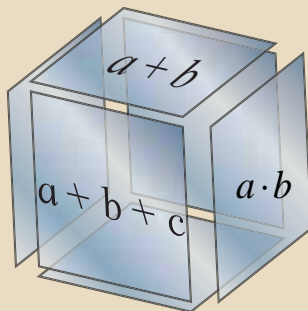
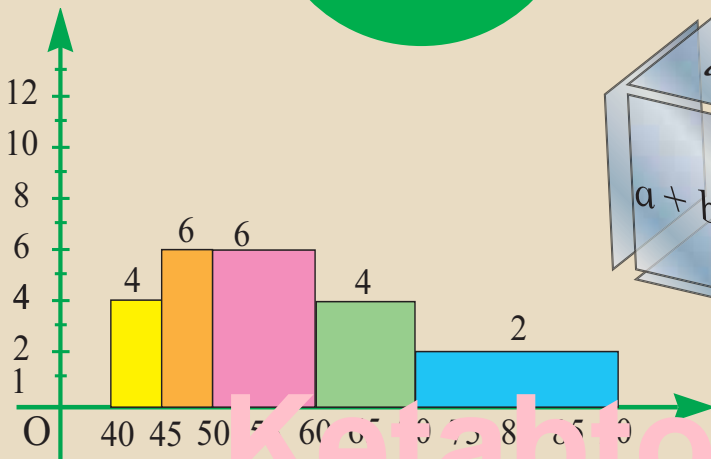
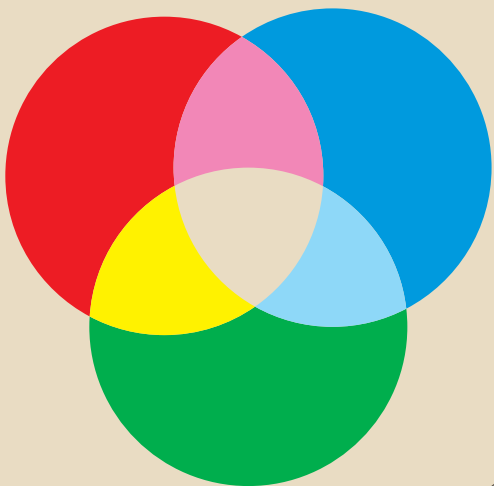




د پوهنې وزارت
د تعلیمي نصاب، د ښوونکو د روزنې
او د ساینس د مرکز معینیت
د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي
کتابونو د تالیف ریاست

ریاضي

نهم ټولگی



نهم ټولگی



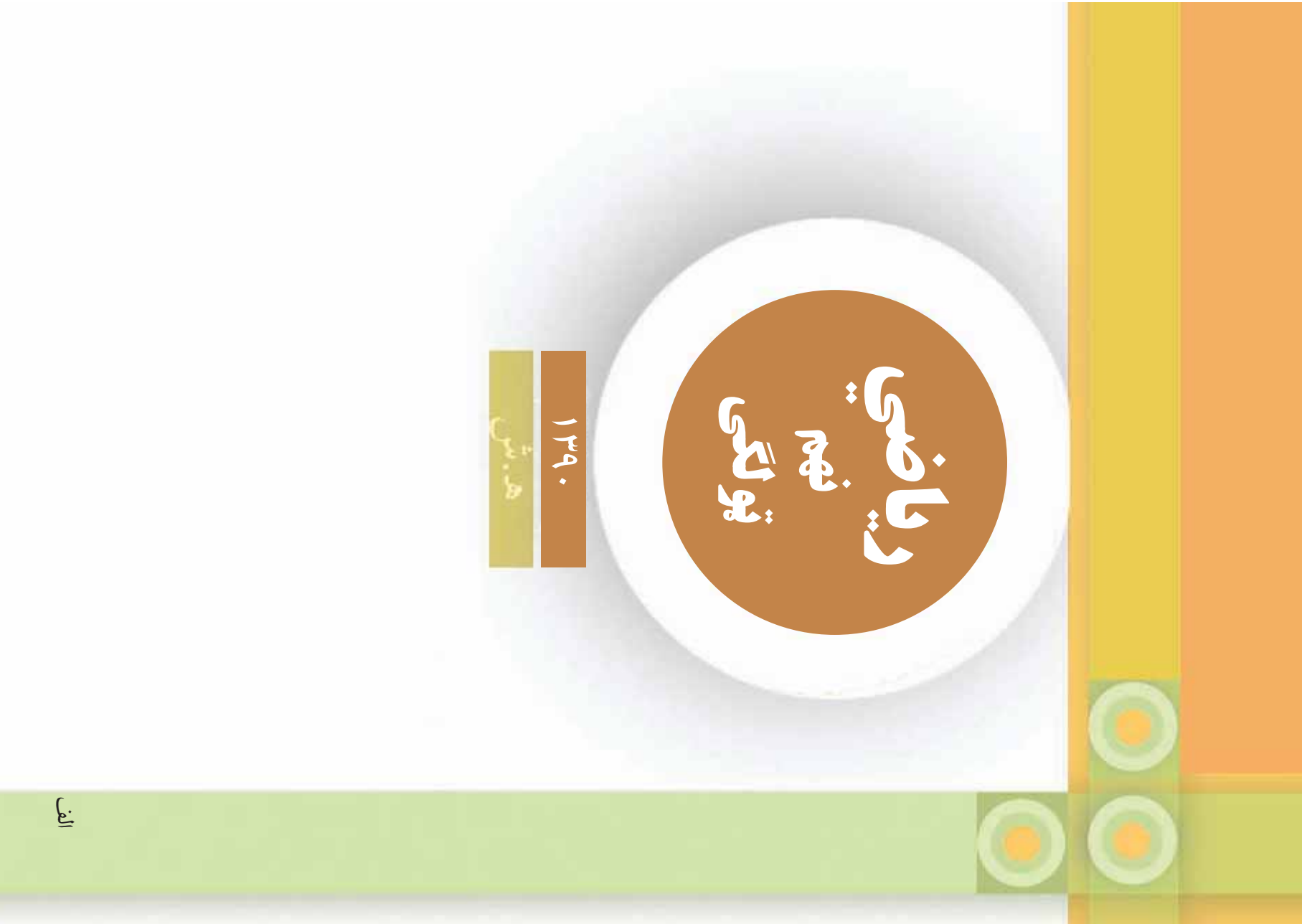
ISBN 978-9936-25-068-0



9 789936 250680 >

۱۳۹۰ هـ. ش.

Ketabton.com





مولفين

- پوهيالی حمدالله شيرزى وردگ د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تاليف د پروژې غړى
- پوهنمل طلاباز حبيب زى د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تاليف د پروژې غړى
- پوهندوى خالقداد فيروز کوهى د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تاليف د پروژې غړى
- دکور ماځان شينوارى د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تاليف د پروژې غړى
- سرمؤلف ميرتقيب الله د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف رياست علمي غړى

ژباړونکي

- پوهيالی حمدالله شيرزى وردگ د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تاليف د پروژې غړى
- استاد مختار نويد د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف رياست علمي غړى

علمي اديتور

- پوهنمل طلاباز حبيب زى د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تاليف د پروژې غړى
- سرمحقق نعمت الله اندر د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تاليف د پروژې غړى

د ژبې اديتور

دیني، سیاسي او فرهنگي کمیټه:

- مولوي عبدالصبور عربي
- دکټور محمد يوسف نيازی
- حبيب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعليمي نصاب په رياست کې.

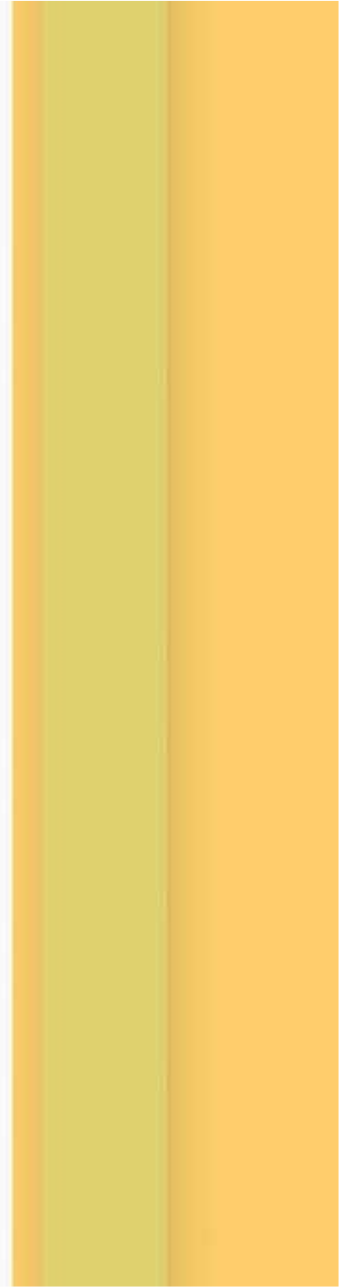
د څارنې کمیټه:

- دکټور اسدالله محقق د تعليمي نصاب د پراختيا، د ښوونکو د روزنې او د ساينس مرکز معين.
- دکټور شيرعلي ظريفې د تعليمي نصاب د پراختيا د پروژې مسؤول.
- د سرمؤلف مرستيال عبدالظاهر گلستاني د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف لوى

رئيس

کميټو او ډيزاين

- وليد نويد نسيمي
- محمد اشرف امين





ملي سرود

دا عزت د هر افغان دی	دا وطن افغانستان دی
هر بچی یې قهرمان دی	کور د سولې کور د توري
د بلوڅو د ازبکو	دا وطن د ټولو کور دی
د ترکمنو د تاجکو	د پښتون او هزاره وو
پامریان، نورستانیان	ورسره عرب، گوجر دي
هم ایماق، هم پشه پان	براهوي دي، قزلباش دي
لکه لمر پر شنه اسمان	دا هیواد به تل خلیږي
لکه زړه وي جاویدان	په سینه کي د آسیا به
وایو الله اکبر وایو الله اکبر	نوم د حق مو دی رهبر

بسم الله الرحمن الرحيم

د پوهني د وزير پيغام گراڼو ښوونکو او زده کوونکو،

ښوونه او روزنه د هر هېواد د پراختيا او پرمختگ بنسټ جوړوي. تعليمي نصاب د ښوونې او روزنې مهم ترکي دی چې د معاصر علمي پرمختگ او ټولني د اړتياو له مخې رامنځته کېږي. څرگنده چې علمي پرمختگ او ټولنيزې اړتياوې تل د بدلون په حال کې وي، له دې امله لازمه ده چې تعليمي نصاب هم علمي او رغنده انکشاف ومومي. البته نه ښايي چې تعليمي نصاب د سياسي بدلونونو او د امتحاصو د نظريو او هيلو تابع شي.

دا کتاب چې نن ستاسو په لاس کې دی، پر همدې ارزښتونو چمتو او ترتيب شوی دی. علمي گټورې موضوعگانې پکې زياتې شوې دي. زده کړې په بهير کې د زده کوونکو فعال ساتل د تدرسي پلان برخه گرځېدلې ده.

هيله من يم دا کتاب له لارښوونو او تعليمي پلان سره سم د فعالې زده کړې د ميتودونو د کارولو له لارې تدریس شي او د زده کوونکو مينځي او پلرونه هم د خپلو لوڼو او زامنو په پاکښته ښوونه او روزنه کې پرله پسې گډه مرسته وکړي چې د پوهني د نظام هيلې ترسره شي او زده کوونکو او هېواد ته ښې برلاوي ور په برخه کړي.

پر دې ځکې پوره باور لرم چې زموږ گران ښوونکي د تعليمي نصاب په رغنه پلي کولو کې خپل مسؤوليت په رښتينې توگه سرته رسوي.

د پوهني وزارت تل زما کارې چې د پوهني تعليمي نصاب د اسلام د سپېڅلي دين له بنسټونو، د وطن دوستۍ د پاک حس په ساتلو او علمي معيارونو سره سم د ټولني د څرگندو اړتياو له مخې پراختيا ومومي. په دې ډگر کې د هېواد له ټولو علمي شخصيتونو، د ښوونې او روزنې له پوهانو او د زده کوونکو له ميندو او پلرونو څخه هيله لرم چې د خپلو نظريو او رغنده وړاندیزونو له لارې زموږ له مولفانو سره د درسي کتابونو په لا ښه تاليف کې مرسته وکړي.

له ټولو هغو پوهانو څخه چې د دې کتاب په چمتو کولو او ترتيب کې ښې مرسته کړې، له ملي او نړيوالو درنو مؤسسو او نورو دوستو هېوادونو څخه چې د نوي تعليمي نصاب په چمتو کولو او تدوين او د درسي کتابونو په چاپ او وېش کې ښې مرسته کړې ده، مننه او درناوی کوم.

ومن الله التوفيق

فاروق وردگ

د افغانستان د اسلامي جمهوريت د پوهني وزير

مخ

۱

فهرست لوهری خپرکی: دایره

- د دایرې عناصر، د یوې مستقیمې کرني حالتونه، دایرې موقعیت نظر یو بل ته
- په دایره پورې اړوند زاوېي
- د دایرې د وتر او شعاع ځانګړتیاوې
- د دایرې محیطي او مماسي زاوېي

دویم خپرکی: په یوه دایره کې د اوږدوالی اړیکې

۲۷

- د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته
- دایرې مماس کرښه، د دایرې داخلي او خارجي زاوېه
- محیطي او محاطي دایره
- په دایره کې د مرسوم څلور ضلعي ځانګړتیاوې (خواص)

• د منظمې مضلع ترسیم، د د اړې مساحت او محیط

۵۵

درېم خپرکی: تحلیلي هندسه

- د دور ټکو تر منځ فاصله یا واټن
 - د یوې قطعه خط د منځني ټکي مختصات
 - د مستقیمې کرنيې میل، د موازي او عمود کرښو میلونه
 - د مستقیمې کرنيې معادله، د هغې مستقیمې کرنيې معادله چې میل او یو ټکی یې معلوم وي
 - د مستقیمې کرنيې عمومي معادله
 - د خطي معادلانو سیستم
 - د خطي معادلانو د سیستم حل د تعویضي او افنا په لاره (طریقه)
 - تغییر مکان، انتقال، انعکاس او دوران
- ### څلورم خپرکی: مثالونه
- د تالس قضیه
- د حاده زاوېي سین، کوساین او تانجنټ
 - د ځینو خاصو زاویو مثالني نسبتونه، د میل او تانجنټ تر منځ اړیکې
 - مثالني جدول، د قایم الزامو مثالونو حل

۹۵

د تالس قضیه

- د حاده زاوېي سین، کوساین او تانجنټ
- د ځینو خاصو زاویو مثالني نسبتونه، د میل او تانجنټ تر منځ اړیکې
- مثالني جدول، د قایم الزامو مثالونو حل

مسخ

۱۲۷

- مثالاتي معادلي
فهرست

پنځم څپرکی: څو جمله يي گاني

- په فکتوريزو تجزيه
- د الجبري افادو ضرب، د مکعبونو مجموعه او تفاضل
- کوچني گډ مشترک مضرب
- د الجبري افادو وېش
- په الجبري افادو کې د عمليو د سرته رسولو ترتيب

۱۵۱

شپږم څپرکی: نامساوات

- د خطي غير مساواتو حل
- فاصله يا انټروالونه
- د بيټوم د علامې ټاکل، د کسر افادي اشاره ټاکل
- کسري نامساواتونه، دوه متحوله خطي نامساوات
- د نامساواتو سيستمونه

۱۷۵

اووم څپرکی: يو مجهوله دويمه درجه معادلي

- د دويمې درجې معادلو حل
- غير خطي اړيکي

۱۹۵

اتم څپرکی: احصايه

- په هندسي لاره د دويمې درجې معادلو حل د محمد بن موسی فورمول، تکميل مربع
- د data د دسته بندي لاره، د نېټو يا پيوسته data گانو دسته بندي او وزني اوسط
- مستطلي او دايروي گرافونه
- ميله، د تحول ساحه او د انحراف اوسط

۲۲۱

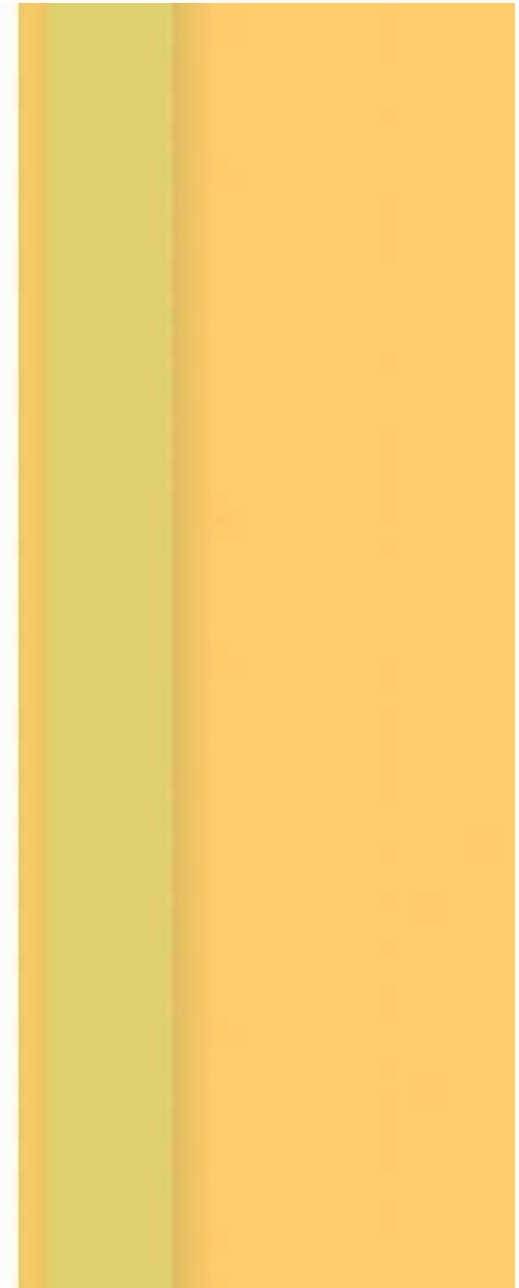
نهم څپرکی: احتمالات

- د ناڅاپه پېښو اتحاد او تقاطع
- کلي او مکمله ست
- په ستونزو مدل جوړول



لومړۍ څپرګۍ دایـږه





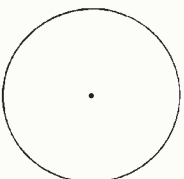
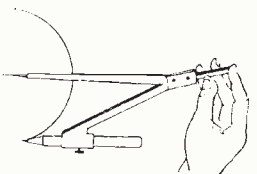
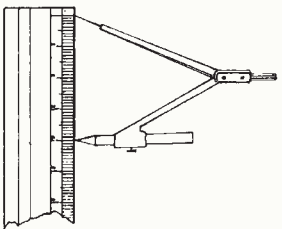


دایره CIRCLE

شکل ته پام وکړئ هغه هندسي شکلونه چې په تصویر کې ونښه نومونه يې واخلي.

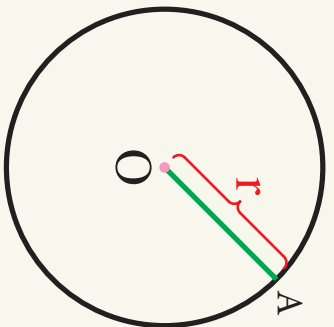
فعالیت

یوه ټکي د کاغذ پر مخ وټاکئ، ددې ټکي شاوخوا ته د 1 cm په اوږدوالي د ډبرکار خوله خلاصه او هغه ته یو بشپړ دوران ورکړئ، لاسته راغلی شکل او ټاکل شوی ټکي څه نومېږي؟

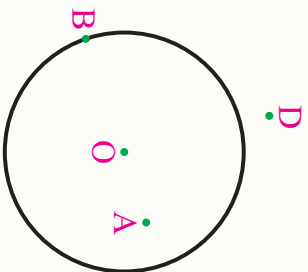


تعریف

په یو مستوي کې د هغو ټولر ټکو سټ چې له یوه ټاکلي ټکي نه مساوي واټن (فاصله) ولري دایره نومېږي، یا په بل عبارت دایره د یوې تړلي منځني څخه عبارت ده چې له یوه ټاکلي ټکي څخه مساوي واټن ولري. تړلي منځني ته د دایرې محیط او ټاکلي ټکي ته د دایرې مرکز وايي چې په (O, r) ښودل کېږي. د دایرې مرکز په شکل کې O او شعاع یې د r په تورو ښودل کېږي.



فعالیت



- په لاندې شکل کې د A ، B او D د ټکو ځایونه (موقعیت) نظر O دایرې ته وټاکي.
- د هغو ټکو واټن د دایرې د مرکز څخه اندازه او د دایرې د شعاع له اوردوالی سره پرتله کړي.
- په خپله خوبه درې نور ټکي چې په دایره کې دننه او له دایرې څخه بهر پرانه وي په پام کې ونیسئ. ایا لاسته راغلی اړیکې د دې ټکو لپاره هم سمې دي؟

پایله:

- 1- د هغو ټکو ست چې فاصله یې د دایرې له مرکز څخه د دایرې د شعاع څخه کوچنی وي، د دایرې داخلي ساحه (منځ) بلل کېږي، یا $I = \{A \mid |OA| < r\}$
- 2- د هغو ټکو ست چې فاصله یې د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع سره مساوي وي، د دایرې محیط یا منځ ونل کېږي، یا $C = \{B \mid |OB| = r\}$
- 3- د هغو ټکو ست چې فاصله یې د دایرې له مرکز څخه د دایرې د شعاع څخه لوی وي، د دایرې د خارجي یا باندي ساحې په نامه یادېږي، یا $E = \{D \mid |OD| > r\}$
- 4- د مستوي هغه برخه چې د دایرې د محیط او دهغې د اخلي سطحې په واسطه جلا شوي وي، د دایرې د سطحې په نوم یادېږي.

پوښتنې

- 1- یوه دایره د 2 cm په شعاع رسم کړئ. دلاندې ټکو څخه کوم یو یې د دایرې په داخل، خارج او په محیط کې پروت دی:
 - د A ټکي واټن د دایرې له مرکز څخه 1.4 cm دی.
 - د B ټکي واټن د دایرې له مرکز څخه 2.3 cm دی.
 - د C ټکي واټن د دایرې له مرکز څخه صفر دی.
 - د D ټکي واټن د دایرې له مرکز څخه $\frac{4}{2}\text{ cm}$ دی.
- 2- په کوم حالت کې یو ټکی د دایرې پر محیط پروت وي.

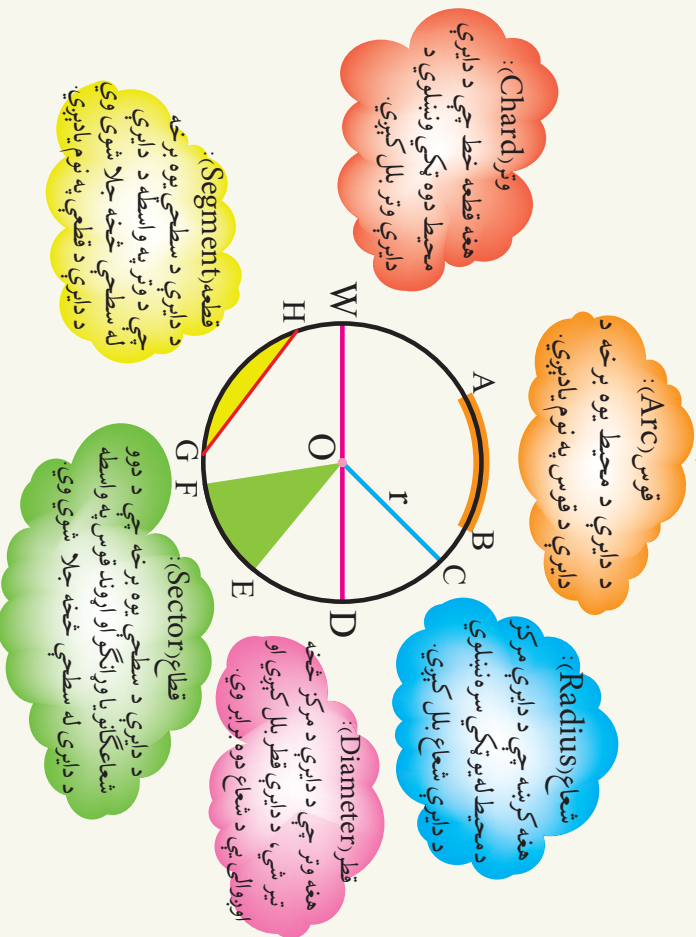


د دایرې عناصر Elements of a Circle

شکل ته پام وکړئ د کیک مخ کوم هندسي شکل را ښيي او پرې شوي برخه یې د دایرې کوم عنصر راښيي؟

د دایرې د عناصرو تعریف

لومړی شکل او د دایرې د عناصرو تعریفونه خپلو کتابچو ته نقل او ورسته لاندې تعریفونه د شکل له اړوند عناصرو سره په خپلو کتابچو کې ونښلوئ.



فعالیت

- د 4cm شعاع په اندازه یوه دایره رسم او له کاغذ څخه هغه پری کړئ.
- دغه دایره داسې قات کړئ چې دواړه نیمې دایرې یو پر بل منطبقې شي.
- کاغذ خلاص کړئ، د کاغذ پر مخ قات شوي کرښه د څه په نامه یادېږي.
- داخل دوه نیمې دایرې بیا قات او قات کاغذ داسې خلاص کړئ، چې څلور مساوي برخې لاسته راغلې وي. څو قطعه خطونه (ټوټه) کرښې (وینئ). هر یو د څه په نامه یادېږي؟
- څلور لاسته راغلې زاوېې اندازه کړئ، او وړایاست چې یو له بل سره څه اړیکې لري؟
- د یوې دایرې د قطر او شعاع تر منځ اړیکې څه دي؟
- دایره داسې قات کړئ چې دوه نامساوي برخې جوړې شي، هغه خلاصه کړئ جوړه شوي کرښه د څه په نامه یادېږي؟ د هغې اوږدوالی د دایرې د قطر سره پرتله کړئ.

پایله:

- **ومو لیدل چې په هره دایره کې که چیرې د دایرې د محیط دوه ټکي ونښلوو د دایرې وتر لاسته راځي.**
- په هره دایره کې ترټولو لوی وتر، د دایرې قطر دی چې د شعاع دوه برابره دی.
- د یوې دایرې هر قطر، وتر اما هر وتر قطر نه دی.
- "هغه قوس چې د یوې دایرې د محیط له نیمايي څخه کوچنی وي د کوچني قوس (minor Arc) په نوم یادېږي.
- "هغه قوس چې د یوې دایرې د محیط له نیمايي څخه لوی وي د لوی قوس (major Arc) په نوم یادېږي.

پوښتنې

- 1- د $C(0, 4)$ دایره رسم کړئ.
 - a) د دایرې شعاع یا وړانگه، قطر، قطعه او قطاع په شکل کې وښئ.
 - b) د دایرې د قطر اوږدوالی وټاکئ.
 - c) د دایرې محیط په څلور مساوي برخو وویشئ، ددې څخه څه پایله په لاس راځي؟
 - d) د دایرې داخلي ناحیه، خارجي ناحیه او د دایرې محیط د مختلفو رنگونو، په واسطه په نښه کړئ.

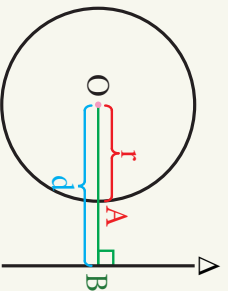


د دایرې سره د یوې مستقیمې کرښې حالتونه

مخامخ شکل ته پام وکړئ او وایاست چه
قلمونه او هندسي بکس له دایرې سره څه
اړیکې لري هره یوه توضیح کړئ؟

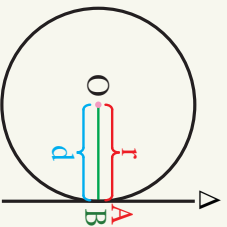
فعالیت

- یوه دایره او مستقیمه کرښه داسې رسم کړئ چې د دایرې سره یو ټکی، دوه ټکي او هېڅ ګان(مشترک) ټکی و نلري.
- د دایرې له مرکز څخه په هره مستقیمه کرښه باندې عمودي کرښې رسم کړئ، د دایرې د مرکز او کرښې تر منځ واټن اندازه کړئ او هر حالت د دایرې د شعاع له اوږوالی سره پرتله کړئ.

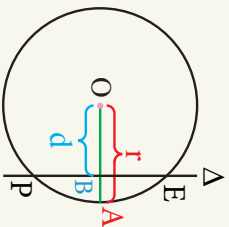


د پورتنۍ فعالیت د کرښې څخه لیدل کېږي چې یو مستقیمه کرښه او دایره نظر یو بل ته درې لاندې حالتونه لري:

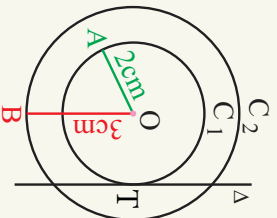
1- که چېرې مستقیمه کرښه له دایرې سره ګان ټکي و نلري، مستقیمه کرښه له دایرې نه بهر پروت دی، په دې حالت کې د مستقیمې کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې د شعاع څخه لوی دی یعنې: $d > r$



2- که چېرې مستقیمه کرښه د دایرې سره یو ګان ټکی ولري نو مستقیمې کرښې ته یو دایره مماس وايي. په دې حالت کې د مستقیمې کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې د شعاع سره برابر ده یعنې: $d = r$



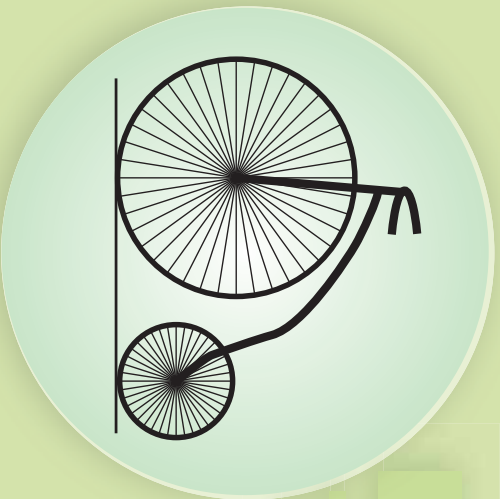
3- که چیرې یو مستقیم د دایرې سره دوه ګډه (مشترک) ټکي ولري، مستقیم ته د دایرې خوځي (قاطع) وايي، په دې حالت کې د مستقیم واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع څخه کوچنی دی،
یعني $d < r$



مثال (بېلګه): د (O) ټکی په پام کې نیسو، د (O) په مرکز د 2 او 3 سانتي متره په شعاع دوي متحدالمرکز دایرې رسم کړئ د مستقیمې کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه د C_1 او C_2 ، دوو دایرو له وړانګو سره څه اړیکې لري؟
حل: په شکل کې لیدل کېږي چې د Δ مستقیم واټن د C_1 دایرې له مرکز څخه د هغې دایرې د وړانګې یا شعاع سره برابر دی یعني: $d = r$
د Δ مستقیم واټن د C_2 دایرې له مرکز څخه د هغې دایرې له وړانګې یا شعاع څخه کوچنی دی یعني: $d < r$

پوښتنې

- د 3cm شعاع په اوږدوالي یوه دایره رسم کړئ، په دې دایره کې کرښې په لاندینو راکړل شویو واټنو رسم او حالتونه یې څرګند کړئ:
- الف: د کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه 2.5cm وي.
ب: د کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه 4cm وي.
ج: د کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع سره برابره وي.



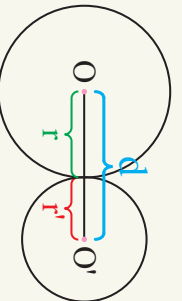
د دایرو موقعیت نسبت یو بل ته

مخامخ شکل ته په پام سره ووايو، چې:

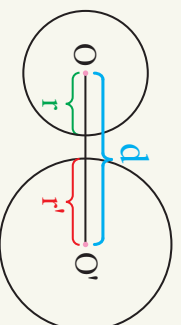
- 1- د بايسیکل ټایرونه کوم هندسي شکل لري؟
- 2- ټایرونه یو بل سره څو حالتونه غوره کولای شي؟ تو ضیح یې کړئ.

فعالیت

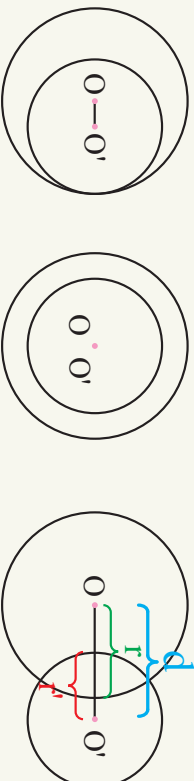
- دوي دایري داسي رسم کړئ چې:
 - 1: یو له بل سره یو ګډ ټکی ولري.
 - 2: دوه ګډ ټکي ولري.
 - 3: یو بل سره ګډ ټکی و نلري.
- د دایرو د مرکزونو تر منځ اوږدوالی په پورتنۍ حالتونو کې د هغو له شعاع سره پرتله کړئ. د پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راځي چې:



که چېرې د دوو دایرو د مرکزونو تر منځ واټن د هغو د شعاع له مجموعې سره مساوي وي. په دې حالت کې دایرو ته خارجاً مماس وایي، یعنې $d = r + r'$



که چېرې د دوو دایرو د مرکزونو تر منځ واټن، دهغو د شعاع د مجموعې له اوږدوالي څخه زیات وي په دې حالت کې دایرو ته نایرېکري یا نا متقاطع دایري وایي، یعنې $d > r + r'$



که د دوو دایرو د مرکزونو ترمنځ واټن د هغو د شعاع گانو د تفریق حاصل له مطلقه قیمت سره مساوي وي. دایرو ته له دننه مماس وایي، یعني

$$d = |r - r'|$$

که د دوو دایرو د مرکزونو ترمنځ واټن صفر وي، دایري د متحدالمرکز په نامه سره یادېږي، یعني

$$d = 0$$

که د دوو دایرو د مرکزونو ترمنځ واټن د هغو د شعاعگانو د مجموعې د اوږدوالي څخه کوچنی او د شعاعگانو د تفریق د حاصل د مطلقه قیمت څخه لوی وي. دایري یو له بل سره متقاطع دي، یعني

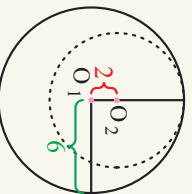
$$|r - r'| < d < r + r'$$

مثال (بېلگه): دوي دایري داسې رسم کړئ، چي د لومړی دایري شعاع 6cm، د دویمي

دایري او لومړی دایري مرکزونو ترمنځ واټن 2cm او د دویمي دایري شعاع د لومړی دایري د شعاع $\frac{2}{3}$ برابره وي، په دې حالت کې د دې دوو دایرو موقعیت نظر یو بل ته پیدا کړئ؟

حل: که د لومړنی دایري شعاع r_1 او د دویمي دایري شعاع r_2 ونوموو نو لرو:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= 6\text{cm} \\ r_2 &= \frac{2}{3}r_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} r_2 &= \frac{2}{3} \times 6 \\ r_2 &= 4\text{cm} \end{aligned} \right.$$



$$d = |r_1 - r_2| = |6 - 4| = |2| = 2$$

څرنگه چه:

نو له دایري سره داځلا مماس دي.

پوښتني

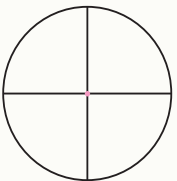
- ۱- دوي دایري د 6 cm او 4 cm په شعاع په پام کي ونیسئ او په لاندې توگه یې رسم کړئ.
 - الف: دایري خارجاً له باندې سره مماس دي.
 - ب: دایري داځلا (له دننه) سره مماس وي.
 - ج: دایري سره غیر متقاطع (ناپربکړي) وي.
 - د: دایري سره غیر متقاطع (غوڅو نه) وي.
 - ه: دایري متحدالمرکز (مرکز) وي.
 - و: پورتني حالتونه په خپله ژبه ووايي.



د دایرې اړوند زاوې Angle of a Circle

تصویر ته پام وکړئ هغه هندسي شکلونه چې په هغه کې لیدل کېږي نوم یې واخلي؟

فعالیت



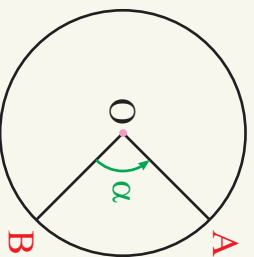
- په پورتنۍ شکل کې څو زاوې لیدلای شئ.
- د دې زاویو گڼه خاصیتونه کوم دي بیان یې کړئ؟
- د $C(0,3)$ دایره رسم کړئ.
- په دې دایره کې یو پر بل دوه صمود قطرونه رسم کړئ.
- څو مرکزي زاوې لاسته راځي؟ د هرې زاوې د مقابل قوس اندازه څو درجې دی؟
- د دې دایرې محیط څو درجې دی؟

د پورتنۍ فعالیت له نتیجه څخه لیکلای شو چې:

د یو قوس اوږدوالی د هغه د مرکزي زاوې په پراخوالی پورې اړه لري، یعنې:

$$\frac{\text{طول قوس}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\widehat{AOB}}{360^\circ}$$

تعریف



هغه زاویه چې د دایرې په مرکز پروت، او ضلعي یې د دایرې شعاعگانې وي مرکزي زاویه بلل کېږي لکه: د \widehat{AOB} یا د α° زاویه:

مهره مرکزی زاویه له دایرې شخړه یو قوس بېلوي، چې دغه قوس د خپلې مخامخ مرکزي زاوېې مساوي اندازه لري، لکه: \widehat{AB} قوس چې د α زاوېې سره مساوي دي. د قرارداد له مخې وینای شو چې په یوه دایره کې د مخامخ قوس اندازه د درجې له مخې د مرکزي زاوېې سره مساوي ده یعنې: $\widehat{AOB} = AB = \alpha$

لومړی مثال: که د $C(O, r)$ په دایره کې لوی قوس (major) د کوچني قوس (minor) پینځه برابره وي نو د کوچني قوس، لوی قوس او د هغې د مرکزي زاوېې اندازه پیدا کړئ.

حل: که کوچني قوس $PQ_{minor} = x$ وي، نو لوی قوس یې

$$\widehat{PQ} + \widehat{PAQ} = 360^\circ$$

$$PQ_{major} = 360^\circ - x$$

$$\widehat{PAQ}_{min} = 5PQ_{min}$$

$$x + 5x = 360^\circ$$

$$6x = 360^\circ$$

$$x = 60^\circ \Rightarrow \widehat{POQ} = x = 60^\circ$$

$$\widehat{PAQ} = 5x = 5 \times 60 = 300^\circ$$

دویم مثال: په لاندې شکل کې که $\widehat{KOS} = 31^\circ$ ، $\widehat{EOJ} = 82^\circ$ ، \widehat{EK} دایرې قطر وي. د \widehat{SK} ، \widehat{KJ} ، \widehat{SJ} د \widehat{EK} قوسونه په درجه پیدا کړئ.

د مرکزي زاوېې مخامخ قوس $\widehat{SK} = 31^\circ \Rightarrow \widehat{SK} = 31^\circ$

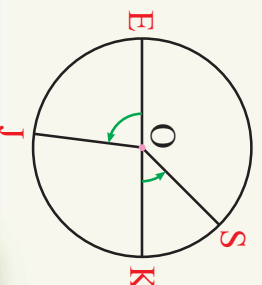
$$\widehat{KOJ} = 180^\circ - \widehat{EOJ} = 180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$$

$$\widehat{KOJ} = \widehat{KJ} = 98^\circ$$

$$\widehat{SJ} = \widehat{SK} + \widehat{KJ} = 31^\circ + 98^\circ = 129^\circ$$

$$\widehat{JE} = \widehat{EOJ} = 82^\circ$$

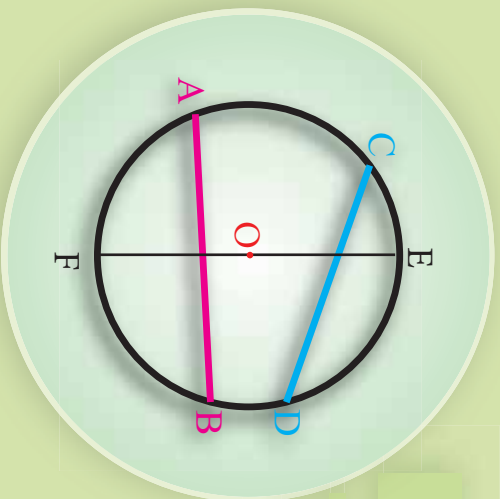
$$\widehat{EK} = \widehat{EOK} = 180^\circ$$



پوښتنې

- 1- د A, B, C او C درې ټکي د (O, r) پر دایره داسې پرانه دي، چې $\widehat{AOB} = 75^\circ$ ، $\widehat{BOC} = 136^\circ$ زاوېې د OB دواړو خواوو ته پرتې وي AC حساب کړئ.
- 2- یوه مرکزي زاویه د 180° په اندازه رسم کړئ.

د دایرې د وتر خواص



شکل ته پام وکړئ د \overline{AB} ، \overline{CD} او \overline{EF} مستقیمې کرښې په څه نامه یادېږي د \overline{EF} کرښې ځانګړتیا څه ده؟ او له \overline{AB} کرښې سره څه اړیکه لري؟

فعالیت

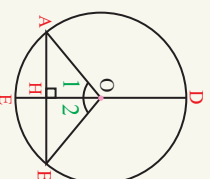
- د $C(O, r)$ په دایره کې د \overline{AB} وتر رسم کړئ.
 - د دایرې د \overline{ED} قطر داسې رسم کړئ چې د \overline{AB} په وتر د H په نقطه عمود وي.
 - د (O) ټکي د A او B سره ونښلوئ، لاسته راغلي منځ څه ډول مثلث دی.
 - په لاندې تش ځایونو کې د $(=, <, >)$ وړ ښيي ولیکئ.
- $\overline{OA} \square \overline{OB}$ ، $\widehat{AE} \square \widehat{EB}$ ، $\overline{AH} \square \overline{HB}$

د دې فعالیت د پایلې څخه کولای شو لاندې قضیه بیان او ثبوت کړو.

قضیه: په هره دایره کې په وتر عمود قطر، وتر او د هغې مقابل قوس نیموي.

ثبوت: د $\triangle BOH$ او $\triangle AOH$ دوو مثلثونو څخه لیکلی شو چې:

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{OB} \dots\dots\dots \text{د دایرې شعاع} \\ \widehat{H_1} = \widehat{H_2} \dots\dots\dots \text{قایمه} \\ \overline{OH} = \overline{OH} \dots\dots\dots \text{مشرکي} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AOH \cong \triangle OHB$$

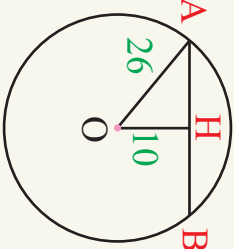


نو د دوو مثلثونو د تساوي څخه داسې پایله لاسته راځي، چې: $\overline{AH} = \overline{HB}$ او د $\triangle AOH$ او $\triangle BOH$ مرکزي زاويې سره مساوي دي په پایله کې $\widehat{AE} = \widehat{EB}$ دی.

مثال: د $C(O, 26)$ دایره راکړل شوې ده، که چیرې پر وتر د عمود اوږدوالی د دایرې له مرکز څخه (10) واحد وي د \overline{AB} وتر اوږدوالی حساب کړئ.

حل: د \hat{OAH} په مثلث کې د فیثاغورث د قضیې له مخې لرو چې:

$$\begin{aligned} \overline{OA}^2 &= \overline{AH}^2 + \overline{OH}^2 \\ (26)^2 &= \overline{AH}^2 + (10)^2 \\ \overline{AH}^2 &= (26)^2 - (10)^2 \\ \overline{AH}^2 &= 676 - 100 = 576 \\ \overline{AH} &= 24 \\ \overline{AB} &= 2\overline{AH} = 2 \times 24 = 48 \text{ unit} \end{aligned}$$



فعالیت

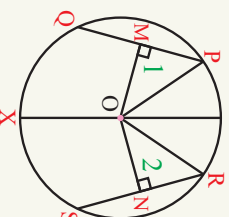
- د $C(0, 3)$ دایره رسم کړئ.
- په دایره کې د \overline{PQ} او \overline{ER} دوه مساوي وترونه رسم کړئ.
- د دایرې له مرکز څخه د \overline{PQ} او \overline{ER} په وترونو عمود کړئ. رسم او اوږدوالی یې معلوم کړئ.

د دې فعالیت له پایلې څخه لاندې قضیه بیان او ثبوتو.

قضیه: په هره دایره کې د هغې مساوي وترونه، د دایرې له مرکز څخه مساوي واټن لري.

ثبوت: د \hat{POM} او \hat{RON} د دوو مثلثونو څخه لرو چې:

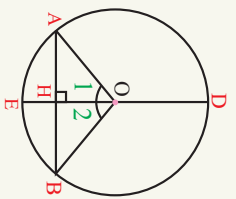
$$\begin{aligned} \overline{OP} &= \overline{OR} \dots\dots\dots \text{د دایرې شعاع} \\ \hat{1} &= \hat{2} \dots\dots\dots \text{قایمه} \\ \overline{PQ} &= \overline{RS} \dots\dots\dots \text{مساوي وترونه} \implies \hat{POM} \cong \hat{RON} \\ \frac{\overline{PQ}}{2} &= \frac{\overline{RS}}{2} \implies \overline{PM} = \overline{RN} \end{aligned}$$

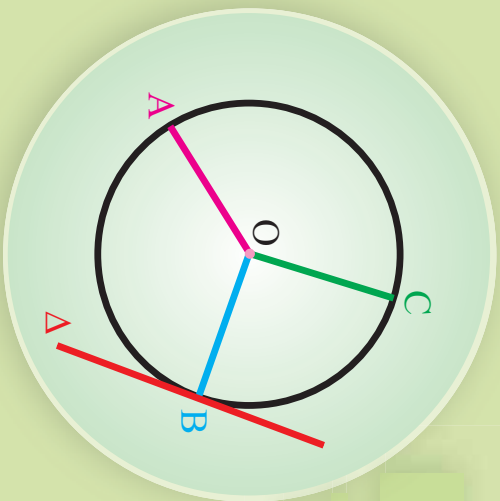


په پایله کې ویلای شو چې په هره دایره کې مساوي وترونه له مرکز څخه مساوي واټن لري.

پوښتنې

- 1- د $C(0, 13)$ په دایره کې د \overline{AB} وتر د دایرې له مرکز څخه 5 واحدو واټن لري د \overline{AB} اوږدالی پیدا کړئ.
- 2- که چېرې د یوې دایرې قطر د وتر له نیمایي څخه تیر شي، ثبوت کړئ چې پر وتر عمود دی.
- 3- په یوه دایره کې $\overline{AB} = 8 \text{ cm}$ وتر رسم کړئ. که چېرې د وتر عمودي فاصله له مرکز څخه $\overline{OH} = 3 \text{ cm}$ وي د دایرې قطر او محیط محاسبه کړئ.

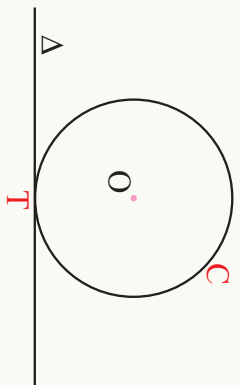




د دایري د شعاع خواص

شکل ته په پام د OA ، OB او OC کرښې څه نومېږي او د Δ کرښه د دایري او د OB وړانګې سره څه اړیکې لري؟

فعالیت



- په مخامخ شکل د Δ مستقیمه کرښه د $O(0, 2)$ دایري د T په ټکي کې مماس دی د C ، B ، A او D ټکي د مماس پر مخ د T ټکي دواړو خواوو کې وټاکئ او د دایري له مرکز سره یې ونښلوئ.
- پورته کرښې یا قطعه خطونه د خط کش په مرسته اندازه کړئ.
- د دایري د مرکز او مماس تر منځ لندې واټن ونښائئ.
- تر ټولو کوچنی فاصله د یوه ټکي او یوې مستقیمې کرښې تر منځ کومه فاصله ده؟
- د پورتنۍ دوو حالتونو څخه څه پایله لاسته راوړئ.

د دې فعالیت د پایلي څخه په لاندې توګه قضیه بیان او ثبوت و.

قضیه: د دایري شعاع د تماس په ټکي کې پر مماس عمود دی.

پایله: په لاندې شکل کې لیدل کېږي، چې:

$$\overline{OT} < \overline{OB} < \overline{OA}$$

$$\overline{OT} < \overline{OC} < \overline{OD}$$

پوهېږو چې تر ټولو کوچنی فاصله د یوه ټکي او مستقیم تر منځ عمودي فاصله ده. په پایله کې ویلای شو چې مستقیمې کرښې: $OT \perp \Delta$ دی.

لومړی مثال: په لاندې شکل کې د Δ مستقیمه کرښه د A په ټکي د $C(O, r)$ پر دایره

مماس دی. که چیرې د \hat{AOB} مساوي 60° وي، د X زاویه پیدا کړئ.

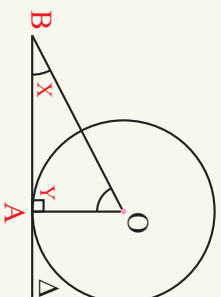
$$OA \perp BA \Rightarrow \hat{y} = 90^\circ$$

$$\hat{o} + \hat{x} + \hat{y} = 180^\circ$$

$$60^\circ + \hat{x} + 90^\circ = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 150^\circ$$

$$x = 30^\circ$$



دویم مثال: په لاندې شکل کې د Δ مستقیمه کرښه د $C(O, r)$ پر دایره مماس دی، که

$OM = 4unit$ او $ON = 5unit$ اوږدوالی ولري د MN اوږدوالی پیدا کړئ.

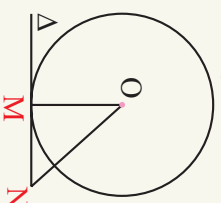
حل: پوره کړو چې د دایري شعاع د تماس په ټکي پر مماس عمود دی په پایله کې د OMN په قائم الزاویه مثلث کې د فیثاغورث د قضیې په اساس لرو چې:

$$\overline{ON}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MN}^2$$

$$\overline{MN}^2 = \overline{ON}^2 - \overline{OM}^2$$

$$\overline{MN}^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$

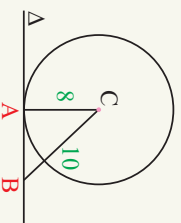
$$\overline{MN} = 3$$



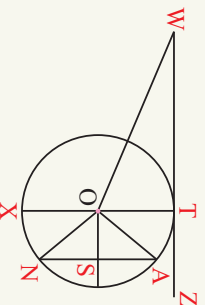
• د دایري شعاع د تماس په ټکي کې پر مماس عمود وي.

• هر مماس په هغه شعاع چې د تماس د ټکي څخه تېرېږي عمود دی.

پوښتنې



1- په مخامخ شکل کې د $\Delta P(C, r)$ پر دایري مماس دی، که $AC = 8unit$ او $BC = 10unit$ اوږدوالی ولري. د \overline{AB} اوږدوالی پیدا کړئ.



2- په مخامخ شکل کې که \overline{WZ} د T په ټکي د $C(O, r)$ پر دایري مماس وي، $OS = 1unit$ ، او $OTW = 3unit$ وي د \overline{OA} ، \overline{AS} ، \overline{SN} ، \overline{OW} او \overline{TX} اوږدوالی پیدا کړئ.

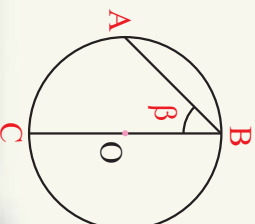
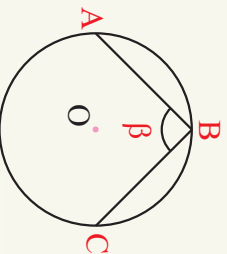
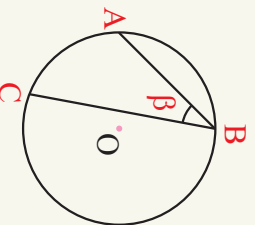


د دایرې محیطي زاویه Inscribed Angel of a Circle

د فوتبال د میدان په مرکزي دایره کې حسیب الله، بال ته او بال الیاس ته توپ پاس کړ. هغه شکل چې د توپ د شونت د مسیر څخه جوړېږي څه ډول دی؟

تعریف

هغه زاویه چې راس یې د دایرې پر محیط او ضلعي یې د دایرې دوه وترونه وي محیطي زاویه بلل کېږي. لکه: د ABC یا د \hat{B} .



فعالیت

- د (O, r) په دایره کې د \widehat{ABC} محیطي زاویه، چې د \widehat{BC} ضلع د دایرې له مرکز څخه تیره شي رسم کړئ.
- د A ټکی د دایرې له مرکز (O) سره ونښلئ څرنگه منځ لاسته راځي.
- د A او B زاویې د \widehat{OAB} په منځ کې یو له بل سره څه اړیکې لري؟
- د \widehat{AOC} زاویه د A او B زاویو سره څه اړیکې لري؟

په یاد ولرئ چې:

- د مرکزي زاويې پراخوالی د خپل مخالف قوس سره مساوي دی.
- په هر منځ کې د خارجي زاويې پراخوالی د دوو داخلي پرته له مجاورې زاويې له مجموعې سره مساوي دی.

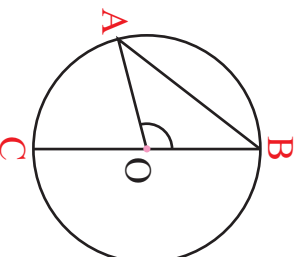
د مخکنی معخ فعالیت د پایلې څخه په لاندې توگه قضیه بیان او ثبوتو.

قضیه: د هرې محیطي زاوې پر اخوالی د خپل مخامخ قوس نیمایي دی.

دلته قضیه په هغه حالت کې ثبوتو چې د محیطي زاوې یوه ضلع د دايرې قطر وي. د دوو نورو حالتونو ثبوت د کورنۍ په توگه زده کوونکو ته پاتې شو.

ثبوت: د \widehat{AOC} زاویه د \widehat{AOB} د مثلث خارجي زاویه ده، لیکلای شو چې:

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AOC} = \widehat{A} + \widehat{B} \\ \widehat{AOC} = \widehat{A} + \widehat{B} \\ \widehat{A} = \widehat{B} \dots\dots \text{ولې} \\ \widehat{AOC} = \widehat{B} + \widehat{B} \\ \widehat{AOC} = 2\widehat{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AC} = 2\widehat{B} \quad \text{نو:}$$

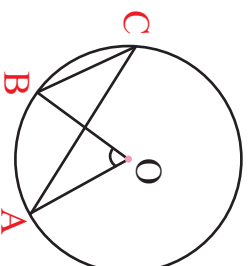


$$\left. \begin{array}{l} \text{مرکزي زاویه} \dots\dots \widehat{AOC} = \widehat{AC} \\ \widehat{AOC} = 2\widehat{B} \\ \widehat{AC} = 2\widehat{B} \\ \widehat{AC} = \frac{\widehat{AC}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ABC} = \frac{\widehat{AC}}{2} \quad \text{په پایله کې}$$

د \widehat{ABC} د محیطي زاوې پر اخوالی د $\frac{1}{2}\widehat{AC}$ سره برابر دی.

مثال: د $C(O, r)$ په دايره کې که مرکزي زاویه $\widehat{AOB} = 60^\circ$ وي د \widehat{ACB} محیطي زاوې مخامخ قوس \widehat{AB} یې پیدا کړئ.

حل: په یوه دايره کې د مرکزي زاوې او د هغې د مخامخ قوس د اړیکو څخه لیکلی شو چې:



$$\left. \begin{array}{l} \widehat{AOB} = 60^\circ \\ \widehat{AOB} = \widehat{AB} \\ \widehat{AB} = 60^\circ \\ \widehat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{AB} = 60^\circ$$

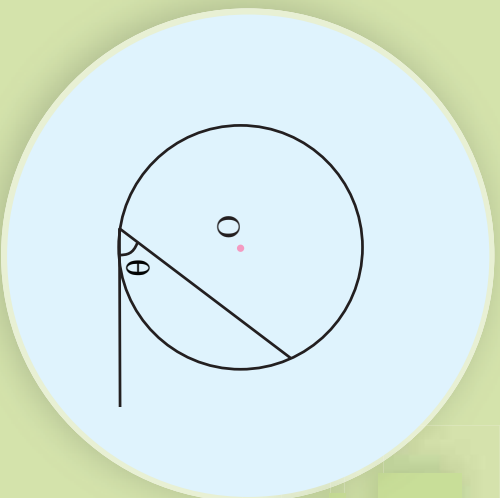
$$\Rightarrow \widehat{ACB} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

پوښتنې

- 1- په یوه دايره کې د 90° په اندازه محیطي زاویه رسم کړئ.
- 2- د دايرې پر محیط د A او B دوه ټکي په پام کې ونیسئ. د \widehat{AB} د قوس په مقابل کې، څو محیطي زاوې رسمولای شو.

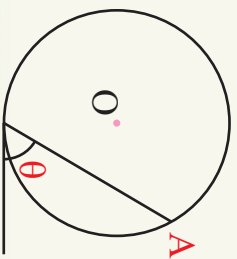
د دایرې مماسي زاویه

شکل ته پام وکړئ، هغه مستقیمې کرښې چې د θ زاویه یې جوړه کړي ده نوم واخلي او د زاوې راس چېرته پروت دی.



تعریف

هغه زاویه چې یوه ضلع یې پر دایره مماس او دویمه ضلع یې د دایرې وتر وي او راس یې د تماس په ټکي کې پروت وي مماسي زاویه بلل کېږي، لکه: د θ زاویه



فعالیت

- د $C(0, 6)$ دایره رسم کړئ.
- په دې دایره کې یوه مماسي زاویه رسم کړئ.
- د دایرې د وتر انجانونه د دایرې له مرکز سره ونښلوئ څه ډول منځ لاسته راځي.
- د دایرې له مرکز څخه پر وتر عمود رسم کړئ.
- د \hat{TOP} مرکزي زاویه او د \hat{PTC} مماسي زاوې سره څه اړیکې لري.

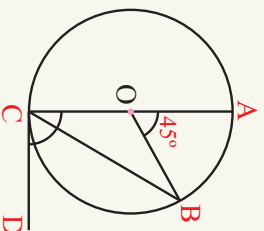
د دې فعالیت د پایلې څخه لاندې قضیه ثبوتولی شو.

قضیه: په یوه دایره کې د مماسي زاوې پراخوالی د هغې د مخالف قوس نیمایي په اندازه دی.

ثبوت: د \hat{OHT} قایم الزاویه مثلث او \hat{OTC} قایمې زاوې څخه لرو چې:

$$\left. \begin{aligned} \hat{3} + \hat{1} &= 90^\circ \\ \hat{3} + \hat{4} &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \hat{3} + \hat{1} &= \hat{3} + \hat{4} \Rightarrow \hat{1} = \hat{4} \\ \hat{1} = \frac{\hat{PO\hat{T}}}{2} &= \frac{\hat{PT}}{2} \Rightarrow \hat{PTC} = \frac{\hat{PT}}{2} \end{aligned}$$

نومړی مثال: په لاندې شکل کې که د $C(O, r)$ په دایره کې د هغې مرکزي زاویه 45° وي، د محیطي او مماسي زاویو پراخوالی پیدا کړئ.
حل: د مرکزي زاویې او دهغې د مخامخ قوس د اړیکو څخه به گټه لیکلی شو چې:



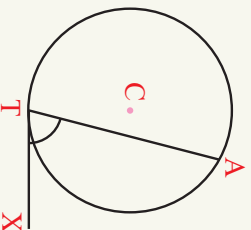
دویم مثال: په لاندې شکل کې د AT قوس اندازه $(2\alpha - 6)^\circ$ ده، د \hat{ATX} مماسي زاویې اندازه پیدا کړئ.

حل: د مماسي زاویې او دهغې د مخامخ قوس د اړیکو څخه د گټې اخیستلو له مخې لیکلای شو، چې:

$$\hat{ATX} = \frac{1}{2} \hat{AT}$$

$$\hat{ATX} = \frac{1}{2} (2\alpha - 6)^\circ$$

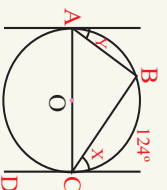
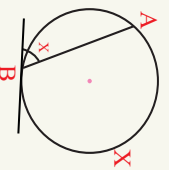
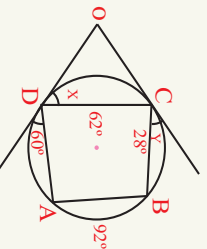
$$= (\alpha - 3)^\circ$$



پایله: محیطي او مماسي زاویې چې د عین قوس په مقابل کې پرتې وي، سره مساوي دي.

پوښتنې

۱- د مماسي زاویو اندازه په لاندې شکلونو کې په لاس راوړئ.



د لومړي څپرکي لنډيز

••••• د هغو ټکو سټ يا هندسي محل چې د يوه ټاکلي ټکي نه مساوي واټن ولري دايره بلل کېږي.

• د هغو ټکو سټ چې واټن يې د دايري له شعاع څخه کوچنی وي د دايري دننه ساحه بلل کېږي.

• د هغو ټکو سټ چې واټن يې د دايري له مرکز او د دايري له شعاع سره مساوي وي د دايري محيط يا مخ بلل کېږي.

• د هغو ټکو سټ چې فاصله يې د دايري له مرکز څخه نسبت د دايري شعاع ته لوي وي د دايري باندي ساحه بلل کېږي.

• د مستوي هغه برخه چې د منځني او د دايري د داخلي سطحي په واسطه بېله شوي وي د دايري سطحه بلل کېږي.

••••• هغه کرښه چې د دايري مرکز او د محيط يو ټکی نښلوي د دايري شعاع بلل کېږي.

••••• هغه ټوټه کرښه چې د دايري د محيط دوه ټکي سره نښلوي د دايري وتر بلل کېږي.

••••• د دايري هغه وتر چې له مرکز څخه تيرېږي د دايري قطر بلل کېږي. هر قطر د شعاع دوه برابره دی.

••••• د دايري د دوو ټکو په مرسته بېله شوي وي قوس بلل کېږي.

••••• هغه کرښه چې له دايري سره يو گډه ټکی ولري مماس بلل کېږي.

• د دايري قطعه: د دايري هغه برخه چې د دايري د وتر او اړونده قوس تر منځ پرته وي د دايري قطعه بلل کېږي

••••• د دايري يوه برخه ده چې د دوو شعاعگانو او اړوند قوس په مرسته د دايري له سطحي څخه بېله شوي وي.

• که يو مستقيم له يوې دايري سره يو گډه ټکی ولري د مماس او که چېرې دوه گډه ټکي ولري د قاطع په نوم يادېږي.

• په هره دايره کې د دايري له مرکز څخه پر وتر عمودي کرښه، وتر او مخامخ قوس نيملپي کوي.

- د دایري شعاع د تماس په ټکي کې پر مماس عمود دی.
- د یوې دایري مساوي وترونه د هغې له مرکز څخه مساوي واټن لري.
- هغه زاویه چې راس یې د دایري په مرکز پروت او ضلعي یې د دایري شعاعگانې وي مرکزي زاویه بلل کېږي.

• د هرې مرکزي زاويې اندازه د هغې د مخامخ قوس سره مساوي ده.

$$\text{د مرکزي زاويې د مخامخ قوس اوږدوالی د دې رابطې } \frac{\widehat{AOB}}{360^\circ} = \frac{\text{د قوس اوږدوالی}}{\text{د دایري محیط}}$$

څخه په لاس راځي.

وترونه وي محیطي زاویه بلل کېږي.

- د هرې محیطي زاويې پراخوالی د هغې د مخامخ قوس له نیمايي سره مساوي دی.
- "هره محیطي زاویه د هغې د مرکزي زاويې نیمايي ده، چې د عین قوس په مخامخ کې پرته ده.

راس د تماس په ټکي کې د دایري پر محیط پروت وي، مماسي زاویه بلل کېږي.

- هره مماسي زاویه د هغې مرکزي زاويې نیمايي ده، چې د عین قوس په مخامخ پرته وي.
- د دوو دایرو حالتونه یو بل ته:

— که د دوو دایرو د مرکز ونو د واټن اوږدوالی د هغو د شعاع گانو له مجموعې څخه لوی وي دایري غیر متقاطع بلل کېږي.

— که د دوو دایرو د مرکزونو واټن اوږدوالی د هغو د شعاع گانو له مجموعې سره مساوي وي دایري خارجاد یا له باندې خوا مماس بلل کېږي.

— که د دوو دایرو د مرکزونو اوږدوالی د هغو د شعاع گانو له اوږدوالی څخه کوچنی او د شعاع گانو د تفریق حاصل یې د مطلقه قیمت څخه لوی وي متقاطع بلل کېږي.

— که د دایرو د مرکزونو تر منځ واټن د هغې د شعاعگانو د تفریق حاصل مطلقه قیمت سره مساوي وي دایري داخلا(دښته) مماس دي.

— که د دایرو د مرکزونو تر منځ واټن صفر وي دایري متحد المركز(د یوه مرکز لرونکي) بلل کېږي.

- په لاندې پوښتنو کې د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب په نښه کړئ.
 - 1- د یوې دایرې د قطر اوږدوالی مساوي دی په:

$2r$ (d)	π (c)	π (b)	$3r$ (a)
----------	-----------	-----------	----------
 - 2- دایره په لاندې ډول ښودل کېږي:

$C(o,r)$ (d)	(b,a) (c)	$(1,2)$ (b)	0 (a)
--------------	-------------	-------------	---------
 - 3- هغه مستقیمه کرښه چې له دایرې سره یو ګډ ټکی ولري:
 - (a) د وتر په نوم یادېږي.
 - (b) د قوس په نوم یادېږي.
 - (c) د مماس په نوم یادېږي.
 - (d) د محیط په نوم یادېږي.
 - 4- د هغو ټکو سټې چې فاصله یې د دایرې له شعاع څخه لویه وي:
 - (a) د دایرې مخ بلل کېږي.
 - (b) د دایرې خارج بلل کېږي.
 - (c) دایره بلل کېږي.
 - (d) د دایرې داخل بلل کېږي.
 - 5- هغه وتر چې د دایرې مرکز ته نږدی وي:
 - (a) پټو وتر دی.
 - (b) وړوکی وتر دی.
 - (c) هېڅ یو.
 - (d) لوی وتر دی.
 - 6- که یوه مستقیمه کرښه دایره په دوو ټکو کې پری کړي هغه ته:
 - (a) مستقیمه کرښه او دایره ولې.
 - (b) قاطع ولې.
 - (c) مماس ولې.
 - (d) موازي ولې.
 - 7- که د یوې دایرې مرکزي زاویه 80° وي د مخالف قوس اندازه یې مساوي په:

80° (d)	80° (c)	70° (b)	90° (a)
----------------	----------------	----------------	----------------
 - 8- یوه مستقیمه کرښه له یوې دایرې سره څو حالتونه لري:

1 (d)	4 (c)	7 (b)	3 (a)
---------	---------	---------	---------
 - 9- هغه زاویه چې راس یې د ایرې پر محیط او ضاعې یې دوه وترونه وي:
 - (a) مرکزي زاویه ده.
 - (b) مماسي زاویه ده.
 - (c) محاطي زاویه ده.
 - (d) محیطي زاویه ده.

- تنش ځایونه په مناسبو کلمو ډکې کړئ:
 - 1- د دایرې هغه برخه چې د وتر په واسطه د دایرې له سطحې څخه بېله شوي وي د په نوم یادېږي.
 - 2- د دایرې تر ټولو لوی وتر دی.
 - 3- د هغو ټکي ست چې بې له مرکز څخه د دایرې له شعاع څخه کوچنی وي د دایرې ویل کېږي.
 - 4- که مستقیمه کرښه له یوې دایرې سره هېڅ ګډ ونلري هغه ته دایره ویل کېږي.
 - 5- په هره دایره کې قطر پر وتر، وتر نیمایي او قوسونه د هغې څخه بیلوي.
 - 6- په هر قائم الزاویه مثلث کې د وتر د ضلعو د مربعانو له مجموعې سره مساوي دي.
 - 7- په هره دایره کې هغه وتر چې مرکز ته نژدې وي تر ټولو وتر دی.
 - 8- د دایرې شعاع د تماس په ټکي پر عمود وي.
 - 9- مرکزي زاویه هغه زاویه ده چې بې د دایرې په مرکز او ضلعې بې د دایرې وي.
 - 10- هغه زاویه چې یوه ضلع بې په دایره او بله بې د دایرې او راس بې د په ټکي پروت وي د زاویې په نوم یادېږي.
- په لاندې جملو کې سمې او ناسمې جملې د(س) او (ن) د تورو په مرسته په نښه کړئ.
 - 1- () د یوې مستوي د ټولو ټکي ست چې د O د یو ټاکلي ټکي څخه د r مساوي فاصلې ولري دایره بلل کېږي.
 - 2- () دایره د خپل محیط په نامه یادېږي.
 - 3- () هغه قطعه خط یا ټوټه کرښه چې د دایرې د محیط دوه ټکي سره نښلوي د دایرې د قطر په نامه یادېږي.
 - 4- () په یوه دایره کې شعاع یا وړانګه د قطر نیمایي ده.
 - 5- () د دایرې قطعه د \cap په علامه ښودل کېږي.

6- د هغو ټکو سټ چې د شعاع په اندازه مساوي فاصله ولري د دایرې خارجي ساحه بلل کېږي.

7- په یوه دایره کې عمود قطر په وتر، وتر نیمایي او دوه بیلابیل قوسونه منځ ته راوړي.

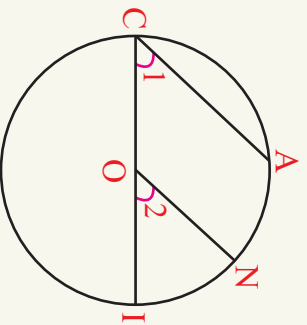
8- ټوله دایره د دایرې د قوس په نوم یادېږي.

9- د $d = \frac{r}{2}$ په رابطه کې d قطر او r د دایرې شعاع دی.

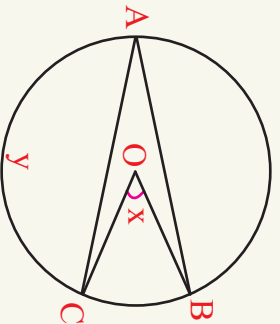
10- د یوې دایرې شعاع د تماس په ټکي پر مماس عمود وي.

• لاندي سوالونه په تفصیل سره حل کړئ.

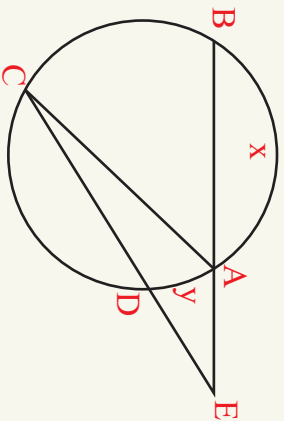
1- په لاندي شکل کې که \overline{CI} د دایرې قطر او $\overline{CA} \parallel \overline{ON}$ وي ثبوت کړئ چې $\widehat{AN} = \widehat{NI}$ دی.



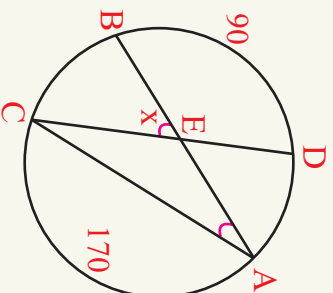
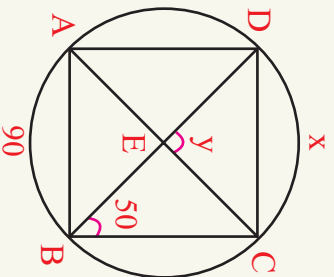
2- په لاندي شکل کې که $y = 140^\circ$ او $\widehat{AB} = 48^\circ$ وي د \hat{x} پیدا کړئ.



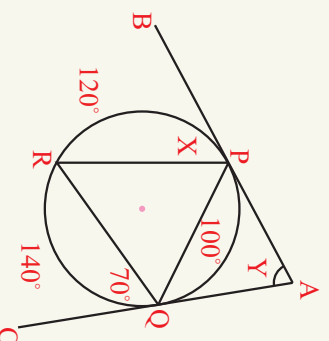
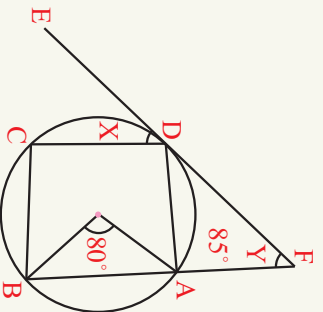
3- په لاندې شکل کې که $\hat{E} = 40^\circ$ او د \hat{BC} , \hat{AB} او \hat{CD} مساوي اندازه اوږدوالی مساوي وي د \hat{ACD} اندازه معلومه کړئ.



4- په لاندې شکلونو کې د x او y اندازه وپاڅئ.



5- په لاندې شکلونو کې د x او y اندازه پیدا کړئ.



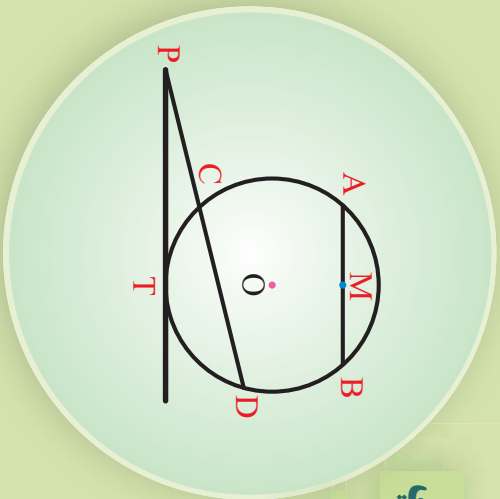
دويم چپرکي

په يوه دايره کې ده
اوږدوالي اړيکي



په دایره کې د اوږدوالي اړیکې

هغه تړته کرښې چې په مخامخ شکل کې ونډې نوم یې واحلی.



تعریف

د اوږدوالی اړیکې: په یو هندسي شکل کې د کرښو د اجزاو تر منځ اړیکې د اوږدوالی اړیکو په نوم یادېږي.

فعالیت

- د P له ټکي څخه چې د $C(O, r)$ دایرې په بهر کې پروت د \overline{PAB} او \overline{PCD} قاطع کرښې رسم کړئ.
- د A ټکي د D او B ټکي د C ټکي سره ونښلئ.
- ویلای شئ چې د \widehat{PAD} او \widehat{PCB} مثلثونه مشابه دي؟
- په پورته دوو مثلثونو کې د تشابه نسبتونه ولیکئ.

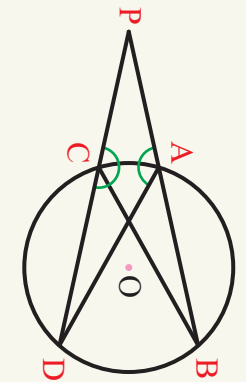
د دې فعالیت پایلې څخه لاندې قضیه څرگندېږي.

قضیه (۱- ۲): که چېرې د یوې دایرې له بهرنیو ټکو څخه پر دایره دوه قاطع کرښې رسم شي،

د یوې قاطع د قطعانو د ضرب حاصل، د بل قاطع د قطعانو د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

یعنې:



ثبوت: د $\hat{P}AD$ او \hat{PCB} مثلثونو تر منځ لاندې اړیکې موجود دي. $\hat{P}A \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$
 د عین قوس محیطي زاوې $\hat{D} = \hat{B}$
 $\hat{P} = \hat{P}$ گڼو $\Rightarrow \hat{A} = \hat{C}$

د پورتنیو درېو زاویو د تساوي څخه پوهیږو چې د $\hat{P}AD$ او \hat{PCB} مثلثونه مشابه دي، نو لیکلی شو چې:

$$\hat{P}CB \sim \hat{P}AD \Rightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

مثال: په لاندې شکل کې \overline{PA} او \overline{PB} د $C(O, r)$ د دايرې دوه قاطع کرني دي. که $\overline{PA} = 10\text{cm}$, $\overline{PC} = 6\text{cm}$ او $\overline{PD} = 4\text{cm}$ اوږدوالی ولري، د \overline{PB} اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: هغه قطعات (پوټه کرني) چې د P له ټکي څخه رسمېږي او د (1-2) قضیې په مرسته لیکلای شو، چې:

$$PA \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$$

$$10 \cdot 6 = \overline{PB} \cdot 4$$

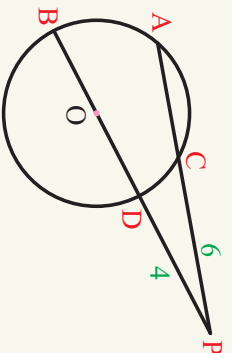
$$60 = 4\overline{PB}$$

$$\overline{PB} = 15\text{cm}$$

$$\overline{DB} = \overline{PB} - \overline{PD}$$

$$\overline{DB} = 15 - 4$$

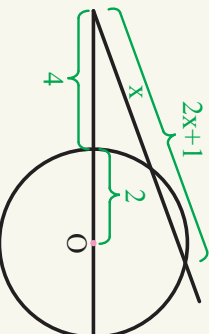
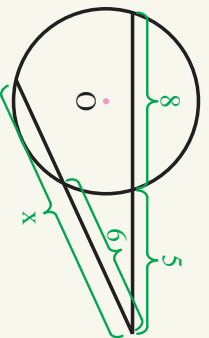
$$\overline{DB} = 11\text{cm}$$



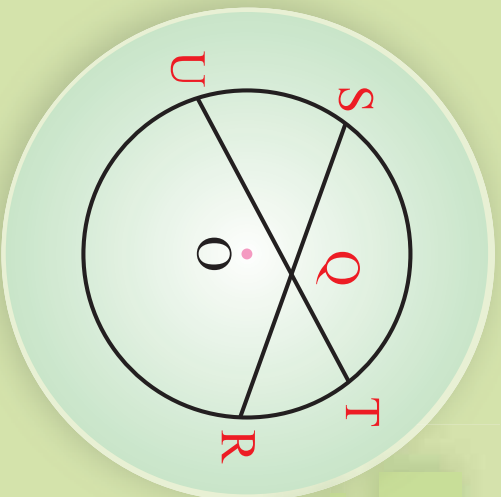
که چېرې د یوې دايرې له بهرنیو ټکو څخه پر دايره دوه قاطع کرني رسم شي، د یوې قاطع د قطعانو د ضرب حاصل، د بل قاطع د قطعانو د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

یو نښتی

1- په لاندې شکلونو کې د X عددي قیمت پیدا کړئ.

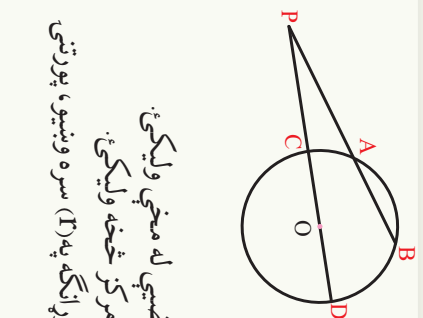


د یو ټکی طاقت نظر دایري ته



مخامخ شکل ته پاملرته وکړئ. ویلاشې شی چې د مساوات $\overline{QR} \cdot \overline{QS} = \overline{QU} \cdot \overline{QT}$ سم دی.

فعالیت



- د P له یو ټاکلي ټکي څخه چې $C(O, r)$ د دایري څخه بهر پروت دی پر هغه د \overline{PAB} قاطع رسم کړئ. د P له بهرنی ټکي څخه د PCD قاطع داسې رسم کړئ چې د $C(O, r)$ دایري له مرکز څخه تیر شي.
- د \overline{PAB} او PCD د ټوټه کړینو ترمنځ اړیکې د $(1-2)$ قضیې له مخې ولیکئ.
- په پورتنۍ اړیکه کې د \overline{PC} او \overline{PD} اوږدوالی د دایري له مرکز څخه ولیکئ.
- که P ټکی ولاین له مرکز څخه په (d) او شعاع یا وړانگه په (r) سره ونښوئ، پورتنۍ اړیکه د d او r ترمنځ ولیکئ.

د پاسنی فعالیت د پایلي څخه لاندې قضیه څرگندېږي.

قضیه (2-2): که د یو ټاکلي ټکي څخه د یوې قاطع کرښې په یو دایره داسې رسم کړئ چې د دایري له مرکز څخه تیره شي. د لومړي قاطع د ټوټه کړینو ترمنځ د ضرب حاصل د یو ټاکلي اندازې $(r^2 - d^2)$ سره مساوي دي، (d) د ټاکلي ټکي او د دایري د مرکز ترمنځ ولاین او (r) د دایري شعاع یا وړانگه ده.

لومړی حالت: که چیرې ټاکلي ټکی د دایري په بهر کې پروت وي.



ثبوت: که چیرې د P ټکي د دایري په بهر کې او ولاین له مرکز څخه په (d) او دایري شعاع په (r) سره ونښوئ، د $(1-2)$ قضیې

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} \dots (2-1)$$

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = (\overline{PO} - \overline{CO})(\overline{PO} + \overline{OD})$$

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = (d-r)(d+r)$$

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = d^2 - r^2$$

له مخې لیکلای شو:
دوه نور حالتونو چې ټاکلی ټکی یې د دایرې پر محیط او دننه په دایره کې براته وي، دا د گرانو زده کورونکو کورنۍ دنده ده.

تعریف

د $d - r^2$ د $d^2 - r^2$ رابطه د P د ټکي طاقت نظر د $C(O, r)$ دایرې ته وایي چې، ثابتې اندازه ده چې د $P_{(0)} = d^2 - r^2$ په شکل ښودل کېږي.

$$r = \frac{D}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ cm}$$

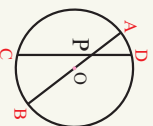
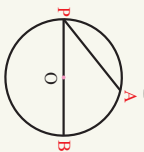
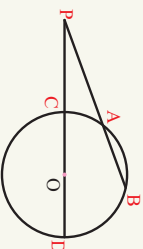
$$P_{(0)} = d^2 - r^2$$

$$P_{(0)} = (13)^2 - (5)^2$$

$$P_{(0)} = 169 - 25 \Rightarrow P_{(0)} = 144$$

د $d^2 - r^2$ رابطه د P د ټکي طاقت نظر د $C(O, r)$ دایرې ته پیدا کړی.

حل: خرنگه چې د دایرې قطر راکړل شوی دی لومړی د دایرې شعاع یا وړانگه وروسته د P ټکي طاقت نظر دایرې ته پیدا کړی.



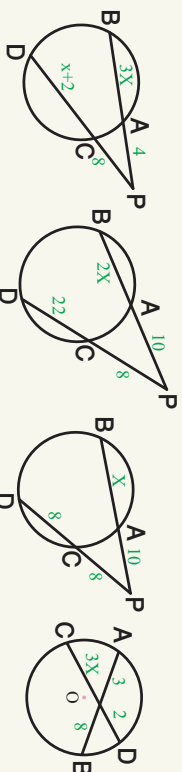
• که د یوه ټکي طاقت نظر یوې دایرې ته مثبت وي ټکی د دایرې نه بهر پروت دی، یا $d^2 - r^2 > 0$ لکه د $P_{(0)} = d^2 - r^2$ قضیې شکل

• که د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته صفر وي ټکی د دایرې پر محیط پروت دی، یعنې $d^2 - r^2 = 0 \Rightarrow d^2 = r^2$

• که د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته منفي وي ټکی د دایرې دننه پروت ده، یعنې $d^2 - r^2 < 0 \Rightarrow d^2 < r^2$

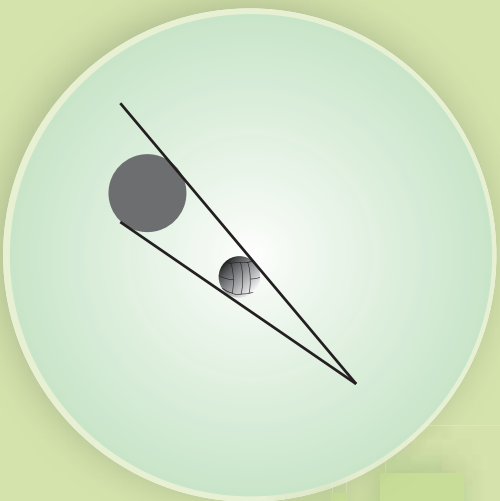
پوښتنې

1- په لاندې شکلونو کې د X قیمتونه پیدا کړی.



2- په لاندې حالتونو کې د یوه ټکي طاقت نظر یوې دایرې ته پیدا کړی.
الف) که $d = 7$ او $r = 4$ وي. ب) که $d = 3$ او $r = 3$ وي. ج) که $d = 3$ او $r = 5$ وي.

په دایري مماس کرښه



شکل ته پاملرته وکړئ. که چیرې د نور د وړانګې حرکت مسیر مستقیمې کرښې ومنل شي، دغه کرښې نظر توپ او د هغه له سیورۍ سره څه اړیکې لري.

فعالیت

- د P له یوه بهرنۍ ټکي نه د $C(O, r)$ په دایره د \overline{PR} او \overline{PQ} دوه مماسونه رسم کړئ. که د Q او R ټکي پر دایره د تماس ټکي وي. یا د P له ټکي پر دایره بل مماس رسمېدلای شي؟
- د O ټکي د R, Q او P ټکو سره ونښلوئ.
- لاسته راغلي مثلثونه سره څه اړیکې لري؟
- یا رسم شوی مماسونه سره برابر دي؟

د دې فعالیت د پایلې څخه لاندې قضیه څرګندېږي.

قضیه (2-3): د یوې دایرې له بهرنۍ ټکي څخه پر دایره دوه مساوي مماسونه، رسمېږي.

ثبوت: په $\triangle POR$ او $\triangle POQ$ مثلثونو کې لیکلی شو چې:

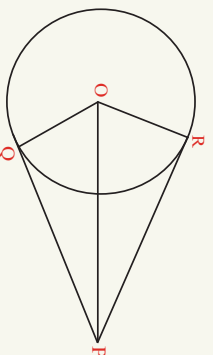
$$\overline{OR} = \overline{OQ} \quad \text{د دایرې شعاع یا وړانګه.}$$

$$\overline{PO} = \overline{PO} \quad \text{ګډې}$$

$$\hat{R} = \hat{Q} \quad \dots\dots\dots 90^\circ$$

$$\triangle POR \cong \triangle POQ$$

$$\overline{PR} = \overline{PQ}$$



قضیه (2-4): که د یوې دایرې له بهرنۍ ټکي نه یو مماس او یو قاطع پر یوه دایره رسم شي ثبوت کړئ، چې د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته د مماس له مربع سره مساوي دی.

ثبوت: $C(O, r)$ په دایره کې \overline{PT} مماس او \overline{PAB} قاطع دی، که د T ټکي له A او B

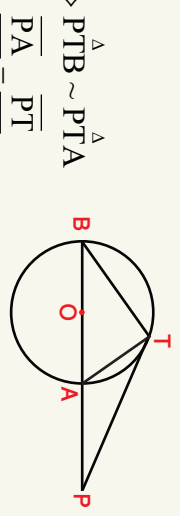
ټکوسره وښلوه، د \hat{PTA} او \hat{PTB} مثالونو څخه لیکلای شو چې:

$$\hat{PTA} = \hat{PBT} \dots (I)$$

$$\hat{P} = \hat{P} \dots (II)$$

$$\Rightarrow \hat{PTB} = \hat{PAT}$$

امحيطي زاويې او د عين قوس گډ مماس

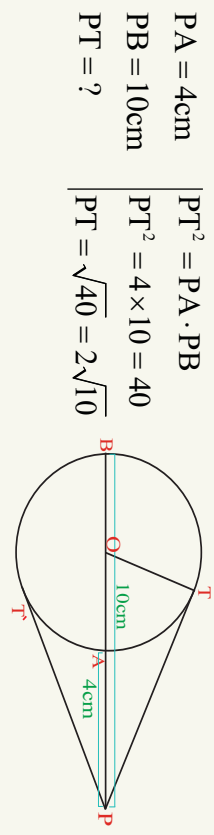


$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PB}}$$

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2 \Rightarrow \overline{PT}^2 = d^2 - r^2$$

په پايله کې لیکلای شو چې: $PT = PT'$

مثال: په لاندي شکل کې د \overline{PT} او $\overline{PT'}$ اوږدوالی لاسته راوړئ.



$$PA = 4\text{cm}$$

$$PB = 10\text{cm}$$

$$PT = ?$$

$$\overline{PT}^2 = PA \cdot PB$$

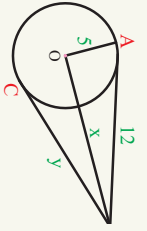
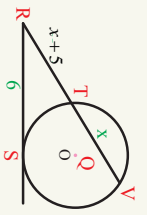
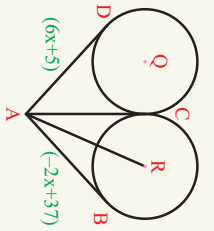
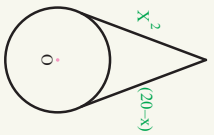
$$\overline{PT}^2 = 4 \times 10 = 40$$

$$\overline{PT} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

- د یوې دایرې له باندني ټکي څخه پر هغې دوه مساوي مماسونه رسمولای شو. که چېرې د یوې دایرې له بهرني ټکي څخه پر دایره یو قاطع او یو مماس رسم شي، د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته د مماس له مربع سره مساوي دي.

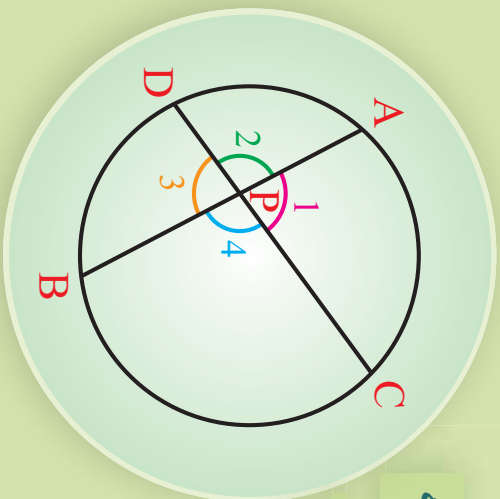
یو نښتی

په لاندي شکلونو کې د X قیمت لاسته راوړئ.



د یوې دایرې دننې (داخلي) زاویه

د یوې دایرې په دننه کې دوه متقاطع وترونه رسم کړئ او وواياست چې خو زاویې جوړوې، او څه یې نوموئ.



تعریف

هغه زاویې چې د دایرې په دننه کې د دوو وترونو د تقاطع په مرسته منځ ته راځي د دایرې دننې زاویې بلل کېږي، لکه په پورتنۍ شکل کې د $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{4}$ زاویې.

فعالیت

په یاد ولرئ:

- هره محیطي زاویه د مخالف قوس نیمایي ده.
- په یوه منځ کې د هرې خارجي زاویې پراخوالي د دوو ناګاونډیو زاویو د مجموعې سره برابر دی.

د $C(O, r)$ دایره رسم کړئ، په هغه کې د \overline{AB} او \overline{CD} دوه وترونه داسې رسم کړئ چې د P په ټکي کې یو بل پری کړي هغه زاویې چې منځ ته راځي د څه په نامه یادېږي؟

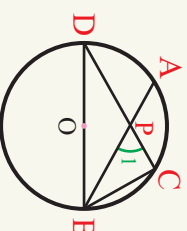
- د D او C ټکي د B سره ونښلوئ د \hat{CPB} زاویه چې د \hat{PBD} باندنۍ زاویه ده، د منځ د دوو ناګاونډیو زاویو سره څه اړیکه لري.

د دې فعالیت د پایلې څخه لاندې قضیه بیان او ثبوتو.

قضیه (2-5): د یوې دایرې د هرې دننې (داخلي) زاویې پراخوالي، د هغو قوسونو د مجموعې له نیمایي سره مساوي دی، چې د د زاویو د اضلاعو د پریکړې په مرسته منځ ته راغلي وي.

ثبوت: څرنگه چې د B او D د دایرې محیطي زاویې دي نو کولای شو چې ولیکو:

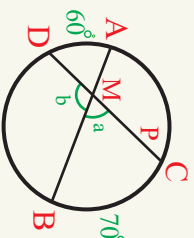
$$\left. \begin{aligned} \hat{B} &= \frac{1}{2} \widehat{AD} && \text{د محیطي زاویې وسعت} \\ \hat{D} &= \frac{1}{2} \widehat{BC} && \text{د محیطي زاویې وسعت} \\ \widehat{CPB} &= \widehat{B} + \widehat{D} && \text{د مر منځ خارجي زاویه} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{CPB} = \frac{1}{2} \widehat{AD} + \frac{1}{2} \widehat{BC} \\ \widehat{CPB} = \frac{1}{2} (\widehat{AD} + \widehat{BC})$$



لومړی مثال: په لاندې شکل کې د \hat{a} او \hat{b} زاوړې پيدا کړئ.
حل: څرنگه چې د يوې دايرې دننې زاوړې پراخوالی د هغو قوسونو مجموعه کې له نيمايي سره مساوی دی چې د زاوړو په مخامخ کې پراته وي، يعنې:

$$\widehat{CMB} = \hat{a} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2} = \frac{60 + 70}{2} = 65^\circ$$

$$\hat{b} = 180^\circ - \hat{a} = 180^\circ - 65^\circ = 105^\circ$$



دویم مثال: په لاندې شکل کې د x او \widehat{NTM} زاوړې پراخوالی وټاکئ.
حل: د يوې دايرې دننې زاوړو د اړیکو له مخې ليکلی شو چې:

$$\widehat{NM} = 9x + 17, \quad \widehat{PQ} = 10x - 10$$

$$\widehat{NTM} = 6x + 28$$

$$6x + 28 = \frac{9x + 17 + 10x - 10}{2}$$

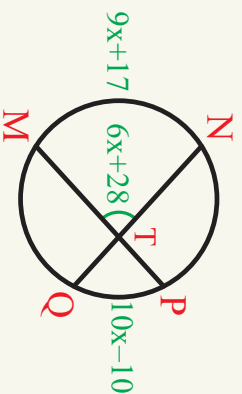
$$12x + 56 = 19x + 7$$

$$-7x = -49$$

$$x = 7$$

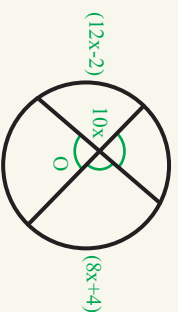
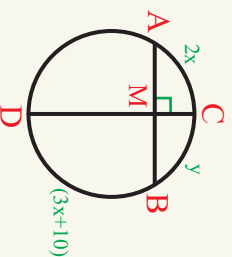
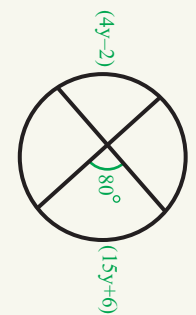
$$\widehat{NTM} = 6x + 28$$

$$= 6 \times 7 + 28 = 42 + 28 \Rightarrow \widehat{NTM} = 70^\circ$$



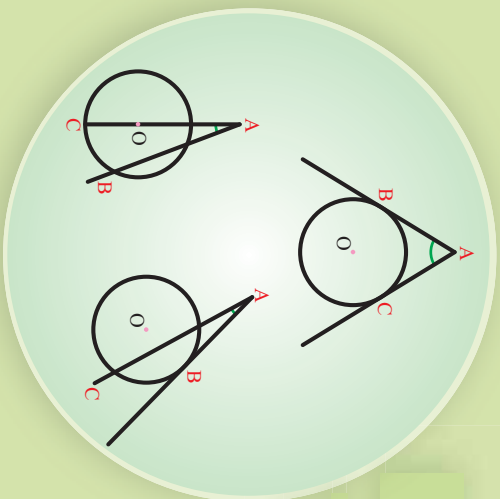
پوښتنې

1- په لاندې شکلونو کې د x او y اندازې معلوم کړئ.



د دایرې بانډنې زاویه

په مخامخ شکلونو کې د توتپه کرښو او د زاویو نومونه واخلئ.



تعریف

هغه زاویه چې د دوو قاطع کرښو، دوو مماسونو یا د یو قاطع او یوه مماس د پریکړې څخه د دایرې په بهر کې منځ ته راغلی وي د دایرې بانډنې زاویه بلل کېږي.

فعالیت

- د $C(O, r)$ په دایره کې د \overline{AB} او \overline{CD} دوه غیر موازي وترونه غزوو تر څو د \widehat{BVD} خارجي زاویه منځ ته راشي د C ټکي له B سره ونښلوئ.
- د \widehat{BVC} مثلث بانډنې زاویه یعنې $(\widehat{1})$ د مثلث د دوو ناګانزلیو زاویو سره څه اړیکې لري؟

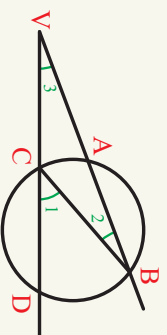
د دې فعالیت له پایلې څخه لاندې قضیه بیانېږي.

قضیه (2-6): د یوې دایرې د بانډنې زاویې پراخوالی، د هغو قوسونو د توپیر له نښې سره مساوي دی، چې د وترونو د تقاطع څخه منځ ته راغلی وي.

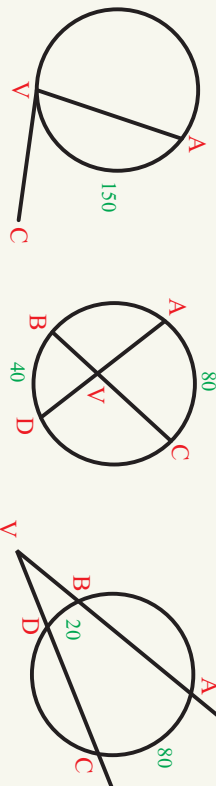
ثبوت: د B ټکي له C سره نښلو او \widehat{BVC} مثلث کې لرو چې:

$$\begin{aligned} \widehat{1} &= \widehat{2} + \widehat{3} && \text{د مثلث خارجي زاویې پراخوالی} \\ \widehat{3} &= \widehat{1} - \widehat{2} && \\ \widehat{1} &= \frac{1}{2} \widehat{AD} && \text{د محطې زاویې پراخوالی} \\ \widehat{2} &= \frac{1}{2} \widehat{AC} && \text{د محطې زاویې پراخوالی} \end{aligned} \Rightarrow \widehat{3} = \frac{1}{2} \widehat{BD} - \frac{1}{2} \widehat{AC}$$

$$\widehat{1} = \frac{1}{2} (\widehat{BD} - \widehat{AC})$$



نومړی مثال: په لاندې شکلونو کې د \widehat{AVC} زاویو پراخوالی پیدا کړئ.



حل: په دایره کې بانډیو او مماسي زاویو پراخوالی څخه په گټه اخستلو سره لیکلای شو چې:

$$a) \widehat{AVC} = \frac{1}{2} \widehat{AC} \quad b) \widehat{AVC} = \frac{1}{2} (\widehat{AC} + \widehat{BD}) \quad c) \widehat{AVC} = \frac{1}{2} (\widehat{AC} + \widehat{BD})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (150)^\circ = \frac{1}{2} \cdot (80 + 40)^\circ = \frac{1}{2} \cdot (80 - 20)^\circ$$

$$\widehat{AVC} = 75^\circ$$

$$\widehat{AVC} = 60^\circ$$

$$\widehat{AVC} = 30^\circ$$

دویمه مثال: د لاندې شکل څخه په گټه اخستلو سره د X او Y ارزښتونه پیدا کړئ.

$$\widehat{ANB} = \frac{x+y}{2} \Rightarrow 70 = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x+y = 140 \dots I$$

$$\widehat{APB} = \frac{x-y}{2} \Rightarrow 50 = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x-y = 100 \dots II$$

که چیرې د I او II اړیکې خوا په خوا جمع کړو لرو چې:

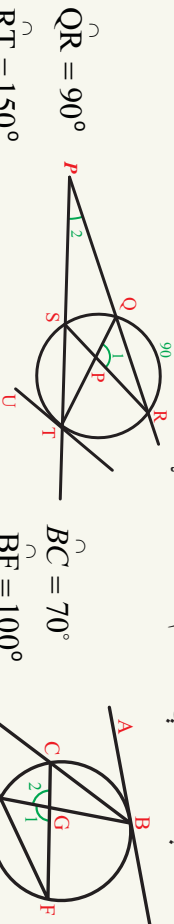
$$2x = 240$$

$$x = 120^\circ$$

$$y = 20^\circ$$

پوښتنې

په لاندې شکلونو کې نا معلوم کمیټونه پیدا کړئ.



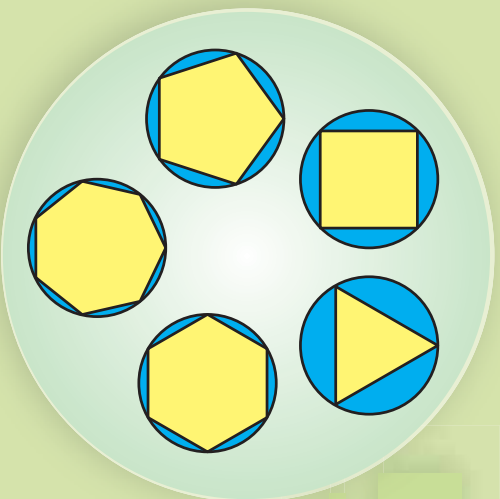
$$\widehat{QR} = 90^\circ$$

$$\widehat{RT} = 150^\circ$$

$$\widehat{QS} = 50^\circ$$

$$\widehat{STU} = ? \quad , \quad \widehat{1} = ? \quad , \quad \widehat{2} = ?$$

$$\widehat{1} = ? \quad , \quad \widehat{2} = ? \quad , \quad \widehat{D} = ? \quad , \quad \widehat{ABC} = ?$$

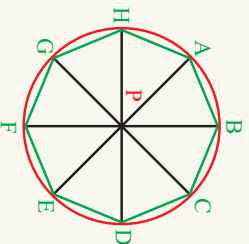


محيطي دایره

مخامخ شکل ته پاملر نه وکړئ، کوم هندسي شکلونه وينئ؟ نومونه يې واخلئ.

تعريف

هغه دایره چې د مضلع د راسونو څخه تېره شوې وي محیطي دایره بلل کېږي او مضلع مرسوم په دایره بلل کېږي، لکه په مخامخ شکل:



د مثلث محیطي دایره: هغه دایره چې د مثلث د درې راسونو څخه تېره شوې وي د مثلث د محیطي دایرې په نامه یادېږي.

فعالیت

- د $\triangle ABC$ مثلث رسم کړئ.
- د \overline{AC} او \overline{BC} د اضلاعگانو عمودي ناصفونه رسم کړئ.
- پورتنی عمودي ناصفونه په څو ټکو کې پرې کوي؟ د هغې د تقاطع ټکی په O سره وپېښئ.
- د \overline{OA} , \overline{OB} , او \overline{OC} اوږدوالی سره پرتله کړئ.
- که چېرې یوه دایره د O په مرکز او د \overline{OA} په شعاع رسم شي آیا د B او C له ټکو تیرېږي او که نه؟
- آیا دا دایره د B او C له ټکو څخه هم تیرېږي؟ ولې؟
- رسم شوی دایره د مثلث د څخه په نامه یادېږي؟

په یاد ولرئ چې:
هغه دایره چې د مضلع د راسونو څخه تیرېږي، د مضلع ته مرسوم په دایره وايي.

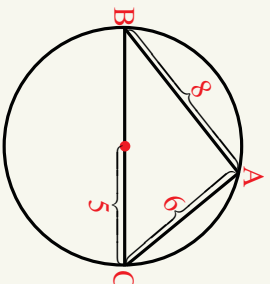
ددې فعالیت د پایلي څخه په لاندې ډول لکلاى شو:

پایله: د اضلاعگانو د وسطي عمودونو د پریکړې ټکي د مثلث د محیطي زاويې مرکز دی.

مثال: د $\triangle ABC$ قايم الزاويه مثلث داسې رسم کړئ چې د قايمو څنډو اوږدوالی په ترتيب سره 8cm او 6cm وي، د دې مثلث د محیطي دایري شعاع (وړانگه) لاس ته راوړي.

حل: پوهېږو چې په هر قايم الزاويه مثلث کې د هغې د محیطي دایري مرکز پر وتر باندې پروت وي نو لومړی د قايم الزاويه مثلث د وتر اوږدوالی پیدا کوو چې د نیمایي ټکي يې د محیطي دایري مرکز دی.

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \\ \overline{BC}^2 &= 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \\ \overline{BC} &= \sqrt{100} \\ \overline{BC} &= 10\text{cm} \\ r &= \frac{BC}{2} \Rightarrow r = \frac{10}{2} = 5\text{cm} \end{aligned}$$

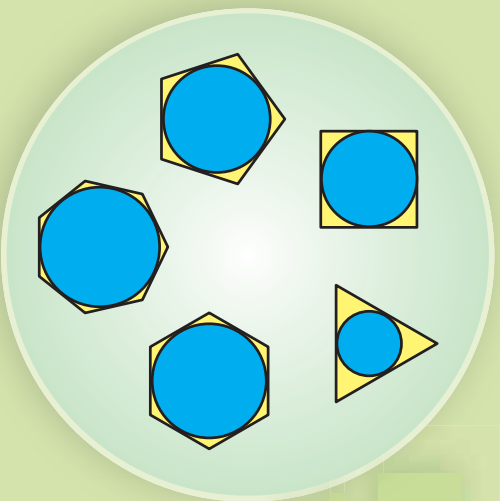


- هغه دایره چې د مضلع د راسونو څخه تېرېږي د مضلع محیطي دایري په نامه یادېږي او مضلع ته مرسوم په دایره ولایي.
- د یو مثلث د اضلاعو د منځني (وسطي) عمودونو د پریکړې ټکي د مثلث د محیطي دایري مرکز دی.

پوښتنې

- 1- یو مثلث چې د اضلاعو اوږدوالی یې په ترتیب سره 3cm ، 4cm او 5cm وي رسم کړئ د هغې د محیطي دایري شعاع یا وړانگه حساب کړي.
- 2 - د قايم الزاويه مثلث، متساوي الاضلاع او متساوي الساقين مثلثونو د محیطي دایرو مرکزونه په کومو ځایونو کې پراته دي په شکل کې یې وښیئ.

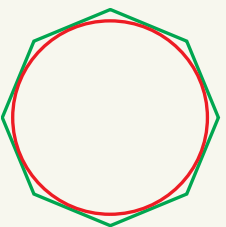
محايطي دائره



- هغه هندسي شڪلونہ چي به مخامخ شڪل کي ٻي وٺي نومونه واخلن.
- د شڪلونو تر منڃ ڇه اريڪي وٺن.

تعريف

هغه دائره چي د محيطي مضلع پير ضلعو مماس وي، د مضلع د محايطي دائري په نامه يادبري لکه مخامخ شڪل چي د مضلع پواسطه احاطه شوي دي.



د مثلث محايطي دائره: هغه دائره چي د ٻيو مثلث په دري ضلعو مماس وي د مثلث محايطي دائره بلل ڪبري.

فعاليت

- د $\triangle ABC$ يو ڪيفي مثلث رسم ڪري.
- د A, B, C زاويو ناصفونہ رسم او د پريڪري ٽڪي په O سره وٺينئ.
- د O له ٽڪي څخه د مثلث پير اضلاعو OM, ON, OP عمود ڪرئ.
- د OM, ON, OP عمودونو اوڙدوالي پرتله ڪري.
- ايا هغه دائره چي د O په مرڪز او د ON په شعاع رسم شي د M او P له ٽڪو څخه تيربري؟ ولي؟
- رسم شوي دائره د څه په نامه يادبري؟

مورسته:
د ٻيوه مثلث وسطي
عمودونہ د مثلث دننه په
ٻيوه ٽڪي کي پريڪري

د پورتنۍ فعالیت پایله کولای شو چې په لاندې توگه څرگنده کړو.
د هر مثلث دننې ناصف الزاویو ترمنځ د پریکړې ټکی، د مثلث د محاطي دایرې له مرکز څخه عبارت دي.
د مثلث باندنی محاطي دایره

فعالیت

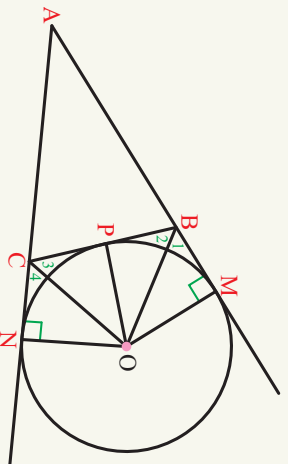
د مثلث باندنی دایره رسم کړئ.

- د $\triangle ABC$ مثلث رسم کړئ او \overline{AB} او \overline{AC} ضلعو ته امتداد ورکړئ.
- د مثلث د B او C زاویو باندنی ناصف الزاویي رسم او د پریکړې ټکی په (O) سره ونښئ.
- ایا د (O) ټکی د مثلث د باندنی محاطي دایرې مرکز کیږي شي؟ ولې؟
- د (O) له ثابت ټکی څخه د \overline{OM} , \overline{OP} او \overline{ON} عمودي کړئ چې د O دایرې شعاع گانې دي.

فکر او څېړنه وکړئ:

- که چیرې د یوې څلور ضلعي د مخالف زاویو مجموعه 180° وي څلور ضلعي په دایره مرسوم دي.
- په یاد ولرئ: هر منظمه مضلع محاطي او محاطي دایره لري.

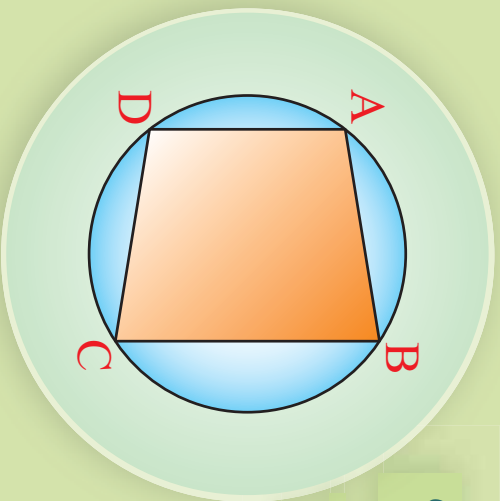
د پورتنۍ فعالیت پایله کولای شو په لاندې توگه څرگنده کړو.
هغه دایره چې د یو مثلث په یوه ضلع او د دوو ضلعو پر امتداد محاس وي د هغه مثلث باندنی محاطي دایره بلل کېږي.



پوښتنې

- 1- په کومو مثلثونو کې د محاطي دایرې او محاطي دایرې مرکزونه منطبق دي، رسم او په شکل کې یې ونښئ.

په دایره کې د مرسوم څلور ضلعي ځای ټاټوبي (خواص)



په مخامخ شکل کې دایره د څلور ضلعي
له راسونو سره څه اړیکه لري.

فعالیت

- د $ABCD$ یو کیني څلور ضلعي مرسوم په دایره رسم کړئ.
- د محیطي دایرې منځ ته راغلی زاوېي څه نومېږي؟
- د دایرې مرکز د څلور ضلعي د دوو مخامخ راسونو سره ونښلوئ، د منځ ته راغلی مرکزي زاوېي مجموعه څو درجې دی؟
- د مرکزي او محیطي زاوېو اړیکې چې د عین قوس مخامخ بڼې وي د پورته مرکزي زاوېو لپاره ولیکئ.

د دې فعالیت د پایلې څخه لاندې قضیه بیانولای شئ:

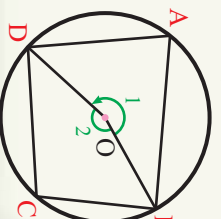
قضیه: په یوه دایره کې د مرسوم څلور ضلعي د مخامخ زاوېو مجموعه 180° ده.

$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 360^\circ$$

$$\hat{DCB} = \frac{1}{2} \hat{O}_1$$

$$\hat{DAB} = \frac{1}{2} \hat{O}_2$$

$$\hat{DCB} + \hat{DAB} = \frac{1}{2} (\hat{O}_1 + \hat{O}_2) = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$



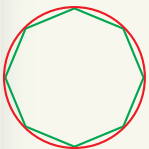
ثبوت:

فعالیت

- منظم درې ضلعي د څه په نامه یادېږي، د هرې زاوېي پراخوالی څو درجې ده؟
- منظم څلور ضلعي څرنگه ونوموو؟
- د هغې د هرې زاوېي پراخوالی څو درجې دی؟

تعريف

هغه مضلع چې اضلاع او زاويې يې يو له بل سره مساوي وي منظمه مضلع بلل کېږي.



فعاليت

- په خپله خوښه يوه پنځه ضلعي رسم کړئ.
- يو راس يې د هغې له ناکاوانډه راس سره وښلولئ، خو مثلثونه منځ ته راځي؟
- د دې مثلثونو دننډيو زاويو مجموعه څو درجي ده؟
- د پنځه ضلعي دننډی زاويو مجموعې په هکله څه فکر کوئ؟
- دغه فعاليت د يو شپږ ضلعي په هکله تکرار کړئ.
- که چيرې n ضلعي مضلع ولرو د هغې دننډی زاويو مجموعه به يې څو درجي وي؟

که چيرې د يوې مضلع د ضلعو شمېر په n او د هغې دننډيو زاويو مجموعه په S_n وښوونو د

هر n ضلعي دننډيو زاويو مجموعه $S_n = (n - 2)180^\circ$ درجي ده.

مثال: د يو څلور ضلعي او لس ضلعي دننډيو زاويو مجموعه پيدا کړئ.

حل: د هر مضلع دننډيو زاويو مجموعه د $S_n = (n - 2)180^\circ$ او لس ضلعي له مخې ټاکل کېږي.

$$S_n = (n - 2)(180^\circ)$$

$$S_4 = (4 - 2)(180^\circ) \Rightarrow S_4 = 360^\circ$$

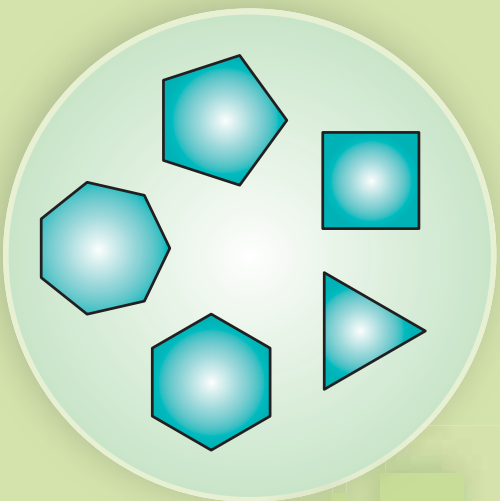
$$S_{10} = (10 - 2)(180^\circ) \Rightarrow 8 \times 180 \Rightarrow S_{10} = 1440^\circ$$

په یاد ولرئ چې:

- د قطررونو تعداد د n ضلعي له يو راس څخه د $n - 3$ اړيکي په مرسته لاس ته راځي.
- له يو راس څخه د مضلع په منځ کې د مثلثونو شمېر د $n - 2$ اړيکي په مرسته لاسته راځي.
- په يوه دايره کې د مرسوم څلور ضلعي د مخامخ زاويو مجموعه 180° دي.
- هغه مضلع چې د ضلعو اوږدوالی يې سره مساوي وي منظم مضلع بلل کېږي.

پوښتنې

- 1- د يوې منظمې شپږ ضلعي مضلع د زاويو پراخوالی څو درجي دي؟
- 2- د يوې منظمې n ضلعي مضلع د زاويو اندازه څو درجي دي؟
- 3- په يوه لس ضلعي مضلع کې د قطررونو په مرسته د يوه راس څخه څو مثلثونه منځ ته راځي؟

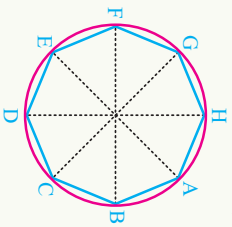


د منظمي مضلع ترسیم

- پاملرته وکړئ.
- په شکل کې څه ډول مضلع گانې گورئ.
- ستاسې په نظر دغه مضلع گانې په څه ډول رسم شوي دي؟

فعالیت

- د $C(O, r)$ دایره رسم کړئ د هغې په مرکز کې O مساوي مرکزي زاويې رسم کړئ، که چیرې n د مضلع د اضلاعو شمېر او θ د مخامخ ضلعي مرکزي زاویه وي ایا د $\hat{\theta} = \frac{360^\circ}{n}$ اړیکه سمه ده؟
- یو 8 ضلعي مضلع د $C(O, r)$ په دایره کې رسم کړئ.
- د دایرې محیط سره د مرکزي زاویو د ضلعو د پریکړې ټکي وښلوئ.
- ایا د منځ ته راغلي مضلع ضلعي سره مساوي دي؟ ولې؟
- منځ ته راغلي مضلع څه ډول ده؟ د مضلع د هرې ضلعي د مخامخ مرکزي زاويې پراخوالی څو درجي ده؟



د یو منظم n ضلعي مضلع د هر ضلع مخامخ د مرکزي زاويې پراخوالی مساوي په $\hat{\theta} = \frac{360^\circ}{n}$ دی.

فعالیت

- د $C(O, r)$ په دایره کې یوه منظمه شپږ ضلعي راښه ده.
- د دایرې مرکز د مضلع له شپږو راسونو سره نښلو. څو مثلثونه منځ ته راځي؟
- د شپږ ضلعي د مخامخ ضلعو د مرکزي زاویو پراخوالی څو درجي دی؟
- منځ ته راغلي مثلثونه څه ډول مثلثونه دي؟
- د پورتنۍ فعالیت پایله کولی شو په لاندې توګه څرګنده کړو.

د یوې شپږ ضلعې د هرې ضلعې اوږدوالی د هغې د محیطي دایرې له شعاع سره مساوی دی.

مثال: هغه دایره چې شعاع یې 2cm دی، خرنګه کولی شو چې هغه په یوه منظم شپږ ضلعې ضلع محیط کړو؟

حل: پوهېږو چې د هرې منظمې شپږ ضلعې ضلع هره ضلع د هغې د محیطي دایرې له شعاع سره مساوي ده نو د پرکار خوله د 2cm په اندازه خلاصوو او په پرله پسې توګه د دایرې له محیط څخه مساوي قوسونه جلاکوو د ټاکل شویو ټکو د نښلولو څخه منظم شپږ ضلعې منځ ته راځي؟

د محیطي دایرې د شعاع له مخې د منظمې ضلع مساحت

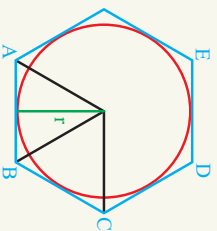
فعالیت

- د $C(O, r)$ محیطي دایره او د $ABCDEF$ منظمه ضلع رسم کړئ.
- د O ټکی د A, B, C راسونو سره ونښلوئ. د OAB او OBC مثلثونه چې منځ ته راځي دې انطباق منونکي دي؟ ولې؟
- د $\triangle AOB$ په مثلث کې د \overline{AB} د ضلعې جگوالی (ارتفاع) د محیطي دایرې له شعاع سره مساوي دي. ولې؟
- د پورتنی مثلثونو مساحت له کومې رابطې څخه په لاس راځي؟
- ایا د منظمې n ضلعې ضلع مساحت د n انطباق منونکو مثلثونو څخه جوړ دی؟
- د منظمې ضلع محیط د $P = AB \cdot n$ اړیکې یا رابطې څخه لاسته ته راځي. ولې؟

که چېرې د منظمې ضلع مساحت په A ، محیط یې په P او د یوې منظمې n ضلعې ضلع محیطي دایرې شعاع په r سره ونښو نو د ضلع مساحت عبارت دی له: $A = \frac{1}{2}P \cdot r$ چې په لاندې ډول ثبوتېږي:

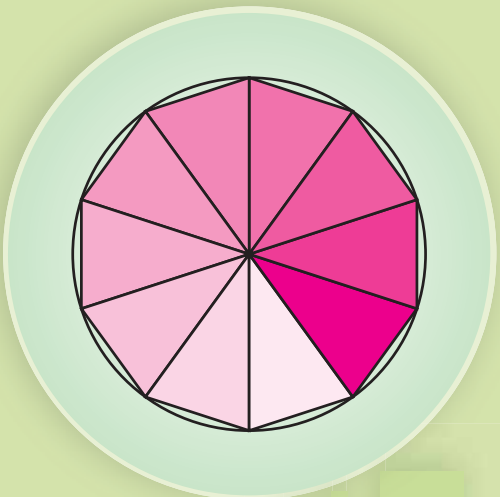
$$A = \frac{1}{2} AB \cdot r \cdot n$$

$$P = AB \cdot n \Rightarrow A = \frac{1}{2} P \cdot r$$



پوښتنې

1- په یوه دایره کې چې شعاع یې 3cm وي یو متساوي الاضلاع مثلث داسې رسم کړئ، چې محیط په دایرې وي؟



د دایري محیط او مساحت

په راکړ شوي شکل کې د مثالونو مجموعي مساحت د دایري او د مثالونو د یو شمېر ضلعو د مجموع اوردوالي د دایري محیط سره پرتله کړئ.

$C(O, r)$ په دایره کې که قطر په (d) او محیط یې د (C) په تورو وښودل شي د دایري د محیط د دایري محیطه

$$\frac{C}{d} = \text{constant}$$

$$\frac{C}{d} = \pi \Rightarrow C = \pi d \dots\dots (1) \quad [\pi \approx 3.14159\dots]$$

پوهېږو چې $r = \frac{d}{2}$ یا $d = 2r$ که چېرې په (I) اړیکه کې د (d) پر ځای د $(2r)$ قیمت ولیکو، د دایري محیط د لاندې اړیکې څخه لاسته راځي:

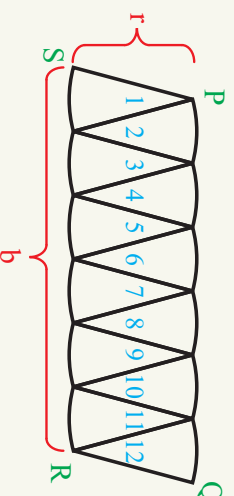
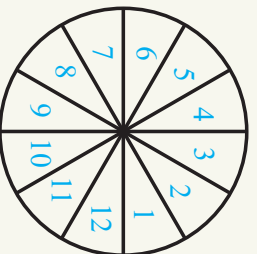
$$C = \pi d$$

$$C = 2\pi r$$

د دایري د مساحت د ثبوت او محاسبې لپاره پر مختلفې لپاره یو ډول د دایري د مساحت محاسبې لپاره په لاندې توګه عمل کوو:

یوه دایره د هغې د قطرونو په مرسته په 12 مساوي برخو ویشو او هره برخه یې د 1 څخه تر 12 پورې شمېرو سره وښیو که چېرې د دایري دغه مثلي پوټې غوڅ او بیا هغوی څنګ په څنګ د لاندې شکل په څیر ترتیب کړو.

په روښانه ډول لیدل کېږي، چې متوازي الاضلاع ته ورته شکل منځ ته راځي.



پوهېرو چې د B قاعده د دایرې د محیط نیمایي ده. ولې؟ نو:

جگوالی \times قاعده = د متوازي الاضلاع مساحت

$$C r = \frac{1}{2} d \times C r$$

له بلې خوا پوهېرو چې $C = 2\pi r$ = د دایرې محیط دی، نو لرو چې:

$$2\pi r \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2 = A = \frac{1}{2} d \times C r$$

پوهېرو چې د متوازي الاضلاع مساحت او دایرې سره ډېر نږدی دی، نو لیکلای شو: $A = \pi r^2$
په پایله کې ولې شو چې د دایرې مساحت د $A = \pi r^2$ اړیکې او محیط یې د $C = 2\pi r$ اړیکې په مرسته په لاس راځي.

لومړی مثال: د یوې دایرې وړانګه (شعاع) 14cm ده د دایرې مساحت پیدا کړئ.

$$A = \pi r^2$$

حل: د دایرې د مساحت د اړیکې څخه په

$$A = (3.14159)$$

گټو اخستو سره یعنی $A = \pi r^2$ لرو چې:

$$A = (3.14159) \cdot 196\text{cm}^2 \Rightarrow A = 615.75\text{cm}^2$$

دویمه مثال: که چېرې د دایرې قطر 70cm وي د دایرې شعاع او مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنگه چې د دایرې محیط راکړل شوی دی، نو اول شعاع، وروسته مساحت پیدا کوو.

$$\frac{d}{2} \Rightarrow r = \frac{70}{2} = 35$$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3.14159(35)^2 \Rightarrow A = 3848.4\text{cm}^2$$

درېیمه مثال: که چېرې د دایرې محیط $14\pi\text{cm}$ وي د دایرې شعاع او مساحت پیدا کړئ.

$$C = 14\pi\text{cm}$$

حل: څرنگه چې د دایرې محیط

$$2\pi r = 14\pi \Rightarrow 2r = 14 \Rightarrow r = \frac{14}{2} = 7$$

راکړل شوی دی، نو د مساحت پیدا کولو لپاره اول شعاع پیدا کوو.

$$A = \pi r^2 \Rightarrow (3.14159) \cdot 7 \cdot 7 \Rightarrow A = 153.93\text{cm}^2$$

- د یوې دایرې مساحت د r په شعاع د $A = \pi r^2$ له اړیکې څخه لاس ته راوړو.
- د یوې دایرې محیط د r په شعاع د $C = 2\pi r$ له اړیکې څخه لاس ته راوړو.

پوښتنې

- 1- که چېرې دایرې محیط 4cm وي د دایرې شعاع یې لاس ته راوړئ.
- 2- د یوې دایرې محیط، چې شعاع یې د اوږدوالی یو واحد وي لاس ته راوړئ.
- 3- د یوې دایرې مساحت، چې شعاع یې د اوږدوالی یو واحد وي لاس ته راوړئ.

د دوهم څپرکي لنډيز

● هغه اړيکي چي د يو هندسي شکل د کرښو د اجزاوو تر منځ موجودي وي، د اورډوالي د اړيکو په نامه يادېږي.

● که چيرې د يوې دایرې له بهرنیو ټکو څخه پر دایره دوه قاطع کرښي رسم شي، د يوې قاطع د قطعاتو د ضرب حاصل، د بل قاطع د قطعاتو د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

یعني:

● که چيرې د يوه ټکي څخه دوه قاطع کرښي پر يوه دایره داسې رسم شي، چي دوسم قاطع د دایرې له مرکز څخه تیر شي، نو قاطع او د هغه د بهرنی قطعی د ضرب حاصل له يوې ټاکلي اندازې يعنې: $d^2 - r^2$ سره مساوي دي.

● د يوه بانډنې ټکي څخه پر يوې دایرې دوه مساوي مماسونه رسميدلای شي.

● که چيرې $0 < d^2 - r^2$ يا $d^2 > r^2$ وي ټکی د دایرې په بهر کې برانه دی.

● که چيرې $0 = d^2 - r^2$ يا $d^2 = r^2$ وي، ټکی د دایرې پر محیط پروت وي.

● که چيرې $0 < d^2 - r^2$ يا $d^2 < r^2$ وي ټکی د دایرې په دننه کې پروت دی.

..... هغه زاويي چي د قاطع کرښو په مرسته د دایرې په دننه کې منځ ته راځي د دایرې دننې زاويي بلل کېږي.

● د يوې دایرې د هرې دننې زاويي پراخوالی د هغې د مخالف قوسونو د مجموعې له نيمایي

$$\overset{\frown}{\alpha} = \frac{\overset{\frown}{a+b}}{2} \text{ سره مساوي دي.}$$

● هغه زاويه چي د دوو قاطع کرښو، دوو مماسونو، يا يو قاطع او يو مماس د پریکړې څخه د دایرې په بهر کې منځ ته راغلي وي د دایرې بانډنې زاويه بلل کېږي.

● د يوې دایرې د هرې بانډنې زاويي پراخوالی د هغې د مخالف قوسونو، تفاضل له نيمایي

$$\overset{\frown}{A} = \frac{\overset{\frown}{a-b}}{2} \text{ سره مساوي دی، يعنې:}$$

● هغه شکل چې د خو ټوټه کرښو په مرسته احاطه شوی وي، مضلع بلل کېږي.

په دې شرط چې:

- دوه ضلعي یې یوازې په خپلو انجانونو کې سره پریښکړئ.
- دوه ګاونډی ضلعي د یوې مستقیمې کرښې په اوږدوالي بېرته نه وي.
- هغه مضلع چې ضلعي او زاويې یې سره مساوي وي، منظم مضلع بلل کېږي.

● هغه د مضلع د رأسونو څخه تیره شي، د مضلع محیطي دایره بلل کېږي.

● د مضلع پر ضلعو مماس وي، د مضلع محاطي دایره بلل کېږي.

● هغه دایره چې د مثلث پر یوه ضلعه او د دوه نورو ضلعو په امتداد مماس وي، د مثلث بهرنی محاطي دایره بلل کېږي.

● د دوه متقاطع دایرو د مرکزونو ترمنځ کرښه په ګڼو وټو عمود ده.

● که چېرې یوه څلور ضلعي، مرسوم په دایره وي، د هغې د مخامخ زاویو مجموعه 180° دي.

● د دایري محیط د مخامخ اړیکې په مرسته لاس ته راځي: $C = 2\pi r$

● د دایري مساحت د مخامخ اړیکې په مرسته لاسته راځي: $A = \pi r^2$

د دویم څپرکي پوښتني

● په لاندي سوالونو کي د هر سوال لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي د سم ځواب څخه دايره تالو کړئ.

1- که چيرې د P ټکي د دايري پر محيط پروت وي د يوه ټکي طاقت نظر دايري ته عبارت دی له:

- (a) 1
(b) 2
(c) 0
(d) درې واړه ځوابونه سم دي.

2- که چيرې د P يړ ټکي د دايري په دننه کي پروت وي، د دې نقطې طاقت نظر يوي دايري ته عبارت دی له:

- (a) د P دټکي طاقت مثبت دی.
(b) د P ټکي طاقت صفر دی.
(c) درې واړه ځوابونه سم نه دي.

3- که د P ټکي د دايري څخه د باندي پروت وي، د P ټکي طاقت نظريوي دايري ته عبارت دی له:

- (a) $d - r$
(b) $d^2 - R^2$
(c) $r - d$
(d) $R^2 - d^2$

4- که چيرې د يوي دايري شعاع R او د دايري دننې ټکي او مرکز وټين په d سره وېښو، د نوموړي ټکي طاقت نظر دايري ته عبارت دی له:

- (a) $R^2 = d^2$
(b) $d^2 = R^2$
(c) دواړه ځوابونه سم دي.
(d) دواړه ځوابونه نا سم دي.

5- يو ټکي د 13cm په اندازه د $C(O, r)$ دايري له مرکز څخه وټين لري که د دايري قطر 10cm وي د قاطع د بهرنی برخي اوږدوالی د نوموړی ټکي څخه عبارت دی له:

- (a) 13 cm
(b) 10 cm
(c) 12 cm
(d) 8 cm

6- که چيرې د P له ټکي څخه د يو مماس اوږدوالی د $C(O, r)$ دايري سره 12cm او قطر يې 10cm وي د P او O د ټکو تر منځ وټين عبارت دی له:

- (a) 13 cm
(b) 12 cm
(c) 10 cm
(d) 5 cm

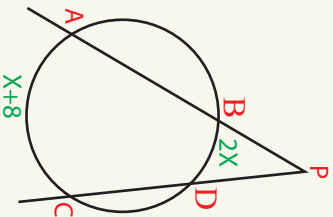
7- که چيرې د $C(O, r)$ د دايري د \overline{AB} وتر د P ټکي پورې امتداد ورکړو داسې چې: $AP = 8\text{cm}$ او $BP = 2\text{cm}$ د PT د مماس اوږدوالی عبارت دی له:

- (a) 4 cm
(b) 8 cm
(c) 2 cm
(d) درې واړه ځوابونه نا سم دي.

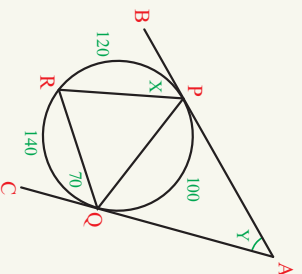
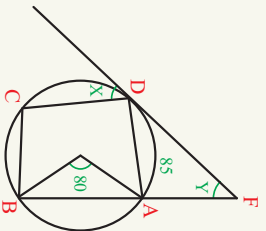
- په لاندې پوښتنو کې تش ځایونه په وړ کلمو ډک کړئ.
 - 1- $r^2 - d^2$ د یوه ټکي نظر یوې دایرې ته دی.
 - 2- که چېرې \overline{PT} د $C(O, r)$ پر دایره مماس وي، د P د ټکي طاقت نظر $C(O, r)$ دایرې ته عبارت دی له \overline{PT}^2 دی.
 - 3- که چېرې د P ټکي د دایرې پر محیط پروت وي، نو د ټکي طاقت نظر دایرې ته دی.
 - 4- که ټکي د دایرې په دننه کې وي، نو د ټکي طاقت نظر دایرې ته دی.
 - 5- که ټکي د دایرې څخه د باندې وي، نو د ټکي طاقت نظر دایرې ته دی.
 - 6- که $\overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$ وي، د A, B, C او D پر محیط پرتې وي او د P ټکي د په دننه او یا بهر پروت دی.
 - 7- که د A, B او T ټکي د دایرې پر محیط پراته وي، A, B او P د یوې کرشې په امتداد دی او د P ټکي د دایرې بهر کې دی په دې توگه $\overline{PT}^2 =$ دی.
- د سمو جملو په مخامخ کې درس) او د ناسمو جملو مخامخ کې دن) توری ولیکئ.
 - 1- (د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته د ټکي او د دایرې مرکز واټن له مربع سره مساوي دی.
 - 2- (که ټکي د دایرې پر محیط پروت وي د ټکي طاقت نظر دایرې ته صفر دی.
 - 3- (که ټکي د دایرې په دننه کې وي د ټکي طاقت نظر دایرې ته منفي دی.
 - 4- (که ټکي د د دایرې په بهر کې وي د ټکي طاقت نظر دایرې ته مثبت دی.
 - 5- (د یوه ټکي طاقت نظر هرې دایرې ته مثبت دی.
 - 6- (د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته $r^2 - d^2$ دي که د d د ټکي واټن دایرې ته او r د دایرې وړانگه وي.
 - 7- (که دوه دایرې مماس وي د هغوی طاقت نظر گډ مماس ته په هر ټکي کې مساوي وي.

● لاندې پوښتنې په تفصیل سره حل کړئ.

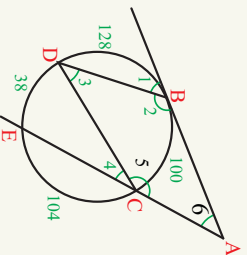
1- په لاندې شکل کې $\hat{P} = (x+1)$ او محامخ قوسونه یې په ترتیب سره $(2x)^0$ او $(x+8)^0$ وي د \hat{APC} د زاوې پراخوالی پیدا کړئ.



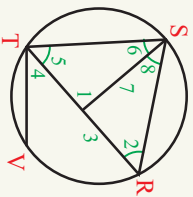
2- د \hat{x} او \hat{y} د زاوې پراخوالی په لاندې شکلونو کې پیدا کړئ.



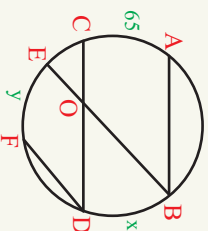
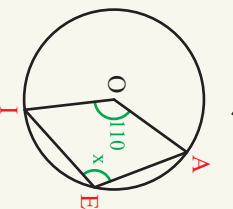
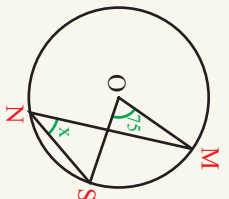
3- په لاندې شکل کې \overline{AB} بر دایره مماس دی که $\hat{DB} = 128^\circ$ او $\hat{CE} = 104^\circ$ وي د $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{4}$, $\hat{5}$, $\hat{6}$ زاوې پراخوالی پیدا کړئ.



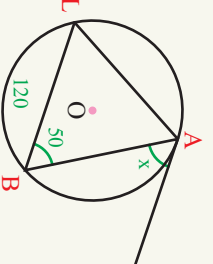
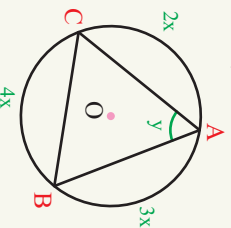
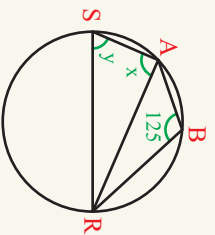
4- د $C(O, r)$ په دایره کې $RS \parallel TV$ او $\widehat{RTS} = 70^\circ$ دایري قطر دی د
 $\widehat{8}, \widehat{7}, \widehat{6}, \widehat{5}, \widehat{4}, \widehat{3}, \widehat{2}$ زاویو اندازه پیدا کړئ.



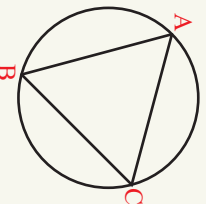
5- د x, x, y, y زاویو اندازه په لاندې شکلونو کې وټاکئ.



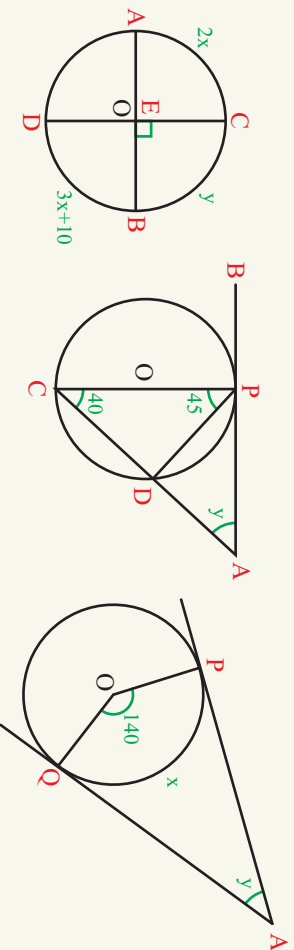
6- د x او y زاویو اندازه په لاندې شکلونو کې پیدا کړئ.



7- د محاطي دایري د تعريف له مخي وښیئ چي د هر مثلث دښو زاویو مجموعه 180° وي.



8- په لاندې شکلونو کې د x او y زاویو اندازه پیدا کړئ.





دریم چیرگی تحلیلی هندرسه

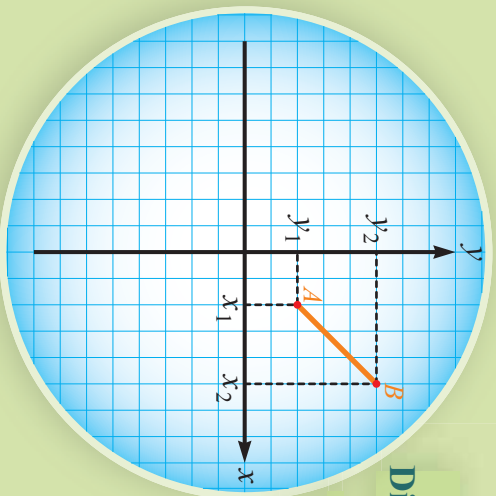


تحليلي هندسه

Analytic Geometry

د الجبر او هندسي ترمنځ اړيکې له تحليلي هندسي څخه عبارت دي. چې د الجبري معادلو او هندسي شکلونو په مرسته تر بحث لاندې نيول کېږي، فرانسوي رياضي پوه دیکارت د لومړي ځل لپاره د ټاکلو هندسي اشکالو او الجبري معادلو ترمنځ اړيکه و څېړله وېي ويل، چې ځينې الجبري معادلې يو ټاکلی هندسي شکل لري. څرنگه چې د هندسي د علم بنسټ ټکي او دالجبري معادلو بنسټ عدد جوړوي نو لدې کبله لومړی د ټکي او عدد ترمنځ اړيکې تر څېړنې لاندې نيسو، دیکارت د عدد او ټکي ترمنځ د اړيکو د څېړنې لپاره د قايم مختصاتو د محورونو داسې يو سيستم راوښود چې تراوسه د دکارت په نامه يادېږي.





د دوو ټکو ترمنځ واټن يا فاصله Distance between two Point

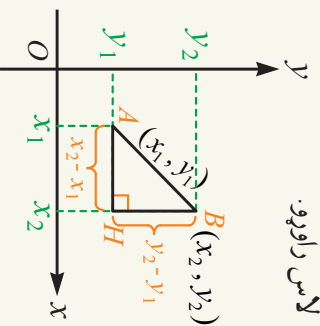
د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ دوه ټکي د وضعيه کمپانو په سيستم کې د AB يوه ټوټه کرښه ټاکنې ستاسې په اند خرنګه کولای شوي چې د A او B ټکو ترمنځ واټن (فاصله) حساب کړو.

فعاليت

- د $A(3, 5)$ او $B(5, 4)$ ټکي د وضعيه کمپانو په سيستم کې وښيئ.
- د AB کرښه رسم کړئ.
- د A او B ټکو ترمنځ واټن (فاصله) حساب کړئ.

د پورتنۍ فعاليت څخه کولای شو په عمومي ډول د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ دوو ټکو ترمنځ واټن (فاصله) په لاندې ډول په لاس راوړو. په لاندې شکل کې $\triangle ABC$ مثلث يوقايم الزاويه مثلث دی. ولې؟ د فيثاغورث د قضیې په مرسته کولای شو د A او B ټکو ترمنځ واټن په لاندې ډول په لاس راوړو.

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 \dots\dots\dots \text{د فيثاغورث د قضیې} \\ \left. \begin{aligned} \overline{AH} &= x_2 - x_1 \\ \overline{BH} &= y_2 - y_1 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \overline{AB}^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ \overline{AB} &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$



لومړی مثال: د $A(1,7)$ او $B(5,4)$ ټکو ترمنځ واټن (فاصله) پيدا کړئ.
حل: د دوو ټکو له فاصلي د فورمول څخه په گټه اخستي ليکلای شو چې:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(5-1)^2 + (4-7)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$$

$$\overline{AB} = 5 \text{ unit}$$

دویم مثال: د $A(3,4)$ ټکي واټن (فاصله) له مبدا څخه حساب کړئ.

حل: پوهیږو چې د مبدا مختصات $O(0,0)$ دی نو د دوو ټکو ترمنځ د واټن د فورمول

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ څخه په لاس راځي:}$$

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} \Rightarrow \overline{OA} = 5$$

د $A(x_2, y_2)$ او $B(x_1, y_1)$ واټن عبارت له:

د $P(x, y)$ یو اختیاري ټکی واټن د قیمو کمیانو له مبداء څخه عبارت دی له:

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

یو پښتني

1- د $A(0,3)$ او $B(2,0)$ ټکو ترمنځ واټن پيدا کړئ.

2- که $A(4,6)$ ، $B(-2,4)$ او $C(-8,2)$ د یوه مثلث درسونو مختصات وي د مثلث ډول وټاکئ.

3- د K عددي قیمت داسې وټاکئ چې د $A(2,3)$ او $B(5K, 6)$ پوټه کرښې اوږدوالی پنځه برابره شي.

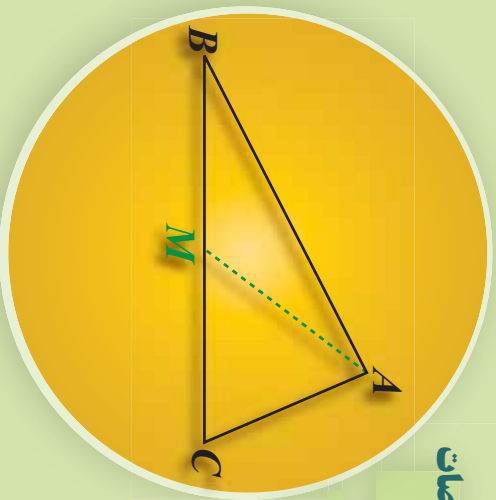
4- د $P(1, \sqrt{3})$ او $Q(-1, 1 + \sqrt{3})$ ترمنځ واټن پيدا کړئ.

5- که $A(-1,4)$ ، $B(-3,-7)$ او $C(1,9)$ د یوه مثلث د راسونو مختصات وي د مثلث محیط حساب کړئ.

6- د هغه مثلث مساحت پيدا کړئ، چې راسونه یې د $A(2,0)$ ، $B(6,2)$ او $C(1,2)$ په ټکو پراته وي.

7- که $A(10,5)$ ، $B(3,2)$ او $C(6,-5)$ د یوه مثلث د څوکو (راسونه) مختصات وي د مثلث ډول وټاکئ.

د یوه قطعه خط د منځني ټکي مختصات



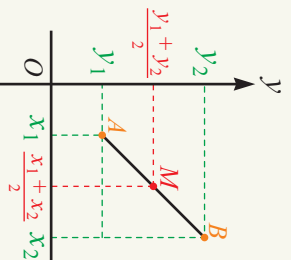
د $\triangle ABC$ په مثلث کې د \overline{AM} قطعه خط د مثلث میانه ده، د میانه ځانګړتیا بیان کړئ.

فعالیت

- د $D(2,0)$ او $E(6,0)$ ټکي دوضیعه کمیانو په سیستم کې ونانګئ.
- که چیرې د C ټکي د \overline{DE} توپه کرښې منځنی ټکی وي، د هغې مختصات ولیکئ.
- د C ټکي مختصات د D او E ټکولو له مختصاتو سره څه اړیکه لري؟
- د $P(0,1)$ او $Q(0,4)$ ټکي دوضیعه کمیانو په سیستم کې ونانګئ.
- که چیرې د R ټکي د \overline{PQ} توپه کرښې منځنی ټکی وي د هغې مختصات په لاس راوړئ.
- د R ټکي مختصات د P او Q ټکو د مختصاتو سره څه اړیکه لري؟

د پورتنۍ فعالیت پایله کولای شو چې په بشپړ ډول داسې بیان کړو: که $A(x_1, 0)$ او $B(x_2, 0)$ دوه ټکي د X په محور پرانه وي نو د M ټکي مختصات چې د \overline{AB} توپه کرښې منځنی ټکی دی داسې په لاس راځي: $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0)$

که $P(0, y_1)$ او $Q(0, y_2)$ دوه ټکي د Y په محور پرانه وي د M د ټکي مختصات چې د \overline{PQ} توپه کرښه منځنی ټکی دی داسې په لاس راوړو: $M(0, \frac{y_1 + y_2}{2})$



په بشپړ ډول $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ دوضیعه کمیانو په سیستم کې دوه ټکي او M د \overline{AB} کرښې منځنی ټکی وي نو د M ټکي مختصات داسې په لاس راځي: $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$

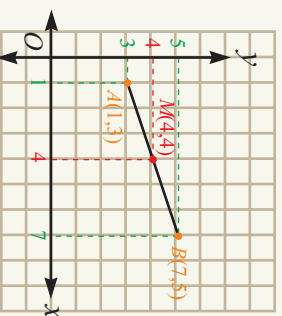
لومړی مثال: که چېرې $A(1,3)$ او $B(7,5)$ د \overline{AB} توپه کرښې د پیل او پای مختصات وي د توپه کرښې د منځني ټکي مختصات په لاس راوړئ.

حل: ديوې توپه کرښې د منځني ټکي د مختصاتو څخه په گڼه اخيسته ليکلاي شو چې:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$M\left(\frac{1+7}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$$

$$M(4,4)$$



دویم مثال: د $P(-1,3)$ ټکي واټن د هغې مستقيمي کرښې له منځني ټکي څخه پيدا کړئ چې د $A(1,2)$ او $B(3,-4)$ ټکو څخه تیر شي.

حل: د P ټکي واټن د AB مستقيمي کرښې له منځني ټکي د پيدا کولو لپاره لومړی د AB منځني ټکي مختصات په لاس راوړو، نو ليکلاي شو چې:

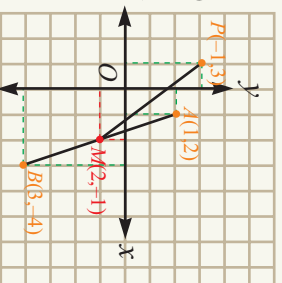
$$M_{\overline{AB}} = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1+3}{2}, \frac{2-4}{2}\right) = (2, -1) \Rightarrow M_{\overline{AB}} = (2, -1)$$

$$\overline{PM} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-3)^2}$$

$$\overline{PM} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$$

$$\overline{PM} = 5 \text{ unit}$$



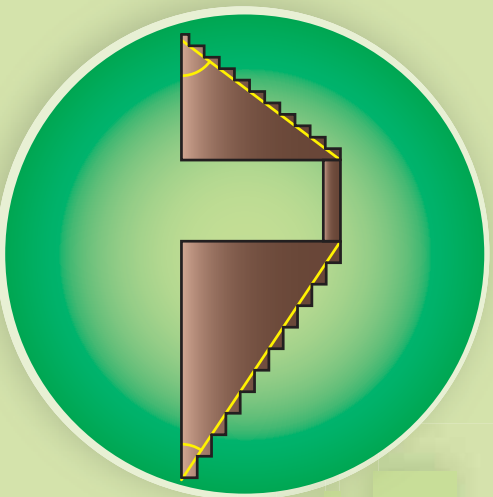
نوښتني

- 1- د يوه مثلث درې راسونه $A(5,-2)$, $B(3,-1)$, او $C(1,5)$ راکړل شوي دي د \overline{AM} د ميايي اوږدوالي پيدا کړئ.
- ۲- که چېرې $A(2,4)$, $B(5,9)$, $C(14,9)$ او $D(1,4)$ ټکي د يوه متوازي الضلاع راسونه وي د متوازي الضلاع د قطرونو د پريکړې د ټکو مختصات پيدا کړئ.
- ۳- که چېرې $A(-1,4)$, $A(-3,-7)$, او $B(1,9)$ د يوه مثلث راسونه وي د هغه د ميايي يا منځني کرښې اوږدوالي پيدا کړئ چې د BC په ضلع رسمېږي.

د مستقیمي کرښې میل



شکل ته وگورئ! په کومه زمینه په اسانۍ سره خنډی شی ولې؟ دلیل یې بیان کړئ.

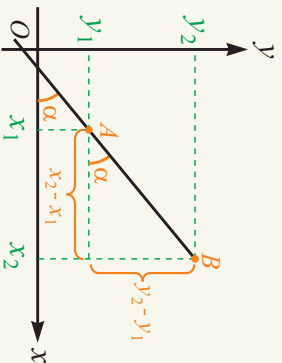


که $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ د \overline{AB} مستقیمي

کرښې دوه اختیاري ټکي وي د $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ نسبت ته

د مستقیمي کرښې میل وايي او په لاندې ډول یې

$$\text{لیکي: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



لومړی مثال: د هغې مستقیمي کرښې میل پیدا کړئ چې د $A(3,5)$ او $B(4,6)$ ټکو

څخه تیر شي.

حل: پوره کړو چې د مستقیمي کرښې میل د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ رابطې څخه لاسته راځي نولرو

چې:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 5}{4 - 3} = 1$$

دویم مثال: هغه مستقیم چې د $A(2,5)$ او $B(4,k)$ ټکو څخه تیرېږي د k قیمت په

هغه کې داسې وټاکئ چې د مستقیمي کرښې میل ۳ وي.

حل: د k قیمت د لاسته راوړلو لپاره ددې رابطې $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ څخه په لاندې ډول

گټه اخلو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$3 = \frac{k - 5}{4 - 2}$$

$$k - 5 = 6 \Rightarrow k = 11$$

درېم مثال: د هغه مستقيمي کرني ميل پيدا کړئ چې د $P(2, 3)$ ټکي او د وضعيه کمياتو له مبدا څخه تير شي.

حل: څرنگه چې مستقيه کرينه د وضعيه کمياتو له مبدا څخه تيرېږي نو د مبدا مختصات $O(0, 0)$ دي، نو ميل يې په لاندي ډول په لاس راوړو:

$$\frac{m}{PO} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{m}{PO} = 1.5$$

فعاليت

- د $A(2, 3)$ او $B(4, 6)$ ټکي د وضعيه کمياتو په سيستم کې ونښئ.
- هغه مستقيم چې د A او B ټکو څخه تيرېږي رسم کړئ او په Δ_1 سره يې ونښئ.
- د Δ_1 مستقيم ميل په لاس راوړئ.
- د Δ_1 مستقيم د X محور له مثبت جهت سره څه ډول زاويه جوړوي.
- د $M(1, 5)$ او $N(4, 2)$ ټکي په همغه وضعيه کمياتو کې په بل رنگ وټاکئ.
- هغه مستقيم چې د M او N ټکو څخه تيرېږي هغه ته Δ_2 وواړئ.
- د Δ_2 مستقيم ميل په لاس راوړئ.
- د Δ_2 مستقيم د X محور د مثبت جهت سره څه ډول زاويه جوړوي؟
- د تشکيل شويو زاويو او کرنيوترمنځ څه ډول اړيکه شته.

د پورتنۍ فعاليت څخه لاندي پايلې په لاس راځي.

د هرې مستقيمي کرني ميل په هغه زاويه پورې اړه لري، چې مستقيمه کرينه يې د X له محور سره جوړوي.

که يوه مستقيمه کرينه د X محور له مثبت جهت سره حاده زاويه جوړه کړي، ميل يې يو مثبت عدد دی. که يوه مستقيمه کرينه د X محور له مثبت جهت سره منفرجه زاويه جوړه کړي ميل يې يو منفي عدد دی.

يو ښتني

- 1- د هغه مستقيمي کرني ميل په لاس راوړئ چې د $A(1, 1)$ او $B(-1, -1)$ ټکو څخه تير شي.
- 2- هغه مستقيم چې د $A(-2, 2\sqrt{3})$ او $B(1, a)$ ټکو څخه تيرېږي، د a عددي قيمت داسې وټاکئ چې د مستقيم ميل $\sqrt{3}$ وي.
- 3- که چيرې $A(5, -2)$ ، $B(3, -1)$ او $C(1, 5)$ ټکي د يوه مثلث راسونه وي د BC ضلعي د ميانې ميل پيدا کړئ.

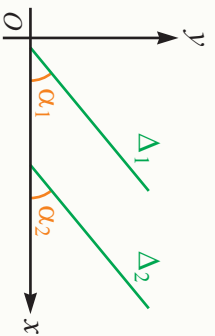


د موازي کرښو ميل

په ورکړل شوي شکل کې زینه په پام کې ونیسئ، د هغې د بازوگانو تر منځ څه ډول اړیکه شتون لري.

فعالیت

- د راکړل شویو وضعیو کمیانو په سیستم کې د Δ_1 او Δ_2 موازي کرښې یو له بل سره داسې رسم کړئ چې د X محور له مثبت جهت سره حاده زاوږې جوړې کړي.
- د Δ_1 او Δ_2 کرښو میلوڼه حساب او یو بل سره یې پرتله کړئ، کرښې یو بل سره څه اړیکې لري؟
- که چېرې د Δ_1 مستقیم د x محور له مثبت جهت سره د α_1 زاوږه د Δ_2 مستقیم د x محور له مثبت جهت سره د α_2 زاوږه جوړه کړي نو α_1 او α_2 یو له بل سره څه اړیکه لري.



په عمومي ډول د پورتنۍ فعالیت پایله په لاندې ډول بیانوو:

موازي کرښې د مساوي میلوڼو لرونکې دي.

که چېرې دوه مستقیمه کرښې مساوي میلوڼه ولري په پایله کې هغه زاوږې چې د X محور له مثبت جهت سره یې جوړوي یو له بل سره مساوي دي.

مثال: که چېرې د Δ_1 مستقیم د $A(2,5)$ او $B(-6,-11)$ ټکو او د Δ_2 مستقیم د $C(-4,-6)$ او $D(3,8)$ ټکو څخه تیر شي، د Δ_1 او Δ_2 کرښې یوه له بلې سره څه اړیکه لري؟

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{\Delta_1} = \frac{-1 - (-5)}{-6 - 2} = \frac{-16}{-8} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_1} = 2$$

$$m_{\Delta_2} = \frac{8 + 6}{3 + 4} = \frac{14}{7} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_2} = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} m_{\Delta_1} = m_{\Delta_2} \\ m_{\Delta_1} = 2 \\ m_{\Delta_2} = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta_1 \parallel \Delta_2$$

خړنگه چې د Δ_1 او Δ_2 ميلونه سره مساوي دي نو نومړي کرښي يوه له بلې سره موازي دي.

فعاليت

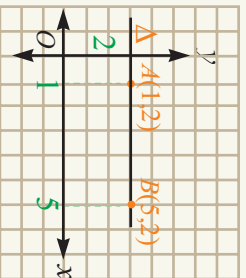
- د $A(1,2)$ او $B(5,2)$ ټکي د وضعيه کمياتو په مستوي کې وټاکئ.
- هغه مستقيمہ کرښه چې له A او B ټکوڅخه تيرېږي رسم او په Δ بې ونوموئ.
- د Δ مستقيم د X محور له مثبت جهت سره څه ډول زاويه جوړوي.
- د Δ مستقيم ميل حساب کړئ.

د پورتنۍ فعاليت پايله په لاندې ډول بيانوو:

که چيرې A او B دوه اختياري ټکي او مساوي ترتيبونه ولري، لکه: $A(x_1, a)$ ، $B(x_2, a)$ ، هغه کرښي چې د A او B ټکوڅخه تيرېږي د X له محور سره موازي دي. او ميل يې له

$$m = \frac{a - a}{x_2 - x_1} = 0$$

صفر سره مساوي دی. يعنې:



فعالیت

- د $M(3,2)$ او $N(3,5)$ ټکي د وضعیه کمیلانو په مستوي کې وټاکئ.
- هغه مستقیمه کرښه چې د M او N ټکو څخه تیرېږي رسم او په Δ یې ونوموئ.
- د Δ مستقیمه کرښه د X له محور سره څه ډول زاویه جوړوي د Δ مستقیم میل په اړه څه وپلټئ؟

د پورتنۍ فعالیت څخه دې پایلې ته رسیږو هغه مستقیمه کرښه چې د x له محور سره قایمه زاویه جوړه کوي نشو کولای د هغې میل حساب کړو، په دې حالت کې ول کېږي چې د Δ مستقیم خط معین یا ټاکلی میل نه لري.

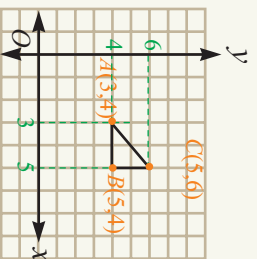
مثال: که چېرې د $A(3,4)$ ، $B(5,4)$ او $C(5,6)$ ټکي د یوه مثلث راسونه وي، د مثلث ډول وټاکئ او هغه د وضعیه کمیلانو په سیستم کې رسم کړئ.

حل: څرنگه چې د AB مستقیمه کرښه د X له محور سره موازي ده، نو میل یې صفر دی.

$$m_{AB} = \frac{4-4}{5-3} = \frac{0}{2} = 0$$

په همدې ډول د BC مستقیمه کرښه د Y له محور سره موازي نومیل یې نامعین (نه دی) تعریف شوی دی.

$$m_{BC} = \frac{6-4}{5-5} = \frac{2}{0} = \infty$$



$$\overline{AB}^2 = (5-3)^2 + (4-4)^2 = 4$$

$$\overline{BC}^2 = (5-5)^2 + (6-4)^2 = 4$$

$$\overline{AC}^2 = (5-3)^2 + (6-4)^2 = 8$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$

په پایله کې

څرنگه چې د فیثاغورث قضیه پکې تطبیق کېږي نو د \overline{AB} مستقیمه کرښه د \overline{AC} په مستقیمې کرښې عمود ده نو د $\triangle ABC$ مثلث قایمه الزاویه دی.

هغه مستقیمه کرښه چې د x محور سره موازي او يا د Y په محور عمود وي ميل يې صفر دی.

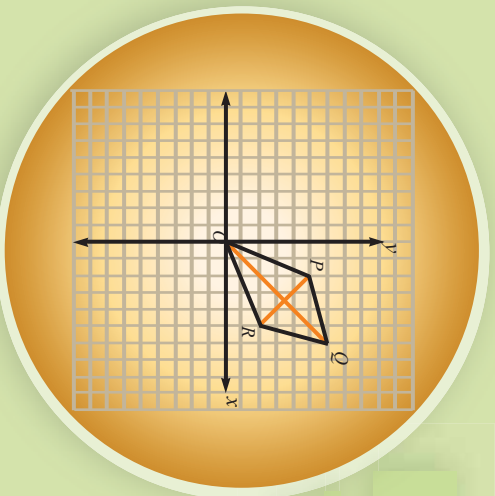
هغه مستقیمه کرښه چې د x په محور عمود يا د Y له محور سره موازي وي ميل يې نه دی تعريف شوی. (معین عدد نه دی)

پوښتنې

- 1- که د $A(3,0)$ ، $B(0,5)$ ، $C(-3,0)$ او $D(0,-5)$ د یوې څلورضلعې راسونه وي:
 - الف: د څلورضلعې مخامخ ضلعې یوه له بلې سره څه اړیکې لري.
 - ب: د قطرونو میلونه پیدا کړئ.
- ۲- $A(3,4)$ ، $B(-3,4)$ ، $C(3,-4)$ او $D(-3,-4)$ ټکي په پام کې ونیسئ.
 - الف: هغه مستقیمه کرښه چې د A او B ټکو څخه تیرېږي له هغې کرښې سره چې د C او D ټکو څخه تیرېږي څه اړیکې لري؟
 - ب: هغه مستقیمه کرښه چې د A او B ټکو اوهغه کرښه چې د C او D ټکو څخه تیرېږي څه اړیکه لري؟
 - ج: د $ABCD$ څلورضلعې څه ډول څلورضلعې ده؟
 - د: د قطرونو میل یې پیدا کړئ.

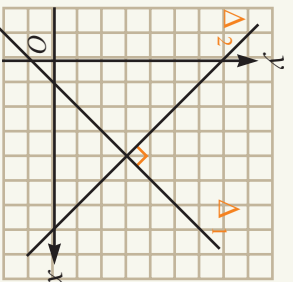
د یو پر بل عمود مستقیمو کرښو میل

$OPQR$ څلور ضلعي یو لوزی دی. کولای شی د لوزی ځانگړتیا د هغې د راسونو د مختصاتو په مرسته بیان کړی.



تعریف

د Δ_1 او Δ_2 دوه مستقیمې کرښې چې میلونه یې m_1 او m_2 دي هغه وخت یو پر بل عمود دي چې لاندې رابطه د هغوی ترمنځ موجوده ده. $m_1 \cdot m_2 = -1$



لومړی مثال: هغه مستقیمه کرښه چې د $A(7,5)$ او $B(1,1)$ او هغه چې د $C(0,5)$ او $D(2,2)$ ټکو څخه تیرېږي له یو بل سره څه اړیکه لري.

حل:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 5}{1 - 7} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$m_{\overline{CD}} = \frac{2 - 5}{2 - 0} = \frac{-3}{2}$$

$$m_{\overline{AB}} \cdot m_{\overline{CD}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{2} = -1$$

په پایله کې د \overline{AB} او \overline{CD} مستقیمې کرښې یو پر بل عمود دي.

فعالیت

- د $C(4,4), B(1,3), O(0,0)$ او $D(3,1)$ ټکي د وضعیه کمپاټو په سیستم کې ونښتی.
- د $OBCD$ شکل رسم کړی.
- د $\overline{OB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ او \overline{DO} ضلعو اوږدوالي پیدا کړی.

- د OB, CD څلورضلي څه ډول څلورضلي ده؟
- وښیئ چې د OC او BC قطرونه یو پر بل عمود دي.
- پوهیږو چې په یوه مستوي کې د دوو ټکوڅخه یوازې یو مستقیم تیرېږي په کوم حالت کې له درېو ټکو څخه یو مستقیم خط تیرېدلای شي؟

تعريف

د P, Q, R او R ټکي هغه وخت پر یوه مستقیم پراته دي چې د \overline{PQ} او \overline{QR} له میل سره مساوي وي.



دویم مثال: د $A(0, -1), B(2, 3), C(-1, -3)$ درې ټکي په پام کې ونیسئ، وښیئ چې دا درې واړه ټکي په یوه مستقیمه کرښه پراته دي.

$$m_{\overline{AB}} = \frac{3+1}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$$

حل: د AB میل عبارت دی له:

$$m_{\overline{AC}} = \frac{-3-(-1)}{-1-0} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$m_{\overline{BC}} = \frac{-3-3}{-1-2} = \frac{-6}{-3} = 2$$

د AC میل عبارت ده له:

څرنگه چې د $\overline{AC}, \overline{AB}$ او \overline{BC} کرښو میلونه سره مساوي دي نو په پایله کې د A, B, C ټکي په یوه مستقیمه کرښه پراته دي.

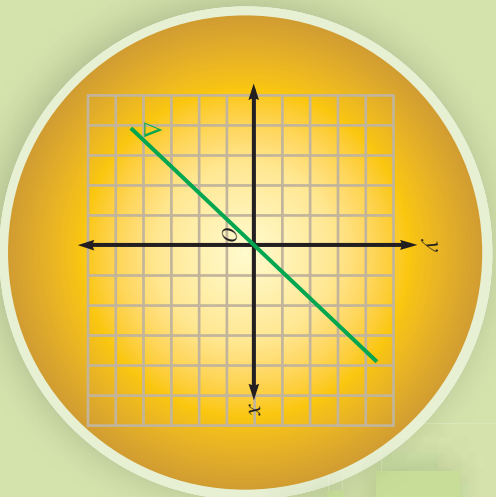
- که چېرې د دوو کرښو د میلونو د ضرب حاصل (-1) وي نو کرښې یوازې عمودي دي.
- درې ټکي هغه وخت په یوه کرښه پراته وي چې د ټوټه کرښو میلونه سره مساوي وي.

پوښتنې

- د $A(6, 1), B(8, 3), C(6, 5)$ ټکي د یوه مثلث څوکي یا راسونه وي وښیئ چې نوموړی مثلث قایم الزویه دی.
- هغه ټوټه کرښه چې د $(7, 5)$ او $(1, 1)$ ټکو څخه تیرېږي له هغه ټوټه کرښې سره چې د $(0, 5)$ او $(2, 2)$ ټکوڅخه تیرېږي، اړیکې یې له بل سره وڅیړئ؟
- یوه کرښه چې د $(2, 4)$ او $(7, 5)$ ټکو اوبله د $(1, -4)$ او $(-3, -5)$ ټکوڅخه تیرېږي د دواړو کرښو حالت یو له بل سره بیان کړئ.

د مستقیمې کرښې معادله

په مخامخ شکل کې د مستقیمې کرښې پرمخ شوې ټکي وټاکئ. د کرښې پرمخ د ټاکل شویو ټکو د فاصلې او ترتیب ترمنځ څه اړیکه وینئ.



فعالیت

- د $A(1,-1)$, $B(-2,2)$, $C(4,-4)$ او $D(-3,3)$ ټکي د وضعیه کمپلټو په سیستم کې وټاکئ. ددې ټکو د تړلو څخه کوم شکل لاسته راځي.
- د $A(1,1)$ او $B(0,0)$ ټکي د شکل پرمخ پراته دي او که نه؟ ولې؟

د پورتنۍ فعالیت پایله په عمومي ډول داسې بیانوو:

$$d \quad x = y \quad \text{او} \quad -x = y \quad \text{رابطې چې د یوې کرښې پرمخ د ټکو د فاصلې او ترتیب ترمنځ اړیکه$$

رښتینې د مستقیمې کرښې معادله بلل کېږي.

په هیڅو چې د هرو دوو ټکو څخه چې په یوه مستوي کې پرتې وي یوازې او یوازې یوه مستقیمه کرښه تیرېږي. اوس غواړو چې د هغې مستقیمې کرښې معادله پیدا کړو چې له دوو اختیاري ټکو څخه تیرېږي.

فعالیت

- د $A(1,3)$ او $B(3,5)$ دوه ټکي د وضعیه کمپلټو په سیستم کې وټاکئ.
 - هغه مستقیمه کرښه رسم کړئ، چې له A او B ټکو څخه تیر شي.
- ددې لپاره چې د $M(x, y)$ اختیاري ټکي د \overline{AB} کرښې پرمخ پروت وي، کوم شرط لازمي ده؟ د \overline{AM} او \overline{AB} توپه کرښو میلونو له مساواتونو څخه کومه اړیکه لاسته راځي.

د پورتنۍ فعالیت پایله کولای شو په عمومي ډول داسې بیان کړو.

د هغې کرښې معادله چې د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ له دوو ټکو څخه تیره شي داسې په لاس راځي:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

لومړی مثال: د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې د $A(3,4)$ او $B(2,-1)$ له ټکو څخه تیره شي.

حل: د هغې مستقیمې کرښې د معادلې په مرسته چې دوه ټکي یې معلوم وي لیکلای شو چې:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-4}{x-3} = \frac{-1-4}{2-3} \Rightarrow \frac{y-4}{x-3} = \frac{-5}{-1} = 5$$

$$y-4 = 5(x-3)$$

$$y = 5x - 15 + 4 = 5x - 11$$

دویم مثال: د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې د x محور په فاصله د $x = -3$ ټکي کې او د y محور په ترتیب د $y = 4$ ټکي کې پرې کړي.

حل: څرنگه چې مستقیمه کرښه د X محور په $x = -3$ ټکي کې پرې کوي نو د مختصاتو په سیستم کې ددې ټکي د پریکړې مختصات $(-3, 0)$ دي. په همدې ټول د Y له محور سره د پریکړې د ټکو د مختصات د وضعیه کمیانو په سیستم کې $(0, 4)$ دی، اوس دوه مستقیم د دوو ټکو پېژندلو په مرسته کولای شو د مستقیمې کرښې معادله داسې ولیکو:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow \frac{y-0}{x-(-3)} = \frac{4-0}{0-(-3)}$$

$$\frac{y}{x+3} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3y = 4(x+3)$$

$$3y - 4x = 12$$

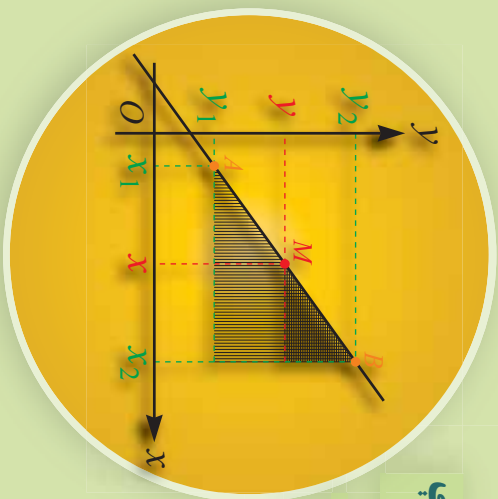
پوښتنې

- 1- د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې د $A(2, -1)$ او $B(3, 4)$ له ټکو څخه تیره شي.
- ۲- د هغه مثلث د AM مېاني معادله ولیکئ چې راسونه یې $A(1, 3)$, $B(-1, 4)$ او $C(5, 6)$ وي.
- ۳- د هغې مستقیمې کرښې معادله پیدا کړئ چې د x محور په $A(3, 0)$ او د y محور په $B(0, -2)$ ټکي کې پرې کړي.

د هغه مستقيمي کرښي معادله چې میل او یو ټکی یې معلوم وي



په مخامخ شکل کې د \overline{AB} میل د \overline{MA} له میل سره څه اړیکه لري؟
 بله هره ټوټه کرښه چې ددې ټوټه کرښې پرمخ وټاکو د \overline{AB} له میل سره برابریز میل لري، ولې؟



پوهیږو چې د هغې کرښې معادله چې د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ دوه ټکي ښکاره کوي عبارت ده له:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

یا

څرنگه چې $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ د مستقيمي کرښې میل رابښي نو پورتنۍ معادله لاندې شکل غوره

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

کوي. **وروستنۍ معادله د هغې کرښې معادله ده چې میل ئې (m) او د $A(x_1, y_1)$ له نقطه څخه تیرېږي.**

لومړی مثال: د هغې مستقيمي کرښې معادله وليکئ چې د $(2, 3)$ ټکي څخه تیر شي او میل يې $\frac{1}{2}$ وي.

حل: څرنگه چې د مستقيمي کرښې میل او یو ټکی راکړل شوي ده نو د $y - b = m(x - a)$ معادله ليکلای شو:

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$2(y - 3) = (x - 2)$$

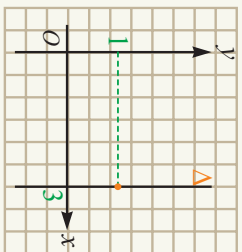
$$2y - 6 = x - 2$$

$$2y - x = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

دویم مثال: هغه مستقیمه کرښه چې د $(3, 1)$ ټکي څخه تیره او د X له محور سره موازي وي ولیکئ.

حل: څرنګه چې مستقیمه کرښه د X له محور سره موازي ده نو میل $y - b = m(x - a)$ $y - 1 = 0$ $(x - 3)$ $y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$

درېم مثال: د هغه مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې د $(3, 1)$ ټکي څخه تیره او د y له محور سره موازي وي.



حل: څرنګه چې مستقیم د y له محور سره موازي ده نو میل یې نه دی تعریف شوی (معین میل نه لري) ځکه پوهیږو چې ددې کرښې پرمخ دهر ټکي واټن یا فاصله د $(3, 1)$ ټکي سره مساوي ده چې معادله یې په دې ډول $x = 3$ ده. په عمومي ډول هغه کرښه چې د (a, b) ټکي څخه تیره او د X له محور سره موازي وي عبارت له $y = b$ سره ده.

هغه کرښه چې د (a, b) ټکي څخه تېرېږي او د Y له محور سره موازي وي عبارت له $x = 1$ سره ده.

څلورم مثال: د Δ ټوپه کرښه د عمودي ناصف معادله پیدا کړئ چې د $A(2, -4)$ او $B(-2, 4)$ ټکو څخه تیره شي.

حل: د عمودي ناصف د معادلې د پیدا کولو لپاره لومړی د \overline{AB} ټوپه کرښې میل په لاس راوړو او بیا د هغې د منځ د \overline{AB} د منځني ټکي مختصات په لاس راوړو.

$$\frac{m_{AB}}{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 + 4}{-2 - 2} = -2 \Rightarrow m_{\Delta} = -\frac{1}{m_{AB}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{m_{AB}}{AB} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{0}{2}, \frac{0}{2}\right) = (0, 0)$$

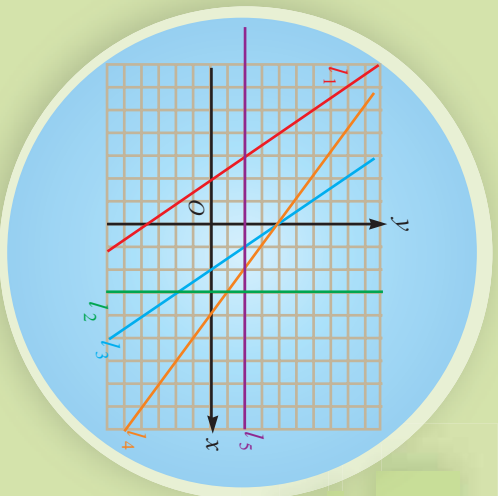
$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

پوښتنې

- 1- د هغه مستقیمې کرښې معادله پیدا کړئ چې میل یې 4 او y محور د 3 په ټکي کې پري کړي.
- 2- د هغه مستقیمې کرښې معادله پیدا کړئ چې د $P(5, -4)$ ټکي څخه تیره او میل یې -2 وي.
- 3- د $3x + 4y - 7 = 0$ معادله کې د مستقیم میل او د Y له محور سره یې د غوڅوونې ټکي پیدا کړئ.

د مستقیمې کرښې عمومي معادله

د l_1 ، l_2 ، l_3 ، l_4 څلور کرښې نسبت یو بل ته کوم وضعیتونه لري؟



د یوې کرښې الجبري معادله د هغه ټکي د مختصاتو اړیکه چې په مستقیمه کرښه پروت دی راښيي. په عمومي ډول د یوې مستقیمې کرښې معادله په لاندې ډول بیانوو:

په معیاري یا سټنډرډ ډول د یوې مستقیمې کرښې معادله په لاندې ډول ده.

$$y - \frac{c}{b}x - \frac{a}{b} = 0 \quad \text{یا} \quad y = \frac{c}{b}x + \frac{a}{b} \quad \text{او} \quad c, a, b \neq 0 \quad \text{د یوې حقیقي عددونه او} \quad b \neq 0 \quad \text{دی.}$$

په پورتنۍ معادله کې $\frac{-a}{b}$ د کرښې میل او $\frac{-c}{b}$ د y له محور سره د پریکړې ټکی یا تقاطع بلل کېږي.

نو ویلای شو چې د هرې کرښې معادله په یوه مستوي کې په لاندې ډول ده:

h او m چې h او m د مستقیمې کرښې میل او h د y له محور سره د پریکړې ټکی یا ترتیب دی په

عمومي ډول هره خطي اړیکه د x او y له جنسه چې په هغه کې د x او y توان یو وي د مستقیمې

کرښې معادله بلل کېږي.

فعالیت

- د $2x - x = 2$ او $3y - 6 = 0$ دوی مستقیمې کرښې د وضعیتو کمپاڼو په مستوي کې رسم کړئ.
- د هر یوه مستقیم میل پیدا کړئ.
- دا دوی کرښې یوله بل سره څه وضعیتونه لري.

له پورتنۍ فعالیت څخه پایله په لاندې ډول بیانوو:

که د دوو کرښو میلونه سره مساوي نه وي نو کرښو یوه بله پرې کرښې دي.

په عمومي ډول که د $c_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ او $c_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0$ دوی کرښې یوه بله

پرې کړي. وي نو میلونه یې سره مساوي نه دي له دې نه داسې پایله په لاس راځي.

$$\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2} \quad \text{یا} \quad \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

فعالیت

- د $0 = 5 - y + 3x$ او $0 = 1 - 2y + 6x$ مستقیمې کرښې د قایمو وضعیتو کمیانو په مستوی کې رسم کړئ.
- د دې مستقیمې کرښې میل په لاس راوړئ.
- دا دوی مستقیمې کرښې نسبت یو بل ته څه وضعیت لري؟ ولې؟

په عمومي ډول د $0 = c_1 + b_1y + a_1x$ او $0 = c_2 + b_2y + a_2x$ دوه مستقیمې کرښې هغه وخت موازي دي چې میلونه یې سره مساوي وي له دې ځایه دا پایله په لاس راځي چې د هغوی د متحرکینو د ضریبونو ترمنځ لاندې اړیکه موجوده ده.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

که د متحرکینو د ضریبونو ترمنځ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ اړیکه وجود ولري په دې حالت کې کرښې یو پر بل پرتې (منطقی) دي یا سره یو دي.

لومړی مثال: د $5 = 4y + 3x$ او $-1 = 3y - 4x$ د مستقیمو اړیکې نظر یو بل ته بیان کړئ.

$$a_1 = 3 \quad b_1 = 4 \quad c_1 = -5$$

$$a_2 = 4 \quad b_2 = -3 \quad c_2 = 1$$

$$-1 \text{ - څرنگه چې } \frac{3}{4} \neq \frac{4}{-3} \text{ نو } \frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2} \text{ دی په دې صورت کې کرښې یو بل نه غوڅي.}$$

2- څرنگه چې $-1 = -1 \times \frac{3}{4} = -1 \times \frac{4}{-3} = -1$ نو $\frac{a_1}{a_2} \times \frac{b_1}{b_2} = -1$ دی نو د پرېکړې په ټکي کې یو پر بل عمود دي.

دویم مثال: په لاندې معادلو کې د k عددي قیمت داسې وټاکئ چې مستقیمونه یو بل سره

$$\text{عمودي وي او } 0 = 3 + 6y - 2x \text{ او } 0 = 1 - 3y + kx$$

$$\text{حل: د عمودیت شرط څېړو:} \quad kx + 3y - 1 = 0, \quad 2x - 6y + 3 = 0$$

$$a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$$

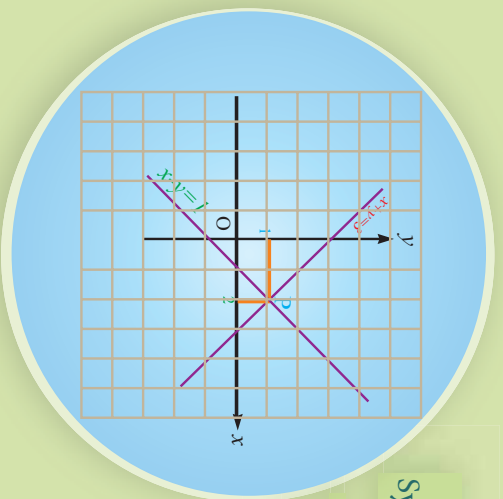
$$2 \cdot k + (-6)3 = 0 \Rightarrow k = 9$$

پوښتنې

- د $0 = 1 - 3y + 4x$ او $0 = 5 + 6y + 8x$ کرښو حالت یو بل ته بیان کړئ.
- د $0 = 10 + 4y - 8x$ او $0 = 5 + 2y - 4x$ کرښو حالت یو بل ته بیان کړئ.
- د $0 = 0 + kx + (1+k)y$ او $0 = 5 + 3y - 2x$ معادلو کې د k قیمت داسې وټاکئ چې کرښې یوه له بلې سره موازي وي.

د خطي معادلو سیستم System of linear equation

شکل ته پام وکړئ! ایا د P ټکي مختصات د کرښو په دواړو معادلو کې صدق کوي؟



فعالیت

د $4x - 2 = 3x + 5$ او $y = 4x - 2$ کرښو میلونه پیدا کړئ.
• دا کرښې نظر یوډل ته څه اړیکې لري؟ ولې؟
• پورتنۍ دواړې کرښې د وضعیت ګمیانو په سیستم کې رسم کړئ؟ د رسم شویو کرښو تر منځ څه اړیکه لیدل کېږي؟

په پورتنۍ فعالیت کې لیدل کېږي د هغو دوو کرښو چې میلونه یې مساوي نه وي یو بل د P په ټکي کې پېرې کوي.

څرنگه چې د پېرېکړې ټکي د دواړو کرښو په منځ پراته دي نو د هغې ټکي مختصات د کرښو په معادلو کې صدق کوي. که د پېرېکړې د ټکي مختصات په $P(x, y)$ وښیو نو: $y = -3x + 5$ او $y = 4x - 2$ معادلو څخه لیکلای شو، چې:

$$4x - 2 = -3x + 5$$

$$7x = 7$$

$$x = 1$$

د کرښو په معادلو کې د x قیمت په وضع کولو سره د y قیمت په لاس راوړلای شو:

$$y = 4x - 2 \Rightarrow y = 4(1) - 2 \Rightarrow y = 2$$

نو د پېرېکړې د ټکي مختصات عبارت دي له $P(1, 2)$ په پایله کې ویلای شو، چې $P(1, 2)$

نکی داسې نکی دی چې په دواړو معادلو کې حقیقت لري، چې د $\begin{cases} y = 4x - 2 \\ y = -3x + 5 \end{cases}$ خطي معادلو د سیستم حل دی.

فعالیت

- مخامخ د خطي معادلو سیستم په پام کې ونیسئ:
- $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ او b_2, a_2 د څه په نامه یادېږي؟
- پورتنیو معادلو کې x او y ته څه وبل کېږي؟
- ایا ددې دوو کرښو د پریکړې د نکی، د مختصلانو د سیستم یو حل کیدای شي؟

د خطي سیستم د حل لپاره د (1) سیستم داسې لیکو چې په هغه حالت کې چې b_1 او b_2 د صفر خلاف وي.

$$\begin{cases} y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1} \\ y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

نو لاندې درې حالتونه لرو:

- 1- که چیرې د دوو کرښو میلونه سره مساوي نه وي نو دا کرښې یو بل په یوه نکی کې پری کوي.
- 2- که چیرې د کرښو میلونه مساوي وي اما د Y محوره یې د پریکړې نکی مساوي نه وي هغه وخت دا دوه کرښې سره موازي دي.
- 3- که چیرې د کرښو میلونه او د Y محور سره د پریکړې نکی مساوي وي نو هغه دوه کرښې سره منطبق یا یو پر بل پراته وي.

لومړی مثال: د لاندې خطي معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

حل: د دې سیستم د حل لپاره نوموړی سیستم په دې ډول لیکو:

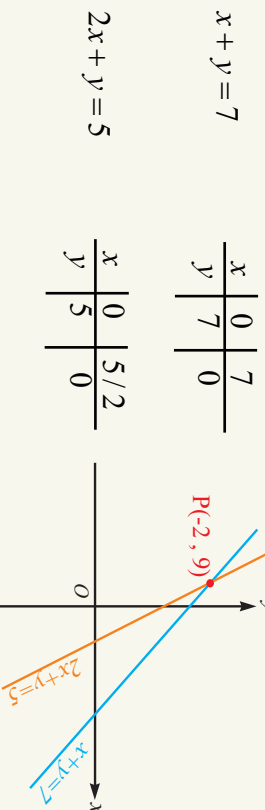
$$\begin{cases} y = 7 - x \\ y = -2x + 5 \end{cases}$$

ليدل کيږي چې د پورتنیو کرښو د معادلو ميلونه 1- او 2- دي څرنگه چې د دوو خطونو ميلونه مساوي نه دي نو کرښې يو بل په يوه ټکي کې پرېکړي چې د پرېکړې د ټکي د مختصاتو د پيدا کولو لپاره په لاندي ډول عمل کوو:

$$\begin{aligned} -x + 7 &= -2x + 5 \\ -x + 2x &= 5 - 7 \Rightarrow x = -2 \\ \text{د کرښو په يوه معادله کې د } x \text{ پر ځای د } -2 \text{ په وضع کولو سره لرو چې:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -x + 7 \\ y &= -(-2) + 7 \Rightarrow y = 9 \end{aligned}$$

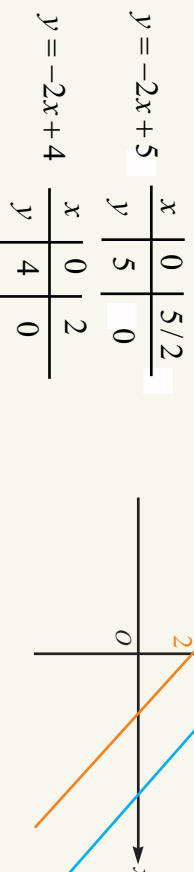
نو $(-2, 9)$ د کرښو د معادلو د سيستم حل او د پرېکړې ځای دی، چې په شکل کې ليدل کېږي.



دویم مثال: د لاندي خطي معادلو سيستم حل کوئ.

حل: لومړی معادلي په لاندي ډول ليکو:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 12x + 3y = 6x + 12 \\ y = -2x + 5 \\ y = -\frac{6}{3}x + \frac{12}{3} \end{cases}$$



څرنگه چې د دواړو کرښو ميل 2- دی په پايله کې کرښې خپل منځ کې موازي دي او يو بل نه پرېکړي يعنې د موازي کرښو د معادلو سيستم حل نه لري.

درباره مثال: د لاندې خطي معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ -28 = -4x - 4y \end{cases}$$

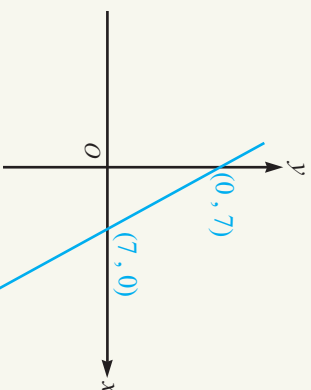
حل: لومړی د معادلانو سیستم په لاندې ډول لیکو:

$$\begin{cases} y = -x + 7 \\ y = \frac{-4}{4}x + \frac{28}{4} \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 7 \\ \hline y & 7 & 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} y = -x + 7 \\ y = -x + 7 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 7 \\ \hline y & 7 & 0 \end{array}$$



لیدل کېږي، چې د کرښو میل او د Y په محور د پریکړې ټکی سره برابر دي نو دواړه کرښې سره منطبق دي په دې حالت کې کرښې ډېر گډه ټکي لري په پایله کې د خطي معادلو سیستم ډېر حلونه لري.

که a_1, b_1, c_1 او a_2, b_2, c_2 حقيقي عددونه X او Y مجهولونه وي په دې حالت کې د خطي معادلو سیستم دې $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ وي.

- که چیرې کرښې یوه له بلې په یوه ټکي کې پرې کړي معادلي یو حل لري.
- که چیرې کرښې یوه له بلې سره موازي وي معادلي حل نه لري.
- که چیرې کرښې یو پر بل منطبق وي معادلي بې نهایت حلونه لري.

پوښتنې

د لاندې خطي معادلو سیستمونه حل کړئ.

1) $\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 2 = y \\ 3x - y = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4x - y = 6 \\ 8x - 2y = 6 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ -6x + 2y = -10 \end{cases}$

د خطي معادلو د سیستم حل د تعویض په لاره (طریقه)

د خطي سیستم د معادلو حل ته پام وکړئ
د X مجهول عددي قیمت ستاسو په هاند
څنګه په لاس راغلی دی.

$$\begin{aligned}x+y &= 4 \quad \dots \text{I} \\x-y &= 6 \quad \dots \text{II} \\x-(4-x) &= 6 \\y &= 4-x \\x &= 5\end{aligned}$$

فعالیت

- د یوه مثلث د دواړو زاویو مجموعه 100° او د تفریق حاصل یې 20° دی الجبري معادلي یې ولیکئ.
- د معادلانو دا سیستم څو مجهول لري؟ د هر یوه عددي قیمت پیدا کړئ.
- په لاس راغلي قیمتونه د معادلانو په سیستم کې وازماینئ.

له پورتنی فعالیت څخه د مسألې حل او د خطي معادلو د سیستم د حل لاره په لاندې توګه داسې لیکو:

حل: که چېرې د مثلث زاویې په \hat{A} او \hat{B} ونوموو پورتنۍ عبارت د الجبري معادلو په بڼه داسې لیکو:

$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{B} &= 100^\circ \quad \dots \text{I} \\ \hat{A} - \hat{B} &= 20^\circ \quad \dots \text{II}\end{aligned}$$

او د \hat{A} زاویې قیمت د \hat{B} زاویې له جنسه له لومړۍ معادلي څخه په لاس راوړو
 $\hat{A} = 100^\circ - \hat{B}$ دا قیمت په دویمه معادله کې دی \hat{A} په عوض وضع کوو او معادله حلوو:
 $100^\circ - \hat{B} - \hat{B} = 20^\circ \Rightarrow -2\hat{B} = -80^\circ \Rightarrow \hat{B} = 40^\circ$
اوس د \hat{B} قیمت د خطي معادلانو په سیستم کې وضع کوو چې د \hat{A} قیمت په لاس راځي.

$$\begin{aligned}\hat{A} - \hat{B} &= 20^\circ \\ \hat{A} - 40^\circ &= 20^\circ \Rightarrow \hat{A} = 20^\circ + 40^\circ \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ\end{aligned}$$

دویم مثال: لاندې د دوه مجهولہ معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$$

حل: لومړی د یوه مجهول قیمت د بل مجهول له جنسه د یوې معادلې څخه په لاس راوړو او په بله معادله کې یې وضع کړو:

$$2x + 3y = 0 \Rightarrow 2x = -3y \Rightarrow x = -\frac{3}{2}y$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 10 \\ 3(-\frac{3}{2}y) + 2y = 10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -\frac{3}{2}y \\ x = -\frac{3}{2}(-4) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{9}{2}y + 2y = 10 \\ -\frac{9+4}{2}y = 10 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -3(-2) \\ x = 6 \end{array}$$

$$-5y = 20 \Rightarrow y = -4$$

د دوه مجهولہ لومړی درجو معادلو د سیستم د حل لپاره په لاندې ډول عمل کوو:

- د یوه مجهول قیمت د بل مجهول له جنسه د یوې معادلې څخه په لاس راوړو او هغه په بله معادله کې د هغه په عوض وضع کوو.
- په لاس راغلي یو مجهول لومړی درجه معادله حل کړو او د مجهول قیمت په لاس راوړو.
- دا په لاس راغلي مجهول قیمت د سیستم په معادلو کې وضع او د بل مجهول قیمت په لاس راوړو.
- په لاس راغلي قیمتونه د سیستم په معادلو کې وضع کوو که سم له لاسه په دواړو معادلو کې یې حقیقت ولري د معادلې حل سم، او پرتله له هغه د معادلې حل نه او سم نه دی.

پوښتنې

د لاندې سیستمونو حل د تعویضي په طریقه په لاس راوړئ.

1) $\begin{cases} y = 2x \\ x + y = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7x - 2y = 15 \\ 6x - y = 10 \end{cases}$

3) $\begin{cases} a + 2b = 2 \\ 2a - 3b = 25 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{2x-1}{3} + \frac{y+2}{4} = 4 \\ \frac{x+3}{3} = \frac{x-y}{3} \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{5}{x} - \frac{3}{y} = 1 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 7 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{y}{5} = 6 \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{2} = -4 \end{cases}$

د خطي معادلو د سیستم حل د افنا په لاره طريقه

$$\begin{aligned}x + y &= ? \\ \frac{1}{3}x + y &= ? \\ x &= ? \\ y &= ?\end{aligned}$$

حمير، زحل ته وويل: که ته خپلې پیسې ما ته راکړي زه د 15 افغانیو څښتن کېرم، زحل حميرا ته وويل: که ته د خپلو پیسو دريمه برخه ما ته راکړي زه د 5 افغانیو څښتنه کېرم، هره يوه خو افغانی لري؟

فعاليت

- د معادلو يو سیستم وليکئ چې دوه معادلي او دوي مجهوله ولري.
- نوموړی سیستم د گراف په مرسته حل کړئ.
- نوموړي معادلي په تعويضي طريقه حل کړئ.
- ايا بله طريقه شته چې نوموړی معادلي پرې حل شي؟

يوه بله لاره چې د دوه مجهوله معادلو سیستم پرې حلولاى شو د افنا طريقه يا لاره ده، چې په

$$\begin{cases} 7x + 5y = 41 & \text{I} \\ 5x - 2y = 7 & \text{II} \end{cases}$$

لاندي مثال کې يې څېړو.
مثال: د خطي معادلو دا سیستم حل کړئ.

حل: لومړی معادلو ته داسې بدلون ورکړو، چې که هغوی خواپه خوا سره جمع يا تفریق کړو نو له مجهولونو څخه يو مجهول افنا يا له منځه لاړ شي، لکه د X مجهول وخواړو، چې افنا يې کړو د لومړی معادلي دواړه خواوي د دويمې معادلي د X په ضريب يعني (5) کې ضربوو او د دويمې معادلي دواړه خواوي د لومړی معادلي د X په ضريب يعني (7) کې ضربوو.

$$\begin{cases} 7x + 5y = 205 & \Rightarrow 35x + 25y = 205 \\ 5x - 2y = 7 & \Rightarrow 35x - 14y = 49 \end{cases}$$

په لاس راغلي معادلي چې په هغه کې د X ضريبونه مساوي دي يو له بل څخه تفریقوو.

$$\begin{array}{r} 35x + 25y = 205 \\ 35x - 2y = 49 \\ \hline - \quad \quad \quad + \quad \quad \quad - \\ 39y = 156 \end{array} \quad \Rightarrow y = \frac{156}{39} \Rightarrow y = 4$$

د Y په لاس راغلي قیمت د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو ترڅو د بل مجهول قیمت په لاس راشي.

$$5x - 2y = 7$$

$$5x - 2(4) = 7 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3$$

دویم مثال: د معادلو لاندې سیستم د افنا په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$$

حل: لومړی یو مجهول له منځه وړو لکه Y نو لومړی معادله په -3 کې او دویمه معادله په -3 کې ضربوو په لاس راغلي معادلې خواپخوا سره جمع کوو:

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 4 \quad \Rightarrow -9x - 6y = -12 \\ 2x - 3y = -1 \quad \Rightarrow \frac{-4x \mp 6y = \mp 2}{-13x + 0 = -10} \end{array} \quad \begin{array}{l} 3\left(\frac{10}{13}\right) + 2y = 4 \\ 2y = 4 - \frac{30}{13} \\ 2y = \frac{52 - 30}{13} \\ 2y = \frac{22}{13} \\ x = \frac{10}{13} \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \frac{30}{13} + 2y = 4 \\ \Rightarrow 2y = \frac{52 - 30}{13} \\ \Rightarrow 2y = \frac{22}{13} \\ \Rightarrow y = \frac{11}{13} \end{array}$$

د دوه مجهوله معادلو د سیستم حل د افنا په طریقه کې په لاندې ډول عمل کوو.

- هر مجهول چې وغواړو هغه افنا کوو د هغې ضربونه په پام کې نیسو. لومړی معادله د دویمې معادلې د افنا شوی مجهول په ضرب کې او دویمه معادله د لومړې معادلې د افنا شوی مجهول په ضرب کې ضربوو.
- په لاس راغلي معادلې یوه له بلې څخه تفریق یا جمع کوو چې د یوه مجهول قیمت په لاس راځي دا په لاس راغلي قیمت د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو چې د بل مجهول قیمت په لاس راځي.

پوښتنې

د معادلو لاندې سیستم د افنا په طریقه حل کړئ.

$$1) \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = -39 \\ x - y = 9 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - 4y = 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{5}{y} = 5 \\ \frac{x}{3} + \frac{10}{y} = 18 \end{cases}$$

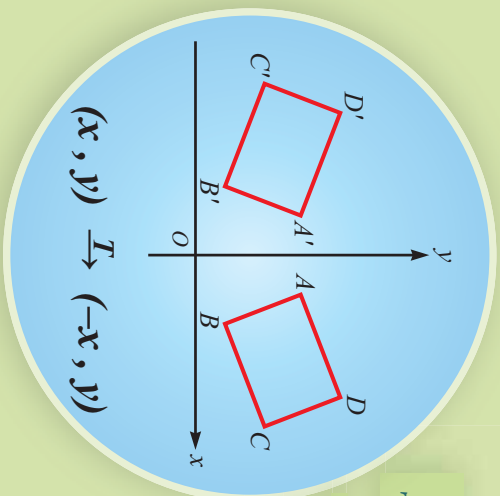
$$5) \begin{cases} y + x - 1 = 0 \\ 2x + y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 10x + 3y = 26 \\ 8x + 3y = 18 \end{cases}$$

د ځای بدلون (تغیر مکان)

Transformation

په مخامخ شکل کې څه توپیرونه او څه بیروالی وینئ؟



فعالیت

- په مخامخ شکل کې څه توپیرونه او څه بیروالی وینئ
- د $A(1,2)$, $B(-2,3)$ او $C(2,-4)$ ټکي د وضعیه کمیانو په سیستم کې وټاکئ.
 - ددې ټکو د x په مختصه باندې ۲ واحد ورزیات کړئ.
 - په لاس راغلی ټکي د وضعیه کمیانو په سیستم کې وښیئ.

په پورتنۍ فعالیت کې ولیدل شول چې هر اخیاري ټکي (x, y) په یوه مستوي کې کولای شو د $(x+2, y)$ ټکي ته په دې ډول بدلون ورکړو، په دې حالت کې ویلای شو چې په لاس راغلی ټکي د راکړل شوی ټکي څیري یا تصویر د $(x+2, y)$ تر بدلون لاندې دی، هغه اړیکه چې د مستوي د هر ټکي د وضعیه کمیانو په مستوي کې یوازې او یوازې یوه نوی ټکي ته نسبت ورکړئ په مستوي کې د ځای یا ټکي بدلون بلل کېږي.

لومړی مثال: د $D(1,2)$, $E(4,1)$ او $C(2,4)$ ټکو څیري یا تصویر د لاندې بدلونې په اساس د وضعیه کمیانو په مستوي کې په لاس راوړئ.

$$a: (x, y) \xrightarrow{T_1} (-x, y)$$

$$c: (x, y) \xrightarrow{T_3} (y, x)$$

$$b: (x, y) \xrightarrow{T_2} (x, -y)$$

$$d: (x, y) \xrightarrow{T_4} (x+2, y+3)$$

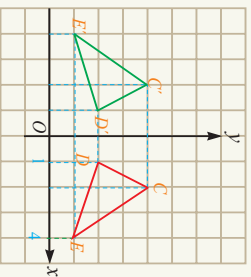
حل: لومړی راکړل شوی ټکي د وضعیه کمیانو په سیستم کې ټاکو.

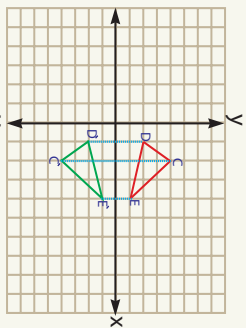
$$a: (x, y) \xrightarrow{T_1} (-x, y)$$

$$T(4, 1) = (-4, 1)$$

$$T(1, 2) = (-1, 2)$$

$$T(2, 4) = (-2, 4)$$





b: د $(x, y) \xrightarrow{T_2} (x, -y)$ تریډلون لاندې لرو چې:

$$R(4, 1) = (4, -1)$$

$$R(1, 2) = (1, -2)$$

$$R(2, 4) = (2, -4)$$

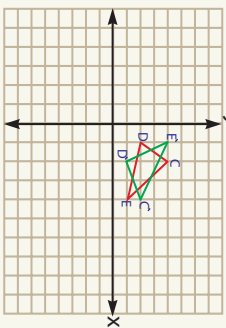
c د $(x, y) \xrightarrow{T_3} (y, x)$ تریډلون لاندې لرو چې:

$$(1, 4)$$

$$M(4, 1) = (1, 4)$$

$$M(1, 2) = (2, 1)$$

$$M(2, 4) = (4, 2)$$

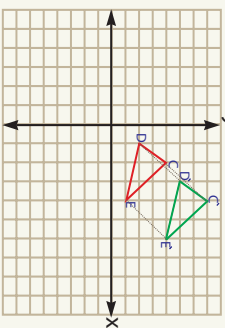


d: د $(x, y) \xrightarrow{T_4} (x+2, y+3)$ تریډلون لاندې لرو چې:

$$S(4, 1) = (6, 4)$$

$$S(1, 2) = (3, 5)$$

$$S(2, 4) = (4, 7)$$



په پورتنیو مثالونو کې ښودلای شو چې د ورکړل شویو بدلونونو د ټکو فاصله توپیر نه کوي.

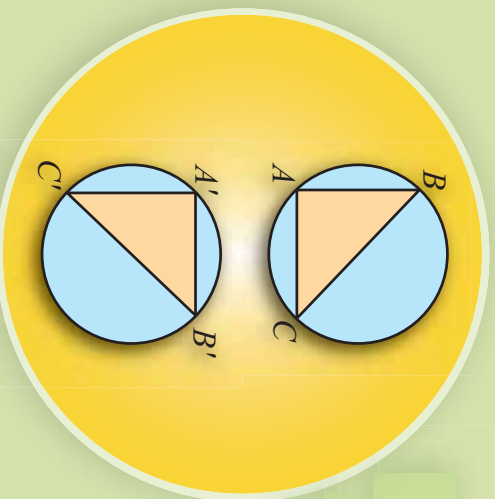
د مثال په ډول که $c' = T(c) = E'$ وی نو $T(E) = E'$ ده.

هغه بدلونونه چې د ټکو ترمنځ واټن (فاصله) ساتي، ایزومتري (Isometry) بلل کېږي.

که یو شکل د ایزومتري په ډول، خپل ځای بدل کړي نو د اصل څپرې یا شکل سره انطباق منونکي دي.

پوښتنې

- 1- د $(-3, 1), (-2, -2), (1, -1)$ او $(3, 3)$ ټکو تصویر د لاندې بدلونو په اساس د وضعیه -1 د $(-3, 1), (-2, -2), (1, -1)$ او $(3, 3)$ ټکو تصویر د لاندې بدلونونو په اساس د وضعیه کمیاتو په سیستم کې په لاس راوړئ.
- a: $(x, y) \xrightarrow{T} (x-1, y+2)$ d: $(x, y) \xrightarrow{R} (0, y-2)$
- b: $(x, y) \xrightarrow{D} (2x, y)$ e: $(x, y) \xrightarrow{P} (3x-1, y+2)$
- c: $(x, y) \xrightarrow{K} (x+5, 0)$



انتقال Translation

په مخامخ شکل کې د $\triangle ABC$ مثال چې په مستوي کې يې له لومړي حالته دوم حالت $\triangle A'B'C'$ غوره کړی دی، تاسو کولای شئ چې ددې حرکت د ځای بدلون شرح کړئ.

فعالیت

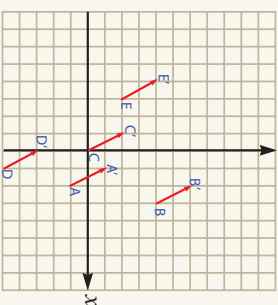
- د وضیعه کمیانو په مستوي کې د $\triangle ABC$ مثال رسم او مشخصات يې ولیکئ.
- د $\triangle ABC$ مثال راسونه د محور په مثبت جهت د (2) واحد په اندازه او د y محور په مثبت جهت د (1) واحد په اندازه حرکت ورکړئ نو یو حاصل شوی ټکوته A' ، B' او C' وولئ.
- د A' ، B' او C' ټکی یو له بل سره وتړئ او د $\triangle A'B'C'$ منلونه د اضلاعو د اوږدوالي او ظاهري شکل له مخې پرتله کړئ.

که چیرې د یوه شکل یا څیزې ټول ټکي په یوه ټاکلی جهت لورئ، او یو ولټن (فاصل) حرکت ورکړو په لاس راغلی شکل له لومړي شکل سره انطباق منونکي دي، دې حرکت ته انتقال وایي او هغه په دې ډول بشودل کېږي: $T(x, y) = (x + h, y + k)$ **حقیقي عددونه دي.** په داسې حال کې چې h او k حقیقي عددونه دي.

لومړی مثال: د $A(2, -1)$, $B(3, 4)$, $C(0, 0)$, $D(1, -5)$ او $E(-3, 2)$ ټکي د وضیعه کمیانو په سیستم کې د $T(x, y) = (x - 1, y + 2)$ انتقالی رابطې په اساس وښئ.

حل: لومړی راکړل شوي ټکي د وضیعه کمیانو په سیستم کې وښئ او بیا هغه ټکي چې د $T(x, y) = (x - 1, y + 2)$ اړیکې څخه لاسته راځي په لاس راوړئ.

- $A(2, -1), T_A(2-1, -1+2) = (1, 1)$
- $B(3, 4), T_B(3-1, 4+2) = (2, 6)$
- $C(0, 0), T_C(0-1, 0+2) = (-1, 2)$
- $D(1, -5), T_D(1-1, -5+2) = (0, -3)$
- $E(-3, 2), T_E(-3-1, 2+2) = (-4, 4)$



په پورتنۍ مثال کې د ټکو د تړلوڅخه د شکل څیره لاسته راځي لیسل کېږي چې د $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ او $\overline{EE'}$ یو له بل سره موازي او مساوي دي.

دویم مثال: که چېرې $A(6, 1), B(8, 3), C(6, 5), D(4, 3)$ د یوې مربع راسونه وي هغه د

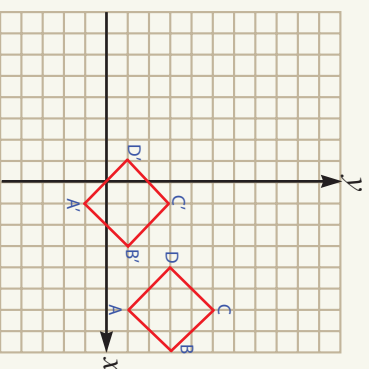
وضعیه کمیانو په سیستم کې تر دې $(2 - y, x - 5)$ او $T(x, y) = (x - 5, y - 2)$ اړیکه لاندې رسم کړئ.

الف: د مربع د اضلاعگانو اوږدوالی او تصویر نظر یویل ته پرته کړئ.

ب: د مربع د اضلاعگانو میل او څیره یی نظر یویل ته پرته کړئ.

حل: د $ABCD$ منظمه مربع تر انتقال لاندې د $A'B'C'D'$ څلور ضلعي ده.

- $A(6, 1), T_A = (6-5, 1-2) \Rightarrow A' = (1, -1)$
- $B(8, 3), T_B = (8-5, 3-2) \Rightarrow B' = (3, 1)$
- $C(6, 5), T_C = (6-5, 5-2) \Rightarrow C' = (1, 3)$
- $D(4, 3), T_D = (4-5, 3-2) \Rightarrow D' = (-1, 1)$



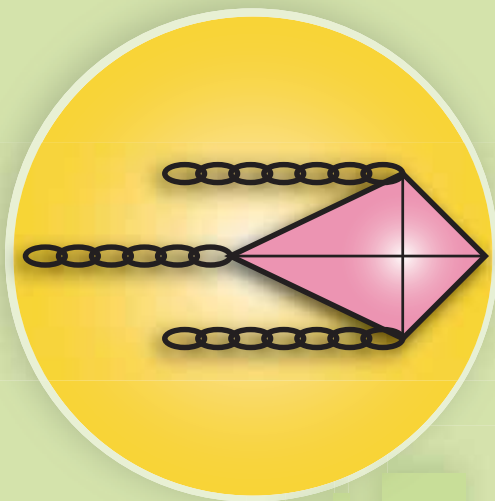
د (الف) او (ب) جزونو د ښاګردانو کورنۍ دنده ده.

انتقال یو ایزومتري رابطه ده.

یو پښتني

1-ک د $(-1, 1), M(1, -5), N(2, -5), O(2, 5), P(3, 3)$ یوه څلور ضلعي وي څلور ضلعي او دهغي تصویر تر دې رابطې $T(x, y) = (x + 9, -y)$ لاندې رسم کړئ.

۲- که $I(5, 0), J(7, 0), K(5, 3), L(7, 0)$ د یوه مثلث راسونه وي مثلث او د هغي تصویر پاڅیره د $F(x, y) = (-y + 3, x - 3)$ بدلون په اساس رسم کړئ.

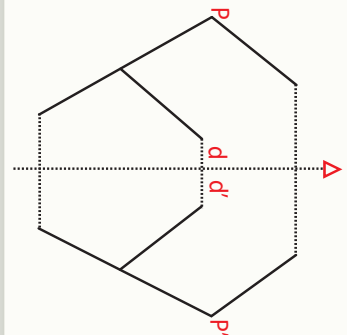


انعکاس

Reflection

د پیتنگ (کاغذ پیران) څیرې ته پاملرنه وکړئ؛ ستاسو په نظر دا کاغذ پیران (پیتنگ) نسبت کوم یوه قطر ته منظر دی.

فعالیت



- د یوې صفحې په نمایي کې یو شکل رسم کړئ.
- د شکل ټولې کرني په داسې رنگ رسم کړئ، چې په کاغذ کې ژر جذب نه شي.
- کاغذ په منځ داسې قات کړئ چې د قات شوي لیکې یوې خوا ته شکل پروت وي.
- صفحه خلاصه کړئ، وولئ؛ چې کوم شکل د اصلي شکل مخالف پروت او د دوی ترمنځ څه توپیر دی.

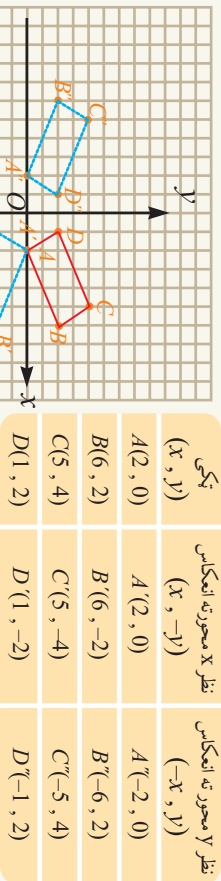
تعریف

که چیرې د P شکل یا څیرې هر ټکی د P' شکل یا څیرې په هر ټکی داسې بدل شي چې د P شکل یا څیرې د هر ټکي فاصله نظر Δ محور ته د P' د شکل د هر ټکي فاصله سره مساوي وي، دې تبدیل ته نظر Δ محوره انعکاس وايي او Δ محور ته د انعکاس محور وايي.

لومړی مثال: که چیرې د $A(2,0)$, $B(6,2)$, $C(5,4)$ او $D(1,2)$ ټکي د یوه مستطیل راسونه وي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې مستطیل رسم څیره او تصویر یې نظر x او y محوره رسم کړئ.

حل: که چیرې د $ABCD$ مستطیل څیره نظر y محوره رسم کړو په دې حالت کې یوازې د x مختصه یې په $(-x)$ بدلېږي او که چیرې څیره یا تصویر یې نسبت x محوره رسم کړو

یوازې د y مختصه یې په $(-y)$ بدلېږي څرنگه چې په شکل کې لیدل کېږي.



- د $T(x, y) = (-x, y)$ ليردونه نسبت y محور ته يو انعکاس دی.
- د $T(x, y) = (x, -y)$ ليردونه نسبت x محور ته يو انعکاس دی.
- د $T(x, y) = (x, y)$ ليردونه نسبت $y = x$ مستقیم ته يو انعکاس دی.

پوښتنې

1- که $B(7,1)$ او $C(3,1)$ د یوه مثلث راسونه وي، مثلث او د هغې تصویر یا څیره د لاندې ورکړل شویو د انعکاس اړیکو په اساس رسم کړئ

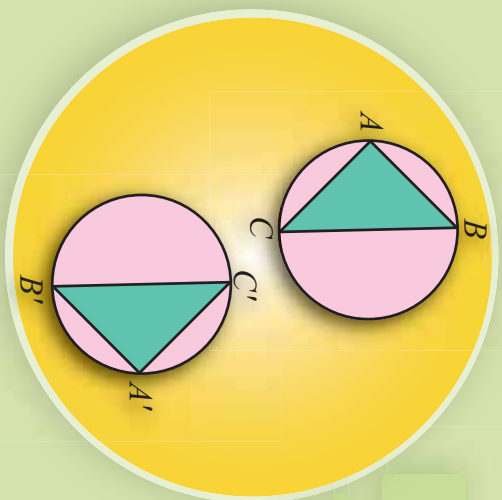
$$a: R_1(x, y) = (-x, y) \qquad b: R_2(x, y) = (x, -y)$$

$$c: R_3(x, y) = (y, x) \qquad d: R_4(x, y) = (-y, -x)$$

2- که چېرې $A(0,2), B(-5,0), C(-3,-5)$ او $D(2,-3)$ د یوې مربع راسونه وي مربع او د هغې تصویر د $R(x, y) = (-x, -y)$ انعکاس اړیکې په اساس رسم کړئ.

3- د $A(1,4), B(3,-2), C(5,1)$ د یوه مثلث راسونه وي، د $\triangle ABC$ مثلث تصویر یا څیره تر انعکاس لاندې نسبت لاندې کرښو ته:

- $x + 2 = 0$ رسم کړئ او په $\triangle A'B'C'$ بې ونوموئ.
- $0 = y + 3$ رسم کړئ او په $\triangle A''B''C''$ بې ونوموئ.



دوران Rotations

په مخامخ شکل کې د \hat{ABC} مثلث په مستوي کې حرکت کړی او د $\hat{A'B'C'}$ نوي ځای يې نيولی دی ناسې کولای شئ د دې ډول بدلون حرکت شرح کړئ.

فعالیت

مخامخ مدل د ماشومانو د لوبو د څرخ دوه بيلابيل ځايونه راښيي. د شکل څخه ليدل کېږي چې \hat{A} د \hat{A} ټکي متناظر او \hat{B} د \hat{B} ټکي متناظر دي د $\hat{AOA'}$ او $\hat{BOB'}$ زاويې اندازه کړئ

- او يوه له بلې سره يې پرتله کړئ.
- اوس د څرخ د چوکي په لومړي ځای يو ټکی وټاکئ او هغه P ونوموئ.
- د P ټکي متناظر ټکی د څرخي په دويم ځای کې پيدا کړئ او هغه P' ونوموئ.

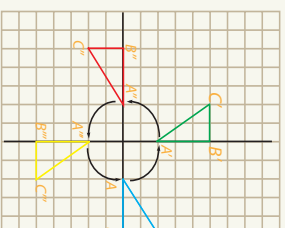
• د $\hat{POP'}$ زاويه اندازه کړئ.

د پورتنی فعالیت په پام کې نيولو سره دوران په مستوي کې د ليردوني په عنوان داسې تعريفوو:

که يو شکل په يوه مستوي کې د يو ټاکلي ټکي په شاوخوا د $\hat{\alpha}$ زاويې په اندازه دوران وکړي ټول ټکي يې د $\hat{\alpha}$ زاويې په اندازه دوران کوي په دې حالت کې د \hat{O} ثابت ټکی د دوران مرکز او د $\hat{\alpha}$ ثابت زاويې ته د دوران زاويه وايي.

مثال: د $B(5,0), A(2,0)$ او $C(5,2)$ د يوه مثلث راسونه دي د وضعيه کمپاټو په مستوي کې د \hat{ABC} مثلث او د هغه څيره يا تصوير د لاندي د تبديل دورک شويو اړيکو په اساس رسم او بيا هريو بدلون شرح کړئ.

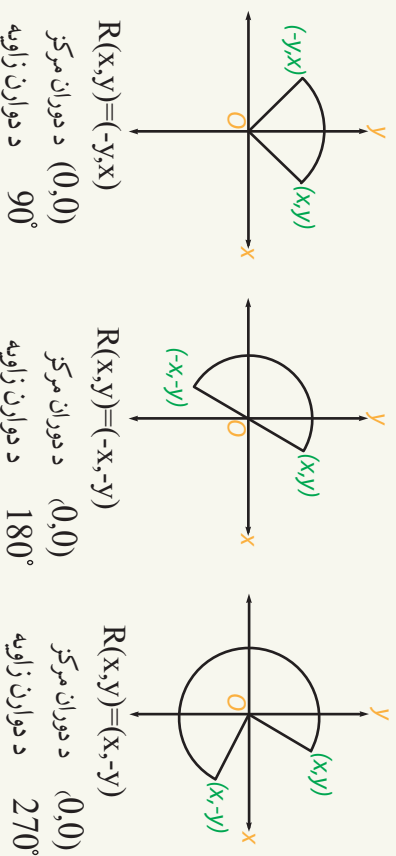
نکته	خبره (تصویر)		
(x, y)	$(-y, x)$	$(-x, -y)$	$(y, -x)$
$A(2, 0)$	$A'(0, 2)$	$A''(-2, 0)$	$A'''(0, -2)$
$B(5, 0)$	$B'(0, 5)$	$B''(-5, 0)$	$B'''(0, -5)$
$C(5, 2)$	$C'(-2, 5)$	$C''(-5, -2)$	$C'''(2, -5)$



الف: $R_1(x, y) = (-y, x)$ ب: $R_2(x, y) = (-x, -y)$ ج: $R_3(x, y) = (y, -x)$

حل:

د شکل خنجه لیدل کېږي چې د R_1, R_2 او R_3 بدلونونه د وضعیه کمیانو د مبدأ په مرکز دورانونه په ترتیب د 90° او 180° او 270° زاویو سره دي.



پوښتنې

- 1- که $A(0, 0)$, $B(6, -2)$ او $C(7, 1)$ د یوه مثلث راسونه وي.
 - الف: د $R(x, y) = (-y, x)$ تبدیل لاندې د ABC مثلث شکل او تصویر رسم کړئ.
 - ب: د مثلث د اضلاعگانو اوږدوالی د هغه له تصویر یا خنجرې سره پرتله کړئ. آیا دا دوران یو ایزو متري دی؟
 - 2- که $A(-1, -2)$, $B(7, 2)$ او $C(5, 6)$ د یو مستطیل راسونه وي.
 - الف: $R(x, y) = (-y, -x)$ تر دوران لاندې مستطیل او د هغه تصویر یا خنجره رسم کړئ.
 - ب: د مستطیل د اضلاعگانو اوږدوالی او مساحت د هغه له تصویر یا خنجرې سره پرتله کړئ.

- په يوه مستوي کې چې دوه افقي او عمودي محورونه يوبل عموداً پرې کړي د وضعيه کمپاټو د سيستم په نامه يادېږي.
- د وضعيه کمپاټو په سيستم کې افقي محور ته د فاصلي يا واټن محور او عمودي محور ته د ترتيب محور او د پريکړې ټکي ته يې مېلې وايي.
- د A او B دوو ټکوترونځ واټن د $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ او $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ اړيکي څخه لاسته راځي.
- د يوې کرښې د منځ ټکي مختصات د $(\frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2})$ څخه لاسته راځي.
- هغه کرښه چې د γ مختصه يې صفروي د منځ د ټکي مختصات يې $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$ څخه لاسته راځي.
- هغه کرښه چې د X مختصه يې صفروي د منځ د ټکي مختصات يې $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0)$ دي.
- د هرې مستقيمي کرښې ميل د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ رابطې څخه لاسته راځي.
- د هر مستقيم خط ميل په هغه زاويه پورې اړه لري چې مستقيم يې د X محور له مثبت جهت سره جوړه وي.
- هر مستقيم چې د x محور د مثبت جهت سره حاده زاويه جوړه کړي ميل يې مثبت او که منفرجه زاويه جوړه کړي ميل يې منفي دی.
- موازي مستقيمونه د مساوي ميلونو لرونکي دي.
- هر مستقيم خط چې له x محور سره موازي وي ميل يې صفر او هر مستقيم خط چې پر X محور عمود وي ميل نه دی تعريف شوی.
- دوه مستقيم خطونه هغه وخت يو پر بل عمود دي چې د ميلونو د ضرب حاصل يې (-1) وي.
- درې ټکي هغه وخت په يوې کرښې پراته دي چې د هر قطعه خط ميلونه يې سره مساوي وي.
- د وضعيه کمپاټو په مستوي کې د يوه ټکي هغه اړيکه چې يوازې او يوازې يوه نوي ټکي ته نسبت ورکړي يوه ليردونه يا تغير مکان بلل کېږي.
- که چېرې د يوه شکل ټولو ټکو ته په يوه ټاکلي جهت او يوه فاصله حرکت ورکړو په لاس راغلي شکل د لومړي شکل سره انطباق موندلی دی او دې حرکت ته انتقال وايي.
- که يوشکل په يوه مستوي کې د يو ټاکلي ټکي په شاوخوا د α زاويې په اندازه دوران وکړي

ټول ټکي يې په عين زاويه دوران کوي دي حرکت ته دوران وايي.

● په لاندي سوالونو کې هر سوال ته څلور ځوابونه ورکړ شوي دي صحيح ځواب وټاکئ.

1- د دوو عمودي کرنيو د ميلونو د ضرب حاصل:

(a) 1) دى. (b) صفر دى. (c) ∞ دى. (d) منفي يو دى.

2- د مستقيمي کرنيې معادله چې د Y محور سره يې د پربکړې ټکي او ميل يې ښکاره وي عبارت له:

(a) $y = mx + c$ (b) $y = b$ (c) $y = mx + b$ (d) $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

3- د هغه کرنيې معادله چې دوه ټکي يې ښکاره وي عبارت له:

(a) $y = mx + b$ (b) $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (c) $\frac{y - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x - x_1}$

4- د $A(0, y_1)$ او $B(0, y_2)$ دوو ټکو د منځني ټکي مختصات عبارت له:

(a) $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0)$ (b) $M(\frac{y_2 + y_1}{2}, 0)$ (c) $M(0, \frac{y_1 + y_2}{2})$ (d) $M(0, 0)$

5- د $A(x_1, 0)$ او $B(x_2, 0)$ دوو ټکو د منځني ټکي مختصات عبارت له:

(a) $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0)$ (b) $M(\frac{y_2 + y_1}{2}, 0)$ (c) $M(\frac{y_1 + y_2}{2}, 0)$ (d) $M(0, 0)$

6- د A او B دوو ټکو ترمنځ واټن عبارت دى له:

(a) $AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$ (b) $AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2}$

(c) $AB = \sqrt{(x_2 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2}$ (d) $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

7- د يوه ټکي او د وضعيه کميانو د مبادا ترمنځ واټن يا فاصله عبارت ده له:

(a) $AB = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (b) $AB = \sqrt{y_1^2 + y_1^2}$

(c) $AB = \sqrt{x^2 + y^2}$ (d) $AB = \sqrt{x^2 - y^2}$

8- د يو مستقيمي کرنيې ميل عبارت له:

(a) $m = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ (b) $m = \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}$ (c) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (d) $m = \frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$

9- دوه مستقيمو نه هغه وخت يو له بل سره موازي وي چې:

a: د هغو ميلونه سره مساوي وي. b: ميلونه يې مساوي نه وي.

- C: د ميلونو د ضرب حاصل يې منفي يو وي.
- خالي ځايونه په مناسبو کلماتو ډک کړئ.
- 1- د وضعيه کمياتو په سيستم کې د X محورته د او محورته د وايي.
 - 2- په دويمه ناحيه کې هغه ټکي پرانه دي چې X يې او Y يې دی.
 - 3- په دريمه ناحيه کې هغه ټکي پرانه دي چې X او Y دواړه دی.
 - 4- هغه مستقيم چې د X محور د مثبت جهت سره مساوي حاده زاويه جوړه کړي ميل يې دی.
 - 0- دوه موازي مستقيمي کرني چې د X محور د مثبت جهت سره مساوي جوړه وي.
 - 1- X د محور سره د هر موازي مستقيم ميل دی.
 - 7- درې ټکي هغه وخت په يوه مستقيمه کرينه پرانه وي چې د ټوټه کرنيو سره مساوي وي.
 - 8- که د دوو کرنيو ميلونه يوبل سره مساوي نه وي دا کرنيې دی.
 - لاندي جملې کومې سمي او کومې بې ناسمي دي د سمو په مخ کې درس) توري اود ناسمي په مخ کې دن) توري وليکئ:
 - 1-) که د وضعيه کمياتو په مستوي کې د هر ټکي لپاره يوازې او يوازې يوه نوي ټکي ته نسبت ورکړئ په مستوي کې بدلون بلل کېږي.
 - 2-) که د P شکل هر ټکي د P' شکل په يوه ټکي داسې تبديل شي چې د P د شکل د هر ټکي واټن نظر يوه محورته د P' د شکل له هر ټکي سره مساوي وي دي بدلون ته انعکاس وايي.
 - 3-)) $T(x, y) = (-x, y)$ بدلون نسبت y محورته يوانعکاس دی.
 - 4-)) $T(x, y) = (x, -y)$ بدلون نسبت x محورته يوانعکاس دی.
 - 5-)) $T(x, y) = (y, x)$ بدلون نسبت $x = y$ مستقيم ته يوانعکاس دی.
 - 6-)) انتقال هغه تغير مکان يا ليردونه دی چې په هغه کې د واټونو يا فاصلو جهت اود زاويو پراخوالی ثابت پاتې شي.
 - 7-)) که په مستوي کې يو شکل (O) ټاکلي ټکي په شاوخوا د α زاويې په اندازه دوران وکړي د هغې ټول ټکي په عين زاويه دوران کوي.

- لاندې سوالونه حل کړئ
 - 1- لاندې ټکي چې وضعيه کميات يې ورکړ شوی دی د وضعيه کمياتو په سيستم کې وټاکئ.

1: (0,1)	2: (2,3)	3: (0,-4)	4: (5,0)
----------	----------	-----------	----------
 - 2- د لاندې ټکو د جوړو ترمنځ واټن چې وضعيه کميات يې ورکړی شوی ښکاره کړئ.

1: (0,9)	2: (4,1), (3,-2)	3: (-7,4), (1,-11)
----------	------------------	--------------------
 - 3- وښئ چې لاندې ټکي د يوه قائم الزاويه مثلث راسونه دي او هم د مثلث مساحت پيدا کړئ.

1: (0,9), (-4,-1), (3,2)	2: (3,-2), (-2,3), (4,-4)
--------------------------	---------------------------
 - 4- وښئ چې لاندې ورکړی شوی ټکي په يوه مستقيمه کرښه دپاسه پراته دي.

1: (0,4), (3,-2), (-2,8)	2: (1,2), (-3,10), (4,-4)
--------------------------	---------------------------
 - 5- د يوې مستقيمي کرښې ميل او يو ټکي په لاندې ډول ورکړل شوی د هغې معادله په لاس راوړئ.

1: (2,3), $m = -\frac{1}{2}$	2: (-4,1), $m = -\frac{2}{3}$	3: (-1,-4), $m = -2$
------------------------------	-------------------------------	----------------------
 - 6- که د يوه مستطیل راسونه $(-3,1), (-1,3), (3,-1)$ او $(1,-3)$ وي مساحت يې پيدا کړئ.

7- که د يوه متوازي الضلع راسونه $(2,4), (5,9), (4,9)$ او $(1,4)$ وي د قطرونو اوږدوالی يې پيدا کړئ.
 - 8- وښئ چې د $(-3,1), (-9,4), (12,0)$ او $(6,3)$ د يوه متوازي الضلع راسونه دي.

9- که $(5,0), (3,2), (-3,-3)$ او $(1,-3)$ د يوه مثلث راسونه وي د اضلاعگانو د منځني ټکي کميات وضعيه په لاس راوړئ.
 - 10- ثبوت کړئ:

الف: چې د مربع قطرونه يو پر بل عمود دي.

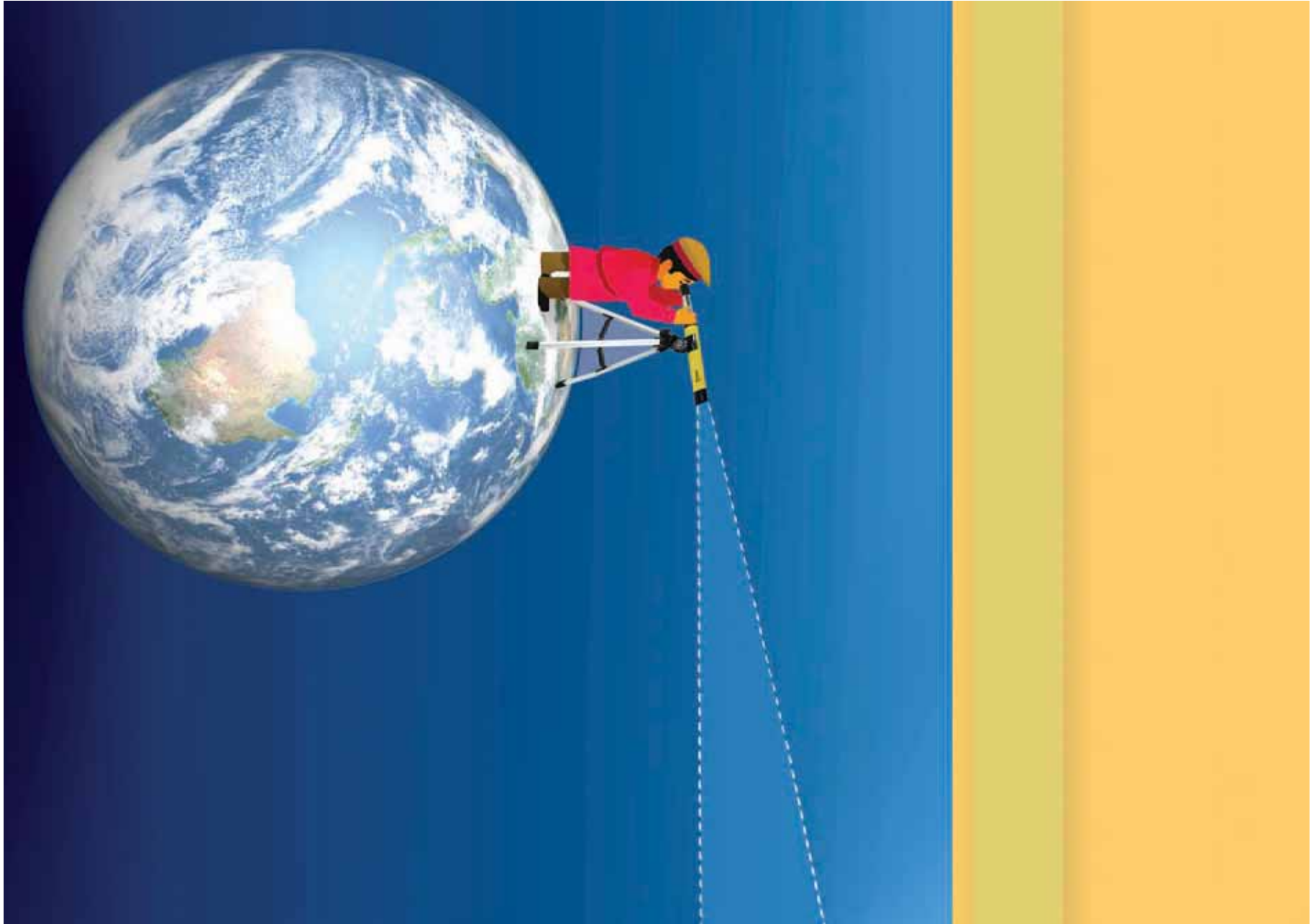
ب: چې د مستطیل قطرونه يو بل نيملي کوي.
 - 11- هغه مستقيم چې د $A(3,-1)$ او $B(5,3)$ ټکو څخه تيرېږي د وسطي عمود معادله يې پيدا کړئ.

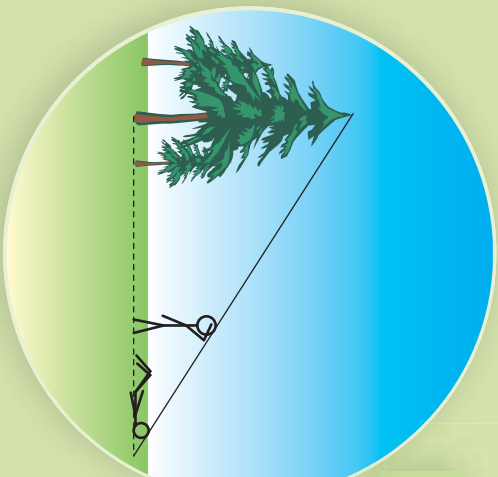
12- د هغه مستقيم معادله پيدا کړئ چې $P(4,5)$ ټکي څخه تير شي او په ترتيب سره د X او Y له محورونو سره موازي وي.
 - 13- که چيرې $A(5,0), B(7,0)$ او $C(5,3)$ د يوه مثلث راسونه وي.

الف: د $T(x,y) = (-y+3, x-3)$ ترتيب لاندې مثلث او د هغه تصوير يا څيره رسم کړئ.

ب: د ABC مثلث تصوير د $T(x,y) = (-y,x)$ تر دوران لاندې پيدا کړئ او هغه ته $A'B'C'$ وولئ وروسته د $T(x,y) = (x+3, y-3)$ تصوير يا څيره د تر انتقال پاليردوني لاندې وټاکئ.





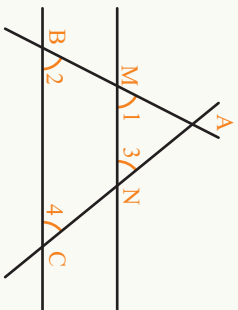


په مثلث کې د تالس قضیه

دوه زده کوونکي یو له بل سره خبرې کوي چې د یسوي ونې جگ والي څنګه اندازه کړي یو بل ته داسې وړاندیز وکړ او په خپله په ځمکه اور د پریورت، هغه له خپل ملاګري څخه وغوښتل چې دومره حرکت وکړي چې د ده سر او د ونې څوکه په یوه مستقیمه کرښه سره وویني. د زده کوونکي د وړاندیز په سموالي سوچ وکړی.

فعالیت

• د $\triangle ABC$ په مثلث کې $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ دی. د هر تړته کرښې اندازه په تش ځایونو کې ولیکئ.



$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}} =$$

• هغه زاويې چې یو له بل سره مساوي دي وښیئ.

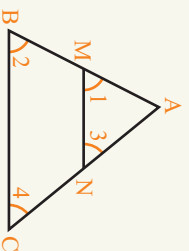
• د $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$, $\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$, او $\frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$ نسبتونه پیدا او یو له بل سره څه اړیکه لري؟

د پورتنۍ فعالیت څخه د تالس قضیه داسې بیانوو؟

قضیه: که د $\triangle ABC$ مثلث په یوې ضلعي یا څنډې موازي کرښه رسم کړو د تشکیل شوي مثلث د اضلاعو نسبت د $\triangle ABC$ مثلث پر اضلاعو یو له بل سره مساوي دي. دا قضیه په مثلث کې د تالس قضیې په نامه یادېږي.

ثبوت: څرنگه چې د $\triangle ABC$ په مثلث کې $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ دي نو کولای شو ولیکو چې:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{1} = \hat{2} \dots\dots \text{متواافقه} \\ \hat{3} = \hat{4} \dots\dots \text{متواافقه} \\ \hat{A} = \hat{A} \dots\dots \text{مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$$



نومړی مثال: د $\triangle ABC$ په قائم الزاویه مثلث کې که \overline{EF} له \overline{BC} سره موازي دي په پام کې ونیسئ د قائمو اضلاعو او د \overline{EF} موازي کرښې اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: څرنگه چې د $\triangle ABC$ په مثلث کې $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ سره دي نو د تالس د قضیې په اساس دا دوه مثلثونه سره ورته یا مشابه دي نو کولای شو ولیکو چې:

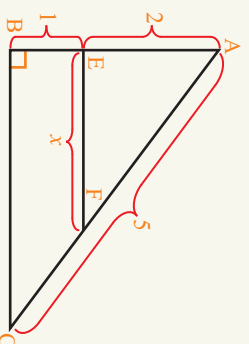
$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$$

$$AC^2 = BC^2 + AB^2$$

$$5^2 = BC^2 + 3^2$$

$$BC^2 = 25 - 16 = 9$$

$$\boxed{BC = 3}$$

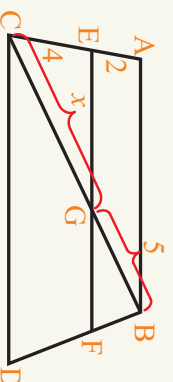


دویم مثال: په لاندې خوځنده کې $\overline{EF} \parallel \overline{BA}$ دي د x مقدار وټاکئ.

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{GB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \quad \text{یا} \quad \frac{\overline{CG}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{GB}}{\overline{AE}}$$

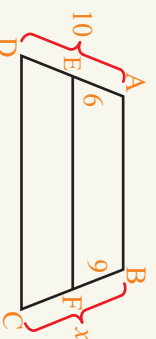
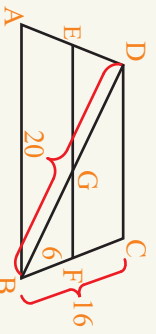
$$x \cdot \frac{5}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2} \Rightarrow x = \frac{4 \cdot 5}{2} = \frac{20}{2}$$

$$x = 10$$

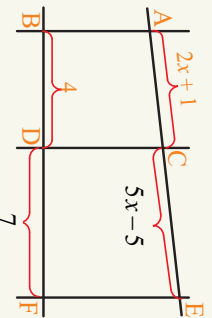


پوښتنې

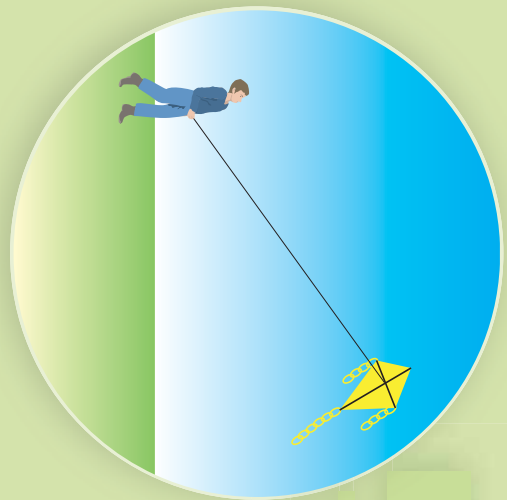
1- د خوځنده په لاندې شکلونو کې د x مقدار وټاکئ.



2- په لاندې شکل کې که $\overline{CD} \parallel \overline{EF}$ او $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ وي د x مقدار وټاکئ.



د یوې حاده زاوې ساین

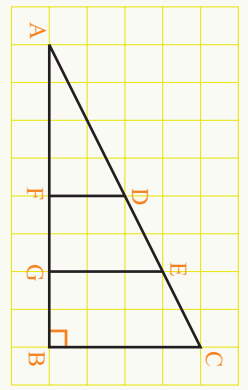


که یو کاغذ پران په هوا کې د الوتلو په حالت کې وي، کولای شئ ولټن بې د خمکې څخه په لاس راوړئ؟

فعالیت

● په قایم الزاویه مثلث کې د \overline{AC} په وتر باندې د D او E ټکي ټاکل شوي دي. د دې ټکو څخه د مثلث په \overline{BC} ضلعو موازي رسم کړئ او د پریکړې ټکي یې په وار سره F او G نوموړ.

● د خط کش څخه په گڼه اخیسته د مثلث اضلاعوې اندازه او د $\frac{DF}{AE} = \frac{EG}{DA}$ او $\frac{BC}{AC} = \frac{EG}{AE}$ نسبتونه محاسبه او پر تله یې کړئ.



- یا د D او E ټکو د ځای په بدلون سره د $\frac{DF}{AE} = \frac{EG}{DA}$ او $\frac{BC}{AC} = \frac{EG}{AE}$ نسبتونه هم بدلون کوي؟ د یوه ټکي په ټاکلو سره هغه وڅیړئ.
- د AC د ځای په بدلون د \hat{A} زاوې په مقدار کې بدلون رامنځ ته کېږي.
- اوس \overline{AC} ثابت پریږدئ او د \hat{A} زاوې ته زياتوالی ورکړئ. سوچ وکړئ چې په پورتنیو مساوي نسبتونو کې څه پېښېږي؟ وېې څیړئ؟

تعریف

په هر قایم الزاویه مثلث کې د یوې حاده زاوې د مخامخ څنډې یا ضلعې او برډوالی دوتر پر اوږدوالی تل مساوي له یو ثابت مقدار سره دی چې د حاده زاوې په اندازه پورې اړه لري. دې نسبت ته $\sin \theta$ (د حاده زاوې ساین) ویل کېږي.



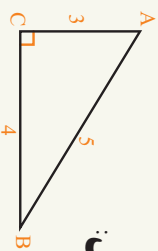
$$\sin \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \text{د } \theta \text{ حاده زاوې د مخامخ ضلعې اوږدوالی دوتر اوږدوالی}$$

لومړی مثال: په لاندې شکل کې $\sin A$ او $\sin B$ په لاس راوړئ.

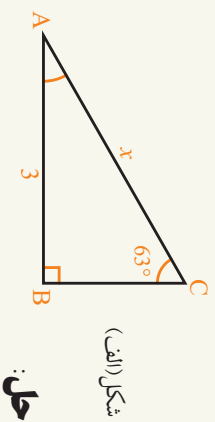
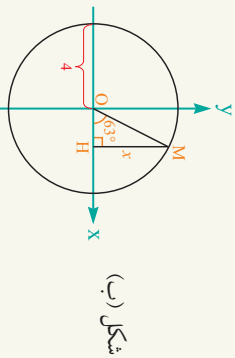
حل:

$$\sin A = \frac{\text{د مخالف څنډې يا ضلعي اوږدوالی}}{\text{موز اوږدوالی}} = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin A = 0.8$$

$$\sin B = \frac{\text{د B زاوې د مخالف څنډې يا ضلعي اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5} = 0.6$$



دویم مثال: که $\sin 63^\circ$ مساوي په 0,891 وي، په لاندې شکلونو کې د x اندازه پیدا کړئ.



حل:

د الف جزه: د یوې حادې زاوې د تعريف څخه په گټه اخیسته کولای شو ولیکو چې:

$$\sin 63^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$0.891 = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{3}{0.891} \Rightarrow x \approx 3.37$$

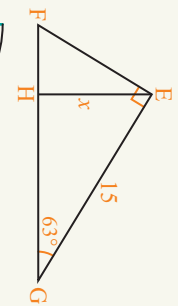
$$\sin 63^\circ = \frac{MH}{OM}$$

$$0.891 = \frac{x}{4} \Rightarrow x \approx 3.56$$

د ب جزه:

پو پښتني

1- که $\sin 63^\circ$ مساوي په 0,891 وي، په مخالف شکل کې د x عددي قیمت پیدا کړئ.

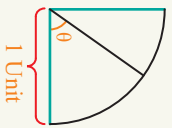


2- د دایرې د څلورمې برخې شکل په پام کې ونیسئ.

الف: که د θ زاوېه لویه شي $\sin \theta$ څرنگه بدلون مومي؟

ب: که د θ زاوېه صفر ته نږدې شي، $\sin \theta$ کوم عدد ته نږدې کېږي.

ج: که زاوېه 90° ته نږدې شي، $\sin \theta$ کوم عدد ته نږدې کېږي.



3- د 40° , 80° او 65° زاوېې په وار سره رسم او بیا په هره زاوېه یو قايم الزاويه مثلث کې رسم کړئ د کرنيې يا خطکش څخه په گټه اخیسته د مثلث اضلاعوي اندازه او $\sin 80^\circ$, $\sin 65^\circ$, او $\sin 40^\circ$ پیدا کړئ او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

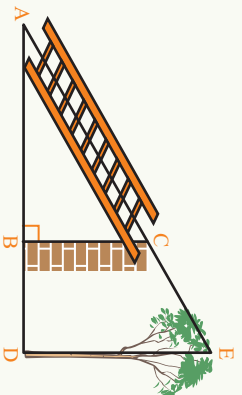
4- یو مستوي الساقين مثلث چې قاعده یې 8 واحده او $\hat{B} = 54^\circ$ وي رسم کړئ که یوه څنډه يا ضلعه یې 5 واحده وي د B زاوېې \sin ساين پیدا کړئ.



د یوې حاده زاوېي کوساین

د یوه د یووال شاته د ناخو یوه ونه ولاړه ده. یو زده کونکی غواړي و پوهېږي چې ونه له د یواله څومره واټن لري. د دې کار لپاره یې یوازې یوه لنډه زینه درلوده. فکر وکړئ هغه څه سوچ کوي؟

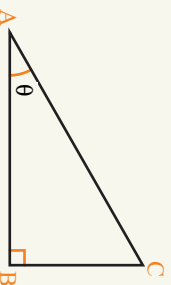
فعالیت



- په مخامخ شکل کې د تشکیل شویو مثلثونو نومونه واخلي.
- \overline{BC} او \overline{DE} یو له بل سره څه اړیکه لري؟ ولې؟
- د $\triangle ABC$ او $\triangle ADE$ مثلثونه یو بل سره څه اړیکه لري. د زینې واټن تر د یوال او بیایې تر وې پورې پیدا کړئ.
- د تالس د قضیې په مرسته لاندې مساوات تکمیل او د \overline{AE} اوږدوالی په لاس راوړئ.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\dots}{AE}$$
 دا مقدار په څه پورې تړلی دی.

په عمومي ډول د $\triangle ABC$ په قایم الزویه مثلث کې چې یوه حاده زاویه یې θ ده، د دې زاوېي د گاونډي یا مجاورې ضلعي د اوږدوالي او دوتر د اوږدوالي نسبت ته کوساین وايي.



$$\cos \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\text{دوتر اوږدوالی}}{\text{د گاونډي ضلعي اوږدوالی}}$$

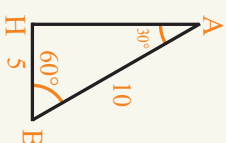
مثال: د AHB په مثلث کې که $\hat{A} = 30^\circ$ او $\hat{B} = 60^\circ$ وي ونیسئ چې
 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ او $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ، $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ دی.

حل: د فیثاغورث د قضیې څخه په ګټه اخیستنه د AH جگړالی کولای شو ولیکو چې:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HB}^2$$

$$10^2 = \overline{AH}^2 + 5^2 \Rightarrow \overline{AH}^2 = 100 - 25 = 75$$

$$\overline{AH} = \sqrt{75} \Rightarrow \overline{AH} = 5\sqrt{3}$$



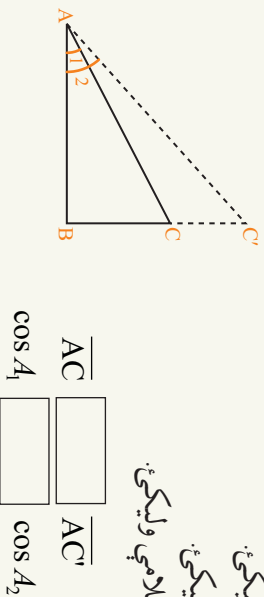
$$\sin 60^\circ = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 60^\circ = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad , \quad \cos 30^\circ = \frac{\overline{AH}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

یو پښتني

1- که یوه حاده زاویه لویه شي، د کوساین په اندازه کې څه بدلون راځي؟ ولئ؟
 د مخامخ مثلث او مثلثاتي دایرې په مرسته خپل نظر بیان کړئ.

- د $\cos A_1$ لپاره یو نسبت ولیکئ.
- د $\cos A_2$ لپاره یو نسبت ولیکئ.
- په تشو ځایونو کې مناسبې علامې ولیکئ.



$$\frac{\overline{AC}}{\cos A_1} = \frac{\overline{AC'}}{\cos A_2}$$

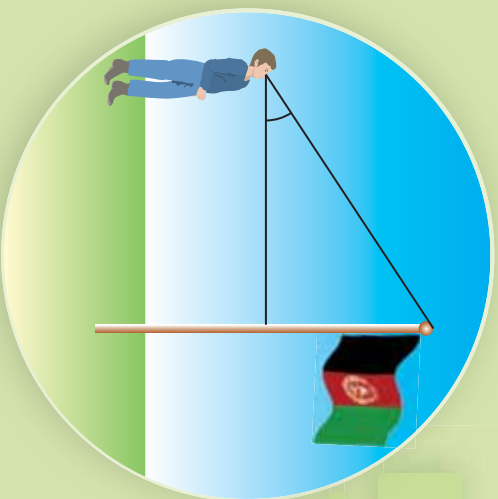
- 1- د 30° او 45° زاویو لپاره $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ لپاره یو ثابت وڅیړئ؟
- 2- د 30° او 45° زاویو لپاره $\sin A$ او $\cos A$ عددي قیمت پیدا کړئ.



- 3- د \hat{A} په مثلث کې چې د اضلاعو یا څنډو اوږدوالی یې 6, 8 او 10 واحد وي د $\sin A$ او $\cos A$ مثلثاتي نسبتونه محاسبه کړئ.
- 4- د \hat{A} په مثلث کې چې د اضلاعو یا څنډو اوږدوالی یې 6, 8 او 10 واحد وي د $\sin A$ او $\cos A$ مثلثاتي نسبتونه محاسبه کړئ.

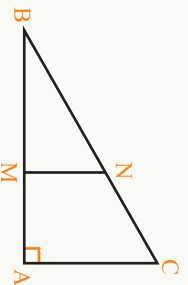
د حاده زاوي تانجنت

يو زده کورونکی د بیرغ مخکې ولاړ دی. سوچ کوي چې د بیرغ د میلی اوردوالی څنګه پیدا کړي؟



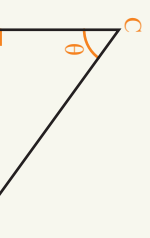
فعالیت

د $\triangle ABC$ مثلث چې د \hat{A} زاویه یې قايمه ده د B زاوي مثلثي نسبتونه $(\cos B, \sin B)$ په پام کې ونیسئ چې د \overline{MN} توپه کرښه په \overline{AC} موازي رسم شوي ده.



- د $\triangle ABC$ مثلث په پام کې نیولو سره $\sin B$ او $\cos B$.
- د $\triangle ABC$ مثلث اضلاعو یا له مخې د $\frac{\sin B}{\cos B}$ نسبت ولیکئ.
- د $\triangle BMN$ مثلث څخه په ګټه اخیستنه او دا اضلعو یا څنډو له مخې $\frac{\sin B}{\cos B}$ ولیکئ.
- د $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{MN}$ او \overline{BN} کرښو د مخامخ اندازه کولو په مرسته پورتنی دوه نسبتونه سرو پرته کړئ.
- سوچ وکړئ که چېرې $\frac{\cos B}{\sin B}$ پیدا کړو نو دا نسبت د مخامخ څنډو یا اضلعو د اوردوالي سره تړاو لري یا یوازې د زاوي په مقدار پورې تړاو لري.

نوډی پایله: په یوه قايم الزاويه مثلث کې د یوې حاده زاوي د مخامخ څنډې یا ضلعي اوردوالي او د هغه زاوي د ګاونډي ضلعي د اوردوالي نسبت یو ثابت مقدار دی چې د (د حاده زاوي تانجنت) په نامه یادېږي.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \text{ د } \hat{\theta} \text{ زاوي د مخامخ ضلعي اوردوالی} \\ \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \text{ د } \hat{\theta} \text{ زاوي د ګاونډي ضلعي اوردوالی} = \tan \theta$$

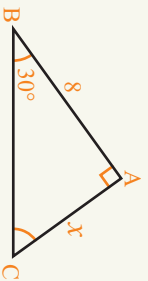
دویمه پایله: د θ حاده زاوې تانجنت د حاده زاوې سینین پر کوساین له نسبت سره مساوي

$$\text{دی: } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

دریمه پایله: $\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ یو بل مقدار دی چې د حاده زاوې کوتانجنت ($\text{Cotangent}(\theta)$)

یاد د θ زاوې دگاونډي یا مجاورې ضلعي اوږدوالي د θ زاوې د مخالف ضلعي یا مقابلې ضلعي پر اوږدوالي ته کوتانجنت $\text{Cot} \theta$ وايي. دا نسبت د نورو نسبتونو په شان یوازې د زاوې په پراخوالي پورې اړه لري.

لومړی مثال: په لاندې مثلث کې که $x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ وي د



حل: د $\tan \theta$ تعریف څخه په گټه اخیسته کولای شو ولیکو چې:

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{8} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

دویم مثال: د $\triangle ABC$ مثلث چې لاندې رسم شوی دی، په دې مثلث کې $\sin c$, $\cos c$, $\tan c$ او $\cot c$ په لاس راوړئ او د $\tan c$ رابطه د $\cos c$ او $\sin c$ نسبتونو سره پرتله کړئ.

حل: لومړی د فیثاغورث د قضیې په مرسته د $\triangle ABC$ په مثلث کې د AC اوږدوالی پیدا کوو.

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \\ 5^2 &= 3^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 25 - 9 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4 \\ \sin C &= \frac{3}{5} \quad \cos C = \frac{4}{5} \quad , \quad \tan C = \frac{3}{4} \quad , \quad \cot C = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



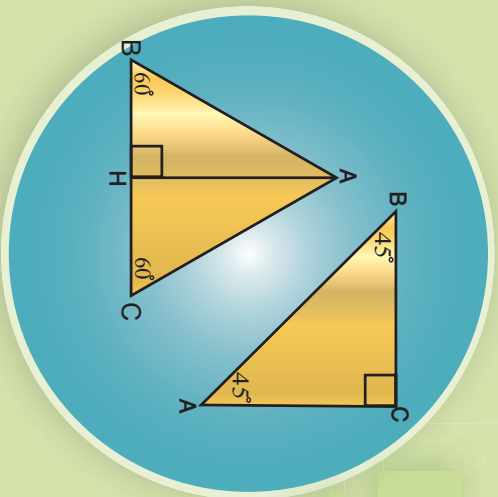
$$\begin{aligned} \frac{\sin C}{\cos C} &= \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4} \\ \tan C &= \frac{3}{4} \Rightarrow \tan C = \frac{\sin C}{\cos C} \end{aligned}$$

پو پښتني

- 1- په مخالف شکلونو کې $\tan \theta$ او $\text{Cot} \theta$ پیدا کړئ.
- 2- د $\triangle ABC$ په مثلث کې چې ضلعي یې سره مساوي دي $\tan A$ او $\tan B$ پیدا کړئ.
- 3- که د یوه قائم الزاویه مثلث قاعده ثابته وساتو او حاده زاویه یې لویه شي د $\tan \theta$ په نسبت کې څه بدلون پېښیږي.

د خانګړو زاویو مثلثاتي نسبتونه (30° ، 60° ، 45° او 90°)

مخامخ مثلثونه څه ډول مثلثونه دي د اضلاعگانو اوږدوالی یې وټاکئ.



فعالیت

- د $\triangle ABC$ یو مستایي الاضلاع مثلث رسم کړئ.
 - د \overline{AH} ارتفاع یا جگوالی رسم کړئ، په دې ډول مثلثونو کې جگوالی کومې ځانګړتیاوې لري.
 - د فیثاغورث د قضیې څخه په ګټه اخیستنه د جگوالی یا ارتفاع اوږدوالی یا د مثلث جگوالی پیدا کړئ.
 - ایا کولای شئ چې د 30° او 60° زاویو مثلثاتي نسبتونو عددي قیمت پیدا کړئ.
 - د $\triangle ABC$ یو مستایي الساقین، قایم الزاویه مثلث رسم کړئ، چې د هرې ضلعې یا څنډې اوږدوالی یې یو واحدوي.
 - هره حاده زاویه څو درجې ده؟ ولې؟ د وتر د اوږدوالي اندازه یې حساب کړئ.
 - د 45° زاویې مثلثاتي نسبتونه په لاس راوړئ.
- د پورتنۍ فعالیت څخه لاندې جدول جوړ ولای شو.

زاویې	0°	30°	45°	60°	90°
مثلثاتي نسبتونه					
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ناټاکلی (یا معین)

مثال: په لاندې اړیکو یا رابطو کې د x او y عددي قیمت پیدا کړئ.

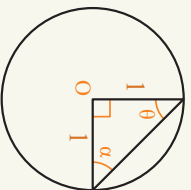
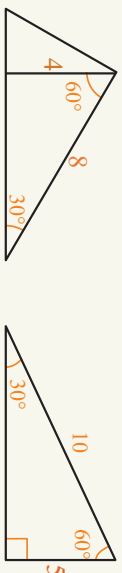
- 1) $x = \sin 60^\circ + \sin 30^\circ$ 2) $y = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ$
- 3) $\tan 60^\circ - \sin 30^\circ = ?$ 4) $y = \tan 30^\circ - \cos 60^\circ$
- 5) $\tan 45^\circ - \sin 45^\circ = ?$ 6) $y = \tan 30^\circ + \tan 60^\circ$

حل: په پورتنیو اړیکو کې د هر مثلثي نسبت په ځای عددي قیمت وضع کوو:

- 1) $x = \sin 60^\circ + \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$
- 2) $y = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$
- 3) $x = \tan 60^\circ - \sin 30^\circ = \sqrt{3} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}-1}{2}$
- 4) $y = \tan 30^\circ - \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}$
- 5) $x = \tan 45^\circ - \sin 45^\circ = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$
- 6) $y = \tan 30^\circ + \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{3}$

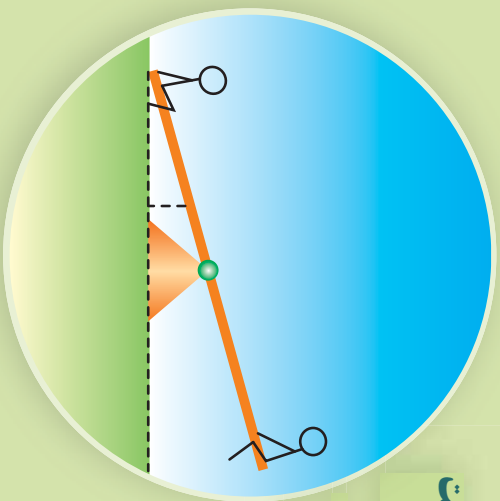
پو پښتني

په لاندې شکلونو کې د 60° , 45° , 30° زاویو د \sin , \cos , \tan او \cot مثلثي نسبتونه پیدا کړئ.



د یوه مستقیم خط د میل او تانجنت اړیکه

د راغلي میل ښی یا کیني خوا ته په څه پورې اړه لري؟



فعالیت

- د $A(1,3)$ او $B(0,0), C(1,0)$ ټکي د وضعیه کمپاټو په مستوي کې ونښئ، هغه مثلث چې راسونه د دې ټکو څخه جوړېږي څه ډول مثلث دی؟ ولې؟
- \overline{AB} مستقیمې کرښې میل په لاس راوړئ.
- د \overline{AB} مستقیمې کرښې معادله د $y = mx + h$ په شکل ولیکي.
- د $\tan A$ په لاس راوړئ، د \overline{AB} د مستقیمې کرښې د میل سره څه اړیکه لري؟
- د \overline{AB} په مستقیم دوه اختیاري ټکي په پام کې ونیسئ، د دې ټکو په لرل سره د مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ. آیا د $\tan B$ د مستقیمې کرښې د میل برابري لیدل کېږي؟

د پورتنی فعالیت څخه لیدل کېږي، چې د هغې مستقیمې کرښې میل چې د x له محور سره حاده زاویه جوړوي، د هغې زاوې له تانجنت سره چې د کرښې او د x محور مثبت جهت سره یې جوړوي برابره ده. د $y = mx + h$ معادله کې $m = \tan A$ دي.

لومړی مثال: د Δ مستقیمه کرښه د y محور په 4 کې پریږي او د x محور له مثبت جهت سره 45° زاویه جوړوي، که $\tan 45^\circ = 1$ وي د Δ مستقیمې کرښې معادله ولیکي.

حل: یو هېرو چې د مستقیمې کرښې معادله $y = mx + h$ ده نو لومړی د مستقیمې کرښې میل په لاس راوړو:

$$\left. \begin{array}{l} m = \tan \theta \\ m = \tan 45^\circ \\ m = 1 \\ h = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = mx + h \\ y = x + 4 \end{array}$$

دویم مثال: د $x = 2\sqrt{3} - y$ مستقیمې کرښې په معادله کې د مستقیمې کرښې میل، د میل

زاویه او د Y له محور سره د پریکړې ټکي په لاس راوړئ.

حل: لومړی د مستقیمې کرښې معادله په سټنډرډ شکل $mx + h = y$ بدلوه چې وروسته یې میل او له محور سره د پریکړې ټکي په اسانۍ سره پیدا کولای شو.

$$\sqrt{3}y - x = 2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}y = x + 2\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$$

$$m = \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30^\circ, \quad h = 2$$

یا کولای شئ د فیثاغورث د قضیې او مثلثات ترمنځ اړیکه پیدا کړئ.

فعالیت

• د $\triangle ABC$ یو قائم الزامه مثلث چې قائمې جوړونکې ضلعې یې 6 او 8 دي رسم او قایمه زاویه یې په A وښیئ.

• $\sin B$, $\cos B$, $(\sin B)^2$ او $(\cos B)^2$ حساب کړئ.

• $\sin B$, $\cos B$, $(\sin B)^2$ او $(\cos B)^2$ د AC , AB او BC اضلاعو له جنسه ولیکئ څه پایله ترې اخلئ.

د پورتنۍ فعالیت څخه ښکاري چې د یوې حاده زاوې د سین او کوساین د مربعانو جمع مساوی له 1 سره ده.

ځینې وخت د مثلثاتي نسبت د توان علامه په لاندې ډول سره ښودل کېږي.

$$(\sin A)^2 = \sin^2 A$$

پاملرنه وکړئ چې د 2 توان د زاوې په سین پورې اړه لري نه په زاویه پورې $\sin^2 A \neq \sin^2 A$

پوښتنې

1- د هغه مستقیمې کرښې معادله په لاس راوړئ چې د x محور له مثبت جهت سره 60° زاویه

جوړه کړي او د y محور په $(0,5)$ ټکي کې پرې کړي.

2- د $y = x + 4$ کرښې په معادله کې میل، د میل زاویه او د y له محور سره د پریکړې ټکي پیدا

کړئ.

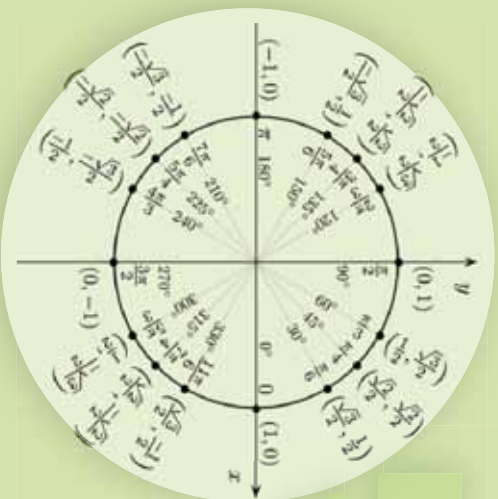
$$a) \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2}{1 + 2 \sin \theta \cos \theta} = 1 \quad b) 1 + \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$c) \frac{\tan^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos \theta} = \sin \theta \times \tan^3 \theta \quad d) \frac{(\sin A + \cos A)^2 - 1}{2 \sin A} = \cos A$$

$$e) \sin^4 A + \cos^2 A \times \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

مثلاثي جدول او دهغي استعمال

په مخامخ مثلاثي دايرې په شکل کې د نوموړو زاويو مثلاثي نسبتونه ښودلای شئ.



فعاليت

- يو مستوايي الاضلاع مثلث رسم او هرې زاويې پراخوالی يې وټاکئ.
- په يو مثلث کې د 30° او 60° زاويو مثلاثي نسبتونه پيدا کړئ.
- د زاويې مثلاثي نسبتونه په يوه مثلث کې وټاکئ.
- ايا د هرې زاويې مثلاثي نسبتونه په پورته شکل پيدا کولای شو؟

د پورتنۍ فعاليت پايله داسې بيانوو:

پايله:

د ځينو زاويو مثلاثي نسبتونه کولای شو په آساني سره په لاس راوړو خو د يو شمېر نورو زاويو د مثلاثي نسبتونو محاسبه گران دی نو ددې کار لپاره د ځينو پوهانو لخوا مثلاثي جدولونه د خاصو فورمولونو په واسطه جوړ شوي چې ددې ټوله جدول په مرسته د هرې زاويې مثلاثي نسبتونه پيدا کولای شو.

د يادونې وړ ده چې د جدول په ترتيب کې په يوه قايم الزويه مثلث کې د θ او $(\pi - \theta)$ يا $(90 - \theta)$ زاويو د اړيکو څخه گټه اخيستل شوی ده.

مثنائی جدول

θ	SIN θ	Cos θ	TAN θ	Cot θ	Cot θ	θ
0° 00'	0.0000	1.0000	0.0000	∞		90° 00'
10	0.0029	1.0000	0.0029	343.77		50
20	0.0058	1.0000	0.0058	171.89		40
30	0.0087	1.0000	0.0087	114.59		30
40	0.0116	0.9999	0.0116	85.940		20
50	0.0145	0.9999	0.0145	68.750		10
1° 00'	0.0175	0.9998	0.0175	57.290		89° 00'
10	0.0204	0.9998	0.0204	49.104		50
20	0.0233	0.9997	0.0233	42.964		40
30	0.0262	0.9997	0.0262	38.188		30
40	0.0291	0.9996	0.0291	34.368		20
50	0.0320	0.9995	0.0320	31.242		10
2° 00'	0.0349	0.9994	0.0349	28.636		88° 00'
10	0.0378	0.9993	0.0378	26.432		50
20	0.0407	0.9992	0.0407	24.542		40
30	0.0436	0.9990	0.0437	22.904		30
40	0.0465	0.9989	0.0466	21.470		20
50	0.0494	0.9988	0.0495	20.206		10
3° 00'	0.0523	0.9986	0.0524	19.081		87° 00'
10	0.0552	0.9985	0.0553	18.075		50
20	0.0581	0.9983	0.0582	17.169		40
30	0.0610	0.9981	0.0612	16.350		30
40	0.0640	0.9980	0.0641	15.605		20
50	0.0669	0.9978	0.0670	14.924		10
4° 00'	0.0698	0.9976	0.0699	14.301		86° 00'
10	0.0727	0.9974	0.0729	13.727		50
20	0.0756	0.9971	0.0758	13.197		40
30	0.0785	0.9969	0.0787	12.706		30
40	0.0814	0.9967	0.0816	12.251		20
50	0.0843	0.9964	0.0846	11.826		10
5° 00'	0.0872	0.9962	0.0875	11.430		85° 00'
10	0.0901	0.9959	0.0904	11.059		50
20	0.0929	0.9957	0.0934	10.712		40
30	0.0958	0.9954	0.0963	10.385		30
40	0.0987	0.9951	0.0992	10.078		20
50	0.1016	0.9948	0.1022	9.7882		10

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
6° 00'	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	84° 00'
10	0.1074	0.9942	0.1080	9.2553	50
20	0.1103	0.9939	0.1110	9.0098	40
30	0.1132	0.9936	0.1139	8.7769	30
40	0.1161	0.9932	0.1169	8.5555	20
50	0.1190	0.9929	0.1198	8.3450	10
7° 00'	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	83° 00'
10	0.1248	0.9922	0.1257	7.9530	50
20	0.1276	0.9918	0.1287	7.7704	40
30'	0.1305	0.9914	0.1317	7.5958	30'
40	0.1334	0.9911	0.1346	7.4287	20
50	0.1363	0.9907	0.1376	7.2687	10
8° 00'	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	82° 00'
10	0.1421	0.9899	0.1435	6.9682	50
20	0.1449	0.9894	0.1465	6.8269	40
30	0.1478	0.9890	0.1495	6.6912	30
40	0.1507	0.9886	0.1524	6.5606	20
50	0.1536	0.9881	0.1554	6.4348	10
9° 00'	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	81° 00'
10	0.1593	0.9872	0.1614	6.1970	50
20	0.1622	0.9868	0.1644	6.0844	40
30	0.1650	0.9863	0.1673	5.9758	30
40	0.1679	0.9858	0.1703	5.8708	20
50	0.1708	0.9853	0.1733	5.7694	10
10° 00'	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	80° 00'
10	0.1765	0.9843	0.1793	5.5764	50
20	0.1794	0.9838	0.1823	5.4845	40
30	0.1822	0.9833	0.1853	5.3955	30
40	0.1851	0.9827	0.1883	5.3093	20
50	0.1880	0.9822	0.1914	5.2257	10
11° 00'	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	79° 00'
10	0.1937	0.9811	0.1974	5.0658	50
20	0.1965	0.9805	0.2004	4.9894	40
30	0.1994	0.9799	0.2035	4.9152	30
40	0.2022	0.9793	0.2065	4.8430	20
50	0.2051	0.9787	0.2095	4.7729	10



θ	Sin θ	Cos θ	TAN θ	Cor θ	θ
12° 00'	0.2070	0.9781	0.2126	4.7046	78° 00'
10	0.2108	0.9775	0.2156	4.6582	50
20	0.2136	0.9769	0.2186	4.5736	40
30	0.2164	0.9763	0.2217	4.5107	30
40	0.2193	0.9757	0.2247	4.4494	20
50	0.2221	0.9750	0.2278	4.3897	10
13° 00'	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	77° 00'
10	0.2278	0.9737	0.2339	4.2747	50
20	0.2306	0.9730	0.2370	4.2193	40
30	0.2334	0.9724	0.2401	4.1653	30
40	0.2363	0.9717	0.2432	4.1126	20
50	0.2391	0.9710	0.2462	4.0611	10
14° 00'	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	76° 00'
10	0.2447	0.9696	0.2524	3.9617	50
20	0.2476	0.9689	0.2555	3.9136	40
30	0.2504	0.9681	0.2586	3.8667	30
40	0.2532	0.9674	0.2617	3.8208	20
50	0.2560	0.9667	0.2648	3.7760	10
15° 00'	0.2588	0.9660	0.2679	3.7321	75° 00'
10	0.2616	0.9653	0.2711	3.7321	50
20	0.2644	0.9644	0.2742	3.6870	40
30	0.2672	0.9636	0.2773	3.6470	30
40	0.2700	0.9628	0.2805	3.6059	20
50	0.2728	0.9621	0.2836	3.5656	10
16° 00'	0.2756	0.9613	0.2867	3.5261	74° 00'
10	0.2784	0.9605	0.2899	3.4874	50
20	0.2812	0.9596	0.2931	3.4485	40
30	0.2840	0.9588	0.2962	3.4124	30
40	0.2868	0.9580	0.2994	3.3759	20
50	0.2896	0.9572	0.3026	3.3402	10
17° 00'	0.2924	0.9563	0.3057	3.3052	73° 00'
10	0.2952	0.9555	0.3089	3.2709	50
20	0.2979	0.9546	0.3121	3.2371	40
30	0.3007	0.9537	0.3153	3.2041	30
40	0.3035	0.9528	0.3185	3.1716	20
50	0.3062	0.9520	0.3217	3.1397	10
18° 00'	0.3090	0.9511	0.3249	3.1084	72° 00'
10	0.3118	0.9502	0.3281	3.0777	50
20	0.3145	0.9492	0.3314	3.0475	40
30	0.3173	0.9483	0.3346	3.0178	30
40	0.3201	0.9474	0.3378	2.9887	20
50	0.3228	0.9465	0.3411	2.9600	10
19° 00'	0.3256	0.9455	0.3443	2.9319	71° 00'
10	0.3283	0.9446	0.3476	2.9042	50
20	0.3311	0.9436	0.3508	2.8770	40
30	0.3338	0.9426	0.3541	2.8502	30
40	0.3365	0.9417	0.3574	2.8239	20
50	0.3393	0.9407	0.3607	2.7980	10
20° 00'	0.3420	0.9397	0.3640	2.7725	70° 00'
10	0.3448	0.9387	0.3673	2.7475	50
20	0.3475	0.9377	0.3706	2.7228	40
30	0.3502	0.9367	0.3739	2.6985	30
40	0.3529	0.9356	0.3772	2.6746	20
50	0.3557	0.9346	0.3805	2.6511	10
21° 00'	0.3584	0.9336	0.3839	2.6279	69° 00'
10	0.3611	0.9325	0.3872	2.6051	50
20	0.3638	0.9315	0.3906	2.5826	40
30	0.3665	0.9304	0.3939	2.5605	30
40	0.3692	0.9293	0.3973	2.5386	20
50	0.3719	0.9283	0.4006	2.5172	10
22° 00'	0.3746	0.9272	0.4040	2.4960	68° 00'
10	0.3773	0.9261	0.4074	2.4751	50
20	0.3800	0.9250	0.4108	2.4549	40
30	0.3827	0.9239	0.4142	2.4342	30
40	0.3854	0.9228	0.4176	2.4142	20
50	0.3881	0.9216	0.4210	2.3945	10

θ	Sin θ	Cos θ	TAN θ	COT θ	θ
23° 00'	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	67° 00'
10	0.3934	0.9194	0.4279	2.3369	50
20	0.3961	0.9182	0.4314	2.3183	40
30	0.3987	0.9171	0.4348	2.2998	30
40	0.4014	0.9159	0.4383	2.2817	20
50	0.4041	0.9147	0.4417	2.2637	10
24° 00'	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	66° 00'
10	0.4094	0.9124	0.4487	2.2286	50
20	0.4120	0.9112	0.4522	2.2113	40
30	0.4147	0.9100	0.4557	2.1943	30
40	0.4173	0.9088	0.4592	2.1775	20
50	0.4200	0.9075	0.4628	2.1609	10
25° 00'	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	65° 00'
10	0.4253	0.9051	0.4699	2.1283	50
20	0.4279	0.9038	0.4734	2.1123	40
30	0.4305	0.9026	0.4770	2.0965	30
40	0.4331	0.9013	0.4806	2.0809	20
50	0.4358	0.9001	0.4841	2.0655	10
26° 00'	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	64° 00'
10	0.4410	0.8975	0.4913	2.0353	50
20	0.4436	0.8962	0.4950	2.0204	40
30	0.4462	0.8949	0.4986	2.0057	30
40	0.4488	0.8936	0.5022	1.9912	20
50	0.4514	0.8923	0.5059	1.9768	10
27° 00'	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	63° 00'
10	0.4566	0.8897	0.5132	1.9486	50
20	0.4592	0.8884	0.5169	1.9347	40
30	0.4617	0.8870	0.5206	1.9210	30
40	0.4643	0.8857	0.5243	1.9074	20
50	0.4669	0.8843	0.5280	1.8940	10
28° 00'	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	62° 00'
10	0.4720	0.8816	0.5354	1.8676	50
20	0.4746	0.8802	0.5392	1.8546	40
30	0.4772	0.8788	0.5430	1.8418	30
40	0.4797	0.8774	0.5467	1.8291	20
50	0.4823	0.8760	0.5505	1.8165	10
29° 00'	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	61° 00'
10	0.4874	0.8732	0.5581	1.7917	50
20	0.4899	0.8718	0.5619	1.7796	40
30	0.4924	0.8704	0.5658	1.7675	30
40	0.4950	0.8689	0.5696	1.7556	20
50	0.4975	0.8675	0.5735	1.7437	10
30° 00'	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	60° 00'
10	0.5025	0.8646	0.5812	1.7205	50
20	0.5050	0.8631	0.5851	1.7090	40
30	0.5075	0.8616	0.5890	1.6977	30
40	0.5100	0.8601	0.5930	1.6864	20
50	0.5125	0.8587	0.5969	1.6753	10
31° 00'	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	59° 00'
10	0.5175	0.8557	0.6048	1.6534	50
20	0.5200	0.8542	0.6088	1.6426	40
30	0.5225	0.8526	0.6128	1.6319	30
40	0.5250	0.8511	0.6168	1.6212	20
50	0.5275	0.8496	0.6208	1.6107	10
32° 00'	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	58° 00'
10	0.5324	0.8465	0.6289	1.5900	50
20	0.5348	0.8450	0.6330	1.5798	40
30	0.5373	0.8434	0.6371	1.5697	30
40	0.5398	0.8418	0.6412	1.5597	20
50	0.5422	0.8403	0.6453	1.5497	10
33° 00'	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	57° 00'
10	0.5471	0.8371	0.6536	1.5301	50
20	0.5495	0.8355	0.6577	1.5204	40
30	0.5519	0.8339	0.6619	1.5108	30
40	0.5544	0.8323	0.6661	1.5013	20
50	0.5568	0.8307	0.6703	1.4919	10

θ	SIN θ	COS θ	TAN θ	COT θ	SIN θ	COS θ	TAN θ	COT θ	θ
34° 00'	0.55992	0.82930	0.67445	1.48296	56° 00'	0.82930	0.67445	1.48296	34° 00'
10	0.5616	0.8274	0.6787	1.4733	50	0.8258	0.6830	1.4641	50
20	0.5640	0.8258	0.6830	1.4641	40	0.8241	0.6873	1.4550	40
30	0.5664	0.8241	0.6873	1.4550	30	0.8225	0.6916	1.4460	30
40	0.5688	0.8225	0.6916	1.4460	20	0.8208	0.6959	1.4370	20
50	0.5712	0.8208	0.6959	1.4370	10	0.8192	0.7002	1.4281	10
35° 00'	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	55° 00'	0.8192	0.7002	1.4281	35° 00'
10	0.5760	0.8175	0.7046	1.4193	50	0.8175	0.7089	1.4106	50
20	0.5783	0.8158	0.7089	1.4106	40	0.8141	0.7133	1.4019	40
30	0.5807	0.8141	0.7133	1.4019	30	0.8124	0.7177	1.3934	30
40	0.5831	0.8124	0.7177	1.3934	20	0.8107	0.7221	1.3848	20
50	0.5854	0.8107	0.7221	1.3848	10	0.8090	0.7265	1.3764	10
36° 00'	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	54° 00'	0.8090	0.7265	1.3764	36° 00'
10	0.5901	0.8073	0.7310	1.3680	50	0.8073	0.7355	1.3697	50
20	0.5925	0.8056	0.7355	1.3697	40	0.8056	0.7400	1.3614	40
30	0.5948	0.8039	0.7400	1.3514	30	0.8021	0.7445	1.3432	30
40	0.5972	0.8021	0.7445	1.3432	20	0.8004	0.7490	1.3351	20
50	0.5995	0.8004	0.7490	1.3351	10	0.7986	0.7536	1.3270	10
37° 00'	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	53° 00'	0.7986	0.7536	1.3270	37° 00'
10	0.6041	0.7969	0.7581	1.3190	50	0.7951	0.7627	1.3111	50
20	0.6065	0.7951	0.7627	1.3111	40	0.7934	0.7673	1.3032	40
30	0.6088	0.7934	0.7673	1.3032	30	0.7916	0.7720	1.2954	30
40	0.6111	0.7916	0.7720	1.2954	20	0.7898	0.7766	1.2876	20
50	0.6134	0.7898	0.7766	1.2876	10	0.7880	0.7813	1.2799	10
38° 00'	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	52° 00'	0.7880	0.7813	1.2799	38° 00'
10	0.6180	0.7862	0.7862	1.2723	50	0.7862	0.7907	1.2617	50
20	0.6202	0.7844	0.7907	1.2617	40	0.7844	0.7954	1.2572	40
30	0.6225	0.7826	0.7954	1.2572	30	0.7826	0.8002	1.2497	30
40	0.6248	0.7808	0.8002	1.2497	20	0.7790	0.8050	1.2423	20
50	0.6271	0.7790	0.8050	1.2423	10	0.7771	0.8098	1.2349	10
39° 00'	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	51° 00'	0.7771	0.8098	1.2349	39° 00'
10	0.6316	0.7753	0.8146	1.2276	50	0.7753	0.8195	1.2203	50
20	0.6338	0.7735	0.8195	1.2203	40	0.7716	0.8243	1.2131	40
30	0.6361	0.7716	0.8243	1.2131	30	0.7698	0.8292	1.2059	30
40	0.6383	0.7698	0.8292	1.2059	20	0.7679	0.8342	1.1988	20
50	0.6406	0.7679	0.8342	1.1988	10	0.7660	0.8391	1.1918	10
40° 00'	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	50° 00'	0.7660	0.8391	1.1918	40° 00'
10	0.6450	0.7642	0.8441	1.1847	50	0.7642	0.8491	1.1778	50
20	0.6472	0.7623	0.8491	1.1778	40	0.7604	0.8541	1.1708	40
30	0.6494	0.7604	0.8541	1.1708	30	0.7585	0.8591	1.1640	30
40	0.6517	0.7585	0.8591	1.1640	20	0.7566	0.8642	1.1571	20
50	0.6539	0.7566	0.8642	1.1571	10	0.7547	0.8693	1.1504	10
41° 00'	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	49° 00'	0.7547	0.8693	1.1504	41° 00'
10	0.6583	0.7528	0.8744	1.1436	50	0.7528	0.8796	1.1436	50
20	0.6604	0.7509	0.8796	1.1369	40	0.7490	0.8847	1.1369	40
30	0.6626	0.7490	0.8847	1.1303	30	0.7470	0.8899	1.1297	30
40	0.6648	0.7470	0.8899	1.1237	20	0.7451	0.8952	1.1237	20
50	0.6670	0.7451	0.8952	1.1171	10	0.7431	0.9004	1.1171	10
42° 00'	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	48° 00'	0.7431	0.9004	1.1106	42° 00'
10	0.6713	0.7412	0.9057	1.1041	50	0.7392	0.9110	1.1041	50
20	0.6734	0.7392	0.9110	1.0977	40	0.7373	0.9163	1.0977	40
30	0.6756	0.7373	0.9163	1.0913	30	0.7353	0.9217	1.0913	30
40	0.6777	0.7353	0.9217	1.0850	20	0.7333	0.9271	1.0850	20
50	0.6799	0.7333	0.9271	1.0786	10	0.7314	0.9325	1.0786	10
43° 00'	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	47° 00'	0.7314	0.9325	1.0724	43° 00'
10	0.6841	0.7294	0.9380	1.0661	50	0.7274	0.9435	1.0661	50
20	0.6862	0.7274	0.9435	1.0599	40	0.7254	0.9490	1.0599	40
30	0.6884	0.7254	0.9490	1.0538	30	0.7234	0.9545	1.0538	30
40	0.6905	0.7234	0.9545	1.0477	20	0.7214	0.9601	1.0477	20
50	0.6926	0.7214	0.9601	1.0416	10	0.7193	0.9657	1.0416	10
44° 00'	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	46° 00'	0.7193	0.9657	1.0355	44° 00'
10	0.6967	0.7173	0.9713	1.0295	50	0.7153	0.9770	1.0295	50
20	0.6988	0.7153	0.9770	1.0235	40	0.7133	0.9827	1.0235	40
30	0.7009	0.7133	0.9827	1.0176	30	0.7112	0.9884	1.0176	30
40	0.7030	0.7112	0.9884	1.0117	20	0.7092	0.9942	1.0117	20
50	0.7050	0.7092	0.9942	1.0058	10	0.7071	1.0000	1.0058	10
45° 00'	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	45° 00'	0.7071	1.0000	1.0000	45° 00'

فعالیت

- د جدول لومړي پرته لیکه یا سطر او ولاړه لیکه یا ستون څه راښيي؟
- د جدول د کښي او ښي خوا لومړي ولاړه لیکه یا ستون په کومه زاویه پیل او په کومه زاویه ختم شوی؟
- د جدول لومړی او وروستی کرښه څه راښيي؟
- که یوه زاویه 45° او یا له هغه څخه کوچنی وي هغه د جدول کښه خوا کې د درجې په ستون کې پیدا کوو او مثلثي نسبت یې له پورته خوا څخه لولو یا له ښکته خوا څخه او که زاویه له 45° څخه لویه وي څه کوو؟

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

که زاویه له 45° څخه کوچنی وي هغه د جدول د کښي خوا په لومړی ولاړه لیکه ستون کې، او مثلثي نسبت یې په پورته خوا لومړی پرته لیکه یا سطر کې گورو. که زاویه له 45° څخه لویه وي هغه زاویه د جدول دښی خوا په لومړی ولاړه لیکه یا ستون کې، او مثلثي نسبت یې په ښکته خوا څخه پورته خواته په وروستی پرته لیکه یا سطر کې پیدا کوو. چې د پام وړ زاوې د اړوند کرښي او د مثلثي نسبت د اړوندې ولاړې لیکې یا ستون پرېکړه د زاوې مطلوب نسبت راکوي.

لومړی مثال: د $30^\circ 10'$ کوساین پیدا کړئ.

حل: لومړی د جدول د کښي خوا په لومړی ولاړه لیکه یا ستون کې مطلوبه زاویه ($30^\circ 10'$) پیدا کوو او د جدول په لومړی کرښه (سطر) کې مطلوب مثلثي نسبت پیدا کوو دې ولاړې او پرته لیکې (سطر او ستون) پرېکړه د $0,8646$ عدد راکوي چې دا د ($30^\circ 10'$) زاوې کوساین دی.

$$\cos(30^\circ 10') = ? \quad \begin{array}{c} \text{cos} \\ \vdots \\ 0,8646 \end{array}$$

دویم مثال: د $84^\circ 50'$ سین وټاکئ.

حل: لومړی د جدول د ښي خوا په لومړی ستون کې د پام وړ زاویه $84^\circ 50'$ پیدا کوو او د جدول په وروستی کرښه (سطر) کې د پام وړ مثلثي نسبت پیدا کوو دې پرته او ولاړو لیکو (سطر او ستون) پرېکړه د ($0,9959$) عدد راکوي چې د $84^\circ 50'$ زاویه کوساین دی.

$$\sin 84^\circ 50' = ? \quad \begin{array}{c} \text{sin} \\ \vdots \\ 0,9959 \end{array}$$

يادونه
هغه جدول چې تر اوسه مو ترې کار واخسته د هغو زاويو مثلثي نسبتونه چې توپير يې لس دقيقې وي راښيي د هرې زاوې مثلثي نسبت د دې جدول په مرسته نشو ټاکلې، نو اوس غواړو داسې طريقه بيان کړو چې ددې جدول په مرسته د هرې زاوې مثلثي نسبتونه په لاس راوړو چې دا طريقه د انټرپوليشن Interpolation په نامه يادېږي او په لاندي مثالونو کې يې ترې کار اخلو:

دريم مثال: د $\tan 42^\circ 35'$ زاوې تانجنټ په لاس راوړئ.

حل: په جدول کې د $42^\circ 35'$ زاوې تانجنټ نشته خو د $42^\circ 40'$ او $42^\circ 30'$ زاويو تانجنټونه په جدول کې شته دی چې د هغوی په مرسته $42^\circ 35'$ زاوې مثلثي نسبت داسې پيدا کوو:

$\tan 42^\circ 40'$	5					
$\tan 42^\circ 35'$	x	= 0,9217	x	10	=	0,0054
$\tan 42^\circ 30'$	= 0,9163	5'	:	x	:	x

د دو زاويو توپير

د مثلثي نسبتونو توپير

ليدل کېږي چې د لومړی او دويمې زاوې فرق 5 او د لومړی او دريمې زاوې فرق 10 په همدې ترتيب سره د \tan فرق يې X او 0,0054 دی يعنې که زاويه د 10 په اندازه فرق ولري نو \tan يې د 0,0054 په اندازه فرق کوي او که زاويه د 5 په اندازه فرق وکړي نو \tan د X په اندازه فرق کوي چې د تناسب په مرسته لیکو:

$$\frac{5}{10} = \frac{x}{0,0054} \Rightarrow x = 0,0027$$

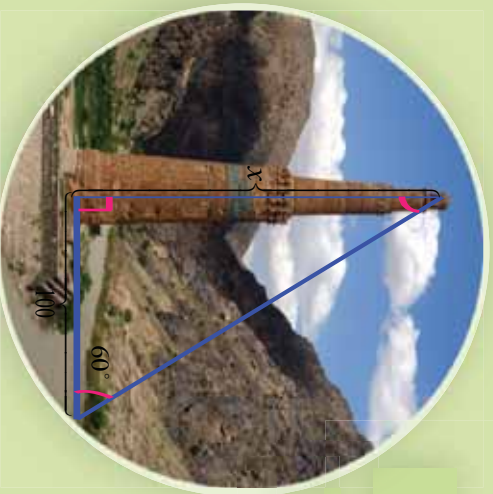
د X قيمت د کوچنی زاويو له \tan سره جمع کوو:
 $0,9163 + 0,0027 = 0,9190$
 $\tan 42^\circ 35' = 0,9190$

يو نېټې

د مثلثي جدول څخه په گڼې اخيستي سره د $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ مثلثي نسبتونه د $\alpha = 35^\circ 20'$ او $\alpha = 75^\circ 10'$ زاويو پيدا کړئ.

د قائم الزاويه مثلثونو حل

مخامخ شکل ته پام وکړئ د ځلي (منان)
جگړالی څنگه پيدا کولی شئ.



فعالیت

- که د یوه قائم الزاویه مثلث یوه زاویه $40^\circ 30'$ وي بله زاویه یې پیدا کړئ.
- که د یوه قائم الزاویه مثلث یوه زاویه 29° او وتر یې $25cm$ وي د مثلث مجهول عناصر پیدا کړئ.
- که د قائم الزاویه مثلث د یوې ضلعي یا یوه ضلعه او یوه حاده زاویه یې معلومه وي د مثلث نور عناصر څنگه پیدا کولای شو.

د پورتنۍ فعالیت پایله داسې بیانوو:

په هر قائم الزاویه مثلث کې که یوه حاده زاویه یا دوه ضلعي معلومې وي د مثلث پاتې اجزایې د مثلثي توابعو په مرسته په لاس راوړو.

مثال: د یوه قائمه الزاویه مثلث یوه حاده زاویه 40° که ددې زاويې مجاور ضلعه 120 واحد د اوږوالي وي نوموړی مثلث حل کړئ.

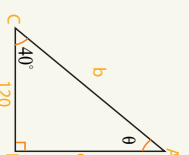
حل: څرنگه چې د مثلث یوه زاویه او دوه ضلعي نا معلومې وي نو ددې معلومو اجزاو په مرسته نا معلومې اجزاوې په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$1, \quad \theta = 90^\circ - \hat{c} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

$$2, \quad \tan 40^\circ = \frac{c}{120} \Rightarrow c = 120 \tan 40^\circ = 120 \cdot 0,8391 = 100,692$$

$$3, \quad \cos 40^\circ = \frac{120}{b} \Rightarrow b = \frac{120}{\cos 40^\circ} = \frac{120}{0,7660} = 156,6579$$

$$b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{(120)^2 + (156,692)^2} = 156,6579$$



دویم مثال: د یوه قائمه الزاویه مثلث وتر 49.7 cm او یوه قائمه ضلعه یې 25 cm وي نوموړی مثلث حل کړئ.

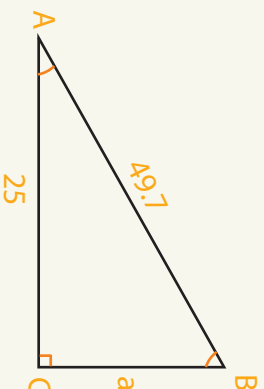
حل: لیدل کېږي چې د مثلث دوه عناصر معلوم وي نو نا معلوم عناصر یې داسې پیدا کوو:

$$1) \cos \hat{A} = \frac{25}{49.7} = 0.503$$

$$\cos \hat{A} = 0.503 \Rightarrow \hat{A} = 59.8^\circ = 59^\circ 48'$$

$$2) B = 90^\circ - \hat{A} \Rightarrow B = 90 - 59.8^\circ = 30.2^\circ = 30^\circ 12'$$

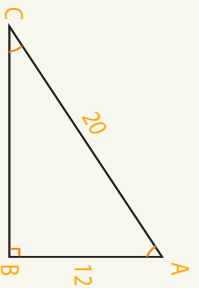
$$3) \tan \hat{A} = \frac{a}{25} \Rightarrow a = \tan \hat{A} \cdot 25 = 25 \cdot 1.7182 = 43$$



پوښتنې

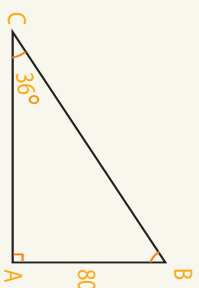
1- د یوه قائمه الزاویه مثلث یوه حاده زاویه $50^\circ 38'$ او د دې زاویې مجاوره ضلعه 311 واحده ده نو مورې مثلث حل کړئ.

2- په لاندې شکلونو کې مجهول عناصر وټاکئ.



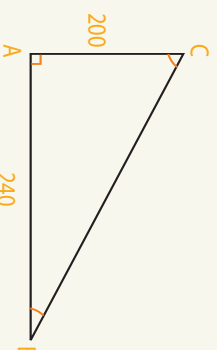
$$x = ?$$

$$\hat{A} = ?$$



$$x = ?$$

$$\hat{B} = ?$$

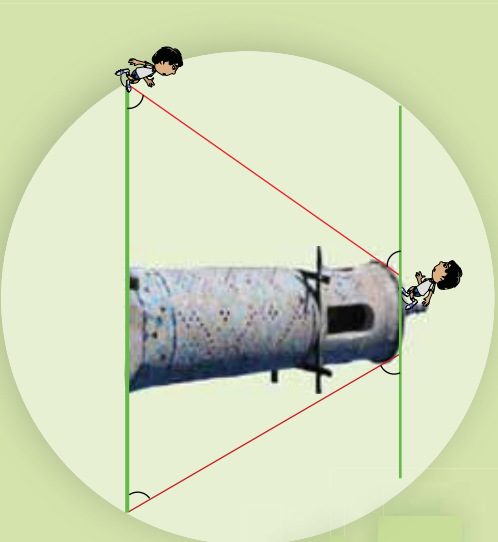


$$\hat{B} = ?$$

$$\overline{BC} = ?$$

د میل یا ارتفاع او تنزیل زاوې

مخامخ شکل ته پام وکړئ د میل او تنزیل زاوې ونښایئ.



فعالیت

- که احمد په یو جگوالی پروت وي د لید کرښه د افقي سطحې سره څه ډول زاویه جوړوي او دا زاویه په کوم نوم یا دېرې(د تحول ساحه بې کومه فاصله ده)؟
- که یو شی په یوه ښکته ځای کې پروت وي د لید کرښه د افقي سطحې سره څه ډول زاویه جوړوي او دا زاویه په کوم نامه یا دېرې(د تحول ساحه بې په کومه فاصله ده)؟

ډیرته فعالیت پایله داسې بیانو:

1 - د ارتفاع زاویه Angle of Elevation

که یو شی په یوه ارتفاع پروت وي نو د لید کرښه له افق سره یوه زاویه جوړوي چې د جگوالی زاویه بلل کېږي لکه ورکړل شوي شکل کې د α زاویه.

د افق کرښه

β

2 - د تنزیل زاویه Angle of Depression

که یو شی په ټیټ ځای کې پروت وي د لید کرښه له شی سره یوه زاویه جوړوي چې د تنزیل زاویه بلل کېږي لکه په شکل کې د β زاویه.

د لید کرښه

α

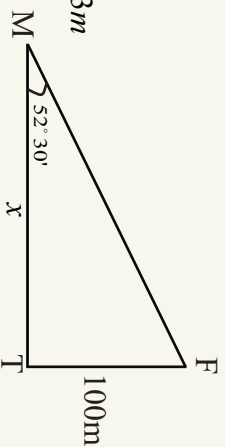
P_2

د افق کرښه

نومړی مثال: د $M\hat{T}T$ قائمه الزاويه مثلث کې د جگوالی يا ارتفاع زاويه $30^\circ 52'$ که د مثلث جگوالی $100m$ وي د مثلث وتر او قاعده يې پيدا کړئ.

$$\tan 52^\circ 30' = \frac{\overline{TF}}{\overline{MF}} = \frac{100}{x}$$

$$x = \frac{100}{\tan 52^\circ 30'} = \frac{100}{1.3092} \Rightarrow x = 76.73m$$



دویم مثال: د یوه کاغذ پران ریټنگ (د تار اوز دوالی $120m$ وي ددې کاغذ پران ریټنگ) د جگوالی يا ارتفاع زاويه 45° ده د کاغذ پران ریټنگ (جگوالی وټاکئ.

$$\frac{h}{120} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow h = 60 \cdot \sqrt{2}m$$

درېم مثال: یو نوري (ترسد) برج له بحر څخه f 120 جگوالی لري هغه نرولي زاويه چې د برج نه یو بیړی (کنستی) لیدل کېږي 15° در چې ده نوموړي بیړی له برج نه څومره فاصله لري .

$$\cot A = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

$$\cot 15 = \frac{\overline{AC}}{120}$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = 120 \cdot \cot 15^\circ = 120 \cdot 3.7 = 444 \text{ ft}$$

پوښتنې

- 1- د هغه ونې ارتفاع پيدا کړئ چې د ارتفاع زاويه يې له 20° څخه 40° واوړي نو په هغه صورت کې به لیدونکی 75 ft ونې ته نږدی شي.
- 2- یوه ونه باد له پورته خوا څخه داسې ماته کړې چې د ونې تنه او ماته برخه يې یو قائمه الزاويه مثلث له څمکې سره جوړه کړې که ماته برخه له څمکې سره 50° زاويه جوړه کړې وي او د ونې تنه 20 ft وي د ونې جگوالی پيدا کړئ.

مثالتي معادلي

مخامخ مثالتي اړيکي له څه سره مساوي دي
وضاحت ورکړئ.



پوهېږو چې مطابقت هغه مساوات دی چې د متحول د ټولو قيمتونو لپاره د مساوات دواړه خواوي سره برابري شي او معادله هغه مساوات دی چې د متحول د ځينې قيمتونو لپاره د مساوات دواړه خواوي سره برابري شي.

فعاليت

- د فيثاغورث د قضیې او مثالات ترمنځ اړيکه وښئ، ايا دا اړيکه مطابقت دی که معادله؟
- مطابقت او معادله څه توپير لري، دا توپير په مثالتي اړيکو کې وڅېړئ.
- د $\sin x = 1$ رابطه کې x مجهول دی که $\sin x$
- داسې قوسونه يا زاويې چې يو شان مثالتي نسبتونه ولري وښئ.

د پورته فعاليت پايله په يو تعريف کې، په لاندې ډول بيانوو:

تعريف:

- هره معادله چې په هغې کې يو يا څو مثالتي نسبتونه گډون ولري مثالتي معادله بلل کېږي لکه $\sin x - 1 = 0$ يا $2 \cos x - 1 = 0$
- هغه قوس يا زاويه چې د هغې مثالتي نسبت مطلوب وي اصلي مجهول بلل کېږي لکه په پورتيو معادلو کې x اصلي مجهول دی.
 - د اصلي مجهول مثالتي نسبت ته فرعي مجهول وايي لکه په پورتيو معادلو کې $\cos x$ او $\sin x$ فرعي مجهول دی.
- هغه زاويې چې مثالتي نسبتونه يې يو شان دي پر يو ډيگ توابع بلل کېږي، چې فورمولونه په

- لاندي ډول دي:
- 1- د $\sin \theta$ مثلثي نسبت عمومي فورمول $x = m\pi + (-1)^n \cdot \theta, n = 0,1,2, \dots$
- 2- د $\cos \theta$ مثلثي نسبت عمومي فورمول $x = 2m\pi \pm \theta, n = 0,1,2, \dots$
- 3- د $\tan \theta$ مثلثي نسبت عمومي فورمول $x = m\pi + \theta, n = 0,1,2, \dots$

د مثلثي معادلو د حل لپاره په لاندي ډول عمل کوو:

- 1- د الجبري معادلو د حل په مرسته د فرعي مجهول قيمت په لاس راوړو.
- 2- د مثلثي نسبتونو د جدول په مرسته د اصلي مجهول قيمت په لاس راوړو.
- 3- څرنگه چې مثلثي معادلي پرېوډيک معادلي دي نو ډېر حلونه لري نو د هغو زاويو د فورمولونو په مرسته چې يوشان نسبتونه لري د معادلي حلونه دي.

مثال: د $2 \sin x - \sqrt{2} = 0$ او $\cos x + \frac{1}{2} = 1$ مثلثي معادلو حلونه پيدا کړئ.

$$2 \sin x - \sqrt{2} = 0 \quad \cos x + \frac{1}{2} = 1$$

$$2 \sin x = \sqrt{2} \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \quad x = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$x = m\pi + (-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right) \quad x = 2m\pi \pm \theta = 2m\pi \pm \frac{\pi}{6}$$

پوښتي

دي لاندي معادلو حل پيدا کړئ:

a) $\sqrt{3} \cot x - 1 = 0$ b) $2 \sin 3x + \sqrt{3} = 0$ c) $2 \cos 4x - \sqrt{2} = 0$

- مثلثات له دوو یوناني کلمو څخه چې تراگون او متری چې د مثلث د اندازه کولو معنی لري جوړ شوی دی او له هغه علم څخه عبارت دی چې د مثلث د عناصرو ترمینځ اړیکې څیړي. که په یوه ضلعو د مثلث یوه موازي کرښه رسم شي پرېکړې ضلعي په مناسبو ټوټو وېشي دا قضیه د تالس د قضیې په نامه یادېږي.
- په هر قایم الزاویه مثلث کې د حاده زاویې د مخامخ ضلعي اوږدوالی دوتر په اوږدوالي د حاده زاویې د سین sine په نامه یادېږي.
- په هر قایم الزاویه مثلث کې د حاده زاویې د گاونډي یا مجاورې ضلعي اوږدوالی د وتر په اوږدوالي د حاده زاویې د کوساین cosine په نامه یادېږي.
- په هر قایم الزاویه مثلث کې د حاده زاویې د مخامخ څنډې یا ضلعي اوږدوالی د گاونډي یا مجاورې څنډې یا ضلعي په اوږدوالي د حاده زاویې د tangent په نامه یادېږي.
- په هر قایم الزاویه مثلث کې د حاده زاویې د $\sin \theta$ او $\cos \theta$ نسبتونو نسبت د حاده زاویې د $\tan \theta$ په نامه یادېږي $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$.
- په هر قایم الزاویه مثلث کې د حاده زاویې د \cos او \sin نسبتونو نسبت د حاده زاویې د \cot په نامه یادېږي $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$.
- هغه زاویه لکه α چې مستقیمه کرښه یې د x محور له مثبت جهت سره جوړوي د میل زاویې په نامه یادېږي او د دې کرښې میل د $\tan \alpha$ سره مساوي ده $m = \tan \alpha$.
- په هر قایم الزاویه مثلث کې د $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ اړیکه رښتیا ده.
- د $\sin x$, $\cos x$ او $\tan x$ مثلثي نسبتونه پرته له زاویې معنا نلري.
- د $mx + b = y$ معادله کې m ، دهغه زاویې تانجنت دی چې مستقیمه کرښه یې د محور له مثبت جهت سره جوړوي او h د y محور سره د پریکړې ټکی دی.
- $\sin 30^\circ$ له $\cos 60^\circ$ سره برابر دی.
- $\sin 60^\circ$ له $\cos 30^\circ$ سره برابر دی.
- $\sin 45^\circ$ له $\cos 45^\circ$ برابر دی.

د څلورم څپرکي پوښتنې

• په لاندې سوالونو کې هر سوال ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي چې يو يې سم دی. سم ځواب په نښه کړئ.

1- د یوې حاده زاوېې $\sin \alpha$ عبارت له:

- (a) د حاده زاوېې د مخامخ ضلعي اوږدوالی
 دوتر اوږدوالی
 دوتر اوږدوالی
 د حاده زاوېې د گاونډي(مجاورې) ضلعي اوږدوالی
- (b) دوتر اوږدوالی
 دوتر اوږدوالی
 د حاده زاوېې د گاونډي(مجاورې) ضلعي اوږدوالی
 د حاده زاوېې د مخامخ ضلعي اوږدوالی
- (c) د حاده زاوېې د گاونډي(مجاورې) ضلعي اوږدوالی
 دوتر اوږدوالی
 دوتر اوږدوالی
 د حاده زاوېې د مخامخ ضلعي اوږدوالی

2- د $\tan \alpha$ نسبت مساوي دی په:

- (a) $\frac{\sin x}{\cos x}$ (b) $\frac{\cos x}{\sin x}$ (c) $\frac{1}{\sin x}$ (d) $\frac{1}{\cos x}$
- 3- د $2x - 3 = 2x - 3$ په معادله کې د مستقيمي کرنيې ميل عبارت له:
- (a) $\frac{3}{2}$ (b) -1 (c) 1 (d) a او b

4- د هغې مستقيمي کرنيې معادله چې د y محور په $(3, 0)$ کې پرېکړي او د x محور

له مثبت جهت سره 45° زاويه جوړه کړي برابر ده له:

- (a) $y = x + 3$ (b) $2y = 2x - 3$ (c) $2x - y = 0$ (d) هيڅ يو
- 5- د $\sin^2 30 + \cos^2 30$ افادي قيمت برابر دی له:
- (a) 1 (b) 2 (c) -2 (d) -1
- 6- $\sin 45^\circ$ او $\cos 45^\circ$ برابر دي له:

- (a) 1 (b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ (d) $\sqrt{2}$

7- د $\frac{\sin 30^\circ - \cos 60^\circ}{\cos 60^\circ + \sin 30^\circ}$ افادي قيمت برابر دي له:

- (a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) درې واړه ځوابونه سم دي.

• تش ځایونه په مناسبو بیانونو وکړئ.

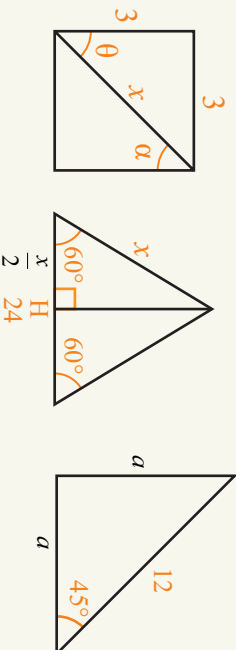
- 1- په یوه قائم الزویه مثلث کې د دوو نورو حاده زاویو مجموعه ده.
- 2- که د یوه مستطوي الضلاع مثلث یوه څنډه 10cm وي جگوالی یې دی.
- 3- د یو حاده زاویې سین جبارت له څخه جوړه شوی ده.
- 4- Trigonometry له دوو کلمو او څخه جوړه شوی ده.
- 5- $\tan \theta \cdot \cot \theta$ برابر په دی.

• د لاندې جملو څخه کومه سمه او کومه ناسمه ده، دسې په مخ کې د (س) توري او د ناسمې په مخ کې د (ن) توري ولیکي.

- 1- د $\sin x$ نسبت مساوي په دی.
- 2- $\sin 30^\circ$ او $\cos 60^\circ$ یو بل سره مساوي دي.
- 3- د $2x - 1 = 5x$ معادله کې د دې کرنيې میل $\frac{2}{5}$ دی.
- 4- د $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ نسبت د $\tan \theta$ سره برابر دی.
- 5- $1 + \cos^2 \theta$ برابر په $\sin^2 \theta$ دی.

• لاندې سوالونه حل کړئ.

1- په لاندې شکلونو کې د ورکړ شویو زاویو مثلثي نسبتونه پيدا کړئ.



-2 په لاندې سوالونو کې د A او B قيمتونه حساب کړئ.

- 1) $A = \cos 30^\circ - \sin 30^\circ$
- 2) $B = \cos 60^\circ - \sin 30^\circ$
- 3) $A = \tan 30^\circ - \tan 60^\circ$
- 4) $B = \cos 60^\circ + \sin 30^\circ$
- 5) $A = \frac{1}{2}(\tan 45^\circ - \cos 45^\circ)$
- 6) $B = \tan 45^\circ + \tan 60^\circ$
- 7) $A = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 60^\circ + \cos 45^\circ)$
- 8) $B = 2 - \frac{1}{2}(\sin 45^\circ - \cot 45^\circ)$
- 9) $A = \sin 45^\circ + \cos 30^\circ - \tan 45^\circ$

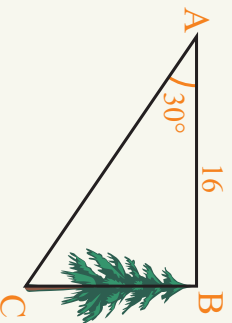
$$\frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{1 + \sin x \cos x} = \sin x - \cos x \text{ رابطه ثبوت کړئ.}$$

$$-4 \text{ که } \sin x = \frac{7}{12} \text{ وي او } \cos x \text{ پيدا کړئ.}$$

$$-5 \text{ که } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ وي او } \sin x \text{ پيدا کړئ.}$$

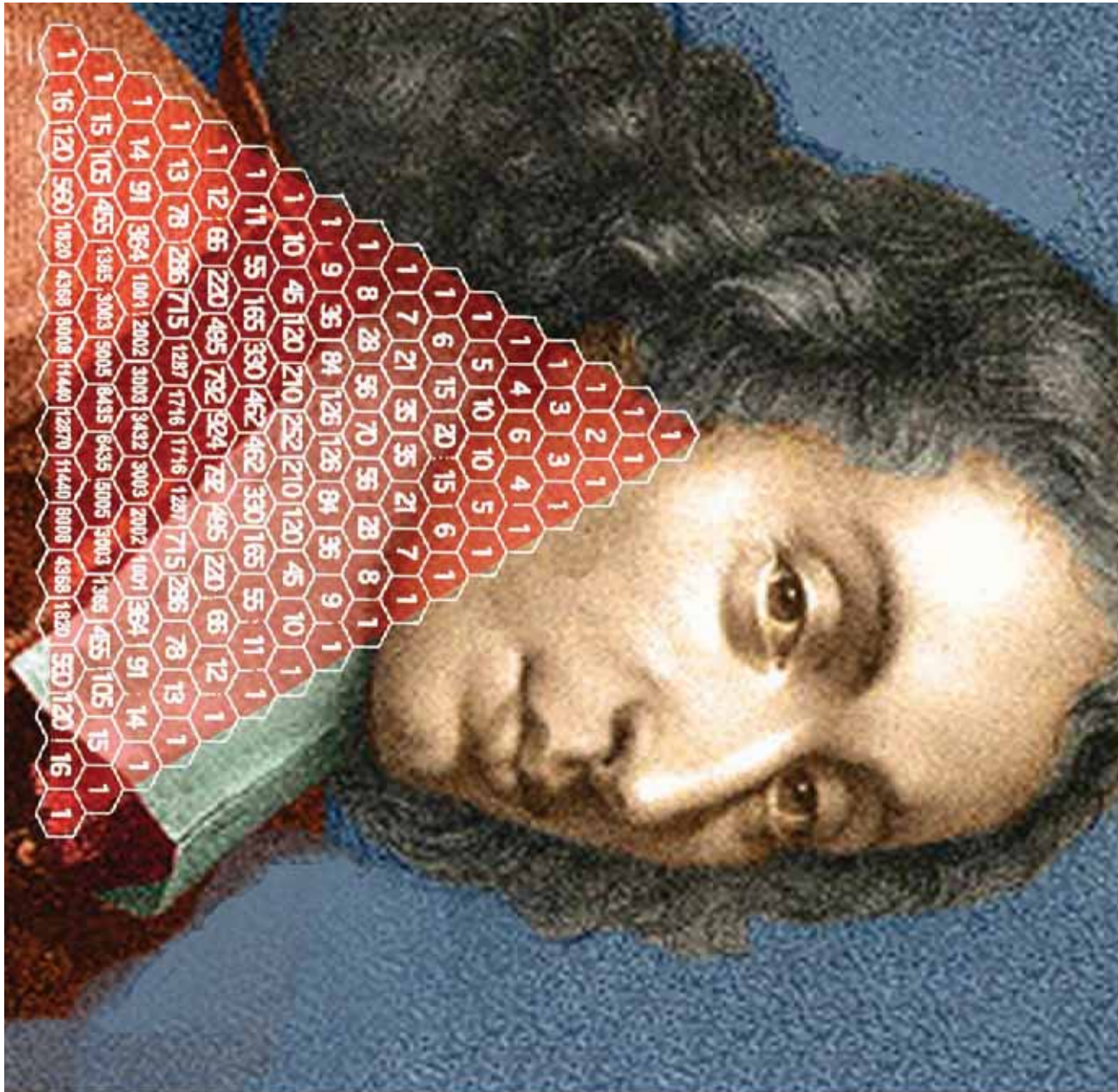
-6 که چېرې α زاويه صفر ته نږدې شي $\tan \alpha$ ، کوم عدد ته نږدې کېږي د شکل له مخې د خپلې وينا سمونالی وښئ.

-7 په لاندې شکل کې که $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ او \overline{AC} او \overline{BC} واټونه حساب کړئ.



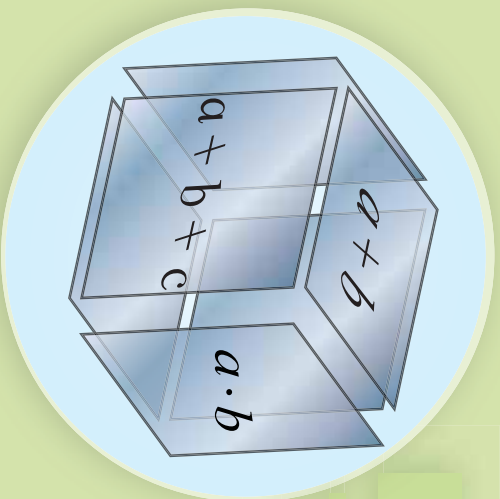
پنجم چیرگی چو جمله پی





الجبري افادي

د مخته‌څخه شکل په سطحو لیکل شویو الجبري افادو نومونه واخلئ.



فعالیت

لاندې افادي په پام کې ونیسئ:

a) $2x$ b) $\frac{1}{3}xy^3$ c) $\sqrt{2}xym'$ d) $9x^2$

e) $5x$ f) $2xy^3$ g) $3x^2$ h) $\frac{4x^2}{x-1}$

• یو بل ته ورته افادي په نښه کړئ.

• لاندې الجبري افادي تر ممکن حده ساده کړئ.

a) $2x + 6x^2 + \sqrt{2}xym^4$ b) $3x^2 + 6x^2$ c) $\frac{1}{3}xy^3 + 2x$ d) $\frac{1}{3}xy^3 + 2xy^3$

• هغه افادي چې نشي ساده کېدای، څنگه باید ولیکل شي، د هر یوې لپاره نوم لازم گنئ؟

• په هر حالت کې د افادو تر ټولو لږ توان نسبت x ته وټاکئ.

د پورتنۍ فعالیت څخه کولای شو ولیکو چې:

که چېرې په یوه الجبري افاده کې د مشابه جملاتو له ساده کولو څخه وروسته یوازې یو حد ولري، هغې ته یو حده، (Monomial) که جمع یا تفریق د دوحدونو ولرو هغې ته دوه حده ولري (Binomial) که جمع یا تفریق د دريوحدونو ولرو هغې ته درې حده یا (Trinomial) او که له دريوحدونو څخه زیات حدونه ولرو پولینوم یا (Polynomial) په نامه یادېږي په دې شرط چه د تورو توانونه ئې مکمل عدوده وی هره الجبري افاده کې تر ټولو لږ توان نسبت یوه ځانگړی متحول ته د الجبري افادي درجه نظر هغه متحول ته بلل کېږي.

مثال: لاندې جدول بشپړ کړئ.

الجبري افادې	مناسبي نومونه				درجه	
	خو جمله	درې جمله	دوه جمله	يوه جمله	نظر Y ته	نظر X ته
$\sqrt{32}r^2 - 3r + 2r^3$						
$3x^2 - 7x$			✓			2
$6x^2 - 4x - 1$						
$0.4x^2y - 2x^4 + 16y^2$						
$13x - 2y^3 + 6x^3y$						
$3 - 5 + x^2 - y^3 - 2xy$						
$4x^2 - 2x + 6x^2 - 5x$						

يو بښتنې

1- لاندې الجبري افادې ساده اود هرې يوې درجه نسبت هر متحول ته وټاکئ.

a) $x^2 - 3x + 6x^2 - \frac{3}{2}x$ b) $\sqrt{2}m^2 - \frac{1}{2}m + 2\sqrt{2}n^2m + 3m$

c) $-4x^2 + 2x^2 + 14x - 8 + 4x^3 - 16x - 2x^2$ d) $4 - x^3y - 2 + xy^3 - 4xy - 1 - 2$ لاندې الجبري افادې، خو جمله يې دي، دهرې يوې درجه نسبت هر متحول ته وټاکئ.

a) $6x^2 - 4x - 12xy^6 - 2x^5$ b) $8x^6 - 4xy^6 - 5x^2$

c) $6x^2y^6m^9$ d) $\sqrt{3}x - y + 6x^2y^3 - 2y^2$

e) $3pq^3 - 8p^4q^3 - 12q^4 - 0.5p^6$ f) $\frac{4m-2n}{2m-n}$

3- A, B, او C په افادو کې ورته حدود وښيي اوافادې ساده کړئ.

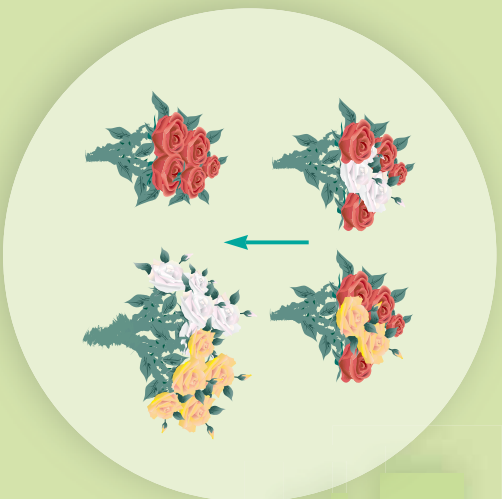
A = $4xy + 2x^2y - 3xy^2 - \sqrt{2}xy - 0.5x^2y - \frac{1}{2}xy^2$

B = $\frac{4}{3}a^2b - a^2 + b^2 - 0.7a^2b - 2a^2 - 3b^2 + xy$

C = $2\sqrt{8x} + \sqrt{2} - 3\sqrt{8x} + \sqrt{32}$

په فکتورونو تجزیه (فکتور نیونه)

په مخالف شکل کې خو غوښچي گلونه وښی؟
کومې غوښچي یو بل ته ورته دي؟ یوه غوښچه خو
گلانو څخه جوړه ده؟



فعالیت

- $5x = (\dots + \dots)x = \dots x + \dots x$.
تس ځایونه وکړی.
- $6y = (\dots + \dots)y = \dots y + \dots y$.
پاسنیو اړیکو کې له کومې ځانګړتیا څخه ګټه اخیستل شوي ده.
- د ښی اړخ عددي ضریبونه د کین اړخ د متحولینو له ضریبونو سره څه اړیکه لري.
 $3x + 2x = (\dots + \dots)x = \dots x$
- ایا کولای شو چې $a + b$ ساده کړو؟
 $ax + bx = (\dots + \dots)x = \dots x$

په پورتنۍ فعالیت کې لیدل کېږی چې:

د ځینو الجبري افادو په تجزیه کې کولای شو چې د ضرب توزیعي خاصیت څخه پر جمع باندې ګټه واخلو. د ګډعامل په پېژندلو سره په افاده کې کولای شوالجبري افادي تجزیه کړو.

لومړی مثال: لاندې الجبري افادي تجزیه کړی.

- a) $ab + ac - ad$ b) $x^4 - x^3y + x^2y^2$
- c) $\frac{1}{2}m^2 - 2m$ d) $3xy - 6x^2$

حل: په راکړل شویو افادو کې لومړی په ټولو حدونو کې ګډ حد پیدا کړو او هغه د قوس منځني لیکو وروسته ټول حدونه بیل بیل په جمله وشو او حاصل یې د قوس په منځ کې لیکو:

$$\begin{aligned} a) \quad ab + ac - ad &= a(b + c - d) \\ b) \quad x^4 - x^3y + x^2y^2 &= x^2(x^2 - xy + y^2) \\ c) \quad \frac{1}{2}m^2 - 2m &= m\left(\frac{1}{2}m - 2\right) \\ d) \quad 3xy - 6x^2 &= 3x(y - 2x) \end{aligned}$$

دویم مثال: لاندی الجبری افادی تجزیہ کریں۔

$$\begin{aligned} a) \quad Ax + Bx + Ay + By & & b) \quad x^2 - 4y^2 + x + 2y \\ c) \quad 2x^2 + 2xy + 3x + 3y & & d) \quad 2x - 2y + 2x + 2y \end{aligned}$$

حل: لومری افادہ داسی ترتیبوچی ورتہ حدونہ خنک پر خنک راشی او ورستہ دافادی گہ
حدود پیدا کو او ایسی بی تجزیہ کوو.

$$\begin{aligned} a) \quad & \underbrace{Ax + Bx}_x + \underbrace{Ay + By}_y \\ &= x(A + B) + y(A + B) \\ &= (A + B)(x + y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad & x^2 - 4y^2 + x + 2y \\ &= [x^2 - (2y)^2] + (x + 2y) \\ &= (x - 2y)(x + 2y) + (x + 2y) \\ &= (x + 2y)(x - 2y + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad & 2x^2 + 2xy + 3x + 3y \\ &= 2x(x + y) + 3(x + y) \\ &= (x + y)(2x + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) \quad & 2x + 2y + 2x + 2y \\ &= 4x + 4y \\ &= 4(x + y) \end{aligned}$$

پو پستی

لاندی افادی تجزیہ کریں۔

- 1) $x^4 - x^3y + x^2x$
- 2) $x(2x - 3y)^2 + 8(2x - 3y)$
- 3) $10ab - 15ac$
- 4) $32x^2y - 4xy^2$
- 5) $\sqrt{2}x^3y^2 - \sqrt{8}xy$
- 6) $0.5mn^2 - 0.125m^4n^3$
- 7) $ab + b + b$
- 8) $\frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{6}x^2 - \frac{1}{2}x^2 - x^4$
- 9) $mab + my + ny + nab$
- 10) $ab(b + a + c) + ac(a + b + c) + bc(c + b + a)$

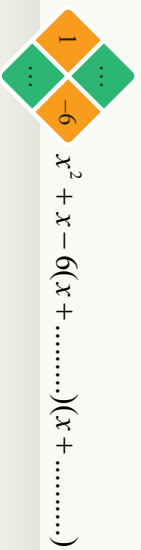
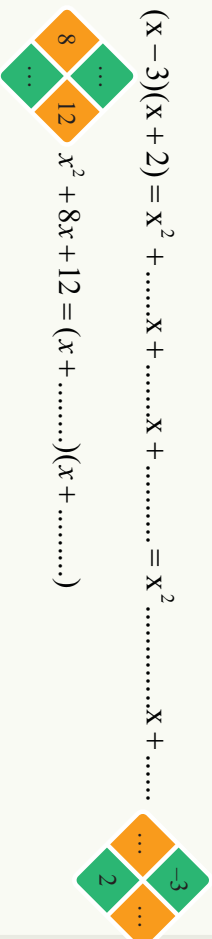
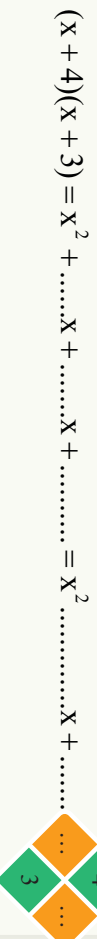
دالجيبري افادو ضرب چي يوه گڻه جمله واري

د مخامخ قوسونو له ضرب څخه وړاىست چې د دوو عددونو د جمعې او ضرب حاصل له کومو عددونو سره برابر دى.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

فعاليت

• په هره مربع کې، دا عددو ترمينځ څه ډول اړيکه ليدل کېږي؟



له پورتنی فعالیت سطحه لیدل کړی: د دوو الجبري عبارتونوله ضرب سطحه چې یوه گډه جمله ولري لیکلای شو چې:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + a \times b$$

که چېرې وضو او یوه ترینوم الجبري افاده د $x^2 + bx + c$ تجزیه کړو نو لومړی باید دوه عددونه داسې پیدا کړو چې د ضرب حاصل یې c اورد جمع حاصل یې b شي، که دې اعدادونه m او n وویل شي، لرو چې:

$$x^2 + bx + c = x^2 + (m+n)x + m \cdot n$$

مثال: د لاندې افادو ضرب او تجزیه سرته ورسوی:

a) $(t-4)(t+5)$ b) $(a+3)(a+4)$ c) $(x-0.4)(x+0.2)$

d) $(y+\frac{2}{3})(y+\frac{1}{2})$ e) $x^2+12x+32$ f) x^2+4x+3

g) $x^2-3x-28$ h) x^2-5x+6

حل:

a) $(t-4)(t+5) = t^2 + (-4 \times 5)t + (-4 \times 5) = t^2 + t - 20$

b) $(a+3)(a+4) = a^2 + (3+4)a + (3 \times 4) = a^2 + 7a + 12$

c) $(x-4)(x-2) = x^2 + (-4-2)x + (-4 \times -2) = x^2 - 6x + 8$

d) $(y+\frac{2}{3})(y+\frac{1}{2}) = y^2 + (\frac{1}{2}+\frac{2}{3})y + \frac{2}{6} = y^2 + \frac{7}{6}y + \frac{2}{6}$

e) $x^2+12x+32 = x^2+4x+8x+32 = x(x+4)+8(x+4) = (x+8)(x+4)$

f) $x^2+4x+3 = x^2+3x+x+3 = x(x+3)+(x+3) = (x+3)(x+1)$

g) $x^2-3x-28 = x^2+(4-7)x+(4)(-7) = x^2+4x-7x-28$
 $= x(x+4)-7(x+4) = (x-7)(x+4)$

h) $x^2-5x+6 = x^2-2x-3x+6 = x(x-2)-3(x-2) = (x-3)(x-2)$

پوښتنې

1- لاندې افادې تجزیه کړئ.

a) $x^2+7x+12$ b) m^2-6m-7

c) a^2+a-2 d) x^2-x-20

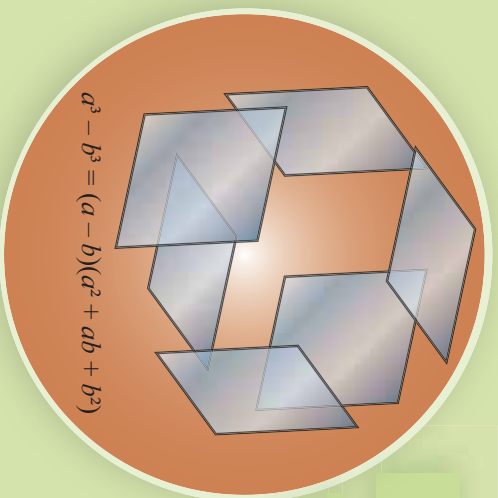
2- لاندې افادې ضرب کړئ.

a) $(2x-1)(x+3)$ b) $(\sqrt{2}+x^2)(x-\sqrt{2})$

c) $(a-3)(a+4)$ d) $(0.5xm-\frac{1}{2})(4xm+0.5)$

د مکعبونو مجموع او تفاضل

شکل ته پام وکړئ، وړایست چې ددې
سطحو څخه که سره نږدی شي، کوم جسم
په لاس راځي.



فعالیت

لاندي جدول ډک کړئ:

a	b	$a^3 + b^3$	$(a + b)$	$a^2 - ab + b^2$	$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$
5	2				
4	1				
-3	2				
3	-2				
4	4				

- د دوو $a^3 + b^3$ او $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ ولاړو لیکو ترمنځ څه اړیکې لیدل کېږي؟
- ایا کولای شئ یوه ورته رابطه د $a^3 - b^3$ لپاره ولیکئ؟

ډیررتی فعالیت څخه کولای شو دا پایله ولیکو:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

دا رابطه کولای شو چې په الجبري ډول وښیو:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2)$$

$$= a^3 - a^2b + ab^2 + b a^2 - ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + b^3$$

لومړی مثال: لاندې الجبري افادې تجزیه کړئ.

$$a) b^3 - 8 \qquad b) a^6 b^6 - x^3 y^3 \qquad c) h^3 + \frac{1}{h^3}$$

حل: لومړی الجبري افاده د $a^3 \pm b^3$ مطابقت شکل ته اړه وړو، وروسته د مطابقت په مرسته هغه تجزیه کوو:

$$a) b^3 - 8 = b^3 - 2^3 = (b - 2)(b^2 + 2b + 4)$$

$$b) a^6 b^6 - x^3 y^3 = (a^2 b^2)^3 - (xy)^3 = (a^2 b^2 - xy)(a^4 b^4 + a^2 b^2 xy + x^2 y^2)$$

$$c) h^3 + \frac{1}{h^3} = h^3 + \left(\frac{1}{h}\right)^3 = \left(h + \frac{1}{h}\right)\left(h^2 - 1 + \frac{1}{h^2}\right)$$

دویم مثال: د یوه مکعب مستطیل حجم داسې $27x^3 - \frac{1}{8}$ ښودل شوی دی، که د مکعب مستطیل جگوالی $3x - \frac{1}{2}$ ددې مکعب مستطیل دفاعي مساحت به څومره وي؟

د مکعب مستطیل حجم = د دفاعي مساحت \times ارتفاع \Rightarrow ارتفاع \times دفاعي مساحت = د مکعب مستطیل حجم

$$\frac{27x^3 - \frac{1}{8}}{3x - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8} (3x)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3}{3x - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8} [(3x)^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}]}{3x - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8} (9x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4})}{3x - \frac{1}{2}}$$

د دریم مثال: د $\frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2}$ افاده ساده کړئ:

حل: لومړی د صورت مطابقت په انکشافی یا غږیدلی بڼه لیکو:

$$\frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2} = \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{x^2 + xy + y^2} = x - y$$

څلورم مثال: د $x^3 + \frac{2}{x^3}$ افاده تجزیه کړئ:

$$x^3 + \frac{2}{x^3} = x^3 + \frac{(\sqrt[3]{2})^3}{x^3} = x^3 + \left(\frac{\sqrt[3]{2}}{x}\right)^3 = \left(x + \frac{\sqrt[3]{2}}{x}\right)\left(x^2 - \sqrt[3]{2} + \frac{\sqrt[3]{4}}{x^2}\right)$$

پوښتنې

1- د $(a^2 + ab + b^2)(a - b) = a^3 - b^3$ مساوات صحت په الجبري بڼه وښئ.

2- لاندې افادې تجزیه کړئ.

$$a) a^6 b^6 + x^3 y^3 \qquad b) 8 + b^3 \qquad c) x^{12} - y^{12}$$

$$d) 125x^3 + y^3 \qquad e) 0.125x^3 - 1 \qquad f) \frac{1}{x^3} + 1$$

$$g) 8 - 64a^3 b^6 \qquad h) 8a^3 - 27b^3 \qquad i) b^6 - 1$$

L.C.M

کوچنی گڊ مضرب (L.C.M)

د $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$ د کسرونو په حاصل کې د

6 او 4 د کوچنی گڊ مضرب یا دواړو

کسرونو گڊ مخرچ پیدا کولو لپاره مو یوه

لاره درلوده د $\frac{2}{2x+2} + \frac{3}{x^2-1}$ جمعې

د حاصل لپاره څه وړاندیزونه کوئ؟

فعالیت

• د $\frac{2}{8}$ او $\frac{3}{6}$ کسرونو د جمع حاصل لپاره مو لومړی د ۶ او ۸ کوچنی گڊ مضرب یا دواړو

کسرونو گڊ مخرچ پیدا کولو پړاوونه توضیح کوئ.

• د $2x + 2$ او $x^2 - 1$ افادې په ضربی عواملو تجزیه کوئ.

• ضربی گډ او ناگډعوامل بې وټاکئ.

• د $2x + 2$ او $x^2 - 1$ کوچنی گڊ مضرب پیدا کولو لپاره سوچ وکړئ څه باید وکړو.

• د $2x + 2$ او $x^2 - 1$ کوچنی گڊ مضرب خوندی؟ هغه په لاس راوړئ.

• د $\frac{2}{2x+2} + \frac{3}{x^2-1}$ کسرونو د جمع حاصل په لاس راوړئ.

ددو یا څو الجبري افادو د کوچنی گڊ مضرب د پیدا کولو لپاره لومړی هغوی په لومړنیو ضربی عواملو تجزیه، وروسته هغه گډعوامل چې ترټولو لوی توان لري د ناگډعواملو سره ضربوو چې کوچنی گڊ مضرب په لاس راځي.

لومړی مثال: د $4x^2 + 2$ او $x^2 - 1$ کوچنی گڊ مضرب په لاس راوړئ.

حل: لومړی افادې جلا جلا تجزیه کوو

$$4x^2 = 2^2 x^2$$

$$2x + 2 = 2(x + 1)$$

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

ليال کبري چي هغه گڊ عامل چي لوی توان لري $(x+2)$ او 2^2 دی، چي د ضرب حاصل ٻي د ٽاگڊو عواملو سره برابري به $4x^2(x^2-1) = 4x^2(x-1)(x+1)$ چي د کوجني گڊ مضرب يا (L.C.M) په نامه يادوږي.

دويم مثال: د $68x^2 + 40x + 32$ ، $6x^2 - 6$ او $4x^2 + 12x - 16$ افادو کوجني گڊ مضرب پيدا کړئ.

$$4x^2 + 12x - 16 = 4(x^2 + 3x - 4) = 2^2(x+4)(x-1)$$

$$8x^2 + 40x + 32 = 8(x^2 + 5x + 4) = 2^3(x+4)(x+1)$$

$$6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1) = 2 \times 3(x-1)(x+1)$$

په پايله ڪه کوجني گڊ مضرب عبارت له:

$$2^3 \times 3(x+1)(x+4)(x-1)$$

پوښتني

د کوجني گڊ مضرب په پام کي نيولو سره ٻي ساده کړئ.

$$1) \frac{2x}{3} - \frac{4}{5x} \div \frac{3}{10x}$$

$$2) \frac{3x-1}{x^2+2x-15} - \frac{2}{x+5}$$

$$3) \frac{2}{x-1} + \frac{x}{x+1} - \frac{4}{x^2-1}$$

$$4) \frac{2}{x^2-1} + \frac{3}{x^3-1} + \frac{1}{x+1}$$

د الجبري افادو ویش

$$\frac{2xy^2 - 4x^2y^4}{-2xy^2} = ?$$

پام وکړئ چې د مخزغ افاده د صورت په کومه افاده پورې اړه لري، کولای شئ هغه ساده کړئ.

فعالیت

995 کله چې د $\frac{995}{7}$ کسر نور ونشو کړای ساده یا اختصار کړو؛ نو پایله څه ده؟
 لاندې الجبري افادې ترممکن حده پورې ساده کړئ.

a) $\frac{2m^2y - 3x^3y^4 + 24xy^3}{-3xy^2}$ ، $x \neq 0 \wedge y \neq 0$ b) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$ ، $x \neq 2$

c) $\frac{x^3 - x^2 - x - 6}{x + 2}$ ، $x \neq -2$

• لاندې عملیو ته پاملرنه وکړئ او توضیح کړئ چې هرگام دکوم کار په پایله کې لاس ته راځي ولې؟

a)
$$\begin{array}{r} 995 \quad | \quad 7 \\ \underline{-7} \quad | \quad 142 \\ 29 \\ \underline{28} \\ 15 \\ \underline{14} \\ 1 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 - 11x - 6 \\ \underline{\pm x^3 \pm 2x^2} \\ -4x^2 - 11x \\ \underline{\mp 4x^2 \mp 8x} \\ -3x - 6 \\ \underline{\mp 3x \mp 6} \\ 0 \end{array}$$

• د (a) په جزء کې موږ لې ویش دکنې خوا له لومړي رقم ۹ څخه پیل کړی سوج وکړئ په (b) جزء کې موږ لې له x^3 څخه د وېش عملیه پیل کړې ده؟

لیکل اول ترتیب اول د یوې الجبري افادې د کین لورې (خوا) نه ښي لورې (خوا) ته په ترتیب د لورې

درجې، څخه کوچنی درجې ته د پولینوم نزولي ترتیب نومېږي

ددواو الجبري افادو د یو پر بل د ویش لپاره لاندې پړاوونه ترسره کړئ.

۱- د مقسوم او مقسوم علیه پولینومونه په نزولي ډول ترتیب کړئ.

۲- د مقسوم لومړی حد د مقسوم علیه په لومړی حد وویشی، چې حاصل یې د خارج قسمت لومړی حد دی.

۳- په لاس راغلی خارج قسمت د مقسوم علیه په ټولو حدونو کې ضرب حاصل یې د مقسوم له ورته حدودونه تفریق کوو.

۴- د مقسوم بل حد رابنګته کووډ پاتې افادې څنګ ته یې لیکو وروسته ددې افادې لومړی حد د مقسوم علیه په لومړی حد ویشواو حاصل یې د مقسوم علیه په ټولو حدونو کې ضربوو او حاصل یې له پاتې افادې څخه تفریق کوو.

۵- وروسته ۲، ۳، ۴ پړاوونو ته ترهغه ادامه ورکوو چې د پاتې حدودو درجه د مقسوم علیه د حدونو له درجې څخه کوچنی شی.

لومړی مثال : د $x^3 - 3x^2 - 23x + 30$ افاده په $x - 6$ افاده ویشی.

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 3x^2 - 23x + 30 \quad | \quad x - 6 \\
 \underline{-(x^3 + 3x - 5)} \\
 6x^2 - 23x + 35 \\
 \underline{-(6x^2 + 18x)} \\
 5x + 30 \\
 \underline{-(5x + 30)} \\
 0
 \end{array}$$

د تقسیم مراحل

$$\left. \begin{array}{l}
 I - \frac{x^3}{x} = x^2 \\
 II - \frac{3x^2}{x} = 3x \\
 III - \frac{-5x}{x} = -5
 \end{array} \right\}$$

دویم مثال: د $x^2 - x - 4$ او $x^5 - 2x^3 + x^2 - 8x + 4$ افاده په $x^2 - x - 4$ افادی ووشی.
حل : ده مقسوم او مقسوم علیه پر لټومونه په نزولي ډول ترتیب و او بیا عملیه سرته رسوو.

د تقسیم مراحل

$$\begin{array}{r}
 x^5 + 0x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 4 \\
 \underline{x^5 \mp x^4 \mp 4x^3} \\
 x^4 + 2x^3 + x^2 \\
 \underline{x^4 \mp x^3 \mp 4x^2} \\
 3x^3 + 5x^2 - 8x \\
 \underline{3x^3 \mp 3x^2 \mp 12x} \\
 8x^2 + 4x + 4 \\
 \underline{8x^2 \mp 8x \mp 32} \\
 12x + 36
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 I - \frac{x^5}{x^2} = x^3 \\
 II - \frac{x^4}{x^2} = x^2 \\
 III - \frac{3x^3}{x^2} = 3x \\
 IV - \frac{8x^2}{x^2} = 8
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} x^5 + 0x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 4 \\ \underline{x^5 \mp x^4 \mp 4x^3} \\ x^4 + 2x^3 + x^2 \\ \underline{x^4 \mp x^3 \mp 4x^2} \\ 3x^3 + 5x^2 - 8x \\ \underline{3x^3 \mp 3x^2 \mp 12x} \\ 8x^2 + 4x + 4 \\ \underline{8x^2 \mp 8x \mp 32} \\ 12x + 36 \end{array}} \right\}$$

څرنگه چې د دوو عددونو ویش دسموالی لپاره مودونه شرطونو څیرل، نو د دوو الجبري افادو د ویش دسموالی لپاره هم دوه شرطونه څیرو.

- 1- د خارج قسمت او مقسوم علیه د ضرب حاصل جمع پاتې د مقسوم د الجبري افادي سره باید برابره وي.
 - 2- د پاتې درجه د مقسوم علیه له درجې څخه باید کوچنی وي.
- لکه په دویم مثال کې:

$$\begin{aligned}
 &(x^2 - x - 4)(x^3 + x^2 + 3x + 8) + 12x + 36 \\
 &= x^5 - 2x^3 - 8x + 4
 \end{aligned}$$

لیدل کېږي چې د خارج قسمت او مقسوم علیه د ضرب حاصل جمع پاتې د مقسوم له افادي سره برابر دی او د خارج قسمت درجه نظر x ته له ۲ سره برابره ده پاتې درجه (۱) ده نو په لاس راغلی پایله سمه ده.

درېيم مثال: د $x^4 - 3x + 1 + 2x^2$ افاده په $x + 3$ افاده وويشي:
حل: لومړی دمقسوم او مقسوم عليه افادې په نزولي ډول ترتيبوو.

$$\begin{array}{r} x^4 + 0 \cdot x^3 + 2x^2 - 3x + 1 \quad | \quad x + 3 \\ -x^4 \pm 3x^3 \\ \hline -3x^3 + 2x^2 \\ \pm 3x^3 \mp 9x^2 \\ \hline 11x^2 - 3x \\ \pm 11x^2 \pm 33x \\ \hline -36x + 1 \\ \pm 36x \mp 108 \\ \hline 109 \end{array}$$

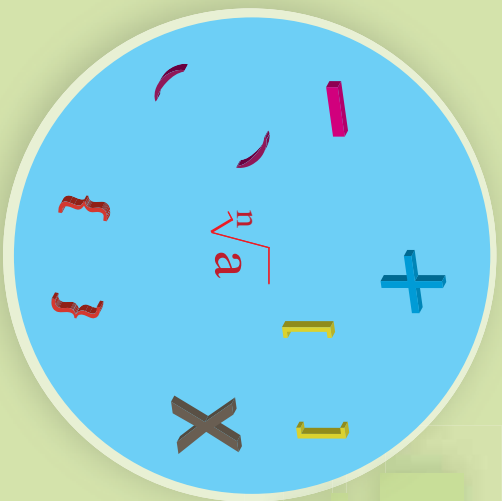
پوښتني

د لاندې افادو د ویش حاصل پيدا کړئ.

- 1) $(2t^3 - 4t^2 - 2t - 6) \div (t^2 + 9t + 7)$
- 2) $(1 - x^2 - x) \div (1 - x)$
- 3) $(2y^3 + y - 3y) \div (y^2 - 3y - 1)$
- 4) $(2x^3 + 5x^2 - x - 1) \div (x + 3)$

د الجبري افادو د عمليو سرته رسولو ترتيب

که چيرې په الجبري افادو کې مخامخ
نښې راځي وي په څه ډول په ترتيب
سره افاده ساده کړو؟



فعاليت

● دلاندې افادو ساده کولو لپاره کومې عمليې سرته ورسوو. د عمليې د سرته رسولو ترتيب په شمير سره ونوموئ.

$$3 - 2^4 \times 5 + (16 \div 4)$$

$$4 \times 5 \div 2 - 3(2 + 3^2) + 2$$

$$3x^2 - 4x(2 + x)$$

$$2x - 3\{-2(x+1)(x+2)\} + 6x \div 2$$

په پورتني فعاليت کې موږ ليدل چې د الجبري افادو عمليو په ترتيب سره سرته رسول د عددونو د قانون له ترتيب څخه پيروې کوي. د يوې الجبري افادې د ساده کولو لپاره په ترتيب سره په لاندې ډول عمل کړو

1- توان رفع کړو.

۲- د قوسونو په لړلو سره لومړۍ هغه ساده کړو.

۳- په ترتيب سره له کين څخه ښي اړخ ته د ضرب او ویش عمليې سرته رسوو.

۴- په ترتيب سره له کين څخه ښي اړخ ته د جمع او تفریق عمليې سرته رسوو.

لومړی مثال : لاندې افادې ساده کړئ:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{1}{2}m-3 \left\{ \left[5\left(m-\frac{1}{2}-m\right) \right] - m-6 \right\} \div 2 \\
 & = \frac{1}{2}m-3 \left\{ 5m-\frac{5}{2}-5m-m-6 \right\} \div 2 \\
 & = \frac{1}{2}m-3 \left\{ -m-\frac{17}{2} \right\} \div 2 \\
 & = \frac{1}{2}m + \left(3m + \frac{51}{2}\right) \times \frac{1}{2} \\
 & = \frac{1}{2}m + \frac{3}{2}m + \frac{51}{4} \\
 & = \frac{m+3m}{2} + \frac{51}{4} = \frac{4m}{2} + \frac{51}{4} \\
 & = 2m + \frac{51}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & 2x-1 - \{-2(x+2)\} + 2x \div 2 \times 5x \\
 & = 2x-1 - (-2x-4) + 2x \div 2 \times 5x \\
 & = 2x-1 + 2x+4 + x \times 5x \\
 & = 2x-1+2x+4+5x^2 \\
 & = 4x+5x^2+3
 \end{aligned}$$

فعالیت

• مخامخ عبارتونه ساده کړئ:

a) $\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$

b) $\sqrt[3]{8x^3y^3}$

c) $\sqrt{3a\sqrt{49a^2}}$

• د $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ او $\frac{1}{\sqrt{a-\sqrt{b}}}$ کسرونو د منځه وړلو لپاره چې مخخروجوبيا شي $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ او $\frac{1}{\sqrt{a-\sqrt{b}}}$ د کوم مطابقت څخه مرسته اخيستلاى شئ:

• د $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ او $\frac{1}{\sqrt{a-\sqrt{b}}}$ کسرونو جنرونه په مخخروجوبيا له منځه يوښي اوساده يې کړئ.

• ديو کسردمخخروجوبيا کسرونو د منځه وړلو عمليه د الجبري کسردگوبيا کولو يا ناطق کولو په نامه يادېږي.

مثال : لاندې کسرونو مخرچ ناطق کړئ

1) $\frac{2}{\sqrt{x}}$

2) $\frac{2}{\sqrt[3]{a}}$

3) $\frac{a-1}{\sqrt{a-1}}$

4) $\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

حل:

1) $\frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
 $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = \frac{2\sqrt{x}}{x}$

2) $\frac{2}{\sqrt[3]{a}} = \frac{2}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}}$
 $= \frac{2\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{2\sqrt[3]{a^2}}{a}$

3) $\frac{a-1}{\sqrt{a-1}} = \frac{a-1}{\sqrt{a-1}} \times \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a+1}}$
 $= \frac{(a-1)(\sqrt{a+1})}{(\sqrt{a})^2 - 1^2}$
 $= \frac{(a-1)(\sqrt{a+1})}{a-1} = \sqrt{a+1}$

4) $\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$
 $= \frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2}$
 $= \frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2-3}$
 $= \frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{-1} = -5(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

د یوې الجبري افادې د ساده کولو لپاره په ترتیب سره لومړې قوسونه له منځ څخه ورو، وریسې د توان عملیه او په پای کې په ترتیب سره د ویش، ضرب، جمع او تفریق عملیې له پنی څخه کین اړخ ته سر ته رسوو.

- د \sqrt{x} د ناطق کولو عامل \sqrt{x} دی.
- د $\sqrt{x} + 1$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x} - 1$ دی.
- د $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ دی.

پوښتنې

لاندي افادي ساده کړئ.

- 1) $2x \times -2\{x - (2 + x) - 1\} \div 2$
- 2) $\frac{1}{3}y - 5 \left\{ -2 \left[6\left(y - \frac{1}{3} - y\right) \right] \right\} \div 3$
- 3) $5 + (-18) - [24 + (-30)] \times (-7)$
- 4) $[(-102) + (-330)] \div 16 + [68 + 240 - (-210)] \div 6$
- 5) $\frac{2}{\sqrt{7}}$
- 6) $\frac{3}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$
- 7) $2\sqrt{2000ab} - \frac{b}{a}\sqrt{72ab}$
- 8) $\frac{2a}{\sqrt{a}}$
- 9) $\frac{x-y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$
- 10) $2\sqrt{18x} + \sqrt{50x} - \frac{1}{2}\sqrt{20x}$
- 11) $(\sqrt{2} + 1)(1 - \sqrt{2})$

● هغه الجبري افادې چې د یوه حد څخه جوړه شوي وي د مونوم یا یو حده په نامه یادېږي لکه: ax^n

● هغه الجبري افاده چې له دوو حدونو څخه جوړه شوې وي، دوه حده یا بینوم بلل کېږي، لکه: $ax^2 + b$

● هغه الجبري افاده چې له دريو حدونو څخه جوړه شوې وي، درې حده یا ترینوم بلل کېږي، لکه: $ax^2 + bx + c$

● هغه الجبري افادې چې له څو حدونو څخه جوړې شوې وي او د تورو توانونه ئې مکمل عدونه وي څو حده یا پولینوم بلل کېږي لکه: $ax^3 + bx^3 + cx^2 - x - d$

● په یوه الجبري افاده کې د متحول ترتولولوی توان دالجبري افادې درجه بلل کېږي.
 ● د پولینوم هغه ترتیب چې د کینې خوا څخه بنسې خواته له لوی توان څخه کوچني ته ترتیب شوی وي، نزولي ترتیب بلل کېږي.
 ● دهر a او b لپاره لرو:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

● دالجبري افادو دگډوعمو املو چې ترتولولوی توان ولري دضرب حاصل له ناگډوعمو املوسره د I.C.M په نامه یادېږي.

● که چېرې په یوه الجبري افاده کې قوسونه او $(+)$ ، $(-)$ او (\dots) عمليې راغلي وي دساده کولو لپاره یې په ترتیب سره لومړی کوچنی، منځنی او بیا لوی قوس له منځه وړو ورپسې د توان عملیه او په پای کې په ترتیب سره د ویش، ضرب جمع او تفریق عمليې له کینې څخه بنې اوڅ ته سرته رسوو.

- د \sqrt{x} د ناطق کول عامل \sqrt{x} دی.
- د $\sqrt{x+1}$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x-1}$ دی.
- د $\sqrt{y} + \sqrt{x}$ د ناطق کولو عامل عبارت له $\sqrt{y} - \sqrt{x}$ دی.

دینچم خیرکی پوښتنې

- په لاندې سوالونو کې هر سوال ته څلور ځوابونه ورکړل شوي سم ځواب یې وټاکئ.

$$-1 \text{ د } -\frac{1}{2}x^2 - 2x^2 \text{ افاده کې گډ عامل :}$$

- (a) 2 دی. (b) x دی. (c) $2x$ دی. (d) نه لري.

-2 د $(x+3)(x-2)$ الجبري افادو د ضرب حاصل عبارت له:

(a) $x^2 + 5x + 6$ (b) $x^2 - 5x - 6$

(c) $x - x^2 + 6$ (d) $6 + x - x^2$

-3 د $\frac{3}{x^2-1} + \frac{3}{2x+2}$ افادې کوچنۍ گډ مضرب عبارت له :

a: $2(x-1)(x+1)$ (b) $(x-1)(x+1)$

(c) $(x^2-1)(2x+2)$ (d) هیڅ یو.

-4 د $\frac{2x-4x^3+x^2+16x-8}{2x^2-8}$ افادې د ویش حاصل عبارت له:

(a) $-2x+1$ (b) $\frac{-2x}{2x^2-8} + (-2x+1)(2x)$

(c) الف او ب (d) هیڅ یو.

-5 د $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ د ناطق کولو عامل عبارت له :

(a) \sqrt{a} (b) \sqrt{b}

(c) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ (d) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

● تپش ځایونه په مناسبو جملو د کډ کړی.

۱- د $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1$ الجبري افاده یوه حده درجه افاده ده.

۲- د $x^2 + 7x + 12$ الجبري افادي ضربی عوامل او دی.

۳- د $\frac{x^2 - 1}{x + 1}$ ویش حاصل عبارت له دی.

۴- $a^3 + b^3 = (\dots)(\dots)$

۵- د $(x^2 - x - 1)(x^2 + x - 1)$ د ضرب حاصل عبارت له دی.

● په لاندې جملو کې کومه یوه سمه او کومه یوه ناسمه ده، د سمې مخ ته (س) توری اوازېمي

مخ ته (ن) توری ولیکئ

۱- هغه الجبري افادي چې دغو حدونو ترمنځه جوړه شوي وي، د پولینوم په

نامه یادېږي.

۲- د $x^2 + 2ax + a^2$ افادي تجزیه $(x + a)(x + a)$ ده

۳- د $21x^3y^3$ او $14x^3y^2$ کوچنی گډ مضرب $42x^3y^4$ دی.

۴- $a^3 - b^3 = (a + b)(a^2 + ab + b^2)$

۵- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

• لاندی سوالونہ مفصل حل کریں

1- تجزیہ ہی کریں

a) $y^2 - y - 2$

c) $21a - 14ab + 28a^2$

e) $a^2x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}$

a) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x-2} + \frac{1}{x^2-4}$

b) $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

c) $\frac{a^2b^{-2} - b^2a^{-2}}{ab^{-1} - ba^{-1}}$

b) $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

d) $72m^8n^6 - 98m^6n^8$

f) $1 + 2ab - (a^2 + b^2)$

2- سادہ ہی کریں

a) $\frac{12a^2 - 4a + 20}{40 - 5a}$

b) $\frac{a^4 - b^4}{a - b}$

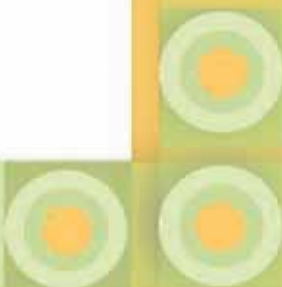
c) $2x^3 - x^2 - 4 \div (x - \frac{1}{2})$

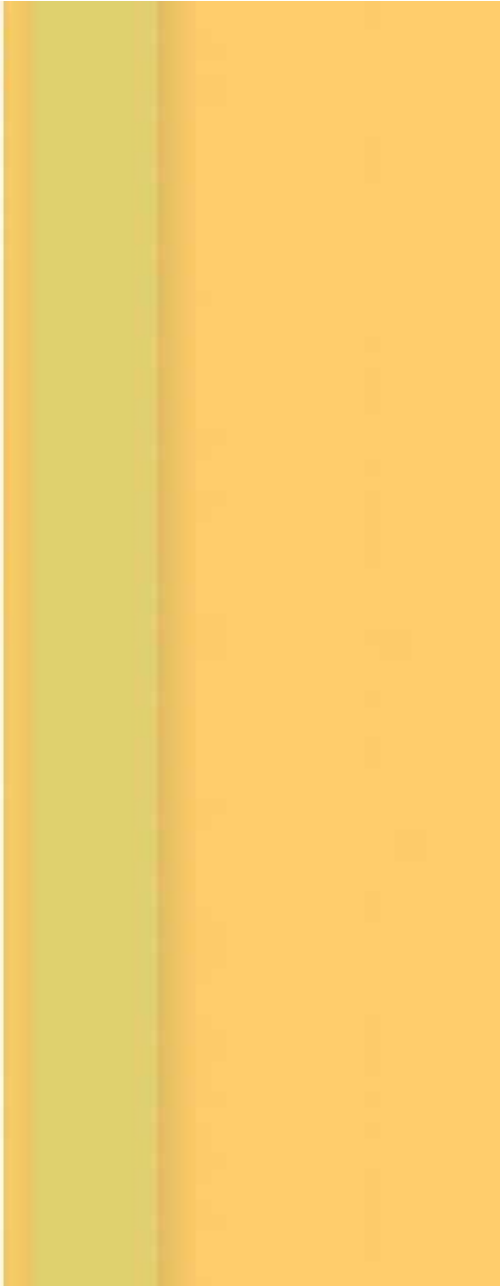
d) $(x^3 - 5x + 6) \div (x - 2)$

e) $x^2 - 5x + 64 \div (-x + 5)$

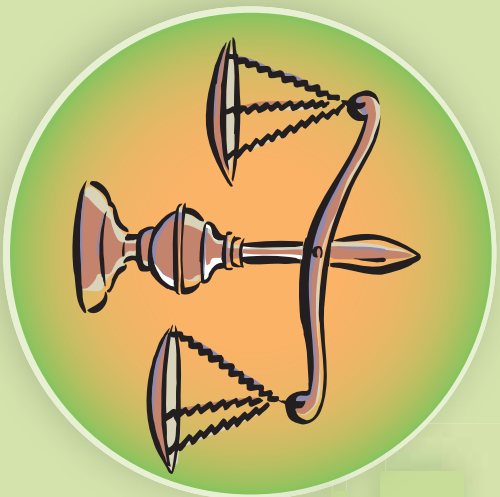
3- ویجی ویسٹی

شپریم چیرگی غیر مساوات





غیر مساوات Inequality



تله په کوم حالت کې قرار لري؟ ولې؟

عموماً په ورځني ژوند کې د غیر مساوي کمیتونو پرتله کولو ته اړتیا لرو، لکه د یوه پوښلگي د زده کوونکو د نمر و مجموع له زیاتو څخه کمو نمر ته درجه بندي کړو، یا ناسې کولی شئ داسې نور مثالونه په ورځني ژوند کې وښيي چې نا مساوي عدونه سره پرتله شي.

که چېرې عدونه دي ($<$, $>$, \geq , \leq) علامو په مرسته اړیکې ولري د نامساوي په نامه یادېږي لکه: $4 > 2$, $5 < 2$, ...

فعالیت

• د 3 ، $\frac{-3}{2}$ ، $\sqrt{2}$ ، -4 او $\frac{2}{3}$ عدونه د عدونو په محور وټاکئ.



• له مناسبو علامو څخه په کار اخیستلو، پورتي عدونه په ترتیب سره له کوچني څخه تر لوی پورې ولیکئ.

• د اعدادو په محور د اعدادو د ترتیب او د اعدادو د ځای تر منځ څه اړیکې وښئ؟

د پورتي فعالیت مشاهدات په لاندې ډول داسې لنډوړ:

د عدونو په محور هغه عدد چې د عدد ښی خوا ته پروت وي، لوی او له هغه عدد څخه چې د هغې کیڼې خوا ته پروت دی کوچنی دی.

په بشپړ رڼکې (ډول وېلی شو چې که د a او c درې حقيقي عدونه وي، نو لیکلای شو، چې: $a < b$, $b < c \Rightarrow a < c$

فعالیت

- دوه غیر مساوي عددونه وټاکئ او دهغوی تر منځ اړیکه د کوچني یا لويي علامو په کار اخیستلو بیان کړئ.
- د غیر مساوي دواړو خواوو ته د 5 عدد ورجمع کړئ، ایا د غیر مساوي د علامي په لوري کې څه بدلون راځي؟
- د پورتنی غیر مساوي له دواړو خواوو څخه د 3 عدد تفریق کړئ، ایا د غیر مساوي د علامي په جهت کې څه بدلون راځي؟

په بشپړ ډول سره د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانو:

که $a < b$ وي نو د a, b, c او c اختیاري حقیقي عددونو لپاره لرو: $a + c < b + c$
 $a - c < b - c$

فعالیت

- دوه نامساوي عددونه وټاکئ او دهغوی تر منځ اړیکه د کوچني یا لويي علامي ($<$) څخه په کار اخیستلو ولیکئ.
- د پورتنی غیر مساوي دواړه خواوي د 4 په عدد کې ضرب کړئ، ایا د غیر مساوات د علامي په جهت کې څه بدلون راځي؟
- د پورتنی غیر مساوات دواړه خواوي د 4- په عدد کې ضرب کړئ، ایا د غیر مساوات د علامي په جهت کې څه بدلون راځي؟
- که د $4 < 7$ غیر مساوات دواړه خواوي معکوس کړو، ایا د غیر مساوات د علامي په جهت کې بدلون راځي.

په بشپړ ډول د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانو:

د a, b, c او c حقیقي عددونو لپاره لرو چې:

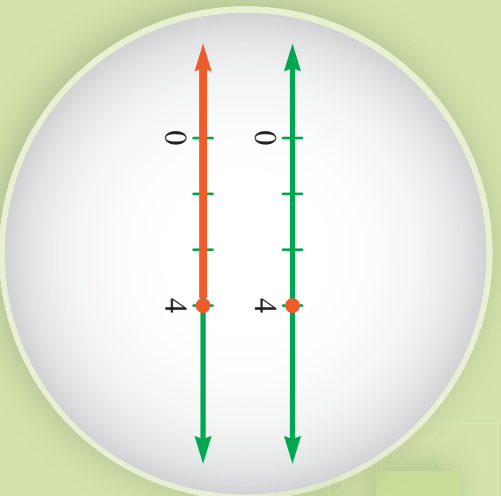
$$\begin{aligned} a < b & \quad \cdot \quad 0 < c \Rightarrow ac < bc \\ a < b & \quad \cdot \quad c < 0 \Rightarrow ac > bc \\ 0 < a < b & \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \end{aligned}$$

په یاد ولرئ چې د ورش عملیه د ضرب د عملي معکوسه عملیه ده، یعنې که وغواړو چې یو عدد په a ورشمو هغه عدد به $\frac{1}{a}$ کې ضربونو د غیر مساوات د ضرب د عملي ټول خواص د ورش په عملیه کې هم حقیقت لري.

پوښتنې

د $9 < 3 -$ په نامساوي کې د یو اختیاري عدد په جمع او تفریق کولو سره د غیر مساوات ټول خواص وڅیړئ.

د لومړۍ درجه خطي غیر مساوات حل



د $x = 4$ او $x \leq 4$ دوه الجبري جملې

په پام کې ونیسئ.

د دې عبارتونو تر منځ څه ورته والی او

څه توپیر وینئ.

فعالیت

- د $x + 3 = 7$ معادله، د x د کوم عددي قیمت لپاره سمه ده.
- آیا د x په لاس راغلی قیمت څخه پرته بل قیمت x ته پیدا کولی شئ چې په معادله کې رښتینوالی ولري؟
- د x د کوم عددي قیمت لپاره د $x + 3 < 7$ نامساوي سمه ده.
- آیا د x په لاس راغلی قیمت څخه پرته، بل قیمت شته چې غیر مساوات صدق پری وکړی.

• د x د څو عددي قیمتونو لپاره پورتنۍ غیر مساوات صدق کوی.

د پورتنۍ فعالیت په لیلو سره نامساوي د مساوات په پرتله ډېر حلونه لري.

هغه الجبري رابطې چې د $>$ ، $<$ ، \geq او \leq علامو په مرسته یو له بل سره اړیکې ولري او په هغه کې د متحول توان یو وي د لومړۍ درجه یو مجهوله یا خطي نامساوي بلل کېږي.

لاندي نامساوي د یو مجهوله لومړۍ درجې نامساواتو بېلگه ده.

$$x + 3 < 0 \quad , \quad 2x - \frac{1}{3} > 3 - x$$

$$6x + 7 \leq 5 \quad , \quad \frac{x}{5} + \sqrt{2} \geq 12$$

په بشپړ ډول د x د هغو قیمتونو پیدا کولو لپاره چې په غیر مساوات کې حقیقت ولري د غیر مساواتو د خواصو څخه په ګټه اخیستې سره غیر مساوات ته داسې بدلون ورکړو چې د غیر مساوات یو اړخ ته x او بل اړخ ته یې عددونه پراته وي.

د غیر مساوات د حل څخه موخه داده چې د x لپاره هغه قیمتونه پیدا کړو چې غیر مساوات په ساحه کې حقیقت ولري دا ساحه د غیر مساوات د حل ساحه بلل کېږي.

لومړی مثال: د $x + 4 \geq -7$ غیر مساوات حل کړئ او د غیر مساوات د حل ساحه یې

د عددونو په محور وښیئ.

حل: د نامساوي په دواړو خواوو کې د (-4) عدد په جمع کولو سره لرو چې:

$$x + 4 - 4 \geq -7 - 4$$

$$x \geq -11$$



دویم مثال: د $2x + 1 > 5$ نامساوي حل کړئ.

حل: د غیر مساوات له خواصو څخه په ګټه اخیستې سره کولای شو چې معلوم د غیر مساوات علامې یو اړخ ته او مجهول بل اړخ ته نقل کړو:

$$2x + 1 > 5$$

د نامساوي له دواړو خواوو څخه د (-1) عدد تفریق کوو:

$$2x + 1 - 1 > 5 - 1$$

$$2x > 4$$

د نامساوي دواړه خواوي په 2 ویشو یا په $\frac{1}{2}$ کې یې ضربوو:

$$\frac{1}{2} \times (2x) > \frac{1}{2} \times 4$$

$$x > 2$$

یعنې د ټولو هغو قیمتو لپاره چې له 2 څخه لوی وي غیر مساوات صدق کوي دا مطلب د



عددونو په محور داسې ښودلای شو.

پوښتنه: سوچ وکړئ چې ولې په لومړۍ مثال کې د عددونو په محور 11- په (●) او دویم مثال کې د عددونو په محور 2 په (○) ښودل شوی دی؟

په دې دوو مثالونو کې هغو علامو ته چې د غیر مساوات د حل ساحې ټاکلو لپاره پکار وړل شوی پاملرنه وکړئ.

په عمومي حالت کې د $ax + b < cx + d$ الجبري عبارت چې په هغه کې a, b, c, d حقيقي عددونه او x متحول وي، لومړۍ درجه یو مجهوله یا خطي غیر مساوات بلل کېږي. د غیر مساوات د حل لپاره لاندې ټکي په پام کې نیسو:

- د غیر مساوات د خواصو په پام کې نیولو سره معلوم یو اړخ او مجهول د غیر مساوات بل اړخ ته انتقالوو.

- معلوم عددونه په خپل منځ کې او مجهول حدونه خپل منځ کې جمع کوو.

- د متحول د عددي قیمت د پیدا کولو لپاره د غیر مساوات دواړه خواړي د متحول په ضریب د غیر مساوات د خواصو په پام کې نیولو سره ویشو.

درېم مثال: د $x - 5 < 3x + 1$ نامساوي حل کړئ.

حل:

$$2x < -6$$

$$x < -\frac{6}{2}$$

$$x < -3$$



$$x + 5 < 3x - 1$$

$$x - 3x < -1 - 5$$

$$-2x < -6$$

$$\frac{-2x}{-2} > \frac{-6}{-2}$$

$$x > 3$$



څلورم مثال: لاندې غیر مساوات حل کړئ.

1- د لاندې غير مساواتو حل پيدا او د هغوی دحل ساحه د عددونو په محور وښيي:

a) $4x \geq 8$

b) $8 + x < 5$

c) $5 + x < 2x - 1$

d) $-3x - 4 > x + 7$

e) $\frac{3}{2}x - 1 > x - \frac{2}{3}$

f) $0.5 - x < 3x - 1$

g) $2 - x \leq 2$

h) $2x - 5 - 7x > 0$

i) $15x + 6 > 0$

2- د 1325 د ویش پر 25 باید تر ټولو لوی عدد پیدا کړو، چې په 25 کې ضرب او له 1325 څخه کوچنی یا ورسره مساوي شي، دا عبارت په غیر مساوات وښيي او خارج قسمت یې پیدا کړئ.

3- که تاسې ته وویل شي چې د یوه فعالیت د سرته رسولو لپاره حد اکثر 5 ورځې وخت لري دا عبارت په غیر مساوات وښيي.



$$\{x \in \mathbb{R} : x \leq 4\}$$

د غیر مساوات د حل لپاره ډېر عددونه کولی شو په لاس راوړو چې دهغه غیر مساوات حل وي، داسې ټول حقیقي عددونه که د یو سټ په ډول په پام کې ونیسو، دې سټ ته د غیر مساوات حل وایي.

د مثال په ډول $x > 3$ د $3x - 2 > 7$ نامساوي د حل سټ دی، ځکه هر هغه عدد چې له 3 څخه لوی وي په نوموړی نامساوي کې صدق کوي، دا د حل سټ د ریاضي په ژبه داسې $\{x \in \mathbb{R} : x > 3\}$ ښودل کېږي:



داسې لوستل کېږي: د x ټول هغه حقیقي عددونه چې له درېو(3) څخه لوی وي، لیدل کېږي، چې د عددونو دا سټ د عددونو د محور یوه برخه ده، چې په ریاضي کې ورته وائین (فاصله) یا انټروال وایي.

په لاندې شکل کې د عددونو په محور ټاکل شوی هغه فاصله(انټروال) ده، چې له -1 څخه لوی یا ورسره مساوي او له 4 څخه کوچنی یا ورسره مساوي دی.



دا فاصله په $[-1, 4]$ یا $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 4\}$ سره ښودل کېږي.

پاملرنه وکړئ چې د -1 او 4 عددونه په فاصله کې ګډون لري. په هغه حالت کې چې د انټروال د پیل او پای ټکی په کې ګډون ولري، دې وائین یا فاصلې ته تړلی فاصله وایي.

نو که په پورتنۍ فاصله کې د -1 او 4 ټکي ګډون ونلري دې فاصلې ته خلاص وائین یا فاصله وایي او په لاندې ډول یې ښودلای شو:

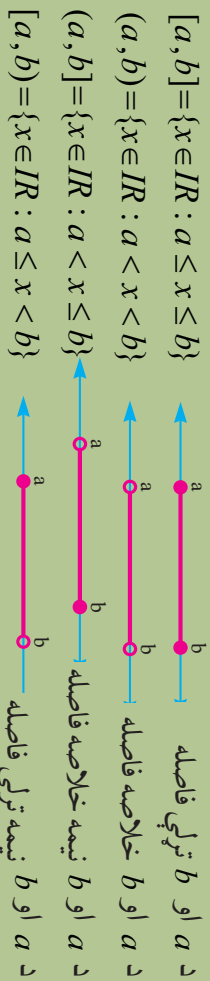


$$\{-1, 4\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 4\}$$

که د ممکنې فاصلې د پای د ټکو څخه یوازې یو ټکی لکه 4 په فاصله کې شامل وي، هغې فاصلې یا واټن ته نیمه خلاصه یا نیمه تړلی واټن یا فاصله وايي، او هغه په لاندي شکل نښو:



په عمومي ډول د هرو دوو a او b حقيقي عددونو چې $a \leq b$ څخه وي لرو:



پاملرنه وکړئ چې د عددونو په محور باندې کولې شو هغه فاصلې په پام کې ونيسو چې له یوې خوا څخه تړلی نه وي، په دې حالت کې فاصله یا واټن د ∞ علایمي څخه په گټه اخیستنه چې هغه یې نهایت لولو نښو، لکه د هغو عددونه سټ چې د 4 څخه لوی یا ورسره مساوي وي داسې نښو:



او هغه عددونه چې له 4 څخه کوچني وي، عبارت دی له:



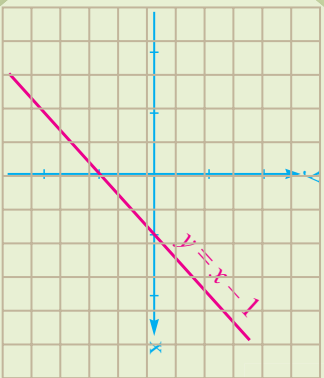
- نو په عمومي ډول که a یو حقيقي عدد وي نو لرو چې:
 - د a څخه لوی حقيقي عددونه
 - د a څخه لوی یا ورسره مساوي حقيقي عددونه
 - د a څخه کوچنی حقيقي عددونه وي.
 - د a څخه کوچنی یا ورسره مساوي حقيقي عددونه.

یو نښتی

1- لاندي انټروالونه د سټ په شکل ولیکئ، او د عددونو په محور یې ونښئ

- 1) $[5, 7]$ 2) $(9, -3)$ 3) $[-2, 8]$ 4) $(6, 1]$ 5) $[2, \infty)$
- 2- لاندي سټونه د انټروال په ډول ولیکئ:
- 1) $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 6\}$ 2) $B = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 5\}$
- 3) $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 4\}$

د لومړي درجي دوه حده (بينوم) د علامې ټاکل



په مخامخ شکل کې x د کوم قیمت لپاره د $y = x - 1$ مستقیم خط د x د محور څخه د پاسه او د x د کوم قیمت لپاره مستقیم خط د x محور نه لاندې پروت وی.

فعالیت

- د $2x - 4$ الجبري افاده څو حده ده؟
- دا افاده د x متحول په کوم قیمت مساوي له صفر سره ده؟
- دا افاده د x متحول په کومو قیمتونو سره مثبت ده؟
- دا افاده د x متحول په کومو قیمتونو سره منفي ده؟

د پورتنۍ فعالیت رياضي بيان په لاندې ډول په جدول کې لاندو:

x	$x < 2$	2	$x > 2$
$2x - 4$	-	0	+

په دې جدول کې لیدل کېږي چې د $2x - 4$ بینوم په $x = 2$ کې مساوي په صفر دی او د هغو قیمتونو لپاره چې له 2 نه کوچني وي منفي علامه او په هغو قیمتونو کې چې له 2 نه لوی وي بینوم همیشه علامه لري.

لومړی مثال: د $P(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ بینوم علامه وټاکئ:

حل: لومړی هغه قیمت پیدا کړو چې بینوم په هغې کې صفر وي.

$$-\frac{1}{2}x + 3 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x = -3 \Rightarrow x = 6$$

وروسته هغه قيمتونه چي بينوم په هغې کې مثبت وي، په لاس راوړو:

$$-\frac{1}{2}x + 3 > 0 \Rightarrow \frac{-1}{2}x > -3 \Rightarrow x < 6$$

په همدې ترتيب هغه قيمتونه چي بينوم په هغې کې منفي وي عبارت دي له:

$$-\frac{1}{2}x + 3 < 0 \Rightarrow \frac{-1}{2}x < -3 \Rightarrow x > 6$$

په لاس راغلي پايلې لاندې جدول کې راټولولو:

x	$x < 6$	6	$x > 6$
$-\frac{1}{2}x + 3$	+	0	-

يادونه: په عمومي ډول د $ax + b$ بينوم د علامې د ټاکلو لپاره لومړی هغه قيمت په لاس راوړو چي بينوم په هغې کې صفر کېږي او د علامې د ټاکلو جدول يې په لاندې ډول دی.

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a} < x$	$a > 0 - 1$
$ax + b$	د a ته مخالفه علامه	0	د a سره ورته علامه	

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a} < x$	$a < 0 - 2$
$ax + b$	د a مطابقه علامه	0	د a مخالفه علامه	

پوښتنې

د لاندې الجبري افادو علامې وټاکئ:

- 1) $3x - 9$
- 2) $7x - 2$
- 3) $\frac{3}{4}x - 1$
- 4) $0.5x + 10$
- 5) $2x - 4 + x - 1$
- 6) $\frac{1}{2}x + 3$

د کسري افادو د علامو تحليل او ټاکل

a ، b حقيقي عددونو لپاره د $\frac{a}{b}$ کسر، څه وخت مثبت او څه وخت منفي علامه لري.

$$\frac{?}{?} = +$$
$$\frac{?}{?} = -$$

فعاليت

- د $\frac{3x+5}{2x-2}$ کسري افاده په پام کې ونیسئ.
- پورتني افاده په کوم حالت کې مثبت کېږي.
- پورتني افاده په کوم حالت کې منفي کېږي.
- د x په کوم قيمت سره د پورتني کسري افاده مساوي په صفر ده.
- ایا کولای شئ په نوموړی افاده کې د x په ځای (1) وضع کړئ. ولې؟

د نوموړی افادي د صورت او مخرچ د علامې د ټاکلو څخه وروسته کولای شو د نوموړی کسري افادي علامه د صورت او مخرچ د علامو د ویش له حاصل څخه په لاس راوړو:

$$3x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5}{3}$$

پوهېږو چې د $x < \frac{-5}{3}$ لپاره د بېنوم د صورت علامه منفي او د $x > \frac{-5}{3}$ لپاره د بېنوم د صورت علامه مثبت ده.

د مخرچ د علامې د ټاکلو لپاره لومړی هغه قيمت پيدا کوو، چې $2x - 2 = 0$ په هغه کې صفر شي.

په پایله کې د $x < 1$ څخه بېنوم د مخرچ علامه منفي او د $x > 1$ لپاره د بېنوم د مخرچ علامه مثبت ده.

پاملرنه وکړی په هغه قیمت کې چې د کسري افادي مخخج صفر کېږي نه دی تعريف شوی، پورتنۍ بحث په لاندې ډول د علامو د تحليل او ټاکلو په جدول کې داسې ليدوو:

x	$x < -\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3} < x < 1$	$1 < x$
$3x+5$	-	0	+
$2x-2$	-	0	+
$\frac{3x+5}{2x-2}$	+	0	+

نو د $x < -\frac{5}{3}$ او $x > 1$ قيمتونو لپاره د $\frac{3x+5}{2x-2}$ کسري افادي اشاره مثبت او د $-\frac{5}{3} < x < 1$

قيمتونو لپاره د $\frac{3x+5}{2x-2}$ کسر افادي اشاره منفي ده.

او د $x = -\frac{5}{3}$ قيمت لپاره کسري افاده مساوي صفر ده.

په عمومي ډول د کسري افادي د اشارې د تحليل او ټاکلو لپاره لومړی د کسر د صورت او مخخج اشاره ټاکو وروسته د صورت او مخخج د اشارو او د ویش د حاصل څخه د کسري افادي اشاره په لاس راوړو.

مثال د: $\frac{-x+3}{x}$ کسري افادي اشاره وټاکي.

$$-x+3=0 \Rightarrow x=3$$

$$x=0$$

x		0	3	
$-x+3$	+	+	0	-
x	-	0	+	+
$\frac{-x+3}{x}$	+	0	+	-

يو نښتلي

د لاندې کسري افادو اشاره وټاکي.

a) $\frac{-x+1}{5+x}$

b) $\frac{x}{x+1}$

c) $\frac{1}{x} + \frac{2}{7}$

کسری غیر مساوات

$$y = \frac{x + 1}{x}$$

$$y > 0$$
$$y < 0$$

؟

د x په کوم قیمت سره د مخامخ کسری افاده مثبت او د x په کوم قیمت سره افاده منفي ده؟

فعالیت

- د $0 < \frac{x-2}{4+2x}$ کسری غیر مساوات په پام کې ونیسئ:
- د پورتنۍ نامساوي د ریښتینوالی لپاره د کسری افادي صورت باید کومه علامه ولري؟
 - د x متحول د کوم قیمتونو لپاره د پورتنۍ کسری افادي صورت مثبت دی؟
 - د x متحول د کوم قیمتونو لپاره د پورتنۍ کسری افادي مخرج مثبت دی؟
 - د x متحول د کوم قیمتونو لپاره د پورتنۍ کسری افادي صورت منفي دی؟
 - د x متحول د کوم قیمتونو لپاره د پورتنۍ کسری افادي مخرج منفي دی؟
- د پورتنۍ فعالیت د لاس ته راغلو پایلو په پام کې نیولو سره د x متحول د کومو قیمتونو لپاره
- $$0 < \frac{x-2}{4+2x} \text{ غیر مساوات سم دی؟}$$

د پورتنۍ فعالیت د سرته رسولو څخه ولیدل شول چې د $0 < \frac{x-2}{4+2x}$ غیر مساوات د حل لپاره باید بیلابیل حالتونه په پام کې ونیسو. د کسری نامساواتو د حل د ست پيدا کولو یوه بڼه لاره د علامو د ټاکلو او تحلیل جدول دی. د مثال په ډول د $0 < \frac{x-2}{4+2x}$ غیر مساوات د حل ست پيدا کولو لپاره داسې عمل کوو:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$
$$4+2x=0 \Rightarrow x=-2$$

x		-2		2
$x-2$	$-$	0	$-$	$+$
$4+2x$	$-$	0	$+$	$+$
$x-2$	$+$	نه دی تعریف شوی	$-$	$+$
$4+2x$	د ناساوی حل		0	د ناساوی حل

د علامو د تحلیل او ټاکلو جدول ته په پاملرنې سره لیدل کېږي، چې هغه قیمتونه چې له $(x < -2)$ او له $(x > 2)$ وي افاده مثبت ده، او دهغو قیمتونو څخه چې له (-2) څخه لوی او له (2) کوچنی $(-2 < x < 2)$ وي منفي ده. په پایله کې د غیر مساوات د حل سټ عبارت له $x < -2$ او د $x > 2$ یا $\{x \in R : x < -2\} \cup \{x \in R : x > 2\}$ یا $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

مثال: د $\frac{2x}{5x+3} \geq 1$ کسري غیر مساوات حل کړئ.

حل: د غیر مساوات د حل سټ پیدا کولو لپاره لومړی کسري افاده یو وار د صفر څخه کوچنی یا لویه لیکو:

$$\frac{2x}{5x+3} \geq 1 \Rightarrow \frac{2x}{5x+3} - 1 \geq 0$$

$$\frac{2x - (5x+3)}{5x+3} \geq 0 \Rightarrow \frac{-3x-3}{5x+3} \geq 0$$

$$-3x-3=0 \Rightarrow x=-1$$

$$5x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{5}$$

اوس د غیر مساوات د علامې د ټاکلو له جدول څخه د غیر مساوات حل په لاس راوړو.

x		-1		$-\frac{3}{5}$
$-3x-3$	$+$	0	$-$	$-$
$5x+3$	$-$	$-$	0	$+$
$-3x-3$	$-$	0	$+$	نه دی تعریف شوی
$5x+3$	د ناساوی حل		د ناساوی حل	

له پورتنۍ جدول په پاملرنې سره د غیر مساوات حل عبارت دی له: $\{x \in R : -1 \leq x < -\frac{3}{5}\}$

په بشپړ ډول د کسري ناساوي د حل لپاره په لاندې ډول پرمخ ځو:

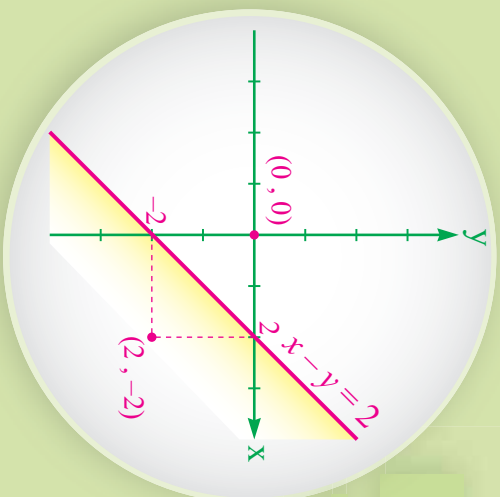
- غیر مساوات داسې لیکو چې له صفر څخه کوچنی یا لویه وي.
- غیر مساوات د علامو د ټاکلو له جدول څخه د غیر مساوات د حل سټ په لاس راوړو.

پوښتنې

د لاندې غیر مساواتو د حل سټ پیدا کړئ.

1) $\frac{-x-9}{2x+4} < 0$ 2) $\frac{6x+7}{7-6x} \leq 0$ 3) $\frac{x+10}{2x-3} \geq 0$ 4) $\frac{7x-2}{3-2x} > 3$

خطي دوه متحو له غير مساوات



د $x - y = 2$ مستقيم خط د وضعيه کمیانو مستوي په دوه پاسني او لاندني ناحيو ویشي. د کرمي ناحیې د ټکو مختصات په $x - y < 2$ غیر مساوات کې صدق کوي.

د $x - y < 2$ نامساوي چې په هغه کې د x او y متحولین لومړی درجه دی یو خطي دوه متحو له غیر مساوات بلل کېږي.

فعالیت

- د (x, y) مرتبې جوړې داسې په لاس راوړئ چې په $x - y < 2$ غیر مساوات کې صدق وکړي.
- څنډه مرتبې جوړې پیدا کولای شئ چې په پورتنی غیر مساوات کې حقیقت ولري.

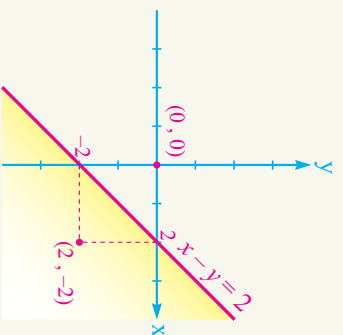
• ایا کولای شئ چې نورې مرتبې جوړې پیدا کړئ چې په پورتنی غیر مساوات کې صدق وکړي. په پورتنیو حالاتو کې ویلای شو چې:

د $c < ax + by$ نامساوي چې په هغه کې a, b او c حقیقي عددونه او $a \neq 0$ یا $b \neq 0$ وي خطي دوه متحو له غیر مساوات بلل کېږي.

د دې غیر مساوات د حل سټ د هغو عددونو مرتبې جوړې دی چې په نامساوي کې صدق کوي.

لومړی مثال: د $x - y < 2$ دوه متحو له غیر مساوات د حل سټ پیدا کړئ.

حل: د دې غیر مساوات د حل لپاره لومړی $x - y = 2$ کرښه د وضعیه کمیانو په مستوي کې رسمو. لیدل کېږي چې د $x - y = 2$ مستقیمه کرښه د وضعیه کمیانو مستوي په



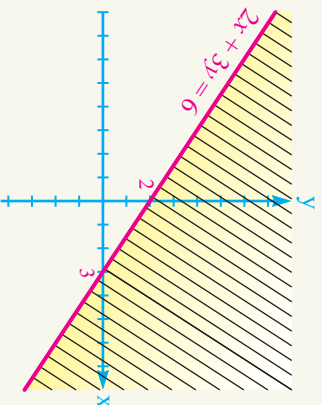
دوو ناحیو وینځي د دې لپاره چې وپوهېږو د کرمي ناحیې د عددونو مرتبې جوړې په غیر مساوات کې صدق کوي له هرې ناحیې څخه یوه مرتبه جوړه ټاکو او په غیر مساوات کې یې وضع کوو. د مثال په ډول $(0, 0)$ مرتبه جوړه په غیر مساوات کې صحیح دی.

$$0 - 0 < 2 \Rightarrow 0 < 2$$

نو هغه ټکی چې د مستقیمې کرښې پرته خواته دی د غیر مساوات حل دی. د غیر مساوات د حل سټ د ښودلو لپاره هغه اړخ د مستقیمې کرښې تورو چې په غیر مساوات کې سم والی نه لري.

پوښتنه: څو نور ټکی د مستقیمې کرښې څخه پرته او ښکته خواته وټاکي پورتنۍ پایله وڅیړئ.

دویم مثال: د $2x + 3y < 6$ نامساوي د حل سټ پیدا کړئ.



حل: لومړی د $2x + 3y < 6$ کرښه د وضعیه کمیانو په مستوي کې رسمو وروسته د غیر مساوات د حل سټ پیدا کولو لپاره د مستقیم د پاسه یا ښکته خواته یوه ټکی مختصات ټاکو او په غیر مساوات کې یې وضع کوو که حقیقت یې درلود هغه اړخ د غیر مساوات حل دی او بل عکس نه دی.

لکه د $(0, 0)$ د وضعیه کمیانو مبدا مرتبه جوړه

په پام کې نیسو:

$$2x + 3y < 6$$

$$2 \times (0) + 3 \times (0) < 6$$

$$0 < 6$$

څرنگه چې نوموړی ټکی مختصات په غیر مساوات کې حقیقت لري نو د کرښې لاندې خوا ټکی د غیر مساوات د حل سټ دی.

پوښتنې

1) $3x - 2 < 5x + y$

2) $2y < 3x$

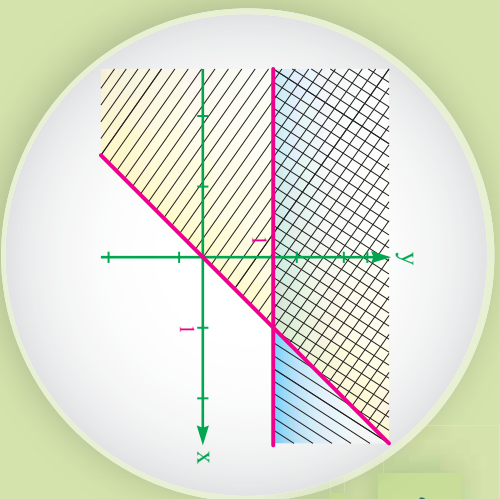
3) $x + y > 0$

4) $2x - 6y \geq 8x + 4y$

5) $x + y < 0$

6) $5x - 3y < -1$

دوه متحوله خطي غير مساواتو سيستمونه



د لاندې غير مساواتو د حل سټ پيدا کړئ.
 ايا کولای شئ اټکل وکړئ چې مخامخ شکل د کومو نامساواتو د حل ساحه رابښي.

$$2 > x + y \quad \text{د غير مساواتو سيستم چې په هغه کې دوه خطي دوه متحوله غير مساوات دي}$$

$$2x > y - 1$$

د غير مساوات سيستم بلل کږي.

د غير مساواتو سيستم له حل څخه مطلب دا دی چې هغه مرتبې جوړې پيدا کړو چې په يوه وخت کې په دواړو غير مساواتو کې صدق وکړي.

لومړی د هر يوه نامساوي حل د وضعيه کمپاټو په مستوي کې په لاس راوړو.

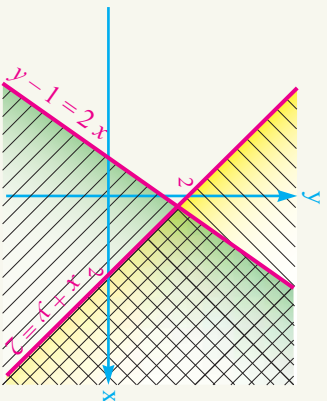
هغه ناحیه چې گډه نه ده خط، خط شوی د غير مساوات همزمان د حل په سټ کې گډون لري او دا ناحیه د غير مساوات د سيستم حل دی.

$$2 = x + y \quad \text{د رسمولو لپاره که } x = 0$$

$$\text{وي } y = 2 \quad \text{او که } y = 0 \quad \text{وي نو } x = 2 \quad \text{کږي او}$$

$$2x = y - 1 \quad \text{د کرښه کې که } x = 0 \quad \text{وي } y = 1$$

$$\text{او که } y = 0 \quad \text{وي نو } x = \frac{-1}{2} \quad \text{سره کږي.}$$



د دوه متحوله خطي غير مساوات د سيستم د حل لپاره داسې عمل کوو:

لومړی د هر يوه دوه متحوله خطي نامساوي د سيستم حل د وضعيه کمپاټو په مستوي کې ټاکو.

هغه ناحیه چې په يوه وخت کې د دواړو غير مساواتو د حل د سټ يوه برخه وي د سيستم حل دی.

مثال: د لاندې غیر مساواتو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} 2y - 3x > -6 \\ y - 2 < 0 \\ 3y + 4x > -12 \end{cases}$$

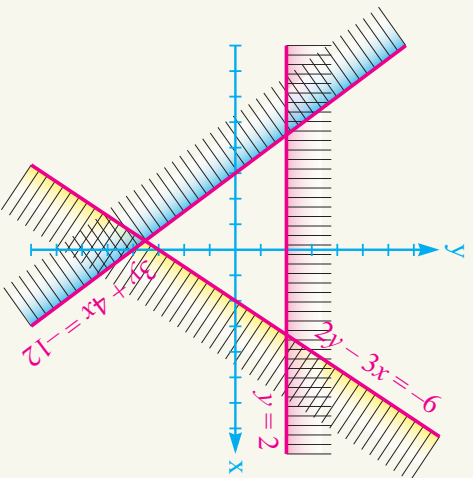
$$3y + 4x = -12$$

حل: لومړی د پورتنۍ غیر مساوات هره یوه کرښه رسموو یعنې:

$$2y - 3x = -6 \quad \text{او} \quad y - 2 = 0$$

$$2y - 3x = -6$$

د $x = -6$ رسمولو لپاره که $2y - 3x = -6$ وي $y = -3$ او د $y - 2 = 0$ گراف لپاره که $x = 0$ وي $y = 2$ کېږي او د $3y + 4x = -12$ کرښې د رسمولو لپاره که $x = 0$ وي $y = -4$ کېږي چې د نوموړو قیمتونو په مرسته یې گراف په مخامخ بڼه رسموو.



وروسته د هرې یوې غیر مساوات د حل ساحه په بیل بیل ډول ټاکو. د ورکړل شوی نامساواتو سیستم د حل سټ په شکل کې نه دي توري شوي ناحیې په شکل لیدل کېږي.

پوښتنې

د لاندې سیستمونو د حل سټ د گراف په مرسته په لاس راوړئ.

1)
$$\begin{cases} x < 3 \\ 2x + y < 4 \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} 2x + 3y < 9 \\ 5x - 2y > 5 \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} x < 3 \\ y > 2 \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} 2x - 3y < -3 \\ 5x - 2y > 9 \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} x + y < 4 \\ x - y < 3 \\ 5x - y > 1 \end{cases}$$

- که چېرې عددونه د دې علامو ($<$, $>$, \geq) په مرسته یو له بل سره اړیکه ولري د غیر مساوات په نامه یادېږي.
 - که د یوه غیر مساوات دواړو خواوو ته یو حقیقي عدد ور جمع یا تفریق کړو په نامساوي کې بدلون نه راځي.
 - که د یوه غیر مساوات دواړه خواوې په یوه مثبت حقیقي عدد د صفر خلاف ضرب یا تقسیم شي په نامساوي کې بدلون نه راځي.
 - که د یوه غیر مساوات دواړه خواوې په یوه منفي حقیقي عدد د صفر خلاف ضرب یا ویشل شي د غیر مساوات لوري بدلون کوي.
- ترلی انټروال $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- خلاص انټروال $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- نیمه خلاص انټروال $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- نیمه ترلی انټروال $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

- د یوې کسري افادې د علاقمې د ټاکلو لپاره لومړی د صورت او مخخج علامه بېله بېله ټاکو وروسته د علامو د ویش حاصل په لاس راوړو.
- $3 \leq 5$ د هر دوه متحوله خطي غیر مساوات د سیستم د حل لپاره داسې عمل کوو.
- لومړی د هر دوه متحوله خطي غیر مساوات د سیستم حل د وضعیه کمیانو په مستوي کې ټاکو. هغه ناحیه چې په یوه وخت کې د دواړو غیر مساواتو د حل د ست یوه برخه وي د سیستم حل

$$0 - x - \frac{1}{5} \leq 2x + 5 \leq 1 - x \dots\dots\dots$$

• د لاندې جملو څخه کومه یوه سمه د هغې په مخ کې د (س) توري او د ناسمې په مخ کې د (ن) توري ولیکئ.

- 1 () د یوې غیر مساوات د حل سټ یو عنصر لري.
- 2 () د $\{x \in R : 2 \leq x < 5\}$ یو تړلی انټروال دی.
- 3 () د غیر مساواتو د سیستم د حل سټ د وضعیه کمیانو د مستوي یوه برخه ده.
- 4 () د خطي غیر مساوات د حل سټونه بې شمیره دی.
- 0 () څرنگه چې $2 < -2$ څخه دی نو له دې ځایه دا پایله $\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$ اخیستلای شو.

• لاندې پوښتنې په بشپړ ډول حل کړئ:

1- د لاندې غیر مساوات گانو حل په لاس راوړئ.

- a) $\frac{x-5}{4} - \frac{x-8}{3} < 0$
 - b) $x-2 < 3(2x-9)$
 - c) $(x-3)(x+3) < 0$
 - d) $\frac{3x+4}{x} - 1 < 0$
 - e) $1 - \frac{2}{x} \leq 3$
- 2 لاندې انټروالونه د عددونو پر محور وښئ.
- a) $[-1, 2]$
 - b) $(-2, 1]$
 - c) $[-1, 1)$
 - d) $(-2, 2)$

-3- د لاندې عددونو ستونډه د انټروال په بڼه وليکئ او د عددونو پر محور بڼې وښيي.

a) $\{x \in \mathbb{R}: x \leq 2\}$

b) $\{x \in \mathbb{R}: x \leq 5\}$

a) $\begin{cases} y > x \\ x \in \mathbb{R}: -1 \leq x \leq 6 \\ 3y < 2 \end{cases}$

d) $\{x \in \mathbb{R}: -4 < x < 2\}$

-4- د لاندې غير مساوات د سيستم حل پيدا کړئ:

b) $\begin{cases} 2x - y > 0 \\ x - 2y < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y < 2 \\ y - 4 > 2x \end{cases}$

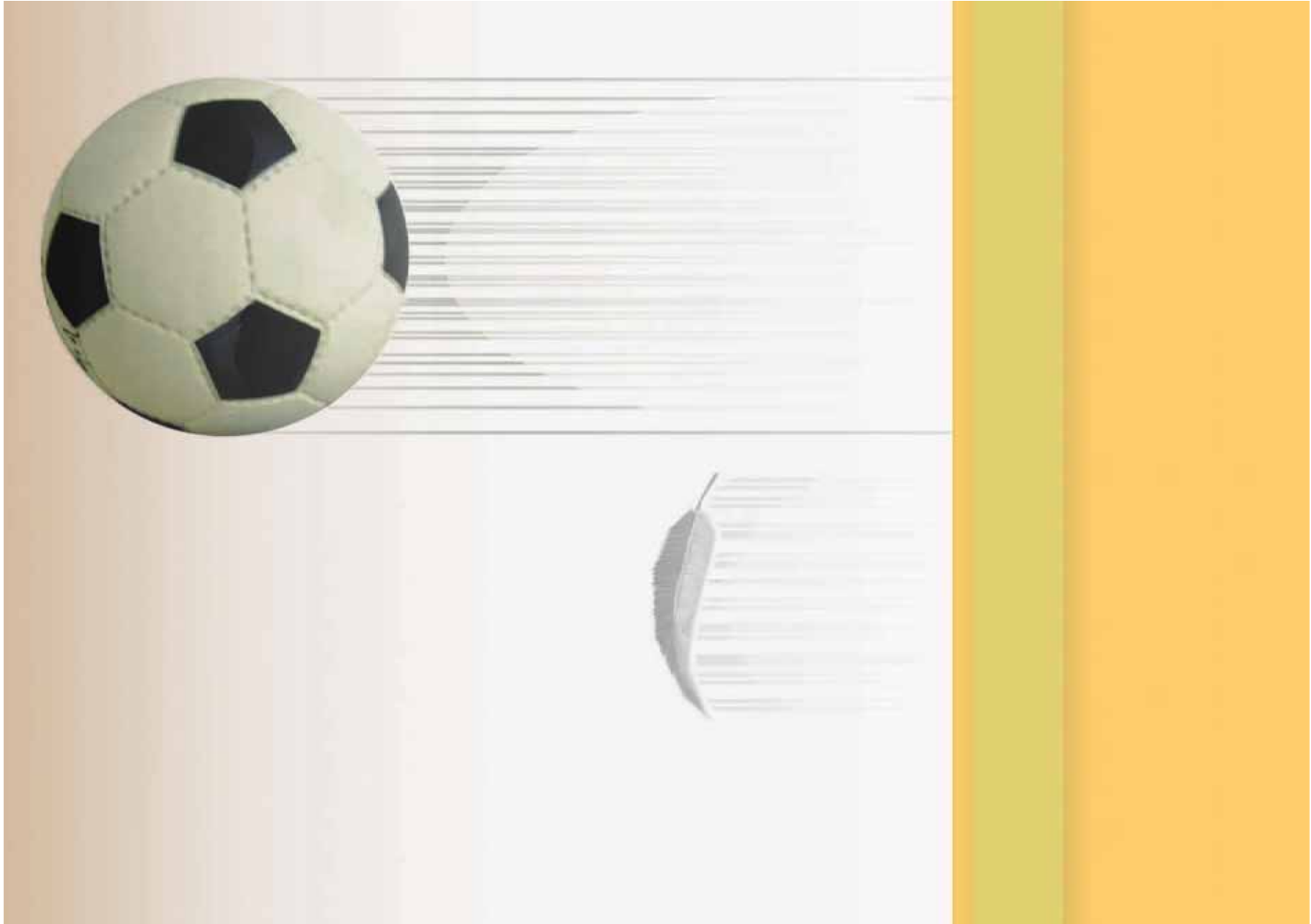
d) $\begin{cases} 2x + 2y < 8 \\ 3x - 3y < 9 \\ 10x - 2y > 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y > 2 \\ x > -3 \\ y + x < 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} y < 2 \\ x < -3 \\ y + x > 0 \end{cases}$

اووم چپرکی

دویمه درجه یو مجهوله
معادله



دویمه درجه یو مجهوله معادلي Quadratic Equation

که چیري یوه کوټه د یوې مربع شکلي قالبین په واسطه داسې فرش شي چې د کوټي اوږدوالی $3m$ او سورنې $2m$ په اندازه د قالبین د خټلوي څخه زیاده وي، لکه مخامخ شکل، وریاست چې د کوټي مساحت څومره دی؟



فعالیت

- الجبري افاده تعريف کړئ.
 - معادله تعريف کړئ.
 - د یو مجهوله لومړی درجي معادلي یوه بېلگه ولیکئ.
 - د یو مجهوله لومړی درجي معادلي عمومي شکل ولیکئ.
 - د $(x+3)(x-2) = 0$ معادلي د قوسونو د ضرب حاصل پیدا کړئ.
 - د پورتنی معادلي درجه د $3x - 1 = 4 + x$ معادلي له درجي سره پرتله کړئ.
- هغه معادلي چې یو مجهول ولري او د هغې درجه دوه وي یو مجهوله دویمه درجه معادله بلل کېږي، چې عمومي شکل یې $ax^2 + bx + c = 0$ ، چې $a \neq 0$ ، b او c حقیقي اعداد او x مجهول بلل کېږي که چیري $b = 0$ یا $c = 0$ وي په دې حالت کې دې ډول معادلي ته نیمگړی دویمه درجه معادله وايي.

لومړی مثال: یو تار چې یو متر اوږدوالی لري غواړو د هغې څخه یو مستطیل چې مساحت یې 600cm^2 دی جوړ کړو د دې مستطیل اوږدوالی او سورننگه وټاکو.

حل: که د مستطیل اوږدوالی x او سورنې په y وښیو د مستطیل محیطد $I = 2(x + y) = 100 \dots$ او مساحت یې $II = x \cdot y = 600 \dots$ څخه په لاس راوړو.

$$\begin{cases} 2(x + y) = 100 & \Rightarrow & \text{I} \\ x \cdot y = 600 & \Rightarrow & \text{II} \end{cases}$$

د I معادلي څخه د y قيمت د x له جنسه په لاس راوړو او په II معادله کې وضع کوو:

$$\begin{cases} 2(x+y) = 100 \\ x \cdot y = 600 \end{cases} \Rightarrow x(50-x) = 600$$

$$50x - x^2 = 600$$

څرنگه چې په پورتنۍ معادله کې د x درجه دوه ده نو نوموړې معادله دويمه درجه ده د معادلو د حلولو پيدا کولو لپاره نيلايلي لارې شته چې هغه تر څېړنې لاندې نيسو.

دويم مثال: هغه عدد په لاس راوړی چې مربع يې د 6 په اندازه له خپل عدد څخه زياته وي. **حل:** که چېرې عدد په X ونوموو؛ نو پورتنۍ بيان د رياضې په بڼه داسې ليکو:

$$x^2 = 6 + x \quad \text{يا} \quad x^2 - x - 6 = 0$$

د دې ډول معادلو حل به په راتلونکي لوست کې وڅېړو.

دريم مثال: په لاندي معادلو کې د عمومي شکل له مخې د b , a او c ضريبونو قيمتونه وليکئ. **حل:**

a) $2x^2 - 4x + 1 = 0$ b) $3x - x^2 = 4$ c) $4x^2 - 1 = 0$

d) $7x^2 = 49$ e) $x^2 - 4 = 0$ f) $\frac{3}{4} - x^2 = \frac{2}{3}x$

جزء	معادلي	د a ضريب	د b ضريب	د c ضريب
a	$2x^2 - 4x + 1 = 0$	2	-4	1
b	$3x - x^2 = 4$	-1	3	-4
c	$4x^2 - 1 = 0$	4	0	-1
d	$7x^2 = 49$	7	0	-49

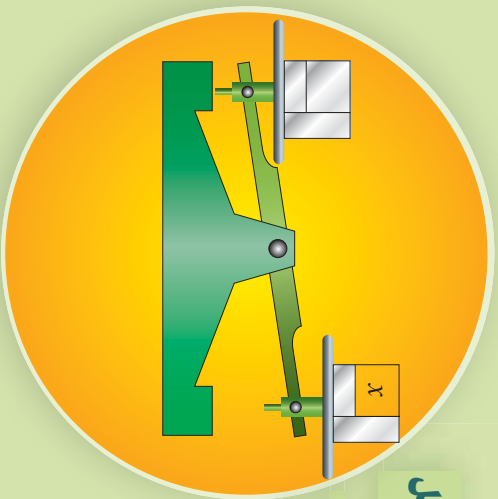
پوښتي

1- په لاندي معادلو کې مکملې او نيمگړې دوهم درجه يو مجهوله معادلي په گوته کوئ.

a) $6 - 2x + x^2 = 0$ b) $5x^2 - 3x + 1$ c) $\sqrt{2}x^2 - 4x = 0$ d) $-x^2 = 3$

2- په لاندي معادلو کې د a , b او c ضريبونه ونيئ.

a) $6x^2 - 4x = 2$ b) $3x - 4 = x^2$ c) $4x - x^2 - 6 = 4x^2$



د دویمه درجه یو مجهول معادلي حل

آيا کولای شي چې د x لپاره داسې قیمت پیدا کړئ چې تله په تعادل کې راشي.

فعالیت

x	$2x + 4$	$3x - 1$
-3		
-2		
0		
5		

- د $2x + 4 = 3x - 1$ معادلي حل پیدا کړئ.
- پورتنی مساوات د x د بیلابیلو قیمتونو لپاره په مخامخ جدول کې وڅېړئ.

x	$x^2 - 4x + 3$
-3	
-2	
-1	
0	
1	

- د جدول او پاسنې پوښتنې په پام کې نیولو سره توضیح ورکړئ چې د معادلي د حلولو پیدا کول یعنې څه؟
- مخامخ جدول پوره او د هغې له مخې د $x^2 - 4x + 3 = 0$ معادلي حلوله په لاس راوړئ.

هغه قیمتونه چې په یوه دویمه درجه معادله کې برابر والی راولي د یو مجهول دویمې درجې معادلي حل بلل کېږي.

لومړی مثال: هغه عدد پیدا کړئ چې مربع یې د 12 واحدو په اندازه له عدد څخه ډیره وي.

حل: که چېرې عدد ته x وویو نو الجبري عبارت داسې بڼه نیسي:

$$x^2 = x + 12$$

څرنگه کولای شو چې د پورتنۍ مساوات څخه د هغې حل پیدا کړو.

که چیري $x = 1$ به معادله کې وضع کړو نو لیدل کېږي، چې د مساوات ښی اړخ د 13 عدد او کین اړخ ته یې د 1 عدد په لاس راځي. په معادله کې د $x = 2$ قیمت په وضع کولو سره لیدل کېږي، چې د مساوات ښی اړخ ته 14 او کین اړخ ته یې د 4 عدد په لاس راځي او د $x = 3$ په وضع کولو سره لیدل کېږي چې ښی اړخ ته د 15 عدد او کین اړخ ته د 9 عدد دی.

په همدې ترتیب د نورو قیمتونو په وضع کولو سره لکه $x = 4$ لیدل کېږي، چې د مساوات ښی اړخ ته د 16 عدد او کین اړخ ته هم 16 عدد په لاس راځي لیدل کېږي، چې د $16 = 16$ مساوي کېږي نو $x = 4$ د معادلې یو حل دی.

x	x^2	$x + 12$
1	1	13
2	4	14
3	9	15
4	16	16

د پورتنی لاري لښیز چې د معادلې حل د پیدا کولو لپاره مو ترې گټه واخیسته کولای شو په مخامخ جدول کې داسې ولیکو. یا کولای شو چې د دویمې درجې معادله د حل لپاره یوه بشپړه لاره پیدا کړو.

دویم مثال: هغه عدد په لاس راوړئ، چې دهغې د مربع جمع د 1 سره مساوي په صفر شي.

حل: د پاسني بیان الجبري افاده عبارت ده له: $x^2 + 1 = 0$

د پورتنی لاري په څېر د اټکل شویو اعداد په وضع کولو سره د معادلې د حل په لټولو پیل کوو او پر مخ ځو، د دې کار لپاره د پورتنی جدول په څیر مخامخ جدول په پام کې نیسو. د دې جدول څخه لیدل کېږي چې نشو کولای تعادل برقرار کړو یعنې د x لپاره داسې قیمت نشو پیدا کولای، چې د معادلې دواړې خواوې مساوي کړي. له بلې خوا د معادلې څخه څرگندېږي هر کله چې یو عدد مربع کړو او یو ورسره جمع کړو هیڅ وخت مساوي په صفر نشي کیدلای؛ نو دا دویمه درجه معادله حل نه لري.

x	x^2	-1
1	1	-1
2	4	-1
0	0	-1
-1	1	-1
-2	4	-1
-3	9	-1

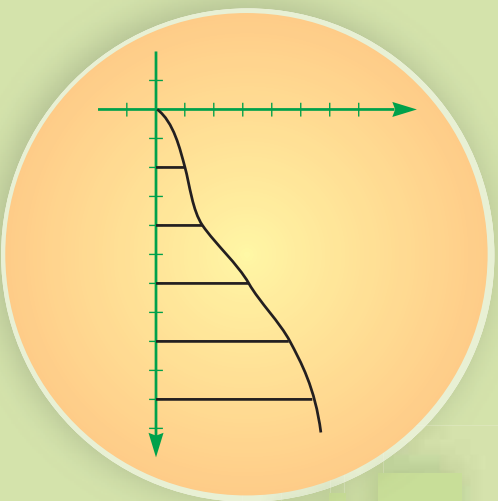
پو پښتني

1- یوه دویمه درجه یو مجهوله معادله ولیکئ چې حل و نه لري.

2- لاندي معادلې حل کړئ.

a) $x^2 - 1 = 0$ b) $x^2 = 0$

غير خطي اړيکي (رابطي)



ډاکټران د يوه ماشوم د ونې (قد) او زېږدوالي په بيلابيلو وختونو کې په مخامخ گراف کې څېړي. ايا تاسې تر اوسه پورې د خپلې ونې (قد) د اوږدوالي بدلون ته سوچ کړی دی چې په بيلابيلو وختونو کې څومره ورو؟

فعاليت

- د يوې مربع د ضلعي د اوږدوالي او مساحت تر منځ اړيکه په پام کې ونيسئ، د مربع د ضلعي اوږدوالي په x او مساحت يې په y نښو.
- د x او y اړيکه په يوه معادله کې ونښئ.
- مخامخ جدول پوره کړئ.

x	1	2	3	4	
y		4			25

- د قايمو مخخصاتو په سيستم کې د پورتنيو مرتبو جوړو ټکي وټاکئ او يو بل سره يې ونښلوئ.
- د دقيق گراف رسمولو لپاره، x ته ډېر سره نږدې قيمتونه ورکوه، لاندي جدول پوره کړئ د پرته په څېر ټکي د وضعيه کمياتو په سيستم کې وټاکئ او گراف يې رسم کړئ.

x	0	0.2	0.5	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
y		0.4			1				3.24	4					9

- د پورتنی جدول په مرسته لاندي جدول په خپلو کتابچو کې بشپړ کړئ.

x	-3	-2.8	-2.6	-2.4	-2.2	-2	-1.8	-1.6	-1.4	-1.2	-1	-0.8	-0.5	-0.2	
$y = x^2$															0

- د پورتنیو جدولونو څخه په گټه د $y = x^2$ معادلي گراف په ډېر دقت رسم کړئ.

د پورتنی فعالیت څخه لاندي پايله په لاس راځي.

پایله: په پورتنی فعالیت کې مو ولیدل چې د $y = x^2$ معادلي گراف مستقیم نه دی.

مثال: د $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 1 \end{cases}$ سیستم معادلانو گراف د قایمو مختصانو په سیستم کې رسم کړئ او

گڼو حل یې پیدا کړئ.

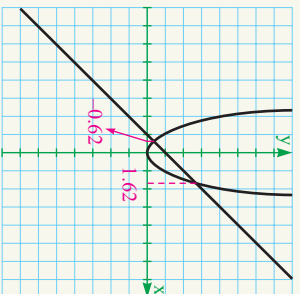
حل: د هغو لارو څخه چې مخکې مو د گراف د رسمولو لپاره ترې گټه واخیسته د پورتنیو معادلو د گرافونو د رسمولو لپاره د هغو د عددونو جدولونه ترتیب او مرتبې جوړې یې د مختصانو په سیستم کې پس له ټاکلو د معادلو گرافونه رسموو.

د $y = x^2$ لپاره لرو:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

د $y = x + 1$ لپاره:

x	0	1
$y = x + 1$	1	2



د گراف له مخې د گڼو حل د ټکو وړنډی قیمتونه یې مساوي په:

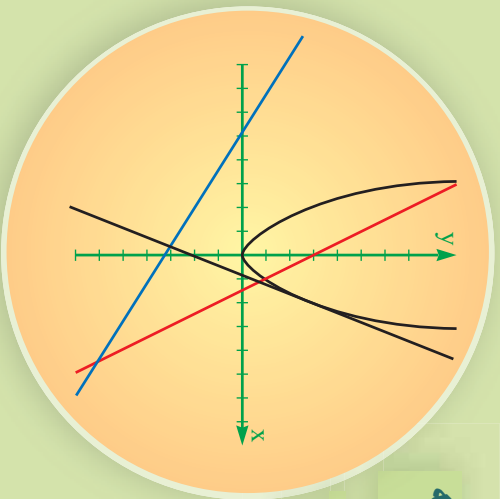
$$x_1 = 1.62, \quad x_2 = -0.62$$

پو پښتني

- 1- د $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x - 2 \end{cases}$ سیستم د معادلانو گراف رسم کړئ.
- 2- د $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$ سیستم د معادلانو گراف رسم کړئ.

د دویمې درجې معادلې حل په هندسي لاره (طریقه)

په مخامخ شکل کې مستقیم خط له ورکړل شوی منحنی سره په څو حالتونو کې قرار لري؟



فعالیت

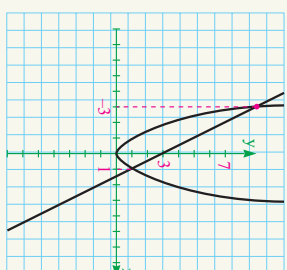
- یاد $x^2 - 6x + 7 = 0$ معادله کولای شو چې داسې $x^2 = 6x - 7$ ولیکو؟
- که چېرې نوموړی مساوات له $y = x^2 = 6x - 7$ سره مساوي وي نو $y = x^2$ او $y = 6x - 7$ معادلو د سیستم گراف د مختصاتو په سیستم کې رسم کوئ.
- د پورتنی سیستم گرافونه یو بل په څو نقطو کې قطع کوي؟
- د پورتنی سیستم حل د گرافونو د تقاطع له ټکو سره څه اړیکه لري.

د پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

- هره دویمه درجه معادله کولای شو چې د $y = x^2$ معادلې او د $y = ax + b$ کرښه ایزو معادلو په څیر ولیکو.
 - x ټکی د پریکړې مختصراً په هغه صورت کې چې وي) د دویمې درجې معادلې حل دی د پورتنی کرښې په مرسته د دویمه درجه معادلې حل پیدا کول د هندسي حل په نامه یادېږي.
- لومړی مثال:** $x^2 + 2x - 3 = 0$ د معادلې حل په هندسي لاره پیدا کوئ.
- حل:** $x^2 + 2x - 3 = 0$ معادله کولای شو په لاندې ډول ولیکو او گراف یې رسم کوو.

$$x^2 = -2x + 3 \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$

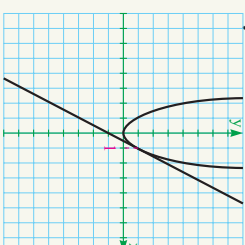
x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4
x	0	3			
y	3	-3			



له شکل څخه لیدل کېږي چې مستقیم خط منحنی په دوو ټوکو کې قطع کوي چې د پریکړې ټکي د x مختصه د دویمه درجه معادلي حل دی یعنې $x_1 = -3$ ، $x_2 = 1$.
دویم مثال: د $x^2 + 2x + 3 = 0$ معادلي حل د هندسي لارې په مرسته پیدا کړئ.
حل: د $x^2 = y$ معادلي او د $y = 2x - 1$ مستقیمي کرني شکلونه رسمو.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	+9	4	1	0	1	4	9
x	0	-1					
y	-1	-3					

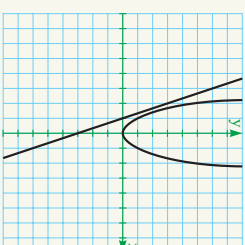


لیدل کېږي، چې کرښه له منحنی سره په یوه نقطه کې تماس ده چې ددې نقطې مختصه قیمت) د معادلي حل دی.

دویم مثال: د $x^2 + 3x + 3 = 0$ معادلي حل په هندسي لاره پیدا کړئ.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x - 3 \end{cases}$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	+9	4	1	0	1	4	9
x	0	-1					
y	-3	0					



لیدل کېږي، چې مستقیم خط منحنی نه قطع نو دویمه درجه معادله حل نه لري.
یادونه:

که چېرې منحنی په دوو ټوکو کې پري کړي معادله دوه حله لري.
 که چېرې منحنی په یوه ټوکې کې پري کړي معادله یو حل لري.
 که چېرې منحنی قطع یا فرخ نه کړي، معادله حل نه لري.

پوښتنې

- 1- د لاندي معادلو حل په هندسي لاره (طریق) پیدا کړئ.
- a) $x^2 - 2x + 2 = 0$ b) $x^2 - 6x + 8 = 0$ c) $x^2 - 5 + 7 = 0$

د یو مجهول د دوهمه درجه معادلو حل د تجزیه په لاره (طریقه)

$$0 = x^2 + x - 3$$

د دوو عددونو د ضرب حاصل څه وخت مساوي په صفر دی.

فعالیت

- که a او b دوه حقيقي عددونه وي څه وخت $a \times b = 0$ کېږي.
- د $(2x+3)(x-1)$ د ضرب حاصل په پام کې ونیسئ، ایا ویلای شئ چې څه وخت دا حاصل ضرب مساوي په صفر دی؟
- د $x^2 + x - 3 = 0$ معادله د $(2x+3)(x-1)$ حاصل ضرب سره څه اړیکه لري؟
- د مخکیني لارې (طریقي) څخه په ګټه اخیستني سره د $2x^2 + x - 3 = 0$ معادلي حلونه پیاکړئ او د $0 = (2x+3)(x-1)$ معادلي له حلونو سره یې پرتله کړئ.

د پورتنۍ فعالیت پایله په لاندې ډول په لاس راوړو:

پایله: که وکړای شو، چې دویمه درجه معادله د دوو خطی افادو د ضرب د حاصل په شکل

واړو نو په دې حالت کې د معادلي حل ساده کېږي، چې په لاندې ډول عمل کوو:

- د اعدادو له خاصیتونو څخه پو هېزو چې د دوو عددونو د ضرب حاصل هغه وخت صفر دی چې یو د هغوی د ضربی اجزاوو څخه یو مساوي په صفر وي، دا مسئله د الجبري افادو لپاره هم سمه ده.

- د هرې خطي الجبري افادې حل چې د یوې دوهمې درجې معادلي مساوي ده، د دویمې درجه معادلي حل دی.

لومړی مثال: د $x^2 - 7x + 6 = 0$ معادلې حل د تجزیني په مرسته په لاس راوړئ.

حل: د $x^2 - 7x + 6$ له تجزیني څخه لرو چې:

$$x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6) = 0$$

د نوموړې ضرب حاصل هغه وخت صفر دی چې یو د هغو فکتورونو څخه مساوي په صفر وي او یا دواړه صفر وي؛ یعنې:

$$1) \quad x-1=0 \Rightarrow x_1=1$$

$$2) \quad x-6=0 \Rightarrow x_2=6$$

نو 1 او 6 د $x^2 - 7x + 6 = 0$ معادلې حلونه دي.

دویم مثال: د $2x^2 - 5x - 3 = 0$ معادلې حل د تجزیني په لاره (طریق) پیدا کړئ.

حل: تر اوسه مو هغه معادلې په فکتورونو تجزیه کړې، چې د x^2 ضرب (1) وړخو د هغو معادلو چې د x^2 ضرب یې یو نه وي په لاندې ډول یې بدلوو د دې لپاره چې د x^2 ضرب یوه کومه مربع شي د معادلې دواړه خواوې د x^2 په ضرب کې ضربوو:

$$4 = 2x^2 - 5x - 3$$

$$2A = 4x^2 - 10x - 6 = (2x)^2 - 5(2x) - 6$$

$$2A = (2x+1)(2x-6)$$

$$A = \frac{1}{2}(2x+1)(2x-6)$$

$$A = (2x+1)(x-3)$$

او د A د معادلې د حل لپاره لرو:

$$1) \quad 2x+1=0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$2) \quad x-3=0 \Rightarrow x_2 = 3$$

پوښتنې

لاندې معادلې د تجزیني په لاره (طریق) حل کړئ.

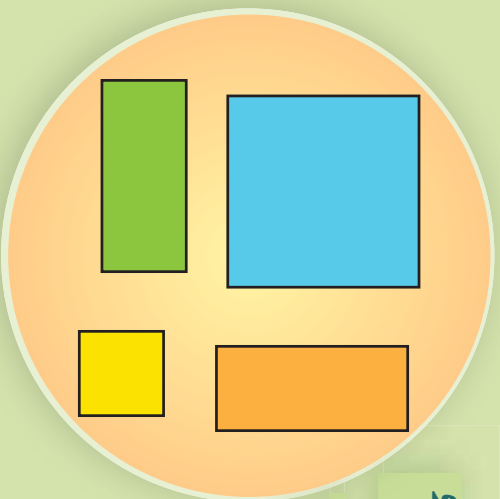
$$1) \quad x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$2) \quad x^2 + x - 2 = 0$$

$$3) \quad x^2 - 6x + 8 = 0$$

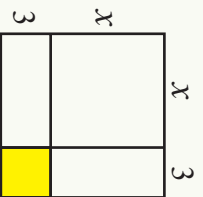
د دویمې درجې یو مجهول معادلو حل د تکمیل مربع په طریقه

هڅه وکړئ چې د دې شکلونو له یو ځای کیدو څخه یوه لویه مربع جوړه کړئ.



فعالیت

- د یوې مربع د ضلعي اوږدوالی څومره دی.
- د هرې برخې مساحت د هر مستطیل او مربع په منځ ولیکئ.
- د $x^2 - 40x + 6x = 0$ معادله داسې ترتیبوو چې متحول لرونکی حدونه یو اړخ او ثابت عددونه د مساوات بل اړخ ته چاڼ شي.
- متحول لرونکی الجبري افاده څه اړیکه له رنگ شوی مساحت سره لري؟



- د مستطیلونو د مساحت عددي ضرب د دویمه درجې معادلې د x له ضرب سره څه اړیکه لري.
- د یوې مربع مساحت څومره دی.
- د دې لپاره چې د متحول لرونکی الجبري افادې د لویې مربع د مساحت سره برابره شي کوم عدد د تساهې دواړو خواوو ته ورزیات کړو.
- د په لاس راغلی اړیکې څخه د قیمت(د دویمې درجه معادلې حل) په لاس راوړو.

محمد بن موسی دا لاره(طریقه) د دویمه درجه معادلې لپاره پیدا کړله. د دې طریقې په پوره کیدو سره د دویمې درجه معادلو په حل کې په بشپړه(صومې) توگه گټه اخیستل کېږي، په دې تگلاره(روش) کې د $ax^2 + bx + c = 0$ دویمه درجه معادله په $q^2 = (x + p)^2$ بڼه بدلېږي چې د تجزیې پړاوونه یې عبارت له:

لومړی P د x د ضريب د نيمایي سره وضع کوو. يعنې $P = \frac{b}{2}$

• وروسته $q^2 = -c + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ وضع کوو.

• په پای کې د $x + p = q$ معادله لرو.

لومړی مثال: د $x^2 + 2x - 8 = 0$ معادله د تکميل مربع په تگ لاره حل کړئ.

حل: لومړی معادله په لاندي ډول لیکو:

$$x^2 + 2x = 8$$

د x د ضريب نيمایي په لاس راوړو، مربع يې له دواړو خواوو سره جمع کوو:

$$x^2 + 2x + 1 = 8 + 1$$

$$(x + 1)^2 = 9$$

$$x + 1 = 3$$

$$x = 2$$

يادونه: ټولې دويمه درجه معادلې نشو کولای په دې تگ لاره حل کړو ځکه دا لاره هندسي تعبير ته اړتيا لري؛ نو ځکه په دې لاره نشو کولای هغه معادلې چې منفي جذرونه لري هم په لاس راوړو.

پوښتنې

لاندي معادلې د تکميل مربع په طريقه حل کړئ.

a) $x^2 + 8x - 24 = 0$ b) $x^2 - x - \frac{5}{4} = 0$ c) $x^2 - 6x - 13 = 0$

د محمد بن موسی فورمول یا د تکمیل مربع د طریقې توسعه

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

د $ax^2 + bx + c = 0$ معادلې دواړه خواوې د x^2 په ضریب وړېشو نو وواياست چې مخامخ مساوات حقیقت لري؟ که نه؟

مو لیدل چې دویمه درجه معادله په عمومي ډول داسې $ax^2 + bx + c = 0$ لیکو چې په هغې کې a ، b او c حقیقي اعداد او a د صفر خلاف یو عدد دی، د دې معادلې د حل لپاره داسې عمل کوو:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{معادلې دواړه خواوې په } a \text{ ویشو:}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

• ثابت عددونه د معادلې یو خوا او مجهول حدونه د مساوي بلې خوا ته سره چاړوو د x د ضریب د نیمايي مربع د معالې دواړو خواوو ته جمع کوو:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

د لاندې لیکنې لپاره $b^2 - 4ac$ په Δ سره ښیوو.

فعالیت

هره دویمه درجه معادله چې $ax^2 + bx + c = 0$ بڼه ولري، لاندې پوښتنو ته ځوابونه ووايئ:

- 1- که $4ac = 0$ وي؛ نو په دې صورت کې د معادلې حلونه کوم دي؟
- 2- که $4ac > 0$ وي؛ نو په دې صورت کې د معادلې حلونه کوم دي؟
- 3- که $4ac < 0$ وي؛ نو آیا معادله د حقیقي عددونو په ست کې حل لري؟

د پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

لومړۍ پایله: د $ax^2 + bx + c = 0$ دویمې درجه معادلې چې a ، b او c حقیقي عددونه او $a \neq 0$ وي.

د $\Delta = b^2 - 4ac$ د قاسمي په نوم یادېږي.

1- که $\Delta > 0$ وي معادله دوه بیلابیل حلونه لري چې عبارت له:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

2- که $\Delta = 0$ وي معادله دوه مساوي یا مضاعف حلونه لري چې عبارت له:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$
$$x_1 \times x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

3- که $\Delta < 0$ وي معادله په حقيقي اعدادو کې حل نه لري.

دویمه پایله: د حلونو د جمع او ضرب حاصل څخه کولای شو د دویمې درجه معادلې په تجزیه کولو کې ګټه واخلو.

لومړی مثال: د $x^2 - 3x + 1 = 0$ معادلې حلونه پیدا کړئ.

حل: لومړی د Δ قیمت پیدا کوو:

څرنگه چې $\Delta = 0$ ده نو معادله دوه حلونه لري.

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

دویم مثال: د $9x^2 - 12x + 4 = 0$ حلونه پیدا کړئ.

حل: لرو چې:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - (4 \times 9 \times 4) = 144 - 144 = 0$$

څرنگه چې $\Delta = 0$ ده معادله دوه مساوي حلونه لري.

$$x_1 = x_2 = \frac{b}{2a} = \frac{12}{2 \times 9} = \frac{2}{3}$$

درېم مثال: د $5x^2 + 3x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: نوموړی معادله حل نه لري ځکه $\Delta < 0$ څخه ده یعنې

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 5 \times 1 = 4 - 20 = -16$$

څلورم مثال: د $4x - 3x - 1 = 0$ معادلې د جذرونو د جمع او ضرب حاصل پیدا کړئ.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{4}, \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{4}$$

نو پښتني

لاندي معادلې حل کړئ

a) $x^2 + 4x - 21 = 0$

b) $x^2 + 6x + 9 = 0$

c) $3x^2 - 12x + 60 = 0$

د اووم څپرکي لنډيز

- د دويمې درجه معادلې عمومي بڼه د $ax^2 + bx + c = 0$ چې $a \neq 0$ ډول ده.
- هغه معادلې چې د $ax^2 + c = 0$ او $ax^2 + bx = 0$ په ډول وي، په ډول وي، د دويمې درجې نيمگړي معادلې په نامه يادېږي.
- د $ax^2 + bx = 0$ معادلې حل عبارت له $x_1 = 0$ ، $x_2 = -\frac{b}{a}$ دي.
- هره دويمه درجه معادله له دوو برخو مستقيم خط او يوه منحنې جوړه شوې ده.
- که يو مستقيم خط يو منحنې په دوو نقطو کې قطع معادله دوه حله لري.
- که يو مستقيم له منحنې سره مماس وي معادله دوه مساوي حلونه لري.
- که مستقيمه کرښه له منحنې سره پرېکه ونه لري معادله په حقيقي عددونو کې حل نه لري.
- د دوو قوسونو د ضرب حاصل هغه وخت مساوي په صفر دی چې لږ تر لږه يو بې مساوي په صفر وي.
- د حلونو د جمع حاصل له دې اړیکې څخه $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ او د حلونو د ضرب حاصل له دې اړیکې $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ څخه په لاس راځي.
- په بشپړه ډول د هرې دويمې درجې معادلې جذرونه يا حل $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ فورمول څخه په لاس راځي، چې $\Delta = b^2 - 4ac$ دی.
- که چيرې $\Delta > 0$ وي معادله دوه حقيقي حلونه لري.
- که چيرې $\Delta = 0$ وي معادله دوه مساوي حلونه لري.
- که چيرې $\Delta < 0$ وي معادله په حقيقي عددونو په set کې حل نه لري.
- د دويمه درجه معادلو د تشکيل لپاره ده $x_2 \cdot x_1 + x_2(x_1 + x_2) - x_1^2 = 0$ يا $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ څخه گټه اخلو.

د اووم څپرکي پوښتنې

• په لاندي سوالونو کې هر سوال ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې وټاکئ.

1- د $3x^2 = 4x$ معادلي a , b او c ضريبونه عبارت دي له:

الف) $a=1$, $b=4$, $c=3$ ب) $a=3$, $b=4$, $c=1$

ج) $a=-1$, $b=3$, $c=4$ د) هيڅ يو.

2- د $3x^2 - 8x + 5 = 0$ معادله حلونه عبارت له:

الف) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{5}{3}$ ب) $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{5}{3}$

ج) الف او ب د) هيڅ يو.

3- د $x^2 = 9$ معادلي گراف عبارت دی له:

الف) مستقيم دی. ب) منحنی دی.

ج) الف او ب. د) هيڅ يو.

4- د $x^2 - 10x + 16 = 0$ معادلي د حلونو د جمع حاصل برابر دی له:

الف) $x_1 + x_2 = 5$

ب) $x_1 + x_2 = -5$ ج) $x_1 + x_2 = 8$

د) $x_1 + x_2 = 10$ 5- که $\Delta > 0$ څخه وي معادله:

الف) دوه مساوي حلونه لري ب) دوه حقيقي او مختلف حلونه لري

ج) حل نه لري د) يو حل لري

• تښ ځایونه وکړئ.

1- د يو مجهوله دويمه درجه معادلې عمومي بڼه ده.

2- $-\frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ د حلونو او $\frac{c}{a}$ د حلونو دی.

3- که وي معادله حل نه لري.

4- که د معادلي درجه دوه وي معادله لري.

5- د $x^2 - x + 0.25 = 0$ معادلي حلونه او دی.

• لاندې پوښتنې ولولئ د سم په مخ کې (س) او د ناسم په مخ کې (ن) کلیمه ولیکئ.

- 1 () که $b^2 - 4ac < 0$ وي، معادله د حقيقي اعدادو په set کې حل نه لري.

- 2 () د محمد بن موسی فورمول $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ دی.

- 3 () د $2x^2 - 4x = 0$ معادلي یو حل صفر دی.

- 4 () د دویمې درجه معادلي د تشکیل لپاره د $x_1 \cdot x_2 = 0$ او $x_1 + x_2 = 0$ یاد
($x_1 - x_2$)($x - x_1$) څخه گټه اخلو.

- 5 () که چیرې په یوه دویمه درجه معادله کې د علامو تحول نه وي نو معادله یو منفي
حل لري.

• لاندې پوښتنې حل کړئ.

- 1 په لاندې معادلو کې a ، b او c ضریبونه وپښئ او وروایست کومه معادله کامله او کومه
معادله ناقصه ده.

a) $3x^2 - 4x + 1 = 0$ b) $3x^2 - 1 = 0$ c) $2x^2 - 6x = 0$

- 2 د لاندې معادلو حل پیدا کړئ.

a) $3x^2 + x - 4 = 0$ b) $x^2 + 4x - 32 = 0$ c) $6x^2 - x - 2 = 0$

- 3 لاندې معادلي د تجزيې په لار (طریقه) حل کړئ.

a) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ b) $x^2 + 4x - 32 = 0$
c) $x^2 - 2\sqrt{3} + 3 = 0$ d) $cx^2 - 2acx + ca^2 = 0$

- 4 لاندې معادلي په هندسي تگ لاره حل کړئ.

a) $2x^2 + 7x - 1 = 0$ b) $x^2 - 2x + 1 = 0$

- 5 د لاندې معادلو حل د تجزيې په طریقه حل کړئ.

a) $4x^2 + 3x - 1 = 0$ b) $x^2 + \frac{x}{5} = \frac{6}{5}$
c) $2x^2 + 3x + 1 = 0$ d) $x^2 + 3x = 0$

6- د عمومی فورمول شخصه په گڼه اخیستني سره لاندې معادلې حل کړئ.

a) $7x^2 - 8x + 1 = 0$

b) $x^2 - 3x + 2 = 0$

c) $t^2 - 0.27 + 0.6t = 0$

7- که دیوه مستطیل مساحت 20cm^2 او اوږدوالی د عرض دوه برابره وي د مستطیل اوږدوالی او سور پیدا کړئ.

8- که د یوه قائم الزاویه مثلث د قائمو ضلعو اوږدوالی $2a$ او $2a + 1$ وي د وتر اوږدوالی یې پیدا کړئ.

9- که دیوه مستطیل مساحت 24cm^2 او محیط یې 36cm وي اوږدوالی او سور یې پیدا کړئ.

10- هغه معادلې ولیکئ چې حلونه یې په لاندې ډول دي.

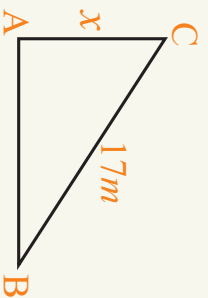
a) $-2, 0.5$

b) $3, -1$

c) $0, 2$

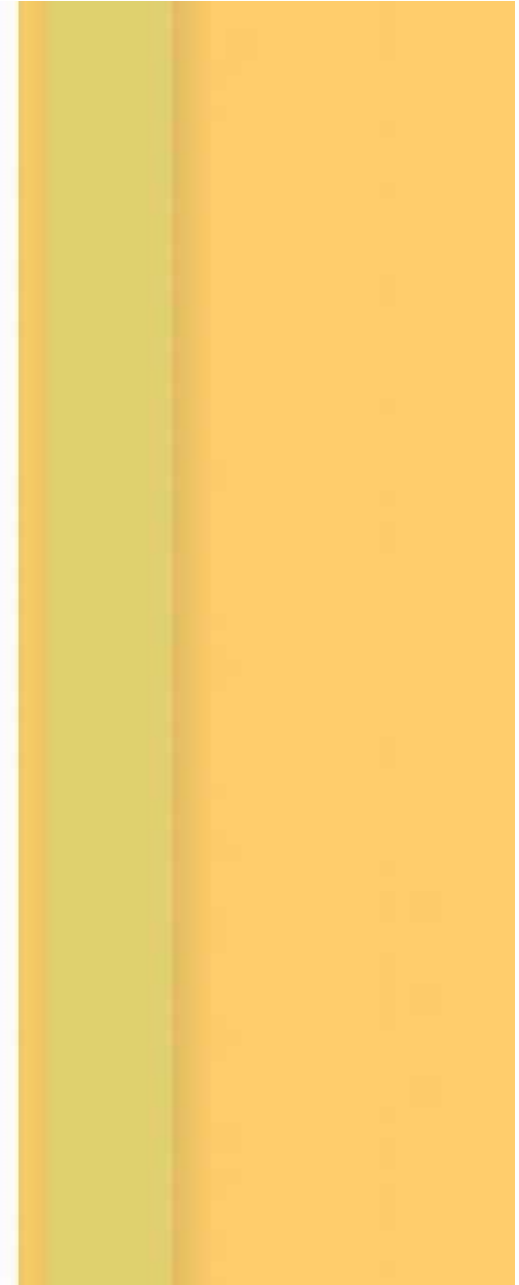
d) $\sqrt{2}-1, 2$

11- دوه تنه بائیسیکل چلوونکي د A ټکي څخه یو ختیځ لور ته او بل شمال لور ته حرکت وکړ په هغه وخت کې چې د دوی تر منځ واټن 17m دی هغه بائیسیکل چلوونکي چې ختیځ لور ته حرکت کړی دی 7m زیات واټن له هغه تن څخه چې شمال لور ته حرکت کړی دی کړی دی. هغه الجبري معادله چې د هغې له مخې وکړای شو چې وهل شوی واټن د هر یوه بائیسیکل چلوونکي ولیکئ.



ایہ چیرگی احصائے







د دیتا (Data) د ډیټی کولو لاره

آیا تاسې په خپل ټولګی کې تر ټولو جګه ونه لرئ؟ که چیرې د فلین او یا انډونیزیا ته ولاړ شئ څنګه؟
تاسې په کومه کچه په یوه هیواد کې جګ او په بل هیواد کې لنډه ونې شمیرل کېږي، معیارونه مو کوم دي؟

فعالیت

د یو شمیر کورنیو شمیر چې په څو کلیو کې پرتې دي، په لاندې ډول لیکل شوي اطلاعات په لاس راغلي:

52	49	40	42	45	53	35	38	40	43
51	55	38	39	44	37	46	41	50	56

خوارو دا راکړل شوی دیتا data په دريو ډیټیو کې داسې ځای په ځای کړو تر څو پوه شو،

چې کوم کلي ډیر، منځنۍ، او کم وګړي لري.

- ایا کولای شو، چې یو یا څو ورکړل شوی دیتا data له منځه یوسی؟
- تر ټولو لوی او تر ټولو کوچنی کورنی پیدا کړئ.
- د لږو او ډیرو دیتاګانو data تر منځ وسعت څومره دی؟
- دا وسعت د ګیلپو په شمیر وروستی. سوچ وکړئ دا اعداد څه شی رابښي؟
- د عددونو څخه په ګټه اخستني سره جدول وکړئ.
- میله یي ګراف یې رسم کړئ.

د کورنیو شمیر	د کلیو شمیر
35 - 41	
42 - 48	
49 - 56	

- دیتاگانو د زیات مقدار او کم مقدار وسعت په لاس راوړی.
- دا وسعت د دستو په تعداد وروستی او د اوردوالی په لاس راوړی که چیرې حاصل یې طبیعي عدد نه وي کولای شی هغه (round down) کړی.
- له دې مقدارونو څخه دستې جوړې کړی.

مثال: په لاندې جدول کې د 30 روغتونو ناروغان چې په اټکلي ډول نیول شوی داسې راغلي دي:

152	151	152	160	157	140	161	165	163
164	166	170	172	174	154	146	153	149
172	175	165	172	170	169	146	158	177
160	165	168						

دا دیتاگانې په څلور دستو یا گیلپو کې ځای په ځای کړی.

- که چیرې د ناروغانو شمېر په یوه روغتون کې له 175 څخه زیات وي هغه روغتون ته ازدهامې (گڼه گوڼه) روغتون ولېږي. خو روغتونونه ازدهامې (گڼه گوڼه) دي.
- د ازدهام د پرته کولو لپاره میله یې گراف رسم کړی.

حل: د دې لپاره چې داوه شو ټول ارقام په یوه جدول کې ځای په ځای کوو او تر ټولو زیات او تر ټولو کم ارقام یې په لاس راوړو.

$$140 = \text{تر ټولو ټیټ رقم}$$

$$177 = \text{تر ټولو لوړ رقم}$$

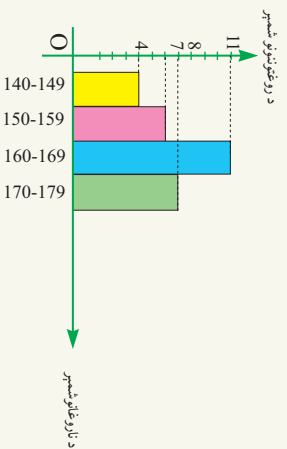
$$37 = 177 - 140 = \text{ټیټ رقم} - \text{لوړ رقم}$$

د دستو یا گیلپو د اوردوالی د پیدا کولو لپاره دا وسعت د دستو یا گیلپو په شمېر ونشو $\frac{37}{4} = 9.25$ ددې عدد څخه د دستې یا گیلپې په اوردوالی کې گڼه اخلو. اما د کار د اسانې

لپاره دا عدد روڼه جون یا کښته خوا په پام کې نیسو چې په دې ډول د گیلپې اوردوالی د (9) عدد په لاس راځي.

د ناروغانو شمېر	د روغتونو کثرت	د گیلپو وسط یا منځی	f · X
140 – 149	4	144.5	$4 \times 144.5 = 575$
150 – 159	7	154.5	$7 \times 154.5 = 1081.5$
160 – 169	11	164.5	$11 \times 164.5 = 1809.5$
170 – 179	$\frac{8}{n = 30}$	174.5	$8 \times 174.5 = 1396$

$$\bar{X} = \frac{575 + 1081.5 + 1809.5 + 1396}{30} = \frac{4865}{30} = 162.1$$



پاملرنه وکړئ که چېرې د دستې اوږدوالی پورته خوا پوره په پام کې ونه نیسو یعنې روزنارف نه کړو، د دستو گیلپو) د اوږدوالی مجموعه له 37 څخه لږ، په لاس راځي، چې په دې ډول یو شمېر داتاگانې حساب او له جدول څخه خارجېږي او دا سم کار نه دی.

په ځینو وختونو کې د دستو یا گیلپو د شمېر (ګروپونو) په ځای د دستو یا گیلپو اوږدوالی مونږ ته پېژندل شوی دی په دې حالت کې د دستو یا گیلپو شمېر مونږ ته اهمیت نلري. د دستو یا گیلپو د اوږدوالی په لرلو سره داسې لیکو چې د هغو اوږدوالی د فرض شویو دستو یا گیلپو سره برابر وي او وروسته یې جدول پوره کوو.

مثال: په پورتنی مثال کې که د دستو یا گیلپو په ځای د دستو یا گیلپو اوږدوالی 8 فرض کړو منځنی یا اوسط قیمت یې پیدا کړئ.

حل: ټیټ رقم یعنې 140 څخه پیل کوو. څرنگه چې د گیلپو یا دستې اوږدوالی 8 دی د دوو لاندې پرله پسې سرحدونو تر منځ ولټن باید 8 وي. یعنې د دویمې گیلپو یا دستې لاندنۍ سرحد باید 148 وي. اته تر هغه زیاتو تر څو تېرې داتاگانې په جدول کې ځای په ځای شي تر پایه دوام ورکوو.

د ناروغانو شمېر	د ورغونيزو شمېر	د گیلپو اوسط	f · X
140 – 147	3	143.5	430.5
148 – 155	6	151.5	909
156 – 163	6	159.5	957
164 – 171	9	167.5	1507.5
172 – 179	$\frac{6}{n=30}$	175.5	1053

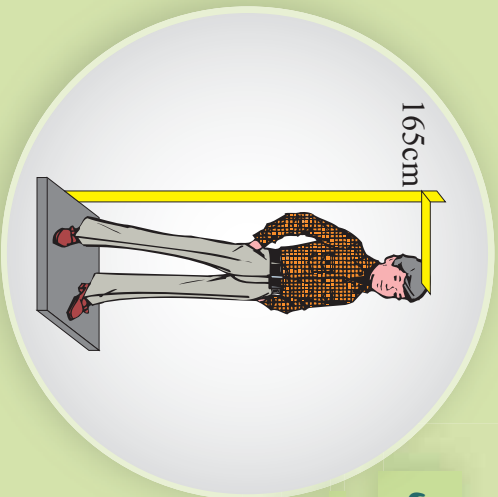
$$\bar{X} = \frac{430.5 + 909 + 957 + 1507.5 + 1053}{30} = 161.9$$

1- لاندي ديتاگاني د 20 زده کونکو د رسيدلو وخت په دقيقو له کوره تر ښوونځي رانښي:

10	50	65	33
48	5	11	23
37	26	26	32
17	7	13	19
29	43	21	22

- پورتنی ديتاگاني په اوو گروپو کې گڼلوی يا دسته بندي کړی.
- د هرې گڼلوی کثرت پيدا کړی.
- ميله يي گراف يې رسم کړی.
- که چېرې ديتاگاني په هغه گروپونو کې چې د گڼلوی اوږدوالی يې 10 وي کېږدو د کثرت جدول يې جوړ کړی.
- 2- يو مثال راوړی، چې ديتاگاني د دسته بندي لپاره له گڼليو له اوږدوالی څخه گڼه اخيستل شوی وي.
- 3- د موضوع د څيړلو لپاره يو مثال ورکړی، چې د ديتاگانو د گڼلوی کولو گڼليو له شمېر څخه گڼه اخيستل شوی وي.

165cm



د نښتو يا پيوسته ديتاگانو دسته بندي

که چيرې له تاسې څخه پوښتنه وشي چې ونه مو څومره جگه ده څه ځواب ورکوي.
يا تپک داسې عدد دی چې د متر له مخې يې لولئ؟

فعاليت

- که له تاسې څخه پوښتنه وشي چې څو وروڼه لرئ، څه وايئ؟ ايا کولی شئ ادعا وکړئ، چې د دغه ډول سوال په ځواب او يا نورو عمومي پوښتنو چې لاپتک وسایل مو لرئ، کولای مو شول، چې د خپلو هم صفتانو د وروڼو د شمېر په تپک ډول ووايئ.
- ناڅاپي متحول مو څه شي دی او دکومو ډولونو څخه دی.
- که ستاسې يو دوست ووايې د ونې اوږدوالی يې ۱۵۶ سانتي متر دی. ايا تپک د ونې(قد) اوږدوالی يې ۱۵۶ سانتي متره دی؟

د ۱۵ زده کونکو د ونو اوږدوالی وروسته له پوښتنې څخه داسې ورکړل شوي.

153	148	151	138	136
142	131	141	141	139
152	159	139	132	146

لاندي جدول بشپړ کړئ.

د زده کونکو د ونې جگړال	د زده کونکو شمېر
130 – 140	
140 – 150	
150 – 160	

- په سوچ ووايئ چې ولې د ۱۴۰ عدد يو وار د دستو يا گيلپو د پورتنی سرحد په څېر او يو وار د دستو د لاندينی سرحد په څېر راوړل شوي دي.
- که چيرې د يوه سړی د ونې اوږدوالی ۱۴۰ سانتي مترو وي څه سوچ کوئ، چې په کومه دسته يا گيلی کې قرار لري.

32	35	38	47	44	48	28
30	40	36	51	52	54	31
27	32	42	52	31	29	29
54	49	37	43			

که چیري یو نښتی یا پیوسته متحول ولرو د اطلاعاتو په گڼی یا دسته بندې کې د یوې دستې یا گڼی پورتنی سرحد به له کورنی سرحد سره برابر وي، د قرارداد له مخې که داټا د پورتنی گڼی یا دستې سره برابر وي په ورپسې سرحد کې لوړې.

مثال: د 25 ډول، ډول موټرونو چټکتیا په لاندې ډول احصایه نیول شوي ده.

• د کثرت جدول یې ډک کړئ.

• که چیري د چلولو د جواز سرعت په ښار کې په یوه ساعت کې ۳۰ کیلومتره وي خو موټرونو د چټکتیا د مجاز سرعت څخه زیات چلېدلې دي.

• د گڼیو د کثرت د جمع حاصل څو دی؟ دا عدد د څه شی سره برابر دی؟
حل: څرنگه چې سرعت یو پیوسته متحول دی؛ نو جدول د پیوسته یا سره نښتی متحول لپاره جوړوو. د ۳۰ عدد په دویمه گڼی کې او د ۴۰ عدد په دریمه گڼی کې لوړې د گڼیو د کثرت جمع برابر ده له $25 = 5 + 7 + 9 + 4 = n$ چې د موټرونو د شمېر سره مساوي ده او (۲۱) موټرونو له خپل جواز څخه زیات چلېدلې دي.

سرعت	تعداد
20 - 30	4
30 - 40	9
40 - 50	7
50 - 66	$\frac{5}{25}$

یو نښتی

1- لاندې داټاگانې چې د 34 زده کوونکو د هوش ضریب د ښوونځي په اول کال کې راښيي په پام کې ونیسئ.

86	108	108	111	111	103	108	101	88
91	103	105	105	112	96	111	107	96
92	100	112	112	92	89	95	90	105
111	95	108	77	106	90	77		

د 4 دسته یې جدول په جوړولو سره د گڼیو د کثرت د جمع حاصل، د گڼیو مرکز، او data منځنی قیمت پیدا کړئ.



وزني اوسط يا منڃي قيمت Weighted Mean

که خوڪ ڀنبه کار سرته ورسوي، انعام ٻي نظر کوم عدد ته خو برابره دی.

فعاليت

اڻڀلائي مو ڏي ڇي هغه زده ڪونڪي ڇي دولسم ٿولگي پاي ته ورسوي د کانڪور ازموينه په څلورو څانگو کي له خاصو ضريبنو سره رسوي او د هغي د نمبرو په اساس پوهنتونونو پوهنځيو ته ویشل کېږي. اټکل کوو ڇي د دوو زده کوونکو د کانکور نمبري په لاندې ډول دی.

مضمون	ڙه او ادبيات د 2 په ضريب	ٿولنيز علوم د 3 په ضريب	رياضي د 4 په ضريب	مضمون
ضريب	3	3	4	ضريب
لومړي زده ڪونڪي	61	62	61	لومړي زده ڪونڪي
دولسم زده ڪونڪي	61	66	60	دولسم زده ڪونڪي

مضمون	د لومړي زده ڪونڪي نمبري	ضريب	مضمون	د دولسم زده ڪونڪي نمبري	ضريب
رياضي	61	4	رياضي	60	4
طبيعي علوم	62	3	طبيعي علوم	62	3
ٿولنيز علوم	66	2	ٿولنيز علوم	66	2
ڙه او ادبيات	61	3	ڙه او ادبيات	61	3

- د دواړو زده ڪونکو د نمبرو منڃي يا وسطي قيمت ڀيلا ڪري.
- د کوم مضمون نمبري په منڃي يا وسطي قيمت ڇپره اغيزه لري؟ ولي؟
- د کوم مضمون نمبري په منڃي يا وسطي قيمت لږ اغيزه لري؟ ولي؟
- که د زده کوونکو د رياضي مضمون په نمبرو 5 نمبري ورتلبي شي منڃي يا وسطي قيمت ڇپر بدلون مومي که ڏي د ٿولنيزو علومو په مضمون 5 نمبري زتلبي شي.

که چیري دیتاگانې په ځانګړي ضریب سره ورکړل شوی وي دا په دې معنا ده چې د دیتا اغیزه یوشان له هغه ضریب سره تړلې ده. په دې حالت کې د ضریبونو د کثرت جدول د دیتاگانې د کثرت په عنوان حسابېږي او په W سره ښودل کېږي. په لاس راغلی اوسط ته وزني اوسط وایي:

$$\bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

مثال: په ځینو پوهنتونو کې نمبري د تورو په اساس لکه A, B, C, D او F اعلا تیري په دې پوهنتونو کې د A ارزښت څلور، د B ارزښت درې، د C ارزښت دوه، د D ارزښت یو او د F ارزښت صفر وي یوه محصل لاندې نمبري اخیستی دی.

مضمون	نمرې	د کړیالونو شمېر
ریاضیات	B	3
فزیک	A	3
کیمیا	C	2
بیولوژي	B	3
ژبه	A	1

- د دې محصل د نمبرو اوسط څو دی.
حل:

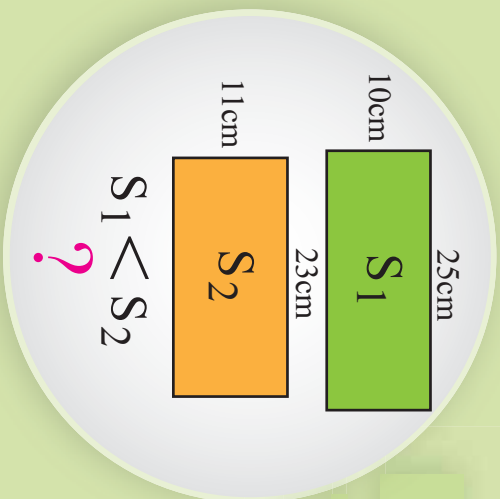
مضمون	حرفي نمره	د کړیالو شمېر x	عددي نمرې w	$w \cdot x$
ریاضیات	B	3	3	$3 \times 3 = 9$
فزیک	A	3	4	$4 \times 3 = 12$
کیمیا	C	2	2	$2 \times 2 = 4$
بیولوژي	B	3	3	$3 \times 3 = 9$
ژبه	A	1	4	$4 \times 1 = 4$

$n = 12$ د کړیالونو شمېر

$$\bar{x} = \frac{9 + 12 + 4 + 9 + 4}{12} = \frac{38}{12} = 3.16$$

پوښتنې

که د کانګر په یوه ازموینه کې د یوه زده کوونکي نمبري په وار سره 61, 70 او 53 او ضریبونه یې په وار سره 1, 2, 3 وي د دې زده کوونکي د نمبرو اوسط حساب کړئ.



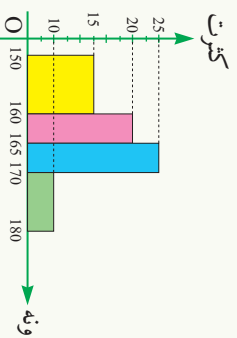
مستطيلي گراف Histogram

که د يوه مستطيل اوږدوالی 25 سانتي متره او سوري يی 10 سانتي متره او دبل مستطيل اوږدوالی 23 سانتي متره او سوري يی 11 سانتي متره وي. د دې دواړو مستطيلونو مساحتونه پيدا او يو له بل سره يي پرتله کړئ.

فعاليت

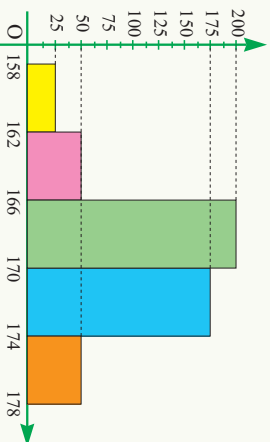
ديوي بڼورنځي د 70 زده کوونکو د ونې (قد) اندازه په لاندې ډول په جدول کې ورکړل شوې ده.

ونه په سانتي	150 – 160	160 – 165	165 – 170	170 – 180
کثرت	15	20	25	10



- په پورتنۍ گراف کې د مستطيلونو قاعدې څه شی رانښيي.
 - د هر مستطيل مساحت په لاس راوړئ. د مستطيل مساحت څه شي رانښيي.
 - د مستطيلونو جگوالی (ارتفاع) څه شی رانښيي.
 - پورتنۍ گراف له ميله يي گراف سره څه توپير لري.
- يو ځل بيا د يوه بڼورنځي د 50 زده کوونکو ونې چې اندازه يي په لاندې جدول کې ورکړ شوی ده په پام کې ونيسئ:

ونه په سانتي متر	158 – 162	162 – 166	166 – 170	170 – 174	174 – 178
کثرت	25	50	200	175	50



- جدول ته په پاملرني سره د مستطیل قاعده څه شی رانښيي.
- د مستطیل اوردوالی څه شی رانښيي.
- میله یي گراف له پورتنی گراف سره څه توپیر لري؟

د دیناگانو د پیوسته یا نښتې ښودلو لپاره د مستطیلي گراف څخه گټه اخلو په دې گراف کې د مستطیل عرض د دستو یا گڼیو د اوردوالی سره برابر دی په مستطیلي گراف کې مساحتونه د هرې دستې یا گڼې کثرت رانښيي.

که د دستو یا گڼیو اوردوالی یو له بل سره برابر وي کولای شو د مساحتونو په ځای راسا کثرت پرتله کړو په دې صورت کې اوردوالی د کثرت صمودي محور رانښيي.

مثال: د یوه ټولگي د زده کوونکو وزن په لاندې جدول کې را کړل شوی دی.

د زده کوونکو وزن په کیلو گرام	د زده کوونکو شمېر
40 – 45	4
45 – 50	6
50 – 60	12
60 – 70	8
70 – 90	8

دلته لیدل کېږي چې د دستو یا گڼیو واټن مساوي نه دی، مخکې د مستطیلي گراف د رسمولو څخه لازمه ده چې د مستطیلونو جگوالی (ارتفاع) یوه گڼه واټن ته په پام کې نیولو سره د ټولو دستو یا گڼیو پیدا کړو په دې مثال کې، $5K$ گڼه یا مشترک دی نو کولای شو چې ټول پنځه واړه واحده د x په محور په یوه واحد وښیو:

- د 40 – 45 گڼیو لپاره یو واحد
- د 45 – 50 گڼیو لپاره یو واحد
- د 50 – 60 گڼیو لپاره یو واحد
- د 60 – 70 گڼیو لپاره یو واحد
- د 70 – 90 گڼیو لپاره یو واحد

د مستطیلونو د عمودي اوږدوالي د پیدا کولو لپاره د دستو یا ګیلپو کثرت د دستو یا ګیلپو په اوږدوالي ویشو.

$$40 - 45 \rightarrow \frac{4}{1} = 4 \rightarrow \frac{4}{5} = 0.8$$

$$45 - 50 \rightarrow \frac{6}{1} = 6 \rightarrow \frac{6}{5} = 1.2$$

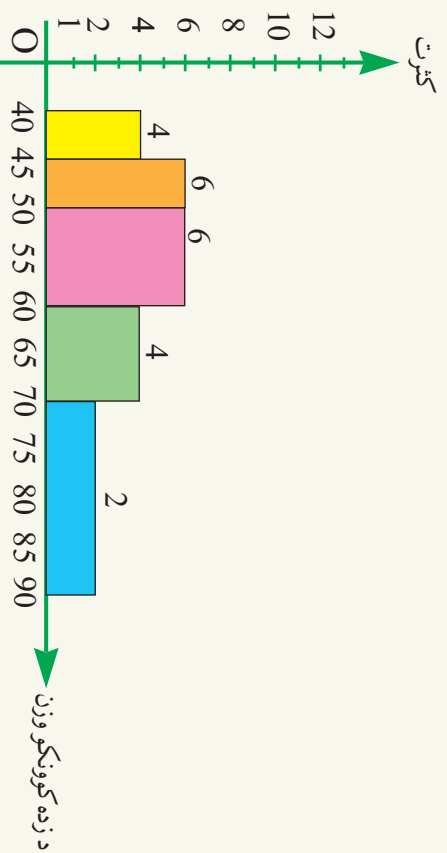
$$50 - 60 \rightarrow \frac{12}{2} = 6 \rightarrow \frac{12}{10} = 1.2$$

$$60 - 70 \rightarrow \frac{8}{2} = 4 \rightarrow \frac{8}{10} = 0.8$$

$$70 - 90 \rightarrow \frac{8}{4} = 2 \rightarrow \frac{8}{20} = 0.4$$

اوس په لاس راغلی پایلي په لاندې جدول کې ترتیب او مستطیلي گراف د راکړل شوي مثال رسمو:

د زده کوونکو وزن په Kg	40-45	45-50	50-60	60-70	70-90
کثرت نظر واحد فاصلي ته	4	6	6	4	2



1- لاندې جدول د يوه روغتون د ناروغانو تعداد د هغو ټاکلو ورځو رابڼې چې په روغتون کې بستر شوي دي.

د ورځو شمېر	1 - 5	5 - 9	9 - 13	13 - 17	17 - 21	21 - 25
د ناروغانو شمېر	12	10	16	18	14	8

- د پورتنۍ جدول مستطلي گراف رسم کړئ.

2- د يوه ټولگي 50 زده کونکو د IQ (دکاوټ) په ازمېنه کې گډون کړی دی، چې پايلې يې په لاندې ډول دي.

115	113	109	118	92	130	112	114	117	122
127	107	108	113	124	112	111	106	116	118
121	107	118	118	110	124	115	103	100	114
104	124	116	123	104	135	121	126	116	110
94	134	98	129	102	103	107	113	117	112

- نوموړو ډاټاگانو ته د کثرت جدول جوړ کړئ. د دې جدول لپاره ۷ گروپونه داسې په پام کې ونیسئ چې د گېټو اوږدوالی يې مساوي وي.
- د دې ډيټاگانو مستطلي گراف رسم کړئ.
- څه پايلې اخلي.

مخامخ شکل د لرگي پوه کنده ده هغه
کرښې چې ددې لرگي په مقطع کې ونډې
د څه شي شکل ته ورته دی.

دایره وي گراف



فعالیت

- د افغانستان د ښوونې او روزنې وزارت په 1387 کال کې لاندې ارقام د ښوونځیو د زده کوونکو د شمېر په اړه خپرې کړي دي: د ابتدایي زده کوونکو شمېر 250000 د منځنیو ښوونځیو د زده کوونکو شمېر 200000 او د ثانوي زده کوونکو شمېر 150000 دی.
- که د هرې دانانسې کنت په 360° درجو کې ضرب کړو هره دوره به څو درجي وي؟
 - یوه دایره رسم او مرکزي زاوې یې په لاس ته راغلو اعدادو په اندازه پیلې کړئ. د هرې زاوې دننه د اړوند تحصیلي دورې نوم ولیکئ.
 - یو عنوان د گراف لپاره وټاکئ او د گراف لاندې یې ولیکئ.
 - په دایروي گراف کې څه سره پرتله کېږي.
 - د دایرې په کوچنی کېدو یا لوییدو سره په دایروي گراف کې څه توپیر راځي؟

له پورتنۍ فعالیت څخه پوه شو چې کولای شو دیتاگانو د دایرې په مرسته وښوئ. د یو ناڅاپي یا اتفاقي متحول د دیتاگانو ښودل د دایرې په مرسته د دایروي گراف په نامه یادېږي؛ په دایروي گراف کې لومړی نسبت د هرې دستې یا گیلې او ټولې دیتاگانو شمېر په 360° ضرب چې د گیلېو مرکزي زاویه رانښيي په لاس راوړو؛ یعنې:

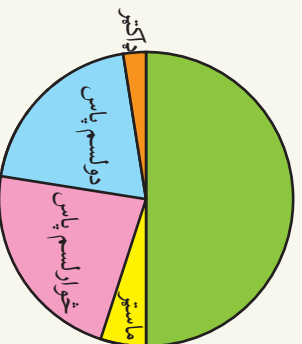
$$\text{د دیتاگانو کنت} \times 360^\circ = \frac{\text{د دیتاگانو شمېر}}{\text{کنت د درجې له جنسه}}$$

مثال: یوه مؤسسه چې د کارکوونکو شمېر یې ۲۰۰ او د تحصیل د درجې له مخې ویشل شوی دی.

د تحصیل درجه	ډاکټر	ماستر	لیسانس	څوارلسم پاس	دوولسم پاس
د کارمندانو شمېر	5	10	100	45	40

د دې دیتا دایروي گراف په لاندې ډول دی.

د تحصیل درجه	کثرت	مرکزي زاویه د درجې له جنسه
ډاکټر	5	$\frac{5}{200} \times 360^\circ = 9^\circ$
ماستر	10	$\frac{10}{200} \times 360^\circ = 18^\circ$
لیسانس	100	$\frac{100}{200} \times 360^\circ = 180^\circ$
څوارلسم پاس	45	$\frac{45}{200} \times 360^\circ = 81^\circ$
دوولسم پاس	40	$\frac{40}{200} \times 360^\circ = 72^\circ$



پوښتنې

- د لاندې جدول په پام کې نیولو سره د کورنیو دایروي گراف د جمعیت له مخې رسم کړئ.

د کورنی نوع	د کورنی جمعیت	سره ډېر جمعیت	منځنی جمعیت	لږ جمعیت	جمع
د کورنی شمېر	11	23	6	40	

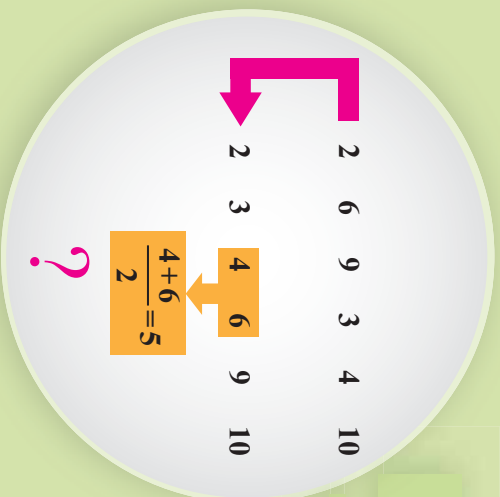
- دایروي گراف د څه ډول متحول لپاره مناسب دی.
 - که د دیتاگانو کثرت دوه برابره کړو، ایا مرکزي زاویه یې بدلون مومي؟

میانہ

Median

کہ لہ تاسی خجہ پورینتہ و شی، چي د نومرو اوسط مو خو دی؟ لہ اوسط خجہ گپہ اخلی. کہ لہ تاسی خجہ ویوینتل شی، چي ترټولو ډیر خله ستاسو د نومرو په اطلاعاته کی خو دی؟

کہ لہ تاسی پورینتہ وشی، چي تاسی د بنسوزہ کوونکو په منځ کی یاست که د کمزورو زده کوونکو په منځ کی تاسی دی سوال ته جواب ورکوی.



فعالیت

- سوچ وکړئ د ((میانې)) لغت یعنی څه؟
 - که یو شمیر دیناگانو ولرو څرنگه کولای شو د هغو وسطي مقدار پیدا کړو.
 - که د دیناگانو شمیر طاق وي، ایا وسطي مقدار د دیناگانو په میانہ کې شته دی؟
 - که د دیناگانو شمیر جفت وي، ایا وسطي مقدار د دیناگانو په میانہ کې شته دی؟
 - ایا کولای شو وسطي مقدار پرته له ترتیب کولو د دیناگانو په لاس راوړو.
 - که د دیناگانو مقدار جفت وي اټکل کولی شئ، چې څه مقدار د وسطي مقدار په عنوان وټاکو.
 - لاندې دیناگانې په پام کې ونیسئ.
- | | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 5 | 1 | 4 |
| 2 | 3 | 5 | 1 | 4 |
| 2 | 3 | 5 | 1 | 4 |
| 2 | 3 | 5 | 1 | 4 |
- وسطي مقدار یې پیدا کړئ.
 - د دیتا د وسطي مقدار یې شمیر مخکنی دانا له شمیر سره څه اړیکه لري.
 - لاندې دیتا په پام کې ونیسئ.
- یو وسطي عدد پیدا کړئ، چې د دیتا شمیر یې وروسته او د مخکنی له هغه عدد د دیتا له شمیر سره برابر وي.

که د گیپو اوردوالی یو له بل سره برابر وي کولای شو د مساحتونو په ځای راساً کثرت پرتله کړو په دې وضعیت کې اوردوالی د کثرت عمودي محور راښيي نو په دې حالت کې مساحت نشو په لاس راوړئ.

مثال: د یوه ټولګي د زده کوونکو وزن په لاندې جدول کې راکړل شوی دی.

10000	7000	4000	6000	3000
-------	------	------	------	------

ددې data میانه حساب کړئ.
حل: لومړی data مرتب کوو:

3000	4000	6000	7000	10000
------	------	------	------	-------

لیدل کېږي چې د 6000 عدد د عددونو په وسط (منځ) کې قرار لري نو د data میانه د پورته عددونو ده.

دویم مثال: د لاندې data میانه وټاکئ.

2	6	9	3	4	10
---	---	---	---	---	----

حل: د میاني د حسابولو لپاره عددونه ترتیب کوو.

2	3	4	6	9	10
---	---	---	---	---	----

دا عددونه د پورته عددونو د data میانه ده.

لیدل کېږي چې د data منځ کې داسې عدد نشته چې د میاني خاصیت صدق کړي نو که چیرې تاسې $5 = \frac{4+6}{2}$ په پام کې ونیسئ چې د میاني ځانګړتیا په کې صدق کوي او دا عدد د پورتنۍ داتا میانه ده چې د پنځو څخه وروسته د داتا شمېر د پنځو څخه د پورته داتا سره برابر دی.

پوښتنې

- 1- لاندې جدول د یوه روغتون د ناروغانو شمېر د هغو ټاکلو ورځو رابینې چې په روغتون کې بستر شوی دی.
1, 2, 3, 3 او 0, 2, 100
2- د پورتنۍ جدول مستطلي ګراف رسم کړئ.
5, 0, 5, 6, 5, 15, 12, 0, 4, 15
3- که له ټولو دیناګانو سره یو ثابت عدد جمع شي د میاني په مقدار کې څه اغیزه منځ ته راځي په یوه مثال کې یې ونیسئ.
4- که دیناګانې دوه برابره کړو د میاني په مقدار کې څه اغیزه کوي په یوه مثال کې یې ونیسئ.



د تحول ساحه Range

د خپلو هم ټولگيو الو ونې مو اندازه کړې.
د تر ټولو لوړو ونو او د تر ټولو لنډو ونو تر منځ
توثير حساب کړې، که و مورغوښتل چې د
زده کوونکو تر ټولو زيات توثير پيدا کړې يا
لازمه ده چې د نورو زده کوونکو ونې اندازه
کړې؟

فعاليت

د اووم ټولگي د 10 زده کوونکو او لسم ټولگي 10 زده کوونکو د ونو لوړوالی په اتفاقي ډول ټاکل شوی، چې لاندې راوړل شوی دی.

152, 150, 149, 148, 148, 148, 146, 145, 142 : د اووم ټولگي زده کوونکي
160, 160, 160, 159, 158, 156, 153, 151, 150 : د لسم ټولگي زده کوونکي

- د دواړو گروپونو د لوړو ونو تر منځ وسعت پيدا کړې.
- آیا د دواړو گروپونو د اعدادو تر منځ وسعت يو شان دی.
- که چېرې دیتاگانې و نه لرو، یا د دیتا د لږو او ډیرو توپيرونو په لرلو سره د دې گروپونو په اړه مونږ کولای شو چې سره پرتله یې کړو.
- یا د بدلون یا تحول د ساحې برابروالي په دواړو گروپونو کې د دیتا د بیوالي په معنا دی.
- د نمونې د تعریف په پاملرنې سره که دا گروپونه د ټولنې په عنوان په پام کې ونیسو په نمونه کې د ولټن د اوږدوالي زیاتوالي، په ټولنه کې د ولټن د اوږدوالي زیاتوالي پایله راکوي.

د پورتني فعالیت څخه پوهیږو د ولټن اوږدوالي چې متحول په هغې کې د بدلون امکان لري د تحول د ساحې په نامه یادېږي. دا معیار د جگې او ټیټې دیتاگانو ترمنځ وسعت را په گوته کوي، پاملرنه باید وشي چې د تحول د ساحې لوی والی په یوه ټولنه کې د توپیر یا پراگندګې فیر والی دی هر څومره چې دا توپیر کم وي د وګړو پراگندګې کمه ده. د یوې ټولنې وګړي د دې ځانګړتیا له مخې یو بل ته نږدی دی که د تحول ساحه صفر وي، که د وګړو د څېړنو د ځانګړتیاوې سره برابري او یو شان وي په دې حالت کې ټولنه یوه متجانسه ټولنه بولو.

مثال: د دوو زده کوونکو د $\frac{4}{2}$ میاشتنی ازمونې شمېرې په لاندې ډول دی.

الف: 20, 21, 25, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39
ب: 20, 33, 34, 35, 35, 35, 34, 34, 39

• د دواړو دستو یا ګڼیو د تحول ساحه پیدا کړئ.

• آیا د دیتاګانې پراګندګي په لومړۍ یا که په دویم ګروپ کې کمه ده.

حل: د دواړو ګروپونو د تحول ساحه یو برابر ده.

$$39 - 20 = 19$$

د دویم ګروپ د دیتاګانې پراګندګي لږ او په دیتاګانې کې د 34 او 35 عددونه زیات تکرار شوی دی و اټن یې کم دی. ولې پراګندګي په لومړي ګروپ کې ډېره ده د تحول ساحه یوازې له لږو او زیاتو مقدارونو سره کار کوي. د دیتاګانو په اړه او د هغوی تر منځ هېڅ اطلاعات مونږ ته نه راکوي. نو د تحول د ساحې په لرلو سره نشو کولای د دیتاګانې د مینې د پراګندګي د میزان اټکل وکړو.

پوښتنې

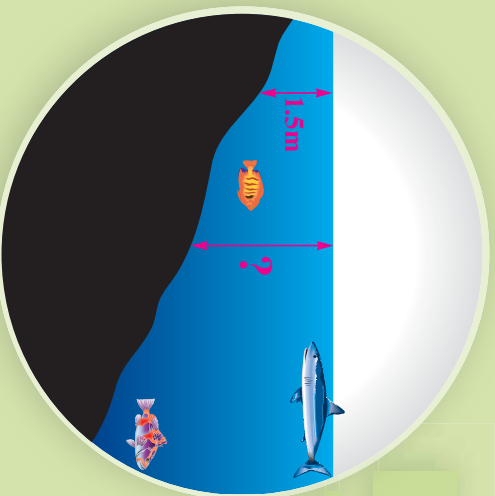
1- لاندې داتاګانې په پام کې ونیسئ.

1, 2, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15

• ددې داتاګانې د تحول ساحه پیدا کړئ.

• که د پورتنۍ data تر ټولو زیات او کم data له منځه یوسو د تحول ساحه یې پیدا کړئ.

• دا دواړه د تحول ساحه یو له بل سره پرتله کړئ او ووايست چې د کوم یو پراګندګي زیاته ده.



د انحراف اوسط Average deviation

که د یوه سیند د یوه ټکي ژوروالی 1.5 متره وي سوچ وکړئ چې د سیند د ټولو ټکو ژوروالی یو شان دی؟

فعالیت

پنځو تنو زده کوونکو په یوه صنفی ازموینه کې لاندې شمېرې اخیستي دي.

20	18	16	14	12
----	----	----	----	----

- د دې شمېرو اوسط او یا منځنۍ قیمت پیدا کړئ.
- د ټولو دیتاگانو د منځ یا اوسط توپیر پیدا کړئ.
- د هرې دیتاگانو د منځنیو د توپیر د جمع حاصل ولیکئ.
- د هرې دیتاگانو د اوسط یا منځ د توپیر د مطلقه قیمتونو د جمع حاصل پیدا کړئ.
- په لاس راغلی قیمتونه سره پرتله کړئ.
- د پنځو دیتاگانو تاسې پخپله یو مثال ورکړئ او پورتنۍ عملې پرې سر ته ورسوئ.

له پورتنۍ فعالیت څخه پوهېږو هغه توپیر چې د دیتاگانو او اوسط تر منځ دی د منځ یا اوسط انحراف په نامه یادېږي.

د **data** د منځنۍ یا اوسط انحراف مجموع همیشه صفر ده. په دې دلیل د **data** د څېړنې لپاره د انحراف د مطلقه قیمت څخه گټه اخلو. که د ټولو انحرافونو د مطلقه قیمت جمع کړو او د **data** په شمېر کې وویشو د انحراف اوسط یا منځی ورته ویل کېږي، د لاندې فورمول په مرسته حسابېږي.

$$\text{د انحراف اوسط یا منځی} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

نسري	كثرت
0-10	2
10-20	7
20-30	4
30-40	5
40-50	10
50-60	12

دلته X_1, X_2, \dots, X_n عبارت له \bar{X} د دیتاگانو منځني يا اوسط او n د دیتاگانو شمېر دی، لیل کړي چې هر څومره د منځني انحراف لوی وي ، نو په هم هغه اندازه د data د پراگندګي له اوسط نه ډیره ده.

مثال: د 40 تنو زده کونکو نمبري په لاندې جدول کې ورکړل شوی دی.

د پورتنیو نمبرو د انحراف منځني پیدا کړئ.

حل: لومړی د اوسط يا منځني مقدار په لاس راوړو.

د دیتاگانو اوسط	$f \cdot x$	$x - \bar{x}$	$f(x - \bar{x})$
2	10	$5 - 37.5 = -32.5$	$2 \times (-32.5) = -65$
7	105	$15 - 37.5 = -22.5$	$7 \times (-22.5) = -157.5$
4	100	$25 - 37.5 = -12.5$	$4 \times (-12.5) = -50$
5	175	$35 - 37.5 = -2.5$	$5 \times (-2.5) = -12.5$
10	450	$45 - 37.5 = 7.5$	$10 \times 7.5 = 75$
12	660	$55 - 37.5 = 17.5$	$12 \times 17.5 = 210$
$\frac{1}{n=40}$	1500		

$$\bar{x} = \frac{10+105+100+175+450+660}{40} = \frac{1500}{40} = 37.5$$

لیل کړي چې د $f(x - \bar{x})$ د جمعی حاصل له صفر سره مساوي دی. نو باید مطلقه قیمت یې سره جمع کړو.

$$\begin{aligned} \text{د انحراف اوسط} &= \frac{|-65| + |-157.5| + |-50| + |-12.5| + |75| + |210|}{40} \\ \text{د انحراف اوسط} &= \frac{65+157.5+50+12.5+75+210}{40} = \frac{570}{40} = 14.25 \end{aligned}$$

پوښتنې

- د A او B دوو جمعیتونو انحرافونه لاندې راکړل شوی.
- د A جمعیت انحرافونه : 4 2 0 0
- د B جمعیت انحرافونه : 8 1 0 0
- د A جمعیت د انحراف منځني پیدا کړئ.
- د B جمعیت پراگندګي زیاته ده.

د اتم څپرکي لنډيز

- گډهې د هغو دیتاگانو مجموعه ده، چې د گډهې ځانگړتیاوې ولري. د دیتاگانو د گډهې کیدو یا لپاره لاندې پړاوونه په پام کې نیسو:
 - د تحول ساحه: د دیتاگانو د ډیر لږو او ډیر زیاتو تر منځ وسعت.
 - د گډهې اوردوالی: د تحول د ساحې او د دستو د شمېر نسبت.
 - د دستو کثرت: د هغو دیتاگانو د گډهيو شمېر چې په هره دسته کې قرار لري.
 - د گډهې مرکز: د هرې دستې د منځنۍ محاسبه.
- په دسته بڼې کې که متحولونه پيوسته یا پرله پسې وي د ورپسې گډهې پورتنۍ سرحد د مخکینې گډهې یا دستې لاندې سرحد سره برابر دی. په هغه صورت کې چې دیتاگانو د دستې د پورتنۍ سرحد سره برابر وي هغه دیتاگانو په ورپسې دیتاگانو پورې اړه لري.
- د دیتاگانو د دستو د شمېر مجموع د ټولې دیتاگانو د شمېر سره برابر دی.
- فرض کوو د X_1, X_2, \dots, X_n په ترتیب د W_1, W_2, \dots, W_n ضریبونه وي دغه اطلاعات کولی شو په لاندې جدول کې خلاصه کړو.

data	X_1	X_2	...	X_n
د وزن ضریب	W_1	W_2	...	W_n

- په دې حالت کې د پورتنۍ داتاگانو منځنۍ په لاندې ډول محاسبه کړو.

$$\text{اوسط وزنې} = \frac{W_1 X_1 + W_2 X_2 + \dots + W_n X_n}{W_1 + W_2 + \dots + W_n}$$

- هستوگرام یا مستطليي گراف عبارت له هغه گراف څخه دی، چې د کثرت توزیع یې د مستطیلونو په مرسته ښودل کېږي.
- د مستطیل جگوالی د دستې یا گډهې د کثرت سره برابر ده.
- د هر مستطیل مساحت د دستې یا گډهيو د اوردوالی او د دستې یا گډهې د کثرت له حاصل ضرب سره برابر دی.
- په مستطليي گراف کې مستطیلونه یو بل سره تړلی او د تړلیو (پیوسته) متحولینو څخه د گراف د ښودلو لپاره ګټه اخلي.

● په یوه اختیاري شعاع یوه دایره د مرکز زاویې په مرسته په Π برخو ویشو داسې، چې دهرې برخې د مرکزي زاویې اندازه د کثرت سره د هغې قیمت متناسبه وي په دې حالت کې یې مرکزي زاویه نظر لومړی دستې یا گډې ته عبارت دی له:

$$\text{د دیناگانو کثرت} = \frac{\text{کثرت د درجې له مخې}}{\text{د ټولو دیناگانو شمېر}} \times 360^\circ$$

● د میانې د پیدا کولو لپاره په لومړۍ مرحله کې دیناگانې منظم کړو او روسته:

- که د دیناگانې شمېر طاق وي د دیناگانې منځې یا اوسط ده.
 - که د دیناگانې شمېر جفت وي میانه د دوو دیناگانې منځنی اوسط دی.
 - د تر ټولو کوچني دیناگانې او تر ټولو لوی دیناگانې توپیر د تحول د ساحې څخه عبارت دی یا په بل عبارت داناگانې په هغه ساخځه کې بدلون کوي.
 - د هرې دیناگانې د منځنی تفاضل ته د منځنی انحراف وايي.
- د انحراف منځنی یا اوسط د انحرافونو د مطلقه قیمت د اوسط څخه عبارت دی او فورمول یې د اړوند دیناگانې لپاره په لاندې ډول لیکو:

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

د اتم خپرکي پوښتني

1- لاندې جدول وکړ کړئ:

گڼلې (دسته)	کثرت	د دستې مرکز	تجمعي کثرت
7,5-10,5	12		
10,5-13,5	10		
13,5-16,5	15		

- پورتنی جدول د کومې دسته بندې گراف رابښي: پيوسته يا نښتي يا مجزا.

2- لاندې جدول د 200 ټول کلتو ځوانانو د ونو اوږدوالی رابښي:

گڼلې (دسته)	کثرت	د دستې مرکز
149,5-156,5	15	153
156,5-163,5	20	160
163,5-170,5	30	167
170,5-177,5	25	174
177,5-184,5	10	181

- مستطلي گراف يې رسم کړئ.

3- د A, B, C او E ښارونو کې 200 ميليونه افغاني سرمايه په کار اچول شوی ده داسې چې:

- د A ښار لپاره 110 ميليونه افغاني
- د B ښار لپاره 32 ميليونه افغاني
- د C ښار لپاره 24 ميليونه افغاني
- د D ښار لپاره 14 ميليونه افغاني
- د E ښار لپاره ټول ميليونه افغاني معلومات ورکړل شوی او دايروي گراف يې رسم کړئ.

ښارونه	د سرمايي ویش په مليون	سرمايه په فصلي	سرمايه په درجه
A	110		
B	32		
C	24		
D	14		
E	20		

4- يو شمير کورنی د خپلو غړو د شمير سره په لاندې جدول کې ورکړ شوی دی.

کورنی	15	12	18	
دکورنی غړي	5	4	2	8

- د کورنی مود پیدا کړی.
- میانه یا منځنی پیدا کړی.
- اوسط میانه پیدا کړی.
- د تحول ساحه محاسبه کړی.

5- د یوه ټولګي د زده کوونکو د ونډ اندازه په لاندې جدول کې ورکړ شوی.

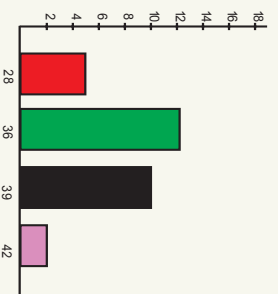
د ونډې اندازه	1.5-1.6	1.6-1.7	1.7-1.8	1.8-1.9	1.9-2
کثرت	5	16	9	4	1

- د ګڼې مود مشخص کړی.
- د ګڼې یو مرکز حساب کړی.
- منځنی یې پیدا کړی.
- یوه ټیټوونکی د یوه صنفی ازموینې د اوسط محاسبه داسې وکړه:

$$1.4+3.6+2.8+7.9+3.10+3.11+5.12+1.15 = \text{د ازموینې اوسط}$$

25

- د ټولګي د زده کوونکو شمېر پیدا کړی.
- څو نېټې د ۸ او ۱۳ تر منځ قرار لري د (۸ او ۱۳ په ګډون)؟



- عمومي منځنی یې څو دی.
- 7- لاندې میله یې ګراف د هغو کتابونو شمېر راښيي چې په یوه میاشت کې مطالعه شوی دی.
- احصائیوي جدول رسم شوي.
- د مطالعه شویو کتابونو شمېر په میاشت کې څو دی.

8- که د تحول ساحه له صفر سره برابره وي د داتاګانې څخه څه پایله اخلي.

9- که په داتاګانې باندې یو ثابت مقدار علاوه کړو د تحول ساحه څرنگه تحول کوي؟

- 10- د څلورو زده کوونکو د هغو ساعتونو شمېر چې لویو ته یې ورکړی دی په لاندې ډول راغلی دی:
- 1 5 7 9
- د پورتنی داتاګانو د انحراف منځنی یا اوسط حساب کړی.



فہم چپرگی احتمالات





د ناڅاپو پښو اتحاد

په دواړو شکلونو کې یو ځای څو هیلې،

وینئ:

هیلې، په کومه حلقه پورې اړه لري؟

فعالیت

- د یوې دانې رمل د اچولو په تجربه کې د $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ نمونې فضا او د $A = \{1, 2, 3\}$ او $B = \{4, 5, 6\}$ ناڅاپي پښې په پام کې نیسو.
- د A او C ناڅاپي پښې یو له بل سره څه اړیکې لري؟
- که د A یا B پښې رامنځ ته شوي وي یا ویلې شی، چې د $A \cup B$ پښه شوې ده؟
- د A پښه رامنځ ته شوې او بله کومه اختیاري پښه چې هېڅ پښه شوې نه ده نا ممکنه یا \emptyset پښه نومول کېږي.
- ویلې شی، چې د $A \cap A$ او د A پښې یو د بل سره څه توپیر لري؟

د پورتنۍ فعالیت پایلې په عمومي ډول د S په نمونه یي فضا کې د A ، B ، او C ناڅاپه پښو لپاره په لاندې ډول په لاس راوړو.

پایله:

- که چېرې د S په یوه نمونه یي فضا کې د $A \subseteq B$ ناڅاپي پښه وي، په دې صورت کې: $A \cup B = B$
- که چېرې د S په یوه نمونه فضا کې د A او B ناڅاپي پښه وي، د $A \cup B$ او $B \cup A$ پښې یو بل سره توپیر نه لري؛ یعنې: $A \cup B = B \cup A$
- که چېرې د S په یوه نمونه یي فضا کې د A یا B یوه پښه رامنځ ته شي نو د $A \cup B$

پښینه هم رامنځ ته شوي ده، چې سربره په دې
پښینه کې $A \subseteq A \cup B$ او $B \subseteq A \cup B$

- د A پښینه د S په نمونه کې فضا کې پښینه شوي ده او یوه بله پښینه چې هیڅ نه پښتیری، یعنې \emptyset ، په دې معنا ده چې یوازې د A پښینه را منځ ته شوی ده.
- $$A \cup \emptyset = A$$

- د $A \cup B$ ناڅاپي پښینه په دې معنا ده، چې لږ تر لږه د A یا B پښینه منځ ته راغلي ده.

مثال: که چېرې د C ناڅاپي پښینه د A او B دوي بېلابېلي ناڅاپي پښینې په خپل ځان کې ولري په دې صورت کې د $A \cup B$ ناڅاپي پښینه هم په خپل ځان کې لري په یوه مثال کې یې واضح کړی.

حل: د $A = \{1, 2\}$ ، $B = \{2, 3\}$ او $C = \{1, 2, 3, 4\}$ پښینې په پام کې نیسو لیدل کېږي، چې $A \subseteq C$ او $B \subseteq C$ دی نو:

$$B \cup A = A \cup B = \{1, 2, 3\} \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

پوښتنې

1- د S د یوې نمونه یې فضا څخه د A ، B او C د ناڅاپو پښینو لپاره د یو مثال (بیلگې) په مرسته د لاندې اړیکو سم والی وڅیړئ.

- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup A = A$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2- که $A \subseteq B$ وي په یوه مثال کې وښیئ چې $A \cup B = B$ دی.

3- که چېرې د A او $A \cup B$ ناڅاپي پښینې سره برابرې وي، په یوه گراف کې وښیئ چې د A ناڅاپي پښینه د B ناڅاپي پښینه په بر کې لري.

د ناڅاپي پښو قاطع

د نور اصلي رنگونو د پرېکړې څخه
کوم رنگونه لاسته راځي؟



فعالیت

- د رمل د یوې دانې د اچولو نمونه یې فضا $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ او د $A = \{2, 4, 6\}$ ،
 $B = \{4, 6\}$ او $C = \{1, 3, 5\}$ ناڅاپي پښې په پام کې نیسو.
- د $A \cap B$ او $B \cap A$ ناڅاپي پښې یو بل سره څه اړیکه لري.
- آیا د A او B پښې د $A \cap B$ ناڅاپي پښه په برکې لرلې شې که نه؟
- وښيي چې د $C \cap B$ ناڅاپي پښه یوه ناشونې پښه ده.
- که د B پښه د A پښه په ځان کې ولري، د A او $A \cap B$ ناڅاپي پښې سره پرتله کوئ.

د پورتنۍ فعالیت څخه کولای شو لاندې پایلې په عمومي ډول بیان کوو.

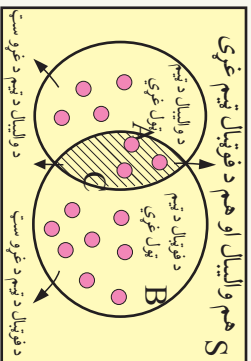
پایله:

- د S په یوه نمونه یې فضا کې د A ، B او C ناڅاپي (تصادفي) پښو لپاره لرو.
- د $A \cap B$ او $B \cap A$ ناڅاپي پښې یو شان دي.
- د A او B ناڅاپه پښې هره یوه یې د $A \cap B$ ناڅاپه پښه په خپل ځان کې لري.
- که د A او B دوه پښو چې تشې نه $A \cap B = \emptyset$ وي په دې حالت کې د A او B پښې یوه له بله بېلې پښې بلل کېږي.
- د A پښې لپاره لرو:
 $A \cap S = A$ ، $A \cap \emptyset = \emptyset$
- که چیرې د B پښه د A پښه په خپل ځان کې ولري، نو $A \cap B = A$ سره ده.

مثال: د ښوونځي د فوټبال له ټيم څخه درې تنه د ښوونځي د واليبال د ټيم غړي هم دي که

چيري د فوټبال د ټيم غړي به A ، د واليبال د ټيم غړي به B او د دواړو ټيمونو گډ غړي به C

S هم واليبال او هم د فوټبال ټيم غړي



سره ونښو به دي حالت کي د ستونزو تر منځ اړيکه د

ست د تيوري په بڼه وليکي:

$$A \cap B = C$$

ايا پورهيري چي د B د ست په مکمله ست کي يعني

\bar{B} کي د واليبال د ټيم ټول غړي گډون لري. که نه؟

نو \bar{B} ټول هغه زده کونکي دي، چي د فوټبال د ټيم

غړي نه دي، څرنگه چي 3 تنه زده کونکي د واليبال د ټيم غړي، چي په عين حال کي د

فوټبال د ټيم غړي هم دي به \bar{B} کي گډو نه لري؛ نو په دي اساس د واليبال ټيم B ست په

پام کي نيولو سره ناقص دی.

پوښتي

1- د A ، B ناڅاپي پيښه د ډياگرام په مرسته د A او B د بيلابيلو حالتونو لپاره چي د C پيښه د A او B پيښي په خپل ځان کي لري وښيي او وضاحت ورکړي.

2- په يوه مثال کي د A ، B او C پيښي چي A او B په خپل ځان کي لري وښيي چي:

- $(\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $(\overline{A \cap B}) = \overline{A} \cup \overline{B}$

3- لاندي پيښي په بيان سره وليکي:

- $\overline{A \cup B}$
- $\overline{A \cap B}$
- $\overline{A \cup B}$



کلي او مکمله سټ

که چیري S د افغانستان ولایات، A د شمال او B د نور پاتي ولایات وي، نو $S - A$ او $S - B$ کوم ولایات راښيي؟

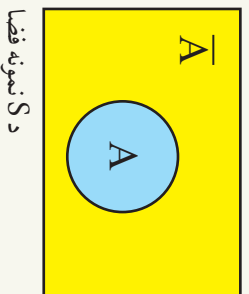
فعالیت

- د یوې داني رمل د اچولو نمونه یي فضا $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ او د $A = \{1, 3, 5\}$ ناڅاپي پیښه په پام کې ونیسئ.
 - د A د ناڅاپي پیښې مکمله یعنې \bar{A} کومه ناڅاپي پیښه کېدلې شي؟
 - یوه ناڅاپي پیښه پیدا کړئ، چې A یې په بر کې ولري، او په \bar{A} کې شامله نه دی.
 - آیا کولای شئ د S نمونه یي فضا څخه یو پیښه پیدا کړي چې په یو وخت کې نه په A کې او نه په \bar{A} گډون ولري.
 - د A او \bar{A} د ناڅاپي پیښو اتحاد له دواړمې پیښې سره څه اړیکه لري؟
 - د A او \bar{A} پیښو تقاطع ناممکنې یا ناشوني پیښې سره څه اړیکه لري؟
- د پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.

پایله: که چیري S یوه نمونه یي فضا او A یوه ناڅاپي پیښه وي:

- \bar{A} یوه ناڅاپي پیښه ده، چې په یوه وخت د A سره نه پیښيږي.
- د A هره ناڅاپي پیښه چې پیښيږي:

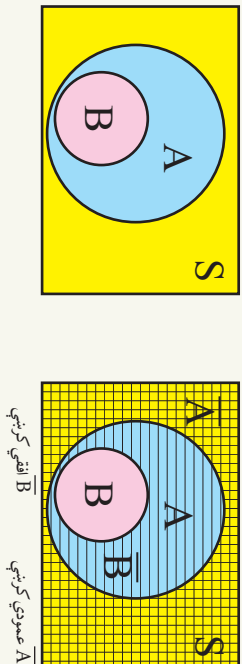
- $A \cup \bar{A} = S$
- $P(A \cup \bar{A}) = P(S) = 1$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$



د S نمونه فضا

مثال: که د S په یوه نمونه یي فضا کې د A ناڅاپي پېښه د B ناڅاپي پېښه په برکې ولري، په گرافیکي ډول ونښئ چې د \bar{B} ناڅاپي پېښه د A ناڅاپي پېښه په خپل ځان کې ولري.

حل: څرنگه چې $B \subseteq A$ دی، که چېرې موږ په شکل کې \bar{A} او \bar{B} ونښو د لاندې شکل څخه په پوره ښکاره لیدل کېږي، چې:



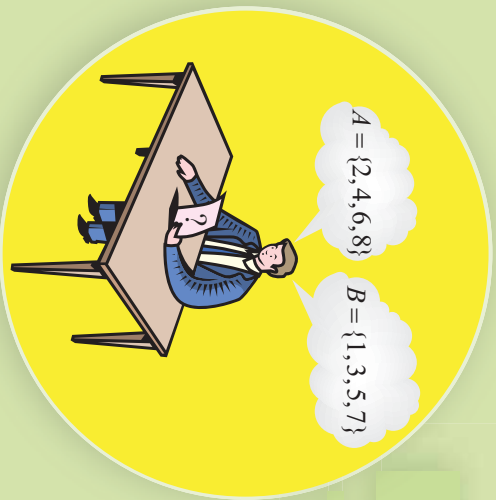
پوښتنې

1- د یوه مثال او گراف په مرسته د S د نمونه یي فضا او د A او B ناڅاپي پېښو لپاره ونښئ، چې:

- a) $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$
 - b) $\bar{S} = \emptyset$
 - c) $S = \bar{\emptyset}$
- 2- د S نمونه یي فضا او د A او B ناڅاپي پېښو لپاره لاندې پېښې په عبارت سره ولیکئ:

- a) $\bar{A} \cap \bar{B}$
- b) $\overline{(A \cup B)}$

په ستونو مهال جوړونه

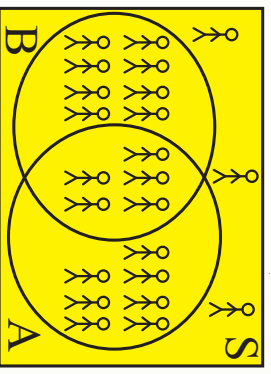


تر اوسه مو الجبري يا هندسي قوانينو
څخه د ژوندانه د مسائلو په حل كې گټه
اخيستله.

آيا سوچ مو كړئ، چې د ستونزو څخه هم
كولای شو چې د خپلو مسائلو د حل
لپاره گټه واخلو؟

فعاليت

د يوه ټولگي د 23 زده كوونكو څخه مو د خوښو او وروڼو لرونكو زده كوونكو احصائيه راټوله كړئ، چې په لاندې دياگرام كې ليكل شوی ده.



په شكل كې ټول هغه زده كوونكي چې خوښی لري د A په سټ او هغه زده كوونكي چې وروڼه لري د B په سټ سره ښودل شوي دي.

شكل په پام كې ونيسئ د لاندې فعاليت سوالونو ته
ځواب پيدا كړئ.

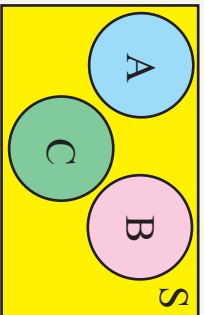
- څو تنه خوښی لري؟
- څو تنه وروڼه لري؟
- څو تنه هم خوښی او هم وروڼه لري؟
- څو تنه نه خوښی او نه وروڼه لري؟
- څرنگه كولی شو دا مساله د رياضي په ژبه وليكو.
- ټول هغه كسان چې خوښی نه لري څو تنه دي؟

ليدل كېږي چې پورتنی گراف كولی شي چې پورتنی ټولو سوالونو ته او د هغوی په شان نورو سوالونو ته په ښه توگه ځواب ورکړئ.
نو د پورتنی فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راوړو.

پايله: ليدل کيږي، چې دست د تيوري په کارولو سره په ورځني ژوندانه کې د ډېرو مسائلو سره مخامخ کيږو، چې کولای شو هغه حل پيدا کړو، او هغه و ارزوو.

د ست د تيوري تطبيق په احتمالاتو کې او يا په بل عبارت د هغو ناڅاپي پېښو د پېښېدو د مسائلو د حل او د هغې د ښودنې د ست د تيوري په مرسته د ست تيوري يوه بله د تطبيق ساحه شمېرل کېدای شي.

مثال: د S نمونه يي فضا د A, B, C او ناڅاپه پېښې په لاندې ډياگرام کې ورکړل شوي دي په پام کې ونيسئ! مطلوب دی د پېښو د پېښېدو احتمال:



- a. د دې احتمال چې د A يا B حادثه ناڅاپي پېښه شي.
- b. د دې احتمال چې د A يا B پېښه، پېښه شي.
- c. د دې احتمال چې د C پېښه، پېښه نه شي.

حل:

a. د A يا B احتمال په حقيقت د $A \cup B$ احتمال دی څرنگه چې د ايښې يو بل څخه بېلې دي، يعنې $A \cap B = \emptyset$ دی نو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

b) د دې احتمال چې د A پېښه ناڅاپه پېښه، پېښه شي د \bar{A} مکمله پېښې څخه عبارت ده، چې د A پېښه نه ده پېښه شوی، په بل عبارت هغه پېښه ده چې د C يا B حادثه پېښه نه شي نو:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = P(C \cup B)$$

$$\text{نو: } P(A) = 1 - (P(C \cup B)) = 1 - P(C) - P(B)$$

c) د دې احتمال چې د C پېښه ناڅاپه پېښه نه شي د هغې پېښې د پېښېدو احتمال سره برابر دی چې د A يا B پېښې، پېښې شي، او دا د $A \cup B$ ډيښې د پېښېدو څخه عبارت ده.

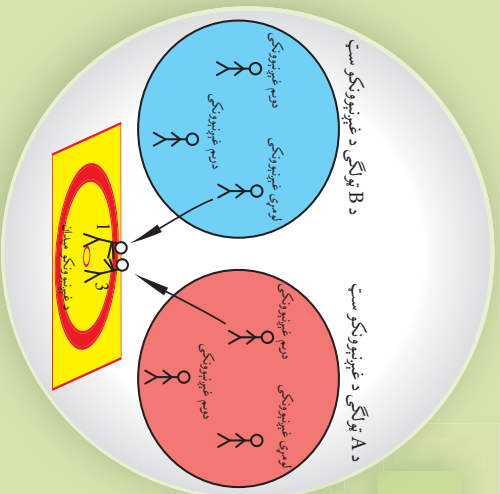
$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

پوښتنې

- 1- هغه مثال چې په فعاليت کې مو ترې گټه اخيستي ده په پام کې ونيسئ:
 - a) د دې احتمال مطلب دی، چې له دې ټولگي څخه يو زده کوونکی په تصادفي يا ناڅاپي ډول وټاکل شي چې خور او وروڼه لری.
 - b) د يوه داسې زده کوونکي د ټاکلو احتمال چې تصادفي ټاکل کيږي پيدا کړئ، چې لږ تر لږه خور يا وروڼه ولري.

د شمېرنې اصل

د A او B دوو ټولګيو څخه درې تنه د غېبې لپاره ټاکل شوي دي په څو ډوله کولای شئ چې یو له بل سره په غېبه ورشي.



فعالیت

- دوه عدده تور او سرمه يي رنگه پتلونونه له درې عدده سپين، ابې او فولادي رنگه کميسونه په پام کې نيسو.
- په څو ډوله کولای شو هغو په ځان کرواوغونډو.
 - د شمېرنې د ترتيب لپاره د ونې د شکل له گراف څخه گټه واخلي.
 - د اغوستلو د ټولو امکاناتو او د پتلونونو او کميسونو د شمېر تر منځ څه اړيکه شته ده.

د پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پايله په لاس راوړو.

پايله:

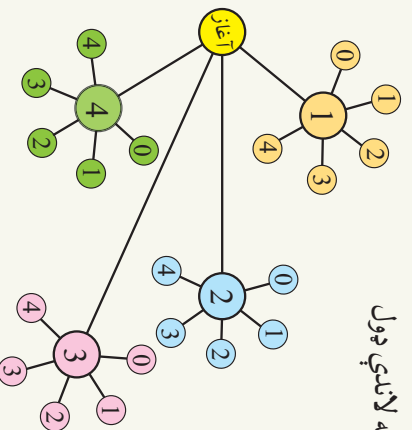
- 1- د دوو ستونزو د عنصر په ترکیب کې د ټولو امکاناتو شمېر د ترکیبي مجموعه د هرې یوې مجموعې د عنصر د شمېر د مجموعو دضرب حاصل سره مساوي دی.
- 2- که چېرې د امکاناتو شمېر او یا د یو ست عناصر په m عدد او د یوه بل ست د عناصرو شمېر مساوي په n عدد وي په دې حالت کې دواړه ټاکنې یو د بل سره د $(m \times n)$ د شمېر په ډول امکان لري.

مثال: د 0، 1، 2، 3 او 4 رقمونو څخه په گټه اخستې سره څو دوه رقمي عددونه کولای شو جوړ کړو؟ برسيره پر دې د امکاناتو د ونې گراف يې رسم کړئ او هغه احتمال پيدا کړئ، چې له دې عددونو څخه یو عدد په اتفاقي (ناڅاپي) ډول و ټاکل شي، چې هغه عدد په 2 د ونېش وړي وي.

د دې کار لپاره د ذکر شوی دوه رقمي عدد د جوړولو لپاره دوه تش ځایونه د هر رقم لپاره په پام کې نیسو.

د کيفي خوا په تش ځای کې د راکړل شویو پنځو رقمونو څخه 4 امکانانوزو (برته له صفر) د 0, 1, 2, 3 او 4 عددونو د ځای په ځای کولو لپاره شته دي، خو د نښې خوا د تش ځای لپاره 0, 1, 2, 3 او 4 هرو پنځو عددونو څخه گټه اخلو. په دې ترتیب د دې رقم د ټاکلو پنځه امکانه شته دي، چې په مجموعي ډول $4 \times 5 = 20$ شمېر د دوه رقمي عددونو د جوړولو لپاره د پورتنیو عددونو په وسیله موجود دي.

دا مطلب کولای شو د ونه ییز د گراف په مرسته په لاندې ډول وښیو، لکه:



د دې لپاره چې نوموړی رقم پر 2 د ویش قابلیت ولري د نښې خوا په تش ځای کې د 5 برابرو امکانانو څخه یوازې 3 امکانه د (0, 1, 2, 3 او 4) شته دي. د داسې عددونو د جوړولو لپاره چې پر 2 د ویش وړ وي د $3 \times 4 = 12$ برابر حالتونه دي، چې په لاندې حالت کې د هغه رقم د ټاکل کیدو احتمال چې پر 2 د ویش وړ وي عبارت دی له:

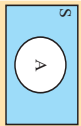
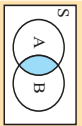
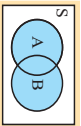
$$P(\text{مطلوب عدد}) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0.6 = 60\%$$

پوښتنې

- 1- د (m, n) تورو څخه په گټه اخیستنه خو څلور حرفي معنا لرونکي او معنانه لرونکي کلیمې جوړولای شو؟ موضوع د ونه ییز گراف په مرسته تشریح کړئ. که چېرې د دې ترکیبي کلمو څخه په ناڅاپي ډول یوه کلمه وټاکو د دې احتمال پیدا کړئ، چې دا کلمه ((مریم)) وي.
- 2- 0, 1, 4, 7, 8 او 9 عددونو څخه د میایل تلیفون څو داسې شمېر رقمي نمبري جوړولای شو چې د کيفي خوا څخه په 077 پیل شوی وي.

د نهم خبرکی لنډيز

- د دې لپاره چې وکولای شو د ناڅاپي پېښو د ترکیب د بېلا بېلو حالتونو د پرتله کولو لپاره دستونو د تېوري په کارولو سره یو ښه تصور ولرو هغه مو په لاندې جدول کې راټول کړل.

د حادې احتمال	Venn د نظریات او اتفاقي حادې	د بیان ارایه د ست په واسطه	د اتفاقي حادې بیان
خرگه چې $P(S) = 1$ دی نو $P(A) = 1 - P(\bar{A})$		$\bar{A} = S - A$ یا $S = A \cup \bar{A}$	د S هغه ټولې ناڅاپي پېښې چې د A په پېښه کې ګډون ونه لري د A پېښې عکس دی.
$P(A \cap B)$		$P(A \cap B)$	د A ناڅاپه پېښه یا د B ناڅاپه پېښه پېښوي.
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$		$P(A \cup B)$	لږ تر لږه یو د A یا د B د ناڅاپي پېښو څخه پېښوي.

- **د شمیرني حل:** د دوو ستونزو د عناصرو په ترکیب کې ټولو امکاناتو شمېر د هرې ترکیبي مجموعې د عناصر د ضرب د حاصل سره مساوي دی.

که د یوې مجموعې د عناصرونو امکان په m ډول او بلې مجموعې د عناصرونو (ضرو) امکان په n ډول وي د دوی یو د بل سره د ترکیب د ټولو امکاناتو شمېر د $m \times n$ سره برابر دی.

د نهم خبرکی پوښتنې

- 1- که S یوه نمونه یي فضا او A د هغې یو ناڅاپه پېښه وي وښیئ چې:
 - a) که $A \subseteq \emptyset$ وي وښیئ، چې $P(A) = 0$ دی.
 - b) که $A \subseteq S$ وي په دې حالت کې $P(A) = 1$ دی.
- که چیرې د C ناڅاپي پېښه د A او B ناڅاپي پېښې په بر کې ولری، وښیئ چې همدارنگه د C ناڅاپي پېښه د $A \cup B$ ناڅاپي پېښه په بر کې ولری.
- 3- که چیرې S او A او B یوه نمونه یي فضا وي د B او $A \cup B$ یو بل سره برابر وي. چې ولري وښیئ چې د $A \cup B$ او B یو بل سره برابر وي.
- 4- که د S په یوه نمونه یي فضا کې د B ناڅاپه پېښه د A پېښه په بر کې ولري، وښیئ چې د A او $A \cup B$ ناڅاپه پېښې یو بل په بر کې ولري. بر سره پر دې ښکاره (واضح) کړئ، چې د دې ناڅاپي پېښو احتمال یو د بل سره څه اړیکه لري؟
- 5- که چیرې S یوه نمونه یي فضا وي او B د هغې یوه ناڅاپه پېښه وي وښیئ چې: $S - B = \bar{B}$
- 6- د ګراف په مرسته وښیئ چې د A او B دوي ناڅاپي پېښې او S یوه نمونه یي فضا د $A - B$ او $\bar{A} - \bar{B}$ ناڅاپي پېښې سره برابري دي، یعنې: $\bar{A} - \bar{B} = B - A$
- 7- وښیئ چې د $\overline{A \cap (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})}$ ناڅاپي پېښ، احتمال د صفر سره مساوي دی.

**Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library**