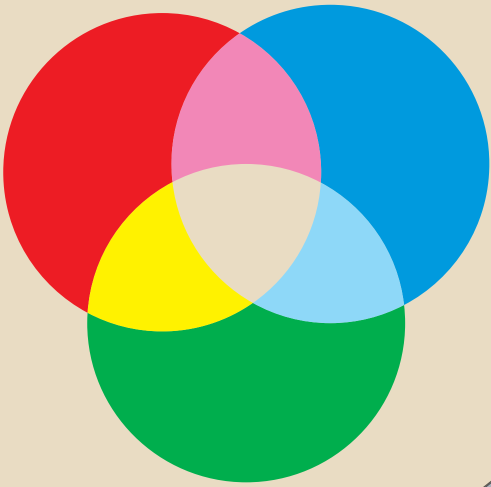
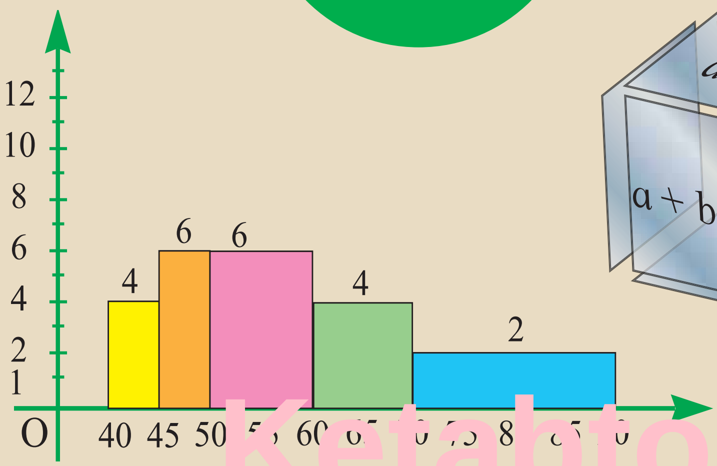
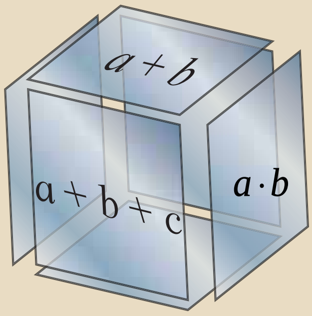
د پوهنې وزارت
د تعلیمي نصاب، د ښوونکو د روزنې
او د ساینس د مرکز معینیت
د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي
کتابونو د تالیف ریاست

ریاضي

نهم ټولګی







نهم ټولګی

ISBN 978-9936-25-068-0

۱۳۹۰ هـ. ش.

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

رياضي
نهم ټولگی

۱۳۹۰
هـ.ش

مولفین

- پوهیالی حمدالله شیرزی وردگ د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی
- پوهنمل طلاباز حبیب زی د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی
- پوهندوی خالقداد فیروزکوهی د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی
- دکتور ماخان شینواری د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی
- سرمولف میرنقیب الله د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف ریاست علمي غړی

ژباړونکي

- پوهیالی حمدالله شیرزی وردگ د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی
- استاد مختار نوید د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف ریاست علمي غړی

علمي اډیټور

- پوهنمل طلاباز حبیب زی د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی

د ژبې اډیټور

- سرمحقق نعمت الله اندړ د ښوونې او روزنې د وزارت د درسي کتابونو د تالیف د پروژې غړی

دیني، سیاسي او فرهنګي کمېټه:

- مولوي عبدالصبور عربي
- دکتور محمد یوسف نیازی
- حبیب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعلیمي نصاب په ریاست کې.

د څارنې کمېټه:

ـ دکتور اسدالله محقق د تعلیمي نصاب د پراختیا، د ښوونکو د روزنې او د ساینس مرکز معین.

ـ دکتور شېرعلي ظریفي د تعلیمي نصاب د پراختیا د پروژې مسؤول.

ـ د سرمؤلف مرستیال عبدالظاهر ګلستاني د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی رئیس.

کمپوز او ډیزاین

- ولید نوید نسیمي
- محمد اشرف امین

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحیم

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هیواد به تل ځلیږي
په سینه کې د اسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه یان
لکه لمر پر شنه اسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحيم

د پوهنې د وزير پيغام

گرانو ښوونکو او زده کوونکو،

ښوونه او روزنه د هر هېواد د پراختيا او پرمختگ بنسټ جوړوي. تعليمي نصاب د ښوونې او روزنې مهم توکی دی چې د معاصر علمي پرمختگ او ټولنې د اړتياوو له مخې رامنځته کېږي. څرگنده ده چې علمي پرمختگ او ټولنيزې اړتياوې تل د بدلون په حال کې وي. له دې امله لازمه ده چې تعليمي نصاب هم علمي او رغنده انکشاف ومومي. البته نه ښايي چې تعليمي نصاب د سياسي بدلونونو او د اشخاصو د نظريو او هيلو تابع شي.

دا کتاب چې نن ستاسو په لاس کې دی، پر همدې ارزښتونو چمتو او ترتيب شوی دی. علمي گټورې موضوعگانې پکې زياتې شوې دي. د زده کړې په بهير کې د زده کوونکو فعال ساتل د تدريسي پلان برخه گرځېدلې ده.

هيله من يم دا کتاب له لارښوونو او تعليمي پلان سره سم د فعالې زده کړې د ميتودونو د کارولو له لارې تدريس شي او د زده کوونکو ميندې او پلرونه هم د خپلو لوڼو او زامنو په باکيفيته ښوونه او روزنه کې پرله پسې گډه مرسته وکړي چې د پوهنې د نظام هيلې ترسره شي او زده کوونکو او هېواد ته ښې برياوې ور په برخه کړي.

پر دې ټکي پوره باور لرم چې زموږ گران ښوونکي د تعليمي نصاب په رغنده پلي کولو کې خپل مسؤوليت په ريښتوني توگه سرته رسوي.

د پوهنې وزارت تل زيار کاږي چې د پوهنې تعليمي نصاب د اسلام د سپېڅلي دين له بنسټونو، دوطن دوستۍ د پاک حس په ساتلو او علمي معيارونو سره سم د ټولنې د څرگندو اړتياوو له مخې پراختيا ومومي.

په دې ډگر کې د هېواد له ټولو علمي شخصيتونو، د ښوونې او روزنې له پوهانو او د زده کوونکو له ميندو او پلرونو څخه هيله لرم چې د خپلو نظريو او رغنده وړانديزونو له لارې زموږ له مؤلفانو سره د درسي کتابونو په لا ښه تاليف کې مرسته وکړي.

له ټولو هغو پوهانو څخه چې د دې کتاب په چمتو کولو او ترتيب کې يې مرسته کړې، له ملي او نړيوالو درنو مؤسسو او نورو دوستو هېوادونو څخه چې د نوي تعليمي نصاب په چمتو کولو او تدوين او د درسي کتابونو په چاپ او وېش کې يې مرسته کړې ده، مننه او درناوی کوم.

ومن الله التوفيق

فاروق وردگ

د افغانستان د اسلامي جمهوريت د پوهنې وزير

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

فهرست

مـخ

لومړی څپرکی: دایره ۱

- د دايرې عناصر، د يوې مستقيمې کرښې حالتونه، دايرې موقعيت نظر يو بل ته
- په دايره پورې اړوند زاويې
- د دايرې د وتر او شعاع څانګړتياوې
- د دايرې محيطي او مماسي زاويې

دويم څپرکی: په يوه دايره کې د اوږدوالی اړيکې ۲۷

- د يوه ټکي طاقت نظر دايرې ته
- دايرې مماس کرښه، د دايرې داخلي او خارجي زاويه
- محيطي او محاطي دايره
- په دايره کی د مرسوم څلور ضلعی څانګړتياوې (خواص)
- د منظمې مضلع ترسيم، د د ايرې مساحت او محيط

دريم څپرکی: تحليلي هندسه ۵۵

- د دوو ټکو تر منځ فاصله يا واټن
- د يوې قطعه خط د منځنی ټکي مختصات
- د مستقيمې کرښې ميل، د موازي او عمود کرښو ميلونه
- د مستقيمې کرښې معادله، د هغې مستقيمې کرښې معادله چې ميل او يو ټکی يې معلوم وي
- د مستقيمې کرښې عمومي معادله
- د خطي معادلاتو سيستم
- د خطي معادلاتو د سيستم حل د تعويضي او افنا په لاره (طريقه)
- تغيير مکان، انتقال، انعکاس او دوران

څلورم څپرکی: مثلثات ۹۵

د تالس قضيه

- د حاده زاويې ساين، کوساين او تانجنت
- د ځينو خاصو زاويومثلثاتي نسبتونه، د ميل او تانجنت تر منځ اړيکې
- مثلثاتي جدول، د قايم الزاويو مثلثونو حل

• مثلثاتي معادلې

فهرست — **مخ**

پنځم څپرکی: څو جمله یي ګانې ۱۲۷
• په فکتورونو تجزیه
• د الجبري افادو ضرب، د مکعبونو مجموعه او تفاضل
• کوچنی ګډ مشترک مضرب
• د الجبري افادو ویش
• په الجبري افادو کې د عملیو د سرته رسولو ترتیب
شپږم څپرکی: نامساوات ۱۵۱
• د خطي غیر مساواتو حل
• فاصله یا انتروالونه
• د بینوم د علامې ټاکل، د کسر افادې اشاره ټاکل
• کسري نامساواتونه، دوه متحوله خطي نامساوات
• د نامساواتو سیستمونه
اووم څپرکی: یو مجهوله دویمه درجه معادلې ۱۷۵
• د دویمې درجې معادلو حل
• غیر خطي اړیکې
• په هندسي لاره د دویمې درجې معادلو حل د محمد بن موسی فورمول، تکمیل مربع
اتم څپرکی: احصائیه ۱۹۵
• د data د دسته بندي لاره، د نښتو یا پیوسته data ګانو دسته بندي او وزني اوسط
• مستطیلي او دایروي ګرافونه
• میانه، د تحول ساحه او د انحراف اوسط
نهم څپرکی: احتمالات ۲۲۱
• د ناخاپه پېښو اتحاد او تقاطع
• کلي او مکمله سټ
• په سټونو مدل جوړول

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومڕی څپرکی

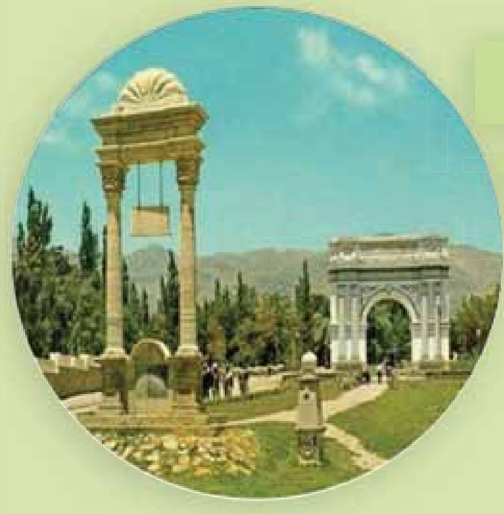
دایـــره

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

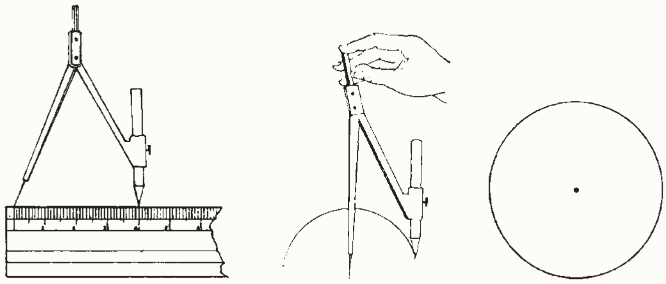
دایره
CIRCLE

شکل ته پام وکړئ هغه هندسي شکلونه چې په تصویر کې وینئ نومونه یې واخلئ.



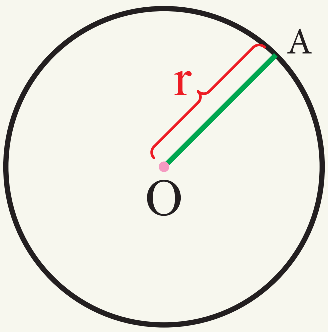
فعالیت

یوه ټکی د کاغذ پر مخ وټاکئ، ددې ټکي شاوخواته د 1cm په اوږدوالی د پرکار خوله خلاصه او هغه ته یو بشپړ دوران ورکړئ، لاسته راغلی شکل او ټاکل شوی ټکی څه نومېږي؟



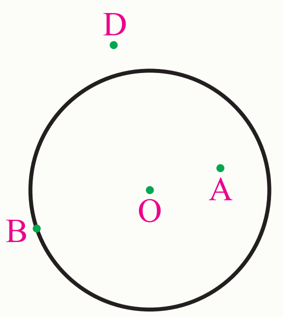
تعریف

په یو مستوي کې د هغو ټولو ټکو سټ چې له یوه ټاکلي ټکي نه مساوي واټن(فاصله) ولري دایره نومېږي، یا په بل عبارت دایره دیوې تړلي منحنی څخه عبارت ده چې له یوه ټاکلي ټکي څخه مساوي واټن ولري.
تړلې منحنی ته د دایرې محیط او ټاکلي ټکي ته د دایرې مرکز وایي چې په $C(O,r)$ ښودل کېږي.
د دایرې مرکز په شکل کې O او شعاع یې د r په توروو ښودل کېږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت



- په لاندې شکل کې د A ، B او D د ټکو ځایونه(موقعیت) نظر O دایرې ته وټاکئ.
- د هغو ټکو واټن د دایرې د مرکز څخه اندازه او د دایرې د شعاع له اوږدوالي سره پرتله کړئ.
- په خپله خوښه درې نور ټکي چې په دایره کې دننه او له دایرې څخه بهر پراته وي په پام کې ونیسئ. ایا لاسته راغلې اړیکې د دې ټکو لپاره هم سمې دي؟

پایله:

1- د هغو ټکو سټ چې فاصله یې د دایرې له مرکز څخه د دایرې د شعاع څخه کوچنۍ وي، د دایرې داخلي ساحه(منځ) بلل کېږي، یا $I = \{A / |\overline{OA}| < r\}$

2- د هغو ټکو سټ چې فاصله یې د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع سره مساوي وي، د دایرې محیط یا مخ ویل کېږي، یا $C = \{B / |\overline{OB}| = r\}$

3- د هغو ټکو سټ چې فاصله یې د دایرې له مرکز څخه د دایرې د شعاع څخه لوی وي، د دایرې د خارجي یا باندنۍ ساحې په نامه یادېږي، یا $E = \{D / |\overline{OD}| > r\}$

4- د مستوي هغه برخه چې د دایرې د محیط او دهغې د اخلي سطحې په واسطه جلا شوې وي، د دایرې د سطحې په نوم یادېږي.

پوښتنې

1- یوه دایره د $2cm$ په شعاع رسم کړئ. دلاندې ټکو څخه کوم یو یې د دایرې په داخل، خارج او په محیط کې پروت دی:

- د A ټکي واټن د دایرې له مرکز څخه $1.4cm$ دی.
- د B ټکي واټن د دایرې له مرکز څخه $2.3cm$ دی.
- د C ټکي واټن د دایرې له مرکز څخه صفر دی.
- د D ټکي واټن د دایرې له مرکز څخه $\frac{4}{2}cm$ دی.

2- په کوم حالت کې یو ټکی د دایرې پر محیط پروت وي.

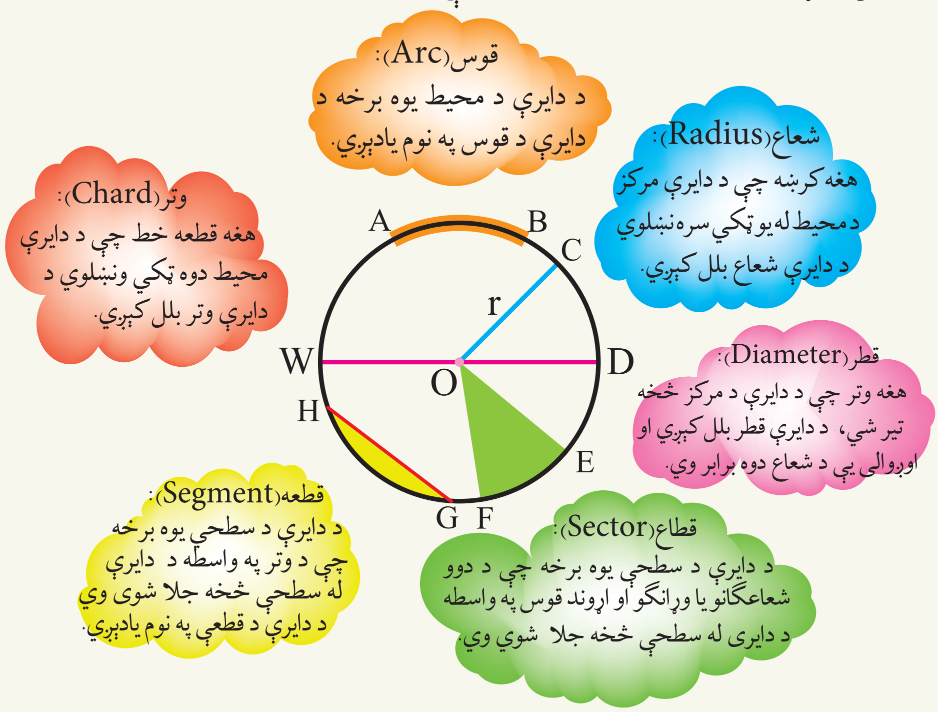
(c) ketabton.com: The Digital Library

د دايرې عناصر
Elements of a Circle

شکل ته پام وکړئ د کيک مخ کوم هندسي شکل را ښيي او پرې شوې برخه يې د دايرې کوم عنصر راښيي؟

د دايرې د عناصرو تعريف

لومړی شکل او د دايرې د عناصرو تعريفونه خپلو کتابچوته نقل او ورسته لاندې تعريفونه د شکل له اړوند عناصرو سره په خپلو کتابچو کې ونښلوئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د 4cm شعاع په اندازه یوه دایره رسم او له کاغذ څخه هغه پرې کړئ.
- د غه دایره داسې قات کړئ چې دواړه نیمې دایرې یو پر بل منطبقې شي.
- کاغذ خلاص کړئ، د کاغذ پر مخ قات شوې کرښه د څه په نامه یادېږي.
- دا ځل دوه نیمې دایرې بیا قات او قات کاغذ داسې خلاص کړئ، چې څلور مساوي برخې لاسته راغلې وي. څو قطعه خطونه(ټوټه کرښې)وینئ. هر یو د څه په نامه یادېږي؟
- څلور لاسته راغلې زاویې اندازه کړئ، او وواياست چې یو له بل سره څه اړیکې لري؟
- د یوې دایرې د قطر او شعاع تر منځ اړیکې څه دي؟
- دایره داسې قات کړئ چې دوه نامساوي برخې جوړې شي، هغه خلاصه کړئ جوړه شوې کرښه د څه په نامه یادېږي؟ د هغې اوږدوالی د دایرې د قطر سره پرتله کړئ.

پایله:

- ومو لیدل چې په هره دایره کې که چیرې د دایرې د محیط دوه ټکي ونښلوو د دایرې وتر لاسته راځي.
- په هره دایره کې تر ټولو لوی وتر، د دایرې قطر دی چې د شعاع دوه برابره دی.
- د یوې دایرې هر قطر، وتر دی اما هر وتر قطر نه دی.
- هغه قوس چې د یوې دایرې د محیط له نیمایي څخه کوچنی وي د کوچنی قوس (minor Arc) په نوم یادېږي.
- هغه قوس چې د یوې دایرې د محیط له نیمایي څخه لوی وي د لوی قوس (major Arc) په نوم یادېږي.

پوښتنې

1- د $C(0,4)$ دایره رسم کړئ.

a) د دایرې شعاع یا وړانګه، قطر، قطعه او قطاع په شکل کې و ښیئ.

b) د دایرې د قطر اوږدوالی وټاکئ.

c) د دایرې محیط په څلور مساوي برخو وویشئ، ددې څخه پایله په لاس راځي؟

d) د دایرې داخلي ناحیه، خارجي ناحیه او د دایرې محیط د مختلفو رنګونو، په واسطه په نښه کړئ.

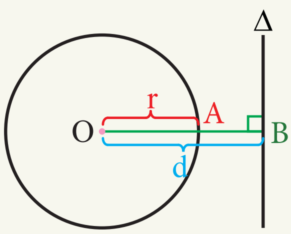
(c) ketabton.com: The Digital Library

د دايرې سره د يوې مستقيمې کرښې حالتونه

مخامخ شکل ته پام وکړئ او وواياست چه قلمونه او هندسي بکس له دايرې سره څه اړيکې لري هره يوه توضيح کړئ؟

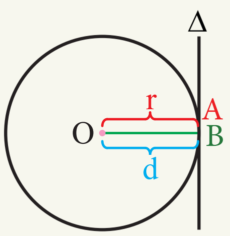
فعاليت

- يوه دايره او مستقيمه کرښه داسې رسم کړئ چې د دايرې سره يوټکی، دوه ټکي او هيڅ ګډ(مشترک) ټکی و نلري.
- د دايرې له مرکز څخه په هره مستقيمه کرښه باندې عمودي کرښې رسم کړئ، د دايرې د مرکز او کرښې تر منځ واټن اندازه کړی او هر حالت د دايرې د شعاع له اوږوالی سره پرتله کړئ.

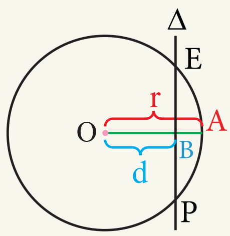


د پورتنی فعاليت د کرني څخه ليدل کيږي چې يو مستقيمه کرښه او دايره نظر يو بل ته درې لاندې حالتونه لري:

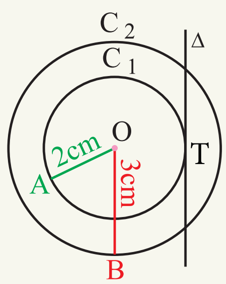
1- که چيرې مستقيمه کرښه له دايرې سره ګډ ټکی و نلري، مستقيمه کرښه له دايرې نه بهر پروت دی، په دې حالت کې د مستقيمې کرښې واټن د دايرې له مرکز څخه د دايرې د شعاع څخه لوی دی يعني: $d > r$



2- که چيرې مستقيمه کرښه د دايرې سره يو ګډ ټکی ولري نو مستقيمې کرښې ته پر دايره مماس وايي. په دې حالت کې د مستقيمې کرښې واټن د دايرې له مرکز څخه د دايرې د شعاع سره برابر ده يعني: $d = r$



3- که چیرې یو مستقیم د دایرې سره دوه ګډ (مشترک) ټکي ولري، مستقیم ته د دایرې غوڅې (قاطع) وایي، په دې حالت کې د مستقیم واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع کوچنی دی، یعنې $d < r$



مثال (بېلګه): د (O) ټکی په پام کې نیسو، د (O) په مرکز د 2 او 3 سانتي متره په شعاع دوې متحدالمرکز دایرې رسم کړئ د مستقیمي کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه د C_1 او C_2، دوو دایرو له ورانګو سره څه اړیکي لري؟

حل: په شکل کې لیدل کېږي چې د Δ مستقیم واټن د C_1 دایرې له مرکز څخه د هغې دایرې د ورانګې یا شعاع سره برابر دی یعنې: $d = r$

د Δ مستقیم واټن د C_2 دایرې له مرکز څخه د هغې دایرې له ورانګې یا شعاع څخه کوچنی دی یعنې: $d < r$

پوښتنې

د $3cm$ شعاع په اوږدوالی یوه دایره رسم کړئ، په دې دایره کې کرښې په لاندینیو راکړل شویو واټنو رسم او حالتونه یې څرګند کړئ:

الف: د کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه $2.5cm$ وي.

ب: د کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه $4cm$ وي.

ج: د کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع سره برابره وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دایرو موقعیت نسبت یو بل ته

مخامخ شکل ته په پام سره ووایئ چې:

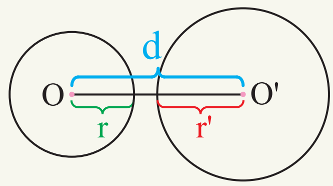
1- د بایسیکل ټایرونه کوم هندسي شکل لري؟

2- ټایرونه یو بل سره څو حالتونه غوره کولای شي؟ توضیح یې کړئ.

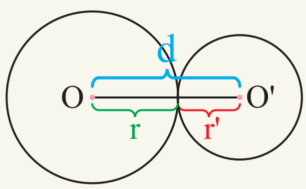
فعالیت

- دوې دایرې داسې رسم کړئ چې:
  1: یو له بل سره یو ګډ ټکی ولري.
  2: دوه ګډ ټکي ولري.
  3: یو بل سره ګډ ټکی و نلري.
- د دایرو د مرکزونو تر منځ اوږدوالی په پورته حالتونو کې د هغو له شعاع سره پرتله کړئ.

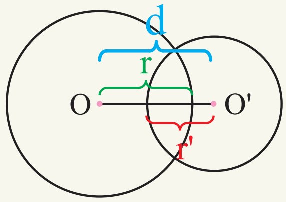
د پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راځي چې:



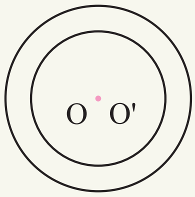
که چیرې د دوو دایرو د مرکزونو ترمنځ واټن، دهغو د شعاع د مجموعې له اوږدوالي څخه زیات وي په دې حالت کې دایرو ته ناپرېکړې یا نا متقاطع دایرې وایي، یعني $d > r + r'$



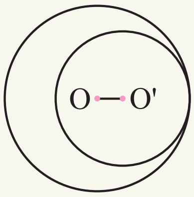
که چیرې د دوو دایرو د مرکزونو تر منځ واټن د هغو د شعاع له مجموعې سره مساوي وي. په دې حالت کې دایرو ته خارجا مماس وایي، یعني $d = r + r'$



کــه د دوو دایــرو د مرکزونــو تــر منــځ واټــن، د هغــو د شــعاعګانو د مجموعــې د اوږدوالــي څخــه کوچنــی او د شــعاعګانو د تفریق د حاصل د مطلقه قیمت څخه لوی وي. دایــرې یو له بل ســره متقاطع دي، یعني $|r-r'| < d < r+r'$



که د دوو دایرو د مرکزونو تر منـځ واټـن صفر وي، دایـرې د متحدالمرکـز پـه نامـه سـره یادیـږي، یعني $d=0$

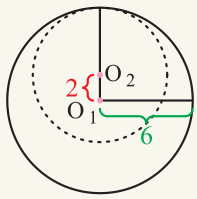


کـه د دوو دایــرو د مرکزونــو ترمنـځ واټن د هغو د شــعاع ګانو د تفریق حاصل له مطلقه قیمت سره مساوي وي. دایرو ته له دننه مماس وایي، یعني $d=|r-r'|$

مثال(بېلګه): دوې دایرې داسـې رسـم کـړئ، چې د لومړۍ دایرې شـعاع $6cm$ ، د دویمې دایرې او لومړۍ دایرې مرکزونو تر منځ واټن 2cm او د دویمې دایرې شـعاع د لومړۍ دایرې د شعاع $\frac{2}{3}$ برابره وي، په دې حالت کې د دې دوو دایرو موقعیت نظر یو بل ته پیدا کړئ؟

حل: که د لومړنۍ دایرې شعاع r_1 او د دویمې دایرې شعاع r_2 ونوموو نو لرو:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= 6cm \\ r_2 &= \frac{2}{3} r_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} r_2 &= \frac{2}{3}\times 6 \\ r_2 &= 4cm \end{aligned}$$



$$d = |r_1 - r_2| = |6-4| = |2| = 2$$

څرنګه چې:
نو له دایرې سره داخلاً مماس دي.

پوښتنې

۱- دوې دایرې د ٦cm او ٤cm په شعاع په پام کې و نیسئ او په لاندې توګه یې رسم کړئ.

الف: دایرې خارجاً (له باندې) سره مماس دي.
ب: دایرې داخلاً(له دننه) سره مماس وي.
ج: دایرې سره غیر متقاطع(نا پرېکړې) وي.
د: دایرې سره غیر متقاطع(غوځو نه) وي.
هـ: دایرې متحدالمرکزه(ګډ مرکز) وي.
و: پورتنې حالتونه په خپله ژبه ووایئ.

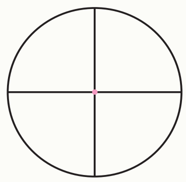
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دايرې اړوند زاويې
Angle of a Circle

تصوير ته پام وکړئ هغه هندسي شکلونه چې په هغه کې ليدل کېږي نوم يې واخلئ؟

فعاليت



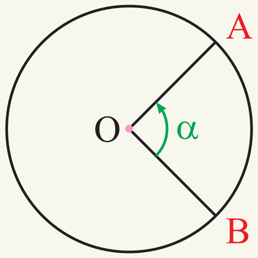
- په پورتني شکل کې څو زاويې ليدلای شئ.
- د دې زاويو ګډ خاصيتونه کوم دي بيان يې کړئ؟
- د $C(0,3)$ دايره رسم کړئ.
- په دې دايره کې يو پر بل دوه عمود قطرونه رسم کړئ.
- څو مرکزي زاويې لاسته راځي؟ د هرې زاويې د مقابل قوس اندازه څو درجې دی؟
- د دې دايرې محيط څو درجې دی؟

د پورتني فعاليت له نتيجې څخه ليکلای شو چې:
د يو قوس اوږدوالی د هغه د مرکزي زاويې په پراخوالي پورې اړه لري، يعنې:

$$\frac{\hat{AOB}}{360^\circ} = \frac{\text{طول قوس}}{\text{محيط دايره}}$$

تعريف

هغه زاويه چې راس يې د دايرې په مرکز پروت، او ضلعې يې د دايرې شعاعګانې وي مرکزي زاويه بلل کېږي لکه: د $\hat{AOB}$ يا د $\hat{\alpha}$ زاويه:

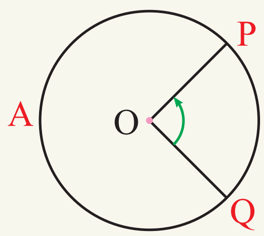


هره مرکزي زاویه له دایرې څخه یو قوس بېلوي، چې دغه قوس د خپلې مخامخ مرکزي زاویې مساوي اندازه لري، لکه: د $\overset{\frown}{AB}$ قوس چې د α زاویې سره مساوي دی.

د قرارداد له مخې ویلای شو چې په یوه دایره کې د مخامخ قوس اندازه د درجې له مخې د مرکزي زاویې سره مساوي ده یعنې: $\hat{AOB} = \overset{\frown}{AB} = \hat{\alpha}$

لومړی مثال: که د $C(O, r)$ په دایره کې لوی قوس (major) د کوچنی قوس (minor) پنځه برابره وي نو د کوچنی قوس، لوی قوس او د هغې د مرکزي زاویو اندازه پیدا کړئ.

حل: کـه کوچنـی قـوس $\overset{\frown}{PQ}_{minor} = x$ وي، نـو لـوی قـوس یـې $\overset{\frown}{PAQ}_{major} = 360^\circ - x^\circ$ دی نو لیکلای شو، چې:



$\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{PAQ} = 360^\circ$

$\overset{\frown}{PAQ}_{maj} = 5\overset{\frown}{PQ}_{min}$

$x + 5x = 360^\circ$

$6x = 360^\circ$

$x = 60^\circ \quad \Rightarrow \hat{POQ} = x = 60^\circ$

$\overset{\frown}{PAQ} = 5x = 5 \times 60 = 300^\circ$

دویم مثال: په لاندې شکل کې که $\hat{KOS} = 31^\circ$ ، $\hat{EOJ} = 82^\circ$ ، $\overline{EK}$ د دایرې قطر وي. د $\overset{\frown}{SJ}, \overset{\frown}{KJ}, \overset{\frown}{SK}$ د $\overset{\frown}{EK}$ قوسونه په درجه پیدا کړئ.

د مرکزي زاویې مخامخ قوس .....

$\overset{\frown}{SK} = \hat{SOK} = 31^\circ \quad \Rightarrow \overset{\frown}{SK} = 31^\circ$

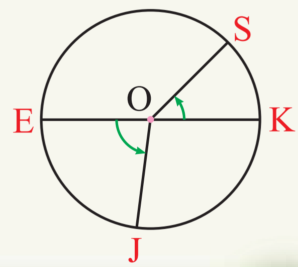
$\hat{KOJ} = 180^\circ - \hat{EOJ} = 180^\circ - 82^\circ = 98^\circ$

$\hat{KOJ} = \overset{\frown}{KJ} = 98^\circ$

$\overset{\frown}{SJ} = \overset{\frown}{SK} + \overset{\frown}{KJ} = 31^\circ + 98^\circ = 129^\circ$

$\overset{\frown}{JE} = \hat{EOJ} = 82^\circ$

$\overset{\frown}{EK} = \hat{EOK} = 180^\circ$



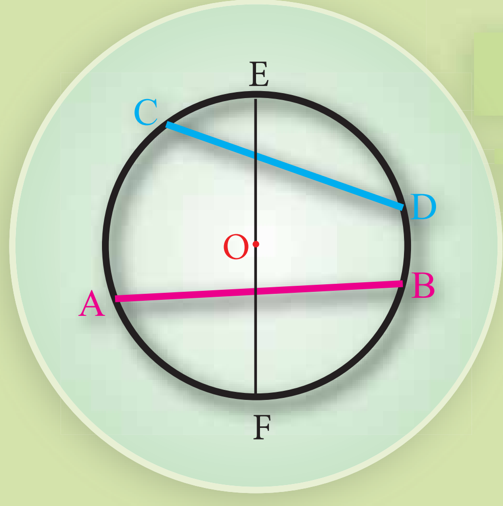
پوښتنې

1- د B, A او C درې ټکي د $C(O,r)$ پر دایره داسې پراته دي، چې $\hat{AOB} = 75^\circ$ ، $\hat{BOC} = 136^\circ$ زاویې د OB دواړو خواوو ته پرتې وي $\overset{\frown}{AC}$ حساب کړئ.

2 - یوه مرکزي زاویه د 180° په اندازه رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دایرې د وتر خواص



شکل ته پام وکړئ، د $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$ او $\overline{EF}$ مستقیمې کرښې په څه نامه یادیږي د $\overline{EF}$ کرښې ځانګړتیا څه ده؟ او له $\overline{AB}$ کرښې سره څه اړیکه لري؟

فعالیت

- د $C(O,r)$ په دایره کې د $\overline{AB}$ وتر رسم کړئ.
- د دایرې د $\overline{ED}$ قطر داسې رسم کړئ چې د $\overline{AB}$ په وتر د H په نقطه عمود وي.
- د (O) ټکی د A او B سره ونښلوئ، لاسته راغلی مثلث څه ډول مثلث دی.
- په لاندې تش ځایونو کې د ($=$، $<$ یا $>$) ورنښې ولیکئ.

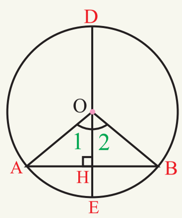
$\overline{OA}\ \square\ \overline{OB}\ ,\ \overset{\frown}{AE}\ \square\ \overset{\frown}{EB}\ ,\ \overline{AH}\ \square\ \overline{HB}$

د دې فعالیت د پایلې څخه کولای شو لاندې قضیه بیان او ثبوت کړو.

قضیه: په هره دایره کې په وتر عمود قطر، وتر او د هغې مقابل قوس نیمويي.

ثبوت: د $\overset{\Delta}{BOH}$ او $\overset{\Delta}{AOH}$ دوه مثلثونو څخه لیکلی شو چې:

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{OA}=\overline{OB}\text{.........} & \text{د دایرې شعاع} \\ \hat{H}_1=\hat{H}_2\text{..........} & \text{قایمه} \\ \overline{OH}=\overline{OH}\text{........} & \text{مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AOH}\cong\overset{\Delta}{OHB}$$



نو د دوه مثلثونو د تساوي څخه داسې پایله لاسته راځي، چې: $\overline{AH}=\overline{HB}$ او د $\overset{\Delta}{AOH}$ او $\overset{\Delta}{BOH}$ مرکزي زاویې سره مساوي دي په پایله کې $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EB}$ دی.

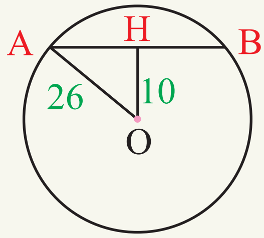
مثال: د $C(O,26)$ دایره راکړل شوې ده، که چیرې پر وتر د عمود اوږدوالی د دایرې له مرکز څخه (۱۰) واحده وي د $\overline{AB}$ وتر اوږدوالی حساب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د $\overset{\Delta}{OAH}$ په مثلث کې د فیثاغورث د قضیې له مخې لرو چې:

$$\overline{OA}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{OH}^2$$
$$(26)^2 = \overline{AH}^2 + (10)^2$$
$$\overline{AH}^2 = (26)^2 - (10)^2$$
$$\overline{AH}^2 = 676 - 100 = 576$$
$$\overline{AH} = 24$$
$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times 24 = 48\,\text{unit}$$



فعالیت

- د $C(0,3)$ دایره رسم کړئ.
- په دایره کې د $\overline{PQ}$ او $\overline{ER}$ دوه مساوي وترونه رسم کړئ.
- د دایرې له مرکز څخه د $\overline{PQ}$ او $\overline{ER}$ په وترونو عمودکرښې رسم او اوږدوالی يې معلوم کړئ.

د دې فعالیت له پایلې څخه لاندې قضیه بیان او ثبوتوو.

قضیه: په هره دایره کې د هغې مساوي وترونه، د دایرې له مرکز څخه مساوي واټن لري.

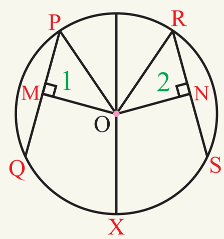
ثبوت: د $\overset{\Delta}{RON}$ او $\overset{\Delta}{POM}$ د دوو مثلثونو څخه لرو چې

$\overline{OP} = \overline{OR}$ ....د دایرې شعاع

$\hat{1} = \hat{2}$ ....قایمه

$\overline{PQ} = \overline{RS}$ .... مساوي وترونه $\Longrightarrow$ $\overset{\Delta}{POM} \cong \overset{\Delta}{RON}$, $\overline{OM} = \overline{ON}$

$\dfrac{\overline{PQ}}{2} = \dfrac{\overline{RS}}{2} \Rightarrow PM = RN$



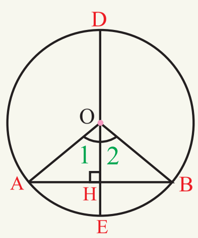
په پایله کې ویلای شو چې په هره دایره کې مساوي وترونه له مرکز څخه مساوي واټن لري.

پوښتنې

1- د $C(0,13)$ په دایره کې د $\overline{AB}$ وتر د دایرې له مرکز څخه 5 واحده واټن لري د $\overline{AB}$ اوږدوالی پیدا کړئ.

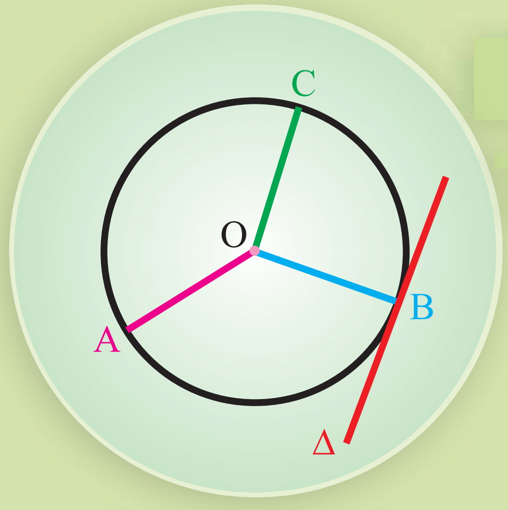
2- که چیرې د یوې دایرې قطر د وتر له نیمایي څخه تیر شي، ثبوت کړئ چې پر وتر عمود دی.

3- په یوه دایره کې $\overline{AB} = 8cm$ وتر رسم کړئ. که چیرې د وتر عمودي فاصله له مرکز څخه $\overline{OH} = 3cm$ وي د دایرې قطر او محیط محاسبه کړئ.



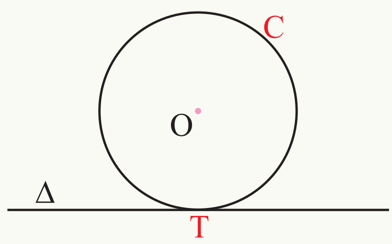
(c) ketabton.com: The Digital Library

د دایرې د شعاع خواص



شکل ته په پام د OA، OB او OC کرښې څه نومیږي او د Δ کرښه د دایرې او د OB ورانګې سره څه اړیکې لري؟

فعالیت



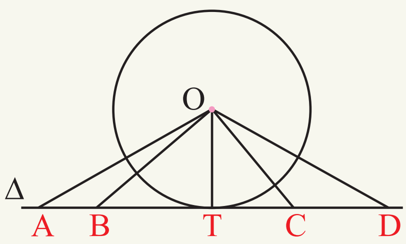
- په مخامخ شکل د(Δ) مستقیمه کرښه د $C(0,2)$ دایرې د T په ټکي کې مماس دی د A, B, C او D ټکي د مماس پر مخ د T ټکي دواړو خواوو کې وټاکئ او د دایرې له مرکز سره یې ونښلوئ.
- ټوټه کرښې یا قطعه خطونه د خط کش په مرسته اندازه کړئ.
- د دایرې د مرکز او مماس تر منځ لنډې واټن وښایئ.

تر ټولو کوچنی فاصله د یوه ټکي او یوې مستقیمې کرښې تر منځ کومه فاصله ده؟

- د پورتنی دوو حالتونو څخه پایله لاسته راوړئ.

د دې فعالیت د پایلې څخه په لاندې توګه قضیه بیان او ثبوتوو.

قضیه: د دایرې شعاع د تماس په ټکي کې پر مماس عمود دی.



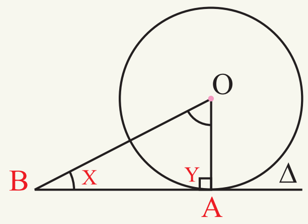
پایله: په لاندې شکل کې لیدل کیږي، چې:

$\overline{OT} < \overline{OB} < \overline{OA}$

$\overline{OT} < \overline{OC} < \overline{OD}$

پوهیږو چې تر ټولو کوچنی فاصله د یوه ټکي او مستقیم ترمنځ عمودي فاصله ده. په پایله کې ویلای شو چې مستقیمې کرښې Δ: $\overline{OT} \perp \Delta$ دی.

لومړی مثال: په لاندې شکل کې د Δ مستقیمه کرښه د A په ټکي د $C(O,r)$ پر دایره مماس دی. که چیرې د $\hat{AOB}$ مساوي 60° وي، د x زاویه پیدا کړئ.



$OA \perp BA \Rightarrow \hat{y} = 90^\circ$

$\hat{o} + \hat{x} + \hat{y} = 180^\circ$

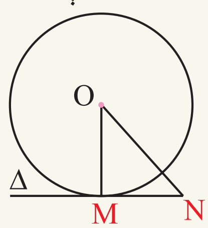
$60^\circ + \hat{x} + 90^\circ = 180^\circ$

$x = 180^\circ - 150^\circ$

$x = 30^\circ$

دویم مثال: په لاندې شکل کې د Δ مستقیمه کرښه د $C(O,r)$ پر دایره مماس دي، که $\overline{OM} = 4unit$ او $\overline{ON} = 5unit$ اوږدوالی ولري د $\overline{MN}$ اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: پوهیږو چې د دایرې شعاع د تماس په ټکي پر مماس عمود دی په پایله کې د $\overset{\Delta}{OMN}$ په قایم الزاویه مثلث کې د فیثاغورث د قضیې په اساس لرو چې:



$\overline{ON}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MN}^2$

$\overline{MN}^2 = \overline{ON}^2 - \overline{OM}^2$

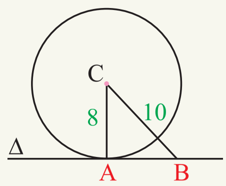
$\overline{MN}^2 = 5^2 - 4^2 = 9$

$\overline{MN} = 3$

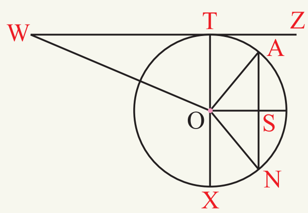
- د دایرې شعاع د تماس په ټکي کې پر مماس عمود وي.
- هر مماس په هغه شعاع چې د تماس د ټکی څخه تیرېږي عمود دی.

پوښتنې

1- په مخامخ شکل کې د Δ پر دایرې $P(C,r)$ مماس دی، که $\overline{AC} = 8unit$ او $\overline{BC} = 10unit$ اوږدوالی ولري. د $\overline{AB}$ اوږدوالی پیدا کړئ.

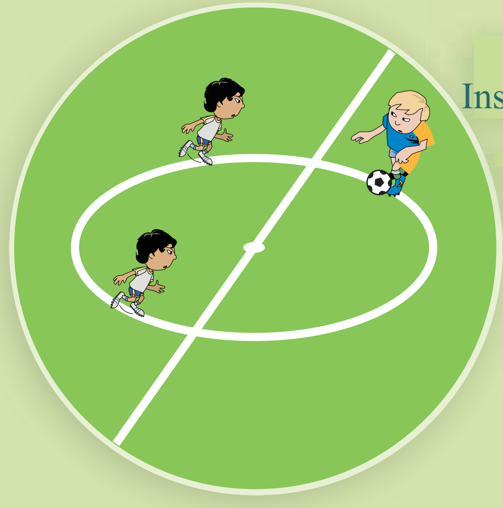


2 - په مخامخ شکل کې که $\overline{WZ}$ د T په ټکي د $C(O,r)$ پر دایرې مماس وي، $\overline{OS} = 1unit$ ، TW=3unit وي د $\overline{OA}, \overline{AS}, \overline{SN}, \overline{OW}$ او $\overline{TX}$ اوږدوالی پیدا کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

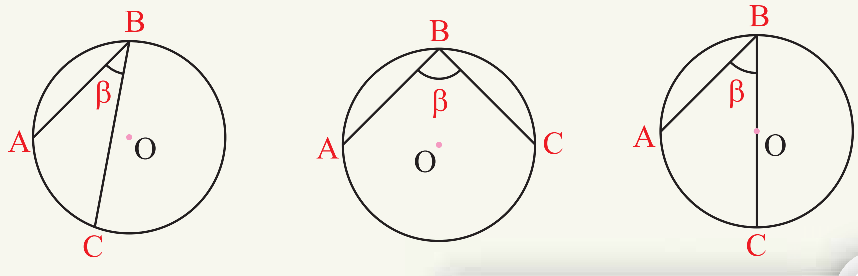
د دایرې محیطي زاویه
Inscribed Angel of a Circle



د فوټبال د میدان په مرکزي دایره کې حسیب الله، بلال ته او بلال الیاس ته توپ پاس کړ. هغه شکل چې د توپ د شوټ د مسیر څخه جوړېږي څه ډول دی؟

تعریف

هغه زاویه چې راس یې د دایرې پر محیط او ضلعې یې د دایرې دوه وترونه وي محیطي زاویه بلل کېږي. لکه: د $A\hat{B}C$ یا د $\hat{\beta}$.



فعالیت

- د $C(O,r)$ په دایره کې د $A\hat{B}C$ محیطي زاویه، چې د $\overline{BC}$ ضلع د دایرې له مرکز څخه تېره شي رسم کړئ.
- د A ټکی د دایرې له مرکز (O) سره ونښلوئ څرنګه مثلث لاسته راځي.
- د $\hat{A}$ او $\hat{B}$ زاویې د $O\hat{A}B$ په مثلث کې یو له بل سره څه اړیکې لري؟
- د $A\hat{O}C$ زاویه د $\hat{A}$ او $\hat{B}$ زاویو سره څه اړیکې لري؟

> **په یاد ولرئ چې:**
> - د مرکزي زاویې پراخوالی د خپل مخامخ قوس سره مساوي دی.
> - په هر مثلث کې د خارجي زاویې پراخوالی د دوو داخلي پرته له مجاورې زاویې له مجموعې سره مساوي دی.

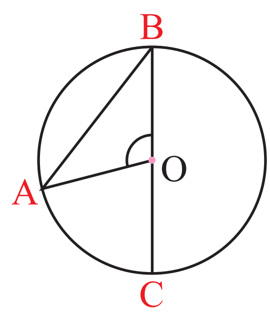
(c) ketabton.com: The Digital Library

د مخکینی مخ فعالیت د پایلې څخه په لاندې توګه قضیه بیان او ثبوتوو.

قضیه: د هرې محیطي زاویې پراخوالی د خپل مخامخ قوس نیمایي دی.

دلته قضیه په هغه حالت کې ثبوتوو چې د محیطي زاویې یوه ضلع د دایرې قطر وي. د دوو نورو حالتونو ثبوت د کورنی دندې په توګه زده کوونکو ته پاتې شو.

ثبوت: د $\hat{AOC}$ زاویه د $\overset{\Delta}{AOB}$ د مثلث خارجي زاویه ده، لیکلای شو چې:



مرکزي زاویه ..... $\hat{AOC} = \overset{\frown}{AC}$

$\hat{AOC} = 2\hat{B}$

نو: $\overset{\frown}{AC} = 2\hat{B}$

په پایله کې $\hat{ABC} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{AOC} = \hat{A} + \hat{B} \\ \hat{A} = \hat{B} \text{ ..... ولې} \\ \hat{AOC} = \hat{B} + \hat{B} \\ \hat{AOC} = 2\hat{B}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

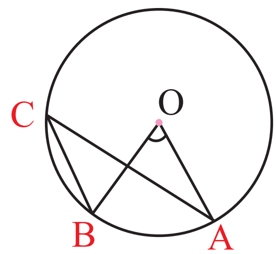
د $\hat{ABC}$ د محیطي زاویې پراخوالی د $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ سره برابر دی.

مثال: د $C(O,r)$ په دایره کې که مرکزي زاویه $\hat{AOB} = 60^\circ$ وي د $\hat{ACB}$ محیطي زاویې مخامخ قوس $\overset{\frown}{AB}$ یې پیدا کړئ.

حل: په یوه دایره کې د مرکزي زاویې او د هغې د مخامخ قوس د اړیکو څخه لیکلی شو چې:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{AOB} = 60^\circ \\ \hat{AOB} = \overset{\frown}{AB}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 60^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\frown}{AB} = 60^\circ \\ \hat{ACB} = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{ACB} = \dfrac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$



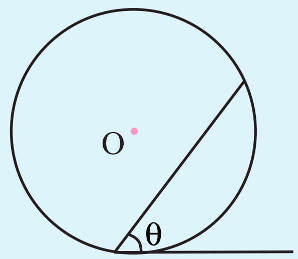
پوښتني

1 - په یوه دایره کې د 90° په اندازه محیطي زاویه رسم کړئ.

2 - د دایرې پر محیط د A او B دوه ټکي په پام کې ونیسئ. د $\overset{\frown}{AB}$ د قوس په مقابل کې، څو محیطي زاویې رسمولای شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

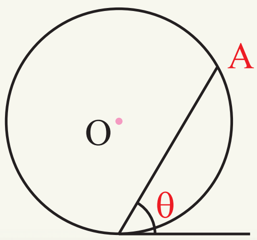
د دایرې مماسي زاویه



شکل ته پام وکړئ، هغه مستقیمې کرښې چې د θ زاویه یې جوړه کړې ده نوم واخلئ او د زاویې راس چېرته پروت دی.

تعریف

هغه زاویه چې یوه ضلع یې پر دایره مماس او دویمه ضلع یې د دایرې وتر وي او راس یې د تماس په ټکي کې پروت وي مماسي زاویه بلل کیږي، لکه: د θ زاویه



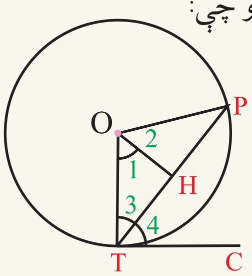
فعالیت

- د $C(0,6)$ دایره رسم کړئ.
- په دې دایره کې یوه مماسي زاویه رسم کړئ.
- د دایرې د وتر انجامونه د دایرې له مرکز سره ونښلوئ څه ډول مثلث لاسته راځي.
- د دایرې له مرکز څخه پر وتر عمود رسم کړئ.
- د $T\hat{O}P$ مرکزي زاویه او د $P\hat{T}C$ مماسي زاویې سره څه اړیکې لري.

د دې فعالیت د پایلې څخه لاندې قضیه ثبوتولی شو.

قضیه: په یوه دایره کې د مماسي زاویې پراخوالی د هغې د مخامخ قوس نیمایي په اندازه دی.

ثبوت: د $\overset{\Delta}{OHT}$ قایم الزاویه مثلث او $O\hat{T}C$ قایمې زاویې څخه لرو چې:



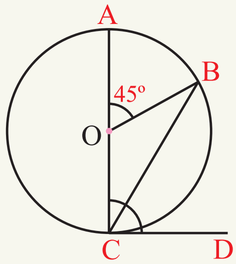
$$\left.\begin{array}{l}\hat{3}+\hat{1}=90^\circ\\ \hat{3}+\hat{4}=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{3}+\hat{1}=\hat{3}+\hat{4}\Rightarrow \hat{1}=\hat{4}$$

$$\hat{1}=\frac{P\hat{O}T}{2}=\frac{\overset{\frown}{PT}}{2}\Rightarrow P\hat{T}C=\frac{\overset{\frown}{PT}}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

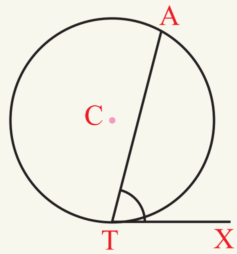
لومړی مثال: په لاندې شکل کې چې د $C(0, r)$ په دایره کې د هغې مرکزي زاویه 45° وي، د محیطي او مماسي زاویو پراخوالی پیدا کړئ.

حل: د مرکزي زاویې او دهغې د مخامخ قوس د اړیکو څخه په ګټه لیکلی شو چې:



دوېم مثال: په لاندې شکل کې د $\overset{\frown}{AT}$ قوس اندازه $(2\alpha - 6)^\circ$ ده، د $A\hat{T}X$ مماسي زاویې اندازه پیدا کړئ.

حل: د مماسي زاویې او دهغې د مخامخ قوس د اړیکو څخه د ګټې اخیستلو له مخې لیکلای شو، چې:



$$A\hat{T}X = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AT}$$

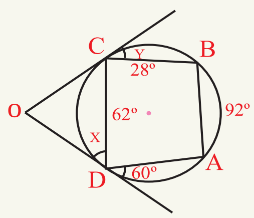
$$A\hat{T}X = \frac{1}{2}(2\alpha - 6)^\circ$$

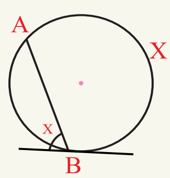
$$= (\alpha - 3)^\circ$$

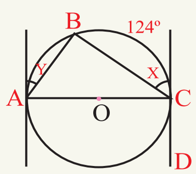
پایله: محیطي او مماسي زاویې چې د عین قوس په مقابل کې پرتې وي، سره مساوي دي.

پوښتنې

۱- د مماسي زاویو اندازه په لاندې شکلونو کې په لاس راوړئ.







(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړي څپرکي لنډيز

- د هغو ټکو سټ یا هندسي محل چې د یوه ټاکلي ټکي نه مساوي واټن ولري دايره بلل کېږي.
- د هغو ټکو سټ چې واټن يې د دايرې له شعاع څخه کوچنی وي د دايرې دننه ساحه بلل کېږي.
- د هغو ټکو سټ چې واټن يې د دايرې له مرکز او د دايرې له شعاع سره مساوي وي د دايرې محيط یا مخ بلل کېږي.
- د هغو ټکو سټ چې فاصله يې د دايرې له مرکز څخه نسبت د دايرې شعاع ته لوي وي د دايرې باندنی ساحه بلل کېږي.
- د مستوي هغه برخه چې د منحني او د دايرې د داخلي سطحې په واسطه ببله شوې وي د دايرې سطحه بلل کېږي.
- هغه کرښه چې د دايرې مرکز او د محيط يو ټکی نښلوي د دايرې شعاع بلل کېږي.
- هغه ټوټه کرښــه چې د دايرې د محيط دوه ټکي سره نښلوي ددايرې وتر بلل کېږي.
- د دايرې هغه وتر چې له مرکز څخه تيرېږي د دايرې قطر بلل کېږي. هر قطر د شعاع دوه برابره دی.
- د دايرې د محيط يوه برخه چې د دوو ټکو په مرسته ببله شوې وي قوس بلل کېږي.
- هغه کرښه چې له دايرې سره يوګډ ټکی ولري مماس بلل کېږي.
- د دايرې قطعه: د دايرې هغه برخه چې د دايرې د وتر او اړونده قوس تر منځ پرته وي د دايرې قطعه بلل کېږي
- د دايرې يوه برخه ده چې د دوو شعاعګانو او اړوند قوس په مرسته د دايرې له سطحې څخه ببله شوې وي.
- که يو مستقيم له يوې دايرې سره يوګډ ټکی ولري د مماس او که چيرې دوه ګډې ټکي ولري د قاطع په نوم يادېږي.
- په هره دايره کې د دايرې له مرکز څخه پر وتر عمودي کرښه، وتر او مخامخ قوس نيمايي کوي.

- د دايرې شعاع د تماس په ټکي کې پر مماس عمود دی.
- د يوې دايرې مساوي وترونه د هغې له مرکز څخه مساوي واټن لري.

هغه زاويه چې راس يې د دايرې په مرکز پروت او ضلعې يې د دايرې شعاعګانې وي مرکزي زاويه بلل کېږي.

- د هرې مرکزي زاويې اندازه د هغې د مخامخ قوس سره مساوي ده.
- د مرکزي زاويې د مخامخ قوس اوږدوالی د دې رابطې $\frac{A\hat{O}B}{360^\circ} = \frac{\text{د قوس اوږدوالی}}{\text{د دايرې محيط}}$ څخه په لاس راځي.

هغه زاويه ده، چې راس يې د دايرې پر محيط او ضلعې يې د دايرې وترونه وي محيطي زاويه بلل کېږي.

- د هرې محيطي زاويې پراخوالی د هغې د مخامخ قوس له نيمايي سره مساوي دی.
- هره محيطي زاويه د هغې د مرکزي زاويې نيمايي ده، چې د عين قوس په مخامخ کې پر ته ده.

هغه زاويه ده، چې يوه ضلعه يې په دايرې مماس او بله يې د دايرې وتر او راس د تماس په ټکي کې د دايرې پر محيط پروت وي مماسي زاويه بلل کېږي.

- هره مماسي زاويه د هغې مرکزي زاويې نيمايي ده، چې د عين قوس په مخامخ پرته وي.
- د دوو دايرو حالتونه يو بل ته:

_ که د دوو دايرو د مرکز ونو د واټن اوږدوالی د هغو د شعاعګانو له مجموعې څخه لوی وي دايرې غير متقاطع بلل کېږي.
_ که د دوو دايرو د مرکزونو واټن اوږدوالی د هغو د شعاعګانو له مجموعې سره مساوي وي دايرې خارجاً(د يا له باندې خوا) مماس بلل کېږي.
_ که د دوو دايرو د مرکزونو اوږدوالی د هغو د شعاعګانو له اوږدوالی څخه کوچنی او د شعاعګانو د تفريق حاصل يې د مطلقه قيمت څخه لوی وي متقاطع بلل کېږي.
_ که د دايرو د مرکزونو تر منځ واټن د هغې د شعاعګانو د تفريق حاصل مطلقه قيمت سره مساوي وي دايرې داخلاً(دننه) مماس دي.
_ که د دايرو د مرکزونو تر منځ واټن صفر وي دايرې متحد المرکز(د يوه مرکز لرونکي) بلل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړي څپرکي پوښتنې

• په لاندې پوښتنو کې د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب په نښه کړئ.

1– د يوې دايرې د قطر اوږدوالی مساوي دی په:

a) $3r$ b) π c) 2π d) $2r$

2– دايره په لاندې ډول ښودل کېږي:

a) 0 b) $(1,2)$ c) (b,a) d) $C(o,r)$

3-هغه مستقيمه کرښه چې له دايرې سره يو ګډ ټکی ولري:

a) د وتر په نوم يادېږي. b) د قوس په نوم يادېږي.

c) د مماس په نوم يادېږي. d) د محيط په نوم يادېږي.

4- د هغو ټکو سټ چې فاصله يې د دايرې له شعاع څخه لويه وي:

a) د دايرې مخ بلل کېږي. b) د دايرې خارج بلل کېږي.

c) دايره بلل کېږي. d) د دايرې داخل بلل کېږي.

5- هغه وتر چې د دايرې مرکز ته نږدې وي:

a) پنډ وتر دی. b) وروکی وتر دی.

c) هيڅ يو. d) لوی وتر دی.

6- که يوه مستقيمه کرښه دايره په دوو ټکو کې پرې کړي هغه ته:

a) مستقيمه کرښه او دايره وايي. b) قاطع وايي.

c) مماس وايي. d) موازي وايي.

7- که د يوې دايرې مرکزي زاويه 80° وي د مخامخ قوس اندازه يې مساوي په:

a) 90° b) $70'$ c) $80''$ d) 80°

8- يوه مستقيمه کرښه له يوې دايرې سره څو حالتونه لري:

a) 3 b) 7 c) 4 d) 1

9- هغه زاويه چې راس يې د ايرې پر محيط او ضلعې يې دوه وترونه وي:

a) مرکزي زاويه ده. b) مماسي زاويه ده.

c) محاطي زاويه ده. d) محيطي زاويه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- تش ځایونه په مناسبو کلمو ډک کړئ:

1- د دایرې هغه برخه چې د وتر په واسطه د دایرې له سطحې څخه بېله شوې وي د .... په نوم یادېږي.

2- د دایرې تر ټولو لوی وتر .... دی.

3- د هغو ټکو سټ چې .... یې له مرکز څخه د دایرې له شعاع څخه کوچنی وي د دایرې .... ویل کېږي.

4- که مستقیمه کرښه له یوې دایرې سره هیڅ ګډ .... ونلري هغه ته .... دایره ویل کېږي.

5- په هره دایره کې .... قطر پر وتر، وتر نیمايي او .... قوسونه د هغې څخه بیلوي.

6- په هر قایم الزاویه مثلث کې د وتر .... د .... ضلعو د مربعاتو له مجموعې سره مساوي دي.

7- په هره دایره کې هغه وتر چې مرکز ته نژدې وي تر ټولو .... وتر دی.

8- د دایرې شعاع د تماس په ټکی پر .... عمود وي.

9- مرکزي زاویه هغه زاویه ده چې .... یې د دایرې په مرکز او ضلعې یې د دایرې.................. وي.

10- هغه زاویه چې یوه ضلع یې .... په دایره او بله یې د دایرې .... او راس یې د .... په ټکی پروت وي د .... زاویې په نوم یادېږي.

- په لاندې جملو کې سمې او نا سمې جملې د(س) او (ن) د تورو په مرسته په نښه کړئ.

1- (   ) د یوې مستوي د ټولو ټکو سټ چې د(O) د یو ټاکلی ټکي څخه د(r) مساوي فاصلې ولري دایره بلل کېږي.

2- (   ) دایره د خپل محیط په نامه یادېږي.

3- (   ) هغه قطعه خط یا ټوټه کرښه چې د دایرې د محیط دوه ټکي سره نښلوي د دایرې د قطر په نامه یادېږي.

4- (   ) په یوه دایره کې شعاع یا وړانګه د قطر نیمايي ده.

5- (   ) د دایرې قطعه د($\frown$) په علامه ښودل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-6 (   ) د هغو ټکو سټ چې د شعاع په اندازه مساوي فاصله ولري د دايرې خارجي ساحه بلل کېږي.

-7 (   ) په يوه دايره کې عمود قطر په وتر، وتر نيمايي او دوه بېلابېل قوسونه منځ ته راوړي.

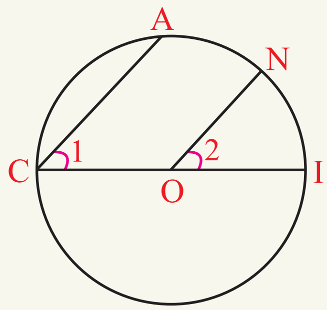
-8 (   ) ټوله دايره د دايرې د قوس په نوم يادېږي.

-9 (   ) د $d = \frac{r}{2}$ په رابطه کې d قطر او r د دايرې شعاع دی.

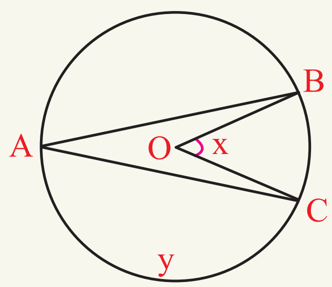
-10 (   ) د يوې دايرې شعاع د تماس په ټکي پر مماس عمود وي.

• لاندې سوالونه په تفصيل سره حل کړئ.

1- په لاندې شکل کې که $\overline{CI}$ د دايرې قطر او $\overline{ON} \parallel \overline{CA}$ وي ثبوت کړئ چې $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NI}$ دی.

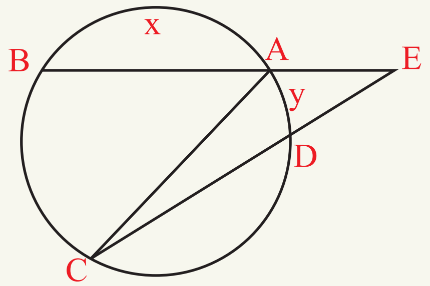


2- په لاندې $C(o,r)$ شکل کې که $y = 140^\circ$ او $\overset{\frown}{AB} = 48^\circ$ وي د $\hat{x}$ پيدا کړئ.

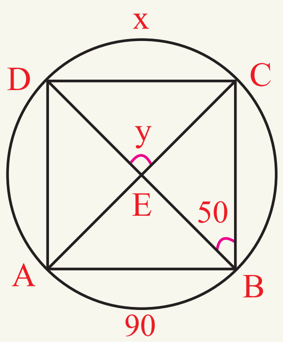


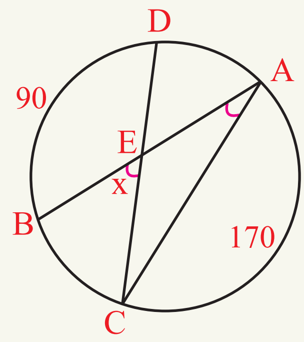
(c) ketabton.com: The Digital Library

3- په لاندې شکل کې که $\hat{E} = 40^\circ$ او د $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}$ او $\overset{\frown}{CD}$ مساوي اندازه اوږدوالی مساوي وي د $A\hat{C}D$ اندازه معلومه کړئ.

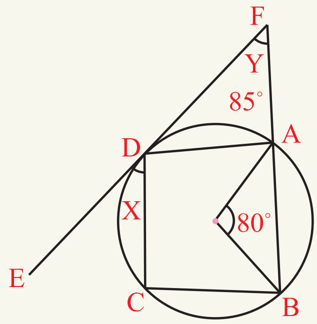


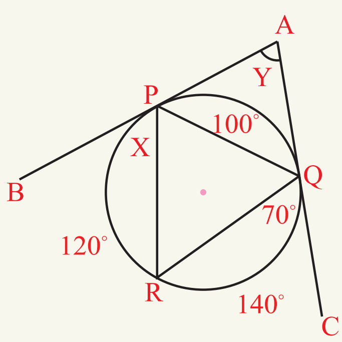
4- په لاندې شکلونو کې د x او y اندازه وټاکئ.





5- په لاندې شکلونو کې د x او y اندازې پیدا کړئ.





(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم څپــــرکی

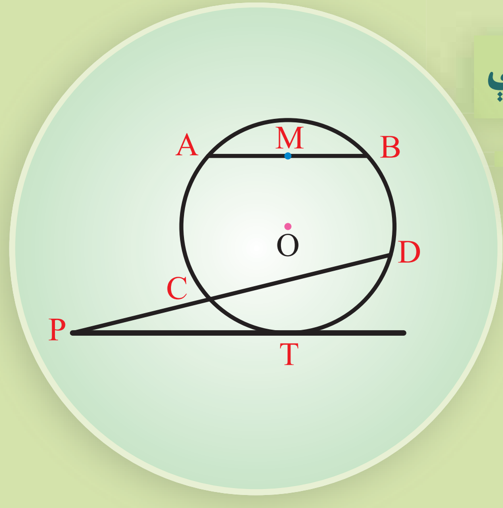
په يوه دايره کې د اوږدوالی اړيکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دایره کې د اوږدوالي اړیکې



هغه توټه کرښې چې په مخامخ شکل کې وینئ نوم یې واخلئ.

تعریف

د اوږدوالي اړیکې: په یو هندسي شکل کې د کرښو د اجزاوو تر منځ اړیکې د اوږدوالي اړیکو په نوم یادیږي.

فعالیت

- د P له ټکي څخه چې د $C(O,r)$ دایرې په بهر کې پروت د $\overline{PAB}$ او $\overline{PCD}$ قاطع کرښې رسم کړئ.
- د A ټکی د D او B ټکی د C ټکي سره ونښلوئ.
- ویلای شئ چې د $\overset{\Delta}{PAD}$ او $\overset{\Delta}{PCB}$ مثلثونه مشابه دي؟
- په پورته دوو مثلثونو کې د تشابه نسبتونه ولیکئ.

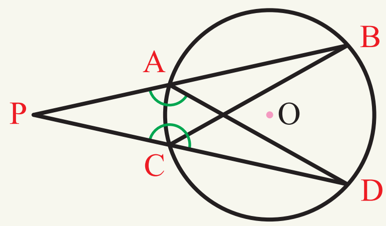
د دې فعالیت پایلې څخه لاندې قضیه خرګندیږي.

قضیه (**۱ - ۲**): که چیرې د یوې دایرې له بهرنیو ټکو څخه پر دایره دوه قاطع کرښې رسم شي، د یوې قاطع د قطعاتو د ضرب حاصل، د بل قاطع د قطعاتو د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

یعنې: $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD}$

ثبوت: د $\overset{\Delta}{PAD}$ او $\overset{\Delta}{PCB}$ مثلثونو تر منځ لاندې اړیکي موجود دي دي. $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$

$\hat{D}=\hat{B}$ د عین قوس محیطي زاویې
$\hat{P}=\hat{P}$ ګډ
$\Rightarrow \hat{A}=\hat{C}$



د پورتنیو دریو زاویو د تساوي څخه پوهېږو چې د $\overset{\Delta}{PAD}$ او $\overset{\Delta}{PCB}$ مثلثونه مشابه دي، نو لیکلی شو چې:

$$\overset{\Delta}{PCB}\sim\overset{\Delta}{PAD}\Rightarrow\frac{PA}{PC}=\frac{PD}{PB}\Rightarrow PA\cdot PB=PC\cdot PD$$

نتیجه

مثال: په لاندې شکل کې $\overline{PA}$ او $\overline{PB}$ د $C(O,r)$ د دایرې دوه قاطع کرښې دي. که $\overline{PA}=10cm$, $\overline{PC}=6cm$ او $\overline{PD}=4cm$ اوږدوالی ولري، د $\overline{PB}$ او $\overline{DB}$ اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: هغه قطعات(ټوټه کرښې) چې د P له ټکي څخه رسمېږي او د(۱-۲) قضیې په مرسته لیکلای شو، چې:

$\overline{PA}\cdot\overline{PC}=\overline{PB}\cdot\overline{PD}$

$10\cdot 6=\overline{PB}\cdot 4$

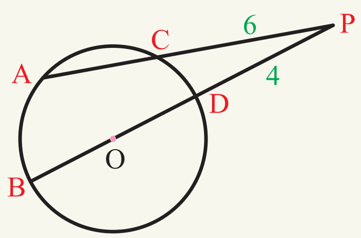
$60=4\overline{PB}$

$\overline{PB}=15cm$

$\overline{DB}=\overline{PB}-\overline{PD}$

$\overline{DB}=15-4$

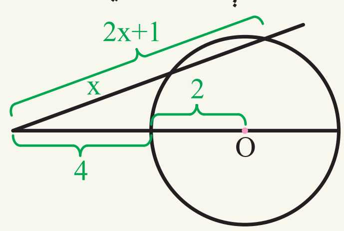
$\overline{DB}=11cm$

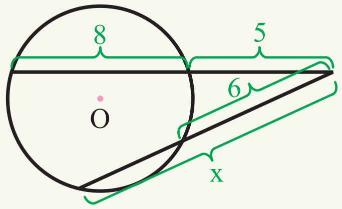


که چیرې د یوې دایرې له بهرنیو ټکو څخه پر دایره دوه قاطع کرښې رسم شي، د یوې قاطع د قطعاتو د ضرب حاصل، د بل قاطع د قطعاتو د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

پوښتنې

1- په لاندې شکلونو کې د x عددي قیمت پیدا کړئ.

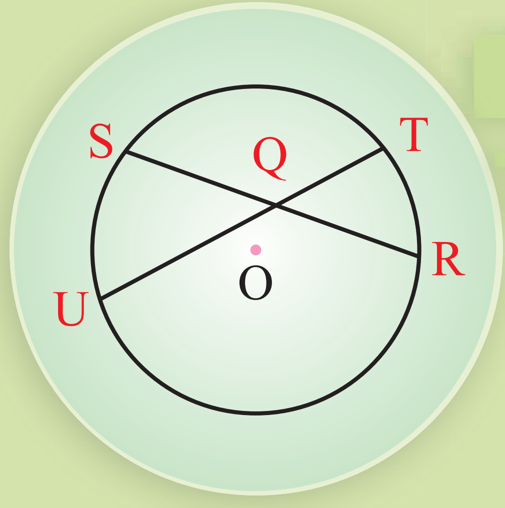




(c) ketabton.com: The Digital Library

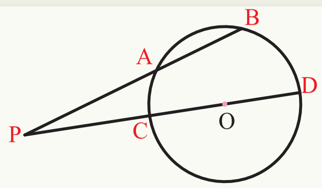
(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو ټکي طاقت نظر دایرې ته



مخامخ شکل ته پاملرنه وکړئ. ویلاشي شئ چې د $\overline{QR}\cdot\overline{QS}=\overline{QU}\cdot\overline{QT}$ مساوات سم دي.

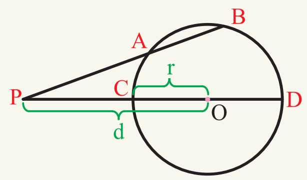
فعالیت



- د P له یو ټاکلي ټکي څخه چې $C(O,r)$ د دایرې څخه بهر پروت دی پر هغه د $\overline{PAB}$ قاطع رسم کړئ.
- د P له بهرنی ټکي څخه د $\overline{PCD}$ قاطع داسې رسم کړئ چې د $C(O,r)$ دایرې له مرکز څخه تیر شي.
- د $\overline{PAB}$ او $\overline{PCD}$ د ټوټه کرښو ترمنځ اړیکې د (2-1) قضیې له مخې ولیکئ.
- په پورتنی اړیکه کې د $\overline{PC}$ او $\overline{PD}$ اوږدوالی د دایرې له مرکز څخه ولیکئ.
- که د P ټکي واټن د دایرې له مرکز څخه په (d) او شعاع یا وړانګه په (r) سره وښیو، پورتنی اړیکه د d او r تر منځ ولیکئ.

د پاسني فعالیت د پایلې څخه لاندې قضیه څرګندېږي.

قضیه(2-2): که دیو ټاکلی ټکي څخه دوې قاطع کرښې په یوه دایره داسې رسم کړئ چې، دویمه قاطع د دایرې له مرکز څخه تیره شي. د لومړی قاطع د ټوټه کرښو تر منځ د ضرب حاصل د یو ټاکلی اندازې (d^2-r^2) سره مساوي دي، (d) د ټاکلي ټکي او د دایرې د مرکز تر منځ واټن او (r) د دایرې شعاع یا وړانګه ده.



لومړی حالت: که چیرې ټاکلي ټکی د دایرې په بهر کې پروت وي.

ثبوت: که چیرې د P ټکي د دایرې په بهر کې او واټن له مرکز څخه په (d) او دایرې شعاع په (r) سره وښیو، د (2-1) قضیې

له مخې ليکلای شو:

دوه نــور حالتونو چــې ټاکلې ټکي يــې د دايرې پر محيط او دننه په دايره کې پراته وي، دا دګرانو زده کوونکو کورنی دنده ده.

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}....(2-1)$$
$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=(\overline{PO}-\overline{CO})(\overline{PO}+\overline{OD})$$
$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=(d-r)(d+r)$$
$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=d^2-r^2$$

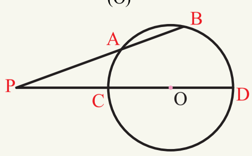
تعريف

د $\overline{PA}\cdot\overline{PC}=d^2-r^2$ رابطه د P د ټکي طاقت نظر د C(o,r) دايرې ته وايي چې، ثابته اندازه ده چې د $P_{(o)}=d^2-r^2$ په شکل ښودل کېږي.

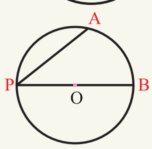
لومړی مثال: که د يوې دايرې قطر $10cm$ او د P ټکی د $13cm$ په اندازه د دايرې له مرکز څخه واټن ولري د P ټکي طاقت نظر C(o,r) دايرې ته پيدا کړئ.

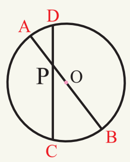
حل: څرنګه چې د دايرې قطر راکړل شوی دی لومړی د دايرې شعاع يا ورانګه وروسته د P ټکي طاقت نظر دايرې ته پيدا کړئ.

$$r=\frac{D}{2}=\frac{10}{2}=5cm$$
$$P_{(O)}=d^2-r^2$$
$$P_{(O)}=(13)^2-(5)^2$$
$$P_{(O)}=169-25\Rightarrow P_{(O)}=144$$



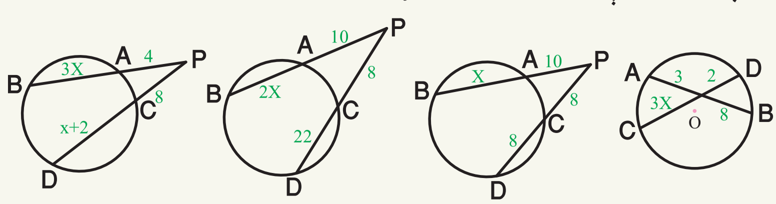
- که د يوه ټکي طاقت نظر يوې دايرې ته مثبت وي ټکی د دايرې نه بهر پروت دی، يا $P_{(o)}=d^2-r^2>0$ لکه د(2-2) قضيې شکل
- که د يوه ټکي طاقت نظر دايرې ته صفر وي ټکی د دايرې پر محيط پروت دی، يعني $P_{(0)}=d^2-r^2=0\Rightarrow d^2=r^2$
- که د يوه ټکي طاقت نظر دايرې ته منفي وي ټکی د دايرې دننه پروت ده، يعني $P_{(0)}=d^2-r^2<0\Rightarrow d^2<r^2$





پوښتنې

1- په لاندې شکلونو کې د x قيمتونه پيدا کړئ.



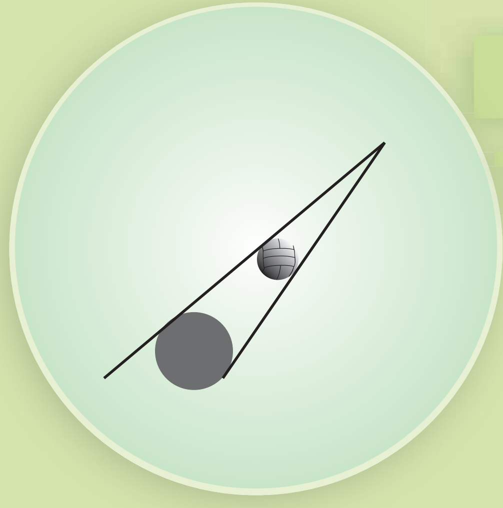
2- په لاندې حالتونو کې د يوه ټکي طاقت نظر يوې دايرې ته پيدا کړئ.

الف) که $d=7$ او $r=4$ وي. ب) که $d=3$ او $r=3$ وي. ج) که $d=3$ او $r=5$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دايرې مماس کرښه



شکل ته پاملرنه وکړئ.
که چيرې د نور د وړانګې حرکت مسير مستقيمې کرښې ومنل شي، دغه کرښې نظر توپ او د هغه له سيورې سره څه اړيکې لري.

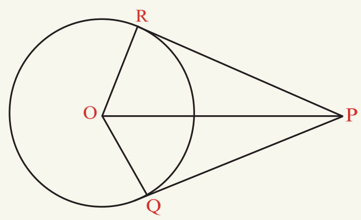
فعاليت

- د P له يوه بهرنې ټکي نه د $C(O,r)$ په دايره د $\overline{PR}$ او $\overline{PQ}$ دوه مماسونه رسم کړئ.
- که د Q او R ټکي پر دايره د تماس ټکي وي. ايا د P له ټکي پر دايره بل مماس رسمېدلای شي؟
- د O ټکی د Q، R او P ټکو سره و نښلوئ.
- لاسته راغلي مثلثونه سره څه اړيکې لري؟
- ايا رسم شوی مماسونه سره برابر دي؟

د دې فعاليت د پايلې څخه لاندې قضيه څرګندېږي.

قضيه (2-3): د يوې دايرې له بهرنی ټکي څخه پر دايره دوه مساوي مماسونه، رسمېږي.

ثبوت: په $\overset{\Delta}{POR}$ او $\overset{\Delta}{POQ}$ مثلثونو کې ليکلی شو چې:



$\overline{OR} = \overline{OQ}$.... د دايرې شعاع يا وړانګه

$\overline{PO} = \overline{PO}$ .... ګډ

$\hat{R} = \hat{Q}$..............90°

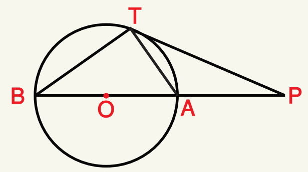
$\overset{\Delta}{POR} \cong \overset{\Delta}{POQ}$

$\overline{PR} = \overline{PQ}$

قضيه (2-4): که د يوې دايرې له بهرنی ټکي نه يو مماس او يو قاطع پر يوه دايره رسم شي ثبوت کړئ، چې د يوه ټکي طاقت نظر دايرې ته د مماس له مربع سره مساوي دی.

ثبوت: $C(O,r)$ په دايره کې $\overline{PT}$ مماس او $\overline{PAB}$ قاطع دی، که د T ټکی له A او B

ټکوسره ونښلوو، د $\overset{\Delta}{PTA}$ او $\overset{\Delta}{PTB}$ مثلثونو څخه لیکلای شو چې:



$\hat{PTA} = \hat{PBT}$.....(I) (محیطي زاویې او د عین قوس ګډ مماس)

$\hat{P} = \hat{P}$..........(II)

$\overset{I \wedge II}{\Rightarrow} \hat{PTB} = \hat{PAT}$

$\Rightarrow \overset{\Delta}{PTB} \sim \overset{\Delta}{PTA}$

$\frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PB}}$

$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2 \Rightarrow \overline{PT}^2 = d^2 - r^2$

په پایله کې لیکلای شو چې: $PT = PT'$

مثال: په لاندې شکل کې د $\overline{PT}$ او $\overline{PT'}$ اوږدوالی لاسته راوړئ.

حل:

$PA = 4cm$

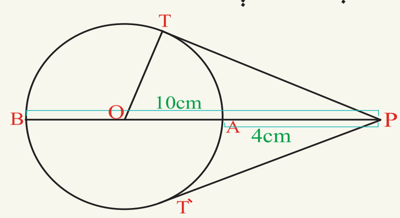
$PB = 10cm$

$PT = ?$

$PT^2 = PA \cdot PB$

$PT^2 = 4 \times 10 = 40$

$PT = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

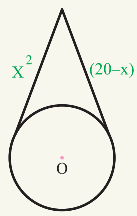


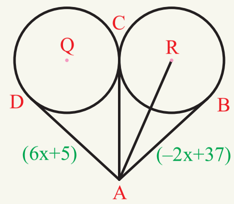
- د یوې دایرې له باندنې ټکي څخه پر هغې دوه مساوي مماسونه رسمولای شو.

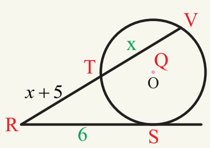
که چیرې د یوې دایرې له بهرنې ټکي څخه پر دایره یو قاطع او یو مماس رسم شي، د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته د مماس له مربع سره مساوي دی.

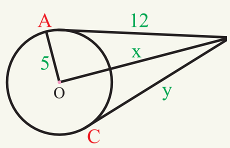
پوښتنې

په لاندې شکلونو کې د x قیمت لاسته راوړئ.





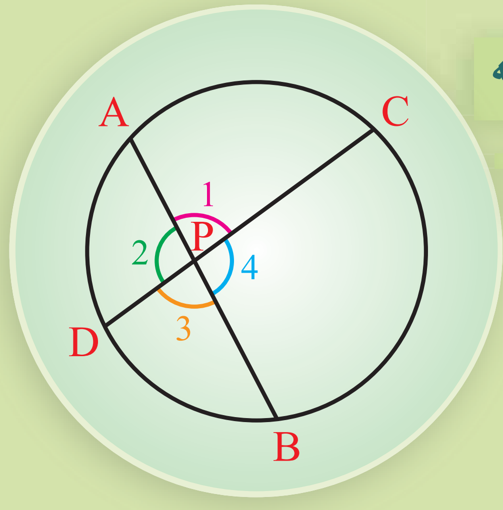




(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې دايرې دننی(داخلي) زاويه



د يوې دايرې په دننه کې دوه متقاطع وترونه رسم کړئ او ووایاست چې څو زاويې جوړې، او څه يې نوموئ.

تعريف

هغه زاويې چې د دايرې په دننه کې د دوو وترونو د تقاطع په مرسته منځ ته راځي د دايرې دننی زاويې بلل کيږي، لکه په پورتني شکل کې د $\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}$ زاويې.

فعاليت

- د $C(O,r)$ دايره رسم کړئ، په هغه کې د $\overline{AB}$ او $\overline{CD}$ دوه وترونه داسې رسم کړئ چې د P په ټکي که يو بل پرې کړي هغه زاويې چې منځ ته راغلې د څه په نامه يادېږي؟
- د D او C ټکي د B سره ونښلوئ د $\hat{CPB}$ زاويه چې د $\overset{\Delta}{PBD}$ باندنی زاويه ده، د مثلث د دوو ناګاونډيو زاويو سره څه اړيکه لري.

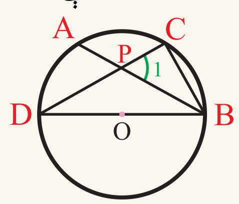
په ياد ولرئ:

- هره محيطي زاويه د مخامخ قوس نيمايي ده.
- په يوه مثلث کې د هرې خارجي زاويې پراخوالی د دوو ناګاونډيو زاويو د مجموعې سره برابر دی.

د دې فعاليت د پايلې څخه لاندې قضيه بيان او ثبوتوو.

قضيه(2-5): د يوې دايرې د هرې دننی(داخلي) زاويې پراخوالی، د هغو قوسونو د مجموعې له نيمايې سره مساوي دی، چې د د زاويو د اضلاعو د پريکړې په مرسته منځ ته راغلي وي.

ثبوت: څرنګه چې د $\hat{B}$ او $\hat{D}$ د دايرې محيطي زاويې دي نو کولای شو چې وليکو:

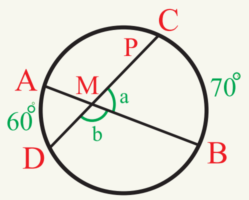


$$\left.\begin{array}{ll}\hat{B}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} & \text{د محيطي زاويې وسعت}\\ \hat{D}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} & \text{د محيطي زاويې وسعت}\\ C\hat{P}B=\hat{B}+\hat{D} & \text{د هر مثلث خارجي زاويه}\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{array}{l}C\hat{P}B=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}\\ C\hat{P}B=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC})\end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: په لاندې شکل کې د $\hat{a}$ او $\hat{b}$ زاويې پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې د يوې دايرې دننې زاويې پراخوالی د هغو قوسونو دمجموعې له نيمايي سره مساوي دی چې د زاويو په مخامخ کې پراته وي، يعنې:

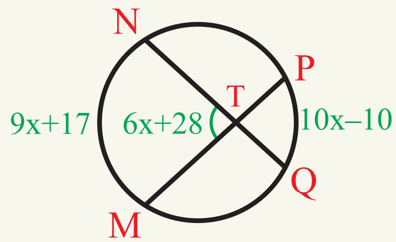


$$C\hat{M}B = \hat{a} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{60+70}{2} = 65^\circ$$

$$\hat{b} = 180^\circ - a = 180^\circ - 65^\circ = 105^\circ$$

دويم مثال: په لاندې شکل کې د x او $N\hat{T}M$ زاويې پراخوالی وټاکئ.

حل: د يوې دايرې دننې زاويو د اړيکو له مخې ليکلی شو چې:



$$\overset{\frown}{NM} = 9x+17 \quad , \quad \overset{\frown}{PQ} = 10x-10$$

$$N\hat{T}M = 6x+28$$

$$6x+28 = \frac{9x+17+10x-10}{2}$$

$$12x+56 = 19x+7$$

$$-7x = -49$$

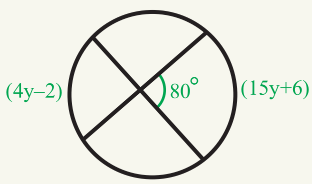
$$x = 7$$

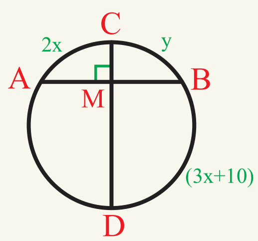
$$N\hat{T}M = 6x+28$$

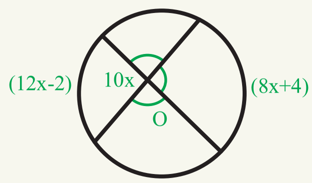
$$= 6\times 7+28 = 42+28 \Rightarrow N\hat{T}M = 70^\circ$$

پوښتنې

1- په لاندې شکلونو کې د x او y اندازې معلوم کړئ.

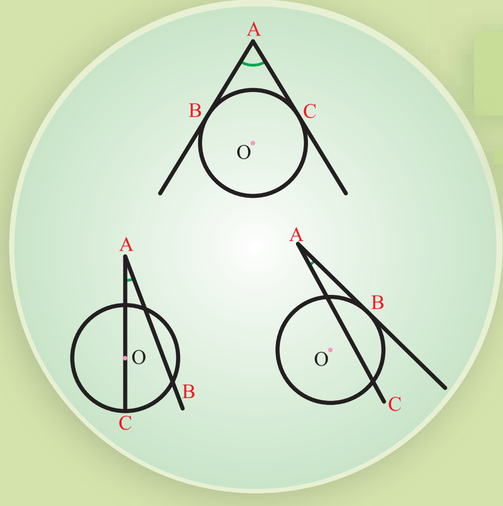






(c) ketabton.com: The Digital Library

د دایرې باندنۍ زاویه



په مخامخ شکلونو کې د توپه کرښو او د زاویو نمونه واخلئ.

تعریف

هغه زاویه چې د دوو قاطع کرښو، دوو مماسونو یا د یو قاطع او یوه مماس د پرېکړې څخه د دایرې په بهر کې منځ ته راغلې وي د دایرې باندنۍ زاویه بلل کېږي.

فعالیت

- د $C(O,r)$ په دایره کې د $\overline{AB}$ او $\overline{CD}$ دوه غیر موازي وترونه غزوو تر څو د $B\hat{V}D$ خارجي زاویه منځ ته راشي د C ټکی له B سره ونښلوئ.
- د $B\overset{\Delta}{V}C$ مثلث باندنۍ زاویه یعنې ($\hat{1}$) د مثلث د دوو ناګاونډیو زاویو سره څه اړیکې لري؟

د دې فعالیت له پایلې څخه لاندې قضیه بیانېږي.

قضیه (2-6): د یوې دایرې د باندنۍ زاویې پراخوالی، د هغو قوسونو د توپیر له نمایې سره مساوي دی، چې د وترونو د تقاطع څخه منځ ته راغلي وي.

ثبوت: د B ټکی له C سره نښلوو او $V\overset{\Delta}{B}C$ مثلث کې لرو چې:

$\hat{1} = \hat{2} + \hat{3}$ د مثلث خارجي زاویې پراخوالی

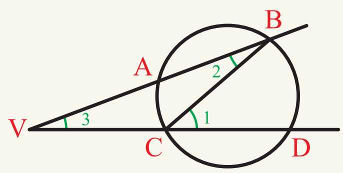
$\hat{3} = \hat{1} - \hat{2}$

$\hat{1} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$ د محیطي زاویې پراخوالی

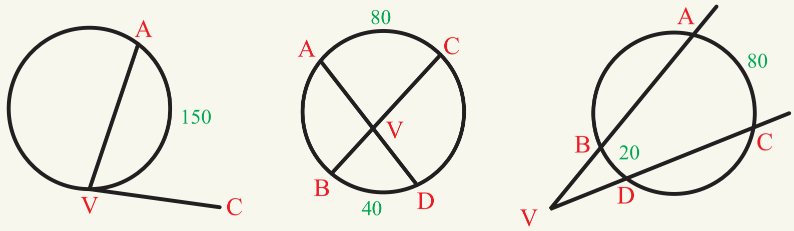
$\hat{2} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ د محیطي زاویې پراخوالی

$\Rightarrow \hat{3} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD} - \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$

$B\hat{V}D = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD} - \overset{\frown}{AC})$



لومړی مثال: په لاندې شکلونو کې د $\hat{AVC}$ زاویو پراخوالی پیدا کړئ.



حل: په دایره کې دننیو، باندنیو او مماسي زاویو پراخوالی څخه په ګټه اخستلو سره لیکلای شو چې:

a) $\hat{AVC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AV} = \frac{1}{2}\cdot(150)^{\circ}$, $\hat{AVC} = 75^{\circ}$

b) $\hat{AVC} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}) = \frac{1}{2}\cdot(80+40)^{\circ}$, $\hat{AVC} = 60^{\circ}$

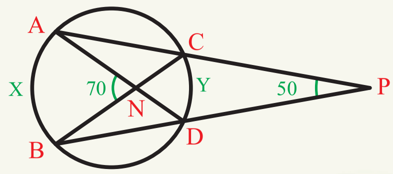
c) $\hat{AVC} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}) = \frac{1}{2}\cdot(80-20)^{\circ}$, $\hat{AVC} = 30^{\circ}$

دویمه مثال: د لاندې شکل څخه په ګټه اخستو سره د x او y ارزښتونه پیدا کړئ.

$$\hat{ANB} = \frac{x+y}{2} \Rightarrow 70 = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x+y = 140......I$$

$$\hat{APB} = \frac{x-y}{2} \Rightarrow 50 = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x-y = 100......II$$

که چیرې د I او II اړیکې خوا په خوا جمع کړو لرو چې:



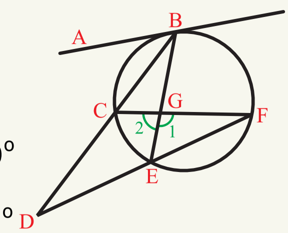
$2x = 240$

$x = 120^{\circ}$

$y = 20^{\circ}$

پوښتنې

په لاندې شکلونو کې نا معلوم کمیتونه پیدا کړئ.

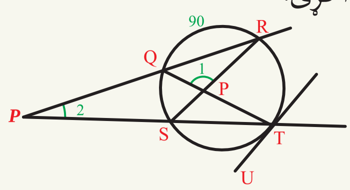


$\overset{\frown}{BC} = 70^{\circ}$

$\overset{\frown}{BF} = 100^{\circ}$

$\overset{\frown}{EF} = 130^{\circ}$

$\hat{1} = ?$, $\hat{2} = ?$, $\hat{D} = ?$, $\hat{ABC} = ?$



$\overset{\frown}{QR} = 90^{\circ}$

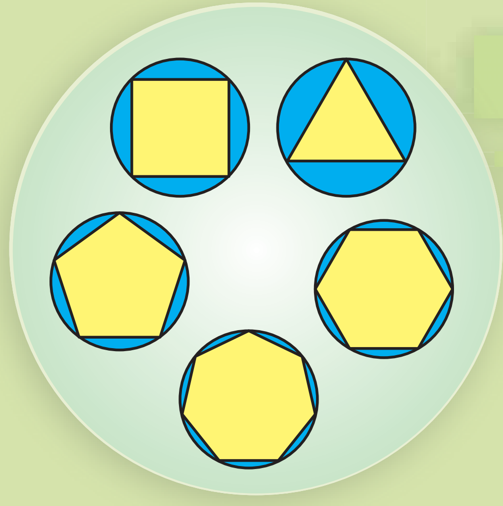
$\overset{\frown}{RT} = 150^{\circ}$

$\overset{\frown}{QS} = 50^{\circ}$

$\hat{STU} = ?$, $\hat{1} = ?$, $\hat{2} = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

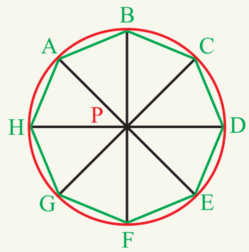
محیطي دایره



مخامخ شکل ته پاملرنه وکړئ، کوم هندسي شکلونه وینئ نومونه یې واخلئ.

تعریف

هغه دایره چې د مضلع د راسونو څخه تېره شوې وي محیطي دایره بلل کېږي او مضلع مرسوم په دایره بلل کېږي، لکه په مخامخ شکل:



د مثلث محیطي دایره: هغه دایره چې د مثلث د درې راسونو څخه تېره شوې وي د مثلث د محیطي دایرې په نامه یادېږي.

فعالیت

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث رسم کړئ.
- د $\overline{AC}$ او $\overline{BC}$ د اضلاعګانو عمودي ناصفونه رسم کړئ.
- پورتنی عمودي ناصفونه په څو ټکو کې پرې کوي؟ د هغې د تقاطع ټکې په O سره وښیئ.
- د $\overline{OA}, \overline{OB}$ او $\overline{OC}$ اوږدوالي سره پرتله کړئ.
- که چیرې یوه دایره د O په مرکز او د $\overline{OA}$ په شعاع رسم شي ایا د B او C له ټکو تیرېږي او که نه ؟
- ایا دا دایره د B او C له ټکو څخه هم تیرېږي؟ ولې؟
- رسم شوې دایره د مثلث د څه په نامه یادېږي؟

> **په یاد ولرئ چې**:
> هغه دایره چې د مضلع د راسونو څخه تیرېږي، مضلع ته مرسوم په دایره وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

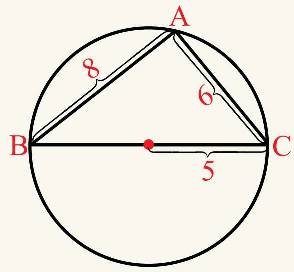
ددې فعالیت د پایلې څخه په لاندې ډول لکلای شو:

پایله: د اضلاعګانو د وسطي عمودونو د پرېکړې ټکی د مثلث د محیطي زاویې مرکز دی.

مثال: د $\overset{\Delta}{ABC}$ قایم الزاویه مثلث داسې رسم کړئ چې د قایمو څنډو اوږدوالی په ترتیب سره $8cm$ او $6cm$ وي، د دې مثلث د محیطي دایرې شعاع(وړانګه) لاس ته راوړې.

حل: پوهېږو چې په هر قایم الزاویه مثلث کې د هغې د محیطي دایرې مرکز پر وتر باندې پروت وي نو لومړی د قایم الزاویه مثلث د وتر اوږدوالی پیدا کوو چې د نیمایي ټکي یې د محیطي دایرې مرکز دی.

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$
$$\overline{BC}^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$$
$$\overline{BC}^2 = \sqrt{100}$$
$$\overline{BC} = 10cm$$
$$r = \frac{BC}{2} \Rightarrow r = \frac{10}{2} = 5cm$$



- هغه دایره چې د مضلع د راسونو څخه تېرېږي د مضلع محیطي دایرې په نامه یادېږي او مضلع ته مرسوم په دایره وایي.
- د یو مثلث داضلاعو د منځنی(وسطي) عمودونو د پرېکړې ټکی د مثلث د محیطي دایرې مرکز دي.

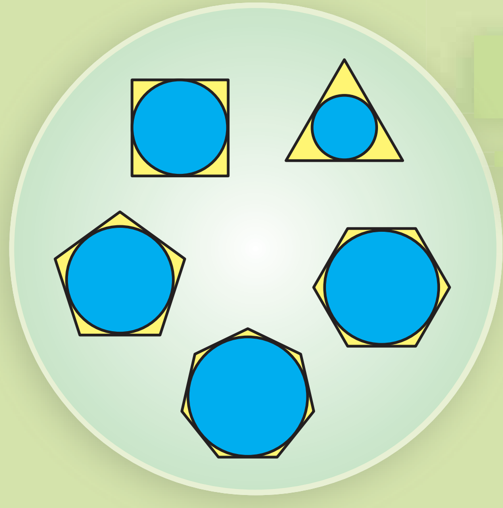
پوښتنې

1- یو مثلث چې د اضلاعو اوږدوالی یې په ترتیب سره $3cm$, $4cm$ او $5cm$ وي رسم کړئ د هغې د محیطي دایرې شعاع یا وړانګه حساب کړې.

2 - د قایم الزاویه مثلث، متساوي الاضلاع او متساوي الساقین مثلثونو د محیطي دایرو مرکزونه په کومو ځایونو کې پراته دي په شکل کې یې وښیئ.

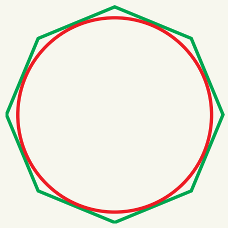
(c) ketabton.com: The Digital Library

محاطي دايره



- هغه هندسي شکلونه چې په مخامخ شکل کې يې وينئ نومونه واخلئ.
- د شکلونو تر منځ څه اړيکې وينئ.

تعريف



هغه دايره چې د محيطي مضلع پر ضلعو مماس وي، د مضلع د محاطي دايرې په نامه يادېږي لکه مخامخ شکل چې د مضلع پواسطه احاطه شوې دی.

د مثلث محاطي دايره: هغه دايره چې د يو مثلث په درې ضلعو مماس وي د مثلث محاطي دايره بلل کېږي.

فعاليت

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ يو کيفي مثلث رسم کړئ.
- د $\hat{A}, \hat{B}$ او $\hat{C}$ زاويو ناصفونه رسم او د پرېکړې ټکی په (O) سره وښيئ.
- د (O) له ټکي څخه د مثلث پر اضلاعو د $\overline{OM}, \overline{ON}$ او $\overline{OP}$ عمود کرښې رسم کړئ.
- د $\overline{OM}, \overline{ON}$ او $\overline{OP}$ عمودونو اوږدوالي پرتله کړئ.
- ايا هغه دايره چې د(O) په مرکز او د $\overline{ON}$ په شعاع رسم شي د M او P له ټکو څخه تيرېږي؟ ولې؟
- رسم شوې دايره د څه په نامه يادېږي؟

مرسته: د يوه مثلث وسطي عمودونه د مثلث دننه په يوه ټکي کې پرېکوي

د پورتنی فعالیت پایله کولای شو چې په لاندې توګه څرګنده کړو.
د هر مثلث دننی ناصف الزاویو ترمنځ د پریکړې ټکی، د مثلث د محاطي دایرې له مرکز څخه عبارت دي.

د مثلث باندنی محاطي دایره

فعالیت

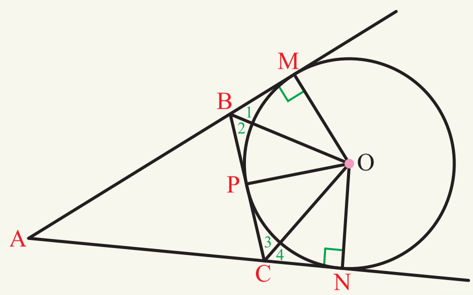
د مثلث باندنی دایره رسم کړئ.

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث رسم کړئ او $\overline{AB}$ او $\overline{AC}$ ضلعو ته امتداد ورکړئ.
- د مثلث د $\hat{B}$ او $\hat{C}$ زاویو باندنی ناصف الزاویې رسم او د پریکړې ټکی په (O) سره وښیئ.
- ایا د (O) ټکی د مثلث د باندنی محاطي دایرې مرکز کیدلی شي؟ ولې؟
- د (O) له ثابت ټکی څخه د $\overline{OP}$, $\overline{OM}$ او $\overline{ON}$ عمودي کرښې د مثلث په یوه ضلعه او د هغه په امتداد رسم او وښیئ چې د O دایرې شعاع ګاني دي.

فکر او څېړنه وکړئ:
- که چیرې د یوې څلور ضلعي د مخامخ زاویو مجموعه $180°$ وي څلور ضلعي په دایره مرسوم دي.

په یاد ولرئ:
- هر منظمه مضلع محیطي او محاطي دایره لري.

د پورتنی فعالیت پایله کولای شو په لاندې توګه څرګنده کړو.
هغه دایره چې د یو مثلث په یوه ضلع او د دوو ضلعو پر امتداد مماس وي د هغه مثلث باندنی محاطي دایره بلل کېږي.

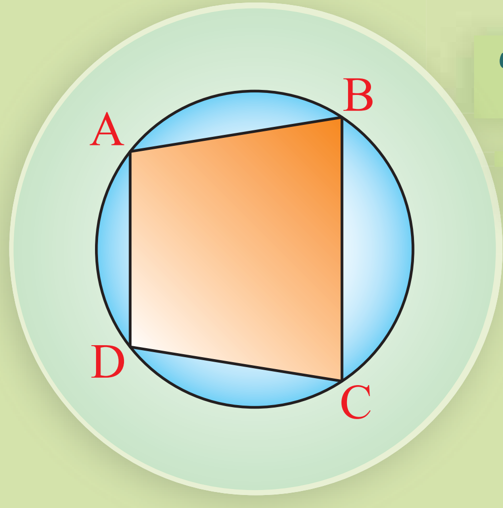


پوښتني

1– په کومو مثلثونو کې د محیطي دایرې او محاطي دایرې مرکزونه منطبق دي، رسم او په شکل کې یې وښیئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دايره کې د مرسوم څلورضلعي ځانګړتياوې(خواص)



په مخامخ شکل کې دايره د څلور ضلعي له راسونو سره څه اړيکه لري.

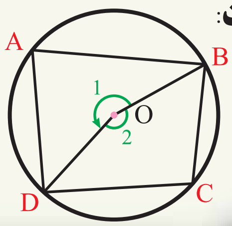
فعاليت

- د $ABCD$ يو کيفي څلور ضلعي مرسوم په دايره رسم کړئ.
- د محيطي دايرې منځ ته راغلې زاويې څه نومېږي؟
- د دايرې مرکز د څلور ضلعي د دوو مخامخ راسونو سره ونښلوئ، د منځ ته راغلې مرکزي زاويې مجموعه څو درجې دی؟
- د مرکزي او محيطي زاويو اړيکې چې د عين قوس مخامخ پرتې وي د پورته مرکزي زاويو لپاره وليکئ.

د دې فعاليت د پايلې څخه لاندې قضيه بيانولای شی:

قضيه: په يوه دايره کې د مرسوم څلور ضلعي د مخامخ زاويو مجموعه 180° ده.

ثبوت:



$$\hat{O}_1+\hat{O}_2=360^\circ$$

$$D\hat{C}B=\frac{1}{2}\hat{O}_1$$

$$D\hat{A}B=\frac{1}{2}\hat{O}_2$$

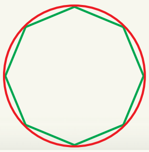
$$D\hat{C}B+D\hat{A}B=\frac{1}{2}(\hat{O}_1+\hat{O}_2)=\frac{360^\circ}{2}=180^\circ$$

فعاليت

- منظم درې ضلعي د څه په نامه يادېږي، د هرې زاويې پراخوالي څو درجې ده؟
- منظم څلور ضلعي څرنګه ونوموو؟
- د هغې د هرې زاويې پراخوالی څو درجې دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف



هغه مضلع چې اضلاع او زاويې يې يو له بل سره مساوي وي منظمه مضلع بلل کېږي.

فعاليت

- په خپله خوښه يوه پنځه ضلعي رسم کړئ.
- يو راس يې د هغې له ناګاونډه راس سره ونښلوئ، څو مثلثونه منځ ته راځي؟
- د دې مثلثونو دننيو زاويو مجموعه څو درجې ده؟
- د پنځه ضلعي دننی زاويو مجموعې په هکله څه فکر کوئ؟
- دغه فعاليت د يو شپږ ضلعي په هکله تکرار کړئ.
- که چيرې n ضلعي مضلع ولرو د هغې دننی زاويو مجموعه به يې څو درجې وي؟

که چيرې د يوې مضلع د ضلعو شمېر په n او د هغې دننيو زاويو مجموعه په S_n وښيو نو د هر n ضلعي دننيو زاويو مجموعه $S_n = (n-2)180^\circ$ درجې ده.

مثال: د يو څلور ضلعي او لس ضلعي دننيو زاويو مجموعه پيدا کړئ.

حل: د هر مضلع دننيو زاويو مجموعه د $S_n = (n-2)180^\circ$ اړيکی له مخې ټاکل کېږي.

$$S_n = (n-2)(180^\circ)$$
$$S_4 = (4-2)(180^\circ) \Rightarrow S_4 = 360^\circ$$
$$S_{10} = (10-2)(180^\circ) \Rightarrow 8\times180 \Rightarrow S_{10} = 1440^\circ$$

په ياد ولرئ چې:

- د قطرونو تعداد د n ضلعي له يو راس څخه د n-3 اړيکی په مرسته لاس ته راځي.
- له يو راس څخه د مضلع په منځ کې د مثلثونو شمېر د n-2 اړيکې په مرسته لاسته راځي.
- په يوه دايره کې د مرسوم څلور ضلعي د مخامخ زاويو مجموعه 180° دي.
- هغه مضلع چې د ضلعو اوږدوالی يې سره مساوي وي منظم مضلع بلل کېږي.

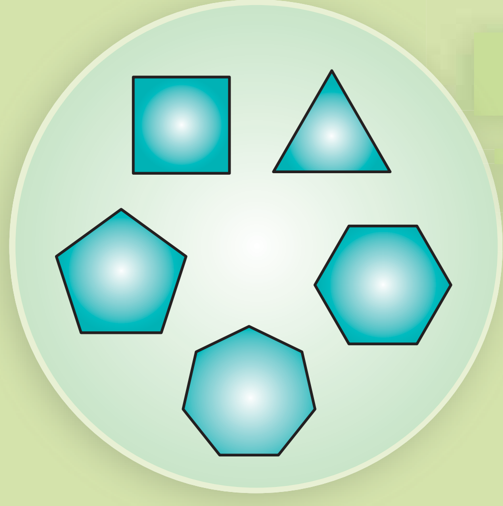
پوښتنې

1- د يوې منظمې شپږ ضلعي مضلع د زاويو پراخوالی څو درجې دي؟
2- د يوې منظمې n ضلعي مضلع د زاويو اندازه څو درجې دي؟
3- په يوه لس ضلعي مضلع کې د قطرونو په مرسته د يوه راس څخه څو مثلثونه منځ ته راځي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

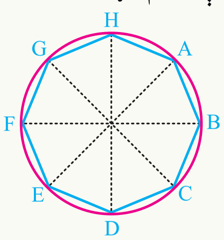
د منظمې مضلع ترسيم



- پاملرنه وکړئ.
- پــه شــکل کې څــه ډول مضلــع ګانې ګورئ.
- ستاســې په نظر دغه مضلع ګانې په څه ډول رسم شوې دي؟

فعاليت

- د $C(O,r)$ دايره رسم کړئ د هغې په مرکز کې (8) مساوي مرکزي زاويې رسم کړئ.
- که چيرې n د مضلع د اضلاعو شمېر او θ د مخامخ ضلعې مرکزي زاويه وي ايا د $\hat{\theta} = \frac{360^\circ}{n}$ اړيکه سمه ده؟
- يو 8 ضلعي مضلع د $C(O,r)$ په دايره کې رسم کړئ.
- د دايرې محيط سره د مرکزي زاويو د ضلعو د پرېکړې ټکي ونښلوئ.
- ايا د منځ ته راغلې مضلع ضلعې سره مساوي دي؟ ولې؟
- منځ ته راغلې مضلع څه ډول ده؟ د مضلع د هرې ضلعې د مخامخ مرکزي زاويې پراخوالى څو درجې ده؟



د يو منظم n ضلعي مضلع د هر ضلع مخامخ د مرکزي زاويې پراخلوالى مساوي په $\hat{\theta} = \frac{360^\circ}{n}$ دى.

فعاليت

- د $C(O,r)$ په دايره کې يوه منظمه شپږ ضلعي رابنده ده.
- د دايرې مرکز د مضلع له شپږو راسونو سره نښلوو. څو مثلثونه منځ ته راځي؟
- د شپږ ضلعي د مخامخ ضلعو د مرکزي زاويو پراخوالى څو درجې دي؟
- منځ ته راغلي مثلثونه څه ډول مثلثونه دي؟

د پورتنۍ فعاليت پايله کولی شو په لاندې توګه څرګنده کړو.

د يوې شپږ ضلعي د هرې ضلعې اوږدوالى د هغې د محيطي دايرې له شعاع سره مساوي دي.

مثال: هغه دايره چې شعاع يې $2cm$ دى، څرنګه کولى شو چې هغه په يوه منظم شپږ ضلعي مضلع محاط کړو؟

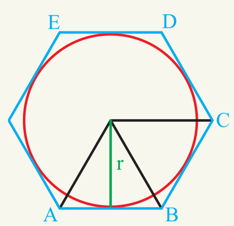
حل: پوهېږو چې د هرې منظمې شپږ ضلعي مضلع هره ضلع د هغې د محيطي دايرې له شعاع سره مساوي ده نو د پرکار خوله د $2cm$ په اندازه خلاصوو او په پرله پسې توګه د دايرې له محيط څخه مساوي قوسونه جلاکوو د ټاکل شويو ټکو د نښلولو څخه منظم شپږ ضلعي منځ ته راځي؟

د محاطي دايرې د شعاع له مخې د منظمې مضلع مساحت

فعاليت

- د $C(O,r)$ محاطي دايره او د $ABCDEF$ منظمه مضلع رسم کړئ.
- د O ټکى د B, A او C راسونو سره ونښلوئ. د $\overset{\Delta}{OAB}$ او $\overset{\Delta}{OBC}$ مثلثونه چې منځ ته راغلي دي انطباق منونکي دي؟ ولې؟
- د $\overset{\Delta}{AOB}$ په مثلث کې د $\overline{AB}$ د ضلعې جګوالى(ارتفاع) د محاطي دايرې له شعاع سره مساوي دي. ولې؟
- د پورتني مثلثونو مساحت له کومې رابطې څخه په لاس راځي؟
- ايا د منظمې n ضلعي مضلع مساحت د n انطباق منونکو مثلثونو څخه جوړ دى؟
- د منظمې مضلع محيط د $P = AB \cdot n$ اړيکې يا رابطې څخه لاسته ته راځي. ولې؟

که چېرې د منظمې مضلع مساحت په A، محيط يې په P او د يوې منظمې n ضلعي مضلع د محاطي دايرې شعاع په r سره وښيو نو د مضلع مساحت عبارت دى له: $A = \frac{1}{2}P \cdot r$ چې په لاندې ډول ثبوتېږي:



$$A = \frac{1}{2}AB \cdot r \cdot n$$

$P = AB \cdot n$ د مضلع محيط $\Rightarrow A = \frac{1}{2}P \cdot r$

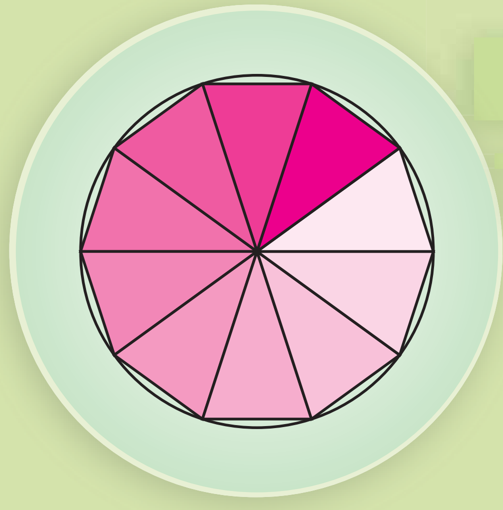
پوښتني

1- په يوه دايره کې چې شعاع يې $3cm$ وي يو متساوي الاضلاع مثلث داسې رسم کړئ، چې محاط په دايرې وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دایرې محیط او مساحت



په راکړل شوي شکل کې د مثلثونو مجموعي مساحت د دایرې او د مثلثونو د یو شمېر ضلعو د مجموع اوږدوالی د دایرې محیط سره پرتله کړئ.

د $C(O,r)$ په دایره کې چې قطر په (d) او محیط یې د (C) په توروو ښودل شي د دایرې د دې دوو غړو تر منځ لاندې اړیکه وجود لري؟

$$\frac{\text{د دایرې محیط}}{\text{د دایرې قاعده}} = \frac{c}{d} = \text{constant}$$

$$\frac{c}{d} = \pi \Rightarrow c = \pi d \text{ .... (I)} \quad [\pi \approx 3.14159\cdots]$$

پوهېږو چې $r = \frac{d}{2}$ یا $d = 2r$ که چیرې په (I) اړیکه کې د (d) پر ځای د (2r) قیمت ولیکو، د دایرې محیط د لاندې اړیکې څخه لاسته راځي:

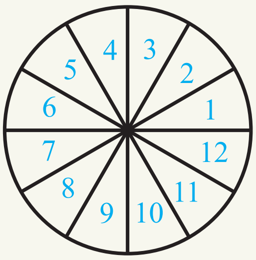
$$C = \pi d$$

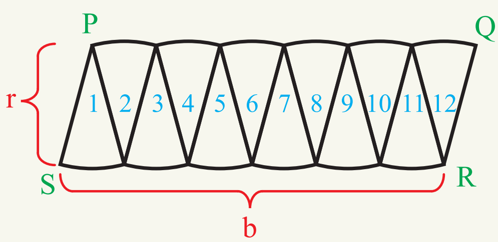
$$C = 2\pi r$$

د دایرې د مساحت د ثبوت او محاسبې لپاره پرمختللې ریاضي ته اړ یو، نو په دې ډول د دایرې د مساحت محاسبې لپاره په لاندې توګه عمل کوو:

یوه دایره د هغې د قطرونو په مرسته په (12) مساوي برخو ویشو او هره برخه یې د 1 څخه تر 12 پورې شمېرو سره ونښیو که چیرې د دایرې دغه مثلثي ټوټې غوڅ او بیا هغوی څنګ په څنګ د لاندې شکل په څېر ترتیب کړو.

په روښانه ډول لیدل کېږي، چې متوازي الاضلاع ته ورته شکل منځ ته راځي.





پوهېږو چې د b قاعده د دايرې د محيط نيمايي ده. ولې؟ نو:

د متوازي الاضلاع مساحت = قاعده × جګوالی

د متوازي الاضلاع مساحت $= \frac{1}{2}Cr$

له بلې خوا پوهېږو چې($C = 2\pi r$ = د دايرې محيط)دی، نو ګروچې:

د متوازي الاضلاع مساحت $= A = \frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r = \pi r^2$

پوهېږو چې د متوازي الاضلاع مساحت او دايرې سره ډېر نږدې دي، نو ليکلای شو: $A = \pi r^2$

په پايله کې ويلی شو چې د دايرې مساحت د $A = \pi r^2$ اړيکی او محيط يې د $C = 2\pi r$ اړيکی په مرسته په لاس راځي.

لومړی مثال: د يوې دايرې وړانګه(شعاع) $14cm$ ده د دايرې مساحت پيدا کړئ.

حل: د دايرې د مساحت د اړيکې ځخه په ګټو اخستو سره يعنې $A = \pi r^2$ لرو چې:

$A = \pi r^2$

$A = (3.14159)$

$A = (3.14159)\cdot 196cm^2 \Rightarrow A = 615.75\ cm^2$

دويمه مثال: که چيرې د دايرې قطر $70cm$ وي د دايرې شعاع او مساحت پيدا کړئ.

حل:ځرنګه چې د دايرې محيط راکړل شوي دی، نو اول شعاع، وروسته مساحت پيدا کوو.

$r = \frac{d}{2} \Rightarrow r = \frac{70}{2} = 35$

$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3.14159(35)^2 \Rightarrow A = 3848.4\,cm^2$

دريمه مثال: که چيرې د دايرې محيط $14\pi cm$ وي د دايرې شعاع او مساحت پيدا کړئ.

حل: ځرنګه چې د دايرې محيط راکړل شوي دی، نو د مساحت پيدا کولو لپاره اول شعاع پيدا کوو.

$C = 14\pi cm$

$2\pi r = 14\pi \Rightarrow 2r = 14 \Rightarrow r = \frac{14}{2} = 7$

$A = \pi r^2 \Rightarrow (3.14159)\cdot 7\cdot 7 \Rightarrow A = 153.93\ cm^2$

- د يوې دايرې مساحت د r په شعاع د $A = \pi r^2$ له اړيکې ځخه لاس ته راوړو.
- د يوې دايرې محيط د r په شعاع د $C = 2\pi r$ له اړيکې ځخه لاس ته راوړو.

پوښتنې

1- که چيرې دايرې محيط $41cm$ وي د دايرې شعاع يې لاس ته راوړئ.

2- د يوې دايرې محيط، چې شعاع يې د اوږدوالی يو واحد وي لاس ته راوړئ.

3- د يوې دايرې مساحت، چې شعاع يې د اوږدوالی يو واحد وي لاس ته راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوهم څپرکی لنډیز

- هغه اړیکې چې د یو هندسي شکل د کرښو د اجزاوو تر منځ موجودې وي، د اوږدوالی د اړیکو په نامه یادېږي.
- که چیرې د یوې دایرې له بهرنیو ټکو څخه پر دایره دوه قاطع کرښې رسم شي، د یوې قاطع د قطعاتو د ضرب حاصل، د بل قاطع د قطعاتو د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

یعني: $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\ \overline{PD}$

- که چیرې د یوه ټکي څخه دوه قاطع کرښې پر یوه دایره داسې رسم شي، چې دویم قاطع د دایرې له مرکز څخه تیر شي، نو د قاطع او د هغه د بهرنی قطعی د ضرب حاصل له یوې ټاکلي اندازې یعنې: $d^2 - r^2$ سره مساوي دي.
- د یوه باندنی ټکي څخه پر یوې دایرې دوه مساوي مماسونه رسمیدلای شي.
- که چیرې $d^2 - r^2 > 0$ یا $d^2 > r^2$ وي ټکی د دایرې په بهر کې پراته دی.
- که چیرې $d^2 = r^2 = 0$ یا $d^2 = r^2$ یا $d = r$ وي، ټکی د دایرې پر محیط پروت وي.
- که چیرې $d^2 - r^2 < 0$ یا $d^2 < r^2$ وي ټکی د دایرې په دننه کې پروت دی.

هغه زاویې چې دقاطع کرښو په مرسته د دایرې په دننه کې منځ ته راځي د دایرې دننی زاویې بلل کېږي.

- د یوې دایرې د هرې دننی زاویې پراخوالی د هغې د مخامخ قوسونو د مجموعې له نیمایي سره مساوي دي. $\hat{\alpha} = \frac{\overset{\frown}{a} + \overset{\frown}{b}}{2}$

- هغه زاویه چې د دوو قاطع کرښو، دوو مماسونو، یا یو قاطع او یو مماس د پریکړې څخه د دایرې په بهر کې منځ ته راغلي وي د دایرې باندنی زاویه بلل کېږي.
- د یوې دایرې د هرې باندنی زاویې پراخوالی د هغې د مخامخ قوسونو، تفاضل له نیمایي سره مساوي دی، یعنې: $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{a} - \overset{\frown}{b}}{2}$

- هغه شکل چې د څو ټوټه کرښو په مرسته احاطه شوی وي مضلع بلل کېږي.

په دې شرط چې:

- دوه ضلعې يې يوازې په خپلو انجامونو کې سره پرېکړېږي.
- دوه ګاونډی ضلعې د يوې مستقيمې کرښې په اوږدوالی پرتې نه وي.
- هغه مضلع چې ضلعې او زاويې يې سره مساوي وي، منظم مضلع بلل کېږي.

هغه دايره چې د مضلع د راُسونو څخه تيره شي، د مضلع محيطي دايره بلل کېږي.

هغه دايره چې د مضلع پر ضلعو مماس وي، د مضلع محاطي دايره بلل کېږي.

هغه دايره چې د مثلث پر يوه ضلعه او د دوو نورو ضلعو په امتداد مماس وي، د مثلث بهرنی محاطي دايره بلل کېږي.

- د دوو متقاطع دايرو د مرکزونو ترمنځ کرښه په ګډ وتر عمود ده.
- که چيرې يوه څلور ضلعې مرسوم په دايره وي، د هغې د مخامخ زاويو مجموعه 180° دي.
- د دايرې محيط د مخامخ اړيکی په مرسته لاس ته راځي: $C = 2\pi r$
- د دايرې مساحت د مخامخ اړيکی په مرسته لاسته راځي: $A = \pi r^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دویم څپرکي پوښتنې

- په لاندې سوالونو کې د هر سوال لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي د سم ځواب څخه دایره تاو کړئ.

1- که چیرې د P ټکی د دایرې پر محیط پروت وي د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته عبارت دی له:

a) 1 b) 2
c) 0 d) درې واړه ځوابونه سم دي.

2- که چیرې د P یو ټکی د دایرې په دننه کې پروت وي، د دې نقطې طاقت نظر یوې دایرې ته عبارت دی له:

a) د P دټکي طاقت مثبت دی. b) د P ټکي طاقت منفي دی.
c) د P ټکي طاقت صفر دی. d) درې واړه ځوابونه سم نه دي.

3- که دP ټکی د دایرې څخه د باندې پروت وي، دP ټکي طاقت نظریوې دایرې ته عبارت دی له:

a) $d - r$ b) $d^2 - R^2$
c) $r - d$ d) $R^2 - d^2$

4- که چیرې د یوې دایرې شعاع R او د دایرې دننی ټکی او مرکز واټن په d سره وښیو، د نوموړی ټکي طاقت نظر دایرې ته عبارت دی له:

a) $R^2 = d^2$ b) $d^2 = R^2$
c) دواړه ځوابونه سم دي. d) دواړه ځوابونه نا سم دي.

5- یو ټکی د $13cm$ په اندازه د $C(O,r)$ دایرې له مرکز څخه واټن لري که د دایرې قطر $10cm$ وي د قاطع د بهرنی برخې اوږدوالی د نوموړی ټکي څخه عبارت دی له:

a) 13 cm b) 10 cm
c) 12 cm d) 8 cm

6- که چیرې د P له ټکي څخه د یو مماس اوږدوالی د $C(O,r)$ دایرې سره $12cm$ او قطر یې $10cm$ وي د P او O د ټکو تر منځ واټن عبارت دی له:

a) 13 cm b) 12 cm
c) 10 cm d) 5 cm

7- که چیرې د $C(O,r)$ د دایرې د $\overline{AB}$ وتر د P ټکي پورې امتداد ورکړو داسې چې: $\overline{AP} = 8cm$ او $\overline{BP} = 2cm$ د $\overline{PT}$ د مماس اوږدوالی عبارت دی له:

a) 4 cm b) 8 cm
c) 2 cm d) درې واړه ځوابونه نا سم دي.

● په لاندې پوښتنو کې تش ځایونه په ور کلمو ډک کړئ.

1- $d^2 - r^2$ د یوه ټکی .... نظر یوې دایرې ته دی.

2- که چیرې $\overline{PT}$ د $C(O,r)$ پر دایره مماس وي، د P د ټکی طاقت نظر $C(O,r)$ دایرې ته عبارت دی له .... $\overline{PT}^2$ دی.

3- که چیرې د P ټکی د دایرې پر محیط پروت وي، نو د ټکي طاقت نظر دایرې ته .... دی.

4- که ټکی د دایرې په دننه کې وي، نو د ټکي طاقت نظر دایرې ته .... دی.

5- که ټکی د دایرې څخه د باندې وي، نو د ټکي طاقت نظر دایرې ته .... دی.

6- که $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$ وي، د A, B, C او D د .... پر محیط پرتې وي او د P ټکی د .... په دننه او یا بهر پروت دي.

7- که د A, B او T ټکي د دایرې پر محیط پراته وي، A, B او P د یوې کرښې په امتداد دی او د P ټکی د دایرې بهر کې دی په دې توګه ....= $\overline{PT}^2$ دی.

● د سمو جملو په مخامخ کې د(س) او د ناسمو جملو مخامخ کې د(ن) توری ولیکئ.

1- (   ) د یوه ټکی طاقت نظر دایرې ته د ټکی او د دایرې مرکز واټن له مربع سره مساوي دی.

2- (   ) که ټکی د دایرې پر محیط پروت وي د ټکي طاقت نظر دایرې ته صفر دی.

3- (   ) که ټکی د دایرې په دننه کې وي د ټکي طاقت نظر دایرې ته منفي دی.

4- (   ) که ټکی د د دایرې په بهر کې وي دټکي طاقت نظر دایرې ته مثبت دی.

5- (   ) د یوه ټکي طاقت نظر هرې دایرې ته مثبت دی.

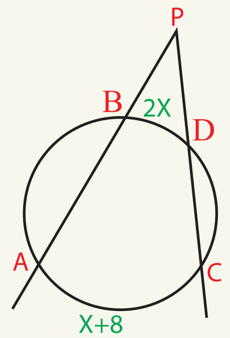
6- (   ) د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته $d^2 - r^2$ دي که د d د ټکي واټن دایرې ته او r د دایرې وړانګه وي.

7- (   ) که دوه دایرې مماس وي د هغوی طاقت نظر ګډ مماس ته په هر ټکي کې مساوي وي.

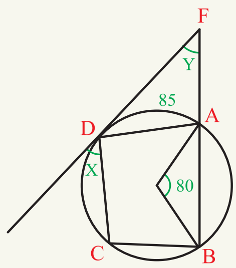
(c) ketabton.com: The Digital Library

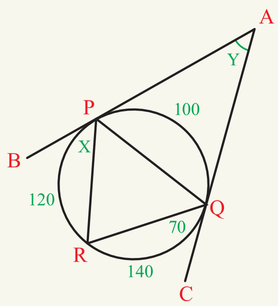
● لاندې پوښتنې په تفصیل سره حل کړئ.

1- په لاندې شکل کې $\hat{P} = (x+1)$ او مخامخ قوسونه يې په ترتيب سره $(2x)^0$ او $(x+8)^0$ وي د $A\hat{P}C$ د زاويې پراخوالی پيدا کړئ.

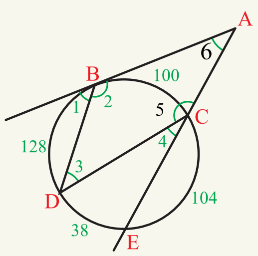


2- د $\hat{x}$ او $\hat{y}$ د زاويو پراخوالی په لاندې شکلونو کې پيدا کړئ.



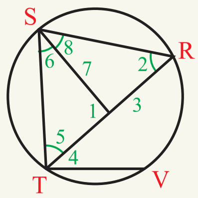


3- په لاندې شکل کې $\overline{AB}$ پر دايره مماس دی که $\overset{\frown}{DB} = 128^o$ او $\overset{\frown}{CE} = 104^o$ وي د $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}$ او $\hat{6}$ زاويو پراخوالی پيدا کړئ.

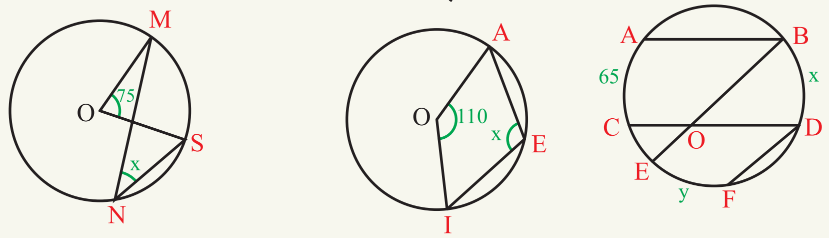


(c) ketabton.com: The Digital Library

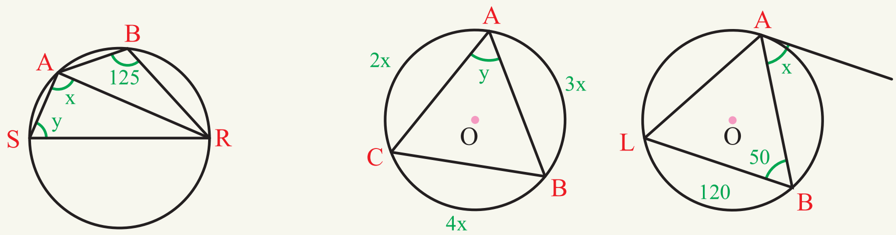
4- د $C(O,r)$ پـه دایـره کـې $\hat{RTS} = 70^\circ$, RS // TV او RT د دایـرې قطـر دی د $\hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}, \hat{7}$ او $\hat{8}$ زاویو اندازه پیدا کړئ.



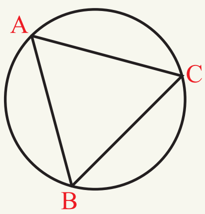
5- د $\hat{x}, \hat{y}$ زاویو اندازه په لاندې شکلونو کې وټاکئ.



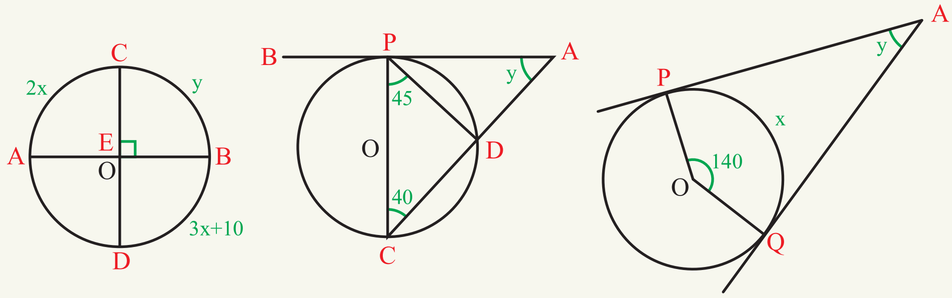
6- د $\hat{x}$ او $\hat{y}$ زاویو اندازه په لاندې شکلونو کې پیدا کړئ.



7- د محاطي دایرې د تعریف له مخې وښیئ چې د هر مثلث دننیو زاویو مجموعه 180° وي.



8- په لاندې شکلونو کې د $\hat{x}$ او $\hat{y}$ زاویو اندازه پیدا کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم څپرکی

تحليلي هندسه

تحلیلي هندسه

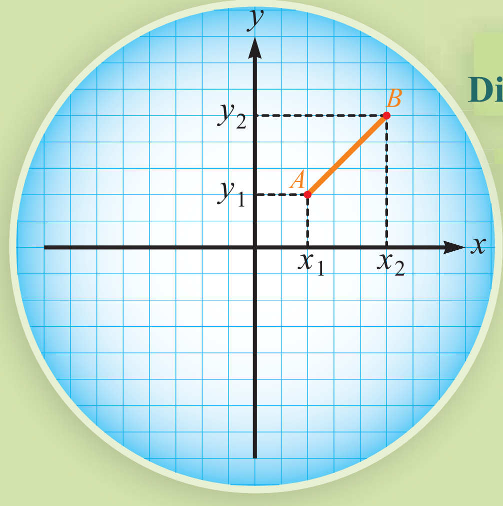
Analytic Geometry

د الجبر ا و هندسې تر منځ اړیکې له تحلیلي هندسې څخه عبارت دی. چې د الجبري معادلو او هندسې شکلونو په مرسته تر بحث لاندې نیول کېږي، فرانسوي ریاضي پوه دیکارت د لومړی ځل لپاره د ټاکلو هندسي اشکالو او الجبري معادلو ترمنځ اړیکه و څېړله ویې ویل، چې ځینې الجبري معادلې یو ټاکلی هندسي شکل لري. څرنګه چې د هندسې د علم بنسټ ټکی او دالجبري معادلو بنسټ عدد جوړوي نو لدې کبله لومړی د ټکي او عدد ترمنځ اړیکي تر څېړنې لاندې نیسو، دیکارت د عدد او ټکي ترمنځ د اړیکو د څېړنې لپاره د قایم مختصاتو د محورونو داسې یو سیستم راوپیژند چې تراوسه د دکارت په نامه یادیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوو ټکو ترمنځ واټن یا فاصله
Distance between two Point

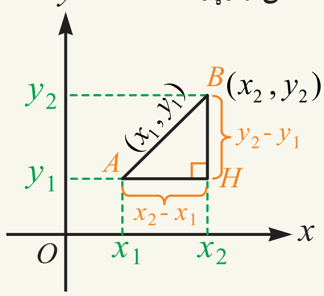


د $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ دوه ټکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې د AB یوه ټوټه کرښه ټاکي ستاسې په اند څرنګه کولای شوچې د A او B ټکو ترمنځ واټن(فاصله) حساب کړو.

فعالیت

- د A(3,5) او B(5,4) ټکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وښيئ.
- د AB کرښه رسم کړئ.
- د A او B ټکو ترمنځ واټن(فاصله) حساب کړئ.

د پورتني فعالیت څخه کولای شو په عمومي ډول د $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ دوو ټکو ترمنځ واټن(فاصله) په لاندې ډول په لاس راورو.
په لاندې شکل کې $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث یوقایم الزاویه مثلث دی. ولې؟
د فیثاغورث د قضیې په مرسته کولای شو د A او B ټکو ترمنځ واټن په لاندې ډول په لاس راورو.



$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 \quad \text{......د فیثاغورث د قضیې}$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{AH} &= x_2 - x_1\\ \overline{BH} &= y_2 - y_1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \overline{AB}^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$$

لومړی مثال: د $A(1,7)$ او $B(5,4)$ ټکو ترمنځ واټن(فاصله) پیدا کړئ.

حل: د دوو ټکو له فاصلې د فورمول څخه په ګټه اخستنې لیکلای شوچې:

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\overline{AB}=\sqrt{(5-1)^2+(4-7)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}$$

$$\overline{AB}=5\ unit$$

دویم مثال: د $A(3,4)$ ټکي واټن(فاصله) له مبدآ څخه حساب کړئ.

حل:پوهیږوچې د مبدا مختصات $O(0,0)$ دی نو دووټکوترمنځ د واټن د فورمل $\overline{0A}=\sqrt{x^2+y^2}$ څخه په لاس راځي:

$$\overline{OA}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}\Rightarrow\overline{OA}=5$$

د $A(x_2 y_2)$ او $B(x_2,y_2)$ واټن عبارت له: $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

د $P(x,y)$ یو اختیاري ټکی واټن د قایمو کمیاتو له مبدآ څخه عبارت دی له:

$$\overline{OA}=\sqrt{x^2+y^2}$$

پوښتنې

1- د $A(0,3)$ او $B(2,0)$ ټکو ترمنځ واټن پیداکړئ.

2- کـه $A(4,6)$ ، $B(-2,4)$ او $C(-8,2)$ د یوه مثلث دراسـونو مختصـات وي د مثلث ډول وټاکئ.

3- د K عددی قیمت داسـې وټاکئ چې د $A(2,3)$ او $B\ (5K,6)$ ټوټه کرښـې اوږدوالی پنځه برابره شي.

4- د $P(1,\sqrt{3})$ او $Q(-1,1+\sqrt{3})$ ترمنځ واټن پیداکړئ.

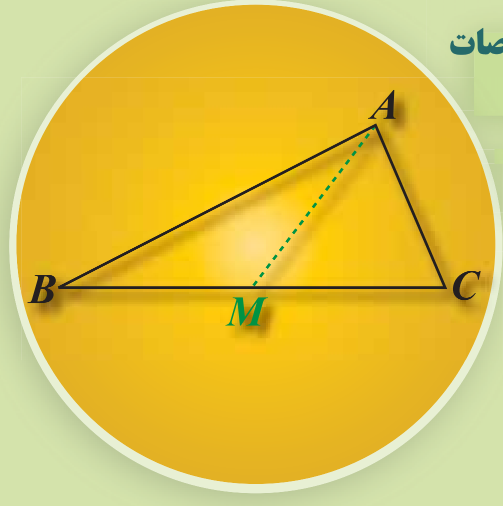
5- کـه $A(-1,4), B(-3,-7)$ او $C(1,9)$ د یـوه مثلث د راسـونومختصات وي د مثلث محیط حساب کړئ.

6- د هغه مثلث مسـاحت پیداکړئ، چې راسـونه یې د $A(2,0)$ ، $B(6,2)$ او $C(1,2)$ په ټکوپراته وي.

7- کـه $A(10,5)$ ، $B(3,2)$ او $C(6,-5)$ د یـوه مثلـث د څوکو(راسـونه) مختصات وي د مثلث ډول وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه قطعه خط دمنځنۍ ټکي مختصات



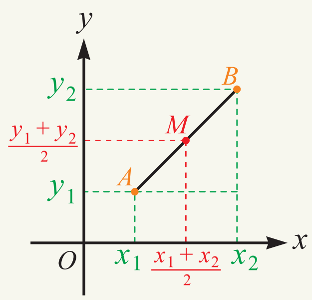
د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې د $\overline{AM}$ قطعه خط د مثلث میانه ده، د میانې څانګړتیا بیان کړئ.

فعالیت

- د $D(2,0)$ او $E(6,0)$ ټکي دوضیعه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- که چیرې د C ټکی د $\overline{DE}$ ټوټه کرښې منځنی ټکی وي، د هغې مختصات ولیکئ.
- د C ټکي مختصات د D او E ټکو له مختصاتوسره څه اړیکه لري؟
- د $P(0,1)$ او $Q(0,4)$ ټکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- که چیرې د R ټکی د $\overline{PQ}$ ټوټه کرښې منځنی ټکی وي د هغې مختصات په لاس راوړئ.
- د R ټکي مختصات د P او Q ټکو د مختصاتوسره څه اړیکه لري؟

د پورتنی فعالیت پایله کولای شو چه په بشپړول داسې بیان کړو: که $A(x_1,0)$ او $B(x_2,0)$ دوه ټکو د x په محورو پراته وي نو د M ټکي مختصات چې د $\overline{AB}$ ټوټه کرښې منځنی ټکی دی داسې په لاس راځي : $M(\frac{x_1+x_2}{2},0)$

که $P(0,y)$ او $Q(0,y_2)$ دوه ټکي د y په محور پراته وي د M ټکي مختصات چې د $\overline{PQ}$ ټوټه کرښه منځنۍ ټکی دی داسې په لاس راوړو: $M(0,\frac{y_1+y_2}{2})$



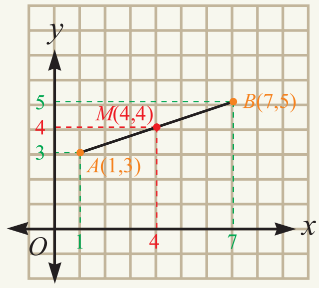
په بشپړ ډول $A(x_1,y_1)$، $B(x_2,y_2)$ د وضعیه کمیاتو په سیستم کې دوه ټکي او M د $\overline{AB}$ کرښې منځنی ټکی وي نو د M ټکي مختصات داسې په لاس راځي: $M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: که چیرې $A(1,3)$ او $B(7,5)$ د $\overline{AB}$ ټوټه کرښې د پیل اوپای مختصات وي د ټوټه کرښې د منځنۍ ټکي مختصات په لاس راوړئ.

حل: دیوې ټوټه کرښې د منځنۍ ټکی د مختصاتوڅخه په ګټه اخیستنه لیکلای شوچې:

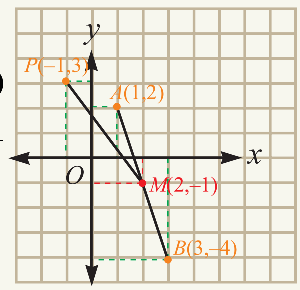
$$M(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$$
$$M(\frac{1+7}{2}, \frac{3+5}{2})$$
$$M(4,4)$$



دویم مثال: د $P(-1,3)$ ټکی واټن د هغې مستقیمې کرښې له منځنۍ ټکي څخه پیداکړئ چې د $A(1,2)$ او $B(3,-4)$ ټکو څخه تیرشي.

حل: د P ټکي واټن د AB مستقیمې کرښې له منځنۍ ټکي د پیداکولولپاره لومړی د AB منځنۍ ټکي مختصات په لاس راوړو، نولیکلای شوچې:

$$M_{\overline{AB}} = (\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$$
$$= (\frac{1+3}{2}, \frac{2-4}{2}) = (2,-1) \Rightarrow M_{\overline{AB}} = (2,-1)$$
$$\overline{PM} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(2+1)^2+(-1-3)^2}$$
$$\overline{PM} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$$
$$\overline{PM} = 5 \text{ unit}$$



پوښتنې

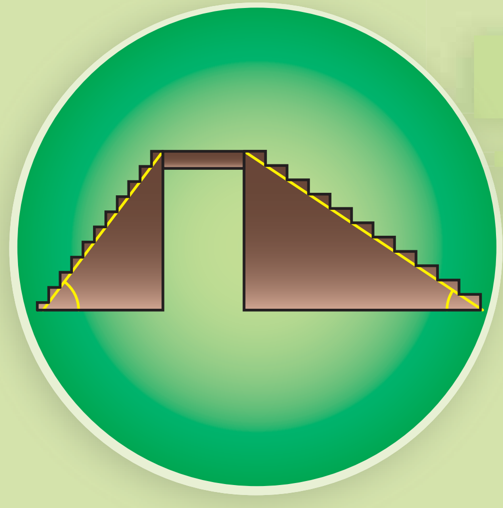
۱- د یوه مثلث دری راسونه $B(3,-1), A(5,-2)$ او $C(1,5)$ راکړل شوي دي د $\overline{AM}$ د میانې اوږدوالی پیداکړئ.

۲- که چیرې $A(2,4)$، $C(14,9), B(5,9)$، او $D(11,4)$ ټکي د یوه متوازي الضلاع راسونه وي د متوازي الضلاع د قطرونو د پریکړې د ټکو مختصات پیداکړئ.

۳- که چیرې $B(-3,-7), A(-1,4)$ او $C(1,9)$ د یوه مثلث راسونه وي د هغه د میانې یا مینځنۍ کرښې اوږدوالی پیداکړئ چې د BC په ضلع رسمیږي.

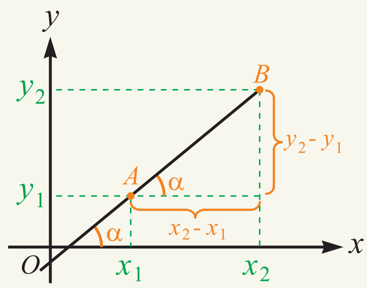
(c) ketabton.com: The Digital Library

د مستقیمې کرښې میل



شکل ته وګورئ په کومه زینه په اسانی سره ختلی شئ ولې؟ دلیل یې بیان کړئ.

که $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2 y_2)$ د $\overline{AB}$ مستقیمې کرښې دوه اختیاري ټکي وي د $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ نسبت ته د مستقیمې کرښې میل وایي او په لاندې ډول یې لیکي: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



لومړی مثال: د هغې مستقیمې کرښې میل پیداکړئ چې د $A(3,5)$ او $B(4,6)$ ټکو څخه تیرشي.

حل: پوهیږوچې د مستقیمې کرښې میل د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ رابطې څخه لاسته راځي نولرو چې:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-5}{4-3} = 1$$

دویم مثال: هغه مستقیم چې د $A(2,5)$ او $B(4,k)$ ټکو څخه تیریږی د k قیمت په هغه کې داسې وټاکئ چې د مستقیمې کرښې میل ۳ وي.

حل: د k قیمت د لاسته راوړلو لپاره ددې رابطې $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ څخه په لاندې ډول ګټه اخلو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$3 = \frac{k-5}{4-2}$$

$$k - 5 = 6 \Rightarrow k = 11$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د هغه مستقیمې کرښې میل پیداکړئ چې د $P(2,3)$ ټکي او د وضیعه کمیاتو له مبدأ ځخه تیرشي.

حل: ځرنګه چې مستقیه کرښه د وضیعه کمیاتو له مبدا ځخه تیریږي نود مبدا مختصات $O(0,0)$ دی، نومیل یې په لاندې ډول په لاس راورو:

$$m_{\overline{PO}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3}{2}$$

$$m_{\overline{PO}} = 1.5$$

فعالیت

- د $A(2,3)$ او $B(4,6)$ ټکی د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وښیئ.
- هغه مستقیم چې د A او B ټکوځخه تیریږي رسم کړئ او په Δ_1 سره یې وښیئ.
- د Δ_1 مستقیم میل په لاس راوړئ.
- د Δ_1 مستقیم د x محور له مثبت جهت سره څه ډول زاویه جوړوي.
- د $M(1,5)$ او $N(4,2)$ ټکي په همغه وضیعه کمیاتوکې په بل رنګ وټاکئ.
- هغه مستقیم چې د M او N ټکوځخه تیریږي هغه ته Δ_2 ووایئ.
- د Δ_2 مستقیم میل په لاس راوړئ.
- د Δ_2 مستقیم د x محور د مثبت جهت سره څه ډول زاویه جوړوي؟
- د تشکیل شویو زاویو اوکرښوترمنځ څه ډول اړیکه شته.

د پورتنی فعالیت ځخه لاندې پایلې په لاس راځي.

د هرې مستقیمې کرښې میل په هغه زاویه پورې اړه لري، چې مستقیمه کرښه يې د x له محور سره جوړوي.

که یوه مستقیمه کرښه د x محور له مثبت جهت سره حاده زاویه جوړه کړي، میل يې یومثبت عدد دی.

که یوه مستقیمه کرښه د x محور له مثبت جهت سره منفرجه زاویه جوړه کړي میل يې یو منفي عدد دی.

پوښتنې

۱- د هغه مستقیمې کرښې میل په لاس راوړئ چې د $A(1,1)$ او $B(-1,-1)$ ټکوځخه تیرشي.

۲- هغه مستقیم چې د $A(-2,2\sqrt{3})$ او $B(1,a)$ ټکوځخه تیریږي، د a عددي قیمت داسې و ټاکئ چې د مستقیم میل $\sqrt{3}$ وي.

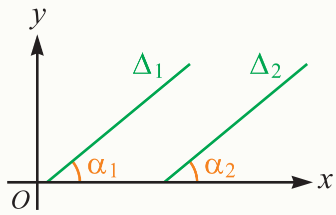
۳- که چیرې $B(3,-1), A(5,-2)$ او $C(1,5)$ ټکي د یوه مثلث راسونه وي د $\overline{BC}$ ضلعې د میانې میل پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د موازي کرښو میل

په ورکړل شوي شکل کې زینه په پام کې ونیسئ د هغې د بازوګانو تر منځ څه ډول اړیکه شتون لري.

فعالیت



- د راکړل شوېو وضیعه کمیاتو په سیستم کې د Δ_1 او Δ_2 موازي کرښې یو له بل سره داسې رسم کړئ چې د x محور له مثبت جهت سره حاده زاویې جوړې کړي.
- د Δ_1 او Δ_2 کرښو میلونه حساب او یو بل سره یې پرتله کړئ، کرښې یوبل سره څه اړیکې لري؟
- که چیرې د Δ_1 مستقیم د x محور له مثبت جهت سره د α_1 زاویه د Δ_2 مستقیم د x محور له مثبت جهت سره د α_2 زاویه جوړه کړې نو α_1 او α_2 یو له بل سره څه اړیکه لري.

په عمومي ډول د پورتنی فعالیت پایله په لاندې ډول بیانوو:
موازي کرښې د مساوي میلونو لرونکې دي.
که چیرې دوه مستقیمه کرښې مساوي میلونه ولري په پایله کې هغه زاویې چې د x محور له مثبت جهت سره یې جوړوي یو له بل سره مساوي دي.

مثال: که چیرې د Δ_1 مستقیم د A(2,5) او B(−6,−11) ټکو او د Δ_2 مستقیم د C(−4,−6) او D(3,8) ټکو څخه تیرشي، د Δ_1 او Δ_2 کرښې یوه له بلې سره څه اړیکه لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left.\begin{array}{l} m_{\overline{AB}} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ m_{\Delta_1} = \dfrac{-11-(5)}{-6-2} = \dfrac{-16}{-8} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_1} = 2 \\ m_{\Delta_2} = \dfrac{8+6}{3+4} = \dfrac{14}{7} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_2} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow m_{\Delta_1} = m_{\Delta_2} \Rightarrow \Delta_1 \parallel \Delta_2$$

خرنگه چې د Δ_1 او Δ_2 میلونه سره مساوي دي نو نومړي کرښې یوه له بلې سره موازي دي.

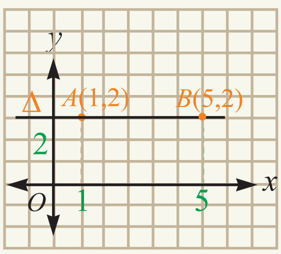
فعالیت

- د $A(1,2)$ او $B(5,2)$ ټکي د وضیعه کمیاتو په مستوي کې وټاکئ.
- هغه مستقیمه کرښه چې له A او B ټکوڅخه تیریږي رسم او په Δ یې ونوموئ.
- د Δ مستقیم د x محور له مثبت جهت سره څه ډول زاویه جوړوي.
- د Δ مستقیم میل حساب کړئ.

د پورتنی فعالیت پایله په لاندې ډول بیانوو:

که چیرې A او B دوه اختیاري ټکي او مساوي ترتیبونه ولري، لکه: $B(x_2,a), A(x_1,a)$

هغه کرښې چې د A او B ټکوڅخه تیریږي د x له محورسره موازي دی. اومیل یې له صفرسره مساوي دی. یعنې:
$$m = \frac{a-a}{x_2 - x_1} = 0$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د $M(3,2)$ او $N(3,5)$ ټکي د وضیعه کمیاتو په مستوي کې وټاکئ.
- هغه مستقیمه کرښه چې د M او N ټکوڅخه تیریږي رسم او په Δ یې ونوموئ.
- د Δ مستقیمه کرښه د x له محور سره څه ډول زاویه جوړ وي د Δ مستقیم میل په اړه څه ویلای شئ؟

د پورتني فعالیت څخه دې پایلې ته رسیږو هغه مستقیمه کرښه چې د x له محورسره قایمه زاویه جوړه کړي نشو کولای د هغې میل حساب کړو، په دې حالت کې ویل کیږي چې د Δ مستقیم خط معین یا ټاکلی میل نه لري.

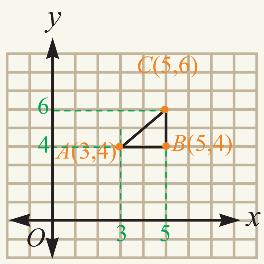
مثال: که چیرې د $A(3,4)$ ، $B(5,4)$ او $C(5,6)$ ټکي د یوه مثلث راسونه وي، د مثلث ډول وټاکئ اوهغه د وضیعه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ.

حل: څرنګه چې د AB مستقیمه کرښه د x له محور سره موازي ده، نو میل یې صفر دی.

$$m_{\overline{AB}} = \frac{4-4}{5-3} = \frac{0}{2} = 0$$

په همدې ډول د BC مستقیمه کرښه د y له محور سره موازي نومیل یې نامعین(نه دی تعریف شوی)دی.

$$m_{\overline{BC}} = \frac{6-4}{5-5} = \frac{2}{0} = \infty$$



$$\overline{AB}^2 = (5-3)^2 + (4-4)^2 = 4$$
$$\overline{BC}^2 = (5-5)^2 + (6-4)^2 = 4$$
$$\overline{AC}^2 = (5-3)^2 + (6-4)^2 = 8$$
$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$

په پایله کې

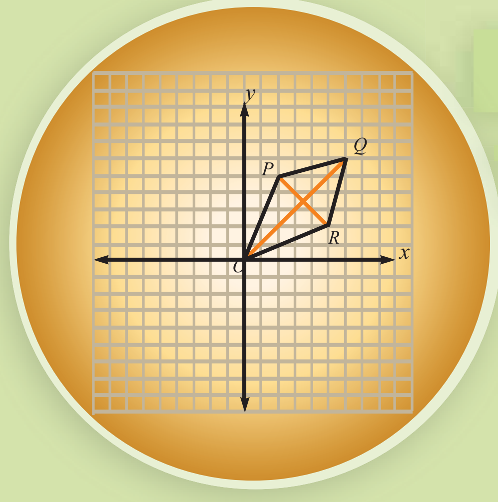
څرنګه چې د فیثاغورث قضیه پکې تطبیق کیږي نو د $\overline{AB}$ مستقیمه کرښه د $\overline{AC}$ په مستقیمې کرښې عمود ده نود $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث قایمه الزاویه دی.

هغه مستقیمه کرښه چې د x محور سره موازي او یا د y په محور عمود وي میل یې صفردی.
هغه مستقیمه کرښه چې د x په محور عمود یا د y له محور سره موازي وي میل یې نه دی تعریف شوی.(معین عدد نه دی)

پوښتنې

1- که د $A(3,0)$ ، $B(0,5)$ ، $C(-3,0)$ او $D(0,-5)$ د یوې څلورضلعي راسونه وي:
الف: د څلورضلعي مخامخ ضلعې یوه له بلې سره څه اړیکې لري.
ب: د قطرونو میلونه پیدا کړئ.
۲- $A(3,4)$, $B(-3,4)$, $C(3,-4)$ او $D(-3,-4)$ ټکی په پام کی ونیسئ.
الف: هغه مستقیمه کرښه چې د A او B ټکو څخه تیریږي له هغې کرښې سره چې د C او D ټکوڅخه تیریږي څه اړیکې لري؟
ب: هغه مستقیمه کرښه چې د A او B ټکو اوهغه کرښه چې د C او D ټکو څخه تیریږي څه اړیکه لري؟
ج: د $ABCD$ څلورضلعي څه ډول څلور ضلعي ده؟
د: د قطرونو میل یې پیدا کړئ.

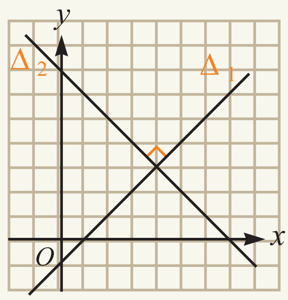
(c) ketabton.com: The Digital Library



د یو پر بل عمود مستقیمو کرښو میل

$OPQR$ خلورضلعي یولوزي دی. کولای شئ د لوزی خانګړتیا د هغې د راسونو د مختصاتو په مرسته بیان کړئ.

تعریف



د Δ_1 او Δ_2 دوه مستقیمي کرښې چې میلونه یې m_1 او m_2 دي هغه وخت یو پربل عمود دي چې لاندې رابطه د هغوی ترمنځ موجوده ده. $m_1 \cdot m_2 = -1$

لومړی مثال: هغه مستقیمه کرښه چې د $A(7,5)$ او $B(1,1)$ او هغه چې د $C(0,5)$ او $D(2,2)$ ټکو څخه تیریږي له یوبل سره څه اړیکه لري.

حل:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-5}{1-7} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$m_{\overline{CD}} = \frac{2-5}{2-0} = \frac{-3}{2}$$

$$m_{\overline{AB}} \cdot m_{\overline{CD}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{2} = -1$$

په پایله کې د $\overline{AB}$ او $\overline{CD}$ مستقیمې کرښې یو پربل عمود دي.

فعالیت

- د $C(4,4), B(1,3), 0(0,0)$ او $D(3,1)$ ټکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کی وښیئ.
- د OBCD شکل رسم کړئ.
- د $\overline{OB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ او $\overline{DO}$ ضلعو اوږدوالي پیدا کړئ.

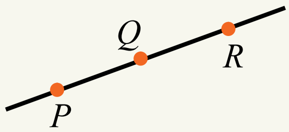
(c) ketabton.com: The Digital Library

- د $\boxed{OBCD}$ خلورضلعي څه ډول خلورضلعي ده؟
- وښيئ چې د $\overline{OC}$ او $\overline{BC}$ قطرونه یو پر بل عمود دي.

پوهیږو چې په یوه مستوي کې د دوو ټکوخخه یوازې یو مستقیم تیریږي په کوم حالت کې له دریو ټکو څخه یومستقیم خط تیریدلای شي؟

تعریف

د Q, P او R ټکي هغه وخت پر یوه مستقیم پراته دي چې د $\overline{PQ}$ میل د $\overline{QR}$ له میل سره مساوي وي.



دویم مثال: د $A(0,-1), B(2,3)$ او $C(-1,-3)$ دریې ټکي په پام کې ونیسئ، وښیئ چې دا دريې واړه ټکي په یوه مستقیمه کرښه پراته دي.

حل: د AB میل عبارت دی له:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{3+1}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$$

$$m_{\overline{AC}} = \frac{-3-(-1)}{-1-0} = \frac{-2}{-1} = 2$$

د AC میل عبارت ده له : $m_{\overline{BC}} = \frac{-3-3}{-1-2} = \frac{-6}{-3} = 2$

څرنګه چې د $\overline{AB}, \overline{AC}$ او $\overline{BC}$ کرښو میلونه سره مساوي دي نوپه پایله کې د B, A او C ټکي په یوه مستقیمه کرښه پراته دي.

- که چیرې د دوو کرښو د میلونو د ضرب حاصل (−1) وي نو کرښې یوپربل عمودي دي.
- درې ټکي هغه وخت په یوه کرښه پراته وي چې د توټه کرښو میلونه سره مساوي وي.

پوښتنې

1- که د A(6,1) ، B(8,3) او C(6,5) ټکي د یوه مثلث خوکې یا راسونه وي وښیئ چې نوموړی مثلث قایم الزاویه دی.

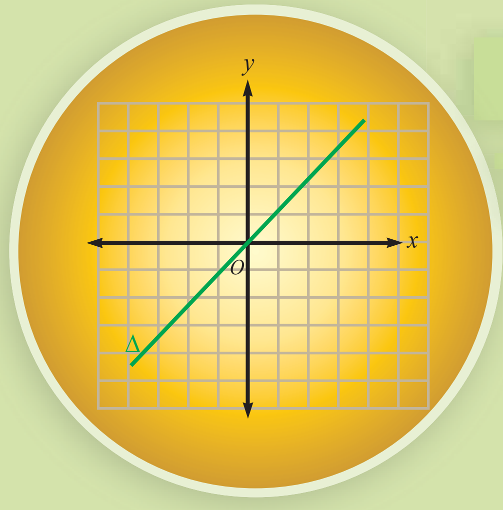
۲- هغه توټه کرښه چې د (7,5) او (1,1) ټکو څخه تیریږي له هغه توټه کرښې سره چې د (0,5) او (2,2) ټکوڅخه تیریږي ،اړیکې یې یو له بل سره وڅیرئ؟

۳- یوه کرښه چې د (2,4) او (7,5) ټکو اوبله د (1,−4) او (−3,−5) ټکوڅخه تیریږي د دواړو کرښوحالت یو له بل سره بیان کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مستقیمې کرښې معادله



په مخامخ شکل کې د مستقیمې کرښې پرمخ څو ټکي وټاکئ.
د کرښې پرمخ د ټاکل شویو ټکو د فاصلې اوترتیب ترمنځ څه اړیکه وینئ.

فعالیت

- د $A(1,-1)$، $B(-2,2)$، $C(4,-4)$ او $D(-3,3)$ ټکي د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- ددې ټکو د ترلوڅخه کوم شکل لاسته راځي.
- د $A(1,1)$ او $B(0,0)$ ټکي د شکل پرمخ پراته دي اوکه نه؟ ولې؟

د پورتنی فعالیت پایله په عمومي ډول داسې بیانوو:

د $y = x$ او $y = -x$ رابطې چې د یوې کرښې پرمخ د ټکو د فاصلې اوترتیب ترمنځ اړیکه راښیي د مستقیمې کرښې معادله بلل کیږي.

پوهیږو چې د هرو دوو ټکو څخه چې په یوه مستوي کې پرتې وي یوازې او یوازې یوه مستقیمه کرښه تیریږي. اوس غواړو چې د هغې مستقیمې کرښې معادله پیدا کړو چې له دوو اختیاري ټکو څخه تیریږي.

فعالیت

- د $A(1,3)$ او $B(3,5)$ دوه ټکي د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- هغه مستقیمه کرښه رسم کړئ، چې له A او B ټکوڅخه تیر شي.

ددې لپاره چې د $M(x,y)$ اختیاري ټکي د $\overline{AB}$ کرښې پر مخ پروت وي، کوم شرط لازمي دی؟ د $\overline{AM}$ او $\overline{AB}$ ټوټه کرښو میلونو له مساویتوب څخه کومه اړیکه لاسته راځي.

د پورتنی فعالیت پایله کولای شو په عمومي ډول داسې بیان کړو.

د هغې کرښې معادله چې د $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ له دوو ټکو څخه تېره شي داسې په لاس راځي:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

لومړی مثال: د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې د $A(3,4)$ او $B(2,-1)$ له ټکو څخه تېره شي.

حل: د هغې مستقیمې کرښې د معادلې په مرسته چې دوه ټکي یې معلوم وي لیکلای شو چې:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-4}{x-3}=\frac{-1-4}{2-3}\Rightarrow\frac{y-4}{x-3}=\frac{-5}{-1}=5$$

$$y-4=5(x-3)$$

$$y=5x-15+4=5x-11$$

دویم مثال: د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې د x محور په فاصله د $x=-3$ ټکي کې او د y محور په ترتیب د $y=4$ ټکي کې پرې کړي.

حل: څرنګه چې مستقیمه کرښه د x محور په $x=-3$ ټکي کې پرې کوي نو د مختصاتو په سیستم کې ددې ټکی د پریکړې مختصات $(-3,0)$ دی. په همدې ډول د y له محور سره د پریکړې د ټکو د مختصات د وضعیه کمیاتو په سیستم کې $(0,4)$ دی، اوس دیوه مستقیم د دوو ټکو پیژندلو په مرسته کولای شو د مستقیمې کرښې معادله داسې ولیکو:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\ \Rightarrow\ \frac{y-0}{x-(-3)}=\frac{4-0}{0-(-3)}$$

$$\frac{y}{x+3}=\frac{4}{3}\ \Rightarrow\ 3y=4(x+3)$$

$$3y-4x=12$$

پوښتنې

1- د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې د $A(2,-1)$ او $B(3,4)$ له ټکو څخه تېره شي.

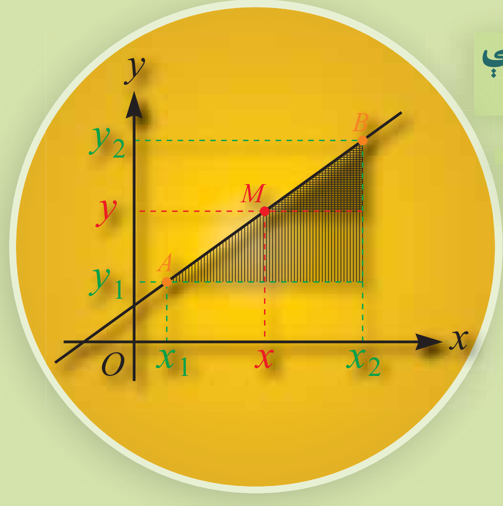
۲- د هغه مثلث د $\overline{AM}$ میانې معادله ولیکئ چې راسونه یې $A(1,3), B(-1,4)$ او $C(5,6)$ وي.

۳- د هغې مستقیمې کرښې معادله پیدا کړئ چې د x محور په $A(3,0)$ او د y محور په $B(0,-2)$ ټکي کې پرې کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه مستقیمي کرښې معادله چې میل او یو ټکی یې معلوم وي



په مخامخ شکل کې د $\overline{AB}$ میل د $\overline{MA}$ له میل سره څه اړیکه لري؟

بله هره ټوټه کرښه چې ددې ټوټه کرښې پرمخ وټاکو د $\overline{AB}$ له میل سره برابر میل لري، ولې؟

پوهیږو چې د هغې کرښې معادله چې د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ دوه ټکي ښکاره کوي عبارت ده له:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

یا

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

څرنګه چې $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ د مستقیمې کرښې میل راښیي نو پورتنۍ معادله لاندې شکل غوره کوي. $y-y_1=m(x-x_1)$

وروستنۍ معادله د هغې کرښې معادله ده چې میل ئې (m) او د $A(x_1, y_1)$ له نقطه څخه تیریږي.

لومړی مثال: د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې د $(2,3)$ ټکي څخه تیر شي او میل یې $\frac{1}{2}$ وي.

حل: څرنګه چې د مستقیمې کرښې میل او یو ټکی راکړل شوي ده نو د $y-b=m(x-a)$ معادلې څخه لیکلای شو:

$$y-3=\frac{1}{2}(x-2)$$

$$2(y-3)=(x-2)$$

$$2y-6=x-2$$

$$2y-x=4 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x+2$$

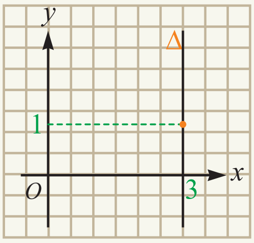
دویم مثال: هغه مستقیمه کرښه چې د $(3,1)$ ټکي څخه تیره او د x له محور سره موازي وي ولیکئ.

حل: څرنګه چې مستقیمه کرښه د x له محور سره موازي ده نومیل یې صفر دی. په پایله کې یې معادله په لاندې ډول ده .

$$y-b=m(x-a)$$
$$y-1=0\ (x-3)$$
$$y-1=0 \Rightarrow y=1$$

دریم مثال: د هغه مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې د $(3,1)$ ټکي څخه تیره او د y له محور سره موازي وي.

حل: څرنګه چې مستقیم د y له محور سره موازي ده نومیل یې نه دی تعریف شوی (معین میل نه لري) ځکه پوهیږو چې ددې کرښې پرمخ دهر ټکي واټن یافاصله د $(3,1)$ ټکي سره مساوي ده چې معادله یې په دې ډول $x=3$ ده.



په عمومي ډول هغه کرښه چې د(a,b) ټکي څخه تیره او د x له محور سره موازي وي عبارت له $y=b$ سره ده.

هغه کرښه چې د (a,b) ټکي څخه تیریږي او د y له محور سره موازي وي عبارت له $x=1$ سره ده.

څلورم مثال: د Δ ټوټه کرښه د عمودي ناصف معادله پیداکړئ چې د $A(2,-4)$ او $B(-2,4)$ ټکوڅخه تیره شي.

حل: د عمودي ناصف د معادلې د پیداکولو لپاره لومړی د $\overline{AB}$ ټوټه کرښې میل په لاس راوړو او بیا د هغې د منځ د $\overline{AB}$ د منځنۍ ټکي مختصات په لاس راوړو.

$$m_{\overline{AB}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4+4}{-2-2}=-2 \quad \Rightarrow \quad m_\Delta=-\frac{1}{m_{\overline{AB}}}=\frac{1}{2}$$

$$m_{\overline{AB}}=(\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1+y_2}{2})=(\frac{0}{2},\frac{0}{2})=(0,0)$$

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad \Rightarrow \quad y-0=\frac{1}{2}(x-0)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x$$

پوښتنې

1- د هغه مستیمې کرښې معادله پیداکړئ چې میل یې 4 او y محور د 3 په ټکي کې پرې کړي.

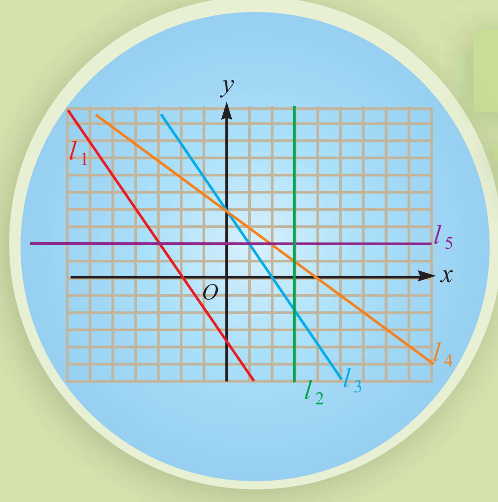
۲- د هغه مستقیمې کرښې معادله پیداکړئ چې د $P(5,-4)$ ټکي څخه تیره او میل یې ۲- وي.

۳- د $3x+4y-7=0$ معادله کې د مستقیم میل او د y له محور سره یې د غوڅوونې ټکی پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مستقیمې کرښې عمومي معادله



د l_1 ، l_2 ، l_3 ، l_4 څلورکرښې نسبت یو بل ته کوم وضعیتونه لري؟

د یوې کرښې الجبري معادله د هغه تکي د مختصاتو اړیکه چې په مستقیمه کرښه پروت دی راښیي په عمومي ډول د یوې مستقیمې کرښې معادله په لاندې ډول بیانوو:

په معیاري یا سټنډرډ ډول د یوې مستقیمې کرښې معادله په لاندې ډول ده.

$y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$ یا $ax+by+c=0$ ، b, a او c حقیقي عددونه او $b\neq 0$ دی.

په پورتنۍ معادله کې $\frac{-a}{b}$ د کرښې میل او $\frac{-c}{b}$ د y له محور سره د پرېکړې ټکی یا تقاطع بلل کېږي.

نو ویلای شوچې د هرې کرښې معادله په یوه مستوي کې په لاندې ډول ده:

$y=mx+h$ چې m د مستقیمې کرښې میل او h د y محور سره د پرېکړې ټکی یا ترتیب دی په عمومي ډول هره خطي اړیکه د x او y له جنسه چې په هغه کې د x او y توان یو وي د مستقیمې کرښې معادله بلل کېږي.

فعالیت

- د $2x+3y-6=0$ او $y-x=2$ دوې مستقیمې کرښې د وضیعه کمیاتو په مستوي کې رسم کړئ.
- د هریوه مستقیم میل پیدا کړئ.
- دا دوې کرښې یوله بل سره څه وضعیتونه لري.

له پورتني فعالیت څخه پایله په لاندې ډول بیانوو:

که د دوو کرښو میلونه سره مساوي نه وي نوکرښو یوه بله پرې کړې دي.

په عمومي ډول که د $a_1x+b_1y+c_1=0$ او $a_2x+b_2y+c_2=0$ دوې کرښې یوه بله پرې کړي. وي نو میلونه یې سره مساوي نه دي له دې نه داسې پایله په لاس راځي.

$$\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2} \quad \text{یا} \quad \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$$

فعالیت

- د $-3x+y-5=0$ او $6x-2y+1=0$ مستقیمې کرښې د قایمو وضیعه کمیاتو په مستوي کې رسم کړئ.
- ددې مستقیمې کرښې میل په لاس راوړئ.
- دا دوې مستقیمې کرښې نسبت یو بل ته څه وضعیت لري؟ ولې؟

په عمومي ډول د $a_1x+b_1y+c_1=0$ او $a_2x+b_2y+c_2=0$ دوه مستقیمې کرښې هغه وخت موازي دي چې میلونه یې سره مساوي وي له دې ځایه دا پایله په لاس راځي چې د هغوی د متحولینو د ضریبونوترمنځ لاندې اړیکه موجوده ده.

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}\Rightarrow\frac{a_1}{a_2}\frac{b_1}{b_2}$$

که د متحولینو د ضریبونو ترمنځ $\frac{a_1}{b_1}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ اړیکه وجود ولري په دې حالت کې کرښې یو پر بل پرتې(منطبق) دي یاسره یو دي.

لومړی مثال: د $3x+4y=5$ او $4x-3y=-1$ د مستقیمونو اړیکې نظر یو بل ته بیان کړئ.

حل: د دوو کرښو د معادلاتو د ثابتوضریبونو نه په ګټه اخیستنه لروچې:

$a_1=3$ $\quad b_1=4$ $\quad c_1=-5$

$a_2=4$ $\quad b_2=-3$ $\quad c_2=1$

1- څرنګه چې $\frac{4}{-3}\neq\frac{3}{4}$ نو $\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{a_1}{a_2}$ دی په دې صورت کې کرښې یوبل غوځوي.

2- څرنګه چې $\frac{4}{-3}\times\frac{3}{4}=-1$ نو $\frac{b_1}{b_2}\times\frac{a_1}{a_2}=-1$ دي نو د کرښو د پریکړې په ټکی کې یوپربل عمود دي.

دویم مثال: په لاندې معادلوکې د k عددي قیمت داسې وټاکئ چې مستقیمونه یوبل سره عمودې وي $2x-6y+3=0$ او $kx+3y-1=0$

حل: د عمودیت شرط څېړو:

$kx+3y-1=0\ ,2x-6y+3=0$

$a_1.a_2+b_1.b_2=0$

$2\cdot k+(-6)3=0\ \Rightarrow k=9$

پوښتنې

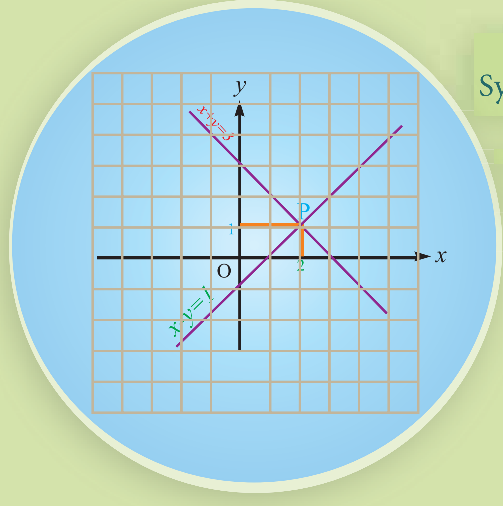
1- د $4x+3y-1=0$ او $8x+6y+5=0$ کرښوحالت یوبل ته بیان کړئ.

۲- د $8x-4y+10=0$ او $4x-2y+5=0$ کرښو حالت یو بل ته بیان کړئ.

۳- د $(k+1)x+ky=0$ او $2x-3y+5=0$ معادلوکې د k قیمت داسې وټاکئ چې کرښې یوه له بلې سره موازي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خطي معادلو سیستم
System of liear equation



شکل ته پام وکړئ ایا د P ټکی مختصات
د کرښو په دواړو معادلو کې صدق کوي؟

فعالیت

- د $y=4x-2$ او $y=3x+5$ کرښو میلونه پیدا کړئ.
- دا کرښې نظر یوبل ته څه اړیکی لري؟ ولې؟
- پورتنی دواړې کرښې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ؟ د رسم شویو کرښو تر منځ څه اړیکه لیدل کیږي؟

په پورتنی فعالیت کې لیدل کیږي د هغو دوو کرښو چې میلونه یې مساوي نه وي یو بل د P په ټکي کې پرې کوي.

څرنګه چې د پریکړې ټکي د دواړو کرښو په مخ پراته دي نو د هغې ټکي مختصات د کرښو په معادلو کې صدق کوي. که د پریکړې د ټکي مختصات په P(x,y) وښیو نو: $y=-3x+5$ او $y=4x-2$ معادلو څخه لیکلای شو، چې:

$$4x-2=-3x+5$$
$$7x=7$$
$$x=1$$

د کرښو په معادلو کې د x قیمت په وضع کولو سره د y قیمت په لاس راوړلای شو:

$$y=4x-2 \Rightarrow y=4(1)-2 \Rightarrow y=2$$

نو د پریکړې د ټکي مختصات عبارت دي له $P(1,2)$ په پایله کې ویلای شو، چې $P(1,2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټکی داسې ټکی دی چې په دواړو معادلو کې حقیقت لري. چې د $\begin{cases} y = 4x - 2 \\ y = -3x + 5 \end{cases}$ خطي معادلو د سیستم حل دی.

فعالیت

- مخامخ د خطي معادلو سیستم په پام کې ونیسئ.
- a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 او c_2 د څه په نامه یادیږي؟
- پورتنیو معادلو کې x او y ته څه ویل کیږي؟
- ایا ددې دوو کرښو د پریکړې د ټکي، د مختصاتو د سیستم یو حل کیدای شي؟

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad \text{..........} \quad I$$

د خطي سیستم د حل لپاره د (I) سیستم داسې لیکو چې په هغه حالت کې چې b_1 او b_2 د صفر خلاف وي.

$$\begin{cases} y = -\dfrac{a_1}{b_1}x + \dfrac{c_1}{b_1} \\ y = -\dfrac{a_2}{b_2}x + \dfrac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

نو لاندې درې حالتونه لرو:

1- که چیرې د دوو کرښو میلونه سره مساوي نه وي نو دا کرښې یو بل په یوه ټکي کې پرې کوي.

2- که چیرې د کرښو میلونه مساوي وي اما د y محوره یې د پریکړې ټکي مساوي نه وي هغه وخت دا دوه کرښې سره موازي دي.

3- که چیرې د کرښومیلونه او د y محور سره د پریکړې ټکي مساوي وي نو هغه دوه کرښې سره منطبق یا یو پر بل پراته وي.

لومړی مثال: د لاندې خطي معادولو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

حل: د دې سیستم د حل لپاره نوموړی سیستم په دې ډول لیکو:

$$\begin{cases} y = 7 - x \quad \Rightarrow y = -x + 7 \\ y = 5 - 2x \Rightarrow y = -2x + 5 \end{cases}$$

ليدل کېږي چې د پورتنيو کرښو د معادلو ميلونه 1- او 2- دي څرنگه چې د دوو خطونو ميلونه مساوي نه دي نو کرښې يو بل په يوه ټکي کې پرې کوي، چې د پرېکړې د ټکي د مختصاتو د پيدا کولو لپاره په لاندې ډول عمل کوو:

$$-x+7=-2x+5$$
$$-x+2x=5-7 \quad \Rightarrow x=-2$$

د کرښو په يوه معادله کې د x پر ځای د 2- په وضع کولو سره لرو چې:

$$y=-x+7$$
$$y=-(-2)+7 \quad \Rightarrow y=9$$

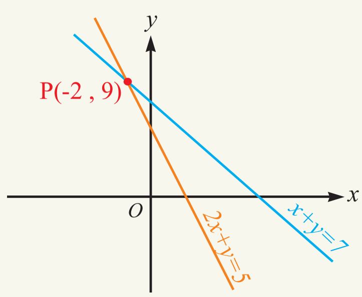
نو $(-2,9)$ د کرښو د معادلو د سيستم حل او د پرېکړې ځای دی، چې په شکل کې ليدل کېږي.

$x+y=7$

x	0	7
y	7	0

$2x+y=5$

x	0	5/2
y	5	0



دويم مثال: د لاندې خطي معادلو سيستم حل کړئ.

حل: لومړی معادلې په لاندې ډول ليکو:

$$\begin{cases} 2x+\ \ y=5 \\ 12x+3y=6x+12 \end{cases}$$

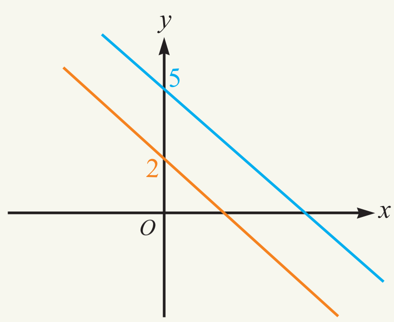
$$\begin{cases} y=-2x+5 \\ y=-\dfrac{6}{3}x+\dfrac{12}{3} \end{cases}$$

$y=-2x+5$

x	0	5/2
y	5	0

$y=-2x+4$

x	0	2
y	4	0



څرنگه چې د دواړو کرښو ميل 2- دی په پايله کې کرښې خپل منځ کې موازي دي او يو بل نه پرې کوي يعنې د موازي کرښو د معادلو سيستم حل نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم مثال: د لاندې خطي معادلو سيستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ -28 = -4x - 4y \end{cases}$$

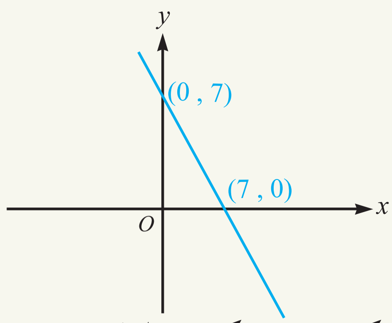
حل: لومړی د معادلاتو سيستم په لاندې ډول ليکو:

$$\begin{cases} y = -x + 7 \\ y = \dfrac{-4}{4}x + \dfrac{28}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x + 7 \\ y = -x + 7 \end{cases}$$

x	0	7
y	7	0

x	0	7
y	7	0



ليدل کېږي، چې د کرښو ميل او د y په محور د پرېکړې ټکی سره برابر دي نو دواړه کرښې سره منطبق دي په دې حالت کې کرښې ډېر ګډ ټکي لري په پايله کې د خطي معادلو سيستم ډېر حلونه لري.

که a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 او c_2 حقيقي عددونه x او y مجهولونه وي په دې حالت کې د خطي معادلو سيستم $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ دی.

- که چيرې کرښې يوه له بلې په يوه ټکي کې پرې کړي معادلې يو حل لري.
- که چيرې کرښې يوه له بلې سره موازي وي معادلې حل نه لري.
- که چيرې کرښې يو پر بل منطبق وي معادلې بې نهايت حلونه لري.

پوښتنې

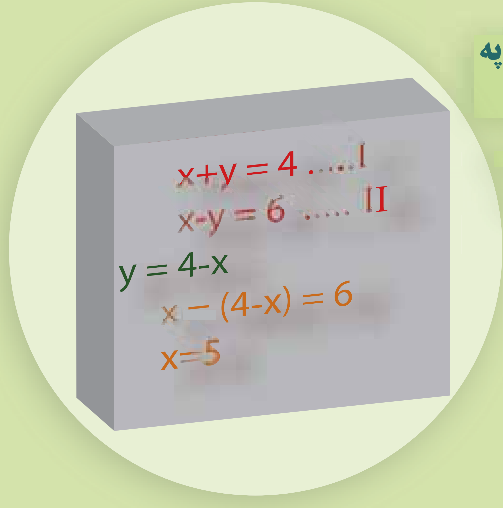
د لاندې خطي معادلو سيستمونه حل کړئ.

1) $\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = 4x - 3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 2 = y \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4x - y = 6 \\ 8x - 2y = 6 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ -6x + 2y = -10 \end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خطي معادلو د سیستم حل د تعویض په لاره(طریقه)



د خطي سیستم د معادلو حل ته پام وکړئ د x مجهول عددي قیمت ستاسو په هاند څنگه په لاس راغلی دی.

فعالیت

- د یوه مثلث د دوو زاویو مجموعه 100° او د تفریق حاصل یې 20° دی الجبري معادلې یې ولیکئ.
- د معادلاتو دا سیستم څو مجهوله لري؟ د هر یوه عددي قیمت پیدا کړئ.
- په لاس راغلي قیمتونه د معادلاتو په سیستم کې وازمایئ.

له پورتني فعالیت څخه د مسئلې حل او د خطي معادلو د سیستم د حل لاره په لاندې توگه داسې لیکو:

حل: که چیرې د مثلث زاویې په $\hat{A}$ او $\hat{B}$ ونوموو پورتنۍ عبارت د الجبري معادلو په بڼه داسې لیکو:

$$\hat{A}+\hat{B}=100^\circ \quad ....I$$
$$\hat{A}-\hat{B}=20^\circ \quad ....II$$

او د $\hat{A}$ زاویې قیمت د $\hat{B}$ زاویې له جنسه له لومړۍ معادلې څخه په لاس راوړو $\hat{A}=100^\circ-\hat{B}$ دا قیمت په دویمه معادله کې چې د A په عوض وضع کوواو معادله حلوو:

$$100^\circ-\hat{B}-\hat{B}=20^\circ \Rightarrow -2\hat{B}=-80^\circ \Rightarrow \hat{B}=40^\circ$$

اوس د $\hat{B}$ قیمت د خطي معادلاتو په سیستم کې وضع کوو چې د $\hat{A}$ قیمت په لاس راځي.

$$\hat{A}-\hat{B}=20^\circ$$
$$\hat{A}-40^\circ=20^\circ \Rightarrow \hat{A}=20^\circ+40^\circ \Rightarrow \hat{A}=60^\circ$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: لاندې د دوه مجهوله معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases}2x+3y=0\\3x+2y=10\end{cases}$$

حل: لومړی د یوه مجهول قیمت د بل مجهول له جنسه د یوې معادلې څخه په لاس راوړو او په بله معادله کې یې وضع کوو:

$$2x+3y=0 \quad \Rightarrow 2x=-3y \quad \Rightarrow x=-\frac{3}{2}y$$

$$3x+2y=10$$
$$3(-\frac{3}{2}y)+2y=10$$
$$-\frac{9}{2}y+2y=10$$
$$\frac{-9+4}{2}y=10$$
$$-5y=20 \quad \Rightarrow y=-4$$

$$x=-\frac{3}{2}y$$
$$x=-\frac{3}{2}(-4)$$
$$x=-3(-2)$$
$$x=6$$

د دوه مجهوله لومړۍ درجو معادلو د سیستم د حل لپاره په لاندې ډول عمل کوو:
- د یوه مجهول قیمت د بل مجهول له جنسه د یوې معادلې څخه په لاس راوړو او هغه په بله معادله کې د هغه په عوض وضع کوو.
- په لاس راغلې یو مجهوله لومړۍ درجه معادله حلوو او د مجهول قیمت په لاس راوړو.
- دا په لاس راغلې مجهول قیمت د سیستم په معادلو کې وضع او د بل مجهول قیمت په لاس راوړو.
- په لاس راغلې قیمتونه د سیستم په معادلو کې وضع کوو که سم له لاسه په دواړو معادلو کې یې حقیقت ولرې د معادلې حل سم، او پرته له هغه د معادلې حل نه او سم نه دی.

پوښتنې

د لاندې سیستمونو حل د تعویضي په طریقه په لاس راوړئ.

1) $\begin{cases}y=2x\\x+y=6\end{cases}$

2) $\begin{cases}7x-2y=15\\6x-y=10\end{cases}$

3) $\begin{cases}a+2b=2\\2a-3b=25\end{cases}$

4) $\begin{cases}\frac{2x-1}{3}+\frac{y+2}{4}=4\\\frac{x+3}{3}=\frac{x-y}{3}\end{cases}$

5) $\begin{cases}\frac{5}{x}-\frac{3}{y}=1\\\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=7\end{cases}$

6) $\begin{cases}\frac{2x}{3}+\frac{y}{5}=6\\\frac{x}{6}-\frac{y}{2}=-4\end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خطي معادلو د سیستم حل د افنا په لاره (طریقه)

حمیرا، زحل ته وویل: که ته خپلي پیسې ما ته راکړې زه د 15 افغانیو څښتن کېږم، زحل حمیرا ته وویل: که ته د خپلو پیسو دریمه برخه ما ته راکړې زه د 5 افغانیو څښتنه کېږم، هره یوه څو افغانۍ لري؟

$$x + y = ?$$

$$\frac{1}{3}x + y = ?$$

$$x = ?$$

$$y = ?$$

فعالیت

- د معادلو یو سیستم ولیکئ چې دوه معادلې او دوې مجهوله ولري.
- نوموړی سیستم د ګراف په مرسته حل کړئ.
- نوموړې معادلې په تعویضي طریقه حل کړئ.
- ایا بله طریقه شته چې نوموړې معادلې پرې حل شي؟

یوه بله لاره چې د دوه مجهوله معادلو سیستم پرې حلولای شو د افنا طریقه یا لاره ده، چې په لاندې مثال کې يې څېړو.

مثال: د خطي معادلو دا سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} 7x+5y=41 & \text{..............I} \\ 5x-2y=7 & \text{..............II} \end{cases}$$

حل: لومړی معادلو ته داسې بدلون ورکوو، چې که هغوی خوا په خوا سره جمع یا تفریق کړو نو له مجهولونو څخه یو مجهول افنا یا له منځه لاړ شي، لکه د x مجهول وغواړو، چې افنا يې کړو د لومړی معادلې دواړه خواوې د دویمې معادلې د x په ضریب یعنې (5) کې ضربوو او د دویمې معادلې دواړه خواوې د لومړی معادلې د x په ضریب یعنې (7) کې ضربوو.

$$\begin{cases} 7x+5y=205 & \Rightarrow\ 35x+25y=205 \\ 5x-2y=7 & \Rightarrow\ 35x-14y=49 \end{cases}$$

په لاس راغلې معادلې چې په هغه کې د x ضریبونه مساوي دي یو له بل څخه تفریقوو.

$$\begin{array}{r} 35x+25y = 205 \\ 35x - 2y = 49 \\ - \quad + \quad - \\ \hline 39y=156 \end{array} \Rightarrow y=\frac{156}{39} \Rightarrow y=4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د y په لاس راغلي قيمت د سيستم په يوه معادله کې وضع کوو تر څو د بل مجهول قيمت په لاس راشي.

$$5x-2y=7$$
$$5x-2(4)=7 \Rightarrow 5x=15 \Rightarrow x=3$$

دويم مثال: د معادلو لاندې سيستم د افنا په طريقه حل کړئ.

$$\begin{cases}3x+2y=4\\2x-3y=-1\end{cases}$$

حل: لومړی يو مجهول له منځه وړو لکه y نو لومړۍ معادله په 3- کې او دويمه معادله په 3- کې ضربوو په لاس راغلي معادلې خواپخوا سره جمع کوو:

$$\begin{aligned}3x+2y=4 &\quad\Rightarrow -9x-6y=-12\\2x-3y=-1 &\quad\Rightarrow \underline{\mp 4x\mp 6y=\mp 2}\\ &\qquad -13x+0=-10\\ &\qquad x=\frac{10}{13}\end{aligned}$$

$$3\left(\frac{10}{13}\right)+2y=4 \Rightarrow \frac{30}{13}+2y=4$$
$$2y=4-\frac{30}{13} \Rightarrow 2y=\frac{52-30}{13}$$
$$2y=\frac{22}{13} \Rightarrow y=\frac{11}{13}$$

د دوه مجهوله معادلو د سيستم حل د افنا په طريقه کې په لاندې ډول عمل کوو.

- هر مجهول چې وغواړو هغه افنا کړو د هغې ضريبونه په پام کې نيسو. لومړی معادله د دويمې معادلې د افنا شوی مجهول په ضريب کې او دويمه معادله د لومړی معادلې د افنا شوی مجهول په ضريب کې ضربوو.
- په لاس راغلی معادلې يوه له بلې څخه تفريق يا جمع کوو چې د يوه مجهول قيمت په لاس راځي دا په لاس راغلي قيمت د سيستم په يوه معادله کې وضع کوو چې د بل مجهول قيمت په لاس راځي.

پوښتني

د معادلو لاندې سيستم د افنا پع طريقه حل کړئ.

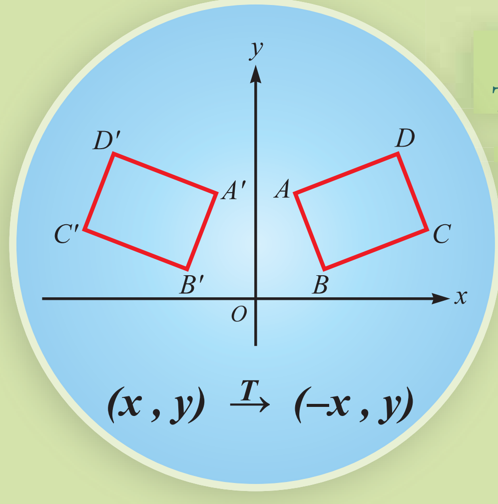
1) $\begin{cases}x+y=3\\2x-y=10\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y=-39\\x-y=9\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x+2y=2\\x-4y=1\end{cases}$

4) $\begin{cases}\frac{2}{x}-\frac{5}{y}=5\\\frac{3}{x}+\frac{10}{y}=18\end{cases}$ 5) $\begin{cases}y+x-1=0\\2x+y-9=0\end{cases}$ 6) $\begin{cases}10x+3y=26\\8x+3y=18\end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځای بدلون (تغیرمکان)

Transformation



په مخامخ شکل کې څه تویپرونه اوڅه یووالی وینئ؟

فعالیت

په مخامخ شکل کې څه توپیرونه او څه یووالی وینئ

- د $A(1,2)$, $B(-2,3)$ او $C(2,-4)$ ټکې د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- ددې ټکو د x په مختصه باندې ۲ واحد ورزیات کړئ.
- په لاس راغلی ټکې د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وښیئ.

په پورتنی فعالیت کې ولیدل شول چې هراختیاري ټکی (x, y) په یوه مستوي کې کولای شو د $(x+2, y)$ ټکي ته په دې ډول بدلون ورکړو، په دې حالت کې ویلای شو چې په لاس راغلی ټکی د راکړل شوی ټکي خیرې یا تصویر د $(x+2, y)$ تر بدلون لاندې دی، هغه اړیکه چې د مستوي د هر ټکی د وضیعه کمیاتو په مستوی کې یوازې او یوازې یوه نوی ټکی ته نسبت ورکړئ په مستوي کې د ځای یا ټکي بدلون بلل کیږي.

لومړی مثال: د $D(1,2)$, $E(4,1)$ او $C(2,4)$ ټکو خیرې یا تصویر د لاندې بدلوني په اساس د وضیعه کمیاتو په مستوي کې په لاس راوړئ.

$a: \quad (x, y) \xrightarrow{T_1} (-x, y)$ $\qquad b: \quad (x, y) \xrightarrow{T_2} (x, -y)$

$c: \quad (x, y) \xrightarrow{T_3} (y, x)$ $\qquad d: \quad (x, y) \xrightarrow{T_4} (x+2, y+3)$

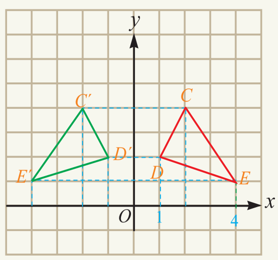
حل: لومړی راکړل شوی ټکی د وضیعه کمیاتو په سیستم کې ټاکو.

a: د $(x, y) \xrightarrow{T_1} (-x, y)$ تربدلوني لاندې لرو چې:

$T(4,1) = (-4,1)$

$T(1,2) = (-1,2)$

$T(2,4) = (-2,4)$



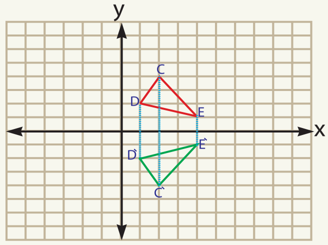
(c) ketabton.com: The Digital Library

b: د $(x,y)\xrightarrow{T_2}(x,-y)$ تربدلون لاندې لرو چې:

$R(4,1)=(4,-1)$

$R(1,2)=(1,-2)$

$R(2,4)=(2,-4)$



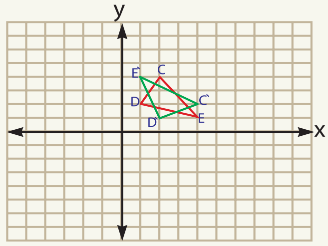
c: د $(x,y)\xrightarrow{T_3}(y,x)$ تربدلون لاندې لرو چې:

$(1,4)$

$M(4,1)=(1,4)$

$M(1,2)=(2,1)$

$M(2,4)=(4,2)$

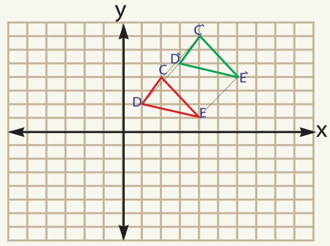


d: د $(x,y)\xrightarrow{T_4}(x+2,y+3)$ تربدلون لاندې لرو چې:

$S(4,1)=(6,4)$

$S(1,2)=(3,5)$

$S(2,4)=(4,7)$



په پورتنیو مثالونوکې ښودلای شوچې د ورکړل شویو بدلونونو د ټکو فاصله توپیرنه کوي.

د مثال په ډول که $T(c)=c'$ او $T(E)=E'$ وي نو $EC=E'C'$ ده.

هغه بدلونونه چې د ټکوترمنځ واټن(فاصله) ساتی، ایزومتری, (*Isometry*) بلل کیږي.

که یوشکل دایزومتری په ډول، خپل ځای بدل کړي نو د اصل ځیرې یا شکل سره انطباق منونکي دي.

پوښتني

1- د $(-3,1),(-2,-2),(1,-1)$ او $(3,3)$ ټکو تصویر د لاندې بدلونو په اساس د وضیعه

1- د $(-3,1),(-2,-2),(1,-1)$ او $(3,3)$ ټکو تصویر د لاندې بدلونونو په اساس د وضیعه کمیاتو په سیستم کې په لاس راوړئ.

a: $(x,y)\xrightarrow{T}(x-1,y+2)$

b: $(x,y)\xrightarrow{D}(2x,y)$

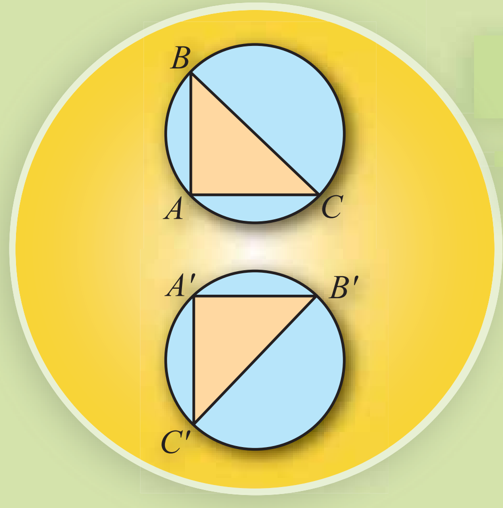
c: $(x,y)\xrightarrow{K}(x+5,0)$

d: $(x,y)\xrightarrow{R}(0,y-2)$

e: $(x,y)\xrightarrow{P}(3x-1\ ,\ y+2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتقال
Translation



په مخامخ شکل کې د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث چې په مستوي کې یې له لومړي حالته دوم حالت $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ غوره کړی دی، تاسو کولای شئ چې ددې حرکت د ځای بدلون شرح کړئ.

فعالیت

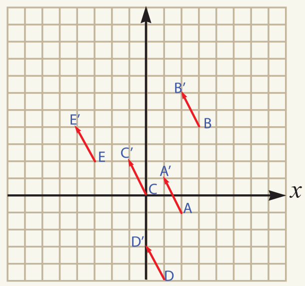
- د وضیعه کمیاتو په مستوي کې د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث رسم او مختصات یې ولیکئ.
- د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث راسونه د محور په مثبت جهت د (2) واحد په اندازه او د y محور په مثبت جهت د (1) واحد په اندازه حرکت ورکړئ نوبیوحاصل شوو ټکوته B', A' او C' ووایئ.
- د B', A' او C' ټکي یو له بل سره وتړئ او د $\overset{\Delta}{ABC}$ او $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ مثلثونه د اضلاعو د اوږدوالي اوظاهري شکل له مخې پرتله کړئ.

که چیرې د یوه شکل یاخیرې ټول ټکي په یوه ټاکلې جهت(لوری) او یو واټن(فاصل) حرکت ورکړو په لاس راغلی شکل له لومړي شکل سره انطباق منونکي دي، دي حرکت ته انتقال وایي او هغه په دی ډول ښودل کېږي: $T(x, y) = (x+h, y+K)$
په داسې حال کې چې h او k حقیقي عددونه دي.

لومړی مثال: د $A(2,-1)$, $B(3,4)$, $C(0,0)$, $D(1,-5)$ او $E(-3,2)$ ټکي د وضیعه کمیاتو په سیستم کې د $T(x, y) = (x-1, y+2)$ انتقالي رابطې په اساس وښیئ.

حل: لومړی راکړل شوي ټکي د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وښیئ اوبیا هغه ټکي چې د $T(x, y) = (x-1, y+2)$ اړیکې څخه لاسته راځي په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$A(2,-1),T_A(2-1,-1+2)=(1,1)$
$B(3\ ,\ 4),T_B(3-1\ ,\ 4+2)=(2,6)$
$C(0\ ,\ 0),T_C(0-1\ ,\ 0+2)=(-1,2)$
$D(1\ ,-5),T_D(1-1\ ,-5+2)=(0,-3)$
$E(-3\ ,2),T_E(-3-1\ ,2+2)=(-4,4)$

په پورتنی مثال کې د ټکو د ترلوځخه د شکل څیره لاسته راځي لیدل کیږي چې د $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}, \overline{DD'}$ او $\overline{EE'}$ یو له بل سره موازي او مساوي دي.

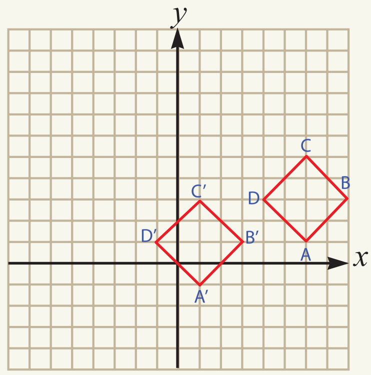
دویم مثال: که چیرې $A(6,1)$, $B(8,3)$, $C(6,5)$ او $D(4,3)$ د یوې مربع راسونه وي هغه د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ترسیم کړئ او د $T(x,y)=(x-5,y-2)$ اړیکه لاندې رسم کړئ.

الف: د مربع د اضلاعګانو اوږدوالی او تصویر نظر یوبل ته پرتله کړئ.

ب: د مربع د اضلاعګانو میل او څیره یې نظر یوبل ته پرتله کړئ.

حل: د ABCD منطقه مربع ترانتقال لاندې د $\boxed{A'B'C'D'}$ څلور ضلعي ده.

$A(6,1),T_A=(6-5\ ,1-2)\quad\Rightarrow A'=(1,-1)$
$B(8,3),T_B=(8-5\ ,3-2)\quad\Rightarrow B'=(3,1)$
$C(6,5),T_C=(6-5,5-2)\quad\Rightarrow C'=(1,3)$
$D(4,3),T_D=(4-5,3-2)\quad\Rightarrow D'=(-1,1)$



د (الف) او (ب) جزونو د شاګردانو کورنی دنده ده.

انتقال یو ایزومتري رابطه ده.

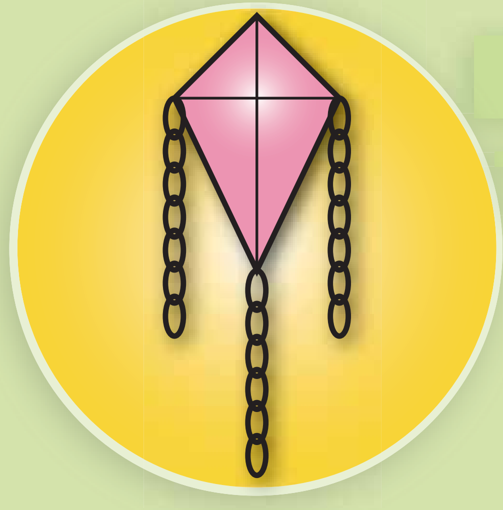
پوښتنې

1- که د $M(1,-1)$، $N(2,-5)$، $O(2,5)$ او $P(3,3)$ یوه څلور ضلعي وي څلور ضلعي او د هغې تصویر تر دې رابطې $T(x,y)=(x+9,-y)$ لاندې رسم کړئ.

۲- که $L(7,0)$, $I(5,0)$ او $O(5,3)$ د یوه مثلث راسونه وي مثلث او د هغې تصویر یا څیره د $F(x,y)=(-y+3,x-3)$ بدلون په اساس رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

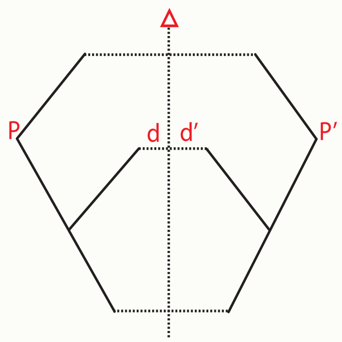
انعکاس
Reflection



د پتنگ(کاغذ پران) خیرې ته پاملرنه وکړئ، ستاسو په نظر دا کاغذپران(پتنګ) نسبت کوم یوه قطر ته متناظر دی.

فعالیت

- د یوې صفحې په نمایي کې یوشکل رسم کړئ.
- د شکل ټولې کرښې په داسې رنګ رسم کړئ، چې په کاغذ کې ژر جذب نه شي.
- کاغذ په منځ داسې قات کړئ چې د قات شوې لیکې یوې خوا ته شکل پروت وي.
- صفحه خلاصه کړئ، ووایئ چې کوم شکل د اصلي شکل مخامخ پروت او د دوی ترمنځ څه توپیر دی.



تعریف

که چیرې د P شکل یا خیرې هر ټکی د p' شکل یاخیرې په هر ټکی داسې بدل شی چې د P شکل یاخیرې د هر ټکي فاصله نظر Δ محورته د p' د شکل د هر ټکي فاصله سره مساوي وي، دې تبدیل ته نظر Δ محورته انعکاس وایي او Δ محور ته د انعکاس محوروايي.

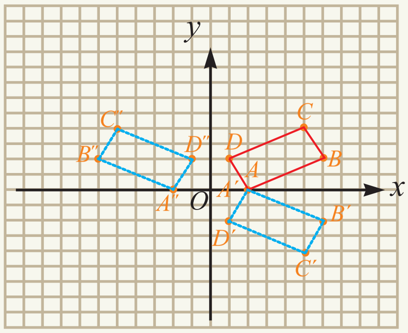
لومړی مثال: که چیرې د A(2,0), B(6,2), C(5,4) او D(1,2) ټکي د یوه مستطیل راسونه وي د وضیعه کمیاتو په سیستم کې مستطیل رسم خیره او تصویر یې نظر x او y محورته رسم کړئ.

حل: که چیرې د $\overline{ABCD}$ مستطیل خیره نظرد y محور ته رسم کړو په دې حالت کې یوازې د x مختصه یې په $(-x)$ بدلیږي او که چیرې خیره یا تصویر یې نسبت x محورته رسم کړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوازې د y مختصه يې په $(-y)$ بدلېږي خرنګه چې په شکل کې ليدل کيږي.

نظر y محور ته انعکاس $(-x\ ,\ y)$	نظر x محورته انعکاس $(x\ ,\ -y)$	ټکی $(x\ ,\ y)$
$A''(-2\ ,\ 0)$	$A'(2\ ,\ 0)$	$A(2\ ,\ 0)$
$B''(-6\ ,\ 2)$	$B'(6\ ,\ -2)$	$B(6\ ,\ 2)$
$C''(-5\ ,\ 4)$	$C'(5\ ,\ -4)$	$C(5\ ,\ 4)$
$D''(-1\ ,\ 2)$	$D'(1\ ,\ -2)$	$D(1\ ,\ 2)$



د $T(x, y) = (-x, y)$ ليږدونه نسبت y محورته يو انعکاس دی.
د $T(x, y) = (x, -y)$ ليږدونه نسبت x محورته يو انعکاس دی.
د $T(x, y) = (x, y)$ ليږدونه نسبت $y = x$ مستقيم ته يو انعکاس دی.

پوښتنې

1- که $(A(3,1)$, $B(7,1)$ او $C(3,1)$ د يوه مثلث راسونه وي، مثلث او د هغې تصوير ياځيره د لاندې ورکړل شويو د انعکاس اړيکو په اساس رسم کړئ

$a:\ R_1(x, y) = (-x, y)$ $\qquad$ $b:\ R_2(x, y) = (x, -y)$

$c:\ R_3(x, y) = (y, x)$ $\qquad$ $d:\ R_4(x, y) = (-y, -x)$

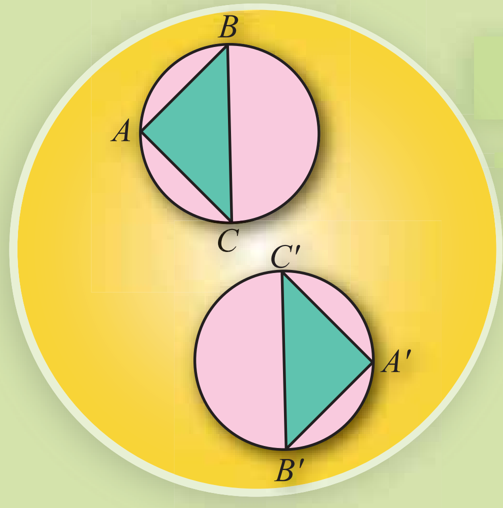
2- که چيرې $(A(0,2)$, $(B(-5,0)$, $C(-3,-5)$ او $D(2,-3)$ د يوې مربع راسونه وي مربع او د هغې تصوير د $R(x, y) = (-x, -y)$ انعکاس اړيکې په اساس رسم کړئ.

۳- د $(A(1,4)$, $B(3,-2)$ او $C(5,1)$ ديوه مثلث راسونه وي، د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث تصويرياځيره تر انعکاس لاندې نسب لاندې کرښو ته:

- $x + 2 = 0$ رسم کړئ او په $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ يې ونوموئ.
- $y + 3 = 0$ رسم کړئ او په $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ يې ونوموئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

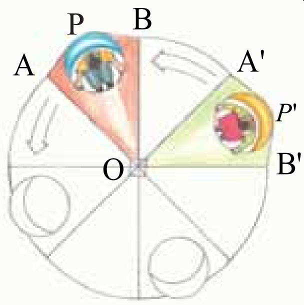
دوران
Rotations



په مخامخ شکل کې د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث په مستوي کې حرکت کړی او د $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ نوی ځای یې نیولی دی تاسي کولای شئ د دې ډول بدلون حرکت شرح کړئ.

فعالیت

مخامخ مدل د ماشومانو د لوبو د څرخ دوه بېلابېل ځایونه راښيي.



- د شکل څخه لیدل کېږي چې A' د A ټکی متناظر او B' د B ټکی متناظر دی د $A\hat{O}A'$ او $B\hat{O}B'$ زاویې اندازه کړئ او یوه له بلې سره یې پرتله کړئ.
- اوس د څرخ د چوکۍ په لومړی ځای یو ټکی وټاکئ او هغه په P ونوموئ.
- د P ټکی متناظر ټکی د څوکۍ په دویم ځای کې پیدا کړئ او هغه p' ونوموئ.
- د $P\hat{O}P'$ زاویه اندازه کړئ.

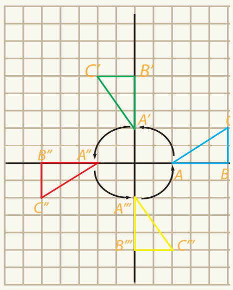
د پورتنی فعالیت په پام کې نیولو سره دوران په مستوي کې د لیږدوني په عنوان داسي تعریفوو:

که یوشکل په یوه مستوي کې د یوټاکلي ټکي په شاوخوا د $\hat{\alpha}$ زاویې په اندازه دوران وکړي ټول ټکي یې د $\hat{\alpha}$ زاویې په اندازه دوران کوي په دې حالت کې د O ثابت ټکی د دوران مرکز او د $\hat{\alpha}$ ثابته زاویې ته د دوران زاویه وایي.

مثال: د A(2,0), B(5,0) او $C(5,2)$ د یوه مثلث راسونه دي د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث او د هغه خیره یاتصویر د لاندي د تبدیل د ورکړ شویو اړیکو په اساس رسم او بیا هریو بدلون شرح کړئ.

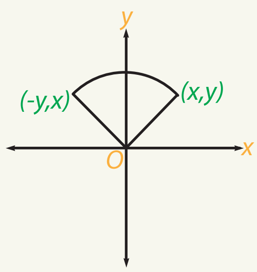
الف: $R_1(x,y)=(-y,x)$ ب: $R_2(x,y)=(-x,-y)$ ج: $R_3(x,y)=(y,-x)$

حل:

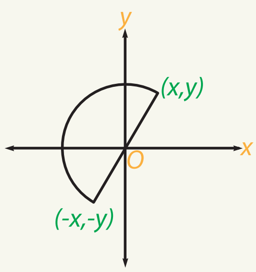


تکی	خیره(تصویر)		
(x,y)	$(-y,x)$	$(-x,-y)$	$(y,-x)$
$A(2,0)$	$A'(0,2)$	$A''(-2,0)$	$A'''(0,-2)$
$B(5,0)$	$B'(0,5)$	$B''(-5,0)$	$B'''(0,-5)$
$C(5,2)$	$C'(-2,5)$	$C''(-5,-2)$	$C'''(2,-5)$

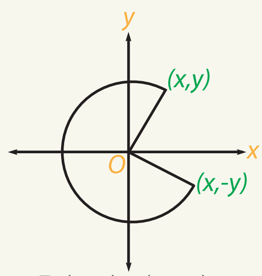
د شکل څخه لیدل کېږي چې د R_1, R_2 او R_3 بدلونونه د وضعیه کمیاتو د مبدأ په مرکز دورانونه په ترتیب د $90°, 180°$ او $270°$ زاویوسره دي.



$R(x,y)=(-y,x)$
د دوران مرکز $(0,0)$
د دوران زاویه $90°$



$R(x,y)=(-x,-y)$
د دوران مرکز $(0,0)$
د دوران زاویه $180°$



$R(x,y)=(x,-y)$
د دوران مرکز $(0,0)$
د دوران زاویه $270°$

پوښتنې

1- که $A(0,0)$ $B(6,-2)$ او $C(7,1)$ د یوه مثلث راسونه وي.

الف: د $R(x,y)=(-y,x)$ ترتبدیل لاندې د ABC مثلث شکل اوتصویر رسم کړئ.

ب: د مثلث د اضلاعګانو اوږدوالی د هغه له تصویر یا خیرې سره پرتله کړئ. ایا دا دوران یو ایزومتري دی؟

2- که $(A(-1,-2)$, $B(7,2)$, $C(5,6)$ او $D(-3,2)$ د یو مستطیل راسونه وي.

الف: $R(x,y)=(-y,-x)$ تر دوران لاندې مستطیل او د هغه تصویریا خیره رسم کړئ.

ب: د مستطیل د اضلاع ګانو اوږدوالی اومساحت د هغه له تصویر یاخیرې سره پرتله کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دريم څپرکي لنډيز

- په يوه مستوي کې چې دوه افقي اوعمودي محوورنه يوبل عموداً پرې کړي د وضيعه کمياتو د سيستم په نامه ياديږي.
- د وضيعه کمياتو په سيستم کې افقي محورته د فاصلې يا واټن محور اوعمودي محورته د ترتيب محور اود پريکړې ټکي ته يې مبدا وايي.
- د A او B دوو ټکوترمنځ واټن د $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ اړيکې څخه لاسته راځي.
- د يوې کرښې د منځ ټکی مختصات د $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$ څخه لاسته راځي.
- هغه کرښه چې دy مختصه يې صفروي د منځ د ټکی مختصات يې $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, 0)$ دی.
- هغه کرښه چې د x مختصه يې صفر وي د منځ د ټکي مختصات يې $M(0, \frac{y_1 + y_2}{2})$
  د هرې مستقيمې کرښې ميل د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ رابطې څخه لاسته راځي.
- د هر مستقيم خط ميل په هغه زاويه پورې اړه لري چې مستقيم يې د x محور له مثبت جهت سره جوړه وي.
- هر مستقيم چې د x محور د مثبت جهت سره حاده زاويه جوړه کړي ميل يې مثبت او که منفرجه زاويه جوړه کړي ميل يې منفی دی.
- موازی مستقيمونه د مساوي ميلونو لرونکي دي.
- هر مستقيم خط چې له x محور سره موازي وي ميل يې صفر او هر مستقيم خط چې پر x محور عمود وي ميل نه دی تعريف شوی.
- دوه مستقيم خطونه هغه وخت يو پربل عمود دي چې د ميلونو د ضرب حاصل يې (-1) وي.
- درې ټکي هغه وخت په يوې کرښې پراته دي چې د هر قطعه خط ميلونه يې سره مساوي وي.
- د وضيعه کمياتو په مستوي کې د يوه ټکي هغه اړيکه چې يوازې او يوازې يوه نوي ټکي ته نسبت ورکړي يوه ليږدونه ياتغير مکان بلل کيږي.
- که چيرې د يوه شکل ټولو ټکو ته په يوه ټاکلي جهت او يوه فاصله حرکت ورکړو په لاس راغلی شکل د لومړي شکل سره انطباق منونکی دی او دې حرکت ته انتقال وايي.
- که يوشکل په يوه مستوي کې د يو ټاکلي ټکي په شاوخواد $\hat{\alpha}$ زاويې په اندازه دوران وکړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دريم څپرکی پوښتنې

ټول ټکي يې په عين زاويه دوران کوي دې حرکت ته دوران وايي.

- په لاندې سوالونوکې هر سوال ته څلورځوابونه ورکړ شوی دی صحيح ځواب وټاکئ.

1- د دوو عمودي کرښو د ميلونو د ضرب حاصل:

a) (1) دی. b) صفر دی. c) ∞ دی. d) منفي يو دی.

2- د مستقيمې کرښې معادله چې د y محور سره يې د پرېکړې ټکی او ميل يې ښکاره وي عبارت له:

a) $y = mx + c$ b) $y = b$ c) $y = mx + b$ d) $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

3- د هغه کرښې معادله چې دوه ټکي يې ښکاره وي عبارت له:

a) $y = mx + b$ b) $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ c) $\dfrac{y - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x - x_1}$ d) $y = mx$

4- د $A(0, y_1)$ او $B(0, y_2)$ دوو ټکو د منځنی ټکی مختصات عبارت له:

a) $M(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, 0)$ b) $M(\dfrac{y_2 + y_1}{2}, 0)$ c) $M(0, \dfrac{y_1 + y_2}{2})$ d) $M(0,0)$

٥- د $A(x_1, 0)$ او $B(x_2, 0)$ دووټکو د منځنی ټکی مختصات عبارت له :

a) $M(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, 0)$ b) $M(\dfrac{y_2 + y_1}{2}, 0)$ c) $M(0, \dfrac{y_1 + y_2}{2})$ d) $M(0,0)$

6- د A او B دوو ټکو ترمنځ واټن عبارت دی له:

a) $AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$ b) $AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2}$

c) $AB = \sqrt{(x_2 + y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2}$ d) $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

7- د يوه ټکی او د وضيعه کمياتو د مبدآ ترمنځ واټن يافاصله عبارت ده له:

a) $AB = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2}}$ b) $AB = \sqrt{y_1^2 + y_1^2}$

c) $AB = \sqrt{x^2 + y^2}$ d) $AB = \sqrt{x^2 - y^2}$

8- د يو مستقيمې کرښې ميل عبارت له:

a) $m = \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ b) $m = \dfrac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}$ c) $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ d) $m = \dfrac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$

9- دوه مستقيمونه هغه وخت يو له بل سره موازي وي چې:

a: د هغو ميلونه سره مساوي وي. b: ميلونه ئې مساوي نه وی.

c: د میلونو د ضرب حاصل یې منفي یو وي. d: ټول ځوابونه سم دی.

• خالي ځایونه په مناسبوکلماتو ډک کړئ.

۱- د وضیعه کمیاتو په سیستم کې د x محورته د .... او محورته د .... وایي.

۲- په دویمه ناحیه کې هغه ټکي پراته دي چې x یې .... او y یې .... دی.

۳- په دریمه ناحیه کې هغه ټکي پراته دي چې x او y دواړه .... دی.

٤- هغه مستقیم چې د x محور د مثبت جهت سره مساوي حاده زاویه جوړه کړي میل یې .... دی.

٥- دوه موازي مستقیمې کرښې چې د x محورد مثبت جهت سره مساوي .... جوړه وي.

٦- د x محورسره د هر موازي مستقیم میل .... دی.

۷- درې ټکي هغه وخت په یوه مستقیمه کرښه پراته وي چې د ټوټه کرښو .... سره مساوي وي.

۸- که د دووکرښو میلونه یوبل سره مساوي نه وي دا کرښې .... دی.

• لاندې جملې کومې سمې اوکومې یې ناسمې دي د سموپه مخ کې د(س) توري اود ناسمې په مخ کی د(ن) توري ولیکئ.

1- (   ) که د وضیعه کمیاتو په مستوي کې د هر ټکی لپاره یوازې او یوازې یوه نوي ټکي ته نسبت ورکړئ په مستوي کې بدلون بلل کیږي.

2- (   ) که د p شکل هر ټکی د P' شکل په یوه ټکي داسې تبدیل شي چې د p د شکل د هر ټکی واټن نظر یوه محورته د P' د شکل له هر ټکي سره مساوي وي دې بدلون ته انعکاس وایي.

3- (   ) د $T(x,y) = (-x,y)$ بدلون نسبت y محورته یوانعکاس دی.

4- (   ) د $T(x,y) = (x,-y)$ بدلون نسبت x محورته یو انعکاس دی.

5- (   ) د $T(x,y) = (y,x)$ بدلون نسبت $y = x$ مستقیم ته یوانعکاس دی.

6- (   ) انتقال هغه تغیرمکان یالیږدونه دی چې په هغه کې د واټونو یا فاصلو جهت اود زاویو پراخوالی ثابت پاتې شي.

7- (   ) که په مستوي کې یوشکل(O) ټاکلي ټکي په شاوخوا د $\hat{\alpha}$ زاویې په اندازه دوران وکړي د هغې ټول ټکي په عین زاویه دوارن کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- لاندې سوالونه حل کړئ

1- لاندې ټکي چې وضعيه کميات يې ورکړ شوی دی د وضعيه کمياتو په سيستم کې وټاکئ.

$1:\ (0,1)$ $\quad 2:\ (2,3)$ $\quad 3:\ (0,-4)$ $\quad 4:\ (5,0)$

2- د لاندې ټکو د جوړو ترمنځ واټن چې وضيعه کميات يې ورکړی شوی ښکاره کړئ.

$1:\ (0,9),(-5,4)$ $\quad 2:\ (4,1),(3,-2)$ $\quad 3:\ (-7,4),(1,-11)$

3-وښيئ چې لاندې ټکي د يوه قايم الزاويه مثلث راسونه دي او هم د مثلث مساحت پيدا کړئ.

$1:\ (0,9)\ ,\ (-4,-1)\ ,\ (3,2)$ $\quad 2:\ (3,-2)\ ,\ (-2,3)\ ,\ (4,-4)$

4-وښيئ چې لاندې ورکړی شوی ټکي په يوه مستقيمه کرښه دپاسه پراته دي.

$1:\ (0,4)\ ,\ (3,-2)\ ,\ (-2,8)$ $\quad 2:\ (1,2)\ ,\ (-3,10)\ ,\ (4,-4)$

5-د يوې مستقيمې کرښې ميل اويو ټکی په لاندې ډول ورکړل شوی د هغې معادله په لاس راوړئ.

$1:\ (2,3)\ ,\ m=-\dfrac{1}{2}$ $\quad 2:\ (-4,1)\ ,\ m=-\dfrac{2}{3}$ $\quad 3:\ (-1,-4)\ ,\ m=-2$

6- که د يوه مستطيل راسونه $(-3,1),(-1,3),(3,-1)$ او $(1,-3)$ وي مساحت يې پيدا کړئ.

7- که د يوه متوازي الضلاع راسونه $(5,9),(2,4),(4,9)$ او $(1,4)$ وي د قطرونو اوږدوالی يې پيدا کړئ.

8- وښيئ چې د $(-3,1),(-9,4),(12,0)$ او $(6,3)$ د يوه متوازي الضلاع راسونه دي.

9- که $(5,0),(-3,2)$ او $(1,-3)$ د يوه مثلث راسونه وي د اضلاعګانو د منځنی ټکي کميات وضيعه په لاس راوړئ.

10- ثبوت کړئ:

الف: چې د مربع قطرونه يو پربل عمود دي.

ب: چې د مستطيل قطرونه يوبل نيمايي کوي.

11- هغه مستقيم چې د $A(3,-1)$ او $B(5,3)$ ټکوڅخه تيريږی د وسطي عمود معادله يې پيدا کړئ.

12- د هغه مستقيم معادله پيدا کړئ چې $P(4,5)$ ټکي څخه تير شي او په ترتيب سره د x او y له محورونو سره موازي وي.

13- که چيرې $A(5,0), B(7,0)$ او $C(5,3)$ د يوه مثلث راسونه وي.

الف: د $T(x,y)=(-y+3,x-3)$ ترتيب لاندې مثلث او د هغه تصوير ياځيره رسم کړئ.

ب: د ABC مثلث تصوير د $R(x,y)=(-y,x)$ تر دوران لاندې پيدا کړئ او هغه ته $A'B'C'$ ووايئ وروسته د $T(x,y)=(x+3,y-3)$ تصوير يا ځيره د ترانتقال ياليږدونې لاندې وټاکئ.

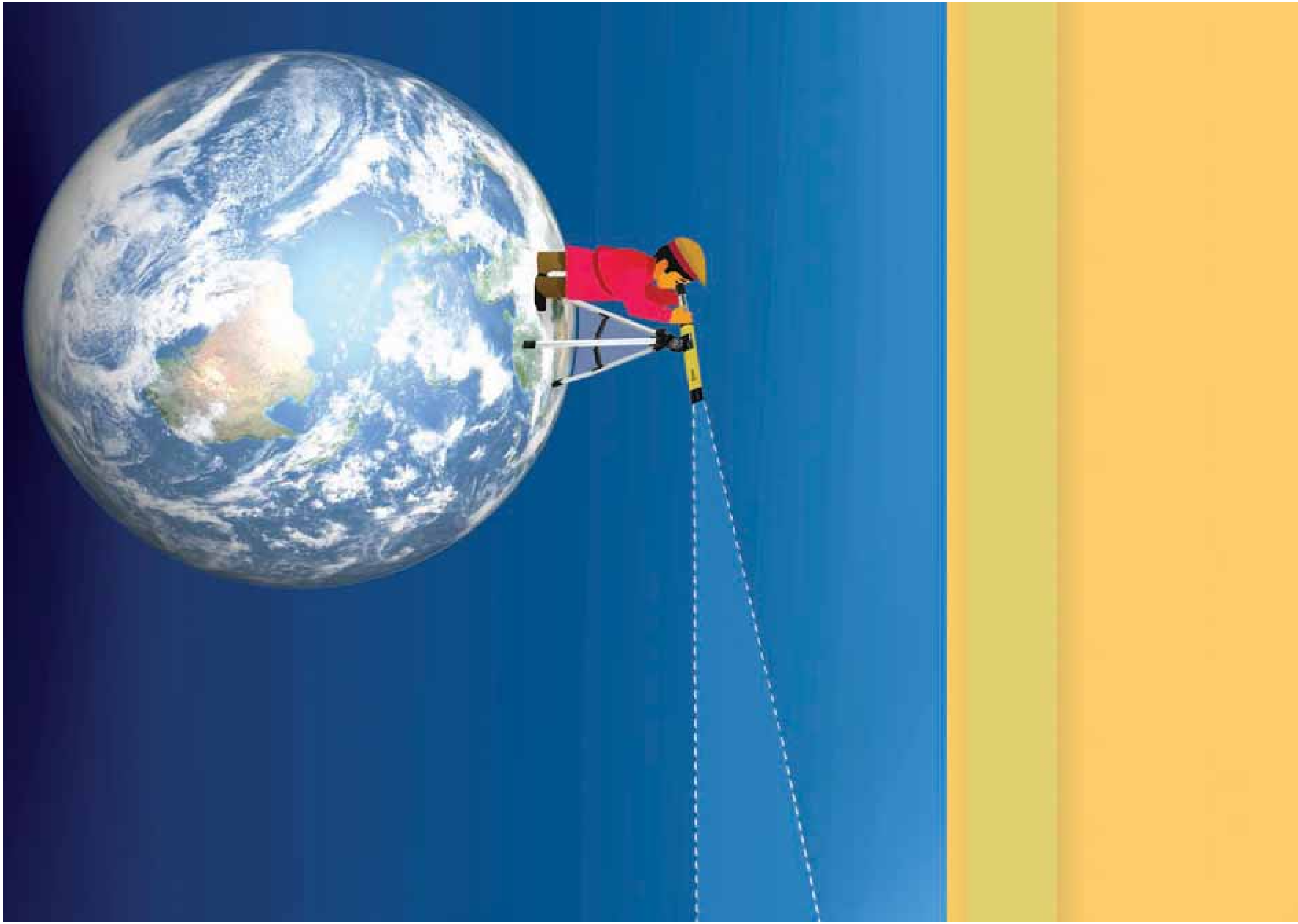
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم څپرکی

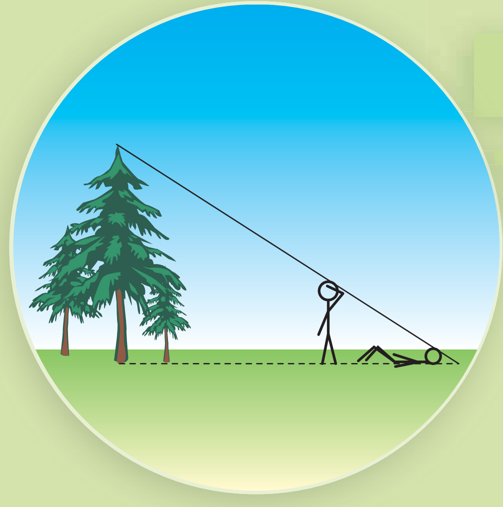
مثلثات

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

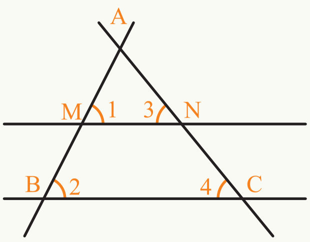
په مثلث کې د تالس قضیه



دوه زده کوونکي یو له بل سره خبرې کوي چې د یوې ونې جګ والي څنګه اندازه کړي یو بل ته داسې ورانديز وکړ او په خپله په ځمکه اوږد پريوت، هغه له خپل ملګري څخه وغوښتل چې دومره حرکت وکړي چې د ده سر او د ونې څوکه په يوه مستقيمه کرښه سره وويني. د زده کوونکي د وړانديز په سموالي سوچ وکړئ.

فعالیت

• د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې $\overline{MN}\,//\,\overline{BC}$ دی. د هر ټوټه کرښې اندازه په تش ځايونو کې وليکئ.



$\frac{\overline{MN}}{\overline{BC}} = \ldots$ $\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \ldots$ $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \ldots$

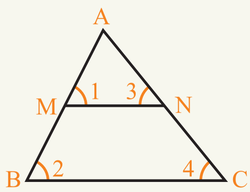
• هغه زاويې چې يو له بل سره مساوي دي وښيئ.

• د $\frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$، $\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$ او $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$ نسبتونه پيدا او يو له بل سره څه اړيکه لري؟

د پورتني فعاليت څخه د تالس قضيه داسې بيانوو؟

قضیه: که د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث په يوې ضلعې يا ځنډې موازي کرښه رسم کړو د تشکيل شوي مثلث د اضلاعو نسبت د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث پر اضلاعو يو له بل سره مساوي دي. دا قضيه په مثلث کې د تالس قضيې په نامه ياديږي.

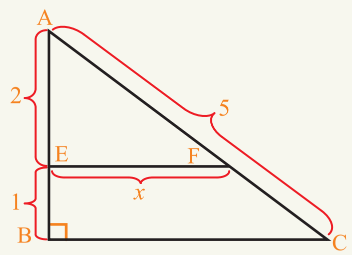
ثبوت: څرنګه چې د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې $\overline{MN}\,//\,\overline{BC}$ دي نو کولای شو وليکو چې:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{1} = \hat{2}\ldots\ldots \text{ متوافقه} \\ \hat{3} = \hat{4}\ldots\ldots \text{ متوافقه} \\ \hat{A} = \hat{A}\ldots\ldots \text{ مشترک}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AMN} \quad \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$$

لومړی مثال: د $\overset{\Delta}{ABC}$ په قایم الزاویه مثلث کې چې $\overline{EF}$ له $\overline{BC}$ سره موازي دي په پام کې ونیسئ د قایمو اضلاعو اود $\overline{EF}$ موازي کربښي اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې $\overline{EF}//\overline{BC}$ سره دي نو د تالس د قضیې په اساس دا دوه مثلثونه سره ورته یا متشابه دي نو کولای شو ولیکو چې:



$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$$

$$AC^2=BC^2+AB^2$$

$$5^2=BC^2+3^2$$

$$BC^2=25-16=9$$

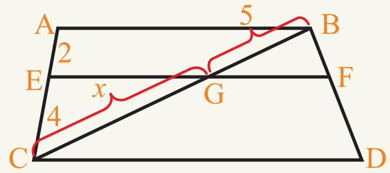
$$\boxed{BC=3}$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{x}{3}$$

$$x=2$$

دویم مثال: په لاندې ذوذنقه کې $\overline{EF}//\overline{BA}$ دي د x مقدار ورکړئ.



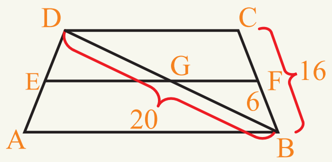
$$\frac{\overline{CG}}{\overline{GB}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \text{ یا } \frac{\overline{CG}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{GB}}{\overline{AE}}$$

$$\frac{x}{4}=\frac{5}{2} \Rightarrow x=\frac{4\cdot5}{2}=\frac{20}{2}$$

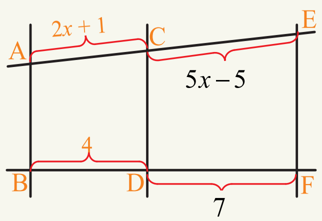
$$x=10$$

پوښتنې

1- د ذوذنقو په لاندې شکلونو کې د x مقدار ورکړئ.



2- په لاندې شکل کې چې $\overline{CD}//\overline{EF}$ او $\overline{AB}//\overline{CD}$ وي د x مقدار ورکړئ.

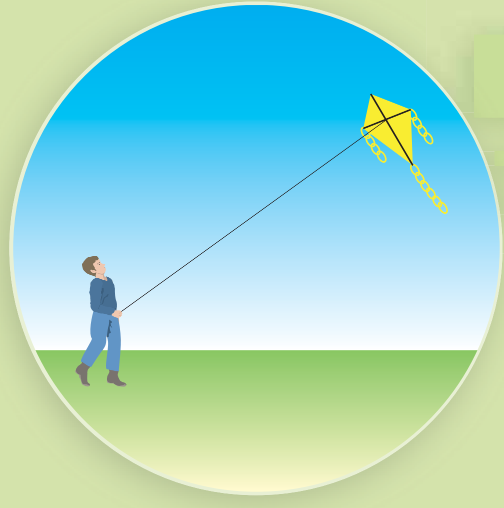


(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

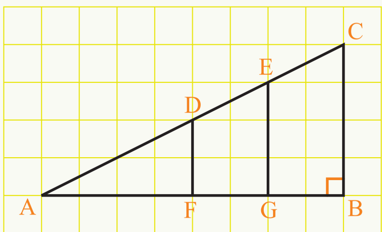
د يوې حاده زاويې ساين

که يو کاغذ پران په هوا کې د الوتلو په حالت کې وي، کولای شئ واتن يې د ځمکې څخه په لاس راوړئ؟



فعالیت

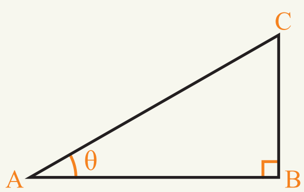
- په قايم الزاويه مثلث کې د $\overline{AC}$ په وتر باندې د D او E ټکي ټاکل شوي دي. د دې ټکو څخه د مثلث په $\overline{BC}$ ضلعه موازي رسم کړئ او د پريکړې ټکي يې په وار سره F او G نوموو.
- د خط کش څخه په ګټه اخيستنه د مثلث اضلاعوې اندازه او د $\frac{DF}{DA}=\frac{EG}{AE}$ او $\frac{BC}{AC}$ نسبتونه محاسبه او پرتله يې کړئ.



- ايا د D او E ټکو د ځای په بدلون سره د $\frac{DF}{DA}=\frac{EG}{AE}$ او $\frac{BC}{AC}$ نسبتونه هم بدلون کوي؟ ديوه ټکي په ټاکلو سره هغه وڅيرئ.
- د AC د ځای په بدلون د $\hat{A}$ زاويې په مقدار کې بدلون رامنځ ته کيږي.
- اوس $\overline{AC}$ ثابت پريږدئ او د $\hat{A}$ زاويې ته زياتوالی ورکړئ. سوچ وکړئ چې په پورتنيو مساوي نسبتونو کې څه پيښيږي؟ وې څيړئ؟

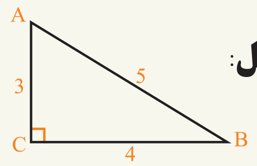
تعريف

په هر قايم الزاويه مثلث کې د يوې حاده زاويې د مخامخ ضلعې او وتر د اوږدوالي نسبت يو ثابت مقدار دی او د زاويې اندازې پورې اړه لري. دې نسبت ته د حاده زاويې ساين ($Sin\theta$) ويل کيږي.



$$\sin\theta = \frac{\text{د } \theta \text{ حاده زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}} = \frac{BC}{AC}$$

لومړی مثال: په لاندې شکل کې $SinA$ او $SinB$ په لاس راوړئ.

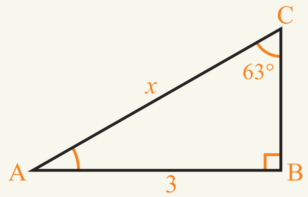


حل:

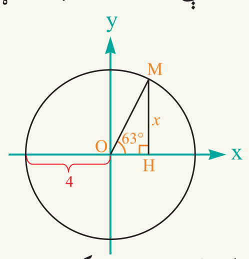
$$\sin A = \frac{\text{د } A \text{ زاويې د مخامخ ځنډي يا ضلعي اوږدوالى}}{\text{دوتر اوږدوالى}} = \frac{\overline{BC}}{AB} = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin\hat{A} = 0.8$$

$$\sin B = \frac{\text{د } B \text{ زاويې د مخامخ ځنډي يا ضلعي اوږدوالى}}{\text{دوتر اوږدوالى}} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5} = 0.6$$

دويم مثال: که $Sin63^o$ مساوي په 0,891 وي، په لاندې شکلونو کې د x اندازه پيدا کړئ.



شکل (الف)



شکل (ب)

حل:

د الف جزء: د يوې حادې زاويې د تعريف څخه په ګټه اخيستنه کولای شو وليکو چې:

$$\sin 63^\circ = \frac{AB}{AC}$$

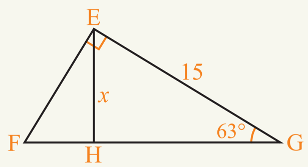
$$0.891 = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{3}{0.891} \quad \Rightarrow \quad x \approx 3.37$$

د ب جزء:

$$\sin 63^\circ = \frac{MH}{OM}$$

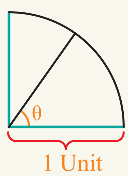
$$0.891 = \frac{x}{4} \Rightarrow x \approx 3.56$$

پوښتنې



1- که $Sin63^o$ مساوي په 0,891 وي، په مخامخ شکل کې د x عددي قيمت پيدا کړئ.

2- د دايرې د څلورمې برخې شکل په پام کې ونيسئ.



الف: که د θ زاويه لويه شي $Sin\theta$ څرنګه بدلون مومي؟

ب: که د θ زاويه صفر ته نږدې شي، $Sin\theta$ کوم عدد ته نږدې کېږي.

ج: که زاويه 90^o ته نږدې شي، $Sin\theta$ کوم عدد ته نږدې کېږي.

3- د $80^o, 40^o$ او 65^o زاويې په وار سره رسم او بيا په هره زاويه يو قايم الزاويه مثلث کې رسم کړئ د کرښې يا خط کش څخه په ګټه اخيستنه د مثلث اضلاعوې اندازه او $Sin80^o, Sin65^o$ او $Sin40^o$ پيدا کړئ او يو له بل سره يې پرتله کړئ.

4- يو متساوي الساقين مثلث چې قاعده يې 8 واحده او $\hat{B} = 54^\circ$ وي رسم کړئ که يوه څنډه يا ضلعه يې 5 واحده وي د B زاويې Sin ساين پيدا کړئ.

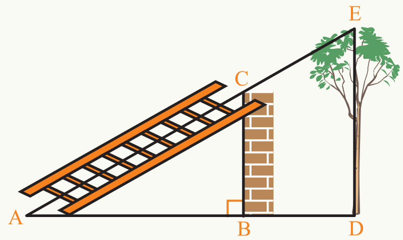
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې حاده زاويې کوساين

ديوه ديوال شاته د ناجو يوه ونه ولاړه ده. يو زده کوونکی غواړي و پوهيږي چې ونه له ديواله څومره واټن لري. د دې کار لپاره يې يوازې يوه لنډه زينه درلوده. فکر وکړئ هغه څه سوچ کوئ؟

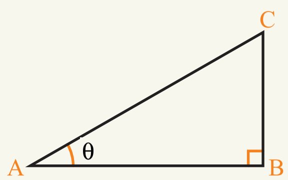
فعاليت



- په مخامخ شکل کې د تشکيل شويو مثلثونو نومونه واخلئ.
- $\overline{BC}$ او $\overline{DE}$ يو له بل سره څه اړيکه لري؟ ولې؟
- د $\overset{\Delta}{ABC}$ او $\overset{\Delta}{ADE}$ مثلثونه يو بل سره څه اړيکه لري.
- د زينې واټن تر ديوال او بيا يې تر ونې پورې پيدا کړئ.
- د تالس د قضيې په مرسته لاندې مساوات تکميل او د $\overline{AE}$ اوږدوالی په لاس راوړئ.
- دا مقدار په څه پورې تړلی دی. $\frac{AB}{AC} = \frac{....}{AE}$

په عمومي ډول د $\overset{\Delta}{ABC}$ په قايم الزاويه مثلث کې چې يوه حاده زاويه يې θ ده، د دې زاويې د ګاونډې يا مجاورې ضلعې د اوږدوالي او دوتر د اوږدوالي نسبت ته کوساين وايي.

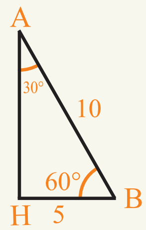
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\text{د } \theta \text{ زاويې دګاونډې ضلعې اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}} \cos\theta$$



مثال: د AHB په مثلث کې چې $\hat{A}=30^\circ$ او $\hat{B}=60^\circ$ وي وښيئ چې

$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ او $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ دی.

حل: د فیثاغورث د قضیې څخه په ګټه اخیستنه د AH جګوالی کولای شو ولیکو چې:



$$\overline{AB}^2=\overline{AH}^2+\overline{HB}^2$$

$$10^2=\overline{AH}^2+5^2 \Rightarrow \overline{AH}^2=100-25=75$$

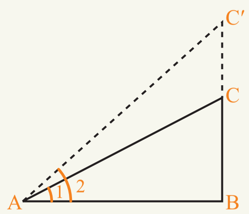
$$\overline{AH}=\sqrt{75} \Rightarrow \overline{AH}=5\sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 60^\circ=\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ=\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2} \quad , \quad \cos 30^\circ=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

پوښتنې

1- که یوه حاده زاویه لویه شي، د کوساین په اندازه کې څه بدلون راځي؟ ولې؟
د مخامخ مثلث او مثلثاتي دایرې په مرسته خپل نظر بیان کړئ.



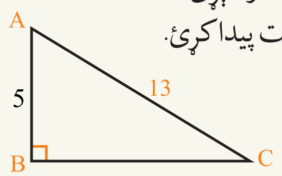
- د $CosA_1$ لپاره یو نسبت ولیکئ.
- د $CosA_2$ لپاره یو نسبت ولیکئ.
- په تشو ځایونو کې مناسبې علامې ولیکئ.

$\overline{AC'}$ ☐ $\overline{AC}$

$\cos A_2$ ☐ $\cos A_1$

2- د $30^o, 45^o$ او 60^o زاویو لپاره $Sin^2A+Cos^2A=1$ اریکه وڅیړئ؟

3- په لاندې قایم الزاویه مثلث کې د $SinA$ او $CosA$ عددي قیمت پیدا کړئ.



4- د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې چې د اضلاعو یا څنډو اوږدوالې یې 8,6 او ۱۰ واحده وي د $SinA$ او $CosA$ مثلثاتي نسبتونه محاسبه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

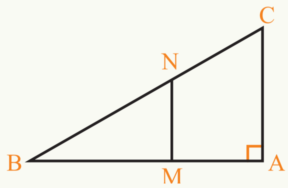
(c) ketabton.com: The Digital Library

د حاده زاويې تانجنت

يو زده کوونکی د بيرغ مخکې ولاړ دی.
سوچ کوئ چې د بيرغ د میلې اوږدوالی
څنګه پیدا کړي؟

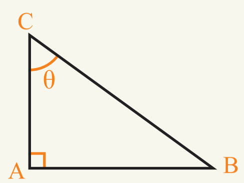
فعاليت

د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث چې د $\hat{A}$ زاويه يې قايمه ده د $\hat{B}$ زاويې مثلثاتي نسبتونه $(\cos\hat{B}, \sin\hat{B})$ په پام کې ونيسئ چې د $\overline{MN}$ توټه کرښه په $\overline{AC}$ موازي رسم شوې ده.



- د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث په پام کې نيولو سره $\sin\hat{B}$ او $\cos\hat{B}$.
  د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث اضلاعو يا د ځنډو له مخې ولیکئ.
- د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث اضلاعو يا له مخې د $\dfrac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}$ نسبت ولیکئ.
- د $\overset{\Delta}{BMN}$ مثلث څخه په ګټه اخيستنه او داضلاعو يا ځنډو له مخې $\dfrac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}$ ولیکئ.
  د $\overline{MN}, \overline{BC}, \overline{AC}$ او $\overline{BN}$ کرښو د مخامخ اندازه کولو په مرسته پورتني دوه نسبتونه سره پرتله کړئ.
- سوچ وکړئ که چیرې $\dfrac{CosB}{SinB}$ پيدا کړو نو دا نسبت د مخامخ ځنډو يا اضلاعو د اوږدوالي سره تړاو لري يا يوازې د زاويې په مقدار پورې تړاو لري.

لومړی پايله: په يوه قايم الزاويه مثلث کې د يوې حاده زاويې د مخامخ ځنډې يا ضلعې اوږدوالي او د هغه زاويې د ګاونډي ضلعې د اوږدوالي نسبت يو ثابت مقدار دی چې د (د حاده زاويې تانجنت) په نامه ياديږي.



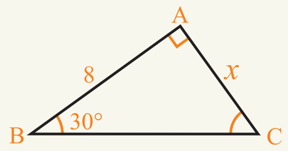
$$\tan\theta = \frac{\overline{AB} \text{ د } \hat{\theta} \text{ زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی}}{\overline{AC} \text{ د } \hat{\theta} \text{ زاويې د ګاونډې ضلعې اوږدوالی}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویمه پایله: د θ حاده زاویې تانجنت د حاده زاویې سـاین پر کوسـاین له نسـبت سره مساوي دی:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

دریمـه پایلـه: $\frac{Cos\theta}{Sin\theta}$ یو بل مقـدار دی چې د حاده زاویـې کوتانجنت (Cotangentθ) یـا د θ زاویـې دګاونډې یا مجـاورې ضلعې اوږدوالـې د θ زاویې د مخامخ خنـډې یا مقابلې ضلعې پر اوږدوالي ته کوتانجنت $Cot\theta$ وایي. دا نسـبت د نورو نسـبتونو په شان یوازې د زاویې په پراخوالي پورې اړه لري.



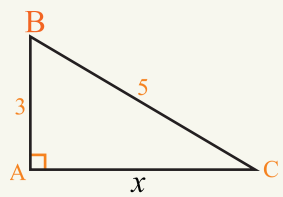
لومړی مثال: په لاندې مثلث کې چې $x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ دی که د $\tan 30^\circ$ عددي قیمت په لاس راوړئ.

حل: د $\tan\theta$ تعریف څخه په ګټه اخیستنه کولای شو ولیکو چې:

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{8} \Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{8\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

دویم مثال: د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث چې لاندې رسم شوی دی، په دې مثلث کې $\tan c, \cos c, \sin c$ او $\cot c$ په لاس راوړئ او د $\tan c$ رابطه د $\cos c$ او $\sin c$ نسبتونو سره پرتله کړئ.

حل: لومړی د فیثاغورث د قضیې په مرسته د ABC په مثلث کې د AC اوږدوالی پیدا کوو.



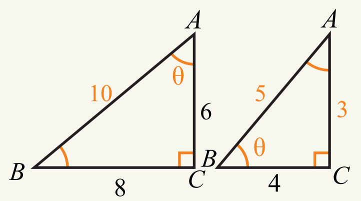
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 25 - 9 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$\sin C = \frac{3}{5} \qquad \cos C = \frac{4}{5} \quad , \quad \tan C = \frac{3}{4} \quad , \quad \cot C = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4} \qquad \tan C = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \tan C = \frac{\operatorname{Sin} C}{\operatorname{Cos} C}$$

پوښتنې

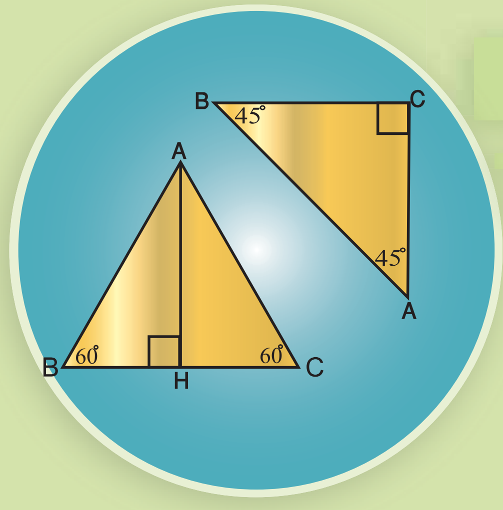


1- په مخامخ شکلونو کې $Sin\theta, Cos\theta, \tan\theta$ او $Cot\theta$ پیدا کړئ.

2- د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې چې ضلعې یې سره مساوي دي $\tan A$ او $\tan B$ پیدا کړئ.

3- که د یوه قایم الزاویه مثلث قاعده ثابته وساتو او حاده زاویه یې لویه شي د $\tan\theta$ په نسبت کې څه بدلون پیښیږي.

د ځانګړو زاویو مثلثاتي نسبتونه
($30°$، $60°$، $45°$ او $90°$)



مخامخ مثلثونه څه ډول مثلثونه دي د اضلاعګانو اوږدوالی یې وټاکئ.

فعالیت

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ یو متساوي الاضلاع مثلث رسم کړئ.
- د $\overline{AH}$ ارتفاع یا جګوالی رسم کړئ، په دې ډول مثلثونو کې جګوالی کومې ځانګړتیاوې لري.
- د فیثاغورث د قضیې څخه په ګټه اخیستنه د جګوالي یا ارتفاع اوږدوالی یا د مثلث جګوالی پیدا کړئ.
- ایا کولای شئ چې د $30°$ او $60°$ زاویو مثلثاتي نسبتونو عددي قیمت پیدا کړئ.
- د $\overset{\Delta}{ABC}$ یو متساوي الساقین، قایم الزاویه مثلث رسم کړئ، چې د هرې ضلعې یا ځنډې اوږدوالی یې یو واحدوي.
- هره حاده زاویه څو درجې ده؟ ولې؟ د وتر د اوږدوالي اندازه یې حساب کړئ.
- د $45°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه په لاس راوړئ.

د پورتني فعالیت څخه لاندې جدول جوړ ولای شو.

زاویې / مثلثاتي نسبتونه	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	نا ټاکلی (نا معین)

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: په لاندې اړیکو یا رابطو کې د x او y عددي قیمت پیدا کړئ.

1) $x=\sin 60^\circ+\sin 30^\circ$
2) $y=\cos 60^\circ+\cos 30^\circ$
3) $\tan 60^\circ-\sin 30^\circ=?$
4) $y=\tan 30^\circ-\cos 60^\circ$
5) $\tan 45^\circ-\sin 45^\circ=?$
6) $y=\tan 30^\circ+\tan 60^\circ$

حل: په پورتنیو اړیکو کې د هر مثلثاتي نسبت په ځای عددي قیمت وضع کوو:

1) $x=\sin 60^\circ+\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

2) $y=\cos 60^\circ+\cos 30^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

3) $x=\tan 60^\circ-\sin 30^\circ=\sqrt{3}-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$

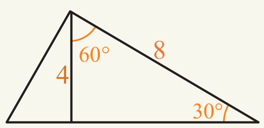
4) $y=\tan 30^\circ-\cos 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$

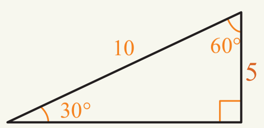
5) $x=\tan 45^\circ-\sin 45^\circ=1-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

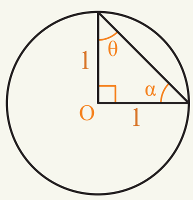
6) $y=\tan 30^\circ+\tan 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{3}$

پوښتنې

په لاندې شکلونو کې د $30^o, 45^o$ او 60^o زاویو د $\tan, Cos, Sin$ او Cot مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.



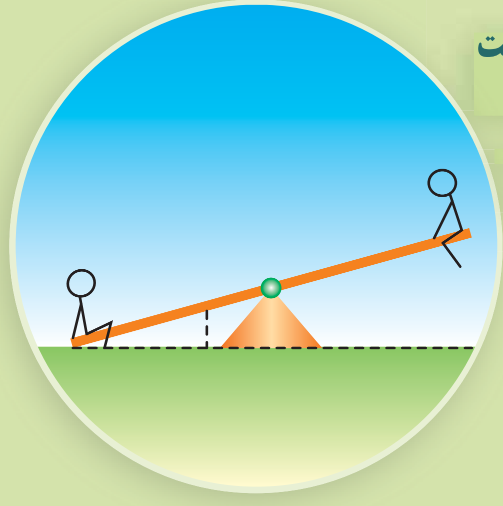




(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه مستقيم خط د ميل او تانجنت اړيکه



د رافعي ميل ښــی یاکيڼــي خوا ته په څه پورې اړه لري؟

فعاليت

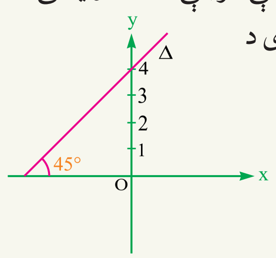
- د $B(0,0), C(1,0)$ او $A(1,3)$ ټکي د وضعيه کمياتو په مستوي کې وښيئ، هغه مثلث چې راسونه د دې ټکو څخه جوړېږي څه ډول مثلث دی؟ ولې؟
- د $\overline{AB}$ مستقيمې کرښې ميل په لاس راوړئ.
- د $\overline{AB}$ مستقيمې کرښې معادله د $y = mx + h$ په شکل وليکئ.
- $\tan A$ په لاس راوړئ د $\overline{AB}$ د مستقيمې کرښې د ميل سره څه اړيکه لري؟
- د $\overline{AB}$ په مستقيم دوه اختياري ټکي په پام کې ونيسئ، د دې ټکو په لرلوسره د مستقيمې کرښې ميل پيدا کړئ. ايا د $\tan B$ د مستقيمې کرښې د ميل برابرې ليدل کيږي؟

د پورتني فعاليت څخه ليدل کيږي، چې د هغې مستقيمې کرښې ميل چې د x له محور سره حاده زاويه جوړوي، د هغې زاويې له تانجنت سره چې د کرښې او د x محور مثبت جهت سره يې جوړوي برابره ده. د $y = mx + h$ معادله کې $m = \tan A$ دی.

لومړی مثال: د Δ مستقيمه کرښه د y محور په 4 کې پريکوي او د x محور له مثبت جهت سره 45^o زاويه جوړوي، که $\tan 45^o = 1$ وي د Δ مستقيمې کرښې معادله وليکئ.

حل: پوهيږو چې د مستقيمې کرښې معادله $y = mx + h$ ده نو لومړی د مستقيمې کرښې ميل په لاس راوړو:

$$\left.\begin{array}{l} m = \tan\theta \\ m = \tan 45^o \\ m = 1 \\ h = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = mx + h \\ y = x + 4 \end{array}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $\sqrt{3}y - x = 2\sqrt{3}$ مستقيمي کرښې په معادله کې د مستقيمي کرښې ميل، د ميل زاويه او د y له محور سره د پريکړې ټکي په لاس راوړئ.

حل: لومړی د مستقيمي کرښې معادله په ستندرد شکل $y = mx + h$ بدلوو چې وروسته يې ميل او له محور سره د پريکړې ټکي په اسانۍ سره پيدا کولای شو.

$$\sqrt{3}\,y - x = 2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}\,y = x + 2\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$$

$$m = \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30^\circ \qquad , \qquad h = 2$$

ايا کولای شئ د فيثاغورث د قضيې او مثلثات ترمنځ اړيکه پيدا کړئ.

فعاليت

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ يو قايم الزاويه مثلث چې قايمې جوړونکې ضلعې يې 6 او 8 دي رسم او قايمه زاويه يې په A وښيئ.
- $\sin B$, $\cos B$, $(\sin B)^2$, $(\cos B)^2$ او $(\sin B)^2 + (\cos B)^2$ حساب کړئ.
- $\sin B$, $\cos B$, $(\sin B)^2$, $(\cos B)^2$ او $(\sin B)^2 + (\cos B)^2$ د AC, AB او BC اضلاعو له جنسه وليکئ څه پايله ترې اخلئ.

د پورتني فعاليت څخه ښکاري چې د يوې حاده زاويې د ساين او کوساين د مربعاتو جمع مساوي له 1 سره ده. $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$

ځينې وخت د مثلثاتي نسبت د توان علامه په لاندې ډول سره ښودل کيږي.

$$(\sin A)^2 = \sin^2 A$$

پاملرنه وکړئ چې د 2 توان د زاويې په ساين پورې اړه لري نه په زاويه پورې $SinA^2 \neq Sin^2 A$

پوښتنې

1- د هغه مستقيمې کرښې معادله په لاس راوړئ چې د x محور له مثبت جهت سره 60^o زاويه جوړه کړي او د y محور په $(0,5)$ ټکي کې پرې کړي.

2- د $y = x + 4$ کرښې په معادله کې ميل، د ميل زاويه او د y له محور سره د پريکړې ټکي پيدا کړئ.

a) $\dfrac{(\sin\theta + \cos\theta)^2}{1 + 2\sin\theta\cos\theta} = 1$

b) $1 + (\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta})^2 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

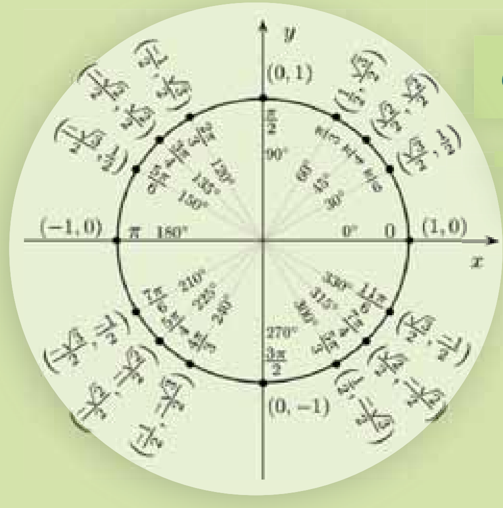
c) $\dfrac{\tan^2\theta - \sin^2\theta}{\cos\theta} = \sin\theta \times \tan^3\theta$

d) $\dfrac{(\sin A + \cos A)^2 - 1}{2\sin A} = \cos A$

e) $\sin^4 A + \cos^2 A \times \sin^2 A + \cos^2 A = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلثاتي جدول او دهغې استعمال



په مخامخ مثلثاتي دايرې په شکل کې د نوموړو زاويو مثلثاتي نسبتونه ښودلای شئ.

فعاليت

- يو متساوي الاضلاع مثلث رسم او هرې زاويې پراخوالی يې وټاکئ.
- په يو مثلث کې د 30° او 60° زاويو مثلثاتي نسبتونه پيداکړئ.
- د زاويې مثلثاتي نسبتونه په يوه مثلث کې وټاکئ.
- ايا د هرې زاويې مثلثاتي نسبتونه په پورته شکل پيداکولای شو؟

د پورتنی فعاليت پايله داسې بيانوو:

پايله:

د ځينوزاويو مثلثاتي نسبتونه کولای شو په أسانی سره په لاس راوړو خو د يو شمېر نورو زاويو د مثلثاتي نسبتونو محاسبه گران کار دی نو ددې کار لپاره د ځينو پوهانو لخوا مثلثاتي جدولونه د خاصو فورمولونو په واسطه جوړ شوی چې ددې ډوله جدول په مرسته د هرې زاويې مثلثاتي نسبتونه پيداکولای شو.

د يادونې وړ ده چې د جدول په ترتيب کې په يوه قايم الزاويه مثلث کی د θ او $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ يا $(90-\theta)$ زاويو د اړيکو څخه گټه اخيستل شوی ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلثاتی جدول

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
0° 00′	0.0000	1.0000	0.0000	∞	90° 00′
10	0.0029	1.0000	0.0029	343.77	50
20	0.0058	1.0000	0.0058	171.89	40
30	0.0087	1.0000	0.0087	114.59	30
40	0.0116	0.9999	0.0116	85.940	20
50	0.0145	0.9999	0.0145	68.750	10
1° 00′	0.0175	0.9998	0.0175	57.290	89° 00′
10	0.0204	0.9998	0.0204	49.104	50
20	0.0233	0.9997	0.0233	42.964	40
30	0.0262	0.9997	0.0262	38.188	30
40	0.0291	0.9996	0.0291	34.368	20
50	0.0320	0.9995	0.0320	31.242	10
2° 00′	0.0349	0.9994	0.0349	28.636	88° 00′
10	0.0378	0.9993	0.0378	26.432	50
20	0.0407	0.9992	0.0407	24.542	40
30	0.0436	0.9990	0.0437	22.904	30
40	0.0465	0.9989	0.0466	21.470	20
50	0.0494	0.9988	0.0495	20.206	10
3° 00′	0.0523	0.9986	0.0524	19.081	87° 00′
10	0.0552	0.9985	0.0553	18.075	50
20	0.0581	0.9983	0.0582	17.169	40
30	0.0610	0.9981	0.0612	16.350	30
40	0.0640	0.9980	0.0641	15.605	20
50	0.0669	0.9978	0.0670	14.924	10
4° 00′	0.0698	0.9976	0.0699	14.301	86° 00′
10	0.0727	0.9974	0.0729	13.727	50
20	0.0756	0.9971	0.0758	13.197	40
30	0.0785	0.9969	0.0787	12.706	30
40	0.0814	0.9967	0.0816	12.251	20
50	0.0843	0.9964	0.0846	11.826	10
5° 00′	0.0872	0.9962	0.0875	11.430	85° 00′
10	0.0901	0.9959	0.0904	11.059	50
20	0.0929	0.9957	0.0934	10.712	40
30	0.0958	0.9954	0.0963	10.385	30
40	0.0987	0.9951	0.0992	10.078	20
50	0.1016	0.9948	0.1022	9.7882	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

(c) ketabton.com: The Digital Library

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
6° 00′	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	**84°** 00′
10	0.1074	0.9942	0.1080	9.2553	50
20	0.1103	0.9939	0.1110	9.0098	40
30	0.1132	0.9936	0.1139	8.7769	30
40	0.1161	0.9932	0.1169	8.5555	20
50	0.1190	0.9929	0.1198	8.3450	10
7° 00′	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	**83°** 00′
10	0.1248	0.9922	0.1257	7.9530	50
20	0.1276	0.9918	0.1287	7.7704	40
30′	0.1305	0.9914	0.1317	7.5958	30′
40	0.1334	0.9911	0.1346	7.4287	20
50	0.1363	0.9907	0.1376	7.2687	10
8° 00′	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	**82°** 00′
10	0.1421	0.9899	0.1435	6.9682	50
20	0.1449	0.9894	0.1465	6.8269	40
30	0.1478	0.9890	0.1495	6.6912	30
40	0.1507	0.9886	0.1524	6.5606	20
50	0.1536	0.9881	0.1554	6.4348	10
9° 00′	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	**81°** 00′
10	0.1593	0.9872	0.1614	6.1970	50
20	0.1622	0.9868	0.1644	6.0844	40
30	0.1650	0.9863	0.1673	5.9758	30
40	0.1679	0.9858	0.1703	5.8708	20
50	0.1708	0.9853	0.1733	5.7694	10
10° 00′	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	**80°** 00′
10	0.1765	0.9843	0.1793	5.5764	50
20	0.1794	0.9838	0.1823	5.4845	40
30	0.1822	0.9833	0.1853	5.3955	30
40	0.1851	0.9827	0.1883	5.3093	20
50	0.1880	0.9822	0.1914	5.2257	10
11° 00′	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	**79°** 00′
10	0.1937	0.9811	0.1974	5.0658	50
20	0.1965	0.9805	0.2004	4.9894	40
30	0.1994	0.9799	0.2035	4.9152	30
40	0.2022	0.9793	0.2065	4.8430	20
50	0.2051	0.9787	0.2095	4.7729	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

(c) ketabton.com: The Digital Library

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
12° 00′	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	**78°** 00′
10	0.2108	0.9775	0.2156	4.6382	50
20	0.2136	0.9769	0.2186	4.5736	40
30	0.2164	0.9763	0.2217	4.5107	30
40	0.2193	0.9757	0.2247	4.4494	20
50	0.2221	0.9750	0.2278	4.3897	10
13° 00′	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	**77°** 00′
10	0.2278	0.9737	0.2339	4.2747	50
20	0.2306	0.9730	0.2370	4.2193	40
30	0.2334	0.9724	0.2401	4.1653	30
40	0.2363	0.9717	0.2432	4.1126	20
50	0.2391	0.9710	0.2462	4.0611	10
14° 00′	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	**76°** 00′
10	0.2447	0.9696	0.2524	3.9617	50
20	0.2476	0.9689	0.2555	3.9136	40
30	0.2504	0.9681	0.2586	3.8667	30
40	0.2532	0.9674	0.2617	3.8208	20
50	0.2560	0.9667	0.2648	3.7760	10
15° 00′	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	**75°** 00′
10	0.2616	0.9652	0.2711	3.6891	50
20	0.2644	0.9644	0.2742	3.6470	40
30	0.2672	0.9636	0.2773	3.6059	30
40	0.2700	0.9628	0.2805	3.5656	20
50	0.2728	0.9621	0.2836	3.5261	10
16° 00′	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	**74°** 00′
10	0.2784	0.9605	0.2899	3.4495	50
20	0.2812	0.9596	0.2931	3.4124	40
30	0.2840	0.9588	0.2962	3.3759	30
40	0.2868	0.9580	0.2994	3.3402	20
50	0.2896	0.9572	0.3026	3.3052	10
17° 00′	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	**73°** 00′
10	0.2952	0.9555	0.3089	3.2371	50
20	0.2979	0.9546	0.3121	3.2041	40
30	0.3007	0.9537	0.3153	3.1716	30
40	0.3035	0.9528	0.3185	3.1397	20
50	0.3062	0.9520	0.3217	3.1084	10
18° 00′	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	**72°** 00′
10	0.3118	0.9502	0.3281	3.0475	50
20	0.3145	0.9492	0.3314	3.0178	40
30	0.3173	0.9483	0.3346	2.9887	30
40	0.3201	0.9474	0.3378	2.9600	20
50	0.3228	0.9465	0.3411	2.9319	10
19° 00′	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	**71°** 00′
10	0.3283	0.9446	0.3476	2.8770	50
20	0.3311	0.9436	0.3508	2.8502	40
30	0.3338	0.9426	0.3541	2.8239	30
40	0.3365	0.9417	0.3574	2.7980	20
50	0.3393	0.9407	0.3607	2.7725	10
20° 00′	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	**70°** 00′
10	0.3448	0.9387	0.3673	2.7228	50
20	0.3475	0.9377	0.3706	2.6985	40
30	0.3502	0.9367	0.3739	2.6746	30
40	0.3529	0.9356	0.3772	2.6511	20
50	0.3557	0.9346	0.3805	2.6279	10
21° 00′	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	**69°** 00′
10	0.3611	0.9325	0.3872	2.5826	50
20	0.3638	0.9315	0.3906	2.5605	40
30	0.3665	0.9304	0.3939	2.5386	30
40	0.3692	0.9293	0.3973	2.5172	20
50	0.3719	0.9283	0.4006	2.4960	10
22° 00′	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	**68°** 00′
10	0.3773	0.9261	0.4074	2.4545	50
20	0.3800	0.9250	0.4108	2.4342	40
30	0.3827	0.9239	0.4142	2.4142	30
30′	0.3827	0.9239	0.4142	2.4142	30′
40	0.3854	0.9228	0.4176	2.3945	20
50	0.3881	0.9216	0.4210	2.3750	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
23° 00′	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	**67°** 00′
10	0.3934	0.9194	0.4279	2.3369	50
20	0.3961	0.9182	0.4314	2.3183	40
30	0.3987	0.9171	0.4348	2.2998	30
40	0.4014	0.9159	0.4383	2.2817	20
50	0.4041	0.9147	0.4417	2.2637	10
24° 00′	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	**66°** 00′
10	0.4094	0.9124	0.4487	2.2286	50
20	0.4120	0.9112	0.4522	2.2113	40
30	0.4147	0.9100	0.4557	2.1943	30
40	0.4173	0.9088	0.4592	2.1775	20
50	0.4200	0.9075	0.4628	2.1609	10
25° 00′	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	**65°** 00′
10	0.4253	0.9051	0.4699	2.1283	50
20	0.4279	0.9038	0.4734	2.1123	40
30	0.4305	0.9026	0.4770	2.0965	30
40	0.4331	0.9013	0.4806	2.0809	20
50	0.4358	0.9001	0.4841	2.0655	10
26° 00′	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	**64°** 00′
10	0.4410	0.8975	0.4913	2.0353	50
20	0.4436	0.8962	0.4950	2.0204	40
30	0.4462	0.8949	0.4986	2.0057	30
40	0.4488	0.8936	0.5022	1.9912	20
50	0.4514	0.8923	0.5059	1.9768	10
27° 00′	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	**63°** 00′
10	0.4566	0.8897	0.5132	1.9486	50
20	0.4592	0.8884	0.5169	1.9347	40
30	0.4617	0.8870	0.5206	1.9210	30
40	0.4643	0.8857	0.5243	1.9074	20
50	0.4669	0.8843	0.5280	1.8940	10
28° 00′	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	**62°** 00′
10	0.4720	0.8816	0.5354	1.8676	50
20	0.4746	0.8802	0.5392	1.8546	40
30	0.4772	0.8788	0.5430	1.8418	30
40	0.4797	0.8774	0.5467	1.8291	20
50	0.4823	0.8760	0.5505	1.8165	10
29° 00′	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	**61°** 00′
10	0.4874	0.8732	0.5581	1.7917	50
20	0.4899	0.8718	0.5619	1.7796	40
30	0.4924	0.8704	0.5658	1.7675	30
40	0.4950	0.8689	0.5696	1.7556	20
50	0.4975	0.8675	0.5735	1.7437	10
30° 00′	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	**60°** 00′
10	0.5025	0.8646	0.5812	1.7205	50
20	0.5050	0.8631	0.5851	1.7090	40
30	0.5075	0.8616	0.5890	1.6977	30
40	0.5100	0.8601	0.5930	1.6864	20
50	0.5125	0.8587	0.5969	1.6753	10
31° 00′	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	**59°** 00′
10	0.5175	0.8557	0.6048	1.6534	50
20	0.5200	0.8542	0.6088	1.6426	40
30	0.5225	0.8526	0.6128	1.6319	30
40	0.5250	0.8511	0.6168	1.6212	20
50	0.5275	0.8496	0.6208	1.6107	10
32° 00′	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	**58°** 00′
10	0.5324	0.8465	0.6289	1.5900	50
20	0.5348	0.8450	0.6330	1.5798	40
30	0.5373	0.8434	0.6371	1.5697	30
40	0.5398	0.8418	0.6412	1.5597	20
50	0.5422	0.8403	0.6453	1.5497	10
33° 00′	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	**57°** 00′
10	0.5471	0.8371	0.6536	1.5301	50
20	0.5495	0.8355	0.6577	1.5204	40
30	0.5519	0.8339	0.6619	1.5108	30
40	0.5544	0.8323	0.6661	1.5013	20
50	0.5568	0.8307	0.6703	1.4919	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

(c) ketabton.com: The Digital Library

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
34° 00′	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	**56°** 00′
10	0.5616	0.8274	0.6787	1.4733	50
20	0.5640	0.8258	0.6830	1.4641	40
30	0.5664	0.8241	0.6873	1.4550	30
40	0.5688	0.8225	0.6916	1.4460	20
50	0.5712	0.8208	0.6959	1.4370	10
35° 00′	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	**55°** 00′
10	0.5760	0.8175	0.7046	1.4193	50
20	0.5783	0.8158	0.7089	1.4106	40
30	0.5807	0.8141	0.7133	1.4019	30
40	0.5831	0.8124	0.7177	1.3934	20
50	0.5854	0.8107	0.7221	1.3848	10
36° 00′	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	**54°** 00′
10	0.5901	0.8073	0.7310	1.3680	50
20	0.5925	0.8056	0.7355	1.3597	40
30	0.5948	0.8039	0.7400	1.3514	30
40	0.5972	0.8021	0.7445	1.3432	20
50	0.5995	0.8004	0.7490	1.3351	10
37° 00′	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	**53°** 00′
10	0.6041	0.7969	0.7581	1.3190	50
20	0.6065	0.7951	0.7627	1.3111	40
30	0.6088	0.7934	0.7673	1.3032	30
40	0.6111	0.7916	0.7720	1.2954	20
50	0.6134	0.7898	0.7766	1.2876	10
38° 00′	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	**52°** 00′
10	0.6180	0.7862	0.7860	1.2723	50
20	0.6202	0.7844	0.7907	1.2647	40
30	0.6225	0.7826	0.7954	1.2572	30
40	0.6248	0.7808	0.8002	1.2497	20
50	0.6271	0.7790	0.8050	1.2423	10
39° 00′	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	**51°** 00′
10	0.6316	0.7753	0.8146	1.2276	50
20	0.6338	0.7735	0.8195	1.2203	40
30	0.6361	0.7716	0.8243	1.2131	30
40	0.6383	0.7698	0.8292	1.2059	20
50	0.6406	0.7679	0.8342	1.1988	10
40° 00′	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	**50°** 00′
10	0.6450	0.7642	0.8441	1.1847	50
20	0.6472	0.7623	0.8491	1.1778	40
30	0.6494	0.7604	0.8541	1.1708	30
40	0.6517	0.7585	0.8591	1.1640	20
50	0.6539	0.7566	0.8642	1.1571	10
41° 00′	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	**49°** 00′
10	0.6583	0.7528	0.8744	1.1436	50
20	0.6604	0.7509	0.8796	1.1369	40
30	0.6626	0.7490	0.8847	1.1303	30
40	0.6648	0.7470	0.8899	1.1237	20
50	0.6670	0.7451	0.8952	1.1171	10
42° 00′	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	**48°** 00′
10	0.6713	0.7412	0.9057	1.1041	50
20	0.6734	0.7392	0.9110	1.0977	40
30	0.6756	0.7373	0.9163	1.0913	30
40	0.6777	0.7353	0.9217	1.0850	20
50	0.6799	0.7333	0.9271	1.0786	10
43° 00′	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	**47°** 00′
10	0.6841	0.7294	0.9380	1.0661	50
20	0.6862	0.7274	0.9435	1.0599	40
30	0.6884	0.7254	0.9490	1.0538	30
40	0.6905	0.7234	0.9545	1.0477	20
50	0.6926	0.7214	0.9601	1.0416	10
44° 00′	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	**46°** 00′
10	0.6967	0.7173	0.9713	1.0295	50
20	0.6988	0.7153	0.9770	1.0235	40
30	0.7009	0.7133	0.9827	1.0176	30
40	0.7030	0.7112	0.9884	1.0117	20
50	0.7050	0.7092	0.9942	1.0058	10
45° 00′	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	**45°** 00′
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د جدول لومړي پرته لیکه یا سطر او ولاړه لیکه یا ستون څه راښیي؟
- د جدول دکیڼې او ښي خوا لومړي ولاړه لیکه یا ستون په کومه زاویه پیل او په کومه زاویه ختم شوی؟
- د جدول لومړۍ او وروستی کرښه څه را ښیي؟
- که یوه زاویه 45° او یا له هغه څخه کوچنۍ وي هغه د جدول کینه خوا کې د درجې په ستون کې پیدا کوو او مثلثاتي نسبت یې له پورته خوا څخه لولو یا له ښکته خوا څخه او که زاویه له 45° څخه لویه وي څه کوو؟

د پورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

که زاویه له 45° څخه کوچنۍ وي هغه دجدول دکیڼې خوا په لومړي ولاړه لیکه ستون کې، او مثلثاتي نسبت یې په پورته خوا لومړي پرته لیکه یا سطر کې ګورو.

که زاویه له 45° څخه لویه وي هغه زاویه د جدول دښې خوا په لومړي ولاړه لیکه یا ستون کې، او مثلثاتي نسبت یې په ښکته خوا څخه پورته خوا ته په وروستنی پرته لیکه یا سطر کې پیداکوو. چې د پام وړ زاویې د اړوند کرښې او د مثلثاتي نسبت د اړوندې ولاړې لیکې یا ستون پریکړه د زاویې مطلوب نسبت راکوي.

لومړی مثال: د $30^\circ\ 10'$ کوساین پیداکړئ.

حل: لومړی د جدول دکیڼې خوا په لومړي ولاړه لیکه یا ستون کې مطلوبه زاویه $(30^\circ 10')$ پیداکوو او د جدول په لومړي کرښه(سطر) کې مطلوب مثلثاتي نسبت پیداکوو ددې ولاړې او پرتې لیکې(سطر اوستون) پرېکړه د 0,8646 عدد راکوي چې دا د $(30^\circ 10')$ زاویې کوساین دی.

$$\cos(30^\circ 10') = ? \qquad 30^\circ 10' \cdots\cdots 0{,}8646$$

دویم مثال : د $84^\circ\ 50'$ ساین وټاکئ.

حل: لومړی د جدول د ښي خوا په لومړي ستون کې د پام وړ زاویه $84^\circ\ 50'$ پیداکوو او د جدول په وروستنی کرښه(سطر) کې د پام وړ مثلثاتي نسبت پیداکوو ددې پرتې او ولاړو لیکو(سطر او ستون) پرېکړه د (0,9959) عدد راکوي چې د $84^\circ\ 50'$ زاویه کوساین دی.

$$\sin 84^\circ 50' = ? \qquad 0.9959 \cdots\cdots 84^\circ 50'$$

يادونه

هغه جدول چې تر اوسه مو ترې کار واخسته د هغو زاويو مثلثاتي نسبتونه چې توپير يې لس دقيقې وي راښيي د هرې زاويې مثلثاتي نسبت د دې جدول په مرسته نشو ټاکلی، نو اوس غواړو داسې طريقه بيان کړو چې ددې جدول په مرسته د هرې زاويې مثلثاتي نسبتونه په لاس راوړو چې دا طريقه د انټرپوليشن Interpolation په نامه يادېږي او په لاندې مثالونو کې يې ترې کار اخلو:

دريم مثال: د $\tan 42^\circ 35'$ زاويې تانجنت په لاس راوړئ.

حل: په جدول کې د $42^\circ 35'$ زاويې تانجنت نشته خو د $42^\circ 40'$ او $42^\circ 30'$ زاويو تانجانتونه په جدول کې شته دی چې د هغوی په مرسته $42^\circ 35'$ زاويې مثلثاتي نسبت داسې پيداکوو:

$$\left.\begin{array}{l} \tan 42^\circ 40' \\ \tan 42^\circ 35' \\ \\ \tan 42^\circ 30' \end{array}\right] \begin{array}{l} = 0{,}9217 \\ 10 = \quad x \\ = 0{,}9163 \end{array} \quad 5,\ x,\ 0{,}0054$$

د مثلثاتي نسبتونو توپير		د دو زاويو توپير
0.00054	:	10'
x	:	5'

ليدل کيږي چې د لومړۍ او دويمې زاويې فرق 5 او د لومړۍ او دريمې زاويې فرق 10 په همدې ترتيب سره د tan فرق يې x او 0,0054 دی يعنې که زاويه د 10 په اندازه فرق ولري نو tan يې د 0,0054 په اندازه فرق کوي او که زاويه د 5 په اندازه فرق وکړي نو tan د x په اندازه فرق کوي چې د تناسب په مرسته ليکو:

$$\frac{5}{10} = \frac{x}{0{,}0054} \Rightarrow x = 0{,}0027$$

د x قيمت د کوچنی زاويو له tan سره جمع کوو:

$$0{,}9163 + 0{,}0027 = 0{,}9190$$

$$\tan 42^\circ 35' = 0{,}9190$$

پوښتنې

د مثلثاتي جدول څخه په ګټې اخيستنې سره د $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ مثلثاتي نسبونه د $\alpha = 35^\circ 20'$ او $\alpha = 75^\circ 10'$ زاويو پيداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قایم الزاویه مثلثونو حل

مخامخ شکل ته پام وکړئ د څلي(منار) جګوالی څنګه پیداکولی شئ.

فعالیت

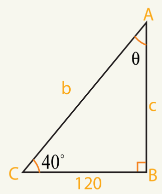
- که دیوه قایم الزاویه مثلث یوه زاویه '40 °30 وي بله زاویه یې پیدا کړئ.
- که د یوه قایم الزاویه مثلث یوه زاویه °29 او وتر یې $25cm$ وي د مثلث مجهول عناصر پیدا کړئ.
- که د قایم الزاویه مثلث دوې ضلعې یا یوه ضلعه او یوه حاده زاویه یې معلومه وي د مثلث نور عناصر څنګه پیداکولای شو.

د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

په هر قایم الزاویه مثلث کې که یوه حاده زاویه یا دوه ضلعې معلومې وي د مثلث پاتې اجزاوې د مثلثاتي توابعو په مرسته په لاس راوړو.

مثال: دیوه قایمه الزاویه مثلث یوه حاده زاویه °40 که ددې زاوېې مجاور ضلعه 120 واحده د اوږوالي وي نوموړی مثلث حل کړئ.

حل: څرنګه چې د مثلث یوه زاویه او دوه ضلعې نا معلومې وي نو ددې معلومو اجزاو په مرسته نا معلومې اجزاوې په لاندې ډول په لاس راوړو:



1, $\theta = 90^\circ - \hat{c} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$

2, $\tan 40^\circ = \dfrac{c}{120} \Rightarrow c = 120 \tan 40^\circ = 120 \cdot 0{,}8391 = 100{,}692$

3, $\cos 40^\circ = \dfrac{120}{b} \Rightarrow b = \dfrac{120}{\cos 40^\circ} = \dfrac{120}{0{,}7660} = 156.6579$

$b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow b = \sqrt{(120)^2 + (156.692)^2} = 156{,}6579$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د يوه قايمه الزاويه مثلث وتر $49.7cm$ او يوه قايمه ضلعه يې $25cm$ وي نوموړی مثلث حل کړئ.

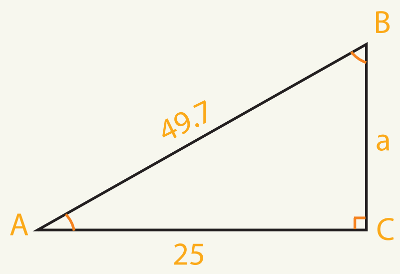
حل: ليدل کيږي چې د مثلث دوه عناصر معلوم وي نو نا معلوم عناصر يې داسې پيدا کوو:

$$1)\cos\hat{A}=\frac{25}{49,7}=0,503$$

$$\cos\hat{A}=0,503 \quad \Rightarrow \hat{A}=59,8°=59°,48'$$

$$2)B=90°-\hat{A} \quad \Rightarrow B=90-59,8°=30,2°=30°12'$$

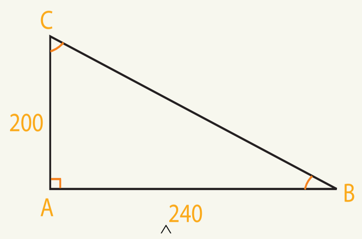
$$3)\tan\hat{A}=\frac{a}{25} \quad \Rightarrow a=\tan\hat{A}\cdot 25=25\cdot 1,7182=43$$



پوښتنې

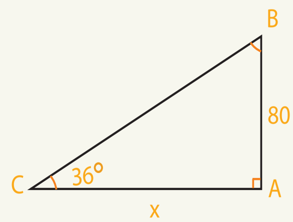
1 - د يوه قايمه الزاويه مثلث يوه حاده زاويه $38°\ 50'$ او د دې زاويې مجا وره ضلعه 311 واحده ده نو موړی مثلث حل کړئ.

2 - په لاندې شکلونو کې مجهول عناصر وټاکئ.



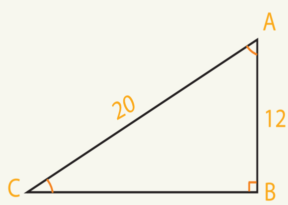
$\hat{B}=?$

$\overline{BC}=?$



$x=?$

$\hat{B}=?$



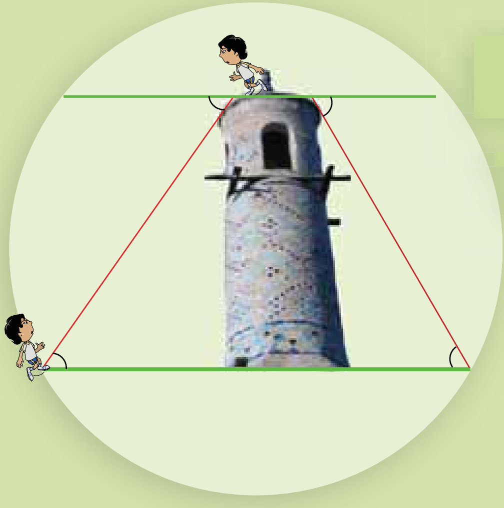
$x=?$

$\hat{A}=?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د میل یا ارتفاع او تنزیل زاویې

مخامخ شکل ته پام وکړئ د میل او
تنزیل زاویې وښایئ.



فعالیت

- که احمد په یو جگوالی پروت وي دلید کرښه د افقي سطحې سره څه ډول زاویه جوړوي او دا زاویه په کوم نوم یا دېږي(د تحول ساحه یې کومه فاصله ده) ؟
- که یو شی په یوه ښکته ځای کې پروت وي دلید کرښه د افقي سطحې سره څه ډول زاویه جوړوي او دا زاویه په کوم نامه یادیږي(د تحول ساحه یې په کومه فاصله ده) ؟

دپورته فعالیت پایله داسې بیانوو:

1 - **د ارتفاع زاویه** Angle of Elevation
که یو شی په یوه ارتفاع پروت وي نو دلید کرښه له افق سره یوه زاویه جوړوي چې د جگوالي زاویه بلل کېږي لکه ورکړل شوي شکل کې د α زاویه.

2 - **د تنزیل زاویه** Angle of Depression
که یو شی په ټیټ ځای کې پروت وي د لید کرښه له شی سره یوه زاویه جوړوي چې د تنزیل زاویه بلل کېږي لکه په شکل کې د β زاویه.

د افق کرښه

β P_1

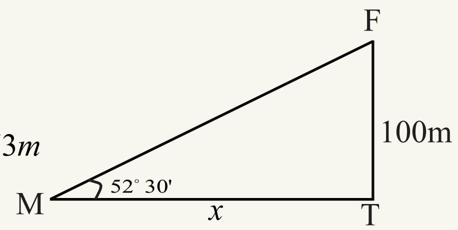
د لید کرښه

α

P_2 د افق کرښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $\overset{\Delta}{MFT}$ قایمه الزاویه مثلث کې د جگوالی یا ارتفاع زاویه $52° \ 30'$ که د مثلث جگوالی $100m$ وي د مثلث وتر او قاعده یې پیدا کړئ.



$$\tan 52°30' = \frac{\overline{TF}}{\overline{MF}} = \frac{100}{X}$$

$$x = \frac{100}{\tan 52°30'} = \frac{100}{1.3092} \Rightarrow x = 76.73m$$

دویم مثال: د یوه کاغذ پران(پتنگ) د تار اوږ دوالی 120m وي ددې کاغذ پران(پتنگ) د جگوالی یا ارتفاع زاویه $45°$ ده د کاغذ پران(پتنگ) جگوالی وټاکی.

$$\frac{h}{120} = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow h = 60 \cdot \sqrt{2}m$$

دریم مثال: یو نوري(ترسد) برج له بحر څخه $120f$ جگوالی لري هغه نزولي زاویه چې د برج نه یو بېړی(کښتی) لیدل کېږي $15°$ درجې ده نوموړي بېړی له برج نه څومره فاصله لري .

$$\cot A = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

$$\cot 15 = \frac{\overline{AC}}{120}$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = 120 \cdot \cot 15° = 120 \cdot 3,7 = 444\ ft$$

پوښتنې

1- د هغه ونې ارتفاع پیداکړئ چې د ارتفاع زاویه یې له $20°$ څخه $40°$ واوړي نو په هغه صورت کې به لیدونکی $75ft$ ونې ته نږدی شي.

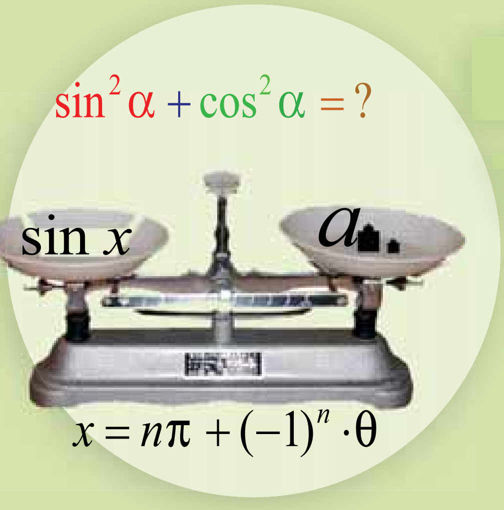
2- یوه ونه باد له پورته خواڅخه داسې ماته کړې چې د ونې تنه او ماته برخه یې یو قایمه الزاویه مثلث له ځمکې سره جوړه کړې که ماته برخه له ځمکې سره $50°$ زاویه جوړه کړې وي او د ونې تنه $20ft$ وي د ونې جگوالي پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلثاتي معادلې

مخامخ مثلثاتي اړيکې له څه سره مساوي دي وضاحت ورکړئ.



پوهېږو چې مطابقت هغه مساوات دی چې د متحول د ټولو قیمتونو لپاره د مساوات دواړه خواوې سره برابرې شي او معادله هغه مساوات دی چې د متحول د ځینې قیمتونو لپاره د مساوات دواړه خواوې سره برابرې شي.

فعالیت

- د فیثاغورث د قضیې او مثلثات ترمنځ اړیکه وښیئ ایا دا اړیکه مطابقت دی که معادله؟
- مطابقت او معادله څه تو پیر لري دا توپیر په مثلثاتي اړیکو کې وڅېړئ.
- د $\sin x = 1$ رابطه کې x مجهول دی که $\sin x$
- داسې قوسونه یا زاویې چې یو شان مثلثاتي نسبتونه ولري وښیئ.

د پورته فعالیت پایله په یو تعریف کې په لاندې ډول بیانوو:

تعریف:

هره معادله چې په هغې کې یو یاځو مثلثاتي نسبتونه ګډون ولري مثلثاتي معادله بلل کېږي لکه $2\cos x - 1 = 0$ یا $\sin x - 1 = 0$

- هغه قوس یا زاویه چې د هغې مثلثاتي نسبت مطلوب وي اصلي مجهول بلل کېږي لکه په پورتنیو معادلو کې x اصلي مجهول دی.

- د اصلي مجهول مثلثاتي نسبت ته فرعي مجهول وایي لکه په پورتني معادلو کې $\cos x$ او $\sin x$ فرعي مجهول دی.

-هغه زاویې چې مثلثاتي نسبتونه یې یو شان دي پریودیک توابع بلل کېږي، چې فورمولونه یې

لاندې ډول دي:

1- د $\sin\theta$ مثلثاتي نسبت عمومي فورمول $\quad x = n\pi + (-1)^n \cdot \theta,\ n = 0,1,2....$

2- د $\cos\theta$ مثلثاتي نسبت عمومی فورمل $\quad x = 2n\pi \pm \theta\ ,n = 0,1,2....$

3- د $\tan\theta$ مثلثاتي نسبت عمومی فورمول $\quad x = n\pi + \theta\ ,\ n = 0,1,2....$

د مثلثاتي معادلو د حل لپاره په لاندې ډول عمل کوو:

1 - د الجبري معادلو د حل په مرسته د فرعي مجهول قیمت په لاس راوړو.

2- د مثلثاتي نسبتونو د جدول په مرسته د اصلي مجهول قیمت په لاس راوړو.

3- څرنګه چې مثلثاتي معادلې پریودیک معادلې دي نو ډېر حلونه لري نو د هغو زاویو د فورمولونو په مرسته چې یوشان نسبتونه لري د معادلې حلونه دي.

مثال: د $2\sin x - \sqrt{2} = 0$ او $\cos x + \frac{1}{2} = 1$ مثلثاتي معادلو حلونه پیدا کړئ.

$\cos x + \frac{1}{2} = 1$	$2\sin x - \sqrt{2} = 0$
$\cos x = 1 - \frac{1}{2}$	$2\sin x = \sqrt{2}$
$\cos x = \frac{1}{2}$	$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$x = 30° = \frac{\pi}{6}$	$x = 45° = \frac{\pi}{4}$
$x = 2n\pi \pm \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$	$x = n\pi + (-1)^2 (\frac{\pi}{4})$

پوښتنې

دې لاندې معادلو حل پیدا کړئ.

$c)\ 2\cos 4x - \sqrt{2} = 0 \qquad b)\ 2\sin 3x + \sqrt{3} = 0 \qquad a)\ \sqrt{3}\cot x - 1 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څلورم څپرکي لنډيز

- مثلثات له دوو يوناني کلمو څخه چې ترايگون او متري چې د مثلث د اندازه کولو معنی لري جوړ شوی دی او له هغه علم څخه عبارت دی چې د مثلث د عناصرو ترمنځ اړيکي څيړي.
- که په يوه ضلعه د مثلث يوه موازي کرښه رسم شي پرېکړې ضلعې په مناسبو ټوټو وېشي دا قضيه د تالس د قضيې په نامه ياديږي.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د حاده زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی دوتر په اوږدوالي د حاده زاويې د ساين sine په نامه ياديږي.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د حاده زاويې د ګاونډي يا مجاورې ضلعې اوږدوالی د وتر په اوږدوالي د حاده زاويې د کوساين cosine په نامه ياديږي.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د حاده زاويې د مخامخ څنډې يا ضلعې اوږدوالی د ګاونډې يا مجاورې څنډې يا ضلعې په اوږدوالي د حاده زاويې د تانجنت tangent په نامه ياديږي.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د حاده زاويې د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ نسبتونو نسبت د حاده زاويې د $\tan\theta$ په نامه ياديږي $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د حاده زاويې د $\cos$ او $\sin$ نسبتونو نسبت د حاده زاويې د $\cot$ په نامه ياديږي $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$.
- هغه زاويه لکه(α)چې مستقيمه کرښه يې د x محور له مثبت جهت سره جوړوي د ميل زاويې په نامه ياديږي او د دې کرښې ميل د $\tan\alpha$ سره مساوي ده $m = \tan\alpha$.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ اړيکه ربنتياده.
- د $\sin x, \cos x$ او $\tan x$ مثلثاتي نسبتونه پرته له زاويې معنا نلري.
- د $y = mx + b$, m معادله کې، m دهغه زاويې تانجنت دی چې مستقيمه کرښه يې د محور له مثبت جهت سره جوړوي او h د y محور سره د پرېکړې ټکی دی.
- $Sin30^o$ له $Cos60^o$ سره برابردی.
- $Cos30^o$ له $\sin 60^o$ سره برابر دی.
- $Cos45^o$ له $Sin45^o$ برابر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څلورم څپرکي پوښتنې

• په لاندې سوالونو کې هر سوال ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي چې یو یې سم دی. سم ځواب په نښه کړئ.

1- د یوې حاده زاویې $\sin\alpha$ عبارت له:

a) $\frac{\text{د حاده زاویې د مخامخ ضلعې اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}}$

b) $\frac{\text{دوتر اوږدوالی}}{\text{د حاده زاویې دګاونډې(مجاورې) ضلعې اوږدوالی}}$

c) $\frac{\text{د حاده زاویې دګاونډې(مجاورې) ضلعې اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}}$

d) $\frac{\text{دوتر اوږدوالی}}{\text{د حاده زاویې د مخامخ ضلعې اوږدوالی}}$

2- د $\tan\alpha$ نسبت مساوي دی په:

a) $\frac{\sin x}{\cos x}$ b) $\frac{\cos x}{\sin x}$ c) $\frac{1}{\sin x}$ d) $\frac{1}{\cos x}$

3- د $2y = 2x - 3$ په معادله کې د مستقیمې کرښې میل عبارت له:

a) $\frac{3}{2}$ b) -1 c) 1 d) a او b

4- د هغې مستقیمې کرښې معادله چې د y محور په (۳ ، ۰) کې پرېکړي او د x محور له مثبت جهت سره 45^o زاویه جوړه کړي برابره ده له:

a) $y = x + 3$ b) $2y = 2x - 3$ c) $2x - y = 0$ d) هیڅ یو

5- د $\sin^2 30 + \cos^2 30$ افادې قیمت برابر دی له:

a) 1 b) 2 c) -2 d) -1

6- $\sin 45^o$ او $\cos 45^o$ برابردي له:

a) 1 b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}$

7- د $\frac{\sin 30^o - \cos 60^o}{\cos 60^o + \sin 30^o}$ افادې قیمت برابر دي له:

a) 0 b) 1 c) -1 d) درې واړه ځوابونه سم دي.

• تش ځایونه په مناسبو بیانونو ډک کړئ.

1- په یوه قایم الزاویه مثلث کې د دوو نورو حاده زاویو مجموعه .... ده.

2- که د یوه متساوي الضلاع مثلث یوه ضلعه $10cm$ وي جګوالی یې.............. دی.

3- دیو حاده زاویې ساین عبارت له.............................

4- Triganomitry له دوو کلمو.............. او .... څخه جوړه شوې ده.

5- $\tan\theta \cdot \cot\theta$ برابر په .... دي.

• د لاندې جملو څخه کومه سمه او کومه ناسمه ده، دسمې په مخ کې د (س) توری او د ناسمې په مخ کې د (ن) توری ولیکئ.

1- ( ) د $\sin x$ نسبت مساوي په   دی.

2- ( ) $\sin 30^o$ او $\cos 60^o$ یو بل سره مساوي دي.

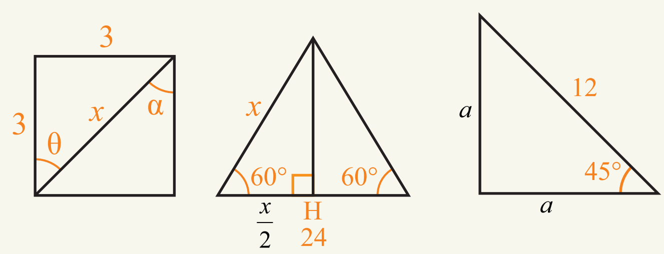
3- ( ) د $2y = 5x - 1$ معادلې د ډېر کرښې میل $\frac{2}{5}$ دی.

4- ( ) د $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ نسبت د $\tan\theta$ سره برابر دی.

5- ( ) $1+\cos^2\theta$ برابر په $\sin^2\theta$ دی.

• لاندې سوالونه حل کړئ.

1- په لاندې شکلونو کې د ورکړ شوو زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- په لاندې سوالونو کې د A او B قیمتونه حساب کړئ.

1) $A = \cos 30^\circ - \sin 30^\circ$

2) $B = \cos 60^\circ - \sin 30^\circ$

3) $A = \tan 30^\circ - \tan 60^\circ$

4) $B = \cos 60^\circ + \sin 30^\circ$

5) $A = \frac{1}{2}(\tan 45^\circ - \cos 45^\circ)$

6) $B = \tan 45^\circ + \tan 60^\circ$

7) $A = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 60^\circ + \cos 45^\circ)$

8) $B = 2 - \frac{1}{2}(\sin 45^\circ - \cot 45^\circ)$

9) $A = \sin 45^\circ + \cos 30^\circ - \tan 45^\circ$

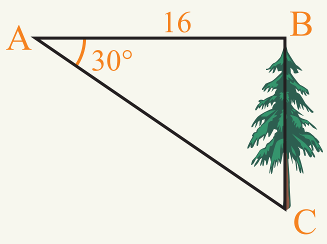
3- دا $\frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{1 + \sin x \cos x} = \sin x - \cos x$ رابطه ثبوت کړئ.

4- که $\sin x = \frac{7}{12}$ وي $\cos x$ او $\tan x$ پیدا کړئ.

5- که $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ وي $\sin x$ او $\tan x$ پیدا کړئ.

6- که چیرې α زاویه صفر ته نیږدې شي $\tan \alpha$، کوم عدد ته نږدې کیږي د شکل له مخې د خپلې وینا سموالی وښیئ.

7- په لاندې شکل کې که $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ وي د $\overline{AC}$ او $\overline{BC}$ واټنونه حساب کړئ.

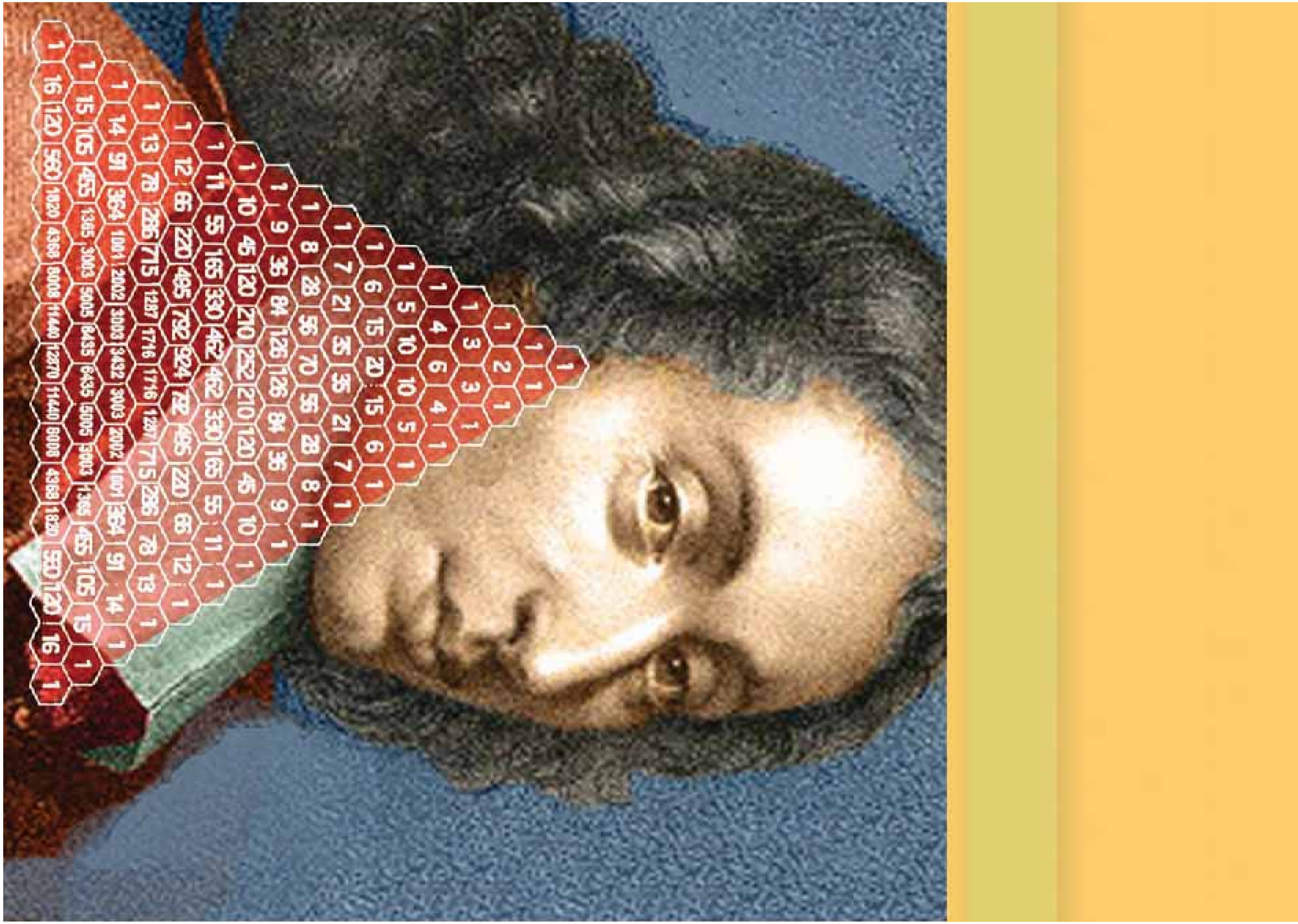


(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم څپرکی

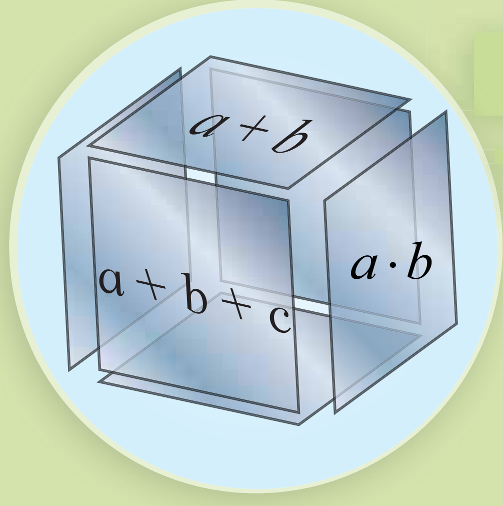
څو جمله يي

(c) ketabton.com: The Digital Library



الجبري افادي

د مخامخ شــكل په ســطحو ليكل شــويو الجبري افادو نومونه واخلئ.



فعاليت

لاندې افادې په پام کې ونیسئ.

$a)\ 2x$ $b)\ \frac{1}{3}xy^3$ $c)\ \sqrt{2}xym'$ $d)\ 9x^2$

$e)\ 5x$ $f)\ 2xy^3$ $g)\ 3x^2$ $h)\ \frac{4x^2}{x-1}$

- يوبل ته ورته افادې په نښه کړئ.
- لاندې الجبري افادې تر ممکن حده ساده کړئ.

$a)\ 2x+6x^2+\sqrt{2}xym^4$ $b)\ 3x^2+6x^2$ $c)\ \frac{1}{3}xy^3+2x$ $d)\ \frac{1}{3}xy^3+2xy^3$

- هغه افادې چې نشي ساده کيدای، څنګه بايد وليکل شي، د هر يوې لپاره کوم نوم لازم ګڼئ؟
- په هرحالت کې د افادو تر ټولو لوړ توان نسبت x ته وټاکئ.

د پورتنی فعالیت څخه کولای شو ولیکوچې:

که چیرې په یوه الجبري افاده کې د مشابه جملاتو له ساده کولو څخه وروسته یوازې یو حد ولرئ، هغې ته یو حده،(Monomial) که جمع یا تفریق د دوحدونو ولرو هغې ته دوه حده یا (Bionomial) که جمع یا تفریق ددریوحدونوولروهغې ته دري حده یا (Trinomial) اوکه له دریو حدونو څخه زیات حدونه ولرو پولینوم یا(Polinomila) په نامه یادیږي په دي شرط چه د تورو توانونه ئی مکمل عدودنه وی هره الجبري افاده کې تر ټولو لوړ توان نسبت یوه ځانګړی متحول ته د الجبري افادې درجه نظر هغه متحول ته بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: لاندې جدول بشپړکړئ.

درجه		مناسبې نومونې				الجبري افادې
نظر x ته	نظر y ته	يوه حده	دوه حده	درې حده	څو حده	
						$\sqrt{32}y^2-3y+2y^3$
2			✓			$3x^2-7x$
						$6x^2-4x-1$
						$0.4x^2y-2x^4+16y^2$
						$13x-2y^3+6x^3y$
						$3-5+x^2-y^3-2xy$
						$4x^2-2x+6x^2-5x$

پوښتنې

1- لاندې الجبري افادې ساده او هرې يوې درجه نسبت هرمتحول ته وټاکئ.

a) $x^2-3x+6x^2-\frac{3}{2}x$ b) $\sqrt{2}mn^2-\frac{1}{2}m+2\sqrt{2}n^2m+3m$

c) $-4x^2+2x^2+14x-8+4x^3-16x-2x^2$ d) $4-x^3y-2+yx^3-4xy-1$

2- لاندې الجبري افادې، څوجمله يې دي، دهرې يوې درجه نسبت هر متحول ته وټاکئ.

a) $6x^2-4x-12xy^6-2x^5$ b) $8x^6-4xy^6-5x^2$

c) $6x^2y^6m^9$ d) $\sqrt{3}x-y+6x^2y^3-2y^2$

e) $3pq^3-8p^4q^3-12q^4-0.5p^6$ f) $\frac{4m-2n}{2m-n}$

3- د A, B او C په افادوکې ورته حدود وښيې اوافادې ساده کړئ.

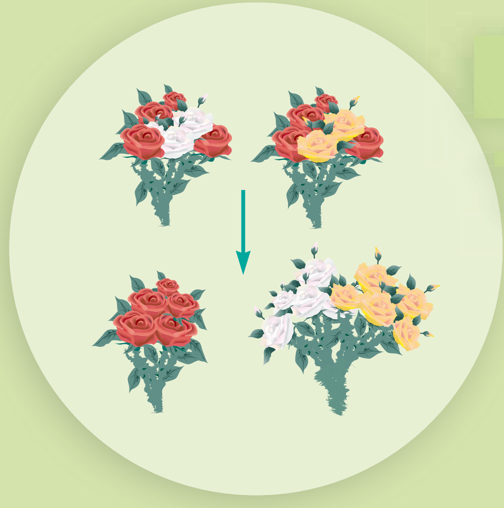
$A=4xy+2x^2y-3xy^2-\sqrt{2}xy-0.5x^2y-\frac{1}{2}xy^2$

$B=\frac{4}{3}a^2b-a^2+b^2-0.7a^2b-2a^2-3b^2+xy$

$C=2\sqrt{8x}+\sqrt{2}-3\sqrt{8x}+\sqrt{32}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په فکټورونو تجزیه(فکتور نیونه)



په مخامخ شکل کې څو غونچې ګلونه وینئ؟
کومې غونچې یو بل ته ورته دي؟ یوه غونچه څو
ګلانو څخه جوړه ده؟

فعالیت

- تش ځایونه ډک کړئ.

$$5x = (\ldots\ldots + \ldots\ldots)x = \ldots\ldots x + \ldots\ldots\ldots x$$
$$6y = (\ldots\ldots + \ldots\ldots)y = \ldots\ldots y + \ldots\ldots\ldots y$$

- پاسنیو اړیکو کې له کومې ځانګړتیا څخه ګټه اخیستل شوې ده.
- د ښې اړخ عددي ضریبونه د کیڼ اړخ د متحولینو له ضریبونوسره څه اړیکه لري.

$$3x + 2x = (\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots)x = \ldots\ldots\ldots\ldots x$$
$$ax + bx = (\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots\ldots)x = \ldots\ldots\ldots\ldots x$$

- ایاکولای شو چې $a+b$ ساده کړو؟

په پور تنی فعالیت کې لیدل کیږی چې:
د ځینوالجبري افادو په تجزیه کې کولای شوچې د ضرب توزیعي خاصیت څخه پرجمع باندې ګټه واخلو. د ګډعامل په پیژندلوسره په افاده کې کولای شوالجبري افادې تجزیه کړو.

لومړی مثال: لاندې الجبري افادې تجزیه کړئ.

$a)\ \ ab + ac - ad$ $\qquad$ $b)\ \ x^4 - x^3y + x^2y^2$

$c)\ \ \frac{1}{2}m^2 - 2m$ $\qquad$ $d)\ \ 3xy - 6x^2$

حل:په راکړل شوېوافادوکې لومړی په ټولوحدونو کې ګډ حد پیداکوو او هغه د قوس مخکې لیکو وروسته ټول حدونه بیل بیل په جمله ویشو اوحاصل یې دقوس په منځ کې لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\quad ab+ac-ad = a(b+c-d)$

$b)\quad x^4-x^3y+x^2y^2 = x^2(x^2-xy+y^2)$

$c)\quad \frac{1}{2}m^2-2m = m(\frac{1}{2}m-2)$

$d)\quad 3xy-6x^2 = 3x(y-2x)$

دويم مثال: لاندې الجبري افادې تجزيه کړئ.

$a)\ Ax+Bx+Ay+By$ | $b)\ x^2-4y^2+x+2y$

$c)\ 2x^2+2xy+3x+3y$ | $d)\ 2x-2y+2x+2y$

حل: لومړۍ افاده داسې ترتيبوو چې ورته حدونه څنګ پر څنګ راشي او ورسته دافادې ګډ حدود پيداکوواوبيا يې تجزيه کوو.

$$a)\ \underbrace{Ax+Bx}_{x}+\underbrace{Ay+By}_{y}$$
$$= x(A+B)+y(A+B)$$
$$= (A+B)(x+y)$$

$$b)\ x^2-4y^2+x+2y$$
$$= [x^2-(2y)^2]+(x+2y)$$
$$= (x-2y)(x+2y)+(x+2y)$$
$$= (x+2y)(x-2y+1)$$

$$c)\ 2x^2+2xy+3x+3y$$
$$= 2x(x+y)+3(x+y)$$
$$= (x+y)(2x+3)$$

$$d)\ 2x+2y+2x+2y$$
$$= 4x+4y$$
$$= 4(x+y)$$

پوښتنې

لاندې افادې تجزيه کړئ.

1) $x^4-x^3y+x^2x$

2) $x(2x-3y)^2+8(2x-3y)$

3) $10ab-15ac$

4) $32x^2y-4xy^2$

5) $\sqrt{2}x^3y^2-\sqrt{8}xy$

6) $0.5mn^2-0.125m^4n^3$

7) $ab+b+b$

8) $\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{6}x^2-\frac{1}{2}x^2-x^4$

9) $mab+my+ny+nab$

10) $ab(b+a+c)+ac(a+b+c)+bc(c+b+a)$

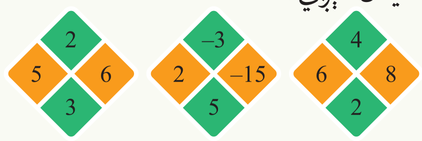
دالجبري افادو ضرب چې يوه ګړه جمله ولري

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

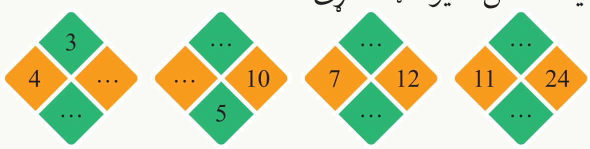
د مخامخ قوسونو له ضرب څخه وواياست چې د دوو عددونو د جمعي او ضرب حاصل له کومو عددونو سره برابر دی.

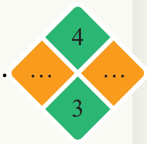
فعاليت

- په هره مربع کې، داعدادو ترمنځ څه ډول اړيکه ليدل کېږي؟

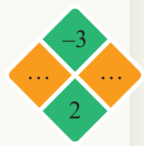


- دپورتنی اړيکې څخه په ګټه اخيستنه تش ځايونه ډک کړئ:



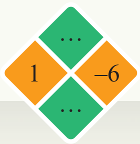


$(x+4)(x+3) = x^2 + ...x + ...x + ... = x^2 ....x + ...$



$(x-3)(x+2) = x^2 + ...x + ...x + ... = x^2 ....x + ...$

$x^2 + 8x + 12 = (x + ...)(x + ...)$



$x^2 + x - 6(x + ...)(x + ...)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعالیت څخه لیدل کېږي:
د دوو الجبري عبارتونوله ضرب څخه چي یوه ګډه جمله و لري لیکلای شوچي:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+a\times b$$

که چیرې وغواړو یوه ترینوم الجبري افاده د x^2+bx+c تجزیه کړونولومړی باید دوه عددونه داسې پیداکړوچي دضرب حاصل یې c اود جمع حاصل یې b شي، که دې اعدادوته m او n وویل شي، لروچي:

$$x^2+bx+c=x^2+(m+n)x+m\cdot n$$

مثال: د لاندې افادو ضرب اوتجزیه سرته ورسوئ:

$a)\ (t-4)(t+5)$ $\quad b)\ (a+3)(a+4)$ $\quad c)\ (x-0.4)(x+0.2)$

$d)\ (y+\frac{2}{3})(y+\frac{1}{2})$ $\quad e)\ x^2+12x+32$ $\quad f)\ x^2+4x+3$

$g)\ x^2-3x-28$ $\quad h)\ x^2-5x+6$

حل:

$a)\ (t-4)(t+5)=t^2+(-4+5)t+(-4\times 5)=t^2+t-20$

$b)\ (a+3)(a+4)=a^2+(3+4)a+(3\times 4)=a^2+7a+12$

$c)\ (x-4)(x-2)=x^2+(-4-2)x+(-4\times -2)=x^2-6x+8$

$d)\ (y+\frac{2}{3})(y+\frac{1}{2})=y^2+(\frac{1}{2}+\frac{2}{3})y+\frac{2}{6}=y^2+\frac{7}{6}y+\frac{2}{6}$

$e)\ x^2+12x+32=x^2+4x+8x+32=x(x+4)+8(x+4)=(x+8)(x+4)$

$f)\ x^2+4x+3=x^2+3x+x+3=x(x+3)+(x+3)=(x+3)(x+1)$

$g)\ x^2-3x-28=x^2+(4-7)x+(4)(-7)=x^2+4x-7x-28$
$=x(x+4)-7(x+4)=(x-7)(x+4)$

$h)\ x^2-5x+6=x^2-2x-3x+6=x(x-2)-3(x-2)=(x-3)(x-2)$

پوښتني

1- لاندې افادې تجزیه کړئ.

$a)\ x^2+7x+12$ $\quad b)\ m^2-6m-7$

$c)\ a^2+a-2$ $\quad d)\ x^2-x-20$

2- لاندې افادې ضرب کړئ.

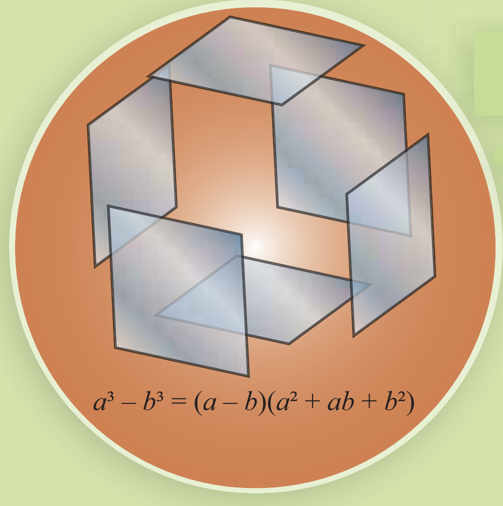
$a)\ (2x-1)(x+3)$ $\quad b)\ (\sqrt{2}+x^2)(x-\sqrt{2})$

$c)\ (a-3)(a+4)$ $\quad d)\ (0.5xm-\frac{1}{2})(4xm+0.5)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مکعبونو مجموع او تفاضل



شکل ته پام وکړئ، وواياست چې ددې سطحو څخه که سره نږدې شي، کوم جسم په لاس راځي.

فعاليت

لاندې جدول ډک کړئ:

a	b	a^3+b^3	$(a+b)$	a^2-ab+b^2	$(a+b)(a^2-ab+b^2)$
5	2				
4	1				
−3	2				
3	−2				
4	4				

- د دوو a^3+b^3 او $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ ولاړو ليکو ترمنځ څه اړيکې ليدل کېږي؟
- ايا کولای شئ يوه ورته رابطه د a^3-b^3 لپاره وليکئ.

دپورتنی فعاليت څخه کولای شو دا پايله وليکو:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

دا رابطه کولای شو چې په الجبري ډول وښيو:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$$
$$=a^3-a^2b+ab^2+ba^2-ab^2+b^3$$
$$=a^3+b^3$$

لومړی مثال: لاندې الجبري افادې تجزیه کړئ.

$a)\ b^3-8 \qquad b)\ a^6b^6-x^3y^3 \qquad c)\ h^3+\frac{1}{h^3}$

حل: لومړی الجبري افاده د $a^3 \pm b^3$ مطابقت شکل ته اړه وو، وروسته د مطابقت په مرسته هغه تجزیه کوو:

$a)\ b^3-8=b^3-2^3=(b-2)(b^2+2b+4)$

$b)\ a^6b^6-x^3y^3=(a^2b^2)^3-(xy)^3=(a^2b^2-xy)(a^4b^4+a^2b^2xy+x^2y^2)$

$c)\ h^3+\frac{1}{h^3}=h^3+(\frac{1}{h})^3=(h+\frac{1}{h})(h^2-1+\frac{1}{h^2})$

دویم مثال: دیوه مکعب مستطیل حجم داسې $27x^3-\frac{1}{8}$ ښودل شوی دی، که د مکعب مستطیل جګوالی $3x-\frac{1}{2}$ وی ددې مکعب مستطیل دقاعدې مساحت به څومره وي؟

د مکعب مستطیل حجم = د قاعدې مساحت × ارتفاع ⟸ د قاعدې مساحت = $\frac{\text{د مکعب مستطیل حجم}}{\text{ارتفاع}}$

د قاعدې مساحت $=\frac{27x^3-\frac{1}{8}}{3x-\frac{1}{2}}=\frac{(3x)^3-(\frac{1}{2})^3}{3x-\frac{1}{2}}=\frac{(3x-\frac{1}{2})[(3x)^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}]}{(3x-\frac{1}{2})}=9x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$

دریم مثال : د $\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$ افاده ساده کړئ:

حل : لومړی دصورت مطابقت په انکشافي یا غزیدلی بڼه لیکو:

$$\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^2+xy+y^2}=x-y$$

څلورم مثال :د $x^3+\frac{2}{x^3}$ افاده تجزیه کړئ:

$$x^3+\frac{2}{x^3}=x^3+\frac{(\sqrt[3]{2})^3}{x^3}=x^3+(\frac{\sqrt[3]{2}}{x})^3$$

$$=(x+\frac{\sqrt[3]{2}}{x})(x^2-\sqrt[3]{2}+\frac{\sqrt[3]{4}}{x^2})$$

پوښتنې

1- د $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ مساوات صحت په الجبري بڼه وښيئ.

2- لاندې افادې تجزیه کړئ.

$a)\ a^6b^6+x^3y^3 \qquad b)\ 8+b^3 \qquad c)\ x^{12}-y^{12}$

$d)\ 125x^3+y^3 \qquad e)\ 0.125x^3-1 \qquad f)\ \frac{1}{x^3}+1$

$g)\ 8-64a^3b^6 \qquad h)\ 8a^3-27b^3 \qquad i)\ b^6-1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوچنی ګډ مضرب (L.C.M)

د $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$ د کسرونو په حاصل کې د 6 او 4 د کوچنی ګډ مضرب یا دواړو کسرونو ګډ مخرج پیدا کولو لپاره مو یوه لاره درلوده د $\frac{2}{2x+2}+\frac{3}{x^2-1}$ جمعي د حاصل لپاره څه وړاندیزونه کوئ؟

فعالیت

- د $\frac{2}{8}$ او $\frac{3}{6}$ کسرونو د جمع حاصل لپاره مو لومړی د ٦ او ٨ کوچني ګډ مضرب یا دواړو کسرونو ګډ مخرج پیدا کولو پراوونه توضیح کړئ.
- د $2x+2$ او x^2-1 افادې په ضربي عواملوتجزیه کړئ.
- ضربي ګډ او ناګډعوامل یې وټاکئ.
- د $2x+2$ او x^2-1 کوچني ګډ مضرب پیدا کولو لپاره سوچ وکړئ څه باید وکړو.
- د $2x+2$ او x^2-1 کوچني ګډ مضرب څودی؟هغه په لاس راوړئ.
- د $\frac{2}{2x+2}+\frac{3}{x^2-1}$ کسرونو د جمع حاصل په لاس راوړئ.

دوو یاخو الجبري افادوکوچنی ګډ مضرب دپیداکولولپاره لومړی هغوی په لومړنیو ضربي عواملوتجزیه، وروسته هغه ګډعوامل چې ترټولولوی توان لري د ناګډعواملو سره ضربووچې کوچنی ګډ مضرب په لاس راځي.

لومړی مثال: د $4x^2$، $2x+2$ او x^2-1 کوچنی ګډ مضرب په لاس راوړئ.

حل: لومړی افادې جلاجلا تجزیه کوو

$$4x^2 = 2^2x^2$$
$$2x+2 = 2(x+1)$$
$$x^2-1 = (x-1)(x+1)$$

لیدل کېږي چې هغه ګډ عامل چې لوی توان لري $(x+2)$ او 2^2 دی، چې د ضرب حاصل یې د ناګډوعواملوسره برابر په $2^2(x+1)(x-1)x^2 = 4x^2(x^2-1)$ دی. چې د کوچني ګډ مضرب یا (L.C.M) په نامه یادېږي.

دویم مثال: د $68x^2+40x+32$ ، $6x^2-6$ او $4x^2+12x-16$ افادوکوچنی ګډ مضرب پیدا کړئ.

$$4x^2+12x-16 = 4(x^2+3x-4) = 2^2(x+4)(x-1)$$
$$8x^2+40x+32 = 8(x^2+5x+4) = 2^3(x+4)(x+1)$$
$$6x^2-6 = 6(x^2-1) = 2\times 3(x-1)(x+1)$$

په پا یله که کوچنی ګډ مضرب عبارت له:

$$2^3\times 3(x+1)(x+4)(x-1)$$

پوښتنې

د کوچني ګډ مضرب په پام کې نیولو سره یې ساده کړئ.

1) $\frac{2x}{3}-\frac{4}{5x}\div\frac{3}{10x}$

2) $\frac{3x-1}{x^2+2x-15}-\frac{2}{x+5}$

3) $\frac{2}{x-1}+\frac{x}{x+1}-\frac{4}{x^2-1}$

4) $\frac{2}{x^2-1}+\frac{3}{x^3-1}+\frac{1}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د الجبري افادو ویش

$$\frac{2xy^2 - 4x^2y^4}{-2xy^2} = ?$$

پام وکړئ چي د مخرج افاده د صورت په کومه افاده پورې اړه لري، کولای شئ هغه ساده کړئ.

فعالیت

- کله چي د $\frac{995}{7}$ کسر نور ونشو کړای ساده یا اختصار کړو؛ نو پایله څه ده؟
- لاندي الجبري افادې ترممکن حده پورې ساده کړئ.

$a)\ \frac{2m^2y - 3x^3y^4 + 24xy^3}{-3xy^2}\ ,\ x \neq 0 \wedge y \neq 0$

$b)\ \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}\ ,\ x \neq 2$

$c)\ \frac{x^3 - x^2 - x - 6}{x + 2}\ ,\ x \neq -2$

- لاندي عملیوته پاملرنه وکړئ اوتوضیح کړئ چي هرګام دکوم کاربه پایله کي لاس ته راځي ولې؟

a)

$$\begin{array}{r|l} 995 & 7 \\ -7 & 142 \\ \hline 29 & \\ 28 & \\ \hline 15 & \\ 14 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 11x - 6 & x + 2 \\ \pm x^3 \pm 2x^2 \qquad\qquad & x^2 - 4x - 3 \\ \hline -4x^2 - 11x \quad & \\ \mp 4x^2 \mp 8x \quad & \\ \hline -3x - 6 & \\ \mp 3x \mp 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

- د (a) په جزء کي موولي ویش دکیني خوا له لومړی رقم ۹ څخه پیل کړ؟ سوچ وکړئ په (b) جزء کي مو ولي له x^3 څخه د ویش عملیه پیل کړي ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکل اوترتيبول د يوې الجبري افادې دکينې لورې (خوا) نه ښي لورې (خوا) ته په ترتيب د لوېي درجې څخه کوچنی درجې ته د پولينوم نزولي ترتيب نوميږي

ددوالجبري افادو يو پربل د ويش لپاره لاندې پړاوونه ترسره کړئ.

۱- د مقسوم او مقسوم عليه پولينومونه په نزولي ډول ترتيب کړئ.

۲- د مقسوم لومړی حد د مقسوم عليه په لومړی حد وويشی چې حاصل يې د خارج قسمت لومړی حد دی.

۳- په لاس راغلی خارج قسمت د مقسوم عليه په ټولوحدونو کې ضرب حاصل يې د مقسوم له ورته حدودونه تفريق کوو.

٤- د مقسوم بل حد راښکته کوود پاتې افادې څنگ ته يې ليکو وروسته ددې افادې لومړی حد د مقسوم عليه په لومړی حد ويشواوحاصل يې د مقسوم عليه په ټولوحدودوکې ضربوواوحاصل يې له پاتې افادې څخه تفريق کوو.

٥- وروسته ۲، ۳، ٤ پړاوونوته ترهغه ادامه ورکووچې د پاتې حدودو درجه د مقسوم عليه د حدونو له درجې څخه کوچنی شي.

لومړی مثال : د $x^3-3x^2-23x+30$ افاده په $x-6$ افاده ويشی.

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x^2-23x+30 & x-6 \\ \underline{-x^3 \mp 6x^2} & x^2+3x-5 \\ 3x^2-23x & \\ \underline{-3x^2 \mp 18x} & \\ -5x+30 & \\ \underline{\mp 5x \pm 30} & \\ 0 & \end{array}$$

د تقسيم مراحل

$$\left.\begin{array}{l} I-\quad \dfrac{x^3}{x}=x^2 \\ II-\quad \dfrac{3x^2}{x}=3x \\ III-\quad \dfrac{-5x}{x}=-5 \end{array}\right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $x^5-2x^3+x^2-8x+4$ افاده په x^2-x-4 افادی وویشئ.

حل : دمقسوم اومقسوم علیه پولینومونه په نزولي ډول ترتیبوواوبیا عملیه سرته رسوو.

$$
\begin{array}{r|l}
x^5+0.x^4-2x^3+x^2-8x+4 & x^2-x-4 \\
\underline{-x^5 \mp x^4 \mp 4x^3} & x^3+x^2+3x+8 \\
x^4+2x^3+x^2 & \\
\underline{-x^4 \mp x^3 \mp 4x^2} & \\
3x^3+5x^2-8x & \\
\underline{-3x^3 \mp 3x^2 \mp 12x} & \\
8x^2+4x+4 & \\
\underline{-8x^2 \mp 8x \mp 32} & \\
12x+36 &
\end{array}
$$

د تقسیم مراحل

$$
\left.
\begin{array}{l}
I - \dfrac{x^5}{x^2}=x^3 \\
II - \dfrac{x^4}{x^2}=x^2 \\
III - \dfrac{3x^3}{x^2}=3x \\
IV - \dfrac{8x^2}{x^2}=8
\end{array}
\right\}
$$

څرنګه چې د دوو عددونو ویش دسموالي لپاره مودوه شرطونو څیړل، نو د دوو الجبري افادو د ویش دسموالی لپاره هم دوه شرطونه څیړو.

1- د خارج قسمت اومقسوم علیه د ضرب حاصل جمع پاتې د مقسوم دالجبري افادې سره باید برابره وي.

۲ - د پاتې درجه د مقسوم علیه له درجې څخه باید کوچنی وي.

لکه په دویم مثال کې:

$$(x^2-x-4)(x^3+x^2+3x+8)+12x+36$$
$$=x^5-2x^3-8x+4$$

لیدل کیږي چې د خارج قسمت او مقسوم علیه د ضرب حاصل جمع پاتې د مقسوم له افادې سره برابر دی او د خارج قسمت درجه نظر x ته له ۲ سره برابره ده پاتې درجه (۱) ده نو په لاس راغلی پایله سمه ده.

دریم مثال: د $2x^2 + x^4 - 3x + 1$ افاده په $x+3$ افاده وویشئ:

حل: لومړی دمقسوم اومقسوم علیه افادې په نزولي ډول ترتیبوو.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + 0\cdot x^3 + 2x^2 - 3x + 1 & x+3 \\ \hline
\underline{-x^4 \pm 3x^3} & x^3 - 3x^2 + 11x - 36 \\
\quad -3x^3 + 2x^2 & \\
\quad \underline{\mp 3x^3 \mp 9x^2} & \\
\qquad 11x^2 - 3x & \\
\qquad \underline{\pm 11x^2 \pm 33x} & \\
\qquad\quad -36x + 1 & \\
\qquad\quad \underline{\mp 36x \mp 108} & \\
\qquad\qquad 109 &
\end{array}
$$

پوښتنې

د لاندې افادو د ویش حاصل پیدا کړئ.

1) $(2t^3 - 4t^2 - 2t - 6) \div (t^2 + 9t + 7)$

2) $(1 - x^2 - x) \div (1 - x)$

3) $(2y^3 + y - 3y) \div (y^2 - 3y - 1)$

4) $(2x^3 + 5x^2 - x - 1) \div (x + 3)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د الجبري افادو د عملیو سر ته رسولو ترتیب

که چیرې په الجبري افادو کې مخامخ
نښې راغلې وي په څه ډول په ترتیب
سره افاده ساده کوو؟

فعالیت

- دلاندې افادوساده کولولپاره کومې عملیې سرته ورسوو. د عملیې د سرته رسولو ترتیب په شمیر سره ونوموئ.

$$3-2^4\times5+(16\div4)$$
$$4\times5\div2-3(2+3^2)+2$$
$$3x^2-4x(2+x)$$
$$2x-3\{-2(x+1)(x+2)\}+6x\div2$$

په پورتنۍ فعالیت کې موولیدل چې دالجبري افادوعملیوپه ترتیب سره سرته رسول دعددنود قانون له ترتیب څخه پیروي کوي. دیوې الجبری افادې دساده کولولپاره په ترتیب سره په لاندې ډول عمل کوو

1- توان رفع کوو.

٢- د قوسونوپه لرلوسره لومړی هغه ساده کوو.

٣- په ترتیب سره له کیڼ څخه ښي اړخ ته د ضرب اوویش عملیې سرته رسوو.

٤- په ترتیب سره له کیڼ څخه ښي اړخ ته د جمع اوتفریق عملیې سرته رسوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال : لاندې افادې ساده کړئ.

1) $\frac{1}{2}m-3\left\{\left[5(m-\frac{1}{2}-m)\right]-m-6\right\}\div 2$

$=\frac{1}{2}m-3\left\{5m-\frac{5}{2}-5m-m-6\right\}\div 2$

$=\frac{1}{2}m-3\left\{-m-\frac{17}{2}\right\}\div 2$

$=\frac{1}{2}m+(3m+\frac{51}{2})\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}m+\frac{3}{2}m+\frac{51}{4}$

$=\frac{m+3m}{2}+\frac{51}{4}=\frac{4m}{2}+\frac{51}{4}$

$=2m+\frac{51}{4}$

2) $2x-1-\{-2(x+2)\}+2x\div 2\times 5x$

$=2x-1-(-2x-4)+2x\div 2\times 5x$

$=2x-1+2x+4+x\times 5x$

$=2x-1+2x+4+5x^2$

$=4x+5x^2+3$

فعاليت

- مخامخ عبارتونه ساده کړئ:

a) $\sqrt[3]{\frac{5}{8}}$

b) $\sqrt{8x^3y^3}$

c) $\sqrt{3a\sqrt{49a^2}}$

- د $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ او $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ کسرونو دمخرج د جذرونو منځه ورلو لپاره چې مخرج گویا شي $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ او $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ د کوم مطابقت څخه مرسته اخیستلای شئ.
- د $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ او $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ کسرونوجذرونه په مخرج له منځه یوسي اوساده يې کړئ.

دیوکسردمخرج د جذرونو د منځه ورلوعملیه د الجبري کسر دگویا کولو یا ناطق کولو په نامه یادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال : لاندې کسرونو مخرج ناطق کړئ

1) $\frac{2}{\sqrt{x}}$ 2) $\frac{2}{\sqrt[3]{a}}$

3) $\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}$ 4) $\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

حل:

1) $$\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$
$$=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$$

2) $$\frac{2}{\sqrt[3]{a}}=\frac{2}{\sqrt[3]{a}}\times\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}}$$
$$=\frac{2\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}}=\frac{2\sqrt[3]{a^2}}{a}$$

3) $$\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}=\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}\times\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+1}$$
$$=\frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a})^2-1^2}$$
$$=\frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{a-1}=\sqrt{a}+1$$

4) $$\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2-3}$$
$$=\frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{-1}=-5(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

د يوې الجبري افادې د ساده کولو لپاره په ترتيب سره لومړی قوسونه له منځ څخه وړو، وروسته د توان عمليه او په پای کې په ترتيب سره د وېش، ضرب، جمع او تفريق عمليې له ښي څخه کيڼ اړخ ته سر ته رسوو.

- د $\sqrt{x}$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x}$ دی.
- د $\sqrt{x}+1$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x}-1$ دی.
- د $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ دی.

پوښتنې

لاندې افادې ساده کړئ.

1) $2x\times -2\{3x-(2+x)-1\}\div 2$

2) $\frac{1}{3}y-5\left\{-2\left[6(y-\frac{1}{3}-y\right]\right\}\div 3$

3) $5+(-18)-[24+(-30)]\times(-7)$

4) $[(-102)+(-330)]\div 16+[168+240-(-210)]\div 6$

5) $\frac{2}{\sqrt{7}}$

6) $\frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

7) $2\sqrt{2000ab}-\frac{b}{a}\sqrt{72ab}$

8) $\frac{2a}{\sqrt{a}}$

9) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

10) $2\sqrt{18x}+\sqrt{50x}-\frac{1}{2}\sqrt{20x}$

11) $(\sqrt{2}+1)(1-\sqrt{2})$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دپنځم څپرکی لنډیز

- هغه الجبري افادې چې د یوه حد څخه جوړه شوي وي دمونوم یا یو حده په نامه یادېږي
لکه: ax^n
- هغه الجبري افاده چې له دوو حدونو څخه جوړه شوې وي، دوه حده یا بینوم بلل کېږي،
لکه: ax^2+b
- هغه الجبري افاده چې له درېو حدونو څخه جوړه شوې وي، درې حده یا ترینوم بلل کېږي،
لکه: ax^2+bx+c
- هغه الجبري افادې چې له څوحدونوڅخه جوړې شوې وي او د تورو توانونه ئې مکمل عدونه وی څوحده یا پولینوم بلل کېږي
لکه: $ax^5+bx^3+cx^2-x-d$
- په یوه الجبري افاده کې د متحول ترټولولوی توان دالجبري افادې درجه بلل کېږي.
- د پولینوم هغه ترتیب چې دکېنې خوا څخه ښي خواته له لوی توان څخه کوچني ته ترتیب شوی وي، نزولي ترتیب بلل کېږي.
- دهر a او b لپاره لرو:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

- دالجبري افادوګډوعواملوچې ترټولولوی توان ولري دضرب حاصل له ناګډوعواملوسره د L.C.M په نامه یادیږي.
- که چیرې په یوه الجبري افاده کې قوسونه او(+ ، - ، × او ÷ ...) عملیې راغلي وي دساده کولولپاره يې په ترتیب سره لومړی کوچنی، منځنی او بیا لوی قوس له منځه ورو وریسې د توان عملیه او په پای کې په ترتیب سره د وېش، ضرب جمع او تفریق عملیې له کیڼ څخه ښي اړخ ته سرته رسوو.
- د $\sqrt{x}$ د ناطق کول عامل $\sqrt{x}$ دی.
- د $\sqrt{x}+1$ د ناطق کولوعامل $\sqrt{x}-1$ دی.
- د $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ د ناطق کولوعامل عبارت له $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ دی.

دپنځم څپرکي پوښتنې

• په لاندې سوالونوکې هرسوال ته څلورځوابونه ورکړل شوي سم ځواب يې وټاکئ.

1- د $2x^2-\frac{1}{2}x$ افاده کې ګډ عامل :

a) 2 دی.　　b) x دی.　　c) $2x$ دی.　　d) نه لري.

2- د $(x-2)(x+3)$ الجبري افادوضرب حاصل عبارت له:

a) x^2+5x+6　　b) x^2-5x-6

c) x^2+x-6　　d) x^2-x+6

3- د $\frac{3}{x^2-1}+\frac{3}{2x+2}$ افادې کوچنی ګډ مضرب عبارت له :

a: $2(x+1)(x-1)$　　b) $(x+1)(x-1)$

c) $(2x+2)(x^2-1)$　　d) هيڅ يو.

4- د $\frac{2x-4x^3+x^2+16x-8}{2x^2-8}$ افادې دويش حاصل عبارت له:

a) $-2x+1$　　b) $(-2x+1)(2x)+\frac{-2x}{2x^2-8}$

c) الف او ب　　d) هيڅ يو.

5- د $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ د ناطق کولوعامل عبارت له :

a) $\sqrt{a}$　　b) $\sqrt{b}$

c) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$　　d) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

• تش ځایونه په مناسبو جملو ډک کړئ.

۱- د $2x^3-4x^2+3x-1$ الجبري افاده یوه . . . . حده درجه . . . .
. . . افاده ده.

۲- د $x^2+7x+12$ الجبري افادې ضربی عوامل . . . . او . . . . دی.

۳- د $\frac{x^2-1}{x+1}$ویش حاصل عبارت له . . . . دی.

٤- $a^3+b^3=$ (. . . . .) (. . . . .)

۵- د $(x^2+x-1)(x^2-x-1)$ دضرب حاصل عبارت له . . . . دی.

• په لاندې جملو کې کومه یوه سمه اوکومه یوه ناسمه ده، د سمې مخ ته (س) توری اوناسمې مخ ته (ن) توری ولیکئ

۱- (   ) هغه الجبري افادې چې دڅو حدونوڅخه جوړه شوې وي، د پولینوم په نامه یادېږي.

۲- (   ) د $x^2+2ax+a^2$ افادې تجزیه $(x+a)$ $(x+a)$ ده

۳- (   ) د $21x^3y^3$ او $14x^3y^2$ کوچنی ګډ مضرب $42x^3y^4$ دی.

4- (   ) $a^3-b^3=(a+b)(a^2+ab+b^2)$

5- (   ) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

• لاندې سوالونه مفصل حل کړئ

۱- تجزیه یې کړئ

a) $y^2 - y - 2$

b) $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

c) $21a - 14ab + 28a^2$

d) $72m^8n^6 - 98m^6n^8$

e) $a^2x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}$

f) $1 + 2ab - (a^2 + b^2)$

2- ساده یې کړئ

a) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x-2} + \frac{1}{x^2-4}$

b) $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

c) $\frac{a^2b^{-2} - b^2a^{-2}}{ab^{-1} - ba^{-1}}$

3- و یې ویشئ

a) $\frac{12a^2 - 4a + 20}{40 - 5a}$

b) $\frac{a^4 - b^4}{a - b}$

c) $2x^3 - x^2 - 4 \div (x - \frac{1}{2})$

d) $(x^3 - 5x + 6) \div (x - 2)$

e) $x^2 - 5x + 64 \div (-x + 5)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی

غیر مساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

غیر مساوات
Inequality

تله په کوم حالت کې قرار لري؟ ولې؟

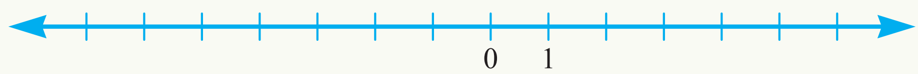
عموماً په ورځنې ژوند کې د غیر مساوي کمیتونو پرتله کولو ته اړتیا لرو، لکه د یوه ټولګي د زده کوونکو د نمرو مجموع له زیاتو څخه کمو نمرو ته درجه بندي کړو، ایا تاسې کولی شئ داسې نور مثالونه په ورځنې ژوند کې وښیې چې نا مساوي عددونه سره پرتله شي.

که چیرې عددونه دي($<,\leq,>,\geq$) علامو په مرسته اړیکې ولري د نامساوي په نامه یادیږي

لکه: $4 > 5$, $2 < 3-$ ...

فعالیت

- د $3, \frac{-3}{2}, \sqrt{2}, 4-$ او $\frac{2}{3}$ عددونه د عددونو په محورو وټاکئ.



- له مناسبو علامو څخه په کار اخیستلو، پورتني عددونه په ترتیب سره له کوچني څخه تر لوی پورې ولیکئ.
- د اعدادو په محور د اعدادو د ترتیب او د اعدادو د ځای تر منځ څه اړیکې وینئ؟

د پورتني فعالیت مشاهدات په لاندې ډول داسې لنډوو:

د عددونو په محور هغه عدد چې د عدد ښی خواته پروت وي، لوی او له هغه عدد څخه چې د هغې کیڼې خوا ته پروت دی کوچنی دی.

په بشپړ(کلي) ډول ویلی شو چې که د b,a او c دري حقیقي عددونه وي، نو لیکلای شو، چې:

$$a < b \ , b < c \quad \Rightarrow \quad a < c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- دوه غیر مساوي عددونه وټاکئ او دهغوی تر منځ اړیکه د کوچنی یا لویې علامو په کار اخیستلو بیان کړئ.
- د غیر مساوي دواړو خواوو ته د ۵ عدد ورجمع کړئ، ایا د غیر مساوي د علامې په لوري کې څه بدلون راځي؟
- د پورتنی غیر مساوي له دواړو خواوو څخه د ۳ عدد تفریق کړئ، ایا د غیر مساوي د علامې په جهت کې څه بدلون راځي؟

په بشپړ ډول سره د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

که $a<b$ وي نو د b,a او c اختیاري حقیقي عددونو لپاره لرو: $a+c<b+c$

$a-c<b-c$

فعالیت

- دوه نامساوي عددونه وټاکئ او دهغوی تر منځ اړیکه د کوچنی یا لویې علامې(>) څخه په کار اخیستلو ولیکئ.
- د پورتنی غیر مساوي دواړه خواوې د ٤ په عدد کې ضرب کړئ، ایا د غیر مساوات د علامې په جهت کې څه بدلون راځي؟
- د پورتنی غیر مساوات دواړه خواوې د ٤- په عدد کې ضرب کړی، ایا د غیر مساوات د علامې په جهت کې څه بدلون راځي؟
- که د $7>4$ غیر مساوات دواړه خواوې معکوس کړو، ایا د غیر مساوات د علامې په جهت کې بدلون راځي.

په بشپړ ډول د پورتنی فعالیت پایله داسې بیانوو:

د b,a او c حقیقي عددونو لپاره لرو چې:

$a<b$ ، $0<c \Rightarrow ac<bc$

$a<b$ ، $c<0 \Rightarrow ac>bc$

$0<a<b \Rightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{a}$

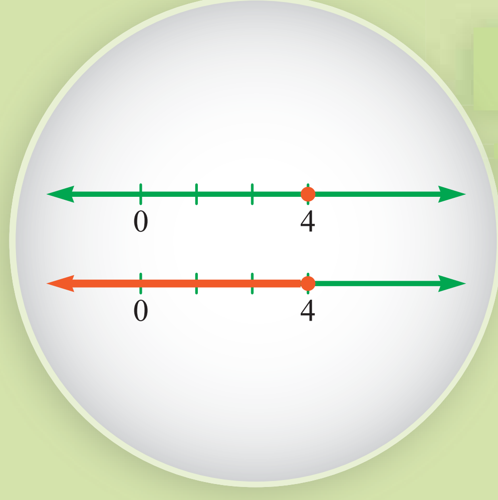
په یاد ولرئ چې د ویش عملیه د ضرب د عملیې معکوسه عملیه ده، یعني که وغواړو چې یو عدد په a وویشو هغه عدد په $\frac{1}{a}$ کې ضربوو نو د غیر مساوات د ضرب د عملیې ټول خواص د ویش په عملیه کې هم حقیقت لري.

پوښتنې

د $9>-3$ په نا مساوي کې د یو اختیاري عدد په جمع او تفریق کولو سره د غیر مساوات ټول خواص وڅیړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړی درجه خطي غیر مساوات حل



د $x=4$ او $x\leq 4$ دوه الجبري جملې په پام کې ونیسئ.

د دې عبارتونو تر منځ څه ورته والی او څه توپیر وینئ.

فعالیت

- د $x+3=7$ معادله، د x د کوم عددي قیمت لپاره سمه ده.
- آیا د x په لاس راغلی قیمت څخه پرته بل قیمت x ته پیدا کولای شئ چې په معادله کې ربښتینوالي ولري؟
- د x د کوم عددي قیمت لپاره د $x+3<7$ نامساوي سمه ده.
- ایا د x په لاس راغلی قیمت څخه پرته، بل قیمت شته چې غیر مساوات صدق پرې وکړي.

- د x د څو عددي قیمتونو لپاره پورتنی غیر مساوات صدق کوي.

د پورتنی فعالیت په لیدو سره نامساوي د مساوات په پرتله ډېر حلونه لري.

هغه الجبري رابطې چې د $(>, <, \leq$ او $\geq)$ علامو په مرسته یو له بل سره اړیکې ولري او په هغه کې د متحول توان یو وي د لومړی درجه یو مجهوله یا خطي نامساوي بلل کیږي.

لاندې نامساوي د یو مجهوله لومړی درجې نامساواتو بېلګه ده.

$$x+3<0 \quad , \quad 2x-\frac{1}{3}>3-x$$

$$6x+7\leq 5 \quad , \quad \frac{x}{5}+\sqrt{2}\geq 12$$

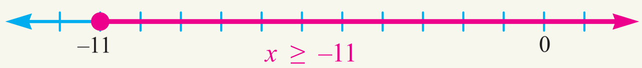
په بشپړ ډول د x د هغو قیمتونو پیداکولو لپاره چې په غیر مساوات کې حقیقت ولري د غیرمساواتو د خواصو څخه په ګټه اخیستنې سره غیر مساوات ته داسې بدلون ورکوو چې د غیر مساوات یو اړخ ته x او بل اړخ ته یې عددونه پراته وي.
د غیر مساوات د حل څخه موخه دا ده چې د x لپاره هغه قیمتونه پیداکړو چې غیر مساوات په ساحه کې حقیقت ولري دا ساحه د غیر مساوات د حل ساحه بلل کېږي.

لومړی مثال: د $x+4\geq -7$ غیر مساوات حل کړئ او د غیر مساوات د حل ساحه یې د عددونو په محور وښیئ.

حل: د نامساوي په دواړو خواوو کې د(-4) عدد په جمع کولو سره لرو چې:

$$x+4-4\geq -7-4$$

$$x\geq -11$$



دویم مثال: د $2x+1>5$ نامساوي حل کړئ.

حل: د غیر مساوات له خواصو څخه په ګټه اخیستنې سره کولای شو چې معلوم د غیرمساوات علامې یو اړخ ته او مجهول بل اړخ ته نقل کړو:

$$2x+1>5$$

د نامساوي له دواړو خواوو څخه د(-1) عدد تفریق کوو:

$$2x+1-1>5-1$$

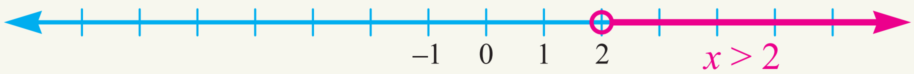
$$2x>4$$

د نامساوي دواړه خواوې په 2 ویشو یا په $\frac{1}{2}$ کې یې ضربوو:

$$\frac{1}{2}\times(2x)>\frac{1}{2}\times 4$$

$$x>2$$

یعنې د ټولو هغو قیمتو لپاره چې له 2 څخه لوی وي غیر مساوات صدق کوي دا مطلب د



(c) ketabton.com: The Digital Library

عددونو په محور داسې ښودلای شو.

پوښتنه: سوچ وکړئ چې ولې په لومړي مثال کې د عددونو په محور 11- په(●) او دویم مثال کې د عددونو په محور 2 په(o) ښودل شوی دی؟

په دې دوو مثالونو کې هغو علامو ته چې د غیرمساوات د حل ساحې ټاکلو لپاره پکار وړل شوی پاملرنه وکړئ.

په عمومي حالت کې د $ax + b < cx + d$ الجبري عبارت چې په هغه کې a, b, c او d حقیقي عددونه او x متحول وي، لومړی درجه یو مجهوله یا خطي غیرمساوات بلل کیږي.

د غیرمساوات د حل لپاره لاندې ټکي په پام کې نیسو:

- د غیرمساوات د خواصو په پام کې نیولو سره معلوم یو اړخ او مجهول د غیرمساوات بل اړخ ته انتقالوو.
- معلوم عددونه په خپل منځ کې او مجهول حدونه خپل منځ کې جمع کوو.
- د متحول د عددي قیمت دپیدا کولو لپاره د غیرمساوات دواړه خواوې د متحول په ضریب د غیرمساوات د خواصو په پام کې نیولو سره ویشو.

دریم مثال: د $3x + 1 < x - 5$ نامساوي حل کړئ.

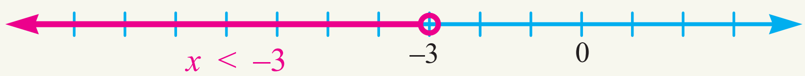
حل:

$$3x - x < -5 - 1$$

$$2x < -6$$

$$x < -\frac{6}{2}$$

$$x < -3$$



څلورم مثال: لاندې غیرمساوات حل کړئ.

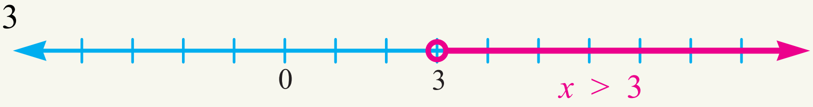
$$x + 5 < 3x - 1$$

$$x - 3x < -1 - 5$$

$$-2x < -6$$

$$\frac{-2x}{-2} > \frac{-6}{-2}$$

$$x > 3$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د لاندې غیرمساواتو حل پیدا او د هغوی دحل ساحه د عددونو په محور وښیئ:

$a)\ 4x \geq 8$

$b)\ 8 + x < 5$

$c)\ 5 + x < 2x - 1$

$d)\ -3x - 4 > x + 7$

$e)\ \frac{3}{2}x - 1 > x - \frac{2}{3}$

$f)\ 0.5 - x < 3x - 1$

$g)\ 2 - x \leq 2$

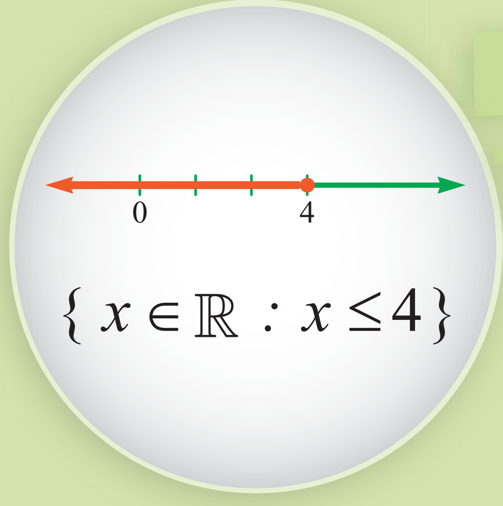
$h)\ 2x - 5 - 7x > 0$

$i)\ 5x + 6 > 0$

2- د 1325 د ویش پر 25 باید تر ټولو لوی عدد پیدا کړو، چې په 25 کې ضرب او له 1325 څخه کوچنی یا ورسره مساوي شي، دا عبارت په غیرمساوات وښیئ او خارج قسمت یې پیدا کړئ.

3- که تاسې ته وویل شي چې د یوه فعالیت د سرته رسولو لپاره حد اکثر 5 ورځې وخت لرې دا عبارت په غیرمساوات وښیئ.

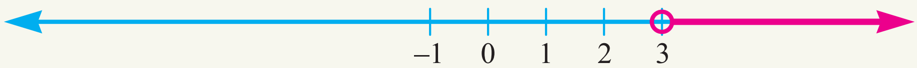
فاصلې (انټروالونه)



د غیرمساوات د حل لپاره ډېر عددونه کولی شو په لاس راوړو چې دهغه غیرمساوات حل وي، داسې ټول حقیقي عددونه که د يو سټ په ډول په پام کې ونيسو، دې سټ ته د غیرمساوات حل وايي.

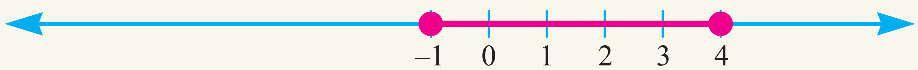
د مثال په ډول $x>3$ د $3x-2>7$ نامساوي د حل سټ دی، ځکه هر هغه عدد چې له 3 څخه لوی وي په نوموړې نامساوي کې صدق کوي، دا د حل سټ د رياضي په ژبه داسې ښودل کېږي: $\{x \in IR : x>3\}$

داسې لوستل کېږي: د x ټول هغه حقيقي عددونه چې له دريو(3) څخه لوی وي.



ليدل کېږي، چې د عددونو دا سيټ د عددونو د محور يوه برخه ده، چې په رياضي کې ورته واټن(فاصله) يا انټروال وايي.

په لاندې شکل کې د عددونو په محور ټاکل شوی هغه فاصله(انټروال) ده، چې له 1- څخه لوی يا ورسره مساوي او له 4 څخه کوچنی يا ورسره مساوي دی.

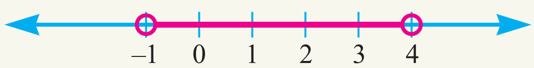


دا فاصله په $[-1,4]$ يا $\{x \in R : -1 \leq x \leq 4\}$ سره ښودل کېږي.

پاملرنه وکړئ چې د -1 او 4 عددونه په فاصله کې ګډون لري. په هغه حالت کې چې د انټروال د پيل او پای ټکی په کې ګډون ولري، دې واټن يا فاصلې ته تړلې فاصله وايي.

نو که په پورتنی فاصله کې د 1- او 4 ټکي ګډون و نلري دې فاصلې ته خلاص واټن يا فاصله وايي او په لاندې ډول يې ښودلای شو:

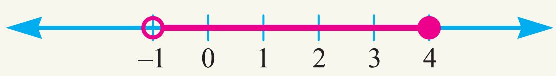
$$(-1,4)=\{x \in IR : -1<x<4\}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

که د مخکنې فاصلې د پای د ټکو څخه یوازې یو ټکی لکه 4 په فاصله کې شامل وي، هغې فاصلې یا واټن ته نیمه خلاصه یا نیمه تړلې واټن یا فاصله وایي، او هغه په لاندې شکل ښیو:

$(-1,4]=\{x \in IR : -1 < x \le 4\}$



په عمومي ډول د هرو دوو a او b حقیقي عددونو چې $a \le b$ څخه وي لرو:

د a او b تړلې فاصله $[a,b]=\{x\in IR : a \le x \le b\}$

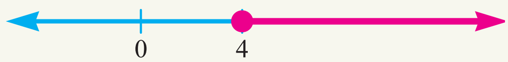
د a او b خلاصه فاصله $(a,b)=\{x\in IR : a < x < b\}$

د a او b نیمه خلاصه فاصله $(a,b]=\{x\in IR : a < x \le b\}$

د a او b نیمه تړلې فاصله $[a,b)=\{x\in IR : a \le x < b\}$

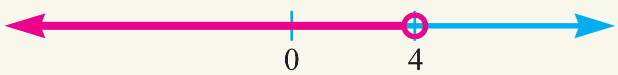
پاملرنه وکړئ چې د عددونو په محور باندې کولی شو هغه فاصلې په پام کې ونیسو چې له یوې خوا څخه تړلې نه وي، په دې حالت کې فاصله یا واټن د ∞ علامې څخه په ګټه اخیستنه چې هغه بې نهایت لولو ښیو، لکه د هغو عددونو سټ چې د 4 څخه لوی یا ورسره مساوي وي داسې ښیو:

$\{x\in IR : 4 \le x\}=[4,\infty)$



او هغه عددونه چې له 4 څخه کوچني وي، عبارت دی له:

$\{x \in IR : 4 > x\} = (-\infty,4)$



نو په عمومي ډول که a یو حقیقي عدد وي نو لرو چې:

د a څخه لوی حقیقي عددونه $(a,\infty)=\{x\in IR : a < x\}$

د a څخه لوی یا ورسره مساوي حقیقي عددونه $[a,\infty)=\{x\in IR : a \le x\}$

د a څخه کوچنی حقیقي عددونه وي. $(-\infty,a)=\{x\in IR : x < a\}$

د a څخه کوچنی یا ورسره مساوي حقیقي عددونه. $(-\infty,a]=\{x\in IR : x \le a\}$

پوښتنې

1- لاندې انټروالونه د سټ په شکل ولیکئ او د عددونو په محور یې وښیئ

1) $[5,7]$ 2) $(9,-3)$ 3) $[-2,8)$ 4) $(6,1]$ 5) $[2,\infty)$

2- لاندې سټونه د انټروال په ډول ولیکئ:

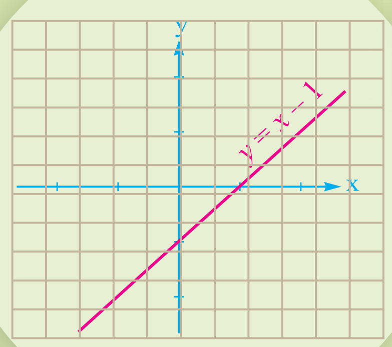
1) $A=\{x \in IR : 2 < x < 6\}$ 2) $B=\{x \in IR : -3 \le x \le 5\}$

3) $C=\{x \in IR : 0 \le x < 4\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړۍ درجې دوه حده (بینوم) د علامې ټاکل



په مخامخ شکل کې x د کوم قیمت لپاره د $y = x-1$ مستقیم خط د x د محور څخه د پاسه او د x د کوم قیمت لپاره مستقیم خط د x محور نه لاندې پروت وی.

فعالیت

- د $2x-4$ الجبري افاده څو حده ده؟
- دا افاده د x متحول په کوم قیمت مساوي له صفر سره ده؟
- دا افاده د x متحول په کومو قیمتونو سره مثبت ده؟
- دا افاده د x متحول په کومو قیمتونو سره منفي ده؟

د پورتنی فعالیت رياضي بيان په لاندې ډول په جدول کې لنډوو:

x	$x<2$	2	$x>2$
$2x-4$	$-$	0	$+$

په دې جدول کې لیدل کېږي چې د $2x-4$ بینوم په $x=2$ کې مساوي په صفر دی او د هغو قیمتونو لپاره چې له 2 نه کوچني وي منفي علامه او په هغو قیمتونو کې چې له 2 نه لوی وي بینوم مثبته علامه لري.

لومړی مثال: د $P(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ بینوم علامه وټاکئ.

حل: لومړی هغه قیمت پیدا کوو چې بینوم په هغې کې صفر وي.

$$-\frac{1}{2}x+3=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{2}x=-3 \quad \Rightarrow \quad x=6$$

وروسته هغه قیموتونه چې بینوم په هغې کې مثبت وي، په لاس راوړو:

$$-\frac{1}{2}x+3>0 \Rightarrow \frac{-1}{2}x>-3 \Rightarrow x<6$$

په همدې ترتیب هغه قیمتونه چې بینوم په هغې کې منفي وي عبارت دي له:

$$-\frac{1}{2}x+3<0 \Rightarrow \frac{-1}{2}x<-3 \Rightarrow x>6$$

په لاس راغلی پایلې لاندې جدول کې راټولوو:

x	$x<6$	6	$x>6$
$-\frac{1}{2}x+3$	$+$	0	$-$

یادونه: په عمومي ډول د $ax+b$ بینوم د علامې د ټاکلو لپاره لومړی هغه قیمت په لاس راوړو چې بینوم په هغې کې صفر کېږي او د علامې د ټاکلو جدول یې په لاندې ډول دی.

$a>0-1$

x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}<x$
$ax+b$	a ته مخالفه علامه	0	a سره ورته علامه

$a<0-2$

x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}<x$
$ax+b$	د a مطابقه علامه	0	د a مخالفه علامه

پوښتنې

د لاندې الجبري افادو علامې وټاکئ:

1) $3x-9$ 2) $7x-2$ 3) $\frac{3}{4}x-1$

4) $0.5x+10$ 5) $2x-4+x-1$ 6) $\frac{1}{2}x+3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کسري افادو د علامو تحلیل او تاکل

$$\frac{?}{?} = +$$

$$\frac{?}{?} = -$$

د a ، b حقیقي عددونو لپاره د $\frac{a}{b}$ کسر، څه وخت مثبت او څه وخت منفي علامه لري.

فعالیت

- د $\frac{3x+5}{2x-2}$ کسري افاده په پام کې ونیسئ.
- پورتنۍ افاده په کوم حالت کې مثبت کېږي.
- پورتنۍ افاده په کوم حالت کې منفي کېږي.
- د x په کوم قیمت سره د پورتنۍ کسري افاده مساوي په صفر ده.
- ایا کولای شئ په نوموړي افاده کې د x په ځای (۱) وضع کړئ. ولې؟

د نوموړي افادې د صورت او مخرج د علامې د ټاکلو څخه وروسته کولای شو د نوموړي کسري افادې علامه د صورت او مخرج د علامو د ویش له حاصل څخه په لاس راوړو:

$$3x+5=0 \Rightarrow x=\frac{-5}{3}$$

پوهېږو چې د $x<\frac{-5}{3}$ لپاره د بینوم د صورت علامه منفي او د $x>\frac{-5}{3}$ لپاره د بینوم د صورت علامه مثبت ده.

د مخرج د علامې د ټاکلو لپاره لومړی هغه قیمت پیدا کوو، چې $2x-2$ په هغه کې صفر شي.

$$2x-2=0 \Rightarrow x=1$$

په پایله کې د $x<1$ څخه بینوم د مخرج علامه منفي او د $x>1$ لپاره د بینوم د مخرج علامه مثبت ده.

پاملرنه وکړی په هغه قیمت کې چې د کسري افادې مخرج صفر کېږي نه دی تعریف شوی، پورتنی بحث په لاندې ډول د علامو د تحلیل او ټاکلو په جدول کې داسې لنډوو:

x	$x<-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}<x<1$	1	$1<x$
$3x+5$	$-$	0	$+$		$+$
$2x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{3x+5}{2x-2}$	$+$	0	$-$	نه دی تعریف شوی	$+$

نو د $x<\frac{-5}{3}$ او $x>1$ قیمتونو لپاره د $\frac{3x+5}{2x-2}$ کسري افادې اشاره مثبت او د $\frac{-5}{3}<x<1$ قیمتونو لپاره د $\frac{3x+5}{2x-2}$ کسر افادې اشاره منفي ده.

او د $x=\frac{-5}{3}$ قیمت لپاره کسري افاده مساوي صفر ده.

په عمومي ډول د کسري افادې د اشارې د تحلیل او ټاکلو لپاره لومړی د کسر د صورت او مخرج اشاره ټاکو وروسته د صورت او مخرج د اشارو او د ویش د حاصل څخه د کسري افادې اشاره په لاس راوړو.

مثال: د $\frac{-x+3}{x}$ کسري افادې اشاره وټاکئ.

حل:

$-x+3=0 \quad \Rightarrow x=3$

$x=0$

x		0		3	
$-x+3$	$+$		$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{-x+3}{x}$	$-$	نه دی تعریف شوی	$+$	0	$-$

پوښتنې

د لاندې کسري افادو اشاره وټاکئ.

$a)\ \frac{-x+1}{5+x} \qquad b)\ \frac{x}{x+1} \qquad c)\ \frac{1}{x}+\frac{2}{7}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

کسري غیرمساوات

$$y = \frac{x+1}{x}$$

$y > 0$

$y < 0$?

د x په کوم قیمت سره د مخامخ کسري افاده مثبت او د x په کوم قیمت سره افاده منفي ده؟

فعالیت

د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ کسري غیرمساوات په پام کې ونیسئ.

- د پورتنی نامساوي د رښتینوالی لپاره د کسري افادې صورت او مخرج باید کومه علامه ولري؟
- د x متحول د کوم قیمتونو لپاره د پورتني کسري افادې صورت مثبت دی؟
- د x متحول د کوم قیمتونو لپاره د پورتني کسري افادې مخرج مثبت دی؟
- د x متحول د کوم قیمتونو لپاره د پورتني کسري افادې صورت منفي دی؟
- د x متحول د کوم قیمتونو لپاره د پورتني کسري افادې مخرج منفي دی؟
- د پورتني فعالیت د لاس ته راغلو پایلو په پام کې نیولو سره د x متحول د کومو قیمتونو لپاره د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ غیرمساوات سم دی؟

د پورتني فعالیت د سرته رسولو څخه ولیدل شول چې د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ غیرمساوات د حل لپاره باید بیلابیل حالتونه په پام کې ونیسو. د کسري نامساواتو د حل د سټ پیدا کولو یوه بله لاره د علامو د ټاکلو او تحلیل جدول دی. د مثال په ډول د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ غیرمساوات د حل سټ پیدا کولو لپاره داسې عمل کوو:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

$$4+2x=0 \Rightarrow x=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

x		-2		2	
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$4+2x$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-2}{4+2x}$	$+$ د نامساوي حل	نه دی تعریف شوی	$-$	0	$+$ د نامساوي حل

د علامو د تحلیل او ټاکلو جدول ته په پاملرنې سره لیدل کېږي، چې هغه قیمتونه چې له($x<-2$) او له($x>2$) وي افاده مثبت ده، او دهغو قیمتونو لپاره چې له(-2) څخه لوی او له(2) کوچنی($-2<x<2$) وي منفي ده. په پایله کې د غیرمساوات د حل سټ عبارت له $x<-2$ او د $x>2$ یا $\{x\in R : x<-2\}\cup\{x\in R : x>2\}$ یا $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

مثال: د $\frac{2x}{5x+3}\geq 1$ کسري غیرمساوات حل کړئ.

حل: د غیرمساوات د حل سټ پیداکولو لپاره لومړی کسري افاده یو وار د صفر څخه کوچنی یا لویه لیکو:

$$\frac{2x}{5x+3}\geq 1 \Rightarrow \frac{2x}{5x+3}-1\geq 0$$

$$\frac{2x-(5x+3)}{5x+3}\geq 0 \Rightarrow \frac{-3x-3}{5x+3}\geq 0$$

$$-3x-3=0\Rightarrow x=-1$$

$$5x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-3}{5}$$

اوس د غیرمساوات د علامې د ټاکلو له جدول څخه د غیرمساوات حل په لاس راورو.

x		-1		$-\frac{3}{5}$	
$-3x-3$	$+$	0	$-$		$-$
$5x+3$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{-3x-3}{5x+3}$	$-$	0	$+$ د نامساوي حل	نه دی تعریف شوی	$-$

له پورتنی جدول په پاملرنې سره د غیرمساوات حل عبارت دی له: $\{x\in IR : -1\leq x<\frac{-3}{5}\}$

په بشپړ ډول د کسري نامساوي د حل لپاره په لاندې ډول پر مخ ځو:

- غیرمساوات داسې لیکو چې له صفر څخه کوچنی یا لویه وي.
- غیرمساوات د علامو د ټاکلو له جدول څخه د غیرمساوات د حل سټ په لاس راورو.

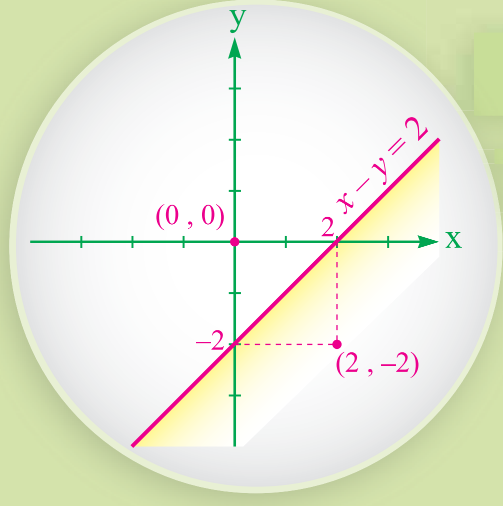
پوښتنې

د لاندې غیرمساواتو د حل سټ پیدا کړئ.

1) $\frac{-x-9}{2x+4}<0$ 2) $\frac{6x+7}{7-6x}\leq 0$ 3) $\frac{x+10}{2x-3}\geq 0$ 4) $\frac{7x-2}{3-2x}>3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خطي دوه متحوله غیرمساوات



د $x - y = 2$ مستقیم خط د وضعیه کمیاتو مستوي په دوه پاسني او لاندیني ناحیو ویشي.
د کومې ناحیې د ټکو مختصات په $x - y < 2$ غیرمساوات کې صدق کوي.

د $x - y < 2$ نامساوي چې په هغه کې د x او y متحولین لومړی درجه دی یو خطي دوه متحوله غیرمساوات بلل کیږي.

فعالیت

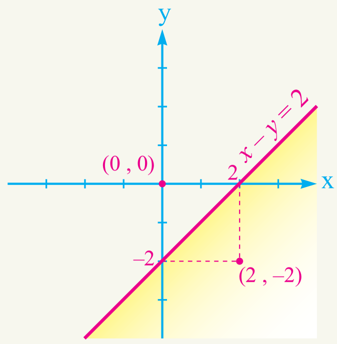
- د (x, y) مرتبې جوړې داسې په لاس راوړئ چې په $x - y < 2$ غیرمساوات کې صدق وکړي.
- څومره مرتبې جوړې پیداکولای شئ چې په پورتنی غیرمساوات کې حقیقت ولري.

- ایا کولای شئ چې نورې مرتبې جوړې پیداکړئ چې په پورتني غیرمساوات کې صدق وکړي.

په پورتنیو حالاتو کې ویلای شو چې:

د $ax + by < c$ نامساوي چې په هغه کې b, a او c حقیقي عددونه او $a \neq 0$ یا $b \neq 0$ وي خطي دوه متحوله غیرمساوات بلل کیږي.

د دې غیرمساوات د حل سټ د هغو عددونو مرتبې جوړې دی چې په نامساوي کې صدق کوي.



لومړی مثال: د $x - y < 2$ دوه متحوله غیرمساوات د حل سټ پیداکړئ.

حل: د دې غیرمساوات د حل لپاره لومړی $x - y = 2$ کرښه د وضعیه کمیاتو په مستوي کې رسموو. لیدل کیږي چې د $x - y = 2$ مستقیمه کرښه د وضعیه کمیاتو مستوي په

دوو ناحیو ویشي د دې لپاره چې و پوهېږو د کومې ناحیې د عددونو مرتبې جوړې په غیرمساوات کې صدق کوي له هرې ناحیې څخه یوه مرتبه جوړه ټاکو او په غیرمساوات کې یې وضع کوو.

د مثال په ډول $(0,0)$ مرتبه جوړه په غیرمساوات کې صحیح دی.

$$0-0<2 \quad \Rightarrow \quad 0<2$$

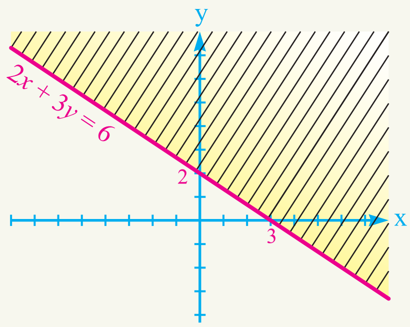
نو هغه ټکی چې د مستقیمې کرښې پورته خوا ته دی د غیرمساوات حل دی.

د غیرمساوات د حل سټ د ښودلو لپاره هغه اړخ د مستقیمې کرښې توروو چې په غیرمساوات کې سم والی نه لري.

پوښتنه: څو نور ټکي د مستقیمې کرښې څخه پورته او ښکته خواته وټاکئ پورتنۍ پایله وڅیړئ.

دویم مثال: د $2x+3y<6$ نامساوي د حل سټ پیدا کړئ.

حل: لومړی د $2x+3y<6$ کرښه د وضعیه کمیاتو په مستوي کې رسموو وروسته د غیرمساوات د حل سټ پیدا کولو لپاره د مستقیم د پاسه یا ښکته خوا د یوه ټکي مختصات ټاکو او په غیرمساوات کې یې وضع کوو که حقیقت یې درلود هغه اړخ د غیرمساوات حل دی او بل عکس نه دی.



لکه د $(0,0)$ د وضعیه کمیاتو مبدا مرتبه جوړه په پام کې نیسو:

$$2x+3y<6$$
$$2\times(0)+3\times(0)<6$$
$$0<6$$

څرنګه چې نوموړی ټکی مختصات په غیرمساوات کې حقیقت لري نو د کرښې لاندې خوا ټکي د غیرمساوات د حل سټ دی.

پوښتنې

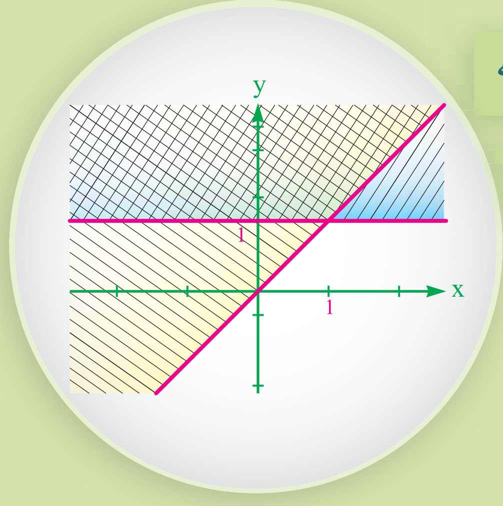
1) $3x-2<5x+y$ 2) $2y<3x$ 3) $x+y>0$

4) $2x-6y\ge 8x+4y$ 5) $x+y<0$ 6) $5x-3y<-1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه متحوله خطي غیرمساواتو سیستمونه



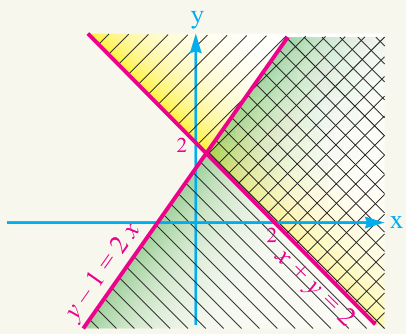
د لاندې غیرمساواتو د حل سټ پیدا کړئ.
ایا کولای شئ اټکل وکړئ چې مخامخ شکل د کومو نامساواتو د حل ساحه راښیي.

د $\begin{cases} x + y < 2 \\ y - 1 > 2x \end{cases}$ د غیرمساواتو سیستم چې په هغه کې دوه خطي دوه متحوله غیرمساوات دي د غیرمساوات سیستم بلل کېږي.

د غیرمساواتو سیستم له حل څخه مطلب دا دی چې هغه مرتبې جوړې پیدا کړو چې په یوه وخت کې په دواړو غیرمساواتو کې صدق وکړي.

لومړی د هر یوه نامساوي حل د وضعیه کمیاتو په مستوي کې په لاس راوړو.

هغه ناحیه چې ګډه نه ده خط، خط شوی د غیرمساوات همزمان د حل په سټ کې ګډون لري او دا ناحیه د غیرمساوات د سیستم حل دی.



د $x + y = 2$ ګرښې د رسمولو لپاره که $x = 0$ وي $y = 2$ او که $y = 0$ وي نو $x = 2$ کېږي او د $y - 1 = 2x$ ګرښه کې که $x = 0$ وي $y = 1$ او که $y = 0$ وي نو $x = \frac{-1}{2}$ سره کېږي.

د دوه متحوله خطي غیرمساوات د سیستم د حل لپاره داسې عمل کوو:
لومړی د هر یوه دوه متحوله خطي نامساوي د سیستم حل د وضعیه کمیاتو په مستوي کې ټاکو.
هغه ناحیه چې په یوه وخت کې د دواړو غیرمساواتو د حل د سټ یوه برخه وي د سیستم حل دی.

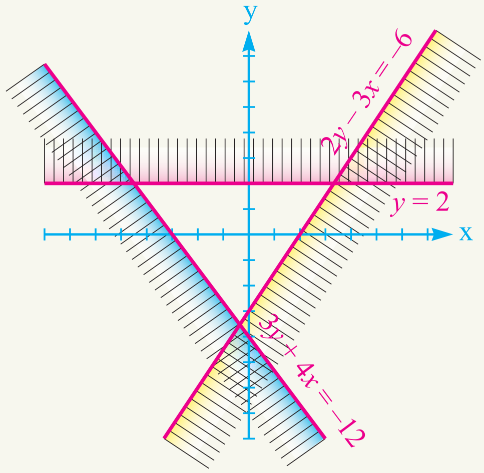
مثال: د لاندې غیرمساواتو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} 2y-3x>-6 \\ y-2<0 \\ 3y+4x>-12 \end{cases}$$

حل: لومړی د پورتنی غیرمساوات هره یوه کرښه رسموو یعني:

$2y-3x=-6$, $y-2=0$ او $3y+4x=-12$

د $2y-3x=-6$ رسمولو لپاره که $x=0$ وي $y=-3$ او د $y-2=0$ ګراف لپاره که $x=0$ وي $y=2$ کېږي او د $3y+4x=-12$ کرښې د رسمولو لپاره که $x=0$ وي $y=-4$ کېږي چې د نوموړو قیمتونو په مرسته يې ګراف په مخامخ بڼه رسموو.



وروسته د هرې يوې غیرمساوات د حل ساحه په بيل بيل ډول ټاکو.
د ورکړل شوو نامساواتو سیستم د حل سټ په شکل کې نه دي توري شوي ناحيې په شکل ليدل کېږي.

پوښتنې

د لاندې سیستمونو د حل سټ د ګراف په مرسته په لاس راوړئ.

1) $\begin{cases} x<3 \\ 2x+y<4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y<9 \\ 5x-2y>5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x<3 \\ y>2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-3y<-3 \\ 5x-2y>9 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+y<4 \\ x-y<3 \\ 5x-y>1 \end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شپږم څپرکي لنډيز

- که چيرې عددونه د دې علامو ($<, \leq, >, \geq$) په مرسته يو له بل سره اړيکه ولري د غيرمساوات په نامه يادېږي.
- که د يوه غيرمساوات دواړو خواوو ته يو حقيقي عدد ور جمع يا تفريق کړو په نامساوي کې بدلون نه راځي.
- که د يوه غيرمساوات دواړه خواوې په يوه مثبت حقيقي عدد د صفر خلاف ضرب يا تقسيم شي په نامساوي کې بدلون نه راځي.
- که د يوه غيرمساوات دواړه خواوې په يوه منفي حقيقي عدد د صفر خلاف ضرب يا وويشل شي د غيرمساوات لورې بدلون کوي.

تړلی انټروال $[a,b]=\{x\in IR : a \leq x \leq b\}$

خلاص انټروال $(a,b)=\{x\in IR : a < x < b\}$

نيمه خلاص انټروال $(a,b]=\{x\in IR : a < x \leq b\}$

نيمه تړلی انټروال $[a,b)=\{x\in IR : a \leq x < b\}$

- د يوې کسري افادې د علامې د ټاکلو لپاره لومړی د صورت او مخرج علامه بېله بېله ټاکو وروسته د علامو د ويش حاصل په لاس راوړو.
- د $x+3 \leq 5$ دوه متحوله خطي غيرمساوات د سيستم د حل لپاره داسې عمل کوو.

لومړی د هر دوه متحوله خطي غيرمساوات د سيستم حل د وضعيه کمياتو په مستوي کې ټاکو. هغه ناحيه چې په يوه وخت کې د دواړو غيرمساواتو د حل د سټ يوه برخه وي د سيستم حل

د شپږم څپرکي پوښتنې

دی.

- په لاندې سوالونو کې د هر سوال لپاره څلور ځوابه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ.

1- د لاندې نامساواتو څخه کوم یو سم دی:

$a)\ \frac{1}{2}+\frac{3}{6}\le 2-\frac{1}{3}$ $b)\ \frac{3}{2}>\sqrt{2}$ $c)\ \sqrt{9+16}\ge 5$ $d)$ د b,a او c ځوابونه

2- د $x+3\le 5$ نامساوي د حل ست عبارت دی له:

$a)\ \{x\in IR: x\le 2\}$ $b)\ \{x\in IR: 2\le x\}$
$c)\ \{x\in IR: x\le 8\}$ $d)\ \{x\in IR: x<-2\}$

3- د لاندې انټروالونو څخه کوم یو د $2x+3>1$ نامساوات د حل ست دی.

$a)\ [-2,\infty)$ $b)\ (2,\infty)$ $c)\ (1,\infty)$ $d)\ (-2,\infty)$

4- که $0<a<b$ وي د لاندې اړیکو څخه کومه یوه سمه ده.

$a)\ \frac{1}{b}<\frac{1}{a}$ $b)\ \frac{-1}{b}<\frac{-1}{a}$ $c)\ -b<-a$ $d)$ جوابهای b,a و c

5- د لاندې انټروالونو څخه کوم یو د $\frac{x+3}{3-x}>0$ نامساوي د حل ست دی.

$a)\ (-3,3)$ $b)\ (-\infty,3)$ $c)\ (-3,\infty)$ $d)\ (-3,3)$

- تش ځایونه په مناسبو کلمو سره ډک کړئ.

1- د $ax+by<0$ نامساوات کې د ټولو هغه .... سټ چې په نامساوات کې صدق وکړي د پورتنی نامساوات د حل سټ بلل کېږي.

۲- د $[4,5]$ انټروال د .... په نامه یادېږي.

۳- د $2x+4$ بینوم د .... قیمتونو لپاره یادېږي.

۴- د $-x+\frac{1}{2}$ بینوم د .... قیمتونولپاره مثبت کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵- د $2x+5 \le \frac{1}{5}-x$ نامساوي د حل سټ عبارت دی له ....

• د لاندې جملو څخه کومه یوه سمه د هغې په مخ کې د(س) توري او د ناسمې په مخ کې د(ن) توري ولیکئ.

1- (   ) د یوې غیرمساوات د حل سټ یو عنصر لري.

۲- (   ) د $\{x \in R \;: 2 \le x < 5\}$ یو تړلی انتروال دی.

۳- (   ) د غیرمساواتو د سیستم د حل سټ د وضعیه کمیاتو د مستوي یوه برخه ده.

٤- (   ) د خطي غیرمساوات د حل سټونه بې شمیره دی.

۵- (   ) څرنګه چې $-2 < 3$ څخه دی نو له دې ځایه دا پایله $-\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$ اخیستلای شو.

• لاندې پوښتنې په بشپړ ډول حل کړئ:

1- د لاندې غیرمساوات ګانو حل په لاس راوړئ.

$a)\ \frac{x-5}{4}-\frac{x-8}{3}<0$

$b)\ x-2<3(2x-9)$

$c)\ (x-3)(x+3)<0$

$d)\ \frac{3x+4}{x}-1<0$

$e)\ 1-\frac{2}{x}\le 3$

2- لاندې انتروالونه د عددونو پر محور وښیئ.

$a)\ [-1,2]$ $b)\ (-2,1]$ $c)\ [-1,1)$ $d)\ (-2,2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- د لاندې عددونو سټونه د انټروال په بڼه ولیکئ او د عددونو پر محور یې وښیئ.

$a)\ \{x \in IR: x \leq 2\}$ $\qquad$ $b)\ \{x \in IR: x \leq 5\}$

$c)\ \{x \in IR: -1 \leq x \leq 6\}$ $\qquad$ $d)\ \{x \in IR: -4 < x < 2\}$

4- د لاندې غیرمساوات د سیستم حل پیدا کړئ:

$$a)\ \begin{cases} y > x \\ 3y < 2 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 2x - y > 0 \\ x - 2y < 0 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x + y < 2 \\ y - 4 > 2x \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} 2x + 2y < 8 \\ 3x - 3y < 9 \\ 10x - 2y > 2 \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} y > 2 \\ x > -3 \\ y + x < 0 \end{cases}$$

$$f)\ \begin{cases} y < 2 \\ x < -3 \\ y + x > 0 \end{cases}$$

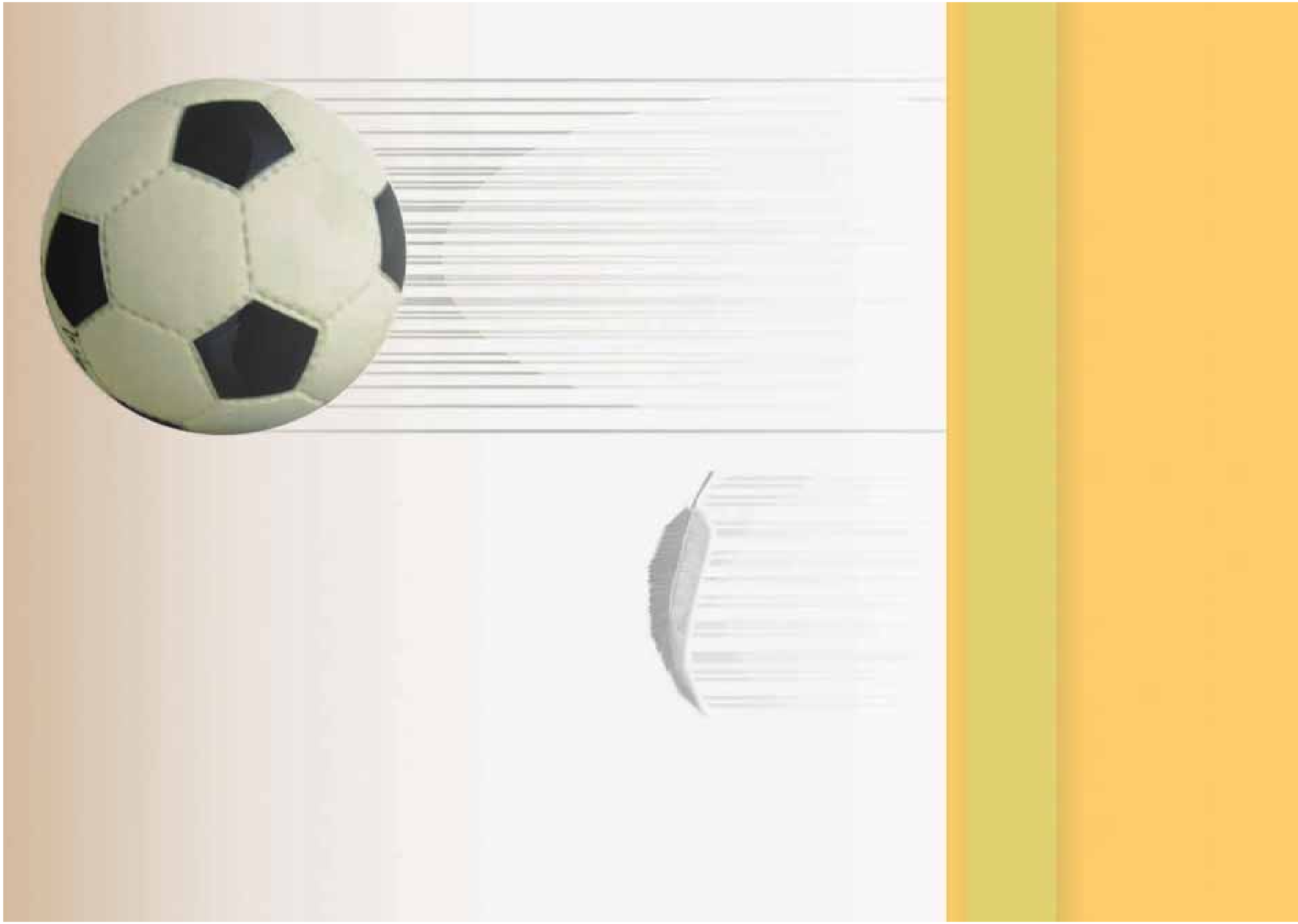
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم څپـــرکی

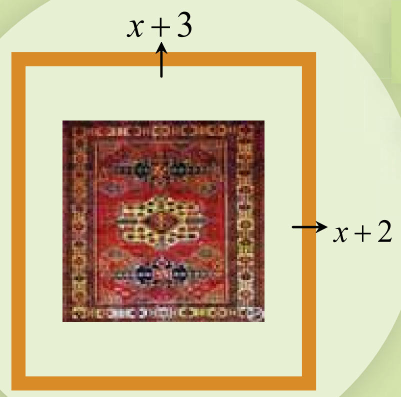
دویمه درجه یو مجهوله معادله

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

دويمه درجه يو مجهوله معادلې
Quadratic Equation



که چيرې يوه کوټه د يوې مربع شکلې قالين په واسطه داسې فرش شي چې د کوټې اوږدوالى $3m$ او سور يې $2m$ په اندازه د قالين د څنډې څخه زياد وي، لکه مخامخ شکل، وواياست چې د کوټې مساحت څومره دی؟

فعاليت

- الجبري افاده تعريف کړئ.
- معادله تعريف کړئ.
- د يو مجهوله لومړى درجې معادلې يوه بېلګه وليکئ.
- د يو مجهوله لومړى درجې معادلې عمومي شکل وليکئ.
- د $(x-2)(x+3)=0$ معادلې د قوسونو د ضرب حاصل پيدا کړئ.
- د پورتني معادلې درجه د $x+4=3x-1$ معادلې له درجې سره پرتله کړئ.

هغه معادلې چې يو مجهول ولري او د هغې درجه دوه وي يو مجهوله دويمه درجه معادله بلل کېږي، چې عمومي شکل يې $ax^2+bx+c=0$ ، $a\neq 0$ چې a, b او c حقيقي اعداد او x مجهول بلل کېږي که چيرې $b=0$ يا $c=0$ وي په دې حالت کې دې ډول معادلې ته نيمګړې دويمه درجه معادله وايي.

لومړى مثال: يو تار چې يو متر اوږدوالى لري غواړو د هغې څخه يو مستطيل چې مساحت يې $600cm^2$ دی جوړ کړو د دې مستطيل اوږدوالى او سور څرنګه وټاکو.

حل: که دمستطيل اوږدوالى x او سور يې په y وښيو دمستطيل محيط $2(x+y)=100 \ldots I$ اړيکې او مساحت يې $x\times y=600\ldots II$ اړيکې څخه په لاس راوړو.

$$\begin{cases}2(x+y)=100\\ x\cdot y=600\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+y=50 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{I}\\ x\cdot y=600 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{II}\end{cases}$$

د I معادلې څخه د y قیمت د x له جنسه په لاس راوړو او په II معادله کې وضع کوو:

$$\begin{cases} 2(x+y)=100 \\ x \cdot y = 600 \end{cases} \Rightarrow x(50-x)=600$$
$$50x - x^2 = 600$$

څرنګه چې په پورتنی معادله کې د x درجه دوه ده نو نوموړی معادله دویمه درجه ده د معادلو د حلونو پیداکولو لپاره بیلابیلې لارې شته چې هغه تر څېرنې لاندې نیسو.

دویم مثال: هغه عدد په لاس راوړئ چې مربع یې د 6 په اندازه له خپل عدد څخه زیاته وي.

حل: که چیرې عدد په x ونوموو؛ نو پورتنی بیان د ریاضي په بنه داسې لیکو:

$x^2 = 6 + x$ یا $x^2 - x - 6 = 0$

د دې ډول معادلو حل به په راتلونکې لوست کې وڅیړو.

دریم مثال: په لاندې معادلو کې د عمومي شکل له مخې د b, a او c ضریبونو قیمتونه ولیکئ.

حل:

$a)\ 2x^2 - 4x + 1 = 0$ $b)\ 3x - x^2 = 4$ $c)\ 4x^2 - 1 = 0$

$d)\ 7x^2 = 49$ $e)\ x^2 - 4 = 0$ $f)\ \frac{3}{4} - x^2 = \frac{2}{3}x$

جزء	معادلی	د a ضریب	د b ضریب	د c ضریب
a	$2x^2 - 4x + 1 = 0$	2	–4	1
b	$3x - x^2 = 4$	–1	3	–4
c	$4x^2 - 1 = 0$	4	0	–1
d	$7x^2 = 49$	7	0	–49

پوښتنې

1 - په لاندې معادلو کې مکملې او نیمګړې دوهم درجه یو مجهوله معادلې په ګوته کړئ.

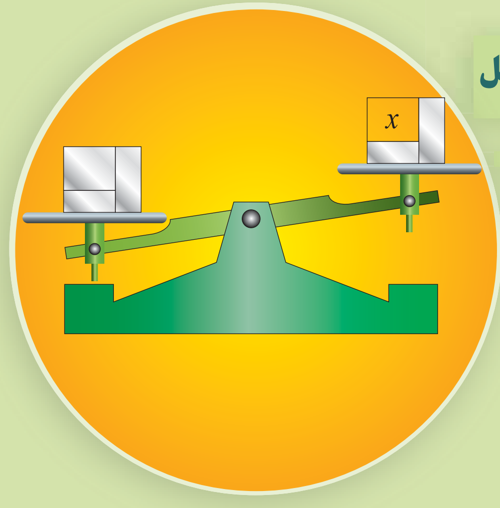
$a)\ 6 - 2x + x^2 = 0$ $b)\ 5x^2 - 3x + 1$ $c)\ \sqrt{2}x^2 - 4x = 0$ $d)\ -x^2 = 3$

2- په لاندې معادلو کې د a، b او c ضریبونه وښیئ.

$a)\ 6x^2 - 4x = 2$ $b)\ 3x - 4 = x^2$ $c)\ 4x - x^2 - 6 = 4x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دویمه درجه یو مجهوله معادلې حل



آیا کولای شي چې د x لپاره داسې قیمت پیدا کړئ چې تله په تعادل کې راشي.

فعالیت

- د $2x+4=3x-1$ معادلې حل پیداکړئ.
- پورتنې مساوات د x د بیلابیلو قیمتونو لپاره په مخامخ جدول کې وڅیړئ.

x	$2x+4$	$3x-1$
-3		
-2		
0		
5		

- د جدول او پاسنې پوښتنې په پام کې نیولو سره توضیح ورکړئ چې د معادلې د حلولو پیداکول یعنې څه؟
- مخامخ جدول پوره او د هغې له مخې د $x^2-4x+3=0$ معادلې حلونه په لاس راوړئ.

x	x^2-4x+3
-3	
-2	
-1	
0	
1	

هغه قیمتونه چې په یوه دویمه درجه معادله کې برابروالی راولي د یو مجهوله دویمې درجې معادلې حل بلل کیږي.

لومړی مثال: هغه عدد پیداکړئ چې مربع یې د 12 واحدو په اندازه له عدد څخه ډیره وي.

حل: که چیرې عدد ته x ووایو نو الجبري عبارت داسې بڼه نیسي:

$$x^2 = x+12$$

څرنګه کولای شو چې د پورتنی مساوات څخه د هغې حل پیداکړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې $x = 1$ په معادله کې وضع کړو نو لیدل کېږي، چې د مساوات ښی اړخ د 13 عدد او کیڼ اړخ ته یې د 1 عدد په لاس راځي. په معادله کې د $x = 2$ قیمت په وضع کولو سره لیدل کېږي، چې د مساوات ښی اړخ ته 14 او کیڼ اړخ ته یې د 4 عدد په لاس راځي او د $x = 3$ په وضع کولو سره لیدل کېږي چې ښی اړخ ته د 15 عدد او کیڼ اړخ ته د 9 عدد دی.
په همدې ترتیب د نورو قیمتونو په وضع کولو سره لکه $x = 4$ لیدل کېږي، چې د مساوات ښی اړخ ته د 16 عدد او کیڼ اړخ ته هم 16 عدد په لاس راځي لیدل کېږي، چې د 16=16 مساوي کېږي نو $x = 4$ د معادلې یو حل دی.

د پورتنۍ لارې لنډیز چې د معادلې حل د پیدا کولو لپاره مو ترې ګټه واخیسته کولای شو په مخامخ جدول کې داسې ولیکو.
ایا کولای شو چې د دویمې درجې معادله د حل لپاره یوه بشپړه لاره پیدا کړو.

x	x^2	$x+12$
1	1	13
2	4	14
3	9	15
4	16	16

دویم مثال: هغه عدد په لاس راوړئ، چې د هغې د مربع جمع د 1 سره مساوي په صفر شي.
حل: د پاسني بیان الجبري افاده عبارت ده له: $x^2 + 1 = 0$
د پورتنۍ لارې په څېر د اټکل شویو اعدادو په وضع کولو سره د معادلې د حل په لټولو پیل کوو او پر مخ ځو، د دې کار لپاره د پورتنۍ جدول په څېر مخامخ جدول په پام کې نیسو.
د دې جدول څخه لیدل کېږي چې نشو کولای تعادل برقرار کړو یعنې د x لپاره داسې قیمت نشو پیدا کولای، چې د معادلې دواړې خواوې مساوي کړي. له بلې خوا د معادلې څخه څرګندیږي هر کله چې یو عدد مربع کړو او یو ورسره جمع کړو هیڅ وخت مساوي په صفر نشي کیدلای؛ نو دا دویمه درجه معادله حل نه لري.

x	x^2	-1
1	1	-1
2	4	-1
0	0	-1
-1	1	-1
-2	4	-1
-3	9	-1

پوښتنې

1- یوه دویمه درجه یو مجهوله معادله ولیکئ چې حل و نه لري.

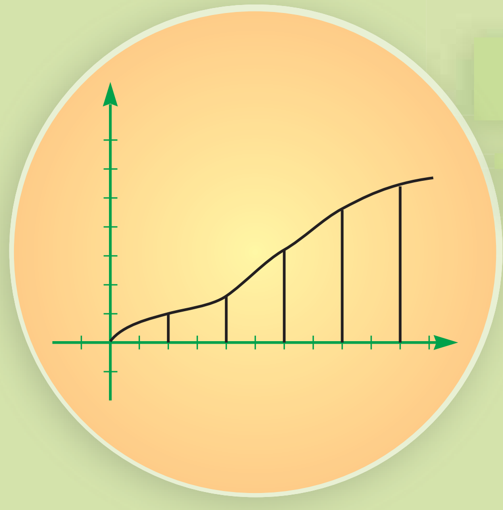
2- لاندې معادلې حل کړئ.

$a)\ x^2 - 1 = 0 \qquad b)\ x^2 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

غیر خطي اړیکی(رابطي)



ډاکټران د یوه ماشوم د ونې(قد)اوږدوالی پــه بېلابېلو وختونو کې په مخامخ ګراف کــې څېړي. ایا تاســې تر اوســه پورې د خپلــې ونې(قــد) د اوږدوالــی بدلون ته ســوچ کړی دی چې پــه بېلابېلو وختونو کې څومره وو؟

فعالیت

- د یوې مربع د ضلعې د اوږدوالی او مساحت تر منځ اړیکه په پام کې ونیسئ، د مربع د ضلعې اوږدوالی په x او مساحت یې په y ښیو.
- د x او y اړیکه په یوه معادله کې وښیئ.
- مخامخ جدول پوره کړئ.

x	1	2	3	4	
y		4			25

- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د پورتنیو مرتبو جوړو ټکې وټاکئ او یو بل سره یې ونښلوئ.
- د دقیق ګراف رسمولو لپاره، x ته ډېر سره نږدې قیمتونه ورکوو، لاندې جدول پوره کړئ د پورته په څېر ټکې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ او ګراف یې رسم کړئ.

x	0	0.2	0.5	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
y		0.4			1				3.24	4					9

- د پورتنی جدول په مرسته لاندې جدول په خپلو کتابچو کې بشپړ کړئ.

x	−3	−2.8	−2.6	−2.4	−2.2	−2	−1.8	−1.6	−1.4	−1.2	−1	−0.8	−0.5	−0.2	
$y=x^2$															0

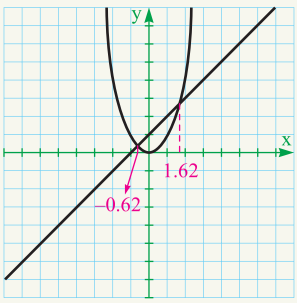
- د پورتنیو جدولونو څخه په ګټه د $y = x^2$ معادلې ګراف په ډېر دقت رسم کړئ.

د پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.

پایله: په پورتنی فعالیت کې مو ولیدل چې د $y = x^2$ معادلې گراف مستقیم نه دئ.

مثال: د $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x+1 \end{cases}$ سیستم معادلاتو گراف د قایمو مختصاتو په سیستم کې رسم کړئ، او گډ حل یې پیدا کړئ.

حل: د هغو لارو څخه چې مخکې مو د گراف د رسمولو لپاره تري گټه واخیسته د پورتنیو معادلو د گرافونو د رسمولو لپاره د هغو د عددونو جدولونه ترتیب او مرتبې جوړې یې د مختصاتو په سیستم کې پس له ټاکلو د معادلو گرافونه رسموو.



- د $y = x^2$ لپاره لرو:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

- د $y = x+1$ لپاره:

x	0	1
$y=x+1$	1	2

د گراف له مخې د گډ حل د ټکو ورنژدې قیمتونه یې مساوي په:

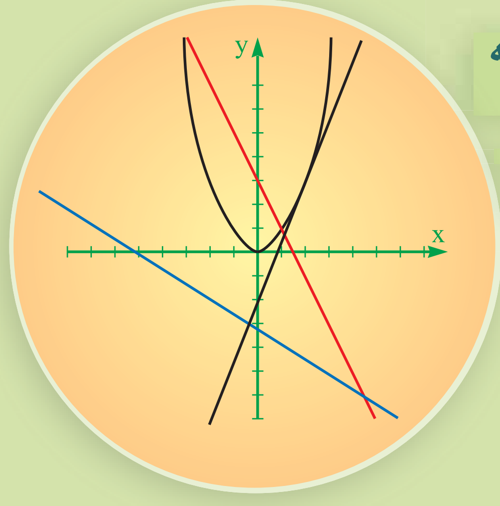
$$x_1 = 1.62 \ , \ x_2 = -0.62$$

پوښتنې

1- د $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x-2 \end{cases}$ سیستم د معادلاتو گراف رسم کړئ.

2- د $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$ سیستم د معادلاتو گراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دويمي درجې معادلې حل په هندسي لاره (طريقه)

په مخامخ شکل کې مستقيم خط له ورکړل شوي منحني سره په څو حالتونو کې قرار لري؟

فعاليت

- ايا د $x^2 - 6x + 7 = 0$ معادله کولای شو چې داسې $x^2 = 6x - 7$ وليکو؟
- که چيرې نومورې مساوات له y سره مساوي وي $y = x^2 = 6x - 7$ نو $y = x^2$ او $y = 6x - 7$ دي.
- د $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 6x - 7 \end{cases}$ معادلو د سيستم ګراف د مختصاتو په سيستم کې رسم کړئ.
- د پورتني سيستم ګرافونه يو بل په څو نقطو کې قطع کوي؟
- د پورتني سيستم حل د ګرافونو د تقاطع له ټکو سره څه اړيکه لري.

د پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

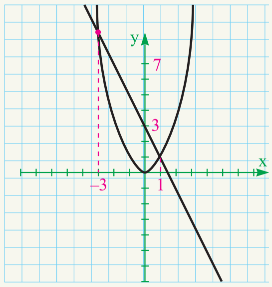
- هره دويمه درجه معادله کولای شو چې د $y = x^2$ معادلې او د $y = ax + b$ کرښه ايزو معادلو په څير وليکو.
- د x ټکي د پرېکړې مختصه (په هغه صورت کې چې وي) د دويمې درجې معادلې حل دی د پورتني کرنې په مرسته د دويمه درجه معادلې حل پيدا کول د هندسي حل په نامه ياديږي.

لومړی مثال: د $x^2 + 2x - 3 = 0$ معادلې حل په هندسي لاره پيدا کړئ.

حل: د $x^2 + 2x - 3 = 0$ معادله کولای شو په لاندې ډول وليکو او ګراف يې رسم کړو.

$$x^2 = -2x + 3 \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



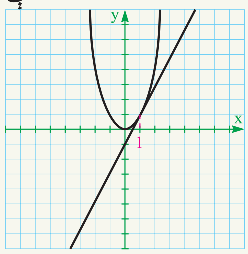
x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

x	0	3
y	3	-3

له شکل څخه ليدل کېږي چې مستقيم خط منحني په دوو بېلو ټکو کې قطع کوي چې د پرېکړې ټکي د x مختصه د دويمه درجه معادلې حل دی يعني $x_1=-3$, $x_2=1$

دويم مثال: د $x^2+2x+3=0$ معادلې حل د هندسي لارې په مرسته پيدا کړئ.

حل: د $y=x^2$ معادلې او د $y=2x-1$ مستقيمې کرښې شکلونه رسموو.



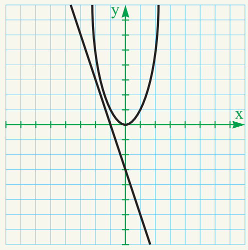
$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x-1 \end{cases}$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	+9	4	1	0	1	4	9

x	0	-1
y	-1	-3

ليدل کېږي، چې کرښه له منحني سره په يوه نقطه کې مماس ده چې ددې نقطې مختصه (قيمت) د معادلې حل دی.

دريم مثال: د $x^2+3x+3=0$ معادلې حل په هندسي لاره پيدا کړئ.



$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=3x-3 \end{cases}$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	+9	4	1	0	1	4	9

x	0	-1
y	-3	0

ليدل کېږي، چې مستقيم خط منحني نه قطع نو دويمه درجه معادله حل نه لري.

يادونه:

که چيرې منحني په دوو ټکو کې پرې کړې معادله دوه حله لري.
که چيرې منحني په يوه ټکي کې پرې کړې معادله يو حل لري.
که چيرې منحني قطع يا غوځ نه کړې، معادله حل نه لري.

پوښتنې

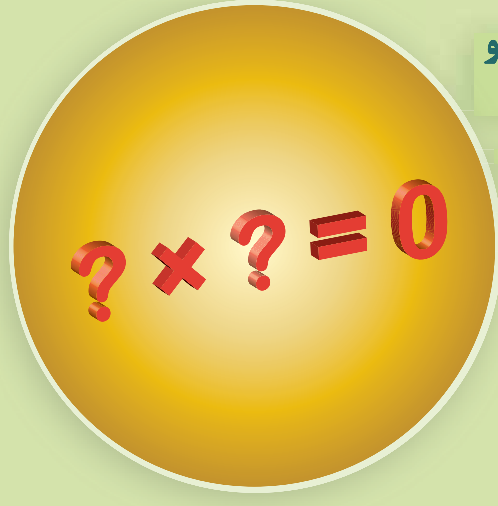
1- د لاندې معادلو حل په هندسي لاره(طريق) پيدا کړئ.

a) $x^2-2x+2=0$ b) $x^2-6x+8=0$ c) $x^2-5+7=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو مجهوله دوهمه درجه معادلو حل د تجزیې په لاره(طریقه)



د دوو عددونو د ضرب حاصل څه وخت مساوي په صفر دی.

فعالیت

- که a او b دوه حقیقي عددونه وي څه وخت $a \times b = 0$ کېږي.
- د $(x-1)(2x+3)$ د ضرب حاصل په پام کې ونیسئ، ایا ویلای شئ چې څه وخت دا حاصل ضرب مساوي په صفر دی؟
- د $2x^2 + x - 3 = 0$ معادله د $(x-1)(2x+3)$ حاصل ضرب سره څه اړیکه لري؟
- د مخکینې لارې(طریقې) څخه په ګټه اخیستنې سره د $2x^2 + x - 3 = 0$ معادلې حلونه پیدا کړئ او د $(x-1)(2x+3) = 0$ معادلې له حلونو سره یې پرتله کړئ.

د پورتنی فعالیت پایله په لاندې ډول په لاس راوړو:

پایله: که وکړای شو، چې دویمه درجه معادله د دوو خطي افادو د ضرب د حاصل په شکل واړوو نو په دې حالت کې د معادلې حل ساده کېږي، چې په لاندې ډول عمل کوو:

- د اعدادو له خاصیتونو څخه پوهېږو چې د دوو عددونو د ضرب حاصل هغه وخت صفر دی چې یو د هغوی د ضربي اجزاوو څخه یو مساوي په صفر وي، دا مسئله د الجبري افادو لپاره هم سمه ده.
- د هرې خطي الجبري افادې حل چې د یوې دوهمې درجې معادلې مساوي ده، د دویمې درجه معادلې حل دی.

لومړی مثال: د $x^2 - 7x + 6 = 0$ معادلې حل د تجزيي په مرسته په لاس راوړئ.

حل: د $x^2 - 7x + 6$ له تجزيي څخه لرو چې:

$$x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6) = 0$$

د نومورې ضرب حاصل هغه وخت صفر دی چې يو د هغو فکټورونو څخه مساوي په صفر وي او يا دواړه صفر وي؛ يعنې:

1) $x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

2) $x - 6 = 0 \Rightarrow x_2 = 6$

نو 1 او 6 د $x^2 - 7x + 6 = 0$ معادلې حلونه دي.

دويم مثال: د $2x^2 - 5x - 3 = 0$ معادلې حل د تجزيي په لاره(طريق) پيدا کړئ.

حل: تر اوسه مو هغه معادلې په فکټورونو تجزيه کړي، چې د x^2 ضريب (1) وو خو د هغو معادلو چې د x^2 ضريب يې يو نه وي په لاندې ډول يې بدلوو د دې لپاره چې د x^2 ضريب يوه کامله مربع شي د معادلې دواړه خواوې د x^2 په ضريب کې ضربوو:

$$A = 2x^2 - 5x - 3$$

$$2A = 4x^2 - 10x - 6 = (2x)^2 - 5(2x) - 6$$

$$2A = (2x+1)(2x-6)$$

$$A = \frac{1}{2}(2x+1)(2x-6)$$

$$A = (2x+1)(x-3)$$

او د A د معادلې د حل لپاره لرو:

1) $2x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$

2) $x - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$

پوښتنې

لاندې معادلې د تجزيي په لاره(طريقه) حل کړئ.

1) $x^2 + 4x + 3 = 0$

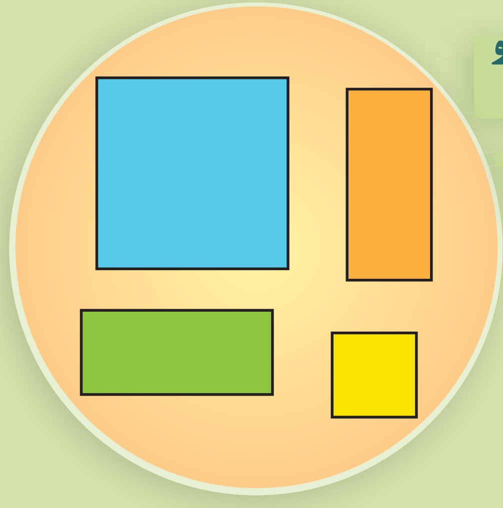
2) $x^2 + x - 2 = 0$

3) $x^2 - 6x + 8 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

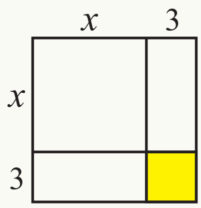
(c) ketabton.com: The Digital Library

د دویمې درجې یو مجهوله معادلو حل د تکمیل مربع په طریقه



هڅه وکړئ چې د دې شکلونو له یو ځای کیدو څخه یوه لویه مربع جوړه کړئ.

فعالیت



- د یوې مربع د ضلعې اوږدوالی څومره دی.
- د هرې برخې مساحت د هر مستطیل او مربع په مخ ولیکئ.
- د $x^2 + 6x - 40 = 0$ معادله داسې ترتیبوو چې متحول لرونکي حدونه یو اړخ او ثابت عددونه د مساوات بل اړخ ته چاڼ شي.
- متحول لرونکې الجبري افاده څه اړیکه له رنګ شوې مساحت سره لري؟
- د مستطیلونو د مساحت عددي ضریب د دویمه درجې معادلې د x له ضریب سره څه اړیکه لري.
- د یوې مربع مساحت څومره دی.
- د دې لپاره چې د متحول لرونکې الجبري افادې د لوېې مربع د مساحت سره برابره شي کوم عدد د تساوي دواړو خواوو ته ورزیات کړو.
- د په لاس راغلې اړیکې څخه د قیمت(د دویمې درجه معادلې حل) په لاس راوړو.

محمد بن موسی دا لاره(طریقه) د دویمه درجه معادلې لپاره پیدا کړله. د دې طریقې په پوره کیدو سره د دویمې درجه معادلو په حل کې په بشپړه(عمومي) توګه ګټه اخیستل کیږي، په دې تګلاره(روش) کې د $x^2 + bx + c = 0$ دویمه درجه معادله په $(x+p)^2 = q^2$ بڼه بدلیږي چې د تجزیې پراوونه یې عبارت له:

- لومړی p د x د ضریب د نیمایي سره وضع کوو یعنې $P = \frac{b}{2}$
- وروسته $q^2 = -c + (\frac{b}{2})^2$ وضع کوو.
- په پای کې د q د $x + p = q$ معادله لرو.

لومړی مثال: د $x^2 + 2x - 8 = 0$ معادله د تکمیل مربع په تګ لاره حل کړئ.

حل: لومړی معادله په لاندې ډول لیکو:

$$x^2 + 2x = 8$$

د x د ضریب نیمایي په لاس راوړو، مربع یې له دواړو خواوو سره جمع کوو:

$$x^2 + 2x + 1 = 8 + 1$$
$$(x+1)^2 = 9$$
$$x + 1 = 3$$
$$x = 2$$

یادونه: ټولې دویمه درجه معادلې نشو کولای په دې تګ لاره حل کړو ځکه دا لاره هندسي تعبیر ته اړتیا لري؛ نو ځکه په دې لاره نشو کولای هغه معادلې چې منفي جذرونه لري هم په لاس راوړو.

پوښتنې

لاندې معادلې د تکمیل مربع په طریقه حل کړئ.

a) $x^2 + 8x - 24 = 0$ b) $x^2 - x - \frac{5}{4} = 0$ c) $x^2 - 6x - 13 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د محمد بن موسی فورمول یا د تکمیل مربع د طریقې توسعه

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

د $ax^2+bx+c=0$ معادلې دواړه خواوې د x^2 په ضریب ووېشو نو وواياست چې مخامخ مساوات حقیقت لري؟ که نه؟

ومو لیدل چې دويمه درجه معادله په عمومي ډول داسې $ax^2+bx+c=0$ لیکو چې په هغې کې b, a او c حقیقي اعداد او a د صفر خلاف یو عدد دی، د دې معادلې د حل لپاره داسې عمل کوو:

- د $ax^2+bx+c=0$ معادلې دواړه خواوې په a ویشو:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

- ثابت عددونه د معادلې یو خوا او مجهول حدونه د مساوي بلې خوا ته سره چاڼوو د x د ضریب د نیمايي مربع د معالې دواړو خواوو ته جمع کوو:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

د لنډې لیکنې لپاره b^2-4ac په Δ سره ښیوو.

فعالیت

هره دويمه درجه معادله چې $ax^2+bx+c=0$ بڼه ولري، لاندې پوښتنو ته ځوابونه ووايئ:

1- که $\Delta=b^2-4ac=0$ وي؛ نو په دې صورت کې د معادلې حلونه کوم دي؟

2- که $\Delta=b^2-4ac>0$ وي؛ نو په دې صورت کې د معادلې حلونه کوم دي؟

3- که $\Delta=b^2-4ac<0$ وي؛ نو ایا معادله د حقیقي عددونو په سټ کې حل لري؟

د پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

لومړۍ پایله: د $ax^2+bx+c=0$ دويمې درجه معادلې چې b, a او c حقیقي عددونه او $a\neq 0$ وي.

د $\Delta = b^2 - 4ac$ د قاسمي په نوم یادیږي.

1- که $\Delta > 0$ وي معادله دوه بیلابیل حلونه لري چې عبارت له:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

2- که $\Delta = 0$ وي معادله دوه مساوي یا مضاعف حلونه لري چې عبارت له: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

3- که $\Delta < 0$ وي معادله په حقیقي اعدادو کې حل نه لري.

دویمه پایله: د حلونو د جمع او ضرب حاصل

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

د جذرونو د جمع او د ضرب له حاصل څخه کولای شو د دویمې درجه معادلې په تجزیه کولو کې ګټه واخلو.

لومړی مثال: د $x^2 - 3x + 1 = 0$ معادلې حلونه پیدا کړئ.

حل: لومړی د Δ قیمت پیدا کوو: $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4\times1\times1 = 5$

څرنګه چې $\Delta = 0$ ده نو معادله دوه حلونه لري.

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

دویم مثال: د $9x^2 - 12x + 4 = 0$ حلونه پیدا کړئ.

حل: لرو چې: $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - (4\times9\times4) = 144 - 144 = 0$

څرنګه چې $\Delta = 0$ ده معادله دوه مساوي حلونه لري.

$$x_1 = x_2 = \frac{b}{2a} = \frac{12}{2\times9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

دریم مثال: د $5x^2 + 3x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: نوموړې معادله حل نه لري ځکه $\Delta < 0$ څخه ده یعنې

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times5\times1 = 4 - 20 = -16$$

څلورم مثال: د $4x - 3x - 1 = 0$ معادلې د جذرونو د جمع او ضرب حاصل پیدا کړئ.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{4} \quad , \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{4}$$

پوښتنې

لاندې معادلې حل کړئ

a) $x^2 + 4x - 21 = 0$ b) $x^2 + 6x + 9 = 0$ c) $3x^2 - 12x + 60 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اووم څپرکي لنډيز

- د دويمې درجه معادلې عمومي بڼه د $ax^2+bx+c=0$ چې $a\neq 0$ ډول ده.
- هغه معادلې چې د $ax^2+c=0$ او $ax^2+bx=0$ په ډول وي، د دويمې درجې نيمګړې معادلې په نامه يادېږي.
- د $ax^2+bx=0$ معادلې حل عبارت له $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$ دي.
- هره دويمه درجه معادله له دوو برخو مستقيم خط او يوه منحني جوړه شوې ده.
- که يو مستقيم خط يو منحني په دوو نقطوکې قطع معادله دوه حله لري.
- که يو مستقيم له منحني سره مماس وي معادله دوه مساوي حلونه لري.
- که مستقيمه کرښه له منحني سره پرې‌کړه ونه لري معادله په حقيقي عددونوکې حل نه لري.
- د دوو قوسونو د ضرب حاصل هغه وخت مساوي په صفر دی چې لږ تر لږه يو يې مساوي په صفر وي.
- د حلونو، د جمع حاصل له دې اړيکې څخه $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ او د حلونو د ضرب حاصل له دې اړيکې $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$ څخه په لاس راځي.
- په بشپړه ډول د هرې دويمې درجې معادلې جذرونه يا حل $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ فورمول څخه په لاس راځي، چې $\Delta=b^2-4ac$ دی.
- که چيرې $\Delta>0$ وي معادله دوه حقيقي حلونه لري.
- که چيرې $\Delta=0$ وي معاديه دوه مساوي حلونه لري.
- که چيرې $\Delta<0$ وي معادله په حقيقي عددونو په set کې حل نه لري.
- د دويمه درجه معادلو د تشکيل لپاره ده $x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$ يا $(x-x_1)(x-x_2)=0$ څخه ګټه اخلو.

د اووم څپرکي پوښتني

• په لاندي سوالونو کې هر سوال ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې وټاکئ.

1- د $4x = 3x^2$ معادلې b, a او c ضريبونه عبارت دي له:

الف) $a = 3\ ,\ b = 4\ ,\ c = 1$ ب) $a = -3\ ,\ b = 4\ ,\ c = 1$

ج) $a = 4\ ,\ b = 3\ ,\ c = -1$ د) هيڅ يو.

2- د $3x^2 - 8x + 5 = 0$ معادله حلونه عبارت له:

الف) $x_2 = \frac{5}{3}\ ,\ x_1 = 1$ ب) $x_1 = -\frac{5}{3}\ ,\ x_2 = 1$

ج) الف او ب د) هيڅ يو.

3- د $y = x^2$ معادلې ګراف عبارت دی له:

الف) مستقيم دی. ب) منحني دی.

ج) الف او ب. د) هيڅ يو.

4- د $x^2 - 10x + 16 = 0$ معادلې د حلونو د جمع حاصل برابر دی له:

الف) $x_1 + x_2 = 5$ ب) $x_1 + x_2 = -5$

ج) $x_1 + x_2 = 8$ د) $x_1 + x_2 = 10$

5- که $\Delta > 0$ څخه وي معادله:

الف) دوه مساوي حلونه لري ب) دوه حقيقي او مختلف حلونه لري

ج) حل نه لري د) يو حل لري

• تش ځايونه ډک کړئ.

1- د يو مجهوله دويمه درجه معادلو عمومي بڼه .... ده.

2- $-\frac{b}{a}$ د حلونو .... او $\frac{c}{a}$ د حلونو .... دی.

3- که .... وي معادله حل نه لري.

4- که د معادلې درجه دوه وي معادله .... لري.

5- د $x^2 - x + 0.25 = 0$ معادلې حلونه .... او .... دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

● لاندې پوښتنې ولولئ د سم په مخ کې(س) او د ناسم په مخ کې(ن) کليمه وليکئ.

1 - (   ) که $b^2-4ac<0$ وي، معادله د حقيقي اعدادو په set کې حل نه لري.

2 - (   ) د محمد بن موسی فورمول $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ دی.

3 - (   ) د $2x^2-4x=0$ معادلې يو حل صفر دی.

4 - (   ) د دويمې درجه معادلې د تشکيل لپاره د $x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$ ياد $(x-x_1)(x-x_2)=0$ څخه ګټه اخلو.

5 - (   ) که چيرې په يوه دويمه درجه معادله کې د علامو تحول نه وي نو معادله يو منفي حل لري.

● لاندې پوښتنې حل کړئ.

1- په لاندې معادلو کې b, a او c ضريبونه و ښيئ او وواياست کومه معادله کامله او کومه معادله ناقصه ده.

$a)\ 3x^2-4x+1=0$ $b)\ 3x^2-1=0$ $c)\ 2x^2-6x=0$

2- د لاندې معادلو حل پيدا کړئ.

$a)\ 3x^2+x-4=0$ $b)\ x^2+4x-32=0$ $c)\ 6x^2-x-2=0$

3- لاندې معادلې د تجزيې په لار(طريقه) حل کړئ.

$a)\ x^2-2\sqrt{3}\,x+3=0$ $b)\ x^2+4x-32=0$

$c)\ x^2-2\sqrt{3}+3=0$ $d)\ cx^2-2acx+ca^2=0$

4- لاندې معادلې په هندسي ټګ لاره حل کړئ.

$a)\ 2x^2+7x-1=0$ $b)\ x^2-2x+1=0$

5- د لاندې معادلو حل د تجزيې په طريقه حل کړئ.

$a)\ 4x^2+3x-1=0$ $b)\ x^2+\dfrac{x}{5}=\dfrac{6}{5}$

$c)\ 2x^2+3x+1=0$ $d)\ x^2+3x=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- د عمومي فورمول څخه په ګټه اخیستنې سره لاندې معادلې حل کړئ.

$a)\ 7x^2-8x+1=0$ $b)\ x^2-3x+2=0$

$c)\ t^2-0.27+0.6t=0$

7- که دیوه مستطیل مساحت $20cm^2$ او اوږدوالی د عرض دوه برابره وي د مستطیل اوږدوالی او سور پیدا کړئ.

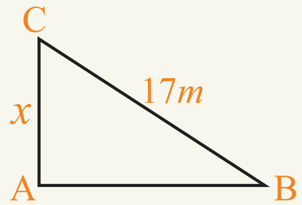
8- که د یوه قایم الزاویه مثلث د قایمو ضلعو اوږدوالی $2a$ او $2a+1$ وي د وتر اوږدوالی یې پیدا کړئ.

9- که دیوه مستطیل مساحت $24cm^2$ او محیط یې $36cm$ وي اوږدوالی او سور یې پیدا کړئ.

10- هغه معادلې ولیکئ چې حلونه یې په لاندې ډول دي.

$a)\ -2,0.5$ $b)\ 3,-1$ $c)\ 0,2$ $d)\ \sqrt{2}-1,2$

11-دوه تنه بایسیکل چلوونکي د A ټکي څخه یو ختیځ لور ته او بل شمال لورته حرکت وکړ په هغه وخت کې چې د دوی تر منځ واټن $17m$ دی هغه بایسیکل چلوونکی چې ختیځ لور ته حرکت کړی دی $7m$ زیات واټن له هغه تن څخه چې شمال لور ته حرکت کړی طی کړی دی. هغه الجبري معادله چې د هغې له مخې وکړای شو چې وهل شوی واټن د هر یوه بایسیکل چلوونکی ولیکئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم څپرکی
احصائیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دیتا (Data) د ګېډې کولو لاره

آیا تاسې په خپل ټولګی کې تر ټولو جګه ونه لرئ؟ که چیرې د فلپین او یا اندونیزیا ته ولاړ شئ څنګه؟
تاسې په کومه کچه په یوه هیواد کې جګ او په بل هیواد کې لنډ ونې شمېرل کېږي، معیارونه مو کوم دي؟

فعالیت

د یو شمېر کورنیو شمېر چې په څو کلیو کې پرتې دي، په لاندې ډول لیکل شوي اطلاعات په لاس راغلي:

52	49	40	42	45	53	35	38	40	43
51	55	38	39	44	37	46	41	50	56

غواړو دا راکړل شوي دیتا data په دریو ګیډیو کې داسې ځای په ځای کړو تر څو پوه شو، چې کوم کلي ډیر، منځنی، او کم وګړي لري.

- ایا کولای شو، چې یو یا څو ورکړل شوي دیتا data له منځه یوسئ؟
- تر ټولو لویې او تر ټولو کوچنۍ کورنۍ پیدا کړئ.
- د لړو او ډیرو دیتاګانو data تر منځ وسعت څومره دی؟
- دا وسعت د ګیډیو په شمېر وویشئ. سوچ وکړئ دا عدد څه شی راښیي؟
- د عددونو څخه په ګټه اخستنې سره جدول ډک کړئ.
- میله یي ګراف یې رسم کړئ.

د کورنیو شمېر	د کلیو شمېر
35 - 41	
42 - 48	
49 - 56	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دیتا data د دسته بندي یاګیډی کولو لپاره لاندې ګامونه په وار سره تر سره کړئ.
- د دیتاګانو د زیات مقدار او کم مقدار وسعت په لاس راوړئ.
- دا وسعت د دستو په تعداد وویشئ او د اوړدوالی په لاس راوړئ که چیرې حاصل یې طبیعي عدد نه وي کولای شئ هغه(round down)کړئ.
- له دې مقدارونو څخه دستې جوړې کړئ.

مثال: په لاندې جدول کې د 30 روغتونو ناروغان چې په اټکلي ډول نیول شوی داسې راغلي دي:

163	165	161	140	157	160	152	151	152
149	153	146	154	174	172	170	166	164
177	158	146	169	170	172	165	175	172
						168	165	160

دا دیتاګانې په څلور دستو یاګیډیو کې ځای په ځای کړئ.
- که چیرې د ناروغانو شمېر په یوه روغتون کې له 175 څخه زیات وي هغه روغتون ته ازدهامي(ګڼه ګوڼه) روغتون وایي. څو روغتونونه ازدهامي(ګڼه ګوڼه) دي.
- د ازدهام د پرتله کولو لپاره میله یي ګراف رسم کړئ.

حل: د دې لپاره چې ډاډه شو ټول ارقام په یوه جدول کې ځای په ځای کوو او تر ټولو زیات او تر ټولو کم ارقام یې په لاس راوړو.

$140 =$ ترټولو ټیټ رقم

$177 =$ تر ټولو لوړ رقم

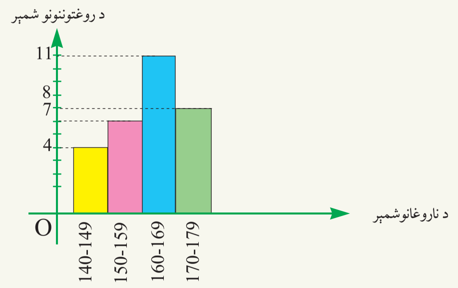
$= 177 - 140 = 37$ ټیټ رقم – لوړ رقم

د دستو یا ګیډیو د اوږدوالی دپیدا کولو لپاره دا وسعت د دستو یا ګیډیو په شمېر ویشو $\frac{37}{4} = 9.25$ ددې عدد څخه د دستې یاګیډی په اوږدوالی کې ګټه اخلو. اما د کار د اسانی لپاره دا عدد روندډون یا کښته خوا په پام کې نیسو چې په دې ډول د ګیډې اوږدوالی د(9) عددپه لاس راځي.

د ناروغانو شمېر	د روغتونو کثرت	دګیډیو وسط یا منځی	$f \cdot X$
140 – 149	4	144.5	4 × 144.5 = 575
150 – 159	7	154.5	7 × 154.5 = 1081.5
160 – 169	11	164.5	11 × 164.5 = 1809.5
170 – 179	8 n = 30	174.5	8 × 174.5 = 1396

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overline{X} = \frac{575+1081.5+1809.5+1396}{30} = \frac{4865}{30} = 162.1$$



پاملرنه وکړئ که چیرې د دستې اوږدوالی پورته خوا پوره په پام کې و نه نیسو یعنې روندا‌ف نه کړو، د دستو(گیډیو) د اوږدوالی مجموعه له 37 څخه لږ په لاس راځي، چې په دې ډول یو شمېر داتاگانې حساب او له جدول څخه خارجیږي او دا سم کار نه دی.

په ځینو وختونو کې د دستو یا گیډیو د شمېر(گروپونو) په ځای د دستو یا گیډیو اوږدوالی مونږ ته پېژندل شوی دی په دې حالت کې د دستو یا گیډیو شمېر مونږ ته اهمیت نلري. د دستو یا گیډیو د اوږدوالی په لرلو سره داسې لیکو چې د هغو اوږدوالی د فرض شویو دستو یا گیډیو سره برابر وي او وروسته یې جدول پوره کوو.

مثال: په پورتنی مثال کې که د دستو یا گیډیو په ځای د دستو یا گیډیو اوږدوالی 8 فرض کړو منځنی یا اوسط قیمت یې پیدا کړئ.

حل: ټیټ رقم یعنې 140 څخه پیل کوو. څرنگه چې د گیډۍ یا دستې اوږدوالی 8 دی د دوو لاندې پرله پسې سرحدونو تر منځ واټن باید 8 وي. یعنې د دویمې گیډۍ یا دستې لاندنی سرحد باید 148 وي. اته، اته تر هغه زیاتوو تر څو ډیرې داتاگانې په جدول کې ځای په ځای شي تر پایه دوام ورکوو.

د ناروغانو شمېر	د رغتونو شمېر	دگیډیو اوسط	f · x
140 – 147	3	143.5	430.5
148 – 155	6	151.5	909
156 – 163	6	159.5	957
164 – 171	9	167.5	1507.5
172 – 179	6 n = 30	175.5	1053

$$\overline{X} = \frac{430.5+909+957+1507.5+1053}{30} = 161.9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- لاندې دیتاګانې د 20 زده کوونکو د رسیدلو وخت په دقیقو له کوره تر ښوونځی راښیي:

10	50	65	33
48	5	11	23
37	26	26	32
17	7	13	19
29	43	21	22

- پورتنی دیتاګانې په اوو ګروپو کې ګیلډی یا دسته بندي کړئ.
- د هرې ګیلډی کثرت پیدا کړئ.
- میله یي ګراف یې رسم کړئ.
- که چیرې دیتاګانې په هغه ګروپونو کې چې د ګیلډی اوږدوالی یې 10 وي کېږدو د کثرت جدول یې جوړ کړئ.

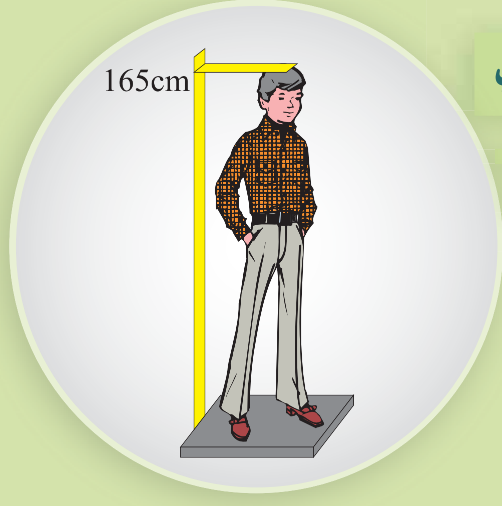
2- یو مثال راوړئ چې دیتاګانې د دسته بندي لپاره د ګیلډیو له اوږدوالی څخه ګټه اخیستل شوی وي.

3- د موضوع د څېړلو لپاره یو مثال وړکړئ، چې د دیتاګانو د ګیلډی کولو ګیلډیو له شمېر څخه ګټه اخیستل شوی وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نښتو یا پیوسته دیټاګانو دسته بندي



که چیرې له تاسې څخه پوښتنه وشي چې ونه مو څومره جګه ده څه ځواب ورکوئ.
ایا ټیک داسې عدد دی چې د متر له مخې یې لولئ؟

فعالیت

- که له تاسې څخه پوښتنه وشي چې څو ورونه لرئ، څه وایئ؟ ایا کولی شئ ادعا وکړئ، چې د دغه ډول سوال په ځواب او یا نورو عمومي پوښتنو چې لا ټیک وسایل مو لرلی، کولای مو شول، چې د خپلو هم صنفانو د ورونو د شمېر په ټیک ډول و وایئ.
- ناڅاپي متحول مو څه شي دی او دکومو ډولونو څخه دی.
- که ستاسې یو دوست ووایي د ونې اوږدوالی یې ۱۵٦ سانتي متر دی. ایا ټیک د ونې(قد) اوږدوالی یې ۱۵٦ سانتي متره دی؟
- د ۱۵ زده کوونکو د ونو اوږدوالی وروسته له پوښتنې څخه داسې ورکړل شوي.

136	138	151	148	153
139	141	141	131	142
146	132	139	159	152

لاندې جدول بشپړ کړئ.

د زده کوونکو د ونې جګوالی	د زده کوونکو شمېر
130 – 140	
140 – 150	
150 – 160	

- په سوچ ووایئ چې ولې د ۱٤۰ عدد یو وار د دستو یا ګیډیو د پورتنی سرحد په څېر او یو وار د دستو د لاندینی سرحد په څېر راوړل شوي دي.
- که چیرې د یوه سړي د ونې اوږدوالی ۱٤۰ سانتي متره وي څه سوچ کوئ، چې په کومه دسته یا ګیډۍ کې قرار لري.

که چیرې یو نښتي یا پیوسته متحول ولرو د اطلاعاتو په ګیلډې یا دسته بندي کې د یوې دستې یاګیلډې پورتنی سرحد به له کوزنی سرحد سره برابر وي، د قرارداد له مخې که داتا د پورتنی ګیلډې یا دستې سره برابر وي په ورپسې سرحد کې لوېږي.

مثال: د 25 ډول، ډول موټرونو چټکتیا په لاندې ډول احصایه نیول شوې ده.

32	35	38	47	44	48	28
30	40	36	51	52	54	31
27	32	42	52	31	29	29
54	49	37	43			

• د کثرت جدول يې ډک کړئ.

• که چیرې د چلولو د جواز سرعت په ښار کې په یوه ساعت کې ۳۰ کیلومتره وي څو موټرونو د چټکتیا د مجاز سرعت څخه زيات چلېدلي دي.

• د ګیلډیو د کثرت د جمع حاصل څو دی؟ دا عدد د څه شي سره برابر دی؟

حل: څرنګه چې سرعت یو پیوسته متحول دی؛ نو جدول د پیوسته یا سره نښتي متحول لپاره جوړوو. د ۳۰ عدد په دویمه ګیلډې کې او د ۴۰ عدد په دریمه ګیلډې کې لوېږي د ګیلډو د کثرت جمع برابره ده له $n = 4+9+7+5 = 25$ چې د موټرونو د شمیر سره مساوي ده او(۲۱) موټرونو له خپل جواز څخه زيات چلیدلی دی.

سرعت	تعداد
20 – 30	4
30 – 40	9
40 – 50	7
50 – 66	5
	25

پوښتني

1- لاندې داتاګانې چې د 34 زده کوونکو د هوش ضریب د ښوونځي په اول کال کې راښيي په پام کې ونیسئ.

86	108	108	111	111	103	108	101	88
91	103	105	105	112	96	111	107	96
92	100	112	112	92	89	95	90	105
111	95	108	77	106	90	77		

د 4 دسته يې جدول په جوړولو سره د ګیلډیو د کثرت د جمع حاصل، د ګیلډو مرکز، او data منځنی قیمت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

وزني اوسط یا منځنۍ قیمت
Weighted Mean

که څوک ښه کار سرته ورسوي، انعام يې
نظر کوم عدد ته څو برابره دی.

فعالیت

اوریدلی مو دي چې هغه زده کوونکی چې دولسم ټولګی پای ته ورسوي د کانکور ازموینه په څلورو څانګو کې له خاصو ضریبونو سره سرته رسوي او د هغې د نمبرو په اساس پوهنتونونو پوهنځیو ته ویشل کېږي. اټکل کوو چې د دوو زده کوونکو د کانکور نمبرې په لاندې ډول دی.

مضمون	ژبه او ادبیات د 2 په ضریب	ټولنیز علوم د 2 په ضریب	طبیعي علومو د 3 په ضریب	ریاضي د 4 په ضریب
ضریب	3	2	3	4
لومړی زده کوونکی	61	66	62	61
دویم زده کوونکی	61	66	62	60

مضمون	د دویم زده کوونکی نمبرې	ضریب
ریاضي	60	4
طبیعي علوم	62	3
ټولنیز علوم	66	2
ژبه او ادبیات	61	3

مضمون	د لومړی زده کوونکی نمبرې	ضریب
ریاضي	61	4
طبیعي علوم	62	3
ټولنیز علوم	66	2
ژبه او ادبیات	61	3

- د دواړو زده کونکو د نمبرو منځنۍ یا وسطي قیمت پیدا کړئ.
- د کوم مضمون نمبرې په منځني یا وسطي قیمت ډېره اغیزه لري؟ ولې؟
- د کوم مضمون نمبرې په منځني یا وسطي قیمت لږ اغیزه لري؟ ولې؟
- که د زده کوونکو د ریاضي مضمون په نمبرو ۵ نمبرې ورزیاتې شي منځنۍ یا وسطي قیمت ډېر بدلون مومي که دې د ټولنیزو علومو په مضمون ۵ نمبرې زیاتې شي.

که چیرې دیتاګاني په ځانګړې ضریب سره ورکړل شوې وي دا په دې معنا ده چې د دیتا اغیزه یوشان له هغه ضریب سره تړلې ده. په دې حالت کې د ضریبونو د کثرت جدول د دیتاګانې د کثرت په عنوان حسابېږي او په W سره ښودل کېږي. په لاس راغلی اوسط ته وزني اوسط وايي:

$$\bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$ وزني اوسط

مثال: په څینو پوهنتونو کې نمرې د تورو په اساس لکه A, B, C, D او F اعلانیږي په دې پوهنتونو کې د A ارزښت څلور، د B ارزښت درې، د C ارزښت دوه، د D ارزښت یو او د F ارزښت صفر وي یوه محصل لاندې نمرې اخیستې دی.

مضمون	نمرې	د کریډتونو شپږ
ریاضیات	B	3
فزیک	A	3
کیمیا	C	2
بیولوژي	B	3
ژبه	A	1

– د دې محصل د نمبرو اوسط څو دی.

حل:

مضمون	حرفی نمره	د کریډتو شمېر =X	عددي نمرې =W	W · X
ریاضیات	B	3	3	$3 \times 3 = 9$
فزیک	A	3	4	$4 \times 3 = 12$
کیمیا	C	2	2	$2 \times 2 = 4$
بیولوژي	B	3	3	$3 \times 3 = 9$
ژبه	A	1	4	$4 \times 1 = 4$

$n = 12$ د کریډتونو شمېر

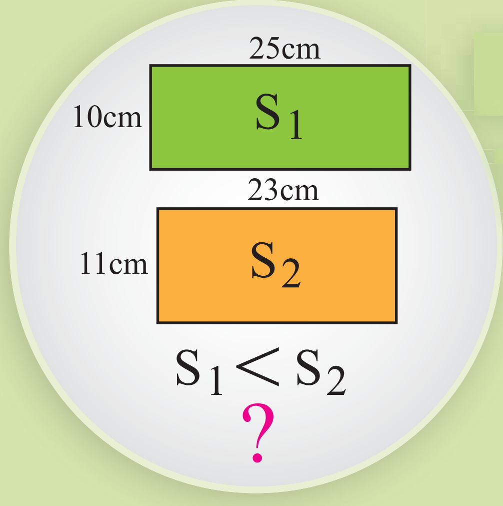
$$\bar{x} = \frac{9+12+4+9+4}{12} = \frac{38}{12} = 3.16$$ = وزني اوسط یا منځنی

پوښتنې

که د کانکور په یوه ازموینه کې د یوه زده کوونکي نمبرې په وار سره 70, 65, 61 او 53 او ضریبونه یې په وار سره 3, 2, 1 وي د دې زده کوونکي د نمبرو اوسط حساب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مستطيلي ګراف
Histogram

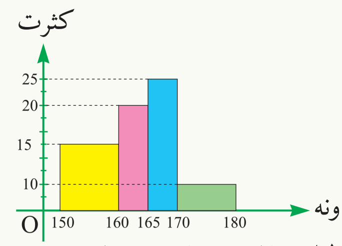


که د يوه مستطيل اوږدوالی 25 سانتي متره او سور يې 10 سانتي متره او دبل مستطيل اوږدوالی 23 سانتي متره او سور يې 11 سانتي متره وي. د دې دواړو مستطيلونو مساحتونه پيدا او يو له بل سره يې پرتله کړئ.

فعاليت

ديوې ښوونځي د 70 زده کوونکو د ونې(قد) اندازه په لاندې ډول په جدول کې ورکړل شوې ده.

ونه په سانتي	150 – 160	160 – 165	165 – 170	170 – 180
کثرت	15	20	25	10

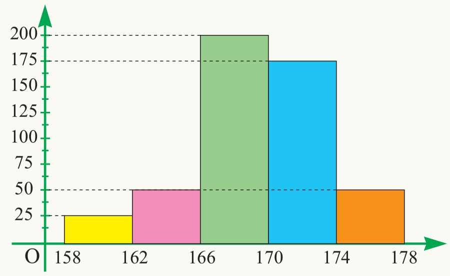


- په پورتنی ګراف کې د مستطيلونو قاعدې څه شی راښيي.
- د هر مستطيل مساحت په لاس راوړئ. د مستطيل مساحت څه شي راښيي.
- د مستطيلونو جګوالی(ارتفاع) څه شی راښيي.
- پورتنی ګراف له میله يي ګراف سره څه توپير لري.

يو ځل بيا د يوه ښوونځي د ۵۰۰ زده کوونکو ونې چې اندازه يې په لاندې جدول کې ورکړ شوی ده په پام کې ونيسئ:

ونه په سانتي متر	158 – 162	162 – 166	166 – 170	170 – 174	174 – 178
کثرت	25	50	200	175	50

(c) ketabton.com: The Digital Library



- جدول ته په پاملرنې سره د مستطیل قاعده څه شی راښيي.
- د مستطیل اوږدوالی څه شی راښيي.
- میله یي ګراف له پورتني ګراف سره څه توپیر لري؟

د دیټاګانو د پیوسته یا نښتي ښودلو لپاره د مستطیلي ګراف څخه ګټه اخلو په دې ګراف کې د مستطیل عرض د دستو یاګیډیو د اوږدوالی سره برابر دی په مستطیلي ګراف کې مساحتونه د هرې دستې یاګیډۍ کثرت راښيي.

که د دستو یاګیډیو اوږدوالی یو له بل سره برابر وي کولای شو د مساحتونو په ځای راساً کثرت پرتله کړو په دې صورت کې اوږدوالی د کثرت عمودي محور راښيي.

مثال: د یوه ټولګي د زده کوونکو وزن په لاندې جدول کې راکړل شوی دی.

د زده کوونکو وزن په کیلو ګرام	40 – 45	45 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 90
د زده کوونکو شمېر	4	6	12	8	8

دلته لیدل کېږي چې د دستو یاګیډیو واټن مساوي نه دی، مخکې د مستطیلي ګراف د رسمولو څخه لازمه ده چې د مستطیلونو جګوالی(ارتفاع) یوه ګډه واټن ته په پام کې نیولو سره د ټولو دستو یاګیډیو پیداکړو په دې مثال کې $5Kg$ ګډ یا مشترک دی نو کولای شو چې ټول پنځه واړه واحده د x په محور په یوه واحد وښیو:

د $40-45$ ګیډۍ لپاره یو واحده

د $45-50$ ګیډۍ لپاره یو واحده

د $50-60$ ګیډۍ لپاره یو واحده

د $60-70$ ګیډۍ لپاره یو واحده

د $70-90$ ګیډۍ لپاره یو واحده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مستطیلونو د عمودي اوږدوالي د پیداکولو لپاره د دستو یاګیډیو کثرت د دستو یاګیډیو په اوږدوالي ویشو.

$$40-45 \rightarrow \frac{4}{1} = 4 \rightarrow \frac{4}{5} = 0.8$$

$$45-50 \rightarrow \frac{6}{1} = 6 \rightarrow \frac{6}{5} = 1.2$$

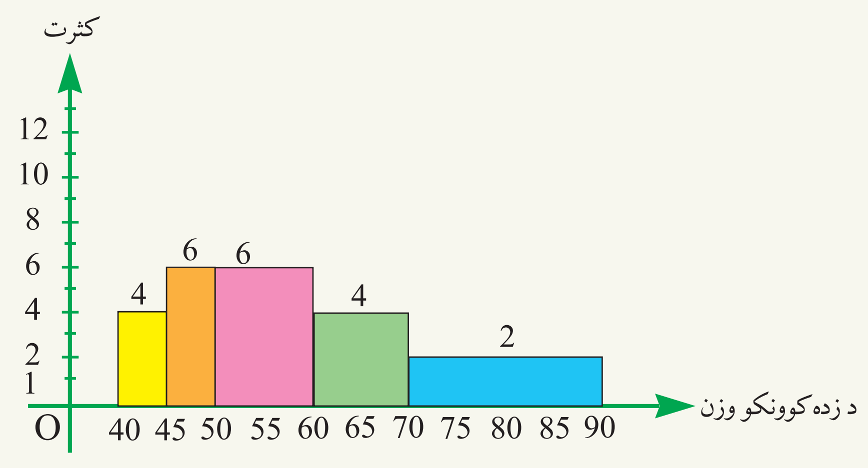
$$50-60 \rightarrow \frac{12}{2} = 6 \rightarrow \frac{12}{10} = 1.2$$

$$60-70 \rightarrow \frac{8}{2} = 4 \rightarrow \frac{8}{10} = 0.8$$

$$70-90 \rightarrow \frac{8}{4} = 2 \rightarrow \frac{8}{20} = 0.4$$

اوس په لاس راغلی پایلې په لاندې جدول کې ترتیب او مستطیلي ګراف د راکړل شوي مثال رسموو:

د زده کوونکو وزن په Kg	40-45	45-50	50-60	60-70	70-90
کثرت نظر واحد فاصلې ته	4	6	6	4	2



(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- لاندې جدول د یوه روغتون د ناروغانو تعداد د هغو ټاکلو ورځو راښیي چې په روغتون کې بستر شوي دي.

د ورځو شمېر	1 – 5	5 – 9	9 – 13	13 – 17	17 – 21	21 – 25
د ناروغانو شمېر	12	10	16	18	14	8

ـ د پورتني جدول مستطیلي ګراف رسم کړئ.

2- د یوه ټولګی 50 زده کوونکو د IQ (ذکاوت) په ازموینه کې ګډون کړی دی، چې پایلې یې په لاندې ډول دي.

122	117	114	112	130	92	118	109	113	115
118	116	106	111	112	124	113	108	107	127
114	100	103	115	124	110	118	118	107	121
110	116	126	121	135	104	123	116	124	104
112	117	113	107	103	102	129	98	134	94

– نوموړو داتاګانو ته د کثرت جدول جوړ کړی. د دې جدول لپاره ۷ ګروپونه داسې په پام کې ونیسئ چې د ګېډیو اوږدوالی یې مساوي وي.
– د دې دیټاګانو مستطیلي ګراف رسم کړئ.
– څه پایلې اخلئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دایره وي ګراف

مخامخ شکل د لرګي یوه کنده ده هغه کرښې چې ددې لرګي په مقطع کې وینئ د څه شي شکل ته ورته دی.

فعالیت

د افغانستان د ښوونې او روزنې وزارت په 1387 کال کې لاندې ارقام د ښوونځیو د زده کوونکو د شمېر په اړه خپرې کړي دي: د ابتدایي زده کوونکو شمېر 250000 د منځنیو ښوونځیو د زده کوونکو شمېر 200000 او د ثانوي زده کوونکو شمېر 150000 دی.

- که د هرې داتا نسبي کثرت په 360° درجو کې ضرب کړو هره دوره به څو درجې وي؟
- یوه دایره رسم او مرکزي زاویې یې په لاس ته راغلو اعدادو په اندازه بیلې کړئ. د هرې زاویې دننه د اړوند تحصیلي دورې نوم ولیکئ.
- یو عنوان د ګراف لپاره و ټاکئ او د ګراف لاندې یې ولیکئ.
- په دایروي ګراف کې څه، څه سره پرتله کېږي.
- د دایرې په کوچنی کېدو یا لوییدو سره په دایروي ګراف کې څه توپیر راځي؟

له پورتنی فعالیت څخه پوه شو چې کولای شو دیتاګانو د دایرې په مرسته وښیو. د یو ناڅاپي یا اتفاقي متحول د دیتاګانو ښودل د دایرې په مرسته د دایروي ګراف په نامه یادېږي، په دایروي ګراف کې لومړی نسبت د هرې دستې یا ګیلۍ او ټولې دیتاګانو شمېر په 360° ضرب چې د ګیډیو مرکزي زاویه راښیي په لاس راوړو؛ یعنې:

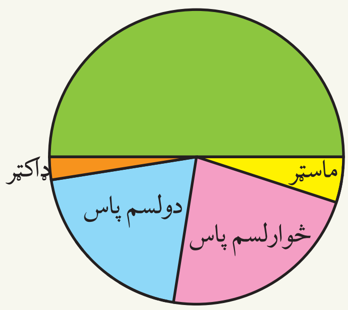
$$\text{له جنسه د درجې کثرت} = \frac{\text{د دیتاګانو کثرت}}{\text{د ټولو دیتاګانو شمېر}} \times 360^\circ$$

مثال: یوه مؤسسه چې د کارکوونکو شمېر يې ۲۰۰ او د تحصیل د درجې له مخې وېشل شوی دی.

د تحصیل درجه	ډاکټر	ماسټر	لیسانس	څوارلسم پاس	دولسم پاس
د کارمندانو شمېر	5	10	100	45	40

د دې دیټا دایروي ګراف په لاندې ډول دی.

د تحصیل درجه	کثرت	مرکزي زاویه د درجې له جنسه
ډاکټر	5	$\frac{5}{200} \times 360° = 9°$
ماسټر	10	$\frac{10}{200} \times 360° = 18°$
لیسانس	100	$\frac{100}{200} \times 360° = 180°$
څوارلسم پاس	45	$\frac{45}{200} \times 360° = 81°$
دولسم پاس	40	$\frac{40}{200} \times 360° = 72°$



پوښتنې

– د لاندې جدول په پام کې نیولو سره د کورنیو دایروي ګراف د جمعیت له مخې رسم کړئ.

د کورنۍ نوع	ډېر جمعیت سره	منځنی جمعیت	لږ جمعیت	جمع
د کورنۍ شمېر	11	23	6	40

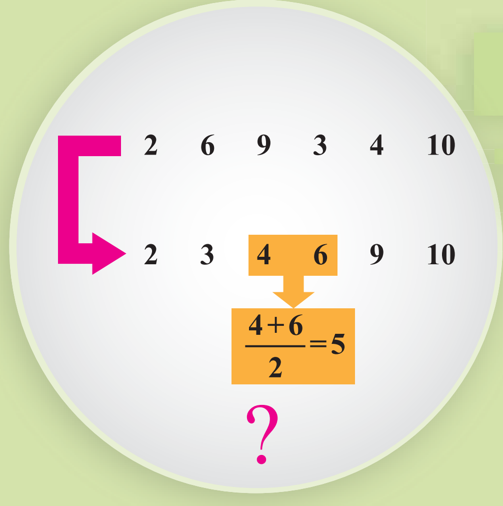
– دایروي ګراف د څه ډول متحول لپاره مناسب دی.

- که د دیټاګانو کثرت دوه برابره کړو، ایا مرکزي زاویه یې بدلون مومي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

میانه
Median



که له تاسي څخه پوښتنه و شي، چې د نومرو اوسط مو څو دی؟ له اوسط څخه ګټه اخلئ. که له تاسي څخه وپوښتل شي، چې ترټولو ډېر ځله ستاسو د نومرو په اطلاعنامه کې څو دي؟
که له تاسي پوښتنه وشي، چې تاسي د ښو زده کوونکو په منځ کې یاست که د کمزورو زده کوونکو په منځ کې تاسي دې سوال ته ځواب ورکوئ.

فعالیت

- سوچ وکړئ د((میاني)) لغت یعني څه؟
- که یو شمېر دیتاګانو ولرو څرنګه کولای شو د هغو وسطي مقدار پیدا کړو.
- که د دیتاګانو شمېر طاق وي، ایا وسطي مقدار د دیتاګانو په میانه کې شته دی؟
- که د دیتاګانو شمېر جفت وي، ایا وسطي مقدار د دیتاګانو په میانه کې شته دی؟
- ایا کولای شو وسطي مقدار پرته له ترتیب کولو د داتاګانو په لاس راوړو.
- که د دیتاګانو مقدار جفت وي اټکل کولی شئ، چې څه مقدار د وسطي مقدار په عنوان وټاکو.
- لاندې دیتاګانې په پام کې ونیسئ.

2 3 5 1 4

– وسطي مقدار یې پیدا کړئ.
– د دیتا د وسطي مقدار یې شمېر مخکنی داتا له شمېر سره څه اړیکه لري.
– لاندې دیتا په پام کې ونیسئ.

2 3 5 1 4 5

– یو وسطي عدد پیدا کړئ، چې د دیتا شمېر یې وروسته او د مخکنی له هغه عدد د دیتا له شمېر سره برابر وي.

که دګیډیو اوږدوالی یو له بل سره برابر وي کولای شو د مساحتونو په ځای راساً کثرت پرتله کړو په دې وضعیت کې اوږدوالی د کثرت عمودي محور راښیي نو په دې حالت کې مساحت نشو په لاس راوړئ.

مثال: د يوه ټولګي د زده کوونکو وزن په لاندې جدول کې راکړل شوی دی.

10000 7000 4000 6000 3000

ددې data میانه حساب کړئ.

حل: لومړی data مرتب کوو:

3000 4000 6000 7000 10000

لیدل کېږي چې د 6000 عدد د عددونو په وسط(منځ) کې قرار لري نو د data میانه د پورته عددونو ده.

دویم مثال: د لاندېdata میانه وټاکئ.

2 6 9 3 4 10

حل: د میانې د حسابولو لپاره عددونه ترتیب کوو.

2 3 4 6 9 10

دا عددونه د پورته عددونو د data میانه ده.

لیدل کېږي چې د data منځ کې داسې عدد نشته چې د میانې خاصیت صدق کړي نو که چیرې تاسې $5=\frac{4+6}{2}$ په پام کې ونیسئ چې د میانې ځانګړتیا په کې صدق کوي او دا عدد د پورتنی داتا میانه ده چې د پنځو شخه وروسته د داتا شمېر د پنځو شخه د پورته داتا سره برابر دی.

پوښتنې

1- لاندې جدول د یوه روغتون د ناروغانو شمېر د هغو ټاکلو ورځو راښیي چې په روغتون کې بستر شوي دي.

1 , 2 , 3 او 0 , 2 ,100

2- د پورتني جدول مستطیلي ګراف رسم کړئ.

5 ,15 , 4 , 0 , 12 , 15 , 5 , 6 , 5 , 0

3- که له ټولو دیتاګانو سره یو ثابت عدد جمع شي د میانې په مقدار کې څه اغیزه منځ ته راځي په یوه مثال کې یې وښیئ.

4- که دیتاګانې دوه برابره کړو د میانې په مقدار کې څه اغیزه کوي په یوه مثال کې یې وښیئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تحول ساحه
Range

د خپلو هم ټولګیوالو ونې مو اندازه کړې.
د تر ټولو لوړو ونو او د تر ټولو لنډو ونو تر منځ توپیر حساب کړئ، که و موغوښتل چې د زده کوونکو تر ټولو زیات توپیر پیدا کړئ ایا لازمه ده چې د نورو زده کوونکو ونې اندازه کړئ؟

فعالیت

د اووم ټولګی د 10 زده کوونکو او لسم ټولګی 10 زده کوونکو د ونو لوړوالی په اتفاقي ډول ټاکل شوی، چې لاندې راوړل شوي دي.

د اووم ټولګی زده کوونکی : 142 ,145 ,146 ,148 ,148 ,148 ,149 ,149 ,150 , 152

د لسم ټولګی زده کوونکی : 150 ,151 ,153 ,156 ,158 ,158 ,159 ,160 ,160 , 160

- د دواړو ګروپونو د لوړو ونو تر منځ وسعت پیدا کړئ.
- أیا د دواړو ګروپونو د اعدادو تر منځ وسعت یو شان دی.
- که چیرې دیتاګانې و نه لرو، ایا د دیتا د لږو او ډیرو توپیرونو په لرلو سره د دې ګروپونو په اړه مونږ کولای شو چې سره پرتله یې کړو.
- ایا د بدلون یا تحول د ساحې برابروالي په دواړو ګروپونو کې د دیتا د یووالی په مانا دی.
- د نمونې د تعریف په پاملرنې سره که داګروپونه د ټولنې په عنوان په پام کې ونیسو په نمونه کې د واټن د اوږدوالي زیاتوالي، په ټولنه کې د واټن د اوږدوالي د زیاتوالي پایله راکوي.

د پورتني فعالیت څخه پوهېږو د واټن اوږدوالی چې متحول په هغې کې د بدلون امکان لري د تحول د ساحې په نامه یادېږي. دا معیار د جګې او ټیټې دیتاګانو ترمنځ وسعت را په ګوته کوي.پاملرنه باید وشي چې د تحول د ساحې لوی والی په یوه ټولنه کې د توپیر یا پراګندګي ډېر والی دی هر څومره چې دا توپیر کم وي د وګړو پراګندګي کمه ده. د یوې ټولنې وګړي د دې ځانګړتیا له مخې یو بل ته نږدې دی که د تحول ساحه صفر وي، که د وګړو د خېرنو د ځانګړتیاوې سره برابري او یو شان وي په دې حالت کې ټولنه یوه متجانسه ټولنه بولو.

مثال: د دوو زده کوونکو د $4\frac{1}{2}$ میاشتنی ازموینې نمبرې په لاندې ډول دی.

الف: 20 , 21 , 25 , 32 , 33 , 35 , 36 , 37 , 38 , 39

ب : 20 , 33 , 34 , 35 , 35 , 35 , 34 , 34 , 35 , 39

- د دواړو دستو یا ګیډیو د تحول ساحه پیدا کړئ.
- أیا د دیتاګانې پراګندګي په لومړی یا که په دویم ګروپ کې کمه ده.

حل: د دواړو ګروپونو د تحول ساحه یو برابر ده.

$$39 - 20 = 19$$

د دویم ګروپ د دیتاګانې پراګندګي لږ او په دیتاګانې کې د 34 او 35 عددونه زیات تکرار شوی دی واټن یې کم دی. ولې پراګندګي په لومړی ګروپ کې ډېره ده د تحول ساحه یوازې له لږو او زیاتو مقدارونو سره کار کوي. د دیتاګانو په اړه او د هغوی تر منځ هیڅ اطلاعات مونږ ته نه راکوي. نو د تحول د ساحې په لږلو سره نشو کولای د دیتاګانې د میانې د پراګندګي د میزان اټکل وکړو.

پوښتنې

1- لاندې داتاګانې په پام کې ونیسئ.

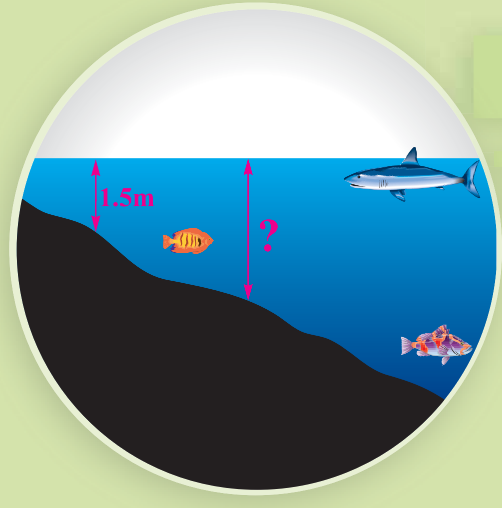
15, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 6, 5, 2, 1

- ددې داتاګانې د تحول ساحه پیدا کړئ.
- که د پورتنی data تر ټولو زیات او کم data له منځه یوسو د تحول ساحه یې پیدا کړئ.
- دا دواړه د تحول ساحه یو له بل سره پرتله کړئ او وواياست چې د کوم یو پراګندګي زياته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انحراف اوسط
Average deviation



که د یوه سیند د یوه ټکي ژوروالی 1.5 متره وي سوچ وکړئ چې د سیند د ټولو ټکو ژوروالی یو شان دی؟

فعالیت

پنځو تنو زده کوونکو په یوه صنفي ازموینه کې لاندې نمبرې اخیستي دي.

20 18 16 14 12

- د دې نمبرو اوسط او یا منځنی قیمت پیدا کړئ.
- د ټولو دیتاګانو د منځ یا اوسط توپیر پیدا کړئ.
- د هرې دیتاګانو د منځنیو د توپیر د جمع حاصل ولیکئ.
- د هرې دیتاګانو د اوسط یا منځ د توپیر د مطلقه قیمتونو د جمع حاصل پیدا کړئ.
- په لاس راغلي قیمتونه سره پرتله کړئ.
- د پنځو دیتاګانو تاسې پخپله یو مثال ورکړئ او پورتنی عملیې پرې سر ته ورسوئ.

له پورتنی فعالیت څخه پوهېږو هغه توپیر چې د دیتاګانو او اوسط تر منځ دی د منځ یا اوسط انحراف په نامه یادېږي.

د data د منځنی یا اوسط انحراف مجموع همیشه صفر ده. په دې دلیل د data د څېړنې لپاره د انحراف د مطلقه قیمت څخه ګټه اخلو. که د ټولو انحرافونو د مطلقه قیمت جمع کړو او د data په شمېر یې وویشو د انحراف اوسط یا منځنی ورته ویل کېږي، د لاندې فورمول په مرسته حسابېږي.

$$\text{د انحراف اوسط یا منځنی} = \frac{|x_1-\bar{x}|+|x_2-\bar{x}|+\ldots+|x_n-\bar{x}|}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته $X_1, X_2 \ldots X_n$ عبارت له data او $\overline{X}$ د دیټاګانو منځنۍ یا اوسط او n د دیټاګانو شمېر دی، لیدل کېږي چې هر څومره د منځنۍ انحراف لوی وي، نو په هم هغه اندازه د data د پراګندګي له اوسط نه ډېره ده.

مثال: د 40 تنو زده کوونکو نمبرې په لاندې جدول کې ورکړل شوي دي.

نمرې	کثرت
0 – 10	2
10 – 20	7
20 – 30	4
30 – 40	5
40 – 50	10
50 – 60	12

د پورتنیو نمبرو د انحراف منځنۍ پیدا کړئ.

حل: لومړی د اوسط یا منځنۍ مقدار په لاس راوړو.

f= کثرت	د داتاګانو اوسط	f · x	$x - \overline{x}$	$f(x - \overline{x})$
2	5	10	5 – 37.5 = –32.5	2 × (–32.5) = –65
7	15	105	15 – 37.5 = –22.5	7 × (–22.5) = –157.5
4	25	100	25 – 37.5 = –12.5	4 × (–12.5) = –50
5	35	175	35 – 37.5 = –2.5	5 × (–2.5) = –12.5
10	45	450	45 – 37.5 = 7.5	10 × 7.5 = 75
12	55	660	55 – 37.5= 17.5	12 × 17.5 = 210
n = 40		1500		

$$\overline{x} = \frac{10+105+100+175+450+660}{40} = \frac{1500}{40} = 37.5$$

لیدل کېږي چې د $f(x-\overline{x})$ د جمعې حاصل له صفر سره مساوي دی. نو باید مطلقه قیمت یې سره جمع کړو.

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{|-65|+|-157.5|+|-50|+|-12.5|+|75|+|210|}{40}$$

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{65+157.5+50+12.5++75+210}{40} = \frac{570}{4} = 14.25$$

پوښتنې

د A او B دوو جمعیتونو انحرافونه لاندې راکړل شوي.

د A جمعیت انحرافونه :	4	2	0	0	-1	-2	-3
د B جمعیت انحرافونه :	8	1	0	0	-2	-3	-4

- د A جمعیت د انحراف منځنۍ پیدا کړئ.
- د کوم جمعیت پراګندګي زیاته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اتم څپرکي لنډيز

- ګیډۍ د هغو ډیټاګانو مجموعه ده، چې د ګیډۍ ځانګړتیاوې ولري. د ډیټاګانو د ګیډۍ کیدو یا لپاره لاندې پراوونه په پام کې نیسو:
- د تحول ساحه: د ډیټاګانو د ډیر لږو او ډیر زیاتو تر منځ وسعت.
- د ګیډۍ اوږدوالی: د تحول د ساحې او د دستو د شمیر نسبت.
- د دستو کثرت: د هغو ډیټاګانو د ګیډیو شمیر چې په هره دسته کې قرار لري.
- د ګیډۍ مرکز: د هرې دستې د منځنی محاسبه.
- په دسته بندۍ کې که متحولونه پیوسته یا پرله پسې وي د وروستۍ ګیډۍ پورتنی سرحد د مخکینی ګیډۍ یا دستې لاندې سرحد سره برابر دی. په هغه صورت کې چې ډیټاګانو د دستې د پورتنی سرحد سره برابر وي هغه ډیټاګانو په وروستۍ ډیټاګانو پورې اړه لري.

د ډیټاګانو د دستو د شمیر مجموع د ټولې ډیټاګانو د شمیر سره برابره دی.

- فرض کوو د $data\ X_1, X_2 ... X_n$ په ترتیب د $W_1, W_2 ... W_n$ ضریبونه وي دغه اطلاعات کولی شو په لاندې جدول کې خلاصه کړو.

data	X_1	X_2	...	X_n
د وزن ضریب	W_1	W_2	...	W_n

- په دې حالت کې د پورتنی داتاګانو منځی په لاندې ډول محاسبه کړو.

$$\text{وزنی اوسط} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + ... + w_n x_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n}$$

- هستوګرام یا مستطیلي ګراف عبارت له هغه ګراف څخه دی، چې د کثرت توزیع یې د مستطیلونو په مرسته ښودل کیږي.

د مستطیل جګوالی د دستې یاګیډۍ د کثرت سره برابره ده.

د هر مستطیل مساحت د دستې یاګیډیو د اوږدوالی او د دستې یاګیډۍ د کثرت له حاصل ضرب سره برابر دی.

په مستطیلي ګراف کې مستطیلونه یو بل سره تړلی او د ترلیو(پیوسته) متحولینو څخه د ګراف د ښودلو لپاره ګټه اخلي.

• په یوه اختیاري شعاع یوه دایره د مرکز زاویې په مرسته په n برخو ویشو داسې، چې دهرې برخې د مرکزي زاویې اندازه د کثرت سره د هغې قیمت متناسبه وي په دې حالت کې یې مرکزي زاویه نظر لومړی دستې یا ګیډۍ ته عبارت دی له:

$$\text{کثرت د درجې له مخې} = \frac{\text{د دیتاګانو کثرت}}{\text{د ټولو دیتاګانو شمېر}} \times 360^{\circ}$$

• د میانې د پیدا کولو لپاره په لومړی مرحله کې دیتاګانې منظم کوو او روسته:

- که د دیتاګانې شمېر طاق وي د دیتاګانې منځۍ یا اوسط ده.

- که د دیتاګانې شمېر جفت وي میانه د دوو دیتاګانې منځنی اوسط دی.

• د تر ټولو کوچنی دیتاګانې او تر ټولو لوی دیتاګانې توپیر د تحول د ساحې څخه عبارت دی یا په بل عبارت داتاګانې په هغه ساحهٔ کې بدلون کوي.

• د هرې دیتاګانې د منځنی تفاضل ته د منځنی انحراف وایي.

د انحراف منځۍ یا اوسط د انحرافونو د مطلقه قیمت د اوسط څخه عبارت دی او فورمول یې د اړوند دیتاګانې لپاره په لاندې ډول لیکو:

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \cdots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اتم څپرکي پوښتنې

1- لاندې جدول ډک کړئ.

تجمعي کثرت	د دستې مرکز	کثرت	ګیلې(دسته)
		12	7,5-10,5
		10	10,5-13,5
		15	13,5-16,5

- پورتنی جدول د کومې دسته بندې ګراف راښيي. پیوسته یا نښتی یا مجزا.

2- لاندې جدول د 200 شل کلنو ځوانانو د ونو اوږدوالی راښيي.

د دستې مرکز	کثرت	ګیلې(دسته)
153	15	149,5-156,5
160	20	156,5-163,5
167	30	163,5-170,5
174	25	170,5-177,5
181	10	177,5-184,5

- مستطیلي ګراف یې رسم کړئ.

3-د A, B, C, D او E ښارونو کې 200 ملیونه افغانۍ سرمایه په کار اچول شوې ده داسې چې:

- د A ښار لپاره 110 ملیونه افغانۍ
- د B ښار لپاره 32 ملیونه افغانۍ
- د C ښار لپاره 24 ملیونه افغانۍ
- د D ښار لپاره 14 ملیونه افغانۍ
- د E ښار لپاره شل میلیونه افغانۍ معلومات ورکړل شوي او دایروي ګراف یې رسم کړئ.

ښارونه	د سرمایې ویش په ملیون	سرمایه په فیصدي	سرمایه په درجه
A	110		
B	32		
C	24		
D	14		
E	20		

4- یو شمیر کورنی د خپلو غړو د شمیر سره په لاندې جدول کې ورکړ شوي دي.

کورنی	18	12	15	8
دکورنی غړي	2	4	5	8

(c) ketabton.com: The Digital Library

● د کورنۍ مود پیدا کړئ.
● میانه یا منځنی پیدا کړئ.
● اوسط میانه پیدا کړئ.
● د تحول ساحه محاسبه کړئ.

5- د یوه ټولګی د زده کوونکو د ونو اندازه په لاندې جدول کې ورکړ شوی.

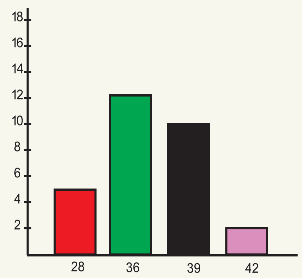
د ونې اندازه	1.5-1.6	1.6-1.7	1.7-1.8	1.8-1.9	1.9-2
کثرت	5	16	9	4	1

● دګیډې مود مشخص کړئ.
● دګیډ یو مرکز حساب کړئ.
● منځی یې پیدا کړئ.

6- یوه ښوونکی د یوه صنفي ازموینې د اوسط محاسبه داسې وکړه:

$$\frac{1\cdot4+3\cdot6+2\cdot8+7\cdot9+3\cdot10+3\cdot11+5\cdot12+1\cdot15}{25} = \text{د ازموینې اوسط}$$

● د ټولګي د زده کوونکو شمېر پیدا کړئ.
● څو نمبري د ۸ او ۱۳ تر منځ قرار لري د (۸ او ۱۳ په ګډون)؟
● عمومي منځی یې څو دی.



7- لاندې میله یې ګراف د هغو کتابونو شمېر راښیي چې په یوه میاشت کې مطالعه شوی دی.
● احصائیوي جدول رسم شي.
● د مطالعه شویو کتابونو شمېر په میاشت کې څو دی.

8- که د تحول ساحه له صفر سره برابره وي د داتاګانې څخه څه پایله اخلئ.
9- که په داتاګانې باندې یو ثابت مقدار علاوه کړو د تحول ساحه څرنګه تحول کوي؟

10- د څلورو زده کوونکو د هغو ساعتونو شمېر چې لوبو ته یې ورکړی دی په لاندې ډول راغلی دی:

9 7 5 1

● د پورتنی داتاګانو د انحراف منځی یا اوسط حساب کړئ.

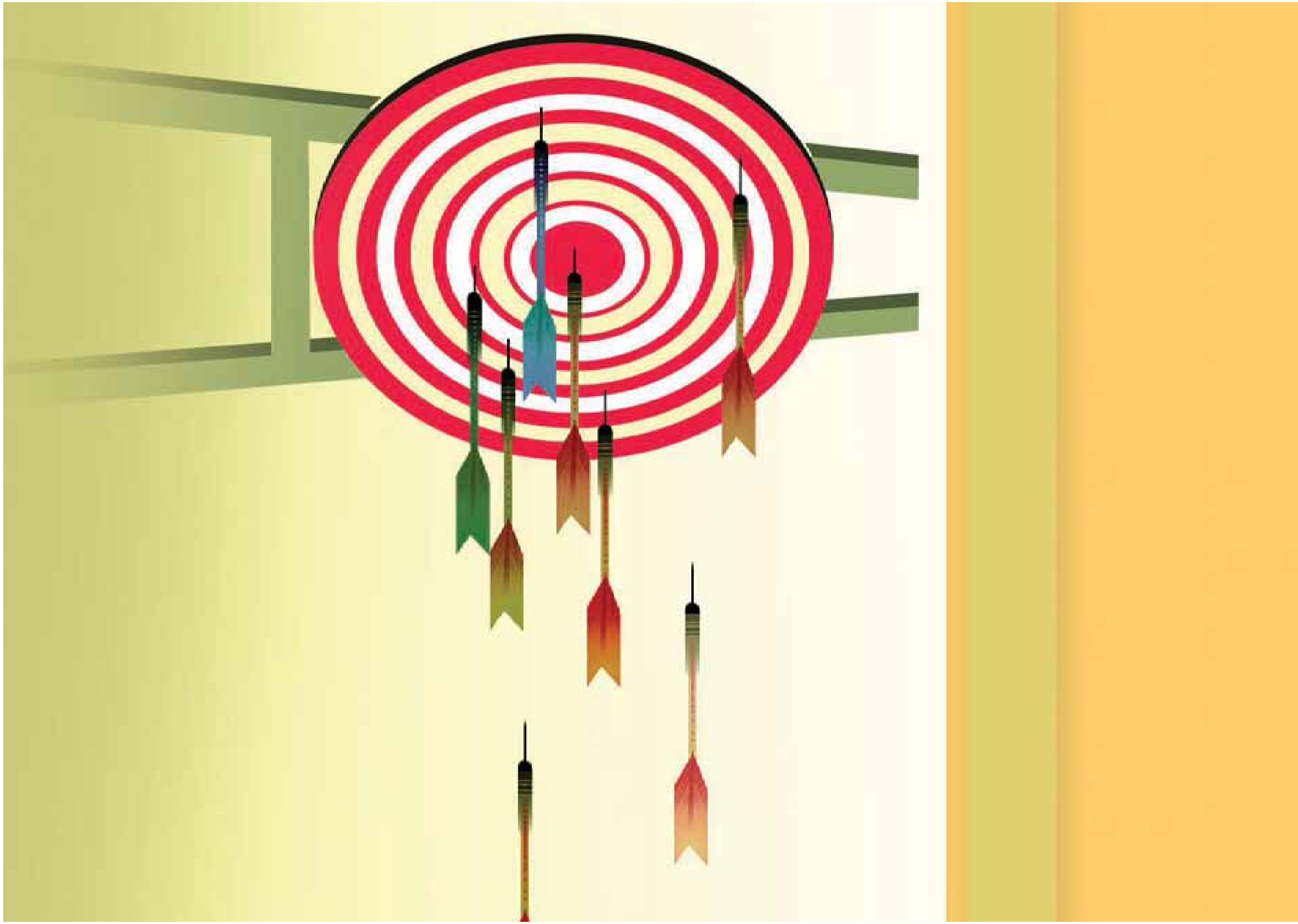
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم څپرکی

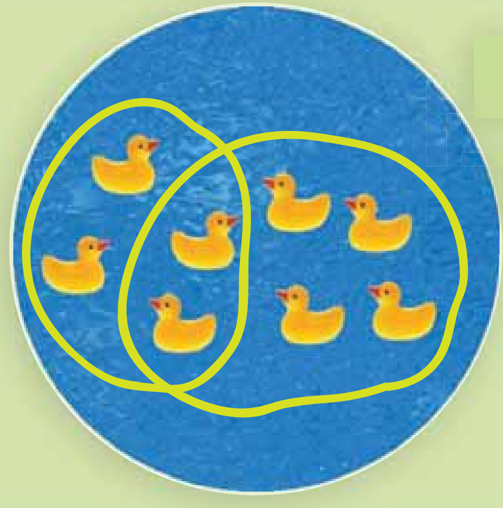
احتمالات

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناځاپو پیښو اتحاد



په دوارو شکلونو کې یو ځای خو هیلۍ وینئ.
هیلۍ په کومه حلقه پورې اړه لري؟

فعالیت

- د یوې دانې رمل د اچولو په تجربه کې د $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ نمونې فضا او د $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5,6\}$ او $C=\{1,2\}$ ناځاپي پیښې په پام کې نیسو.
- د A او C ناځاپي پیښې یو له بل سره څه اړیکې لري؟
- که د A یا د B پیښې رامنځ ته شوې وي ایا ویلی شئ چې د $A\cup B$ پیښه شوې ده؟
- د A پیښه رامنځ ته شوې او بله کومه اختیاري پیښه چې هیڅ پیښه شوې نه ده نا ممکنه یا ϕ پیښه نومول کېږي.
- ویلی شئ چې د $A\cup\phi$ او د A پېښې یو د بل سره څه توپیر لري؟

د پورتني فعالیت پایلې په عمومي ډول د S په نمونې فضا کې د A, B او C ناځاپه پېښو لپاره په لاندې ډول په لاس راورو.

پایله:

- که چیرې د S په یوه نمونه یې فضا کې د $A\subseteq B$ ناځاپي پیښه وي، په دې صورت کې:

$$A\cup B=B$$

- که چیرې د S په یوه نمونه فضا کې د A او B ناځاپي پیښه وي، د $A\cup B$ او $B\cup A$ پیښې یو له بل سره توپیر نه لري؛ یعنې:

$$A\cup B=B\cup A$$

- که چیرې د S په یوه نمونه یې فضا کې د A یا B یوه پیښه رامنځ ته شي نو د $A\cup B$

پیبنه هم رامنځ ته شوي ده، چې سربېره په دې

$$A \subseteq A \cup B \quad \text{او} \quad B \subseteq A \cup B$$

• د A پیبنه د S په نمونه يي فضا کې پیبنه شوي ده او يوه بله پیبنه چې هيڅ نه پيښيږي، يعني ϕ، په دې معنا ده چې يوازې د A پیبنه را منځ ته شوی ده.

$$A \cup \emptyset = A$$

• د $A \cup B$ ناخاپي پيبنه په دې معنا ده، چې لږ تر لږه د A یا B پیبنه منځ ته راغلې ده.

مثال: که چیرې د C ناخاپي پیبنه د A او B دوې بېلا بیلې ناخاپي پيبنې په خپل ځان کې ولري په دې صورت کې د $A \cup B$ ناخاپي پیبنه هم په خپل ځان کې لري په يوه مثال کې يې واضح کړئ.

حل: د $A = \{1,2\}$ ، $B = \{2,3\}$ او $C = \{1,2,34\}$ پیښې په پام کې نیسو لیدل کېږي، چې $A \subseteq C$ او $B \subseteq C$ دی نو:

$$B \cup A = A \cup B = \{1 , 2 , 3\} \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

پوښتنې

1- د S د یوې نمونه یې فضا څخه د B, A او C د ناخاپو پېښو لپاره د يو مثال(بیلگې) په مرسته د لاندې اړیکو سم والی وڅیرئ.

a) $A \cup \emptyset = A$

b) $A \cup A = A$

c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2- که $A \subseteq B$ وي په يوه مثال کې وښيئ چې $A \cup B = B$ دی.

3 - که چیرې د A او $A \cup B$ ناخاپي پيښې سره برابرې وي، په يوه گراف کې وښيئ چې د A ناخاپي پېښه د B ناخاپي پیبنه په بر کې لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناڅاپي پېښو تقاطع

د نـور اصلي رنګونـو د پرېکړې څخه کوم رنګونه لاسته راځي؟

فعالیت

- د رمل د یوې دانې د اچولو نمونه یي فضا $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ او د $A=\{2,4,6\}$، $B=\{4,6\}$ او $C=\{1,3,5\}$ ناڅاپي پېښې په پام کې نیسو.
- د $A\cap B$ او $B\cap A$ ناڅاپي پېښې یو بل سره څه اړیکه لري.
- ایا د A او B پېښې د $A\cap B$ ناڅاپي پېښه په بر کې لرلی شئ که نه؟
- وښیې چې د $C\cap B$ ناڅاپي پېښه یوه ناشونې پېښه ده.
- که د B پېښه د A پېښه په ځان کې ولري، د A او $A\cap B$ ناڅاپي پېښې سره پرتله کړئ.

د پورتنی فعالیت څخه کولای شو لاندې پایلې په عمومي ډول بیان کړو.

پایله:

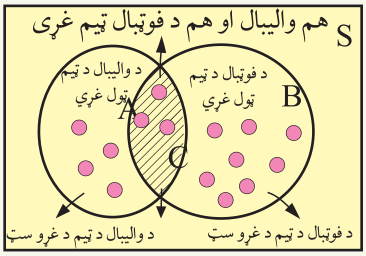
د S په یوه نمونه یي فضا کې د A, B او C ناڅاپي(تصادفي) پېښو لپاره لرو.

- د $A\cap B$ او $B\cap A$ ناڅاپي پېښې یو شان دي.
- د A او B ناڅاپه پېښې هره یوه یې د $A\cap B$ ناڅاپه پېښه په خپل ځان کې لري.
- که د A او B دوه پېښو چې تشی نه $A\cap B=\phi$ وي په دې حالت کې د A او B پېښې یوه له بله بېلې پېښې بلل کېږي.
- د A پېښې لپاره لرو:

$$A\cap S=A \ ، \ A\cap\emptyset=\emptyset$$

- که چیرې د B پېښه د A پېښه په خپل ځان کې ولري، نو $A\cap B=A$ سره ده.

مثال: د ښوونځی د فوټبال له ټیم څخه درې تنه د ښوونځی د والیبال د ټیم غړي هم دي که چیرې د فوټبال د ټیم غړی په A، د والیبال د ټیم غړی په B او د دواړو ټیمونو ګډ غړي په C سره وښیو په دې حالت کې د سټونو تر منځ اړیکه د سټ د تیورۍ په بڼه ولیکئ:



$$A \cap B = C$$

ایا پوهېږئ چې د B د سټ په مکمله سټ کې یعني $\overline{B}$ کې د والیبال د ټیم ټول غړي ګډون لري. که نه؟

نو $\overline{B}$ ټول هغه زده کوونکي دي، چې د فوټبال د ټیم غړي نه دي، څرنګه چې 3 تنه زده کوونکي د والیبال د ټیم غړي، چې په عین حال کې د فوټبال د ټیم غړي هم دي په $\overline{B}$ کې ګډون نه لري؛ نو په دې اساس د والیبال ټیم $\overline{B}$ سټ په پام کې نیولو سره ناقص دی.

پوښتنې

1- د A, B ناڅاپي پېښه د دیاګرام په مرسته د A او B د بېلابېلو حالتونو لپاره چې د C پېښه د A او B پېښې په خپل ځان کې لري وښيئ او وضاحت ورکړئ.

2- په یوه مثال کې د A, B او C پېښې چې A او B په خپل ځان کې لري وښيئ چې:

a) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

3- لاندې پېښې په بیان سره ولیکئ:

a) $\overline{A} \cup \overline{B}$

b) $\overline{A \cap B}$

c) $\overline{A \cup B}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کلي او مکمله سټ

که چیري S د افغانستان ولایات، A د شمال او B د نور پاتي ولایات وي، نو $S-A$ او $S-B$ کوم ولایات راښيي؟

فعالیت

- د یوي داني رمل د اچولو نمونه یي فضا $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ او د $A=\{1,3,5\}$ ناخاپي پیښه په پام کي ونیسئ.
- د A د ناخاپي پیښي مکمله یعني $\overline{A}$ کومه ناخاپي پیښه کیدلی شي؟
- یوه ناخاپي پیښه پیداکړئ، چي A یي په بر کي ولري، او په $\overline{A}$ کي شامله نه دی.
- ایا کولای شئ د S نمونه یي فضا څخه یو پیښه پیداکړي چي په یو وخت کي نه په A کي او نه په $\overline{A}$ ګډون ولري.
- د A او $\overline{A}$ د ناخاپي پیښو اتحاد له ډاډمني پیښي سره څه اړیکه لري؟
- د A او $\overline{A}$ پیښو تقاطع ناممکني یا ناشوني پیښي سره څه اړیکه لري؟

د پورتنی فعالیت څخه لاندي پایله په لاس راځي.

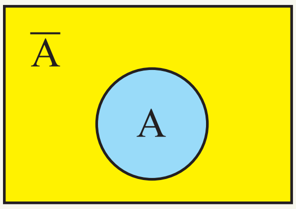
پایله: که چیري S یوه نمونه یي فضا او A یوه ناخاپي پیښه وي:

- $\overline{A}$ یوه ناخاپي پیښه ده، چي په یوه وخت د A سره نه پیښیږي.
- د A هره ناخاپي پیښه چي پیښیږي:

a) $A\cup\overline{A}=S$

b) $P(A\cup\overline{A})=P(S)=1$

c) $P(\overline{A})=1-P(A)$

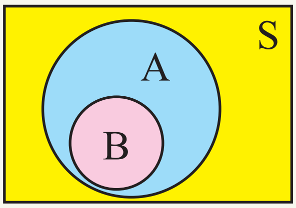


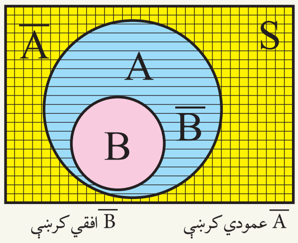
د S نمونه فضا

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: که د S په یوه نمونه یي فضا کې د A ناخاپي پیښه د B ناخاپي پیښه په بر کې ولري، په ګرافیکي ډول وښیئ چې د $\overline{B}$ ناخاپي پیښه د $\overline{A}$ ناخاپي پیښه په خپل ځان کې ولري.

حل: څرنګه چې $A \subseteq B$ دی، که چیرې مونږ په شکل کې $\overline{A}$ او $\overline{B}$ وښیو د لاندې شکل څخه په پوره ښکاره لیدل کېږي، چې: $\overline{A} \not\subset \overline{B}$





پوښتني

1- د یوه مثال او ګراف په مرسته د S د نمونه یي فضا او د A او B ناخاپي پیښو لپاره وښیئ، چې:

a) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\overline{S} = \emptyset$

c) $S = \overline{\emptyset}$

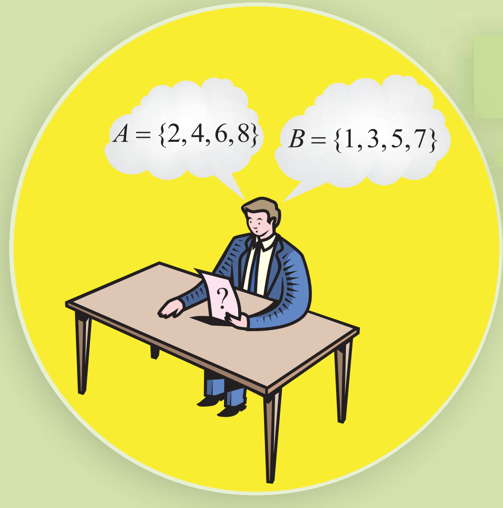
2- د S نمونه یي فضا او د A او B ناخاپي پیښو لپاره لاندې پیښې په عبارت سره ولیکئ:

a) $\overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\overline{(A \cup B)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

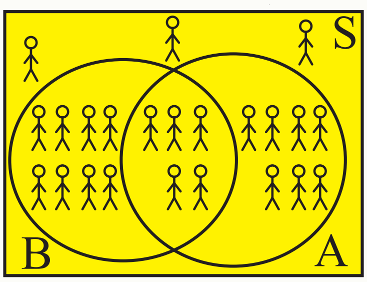
په سټونو مډل جوړونه



تر اوسه مو الجبري یا هندسي قوانینو
خخه د ژوندانه د مسائلو په حل کې ګټه
اخیستله.
أیا سوچ مو کړئ، چې د سټونو خخه هم
کولای شو چې د خپلو مسائلو د حل
لپاره ګټه واخلو؟

فعالیت

د یوه ټولګي د 23 زده کوونکو خخه مو د خوښندو او وروڼو لرونکو زده کونکو احصائیه راټوله کړئ، چې په لاندې دیاګرام کې لیکل شوی ده.



په شکل کې ټول هغه زده کوونکي چې خوېندې لري د A په سټ او هغه زده کوونکي چې وروڼه لري د B په سټ سره ښودل شوي دي.
شکل په پام کې ونیسئ د لاندې فعالیت سوالونو ته ځواب پیدا کړئ.

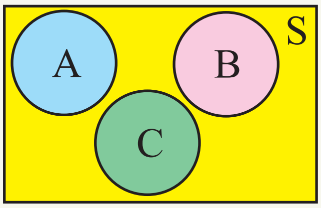
- څو تنه خوېندې لري؟
- څو تنه وروڼه لري؟
- څو تنه هم خوېندې او هم وروڼه لري؟
- څو تنه نه خوېندې او نه وروڼه لري؟
- څرنګه کولی شو دا مسأله د ریاضي په ژبه ولیکو.
- ټول هغه کسان چې خوېندې نه لري څو تنه دي؟

لیدل کېږي چې پورتنی ګراف کولی شي چې پورتنی ټولو سوالونو ته او د هغوی په شان نورو سوالونو ته په ښه توګه ځواب ورکړئ.
نو د پورتنی فعالیت خخه لاندې پایله په لاس راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پایله: لیدل کېږي، چې دسټ د تیوري په کارولو سره په ورځني ژوندانه کې د ډېرو مسائلو سره مخامخ کېږو، چې کولای شو هغه حل پیدا کړو، او هغه و ارزوو.
د سټ د تیوري تطبیق په احتمالاتو کې او یا په بل عبارت د هغو ناخاپي پېښو د پېښېدو د مسائلو د حل او د هغې د ښودنې د سټ د تیوري په مرسته د سټ تیوري یوه بله د تطبیق ساحه شمېرل کېدای شي.

مثال: د S نمونه يي فضا د A, B او C ناخاپه پېښې په لاندې دیاګرام کې ورکړل شوي دي په پام کې ونیسئ مطلوب دی د پېښو د پېښېدو احتمال:



a. د دې احتمال چې د A یا B حادثه ناخاپي پېښه شي.
b. د دې احتمال چې د A یا B پېښه، پېښه شي.
c. د دې احتمال چې د C پېښه، پېښه نه شي.

حل:

a. د A یا B احتمال په حقیقت د $A\cup B$ احتمال دی ځکه چې د اپېښې یو د بل څخه بېلې دي، یعنې $A\cap B=\phi$ دی نو:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

b) د دې احتمال چې د A پېښه ناخاپه پېښه، پېښه شي د $\overline{A}$ مکمله پېښې څخه عبارت ده، چې د $\overline{A}$ پېښه نه ده پېښه شوی، په بل عبارت هغه پېښه ده چې د C یا B حادثه پېښه نه شي نو: $P(\overline{A})=P(C\cup B)$ ځکه چې $P(A)=1-P(\overline{A})$

نو: $P(A)=1-(P(C\cup B))=1-P(C)-P(B)$

c) د دې احتمال چې د C پېښه ناخاپه پېښه نه شي د هغې پېښې د پېښېدو د احتمال سره برابر دی چې د A یا B پېښې، پېښې شي، او دا د $A\cup B$ دپېښې د پېښېدو څخه عبارت ده.

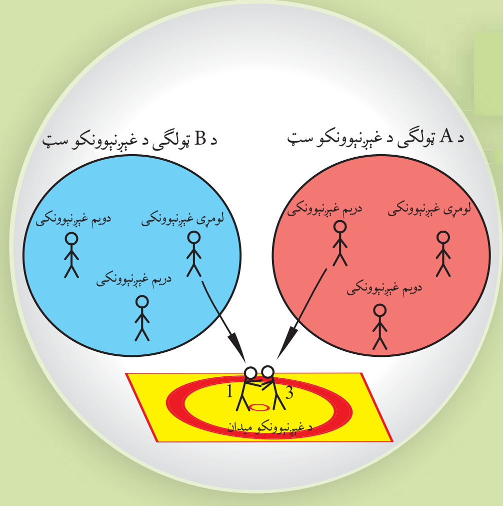
$$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

پوښتنې

1- هغه مثال چې په فعالیت کې مو ترې ګټه اخیستې ده په پام کې ونیسئ:
a) د دې احتمال مطلوب دی، چې له دې ټولګې څخه یو زده کوونکی په تصادفي یا ناخاپي ډول وټاکل شي چې خور او ورونه لري.
b) د یوه داسې زده کوونکي د ټاکلو احتمال چې تصادفي ټاکل کېږي پیدا کړئ، چې لږ تر لږه خور یا ورور ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شمېرنې اصل



د A او B دوو ټولګيو څخه درې تنه د غېږې لپاره ټاکل شوي دي په څو ډوله کولای شئ چې یو له بل سره په غېږه ورشي.

فعالیت

دوه عدده تور او سرمه يي رنګه پطلونونه له درې عدده سپين، ابي او فولادي رنګه کمیسونه په پام کې نیسو.

- په څو ډوله کولای شو هغو په ځان کړو(واغوندو).
- د شمېرنې د ترتیب لپاره د ونې د شکل له ګراف څخه ګټه واخلئ.
- د اغوستلو د ټولو امکاناتو او د پتلونونو او کمیسونو د شمېر تر منځ څه اړيکه شته ده.

د پورتني فعالیت څخه لاندې پايله په لاس راورو.

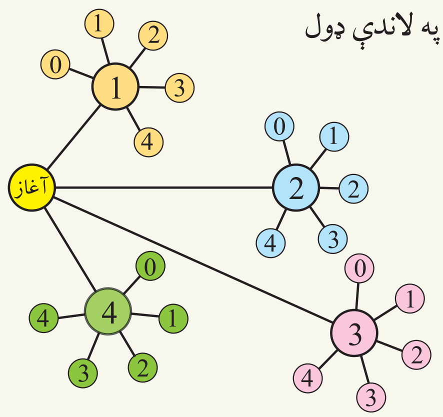
پايله:

1- د دوو سټونو د عناصر په ترکیب کې د ټولو امکاناتو شمېر د ترکیبي مجموعه د هرې یوې مجموعې د عنصر د شمېر د مجموعو دضرب حاصل سره مساوي دی.

2- که چیرې د امکاناتو شمېر او یا د یو سټ عناصر په m عدد او د یوه بل سټ د عناصرو شمېر مساوي په n عدد وي په دې حالت کې دواړه ټاکنې یو د بل سره د $(m\times n)$ د شمېر په ډول امکان لري.

مثال: د 0، 1، 2، 3 او 4 رقمونو څخه په ګټه اخستنې سره څو دوه رقمي عددونه کولای شو جوړ کړو؟ برسېره پر دې د امکاناتو د ونې ګراف یې رسم کړئ او هغه احتمال پیدا کړئ، چې له دې عددونو څخه یو عدد په اتفاقي(ناڅاپي) ډول و ټاکل شي، چې هغه عدد په 2 د وېش وړ وي.

د دې کار لپاره د ذکر شوی دوه رقمي عدد د جوړولو لپاره دوه تش ځایونه د هر رقم لپاره په پام کې نیسو.
د کیڼي خوا په تش ځای کې د راکړل شویو پنځو رقمونو څخه 4 امکانانو(پرته له صفر) د 3,2,1,0 او 4 عددونو د ځای په ځای کولو لپاره شته دي، خو د ښي خوا د تش ځای لپاره 3,2,1,0 او 4 هرو پنځو عددونو څخه ګټه اخلو. په دې ترتیب د دې رقم د ټاکلو پنځه امکانه شته دی، چې په مجموعي ډول $4\times5=20$ شمېر د دوه رقمي عددونو د جوړولو لپاره د پورتنیو عددونو په وسیله موجود دي.
دا مطلب کولای شو د ونه ییز د ګراف په مرسته په لاندې ډول وښیو، لکه:



د دې لپاره چې نوموړی رقم پر 2 د ویش قابلیت ولري د ښي خوا په تش ځای کې د 5 برابرو امکاناتو څخه یوازې 3 امکانه د (3,2,1,0 او 4) شته دی. د داسې عددونو د جوړولو لپاره چې پر 2 د ویش وړ وي د $4\times3=12$ برابر حالتونه دي، چې په لاندې حالت کې د هغه رقم د ټاکل کیدو احتمال چې پر 2 د ویش وړ وي عبارت دی له:

$$P\ (\text{مطلوب عدد})=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}=0.6=60\%$$

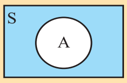
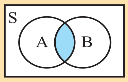
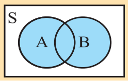
پوښتنې

1- د (م، د، ی) تورو څخه په ګټه اخیستنه څو څلور حرفي معنا لرونکي او معنا نه لرونکي کلیمې جوړولای شو؟ موضوع د ونه ییز ګراف په مرسته تشریح کړئ.
که چیرې د دې ترکیبي کلمو څخه په ناڅاپي ډول یوه کلمه وټاکو د دې احتمال پیدا کړئ، چې دا کلمه((مریم)) وي.
2- د 8,7,4,1,0 او 9 عددونو څخه د مبایل تلیفون څو داسې شپږ رقمي نمبرې جوړولای شو چې د کیڼې خوا څخه په 077 پیل شوي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نهم څپرکی لنډیز

• د دې لپاره چې وکولای شو د ناخاپي پېښو د ترکیب د بېلا بېلو حالتونو د پرتله کولو لپاره د ستونو د تیوري په کارولو سره یو ښه تصور ولرو هغه مو په لاندې جدول کې راټول کړل.

د حادثې احتمال	د Venn دیاګرام او اتفاقي حادثه	د بیان ارایه د ست په واسطه	د اتفاقي حادثې بیان
خرنګه چې $P(S)=1$ دی نو $P(A)=1-P(\overline{A})$		$\overline{A}=S-A$ یا $S=A\cup\overline{A}$	د S هغه ټولې ناخاپي پېښې چې د A په پېښه کې ګډون و نه لري د A پېښې عکس دی.
$P(A\cap B)$		$A\cap B$	د A ناخاپه پېښه یا د B ناخاپه پېښه پېښېږي.
$P(A\cup B)$ $=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$		$A\cup B$	لږ تر لږه یو د A یا د B د ناخاپي پېښو څخه پېښېږي.

د شمېرنې حل: د دوو ستونو د عناصرو په ترکیب کې ټولو امکاناتو شمېر د هرې ترکیبي مجموعې د عناصر د ضرب د حاصل سره مساوي دی.
که د یوې مجموعې د عنصرونو امکان په m ډول او د بلې مجموعې د عنصرونو(غړو) امکان په n ډول وي د دوی یو د بل سره د ترکیب د ټولو امکاناتو شمېر د $m\times n$ سره برابر دی.

د نهم څپرکي پوښتنې

1–که S یوه نمونه یي فضا او A د هغې یو ناخاپه پېښه وي وښیئ چې:

a) که $A\subseteq\phi$ وي وښیئ، چې $P(A)=0$ دی.

b) که $S\subseteq A$ وي په دې حالت کې $P(A)=1$ دی.

که چیرې د C ناخاپي پېښه د A او B ناخاپي پېښې په بر کې ولري، وښیئ چې همدارنګه د C ناخاپي پېښه د $A\cup B$ ناخاپي پېښه په بر کې ولري.

3- که چیرې S د A او B یوه نمونه یي فضا وي د B او $A\cup B$ ناخاپي پېښې یو بل په بر کې ولري وښیئ چې د $A\cup B$ او B یو بل سره برابر دي.

4- که د S په یوه نمونه یي فضا کې د B ناخاپه پېښه د A پېښه په بر کې ولري، وښیئ چې د A او $A\cup B$ ناخاپه پېښې یو بل په بر کې ولري. برسېره پر دې ښکاره(واضح) کړئ، چې د دې ناخاپي پېښو احتمال یو د بل سره څه اړیکه لري؟

5- که چیرې S یوه نمونه یي فضا وي او B د هغې یوه ناخاپه پېښه وي وښیئ چې: $S-B=\overline{B}$

6- د ګراف په مرسته وښیئ چې د A او B دوې ناخاپي پېښې او S یوه نمونه یي فضا د $B-A$ او $\overline{A}-\overline{B}$ ناخاپي پېښې سره برابرې دي، یعنې: $\overline{A}-\overline{B}=B-A$

7- وښیئ چې د $\overline{A}\cap\left[(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\right]$ ناخاپي پېښې احتمال د صفر سره مساوي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library