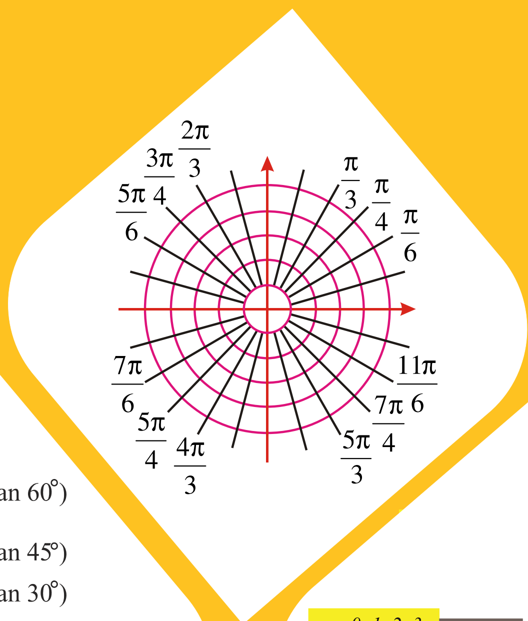
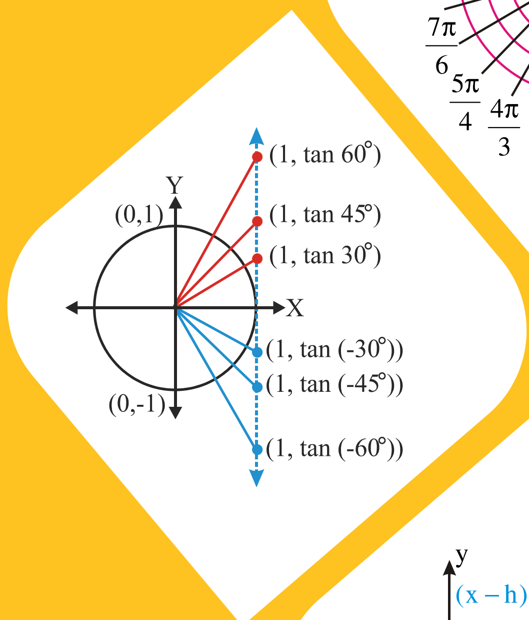
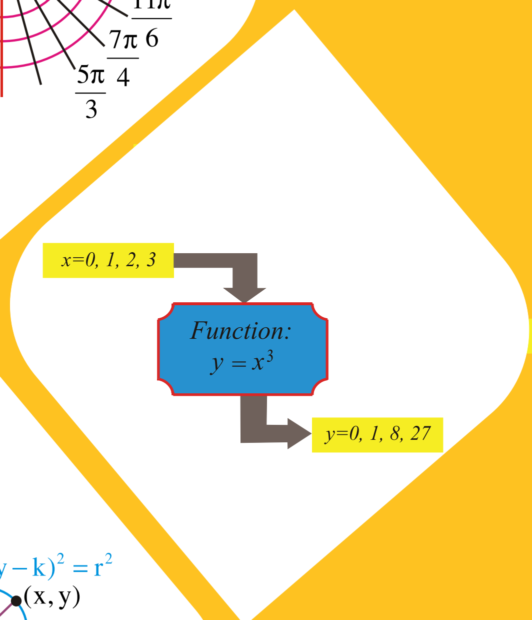
د پوهنې وزارت
د تعليمي نصاب د پراختيا، د ښوونکو د روزنې
او د ساينس د مرکز معينيت
د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو
د تاليف لوی رياست

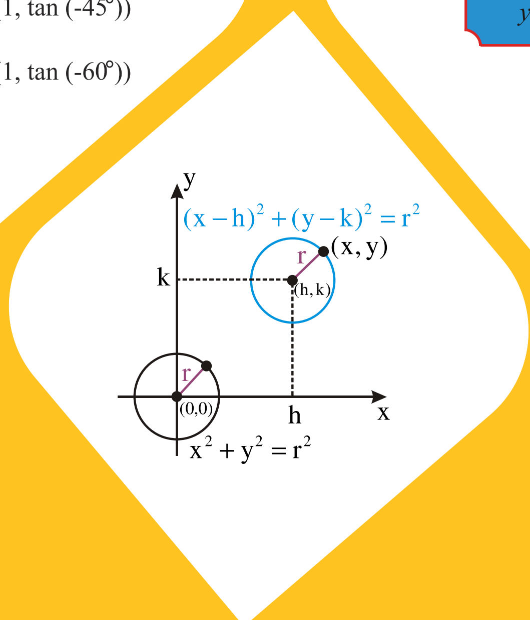
ریاضی

لسم ټولګی









ریاضی لسم ټولګی

MATHEMATICS

Grade 10

۱۳۹۰

ریاضی
لسم
ټولګی

۱۳۹۰
هـ . ش.

مؤلفین:

پوهنیار عبیدالله صافی د تعلیمی نصاب د پراختیا او د درسی کتابونو د ریاضیاتو متخصص

د احصائیې څپرکی:

پوهندوی خالقداد فیروزکوهی

د ریاضي د منطق څپرکی:

پوهنمل طلاباز حبیب زی

علمي او مسلکي ایډیټ:

- حبیب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعلیمي نصاب د پراختیا په ریاست کې.
- سرمؤلف عبدالکبیر د ریاضیاتو د ډیپارتمنت علمي غړي
- پوهنیار عبیدالله صافی د تعلیمي نصاب د پراختیا د ریاضیاتو متخصص
- لینا صافی د ریاضیاتو د ډیپارتمنت علمي غړی

د ژبې ایډیټ:

محمد قدوس (ذکوخیل) د تعلیمي نصاب د پراختیا د ریاست علمي او مسلکي غړي.

اقا محمد ګرندی د تعلیمي نصاب د پراختیا د ریاست علمي او مسلکي غړي.

دیني، سیاسي او فرهنګي کمېټه:

- ډاکټر عطاء الله واحدیار د پوهنې وزارت ستر سلاکار او د نشراتو رئیس.
- حبیب الله راحل د پوهنې ورزارت سلاکار د تعلیمي نصاب د پراختیا په ریاست کې.
- محمد آصف کوچی د اسلامي زده کړو د ډیپارتمنت متخصص

د څارنې کمېټه:

- دکتور اسدالله محقق د تعلیمي نصاب د پراختیا، د ښوونکو د روزنې او د ساینس مرکز معین
- دکتور شېر علي ظریفي د تعلیمي نصاب د پراختیا د پروژې رئیس
- د سرمؤلف مرستیال عبدالظاهر ګلستاني د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی رئیس

دیزاین

- محمد اشرف امین

بسم الله الرحمن الرحيم

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هیواد به تل ځلیږي
په سینه کې د اسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه یان
لکه لمر پر شنه اسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحيم

د پوهنې د وزیر پیغام

ګرانو ښوونکو او زده کوونکو،

ښوونه او روزنه د هر هېواد د پراختیا او پرمختګ بنسټ جوړوي. تعلیمي نصاب د ښوونې او روزنې مهم توکی دی چې د معاصر علمي پرمختګ او ټولنې د اړتیاوو له مخې رامنځته کیږي. څرګنده ده چې علمي پرمختګ او ټولنیزې اړتیاوې تل د بدلون په حال کې وي. له دې امله لازمه ده چې تعلیمي نصاب هم علمي او رغنده انکشاف ومومي. البته نه ښایي چې تعلیمي نصاب د سیاسي بدلونونو او د اشخاصو د نظریو او هیلو تابع شي.

دا کتاب چې نن ستاسو په لاس کې دی، پر همدې ارزښتونو چمتو او ترتیب شوی دی. علمي ګټورې موضوعګانې پکې زیاتې شوې دي. د زده کړې په بهیر کې د زده کوونکو فعال ساتل د تدریسي پلان برخه ګرځېدلې ده.

هیله من یم دا کتاب له لارښوونو او تعلیمي پلان سره سم د فعالې زده کړې د میتودونو د کارولو له لارې تدریس شي او د زده کوونکو میندې او پلرونه هم د خپلو لوڼو او زامنو په باکیفیته ښوونه او روزنه کې پرله پسې ګډه مرسته وکړي چې د پوهنې د نظام هیلې ترسره شي او زده کوونکو او هېواد ته ښې برياوې ور په برخه کړي.

پر دې ټکي پوره باور لرم چې زموږ ګران ښوونکي د تعلیمي نصاب په رغنده پلي کولو کې خپل مسؤولیت په ریښتوني توګه سرته رسوي.

د پوهنې وزارت تل زیار کاږي چې د پوهنې تعلیمي نصاب د اسلام د سپېڅلي دین له بنسټونو، د وطن دوستۍ د پاک حس په ساتلو او علمي معیارونو سره سم د ټولنې د څرګندو اړتیاوو له مخې پراختیا ومومي.

په دې ډګر کې د هېواد له ټولو علمي شخصیتونو، د ښوونې او روزنې له پوهانو او د زده کوونکو له میندو او پلرونو څخه هیله لرم چې د خپلو نظریو او رغنده وړاندیزونو له لارې زموږ له مؤلفانو سره د درسي کتابونو په لا ښه تألیف کې مرسته وکړي.

له ټولو هغو پوهانو څخه چې د دې کتاب په چمتو کولو او ترتیب کې یې مرسته کړې، له ملي او نړیوالو درنو مؤسسو، او نورو ملګرو هېوادونو څخه چې د نوي تعلیمي نصاب په چمتو کولو او تدوین او د درسي کتابونو په چاپ او وېش کې یې مرسته کړې ده، مننه او درناوی کوم.

ومن الله التوفیق

فاروق وردګ

د افغانستان د اسلامي جمهوریت د پوهنې وزیر

فهرست مخ

فهرست — مخ

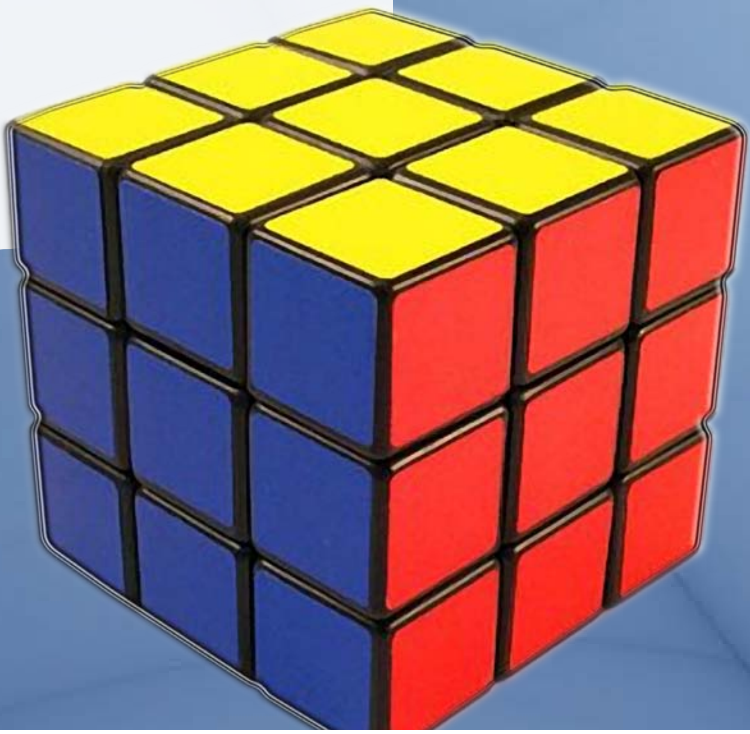
لومړی څپرکی

پولینوم

پولینوم(Polynome)

یا (Polynomial)

$$(3x^2+5x+2)+(5x+6)$$
$$=3x^2+5x+2+5x+6$$
$$=3x^2+5x+5x+6+2$$
$$=3x^2+10x+8$$



الجبري افادې

(Algebraic Expressions)

ایـــا ویـــلای شـئ چې پـه $\frac{x^4-1}{x^2}$ ، $x^3+\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x}+y^3$ او $\sqrt{y^2+1}$ الجبري افادو کې کومـه یوه ناطقه اوکومه یوه غیر ناطقه الجبري افاده ده؟

متحول او ثابت (variable and constant): متحول یو سمبول (Symbol) دی چې د یوه غیر خالي سټ د هر عنصر په ځای وضع کیږي. د مثال په ډول که $A=\{x/x\in IN$ او $x\leq 10\}$ وي.

نو د A په سټ کې x له یوه څخه تر 10 پورې د طبیعي عددونو قیمتونه اخیستلای شي. x، ته متحول(Variable) وایي. عموماً متحولونه د انګلیسي ژبې د کوچنیو تورو لکه z, y, x او نورو په واسطه ښودل کیږي.

د یوه عدد قیمت تغیر نه کوي، لکه د 4 عدد هیڅکله له 5 یا 3 او یا کوم بل عدد سره مساوي کیدای نه شي، نو ټول حقیقي عددونه ثابت (Constants) دي.

د حقیقي عددونو سربیره د انګلیسي د ژبې توري لکه $a, b c \ldots$ او نور هم د ثابتو پر ځای کارول کیږي.

الجبري افاده (Algebraic Expression): کیدای شي الجبري افاده له یوه ثابت، یو متحول او یا د ثابتو او متحولونو له ترکیب څخه جوړه شوې وي. د الجبري افادو لاندې مثالونه وګورئ.

$5\sqrt{x}$، $4x+5+\frac{15}{t^2}$، $\sqrt{3}x$، x^2-x+1، x، -12، 12 او داسې نور.

په $3x^2$ الجبري افاده کې 3 ته ضریب (Coefficient) وایی. په $-\frac{1}{2}y$ کې د $-\frac{1}{2}$ عدد او په x کې (1) ضریب دی. $-3x^5y^5$ او $15x^5y^5$ مشابه حدونه (Liketerms) دي چې مشابه متحولونه او مساوي توانونه لري، یوازې عددي ضریبونه یې سره توپیر لري.

د الجبري افادو ډولونه: الجبري افادې په دریو ډولو دي.

1- **پولینومي الجبري افادې** (Polynomial algebraic expressions)

پولینوم: هغه یوه یا څو حده الجبري افاده، چې د تورو توانونه یې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي، پولینوم نومیږي. x^3-x+1 ، $2x^2+x-1$، $x-1$، 12 او نور پولینومونه دي، خو $x^{-2}+x-1$، $\frac{1}{x}+x$ او $x^3+\sqrt{x}+\frac{y}{x^2}$ پولینومونه، نه دي، یا د پولینوم مشخصې دا دي:

- د ټولو متحولونو توانونه یې مکمل عددونه وي.
- په مخرج کې متحول ونه لري.
- متحول تر جذر لاندې نه وي.

لومړی مثال: په $a)\sqrt{2}x$, $b)2\sqrt{x}$, $c)\frac{1}{y^2}-\frac{2}{x^3}$, $d)x^{\frac{1}{2}}$, $e)x^{-3}+x^2$
$f)8p^2+p^{2.2}$ $g)9x^2-\frac{7}{x^2}$, $h)88$, $i)6a^2-4a$ افادو کې:

h,a او i پولینومونه دي، خو b,c,d,e,f او g پولینومونه، نه دي. په یاد ولرئ چې هر پولینوم، یوه ناطقه الجبري افاده ده، خو هره ناطقه الجبري افاده پولینوم نه دی. د مثال په ډول:

$x^3+\frac{y}{x^2}+\frac{y}{x}+y^3$ یوه ناطقه الجبري افاده ده، خو پولینوم نه دی.

12 هم یو پولنیوم دی ځکه چې: $12=12x^0$ دی او صفر هم د مکملو عددونو په سټ کې شامل دی، خو $5\sqrt{x}$ او $\frac{5}{x^3}$ پولینومونه نه دي، ځکه $5\sqrt{x}=5x^{\frac{1}{2}}$، $\frac{5}{x^3}=5x^{-3}$ چې $\frac{1}{2}$ او -3 د مکملو عددونو په سټ کې شامل نه دي.

پولینوم د یو توري په واسطه لکه P ښودل کیږي، یو پولینوم چې له یو متحول څخه جوړ شوی وي

عمومي شکل يې په لاندې ډول دی.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

n يو مکمل عدد او $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n$ ضريبونه دي چې حقيقي عددونه دي. که $a_n \neq 0$ نو n د پولينوم درجه ده.

فعاليت

له $-8,\ -8x^2,\ \sqrt{8}x^3,\ \frac{1}{x},\ x,\ 2x^3 - x^2$ او $8\sqrt{x}$ الجبري افادو څخه کومه يوه يې پولينوم دی او کومه يوه پولينوم نه دی؟

دويم مثال: د $P(x) = -5x^3 + x^2 - x + 12$ په پولينوم کې، $n = 3$، $a_n = -5$، $a_1 = -1$ و $a_0 = 12$ دی. او د $11x^2 - 1$ په پولينوم کې، $n = 2$، $a_n = 11$، $a_1 = 0$، او $a_0 = -1$ دی.

2- ناطقه الجبري افاده (Rational algebraic expression):

که يوه الجبري افاده د $\frac{p}{q}(q \neq 0)$ په شکل وليکلای شو چې p او q پولينومونه وي. داسې الجبري افادې ته ناطقه الجبري افاده وايي. د مثال په ډول $x^2 - \frac{1}{x^2}$ چې د $\frac{x^4 - 1}{x^2}$ په شکل يې هم ليکلای شو چې يو متحول لرې يوه ناطقه الجبري افاده ده. څرنګه چې هرې الجبري افادې ته يو مخرج ورکولای شو، نو $(x^2 - 1)$ هم يوه ناطقه الجبري افاده ده، ځکه چې $\frac{x^2 - 1}{1} = x^2 - 1$ دی.

3- غير ناطقه الجبري افاده (Irrational algebraic expression):

داسې يوې الجبري افادې ته چې د دوو پولينومونو د خارج قسمت په بڼه يې نه شو ليکلای، غير

ناطقه الجبري افاده وايي، لکه: $\sqrt{xy}$، $\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$ او $\sqrt{y^2+1}$ د غير ناطقو الجبري افادو مثالونه دي.

يوه الجبري افاده کيداى شي چې ناطقه، غير ناطقه او يا پولينومي الجبري افاده وي. پولينوم هغه يو يا څو حده الجبري افاده ده چې د تورو توانونه يې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.

پوښتني

1- په لاندې الجبري افادو کې کومه يوه ناطقه، غير ناطقه او پولينومي الجبري افاده ده؟

$$\frac{1}{x} \quad , \quad \sqrt{x}-\frac{1}{2} \quad , \quad \frac{3x^2}{2} \quad , \quad \frac{m+3}{6} \quad , \quad x+\frac{1}{x} \quad , \quad 3x^2+\frac{xy}{2}$$ او 13

2- په لاندې الجبري افادو کې کومه يوه يې يو پولينوم او کومه يوه يې پولينوم نه دی؟

$$3x^2+\frac{xy}{2} \quad , \quad -20a^3b+28ab^4 \quad , \quad \frac{1}{7}x^3-x \quad , \quad 3x$$

$$\frac{1}{x}-\frac{x^2}{5} \quad , \quad 8\sqrt{x} \quad , \quad 8x^{-8} \quad , \quad 3x \quad , \quad -0.03 \quad , \quad \sqrt{8}x^8$$

3. د $Px^4-ax^3+bx^2+cx+d$ په پولينوم کې، a_1, a_2, a_3, a_n او a_0 وښاياست.

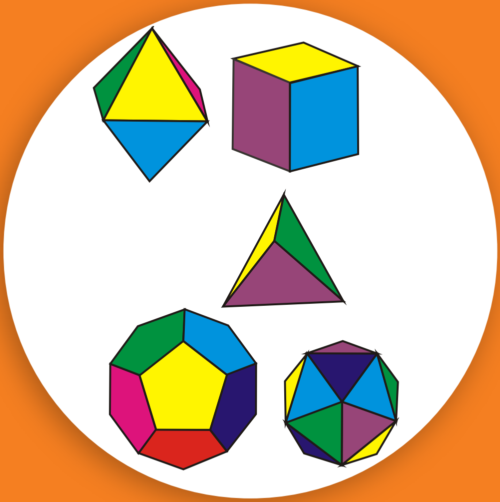
4. د $P(x)=\frac{x^3}{2}-2x^2-1$ په پولينوم کې، a_1, a_2, a_3 او a_0 وښاياست.

د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه

ایا ویلای شئ چې د:

$12y^5x^3 + x^4y^3$، $12x^3$، $-x^2 - x$ او

12 د پولینومونو درجې څو دي؟



$3x$ یا $16x$ ته مونوم یا (Monomial) (یو حده)الجبري افاده وایي. $x-4$ یا $ab-y$ ته باینوم (Binome) یا (Binomial) (دوه حده) الجبري افاده وایي او د $2x^3 - x - 1$ الجبري افاده ترینوم (Trinomial) (دري حده) الجبري افاده ده او $\sqrt{2x} - \frac{1}{y} + 1$ الجبري افادې ته مولتینوم (Multinomial) وایي.

څینې وختونه پولینوم له یو، دوه، دري او څو متحولونو څخه جوړ شوي وي.

د $2x^3 - 8x^2 + 7x + 11$ پولینوم د یو متحول، $2x^3 - 3y$ پولینوم د دوه متحولونو او $x + y + z$ د دریو متحولونو لرونکی پولینوم دی چې په لاندې جدول کې ښودل شوي دي.

متحول	مونوم (یو حده)	باینوم (دوه حده)	ترینوم (دري حده)
یو متحول	$5x^3$	$5y^2 + 3y$	$3x^2 + 2x - 4$
دوه متحولونه	$7x^2y$	$7x^2 - 4y^3$	$6x^2 + 5x - 3y^2$
دري متحولونه	$4xyz^2$	$8a^2b + 4c$	$3a^2b^2 + 6c^2 - z^5a$

فعالیت

د $ax^2 + bx + c$، $2x - y$، 15، $-3x$ او $4x^2 - 4y$ الجبري افادو کې مونوم، باینوم او ترینوم وښایاست.

د يو پولينوم درجه (Degree of a Polynome): که پولينوم له يوه توري څخه جوړ شوی وي، د هغه توري لوړ توان د پولينوم درجه ده، لکه د $-x^3+2x+1+x^5$ د پولينوم درجه 5 ده. که پولينوم له ډېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د زيات توان لرونکي مونوم درجه د پولينوم درجه ده، لکه د $2x^2y^3-5xy^5+x^3y$ د پولينوم درجه 6 ده، ($1+5=6$) او دا پولينوم نظر x ته دريمه درجه او نظر y ته پنځمه درجه پولينوم دی. که د يوه پولينوم درجه يوه وي، خطي پولينوم (Liner Polynome) او که د پولينوم درجه دوه وي، دويمه درجه پولينوم (Quadratic Polynome) او که درجه يې درې وي، دريمه درجه پولينوم (Cubic Polynomial) ورته وايي. او هم د $3x^2$ مونوم دويمه درجه، د $3x^2y^3$ مونوم درجه 5 او د 12 مونوم درجه صفره. داسې پولينوم ته ثابت پولينوم وايي، ځکه چې $12=12x^0$

ثابت پولينوم: هغه پولينوم دی چې درجه يې صفر وي.يا هغه پولينوم دی چې د ټولو متحولونو ضريبونه يې صفر وي.

لومړی مثال: د m او n قيمتونه پيدا کړئ، که $(2m-4)x^2+(5-n)x+13$ يو ثابت پولينوم وي.

حل: څرنگه چې دا يو ثابت پولينوم دی، نو د هر حد د متحول ضريب يې صفر دی.

نو:

$$5-n=0 \qquad 2m-4=0$$
$$n=5 \qquad 2m=4$$
$$m=2$$

صفري پولينوم (Zero Polynome): که د ثابت پولينوم ثابت حد صفر وي، داسې پولينوم ته صفري پولينوم وايي، لکه: $P(x)=0$ ، د صفري پولينوم درجه تعريف شوې نه ده.

دويم مثال: د a قيمت پيدا کړئ که $(b-4)x^3-(2c+6)x+(a-b+c)$ يو صفري پولينوم وي.

حل: په صفري پولينوم کې هر حد صفر وي، نو:

$a-b+c=0$	$2c+6=0$	$b-4=0$
$a-4-3=0$	$2c=-6$	$b=4$
$a=7$	$c=-3$	

دریم مثال: د $P(x)=x^2-1+3x^5$ ، $g(x)=2xy^2-x^2y^3$ او $h(x)=\sqrt{3}$ د پولینومونو درجې پيدا کړئ.

حل: د $P(x)$ د پولینوم درجه 5 د $g(x)$ د پولینوم درجه هم 5 ده، $(n=5)$ خو د $h(x)$ د پولینوم درجه صفر ده.

فعالیت

د هر پولینوم درجه څو ده؟ او هم د دې پولینومونو درجې نظر هر توري ته پيدا کړئ.

$x^2-x^3+2x+5x^5 \quad , \quad x-1 \quad , \quad 15 \quad , \quad 2m^3n^2-3mn^3-mn$

مکمل او ناقص پولینومونه: مکمل پولینوم هغه پولینوم دی چې له لوړ توان څخه تر ثابت عدده پورې ټول حدونه ولري $x^3+1+2x-x^2$, $x-1$ او 51 مکمل پولینومونه دي، خو x^2-1 و x^3+x+1 ناقص پولینومونه دي. موږ کولای شو دا ناقص پولینومونه د مکملو پولینومو په شکل ولیکو، لکه: $x^2-1=x^2+0.x-1$ او $x^3+x-1=x^3+0.x^2+x-1$.

منظم او غیر منظم پولینومونه: د $2x^3-3x^2+4x-1$ یا $-11+12x+13x^2-x^3$ پولینومونه منظم، خو د $3x^4-x+1+x^3+x^2$ پولینوم یو غیر منظم پولینوم دی. کولای شو چې یو غیر منظم پولینوم د منظم پولینوم په شکل ولیکو، لکه همدا پولینوم په دوه ډوله د منظم پولینوم په شکل لیکلای شو. $3x^4+x^3+x^2-x+1$ یا $1-x+x^2+x^3+3x^4$

نزولي او صعودي پولینومونه

:(Descending and ascending Polynomes)

که یو پولینوم د متحول له لوړ توان څخه ټیټ توان ته ترتیب شوی وي، نزولي او که له ټیټ توان څخه لوړ توان ته ترتیب شوی وي، صعودي ترتیب ورته وایي.

د مثال په ډول $x^4+3x^3+x^2+x+1$ په نزولي ترتیب او د $1+x+x^2+3x^2+x^4$ پولینوم په صعودي ترتیب لیکل شوی دی.

که یو پولینوم له دوو یا څو تورو څخه جوړ شوی وي، نو موږ کولای شو نظر هر توري ته یې په صعودي یا نزولي ډول ترتیب کړو، لکه: د $x^3y+3x^2y^2+2xy^3-5y^4$ پولینوم نظر x ته په نزولي ډول او نظر y ته په صعودي ډول ترتیب شوی دی.

فعالیت

دا پولینومونه په صعودي ډول ترتیب کړئ:

$$4x-5+6x^2+8x^3, 2y^2-4y+3-3y^4+y^3, 2a^3+5+4a^4+a^5+3a^2+a$$

څلورم مثال: د $P(y)=4xy^4-3x^3y^2+2x^2y^3+x^4+y^5$ پولینوم نظر y ته په صعودی ترتیب ولیکئ:

حل: $P(y)=x^4-3x^3y^2+2x^2y^3+4xy^4+y^5$

معادل پولینومونه: هغه پولینومونه دي چې یو متحول ولري او د مشابه حدونو ضریبونه یې سره مساوي وي.

پنځم مثال: که د x^2+3x+2 او $m(x-1)^2+n(x-1)+P$ پولینومونه سره معادل وي، د n, m او p قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$m(x^2-2x+1)+nx-n+p=x^2+3x+2$$

$$mx^2-2mx+m+nx-n+p=x^2+3x+2$$

$$mx^2+(-2m+n)x+(m-n+p)=1x^2+3x+2$$

په نتيجه کې:

$$
\begin{aligned}
m &= 1 \\
-2m + n &= 3 \qquad \Rightarrow n = 5 \\
m - n + p &= 2 \qquad \Rightarrow p = 6
\end{aligned}
$$

متجانس پولینوم(Hemogence Polynome): چې د ټولو حدونو توانونه يې سره مساوي وي، لکه د $2x^2 + y^2 - z^2$ يوه متجانسه افاده ده.

شپږم مثال: که د $3x^2y + 5x^m z - 7y^{n-3}z^2$ پولینوم متجانس وي، د m او n قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$
\begin{aligned}
m + 1 &= 2 + 1 \qquad & n - 3 + 2 &= m + 1 \\
m &= 2 & n - 1 &= m + 1 \\
& & n - 1 &= 2 + 1 \\
& & n &= 4
\end{aligned}
$$

که پولینوم له يوه توري څخه جوړ شوی وي، د دې توري لوړ توان د پولینوم درجه ده او که پولینوم له ډېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د لوړ توان لرونکي مونوم درجه د دې پولینوم درجه ده. هغه پولینومونه چې يو متحول ولري او د مشابه حدونو ضريبونه يې سره مساوي وي، د معادلو پولینومو په نامه يادېږي. او هغه پولینوم چې د ټولو حدونو توانونه يې سره مساوي وي، متجانس پولینوم دی.

پوښتني

1- په لاندې افادو کې مونوم، باینوم او ترینوم وښایاست او درجې يې پیدا کړئ.

$$\frac{1}{2}x^2y^5 \quad , \quad x^2 - y + 4 \quad , \quad x - 1$$

$$x - x^2 - x^3 \quad , \quad 12x \quad , \quad -12$$

2- په لاندې پولینومونو کې مکمل او ناقص پولینومونه وښایاست او بیا ناقص پولینومونه د مکملو پولنیومونو په شکل ولیکئ.

$$x \quad , \quad x+1 \quad , \quad x^2 - 1 \quad ,$$

$$2x^2 - 2x - 2 \quad , \quad 15 \quad , \quad x^3 + x - 1$$

3- لومړی د لاندې پولینومونو درجې پیدا کړئ او بیا يې په نزولي ډول ترتیب کړئ.

$$4x - 5 + 6x^2 + 8x^3$$

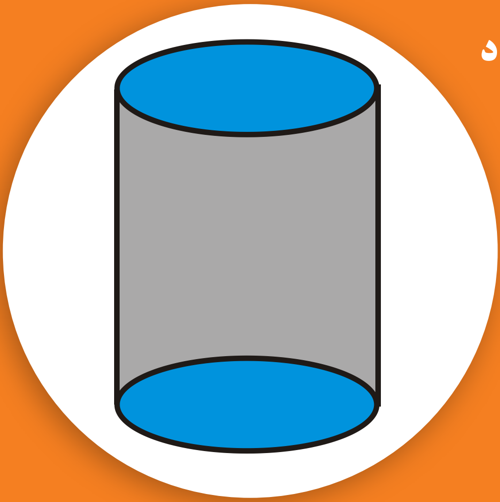
$$2y^2 - 4y + 3 - 3y^4 + y^3$$

$$1 - x^3 + x^2 + 2x^4 - x^5 + x$$

.4 که $P(x-1)^2 + n(x+3) + c = 2x^2 - x + 22$ وي د n, p او c قیمتونه پیدا کړئ.

.5 د b, a او c قیمتونه پیدا کړئ که $P(x) = 7x^4 - (2a-3)x^3 + 5x - (c-3)$ او $Q(x) = (3b+4)x^4 + 2x^3 + 5x$ معادل پولینومونه وی.

د پولینوم د قیمت او د پولینوم د ضریبونو د مجموعي پیدا کول:



ایا ویلای شئ د $x=-1$ لپاره د $P(x)=x^3-x^2-x-1$ د پولینوم قیمت $P(-1)=?$ څو دی؟ یا ?

که په یوه پولینوم کې د متحول پر ځای یو حقیقي عدد وضع کړو، یو حقیقي عدد په لاس راځي، چې دا حقیقي عدد ددې پولینوم قیمت دی. د $x=2$ لپاره د $P(x)=3x+2$ د پولینوم قیمت $P(2)=3\cdot 2+2=8$ دی.

لومړی مثال: د $P(x)=2x^2-7x+1$ د پولینوم $P(5)$ ، $P(-1)$ او $P(0)$ پیدا کړئ.

حل:

$$P(5)=2\cdot 5^2-7(5)+1=50-35+1=51-35=16$$
$$P(0)=1$$
$$P(-1)=2(-1)^2-7(-1)+1=2+7+1=10$$

فعالیت

د $P(x)=x^5-x^3-x-1$ پولینوم لپاره $P(0)$، $P(-1)$ او $P(1)$ پیدا کړئ.

دویم مثال: که $P(x)=16x^3-8x^2+\frac{3}{4}$ وي $P(-\frac{1}{4})$ پیدا کړئ.

حل:

$$P(-\frac{1}{4})=16(-\frac{1}{4})^3-8(-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}=16(-\frac{1}{64})-8(\frac{1}{16})+\frac{3}{4}$$
$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{-1-2+3}{4}=\frac{-3+3}{4}=\frac{0}{4}=0$$

دریم مثال: لکه څرنګه چې پوهېږئ د دایرې محیط (Circumference) د $C = 2\pi r$

له فورمول څخه لاس ته راځي چې که $\pi = \frac{22}{7}$ او r د دایرې شعاع وي.

که د یوې دایرې شعاع $r = 3\frac{1}{2}cm$ وي، ددې دایرې محیط (C) پیدا کړئ.

حل:

$$C = 2\pi r = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{7}{2} cm = 22cm$$

څلورم مثال: که b, a او c د مثلث د ضلعو اوږدوالی او p د مثلث د محیط نیمایي وي یعنې

$p = \frac{a+b+c}{2}$ ، د مثلث مساحت د دې فورمول په واسطه لاس ته راځي.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

که په یوه مثلث کې د ضلعو اوږدوالی $b = 12cm,\ a = 9cm$ او $c = 15cm$ وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+12+15}{2} = \frac{36}{2} = 18cm$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)}$$

$$= \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 9^2} = 2 \cdot 3 \cdot 9 = 54cm^2$$

فعالیت

د استوانې حجم د $V = \pi r^2 h$ له فورمول څخه لاس ته راځي، چې V د استوانې حجم، r د قاعدې شعاع او h د استوانې لوړوالی دی. که د یوې استوانې $r = 5cm$ او $h = 21cm$ وي، ددې استوانې حجم پیدا کړئ.

د پولینوم د ضریبونو د مجموعې پیدا کول:

که $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ وي، د ضریبونو مجموعه یې $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ ده.

پنځم مثال: د $p(x)=2x^3+5x^2-3x+1$ د پولینوم د ضریبونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل: $p(1)$ پیدا کوو: $P(1)=2\cdot1^3+5\cdot1^2-3\cdot1+1=2+5-3+1=5$

که پولینوم له څو تورو څخه جوړ شوی وي، د هر توري پر ځای یو (1) وضع کوو، لکه د $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$ د ضریبونو د مجموعې د پیداکولو لپاره د x او y پر ځای یو (1) وضع کوو:

$$1^4+4\cdot1^3\cdot1+6\cdot1^2\cdot1^2+4\cdot1\cdot1^3+1^4=1+4+6+4+1=16$$

شپږم مثال: د $(x-3y)^4$ د ضریبونو مجموعه پیدا کړئ.

حل:

$$(1-3\cdot1)^4=(1-3)^4=(-2)^4=16$$

اووم مثال: د $(7x^2-5x-1)^{600}(2x^3-1)^{17}(x+2)^4$ د ضریبونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل:

$$(7\cdot1^2-5\cdot1-1)^{600}(2\cdot1^3-1)^{17}(1+2)^4=(1)^{600}(1)^{17}(3)^4=81$$

اتم مثال: که ددې توپ شعاع 6cm وي ددې توپ حجم پیدا کړئ.

حل:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(6cm)^3=\frac{4}{3}\pi(216cm^3)=288\pi cm^3$$

د x د یوه راکړ شوي قیمت لپاره د $P(x)$ په پولینوم کې د x پر ځای راکړ شوی قیمت وضع کوو، د پولینوم قیمت په لاس راځي که په یوه پولینوم کې د توري (متحول) پر ځای یو وضع شي د پولینوم د ضریبونو مجموعه په لاس راځي.

پوښتنې

1. که $p(x)=-x^4-x^3-x^2-x-1$ وي $p(-1)$ او $p(\frac{1}{2})$ پیداکړئ.

2. د $p(x)=kx^3-x^2+3x-1$ په پولینوم کې که $p(2)=17$ وي د k قیمت پیداکړئ.

3. که د mx^2-2x+1 د ضریبونو مجموعه 18 وي د m قیمت پیداکړئ.

4. د $x=-\frac{1}{2}$ لپاره د $p(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ پولینوم قیمت پیداکړئ.

5. د $A=x^2-4x+4$ ، $B=-4x^3+10x^2$ ، $C=-x+3x^4-6x^3$ او $D=x^2+4x-4$ په پولینومونو کې د $x=4$ لپاره دکوم پولینوم قیمت له 100 څخه زیات دی؟

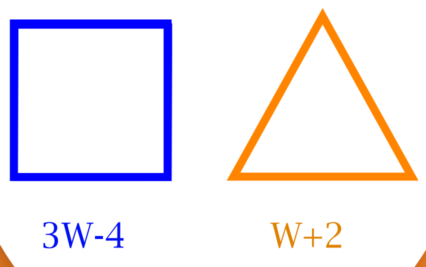
a) C　　b) D　　c) A　　d) B

6. په لاندې پولینومونو کې د $x=5$ لپاره دکوم پولینوم قیمت تر ټولو زیات دی؟

a) x^2-2x+6
b) $3x^4+6x+12$
c) $-x^3-40x-300$
d) x^5-120x^4+10

7. که $p(x)=x^4-x^3-x^2-x-1$ وي، $p(-1)$ ، $p(0)$ ، $p(\frac{1}{2})$ او $p(-\frac{1}{2})$ پیدا کړئ.

د پولينوم څلورګوني عمليې



که د مربع هره ضلعه $3w-4$ او د متساوي الاضلاع مثلث هره ضلع $w+2$ وي، يوه الجبري افاده وليکئ چې د دواړو شکلونو محيط ښکاره کړي.

که $A=8x^2-2x+3$ او $B=9x-5$ وي، $A+B$ او $A-B$ پيدا کړئ.

1 د جمعې عمليه: مشابه حدونه (Like terms) يو له بل سره جمع کيږي او هم مشابه حدونه يو له بله تفريق کيږي، دا دواړه عمليې په افقي او عمودي ډول سر ته رسيدلای شي.

لومړی مثال: که $A=-3cd^2-2cd+5$ او $B=9cd-7cd^2-5$ وي $A+B$ پيدا کړئ.

حل:

$$A+B=(-3cd^2-2cd+5)+(9cd-7cd^2-5)$$
$$=-3cd^2-2cd+5+9cd-7cd^2-5=-10cd^2+7cd$$

فعاليت

که $A=ab^2+3a$, $B=2ab^2+3a-2$ او $C=2a+4$ وي، د دې درې واړو پولينومونو د جمعې حاصل پيدا کړئ. $(A+B+C=?)$

دويم مثال: جمع يې کړئ که: $A=1+2x+3x^2$, $B=3x-5-2x^2$ او $C=x^2-5x+4$ او هم که $A=a^4b-2a^3b^2-3a^2b^3-4c-2b$, $B=a^3b^2-2a^2b^3+4b-4$ او $C=a^4b+a^3b^2-2c$ وي.

حل: لومړی پولينومونه په منظم ډول ليکو او بيا مشابه حدونه سره جمع کوو.

$$\begin{array}{r}
3x^2+2x+1\\
-2x^2+3x-5\\
+\quad x^2-5x+4\\
\hline
2x^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
a^4b & -2a^3b^2 & -3a^2b^3 & -4c & -2b\\
 & a^3b^2 & -2a^2b^3 & & +4b-4\\
a^4b & +a^3b^2 & & -2c & \\
\hline
2a^4b & & -5a^2b^3 & -6c & +2b-4
\end{array}$$

2- **د تفریق عملیه**: د تفریق په عملیه کې د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کوو. یا په بل عبارت د مفروق علامې تغیروو.

لومړی مثال: د B پولینوم د A له پولینوم څخه تفریق کړئ، که $A=-x^3+x^2+x-7$ او $B=-x^3+x^2+4x+3$ وی او هم که $A=2b^2-2c^2-2d^2-2e^2$ او $B=b^2-3c^2-3d^2-3e^2-f^2$ وي.

حل:

$$\begin{array}{rl}
A= & -x^3+x^2+x-7\\
-B= & \mp x^3\pm x^2\pm 4x\pm 3\\
\hline
A-B= & \qquad\qquad -3x-10
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
A= & 2b^2-2c^2-2d^2-2e^2\\
B= & -b^2\mp 3c^2\mp 3d^2\mp 3e^2\mp f^2\\
\hline
A-B= & b^2+c^2+d^2+e^2+f^2
\end{array}$$

یا

$$-x^3+x^2+x-7-(-x^3+x^2+4x+3)$$
$$=-x^3+x^2+x-7+x^3-x^2-4x-3$$
$$=-3x-10$$

باید په یاد ولرو چې د یو پولینوم د ساده کولو لپاره مشابه حدونه (Like terms) سره جمع یا تفریقوو. د مثال په ډول

a) $x^2+6x^4-8+9x^2+2x^4-6x^2=8x^4+4x^2-8$

b) $3x-x-1+3-2x=2$

c) $2x^2-x-x^2-x-2=x^2-2x-2$

d) $6xy-xy-x-y+2x=5xy+x-y$

e) $mn-4+mn-5=2mn-9$

فعاليت

په لاندې پولينومونو کې مشابه حدونه (Like terms) وښاياست.

$-t+5t^2-6t^2+6t-3$ $\qquad$ $9rs-2r^2s^2+4r^2s^2+3rs-7$

$3p-4p^2+6p+10p^2$ $\qquad$ $2fg+f^2g-fg^2-2fg+3f^2g+5fg^2$

دویم مثال: د $a^4+2a^3b-3ab^3+a^2b^2$ له پولینوم سره کوم پولینوم جمع کړو چې د جمعې حاصل يې $2a^4-3a^3b-3ab^3-b^4+a^2b^2$ شي؟

حل:

$$\begin{array}{l} 2a^4-3a^3b+a^2b^2-3ab^3-b^4 \\ \underline{-a^4\pm 2a^3b\pm a^2b^2\mp 3ab^3} \\ a^4-5a^3b \qquad\qquad -b^4 \end{array}$$

فعاليت

د $4x+6-2x^2$ او $3x^2-x^3-3$ پولینومو مجموعه د x^3+x^2-2x او $-2x^3+3x-7$ پولینومو له مجموعې څخه تفریق کړئ.

دریم مثال: تفریق يې کړئ.

$$\begin{array}{l} 202x^4y-303x^3y^2-101x^2y^3-404xy^4-505y^5 \\ \underline{-101x^4y\mp 303x^3y^2\pm 101x^2y^3\mp 404xy^4\pm 505\ y^5} \\ 101x^4y \qquad -202x^2y^3 \qquad -1010y^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3ax-5bx-8cx-11dx \\ \underline{\pm 3ax\mp 5bx\mp 8cx\mp 11dx} \\ \qquad 0 \end{array}$$

څلورم مثال: مشابه حدونه (Like terms) سره جمع او ساده يې کړئ.

$20-k-k-10-6-k^2=-k^2-2k+4$ $\qquad$ $8-10+x-7+x=2x-9$

$y^2-1+y^2-1=2y^2-2$ $\qquad$ $ab+a-b-a=ab-b$

$$4b^3-2b^2-2+b-4b^3+b^2+b^2-b+2=0$$
$$x^2-5x-2x^2+5=-x^2-5x+5$$

باید په یاد ولرو چې که Q, P او R پولینومونه وي نو

(د جمعې د عملیې تبدیلي خاصیت)...................... $P+Q=Q+P$

(د جمعې د عملیې اتحادي خاصیت)...... $P+(Q+R)=(P+Q)+R$

(د ضرب توزیعي خاصیت پر جمع باندې)......... $P(Q+R)=PQ+PR$

یا $(Q+R)P=QP+RP$

د پولینومو د جمعې او تفریق په عملیو کې مشابه حدونه سره جمع او یا یو له بله تفریق کېږي، د پولینومونو د جمعې په عملیه کې د تبدیلي او اتحادي خاصیتونه صدق کوي او د تفریق په عملیه کې د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي او د ضرب توزیعي قانون پر جمع باندې په پولینومو کې هم صدق کوي.

پوښتنې

1. د دوو پولینومو مجموعه x^2+2x-y^2 ده، که یو پولینوم $x^2-2xy+3$ وي، بل پولینوم پیدا کړئ.
2. د $3x^4+5x^3+2x^2-x+1$ پولینوم له $4x^4+2x^2+x^3-x+1$ پولینوم څخه تفریق کړئ.
3. د $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ پولینوم، له $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ پولینوم تفریق کړئ.
4. که $A=a^3+2a^2-6a+7$, $B=a^3+2a+5$ او $C=2a^3-a^2+2a-8$ وي ددې درې واړو پولینوم مجموعه پیدا کړئ. ($A+B+C=?$)
5. د $(ab^2+3a)+(2ab^2+3a-2)+(2a+4)$ افادې د جمعې حاصل مساوي دی، په:

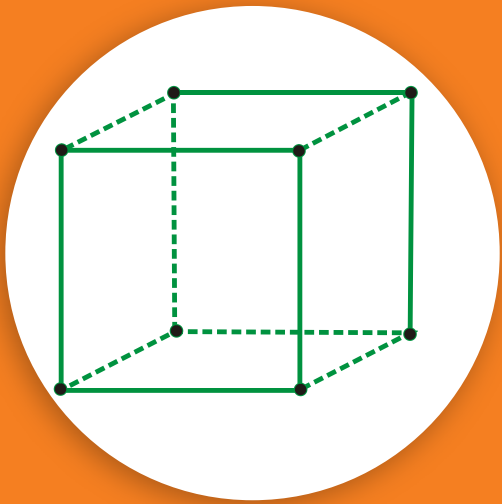
$a)-3ab^2+8a+2$ $\quad$ $b)3ab^2+8a$ $\quad$ $c)3ab^2+8a+2$

6. جمع یې کړئ.

$$(3a^2b^2+2a^2-5ab)+(-3ab+a^2-2)+(1+6ab)$$

7. که دوه الوتکې له یوه هوایي ډګر څخه یو د بل مخالف لورې ته والوزي، که 2 ساعتونه وروسته د یوې الوتکې واټن له هوایي ډګر څخه $x^2+2x+400$ میله وي، دبلې الوتکې واټن له هوایي ډګر څخه $3x^2-50x+100$ میله وي، ددې دواړو الوتکو تر منځ واټن (فاصله) پیدا کړئ.

د پولینومونو ضرب



د هغه مکعب حجم به څومره وي چې هره ضلعه یې $(x+1)$ سانتي متره وي؟

د مونوم ضرب په مونوم کې: که د $3r^2s^3$ مونوم د $5r^4s^5$ په مونوم کې ضرب کړو، د ضرب حاصل یې $(3r^2s^3)(5r^4s^5)=15r^6s^8$ کېږي.

فعالیت

د $(7x^2y)(-3x^4yz^8)$ ، $(-\frac{1}{3}x)(-x)$ او $(-30a^2b)(-5ab)$ سره ضرب کړئ.

لومړی مثال: د ضرب لاندې حاصلونه لاس ته راوړئ.

$$(-5y^a)(5y)=-25y^{a+1}$$

$$\frac{1}{4}(4)^2(\frac{1}{2})^2=(\frac{16}{4})(\frac{1}{4})=\frac{16}{16}=1$$

$$(-4s^2t^2)(2st^3)=-8s^3t^5$$

$$(-2a)^3(-2a)^2=-32a^5$$

$$-a^{2x}(-2a)=2a^{2x+1}$$

$$x(x^m)=x^{m+1}=x^{1+m}$$

$$(-\frac{1}{2}a)(-\frac{1}{2}a)=\frac{1}{4}a^2$$

$$(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)=\frac{125}{8}m^3n^3$$

$$(-0.1)(-0.1)(-0.1)=-0.001$$

$$(-a^b)(-a)=a^{b+1}=a^{1+b}$$

$$(-mn)(-mn^2)=m^2n^3$$

$$(0.01p)(0.01p)=0.0001p^2$$

$$(0.1x^2)(0.1x^2)=0.01x^4$$

د مونوم ضرب په پولینوم کې:

دویم مثال: د ضرب لاندې حاصلونه لاس ته راوړئ.

$$(2m^2n^3)(1-4mn^4)=2m^2n^3-8m^3n^7$$

$$x^3(x-x^2y^4)=x^4-x^5y^4$$

$$-3b(5b^4-8b+12)=-15b^5+24b^2-36b$$

$$-4s^2t^2(5s^2t+6st-2s^2t^2)=-20s^4t^3-24s^3t^3+8s^4t^4$$

فعالیت

د هغه مکعب حجم پیداکړئ چې اوږدوالی یې، $2x$، سور یې x او لوړوالی یې $x+2$ وي.

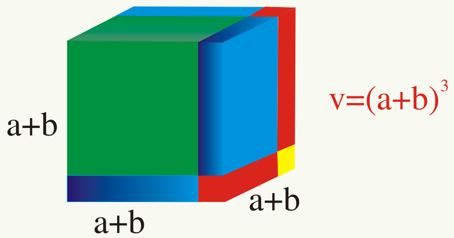
د پولینوم ضرب په پولینوم کې:

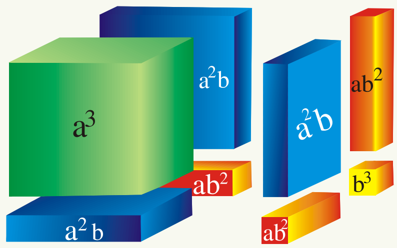
دریم مثال: **a:** د $(x-4)(x-5)$ د ضرب حاصل لاس ته راوړئ.

حل: $(x-4)(x-5)=x^2-5x-4x+20=x^2-9x+20$

	x	-4
x	x^2	$-4x$
-5	$-5x$	20

b) $(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$





c: که $P(x)=x^3+2x$ او $Q(x)=2x^2-x+1$ وي.

$$P(x)\cdot Q(x)=(x^3+2x)\cdot(2x^2-x+1)$$

$$=x^3\cdot 2x^2+x^3(-x)+x^3\cdot 1+2x\cdot 2x^2+2x(-x)+2x\cdot 1$$
$$=2x^5-x^4+x^3+4x^3-2x^2+2x=2x^5-x^4+5x^3-2x^2+2x$$

خلورم مثال: د a^3+b^3 او a^3-b^3 د مطابقتونو په مرسته یې ضرب کړئ.

حل:

a) $(x^m+y^n)(x^{2m}-x^my^n+y^{2n})=(x^m+y^n)[(x^m)^2-(x^m)(y^n)+(y^n)^2]$

$$=(x^m)^3+(y^n)^3=x^{3m}+y^{3n}$$

b) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)(x-\sqrt{xy}+y)$

$$=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y)$$

$$=[(\sqrt{x})^3-(\sqrt{y})^3][(\sqrt{x})^3+(\sqrt{y})^3]=[(\sqrt{x})^3]^2-[(\sqrt{y})^3]^2$$

$$=(x^{\frac{3}{2}})^2-(y^{\frac{3}{2}})^2=x^3-y^3$$

په یاد ولرئ چې که Q, P او R پولینومونه وي

(د ضرب د تبدیلي خاصیت) $P\cdot Q=Q\cdot P$

(د ضرب اتحادي خاصیت) $P\cdot(Q\cdot R)=(P\cdot Q)\cdot R$

فعالیت

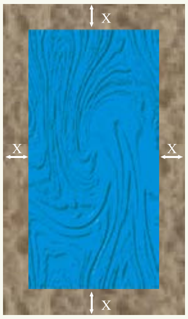
که $P(x)=2x^2-x-1$ او $Q(x)=4x-8$ وي، د ضرب د تبدیلي او اتحادي خاصیتونه په کې وښیئ.

لاندې جدول کې د هندسي شکلونو مساحت (Area) پیدا کړئ.

هندسي شکلونه	راکړ شوي اوږدوالي	مساحت
مستطیل	اوږدوالی یې $n+5$ ، اوسور یې $n-4$	n^2+n-20
مستطیل	اوږدوالی یې $3y+3$ ، اوسور یې $2y-1$	$6y^2+3y-3$
مثلث	قاعده یې $2b-5$ ، او لوړوالی یې b^2+2	$b^3-\frac{5}{2}b^2+2b-5$
مربع	هره ضلعه یې $m+13$، ده	$m^2+26m+169$
مربع	هره ضلعه یې $2g-4$ ده	$4g^2-16g+16$
دایره	شعاع یې $3c+2$ ده	$(9c^2+12c+4)\pi$

فعالیت

د $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.



پوښتنه: د یوه حوض څلورو خواو ته له سمنټو څخه پخه شوې لاره ده، که د دې لارې سور x متره وي او د حوض اوږدوالی او سور په ترتیب سره 50m او 25m وي د لارې مساحت معلوم کړئ.

حل: د لارې او حوض مجموعي مساحت

$$A=(25+2x)(50+2x)=1250+150x+4x^2$$

د حوض مساحت: $(25m)(50m)=1250m^2$

د لارې مساحت: $1250+150x+4x^2-1250=4x^2+150x$

د پولینومونو په ضرب کې کیدای شي، مونوم په مونوم کې، مونوم په پولینوم کې او یا پولینوم په پولینوم کې ضرب کړو او د ضرب په عملیه کې د تبدیلي، اتحادي او د ضرب توزیعي خاصیت په جمع باندې هم صدق کوي.

پوښتنې

1. ضرب یې کړئ: $(4x^2y^2z)(-5xy^3z^2)$, $-2xy(2x^2+2y^2-2)$

2. یو بکس چې لوړوالی یې x انچه، اوږدوالی یې $(x+1)$ او سور یې $2x-4$ انچه دی، که لوړوالی یې 3 انچه وي، د دې بکس حجم مساوي دی، په:

a) $40in^3$ b) $24in^3$ c) $48in^3$ d) $20in^3$

3. د $(\frac{a^p}{a^{-q}})^{p-q}(\frac{a^q}{a^{-r}})^{q-r}(\frac{a^r}{a^{-p}})^{r-p}$ د ضرب حاصل مساوي دی، په:

a) 1 b) -1 c) صفر d) درې واړه سم نه دي

د پولینوم ویش پر مونوم

ایا د

$$\frac{4m^2}{\frac{n}{n}} \quad , \quad \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}} \quad , \quad \frac{3mn^2}{-mn} \quad , \quad \frac{-x^2}{x}$$

$\frac{-n^a}{n^b}$ او د $\frac{14x^5}{2x^2}$ د ویش حاصل په لاس

راوړلای شئ؟(هیځ یو مخرج له صفر سره مساوي نه دي).

د مونوم ویش پر مونوم (Dividing monomial by monomial):

لومړی مثال: ویې ویشئ:

$$\frac{36a^5b^5c^7}{12a^4bc^3} = 3ab^4c^4 \quad , \quad \frac{6x^9y^3}{4x^6y^2} = \frac{3}{2}x^3y \quad , \quad \frac{-a^2}{-a^x} = a^{2-x} \quad , \quad \frac{-n^a}{n^b} = -n^{a-b}$$

د پولینوم ویش پر مونوم:

$$(x^4 + 5x^3 - 7x^2) \div x^2$$

$$\frac{x^4 + 5x^3 - 7x^2}{x^2} = \frac{x^4}{x^2} + \frac{5x^3}{x^2} - \frac{7x^2}{x^2} = x^2 + 5x - 7 \qquad (x^2 \neq 0)$$

دویم مثال: ویې ویشئ.

$$\frac{x^8y^2 - x^4y^6 - 4x^3y^9}{x^3y} = x^5y - xy^5 - 4y^8 \qquad (x^3y \neq 0)$$

$$\frac{r^6s^2 - r^5s - 4r^3s^4}{r^2s} = r^4s - r^3 - 4rs^3 \qquad (r^2s \neq 0)$$

فعالیت

د ویش حاصل په لاس راوړئ. (مخرجونه خلاف د صفر دي)

$$a: \frac{27x^6y^{13} - 18x^{12}y^8}{9x^3y^8} \qquad b: \frac{x^2}{y^2-1} \div \frac{x^2}{y-1} \qquad c: \frac{10b^3c^7}{6b^2c^7}$$

د پولینوم ویش پر پولینوم: څه وخت چې یو پولینوم پر بل پولینوم ویشو، مقسوم (Dividend) او مقسوم علیه (Divisor) دواړه باید په منظم ډول ترتیب شي.

دریم مثال: د $(13x+2x^4+12+3x^3-4x^2)\div(3+x^2-2x)$ د ویش حاصل په لاس راوړئ.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4+3x^3-4x^2+13x+12 & x^2-2x+3 \\ \cline{2-2}
-2x^4\mp 4x^3\pm 6x^2 & 2x^2+7x+4 \\ \cline{1-1}
7x^3-10x^2+13x & \\
-7x^3\mp 14x^2\pm 21x & \\ \cline{1-1}
4x^2-8x+12 & \\
-4x^2\mp 8x\pm 12 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

فعالیت

د $(a^5+b^5)\div(a+b)$ د ویش حاصل په لاس راوړئ.

څلورم مثال: د ویش حاصل یې پیداکړئ $(x^3-19x-30)\div(x+3)$.

حل:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3\qquad -19x-30 & x+3 \\ \cline{2-2}
-x^3\pm 3x^2 & x^2-3x-10 \\ \cline{1-1}
-3x^2-19x & \\
\mp 3x^2\mp 9x & \\ \cline{1-1}
-10x-30 & \\
\mp 10x\mp 30 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

پنځم مثال: د $4x^3-10x^2+12x+6$ له پولینوم سره کوم عدد جمع کړو چې په
($2x+1$) پوره وویشل شي؟

حل:

$$
\begin{array}{l|l}
4x^3-10x^2+12x+6 & 2x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{{}_-4x^3 \pm 2x^2} & 2x^2-6x+9 \\
\quad -12x^2+12x & \\
\quad \underline{\mp 12x^2 \mp 6x} & \\
\qquad\qquad 18x+6 & \\
\qquad\qquad \underline{{}_-18x \pm 9} & \\
\qquad\qquad\quad -3 &
\end{array}
$$

په نتیجه کې که له پورتني پولینوم سره 3 جمع کړو، نو په $(2x+1)$ پوره د ویشلو وړ دی.
باید پام مو وي، د ویش عملیې ته به تر هغو پورې دوام ورکوو چې پاتې(باقیمانده) صفر او یا د باقیمانده درجه د مقسوم علیه له درجې څخه د یو په ا ندازه کمه شي.

فعالیت

د دوو پولینومونو د ضرب حاصل $6y^3-11y^2+6y-1$ دی. که یو پولینوم $3y^2-4y+1$ وي، بل پولینوم پیدا کړئ.

شپږم مثال: د x په کوم قیمت $12x^4+3x^3-13x^2+x+5$ پولینوم پر $3x^2-1$ باندې پوره ویشل کېږي؟

حل:

$$
\begin{array}{l|l}
12x^4+3x^3-13x^2+x+5 & 3x^2-1 \\ \cline{2-2}
\underline{{}_-12x^4 \qquad \mp 4x^2} & 4x^2+x-3 \\
\qquad 3x^3-9x^2+\quad x & \\
\qquad \underline{{}_-3x^3 \qquad\quad \mp x} & \\
\qquad\quad -9x^2+2x+5 & \\
\qquad\quad \underline{\mp 9x^2 \qquad \pm 3} & \\
\qquad\qquad\qquad 2x+2 &
\end{array}
$$

$$2x+2=0$$
$$2x=-2$$
$$x=-1$$

نو د $x=-1$ لپاره پورتنی پولینوم پر $3x^2-1$ پوره ویشل کیږي.

د پولینومونو په ویش کې کیدای شي چې مونوم پر مونوم، پولینوم پر مونوم او یا پولینوم پر پولینوم وویشو. لومړی باید مقسوم او مقسوم علیه په نزولي ډول ترتیب شي او د ویش عملیې ته تر هغه پورې دوام ورکوو، تر څو د پاتې (باقي) درجه د مقسوم علیه له درجې څخه د یو په اندازه کمه شي.

پوښتنې

1. د P په کوم قیمت پولینوم $3x^3-7x^2-9x+p$ پر $x-13$ پوره ویشل کیږي؟

2. د ویش حاصل یې پیدا کړئ.

$$(a^3+b^3+c^3-3abc)\div(a+b+c)$$

$$(x^2+x-6)\div(x-2)$$

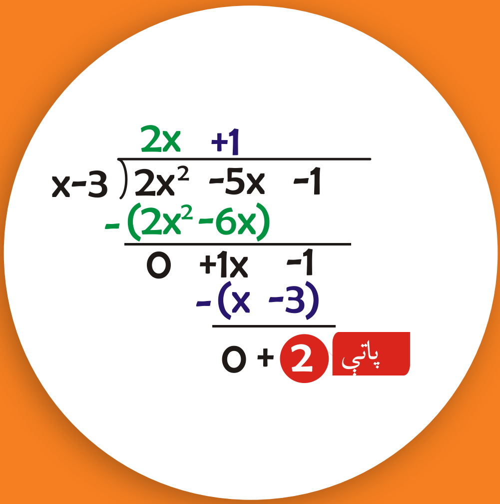
$$(x^5-y^5)\div(x-y)$$

$$\frac{j^5k^2-3j^8k^4}{2j^4k}$$

$$\frac{12x^5+9x^4+15x^2}{3x^3}$$

$$\frac{27a^6b^{13}-18a^{12}b^8}{9a^3b^8}$$

د باقیمانده قضیه
(Remainder Theorem)



ایا د ویش د عملیې د سرته رسولو پرته ویلای شئ چې که د x^3-6x^2-x-6 پولینوم په $x-4$ وویشو پاتې(باقي) به څو وي؟

که د $P(x)$ پولینوم په $x-a$ وویشل شي باقي (پاتې) د $P(a)$ سره مساوي ده. یا $R=P(a)$

لومړی مثال: که د $P(x)=2x^2+3x+4$ پولینوم پر $(x+3)$ وویشل شي نو باقي (Remainder) له $P(-3)$ سره مساوي ده.

حل: $P(-3)=2(-3)^2+3(-3)+4=13$

اوس یې ازمایو او د ویش عملیه سرته رسوو.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^2+3x+4 & x+3 \\ \cline{2-2}
-2x^2 \pm 6x & 2x-3 \\ \cline{1-1}
-3x+4 & \\
\mp 3x \mp 9 & \\ \cline{1-1}
13 &
\end{array}
$$

قضیه: که د $P(x)$ پولینوم په $(x-a)$ وویشو، نو باقي یا پاتې $R=P(a)$ ده.

ثبوت: که د $P(x)$ پولینوم په $(x-a)$، وویشو او خارج قسمت $Q(x)$ او پاتې R وي، نو لرو چې:

$$P(x)=Q(x)(x-a)+R \qquad x-a=0$$
$$P(a)=Q(a)(a-a)+R \qquad x=a$$
$$P(a)=R$$

دویم مثال: که د $2x^3-x^2-7$ پولینوم پر $(x-2)$ وویشل شي، پاتې به څو وي؟

حل:

$$P(2)=2(2)^3-(2)^2-7=16-4-7=5$$
$$R=5$$

فعالیت

د پورتنی قضیې په مرسته یې پاتې(باقیمانده) پیدا کړئ.

- که $x^3-x^2-226x+1410$ پر $(x+17)$ وویشل شي.
- که x^3-2x^2+3x+5 پر $(x-4)$ وویشل شي.
- که $x^3+18x^2+164x+199$ پر $(x+8)$ وویشل شي.

دریم مثال: که د $5x^2+x-9$ پولینوم پر $(x+\frac{1}{2})$ وویشل شي، د ویش د عملیې له سرته رسولو څخه پرته وواياست چې څو پاتې کیږي؟

حل:

$$x+\frac{1}{2}=0$$
$$x=-\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2})=5(-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}-9$$
$$=5(\frac{1}{4})-\frac{1}{2}-9=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}-9=\frac{5-2-36}{4}=-\frac{33}{4}$$

څلورم مثال: که د $P(y)=10y^3+7y^2-y-11$ پولینوم پر $(2y+1)$ وویشو، د ویش د عملیې له سرته رسولو وروسته یې پاتې(باقي) پیدا کړئ.

حل:

$$2y+1=0\Rightarrow 2y=-1$$
$$\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2})=10(-\frac{1}{2})^3+7(-\frac{1}{2})^2-(-\frac{1}{2})-11$$
$$P(-\frac{1}{2})=10(-\frac{1}{8})+7(\frac{1}{4})+\frac{1}{2}-11$$
$$=-\frac{5}{4}+\frac{7}{4}+\frac{1}{2}-11=\frac{-5+7+2-44}{4}=\frac{-40}{4}=-10$$
$$R=-10$$

فعاليت

د 4 مثال په پوښتنه کې د ويش عمليه سرته ورسوئ او باقي يې په لاس راوړئ.

پنځم مثال: که د $4x^4+12x^3-13x^2-33x+18$ پولينوم پر $(x+4)$ وويشل شي، باقي يې پيدا کړئ.

حل:

$$P(-4)=4(-4)^4+12(-4)^3-13(-4)^2-33(-4)+18$$
$$=1024-768-208+132+18=1174-976=198$$

اوس د ويش عمليه سرته رسوو.

$$\begin{array}{l|l}
4x^4+12x^3-13x^2-33x+18 & x+4 \\ \hline
\underline{-4x^4 \pm 16x^3} & 4x^3-4x^2+3x-45 \\
\quad -4x^3-13x^2 & \\
\quad \underline{\mp 4x^3 \mp 16x^2} & \\
\qquad 3x^2-33x & \\
\qquad \underline{\pm 3x^2 \pm 12x} & \\
\qquad\quad -45x+18 & \\
\qquad\quad \underline{\mp 45x \mp 180} & \\
\qquad\qquad 198 &
\end{array}$$

که د $P(x)$ پولينوم پر $P(x-a)$ وويشل شي، د ويش د عمليې د سر ته رسوولو پرته يې د باقي مانده قضيې (Remainder Theorem) په مرسته باقي پيدا کولای شو چې باقي مانده (R) له $P(a)$ سره مساوي ده.

پوښتني

1. د باقيمانده قضيې (Remainder theorem) په مرسته يې باقي (پاتې) پيدا کړئ.

$$(5x^3 - x^2 + 4x + 1) \div (x-3) \quad , \quad (6p^3 + 2p^2 - p + 20) \div (p - \frac{1}{2})$$

$$(6x^2 + 15) \div (4x + 9) \quad , \quad (4y^2 - y - 6) \div (y - 1.6)$$

2. د باقيمانده قضيې په مرسته وواياست چې د k په کوم قيمت د $5x^3 - k^2x^2 + 3kx - 6$ پولينوم پر $x+2$ وويشل شي، تر څو -44 باقي شي؟

3. د k په کوم قيمت که د $2k^2y^4 - ky^2 + 1$ پولينوم، پر $(y - \frac{1}{2})$ وويشل شي ترڅو 2 باقي شي؟

4. که چيرې $m^2x^4 - 10x^2 + 2$ پولينوم پر $(x-1)$ وويشو او باقي 17 وی، د m قيمت به څو وي؟

د فکټور قضيه
(The Factor Theorem)

$(x^5+1)\div(x+1)$

$P(-1)=[(-1)^5+1]$
$=-1+1=0$

ايا $(x-1)$ د $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ د پولينوم يو فکټور دی؟

که د $P(x)$ پولينوم پر $(x-a)$ وويشل شي او $P(a)=0$ شي، نو $x-a$ ددې پولينوم يو فکټور دی.

ثبوت: د باقيمانده قضيې په اساس $R=P(a)$ دی، نو که د $P(x)$ پولينوم پر $(x-a)$ وويشل شي او د ويش حاصل(خارج قسمت) يې $Q(x)$ وي، نو لرو چې: $\mathrm{P(x)=Q(x)(x-a)+R}$
که $R=0$ وي، نو: $\mathrm{P(x)=Q(x)(x-a)}$

ليدل کيږي چې $(x-a)$ د $P(x)$ پولينوم يو فکټور دی. او يا که $(x-a)$ د $P(x)$ د پولينوم يو فکټور وي، نو $P(a)=0$ دی.

لومړی مثال: وښاياست چې $(x-2)$ د $\mathrm{P(x)=x^3+3x^2+4x-28}$ د پولينوم يو فکټور دی.

حل

$\mathrm{x-2=0}$ $\qquad$ $\mathrm{P(x)=x^3+3x^2+4x-28}$

$\mathrm{x=2}$ $\qquad$ $\mathrm{P(2)=2^3+3(2)^2+4\cdot 2-28=8+3(4)+8-28=0}$

څرنګه چې R يا $P(2)=0$ دی، نو $(x-2)$ د $P(x)$ د پولينوم يو فکټور دی.

فعاليت

د ويش د عمليې له سرته رسولو پرته، د فکټور د قضيې په مرسته وښاياست چې $x-1$ د $\mathrm{P(x)=2x^3-13x^2+26x-15}$ پولينوم يو فکټور دی.

دويم مثال: د فکټور د قضيې په مرسته وښاياست چې $(x-2)$ د $\mathrm{P(x)=x^5-32}$ پولينوم يو فکټور دی.

حل:

$$P(x) = x^5 - 32$$
$$P(2) = 2^5 - 32 = 32 - 32 = 0$$

څرنگه چې $R = P(2) = 0$ ده، نو $(x-2)$ د $x^5 - 32$ د پولینوم یو فکتور دی.

دریم مثال: وښایاست چې $(x+1)$ د $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7x + 4$ پولینوم یو فکتور دی.

حل: $P(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 + 7(-1) + 4 = -2 + 5 - 7 + 4 = 0$

څرنگه چې R یا $P(-1)$ له صفر سره مساوي دی، نو $(x-1)$ د دې پولینوم یو فکتور دی.

څلورم مثال: د k په کوم قیمت، $(x-1)$ د $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - x - 2k$ پولینوم یو فکتور دی؟

حل:

$$P(1) = 2(1)^4 - 3(1)^3 - 1 - 2k = 2 - 3 - 1 - 2k = -2 - 2k$$
$$-2 - 2k = 0$$
$$-2k = 2$$
$$k = -1$$

د $k = -1$ لپاره باقیمانده صفر کېږي، نو $x-1$ د دې پولینوم یو فکتور دی.

فعالیت

د فکتور د قضیې په مرسته وښایاست چې ایا د کیڼې خوا دوه حدې (باینومونه) د اړوندو پولینومونو فکتورونه دي او که نه؟

$(y+5) : (y^3 + 125)$ ، $(x-6) : (x^6 - 36x^3 + 1296)$

$(x - \frac{1}{2}) : (x^3 - \frac{1}{8})$ ، $(x + \frac{1}{2}) : (20x^3 + 7x + 6)$

$(x+2) : (x^5 + 32)$ ، $(x - 0.1) : (10x^3 - 11x^2 + 1)$

د فکتور د قضیې معکوس (Converse of Factor Theorem):

که $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکتور وي، نو $P(a) = 0$ دی او د a عدد $P(x) = 0$ پولینومي معادلې یو جذر (Root) دی.

لومړی مثال: که $(x-2)$ د $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ پولینوم یو فکتور وي، نو

وښاياست چې $P(2)=0$ دی. او 2 د $x^3-6x^2+11x-6=0$ د معادلې يو جذر دی.

حل: که 2 د $x^3-6x^2+11x-6=0$ د معادلې يو جذر وي، نو $(x-2)$ ددې پولينوم يو فکتور دی $P(2)=0$ دی.

$$P(2)=2^3-6(2)^2+11(2)-6=8-24+22-6=0$$

دويم مثال: که -2 د $x^3+4x^2+kx+8=0$ د معادلې يو جذر وي، د k قيمت پيدا کړئ.

حل:

$$(-2)^3+4(-2)^2+k(-2)+8=0$$
$$-8+16+k(-2)+8=0$$
$$-2k=-8+8-16$$
$$k=8$$

دريم مثال: وښاياست چې 3 د $x^3-6x^2+5x+12=0$ د پولينومي معادلې يو جذر دی.

حل:

$$(3)^3-6(3)^2+5(3)+12=0$$
$$27-54+15+12=0$$
$$54-54=0$$
$$0=0$$

نو ليدل کيږي چې 3 ددې پولينومي معادلې يو جذر دی.

فعاليت

ښکاره کړئ چې 2 د $x^3-4x^2+5x-2=0$ د معادلې يوجذر دی.

څلورم مثال: د k د کوم قيمت لپاره 3 د $2x^4-6x^3-7x^2+kx-15=0$ دمعادلې يو جذر دی؟

حل:

$$2(3)^4-6(3)^3-7(3)^2+3k-15=2(81)-6(27)-7(9)+3k-15=0$$
$$162-162-63+3k-15=0$$
$$3k=15+63+162-162=78$$
$$3k=78$$
$$k=26$$

که (x−a) د $P(x)$ پولینوم یو فکتور وي، نو $P(a)=0$ دی او که د $P(x)$ په پولینوم کې $P(a)=0$ شي نو $(x-a)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکتور دی.

پوښتنې

1 – د k د کوم قیمت لپاره $(x-2)$ د $P(x)=2x^4-x^3+kx^2+kx-12$ پولینوم یو فکتور دی؟

2 – آیا $(x+3)$ د $P(x)=x^5-x^3+27x^2-27$ پولینوم یو فکتور دی؟

3 – د فکتور د قضیې په مرسته وښایاست چې $(x+7)$ د $P(x)=x^3+8x^2+8x+7$ د پولینوم یو فکتور دی، که نه؟

4 – د ویش د عملیې د سرته رسولو پرته وښایاست چې ایا $(y-7)$ د $P(y)=y^4+2y^3-6y^2-14y-7$ د پولینوم یو فکتور دی که نه؟

5 - وښایاست چې ایا $(m+\frac{1}{2})$ د $P(x)=2m^2+4m-2$ پولینوم یو فکتور دی که نه؟

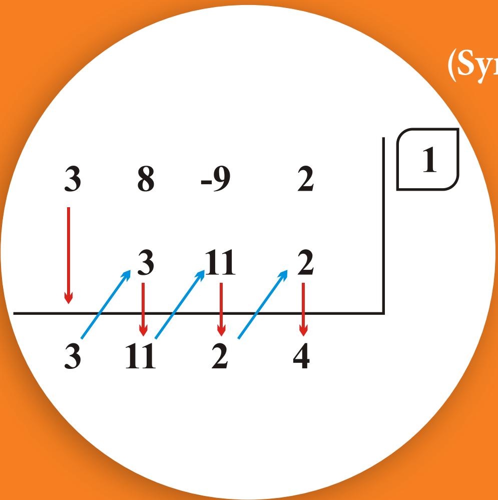
6- د $x^3+x^2-10x+8$ پولینوم د فکتور د قضیې په مرسته تجزیه کړئ.

7– که $(x-1)$ او $(x+1)$ د $P(x)=x^3+ax^2+bx+2$ د پولینوم فکتورونه وي، د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

8– د k، د کوم قیمت لپاره $(x-5)$ د $Q(x)=x^3-5x^2-16x+k$ پولینوم یو فکتور دی؟

9 – د k د کوم قیمت لپاره (-1) د $x^3-9x^2+14x+k=0$ د پولینومي معادلې یو جذر دی؟

ترکیبي ویش
(Synthetic Division)



1

که د $P(x)=2x+3x^3-x^2-5$ پولینوم پر $(x-2)$ وویشل شي؟ ایا د ویش عملیې له سرته رسولو پرته، د ویش حاصل او باقي پیداکولای شئ.

د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$، د ویشلو لپاره ترکیبي ویش (Horner's Method) یوه لنډه طریقه ده چې په عمومي ډول د دې هدفونو لپاره ترې کار اخیستل کیږي.

1 – د x د مختلفو قیمتونو لپاره د $P(x)$ پولینوم د قیمت پیداکول.

2 – د $P(x)=0$ معادلې د ناطق جذر د پیداکولو لپاره.

3 – د الجبري افادو د تجزیې لپاره.

لومړی مثال: که د $P(x)=4x^4+12x^3-13x^2-33x+18$ پولینوم پر $(x+4)$ باندې وویشو د ویش د عملیې له سرته رسولو پرته د ترکیبي ویش (تقسیم) په مرسته یې د ویش حاصل (Quotient) او باقیمانده (Remainder) پیداکړئ.

حل:

$x+4=0$

$x=-4$

-4	18	-33	-13	12	4	لومړی کرښه
	180	-12	16	-16		دویمه کرښه
	198	-45	3	-4	4	دریمه کرښه

چې د ویش حاصل (خارج قسمت) یې $4x^3-4x^2+3x-45$ او پاتې یا باقي مانده یې 198 ده، په دې معنا چې: $P(x)=(x+4)(4x^3-4x^2+3x-45)+198$

پورتنۍ عملیه په لاندې پړاوونو کې ښودلای شو.

د لومړۍ کرښې عددونه د مقسوم ضریبونه دي چې نظر د x توان ته په نزولي ډول ترتیب شوي دي.

1. د 4 عدد له لومړۍ کرښې څخه دریمې کرښې ته راښکته شوی دی.

2. 4 په (4−) کې ضرب شوی دی چې (16−) کېږي او (16−) د 12 د عدد لاندې په دویمه کرښه کې لیکل شوی دی.
3. د 12 او (16−) د جمعې حاصل، چې (4−) کېږي، په دریمه کرښه کې لیکو.
4. د(4−) عدد په (4−) کې ضربو چې 16 کېږي او د 13 − لاندې یې په دویمه کرښه کې لیکو.
5.د16 او (13−) د جمعې حاصل، چې 3 کېږي، په دریمه کرښه کې لیکل شوی دی.
6. د 3 او (4−)د ضرب حاصل، چې (12−) کېږي، د 33- لاندې په دویمه کرښه کې لیکل شوی دی.
7. د(33−) او (12−) د جمعې حاصل، چې 45 − کېږي، په دریمه کرښه کې لیکو.
8. د(45−) او (4−) د ضرب حاصل، چې 180 کېږي، تر 18 لاندې په دویمه کرښه لیکل شوی دی.
9. د180 او 18 د جمعې حاصل 198 په دریمه کرښه کې دی، 198باقیمانده ده او $4x^3-4x^2+3x-45$ د ویش حاصل دی.

$$R=198 \text{ او } Q(x)=4x^3-4x^2+3x-45$$
$$P(x)=(4x^3-4x^2+3x-45)(x+4)+198$$

پاتی + (د ویش حاصل) x (مقسوم علیه)= مقسوم

فعالیت

د ویش عملیې د سرته رسولو په مرسته د پورتنی پوښتنې د ویش حاصل او باقیمانده پیدا کړئ.

دویم مثال: د ترکیبي ویش او د ویش د عملیې د سرته رسولو په مرسته یې د ویش حاصل او باقیمانده پیدا کړئ.

$$(4x^4-5x^2+2x-3)\div(x-2)$$

په یاد ولرئ کوم حدونه چې موجود نه وي، د هغوی د ضریبونو پر ځای صفر لیکو یا په بل عبارت پولینوم د مکمل پولینوم په شکل په نزولي ډول ترتیبوو.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4 & 0 & -5 & 2 & -3 & 2 \\ \cline{6-6} & 8 & 16 & 22 & 48 & \\ \hline 4 & 8 & 11 & 24 & 45 & \end{array}$$

اوس د وېش عملیه سرته رسوو:

$$\begin{array}{l|l}
4x^4 \qquad -5x^2+2x-3 & x-2 \\ \cline{2-2}
-4x^4 \mp 8x^3 & 4x^3+8x^2+11x+24 \\ \cline{1-1}
\quad 8x^3 - 5x^2 & \\
\quad -8x^3 \mp 16x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad 11x^2 + 2x & \\
\qquad -11x^2 \mp 22x & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 24x-3 & \\
\qquad\quad -24x \mp 48 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 45 &
\end{array}$$

د وېش حاصل $4x^3+8x^2+11x+24$

او باقي (45) ده.

درېیم مثال: $(x^5-x^3+27x^2-28)\div(x+3)$ د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او پاتې(باقي) پیدا کړئ.

حل: $x^5-x^3+27x^2-28 = x^5-0\cdot x^4-x^3+27x^2+0\cdot x-28$

$$x+3=0$$
$$x=-3$$

$$\begin{array}{cccccc|c}
1 & 0 & -1 & 27 & 0 & -28 & -3 \\ \cline{7-7}
 & -3 & 9 & -24 & -9 & 27 & \\ \hline
1 & -3 & 8 & 3 & -9 & -1 &
\end{array}$$

د وېش حاصل(خارج قسمت) یې $x^4-3x^3+8x^2+3x-9$ او پاتې(باقیمانده) عبارت له (-1) څخه ده.

څلورم مثال: د $(2t^3-7t^2-2t+14)\div(2t-3)$ د وېش حاصل(خارج قسمت) او پاتې (باقي) پیدا کړئ.

حل:

$$\frac{2t-3}{2} = t-\frac{3}{2}$$

$$t-\frac{3}{2}=0$$

$$t=\frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
2 & -7 & -2 & 14 & \frac{3}{2} \\ \cline{5-5}
 & 3 & -6 & -12 & \\ \hline
2 & -4 & -8 & 2 &
\end{array}$$

نو $2t^2-4t-8$ د ویش حاصل نه دی، بلکې د ویش حاصل (t^2-2t-4) دی. (مقسوم او مقسوم علیه دواړه په 2 ویشل شوي دي).

پنځم مثال: د ترکیبي ویش (Synthetic division) په مرسته د ویش حاصل (quotient) او پاتی (remainder) پیداکړئ.

$$(4V^3-2V^2+5)\div(V-5)$$

$$\begin{array}{cccc|l} 4 & -2 & 0 & 5 & 5 \\ & 20 & 90 & 450 & \\ \hline 4 & 18 & 90 & 455 & \end{array}$$

نو $Q(x)=4v^2+18v+90$ او $R=455$ ده.

که د P(x) پولینوم پر (x-a) باندې ویشو، نو مقسوم د مکمل نزولي پولینوم په شکل ترتیبوو او د ترکیبي ویش په مرسته یې د ویش د عملیې له سرته رسولو پرته د ویش حاصل (خارج قسمت) او باقي مانده لاس ته راوړلای شو، چې د ویش د حاصل درجه د یوه په اندازه د مقسوم علیه له درجې څخه کمه ده.

پوښتنې

1- د ترکیبي ویش په مرسته یې د ویش حاصل او باقیمانده پیداکړئ.

$(2x^3-7x^2-2x+12)\div(2x-3)$ ، $(10x^2+2x+1)\div(x+1)$

$(6x^2+15)\div(4x+9)$ ، $(5x^3-3x+7)\div(x+4)$

$(6p^3+2p^2-p+20)\div(p-\frac{1}{2})$

2- د ترکیبي ویش په مرسته یې پاتې (باقیمانده) او د ویش حاصل پیداکړئ.

$(y^5-17y^3-9)\div(y-3)$

$(4x^3-2x^2+5)\div(x-5)$

$(x^3+8x^2+8x+7)\div(x+7)$

د ترکيبي ويش په مرسته د پولينوم د فکتور، او د پولينوم د قيمت پيدا کول

ايا د ترکيبي ويش په مرسته ويلای شئ چې $(x+3)$ د $x^3+9x^2+27x+27$ د پولينوم يو فکتور دی؟

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & +2 & -5 & -6 & \boxed{-1} \\ & -1 & -1 & +6 & \\ \hline 1 & 1 & -6 & 0 & \end{array}$$

لومړی مثال: د ترکيبي ويش په مرسته وښاياست چې $(x-1)$ د $P(x)=2x^4-x^3-x^2+x-1$ د پولينوم يو فکتور دی.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ & 2 & 1 & 0 & 1 & \\ \hline 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

خرنگه چې $R=0$ دی، نو $(x-1)$ ددې پولينوم يو فکتور دی. يا دا چې:

$$2x^4-x^3-x^2+x-1=(x-1)(2x^3+x^2+1)$$

يا د باقيمانده قضيې په مرسته:

$$P(1)=2\cdot1^4-1^3-1^2+1-1=2-1-1+1-1=0$$

دويم مثال: ايا $(x+10)$ د x^3+3x^2-150 پولينوم يو فکتور دی او که نه؟

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 3 & 0 & -150 & -10 \\ & -10 & 70 & -700 & \\ \hline 1 & -7 & 70 & -850 & \end{array}$$

خرنگه چې $R=-850$ دی $(R\neq 0)$، نو $(x+10)$ د x^3+3x^2-150 د پولينوم فکتور نه دی.

دريم مثال: که $P(x)=3x^3-12x^2+25+5x$ وی، د $x=2$ لپاره د ترکيبي ويش په

مرسته ددې پولینوم قیمت پیدا کړئ.

حل: لومړی د پولینوم په نزولي ډول ترتیبوو.

$$P(x)=3x^3-12x^2+5x+25$$

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & -12 & 5 & 25 & 2 \\ & 6 & -12 & -14 & \\ \hline 3 & -6 & -7 & 11 & \end{array}$$

نو: $P(2)=11$ دی.

فعالیت

د ترکیبي ویش په مرسته د $P(x)=x^3-x^2+10x+5$ د پولینوم قیمت د $x=1$ او $x=3$ لپاره پیدا کړئ.

څلورم مثال: د ترکیبي ویش په مرسته وښایاست چې $(r-4)$ د r^4-256 یو فکتور دی.

$$r^4-256=r^4+0\cdot r^3+0\cdot r^2+0\cdot r-256$$

حل:

$$r-4=0$$
$$r=4$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -256 & 4 \\ & 4 & 16 & 64 & 256 & \\ \hline 1 & 4 & 16 & 64 & 0 & \end{array}$$

$$Q(x)=r^3+4r^2+16r+64$$
$$R=0$$

نو $(r-4)$ د r^4-256 یو فکتور دی.

د ترکیبي ویش په مرسته د یوې معادلې د جذرونو پیدا کول:

پنځم مثال: که د (1) عدد د $x^3+4x^2+x-6=0$ د معادلې یو جذر وي، دترکیبي ویش

په مرسته يې نور جذرونه پيدا کړئ.

حل:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 1 & -6 & 1 \\ & 1 & 5 & 6 & \\ \hline 1 & 5 & 6 & 0 & \end{array}$$

نو د ويش حاصل يې x^2+5x+6 دی.

$$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x^2+5x+6)$$
$$x^2+5x+6=0$$
$$(x+3)(x+2)=0$$
$$x=-3 \qquad x=-2$$

د دې معادلې دوه نور جذرونه -2 او -3 دي.

د ترکيبي ويش په مرسته د پولينوم فکتور، د پولينوم قيمت او د پولينومي معادلې جذر پيدا کولای شو، که چيرې د $P(x)$ پولينوم په $(x-a)$ وويشو او $(R=0)$ وي، نو $(x-a)$ د دې پولينوم يو فکتور دی، او د (a) عدد د $P(x)=0$ پولينومي معادلې يو جذر دی.

پوښتنې

1- د ترکيبي ويش په مرسته وښاياست چې $(x+\frac{1}{2})$ د $20x^3+7x+6$ پولينوم يوفکتور دی او $(x+1)$ د x^4-2x^2+x+2 پولينوم يو فکتور دی.

2- ايا $(x-0,1)$ د $10x^3-11x^2+1$ د پولينوم يو فکتور دی؟ ولې؟

3- د ترکيبي ويش په مرسته د $6-y-6y^2+y^3$ پولينوم قيمت د $y=6$ لپاره پيدا کړئ.

4- که (1) د $x^3+x^2-10x+8=0$ معادلې يو جذر وي، د ترکيبي ويش په مرسته يې نور جذرونه پيدا کړئ.

5- که د (-2) عدد د $x^3+4x^2+kx+8=0$ معادلې يو جذر وي، د ترکيبي ويش په مرسته د k قيمت پيدا کړئ؟

د څپرکي لنډيز

- الجبري افادې په درې ډوله دي(ناطقه الجبري افاده، غیر ناطقه الجبري افاده، پولینومي الجبري افاده).
- هغه حدونه چې متحولونه او درجې يې سره مساوي وي، مشابه حدونه (Like terms) نوميږي، لکه $3x^2$ او $5x^2$ يا $4x^2y^2$ او $-6x^2y^2$ مشابه حدونه دي.
- پولینوم هغه يو يا څو حده الجبري افاده ده چې د حروفو توانونه يې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.
- د يوه پولینوم درجه چې له يوه توري (متحول) څخه جوړه شوی وي، د هغه توري له لوړ توان څخه عبارت ده او که له يوه څخه د زياتو تورو څخه جوړ شوی وي، د زيات توان لرونکي مونوم درجه ددې پولینوم درجه ده.
- د يوه حد عددي فکټور (Numerical Factor) ته ضريب وايي، لکه په $3x^2$ کې 3 د x^2 ضريب دی.
- ټول ثابت عددونه پولینومونه دي چې ثابت پولینومونه نوميږي او درجه يې صفر ده، د صفري پولینوم درجه تعریف شوې نه ده.
- هغه پولینومونه چې يو متحول ولري او د مشابه حدونو ضريبونه يې سره مساوي وي، د معادلو پولینومونو په نوم يادیږي.
- د متحول په راکړ شوي قيمت کې د يوه پولینوم قيمت هغه عدد دی چې په پولینوم کې د متحول د راکړل شوي قيمت له وضع کېدو څخه په لاس راځي.
- هغه پولینومونه چې د متحول له لوړ توان څخه تر ثابت عدده پورې، ټول حدونه په کې موجود وي، مکمل پولینوم او که يو يا څو حدونه، ونه لري، د ناقص پولینوم په نوم يادېږي.
- که د يوه پولینوم متحول له ټيټ توان څخه تر لوړ توان پورې ترتيب شي، منظم صعودي او که له لوړ توان څخه تر ټيټ توان پورې ترتيب شي، منظم نزولي پولینوم نوميږي.
- د پولینوم د جمعې په عمليه کې مشابه حدونه (Like terms) يو له بل سره جمع کيږي، د

تفریق په عملیه کې د مفروق علامې ته تغیر ورکوو او نوره عملیه د جمعې د عملیې په شان سرته رسول کیږي (د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي.

- د پولینومونو د جمعې او ضرب په عملیو کې د تبدیلي او اتحادي خاصیتونه او هم د ضرب توزیعي خاصیت پر جمع باندې صدق کوي.
- د ضرب په عملیه کې کولای شو، مونوم په مونوم کې، مونوم په پولینوم کې او یا پولینوم په پولینوم کې ضرب کړو.
- په همدې ډول کولای شو، د ویش په عملیه کې مونوم پر مونوم، پولینوم پر مونوم یا پولینوم پر پولینوم باندې وویشو.
- که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ وویشو د باقیمانده قضیې په اساس پاتې(باقې) له $P(a)$ سره مساوي ده.
- که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ وویشو او باقي صفر شي، نو $(x-a)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکتور دی.
- د فکتور د معکوسې قضیې په اساس که $(x-c)$ د $M(x)$ د پولینوم یو فکتور وي، نو $P(c)=0$ او د c عدد د $M(x)=0$ د پولینومي معادلې یو جذر دی.
- د ترکیبي ویش په مرسته کولای شو چې که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ وویشو، د ویش حاصل او باقي لاس ته راوړو او هم د ترکیبي ویش په مرسته د متحول په راکړ شوي قیمت کې د $P(x)$ د پولینوم قیمت پیدا کولای شو.
- د ترکیبي ویش په مرسته د پولینومي معادلې $P(x)=0$ جذرونه پیدا کولای شو.
- د باقیمانده قضیې په مرسته الجبري افاده هم تجزیه کولای شو.

د خپرکي پوښتنې:

1– د k قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ؛ چې:

a: که $(x+5)$ د $P(x)=x^3+kx+125$ پولینوم یو فکتور وي.

b: که $(x-1)$ د $Q(x)=2x^4-3x^3-x-2k$ د پولینوم یو فکتور وي.

c: که د $P(x)=x^3+2x^2-3kx-10$ پولینوم پر $(x+3)$ تقسیم شي او پاتې 8 وي

2 – د ترکیبي ویش په مرسته یې د ویش حاصلونه (Quotients) او پاتې یا (Remainders) پیدا کړئ.

$$(5x^4-6x^2+3x-4)\div(x+4) \quad , \quad (x^5+4x^4+x^2-3x-28)\div(x+4)$$

$$(10x^2-31x+24)\div(x-\frac{3}{2}) \quad , \quad (30x^3-20x^2-100x+1000)\div(x-10)$$

3 – د فکتور د قضیې په مرسته وښایاست چې $(x-1)$ د $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ د پولینوم یو فکتور دی.

4 – د فکتور د قضیې په مرسته وښایاست چې $(x-\frac{1}{2})$ د $P(x)=x^3-\frac{1}{8}$ د پولینوم یو فکتور دی.

5 – د ترکیبي ویش په مرسته د $x=-\frac{1}{2}$ لپاره د $P(x)=5x^2+x-9$ د پولینوم قیمت پیدا کړئ.

6 – د ترکیبي ویش په مرسته د $x=3$ لپاره د $k(x)=2x^3-3x^2+4x+1$ د پولینوم قیمت پیدا کړئ.

7– د ترکیبي ویش په مرسته وښایاست چې د 3 عدد د $x^3-3x^2+x-3=0$ پولینومي معادلې یو حل (جذر) دی.

8 – د فکتور د قضیې په مرسته وښایاست چې د -1 او 2 عددونه د $x^4-5x^2+4=0$ د معادلې حلونه (جذرونه) دي.

9 – د ترکیبي ویش په مرسته د k قیمت پیدا کړئ چې که د $(x+3)$

$P(x) = 3x^3 + kx^2 - 22x + 24$ پولینوم یو فکټور وي.

10 - د ترکیبي ویش په مرسته یې د ویش حاصل او باقي پیدا کړئ.

$(4x^4 - 5x^2 + 2x - 3) \div (x - 2)$ $\quad$ $(x^3 - x^2 - 14x + 11) \div (x - 4)$

$(7x^4 + 41x^2 - 6) \div (x + 6)$ $\quad$ $(5x^3 - 3x + 7) \div (x + 4)$

11 - د b او c قیمتونه په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د

$P(x) = x^4 + 6x^3 - 20x^2 + bx + c$ پولینوم پر $x^2 - 3x + 2$ وویشو، باقي صفر شي.

12 - د m قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د $k(x) = 2x^3 + 5x^2 - mx + 4$

پولینوم پر $(x^2 + 2x - 1)$ وویشو او باقي صفر شي.

13 - که $k = 3a(x-1)^2 - a(x-1) - 4$ او $L = 16 + b(x-1) - 3b(x-1)^2$ وي

$Kb + La$ پیدا کړئ.

14 - د $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ قیمت پیدا کړئ که $x + y + z = 1$ او

$xy + yz + zx = 20$ وي.

15 - که $x + y = 6$ او $xy = 8$ وي، د $x^3 + y^3$ قیمت پیدا کړئ.

16 - د x په کوم قیمت د $P(x) = 12x^4 + 3x^3 - 13x^2 + x + 5$ پولینوم پر

$(3x^2 - 1)$ پوره ویشل کیږي؟

17 - د P د کوم قیمت لپاره د $K(x) = 3x^3 - 7x^2 - 9x + P$ پولینوم پر $(x - 13)$ پوره

د وېشلو وړ دی؟

18 - که د $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$ پولینوم پر $(2x + 1)$ وویشل شي، د ویش د

عملیې د سرته رسولو پرته ویلای شئ چې پاتې (باقي مانده) به څومره وي؟

a) -3 $\quad$ b) $-\frac{3}{2}$ $\quad$ c) 3 $\quad$ d) $\frac{7}{2}$

19 - د m قیمت به څو وي، که د $P(x) = 5x^2 + 6x - 7$ پولینوم پر $(x + m)$ وویشل شي

تر څو باقي مانده (1) شي؟

a)2 b) $\frac{-4}{5}$ c) -4 d) او a او b سم دي

20 – که د $P(x)=x^3+3x^2-5x-8$ پولینوم، پر $(x+3)$ وویشل شي د ویش د عملیې له سرته رسولو پرته وواياست چې باقي خومره ده؟

a) صفر b) 13 c) -23 d)7

21- که چیرې $x=4$, $y=-3$ او $z=2$ وي، د لاندې الجبري افادو قیمت پیدا کړئ.

$a: x^2yz+zxy^2+3xyz^2$ $b: \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{4}Z^2$

22 –د x د راکړ شوو قیمتونو لپاره د ترکیبي ویش په مرسته د لاندې پولینومو قیمتونه پیدا کړئ.

$P(x)=2x^3+3x^2-2x+5 \quad , \quad x=2$

$P(x)=3x^3+4x^2-5x+6 \quad , \quad x=-1$

$P(x)=2x^4-5x^3+4x-1 \quad , \quad x=1$

$P(x)=4x^4+6x^3+x^2+x-3 \quad , \quad x=-2$

23 – د لاندې معادلو یو، یو جذر راکړ شوی دی، د ترکیبي ویش په مرسته یې نور جذرونه پیدا کړئ.

$x^3-3x^2+x-3=0$ یو جذر یې (3) دی.

$x^3-5x^2+7x+13=0$ یو جذر یې (–1) دی.

$x^4-5x^2+4=0$ یو جذر یې (–1) دی.

$x^4-x^3-9x^2-11x-4=0$ یو جذر یې (–1) دی.

24 –که $P(x)=0$ وي، د دې پولینوم درجه څو ده؟

a) 1 b) –1 c) صفر d) تعریف شوې نه ده

25 –د هغه مستطیل له مساحت څخه چې بعدونه یې $(x+5)$ او $(x+2)$ وي، د هغه مستطیل مساحت تفریق کړئ چې بعدونه یې $(x+3)$ او $(x+1)$ وي.

26 – که $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ او $a=13$, $b=5$, $c=12$ او $p=\frac{a+b+c}{2}$ وي، د A قیمت پیدا کړئ.

27 – که $(x-1)^3$ او x^3+ax^2+bx+c معادل پولینومونه وي، د b قیمت مساوي دی په:

a) 1   b) 3   c) -3 d) -1

28 – د $(a-\frac{2}{a-1})\ (a\div\frac{a+1}{a-1})$ افادې حاصل مساوي دی په:

a) $a(a+1)$ b) $a(a-2)$ c) $\frac{a-2}{a}$ d) $\frac{a-1}{a}$

29 – د $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)$ د ضرب حاصل مساوي دی په:

a) x^2-y^2 b) x^2+y^2 c) $2x^2-y$ d) $x-y$

30 –لاندې پولینومونه په نزولي ډول (Descending Order) ترتیب او هم وواياست چې درجې يې څو دي؟

a) $-5x^2+3x^5+9$ b) $-x^2+xy^2z^3-x^5$ c) 3

31 – د $Q(x)=x^2+3x-5$ په پولینوم کې $Q(-1)$ مساوي دی، په:

a) 7   b) -7 c) 1   d) -1

32 – که $P(x)=x^2-2x+3$ او $Q(x)=2x^2+3x-1$ وي، د لاندې افادو قیمتونه پيدا کړئ.

$P(x)-Q(x)$ $P(0)+Q(0)$ $P(1)-Q(-1)$

$P(x)-P(x)$ $[P(x)+Q(x)]+p(x)$

33 - لاندې پولینومونه نظر y ته په نزولي ډول ترتیب کړئ.

$4x^2y-3xy^2+x^3+y^3$ $4xy^3-3x^3y+2x^2y^2+x^4+y^4$

34 – په لاندې الجبري افادو کې پولینومونه، ناطقې الجبري افادې او غیر ناطقې الجبري افادې په نښه کړئ.

13 , $\sqrt{2}x$, 0

$\frac{3x^2}{2}$, $\sqrt{x}-\frac{1}{x}$, $y^2-\frac{1}{y^2}$

35 – د $(1+2x+3x^2)+(3x-5-2x^2)+(-x^2-5x+4)$ افادې حاصل مساوي دی په:

$a)\ 1$ $b)$ صفر $c)\ -1$ $d)\ 2$

36 – د دوو الجبري افادو د ضرب حاصل $(a^3+b^3+c^3-3abc)$ دی. که یوه افاده یې $(a+b+c)$ وي، بله افاده پیدا کړئ.

37 – د ویش حاصل یې پیدا کړئ.

$$(12x^4+3x^3-13x^2+x+5)\div(3x^2-1) \quad , \quad (a^3+b^3)\div(a+b)$$

$$(4x^3-10x^2+12x+6)\div(2x+1) \quad , \quad (a^5-b^5)\div(a-b)$$

$$\frac{x^{a-2}}{x} \quad , \quad \frac{-m^a}{m^b}$$

38 – ضرب یې کړئ.

$$(a^{2x}-2)(a^{2x}-2) \quad , \quad (\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})$$

$$(e^x+1)(e^x-1) \quad , \quad (m^2-2n^2)(2m^2-n^2)$$

$$(0.1x^2)(0.1x^2)(0.1x^2) \quad , \quad (2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)$$

39 – لومړی لاندې افادې ساده او بیا یې جمع کړئ.

$$(a-1)+1-(a-1)-3 \quad , \quad -(10mn-m)-(m^2+m)+m^2$$

$$(y^2-1)+(y^2-1) \quad , \quad [-4(a-b)-5]+[(2a+b)-(a-b)]$$

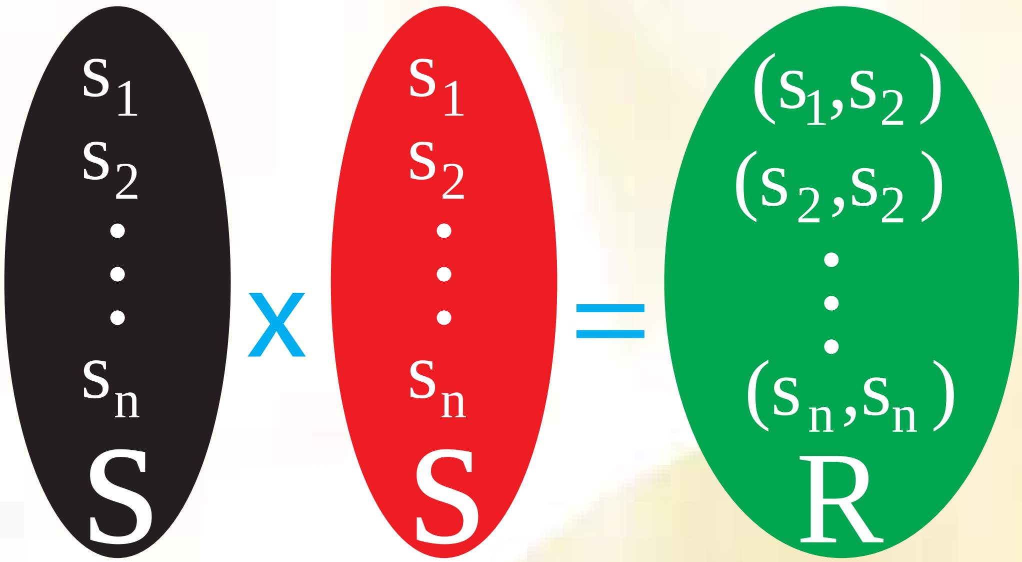
$$10[-\{-(x^2-1)+5\}-x(x-2)] \quad , \quad 10(x+1)-(x+1)-3(x+2)$$

$$mn-4+mn-5$$

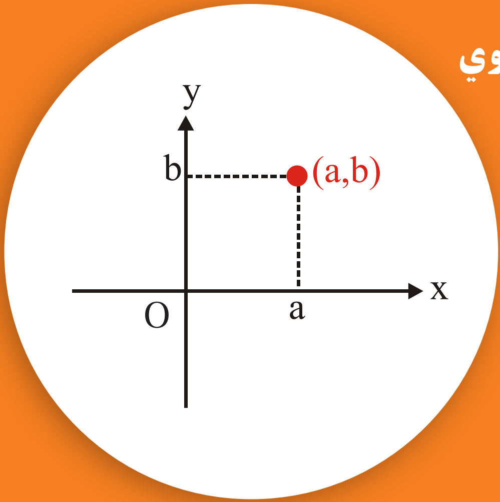
40 – که $a+b=9$ او $ab=20$ وي $a-b$ پیداکړئ

41 – که $a+b=7$ او $a-b=1$ وي د a^2+b^2، $4ab$ او $8ab(a^2+b^2)$ قیمت پیدا کړئ.

دویم څپرکی
رابطه


s_1
s_2
s_n
S
x
s_1
s_2
s_n
S
=
(s_1, s_2)
(s_2, s_2)
(s_n, s_n)
R

مرتبې جوړې او کارتيزيني مستوي



• د (a,b) مرتبه جوړه په کوم حالت کې د (c,d) له مرتبې جوړې سره مساوي کېدای شي؟

• آيا د (a,b) مرتبه جوړه د (b,a) له مرتبې جوړې سره مساوي ده؟

که a او b د يوه سېټ او يا د مختلفو سټونو عناصروي او a ته لومړنی عنصر او b ته دويم عنصر ووايو، نو (a,b)ته مرتبه جوړه وايي، او (b,a) هم يو مرتبه جوړه ده، خو $(a,b)\neq(b,a)$ د (a,b) مرتبه جوړه په هغه صورت کې د (c,d) له مرتبې جوړې سره مساوی کېدای شي چې a=c او b=d وي.

لومړی مثال: که $(x-2,y+1)=(1,3)$ وي د x او y قيمتونه پيدا کړئ.

حل

$$x-2=1 \qquad y+1=3$$

$$\boxed{x=3} \qquad \boxed{y=2}$$

فعاليت

که $(a+1,2b-3)=(0,-1)$ وي، د a او b قيمتونه پيدا کړئ.

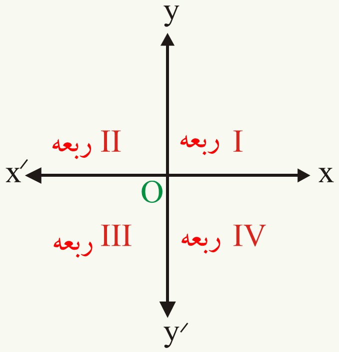
کارتيزيني مستوی (Cartesian Plane)

دوه، عمود او افقي خطونه رسم کړئ او د تقاطع ټکي ته يې مبدأ (Origin) ووايي، افقي خط ته د X محور او عمود خط ته د Y محور وايي.

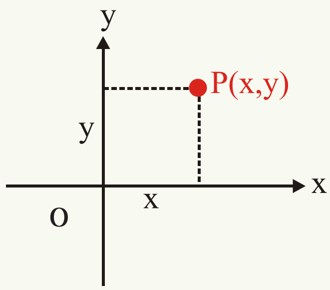
د X محوريه X'OX او د Y محور په Y'OY سره وښايئ، هغه مستوي چې دا محورونه په کې واقع دي د کارتيزيني مستوی په نامه ياديږي.

دواړه محورونه مستوي په څلورو برخو ويشي چې هري برخې ته يې ربعه (ناحيه)(Quadrant)

وايي، د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف جهت (Anti clockwise) په ترتيب سره لومړنی دويمه، دريمه او څلورمه ربعه ده، لکه څنګه چې په شکل کې ليدل کيږي.

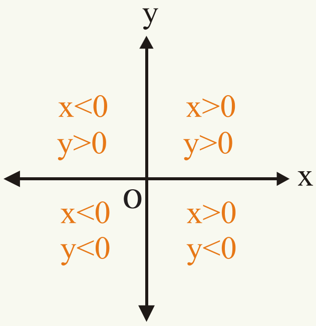


په دې مستوي کې د P دنقطې موقعيت د (x,y) د حقيقي عددونو د مرتبې جوړې په واسطه داسې ښودل کيږي چې دP د نقطې عمودي فاصله د Y له محور څخه x او د P د نقطې عمودي فاصله د x له محور څخه y ده.



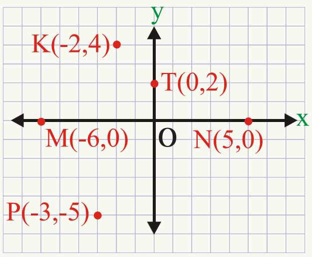
که د P نقطه د Y د محوربښي خواته واقع وي، د x قيمت مثبت دی او که د Y د محور کيڼې خواته واقع وي، د x قيمت منفي دي. او که د P نقطه د Y پر محور پرته وي $x = 0$ دی.

همدارنګه که د P نقطه د X له محور څخه پورته واقع وي، د y قيمت مثبت او که د X له محور څخه لاندې واقع وي د y قيمت منفي دي. $(y<0)$ او که د p نقطه د X پر محور پرته وي، $y = 0$ کيږي، په لنډ ډول په شکل کې ښودل شوې دي

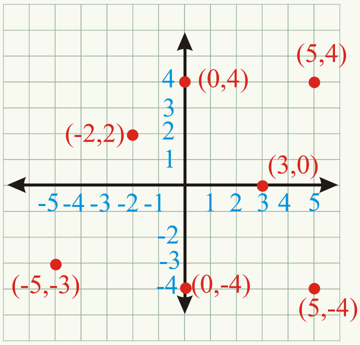


چې x او y ته کارتیزیني مختصات (Cartesion Coordinates) وایي چې په P(x, y) کې لومړنی عنصر x ته فاصله (abscissa) او دویمي عنصر y ته ترتیب(Ordinate)وایي چې د مختصاتو مبدا (0,0) ده، څرګنده ده چې د حقیقي عدونو (x, y) د هرې مرتبې جوړې لپاره په مستوي کې یوه نقطه او د مستوي د هرې نقطې لپاره د حقیقي عدونو یوه جوړه شته دی.

دویم مثال: د $P(-3,-5)$, $K(-2,4)$, $T(0,2)$, $N(5,0)$ او $M(-6,0)$ نقطې دوضعیه کمیاتو په مستوي کې وټاکئ



دریم مثال: د هرې نقطې لپاره چې په لاندې شکل کې ښودل شوې دي، اړونده مرتبه جوړه ولیکئ.



فعالیت

د $(2,-1)$, $(-1,2)$, $(-2,-1)$, $(2,1)$, $(2,0)$ او $(0,1)$ نقطې دوضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.

پوښتنې

1 - که د P د نقطې فاصله مثبت او ترتیب یې منفي وي، د P نقطه په کومه ربعه کې واقع ده؟

2 - که د یوه شکل څلور رأسونه $A(3,3)$, $B(-3,3)$, $C(-3,-3)$ او $D(3,-3)$ وي، دا کوم ډول هندسي شکل دی؟

3 - د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هغه مثلث چې رأسونه یې $A(2,0)$, $B(0,2)$ او $C(0,0)$ وي رسم کړئ او ووایاست چې د اکوم ډول مثلث دی؟

4 - د $P_1(2,-3)$, $P_2(-3,2)$, $P_3(1,5)$ نقطې و وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.

5 - ووایاست چې لاندې مرتبې جوړې په کومه ربعه کې واقع دي؟

$(1,5)$, $(-5,1)$

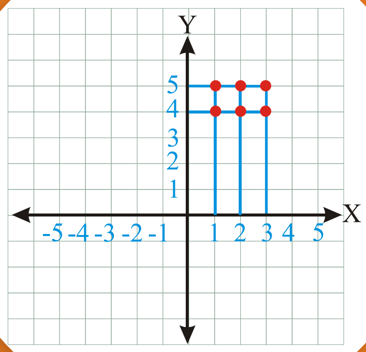
$(-4,-6)$, $(4,-5)$

$(-\frac{1}{2},-2)$, $(-\frac{1}{2},2)$

$(2\frac{1}{2},\frac{1}{4})$, $(2,0)$

$(0,-1)$

د کارتیزني ضرب حاصل او گراف یې



آیا په مخامخ شکل کې $A \times B$ ښودلای شئ؟

فعالیت

که $A\{1,2,3\}$ او $B=\{4,5\}$ وي:

- $A \times B$ پیداکړئ.
- د $A \times B$ د عناصرو شمیر پیداکړئ.
- آیا $A \times B = B \times A$ دی؟
- آیا $A \times A$ او $B \times B$ پیداکولای شئ؟

که A او B دوه غیر خالي ستونه وي، $(A \times B)$ په لاندې ډول تعریف شوي دي:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

په دې معنا چې د A او B د ضرب حاصل $(A \times B)$ داسې یوسټ دی چې عناصر یې د (x,y) د هغه مرتبو جوړوسټ دی چې x د A دسټ او y د B دسټ عنصروي، که $A \neq B$ وي نو: $A \times B \neq B \times A$ دی که د A د سټ د عنصرونو شمیر m او د B دسټ د عنصرونو شمیر n وي، د $A \times B$ د عناصرو شمیر له $(m \times n)$ څخه عبارت دی.

لومړی مثال: که $A = \{0,1,2\}$ او $B = \{3,4\}$ وي $A \times B$, $B \times A$ او $A \times A$ پیداکړئ.

حل:

$$A \times B = \{0,1,2\} \times \{3,4\} = \{(0,3), (0,4), (1,3)(1,4), (2,3), (2,4)\}$$

$$B \times A = \{3,4\} \times \{0,1,2\} = \{(3,0), (3,1), (3,2)(4,0), (4,1), (4,2)\}$$

$$A \times A = \{0,1,2\} \times \{0,1,2\} = \{(0,0), (0,1), (0,2)(1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$$

فعالیت

که $A=\{-4,-1,0\}$ او $B=\{1,4\}$ وي $A\times A, A\times B$ او $B\times B$ پیداکړئ.

دويم مثال: که $IN=\{1,2,3...\}$ او $L=\{0\}$ وي $IN\times L$ پیداکړئ.

حل:

$$IN\times L=\{(1,0),(2,0),(3,0),(4,0)...\}=\{(x,0)/x\in IN\}$$

دريم مثال: که $IN=\{1,2,3...\}$ او $W=\{0,1,2,3...\}$ وي $W\times N$ پیداکړئ.

حل:

$$W\times IN\{(0,1),(0,2),(0,3),...,(1,1),(1,2),(1,3),...,(2,1),(2,2),...,\}$$
$$=\{(x,y)/x\in w\wedge y\in IN\}$$

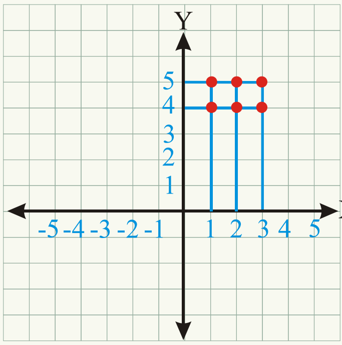
د کارتيزني ضرب د حاصل گراف: (Graph of Cartesian Product)

کولای شوو چې د کارتيزني ضرب حاصل د وضعيه کمیاتو په مستوي کې هم وښودلاي شو.

څلورم مثال: که $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{4,5\}$ وی $A\times B$ پیداکړي او د وضعيه کمیاتو په مستوي کې يې وښاياست.

حل:

$$A\times B=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$$

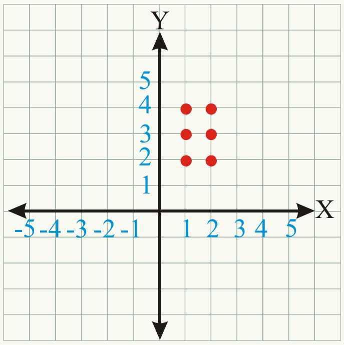


د X پرمحور د 1,2,3 عددونه او د Y پر محور د 4 او 5 عددونه ټاکو له 2,1 او 3 څخه عمود خطونه او له 4 او 5 څخه افقي خطونه رسموو، ددې دوارو خطونو د تقاطع نقطې د $A\times B$ مرتبې جوړې ښکاره کوي.

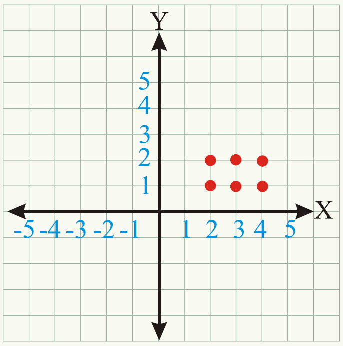
پنځم مثال: که $A=\{1,2\}$ او $B=\{2,3,4\}$ وي $A\times B$ او $B\times A$ پیداکړي او په شکل کې یې وښایاست.

$$A\times B=\{1,2\}\times\{2,3,4\}=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$$

$$B\times A=\{2,3,4\}\times\{1,2\}=\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$



$A\times B$

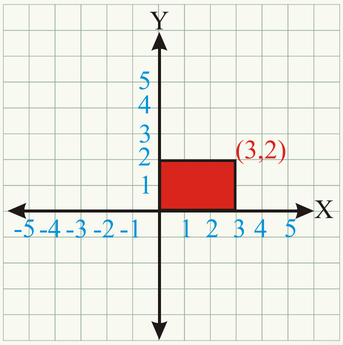


$B\times A$

شپږم مثال: که $A=\{x/x\in IR, 0\le x\le 3=[0,3]\}$ او $B=\{y/y\in IR, 0\le y\le 2=[0,2]\}$ وي $A\times B$ په شکل کې یې وښایاست.

حل:

$$A\times B=\{(x,y)/0\le x\le 3\wedge 0\le y\le 2\}$$



فعالیت

که چیرې $A=\{1,2\}$ او $B=\{3,4\}$ وی $A\times B$ پیدا او په شکل کې یې وښایاست.

پوښتنې

1 - که:

$A=\{-1,1,3\}$ i) $B=\{2,4\}$

$A=\{-1,1\}$ ii) $B=\{2,3\}$

وي $A\times B$ پيدا او په شکل کې یې وښایاست.

2 - د لومړۍ پوښتنې د ستونو لپاره $B\times A$ پيدا اوپه شکل کې یې وښایاست.

3 - که $A=\{1,2,3\}$ وي $A\times A$ پيداکړئ.

4 - که $A=\{2,4,6\}$ او $B=\{1,3,5\}$ وي $A\times B\,,B\times A\,,A\times A$ او $B\times B$ پيداکړئ

رابطه
(Relation)

عطاالله د عزت الله ورور دی

(عطا الله R عزت الله) چې ورووليي هم يوه رابطه ده

يوسټ چې د شيانو او مفهومونو د مرتبو جوړو څخه جوړ شوي وي، له يوې رابطې څخه عبارت دی. یاکه A او B دوه غیر خالي سټونه (non empty sets) وي، نو د $A \times B$ هرفرعي سټ له A څخه په B کې يوه رابطه ده، که $(a,b) \in R$ وي، ويل کيږي چې a له b سره رابطه لري او د (aRb) په شکل ليکل کيږي.

که R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، نو $R \subset A \times B$ ده اوکه R د $A \times A$ يو فرعي سټ وي، نو R په A کې يوه رابطه ده.

لمړی مثال: که $A = \{x, y\}$ او $B = (1,2)$ وي، $A \times B$ پيداکړئ، او له A څخه په B کې څلور رابطې وليکئ.

حل

$$A \times B = \{(x,1),(x,2),(y,1),(y,2)\}$$
$$R_1 = \{(x,1),(x,2)\}$$
$$R_2 = \{(y,1)\}$$
$$R_3 = \{(y,2)\}$$
$$R_4 = \{(x,1),(y,1)\}$$

چې د $A \times B$ د عناصرو شمير څلور او د $A \times B$ د ټولو فرعي سټونو شمير $2^4 = 16$ دي، نو له A څخه په B کې د ټولو رابطو شمير 16 دي.

دويم مثال: که $A = \{1,3,5,...19\}$ چې د Aدسټ د عناصرو شمير 10 دی او $B = \{2,4,6\}$ وي چې د B د عناصرو شمير (3) دي، د $A \times B$ د عناصرو شمير(ټولې مرتبې

جوړې $30 = 3 \times 10$ دي او له A څخه په B کې د ټولو رابطو شمیر 2^{30} دي.

پام موږ چې : ϕ او $A \times B$ هم په فرعي سټونو کې شامل دي.

دریم مثال: که $A = \{1,2,3\}$ او $B = \{a,b\}$ وي له A څخه په B کې (3) رابطې ولیکئ.

حل:

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

درې رابطې عبارت دي له:

$$R_1 = \{(1,a),(1,b),(2,a),(3,a),(3,b)\}$$
$$R_2 = \{(1,b),(2,a),(3,a),(3,b)\}$$
$$R_3 = \{(2,a),(2,b),(3,a)\}$$

فعالیت

که $R = \{(x,y)/x-y=5\}$ په $A = \{1,2,3,4\}$ کې یوه رابطه وي، د R عناصر ولیکئ.

څلورم مثال: که $R = \{(x,y)/x-y=2\}$ په $A = \{1,2,3,4\}$ کې یوه رابطه وي، د R عناصر ولیکئ.

حل: $R = \{(3,1),(4,2)\}$ ده.

د رابطې د تعریف ساحه (Domain) او د قیمتونو ساحه (Range) یې:

پوهیږو چې که R له A څخه په B کې یوه رابطه وي، نو $R \subseteq A \times B$ ده، په دې معنا چې R یوسټ دی چې عناصر یې د (x,y) مرتبې جوړې دي چې $x \in A$ او $y \in B$ ده.

د R د تعریف ساحه د مرتبو جوړو لومړني عنصرونه دي چې په Dom_R سره ښودل کیږي.

همدارنګه د *R* د قیمتونو ساحه (Range) د مرتبو جوړو دویمي عناصر دي، په Range_R سره ښودل کیږي.

لومړی مثال: که $A = \{1,2\}$ او $B = \{x,y\}$ وي او R د A څخه په B کې یوه رابطه وي، لومړی د دې رابطې عناصر ولیکئ، بیا د رابطې د تعریف ساحه Dom_R او د قیمتونو ساحه

$Range_R$ ولیکئ.

حل

$R = \{(1,x),(2,x),(1,y),(2,y)\}$

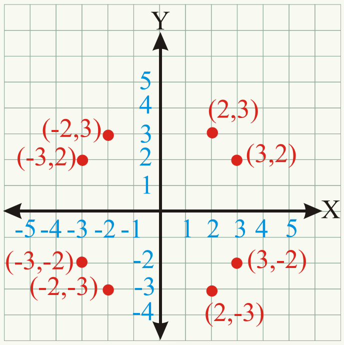
$Dom_R = \{1,2\} \qquad Rang_R = \{x,y\}$

دویم مثال: که د $R = \{(x,y) / x^2 + y^2 = 13\}$ رابطه د $A = \{-3,-2,1,2,3\}$ په سټ کې تعریف شوي وي، لومړی د (R) عناصر د مرتبو جوړو په شکل ولیکئ، بیا Dom_R او $Rang_R$ پیدا کړئ او بیا یې ګراف رسم کړئ.

$R = \{(-3,-2),(-3,2),(-2,-3),(-2,3),(2,-3),(2,3),(3,-2),(3,2)\}$

$Dom_R = \{-3,-2,2,3\}$

$Range_R = \{-3,-2,2,3\}$



فعالیت

که $R = \{(x,y) / y = 2x\}$ وي او د R د تعریف ناحیه $\{0,4,8\}$ وي، د R د قیمتونو ناحیه معلومه کړئ.

معکوسه رابطه (Inverse of a Relation)

که R له A څخه په B کې یوه رابطه وي، د R معکوس چې په R^{-1} سره ښودل کیږي چې له $R^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in R\}$ څخه عبارت ده:

$(x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R^{-1}$

د R دتعریف ساحه د R^{-1} د قیمتونو ساحه او د R^{-1} د تعریف ساحه د R د قیمتونو له ساحې څخه عبارت ده.

مثال: که $R = \{(1,2)(2,3)(3,4)\}$ د طبیعي عددونو په سټ کې یوه رابطه وي، د R د رابطې

معکوسه رابطه یا R^{-1} پیداکړئ.

حل:

$$R^{-1}=\{(2,1)(3,2)(4,3)\}$$

معادله رابطه (Equivalent Relation): د R رابطه د A په سټ کې یوه معادله رابطه ده، که درې لاندني خاصیتونه ولرې:

1- انعکاسي خاصیت (Reflexive Property): د x د هر عنصر $x\in A$ لپاره $(x,x)\in R$ وي یا $\forall x\in A\Rightarrow (x,x)\in R$

2- تناظري خاصیت (Symmetric Property): (: که (x,y) په R کې شامله وي، نو (y,x) هم په R کې شامله وي یا: $\forall (x,y)\in R\Rightarrow (y,x)\in R$

3 - انتقالي خاصیت (Transitive Property): که $(x,y)\in R$ او هم $(y,z)\in R$ وي او په نتیجه کې (x,z) مرتبه جوړه هم په R کې شامله وي یا:

$$(x,y)\in R\wedge (y,z)\in R\Rightarrow (x,z)\in R$$

مثال: د مساوات رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې یوه معادله رابطه ده:

1- په حقیقي عددونو کې د هرx لپاره x=x دی، 5=5 (انعکاسی خاصیت)

2- د هر $x,y\in IR$ لپاره که x=y وي، نو y=x ده(تناظري خاصیت)

3- د هر $x,y,z\in IR$ لپاره که $x=y$ او y=z وي په نتیجه کې x=z دی(انتقالي خاصیت)

پوښتنې

1- که $A=\{1,2\}$ و $B=\{0,4,6\}$ وي.

له A څخه پهB کې درې رابطې ولیکئ.

له B څخه په A کې څلور رابطې ولیکئ.

په A کې څلور رابطې ولیکئ.

2- که $A=\{1,2,3,4\}$ او $B=\{1,3,5\}$ وي او $R=\{(x,y)|y<x\}$، له A څخه په Bکې یوه رابطه وي، د R عناصر ولیکئ.

3- که $R=\{(x,y)|y+1=2x^2\}$ د طبیعي عددونو په سټ کې یوه رابطه وي او د تعریف ساحه یې ټول طبیعي عددونو وي، د قیمتونو ساحه (Range) پیداکړئ.

دڅپرکي لنډيز

- (a,b): چې دليکلو ترتيب په کې اهميت لري، مرتبه جوړه نوميږي، چې a ته لومړنی مختصه او b ته دويمه مختصه وايي، په عمومي ډول $(a,b) \neq (b,a)$
- د (a,b) او (c,d) دوه مرتبی جوړي په داسې حال کې سره مساوي دي چې $a = c$ او $b = d$ وي.
- **د کارتيزيني ضرب حاصل**: د A او B دستونو کارتيزيني ضرب چې په $A \times B$ سره ښودل کيږي په دې ډول تعريف شوي دی: $A \times B = \{(x,y) | x \in A \wedge y \in B\}$
- که د A ست د عناصرو شمير په m او د B د سټ د عناصرو شمير په n سره وښايو، د $A \times B$ د عناصر شمير $m \times n$ دی.
- کولای شوچې د A اوB، دستونو ضرب $(A \times B)$ د وضعيه کمياتو په مستوي کې وښايو.
- **رابطه**: د $A \times B$ هر فرعي سټ د R يوه رابطه ده له A څخه په B کې او که $R \subset A \times B$ او که $R \subset A \times A$ وي، نو په دې صورت کې R په A کې يوه رابطه ده. $(x\ ,\ y) \in R \Leftrightarrow x R y$
- که د A د سټ د عناصرو شمير په n سره وښايو، د A د فرعي سټونو شمير 2^n دی.
- که د A دسټ د عناصرو شمير په m او د B دسټ د عناصرو شمير په n سره وښايو له A څخه په B کې د رابطو شمير 2^{mxn} دی
- که R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، د R د تعريف ساحه Dom_R د مرتبو جوړو دلومړنيو عناصرو سټ او د قيمتونو ساحه $(Range_R)$ يې دمرتبو جوړو د دويمو عناصرو سټ دی.
- **معکوسه رابطه**: که R له A څخه پهB کې يوه رابطه وي، د R معکوسه رابطه په R^{-1} سره ښودل کيږي چې:

$$R.^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in R\}$$

$$(x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R^{-1}$$

ښکاره خبره ده چې R^{-1} د تعريف ساحه د R دقيمتونو له ساحې سره او د R^{-1} دقيمتونو ساحه د R د تعريف له ساحې سره مساوی ده.

- **معادله رابطه**: R د A په سټ کې يوه معادله رابطه ده چه که چيري لاندې دري خاصيتونه ولري.

1- انعکاسي خاصيت. 2- تناظری خاصيت. 3- انتقالی خاصيت.

دځپرکي پوښتني

1- که $A = \{1,3,5\}$ او $B = \{2,4,6\}$ وي $B\times A, A\times B$ او $A\times A$ پیدا کړئ..

2- که $A = \{1,2,3\}$ او $B = \{0,1\}$ وي $A\times B$ په شکل کې وښایاست.

3- که $(x-2y, 2x+y) = (3,1)$ وي د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

4- په $A = \{1,3,5\}$ کې د R رابطه داسې په لاس راوړئ چې R د مساوات رابطه وي.

5- که $A = \{a,b\}$ وي د A^2 عناصرو ولیکئ.

6- که د $R = \{(x,y) | y = x^2\}$ رابطه د حقیقی عددونو په سټ کې تعریف شوي وي د R رابطې ګراف رسم کړئ.

7- که $R = \{(x,y) | y^2 = x\}$ رابطه د حقیقی عددونو په سټ کې تعریف شوي وي د R د رابطې ګراف رسم کړئ.

8- که $R = \{(1,-1), (2,-2)(3,-3)\}$ وي د R^{-1} د تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

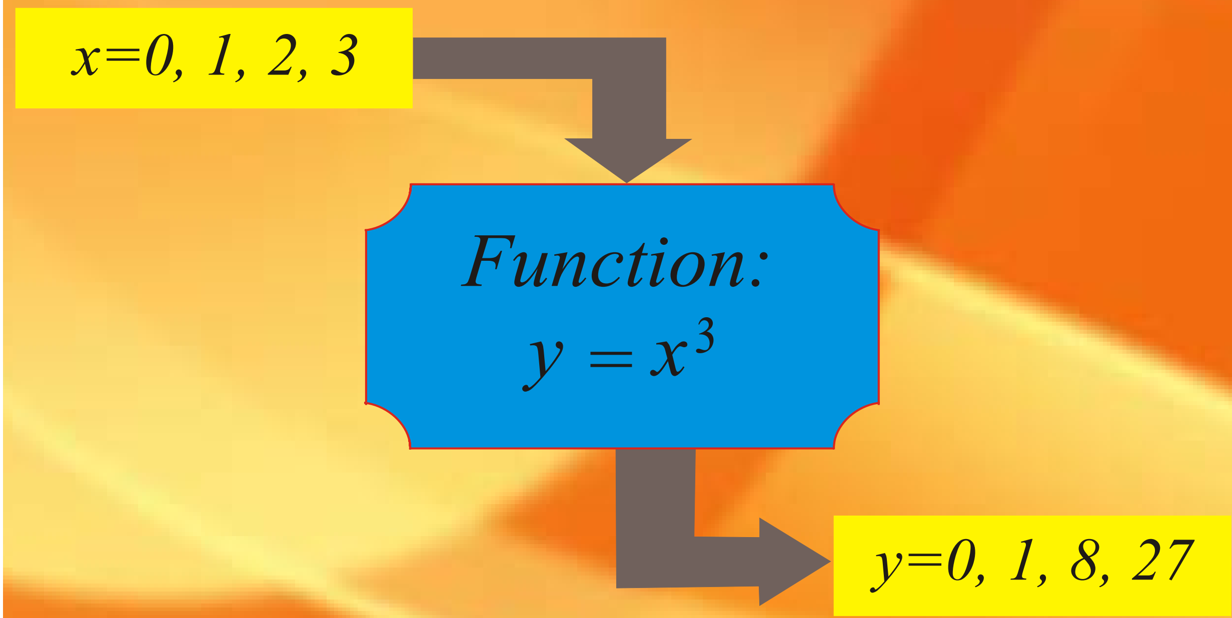
9- که $R = \{(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)\}$ وي Rد او R^{-1} د تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

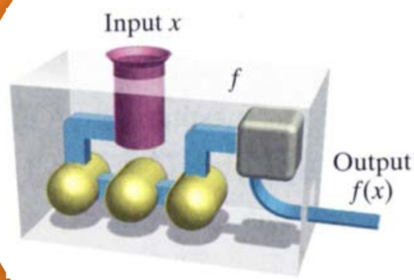
10- که $A = \{3,6,12\}$ او $B = \{-1,0\}$ وي په A کې د رابطو شمیر او له A څخه په B کې درابطو شمیر پیدا کړئ.

11- که د $(4a+1, 2b+a)$ او $(5, 3a-4b)$ دوه مرتبې جوړې سره مساوي وي د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

12- که $A = \{a,b,c\}$ او $B = \{x,y\}$ وي $A\times B$ او $B\times A$ پیدا کړئ.

دریم څپرکی
تابع


$x=0, 1, 2, 3$
Function:
$y = x^3$
$y=0, 1, 8, 27$



تابع (function)

فعالیت

- آیا هره تابع یوه رابطه ده او هره رابطه یوه تابع ده ؟
- آیا تابع او رابطه یو له بله سره توپیر لري؟
- آیا د مرتبو جوړو هر سټ یوه تابع ده؟
- آیا کولای شی چې یوې تابع ته د یو ماشین په شان فکر وکړئ؟

د لومړي ځل لپاره د تابع مفهوم د یو الماني ریاضي پوه لیبنز (Leibniz)، (1716 – 1646) له خوا معرفي شوه.

تابع یوه رابطه یا یوه قاعده ده چې یو کمیت ته د بل کمیت سره اړیکه ورکوي، د تابع د مفهوم د ښه پوهیدو لپاره لاندې مثالونه تر غورلاندې ونیسئ.

1 - د یوې مربع مساحت (A) د مربع د ضلعې (x) پورې اړه لري. هغه معادله چې د مربع مساحت ته د مربع د ضلعې پورې اړیکه ورکوي له $A = x^2$ څخه عبارت ده.

د مربع ضلعه x	1	2	3	4	5	...
د مربع مساحت A	1	4	9	16	25	...

یا په بل عبارت د مربع مساحت د مربع د ضلعې تابع دی یا $A = f(x)$

2 - د نړۍ د نفوسو شمېر (p) په وخت (t) پورې اړه لري، لکه څرنګه چې په لاندې جدول کې لیدل کیږي په تقریبي ډول د نړۍ د نفوسو شمېر د میلون په حساب ښودل شوي دي.

کال (t)	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
نفوس په میلون (p)	1650	1750	1860	2070	2300	2560	3040	3710	4450	5280	6080

لیدل کیږي چې نفوس (Population) یا P د وخت (t) تابع ده یا $p = f(t)$

3 - د دایرې مساحت (A) ، د دایرې شعاع (r) پورې اړه لري ($A = \pi r^2$)

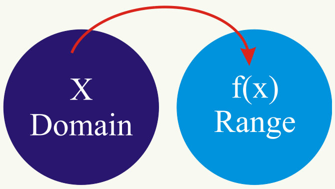
4 – د کرې حجم (V) د کرې په شعاع (r) پورې اړه لري چې د $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ د معادلې په واسطه ښودل کیږي.

له پورتنیو مثالونو څخه دا نتیجه اخیستل کیږي چې د تابع په مفهوم کې اړیکه مرکزي حیثیت لري د مثال په ډول د هر انسان عمر له یوه عدد سره اړیکه لري، په یوه مغازه کې هر جنس له یوه ټاکلې قیمت سره اړیکه لري، هر موټر د یوې ټاکلې شمیرې جوازسپر پورې اړه لري او د هر عدد مکعب، یو عدد دی $(2^3 = 8 \;\; , \;\; 3^3 = 27)$.

په پورتنیو مثالونو کې لیدل کیږي چې مساحت (A)، نفوس (P) اوحجم (V) د مربع ضلعې (x)، وخت (t) او د کرې شعاع (r) تابع دي چې مساحت، نفوس او حجم هر یو ته مربوطه (مقید) متحول (dependent Variable) او د مربع ضلعې، د کرې شعاع او د وخت کمیتونو ته ازاد متحول یا مستقل متحول (Independent Variable) وایي کولای شو چې تابع داسې تعریف کړو:

تعریف

تابع د دوو ستونو تر منځ یوه داسې رابطه یا قاعده ده چې د لومړني سټ هر عنصر یوازې او یوازې د دویم سټ له یو عنصر سره اړیکه ولري چې لومړنی سټ د تعریف د ناحیې (Domain) او دویم سټ د قیمتونو د ناحیې (Range) په نوم یادیږي.



یا تابع د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر یې تکرار شوي نه وي.

که $S = \{(1,4)(2,3)(3,2)(4,3)(5,4)\}$ وي، نو د S رابطه دیوې تابع ښودونکې کې ده، ځکه چې د مرتبو جوړو لومړني عناصر یې تکرار شوي نه دي.

$\text{Domain}(s) = \{1,2,3,4,5\}$

$\text{Range}(s) = \{2,3,4\}$

فعالیت

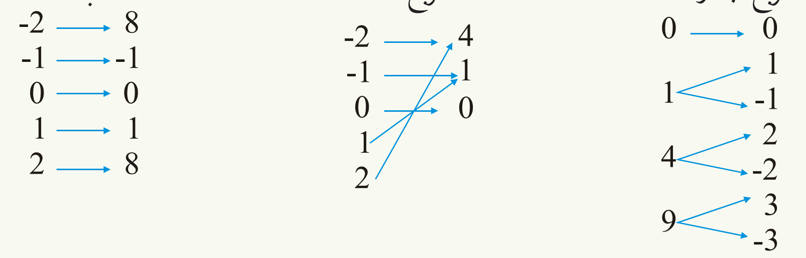
که $T=\{(1,4),(2,3),(3,2),(2,4),(1,5)\}$ وي ایا T یوه تابع ښکاره کوي؟

لومړی مثال: په لاندې جدولونو کې کوم یو، یوه تابع ښکاره کوي؟

(جدول III) | (جدول II) | (جدول I)

Domain Range | Domain Range | Domain Range

(د عدد مربع جذر) (عدد) | د عدد مربع (عدد) | د عدد مکعب (عدد)



I او II جدولونه تابع ښکاره کوي، لیکن III جدول تابع نه ښکاره کوي، ځکه چې د لومړنی سټ یا (Domain) یو عنصر د دویم سټ (Range) له دوو عنصرو سره اړیکه لري، یا په بل عبارت د مرتبو جوړو لومړني عناصر تکرار شوي دي چې مرتبې جوړې یې :

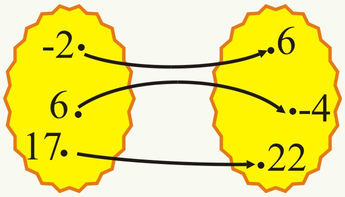
$(1\ ,1),(1\ ,-1),(4\ ,\ 2),(4\ ,-2),(0,0),(9\ ,3),(9\ ,\ -3)$ دي او یا دا چې د لومړنی سټ د یو عنصر لپاره په دویم سټ کې دوه تصویرونه (Images) موجود دي، ډېره ښه به دا وي چې یوې تابع ته د یو ماشین فکر وکړو، کوم شکل چې د ځپرکې په لومړی مخ کې راکړل شوی دی، خام مواد یا ورودي (input) یا Domain او خروجي output یا $f(x)$ د Range په نامه یادیږي.

که A او B د حقیقي عددونو ستونه وي له A ځخه B ته هره تابع د حقیقي تابع په نامه یادیږي. پام مو وي چې : $Range \subseteq codomain$ دی.

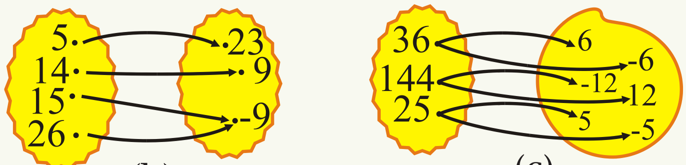
دویم مثال: که $f=\{(-5,3m)\ ,\ (-5,2m-10)\ ,\ (1,2)\}$ د یوې تابع ښودونکی وي، د m قیمت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $-5=-5$ دي، نو باید $3m=2m-10$ سره وي، په نتیجه کې $m=-10$ کیږي په دې معنا دی لپاره چې f یوه تابع وي، باید $m=-10$ وي.

دریم مثال: له لاندینیو دیاګرامونو ځخه کوم یو یې یوه تابع ښیي؟



(a)



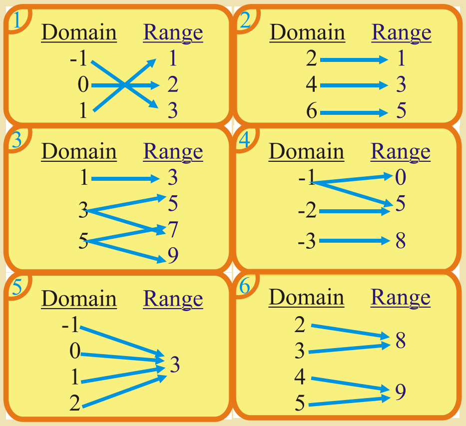
(b) (c)

حل: د a او b دیاګرامونه تابع ښیي، لیکن د c دیاګرام د یوې تابع ښودونکی نه دی.

تابع د X او Y د دوو سټونو ترمنځ یوه داسې رابطه ده چې د x د سټ یا (Domain) هر عنصر یوازې د Y د سټ (Range) د یو عنصر سره اړیکه ولري، چې X ته ازاد متحول او Y ته مقید (مربوطه) متحول وایي یا تابع د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر یې تکرار شوي نه وي.

پوښتنې

1 – د مخامخ جدولونو څخه کوم یو یې د تابع ښودونکی دی؟



2 – د لاندې مرتبو جوړو له سټونو څخه کومه یو یې یوه تابع ښکاره کوي؟ د تعریف ساحه (Domain) او د قیمتونو ساحه (Range) یې تعین کړي.

1– $\{(2,4)\,,\,(3,6)\,,\,(4,8)\,,\,(5,10)\}$

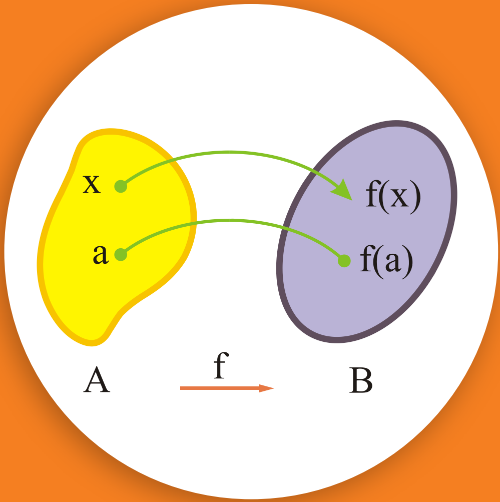
2– $\{(-1,4)\,,\,(0,3)\,,\,(1,2)\,,\,(2,1)\}$

3– $\{(10,-10)\,,\,(5,-5)\,,\,(0,0)\,,\,(5,5)\,,\,(10,10)\}$

4– $\{(-10,10)\,,\,(-5,5)\,,\,(0,0)\,,\,(5,5)\,,\,(10,10)\}$

5– $\{(0,11),(1,1),(2,1),(3,2),(4,2),(5,2)\}$

6– $\{(1,1)\,,\,(2,1)\,,\,(3,1)\,,\,(1,2)\,,\,(2,2)\,,\,(3,2)\}$



د تابع د ليکلو طريقه او
د تابع د قيمت پيدا کول:

- څه وخت يوه معادله د يوې تابع ښودونکي وي؟
- يوه رابطه څه وخت يوه تابع ښکاره کوي؟
- يو جدول څه وخت يوه تابع ښکاره کوي؟

د لومړي ځل لپاره سويسي رياضي پوه ايولر (1707 -1783) (Euler) دا عبارت چې y د x تابع ده، د $y = f(x)$ مساوات په شکل وښوده چې $f(x)$ د x لپاره د y يا $f(x)$ د تابع قيمت دی.
که f له A څخه B ته يوه تابع وي، په لاندې ډول ښودل کيږي چې

$f : A \to B$

يا $y = f(x)$

په شکل کې x له (input) او $f(x)$ د (output) څخه عبارت دی، تابعگانې د f,g,h, او نورو تورو په واسطه ښودل کيږي.
تابع عموماً په 4 طريقو ښودل کيدای شي.
1 – د عبارتونو په واسطه (Verbally)
2 – د يو جدول په واسطه يا عددي (Numerically)
3 - د گراف په واسطه يا مشاهده وي (Visually)
4 - د يو واضح فورمول يا معادلې په واسطه يا په الجبري ډول (Algebraically)

فعاليت

که $f(x)$ او $g(x)$ په لاندې ډول په جدولونو کې راکړل شوي وي، د x په راکړل شوو قيمتونو کې ددې تابعگانو قيمت پيدا کړې. يا په بل عبارت د تابع د تعريف ساحه (Domain) درکړل شوې ده، د تابع اړونده قيمتونه (Range) يې پيدا کړئ.

$f(x)=\frac{1}{2}x-4$

x=	-1	-2	0	2	4
f(x)=	?	?	?	?	?

$g(x)=x^3-1$

x=	0	-1	1	2
g(x)=	?	?	?	?

لومړی مثال: که $f(x)=x^2+3x-2$ وي $f(2)$ ، $f(0)$ ، $f(-3)$ او $f(a)$ پیدا کړئ.

حل:

د تعریف ساحه	$f(x)=x^2+3x-2$ (Rule) تابع	د تابع قیمتونه
2	$f(2)=2^2+3\cdot 2-2=4+6-2$	8
0	$f(0)=0^2+3\cdot 0-2=-2$	-2
-3	$f(-3)=(-3)^2+3(-3)-2=9-9-2$	-2
a	$f(a)=a^2+3a-2$	a^2+3a-2

یا $f(2)=8$, $f(0)=-2$, $f(-3)=-2$, $f(a)=a^2+3a-2$

دویم مثال: که $f(x)=x^2+3x+5$ وي، $f(-x)$, $f(x+3)$ او $f(2)$ پیدا کړئ.

حل

$$f(2)=2^2+3\cdot 2+5=4+6+5=15$$

$$f(x+3)=(x+3)^2+3(x+3)+5=x^2+6x+9+3x+9+5=x^2+9x+23$$

$$f(-x)=(-x)^2+3(-x)+5=x^2-3x+5$$

فعالیت

که $g(x)=x^2-2x+7$ وي $g(-x)$, $g(x+4)$ او $g(-5)$ پیدا کړئ.

دریم مثال: که $h(x)=3-2x$ او $f(x)=2x+6$ وي $f(-1)$ ، $h(6)$ او $f(-1)+f(3)$ پیدا کړئ.

حل:

$$f(-1)=2(-1)+6=-2+6=4$$
$$h(6)=3-2\cdot 6=3-12=-9$$
$$f(-1)+f(3)=4+2\cdot 3+6=4+12=16$$

خلورم مثال: که $f(x)=ax^2-bx+1$ او $f(3)=10, f(1)=0$ وي د a او b قيمتونه پيدا کړئ.

حل:

$$10=9a-3b+1 \quad , \quad 0=a-b+1$$

$$10=9a-3b+1$$
$$\underline{0=\_3a\mp 3b\pm 3}$$

$$10=6a-2 \qquad\qquad 10=18-3b+1$$
$$12=6a \qquad\qquad 3b=19-10$$
$$a=2 \qquad\qquad 3b=9$$
$$b=3$$

پنځم مثال: له لاندينو معادلو څخه کومه يوه يې يوه تابع ښيي؟

$$a:\quad x^2+y=4 \qquad\qquad b: x^2+y^2=4$$

حل: هغه وخت يوه معادله يوه تابع ښيي چې د هر x لپاره د y يو قيمت موجود شي.

$$a:\quad x^2+y=4 \Rightarrow y=4-x^2$$

د x د هر قيمت لپاره y يو قيمت لري، د مثال په ډول که $x=1$ وي، $y=4-1^2=3$ نو $y=4-x^2$ يوه تابع ده.

$$b:\quad x^2+y^2=4 \Rightarrow \quad y=\pm\sqrt{4-x^2}$$

د x د يوه قيمت لپاره y دوه قيمتونه لري، نو y يوه تابع نه ده.

د مثال په ډول که $x=1$ وي، $y=\pm\sqrt{3}$ يا $(1\,,\sqrt{3})(1\,,-\sqrt{3})$ چې لومړني عناصر يې تکرار شوي دي.

فعالیت

وښایاست چې د $y-x^2=1$ او د $x^3-y=2$ معادلې د تابع ښودونکي دي او د $xy=0$

معادله د یوې تابع ښودونکې نه ده.

یوه تابع د $y=f(x)$ په شکل لیکل کیږي، د تابع د قیمت د پیدا کولو لپاره د x قیمت د تابع په معادله کې وضع کوو، د تابع قیمت په لاس راځي او یوه معادله هغه وخت د یوې تابع ښکارندویه وي چې د هر x لپاره یوه y وجود ولري.

پوښتنې

1– که $g(x)=x^2+x-2$ او $f(x)=2x^2+3x-1$ وي $g(2)-g(-3)$, $g(-2), f(-3)$

او $\dfrac{f(0)\cdot g(-2)}{f(-3)}$ پیدا کړئ.

2 – که $f(x)=x^2-x$ او $g(x)=\sqrt{x+4}$ وي. $f(-2)$, $g(0)$ او $f(x-1)$ پیدا کړئ.

3– که $g(x)=3\sqrt{x}$ او $h(x)=1+4x$ وي $h(16)$, $h(-3)$ او $g(-4)$ پیدا کړئ.

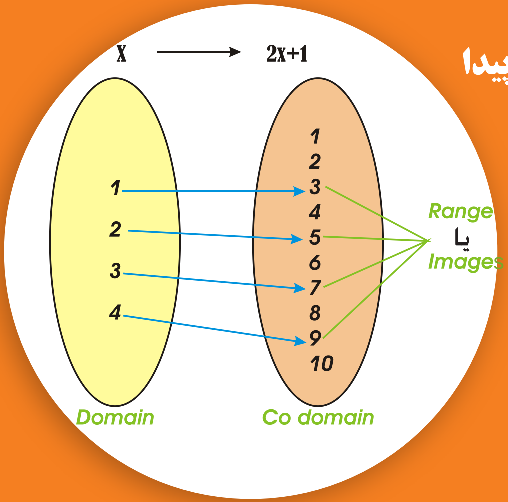
4 – $f(x)=\dfrac{15}{x-3}$, $g(x)=16+3x-x^2$ او $h(x)=\sqrt{25-x^2}$ وي $g(-7), f(6)$

او $f(0)+g(4)-h(-3)$ پیدا کړئ.

5 – که $g(x)=\sqrt{x+40}-2$ وي $g(12)$, $g(5)$, $g(4)$, $g(0)$ او $g(-2)$ پیدا کړئ.

6 – ایا د $x^2+xy=1$ معادله یوه تابع ښیي؟

د يوې تابع د تعريف د ساحې پيدا کول



آيا کېدای شي چې د هرې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه وي؟

فعاليت

- د x کوم قيمتونه دتابع د تعريف په ساحه کې شامل وي؟
- د $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$ د تابع د تعريف ساحه وټاکئ.
- آيا $g(x)=3\sqrt{x}$ د تابع د تعريف په ساحه کې $x=-4$ شامل دی؟

د يوې تابع د تعريف په ساحه (Domain) کې د x ټول هغه قيمتونه شامل وي، چې تابع په هغه قيمتونو کې تعريف شوې وي يا د تابع قيمت يو حقيقي عدد وي.

لومړی مثال: د لاندې تابعګانو د تعريف ساحه (Domain) وټاکئ.

$$f(x)=\frac{1}{x-3}\quad,\quad h(x)=x^2-7x\quad,\quad K(x)=\frac{6x}{x^2-9}$$

$$g(x)=\sqrt{x}\quad,\quad R(x)=\sqrt{3x+12}$$

حل:

- د $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ تابع په $x=3$ کې تعريف شوې نه ده ځکه چې $x=3$ لپاره د تابع مخرج صفر کېږي يا د $x=3$ لپاره د تابع قيمت يو حقيقي عدد نه دی نو:

$$\mathrm{Dom}f=\{x\in IR\,/\,x\neq 3\}$$

- د $g(x)=\sqrt{x}$ په تابع کې ددې لپاره چې دتابع قيمت يو حقيقي عدد (Real number) وي،

باید $x \geq 0$ وي، نو $Dom\, g = \{x \in IR / x \geq 0\}$ یا $\operatorname{dom} g = [0\,,\,\infty)$

- $h(x) = x^2 - 7x$ په تابع کې، څرنګه چې د x د هر قیمت لپاره د $h(x)$ تابع تعریف شوی ده. نو: (د حقیقي عددونو سټ) $\operatorname{Dom} h = IR = (-\infty\,,\,\infty)$
- د $k(x) = \dfrac{6x}{x^2 - 9}$ یا $k(x) = \dfrac{6x}{(x-3)(x+3)}$ تابع د تعریف ساحه عبارت ده له:

$$Dom\, k(x) = \{x \in IR / \quad x \neq 3\,, \quad x \neq -3\}$$

- د $R(x) = \sqrt{3x + 12}$ په تابع کې باید $3x + 12 \geq 0$ وي، نو $x \geq -4$ کیږي.

$$Dom\, R = \{x \in IR / x \geq -4\} = [-4, \infty)$$

فعالیت

د لاندې تابعګانو د تعریف ساحه (Domain) پیدا کړئ.

$$f(x) = x^2 + 3x - 17 \quad , \quad g(x) = \frac{5x}{x^2 - 49} \quad , \quad h(x) = \sqrt{9x - 27}$$

دویم مثال: د $y = \sqrt{x - 3}$ د تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$$x - 3 \geq 0 \quad \Rightarrow x \geq 3$$

$$\operatorname{Dom} y = \{x \in IR / \ x \geq 3\} = [3\,,\,\infty)$$

دریم مثال: د لاندې تابعګانو د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$f(x) = \sqrt{x - 2}$, $\operatorname{Dom} f = \{x / \quad x \geq 2\}$ یا $[2, +\infty)$

$g(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 4}$, $dom\, g = IR - \{4\}$ یا $(-\infty\,,\,4) \cup (4, +\infty)$

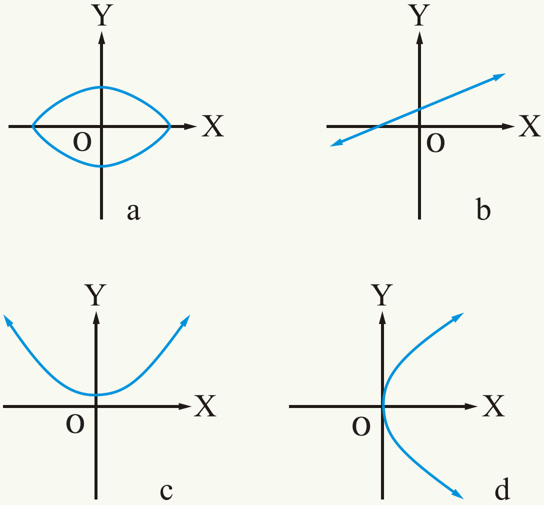
یا د سټ په شکل: $dom\, g = \{x \in IR / x \neq 4\}$

$$h(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$$

$\operatorname{Dom} h = \{x / \ x \leq -1$ یا $x \geq 3\}$ یا $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

د یوې تابع ګراف او د ګراف له مخې د یوې تابع پیژندنه
(Graph of a function and vertical line test)

په راکړل شوو شکلونو کې کوم ګراف د یوې تابع ګراف دی؟



فعالیت

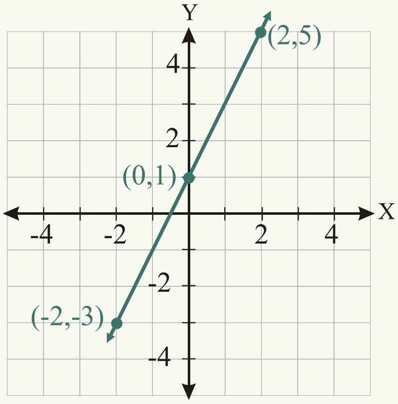
- د y له محور سره یو موازي خط رسم کړئ.
- وګورئ چې دا خط د تابع ګراف په څو نقطو کې قطع کوي؟
- که دا خط ګراف په یوه نقطه کې قطع کړي ایا دا ګراف به د یوې تابع ګراف وي؟
- که دا خط، ګراف له یوې نقطې څخه په زیاتو نقطو کې قطع کړي آیا دا ګراف به د یوې تابع ګراف وي؟

که $f(x)$ یوه حقیقي تابع وي، د $f(x)$ د تابع ګراف د $(x\ ,\ f(x))$ د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې د $y=f(x)$ په معادله کې صدق وکړي.

یا د یوې تابع ګراف د XY د مستوي د هغه نقطو سټ دی چې $\{(x,y)\ /\ y=f(x)\}$ صدق کوي چې $x\in dom\ f(x)$ وي.

لومړي مثال: د $y = f(x) = 2x+1$ د تابع ګراف رسم کړئ.

input	تابع	output	مرتبې جوړې
x	$2x+1$	$y=f(x)$	(x,y)
0	$2(0)+1$	1	$(0,1)$
2	$2(2)+1$	5	$(2,5)$
-2	$2(-2)+1$	-3	$(-2,-3)$



دويم مثال: د $f(x)=x^2+1$ او $y=-1$ تابعګانو ګراف رسم کړئ.

د تعريف او د قيمتونو ساحې يې هم پيدا کړئ.

حل:

$f(x)=x^2+1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	10	5	2	1	2	5	10

د $(3\,,10)\,,\,(2{,}5)\,,\,(1{,}2)\,,\,(0{,}1)\,,\,(-1\,,2)\,,\,(-2\,,\,5)\,,\,(-3{,}10)$ مرتبو جوړو په نظر کې نيولو سره د تابع ګراف رسم کړئ:

يا

$f(-3)=(-3)^2+1=9+1=10$

$f(-2)=(-2)^2+1=4+1=5$

$f(-1)=(-1)^2+1=1+1=2$

$f(0)=0^2+1=0+1=1$

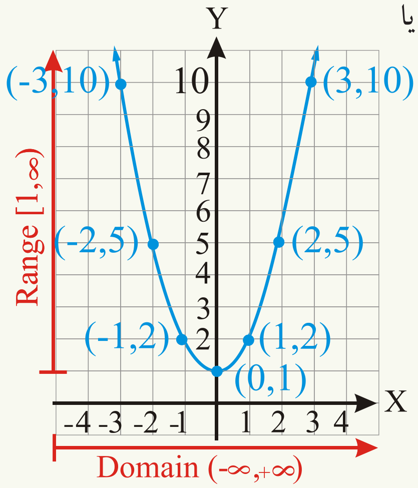
$f(1)=1^2+1=2$

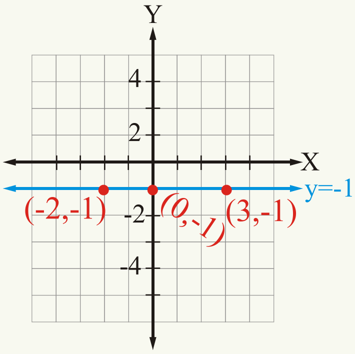
$f(2)=2^2+1=5$

$f(3)=3^2+1=10$

$\mathrm{Dom}\,f=(-\infty,+\infty)$

$\mathrm{Rang}\,f=[1,+\infty)$





$f(x) = -1$

Input	Output	مرتبه جوړه
x	$y = f(x)$	(x, y)
-2	-1	$(-2, -1)$
0	-1	$(0, -1)$
3	-1	$(3, -1)$

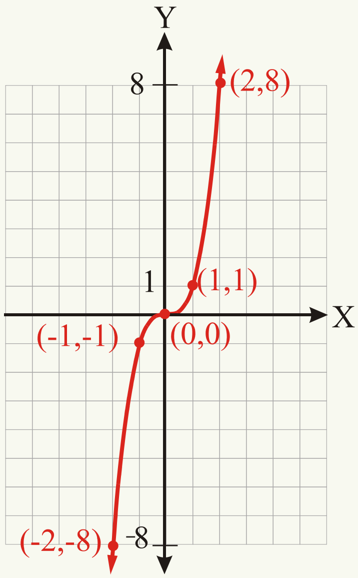
$\text{Dom } y = IR$

$\text{Range } y = -1$

فعالیت

د $f(x) = x^2 - 4$ تابع ګراف رسم کړئ.

دریم مثال: د $y = f(x) = x^3$ تابع ګراف رسم کړئ.

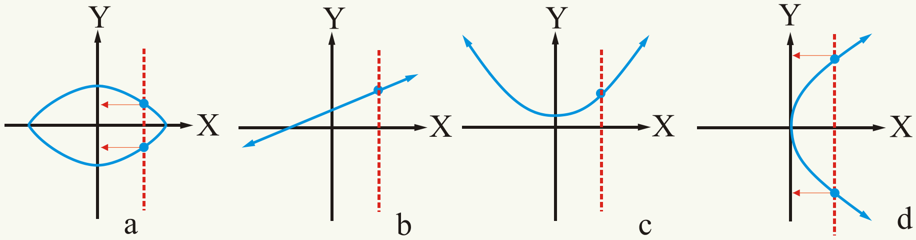


$f(x) = x^3$

x	2	1	0	-1	-2
$y = f(x)$	8	1	0	-1	-8

که يو عمودي خط (د y له محور سره موازي) يو ګراف يوازې په يوه نقطه کې قطع کړي، نو داګراف د يوې تابع ګراف دی او که له يوې نقطې څخه يې په زياتو نقطو کې قطع کړي، نو داګراف د يوې تابع ګراف نه دی.

څلورم مثال: په لاندې راکړل شوو ګرافونو کې لیدل کیږي چې b او c د تابعګانو ګرافونه دي ځکه چې عمود خط یې ګرافونه په یوه نقطه کې قطع کړي دي، لیکن د a او d ګرافونه د تابع ګرافونه نه دي، ځکه چې عمودي خط ګرافونه له یوې څخه په زیاتو نقطو (دوو نقطو) کې قطع کړي دي یا د یوه x لپاره د y یا $f(x)$ دوه قیمتونه وجود لري، نو د a او d ګرافونه د تابع ګرافونه نه دي.



د تابع د تعریف په ناحیه domain کې هغه عددونه شامل وي چې تابع په کې تعریف شوي وي یا د تابع قیمت یو حقیقي عدد وي. د یوې تابع ګراف د XY په مستوي کې د S د نقطو سټ دی، په ډې ډول چې $S=\{(x,y)\,|\,y=f(x)\}$ چې x د تابع د تعریف په ساحه کې شامل وي، که د y له محور سره موازي خط ګراف یوازې په یوه نقطه کې قطع کړي، دا ګراف د یوې تابع ګراف دی.

پوښتنې

1 - د لاندې تابعګانو د تعریف ساحې (Domain) پیدا کړئ.

$f(x)=\sqrt{x^2-9}$ ، $g(x)=2x-5$ ، $h(x)=\sqrt{x^2-4}$

$f(x)=\sqrt{x+1}$ ، $g(x)=|x-3|$ ، $h(x)=\dfrac{3}{x-4}$

$f(x)=\dfrac{7x}{x^2-16}$ ، $g(x)=\dfrac{2}{(x+3)(x-7)}$ ، $h(x)=\dfrac{4}{x^2+11x+24}$

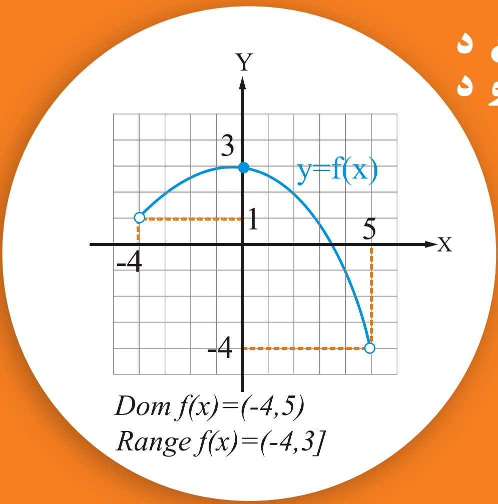
$f(x)=\dfrac{3}{x^2+4}$

2 - د $f(x)=x^2$ او $f(x)=-x^2$ د تابعګانو ګرافونه رسم کړئ.

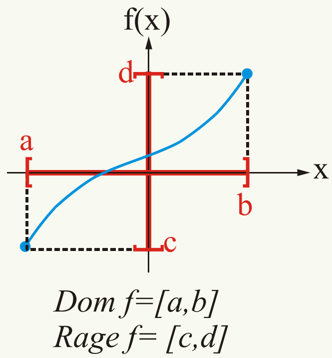
3 - د $g(x)=2x-1$ تابع ګراف رسم کړئ که $x=-3\,,\,-2\,,-1\,,0,\,1,\,2,\,3,$ وي.

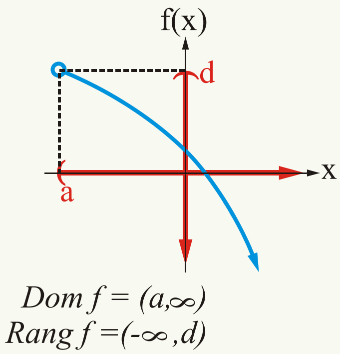
4 - د $x=y^2-2$ ګراف رسم کړئ او آیا دا د یوې تابع ګراف دی؟ ولې؟

د ګراف له مخې د يوې تابع د تعريف او قيمتونو د ناحيو او د تابع د قيمتونو پيدا کول:

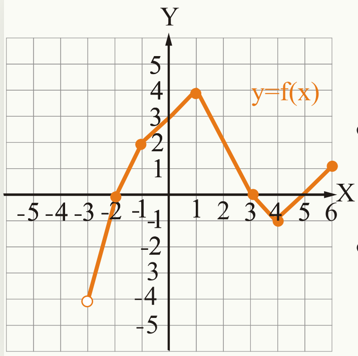


آيا د توابعو په لاندينيو راکړل شوو ګرافونو کې دتابع د تعريف ساحه (Domain) او د قيمتونو ساحه (Range) يې ټاکلای شئ؟





فعاليت



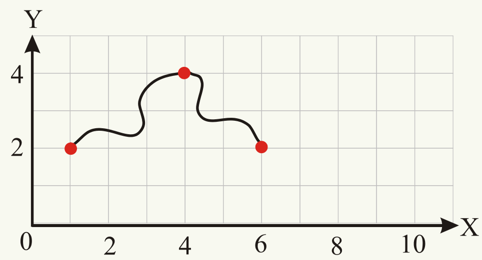
شکل وګورئ لاندينيو پوښتنو ته ځواب ورکړئ:

- د شکل له مخې د f د تعريف او قيمتونو ساحه پيداکړئ.
- آيا د 4 – عدد د f د تابع د قيمتونو په ساحه کې شامل دی؟ ولې؟
- آيا د 3 – عدد د f د تعريف په ساحه کې شامل دی؟ ولې؟

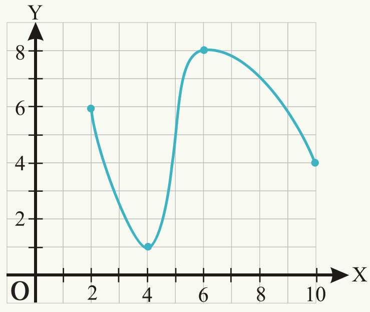
• آیا د 6 عدد د f د تعریف په ساحه کې شامل دی؟

لیدل کیږي چې $f(-1)=2$ او $f(1)=4$ دي او هم د شکل له مخې د تابع د تعریف ساحه له -3 څخه تر 6 پورې ده، لیکن $-3\notin dom\ f$ او $6\in dom\ f$، نو $dom\ f=(-3,6]$ او په همدې ډول د f(x) تابع د قیمتونو ساحه (Range) له -4 څخه تر 4 پورې ده خو $-4\notin Range\ f$ نو $Range\ f=(-4\ ,4]$.

لومړی مثال: په راکړل شوو شکلونو کې د تابعګانو د تعریف او د قیمتونو ساحې پیداکړئ.



(1)



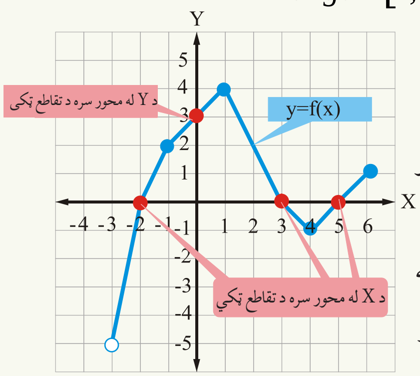
(2)

حل:

د لومړي شکل په ګراف کې د تعریف ساحه د 1 او 6 تر منځ ټول حقیقي عددونه دي او د قیمتونو ساحه یې د 2 او 4 تر منځ ټول حقیقي عددونه دي یا: $1\leq x\leq 6$ او $2\leq y\leq 4$

د (2) شکل په ګراف کې $2\leq x\leq 10$ یا $Dom=[2\ ,10]$

$Range=[1\ ,8]$ یا $1\leq y\leq 8$



دویم مثال: لاندې شکل په پام کې ونیسئ.

• $f(-2)$ ، $f(3)$ او $f(5)$ پیداکړئ.

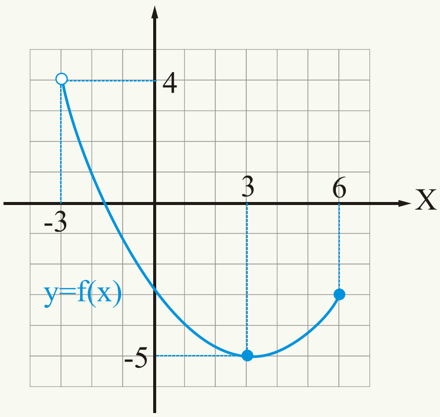
• د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د X له محور سره د ګراف د تقاطع په ټکي کې $y=0$ وي نو $f(-2)=0\ ,\ f(3)=0$ او

$f(5)=0$ دي، نوګراف د X محور د $(-2,0)$ ، $(3,0)$ او $(5\ ,\ 0)$ په نقطوکې قطع کوي.

خرنګه چې د y له محور سره د ګراف د تقاطع په ټکي کې $x=0$ دی $f(0)=3$ ، نوګراف د y محور د $(0,3)$ په نقطه کې قطع کوي.

دریم مثال: په لاندې شکل کې د f تابع Domain او Range پیدا کړئ او f (3) او f (6) هم په لاس راوړئ.



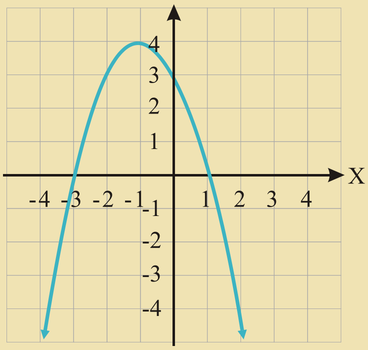
حل: لیدل کیږي چې د تعریف ساحه یې له 3 - څخه تر 6 پورې ده، خو 3 - د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

$$Domain\ f(x) = -3 < x \leq 6 \text{ یا } (-3\ ,6]$$

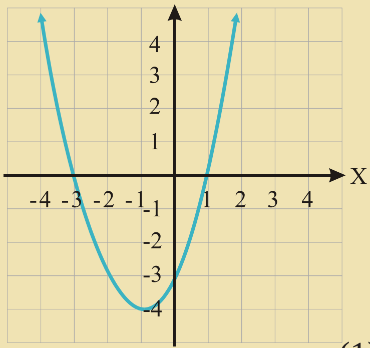
او د قیمتونو ساحه یې: $[-5\ ,\ 4)$ یا $\mathrm{Range}\, f(x) = -5 \leq y < 4$ ، $f(6)=-3$ او $f(3)=-5$ ده.

پوښتني

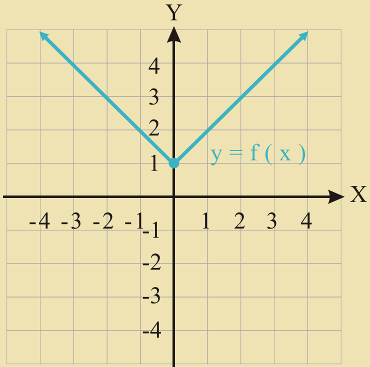
په راکړل شوو شکلونو کې:



(2)



(1)



(3) $f(-1)=?$ $f(3)=?$

a- د تابع د تعریف ساحه

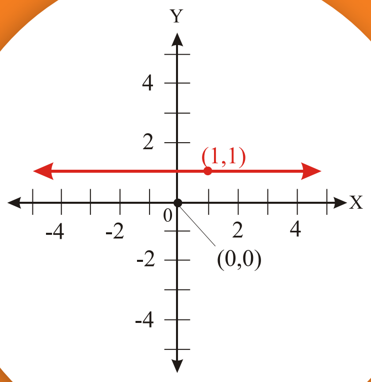
b- د تابع د قیمتونو ساحه

c- د X له محور سره د ګراف د تقاطع ټکي

d- د Y له محور سره دتقاطع ټکي او په دریم شکل کې د تابع غوښتل شوي قیمتونه پیدا کړئ.

ځيني خاصې تابعګانې:

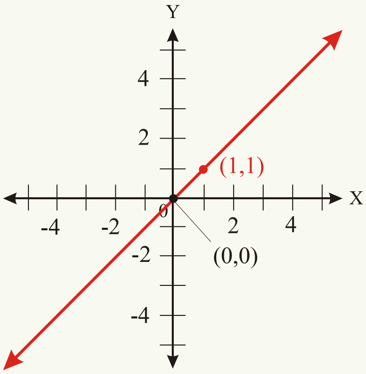
د هغو تابعګانو نومونه واخلی چې ګرافونه يې راکړل شوي دي



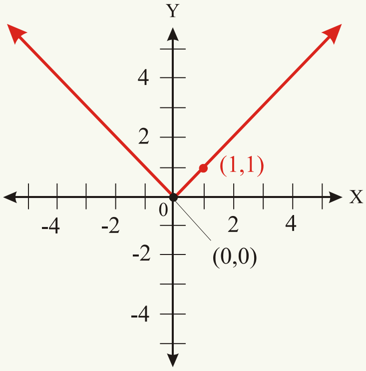
$f(x)=1$

توابع ډير ډولونه لري چې ځيني خاصې تابعګانې ترڅيرنې لاندې نيسو:

ثابته تابع، د عينيت تابع، د مطلقه قيمت تابع، څو معادله يي تابع او د علامې تابع



$f(x)=x$



$f(x)=|x|$

فعاليت

- ثابتې تابع ته ولې ثابته تابع وايي؟
- آيا د عينيت تابع د تعريف او د قيمتونو ساحې سره مساوي وي؟
- آيا د مطلقه قيمت د تابع د قيمتونو ساحه منفي قيمتونه اخيستلای شي؟

ثابته تابع (Constant Function)

که x او y د حقیقي عددونو ستونه وي، د $f : x \to y$ یا $f(x) = y$ په تابع کې چې y له یوه ثابت عدد سره مساوي وي یا $y = f(x) = c$ چې (c) یو ثابت عدد دی، نو د y ثابتې تابع په نوم یادیږي.

د مثال په ډول: $f(x) = 2$, $f(x) = -3$ او $f(x) = -2$ او داسې نورې ثابتې تابعګانې دي.

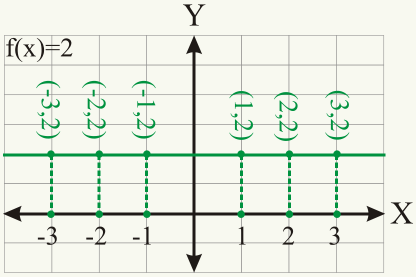
لومړی مثال: $f(x) = 2$ او $f(x) = -2$ تابعګانو ګرافونه رسم کړئ.

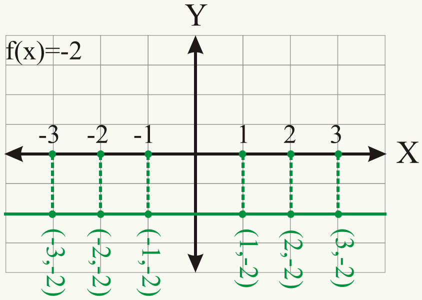
$f(x) = 2$

x =	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	2	2	2	2	2	2

$f(x) = -2$

x =	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	−2	−2	−2	−2	−2	−2

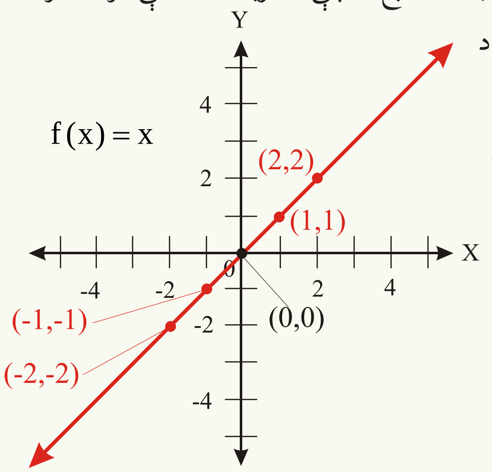




په دې معنا چې په ثابته تابع کې د تعریف د ساحې د هر عنصر تصویر یو ثابت عدد دی.

د عینیت تابع (Identity function): هغه تابع ده چې د تعریف د ساحې هر عنصر ته د خپل ځان سره ارتباط ورکړي یا $f(x) = x$ د عینیت د تابع په نامه یادیږي.

مثال: د $f(x) = x$ د تابع ګراف رسم کړئ.



$f(x) = x$

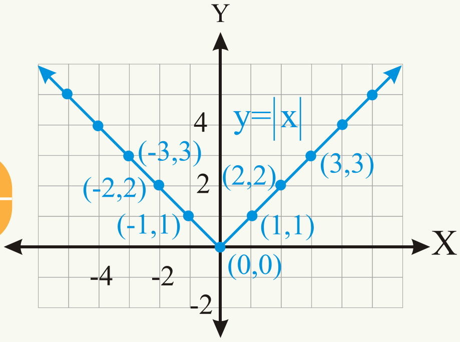
x =	0	1	2	−1	−2	...
f(x) =	0	1	2	−1	−2	...

د مطلقه قیمت تابع (Absolute value function)

د مطلقه قیمت تابع $f(x)=|x|$ په لاندې ډول تعریف شوی ده:

$$f(x)=\begin{cases} x & , \ x\geq 0 \\ -x & , \ x<0 \end{cases}$$

لومړی مثال: د $f(x)=|x|$ د تابع ګراف رسم کړئ.



$f(x)=|x|$

$x=$	0	1	2	3	-1	-2	-3
$f(x)=$	0	1	2	3	1	2	3

لیدل کیږي چې د مطلقه قیمت د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ساحه یې $[0,\infty)$ ده.

څو معادله یي تابع (Piecewise function) او ګراف یي

ایا کېدای شي چې یوه تابع د تعریف په ساحه کې د دوو یا څو معادلو په واسطه تعریف شوې وي؟

لومړی مثال: که $f(x)=\begin{cases} 2x+3 : x<4 \\ x^2-1 : 4\leq x\leq 10 \end{cases}$ وي، نو $f(-5)$، $f(8)$ او د f تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $-5<4$ دی، نو په لومړی معادله کې وضع کیږي، لرو چې:

$$f(-5)=2(-5)+3=-10+3=-7$$

او څرنګه چې د 8 عدد د 4 او 10 ترمنځ واقع دی $4<8<10$ نو په دویمه معادله کې وضع کیږي لرو چې:

$$f(8)=8^2-1=64-1=63$$

د f تابع د تعریف ساحه په لومړی معادله کې $(-\infty\ ,\ 4)$ او په دویمه معادله کې $[4\ ,\ 10]$ ده، نو د

f د تعریف ساحه د $(-\infty, 10]$ څخه عبارت ده.

فعالیت

که چېرې $g(x)=\begin{cases}-\frac{11}{60}x+15 & : 0\le x<60\\ \frac{1}{5}x-8 & : 60\le x\le 90\end{cases}$ وي،

وښایاست چې $g(80)=8$ او $g(30)=9.5$ دی.

د څو معادله یې تابع ګراف (Graph of function defined piecewise)

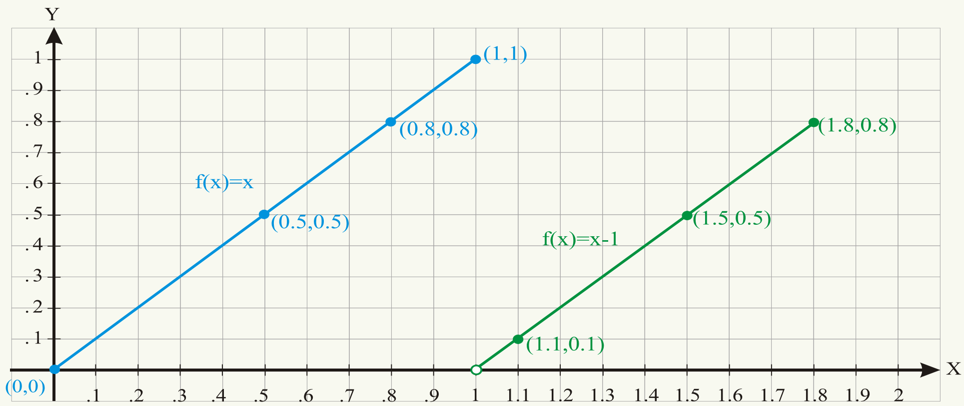
دویم مثال: د f (x) تابع د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا کړې او ګراف یې هم رسم کړئ که:

$f(x)=\begin{cases}x : 0\le x\le 1\\ x-1 : 1<x\le 2\end{cases}$ وي.

حل: د لومړی معادلې د تعریف ساحه $[0,1]$ او د دویمې معادلې د تعریف ساحه $[1,2]$ ده چې

په نتیجه کې د f (x) د تعریف ساحه $[0,2]$ ده.

د ګراف د رسمولو لپاره، د دواړو برخو ګراف رسموو په دې ډول:



$y = f(x) = x - 1$

x	1,1	1,5	1,8
$f(x)$	0,1	0,5	0,8

$y = f(x) = x$

x	0	0.5	0.8	1
y = f(x)	0	0.5	0.8	1

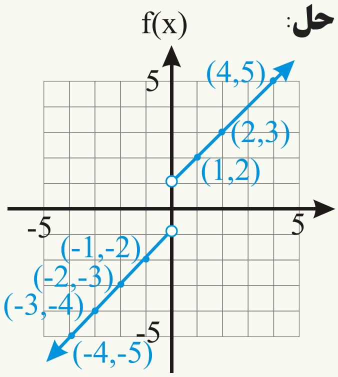
په نتیجه کې دوه مستقیم خطونه په لاس راځي چې دواړه د f (x) د تابع ګراف دی.

فعالیت

که: $f(x) = \begin{cases} x \Leftarrow 0 \le x \le 4 \\ x - 1 \Leftarrow 0 < x < -4 \end{cases}$ وي، $f(0), f(-2), f(2)$ پیداکړئ او ددې تابع ګراف هم رسم کړئ.

دریم مثال: د $f(x) = \begin{cases} x - 1 \Leftarrow x < 0 \\ x + 1 \Leftarrow x > 0 \end{cases}$ د تابع ګراف رسم د تعریف او د قیمتونو ساحې یې وټاکئ.

حل:



x	1	2	4	-1	-2	-3	-4
$f(x)$	2	3	5	-2	-3	-4	-5

لیدل کیږي چې د تابع د تعریف په ساحه کې صفر شامل نه دی $(x \ne 0)$ یا

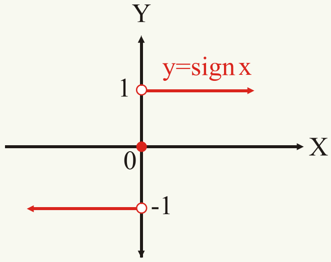
$Dom\ \ f(x) = (-\infty\ ,\ 0) \cup (0, \infty)$ او د قیمتونو ناحیه (Range) یې عبارت دی له:

$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ یا $y > 1$ او $y < -1$

د علامې تابع (Sign Function): د علامې تابع چې په sgn (x) سره ښودل کیږي د خو معادله یي تابع یو مثال دی چې په لاندې ډول تعریف شوی ده:

دې تابع د تعریف ناحیه د حقیقي عددونو سټ او د قیمتونو ساحه $\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & : x>0\\ 0 & : x=0\\ -1 & : x<0\end{cases}$

(Range) يې $\{-1,0,1\}$ ده.



$$Dom_{sgn}=IR \qquad Range_{sgn}=\{-1\,,\,0\,,1\}$$

$f(x)=c$ ثابته تابع ، $f(x)=x$ د عینیت تابع او $f(x)=|x|$ د مطلقه قیمت تابع ده، چې د تعریف ساحه یې ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ساحه یې صفر او مثبت حقیقي عددونه دي.

د علامې تابع دا ډول تعریف شوې ده:

$$f: IR\rightarrow IR \quad , \quad Sgn(x)=\begin{cases}1 & : x>0\\ 0 & : x=0\\ -1 & : x<0\end{cases}$$

چې د علامې د تابع د تعریف ساحه د حقیقي عددونو سټ او د قیمتونو ساحه یې $\{-1,0,1\}$ ده.

پوښتنې

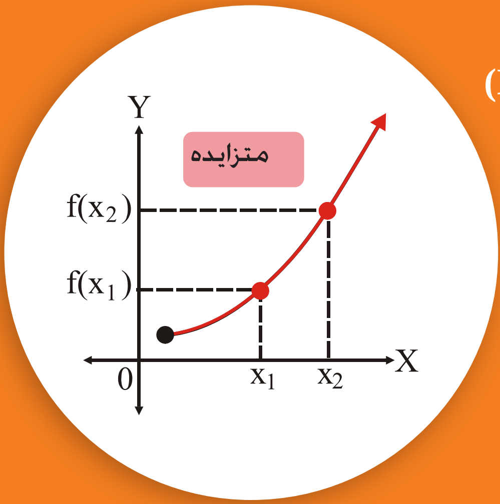
1- د $f(x)=-5$ ، $g(x)=\frac{1}{2}$ او $h(x)=4$ د تابعګانو ګرافونه رسم کړئ.

2 – د $f(x)=|x|-3$ د تابع ګراف رسم کړئ.

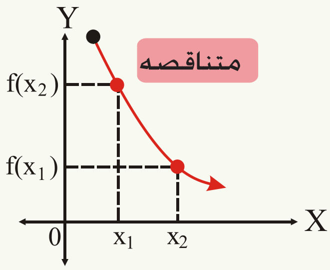
3- که $f(x)=\begin{cases}-x : x<0\\ x : x\geq 0\end{cases}$ وي $f(0)$, $f(-2,3)$ او $f(16)$ پیداکړئ.

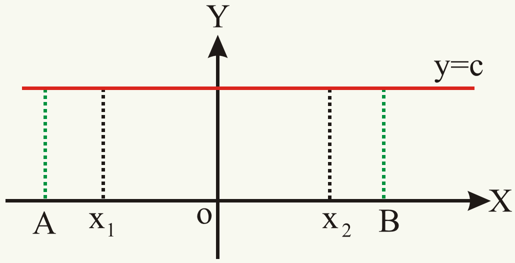
4- که $h(x)=\begin{cases}x+1 : -1\leq x<0\\ -x+1 : 0\leq x\leq 1\end{cases}$ وي د $h(x)$ تابع د تعریف ساحه پیداکړئ.

متزايدي او متناقصي تابعګاني
(Increasing and decreasing functions)



- په راکړل شوو ګرافونو کې کوم ګراف د متزايدی تابع ګراف دی؟
- کوم ګراف د متناقصی تابع ګراف دی؟
- کوم ګراف نه متزايد دی او نه متناقص؟





1 – یوه تابع په یوه انټروال کې متزایده ده که $x_1 < x_2$ وي، په نتیجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي.

2 – یوه تابع په یوه انټروال کې متناقصه ده که $x_1 < x_2$ وي، په نتیجه کې $f(x_1) > f(x_2)$ شي.

3 – که $x_1 < x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) = f(x_2)$ شي دا تابع نه متناقصه ده او نه متزایده.

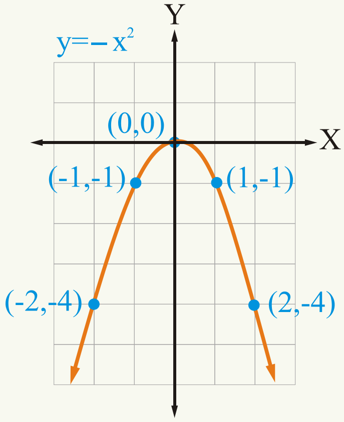
لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کیږي یا دا ثابته تابع ده.

مثال: د $f(x) = x^2$ او $f(x) = -x^2$ د تابعګانو ګراف په کومو انټروالو کې متزاید او په کومو انټروالو کې متناقص دی؟

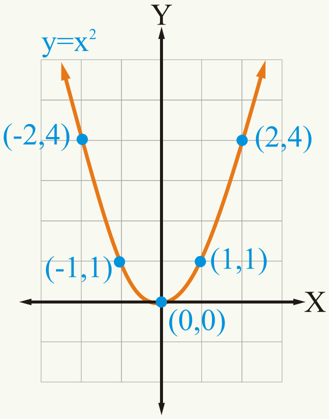
x	0	1	−1	2	−2
$f(x) = -x^2$	0	−1	−1	−4	−4

x	0	1	−1	2	−2
$f(x) = x^2$	0	1	1	4	4

$$-1<2$$
$$f(-1)>f(2)$$
$$-1>-4$$



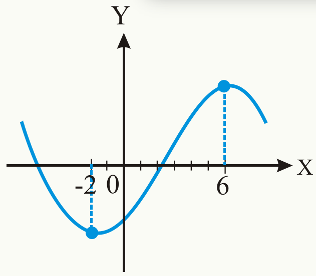
$$-1<2$$
$$f(-1)<f(2)$$
$$1<4$$



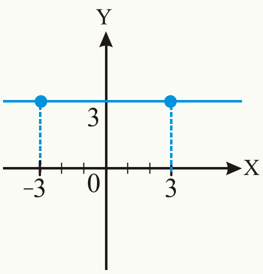
لیدل کیږي چې د $f(x)=x^2$ تابع د $(-\infty,0)$ په انټروال کې متناقصه او د $(0\ ,\ \infty)$ په انټروال کې متزایده ده، لیکن د $f(x)=-x^2$ د $(-\infty,0)$ په انټروال کې متزایده او د $(0,\infty)$ په انټروال کې متناقصه ده.

فعالیت

په راکړل شوو شکلونو کې د تابع ګراف په کومو انټروالو کې متزاید په کومو کې متناقص دی، کوم ګراف نه متزاید او نه متناقص دی؟



(a)



(b)

جفتي او طاقي تابعګانې (Even and Odd Functions):

1– د $f(x)$ تابع یوه جفته تابع ده که چیرې $f(-x)=f(x)$ وي، په دې معنا که په تابع کې د x پر ځای x– عوض کړو، د تابع په قیمت کې تغیر رانه شي.

2- د $f(x)$ تابع یوه طاقه تابع ده که چیرې $f(-x)=-f(x)$ وي یا دا چې که په تابع کې د

x پر ځای x− عوض کړو، د تابع قیمت منفي شي.

لومړی مثال: د $f(x)=x^2$ او $f(x)=x^3$ په تابعګانو کې کومه تابع جفته او کومه یوه طاقه ده؟

حل: په دواړو تابعګانو کې

د x پر ځای x − عوض کوو:

$$f(-x)=(-x)^3=(-x)(-x)(-x)=-x^3$$

نو د $f(x)=x^3$ تابع یوه طاقه تابع ده،

ځکه چې $f(-x)=-f(x)$ کیږي لکه

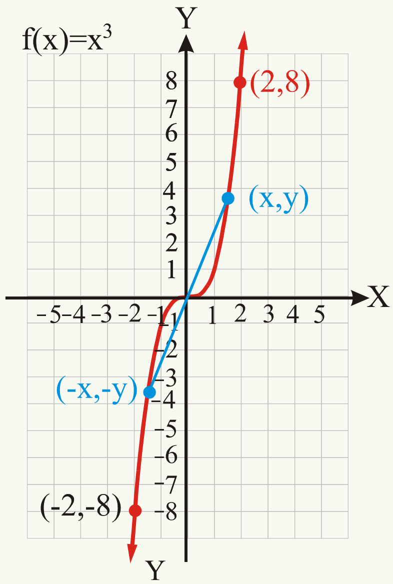
$f(-2)=-f(2)=-8$ او د $f(x)=x^2$ په تابع کې لرو چې:

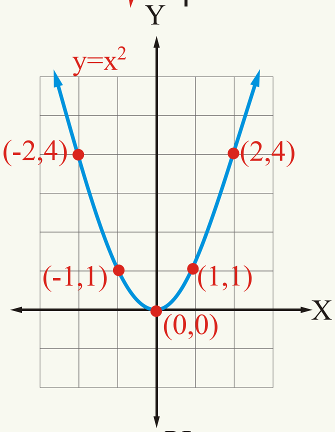
$$f(-x)=(-x)^2=(-x)(-x)=x^2$$

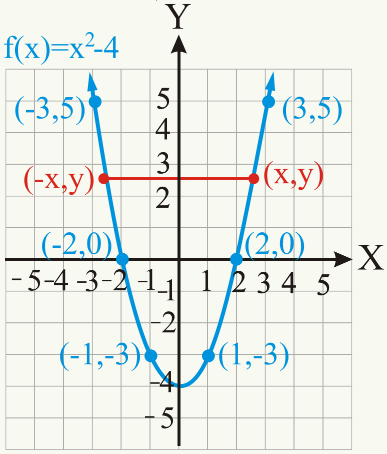
نو $f(x)=x^2$ یو جفته تابع ده، ځکه چې

$f(-x)=f(x)$ کیږي لکه: $f(-2)=f(2)=4$

لیدل کیږي چې د جفتو تابعګانو ګرافونه نظر د Y محور ته او د طاقو تابعګانو ګرافونه نظر د وضعیه کمیاتو مبدا ته سره متناظر دي.







دویم مثال: د $f(x)=x^2-4$ او $g(x)=x^2+3x+2$ په تابعګانو کې کومه یوه جفته او کومه یوه طاقه ده؟

حل:

$$f(-x)=(-x)^2-4=x^2-4=f(x)$$

نو دا تابع جفته ده، په شکل کې هم لیدل کیږي، دوه نقطې د (3,5) او (−3,5) د تابع د $x=3$ او $x=-3$ لپاره د تابع قیمت سره مساوي دی چې د (5) عدد دی.

یعني: $f(-3) = f(3) = 5$

همدارنګه د $x = 2$ او $x = -2$ لپاره د تابع قیمت سره مساوي دی چې صفر دی، نو په نتیجه کې تابع جفته ده.

$$g(x) = (-x)^2 + 3(-x) + 2 = x^2 - 3x + 2$$

چې دا تابع نه جفته او نه طاقه ده.

دریم مثال: که f له حقیقي عددونو څخه حقیقي عددونو ته یوه طاقه تابع وي او $f(-2) = k + 5$ او $f(2) = 2k + 3$ وي، د k قیمت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې f یوه طاقه تابع ده نو: $f(-x) = -f(x)$

د طاقې تابع د تعریف په اساس: $f(-2) = -f(2)$

$$k + 5 = -(2k + 3)$$

$$k + 5 = -2k - 3$$

$$3k = -8$$

$$k = -\frac{8}{3}$$

که د $f(x)$ په تابع کې $x_1 < x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي تابع متزایده او که $x_1 < x_2$ وي او $f(x_1) > f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده که $f(-x) = f(x)$ وي تابع جفته او که $f(-x) = -f(x)$ شي تابع طاقه ده د جفتو تابعګانو ګراف نظر د Y محور ته او د طاقو تابعګانو ګراف نظر د وضعیه کمیاتو مبدا ته سره متناظر وي.

پوښتنې

1- د لاندینیو تابعګانو څخه کومه یوه یې متزایده، کومه یوه یې متناقصه او کومه یوه نه متزایده او نه متناقصه ده؟

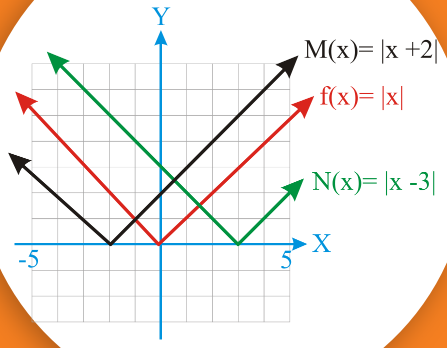
$$f(x) = x^3 + x \quad , \quad f(x) = x^2 + x \quad , \quad f(x) = x^2 - x^4$$

2- د لاندینیو راکړ شوو تابعګانو څخه کومه یوه جفته او کومه یوه طاقه ده؟

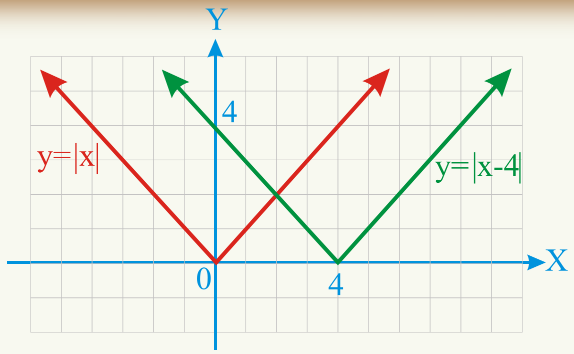
$$f(x) = x \quad , \quad f(x) = |x|$$

$$f(x) = x^4 \quad , \quad f(x) = x^5$$

انتقال (Translation)



آیا کولای شئ چې ووایئ راکړل شوي ګرافونه یو له بله سره څه اړیکه لري؟



فعالیت

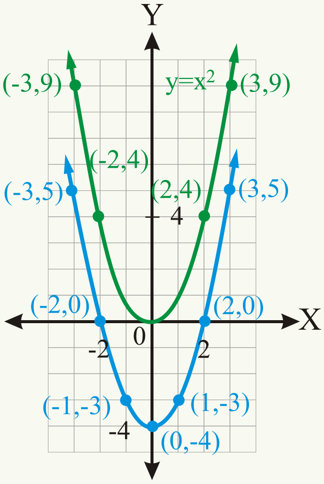
- د $f(x)=x^2$ د تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=x^2+4$ د تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=x^2-4$ د تابع ګراف رسم کړئ.
- وواياست چې پورتني ګرافونه یو له بله څه ډول اړيکه لري؟

که د $f(x)=x^2$ ګراف رسم کړو، ښتګه کولای شو د $f(x)=x^2$ د ګراف له انتقال څخه د $f(x)=x^2-4$ د تابع ګراف رسم کړو؟

د $y=x^2$ د ګراف د (x,y) د هرې نقطې لپاره د $(x,y-4)$ اړونده نقطه د $y=x^2-4$ په ګراف واقع ده، نو د $y=x^2$ د ګراف هره نقطه د 4 واحدو په اندازه ښکته خواته انتقال کوي تر څو د $y=x^2-4$ ګراف لاس ته راشي. لکه څنګه چې په شکل کې لیدل کیږي، دا انتقال

د عمودي انتقال (Vertical Transltion) په نوم یادیږي.

انتقال په دوه ډوله دی: عمودي انتقال او افقي انتقال.



1- **عمودي انتقال** (Vertical Translation):

عمودي انتقال پورته او یا ښکته خواته وي.

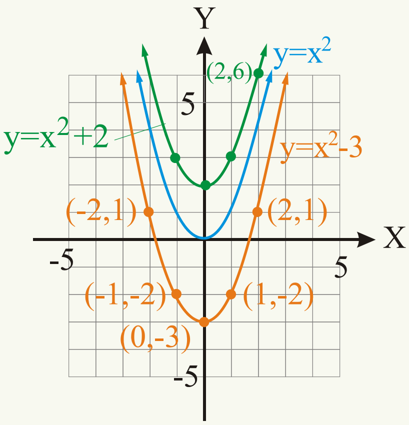
که $c > 0$ وي:

1: که د $y = f(x)$ د تابع ګراف د c په اندازه پورته خواته انتقال شوي وي، نو د $y = f(x) + c$ ګراف لاس ته راځي.

2: که د $y = f(x)$ د تابع ګراف د c په اندازه ښکته خواته انتقال شوي وي، نو د $y = f(x) - c$ ګراف لاس ته راځي.

لومړی مثال: د $y = x^2 + 2$ او $y = x^2 - 3$ تابعګانو ګرافونه د $y = x^2$ د تابع له ګراف سره څرنګه اړیکه لري؟ دری واړه ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ.

حل: د $y = x^2$ د تابع ګراف د (2) واحدو په اندازه پورته خواته انتقالوو، ترڅو د $y = x^2 + 2$ د تابع ګراف په لاس راشي او که د $y = x^2$ تابع ګراف د (3) واحدو په اندازه ښکته خواته نقل کړو، د $y = x^2 - 3$ ګراف لاس ته راځي:



x =	0	1	2	-1
$y = x^2$	0	1	4	1
$y = x^2 + 2$	2	3	6	3
$y = x^2 - 3$	-3	-2	1	-2

یا عمودي انتقال داسې هم تعریفولای شو:

که د تابع په ګراف کې د y پر ځای $y - a$ وضع کړو a یو ثابت عدد دی، نو ګراف د $|a|$ په اندازه په عمودي ډول انتقال کوي که $a > 0$ وي، انتقال په عمودي ډول پورته خواته او که $a < 0$ وي ګراف د $|a|$ په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال کوي.

دويم مثال: د $y = x^2$ د ګراف له انتقاله څخه د $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 2$ ، $y = x^2 + 4$ او $y = x^2 - 4$ تابعګانو ګرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم او يو له بله سره يې پرتله کړي.

$y = x^2$

x	y
0	0
± 1	1
± 2	4

$y = x^2 + 2$

x	y
0	2
± 1	3
± 2	6

$y = x^2 + 4$

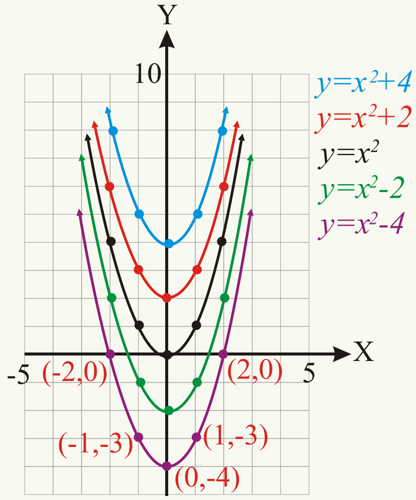
x	y
0	4
± 1	5
± 2	8

$y = x^2 - 2$

x	y
0	-2
± 1	-1
± 2	2

$y = x^2 - 4$

x	y
0	-4
± 1	-3
± 2	0



افقي انتقال: (Horizontal Translation)

که د تابع په ګراف کې د x پر ځای x − b وضع شي چې b يو ثابت عدد دی. د تابع ګراف د $|b|$ په اندازه په افقي ډول انتقال کوي، که $b > 0$ وي ګراف ښي خواته او که $b < 0$ وي، ګراف کيڼې خواته انتقال کوي.

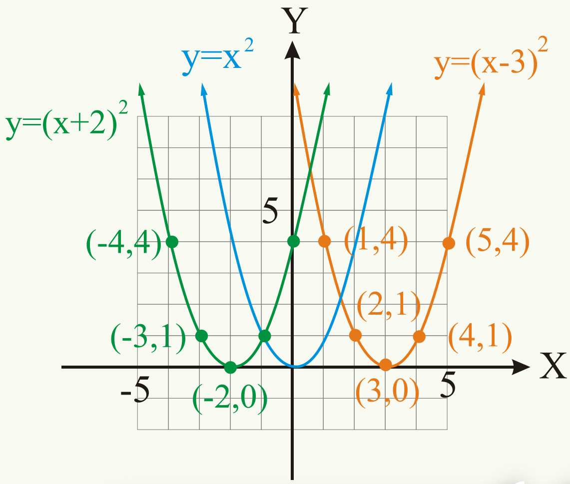
درېيم مثال: د $y = x^2$ ګرا ف له انتقال څخه د $y = (x+2)^2$ او $y = (x-3)^2$ ګرافونه رسم کړئ.

حل: لکه څنګه په شکل کې ليدل کيږي چې که د $y = x^2$ د تابع ګراف د 2 واحدو په اندازه

کېښې خواته انتقال کړو، د $y=(x+2)^2$ ګراف لاس ته راځي، که د $y=x^2$ ګراف 3 واحده ښې خواته انتقال کړو، د $y=(x-3)^2$ د تابع ګراف لا س ته راځي، لکه څنګه چې په شکل کې هم ليدل کېږي.

x	-2	0	-1	-3	-4 ....
$y=(x+2)^2$	0	4	1	1	4 ....

x =	3	4	2	5	1 ....
$y=(x-3)^2$	0	1	1	4	4 ....



فعاليت

د $f(x)=|x|$ د ګراف له انتقال څخه د $g(x)=|x+2|$ او $h(x)=|x-3|$ تابعګانو ګرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم کړئ.

د عمودي او افقي انتقالونو ترکيب:

(Combining Horizontal and Vertical Shifts)

څلورم مثال: د $g(x)=(x+1)^2$ او $h(x)=(x+1)^2-3$ د تابعګانو ګرافونه رسم کړئ.

حل: لومړی د $f(x)=x^2$ د تابع ګراف رسموو چې د دويمې درجې تابع د معياري ګراف په نامه ياديږي لومړی د ګراف پر مخ د $(0,0)$ ، $(2,4)$ او $(-2,4)$ درې نقطې ټاکو.

بیا د $g(x)=(x+1)^2$ تابع ګراف رسموو چې د $f(x)=x^2$ د تعریف له ساحې سره د (1) عدد جمع کوو، ترڅو چې د $f(x)=x^2$ ګراف کیڼې خواته د یو واحد په اندازه نقل شي چې په دویم شکل کې ښودل شوی دی. په پای کې د $f(x)=(x+1)^2-3$ د ګراف د رسمولو لپاره د دویم شکل ګراف د 3 واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقالوو چې ګراف یې په دریم شکل کې ښودل شوی دی:

$f(x)=x^2$

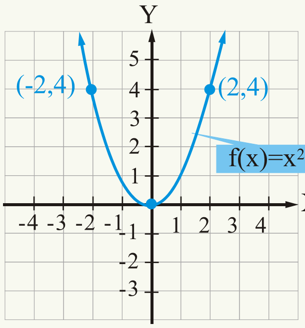
x	0	2	-2
f(x)	0	4	4

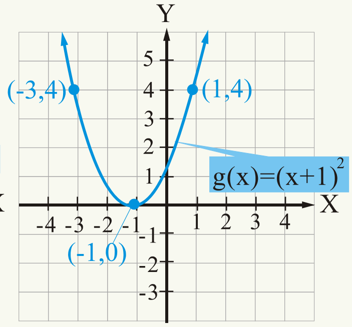
$g(x)=(x+1)^2$

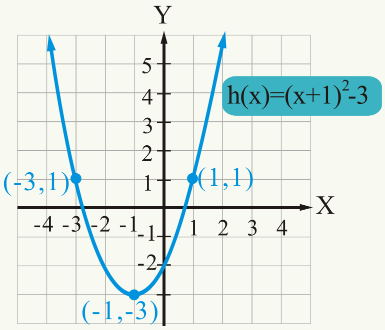
x	-1	1	-3
f(x)	0	4	4

$f(x)=(x+1)^2-3$

x	1	-3	-1
f(x)	1	1	-3

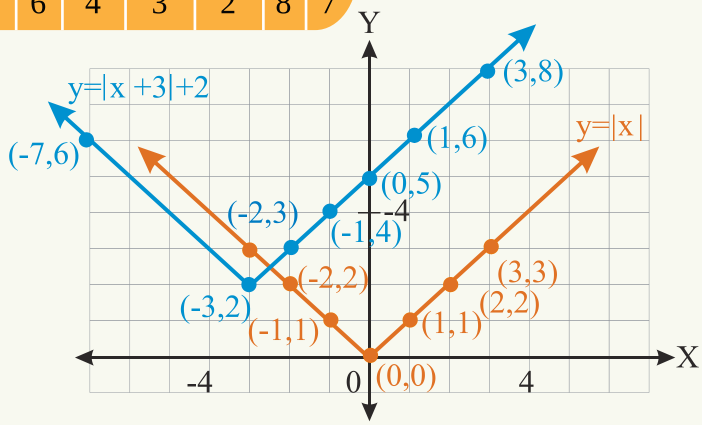






پنځم مثال: د $y=|x|$ د تابع ګراف له انتقال کولو څخه د $y=|x+3|+2$ د تابع ګراف رسم کړئ.

x	0	1	-1	-2	-3	3	2
$y=\|x\|$	0	1	1	2	3	3	2
$y=\|x+3\|+2$	5	6	4	3	2	8	7



انتقال په (2) ډول دی، (عمودي او افقي)

عمودي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

1- که چیرې د $y = f(x)$ د تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته انتقال شي د $y = f(x+c)$ د تابع ګراف لاس ته راځي.

2- که د $y = f(x)$ د تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال شي د $y = f(x)-c$ د تابع ګراف لاس ته راځي.

افقي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

1- که د $y = f(x)$ د تابع ګراف د c واحدونو په اندازه کیڼې خواته انتقال شي، د $y = f(x+c)$ ګراف لاس ته راځي.

2- که د $y = f(x+c)$ د تابع ګراف د c واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شي د $y = f(x-c)$ د تابع ګراف لاس ته راځي.

پوښتنې

1- د $y = x^2$ د تابع ګراف له انتقال څخه د لاندینیو تابعګانو ګرافونه رسم کړئ.

$$g(x) = x^2 - 2 \;,\; g(x) = (x-2)^2 \;,\; g(x) = x^2 - 1 \;,\; g(x) = (x-2)^2 + 1$$

2- د $f(x) = \sqrt{x}$ تابع ګراف رسم کړئ او ددې له انتقال څخه د $f(x) = \sqrt{x} + 2$ او $f(x) = \sqrt{x+2}$ تابعګانو ګرافونه رسم کړئ.

3- د $f(x) = |x|$ د تابع ګراف رسم کړئ او ددې ګراف له انتقال څخه د $g(x) = |x| + 4$, $g(x) = |x+4|$ او $h(x) = |x-4|$ تابعګانو ګرافونه رسم کړئ.

4- د $f(x) = x^3$ د تابع ګراف له انتقال څخه د $g(x) = x^3 - 3$ او $g(x) = (x-3)^3$ تابعګانو ګرافونه رسم کړئ.

$$f(x)=\sqrt{4-x}$$
$$g(x)=\sqrt{3+x}$$
$$(f+g)(x)=?$$

د تابعګانو عملیې
(Operations on functions)

که $f(x)=x+2$ او $g(x)=2x+11$ وي $(f+g)(x)$ او $(f-g)(x)$ پیداکړئ.

د تابعګانو خلورګونې عملیې په لاندې ډول تعریف شوي دي:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad (f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x).\,g(x) \qquad (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x)\neq 0)$$

$$\text{dom}\,(f+g)(x)=\text{dom}\ f \cap \text{dom}\,g$$
$$\text{dom}\,(f-g)(x)=\text{dom}\ f \cap \text{dom}\,g$$
$$\text{dom}\,(f\cdot g)(x)=\text{dom}\ f \cap \text{dom}\,g$$
$$\text{dom}\,(\frac{f}{g})(x)=\text{dom}\ f \cap \text{dom}\,g - \{x/g(x)=0\}$$

لومړی مثال: که $f(x)=2x+1$ او $g(x)=x^2-4$ وي، $(f+g)(x)$ او د $(f+g)(x)$ د تابعګانو د تعریف ساحې پیداکړئ.

حل:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f+g)(x)=(2x+1)+(x^2-4)=2x-3+x^2=x^2+2x-3$$
$dom\ g=IR$ او $dom\ f=IR$
$$dom(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$$

دویم مثال: که $f(x)=x^2-3$ او $g(x)=4x+5$ وي، $(f+g)(x)$ او $(f+g)(3)$ پیداکړئ.

حل:

$$(f+g)(x)=(x^2-3)+(4x+5)=x^2+4x+2$$
$$(f+g)(3)=3^2+4(3)+2=9+12+2=23$$
$\text{dom } g=IR$ و $\text{dom } f=IR$
$$\text{dom}(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$$

فعالیت

که $f(x)=3x^2+4x-1$ او $g(x)=2x+7$ وي، $(f+g)(x)$ او $(f+g)(4)$ پیداکړئ.

دریم مثال: که $f(x)=2x-1$ او $g(x)=x^2+x-2$ وي، $(f-g)(x)$ $(f\cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})(x)$ پیداکړئ او د تعریف ساحې يې هم وټاکئ.

حل:

$$(f-g)(x)=(2x-1)-(x^2+x-2)=2x-1-x^2-x+2=-x^2+x+1$$

خرنګه چې $dom\, f=IR$ او $dom\, g=IR$

$$dom(f-g)(x)=IR\cap IR=IR$$
$$(f\cdot g)(x)=(2x-1)(x^2+x-2)=2x^3+x^2-5x+2$$
$$dom(f\cdot g)(x)=IR\cap IR=IR$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{2x-1}{x^2+x-2}=\frac{2x-1}{(x+2)(x-1)}$$
$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x)=IR\cap IR-\{x/g(x)=0\}$$
$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x)=\{x/x\neq-2 \text{ او } x\neq 1\}$$

فعالیت

که $f(x)=x-5$ او $g(x)=x^2-1$ وي، نو $(\frac{f}{g})(x)$، $(f\cdot g)(x)$ او $(f-g)(x)$ پیداکړئ.

خلورم مثال: که $f(x)=x+3$ او $g(x)=x-1$ وي، $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x+3-(x-1)=x+3-x+1=4$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x+3)(x-1)=x^2+2x-3$$

خرنگه چې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې ټول حقیقي عددونه شامل دي (x هر حقیقي عدد اخیستلای شي) یا $dom\ f=IR$ په همدې ډول: $dom\ g=IR$

$$dom(f-g)(x)=IR\bigcap IR=IR$$
$$dom(f\cdot g)(x)=IR\bigcap IR=IR$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+3}{x-1}\quad(x\neq 1)$$
$$dom(\frac{f}{g})(x)=IR-\{1\}$$

یا
$$dom(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\neq 1\}$$

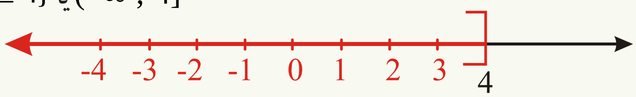
یا
$$dom(\frac{f}{g})(x)=(-\infty,1)\bigcup(1,\infty)$$

پنځم مثال: که $f(x)=\sqrt{4-x}$ او $g(x)=\sqrt{3+x}$ وي، $f+g$ ، $f-g$ $f\cdot g$ او $\frac{f}{g}$ پیداکړئ او د تعریف ناحیه (Domain) یې وټاکئ.

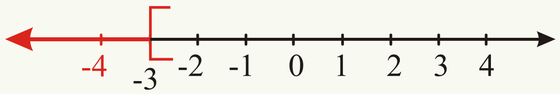
حل:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{3+x}$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{4-x}-\sqrt{3+x}$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(\sqrt{4-x})(\sqrt{3+x})=\sqrt{(4-x)(3+x)}$$
$$=\sqrt{12+x-x^2}$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3+x}}=\sqrt{\frac{4-x}{3+x}}$$

$dom f:\{4-x\geq 0\ ,\ x\leq 4\}$ یا $(-\infty\ ,\ 4]$

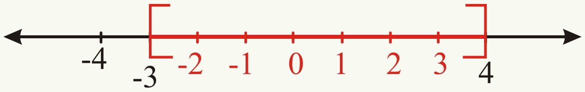


$\operatorname{dom} g : \{x / 3 + x \geq 0 , x \geq -3\}$ یا $[-3 , \infty)$

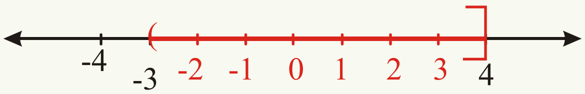


$(-\infty , 4] \cap [-3 , \infty) = [-3 , 4]$

چې $[-3,4]$ د $f+g$, $f-g$ او $f \cdot g$ د تابعګانو د تعریف ساحه ده.



د $dom\frac{f}{g}$ د تعریف په ناحیه کې خرنګه چې $g(-3) = 0$ دی نو: $Dom\frac{f}{g} = (-3 , 4]$



له ثابت عدد سره د تابع د ضرب حاصل

که c یو ثابت عدد او f یوه تابع وي نو حاصل ضرب يې عبارت دی له:

$(c\, f)(x) = c \cdot f(x)$

شپږم مثال: که $f(x) = x^2 - x + 2$ او $c = 5$ وي.

$(5\ f)(x) = 5 \cdot f(x) = 5(x^3 - x + 2) = 5x^3 - 5x + 10$

پوښتنې

لاندې تابعګانې په پام کې ونیسئ .

1 - $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})x$ پیداکړئ.

2- د تعریف ناحیې يې وټاکئ.

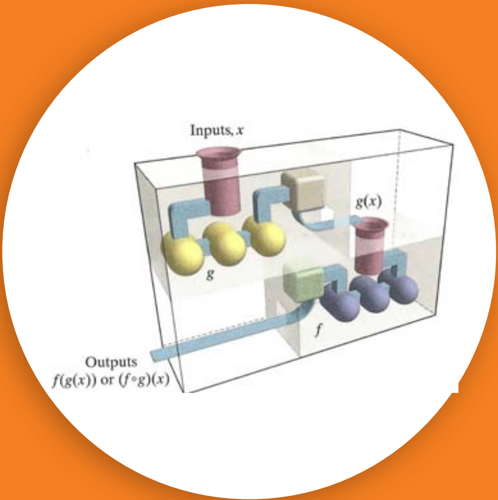
$a: f(x) = 2x + 3$ ، $g(x) = x - 1$ ، $b: f(x) = x - 5$ ، $g(x) = 3x^2$

$c: f(x) = 2x^2 - x - 3$ ، $g(x) = x + 1$ ، $d: f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = x - 5$

$e: f(x) = \sqrt{x+4}$ ، $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، $f: f(x) = \sqrt{3x}$ ، $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

د تابعګانو ترکیب یا مرکبې تابعګانې

composition of functions or composite functions



فعالیت

- که $f(x)=x^2-2$ او $g(x)=x+3$ وي، $(f \circ g)(x)$ او $(g \circ f)(x)$ پیدا کړئ.
- په کوم حالت کې $(f \circ g)(x)=(g \circ f)(x)$ وي.
- $(f \circ f)(x)$ او $(g \circ g)(x)$ پیدا کړئ.

که چیرې f او g د x تابعګانې وي د f ترکیب له g سره د $(f \circ g)(x)$ یا $f(g(x))$ سره ښودل کیږي $(f \circ g)(x)=f(g(x))=f[g(x)]$

د $(f \circ g)(x)$ د تعریف ساحه عبارت له x څخه ده چې x د g د تعریف په ساحه کې او $g(x)$ د f د تعریف په ساحه کې شامل وي.

یا: د $(f \circ g)$ تعریف ساحه: $\mathrm{Dom}\,(fog)x=\{x \in IR \,/\, x \in \mathrm{dom}\, g\,,\, g(x) \in \mathrm{dom}\, f\}$

1- چې x د g د تعریف په ساحه کې شامل وي.

2- $g(x)$ د f د تعریف په ساحه کې شامل وي.

په پورتني شکل کې $(f \circ g)(x)$ تابع د دوو ماشینو په واسطه ښودل شوې ده چې په لومړي ماشین کې ورودي x ، (in put) دی او خروجي (output) یې g(x) ده، په دویم ماشین کې (input) یې $g(x)$ او (output) یې $(fog)(x)$ دی. که g(x) د f د تعریف په ساحه کې شامل نه وي، نو په دویم ماشین (f) کې داخلیدلای نه شي.

$$x \xrightarrow{g} \boxed{g(x)} \xrightarrow{f} f\,(\,g\,(\,x\,))$$

$$x \xrightarrow{f} \boxed{f(x)} \xrightarrow{g} g\,(\,f\,(\,x\,))$$

لومړی مثال: که $f(x)=x^2-1$ او $g(x)=3x$ وي $(f o g)(x)$ او $(g o f)(x)$ پيدا کړئ.

حل:

$$(f o g)(x)=f(g(x))=f(3x)=(3x)^2-1=9x^2-1$$
$$(g o f)(x)=g((f(x))=g(x^2-1)=3(x^2-1)=3x^2-3$$

ليدل کيږي چې:

$$(f o g)(x)\neq(g o f)(x)$$
$$9x^2-1\neq 3x^2-3$$

دويم مثال: که $f(x)=3x-4$ او $g(x)=x^2+6$ وي $(f o g)(x)$ او $(g o f)(x)$ پيدا کړئ.

حل: په حقيقت کې په $(f o g)(x)$ کې د $g(x)$ تابع د f په تابع کې د (Domain) يا x ځای نيسي

$$f(g(x))=f(x^2+6)=3(x^2+6)-4=3x^2+18-4=3x^2+14$$
$$g(f(x))=(g o f)(x)=g(3x-4)=(3x-4)^2+6=9x^2-24x+22$$

ښکاره خبره ده چې د $(f o g)(x)$ او $(g o f)(x)$ د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه دي.

فعاليت

که $f(x)=x+6$ او $g(x)=x-6$ وي، وښاياست چې $(f o g)(x)=(g o f)(x)$ دی.

دريم مثال: که $g(x)=1-x$ او $f(x)=\sqrt{x}$ وي:

لومړی د fog او gof د تعريف ساحې پيدا کړئ، بيا $f o g$ او gof په لاس راوړئ.

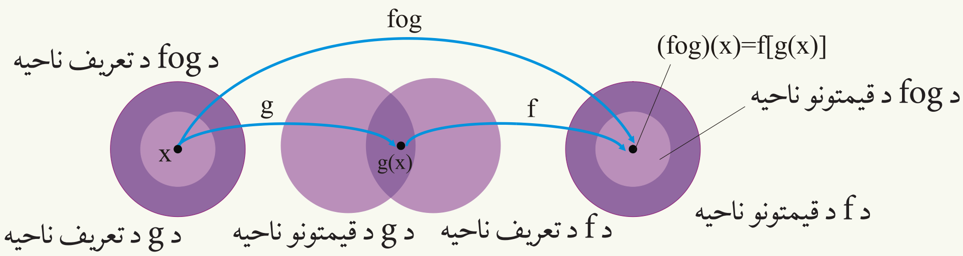
حل: د f د تابع د تعريف ساحه $[0\ ,\ \infty)$ او د g تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه $(-\infty,\infty)$ دي.

يا: $\mathrm{Dom}f=[0,\infty)\qquad \mathrm{Dom}g=(-\infty,\infty)$

يا: $\mathrm{Dom}(fog)=\{x/x\in \mathrm{dom}g\ ,\ g(x)\in \mathrm{dom}f\}$

$$dom(fog)=\{x/x\in IR, 1-x\ge 0\}\ ,\ -x\ge -1\Rightarrow x\le 1=(-\infty,1]$$
$$Dom\ (gof)=\{x/\in dom f, f(x)\in dom g\}=\{x/x\ge 0, \sqrt{x}\in IR\}=[0,\infty)$$
$$(fog)(x)=f(1-x)=\sqrt{1-x}$$
$$(gof)(x)=g(\sqrt{x})=1-\sqrt{x}$$

د مرکبو تابعګانو د تعریف د ساحې د لا روښانتیا لپاره لاندې شکل وګورئ.



څلورم مثال:که $h(x)=\sqrt{3x^2+1}$ وي، په دوو طریقو سره وښایاست چې د $h(x)$ تابع د کومو دوو تابعګانو له ترکیب څخه په لاس راغلی ده؟

حل: د $h(x)$ تابع کولای شو د $(g\,o\,f)(x)$ او $(jok)(x)$ دوو تابعګانو د ترکیب په شکل ولیکو.

په دې ډول که: $f(x)=3x^2+1$ او $g(x)=\sqrt{x}$ وي.

$$(g\,o\,f)(x)=g\big(f(x)\big)=g(3x^2+1)=\sqrt{3x^2+1}$$

په همدې ډول کولای شو د $h(x)$ تابع د $(jok)(x)$ د دوو تابعګانو د ترکیب په شکل ولیکو په دې

ډول چې: $j(x)=\sqrt{x+1}$ او $k(x)=3x^2$ وي.

$$(j\,o\,k)(x)=j\big(k(x)\big)=j(3x^2)=\sqrt{3x^2+1}$$

پنځم مثال:که $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$ ، $(x\neq -2)$ وي، $f(f(x))$ $(f\,o\,f)(2)$ او $(fo\,fo\,f)(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f\,o\,f)(x)=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{x}{x+2}+2}=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{x+2x+4}{x+2}}=\frac{x}{x+2}\cdot\frac{x+2}{3x+4}=\frac{x}{3x+4}$$

$$(fof)(2) = ? \quad (fof)(x) = \frac{x}{3x+4} \Rightarrow (fof)(2) = \frac{2}{3\cdot 2+4} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$(fofof)(x) = \frac{\frac{x}{x+2}}{3(\frac{x}{x+2})+4} = \frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x}{x+2}+4} = \frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x+4x+8}{x+2}}$$

$$= \frac{x}{x+2}\cdot\frac{x+2}{7x+8} = \frac{x}{7x+8}$$

فعاليت

که $f(x) = x^2 - 2$ او $g(x) = x+3$ وي، $(f\,o\,g)(x)$, $(g\,o\,f)(x)$ ، $(g\,o\,f)(-2)$
او $(fog)(3)$ پيدا کړئ.

پوښتني

1- که $f(x) = -3x+2$ او $g(x) = x^3$ وي:
$(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(g-f)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $(\frac{g}{f})(x)$ پيدا او د تعريف ساحې يې هم وټاکئ.

2- که $f(x) = x^2 - 3$ او $g(x) = \sqrt{x-3}$ وي، $(f\cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$ او $(\frac{g}{f})(x)$ پيدا کړئ.

3- که $f(x) = x^2+1$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = \sqrt{4-x^2}$ او $k(x) = \sqrt{3x+4}$ وي، د $(f\cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$, $(h\cdot k)(x)$ او $(\frac{h}{k})(x)$ تابعگانو د تعريف ساحې پيدا کړئ.

4- که $f(x) = 3x-2$, $g(x) = x^2$ وي $(g\,o\,f)(3)$ او $(f\,o\,g)(1)$ پيدا کړئ.

5- که $f(x) = \sqrt{x}$ او $g(x) = \sqrt{2-x}$ وي، $f\,o\,g$ $g\,o\,f$ او $f\,o\,f$ پيدا کړئ.

6- که $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $g(x) = x^{10}$ او $h(x) = x+3$ وي $(f\,o\,g\,o\,h)(x)$ پيدا کړئ.

معکوسه تابع (Inverse Function)

فعالیت

- په شکل کې د دواړو تابعګانو ترمنځ کومه اړیکه شتون لري؟
- آیا د هرې تابع معکوس، هم یوه تابع وي؟
- که د یوې تابع معکوس هم یوه تابع وي، داسې تابع په څه نامه یادیږي؟
- که $f=\{(1,2)(3,5)(6,7)\}$ او $g=\{(2,1)(5,3)(7,6)\}$ وي آیا د g تابع د f معکوسه تابع ده او که نه؟ ولې؟
- که $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)$ وي، آیا g د f د تابع معکوسه تابع ده؟

په پورتني شکل کې یو ترمامیټر لیدل کیږي او پوهیږو چې د سانټي ګریډ او فارنهایټ د تودوخې د درجو ترمنځ د $f=\frac{9}{5}c+32$ اړیکه شته دی، که دا معادله د (c) له پاره حل شي لرو چې:

$$f=\frac{9}{5}c+32 \Rightarrow f-32=\frac{9}{5}c+32-32$$

$$\Rightarrow \frac{5}{9}(f-32)=\frac{5}{9}(\frac{9}{5}c)$$

$$c=\frac{5}{9}(f-32)$$

د c تابع د f معکوسه تابع ده.

د (x,y) رابطې معکوس له (y,x) څخه عبارت ده چې د معکوسې تابع د تعریف ساحه د تابع

د قیمتونو د ساحې او د معکوسې تابع د قیمتونو ساحه، دتابع د تعریف له ساحې څخه عبارت ده.

$$domain\, f^{-1} = Range\, f \quad \text{او} \quad Range\, f^{-1} = dom\, f$$

د f د تابع معکوس په f^{-1} ښودل کیږي، پام مو وي چې: $\left(f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}\right)$

لومړی مثال: که $f(x) = \{(1,5)(3,7)(8,-10)\}$ وي.

نو $f^{-1}(x) = \{(5,1)(7,3)(-10,8)\}$ ده. ځکه چې:

$$f(3) = 7 \qquad f^{-1}(7) = 3$$
$$f(1) = 5 \qquad f^{-1}(5) = 1$$
$$f(8) = -10 \qquad f^{-1}(-10) = 8$$

نو $f^{-1}(x)$ هم یوه تابع ده.

خو که $f(x) = \{(1,2)(3,2)(4,5)\}$ وي، $f^{-1}(x) = \{(2,1)(2,3)(5,4)\}$ ده.

لیدل کیږي چې $f^{-1}(x)$ یوه تابع نه ده، ځکه د $x = 2$ لپاره دوه مختلف تصویرونه په (Range) کې وجود لري. $f(2) = 1$ او $f(2) = 3$.

نو د هرې تابع معکوس یوه تابع نه وي، یا په بل عبارت هره تابع معکوس منونکې نه وي.؛

څه وخت چې یوه تابع د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوي وي، که د لومړیو او دویمو عناصر ځایونه یې یو تر بله تبدیل کړو، هغه رابطه چې لاسته راځي، د لومړنۍ تابع معکوسه ده، هغه تابع چې معکوس یې هم تابع وي نو تابع معکوس منونکې ده.

دویم مثال: آیا د f او g تابعګانې چې په لاندې ډول د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوي دي معکوس منونکې دي که نه؟

$$f = \{(1,2), (-2,3), (3,1), (0,-1)\} \quad g = \{(2,4), (3,1), (0,2), (5,1)\}$$

حل: که د مرتبو جوړلو د لومړنیو او دویمو عناصرو ځایونه یو تر بله تبدیل شي، نو لرو چې:

$$f^{-1} = \{(2,1), (3,-2), (1,3), (-1,0)\}$$

لیدل کیږي چې f^{-1} یا د f د تابع معکوس هم یوه تابع ده ځکه چې د f^{-1} د مرتبو جوړو لومړنی عناصر تکرار شوي نه دي. او $g^{-1} = \{(4,2), (1,3), (2,0), (1,5)\}$

لیدل کیږي چې g^{-1} یا د $g(x)$ معکوس، تابع نه ده. ځکه د $x=1$ لپاره دوه قیمتونه د 3 او 5 وجود لري، نو د g تابع معکوس منونکی تابع نه ده.

په لنډ ډول څرنگه چې f یو په یو تابع ده، نو معکوس منونکي هم ده او د g تابع چې یو په یو تابع نه ده، نو معکوس منونکي هم نه ده.

نتیجه: یوازې د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع وي.

یو په یو تابع (one-to-one function)

یو د $f(x)$ تابع یوه یو په یو تابع ده که چیرې $x_1 \neq x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) \neq f(x_2)$ شي.

یا : $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ او که $a=b \Rightarrow f(a)=f(b)$

که یوه تابع یو په یو وي، نو معکوس یې هم یوه تابع ده.

دریم مثال: که $f(x)=-4x+12$ او $g(x)=\sqrt{25-x^2}$ وي، وښایاست چې کومه یوه له دې تابعگانو څخه یو په یو تابع ده؟

حل: که $a \neq b$ وي، $-4a+12 \neq -4b+12$ دی.

نو $f(x)$ یوه یو په یوتابع ده.

د مثال په ډول: که $x=2$ وي: $f(2)=-4(2)+12=-8+12=4$

که $x=3$ وي:

$$f(3)=-4(3)+12=-12+12=0$$

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

$$2 \neq 3 \Rightarrow -4 \neq 0$$

نو $f(x)$ یو په یو تابع ده. او $g(x)=\sqrt{25-x^2}$ لپاره:

که $x=3$ وي. $g(3)=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

که $x=-3$ وي. $g(-3)=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

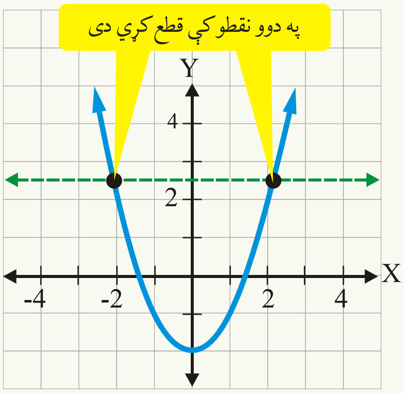
$f(3)=f(-3)$ لیکن $3 \neq -3$ نو $g(x)$ یو په یو تابع نه ده.

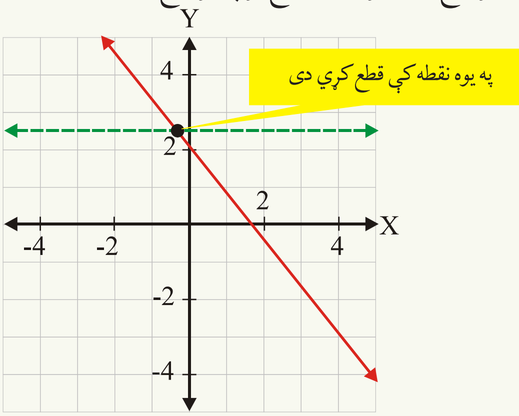
فعالیت

که $f(x)=3x+8$ او $g(x)=x^2$ وي، وښایاست چې کومه یوه تابع یو په یو تابع ده او کومه یوه تابع یو په یو تابع نه ده؟ ولې؟

د ګراف له مخې د یو په یو تابع پېژندنه: که یو افقي خط چې د x له محور سره موازي وي د تابع ګراف په یوه نقطه کې قطع کړي، دا یو په یو تابع ده، که افقي خط د تابع ګراف له یوې نقطې څخه په زیاتو نقطو کې قطع کړي، نو دا ګراف د یو په یو تابع ګراف نه دی.

څلورم مثال: په راکړل شوو شکلونو کې لیدل کیږي چې د x له محور سره موازي خط لومړنی تابع ګراف په یوه نقطه کې او د دویمي تابع ګراف یې په دوو نقطو کې قطع کړي دي نو لومړنی تابع یو په یو تابع ده، خو دویمه تابع یو په یو تابع نه ده.





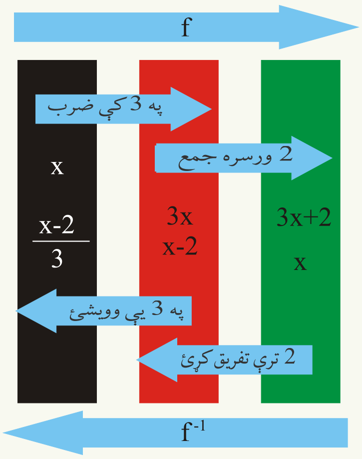
د معکوسي تابع تعریف: که f یوه یو په یو تابع وي چې د تعریف ساحه یې x او د قیمتونو ساحه یې y ده، نو د g تابع د f د تابع معکوسه تابع ده، که د g د تعریف ساحه y او د قیمتونو ساحه یې x وي او یا د g تابع په هغه صورت کې د f معکوسه ده که چیرې:

$$(f \circ g)(x) = x$$
$$(g \circ f)(x) = x$$
$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

پنځم مثال: که $f(x) = 3x + 2$ وي، د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع $f^{-1}(x)$ پیداکړئ.

حل:

$$y = f(x) = 3x + 2$$
$$x = 3y + 2$$
$$3y = x - 2$$



$$y=\frac{x-2}{3}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x-2}{3}=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$$

$$f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$$

دا مثال په لنډ ډول په شکل کې هم ښودل شوی دی.

له بلې خواکه $f^{-1}(x)$ په $g(x)=\dfrac{x-2}{3}$ سره وښودل شي، $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)=x$ دی.

ځکه چې:

$$(f\,o\,g)(x)=3\left(\frac{x-2}{3}\right)+2=x-2+2=x$$

$$(g\,o\,f)(x)=\frac{3x+2-2}{3}=\frac{3x}{3}=x$$

يا: $f^{-1}(f(x))=x$ او $f(f^{-1}(x))=x$

شپږم مثال: که $f(x)=x^3+1$ وي $f^{-1}(x)$ اوکه $g(x)=x^2$ وي $g^{-1}(x)$ پيداکړئ.

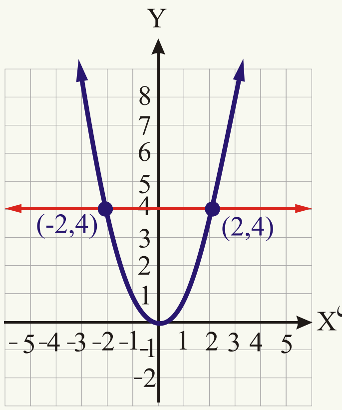
حل:

$$y=x^3+1$$

$$x=y^3+1 \qquad \Rightarrow y^3=x-1 \Rightarrow y=\sqrt[3]{x-1}$$

که y په $f^{-1}(x)$ سره وښيو، نو $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$

$$g(x)=x^2 \Rightarrow y=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{y}$$



x پر y او y پر x بدلوو.

$$y=\pm\sqrt{x} \quad \text{يا} \quad g^{-1}(x)=\pm\sqrt{x}$$

ليدل کيږي چې $g^{-1}(x)$ يوه تابع نه ده، ځکه چې که $x=2$ او يا $x=-2$ وي، $g(-2)=4$ او $g(2)=4$ کيږي شکل وګورئ نو د g(x) تابع معکوس پذيره نه ده.

اووم مثال: د x د کوم قیمت لپاره د $f(x)=5x-2$ تابع له خپل معکوس سره مساوي کیږي؟

حل: که $y=5x-2$ وي، نو معکوس یې

$$x=5y-2 \Rightarrow \qquad 5y=x+2$$

$$y=\frac{x+2}{5} \qquad f^{-1}(x)=\frac{x+2}{5}$$

$$\frac{x+2}{5}=5x-2 \Rightarrow \quad 24x=12$$

$$x=\frac{1}{2}$$

نو د $x=\frac{1}{2}$ په قیمت سره د $f(x)$ تابع له خپلې معکوسې تابع سره مساوي کیږي.

اتم مثال: وښایاست چې د $f(x)=7x-2$ او $g(x)=\frac{1}{7}x+\frac{2}{7}$ تابعګانې یو د بل معکوسې تابعګانې دي.

حل:

$$(f\,o\,g)(x)=f(g(x))=f(\frac{1}{7}x+\frac{2}{7})=7(\frac{1}{7}x+\frac{2}{7})-2=x$$

$$(g\,o\,f)(x)=f(g(x))=g(7x-2)=\frac{1}{7}(7x-2)+\frac{2}{7}=x$$

نو د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانې یو د بل معکوسې تابعګانې دي، نو نتیجه کیږي چې د تابع او د تابع د معکوسې تابع ترکیب د عینیت $\left(f(x)=x\right)$ تابع ده.

فعالیت

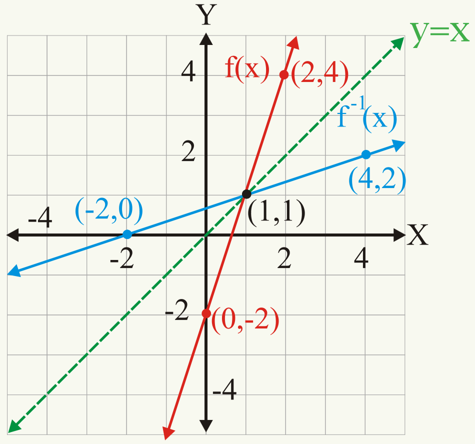
که $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ وي، $f^{-1}(x)$ پیداکړئ او هم وښایاست چې $(f\,o\,f^{-1})(x)=x$ کیږي.

د تابع او دهغې د معکوسې تابع ګراف: د $f(x)$ د یو په یو تابع او د هغې د معکوسې تابع $f^{-1}(x)$ د ګرافونو ترمنځ یوه رابطه موجوده ده څکه که چېرې (a,b) د $f(x)$ تابع د ګراف پر مخ یوه نقطه وي نو د (b,a) نقطه د $f^{-1}(x)$ تابع د ګراف پرمخ واقع ده چې (a,b) او (b,a) نقطې نظر د $y=x$ خط ته سره متناظرې دي.

نهم مثال: که $f(x)=3x-2$ وي، نو ښکاره ده چې $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ د $f(x)$ معکوسه تابع ده. د دواړو تابعګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ چې ګرافونه نظر د $y=x$ خط سره متناظر دي.

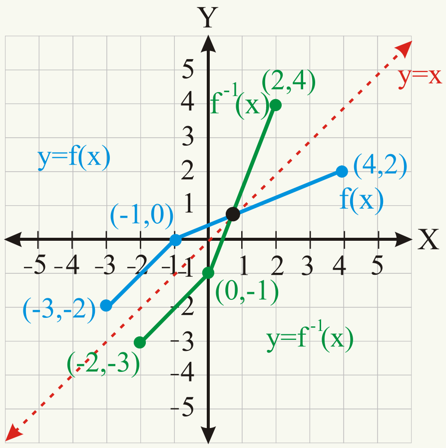
x	0	1	2
$f(x)$	-2	1	4

x	-2	1	4
$f^{-1}(x)$	0	1	2



لیدل کیږي چې د دواړو تابعګانو ګرافونه نظر د y = x خط ته سره متناظر دي.

لسم مثال: که $f(x)$ د $(-1,0),(-3,-2)$ او $(4,2)$ مرتبو جوړو لرونکي وي د $f(x)$ او $f^{-1}(x)$ د تابعګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ او وښایاست چې دواړه ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.



لیدل کیږي چې د f (x) او $f^{-1}(x)$ د تابعگانو گرافونه نظر د y=x خط ته سره متناظر دي.

- د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع ده.
- د X له محور سره موازي خط (افقي خط) د یو په یو تابع گراف په یوه نقطه کې قطع کوي.
- د $y = f(x)$ د تابع د معکوس د پیداکولو لپاره د تابع معادله د x لپاره حلوو، بیا x پر y او y پر x بدلوو په لاس راغلی تابع $y = f^{-1}(x)$ ده چې د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع ده.
- د $f(x)$ د تابع او د $f(x)$ د معکوسې تابع گرافونه نظر د $y = x$ خط ته سره متناظر دي.
- $dom\, f(x) = Range\, f^{-1}(x)$ او $Range\, f(x) = dom\, f^{-1}(x)$ وي.

پوښتني

1- د لاندینیو تابعگانو معکوس پیداکړئ او ووایئ چې دکومې تابع معکوس هم یوه تابع ده؟

$$f = \{(-1,0), (-2,1), (4,3), (3,4)\} \quad h = \{(1,4), (2,3), (4,1)\}$$
$$g = \{(1,2), (2,3), (3,2), (4,1)\} \quad k = \{(3,0), (2,-1), (1,2), (0,1), (-1,2)\}$$

2 – د لاندینیو هر یوې تابع معکوسه تابع پیداکړئ او د خپل ځواب صحت د $f(f^{-1}(x)) = x$ سره وازمایئ.

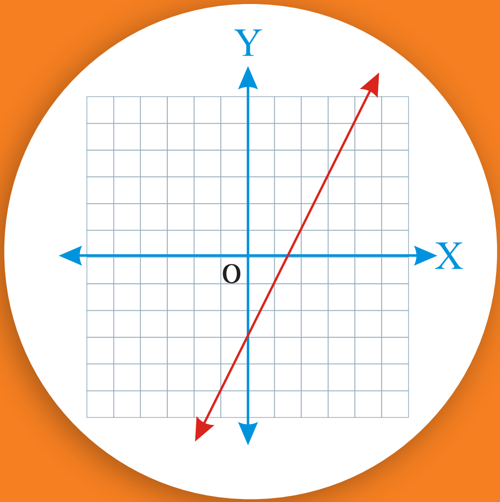
$$f(x) = 2x+3 \quad , \quad f(x) = 2x \quad , \quad f(x) = x+3$$
$$f(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad f(x) = (x+2)^3 \quad , \quad f(x) = x^3+2$$

3 – د لاندینیو تابعگانو گرافونه رسم کړئ او د X له محور سره د موازي خط (افقي خط) په واسطه وښایاست چې ددوی معکوس هم یوه تابع ده.

$$f(x) = 1 - x^2 \quad , \quad g(x) = \frac{7-2x}{5}$$

4 – له لاندینیو تابعگانو څخه کومه یوه یو په یو تابع ده.

$$y = \frac{1}{x+2} \quad , \quad y = 9 \quad , \quad y = (x-2)^2 \quad , \quad y = 6-x \quad , \quad y = 4x-5$$



پولينومي تابعګاني

- آيا پوهيږي چې لومړۍ درجې تابع ته ولې خطي تابع وايي؟
- آيا د لومړۍ درجې تابع ګراف يو مستقيم خط دی؟

پولينومونه مو په لومړي فصل کې تر خيړنې لاندې ونيول.

خطي تابع (Liner function) يا لومړۍ درجه تابع

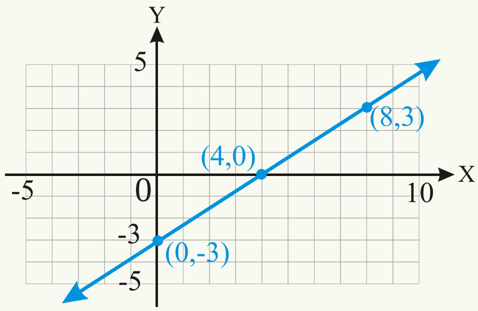
هغه پولينومي تابع ده چې درجه يې يوه وي، د لومړۍ درجې تابع عمومي شکل $f(x)=ax+b$ دی چې $a\neq 0$ او b , a حقيقي عددونه دي.

د مثال په ډول: $f(x)=3x+4$, $f(x)=x-1$, $f(x)=2x$ او $f(x)=\frac{1}{2}x$ خطي تابعګاني دي.

لومړی مثال: د $f(x)=\frac{3}{4}x-3$ د تابع ګراف رسم کړئ او د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع نقطې پيداکړئ.

$$f(x)=\frac{3}{4}x-3$$

x =	8	4	0
f(x)	3	0	−3



د X له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه (4 ,0) او د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه (0,−3) ده.

لیدل کیږي چې د لومړۍ درجې تابع ګراف یو مستقیم خط دی او له همدې سببه ورته خطي تابع هم وایي، د خطي تابع د ګراف د رسمولو لپاره همدومره کافي ده چې X او Y له محورو سره یې د تقاطع ټکي پیدا کړو او مستقیم خط رسم کړو، لکه چې په شکل کې لیدل کیږي.

فعالیت

د $y = f(x) = x+1$ او $y = x-1$ د تابعګانو ګراف رسم او د X او Y له محور سره یې د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات هم پیدا کړئ.

دویم مثال: د $f(x) = \frac{2}{3}x+2$ د خطي تابع ګراف رسم کړئ.

حل: د Y له محور سره د ګراف د تقاطع په نقطه کې $(x = 0)$ دی نو:

$$f(0) = \frac{2}{3}(0)+2 = 2$$

نو د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه $(0, 2)$ ده.

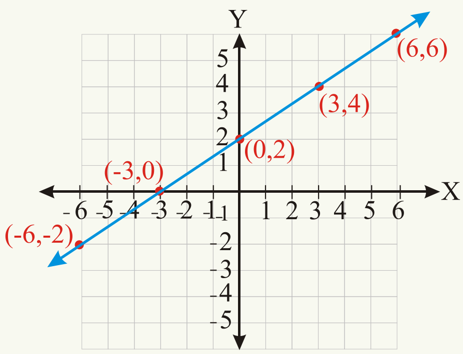
او د X له محور سره د ګراف د تقاطع په نقطه کې د y یا f (x) قیمت صفر دی $f(x) = 0$

$$0 = \frac{2}{3}x+2 \Rightarrow x = -3$$

نو د X له محور سره د ګراف د تقاطع ټکی $(-3,0)$ دی.

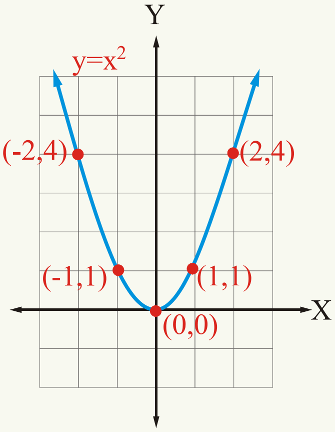
د $(0 , 2)$ او $(-3 , 0)$ نقطې یو له بله سره نښلوو او مستقیم خط رسموو او هم کولای شو چې د ګراف یو څو نورې نقطې وټاکو چې پر همدې مستقیم خط باندې پرتې دي.

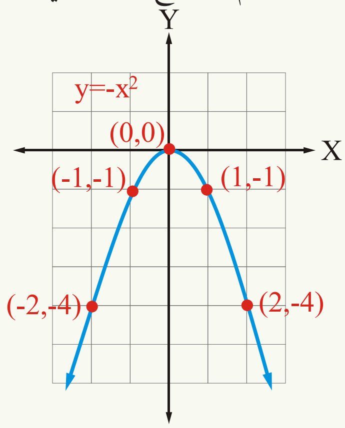
x =	0	3	−3	6	−6	...
f(x) =	2	4	0	6	−2	...



دویمه درجه تابع (Quadratic Function) او ګراف يې:

دا ګرافونه د کوم ډول تابع ګرافونه دي؟





- دا دواړه ګرافونه سره څه توپير لري؟
- له $f(x)=x^2+7x+12$, $g(x)=x^2+1$, $h(x)=x^2+3x$, $k(x)=x^2$ او $r(x)=2x-1$ څخه کومه يوه يې دويمه درجه تابع نه ده؟

هغه پولينومي تابع چې درجه يې يوه وي، لومړی درجه يا د خطي تابع (Liner Function) په نامه ياديږي او که د پولينومي تابع درجه (2) وي، د دويمي درجې تابع په نوم ياديږي.

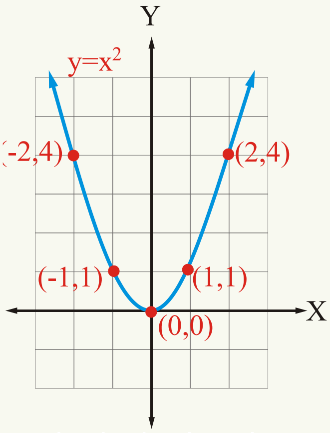
فعاليت

- د دويمي درجې تابع ګراف په کوم نوم ياديږي؟
- د دويمي درجې تابع د ګراف د تناظر محور کوم خط دی؟
- د دويمي درجې تابع ګراف څه وخت پورته خواته او کوم وخت ښکته خواته خلاصيږي؟
- د دويمي درجې تابع د ګراف رأس په کوم وخت کې اصغري (Minimum) او په کوم وخت کې اعظمي (Maximum) وي؟
- آيا د دويمي درجې تابع ګراف د رأس د نقطې وضعيه کميات پيدا کولای شی؟
- په کوم حالت کې د دويمي درجې تابع ګراف د X او Y محورونه قطع کولای شي؟
- آيا د X او Y له محورونو سره د دويمي درجې تابع د ګراف د تقاطع د نقطو وضعيه کميات پيدا

کولای شئ؟

د دویمې درجې تابع عمومي شکل $f(x)=ax^2+bx+c$ دی چې b ، a او c حقیقي عددونه او $a\neq 0$ وي.

د دویمې درجې تابع ګراف: ترټولو ساده دویمه درجه تابع د $f(x)=y=x^2$ تابع ده چې $a=1$ او $b=c=0$ که x ته یو څو قیمتونه ورکړل شي د تابع یا y اړونده قیمتونه لاس ته راوړلای شي، ګراف یې رسم کیدای شئ لکه څنګه چې په شکل کې لیدل کیږي.



x	0	1	2	−1	−2
y	0	1	4	1	4

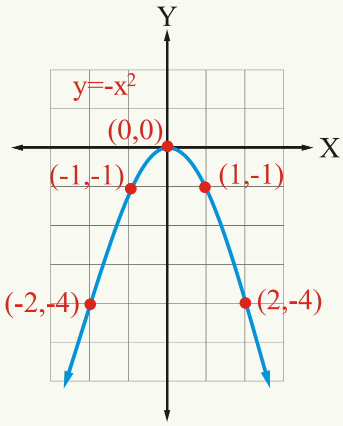
دویمې درجې تابع ګراف د پارابولا (Parabola) په نوم یادیږي چې دا ګراف نظر د y محور ته متناظر دی، هغه خط چې د پارابول له رأس څخه تیر شي او د y له محور سره موازي وي، د تناظر د محور په نامه یادیږي چې د y محور ددې تابع د ګراف د تناظر محور دی.

هغه نقطه چې د تناظر محور په کې ګراف قطع کوي، د پارابول د رأس (Vertex) په نامه یادیږي. که a>0 وي، د پارابول خوله پورته خواته خلاصیږي او د ګراف د رأس ټکی اصغري دی د $y=x^2$ د تابع ګراف د $(-\infty,0)$ په انټروال کې متناقص او د $(0,\infty)$ په انټروال کې ګراف متزاید دی.

لومړی مثال: د $y=-x^2$ د تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

د پارابول خوله ښکته خواته خلاصیږي، ځکه چې $a<0$ دی، د $(-\infty,0)$ په انټروال کې ګراف متزاید او د $(0,\infty)$ په انټروال کې ګراف متناقص دی.



x	0	1	−1	2	−2
y	0	−1	−1	−4	−4

فعالیت

د $y = x^2 + 4$ تابع ګراف رسم کړئ.

دویم مثال: د $f(x) = x^2$ ، $g(x) = 2x^2$ او $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ د تابعګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

$g(x) = 2x^2$

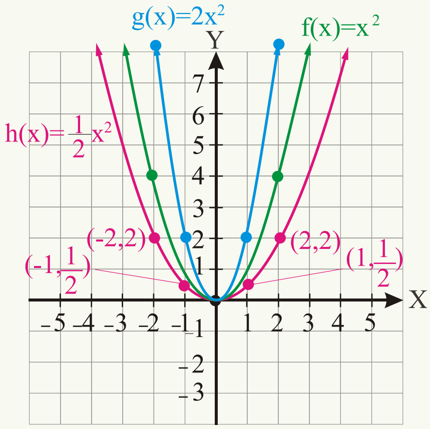
$x =$	0	1	-1	2	-2
$g(x) =$	0	2	2	8	8

$f(x) = x^2$

$x =$	0	1	-1	2	-2
$f(x) =$	0	1	1	4	4

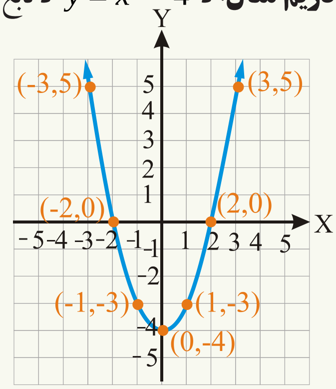
$h(x) = \frac{1}{2}x^2$

$x =$	0	1	-1	2	-2
$h(x) =$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	2



دریم مثال: د $y = x^2 - 4$ د تابع ګراف رسم کړئ.

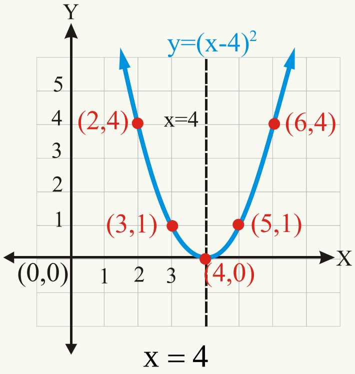
x	0	1	-1	2	-2	3	-3
y	-4	-3	-3	0	0	5	5



په حقیقت کې د $y = x^2$ د تابع ګراف 4 واحده ښکته خواته نقل شوی دی.

څلورم مثال: د $y = (x-4)^2$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل: که x ته یو څو قیمتونه ورکړو او د y اړونده قیمتونه پیدا کړو د تابع ګراف رسمیدلای شي لکه:

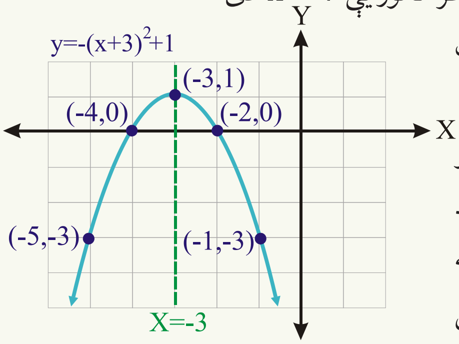


x	4	5	3	6	2	...
y	0	1	1	4	4	...

لیدل کېږي چې ګراف د $(-\infty , 4)$ په انټروال کې متناقص او د $(4,\infty)$ په انټروال کې متزاید دی. له شکل څخه لیدل کېږي چې د $y=x^2$ ګراف په افقي ډول 4 واحده ښي خواته انتقال شوی دی د پارابول رأس د $(4,0)$ ټکی دی او د تناظر محور يې $x=4$ دی.

پنځم مثال: د $y=-(x+3)^2+1$ د تابع ګراف رسم کړئ.

د $y=x^2$ ګراف درې واحده کيڼې خواته او يو واحد په عمودي ډول پورته خواته نقل شوی دی او د پارابول راس د $(-3,1)$ ټکی د ګراف اعظمي نقطه او د تناظر محور يې $x=-3$ دی چې په شکل کې هم لیدل کېږي.



x	-3	-2	-4	-5	-1
y	1	0	0	-3	-3

فعالیت

د $y=3x^2$ او $y=-3x^2$ د تابعګانو ګرافونه رسم کړئ.

د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع ټکي:

دي لپاره چې په اسانۍ سره پارابول رسم کړو، د X او Y له محور سره يې د تقاطع ټکي پيدا کوو (که چېرې د X له محور سره تقاطع ولري)

د Y له محور سره د تقاطع د ټکی د پیداکولو لپاره د $y = ax^2 + bx + c$ معادله کې x=0 وضع کیږي په نتیجه کې y=c دی.

د X له محور سره د تقاطع د پیداکولو لپاره $y = 0$ وضع کوو، نو لرو چې:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$0 = ax^2 + bx + c \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

څرنګه چې پوهیږئ $ax^2 + bx + c = 0$ یوه دویمه درجه معادله ده او جذرونه یې $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ دی، پوهیږو چې ددې معادلې جذرونه هغه وخت حقیقي عددونه دي چې $b^2 - 4ac \geq 0$ وي، که $b^2 - 4ac < 0$ ګراف د X محور قطع کولای نه شي، په لنډ ډول یې لاندې جدول کې وګورئ:

د $(a \neq 0)$ $y = ax^2 + bx + c$ د تابع ګراف

a	د دویمې درجې تابع ګراف په هغه صورت کې د X محور په دوو نقطو کې قطع کوي چې $b^2 - 4ac > 0$ وي.
b	په هغه صورت کې د X محور په یوه نقطه کې قطع کوي چې $b^2 - 4ac = 0$ وي.
c	په هغه صورت کې د X محور قطع کولای نه شي چې $b^2 - 4ac < 0$ وي.

د پارابول د راس د نقطې د وضعیه کمیاتو پیدا کول:

د تکمیل مربع په طریقه هم کولای شوو چې د پارابول د رأس د نقطې وضعیه کمیات پیداکړو.

$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

$$y = a\left[(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2\right] + c$$

$$= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a(\frac{b^2}{4a^2}) + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

د پارابول د رأس د ټکي وضعیه کمیات $(-\frac{b}{2a}\ ,\ \frac{4ac-b^2}{4a})$ او یا (h,k) دي او څرنګه چې د تناظر محور له رأس څخه تیرېږي، نو $x=-\frac{b}{2a}$ د تناظر د محور معادله ده.

که چېرې $a>0$ وي، رأس اصغري (Minimum) او که $a<0$ وي، رأس اعظمي (Maximum) دی.

شپږم مثال: د $f(x)=2x^2+4x+5$ د تابع ګراف رسم کړئ.

1- د X له محور سره د تقاطع ټکي پیداکوو. څرنګه چې $a=2\ ,\ b=4$ او $c=5$ دي.

$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\cdot2\cdot5=-24<0$ دا چې $\Delta<0$ ده نوګراف د X محور نه قطع کوي.

2- د Y له محور سره د ګراف د تقاطع ټکي پیداکوو په دې حالت کې $x=0$ دی.

د $y=ax^2+bx+c$ په تابع‌کې چې $x=0$ شي $y=c$ کیږي، نو $(0,c)$ د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه ده. $f(0)=2\cdot0^2+4\cdot0+5=5$

نو په دې مثال کې $(0,5)$ د y له محور سره د تقاطع نقطه ده.

3 – د رأس د نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له:

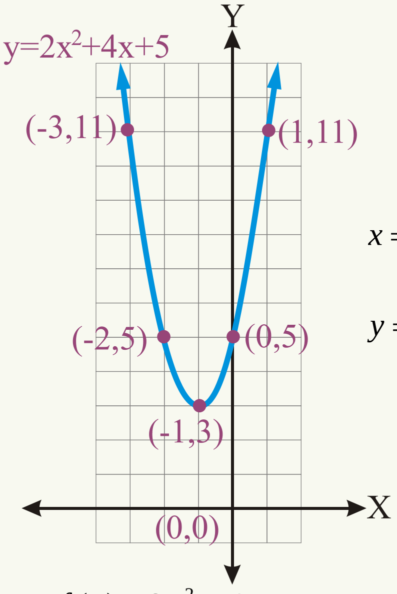
$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\cdot2}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot2\cdot5-4^2}{4\cdot2}=\frac{40-16}{8}=\frac{24}{8}=3$$

$(-1,3)$ د پارابول د رأس د نقطې وضعیه کمیات دي او رأس اصغري دی، ځکه چې $a>0$ دی.

4 – د تناظر د محور معادله $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-4}{4}=-1$

د ګراف د تناظر د محور معادله $x=-1$ ده، د ګراف د رسمولو لپاره کولای شو د ګراف یو څو نورې نقطې هم پیداکړو:



$f(x)=2x^2+4x+5$

x =	−1	−2	0	1	−3
f(x) =	3	5	5	11	11

اووم مثال: د $y=-3x^2-2x+1$ د تابع گراف رسم کړئ.

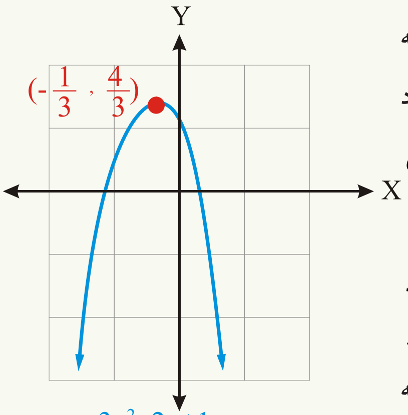
$$y=-3(x^2+\frac{2}{3}x)+1$$

د x د ضریب نیمايي مربع جمع او هم تفریقوو.

$$y=-3\left[x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{3})^2\right]+1$$

$$y=-3\left[x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2\right]-3(-\frac{1}{9})+1=-3\left[(x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2\right]+\frac{4}{3}$$

$$y=-3(x+\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}$$



په نتیجه کې $x=-\frac{1}{3}$ د تناظر د محور معادله ده، ځکه چې : $x+\frac{1}{3}=0\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ او $(-\frac{1}{3},\frac{4}{3})$ د رأس د ټکي وضعیه کمیات دي او څرنګه چې $a<0$ دی، نو رأس اعظمي دی.

یاددونه: که دویمه درجه تابع د $y-k=a(x-h)^2$ یا $y=a(x-h)^2+k$ په شکل ولیکل شي $x=h$ د تناظر د محور معادله او (h,k) د رأس د نقطې وضعیه کمیات دي.

$f(x)=ax+b \quad (a\neq 0)$ د لومړۍ درجې یا خطي تابع عمومي شکل دی.

او $y=ax^2+bx+c \ , \ (a\neq 0)$ د دویمې درجې معادلې عمومي شکل دی.

د دویمې درجې تابع گراف ته پارابول (Parabola) وایي که $a>0$ وي، رأس اصغري او که $a<0$ وه، رأس اعظمي دی. $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ د پارابول د رأس وضعیه کمیات او $x=-\frac{b}{2a}$ د پارابول د تناظر د محور معادله ده. که $\Delta=b^2-4ac>0$ پارابول د X محور په دوو نقطو کې او که $\Delta=0$ نو پارابول د x محور په یوه نقطه کې قطع کوي او که $\Delta<0$ وي، پارابول د X محور قطع کولای نه شي.

پوښتني

1 - د $h(x)=-\frac{3}{2}x+3$ د تابع ګراف رسم کړئ.

2 – د $g(x)=2x+1$ او $g(x)=2x-1$ تابعګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او سره پرتله یې کړئ.

3 – د $f(x)=2x^2$, $f(x)=3x^2$, $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ او $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ تابعګانو ګرافونه په وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ او یو له بله سره یې پرتله کړئ

4 – د لاندې تابعګانو د ګراف د تناظر محور معادلې پیدا کړئ.

$$f(x)=3x^2-2x+6 \quad , \quad f(x)=x^2-12x+30 \quad , \quad f(x)=x^2+8x+13$$

5 – د $f(x)=(x-2)^2$, $g(x)=(x+1)^2$ او $h(x)=(x-3)^2$ د تابعګانو ګرافونه رسم کړئ او ووایاست چې د $f(x)=x^2$ له ګراف سره څه اړیکه لري؟

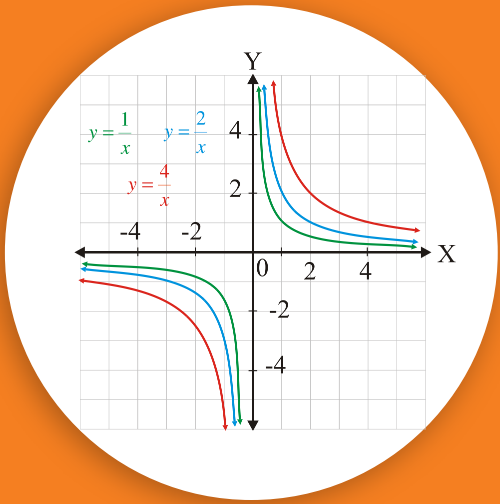
6 – د $y=-x^2-1$ د تابع د ګراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

a : $(-1,1)$ b: $(1,-1)$ c: $(0,-1)$ d : $(0,1)$

7 – د $y=(x-1)^2-2$ تابع د ګراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

a : $(1,1)$ b: $(-1,2)$ c: $(-1,-2)$ d : $(1,-2)$

ناطقي يا نسبتي تابعګاني
(Rational functions)



په دې شکل د کوم ډول تابعګانو ګرافونه دي؟

فعاليت

- آيا د ناطقې تابع د عمودي مجانب معادله پيداکولای شئ ؟
- آيا د هرې ناطقې تابع د تعريف په ساحه کې ټول حقيقي عددونه شامليدلای شي؟
- آيا د يوې ناطقې تابع افقي مجانب پيداکولای شئ؟
- آيا هره ناطقه تابع عمودي مجانب لري؟

تعريف

ناطقه تابع هغه تابع ده چې د دوو پولينومي تابعګانو له خارج قسمت څخه جوړه شوې وي که $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ ، $g(x)\neq 0$ وي، په داسې حال کې چې $p(x)$ او $g(x)$ پولينومونه وي نو $f(x)$ يوه ناطقه تابع ده.

د ناطقې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه وي، پرته د x له هغه قيمتونو څخه چې د ناطقې تابع مخرج پرې صفر کيږي، د مثال په ډول: $f(x)=\frac{1}{x}$, $h(x)=\frac{x^3-1}{x}$
$g(x)=\frac{x-1}{x^2-x-6}$ ، $g(x)=3$ او $P(x)=2x^2-3$ ناطقې تابعګانې دي.

فعاليت

آيا $k(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x+2}$ يوه ناطقه تابع ده؟ ولې ؟

د ناطقي تابع د تعریف د ساحې پیدا کول

(Finding Domain of Rational function)

لومړی مثال: د لاندینیوناطقو تابعګانو د هري یوې د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{x^2-9} \quad , \quad h(x)=\frac{x+3}{x^2+9}$$

حل: د $f(x)$ په تابع کې د $x=3$ لپاره د تابع مخرج صفر کیږي، نو د 3 عدد د $f(x)$ د ناطقې تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی یا: $Dom\ f(x)=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq 3\}$

د $g(x)$ په تابع کې که چیرې $x=3$ یا $x=-3$ شي، نو مخرج یې صفر کیږي، نو د 3 او 3 - عددونه د $g(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

$$Dom\ g(x)=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq 3\ ,\ x\neq -3\}$$

څرنګه چې د $h(x)$ د تابع مخرج د x په هیڅ قیمت نه صفر کیږي، نو د $h(x)$ د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

$$Dom\ h(x)=IR \quad \text{یا} \quad Dom\ h(x)=(-\infty\ ,\ \infty)$$

فعالیت

د لاندینیو ناطقو تابعګانو د تعریف ساحې تعین کړئ.

$$f(x)=\frac{x^2-25}{x-5} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{x^2-25} \quad , \quad h(x)=\frac{x+5}{x^2+25}$$

دویم مثال: د لاندینیو ناطقو تابعګانو د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{x+3}{x-4} \qquad g(x)=\frac{x-3}{x+5}$$

حل: د $f(x)$ د تابع د تعریف ساحه پرته له (4) څخه ټول حقیقي عددونه دي.

$dom\ f(x) = IR \setminus \{4\}$ یا $IR - \{4\}$

$y = f(x) = \dfrac{x+3}{x-4} \Rightarrow y(x-4) = x+3$

$xy - x = 4y + 3$

$(y-1)x = 4y + 3$

$xy - 4y = x + 3 \Rightarrow \quad x = \dfrac{4y+3}{y-1}$

$Range\ f(x) = IR \setminus \{1\}$ یا $IR - \{1\}$

د $g(x)$ تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته له (-5) څخه:

$$dom\, g(x) = IR - \{-5\} \text{ یا } \{x \in IR / x \neq -5\}$$

$$g(x) = y = \frac{x-3}{x+5} \Rightarrow y(x+5) = x-3 \Rightarrow xy + 5y = x - 3$$

$$x = \frac{-5y-3}{y-1} \qquad Range\, g(x) = IR - \{1\} \text{ یا } \{y \in IR / y \neq 1\}$$

فعالیت

د لاندې راکړل شوو ناطقو تابعګانو د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا کړئ.

$$h(x) = \frac{1}{x^3} \quad , \quad k(x) = \frac{x+1}{3} \quad , \quad r(x) = \frac{4x-1}{2-x} \quad , \quad m(x) = \frac{x}{3x-2}$$

د ناطقي تابع د ګراف رسمول (Graphing Rational function):

دریم مثال: د $f(x) = \dfrac{1}{x}$ د تابع ګراف رسم کړئ.

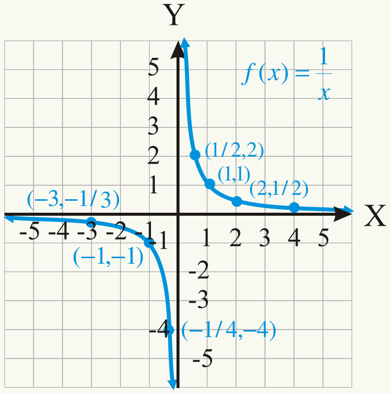
حل: څرنګه چې که $x = 0$ شي، نو د تابع مخرج صفر کیږي، نو صفر د $f(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

$Dom\ f = IR - \{0\}$

x	$\ldots -4$	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$4\ldots$
f(x)	$\ldots -\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}\ldots$

اوس د $f(x)=\frac{1}{x}$ د تابع وضعیت مطالعه کوو:

خرنګه چې $x=0$ د $f(x)$ د تابع د تعریف په ناحیه کې شامل نه دی، ددې تابع د ګراف د رسمولو لپاره x ته داسې قیمتونه ورکوو چې له دواړو خواو څخه صفر ته نژدې شي (تقرب وکړي)، که x له کېڼې خوا څخه صفر ته نژدې شي $(x\to 0^-)$ د تابع قیمت $-\infty$ ته نږدې کیږي $(f(x)\to-\infty)$ او که x له ښي خوا څخه صفر ته نژدی کیږي، $(x\to 0^+)$ د تابع قیمت $+\infty$ ته تقرب کوي $(f(x)\to\infty)$ لاندې جدول وګورئ.



a: x له کېڼې خوا څخه صفر ته نږدې کیږي.

x	...−1	−0.5	−0.1	−0.01	−0.001	$x\to 0^-$
$f(x)=\frac{1}{x}$	...−1	−2	−10	−100	−1000	$f(x)\to-\infty$

b : x له ښي خوا څخه صفر ته نږدې کیږي.

x	$0^+\leftarrow x$	0.001	0.01	0.1	0.5	1...
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\infty\leftarrow f(x)$	1000	100	10	2	1...

عمودي مجانب (Vertical Asymptotes)

څه وخت چې په یوه ناطقه تابع $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ کې چې صورت او مخرج یې مشترک فکتور، ونلري او $p(a)\neq 0$ وي، که $g(a)=0$ شي، نو د $x=a$ خط د $f(x)$ د تابع عمودي مجانب دی چې د y له محور سره موازي دی دعمودي مجانبونو شمېر د مخرج د جذرونو له شمېر سره مساوي دي یا په بل عبارت که $x\to a$ په نتیجه کې $f(x)\to+\infty$ یا $f(x)\to-\infty$ ، نو د $x=a$ عمودي خط ددې تابع عمودي مجانب دی یا که:

$x\to a \Rightarrow |f(x)|\to\infty$ نو $x=a$ د تابع عمودي مجانب دی.

x هره خومره چې د a قیمت ته نږدې شي، خو د تابع ګراف د $x=a$ مستقیم خط قطع کولای

نه شي ځکه چې د a عدد د تابع دتعریف په ساحه کې شامل نه دي، لکه: د $f(x)=\frac{1}{x}$ د تابع د تعریف په ساحه کې صفر شامل نه دی، نو $x=0$ یا د Y محور د $f(x)=\frac{1}{x}$ د تابع عمودي مجانب دی.

خلورم مثال: د $f(x)=\frac{2x}{x-3}$ ، $g(x)=\frac{x}{x^2-25}$ او $h(x)=\frac{x+5}{x^2+25}$ د تابعگانو عمودي مجانبونه پیدا کړئ.

حل:

1 - د f(x) د تابع د عمودي مجانب د پیدا کولو لپاره د x هغه قیمت پیدا کوو چې د f(x) تابع مخرج پرې صفر کیږي. نو د 3 عدد د $f(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

$$dom f(x)=\{x/x\in IR \ , \ \ x\neq 3\}$$

نو د x = 3 خط د f(x) د تابع عمودي مجانب دی.

2 -

$$g(x)=\frac{x}{x^2-25}=\frac{x}{(x-5)(x+5)}$$
$$x-5=0\Rightarrow x=5$$
$$x+5=0\Rightarrow x=-5$$

د x=5 یا x = −5 لپاره د g(x) تابع مخرج صفر کیږي، نو د 5 او 5 - عددونه د g(x) د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

$$dom\, g(x)=\{x/\in IR \ , \ \ x\neq -5 \ , \ \ x\neq 5\}$$

نو د $g(x)$ د تابع عمودي مجانبونه د $x=5$ او $x=-5$ خطونه دي،

3 - څرنگه چې د x په هر قیمت د $h(x)=\frac{x+5}{x^2+25}$ د تابع مخرج نه صفر کیږي، نو عمودي مجانب نه لري یاددې تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

افقی مجانب (Horizontal Asymptote)

که په یوه ناطقه تابع کې د صورت او مخرج درجې سره مساوي وي، نو ښکاره خبره ده چې دوېش حاصل (خارج قسمت) به یو ثابت عدد وي، که دې ثابت عدد ته b ووایو، نو د $y=b$ افقي خط

ددې تابع افقي مجانب دی چې دا خط یا د X محور او یا د X له محور سره موازي خط دی چې په حقیقت کې د b عدد د صورت او مخرج د لوی توانونو د ضریبونو له نسبت څخه عبارت دی.او یا صورت پر مخرج وېشو.

د مثال په ډول د $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ د تابع افقي مجانب د $y=2$ خط دی.

افقي مجانب داسې تعریفوو:

که $x\to\infty$ یا $x\to-\infty$ او په نتیجه کې $f(x)\to b$ نو $y=b$ مستقیم خط د f(x) تابع افقي مجانب دی او یا که $|x|\to\infty$ او $y\to b$ ، نو $y=b$ مستقیم خط ددې تابع افقي مجانب دی.

پنځم مثال: د $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ د تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

1 - **د X له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه**: د X له محور سره د تقاطع په نقطه کې $f(x)=0$ کیږي، په نتیجه کې لرو چې: $0=\dfrac{2x}{x-1}\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$

نو د تابع ګراف د X محور په $x=0$ یا د $(0,0)$ په نقطه کې قطع کوي.

2 - **د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه**: $f(0)=\dfrac{2\cdot 0}{0-1}=\dfrac{0}{-1}=0$

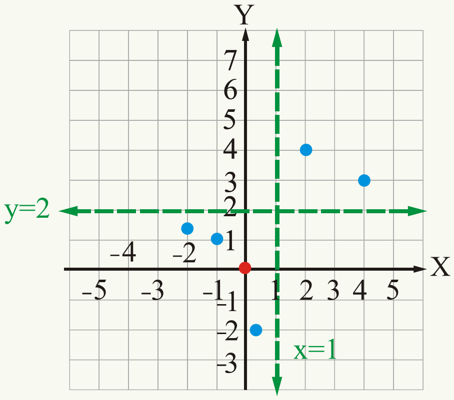
نو ګراف د X او Y محورونه د $(0,0)$ په نقطه کې قطع کوي یا په بل عبارت ددې تابع ګراف د وضیعه کمیاتو له مبدأ څخه تیریږي.

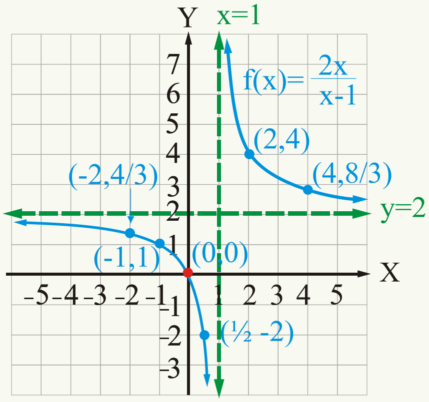
3 - د تابع د عمودي مجانب معادله: $x-1=0\Rightarrow x=1$ دی دا خط رسم کړئ.

4 - د تابع د ګراف افقي مجانب $\dfrac{2}{1}=2$ نو، $y=f(x)=2$ د تابع افقي مجانب دی، یا $\dfrac{2x}{x-1}=2+\dfrac{2}{x-1}$ افقي مجانب یې هم رسم کړئ.

5 - د ګراف یو څو نورې نقطې هم پیدا کوو لکه:

x	0	-2	-1	$\frac{1}{2}$	2	4
$y=f(x)$	0	$\frac{4}{3}$	1	-2	4	$\frac{8}{3}$





له محورونو سره د تقاطع نقطې ټاکو، د تابع مجانبونه رسموو او بيا يې ګراف لکه څنګه چې په شکل کې ليدل کيږي، رسموو.

فعاليت

د $f(x)=\dfrac{3x}{x-2}$ د تابع ګراف رسم کړئ.

شپږم مثال: د $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ د تابع افقي او عمودي مجانبونه پيدا کړئ او ګراف يې رسم کړئ.

حل: د عمودي او افقي مجانبونو معادلې عبارت دي له:

1 - د عمودي مجانب معادله $x=2$

2 - د افقي مجانب معادله $f(x)=y=1$

3 - د Y له محور سره تقاطع:

که $x=0$ شي، نو $f(x)=-1$ دي، ګراف د Y محور په $(0,-1)$ کې قطع کوي.

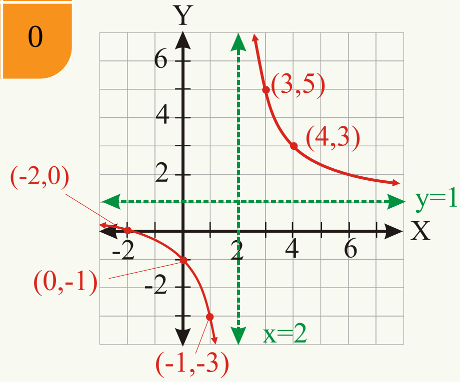
4 - د X له محور سره تقاطع $f(x)=0$ شي نو:

$$x+2=0$$
$$x=-2$$

نو د $(-2,0)$ په نقطه کې ګراف د X محور قطع کوي.

5 - ددې لپاره چې ګراف په اسانه ډول رسم شي، په لاندې جدول کې د ګراف د هرې خانګې قيمتونه وګورئ.

x	-1	0	1	3	4	5	-2
$f(x)$	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	5	3	$2\frac{1}{3}$	0



که صورت پر مخرج وويشو $\frac{x+2}{x-2}=1+\frac{4}{x-2}$

په حقيقت کې د $f(x)=\frac{1}{x}$ د تابع ګراف د يو واحد په اندازه پورته خواته او د (2) واحدونو په اندازه ښي خواته ا نتقال شوی دی.او $y=f(x)=1$ د تابع افقي مجانب دی.

مايل مجانب: **(slant or Obligue asymptote)**

څه وخت چې د يوې ناطقې تابع د صورت درجه د يو په اندازه د مخرج له درجې څخه زياته وي ښکاره خبره ده چې تابع افقي مجانب نه لري چې په دې حالت کې تابع مايل مجانب لري.

اووم مثال: د $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ د تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

1 - د مايل مجانب د پيداکولو لپاره صورت پر مخرج ويشو، نو لرو چې:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}=\underbrace{x+1}_{\text{مايل مجانب}}+\frac{2}{x-1}$$

که $|x|$ هر څومره لوی شي $\frac{2}{x-1}$ صفر ته نژدې کيږي، نو په نتيجه کې ګراف د $y=f(x)=x+1$ مستقيم خط ته نږدې کيږي چې همدا د $y=x+1$ خط د $f(x)$ د تابع مايل مجانب دی.

2 – د Y له محور سره يې د تقاطع نقطه:

$$f(0)=0+1+\frac{2}{0-1}=1-2=-1$$

گراف د $(0,-1)$ په نقطه کې د Y محور قطع کوي.

3 - ښکاره خبره ده چې گراف د X محور قطع

کولای نه شي ځکه چې $x=\sqrt{-1}$ کيږي.

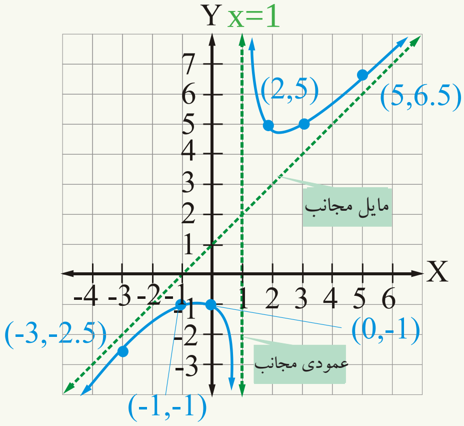
4 - عمودي مجانب يې

$x-1=0 \Rightarrow x=1$ دی.

5 - ښکاره ده چې افقي مجانب نه لري.

6 - يو څو نورې نقطې پيدا کوو او د تابع گراف

رسموو:



x	2	3	5	−1	−3
f(x)	5	5	6.5	−1	−2.5

اتم مثال: د $f(x)=\frac{x^2+1}{x-2}$ د تابع گراف رسم کړئ.

1 - د تابع عمودي مجانب د $x=2$ خط دی، ځکه چې $x-2=0 \Rightarrow x=2$

2 - x^2+1 پر $(x-2)$ ويشو لرو چې: $\frac{x^2+1}{x-2}=x+2+\frac{5}{x-2}$

که $|x|$ لوی شي $\frac{5}{x-2}$ صفر ته نږدې کيږي او د تابع گراف د $y=x+2$ خط ته نږدې کيږي

چې $y=x+2$ خط ددې تابع مايل مجانب دی.

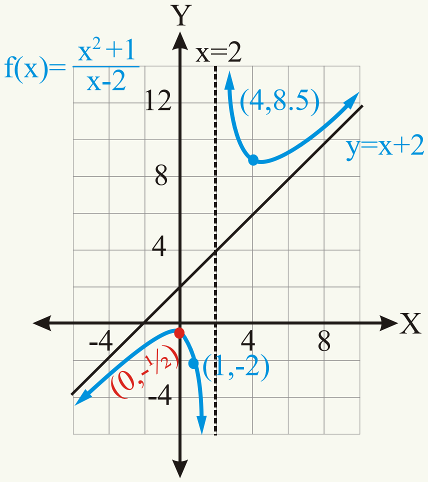
3 – د Y له محور سره تقاطع $-\frac{1}{2}$ ده، ځکه که $x=0$ شي $f(0)=\frac{0+1}{0-2}=-\frac{1}{2}$

4 – گراف د X له محور سره تقاطع نه لري، ځکه چې که $f(x)=0$ شي نو: $0=\frac{x^2+1}{x-2}$

(چې په حقیقي عددونو کې تعریف شوی نه دی) $x^2+1=0 \Rightarrow x^2=\sqrt{-1}$

د مجانبونو په رسمولو او د Y له محور سره د تقاطع د ټکی او ځو نورو قیمتونو په مرسته د تابع ګراف رسمولای شو.

x	0	1	4
f(x)	$-\frac{1}{2}$	-2	8.5



که $f(x)=\dfrac{P(x)}{g(x)}$ په تابع کې په ترتیب سره m او n د صورت او مخرج درجې وي نو:

1 – که $m<n$ وي د x محور افقي مجانب دی.

2 – که $m=n$ وي $y=b$ د تابع افقي مجانب دی چې b د m او n د درجو حدونو د ضریبونو

نسبت دی یا که چیرې $f(x)=\dfrac{a_nx^n+...+a_0}{b_nx^n+...+b_0}$، $(b_n\neq 0)$ وي، نو $y=\dfrac{a_n}{b_n}$ د f(x) د تابع افقي مجانب دی.

3 – که $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري.

4 – که د صورت درجه د یو په اندازه مخرج له درجې څخه زیاته وي، نو د تابع ګراف مایل مجانب لري چې په بی نهایت کې د ګراف سره موازي کیږي، یوه ناطقه تابع یو یا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو یو افقي یا مایل مجانب به لري.

پوښتنې

1 – د $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-4}$ د تابع افقي او عمودي مجانبونه پيدا کړئ.

2 – آيا د $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+1}$ تابع عمودي مجانب لري؟ ولې؟

3 – د لاندې راکړل شوو تابعګانو د تعريف ساحې پيدا کړئ او د عمودي مجانبونو معادلې يې وليکئ.

$$f(x)=\frac{5x}{x-4}\ ,\ g(x)=\frac{3x^2}{(x-5)(x+4)}\ ,\ h(x)=\frac{x+7}{x^2-49}\ ,\ k(x)=\frac{x+7}{x^2+49}$$

4 – له لاندې تابعګانو څخه کومه يوه چې عمودي مجانب ولري پيدا يې کړئ.

$$f(x)=\frac{x}{x+4}\quad ,\quad g(x)=\frac{x+3}{x(x+4)}$$

$$h(x)=\frac{x}{x(x+4)}\quad ,\quad k(x)=\frac{x}{x^2+4}$$

5 – د لاندې ناطقو تابعګانو ګرافونه رسم کړئ.

$$f(x)=\frac{4x}{x-2}\quad ,\quad g(x)=\frac{2x}{x-4}$$

6 - د $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}$ د تابع افقي مجانب عبارت دی له:

$a:\quad y=2$ $\qquad b:\quad y=3$

$c:\quad y=-2$ $\qquad d:\quad y=-3$

7 - د $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ او $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$ تابعګانو ګرافونه رسم کړئ او د $f(x)=\dfrac{1}{x}$ د تابع له ګراف سره يې پرتله کړئ.

8 – د $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ د تابع مايل مجانب پيدا کړئ.

د څېرکي لنډيز

• تابع د دوو سټونو تر منځ داسې يوه رابطه يا قاعده (Rule) ده چې د لومړني سټ هر عنصر يوازې او يوازې د دويم سټ له يو عنصر سره اړيکه ولري. لومړني سټ ته د تابع د تعريف ساحه (Domain) او دويم سټ ته د قيمتونو ساحه(Range) وايي يا تابع د هغه مرتبو جوړو سټ دى چې لومړني عناصر يې تکرار شوي نه وي.

• يوه تابع د $y = f(x)$ په شکل ليکل کيږي، په يوه نقطه کې د تابع د قيمت د پيدا کولو لپاره د x راکړل شوى قيمت د تابع په معادله کې وضع کوو، د تابع قيمت په هغه نقطه کې په لاس راځي او يوه معادله هغه وخت د يوې تابع ښودونکی وي چې د هر x لپاره يوه y وجود ولري.

• د يوې تابع د تعريف په ساحه (Domain) کې هغه عددونه شامل وي، چې تابع په کې تعريف شوي وي يا د تابع قيمت يو حقيقي عدد وي. د يوې تابع گراف د XY په مستوي کې د S د هغو نقطو سټ دى په دې ډول چې $S = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ او x د تابع د تعريف په ساحه کې شامل وي، که د y له محور سره موازي خط گراف يوازې په يوه نقطه کې قطع کړي، دا گراف د يوې تابع گراف دى.

• $f(x) = c$ ثابته تابع، $f(x) = ax + b$ خطي تابع، $(a \neq 0)$, $f(x) = x$ د عينيت تابع او $f(x) = |x|$ د مطلقه قيمت تابع ده، چې د تعريف ساحه يې ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ساحه يې صفر او مثبت حقيقي عددونه دي.

• د علامې تابع دا ډول تعريف شوې ده:

$$f : IR \to IR \qquad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 : x > 0 \\ 0 : x = 0 \\ -1 : x < 0 \end{cases}$$

ددې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ساحه يې $\{-1, 0, 1\}$ ده.

• د دويمې درجې تابع عمومي شکل $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ دى او د دويمې درجې تابع گراف ته پارابولا (parabola) وايي که $a > 0$ وي، رأس اصغري او که $a < 0$ و، رأس اعظمي دى. $(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a})$ د پارابول د رأس وضعيه کميات او $x = -\dfrac{b}{2a}$ د پارابول د تناظر د

محور معادله ده. که $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ پارابول د X محور په دوو نقطو کې او که $\Delta = 0$ ، نو پارابول د x محور په یوه نقطه کې قطع کوي او که $\Delta < 0$ ، وي پارابول د x محور نه قطع کوي

- که د $f(x)$ په تابع کې $x_1 < x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي، تابع متزایده، که $x_1 < x_2$ وي او $f(x_1) > f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده، او هم که $f(-x) = f(x)$ وي، تابع جفته او که $f(-x) = -f(x)$ شي، تابع طاقه ده.
- انتقال په (2) ډوله دی (عمودي او افقي انتقال)
- **عمودي انتقال**: که c یو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ د تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته انتقال شي د $y = f(x) + c$ د تابع ګراف لاس ته راځي.

که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال شي، د $y = f(x) - c$ تابع ګراف لاس ته راځي.

افقي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ د تابع ګراف د c واحدونو په اندازه کیڼې خواته انتقال شي، د $y = f(x+c)$ ګراف لاس ته راځي.

که د $y = f(x)$ د تابع ګراف د c واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شي، د $y = f(x-c)$ تابع ګراف لاس ته راځي.

- د تابعګانو عملیې په لاندې ډول تعریف شوي دی:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad , \quad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad , \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

$$\operatorname{dom}(f+g)(x) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$$
$$\operatorname{dom}(f-g)(x) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$$
$$\operatorname{dom}(f \cdot g)(x) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$$
$$\operatorname{dom}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g - \{x / g(x) = 0\}$$

• د مرکبو تابعګانو د تعریف ساحه:

$$Dom(fog)(x)=\{x/x\in domg \quad , \quad g(x)\in domf\}$$
$$Dom(gof)(x)=\{x/x\in domf \quad , \quad f(x)\in domg\}$$

• د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع ده.

• د X له محور سره موازي خط (افقي خط) د یو په یو تابع ګراف په یوه نقطه کې قطع کوي.

• د $y=f(x)$ د یو په یو تابع د معکوس د پیداکولو لپاره معادله د x لپاره حلوو، بیا x پر y او y پر x بدلوو په لاس راغلی تابع $f^{-1}(x)$ ده چې د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع ده. د f(x) او د f(x) د معکوسې تابع ګرافونه نظر د y=x خط سره متناظر دي.

• که د $f(x)=\dfrac{P(x)}{g(x)}$ په ناطقه تابع کې په ترتیب سره m او n عددونه د صورت او مخرج درجې وي نو:

1 – که $m<n$ وي، د X محور افقي مجانب دی.

2 – که $m=n$ وي، $y=b$ د تابع افقي مجانب دی چې b د m او n درجو لرونکو حدونو د ضریبونو نسبت دی یا که چیرې $f(x)=\dfrac{a_nx^n+...+a_0}{b_nx^n+...+b_0}$ وي، $(b_n\neq 0)$ نو $y=\dfrac{a_n}{b_n}$ د f (x) د تابع افقي مجانب دی.

3 – که $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري.

4 – که د صورت درجه د یو په اندازه د f(x) د مخرج له درجې څخه زیاته وي، نو تابع مایل مجانب لري.

• یوه ناطقه تابع یو یا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو یو افقي یا مایل مجانب به لري.

د خپرکي پوښتنې

1 - د لاندېنیو مرتبو جوړو له ستونو څخه کوم یو یې د یوې تابع ښودونکي دی؟ د تعریف او د قیمتونو ساحې یې پیدا کړئ.

$1-\quad \{(1,2),(3,4),(5,5)\}$

$2-\quad \{(3,4),(3,5),(4,4),(4,5)\}$

$3-\quad \{(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0)\}$

$4-\quad \{(1,4),(1,5),(1,6)\}$

2 - که $g(x)=x^2+2x+3$ وي، $g(-x), g(-1)$ او $g(x+5)$ پیدا کړئ.

3 - که $h(x)=x^4+x^2+1$ وي، $h(-x), h(-1), h(2)$ او $h(3a)$ پیدا کړئ.

4 - د لاندېنیو تابعګانو دتعریف ساحې پیدا کړئ.

$f(x)=2x \quad , \quad f(x)=(x-3)^{\frac{1}{2}}$

$f(x)=\sqrt{16-x^2} \quad , \quad f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$

$f(x)=\sqrt{\dfrac{3}{x^2+25}} \quad , \quad f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$

5 - که چېرې $f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x<0 \\ 4x+7 & : \quad x\geq 0 \end{cases}$ وي، $f(0), f(3)$ او $f(-2)$ پیدا کړئ.

6 - که چیرې $g(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x\geq -3 \\ -(x+3) & : \quad x<-3 \end{cases}$ وي، $g(-6), g(0)$ او $g(-3)$ پیدا کړئ.

7- $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \Leftarrow \quad x\neq 3 \\ 6 & \Leftarrow \quad x=3 \end{cases}$ وي، $h(0), h(3)$ او $h(5)$ پیدا کړئ.

8 - له لاندینیو معادلو څخه کومه یوه یې تابع تعریفوي؟

$x+y=16 \quad , \quad x^2+y=16 \quad , \quad x^2+y^2=16$

$x=y^2 \quad , \quad y=\sqrt{x+4} \quad , \quad x+y^3=8$

9 - په لاندينيو تابعګانو کې کومه طاقه، کومه يوه جفته او کومه يوه، نه طاقه او نه جفته ده؟

$$f(x)=x^4-2x^2+5 \quad , \quad f(x)=x^2+2x-1 \quad . \quad f(x)=\frac{2}{x-6}$$

10 - د $f(x)=(x-1)^2,\ f(x)=x^2-1$ تابعګانو ګرافونه رسم او د $f(x)=x^2$ سره يې پرتله کړئ.

11 - د لاندېنيو تابعګانو $(f+g),(f-g),(f\cdot g)$ او $(\frac{f}{g})$ پيدا کړئ او د تعريف ساحې يې وټاکئ.

$f(x)=4x-1 \quad , \quad g(x)=6x+3$

$f(x)=\sqrt{2x+5} \quad , \quad g(x)=\sqrt{4x-9}$

$f(x)=4x^2-11x+2 \quad , \quad g(x)=x^2+5$

12 - که $f(x)=4x^2-2x$ او $g(x)=8x+1$ وي نو:

$(f+g)(3) \quad , \quad (f+g)(-5) \quad , \quad (f\cdot g)(4)$

$(\frac{f}{g})(4) \quad , \quad (fog)(2) \quad , \quad (gof)(-5)$

پيدا کړئ.

13 - fog او gof پيدا کړئ که:

$f(x)=8x+12 \quad , \quad g(x)=3x-1$

$f(x)=5x+3 \quad , \quad g(x)=-x^2+4x+3$

$f(x)=-x^3+2 \quad , \quad g(x)=4x$

$f(x)=\frac{1}{x} \quad , \quad g(x)=x^2$

$f(x)=\sqrt{x+2} \quad , \quad g(x)=8x^2-6$

14 - د y=f(x) د تابع د ګراف په نظر کې نيولو سره ووایاست چې د $y=f(x)-5$ تابع ګراف د 5 واحدو په اندازه:

a- ښکته خواته انتقال شوي دی.　　b- پورته خوا ته انتقال شوي دی.

c- ښي خواته انتقال شوي دی.　　d- کيڼي خواته انتقال شوي دی.

15 - که د f(x) تابع په لاندې ډول تعريف شوي، وي ګراف يې رسم کړئ، د تعريف او قيمتونو

ساحې يې وټاکئ.

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & : \quad x>1\\ x^2 & : \quad -1<x<1\\ x+2 & : \quad x<-1\end{cases}$$

16 - د $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ تابع د تعريف او قيمتونو ساحې يې وټاکئ.

17 - د $f(x)=\sqrt{2x-1}$ تابع د تعريف او قيمتونو ساحې وټاکئ.

18 - د لاندېنيو ناطقو تابعګانو د تعريف ساحې پيدا کړئ او کومه تابع چې عمودي مجانب ولري، د عمودي مجانبونو معادلې يې هم پيدا کړې.

$$\mathrm{f(x)}=\frac{5x}{x-4}\quad,\quad \mathrm{g(x)}=\frac{7x}{x-8}\quad,\quad \mathrm{h(x)}=\frac{x+8}{x^2-64}$$

$$\mathrm{f(x)}=\frac{x+8}{x^2+64}\quad,\quad \mathrm{g(x)}=\frac{x+7}{x^2-49}\quad,\quad \mathrm{h(x)}=\frac{x+7}{x^2-36}$$

19 - د $f(x)=x^2+2$, $f(x)=x^2+1$, $f(x)=x^2-1$ او $f(x)=x^2-2$ تابعګانو ګرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم او د $f(x)=x^2$ د تابع له ګراف سره يې پرتله کړئ.

20 - د لاندينيو دويمې درجې تابعګانو د رأسونو وضعيه کمياتو اود تناظر د محورونو معادلې پيدا کړئ.

$$y=(x-2)^2 \qquad y=(x+3)^2-4$$

21 - د $y=-\dfrac{x}{2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

22 - د $f(x)=\dfrac{x^2-5}{x+2}$ د تابع عمودي او مايل مجانبونه پيدا کړئ.

23 - د $h(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$ تابع د افقي مجانب معادله عبارت ده له:

$a)\quad y=-1 \qquad\qquad b)\quad y=1$

$c)\quad y=-\dfrac{1}{4} \qquad\qquad d)\quad y=4$

24 - د $f(x)=\begin{cases}3x+1 & : x<2\\ -x & : x\geq 2\end{cases}$ د تابع گراف رسم کړئ.

25- $g(x)=|x|-5$ د تابع گراف رسم او د قیمتونو ساحه یې پیدا کړئ.

26 - د علامې تابع د قیمونو په ساحه کې کوم عددونه شامل وي؟

27 - د لاندېنیو هرې تابع معکوسه تابع پیدا کړئ او وښایاست چې $f(f^{-1}(x))=x$ دی.

$f(x)=\frac{1}{8}x$, $f(x)=8x-1$, $f(x)=x^2+6$

$f(x)=\frac{4x+6}{5}$, $f(x)=x^3-1$

28 -آیا د $g(x)=x^2$ تابع معکوس منونکی ده؟ (معکوس یې هم یوه تابع ده)

29 - که $(fog)(x)=(gof)(x)$ وي، د f او g تابعگانې سره څه اړیکه لري؟

30 - د X او Y له محورونو سره د $g(x)=3-\frac{3}{2}x$ د گراف، د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیدا کړئ.

31 - د $f(x)=-3$ د تابع گراف رسم کړئ.

32 - د $f(x)=2x^2+4x+5$ تابع د گراف د رأس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

33 - د $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $f(x)=3x^2$, $f(x)=2x^2$ او $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ تابعگانو گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او د $f(x)=x^2$ تابع د گراف سره یې پرتله کړئ.

34 ـ د $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ د ناطقی تابع مایل مجانب عبارت دی له:

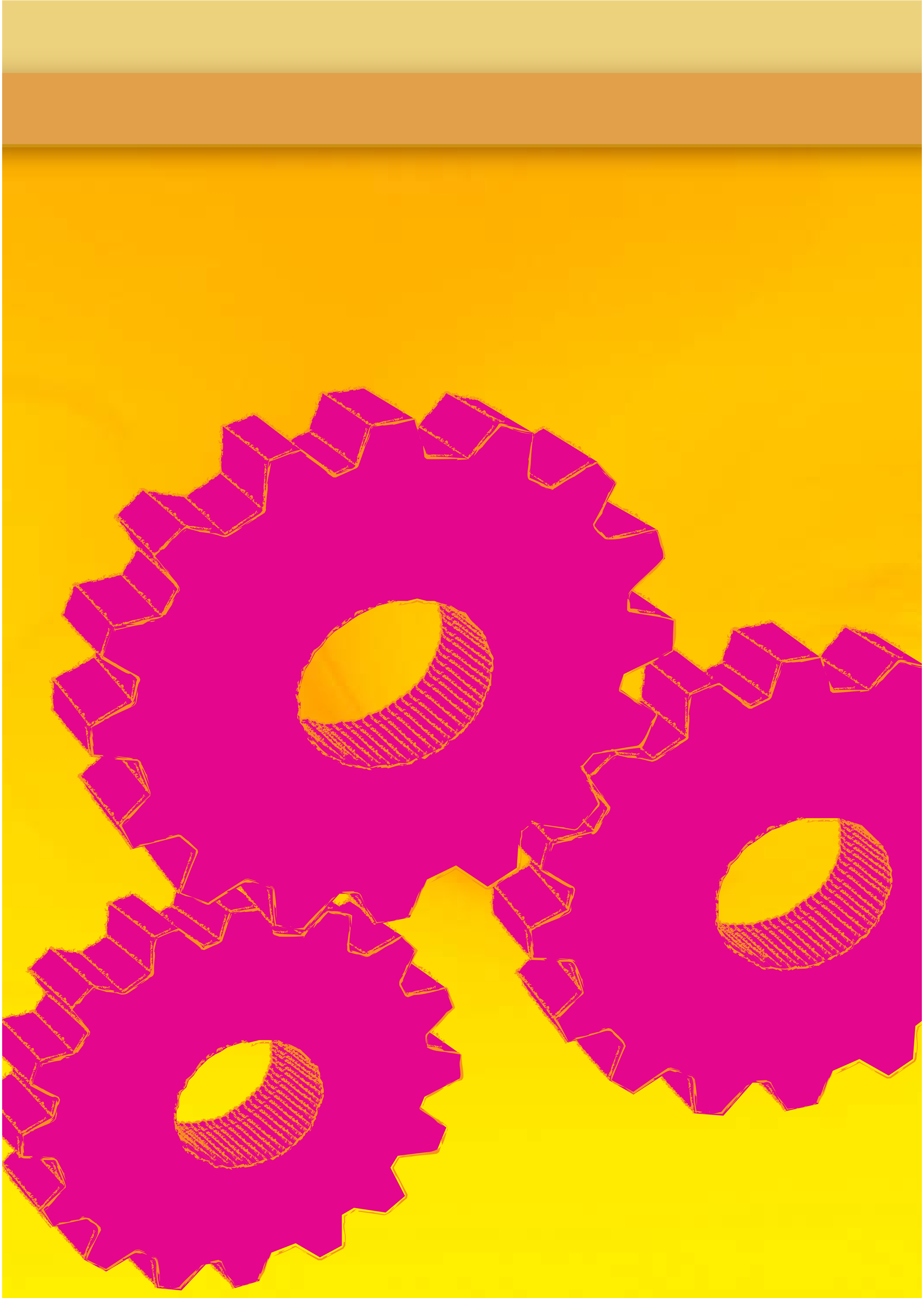
$a:\ y=x$

$b:\ y=x-1$

$c:\ y=x+1$

خلورم خپرکی

مثلثاتي تابعګانې



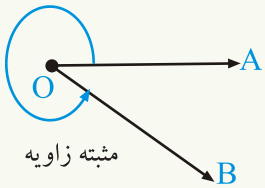
زاویه او راډیان(Angle and Radian)
زاویه او د زاویې د اندازه کولو واحدونه:

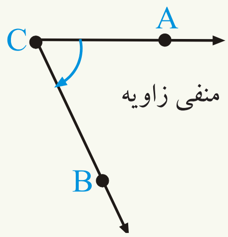
أیا زاویه په مثلثاتو او هندسه کې یو له بله توپیر لري؟
أیا په هندسه کې منفي زاویې شته دی؟

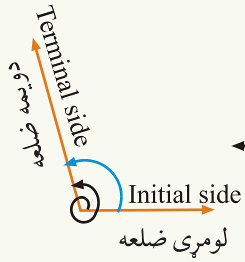
له هندسې څخه پوهېږو، زاویه هغه شکل دی، چې د دوه نیمو خطونو له یو ځای کېدو څخه چې مشترکه مبدأ ولري، تشکیل شوې وي، چې مشترکه مبدأ د زاویې له رأس څخه عبارت ده. په هندسه کې زاویه د $1°$ څخه تر $360°$ پورې وي، خو په مثلثاتو کې په هره اندازه زاویه درلودلای شو. له بلې خوا په مثلثاتو کې مثبتې او منفي زاویې هم شته دی.

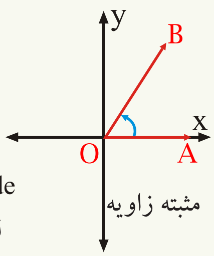
په مثلثاتو کې زاویه د یو خط له دوران څخه په دې ډول چې د خط یو انجام ثابت وي، لاس ته راځي. چې د لومړي خط دوران د دویمې ضلعې موقعیت اختیاروي(یوه ضلعه د رأس په نقطه کې دوران کوي). د ساعت د عقربې د حرکت مطابق دوران(clockwise) منفي او د ساعت د عقربې د حرکت مخالف(Counter clockwise) دوران مثبت فرض شوی دی.

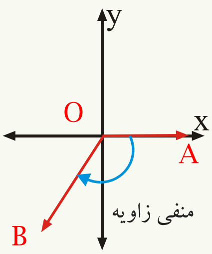
چې لومړۍ ضلعې ته (Initial side) او د دوران پای ته دویمه ضلعه (Terminal side) وایي. لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.



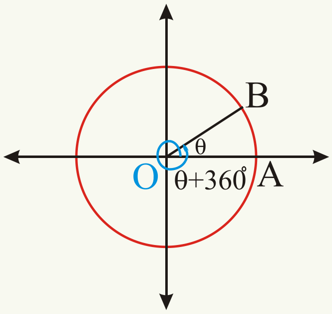






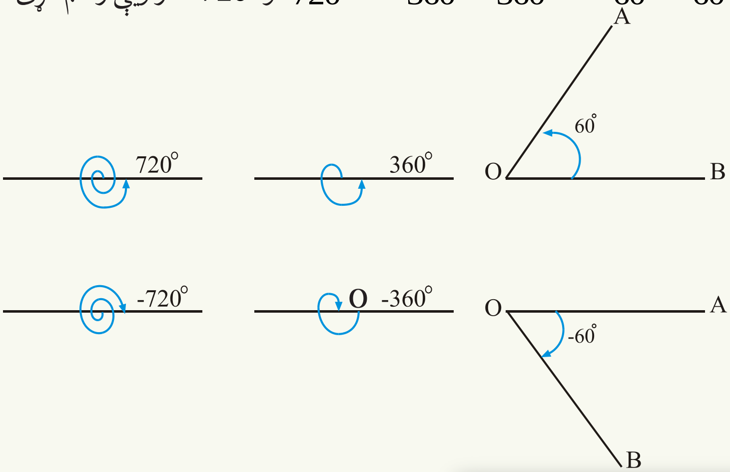


که په شکل کې د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته د مختصاتو د مبدأ پر شاوخوا د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف جهت کې دوران ورکړو، د θ زاویه لاس ته راځي.



که د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته د 360^o په اندازه(یو پوره دوارن) دوران ورکړو، او دوران ته دوام ورکړو تر څو د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط د OB موقعیت ته ورسېږي. په دې حالت کې جوړه شوې زاویه $\theta+360^o$ ده. او که د دوو پوره دورانونو وروسته د B ټکي ته ورسېږو، طې شوې زاویه به $\theta+720^o$ او په همدې ډول که د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته K دورانونه ورکړو او د B ټکی ته ورسېږو، نو د زاویې اندازه به $\theta+K\cdot360^o$ وي. لکه څرنګه چې لیدل کېږي، په مثلثاتو کې له 360^o څخه لوی زاویې هم شته دی.

لومړی مثال: د 60^o ، -60^o ، 360^o، -360^o ، 720^o او -720^o زاویې رسم کړئ.



فعالیت

د 45^o , 90^o , -180^o او 180^o زاویې رسم کړئ.

د زاویې د اندازه کولو واحدونه: زاویه د درجې، ګراد او راډیان په مرسته اندازه کېږي.

درجه: د یو دوران (Rotation) $\frac{1}{360}$ برخه له درجې څخه عبارت ده، یا دیوې قایمې زاویې $\frac{1}{90}$ برخې ته درجه وایي.

$$1^{\circ}=60' \qquad 1'=60'' \qquad 1^{\circ}=60\cdot 60=3600''$$

$$(\frac{1}{60})^{\circ}=1' \quad , \quad (\frac{1}{60})'=1'' \qquad (\frac{1}{3600})^{\circ}=1''$$

دویم مثال: $35^{\circ}\ 15'\ 27''$ د درجې په اعشاري شکل ولیکئ او $(48{,}3625)^{\circ}$ په درجه، دقیقه او ثانیه (DMS) واړوئ.

حل

$$35^{\circ}\ 15'\ 27''=35^{\circ}+(\frac{15}{60})^{\circ}+(\frac{27}{3600})^{\circ}=35^{\circ}+0{,}25^{\circ}+0{,}0075^{\circ}=35{,}2575^{\circ}$$

$$48{,}3625^{\circ}=48^{\circ}+0{,}3625^{\circ}=48^{\circ}+(0{,}3625\cdot 60)'=48^{\circ}+(21{,}75)'$$

$$=48^{\circ}+(21)'+(0{,}75\cdot 60)''=48^{\circ}\quad 21'\quad 45''$$

فعالیت

$36^{\circ}\ 47'\ 12''$ په درجه واړوئ او $55{,}967663^{\circ}$ په درجه، دقیقه او ثانیه (DMS) (Degree, Minute, Second) واړوئ.

ګراد: ګراد هم د زاویې د اندازه کولو واحد دی، د یو دوران $\frac{1}{400}$ برخې ته ګراد وایي. د ګراد $\frac{1}{100}$ برخې ته دقیقه ګراد او د دقیقه ګراد $\frac{1}{100}$ مې برخې ته ثانیه ګراد وایي.

$$1g=100'g \quad , \quad 1'g=100''g \quad , \quad 1g=10000''g$$

د درجې بدلول په ګراد او د ګراد بدلول په درجې باندې: کولای شو چې درجه په ګراد او ګراد په درجه واړوو.

دریم مثال: 45° درجې په ګراد او $100g$ په درجه واړوئ.

حل: څرنګه چې یو مکمل دوران 360° یا $400g$ دی نو:

$$360^o = 400g \qquad\qquad 400g = 360^o$$

$$1^0 = \frac{400}{360}g = \frac{10}{9}g \qquad\qquad 1g = (\frac{360}{400})^o = (\frac{9}{10})^o$$

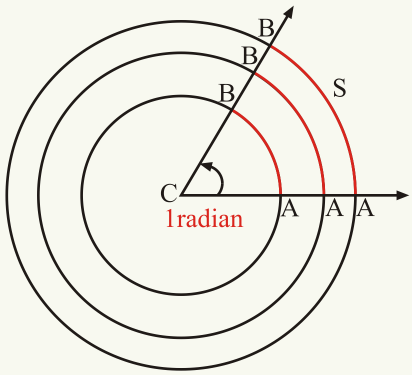
$$45^o = 45(\frac{10}{9})g = 50g \qquad\qquad 100g = 100(\frac{9}{10})^o = 90^o$$

اويا:

$$\frac{d}{180} = \frac{g}{200} \quad , \quad \frac{d}{180} = \frac{100}{200}$$

$$d = \frac{180 \cdot 100}{200} = 90^o$$

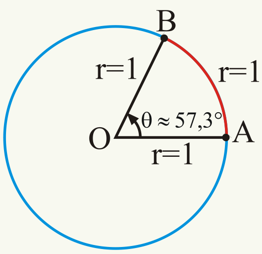
راډيان(Radian): د درجې او ګراد سربېره د زاويې د اندازه کولو بل واحد راډيان دی. راډيان د هغه مرکزي زاويې اندازه ده، چې د مقابل قوس اوږدوالی يې د شعاع له اوږدوالی سره مساوي وي. راډيان په عالي رياضياتو کې ډېر استعمالېږي. په شکل کې د $\hat{ACB}$ مرکزي زاويه چې شعاع يې r او د AB قوس اوږدوالی له r سره مساوي دی، نو د $\hat{ACB}$ زاويه 1Radian ده.



$$\hat{ACB} = 1radian = 1^R$$

که د AB قوس د دايرې له شعاع r سره مساوي وي، θ د راډيان په حساب مساوي ده په:

$$\hat{\theta} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{s}{r} \text{ او يا } s = r\theta$$



په مثلثاتي دايره يا واحده دايره(Circle Unite) کې چې شعاع يې د اوږدوالی واحد او مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې واقع دی، د راډيان په حساب د مرکزي زاويې اندازه له مقابل قوس سره مساوي ده.

$$\theta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{1} = \overset{\frown}{AB} = S \quad radian$$

خرنګه چې د دايرې محيط $C = 2\pi r$ دی، نو $\frac{2\pi\, r}{r} = 2\pi \;\; radian$ په دې معنا چې يو پوره دوارن 360^o يا $2\pi^R$ دی.

$$2\pi^R = 360^\circ$$

$$1^R = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx \frac{180^\circ}{3.14159} \approx (57.29578)^\circ \approx 57^\circ 17'45'' \approx (57.3)^\circ$$

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \approx \frac{3.14159}{180^\circ} \approx 0.01745\,\text{Randians}$$

خلورم مثال: د $\frac{\pi}{3}$ $radian$ د مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی پيدا کړئ، که د دايرې قطر $30m$ وي.

حل: خرنګه چې: $r = \frac{d}{2} = \frac{30m}{2} = 15m$ دی، نو: $s = r\theta = 15(\frac{\pi}{3}) = 5\pi\ m \approx 15{,}7m$

فعاليت

د $1Rad$ مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی په څو سانتي متره وي؟ که د دايرې شعاع $10cm$ وي.

د درجې او ګراد بدلول په راډيان او د راډيان بدلول په درجه او ګراد:

خرنګه چې $360^o = 400g = 2\pi^R$ دی،نو $\frac{d}{360^\circ} = \frac{g}{400} = \frac{R}{2\pi}$ او يا $\frac{d}{180} = \frac{g}{200} = \frac{R}{\pi}$

و يا

$$360^o = 2\pi^R$$

$$1^o = (\frac{2\pi}{360})^R = (\frac{\pi}{180})^R$$

په همدې ډول خرنګه چې: $2\pi^R = 360^o$

$$1^R = (\frac{360}{2\pi})^o = (\frac{180}{\pi})^o$$

$$1^R = \frac{200g}{\pi} = \frac{200g}{3{,}1415} \approx 63{,}66198g$$

پنځم مثال: د 75^o , 220^o , -400° , $-100g$ او 40° زاويې په راډيان واړوئ.

خرنګه چې $1^o = (\frac{\pi}{180})^R$ ده، نو:

$$220\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{9}\text{radain,} \qquad 75^\circ\cdot\frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}\text{radain}$$

$$40^\circ\cdot\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{9}\text{ radian} \qquad -400^\circ\cdot\frac{\pi}{180} = -\frac{20\pi}{9}\text{ radain}$$

خرنګه چې يو پوره دوران $2\pi^R$ او يا $400g$ دی، نو:

$$1g = (\frac{2\pi}{400})^R = (\frac{\pi}{200})^R$$

$$-100g = (-100\cdot\frac{\pi}{200})^R = (-\frac{\pi}{2})^R$$

پوښتنه: که د ګراد په حساب له يوې زاويې څخه 30 واحده کم کړو، په لاس راغلی عدد، د زاويې اندازه په درجه راکوي، دا زاويه څو راډيانه ده؟

حل

$$\frac{10}{9}D - 30 = D$$

$$\frac{10}{9}D - D = 30 \Rightarrow \frac{10D - 9D}{9} = 30 \Rightarrow D = 270^\circ$$

$$\frac{270}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{3\pi}{2}\text{Radian}$$

نو دا زاويه $\frac{3\pi}{2}$ راډيانه ده.

شپږم مثال a: $(\frac{5\pi}{6})$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{9}$ او 6π راډيان په درجه واړوئ.

(b): د يو دوران(Revolution) $\frac{1}{4}$ برخه څو راډيانه کېږي؟

حل

$$1^R = \left(\frac{180}{\pi}\right)^o \quad , \quad \frac{\pi}{5}\cdot\frac{180}{\pi} = 36^\circ$$

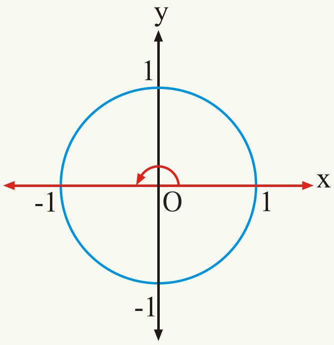
$$a: \left(\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\left(\frac{180}{\pi}\right) = 150^\circ \quad , \quad 6\pi\cdot\frac{180}{\pi} = 1080^\circ \quad , \quad \frac{4\pi}{9}\cdot\frac{180}{\pi} = 80^\circ$$

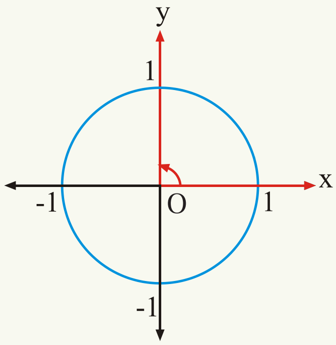
$$b: = \frac{1}{4}\cdot 2\pi^R = \frac{\pi}{2}\text{radian}$$

لاندې شکلونه وګورئ.

$\frac{1}{2}\text{Rev}$, $\frac{1}{4}\text{Rev}$

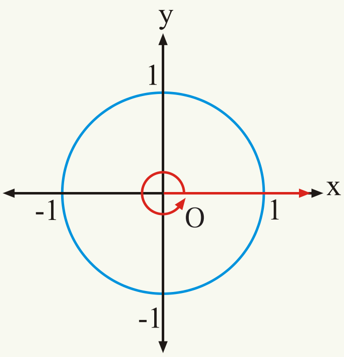
$\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi^R$, $\frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}\text{Radain}$

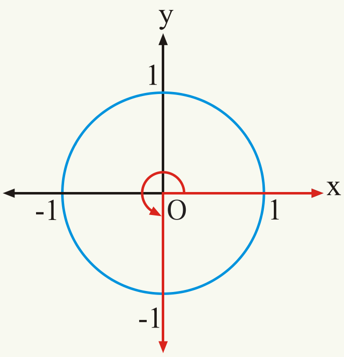


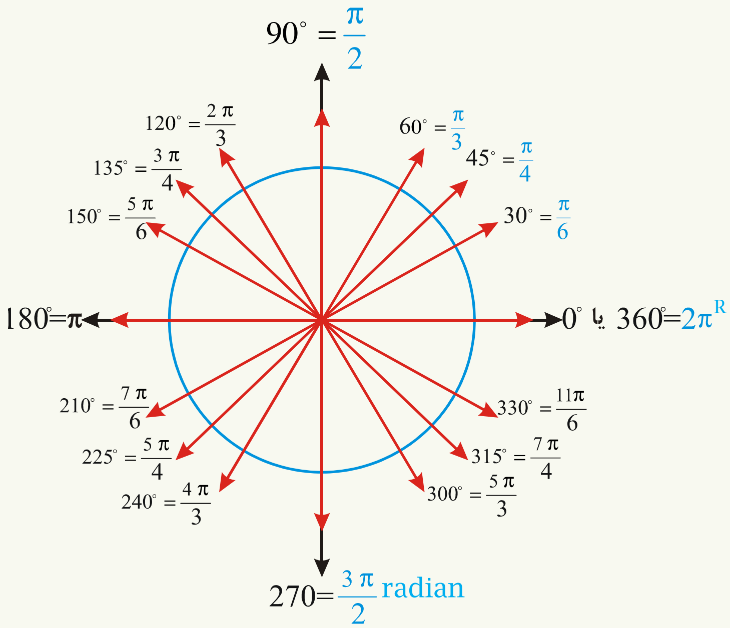


$1\ \text{Revolution}$, $\frac{3}{4}\text{Revolution}$

$2\ \pi\text{Radians}$, $\frac{3}{4}\cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}\text{Radians}$







د درجې او راډیان تر منځ د اړیکې د ښه څرګندیدو لپاره لاندې شکل هم وګورئ:

فعالیت

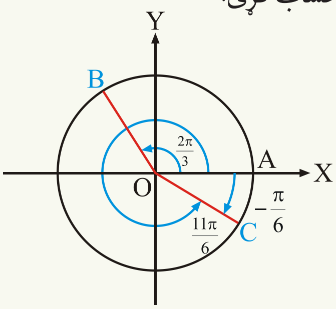
$\frac{\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{4}$ او $\frac{5\pi}{4}$ – راډیانه زاویې په درجه واړوئ.

اووم مثال

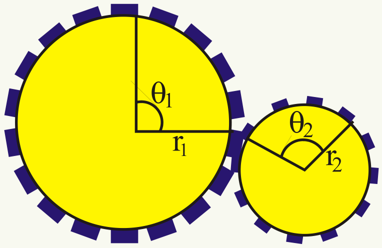
a) د $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{6}$ او $-\frac{\pi}{6}$ – زاویې په شکل کې وښایاست:

b) په شکل کې لوی او کوچنی خرخ ښودل شوی دی، که د θ_1 او θ_2 د زاویو مقدار د راډیان په حساب وي، د θ_2 د زاویې مقدار د θ_1، r_1 او r_2 له جنسه حساب کړئ.

د (a) حل:



د (b) حل:



$$\theta_2 r_2 = \theta_1 r_1 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\theta_1 r_1}{r_2}$$

له شکل څخه ليدل کېږي، چې د $\frac{11\pi}{6}$ او $-\frac{\pi}{6}$ زاويو دويمې ضلعې يو پر بل منطبقې دي.

اتم مثال: که د ساعت د ثانيې عقربې 40 ثانيې دوران کړی وي، د ثانيې د عقربې په واسطه طی شوې مثبته زاويه په راډيان پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې 60 ثانيې يو پوره دوران يا 2π راډيان کېږي، نو $\frac{40}{60}=\frac{2}{3}\text{Rev}$ او څرنګه چې يو دوران 2π *Radian* دی، نو: $\frac{2}{3}\cdot 2\pi^R = \frac{4\pi}{3}$ Radian

همدارنګه د ساعت د دوو عقربو ترمنځ د زاويې د پيدا کولو لپاره له $\theta = |5{,}5\min - 30hr|$ څخه کار اخلو.
د مثال په توګه د 3 بجو او 40 دقيقو په وخت کې د ساعت ګرد او دقيقه ګرد په منځ کې زاويه څو درجې ده؟

$$\theta = |5{,}5\cdot 40 - 30\cdot 3| = 130^o$$

پوښتنې

1 - که د يوې مرکزي زاويې مقابل قوس 50cm او د دايرې شعاع 25cm وي، مرکزي زاويه به څو راډيانه وي؟

2 - $32{,}4222^o$ په درجې، دقيقې او ثانيې واړوئ

3 - د يو دوران $\frac{1}{8}$ برخه څو راډيانه، څو درجې او څو ګراده کېږي؟

4 - $\frac{5\pi}{4}$ راډيانه څو ګراده او $-7{,}5^\circ$ څو راډيانه کېږي؟

5- $225^{\circ}, -315^{\circ}, 720^{\circ}$ او 45° زاويې په راډيان اوګراد واړوئ

6 - د يو دوران $\frac{1}{9}$ ، $\frac{1}{24}$ ، $\frac{1}{18}$ او $\frac{4}{5}$ برخې څو راډيانه او څو درجې کېږي؟

7 - $\frac{11\pi}{3}$ ، $\frac{9\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{6}$ ، $-\frac{\pi}{6}$ ، $-\frac{\pi}{10}$ ، $\frac{2\pi}{5}$ او $-\frac{5\pi}{12}$ راډيانه په درجو واړوئ

8 - که د يو ساعت د ثانيې د عقربې اوږدوالی $6cm$ وي، په 40 ثانيو کې د ثانيې عقربه څو سانتي متره فاصله طی کوي؟

9 - که د دايرې شعاع $3cm$ او مرکزي زاويه $\frac{5}{3}$ راډيانه وي. د دې مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی به څو سانتي متره وي؟

10 - که د يو ساعت د ثانيې د عقربې دوران 35 ثانيې وي، نو د ثانيې عقربې به څو راډيانه مثبته زاويه طی کړې وي؟

11 - د دوو زاويو مجموعه 152° ده، که د يوې زاويې اندازه د درجې په حساب له بلې زاويې سره د ګراد په حساب برابره وي، د هرې زاويې اندازه د راډيان په حساب څومره ده؟

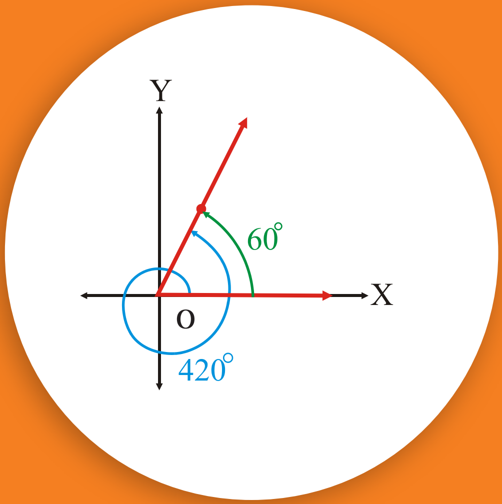
-12 1620° څو راډيانه کېږي؟

a) $4\pi^{R}$ b) $8\pi^{R}$ c) $9\pi^{R}$ d) $10\pi^{R}$

13 - څلور دورانونه څو راډيانه کېږي؟

a) $2\pi^{R}$ b) $4\pi^{R}$ c) $6\pi^{R}$ d) $8\pi^{R}$

14 - که د يوې دايرې شعاع $10m$ وي، د $45\,radian$ مرکزي زاويې، مقابل قوس به څو متره وي؟



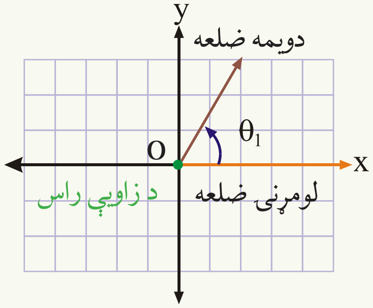
د يوې زاويې معياري حالت او کوټرمينل زاويې

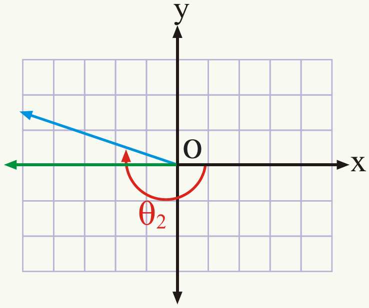
أيا ويلای شئ چې د 60° او 420° زاويو دويمې ضلعې يو پر بل منطبق دي؟ ولې؟

د يوې زاويې معياري حالت (Standard position of an angle):

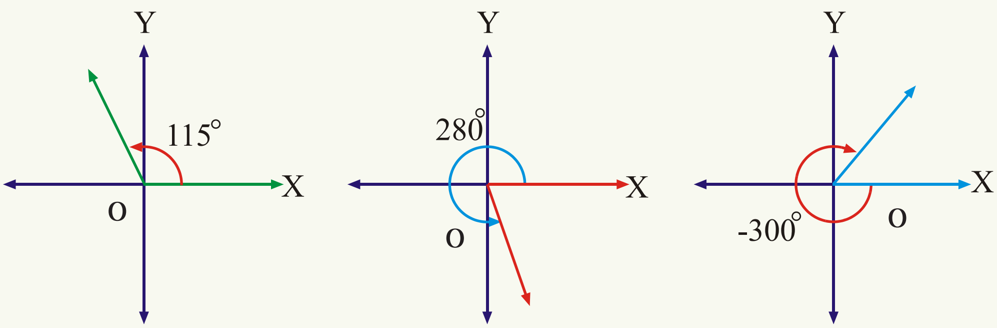
که ديوې زاويې رأس د وضعيه کمياتو په مبدأ کې او لومړنۍ ضلعه يې د X د محور په مثبت جهت پرته وي، نو دا زاويه په معياري حالت کې ده.

د مثال په توګه: په لاندې شکل کې د θ_1 او θ_2 زاويې په معيارې حالت کې ښودل شوي دي.





لومړی مثال: 115° ، 280° او -300° زاويې په معيارې حالت کې رسم کړئ.



که په معیاري حالت کې د يوې زاويې دويمه ضلع د X او يا د Y پر محور منطبق شي، داسې زاويې ته ربعي زاويه(Quadrantale angle) وايي.

د مثال په توگه: $90^o, 180^o, 270^o, 360^o$ او داسې نورې زاويې ربعي زاويې دي.

فعاليت

د $130^o, 50^o, 500^o$ او -210^o زاويې په معياري حالت کې رسم کړئ.

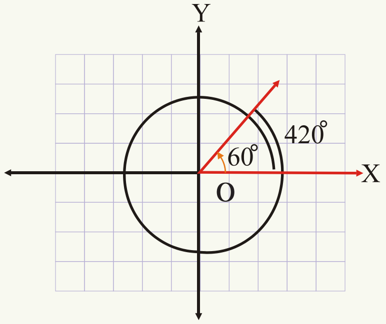
کوټرمينل زاويې: (Conterminal angles)

دوې يا څو زاويې، چې په معياري حالت کې يې دويمې ضلعې يو پر بل منطبقې شي، د کوټرمينل زاويو په نامه يادېږي.

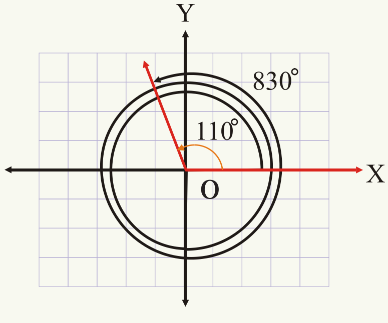
دويم مثال: په شکل کې وښايات چې د 60^o او 420^o زاويې، او همدارنگه د 110^o او 830^o زاويې چې په معياري حالت کې دي، يوه له بلې سره کوټرمينل زاويې دي.

حل: څرنگه چې په معياري حالت کې د دې زاويو لومړنۍ ضلعې يو پر بل منطبق دي، لکه څنگه چې په شکل کې ليدل کېږي د 60^o او 420^o زاويو دويمې ضلعې(Conterminal sides) يو پر بل منطبق دي. نو دتعريف په اساس دا دواړه زاويې سره کوټرمينل دي.

همدرانگه د 110^o او 830^o زاويې هم سره کوټرمينل دي.



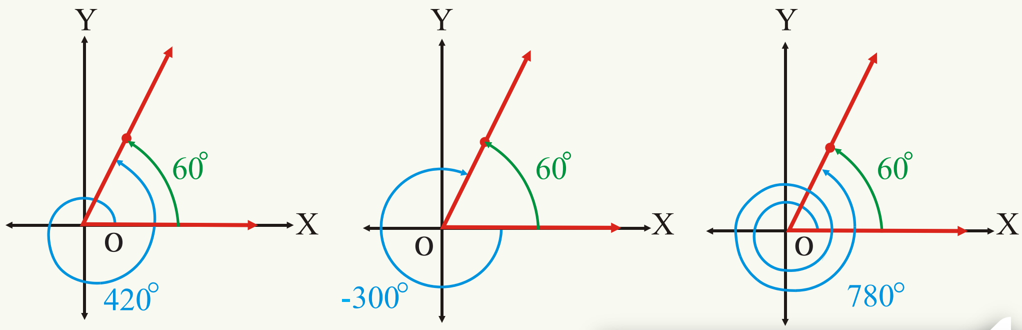
(a)



(b)

دريم مثال: په معياري حالت کې د 60^o زاويې سره درې کوټرمينل زاويې رسم کړئ او په شکل کې يې هم وښاياست.

حل: $60^o + 360^o = 420^o$, $\quad 60^o - 360^o = -300^o$, $60^o + 2 \cdot 360^o = 780^o$



فعالیت

ایا د 230°، 590° او 230°، -130° زاویې سره کوټرمینل دي؟ رسم يې کړئ.

څرنګه چې کوټرمینل زاويې یو له بله سره د یو پوره دوران (360°) یا $2\pi^R$ او یا څو دورانونه $n\cdot 360^\circ$ او یا $n\cdot 2\pi$ توپیر لري، نو د θ د زاويې سره کوټرمینل زاويې عبارت دي له:

$$\theta+360^\circ \qquad \theta+2\pi$$

$$\theta+2\cdot 360^\circ \qquad \theta+2\cdot 2\pi$$

$$\theta+3\cdot 360^\circ \qquad \theta+3\cdot 2\pi$$

$$-----\qquad -----$$

$$\theta+n\cdot 360^\circ \qquad \theta+2n\pi$$

خلورم مثال:

(a) له 30° زاويې سره څلور کوټرمینل زاويې پيدا کړئ.

(b): له 90° زاويې سره دوه کوټرمینل زاويې پيدا او په شکل کې يې وښاياست.

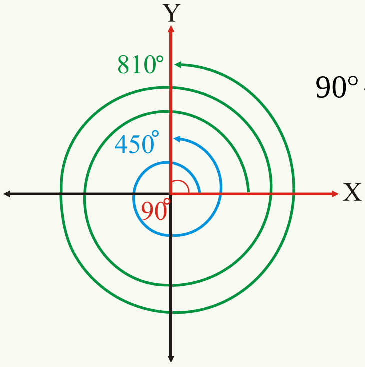
حل(a)

$$\text{Radian}\quad \frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13\pi}{6} \quad \text{یا} \quad 30^\circ+360^\circ=390^\circ$$

$$\text{Radian}\quad \frac{\pi}{6}+2\cdot 2\pi=\frac{25\pi}{6} \quad \text{یا} \quad 30^\circ+2\cdot 360^\circ=750^\circ$$

$$\text{Radian}\quad \frac{\pi}{6}+3\cdot 2\pi=\frac{37\pi}{6} \quad \text{یا} \quad 30^\circ+3\cdot 360^\circ=1110^\circ$$

$$\text{Radian}\quad \frac{\pi}{6}+4\cdot 2\pi=\frac{49\pi}{6} \quad \text{یا} \quad 30^\circ+4\cdot 360^\circ=1470^\circ$$



حل(b

$90° + 2\cdot 360° = 810°$ $\qquad$ $90° + 360° = 450°$

پنځم مثال: آیا $\underline{410^o, 50^o}$ $\underline{800^o, 80^o}$ او د $\underline{-680^o, 40^o}$ او د 60^o او 410^o زاویې سره کوټرمینل دي؟

حل: خرنگه چې $410° = 50° + 360°$ دی، نو د 50^o او 410^o زاویې سره کوټرمینل دي او $800^0 = 80^o + 2\cdot 360^o$ نو د 80^o او 800^o زاویې هم سره کوټرمینل دي. همدرانگه $-680^o = 40^o - 2\cdot 360^o$ نو 40^o او -680^o زاویې هم سره کوټرمینل دي، خو $410° \neq 60° + 360°$، نو د $410°$ او $60°$ زاویې سره کوټرمینل نه دي.

که د یوې زاویې رأس د وضعیه کمیاتو په مبدآکې او لومړنی ضلعه یې د X د محور پر مثبت جهت منطبق وي، نو دا زاویه په معیاري حالت کې ده. که په معیاري حالت کې د دوو یا ثو زاویو دویمې ضلعې یو پر بل منطبق وي، داسې زاویې د کوټرمینل زاویو په نوم یادېږي.

پوښتنې

1 - د 90^o,120^o,-270^o او 240^o زاویې په معیاري حالت کې رسم کړئ.

2 - تر ټولو کوچنی مثبته زاویه پیدا کړئ، چې له لاندینیو زاویو سره کوټرمینل وي.

135^o $\quad$ 90^o $\quad$ 60^o $\quad$ 539^o $\quad$ 450^o $\quad$ -125^o $\quad$ -40^o

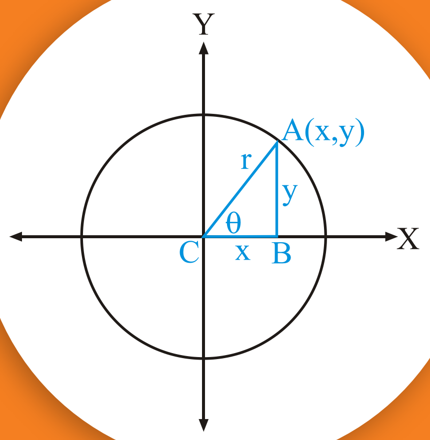
3 - آیا د (-80^o ، 280^o) او د (35^o ، 395^o) زاویې سره کوټرمینل دي؟

4 - له 40^o زاویې سره، شپږ کوټرمینل زاویې پیدا کړئ.

5 - آیا د $(-930°,150°)$ او د $(180°,900°)$ زاویې سره کوټرمینل دي، په شکل کې یې هم وښایاست؟

مثلثاتي تابعگاني

(Trigonometric Functions)



آیا ویلای شئ چې د θ د زاویې مثلثاتي نسبتونه د θ د زاویې د ضلعو په اوږدوالي پورې اړه لري او که نه؟

خرنگه چې پوهیږو، چې د یوې حادې زاویې (θ) مثلثاتي نسبتونه (Trigonometric ratios) په یوه قایمه الزاویه مثلث کې په لاندې ډول تعریف شوي دي.

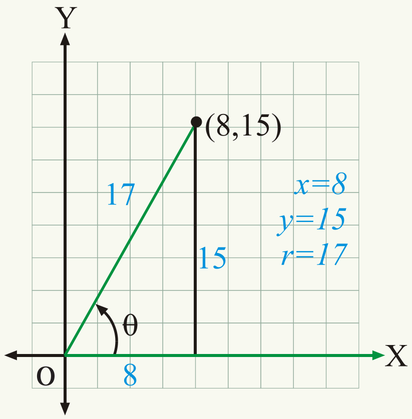
$$\sin\theta=\frac{AB}{AC}=\frac{y}{r}\ ,\ \cos\theta=\frac{BC}{AC}=\frac{x}{r}$$

$$\tan\theta=\frac{AB}{BC}=\frac{y}{x}\ ,\ \cot\theta=\frac{BC}{AB}=\frac{x}{y}$$

$$\sec\theta=\frac{AC}{BC}=\frac{r}{x}\ ,\ \csc\theta=\frac{AC}{AB}=\frac{r}{y}$$

او په نتیجه کې لیدل کیږي، چې: $\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$ او $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$.

لومړی مثال: که په معیاري حالت کې د θ زاویې دویمه ضلعه د (8,15) له ټکي څخه تېره شي، د θ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.



د فیثاغورث د قضیې په اساس لروچې: $r^2=x^2+y^2$ دي.

$$r^2 = 8^2 + (15)^2 = 64 + 225 = 289$$
$$r = \sqrt{289} = 17$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{15}{17} \;,\; \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{8}{17}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{15}{8} \;,\; \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{8}{15}$$
$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{17}{8} \;,\; \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{17}{15}$$

د زاويو د ځينو مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اساسي اړيکې:

د فيثاغورث د قضيې په اساس د شکل له مخې ليکلای شو چې:

$$y^2 + x^2 = r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\mathrm{I}$$

دواړو خواوې په r^2 ويشو:

$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$
$$(\frac{y}{r})^2 + (\frac{x}{r})^2 = 1$$
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

همدارنګه که د (I) معادلې دواړه خواوې په y^2 وويشو نو لرو چې:

$$\frac{y^2}{y^2} + \frac{x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2} \Rightarrow 1 + (\frac{x}{y})^2 = (\frac{r}{y})^2$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

او که د (I) معادلې دواړه خواوې په x^2 وويشو:

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} \Rightarrow (\frac{y}{x})^2 + 1 = (\frac{r}{x})^2$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

له بلې خوا:

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y}{x}=\tan\theta \qquad \frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{x}{y}=\cot\theta$$

او له دې ځایه څخه نتیجه کېږي، چې:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\ ,\ \sin\theta\cdot\csc\theta=1\ ,\ 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta\ ,\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta\cdot\cot\theta=1\ ,\ \cos\theta\cdot\sec\theta=1\ ,\ 1+\cot^2\theta=\csc^2\theta\ ,\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

څرنګه چې دا اړیکې د θ د هر قیمت لپاره سمې دي نو په دې اساس مثلثاتي مطابقتونه هم ورته وایي.

فعالیت

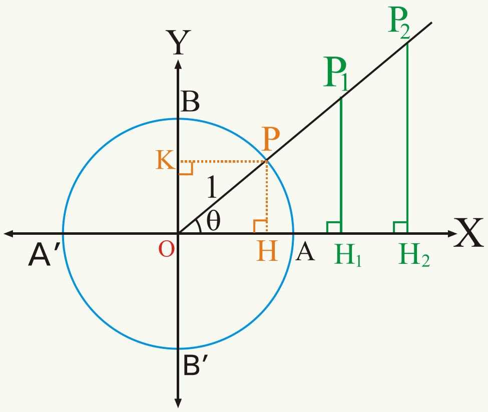
که په معیاري حالت کې د θ دویمه ضلع د (12,5) له ټکي څخه تېره شي، د θ د زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د مثلثاتي تابعګانو پورتني قیمتونه یوازې د θ زاویې د اندازې پورې اړه لري، د P د ټکي پر موقعیت پورې چې د θ پر دویمه ضلع واقع دی اړه نه لري. چې دا حقیقت په شکل کې د $\overset{\Delta}{OPH}$، $\overset{\Delta}{OH_1P_1}$ او $\overset{\Delta}{OH_2P_2}$ مثلثونو د مشابهت په اساس لیدل کېږي.

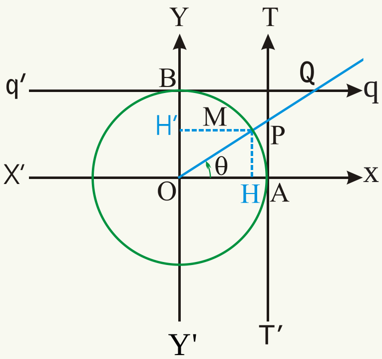
$$|OP|=1$$

$$\cos\theta=\frac{|OH|}{|OP|}=\frac{|OH_1|}{|OP_1|}=\frac{|OH_2|}{|OP_2|}$$

$$\sin\theta=\frac{|PH|}{|OP|}=\frac{|P_1H_1|}{|OP_1|}=\frac{|P_2H_2|}{|OP_2|}$$



که د θ زاویه د راډیان په حساب وي. θ آزاد متحول او $\sec\theta, \cot\theta, \tan\theta, \cos\theta, \sin\theta$ او $\csc\theta$ مقید (مربوطه) متحولونه دي. په دې معنا چې $\csc\theta$ او $\sec\theta, \cot\theta, \tan\theta, \cos\theta, \sin\theta$ مثلثاتي تابعګانې دي چې مقدارېې د θ د ضلعو اوږدوالي پورې اړه نه لري، بلکې د θ د زاویې په مقدار پورې اړه لري.



خرنګه چې مثلثاتي دایره

(Trigonometric Circle) هغه دایره ده، چې د شعاع اوږدوالی یې د اوږدوالي واحد دی.

په مثلثاتي دایره کې چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبداکې او د XX' او YY' محورونه د دې دایرې افقي او عمودي قطرونه دي. د قرارداد په اساس $y'oy$ ته د ساینو محور او $x'ox$ ته د کوساینو محور وایي. د TAT' محور چې د A په ټکي کې له دایرې سره مماس دی، د ټانجانټ محور او د $q'Bq$ محور چې د B په ټکي کې پر دایره مماس دی، د کوټانجانټ محور بلل کېږي. د ساینو او کوساینو د محورونو مبدا د دایرې مرکز، او د ټانجانټ د محور مبدا، د A ټکی د کوټانجانټ د محور مبدأ، د B ټکی دی.

که چیرې د A له ټکي څخه په مثبت جهت کې د M تر ټکي حرکت وکړو او د $M\hat{O}A$ زاویې ته θ ووایو، د θ د زاویې مثلثاتي توابع په لاندې ډول هم تعریفېږي.

$$(r = OM = OA = OB = 1)$$

$$\sin\theta = \frac{HM}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{1} = \overline{OH'} \qquad \cos\theta = \frac{\overline{OH}}{OM} = \frac{\overline{OH}}{1} = \overline{OH}$$

$$\tan\theta = \frac{HM}{OH} = \frac{\overline{AP}}{OA} = \overline{AP} \qquad \sec\theta = \frac{OM}{OH} = \frac{OP}{OA} = \overline{OP}$$

$$\cot\theta = \frac{\overline{OH}}{HM} = \frac{BQ}{OB} = \overline{BQ} \qquad \csc\theta = \frac{OM}{HM} = \frac{OQ}{OB} = \overline{OQ}$$

په دې اساس مثلثاتي نسبتونو ته مثلثاتي خطونه هم وایي.

په همدې ډول که د θ دویمه ضلعه او یا دقوس پای په دویمه، دریمه یا څلورمه ناحیه (ربع) کې وي.

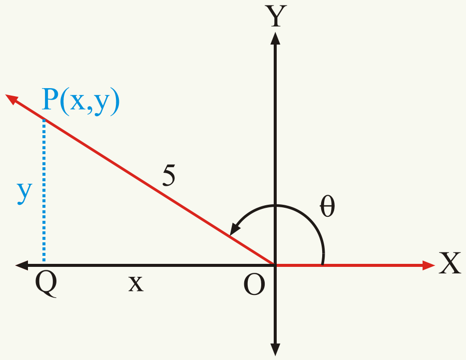
کولی شو چې مثلثاتي نسبتونه يې پر لاس راوړو:
د مثلثاتي نسبتونو علامې په څلورو ناحيو(ربعو) کې (quadrants) کې په لاندې ډول دي.

$\sin\theta > 0$ $\cos\theta < 0$ $\tan\theta < 0$ $\cot\theta < 0$ $\sec\theta < 0$ $\csc\theta > 0$	$\sin\theta > 0$ $\cos\theta > 0$ $\tan\theta > 0$ $\cot\theta > 0$ $\sec\theta > 0$ $\csc\theta > 0$
$\sin\theta < 0$ $\cos\theta < 0$ $\tan\theta > 0$ $\cot\theta > 0$ $\sec\theta < 0$ $\csc\theta < 0$	$\sin\theta < 0$ $\cos\theta > 0$ $\tan\theta < 0$ $\cot\theta < 0$ $\sec\theta > 0$ $\csc\theta < 0$

ربع	$\sin\theta, \csc\theta$	$\tan\theta, \cot\theta$	$\sec\theta, \cos\theta$
I	+	+	+
II	+	−	−
III	−	+	−
IV	−	−	+

د ويم مثال: له لاندې شکل سره سم که په معياري حالت کې، د θ د زاويې دويمه ضلعه، په دويمه ناحيه(ربع) کې واقع وي او $\cos\theta = \frac{-3}{5}$ وي، د θ د زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل: لومړی د P ټکي وضعيه کميات پيدا کوو: څرنګه چې $\cos\theta = \frac{-3}{5}$ دی، په دويمه ربع کې د x قيمت منفي دی، نو $x = -3$ او $r = 5$ د فيثاغورث د قضيې له مخې لرو، چې:

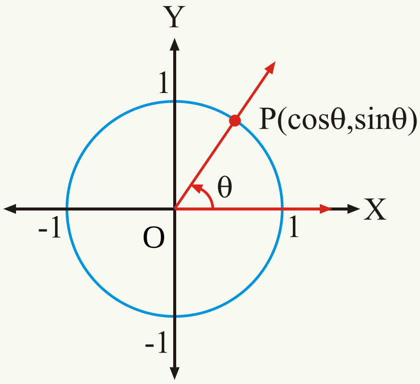


$$5^2 = (-3)^2 + y^2$$
$$y^2 = 25 - 9 = 16$$
$$y = \pm\sqrt{16}$$
$$y = 4$$

(ځکه چې د P ټکي په دویمه ربعه کې دی، $y > 0$ دی)

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5} ، \quad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5} ، \quad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{-3}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{4} ، \quad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{-3} ، \quad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{4}$$



خرنګه چې د X محور ته د cos محور او د Y محور ته د sine محور وایي، مو‌ږ کولای شو چې په مثلثاتي دایره کې د P د ټکي وضعیه کمیات له $P(\cos\theta, \sin\theta)$ او یا $P(x, y)$ سره وښایو.

د θ د زاويې مثلثاتي توابع يوازې د θ د زاويې په مقدار پورې اړه لري، چې θ آزاد متحول او د θ مثلثاتي نسبتونه مقيد متحولونه دي.

په لومړي ناحيه(ربعه) کې ټول مثلثاتي نسبتونه مثبت، په دويمه ناحيه(ربعه) کې $\sin\theta$ او $\csc\theta$ مثبت، په دريمه ناحيه(ربعه) کې $\tan\theta, \cot\theta$ مثبت او په څلورمه ناحيه(ربعه) کې $\cos\theta, \sec\theta$ مثبت او نور منفي دي.

پوښتني

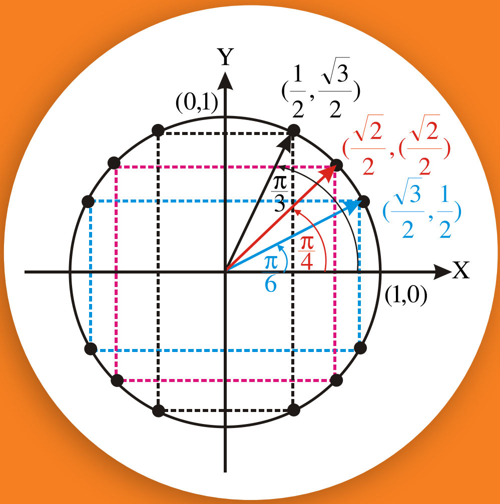
1- د لاندینیو زاویو د مثلثاتي نسبتونو نښې(علامې) په شفاهي ډول ووایاست.

$\sin 120^\circ \quad \tan 170^\circ \quad \tan 60^\circ \quad \cos 330^\circ \quad \sec 200^\circ$

$\cot 271^\circ \quad \csc 91^\circ \quad \sin 271^\circ \quad \csc 181^\circ \quad \csc 315^\circ$

2- که θ په معیاري حالت کې د راډیان په حساب وي او د θ دویمه ضلعه له لاندي راکړل شوو ټکو څخه تېره شي، $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ او $\tan\theta$ پیدا کړئ.

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) , \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) , \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) , \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$



د ځينو خاصو زاويو مثلثاتي نسبتونه

أياکولای شئ، چې ووايئ $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ دی؟

د 45° مثلثاتي نسبتونه: په يوه قايم الزاويه متساوي الساقين مثلث کې، دوې قايمې ضلعې يې يو، يو واحد په پام کې ونيسئ.

$$r^2 = 1^2 + 1^2$$

$$r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابله ضلعه}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

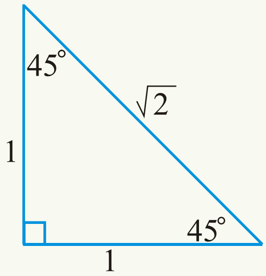
$$\cos 45^\circ = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاوره ضلعه}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابله ضلعه}}{\text{مجاوره ضلعه}} = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \cot\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاوره ضلعه}}{\text{مقابله ضلعه}} = \frac{x}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \sec\frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاوره ضلعه}} = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45^\circ = \csc\frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابله ضلعه}} = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

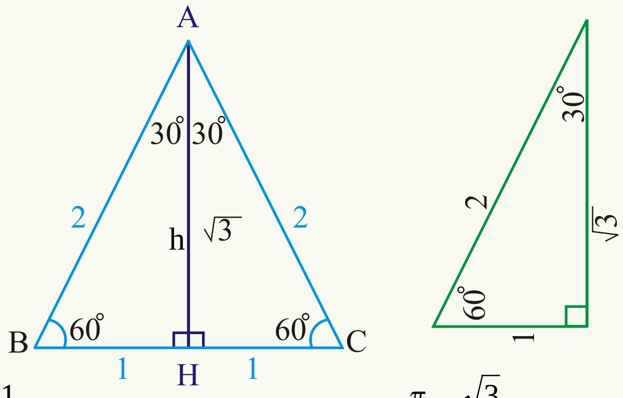


فعالیت

یو قایمه زاویه متساوي الساقین مثلث داسې په پام کې ونیسئ، چې هره قایمه ضلعه یې b واحده وي، د 45^{o} زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

که د $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوي الاضلاع مثلث چې هره ضلعه یې دوه واحده وي، په پام کې ونیسو، د A له رأس څخه د AH ارتفاع رسموو، څرنګه چې د $\hat{A}$ زاویه نیمایي شوې ده، چې نیمایي یې 30^{o} ده، نو:

$$h^2+1^2=2^2$$
$$h^2=4-1=3$$
$$h=\sqrt{3}$$



$$\sin 30^{\circ}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \qquad \cos 30^{\circ}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^{\circ}=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot 30^{\circ}=\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

$$\sec 30^{\circ}=\sec\frac{\pi}{6}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \csc 30^{\circ}=\csc\frac{\pi}{6}=\frac{2}{1}=1$$

فعالیت

یو داسې متساوي الاضلاع مثلث په پام کې ونیسئ، چې هره ضلعه یې a واحده وي د $30^{o}=\frac{\pi}{6}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

همدارنگه که شکل ته پام وکړو:

$$\sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \qquad \cot 60^\circ = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 60^\circ = \sec\frac{\pi}{3} = 2 \qquad \csc 60^\circ = \csc\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

لیدل کېږي، چې $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ کېږي:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ \qquad \cos 30^\circ = \sin 60^\circ \qquad \tan 30^\circ = \cot 60^\circ$$

$$\sec 30^\circ = \csc 60^\circ \qquad \csc 30^\circ = \sec 60^\circ \qquad \cot 30^\circ = \tan 60^\circ$$

یا په عمومي ډول هر وخت چې د دوو زاویو مجموعه 90° وي، که یوه زاویه θ وي، بله زاویه به $(90^\circ - \theta)$ وي.

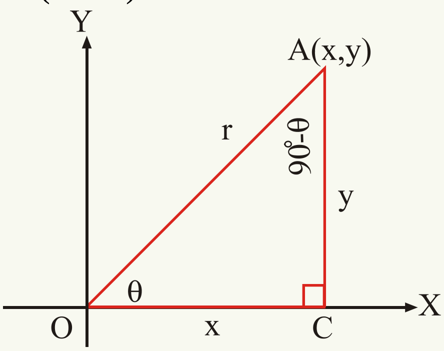
$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{x}{r} \ , \ \cos\theta = \frac{x}{r} \ \Rightarrow \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{y}{r} \ , \ \sin\theta = \frac{y}{r} \ \Rightarrow \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{x}{y} \ , \ \cot\theta = \frac{x}{y} \ \Rightarrow \tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \frac{r}{y} \ , \ \csc\theta = \frac{r}{y} \ \Rightarrow \sec(90^\circ - \theta) = \csc\theta$$

$$\csc(90^\circ - \theta) = \frac{r}{x} \ , \ \sec\theta = \frac{r}{x} \ \Rightarrow \csc(90^\circ - \theta) = \sec\theta$$



فعالیت

په همدې ډول وښایاست چې: $\cot(90° - \theta) = \tan\theta$

لکه څنګه چې د نهم ټولګي په مثلثاتو کې مو ویلي دي، چې د زاویو د مثلثاتي نسبتونو جدول هم په همدې اساس جوړ شوی دی:

لومړی مثال: د 39^o زاويې مثلثاتي نسبتونه راکړل شوي دي، د 51^o زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

$\sin 39^o = 0{,}6293$ $\tan 39^o = 0{,}8098$ $\sec 39^o = 1{,}287$

$\cos 39^o = {,}7771$ $\cot 39^o = 1{,}235$ $\csc 39^o = 1{,}589$

حل: څرنګه چې $39° + 51° = 90°$ کېږي، نو:

$\sin 51^o = \cos 39^o = 0{,}7771$ $\cos 51^o = \sin 39 = 0{,}6293$

$\tan 51^0 = \cot 39^o = 1{,}235$ $\cot 51^o = \tan 39^o = 0{,}8098$

$\sec 51^o = \csc 39 = 1{,}589$ $\csc 51^o = \sec 39^o = 1{,}287$

پوښتنې

1 - که:

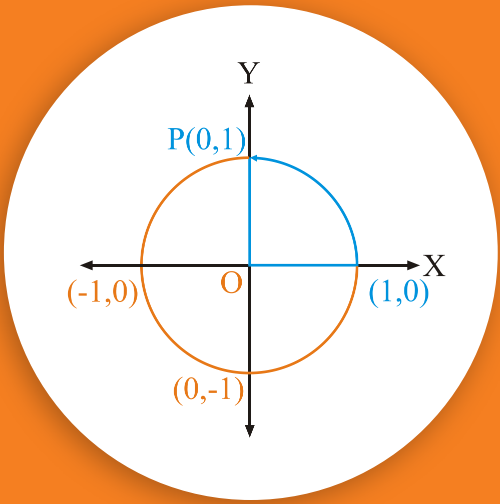
$\sin 17^o = 0{,}2927$ $\cos 17^o = 0{,}9563$ $\sec 17^o = 1{,}046$ $\csc 17^o = 3{,}420$

$\tan 17^o = 0{,}3057$ و $\cot 17^o = 3{,}271$ وي د 73° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2 - د لاندې اړيکو څخه کومه يوه يې ناسمه ده؟

$\sin 28° = \cos 62°$ $\cos 12°\ 10'\ 20'' = \sin 77°\ 49'\ 40''$

$\sec 12° = \sec 88°$ $\tan 70° = \cot\ 20°$



د $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ او 360° زاويو مثلثاتي نسبتونه:

آيا $\tan 90^o$ او $\tan 270^o$ تعريف شوي دي؟

د $\frac{\pi}{2} = 90^o$ د زاويې مثلثاتي نسبتونه:

څرنگه چې $P(0,1)$ ټکی په مثلثاتي دايره باندې د 90^o زاويې په دويمه ضلع واقع دی، نو:

$$r = 1 \qquad x = 0 \qquad y = 1$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \sin\frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot\frac{\pi}{2} = \cot 90^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \tan\frac{\pi}{2} = \tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0}$$ (تعريف شوی نه دی)

$$\csc\frac{\pi}{2} = \csc 90^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \sec\frac{\pi}{2} = \sec 90^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}$$ (تعريف شوی نه دی)

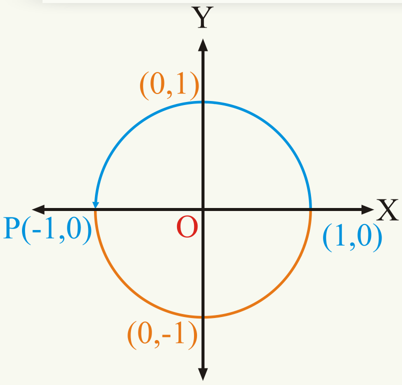
فعاليت

آيا کولای شئ، ووايئ چې $\cot 0^o$ او $\csc 0^o$ تعريف شوي نه دي؟ ولې؟

د 180^o زاويې مثلثاتي نسبتونه:

څرنگه چې د $p(-1,0)$ ټکی په مثلثاتي دايره باندې د 180° زاويې په دويمه ضلعه باندې پروت دی، نو:

$r = 1$ $\quad x = -1$ او $y = 0$ دي.



$$\sin 180^{\circ} = \sin \pi = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 180^{\circ} = \cos \pi = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

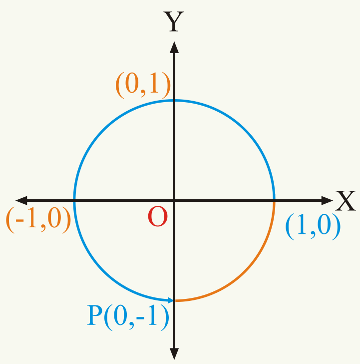
$$\tan 180^{\circ} = \tan \pi = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0 \qquad \cot 180^{\circ} = \cot \pi = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} = \text{(تعریف شوی نه دی)}$$

فعالیت

$\sec 180^{\circ}$ او $\csc 180^{\circ}$ پیداکړئ.

د $\frac{3\pi}{2} = 270^{o}$ زاويې مثلثاتي نسبتونه:

خرنگه چې د $P(0,-1)$ ټکی په مثلثاتي دايره باندې د 270^{o} د زاويې پر دويمه ضلع واقع دی.



$r = 1 \qquad x = 0 \qquad y = -1$

$$\sin \frac{3\pi}{2} = \sin 270^{o} = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \cos \frac{3\pi}{2} = \cos 270^{o} = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan \frac{3\pi}{2} = \tan 270^{o} = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0} \text{(تعريف نه دی)} \qquad \cot \frac{3\pi}{2} = \cot 270^{o} = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\sec \frac{3\pi}{2} = \sec 270^{o} = \frac{r}{x} = \frac{1}{0} \text{(تعريف نه دی)} \qquad \csc \frac{3\pi}{2} = \csc 270^{\circ} = \frac{r}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

په یاد ولرئ، چې د 360^o او 0^o زاویو مثلثاتي نسبتونه سره مساوي وي، کولای شئ، چې ووایئ ولې؟

د $360° = 2\pi$ زاویې مثلثاتي نسبتونه:

خرنگه چې د $p(1,0)$ نقطه د 360° د زاویې په دویمه ضلعه باندې پرته ده نو:

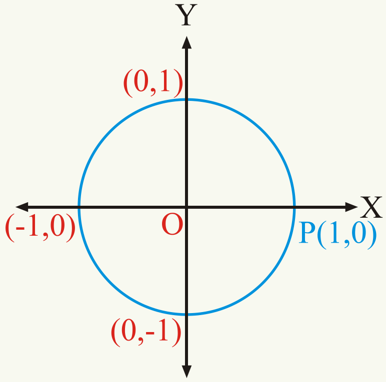
$x = 1 \qquad y = 0 \qquad r = 1$

$\sin 2\pi = \sin 360^0 = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 2\pi = \cos 360^o = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$

$\tan 2\pi = \tan 360^o = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$

$\cot 2\pi = \cot 360^o = \frac{x}{y} = \frac{1}{0}$ (تعریف شوی نه دی)

$\sec 2\pi = \sec 360^o = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1$ ،$\csc 2\pi = \csc 360^o = \frac{r}{y} = \frac{1}{0}$ (تعریف شوی نه دی)



فعالیت

د 0^o زاویې ټول مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$0^o, 90^o, 180^o, 270^o$ او 360^o زاویو ته محوري زاویې وایي چې د هرې زاویې دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعریف شوي نه دي.

پوښتني

1- لاندې جدول ډک کړئ.

θ	0^{o}	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					

2- $\tan 270^{\circ} = ?$

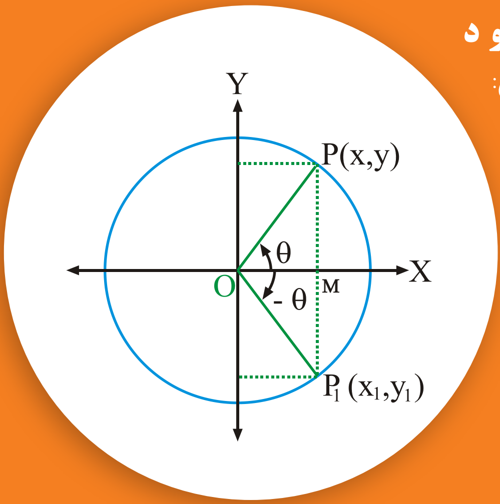
a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف شوي نه دي

3- $\cos 90^{\circ} = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف شوي نه دي

4- آیا $\cos\frac{9\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2}$ دی؟ ولې؟

د يوې حاده زاويې او نورو زاويو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړيکې:



څرنګه چې مو په نهم ټولګي کې وليدل چې مثلثاتي جدول يوازې د يوې حادې مثبتې زاويې مثلثاتي نسبتونه را ښيي ددې لپاره چې د منفي او منفرجه زاويو مثلثاتي نسبتونه هم له مثلثاتي جدول څخه پيداکړای شو نو بايد ددې زاويو او د يوې حاده مثبتې زاويې د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړيکې پيداکړو.

د $\hat{\theta}$ او $-\hat{\theta}$ زاويو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړيکې:

د θ حاده زاويه مثبت او له θ سره مساوي زاويه، د ساعت د عقربې د حرکت په جهت کې $-\theta$ زاويه په معياري حالت په مثلثاتي دايره کې رسموو.

د $P(x,y)$ ټکی د θ پر دويمه ضلع او د $P_1(x_1,y_1)$ ټکی د $-\theta$ د زاويې پر دويمه ضلع واقع دی.

څرنګه چې په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OMP}$ او $\overset{\Delta}{OMP_1}$ مثلثونه يو له بل سره مساوي دی.

$$x_1 = x \qquad |y_1| = |y| \qquad -y_1 = y \quad \Rightarrow \quad y_1 = -y$$

$$\sin(-\theta) = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{1} = y_1 = -y = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = x = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

$$\cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

لومړی مثال: د $\left(-30^\circ = -\frac{\pi}{6}\right)$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيداکړئ.

حل

$$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot(-30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec(-30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \csc(-30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$$

فعالیت

و ښایاست چې: $\csc(-\theta) = -\mathrm{cec}\theta$, $\mathrm{Sec}(-\theta) = \mathrm{Sec}\theta$.

دویم مثال: د $-\frac{3\pi}{2}$ د زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\sin(-\frac{3\pi}{2}) = -\sin\frac{3\pi}{2} = -(-1) = 1$$

$$\cos(-\frac{3\pi}{2}) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

فعالیت

د $-\frac{3\pi}{2}$ د زاویې نور خلور مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec\theta \qquad \csc(-\theta) = -\csc\theta$$

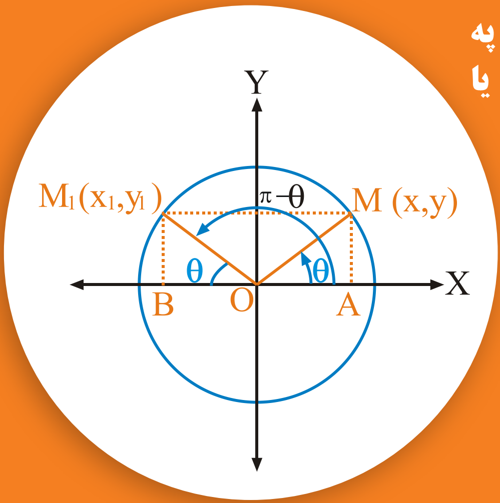
پوښتنې

1 - د -360^o یا -2π راډیان مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ.

2 - د -45^o یا $-\frac{\pi}{4}$ راډیان د (-30°) او (-60°) زاویو مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ.

3 - د -90^o یا $-\frac{\pi}{2}$ رادیان مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ.

د دوه زاویو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړیکې چې مجموعه او یا توپیر يې π یا 180° وي



- آیا د 150° او 135° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کولای شئ؟
- آیا $\sin 135^{\circ}$ او $\sin 45^{\circ}$ سره مساوي دي؟ ولې؟
- آیا ویلای شئ چې $\sin 130^{\circ}$ او $\sin 50^{\circ}$ یو له بله سره څه اړیکه لري؟

دوې زاویې چې مجموعه یې π یا 180° وي، په پام کې نیسو. که θ یوه حاده مثبته زاویه وي بله زاویه $(\pi-\theta)$ ده. دا دواړه زاویې په مثلثاتي دایره کې په معیاري حالت رسموو.

د $M(x,y)$ ټکی د θ د زاویې په دویمه ضلعه باندې او د $M_1(x_1,y_1)$ ټکی د $(\pi-\theta)$ یا $(180-\theta)$ د زاویې پر دویمه ضلعه باندې واقع دی. څرنګه چې په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OAM}$ او $\overset{\Delta}{OM_1B}$ مثلثونه سره مساوي دي.

$$(r=1) \qquad |x_1|=|x| \quad -x_1=x \;\Rightarrow\; x_1=-x \qquad y_1=y$$

$$\sin(180^{\circ}-\theta)=\sin(\pi-\theta)=\frac{y_1}{r}=\frac{y_1}{1}=y_1=\sin\theta$$

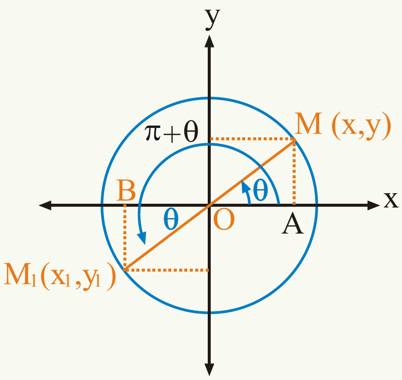
$$\cos(180^{\circ}-\theta)=\cos(\pi-\theta)=\frac{x_1}{r}=\frac{-x}{r}=\frac{-x}{1}=-x=-\cos\theta$$

$$\tan(180^{\circ}-\theta)=\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin(180^{\circ}-\theta)}{\cos(180^{\circ}-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$$

فعالیت

- د $(\pi-\theta)$ د زاویې نور درې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د هغه دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکې چې توپیر يې 180° او یا π راډیان وي.



که حاده زاویه θ وي، بله زاویه $(\pi+\theta)$ کیږي.
د $M(x,y)$ ټکی پر مثلثاتي دایره باندې د θ پر دویمه ضلعه او د $M_1(x_1,y_1)$ ټکی د $(\pi+\theta)$ یا $(180°+\theta)$ د زاویې پر دویمه ضلعه باندې واقع دی.
څرنګه چې د $\overset{\Delta}{OAM}$ او $\overset{\Delta}{OBM_1}$ مثلثونه سره مساوي دي: $y_1=-y$, $x_1=-x$

$$\sin(180^\circ+\theta)=y_1=-y=-\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ+\theta)=x_1=-x=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ+\theta)=\frac{\sin(180^\circ+\theta)}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\cot(180^\circ+\theta)=\frac{\cos(180^\circ+\theta)}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{-\cos\theta}{-\sin\theta}=\cot\theta$$

$$\sec(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta$$

$$\csc(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

لومړی مثال: د 120^o او 240^o زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 120^o=\sin(\pi-60^\circ)=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^o=\cos(\pi-60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^o=\tan(\pi-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\sin 240^o=\sin(180^\circ+60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

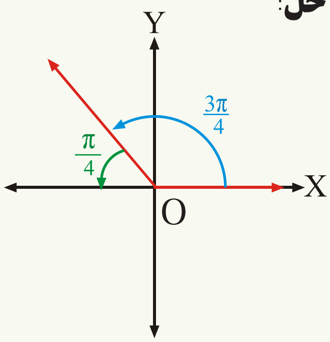
$$\tan 240^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

فعالیت

د 120° او 240° زاویو نور درې، درې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

دویم مثال: د $\frac{3\pi}{4}$ او $\frac{4\pi}{3}$ زاویو sin ، cos او tan پیداکړئ.

حل:

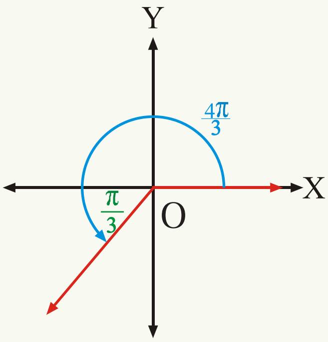


$$\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \tan\frac{3\pi}{4} = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$



$$\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin\frac{4\pi}{3} = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{4\pi}{3} = \tan(\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

خرنګه چې $(180^\circ - \theta)$ د زاویې دویمه ضلع په دویمه ناحیه(ربعه) کې پرته ده. په دویمه ناحیه کې $\sin\theta$ او $\csc\theta$ مثبت او د $(180^\circ - \theta)$ زاویې نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي، او خرنګه چې د $(180 + \theta)$ یا $(\pi + \theta)$ زاویې دویمه ضلع په دریمه ربعه کې پرته ده، نوددې زاویې $\tan\theta$ او $\cot\theta$ مثبت او د $(180 + \theta)$ د زاویې نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي.

پوښتني

1- د 225° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2- د 210° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

3- د 150° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

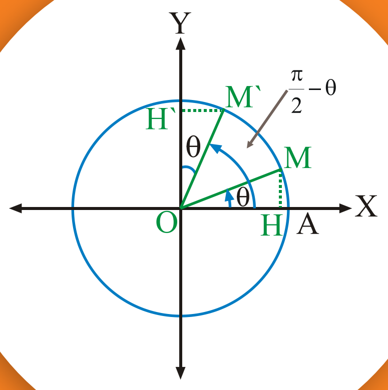
4- $\cot\frac{3\pi}{4} = ?$

a) $-\frac{1}{2}$ b) 1 c) 0 d) -1

5- $\sec(225^{\circ}) = ?$

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $-\frac{2}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکي چې مجموعه یې 90^o یا $\frac{\pi}{2}$ راډیانه وي.



- آیا $\sin 60^o = \cos 30^o$ دی؟ ولې؟
- د 150^o او 60^o زاویو مثلثاتي نسبتونه سره څه اړیکه لري؟

د $A\hat{O}M$ زاویه θ او د $A\hat{O}M'$ زاویه له $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ څخه عبارت ده، چې د θ او $\frac{\pi}{2}-\theta$ زاویو مجموعه 90^o یا $\frac{\pi}{2}$ کیږي. څرنګه چې د $\overset{\Delta}{OHM}$ او $\overset{\Delta}{OH'M'}$ مثلثونه سره مساوي دي.

$$\overline{OH'} = \overline{OH}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta$$

$$\overline{H'M'} = \overline{HM}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta) = \frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)} = \frac{1}{\cot\theta} = \tan\theta$$

فعالیت

وښایاست چې: $\sec(90-\theta) = \csc\theta$ او $\csc(90-\theta) = \sec\theta$ دي.

لومړی مثال: که:

$$\sin 23^\circ = 0{,}3907 \qquad \cos 23^\circ = 0{,}9205 \qquad \tan 23^\circ = 0{,}4245$$
$$\cot 23^\circ = 2{,}356 \qquad \sec 23^\circ = 1{,}086 \qquad \csc 23^\circ = 2{,}559$$

وي، د 67° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:

$$\sin 67^\circ = \cos 23^\circ = 0{,}9205 \qquad \cot 67^\circ = \tan 23^\circ = 0{,}4245$$
$$\cos 67^\circ = \sin 23^\circ = 0{,}3907 \qquad \sec 67^\circ = \csc 23^\circ = 2{,}559$$
$$\tan 67^\circ = \cot 23^\circ = 2{,}356 \qquad \csc 67^\circ = \sec 23^\circ = 1{,}086$$

فعاليت

که:

$$\sin 8^\circ\ 10' = 0{,}1421 \qquad \cos 8^\circ\ 10' = 0{,}9899$$
$$\tan 8^\circ\ 10' = 0{,}1435 \qquad \cot 8^\circ\ 10' = 6{,}968$$
$$\sec 8^\circ\ 10' = 1{,}010 \qquad \csc 8^\circ\ 10' = 7{,}040$$

وي، د $81^\circ\ 50'$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

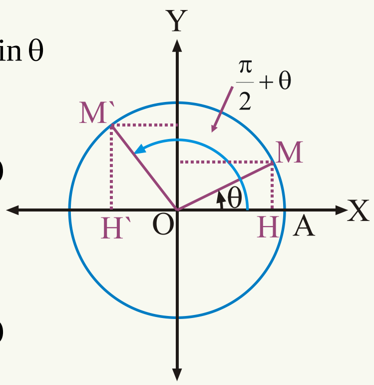
د هغه زاويو مثلثاتي نسبتونه چې توپير يې $\frac{\pi}{2}$ يا 90° وي په لاندې ډول دي:

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \sin[\frac{\pi}{2}-(-\theta)] = \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos[\frac{\pi}{2}-(-\theta)] = \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$



$$\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

$$\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

دويم مثال: د 120^{o} د زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل

$$\sin 120^{o}=\sin(90^{o}+30^{o})=\cos 30^{o}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^{o}=\cos(90^{o}+30^{o})=-\sin 30^{o}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^{o}=\tan(90^{o}+30^{o})=-\cot 30^{o}=-\sqrt{3}$$

$$\cot 120^{o}=\cot(90^{o}+30^{o})=-\tan 30^{\circ}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 120^{o}=\sec(90^{\circ}+30^{\circ})=-\csc 30^{o}=-2$$

$$\csc 120^{o}=\csc(90^{\circ}+30^{\circ})=\sec 30^{o}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta$ ، $\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$

$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$ ، $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$

$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta$ ، $\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$

$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta)=\tan\theta$ ، $\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$

$\sec(\frac{\pi}{2}-\theta)=\csc\theta$ ، $\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$

$\csc(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sec\theta$ ، $\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sec\theta$

پوښتنې

1- د 135^{o} زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2- د 150° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

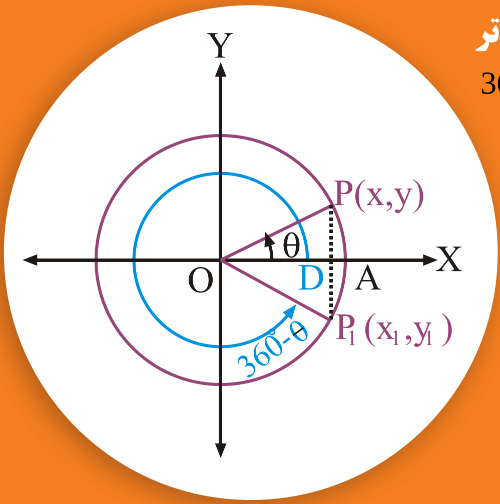
3- $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=?$

a) $\cos x$ b) $\sin x$ c) $-\cos x$ d) $-\sin x$

4- $\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=?$

a) $\tan\theta$ b) $-\tan\theta$ c) $\cot\theta$ d) $-\cot\theta$

د هغه زاویو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړیکې چې مجموعه یې 360° یا 2π وي.



آیا ښودلای شئ چې

$\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$ او

$\cos(360^\circ-\theta)=\cos\theta$ اړیکې سمې

دي؟

په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OPD}$ او $\overset{\Delta}{OP_1D}$ د مثلثونو له مساوي والي څخه لرو، چې:

$x_1 = x \quad |y_1| = |y|$ $\qquad -y_1 = y \Rightarrow y_1 = -y$

$$\sin(360^\circ-\theta)=y_1=-y=-\sin\theta$$

$$\cos(360^\circ-\theta)=x_1=x=\cos\theta$$

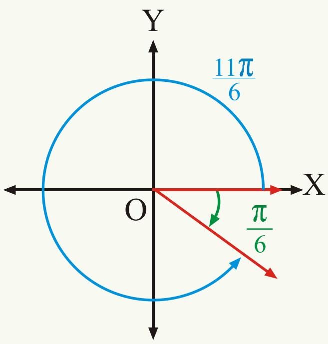
$$\tan(360^\circ-\theta)=\frac{\sin(360^\circ-\theta)}{\cos(360^\circ-\theta)}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}=-\tan\theta$$

فعالیت

په همدې ډول د θ او $360^\circ-\theta$ زاویو د $\sec, \cot$ او $\csc$ د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکې پیدا کړئ او د θ او $(-\theta)$ د زاویو مثلثاتي نسبتونو له اړیکو سره یې پرتله کړئ.

لومړی مثال: د 330° یا $\frac{11\pi}{6}$ راډیانه زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:



$$\sin\frac{11\pi}{6}=\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sin 330^\circ=\sin(360^\circ-30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{11\pi}{6}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{6})=\cos 330^\circ=\cos(360^\circ-30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{11\pi}{6}=\tan(2\pi-\frac{\pi}{6})=\tan 330^\circ=\tan(360^\circ-30^\circ)=-\tan 30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot\frac{11\pi}{6}=\cot(2\pi-\frac{\pi}{6})=\cot 330^\circ=\cot(360^\circ-30^\circ)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\sec\frac{11\pi}{6}=\sec(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sec 330^\circ=\sec(360^\circ-30^\circ)=\sec 30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

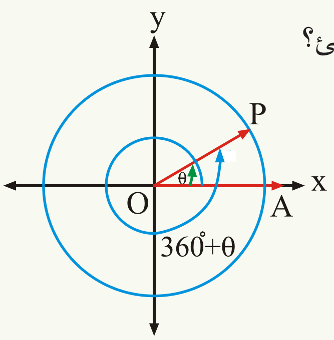
$$\csc\frac{11\pi}{6}=\csc(2\pi-\frac{\pi}{6})=\csc 330^\circ=\csc(360^\circ-30^\circ)=-\csc 30^\circ=-2$$

فعالیت

د 315° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

د کوټرمينل زاويو مثلثاتي نسبتونه:

- آيا $\sin 450^\circ$, $\tan 390^\circ$ او $\csc 450^\circ$ پيدا کولای شئ؟
- آيا $\sin 90^\circ$، $\sin 450^\circ$ او $\sin 790^\circ$ سره برابر دي ؟ ولې؟



خرنگه چې په معياري حالت کې θ او $360^\circ+\theta$ زاويې دويمې ضلعې يو پر بل پرتې دي، نو:

$\sin(360^\circ+\theta)=\sin\theta$, $\cos(360^\circ+\theta)=\cos\theta$

$\tan(360^\circ+\theta)=\tan\theta$, $\cot(360^\circ+\theta)=\cot\theta$

$\csc(360^\circ+\theta)=\csc\theta$, $\sec(360^\circ+\theta)=\sec\theta$

دویم مثال: د 405° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 405^\circ = \sin(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 405^\circ = \cos(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 405^\circ = \tan(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan(360^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\cot 405^\circ = \cot(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cot(360^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1$$

$$\sec 405^\circ = \sec(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sec(360^\circ + 45^\circ) = \sec 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\csc 405^\circ = \csc(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \csc(360^\circ + 45^\circ) = \csc 45^\circ = \sqrt{2}$$

دریم مثال: د 1500° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin 1500^\circ = \sin(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 1500^\circ = \cos(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 1500^\circ = \tan(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 1500^\circ = \cot(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 1500^\circ = \sec(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sec 60^\circ = 2$$

$$\csc 1500^\circ = \csc(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

څلورم مثال: د 900° او -930° زاویو sin ، cos او tan پیداکړئ.

حل

$$-930^\circ + 3\cdot 360^\circ = 150^\circ$$

$$\sin(-930^\circ) = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

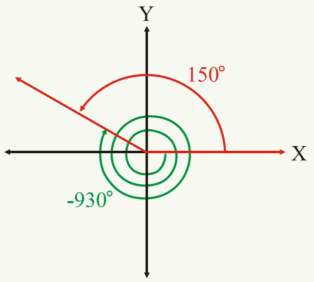
$$\cos(-930^\circ) = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-930^\circ) = \tan 150^\circ = \tan 180^\circ - 30^\circ = \tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

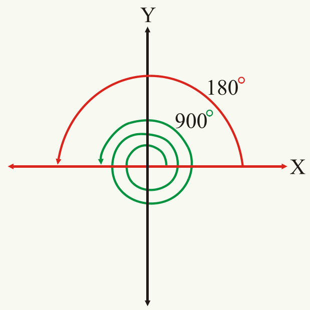
$$\sin 900^\circ = \sin(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \sin 180^\circ = 0$$

$$\cos 900^\circ = \cos(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \cos 180^\circ = -1$$

$$\tan 900^\circ = \tan(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \tan 180^\circ = 0$$



$-930^\circ + 3\cdot 360^\circ = 150^\circ$



$900^\circ = (2\cdot 360^\circ + 180^\circ)$

پنځم مثال: د $-\frac{5\pi}{2}$ او $\frac{7\pi}{3}$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$$-\frac{5\pi}{2} = (-2\pi - \frac{\pi}{2})$$

$$\sin\frac{7\pi}{3} = \sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(-\frac{5\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

$$\cos\frac{7\pi}{3} = \cos(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(-\frac{5\pi}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\tan\frac{7\pi}{3} = \tan(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\tan(-\frac{5\pi}{2}) = \tan(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{\cos(-\frac{\pi}{2})} = \frac{-1}{0}$$ تعریف نه شوی دی

$$\cot(\frac{7\pi}{3}) = \cot(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot(-\frac{5\pi}{2}) = \cot(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\cos(-\frac{\pi}{2})}{\sin(-\frac{\pi}{2})} = \frac{0}{-1} = 0$$

فعالیت

د $\frac{7\pi}{3}$ او $(-\frac{5\pi}{2})$ زاویو نور دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin(2\pi-\theta)=\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(2\pi-\theta)=\cos(360^\circ-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(2\pi-\theta)=\tan(360^\circ-\theta)=-\tan\theta$$
$$\cot(2\pi-\theta)=\cot(360^\circ-\theta)=-\cot\theta$$
$$\sec(2\pi-\theta)=\sec(360^\circ-\theta)=\sec\theta$$
$$\csc(2\pi-\theta)=\csc(360^\circ-\theta)=-\csc\theta$$

$$\sin(2\pi+\theta)=\sin(360^\circ+\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(2\pi+\theta)=\cos(360^\circ+\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(2\pi+\theta)=\tan(360^\circ+\theta)=\tan\theta$$
$$\cot(2\pi+\theta)=\cot(360^\circ+\theta)=\cot\theta$$
$$\sec(2\pi+\theta)=\sec(360^\circ+\theta)=\sec\theta$$
$$\csc(2\pi+\theta)=\csc(360^\circ+\theta)=\csc\theta$$

پوښتني

1- د 480^o او 390^o زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2- د 600^o او 300^o زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

3- د 1830^o او د $(1095^\circ\ 20')$ زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

4- د $\frac{25\pi}{6}$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

5- د $\frac{5\pi}{3}$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

6- د $\frac{41\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}$ او $\frac{3\pi}{4}$ زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

7- د $-300^o, 780^o$ او 420^o زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

8- $\cos(-3\pi) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

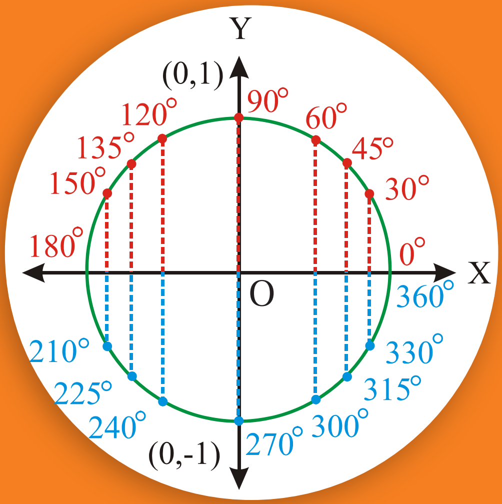
9- $\cos(-15\pi) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) درې واړه سم نه دي

10- $\sin(-1110^\circ) = ?$

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

د مثلثاتي تابعګانو ګراف



- آیاکولای شئ ووایاست چې د $f(x)=\sin x$ او $f(x)=\cos x$ د تابعګانو د تناوب دوره څومره ده؟
- آیا ویلای شئ، چې د $f(x)=\sin x$ او $f(x)=\cos x$ د توابعو domain کوم عددونه دي؟

د $f(x)=\sin x$ د تابع ګراف رسمول (graph of the sine function):

د $f(x)=\sin x$ د تابع د تعریف ناحیه (domain) د ټولو حقیقي عددونو سټ دی او Range يې $[-1,1]$ دی. د دې تابع د تناوب دوره 2π ده. څکه پوهېږئ چې د یوې تابع د تعریف ساحه ټول هغه حقیقي عددونه (Real numbers) دي چې تابع په کې تعریف شوي وي.

د هر حقیقي عدد x لپاره یوه د x راډیان زاویه او له مثلثاتي دایرې سره د x راډیان د زاویې د تقاطع ټکی، هر وخت تعریف شوی دی. که x د راډیان په حساب وي، ددې ټولو زاویو اندازه $2k\pi + x$ راډیان ده، نو د sine او cosine د تابعګانو د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

څرنګه چې sinx او cosx په مثلثاتي دایره باندې د یوه ټکي وضعیه کمیات دي، نو د $f(x)=y=\sin x$ او $f(x)=y=\cos x$ د تابعګانو Range د (1) او (−1) تر منځ دی، یا د $[-1,1]$ انټروال د $y=\sin\theta$ او $y=\cos\theta$ د تابعګانو Range دی.

فعالیت

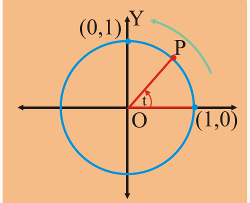
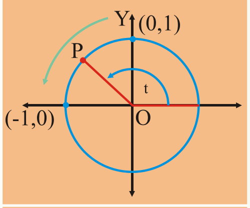
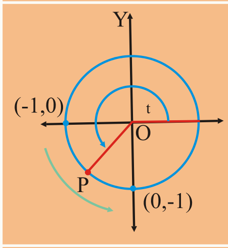
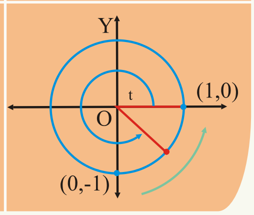
وښایاست چې $-1\le \sin\theta,\cos\theta \le 1$ دی.

باید په یاد ولرو، چې د f تابع ته متناوبه تابع ویل کېږي، که چیرې د t یو عدد د صفر خلاف موجود وي، په دې شرط چې لومړی که $x\in D_F$ وي $x+t$ او $x-t$ هم د f د تابع د تعریف په ساحه (domain) کې شامل وي، او $f(x+t)=f(x)$ وي.

ترټولو کوچنی داسې عدد لکه (t) چې د $f(x+t)=f(x)$ په اړیکه کې صدق وکړي. دا د (t)

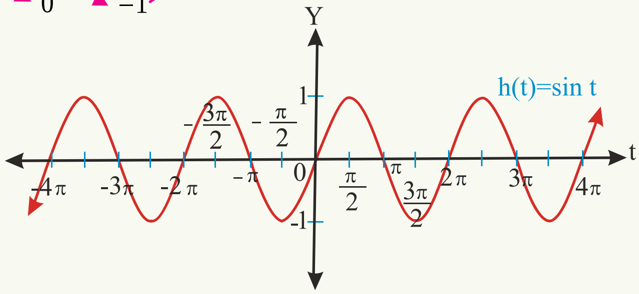
عدد د f د تابع د اصلي تناوب په نوم یادېږي. که (t) د f د تابع د تناوب دوره وي. نو (-t) هم د f د تابع د تناوب دوره ده. څرنګه چې پوهیږئ $\sin(x+2K\pi)=\sin x$ او $\cos(x+2K\pi)=\cos x$ دی، چې K یو تام عدد دی، نو د sinx او cosx توابع متناوبې توابع دي، او تر ټولو کوچنی عدد چې په پورتنیو اړیکو کې صدق کوي 2π دی، نو د دې دواړو توابعو اصلي تناوب 2π دی.

له شکل سره سم په معیاري حالت کې یو د $\hat{t}$ راډیان زاویه په پام کې ونیسئ په داسې حال کې چې د t د زاویې دویمه ضلع مثلثاتي دایره د p په ټکي کې قطع کوي، نو د p د ټکي د y مختصه له sin t څخه عبارت ده. $h(t)=\sin t$ د t او sint تغیرات په لاندې جدول او شکل کې وګورئ:

اړونده شکل	sin t	د P د ټکي حرکت	د t په قیمت کې تغیر
	له صفرڅخه تر یوه پورې تزاید کوي	له $(1,0)$ څخه تر $(0,1)$	له 0 څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې
	له یوه څخه تر صفره پورې تناقص کوي	له $(0,1)$ څخه تر $(-1,0)$	له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې
	له صفره څخه تر -1 پورې تناقص کوي	له $(-1,0)$ څخه تر $(0,-1)$	له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې
	له -1 څخه تر صفره پورې تزاید کوي	له $(0,-1)$ څخه تر $(1,0)$	له $3\frac{\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې

په همدي ډول په هر 2π كي تكرارېږي په نتيجه كي $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$ دى.
لاندي جدول او شكل وګورئ:

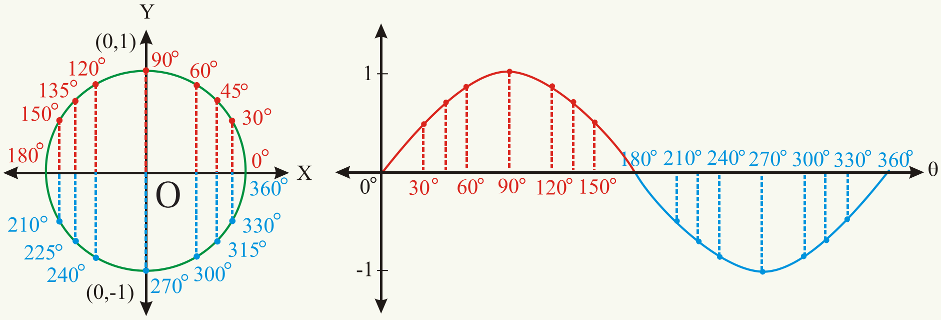
t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$h(t) = \sin t$	0 ↗	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0



او يا كولاى شو، كه د يو دوران زاويې د درجې په حساب وي، د sin t تغيرات په لاندي جدول او شكل كي وښايو:

$h(t) = \sin t$

t	واقعي	تقريبي
0°	0	0.00
30°	$\frac{1}{2}$	0.50
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
90°	1	1.00
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
150°	$\frac{1}{2}$	0.50
180°	0	0.00
210°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
270°	-1	-1.00
300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
330°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
360°	0	0.00



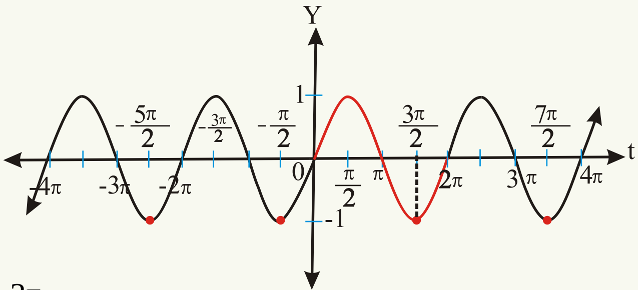
دي ته په پام سره چې sint د تابع د تناوب دوره 2π ده، نو $\sin(t\pm 2\pi)=\sin t$ دی، نو د $\sin t$ د تابع گراف د $[0,2\pi]$، $[2\pi,4\pi]$، $[4\pi,6\pi]$، $[-2\pi,0]$ او داسې نورو انټروالوکې یو شان دی.

فعالیت

په $-3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 4\pi$ او -4π کې د $\sin t$ د تابع قیمتونه پیدا کړئ.

لومړی مثال: د t هغه ټول قیمتونه وښایاست چې د sin t قیمت په کې (-1) دی.

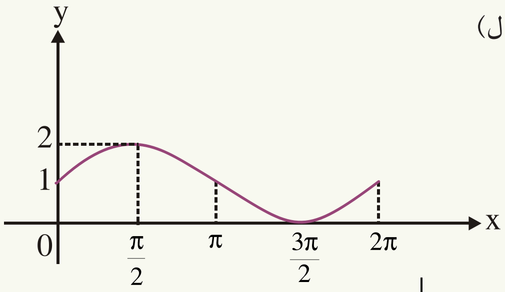
حل: خرنگه چې د sint قیمت د (1) او (-1) تر منځ دی او په هر 2π کې په افقي محور باندې تکرارېږي، نو بې شمېره قیمتونه شته، چې په هغه کې د sint قیمت 1 - دی. د نمونې په ډول څو ټکي په سور رنگ په شکل کې ښودل شوي دي.



د sint په گراف کې له صفر څخه تر 2π پورې یوازې یو ټکی(نقطه) د $(\frac{3\pi}{2},-1)$ شته، چې په سره رنگ ښودلی شوي دی. ټول هغه قیمتونه چې sint په کې (-1) دی، له $t=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ څخه عبارت دی، چې k یو تام عدد دی.

دویم مثال: د $y=\sin x+1$ د تابع ګراف د $[0,2\pi]$ په انټروال کې رسم کړئ.

حل: ددې لپاره د تابع د تعریف ساحه $[0,2\pi]$ او Range يې $[0,2]$ دی، ددې تابع د ګراف د رسمولو لپاره همدا بس دی، چې د $y=\sin x$ ګراف رسم کړو او د يوه واحد په اندازه يې د Y پر محور پورته خوا ته انتقال کړو.(عمودی انتقال)



x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y=\sin x+1$	1	2	1	0	1

د sine او cosine دتابعګانو پريود او لمن(Amplitude):

که $b>0$ وي د $f(t)=\sin bt$ او $g(t)=\cos bt$ ګرافونه، د صفر او 2π تر منځ يوه دوره(Cycle) جوړوي، ددې دواړو تابعګانو پريود $\frac{2\pi}{b}$ دی($b>0$). د مثال په ډول د $y=\cos 3t$ پريود $\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{3}$ دی او د $y=\sin\frac{1}{2}t$ د تابع پريود $\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$ دی

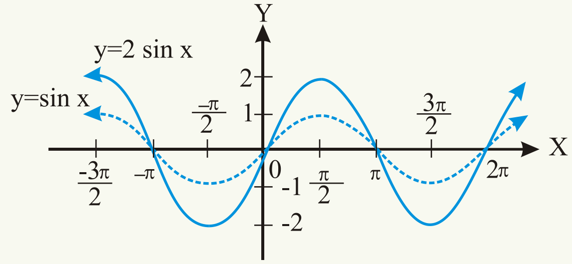
او د $y=a\sin bt$ او $y=a\cos bt$ د تابعګانو د لمن $|a|$ دی($a\neq 0$)، د مثال په ډول د $y=-2\sin 4t$ لمن $|a|=|-2|=2$ او پريود يې $\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ دی.

دريم مثال: د $y=2\sin x$ د تابع ګراف رسم او د $y=\sin x$ د تابع له ګراف سره يې پرتله کړئ.

حل: د دې تابع ګراف توپير د $y=\sin x$ د تابع له ګراف سره دا دی، چې $-2\leq y\leq 2$ دی، چې د 2 عدد ته لمن(amplitude) وايي. ځکه چې د $|2|=2$ دی. ددې تابع پر يو د هم 2π

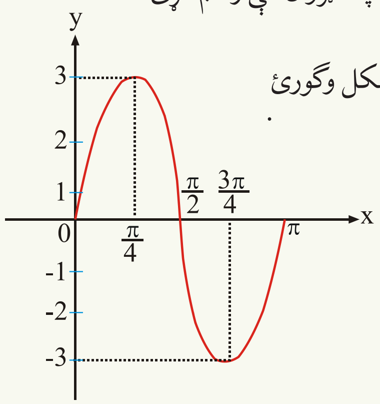
دی، لاندې جدول او شکل وګورئ:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	1	0	-1	0
2 sin x	0	2	0	-2	0



خلورم مثال: د $y = 3\sin 2x$ د تابع ګراف د $[0,\pi]$ په انټروال کې رسم کړئ.

حل: د دې تابع پریود $\frac{2\pi}{2} = \pi$ دی، لاندې جدول او شکل وګورئ.



x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
2x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sin 2x	0	1	0	-1	0
3sin 2x	0	3	0	-3	0

د sint د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، د sint د تابع ګراف د y محور په (0،0) او د X محور په (0.0)، π، 2π، 3π، 4π ... او $-\pi$، -2π، -3π -4π او نورو کې قطع

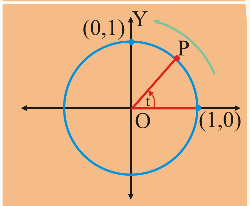
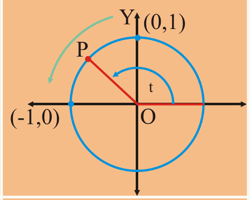
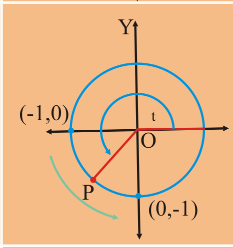
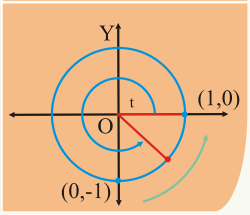
کوي، د $\sin t$ تابع له صفر څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې متزایده، له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې متناقصه، له π

څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې متناقصه او له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې متزایده ده.

د $f(t) = \cos t$ د تابع ګراف (Graph of the cosine function)

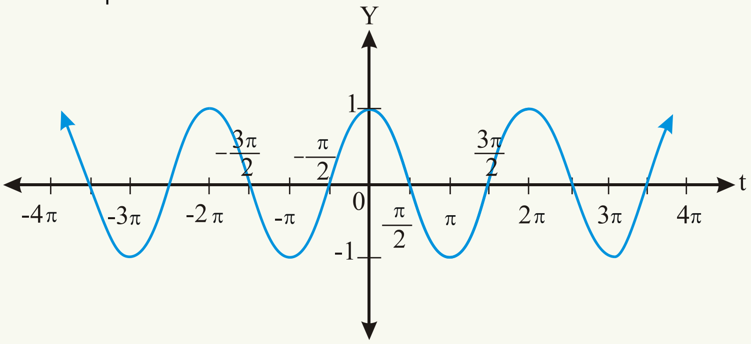
د دې تابع د تعریف ساحه (domain) هم د ټولو حقیقي عددونو سټ دی او Range یې $[-1,1]$

دی، د cosx د تابع د تناوب دوره هم 2π ده، له شکل سره سم په معیاري حالت(Standard position) کې د $\hat{t}$ رادیان یوه زاویه په پام کې ونیسئ چې د $\hat{t}$ د زاویې دویمه ضلعه مثلثاتي دایره د p په ټکي کې قطع کوي، نو د p د ټکي د x مختصه د cost څخه عبارت ده. $f(t) = \cos t$
د تابع ګراف د رسمولو لپاره لاندې جدول او شکلونه وګورئ.

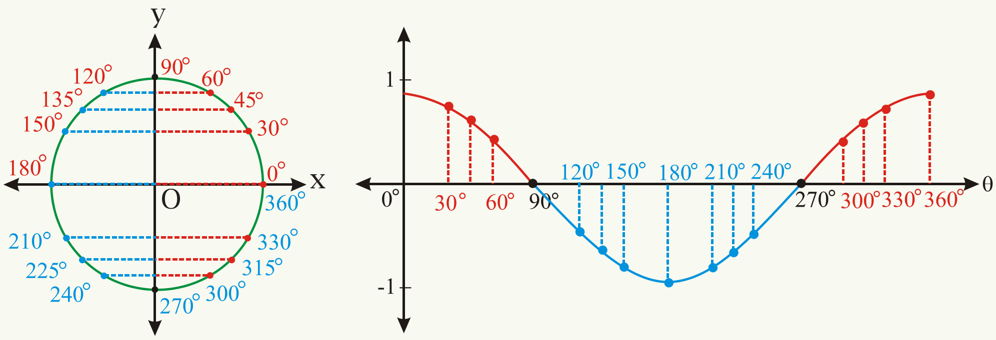
شکل	cost یا د p د ټکي د x مختصه	د P د ټکي حرکت	د t په قیمت کې تغیر
	له یوه څخه ترصفره پورې تناقص کوي	له (1,0) څخه تر (0,1) پورې	له 0 څخه تر $\frac{\pi}{2}$
	له صفر څخه تر 1- پورې تناقص کوي.	له (0,1) څخه تر $(-1,0)$ پورې	له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π
	له1- څخه تر صفره پورې تزاید کوي.	له $(-1,0)$ څخه تر $(0,-1)$ پورې	له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$
	له صفر څخه تر یوه پورې تزاید کوي	له $(0,-1)$ څخه تر (1,0) پورې	له $3\frac{\pi}{2}$ څخه تر 2π

په همدې ډول په هر 2π کې تکرارېږي. په نتیجه کې $\cos(t\pm 2\pi)=\cos t$ دی. لاندې جدول او شکل وګورئ.

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(t)=\cos t$	1	0	-1	0	1



همدارنګه کولای شو، د درجې په حساب د $f(t)=\cos t$ د تابع ګراف رسم کړو:



د $f(t)=y=\cos t$ د تابع د تناوب دوره 2π ده، څکه چې د cost د تابع ګراف د $[0,2\pi]$، $[2\pi,4\pi]$، $[4\pi,6\pi]$ او $[-2\pi,0]$ او داسې نورو کې یو شان دی.

د cost د تابع د تعریف ساحه د حقیقي عددونو سټ او Range یا د y قیمت یې د 1 او -1 تر منځ دی، یا د $[-1,1]$ انټروال د cost د تابع Range دی.

$f(t) = \cos t$

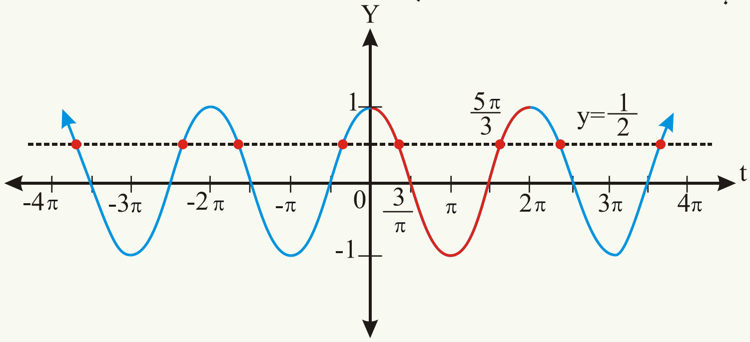
t	واقعي	تقریبي
0°	1	1.00
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{1}{2}$	0.50
90°	0	0.00
120°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
150°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
180°	-1	-1.00
210°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
240°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
270°	0	0.00
300°	$\frac{1}{2}$	0.50
315°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.711
330°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
360°	1	1.00

فعالیت

د $g(t) = \cos t$ د تابع ګراف د t په کومو قیمتونو کې د y محور قطع کوي؟

لومړی مثال: **د** t ټول هغه قیمتونه وښایاست چې د cost د تابع قیمت په کې له $\frac{1}{2}$ سره مساوي وي.

حل: څرنګه چې بې شمېره زاويې شته دی چې په هغه قیمتونو کې $y = \cos t = \frac{1}{2}$ دي، په شکل کې ځو ټکي د نمونې په ډول په سره رنګ ښودل شوي دي.



د $[0,2\pi]$ په انټروال کې داسې دوه ټکي شته، چې $\cos t=\frac{1}{2}$ شي، چې له $(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$ او $(\frac{5\pi}{3},\frac{1}{2})$ څخه عبارت دی. ټول هغه قیمتونه چې په هغوکې $\cos t=\frac{1}{2}$ وي، له $t=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ یا $t=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$ څخه عبارت دي. چې k یو تام عدد دی.

د sin او cos تابعګانو د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، $y=\cos t$ تابع له صفره څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې متناقصه او له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π هم متناقصه ده. لیکن له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ متزایده او له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې هم متزایده ده. د $y=\sin t$ او $y=\cos t$، د توابعو پریود 2π دی، په دې معنا چې: $\sin(t\pm 2\pi)=\sin t$, $\cos(t\pm 2\pi)=\cos t$ دی.

د $f(t)=\sin t$ تابع طاقه او $f(t)=\cos t$ تابع یوه جفته تابع ده، ځکه چې $\sin(-t)=-\sin t$ او $\cos(-t)=\cos t$ دی.

یا د sin t د تابع ګراف نظر مبداء ته متناظر او د cos t تابع ګراف نظر د y محور ته متناظر دی.

پوښتنې

1- د لاندې تابعګانو ګرافونه په راکړل شوو انټروالونو کې رسم کړئ.

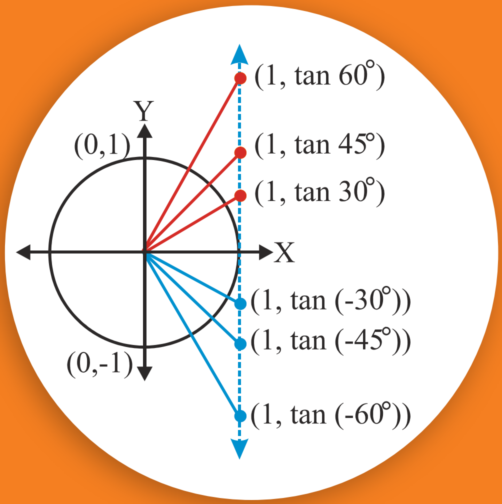
$g(t)=\cos t:[\pi,3\pi]$ $\qquad$ $f(t)=\sin t:[2\pi,6\pi]$

2- د $[-2\pi,6\pi]$ په انټروال کې د t د کوم قیمت لپاره $\sin t=1$ دی؟

3- د $[-2\pi,6\pi]$ په انټروال کې د t د کوم قیمت لپاره $\cos t=0$ دی؟

4- د $g(t)=-\frac{1}{2}\sin t$ د تابع ګراف د $[-2\pi,6\pi]$ په انټروال کې رسم کړئ.

د تانجانټ د تابع ګراف



آیا پوهیږئ چې د tan تابع یوه متزایده تابع ده؟

خرنګه چې $\tan t = \frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t}$ دی، په دې شرط چې $\cos t \neq 0$ وي، نو د tan د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته له هغه زاویو څخه چې cos یې صفر وي، د $\frac{\pi}{2}$ او $\frac{3\pi}{2}$ او یا $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ او $\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ د زاویو کوساینونه صفر دي.

خرنګه چې د $\frac{\pi}{2}$ زاویې د دویمې ضلعې د تقاطع ټکی له مثلثاتي دایرې سره د $(0,1)$ ټکی دی، نو د $\frac{\pi}{2}$ زاویې سره د یو پوره دوران (2π) په جمع کولو سره د $\cdots -\frac{7\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2} \cdots$ زاویې په لاس راځي، چې ددې زاویو د tan قیمتونه تعریف شوي نه دي او د $t = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ مستقیم خطونه د tan د تابع عمودي مجانبونه دي.

په همدې ډول د $(0,-1)$ ټکی د $\frac{3\pi}{2}$ زاویې پر دویمه ضلع واقع دي، د $\frac{3\pi}{2}$ له زاویې سره د یو پوره دوران (2π) له جمع کولو څخه د $\cdots -\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2} \cdots$ زاویې په لاس راځي، چې د tan د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

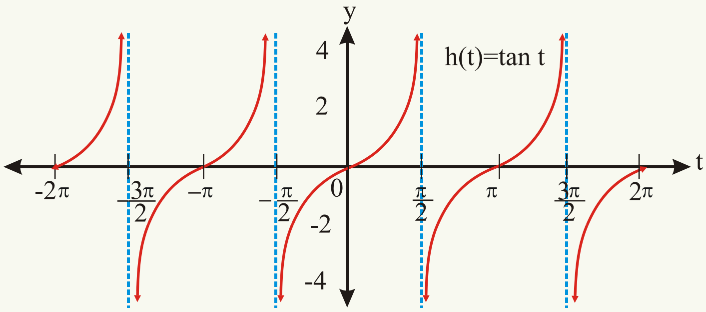
یا د tan د تابع د تعریف په ناحیه(domain) کې ټول حقیقي عددونه شامل دي پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه، او یا $IR - \{t / t \in IR , t = k\pi + \frac{\pi}{2}$ او د ټانجانټ د تابع Range د

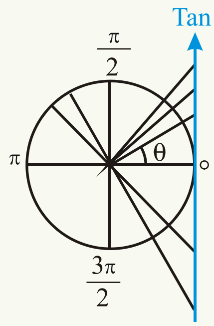
ټولو حقیقي عددونو سټ دی. د ټانجانټ د تابع پریود π دی. د t راډیان زاویې لپاره لرو چې:

$\tan(t\pm\pi)=\tan t$ دی. څه وخت چې د $\hat{t}$ زاویه له صفره تر $\frac{\pi}{2}$ پورې تزاید وکړي، نو $\tan t$ هم له صفره څخه تر $+\infty$ پورې تزاید کوي ($\tan\frac{\pi}{2}$ تعریف شوی نه دی). په دویمه ربع کې هم څه وخت چې د t زاویه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې تزاید وکړي، $\tan t$ هم له $-\infty$ څخه تر صفره پورې تزاید کوي.

په همدې ډول په دریمه ناحیه کې څه وخت چې د $\hat{t}$ زاویه له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې تزاید وکړي، د $\hat{t}$ د زاویې ټانجانټ له صفره څخه تر $+\infty$ پورې تزاید کوي. په څلورمه ناحیه کې د $\hat{t}$ د زاویې ټانجانټ له $-\infty$ څخه تر صفره پورې تزاید کوي. لاندې جدول د ټانجانټ د تابع تحول ښکاره کوي، همدارنګه د دې تابع تحول په لاندې شکلونو کې ښودل شوی دی:

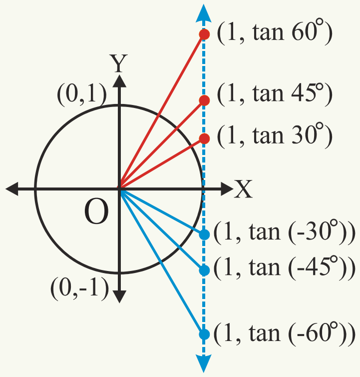
t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$3\pi/2$		2π
$\tan t$	0	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \parallel -\infty$	$\nearrow$	0

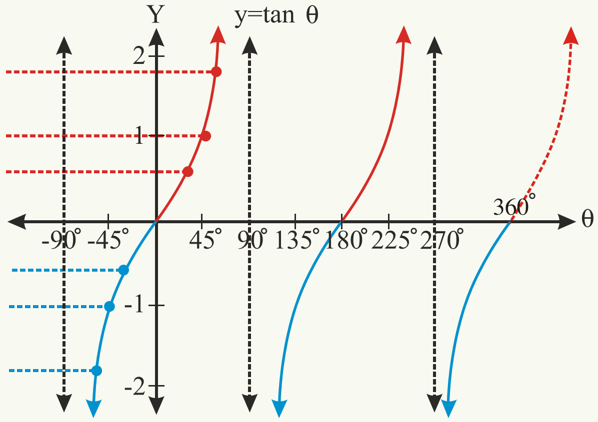




که θ د درجې په حساب وي، د ټانجانټ تابع قیمتونه او شکل په لاندې ډول وګورئ.

	θ	-90° 90°	-60° 120°	-45° 135°	-30° 150°	0° 180°	30° 210°	45° 255°	60° 240°
$\tan\theta$	حقیقي	تعریف شوی نه دی	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
	تقریبي	تعریف شوی نه دی	−1.73	-1	−0.58	0	0.58	1	1.73

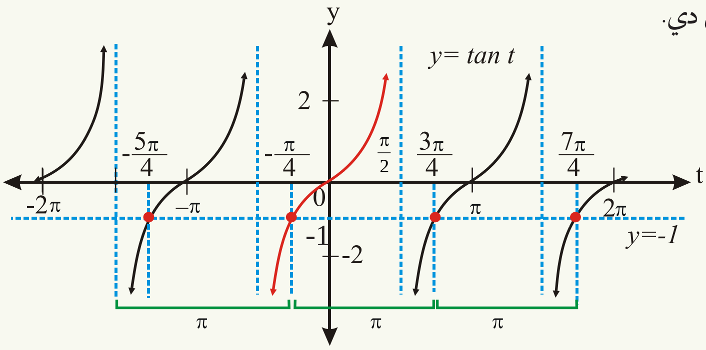




خرنګه چې د $(\pi,2\pi)$ او د $(0,\pi)$ په فاصله کې د ټانجانټ د تابع تغیرات یو شی دي، نو د tan د تابع پریود π دی او د tan تابع یوه متزایده تابع ده. له بلې خواکه $b>0$ وي، د $f(t)=\tan bt$ تابع د $\frac{\pi}{2}$ او $-\frac{\pi}{2}$ تر منځ یوه دوره(Cycle) جوړوي، د دې تابع پریود $\frac{\pi}{b}$ دی. د مثال په ډول د $f(t)=\tan 2t$ پریود $\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$ دی.

مثال: د t ټول هغه قیمتونه پیداکړئ، چې $\tan t=-1$ وي.

حل: خرنګه چې د $\tan t$ قیمتونه د π په فاصله کې تکرارېږي. نو د t بې شمېره قیمتونه شته چې $y=\tan t$ له 1 - سره مساوي وي، چې په لاندې شکل کې څو ټکي د نمونې په ډول ښودل شوي دي.



خرنګه چې د $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ په انټروال کې یوازې د $(-\frac{\pi}{4},-1)$ یو ټکی لري، نو د t ټول قیمتونه چې $\tan t=-1$ دی مساوي دی په $t=-\frac{\pi}{4}+K\pi$ (K یو تام عدد دی).

د tan تابع هر وخت متزايده ده او پرته د $\frac{\pi}{2}$ د طاق مضرب له زاويو څخه په ټولو حقيقي عددونو

کې تعريف شوې ده. او د تناوب دوره يې π ده. ځکه چې: $\tan(t \pm \pi) = \tan(t)$.

څرنگه چې $\tan(-t) = -\tan t$ دى، نو $y = \tan t$ يوه طاقه تابع ده او د $\frac{\pi}{2}$ په تام مضرب

کې عمودي مجانب هم لري.

د sine ، cosine او tangent د تابعگانو د مشخصو لنډيز:

تابع	سمبول	Domain	Range	پريود	طاقه / جفته
$\sin e$	$f(t) = \sin t$	د ټولو حقيقي عددونو سټ	ټول حقيقي عددونه د 1 او 1 - ترمنځ	2π	طاقه
$\cos ine$	$f(t) = \cos t$	ټول حقيقي عددونه	ټول حقيقي عددونه د 1 او 1 - ترمنځ	2π	جفته
$\tan gent$	$f(t) = \tan t$	ټول حقيقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه	ټول حقيقي عددونه	π	طاقه

يا په بل عبارت:

$$R_{\sin} = R_{\cos} = [-1,1] \qquad D_{\sin} = D_{\cos} = IR$$

$$D_{\tan} = \{x \in IR \quad : \quad \cos x \neq 0\}$$

پوښتنې

1 – د t د زاويې په کوم قيمت د $\tan t$ د تابع قيمت د $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ په انټروال کې له صفره کوچنى دى؟

2 – د $y = 3\tan\theta$ د تابع گراف رسم کړئ.

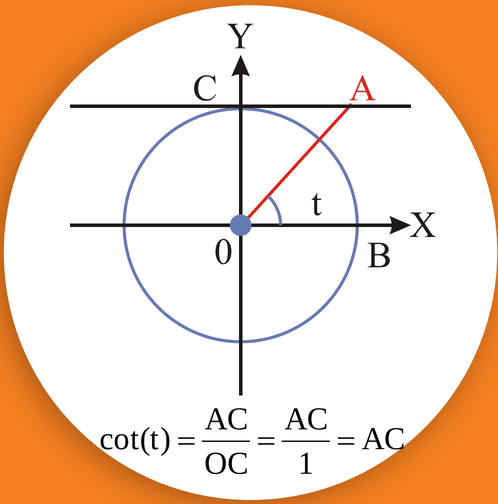
3 – د $\tan\theta$ د تابع پريود مساوي دى په:

a) 2π b) π c) 3π d) درې واړه سم نه دي

4 – که د θ زاويه له 0^o څخه تر 90^o پورې تحول وکړي، د $\tan\theta$ تحول عبارت دى له:

a) له 1- څخه تر $-\infty$ b) له صفر څخه تر $+\infty$ c) له $-\infty$ څخه تر $+\infty$

د کوټانجانټ د تابع ګراف



- ایا د کوټانجانټ د تابع د تناوب دوره پېژنئ؟
- که $\sin t = 0$ وي، آیا $\cot(t)$ تعریف شوی دی؟ که نه، ولې؟

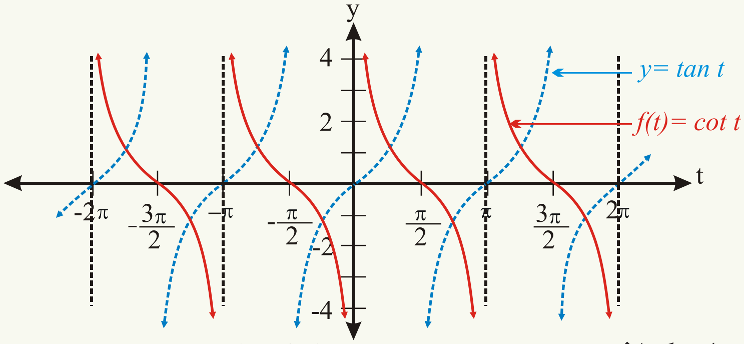
څرنګه چې $\cot(t)=\frac{\cos t}{\sin t}$ دی، که $\sin t = 0$ وي، $\cot(t)$ تعریف شوی نه دی چې t یو تام عدد وي.

د cot د تابع د تعریف ساحه (domain) ټول حقیقي عددونه دي پرته د π له تام مضرب څخه، یا په بل عبارت $IR-\{t/t\in IR, t=k\pi, k\in z\}$ یا $dom_{cot}=\{t\in IR/\sin t\neq 0\}$ او د دې تابع Range ټول حقیقي عددونه دي.

د $F(t)=\cot(t)$ د تابع ګراف د π په تام مضرب کې عمودي مجانب (Vertical asymptotes) لري $(t=k\pi)$ چې k یو تام عدد دی.

څه وخت چې د t زاویه له صفره تر $\frac{\pi}{2}$ پورې زیاته شي، د $\cot(t)$ قیمت له $+\infty$ څخه تر صفره پورې کمېږي ($\cot 0°$ نه دی تعریف شوی) په دویمه ناحیه کې څه وخت چې د t زاویه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې زیاته شي، $\cot(t)$ له صفره تر $-\infty$ پورې کمېږي (تناقص کوي). دې ته په پام کولو سره چې د cot د تابع د تناوب دوره π ده، نو په درېیمه او څلورمه ناحیه کې د $\cot(t)$ د تابع تغیرات د لومړۍ او دویمې ناحیې په شان دي. پورتنی حقیقت په لاندې جدول او شکل کې لیدلای شئ.

t	0		$\pi/2$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cot t$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$



د secant(t) د تابع گراف (Graph of the secant Function)

د sec (t) او cos (t) گرافونه يو له بله سره څه اړيکه لري؟

د $f(t)=\sec(t)$ د تابع گراف د $\cos t$ د تابع له گراف سره معکوسه اړيکه لري، ځکه چې

$\sec(t)=\frac{1}{\cos(t)}$ دی. که $\sec t$ د $\frac{1}{\cos t}$ په شکل په پام کې ونيسو، څه وخت چې د t زاويې

قيمت له صفر څه تر $\frac{\pi}{2}$ يا $90°$ پورې زيات شي، د $\cos t$ قيمت له (1) څخه صفر ته نژدې

کېږي، د $\frac{1}{\cos t}$ يا $\sec t$ قيمت له 1 څخه تر $+\infty$ زياتېږي، که $t=90°$ شي، $\sec t$ تعريف شوی نه دی، که t له $90°$ لږ څه زياته شي د $\sec t$ قيمت $-\infty$ کېږي او په $t=\pi=180°$ کې د -1 سره مساوي کېږي. په همدې ډول که t له $180°$ څخه تر $270°$ زياته شي نو د $\cos t$ قيمت له -1 څخه صفر ته نژدې کېږي او $\sec(t)$ له -1 څخه تر $-\infty$ پورې کمېږي.

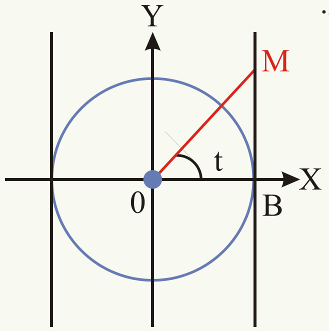
په $270°=\frac{3\pi}{2}=t$ کې د $\sec t$ قيمت غير معين کېږئ په همدې ډول، څه وخت چې د t قيمت د $270°$ څخه تر $360°$ زيات شي، نو $\cos(t)$ له صفر څخه تر يوه پورې قيمت اخلي او $\sec(t)$ د $+\infty$ څخه تر (1) پورې تناقص کوي. ليدل کېږي، چې:

$$\text{Domain } \sec t = IR-\{t \mid t=(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in z\}$$

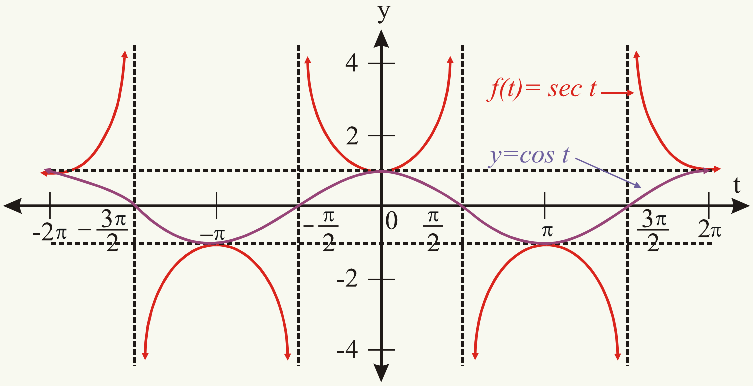
او $\text{Range } \sec(t)=IR-\{t \mid -1\le t\le 1\}$ يا ټول حقيقي عددونه پرته د $[-1,1]$ له انټروال څخه يا په بل عبارت د $F(t)=\sec t$ د تابع د تعريف ساحه $(Domain)$ د ټولو حقيقي عددونو

سټ دی پرته د $\frac{\pi}{2}$ د طاق مضرب څخه او د $F(t)=\sec t$ د تابع Range ټول حقيقي عددونه دي چې لوی يا مساوي د يو او يا کوچنی يا مساوي له -1 وي، لکه څنگه چې ليدل کېږي د

د $\sec(t)$ تابع پریود هم 2π دی او د $F(t)=\sec(t)$ تابع د $t=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ کې عمودي مجانبونه لري چې k یو تام عدد دی.



$$\sec t=\frac{\overline{OM}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OM}}{1}=\overline{OM}$$



t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
t	$0°$		$90°$		$180°$		$270°$		360
$F(t)=\sec t$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

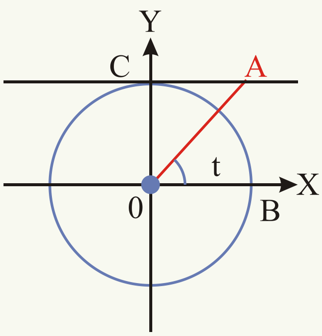
فعالیت

د $f(t)=\frac{4}{3}\sec(t)$ د تابع گراف رسم کړئ.

د cscant د تابع گراف (Graph of the cosecant Function)

د $f(t)=\sin(t)$ د تابع گراف د $F(t)=\csc(t)$ د تابع له گراف سره څه اړیکه لري؟

څرنگه چې $\csc t=\dfrac{1}{\sin t}$ دی، $\sin t$ او $\csc t$ یو د بل معکوس دي. څه وخت چې $\sin(t)=0$ وي، $\csc t$ تعریف شوی نه دی، د $F(t)=\csc t$ د تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه دي پرته له هغه زاویو څخه چې د π تام مضرب وي، (هغه زاویې چې sine یې صفر وي) چې په دې قیمتونو کې عمودي مجانبونه هم لري او د $F(t)=\csc(t)$ د تابع Range ټول هغه حقیقي عددونه دي، چې لوی یا مساوي د یو، کوچنی یا مساوي له (-1) سره وي. او ددې تابع پریود هم 2π دی.



څه وخت چې د t زاویه له $0°$ څخه تر $90°$ پورې زیاته شي، نو $\sin t$ له صفر څخه تر (1) پورې زیاتېږي (تزاید کوي) او $\csc(t)$ له $+\infty$ څخه تر (1) پورې کمېږي (تناقص کوي)، څه و خت چې $t=90°$ شي، $\csc(t)=1$ کېږي او که د t زاویه له $90°$ څخه تر $180°$ زیاته شي، نو $\sin(t)$ له یوه څخه صفر ته راکمېږي او $\csc(t)$ له (1 څخه $+\infty$ ته زیاتېږي(تزاید کوي). څه وخت $t=180°$ شي چې $\sin(t)=0$ او د $\csc(t)$ قیمت غیر معین شي او که t زاویه $180°$ څخه تر $270°$ پورې زیاته شي، $\sin(t)$ له صفر څخه تر (-1) پورې کمېږي او $\csc(t)$ د $-\infty$ څخه تر (-1) پورې زیاتېږي، د $t=270°$ په قیمت $\csc(t)$ له (-1) سره مساوي کېږي.

په همدې ډول کله چې د t زاویه له $270°$ څخه تر $360°$ پورې زیاته شي(تزاید وکړي)، نو $\sin t$ د -1 څخه صفر ته نژدې کېږي او $\csc(t)$ له (-1) څخه تر $-\infty$ کمېږي. په $t=360°$ کې د $\csc(t)$ قیمت غیر معین شي(تعریف شوی نه دی). $t=k\pi$ کې تابع عمودي مجانبونه لري.

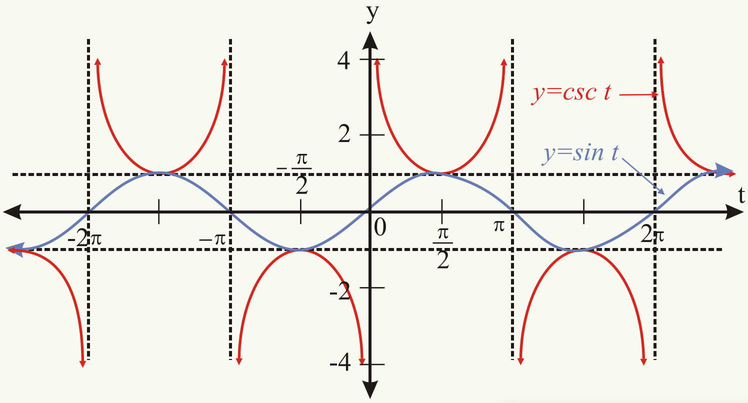
په شکل کې د مثلثاتي دایرې د C په ټکي کې یو مماس رسموو، د $O\overset{\Delta}{C}A$ په قایم الزاویه مثلث کې لرو، چې:

$$\csc(t)=\csc O\hat{A}C=\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{OA}}{1}=\overline{OA}\qquad (\hat{t}=O\hat{A}C)$$

د $\overline{OA}$ د خط یا csc(t) تحول په لاندې جدول کې لنډېږو:

t	0	$\pi/2$	π		$3\pi/2$	2π
$F(t)=\csc t$	$+\infty \searrow 1 \nearrow$		$+\infty$	$-\infty \nearrow$	$-1 \searrow$	$-\infty$

لدېل کېږي چې که د t زاویه له صفر څخه تر 360° یا (2π) پورې قیمتونه واخلې نو $\csc(t)\geq 1$ او یا $\csc(t)\leq -1$ کېږي، نو لاندې شکل وګورئ.



فعالیت

د $h(t)=-3\csc t$ د تابع ګراف رسم کړئ.

لاندې جدول ته وګورئ:

سمبول	Domain	Range	پریود	طاقه یا جفته
$F(t)=\sec t$	ټول حقیقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه	ټول حقیقي عددونه کوچني یامساوي په، -1 لوی یا مساوي په (1)	2π	جفته

طاقه	2π	ټول حقیقي عددونه کوچني یامساوي په -1 لوی یا مساوي په 1	ټول حقیقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه	$f(t)=\csc(t)$
طاقه	π	ټول حقیقي عددونه	ټول حقیقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه	$f(t)=\cot(t)$

له مثلثاتي تابعګانو څخه دا نتیجه په لاس راځي، چې: د θ یا (t) د زاویې په زیاتوالي سره د $\sin\theta$ او $\tan\theta$ مثلثاتي نسبتونه هم زیاتیږي، خو د $\cos\theta$ او $\cot\theta$ قیمت کمیږي.

پوښتنې

1 – د $f(t)=\cot(t)$ تابع د t په کوم قیمت کې تعریف شوې نه ده او ولې؟

2 – څه وخت چې د θ زاویه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې تحول وکړي، د $\cot\theta$ تحول عبارت دی:

a) $1\to-\infty$ b) $0\to-\infty$ c) دواړه سمې نه دي

3 – که $\hat{t}=\pi$ وي، $\cot(t)$ عبارت دی له:

$a)$ صفر $b)$ -1 $c)$ نه دی تعریف شوی

4 – د $\sec$ او $\csc$ د تابعګانو *Range* عبارت دی له:

a) $IR-\{t\,|\,-1<t<1\}$ $b)$ ټول حقیقي عددونه c) $IR-\{t\,|\,-1\le t\le 1\}$

5 – د $f(t)=\csc(t)$ د تابع د تعریف ساحه *(Domain)* عبارت ده، له:

a) ټول حقیقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه

b) ټول حقیقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه

c) ټول حقیقي عددونه پرته د 2π له تام مضرب څخه d) درې واړه سمې نه دي

6 – د $f(t)=\csc(t)$ تابع د $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې:

$a)$ متزایده ده $b)$ متناقصه ده $c)$ نه متزایده او نه متناقصه ده

د څېرکي لنډيز

- د $\frac{R}{\pi}=\frac{g}{200}=\frac{d}{180}$ د فورمول په مرسته کولای شو، زاویه له یوه واحد څخه بل واحد ته واړوو.
- یو راډیان هغه مرکزي زاویه ده، چې د مقابل قوس اوږدالی یې د شعاع له اوږدوالی سره مساوی وي.
- θ د راډیان په حساب مساوي ده په: $\theta=\frac{s}{r}$، چې s د مرکزي زاویې مقابل قوس او r د دایرې شعاع ده.
- که د یوې زاویې رأس د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې او لومړنی ضلع یې د X د محور په مثبت جهت منطبق وي، زاویه په معیاري حالت کې ده.
- که په معیاري حالت کې د دوو یا څو زاویو دویمې ضلعې یو پر بل منطبقې وي، دا زاویې کوټرمینل زاویې نومېږي.
- مثلثاتي دایره هغه دایره ده، چې د شعاع اوږدوالی یې د اوږدوالی واحد وي.

$\sin(90-\theta)=\cos\theta$ $\cos(90-\theta)=\sin\theta$ $\tan(90-\theta)=\cot\theta$	$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$	$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(90-\theta)=\tan\theta$ $\sec(90-\theta)=\csc\theta$ $\csc(90-\theta)=\sec\theta$	$\cot(-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(-\theta)=\sec\theta$ $\csc(-\theta)=-\csc\theta$	$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(\pi-\theta)=-\sec\theta$ $\csc(\pi-\theta)=\csc\theta$
$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$ $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$ $\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$	$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$	$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$ $\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$ $\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$ $\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sec\theta$	$\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$ $\sec(\pi+\theta)=-\sec\theta$ $\csc(\pi+\theta)=-\csc\theta$	$\cot(2\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(2\pi-\theta)=\sec\theta$ $\csc(2\pi-\theta)=-\csc\theta$

• د θ او $(\theta + 2k\pi)$ زاوېې چې k يو تام عدد دی، کوټرمینل زاوېې دي چې ټول مثلثاتي نسبتونه يې سره مساوي دي.

• د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ د توابعو $domain$ ټول حقیقي عددونه او $Range$ يې $[-1,1]$ دی.

• د $y = \sin\theta$ تابع يوه طاقه تابع ده. ځکه چې $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ددې تابع گراف نظر د وضعيه کمياتو مبدأ ته متناظر دی او د $y = \cos\theta$ تابع جفته تابع ده، ځکه چې $\cos(-\theta) = \cos\theta$ او د cos د تابع گراف نظر y محور ته متناظر دی.

• د $0°$، $\frac{\pi}{2}$، π، $\frac{3\pi}{2}$ او 2π د زاويو دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعريف شوې نه دي.

• د sin ، cos ، sec او csc د تابعگانو د تناوب دوره 2π او د tan او cot د تابعگانو د تناوب دوره(پریود)، π ده.

• د tan تابع هر وخت متزايد او د cot تابع هر وخت متناقصه تابع ده.

• د cos او sec تابعگانې جفتې او د sin ، tan ، cot او csc تابعگانې طاقې دي.

• که د يوې تابع گراف نظر د y محور ته سره متناظر وي، دا ډول تابعگانې جفتې دي يا د هر x لپاره، $x \in domF$ د $F(-x) = F(x)$ رابطه صدق وکړي.

• که د يوې تابع گراف نظر د وضعيه کمياتو مبدأ ته سره متناظر وه، طاقه تابع ده چې د هر x لپاره، $x \in domF$ د $F(-x) = -F(x)$ رابطه صدق وکړي.

د مثلثاتي توابعو تحول په لنډ ډول په لاندې جدول کې ښودل شوی دی.

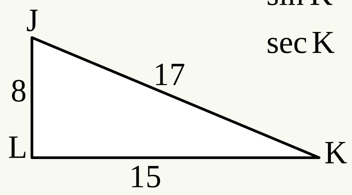
θ	0°	I	$\frac{\pi}{2}$	II	π	III	$\frac{3\pi}{2}$	IV	2π
Sin	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
Cos	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
Tan	0	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	0
Cot	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$
Sec	1	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	1
Csc	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

د څېرکي پوښتنې

1 - $42{,}6033°$ په درجه، دقیقه او ثانیه بدلې کړئ؟

2 - که د یو ساعت د ثانیې د عقربې دوران 3 دقیقې او25 ثانیې وي، د ثانیې عقربې به څو راډیانه مثبته زاویه طی کړې وي؟

3 - د JKL په مثلث کې لاندې قیمتونه پیدا کړئ؟



sin K	sin J	cos J	cos K	tan K	tan J
sec K	sec J	cot J	cot K	csc J	csc K

4 –که د یوې دایرې شعاع 20cm او د مرکزي زاویې مقابل قوس یې $s = 85cm$ وي، مرکزي زاویه څو راډیانه ده؟

5 – د 1 radian او $2\,radian$ مرکزي زاویو دمقابلو قوسو اوږدوالی پیدا کړئ. په دې ډول چې د دایرې قطر 10 cm وي.

6 – د لاندې زاویو دویمې ضلعې (terminal side) چیرې واقع کېږي؟

$$\frac{3\pi}{2}\ ,\quad -7\pi\quad ,\quad -\frac{11\pi}{2}\quad ,\quad -500°\quad ,\quad 900°\quad ,\ -\pi$$

7 – لاندې زاویې چې په راډیان راکړل شوې دی، په درجه یې راواړوئ.

$$\frac{\pi}{8}\ ,\quad \frac{\pi}{15}\ ,\quad \frac{\pi}{4}\ ,\quad \frac{\pi}{3}\quad ,\quad \frac{\pi}{2}\ ,\quad \frac{\pi}{6}\ ,\quad \frac{17\pi}{45}$$

8 – په 54 دقیقو کې د یوه ساعت د ثانیې او د ساعت عقربه هره یوه څو راډیانه طی کوي؟

9 – که د یوه ټراکټور د کوچنی ټایر قطر یو متر او د لوی ټایر یې قطر یې 120cm وي، څه وخت چې کوچنی ټایر د $70°$ درجو په اندازه وڅرخیږي لوی ټایر څو راډیانه طی کوي.

10 – یو څرخ په یو ساعت کې 300ReV دورانونه کوي، دا څرخ په یوه ثانیه کې څو راډیانه ګرځي؟

11 – د یوه مثلث زاویې په ترتیب سره $4x$ درجې، $\frac{70x}{9}$ ګراده او $\frac{\pi x}{20}$ راډیانه دي. هره یوه

زاویه څو درجې ده؟

12- $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ ، $\hat{C}$ او $\hat{D}$ دیوې څلور ضلعي زاویې دي،که $\hat{A}+\hat{D}=240^\circ$ ، $\hat{C}+\hat{D}=200g$

او $\hat{B}+\hat{D}=\frac{2\pi}{3}^R$ وي: د دې څلور ضلعي زاویې د درجې په حساب پیدا کړئ.

13 - دیوه دوران $\frac{1}{12}$ برخه مساوي ده په:

a) $=30^\circ$ b) $\frac{\pi}{6}$radian c) $\frac{100}{3}$g d) درې واړه سمې دي

14 - د دوو زاویو مجموعه 17° او تفاضل یې 17 گراده دی، دا دواړه زاویې پیدا کړئ.

15 - د درجې په حساب د دوو زاویو مجموعه x او تفاضل یې د گراد په حساب هم x دی، دا دواړه زاویې پیدا کړئ.

16 -لاندې زاویې د درجې په اعشاري شکل ولیکئ.

$47^\circ \quad 15' \quad 36''$ $\qquad 15^\circ \quad 24' \quad 45''$

17 - لاندې زاویې په درجه، دقیقه او ثانیې (DMS) واړوئ.

23.16° $\qquad 4.2075^\circ$

18 - $\sin(-\frac{\pi}{3})$ ، $\tan\frac{3\pi}{4}$ او $\cot\frac{7\pi}{6}$ د زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ

19 - د $[-2\pi, 2\pi]$ په انټروال کې د θ په کوم قیمت، $\sin\theta=1$ دی؟

20 - د $[-2\pi, 2\pi]$ په انټروال کې د $\tan\theta$ تابع، د θ په کومو قیمتونو کې عمودي مجانب لري؟

21 - له (i) څخه تر (iii) پورې کومه یوه اړیکه سمه نه ده؟

(i) $\sin(-x)=-\sin x$ (ii) $\cos(-x)=-\cos x$

(iii) $\tan(-x)=-\tan x$

a) i او ii سمې دي. b) یوازې ii سمه ده.

c) i او iii سمې دي. d) درې واړه سمې دي.

e) هیڅ یو.

22 – $\cos\frac{47\pi}{2}$ ، $\sin(-13\pi)$ او $\tan\frac{8\pi}{3}$ پيدا کړئ؟

23 –داسې زاويه پيدا کړئ، چې که دګراد په حساب يې له مقدار ه 23 واحده کم کړو، د زاويې مقدار په درجه لاس ته راشي.

24 - د دريو زاويو مجموعه 240 ګراده ده، که لومړنۍ زاويه 40 ګراده، دويمه $\frac{3\pi}{4}$ راديانه وي، دريمه زاويه څو درجې ده؟

25 – د $4185°$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

26 – د $(-3660°)$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

27 – د $y=\cos\theta$ تابع د $[\frac{3\pi}{2},\ 2\pi]$ په انتروال کې:

هم متزايده او هم متناقصه ده $c)$ متناقصه ده $b)$ متزايده ده $a)$

28 – د $y=\tan\theta$ د تابع پريود عبارت دی، له:

a) 2π b) π c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{3\pi}{2}$

29 – د $F(t)=\cot(t)$ تابع:

نه جفته او نه طاقه ده c) طاقه ده b) جفته ده a)

30 – هغه تابع چې ګراف يې نظر مبدأ ته سره متناظر وي.

نه جفته او نه طاقه ده c) طاقه ده b) جفته ده a)

31 – د $y=\cos\theta$ د تابع د تناوب دوره عبارت ده، له:

a) π b) $\frac{3\pi}{2}$ c) 2π d) 3π

32 – $\sin 67°$ له $\sin 787°$ سره څه اړيکه لري؟

a) $\sin 787° > \sin 67°$ b) $\sin 787° < \sin 67°$ c) $\sin 67° = \sin 787°$

33 – کومه يوه د لاندې اړيکو څخه سمه ده؟

a) $\sec 135° = -\csc 45°$ b) $\sec 135° = \csc 45°$

d) $\sec 135° = \sec 45°$ c) $\sec 135° = -\sec 45°$

34 - کومه یوه د لاندې اړیکو څخه سمه ده؟

a) $\tan 240° = \tan 60°$ b) $\tan 240° = -\tan 60°$

c) $\tan 240° = \cot 60°$ d) $\tan 240° = -\cot 60°$

35 - $\cot 0° = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی.

36 - $\cos 9\pi = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

37 - $\sin(-\frac{13\pi}{2}) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) درې واړه سم نه دي

38 - د $-2430°$ د زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

39 - $\sin(270° - \theta) = ?$

a) $\sin\theta$ b) $-\sin\theta$ c) $\cos\theta$ d) $-\cos\theta$

40 - $\sin(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی

41 - $\sec(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی

42 - $\tan(-15\pi) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی

43 - $\sec(-1530°) =$

$a)\,1$ $b)\ -1$ $c)\,0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

44 – $\cot(-2430°) = ?$

$a)\,1$ $b)\ -1$ $c)\,0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

45 – $\sin(\frac{235\pi}{2}) = ?$

$a)\,1$ $b)\ -1$ $c)\,0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

46 – $\cos(\frac{407\pi}{2}) = ?$

a) 1 b) 0 c) -1 d) ∞

47 – $\tan(90+\theta) =$

$a)\ \cot\theta$ $b)-\cot\theta$ $c)\ -\tan\theta$ $d)\,\tan\theta$

48 – $\tan(270+\theta) = ?$

$a)\ \cot\theta$ $b)\ -\cot\theta$ $c)\ \tan\theta$ $d)-\tan\theta$

49 – $\sin(-1980°) = ?$

$a)\,1$ $b)\ -1$ $c)\,0$ $d)\,\frac{1}{2}$

50 – $\sin(-\frac{3\pi}{2}) = ?$

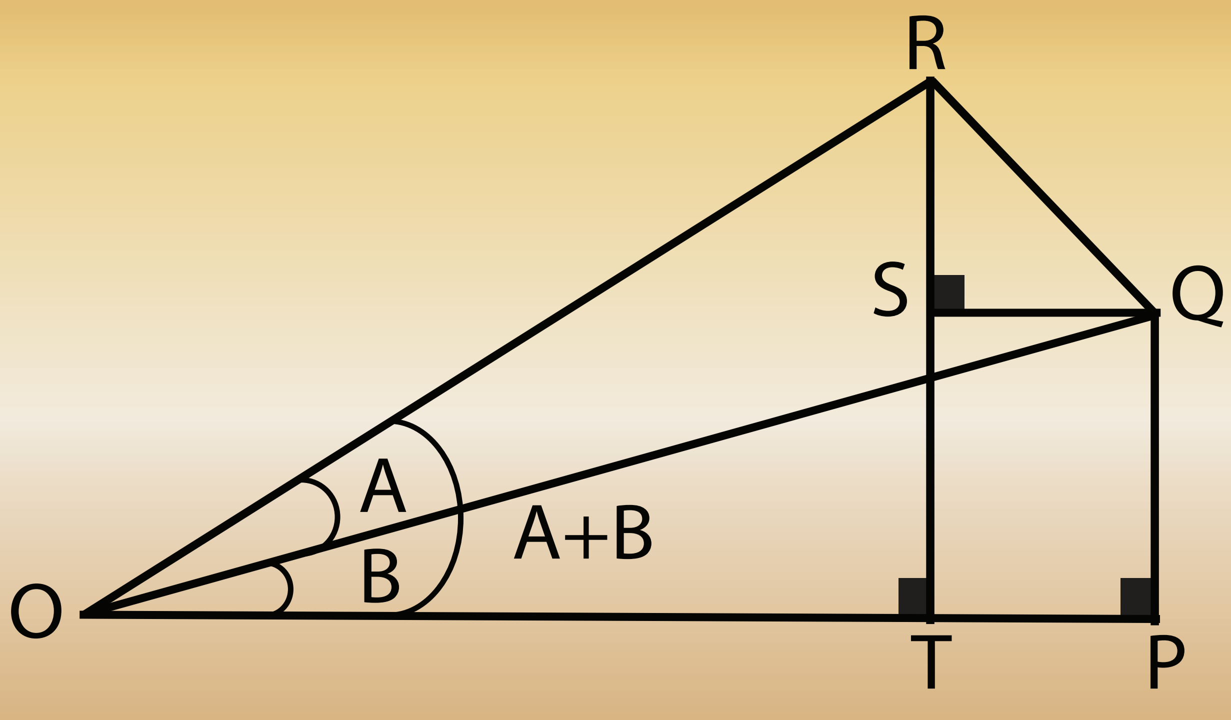
$a)\,1$ $b)\ -1$ $c)\,0$ $d)\,\frac{1}{2}$

51 – لاندې اړیکو څخه کومه یوه یې سمه ده؟

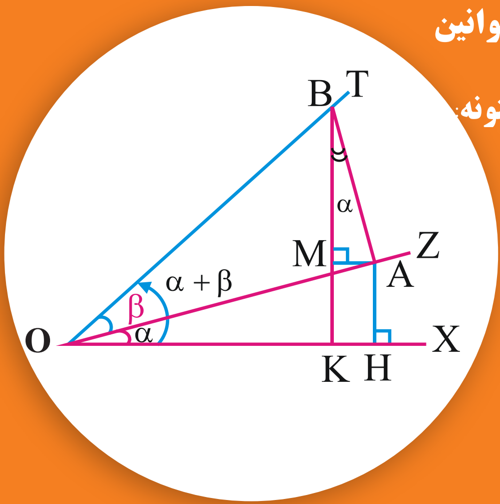
a) $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$ b) $\sin\frac{3\pi}{4} > \sin\frac{\pi}{4}$ c) $\sin\frac{3\pi}{4} < \sin\frac{\pi}{4}$

پنځم څپرکی

د مثلثاتو تطبیقات


R
S
Q
A
A+B
B
O
T
P

د مرکبو زاویو د مثلثاتي نسبتونو قوانين
د جمعي او تفاضل فورمولونه
د دوو زاویو د مجموعي مثلثاتي نسبتونه:



آیا د

$$\mathrm{Sin}(\alpha+\beta)=\mathrm{Sin}\alpha\cos\beta+\mathrm{Cos}\alpha\mathrm{Sin}\beta$$

رابطې سموالی ښودلای شئ؟

1- د $Sin(\alpha+\beta)$ محاسبه کول: د $X\hat{O}Z$ زاویه له α او د $Z\hat{O}T$ زاویه له β سره مساوي جلا کوو او داسې يې يو د بل څنګ ته ږدو چې دوه مجاورې زاويې جوړې کړي بيا د OT د قطعه خط پر مخ د OB قطعه خط د واحد په اندازه جلا کوو. د B له ټکي څخه د BA خط پر OZ عمود رسموو، بيا د A له ټکي څخه د AH خط پر OX عمود رسموو، شکل ته په پاملرنې سره لرو چې:

$$\mathrm{Sin}\beta=\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{AB}}{1}=\overline{AB}$$

$$\mathrm{Cos}\beta=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OA}}{1}=\overline{OA}$$

$$\mathrm{Sin}\alpha=\frac{\overline{HA}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{HA}}{\cos\beta}\Rightarrow\overline{HA}=\sin\propto\cos\beta$$

$$\mathrm{Cos}\alpha=\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OH}}{\cos\beta}\Rightarrow\overline{OH}=\cos\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\overline{KB}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{KB}}{1}=\overline{KB}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{OK}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OK}}{1}=\overline{OK}$$

د A له ټکي څخه پر KB باندې د AM عمود رسموو چې د KHAM څلور ضلعي مستطيل دی، په نتيجه کې KM=HA او MA=KH دي.

د $M\hat{B}A$ زاويه د α له زاويې سره مساوي ده(ددې دارو زاويو ضلعې يو پر بل باندې عمود دي). د BMA په قايم الزاويه مثلث کې لرو چې:

$$\cos(M\hat{B}A) = \cos\alpha = \frac{\overline{\overline{MB}}}{\overline{\overline{AB}}} = \frac{MB}{\sin\beta} \Rightarrow \overline{MB} = \cos\alpha\ \sin\beta$$

$$\sin(M\hat{B}A) = \sin\alpha = \frac{\overline{\overline{MA}}}{\overline{\overline{AB}}} = \frac{MA}{\sin\beta} = \frac{\overline{KH}}{\sin\beta} \Rightarrow \overline{KH} = \sin\alpha\ \sin\beta$$

که د $\overline{KB} = \overline{KM} + \overline{MB}$ په رابطه کې د KM، KB او $\overline{MB}$ پر ځای يې قيمتونه وضع کړو، لرو چې: $(KM = AH = \sin\alpha\cos\beta)$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

2: د $\cos(\alpha+\beta)$ **محاسبه کول** : په همدې ډول که د $\overline{OK} = \overline{OH} - \overline{KH}$ په رابطه کې د OK، KH او OH پر ځای يې قيمتونه وضع کړو نو لرو، چې:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta}$$

3: د $\tan(\alpha+\beta)$ **محاسبه کول:**

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta}$$

صورت او مخرج په $\cos\alpha\cos\beta$ ويشو:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

لومړی مثال: $\sin\frac{7\pi}{12}$، $\sin 120°$ ، $\cos 120°$ او $\tan\frac{5\pi}{12}$ پيدا کړئ.

حل

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 120^\circ=\sin(90^\circ+30^\circ)=\sin 90^\circ\cos 30^\circ+\cos 90^\circ\sin 30^\circ$$
$$\sin 120^\circ=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 120^\circ=\cos(90^\circ+30^\circ)=\cos 90^\circ\cos 30^\circ-\sin 90^\circ\sin 30^\circ$$
$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$
$$\tan\frac{5\pi}{12}=\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$$
$$=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

د دوو زاويو د تفاضل مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin 120^\circ=\sin(180^\circ-60^\circ)=?$$

که د جمعې په فورمولونوکې د β پر ځای $-\beta$ وضع کړو، نو لرو، چې:

$$\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha(-\sin\beta)$$

څرنګه چې پوهيږو:

$$\cos(-\beta)=\cos\beta$$
$$\sin(-\beta)=-\sin\beta$$
$$\tan(-\beta)=-\tan\beta$$

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta-\cos\alpha\ \sin\beta}$$

$$\cos[\alpha+(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta$$

$$\tan[(\alpha+(-\beta)]=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(-\beta)}$$

$$\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}}$$

فعالیت

په همدې ډول وښایاست چې: $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cdot\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$ دی.

لومړی مثال: $\cos\dfrac{\pi}{12}$ او $\sin 150°$ پیداکړئ.

حل:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 150°=\sin(180°-30°)=\sin 180°\cos 30°-\cos 180°\sin 30°$$

$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-(-1)\cdot\frac{1}{2}=-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

دویم مثال: د تفاضل د فورمولونو په مرسته ښکاره کړئ، چې $\cos(\dfrac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$ دی.

حل:

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta+\sin\frac{\pi}{2}\sin\theta=0\cdot\cos\theta+1\cdot\sin\theta=\sin\theta$$

دریم مثال: وښایاست چې $\cos(270°-\theta)=-\sin\theta$ دی.

حل:

$$\cos(270° - \theta) = \cos 270° \cos\theta + \sin 270° \sin\theta$$
$$\cos(270° - \theta) = 0 \cdot \cos\theta + (-1)\sin\theta = -\sin\theta$$

خلورم مثال: $\tan 120^\circ$ پيدا کړئ:

حل:

$$\tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = \frac{\tan 180^\circ - \tan 60^\circ}{1 + \tan 180^\circ \cdot \tan 60^\circ} = \frac{0 - \sqrt{3}}{1 + 0 \cdot \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{1}$$
$$= -\sqrt{3}$$

فعاليت

وښاياست چې: $\sin 211° \cos 59° + \cos 211° \sin 59° = -1$ او $\cos 211° \cos 149° - \sin 211° \sin 149° = 1$ دی.

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$	$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$	$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta}$

پوښتني

1- وښایاست چې:

$$\tan(45-\theta)=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

2- وښایاست چې:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\ \sin\beta$$

-3 $\cos 277^{\circ}\cos 97^{\circ}+\sin 277^{\circ}\sin 97^{\circ}=?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

4- د جمعي د فورمولونو په مرسته $\sin 240^{\circ}$، $\cos 240^{\circ}$ او $\tan 240^{\circ}$ پیدا کړئ.

5- د جمعي او تفاضل د فورمولونو په مرسته وښایاست، چې:

$\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y]=\cos x\cdot\cos y$ دی.

6- د جمعي د فورمولونو په مرسته د 210° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

-7 $\sin 105^{\circ}$، $\cos 105^{\circ}$ او $\tan 105^{\circ}$ پیدا کړئ $(105^{\circ}=60^{\circ}+45^{\circ})$

8- که $\sin x=-\frac{3}{4}$ وی او $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ وی، $\cos(\frac{\pi}{4}+x)$ پیدا کړئ.

9- وښایاست چې: $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$ دی.

-10 $\sin 2^{\circ}\cos 88^{\circ}+\cos 2^{\circ}\sin 88^{\circ}=?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

د 2α مثلثاتی نسبتونه د α له جنسه:

$$\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}=?$$

$$\cos^2 x-\sin^2 x=?$$

آیا ښودلای شئ، چې:

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$ دی؟

$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

څرنگه چې $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ دی:

$$\cos 2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

او همدارنگه $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ دی، نو:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=\cos^2\alpha-1+\cos^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

لومړی مثال: که $\sin\theta=\frac{4}{5}$ او د θ دویمه ضلعه په دویمه ناحیه (ربعه) کې واقع وي $\sin 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیدا کړئ.

حل: $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$ (د θ دویمه ضلعه په دویمه ربعه کې ده).

$$\cos\theta=-\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\sqrt{\frac{25-16}{25}}=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2(\frac{4}{5})(-\frac{3}{5}) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (\frac{-3}{5})^2 - (\frac{4}{5})^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{-\frac{24}{25}}{\frac{-7}{25}} = \frac{24}{7}$$

فعالیت

که $\cos\alpha = \frac{4}{5}$، وي او د α دویمه ضلعه په لومړۍ ربعه کې پرته وي، $\tan 2\alpha$ پیدا کړئ.

او که $\sin\beta = \frac{12}{13}$ او د β دویمه ضلعه په دویمه ربعه کې وي $\sin 2\beta$ پیدا کړئ.

دويم مثال: د $60°$ زاویې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه د $120°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin 120° = 2\sin 60°\cos 60° = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 120° = \cos^2 60° - \sin^2 60° = (\frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \Rightarrow \tan 120° = \frac{2\tan 60°}{1-\tan^2 60°} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}$$

په همدې ډول:

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

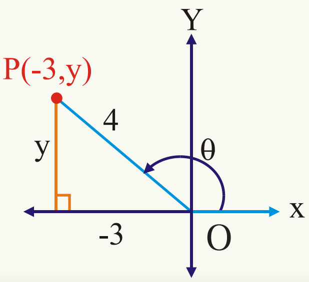
$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \quad , \quad \tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

دریم مثال: که $90° < \theta < 180°$ او $\cos\theta = -\frac{3}{4}$ وي، د $\cos 2\theta$ قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$(-3)^2 + y^2 = 4^2$$
$$y = \pm\sqrt{4^2 - (-3)^2}$$

$y = \sqrt{7}$ (ځکه چې د y قیمت په دویمه ربع کې مثبت دی.)



$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (-\frac{3}{4})^2 - (\frac{\sqrt{7}}{4})^2 = \frac{1}{8}$$

فعالیت

که $90° < \theta < 180°$ او $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ وي، د $\sin\frac{\theta}{2}$ قیمت پیدا کړې.

همدارنګه کولای شو، چې د $\sin\theta$، $\cos\theta$ او $\tan\theta$ قیمتونه د $\tan\frac{\theta}{2}$ له جنسه پیدا کړو:

$$\sin\theta = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}}$$

ځکه چې پوهیږو:

$$\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} = 1$$

(صورت او مخرج پر $\cos^2\frac{\theta}{2}$ ویشو:)

$$\sin\theta=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}+1}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{1}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\quad,\quad\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

همدارنګه کولای شو چې د θ زاويې مثلثاتي نسبتونه د 2θ زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه په لاس راوړو:

$$2\cos^2\theta-1=\cos2\theta$$

$$2\cos^2\theta=1+\cos2\theta$$

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos2\theta}{2}$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{1+\cos2\theta}{2}}\qquad \text{یا}\qquad \cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

په همدې ډول:

$$1-2\sin^2\theta=\cos 2\theta$$
$$-2\sin^2\theta \quad =-1+\cos 2\theta$$
$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$
$$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \qquad \text{یا} \qquad \sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

په نتیجه کې:

$$\tan\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}} \qquad \text{یا} \qquad \tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

لومړی مثال: د $30°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه د $60°$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\sin 30°=\sqrt{\frac{1-\cos 60°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$
$$\cos 30°=\sqrt{\frac{1+\cos 60°}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 30°=\sqrt{\frac{1-\cos 60°}{1+\cos 60°}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

دویم مثال: که $180°<\theta<270°$ او $\sin\theta=-\frac{2}{3}$ وي د $\cos\frac{\theta}{2}$ قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$x^2+y^2=r^2$$
$$x^2+(-2)^2=3^2 \qquad x=\pm\sqrt{3^2-(-2)^2}=-\sqrt{5}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{5}}{3}$$ (ځکه چې د x قیمت په دویمه ربع کې منفي دی)

خرنګه چې $180° < \theta < 270°$ده، نو $\frac{180°}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{270°}{2}$ یا $90° < \theta < 135°$ ده په دې معنا چې د $\cos\frac{\theta}{2}$ علامه منفي ده.

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+(\frac{\sqrt{5}}{3})}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{\sqrt{5}}{3})} = -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{6}}$$

فعالیت

وښایاست چې: $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$ او $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ دی.

دریم مثال: که $\cos\theta = \frac{4}{5}$ وي او د θ دویمه ضلعه په لومړنی ربعه کې وي، $\sin\frac{\theta}{2}$، $\cos\frac{\theta}{2}$ او $\tan\frac{\theta}{2}$ قیمتونه پیداکړي.

حل:

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

خلورم مثال: وښاياست چې $2 = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}$ دی.

حل:

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin 3\theta\cos\theta - \cos 3\theta\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin(3\theta-\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 2$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \quad ، \quad \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \qquad \tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \qquad \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

$$\tan\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}$$

پوښتني

1- د 120° زاويې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د 240° زاويې مثلثاتی نسبتونه پيدا کړئ.

2 - که $\sin\theta = \frac{3}{5}$ وی او د θ دويمه ضلعه په لومړنی ربعه کې وي، $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پيدا کړئ.

3 - که $\sin\theta = \frac{4}{5}$ وي او د θ دويمه ضلعه په دويمه ربعه کې وي $\cos\theta/2$ پيدا کړئ.

4 - $\sin\frac{\pi}{12}$ د $\sin\frac{\pi}{6}$ له جنسه پيدا کړئ.

5 - که $\sin\theta = \frac{12}{13}$ وی او د θ دويمه ضلعه په دويمه ربعه کې وي، $\sin\theta/2$ او $\tan\theta/2$ پيدا کړئ.

6 - د 15° زاويې مثلثاتي نسبتونه د 30° زاويې له جنسه پيدا کړئ.

7 - که $\sin\beta = \frac{12}{13}$ وي او د β دويمه ضلعه په دويمه ربعه کې وي، د $\sin 2\beta$ قيمت مساوی دی په:

a) $\frac{120}{169}$ b) $-\frac{120}{169}$ c) $= -\frac{169}{120}$ d) دري واړه سم نه دي

8 - $\frac{\cos 3\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = ?$

a) 2 b) 1 c) -2 d) -1

3α زاويي مثلثاتي نسبتونه د α زاويي د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$4\cos^3 45^\circ - 3\cos 45^\circ = ?$$

أیا ښودلای شئ، چې دا رابطه $\cos 90^\circ = 4\cos^3 30^\circ - 3\cos 30^\circ$ سمه ده؟

خرنگه چې:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha$$

$$\sin 3\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \qquad (\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \qquad (\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha)$$

$$= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$$

$$\boxed{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}$$

لومړي مثال: $\sin 180^\circ$ د $\sin 60^\circ$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\sin 180^\circ = 3\sin 60^\circ - 4\sin^3 60^\circ = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{12\sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

خرنگه چې:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\begin{aligned}\cos3\alpha &= \cos(2\alpha+\alpha) = \cos2\alpha\cos\alpha - \sin2\alpha\sin\alpha \\ &= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha \\ &= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha \\ &= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha) \;,\; (\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha) \\ &= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha\end{aligned}$$

$$\boxed{\cos3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}$$

فعالیت

$\cos 270°$ د $\cos 90°$ له جنسه پیدا کړئ.

دویم مثال: $\cos180°$ د $\cos60°$ له جنسه پیدا کړئ.

حل:

$$\cos180° = 4\cos^3 60° - 3\cos60° = 4(\frac{1}{2})^3 - 3\cdot\frac{1}{2} = 4\cdot\frac{1}{8} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

خرنګه چې:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan3\alpha = \tan(2\alpha+\alpha) = \frac{\tan2\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan2\alpha\cdot\tan\alpha} = \frac{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} + \tan\alpha}{1 - \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cdot\tan\alpha}$$

$$= \frac{\frac{2\tan\alpha + \tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{\frac{1-\tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}} = \frac{2\tan\alpha + \tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha} = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$

دریم مثال: $\tan135°$ د $\tan 45°$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\tan 135° = \frac{3\tan 45° - \tan^3 45°}{1 - 3\tan^2 45°} = \frac{3\cdot 1 - 1}{1 - 3\cdot 1} = \frac{2}{-2} = -1$$

خلورم مثال: وښاياست چې $4\sin\theta\sin(60^\circ - \theta)\sin(60^\circ + \theta) = \sin 3\theta$

حل:

$$4\sin\theta(\sin 60^\circ\cos\theta - \cos 60^\circ\sin\theta)(\sin 60^\circ\cos\theta + \cos 60^\circ\sin\theta)$$

$$= 4\sin\theta(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta)(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta)$$

$$= 4\sin\theta(\frac{3}{4}\cos^2\theta - \frac{1}{4}\sin^2\theta) = \sin\theta(3\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$= \sin^2[3(1 - \sin^2\theta) - \sin^2\theta] = \sin\theta\cdot 3 - 3\sin^3\theta - \sin^3\theta$$

$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin 3\theta$$

د $(\alpha+\beta+\gamma)$ **مثلثاتي نسبتونه**:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin[\alpha + (\beta+\gamma)] = \sin\alpha\cos(\beta+\gamma) + \cos\alpha\sin(\beta+\gamma)$$

$$= \sin\alpha(\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma) + \cos\alpha(\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma)$$

$$\boxed{= \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin\beta\cos\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\cos[\alpha + (\beta+\gamma)] = \cos\alpha\cos(\beta+\gamma) - \sin\alpha\sin(\beta+\gamma)$$

$$= \cos\alpha(\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma) - \sin\alpha(\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma)$$

$$\boxed{= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \cos\gamma\sin\alpha\sin\beta - \cos\beta\sin\alpha\sin\gamma}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \tan[\alpha + (\beta+\gamma)] = \frac{\tan\alpha + \tan(\beta+\gamma)}{1 - \tan\alpha\cdot\tan(\beta+\gamma)}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\tan\alpha + \dfrac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta\tan\gamma}}{1 - \tan\alpha\dfrac{\tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta\cdot\tan\gamma}}$$

$$= \frac{\dfrac{\tan\alpha - \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma + \tan\beta + \tan\gamma}{1 - \tan\beta\tan\gamma}}{\dfrac{1 - \tan\beta\tan\gamma - \tan\alpha\tan\beta - \tan\alpha\cdot\tan\gamma}{1 - \tan\beta\cdot\tan\gamma}}$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\alpha\tan\gamma}$$

پنځم مثال: $\sin 135^\circ$ د $\sin(30^\circ+45^\circ+60^\circ)$ له جنسه په لاس راوړئ.

حـل

:

$$\sin 135^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ+60^\circ)=\sin 30^\circ\cos 45^\circ\cos 60^\circ$$
$$-\sin 30^\circ\sin 45^\circ\sin 60^\circ+\sin 45^\circ\cos 30^\circ co60^\circ+\sin 60^\circ\cos 30^\circ\cos 45^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{6}}{8}+\frac{\sqrt{6}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{8}=\frac{4\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پوښتنې

1- $\sin 90^\circ$ ، $\cos 90^\circ$ او $\tan 90^\circ$ په ترتیب سره د $\sin 30^\circ$ ، $\cos 30^\circ$ او $\tan 30^\circ$ له جنسه پیدا کړئ.

2- $\cos 135^\circ$ او $\tan 135^\circ$ پیدا کړئ. $135^\circ=(30^\circ+45^\circ+60^\circ)$

3- $8\cos^3\theta-6\cos\theta=?$

a) $\cos 3\theta$ b) $2\cos 3\theta$ c) $-2\cos 3\theta$

4- د $\mathrm{Cos}(\hat{A}-\hat{B}+\hat{C})$ د $\hat{A}$, $\hat{B}$ او $\hat{C}$ زاویو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه پیدا کړئ.

5- وښایاست چې:

$$4\cos x\cos(60^\circ-x)\cos(60^\circ+x)=\cos 3x$$
$$\tan x\tan(60^\circ-x)\tan(60^\circ+x)=\tan 3x$$

د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضـل بدلول د ضرب دحاصل په شکل

$$\sin 30° + \sin 60° = ?$$
$$\tan 45° + \tan 60° = ?$$

خرنگه چې پوهیږو:

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B ....(I)$$
$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B ....(II)$$

که $A+B=P$ او $A-B=q$ فرض کړو او (I) او (II) رابطې سره جمع کړو، نولرو، چې:

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cos B$$

$$\begin{array}{ll} A+B=p & A+B=p \\ \underline{A-B=q} & \underline{{}_{-}A\mp B=-q} \\ 2A=P+q & 2B=P-q \\ A=\dfrac{P+q}{2} & B=\dfrac{P-q}{2} \end{array}$$

په نتیجه کې لرو چې:

$$\boxed{\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

که له I رابطې څخه II رابطه تفریق کړو، نو لرو چې:

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \sin B$$

$$\boxed{\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}$$

په همدې ډول:

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B....III$$
$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B....IV$$

که III رابطه د IV سره جمع کړو لرو چې:

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$$

$$\boxed{\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

که له III رابطې څخه IV رابطه تفريق کړو، نو:

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

فعاليت

د $\sin 60°+\sin 30°$ او $\cos 60°+\cos 30°$ قيمتونه پيدا کړئ.

$$\tan p+\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q+\cos p\sin q}{\cos p\cos q}=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$$
$$\tan p-\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}-\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q-\cos p\sin q}{\cos p\cos q}=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$$

لومړی مثال(a): وښاياست چې: $\frac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\tan 5\theta$

$$\frac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\frac{2\sin\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}{2\cos\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}=\frac{\sin 5\theta\cos 2\theta}{\cos 5\theta\cos 2\theta}=\tan 5\theta$$

b: وښاياست چې $\sin 3x + \sin x = 2\cdot\sin 2x\cdot\cos x$ دی:

حل:
$$\sin 3x + \sin x = 2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} = 2\cdot\sin 2x\cdot\cos x$$

فعاليت

وښاياست چې $\cot p + \cot q = \dfrac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$ او $\cot p - \cot q = \dfrac{\sin(q-p)}{\sin p\sin q}$

دويم مثال: وښاياست چې: $\dfrac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \tan(\beta-\theta)$ او

$$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2\sin 3\theta\sin\theta$$

حل:

$$\frac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \frac{-2\sin\frac{2\theta+2\beta}{2}\sin\frac{2\theta-2\beta}{2}}{2\sin\frac{2\theta+2\beta}{2}\cos\frac{2\theta-2\beta}{2}} = \frac{-2\sin(\theta+\beta)\sin(\theta-\beta)}{2\sin(\theta+\beta)\cos(\theta-\beta)}$$

$$= -\frac{\sin(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\beta)} = -\tan(\theta-\beta) = \tan(\beta-\theta)$$

$$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2\sin\frac{4\theta+2\theta}{2}\sin\frac{4\theta-2\theta}{2} = -2\sin 3\theta\sin\theta$$

د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول په جمع او يا تفاضل باندې:

خرنگه چې:
$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

يا
$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$$

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$A+B=P$$
$$A-B=q$$

$$\boxed{\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]}$$

خرنگه چې: $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B$ دی.

نو:

$$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$$

$$\boxed{\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]}$$

خرنگه چې:

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$$

نو:

$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$

$$\boxed{\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]}$$

خرنگه چې:

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$$

نو:

$$-2\sin A\sin B=\cos(A+B)-\cos(A-B)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin A\sin B&=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)\\&=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]\end{aligned}}$$

لومړی مثال: وښایاست چې:

$$a:\qquad \frac{\sin 8x+\sin 5x+\sin 2x}{\cos 8x+\cos 5x+\cos 2x}=\tan 5x$$

$$b:\qquad \cos 75^\circ-\cos 15^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

د a حل:

$$=\frac{2\sin\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2}+\sin 5x}{2\cos\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2}+\cos 5x}$$

$$=\frac{2\sin 5x\cos 3x+\sin 5x}{2\cos 5x\cos 3x+\cos 5x}=\frac{\sin 5x(2\cos 3x+1)}{\cos 5x(2\cos 3x+1)}=\tan 5x$$

د b حل:

$$\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -2\cdot\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\sin\frac{75^\circ-15^\circ}{2} = -2\sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= -2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

دویم مثال: د جمعې یا تفاضل شکل ته يې واړوئ.

$$2\cos 95^\circ \sin 13^\circ = \sin(95^\circ+13^\circ) - \sin(95^\circ-13^\circ) = \sin 108^\circ - \sin 82^\circ$$

$$\cos 38^\circ \cos 61^\circ = \frac{1}{2}[\cos(38^\circ+61^\circ)+\cos(38^\circ-61^\circ)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 99^\circ + \cos(-23^\circ)] = \frac{1}{2}[\cos 99^\circ + \cos 23^\circ]$$

$$\cos(x+\frac{\pi}{4})\cos(x-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}[\cos 2x + \cos\frac{\pi}{2}] = \frac{1}{2}\cos 2x$$

دریم مثال:

$$\cos 34^\circ \sin 28^\circ = \frac{1}{2}[\sin(34^\circ+28^\circ) - \sin(34^\circ-28^\circ)] = \frac{1}{2}(\sin 62^\circ - \sin 6^\circ)$$

$$2\cos 45^\circ \cos 15^\circ = \cos(45^\circ+15^\circ)+\cos(45^\circ-15^\circ) = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 10\theta \cos 4\theta = \frac{1}{2}[\sin(10\theta+4\theta)+\sin(10\theta-4\theta)] = \frac{1}{2}(\sin 14\theta + \sin 6\theta)$$

څلورم مثال: وښایاست چې: $\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)] = \cos x \cos y$

حل:

$$\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)] = \frac{1}{2}[(\cos x\cos y - \sin x \sin y)$$

$$+(\cos x \cos y + \sin x \sin y)] = \frac{1}{2}[(\cos x \cos y + \cos x \cos y)]$$

$$= \frac{1}{2}(2\cos x \cos y) = \cos x \cos y$$

پنځم مثال: وښایاست چې: $\dfrac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}=\tan 2\theta$

حل:

$$\frac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}=\frac{\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 7\theta)-\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 3\theta)}{\frac{1}{2}(\cos 3\theta+\cos\theta)+\frac{1}{2}(\cos 7\theta-\cos\theta)}$$

$$=\frac{\sin 7\theta-\sin 3\theta}{\cos 3\theta+\cos 7\theta}=\frac{2\cos 5\theta\sin 2\theta}{2\cos 5\theta\cos(-2\theta)}=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\tan 2\theta$$

$$\sin A+\sin B=2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\tan A+\tan B=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B} \qquad \tan A-\tan B=\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}$$

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\mathrm{Sin}A\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-(\cos A-B)]=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

پوښتنې

1- وښایاست چې:

$$\frac{\cos 37^\circ + \sin 37^\circ}{\cos 37^\circ - \sin 37^\circ} = \cot 8^\circ$$

2- د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب حاصلونه د جمعې یا تفاضل شکل ته واړوئ.

$$\cos 30^\circ \cos 60^\circ \quad , \quad \sin 3\theta \cos 5\theta \quad , \quad \sin 5x \cos 8x$$

$$\cos 7\theta \sin 5\theta \quad , \quad \cos 5x \sin 8x \quad , \quad \sin 32^\circ \cdot \cos 24^\circ$$

$$2\sin 60^\circ \cdot \sin 20^\circ \quad , \quad \sin 88^\circ \sin 12^\circ$$

$$\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2} \quad , \quad 2\cos 75\alpha \cdot \sin 25\alpha \quad , \quad 2\cos 8\theta \cdot \sin 4\theta$$

3- د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د جمعې او تفریق حاصل، ضرب ته واړوئ.

$$\sin 94^\circ - \sin 86^\circ \quad , \quad \sin 84^\circ - \sin 76^\circ \quad , \quad \cos 56^\circ + \cos 22^\circ$$

$$\sin 8\theta + \sin 4\theta \quad , \quad \cos 84^\circ - \cos 76^\circ \quad , \quad \cos 86^\circ + \cos 22^\circ$$

$$\sin\frac{5x}{3} - \sin\frac{5x}{6} \quad , \quad \sin\frac{P+Q}{2} - \sin\frac{P-Q}{2} \quad , \quad \cos 95^\circ - \cos 41^\circ$$

$$\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2} \quad , \quad \cos 84^\circ + \cos 76^\circ \quad , \quad \cos\frac{3A}{4} + \cos\frac{4A}{3}$$

4- وښایاست چې:

$$\frac{\cos\beta + \cos 9\beta}{\sin\beta + \sin 9\beta} = \cot 5\beta \quad , \quad \frac{\sin 4A - \sin 2A}{\cos 4A + \cos 2A} = \tan A$$

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$$

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$$

5- که $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ وي، (د یو مثلث د داخلي زاویو مجموعه) وښایاست چې:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

6- وښاياست چې:

$$\sin 10° + \sin 50° - \sin 75° = 0$$

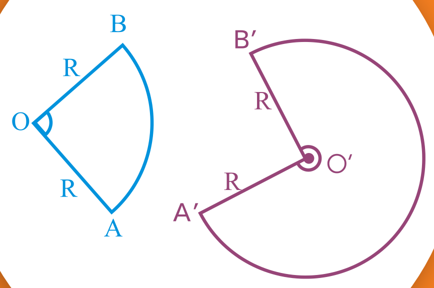
7-

$$\sin 30° \cos 60° + \cos 30° \sin 60° = ?$$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

8- د جمعې یا تفاضل د فورمولونو په واسطه وښاياست چې:

$$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta \quad , \quad \cos(180° + \theta) = -\cos\theta$$
$$\sin(360° - \theta) = -\sin\theta \quad , \quad \sin(270° + \theta) = -\cos\theta$$
$$\cos(270° + \theta) = \sin\theta \quad , \quad \cos(360° - \theta) = \cos\theta$$



د قوس اوږدوالی
(Arc length)

که دیوې دایرې شعاع 5cm وي، د دې دایرې د $45°$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی به څو cm وي؟

که د دووقوسونو شعاعګانې سره مساوي وي، د دې دوو قوسونو اوږدوالی د راډیان په حساب د قوس له مقدار سره متناسب دی، لکه څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{mAB} = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{m\overset{\frown}{A'B'}}$$

چې $m\ \overset{\frown}{AB}$ او $m\ A'B'$ ددې دواړو قوسونو مقدار د راډیان په حساب دي. که د قوس مقدار دوه چنده شي، د قوس اوږدوالی هم دوه چنده کېږي. که د یو قوس مقدار $\theta°$ او شعاع یې R وي د $\theta°$ د زاویې د مقابل قوس اوږدوالی (L) مساوي دی، په:

$$L = \pi R \cdot \frac{\theta°}{180}$$

څکه چې که د دایرې محیط C، شعاع یې R وي، که $\theta°$ د قوس مقدار او L د قوس اوږدوالی وي، نو لرو چې:

$$\frac{L}{\theta°} = \frac{C}{360°}$$

څرنګه چې د دایرې محیط $C = 2\pi R$ دی نو:

$$\frac{L}{\theta°} = \frac{2\pi R}{360°} \Rightarrow L = \frac{\theta°}{180°}\pi R$$

باید پام مو وي، که د قوس یا θ مقدار د راډیان په حساب وي، نو $L = R\theta$ کېږي.

لومړی مثال: د $45°$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی پیدا کړئ، که د دایرې شعاع 14cm وي.

حل:

$$L = \frac{45^\circ}{180^\circ}\cdot\pi\cdot 14\,cm = \frac{14}{4}\pi\,cm \approx \frac{14}{4}\cdot\frac{22}{7}cm = 11cm$$

دویم مثال: د $\frac{\pi}{4}$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی پیدا کړئ، که د دایرې شعاع 14cm وي.

$$L = R\,\theta$$

$$L = 14\,cm\frac{\pi}{4} \approx 14\,cm\cdot\frac{22}{7}\cdot\frac{1}{4} = 11cm$$

دریم مثال: که په یوه دایره کې، د $45°$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی $3\pi cm$ وي، د دې دایرې شعاع پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې: $45° = \frac{\pi}{4}$ radian نو:

$$L = R\theta$$

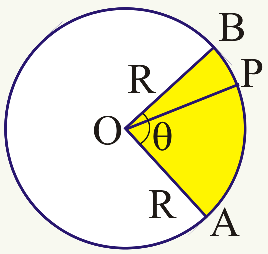
$$R = \frac{L}{\theta} = \frac{3\pi cm}{\frac{\pi}{4}} = 3\pi\cdot\frac{4}{\pi} = 12cm$$

د یوې دایرې قطاع (Sector of a circle): د یوې دایرې د $\overset{\frown}{AB}$ قوس چې د دایرې مرکز O او شعاع یې R ده، په پام کې نیسو، د $\overline{OP}$ د ټولو خطونو مجموعې ته چې P د $\overset{\frown}{AB}$ د قوس یوه نقطه ده، قطاع ویل کېږي.

که د $\overset{\frown}{AB}$ قوس اندازه θ راډیان وي، θ ته د قطاع زاویه وایي.

یا قطاع په دې ډول هم تعریفولای شو:

د یوې دایرې د سطحې هغه برخه چې د دایرې د دوو شعاعګانو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کېږي.



د قطاع د مساحت پیدا کول: که د دایرې شعاع R وي، د دې دایرې د θ راډیان د قطاع

مساحت مساوي دی په: $S=\frac{1}{2}R^2\theta$ چې S د قطاع مساحت او R د دایرې شعاع ده، ځکه

چې:

$$\left.\begin{array}{ll} 2\pi^R & \pi R^2 \\ \theta^R & S \end{array}\right\} \Rightarrow S=\frac{\pi R^2\cdot\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}R^2\theta$$

او یاکه د θ زاویه د درجې په حساب وي،

$$\left.\begin{array}{ll} 360^\circ & \pi R^2 \\ \theta^\circ & S \end{array}\right\} \Rightarrow S=\pi R^2\frac{\theta}{360^\circ}$$

لومړی مثال: که د یوې دایرې شعاع 10cm وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پیداکړئ، چې د قطاع زاویه یې $\theta=90^\circ$ وي.

حل: څرنګه چې $90^\circ=\frac{\pi}{2}$ Radian دی:

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta$$

$$S=\frac{1}{2}(10cm)^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\cdot 100cm^2\cdot\frac{\pi}{2}=25\pi cm^2$$

دویم مثال: که د یوې دایرې شعاع 10cm وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پیداکړئ، چې د قطاع زاویه یې $\theta=72^\circ$ وي.

حل:

$$72^\circ=72\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{2\pi}{5}\text{ Radian}$$

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta=\frac{1}{2}\cdot 100cm^2\cdot\frac{2\pi}{5}=20\pi\, cm^2$$

دریم مثال: که د دایرې شعاع 6cm او د دې دایرې د یوې قطاع مساحت $15\pi cm^2$ وي. د قطاع د قوس اوږدوالی پیداکړئ.

حل:

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta \quad \text{یا} \quad 15\pi cm^2=\frac{1}{2}(6cm)^2\theta$$

$$15\pi cm^2 = 18\theta$$

$$\theta = \frac{15\pi}{18} = \frac{5\pi}{6} \text{ Radian}$$

طول قوس $L = R\theta = 6cm\frac{5\pi}{6} = 5\pi cm = 5\cdot 3{,}14cm \approx 15{,}7cm$

څلورم مثال: یوه دایره چې $7cm$ شـعاع لري، ددې دایرې محیط او مساحت او د $60°$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی یې پیدا کړئ. او هم ددې دایرې د هغه قطاع مســاحت پیدا کړئ، چې $\theta = 60^\circ$ وي.

حل: څرنګه چې $60° = \frac{\pi}{3}$ Radian دی، نو:

$$C = 2\pi R \approx 2\cdot\frac{22}{7}\cdot 7\,cm = 44\,cm \;,\; A = \pi R^2 \approx \frac{22}{7}\cdot 49\,cm^2 = 154\,cm^2$$

$$L = R\theta = 7\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}cm \qquad , \quad A = \frac{1}{2}R^2\theta = \frac{1}{2}\cdot 49\,cm^2\cdot\frac{\pi}{3} \approx 25.6\,cm^2$$

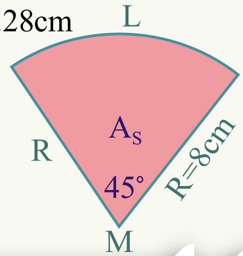
پنځم مثال: که د یوې دایرې شعاع $8cm$ او د قطاع زاویه یې $45°$ وي، د قطاع مساحت، د قطاع د مقابل قوس اوږدوالی او ددې قطاع محیط پیدا کړئ.

حل:

د قطاع مساحت $A_s = \pi R^2\frac{\theta}{360°} = (8cm)^2(3{,}14)\cdot\frac{45°}{360°} \approx 25{,}12cm$

د قطاع مقابل قوس $L = 2\pi R\frac{\theta}{360°} = 2\cdot 8cm\cdot 3.14\cdot\frac{45°}{360°} \approx 6.28cm$

د قطاع محیط $= 2\pi R\frac{\theta}{360°} + 2R = 6.28cm + 2\cdot 8cm \approx 22.28cm$



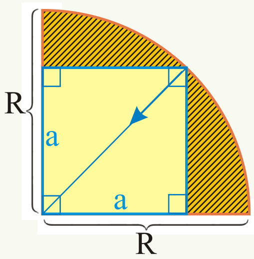
فعالیت

که د دایرې شعاع $10cm$ وي، د هغه قطاعګانو مساحت پیدا کړئ، چې د قوس اندازه یې $180°$، $216°$ او $324°$ وي.

شپږم مثال: د شکل په شان، په $90°$ قطاع کې، د R په شعاع مربع رسم شوې ده، د خط شوې برخې مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دایرې شعاع R ده،د دایرې په څلورمه برخه کې د مربع قطر $d = R = a\sqrt{2}$ دی، که a د مربع ضلعه وی نو د مربع یوه ضلعه $a = \frac{R}{\sqrt{2}}$ او د مربع مساحت $S = \frac{R^2}{2}$

دی، څرنګه چې د دایرې د څلورمې برخې مساحت $\frac{1}{4}\pi R^2$ دی.



نود خط شوی برخې مساحت مساوي دی په: $\frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \frac{R^2}{4}(\pi - 2)$

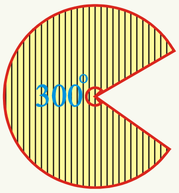
اووم مثال: په شکل کې د دایرې قطاع چې شعاع یې 1cm او مرکزي زاویه یې $300°$ ده د دې شکل محیط څو سانتي متره کیږي؟

$360° \quad 2\pi R$

$300° \quad x$

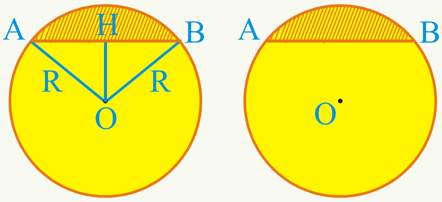
$$x = \frac{300° \cdot 2\pi R}{360°} = \frac{5\pi R}{3}\text{cm}$$

د دې شکل محیط $= (\frac{5}{3}\pi R + 2)\text{cm}$



د دایرې قطعه(Segment of a circle): د دایرې د سطحې یوې برخې ته چې د قوس او مقابل وتر تر منځ واقع وي، قطعه وایي.

د دایرې قطعه د قوس په حساب ښودل کیږي. د مثال په ډول که د $\overset{\frown}{AB}$ قوس $\frac{\pi}{6}$ راډیان وي، قطعې ته هم $\frac{\pi}{6}$



راډیان وایي.

د قطعې مساحت: د θ راډیان د قطعې مساحت چې دداېرې شعاع R وي، مساوي دی، په:

$$S=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$$

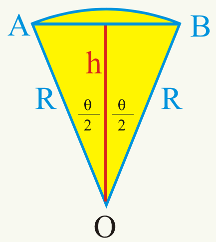
څکه که د AB قوس θ راډیان وي او د O نقطه د A او B له نقطو سره ونښلوو، نو لرو چې:

د AOB د مثلث مساحت - د AOB د قطاع مساحت = د قطعې مساحت

$S_{\overset{\Delta}{AOB}}$ د مثلث مساحت − S_{OAB} د قطاع مساحت = S د قطعې مساحت

په لاندې شکل کې لیدل کېږي، چې د $A\overset{\Delta}{O}B$ مثلث متساوي الساقین دی، نو په دې اساس:

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{h}{R}$$



$h=R\cos\frac{\theta}{2}$ ارتفاع

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\frac{AB}{2}}{R}$$

$AB=2R\sin\frac{\theta}{2}$ د مثلث قاعده:

$$A\overset{\Delta}{O}B \text{ د مثلث مساحت }=\frac{\text{قاعده . ارتفاع}}{2}=\frac{h\cdot AB}{2}$$

څرنګه چې $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ دی.

په نتیجه کې: $\text{مثلث مساحت}=\dfrac{R\cos\frac{\theta}{2}\cdot 2R\sin\frac{\theta}{2}}{2}=\dfrac{R^2\sin\theta}{2}=\dfrac{1}{2}R^2\sin\theta$

څرنګه چې $S_{OAB}=\frac{R^2\sin\theta}{2}$ د مثلث مساحت او د قطاع مساحت $A_s=\frac{1}{2}R^2\theta$ دی.

نو:

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta-\frac{1}{2}R^2\sin\theta=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta) \text{ د قطعې مساحت}$$

لومړی مثال: د پورته شکل په شان که د یوې داېرې شعاع $R=6.8\text{cm}$ وي او د دې داېرې د یوې قطاع زاویه $\theta=71^\circ$ وي، د قطاع مساحت، د ABO د مثلث مساحت او د دې داېرې د

قطعي مساحت پیدا کړئ.

حل:

$R = 6,8cm$

$\theta = 71°$

د قطاع مساحت $A = \pi R^2 \frac{\theta}{360°} = (6.8cm)^2 \cdot 3.14 \frac{71°}{360°} \approx 28.64cm^2$

د مثلث ارتفاع $h = R\cos\frac{\theta}{2} = 6.8cm \cdot \cos\frac{71°}{2} \approx 5.54cm$

$\cos 35°30' = 0.8141$

د مثلث قاعده $b = 2 \cdot R\sin\frac{\theta}{2} = 2 \cdot 6.8cm \cdot \sin\frac{71°}{2} \approx 7.9cm$

$\sin 35°30' = 0.5807$

د مثلث مساحت $A = \frac{1}{2}R^2 \sin\theta = \frac{1}{2}(6.8cm)^2 \cdot \sin 71° \approx 21.96cm^2$

$\sin 71° = 0.9455$

د مثلث مساحت - د قطاع مساحت = د قطعي مساحت

د قطعي مساحت $= 28,64cm^2 - 21,96cm^2 = 6,68cm^2$

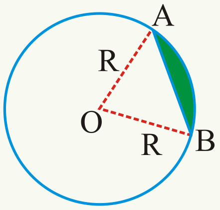
دویم مثال: د هغه قطعي مساحت پیدا کړئ چې شعاع یې R او قوس یې $\overset{\frown}{AB}$ وي، که:

$\overset{\frown}{AB} = 60°\ ,\ R = 12cm$ وي.

حل: څرنګه چې $60° = \frac{\pi^R}{3}$ دی، نو:

$$S = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2}(12cm)^2(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \cdot 144cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= 72cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 24\pi\, cm^2 - 36\sqrt{3}\, cm^2 = (24\pi - 36\sqrt{3})cm^2$$

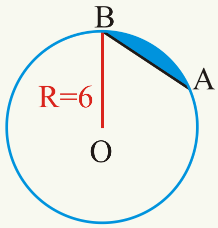


فعاليت

د هغه دايرې د قطعې مساحت پيدا کړئ، چې شعاع يې 6cm او د $\overset{\frown}{AB}=120°$ قوس وي.

دريم مثال: د هغه قطعې مســاحت پيدا کړئ، چې د 6cm وتر په واسـطه جلا شـوی وي، او د دايرې شعاع هم 6cm وي.

حل: څرنگه چې د قطعې قوس $\frac{\pi}{3}$ راډيانه دی:



$$S=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)=\frac{1}{2}(6cm)^2(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$=18cm^2(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2})=(6\pi-9\sqrt{3})cm^2$$

$$\approx 6(3.14)cm^2-9(1.73)cm^2=3.27cm^2$$

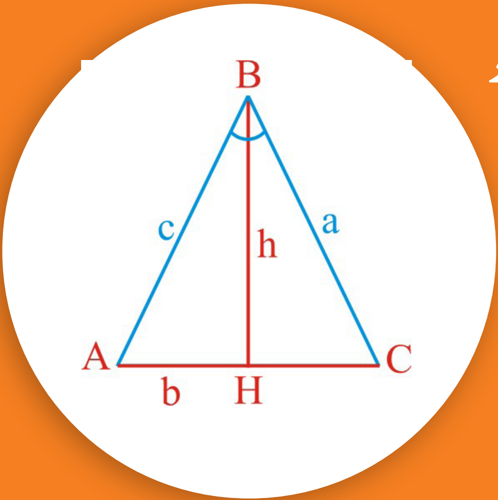
پوښتنې

1- د دايرې د هغه قطاع مساحت پيدا کړئ چې د $\frac{\pi}{6}$ راډيان مرکزي زاويې په مقابل کې واقع وي، که د دايرې شعاع 20cm وي.

2- د هغه قطاع اړونده مرکزي زاويه پيدا کړئ چې مساحت يې $55.5cm^2$ او د دايرې شعاع 12cm وي.

3- که د يوې دايرې شعاع 10m وي، د هغه قوسونو اوږدوالی پيدا کړئ چې د 3,8 راډيان او 27 راډيانه مرکزي زاويو په مقابل کې واقع وي.

د مثلث د مساحت پيدا کول د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو تر منځ د زاويې له جنسه:



که په يو مثلث کې د دوو ضلعو اوږدوالی 4cm او 8cm وي او ددې ضلعو تر منځ زاويه 30° وي أيا ددې مثلث مساحت پيدا کولای شئ؟

د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث په پام کې نيسو او د B له راس څخه د $\overline{BH}$ ارتفاع د $\overline{AC}$ پر ضلعه باندې رسموو:

څرنګه چې $\frac{h}{c}=\frac{BH}{c}=\sin A$ دی په نتيجه کې $h=c\sin A$ کيږي له هندسې څخه

پوهيږو چې د يو مثلث مساحت($S=\frac{\text{ارتفاع . قاعده}}{2}$) دی.

$$S_{ABC}=\frac{b\cdot h}{2}$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A \qquad (h=c\sin A)$$

فعاليت

د پورتنی مثلث د A او C له رأسونو څخه ارتفاعګانې رسم کړئ او وښاياست چې:

$S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$ او $S_{ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B$ دی.

لومړی مثال: د هغه مثلث مســاحت پيدا کړئ، چې د دوو ضلعو اوږدوالی يې $a=3{,}5\text{cm}$ او $c=6\text{cm}$ او $B=47{,}5°$ وي.

حل:

$$A = \frac{1}{2} ac \sin B$$

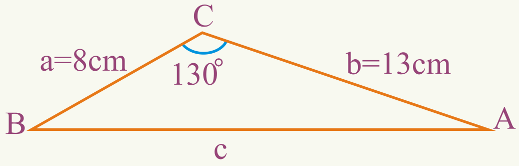
$$\sin 47.5^\circ = 0.73727733$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3{,}5cm \cdot 6cm \cdot \sin 47{,}5^\circ \approx 7{,}74cm^2$$

دويم مثال: د لاندې شکل د مثلث مساحت پيدا کړئ.

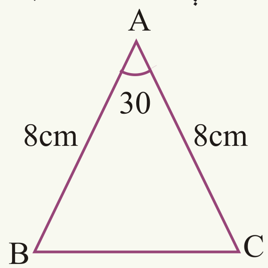
حل:

$$A = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2}(8)(13)\sin 130^\circ \approx 39.83\,cm^2$$



$(\sin 130^\circ = 0.7660)$

دريم مثال: د $\overset{\Delta}{ABC}$ په متساوي الساقين مثلث کې $\overline{AB} = \overline{AC} = 8cm$ او وي، $A = 30^\circ$ ده، ددې مثلث مساحت پيدا کړئ.



$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 30^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 16\,cm^2$$

د مثلث د مساحت پيدا کول د دريو ضلعو له جنسه (د هيرون فورمول)

ددې کار لپاره د يوې زاويې د نيمايي $\sin$، د مثلث د ضلعو د اوږدوالي له جنسه په لاس راوړو:
د ABC په هر مثلث کې لاندې اړيکې صدق کوي.

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(b-c)}{bc}}, \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}, \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

چې a, b, c د مثلث ضلعې او p د مثلث د محيط نيمايي ده $(p = \frac{a+b+c}{2})$ په تيرو لوستو کې مولوستل چې:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \quad ، \quad \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos B}{2}} \quad ، \quad \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{2}}$$

په هر مثلث کې $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ چې دا رابطه د $\cos ine$ د قضيې په نوم يادېږي، دلته د دې رابطې له ثبوت څخه صرف نظر کوو او په خپل وخت کې به وروسته ثبوت شي، د $\cos A$ پر ځای يې قيمت وضع کوو.

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}$$

څرنګه چې: $a+b+c=2p$ دی.

$$a-b+c=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b)$$
$$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c)$$

د $(a-b+c)$ او $(a+b-c)$ قيمتونه وضع کوو، نو لرو چې:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2(p-b)2(p-c)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

فعاليت

په همدې ډول وښاياست چې:

$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$, $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}$ مي باشد.

په همدې ډول کولای شو چې د مثلث د ضلعو له جنسه د يوې زاويې نيمايي $\cos ine$ په لاس راوړو:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \quad ، \quad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \quad ، \quad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

ثبوت: خرنګه چې $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ دی.

د $\cos A$ قیمت وضع کوو:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

$$b+c+a-2a=2p-2a$$

$$b+c-a=2p-2a=2(p-a)$$

په نتیجه کې لرو چې:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

فعالیت

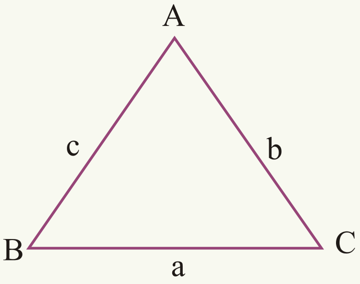
خرنګه چې $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ دی، وښایاست چې: $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

که د $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ په رابطه کې د $\sin\frac{A}{2}$ او $\cos\frac{A}{2}$ قیمتونه وضع کوو:

$$\sin A=2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\sin A=2\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}}$$

$$\sin A=\frac{2}{bc}\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



خرنګه چې د $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$ مثلث مساحت دی.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$$

د $\sin A$ قیمت وضع کوو:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \frac{2}{bc} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

د پورتنیو مساواتو له پرتله کولو څخه لرو چې:

$$\sin A = \frac{2}{bc} \cdot S = \frac{2S}{bc} \quad ، \quad \sin B = \frac{2S}{ac} \quad ، \quad \sin C = \frac{2S}{ab}$$

دریم مثال: د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ، چې د ضلعو اوږدوالی یې په لاندې ډول راکړل شوی وي.

$a = 5cm \qquad b = 4cm \qquad c = 3cm$

حل:

$$P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5cm + 4cm + 3cm}{2} = 6cm$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)}$$
$$= \sqrt{6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6\,cm^2$$

فعالیت

د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ، چې: $b = 5cm$, $c = 6cm$ او $a = 4cm$ وي.

څلورم مثال: که د یو مثلث ضلعې $a = 18cm$، $b = 24cm$ او $c = 30cm$ وي. د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل

$$P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{18+24+30}{2} = 36cm$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$= \sqrt{36(36-18)(36-24)(36-30)} = \sqrt{36 \cdot 18 \cdot 12 \cdot 6} = 216\ cm^2$$

پنځم مثال: د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ، چې د ضلعو اوږدوالی یې $a = 29{,}7\text{ft}$،
$b = 42{,}3\text{ft}$ او $c = 38{,}4\text{ft}$ وي.

حل:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{29{,}7+42{,}3+38{,}4}{2} = 55{,}2\text{ft}$$

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{55{,}2(55{,}2-29{,}7)(55{,}2-42{,}3)(55{,}2-38{,}4)}$$

$$= \sqrt{55{,}2(25{,}5)(12{,}9)(16{,}8)} = 552\text{ft}^2$$

د یو مثلث د محیطي دایرې د شعاع پیدا کول:

محیطي دایره هغه دایره ده، چې مثلث د دایرې په داخل کې واقع وي، او دایره د مثلث په درې واړه راسونو باندې مماس وي، او د محیطي دایرې مرکز د مثلث د درې واړو عمودي ناصفونو د تقاطع نقطه ده.

د شکل په شان د $\overset{\Delta}{ABC}$ د مثلث د ضلعو اوږداولی د a، b او c څخه عبارت دی، چې د O ټکی چې د دایرې مرکز دی د مثلث د ضلعو د درې واړو عمودي ناصفونو (Bisector Perpendicular) د تقاطع ټکی هم دی.

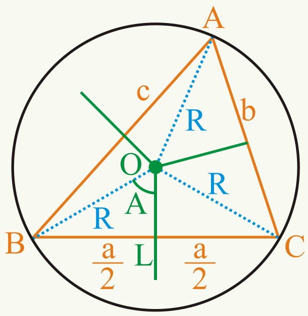
څرنګه چې د BOC مثلث متساوي الساقین دی، نو ارتفاع د $B\hat{O}C$ زاویه او د مثلث قاعده نیمايي کوي. په نتیجه کې: $\hat{A} = B\hat{O}L = L\hat{O}C$

$$\sin\hat{A} = \sin B\hat{O}L = \sin L\hat{O}C$$

څکه چې مرکزي زاویه د محیطي زاویې دوه برابره ده، چې د عین قوس په مقابل کې واقع وي.

$$\sin\hat{A} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$$

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{a}{2\cdot\frac{2s}{bc}} = \frac{abc}{4s} \qquad \left(\sin A = \frac{2S}{bc}\right)$$



او د $R = \dfrac{a}{2\sin A}$ څخه لرو چې:

$$a = R\cdot 2\sin A$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

په همدې ډول

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \text{ یا } R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}$$

لومړی مثال: د ABC د مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ، چې ضلعې یې $a=11cm$ ، $b=12cm$ او $c=13cm$ وي.

حل:

$$p=\frac{11+12+13}{2}=18cm \quad , \quad R=\frac{abc}{4s}=\frac{11\cdot 12\cdot 13}{4\sqrt{18\cdot 7\cdot 6\cdot 5}}=6{,}98cm$$

فعالیت

د هغه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ، چې د ضلعو اوږدوالی یې 18cm ، 24cm او 30cm وي.

دویم مثال: د هغه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ، چې د ضلعو اوږدوالی یې $a=3cm$ ، $b=5cm$ او $c=6cm$ وي.

حل:

$$R=\frac{abc}{4\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{3\cdot 5\cdot 6}{4\cdot\sqrt{7\cdot 4\cdot 2\cdot 1}}=\frac{90}{4\cdot\sqrt{56}}=\frac{45}{2\cdot\sqrt{56}}\approx 3cm$$

د یو مثلث د محاطي دایرې د شعاع پیدا کول:

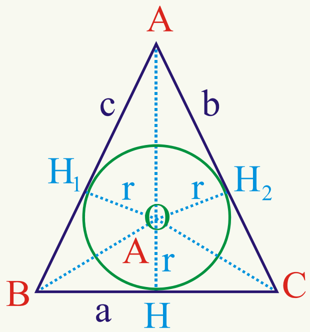
د مثلث محاطي دایره هغه دایره ده چې دایره د مثلث په دننه کې واقع وي او دایره د مثلث په دننه کې د مثلث د درې واړه ضلعو سره مماس وي، د محاطي دایرې مرکزد مثلث د درې واړو ناصف الزاویو دتقاطع ټکی (O) دی.

د $O\overset{\Delta}{A}B$ + د $O\overset{\Delta}{C}A$ + د $O\overset{\Delta}{B}C$ مثلث مساحت = د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث له مساحت سره

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr==\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}r\cdot 2p$$

$$S=r\cdot p \quad \Rightarrow r=\frac{s}{p}$$

ځرنګه چې:
$$s=\sqrt{P(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$r=\frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$



دریم مثال: د هغه مثلث د محاطي دایرې شعاع او د محاطي دایرې مساحت پیدا کړئ، چې د ضلعو اوږدوالی یې 7cm ، 8cm او 9cm وي.

حل

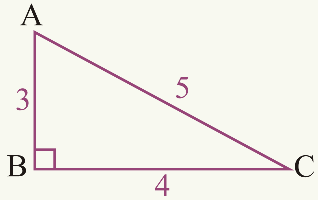
$$p=\frac{7+8+9}{2}=12cm$$
$$S=\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}=26.83cm^2$$
$$r=\frac{s}{p}=\frac{26.83cm^2}{12cm}=2.23cm$$

د محاطي دایرې مساحت مساوي دی، په: $=\pi r^2=\frac{22}{7}\cdot(2.23cm)^2\approx 15.6cm^2$

څلورم مثال: د یو قایم الزاویه مثلث دوه قایمې ضلعې په ترتیب سره 3cm او 4cm دي، د محیطي او محاطي دایرو شاعګانې یې پیدا کړئ.

حل:

$$p=\frac{3+4+5}{2}=6cm$$
$$(\overline{AC})^2=(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2$$
$$AC=\sqrt{9+16}=5$$
$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot\sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}}=\frac{60}{4\cdot\sqrt{6\cdot3\cdot2\cdot1}}=\frac{60}{4\cdot6}=\frac{60}{24}$$
$$=\frac{5}{2}cm=2,5cm$$
$$r=\frac{s}{p}=\frac{6}{6}=1cm$$



پنځم مثال: د شکل په شان د MTN په قايم الزاويه مثلث کې چې که قايمې ضلعې يې m او n راکړ شوي وي، د دې مثلث مساحت او د محيطي دايرې شعاع يې پيدا کړئ.

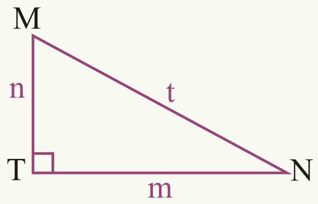
حل:

$$(\overline{MN})^2 = m^2 + n^2$$

$$t = MN = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$S = \frac{n \cdot m}{2}\ ,\ R = \frac{m \cdot n \cdot t}{4S} = \frac{m \cdot n \cdot \sqrt{m^2 + n^2}}{4\frac{n\,m}{2}} = \frac{m\,n\sqrt{m^2 + n^2}}{2mn}$$

$$\text{د مثلث مساحت} = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{2}$$



فعاليت

د هغه مثلث د محاطي دايرې شعاع پيدا کړئ، که چيرې د ضلعو اوږدوالی يې 35cm ، 34cm او 36cm وي.

د متساوي الاضلاع مثلث ارتفاع، مساحت او د محيطي او محاطي دايرو د شعاعګانو پيدا کول:

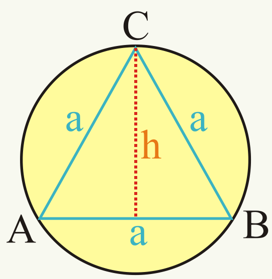
$$\sin 60° = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

د فيثاغورث د قضيې په اساس لرو چې:

$$h^2 + (\frac{a}{2})^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$



د ABC مثلث مساحت $S=\frac{h\cdot a}{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot a}{2}=\frac{\sqrt{3}a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{a^3}{4\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}}=\frac{a^3}{a^2\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{a}{3}\sqrt{3}$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}}{\frac{3a}{2}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{3a}=\frac{a}{6}\sqrt{3}$$

شپږم مثال: د یو متساوي الاضلاع مثلث محیط $18cm$ دی. د دې مثلث مساحت، ارتفاع او د محیطي او محاطي دایرو شعاعګانې یې پیدا کړئ.

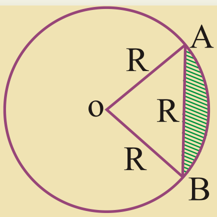
حل: د دې مثلث یوه ضلعه (a) مساوي ده، په:

$$a=\frac{1}{3}\cdot 18cm=6cm$$

$$S=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=\frac{(6cm)^2}{4}\sqrt{3}=15,6cm \qquad h=\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{6cm}{2}\sqrt{3}=5,2cm$$

$$R=\frac{a}{3}\sqrt{3}=\frac{6cm}{3}\sqrt{3}=3,5cm \qquad r=\frac{a}{6}\sqrt{3}=\frac{6cm}{6}\sqrt{3}\approx 1,7cm$$

پوښتنې



1- د شکل مطابق د OAB مثلث متساوي الاضلاع دی چې هره ضلعه یې R ده. د O په مرکز دایره رسم شوې ده، چې د A او B له ټکو څخه تیرېږي. د AB په وتر سره د قطعې مساحت مساوي دی په:

a) $(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4})R^2$ b) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{5})R^2$ c) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2})R^2$

d) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{2})R^2$ e) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})R^2$

2- که د یو متساو الساقین مثلث د هر ساق اوږدوالی $6cm$ او د ساقو تر منځ زاویه $30°$ دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

3- که د یو مثلث د دوو ضلعو اوږدوالی $5\sqrt{2}cm$ او $6cm$ وي، د دوارو ضلعو تر منځ زاویه یې $45°$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

4- که د یو مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره $3cm$ ، $4cm$ او $5cm$ وي د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

5- د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ، چې د ضلعو اوږدوالی یې $a = 7cm$ ، $b = 9cm$ او $c = 12cm$ وي.

6- د هغه قایم الزاویه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ، که قایمې ضلعې یې $12cm$ او $5cm$ وي.

7- که ABC ، د د متساوي الساقین مثلث قاعده $a = 8cm$ او د دې مثلث محاطي شعاع $r = 3cm$ وي. د محیطي شعاع اوږدوالی یې پیدا کړئ.

8- که د یوه قایم الزاویه مثلث مساحت $84cm^2$ وي او د یوې ارتفاع اوږدوالی یې $3,36cm$ وي، د دې مثلث د محیطي شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

د ځيرکي لنډيز

- د جمعي او تفاضل فورمولونه:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta ، \quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta ، \quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} ، \quad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

- د 2α د زاويې مثلثاتي نسبتونه د α له جنسه:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

- د يوې زاويې مثلثاتي نسبتونه، د زاويې د دوه چند له جنسه:

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} ، \quad \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} ، \quad \tan\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$$

- د يوې زاويې د نيمايي مثلثاتي نسبتونه د زاويې له جنسه:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} , \quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} , \quad \tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

- د يوې زاويې د درې چنده مثلثاتي نسبتونو د هغه زاويې له جنسه:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha , \quad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

- د دريو زاويو د مجموعې $(\alpha+\beta+\theta)$ مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin(\alpha+\beta+\theta)=\sin\alpha\cos\beta\cos\theta+\sin\beta\cos\alpha\cos\theta+\sin\theta\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\theta$$

$$\cos(\alpha+\beta+\theta)=\cos\alpha\cos\beta\cos\theta-\cos\alpha\sin\beta\sin\theta-\cos\beta\sin\alpha\sin\theta-\cos\theta\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta+\theta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\theta-\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\theta-\tan\alpha\tan\theta}$$

د ضرب فورمولونه (هغه فورمولونه چې د دوو زاویو د مجموعې یا تفاضل مثلثاتي نسبتونه په ضرب بدلوي).

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

• هغه فورمولونه چې د دوه زاویو د مثلثاتي نسبتونو ضرب د جمعې او یا د تفاضل په شکل بدلوي:

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\sin A\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)]=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

• د R په شعاع د دایرې د مرکزي زاویې (θ°) د مقابل قوس اوږدوالی مساوي دی، په:

$$L=\pi R\frac{\theta^\circ}{180^\circ}$$

• د R په شعاع د دایرې مرکزي زاویې θ راډیان د مقابل قوس اوږدوالی مساوي دی، په:
$L=R\theta$

• د دایرې د سطحې هغه برخه چې د دوو شعاعو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کېږي:

• د قطاع مساحت د $A_{\sec tor}=\frac{1}{2}R^2\theta$ د فورمول په مرسته لاسته راځي:

• د دايرې د سطحې هغه برخه چې د قوس او د مقابل وتر تر منځ واقع وي. قطعه بلل کېږي:

• د قطعې مساحت د $A_{Segment} = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta)$ د فورمول په مرسته پيدا کېږي:

• د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو تر منځ زاويې له جنسه د مثلث مساحت مساوي دی په:

$$S = \frac{1}{2}ac\sin B\ ,\quad S = \frac{1}{2}bc\sin A\ ,\quad S = \frac{1}{2}ab\sin C$$

• د يوې زاويې د نيمايي مثلثاتي نسبتونه د مثلث د ضلعو اوږدوالی له جنسه:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\quad \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\quad \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{ab}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

• د مثلث مساحت د مثلث د ضلعو د اوږدوالی له جنسه:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

• د يوه مثلث د محيطي دايرې شعاع(R) مساوي دی په:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

يا $R = \frac{abc}{4S}$

• د يوه مثلث د محاطي دايرې شعاع د $r = \frac{s}{p}$ يا $r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$ فرمول څخه په لاس راځي.

د څپرکي پوښتنې

1- وښایاست چې د متساوي الاضلاع مثلث مساحت $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ دی، که a د مثلث یوه ضلعه وي؟

2- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a=7cm$ ، $b=8cm$ او $c=9cm$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ؟

3- د جمعې د فورمولونو په مرسته $\cos 165°$ او $\sin 165°$ پیدا کړئ؟

4- $\sin(-165°)=?$ مساوي دی، په:

$a)\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\qquad b)\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ $\qquad c)\ \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

5- وښایاست چې: $\frac{\cos 3\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}$ دی؟

6- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندنیو زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ؟

$\sin(30°+45°)$ ، $\cos(150°-45°)$ ، $\tan(30°+60°)$

$\sin(135°+180°)$ ، $\sin(135°-180°)$ ، $\tan(180°-45°)$

7- د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندینیو رابطو سموالی وښایاست.

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$ ، $\cos(90°+\theta)=-\sin\theta$ ، $\cos(90°-\theta)=\sin\theta$

$\sin(270°+\theta)=-\cos\theta$ ، $\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$ ، $\sin(180°-\theta)=\sin\theta$

8- که $0°<\theta<90°$ او $\sin\theta=\frac{2}{5}$ وي، د $\cos 2\theta$ ، $\sin 2\theta$ ، $\cos\frac{\theta}{2}$ او $\sin\frac{\theta}{2}$ قیمتونه په لاس راوړئ؟

9- وښایاست چې:

$\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta$, $\cos 2\theta+1=2\cos^2\theta$, $\cos 2\theta+2\sin^2\theta=1$

$2\cos^2\theta-2\sin^2\theta=2\cos 2\theta$, $\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\cos\theta-\sin\theta$

10- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره $5cm$ ، $7cm$ او $8cm$ وي د دې مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاعګانې پیدا کړئ؟

11- $\sin(180^\circ+\theta)=?$

$a)\ \sin\theta$ $\quad b)\ -\cos\theta$ $\quad c)-\sin\theta$ $\quad d)\cos\theta$

12- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته وښایاست، چې:

$\sec(360^\circ-\theta)=\sec\theta$, $\tan(180^\circ+\theta)=\tan\theta$ او $\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$

13- $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=?$

$a)\ 2\sin\alpha\sin\beta$ $\quad b)2\cos\alpha\cos\beta$ $\quad c)-2\sin\alpha\sin\beta$

14- وښایاست چې: $\dfrac{\sin\alpha}{\sec 4\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\csc 4\alpha}=\sin 5\alpha$ دی؟

15- لاندې د مثلثاتی نسبتونو ضرب حاصلونه د مجموعې او یا تفاضل په شکل ولیکئ؟

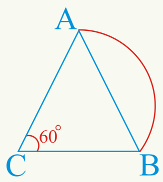
$\cos 40^\circ\cos 60^\circ$, $\cos 100^\circ\ \sin 50^\circ$

$\sin\dfrac{3\theta}{2}\sin\dfrac{5\theta}{2}$, $\sin 8\theta\ \cos 10\theta$

16- لاندې د مثلثاتی نسبتونو مجموعې او یا تفاضل د ضرب د حاصل په څېر ولیکئ؟

$\cos\dfrac{3\alpha}{4}+\cos\dfrac{4\alpha}{3}$, $\sin 12\theta+\sin 8\theta$. $\sin 80^\circ-\sin 72^\circ$, $\cos 84^\circ-\cos 76^\circ$

17- وښایاست چې: $\dfrac{\sin 5\theta+\sin 3\theta}{\cos 5\theta-\cos 3\theta}=-\cot\theta$ دی.



18- د یوې دایرې مساحت $180cm^2$ دی، ددې دایرې د 80° د قطاع مساحت پیدا کړئ.

19- د شکل مطابق د 60° مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی $(1cm)$ دی. د دې قوس شعاع او د وتر اوږدوالی یې پیدا کړئ؟

-20 $\dfrac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1+\tan 60^\circ \cdot \tan 30^\circ} = ?$

$a)\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad b)\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad c)\ \sqrt{3}$ $\quad d)\ -\sqrt{3}$

-21- که $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ ، او د θ دویمه ضلعه په لومړی ربعه کې وي، $\sin 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیداکړئ؟

-22- وښایاست چې: $\tan(45^\circ+\theta) = \dfrac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$ دی؟

-23 $\cos 37^\circ \cos 53^\circ - \sin 37^\circ \sin 53^\circ = ?$ مساوي دی، په:

$a)\ 1$ $\quad b)\ -1$ $\quad c)\ 0$ $\quad d)$ درې واړه ناسم دي

-24 $\cos 60^\circ \cos 14^\circ + \sin 60^\circ \sin 14^\circ$ مساوي دی، په:

$a)\cos 74^\circ$ $\quad b)\cos 46^\circ$ $\quad c)\sin 74^\circ$ $\quad d)\sin 46^\circ$

-25 $\cos 14^\circ \cos 31^\circ - \sin 14^\circ \sin 31^\circ$ مساوي دی، په:

$a)\cos 17^\circ$ $\quad b)\cos 45^\circ$ $\quad c)\sin 17^\circ$ $\quad d)-\sin 17^\circ$

-26 $\cos 80^\circ \cos 35^\circ + \sin 80^\circ \sin 35^\circ$ مساوي دی، په:

$a)\cos 115^\circ$ $\quad b)\sin 115^\circ$ $\quad c)\cos 45^\circ$ $\quad d)\sin 45^\circ$

-27 که $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ ، $\sin\beta = \dfrac{5}{13}$ وي، α او β په لومړنی ربع کې واقع وي $\cos(\alpha-\beta)$ پیداکړئ؟

-28 که $\cos\theta = -\dfrac{8}{17}$ ، $\cos\gamma = -\dfrac{3}{5}$ وي او د θ او γ دویمې ضلعې په دریمه ربع کې واقع وي. $\cos(\theta-\gamma)$ پیداکړئ؟

-29- وښایاست چې: $\dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\cos(x-y)+\cos(x+y)} = \tan x \cdot \tan y$ دی.

30- $\cos(0^\circ - t) = ?$

$a) \sin t$ $\quad b) \cos t$ $\quad c) -\sin t$ $\quad d) -\cos t$

31- وښایاست چې: $\dfrac{\cos\theta \cdot \sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \sin\theta$ دی؟

32- وښایاست چې:

$$\frac{\cos 8x + \cos 4x}{\cos 8x - \cos 4x} = -\cot 6x \cot 2x$$

$$\frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = -\tan x \quad , \quad \frac{\sin 4x + \sin 6x}{\cos 4x - \cos 6x} = \cot x$$

$$\frac{\sin t + \sin 3t}{\cos t + \cos 3t} = \tan 2t \quad , \quad \frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x - \cos 3x} = -\cot 2x$$

33- $\cos(x+y)\cos y + \sin(x+y)\sin y$ افاده مساوي ده، په:

$a) \sin x$ $\quad b) \cos x$ $\quad c) -\sin x$ $\quad d) -\cos x$

34- $\sin(x-y)\cos y + \cos(x-y)\sin y = ?$

$a) \sin x$ $\quad b) \cos x$ $\quad c) -\sin x$ $\quad d) -\cos x$

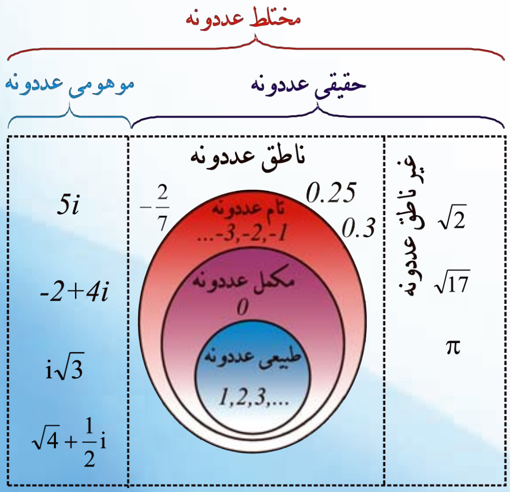
35 – د هغې قطاع مساحت چې شعاع یې $2m$ او مرکزي زاویه یې $0,5\ radian$ وي مساوي ده، په:

$a)\ 3m^2$ $\quad b)\ 2m^2$ $\quad c)\ 1m^2$ $\quad d)$ دري واړه سمې نه دي

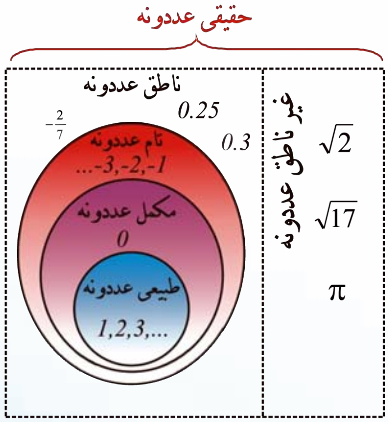
36 – که د یوې دایرې د یوې قطاع مساحت 200cm^2 او مرکزي زاویه یې 2 radian وي، د دې دایرې شعاع مساوي ده، په:

a) 14.14cm $\quad$ b) -14.14cm $\quad$ c) 14cm $\quad$ d) دري واړه غلط دي.

شپږم څپرکی
مختلط عددونه

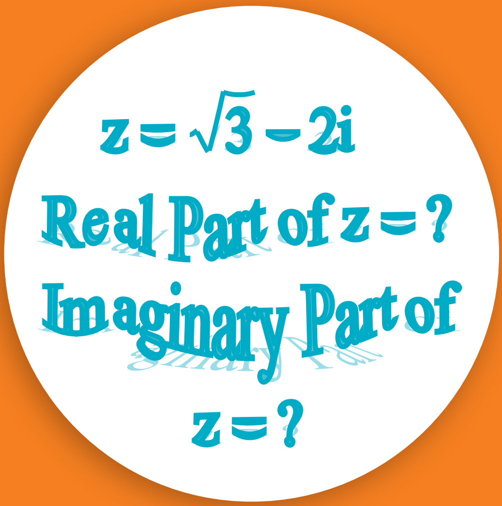


مختلط عددونه
موهومی عددونه
حقیقی عددونه
ناطق عددونه
غیر ناطق عددونه
5i
-2+4i
$i\sqrt{3}$
$\sqrt{4}+\frac{1}{2}i$
$-\frac{2}{7}$
0.25
0.3
تام عددونه
...-3,-2,-1
مکمل عددونه
0
طبیعی عددونه
1,2,3,...
$\sqrt{2}$
$\sqrt{17}$
π



حقیقی عددونه
ناطق عددونه
غیر ناطق عددونه
$-\frac{2}{7}$
0.25
0.3
تام عددونه
...-3,-2,-1
مکمل عددونه
0
طبیعی عددونه
1,2,3,...
$\sqrt{2}$
$\sqrt{17}$
π

تام عددونه -3,-2,-1
-5,-4,
...-6
مکمل عددونه
0
طبیعی عددونه
1,2,3,...



مختلط عددونه
(Complex Numbers)

آیا ویلای شئ چې د $x^2+9=0$ معادله ولې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري؟

آیا پوهېږئ چې د حقیقي عددونو سټ د مختلطو عددونو د سټ، یو فرعي سټ دی؟

موهومی عددونه (Imaginary Numbers):

$i=\sqrt{-1}$ یا $i^2=-1$ دی د i توري له یوناني کلمې (iota) څخه اخیستل شوي دی چې $i=\sqrt{-1}$ ته، د موهومی عددونو واحد وایي.

لومړی مثال: $\sqrt{-16}$ پیدا کړئ.

حل: $\sqrt{-16}=\sqrt{(-1)\cdot 16}=\sqrt{-1}\sqrt{16}=i\sqrt{16}=\pm 4i$

دويم مثال: د $x^2+a^2=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$x^2+a^2=0$$
$$x^2=-a^2$$
$$x=\pm\sqrt{-a^2}=\pm\sqrt{(-1)\cdot(a^2)}=\pm a\sqrt{-1}=\pm ai$$

ai او ai − موهومي عددونه دي (چې a یو حقیقي عدد دی).

د (i) طاقتونه (Powers of i):

لیدل کیږي چې د $i^2=-1$ یا $i=\sqrt{-1}$ په مرسته موهومي عددونه ساده کولاي شو . په یاد ولرئ چې د حقیقي عددونو مربع مثبت او د موهومي عددونو مربع منفي ده.

$i=\sqrt{-1}$ $\qquad$ $i^2=(\sqrt{-1})^2=-1$ $\qquad$ $i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot(i)=-i$

$i^4=(\sqrt{-1})^4=[(\sqrt{-1}^{\,2})]^2=(-1)^2=1$ یا $i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$

$i^5=i^4\cdot i=(1)(i)=i$ $\qquad$ $i^6=(i)^4\cdot(i)^2=(1)\cdot(-1)=-1$

$$i^7 = (i)^6 \cdot (i) = (-1)\cdot(i) = -i \qquad i^8 = i^7 \cdot i = (-i)\cdot(i) = -i^2 = -(-1) = 1$$

(i) ته موهومي واحد وايي.

له دې ځایه نتیجه په لاس راځي، که د موهومي واحد توان $n=4$ یا یوداسې عددوي چې پر څلورو دویش ورړوي، نو له یوه (1) سره مساوي دی.

دریم مثال:

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1 = 1$$
$$i^{12} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$
$$i^{16} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$
$$\vdots$$
$$i^{4n} = i^4 \cdot i^4 \ldots i^4 = 1$$
$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = 1\cdot i = i$$
$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1\cdot(-1) = -1$$
$$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^2 \cdot i = 1(-1)i = -i$$

فعالیت

$(i)^{61}, (i)^{-37}$ و $(i)^{256}$ طاقتونو قیمت پیدا کړئ.

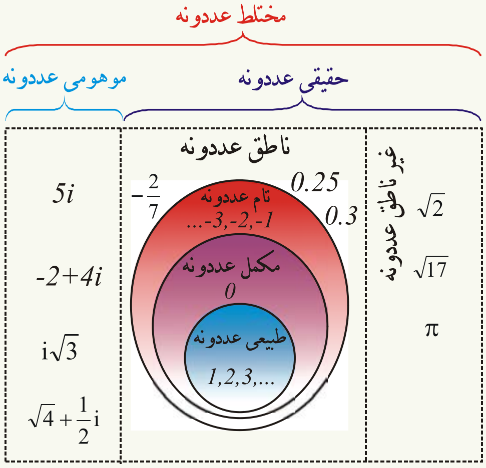
څلورم مثال: i^{54}، i^{1998} او i^{89} پیدا کړئ.

حل: که د 54 عدد پر 4 وویشو، پاتې (باقي) یې 2 ده نو:

$$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = i^{4\cdot 13} \cdot i^2 = (i^4)^{13} \cdot i^2 = (1)\cdot i^2 = (1)\cdot(-1) = -1$$
$$i^{1998} = i^{4(499)} \cdot i^2 = 1\cdot i^2 = i^2 = -1$$
$$i^{89} = i^{4\cdot 22} \cdot i = 1\cdot i = i$$

هغه عددونه چې $\sqrt{-1}$ یې یو فکتور وي د موهومي عددونو په نوم یادیږي د i طبیعي توانونه یو له i، 1، -i او 1- عددونو څخه دي. د حقیقي عددونو مربع مثبت اود موهومي عددونو مربع منفي ده.

د عددونو ستونه د تاریخ په اوږدوکې د اړتیا و او د ریاضي علم له انکشاف سره سم منځ ته راغلي دي. لکه څرنګه چې پوهیږئ، د طبیعي عددونو سټ $IN=\{1,2,3,4....\}$ ټولو مسألو ته ځواب نه شي ویلای. د مثال په ډول د $3x=0$ معادله د طبیعي عددونو په سټ کې حل نه لري، ښکاره خبره ده چې ځواب یې $x=0$ دی، نو یو بل سټ ته اړتیا پیدا شوه چې د مکملو عددنو سټ $W=\{0,1,2,3,...\}$ دی دا سټ هم ځینو پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای، لکه د $x+2=0$ معادله د مکملو عددونو په سټ کې حل نه لري ځکه چې ځواب يې $x=-2$ دی چې 2 - د مکملو عددونو په ست کې شامل نه دی. نو یو بل سټ ته اړتیا پیدا شوه، چې منفي عددونه هم ولري چې د تامو عددونو د ست (Integer Numbers set) یا $I=\{...,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ په نامه یادیږی خو د عددونو په دې ست کې هم د $2x+1=2$ د معادلې حل نشته ځکه چې حل یې $x=\frac{1}{2}$ دی، نو د ناطقو عددونو سټ (Rational Numbers Set) منځ ته راغی خو د $x^2-2=0$ معادله د ناطقو یا ګویا عددونو په سټ کې هم حل نه لري، ځکه چې ددې معادلې حل $x=\sqrt{2}$ دی چې $\sqrt{2}$ د غیرو ناطقو عددونو (Irrational Numbers set) په سټ کې شامل دی، نو د غیر ناطقو عددونو سټ منځ ته راغی د ناطقو او غیر ناطقو عددونو سیټونو مجموعې ته د حقیقي عددونو سټ (Real Numbers Set) وایي.



خود حقیقی عددونو سټ هم ځینو پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای، لکه د $x^2+16=0$ یا د $x^2+1=0$ د معادلو حل د حقیقي عددونو په سټ کې نه شته دی.

یا په بل عبارت منفي عددونه د حقیقي عددونو په سټ کې جفت جذر نه لري. لکه: $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-25}$ او نور، خو هغه معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري. په 1795م. کال کې یو جرمني ریاضي پوه گوس (Gauss) د مختلطو عددونو مفهوم په لاندې ډول وړاندې کړه. که یو مختلط عدد په z سره وښایو $z = a + bi$ چې د یو مختلط عدد معیاري شکل دی چې a د z عدد حقیقي برخه (Real Part of z) او bi د z د مختلط عدد موهومي برخه (Imaginary Part of z) ده، د مختلطو عددونو سټ داسې تعریف کیږي. $C = \{z \mid z = a + bi \ , \ a, b \in 1R \ , \ i^2 = -1\}$ د z یو مختلط عدد د یوې مرتبې جوړې په شکل هم لیکلای شو : $z = a - bi = (a, -b)$, $z = a + bi = (a, b)$ که $a=0$ شي: $Z = 0 + bi = bi$ چې bi ته خالص موهومي عدد (Pure imaginary number) وایي او که $b = 0$ وي نو $z = a + 0 \cdot i = a$ (چې a یو خالص حقیقي عدد (Pure real number) دی) په یاد ولرئ چې مختلط عددونه لکه حقیقي عددونه د ترتیب خاصیت نه لري.

صفري مختلط عدد (Zero Complex Number):

هغه عدد دی چې حقیقي او موهومي دواړه برخې یې صفرونه وي. $(a = 0 \quad b = 0)$ نو

$z = a + bi = 0 + 0i = 0$ صفری مختلط عدد دی.

فعالیت

په $4 + 3i$ او $2 - 5i$ مختلطو عددونو کې حقیقي او موهومي برخې وښایاست.

لومړی مثال: د $1 - i$, $\sqrt{3} - 3i$, $5i$ او $2 - 5i$ مختلطو عددونو کې حقیقي او موهومي برخې وښایاست.

حل: په $1 - i$ کې حقیقي برخه یې 1 او موهومي برخه یې $-i$ ده.

د $\sqrt{3}-3i$ مختلط عدد کې حقیقي برخه یې $\sqrt{3}$ او موهومي برخه یې $-3i$ ده، په $2-5i$ مختلط عدد کې حقیقي برخه یې 2 او موهومي برخه یې $-5i$ ده.

په $5i$ کې حقیقي برخه صفر او موهومی برخه یې $5i$ ده.

دویم مثال: د $6i$, -9 , 0 , $9-i$ او $i-1$ مختلط عددونه په معیاري شکل (Standard Form) ولیکئ.

حل: څرنګه چې $z=a+bi$ ته د مختلط عدد معیاري شکل وایي چې a ته د مختلط عدد حقیقي برخه او bi یې موهومي برخه ده. په لاندې جدول کې دا مختلط عددونه په معیاري شکل بدل شوي دي.

مختلط عددونه	معیاری شکل $(z=a+bi)$
$6i$	$0+6i$
-9	$-9+0i$
0	$0+0i$
$9-i$	$9-i$
$i-1$	$-1+i$

$z=a+bi$ د یوه مختلط عدد معیاري شکل دی چې a ته د مختلط عدد حقیقي برخه او bi یې موهومي برخه ده، که a=0 وي، نو bi خالصه موهومي برخه او که b=0 وي، نو a د مختلط عدد خالصه حقیقي برخه ده او هغه معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نلري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري.

پوښتنې

1- د $(i)^{-33}, (i)^{79}, (i)^{202}, (2i)^2$ او $(3i)^2$ قیمتونه پیداکړئ.

2- لاندې عددونه د مختلطو عددونو په معیاري شکل ولیکئ.

$-i-4 \quad , \quad 5i \quad , \quad -4i+\sqrt{2} \quad , \quad -3i$

3 - $7-i\ ,\ 5+3i\ ,\ -3i \qquad \sqrt{5}-\sqrt{7}i$ مختلط عددونه د مرتبو جوړو په شکل ولیکئ.

4- د $-i$ په مختلط عدد کې حقیقي برخه مساوي ده په!

a) 1 , b) −1 , c) 0 , d) 2

5- د $\sqrt{-16}$ د عدد جذر مساوي دی په!

a) ±4 , b) −4 , c) ±4i , d) ±2

د موهومي عددونو څلورګوني عمليې

$4i+3i=7i$

$4i-3i=i$

$4i-(-3i)=7i$

آیا د $3i$ او $4i$ موهومي عددونه جمع کولای شئ؟

آیا د $10i$ او $50i$ د موهومي عددونو د ضرب حاصل یو حقیقي عدد دی؟

د موهومي عددونو جمع او تفریق: موهومي عددونه کولای شو چې په لاندې ډول یې جمع او تفریق کړو.

a: د جمعي عملیه: د دوو موهومي عددونو د جمعې حاصل یو موهومي عدد دی.

لومړی مثال: د $(7i+8i)$ او $5i$ او $\sqrt{7}i$ د جمعې حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$7i+8i=(7+8)i=15i$$

$$\sqrt{7}i+5i=(\sqrt{7}+5)i$$

b: د تفریق علمیه: د دوو عددونو د تفریق حاصل یو موهومي عدد دی.

دویم مثال: $7i-4i$ او $9i-13i$ د تفریق حاصل پیدا کړئ.

$$7i-4i=(7-4)i=3i$$

$$9i-13i=(9-13)i=-4i$$

c: د ضرب عملیه: د دوو موهومي عددونو د ضرب حاصل یو حقیقي (Real number) عدد دی.

دریم مثال: د $(10i)\cdot(5i)$ او $(\sqrt{9}i)\cdot(\sqrt{4}i)$ د ضرب حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$(10i)\cdot(5i)=(10)\cdot(5)\cdot i\cdot i=50i^2=-50$$

ځکه چې $i^2=-1$ دی نو $50i^2=50\cdot(-1)=-50$ چې -50 یو حقیقي عدد (Real number) دی.

همدارنګه $(\sqrt{4}i)\cdot(\sqrt{9}i)=\sqrt{4\cdot 9}\cdot i\cdot i=\sqrt{36}\cdot i^2=6\cdot(-1)=-6$

د موهومي عددونو د ضرب په عمليه کې د تبديلي خاصيت (Commutative Property)

صدق کوي يعنې: $\boxed{(ai)\cdot(bi)=(bi)\cdot(ai)=-ab}$

فعاليت

$(\frac{2}{3}i)\cdot(-\frac{3}{5}i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

d : **د وېش عمليه**: د دوو موهومي عددونو دوېش حاصل يو حقيقي عدد دی.

خلورم مثال: $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}$, $\frac{5i}{7i}$ او $\frac{\sqrt{13}\,i}{\sqrt{3}\,i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$1)\quad \frac{5i}{7i}=\frac{5}{7}$$ ($\frac{5}{7}$ يو حقيقي عدد دی)

$$2)\quad \frac{\sqrt{13}\,i}{\sqrt{3}\,i}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$$ ($\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ يو حقيقي عدد دی)

$$3)\quad \frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}\,i}{\sqrt{5}\,i}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$$

فعاليت

$36i$ پر $2i-$ ووېشئ.

د موهومي عددونو د جمعې او ضرب په عمليو کې د تبديلي خاصيت صدق کوي. د دوو موهومي عددونو د ضرب او وېش حاصل يو حقيقي عدد دی.

پوښتنې

1) جمع يې کړئ. $\sqrt{7}\,i+\sqrt{7}\,i$, $\sqrt{-7}+\sqrt{-4}$, $\sqrt{-1b}+\sqrt{-1c}$

2) تفريق يې کړئ. $5i-2i$, $12i-7i$, $\sqrt{5}\,i-\sqrt{5}\,i$

3) لاندې موهومي عددونه سره ضرب او تقسيم کړئ.

$(\frac{7}{4}i)(-\frac{2}{9}i)$, $(\sqrt{7}\,i)\cdot(-7i)$, $(3i)\cdot(5i)$ $\qquad \frac{16i}{-4i}$, $\frac{13i}{26i}$

مختلطو عددونو د جمعې او تفریق عملیې:

آیا د $3x-2yi=6+i$ له مساوات څخه د x او y قیمتونه په لاس راوړلای شئ؟

آیا پوهیږئ چې کوم عدد ته د مختلطو عددونو د جمعې د عملې د عینیت عنصر وایي؟

مساوي مختلط عددونه (Equal Complex Numbers): دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي: چې د دواړو عددونو حقیقي او موهومي برخې یو له بله سره مساوي وي. د $z_1=a+bi$ او $z_2=x+yi$ عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې x=a او y=b وي.

لومړی مثال: که چېرې $z_1=x_1+2y_1i$ او $z_2=3-5i$ وي، نو هغه وخت $z_1=z_2$ دی چې: $x_1=3$ او $y_1=-\frac{5}{2}$ وي.

فعالیت

1- که چېرې $z_1=\sqrt{2}\,x+\sqrt{3}\,yi$ او $z_2=-5-6i$ وي، د $z_1=z_2$ له مخې د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

2- که چېرې $2+mi=k+3i$ وي د m او k د حقیقي عددونو قیمت پیدا کړئ.

د مختلطو عددونو د جمعې عملیه: د مختلطو عددونو د جمعې عملیه داسې تعریف شوې ده. که چېرې $z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ وي، نو:

$$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\cdot i$$

یا په بل عبارت د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل یو بل داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د دې دواړو عددونو د موهومي برخو له مجموعې څخه په لاس راغلې وي.

دویم مثال: که چېرې $z_1 = 2-3i$ او $z_2 = 3+4i$ وي، $z_1 + z_2$ پیدا کړئ

$$z_1 + z_1 = (2-3i)+(3+4i) = (2+3)+(-3+4)i = 5+i$$

په همدې ډول:

$$(3-4i)+(-2+6i) = (3-2)+(-4+6)i = 1+2i$$

$$(-9+7i)+(3-15i) = (-9+3)+(7-15)i = -6-8i$$

$0+0i$ د مختلطو عددونو د جمعې د عملیې د عینت عنصر (additive identity) دی، ځکه چې: $(a+bi)+(0+0i) = (a+0)+(b+0)i = a+bi$.

همدارنګه د $a+bi$ د عدد جمعي معکوس (additive inverse) د $-a-bi$ عدد دی، ځکه

چې: $(a+bi)+(-a-bi) = (a-a)+(b-b)i = 0+0i$

فعالیت

د $(3x-yi)+(5x+3yi)$ د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

د مختلطو عددونو د تفریق عملیه: د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل یو بل داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د موهومي برخو د تفریق له حاصل څخه په لاس راغلې وي یعنې: $(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$

لومړی مثال: $(-4+3i)-(6-7i) = (-4+3i)+(-6+7i) = -10+10i$

دویم مثال: $(12-5i)-(8-3i) = (12-8)+(-5+3)i = 4-2i$

دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقیقي او موهومي برخې يې يو له بله سره مساوي وي. د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل يو داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه يې د حقیقي برخو اوموهومي برخه يې د موهومي برخو له مجموعی څخه په لاس راغلي وي، په همدې ډول د دوو مختلطو عددونو د تفريق حاصل يو داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه يې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومي برخه يې د دواړو عددونو د موهومي برخو له حاصل تفريق څخه په لاس راغلي وي.

پوښتنې

1- لاندې مختلط عددونه جمع کړئ.

$(2+5i)+(3+4i)$ ، $(13-12i)+(13+12i)$

$(-3+6i)+(10-7i)$ ، $(\sqrt{3}-ci)+(d+5ci)$

2- لاندې مختلط عددونه يو له بله تفريق کړئ.

$(5-i)-(7+3i)$

$(2\sqrt{3}+5\cdot\sqrt{7}\,i)-(\sqrt{3}+3\sqrt{7}\,i)$

$(3c+4di)-(3c+8di)$

3- د لاندې مختلطو عددونو جمعي معکوس پيدا کړئ.

$2+3i$, $(2,-3)$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$

4- که $(x, y \in IR)$ او $3x+2iy-ix+5y=7+5i$ وي، د x او y قیمتونه پيدا کړئ.

5- لاندې عمليې سرته ورسوئ او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل ولیکئ

$(2+3i)+(-5+2i)$

$(-5-4i)-(-2-\sqrt{2}i)$

$(2+3i)+(-5-i)$

$(6-5i)+(3+2i)$

$(3.7+6.1i)-(1+5.9i)$

$(8+\frac{3}{4}i)-(-7+\frac{2}{3}i)$

$(-6-\frac{5}{8}i)+(4+\frac{1}{2}i)$

$(-2+5i)+(3-i)$

$(3+\frac{3}{5}i)-(-11+\frac{7}{15}i)$

$(-4-\frac{5}{6}i)+(13+\frac{3}{8}i)$

$(-7-\sqrt{-72})+(8+\sqrt{-50})$

$(\sqrt{3}+\sqrt{-2})-(\sqrt{12}+\sqrt{8})$

6- د لاندي مختلطو عددونو جمعي معکوس پیداکړئ.

$2-3i$	$8+11i$	$1-i$	$-1+i$
$5-8i$	$-13+13i$	$-5i$	$2i$

د مختلطو عددونو ضرب

آيا کولای شئ چې د $(2-3i)(3+4i)$ د مختلطو عددونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ؟

د $i^2=-1$ په نظر کې نیولو سره د دوو مختلطو عددونو ضرب په لاندې ډول دی که: $z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ وي.

$$z_1\cdot z_2=(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bidi$$
$$=ac+adi+bci+bdi^2$$
$$=ac+(ad+bc)i+bd(-1)$$
$$z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

لومړی مثال: د $(5-4i)\cdot(7-2i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$(5-4i)(7-2i)=5(7)+5(-2i)+(-4i)(7)-4i(-2i)=35-10i-28i+8i^2$$
$$=35-38i+8(-1)$$
$$=35-38i-8$$
$$=27-38i$$

فعالیت

د $(2-3i)(3+4i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

څرنګه چې $(a+bi)(1+0i)=a\cdot1+a\cdot0i+bi\cdot1+bi\cdot0i=a+bi$ دی، نو $1+0i$ ته د مختلطو عددونو د ضرب د عملیې د عینیت عنصر (Multiplicative identity) وایي لکه: $(3+5i)(1+0i)=3+5i$

د یوه مختلط عدد مزدوج (Conjugate of a Complex Number):

د $z = x + yi$، د مختلط عدد مزدوج $\bar{z} = x - yi$ دی په دې ډول چې:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \quad , \quad 2x \ \mathrm{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi \quad , \quad 2yi \ \mathrm{Im}(z)$$

دویم مثال: د $z = 3 + 4i$ د عدد مزدوج $\bar{z} = 3 - 4i$ دی، $z - \bar{z}$, $z + \bar{z}$ او $z \cdot \bar{z}$ په لاس راوړئ:

$$z \cdot \bar{z} = (3 + 4i) \cdot (3 - 4i) = 3(3) + 3(-4i) + 4i(3) + 4i(-4i)$$

$$= 9 - 16i^2 = 9 - 16(-1) = 9 + 16 = 25$$

$$z + \bar{z} = (3 + 4i) + (3 - 4i) = 6$$ (چې 6 یو حقیقي عدد دی)

$$z - \bar{z} = (3 + 4i) - (3 - 4i) = 8i$$ (چې 8i یو موهومي عدد دی)

فعالیت

د $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 7 + i$ و $z_3 = \sqrt{5} + \sqrt{7}\,i$ د مختلطو عددونو مزدوجونه پیدا کړئ.

څرنګه چې وموليدل، د یو مختلط عدد د مزدوج د پیداکولو لپاره، یوازې د موهومي برخې علامه تغیروو لکه:

مزدوج يې	عدد
i	-i
1+i	1-i
-4-2i	-4+2i
-5i-6	5i-6

د یو مختلط عدد ضربي معکوس (Multiplicative inverse)

پوهیږو چې د $a + bi$ د عدد مزدوج $a - bi$ دی او

$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (b^2 i^2) = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$ دی.

د $a+bi$ د عدد د ضربي معکوس د پیدا کولو له پاره د $\frac{1}{a+bi}$ عدد د مختلط عدد په معیاري شکل لیکونو، د $\frac{1}{a+bi}$ د عدد صورت او مخرج په $a-bi$ کې ضربوو. ($a-bi$ د مخرج مزدوج دی)

$$\frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

د $(a+bi)$ د عدد ضربی معکوس $(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)$ دی.

دریم مثال: د $2-3i$ د عدد ضربي معکوس پیدا کړئ.

$$\frac{1}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{2+3i}{4-9i^2}=\frac{2+3i}{4+9}=\frac{2+3i}{13}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$$

څلورم مثال: د x^2+4 افاده تجزیه کړئ.

$$x^2+4=x^2-(-1)\cdot 4=x^2-(i)^2\cdot 4=x^2-(2i)^2=(x-2i)(x+2i)$$

فعالیت

د $5+3i$ او $\sqrt{2}-4i$ مختلطو عددونو ضربي معکوسونه پیدا کړئ..

که چیرې $z=x+yi$ او $w=x'+y'i$ دوه مختلط عددونه وي، نو $z\cdot w$ په دې ډول تعریف شوي دی.

$$z\cdot w=(xx'-yy')+(xy'+x'y)i$$

د یو مختلط عدد د مزدوج د پیدا کولو لپاره یوازې د موهومي برخې علامه تغیرو او د $a+bi$ د مختلط عدد ضربي معکوس $(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)$ دی.

پوښتنې

1- لاندې مختلط عددونه سره ضرب کړئ.

$(2+i)(3-2i)$, $(3+i)(3-i)$

$(-2+3i)(4-2i)$, $(2-5i)(2+5i)$

$(5+2i)(5-3i)$, $(\sqrt{6}+i)(6-i)$

$(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)$

2- د لاندې مختلطو عددونو ضربي معکوس پيدا کړئ.

$1-i$, $2+4i$, $5-3i$, $3a-4bi$, $(7,4)$

3- لاندې افادې تجزيه کړئ.

x^2+16 , x^2+8 , x^2+5 , x^2+7

4- د $(-3+2i)^2$ او $(2+i)^2$ قيمتونه په لاس راوړئ.

5- که $z=4-3i$ وي، $8z-z^2$ پيدا کړئ.

6- دا معادله حل کړئ. $x+yi=(2-3i)(2+3i)$.

7- وښاياست چې: $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ، د i مربع جذر دی.

8- وښاياست چې: $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ د $-i$ دريم جذر دی.

$$\frac{-2-2i}{-5+6i}=?$$

د دوو مختلطو عددونو ویش
Division of two complex numbers

آیا د $\frac{-2-2i}{-5+6i}$ د ویش حاصل (خارج قسمت) په لاس راوړلای شئ؟

څرنګه چې د $\frac{a+bi}{c+di}$ عدد په مخرج کې c حقیقي عدد او di موهومي عدد دی، نو لومړی باید مخرج په حقیقي عدد بدل کړو، ددې لپاره صورت او مخرج، د مخرج په مزدوج کې ضربوو چې دې عملیې ته ګویا کول (Rationalization) وایي.

لومړی مثال: د $\frac{4+3i}{2+5i}$ د ویش حاصل په لاس راوړئ.

حل: د $2+5i$ مزدوج $2-5i$ دی، صورت او مخرج د مخرج په مزدوج یا $2-5i$ کې ضربوو.

$$\frac{4+3i}{2+5i}=\frac{4+3i}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}=\frac{8-20i+6i-15i^2}{4-10i+10i-25i^2}=\frac{8-14i-15(-1)}{4-25(-1)}$$

$$=\frac{23-14i}{29}=\frac{23}{29}-\frac{14}{29}i$$

لیدل کیږي چې د ویش په حاصل کې حقیقي او موهومي برخې سره جلا دي.

فعالیت

د $\frac{3+2i}{5-i}$ او $\frac{1+i}{1-i}$ د ویش حاصلونه په لاس راوړئ او خپل ځوابونه په معیاري شکل ولیکئ.

تعریف

که $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وی، $\frac{z_1}{z_2}$ په لاندې ډول تعریف شوی دی.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2i^2} = \frac{ac + bd - (ad - bc)i}{c^2 + d^2}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - \frac{ad-bc}{c^2+d^2}i$$

دویم مثال: د $z_1 = 2 - 3i$ عدد پر $z_2 = 1 + i$ وویشـئ او بیا یې امتحان کړئ.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{1+i} = \frac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1-5i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$(1+i)\,(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i - \frac{1}{2}i - \frac{5}{2}i^2 = -\frac{1}{2} - 3i + \frac{5}{2} = 2 - 3i$$

دریم مثال: د $\frac{3+2i}{5-i}$ د ویش حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\frac{3+2i}{5-i} = \frac{(3+2i)\,(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{15 + 3i + 10i + 2i^2}{25 - i^2} = \frac{15 + 13i - 2}{25 + 1} = \frac{13 + 13i}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

که $z = x + yi$ او $w = x' + y'i$ دوه مختلط عددونه وی، نو $\frac{z}{w}$ داسې تعریف شوی دی.

$$\frac{z}{w} = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + \frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}i \quad , \quad (x'^2 + y'^2 \neq 0)$$

د یو مختلط عدد د مزدوج خاصیتونه:

که z_1 او z_2 دوه مختلط عددونه وي:

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$

4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

5) $z + \overline{z} = 2x$

6) $z - \overline{z} = 2yi$

7) $\overline{\overline{z}} = z$

لومړی مثال: که $z_1 = 4+5i$ او $z_2 = -3+2i$ وي وښایاست چې:

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ او $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

حل:

$$z_1 + z_2 = (4+5i)+(-3+2i) = 1+7i \;\Rightarrow\; \overline{z_1 + z_2} = 1-7i$$

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (4-5i)+(-3-2i) = 1-7i$$

په پایله کې $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = (4+5i)\cdot(-3+2i) = -12-10+(8-15)i = -22-7i$$

$$\Rightarrow \overline{z_1 \cdot z_2} = -22+7i$$

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (4-5i)\cdot(-3-2i) = -12-8i+15i+10i^2 = -12-8i+15i-10$$

$$= -22+7i$$

په پایله کې: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22+7i$

دويم مثال: که $z = x+yi$ وي $z+\overline{z}$ او $z-\overline{z}$ پیداکړئ.

حل: $z-\overline{z} = (x+yi)-(x-yi) = 2yi$, $z+\overline{z} = (x+yi)+(x-yi) = 2x$

فعالیت

که $z = 2+3i$ وي، $\overline{\overline{Z}}, Z+\overline{Z}$ او $Z-\overline{Z}$ پیداکړئ.

پوښتنې

1- د ویش حاصل یې پیدا کړئ:

$$\frac{1+i}{1-1} \quad , \quad \frac{3-4i}{2-5i} \quad , \quad \frac{5-2i}{6-i} \quad , \quad \frac{7-i}{3-5i}$$

2- که $z_1=-a-3bi$ و $z_2=2a-3bi$ وي. وښایاست چې:

$\overline{z_1 \cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ او $\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

3- د ویش حاصل پیداکړئ او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل ولیکئ.

$$a:\frac{2}{5-i} \qquad b:\frac{3-i}{2+i} \qquad c:\frac{2-3i}{3}$$

4- د $\dfrac{6+\sqrt{-36}}{3+\sqrt{-9}}$ د ویش حاصل مساوي دی په:

$a:1 \qquad b:2 \qquad c:3i \qquad d:-2$

5- خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل ولیکئ.

$$\frac{6}{1+3i} \quad , \quad \frac{-5}{2-3i} \quad , \quad \frac{3+4i}{4i}$$

$$\frac{3-2i}{-6+4i} \quad , \quad \frac{-4+8i}{2-4i} \quad , \quad \frac{7}{7-2i}$$

$$\frac{1}{i} \quad , \quad \frac{-4+8i}{2-4i}$$

د مختلطو عددونو په ساحه کې د دویمې درجې یو مجهوله معادلې حل:

$$x^2+x+4=0$$
$$x_1=?$$
$$x_2=?$$

آیا د $x^2+x+4=0$ معادلې جذرونه پیدا کولای شئ؟

د یوې دویمې درجې یو مجهوله معادلې عمومي شکل $ax^2+bx+c=0$ دی.

که $\Delta=b^2-4ac>0$ معادله دوه د مختلفو علامو لرونکي حقیقي جذرونه لري.

که $\Delta=0$ معادله دوه مختلط مساوي جذرونه لري.

که $\Delta<0$ معادله د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، خو د مختلطو عددونو په ساحه کې دوه جذرونه لري.

لومړی مثال: د $x^2-10x+26=0$ معادله حل کړئ.

حل: $a=1 \quad b=-10 \quad c=26$ دی.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot26}}{2\cdot1}=\frac{10\pm\sqrt{-4}}{2}$$
$$=\frac{10\pm2i}{2}=5\pm i \qquad \Rightarrow \qquad x_1=5+i \qquad x_2=5-i$$

فعالیت

دا جذرونه په پورتنۍ معادله کې وضع او امتحان یې کړئ.

دویم مثال: د $4x^2+4i\;x+15=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\Delta=b^2-4ac=(4i)^2-4\cdot4\cdot15=16i^2-240=-256$$
$$\pm\sqrt{\Delta}=\pm\sqrt{-256}=\pm\sqrt{256(-1)}=\pm16i$$

$$x_1=\frac{-4i+16i}{2\cdot 4}=\frac{12i}{8}=\frac{3}{2}i$$
$$x_2=\frac{-4i-16i}{8}=-\frac{5}{2}i$$

دريم مثال: $x^2+3ix-2=0$ معادله د محمد بن موسی د فورمول په مرسته، د مختلطو عددونو په ساحه کې حل کړئ.

$$\Delta=b^2-4ac=(3i)^2-4\cdot 1\cdot(-2)=3^2\cdot i^2+8=-9+8=-1$$
$$\pm\sqrt{\Delta}=\pm\sqrt{-1}=\pm i$$
$$x_{1,2}=\frac{-3i\pm i}{2\cdot 1}\qquad x_1=\frac{-4i}{2}=-2i\qquad x_2=\frac{-2i}{2}=-i$$

فعاليت

د $x^2+3=0$ ، $x^2-6x+18=0$ او $x^2-4x+13=0$ معادلې حل کړئ.

پوښتنې

1) هغه دويمه درجه معادله پيدا کړئ چې جذرونه يې $(3+2i)$ او $(3-2\,i)$ وي.

2) دا معادلې حل کړئ.

$$x^2-4x+13=0\ ,\ x^2-6x+18=0\ ,\ -4x^2+3x-5=0$$
$$x^2+8x+41=0\ ,\ x^4-1=0\ ,\ 3x^2+x+2=0$$

3) داسې دويمې درجې معادلې په لاس راوړئ چې جذرونه يې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

$2+5i\ ,\ 2-5i$	$1+i\ ,\ 1-i$
$4i\ ,\ -4i$	$5i\ ,\ -5i$
$2i\ ,\ 3i$	$i\ ,\ \frac{1}{i}$
$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i\ ,\ \frac{2}{3}-\frac{1}{2}i$	$2-i\ ,\ 2+i$

د څپرکي لنډيز

- منفی عددونه د حقیقي عددونو په سټ کې جفت جذرنه لري، خو د مختلطو عددونو په سټ کې منفي عددونه جفت جذر لري.
- مختلط عددونه د حقیقي او موهومي عددونو له یو ځای کیدو څخه په لاس راځي.
- د حقیقي عددونو مربع مثبت، خو د موهومي عددونو مربع منفي ده

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

- داسې عددونو ته چې $\sqrt{-1}$ یې یو فکتور وی، موهومی عددونه وایي.
- د مختلطو عددونو سټ C په لاندې ډول تعریف شوي دی:

$$C = \{z / z = a + bi, \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{IR}, \mathrm{i} = \sqrt{-1}$$

- د یو مختلط عدد معیاري شکل $\mathrm{z = a + bi}$ دی چې a ته د z د عدد حقیقي برخه او bi ته د z موهومي برخه وایي یا $a = \mathrm{Re}(z)$ او $\mathrm{bi} = \mathrm{Im\,g}(z)$
- د i د مختلفو توانونو د پیداکولو لپاره د i توان پر 4 ویشو چې له یوه سره مساوي کیږي او که پوره پرې نه ویشل کیږي، نو د i د توري توان پر 4 د ویشلو له پاتې (باقیمانده) سره مساوی دی، لکه:

$$(\mathrm{i})^{1379} = \mathrm{i}^{4\cdot 344} \cdot \mathrm{i}^3 = (1)(\mathrm{i})^3 = -\mathrm{i} \quad \text{یا} \quad i^{4k+r} = i^r$$

- که د $\mathrm{z = a + bi}$ په مختلط عدد کې $b = 0$ وي، نو a ته خالص حقیقي عدد او که $a = 0$ وي، bi ته خالص موهومي عدد وایي.
- هغه مختلط عدد چې حقیقي او موهومي برخې یې دواړه صفرونه وي، صفري مختلط عدد ورته وایي. $(\mathrm{a} = 0, \mathrm{b} = 0)$
- دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقیقي او موهومي برخې یو له بله سره مساوي وي. $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ او $\mathrm{Im}\,g(z_1) = \mathrm{Im}\,g(z_2)$
- د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل بل یو داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومی برخه یې د دواړو عددونو د موهومی برخو له مجموعې

شخه عبارت ده.

• د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل داسې یو مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د دواړو عددونو د موهومی برخو د تفریق له حاصل شخه عبارت ده.

• که $z_1 = x_1 + y_1 i$ او $z_2 = x_2 + y_2 i$ وي، نو د مختلطو عددونو د جمعې، تفریق، ضرب او ویش عملیې داسې تعریف شوي دي.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

$$z_1 . z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2} .i \quad , \quad (z_2 \neq 0)$$

• د $z = x + yi$ د مختلط عدد مزدوج له $\overline{Z} = x - yi$ شخه عبارت دی.

$$z\overline{z} = x^2 + y^2 \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$z + \overline{z} = 2x \qquad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$z - \overline{z} = 2yi \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

• د $z = a + bi$ د عدد جمعي معکوس $-a - bi$ دی او ضربي معکوس یې $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$ دی.

• $0 + 0i = (0,0)$ د مختلطو عددونو د جمعی د عملیې د عینیت عنصر او $1 + 0i$ د ضرب د عملیې د عینیت عنصر دی.

• هغه دویمه درجې معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري.

د دې فصل پوښتنې:

1) $(i)^{51}$ مساوي دی په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

2) i^{-98} موهومي عدد مساوي دی په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

3) i^{67} موهومي عدد مساوي دی په:

a) $-i$ b) 1 c) -1 d) i

4) $7i-4i$ مساوي دی په:

a) $-3i$ b) $3i$ c) 3 d) -3

5) $3i\cdot 4i$ مساوي دی په:

a) -12 b) 12 c) $12i$ d) $-12i$

6) $\dfrac{64i}{8i}$ مساوي دی په:

a) -8 b) 8 c) $8i$ d) $-8i$

7) $\dfrac{7}{9}i\cdot\dfrac{2}{9}i$ مساوي دی په:

a) $-\dfrac{14}{81}$ b) $\dfrac{14}{81}$ c) $-\dfrac{14}{81}i$ d) $\dfrac{14}{81}i$

8) $\dfrac{\sqrt{-11}}{\sqrt{-5}}$ مساوي دی په:

a) $\sqrt{\dfrac{11}{5}}$ b) $\dfrac{-11}{5}$ c) $\dfrac{-11}{5}i$ d) $\dfrac{11}{5}i$

9) $\dfrac{\sqrt{-1}\sqrt{5}}{\sqrt{-1}\cdot 5}$ مساوي دی په:

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ b) $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\dfrac{5}{3}i$ d) درې واړه سم نه دي

10) $-\frac{xi}{\sqrt{yi}}$ مساوی دی په :

a) $\frac{x}{\sqrt{y}}$ b) $\frac{-x}{\sqrt{y}}$ c) $\frac{xi}{\sqrt{y}}$ d) $\frac{x}{y}$

11) لاندي مختلط عددونه جمع کړئ.

$(3+4i)+(2+5i)$ ، $(a+bi)+(c+di)$

$(1+i)+(1-i)$ ، $(2+3i)+(2-3i)$

12) لاندي مختلط عددونه تفریق کړئ.

$(4+3i)-(4+4i)$ ، $(3-2i)-(3+2i)$

$(4+4i)-(4+3i)$ ، $(1+i)-(1-i)$

13) $(2a+ib)-(2a-ib)$ مساوي دي په:

a) $-ib$ b) $-2ib$ c) $2ib$ d) $4a$

14) $(2-3i)(2+3i)$ د ضرب حاصل مساوی دی په:

a) -13 b) $13i$ c) 13 d) $9i$

15) لاندي مختلط عددونه د $a+bi$ په شکل ولیکئ.

$4(2+5i)-(3-4i)$ ، $(4-3i)(2+i)$

$i(3-2i)^2$ ، i^{51}

16) که $z_1=2-4i$ او $z_2=1-i$ وي، وښایاست چې:

$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

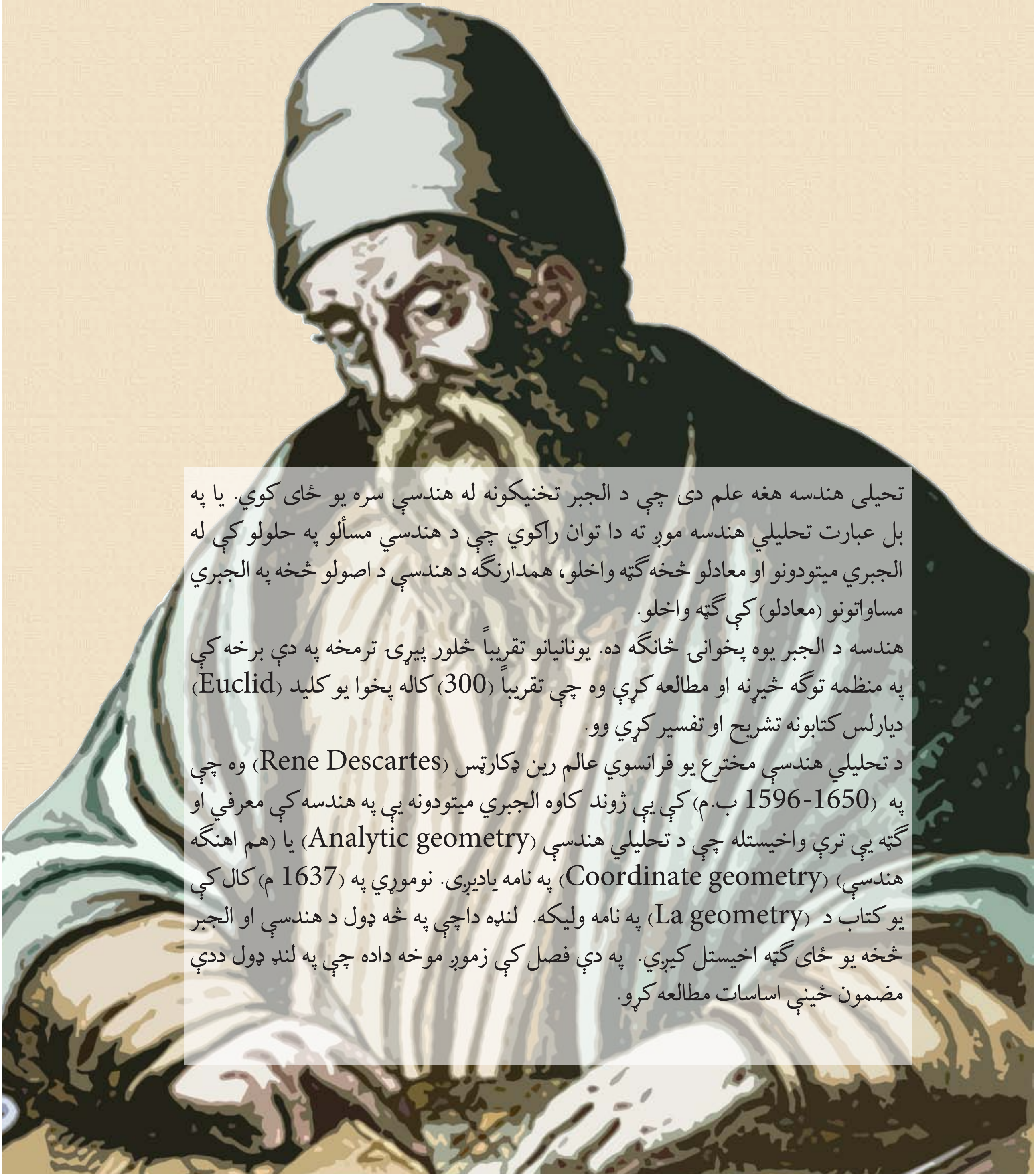
17) د لاندي مختلطو عددونو جمعي او ضربي معکوسونه پیدا کړئ.

$3x-\frac{1}{2}yi$ $2a-bi$ $2+5i$ $-7+3i$ $-6+2i$ $3-i$ $\sqrt{2}+i$

18) $5x^2+2x+1=0$ معادله حل کړئ.

اووم څپرکی

تحليلي هندسه

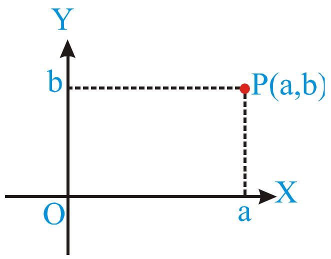


تحیلی هندسه هغه علم دی چې د الجبر تخنیکونه له هندسې سره یو ځای کوي. یا په بل عبارت تحلیلي هندسه موږ ته دا توان راکوي چې د هندسي مسألو په حلولو کې له الجبري میتودونو او معادلو څخه ګټه واخلو، همدارنګه د هندسې د اصولو څخه په الجبري مساواتونو (معادلو) کې ګټه واخلو.

هندسه د الجبر یوه پخوانۍ څانګه ده. یونانیانو تقریباً څلور پیړۍ ترمخه په دې برخه کې په منظمه توګه څیړنه او مطالعه کړې وه چې تقریباً (300) کاله پخوا یو کلید (Euclid) دیارلس کتابونه تشریح او تفسیر کړي وو.

د تحلیلي هندسې مخترع یو فرانسوي عالم رین ډکارټس (Rene Descartes) وه چې په (1596-1650 ب.م) کې یې ژوند کاوه الجبري میتودونه یې په هندسه کې معرفي او ګټه یې ترې واخیستله چې د تحلیلي هندسې (Analytic geometry) یا (هم اهنګه هندسې) (Coordinate geometry) په نامه یادیږي. نوموړي په (1637 م) کال کې یو کتاب د (La geometry) په نامه ولیکه. لنډه داچې په څه ډول د هندسې او الجبر څخه یو ځای ګټه اخیستل کیږي. په دې فصل کې زموږ موخه داده چې په لنډ ډول ددې مضمون ځینې اساسات مطالعه کړو.

د وضعیه کمیاتو سیستم یا
کوارډنټ سیستم
(Coordinate system)



آیا د $(0,-1)$ ، $(2,2)$ ، $(-4,7)$ ، $(2,0)$ او د $(0,-2)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکلای شئ؟

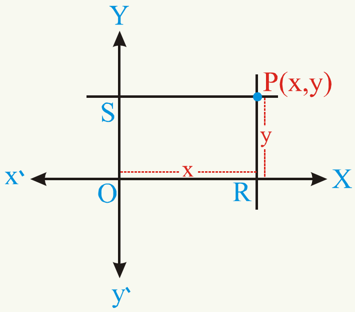
فعالیت

د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د XX' او YY' یو پر بل دوه عمود خطونه رسم کړئ. ددې دوو خطونو د تقاطع ټکي (نقطې) ته (O) و وایې چې د O نقطې ته د وضعیه کمیاتو د محورونو مبدا (Origin) وایې.

دوه یو پر بل عمود خطونه د کوارډنټ د محورونو (Coordinate axises) په نامه یادیږي. چې د XOX' افقي خط د X محور او د YOY' عمودي خط د Y له محور څخه عبارت دی. ښکاره ده ټول عددونه چې د X پر محور د مبدا ښي خواته واقع دي، مثبت او که د مبدا کیڼې خواته واقع وي، منفي دي. همدارنګه هغه عددونه چې د Y پر محور له مبدا پورته واقع دي، مثبت او که له مبدا لاندې واقع دي، منفي عددونه دي.

فرضوو چې که p په مستوي کې یوه نقطه وي، کولای شو چې د p نقطه د یوې مرتبې جوړې $(OrderPair)$ په واسطه وښایو. په دې ډول چې د p له نقطې څخه د X ا و Y له محورونو سره موازي مستقیم خطونه رسموو. چې دا مستقیم خطونه د Y محور د S په نقطه کې او د X محور د R په نقطه کې قطع کوي. چې د $\overline{OR}$ مستقیمه فاصله $\overline{OR}=x$ او $\overline{OS}=y$ ده. په نتیجه کې د p د نقطې موقعیت د (x,y) د مرتبې جوړې په واسطه د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکل کیږي.

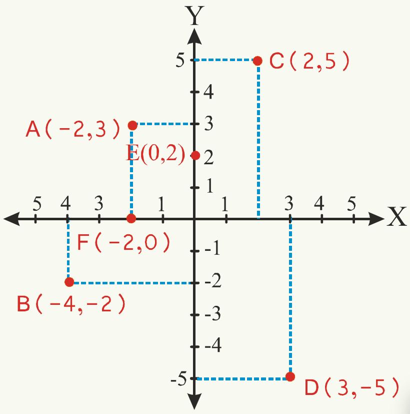
په مستوي کې هره مرتبه جوړه د یوې نقطې په واسطه او د مستوي هره نقطه د (x,y) د حقیقي عددونو د مرتبې جوړې په واسطه ښودل کیږي. چې x او y د X او Y له محورونو څخه د p



نقطې مستقيمې فاصلې دي، چې دې سيستم ته کارتيزني يا کوارډنټ سيستم (Coordinate System) وايي.
د مرتبې جوړې لومړنی مرکبې ته د x مختصه او دويمې ته د y مختصه (Y-Coordinate) وايي. د کوارډنټ محورونه مستوي په څلورو ناحيو (ربعو) (quadrants) ويشي. په دې ډول چې په لومړنی ناحيه (ربعه) کې، $x>0$ $y>0$ په دويمه ربعه کې $x<0$ ، $y>0$ په دريمه ربعه کې $x<0$ ، $y<0$ او په څلورمه ربعه کې $x>0$ او $y<0$ دي.

لومړی مثال: د $A(-2,3)$ ، $B(-4,-2)$ ، $C(2,5)$ $D(3,-5)$ $E(0,2)$ او $F(-2,0)$ نقطې د وضعيه کمياتو په سيستم کې وټاکئ.

حل:



فعاليت

- وښاياست کومې نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د y مختصه يې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي، د x مختصه يې صفر ده.
- ووایاست چې د (2,3)، (−2,3)، (2,−3)، (−2,−3)، (0,4) او (4,0) نقطې په کومو ربعو کې واقع دي.

د دوو نقطو ترمنځ فاصله (Distance between two points):

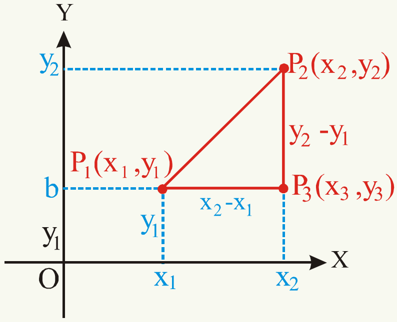
آيا کولای شئ چې و واياست، د $A(4,8)$ او $B(1,2)$ د نقطو تر منځ فاصله څو واحده ده؟
که $P_1\ (x_1\,, y_1)$ او $P_2\ (x_2\,, y_2)$ په مستوي کې دوې نقطې وي. موږ کولای شو چې د P_1 او

P_2 ترمنځ فاصله یا $d = |P_1 P_2|$ د دوو نقطو ترمنځ فاصله د $\overset{\Delta}{P_1 P_2 P_3}$ د قایم الزاویه مثلث له مخې د فیثاغورث د قضیې په اساس پیدا کړو، لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کیږي.

$$(\overline{P_1 P_2})^2 = (\overline{P_1 P_3})^2 + (\overline{P_2 P_3})^2$$

$$d = |P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

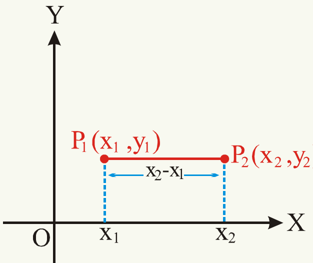


پام مو وي چې که د $P_1\ (x_1, y_1)$ او $P_2\ (x_2, y_2)$ نقطې پر افقي خط باندې واقع وي، په دې حالت کې $y_1 = y_2$ کیږي لکه څرنګه چې د (a) په شکل کې لیدل کیږي.

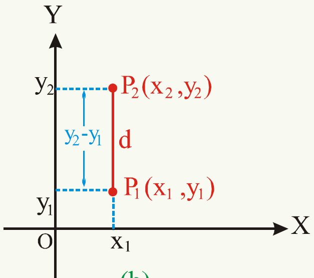
$$d = |P_1 P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0} = |x_2 - x_1|$$

او که د P_1 او P_2 نقطې پر عمودي خط باندې واقع وي، په دې حالت کې $x_1 = x_2$ دی لکه چې د (b) په شکل کې ښودل شوي دي.

$$d = |P_1 P_2| = \sqrt{0 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)} = |y_2 - y_1|$$



(a)



(b)

دویم مثال: د $P_1\ (3, -2)$ او $P_2\ (-1, -5)$ د نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

حل:

$$\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(-1-3)^2+[-5-(-2)]^2}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$$

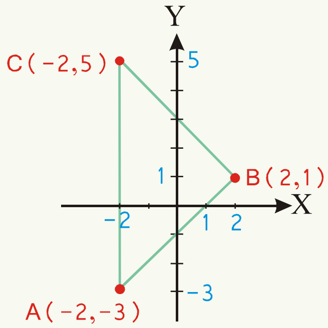
فعالیت

د $P_1\,(8,0)$ او $P_2\,(2,0)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

دریم مثال: د فاصلې د فورمول په مرسته وښایاست چې $A(-2,-3)$ ، $B(2,1)$ او $C(-2,5)$ د یو قایم الزاویه مثلث رأسونه دي.

حل:

$$|AB|=\sqrt{[2-(-2)]^2+[1-(-3)]^2}=\sqrt{32}$$
$$|BC|=\sqrt{(-2-2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{32}$$
$$|CA|=\sqrt{[-2-(-2)]^2+[5-(-3)]^2}=\sqrt{64}$$
$$|AB|^2+|BC|^2=32+32=64$$
$$|CA|^2=64$$



خرنگه چې: $|CA|^2=|AB|^2+|BC|^2$ نو د : $A\overset{\Delta}{B}C$ مثلث یو قایمه زاویه مثلث دی.

فعالیت

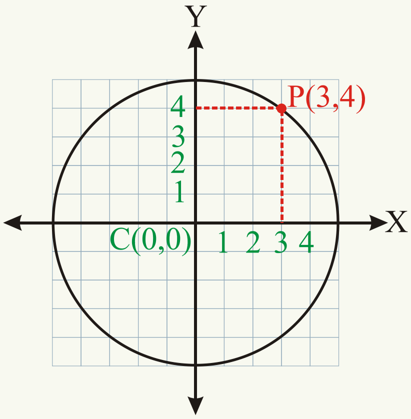
وښایاست چې $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ نقطې د قایمه زاویه مثلث راسونه دي.

څلورم مثال: که $C(0,0)$ د دایرې مرکز او د $P(3,4)$ نقطه د دایرې د محیط یوه نقطه وی،

ددې دایرې د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

حل:

$$\overline{PC} = R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2}$$
$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د Y مختصه یې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د X مختصه یې صفر ده.

د $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ دوو نقطو تر منځ فاصله د $d = PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

پوښتني

1- په لاندې راکړل شوو نقطو کې د کومې نقطې فاصله د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه 15 واحده ده؟

$a:(\sqrt{176},7)$

$b:(10,-10)$

$C:(1,15)$

$d:(\frac{15}{2},\frac{15}{2})$

2- وښایاست چې د $A(0,2)$ ، $B(\sqrt{3},1)$ و $C(0,-2)$ نقطې د یو قایمه زاویه مثلث راسونه دي.

3 - د $(0,5)$ او $(0,-3)$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

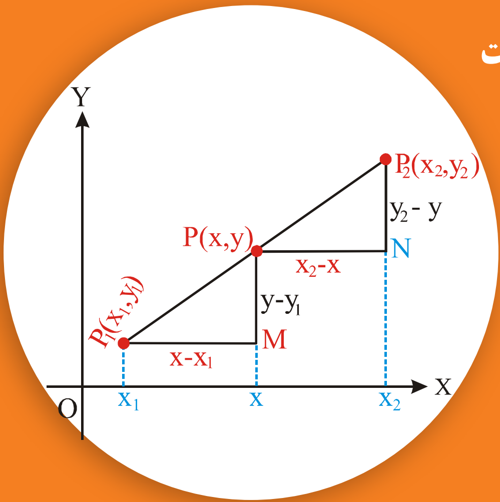
4 - د $A(-\frac{1}{2},3)$ او $B(-1,\frac{-3}{4})$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

5 - د $(7,11)$ او $(1,3)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

6 - د $(3,6)$ او $(1,2)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

7 - د $(3,7)$ او $(12,19)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

د هغې نقطې د وضعیه کمیاتو پیدا کول چې یو قطعه خط په یوه نسبت باندې ویشي:



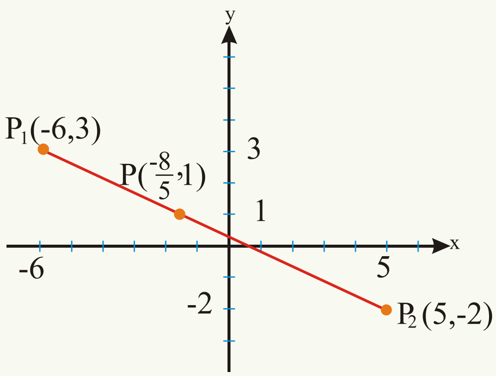
آیا کولای شئ د هغه مستقیم خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، چې د $A(3,1)$ او $B(-2,4)$ له نقطو څخه تیریږي؟

که د p د نقطې وضعیه کمیات (x,y) وي چې د $\overline{P_1P_2}$ مستقیم خط د r په نسبت ویشي یا $\frac{P_1P}{PP_2}=r$ وي. د $P_1\overset{\Delta}{M}P$ او $P\overset{\Delta}{N}P_2$ د مثلثونو له مشابهت څخه لرو چې:

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{PM}{P_2N}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=r$$
$$y-y_1=ry_2-ry$$
$$y+ry=ry_2+y_1$$
$$(1+r)y=ry_2+y_1$$
$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{P_1M}{PN}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=r$$
$$x-x_1=rx_2-rx$$
$$x+rx=rx_2+x_1$$
$$(1+r)x=rx_2+x_1$$
$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$$

لومړی مثال: د P نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، که هغه مستقیم خط چې د $P_1(-6,3)$ او $P_2(5,-2)$ له نقطو څخه تیریږي د $\frac{2}{3}$ په نسبت و ویشي یا $\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{2}{3}$ وي.

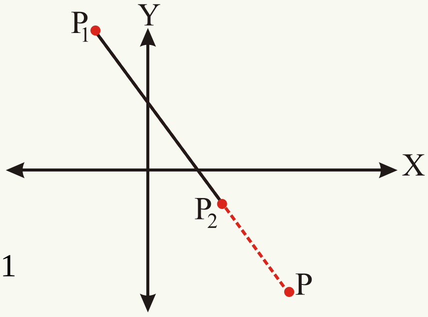


حل:

$$x_1=-6\,, \quad x_2=5\,, \quad r=\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 5-6}{1+\frac{2}{3}}=-\frac{8}{5}$$

$$y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(-2)+3}{1+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{-4}{3}+3}{1+\frac{2}{3}}=1$$



نو د p نقطي وضعيه کميات $P(\frac{-8}{5},1)$ دي چې د $\overline{P_1P_2}$ خط د $\frac{2}{3}$ په نسبت ويشي.

متوجه بايد اوسو چې که د p نقطه قطعه خط داخلاً د $\overline{P_1P_2}$ په نسبت و ويشي، $r>0$ او که خارجاً يې و ويشي، نو $r<0$ دی.

د مثال په ډول په شکل کې ليدل کيږي چې که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه داخلاً د r په نسبت وويشي يا په بل عبارت که P_1P او PP_2 همجهت وي، $r>0$ او که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د r په نسبت وويشي يا داچې P_1P او PP_2 مختلف الجهت وي، $r<0$

دی. $\frac{P_1P}{PP_2}=-r$ لکه چې په پورتني شکل کې ليدل کيږي.

دويم مثال: د p د نقطي وضعيه کميات پيدا کړئ، که هغه مستقيم خط چې د $P_1(-8,4)$ او $P_2(2,-1)$ له نقطو څخه تيريږي.

a: داخلاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت و ويشي. b: خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت و ويشي.

د a حل: $r=\frac{2}{3}$

$$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 2-8}{1+\frac{2}{3}}=\frac{-20}{5}=-4\,,\quad y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(-1)+4}{1+\frac{2}{3}}=\frac{10}{5}=2$$

نو د p د نقطي وضعيه کميات چې د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط داخلاً د $\frac{2}{3}$ په نسـبت ویشــي له $(-4,2)$ څخه عبارت دي

د b حل: ځرنګه چې د p نقطه د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت ویشي، نو:

$$r = -\frac{2}{3}$$

$$x = \frac{(\frac{-2}{3})\cdot 2 - 8}{1 - \frac{2}{3}} = -28 \quad , \quad y = \frac{(\frac{-2}{3})(-1) + 4}{1 - \frac{2}{3}} = 14$$

نو د p د نقطی وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت ویشي له $(-28,14)$ څخه عبارت دي.

فعالیت

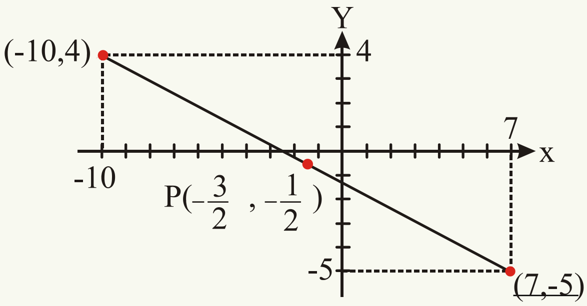
د p د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، په داسې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4,6)$ او $B(-2,3)$ له نقطو څخه تیریږي، داخلاً د $\frac{1}{2}$ په نسبت و ویشي.

که د p نقطه د $\overline{P_1 P_2}$ د مســتقيم خط د تنصيف نقطه وي، په دې حالت کې $r = 1$ دی او د p نقطي وضعيه کميات عبارت دي له: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ او $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

دریم مثال: د هغه قطعه خط د تنصيف د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $(-10,4)$ او $(7,-5)$ له نقطو څخه تیریږي.

حل:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-10 + 7}{2} = -\frac{3}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4 - 5}{2} = -\frac{1}{2}$$



د p د نقطې وضعیه کمیات چې د P_1P_2 قطعه خط د r په نسبت ویشي

د $y = \frac{ry_2 + y_1}{1+r}$, $x = \frac{rx_2 + x_1}{1+r}$ او د P_1P_2 د قطعه خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات

عبــارت دي له: $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ ، $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط داخلاً د r

په یو نسبت و ویشي، نو r مثبت او که خارجاً یې و ویشي، نو r منفي دی.

پوښتنې

1 - د $\overline{AB}$ مستقیم خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات $(2,-1)$ دي، که $A(-1,-3)$ وي،

د B د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

2 - د هغــه قطعــه خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $A(3,1)$ او $B(-2,-4)$

له نقطو څخه تیریږي.

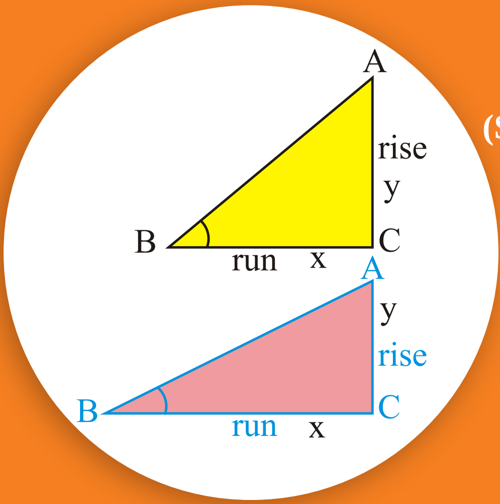
3 - د هغــه نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ په داســې حــال کې هغه قطعه خط چې د $A(4,6)$ او

$B(-2,3)$ له نقطو څخه تیریږي

a: داخلاً یې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و ویشي. b: خارجاً یې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و ویشي.

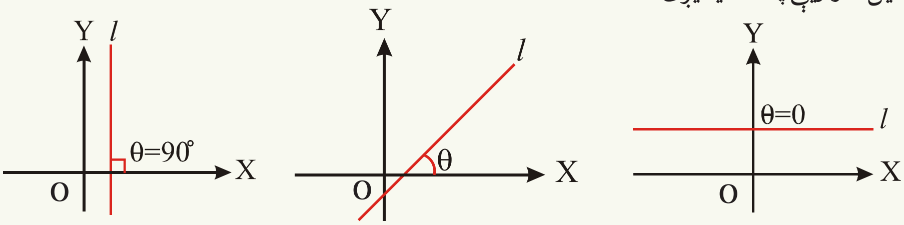
د یو مستقیم خط میل

(Slope of a straight Line)



کـولای شـئ چـې وواییـئ د کومـې مایلې سطحې میل زیات دی؟

د θ زاویه چې د l مستقیم خط یې د X د محور له مثبت جهت سره جوړوي، د مستقیم خط د میل د زاويې په نامه یادیږي.



لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کیږي که د l خط د X له محور سره موازي وي $\theta = 0$ او که د Y له محور سره موازي وي، نو $\theta = 90°$ ده.

څه وخت چې موږ پر مایله سطحه (inclined plane) پورته خواته حرکت کوو، په یو وخت کې افقي فاصله (run) او عمودي فاصله (rise) طی کوو. که د AB د مستقیم خط میل په m و ښایو.

$$m = \frac{rise}{run} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

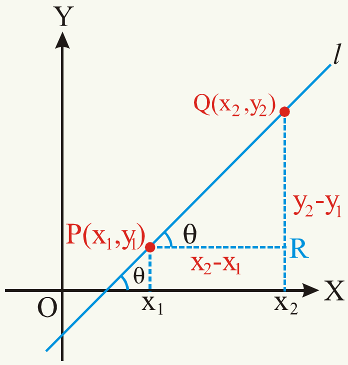
یا په بل عبارت د مستقیم خط د میل د زاويې ټانجانت د مستقیم خط له میل څخه عبارت دی. که $0 < \theta < 90°$ وي، نو د مستقیم خط میل مثبت او که $90° < \theta < 180°$ وي میل منفي دی او کـه $\theta = 0$ وي $\tan 0° = 0$ دی، نـو میل یې صفر او که $\theta = 90°$ وی، نو په دې حالت کې د مستقیم خط میل تعریف شوی نه دی څکه چې $\tan\ 90°$ تعریف شوی نه دی.

فعالیت

د X او Y د محورونو د میل په برخه کې څه فکر کوئ؟

د هغه مستقیم خط میل چې عمود نه وي او د $P(x_1 y_1)$ او $\theta(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تیریږي.
$m = \tan\theta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ دی، څکه لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کیږي.

$$\hat{RPQ} = \hat{\theta}$$
$$\overline{PR} = x_2 - x_1$$
$$\overline{QR} = y_2 - y_1$$
$$m = \tan\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



که د A، B، او C درې نقطې داسې ولرو چې د $\overline{AB}$ د مستقیم خط میل د $\overline{BC}$ د مستقیم خط له میل سره مساوي وي، نو د A، B، او C نقطې په یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

لومړی مثال: د هغه مستقیم خط میل پیداکړئ چې د $P_1\ (2,4)$ او $P_2\ (6,10)$ له نقطو څخه تیریږي.

حل:

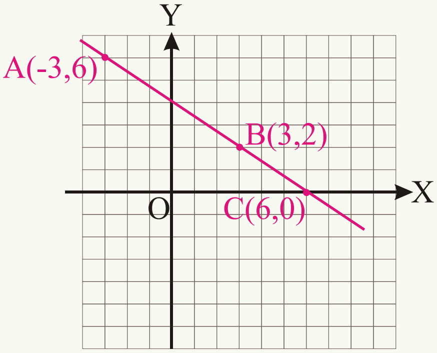
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-4}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

یا:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4-10}{2-6} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: و ښایاست چې د $A(-3,6)$، $B(3,2)$ او $C(6,0)$ درې نقطې پر یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

$$\text{د } \overline{AB} \text{ د مستقیم خط میل} = \frac{2-6}{3-(-3)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$



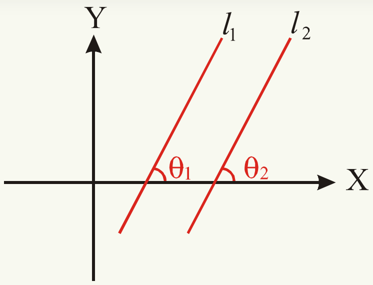
د $\overline{BC}$ مستقیم خط میل $= \dfrac{0-2}{6-3} = -\dfrac{2}{3}$

څرنګه چې د $\overline{AB}$ او $\overline{BC}$ مستقیمو خطونو میلونه سره مساوي دي.نو د A، B، او C نقطې په یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

نتیجه: د یوه مستقیم خط میل د مستقیم خط په ټولو نقطو کې سره مساوي دی.

فعالیت

- د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(-2,4)$ او $(5,1)$ له نقطو څخه تیریږي.
- د مستقیم خط د میل په مرسته وښایاست چې د $(4,-5)$ ، $(7,5)$ او $(10,15)$ نقطې پر یوه مستقیم خط پرتې دي.



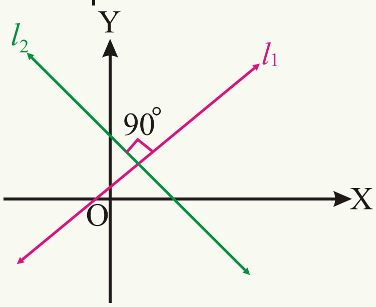
که د l_1 او l_2 دوه مستقیم خطونه وي او میلونه یې په ترتیب سره m_1 او m_2 وي، نو:

1- که l_1 د l_2 ســره موازي وي $m_1 = m_2$ دی.

ځکه چې د شکل مطابق $\theta_1 = \theta_2$ دی

$$\tan\theta_1 = \tan\theta_2$$

$$m_1 = m_2$$



2- که l_1 او l_2 یو پر بل عمود وي، نو:

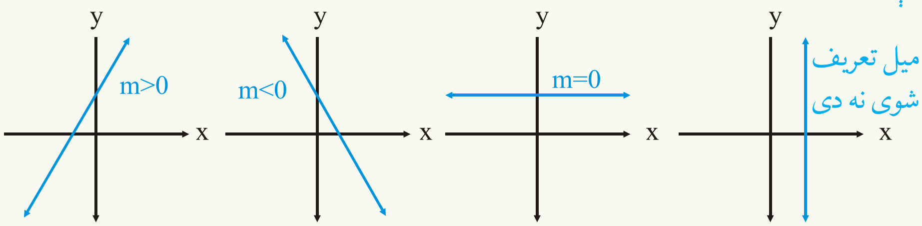
$m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$ یا $m_1 m_2 + 1 = 0$ یا

$m_1 \cdot m_2 = -1$ دی.

د یــو مســتقیم خــط میــل چــې د $P_1(x_1, y_1)$ او د $P_2(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تیریږي، د

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ لــه فورمول څخه پــه لاس راځي د X د محور او د هغه مســتقیمو

خطونو میل چې د X له محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغه مستقیمو خطونو میل چې د Y له محور سره موازي وي تعریف شوي نه دی که د یوه مستقیم خط د میل زاویه حاده وي، میل یې مثبت او که منفرجه وي، میل یې منفي دی او که د مســتقیم خط د میل زاویه صفر وي میل یې صفر دی.



پوښتنې

1 - د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(3,-2)$ او $(2,7)$ له نقطو څخه تیریږي.

2 - که $A(8,6)$ ، $B(-4,2)$ او $C(-2,-6)$ د یــو مثلث رأســونه وي، د مثلث د هرې ضلعې میل پیدا کړئ.

3 - د مستقیم خط د میل په مرسته و ښایاست چې د $(a,2b)$ ، $(c,a+b)$ او $(2c-a,2a)$ نقطې پر یو مستقیم خط باندې واقع دي.

4 - د $\overline{AB}$ مســتقیم خط چې د $A(1,-2)$ او $B(2,4)$ له نقطو او د $\overline{CD}$ مســتقیم خط چې د $C(4,1)$ او $D(-8,2)$ له نقطو څخه تیریږي، دا دواړه خطونه سره:

a: موازي دي　　b: عمود دي　　c: هیڅ یو

5 - د $y=3$ مستقیم خط او د $x=3$ مستقیم خط یو له بله سره څه اړیکه لري؟

a - موازي دي　　b - عمود دي　　c - هیڅ یو

6 - د $x=-1$ او $x=3$ خطونه سره: a - موازي دي　　b - عمود دي　　c - هیڅ یو

7 - د $y=-\sqrt{3}$ د مستقیم خط میل مساوي دی په:

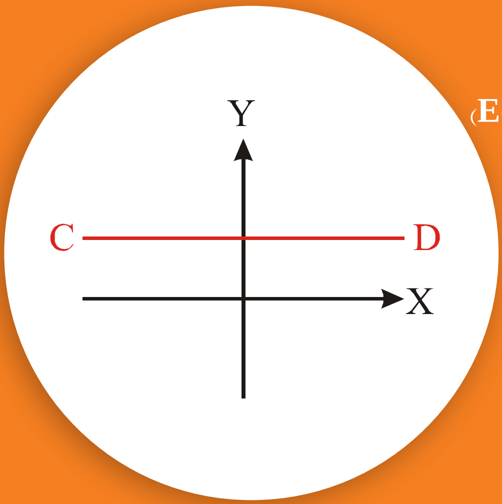
a - 1　　b- صفر　　c- -1　　d- تعریف شوی نه دی

8 - $x=0{,}03$ دمستقیم خط میل مساوي دی په:

a - 1　　b- صفر　　c- -1　　d- تعریف شوی نه دی.

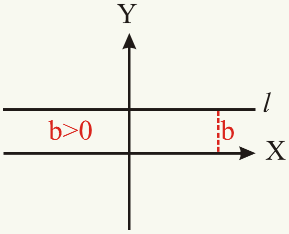
د یو مستقیم خط معادله

(Equation of a straight Line)



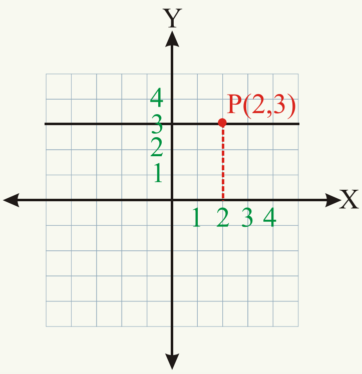
آیا کولای شئ د $\overline{CD}$ د مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د X له محور سره موازي دی.

1–د هغه مستقیم خط معادله چې د X له محور سره موازي وي.



ټولې نقطې چې د l پر مستقیم خط پرتې وي، د X له محور څخه مساوي فاصلې لري یا په بل عبارت د ټولو هغه نقطو د y مختصه چې د X له محور سره پر موازي خط واقع دي سره مساوي ده. که د X له محور څخه د l د خط فاصلې ته (b) و وایو د l د مستقیم خط معادله $y = b$ ده.

که $b > 0$ وي، نو د l خط د X له محور څخه پورته او که $b < 0$ وي، نو د l خط د X له محور لاندې او که $b = 0$ وي، نو د l خط د X پر محور پروت دی.



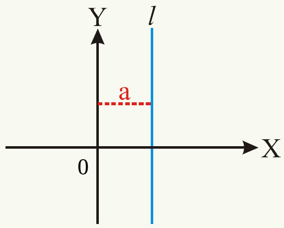
لومړی مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د (2,3) له نقطې څخه تیریږي او د X له محور سره موازي وي.

حل: $y = 3$ ددې خط معادله ده

فعالیت

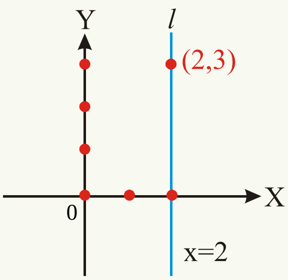
د X د محور معادله پیدا کړئ.

2 - **د هغه مستقيم خط معادله چې د Y له محور سره موازي وي**: ټولې نقطې چې



د l پر خط چې د Y له محور سره موازي دی پرتې وي، د Y له محور څخه مساوي فاصلې لري که د Y له محور څخه د l د مستقيم خط فاصلې ته a و وايو چې a ددې نقطو لومړنی مختصه ده، نو د l د خط معادله $x = a$ ده.

که $a > 0$ وي د l خط د Y د محور ښي خواته او که $a < 0$ وي د l خط د Y د محور کيڼې خواته او که $a = 0$ وي، نو د l خط د Y پر محور منطبق دی.



دويم مثال: د هغه مستقيم خط معادله پيدا کړئ چې د (2,3) له نقطې څخه تير شي او د Y له محور سره موازي وي.

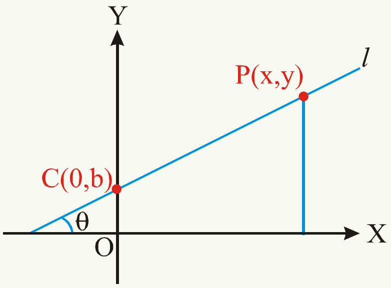
حل: $x = 2$ ددې خط معادله ده.

فعاليت

د Y د محور معادله وليکئ.

3. **د هغه مستقيم خط معادله چې ميل او د Y له محور سره يې د تقاطع نقطه معلومه وي يا د مستقيم خط معياري معادله**:

که $P(x,y)$ د l مستقيم خط يوه نقطه وي او $C(0,b)$ له Y د محور سره د مستقيم خط د تقاطع نقطه وي، نو د l د مستقيم خط ميل عبارت دی له:



$$m = \frac{y-b}{x-0} = \frac{y-b}{x}$$

$$y - b = mx \text{ يا } y = mx + b$$

که $b=0$ وي، مســتقیم خط معادله $y = mx$ ده چې په دې حالت کې مســتقیم خط د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تیرېږي.

دریم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې:

a- میل یې 2 او د Y محور په 5 کې قطع کړي.

b- د Y محور په $\frac{4}{3}$ کې قطع کړي او پر هغه خط عمود وي، چې میل یې -6 دی.

حل:

a: $m=2$ او $b=5$ $\qquad y = mx + b \Rightarrow y = 2x + 5$

b: ددې خط میل $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-6} = \frac{1}{6}$

$b = \frac{4}{3}$ او $m = \frac{1}{6}$ دی؛ نو:

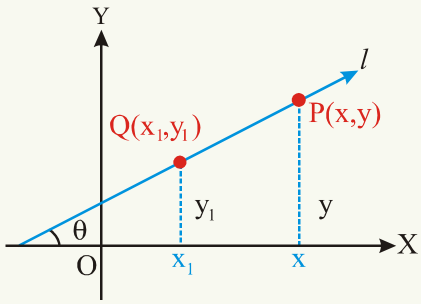
$$y = mx + b \Rightarrow y = \frac{1}{6}x + \frac{4}{3}$$

دا معادله کولای شو، د $6y = x + 8$ ، $6y - x = 8$ او یا $x - 6y + 8 = 0$ په شکل ولیکو.

4 - د هغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي:

د l د مستقیم خط معادله چې میل یې m او د $Q(x_1, y_1)$ له نقطې څخه تیرېږي.

که $p(x,y)$ د l د مســتقیم خط یوه اختیاري نقطه وي. څرنګه چې د $Q(x_1, y_1)$ او $P(x,y)$ نقطې په یوه مستقیم خط واقع دي، نو د l د مستقیم خط میل مساوي دی په:



$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

څلورم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ، چې میل یې (-2) او د $(5,1)$ له نقطې څخه تیریږي.

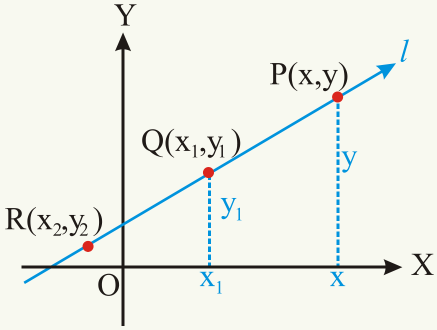
حل:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = -2(x - 5)$$
$$y = -2x + 11$$

یا $2x + y - 11 = 0$

5: **د هغه مستقیم خط معادله چې دوي نقطې یې معلومې وي**:

د l د خط میل چې عمود نه وي، د $Q(x_1, y_1)$ او $R(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تیریږي او $P(x, y)$ ددې خط یوه کیفي نقطه وي د مستقیم خط میل په هره نقطه کې سره مساوی دی، نو لرو چې:



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

یا $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

پنځم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(-2,1)$ او $(6,-4)$ له نقطو څخه تیریږي.

حل:

$$x_1 = -2 \quad , \quad y_1 = 1$$
$$x_2 = 6 \quad , \quad y_2 = -4$$

$$y - 1 = \frac{-4 - 1}{6 - (-2)}[x - (-2)]$$

$y - 1 = \dfrac{-5}{8}(x + 2)$ یا $5x + 8y + 2 = 0$

6: **د هغه مستقیم خط معادله چې له محورونو سره یې تقاطع معلومه وي**:

که $P(x, y)$ د l د مستقیم خط یو ه کیفي نقطه وي او د l مستقیم خط د X محور په a کې او د Y محور په b کې قطع کړي یا د X محور د $A(a,0)$ او د Y محور د $B(0,b)$ په نقطه کې قطع کوي چې د B ، A او p نقطې د l پر مستقیم خط واقع دي.

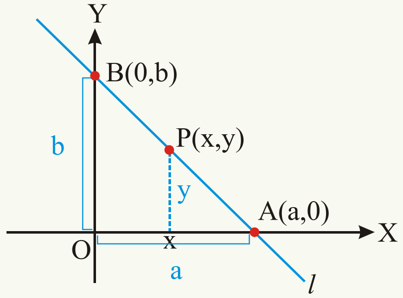
د هغه مستقيم خط له معادلې شخه چې دوې نقطې يې معلومې وي لرو چې:

$x_1 = a \ , \ y_1 = 0 \quad x_2 = 0 \ , y_2 = b$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \ , \ y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x-a) \Rightarrow -ay = b(x-a)$$

$$-ay = bx - ab$$

$$bx + ay = ab$$



دواړه خواوې پر ab ویشو

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

شپږم مثال: د هغه مستقيم خط معادله پیداکړئ چې د x محور په $(2,0)$ او د Y محور په $(0,-4)$ کې قطع کوي.

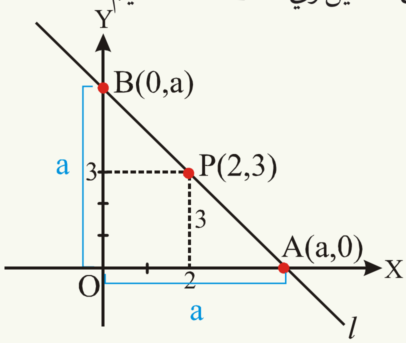
حل: $a = 2$ او $b = -4$ ده.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$$

$2x - y - 4 = 0$ یا

اووم مثال: په شکل کې که د $O\overset{\Delta}{A}B$ مثلث متساوی الساقین وي، د $\overline{AB}$ د مستقيم خط معادله په داسې حالت کې پیداکړئ چې ددې مثلث د $\overline{AB}$ ضلعه د $P(2,3)$ له نقطې شخه تېرېږي.



حل: د $\overline{AB}$ د مستقيم خط ميل مساوي دی په:

$$\overline{AB} \text{ د مستقيم خط ميل} = \frac{a-0}{0-a} = -1$$

نو اوس د هغه مستقيم خط معادله چې ميل يې (-1) او د $P(2,3)$ له نقطې څخه تيريږي عبارت ده له:

$$y-3=-1(x-2) \quad \text{يا} \quad x+y-5=0$$

د هغه مستقيم خط معادله چې ميل او د Y له محور سره يې تقاطع معلومه وي عبارت ده له:

$y=mx+b$ د هغه مستقيم خط معادله چې ميل او يوه نقطه يې معلومه وي عبارت ده له:

$y-y_1=m(x-x_1)$ ، د هغه مستقيم خط معادله چې دوې نقطې يې معلومې وي عبارت ده

له: $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ او د هغه مستقيم خط معادله چې له محورونو سره يې د

تقاطع نقطې معلومې وي: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ ده.

پوښتني

1- د لاندې مستقيمو خطونو معادلې پيداکړئ چې:

a: د هغه افقي خط معادله پيداکړئ چې د $(7,-9)$ له نقطې څخه تيريږي.

b: د هغه مستقيم خط معادله چې د X پر محور عمود او د $(-5,3)$ له نقطې څخه تيريږي.

2 - د لاندې مستقيمو خطونو معادلې پيداکړئ چې:

a: چې ميل يې 7 او د $(-6,5)$ له نقطې څخه تير شي.

b: چې ميل يې صفر او د $(8,-3)$ له نقطې څخه تيريږي.

c: د $(-8,5)$ له نقطې څخه تيريږي او ميل يې تعريف شوى نه وي.

d: چې د $(-5,-3)$ او $(9,-1)$ له نقطو څخه تيريږي.

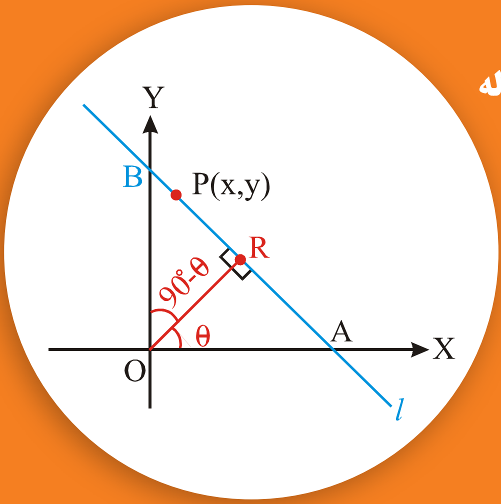
e: چې ميل يې -4 او د Y محور په -9 کې قطع کړي.

3 - د هغه مثلث د ضلعو معادلې پيداکړئ چې راسونه يې $A(-3,2)$ ، $B(5,4)$ او $C(3,-8)$ وي.

4 - د هغه مستقيم خط معادله پيداکړئ چې د $(-4,-6)$ له نقطې څخه تيريږي او پر هغه خط عمود وي چې ميل يې $\dfrac{-3}{2}$ وي.

5 - د هغه مستقيم خط معادله پيداکړئ چې د $(11,-5)$ له نقطې څخه تيريږي او له هغه خط سره موازي وي چې ميل يې -24 وي.

7 - د یوه مستقیم خط نورمال معادله



آیا ویلای شـئ د یوه مسـتقیم خط نورمال خط

کوم خط ته وایي؟

د l د مسـتقیم خط معادله که p د هغه عمود خط اوږدوالی وي چې د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د l پر خط عمود وي او θ د عمود خط د میل زاویه وي.

عبارت ده له: $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ یا $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$

د l مسـتقیم خـط د X محـور د A پـه نقطه کې او د Y محـور د B په نقطه کې قطع کوي، که $P(x,y)$ د $\overline{AB}$ د مسـتقیم خط یوه کیفي نقطه وي او د $\overline{OR}$ خط د l پر خط عمود وي، نو: $\left|\overline{OR}\right| = P$ دی چې د $\overline{OR}$ خط ته د l د خط نورمال خط وایي او P د نورمال اوږدوالی دی.

د $\overset{\Delta}{ORA}$ او $\overset{\Delta}{ORB}$ په قایمه زاویه مثلثونو کې لرو چې:

$$\cos\theta = \frac{P}{OA} \quad \text{یا} \quad OA = \frac{P}{\cos\theta}$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{P}{OB} \quad \text{یا} \quad OB = \frac{P}{\cos(90^\circ - \theta)} = \frac{P}{\sin\theta}$$

څکه چې له مثلثاتو پوهیږو: $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

خرنګه چې د $\overline{AB}$ مسـتقیم خط د X محور په $(OA,0)$ او د Y محور په $(0,OB)$ کې قطع کوي، نو د $\overline{AB}$ د مستقیم خط معادله عبارت ده له:

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1$$

$$\frac{\frac{x}{\frac{P}{\cos\theta}}}{}+\frac{y}{\frac{P}{\sin\theta}}=1$$

یا:

$$x\cos\theta + y\sin\theta = P$$

چې $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ یا $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$ د l د مستقیم خط نورمال معادله ده.

لومړی مثال: که د هغه عمود خط اوږدوالی چې د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د l پرخط عمود وي 5 واحده وي او ددې عمود خط د میل زاویه $120°$ وي، د l د مستقیم خط میل، نورمال معادله یې او د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه پیدا کړئ.

حل: $\theta = 120°$ او $P = 5$ دی.

$$x\cos120° + y\sin120° = 5$$

$$-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 5 \qquad (\cos120° = -\frac{1}{2} \quad , \quad \sin120° = \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$x - \sqrt{3}y + 10 = 0$$

د l خط د میل د پیداکولو لپاره د ا معادله د $y = mx + b$ په شکل لیکو:

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{10}{\sqrt{3}}$$

نو l د خط میل $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$ او د Y محور د $(0, \frac{10}{\sqrt{3}})$ په نقطه کې قطع کوي.

فعالیت

د هغه مستقیم خط نورمال معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحده او نورمال یې د X د محور له مثبت جهت سره د $30°$ زاویه جوړوي.

8- د مستقیم خط عمومي معادله: (General equation of a straight Line)

د $ax + by + c = 0$ معادله د x او y دوه متحوله لري a، b، او c ثابت عددونه دي چې a او b دواړه په یو وخت کې صفر نه وي، د مستقیم خط دعمومي معادلې په نامه یادیږي.

1) که $a \neq 0$ او $b = 0$ وي، نو $x = -\frac{c}{a}$ یا $ax + c = 0$ دا د هغه مستقیم خط معادله ده چې د Y له محور سره موازي وي چې ددې خط مستقیمه فاصله د Y له محور څخه $-\frac{c}{a}$ ده.

2) که $a = 0$ او $b \neq 0$ وي، نو معادله د $by + c = 0$ شکل نیسي یا $y = -\frac{c}{b}$ چې دا د هغه مســتقیم خط معادله ده چې د X له محور ســره موازي دی. د X له محور څخه ددې خط مستقیمه فاصله $\frac{-c}{b}$ ده.

3) که $a \neq 0$ او $b \neq 0$ وي، نو:

$$by = -ax - c \quad \text{یا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

دا د هغه مســتقیم خط معادله ده چې میل یې $m = \frac{-a}{b}$ دی او د y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

1-د یو مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په معیاري شکل:

د $ax + by + c = 0$ عمومي معادله د معیاري معادلې په شکل عبارت ده له:

$$by = -ax - c \quad \text{یا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

چې ددې خط میل $m = \frac{-a}{b}$ او د Y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

دویم مثال: د $5x - 12y + 39 = 0$ د مستقیم خط عمومي معادله په معیاري شکل واړوئ.

حل:

$$12y = 5x + 39 \quad \text{یا} \quad y = \frac{5}{12}x + \frac{39}{12}$$

چې میل یې $m = \frac{5}{12}$ او د Y محور په $\frac{39}{12}$ کې قطع کوی.

2- د یوه مستقیم د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي.

د $ax+by+c=0$ په معادله کې د مستقیم خط میل $\frac{-a}{b}$ او یوه نقطه یې $(\frac{-c}{a},0)$ ده، نو:

$$m=\tan\theta=\frac{-a}{b} \qquad y=\frac{-a}{b}(x+\frac{c}{a})$$

دریم مثال: د $5x-12y+39=0$ د مستقیم خط عمومي معادله د هغه خط د معادلې په شکل تبدیله کړئ چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي.

حل: د $5x-12y+39=0$ مستقیم خط یوه نقطه $(\frac{-39}{5},0)$ ده او میل یې $\frac{5}{12}$ دی، نو:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{5}{12}(x+\frac{39}{5})\Rightarrow y=\frac{5}{12}x+\frac{39}{12}$$

3 - د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې دوې نقطې یې معلومې وي.

هغه خط چې معادله یې $ax+by+c=0$ وي، د $(\frac{-c}{a},0)$ او $(0,\frac{-c}{b})$ له نقطو تیریږي.

$$x_2=0 \qquad y_2=\frac{-c}{b} \qquad x_1=\frac{-c}{a} \qquad y_1=0$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{\frac{-c}{b}-0}{0+\frac{c}{a}}(x+\frac{c}{a})=\frac{\frac{-c}{b}}{\frac{c}{a}}(x+\frac{c}{a})=-\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}(x+\frac{c}{a})$$

$$y=\frac{-a}{b}(x+\frac{c}{a})$$

څلورم مثال: د $5x-12y+39=0$ د مستقیم خط عمومي معادله د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل ولیکئ چې دوې نقطې یې معلومې وي.

حل: د $5x-12y+39=0$ خط د $P_2(0,\frac{39}{12})$ او $P_1(\frac{-39}{5},0)$ له نقطو څخه تیریږي.

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$ یا $$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$\frac{y-0}{x+\frac{39}{5}}=\frac{\frac{39}{12}-0}{0+\frac{39}{5}}$$

4- د یو مستقیم د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې د X او Y له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي.

$$ax+by+c=0$$

$$ax+by=-c$$

دواړه خواوې په $(-c)$ ویشوو:

$$\frac{ax}{-c}+\frac{by}{-c}=1$$

یا

$$\frac{x}{\frac{-c}{a}}+\frac{y}{\frac{-c}{b}}=1$$

پنځم مثال: د $5x-12y+39=0$ معادله د هغه مستقیم خط معادلې ته واړوئ چې له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي.

$$5x-12y=-39$$

دواړه خواوې په -39 ویشوو

$$\frac{5x}{-39}-\frac{12y}{-39}=1$$

:

$$\frac{x}{-\frac{39}{5}}+\frac{y}{\frac{39}{12}}=1$$

پــه دې معنــا چې دا مســتقیم خط د X محــور د $(-\frac{39}{5},0)$ او د Y محور د $(0,\frac{39}{12})$ نقطه قطع کوي.

فعالیت

د $3x - 2y = 6$ مستقیم خط د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات د X او Y، له محورونو سره پیدا کړئ.

5: د یوه مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په نورمال شکل:

څرنګه چې پوهیږو د مستقیم خط نورمال معادله $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ ده او عمومي معادله یې $ax + by + c = 0$ یا $ax + by = -c$ ده، چې دواړه د یوه مستقیم خط ښودونکې دي، نو د ضریبونو نسبتونه یې د k د یوه ثابت عدد سره مساوي دي.

$$\frac{a}{\cos\theta} = \frac{b}{\sin\theta} = \frac{-c}{P} = k$$

$$\frac{P}{-c} = \frac{\cos\theta}{a} = \frac{\sin\theta}{b} = \frac{\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta}}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

ځکه چې: $\frac{\cos^2\theta}{a^2} = \frac{\sin^2\theta}{b^2} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{a^2 + b^2}$

په نتیجه کې : $\sin\theta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ او $\cos\theta = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ کیږي.

د $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ په معادله کې د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ د قیمتونو په لیکلو سره لرو چې:

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

$$\frac{ax+by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

او یا $\frac{b}{\sin\theta} = k \quad , \quad \frac{a}{\cos\theta} = k$

نو: $k\sin\theta = b$ ، $k\cos\theta = a$ او $k^2\sin^2\theta = b^2$ ، $k^2\cos^2\theta = a^2$

$$k^2\cos^2\theta + k^2\sin^2\theta = a^2 + b^2$$

$$k^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a^2 + b^2$$

یا: $k = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$

د $ax+by=-c$ معادلې دواړه خواوې په K ويشوو، نو لرو چې:

$$\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}y=-\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{يا} \quad \frac{ax+by+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

ددې لپــاره چــې د p قيمت هر وخت مثبت دی. نو د مخرج د جذر علامه د c مخالفه علامه ده او که $c=0$ وي، د جذر علامه د b د علامې په شان ده.

شپږم مثال: $2x-3y+6=0$ معادله په نورمال شکل واړوئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې په $\sqrt{2^2+(-3^2)}=\pm\sqrt{13}$ باندې ويشو. ددې لپاره چې ښي خوا مثبت وي د $\sqrt{13}$ علامه بايد منفي ونيول شي:

$$\frac{2x-3y+6}{-\sqrt{13}}=0 \text{ يا } -\frac{2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}-\frac{6}{\sqrt{31}}=0$$

نو θ په دويمه ناحيه (ربعه) کې ده.

د مثلثاتــي جدول څخه لرو چې $\theta=123^\circ\,40'$ ده نو ددې مســتقيم خط نورمــال معادله عبارت ده له:

$$x\cos123^\circ40'+y\sin123^\circ40'-\frac{6}{\sqrt{13}}=0$$

فعاليت

د $2x-3y+6=0$ معادله په نورمال شکل تبديله کړئ.

د يوه مستقيم خط نورمال معادله $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$ او د مستقيم خط عمومي معادله $ax+by+c=0$ ده. د مستقيم خط عمومي معادله د نورمال معادلې په شکل عبارت له:

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

پوښتنې

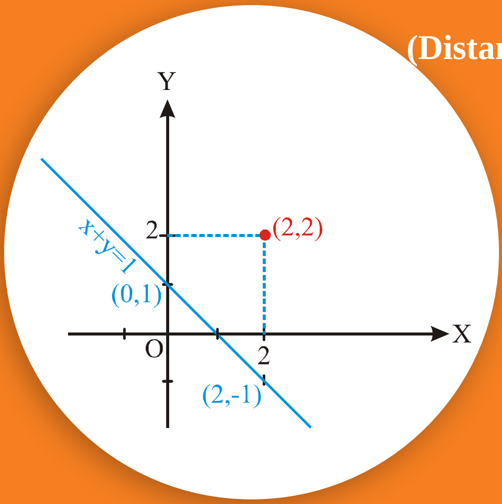
1 - د $x\cos 60^\circ + y\sin 60^\circ - 7 = 0$ د مســتقیم خط نورماله معادله د مســتقیم خط په عمومي معادله تبدیله کړئ.

2 - د $x\cos 225^\circ + y\sin 225^\circ - 6 = 0$ د مســتقیم خط نورمال معادله، د مستقیم خط په عمومي معادله واړوئ.

3 - د مستقیم خط لاندې عمومي معادلې په نورمال شکل واړوئ.

$2x + 4y + 7 = 0$ ، $2x + 5y - 2 = 0$ ، $15y - 8x + 3 = 0$

د يوې نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه:
(Distance of a point from a line)



آيا د $(2,2)$ نقطې فاصله د $x+y=1$ له خط څخه پيداکولای شئ؟

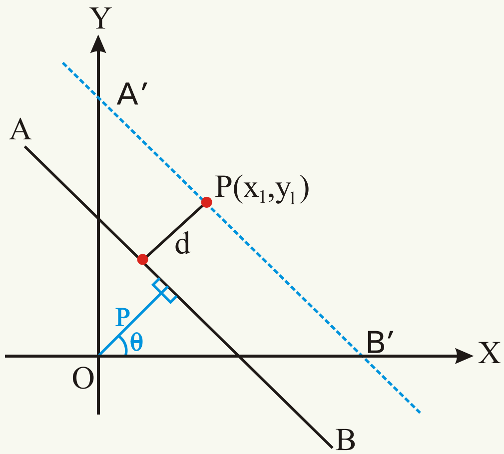
که د P نقطې فاصله لکه څنګه چې په شکل ليدل کيږي د $\overline{AB}$ له خط څخه چې د P نقطه پر $\overline{AB}$ واقع نه وي، d فرض کړو (د $\overline{AB}$ خط نه عمود وي او نه افقي)

د p له نقطې څخه د $\overline{A'B'}$ مستقيم خط له $\overline{AB}$ سره موازي رسم کړئ، په دې حالت کې د AB د خط نورمال معادله عبارت ده له: $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$

څرنګه چې د $A'B'$ مستقيم خط د AB له خط سره موازي دی، نو د $A'B'$ د خط نورمال معادله عبارت ده له:

$$x\cos\theta + y\sin\theta - (p+d) = 0 \quad \text{يا} \quad d = x\cos\theta + y\sin\theta - p$$

څرنګه چې د $P(x_1, y_1)$ نقطه د $\overline{A'B'}$ پر مستقيم خط پرته ده، نو په پورتنۍ معادله کې د x او y پرځای x_1 او y_1 ږدو، نو لرو چې:



$$\boxed{d = x_1\cos\theta + y_1\sin\theta - P}$$

چې دا معادله د AB له خط څخه د p د نقطې فاصله ښيي، کله چې د AB خط معادله په نورمال شکل راکړل شوي وي او که د $\overline{AB}$ د خط معادله په عمومي شکل $(ax+by+c=0)$ راکړل شوي وي نو:

خرنگه چې: $\sin\theta = \dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ ، $\cos\theta = \dfrac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ او $p = \dfrac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$

که دا قیمتونه د AB د مستقیم خط په نورمال معادله کې وضع کړو، لرو چې:

$$d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

د فاصلې پــه معادله کې که د P نقطه او د وضعیه کمیاتو مبدا د AB د خط یوې خواته واقع وي، نو د d قیمــت منفــي کیــږي. او که د p نقطه او مبدا د AB د خــط دواړو خواو ته واقع وي د d قیمت مثبت دی. خرنګه چې فاصله هر وخت مثبت ده، نو باید چې مطلقه قیمت یې په پام کې ونیسو. (د c علامه د مخرج د جذر د علامې مخالفه علامه ده)

لومړی مثال: د $P(-2,8)$ د نقطې فاصله د $4x+3y-11=0$ له خط څخه پیدا کړئ.

حل: $a=4$ ، $b=3$ او $c=-11$ ده، خرنګه چې د c علامه منفي ده، نو د جذر علامه باید مثبت وي.

$$d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4(-2)+3(8)-11|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}} = \frac{|-8+24-11|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

فعالیت

د $(5,8)$ د نقطې فاصله د $3x-2y+7=0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله:

:(Distance between two parallel lines)

د دوو مــوازي خطونــو ترمنــځ فاصله پر یــو ددې خطونو دیــوې نقطې فاصله ده، له بــل موازي خط څخه:

دویم مثال: د $2x-5y+13=0$ او $2x-5y+6=0$ د موازي مستقیمو خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

حل: یوه نقطه په یو ددې موازي خطونو باندې پیداکوو د مثال په ډول که د

$$2x-5y+13=0$$

په معادله کې $x=1$ وي نو $y=3$ کیږي.

اوس نو د $(1,3)$ نقطې فاصله د $2x-5y+6=0$ له مســتقيم خط څخه د فاصلې د فورمول

$d=\dfrac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ په مرسته په لاس راوړو.

$$d=\frac{|2(1)-5(3)+6|}{\sqrt{(2)^2+(-5)^2}}=\frac{|2-15+6|}{\sqrt{4+25}}=\frac{7}{\sqrt{29}}$$

يادونه: د وضعيه كمياتو له مبدا څخه د $ax+by+c=0$ د مستقيم خط فاصله د $\dfrac{|C|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ څخه عبارت ده.

فعاليت

د $3x+2y=10$ او $y=-\dfrac{3}{2}x+7$ د موازي خطونو ترمنځ فاصله پيدا كړئ.

دريم مثال: د $2x+y+2=0$ او $6x+3y-8=0$ د مستقيمو موازي خطونو ترمنځ فاصله پيداكړئ.

حل: كه د $2x+y+2=0$ په معادله كې $x=0$ نو $y=-2$ كيږي. اوس د $(0,-2)$ او د $6x+3y-8=0$ د مستقيم خط فاصله په لاس راوړو:

$$d=\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|6(0)+3(-2)-8|}{\sqrt{36+9}}=\frac{14}{3\sqrt{5}}$$

د $P(x_1,y_1)$ د نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه د $d=x_1\cos\theta+y_1\sin\theta-P$ او يا د $d=\dfrac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

پوښتني

1- د هـر دوو جـوړو موازي خطونـو ترمنځ فاصله پیدا کړئ چې معادلـې یې په لاندې ډول دي:

$3x-4y+3=0$ او $3x-4y+7=0$

$12x+5y-6=0$ او $12x+5y+13=0$

$x+2y-5=0$ او $2x+4y=1$

2 - د $P(6,-1)$ نقطې فاصله د $6x-4y+9=0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

3 - د $3x+6y-8=0$ او $2x+4y+5=0$ د مـوازي خطونو ترمنځ فاصله مســاوي ده په:

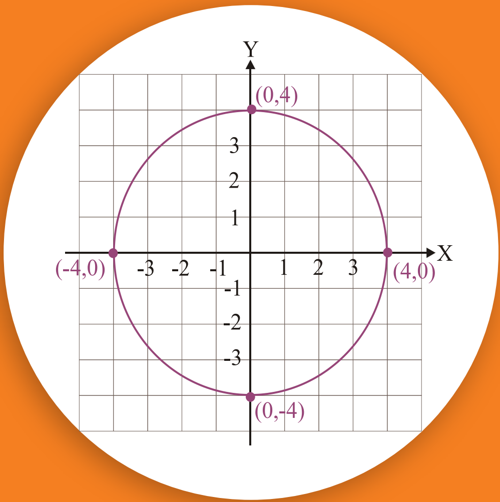
a) $\frac{31}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{31}{6\sqrt{5}}$ c) $6\sqrt{5}$ d) هیڅ یو

4 - د $(1,2)$ د نقطې فاصله د $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+2=0$ د مستقیم خط څخه مساوي ده په:

$a:2$ $b:1$ $c:3$ $d:\frac{1}{2}$

5 - د $(-2,7)$ نقطې فاصله د $24x+7y-2=0$ له مستقیم خط څخه مساوي ده په:

$a:0{,}04$ $b:\frac{1}{25}$ $c:4\times10^{-2}$ d: درېواړه سم دي



دایره (Circle)

آیـا د هغه دایـرې معادله پیدا کولای شـئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې او شـعاع یې 4 واحده وي؟

تعریف

دایره د هغو نقطو سټ دی چې له یوې ثابتې نقطې څخه یې فاصلې مساوي وي. چې دې ثابتې نقطې ته د دایرې مرکز (Center) او مساوي فاصلې ته د دایرې شعاع (Radius) وایي.

د یـوې دایـرې معادلـه (Equation of a circle): کـه $C(h,k)$ د دایرې مرکز، r د دایرې شـعاع او $P(x,y)$ د دایرې د محیط یوه نقطه وي، د شـکل له مخې د فیثاغورث د قضیې څخه په اساس لرو چې:

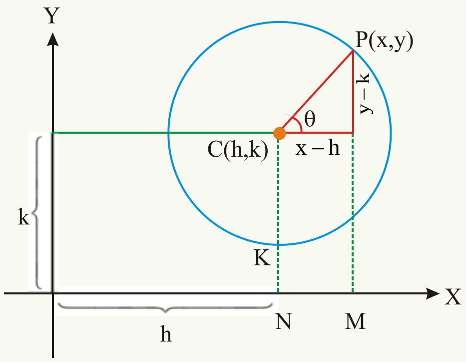
$$(\overline{CP})^2=(x-h)^2+(y-k)^2$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \qquad (\overline{CP}=r)$$

چې دې معادلې ته د دایرې معیاري معادله وایي. که د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي نو په دې حالت کې $h=k=0$ دی او د دایرې معادلـه: $(x-0)^2+(y-0)^2=r^2$ یـا

$$x^2+y^2=r^2$$

ده، او که $r=0$ وي داسـې دایرې ته نقطوي دایره (Point circle) وایي.



لومړی مثال: د هغه دايرې معادله پيدا کړئ چې مرکز يې $(-3,5)$ او د شعاع اوږدوالی يې (7) واحده وي.

حل: $h=-3$ او $k=5$, $r=7$

$$(x+3)^2+(y-5)^2=7^2$$
$$x^2+y^2+6x-10y-15=0$$

فعاليت

د هغه دايرې معادله پيدا کړئ چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې او شعاع يې 3 واحده وي.

د يوې دايرې عمومي معادله (General form of an equation of a circle):

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2-r^2=0$$

يا:

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

که $-k=f$ ، $-h=g$ او $h^2+k^2-r^2=c$ فرض شي، نو لرو چې:

$$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c \quad \text{يا} \quad x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

چې دې معادلې ته د دايرې عمومي معادله وايي چې مرکز يې $(-g,-f)$ او شعاع يې $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$ ده.

که $g^2+f^2-c>0$ وي دايره حقيقي ده.

که $g^2+f^2-c=0$ دايره نقطوي ده.

که $g^2+f^2-c<0$ دايره مجازي ده. (دايره وجود نه لري) چې

او يا که د $x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$

په معادله کې $-2h=a$ ، $-2k=b$ او $h^2+k^2-r^2=c$ عوض کړو لرو چې

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ چې دا هم د دايرې عمومي معادله ده، ځينې وختونه د دايرې عمومي معادله داسې هم ښودل کيږي.

$Ax^2+By^2+Dx+Ey-F=0$ په دې ډول چې $A=B$ او هم علامه وي نو دا هم د دايرې عمومي معادله ده.

خاص حالتونه:

1- که د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ د دایرې په معادله کې $h=0$ وي نو د دایرې مرکز د Y پر محور پروت دی او د دایرې معادله دا شکل غوره کوي: $x^2+(y-k)^2=r^2$

2 - او که $k=0$ وي، د دایرې مرکز د X پرمحور پروت دی او د دایرې معادله دا: $(x-h)^2+y^2=r^2$ ده.

3- که $k=r$ وي، دایره د Y پر محور مماس ده او د دایرې معادله $(x-h)^2+(y-r)^2=r^2$ ده.

4- او که $h=r$ وي، دایره د X پر محور مماس ده او د دایرې معادله $(x-r)^2+(y-k)^2=r^2$ ده.

5- یوه دایره هغه وخت د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تیریږي چې د $h^2+k^2=r^2$ رابطه صدق کړي.

6- یوه دایره هغه وخت د X او Y پر محورونو مماس ده، چې معادله یې دا $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ شکل ولري.

دويم مثال: د $x^2+(y-5)^2=10$ دایرې مرکز د Y پر محور پروت دی.

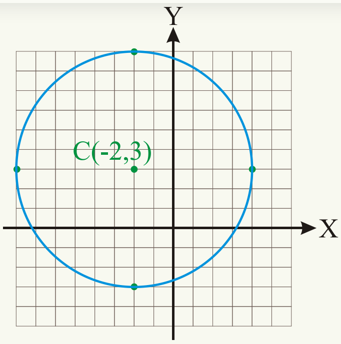
د $(x-1)^2+(y-5)=25$ دایره د Y له محور سره مماس ده.

د $(x+3)^2+y^2=9$ دایره د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تیریږي.

فعالیت

په شکل کې وښیاست چې د څلورم مثال، د لومړۍ دایرې مرکز د Y پر محور پروت دی، دویمه دایره د Y له محور سره مماس ده او دریمه دایره د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تیریږي.

دريم مثال: د هغه دایرې عمومي او معیاري معادلې پیدا کړئ، چې د مرکز وضعیه کمیات یې $(-2,3)$ او شعاع یې 6 واحده وي او هم دا دایره رسم کړئ.



(د دایرې معیاری معادله)

$$(x+2)^2+(y-3)^2=6^2$$

(د دايرې عمومي معادله)

$$x^2+y^2+4x-6y-23=0$$

ځلورم مثال: وښاياست چې $5x^2+5y^2+24x+36y+10=0$ ديوې دايرې معادله ده او هم ددې دايرې د مرکز وضعيه کميات او د شعاع اوږدوالى پيدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 5 ويشو، نو لرو چې:

$$x^2+y^2+\frac{24}{5}x+\frac{36}{5}y+2=0$$

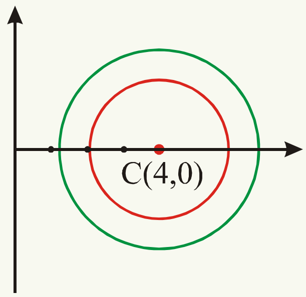
چې $g=\frac{12}{5}$ ، $f=\frac{18}{5}$ او $c=2$ دى.

د دايرې مرکز $(-g,-f)=(\frac{-12}{5},\frac{-18}{5})$

او د دايرې شعاع: $r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{\frac{144}{25}+\frac{324}{25}-2}=\sqrt{\frac{418}{25}}=\frac{\sqrt{418}}{5}$

پنځم مثال: د هغه دايرې معادله پيدا کړئ چې د $x^2+y^2-8x+4=0$ له دايرې سره متحد المرکز (Concnteric) وي او د $x+2y+6=0$ له مستقيم خط سره مماس وي.

حل: د $x^2+y^2-8x+4=0$ د دايرې مرکز $C_1(-g,-f)$ دى.



$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

$$2g=-8\Rightarrow g=-4\Rightarrow -g=4$$

$$2f=0 \quad\Rightarrow\quad f=0$$

د $C_1(4,0)$ نقطه د هغې دايرې مرکز هم دى چې غواړو معادله يې پيداکړو، نو د C_1 وضعيه کميات د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ په معادله کې وضع کوو لرو چې:

$$(x-4)^2+(y-0)^2=r^2$$

ددې لپاره چه د C_2 ددايرې شعاع پيداکړو، نو څرنګه چې دايره د $x+2y+6=0$ له مستقيم خط سره مماس ده. نو د $(4,0)$ د نقطې فاصله له دې مستقيم خط څخه د دايرې شعاع ده

$$d=r=\frac{|4(1)+2(0)+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}} \quad \text{يا} \quad r^2=\frac{100}{5}=20$$

نو ددې دايرې معادله عبارت ده له: $(x-4)^2+y^2=20$ يا $x^2+y^2-8x-4=0$

شپږم مثال: د هغه دايرې معادله پيداکړئ چې د $B(6,5)$ او $A(4,1)$ له نقطو څخه تيرېږي او مرکز يې د $4x+y-16=0$ پر مستقيم خط پروت وي.

حل: که د ايرې مرکز $C(h,k)$ وي، نو د دايرې معادله $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ده، څرنگه چې مرکز يې د $4x+y-16=0$ پر مستقيم خط واقع دی، نو $4h+k=16$ دی.

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ او $|AC|=|BC|$ او $|AC|^2=|BC|^2$

$$(h-4)^2+(k-1)^2=(h-6)^2+(k-5)^2$$

$$4h+8k=44$$

$$\underline{\underset{-}{4}h\underset{-}{+}k=\underset{-}{16}}$$

$$7k=28$$

$$k=4 \quad\Rightarrow\quad h=3$$

$$r^2=(3-4)^2+(4-1)^2=10$$

$(x-3)^2+(y-4)^2=10$ يا $x^2+y^2-6x-8y+15=0$

چې د غوښتل شوې دايرې معادله ده.

فعاليت

د هغه دايرې معادله پيداکړئ چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تيرېږي او د $y-1=0$ له خط سره مماس دی.

اووم مثال: دهغه دايرې د مرکز وضعيه کميات او د شعاع اوږدوالی پيداکړئ چې معادله يې $x^2+y^2+4x+4y-9+0$

حل:

$$x^2+y^2-4x+4y-9=0$$

$$x^2-4x+y^2+4y-9=0$$

$$x^2-4x+(-2^2)-(-2^2)+y^2+4y+2^2-2-9=0$$

$$(x-2)^2+(y+2)^2=17$$

نو مرکز یې $(2-2)$ او شعاع یې $r=\sqrt{17}$

هغه دایرې معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې واقع وي له $x^2+y^2=r^2$ څخه عبارت ده او که مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې واقع نه وي او (h,k) یې مرکز وي: معادله یې $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ یا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ او یا $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ده.

پوښتني

1 – د هغه دایرې معادله پیدا کړئ چې:

a: مرکز یې $(5,-2)$ او $r=4$ وي

b: مرکز یې $(\sqrt{2},-3\sqrt{3})$ اوشعاع یې $r=2\sqrt{2}$ وي.

c: مرکز یې $(0,0)$ اود $(1,2)$ له نقطې څخه تیریږي.

d: مرکز یې $(0,0)$ او د $(-3,-4)$ له نقطې څخه تیریږي.

e: مرکز یې $(8,-6)$ او د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تیریږی

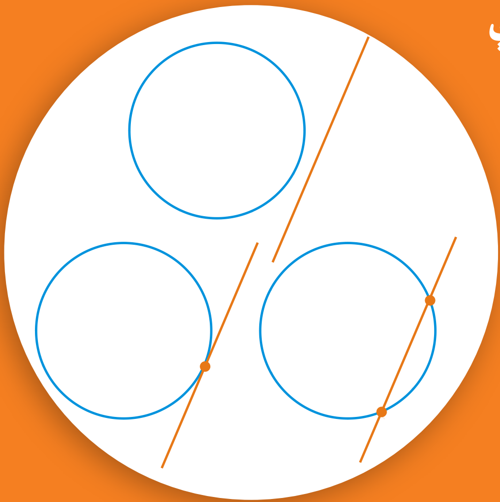
2 - لومړی وښایاست چې لاندې راکړل شوی معادلې د دایرې معادلې دي، بیا یې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

$$5x^2+5y^2+14x+12y=0 \quad , \quad x^2+y^2+12x-10y=0$$

$$3x^2+3y^2-2x+4y-1=0 \quad , \quad x^2+y^2-6x+4y+13=0$$

$$a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0$$

د یو مستقیم خط حالتونه له یوې دایرې سره:



کولای شئ چې وواياست د $3x-4y+20=0$ مستقیم خط د $x^2+y^2=25$ دایره په څو نقطو کې قطع کوي؟

د $x^2+y^2+ax+by+c=0$ دایرې معادله په پام کې نیسو او غواړو چې د یو مستقیم خط حالت له دایرې سره وڅېړو چې آیا دا مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي، یا مستقیم خط پر دایره مماس دی او یا دا چې مستقیم خط دایره نه قطع کوي.

د x او یا y قیمت د مستقیم خط له معادلې څخه په لاس راوړو او د دایرې په معادله کې یې وضع کوو. یوه دویمه درجه یو مجهوله معادله په لاس راځي.

1) که په دې معادله کې $\Delta=b^2-4ac>0$ وي، مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي.

2) که $\Delta=b^2-4ac=0$ وي مستقیم خط له دایرې سره مماس دی.

3) او که $\Delta=b^2-4ac<0$ مستقیم خط دایره نه قطع کوي.

لومړی مثال: آیا د $2x=y+7$ مستقیم خط د $x^2+y^2-8x-2y+12=0$ دایره قطع کوي؟ د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات یې پیدا کړئ.

حل: د مستقیم خط له معادلې څخه $y=2x-7$ ده چې د y دا قیمت د دایرې په معادله کې وضع کوو.

$$x^2+(2x-7)^2-8x-2(2x-7)+12=0$$
$$5x^2-40x+75=0$$
$$x^2-8x+15=0 \quad \text{یا}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4\cdot 15 = 64 - 60 = 4 > 0$$

نـو دا مسـتقيم خط دايـره په دوؤ نقطو کې قطع کـوي او د تقاطع د نقطـو وضعيه کميات يې عبارت دي له:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_1 = 5 \ , \quad x_2 = 3$$

د y قيمت د پيداکولو لپاره د $x_1 = 5$ او $x_2 = 3$ قيمتونه د مستقيم خط په معادله کې وضع کوو، نو لرو چې:

$$y_1 = 2x_1 - 7 \ = 2\cdot 5 - 7 = 3$$

$$y_2 = 2x_2 - 7 = 2\cdot 3 - 7 = -1$$

نو دا خط دايره د $(3,-1)$ او $(5,3)$ په نقطو کې قطع کوي.

دويم مثال: آيا د $x + 3y - 5 = 0$ مستقيم خط د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ له دايرې سره مماس دی که نه؟

حل: د مستقيم خط له معادلې څخه لرو چې $x = 5 - 3y$ دی، د x دا قيمت د دايرې په معادله کې وضع کوو:

$$(5 - 3y)^2 + y^2 - 2(5 - 3y) + 4y - 5 = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

او $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1 = 0$ نو دا مسـتقيم خط له دايرې سـره مماس دی او د تماس د نقطې وضعيه کميات يې عبارت دي له:

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

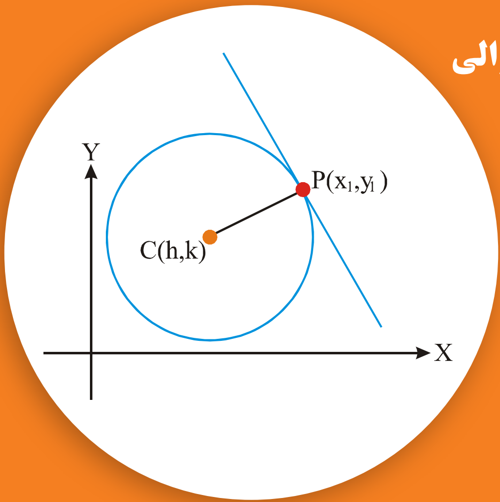
$$x = 5 - 3\cdot 1 = 2$$

نو مستقيم خط د $(2,1)$ په نقطه کې پر دايره مماس دی.

فعاليت

آيا د $x - y + 1 = 0$ مستقيم خط د $x^2 + y^2 + 5 = 0$ له دايرې سره مماس دی، که دايره په دوو نقطو کې قطع کوي او يا دا چې دايره نه قطع کوي؟

د مماس معادله او د مماس اوږدوالی



آیا د هغه مماس معادله پیداکولای شـي چي د $x^2+y^2=13$ د پر نقطه کي $P(-3,-2)$ په دایره مماس وي؟

کـه یو مسـتقیم خط پر هغـه دایره چي مرکز يي $C(h,k)$ او د $p_1(x_1,y_1)$ پـه نقطه کي پر دایره مماس وي، نو د شعاع میل مساوي دی په: $m=\dfrac{k-y_1}{h-x_1}$

او څرنګه چي شعاع د تماس په نقطه کي پر مماس عمود ده، نو د مماس میل له $-\dfrac{h-x_1}{k-y_1}$ سره مساوي دی.

څرنګه چي د مستقیم خط یوه نقطه $P_1(x_1,y_1)$ او میل يي $-\dfrac{h-x_1}{k-y_1}$ دی.

د مستقیم خط د $y-y_1=m(x-x_1)$ معادلي په نظر کي نیولو سره لرو چي:

$$y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$$

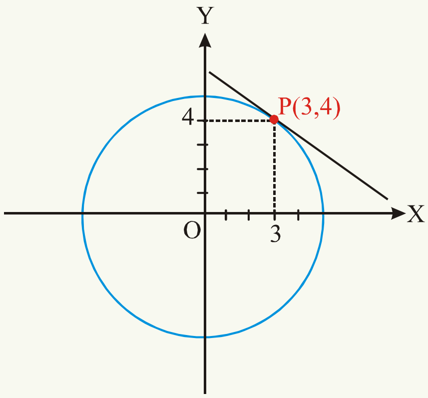
چي دا د هغه مماس معادله ده چي د $P_1(x_1,y_1)$ په نقطه کي پر دایره مماس دی.

او کـه د دایـري مرکـز د وضعیه کمیاتو په مبداکي وي، نو پـه دي حالت کي $h=k=0$ دی او د مماس معادله دا شکل اختیاروي.

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1) \quad \text{یا} \quad yy_1+xx_1=x_1^2+y_1^2$$

څرنګه چي $x_1^2+y_1^2=r^2$ نو د مماس معادله $yy_1+xx_1=r^2$ ده.

لومړی مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(3,4)$ په نقطه‌کې د $x^2+y^2=25$ پر دایره مماس وي:



حل: خرنګه چې د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې دی، نو: $y\cdot 4+x\cdot 3=25$

نو د مماس معادله عبارت ده له: $3x+4y=25$

او یا $3x+4y-25=0$.

دویم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $P(3,5)$ په نقطه‌کې پر هغه دایره مماس دي چې مرکز یې $(1,2)$ دی.

$$h=1 \qquad k=2$$
$$x_1=3 \qquad y_1=5$$
$$y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$$
$$m=-\frac{1-3}{2-5}=-\frac{2}{3}$$
$$y-5=-\frac{2}{3}(x-3)$$
$$2x+3y=21$$

یا:
$$2x+3y-21=0$$

د مماس اوږدوالی

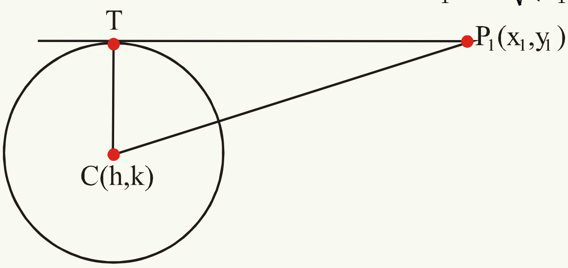
کـه د $P_1(x_1,y_1)$ له نقطې څخه چې د دایرې دباندې واقع ده، د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ پر دایره د P_1T. مماس د شکل په شان رسم شي، د (T) د تماس نقطه د دایرې له مرکز (C) سره ونښلوو، دفیثاغورث د قضیې په اساس د $\overset{\Delta}{P_1TC}$ په قایمه زاویه مثلث کې لرو چې:

$$(\overline{P_1C})^2=(\overline{P_1T})^2+(\overline{CT})^2$$

یا $(P_1T)^2=(P_1C)^2-(CT)^2$

له بلې خوا: $\overline{(P_1C)}^2=(x_1-h)^2+(y_1-k)^2$ او $\overline{CT}=r$ نو د مماس اوږدوالی مساوي

دی په: $\overline{P_1T}=\sqrt{(x_1-h)^2+(y-k)^2-r^2}$



پــه یاد ولرئ چــې د مماس په امتداد د مماس د اوږدوالی د پیــدا کولو لپاره د دایرې له کومې خارجــي نقطــې څخه همدومره کفایت کوي چې د نقطې د x او y قیمتونه د دایرې په معادله کې وضع کړو.

دریم مثال: د $(-5,10)$ له نقطې څخه د $5x^2+5y^2+14x+12y-10=0$ پر دایره د مماس اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 5 ویشو نو لرو چې: $x^2+y^2+\frac{14}{5}x+\frac{12}{5}y-2=0$

د مماس اوږدوالی $=\sqrt{(-5)^2+(10)^2-14+24-2}=\sqrt{133}$

فعالیت

د هغه مماس اوږدوالی پیدا کړئ چې د $P(-2,2)$ له نقطې څخه د $x^2+y^2-6x+8y=0$ پر دایره باندې مماس وي.

د دایــرې پــه معادله کې د مســتقیم خط د یو مجهول په وضع کولو ســره، یــوه دویمه درجه یو مجهولــه معادله په لاس راځي، که په دې معادله کې $\Delta>0$ وي، مســتقیم خط دایره په دوو

نقطــوکــې قطع کوي اوکه $\Delta=0$ وي خط پر دایره مماس دی اوکه $\Delta<0$ وي، مســتقیم خط دایره نه قطع کوي.

د هغــه مســتقیم خط معادله چــې د $P_1(x_1,y_1)$ په نقطه کــې پر هغه دایره چــې مرکز يې (h,k) دی مماس وي، عبارت ده له:

$$y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$$

که د دايرې مرکز د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي نو د مماس معادله: $yy_1+xx_1=x_1^2+y_1^2$

يا $yy_1+xx_1=r^2$ ده، د مماس اوږدوالی د $P(x,y)$ له نقطې څخه چې د دايرې د باندې واقع ده او د دايرې مرکز (h,k) دی مساوي ده په:

$$\overline{PT}=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-r^2}$$

پوښتنې

1 - د لانــدې مســتقيو خطونــو حالتونه له دايرو ســره چې معادلې يې په لاندې ډول راکړ شــوې دي وخيرئ.

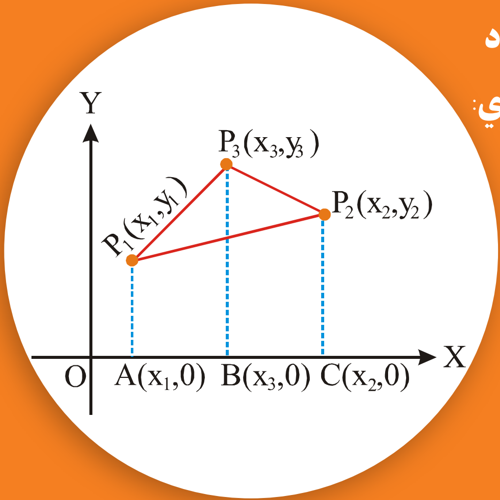
د دايرو معادلې	د مستقيمو خطونو معادلې
$x^2+y^2-4x-y-3=0$	$3x-2y+3=0$
$2(x^2+y^2)-3x+2y-6=0$	$x-y-1=0$
$x^2+y^2-x-9y+14=0$	$5x-y=1$

2- د هغه مستقيم خط معادله پيداکړئ چې د $(2,-3)$ په نقطه کې د $x^2+y^2-2x+4y+3=0$ له دايرې سره مماس وي.

3- د هغه مماس اوږدوالی پيداکړئ چې د $(-5,4)$ له نقطې د $5x^2+5y^2-10x+15y-131=0$ پر دايره مماس رسم شوی وي

4- د هغه مماس اوږدوالی پيداکړئ چې د $(-2,5)$ له نقطې څخه د $x^2+y^2+8x+5y=7$ پر دايره مماس رسم شوی وي.

د مثلث د مساحت پیدا کول چې د راسونو وضعیه کمیات یې معلوم وي:



آیا د هغه مثلث مساحت پیداکولای شئ چې رأسونه یې $(-3,6)$ ، $(3,2)$ او $(6,0)$ وي؟

که P_1 ، P_2 او P_3 لکه چې په شکل کې لیدل کیږي د یوه مثلث راسونه وي. د X پر محور $\overline{P_1A}$ ، $\overline{P_2C}$ و $\overline{P_3B}$ درې عمود خطونه رسم کړئ.

$P_1P_2P_3$ د مثلث مساحت = د P_1ABP_3 ذوذنقې مساحت + P_3BCP_2 ذوذنقې مساحت

$-P_1ACP_2$ د ذوذنقې مساحت

لکه څرنګه چې پوهیږو:

د ذوذنقې مساحت = (د موازي ضلعو د نیمایي مجموعه) × (د موازي ضلعو ترمنځ فاصله)

نو:

$$\overset{\Delta}{P_1P_2P_3} \text{ د مثلث مساحت} = \frac{1}{2}(|P_1A|+|P_3B|)(|AB|)+\frac{1}{2}(|P_3B|+|P_2C|)(|BC|)$$

$$-\frac{1}{2}(|P_1A|+|P_2C|)(|AC|)$$

$$=\frac{1}{2}[(y_1+y_3)(x_3-x_1)]+\frac{1}{2}[(y_3+y_2)(x_2-x_3)]-\frac{1}{2}[(y_1+y_2)(x_2-x_1)]$$

$$=\frac{1}{2}(x_3y_1+x_3y_3-x_1y_1-x_1y_3+x_2y_3+x_2y_2$$

$$-x_3y_3-x_3y_2-x_2y_1-x_2y_2+x_1y_1+x_1y_2)$$

$$=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

مثال: که چیرې $A(4,-5)$ ، $B(5,-6)$ و $C(3,1)$ د یوه مثلث راسونه وي، ددې مثلث مساحت پیداکړئ.

حل: $x_1=4$, $y_1=-5$, $x_2=5$, $y_2=-6$ $x_3=3$ $y_3=1$

$$\text{مثلث مساحت}\ \overset{\Delta}{ABC}\ \text{د} = \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

$$=\frac{1}{2}\left[4(-6-1)+5(1+5)+3(-5+6)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(-28+30+3)=\frac{1}{2}\cdot 5=\frac{5}{2}=2.5$$

که د $P_1\overset{\Delta}{P_2}P_3$ مثلث رأسونه $P_1(x_1,y_1)$ ، $P_2(x_2,y_2)$ او $P_3(x_3,y_3)$ وی، نو

د مثلث مسأحت د $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$ له فورمول څخه په لاس راځي.

پوښتنې

1 - د هغه مثلث مساحت پیداکړئ چې رأسونه یې $A(0,0)$ ، $B(8,6)$ او $C(12,4)$ وي.

2 - که دیو مثلث رأسونه $A(4,0)$ ، $B(-4,0)$ او $C(0,3)$ وي ددې مثلث مساحت پیداکړئ.

3 - د هغه څلور ضلعي مساحت پیداکړئ چې رأسونه یې $A(1,0)$ ، $B(6,2)$ ، $C(8,6)$ او $D(2,4)$ وي.

د څپرکی لنډیز:

• د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د y مختصه یې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د x مختصه یې صفر ده

• د $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ د دوو نقطو ترمنځ فاصله د $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

• د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط د r په نسبت ویشي عبارت دي له: $y = \frac{ry_2 + y_1}{1+r}$ ، $x = \frac{rx_2 + x_1}{1+r}$ او د $\overline{P_1 P_2}$ د قطعه د خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له:

$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ ، $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ که د p نقطه د $\overline{P_1 P_2}$ خط داخلاً د r په یو نسبت وویشي نو r مثبت او که خارجاً یې و ویشي نو r منفي دی.

• د یو مستقیم خط میل چې د $P_1 (x_1, y_1)$ او $P_2 (x_2, y_2)$ له نقطو څخه تیریږي د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ له فورمول څخه په لاس راځي د X د محور او د هغه خطونو میل چې د X له محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغه خطونو میل چې د Y له محور سره موازي وي، تعریف شوي نه دي. که د یوه مستقیم خط د میل زاویه حاده وي، میل یې مثبت او که منفرجه وي میل یې منفي دی.

• د هغه مستقیم خط معادله چې میل او د Y له محور سره یې تقاطع معلومه وي، عبارت ده له:

$y = mx + b$.

د هغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي، عبارت ده له:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

د هغه مستقیم خط معادله چې دوې نقطې یې معلومې وي عبارت ده له:

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ اویا $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ او د هغه مستقیم خط معادله چې

له محورونو سره يې د تقاطع نقطې معلومې وي: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ده.

- د يــوه مســتقيم خط نورمال معادله $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ او د مســتقيم خط عمومي معادله $ax+by+c=0$ ده.

- د $P(x_1, y_1)$ د نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه د $d = x\cos\theta + y\sin\theta - P$ او يا د $d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

- د هغه دايرې معادله چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې واقع وي له $x^2+y^2=r^2$ څخه عبــارت ده او کــه مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې واقع نه وی او (h,k) يې مرکز وي، معادله يې: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

يا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ او يا $x^2+y^2+ax+by+c=0$

- د دايرې په معادله کې د مستقيم خط د يو مجهول په وضع کولو سره، يوه دويمه درجه يو مجهوله معادلــه پــه لاس راځي، که په دې معادله کې $\Delta > 0$ وي، مســتقيم خط دايره په دؤو نقطو کې قطع کوی او که $\Delta = 0$ وي خط پر دايره مماس دی او که $\Delta < 0$ وي، خط دايره نه قطع کوي.

- د هغه مستقيم خط معادله چې د $P_1\ (x_1, y_1)$ په نقطه کې پر هغه دايره چې مرکز يې (h,k) دی مماس وي عبارت ده له: $y-y_1 = -\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$

او که د دايرې مرکز د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي، نو د مماس معادله يې:

$yy_1+xx_1 = x_1^2+y_1^2$ يا $yy_1+xx_1=r^2$ ده او د PT مماس اوږدوالی د $P(x_1, y_1)$ له نقطې څخه چې د هغه دايرې د باندې واقع ده او مرکز يې (h,k) دی مساوي ده په:

$$\overline{PT} = \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-r^2}$$

- که د يوه مثلث رأســونه $P_1\ (x_1, y_1)$، $P_2\ (x_2, y_2)$ او $P_3\ (x_3, y_3)$ وي، نو $\overset{\Delta}{P_1 P_2 P_3}$ د مثلث مســاحت د $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$ له فورمول څخه په لاس راځي.

د څپرکي پوښتنې:

1 - د لاندې دؤو راکړې شوو نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او همدرانګه ددې مستقیمو خطونو د تنصیف د نقطو وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د A او B له دؤو نقطو څخه تیریږی.

$A(3,1)\ ,B(-2,-4) \qquad A(-8,3)\ \ ,B(2,-1)$

$A(-\sqrt{5},-\frac{1}{3})\ ,\ B(-3\sqrt{5},5)$

2 - کـه $A(\sqrt{3},-1)$ ، $B(0,2)$ او $C(h,-2)$ د یـو قایمـه زاویه مثلث راسـونه وي او د $\hat{A}=90°$ وي، د (h) قیمت پیدا کړئ.

3 - د p د نقطـې وضعیـه کمیات پیدا کړئ، په داسـې حال کې هغه خط چې د $A(1,4)$ او $B(5,6)$ له نقطو څخه تیریږي د $\frac{AP}{PB}=2$ په نسبت و ویشي.

4 - د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې میل یې (-2) او د Y محور په 3 کې قطع کړی.

5 - د $x=\sqrt{7}$ او $y=-\sqrt{7}$ د خطونو میل پیدا کړئ.

6 - د y د محور میل مساوی دئ په:

$a)\ -1 \qquad b)\ 1 \qquad c)\,0 \qquad d)$ تعریف شوی نه دی

7 - دیوه مستقیم خط میل $m=\frac{2}{3}$ دی، دهغه خط میل چې پر دې خط عمودوي، مساوي دی په:

$a)\ \frac{2}{3} \qquad b)\ -\frac{2}{3} \qquad c)\,\frac{3}{2} \qquad d)\,\frac{-3}{2}$

8 - د هغه مستقیمو خطونو میل پیدا کړئ چې له لاندې راکړل شوو نقطو له جوړو څخه تیریږي.

$(4,8)$ او $(4,6)$ $\qquad$ $(2,7)$ او $(3,-2)$ $\qquad$ $(5,11)$ او $(-2,4)$

9 - د $4x-y+2=0$ او $12x-3y+1=0$ مستقیم خطونه:

a) موازي دي $\qquad$ b) عمود دي $\qquad$ c) نه موازي او نه عمود دي

10 - د $3x-4y+3=0$ او $3x-4y+7=0$ مستقیمو خطونو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

11 - د هغـه مسـتقیم خـط معادلـه پیـداکـړی چـې د $(-4,7)$ لـه نقطې تیر شـي او د $2x-7y+4=0$ له خط سره موازي وي.

12 - د $P(6,-1)$ د نقطې فاصله د $6x-4y+9=0$ د مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

13 - د p د نقطې وضعیه کمیات په داسې حال کې پیدا کړی چې $\overline{P_1P_2}$ مستقیم خط چې د $P_1\ (2,-5)$ او $P_2\ (6,3)$ له نقطو څخه تیریږي د $\frac{3}{4}$ په نسبت وویشي.

14 - د لاندې مستقیمو خطونو معادلې نورمال شکل ته واړوئ.

$2x-3y+6=0$ $\qquad\qquad$ $2y-6x+4=0$

15 - د هغه مستقیم خط میل چې د $(4,0)$ او $(-4,0)$ له نقطو څخه تیریږي مساوي دی په:

a) 1 $\qquad$ b) -1 $\qquad$ c) 0 $\qquad$ d) ∞

16 - د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحده او نورمال خط یې د X محور د مثبت جهت سره د $30°$ زاویه جوړوي.

17 - د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې راسونه یې $A(2,3)$ ، $B(-1,1)$ او $C(4,-5)$ وي.

18 - د هغه مثلث مساحت چې رأسونه یې $A(1,4)$ ، $B(2,-3)$ او $C(3,-10)$ دي مساوی دی په:

a)1 $\qquad$ b)2 $\qquad$ c)0 $\qquad$ d) هیڅ یو

19 - د $x+2y=6$ د مستقیم خط د تقاطع نقطه د $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ له دایرې سره پیدا کړئ.

20 - د هغه دایرې معادله پیدا کړی چې د $A(1,1)$, $B(2,-1)$ او $C(3,-2)$ له نقطو څخه تیریږی.

21 - د هغه دایرې معادله پیدا کړئ چې د $A(3,-1)$ ، $B(0,1)$ له نقطو څخه تیریږي او مرکز یې د $4x-3y-3=0$ پر مستقیم خط واقع وي.

22 - د $4x^2+4y^2-8x+12y-25=0$ د دایرې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی یې پیداکړئ.

23 - د هغه دایرې معادله پیدا کړی چې د $A(4,1)$ او $B(6,5)$ له نقطو څخه تیریږي او مرکز یې د $4x+y-16=0$ پر مستقیم خط باندې واقع وي.

24 - که د یوه مثلث رأسونه $A(5,-6)$ ، $B(-3,5)$ او $C(-1,2)$ وي، دا مثلث:

c) مختلف الاضلاع دی b) متساوی الساقین دی a) متساوی الاضلاع دی

25 - که د یوه مثلث رآسونه په ترتیب سره $(5,4)$ ، $(4,10)$ او $(7,8)$ وي دا مثلث:

c) مختلف الاضلاع دی b) متساوي الساقین دی a) متساوي الاضلاع دی

26 - کـه $P(-8,4)$ او $Q(2,-1)$ وي د A د نقطې مختصات پیداکړئ که د A نقطه د PQ خط داخلاً خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت و ویشي.

27 - د $x^2+y^2=5$ د دایرې د تقاطع نقطې د $x-y+1=0$ له مستقیم خط سره پیدا کړئ.

28 - کـه د $x+ay-5=0$ مستقیم خط د $x^2+y^2-2x+4y=0$ پـر دایره مماس وي، د a قیمت پیداکړئ.

29 - د هغه دایرې معادله چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تیریږي او د $y-1=0$ له مستقیم خط سره مماس وي، عبارت ده له:

a) $x^2+y^2-4x=0$ b) $x^2+y^2-2x=0$ c) $x^2+y^2+2x=0$

30 - هغه دایره چې معادله یې $x^2+y^2-6x+4y+14=0$ ده:

c) موهومي ده b) نقطوي ده a) حقیقي ده

31 - هغه دایره چې معادله یې $x^2+y^2+2x-4y+5=0$

a) موهومي ده b) نقطوي ده c) حقیقي ده

32 - کـه $A(4,-3)$ او $B(-2,-5)$ وي د A او B د نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ او هم د $\overline{AB}$ د خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات پیداکړئ.

33 - که د یوه مثلث رأسونه $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ وي، وښایاست چې دا مثلث قایمه زاویه مثلث دی.

34 - وښایاست چې $A(0,0)$ ، $B(a,0)$ ، $C(0,b)$ او $D(a,b)$ د یو مستطیل رأسونه دي او هم وښایاست د مستطیل د قطرونو اوږدوالی سره مساوي دی.

35 - وښایاست چې $A(3,1)$ ، $B(6,2)$ او $C(9,3)$ نقطې پر یوه مستقیم خط واقع دي.

36 - د هغـه مستقیمو خطونـو معادلې پیـداکړئ چې د لانـدې هر جوړو لـه نقطو څخه

(5,8)	(1,2)	(3,5)	(8,15)
(−1,−3)	(2,−1)	(−2,−1)	(3,−4)
(0,3)	(5,0)	(0,2)	(−2,0)

47 - د هغه مستقيم خط معادله چې د (5,8) و (−1,10) له نقطو څخه تیریږي عبارت ده له:

$a: \quad y = -\frac{1}{3}x + 9\frac{2}{3}$

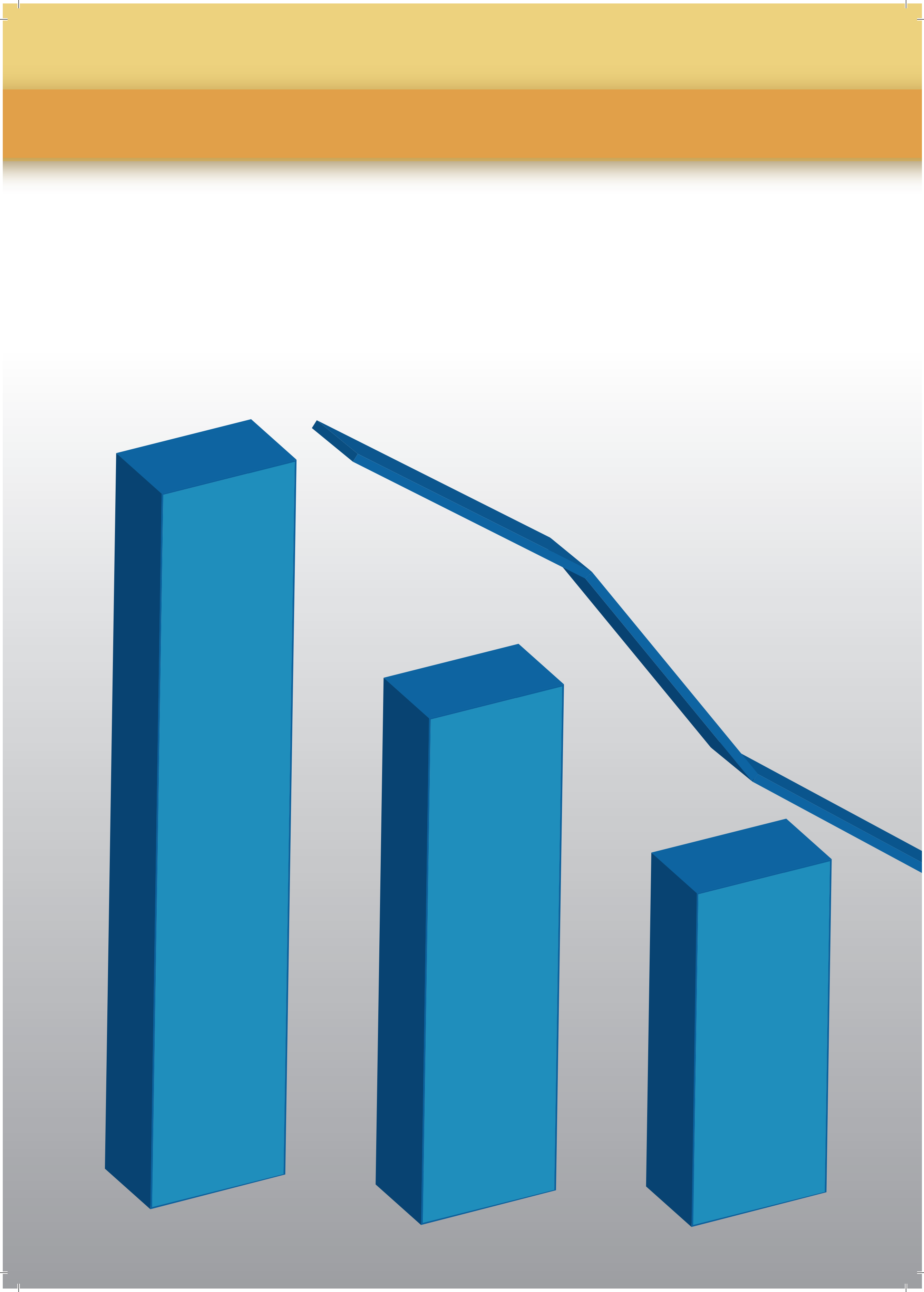
$b: \quad y = -\frac{x}{3} + 9\frac{2}{3}$

$c: \quad y = -\frac{1}{3}x + \frac{29}{3}$

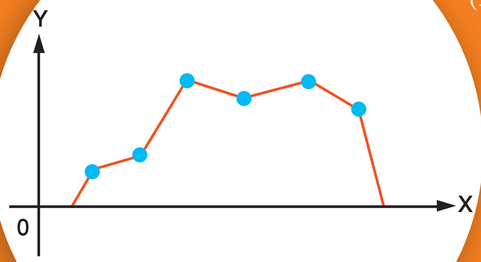
d: درې واړه سم دي

اتم څپرکی

احصائیه



د فریکونسي څو ضلعي ګراف
(Frequency Polygon graph)



مخامخ شــکل په پام کې ونیسئ، آیا کولای شئ د راکړای شوي منحني لاندې مساحت پیدا کړئ؟
آیا ویلای شــئ چې تر منحني لاندې مســاحــت له څه شي سره برابر دی؟

فعالیت

د فریکونسیو مخامخ جدول په نظر کې ونیسئ.

کلاسونه	د کلاس (صنف)مرکز	فریکونسی
10-13	11.5	3
13-16	14.5	6
16-19	17.5	7
19-22	20.5	4

• د هر کلاس (صنف) مرکز د لومړی مختصې او اړونده فریکونسي يې د دویمې مختصې په حیث د مرتبو جوړو په شکل په نظر کې ونیسئ.
• ددې مرتبو جوړو موقعیت د قایمو وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
• هغه نقطې چې په مستوي کې له دې مرتبو جوړو څخه په لاس راځي سره ونښلوئ.
آیا کولای شئ چې ددې ګراف لاندې مساحت پیدا کړئ؟
• د X پر محور د ګراف دواړو خواو ته $(8.5,0)$ او $(23.5,0)$ نقطې زیاتې کړئ. په لاس راغلی ګراف د فریکونسي جدول له مستطیلي ګراف سره یوځای رسم کړئ او د مستطیلونو مساحت د منحني تر لاندې مساحت سره پرتله کړئ.
په څو ضلعي ګراف کې د هر کلاس مرکز پر افقي محور اود هر کلاس مطلقه فریکونسي یا نسبي

فریکونسي پر عمودي محور ښودل کیږی، د کلاس مرکز (منحني نقطه) او د کلاس د فریکونسیو په مقابل کې په مستوي کې یوه نقطه ټاکل کیږي، چې عرض یې د کلاس مرکز او اوږدوالی یې د هماغه کلاس له فریکونسیو سره برابر دی، د جدول د کلاسونو په شمیر په مستوي کې په هماغه اندازه نقطې په لاس راځي. که د کلاسونو په اول او اخر کې دوي نورې د $(x_1 - c , 0) , (x_n + c , 0)$ اختیاري نقطې زیاتې کړئ، څرنگه چې c د هر کلاس وسعت دی یعني (پاسني سرحد منفي د هماغه صنف لاندې سرحد) ، چې ددې نقطو له نښلولو څخه یو گراف په لاس راځي چې د فریکونسي څو ضلعي گراف نومیږي.

مثال: د لاندې جدول د ډیټا (Data) مستطیلي او څو ضلعي گرافونه رسم کړئ.

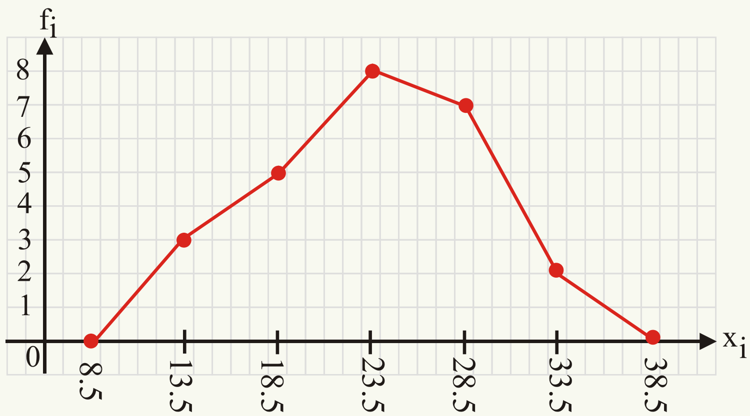
د کلاسونو حدود = CL	11-16	16-21	21-26	26-31	31-36
مطلقه فریکونسي = f_i	3	5	8	7	2
د کلاسونو مرکز = X_i	13.5	18.5	23.5	28.5	33.5

څرنگه چې پوهیږو $c = 5$ ده، ددې لپاره چې دوه اختیاري نقطې په لاس راوړو نو:

$$(x_1 - 5 \, , \; 0) = (13.5 - 5 \, , \; 0) = (8.5 \, , \; 0)$$

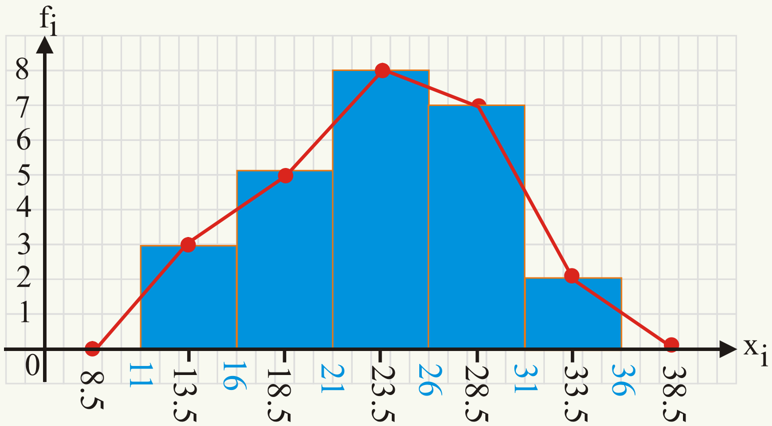
$$(x_n + 5 \, , \; 0) = (33.5 + 5 \, , \; 0) = (38.5 \, , \; 0)$$

ددې نقطو $(8.5 ,0)$ او $(38.5 ,0)$ په اضافه کولو سره گراف رسموو:



د فریکونسي څو ضلعي گراف

مستطيلي ګراف د فریکونسي څو ضلعي ګرا سره



له پورتني ګراف څخه ليدل کيږي چې:

- د فريکونسيو څو ضلعي ګراف راسونه تر مطالعې لاندې دفريکونسيو له جدول د اړونده مستطيل د پورتنی ضلعې منځني نقطه سره واقع دي.
- د فريکونسيو څو ضلعي ګراف د لاندې سطحې مساحت د مستطيلي ګراف له مساحت سره برابر دی.
- د نسبي فريکونسيو څو ضلعي ګرافونه زيات د متصلو ډيټاوو (Data) له پاره کارول کيږي.

پوښتني

1 - د نهم اولسم ټولګیو د 24 زده کوونکو د تنې لوړوالی د سانتي متر په حساب په لاندې ډول راکړل شوي دي.

138	107	136	128	148	118
142	129	115	123	133	123
121	128	122	144	126	135
152	98	117	153	141	126

د پورتنی ډیتا (Data) لپاره د فریکونسي یو جدول ترتیب کړئ. دیتا (Data) په شپږو طبقو وویشئ، ددې دیتا (Data) د ښودلو لپاره کوم ډول ګراف ښه دی، د فریکونسیو څو ضلعي ګراف رسم کړئ.

د ساقې او پاڼې ګراف

موږ د عددونو په نړۍ کې ژوند کوو، هر تن د خپل هیواد د ټولنې د یو غړي په حیث یوه خاصه شمیره لري چې د نورو مشخصو په شان د اهمیت ور دي. ایا ویلای شئ چې دا شمیره څه شی دی؟ او ایا تاسو هم خپله شمیره پیژنئ؟

فعالیت

• په لاندې جدول کې د سانتي متر په حساب د 20 نویو پیدا شوو ماشومانو د تنې لوړوالی چې په تصادفي ډول انتخاب شوي دي، راکړل شوی دی.

45	46	47	43	49	40	42	46	45	43
43	43	48	49	47	49	48	49	47	45

• پورتنی ډیتا (Data) له کوچني عدد څخه لوی عدد ته ترتیب کړئ.
- لیدل کیږي چې په دې ټولو عددونو کې د 4 عدد رقم مشترک دی، کولای شو چې دا رقمونه په لاندې ډول ولیکو.

$$40 + (0,2,3,3,3,3,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9,9)$$

• له 0 تر 9 پورې رقمونه هر یو رقم څو واري تکرار شوی دی.
پورتني رقمونه په لاندې شکل لیکو.

4	0			
	2			
	3	3	3	3
	5	5	5	
	6	6		
	7	7	7	
	8	8		
	9	9	9	9

• که د عددونو پورتنی شکل د 90° زاويې په اندازه کينې خوا ته دوران ورکړي، دا شکل له کوم ډول ګراف سره مشابه دی؟

ډيټا عموماً د عددونو په شکل وي. له دې عددونو څخه څرنګه چې په پورتني فعاليت کې وليدل شول، کولای شو، ګراف يې جوړ کړو، چې دا ګراف د ساقې او پاڼې د ګراف په نامه يادېږي.
او که دې ګراف ته د 90° زاويې په اندازه کينې خواته دوران ورکړو، ميله يې ګراف لاس ته راځي.
د مثال په ډول که ډيټا د صفر او 100 ترمنځ وي، کولای شو لکه د 37 عدد 3 په ساقه او د (7) د پاڼې په حيث وليکو.
د ساقې او پاڼې ګراف د هغه ډيټا (Data) لپاره چې تر ټولو لوی او تر ټولوکوچنی ډيټا (Data) ترمنځ توپير يې لږ وي، مناسب دی.

مثال: د کتابونو په يو پلورنځي کې 20 ډوله کتابونه چې د هر ډول شمير يې په لاندې جدول کې راکړل شوي دی، ددې ډيټا (Data) د ساقې او پاڼې ګراف رسم کړئ.

10	11	15	23	27	28	38	38	39	39
40	41	44	45	46	46	52	57	58	65

حل: ښکاره ده چې د ډيټا (Data) د کينې خوا اولني عددونه 5.4.3.2.1 او 6 دي. چې دا عددونه د ساقې لپاره په نظر کې نيسو. او د هرې خانګې اړونده ډيټا ورته ددې عددونو مخکې ليکو چې په لاندې ډول لاس ته راځي.

ساقه	پاڼې
1	0 1 5
2	3 7 8
3	8 8 9 9
4	0 1 4 5 6 6
5	2 7 8
6	5

که د کتاب مخ ته د ساعت د ستنې حرکت په مخالفه خوا کې د 90° زاويې په اندازه دوران ورکړو. داگراف د میله يي گراف په شکل بدليږي چې په لاندې ډول يې ليکلای شو.

فریکونسی

6				6		
5				6		
4			9	5		
3	5	8	9	4	8	
2	1	7	8	1	7	
1	0	3	8	0	2	5
	1	2	3	4	5	6

مثال: د رياضي په يوه امتحان کې لاندې نتيجې له زده کوونکو څخه پلاس راغلی دي، ددې ديتا لپاره د ساقې او پاڼې گراف رسم کړئ.

25 45 46 50 50 50 55 55 55 55

55 57 58 58 60 60 62 65 67 72

حل: د ساقې د رسم لپاره له لسيزو رقمونو او د پاڼې د ترسيم لپاره له يووېزو رقمونو څخه استفاده کوو:

ساقه	پاڼې
2	5
3	
4	5 6
5	0 0 0 5 5 5 5 5 7 8 8
6	0 0 2 5 7
7	2

پوښتني

1- د لاندې دیتا (Data) لپاره د ساقې او پاڼې ګراف رسم کړئ.

7.9	8.3	10.9	11.7	8.4	9.1	6.8	12.5
11.2	7.8	12	11.3	8.4	13	6.8	

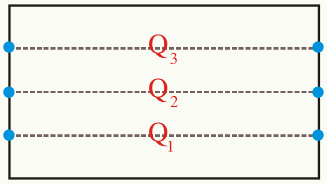
پاملرنه: د ساقې او پاڼې د ګراف د ښودلو لپاره د 8.3 عدد د 83 په شکل او د 11.2 عدد د 112 په شکل او د 12 عدد د 120 په شکل لیکو.

ربعي

په مخامخ شکل کې چې که دا د خلکو ټولنه نظر د دوی د تنې لوړوالی په نسبت په څلورو مساوي برخو و ویشل شي، هره برخه یې په کوم نامه یادوي ؟

فعالیت

مخامخ شکل یو مستطیل دی چې د Q_1, Q_2 او Q_3 خطونو په واسطه په څلورو مساوي برخو ویشل شوی دی.



- د مستطیل د مساحت څو فیصده مساحت د Q_1 د خط لاندې، څو فیصده مساحت د Q_1 د خط له پاسه واقع دی؟
- دمستطیل څو فیصده مساحت د Q_2 تر خط لاندې او څوفیصده مساحت د Q_2 د خط له پاسه دی؟
- د مستطیل څو فیصده مساحت د Q_3 تر خط لاندې او څو فیصده مساحت د Q_3 د خط له پاسه دی؟

هغه عددونه چې ترتیب شوی ډیټا په څلورو مساوي برخو ویشي، دغه عددونو ته لومړی ربعه، دویمه ربعه او دریمه ربعه وایي او په Q_1, Q_2 او Q_3 سره ښودل کیږي.

لومړی ربعه هغه مقدار دی چې 25% ډیټا له هغې لاندې او 75% ډیټا له هغې پورته واقع وي.

دویمه ربعه هغه مقدار دی چې 50% ډیټا له هغې لاندې او 50% ډیټا له هغې پورته واقع وي.

دریمه ربعه هغه مقدار دی چې 75% ډیټا ترې لاندې او 25% ډیټا یې له پاسه واقع وي.

که ډیټا (Data) په صعودي ډول ترتیب کړو، د ډیټا (Data) میانه د Q_2 سره مساوي لومړنی نیمایي ډیټا (Data) میانه له Q_1 سره مساوي او همدارنګه د دویمې نیمایي میانه له Q_3 سره مساوي ده.

د ربعو د پیداکولو په وخت کې لاندې پړاونه په پام کې ونیسئ.

- ډیټا (Data)په صعودي ډول ترتیب کړئ.
- ترتیب شوی ډیټا ته له (1) څخه تر n پورې شمیره (کوډ) ورکړئ.
- د P ام موقعیت ($P=1,2,3$) دلاندې رابطې په مرسته په لاس راځي.

$$C_{QP} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

•د ربعې د موقعیت په اساس، د ربعې مقدار وټاکئ.

مثال: فرض کړئ په لاس راغلي ډیټا (مشاهدې) په لاندې ډول راکړل شوي وي.

90 85 80 120 100 140

د لومړۍ او دریمې ربعې ځایونه وټاکئ.

د لومړۍ او دریمې، ربعې مقدارونه پلاس راوړو.

د ډیټا شمیره:	6	5	4	3	2	1
ډیټا :	140	120	100	90	85	80

د لومړۍ او دریمې ربعو ځایونه عبارت دي له:

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 2$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 5$$

نو د لومړۍ او دریمې، ربعو مقدارونه مساوي دي په:

$Q_3 = 120$ $Q_1 = 85$

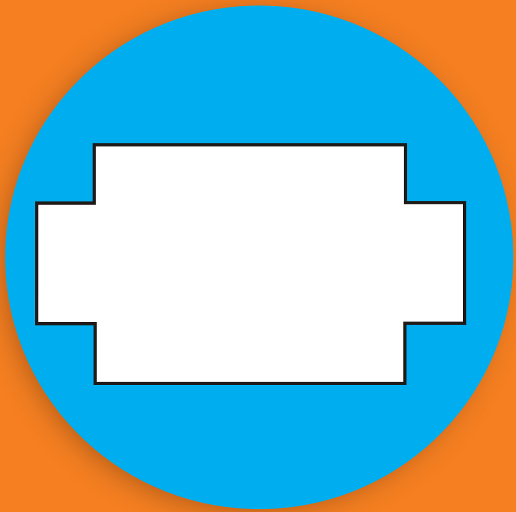
پوښتنې

فرض کړئ په لاس راغلي ډیټا په لاندې ډول راکړل شوي وي.

100 90 80 120 160 140 85

- لومړۍ او دریمه څلورمې پیدا کړئ.
- له میانې تر مخه عددونه ولیکئ.
- له میانې وروسته عددونه په لاس راوړئ.

صندوقچه يي گراف



د يوې تختې کاغذ له څلورو کنجونو څخه څلور مربعې چې هره ضلعه يې $5cm$ وي، جلا کړئ، بيا د کاغذ څنډې له پورته خواڅخه قات کړئ،
کوم شکل چې په لاس راځي، له څه شي سره ورته والی لري؟

فعاليت

د هغه ناروغانو شمير چې د 17 ورځو، په موده کې روغتون ته راغلي دي، په لاندې ډول ثبت شوي دي.

24	17	16	27	14	23	15	10	11
	19	26	25	18	31	31	13	28

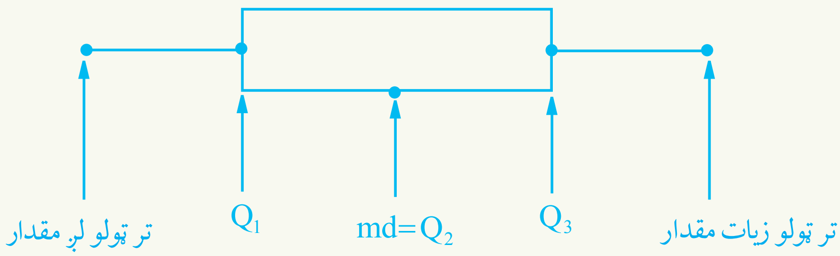
- ميانه يې پيدا کړئ.
- هغه عددونه وليکي چې د مياني تر مخې نمياېي کې پرتې دي.
- ددې عددونو لپاره ميانه پيدا کړئ.
- هغه عددونه وليکئ چې د مياني په وروسته نيمايي کې پراته دي.
- ددې عدددونو لپاره ميانه پيدا کړئ.
- دويمه څلورمه يا Q_2 کوم عدد دی؟

صندوقچه يي يا جعبه يي گراف: دا يو داسې تصويري گراف دی چې د ډيټا (Data) تيت والی د نورو گرافونو په نسبت ښه روښانه کوي، د اگراف د لاندې اندازو پر بنياد د ديتا (Data) گراف ښکاره کوي.

الف) تر ټولو کوچنی ډيټا　　ب) لومړنی څلورمه　　ج) ميانه

د) دريمه څلورمه　　هـ) تر ټولو لوی ډيټا

صندوقچه يي گراف د ربعو او له زيات نه زيات او کم تر کمه ډيټا (Data) ښودونکي دی.



کولای شو د صندوقچه يي ګراف د رسمولو پړاوونه په لاندې ډول وليکو:

الف) تر ټولو کوچنی ډيتا پيدا کړئ.   ب) تر ټولو لويه ډيتا پيدا کړئ

ج) ميانه پيدا کړئ   د) لومړی ربعه پيدا کړئ

هـ) دريمه، ربعه پيدا کړئ   و) ګراف رسم کړئ.

مثال: که په يو ښار کې د 15 ورځو په موده کې د ترافيکي پيښو شمير په لاندې ډول راکړل شوي وي، صندوقچه يي ګراف يې رسم کړئ.

34 16 27 14 23 15 10 12

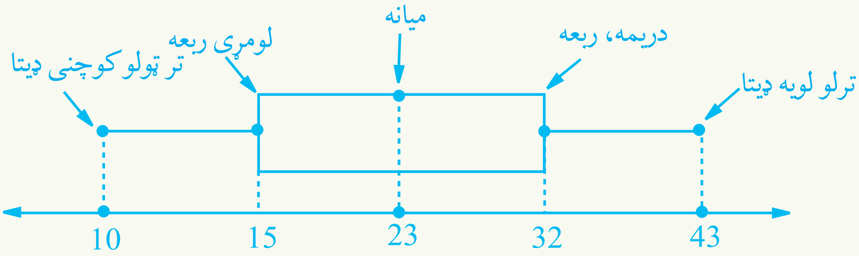
19 31 25 18 32 43 41

حل: پورتنی ډيتا په ترتيب ليکو.

10 12 14 15 16 18 19 23 25 27 31 32 34 41 43

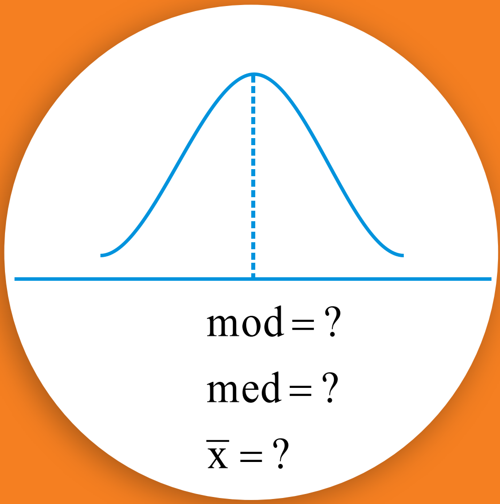
نو: تر ټولو کوچنی ډيتا = 10   تر ټولو لويه ډيتا= 43

ميانه = 23   لومړی ربعه = $Q_1 = 15$ دريمه ربعه = $Q_3 = 32$



پورتنی ګراف صندوقچه يي ګراف دی چې 50% ډيتا دصندوق په داخل کې (د لومړی او دريمې، خلورمو ترمنځ) پرتی دي، 25% يې 10 او 15 ترمنځ او 25% ډيتا د 32 او 43 ترمنځ پرته ده.

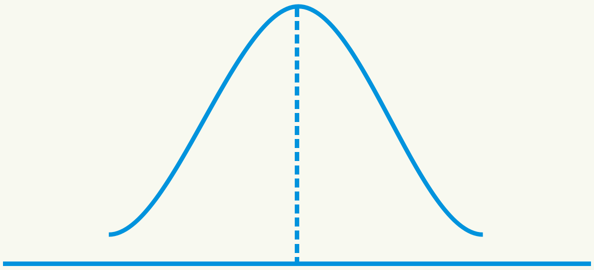
د نارمل منحني د مرکزي تاکوونکو پرتله کول



آیا کولای شو چې د نارمل منحني په مرسته مرکزي ټاکوونکی پلاس راوړو؟

لاندې کوم منحني چې وينئ، په احصائيه کې يوله مشهورو منحني ګانو څخه دی، کولای شو چې زياتې طبيعي پيښې ددې منحني په مرسته وښايو. د نارمل منحني يو متناظره منحني دی چې د يوه زنګ په شان شکل لري.

• آيا د اوسط، مياني او موډ د مرکزي ټاکوونکو ځايونه په دې منحني کې ښودلای شئ؟



فعاليت

– که په يوه ټولګي کې ټول زده کوونکي ښې نمرې واخلي:

• آيا څه فکر کوئ چې ددوی د نمرو اوسط هم ښه دی؟

• آيا د اوسط لوړوالي د ټولګي د تعليمي وضعې پر ښه والي دلالت کوي؟

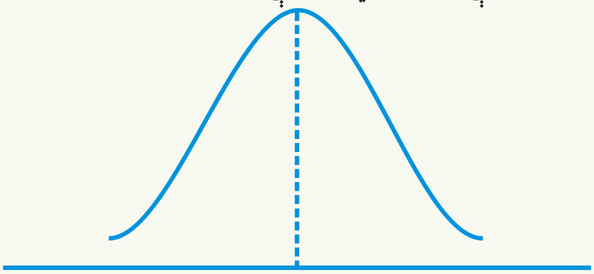
– ددې لپاره چې د ټولګي وضعه ښه ارزيابي کړې، نيم ټولګي بايد ښې نمرې واخلي.

• هغه کومه نمره ده، چې د نيمايي ټولګي د زده کوونکو نمرې له هغې زياتې دي؟

• که میانه له اوسط څخه ډیره کوچنۍ وي، له دې څخه شی په لاس راځي؟

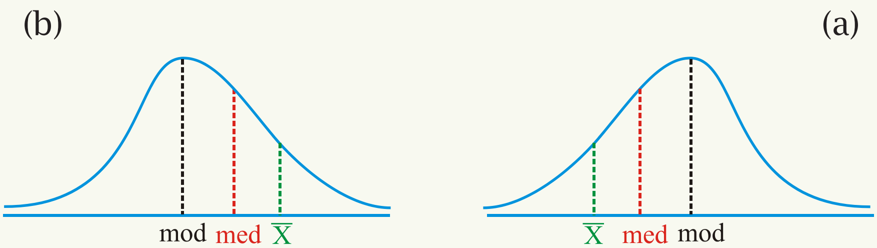
• که میانه له اوسط څخه ډیره لویه وي، له دې څخه څه شی په لاس راځئ؟

د پورتني فعالیت او د منحني له متناظر والي څخه نتیجه په لاس راځئ چې د میانې او اوسط ځای په نارمل منحني کې یو دی. او څرنګه چې نارمل منحني اعظمي نقطه لري. نو له همدې سببه د موډ ځای هم له اوسط او میانې سره مساوي دی یعنې:



$\overline{X} = \text{mod} = \text{md}$

که نارمل منحني، متناظره نه وي، په دې حالت کې لرو چې:



$\text{mod} < med < \overline{x}$ $\qquad$ $\overline{x} < med < \text{mod}$

- که چیرې اوسط او میانه سره مساوي وي، له اوسط او میانې څخه تر مخه، او له اوسط او میانې څخه وروسته ډیټاګانې سره مساوي دي.

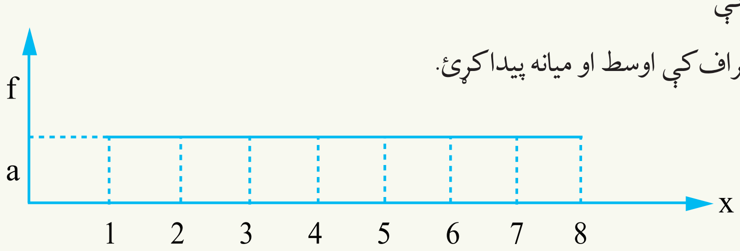
-که اوسط د میانې کیڼې خوا ته پروت وي، د هغه ډیټا شمیر چې د اوسط ښې خواته پرتې دي، د هغه ډیټا (Data) له شمیر څخه چې د اوسط کیڼې خواته پرتې دي، زیات دی. لکه د a به شکل کې.

-که اوسط د میانې ښې خواته پروت وي، د هغه دیتا (Data) شمیر چې د اوسط ښې خواته پرتې

دي، د هغه ډيټاوو (Data) له شمير څخه چې د اوسط کيڼې خوا ته پرتې دي، لږ دي.

لکه د b به شکل کې

مثال: په لاندې ګراف کې اوسط او ميانه پيدا کړئ.



حل:

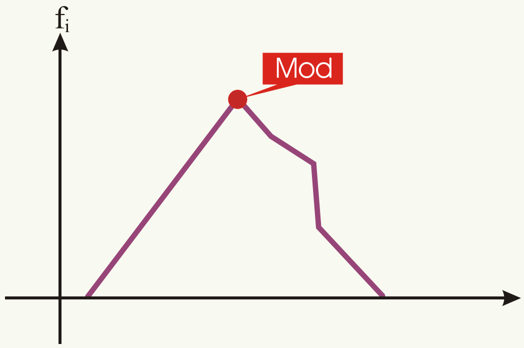
$$med = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

ميانه = $\bar{x} = \frac{a\cdot1+a\cdot2+a\cdot3+a\cdot4+a\cdot5+a\cdot6+a\cdot7+a\cdot8}{a+a+a+a+a+a+a+a}$

اوسط = $\bar{x} = \frac{36a}{8a} = 4.5$

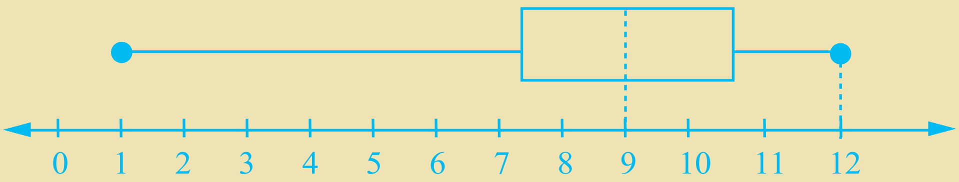
مثال: په لاندې ګراف کې د موډ تقريبي قيمت بغير د محاسبې په ګوته کړئ.

حل:



پوښتني

1– دلاندې صندوقچه يې ګراف په نظر کې نيولو سره لاندې اړونده پوښتنو ته ځوابونه ورکړئ.



- په پورتني ګراف کې ميانه څومره ده؟
- په دې ډيټا کې لومړنی، ربعه د 8 عدد دی، دا عدد، څه شي ښکاره کوي.
- دريمه، ربعه څو ده؟ دا عدد ، د څه شي ښودونکي ده؟
- دا چې ميانه د صندوق کيڼې خواته ده، د څه شي ښکارندويه ده؟
- داچې د کيڼې خوا د عددونو شمېر نظر ښې خوا ته زيات دی دا زياتوالی د څه ښکاره کوونکی دی؟

2– د يوه هيواد د فوټبال ملي ټيم د لوبغاړو عمرونه په لاندې ډول دي.

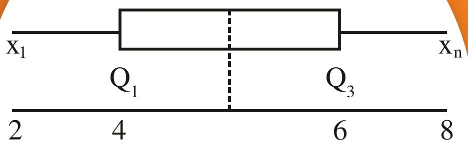
26	25	22	23	18	31	19	26	24	25
	26	31	33	25	25	29	23	27	25

د لاندې نتيجو څخه کومه يوه سمه ده؟

- د هغه لوبغاړو شمير چې عمرونه يې له اوسط څخه لوړ وي، ډير دی.
- د هغه لوبغاړو شمير چې عمرونه يې له مياني څخه لوړ وي، ډير دی.
- د هغه لوبغاړو شمير چې عمرونه يې له اوسط څخه ښکته وي، ډير دی.
- د هغه لوبغاړو شمير چې عمرونه يې له اوسط څخه ډير وي د هغه لوبغاړو له شمير سره مساوي دی چې عمرونه يې له اوسط څخه لږ دي.

ربعي انحراف

که د يوې ټولنې د احصائيوي تغيراتو لمن لويه وي، آيا فکر کوئ چې د ډيټا د تحول ساحه به له ټولنې څخه نامناسبه پايله وړاندې کړي؟



$x_n - x_1 = ?$

$Q_3 - Q_1 = ?$

فعاليت

له يو موزيم څخه د ليدونکو شمير په 12 ورځو کې په لاندې ډول دی.

1 2 8 7 6 5 9 1 6 5 1 11

- ددې ډيټا (Data) د تحول ساحه پلاس راوړئ.
- په عمومي ډول پورتنی ډيټاوې د کومو دوو عددونو ترمنځ تيت شوي دي؟
- يو په څلورمه برخه ډيټا له پورته اوښکته خوا څخه حذف کړئ او بيا د پاتې ډيټا (Data) د تحول ساحه پيدا کړئ.
- دا د تحول دوه ساحې چې په لاس راغلي دي، يو له بله سره يې پرتله کړئ، کومه يو ه يې ډېر تيت والې ښکاره کوي؟
- په څينو وختونو کې د تحول ساحه د دوو ډيرو کوچنيو او يا ډيرو لويو مقدارونو له سببه، نامناسبه تعبيرونه له ټولنې څخه مور ته په لاس راکوي؟

نو له دې امله د نورو ټاکونکو څخه چې د ربعو د انحراف په نامه ياديږي، ګټه اخيستل کيږي، تر څو د ټولنې د تحول ساحه په ښه ډول وټاکئ.

که Q_1 او Q_3 په ترتيب سره د ډيټا د سټ، لومړی ربعه او دريمه ربعه وي، نو د ربعو انحراف په (Q) سره ښودل کيږي او په لاندې ډول تعريف شوی دی.

$$Q = Q_3 - Q_1$$

د ربعي انحراف يو له هغه ټاکونکو څخه دی چې د ډيټا (Data) تيت والې ښکاره کوي.
داسې چې د لومړي او دريمې ربعو له تعريف څخه پوهيږو چې 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه چې دا فاصله لږه وي، ډيټا سره نژدې دي، يا په بل عبارت د هغوی

تیت والي لږ دی.

ځینې وختونه د څلورمو انحراف د $Q=\dfrac{Q_3-Q_1}{2}$ په شکل تعریفوي او دې ته د څلورمې نیمایي لمن وایي.

مثال: دلاندې عددونو د څلورمو انحراف پیدا کړئ.

36 35 29 30 31 25 24 23 22 22 20

حل: لومړی عددونه په صعودي ډول ترتیب کوو او بیا ورته یوه شمیره ټاکو:

20	22	22	23	24	25	29	30	31	35	36
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$$C_{Q_n}=\frac{P\cdot n}{4}+\frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3}=\frac{3\cdot 11}{4}+\frac{1}{2}=\frac{33}{4}+\frac{1}{2}=\frac{33+2}{4}=\frac{35}{4}=8.75$$

نوله دې ځایه: $Q_3=30.75$

همدارنګه: $C_{Q_1}=\dfrac{1\cdot 11}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{11+2}{4}=\dfrac{13}{4}=3.25$

نوله دې ځایه: $Q_1=22.25$

د لومړنی او دریمې، ربعي قیمتونه په ترتیب سره 22.25 او 30.75 دي نو:

$$Q=Q_3-Q_1=30.75-22.25=8.5$$

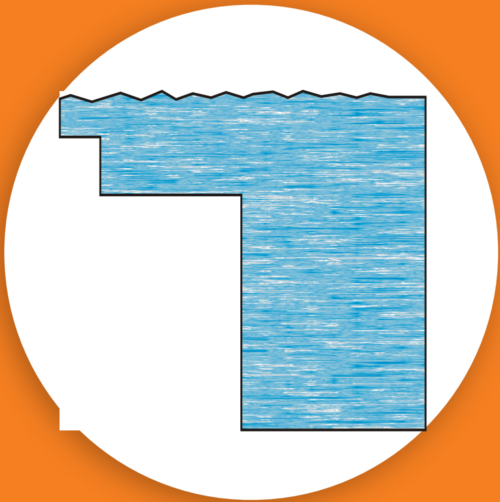
پوښتنې

1 – د لاندې دیتا د تحول ساحه، دڅلورمو انحراف او موډ پیدا کړئ او ووایاست چې د دیتا ګڼوالی په کومه ساحه کې ډیر دی.

5 11 12 14 15 15 16 17 30

2 – د لاندې دیتا د تحول ساحه او د څلورمو انحراف پیدا او پرتله یې کړئ.

27 24 21 29 28 26 23 22



واريانس (variance)

که ستاسو لامبو ښه زده نه وي او وغواړئ چې په داسې ډنډ کې ولامبئ چې ژور والی يې په ټولو برخو کې يو شان نه وي. ددې لپاره چې په ډاډه زړه ولامبئ، کوم معلومات بايد ولرئ؟

فعاليت

که د لمبا په يو ډنډ کې د يوځای ژوروالی يې 1.5 متره او دبل ځای ژوروالی يې 2.5 متره وي.

- ددې ډنډ د دواړو ځايونو د ژوروالي اوسط پيدا کړئ.
- ددې دوو ډيټا د انحرافونو مربع پيدا کړئ.
- ددې دوو ډيټا د انحرافونو د مربعګانو مجموعه پيدا کړئ.
- د پورتنيو ډيټا (Data) مجموعه د مجموعې د غړو پر شمير و ويشئ.

د $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ډيټا د واريانس د پيدا کولو لپاره لاندې پړاوونه په نظر کې ونيسئ.

- د ډيټا اوسط پيدا کړئ يعني :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{n}$$

- د انحرافونو د مربعګانو مجموعه يعنې :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \quad \ldots + (x_n - \bar{x})^2$$

په لاس راوړئ.

-پورتنی مجموعه د مجموعې د غړو پر شمير (n) و ويشئ او په s^2 ښايو :

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

چې دلته S^2 د واریانس په نامه یادیږي. واریانس برابر دی د انحرافونو مربع اوسط له اوسط څخه.

پاملرنه: ځینې وختونه وریانس د پیداکولو لپاره له دې لاندې فورمول څخه هم ګټه اخلي.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \bar{x}^2$$

ثبوت: پورتنې فورمول کولای شو، په لاندې ډول لاس ته راوړو.

پوهیږو چې :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{\,2}-2x_i\bar{x}+\bar{x}^2)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} 2x_i\bar{x}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}^{2}}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - 2\bar{x}\cdot\bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \bar{x}^2$$

مثال: د لاندې دیتا (Data) وریانس د دواړو فورمولو په مرسته پیدا کړئ.

1 5 6 7 9

الف: د $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(xi-\bar{x})^2}{5}$ له فورمول څخه ځرنګه چې $i=1,2,3,4,5$

$$\bar{x} = \frac{1+5+6+7+9}{5} = 5.6$$

$$S^2 = \frac{(1-5.6)^2+(5-5.6)^2+(6-5.6)^2+(7-5.6)^2+(9-5.6)^2}{5}$$

$$=\frac{(-4.6)^2+(-0.6)^2+(0.4)^2+(1.4)^2+(3.4)^2}{5}$$

$$=\frac{21.16+0.36+0.16+1.96+11.56}{5}=\frac{35.2}{5}=7.04$$

ب: له دې فورمول $S^2=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i^{\,2}}{5}-\bar{x}^2$ څخه هم کولی شو چې همدا قیمت په لاس راوړو

$$S^2=\frac{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+x_3^{\,2}+x_4^2+x_5^{\,2}}{5}-\bar{x}^2=\frac{192}{5}-(5.6)^2$$

$$=38.4-31.36=7.04$$

یادونه: که دیتا په کلاسوونو کې ترتیب شوي وي او د کلاسونو مرکزونه $x_1,x_2,..,\ x_n$ او $f_1,f_2,...,f_n$ فریکونسي هم راکړای شوي وي. په دې حالت کې ښه داده چې د واریانس د پیدا کولو لپاره له لاندې فورمول څخه کار واخلو:

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}f_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\bar{x})^2}{N}$$

داسې چې $N=\sum_{i=1}^{n}f_i$ دی.

د وریانس د واحد ټاکل مشکل دي. په عمومي ډول په عمل کې مطلقه قیمت یې نیول کیږي، ځینې وخت د متحول د واحد مربع د واریانس د واحد په حیث ګڼل کیږي.

پوښتنې

د هغه ساعتونو شمیر چې زده کوونکو په یوه اونۍ کې د لوبو کولو لپاره ټاکلي دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي.

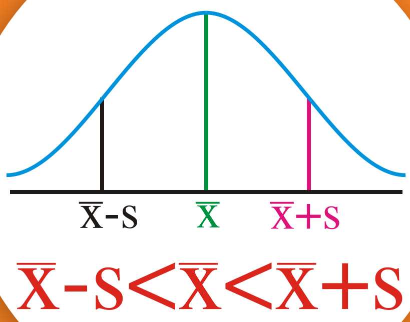
3 2 1 4 3 2 2

ددې دیتا (Data) وریانس پیدا کړئ.

معیاري انحراف

که S دوریانس جذر $\bar{x}$ دیتا اوسط وي

مخامخ شکل کوم ډول ټاکونکی توضیح کوي؟



فعالیت

که S^2 د $x_1, x_2, .., x_n$ دیتا واریانس وي. آیا څه فکر کوئ چې د S^2 او S واحدونه سره څه توپیر لري؟ فرض کړئ چې په یوه هفته کې یوې کارخانې ته د توکو د فرمایشونو د تسلیمی وخت له څېنو ټاکونکو سره لکه انحراف، د انحراف مطلقه قیمت د انحرافونو مربع په لاندې جدول کې راکړل شوی وي، څرنګه چې:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{n} = \frac{8+9+6+4+8}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

د انحرافونو مربع $(x_i - \bar{x})^2$	دانحراف مطلقه قیمت $\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	انحراف $x_i - \bar{x}$	$\bar{x}$	د ورکړې وخت په ورځ x_i
1	1	1	7	8
4	2	2	7	9
1	1	-1	7	6
9	3	-3	7	4
1	1	1	7	8

• د ډيټا (جامو) د ورکړې د وخت اوسط پيدا کړئ.

• د انحرافونو د مطلقه قيمت اوسط يا په لنډ ډول د انحراف اوسط (AD) پيدا کړئ.

• د توکو د ورکړې وخت واريانس پيدا کړئ.

• د واريانس مربع جذر محاسبه کړئ.

• د واريانس د مربع جذر واحد د واريانس له واحد سره پرتله کړئ.

د واريانس له فورمول څخه مو زده کړل چې په توان ورلو سره نه يوازې داچې د واريانس اندازه کولو مقياس له شک سره مخامخ کوي، بلکې انحرافونه هم لوی ښيي.

ددې لپاره چې دا ستونزې له مينځه يوسو، پکار ده چې د وريانس جذر په لاس راورو.

د واريانس جذر د ډيټا (Data) د تيت والي، يو بل ته ټاکونکی د معياري انحراف يا مطلق تيت والي په نوم را پيژني.

معياری انحراف چې د S په سمبول ښودل کيږي، د واريانس له مربع جذر سره مساوي دی.

په دې معنا:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\bar{x}^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}$$

د معياری انحراف يا د مطلق تيت والي واحد هم هغه د متحول واحد دی.

پورتنۍ رابطه په لاندې ډول ثبوت کيږي:

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2\bar{x}x_i+\bar{x}^2)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2n\bar{x}^2+n\bar{x}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{n}\right)$$

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2\Rightarrow S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}$$

مثال: د 5 ناروغانو د بدن د حرارت درجې په لاندې ډول راکړل شوي دي. :

38 39 39 40 41

معیاري انحراف یې پیدا کړئ

حل:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{38+39+39+40+41}{5} = \frac{197}{5} = 39.4$$

$$S^2 = \frac{(38-39.4)^2+(39-39.4)^2+(39-39.4)^2+(40-39.4)^2+(41-39.4)^2}{5}$$

$$S^2 = \frac{(-1.4)^2+(-0.4)^2+(-0.4)^2+(0.6)^2+(1.6)^2}{5}$$

$$S^2 = \frac{1.96+0.16+0.16+0.36+2.56}{5} = \frac{5.2}{5} = 1.04$$

$$S = \sqrt{1.04} = 1.01980$$

پاملرنه: د فریکونسیو له جدول څخه، معیاري انحراف په تقریبي ډول په لاندې ډول په لاس راځي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i {x_i}^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} - \bar{x}^2$$

چې $\bar{x}$ د ډیټا اوسط، x_i د کلاس مرکز او f_i د کلاس فریکونسي ښیي.

پوښتنې

د خلورو ټلویزوني ستېشنونو د ښوونې او روزنې پروګرامونو خپرولو د ساعتونو شمیر په لاندې ډول راکړل شوي دي، د دیتا معیاري انحراف پیدا کړئ.

1 3 4 5

څېرکی لنډیز

• **د فریکونسي څو ضلعي ګراف**: د هغو مرتبو جوړو نقطې چې عرض يې د کلاس مرکز او اوږدوالي يې د هماغه کلاس له فریکونسیو سره مساوي دی، یوه له بلې سره ونښلوو، د فریکونسي څو ضلعي ګراف په لاس راځي، د فریکونسي څو ضلعي ګراف کې دوې نورې اختیاري نقطې د صفر په فریکونسیو د کلاسونو (ګروپونو) په لومړۍ او اخیرنی برخه کې ډیروو، تر څو د فریکونسیو څو ضلعي ګراف له محور سره ونښلوي.

• **د ساقې او پاڼې ګراف**: د ساقې او پاڼې د ګراف د رسمولو لپاره له عددونو څخه ګټه اخیستل کیږي. احصائیوی ډیټا د عددونو په شکل راوړي، بیا له دې عددونو څخه د ساقې او پاڼې ګراف رسموو. دا ډول ګراف د هغه ډیټا (Data) لپاره چې د رقمونو د شمیر له مخې تر ټولو لوی او کوچنی رقم تر منځ توپیر لږ وي، مناسب دی.

• **ربعې**: هغه عدد چې مرتبه جامعه په دوو مساوی برخو وویشي، د میانی په نوم یادیږي. اوس هغه عددونه په نظر کې ونیسئ چې مرتبه جامعه په څلورو مساوي برخو ویشي، دا عددونه په Q_1, Q_2 او Q_3 سره ښودل کیږي، دې عددونو ته په ترتیب سره لومړۍ ربعه، دویمه ربعه او د دریمه ربعه وایي. ښکاره ده چې Q_2 میانه ده.

• **صندوقچه يي یا جعبه يي ګراف**: له دې ګراف څخه د هغې ډیټا (Data) لپاره چې سره نژدې دي یا هغه ډیټاوی چې د اوسط پر شاوخوا راټولې شوي دي او یا هم هغه ډیټا چې ترټولو لویو یا ترټولو کوچنیو ډیټاګانو (Data) پرشاوخوا راټولې شوي وي، ګټه اخیستل کیږي، داګراف یو تصویرې ګراف دی چې ترټولو لویې ډیټا، ترټولو کوچنی ډیټا، میانې، لومړی ربعې او دریمې ربعې په اساس ښکاره کوي.

• **د نارمل منحني په بنیاد د مرکزي ټاکونکو پرتله کول**: څه وخت چې وغواړو مرکزي ټاکونکي (اوسط، میانه، او موډ) له نارمل منحنې څخه په ګټه اخیستنه سره پرتله کړو: په دې حالت کې که نارمل منحني متناظر وي، نو اوسط، میانه او موډ سره مساوي دي. که نارمل منحني متناظر نه وي، نو مرکزي ټاکونکي نظرخپل موقعیت ته د منحني ښې خوا یا کیڼې خواته قیمتونه اخلي:

• **ربعي انحراف**: که Q_1 او Q_3 په ترتیب سره د دیټا (Data)لومړی څلورمه او دریمه څلورمه وي، کولای شوو چې د څلورمو انحراف (Q) په لاندې ډول ولیکو

$$Q = Q_3 - Q_1$$

له پورتني تعریف څخه ښکاری چې 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه چې دا فاصله لږه وي، د ډیټاګنې دي او د ډیټا تیت والی لږ دی.

• **واریانس**: د تیت والی ټاکونکي هغه مقدارونه دی چې د ډیټا (Data) د تیت والی حالت نسبت یوبل ته او نسبت یې اوسط ته ټاکي.

واریانس د تیټ والي له ټاکونکو څخه یو مهم ټاکونکی دی چې په S^2 سره ښودل کیږي او له لاندې رابطې څخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

د واریانس پیداکول د فریکونسیو په جدول کې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

(x_i دکلاس مرکز دی)

• **معیاري انحراف**: د وریانس مربع جذر په S ښکاره کوي چې معیاري انحراف ورته وایي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

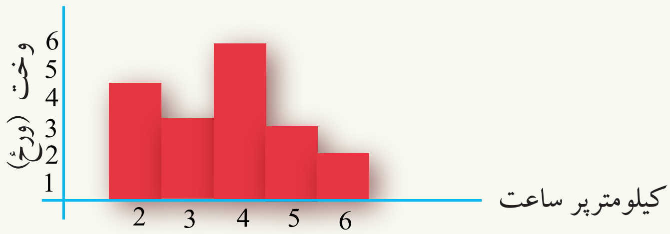
د معیاري انحراف پیداکول د فریکونسیو له جدول د لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

(x_i دکلاس مرکز دی)

د څپرکي پوښتنې

1 - لاندې ګراف د باد سرعت په 19 ورځو کې ښکاره کوي، په ګراف کې د راکړل شوو اطلاعاتو پر بنسټ د باد سرعت لپاره د فریکونسیو څو ضلعي ګراف رسم کړئ.
که چیرې د یوې کشتۍ د حرکت تللو لپاره لږ تر لږه په یوه ساعت کې 5 کیلو متره د باد سرعت ته اړتیا وي، نو څو ورځې د کشتۍ د تللو لپاره مناسبې دي؟
په دې پوښتنه کې د فریکونسیو څو ضلعي ګراف، نظر مستطیلي ګراف ته مناسب دی؟



2 - د فریکونسیو څو ضلعي ګراف هغه ګراف دی چې .... په افقي محور او .... د عمودي محور پر مخ ښودل کیږي.

الف) د کلاسونو مرکز، مطلقه فریکونسي
ب) نسبي فریکونسي، د کلاسونو مرکز
ج) د کلاسونو حدود، مطلقه فریکونسي
د) د کلاس مرکز، مطلقه فریکونسي

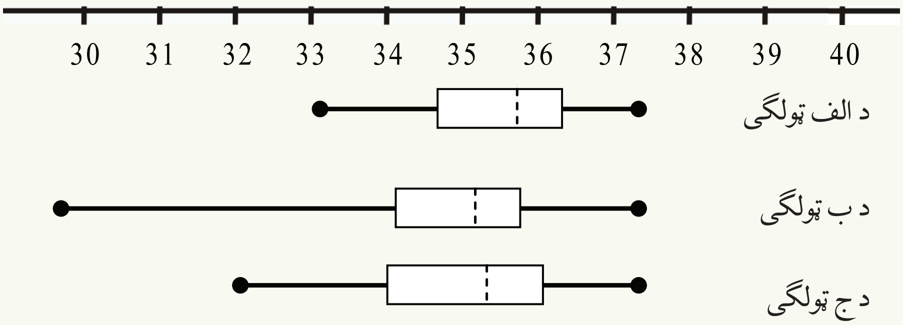
3 - دساقې او پاڼې ګراف راکړل شوي دی:
- له دې ګراف څخه په لاس راغلي ډیټا ولیکئ.

ساقه	پاڼې
1	0 3 3 4
2	0 2 4 8 8
3	2

4 - کوم ګراف ته د 90° په اندازه (د ساعت د عقربو مخالف لوري کې) دوران ورکړو، تر څو میله یي ګراف لاس ته راشي.

الف) د ساقې او پاڼې ګراف
ب) مستطیلي ګراف
ج) د فریکونسیو د څو ضلعي ګراف
د) دایروی ګراف

6: لاندې ګراف د الف،ب او ج د دریو ټولګیو د ریاضي ازموینې نمرې ښکاره کوي، ګراف ته په پاملرنې سره لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



• د کوم ټولګي د تحول ساحه زياته ده؟

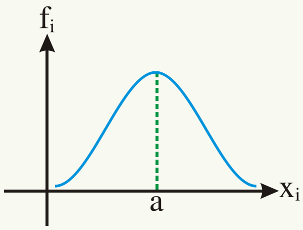
• د کوم ټولګي د نمرو ميانه تر ټولو زياته ده؟ او د کوم ټولګي د نمرو ميانه تر ټولو لږه ده؟

• د کوم ټولګي د نمرو تيت والی تر ټولو ډير دی.

• ددې درو ټولګيو د ازموينې نمرې له کمزورې څخه د قوي په لور ترتيب کړئ.

7 : په ګراف کې د a مقدار عبارت دی له:

الف) ميانه   ب) اوسط   ج) دريمه ربعه   د) موډ



8: د غذايي موادو د توليد دوه فابريکې د A او B په نامه، بسکيت د 48 گرامو په قطعيو کې خرڅوي.
په تصادفي ډول د دواړو فابريکو د بسکيت له قطعيو څخه 5 قطعې ټاکل شوي دي او په پوره غور سره يې وزنونه معلوم شوي دي چې په لاندې ډول دي.

A :	48.08	48.32	47.96	47.84	47.96
B :	49.16	48.84	48.88	49.08	49

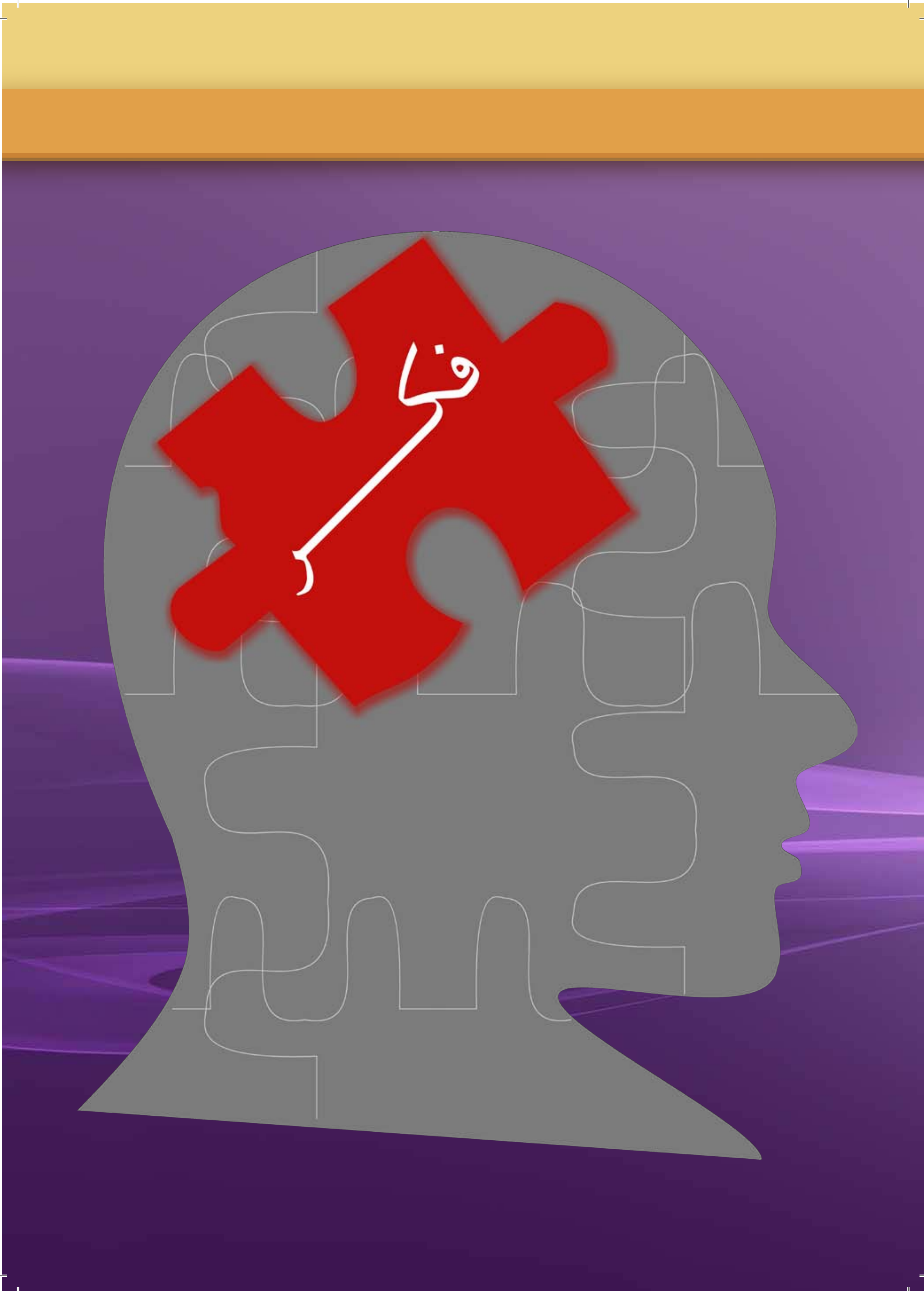
• په قطعيو کې کومه فابريکه زيات بسکيت خرڅوي؟ د سوال د حل لپاره له کوم ټاکونکي څخه استفاده کوي؟
• د بسکيت په ويشلو کې کومې فابريکې يو شان عمل کړی دی.
9: که د ډيټا د تحول ساحه صفر وي. د ډيټا په برخه کې څه نتيجه اخلئ؟
10 : د هغه ساعتونو شمير چې زده کوونکو په يوه اونۍ کې د لوبو لپاره ټاکلي دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي.

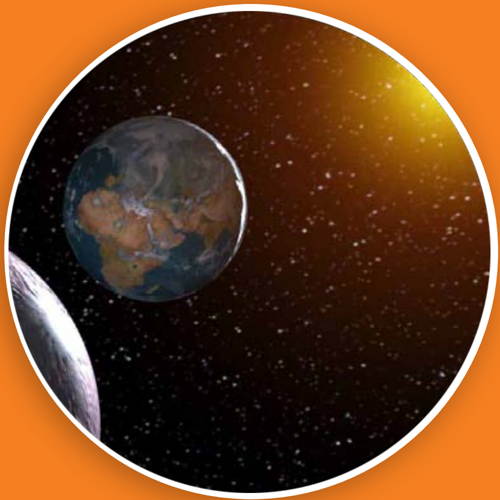
1 5 7 9

ددې ډيټا (Data) ورايانس پيدا کړئ.
11: په لاندې جدول کې واريانس پيدا کړئ.

x_i	25	35	45
f_i	10	25	15

نهم څپرکی
د رياضی منطق


فكر



د شهودي درک استدلال:

پخوا تر ډیــر و پیریو پورې خلکو فکر کاوه چې ځمکه هواره ده او ستوري د ځمکې پر شاوخوا څرخیږي.

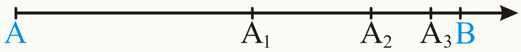
ایا پوهیږي چې ځمکه کروي ده؟

ایا لمر دځمکې پر شــاوخوا او که ځمکه د لمر پرشاوخوا څرخیږي؟

تعریف: هغه طبیعي یا حسي پوهه چې دهغې په مرسته دیوې موضوع سموالی یا حقیقت او یا یو مفهوم پر ته له استدلاله قبلوو، له شهودی درک څخه عبارت ده چې کیدلی شي، دوخت په مختلفو مرحلوکې یوله بله سره توپیر ولري.

فعالیت

د لاندې شکل په نظر کی نیولو سره د مستقیم خط پر مخ د A او B دوې نقطې په پام کې ونیسئ.



یو سړی غواړي چې ددې مستقیم خط پر مخ د A له نقطې څخه په دې ډول د B نقطې ته لاړشي چې د $\overline{AB}$ د قطعه خط منځنی نقطه A_1 کې توقف وکړي او بل وار چې د A_1 نقطې ته رسیدلی دي، ددې لپاره چې د B نقطې ته ورسیږي، بیاد A_2 په نقطه (د $\overline{A_1B}$ د قطعه خط دتنصیف نقطه) کې توقف وکړي، که په همدې ډول دوام ورکړي، نو لاندې پوښتنو ته ځوابونه ورکړئ:

- ایا په پورته ډول چې د خط پر مخ د هرو دوو نقطو په منځنی نقطه کې توقف وکړي، پای لري؟
- که په همدې ډول تر پایه دوام ورکړئ، دا سړی به د B نقطې ته ورسیږي؟
- که دا سړی توقف و نه کړي او یا له لارې بیرته راونه ګرځي، نو نه یوازې چې د B نقطې ته به ورسیږي، بلکې ترې تیر به هم شي. په دې اساس ددې مسلئې د واقعیت او ستاسو د شهودي درک ترمنځ څه توپیر شته؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي؛

نتیجه : د شهودي درک نتیجه هر وخت صحیح نه وي، خو کېدای شي چې د قضیو دحل لپاره یو ښه بنسټ وي.

له هغه مثال څخه چې په پورتنی فعالیت کې مو ترې استفاده وکړه او یاداسې نور مثالونه دا ددې په معنا نه ده چې دشهودي درک استدلال گمراه کوونکی دی، بلکې بر عکس په زیاتو حالتونوکې دشهودي درک استدلال د مسلؤ دحل، د انگیزې، د پیداکولو او د نورو سوالونو د طرح کولو سبب گرځي.

لومړی مثال: د شهودي درک په استدلال سره په اسانی سره حکم کولای شو چې دوه موازي خطونه یو بل نه قطع کوي.

څرنگه چې ددې مسلې په قبلولو کې استدلال په کار وړل شوی نه دی، په واقعیت یو احساس دی چه پر اساس یې داحکم منل کیږي، نو دا ډول نتیجه اخیستنه دشهودي درک په نامه یادوو.

دویم مثال: که یوه نقطه د داسې دایرې د باندې پرته وي چې قطر یې 4 واحده وي. ددې نقطې د فاصلې د مطالعه کولو لپاره چې له 2 واحده څخه زیاته ده، نه شو ویلای چې دا استدلال یو شهودی درک دی. څکه دمسلئې د وضاحت لپاره لازمه ده چې استدلال وکړو. څرنگه چې د دایرې د مرکز فاصله له محیط څخه 2 واحد ده. نقطه د دایرې د باندې واقع ده، نوله دې امله د دایرې له مرکز څخه د نقطې فاصله د 2 واحده څخه لویه ده. یعنې پرته له استدلال څخه د طبیعي پوهې او یا غریزه یې احساس په واسطه نه شو کولای، مسله درک او صحت یې قبول کړو.

پوښتنې

1- د دوو نقطو ترمنځ لنډه فاصله له یوه مستقیم خط څخه عبارت ده، ایا ددې مسلئې درک کول به یو شهودي درک دی؟ څرنگه استدلال کوئ؟

2- له لاندې حکمونو څخه کوم یو یې د شهودي استدلال په طریقه د درک وړدی؟

a- دیوې متوازي الاضلاع مقابلې زاویې سره مساوي دي.

b- د لوزي (معین) قطرونه یو پر بل عمود او یوبل نیمايي کوي.

c- په یوه قایم الزاویه مثلث کې و تر، له هرو دوو ضلعو څخه لوی دی.

تمثيلي يا ګماني استدلال :

ووايه زما په لاسونو کې څه شی دی؟ تقريباً ګرد دی، رنګ يې سپين دی او دسپينو په منځ کې يو ژېړ شی دی؟

د منطق يوه ښوونکي غوښتل چې دخپل يوه زده کوونکي قياسي استدلال وازمايي، خپل مخ يې هغه ته ورواړوه او ورته ويې ويل:

پوهيږئ چې ګمان او يا تمثيل حقيقت ته د رسيدو پل دی. د لوست په جريان کې مو زده کړل چې تمثيلي استدلال موږ حقيقت ته نژدې کوي، ليکن هر وخت سوچه حقيقت نه دی.

ښوونکي په داسې حال کې چې په خپلو لاسونکې يې د چرګې هګۍ پټه کړې وه، له زده کوونکي وپوښتل: ووايه زما په لاسونو کې څه شی دی؟ تقريباً ګرد دی، رنګ يې سپين دی او دسپينو په منځ کې يو ژېړ شی دی.

زده کوونکی چې په همدې وخت کې له زراعتی فارم نه راغلی و، له ژور فکر کولو وروسته يې ښوونکي ته مخ ورواړوه او ويې ويل:

استاده فکر کوم چې دسپين شوي شلغم(ټيپر) په منځ کې ګازره ده.

تعريف

د دوو پېښو ترمنځ د ورته والي پيداکول او دهغوی په باره کې د يوشان نتيجې اخيستلوته تمثيلي يا قياسي (ګماني) استدلال وايي.

فعاليت

يوه ښوونکي يو شوخ زده کوونکي چې لوست يې اخلالوه، له ټولګي څخه وويست. دټولګي د باندې يې د خپل ټولګي بل زده کوونکی وليده چې هغه هم له ټولګي څخه د باندې و تلی دی. دپورتني تعريف په نظر کې نيولو سره له لاندې اړيکو څخه کوم يو يې يو تمثيلي يا قياسي استدلال دی.

- دويم زده کوونکی د لوست په وخت کې تفريح کوي.

- دویم زده کوونکي هم شوخي کړي ده.
- ناروغه دی، نه غواړي چې په ټولګی کې واوسي.

له تعریف او د زده کوونکو له فعالیت څخه لاندی نتیجه پلاس راځی:

نتیجه: قیاس یا تمثیل په حقیقت کې د مختلفو مفهومونو په منځ کې دورته والي پیداکول دي. له دې سببه تمثیلونه کیدای شي، د ډیرو مفهومونو یا دریاضي د قضیو د درک کولو لپاره شهودی زمینه پیداکړي. تمثیلي استدلال د ثبوت په حیث نه شمارل کیږي، بلکې د ثبوت لپاره زمینه برابروي.

لومړی مثال: په عامه ژ به(مارخوړلی له برګ پړې څخه ډاریږي) دا یو قیاسي استدلال دی، څکه چې برګ پړی د مارسره پر تله شوی دی او دهغوی په منځ کې ورته والی لیدل شوی دی.

دویم مثال: له تمثیلي استدلال څخه په ګټه، ددې حقیقت درکول چې د دوو منفي اعدادونو حاصل ضرب مثبت عدد او د یو منفي او یو مثبت عدد حاصل ضرب منفي عدد دی، داسې پلاس راورو: مثلاً ددې حقیقت د درک کولو لپاره چې که چیرې د یوه زده کوونکي لیاقت د (+) په علامه او نا لایق والی د (-) په علامې سره په پام کې ونیسو او ددې دواړو عملونو د حاصل د(دی) لپاره (+) او (نه دی) لپاره (-) په پام کې ونیسو، له تمثیل او یا قیاس څخه ګټه اخلو او که دوی سره ترکیب کړو په نتیجه کې لروچې:

لایق دی = مثبت ، لایق نه دی = منفي

(+) (+) = + ، (+) (-) = -

نالایق دی = منفي ، نالایق نه دی = مثبت

(-) (+) = - ، (-) (-) = +

پوښتني

1 - دا بیان چې(بختور کال دهغه کال له پسرلی نه معلومیږی،) په لاندې کوم استدلال باندې دلالت کوي.

a- شهودی درک استدلال.

b- قیاسي استدلال. c- هیڅ ډول استدلال په کې نشته دی.

2- د قیاسي استدلال په مرسته په کوم مثلث کې د فیثاغورث د قضې په اساس لاندې نتیجه ثبوتیدلای شي:

$\sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$

استقرايي استدلال:

یو زده کوونکی په لومړنی صنفي ازموینه کې 100 نمرې اخلی او په دویم او دریم صنفی ازموینوکې هم 100 نمرې اخلي.
په اخرنی ازموینه کې څه نتیجه اخیستلای شئ چې دا زده کوونکی به څونمرې واخلي؟

فعالیت

د مسلسلو طاقو طبیعي عددونو د جمعې حاصل په پام کې نیسو، ددې کار لپاره د یو 1 له عدد څخه پیل وکړئ او خالي ځایونه ډک کړئ.

$1+3= \boxed{} = (\quad)^2$

$1+3+5= \boxed{} = (\quad)^2$

$1+3+5+7= \boxed{} = (\quad)^2$

$1+3+5+7+9= \boxed{} = (\quad)^2$

پورتنیو پوښتنو ته په پاملرنې سره لیدل کیږي چې د طاقو طبیعي عددونو د جمعې حاصل د طبیعي عددونو د شمیر له پوره مربع سره مساوي دی.
- آیا کولای شو نتیجه واخلو چې هر وخت د طاقو مسلسلو عددونو د جمعې حاصل ددې عددونو د شمیر له مربع سره مساوي دی؟
- کوښښ وکړئ له n طاقو مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل لپاره فورمول په لاس راوړئ.

دپورتني فعالیت د سرته رسولو په اساس لاندې نتیجه په لاس راځي.

نتیجه : استقرايي استدلال د یو شمیر مشاهد و پر بنسټ د عمومي نتیجې اخیستنې طریقه ده. په حقیقت کې یوې کوچنی نمونې ته په لویه نمونه عمومیت ورکول دي.

لومړی مثال: (موټې د خروار نمونه ده) داخبره استقرايي استدلال ته اشاره کوي، څکه په دې مثال

کې له یوې کوچنی نمونې څخه د کل نتیجه اخیستل کیږي، په حقیقت کې له مسلئې څخه د یوشمیر مشاهد و پر بنسټ نتیجه اخیستل شوي ده، نو له استقرایي استدلال څخه کار اخیستل شوی دی.

دویم مثال: یو زده کوونکی په اتفاقي ډول په خومرحلو کې درې مسلسل عددونه سره ضرب کړل او ویې لیدل چې د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دی. له دې کار څخه نتیجه اخلي چې (د هر دروو مسلسلو عددونو د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دی)

نوموړی زده کوونکی کوم استدلال په کار وړی دی؟

الف: شهودي استدلال ب: قیاسي (ګماني) ج: استقرایي استدلال د: هیڅ یو

حل: استقرایی استدلال

پوښتنې

1– هغه طریقه چې د یوه محدوده شمیر دیتا پر اساس ترینه عمومي نتیجه اخیستل کیږي، څرنګه یو استدلال دی.

الف: قیاسي یا تمثیلي استدلال ب: استقرایي استدلال

ج: د شهودي درک استدلال

2 – د عددونو ترتیب ته په پاملرنې سره لاندې خالي ځایونه ډک کړئ:

$1\times8+1=\boxed{}$

$12\times8+2=\boxed{}$

$123\times8+3=\boxed{}$

$1234\times8+4=\boxed{}$

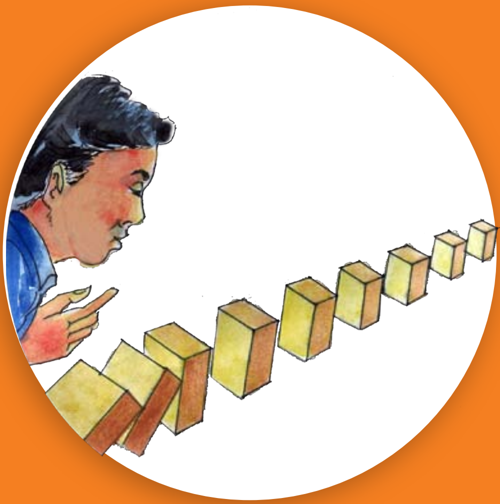
3–

a) د دویمې پوښتنې حل ته په پام نیولو سره کیدای شي چې پورتني ترتیب ته تر بې نهایت پورې دوام ورکړې؟

b) د محاسبه کولو پرته او د پورتنیو پوښتنو په پاملرنې سره اټکل کړې چې کوم عددونه د لاندې پوښتنو په خالي ځایونو کې را تلای شي:

$12345\times8+5=\boxed{}$

$123456\times8+6=\boxed{}$



دریاضي د استقرا استدلال

د دوو مینو لوبه :

آیا تاسوکله د دوو مینو لو به تر سره کړېدئ؟

پوهیږئ چې د دوو مینو په لوبه کې د لومړی خښتې لویدل، د دویمې خښتې پرمخ چې یوه دبلې څنګ ته پرته وي، په ترتیب سره لومړنی پر دویمه، دویمه پر دریمه .... تر پا یه پوري پر مخکه ولیږي، داد خښتو یو پر بله لویدل چې د پورته شکل په شان په مساوي فاصلو یو دبل څنګ ته پریوزي، د علاقه مندانو لپاره یو په زړه پوري تصویر ښکاره کوي.

لیدل کیږي چې د k ام خښتې لویدل د $k+1$ ام د خښتې دلویدلو سبب ګرځي، اوس نو که د خښتو لویدل له یوې ټاکلې شمیرې څخه پیل شي، له هغې څخه وروسته خښتې یو پر له پسې راولیږي او ټولې خښتې د ځمکې مخ نیسي.

فعالیت

پوهیږئ چې $64+27+8+1=100$ دی، که دا عددونه د مکعبونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول ولیکو:

$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$$

- ایا هر وخت د مسلسلو طبیعي عددونو د مکعبونو مجموعه مساوي د یو بل طبیعي عدد له مربع سره مساوي ده؟

- ایا کولای شئ د پورتنی پوښتنې د حل لپاره یوه عمومي طریقه وواياست، د پورتنې پوښتنې د ځواب لپاره لاندې جدول ډک کړئ.

ښودل ئی د يوبل عدد له مربع سره	د معکبونو مجموعه	د متوالي طبیعي عددونو معکبونه	د متوالي عددونو شمیر
1^2		1^3	1
		1^3+2^3	2
	36	$1^3+2^3+3^3$	3
10^2		$1^3+2^3+3^3+4^3$	4
$\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$		$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3$	n

- د $n=1$ ، $n=2$ ، $n=3$ او $n=4$ د طبیعي مسلسلو عددونو د مکعبونو د مجموعې

لپاره د $\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$ د فورمول سموالي وازمايئ.

- اوس که د n مسلسلو طبیعي عددونو لپاره پورتنی فورمول قبول کړو یعنی که:

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

وي، نو د $n+1$ د مسلسلو طبیعي عددونو لپاره یې ثبوت کړئ یا داچې وښایاست:

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

نتیجه: که چیرې $P(n)$ د n طبیعي عددونو په برخه کې یو حکم راکړل شوی وي، که د $n=1$ لپاره $P(1)$ صحیح وي، په دویم پړاو کې که د $P(k)$ له سموالي څخه $P(k+1)$ په لاس راشي، نو دا ادعا د $P(n)$ د هر n طبیعي عدد لپاره هم سمه دی.

لومړی مثال: وښایاست چې $P(n)=4^{2n}-1$ د هر طبیعي عدد لپاره پر 5 دويش وړ دی.

حل: د $n=1$ لپاره سمه ده ځکه چې:

$$n=1\qquad,\qquad P(1)=4^{2\cdot1}-1=4^2-1=16-1=15$$

لیدل کیږي چې $P(1)=15$ پر 5 دويش وړ دی.

قبلوو چې د k طبیعي عدد لپاره پورتنی ادعا سمه ده یعنې: $P(k)=4^{2k}-1$ پر 5 دويش وړ

دی.

څرنګه چې پر 5 دویش وړ دی، نو کولای شو په لاندې ډول یې ولیکو

$$P(k)=4^{2k}-1=5r.......................(*)$$

غواړو وښایو چې د $n=k+1$ لپاره دا ادعا سمه ده، نو لروچې:

$$n=k+1 \qquad , \qquad P(k+1)=4^{2(k+1)}-1...........(**)$$

د (*) د رابطې دواړه خواوې په 4^2 کې ضربوو.

$$4^2(4^{2k}-1)=5r\cdot 4^2$$

$$4^{2k+2}-4^2=5r\cdot 16 \Rightarrow 4^{2(k+1)}-1=15+16\cdot(5r)$$

$$4^{2(k+1)}-1=5(3+16r)$$

د پورتني مساوات له ښي خوا $5\cdot(3+16r)$ څخه ښکاري چې د مساوات کینه خوا پر 5 دویش وړ ده.

نو اخرني مساوات ښکاره کوي چې $P(k+1)=4^{2(k+1)}-1$ هم پر 5 دویش وړ دی، څرنګه چې د $P(k)$ له سموالي څخه د $P(k+1)$ سموالي نتیجه شوه، نو د ریاضي د استقرا د اصل په اساس پورتنی ادعا د $P(n)$ هر طبیعي عدد لپاره سمه ده.

یادونه: د ریاضي د استقرا په مرسته د ریاضي د حکمونو د ثبوتولو لپاره لومړی $P(1)$ په لاس راوړو، بیا $P(k)$ د استقرا د حکم په حیث په پام کې نیسو او په همدې ترتیب له فرضیې څخه حکم ثبوتوو.

دویم مثال: د ریاضي د استقرآ په مرسته ثبوت کړئ چې لاندې رابطه د هرطبیعي عدد n لپاره سمه ده:

$$1\times2+2\times3+3\times4+...+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

حل: په پورتنی رابطه کې د $n=1$ لپاره لرو چې:

$$n=1 \qquad , \qquad P(1)=1\times2=\frac{1(1+1)(1+2)}{3}=\frac{1\times2\times3}{3}=2$$

$$\Rightarrow 2=2$$

نود $n=1$ لپاره پورتني رابطه سمه ده، که د $n=k$ لپاره یې سمه قبوله کړو، نو د $n=k+1$ لپاره یې داسې ثبوتوو، لروچې:

$$n=k\ ,\ P(k)=1\times2+2\times3+3\times4+...+k\times(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

داستقرا فرضیه:

د $P(k)$ په فرضولو سره $P(n)$ رابطه د $n=k+1$ په نظر کې نیولو سره د رابطې سموالی ښکاره کړو، نو لرو چې:

$$n=k+1,\quad P(k+1)=1\times2+2\times3+3\times4+...+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

د استقرا حکم:

د استقرا د فرضیې په نظر کې نیولو سره لرو چې:

$$P(k+1)=[1\times2+2\times3+3\times4+...+k(k+1)]+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$
$$\Rightarrow1\times2+2\times3+...+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

دا رابطه د $n=k+1$ لپاره سمه ده، نو په دې ډول د $P(n)$ رابطه د هر طبیعي عدد (n) لپاره سمه ده.

پوښتنې

1 – د ریاضي د استقرا په مرسته وښایاست چې د هر طبیعي عدد n لپاره لرو چې:

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

2 – د ریاضي د استقرا په مرسته وښایاست چې :

(i) $2+6+10+...+(4n-2)=2n^2$

(ii) $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$

استنتاجی(نتیجوی) استدلال:

أیا کولای شو د شپې په تیاره کې له رڼا څخه پرته شیان ووینو؟

فعالیت

درې مختلف داسې سټونه ولیکئ چې د هر سټ عناصر درې اختیاري مسلسل طبیعي عددونه وي.

- د هرسټ د عناصرو د ضرب حاصل جلا، جلا په لاس راوړئ.
- ایا ویلای شو چې وواېو چې دا دضرب حاصلونه:

(I): پر 2 دویش وړ دي؟ ولې؟

(II): پر 3 دویش وړ دي؟ ولې؟

- ایا ویلای شو چې د دریو مسلسلو طبیعي عددونو د ضرب حاصل هروخت پر 6 دویش وړ دی؟ ولې؟
- د دریو مسلسلو طبیعي عددونو د ضرب حاصل موولی پر 6 دویش وړ قبول کړو، د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

نتیجه: داسې طریقې ته چې د حقایقو سموالی یې په لومړی پړاو کې ومنو او عمومي نتیجه ترې لاس ته راوړو، استنتاجي استدلال یا د نتیجې اخیستنې طریقه ورته وایي یا په بل عبارت استنتاجی استدلال هغه طریقه ده چې سموالی مو ثبوت کړی یا منلی وي.

څه وخت چې له استنتاجي استدلال څخه استفاده کوو، داډمن یو چې نتیجه یې هر وخت سمه ده.

لومړی مثال: د لاندې جدول پراوونو ته په دقت سره وګورئ موږ څرنګه له عددونو سره چې د هر پړاوحقیقت او سموالی منو، بل پړاوته ځو او نتیجه په لاس راوړو.

د یادونې وړ ده چې په جدول کې په اختیاري ډول عدد ټاکل شوي دی، تاسوکولای شئ چې ددې عدد پرځای بل هر عدد چې موغوښتي وي وټاکئ، وګورئ چې دهر عدد لپاره نتیجه یوشان ده.

یو عدد په خپله خوښه وټاکئ.	4	7	12
له لومړي عدد سره 5 جمع کړئ.	9	12	17
اوس یې دوه برابره کړئ.	18	24	34
له حاصل څخه د 4 عدد کم کړئ.	14	20	30
پر 2 یې وویشئ.	7	10	15
هغه عدد چې لومړی موټاکلی و، له عدد څخه کم کړئ.	3	3	3

اساسي خبره داده چې موږ په حقیقت کې د هغه عبارت پر نسبت چې سموالی یې موږ قبول کړی دی، بله نتیجه لاس ته راوړو، دا مسله موږ ډاډ من کوي چې دهر اختیاري عدد په ټاکلو سره نتیجه هر وخت یوشان له 3 سره مساوي ده.

پوښتنې

1 – ښکاره کړئ چې د دوو طاقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت یو جفت عدد دی.

2 – ثبوت کړئ چې هر صحیح طاق عدد د $2k+1$ په شکل دی.

3 – د سرو زرو په 9 سکوکې یوه تقلبي ده چې له نورو سکو څخه یې وزن کم دی.

څرنګه کولای شو چې د نورو وزنونو څخه د استفادې کولو پرته د پله یې ترازو په واسطه له دوه واره تللو سره تقلبي سکه پلاس راوړو؟

د مثال د نفي کولو استدلال:

یوموټې د خروار نمونه ده.
که د یوجنس یوه کوچنۍ نمونه بې کیفیته وي. ایا کولای شو ادعا وکړو چې ددې جنس لویه کتله ښه کیفیت لري؟

فعالیت

کولای شو، ډېر طبیعي عددونه د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په ډول ولیکو، لکه:

$9 = 2 + 3 + 4$

- پورتني مثال ته په پاملرنې سره لاندې خالي ځایو نه ډک کړئ؟

$15 = \square + 2\ \square + 4 + 5$

$\square = \square + 5 + \square + 7$

$\square = 11 + \square + \square + 14$

$74 = 17 + \square + 19 + \square$

- ایا کولای شو چې هر طبیعي عدد د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په شکل ولیکو؟
- که چیرې ځواب مو (نه) وي، نومثال یې وواياست.

د پورتني فعالیت له سرته رسولوڅخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

نتیجه: هر کله چې له مثال سره وښایو چې عمومي نتیجه سمه نه ده او د ادعا ناسموالی ښکاره کړو دې ته د مثال د نفي کولو استدلال وايي.

مثال: د مسلئې د ثبوت لپاره همدو مره کافي ده، چې وښایو چې د x او y دوه غیر ناطق عددونه

ليکن ددوی د جمعي حاصل x+y يو ناطق عدد دی.

ددې لپاره که د $x = 1+\sqrt{2}$ او $y = 1-\sqrt{2}$ وټاکو، لروچې:

$$x + y = (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 1+1 = 2$$

ليدل کيږي چې ددې دواړو عددونو د جمعي حاصل د 2 عدد دی چې يوناطق عدد دی، په داسې حال کې چې x او y غير ناطق (گنگ) عددونه دي. نو دا ادعا نه شو کولای چې د دووغير ناطقو عددونو د جمعي حاصل هروخت يو غير ناطق عدد دی.

پوښتنې

1- د مثال د نفي کولو په استدلال سره وښاياست چې(د هر مثبت حقيقي عدد مربع دعدد له مکعب څخه کوچنی ده)

2- دلاندې کوم يو بيان لپاره د نفي مثال و جود نه لري؟

a) د دوو ناطقو عددونو مجموعه يو ناطق عدد دی.

b) د هر مثبت عدد مربع له عدد څخه لويه ده.

c) دوې زاويې چې متناظرې ضلعې يې سره موازي وي، دا دوې زاويې سره مساوي هم دي.

d) د دوو طاقو عددونو مجموعه يو جفت عدد دی.

e) د دوو غير ناطقو عددونو د ضرب حاصل، غير ناطق عدد نه دی.

د خلف برهان یا غیر مستقیم ثبوت:

که د یوه عدد مربع جفت وي آیا خپله عدد جفت دی که طاق؟

ایا کولای شو چې دا ادعا وکړو، که د هر عدد مربع جفته وي، خپله عدد جفت دی؟

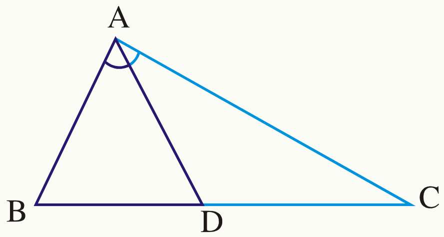
که وښایو چې خپله عدد طاق نه دی، څه نتیجه اخلئ؟

$a^2 =$ جفت $\Rightarrow a = ?$ جفت / طاق

$b^2 =$ طاق $\Rightarrow b = ?$ جفت / طاق

فعالیت

د ABC مثلث د لاندې شکل په شان په پام کې ونیسئ:



- د $\hat{A}$ د زاویې ناصف رسم کړئ..
- که $\overline{BD} \neq \overline{CD}$ وي، نو ده $\overline{AB}$ او $\overline{AC}$ ضلعې څه اړیکه سره لري؟
- که فرض کړو چې که $\overline{BD} \neq \overline{CD}$ وي، خو $\overline{AC} \neq \overline{AB}$ دی، دا مسله مورږ کومې نتیجې ته رسوي؟

نتیجه: که د خپلې ادعا د عکس په فرضولو او یاد قبلولو په نتیجه کې د فرض شوې ادعا خلاف ته ورسیږو نو په دې حالت کې زموږ فرض شوی ادعا سمه ده، دا ډول استدلال د غیر مستقیم ثبوت (برهان خلف) په نامه یادیږي.

یادونه: په یاد ولرئ څه وخت چې له غیر مستقیم ثبوت څخه ګټه اخلو، لاندې پړاوونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: فرضوو چې مطلوبه ادعا سمه نه ده.

دویم پړاو: ښکاره کوو چې دا فرض د اسې نتیجه په لاس راکوي چې پېژندل شوي حقیقتونه نفې کوي.

دریم پړاو: اوس چې نتیجه نفې شوې ده، نومعلومه خبره ده چې د لومړي پړاو فرض سم نه دی، نو مطلوب سم دی.

مثال: وښایاست که n^2 یو جفت طبعي عدد وي، نو n هم جفت دی؟

ددې مسلئې د ثبوت لپاره فرضوو، سره ددې چې n^2 جفت دی، خو n یو طاق عدد دی، نو کولای شو چې n د $n = 2k+1$ په شکل ولیکو، په داسې حال کې چې k یو تام عدد دی، نو ددې عدد مربع مساوي ده په:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

$$\Rightarrow n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$

پورتنې مساوات ښکاره کوي چې n^2 یو طاق عدد دی چې دا د فرض خلاف ده، نو په نتیجه کې دا فرض چې n یو طاق عدد دی، ناسمه ده او دې نتیجې ته رسېږو چې n هم یو جفت عدد دی، ځکه دا فرض چې n طاق عدد دی، موږ دې نتیجې ته ورسولو چې n^2 هم طاق عدد دی

پوښتنه

وښایاست چې $\sqrt{3}$ یو غیر ناطق عدد دی.

د ریاضی منطق او دبیان استنتاج

له ځنګ ملګرې ځخه د یو خبر اوریدل به څه نتیجه ولري؟
ایا خبر سم دی که ناسم؟

تعریف

یوه خبري جملې ته بیان وایي چې نتیجه یې په سموالي یا ناسم والي پای ته ورسیږي.

فعالیت

لاندې جملې په پام کې ونیسئ او وښایاست چې له هغو څخه کومه یوه یې بیان او کومه یوه یې بیان نه دی او منطقي نتیجه یې څه ده؟

i) نن ورځ باران نه اوري.
ii) آیا نن ورځ باران نه اوري؟
iii) بارانه اووره..
iv) څه زیات باران اوري!

له پورتني فعالیت څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

نتیجه:

1 - هر جمله نه شي کیدای چې بیان وي یوه جمله کیدای شي یوه حکمي، تعجبي پوښتنه او یا یو خبر وي.

2 - هره خبري جمله سمه یا ناسمه ده.

یادونه: که یو بیان ته P ووایو، د سم بیان د لیکلو طریقه $P \equiv T$ او د ناسم بیان د لیکلو طریقه

$P \equiv F$ دی، سر بیره پر دې $\sim P$ د P د بیان نفي ښيي.
هغه جدول ته چې د یو بیان ارزیابي په کې صورت نیسي، د صحت د جدول په نامه یادیږي، نو د P د هربیان لپاره لروچې:

P	$\sim P$
T	F
F	T

مثال: د (مسکا دلسم ټولګي زده کوونکی ده $= P$» بیان لپاره د صحت جدول ترتیب کړئ.
حل: د پورتني بیان د ارزیابي لپاره پوهیږو چې نو موړی بیان سم او یا ناسم دی.
که بیان سم وي، نوکولای شو چې ولیکو $P \equiv T$ او $\sim P \equiv F$ دی.
نو د P د بیان د نفي حالت عبارت دی له « P سم نه دی» یعني : $\sim P \equiv F$ دی. دا بیان د دې په معنا دی چې مسکا د لسم ټولګي زده کوونکي نه ده، یعني P ناسم دی.
که $P \equiv F$ وي، نو په دې حالت کې $\sim P = T$ دی. د پورتني ځواب صحت په لاندې جدول کې ګورو:

P	$\sim P$
T	F
F	T

د بیانونو ترکیب:

که د p او q دوه بیانونه راکړشوي وي، په دې حالت کې:
1 - د $p \wedge q$ ترکیب د p او q د بیانونو د عطفي ترکیب یا (منطقي " او") په نامه یادیږي، د "$\wedge$" علامه د (او) په معنا په کار وړل شوي ده.
2- د $p \vee q$ ترکیب د p او q د بیانونو د فصلي ترکیب (منطقی " یا ") په نامه یادیږي، د "$\vee$" علامه د (یا) په معنا په کار وړل شوي ده.
3 - د $p \Rightarrow q$ د مشروط ترکیب او یا د (که p نو q ویل کیږي) په نامه یادیږي، د $\Rightarrow$ علامه ښکاره کوي چې p د شرطي ترکیب اساس چې q ترې نتیجه کیږي.
4 - د $p \Leftrightarrow q$ د دوو خواوو د شرطي ترکیب په نامه او یا د (که او یوازی که) په نامه یادیږي.
د ($\Leftrightarrow$) علامه ښکاره کوي چې که p د شرطي ترکیب اساس وي q ترې نتیجه کیږي او که q دشرطي ترکیب اساس وي، p ترې نتیجه کیږي. په دې ډول د p د بیانونو او (که اویوازې که) ترکیب لاندې د صحت په جدول کې ګورو:

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$p\Rightarrow q$	$p\Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

لومړی مثال: که چیرې $P\equiv(2+4=6)$ او (دمنفي عدد مربع) $\equiv q$ بیانونه راکړل شوي وي د q، p، $\sim p$، $\sim q$، $p\vee q$، $p\wedge q$، $\sim(p\wedge q)$ او $\sim(p\vee q)$ د بیانونو نتیجې پلاس راوړی.

حل: پورتنیو بیانونو ته په توجه سره ددې بیانونو ارزښت عبارت دی له

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim(p\vee q)$
T	F	F	T	F	T	T	F

دویم مثال: د سموالي (صحت) دجدول په تر تیبولو سره ښکاره کړئ چې د $P\vee(p\Rightarrow q)$ بیان هر وخت سم دی.

حل:

p	q	$p\Rightarrow q$	$p\vee(p\Rightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

د سموالي دجدول په اخیرني ستون کې وینو چې د $p\vee(p\Rightarrow q)$ بیان هر وخت سم دی.

پوښتني

1 – د سموالي د جدول په تر تیبولو سره وښایاست چې د $(p \Rightarrow q) \vee \sim (\sim p \vee q)$ بیان هر وخت سم نه دی- متوجه اوسئ چې p او p ~ یوله بله مستقل نه دي.

2 – د سموالي د جدول په جوړولو سره وښایاست چې د $(p \Rightarrow q)$ او د $\sim (p \vee q)$ د بیانونو ارزښت سره مساوي دی یعني:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim (p \vee q)$$

د فصل لنډیز

د ریاضي استدلال:

هغه طریقه چې د هغې په واسطه د ریاضي د یوبیان سموالی په لاس راځي، د ریاضي د استدلال په نامه یادیږي.

شهودی درک:

هغه طبیعي یا حسي پوهه چې د هغې په مرسته دیوې موضوع سموالی یا حقیقت اویا یو مفهوم پرته له استدلاله قبلوو، له شهودي درک څخه عبارت ده چې د وخت په مختلفو مرحلوکې یوله بله سره توپیر لري.

تمثیلي یا قیاسي استدلال:

د دوو پیښو تر منځ د ورته والی پیداکول او د هغوی په باره کې یوشان نتیجې اخیستلو ته تمثیلي یا قیاسي استدلال وایي.

استقرایي استدلال:

هغه طریقه چې دیوشمیر مشاهد و پر اساس ور څخه عمومي نتیجه اخیستل کیږي یعني د جز نه کل په لاس راځي د استقرایي استدلال په نامه یادیږي.

د ریاضي د استقرا استدلال:

که چیرې P(n) د n د طبیعي عددونو په برخه کې یو حکم راکړل شوي وي، که د n=1 لپاره P(1) سم وي او په دویم پړاوکې د $p(k)$ له سموالي څخه د $p(k+1)$ سموالي په لاس راشي، نو د $p(n)$ بیان د هر طبیعي عدد (n) لپاره سم دي او دریاضي د استقرا داستدلال په نامه یادیږي.

نتيجوي استدلال:

له هغه حقيقتونو څخه په ګټه اخيستنه چې صحيح والی يې په پيل کې منل شوی وي، عمومي نتيجه لاس ته راوړل شي، د استنتاجی استدلال يا د نتيجې اخيستنې د طريقې په نامه ياديږي.

يا په بل عبارت هغه طريقه ده چې سم والی مو ثبوت يا قبول کړی وي.

د نفی مثال استدلال:

هر کله چې له مثال سره وښايو چې عمومي نتيجه سمه نه ده او د ادعا ناسموالی په عمومي ډول ښکاره کړو، دې ته د مثال د نفي کولو استدلال وايي.

غير مسقيم ثبوت:

که د خپلې ادعا يا قضيې د عکس په فرضولو يا قبلولو د فرض شوي ادعا خلاف ته ورسيږو، نو په دې حالت کې فرضيه ناسمه او خلاف يې سم دی. دې ډول استدلال ته غيرمستقيم ثبوت (برهان خلف) وايي.

بيان :

يوې خبرې جملې ته چې نتيجه يې سمه يا ناسمه وي، د بيان په نامه ياديږي، يوه جمله چې نتيجه يې سمه اويا ناسمه نه وي، بيان نه دی.

د بيانونو تر کيب:

که د p او q دوه بيانونه راکړل شوي وي، په دې حالت کې:

1- د $p\wedge q$ ترکيب د p او q دوه بيانونه د عطفي ترکيب يا (منطقي "او") په نامه ياديږي.

چې د p او q د بيان په شکل ويل کيږي.

2- د $p\vee q$ ترکيب د p او q د بيانونو د فصلي ترکيب (منطقی " يا ") په نامه ياديږي، د $(\vee)$ علامه د (يا) په معنا په کار وړل شوې ده.

3- (که چيرې نو) او يا د "$\Rightarrow$" منطقي علامه د $p\Rightarrow q$ د p او q مشروط بيان دی، که p نو q ويل کيږي، د $\Rightarrow$ علامه ښکاره کوی چې p د شرطي ترکيب اساس دی، ددې لپاره چې q له هغې نتيجه شي.

4- که يوازې که يا دا "$\Leftrightarrow$" منطقي علامه د p او q د بيانونو دوو خواوو شرطي ترکيب دی چې د (p که اويوازې که q) دی.

د فصل پوښتنې

1 – له لاندې ځوابونو څخه ستاسو په نظر کوم یو سم دی؟

الف- په مشاهداتو کې خطا د استقرایي طریقې له ستونزو څخه یوه ستونزه ده.

ب- د ریاضي د استدلال له قوي طریقو څخه یوه هم استقرایي طریقه ده.

ج- د ریاضي په استقرایي طریقې کې یوه ستونزه د مشاهداتو کموالی دی.

د- د الف او ج ځوابونه سم دي.

2 – له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې سم نه دی؟

استقرایي استدلال

الف- د ریاضي له مسألو څخه یوه قوي طریقه ده.

ب- د مسألو په برخه کې مورږ ته د عمومي قوانینو لارښوونه کوي.

ج- دمسألو دحل لپاره له ریاضي پرته یوه طریقه ده.

د – دمسألو د حلولو لپاره د ریاضي طریقه نه ده.

3 – د شهود په برخه کې له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې سم (صحیح) دی؟

الف- دداسې نتیجې د اخیستنې لپاره چې سل په سلوکې، سمه ده.

ب- له شهود څخه په ګټه اخیستنه پر ډاډ سره نه شوویلای چې نتیجه سل په سلو کې ده.

ج شهود د ریاضي د ښه درک کولو لپاره دی.

د: دشهود څخه په ګټه اخیستنه، کولای شو د ثبوت لپاره قطعي ګمان له حتمي استدلال سره وکړو.

4 – له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې سم نه دی؟

الف: استقرایې استدلال له جز څخه کل ته رسیدل دي.

ب: استقرایې استدلال له کل څخه جز ته رسیدل دي.

ج: له استقرایې استدلال څخه نه شو کولای چې د ریاضي د دقیق ثبوت لپاره ګټه واخلو.

د: استقرایې استدلال دیو شمیر مشاهد و پر اساس یوه کلي نتیجه ده.

5 – د استنتاجي استدلال پر اساس له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې سم نه دې؟

الف: که واوره واوری ځمکه نمجنه کیږي، ځمکه نمجنه ده، نو واوره وریدلې ده.

ب: د یوه ښوونځي ټول فارغان له کمپیوتر سره بلد او په ریاضی ښه پوهیږي، ضمیر چې له همدې ښوونځي څخه فارغ شوی دی. نو له کمپیوتر سره ښه بلد او په ریاضي ښه پوهیږی.

ج: که یوه څلور ضلعي مربع وي، نو قطرونه یې یو پربل عمود دي، که د څلور ضلعي قطرونه یو پر بل عمود وي، نو دا څلور ضلعي مربع ده.

د: که د یوه مثلث دوي ضلعې سره مساوي وي، متساوي الساقین مثلث دی او که د مثلث درې ضلعې سره مساوي وي، متساوي الاضلاع مثلث دی، نو هر متساوي الاضلاع مثلث، متساوي الساقین مثلث دي.

6 – د قیاسي استدلال په واسطه وښایاست د هرې زاویې لپاره $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ده.

7 – د استقرايي استدلال په واسطه وښایاست چې د n مسلسلو طبیعي عددونو مجموعه له n^2 سره مساوي ده.

8 – له استقرايي استدلال سره وښایاست چې د هر طبیعي عدد n لپاره لاندې مساوات سم دی.

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

9 – د استنتاجي استدلال په اساس ثبوت کړئ چې د دوو جفتو عددونو د جمعې حاصل هر وخت مثبت عدد دی؟

10 – له یوه مثال سره وښایاست چې د $3+2^n$ افاده د هر طبیعي عدد لپاره هر وخت لومړنی عدد نه دی.

11 – د غیر مستقیم ثبوت د استدلال په واسطه وښایاست که n یو ثابت اختیاری عدد وی او هم n^2 طاق وي، نو n هم طاق دی.

12 – د (باران اوري او وریځ نشته دی، نو باران نه اوري) د ترکیبي بیانونو لپاره د صحت جدول جوړ کړئ، په داسې حال کې که

($\alpha =$ باران اوري) او ((وریځ ده $= \beta$)) سره وښایو. (1) عدد د سم او د (0) عدد د ناسم لپاره په کار یوسي.

$\propto$	β	$-\propto$	$-\beta$	$\propto \vee -\beta$	$\propto \wedge -\beta \Rightarrow -\propto$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				