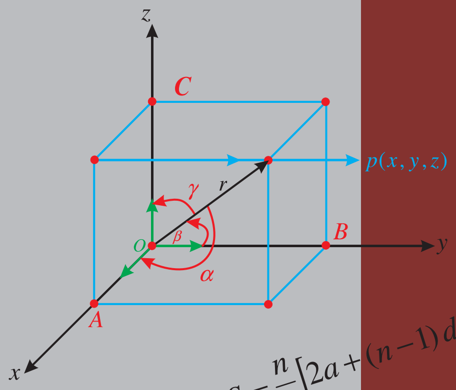
د پوهنې وزارت

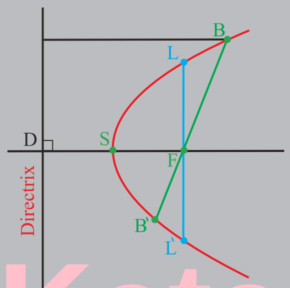
د تعليمي نصاب د پراختيا، د ښوونکو د روزنې او د ساينس
د مرکز معينيت
د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف لوی رياست

رياضي ۱۱

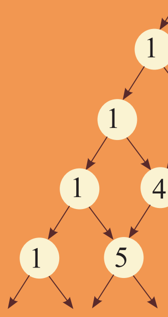
ټولګی



$$S = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$



رياضي ۱۱ ټولګی



...ه لري پيرودل
...ونکو سره به يي

د چاپ کال ۱۳۹...

Ketabton.com

د پوهنې وزارت
د تعلیمي نصاب د پراختیا، د ښوونکو د روزنې او
د ساینس د مرکز معینیت
د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف
لوی ریاست

ریاضي ۱۱ ټولګی

د چاپ کال: ۱۳۹۰ هـ. ش.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکوالان:

- پوهنمل طلاباز حبیب زی د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تألیف د پروژې غړی
- مهربه ناصر د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تألیف د پروژې غړې
- پوهندوی خالقداد فیروزکوهي د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تألیف د پروژې غړی
- د مؤلف مرستیال محمد خالد ستوری(ځدراڼ) د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی

ژباړونکي:

- سرمؤلف نظام الدین د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی
- پوهنمل طلاباز حبیب زی د پوهنې وزارت د درسي کتابونو د تألیف د پروژې غړی
- د مؤلف مرستیال محمد خالد ستوری(ځدراڼ) د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی
- مختار نوید د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی

علمي او مسلکي ایډیټ:

- ډاکټر عطاء الله واحدیار د پوهنې وزارت ستر سلاکار او د نشراتو رئیس.
- حبیب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعلیمي نصاب د پراختیا په لوی ریاست کې.
- د مؤلف مرستیال محمد خالد ستوری(ځدراڼ) د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تألیف علمي غړی

د ژبې ایډیټ:

- محمد قدوس ذکوخیل

دیني، سیاسي او کلتوري کمیټه:

- مولوي عبدالوکیل د اسلامي تعلیماتو علمي غړی.
- حبیب الله راحل د پوهنې وزارت سلاکار د تعلیمي نصاب د پراختیا په لوی ریاست کې.

د څارنې کمیټه:

- دکتور اسدالله محقق د تعلیمي نصاب د پراختیا، د ښوونکو د روزنې او د ساینس مرکز معین
- دکتور شېر علي ظریفي د تعلیمي نصاب د پراختیا د پروژې مسؤول
- د سرمؤلف مرستیال عبدالظاهر گلستاني د تعلیمي نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف لوی رئیس

طرح او ډیزاین:

ولید «نوید» نسیمي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحيم

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی — دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې — هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی — د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو — د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، ګوجر دي — پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي — هم ایماق، هم پشه یان
دا هیواد به تل ځلیږي — لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به — لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مودی رهبر — وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحيم

د پوهنې د وزير پيغام

گرانو ښوونکو او زده کوونکو،

ښوونه او روزنه د هر هېواد د پراختيا او پرمختگ بنسټ جوړوي. تعليمي نصاب د ښوونې او روزنې مهم توکی دی چې د معاصر علمي پرمختگ او ټولنې د اړتياوو له مخې رامنځته کيږي. ښکاره ده چې علمي پرمختگ او ټولنيزې اړتياوې تل د بدلون په حال کې وي. له دې امله لازمه ده چې تعليمي نصاب هم علمي او رغنده انکشاف ومومي. البته نه ښايي چې تعليمي نصاب د سياسي بدلونونو او د اشخاصو د نظريو او هيلو تابع شي.

دا کتاب چې نن ستاسو په لاس کې دی، پر همدې ارزښتونو چمتو او ترتيب شوی دی. علمي گټورې موضوعگانې پکې زياتې شوې دي. د زده کړې په بهير کې د زده کوونکو فعال ساتل د تدريسي پلان برخه گرځيدلې ده.

هيله من يم دا کتاب له لارښوونو او تعليمي پلان سره سم د فعالې زده کړې د ميتودونو د کارولو له لارې تدريس شي او د زده کوونکو ميندې او پلرونه هم د خپلو لوڼو او زامنو په باکيفيته ښوونه او روزنه کې پرله پسې گډه مرسته وکړي چې د پوهنې د نظام هيلې ترسره شي او زده کوونکو او هېواد ته ښې برياوې ور په برخه کړي.

پر دې ټکي پوره باور لرم چې زموږ گران ښوونکي د تعليمي نصاب په رغنده پلي کولو کې خپل مسؤوليت په ريښتوني توگه سرته رسوي.

د پوهنې وزارت تل زيار کاږي چې د پوهنې تعليمي نصاب د اسلام د سپېڅلي دين له بنسټونو، د وطن دوستی د پاک حس په ساتلو او علمي معيارونو سره سم د ټولنې د څرگندو اړتياوو له مخې پراختيا ومومي.

په دې ډگر کې د هېواد له ټولو علمي شخصيتونو، د ښوونې او روزنې له پوهانو او د زده کوونکو له ميندو او پلرونو څخه هيله لرم چې د خپلو نظريو او رغنده وړانديزونو له لارې زموږ له مؤلفانو سره د درسي کتابونو په لا ښه تآليف کې مرسته وکړي.

له ټولو هغو پوهانو څخه چې د دې کتاب په چمتو کولو او ترتيب کې يې مرسته کړې، له ملي او نړيوالو درنو مؤسسو، او نورو ملگرو هېوادونو څخه چې د نوي تعليمي نصاب په چمتو کولو او تدوين او د درسي کتابونو په چاپ او وېش کې يې مرسته کړې ده، مننه او درناوی کوم.

ومن الله التوفيق

فاروق وردگ

د افغانستان د اسلامي جمهوريت د پوهنې وزير

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لړلیک

سرلیک — مخونه

لومړی څپرکی مخروطي مقاطع

- مخروطي مقاطع ۳
- بیضوي ۵
- د بیضوي معادله ۹
- د بیضوي معادله چې مرکز یې یو کیفي ټکی وي ۱۳
- پارابولا ۱۷
- د پارابولا معادله ۱۹
- د هغې پارابولا معیاري معادله چې راس یې یو اختیاري ټکي وي ۲۳
- هایپربولا ۲۷
- د هایپربولا معادله ۲۹
- د هغې هایپربولا معادله چې مرکز یې یو اختیاري ټکی وي ۳۳
- دیوې کرښې مو قعیت نظرمخروطي مقاطعو ته ۳۷
- د څپرکي مهم ټکي ۴۱
- د څپرکي پوښتني ۴۴

دویم څپرکی مثلثات

- د ساین قانون ۴۹
- د کوساین قانون ۵۵
- د ټانجنټ قانون ۵۹
- مثلثاتي مطابقتونه ۶۳
- مثلثاتي معادلې ۶۹
- دویمه درجه مثلثاتي معادلې ۷۵
- د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو یا سېستمونوحل ۷۹
- د څپرکي مهم ټکي ۸۹
- د څپرکي پوښتني ۹۱

دریم څپرکی فضايي هندسه

- اساسي مفاهيم او اکسيومونه ۹۵
- په درې بُعدي فضا کې کرښه او مستوي ۹۷
- په فضا کې موازي مستقيمونه ۱۰۱
- په فضا کې د دوو مستقيمو کرښو تر منځ زاويه ۱۰۳
- په فضا کې موازي مستقيمونه او موازي مستوي‌گانې ۱۰۵
- په فضا کې متعامدې مستقيمې کرښې او مستوي‌گانې ۱۰۷
- په فضا کې موازي مستوي‌گانې ۱۰۹
- د څپرکي مهم ټکي ۱۱۱
- د څپرکي پوښتنې ۱۱۳

څلورم څپرکی ترادفونه

- ترادفونه ۱۱۷
- حسابي ترادف ۱۱۹
- هندسي ترادف ۱۲۷
- د ترادفونو قسمي مجموعه ۱۳۳
- د حسابي ترادف د n لومړيو حدونو قسمي مجموعه ۱۳۷
- د يوه هندسي ترادف د n حدونو د جمعې حاصل ۱۴۱
- لايتناهي هندسي سلسلې ۱۴۳
- د څلورم څپرکي مهم ټکي ۱۴۷
- د څپرکي پوښتنې ۱۴۹

پنځم څپرکی لوګاريتم

- اکسپوننشيل تابع ګانې ۱۵۳
- لوګاريتم ۱۵۷
- لوګاريتمي تابع ګانې ۱۵۹
- معمولي لوګاريتم ۱۶۳
- د لوګاريتم قوانين ۱۶۷
- د لوګاريتم د قاعدې اړول په بله قاعده ۱۷۱
- کرکټرستيک او مانتيس ۱۷۵
- د لوګاريتم جدول ۱۷۹
- انتي لوګاريتم ۱۸۳
- خطي انټرپولېشن ۱۸۵
- د لوګاريتمي او اکسپوننشيل معادلو حل ۱۸۹
- درياضيکی عمليوپه سرته رسولوکې له لوګاريتم څخه کار اخېستنه ۱۹۳
- د څپرکي مهم ټکي ۱۹۷
- د څپرکي پوښتنې ۱۹۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی متریکسونه

- متریکسونه ۲۰۵
- د متریکسونو ډولونه ۲۰۹
- د متریکسونو جمع او تفریق ۲۱۳
- په متریکس کې د سکالر ضرب ۲۱۵
- د دوو متریکسونو ضرب ۲۱۷
- د یوه متریکس ترانسپوز متریکس ۲۲۱
- دیترمینانت ۲۲۳
- د دیترمینانت خاصیتونه ۲۲۷
- د 2×2 مرتبې متریکسونو ضربي معکوس ۲۲۹
- له معکوس متریکس څخه په کاراخیستنې د خطي معادلو د سیستم حل ۲۳۱
- د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه ۲۳۵
- د معادلو د سیستم حل د ګوس(Gouse) په طریقه ۲۳۹
- د شپږم څپرکي مهم ټکي ۲۴۳
- د څپرکي پوښتنې ۲۴۵

اووم څپرکی وکتورونه

- د وضیعه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه ۲۴۹
- د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی ۲۵۱
- وکتورونه په سطح او فضا کې ۲۵۳
- په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات ۲۵۵
- د یوه وکتور د جهت زاویې او کوساینونه ۲۵۹
- د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل ۲۶۱
- د وکتوري ضرب حاصل ۲۶۵
- د څپرکي مهم ټکي ۲۷۵
- د څپرکي پوښتنې ۲۷۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم څپرکی احصایه

- دبدلونونو ضریب ۲۸۱
- په نورمال منحني کې پراګنده ګي(تېتوالی) ۲۸۳
- دنورمال توزیع دډول شاخصونه ۲۸۵
- څو متحوله ټولني ۲۸۷
- د پراګنده ګي ګراف ۲۸۹
- پیوستون او دپیوستون ضریب ۲۹۱
- د خطي میلان معادله ۲۹۵
- د اتم څپرکي مهم ټکي ۲۹۹
- د څپرکي پوښتني ۳۰۱

نهم څپرکی احتمالات

- پرموټېشن یا ترتیب ۳۰۵
- ترکیب یا کمبنیشن ۳۰۹
- ترکیب ۳۱۱
- تبدیل ۳۱۳
- د بینوم قضیه ۳۱۷
- دوه جمله یي احتمال ۳۱۹
- د څپرکي مهم ټکي ۳۲۳
- د څپرکي پوښتني ۳۲۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی څپرکی

مخروطي مقاطع

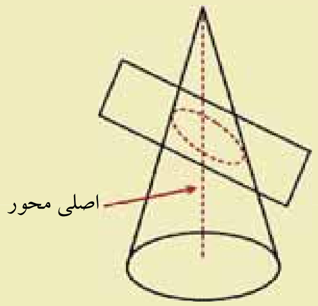
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

مخروطي مقاطع

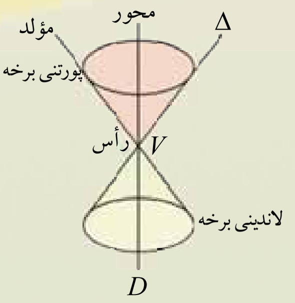
sections of Conic

آيا ويلای شئ چې د يوې مستوي او مخروط د تقاطع لـه ګډ فصل څخه څه ډول منحنې ګانې په لاس راځي.



د مخروطي مقاطعو تعريف

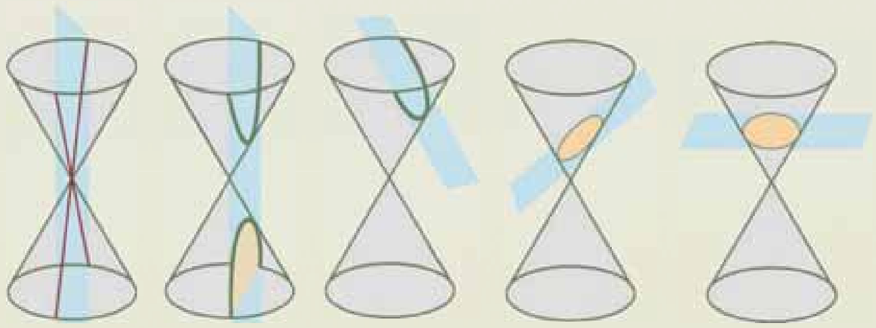
د Δ او D دوه مستقيم خطونه داسې په پام کې نيسو چې يو بل د V په ټکې کې قطع (پرې) کړي. که چيرې د D خط ثابت او د Δ خط د هغه په چاپيرو څرخيږي، لـه دې څرخولو څخه په فضاکې دوه شکلونه چې يو يې د V (ټکې) پورته او بل يې د V د ټکي کښته خواته جوړيږي. هـر يو يې مخروط دی، لکـه مخـامخ شـکل د D مـستقيم خـط د مخـروط محـور او د Δ مستقيم خط د هغه مولد دی. د يوې مستوي په واسطه د يوه مخروط قطع کول مختلف حالتونه لـري چې مختلفې منحني ګانې منځ ته راځي چې مخروطي مقاطع بلل کيږي. په راتلونکې کې به هر يو په تفصيل سره ولوستل شي.



فعاليت

- يو مخروط د مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط په اصلي محور بانـدې عمـود او يا لـه قاعدو سره موازي وي، ويلاې شئ، ګډ فصل يې څه ډول منحني ده؟
- يو مخروط د يوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې د مستوي او مخروط له اصـلي محـور سره يې زاويـه قايمه نه وي (نسبت اصلي محور ته مايل)، ګډ فصل يې څه ډول منحني ده؟
- يو مخروط د يوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط له مولد سره مـوازي وي، تقـاطع يـا ګډ فصل يې څه ډول منحني ده؟
- دوه مخروطه چې راسونه يې سر په سر (منطبق) او قاعدې يې موازي وي، د يوې متسوي په واسطه چې اصـلي محور سره موازي وي قطع کړئ. ويلای شئ چې له ګډ فصل څخه يې څه ډول منحني په لاس راځي؟
- يو مخروط د يوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مـستوي د مخروط اصـلي محـور پـه بـر کـې ولـري، تقاطع يا ګډ فصل يې څه ډول هندسي شکل دی؟

له پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:



پایله:

- که چېرې مستوي یو مخروط داسې قطع کړي چې مستوي د مخروط په اصلي محور عمود او یا موازي له قاعدو سره وي، نو ګډ فصل یې یوه دایره ده.
- که چېرې مستوي مخروط داسې قطع کړي چې مستوي اومخروط له اصلي محور سره یې زاویه قایمه نه وي، (مایل) لاس ته راغلي شکل الپس (Ellipse) یا بیضوي ده.
- که چېرې یوه مستوي یو مخروط داسې قطع کړي وي چې اصلي محور ته موازي او هغه په برکې ونه لري، نو په دې حالت کې د هغوی له ګډ فصل څخه پارابولا (Parabola) په لاس راځي.
- که چېرې یوې مستوي دوه سر په سر یا څوکه په څوکه مخروطونه چې اصلي محور ته موازي وي قطع کړي وي، له ګډ فصل څخه یې هایپربولا (Hyperbola) په لاس راځي.
- که چېرې یوه مستوي اصلي محور په برکې ولري، نو ګډ فصل یې له دوو متقاطع کرښو څخه عبارت دی. چې هر یو یې په پورته شکلونو کې ښودل شوي دي.

پوښتنې

1- د پورتني شکل په پام کې نیولو سره، د مستوي او مخروط هغه متقاطع حالت رسم کړئ چې ګډ فصل یې یوه دایره او یا یو ټکی وي.

2- که چېرې یوه مستوي دوه څوکه په څوکه مخروطونه داسې قطع کړي چې د دواړو مخروطونو اصلي محورونه په برکې ولري، ګډ فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟

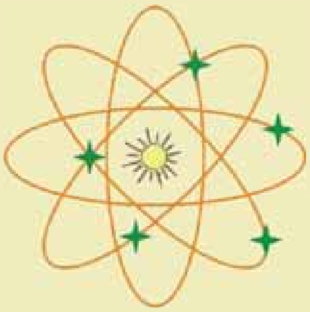
3- د یوې مستوي او مخروط ګډ فصل په کوم حالت کې یوه کرښه ده؟ په دې حالت کې شکل رسم کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیضوي

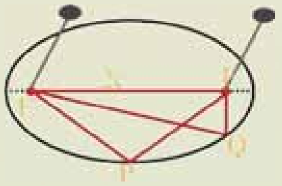
Ellipse

د سیارو حرکت د لمر په شاوخوا یا شمسي نظام څه ډول منحني ګانې جوړوي؟



فعالیت

- د یوې سپینې کاغذي پاڼې پر مخ دوه ستنې په یوه معین او ثابت واټن سره د F او F′ په دوو ټکو کې وټومبئ.
- د یو تار څوکې چې اوږدوالی یې د $\overline{FF'} = 2c$ څخه زیات دي، په دواړو ستنو کې وتړئ، د لاندې شکل په پام کې نیولو سره یو پنسل د تار په غاړه د ستنو په شاوخوا وڅرخوئ.



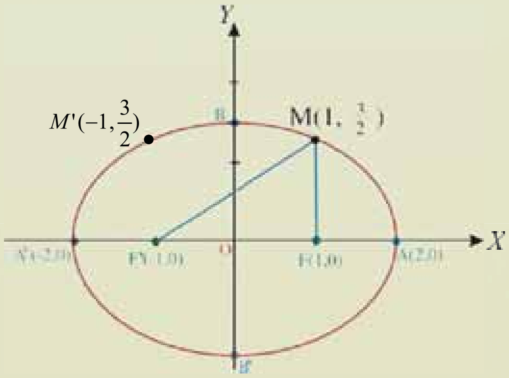
- هغه شکل چې د یوې بشپړې دورې په لاس راځي څه ډول منحني ده؟

له پورته فعالیت څخه لاندې پایله بیانولای شو:

پایله: هغه شکل چې ددوو ستنو تر منځ د معین او ثابت واټن په اندازه د تار په غاړه د پنسل له څرخولو څخه په لاس راځي، د الپس منحني بلل کیږي، د F او F′ ټکي د الپس د محراقونو په نامه یادیږي.

فعالیت

- په مخامخ شکل کې د F،F′، M،M′، A′ او A ټکو مختصات درکړل شوي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو فارمول څخه په کار اخیستنې د $|MF'|$، $|MF|$ او $|AA'|$ اوږدوالی پیدا کړی او بیا د $|AA'|$ او $|MF|+|MF'|$ اوږدوالی یو له بل سره پرتله کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

- د $M'(-1,\frac{3}{2})$ ټکی د الپس په محیط باندې په نښه او همدارنګه د M' ټکی هم په پام کې ونیسئ.
- وروسته د $|M F'| + |M F|$ او $|M' F| + |M' F'|$ قیمتونه یو له بله سره پرتله کړئ.

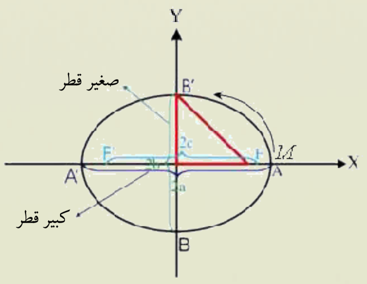
له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف بیانولای شو:

تعریف: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو ځای پر ځای ټکو څخه یې د فاصلو د جمعې حاصل تل مساوي یا ثابت اوږدوالی ولري، بیضوي بلل کیږي، مستقر ټکی چې په F او F' تورو ښودل شوي، د الپس محراقونه او A, A' د الپس راسونه چې $AA' = 2a$ ثابت اوږدوالی دی.

$$|M' F| + |M' F'| = 2a \quad , \quad |M F| + |M F| = 2a$$

$$|M' F| + |M' F'| = |M F| + |M F'| = 2a$$

د الپس قطرونه او راسونه:



الپس بې شمېره قطرونه لري، لوی یې کبیر قطر یا اوږد قطر چې له محراقونو څخه تیریږي او بیضوي په دوو ټکو د A, A' کې قطع کوي، د کبیر قطر یا Major axis په نامه او کوچنی قطر یې د FF' د نیمایي په ټکي عمود دی چې د صغیر قطر یا Minor axis په نامه یادیږي. د A, A' او B, B' ټکی د الپس راسونه دي، کبیر قطر په A, A' چې اوږدوالی یې یعنې $AA' = 2a$ او صغیر قطر په B, B' چې اوږدوالی یې $BB' = 2b$ دی، ښودل کیږي.

یادداښت

که چیرې د M ټکی د صغیر قطر په راسونو یعنې په B یا B' باندې منطبق شي، په دې صورت کې له پورته شکل څخه لیکلای شو:

$$\overline{MF} = \overline{MF'}$$

له بلې خوا پوهیږو چې:

$$|MF| + |MF'| = 2a$$

$$2\overline{MF} = 2a$$

$$\overline{MF} = a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د محراقونو او قطرونو ترمنځ رابطه:

د محراقونو او قطرونو ترمنځ اړیکي د فیثاغورث د قضیې له مخې لیکلای شو:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

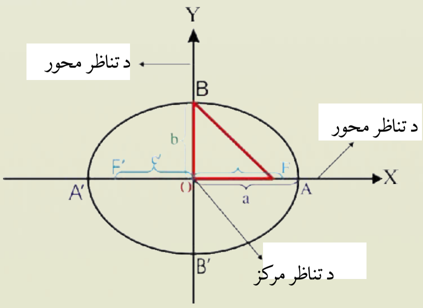
$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

د الپس تناظري مرکز او تناظري محور:

الپس دوه تناظري محورونه لري چې یو یې لوی محور د $A\ A'$ پر قطر باندې منطبق دی چې محراقي محور هم بلل کیږي او بل یې کوچنی تناظري محور چې د $B\ B'$ پر قطر باندې منطبق دی.

د دې دواړو محورونو د تقاطع ټکی د الپس تناظري مرکز بلل کیږي او په (O) سره ښودل کیږي.



$$\overline{OA} = \overline{OA'} = a$$

$$\overline{OB} = \overline{OB'} = b$$

$$\overline{OF} = \overline{OF'} = c$$

عن المرکزیت (**Eccentricity**): د یوې بیضوي شکل د عن المرکزیت په واسطه ټاکل کیږي عن المرکزیت د محراق او لوی محور له نسبت څخه عبارت دی، د بیضوي عن المرکزیت په e سره ښودل کیږي او د $e = \frac{c}{a}$ په شکل تعریف شوی دی.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

پوهیږو چې په هره بیضوي کې $0 < c < a$ دی، نو $0 < e < 1$ کېږي. د بیضوي د عن المرکزیت او قطرونو تر منځ داسې رابطه شته $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

زده‌کوونکي دې د قطرونو او محورونو ترمنځ د رابطې په کارونې سره نوموړې رابطه په لاس راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه: که چيرې د e قيمت صفر ته نژدې شي، محراقونه يې د مرکز خوا ته نژدې کيږي. دلته بيضوي تقريباً دايروي شکل غوره کوي. که چيرې e د 1 عدد ته نژدې شي، په دې صورت کې محراقونه د قطرونو د راسونو خواته نژدې کيږي چې يو اوږد شکل غوره کوي، د بيضوي په ډيرو مسايلو کې د عن المرکزيت څخه کار اخيستل کيږي.

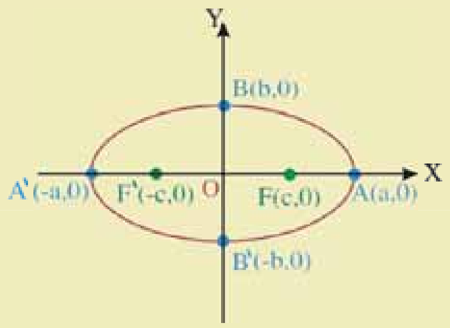
پوښتنې

1 – که چيرې په بيضوي کې د کبير قطر او صغير قطر اوږدوالی يو له بل سره مساوي وي، څه ډول منحنی په لاس راځي؟

2 – که چيرې د بيضوي عن المرکزيت $\frac{2}{3}$ وي، په دې صورت کې د کبير قطر او صغير قطر نسبت پيدا کړئ.

د بیضوي معادله

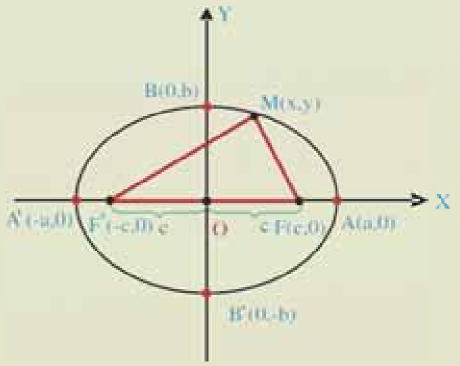
آیا د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، پیدا کولای شئ؟



فعالیت

- داسې بیضوي رسم کړی چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي او محراقونه یې د x د محور په مخ وټاکئ.
- د $M(x,y)$ یو اختیاري ټکی، د بیضوي پر محیط باندې وټاکئ او هغه له محراقونو سره ونښلوئ.
- د بیضوي د تعریف رابطه نظر د M ټکی ته ولیکئ.
- د M او F د ټکو ترمنځ واټن او همدارنګه د M او F' د ټکو ترمنځ واټن پیدا کړئ او د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستنې د بیضوي معادله په لاس راوړئ.

ثبوت لومړی حالت: موږ لرو:



$$|MF|+|MF'|=2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

یا:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

د دواړو خواوو له مربع کولو وروسته لیکو چې:

$$(x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$
$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$
$$x^2-2cx+c^2+y^2-4a^2-x^2-2cx-c^2-y^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$
$$-4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \quad /\div(-4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا

$$a^2+cx=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

د پورته رابطې دواړه خواوې بیا مربع کوو او لیکو:

$$(a^2+cx)^2=(a\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2[(x+c)^2+y^2]$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)$$
$$a^4+2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$a^4+c^2x^2-a^2x^2-a^2c^2-a^2y^2=0$$
$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2-c^2x^2-a^4=0$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$
$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

څرنګه چې $a^2=b^2+c^2$ دي، نو $b^2=a^2-c^2$ کیږي، په دې صورت کې پورته معادله په لاندې توګه لیکو:

$$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad / \div a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \qquad a>b$$

پورتنۍ معادله دداسې بیضوي معادله را ښیي چې د محراقونو وضعیه کمیات یې $(-C,0),\ (C,0)$ او د x پر محور باندې واقع دي.

ثبوت دوهم حالت: که چیرې د بیضوي محراقونه د y په محور باندې وي، په دې صورت کې د بیضوي معادله عبارت ده له:
$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$$

زده کوونکي دې بیضوي رسم، د اوږد قطر، لنډ قطر او محراقونو مختصات دې ولیکي.

لومړی مثال: که چیرې د y پر محور باندې د بیضوي د اوږد قطر اوږدوالی یعنې $|AA'|=6$ او لنډ قطر اوږدوالی یعنې $|BB'|=4$ واحده وي، د بیضوي معادله پیدا کړئ.

حل :

$$|AA'|=2a=6$$
$$2a=6 \quad \Rightarrow \quad a=3$$
$$|BB'|=2b=4 \quad \Rightarrow \quad b=2$$

اوس د a او b قیمتونه په عمومي معادله کې ایږدو او معادله لیکو: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال:که چیرې د یوې بیضوي د اوږده قطر اوږدوالی $|AA'|=10$ او لنډ قطر اوږدوالی یې $|BB'|=8$ واحده وي، د بیضوي د اوږده او لنډ قطرونو د راسونو او محراقونو مختصات، محراقي فاصله، د عن‌المرکزیت قیمت پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

حل: پوهېږو چې:

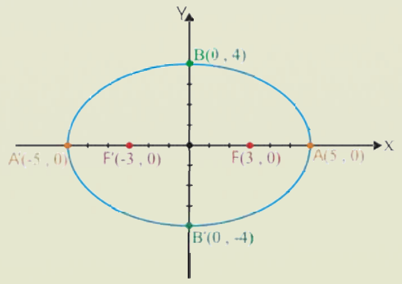
$$|AA'|=2a=10 \Rightarrow a=\pm 5$$
$$|BB'|=2b=8 \Rightarrow b=\pm 4$$

لیدل کیږي چې $a>b$ دی، نو اوږد قطر یې د x پر محور باندې پروت دی، د اوږده قطر د راسونو مختصات له $A(5,0)$ او $A'(-5,0)$ څخه عبارت دي.

د لنډ قطر د راسونو مختصات له: $B(0,4)$ او $B'(0,-4)$ څخه عبارت دي.

د محراقونو د مختصاتو د پیداکولو لپاره د c قیمتونه پیدا کوو:

$$a^2=b^2+c^2$$
$$\Rightarrow (5)^2=(4)^2+c^2$$
$$c^2=a^2-b^2 \Rightarrow 5^2-4^2=25-16=9$$
$$c=\pm 3$$



د محراقونو مختصات له $F(3,0)$ او $F'(-3,0)$ څخه عبارت دي.

عن‌المرکزیت: $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}$ دي

دریم مثال: د داسې بیضوي ګراف رسم کړئ چې معادله یې $4x^2+y^2=16$ وي، د راسونو او محراقونو مختصات یې پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې په 16 ویشو:

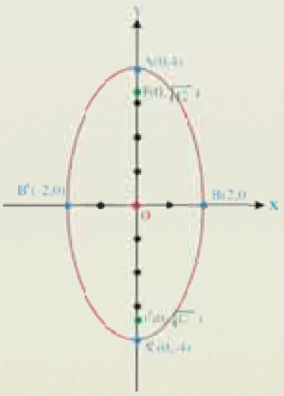
$$\frac{4x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=\frac{16}{16}$$
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$$

د راسونو مختصات:

$$a^2=16 \Rightarrow a=\pm 4 \Rightarrow A(0,4) \text{ ، } A'(0,-4)$$
$$b^2=4 \Rightarrow b=\pm 2 \Rightarrow B(2,0) \text{ ، } B'(-2,0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د محراقونو مختصات:



$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c^2 = (4)^2 - (2)^2$$
$$c^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow c = \pm\sqrt{12}$$
$$F(0,\sqrt{12}),\ F'(0,-\sqrt{12})$$

خلورم مثال: د بیضوي د محیط پر مخ د یوه ټکي مختصات $P(2,4)$ او د محراقونو مختصات یې له $F'(-3\sqrt{2},0), F(3\sqrt{2},0)$ څخه عبارت دي. د اوږده او لنډ قطر اوږدوالی یې پیدا کړئ.

حل: د بیضوي د تعریف له مخې لرو چې: $|PF| + |PF'| = 2a$

د PF او PF′ د فاصلو اوږدوالی پیدا کوو $|PF| = \sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2}$ او $|PF'| = \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2}$

پورتني قیمتونه د تعریف په رابطه کې ایږدو:

$$\sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2} + \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2} = 2a$$
$$\Rightarrow \sqrt{4+12\sqrt{2}+18+16} + \sqrt{4-12\sqrt{2}+18+16} = 2a$$
$$\Rightarrow \left(\sqrt{38+12\sqrt{2}} + \sqrt{38-12\sqrt{2}}\right)^2 = (2a)^2$$
$$38+12\sqrt{2} + 2\sqrt{(38+12\sqrt{2})(38-12\sqrt{2}} + 38-12\sqrt{2} = 4a^2$$
$$76 + 2\sqrt{1444-288} = 4a^2 \Rightarrow 76 + 2\cdot 34 = 4a^2$$
$$\Rightarrow 76+68 = 4a^2 \Rightarrow 144 = 4a^2 \ / \div 4$$
$$\Rightarrow 36 = a^2 \Rightarrow a = \pm 6$$
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 36 = b^2 = 18 \Rightarrow b = \pm 3\sqrt{2}$$
$$2a = 2\cdot 6 = 12$$
$$2b = 2\cdot 3\sqrt{2} = 6\cdot\sqrt{2}$$

پوښتنې

1 – لاندې معادلې په پام کې ونیسئ د اوږده قطر اوږدوالی د راسونو او محراقونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

$a)\ \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ $\qquad b)\ \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

2 – د هغې الپس معادله ولیکئ چې عن‌المرکزیت یې 0.8 وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغې بيضوي معادله چې مرکز يې يو اختياري ټکی وي

ايا دداسې بيضوي معادله پيداکولای شو چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې نه وي؟

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

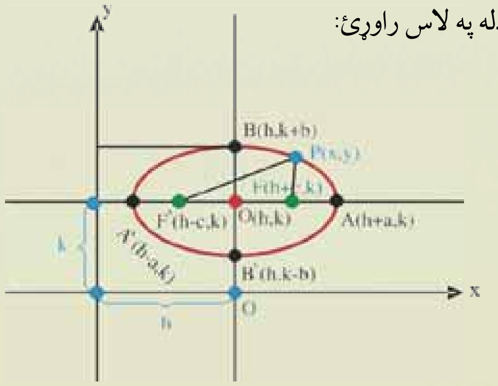
فعاليت

يوه بيضوي د وضعيه کمياتو په سيستم کې رسم کړئ چې مرکز يې (h,k) او لوی قطر يې د x له محور سره موازي وي.

د $P(x,y)$ يو ټکی د بيضوي په محيط باندې په پام کې ونيسي او هغه له F او F' سره ونښلوئ.

د بيضوي د مرکز مختصات (h,k) په پام کې نيولو سره د محراقونو F او F'، راسونو A , A' او B,B' وضعيه کميات په شکل کې وښياست.

د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پيداکولو له فارمول څخه په کار اخيستنې او د بيضوي د تعريف د رابطې په کارونې سره معادله په لاس راوړئ:



$$|\overline{PF}|+|\overline{PF'}|=2a$$

$$|\overline{PF}|=\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

$$|\overline{PF'}|=\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

$$\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

يا:

$$\sqrt{[(x-h)-c]^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

دواړه خواوې مربع او له اختصار وروسته لاندې رابطه په لاس راځي:

$$[x-(h+c)]^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+[(x-h)+c]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h+c)+(h+c)^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+[(x-h)+c]^2$$

$$x^2-2hx-2cx+h^2+2hc+c^2=4a^2-4a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2hx+h^2+2cx-2hc+c^2$$
$$4hc-4cx=4(a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2})$$
$$hc-cx=a^2-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$
$$c(h-x)-a^2=-a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2} \quad / \div(-1)$$
$$c(x-h)+a^2=a\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}$$

دواړه خواوې مربع او ليکو:

$$c^2(h-x)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[\{x-(h+c)\}^2+(y-k)^2]$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2[(x-h)+c]^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2+2ca^2(x-h)+a^4=a^2(x-h)^2+2a^2c(x-h)+a^2c^2+a^2(y-k)^2$$
$$c^2(x-h)^2-a^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$
$$(x-h)^2(c^2-a^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$
$$-(x-h)^2(a^2-c^2)-a^2(y-k)^2=-a^2(a^2-c^2)$$

څرنګه چې په بيضوي کې $a^2-c^2=b^2$ کېږي، نو ليکلای شو:

$$-b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=-a^2b^2 \quad / \div(-a^2b^2)$$
$$=\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

لومړی مثال: د يوې بيضوي د مرکز، محراقونو او اوږد قطر د انجامونو مختصات چې معادله يې $\frac{(x-6)^2}{36}+\frac{(y+4)^2}{16}=1$ ده، پيدا او ګراف يې رسم کړئ.

حل: څرنګه چې نوموړي معادله عمومي شکل لري، له دې امله د مرکز مختصات يې $(6,-4)$ ده، لوی محور يې د x له محور سره موازي دی.

$$a^2=36 \Rightarrow a=\pm 6$$
$$b^2=16 \Rightarrow b=\pm 4$$
$$c=\pm\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=\sqrt{20}=\pm 2\sqrt{5}$$

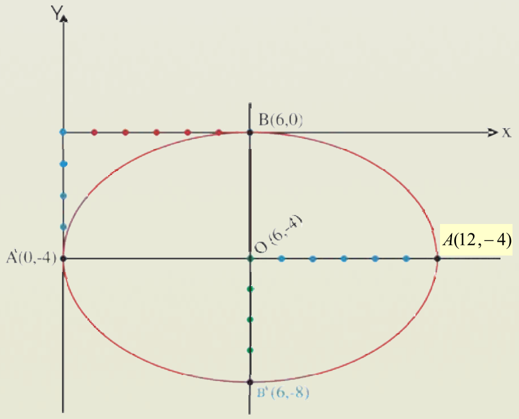
د A او A′ مختصات عبارت دي له:

$$A(h+a\ ,\ k)=A(6+6،\ -4)=A(12،\ -4)$$
$$A'(h-a\ ,k)=A'(6-6،\ -4)=A'(0،\ -4)=A'(0،\ -4)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

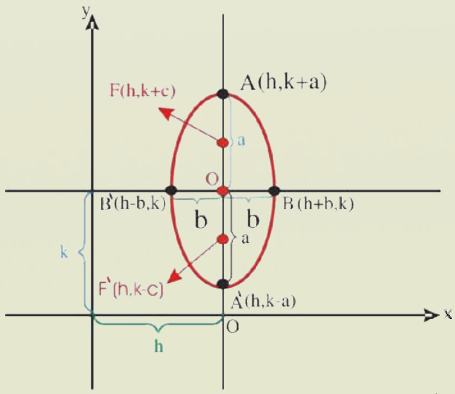
د B او B′ مختصات عبارت دي له:

$$B(h,k+b)=B(6,-4+4)=B(6,0)$$
$$B'(h,k-b)=B'(6,-4-4)=B'(6,-8)$$
$$F(h+c,k)=F(h+c,k)=(6+2\sqrt{5},-4)$$
$$F'(h-c,k)=F'(h-c,k)=(6-2\sqrt{5},-4)$$



دويم حالت: که چېرې محراقي محور د y له محور سره موازي وي، په دې حالت کې معادله لاندې بڼه غوره کوي.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$
$$A(h\,,k+a)\,,\ A'(h,k-a)$$
$$B'(h-b\,,k)\,,\ B(h+b,k)$$
$$F'(h,k-c)\ ,\ F(h\,,k+c)$$



د محراقونو او راسونو مختصات دې زده کوونکو ته دنده ورکړل شي.

يادونه: د $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ معادله هم د بيضوي عمومي معادله ده، په داسې حال کې چې $A\neq C$ او هم علامه وي، يعني $C>0$ ، $A>0$ يا $C<0$ ، $A<0$

دويم مثال: د $16x^2+25y^2-64x+50y-311=0$ معادله د بيضوي د معياري معادلې په ډول وليکئ.

حل: د مربع له بشپړولو څخه په کار اخيستنې سره يې په معياري ډول بدلوو .

$$16x^2+25y^2-64x+50y=311$$
$$16(x^2-4x)+25(y^2+2y)=311$$
$$16(x^2-4x+4-4)+25(y^2+2y+1-1)=311$$
$$16[(x-2)^2-4]+25[(y+1)^2-1]=311$$
$$16(x-2)^2-64+25(y+1)^2-25=311$$
$$=16(x-2)^2+25(y+1)^2=311+64+25$$
$$16(x-2)^2+25(y+1)^2=400$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته معادلې دواړه خواوې په 400 وېشو: $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$

پورتنی معادله دداسې بیضوي معادله ده چې مرکز یې د $(2, -1)$ ټکی دی.

دریم مثال: د بیضوي لاندې معادله د معیاري معادلې په ډول ولیکئ.

$$x^2+9y^2+4x-18y-23=0$$

حل : لومړی معادله ترتیب بیا د مربع له بشپړولو څخه په کار اخیستنې سره هغه په معیاري شکل بدلوو:

$$x^2+4x+9(y^2-2y)-23=0$$

$$x^2+4x+(2)^2-(2)^2+9[y^2-2y+(1)^2-(1)^2]-23=0$$

$$\underbrace{x^2+4x+(2)^2}_{\text{کامله مربع}}-(2)^2+9\underbrace{\left[y^2-2y+(1)^2\right]}_{\text{کامله مربع}}-(1)^2-23=0$$

$$(x+2)^2-4+9(y-1)^2-9-23=0$$

$$(x+2)^2+9(y-1)^2-36=0$$

$$(x+2)^2+9(y-1)^2=36$$

د مساوات دواړه خواوې په 36 وېشو:

$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{9(y-1)^2}{36}=\frac{36}{36}$$

$$\frac{(x+2)^2}{36}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

پوښتنې

1. د بیضوي په لاندې معادلو کې د مرکز، محراقونو او راسونو مختصات پیدا کړئ.

$a)\ \frac{(x+3)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{9}=1 \qquad b)\ x^2+2y^2+4x-12y+20=0$

2. د داسې بیضوي معادله ولیکئ چې مرکز یې د $(0,2)$ ټکی، محراق یې د $(2, 6)$ ټکی او د $(4,6)$ له ټکې څخه تیره شي.

3. د بیضوي لاندې معادلې د معیاري معادلو په ډول ولیکئ، د مرکز، راسونو، محراقونو وضعیه کمیات او همدارنګه د اوږده قطر، لنډ قطر اوږدوالی، عن المرکزیت پیدا او ګرافونه یې رسم کړئ.

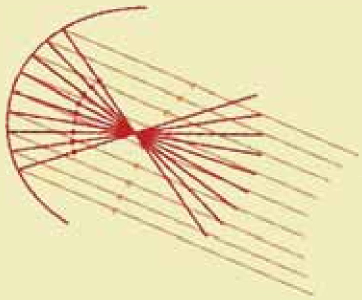
$a)\ 9x^2+25y^2-36x-150y+36=0 \qquad b)\ 16x^2+4y^2+96x-8y+84=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

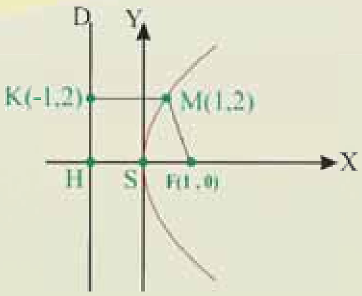
پارابـولا

Parabola



کـه چهـرې د لمـر وړانګـې پـه يـوې معقـرې عدسـيې ولـوېږي، انعکاسي(منعکسه) وړانګې يې له کوم ټکي څخه تيرېږي؟ دغه ټکی څه نوميږي او د عدسې ګډ فصل له يوې متقاطع مستوي سره چې د عدسيې محور په برکې ولري. څه ډول منحني ده؟

فعاليت

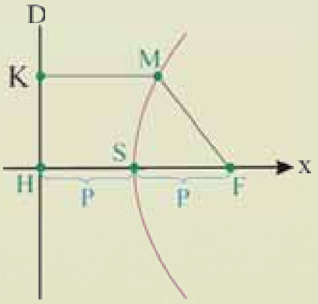


د فعاليت د سرته رسولو لپاره مخامخ شکل په پام کې ونيسئ په شکل کې د M، F او K ټکو مختصات درکړل شوي دي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پيداکولو له فارمول څخه په کار اخيستنې سره د FM او KM هر يو اوږدوالی پيدا او يو له بل سره يې پرتله کړئ.

له پورته فعاليت څخه لاندې تعريف بيانولای شو:

تعريف: په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د يوه ثابت يا مستقر ټکي او يوه ثابت مستقيم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کيږي. دغه ثابت يا مستقر ټکی د پارابولا محراق (F) او د D ثابت مستقيم خط ته د پارابولا موجه (Directrix) وايي $\overline{MF} = \overline{MK}$

هغه مستقيم خط چې د پارابولا له محراق او راس څخه تير او د موجه (D) پر مستقيم خط عمود وي، د پارابولا د محراقي يا تناظري محور په نامه ياديږي.



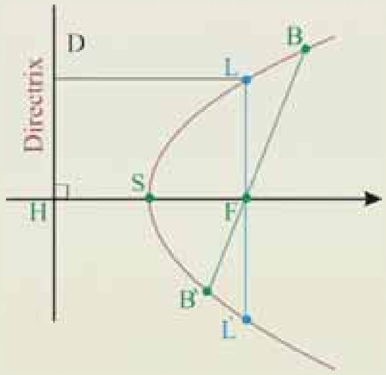
د تناظري محور او منحني ګډ ټکی د پارابولا راس او په S سره ښودل کيږي.

آيا ويلای شئ چې S د $\overline{FH}$ نيمايي ټکی دی، ولې؟

په پارابولا کې عن المرکزيت $(e=1)$ دی ولې؟

د پارابولا وترونه:

هغه مستقیم خط چې د پارابولا دوه ټکی سره ونښلوي، د پارابولا وتر بلل کیږي. په شکل کې $\overline{BB'}$ چې د پارابولا له محراق څخه تیر شوي دی، محراقي وتر دی او LL' چې د محراق په ټکي کې د تناظر پر محور باندې عمود دی عمودي وتر بلل کېږي.



پوښتنې

د پارابولا د محراقي وتر اوږدوالی د $\overline{FH}$ څو برابره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پارابولا معادله

د هغې پارابولا د معادلې د پیداکولو لپاره چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، لاندې فعالیت په پام کې ونیسئ.

$$y^2 = 4px$$
$$x^2 = 4py$$

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو قایم سیستم په پام کې ونیسئ او د y له محور سره د هادي موازي خط رسم کړئ.
- د پارابولا منحني داسې رسم کړئ چې راس یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي.
- د x پر محور باندې محراق داسې وټاکئ چې فاصله یې له مبدا څخه د هادي خط له فاصلې سره مساوي وي.
- په منحني باندې د $M(x, y)$ ټکی وټاکئ، هغه له F سره ونښلوئ او د M له ټکي څخه یو عمود پر هادي(موجه خط) باندې رسم او د تقاطع ټکي ته یې K وواياست.
- د F او K د ټکو مختصات ولیکئ.

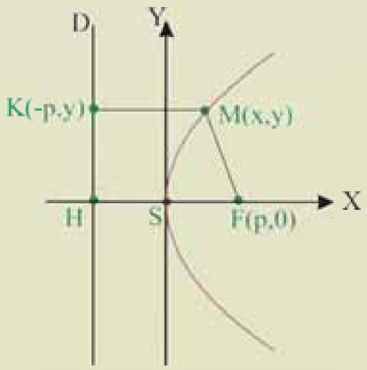
اوس د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د F, M او K, M ټکو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او بیا د پارابولا معادله د $|MF| = |MK|$ له رابطې څخه په لاس راوړئ.

ثبوت لومړی حالت: پوهیږو چې:

$$|MF| = \sqrt{(p-x)^2 + y^2}$$
$$|MK| = x + p$$

اوس د $|MF|$ او $|MK|$ قیمتونه د $|MF| = |MK|$ په رابطه کې ایږدو:

$$\sqrt{(p-x)^2 + y^2} = x + p$$



د پورته معادلې دواړه خواوې مربع کوو:

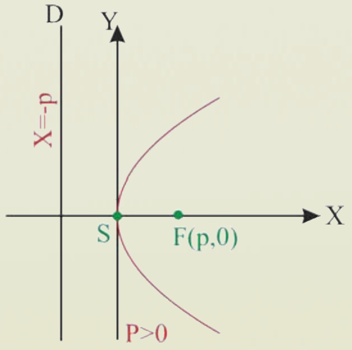
$$(\sqrt{y^2 + (p-x)^2})^2 = (x+p)^2$$
$$y^2 + (p-x)^2 = (x+p)^2$$
$$y^2 + p^2 - 2px + x^2 = x^2 + 2px + p^2$$
$$\Rightarrow y^2 = 4px$$

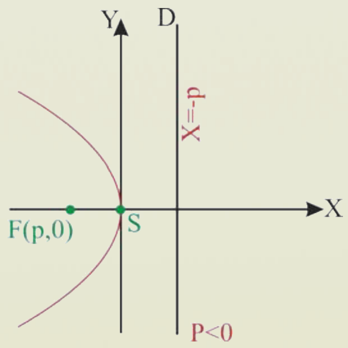
(c) ketabton.com: The Digital Library

ورووستی رابطه دداسې پارابولا معادله راښيي چې راس يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې $F(p,0)$ د پارابولا محراق د x پر محور باندې پروت دی او موجه خط يې $x=-p$ دی.

که چيرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور ښي خواته خلاصه ده.

که چيرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله په افقي محور باندې کينې خواته خلاصه ده.





لومړی مثال: د داسې پارابولا معادله په لاس راوړئ چې د محراق مختصات يې $F(2,0)$، د هادي مستقيم خط معادله $x=-2$ سره وي او همدارنګه د عمودي وتر د انجامونو مختصات يې پيدا کړئ.

حل : د محراق مختصات چې د x په محور باندې دي، وبلاي شو $P=2>0$، له دې امله د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

لرو چې: $y^2=4px$

اوس د $P=2$ قيمت په معادله کې ايږدو:

$$y^2=4\cdot 2x \quad \Rightarrow \quad y^2=8x$$

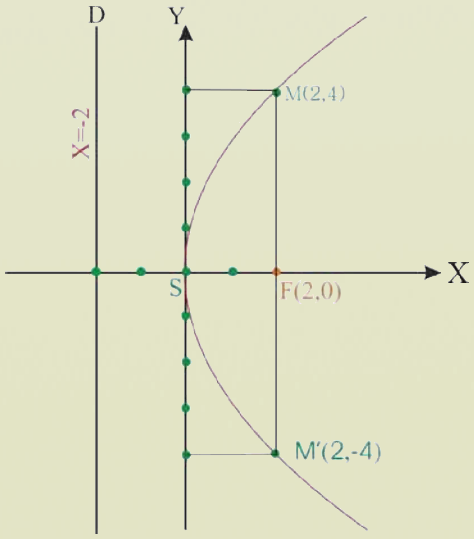
که چيرې د $x=2$ قيمت د $y^2=8x$ په معادله کې کېږدو، په دې صورت کې د پارابولا دوه ټکي چې د عمودي وتر انجامونه دي په لاس راځي، هغه عبارت دي له:

$$y^2=8\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad y^2=16$$

$$y=\pm 4$$

$$M(2,4) \quad , \quad M'(2,-4)$$

د پورته معلوماتو له مخې $y^2=8x$ پارابولا ګراف رسم کړئ.

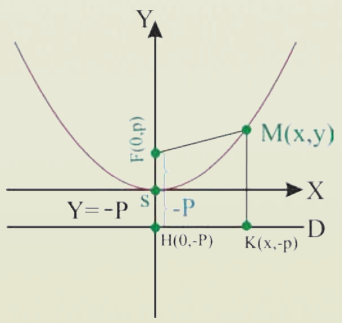


(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم حالت: که چیرې د پارابولا محراق (F) د y پر محور باندې پروت او د D مستقیم خط د x له محور سره موازي وي، د پارابولا معیاري معادله پیداکړئ.

حل: د پورته غوښتنې لپاره په پارابولا باندې یوټکی، لکه: $M(x,y)$ په پام کې نیسو، د پارابولا د تعریف له مخې لیکلای شو:

ثبوت:



$$|\overline{MF}| = |MK|$$

$$|\overline{MF}| = \sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{x^2+(y-p)^2}$$

$$|\overline{MK}| = \sqrt{(x-x)^2+[(y-(-p)]^2} = \sqrt{(y+p)^2}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x^2+(y-p)^2})^2 = (\sqrt{(y+p)})^2$$

$$\Rightarrow x^2+(y-p)^2 = (y+p)^2$$

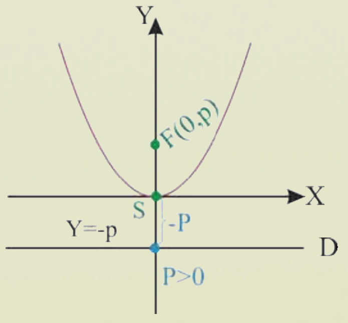
$$\Rightarrow x^2+y^2-2py+p^2 = y^2+2py+p^2$$

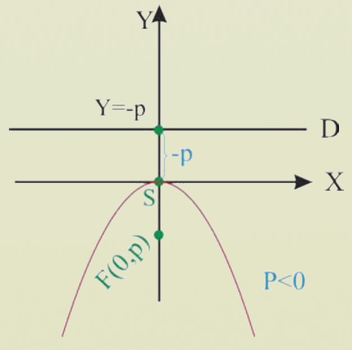
$$\Rightarrow x^2 = 4py$$

پورته معادله دداسې پارابولا معادله ده چې راس یې د وضعیه کمیاتو د سیستم په مبدا کې او محراقي محور یې د y محور دی چې د محراق مختصات یې $F(0,p)$ او $y=-p$ یې د هادي مستقیم خط معادله ده.

که چیرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چیرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.





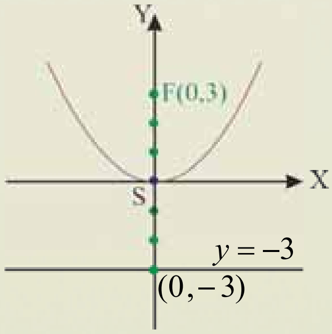
(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د $x^2 = 12y$ په معادله کې د پارابولا د راس، محراق مختصات، د هادي خط معادله پیدا او ګراف يې رسم کړی.

حل : **لومړي** د $x^2 = 4py$ په معادله کې د p قیمت په لاس راوړو.

$$4p = 12$$
$$p = 3$$

څرنګه چې $P = 3 > 0$ څخه دی، نو د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.



1 – د راس مختصات عبارت دي له: $\left.\begin{array}{l} x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \\ 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow S(0,0)$

2 – د محراق مختصات عبارت دي له : F (0, 3)

3 – د هادي خط معادله عبارت ده له: $y = -p \Rightarrow y = -3$

پوښتني

1 – د $y^2 - 4x = 0$ او $x^2 = 2y$ معادلو کې د هرې پارابولا د راس وضعیه کمیات او د هادي (موجه خط) معادلې پیدا او ګرافونه يې رسم کړئ.

2 – د لاندې قیمتونو له مخې د هرې پارابولا معادله پیدا کړئ.

$a)\ S(0,0) \qquad F(0,5)$

$b)\ S(0,0) \qquad F(-2,0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغې پارابولا معیاري معادله چې راس يې يو اختياري ټکي وي

آيا د داسې پارابولا معادله پيدا کولای شوچې د راس مختصات يې د وضيعه کمياتو په مبدا کې نه وي.

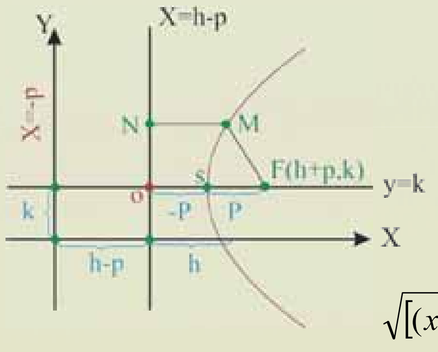
$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$
$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

فعاليت

- يوه پارابولا د وضيعه کمياتو په سيستم کې رسم کړئ چې مرکز يې (h,k) او د تناظري محور يې د x له محور سره موازي وي.
- د پارابولا په منحني باندې د $M(x,y)$ ټکی وټاکئ او هغه له F سره ونښلوئ، بیاد M له ټکي څخه یو عمود خط پر ها دي خط(موجه) باندې رسم او هغه ته N وواياست.

اوس د دووټکو ترمنځ د فاصلې څخه دپيدا کولو په ګټې اخېستنې سره د F, M او N, M ټکو ترمنځ فاصله پيدا کړئ، بيا دهغې پارابولا معادله چې مرکز يې $S(h,k)$ ده، په لاس راوړئ.

ثبوت:خرنګه چې د F او M ټکو وضيعه کميات پيژنو او همدارنګه د N وضيعه کميات له $(h-p,y)$ څخه عبارت دی، د پارابولا د تعريف له مخې ليکو



$$|MF| = |MN|$$

د دوو ټکوتر منځ د فاصلې له مخې لرو:

$$\sqrt{[x-(h+p)]^2+(y-k)^2} = \sqrt{[x-(h-p)]^2+(y-y)^2}$$

د واړه خو اوې مربع کوو او له اختصار وروسته ليکو:

$$[(x-(h+p)]^2+(y+k)^2 = [x-(h-p)]^2$$
$$\Rightarrow x^2-2(h+p)x+(h+p)^2+y^2-2ky+k^2 = x^2-2(h-p)x+(h-p)^2$$

د پورته رابطې له پراختيا او ساده کولو وروسته په لاس راځي چې:

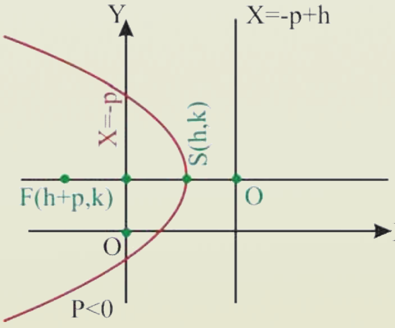
$$y^2-2ky+k^2 = 4px-4ph$$
$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

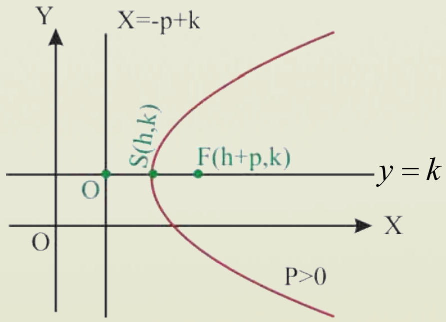
(c) ketabton.com: The Digital Library

پورتنی معادله د هغې پارابولا معادله ده، چې د راس وضعیه کمیات یې $S(h,k)$ محراق یې $F(h+p,k)$ او د موجه خط معادله یې $x=-p+h$ ، تناظري محور یې $y=k$ دی.

که چیرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله ښي خواته خلاصه ده.

که چیرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله چپې خواته خلاصه ده.





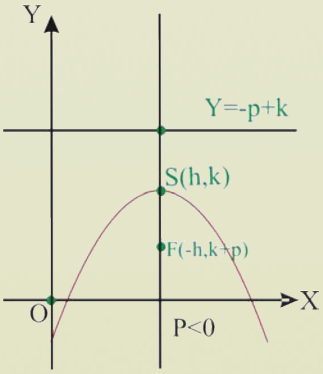
دویم حالت:د هغې پارابولا معادله چې تناظري محور یې د y له محور سره موازي وي، عبارت ده له: $(x-h)^2=4p(y-k)$

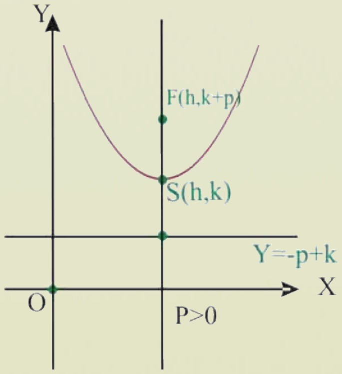
چې د پارابولا د راس مختصات $S(h,k)$ او د محراق مختصات یې $F(h,k+p)$ دي.

$y=k-p$ د پارابولا د هادي خط معادله او $x=-h$ تناظري محور دی.

که چیرې $p>0$ وي، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چیرې $p<0$ وي، د پارابولا خوله ښکته خواته خلاصه ده.





لومړی مثال: غواړو د $(x-1)^2=12(y-2)$ د پارابولا په معادله کې د راس مختصات، د محراق مختصات، د موجه خط معادله، تناظري محور او د عمودي وتر د انجامونو مختصات پیدا کړو.

حل: څرنګه چې معادله د $(x-h)^2=4p(y-k)$ عمومي شکل لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $h=1$, $k=2$ کیږي، په دې صورت کې د پارابولا دراُس وضعیه کمیات عبارت دي له: $S(1,2)$

$$4p=12 \Rightarrow p=\frac{12}{4}=3$$

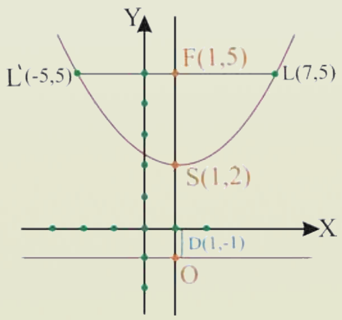
د محراق مختصات: $F(h,k+p)=F(1,2+3) \Rightarrow F(1,5)$

د موجه خط معادله $y=k-P \Rightarrow 2-3=-1$

د تناظر محور: $x=h \Rightarrow x=1$

د عمودي وتر دانجامونو د مختصاتو د پیداکولو لپاره د y قیمت چې په محراق کې لرو په عمومي معادله کې اېږدو یعنې $y=5$ دی.

$$(x-2)^2=12(5-2)$$
$$(x-1)^2=12\cdot 3 \Rightarrow (x-1)^2=36$$
$$(x-1)=\pm 6$$
$$x_1=6+1=7,\ x_2=-6+1=-5$$
$$L(7,5) \quad L'(-5,5)$$



دویم مثال: د $(y-4)^2=-6(x+3)$ معادله په پام کې ونیسئ، د پارابولا دراس او محراق مختصات د موجه خط معادله، تناظري محور معادله، د عمودي وتر د انجامونو مختصات پیدا او گراف یې رسم کړئ.

حل: دراس مختصات: $k=4, h=-3 \Rightarrow S(-3,4)$

$$4P=-6 \Rightarrow P=-\frac{3}{2}$$

څرنگه چې $-\frac{3}{2}<0$ ده، نو د پارابولا خوله چپې خواته خلاصه ده.

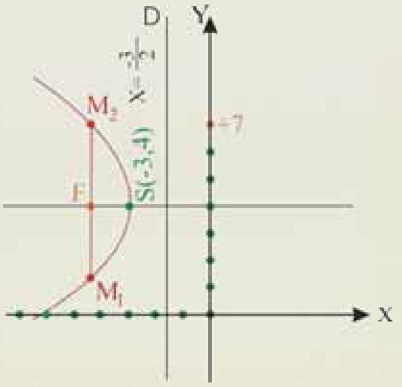
د محراق مختصات: $F(h+p,k)=(-\frac{9}{2},4)$

موجه خط معادله عبارت ده له: $x=h-p \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

د تناظري محور معادله: $y=k \Rightarrow y=4$

د $x=-\frac{9}{2}$ قیمت په معادله کې اېږدو او د عمودي وتر د انجامونو مختصات په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$(y-4)^2=-6(x+3)=-6(-\frac{9}{2}+3)$$
$$(y-4)^2=9 \Rightarrow y-4=\pm 3$$
$$y_1=3+4=7$$
$$y_2=-3+4=1$$
$$M_2(-\frac{9}{2},7)\ ,\ M_1(-\frac{9}{2},1)$$

یادونه: د $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$ د معادلې ګراف یوه پارابولا ده، په داسې حال کې چې ($C\neq 0$, $A=0$ وي یا $C=0, A\neq 0$ وي).

پوښتنه: د $(x-h)^2=4p(y-k)$ معادله په پراختیایي ډول ولیکئ.

دریم مثال: د $y^2-2y+8x+25=0$ پارابولا معادله، د پارابولا د معیاري معادلې په ډول ولیکئ د راس، محراق مختصات، د مؤجه خط معادله او تناظري محور یې پیدا کړئ.

حل: په راکړل شوي معادله کې $A=0$ دی، نو نظر د y متحول ته یې، مربع بشپړوو.

$$y^2-2y+(1)^2-(1)^2+8x+25=0$$
$$(y-1)^2+8x+24=0 \quad \Rightarrow \quad (y-1)^2+8(x+3)=0$$
$$\Rightarrow (y-1)^2=-8(x+3)$$

په معادله کې لیدل کیږي: $4P=-8 \Rightarrow P=-2$

دراس مختصات: $k=1\ ,\ h=-3 \Rightarrow S(-3,1)$

$F(h+p,k)\Rightarrow F(-3-2,1)\Rightarrow F(-5,1)$ ، د موجه خط معادله $x=h-p \Rightarrow x=-3+2=-1$

تناظر محور عبارت له $y=1 \Rightarrow y=k$ څخه دی.

پوښتنې

1ـ د لاندې پارابولا معادله پیدا کړې، په داسې حال کې چې:

a) $S(1,3), F(-1,3)$

2- د $(y-1)^2=12(x-4)$ په معادله کې د پارابولا دراس مختصات، د محراق مختصات، د موجه خط معادله او د تناظر محور پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

3- لاندې معادلې د پارابولا د معیاري معادلې په ډول ولیکئ او ګراف یې رسم کړئ.

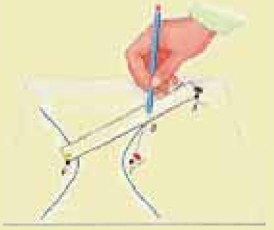
a) $y^2-6y+8x+41=0$ b) $x^2-2x-6y-53=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

هایپربولا

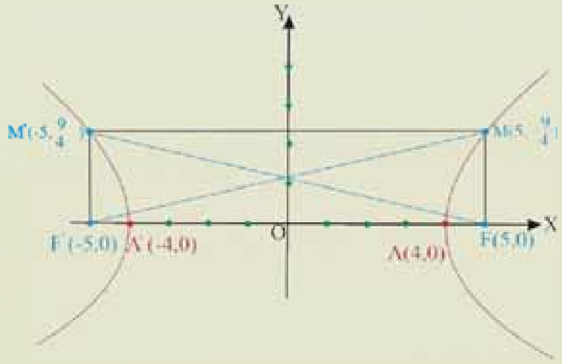
Hyperbola



په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو مستقرو ټکو څخه تل له یوه ثابت اوږدوالي سره مساوي وي، څه ډول یوه منحني کېدلای شي؟

فعالیت

- په لاندې شکل کې د A, M', M, F', F او A' ټکو مختصات درکړل شوي دي.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د $|MF|, |MF'|$ او $|AA'|$ اوږدوالي پیداکړئ.
- د $|MF| - |MF'|$ د تفریق حاصل په لاس راوړئ او د $|AA'|$ له اوږدوالي سره یې پرتله کړئ.
- پورتنی فعالیت د M' ټکي لپاره تطبیق او پایله یې ولیکئ
- د $|MF| - |MF'|$ او $|M'F| - |M'F'|$ د تفریق حاصل یو له بل سره پرتله کړئ.



د پورتني فعالیت له سرته رسولو وروسته لاندې تعریف بیانولای شو:

تعریف: په یوه مستوي کې دهغه ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو ځای پر ځای ټکو څخه تل مساوي اوږ دوالي ولري، هایپربولا Hyperbola بلل کیږي.

دوه مستقر ټکي د هایپربولا د محراقونو په نامه یادیږي، په شکل کې F او F' د هایپربولا محراقونه M او M' د هایپربولا دوه اختیاري ټکي دي، په دې صورت کې لیکو:

$$|M'F| - |M'F'| = |MF| - |MF'| = |AA'| = 2a$$

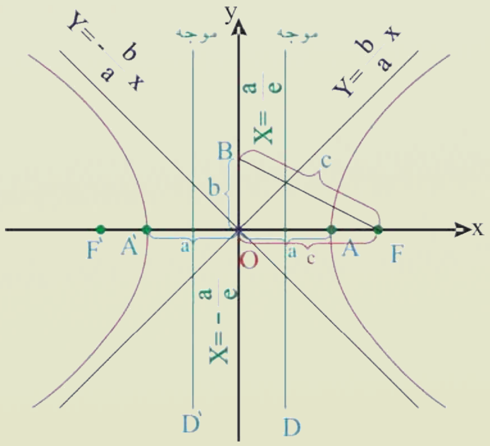
د FF' منځنی ټکی د هایپربولا مرکز دی، دمرکز او هر یوه راس ترمنځ فاصله، لکه بیضوی په هایپربولا کې هم $AA'=2a$ او $FF'=2c$ اوږدوالی لري.

د هایپربولا تناظري محورونه او راسونه:

د بیضوي په ډول هایپربولا هم دوه تناظري محورونه لري چې یوېې په FF' باندې منطبق او د هایپربولا له راسونو څخه تیرېږي. بل یې د FF' عمودي نیمایې کوونکی دی. د دې دواړو محورونو د تقاطع ټکی یا ځای، دهایپربولا مرکز بلل کیږي. هغه تناظري محور چې له FF' څخه تیرېږي، د متقاطع محور په نامه یادیږي، ځکه چې هایپربولا د A او A' په دوو ټکو کې قطع کوي چې دې دوو ټکوته د هایپربولا راسونه وایې او اوږدوالي له $|AA'|=2a$ څخه عبارت دی.

هغه خط چې د هایپربولا په مرکز کې په متقاطع محور باندې عمود دی او هایپربولا نه قطع کوي، خو د مرکز دواړو خواوته د B او B' دوه ټکي په پام کې نیسو چې $OB=OB'=b$ وي، دا دوه ټکي د هایپربولا غیر حقیقي راسونه بلل کیږي چې $|BB'|=2b$ غیر حقیقي محور دی.

په یوه هایپربولا کې د b, a او c اوږدوالو ترمنځ داسې رابطه شته: $c^2=a^2+b^2$

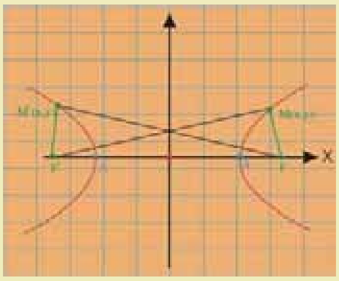


عن المرکزیت: څرنګه چې په هایپربولا کې $c>a$ دي، نو $e>1$ کیږي. چې د c, b, a او عن المرکزیت ترمنځ د $e=\sqrt{1+\frac{b2}{a2}}$ رابطه شته. زده کوونکي دې د $e=\frac{c}{a}$ له رابطې څخه په کار اخیستې سره نوموړې رابطه په لاس راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

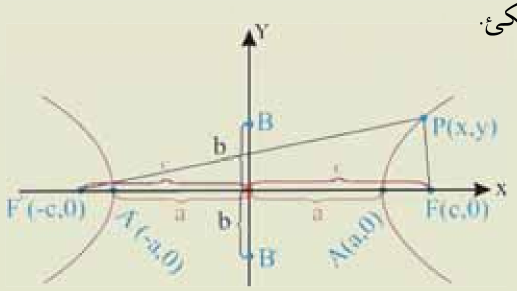
د هایپربولا معادله

آیا داسې یوه هایپربولا رسمولای شئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي؟



فعالیت

- داسې هایپربولا رسم کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي.
- د $P(x,y)$ ټکی په هایپربولا باندې وټاکئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ
- د F, P او F' ټکو ترمنځ د هایپربولا د تعریف رابطه ولیکئ.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د PF او PF' فاصلې پیدا کړې او بیا د هغو تفاضل په لاس راوړئ.



د هایپربولا د تعریف له مخې لیکو: $|PF'|-|PF|=2a$

د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې له فارمول څخه لیکلای شو.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

د مساوات د دواړو خواوله مربع او انکشاف څخه وروسته لرو:

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$$
$$\Rightarrow 4cx-4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \ /\div 4$$
$$\Rightarrow cx-a^2 = a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

بیا هم د مساوات دواړه خواوې مربع او انکشاف ورکوو:

$$(cx-a^2)^2 = a^2(x-c)^2+y^2$$
$$c^2x^2-2a^2cx+a^4 = a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$
$$c^2x^2-2a^2\not{c}x+a^4 = a^2x^2-2\not{a}^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$
$$\Rightarrow c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2 = a^2c^2-a^4 \quad \Rightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

څرنګه چې $c > a$ دی، نو $c^2 - a^2 > 0$ کيږي، له بلې خوا پوهيږو چې $c^2 - a^2 = b^2$ ده، نو په پورته افاده کې د $c^2 - a^2$ قيمت په ايښودلو سره ليکلای شو: $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

د مساوات د واړه خواوې پر a^2b^2 باندې ويشو:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

پورتني معادله د داسې هايپربولا معادله ده چې مرکز يې د وضعيه کميات په مبدأ او محراقونه يې په افقي محور پراته دي.

دويم حالت: که چيرې متقاطع محور يعنې AA' د y پر محور پروت وي، يعنې محراقونه په عمودي محور پراته وي، نو د هايپربولا معادله عبارت ده له:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

پوښتنه

پورته فارمول او همدارنګه د محراقونو او راسونو مختصات دې د شکل له مخې د زده کوونکو په واسطه پيداشي.

د هايپربولا موجه خط:

که چيرې د هايپربولا محراقونه د x يا y په محورونو پراته وي، په دې صورت کې ليکلای شو چې:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

له دې امله ويلای شو چې دا موجه خطونه په متقاطع محور باندې عمود دي چې د هغو فاصله د هايپربولا له مرکز څخه د $\pm\frac{a}{e}$ يا $\pm\frac{a^2}{c}$ څخه عبارت ده.

د هغې هايپربولا د ها دي خط معادلې چې محراقونه يې د y پر محور باندې پراته دي له $y = \pm\frac{a}{e}$ څخه عبارت دي.

او د هغې هايپربولا د ها دي خط معادلې چې محراقونه يې د x پر محور باندې پراته دي له $x = \pm\frac{a}{e}$ څخه عبارت دي.

د هايپربولا مجانبونه:

هغه مستقيم خطونه چې د هايپربولا له مرکز څخه تير اويه لايتناهي کې د هايپربولا له منحنې سره مماس وي. د هايپربولا مجانبونه بلل کيږي .

د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ هایپربولا معادله په پام کې نیسو:

$$a^2y^2=b^2x^2-a^2b^2$$
$$a^2y^2=b^2(x^2-a^2)$$
$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)=\frac{b^2}{a^2}\left[x^2(1-\frac{a^2}{x^2})\right]$$
$$\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

که چیرې په پورتني رابطه کې x لایتناهي ته نږدې شي د $\frac{a^2}{x^2}$ کسر د صفر خواته نږدې کیږئ په پایله کې $\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)$ د یوه عدد ته تقرب کوي، په دې صورت کې $y=\pm\frac{b}{a}x$ لاس ته راځي.

نو $y=\pm\frac{b}{a}x$ د هغو مجانبونو معادلې دي چې د هایپربولا محراقونه د x پر محور باندې پراته وي.

که چیرې محراقونه د y پر محور باندې پراته وي، د مجانبونو معادلې یې له $y=\pm\frac{a}{b}x$ څخه عبارت دي.

لومړی مثال: د هایپربولا د $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$ په معادله کې د محراقونو مختصات، د راسونو مختصات، د موجه خطونو معادلې او د مجانبونو معادلې پیدا او په شکل کې وښایاست.

حل: دراُسونو مختصات: $a^2=16\Rightarrow a=\pm4\Rightarrow A(4,0),A'(-4,0)$

د محراقونو مختصات: $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot5}=\pm2\sqrt{5}$

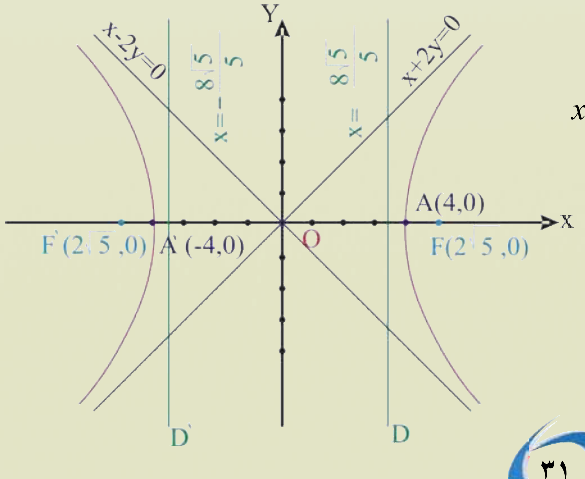
$$\Rightarrow F(2\sqrt{5},0),F'(-2\sqrt{5},0)$$

د موجه خطونو معادلې: څرنګه چې محراقونه د x پر محور باندې پراته دي.

له دې امله:

$$x=\pm\frac{a}{e}=\frac{a^2}{c}=\frac{4^2}{2\sqrt{5}}=\frac{16}{2\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{5}}{5}$$
$$y=\pm\frac{b}{a}x\quad\Rightarrow\quad y=\pm\frac{2}{4}x=\pm\frac{1}{2}x$$
$$2y=\pm x$$

یا: $x=\pm2y\quad\Rightarrow\quad x+2y=0,x-2y=0$



(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: وښیاست چې $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$, د هایپربولا یوه معادله ده، په نوموړي معادله کې د محراقونو، راسونو مختصات، د مجانبونو او موجه خطونو معادلې پیدا او ګراف یې رسم کړئ.

حل: پورتنی معادله د هایپربولا د معیاري معادلې شکل لري چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې او د y محور یې متقاطع محور دی چې محراقونه ور باندې پراته دي.

د راسونو مختصات: $A(0,2)\ ,\ A'(0,-2)$ $\qquad a^2=4\Rightarrow a=\pm2$

$b^2=9\Rightarrow b=\pm3$

د محراقونو مختصات: $c^2=a^2+b^2\Rightarrow c^2=4+9=13\Rightarrow c=\pm\sqrt{13}$

د مجانبونو معادلې: $F(0,\sqrt{13})\quad,\quad F'(0,-\sqrt{13})$

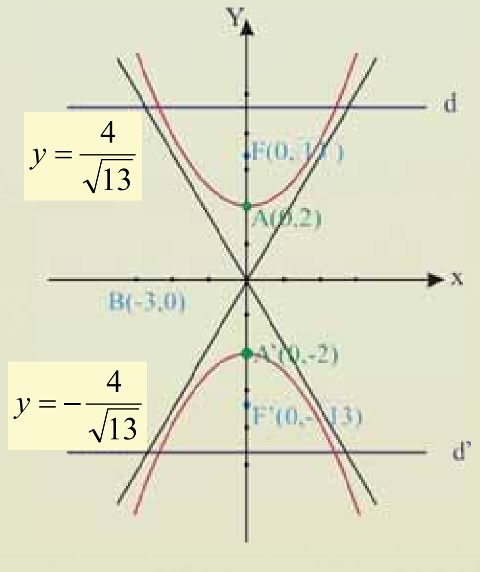
څرنګه چې متقاطع محور د y پر محور باندې منطبق دی، نو د مجانبونو معادلې عبارت دي له:

$$y=\pm\frac{a}{b}x\ \Rightarrow\ y=\pm\frac{2}{3}x\ \Rightarrow\ 3y=\pm2x$$

$$3y-2x=0\quad,\quad 3y+2x=0$$

د موجه خط معادله: څرنګه چې د هایپربولا راسونه د y پر محور باندې پراته دي، نو د موجه خطونو معادلې عبارت دي له:

$$y=\pm\frac{a}{e}=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{4}{\sqrt{13}}=\pm1{,}1$$



پوښتنې

د $4x^2-y^2=16$ هایپربولا له معادلې څخه د محراقونو وضعیه کمیات، د راسونو وضعیه کمیات، د موجه خط معادلې او د مجانبونو معادلې په لاس راوړئ او په پای کې یې ګراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغې هایپربولا معادله چې مرکز یې یو اختیاري ټکی وي

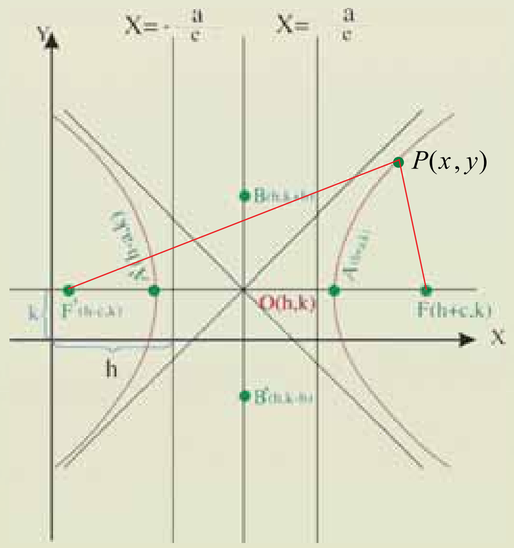
آیا د داسې هایپربولا معادله شته چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبداکې نه وي؟

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په سیستم کې داسې هایپربولا رسم کړئ چې د مرکز مختصات یې (h,k) او متقاطع محور یې موازي د x له محور سره وي.
- په هایپربولا باندې د $p(x,y)$ یو ټکی په پام کې ونیسئ او هغه د F او F' سره ونښلوئ.
- د هایپربولا د معادلې په پام کې نیولو سره د (h,k) ټکي د محراقونو مختصات یعني F او F'، د راسونو مختصات یعني A, A', B او B' په شکل کې وښایاست.



د هایپربولا د تعریف له مخې لیکو:

$$|PF'|-|PF|=2a$$

د دووټکو تر منځ د فاصلې د پیداکولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره لیکلای شو:

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}-\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}=2a$$

یا

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}=2a+\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$$

د پورتني مساوات دواړه خواوې مربع کوو:

$$\left(\sqrt{[x-(h-c)]^2+(y-k)^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{[x-(h+c]^2+(y-k)^2}\right)^2$$

$$[x-(h-c)]^2+(y-k)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+[x-(h+c)]^2+(y-k)^2$$

$$x^2-2x(h-c)+(h-c)^2=4a^2+4a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}+x^2-2x(h+c)+(h+c)^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشابه حدونو له جمعې او تفریق وروسته لیکلای شو: $cx-(ch+a^2)=a\sqrt{[x-(h+c)]^2+(y-k)^2}$

بیاهم د مساوات دواړه خواوې مربع کوو:

$$\{cx-(ch+a^2)\}^2=\left\{a\sqrt{\{x-(h+c)\}^2+(y-k)^2}\right\}^2$$

$$c^2x^2-2cx(ch+a^2)+(ch+a^2)^2=a^2[x-(h+c)]^2+(y-k)^2$$

د ضرب، او طاقتونو له ساده کولو وروسته مشابه حدونه جمع او تفریقوو او پورتنی رابطه په لاندې ډول لیکو:

$$c^2x^2-a^2x^2+2c^2hx+a^2hx+c^2h^2-a^2h^2-a^2(y-k)^2=a^2c^2-a^4$$

$$x^2(c^2-a^2)-2hx(c^2-a^2)+h^2(a^2-c^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x^2-2hx+h^2)-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$(c^2-a^2)(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2(c^2-a^2)$$

څرنګه چې $c^2-a^2=b^2$ دې، نو پورته رابطه په لاندې ډول لیکو: $b^2(x-h)^2-a^2(y-k)^2=a^2b^2$

دواړه خواوې په a^2b^2 ویشو:

$$\frac{b^2(x-h)^2}{a^2b^2}-\frac{a^2(y-k)^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

د حقیقي راسونو مختصات: $A(h+a,k)\quad A'(h-a,k)$

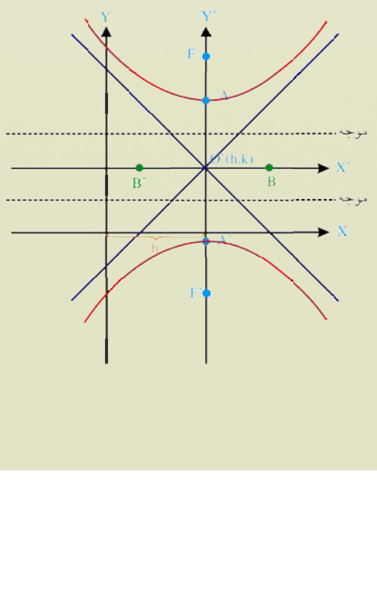
د غیر حقیقي راسونو مختصات: $B(h,k+b)\quad B'(h,k-b)$

د محراقونو مختصات: $F(h+c,k)\ ,\ F'(h-c,k)$

د مجانبونو معادلې: $y=\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$

که چیرې د هایپربولا د مرکز مختصات (h,k) او متقاطع محور یې موازي د y له محور سره وي په دې صورت کې د هایپربولا معادله عبارت ده له: $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

زده کوونکي دې د مرکز مختصات، د محراقونو مختصات، د موجه خط معادله او د مجانبونو معادلې ولیکي؟



دویم حالت: که چیرې محراقونه د y له محور سره موازي پر متقاطع محور پراته وي، نو د هایپربولا معادله عبارت ده، له:

$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ د شکل له مخې د هایپربولا د رأسونو مختصات، محراقونو مختصات د مؤجه خطونو معادلې او د مجانبونو معادلې پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: د هایپربولا غزول شوي معادله له $AX^2 + BY^2 + DX + EY + F = 0$ څخه عبارت ده په داسې حال کې چې $A \neq B$ یا $A = B$ خو مختلف الاشاره وي.

څرنګه کولای شو، د هایپربولا غزول شوي معادله په لاس راوړو؟

لومړی مثال: د $9(x-3)^2 - 4(y+1)^2 = 144$ معادله په پام کې ونیسئ، د مرکز، د راسونو، محراقونو مختصات او همدارنګه د مجانبونو معادلې پیدا کړئ.

حل: راکړل شوي معادله په معیاري ډول لیکو:

$$\frac{9(x-3)^2}{144} - \frac{4(y+1)^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{36} = 1$$

د مرکز مختصات: $k=-1, h=3$ یعني $(3,-1)$ دي

د راسونو مختصات: $a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$

$$A(h+a,k) = A(3+4,-1) = A(7,-1)$$

$$A'(h-a,k) = A'(3-4,-1) = A'(-1,-1)$$

او همدارنګه پوهېږو چې:

$$\begin{cases} b^2 = 36 \Rightarrow b = \pm 6 \\ B(h,k+b) = B(3,6-1) = B(3,5),\ B'(h,k-b) = B'(3,-6-1) = B'(3,-7) \end{cases}$$

د محراقونو مختصات: $F(h+c,k) = F(3+\sqrt{52},-1) \qquad F'(h-c,k) = F'(3-\sqrt{52},-1)$

پوهېږو چې په هایپربولا کې: $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16+36 = 52 \Rightarrow c = \pm\sqrt{52}$

که چیرې متقاطع محور د x له محور سره موازي وي، نو د مجانبونو معادلې عبارت دي له:

$$y-k = \pm\frac{b}{a}(x-h) \Rightarrow y = \pm\frac{6}{4}(x-3)-1 = \pm\frac{3}{2}(x-3)-1$$

$$y = \pm\frac{3}{2}(x-3)-1 \ /\cdot 2$$

$$2y = \pm 3(x-3)-2 \Rightarrow 2y = 3x-9-2 \Rightarrow 2y-3x+11=0$$

$$2y = -3x+9-2 \Rightarrow 2y+3x-7=0$$

دویم مثال: د $2x^2 - 8x - 3y^2 - 18y - 31 = 0$ معادله په پام کې ونیسئ.

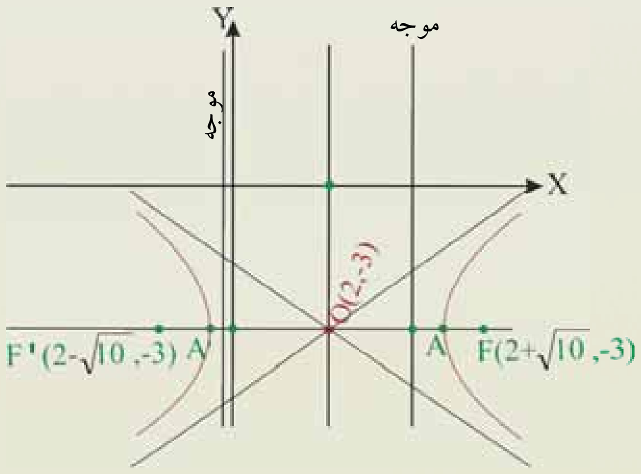
د هایپربولا د مرکز مختصات د راسونو مختصات، د محراقونو مختصات او د موجه خطونو معادلې، د مجانبونو معادلې په لاس راوړئ.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2(x^2-4x)-3(y^2+6y)-31=0$$
$$2\left[(x-2)^2-4\right]-3\left[(y+3)^2-9\right]-31=0$$
$$2(x-2)^2-8-3(y+3)^2+27-31=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2+27-39=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2-12=0$$
$$2(x-2)^2-3(y+3)^2=12$$
$$\frac{2(x-2)^2}{12}-\frac{3(y+3)^2}{12}=\frac{12}{12}$$
$$\frac{(x-2)^2}{6}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$$



پورتني معادله په معياري ډول واړول شوه، ليدل کيږي چې $h=2$ او $k=-3$ دی، د مرکز مختصات يې: $O(2,-3)$

له بلې خوا:

$$b^2=4\Rightarrow b=\pm 2 \quad , \qquad a^2=6\Rightarrow a=\pm\sqrt{6}$$
$$c^2=a^2+b^2\Rightarrow \ c=\pm\sqrt{a^2+b^2}=\pm\sqrt{6+4}=\pm\sqrt{10}$$

د محراقونو مختصات: يې $F'(2-\sqrt{10},-3)$، $F(2+\sqrt{10},-3)$,

د راسونو مختصات: $A'(2-\sqrt{6},-3)$، $A(2+\sqrt{6},-3)$,

د موجه خطونو معادلې: $x-h=\pm\frac{a}{e}\Rightarrow x=\pm\frac{a}{e}+h=\pm\frac{6\sqrt{10}}{10}+2$

د مجانبونو معادلې: څرنگه چې متقاطع محور د x له محور سره موازي دی، نو ليکلای شو:

$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$$
$$y+3=\pm\frac{2}{\sqrt{6}}(x-2)$$

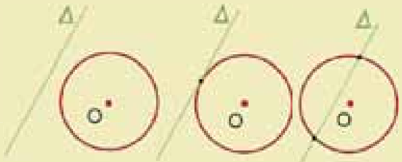
$$y=\frac{2}{\sqrt{6}}(x-2)-3 \ \ /\cdot\sqrt{6}$$
$$\sqrt{6}y=2(x-2)-3\sqrt{6}$$
$$\sqrt{6}y=2x-4-3\sqrt{6} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\sqrt{6}y-2x+4+3\sqrt{6}=0}$$
$$\sqrt{6}y=-2(x-2)-3\sqrt{6} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\sqrt{6}y+2x-4+3\sqrt{6}=0}$$

پوښتنې

د $9x^2-4y^2+54x+16y-79=0$ معادله د هايپربولا پر معياري معادلې باندې واړوئ.

ديوې كرښې مو قعيت نظرمخروطي مقاطعو ته

يوه اختياري كرښه، يوه دايره د امكان په صورت كې په
څو ټكو كې قطع كولای شي؟



فعاليت

د O دايره او د Δ مستقيمه كرښه په پام كې و نيسئ:

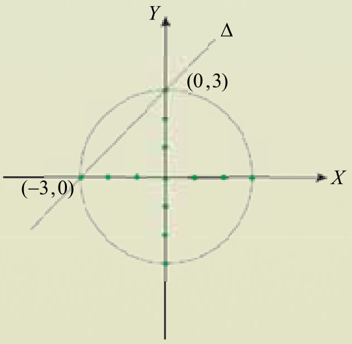
- يوه دايره او مستقيمه كرښه داسې رسم كړئ، چې يوازې يوګډ ټكي سره و لري.
- آيا كيداى شي چې يوه مستقيمه كرښه، يوه دايره له دو وټكو څخه په زياتو ټكوكې قطع كړي؟
- كه چيرې د يوې دايرې د مركز او كرښې تر منځ واټن، د دايرى له شعاع يا وړانګې څخه لوى وي. دايره او كرښه څوګډ ټكي لري؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

پايله: په يوه مستوي كې يوه اختياري كرښه او يوه دايره امكان لري، يوازې يوه، دوه او يا هېڅ ګډ ټكي ونلري.

لومړي مثال: د $x^2+y^2=9$ دايره او $y=x+3$ مستقيمه كرښه رسم او موقعيت يې وښاياست.

حل: په شكل كې ليدل كېږي، چې پورتني دايره او كرښه يو بل په $(0,3)$ او $(-3,0)$ دوو ټكوكې قطع كوي ددې پايلې د لاس راوړلو لپاره كه چيرې د y قيمت د دايرى په معادله كې و ضع كړو عين نتيجه په لاس راځي:



$$x^2+y^2=9$$
$$y=x+3 \quad \Rightarrow x^2+(x+3)^2=9$$
$$x^2+x^2+6x+9=9$$
$$\Rightarrow 2x^2+6x=0$$
$$x_1=0 \quad , \quad x_2=-3$$

د x قيمتونه د $y=x+3$ په معادله كې ايږدو او د y قيمت په لاس راځي.

$$y_1=0+3 \quad \Rightarrow y_1=3$$
$$y_2=-3+3 \quad \Rightarrow y_2=0$$

د $(0,3)$ او $(-3,0)$ د دايرې او مستقيمې كرښې د تقاطع ټكې دى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول د پورتنيو قيمتونو په پام کې نيولو سره د $(0,3)$ او $(-3,0)$ مرتبې جوړې چې د دواړو معادلو د تقاطع ټکي دي په لاس راځي.

په عمومي ډول کله چې د مستقيمې کرښې له معادلې څخه د x يا y متحول حل او د مخروطي مقاطعو په معادله کې يې کېږدو، د حل لپاره يوه دويمه درجه معادله لاسته راځي چې حل يې د Δ په قيمت پورې اړه لري. دغه مسئله په لاندې ډول د څېړلو،او پام وړ، پايلې لري:

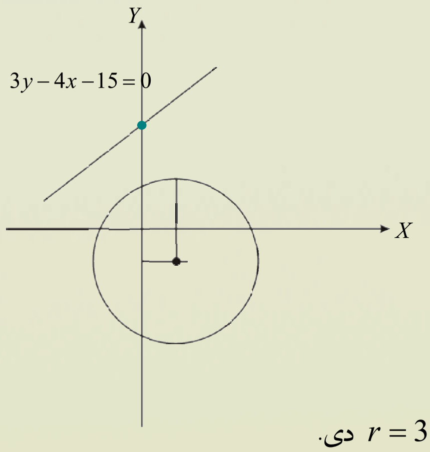
1- که چيرې $\Delta > 0$ وي، معادله دوه حلونه لري، نو په دې ډول کرښه او منحني يوبل په دوو ټکوکې قطع کوي.

2- که چيرې $\Delta = 0$ وي، معادله دوه مضاعف يا مساوي جذرونه لري او په دې ډول کرښه د مخروطي مقاطعو له منحني سره يوازې يو ګډ ټکی چې مماس بلل کېږي لري.

3- که چېرې $\Delta < 0$ وي، معادله حل نلري، په بل عبارت، کرښه او منحني يو بل نه قطع کوي.

دويم مثال: د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ دايره او $3y - 4x - 15 = 0$ کرښه په پام کې ونيسئ او موقعيتونه يې له يو بل سره و څېړئ.

حل: دپورتنيو معادلو د بدلولو لپاره چې معياري حالت ته راوګرځول شي، په لاندې ډول ګام پورته کوو:



$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$
$$x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 + y^2 + 4y + (2)^2 - (2)^2 - 4 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y+2)^2 - 9 = 0$$
$$\Rightarrow \ (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \qquad C(1,-2)$$

له پورتنی معادلې څخه پو هيږو چې د دايرې مرکز $C(1,-2)$ او شعاع يې $r = 3$ دی.

همدغه راز د مستقيمې کرښې لپاره لرو: $3y = 4x + 15 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x + 5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې له پورتني معادلې څخه د y قیمت د دایرې په معادله کې کېږدو او معادله حل کړو، نو لاندې پایله په لاس راځي.

$$(x-1)^2+(\frac{4}{3}x+5+2)^2=9$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1+(\frac{4}{3}x+7)^2=9 \;\Rightarrow x^2-2x+1+\frac{16}{9}x^2+14\frac{4}{3}x+49-9=0$$

$$\Rightarrow 9\cdot\frac{25}{9}x^2-9\cdot\frac{50}{3}x+9\cdot 40=0$$

$$\Rightarrow 25x^2+150x+360=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$\Delta=22500-36000=-13500 \quad , \quad \Delta<0$$

څرنګه چې $\Delta<0$ ده، کرښه او دایره ګډ ټکی نه لري.

دریم مثال: د $y=x-1$ د کرښې موقعیت د $y-x^2+1=0$ پارابولا ته وڅیړئ.

حل: د پورتني مسئلې د څېړلو لپاره د y قیمت د پارابول په معادله کې وضع کوو، او بیا ګام په ګام د معادلې حل په پام کې نیسو:

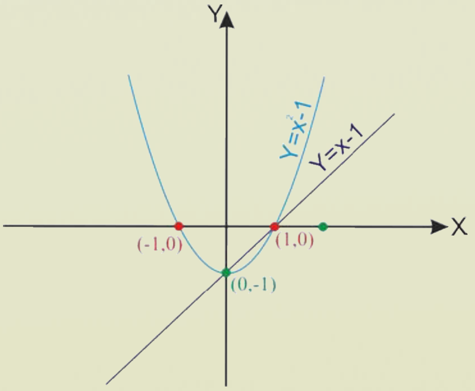
$$y=x-1$$

$$y-x^2+1=0 \;\Rightarrow (x-1)-x^2+1=0$$

$$\Rightarrow x-1-x^2+1=0 \;\Rightarrow x^2-x=0$$

$$\Delta=b^2-4ac \;\Rightarrow \Delta=(-1)-4(1)(0) \;\Rightarrow 1-0$$

$$\Rightarrow \Delta=1$$



څرنګه چې لیدل کېږي $\Delta=1>0$ څخه ده، نو موږ کرښه یعنې $y=x-1$ په لاندې ډول په لاس راځي او د $y-x^2+1=0$ پارابول یو بل په دوو ټکو کې قطع کوي چې د دې دویمې درجې معادلې حل

$$x^2-x=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{1}}{2}$$

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=0$$

که چیرې په لاس راغلي قیمتونه د کرښې په معادله کې کېږدو، نو د نوموړې کرښې او پارابولا د قطع کولو ټکي په لاس راځي، هغه عبارت دي له: $(0,-1)\,,(1,0)$

دغه ټکي په ګراف کې هم په ښکاره ډول لیدل کېږي.

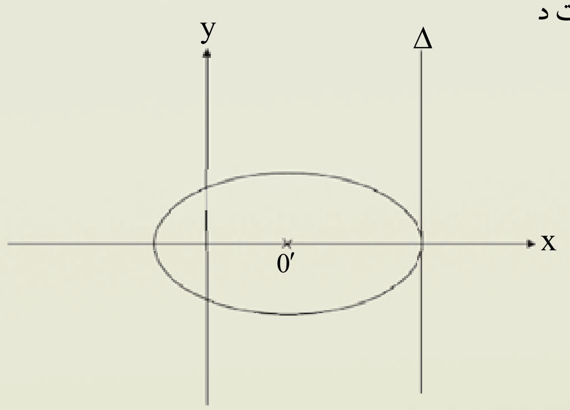
څلورم مثال: د $x=5$ د مستقیمې کرښې او $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ بیضوي موقعیتونه وڅېړئ.

حل: که چیرې د $x=5$ دمستقیمې کرښې قیمت د بیضوي په معادله کې کښېږدو، نو په لاس راځي:

$$\frac{(5-2)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{9}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{4}=1-1 \Rightarrow y^2=0$$

ځرنگه چې: $\Delta=b^2-4ac=0$



په دې ډول وېلای شو چې مستقیمه کرښه او بیضوي یو ګډ ټکی لري چې په شکل کې په ښکاره ډول لیدل کیږي.

یادونه: د مخروطي مقاطعو غزیدلی یا انکشاف ورکړل شوې، معادله په لاندې ډول ده:

$$A,B,D,E,F\in IR \quad ,Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$$

د پورتنۍ معادلې د پېژندلو لپاره په یاد ولرئ چې:

1- که چیرې $A=B$ یو شان علامې ولري، یوه دایره ده.

2- که چیرې $A\neq B$ او یو شان علامې ولري، یو الیپس دی.

3- که چیرې $A\neq B$ یا $A=B$ او مختلفې علامې ولري، هایپربولا ده.

4- که چیرې معادلې لاندې شکل ولري، ګراف یې یوه پارابولا ده.

$Ax^2+Bx+Cy+D=0$ او $Ay^2+By+Cx+D=0$

پوښتنې

1- لاندې معادلې د هغوی د ګرافونو د منحنی له مخې و ټاکئ.

$a)\ y^2-2y+x+3=0$

$b)\ 9x^2+9y^2=27$

$c)\ 25x^2+16y^2=400$

$d)\ x^2-y^2=0$

$e)\ y^2+6y-x+2=0$

2- د $9x^2+4y^2=36$ الیپس او $y=3$ مستقیم خط یو بل په څو ټکو کې قطع کوي؟

3- د $y=x$ خط او $x^2-2y^2=4$ هایپربول د تقاطع ټکي پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرکي مهم ټکي

مخروطي مقاطع: د يوې مستوي او مخروط د تقاطع ګډ فصل عبارت ده له: دايرې، پارابول،هايپربولا، يو ټکی، بيضوي او يا دوه متقاطع کرښې.

بيضوي: په يوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو مستقرو ټکو څخه يې د فاصلو د جمعې حاصل يې يو ثابت اوږدوالی وي، بيضوي بلل کيږي ، مستقر ټکي چې په F' او F تورو ښودل شوي، د بيضوي محراقونه او $AA'=2a$ ثابت او ږدوالی دی

شمېره	معادلې	د مرکز وضيعه کميات	د اوږده قطر انجامونه	د لنډ قطر انجامونه	محراقونه
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $a>b$	$(0,0)$	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې دي	$(c,0),(-c,0)$ د x پر محور باندې دي
2	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ $a>b$	$(0,0)$	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور باندې دي	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې دي	$(0,c),(0,-c)$ د y پر محور باندې دي
3	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ $a>b$	(h,k)	$(h\pm a,k)$ قطر د x له محور سره موازي دي	$(h,k\pm b)$ قطر د y له محور سره موازي دي	$(h\pm c,k)$ د x پر محور باندې دی
4	$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ $a>b$	(h,k)	$(h,k\pm a)$ قطر د y له محور سره موازي دی	$(h\pm b,k)$ قطر د x له محور سره موازی دی	$(h,k\pm c)$ د y پر محور باندې دي

د بيضوي غزول شوي عمومي معادله عبارت ده له: $AX^2+CY^2+DX+EY+F=0$

په داسې حال کې چې $A>0$ او $C>0$ وي: (يعني دواړه هم علامه وي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

$e=\frac{c}{a}$ دبیضوي دعن المرکز یت په نامه یادیږي.

پارابولا: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د یوه ثابت یا مستقر ټکي او ثابت مستقیم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کیږي، دغه ثابت یا مستقر ټکي ته د پاراپولا محراق (F) او ثابت مستقیم خط ته د پارابولا ها دي(موجه) وایي، معادله یې $y^2=4px$ ده

شمیره	د پارابولا معادلې	دراس وضعیه کمیات	د محراق مختصات	د موجه خط معادله	تناظري محور
1	$y^2=4Px$	$S(0,0)$	$F(P,0)$	$x=-p$	$x=0$
2	$x^2=4Py$	$S(0,0)$	$F(0,P)$	$y=-p$	$y=0$
3	$(y-k)^2=4P(x-h)$	$S(h,k)$	$F(h+p,k)$	$x=h-p$	$y=k$
4	$(x-h)^2=4P(y-k)$	$S(h,k)$	$F(h,k+p)$	$y=k-p$	$x=h$

د پارابولا غزول شوي معادله $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ په داسې حال کې چې $A=0$ یا $C=0$ وي، نه دواړه. ($C\neq 0, A=0$ یا $C=0, A\neq 0$ وي) په پارابولا کې $e=1$ دی.

هایپربولا: په یوه مستوي کې د هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو ثابتو مستقرو ټکو څخه تل ثابت اوږدوالی ولري، هایپربولا بلل کیږي.

دوه ثابت مستقر ټکي د هایپربولا محراقونه دي، د دواړو محراقونو ترمنځ فاصله $2c$ ده.

د هایپربولا معادله $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ د هایپربولا محراقونه پر افقي محور پراته دي).

$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ د هایپربولا محراقونه پر عمودي محور پراته دي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

محراقونه	غیر حقیقي رأسونه	د رأسونو وضعیه کمیات	د مرکز وضعیه کمیات	د هایپربولا معادلې
$F(c,0)$ $F'(-c,0)$ د x پر محور باندې	$(0,b),(0,-b)$ د y پر محور باندې	$(a,0),(-a,0)$ د x پر محور پراته دي	$S(0,0)$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
$F(0,\pm c)$ د y پر محور باندې	$(b,0),(-b,0)$ د x پر محور باندې	$(0,a),(0,-a)$ د y پر محور پراته دي	$S(0,0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
$F(h\pm c,k)$	$B(h,k\pm b)$	$A(h\pm a,k)$	$S(h,k)$	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$
$F(h,k\pm c)$	$B(h\pm b,k)$	$A(h,k\pm a)$	$S(h,k)$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

د مجانبونو معادلې	د موجه خطونو معادلې
$y=\pm\frac{b}{a}x$	$x=\pm\frac{a}{c}$
$y=\pm\frac{a}{b}x$	$y=\pm\frac{a}{c}$
$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$	$x=h\pm\frac{a}{c}$
$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)$	$y=k\pm\frac{a}{c}$

هایپربولا عمومي غزول شوې معادله: $Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0$ څخه عبارت ده په داسې حال کې چې $A=B$ یا $A\neq B$ ، خو مختلف الاشاره وي، عن المرکزیت $e>1$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي پوښتنې

هرې پوښتنې ته څلور ځوابه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه او کرښه ترې تا وکړئ.

1- که چیرې یوه مستوي یو مخروط په مایل ډول قطع کړي، نو د مستوي او مخروط ګډ فصل عبارت دی له:

a) بیضوي b) دایره c) هایپربولا d) دوه متقاطع خطونه

2- د الپس محراقونه هغه ټکي دي چې د الپس له مرکز څخه:

a) برابر و اټن ولري b) مختلف و اټنونه لري

c) د اوږد قطر نیمايي واټن لري d) د لنډ قطر نیمايي ده.

3- که چیرې M د الپس یو ټکی F او F' محراقونه او $2a$ داوږده قطر اوږ دوالي وي، نو په دې صورت کې لرو چې:

a) $|MF|-|MF'|=2a$ b) $|MF|+|MF'|=a$

c) $|MF|+|MF'|=2a$ d) $|MF'|+|MF|=0$

4- د الپس عن المرکزیت له لاندې کومې یوې رابطې څخه په لاس راځي:

a): $e=\frac{a}{c}$ b): $e=\frac{c}{a}$ c): $e=\frac{b}{c}$ d): $e=\frac{c}{b}$

5- د لنډ قطر او محراقونو ترمنځ اړیکه عبارت ده له:

a) $a^2=b^2-e^2$ b) $a^2+b^2=c^2$

c) $a^2=b^2+e^2$ d) $a^2=b^2+c^2$

6- د $(y-k)^2=4p(x-h)$ په معادله کې $p>0$ سره وي، نو:

a) د پارابولا خوله پاس خواته خلاصه ده. b) دپارابولا خوله لاندې خواته خلاص ده

c) دپارابولا خوله ښي خواته خلاص ده d) دپارابولا خوله کیڼې خواته خلاص ده.

7- د $(x+1)^2=8(y-2)$ یو پارابولا معادله په پام کې ونیسئ. دمحراق وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

a) $F(-1,-2)$ b) $F(-1,4)$ c) $F(-1,2)$ d) $F(-4,-1)$

8- که چیرې F او F' د هایپربولا محراقونه وي، د p ټکی په کوم شرط د هایپربولا د محیط یو ټکی کیدلای شي؟

a) $|PF|+|PF'|=2a$ b) $|PF|-|PF'|=a$

c) $|PF|-|PF'|=2a$ d) $|PF|-|PF'|=0$

9: د $y = x^2$ د پارابولا گراف متناظر دی نظر:

a) د y محور ته   b) د x محور ته

c) د x او y محورونو ته   c) د وضعیه کمیاتو مبدأ ته

10: په لاندې ځوابونو کې کوم یو د هایپربولا عن المرکزیت ښیي؟

a) $e<1$ b) $e=1$ c) $e>1$ d) $e=-1$

11: د $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ د بیضوي د اوږد قطر موقعیت:

a) د y پر محور باندې دی.   b) د x پر محور باندې دی.

c) د x پر محور عمود دی.   d) د y له محور سره موازي دی.

12: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له یوه ثابت ټکی څخه مساوي فاصلې لري. د څه په نامه یادېږي؟

a) کره   b) دایره   c) پارابولا   d) بیضوي

13: د $y^2 = -4(x+2)$ پارابول دراس مختصات عبارت دي له:

a) $(2,4)$ b) $(4,2)$ c) $(2,0)$ d) $(-2,0)$

14: د $4x^2 + 4y^2 + 8y + 3 = 0$ معادله عبارت ده له:

a) دایرې   b) بیضوي   c) پارابولا   d) هایپربولا

15: د $y = 2x$ مستقیم خط د $\frac{(x-1)^2}{4} - (\frac{(y-2)^2}{9} = 1$ هایپربولا په څو ټکو کې قطع کوي؟

16: د $2y = 3x$ مستقیم خط د $2y^2 - 6y + 5x - 12 = 0$ منحني په څو ټکو کې قطع کوي؟

17 : لاندې معادلې په پام کې ونیسئ، لومړی هغه په معیاري ډول ولیکئ، بیا یې گرافونه رسم کړئ.

$a)\ x^2 + 4y^2 = 4$ $b)\ 9x^2 + 2y^2 = 15$

$c)\ 16x^2 - 96x + 9y^2 + 90y + 225 = 0$ $d)\ x^2 + 12x - 120y + 288 = 0$

18: د لاندې قیمتونو له مخې د هرې یوې بیضوي معادله پیدا کړئ:

a) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $a = -2$ ، $e = 0,75$ دي او لوی قطر یې د y پر محور باندې پروت دی.

b) $(0,0)$ مرکزي مختصه، $b = 64$ $e = 0,5$ دي او لوی قطر یې د x پر محور باندې پروت دی.

19: له لاندې معادلو څخه د بیضوي ټول اجزاوې پیدا کړئ.

a) $4(x-1)^2 + y^2 = 4$ b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

20: د پارابولا لاندې معادلې لومړي په معياري شکل وليکئ او بيايې ګرافونه رسم کړئ.

a) $x^2 - 11y = 0$

b) $y^2 - 4y - 4x + 2 = 0$

21: د پارابولا لاندې هره يوه معادله په معياري ډول واړوئ:

a) $4x^2 - y^2 - 8y - 32 = 0$

b) $2y^2 + 4y - x^2 + 10x - 25 = 0$

22: د هغې هايپربولا معادله پيدا کړئ چې $(-4,0)$ او $(4,0)$ د راسونو مختصات او $y = \pm\frac{5}{4}x$ د مجانبونو معادلې وي.

23: د هغې هايپربولا معادله پيدا کړئ چې $(-1,3)$ ، $(1,3)$ د راسونو مختصات او محراقي اوږدوالى يې 4 واحده وي.

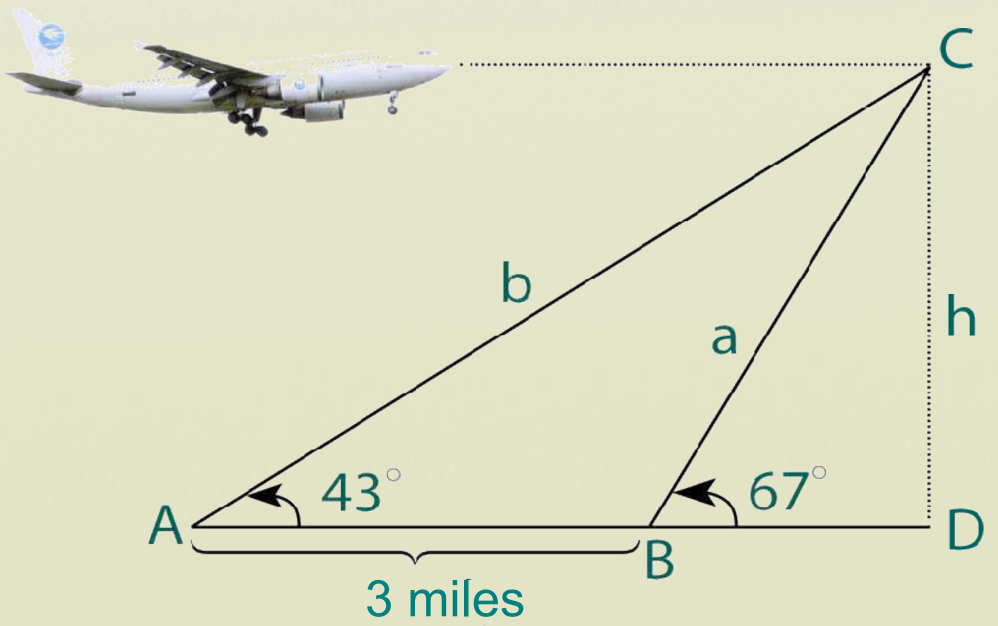
24: د $y = 2x$ مستقيم خط د $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ هايپربولا په څو ټکو کې قطع کوي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم څپرکی

مثلثات

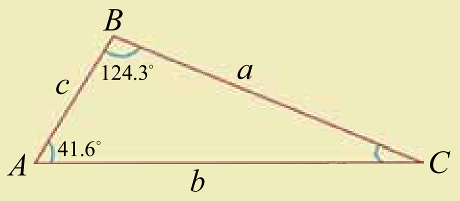
(c) ketabton.com: The Digital Library



د ساین قانون

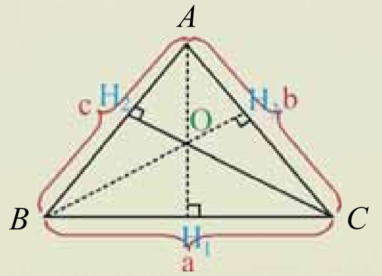
Law of sine

څرنګه کولای شو په مخامخ شکل کې د a د ضلعې او C زاویې اندازه پیدا کړو؟



فعالیت

- د ABC یو حادهالزاویه مثلث رسم او د ضلعو اوږدوالی یې وټاکئ.
- د مثلث له هر رأس څخه د هغې پرمخامخ ضلعې د $(\overline{AH}_1, \overline{BH}_3, \overline{CH}_2)$ ارتفاعګانې رسم کړئ.
- د ABH_1 او BCH_1 په قایمالزاویه مثلثونو کې د $(\overline{AH}_1)$ ارتفاع د $\sin B$ او $\sin C$ له جنسه پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړئ.
- د ABH_3 او ACH_2 پـه قـایمالزاویـه مثلثونـو کـې د $(\overline{BH}_3)$ ارتفاع د $\sin A$ او $\sin C$ له جنسه پیدا او یو لـه بله سره یې پرتله کړې.



له پورتني فعالیت څخه لاندې ثبوت په لاس راوړای شو.

ثبوت:

د ACH_1 او BAH_1 په قایمالزاویه مثلثونو کې لرو چې:

$$\sin B = \frac{\overline{AH}_1}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AH}_1}{c}$$

$$\overline{AH}_1 = c\sin B \quad .... \quad (1)$$

$$\sin C = \frac{\overline{AH}_1}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AH}_1}{b}$$

$$\overline{AH}_1 = b\sin C \quad .... \quad (2)$$

د (1) او (2) اړیکو له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

$$c\sin B = b\sin C \,/ \div bc$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad .... \quad \text{I}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول د ABH_3 او BCH_3 په قایم‌الزاویه مثلثونو کې لیکلی شو چې:

$$\sin A = \frac{\overline{BH_3}}{c} \Rightarrow \overline{BH_3} = c\sin A \ .... \ (3)$$

$$\sin C = \frac{\overline{BH_3}}{a} \Rightarrow \overline{BH_3} = a\sin C \ .... \ (4)$$

د (3) او (4) اړیکې له پرتلې څخه لرو چې: $c\sin A = a\sin C / \div ac$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \ .... \ II$$

د I او II اړیکې له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

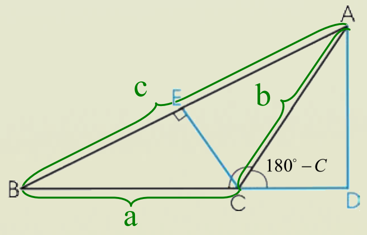
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

پایله: په هر $A\overset{\Delta}{B}C$ کې په داسې حال کې چې A, B, C زاویې او a, b, c د ضلعو اوږدوالې وي، لرو:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

پورتنۍ اړیکه(رابطه) په یوه مثلث کې د ساین د قانون(Law of sine) په نامه یادیږي.

د ساین د قضیې ثبوت په منفرج الزاویه مثلث کې:



د ABC په مثلث کې چې د C زاویه یې منفرجه ده

په پام کې نیسو د $\overline{AD}$ او $\overline{CE}$ ارتفاع‌ګانې رسموو.

د ADC په قایم الزاویه مثلث کې لرو: $\sin(180^\circ - C) = \frac{\overline{AD}}{b}$

د بلې خوا د متممو زاویو څخه پوهیږو چې: $\sin(180^\circ - C) = \sin C$

نو: $\sin C = \frac{\overline{AD}}{b} ......(I)$

همدارنګه د ADB له قایم الزاویه مثلث څخه لرو چې: $\sin B = \frac{\overline{AD}}{c} ......(2)$

اوس (1) او (2) رابطې خوا په خوا یو پربل ویشو:

نو: $\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin B}{b} ....(1) \longrightarrow$ یا $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د ACE په قایم الزاویه مثلث کې لیکلی شو:

$$\sin A = \frac{\overline{CE}}{b} .....(3)$$

د BEC په مثلث کې:

$$\sin B = \frac{\overline{CE}}{a} .....(4)$$

پورته 3 او 4 رابطې خوا په خوا یو پر بل ویشو او لیکو:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

یا

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} ......(5)$$

اوس د I او II رابطو له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

فعالیت

- زده‌کوونکي دې، د ساین قانون په قایم‌الزاویه مثلث کې وڅېړي او ثبوت دې کړي.

لومړی مثال: که چیرې د ABC په مثلث کې د $B = 60^\circ$, $b = 9cm$ او $c = 6\sqrt{3}\,cm$ وي، د یوې ضلعې او دوو زاویو اندازې یې پیدا کړئ؟

حل: د ساین د قضیې یا قانون له مخې لیکلی شو چې:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{9}{\sin 60^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{6\sqrt{3}\cdot \sin 60^\circ}{9} = \frac{6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{9}$$

$$\sin C = \frac{3\cdot 3}{9} = \frac{9}{9} = 1 \Rightarrow \sin C = 1$$

څرنګه چې: $\sin 90^\circ = 1$ دی، نو: $C = 90^\circ$

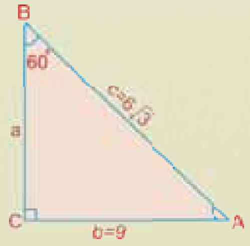
همدارنګه پوهیږو چې په یوه مثلث کې:

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$A + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$A = 180^\circ - 150^\circ$$

$$A = 30^\circ$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د a ضلعي قيمت په لاندې ډول پيداکولی شو :

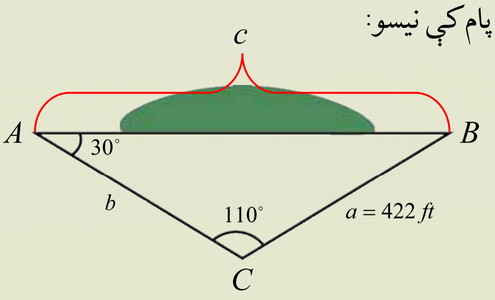
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b} \Rightarrow a=\frac{\sin A\cdot b}{\sin B} \Rightarrow a=\frac{\sin 30^\circ\cdot 9}{\sin 60^\circ}$$

$$a=\frac{\frac{1}{2}\cdot 9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \Rightarrow a=\frac{9}{\sqrt{3}}=\frac{9\cdot\sqrt{3}}{3}=3\sqrt{3}$$

$$a=3\sqrt{3}\,cm$$

دويم مثال: يو ساختماني انجينر غواړي چې د دوو ټکو تر منځ واټن چې په منځ کې يې يوه غونډۍ پرته ده پيداکړي.

حل: د ساين د قانون په کارولو سره $\sin A$ او $\sin C$ په پام کې نيسو:



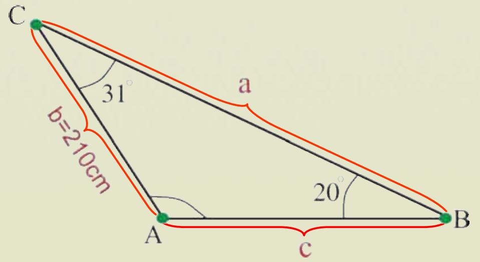
$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$$

$$c=\frac{a\cdot\sin C}{\sin A}=\frac{422\,ft\cdot\sin 110^\circ}{\sin 30^\circ}$$

څرنگه چې: $\sin 110^\circ=0.9396$ او $\sin 30^\circ=0.5$ دی.

نو: $c=\frac{422\,ft\cdot 0.9396}{0.5} \Rightarrow c=793.0224\,ft$

دريم مثال: په مخامخ شکل کې د دوو زاويو او يوې ضلعې اندازه راکړل شوې ده، د يوې نامعلومې زاويې او دوو ضلعو اندازه پيداکړئ.



حل: پوهېږو چې د يوه مثلث د داخلي زاويو مجموعه 180° ده؛ نو نامعلومې زاويې يې داسې پيداکولی شو:

$$A=180^\circ-(31^\circ+20^\circ)=180^\circ-51^\circ$$

$$A=129^\circ$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د a دپیداکولو لپاره لاند تناسب په پام کې نیسو:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b} \Rightarrow \frac{\sin 129^\circ}{a}=\frac{\sin 20^\circ}{210}$$

$$a=\frac{\sin 129^\circ \cdot 210cm}{\sin 20^\circ}$$

څرنگه چې $\sin 20^\circ = 0.342$ او $\sin 129^\circ = 0.7771$ دي؛ نو:

$$a=\frac{0.7771\cdot 210}{0.342}=\frac{163.191}{0.342}=477.166cm$$

$$a=477.166cm$$

اوس د c ضلعې اوږدوالی د $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ له رابطې څخه پیدا کوو:

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c} \Rightarrow \frac{\sin 20^\circ}{210}=\frac{\sin 31^\circ}{c}$$

$$c=\frac{210cm\cdot \sin 31^\circ}{\sin 20^\circ}$$

څرنگه چې $\sin 31^\circ = 0.5150$ او $\sin 20^\circ = 0.342$ دی د پورته قیمتونو په اېښودلو سره لیکلای شو چې:

$$c=\frac{0.5150\cdot 210}{0.342}=\frac{108.15}{0.342}=316.2$$

یادونه:

د ساین قانون هغه وخت کارولی شو چې:

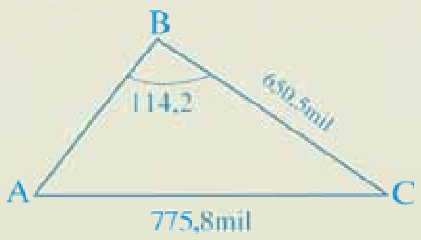
- دوې زاویې او دمنځ ضلع یې معلومه وي.(ASA)، A زاویه او S ضلع ښیې.
- دوه ضلعې او د منځ زاویه یې معلومه وي.(SAS)، S ضلع او A زاویه ښیې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. که چیرې د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a=8$, $b=5$ او $c=10$ واحده وي، د B د زاویې اندازه پیدا کړئ.

2. لاندې شکل په پام کې ونیسئ د A او B د ښارونو ترمنځ واټن پیدا کړئ؟

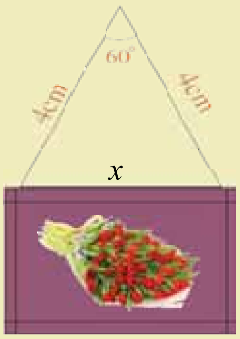


(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوساین قانون

Law of cosine



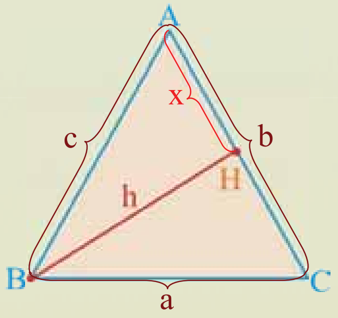
د یوه شکل چارټ د مېخ په مرسته د دېوال پر مخ ځړول شوی دی، که چیرې د مېخ د دوو خواوو د تار اوږدوالی هر یو $4cm$ وي او د منځ زاویه یې 60° وي، د (x) تار د دوو ټکو ترمنځ واټن د کوم قانون په مرسته پیداکولی شو؟

فعالیت

- د ABC کیفي مثلث رسم او د هر رأس مخامخ ضلعې په ترتیب سره په a, b, c وښایاست.
- د B له رأس څخه د $\overline{AC}$ پر ضلع ارتفاع رسم کړئ.
- په جوړ شوو قایم‌الزاویه مثلثونو کې د فیثاغورث قضیه تطبیق کړئ.
- په قایم‌الزاویه مثلثونو کې د $\overline{BH}$ او $\overline{HC}$ قیمتونه د B او C زاویو د cos له جنسه، په ترتیب سره پیدا او د فیثاغورث په رابطه کې یې وضع کړئ.
- ممکنه الجبري محاسبې ترسره او وروستی رابطه یې ولیکئ.

د پورتني فعالیت د سرته رسولو څخه وروسته داسې ثبوتوو:

ثبوت: د ABC په حاده‌الزاویه مثلث کې د $\overline{BH}$ ارتفاع رسموو



$$\overline{BH} = h \quad , \quad \overline{AH} = x \quad , \quad \overline{CH} = b - x$$

د BCH په قایم الزاویه مثلث کې لرو:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2$$

$$a^2 = (b-x)^2 + h^2 \quad .... \quad \text{I}$$

د AHB په قایم الزاویه مثلث کې د h اوږدوالي پیداکوو:

$$h^2 = c^2 - x^2 \quad .... \quad \text{II}$$

د I او II له اړیکو څخه لیکلی شو چې:

$$a^2 = (b-x)^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$

د AHB په قایم‌الزاویه مثلث کې: $coA = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cdot \cos A$

په پورتنی اړیکه کې د x پر ځای $c \cdot \cos A$ قیمت اېږدو، نو:

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ یا $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

پایله:په هر مثلث کې دا لاندې اړیکې سمې دي:

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ یا $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ یا $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ یا $c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos C$

فعالیت

- په همدې مثلث کې دې دوې نورې اړیکې یعنې $\sin C$ او $\sin B$ زده‌کوونکې ثبوت کړي.

یادونه: د کوساین قانون هغه وخت کارولی شو چې:

- چې دوې ضلعې او د منځ زاویې یې معلومې وي.(SAS)، S ضلع او A زاویه ښیې.
- د مثلث درې ضلعې معلومې وي.(SSS)، S یوه ضلع ښیې .

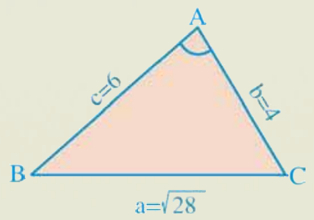
د ساین او کوساین د قانون له کارولو څخه، د مثلث د عناصرو د پیداکولو لپاره له لاندې جدول څخه کار اخلو:

د یوه مثلث د عناصرو پیدا کول	
راکړل شوی معلومات	د کارولو فورمول
(SSS) ضلع، ضلع، ضع	د کوساین او وروسته دساین قانون
SAA (زاویه، زاویه، ضلع)	د ساین قانون
ASA (زاویه، ضلع، زاویه)	د ساین قانون
SAS (ضلع،زاویه، ضلع)	دکوساین قانون وروسته د ساین
AAA (زاویه، زاویه، زاویه)	امکان نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې د هغو درېو ضلعو اندازې په لاندې ډول راکړل شوي دي، د A زاويې اندازه وټاکئ.

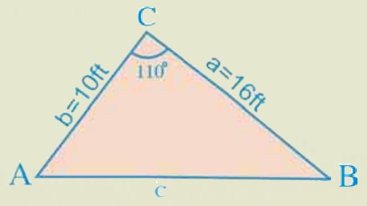
حل:



$$a=\sqrt{28}\quad,\quad b=4\quad,\quad c=6\quad,\quad A=?$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$$
$$(\sqrt{28})^2=(4)^2+(6)^2-2\cdot 4\cdot 6\cos A$$
$$28=16+36-48\cos A\quad\Rightarrow\quad 28=52-48\cos A$$
$$48\cos A=52-28\qquad\Rightarrow\quad 48\cos A=24$$
$$\cos A=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$$
$$\boxed{A=60^\circ}$$

دويم مثال: د ABC په مثلث کې که چيرې دوې ضلعې يې هر يوه $a=16$, $b=10$ واحده او د منځ زاويه يې $C=110^\circ$ وي، د c ضلعې اوږدوالی پيدا کړئ.

حل:



$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$
$$c^2=(16)^2+(10)^2-2(16)10\cos 110^\circ$$
$$c^2=256+100-320\cos 110^\circ$$
$$c^2=356-320\cos 110^\circ$$
$$c=\sqrt{356-320\cos 110^\circ}$$

څرنګه چې : $\cos 110^\circ=0.342$ دی، نو:

$$c=\sqrt{356-320(0.342)}\quad\Rightarrow\quad c=\sqrt{356-109.44}$$
$$\boxed{c=15.70}$$

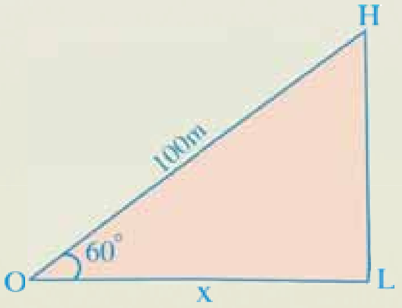
درېيم مثال: يو پتنګ(کاغذ پران) له $100m$ واټن تار سره په هوا کې دی، که تار د ځمکې له سطحې سره 60° زاويه جوړه کړې وي، له ځمکې څخه د پتنګ لوړوالی پيدا کړئ.

حل: د OHL په قايم‌الزاويه مثلث کې لرو، چې:

$$\cos 60^\circ=\frac{\overline{OL}}{\overline{OH}}=\frac{x}{100}\quad\Rightarrow\quad x=100\cdot\cos 60^\circ=100\cdot\frac{1}{2}=50m$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوساین قانون له مخې لرو چې:



$$\overline{HL}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{OL}^2 - 2\overline{OH}\cdot\overline{OL}\cdot\cos 60^\circ$$

$$\overline{HL}^2 = (100)^2 + (50)^2 - 2\cdot 100\cdot 50\cdot\frac{1}{2}$$

$$\overline{HL}^2 = 10000 + 2500 - 5000$$

$$\overline{HL}^2 = 7500m^2 \quad \Rightarrow \overline{HL} = \sqrt{7500}m = 50\sqrt{3}\,m$$

$$\overline{HL} = 86.6m$$

څلورم مثال: که چیرې د ABC په مثلث کې $A = 60^\circ$, $b = 5, c = 8$ وي، د a او $\sin C$ اندازه پیدا کړئ.

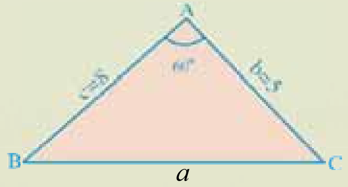
حل: لومړی د کوساین د قضیې په کارلوسره د a ضلع او بیا $\sin C$ پیدا کوو.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad \Rightarrow \quad a^2 = 25 + 64 - 80\cdot\frac{1}{2} = 89 - 40$$

$$a^2 = 49 \quad \Rightarrow \quad a = 7$$

د ساین د قضیې له مخې لیکو چې:

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$



$$\sin C = \frac{c\cdot\sin A}{a} = \frac{8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{7}$$

$$\sin C = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

پوښتنې

1. که چیرې د ABC په مثلث کې $b = 4ft, a = 5ft$ او $A = 45^\circ$ وي، د مثلث نامعلومې ضلعې او زاویې پیدا کړئ.
2. که چیرې په یوه مثلث کې $a = 3cm$ او $b = 9cm$ او د دوی ترمنځ زاویه 60° وي د c د ضلعې اوږدوالی پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټانجنټ قانون

Law of tangent

په هر مثلث کې د زاويو او ضلعو ترمنځ د tan له جنسه مخامخ اړيکه شتون لري.

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

فعاليت

- د ساين قانون مساوي په D ولیکئ.
- د sin قانون هر دوه، نسبتونه يعنې $\frac{b}{\sin B}$ او $\frac{a}{\sin A}$ په جلا جلا ډول مساوي له D سره ولیکئ.
- پورته دوه نسبتونه د ضلعو د اوږدوالي له مخې ولیکئ.
- دوه پورتنی اړيکې لومړی جمع او بيا يې تفريق کړئ.
- لاسته راغلي اړيکې يو پر بل وويشئ.
- الجبري محاسبې ترسره او د پايلې فورمول ولیکئ.

پورته فعاليت په لاندې ډول ثبوتوو.

ثبوت: د ساين قانون په پام کې نيسو:

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=D$$

$$\frac{b}{\sin B}=D\ \Rightarrow\ b=D\sin B\qquad,\qquad \frac{a}{\sin A}=D\ \Rightarrow\ a=D\sin A$$

پورتنی اړيکې لومړی جمع او بيا تفريقوو:

$$a+b=D(\sin A+\sin B)$$
$$a-b=D(\sin A-\sin B)$$

پورتنی اړيکې يو پر بل ويشو:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\tan\frac{A+B}{2}\cdot\cot\frac{A-B}{2}$$

ځرنګه چې $\frac{1}{\tan\frac{A-B}{2}}=\cot\frac{A-B}{2}$ دی.

نو په پایله کې لیکلی شو چې:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

فعالیت

- لاندې اړیکې پیدا کړئ.

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}} \quad , \quad \frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}$$

- پورتنی اړیکې په یوه مثلث کې د ضلعې او زاویې ترمنځ اړیکې د tan اړیکه بلل کېږي.

لومړی مثال: د ABC په مثلث کې $\frac{b-c}{b+c}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ او $A=90^\circ$ دی، د B او C زاویو اندازه پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې په هر مثلث کې:

$$A+B+C=180^\circ$$

$$B+C=180^\circ-90^\circ$$

$$B+C=90^\circ \quad \Rightarrow \frac{B+C}{2}=45^\circ$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{b-c}{b+c}=\frac{1}{\sqrt{3}}\\&A=90^\circ\\&B=?\\&C=?\end{aligned}\right\} \frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}} \quad \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan 45^\circ}$$

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan 30^\circ \quad , \quad \tan\frac{B-C}{2}=\tan 30^\circ$$

$$\frac{B-C}{2}=30^\circ \quad \Rightarrow B-C=60^\circ \quad .... \text{I}$$

$$A+B+C=180^\circ$$

له بلې خوا په هر مثلث کې:

$$B+C=180^\circ-A \quad \Rightarrow B+C=180^\circ-90^\circ$$

$$B+C=90^\circ \quad .... \text{II}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

له I او II اړیکو څخه لاندې پایله په لاس راځي:

د نوموړي سیستم له حلولو څخه وروسته د B قیمت په لاس راوړو:

$$B-C=60^\circ \quad .... \quad I$$
$$B+C=90^\circ \quad .... \quad II$$
$$2B=150^\circ$$
$$\boxed{B=75^\circ}$$

اوس د B قیمت په اېښودلو سره د C زاویه پیدا کوو:

$$B-C=60^\circ$$
$$75^\circ-C=60^\circ$$
$$-C=60^\circ-75^\circ$$
$$\boxed{C=15^\circ}$$

دویم مثال: که چیرې د ABC په یوه مثلث کې $c=432$, $B=42^\circ\ 30'$ او $a=925$ وي، د مثلث نورې اجزاوې پیدا کړئ.

حل:

$$A+B+C=180^\circ \Rightarrow A+C=180^\circ-B \Rightarrow A+C=180^\circ-42^\circ\ 30'$$
$$A+C=179^\circ\ 60'-42^\circ\ 30' \Rightarrow A+C=137^\circ\ 30' \quad .... \quad I$$
$$\frac{A+C}{2}=\frac{137^\circ\ 30'}{2} \Rightarrow \frac{A+C}{2}=\frac{136^\circ\ 90'}{2}=68^\circ\ 45'$$
$$\frac{\tan\frac{A+C}{2}}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{a+c}{a-c}$$

اوس د زاویې او ضلعو قیمتونه په پورتنی اړیکه کې ایږدو، یعنې:

$$\frac{\tan 68^\circ\ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{925+432}{925-432} \Rightarrow \frac{\tan 68^\circ\ 45'}{\tan\frac{A-C}{2}}=\frac{1357}{493}$$

یا:

$$1357\cdot\tan\frac{A-C}{2}=493\cdot\tan 68^\circ\ 45' \Rightarrow \tan\frac{A-C}{2}=\frac{493}{1357}\cdot\tan 68^\circ\ 45'$$

له مثلثاتي جدول څخه پوهېږو چې $\tan 68^\circ\ 45' = 2.5714$ دی؛ نو:

$$\tan\frac{A-C}{2} = 0.9341 \quad \Rightarrow \frac{A-C}{2} = 42^\circ\ 59'$$

$$\boxed{A - C = 85^\circ\ 58' \ ....\ \text{II}}$$

اوس د I او II اړیکو په پام کې نیولو سره لیکو:

$$A + C = 137^\circ\ 30' \ ....\ \text{I}$$
$$A - C = 85^\circ\ 58' \ ....\ \text{II}$$

$$2A = 222^\circ\ 88'$$

$$\boxed{A = 111^\circ\ 44'}$$

$$C = 137^\circ\ 30' - A \ \Rightarrow C = 137^\circ\ 30' - 111^\circ\ 44'$$

$$C = 136^\circ\ 90' - 111^\circ\ 44'$$

$$\boxed{C = 25^\circ\ 46'}$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \Rightarrow b = c \cdot \frac{\sin B}{\sin C}$$

$$b = \frac{432 \sin 42^\circ\ 30'}{\sin 25^\circ\ 46'}$$

$$\sin 42^\circ\ 30' = 0.6756$$

$$\sin 25^\circ\ 46' = 0.4346$$

$$b = \frac{432}{0.4346} \cdot 0.6756 = 994.01 \cdot 0.6756 = 671.5582cm$$

پوښتنې

د لاندې ورکړل شوو عناصرو له مخې د مثلث نامعلومې اجزاوې پیدا کړئ.

a) که چیرې $C = 75^\circ\ ,\ B = 60^\circ\ ,\ a = 35ft$ وي.

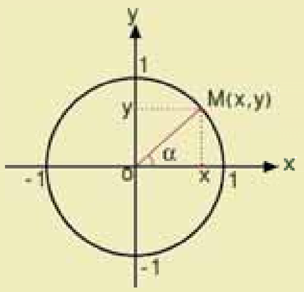
b) که چیرې $\alpha = 45^\circ$, $b = 37m$ او $\gamma = 75^\circ$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلثاتي مطابقتونه

Trigonometry identities



پوهېږو چې $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ يو الجبري مطابقت دی، ځکه د a او b په ټولو قيمتونو سره د مساوات داوړه خواوې برابرېږي.

آيا $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ يو مثلثاتي مطابقت کيدلی شي؟

فعاليت

- په لاندي جدول کې د α د مختلفو قيمتونو لپاره د A او B افادو قيمتونه بشپړ کړئ.

α	$A = \dfrac{\cot\alpha}{\csc - 1}$	$B = \dfrac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha}$
0°		
30°		
45°		
60°		
90°		

- د جدول له بشپړولو څخه وروسته د A او B قيمتونه پرتله او اړيکه يې وليکئ.

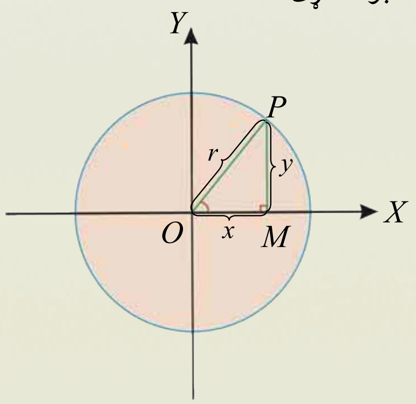
له پورتني فعاليت څخه لاندي تعريف لاسته راځي.

تعريف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاويې په ټولو قيمتونو سره ، د مساوات دواړه خواوې برابرې شي، مثلثاتي مطابقت بلل کيږي،لکه:

$$\frac{\csc\alpha + 1}{\cot\alpha} = \frac{\cot\alpha}{\csc\alpha - 1}$$

که α هر قيمت واخلي، د پورته مساوات دواړه خواوې مساوي کيږي.

د α د زاويې د هر قيمت لپاره د $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ مطابقت ثبوت کړئ.



ثبوت: د $C(O,r)$ په مثلثاتي دايره کې د OMP په قايم-الزاويه مثلث کې گورو او ليکلی شو چې:

$$\sin\alpha=\frac{y}{r} \quad \text{او} \quad \cos\alpha=\frac{x}{r}$$

له بلې خوا د فيثاغورث له قضيې څخه لرو:

$$y^2+x^2=r^2$$

د مساوات دواړه خواوې په r^2 وېشو:

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2} \qquad \text{يا} \qquad (\frac{x}{r})^2+(\frac{y}{r})^2=1$$

اوس د $\frac{y}{r}$ په ځای $\sin\alpha$ او $\frac{x}{r}$ په ځای $\cos\alpha$ ليکو.

نو ليکلی شو: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ يا $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

مثلثاتي اساسي اړيکې عبارت دي له:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \quad , \quad 1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha \quad , \quad 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$$

د مثلثاتو فرعي اړيکې عبارت دي له:

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha} \quad , \quad \cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$$

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha} \quad , \quad \sin\alpha\cdot\csc\alpha=1 \quad , \quad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tag\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad , \quad \tan\alpha\cdot\cot\alpha=1 \quad , \quad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}$$

اوس غواړو د $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$ اړيکه ثبوت کړو.

ثبوت: د فيثاغورث د قضيې په کارولو سره ليکو $x^2+y^2=r^2$

د مساوات دواړه خواوې په x^2 وېشو. $\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}=\frac{r^2}{x^2}\Rightarrow 1+(\frac{y}{x})^2+(\frac{r}{x})^2$

په نتيجه کې په پورته افاده کې د $\frac{r}{x}$ او $\frac{y}{x}$ د قيمتونو په ليکلو سره ليکو: $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- **د مثلثاتي نسبتونو په کارولو سره ثبوت کړئ چې** : $1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$

په عمومي توگه د مطابقتونو د حل یا ثبوت لپاره د مساوات له یوې خوا له افادې څخه د بلې خوا افاده لاسته راوړو، یعنې یوې خواته مختلفې عملیې لکه مربع کول، تجزیه، ضرب او نورې عملیې سرته رسوو، څو د بلې خوا افاده لاسته راشي، که چېرې په یوه الجبري افاده کې مثلثاتي نسبتونه یوه یا څو زاویې وي، مثلثاتي افاده بلل کېږي، د مثلثاتي اړیکو په واسطه مثلثاتي افادې ساده کولی شو.

د موضوع دلا ښه پوهېدو لپاره لاندې لاربښوونې او مثالونه په پام کې ونیسئ.

لومړی مثال: د $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha\cdot\tan\alpha\cot\alpha}{1-\sin^2\alpha}$ مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل:

$$\frac{\sin\alpha\ \cos\alpha\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

دویم مثال: د $\sin^2\beta\cdot\cot^2\beta+\cos^2\beta\cdot\tan^2\beta+\tan^2\beta=1+\tan^2\beta$ مثلثاتي مطابقت ثبوت کړئ.

حل: په لاندې ډول افاده ساده کوو:

$$\sin^2\beta\cot^2\beta+\cos^2\beta\tan^2\beta+\tan^2\beta=\sin^2\beta\frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta}+\cos^2\beta\cdot\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}$$

$$+\tan^2\beta=\cos^2\beta+\sin^2\beta+\tan^2\beta=1+\tan^2\beta$$

دریم مثال: لاندې افاده د $\cos\beta$ له جنسه حساب کړئ.

$$(1-\sin^2\beta)\ \ (1+\sec^2\beta)=?$$

حل: $(1-\sin^2\beta)(1+\sec^2\beta)=\cos^2\beta(1+\dfrac{1}{\cos^2\beta})=\cos^2\beta(\dfrac{\cos^2\beta+1}{\cos^2\beta})=\cos^2\beta+1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: ثبوت کړئ چې $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

حل:د مطابقت د کيڼ اړخ قوسونو ته انکشاف ورکوو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$$

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=2$$

$$2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=2\cdot1=2$$

پنځم مثال: لاندې مطابقت ثبوت کړئ.

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$

حل:

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$

$$\frac{\sin^2 A+(1+\cos A)^2}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+1+2\cos A+\cos^2 A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}$$

$$\frac{1+1+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2+2\cos A}{\sin A(1+\cos A)}=\frac{2(1+\cos A)}{\sin A(1+\cos A)}=2\cdot\frac{1}{\sin A}=2\csc A$$

شپږم مثال: وښاياست چې $\dfrac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A}=\tan^2 A$

حل:

$$1+\tan^2 A=\sec^2 A$$

$$1+\cot^2 A=\csc^2 A$$

$$\frac{\sec^2 A}{\csc^2 A}=\tan^2 A\quad\Rightarrow\quad\frac{\frac{1}{\cos^2 A}}{\frac{1}{\sin^2 A}}=\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}=\tan^2 A$$

$$\tan^2 A=\tan^2 A$$

اووم مثال: لاندي مطابقت ثبوت کړئ.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

حل: دکيڼي خوا په افاده کې د $\cot\alpha$ او $\tan\alpha$ قيمتونه د $\sin\alpha$ او $\cos\alpha$ له جنسه ایږدو.

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$=(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)=(\sin\alpha+\cos\alpha)\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)(\cot\alpha+\tan\alpha)=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

اتم مثال: د $\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\tan x+\cot y$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y}=\frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\cos x\sin y}$$

$$=\frac{\cos x\cos y}{\cos x\sin y}+\frac{\sin x\sin y}{\cos x\sin y}\quad\Rightarrow\quad\frac{\cos y}{\sin y}+\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$=\cot y+\tan x=\tan x+\cot y$$

نهم مثال: د $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل: پوهیږو چې $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$ دی.

اوس د معادلې دواړه خواوې په $\frac{\tan x}{\tan x}$ کې ضربوو؛ نو:

$$\frac{1-\cos x}{2}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

$$=\frac{\tan x}{\tan x}\cdot\frac{1-\cos x}{2}=\frac{\tan x-\tan x\cos x}{2\tan x}$$

$$=\frac{\tan x-(\frac{\sin x}{\cos x})\cos x}{2\tan x}=\frac{\tan x-\sin x}{2\tan x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم مثال: د $\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=2\sec x$ مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\frac{1+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=\frac{(1+\sin x)^2+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{1+2\sin x++\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{1+2\sin x+1}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2+2\sin x}{\cos x(1+\sin x)}$$

$$=\frac{2(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}=\frac{2}{\cos x}=2\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$=2\sec x$$

پوښتني

1. د مثلثاتو د اساسي اړیکو په پام کې نیولو سره د هرې پوښتنې معادل افاده پیدا کړئ.

$a)\ \frac{\sin 250^\circ}{\cos 250^\circ}$ $b)\ \sqrt{\sec^2\beta-1}$ $c)\ \frac{1}{\cos 80^\circ}$

2. هره افاده د $\sin\beta$ له جنسه پیدا کړئ.

$a)\ \cot\beta\cos\beta$, $b)\ \cot^2\beta$

3. لاندې مطابقتونه ثبوت کړئ.

$a)\ \frac{\cos ec\alpha}{\cot an\alpha+\tan\alpha}=\cos\alpha$ $b)\ \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\cos 2x$

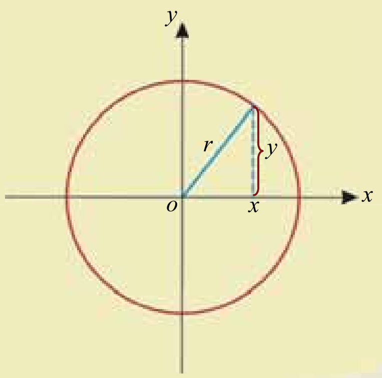
$c)\ \frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha}=tag\alpha$ $d)\ \frac{\tan x-\cot x}{\tan+\cot x}=1-2\cos^2 x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلثاتي معادلې

Trigonometric equation

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ یو مثلثاتي مطابقت دی،
آیا $\sin\alpha+\cos\alpha=1$ یو مطابقت دی که یوه معادله؟



فعالیت

- په لاندې جدول کې د $1-2\sin\beta=0$ او $1+tag^2\beta=\sec^2\beta$ د β د کومو قیمتونو لپاره صحیح دي.

β	$1-2\sin\beta=0$	$1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$
0°		
30°		
60°		
90°		

- د β د مختلفو قیمتونو لپاره د $1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$ او $1-2\sin\beta=0$ ترمنځ څه ډول اړیکې شتون لري.

_ آیا $1+\tan^2\beta=\sec^2\beta$ یو مطابقت دی، که یوه معادله؟

_ آیا $1-2\sin\beta=0$ یو مطابقت دی، که یوه معادله؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي.

تعریف: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاویې په ځینو قیمتونو سره د مساوات دواړه خواوې مساوي کېږي، مثلثاتي معادله بلل کېږي.

هر مثلثاتي مطابقت یوه معادله کېدلی شي، خو هره مثلثاتي معادله، مثلثاتي مطابقت نه شي کېدلای.

هره مثلثاتي معادله له لاندې څلورو حالتونو څخه په یو حالت باندې حلولای شو.

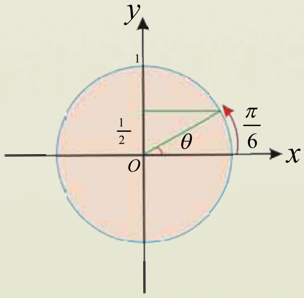
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی حالت: د $a\sin\alpha + b = 0$ معادله د پورتنی معادلې په حل کې د مناسب ځواب د پیدا کولو لپاره لاندې مثالونه په پام کې ونیسئ.

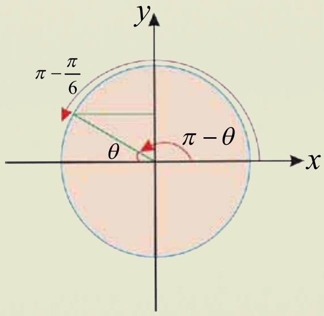
مثال: د $2\sin x - 1 = 0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: لومړی د $\sin x$ قیمت لاسته راوړو: $2\sin x - 1 = 0 \Rightarrow 2\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$



اوس د $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیدا کوو چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ شي.

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6}$$



یوه مثلثاتي دایره په پام کې نیسو او هغه زاویې پیدا کوو چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ وي.

$$x = \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6}, \ldots, 2k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad k \in z$$

په دویمه مثلثاتي دایره کې $(\pi - \theta)$ له رابطې څخه هغه زاویې پیدا کوو چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ وي.

$$x = \pi - \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}, 5\pi - \frac{\pi}{6}, \ldots, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, \quad k \in z$$

نو د $\sin x = \frac{1}{2}$ د معادلې حل په لاندې دوو سټونو کې دی.

$$A_1 = \left\{\frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6}, \ldots, 2k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad k \in z\right\}$$

$$A_2 = \left\{\pi - \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}, 5\pi - \frac{\pi}{6}, \ldots, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, \quad k \in z\right\}$$

په عمومي ډول پورتني سټونه په لاندې ډول لیکلی شو:

$$A_1 \cup A_2 = A = \left\{x / x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \wedge x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \quad k \in Z\right\}$$

دویم مثال: د $2\sin x-3=0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: $2\sin x-3=0 \;\Rightarrow\; 2\sin x=3 \;\Rightarrow\; \sin x=\frac{3}{2}$

اوس د $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې هغه زاویه پیدا کوو چې $\sin x=\frac{3}{2}$ شي، دا چې د هرې زاويې sin د -1 او $+1$ په منځ $(-1\le \sin x\le 1)$ دی، نو هغه زاویه چې sin یې $\frac{3}{2}$ وي، وجود نه لري، نو په دې اساس معادله حل نه لري.

دویم حالت: $a\cos x+b=0$

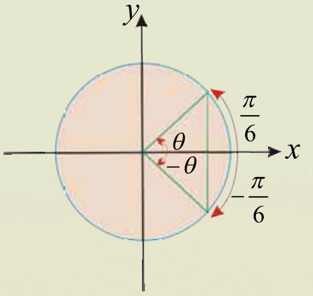
د پورتنی معادلې د حل مناسب ځواب د پیدا کولو لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

لومړی مثال: د $2\cos x-\sqrt{3}=0$ مثلثاتي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

حل: له پورتنی معادلې څخه $\cos x$ لاسته راوړو:

$$2\cos x-\sqrt{3}=0 \;\Rightarrow\; 2\cos x=\sqrt{3} \Rightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

اوس د $[0\,,\,\pi]$ په انټروال کې هغه زاویه پیدا کوو یا لټوو چې cos یې $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، هغه له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت دی، نو لیکلی شو چې $\cos x=\cos\frac{\pi}{6}$.



اوس د مثلثاتي دایرې په پام کې نیولو سره ټولې هغه زاويې چې $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ وي، پیدا کوو.

$$x=\frac{\pi}{6}\;,\;\; 2\pi+\frac{\pi}{6}\;,\;\; 4\pi+\frac{\pi}{6}\ldots$$

$$x=-\frac{\pi}{6}\;,\; 2\pi-\frac{\pi}{6}\;,\;\; 4\pi-\frac{\pi}{6}$$

په عمومي توګه د پورتنیو حلونو سټ داسې لیکل کیږي: $x=2n\pi\pm\theta$

$$A=\left\{x/x=2k\pi+\frac{\pi}{6}\wedge x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\,,\; k\in z\right\}$$

په عمومي توګه د هرې θ زاويې لپاره لیکو: $A=\{x/x=2k\pi+\theta \;\wedge\; x=2k\pi-\theta\,,\; k\in z\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $2\cos x+\sqrt{2}=0$ معادله په $(0\ ,\ 2\pi)$ انټروال کې څوحلونه لري؟

حل: $2\cos x=-\sqrt{2}\ \ \Rightarrow\ \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

له بلې خوا پوهېږو چې د $(0,2\pi)$ په انټروال کې $\cos x=\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ کېږي.

له دې امله د معادلې حل $x=\frac{3\pi}{4}$ په لاس راځي.

د حل سټ يې مساوي دی له:

$$A=\left\{x\,/\,x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\ \wedge\ x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\ ,\ k\in z\right\}$$

ليدل کېږي چې معادله د $(0\ ,\ 2\pi)$ په انټروال کې دوه حلونه لري.

$$x=2k\pi+\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=0}x_1=\frac{3\pi}{4}$$

$$x=2k\pi-\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{k=1}x_2=\frac{5\pi}{4}$$

دریم حالت: $\tan x+b=0$

د عمومي حل د پيداکولو لپاره لاندې مثالونو ته ځير شئ.

مثال: $\tan x-\sqrt{3}=0$ حل کړئ.

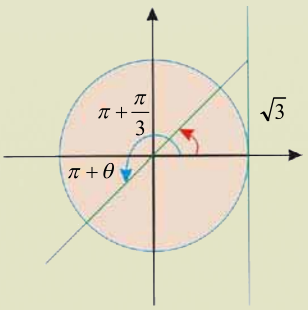
حل: له پورتنی تساوي څخه $\tan x$ په لاس راوړو: $\tan x=\sqrt{3}$

اوس د $(-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2})$ په انټروال کې د x هغه زاويه لټوو چې $\tan x=\sqrt{3}$ وي او هغه زاويه له $\frac{\pi}{3}$ يا 60° څخه عبارت دی.

له دې امله پورتنی معادله د $\tan x=\tan\frac{\pi}{3}$ په صورت لاسته راځي، په مثلثاتي دايره کې وينو چې کومې زاويې له $\tan\frac{\pi}{3}$ سره مساوي دي.

$$x=\left\{\frac{\pi}{3}\ ,\ 2\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 4\pi+\frac{\pi}{3},\ ...\right\}$$

$$x=\left\{\pi+\frac{\pi}{3},3\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ 5\pi+\frac{\pi}{3}\ ,\ ...\right\}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

په عمومي ډول پورتنی ستونه داسې لیکلی شو چې: $A=\left\{x/x=k\pi+\frac{\pi}{3} \quad k\in Z\right\}$

یا په عمومي ډول د هرې θ زاویې لپاره لرو چې: $A=\{x/x=k\pi+\theta \;,\; k\in Z\}$

دویم مثال: لاندې معادله حل کړی.

$$\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

حل:

$$\tan x=\tan\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$$

د معادلې د حل سټ $A=\left\{x/x=k\pi+\frac{\pi}{6} \quad k\in Z\right\}$

دریم مثال:د $\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})$ د معادلې حلونه د $[0\;,\;2\pi]$ په انټروال کې لاسته راوړئ.

حل:

$$\tan(2x-\frac{\pi}{4})=\tan(x+\frac{\pi}{3})\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+(x+\frac{\pi}{3})$$

$$2x-x=k\pi+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=k\pi+\frac{7\pi}{12}$$

د k پر ځای صحیح عددونه لیکو، تر څو زاویې چې د $[0\;,\;2\pi]$ په انټروال کې دي، لاسته راشي.

$$x=k\pi+\frac{7\pi}{12} \xrightarrow{k=0} x_1=\frac{7\pi}{12}$$

$$x=k\pi+\frac{7\pi}{12} \xrightarrow{k=1} x_2=\pi+\frac{7\pi}{12}=\frac{19\pi}{12}$$

څلورم حالت: د $\cot x+b=0$ معادله، د معادلې د عمومي حل لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

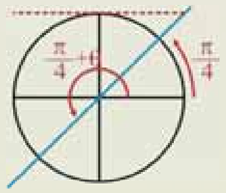
لومړی مثال: د $\cot x-1=0$ معادله حل کړئ.

حل: له پورتنی معادلې څخه $\cot x$ پیداکوو: $\cot x=1 \quad \Rightarrow \quad \cot x-1=0$

اوس د $[0,2\pi]$ په انټروال کې هغه زاویه ګورو چې $\cot$ یې $(+1)$ وي او هغه زاویه له $\frac{\pi}{4}$ یا 45° څخه عبارت ده :

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو: $\cot x = \cot\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$



$$x = \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}, 4\pi + \frac{\pi}{4}, ...$$

$$x = \pi + \frac{\pi}{4}, 3\pi + \frac{\pi}{4}, 5\pi + \frac{\pi}{4}, ...$$

نو د معادلې د حل سټ په لاندې ډول دی.

$$A_1 = \left\{\frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}, 4\pi + \frac{\pi}{4}, ...\right\}$$

$$A_2 = \left\{\pi + \frac{\pi}{4}, 3\pi + \frac{\pi}{4}, 5\pi + \frac{\pi}{4}, ...\right\}$$

$$A = \left\{x / x = k\pi + \frac{\pi}{4}, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4} \quad k \in Z\right\}$$

یا په عمومي ډول د هرې θ زاویې لپاره داسې لیکو: $A = \{x / x = k\pi + \theta \quad k \in Z\}$

دریم مثال: د $\cot 3x = \cot x$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\cot 3x = \cot x \Rightarrow 3x = k\pi + x = 3x - x = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z$$

پوښتنې

د لاندې معادلو د عمومي حل ځوابونه پیدا کړئ.

$a)\quad 3\cos x + 5 = 0$

$b)\quad 4\tan x + \cot x - 5 = 0$

$c)\quad \tan x = \sqrt{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویمه درجه مثلثاتي معادلې

$$a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = d$$

په تېرو درسونو کې مو ساده مثلثاتي معادلې حل کړې دي اوس دویمه درجه مثلثاتي معادلې څېړو. د مثلثاتي معادلې عمومي شکل عبارت دی له: $a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x = d$ چې c, b, a او d ثابت عددونه دي.

لومړی مثال: د $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: په پورتنۍ معادله کې د $\sin x$ پر ځای y لیکو، او معادله داسې لیکلی شو:

$$6y^2 - 5y + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \quad \Delta = (-5)^2 - 4(6)(1)$$

$$\Delta = 25 - 24 \quad \Rightarrow \quad \Delta = 1$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12} \quad , \quad y_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} \quad , \quad y_1 = \frac{1}{2}$$

$$y_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\sin x = y_1 = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = y_2 = \frac{1}{3}$$

په دې ډول هغه کوچنی زاویه چې $\sin$ یې $\frac{1}{2}$ وي، له $\frac{\pi}{6}$ څخه عبارت ده نو:

$$A = \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad k \in Z$$

او یا لیکلی شو چې:

$$x = n\pi + (-1)^n \alpha \Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول د $\sin x=\frac{1}{3}$ لپاره ډېره کوچنۍ زاویه 0.33 ده او د مثلثاتي جدول له مخې د $\sin x=\frac{1}{3}$ لپاره $19^\circ\ 30'$ یا $\frac{13\pi}{120}$ دی.

$$A=\left\{\begin{array}{ll} x=2k\pi+\frac{13\pi}{120} & \\ & k\in Z \\ x=(2k+1)\pi-\frac{13\pi}{120} & \end{array}\right\}$$

دويم مثال: د $\cos 2x+\sin x=0$ معادلې د حل سټ پيدا کړئ.

حل: پوهېږو چې $\cos 2x=1-2\sin^2 x$ دی، نو لیکلی شو چې:

$$1-2\sin^2 x+\sin x=0$$
$$2\sin^2 x-\sin x-1=0$$

که چیرې په پورتنی معادلې کې د $\sin x$ په ځای y وضع کړو، نو لیکو:

$$2y^2-y-1=0 \Rightarrow (2y+1)(y-1)=0$$
$$2y+1=0 \Rightarrow 2y=-1 \Rightarrow y_1=-\frac{1}{2}$$
$$y-1=0 \Rightarrow y_2=1$$

د $\sin x=y$ د تعویض لپاره چې مو په پام کې نیولي دي، نو د لاسته راغلو قیمتونو لپاره لرو چې:

$$\sin x=y_1=-\frac{1}{2}$$
$$\sin x=y_2=1$$

په دې ډول د $\sin x=-\frac{1}{2}$ لپاره هغه کوچنۍ زاویه چې sin یې $-\frac{1}{2}$ وي له $\frac{7\pi}{3}$ څخه عبارت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنا پر دې د حلونو سټ يې عبارت دی له:

$$A=\left\{\begin{array}{l}\sin x=1 \;\Rightarrow\; x=\frac{\pi}{2}\\ \sin x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{7\pi}{6}\end{array}\right\}$$

$$A_1=\left\{\frac{\pi}{2}\;,\;2\pi+\frac{\pi}{2},\;\;4\pi+\frac{\pi}{2},\;\ldots\right\}$$

$$A_2=\left\{2\pi+\frac{7\pi}{6},\;\;4\pi+\frac{7\pi}{6},6\pi+\frac{7\pi}{6},\;\;\ldots\right\}$$

يا په عمومي ډول:

$$A=\left\{x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}\quad,\quad x=2n\pi+\frac{7\pi}{6}\;\;,\;\;n=0,1,2,3\;\ldots\right\}$$

دريم مثال: د $2\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\sin x(2\sin x-\sqrt{2})=0$$

$$\sin x=0\quad\Rightarrow\quad x_1=0^\circ$$

$$2\sin x-\sqrt{2}=0$$

$$2\sin x=\sqrt{2}$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\Rightarrow\quad x_2=\frac{\pi}{4}$$

د معادلې د حلونو سټ عبارت دی له:

$$A_1=\{0^\circ,\;\pi\;,\;3\pi\;,\;5\pi\;,\;\ldots\}$$

$$A_2=\{2\pi\;,\;4\pi\;,\;\ldots\}$$

په عمومي توګه ليکلای شو:

$$x=n\pi+(-1)^n\theta$$

$$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$$

پوښتنې

د لاندې معادلو د حل سټونه پیدا کړئ.

1- $\cos 2x + 1 = 2\sin^2 \frac{x}{2}$

2- $3\cos^2 x + 2\cos x - 5 = 0$

3- $\sin^2 x - (1-\sqrt{3})\sin x \cdot \cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه مجهوله مثلثاتي معادلو یا سیستمونو حل

د الجبري معادلو سیستم مو حل کړ. آیا د مثلثاتي معادلو سیستم حلولای شئ؟

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos x \pm \cos y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

دغه معادلې په شپږو ګروپونو باندې وېشلی شو:

لومړی ګروپ: د دغه ګروپ معادلې په لاندې اتو سیستمونو کې راټولې شوې دي.

$$\begin{cases}\sin x \pm \sin y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases} \qquad \begin{cases}\cos x \pm \cos y = a\\ x \pm y = \alpha\end{cases}$$

څرنګه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس یا زاویه ده، x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.یو له دغو سیستمونو څخه حلوو:

$$\begin{cases}\sin x + \sin y = a \ldots\ \text{I}\\ x + y = \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{II}\end{cases}$$

د لومړی معادلې قیمت د ضرب د فورمولونو په کارولو سره لیکو، ځکه چې د دوو ساینونو مجموعه ده.

$$\sin x + \sin y = a$$

په دې اساس:

$$\begin{cases}2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a \ldots\ I\\ x + y = \alpha \ldots II\end{cases}$$

اوس له II معادلې څخه د $x+y$ قیمت یعنې α د I په معادله کې ایږدو:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a \ldots\ I$$

د I اړیکې دواړه خواوې په $2\sin\frac{\alpha}{2}$ باندې وېشو:

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

تبصره: د پورتني معادلې ښی لوری له $+1$ څخه لوی او له -1 څخه کوچنی نه دی، ځکه چې د قوس یا زاویې ساین دی. یا په بل عبارت مربع یې له یو څخه لوی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-1 \le \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \le 1$$

پورتنی غیرمساوات د $0 < \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}} < 1$ ، په شکل لیکو بیا یې دواړه خواوې مربع کوو:

$$\frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} \le 1$$

دواړه خواوې په $4\sin^2\frac{\alpha}{2} \ne 0$ کې ضربوو:

$$a^2 \le 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$$

پورتنی اړیکه د سیستم د حل له شرط څخه عبارت ده.

لومړی مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

حل: په پورتني سیستم کې $a = 1$ او $\alpha = \frac{\pi}{2}$ دی، وینو چې راکړل شوی شرط د سیستم د حل لپاره صدق کوي او که نه؟ $a^2 - 4\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 0$

د a او α قیمتونه په پورتنی اړیکه کې اېږدو:

$$1 - 4\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}}{2} \le 0 \Rightarrow 1 - 4\sin^2\frac{\pi}{4} \le 0 \Rightarrow 1 - 4(\sin\frac{\pi}{4})^2 \le 0$$

$$1 - 4(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \le 0 \Rightarrow 1 - 4\frac{2}{4} \le 0 \Rightarrow 1 - 2 \le 0 \Rightarrow -1 \le 0$$

لیدل کیږي چې سیستم د حل وړ دی، نو د تحویل د فورمولونو په مرسته د لومړي معادلې کیڼ لوری شکل ته تغییر ورکوو: $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 1$

ځرنګه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ له دې امله $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ کېږي؛نو:

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x-y}{2}=1\Rightarrow\sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \Rightarrow\ \cos\frac{x-y}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x-y}{2}=\frac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ x-y=\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{2}\text{.........}\ I\\ x+y=\frac{\pi}{2}\text{........}\ II\end{cases}\Rightarrow\ 2x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ 2x=\frac{2\pi}{2}\ \Rightarrow\ x=\frac{\pi}{2}$$

د x قیمت په I معادله کې اېږدو نو د y قیمت په لاس راځي:

$$\frac{\pi}{2}-y=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$$

$$y=0$$

دویم ګروپ: ددغه ګروپ اړوند سیستمونه په لاندې ډول دي:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \sin x\cdot\cos y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \sin x\cdot\sin y=a\end{cases}\qquad\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \cos x\cdot\cos y=a\end{cases}$$

ځرنګه چې a معلوم عدد او α معلوم قوس یا زاویه ده. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی له: $-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$

دویم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړې.

$$\begin{cases}x+y=\pi\\ \sin x\sin y=1\end{cases}$$

حل: په پورتنی سیستم کې $a=1$ ، $\alpha=\pi$ دی د دغو معادلو د حل د امکان شرط عبارت دی، له:

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}=-\cos\ \frac{\pi}{2}=0$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\sin^2\frac{\pi}{2}=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سیستم د حل شرط ته په کتنې سره کولای شو ولیکو:

$$-\cos^2\frac{\pi}{2} \le a \le \sin^2\frac{\pi}{2}$$
$$0 \le a \le 1$$

د II معادلې کیڼ لوری د تحویل د فورمول په کارولو سره لاندې شکل ځانته غوره کوي:

$$2\sin x\sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

څرنګه چې $\sin x\sin y = 1$ دی، بنا پر دې $\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2$

له بلې خوا $x+y=\pi$ دی نو: $\cos(x-y) - \cos\pi = 2$

همدارنګه پوهېږو چې $\cos\pi = -1$ دی.

نو:

$$\cos(x-y) - (-1) = 2 \Rightarrow \cos(x-y) + 1 = 2$$
$$\Rightarrow \cos(x-y) = 2-1 \Rightarrow \cos(x-y) = 1$$
$$\cos(x-y) = \cos 0^\circ$$
$$x-y = 0 \Rightarrow x = y$$

د I له معادلې څخه د x قیمت پیداکوو:

$$x+y=\pi \Rightarrow x+x=\pi \Rightarrow 2x=\pi$$

$$x=\frac{\pi}{2} \quad ,y=\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \; x=y=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}$$

دریم ګروپ: دغه ګروپ څلور لاندې سیستمونه تشکیلوي، چې عبارت دي له:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$$

چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

دریم مثال: لاندې مثلثاتي سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3} \end{cases}$$

حل: لیدل کیږي چې دغه سیستم له دریم ګروپ سره مطابقت لري نو، په لاندې ډول کړنه کوو یعنې د سیستم دویمه معادله د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره داسې لیکو:

$$\frac{\text{sinx}-\text{siny}}{\text{sinx}+\text{siny}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ او $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ قیمتونه په پورتني اړیکه کې ایږدو:

$$\frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

څرنگه چې $x+y=\frac{\pi}{2}$ دی، نو $\frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$ سره کیږي.

$$\cot\frac{\pi}{4}\tan\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

له بلې خوا $\cot\frac{\pi}{4}=1$ دی نو معادله لاندې شکل څانته غوره کوي:

$$\tan\frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan\frac{x-y}{2} = \tan 15^\circ \quad \Rightarrow \quad \frac{x-y}{2} = 15^\circ$$

$$x-y = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

د معادلو سستم حلوو:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2} \\ x-y=\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$2x = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

$$x = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

اوس د x قیمت په پورتنی یوه معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x-y=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\frac{\pi}{3}-y=\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=y\Rightarrow\frac{2\pi-\pi}{6}=y$$

$$y=\frac{\pi}{6}$$

$$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3} \quad \text{او} \quad y=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$$

خلورم گروپ: دغه گروپ اته لاندې سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \tan x\pm\tan y=a\end{cases} \qquad \begin{cases}x\pm y=\alpha\\ \cot x\pm\cot y=a\end{cases}$$

څرنگه چې α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y مجهول قوسونه یا زاویې دي.

د سیستم د حل شرط عبارت دی، له: $a^2-4+4a\cot\alpha\geq 0$

څلورم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases}x-y=\frac{\pi}{3}\\ \tan x-\tan y=-2\sqrt{3}\end{cases}$$

حل: کولی شو لومړی معادله داسې ولیکو: $\tan(x-y)=\tan\frac{\pi}{3}$

له بلې خوا پوهیږو چې $\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\cdot\tan y}=\sqrt{3}$

د $\tan x-\tan y=-2\sqrt{3}$ قیمت په پاسنی معادله کې ایږدو:

$$\frac{-2\sqrt{3}}{1+\tan\cdot\tan y}=\sqrt{3}$$

د مساوات دواړه خواوې په $\sqrt{3}$ باندې وېشو او لیکو.

یا:

$$\frac{-2}{1+\tan\cdot\tan y}=1 \quad\Rightarrow\quad 1+\tan x\cdot\tan y=-2$$

یا:

$$\Rightarrow \tan x\cdot\tan y=-3$$

نو:

$$\begin{cases}\tan x\cdot\tan y=-3\text{..............}\quad I\\ \tan x-\tan y=-2\sqrt{3}\text{.......}\quad II\end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\tan x$ قیمت له II معادلې څخه په لاس راوړو په I کې یې ایږدو:

$$\tan x = -2\sqrt{3} + \tan y$$

$$(-2\sqrt{3} + \tan y)\tan y = -3$$

$$\tan^2 y - 2\sqrt{3}\tan y + 3 = 0$$

$$(\tan y - \sqrt{3})^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan y - \sqrt{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan y = \sqrt{3}$$

$$y = \frac{\pi}{3}$$

هغه مثبت کوچنی قوس چې په دغه معادله کې صدق کوي، عبارت دی له: $y = \frac{\pi}{3}$

د y د قیمت په پام کې نیولو سره د I له معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړو.

$$\tan x \cdot \tan y = -3$$

$$\tan x \cdot \sqrt{3} = -3 \quad \Rightarrow \quad \tan x = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

$$x = 2\frac{\pi}{3}$$

پنځم ګروپ: دغه ګروپ لاندې دوه سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \cdot \tan y = a \end{cases}$$

د تېر په څېر بیاهم α معلومه زاویه او a معلوم عدد دی. x او y معلوم قوسونه یا زاویې دي.

دپورتني سیستم د حل شرط عبارت دی، له: $-1 \le \frac{1+a}{1-a}\cos\alpha \le 1$

پنځم مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = 7\frac{\pi}{6} \\ \tan x \cdot \tan y = 0 \end{cases}$$

لیدل کېږي چې دغه سیستم په پنځم ګروپ پورې اړه لري او په لاندې ډول یې حلوو:

$$\tan x \tan y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$ او $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$ قیمتونه په اړونده اړیکه کې ایږدو.

$$\tan x \tan y = \frac{\frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]}{\frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]}$$

د $x + y$ قیمت د سیستم له لومړۍ معادلې څخه په پورتنۍ اړیکه کې ایږدو:

$$\tan x \cdot \tan y = \frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}}$$

څرنګه چې $\tan x \cdot \tan y = 0$ سره راکړل شوی دی، نو لیکو:

$$\frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}} = 0$$

ددې لپاره چې کسر مساوي په صفر شي، نو باید صورت یې له صفر سره برابر شي؛ یعنې:

$$\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6} = 0$$

$$\cos 7\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(x-y) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\cos(x-y) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad x - y = \frac{5\pi}{6}$$

هغه کوچنی قوس چې په معادله کې صدق کوي، عبارت دی له:

نوموړی سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x - y = 5\frac{\pi}{6} \\ x + y = 7\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} = 2\pi \quad , \qquad x = \pi$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x قیمت د I په معادله کې ابږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x-y=5\frac{\pi}{6} \Rightarrow \pi-y=5\frac{\pi}{6} \quad , \quad -y=\frac{5\pi}{6}-\pi$$

$$y=\pi-\frac{5\pi}{6} \Rightarrow y=\frac{6\pi-5\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

$$y=\frac{\pi}{6}$$

شپږم گروپ: په دغه گروپ کې لاندې سیستمونه شتون لري:

$$\begin{cases} x \pm y=\alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}=a \end{cases}$$

د حل د امکان شرط عبارت دی، له: $-1 \le \frac{a-1}{a+1}\sin\alpha \le 1$

شپږم مثال:

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{\tan x}{\tan y}=-3 \end{cases}$$

د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره لرو:

$$\frac{\tan x-\tan y}{\tan x+\tan y}=\frac{-3-1}{-3+1}=2$$

د مساوات په کیڼې خواکې د صورت او مخرج قیمتونه د $\sin$ او $\cos$ له جنسه داسې ابږدو:

$$\frac{\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}}=2 \Rightarrow \frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=2$$

$$2\sin(x+y)=\sin(x-y)$$

څرنگه چې $x-y=\frac{\pi}{2}$ دی، نو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2\sin(x+y)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$\sin(x+y)=\frac{1}{2}$$

هغه کوچنی قوس چې په معادله کې صدق کوي، عبارت دی له: $\frac{\pi}{6}$ چې د معادلو لاندې سیستم جوړوو:

$$x+y=\frac{\pi}{6}$$

$$x-y=\frac{\pi}{2}$$

نوموړی سیستم حلوو:

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{6} \;.....\mathrm{I} \\ x-y=\frac{\pi}{2} \;.....\mathrm{II} \end{cases}$$

$$2x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x=\frac{\pi+3\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}$$

$$x=\frac{4\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$$

د x قیمت د I په معادله کې ایږدو او د y قیمت په لاس راځي:

$$x+y=\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3}+y=\frac{\pi}{6} \Rightarrow y=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$$

$$y=\frac{\pi-2\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$$

$$y=-\frac{\pi}{6}$$

پوښتنې

د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه حل او ووایاست چې په کوم ګروپ پورې اړه لري؟

a) $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ \tan x+\tan y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\cos x}=2 \end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېړکي مهم ټکي

د ساین قانون: د ABC په هر مثلث کې لاندې اړیکې شته:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

پورتنۍ اړیکه د ساین د قانون په نوم یادېږي.

د کوساین قانون: د ABC په هر مثلث کې چې دضلعو اوږدوالي یې b, a او c وي، د ضلعو او زاویو تر منځ لاندې اړیکې شته:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\ \cos A$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\ \cos B$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\ \ \cos C$$

د tan قانون: د ABC په هر مثلث کې د هغه د ضلعو او زاویو ترمنځ د tan له جنسه لاندې اړیکې شته:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}\quad,\quad \frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{C+A}{2}}{\tan\frac{C-A}{2}}\quad,\quad \frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{B+C}{2}}{\tan\frac{B-C}{2}}$$

مثلثاتي مطابقت: هغه مثلثاتي مساوات چې د زاویې د ټولو قیمتونو لپاره د مساواتو دواړه خواوې مساوي شي، مثلثاتي مطابقت بلل کېږي.

مثلثاتي معادلې: هغه مساوات چې د زاویې په ځینو قیمتونو سره دواړه خواوې مساوي شي، معادله بلل کېږي.

د مثلثاتي معادلو سیستمونه

مثلثاتي معادلو سیستمونه په لاندې شپږو ګروپونو وېشل شوي دي:

لومړی ګروپ:

$$\begin{cases}\sin x\pm\sin y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}\qquad \begin{cases}\cos x\pm\cos y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \cdot \cos y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \sin y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

دریم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases}$$

څلورم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan y = a \end{cases}$$

پنځم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x + \tan y = a \end{cases}$$

شپږم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \dfrac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې په ځير سره ولولئ، هرې يوې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه کړئ.

1. که چيرې $A=20^\circ$, $b=10$, $c=7$ وي، د a د ضلعې اوږدوالی عبارت دی له:

$a)$ 16.4 $b)$ 16 $c)$ 15.9 $d)$ 16.8

2. که چيرې $a=8$, $b=5$ او $c=10$ وي، د B زاويې اندازه عبارت ده له:

$a)$ 28° $b)$ 29° $c)$ 29.4° $d)$ 28.5°

3. که چيرې $A=48^\circ$, $B=22^\circ$ ، $a=5$ وي د b اوږدوالی عبارت دی له:

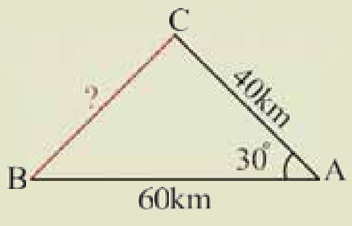
$a)$ 8 $b)$ 8.5 $c)$ 9 $d)$ -9.5

4. د $\sec x(\sec x-\cos x)$ مثلثاتي مطابقت مساوي دی له :

$a)$ $\tan x$ $b)$ $\dfrac{1}{\tan x}$ $c)$ $\cot x$ $d)$ $\tan^2 x$

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که چيرې د $A=30^\circ$, $c=8$, $b=5$ واحده وي، د a ضلع او $\sin C$ پيدا کړئ.
2. که په يوه مثلث کې $a=8$, $b=5$, $c=10$ واحده وي، د B زاويې اندازه پيدا کړئ.
3. د ABC په مثلث کې که $\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ او $A=30^\circ$ وي، د B او C زاويو اندازه پيدا کړئ.
4. دوې بېړۍ د A له تکي څخه په دوو خواوو داسې په حرکت پيل کوي چې د منځ زاويه يې 30° ده، که له يوه ساعت څخه وروسته، لومړۍ بېړۍ $40\,km$ او دويمه بېړۍ $60\,km$ واټن وهلی وي، د دوو بېړيو ترمنځ واټن پيدا کړئ.



5. د $\cot^2\beta$ او $\sin\beta$ او $\cos\beta$ له جنسه محاسبه کړئ.

6. لاندې مطابقتونه ساده کړئ.

a) $\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A$

b) $\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}=\tan^2 A$

c) $\tan A+\cot A=2\csc 2A$

d) $\frac{1-\cos A+\cos B-\cos(A+B)}{1+\cos A-\cos B-\cos(A+B)}=\tan\frac{A}{2}\cdot\cot\frac{B}{2}$

e) $\frac{\cos A}{1-\sin A}=\tan(45+\frac{A}{2})$

f) $\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=\frac{1}{4}\cos 3\alpha$

7. لاندې مثلثاتي معادلې حل کړئ.

a) $\cos^2 x+\cos^4 x=0$

b) $\tan^2 x-4\tan x+3=0$

c) $4\cos\beta-2=0$

d) $\cos x-\sqrt{3}\sin x=1$

e) $\cos^2 x+3\sin x\cdot\cos x=-1$

8. آیا د $2\sin^2 x-\cos x=2\cos 2x+\sin x$ مساوات يو مطابقت دی او که معادله؟

9. لاندې افادې ساده کړئ.

a) $\frac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$

b) $1-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha=?$

c) $\cos 4x+2\sin^2 2x$

d) $(\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x)^2$

10. د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه لومړی تشخيص او بيا يې حل کړئ.

a) $\begin{cases}\tan x+\tan y=1\\ \cos x\cos y=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

b) $\begin{cases}\sin(x+y)=\cos(x-y)\\ \tan x-\tan y=1\end{cases}$

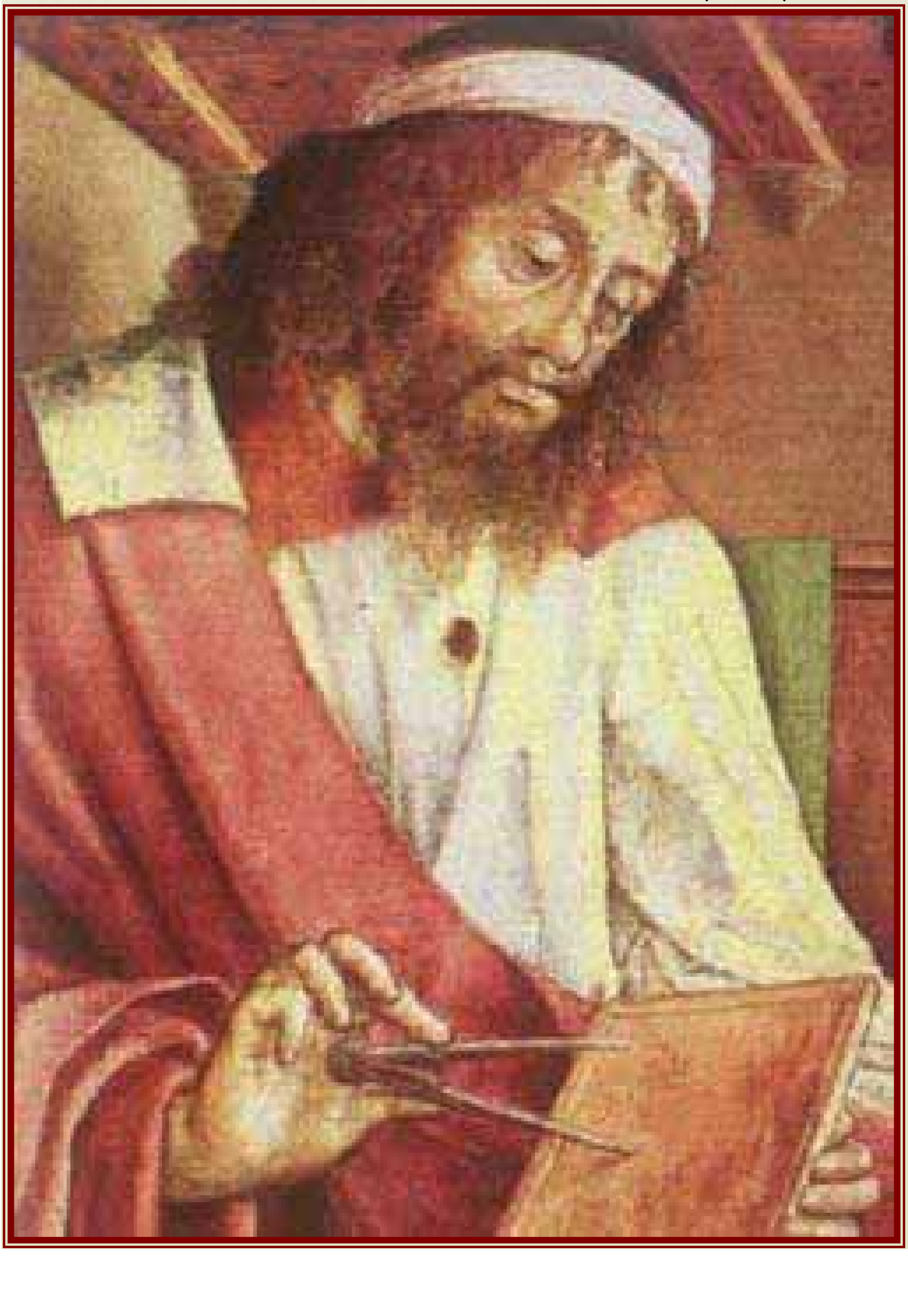
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم څپرکی

فضايي هندسه

اقلیـــدس د دوه اړخیـــزې(دوه‌بعـــدي) او درې اړخیزې(درې بعدي) هندسي بنسټ ایښودونکی دی.

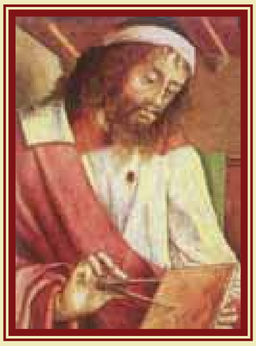


(c) ketabton.com: The Digital Library

اساسي مفاهیم او اکسیومونه

د اقلیدس د هندسي مفاهیمو څیړنې په دوو بعدونو کې د مسطحې هندسې په نامه یادیږي.

هغه هندسي مفاهیم، چې په دریو اړخونو(بعدونو) کې څیړل کیږي، فضایي هندسه نومیږي.



فعالیت

- د مفاهیمو په برخه کې لکه لومړنی اصطلاحات، دلیل، برهان او قضیو په هکله فکر وکړئ. خپل مینځ کې خبرې او د موضوع په هکله بحث وکړئ.

له پورتني بیان او بحث څخه وروسته کولای شو، لاندې تعریف وکړو:

لومړنی اصطلاحګانې Postulates: د هر علم په برخه کې د لومړنیو اصطلاحګانو څخه سترګې پټولای نشو د نورو علومو په ډول په هندسه کې هم هغه مفاهیم او مفکورې، چې پرته له کوم تعریف څخه منل کیږي لومړنې اصطلاحات بلل کیږي. لکه: ټکی(نقطه)، کرښه(خط)، مستوي او فضا.

منطقي دلیل او برهان Logical Reason: برهان د ذهن هغه عمل ته ویل کیږي چې له یو لړ مخکینیو سمو وړاندیزونو او څیړنو څخه و روستنیو څیړنو ته رسیږي چې د هغې سموالی مخکې منل شوی وي. مونږ هم کولای شو، هغه و منو.

قضیه Theorem : هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت یو لړ منطقي دلایلو ته اړتیا ولري، قضیه بلل کیږي.

ټکی(نقطه): مونږ نقطه د یو ذهني مفهوم په ډول پیژنو او هغه د لومړنی اصطلاح(تعریف شوې نه ده) په توګه منو.

مستقیم خط: کش شوی تار، دمیزڅنډه او د خط کش تیغه د مستقیم خط مفهوم او مطلب بیانوي. د مستقیم خط بېلېدونکي علامې دا دي چې د دوو راکړل شوو ټکو څخه یوازې او یوازې یوه مستقیمه کرښه تیریدلای شي مستقیم خط د لومړنی اصطلاح(تعریف شوی نه دی) په ډول منو.

باید فکر مو وي چې یو مستقیم خط دواړو خواوو ته تر لایتناهي پورې غزیدلای شي.

لومړی اصل: دوې ښکاره او ټاکلې نقطې یوازې او یوازې یو مستقیم خط څرګندوي.

دویم اصل: هر مستقیم خط لږ ترلږه دوې څرګندې نقطې لري چې په یو مستقیم خط باندې واقع دي، لږ تر لږه داسې درې نقطې شتون لري چې په یوه مستقیم خط باندې واقع نه وي.

دریم اصل: کولای شو په یوه مستقیم خط باندې د هرو دوو نقطو تر منځ یوه دریمه نقطه په لاس راوړو.

مستوي: د ولاړو اوبو سطح او د ټولګي تخته د مستوي مفهوم څرګندوي او مستوي د لومړنی اصطلاح (تعریف شوې نه ده) په توګه منل کیږي.

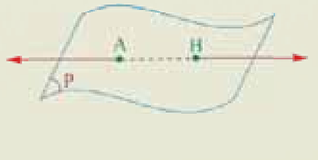
لومړی اصل: په هره مستوي کې لږ تر لږه درې نقطې شتون لري چې د یوه مستقیم خط په استقامت واقع نه وي.

دویم اصل: له هرو دریو نقطو څخه، چې د یوه مستقیم خط په استقامت پرتې نه وي، یوه مستوي تیریږي.

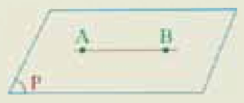
(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم اصل: که چیري د یوه مستقیم خط دوې نقطې په یوې مستوي کې وي، دا خط په مستوي کې دی.

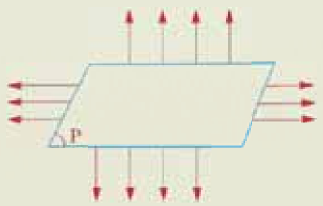
په مسطحه هندسه کې د مستوي رسمیدلوته اړتیا نشته، ځکه چې ټول شکلونه لکه دکاغذ مخ، د لرګي تخته، چې هر یو یې یوه مستوي ښکاره کوي، رسميږي، خو په فضایي هندسه کې د مستوي رسمولو ته اړتیا شته، ځکه چې په فضایي هندسه کې مستوي یوه نه، بلکې ډیرې دي. زیاتره په فضایي هندسه کې مستوي د متوازي الاضلاع، مستطیل او یا هوارې سطحې په واسطه ښودل کیږي او په یوه کونج کې یې یو توری لیکي.



مستوي نه ده



محدوده مستوي



نا محدوده مستوي

دا مستوي ګانې چې په تېرو شکلونو کې لیدل کیږي، په همدې پراخوالي نه دي، بلکې ترلایتناهي پورې امتداد لري. دا چې مستوي ګانې په پورته شکلونو کې لیدل کیږي هغه متوازي الاضلاع او مستطیل نه دي، بلکې د مستوي په یوې هوارې سطحې کې ښودل دي.

ټولې نښې چې په مسطحه هندسه او ریاضي کې استعمالیږي، په فضایي هندسه کې هم استعمالیږي.

هغه اکسیومونه، چې په مسطحې هندسې کې موجود دي، په فضایي هندسه کې هم له دې اکسیومونو څخه کار اخیستل کیږي.

سربیره په مسطحه هندسه په فضایي هندسه کې هم یو لړ ځانګړي اکسیومونه شته چې په لاندې ډول بیانیږي.

د مستوي لومړنی اکسیوم: هغه مستقیم خط چې د مستوي دوې مختلفې نقطې سره نښلوي په دې مستوي کې شامل دی.

د مستوي دویم اکسیوم: له هغو دریو نقطو څخه چې په یوه مستقیم خط واقع نه دي، یوازې او یوازې یوه مستوي تیریږي.

د متقاطع مستوي ګانو اکسیوم: که چیرې دوې مستوي ګانې یو ګډ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چیرې یو ګډ مستقیم خط ولري، د غه متقاطع خط ته د دوې مستوي ګانو مشترک فصل وایي.

فضا: فضا هم د لومړنی اصطلاح (تعریف شوي نه ده) په توګه پېژنو.

لومړی اصل: دلایتناهي نقطو مجموعې ته فضا وایي.

دویم اصل: لږتر لږه څلور داسې نقطې شته چې په یوه مستوي کې واقع نه دي.

پوښتنې

1. څرګنده کړئ چې ولې درې پښې لرونکی میز د څلورو پښو لرونکی میز په پرتله ټینګ دی؟
2. ولې نقطه، کرښه او مستوي لومړنی اصطلاح ګانې بولي؟
3. له دوو نقطو څخه څو مستوي ګانې تیریدلای شي چې دواړه نقطې په کې پرتې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په درې بُعدي فضا کې کرښه او مستوي

په فضا کې دوه قلمونه، دوه کتابونه، يو کتاب او يو قلم کوم حالتونه لري؟

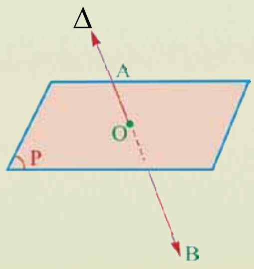
درې بُعدي فضا:

هغه فضا، چې موږ په کې ژوند کوو، درې بُعدي فضا ده. دا درې بُعدي فضا يوه لـه نـه تعريـف شـوو لومړنيـو مفهومونو څخه ده.

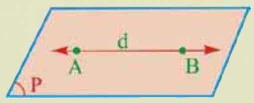
فضا دلايتناهي نقطو مجموعه ده، خط او مستوي هم په ترتيب سره يو بعد، دوه بعدونـه لـري چې هـر يـو د فضا د سټ يوه برخه(جزء) دی.

د يوې مستقيمې کرښې او يوې مستوي نسبي حالـت: يـوه مـستقيمه کرښـه او يـوه مـستوي لاندې درې حالتونه لري:

1. **که چيرې يو مستقيم خط او يوه مستوي يوه مشترکه نقطه ولري، دا خط او مستوي يو له بل سره متقاطع دي. دمثال په ډول په دې شکل کې د Δ مستقيمه کرښه د P مستوي د O په نقطه کې قطع کړې ده.**



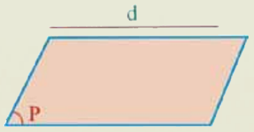
2. که چيرې يو مستقيم خط له يوې مستوي سره دوه او يا لـه دوو څخـه زياتې مشترکې نقطې ولري دا مستقيمه کرښه له مستوي سره منطبقـه



(c) ketabton.com: The Digital Library

ده او یا داسې ویل کیږي چې مستقیمه کرښه په مستوي کې شامله ده،د مثال په ډول د d مستقیم د P په مستوي کې شامل دی.

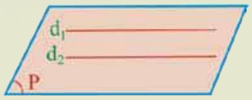
3. که چیرې یوه مستقیمه کرښه له یوې مستوي سره هیڅ ګډه نقطه و نه لري، دا مستقیم له مستوي سره موازي دي، مثلاً په لاندې شکل کې د d مستقیم خط له P مستوي سره موازي دی.



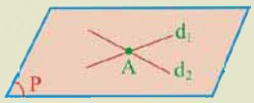
له یو بل سره د دوو مستقیمو کرښو نسبي حالت:

1- که چیرې دوه مستقیم خطونه په یوه مستوي کې شامل وي، نوموړي خطونه د همغې مستوي خطونه بلل کیږي، او یو له لاندینیو حالتونو(وضعیتونو)څخه لري.

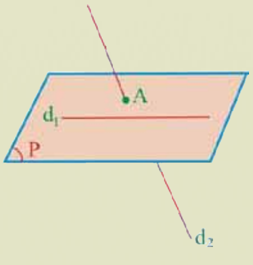
په یوې مستوي کې دوه خطونه هغه وخت موازي بلل کیږي چې هیڅ ګډټکی ونه لري.



2- په یوه مستوي کې دوه خطونه، چې یوه ګډه(مشترکه) نقط ولري، متقاطع خطونه بلل کیږي.



3- دوه مستقیم خطونه چې په یوه مستوي کې پراته نه وي او کومه مشترکه نقطه هم و نه لري، متنافر خطونه بلل کیږي؟



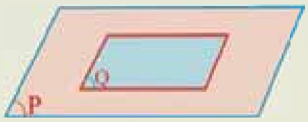
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

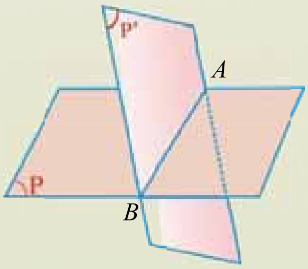
د دوو مستويګانو نسبي حالت:

په عمومي ډول دوې مستويګانې لاندې درې حالتونه لري.

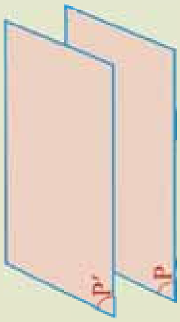
منطبق: که چيرې دوې مستويګانې لږ تر لږه درې مشترکې نقطې ولري چې د يو مستقيم خط په امتداد پرتې وي، يو پر بل منطبقې مستويګانې بلل کيږي، لکه په مخامخ شکل کې د P او Q دوې مستويګانې يو پر بل منطبقې دي.



متقاطع مستويګانې: که چيرې دوې مستويګانې يو ګډ مستقيم خط ولري متقاطع مستويګانې بللې کيږي. دغه د AB مشترک خط ته مشترك فصل هم وايي. لکه مخامخ شکل.



3- که چيرې دوه مستويګانې هيڅ کوم ګډ ټکی و نه لري، سره موازي دي، د مثال په توګه د P او P' مستويګانې.



فعاليت

- په فضا کې له يوې نقطې څخه څو مستقيم خطونه تيريږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستقيم خطونه تيريږي؟
- له يوې نقطې څخه څو مستوي ګانې تيريږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستوي ګانې تيريږي؟
- له دريو نقطو څخه څو مستوي ګانې تيريږي چې درې واړې نقطې پکې شاملې وي؟

پوښتنې

1- د R او T نقطې د P په مستوي کې پرتې دي، د کوم دلیل له مخې د $\overline{RT}$ خط د P په مستوي کې پروت دی؟

2- که د Δ مستقیم خط د P په مستوي کې پروت نه وي، د Δ مسقیم خط به د P مستوي په څو نقطو کې قطع کړي؟

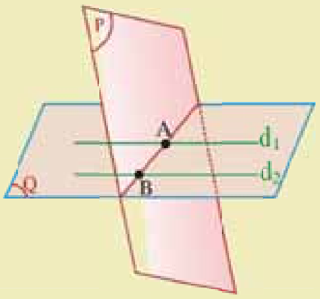
3- که چیرې د AB مستقیم خط او د P مستوي د M او K دوې ګډې نقطې ولري، د $\overline{AB}$ مستقیم خط د P په مستوي کې پروت دی؟

4- د B, A او C نقطې د P په مستوي کې واقع دي او هم د B, A او C نقطې د p' په مستوي کې پرتې دي، د P او p' مستوي ګانې یوه له بلې سره څه اړیکه لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په فضا کې موازي مستقیم خطونه

آیا په فضا کې مستقیم خطونه موازي دي؟



تعریف:

دوه مستقیم خطونه چې په یوې مستوي کې پراته او ګډه نقطه و نه لري، موازي خطونه بلل کېږي.

د موازاتو اکسیوم: له یوې خارجي نقطې څخه له یوې مستقیمې کرښې سره یوازې او یوازې یوه موازي مستقیمه کرښه رسمولای شو او بس.

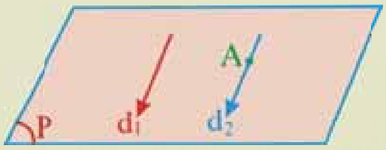
فعالیت

- د A ټکی د P مستوي او د d_1 مستقیم خط چې د A ټکی وربانـدې پـروت نـه وي، پـه پـام کې ونیسئ؟
- د A ټکی او د d_1 له مستقیم خط څخه څو مستويګانې تېریدلای شي؟ ولې؟

له پورتني فعالیت څخه د قضیې متن او ثبوت بیانوو.

قضیه: له یوې خارجي نقطې څخه له یوه مستقیم خط سره یوازې یو موازي مسقیم خط رسـمولای شـو او بس.

ثبوت: د A له نقطې او د d_1 له مستقیمې کرښې څخه یـوازې یوه د P مستوي تیرېږي، ولې؟



اوس د P پـه مـستوي کـې د A لـه نقطـې څخـه یـوازې د d_2 مستقیم خط د d_1 له مستقیم خط سره موازي رسمولای شو.

(پورتنی ثبوت په مسطحه هندسه کې لوستل شوی). نو پورتنی دعوا چې ټکی او خط پـه فضاکې وي، هـم سموالی لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

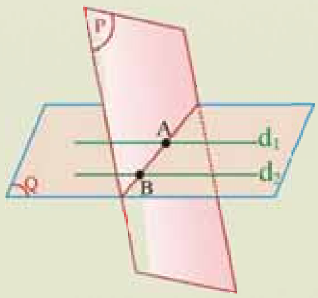
دوه د d_1 او d_2 موازي خطونه او یوه د A نقطه د P له مستوي څخه بهر(خارج) په پام کې ونیسئ.

- آیا د d_1 او d_2 مستقیم خطونه یوه بله مستوي ټاکلي شي؟
- که چیرې د P مستوي د Q مستوي د A په ټکی کې قطع کړي، آیا د P مستوي به د d_2 مستقیم خط هم قطع کړي؟
- آیا دوې مستوي‌گانې یوه بله د یوه مستقیم خط په اوږدو کې قطع کوي، ولې؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه وروسته د قضیې متن او ثبوت بیانوو.

قضیه: که دوه مستقیم خطونه موازي وي او مستوي یو له هغو څخه قطع کړي، بل یې هم قطع کوي.

ثبوت: د d_1 او d_2 یو له بل سره موازي مستقیمونه د Q په مستوي کې پراته دي.



که د P مستوي د d_1 مستقیم د A په نقطه کې قطع کړي، نوموړې مستوي د d_2 مستقیم هم د B په نقطه کې قطع کوي د تعریف له مخې د d_1 او d_2 موازي خطونه یوه د Q مستوي ټاکي، د P او Q مستوي-ګانې د A یوه مشترکه نقطه لري، که چیرې دوې مستوي‌ګانې یوه بله په یوه نقطه کې قطع کړي، نو وبلای شو چې هغوی یو بل د یوې مستقیمې کرښې په اوږدو کې قطع کوي، له دې امله د P او Q مستوي‌ګانې د d_2 مستقیمه کرښه د B په نقطې کې هم قطع کوي. ځکه یو مستقیم خط چې په یوې مستوي کې له دوو موازي خطونو څخه یو قطع کړي، بل یې هم قطع کوي.

پوښتنې

1- که چیرې دوه مستقیم خطونه له یوه دریم مستقیم خط سره موازي وي ثبوت کړئ چې دا مستقیم خطونه په خپل منځ کې هم موازي دي؟

2- که چیرې د E او F مستوي‌ګانې سره موازي او د L_1 مستقیم خط د E مستوي کې او د L_2 مستقیم خط د F په مستوي کې واقع وي آیا $L_2 // L_1$ دی؟

3- که د E او F مستوي ګانې سره متقاطع او د P مستوي هغوی دواړه قطع کړي، آیا د E او F ګډ فصل د E او P له مشترك فصل او د F او P له مشترك فصل سره موازي دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په فضا کې د دوو مستقیمو کرښو تر منځ زاویه

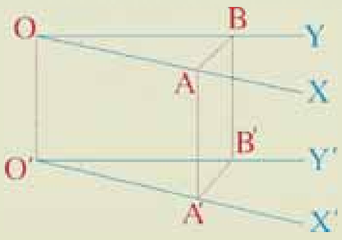
که چیرې د یوې زاویې دوراني لوری د ساعت د عقربې په مخالف لوری حرکت وکړي، زاویه مثبت او که د ساعت د عقربې په همجهت(عین لوری) وي زاویه منفي ده.

فعالیت

- د XOY او $X'O'Y'$ زاوېې داسې په پام کې ونیسئ چې ضلعې یې سره موازي او هم جهته وي.
- د $\overline{OX}$ او $\overline{O'X'}$ له ضلعو څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{O'A'}$ دوه مساوي قطعه خطونه او د $\overline{OY}$ او $\overline{O'Y'}$ له ضلعو څخه د $\overline{OB}$ او $\overline{O'B'}$ مساوي قطعه خطونه بیل کړئ.
- د $OAA'O'$ شکل، کوم هندسي شکل لري، دلیل یې ووایاست، د OAB او $O'A'B'$ جوړ شوي مثلثونه له یو بل سره څه اړیکه لري؟

د پورتني فعالیت له مخې د قضیې متن او ثبوت په لاندې ډول بیانولی شو.

قضیه: په فضا کې دوې زاوېې، چې دوه په دوه موازي او هم جهته ضلعې ولري، یوه له بلې سره مساوي دي.



ثبوت: د XOY او $X'O'Y'$ زاوېې په پام کې نیسو، داسې چې $\overline{OX} // \overline{O'X'}$ او $\overline{OY} // \overline{O'Y'}$ دي، یو لوری(یوجهت) هم لري. په شکل کې د OX او $O'X'$ پر خطونو د $\overline{OA}$ او $\overline{A'O'}$ قطعه خطونه سره مساوي موازي او هم جهته دي.

نو د $OAA'O'$ شکل یوه متوازي‌الاضلاع ده. له دې امله د $\overline{BB'}$ او $\overline{OO'}$ قطعه خطونه موازي، مساوي او هم لوري(هم‌جهت) دي. نو $ABB'A'$ هم یوه متوازي‌الاضلاع ده او $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $O'A'B'$ او OAB مثلثونه انطباق منونکي دي. ځکه $\overline{A'B'} = \overline{AB}$, $\overline{A'O'} = \overline{OA}$ او $\overline{O'B'} = \overline{OB}$ دي

له دي امله $A\hat{O}B = A'\hat{O'}B'$ دي.

د قضيې پايله:

i) که په ترتيب سره د دوو زاويو ضلعې موازي او هم لوري وي، نومړي زاويې يو له بل سره مساوي دي.

ii) که د دوو زاويو يوه، يوه ضلع موازي او هم جهته وي او د هغو يوه، يوه ضلع يې موازي او مختلف جهتونه(لوري) ولري، د دغو دواړو زاويو پراخوالي 180° دی.(ثبوت يې د زده‌کوونکو دنده ده).

د دوو متنافر و مستقيمو کرښو ترمنځ زاويه:

تعريف: په فضاکې د دوو متنافر و مستقيمونو ترمنځ زاويه له هغې زاويې څخه عبارت ده چې د يوې مستوي په يوه اختياري نقطه کې له هغو سره د دوو موازي مستقيمونو د رسمولو په واسطه حاصليږي

پوښتنې

1- که د دوو زاويو پراخوالی سره مساوي وي او د يوې زاويې يوه ضلع د بلې زاويې ضلعې سره موازي وي، آيا د هغو زاويو نورې ضلعې يو له بل سره موازي دي. ولې؟

2- که د دوو زاويو ضلعې سره موازي وي، ثابت کړئ چې د دغو زاويو، ناصف‌الزاويې سره موازي او يا سره عمود دي.

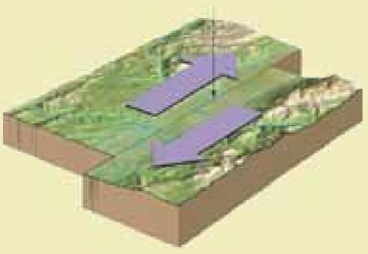
3- د d_1, d_2 دوو متنافرو مستقيمونو ترمنځ زاويه پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

په فضا کې موازي مستقيمونه او موازي مستوي‌گانې

يوه مستقيمه کرښه هغه وخت له يوې مستوي سره موازي بلل کېږي چې هيڅ ګډ ټکی و نه لري.
مستوي‌گانې په فضا کې هغه وخت سره موازي دي چې هيڅ ګډ ټکی و نه لري.



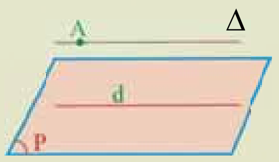
فعاليت

که چيرې د d مستقيم د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقيمه کرښه د P د مستوي بهر او د d مسقيم سره موازي وي، آيا د Δ مستقيم د P له مستوي سره موازي کيدلای شي؟

- دوې د P او Q متقاطع مستوي‌گانې او يو مستقيم خط له دغو مستوي گانو څخه بهر د P او Q له مستوي‌گانو سره موازي په پام کې ونيسئ.
- د d مستقيم(مشترک فصل) د Δ له مستقيم خط سره موازي کيدای شي؟
- له يوې ټاکلي نقطې څخه د d_1 او d_2 دوو مستقيمو کرښو سره څو موازي مستوي‌گانې چې موازي نه وي رسمولای شو؟ د فعاليتونو د هرې برخې له تر سره کولو وروسته د قضيو متن او ثبوت په ترتيب بيانوو.

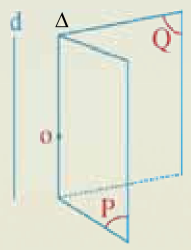
قضيه: که يو مستقيم خط د يوې مستوي له يوه خط سره موازي وي. نوموړی مستقيم خط له همدې مستوي سره موازي دی.

ثبوت: د d مسقيم خط چې د P په مستوي کې پروت او د Δ مستقيمه کرښه د p د مستوي بهر او د d له مستقيم سره موازي راکړل شوې، ثابتوو چې د Δ مستقيمه کرښه د p له مستوي سره موازي ده، که د p مستوي د Δ مستقيمه کرښه قطع کړې، د d مستقيمه کرښه چې د Δ له مستقيمې کرښې سره موازي ده هم قطع کوي. دا د فرضيې خلاف ده، ځکه د d مستقيمه کرښه د P په مستوي کې پرته ده، نو د p مستوي د Δ مستقيم قطع کولای نشي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

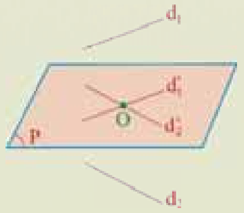
قضیه: که یوه مستقیمه کرښه له دوو متقاطع مستويګانو سره موازي وي، نوموړې مسقیمه کرښه د نوموړو مستويګانو له ګډ فصل سره موازي ده.



ثبوت: د P او Q دوې متقاطع مستویګانې په پام کې نیسو چې هره یوه یې د d له مستقیمې کرښې سره موازي ده، لکه مخامخ شکل.

که د P، Q د مستويګانو د Δ په مشترك فصل باندې د O نقطه وټاکو او له هغې نقطې څخه د d له مستقیمې کرښې سره یو موازي رسم کړو، دا موازي د Δ په مستقیمې کرښې منطبق کېږي ځکه Δ یوازینی خط دی چې په دواړو مستويګانو یعنې په P او Q کې شامل دی.

قضیه: د (O) له یوې ټاکلې نقطې څخه د d_1 او d_2 مستقیم خطونه چې یو له بل سره موازي نه دي یوازې یوه موازي مستوي رسمولای شو او بس.

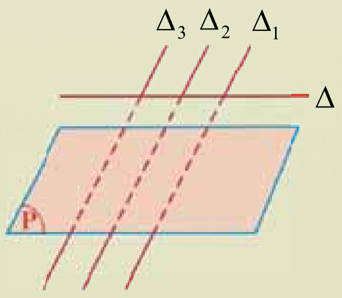


ثبوت: د (O) له نقطې څخه د d'_1 او d'_2 خطونه چې په پرتیب له d_1 او d_2 مسقیمونو سره موازي وي، رسموو د P مستوي چې د (O) له نقطې څخه تیرېږي او د d'_1 او d'_2 مستقیمې کرښې په خپل ځان کې لري له d_1 او d_2 سره موازي دي؟ ولې؟

که چیرې d_1 او d_2 یو له بل سره موازي وي، نو d'_1 او d'_2 یو پر بل منطبق کېږي.

پوښتنې

1- که چیرې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه سره موازي وي، څو موازي مستويګانې له هغو سره رسمولای شئ؟

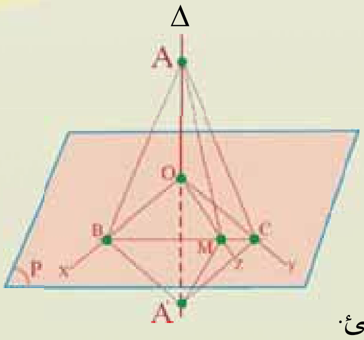


2- که چیرې د Δ_1 , Δ_2 او Δ_3 موازي خطونه د P مستوي او د Δ مستقیمې کرښې په واسطه په داسې حال کې چې د Δ مستقیمه کرښه د P له مستوي سره موازي ده قطع شي، ثبوت کړئ چې مخامخ قطع شوي قطعات یو له بل سره مساوي دي.

په فضا کې متعامدې مستقیمې کرښې او مستوي ګانې

که د Δ مستقیمه کرښه د P مستوي په (O) ټکي کې عمود وي، آیا هغه ټول مستقیم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تیریږي، د Δ په مستقیمې کرښې باندې عمود دي؟

فعالیت



- مخامخ شکل په پام کې ونیسئ د $\overline{ox}$ او $\overline{oy}$ مستقیمونه د Δ په مستقیم د (O) په نقطه کې عمود رسم کړئ.
- د P په مستوي کې د OZ اختیاري مستقیمه کرښه په پام کې ونسیئ.
- د Δ له مستقیمې کرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ مساوي‌الفاصله قطعه خطونه جلا کړئ.

یو اختیاري قاطع داسې رسم کړئ چې د $\overline{OX}$ مستقیمه کرښه د B او $\overline{oy}$ مستقیمه کرښه د C او د $\overline{OZ}$ مستقیمه کرښه د M په نقطو کې قطع کړي. $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ له $\overline{AA`}$ سره څه اړیکه لري.

- د OZ مستقیمه کرښه د Δ پر مستقیمه کرښه عمود ده؟ ولې؟

د پورتني فعالیت له تر سره کولو وروسته د قضیې متن او ثبوت داسې بیانوو.

قضیه: که د Δ یوه مستقیمه کرښه پر هغو دوو مستقیمو کرښو چې دواړه د Δ مستقیمه کرښه د (O) په نقطه کې قطع کوي عمود وي، په هغو ټولو مستقیمو خطونو باندې چې په مستوي کې متقاطع دي او د (O) له نقطې څخه تیریږي، عمود ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: دوي مستقیمي کرښې د $\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ په پام کې نیسو، دا دوه مستقیمونه د Δ پر مستقیم چې د(O) له نقطې څخه تیریږي، عمود دي او د P مستوي جوړوي، د P په مستوي کې د OZ اختیاري(کیفي) مستقیمه کرښه په پام کې نیسو، د Δ له مستقیمي کرښې څخه د $\overline{OA}$ او $\overline{OA'}$ دوه متساوي الفاصله قطعه خطونه جلاکوو.

او د P په مستوي کې یو قاطع رسموو چې د $\overline{OX}$ B او د $\overline{OY}$ C او oz مستقیم د M په نقطه کې قطع کړي.

$\overline{OX}$ او $\overline{OY}$ دواړه د $\overline{AA'}$ منځنی عمودونه دي؛ نو

$$\overline{BA} = \overline{BA'}$$

$$\overline{CA} = \overline{CA'}$$

د ABC او $A'B'C'$ مثلثونه انطباق منونکی دي. د انطباق منلو د عملیې په وخت کې د C, B او M نقطې ثابتې پاتې کیږي او د A نقطه په A' او $\overline{MA}$ په $\overline{MA'}$ منطبق کیږي، نو لیکلی شو. $\overline{MA'} = \overline{MA}$

د $M\overset{\Delta}{A}A'$ مثلث متساوي الساقین دي او د $\overline{MO}$ منځنی(میانه) په عین وخت کې د $\overline{AA'}$ منځنی عمود دی

په نتیجه کې د Δ مستقیمه کرښه د $\overline{OZ}$ پر مستقیمي کرښې باندې عمود دی.

فعالیت

- که د B او C نقطې د P او Q له ټکو څخه متساوي الفاصله وي، د BC مستقیمي کرښې هره نقطه له P او Q څخه متساوي‌الفاصله ده. اوس د X یوه اختیاري(کیفي) نقطه د BC پر مستقیمه کرښه وټاکئ او ثابت کړئ چې X د P او Q څخه متساوي الفاصله دی.

پوښتنې

1- که چیرې د d_1 او d_2 خطونه یو له بل سره موازي وي، له هغو سره څو موازي مستوي‌ګانې رسمولای شئ؟

2- که د L خط د P پر مستوي عمود وي، آیا ټولې هغه مستویګانې چې د L خط په کې پروت دی د P په مستوي باندې عمود دی؟

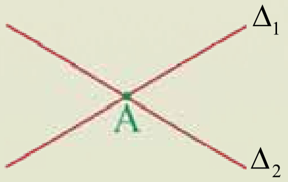
(c) ketabton.com: The Digital Library

په فضا کې موازي مستوي‌ګانې

دوې مستوي‌ګانې چې هيڅ مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستوي‌ګانې بلل کېږي.

فعاليت

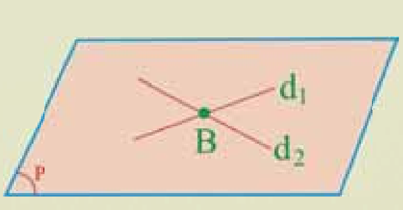
- د Δ_1 او Δ_2 مستقيم خطونه، چې د A په نقطه کې متقاطع دي، په پام کې ونسيئ
- له دې دوو مستقيمو خطونو او د A له نقطې څخه يوه مستوي تېرولی شو.
- له دې مستوي څخه بهر د d_1 او d_2 دوې مستقيمې کرښې چې په ترتيب سره د Δ_1 او Δ_2 سره موازي او يو بل د B په ټکي کې قطع کړي، رسم کړئ.
- هغه مستوي چې د Δ_1 او Δ_2 او د A له نقطې څخه جوړه شوې، له هغې مستوي سره چې د d_1 او d_2 مستقيمو کرښو او د B له ټکي څخه جوړه شوې ده، څه اړيکه لري؟



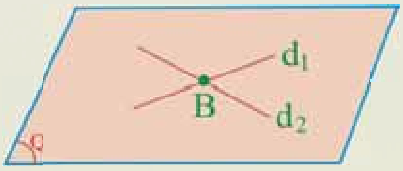
د پورتني فعاليت له تر سره کولو وروسته د قضيې متن او ثبوت بيانولی شو.

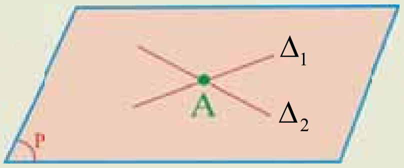
قضيه: که د يوې مستوي دوې متقاطع مستقيمې کرښې د بلې مستوي له متقاطع مستقيمو کرښو سره موازي وي، نوموړې مستوي‌ګانې سره موازي دي.

ثبوت: د Δ_1 او Δ_2 مستقيم خطونه د A په نقطه کې متقاطع دي او يوه د P مستوي جوړوي. د B له نقطې څخه(چې د P مستوي بهر ده) د d_1 او d_2 مستقيم خطونه له Δ_1 او Δ_2 سره موازي رسم شوي دي، چې d_1 او d_2 هم يوه د Q مستوي جوړوي، ثابتوو چې د P او Q مستوي‌ګانې سره موازي دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library





څرنګه چې d_1 او Δ_1 سره موازي دي، نو d_1 د P له مستوي سره هم موازي دي. همدارنګه d_2 له Δ_2 سره موازي دي نو d_2 هم د P له مستوي سره موازي دی. اوس که چیرې د P او Q مستویګانې یو بل سره قطع کړي، مشترک فصل یې هم په همدې وخت کې له d_1 او d_2 سره موازي کیږي، ولې؟

دا امکان نه لري، ځکه چې د d_1 او d_2 مستقیم خطونه متقاطع دي، په نتیجه کې د P او Q مستویګانې یوه بله سره قطع کولای نشي، نو یو بل سره موازي دي.

پوښتنې

که چیرې د E او F مستویګانې سره موازي وي او د L_1 مستقیمه کرښه په E مستوي او د L_2 مستقیمه کرښه د F په مستوي کې پرته وي، آیا $L_1 // L_2$ دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېړ کې مهم ټکي

1- دفضايي هندسې بنسټيز مفاهيم او اکسيومونه:

لومړنی اصطلاحګانې Postulates:

هغه مفاهيم او مفکورې، چې پرته له کوم تعريف څخه منل کيږي، لومړني اصطلاحات بلل کيږي د مثال په توګه. ټکی(نقطه)، کرښه (خط)، مستوي او فضا.

دليل او برهان Logical Reason:

برهان د ذهن هغه عمل ته ويل کيږي چې له يو لړ مخکينيو سمو وړانديزونو او څېړونو څخه و روسته وروستيو څېړنو ته رسېږي او د هغې سموالی مخکې منل شوی وي، موږ هم کولی شو، هغه و منو.

قضيه: Theorem

هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت يولړ منطقي دلايلو ته اړتيا ولري، قضيه بلل کيږي.

ټکی(نقطه): موږ نقطه د يو ذهني مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړنی اصطلاح(تعريف شوې نه ده) په توګه منو.

مستقيم خط: کش شوی تار، د مېز څنډه او د خط کش تيغه د مستقيم خط مفهوم او مطلب بيانوي. مستقيم خط د لومړنی اصطلاح(تعريف شوی نه دی) په ډول منو.

د مستوي لومړی اکسيوم: هغه مستقيم خط چې د يوې مستوي دوې مختلفې نقطې سره ونښلوي، په همغه مستوي کې شامل دی.

د مستوي دويم اکسيوم: له هرو دريو نقطو څخه چې د يوه مستقيم خط په استقامت پرتې نه وي، يوه مستوي تيرېږي.

د متقاطع مستويګانو اکسيوم: که چيرې دوه مستويګانې يو ګډ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چيرې يو مسقيم خط ولري، دغه متقاطع خط ته د دوو مستويګانو مشترک فصل وايي.

فضا: فضا هم(تعريف شوې نه ده) لومړنی اصطلاح په توګه پېژنو.

لومړی اصل: فضا د لايتناهي نقطو مجموعه ده.

دويم اصل: لږتر لږه د فضا څلور داسې نقطې شته چې په يوه مستوي کې واقع نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په درې بُعده فضا کې خط او مستوي:

درې بعدي فضا: هغه فضا چې موږ په کې ژوند کوو درې بعدې فضا ده.

له يو بل سره په فضا کې د دوو مستقيمو خطونو نسبي حالت

موازي

منطبق

متقاطع

متنافر

د يوې مستقيمې کرښې او يوې مستوي نسبي حالت

متقاطع

منطبق

موازي

د دوو مستويگانو نسبي حالت

منطبق

متقاطع

عمود

په فضا کې موازي مستقيمونه:

دوې مستقيمې کرښې چې په يوې مستوي کې واقع او مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستقيمونه بلل کېږي.

په فضا کې د دوو مستقيمونو تر منځ زاويه: په فضا کې دوې متوازي الاضلاع او هم جهته زاويې سره مساوي دي.

په فضا کې موازي مستقيمونه او مستوي: يو مستقيم خط له يوې مستوي سره هغه وخت موازي بلل کېږي، چې هيڅ مشترکه(ګډه)نقطه ونه لري.

په فضا کې متعامد مستقيمونه او مستويګانې:

که د Δ مستقيم د (O) په نقطه کې د P پر مستوي عمود وي، ټول هغه مستقيم خطونه چې د (O) له نقطې څخه تېرېږي، د Δ پر مستقيمه کرښه باندې عمود دي؟

په فضا کې موازي مستوي‌ګانې: دوې مستويګانې، چې هيڅ ګډ ټکی ونه لري، موازي مستوي‌ګانې بلل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي پوښتنې

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا او کړۍ ترې تاو کړئ.

1- د P مستوي د A او B نقطې مفروض دي. که د A او B د نقطو فاصله له p مستوي سره مساوي وي، د P مستوي په هر حال کې:

a _ د AB له خط سره موازي دی   b _ د AB خط يې له منځه تيريږي

c _ د AB خط عمودي ناصف دی   d _ د AB له خط سره موازي دي يا له AB څخه تيريږي

2- که د Δ خط د P د مستوي په ټولو خطونو عمود وي، نو:

a _ د Δ خط د مستوي پر ټولو خطونو عمود دی.

b _ د Δ خط يوازې د P مستوي پر دوو خطونو عمود دی.

c _ د Δ خط د P مستوي له بې شمېره خطونو سره موازي دی.

d _ د Δ خط يوازې د P مستوي له يوه خط سره موازي دی.

3- په دقيق ډول له لاندې کومو اجزاوو څخه يوه مستوي نه تيريږي له:

a _ هغو درې نقطو څخه چې پر يو مسقيم واقع دی.   b _ له دوو متقاطع خطونو څخه

c _ د يو خط او د هغې له خارجي نقطې څخه   d _ څلور متمايزې(مختلفې نقطې)

4- له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې هر وخت سم نه وي.

a _ که د Δ مستقيم خط د P له مستوي سره موازي وي او له هغه خط څخه يوه مستوي تېره کړو، دا مستوي د P له مستوي سره موازي دی.

b _ که د Δ او Δ' دوه خطونه د d له خط سره موازي وي، هغه وخت Δ او Δ' يو له بل سره موازي دي.

c _ که د Δ او Δ' دوه خطونه موازي وي او د P مستوي د Δ خط قطع کړي، د Δ' خط هم قطع کولای شي.

d _ که دوې مختلفې مستوي‌گانې په يوه نقطه کې شريکې وي، نو نوموړې مستوي‌گانې د ياد شوې ټکي په امتداد شريکې دي.

5- د Δ خط د P مستوي قطع کوي، خو د P پر مستوي عمود نه دی. دا خط د P د مستوي په څو خطونو باندې عمود دی؟

a) 0   b) 1   c) 2   d) بې شمېره

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې هر وخت سم نه دي.

a _ که کوم خط د مستوي له خطونو سره موازي وي او متمايز وي، نوموړی خط د هغې له مستوي سره موازي دی.

b _ که يو خط يو له متقاطع مستويگانو څخه قطع کړي، بله هم قطع کوي.

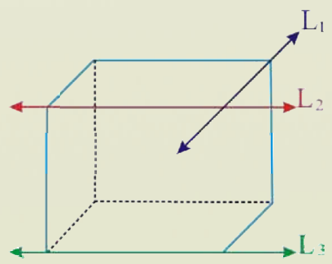
c _ که يو خط يوه له دوو موازي مستويگانو څخه قطع کړي، بله يې هم قطع کوي.

d _ که يوه مستوي يوه له دوو موازي مستويگانو څخه قطع کړي، بله يې هم قطع کوي.

لاندې سوالونه حل کړئ:

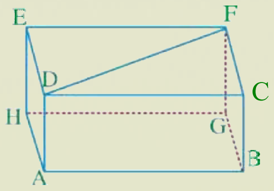
1- که دوه مستقيم خطونه له يوې مستوي سره موازي وي، نوموړي خطونه خپل منځ کې عمود کيدای شي.

2- په لاندې مستطيل کې د L_1, L_2 او L_3 خطونو موقعيت نظر يو بل ته څرگند کړئ. د دې خطونو کومې جوړې متقاطع، کومې جوړې يې موازي او کومې جوړې متنافرې دي؟



3- که د P_1 او P_2 مستوي‌گانې د P پر مستوي باندې عمود وي، د P_1 او P_2 مستويگانې په خپل منځ کې موازي دي؟

4- په مخامخ شکل کې هر څلور ضلعي يو مستطيل دی.



a _ د دوو مستوي‌گانو نومونه واخلئ چې پر AD عمود وي او ووايئ ولې عمود دي؟

b _ د دريو قطعه خطونو، نومونه واخلئ چې پر $ABCD$ مستوي باندې عمود وي.

c _ د $E\hat{D}F$ زاويه قايمه ده.

d _ د $D\hat{F}C$ زاويه قايمه ده.

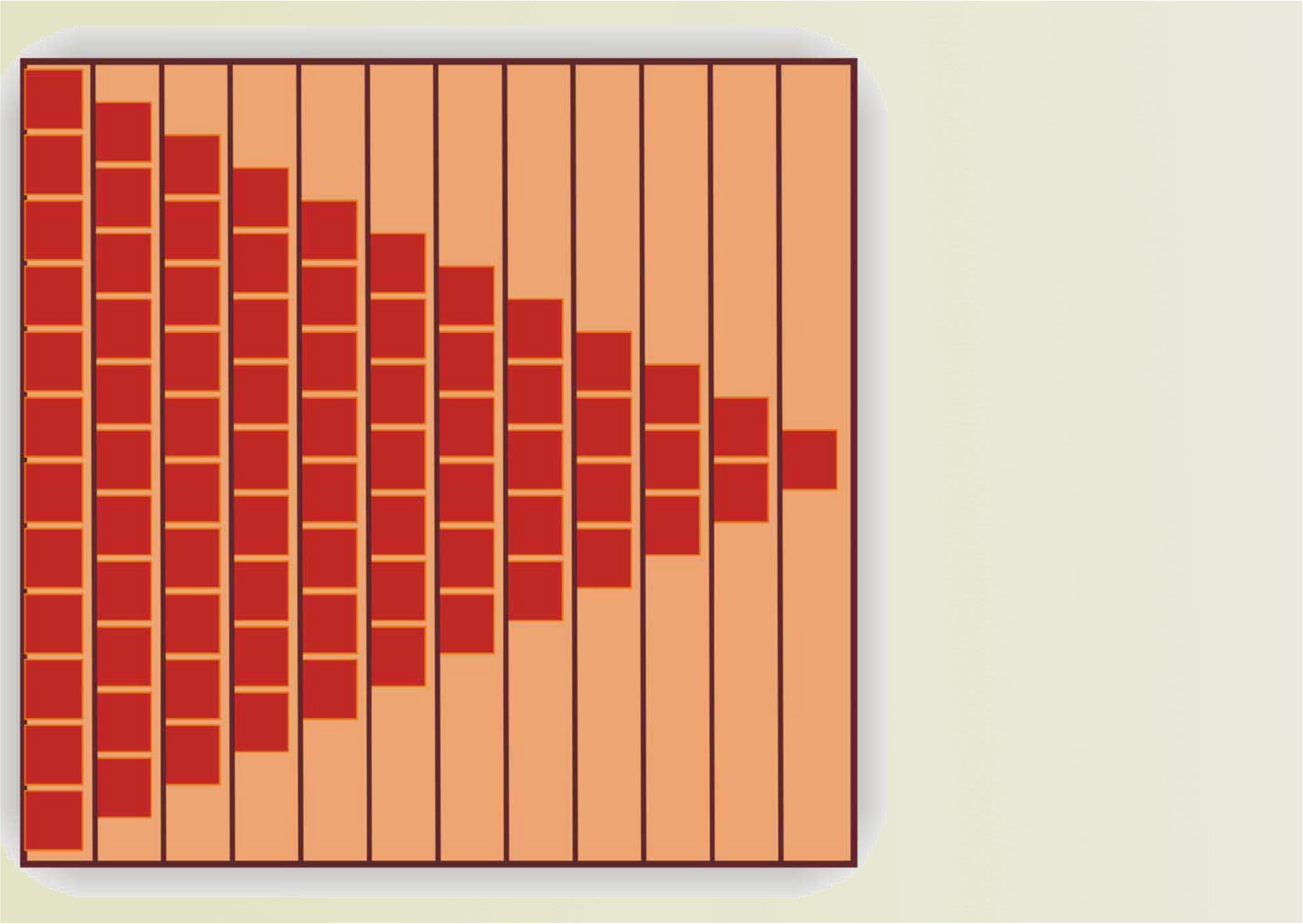
(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم څپرکی

ترادفونه او سلسلې

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library



ترادفونه

Sequence

په مخامخ شکل کې څه ډول ترتیب وینئ.

هر ترتیب چې شتون لري، توضیح یې کړئ.

تعریف: د $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ عددونه د عددونو د ترادف په نامه یادېږي، یا په بل عبارت ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه‌یې طبیعي عددونه او د قیمتونو ناحیه‌یې حقیقي عددونه تشکیلوي. غیر منظم(نامرتب) دعددونو لیکل یو ترادف نه دی.

له پورتنیو عددونوڅخه هر یو د نوموړي ترادف حدونه دی، a_1 یې لومړی حد او a_2 یې دویم حد او a_n دترادف n – ام حد دی، ترادف په لنډ ډول داسې لیکي: $\{a_n\}_{n\in IN}$ په دې حالت کې a_n د ترادف n – ام حد دی.

د جفتو عددونو ترادف	$2,4,6,8, \ldots ,2n$
د طاقو عددونو ترادف	$1,3,5,7, \ldots ,2n-1$
د 5 د مضرب عددونوترادف	$5,10,15,20, \ldots ,5n$

معمولاً یو ترادف د یوه اختیاري n – ام حد په واسطه ټاکل او تعریفېږي؛ مثلاً:

$a_n = 2n \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots$

$b_n = 2n-1 \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots$

$c_n = 5n \quad , \quad n = 1,2,3, \ldots$

فعالیت

- د $\{a_n\} = \{\frac{n+1}{n}\}$ ترادف په پر مختللي(انکشافي) شکل ولیکئ.
- د $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ترادف په پرمختللي(انکشافي) شکل ولیکئ.

هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول زیاتېږي متزاید ترادف بلل کېږي، لکه د جفت، طاق او 5 مضرب عددونوترادفونه.

او هغه ترادف چې د حدونو عددي قیمت یې په تدریجي ډول کمېږي، متناقص ترادف بلل کېږي، لکه: د 5 مضرب عددونو معکوس ترادف $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \ldots, \frac{1}{5n}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $a_n = n^2$ او $b_n = \frac{3}{n}$ ترادفونه متزاید دی، که متناقص؟

حل:

$$a_n = n^2 \quad , \quad n = 1,2,3,\ \dots \quad , \quad a_n = 1,4,9,16,25,36,\ \dots$$

$$b_n = \frac{3}{n} \quad , \quad n = 1,2,3,\ \dots \quad , \quad b_n = 3,\frac{3}{2},1,\frac{3}{4},\frac{3}{5},\ \dots$$

لیدل کېږي چې د a_n د ترادف د حدونو عددي او عددي قیمت په تدریجي ډول زیاتېږي، نو د a_n ترادف متزاید، همدارنګه لیدل کېږي چې د b_n د ترادف د حدونو عددي قیمت په تدریجي ډول کمېږي، نو د b_n ترادف یو متناقص ترادف دی.

یادونه: هغه ترادفونه چې دحدونوشمېر یې معلوم وي معین ترادفونه او هغه ترادفونه چې د حدونو شمېر یې معلوم نه وي، د غیر معینو ترادفونو په نامه یادېږي.

دویم مثال: که د یوه ترادف $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ وروستې حد درکړل شوی وي، 5 لومړنی حدونه یې پیدا کړئ.

حل: د 5 لومړنیو حدونو د پیداکولو لپاره $n = 1,2,3,4,5$ قیمتونه ورکوو او په ترادف کې یې وضع کوو چې په دې ډول د ترادف 5 لومړني عناصر(حدونه) په لاس راځي.

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$$n = 1 \quad , \quad a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \quad , \quad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$n = 3 \quad , \quad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$n = 4 \quad , \quad a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}$$

$$n = 5 \quad , \quad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

پوښتنې

1- په لاندې ترادفونوکې $n-$ام حد وټاکئ؟

$$\left.\begin{array}{l} 1,3,5,7,\ \dots \\ \frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{9},\ \dots \end{array}\right\}$$

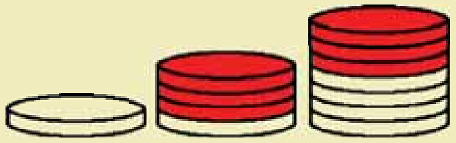
2- که یو ترادف $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ راکړل شوی وي، 6 لومړني پرله پسې حدونه یې ولیکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

حسابي ترادف

Arithmetic Sequences



که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې(متعاقبو) حدونو ترمنځ توپیر یو ثابت عدد وي ،ترادف په څه نوم یادېږي.

فعالیت

- مخامخ عددونه په پام کې ونیسئ $5,8,11,14,17,20$
- د لومړي او وروستي حدونو ترمنځ توپیر څو دی؟
- د پورتنیو عددونو ترتیب له څو حدونو څخه جوړ شوی دی؟
- له بنې څخه کیڼې خوا ته د پورتنیو عددونو ترادف ولیکئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله بیانېږي:

تعریف: که په یوه حسابي ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ توپیر یو ثابت عدد وي، هغه د حسابي ترادف په نوم یادېږي.

دغه ثابت عدد له ګډ توپیر(Common deference's) څخه عبارت دی او په d سره ښودل کېږي که d یو مثبت عدد($d>0$) وي، ترادف متزاید او که d منفي($d<0$) وي، ترادف متناقص بلل کېږي، لکه په لاندې مثالونو کې:

$$2,5,8,11,14,17,\ \ldots$$

$$\left.\begin{aligned} d &= 5-2=3 \\ d &= 8-5=3 \\ d &= 11-8=3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow d=3>0$$

نو ترادف متزاید دی.

$$4,0,-4,-8,-12,-16,-20,\ \dots$$

$$\left.\begin{aligned} d&=0-4=-4\\ d&=-4-0=-4\\ d&=-8-(-4)=-4\\ d&=-12-(-8)=-4\\ d&=-16-(-12)=-4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow d=-4<0$$

ترادف متناقص دی.

لومړی مثال: داسې یو ترادف ولیکئ چې لومړی حد یې $\frac{3}{2}$ اوګډ توپیر یې 2 وي.

حل: څرنګه چې لومړی حد یې $a_1=\frac{3}{2}$ اوګډ توپیر یې $d=2$ دی، نو:

$$a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \dots$$
$$a_2-a_1=d \Rightarrow a_2=a_1+d$$
$$a_3-a_2=d \Rightarrow a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d$$
$$a_4-a_3=d \Rightarrow a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d$$

اوس د $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \dots\ ,a_n$ قیمتونه په ترادف کې وضع کوو:

$$a_1\ ,(a_1+d)\ ,\ (a_1+2d)\ ,\ (a_1+3d),\ \dots$$
$$\frac{3}{2}\ ,(\frac{3}{2}+2)\ ,\ (\frac{3}{2}+2+2)\ ,\ (\frac{3}{2}+2+2+2),\ \dots$$
$$\frac{3}{2},\ \frac{7}{2}\ ,\ \frac{11}{2}\ ,\ \frac{15}{2},\ \dots$$

دویم مثال: کوم یوله لاندې ترادفونو څخه حسابي ترادف دی.

$a)\ 1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4,\ \dots$

$b)\ 1,2,4,8,16,\ \dots$

د a جزء حل: د حسابي ترادف د تعریف په پام کې نیولو سره د حدونو ګډ توپیر په لاس راوړو:

$$1,\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},3,\frac{7}{2},4$$
$$d=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$$
$$d=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

$d = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$

$d = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$

$d = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$

لیدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو حدونو تر منځ ګډ توپیر $\frac{1}{2}$ ثابت عدد دی، نو د حسابي ترادف د تعریف پر بنسټ ویلی شو چې نوموړی ترادف یو حسابي ترادف دی.

د b جزء حل:

$1 \;,\; 2 \;,\; 4 \;,\; 8 \;,\; 16$

$d = 2 - 1 = 1$

$d = 4 - 2 = 2$

$d = 8 - 4 = 4$

$d = 16 - 8 = 8$

لیدل کېږي چې د پورتني ترادف د ټولو عناصرو ترمنځ ګډ توپیر یو ثابت عدد نه دی، نو یاد شوی ترادف حسابي ترادف نه دی.

په یوه حسابي ترادف کې د n-ام حد پیداکول:

که چیرې د یوه حسابي ترادف $a_1, a_2, \ldots, a_n$ لومړی حد په a او ګډ توپیر یې d وي، د n-ام حد د پیداکولو لپاره له لاندې تحلیلي ثبوت څخه ګټه اخلو، ددې کار لپاره د $\ldots\;, 5, 7, 9, 11$ ترادف په پام کې نیسو.

$5, 7, 9, 11, \ldots$

$d = 7 - 5 = 2$

$a_1, a_2, a_3, \ldots$

$a_1, (a_1 + d), (a_1 + 2d), (a_1 + 3d), \ldots$

$5, 5 + 2, 5 + 2 \cdot 2, 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2, \ldots$

$a_1 = 5,\; a_2 = 5 + 2 \cdot 2\;,\; a_3 = 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2, \ldots$

د پورتني مثال په پام کې نیولو سره په عمومي توګه کولای شو ولیکو چې:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = a_1 \\
&a_2 - a_1 = d \Rightarrow a_2 = a_1 + d \\
&a_3 - a_2 = d \Rightarrow a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d \\
&a_4 - a_3 = d \Rightarrow a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d \\
&\vdots \\
&a_n - a_{n-1} = d \Rightarrow a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d
\end{aligned}
$$

لومړی حد	دویم حد	دریم حد	څلورم حد		n-ام حد
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	....	$a+(n-1)d$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
a_1	a_2	a_3	a_4		a_n

په پایله کې په لاس راځي چې د a , d , n او a_n ترمنځ لاندې اړیکه شتون لري:

$$a_n = a + (n-1)d$$

لومړی مثال: د دغه $-2\ ,\ 5\ ,\ 12\ , \ldots$ حسابي ترادف 30-ام حد پیدا کړئ.

حل:

$$
\left.\begin{aligned}
&a_1 = -2 \\
&d = 5-(-2) = 7 \\
&n = 30 \\
&a_{30} = ?
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}
&a_n = a + (n-1)d \\
&a_{30} = -2 + (30-1)7 \\
&a_{30} = -2 + 29\cdot 7 \\
&a_{30} = -2 + 203 \Rightarrow a_{30} = 201
\end{aligned}
$$

دویم مثال: دلاندې حسابي ترادف د حدونو شمېر په لاس راوړئ.

$$35\ ,\ 40\ ,\ 45\ , \ldots ,2000$$

حل: پوهېږو چې:

$$
\left.\begin{aligned}
&a = 35 \\
&d = 40 - 35 = 5 \\
&a_n = 2000 \\
&n = ?
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}
&a_n = a + (n-1)d \\
&2000 = 35 + 5n - 5 \\
&2000 = 30 + 5n \\
&2000 - 30 = 5n \\
&1970 = 5n \Rightarrow n = 394
\end{aligned}
$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- که چیرې په یوه حسابي ترادف کې $d=4, a_1=-11$ وي، a_2 او a_3 حدونه پیداکړئ.

د حسابي ترادف وسطي حد:

که د یوه حسابي ترادف درې پرله پسې حدونه د a_{n-1}, a_n, a_{n+1} ولرو، په داسې حال کې چې $n=2,3,4$ دی.

$$a_{n-1}+a_{n+1}=[a_1+(n-2)d]+[a_1+nd]$$
$$=[a_1+nd-2d]+[a_1+nd]=[a_1+nd-2d+a_1+nd]$$
$$a_{n-1}+a_{n+1}=[2a_1+2nd-2d]=2[a_1+(n-1)d]=2a_n$$
$$\Rightarrow\ 2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}\quad \Rightarrow a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$$

لومړی مثال: د 7 او 23 عددونو حسابي اوسط عبارت دی، له:

$$a_n=\frac{7+23}{2}=\frac{30}{2}=15$$

دویم مثال: د x عدد داسې وټاکئ چې د $\underbrace{2x+1}_{a_{n+1}},\underbrace{2x-4}_{a_n},\underbrace{3x+3}_{a_{n-1}}$ درې حده حسابي ترادف تشکیل کړي، ترادف یې ولیکئ.

$$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}\quad \Rightarrow 2x-4=\frac{3x+3+2x+1}{2}=\frac{5x+4}{2}$$
$$4x-8=5x+4\quad \Rightarrow\ 4x-5x=4+8=12\quad \Rightarrow\ -x=12$$
$$x=-12$$

ترادف یې عبارت دی له: $2(-12)+1\ ,\quad 2(-12)-4\ ,\quad 3(-12)+3$

$$-24+1,\ -24-4,\ -36+3\ \Rightarrow\ -23,\ -28,\ -33,\ -38,\ -43,\ ....$$

یادونه

که د یوه حسابي ترادف n – ام او m – ام حدونه معلوم وي، یعنې:

$$a_n=a+(n-1)d\quad ....\ I$$
$$a_m=a+(m-1)d\quad ....\ II$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د I له اړیکې څخه د II اړیکه کمو، په پایله کې کولای شو ګډ توپیر داسې په لاس راوړو $d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$ (ثبوت یې د زده‌کوونکو دنده ده) چې په یاد شوي فورمول کې d ګډ توپیر، a_n د ترادف $n-$ام حد، a_m د ترادف $m-$ام حد دی.

لومړی مثال: د یوه حسابي ترادف پنځم حد 27 او نهم حد یې 47 دی، ګډ توپیر او لومړی حد یې پیدا کړئ، په پای کې یې ترادف بشپړ کړئ.

$\square, \square, \square, \square, 27, \square, \square, \square, 47$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a_n=47\\ n=9\\ a_m=27\\ m=5\\ d=?\\ a=?\end{array}\right\} \begin{array}{l} d=\frac{a_n-a_m}{n-m}=\frac{47-27}{9-5}=\frac{20}{4}\\ d=5\\ a_n=a+(n-1)d \quad\Rightarrow\quad 47=a+(9-1)5=a+40\\ \Rightarrow\quad 47-40=a \quad\Rightarrow\quad a=7\end{array}$$

ترادف یې عبارت دی له: $7,12,17,22,27,32,37,42,47$

هارمونیکي ترادف: د $\{a_n\}$ یوه ترادف ته هغه وخت هارمونیکي ترادف وایي چې معکوس یې $b_n=\frac{1}{a_n}$ یو حسابي ترادف وي.

لومړی مثال: د $2,4,6,8,10,\ \ldots$ ترادف یو حسابي ترادف دی، ځکه چې $d=2$ دی، د دغه ترادف د حدونو معکوس یعنې $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{10},\ldots$ یو هارمونیکي ترادف تشکیلوي.

دویم مثال: د طبیعي عددونو معکوس ترادف یو هارمونیکي ترادف دی.

$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ \ldots\ ,\frac{1}{n}$

$\{a_n\}=\frac{1}{n}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال : که چیرې په یوه هارمونیکې ترادف کې $a_1 = \frac{1}{4}$ او $d = -3$ وي، هارمونیکې ترادف یې په لاس راوړئ

حل:

$$\frac{1}{4}, (\frac{1}{4}-3), (\frac{1}{4}-3-3), (\frac{1}{4}-3-3-3), (\frac{1}{4}-3-3-3-3), \ldots$$

$$\frac{1}{4}, -\frac{11}{4}, -\frac{23}{4}, -\frac{35}{4}, -\frac{47}{4}, \ldots$$

آیا د طبیعي طاقو عددونو معکوس ترادف یو هارمونیکي ترادف دی، $n-$ ام حد یې ولیکئ.

هارمونیکي حسابي اوسط: که درې مسلسل عناصر a_{n-1} , a_n او a_{n+1} په داسې حال کې چې $n = 2, 3, 4 \ldots$ دی، له یوه حسابي ترادف څخه وټاکل شي، څرنګه چې $\frac{1}{a_{n-1}}, \frac{1}{a_n}$ او $\frac{1}{a_{n+1}}$ د یوه هارمونیک ترادف حدونه دي لرو، چې:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n-1}}}{2} = \frac{\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2} = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2a_{n+1} \cdot a_{n-1}}$$

$$a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

په پایله کې پورتنی اړیکه چې هارمونیک حسابي اوسط ښیې، لیکلای شو:

$$\boxed{a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}}$$

مثال : د 2 او 8 عددونو هارمونیکي اوسط پیدا کړئ.

حل: له $a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$ فارمول څخه په کار اخیستنې سره لرو چې:

$$a_n = \frac{2(2 \cdot 8)}{2+8} = \frac{2 \cdot 16}{10} = \frac{16}{5} = 3.2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د مخامخ ترادف 35 -ام حد پیدا کړئ. $-2 , 5 , 12 , \ldots$

2- آیا $\frac{5}{4} , 1 , \frac{3}{4}$ یو حسابي ترادف تشکیلوي؟ د پوښتنې د سموالی په صورت کې يې مشترك توپير پيدا کړئ.

3- د $2\sqrt{2}$ او $16\sqrt{2}$ تر منځ حسابي اوسط په لاس راوړئ.

4- که $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_{10} = \frac{84}{2}$ وي د d قیمت په لاس راوړئ.

5- له لاندې ترادفونو څخه کوم يو حسابي ترادف نه دی.

$a)\ 2 , \frac{9}{4} , \frac{5}{2} , \frac{11}{4} , \ldots$

$b)\ 3 , 6 , 9 , 12 , \ldots$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

هندسي ترادف

Geometric Sequences

که د شطرنج د يوې تختې په لومړی خانه کې يوه دانه غنم او په دويمه خانه کې يې دوه دانې غنم په همدې ډول که په هره وروستی خانه کې په مخکنی خانې دوه برابره غنم کېښودل شي، نو د شطرنج د تختې په اخيره خانه کې(يوه د شطرنج تخته 64 خانې لري) به څو دانې غنم وي.

فعاليت

- د مخامخ ترادف عددونه په پام کې ونيسئ. $3\ ,\ 6\ ,\ 12\ ,\ 24\ ,\ 48, \dots$
- د پورتني ترادف د عناصرو ترمنځ کومه اړيکه موجوده ده؟
- د پورتني ترادف د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ نسبت پيدا او يو له بل سره يې پرتله کړئ.

له پورتني فعاليت څخه کولای شو لاندې پايله بيان کړو:

پايله

هغه ترادف چې د دوو پر له پسې حدونو ترمنځ نسبت يې يو ثابت عدد q وي، د هندسي ترادف په نامه ياديږي، يعنې:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \cdot q \quad , \ n = 1, 2, 3, \ \dots$$

$$a_{1+1} = a_1 \cdot q \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 q$$

$$a_{2+1} = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$a_{3+1} = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

دلته q ګډ نسبت او a_1 د ترادف لومړی حد دی.

هندسي ترادف هغه وخت پېژندل کېږي چې لومړی حد او ګډ نسبت يې معلوم وي.

لومړی مثال: د $\ldots , 6 , 12 , 24 , 48 , 96$ هندسي ترادف په پام کې ونیسئ ،ګډ نسبت یې په لاس راوړئ.

حل: هر حد یې په مخکیني حد باندي وېشو:

$$96 \rightarrow 48 \rightarrow 24 \rightarrow 12 \rightarrow 6$$

$$q = \frac{48}{96} = \frac{1}{2} \qquad q = \frac{24}{48} = \frac{1}{2} \qquad q = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} \qquad q = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

فعالیت

- په یوه هندسي ترادف کې $a_1 = 2$ او $q = 3$ دی، a_2 , a_3 او a_4 حدونه پیدا کړئ.

یادونه

$q > 1$ لپاره ترادف متزاید دی.

$q < 1$ لپاره ترادف متناقص دی.

$q = 1$ لپاره ثابت ترادف په لاس راځي.

دویم مثال: د $2700 , 900 , 300 , 100 , \ldots$ هندسي ترادف په پام کې ونیسئ لومړی حد او ګډ نسبت یې په لاس راوړئ او وواياست چې پورتنی هندسي ترادف متزاید دی او که متناقص.

حل:

لومړی حد $= a = 2700$

ګډ نسبت $= q = \frac{900}{2700} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

په پورتني مثال کې $q = \frac{1}{3} < 1$ دی، نو نوموړی ترادف متناقص دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هندسي ترادف کې د n – ام حد پیدا کول:

که په یوه هندسي ترادف کې a لومړی حد، q ګډ نسبت او n د ترادف د حدونو شمېر وي،نو د n – ام حد پیدا کولو لپاره له لاندې تحلیلي ثبوت څخه کار اخلو.

که چیرې هندسي ترادف د $a_1, a_2, a_3, a_4,$ .... په پام کې ونیسو، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$a_1 = a_1$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q$$

$$q = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$q = \frac{a_4}{a_3} \Rightarrow a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

$$\vdots$$

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow a_n = a_{n-1} \cdot q = (a_1 q^{n-2}) \cdot q = a_1 q^{n-1}$$

اوس د $a_1, a_2, a_3, a_4,$ .... په ترادف کې یې قیمتونه ږدو:

n - ام حد		څلورم حد	دریم حد	دویم حد	لومړی حد
a_n	, ... ,	a_3	a_3	a_2	a_1
$\downarrow$	, ... ,	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$a_1 q^{n-1}$	, ... ,	$a_1 q^3$	$a_1 q^2$	$a_1 q$	a_1

یعنې په هندسي ترادف کې n – ام حد یا عمومي حد، د دغې اړیکې $a_n = a \cdot q^{n-1}$ په واسطه پیدا کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د لاندې هندسي ترادف شپږم حد پیدا کړئ.

حل: $5\,,\,-10, 20, -40, \ldots\ldots$

$$\left.\begin{array}{l} a=5 \\ q=\dfrac{-10}{5}=-2 \\ n=6 \\ a_6=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_n=aq^{n-1} \\ a_6=5(-2)^{6-1} \\ a_6=5(-2)^5 \Rightarrow a_6=5(-32) \\ a_6=-160 \end{array}$$

دویم مثال: د .... , 2 , 4 , 8 هندسي ترادف دوولسم حد په لاس راوړئ.

حل:

$$\left.\begin{array}{l} n=12 \\ a=8 \\ q=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a_n=aq^{n-1} \\ a_{12}=8(\dfrac{1}{2})^{12-1}=8(\dfrac{1}{2})^{11}=8\dfrac{1}{2^{11}} \\ a_{12}=\dfrac{8}{2^{11}}=\dfrac{2^3}{2^{11}}=2^{3-11}=2^{-8}=\dfrac{1}{2^8}=\dfrac{1}{256} \end{array}\right.$$

د هندسي ترادف وسطي حد:

که a, M, b د هندسي ترادف پر له پسې حدونه وي، د $M,\ a$ او M, b ترمنځ اړیکه پیدا کړئ.

$$\left.\begin{array}{l} q=\dfrac{M}{a} \\ q=\dfrac{b}{M} \end{array}\right\} q=q \Rightarrow \frac{M}{a}=\frac{b}{M} \Rightarrow M^2=a\cdot b$$

$$M=\sqrt{a\cdot b}$$

له پاسني فورمول څخه ویلی شو که چېرې a او b دوه مثبت حقیقي عددونه وي، نو د M حقیقي مثبت عدد ته د a او b هندسي اوسط(Geometric mean) وایي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: د 3 او 12 عددونو هندسي وسط پیداکړئ.

حل:

$$\left.\begin{matrix} a=3 \\ b=12 \end{matrix}\right\} M=\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$$

$$M=6$$

څلورم مثال: د $32, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, 2$ هندسي ترادف نا معلوم حدونه پیداکړئ.

حل:

$$\left.\begin{matrix} a_1=2 \\ n=5 \\ a_5=32 \\ q=? \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} a_5=a\cdot q^{n-1} \Rightarrow 32=2q^{5-1} \Rightarrow 32=2q^4 \\ q^4=\dfrac{32}{2}=16 \Rightarrow q^4=16 \Rightarrow q^4=2^4 \Rightarrow \boxed{q=2} \end{matrix}$$

$$a_1=2$$

$$a_2=a_1\cdot q=2\cdot 2=4$$

$$a_3=a_2\cdot q=a_1q^2=2\cdot 2^2=8$$

$$a_4=a_3\cdot q=a_1\cdot q^3=2\cdot 2^3=16$$

نو هندسي ترادف يې عبارت دی له: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 یا $2,4,8,16,32$

فعالیت

- که په هندسي ترادف کې a_n، n ـ ام حد، n د ترادف د حدونو شمېر او q ګډ نسبت وي، د q لپاره عمومي فورمول پیداکړئ.

لومړی مثال: x داسې وټاکئ چې له لاندې حدونو څخه یو هندسي ترادف جوړ شي.

$$x-1 \;,\; x+3 \;,\; x+1$$

$$M=\sqrt{a\cdot b} \Rightarrow (x+3)=\sqrt{(x-1)(x+1)} \Rightarrow (x+3)^2=(x-1)(x+1)$$

$$x^2+6x+9=x^2-1 \Rightarrow 6x+10=0 \;,\; x=-\frac{10}{6}=-\frac{5}{3}$$

$$x=-\frac{5}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د هندسي ترادف 5 حدونه داسې وليکئ چې لومړی حد يې 5 او اخيري حد يې $\frac{5}{16}$ وي.

2- کوم يو له لاندې ترادفونو څخه هندسي ترادف دی.

$a)\ \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \ldots$

$b)\ -4, -2, 0, 2, 4, \ldots$

3- د $\ldots, \frac{5}{8}, \frac{5}{2}, 5$ هندسي ترادف دوولسم حد پيدا کړئ.

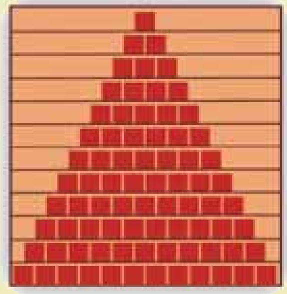
4- د $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{4}$ هندسي وسط په لاس راوړي.

5- د $27, ?, ?, ?, \frac{1}{3}$ حدونو تر منځ درې هندسي وسطونه په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترادفونو قسمي مجموعه



a - په لسم کتار کې د قوطيو شمېر څو دی؟

b - په الماری کې د ټولو قوطيو شمېر پيدا کړئ؟

فعاليت

- د $2, 4, 6, 8, \ldots$ ترادف په پام کې ونيسئ.
- د دويم او دريم حدونو د جمعي حاصل وليکئ.
- د لس لومړيو حدونو د جمعي حاصل پيدا کړئ.
- د n – ام حد د جمعي حاصل وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله بيانېږي:

څرنګه چې د لومړي n حدونو د جمعي حاصل مشکل دی چې ټول n حدونه يې وليکو، نو ځکه يې دوه يا درې لومړي حدونه ليکو او وروسته له دريو ټکو n – ام حد ليکو.

څرنګه چې يو ترادف د بې نهايت حدونو لرونکی دی، که د زياتو حدونو د جمعي حاصل، لکه: 100 , 1000 او داسې نورو حدونو په پام کې وي، نو د جمعي حاصل يې سرخوږي جوړوي.

په عمومي ډول د ترادف n لومړيو حدونو $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ د جمعي حاصل په لاندې ډول ليکو:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

د اسانتيا او لنډيز لپاره په محاسبو کې د $\sum$ له سمبول څخه کار اخلي.

د $\sum$ پورتنی او ښکتنی نښې دا راښيي چې i له 1 څخه تر n پورې ټول تام عددونه اخلي، i د انډکس په نامه يادېږي. د يوې مجموعې د انډکس لپاره هر حرف کارول کېږي، خو د i, n, k, j حروف ډېر معمول دي.

مثلاً: $\sum_{k=1}^{n} 2k = \sum_{i=1}^{n} 2i = \sum_{j=1}^{n} 2j = 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + 2n$

لومړی مثال: لاندې مجموع($\sum_{i=1}^{7}$) په غزيدلي شکل وليکئ.

حل: $\sum_{i=1}^{7}\frac{1}{i}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=\frac{1089}{420}$

دويم مثال: لاندې د جمعې حاصل د مجموعې ($\sum$) په شکل وليکئ.

$a)\ 1+3+5+7+\ \dots\ +(2n-1)$

$b)\ 1+4+9+\ \dots\ +n^2$

د a جزء حل:

$$1+3+5+7+\dots+(2n-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

د b جزء حل:

$$1+4+9+\ \dots\ +n^2=\sum_{i=1}^{n}i^2$$

دريم مثال: لاندې مجموعه په پرمختللي(غزيدلي) شکل وليکئ.

$$\sum_{i=4}^{n}i(i+2)=?$$

حل:

$$\sum_{i=4}^{n}i(i+2)=4(4+2)+5(5+2)+6(6+2)+7(7+2)+\dots+n(n+2)$$
$$=4\cdot6+5\cdot7+6\cdot8+\dots+n(n+2)$$
$$=24+35+48+63+\dots+n(n+2)$$

څلورم مثال: د دغې مجموعې $\sum_{n=7}^{10}\frac{n+1}{n-1}$ حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\sum_{n=7}^{10}\frac{n+1}{n-1}=\frac{7+1}{7-1}+\frac{8+1}{8-1}+\frac{9+1}{9-1}+\frac{10+1}{10-1}=\frac{8}{6}+\frac{9}{7}+\frac{10}{8}+\frac{11}{9}$$
$$=\frac{4032+3888+3780+3696}{3024}=\frac{15396}{3024}=\frac{5132}{108}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تر اوسه مو یوازې د یوه ترادف د n حدونو د جمعې حاصل وڅېړل، که وغواړو د یوه ترادف $\{a_n\}_{n\in IN}$ د ټولو حدونو د جمعې حاصل پیدا کړو، په دې صورت کې لیکو:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}a_i$$

په دې حالت کې i ټول طبیعي عددونه اخېستلای شئ.

د $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ سلسله د بې نهایت سلسلې(Series) په نامه یادېږي.

د $a_1+a_2+a_3+\ldots$ عددونه د سلسلې حدونه او a_n د سلسلې $n-$ام حد یا دسلسلې عمومي حد بلل کېږي.

څرنګه چې موږ نشو کولای، د عددونو بې نهایت شمېر جمع کړو، خویه ریاضي کې د ځینو قاعدو په کارولوسره کولای شو، یوې سلسلې ته دیوي مجموعي نسبت ورکړو، خو دلته غواړو د یوې سلسلې د n حدونو مجموعه پیدا کړو.

د یوې سلسلې د n لومړیو عناصرو مجموعه $\ldots+a_n+\ldots+a_3+a_2+a_1=\sum_{i=1}^{\infty}a_k$ د نومورې سلسلې د n حدونو د قسمي مجموعې په نامه یادېږي، که هغه په S_n وښیو، نو لرو: .

$$S_1=a_1$$
$$S_2=a_1+a_2$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=\sum_{i=1}^{\infty}a_k$$

مثال: د $1+2+3+\ldots+n+\ldots$ سلسلې S_6 او S_8 حساب کړئ.

حل:

$$S_6=1+2+3+4+5+6=21$$
$$S_8=1+2+3+4+5+6+7+8=36$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ او $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ دوې سلسلې او c يو ثابت عدد وي لاندې، خاصيتونه د قسمي مجموعو لپاره سم دي:

$$\sum_{k=1}^{n} c = c + c + \ldots + c = nc$$

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

پوښتنې

1. لاندې مجموعې حساب کړئ.

$a)\ \sum_{i=1}^{6} \sqrt{i}$　　$b)\ 3\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{i+1}$　　$c)\ \sum_{k=1}^{3} (4k^2 - 3k)$

2. لاندې مجموعې د $\sum$ په شکل کې وليکئ.

$a)\ \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{19}{20}$

$b)\ 1 + 4 + 9 + \ldots + n^2$

$c)\ 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1)$

3. لاندې قسمي مجموعې په لاس راوړئ.

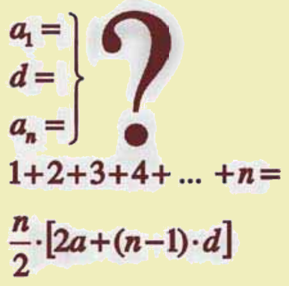
$a)\ \sum_{i=4}^{n} i(i+2)$　　$b)\ \sum_{i=1}^{n} (3i-2)$　　$c)\ \sum_{i=1}^{n} (2+5i)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حسابي ترادف د n لومړيو حدونو قسمي مجموعه

که $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ يو حسابي ترادف وي، نو $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ د يوې حسابي سلسلې قسمي مجموعه کيدلای شي؟



که چيرې ديوه حسابي ترادف د حدونو ترمنځ د جمعې نښه وي، هغې ته حسابي سلسله ويل کېږي. ياپه بل عبارت د يوه حسابي ترادف د جمعې حاصل ته حسابي سلسله وايي.

په يوه حسابي ترادف کې چې لومړی حد يې a ګډ فرق يې d او اخيري حد يې a_n وي، د حدونود جمعې لپاره عمومي فورمول داسې په لاس راوړو:

$$S = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \ldots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \quad \ldots \text{I}$$

$$S = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + (a_n - 3d) + \ldots + (a + 2d) + (a + d) + a \quad \ldots \text{II}$$

د I او II اړيکې خوا په خوا جمع کوو:

$$2S = \underbrace{(a+a_n)+(a+a_n)+(a+a_n)+(a+a_n)+\ldots+(a+a_n)+a+a_n}_{n \text{ ځلې } n(a+a_n)}$$

$$2S = n(a+a_n) \quad \Rightarrow S = \frac{n}{2}(a+a_n) \ldots \text{I}$$

د I فورمول د حسابي سلسلې جمع راښيي چې لومړی حد، اخيري حد اود جملاتو شمېر يې معلوم وي.

لومړی مثال: د حسابي سلسلې د جمعې حاصل په لاس راوړئ، داسې چې $a_n = 25, a = 4$ او د حدونو شمېر یې 8 وي.

حل:

$a = 4$

$a_n = 25 \qquad S = \frac{n}{2}(a + a_n)$

$n = 8 \qquad S = \frac{8}{2}(4 + 25) \Rightarrow S = 4(29) = 116$

که چیرې په یوه حسابي سلسله کې لومړی حد، د حدونو شمېر او ګډ توپیر ورکړل شوی وي، د جمعې حاصل یې له لاندې اړیکې څخه په لاس راځي:

$$S = \frac{n}{2}(a + a_n)$$
$$a_n = a + (n-1)d$$
$$S = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d] \Rightarrow S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \quad \text{......... III}$$

دویم مثال: د لاندې سلسلې د 201 حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

$$7 + 11 + 15 + \ldots$$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a = 7 \\ d = 4 \\ n = 201 \\ S_{201} = ? \end{array}\right\} \begin{array}{l} S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\ S_{201} = \frac{201}{2}[2 \cdot 7 + (201-1)4] \\ S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 200 \cdot 4) \quad \Rightarrow \quad S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 800) = \frac{201}{2} \cdot 814 \\ S_{201} = 81807 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د طبیعي عددونو سلسله په پام کې ونیسئ لومړی حد، ګډ توپیر او $n-$ام حد یې ولیکئ وروسته د مسلسلو طبیعي عددونو د جمعې دحاصل عمومي فورمول په لاس راوړئ.

په یاد ولرئ: د طبیعي جفت پر له پسې عددونو د جمعې حاصل هم یوه حسابي سلسله ده چې فورمول یې په لاندې ډول په لاس راوړو: $2+4+6+8 \ \ldots$

$$\left.\begin{array}{l} a=2 \\ d=2 \\ n=n \\ S_n=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \\ S_n=\frac{n}{2}[2\cdot 2+(n-1)2] \\ S_n=\frac{n}{2}[4+2n-2]=\frac{n}{2}(2+2n) \Rightarrow S_n=n(n+1) \end{array}$$

درېیم مثال: د جفتو پر له پسې عددونو د سلسلې ($2+4+6+8+\ldots$) د 200 حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

حل:

$$\left.\begin{array}{l} n=200 \\ S_{200}=? \end{array}\right\} \begin{array}{l} S_n=n(n+1) \\ S_{200}=200(200+1) \Rightarrow S_{200}=200(201) \\ S_{200}=40200 \end{array}$$

فعالیت

- د طبیعي طاقو پرله پسې عددونو د حسابي سلسلې د جمعې حاصل فورمول پیدا کړئ.

او د طبیعي پرله پسې عددونو د جمعې حاصل د $S=\frac{n}{2}(n+1)$ فورمول په واسطه محاسبه کېږي(د پورته فورمولونو ثبوت د زده‌کوونکو دنده ده).

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. د لاندې حسابي ترادفونو لسم او n – ام حدونه پیدا او همدرانګه د نومړو ترادفونو د لس حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$i)\quad 2,0,-2,-4,\ \ldots$

$ii)\ 1,5,9,13,\ \ldots$

$iii)\ -2,-1,0,1,2,\ \ldots$

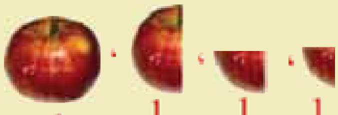
2. که یو ترادف د $2,5,8,11,\ \ldots$ په ډول راکړل شوی وي. د لاندې مجموعو قیمتونه حساب کړئ.

$a)\quad S_8$ $\qquad$ $b)\quad S_{10}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه هندسي ترادف د n حدونو د جمعې حاصل

که چیرې یوه مڼه نیمه او نیمه بیا نیمه او همداسې ادامه ورکړو یو هندسي ترادف په لاس راځي، له لومړی برخې نیولې، څو برخې سره جمع کړو چې د جمعې حاصل مساوي په 2 مڼو شي.



$1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8}$

فعالیت

- یو هندسي ترادف چې لومړی جمله یې a_1 او د دوو پرله پسې جملو ترمنځ نسبت یې مساوي په q راکړل شوی وي، لاندې فعالیت سرته ورسوئ.
- د ترادف دویمه جمله څو ده؟
- که چیرې دو یمه جمله په q کې ضرب شي، دضرب حاصل یې له دریمې جملې سره پرتله کړئ.
- د ترادف د n جملو د جمعې حاصل د فورمول پیدا کولو لپاره څه وړاندیز لرئ؟

پایله:

په یوه هندسي ترادف کې هر راتلونکی حد د مخکیني حد له ضرب څخه په q کې، په لاس راځي. دا خبره د ټولو حدونو لپاره یوه باوري خبره ده، په دې ډول د یوه هندسي ترادف $\{a_n\}$ د n جملو د جمعې د حاصل $(S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n)$ قیمت عبارت دی، له:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad , \quad q \neq 1$$

د پورتنی اړیکې ثبوت کولای شو په اسانی سره په لاس راوړو:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ ... \ + a_1q^{n-1} \quad .... \ I$$

$$S_n \cdot q = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ ... \ + a_1q^{n-1} + a_1q^n \quad .... \ II$$

له I اړیکې څخه د II اړیکه کموو:

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_1q^n = a_1(1-q^n)$$

$$S_n(1-q) = a_1(1-q^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{(1-q)} \quad , \quad q \neq 1$$

پاسنی اړیکه هغه اړیکه ده، چې د هندسي ترادف د n جملو د جمعې حاصل په لاس راکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: په یوه هندسي ترادف کې لومړی حد $a_1 = 2$ او ثابت نسبت $q = \frac{1}{2}$ دی.
د پاسني ترادف 5 لومړی متوالي حدونه او د لسو جملو د جمعې حاصل پیداکړئ.

حل: پوهېږو چې $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ ده، نو:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ q = \frac{1}{2} \\ S = ? \end{array}\right\} \quad a_1 = 2(\frac{1}{2})^0 = 2 \qquad a_4 = 2(\frac{1}{2})^{4-1}$$

$$a_2 = 2(\frac{1}{2}) = 1 \qquad a_4 = 2(\frac{1}{8}) = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = 2(\frac{1}{2})^{3-1} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \qquad a_5 = 2(\frac{1}{2})^4 = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

$$S_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 2 \cdot \frac{1-(\frac{1}{2})^{10}}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_{10} = 2\frac{1-\frac{1}{1024}}{\frac{2-1}{2}} = 2\frac{\frac{1024-1}{1024}}{\frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = 2\frac{\frac{1023}{1024}}{\frac{1}{2}} = \frac{1023}{1024} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4092}{1024} = 3.99609375$$

دویم مثال: د لاندې هندسي ترادف د څو جملو مجموعه 80 کېږي؟

$2, 6, 18, \ldots$

حل:

$$\left.\begin{array}{l} a = 2 \\ q = \frac{6}{2} = 3 \\ n = ? \\ S = 80 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} S = \frac{a(q^n - 1)}{q-1} \\ 80 = \frac{2[(3)^n - 1]}{3-1} \\ 80 = (3)^n - 1 \Rightarrow 80 + 1 = (3)^n \\ 81 = 3^n \Rightarrow (3)^4 = 3^n \\ \Rightarrow n = 4 \end{array}$$

یعنې د پاسني هندسي ترادف د 4 جملو مجموعه 80 کېږي.

پوښتنې

1. په $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$ هندسي ترادف کې د 10 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.
2. د $3, 6, 12, \ldots, 384$ هندسي ترادف د حدونو شمېر او مجموعه پیداکړئ.
3. په $4, 12, 36, \ldots$ ترادف کې د څو جملو د جمعې حاصل 484 کېږي، د n – ام حد قیمت پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لایتناهي هندسي سلسلې

که د ترادف جملو ته په غور پاملرنه وکړو، په اسانۍ لیدل کېږي چې ترادف، جمله په جمله کوچنۍ کېږي.
أیا هر هندسي ترادف یوه عدد ته نږدې کېږي؟

$$S_\infty = \frac{a}{1-q}, |q|<1$$

که چیرې په یوه هندسي سلسله کې $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر يې معلوم نه وي، هغه د متباعدې سلسلې (Divergent series) په نامه یادېږي.

او که چیرې $|q| < 1$ وي، هغه د متقاربې سلسلې (Convergent series) په نامه یادېږي. د متقاربو او متباعدو سلسلو د جمعې حاصل د پیداکولو فورمول:

$$S = a\frac{1-q^n}{1-q} = a\frac{-(q^n-1)}{-(q-1)} = a(\frac{q^n-1}{q-1})$$

که سلسله متباعد $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر بې نهایت وي، یعنې $n \to \infty$ نو پوهېږو چې:

$$S_\infty = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{aq^\infty - a}{q-1} = \frac{\infty - a}{q-1} = \infty \Rightarrow S_\infty = \infty$$

که سلسله متقارب ($|q|<1$) او د جملو شمېر بې نهایت وي، نو $q^n \to 0$ کوي.

$$S = a\cdot\frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_\infty = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a-a\cdot 0}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

یعنې که سلسله متقارب ($|q|<1$) او د جملو شمېر یې بې نهایت وي، د نوموړې سلسلې د جمعې حاصل عبارت دی له: $S_\infty = \dfrac{a}{1-q}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...$ سلسلې د جمعې حاصل محاسبه کړئ.

حل: په دې سلسله کې $a=1$, $q=\frac{1}{2}$ دی، څرنگه چې $|q|=\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}<1$ دی، نو سلسله متقارب ده:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...=\frac{a}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}=2$$

دویم مثال: که په یوه هندسي سلسله کې $a_1=27$ او $q=\frac{1}{3}$ وي، د سلسلې دحدونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې $|q|=\left|\frac{1}{3}\right|=\frac{1}{3}<1$ دی، نو سلسله متقارب ده:

$$a_1+a_2+a_3+\ ...\ =\frac{a}{1-q}$$

$$27+9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...=\frac{27}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{\frac{3-1}{3}}=\frac{27}{\frac{2}{3}}$$

$$27\cdot\frac{3}{2}=\frac{81}{2}=40.5$$

دریم مثال: $0.6\overline{23}$ پیریودیک(متوالي) اعشاري کسر په عام کسر واړوئ.

حل: دا عدد کولای شو په لاندې ډول په هندسي ترادف واړوو.

$$0.6\overline{23}=0.6232323...=0.6+0.023+0.00023+0.0000023+\ ...$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}+\frac{23}{100000}+\frac{23}{10000000}+\ ...$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{10000})+\ ...\ ]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پاسنی سلسله کې $a=1$ او $|q|=\left|\frac{1}{100}\right|=\frac{1}{100}<1$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}[1+\frac{1}{100}+(\frac{1}{100})^2+...]$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}}=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{1}{\frac{99}{100}}$$

$$=\frac{6}{10}+\frac{23}{1000}\cdot\frac{100}{99}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{6}{10}+\frac{23}{990}=\frac{594+23}{990}=\frac{617}{990}\Rightarrow 0.6\overline{23}=\frac{617}{990}$$

څلورم مثال: د $0.\overline{3}$ متوالي اعشاري کسر د هندسي سلسلې په کارولو سره په عام کسر واړوئ.

حل: پوهېږو چې:

$$0.\overline{3}=0.3333\ ...\ =0.3+0.03+0.003+0.0003+\ ...$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\frac{3}{10000}+\ ...$$

$$=\frac{3}{10}[1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ ...\ ]$$

ليدل کېږي چې په پاسنی سلسله کې $a=1$ او $|q|=\left|\frac{1}{10}\right|=\frac{1}{10}<1$ دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$0.\overline{3}=\frac{3}{10}\cdot\frac{a}{1-q}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{10-1}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{\frac{9}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\ 0.\overline{3}=\frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. لاندې هندسي مجموعې په لاس راوړئ.

$i)\ 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots$, $ii)\ 5+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots$

2. لاندې اعشاري پیریودیک(متوالي) کسرونه په عام کسر واړوئ.

$a)\ 0.2\overline{4}$ $b)\ 0.\overline{5}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څلورم څپرکي مهم ټکي

د ترادف تعریف: $a_1, a_2, a_3, \ \dots \ , a_n$ د عددونو د ترادف په نامه یادیږي.

پاسنی هر یوه عدد ته د ترادف حد یا جمله وایي، a_1 د ترادف لومړی حد او a_n د ترادف $n-$ام حد دی

یا په بل عبارت، ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه یې طبیعي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي عددونه تشکیلوي.

حسابي ترادف: که په یوه ترادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ ګډ توپیر یو ثابت عدد وي، نو نوموړی ترادف د حسابي ترادف په نامه یادیږي.

د حسابي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه a_{n+1}, a_n, a_{n-1} ولرو، نو: $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

په حسابي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول $a_n = a + (n-1)d$

هندسي ترادف: هغه ترادف چې د هغه د هر حد او مخکیني حد تر منځ نسبت یو ثابت عدد q وي، د هندسي ترادف په نامه یادیږي، په هندسي ترادف کې د $n-$ام حد فورمول: $a_n = aq^{n-1}$

د هندسي ترادف وسطي حد: که درې پرله پسې حدونه a_{n-1} , a_n , a_{n+1} په داسې حال کې چې $n = 2, 3, 4, \ \dots$ هندسي ترادف حدونه وي، نو د ترادف وسطي حد عبارت له: $a_n = \sqrt{(a_{n+1})(a_{n-1})}$

د ترادفونو قسمي مجموعه: $\sum_{1=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots \ + a_n$ د بې نهایت سلسلې (Series) په نامه یادیږي.

او د $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots +$ د نوموړې $n-$ام سلسلې د جمعي قسمي حاصل دی.

د حسابي ترادف د n لومړیو حدونو قسمي حاصل جمع: $S = \dfrac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

د هندسي ترادف د n لومړیو جملو قسمي حاصل جمع: $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$

بې نهايت هندسي سلسلې: په يوه هندسي سلسله کې که $|q|<1$ وي، سلسله متقارب او د n جملو د جمعې حاصل يې د $\frac{a}{1-q}$ عدد ته نږدې کېږي او قيمت يې د دغه فورمول $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q}$ په واسطه محاسبه او لاسته راځي.

هغه هندسي سلسله چې په هغې کې $|q| \geq 1$ او د حدونو شمېر يې هم بې نهايت وي، سلسله متباعد او د n لومړيو جملو مجموعه يې هم بې نهايت ده، يعنې $S_n = \infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب یې پیدا او له هغه څخه کړۍ تاو کړئ.

1. د $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\ ...$ ترادف $n-$ام حد کوم دی؟

a) $\frac{\sqrt{n}-1}{n}$ b) $\frac{\sqrt{n}+3}{n+2}$ c) $\frac{n}{n-1}$ d) $\frac{n+1}{n}$

2. که $a_n=\frac{3n-1}{2n-1}$ د ترادف $n-$ام حد وي، د دغه ترادف څووم حد $\frac{11}{7}$ دی؟

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

3. د $-9,-5,-1,3,\ ...$ حسابي ترادف دوولسم حد عبارت دی، له:

a) 35 b) 38 c) -35 d) -38

4. د $0.1,0.4,0.7,1,1.3,\ ...$ حسابي ترادف ګډ توپير عبارت دی، له:

a) 0.3 b) 0.1 c) $\frac{2}{3}$ d) $-\frac{2}{3}$

5. د $96,48,24,12,6,\ ...$ هندسي ترادف ګډ نسبت عبارت له:

a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $-\frac{2}{3}$

6. د $5,\frac{5}{2},\frac{5}{4},\frac{5}{8},\frac{5}{16},\ ...$ هندسي ترادف لسم حد عبارت دی، له:

a) $\frac{3}{512}$ b) $\frac{5}{510}$ c) $-\frac{5}{512}$ d) $\frac{5}{512}$

7. د یوه هندسي ترادف د n جملو د جمعې حاصل فورمول عبارت دی، له:

a) $S_n=a\frac{1+q^n}{1-q}$ b) $S=a\frac{q^n-1}{q-1}$

c) $S=a\frac{1+q^n}{1+q}$ d) هیڅ یو

8. په بې نهایت هندسي متقاربو سلسلو کې ګډ نسبت عبارت دی، له:

a) $q=0$ b) $|q|>1$ c) $|q|<1$ d) هیڅ یو

لاندې پوښتنې حل کړئ:

1. څو دوه رقمي طبیعي عددونه لرو چې د ځلورو مضرب وي؟

2. د 21 او 31 ترمنځ په بېل بېل ډول درې حسابي وسطونه ولیکئ. $21, \square, \square, \square, 31$

3. که دیوه حسابي ترادف د لومړی او وروستی جملې مجموعه($a_1 + a_n = 24$) او د n لومړیو جملو مجموعه یې 3720 وي، د نوموړي ترادف د حدونو شمېر وټاکئ؟

4. د لاندې ترادف د 100 جملو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

$$3, 5, 7, 9, 11, \ldots$$

5. که د یوه هندسي ترادف دویمه جمله 6 او اوومه جمله یې 192 وي ،ګډ نسبت یې وټاکئ.

6. د یوه هندسي ترادف د 8 لومړیو جملو د جمعې قسمي حاصل 17 برابره ،د هغه د ځلورو لومړیو جملو دی، د نوموړي ترادف ګډ نسبت حساب کړئ.

7. د لاندې سلسلې د جمعې قسمي حاصل په لاس راوړئ.

$$0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \ldots$$

8. د یوه ناپایه هندسي ترادف لومړی حد 9 او پنځم حد یې $\frac{1}{9}$ دی، د نوموړي ترادف د حدونو د جمعې حاصل پیدا کړئ.

9. د 3 او 96 عددونو تر منځ 4 هندسي وسطونه په بېل بېل ډول ولیکئ.

$$3, \square, \square, \square, \square, 96$$

10. د $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \ldots$ هندسي سلسلې د اته لومړیو حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

11. که $a = 4$ او $d = 3$ وي، هارمونیکي ترادف د $n = 12$ لپاره په لاس راوړئ.

12. لاندې پیریودیک(متوالي) کسرونه په عامو کسرونو واړوئ.

$a)$ $2.\overline{8}$ $\quad$ $b)$ $3.\overline{57}$

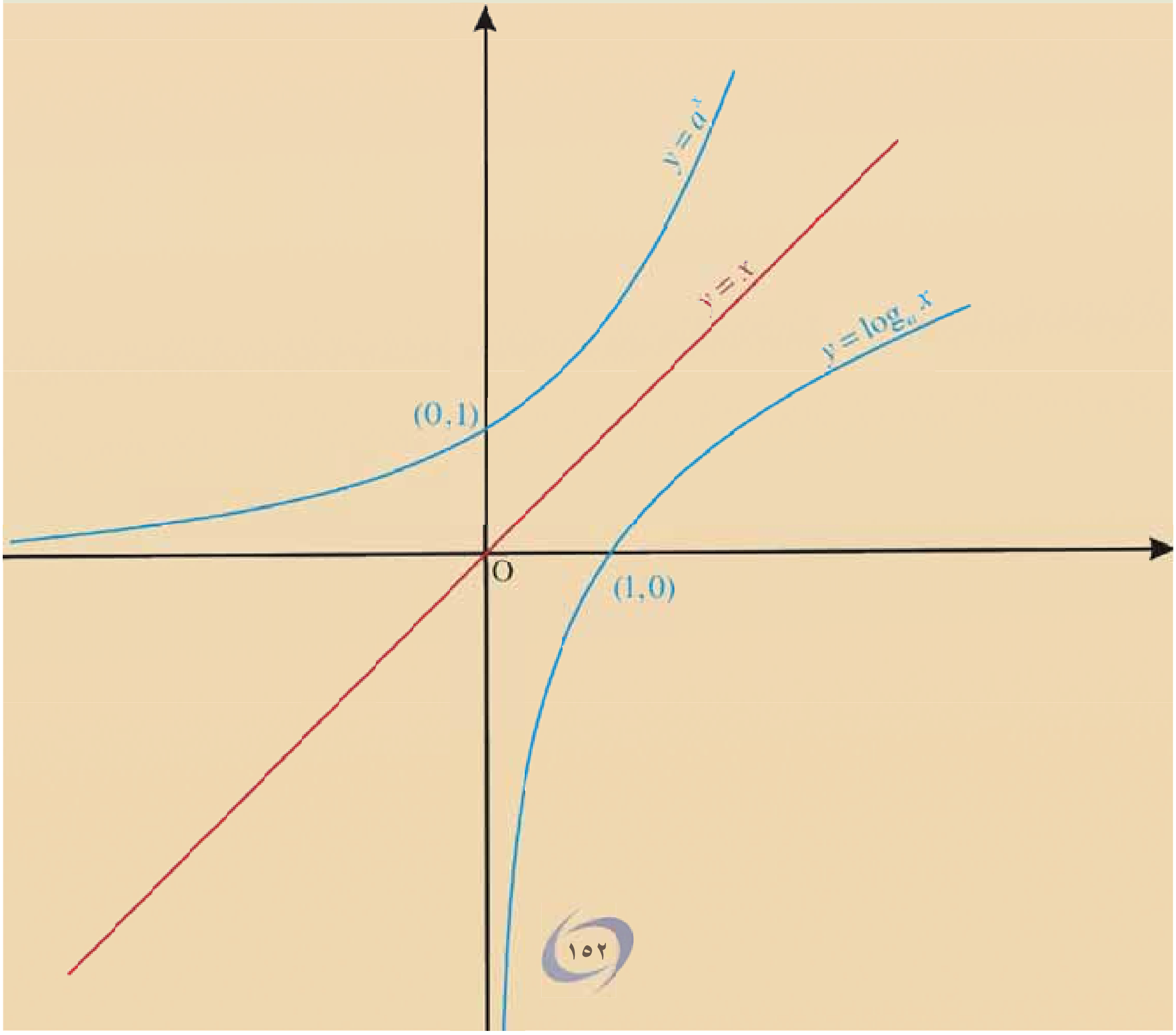
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم څپرکی

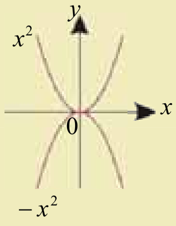
لوګاریتم

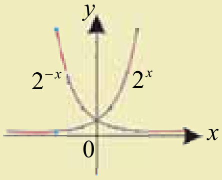
(c) ketabton.com: The Digital Library



اکسپوننشیل تابع گاني

Exponential function





پوهیږئ چې د $f(x)=x^2$ او $f(x)=-x^2$ تابع گانو گرافونه نظرد y محور ته یوله بل سره متناظر دي. آیا تراوسه مو د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تابع گانو د گرافونو په هکله فکر کړی دی؟

تعریف

که چیرې a یو مثبت عدد او $a\neq 1$ وي، نو د $f(x)=a^x$ تابع ته د a په قاعده اکسپوننشیل تابع وایي.

$$a\in IR^+\setminus\{1\} \quad , \quad x\in IR \quad , \quad f:\ IR\to IR^+$$
$$f(x)=a^x$$

$f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ اکسپوننشیل تابع گانې د 2 په قاعده دي.

فعالیت

- د $x\in Z$ مختلفو قیمتونو لپاره د $f(x)=2^x$ تابع گراف رسم کړئ.
- د $f(x)=2^x$ تابع گراف د y محور په کوم ټکي کې قطع کوي؟
- آیا د $f(x)=2^x$ تابع متزایده، متناقصه او که ثابته ده؟ ولې؟

د $f(x)=2^x$ او $f(x)=2^{-x}$ تابع گانوگرافونه دوضعیه کمیاتویه سیستم کې رسم او یوله بله سره یې پرتله کړئ.

- پورتنی فعالیت د $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ تابع لپاره سرته ورسوئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.

د $f(x)=2^x$ تابع قیمت د $x\in Z$ ټولو قیمتونو لپاره همیشه مثبت ده

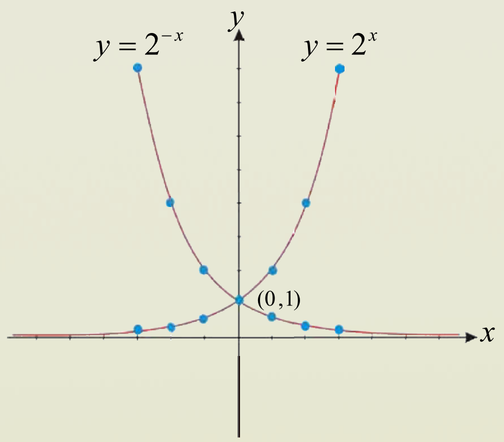
د $y=2^x$ او $y=2^{-x}$ تابع گانو گرافونه نظر y محور ته متناظر دي، یعنې د $y=2^x$ تابع گراف هر ټکی د $y=2^{-x}$ تابع گراف له هر ټکي سره یویه یو متناظر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې په اکسپوننشیل تابع کې $a>1$ وي متزاید، که $a<1$ وي متناقص او که $a=1$ وي ثابته تابع ده.

د $y=2^{-x}$ تابع متزاید ده، ځکه چې $a=2>1$ دی.

د $y=2^{x}$ او $y=2^{-x}$ تابع ګانو ګرافونه رسموو.



د $y=2^{x}$ تابع ګراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

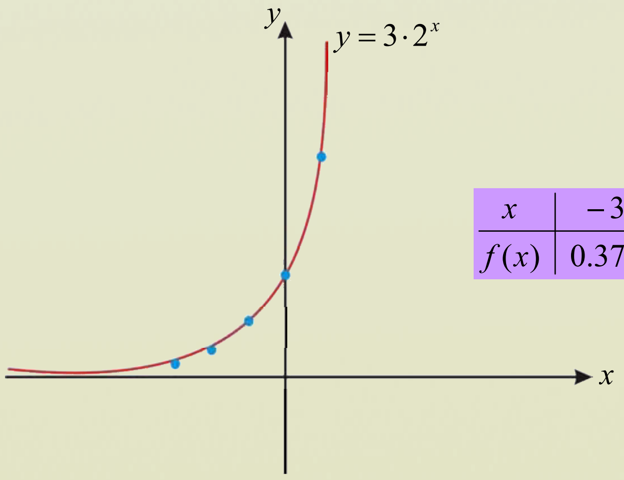
د $y=2^{-x}$ تابع ګراف

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

مثال: د $f(x)=3\cdot 2^{x}$ اکسپوننشیل تابع ګراف رسم کړئ.

حل: د پایلې په پام کې نیولوسره پوهیږو چې د $f(x)=3\cdot 2^{x}$ اکسپوننشیل تابع قاعده $a=2$ ده، نو په دې اساس پورتنی اکسپوننشیل تابع متزایده ده ،ددې لپاره چې د پورتنی اکسپوننشیل تابع ګراف دقیق رسم کړو، نو د x متحول ته مختلف قیمتونه ورکوو د y قیمتونه پیدا او په یوه جدول کې یې لیکو، وروسته دغه ټکی (x او y) د قایمو مختصاتو په سیستم کې په نښه کوو.

چې له نښلولو وروسته یې ګراف رسم کیږي.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.375	0.750	1.5	3	6	12	24

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د $f(x)=a^x$ اکسپوننشیل تابع په پام کې نیولو سره د x او y ټولو حقیقي عددونو لپاره ثبوت کړئ چې:

$$F(x+y)=f(x)\cdot f(y)$$

$$f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)}$$

$$f(a\cdot x)=(f(x))^a$$

د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه: له تیرو معلوماتو څخه په‌ګټه اخیستنې سره د اکسپوننشیل تابع خواص پـه لانـدې ډول بیانوو

1. د هرې اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
2. هره اکسپوننشیل تابع یوپه یو (injective) ده یعنې د هر

$$x_1=x_2 \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$$

$$x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

4. هره اکسپوننشیل تابع د $a>1$ لپاره متزایده او د $a<1$ لپاره متناقصه ده.
5. د هرې اکسپوننشیل تابع ګراف د $(0,1)$ له ټکي څخه تیریږي.
6. د $f(x)=a^x$ او $g(x)=a^{-x}$ اکسپوننشیل تابع ګانو ګرافونه نظر y محورته متناظر پراته دي
7. هره اکسپوننشیل تابع معکوس لري چې معکوسه تـابع یې $Log_a x$ دی او د $f(x)=a^x$ اکسپوننشیل تـابع معکوس تابع $g(x)=a^{-x}$ دی.

پوښتنې

دلاندې اکسپوننشیل تابع گانو گرافونه په قایمو مختصاتوکې رسم کړئ.

$a)$ $f(x) = 2 \cdot 3^{x}$

$b)$ $f(x) = 2 \cdot 3^{-x}$

$c)$ $f(x) = (-2)^{x}$

$d)$ $f(x) = (-2)^{-x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاریتم

Logarithm

آیا کولای شئ چې اکسپوننشیل تابع په بل ډول هم ولیکئ؟

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

فعالیت

لاندې جدول بشپړ کړئ

10000	1000	100	0.01	0.001	0.0001	$y =$ درکړل شوي عددونه
10^4				10^{-3}		$= a^x$ طاقت لرونکي عددونه
		2			-4	$= x$ توان

- د 10^{-3} طاقت لرونکی عدد قاعده او توان څو دي؟
- آیا دیوه عدد قاعده او توان د 1 عدد کیدلای شي؟
- آیا تاسو کولای شئ چې طاقت لرونکی عدد په بل ډول وښایاست؟

د پورتني جدول له بشپړولو وروسته لاندې تعریف کولای شو، بیان کړو.

تعریف: د طاقت لرونکي عدد یوې بیلې ښوونې ته لوګاریتم وایي، یا په بل عبارت د مجهول توان محاسبه د لوګاریتم په نامه یادیږي.

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

په پورتنی اړیکه کې a ته د لوګاریتم قاعده (Base) او y ته لوګاریتمي عدد وایي، د یوه طاقت لرونکی عدد توان له لوګاریتم څخه عبارت دی ،که د قاعدې په اندازه توان لوړشي، را کړل شوی عدد په لاس را کوي.

په تیر جدول کې د 10د قاعدو توانونه درکړل شوو عددونو له لوګاریتم څخه عبارت دي.

د ساري په توګه: $\log_{10} 0.001 = \log_{10} 10^{-3} = -3$

هر مثبت عدد پرته له 1 څخه د لوګاریتم قاعده کیدای شي.

مثال: د لوګاریتم د تعریف په کارولو سره لاندې افادې په معادلو(طاقت لرونکو عددي) افادو واړوئ.

$a)\ \log_2 8 = 3$

$b)\ \log_{10} 1000 = 3$

حل:

$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 8 = 2^3$

$\log_{10} 1000 = 3 \Leftrightarrow 1000 = 10^3$

پوښتني

1. لاندې لوګاریتمي اړیکې د هغوی په اړوندو افادو واړوئ.

$a)\quad \log_{10} N = x$

$b)\quad \log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$

$c)\quad \log_9 81 = 2$

$d)\quad \log_5 5 = 1$

2. لاندې افادې (طاقت لرونکی عددونه) د لوګاریتم په شکل ولیکی

$a)\quad 4^3 = 256$

$b)\quad 2^5 = 32$

$c)\quad 10^4 = 10000$

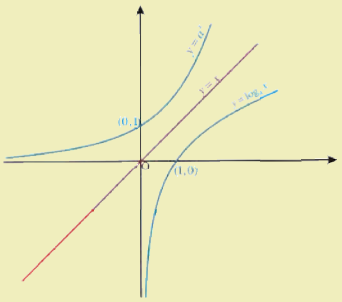
$d)\quad 10^{-1} = 10^y$

$e)\quad y = 2^x$

$f)\quad y = 3^x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاریتمي تابع ګانې



آیا ویلی شي چې کوم ډول تابع ګانې معکوسې تابعګانې لري؟

آیا ویلی شي هغه تابع ګانې چې معکوس لري، په قایمو مختصاتو کې نظر کوم مستقیم خط ته متناظرې دي.

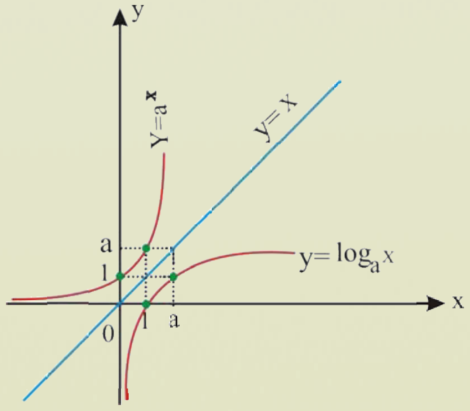
تعریف: د اکسپوننشیل تابع معکوسه تابع د لوګاریتمي تابع په نامه یادیږي او هره اکسپوننشیل تابع لوګاریتمي تابع ده. د یوې ($a \in IR^+$ او $a \neq 1$) اکسپوننشیل تابع، معکوسه تابع د a په قاعده، هغه لوګاریمي تابع ده چې د $\log_a x$ سره ښوول کیږي.

هره لوګاریتمي تابع، معکوسه تابع لري چې د $f(x) = a^x$ او $g(x) = \log_a x$ تابعګانې یو د بل معکوسې تابع-ګانې او ګرافونه یې د $y = x$ مستقیم ته متناظر دي.

$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$

$f^{-1} : IR^+ \to IR, f^{-1}(x) = \log_a x, \ a \in IR^+, \ a \neq 1$

د $f(x) = a^x$ تابع ګراف د $x = 1$ لپاره لاندې شکل لري.



x	0		1		a		$+\infty$
$\log_a x$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې $a>1$ وي، نود $\forall x_1, x_2 \in IR$ لپاره لرو چې:

که $\log_a x_1 > \log_a x_2$ وي؛ نو $x_1 > x_2$ دی.

د $f(x)=a^x$ تابع ګراف د $x=0$ لپاره $\log_a 1 = 0$ $a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$

لومړی مثال: د $y=3^x$ او $y=\log_3 x$ تابعګانو ګرافونه رسم کړئ.

حل: د $y=3^x$ تابع په پام کې نیسو:

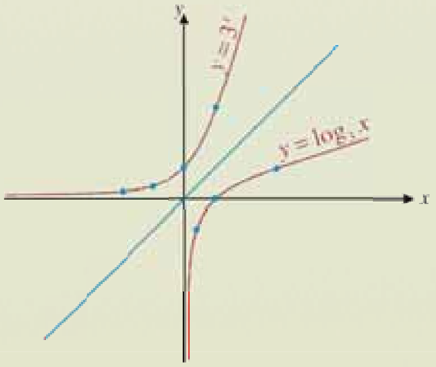
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

اوس $y=\log_3 x$ تابع په پام کې نیسو:

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=\log_3 1 \end{array}\right\} (1,0) \qquad \left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=\log_3 3 \end{array}\right\} (3,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \\ y=\log_3 \frac{1}{3} = y=\log_3 3^{-1} = -1 \end{array}\right\} (\frac{1}{3},-1)$$

x	$\frac{1}{3}$	0	1	3
y	-1	1	0	1



فعالیت

د $y=2^x$ او $y=(\frac{1}{2})^x$ اکسپوننشیل تابعګانو ګراف په پام کې نیولو سره او د اکسپوننشیل تابعګانو د تعریف له مخې ددوی داړوندو معکوسو اکسپوننشیل تابعګانو قیمتونه د $x=1,2$ لپاره پیدا کړئ او نتیجه یې په عمومي ډول ولیکئ.

پایله: د هرې لوګاریتمي تابع لکه $y=\log_a x$ د یوې اختیاري قاعدې لپاره لرو.

$$\log_a 1 = 0 \ , \ \log_a a = 1 \ , \ a \in IR \ , a>0 \ , a \neq 1$$

دویم مثال: که چیرې $f(x)=\log_3 x$ راکړل شوی وي نو $f(3)$, $f(9)$, $f(3^{-2})$, $f(1)$ په لاس راوړي.

حل: په راکړل شوي تابع کې د x پر ځای قیمتونه ایږدو.

$$f(x)=\log_3 x \Rightarrow f(3)=\log_3 3=1$$
$$f(x)=\log_3 x \Rightarrow f(9)=\log_3 9=\log_3 3^2=2\log_3 3=2\cdot 1=2$$
$$f(x)=\log_3 x \Rightarrow f(3^{-2})=\log_3 3^{-2}=-2\cdot\log_3 3=-2\cdot 1=-2$$
$$f(x)=\log_3 x \Rightarrow f(1)=\log_3 1=0$$

دریم مثال: که $\log_3 x=4$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: پورتنی لوګاریتم د طاقت په شکل لیکو $\log_3 x=4 \Leftrightarrow x=3^4 \Rightarrow x=81$

د تیرومعلوماتو په کارو لوسره د لوګاریتمي تابع خاصیت په لاندې ډول بیا نیرو.

د لوګاریتمي تابع خاصیتونه:

1. د لوګاریتمي تابع د قیمتونو ساحه د مثبتو عددونو ، له سټ څخه عبارت ده.
2. څرنګه چې $\log_a 1$ د هرې اختیاري قاعدې لپاره مساوي په صفر ده، نو په دې اساس لوګاریتمي تابع یوازې یو جذر $x_0=1$ لري چې په ترتیب سره د لوګاریتمي تابع ګراف په قایمو مختصاتوکې د $(1,0)$ له ټکي څخه تیریږي.
3. هره لوګاریتمي تابع یو په یو یا انجکتیف (injective) ده یعنې دهر $x_1 \neq x_2$ لپاره تل $f(x_1)\neq f(x_2)$ دی.

د 2 په قاعده لوګاریتم:

د $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمت د $x=16,\frac{1}{8}$ لپاره پیداکړئ.

حل: په راکړل شوی تابع کې د x پرځای قیمتونه وضع کوو چې په پایله کې د تابع قیمت په لاس راځي.

$$f(x)=\log_2 x \Rightarrow f(16)=\log_2 16=\log_2 2^4=4\cdot\log_2 2=4\cdot 1=4$$
$$f(x)=\log_2 x \Rightarrow f(\frac{1}{8})=\log_2(\frac{1}{8})=\log_2 2^{-3}=-3\log_2 2=-3\cdot 1=-3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمت د $x=28,\sqrt{2}$ لپاره په لاس راوړئ.

پوښتنې

1. د $f(x)=\log_2 x$ تابع قیمتونه په $f(2), f(1), f(\frac{1}{32}), f(32)$ کې پیدا کړئ.
2. د $f(x)=\log_3 x$ تابع قیمتونه په $f(1)$ او $f(\frac{1}{81})$ کې په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

معمولي لوګاريتم Common logarithm

طبيعي لوګاريتم Natural logarithm

آيا يوازي 2 او 3 د لوګاريتم قاعدي دي او که نور عددونه هم د لوګاريتم قاعده کېدای شي ؟

$$\left.\begin{array}{l}\log_e N \\ \log_{10} 10^3\end{array}\right\} = ?$$

تعريف

خرنګه چې ومو ليدل، هر مثبت عدد پرته له 1 څخه کېدای شي د لوګاريتم قاعده شي، خوپه عمل کې د 10 او e قاعدې معمول او په کار وړل کيږي.

1 - هغه لوګاريتم چې قاعده يې 10 وي، د معمولي لوګاريتم Common logarithm يا اعشاري (Briggs) لوګاريتم په نامه ياديږي چې د log په سمبول يې ښيي او په لاندې ډول ښودل کيږي.

$$f : IR^+ \longrightarrow IR \ , \ f(x) = \log_{10} x = \log x$$

مثال: د $10^{-1}, 10^3, 10^2, 10^1$ او 10^0 عددونو لوګاريتمونه پيدا کړئ.

حل:

$$\log_{10} 10^0 x = \log 10^0 = y \Leftrightarrow 10^y = 1 \Rightarrow 10^y = 10^0 \Rightarrow y = 0$$

$$\log_{10} 10 = \log 10 \ = y \Leftrightarrow 10^y = 10^1 \Rightarrow y = 1$$

$$\log_{10} 10^2 = \log 10^2 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^2 \Rightarrow y = 2$$

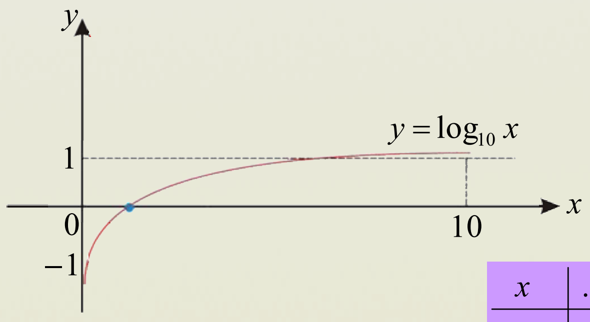
$$\log_{10} 10^3 = \log 10^3 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^3 \Rightarrow y = 3$$

$$\log_{10} 10^{-1} = \log 10^{-1} = y \Leftrightarrow 10^y = 10^{-1} \Rightarrow y = -1$$

$$\vdots$$

$$n \in z \ , \quad \log_{10} 10^n = \log 10^n = y \Leftrightarrow 10^y = 10^n \Rightarrow y = n$$

د x د مختلفو قیمتونو له مخې يې ګراف رسموو



x	$...10^{-3}$	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{1}	10^{2}	10^{3}
$\log x$	$...-3$	-2	-1	0	1	2	3

2 - هغه لوګاریتم چې قاعده يې e وي د طبیعي لوګاریتم(Natural logarithm) په نامه یادیږي او په ln سره ښوول کیږي ، e یو ناطق عدد دی چې تقریبي قیمت يې عبارت دی له: $e=2.718281828\cdots$ چې د $(1+\frac{1}{x})^x$ فورمول څخه هغه وخت چې x بې نهایت ته نږدې شي په لاس راځي د e قیمت پیداکول د لوړو ریاضیاتو کار دی. د e عدد د اویلر عدد په نامه یادیږي او $f(x)=e^x$ تابع د طبیعي اکسپوننشیل تابع په نوم یادیږي او داسې هم لیکي: $Exp(x)=e^x$

د $y=e^x$ تابع ګراف لکه $y=a^x$ تابع ګراف په څیر ده.

د $y=e^x$ په تابع کې x ته مختلف قیمتونه ورکوو:

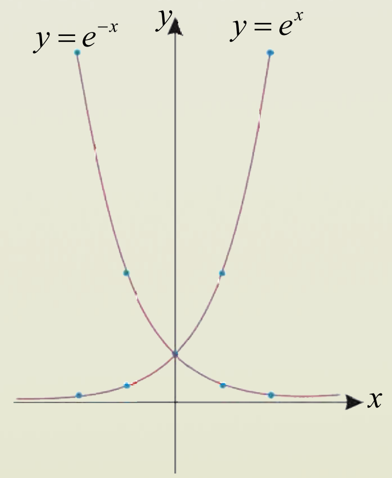
x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{7.3}$	$\frac{1}{2.71}$	1	2.71	7.34

د $y=e^{-x}$ په تابع کې x ته بیلابیل قیمتونه ورکوو:

x	-2	-1	0	1	2
y	7.34	2.71	1	$\frac{1}{2.7}$	$\frac{1}{7.3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورتنيو تقريبي قيمتونو په پام کې نيولو سره د $y=e^{x}$ او $y=e^{-x}$ تابعګانو ګرافونه رسموو:



د طبيعي لوګاريتم مطالعه په لوړو رياضياتوکې لکه ساينس، انجنيري، تجارت او تخنيک کې زيات استعمال لري.

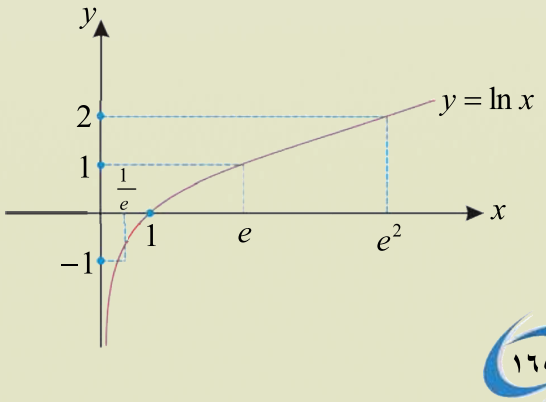
د طبيعي لوګاريتم د تابع $y=\ln x$ ګراف په لاندې ډول دی.

مثال: $\ln e^{-2}$, $\ln e^{-1}$ $\ln e^{0}$, $\ln e^{3}$, $\ln e^{2}$ او $\ln e^{1}$ پيداکړئ.

حل: د تعريف په پام کې نيولو سره لرو چې: $y=\ln x=\log_e x$

$$\ln e^{1}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{1} \Rightarrow y=1$$
$$\ln e^{2}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{2} \Rightarrow y=2$$
$$\ln e^{3}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{3} \Rightarrow y=3$$
$$\ln e^{0}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{0} \Rightarrow y=0$$
$$\ln e^{-1}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{-1} \Rightarrow y=-1$$
$$\ln e^{-2}=y \Leftrightarrow e^{y}=e^{-2} \Rightarrow y=-2$$

د $y=\ln x$ تابع ګراف عبارت دی له:



(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د $y = \ln \frac{1}{e7}$ قیمت پیداکړی او د $\log 0.0001$ قیمت په لاس راوړئ.

پوښتني

لاندې لوګاریمتونه حساب کړئ.

$a)\log_e e^8$ $\qquad$ $b)\ln \frac{1}{e^{-3}}$

$c)\log 0.01$ $\qquad$ $d)\log \frac{1}{10^{-2}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم قوانین

Low of logarithm

پوهیږي چې د عددونو طاقت خپل قوانین لري، آیا د عددونو لوګاریتم هم قوانین لري او که نه؟

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$

$$\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y$$

فعالیت

- د طاقت لرونکو عددونو د ضرب قوانین ولیکئ.
- د طاقت لرونکو عددونو د تقسیم قوانین ولیکئ.
- هر عدد د صفر او یاد یوه په توان مساوي په خودی؟

د طاقت قوانینو ته ورته لوګاریتم هم ځینې قوانین لري

لومړی قانون: د هر عدد لوګاریتم د لوګاریتم د تعریف په ساحه کې په خپله قاعده مساوي په یو دی؛ مثلاً:

$a \in IR,\ a \neq 1, \log_a a = 1$

ثبوت: پوهېږو چې $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\},\ a^1 = a$ دي، نو $\log_a a = 1$

لومړی مثال: $\log_5 5 = 1 \Leftrightarrow 5^1 = 5$

دویم قانون: د 1 عدد لوګاریتم په هره اختیاري قاعده مساوي په صفر دی؛ مثلاً: $\forall a \in IR^+ \setminus \{1\}\ , a^0 = 1$ نو

$\log_a 1 = 0$

دویم مثال: $\log_{\sqrt{5}} 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{5})^0 = 1$

دریم قانون: د دوو یا څوعددونو د حاصل ضرب لوګاریتم د هغو د لوګاریتمونو له مجموع سره مساوي دی یعنې:

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

ثبوت: که چیرې $x = a^p$ او $y = a^q$ ولرو

$x = a^p \quad \ldots \text{I}$

$y = a^q \quad \ldots \text{II}$

د I او II اړیکې خوا په خوا ضربوو: $I \cdot II \Rightarrow x \cdot y = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

د پورتنۍ اړیکې له دواړو خواوې لوګاریتم نیسو: $\log_a(x \cdot y) = p + q$

د p او q قیمتونو په اېښودلو سره لیکو: $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

لومړی مثال: د 50 عدد لوګاریتم په لاس راوړئ.

حل: $\log 50 = \log(5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 = \log 5 + 1$

دویم مثال: $\log_4 2 + \log_4 8 = ?$

حل:

$$\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4(2 \cdot 8) = \log_4(4 \cdot 4)$$
$$= \log_4 4 + \log_4 4 = 1 + 1 = 2$$

فعالیت

- لاندې غیر مساواتو سم والی، د مثال په واسطه وښایاست.

$$\log_a(x + y) \neq \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a(x \cdot y) \neq \log_a x \cdot \log_a y$$

څلورم قانون: د دوو عددونو د تقسیم لوګاریتم د لوګاریتمونو له تفاضل سره مساوي دی، یعني:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

ثبوت: که چیرې $x = a^p$ او $y = a^q$ ولرو:

$$\left.\begin{array}{l} x = a^p \text{..........} \ I \\ y = a^q \text{..........} \ II \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \log_a x = p \\ \log_a y = q \end{array}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا یو په بل ووېشو.

$$\frac{I}{II} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

د پورتنۍ اړیکې له اطراف څخه لوګاریتم نیسو: $\log_a \frac{x}{y} = p - q$

د p او q قیمتونو په اېښودلو سره لیکو: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي مثال: د $\log\frac{5}{2}$ محاسبه کړئ داسې چې $\log 2 = 0.3010,\ \log 5 = 0.6900$ وي.

حل: $\log\frac{5}{2} = \log 5 - \log 2 = 0.6900 - 0.3010 = 0.3980$

دویم مثال: $\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy)$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: څلورم قانون له ښي لوري څخه چپ لوري ته تطبیقوو.

$$\log_y(10y^2x) - \log_y(2xy) = \log_y\frac{10y^2x}{2xy}$$
$$= \log_y(5y) = \log_y y + \log_y 5$$
$$= \log_y 5 + 1$$

پنځم قانون: د یوه توان لرونکي عدد لوګاریتم مساوي دی د توان او د طاقت د قاعدې د لوګاریتم له حاصل ضرب سره یعنې که چیرې $(a^x)^n$ ولرو نو $\log_a x^n = n\log_a x$ دی.

$$\log_a x^n = \log_a(x\cdot x\cdot x\cdot\ \dots\ \cdot x)$$
$$\log_a x^n = \underbrace{\log_a x + \log_a x + \dots + \log_a x}_{lag_a x \text{ خلي } n}$$

په پایله کې $\log_a x^n = n\log_a x$

له پنځم قانون څخه په ګټې اخیستنې سره کولای شو ولیکو.

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a(x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x$$

لومړی مثال: $\log 625 = ?$

حل: $\log 625 = \log 5^4 = 4\log 5 = 4(0.6990) = 2.7960$

دویم مثال: دغه لوګاریتم $\log_3\sqrt[3]{9}$ پیدا کړئ؟

حل: $\log_3\sqrt[3]{9} = \log_3\sqrt[3]{3^2} = \log_3(3)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\log_3 3 = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$

فعالیت

- لاندې لوګاریتمونه پیداکړئ.

$\log_3(0.12) = ?$ $\qquad$ $\log_5\sqrt{8} = ?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. لاندې ضربي افادې د جمعې د حاصل په شکل او دجمعې د حاصل افادې د حاصل ضرب په شکل ولیکئ او د امکان په صورت کې یې وروستی قیمت په لاس راوړئ.

a) $\log_4(5x^2) = ?$

b) $\log_{10}(10x^2y) = ?$

c) $\log_{10} 5 + \log_{10} 20 = ?$

d) $\log_{12} 36 + \log_{12} 4 = ?$

2. لاندې د خارج قسمت افادې په تفاضل او د تفاضل افادې په خارج قسمت واړوئ، د امکان په صورت کې وروستي ځواب په لاس راوړئ.

a) $\log_7 \frac{63}{49} = ?$

b) $\log \frac{125}{80} = ?$

c) $\log_a(x^2a) - \log_a x^2 = ?$

d) $\log_{10} 1000 - \log_{10} 100 = ?$

3. لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

a) $\log_{10}(0.0001)$

b) $\log_2(8)^{-\frac{1}{3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم د یوې قاعدې اړول په بله قاعده

که د یوه عدد لوګاریتم په یوه مشخصه قاعده راکړل شوی وي، خرنګه کولای شو، نوموړی عدد په بله قاعده واړوو.

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

شپږم قانون: په عین قاعده مساوي دی په د دوو عددو نو د تقسیم د حاصل لوګاریتم:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

ثبوت: د $\log_b m = y$ ثبوت لپاره معادل شکل یې لیکو یعنې $m = b^y$ اوس له اطرافو څخه د a په قاعده لوګاریتم نیسو:

$$\log_b m = \log_a b^y \Rightarrow \log_b m = y \log_a b$$

اوس د y قیمت په پورتنۍ اړیکه کې اېږدو:

$$\log_a m = \log_b m \cdot \log_a b$$

د پورتنۍ اړیکې دواړه خواوې په $\log_a b$ ویشو:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \frac{\log_b m \cdot \log_a b}{\log_a b} = \log_b m \Rightarrow \frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

لومړی مثال: $\log_9 27$ محاسبه کړئ.

حل: له شپږم قانون څخه په کار اخیستنې سره لرو:

$$\log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 (3)^3}{\log_3 (3)^2} = \frac{3\log_3 3}{2\log_3 3} = \frac{3\cdot 1}{2\cdot 1} = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: $\log_3 75$ حساب کړئ.

حل: بیا هم د شپږم قانون په کارولو سره لرو چې:

$$\log_3 75 = \frac{\log_5 75}{\log_5 3} = \frac{\log_5 (3\cdot 5^2)}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2\log_5 5}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2}{\log_5 3}$$

یادونه: د یوه عدد معکوس لوګاریتم مساوي دی، د هغه عدد له منفي لوګاریتم څخه چې هغه د کو لوګاریتم (co-logarithem) په نامه یاد یږي.

$$\log_a \frac{1}{M} = -\log_a M = co\log_a M$$

مثال: $\log_2 \frac{1}{32} = ?$

حل: $\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 1 - \log_2 32 = \log_2 1 - \log_2 2^5 = 0 - 5\log_2 2 = -5\cdot 1 = -5$

اووم قانون: د یوه عدد معکوس لوګاریتم مساوي دی په: $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\frac{1}{\log_M a} = x$ نیسو: $\frac{1}{\log_M a} = x \Rightarrow x\log_M a = 1 \Rightarrow \log_M a^x = 1$

د 1 عدد په ځای لیکلی شو چې $\log_M M = 1$

$$\log_M a^x = \log_M M \Rightarrow \log a^x = \log M \Rightarrow a^x = M$$

اوس د دواړو خواوو لوګاریتم نیسو یعنې $\log_a M = x$

په پورتنی اړیکه کې د x په ځای قیمت ایږدو: $\log_a M = x = \frac{1}{\log_M a}$

مثال $\log_{125}\sqrt{5} = ?$

حل: $\log_{125}\sqrt{5} = \log_{125}(5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{125} 5 = \frac{1}{2\log_5 125} = \frac{1}{2\log_5 5^3} = \frac{1}{6\log_5 5} = \frac{1}{6}$

فعالیت

لاندې لوګاریتمونه حساب کړئ.

$\log_{64} 2 = ?$ $\qquad \log_4 \sqrt{25^6} = ?$

اتم قانون: دیوه عدد لوګاریتم په توان لرونکي قاعده مساوي دی په $\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$

ثبوت: د ثبوت لپاره $\log_a x = m$ نیسو او هغه داړوند طاقت په شکل لیکو:

$$\log_a x = m \Rightarrow x = a^m \Rightarrow x = (a^m)^{\frac{n}{n}} \Rightarrow x = (a^n)^{\frac{m}{n}}$$

د پورتنی رابطې د دواړو خواوو څخه لوګاریتم نیسو: $\log_{a^n} x = \frac{m}{n} \Rightarrow \log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د m په ځای قیمت اېږدو:

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$$

له پورتنې قانون څخه لاندې پایلې په لاس راځي

$$1)\ \log_{a^n} x^m = \frac{m}{n}\log_a x \qquad 2)\ \log_{\frac{1}{n}} \frac{1}{x} = \log_n x \qquad 3)\ \log_{a^n} x^n = \log_a x$$

لومړی مثال: $\log_{25} 125 = ?$

حل:

$$\log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2}\log_5 5 = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$$

دويم مثال: $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = ?$

حل:

$$\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{3}}} (27)^2 = \log_{\frac{1}{(3)^{\frac{1}{3}}}} (3^3)^2 = \log_{3^{-\frac{1}{3}}} (3)^6 = \frac{6}{-\frac{1}{3}}\log_3 3 = \frac{6}{1}\left(\frac{3}{-1}\right)\cdot 1 = -18$$

فعالیت

د پورتنيو خاصیتونو په کارولو سره لاندې لوګاریتمونه ساده کړئ.

a) مخامخ لوګاریتم په معکوس ډول ولیکئ. $\log_3 6 = ?$

b) $\log_8 \sqrt[3]{4} = ?$

د معمولي او طبیعي لوګاریتمونو ترمنځ اړیکه: د دغو دوو لوګاریتمونو(اعشاري او طبیعي) په پام کې نیولو سره یعنې د 10 او e عددونه د $\log_a x = \log_b x . \log_a b$ له اړیکې څخه په ګټې اخیستنې چې b, a او x مثبت عددونه او a او b د 1 خلاف دي:

که چیرې $a = e$ او $b = 10$ وضع شي، نو لرو چې:

$$\log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10}$$

$$\log_e x = \log_{10} x \cdot \log_e 10$$

پوهېږو چې $\log_e x = \ln x$ دی، نو:

$$\ln x = \log_e 10 \cdot \log x$$

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې $b = e$ او $a = 10$ وضع شي، نو:

$$\log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e}$$

$$\log_{10} x = \log x = \log_e x \cdot \log_{10} e$$

$$\log x = \log_{10} e \cdot \ln x$$

خرنگه چې $\log_{10} e = 0.4343$ دی، نو لاندې اړیکه لرو:

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

لومړی مثال: د $\ln 4.69$ قیمت په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot \log 4.69$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot 0.6712 = 1.5455$$

دویم مثال: د $\log 6.73$ قیمت پیداکړئ په داسې حال کې چې $\ln 6.73 = 1.9066$ وي.

حل: د تیرې اړیکې په کارولو سره لرو چې:

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

$$\log 6.73 = 0.4343 \cdot \ln 6.73$$

$$= 0.4343 \cdot 1.9066 = 0.8280$$

پوښتني

لاندې لوګاریتمونه ساده کړئ.

$a)\ \log_{\frac{1}{3}} 3^{-4} = ?$ $b)\ \log_9 27 = ?$

$c)\ \log_8 4 = ?$ $d)\ \log_{121} 14641 = ?$

$e)\ \ln 672000$ $f)\ \ln 0.00927$

$g)\ \ln 672000$ $h)\ \ln 0.235$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرکټرستيک او مانتيس

Characteristic and Mantissa

پوهيږو چې:

$\log_{10}1000=3\ ,\ \log_{10}100=2\ ,\ \log_{10}1=0$

دی. آيا ديوه عدد د ارقامو دشمير او لوګاريتم ترمنځ کومه اړيکه شتون لري؟

$$\left.\begin{matrix}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{matrix}\right\}=?$$

تعريف

پوهيږو چې د x هر حقيقي مثبت عدد د $x=S\cdot 10^n$ په شکل ليکل کيدای شي، داسې چې $1\le S<10$ او n يو تام عدد وي.

که چيرې د x لوګاريتم غوښتل شوي وي، په لاندې ډول يې پيداکولای شو.

$$\log x=\log(S\cdot 10^n)=\log S+\log 10^n=\log S+n\log 10=\log S+n$$

د $\log S$ په هغه صورت کې چې $1\le S<10$ وي، S د x د لوګاريتم مانتيس يا اعشاري برخه او n چې يو تام عدد دی، د x د لوګاريتم مشخصه يا کرکټرستيک څخه عبارت دی. څرنګه چې $1\le S<10$ دی نو.

$\log 1\le \log S<\log 10$

$0\le \log S<1$

له پورتني اړيکې څخه داپايله په لاس راځي چې ديوه عدد لوګاريتم د يو او صفر ترمنځ قرار لري.

فعاليت

- لاندې جدول بشپړکړئ.

د عددونو توان لرونکی شکل	$0.001=10^{-3}$	$0.01=10^{-2}$	$1=10^{0}$	$1000=10^{3}$	$4=10^{0.602}$	$7=10^{0.845}$	$10=10^{1}$	$20=10^{1.390}$
د عددونو لوګاريتمي شکل	$\log_{10}0.001$		$\log_{10}1$			$\log_{10}7$		$\log_{10}20$
لوګاريتم	-3	-2		3	0.602		1	

د هغو عددونو لوګاريتمونه چې د 0، 10، 100, 1000، 0.01 د 0.001 عددونو ترمنځ واقع دي، مساوي له څو سره دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

- آیا هر څومره چې عدد لوی شي لوګاریتم یې هم لوئیږي؟
- له 1 څخه د کوچنیو عددونو د لوګاریتم علامه منفي ده، که مثبت؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

- که چیرې $1 \le x < 10$ سره وي، کرکټرستیک یې صفر دی.
- که چیرې $10 \le x < 100$ وي کرکټرستیک یې مساوي له 1 سره دی.
- که چیرې $100 \le x < 1000$ وي، نو کرکټرستیک یې 2 دی.

دیوه عدد په لوګاریتم کې صحیح برخه کرکټرستیک او اعشاري برخه یې مانتیس نومیږي.

هغه وخت چې عدد د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکل شي، د 10د عدد توان له کرکټرستیک څخه عبارت دی.

د عدد لیکنې علمي طریقه Scientific notation

کولای شو هر عدد د 10د توان په څیر ولیکو، لکه: د N عدد داسې لیکو $N = a \cdot 10^n$ چې په دې حالت کې $1 \le a < 10$ او n یو تام عدد دی

لومړی مثال: لاندې عددونه د عدد لیکنې په علمي طریقه ولیکئ.

$a)$ 2573 $b)$ 573216 $c)$ 0.0028

حل :

$a)$ $2573 = 2.373 \cdot 10^3$

$b)$ $573216 = 5.73216 \cdot 10^5$

$c)$ $0.0028 = \dfrac{28}{10000} = \dfrac{28}{10^4} = 28 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10^{-3}$

قاعده: که چیرې دیوه عدد صحیح برخه چې د صفر خلاف وي، نود هغه عدد دلوګاریتم کرکټرستیک مساوي دی، د صحیح برخې د ارقامو په شمیر، منفي یو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $\log 526.9$ کرکټرستیک مساوي له څو سره دی؟

حل: د صحیح ارقامو شمیرله 3 سره برابر دی، نو کرکټرستیک یې $3-1=2$ دی.

او له یوه څخه د کوچنیو عددونو کرکټرستیک منفي علامه لري او قیمت یې د اعشاري د علامې د ښي خوا د صفرونو له شمیر څخه، د یوه په اندازه زیات دی.

دریم مثال: د $\log 0.002$ کرکټرستیک مساوي په څو دی؟

حل:

$$
\begin{aligned}
\log 0.002 &= \log(2\cdot 10^{-3}) \\
&= \log 2 + \log 10^{-3} \\
&= \log 2 - 3\log 10 = \log 2 - 3
\end{aligned}
$$

نو کرکټرستیک یې -3 دی.

له تیرو دوو مثالونو څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د لاندې عددونو کرکټرستیک په لاس راوړو.

لوګاریتمونه		کرکټرستیک
$\log 89435$	$5-1$	4
$\log 56.784$	$2-1$	1
$\log 0.995$	$0-1$	-1
$\log 0.0789$	$-1-1$	-2

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

دلاندې لوګاریتمونو کرکټرستیک په شفاهي ډول وواياست؟

$a)\ \log 0.9560$ $b)\ \log 956.0$

$d)\ \log 2345$ $e)\ \log 3.875$

$c)\ \log 9560$ $f)\ \log 0.0009560$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم جدول

څرنګه چې په تیرلوست کې مو ولوستل چې د یوه عدد لوګاریتم له دوو برخو(کرکټرستیک او مانتیس) څخه تشکیل شوی دی. د مانتیس د پیداکولو لپاره په څه ډول عمل کوئ.

$$\left.\begin{matrix}\log 0.501\\ \log 5.01\\ \log 50.1\\ \log 501\end{matrix}\right\} = ?$$

د مانتیس د پیدا کولو طریقه:

پوهیږو چې هر لوګاریتمي عدد له دوو یعني صحیح او اعشاري برخوڅخه جوړ شوی دی، څرنګه چې صحیح برخه یا مشخصه د خپل عدد د ارقامو له مخې او مانتیس یې د لوګاریتمي جدول له مخې چې مخکې ترتیب شوی، ټاکل کیږي، دغه جدول تر 7،ځینې تر 5 او ځینې یې تر 4 او 3 اعشاري خانو پورې ترتیب شوی چې د مانتیس د پیداکولو لپاره ترې کار اخلي چې د اعشاري تامو عددونو د ارقامو د شمیر په پام کې نیولو سره جدولونه نومول شوي دي. لکه 7 رقمي جدولونه 5، رقمي جدولونه او داسې نور.

د یوه عدد د مانتیس د پیداکولو لپاره د نوموړي عدد ارقام له چپ لوري څخه په پام کې نیول کیږي په دې ډول چې ښي لوری دیوه رقم په استثنا هغه د جدول په داسې ستون کې لټوو چې د ښي خواله رقم سره مطابقت ولري، نو هغه اعشاري عدد چې د سطر او ستون تقاطع وي، له مانتیس څخه عبارت دی.

مثال:

حل:

$$\log 765 = ?$$
$$\log 765 = \log(7.65 \cdot 10^2)$$
$$= \log 7.65 + \log 10^2$$
$$= \log 7.65 + 2$$

مانتیس ← $\log 7.65$ ، کرکټرستیک ← 2

د 2 عدد د کرکټرستیک څخه عبارت دی او دمانتیس د پیداکولو لپاره یعنې $\log 7.65$ په 76 سطر او 5 - ام ستون کې ګورو چې د 8837 عدد سره مطابقت کوي یعنې د نوموړي عدد مانتیس 0.8837 دی چې په حقیقت کې د 765 عدد مانتیس دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
74										
75										
76	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
77										
78										
79										

$$\log 765 = \log 7.65 + 2 = 0.8837 + 2 = 2.8837$$

دویم مثال: $\log 70.9$ په لاس راوړی؟

حل:

$$\log 70.9 = \log(7.09 \cdot 10)$$
$$= \log 7.09 + \log 10^1$$
$$= \log 7.09 + 1$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	**8506**
⋮										
79										
⋮										

د 709 عدد د 9 ستون لاندې لټوو چې له 8506 عدد سره مطابقت کوي یعنې د 7.09 عدد مانتیس 0.8506 دی، په پایله کې یې لوګاریتم داسې حسابوو:

$$\log 70.9 = 0.8506 + 1 = 1.8506$$

دریم مثال: د 0.0247 لوګاریتم حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\log 0.0247 = \log(2.47 \cdot 10^{-2})$$
$$= \log 2.47 + \log 10^{-2}$$
$$= \log 2.47 - 2$$

د 2.47 عدد په 24 – ام سطر او 7 – ام ستون لاندې لټوو چې له 3927 عدد سره مطابقت کوي يعنې د 2.47 عدد مانتيس عبارت دی له: 0.3927 په پايله کې د لوګاريتم حاصل داسې په لاس راوړو:

$$\log 0.0247 = \log 2.24 - 2 = 0.3927 - 2 = \bar{2}.3927$$

يادونه: څرنګه چې مانتيس هميشه مثبت دی، که کرکټرستيک منفي وي او وغواړو دواړه د يوه مثبت عدد په شکل وليکو، نو منفي علامه د کرکټرستيک له پاسه ليکو؛ مثلاً په پورتني مثال کې:

$$0.3927 - 2 = \bar{2}3927$$

فعاليت

- د لوګاريتم د جدول په پام کې نيولو سره 9280 عدد لوګاريتم حساب کړئ.

څلورم مثال: د لاندې جدول په پام کې نيولوسره د $15, 105, 900, \frac{3}{4}, 0.007$ عددونو لوګاريتمونه پيدا کړئ.

عددونه	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
لوګاريتمونه	0.0000	0.30103	0.47712	0.60206	0.69897	0.77815	0.84570	0.90309	0.95424	1.0000

$$\log 15 = (3 \cdot 5) = \log 3 + \log 5 = 0.47712 + 0.69897 = 1.17609$$

$$\log(105) = \log(5 \cdot 3 \cdot 7) = \log 5 + \log 3 + \log 7$$
$$= 0.69897 + 0.47712 + 0.84570$$
$$= 2.02079$$

$$\log(900) = \log(9 \cdot 10^2) = \log 9 + \log 10^2$$
$$= 0.95424 + 2$$
$$= 2.95424$$

$$\log(\frac{3}{4}) = \log 3 - \log 4 = 0.47712 - 0.60206$$
$$= -0.12486$$

$$\log(0.007) = \log(7 \cdot 10^{-3}) = \log 7 + \log 10^{-3} = \bar{3}.84570$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. دلاندې لوګاریتمونو کرکټرستیک په شفاهي ډول ووایاست او مانتیس يې د جدول له مخې پیدا کړئ.

$a)\ \log 222$ $\quad b)\ \log 0.921$

$c)\ \log 928$ $\quad d)\ \log 527$

$e)\ \log 0.024$ $\quad f)\ \log 2400$

$h)\ \log 0.00024$ $\quad j)\ \log 24$

2. د لاندې لوګاریتمونو قیمتونه په لاس راوړئ.

$a)\ \log(2.73)^3$ $\quad b)\ \log\sqrt[5]{0.0762}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتي لوګاريتم

Anti Logarithm

که چيرې د يوه عدد لوګاريتم راکړل شوي وي خرنګه کولای شو، عدد يې پيدا کړو؟

$\log 481 = 2.6821$

$\log N = 1.6580$

$N = ?$

تعريف: که چيرې $\log_a y = x$ وي، نو y د x د لوګاريتم انتي لوګاريتم بلل کيږي يعنې $y = anti\log x$

مثلاً که چيرې $\log 34 = 1.5315$ وي، نود 1.5315 انتي لوګاريتم د 34 له عدد سره مساوي دی.

فعاليت

- که چيرې $\log N = 2.8779$ وي، نو د N عدد و ټاکئ.
- د نوموړي عدد کرکټرستيک پيدا کړئ.
- د مانتيس په جدول کې د 0.8779 عدد له کوم سطر او ستون سره مطابقت لري؟

له پورتني فعاليت څخه کولای شو لاندې پايله بيان کړو:

څرنګه چې د 2 عدد کرکټرستيک دی، نو N يو درې رقمي عدد دی، مانتيس يې په جدول کې له 75 سطر او 5 ستون سره مطابقت لري، نود N عدد عبارت دی له: 755

لومړی مثال: $\log N = 2.9939$ د N عدد په لاس راوړئ.

حل: د نوموړي لوګاريتم د مانتيس برخه يعنې 0.9939 د لوګاريتم په جدول کې پيداکوو، ګورو چې په کوم سطر او ستون کې ځای لري. دغه د سطر او ستون عدد داسې ليکو چې د ستون عدد داړونـد سطر ښي لوري ته قرار ولري چې عبارت دی له 9.86 څخه يعنې د 986 عدد مانتيس 0.9939 دی. په پورتني پوښتنه کې 2 د کرکټرستيک په توګه راکړل شوی، نو د صحيح رقمونو شميرې 3 دی، چې مطلوب عدد عبارت دی له 986 يعنې: $N = 986$

$\log 986 = 2.9939$

$anti\log 2.9939 = 986$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9.5 9.6 9.7 9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939 ↑	0.9943	0.9948	0.9952

دویم مثال: که چیرې $\log N = 0.9791$ وي N په لاس راوړئ.

حل: دلته هم د 9791 عدد په جدول کې پیداکوو، د سطر او ستون اړوند عددونه لکه د تیر په شان لیکو، څرنګه چې 953 مانتیس ښیي چې د مطلوب عدد 953 رقمونه دي څرنګه چې کرکټرسټیک صفر دی، نو مطلوب عدد یعنې N یو صحیح رقم لري چې عبارت دی له:

$N = 9.53$

$\log 9.53 = 0.9791$

$anti\log 0.9791 = 9.53$

دریم مثال: $\log N = -3.0531$ دی، د N عدد پیداکړئ.

په مثال کې لیدل کیږي چې کرکټرسټیک او مانتیس دواړه منفي دي او په جدول کې منفي عدد وجود نه لري، ددې لپاره چې مانتیس مثبت شي، د 1 عدد له مانتیس سره جمع او له کرکټرسټیک څخه یې کموو، په مساواتو کې تغیرنه راځي.

اوس کولای شو د مانتیس 0.9469 په مرسته د N عدد له جدول څخه پیداکړو، چې عبارت دی له 886.

کرکټرسټیک ښیي چې د اعشاري د علامې او له چپې خوا څخه د لومړی 8 عدد تر منځ درې صفرونه ځای لري $N = 0.000885$ نو $anti\log -3.05531 = 0.000885$

څلورم مثال: دلاندې عددونو لوګاریتمونه محاسبه کړئ.

$a)\ 2$ $\quad b)\ 0.2$ $\quad c)\ 0.02$ $\quad d)\ 0.0002$

حل:

$a)\ \log 2 = 0.3010$

$b)\ \log 0.2 = 0.3010 - 1 = \overline{1}.3010$

$c)\ \log 0.02 = 0.3010 - 2 = \overline{2}.3010$

$d)\ \log 0.0002 = 0.3010 - 4 = \overline{4}.3010$

له پورتني مثال څخه دا پایله په لاس راځي چې دیوه عدد د لوګاریتم مانتیس یوازې د رقمونو په ترتیب پورې اړه لري په پورتني مثال کې ټول عددونه یو شان مانتیس 0.3010 لري، ښي او یا چپ لوري ته د صفرونو زیاتول په مانتیس باندې کومه اغیزه نه لري.

پوښتنې

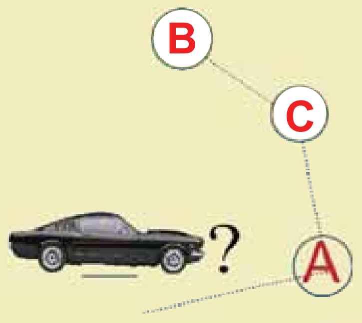
دلاندې هر یوه انتی لوګاریتم قیمت په لاس راوړئ.

$a)\ anti\log 4.9479$ $\quad b)\ anti\log -5.0521$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خطي انټرپولېشن

Linear Interpolation



یوګړندی موټر په متوسط سرعت په 30 دقیقوکې د A ښارته او یونیم ساعت وروسته په همدغه سرعت د B ښارته رسیږي، وواياست چې په همدې ثابت سرعت به نوموړی موټر د C ښار ته چې د A او B ښارونو تر منځ پروت دی، په څومره وخت کې ورسیږي.

فعاليت

- که چیرې $\log A = a$, $\log B = b$ راکړل شوي وي او $\log C = c$ وي، په داسې حال کې چې $A < C < B$ دی.
- $\log C$ د حقیقي عددونو په کومه فاصله کې ځای لري.
- په اټکل ډول وواياست چې که (a, b) یوبل ته نژدې عددونه وي، نود C لوګاریتم چیرې پروت دی؟
- د a او b تر منځ قیمتونه د حسابي وسط له مخې په لاس راوړئ.

پایله: که چیرې دیوه نامعلوم قیمت د پیداکولو لپاره چې ددوو معلومو عددونو تر منځ پروت وي، د معلوموعددونو په مرسته نامعلوم عدد پیدا کړو، په دې صورت کې نوموړې طریقه د خطي انټرپولېشن په نامه یادیږي.

که یو څلور رقمي عددلکه: 1.234 ولرو، نه شوکولای د هغه لوګاریتم له دري رقمي جدول څخه په لاس راوړو، نو د دې ډول عددونو لوګاریتم د خطي انټرپولېشن په واسطه پیداکولای شو.

لومړی مثال: د $\log 5.235$ قیمت په لاس راوړئ.

حل: ښکاره ده چې دنوموړي عدد لوګاریتم په جدول کې نشته، خو د 5.230 او 5.240 عددونو په منځ کې پراته دي چې لوګاریتمونه یې په جدول کې شته، او په لاندې ډول یې په لاس راوړو.

$$\log 5.230 = 0.7185$$
$$\log 5.240 = 0.7193$$

څرنګه چې $5.23 < 5.235 < 5.24$ دی، نو:

$$\log 5.230 < \log 5.235 < \log 5.240$$
$$0.7185 < \log 5.235 < 0.7193$$

که چیرې $\log 5.535 = x$ په پام کې ونیسو ، نو په دې صورت کې لیکو چې: $0.7185 < x < 0.7193$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د عددونو د لوګاریتم او مانتیسو نو ترمنځ تو پیر په پام کې نیسو.

لوګاریتمونه	عددونه
0.7193	5.240
x	5.235
0.7185	5.230

د لوګاریتمونو توپیر 0.0008 ، d ؛ 0.005 ، د عددونو توپیر 0.010

د خطي انټرپولیشن په طریقه کې له دې څلورو عددونو څخه یو تناسب چې یو لـه بـل سـره متناسـب دي جـوړوو او نامعلوم قیمت پیدا کوو یعنې:

$$\frac{d}{0.0008}=\frac{0.005}{0.010}\Rightarrow d=\frac{0.005\cdot 0.0008}{0.010}\Rightarrow d=\frac{0.000004}{0.010}=0.0004$$

اوس د d قیمت د کوچني عددله مانتیس سره جمع کوو. چې حاصل یې د مطلوب عدد لوګاریتم دی.

$$0.0004+0.7185=0.7189$$
$$\log 5.235=0.7189$$

دویم مثال: د 0.0007957 عدد لوګاریتم پیدا کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$\log 0.0007957=\log(7.957\cdot 10^{-4})$$
$$=\log 7.957+\log 10^{-4}$$
$$=\log 7.957-4\log 10$$
$$=\log 7.957-4$$

د 7.957 عـدد لوګـاریتم پـه جـدول کـې نـشته، لیـدل کېـږي چـې کرکټرسـټیک یـې 4 – دی، خـو د 7.96 او 7.95 عددونو لوګاریتم په جدول کې شته.

$$\log 7.960=0.9009$$
$$\log 7.950=0.9004$$

څرنګه چې $7.950<7.957<7.960$ نو:

$$\log 7.950<\log 7.957<\log 7.960$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x = \log 7.957$ په پام کې نیولو سره، دخطي انټرپولیشن پواسطه یې لوګاریتم په لاس راوړو.

	عددونه	لوګاریتمونه	
د عددونو توپیر 0.01	7.96	0.9009	0.0005 د لوګاریتمونو توپیر
0.007	7.957	x	d
	7.950	0.9004	

$$\frac{d}{0.0005} = \frac{0.007}{0.01} \Rightarrow$$

$$d = 0.0005\frac{0.007}{0.01} = 0.00035 \approx 0.0004$$

اوس د d قیمت د کوچني عدد له مانتیس سره جمع کوو:

$$0.9004 + 0.0004 = 0.9008$$

په پای کې په لاس راځي چې:

$$\log 0.0007957 = 0.9008 + (-4) = \bar{4}.9008$$

دریم مثال: 4.5544 عدد انتي لوګاریتم پیدا کړئ.

حل: که چیرې $anti\log 4.5544 = x$ وضع شي، نو باید x پیداکړو، له پورتني اړیکې څخه داسې پایله په لاس راځي.

$$\log x = 4.5544 = 4 + 0.5544$$

$$\log x = \log(t \cdot 10^4) = \log t + 4$$

د 4.5544 عدد په جدول کې نشته، خو د 0.5539 او 0.5551 عددونه په جدول کې شته، انتي‌لوګاریتم یې پیدا کوو، ددغه عددونو په مرسته د x قیمت د انټرپولیشن په طریقه پیدا کوو، د عددونو تفاضل لکه په تیرو مثالونوکې په لاس راوړو او تناسب یې د تیریه شان تشکیلوو.

	عددونه	مانتیسونه	
د عددونو توپیر 0.01	3.59	0.5551	0.0012 د مانتیسونو توپیر
d	t	0.5544	0.0005
	3.58	0.5539	

$$\frac{d}{0.01} = \frac{0.0005}{0.0012}$$

$$d = 0.01 \cdot \frac{0.0005}{0.0012} = \frac{0.000005}{0.0012} = 0.0041667$$

$$d = 0.0042$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د t د قیمت پیدا کولو لپاره د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو.

$$t = 3.58 + d = 3.58 + 0.0042$$
$$= 3.5842$$
$$\log x = \log(3.5842 \cdot 10^4)$$
$$\log x = \log 35842$$

هغه وخت چې دوو عددونو لوګاریتمونه سره مساوي وي، خپله عددونه په خپل منځ کې سره مساوي دي، نو:

$$x = 35842$$

پوښتنې

په لاندې اړیکو کې د x او z قیمتونه پیدا کړئ.

$a)\quad z = \log 0.001582 \qquad b)\quad x = \log 6.289$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتمي او اکسپوننشیل معادلو حل

Exponential and logarithmic equations

$$\log_2(x^2-1)=3$$
$$5^x=5^{\frac{1}{2}x-2}$$

آیا تر اوسه مود $5^x=5^{\frac{1}{2}x-2}$ او $\log_2(x^2-1)=3$ معادلو د حل په اړه فکر کړی دی؟

د x په کومو قیمتونو پورتني مساوات سم دی؟

څرنګه کولای شو په دغه ډول معادلاتو کې د x مجهول قیمت وټاکو.

تعریف

هغه معادلې چې توانونه یې مجهول وي، داکسپوننشیل معادلو په نامه یادیږي، د مجهول د پیداکولو لپاره که چیرې وکړای شو، د دواړو خواوو قاعدې سره مساوي کړو، نو د طاقت د قوانینو له مخې، چې قاعدې مساوي وي، نو توانونه یې هم یو له بل سره مساوي دي.

لومړی مثال: که $2^{x-1}=32$ وي، د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د مساواتو د دواړو خواوو قاعدې سره مساوي کوو.

$$2^{x-1}=32\Rightarrow 2^{x-1}=2^5\Rightarrow x-1=5 \quad , \quad x=6$$

دویم مثال: د $8^{3x-1}=2^4$ اکسپوننشیل معادله حل او وازموئ.

حل:

$$8^{3x-1}=2^4$$
$$(2^3)^{3x-1}=2^{3(3x-1)}=2^4$$

څرنګه چې قاعدې یو له بل سره مساوی دي، نو توانونه یې هم مساوی دي؛ نو لیکو:

$$3(3x-1)=4$$
$$9x-3=4\Rightarrow 9x=4+3$$
$$9x=7\Rightarrow x=\frac{7}{9}$$

آزمونه:

$$8^{3\frac{7}{9}-1} = 2^4$$

$$8^{\frac{7}{3}-1} = 2^4$$

$$8^{\frac{7-3}{3}} = 2^4 \Rightarrow 8^{\frac{4}{3}} = 2^4 \Rightarrow (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 \Rightarrow 2^4 = 2^4$$

فعالیت

- د $16^{x+1} = 64^{x-2}$ اکسپوننشیل معادله کې د x قیمت پیدا کړئ.

لوګاریتمي معادلې:

هغه لوګاریتمي افادې چې په هغوی کې متحول او یا مجهول شتون ولري، د لوګاریتمي معادلو په نامه یادیږي. له یوې لوګاریتمي معادلې څخه د مجهول قیمت پیداکولو لپاره لومړی معادله د لوګاریتم د قوانینو له مخې ساده کوو، وروسته یې د الجبري قوانینو او یا له اکسپوننشیل معادلو څخه په کار اخیستنې سره د مجهول یا متحول قیمت په لاس راوړو.

لاندې مثالونه د لوګاریتمي معادلو بېلګې دي چې د مختلفو قوانینو له مخې د مجهول قیمت محاسبه شوی دی.

لومړی مثال: له لاندې لوګاریتمي معادلې څخه د x قیمت په لاس راوړئ.

حل:

$$\log_2(x^2-1) = 3$$

پورته لوګاریتمي شکل داسې لیکو :

$$x^2 - 1 = 2^3$$

$$x^2 = 1 + 8 = 9$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{9} \quad , \qquad x = \pm 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال:په $\log_3(x+2)=2\log_3 9$ لوګاریتمي معادله کې د x قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$\log_3(x+2)=2\log_3 9$$
$$\log_3(x+2)=\log_3 9^2$$

څرنګه چې د لوګاریتمونو قاعدې سره مساوي دي، نوعددونه هم یوله بل سره مساوي دي.

$$x+2=9^2 \Rightarrow x=81-2$$
$$x=79$$

دریم مثال: په $\log_{\sqrt{5}} x-\log_{\sqrt{5}} 3-\log_{\sqrt{5}} 5+\log_{\sqrt{5}} 4=0$ لوګاریتمي معادله کې د x قیمت په لاس راوړئ.

حل: د دوو عددونو د لوګاریتم د ضرب او وېش په کارولو سره پورتنۍ معادله په لاندې ډول لیکو :

$$\log_{\sqrt{5}} x=\log_{\sqrt{5}} 3+\log_{\sqrt{5}} 5-\log_{\sqrt{5}} 4=\log_{\sqrt{5}}\frac{3\cdot 5}{4}=\log_{\sqrt{5}}\frac{15}{4} \quad\Rightarrow\quad x=\frac{15}{4}$$

څلورم مثال: په $\log_3(3^{2x}+2)=x+1$ معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

حل:

$$\log_3(3^{2x}+2)=x+1\Rightarrow 3^{2x}+2=3^{x+1}$$
$$3^{2x}-3^{x+1}+2=0\Rightarrow 3^{2x}-3\cdot 3^x+2=0$$
$$(3^x)^2-3\cdot 3^x+2=0$$

که $3^x=t$ وضع کړو،نو:

$$t^2-3t+2=0\Rightarrow (t-1)(t-2)=0$$
$$t_1=1 \quad , \quad t_2=2$$

$$3^x=t_1=1\Rightarrow 3^x=3^0\Rightarrow x_1=0$$
$$3^x=t_2=2\Rightarrow \log_3 2=x\Rightarrow x_2=\log_3 2$$

پنځم مثال:په لاندې لوګاریتمي معادله کې د x قیمت محاسبه کړئ.

$$\log(x^2+36)-2\log(-x)=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\log(x^2+36)-\log(-x)^2=1$$

$$\log\frac{x^2+36}{x^2}=\log 10 \Rightarrow \frac{x^2+36}{x^2}=10$$

$$x^2+36=10x^2 \Rightarrow 10x^2-x^2-36=0$$

$$9x^2=36 \Rightarrow x^2=4$$

$$x_{1,2}=\pm 2 \quad , \quad x_1=2 \quad , \quad x_2=-2$$

پوښتنې

په لاندې لوګاریتمي او اکسپوننشیل معادلو کې د x قیمت په لاس راوړئ.

$a)\quad (11)^{3x-1}=11$

$b)\quad 7^{2x-1}=3^{x+3}$

$c)\quad \log\sqrt{x}+3=4$

$d)\quad \log_5\frac{x-1}{x-2}=2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

درياضيکی عمليوپه سرته رسولوکې له لوګاريتم څخه کار اخېستنه

آيا کولای شو د اعشاری عددونو عمليې لکه ضرب، تقسيم، توان او جذر د لوګاريتم په کارولو سره په اسانه سرته ورسوو.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{28.8}{78.8}\\ 3.17\cdot 88.2\end{array}\right\} = ?$$

د ضرب حاصل پيدا کول د لوګاريتم په مرسته: کولای شو دوو يا څو عددونو د ضرب حاصل، د لوګاريتم د لاندې قانون له مخې پيدا کړو: $\log(M\cdot N)=\log M+\log N$

لومړی مثال: غواړو چې د $3.17\cdot 88.2$ عددونو د ضرب حاصل د لوګاريتم په مرسته پيدا کړو.

حل: د ضرب د قانون په اساس ليکلای شو:

$$\log(3.17\cdot 88.2)=\log 3.17+\log 88.2$$
$$=0.5011+1.9455=2.4466$$

ليدل کېږي چې د0.4466 مانتيس عدد په جدول کې نشته، خود 0.4456 او0.4472 مانتيسونو عددونه په جدول کې شته.

له جدول څخه ليدل کېږي چې:

$$anti\log 0.4456=2.79$$
$$anti\log 0.4472=2.80$$

	عددونه	مانتيسونه	
د عددونو توپير 0.01	2.79	0.4456	0.0016 د مانتيسونو توپير
d	t	0.4466	0.0006
	2.80	0.4472	

$$\frac{d}{0.01}=\frac{0.0006}{0.0016}\Rightarrow d=\frac{0.0006\cdot 0.01}{0.0016}=\frac{0.00006}{0.0016}$$
$$d=0.00375$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د d قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو:

$$t = 2.79 + 0.00375 = 2.79375$$

$$\log x = \log(2.79375 \cdot 10^2) \Rightarrow x = 297.375$$

په داسې حال کې چې $anti\log 2.4466 = 297.375$ دی، نو: $3.17 \cdot 88.2 = 297.375$

آیا پوهیږئ؟

ددوو یا څو عددونو د ضرب لپاره لومړی د لوګاریتم د جمعي حاصل پیداکوو ، وروسته یې انتي لوګاریتم په لاس راوړو چې دغه انتي لوګاریتم د نوموړو عددونو د ضرب حاصل تشکیلوي.

فعالیت

- د $74.2 \cdot 62$ د ضرب حاصل د لوګاریتم په واسطه پیداکړئ.

د خارج قسمت پیدا کول د لوګاریتم په مرسته:

کولای شو د لوګاریتم له څلورم قانون څخه په کار اخیستنې سره ، د دوو اعشاري عددونو دتقسیم حاصل په لاس راوړو یعني: $\log\dfrac{M}{N} = \log M - \log N$

مثال: غواړو د $\dfrac{8750}{3.49}$ خارج قسمت د لوګاریتم پواسطه پیداکړو.

حل:

$$\log\frac{8750}{3.49} = \log 8750 - \log 3.49$$

د لوګاریتم له جدول څخه لروچې:

$$\log 8750 = 3.9420$$
$$\log 3.49 = 0.5428$$
$$\log 8750 - \log 3.49 = 3.9420 - 0.5428 = 3.3992$$
$$anti\log 3.3992 = 2507$$
$$\frac{8750}{3.49} = 2507$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: ددوو عددونو د خارج قسمت د حاصل پیداکولو لپاره لومړی دمقسوم له لوګاریتم څخه د مقسوم علیه لوګاریتم کموو، وروسته ددغه تفاوت انتي لوګاریتم په لاس راوړو چی داد مطلوب خارج قسمت حاصل دی.

فعالیت

- د $\frac{374}{16.2}$ حاصل د لوګاریتم په مرسته په لاس راوړئ.

د لوګاریتم په واسطه د توان لرونکي عدد محاسبه:

د هغو توان لرونکوعددونومحاسبه چې توانونه يې تام اویاکسرونه وي، د لوګاریتم له پنځم قانون څخه کار اخلو یعنې $\log M^n = n\log M$

مثال: غواړو چې د $(1.05)^6$ عدد محاسبه کړو.

حل:

$$\log(1.05)^6 = 6\log 1.05 = 6(0.0212)$$
$$= 0.1272$$

بناپردی $anti\log 0.1272 = 1.340$

په لنډ ډول ویلای شوچې: دیوه توان لرونکي عدد قیمت پیداکولو لپاره لومړی د عدد توان په لوګاریتم کې ضربوو، ددغه حاصل ضرب انتي لوګاریتم د توان لرونکي عدد قیمت دی.

فعالیت

- د $(694)^{\frac{2}{3}}$ عدد قیمت د لوګاریتم په واسطه پیداکړئ.

پوښتنې

1. لاندې د ضرب حاصل د لوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$0.097 \cdot 7.78 = ?$$

2. لاندې د تقسیم حاصل د لوګاریتم په واسطه حساب کړئ.

$a)\quad \dfrac{8}{737} = ?$ $\qquad b)\quad \dfrac{32.2}{25.1} = ?$

3. لاندې توان لرونکي عدد دلوګاریتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$(964)^{\frac{2}{3}} = ?$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي مهم ټکي

اکسپوننشیل تابع: که a یو مثبت عدد او $a \neq 1$ وي، نو د $f(x) = a^x$ تابع اکسپوننشیل تابع د a په قاعده نومیږي.

د اکسپوننشیل تابع خاصیتونه:

- د اکسپوننشیل تابع د تعریف ناحیه حقیقي عددونه او دقیمتونو ناحیه یې مثبت حقیقي عددونه دي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د اکسپوننشیل تابع ګراف چې $a \neq 1$ وي، منحني یې د $(0،1)$ له ټکي څخه تیریږي.
- د اکسپوننشیل تابع ګراف نظر y محور ته متناظر واقع دی.
- هره اکسپوننشیل تابع معکوس لري چې معکوس تابع یې $Log_a x$ دی.

لوګاریتمي تابع: $y = \log_a x$ چې د $y = a^x$ اکسپوننشیل تابع معکوس دی، د لوګاریتمي تابع په نامه یادیږي.

دلوګاریتمي تابع خواص

- دلوګاریتمي تابع د قیمتونو ساحه مثبت حقیقي عددونه تشکیلوي.
- د لوګاریتمي تابع ګراف په قایمو مختصاتو کې د $(1،0)$ له ټکي څخه تیریږي.
- د هر $x_1 \neq x_2$ لپاره تابع $f(x_1) \neq f(x_2)$ دی.
- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د هرې لوګاریتمي تابع $f(x) = \log_a x$ مجانب، د y محور دی.

د لوګاریتم قوانین:

- لومړی قانون $\log_a a = 1$
- دویم قانون $\log_a 1 = 0$
- دریم قانون $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$
- خلورم قانون $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- پنځم قانون $\log_a x^n = n \log_a x$
- شپږم قانون $\log_a M = \frac{1}{\log_M a}$
- اووم قانون $\frac{\log_a M}{\log_a b} = \log_b M$
- اتم قانون $\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x$

د لوګاریتم ډولونه:

معمولي لوګاریتم هغه لوګاریتم چې قاعده یې 10 وي، معمولي لوګاریتم یا اعشاري (Brigys) لوګاریتم بلل کیږي چې د (log) په سمبول سره ښودل کیږي.

طبیعي لوګاریتم هغه لوګاریتم چې قاعده یې e وي، د طبیعي لوګاریتم په نامه یادیږي، چې طبیعي لوګاریتم د ln په سمبول ښودل کیږي یعنې $\log_e x = \ln x$

کرکټرستیک او مانتیس

کرکټرستیک که چیرې $\log x = n + \log S$ وي داسې چې $1 \le S < 10$ او n یو تام عدد دی n د مشخصې یا کرکټرستیک په نامه یادیږي چې د عدد د رقمونو له مخې ټاکل کیږي.

مانتیس: د $(\log S)$ اعشاري برخه د مانتیس په نامه یادیږي چې د جدول له مخې ټاکل کیږي، مانتیس یو مثبت عدد د صفر او یوه ترمنځ دی.

انتي لوګاریتم (antilogarithm): که $\log_a y = x$ وي، نو y د x د لوګاریتم انتي لوګاریتم دی یعنې

$$y = anti\log x$$

خطي انټرپولیشن: که یو نامعلوم عدد دوو معلومو عددونو په منځ کې واقع وي او د معلومو عددونو په مرسته نامعلوم عدد پیدا کړو، پدې صورت کې دا طریقه د خطي انټرپولیشن په نامه یادیږي.

اکسپوننشیل او لوګاریتمي معادلې

- **اکسپوننشیل معادلې** هغه معادلې چې په هغې کې د حدونو، توانونه مجهول وي، د اکسپوننشیل معادلې په نامه یادیږي، د مجهول د پیدا کولو لپاره د طاقت له قوانینو څخه ګټه اخلو.
- **لوګاریتمي معادلې** هغه لوګاریتمي مساوات چې په هغوی کې مجهول موجودوي، د لوګاریتمي معادلو په نامه یادیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي پوښتنې

لاندې پوښتنې په غور ولولئ، د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب یې پیدا او له هغه څخه کرۍ تاو کړئ.

1. $\log_{\sqrt{2}}(\frac{1}{4})$ مساوي له څو سره دی؟

a) 4 b) −4 c) 3 d) −3

2. د $\log_b \sqrt[4]{81} = \frac{1}{4}$ اریکه کې د b قیمت عبارت دی له:

a) $\frac{1}{4}$ b) 81 c) $\sqrt{81}$ d) −4

3. د $\log_3 81 - \log 0.01$ افادې قیمت په لاس راوړئ.

a) 0 b) 4 c) 8 d) 9

4. د x قیمت په $\log 81 - \log 2x = \log 3$ افاده کې مساوي له څو سره دی.

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

5. $\log_2 16 = ?$

a) 4 b) 3 c) 5 d) −4

6. $\log_{\frac{1}{5}} 125$

a) 3 b) −3 c) 4 d) 5

7. د $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$ قیمت عبارت دی له :

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) 1 d) −1

8. د x قیمت د $3^{x-1} = 9$ په معادله کې عبارت دی له :

a) $x=-3$ b) $x=9$ c) $x=-9$ d) $x=3$

9. د $\log 234.21$ مشخصه یاکرکټرستیک عبارت دی له:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

10. د یوه عدد دلوګاریتم معکوس عبارت دی له:

a) $\log_a m = \frac{1}{\log_a m}$ b) $\log_a m = -\frac{1}{\log_a m}$ c) $\log_a m = \frac{1}{\log_m a}$ d) هیڅ یو

1. په لاندې معادلوکې د x قیمت پیدا کړئ.

$a)\ 3^x = 3^{3x+2}$ $b)\ 3^{2x} = 9^{4x-1}$

$c)\log_3(x+2) = 2\log_3 9$ $d)\ 16^{x+1} = 64^{x-2}b$

$e) 15^{2x-1} = 7^{x+1}$ $f)\ \log\sqrt{x+1} = 1-\frac{1}{2}\log x$

$g)\log(4x-3) = 2-\log 20$ $h)\ \log_5(x-1)-\log_5(x-2) = \log_5 2$

2- لاندې لوگاریتمي افادې د لوگاریتم د قوانینو په کارولو سره ساده کړئ.

$a)\log_8 3\sqrt{4} = ?$ $b)\log_3 \frac{1}{243} = ?$

$c)\log_{10}\sqrt[4]{100} = ?$ $d)\log(\frac{8}{\sqrt{128}}) = ?$ $e)\ \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$

3. لاندې لوگاریتمونه محاسبه کړئ.

$a)\ \log_8\sqrt[3]{4} = ?$ $b)\ \log_3\frac{1}{243} = ?$

$c)\ \log_{10}\sqrt[4]{100} = ?$ $d)\ \log_{10}\frac{\sqrt[3]{10}}{0.1} = ?$ $e)\ \log\frac{8}{\sqrt{128}} = ?$

4. لاندې انتي لوگاریتمونه پیدا کړئ.

$a)\ 1.7300$ $b)\,0.8954$ $c)\,4.5682$ $d)\,\overline{2}.1987$

5. دلاندې هر عدد لوگاریتم حساب کړئ.

$a)\,89500$ $b)\ 91$ $c)\,3065.3$ $d)\log 0.002$

6. د لوگاریتم په مرسته لاندې حاصل ضرب پیدا کړئ.

$a)\ 2.01\cdot 52.9$ $b)\ (0.0062)(-34.8)$

7. د لاندې تقسیم حاصل د لوگاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)\ 0.888\div 256$ $b)\ 17.3\div 7.47$

8. د لاندې توان لرونکو عددونو قیمتونه د لوگاریتم په مرسته پیدا کړئ.

$a)(7.42)^3$ $b)(-84.7)^2$ $c)\sqrt{418}$ $d)\sqrt{0.21}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوگاریتم جدول چې مانتیس یې څلور اعشاري رقمونه لري

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
3.0	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
3.3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
4.0	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
5.0	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

(c) ketabton.com: The Digital Library

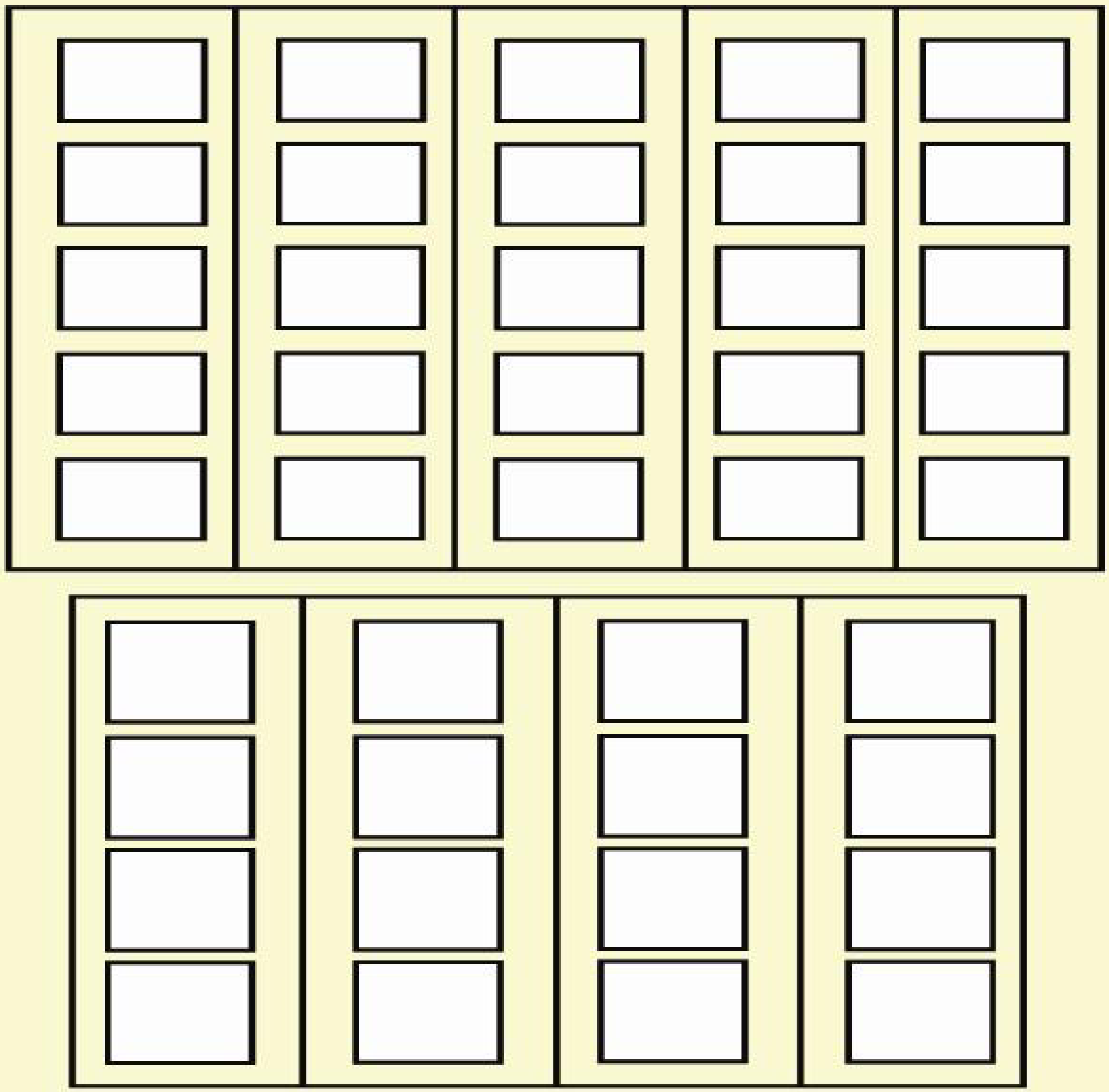
No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
5.7	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
6.0	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
7.0	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی

مټریکسونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

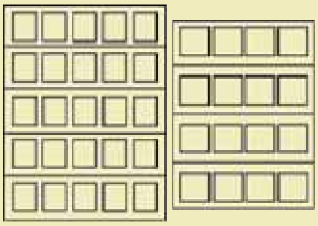


(c) ketabton.com: The Digital Library

متریکسونه

Matrixes

د څو پوړیزې ودانۍ تصویر په پام کې نیسو، هره ودانۍ ځو پوړه لري، په مخامخ شکل کې وینو چې د لویې ودانۍ د کړکیو شمېر $5 \cdot 5 = 25$ دی، د کوچنۍ ودانۍ د هر پوړ کړکۍ وشمېرئ.



فعا لیت

- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د $M(x, y)$ ټکی وټاکئ.
- د M ټکی متناظر یعنې $M'(x', y')$ نظر x محور ته وټاکئ.
- د M او M' مختصاتو تر منځ اړیکې ولیکئ.
- پورتنۍ اړیکې د ضریبو-نو په څېر ولیکئ.
- د پورتني فعالیت ټول مراحل، د p او د هغه متناظر p' ، نظر y محورته S او د هغه متناظر S' نظر د وضعیه کمیاتو مبدأ ته سرته ورسوئ.

د پورتني فعالیت له اجراء څخه وروسته لاندې پایله لیکلای شو:

$$\begin{cases} x = x' \\ -y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x + 0y = x' \\ 0x - 1y = y' \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{M}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \overset{M'}{\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}$$

په دې معنی چې د M ټکی د $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ په واسطه د M' په ټکي بدل او یا اوښتی دی.

پوهېږئ چې هر یو د $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د یوه ټکي ستوني ښوونه ده.

او دغه جدول $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ یوه نوې وسیله ده چې د لومړي ځل لپاره تاسو له هغې سره مخامخ کېږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول: $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ هر يو د p', p او s', s دټکوبدل شوي وسيله ده.

لاندې هرې يوې وسيلې ته (چې دټکود بدلولو د بدليدو دنده په غاړه لري) مټريکس وايي.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

تعريف: د شيانو، عددونو يا تورو ګېډئ چې په سطري او ستوني ډول، په يوه مستطيلي جدول کې ترتيب شي، د مټريکس (Matrix) په نامه يادېږي.

د مستطيلي جدول هر عنصر د مټريکس د عنصر په نامه يادېږي. لوی حروفونه د $A,B,C...$ مټريکس ښيي او واړه حروفونه $a,b,c...$ د مټريکس عناصر دي.

د عددونو هر يولاندی جدول يو مټريکس په ګوته کوي.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ -3 & 7 & 5\\ -4 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$$

لومړی سطر، دويم سطر، دريم سطر

لومړی ستون، دويم ستون، دريم ستون

$$C=\begin{pmatrix}0 & \frac{4}{3} & 7 & -2\end{pmatrix}$$

سطر

که چيرې a د يوه مټريکس په $i-$ام سطر او $j-$ام ستون کې ځای ولري، هغه د a_{ij} په شکل ښوول کېږي چې i او j طبيعي عددونه دي، په ترتيب سره د سطر او ستون له شمېر څخه ښکارندويي کوي.

$$i=1,2,3... \ , \ j=1,2,3...$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}...a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}...a_{2n}\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}...a_{mn}\end{pmatrix}$$

د متریکس مرتبه: که د A د متریکس د سطرونو شمېر m او د ستونونو شمېر يې n وي، وايو چې د A متریکس مرتبه د $m \times n$ څخه عبارت دی اوداسې ویل کېږي m په n کې متریکس او لیکو $A=(a_{ij})_{m\times n}$ د هر متریکس د سطرونو او ستونونو شمېر د همغه متریکس مرتبه ښيي.

فعالیت

- د لاندې متریکسونو مرتبه وټاکئ.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

پاملرنه وکړئ، هغه متریکس چې یو سطر او یو ستون لري یعنې $A=(X)_{1\times1}$، نو د A متریکس د هغه له داخلي عدد سره مساوي دی. $A=(7)_{1\times1}=7$

مثال: لاندې متریکسونه د مستطیلي جدول په ډول ولیکئ.

$a)\quad (a_{ij})_{2\times2}=(i+j)_{2\times2}$ $\qquad b)\quad (a_{ij})_{3\times2}=(i\cdot j)_{3\times2}$

حل: د پورتني هر مثال د حل لپاره لومړی د متریکس عمومي شکل لیکو، د a جزء د متریکس عمومي شکل 2×2 کې یو متریکس دی.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}=i+j$

$a_{11}=1+1=2\ ,\ a_{12}=1+2=3\ ,\ a_{21}=2+1=3\ ,\ a_{22}=2+2=4$

په پایله کې غوښتل شوی متریکس عبارت دی له: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

د b جزء): د b جزء د متریکس عمومي شکل یو (3×2) کې متریکس دی، یعنې 3 سطره او 2 ستونه لري.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$a_{11}=1\cdot1=1\ ,\ a_{21}=2\cdot1=2\ ,\ a_{31}=3\cdot1=3$

$a_{12}=1\cdot2=2\ ,\ a_{22}=2\cdot2=4\ ,\ a_{32}=3\cdot2=6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پایله کې غوښتل شوی مټریکس عبارت دی له: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

دوه، هم مرتبه مټریکسونه هغه وخت سره مساوي دي چې د هغوی هر عنصر یو په یو سره مساوي وي،
مثلاً: $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}$ هغه وخت یوله بل سره مساوي دي چې $a=-1$ او $b=2$ وي، آیا $(1 \quad 2)$ او $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ مټریکسونه یوله بل سره مساوي دي اوکه نه؟ ولې؟

پوښتنې

1. د لاندې مټریکسونو مرتبې ولیکئ.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2. لاندې مټریکسونه د مستطیلي جدول په شکل ولیکئ.

$a)\ (a_{ij})_{3\times3} = (2i+3j)_{3\times3}$ $\qquad$ $b)\ (a_{ij})_{2\times3} = (\frac{i}{j})_{2\times3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مټریکسونو ډولونه

د مټریکسونومخامخ شکلونه څو سطرونه اوڅوستونونه لري؟

آیاصفرونه دمټریکس عناصر کیدای شي؟

$$\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix} \quad (4\ \ 5\ \ 6) \quad \begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

1. **سطري مټریکس**(Row Matrix)**:**هغه مټریکس چې یوازې او یوازې یو سطر ولري، سطري مټریکس یې بولي، مثلاً: $A=(4\quad 5\quad 9\quad 0)_{1\times 4}$

2. **ستوني مټریکس** (Column Matrix)**:** هغه مټریکس دی چې یوازې یو ستون ولري، د ستوني مټریکس په نامه یادیږي، مثلاً: $A=\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}_{3\times 1}$

3. **صفري مټریکس**(Null matrix): هغه مټریکس چې ټول عناصرېې صفرونه وي، له صفري مټریکس څخه عبارت دی او د $0_{m\times n}$ په شکل یې ښيي.

$$0_{2\times 4}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}_{2\times 4} \qquad 0_{3\times 2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}_{3\times 2}$$

4. **مربعي مټریکس**(Square Matrix)**:** که چیري په یوه مټریکس کې د سطرونو شمېر د ستونونو له شمېرسره برابر $(m=n)$ شي، د مربعي مټریکس په نامه یادیږي، مثلاً:

$$A=\begin{pmatrix}1&3&4\\5&7&9\\-1&0&2\end{pmatrix}_{3\times 3}\quad , \qquad m=n\ \Rightarrow\ 3=3$$

هر مربعي مټریکس دوه قطرونه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه قطر چې عناصر یې $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ وي، اصلي قطر (Mean diagonal) او هغه قطر چې عناصر یې $a_{n1}, \dots, a_{1n}$ وي، فرعي قطر (Minor Diagonal) بلل کېږي.

اصلي قطر   فرعي قطر

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

فرعي قطر   اصلي قطر

فعالیت

- داسې متریکسونه ولیکئ چې مرتبې یې 3×1 , 1×4 وي، دا څه ډول متریکسونه دي؟

5. **قطري متریکس** (Diagonal Matrix): هغه متریکس چې ټول عناصر یې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، د قطري متریکس په نامه یادېږي.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

6. **سکالر متریکس** (Scalar Matrix): هغه قطري متریکس چې د اصلي قطر عناصر یې سره مساوي وي، د سکالر متریکس په نامه یې یادوي، لکه:

$$A = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & K & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K \end{pmatrix}_{m\times n}$$

7. **واحد متریکس** (Unite Matrix): که چېرې په یو سکالر یا قطري متریکس کې د اصلي قطر ټول عناصر د (1) عدد وي، دغه ډول متریکس ته واحد متریکس وایي او په I_n سره ښوول کېږي.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\dots0 \\ 0 & 1 & 0\dots0 \\ 0 & 0 & 1\dots0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & 0\dots1 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- یو د 3×3 مرتبې مېټریکس ولیکئ چې د اصلي قطر ښکته ټول عناصر یې صفرونه وي.
- په همدې ډول یو د 3×3 مرتبې مېټریکس ولیکئ چې د اصلي قطر پورتني عناصر یې ټول صفرونه وي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف بیانېږي:

که چیرې په یوه مربعي مېټریکس کې د اصلي قطر پورتني او یا ښکتني ټول عناصر یې صفرونه وي، په دغه صورت کې مېټریکس د مثلثي مېټریکس (Triangular matrix) په نامه یادېږي.

که چیرې د اصلي قطر پورتني ټول عناصر صفرونه وي، د پورتني مثلثي مېټریکس (Upper triangular matrix) او که چېرې د اصلي قطر ښکتني ټول عناصر صفرونه وي، د ښکتني مثلثي مېټریکس (lower triangular matrix) په نامه یادېږي.

په لاندې مثالونو کې A یو پورتنی مثلثي مېټریکس او B ښکتنی مثلثي مېټریکس دی.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&4&0\\3&7&9\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&7&9\\0&0&4\end{pmatrix}$$

متقابل (متضاد) مېټریکس:

که چیرې د A متقابل مېټریکس په $(-A)$ سره وښودل شي نو، دا هغه مېټریکس دی چې هر عنصر د A د متناظر عنصر متضاد دی. که چېرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یو مېټریکس وي، نومتقابل(متضاد) مېټریکس یې $(-A)$ په لاندې ډول تعریفېږي:

$$A=(a_{ij})_{m\times n}\overset{\text{متقابل}}{\Rightarrow}-A=(-a_{ij})_{m\times n}$$

لکه په لاندې مثال کې:

$$A=\begin{pmatrix}2&4&5\\-1&2&0\\2&-3&-4\end{pmatrix}\Rightarrow -A=\begin{pmatrix}-2&-4&-5\\1&-2&0\\-2&3&4\end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. لاندې متريکسونه په پام کې ونيسئ، مرتبې او اړوند نومونه يې وټاکئ:

$a)\ A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $b)\ B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $c)\ C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$d)\ D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $e)\ E=\begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ $f)\ F=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

$g)\ G=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $h)\ H=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مېټریکسونو جمع او تفریق

Addition and subtraction of Matrix

په مخامخ مېټریکسونو کې د هغوی د جمعې او تفریق په اړه د امکان په صورت کې څه ویلای شئ.

$$\left.\begin{array}{l} A+A= \\ A-A= \\ A+B= \\ A-B= \\ B+B= \\ B-B= \end{array}\right\} ?$$

1) د مېټریکسونو جمع:

که چیرې $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ دوه مېټریکسونه وي، نو $A+B=C$ عبارت له هغه مېټریکس څخه دی چې د C_{ij} هر عنصر یې د a_{ij} او b_{ij} د جمعې له حاصل څخه لاس ته راغلی وي، یعنې د دوو مېټریکسونو جمع کول یوازې هغه وخت امکان لري چې د دواړو مېټریکسونو مرتبې سره مساوي وي. څرنګه چې C_{ij} د دوو حقیقي عددونو د جمعې حاصل دی، نو:

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}\Rightarrow (a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}=(C_{ij})_{m\times n}$$

مثال:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}_{3\times 2} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+3 & 2+2 \\ -2+1 & 0+2 \\ 1+0 & 7+(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=C_{3\times 2}$$

2. د مېټریکسونو تفریق:

د جمعې عملیې ته ورته کولای شو، د دوو مېټریکسونو تفاضل یا د تفریق حاصل په لاس راوړو. که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{m\times n}$ وي، نو د تفریق حاصل یې په لاندې ډول په لاس راوړای شو:

$$A_{m\times n}-B_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}-(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}=(c_{ij})_{m\times n}=C_{m\times n}$$

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ وي، $A-B$ په لاس راوړئ.

د متریکسونو د جمعي او تفریق خاصیتونه:

1. د متریکسونو جمع کول دبدلون خاصیت لری، خو د متریکسونو تفریق د بدلون خاصیت نه لري، یعني:

$A+B=B+A$

$A-B\neq B-A$

2. د متریکسونو جمع او تفریق اتحادی خاصیت لری. $(A\pm B)\pm C=A\pm(B\pm C)$

3. د عینیت عنصر (Identity Element) د متریکسونو په جمع کې صدق کوي ،خو د متریکسونو په تفریق کې صدق نه کوي. $A+0=0+A=A$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: څرنګه چې د دواړو متریکسونو مرتبه سره برابره (3×3) ده، نو کولای شو د تفریق حاصل یې په لاس راوړو.

$$A-B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&4\\6&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11&1&5\\0&3&0\\2&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-11&2-1&3-5\\2&-0&5-3&4-0\\6&-2&0-5&1-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10&1&-2\\2&2&4\\4&-5&-5\end{pmatrix}$$

فعالیت

- د یوه مثال په واسطه وښایاست چې $A-B\neq B-A$ دی.

دویم مثال: که چیرې $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\0&6\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}3&1&3\\2&5&-1\end{pmatrix}$ وي، د امکان په صورت کې $A+B$ او $A-B$ په لاس راوړئ.

حل: لیدل کیږي چې د A او B متریکسونو مرتبې سره خلاف دی، له دې امله یې جمع او تفریق امکان نه لري، ځکه د A د متریکس مرتبه 3×2 او د B متریکس مرتبه 2×3 ده.

پوښتنې

لاندې متریکسونه د امکان تر حده جمع او تفریق کړئ:

a) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}2&2\\-1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2\\1&-1\end{pmatrix}$, c) $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&3&4\\-1&0&1\end{pmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په میټریکس کې د سکالر ضرب

موږ د میټریکسونو د جمعې او تفریق قاعده ولیدله،

که $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ یو میټریکس او K یو سکالر

وي، د هغوی د ضرب حاصل په اړه څه فکر کوئ.

$$K\cdot A=K\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ یو **میټریکس** او k یو سکالر وي، د $K\cdot A$ حاصل په لاس راوړئ.

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad , \quad KA=\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

- د $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ **میټریکس** په کوم عدد کې ضرب شي، تر څو یې د ضرب حاصل یو واحد میټریکس شي.

کولای شو د فعالیت له اجراء وروسته یې په لاندې ډول تعریف کړو.

تعریف: که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ یو **میټریکس** او $K\in IR$ یو حقیقي عدد وی، نو د KA له **میټریکس** C څخه عبارت دی، داسې چې د C_{ij} هر عنصر د K د ضرب حاصل په a_{ij} کې دی.

$$C_{ij}=K(a_{ij})$$

لومړی مثال: که $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ او $K=2$ وي، د KA د ضرب حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$KA=2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 6 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 1 & 2\cdot 0 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 0 & 2(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په متریکس کې د سکالر ضرب خاصیتونه:

که چیرې A او B دواړه د یو شان مرتبې متریکسونه، α او β دوه حقیقي عددونه وي، نو:

$a)\ \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$b)\ (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

$c)\ \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

دویم مثال: که چیرې $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$, $\alpha=3$, $\beta=2$ راکړل شوي وي، وښایاست چې

$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

حل:

$$\alpha(\beta A)=3\left[2\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=3\begin{pmatrix}2\cdot3 & 2\cdot6\\ 2(-3) & 2\cdot9\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}6 & 12\\ -6 & 18\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\cdot6 & 3\cdot12\\ 3(-6) & 3\cdot18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$(\alpha\beta)A=(3\cdot2)\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6\cdot3 & 6\cdot6\\ 6(-3) & 6\cdot9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\beta(\alpha A)=2\left[3\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & 9\end{pmatrix}\right]=2\begin{pmatrix}3\cdot3 & 3\cdot6\\ 3(-3) & 3\cdot9\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}9 & 18\\ -9 & 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 36\\ -18 & 54\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$$

پوښتنې

1. که چیرې $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $\alpha=2$ او $\beta=1$ راکړل شوي وي. په متریکس کې د سکالر ضرب درې خاصیتونه تطبیق کړئ؟

2. که $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ او $K=3$ وي، KA او $\frac{1}{K}A$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوو مېټريکسونو ضرب

Multiplication of two Matrixes

آياد دوو مېټريکسونو د ضرب لپاره کوم نظر ورکولای شئ؟ تاسو د دوو مېټريکسونو د جمعې لپاره پيداکړل چې $A+B=B+A$ دی، د مېټريکسونو د ضرب لپاره څه فکر کوئ؟

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0\\1&1\end{pmatrix}=?$$

تعريف

دوه مېټريکسونه د $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ په پام کې ونيسئ، د دې لپاره چې دا داوړه مېټريکسونه يو په بل کې ضرب شي، نو بايد د لومړي مېټريکس د ستونونو شمېر د دويم مېټريکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي. د مېټريکسونو د ضرب حاصل بيا هم يو مېټريکس دی ،لکه: $C=(a_{ij})_{m\times p}$ چې د سطرونو شمېر يې د لومړي مېټريکس د سطرونو په اندازه او د ستونونو شمېر يې د دويم مېټريکس د ستونونو له شمېر سره برابر دی.

$$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$$

د دوو مېټريکسونو د ضرب لپاره په لاندې ډول کړنه کوو:

د لومړي مېټريکس لومړی سطر د دويم مېټريکس په ټولو ستونو کې په وار سره ضربوو او په همغه سطر کې يې ليکو، په دويمه مرحله کې بيا هم د لومړي مېټريکس دويم سطر د دويم مېټريکس په ټولو ستونونو کې په وار سره ضربوو او په همغه(دويم سطر) کې يې ليکو، دغه عمل ته تر هغه دوام ورکوو، ترڅو ټول سطرونه د لومړي مېټريکس په دويم مېټريکس کې ضرب شي، په دغه ډول د مېټريکسونو د ضرب حاصل محاسبه کېږي. دغه مطلب کولای شو په لاندې ډول وښيو.

$$(a_{ij})_{m\times n}\cdot(b_{ij})_{n\times p}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=(C_{ij})_{m\times p}$$

لومړی مثال: که چیرې $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو $A\cdot B$ پیداکړئ.

حل: د دوو مېټریکسونو د ضرب له تعریف څخه پوهېږو:

دویم پړاو
لومړی پړاو

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot0+0\cdot(-1)\\ -1\cdot1+0\cdot0+1\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$$

دویم مثال: که چیرې $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ راکړل شوي وي، نو $A\cdot B$ حاصل په لاس راوړئ.

حل: بیا هم د مېټریکسونو د ضرب له تعریف څخه په کار اخیستنې لرو چې:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}_{2\times3}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}(2\ \ 3\ \ -1)\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix} & (2\ \ 3\ \ -1)\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 2\end{pmatrix}\\ (-2\ \ 1\ \ 2)\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix} & (-2\ \ 1\ \ 2)\begin{pmatrix}3\\ 0\\ 2\end{pmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+3\cdot2+(-1)(-1) & 2\cdot3+3\cdot0+(-1)\cdot2\\ (-2)(1)+1\cdot2+2(-1) & -2(3)+1\cdot0+2\cdot2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2+6+1 & 6+0-2\\ -2+2-2 & -6+0+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 4\\ -2 & -2\end{pmatrix}_{2\times2}$$

دریم مثال: $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 6 & 1 & 7\end{pmatrix}$ وي $A\cdot B$ پیداکړئ.

حل:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2 & 0\\ 6 & 1 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot3+3\cdot6 & 1\cdot2+3\cdot1 & 1\cdot0+3\cdot7\\ 5\cdot3+2\cdot6 & 5\cdot2+2\cdot1 & 5\cdot0+2\cdot7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3+18 & 2+3 & 0+21\\ 15+12 & 10+2 & 0+14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & 5 & 21\\ 27 & 12 & 14\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- که $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$ وي، د ضرب دحاصل دشتون پـه صـورت کې AB او BA پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

څلورم مثال: که $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ او $D=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$ وي، CD او DC پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

حل:

$$CD=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(-3)+(-1)(-4) & 2\cdot4+(-1)(-3)\\ 1(-3)+2(-4) & 1\cdot4+2(-3)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6+4 & 8+3\\ -3-8 & 4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 11\\ -11 & -2\end{pmatrix}$$

$$DC=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\cdot2+4\cdot1 & (-3)(-1)+4\cdot2\\ -4\cdot2+1\cdot(-3) & -4(-1)+(-3)\cdot2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6+4 & 3+8\\ -8-3 & 4-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 11\\ -11 & -2\end{pmatrix}$$

معلومېږي چې $CD=DC$ دی.

د مټریکس د ضرب خواص:

لومړی خاصیت: په عمومی ډول د دوو مټریکسونویه ضرب کې د بدلون خاصیت صدق نه کوي.

یعنې که A او B دوه مټریکسونه او AB او BA تعریف شي، نو: $AB\neq BA$

په ځانګړي حالت کې د $m\times m$ مرتبې مټریکسونه د تبدیلی خاصیت لري.

دویم خاصیت: د مټریکسونو د ضرب د ضرب اتحادي خاصیت لري. که چیرې B,A او C د $m\times n$ مرتبې مټریکسونه وي، نو $(AB)C=A(BC)$

دریم خاصیت: د مټریکسونو ضرب توزیعي خاصیت د جمعې او ضرب لپاره لري، نو لرو:

$a)\ A(B+C)=AB+AC$

$b)\ (A+B)C=AC+BC$

$c)\ K(AB)=(KA)B=A(KB)\ ,\quad K\in IR$

$d)\ IA=AI=A$

پوښتنې

د لاندې متريکسونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=?$

$b)\ \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}=?$

$c)\ \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d)\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}=?$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه مټریکس ترانسپوز مټریکس

Transpose of Matrix

که په یو مټریکس کې سطرونه په ستونونو او ستونونه په سطرونو بدل شي نوي مټریکس چې په لاس راځي په څه نوم یادیږي.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

فعالیت

- د $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$ مټریکس په پام کې ونیسئ، سطرونه ستونونوته او ستونونه سطرونو ته ولېږدوی، هغه نوی مټریکس چې په لاس راځي ویې لیکئ.
- که چیرې د یوه مټریکس د سطرونو او ستونونو ځایونه یوله بل سره بدل کړو(افقي لیکې په عمودي او عمودي په افقي واړوو)، هغه نوی مټریکس چې لاس ته راځي، آیا له لومړی مټریکس سره مساوي دي، نوی مټریکس په څه نوم یادیږي؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي.

تعریف: که چیرې د یوه مټریکس چې مرتبه یې $(m\times n)$ وي، سطر په ستون او ستون په سطر واړول شي، هغه نوی مټریکس چې په لاس راځي، له ترانسپوز(Transpose) مټریکس څخه عبارت دی، د A ترانسپوز مټریکس په A^T ښودل کیږي. د ترانسپوز مټریکس مرتبه $(n\times m)$ ده.

مثلاً: که چیرې $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}_{2\times 3}$ وي، نو ترانسپوز مټریکس یې عبارت دی له: $A^T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}_{3\times 2}$، که یو ترانسپوز مټریکس یعنې A^T له خپل ځان یعنې A سره مساوي شي، نو په دې صورت کې A مټریکس ته متناظر مټریکس (Symmetric Matrix) وایي.

مثلاً: $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix}$ یو متناظر مټریکس دی، ځکه: $A^T=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow A^T=A$

د متناظر مټریکس پیژندل: په متناظرو مټریکسونو کې عناصر نظر اصلي قطر ته متناظراو مساوي دي:

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ b & c & f\\ c & f & d\end{pmatrix}$$

د ترانسپوز متریکس خواص:

لومړۍ خاصیت: د یوه ترانسپوز متریکس ترانسپوز له خپل لومړي متریکس سره مساوي دی.

$$(A^T)^T = A \Rightarrow \left[(a_{ij})^T\right]^T = (a_{ji})^T = (a_{ij}) = A$$

دویم خاصیت: د دوو یا څو ترانسپوز متریکسونو د جمعې او تفریق حاصل د دوی د هر یوه د جمعې او تفریق له ترانسپوز متریکسونو سره مساوی دی. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$

او یا په عمومي ډول $(A \pm B \pm C \pm \ldots)^T = A^T \pm B^T \pm C^T \pm \ldots$

دریم خاصیت: $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

څلورم خاصیت: $(\alpha A)^T = \alpha A^T \quad , \quad \alpha \in IR$

$(-A)^T = -A^T$

فعالیت

- که چیرې $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ او $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، وښایاست چې:

$$(A-B)^T = A^T - B^T \quad , \quad (A+B)^T = A^T + B^T$$

مثال: د لاندې متریکسونو ترانسپوز متریکسونه په لاس راوړئ.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times3} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

حل:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2\times3} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}_{3\times2}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -6 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

پوښتنې

1. د A او B متریکسونه په پام کې ونیسئ، د هغوی ترانسپوز متریکسونه په لاس راوړئ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3\times3} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3\times3}$$

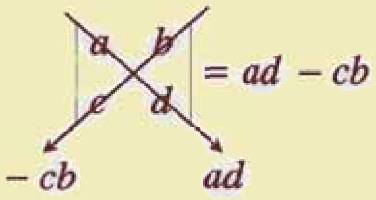
2. په پورتنیو متریکسونو باندې د 3 عدد لپاره د ترانسپوز متریکس 4 خاصیتونه وښایاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیترمینانت

Determinant

په یوه عددي مثال کې یو مربعي میټریکس داسې وټاکئ چې د $ad-bc$ حاصل تفریق مساوي په صفر شي.



تعریف

که چیرې د A میټریکس یوه حقیقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د میټریکس له دیترمینانت څخه عبارت دی، د $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ د میټریکس دیترمینانت په $|A|$، det A او یا $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ په ډول ښوول کېږي.

په همدې ډول که چیرې د $n\times n$ مرتبې یو میټریکس چې n سطرونه او n ستونونه ولري، اړوند دیترمینانت یې له n درجې څخه دی. د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ یو مربعي میټریکس په پام کې نیسو او د تعریف سره سم لرو چې:

$$|A|=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix}_{nxn}$$

د 2×2 مرتبې میټریکسونو د دیترمینانت محاسبه: د $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ میټریکس دیترمینانت په لاندې ډول تعریفوو.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

مثال: د $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ میټریکس دیترمینانت حساب کړئ.

حل: $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}=3\cdot 2-7\cdot 4=6-28=-22$

فعالیت

- د $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$ میټریکس دیترمینانت محاسبه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 3×3 مټريکسونو د ديترمېنانت محاسبه: د $A_{3\times3}$ مټريکس، ديترمېنانت په پام کې نيسو:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

حل: د $A_{3\times3}$ ديترمېنانت د محاسبې لپاره لاندې ګامونه په پام کې نيسو:

لومړی پړاو: اول ستون او دريم سطر له منځه وړو(حذفوو)، د 2×2 مرتبې ديترمېنانت محاسبه او د لومړي ستون او دريم سطر د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{12}\,a_{23} - a_{13}\,a_{22})a_{31}$$

دويم پړاو: دويم ستون او دريم سطر حذف، د 2×2 مرتبې ديترمېنانت محاسبه او د دويم ستون او دريم سطر د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو ، هېره دې نه وي چې د ديترمېنانت د محاسبې لپاره علامې په متناوب ډول بدلون مومي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow -(a_{11}\,a_{23} - a_{21}\,a_{13})a_{32}$$

دريم پړاو: دريم ستون او دريم سطر له منځه وړو(حذفوو)، د 2×2 مرتبې ديترمېنانت محاسبه، د دريم سطر او دريم ستون د تقاطع په عنصر کې يې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{11}a_{22} - a_{12}\,a_{21})a_{33}$$

څلورم پړاو: د 1، 2 او 3 ټول پړاوونه سره جمع کوو، په دې ډول د A ديترمېنانت مقدار په لاس راځي.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =(a_{12}\,a_{23}-a_{13}\,a_{22})\,a_{31}-(a_{11}\,a_{23}-a_{21}\,a_{13})\,a_{32}+(a_{11}\,a_{22}-a_{12}\,a_{21})\,a_{33}$$

$$=a_{12}\,a_{23}\,a_{31}-a_{13}\,a_{22}\,a_{31}-a_{11}\,a_{23}\,a_{32}+a_{21}\,a_{13}\,a_{32}+a_{11}\,a_{22}\,a_{33}-a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د لاندې ديترمينانت مقدار په لاس راوړئ.

$$B=\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

حل: له تېرو معلوماتو څخه کار اخلو:

$$\text{I)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \left(6\cdot 2-1(-3)\right)\cdot 4=\left(12+3\right)\cdot 4=15\cdot 4=60$$

$$\text{II)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -(2\cdot 2-5(-3))(-1)=4+15=19$$

$$\text{III)}\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = (2\cdot 1-5(6))\cdot 7=(2-30)\cdot 7=-28\cdot 7=-196$$

$$\text{I}+\text{II}+\text{III}=60+19-196=-117$$

فعاليت

- د $A=\begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ له ديترمينانت څخه د a قيمت په لاس راوړئ.

دويمه طريقه: **د ساروس په طريقه د ديترمينانت محاسبه**: په دغه طريقه کې د ديترمينانت دوه لومړي ستونونه ښي لوري ته په لاندې ډول تکرار ليکو:

$$A=\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

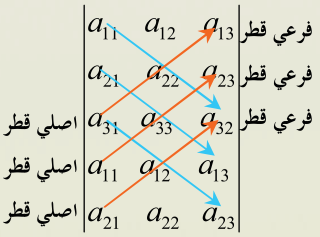
فرعي قطرونه

اصلي قطرونه

د اصلي قطر عناصر يوله بل سره ضرب او جمع کوو، په همدې ډول د فرعي قطر عناصر يوله بل سره ضربوو او وروسته يې جمع کوو، همدارنګه د اصلي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب له مجموع څخه، د فرعي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموع کموو، په دې ډول د A د ميټريکس ديترمينانت مقدار په لاس راځي:

$$|A|=(a_{11}\,a_{22}\,a_{33}+a_{12}\,a_{23}\,a_{31}+a_{13}\,a_{21}\,a_{32})-(a_{13}\,a_{22}\,a_{31}+a_{11}\,a_{23}\,a_{32}+a_{12}\,a_{21}\,a_{33})$$

په دغه طریقه کې کولای شو د لومړی او دویم ستون د لېږد په ځای لومړی او دویم سطر د دیترمېنانت لاندینی برخې ته انتقال کړو او د تېر په ډول کړنه سرته رسوو.



دویم مثال: د لاندې دیترمېنانت قیمت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$$|M|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

حل:

$$|M|=\left|\begin{matrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \\ 5 & -2 \end{matrix}$$

$$=\left(3\cdot 3\cdot 6+2\cdot 0\cdot 5+(-1)(-4)(-2)\right)-\left((-1)\cdot 3\cdot 5+3\cdot 0(-2)+2(-4)\cdot 6\right)$$

$$=(54+0-8)-(-15+0-48)=46+63=109$$

فعالیت

- لاندې د $|A|$ دیترمېنانت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې دوه لومړني سطرونه د دیترمېنانت لاندې برخې ته ولېږدوئ او عملیه سرته ورسوئ.

$$|A|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

پوښتنې

1. د لاندې دیترمېنانتونو مقدار په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$a)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$, $b)\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$, $c)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$, $d)\begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$

2. د لاندې دیترمېنانتونو مقدار د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$a)\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix}$, $b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډیترمینانت خاصیتونه

که چیرې په یوه ډیترمینانت کې د سطر ځای له ستون سره بدل شي، د ډیترمینانت په قیمت کې تغیر راځي او که نه؟

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 4 & 1\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}2 & 4 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 5 & 3 & -1\end{vmatrix}$$

فعالیت

- د $|A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$ او $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}$ ډیترمینانتونه محاسبه کړئ.
- د $|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 6\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}$ ډیترمینانت په پام کې ونیسئ، ترانسپوز یې په لاس راوړئ ، وروسته یې $|A^T|$ (ډیترمینانت) محاسبه کړئ او وښایاست چې $|A|=|A^T|$.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.

که چیرې $A_{n\times n}$ یو متریکس وي، د $|A|$ ډیترمینانت لپاره لاندې خواص صدق کوي.

1. که د $A_{n\times n}$ متریکس د یوه سطر او یا یوه ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو د A ډیترمینانت مساوي له صفر سره دی.

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & a & b\\ 0 & c & d\\ 0 & e & f\end{vmatrix}=0 \quad , \quad |A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=0$$

2. که چیرې د $A_{n\times n}$ متریکس دوه سطرونه یا دوه ستونونه سره مساوي وي، نو اړوند ډیترمینانت یې مساوي له صفر سره دی.

$$A=\begin{pmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=0$$

3. که د $A_{n\times n}$ متریکس د یوه سطر او یا یوه ستون عناصر د بل سطر او یا ستون د عناصرو ګډ فکتور وي، نو $|A|=0$ دی.

$$|A|=\begin{vmatrix}a & b & c\\ \lambda a & \lambda b & \lambda c\\ d & e & f\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}a & b & c\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}=\lambda(0)=0$$

4. د A متریکس ډیترمینانت او A^T متریکس ډیترمینانت یو له بل سره مساوي دي، په همدې ډول ډیترمینانت ځینې نور خاصیتونه یا ځانګړنې هم لري، لکه:

که چیرې په یوه دیترمېنانت کې د دوو سطرونو یا دوو ستونونو ځایونه یو له بل سره بدل شي، د دیترمېنانت اشاره بدلون مومي.

لومړی مثال: د $|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ دېترمېنانت لومړي ستون له دویم ستون سره بدل کړئ او وروسته د دواړو دېترمېنانتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

حل:

$$A=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow (0+6+4)-(24-4+0)=-10$$

$$B=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0+24-4)-(4+6+0)=20-10=10$$

لیدل کېږي چې د A په دیترمېنانت کې دویم ستون له لومړی ستون سره بدل شوی، په ورته ډول کولای شو،دوه سطرونه هم یوله بل سره بدل کړو،نوداسې پایله به لاس راځي: $|A|=-|B|$

که د K یو ثابت عدد په دیترمېنانت کې ضرب شي، دغه عدد یوازې په یوه سطر او یا یوه ستون کې په اختیاري ډول ضربېدلای شي. په همدې ډول کولای شو د یوه دیترمېنانت ګډعامل له یوه سطر او یا یوه ستون څخه ګډ عددوټاکوچې د دیترمېنانت ګډ فکتور بلل کېږي.

دویم مثال: د $|A|$ دیترمېنانت ګډ ضربي عامل پیدا کړئ.

$$A=\begin{vmatrix} 16 & 3 & 22 \\ 8 & 2 & 21 \\ 20 & 1 & 25 \end{vmatrix}$$

حل: لیدل کېږي چې د دیترمېنانت په لومړی ستون کې د 4 عدد ګډ ضربي عامل دی چې په حقیقت کې دا عدد د دیترمېنانت ګډ ضربي عامل دی.

$$|A| = \begin{vmatrix} 16 & 3 & 22 \\ 8 & 2 & 21 \\ 20 & 1 & 25 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 4 & 3 & 22 \\ 2 & 2 & 21 \\ 5 & 1 & 25 \end{vmatrix}$$

پوښتنې

د دېترمېنانت دخواصو په مرسته د لاندې دېرمېنانتونو قیمت په لاس راوړئ.

$$a)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad c)\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 2×2 مرتبې مېټريکسونو ضربي معکوس

Multiplication inverse of 2×2 *matrixes*

آيا د حقيقي عددونو ضرب قاعده مو په ياد ده؟

د a حقيقي عدد ضربي معکوس کوم عدد دی؟

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

په همدې ډول د ځینو مربعي مېټريکسونو لپاره هم دا خاصيت، د مېټريکسونو د خاصيتونو په پام کې نيولو سره شتون لري.

فعاليت

- د $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ مېټريکس په پام کې ونيسئ او ديترمينانت يې محاسبه کړئ.
- د $B=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ مېټريکس د A له مېټريکس سره ضرب او پايله يې وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله بيانولای شو:

تعريف: د $A=(a_{ij})_{n\times n}$ غير صفري مربعي مېټريکس په پام کې نيسو، که چيرې د B مربعي مېټريکس داسې موجود وي، چې: $AB=BA=I$

په دې صورت کې د B مېټريکس د A د مېټريکس معکوس بلل کېږي او هغه په A^{-1} سره ښيي. له دې امله ليکلی شو چې: $AA^{-1}=A^{-1}A=I$

په ياد ولرئ: د A مربعي مېټريکس ته منفرد مېټريکس (Singular Matrix) ويل کېږي، کله چې $|A|=0$ وي او همدارنګه د A مربعي مېټريکس ته غير منفرد مېټريکس (non singular matrix) ويل کېږي، که چېرې $|A|\neq 0$ وي.

له دې امله هغه وخت يو مېټريکس د معکوس مېټريکس لرونکی دی چې:

1. مېټريکس مربعي وي.
2. ديترمينانت يې د صفر خلاف وي.

لومړی مثال: وښاياست چې $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ يو د بل معکوس دي.

حل:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-1)(-7)+3(-2) & (-1)(-3)+3(-1) \\ 2(-7)+(-7)(-2) & 2(-3)+-7(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ليدل کېږي چې: $AB=BA=I$ دی، نو A او B يو د بل معکوس دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الحاقي میټریکس(Ad joint of matrix): د 2×2 مرتبې الحاقي میټریکس د پیدا کولو لپاره د اصلي قطر د عناصرو ځایونه سره بدلوو او فرعي قطر د اشارې په بدلون سره لیکو، هغه نوی میټریکس چې لاس ته راځي، له الحاقي میټریکس (ad joint=adj) څخه عبارت دی، د مثال په ډول:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ A=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$K=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj\ K=\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

هغه وخت یو میټریکس معکوس میټریکس لري چې دیترمینانت یې د صفر خلاف وي، یعنې $|A|\neq 0$ وي. البته د بحث موضوع 2×2 مرتبې میټریکس دی چې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\ Adj\ A \qquad |A|\neq 0$$

لومړی مثال: که چیرې $A=\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ وي، معکوس میټریکس یې پیدا کړئ.

حل: $|A|=\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}=-18+10=8\neq 0$

لیدل کېږي چې د A میټریکس دیترمینانت د صفر خلاف دی، نو د A میټریکس معکوس میټریکس لري.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj\ A=\frac{1}{-8}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{6}{-8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

ازموینه:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4}+\frac{15}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{9}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

په عمومي ډول ویلی شو، د هر $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ میټریکس چې دیترمینانت یې د صفر خلاف یعنې $|A|\neq 0$ وي، معکوس لري چې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. د لاندې میټریکسونو څخه کوم یو میټریکس معکوس لري.

a) $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

2. د لاندې میټریکسونو معکوس میټریکس په لاس راوړئ او وازموئ.

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $C=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له معکوس متریکس څخه په کاراخیستني د خطي معادلو د سیستم حل

آیا تر اوسه مو له معکوس متریکس څخه په ګټه اخیستني د خطي معادلو د سیستم د حل په اړه فکر کړی دی؟

$$X = A^{-1} \cdot B$$

فعالیت

د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ په پام کې و نیسئ:

- د ضریبونو متریکس، د مجهولینو متریکس، د ضریبونو او مجهولینو متریکس ولیکئ.
- هر متریکس د معادلې په ډول ولیکئ.
- د لاس ته راغلي معادلې اطراف د ضریبونو د متریکس په معکوس کې ضرب کړئ.

له پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

څرنګه چې A د سیستم د چپ لورې د ضریبونو متریکس، B د ښي لورې د ثابتو عددونو ستوني متریکس او X د مجهولو عددونو ستوني متریکس دی، نو د A^{-1} په پام کې نیولو سره سیستم داسې حلیږي:

$$A\,X = B$$

$$A^{-1} \cdot A\,X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B$$

$$IX = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: له معکوس مېټريکس څخه په کار اخېستنې سره، د $\begin{cases}x+2y=5\\x+3y=7\end{cases}$ خطي دوه مجهوله سيستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}$ ، $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$ دی.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 3\end{vmatrix}=3-2=1\neq 0$$

څرنګه چې د A مېټريکس ديټرمېنانت د صفر خلاف دی، نو د A مېټريکس معکوس لري او په لاندې ډول يې په لاس راوړو:

$$Adj\ A=\begin{pmatrix}3 & -2\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}3 & -2\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}3 & -2\\-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\-1 & 1\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}3 & -2\\-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 5-2\cdot 7\\-1\cdot 5+1\cdot 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15-14\\-5+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\ ,\ x=1\quad ,\qquad y=2$$

دويم مثال: له معکوس مېټريکس څخه په کار اخيستنې سره د دغه خطي معادلو $\begin{cases}5x-2y=2\\3x-\ y=3\end{cases}$ سيستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$B=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\ ,\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ ,\quad A=\begin{pmatrix}5 & -2\\3 & -1\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}5 & -2\\3 & -1\end{vmatrix}=-5+6=1\ \Rightarrow\ A\neq 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې $|A| \neq 0$ دی، نو A معکوس مټریکس لري.

$$AdjA = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} AdjA = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot 2 + 2\cdot 3 \\ -3\cdot 2 + 5\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+6 \\ -6+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \; x = 4 \quad , \quad y = 9$$

دریم مثال: د x او y په کومو قیمتونوکې لاندې معادلې په یو وخت کې صدق کوي.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases}$$

د یاد شوی سیستم حل د سیستم د ضریبونو د مټریکسونو له تشکیل څخه په لاس راوړو:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \; , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

څرنگه چې د A مټریکس دیترمینانت صفر دی، نو د A مټریکس معکوس نه لري، په پایله کې ویلای شو چې سیستم حل نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

له معکوس مټریکس څخه په ګټه اخیستنې، د لاندې خطي معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} a + b = 11 \\ 4a - b = 9 \end{cases}$$

د خطي معادلو د سيستم حل د کرامر په طريقه

Crammer's rule

آيا کولای شو، د ضريبونو د مټريکس د ديترمينانت او له مجهولينو يعنې د z, y, x سره د متناظرو مټريکسونو د ديترمينانت په واسطه د خطي معادلو د سيستم حل پيدا کړو؟

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

د خطي درې مجهوله معادلو سيستم په پام کې نيسو او د ضريبونو مټريکس يې په A سره ښيو:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

کولای شو د y, x او z قيمتونه له لاندې اړيکو څخه په لاس راوړو، په داسې حال کې چې $|A| \neq 0$ وي.

$$X = \frac{|A_x|}{|A|} \quad , \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} \quad , \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

په پورتنيو اړيکو کې $|A_x|$، $|A_y|$ او $|A_z|$ په ترتيب سره د y, x او z اړوند متناظرو مټريکسونو ديترمينانتونه دي. د هغوی د محاسبې لپاره په لاندې ډول کړنه کوو، د سيستم زيات شوی مټريکس ليکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{array}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $|A_x|$ د محاسبې لپاره د لومړی ستون(د x ضریبونو) په ځای ځلورم ستون(هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم ښي لوري ته پراته دی) ځای پر ځای کوو، د 3×3 مرتبې مېټریکس دیترمېنانت په لاس راوړو او د $|A_y|$ د محاسبې لپاره د دویم ستون(د y ضریبونه) په ځای ځلورم ستون(هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم ښي لوري ته پراته دي) ځای پر ځای کوو او د 3×3 مرتبې د مېټریکس دیترمېنانت محاسبه کوو. او د $|A_z|$ د محاسبې لپاره دریم ستون(د z ضریبونو) په ځای ځلورم ستون ځای په ځای کوو او د 3×3 مرتبې مېټریکس دیترمېنانت قیمت په لاس راوړو.

فعالیت

- له پورتنیو معلوماتو څخه په ګټې اخېستنې سره $|A_x|$، $|A_y|$ او $|A_z|$ پیدا کړئ.

لومړی مثال: د $\begin{cases} x-3y=3 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ سیستم حل د کرامر په طریقه په لاس راوړئ.

حل: $A=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-(-6)=1+6=7\neq 0$

څرنګه چې $|A|\neq 0$ دي؛ نو سیستم حل لري.

اوس زیات شوی مېټریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{3-(-6)}{7}=\frac{3+6}{7}=\frac{9}{7}$$

$$x=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{7}=\frac{2-6}{7}=-\frac{4}{7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: لاندې درې مجهوله سیستم د کرامر په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases}3x-2y+2z=-4\\ x+3y+z=5\\ 2x+2y-z=11\end{cases}$$

حل:

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & -2 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 2 & -1\end{vmatrix}\begin{matrix}3 & -2\\ 1 & 3\\ 2 & 2\end{matrix}=-9-4+4-12-6-2=-21-8=-29\neq 0$$

څرنګه چې $|A|\neq 0$ دئ نو له دې امله سیستم حل لري.

$$|A_x|=\begin{vmatrix}-4 & -2 & 2\\ 5 & 3 & 1\\ 11 & 2 & -1\end{vmatrix}\begin{matrix}-4 & -2\\ 5 & 3\\ 11 & 2\end{matrix}=12-22+20-(66-8+10)=10-68=-58$$

$$X=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix}3 & -4 & 2\\ 1 & 5 & 1\\ 2 & 11 & -1\end{vmatrix}\begin{matrix}3 & -4\\ 1 & 5\\ 2 & 11\end{matrix}=-15-8+22-(20+33+4)=-23+22-57=-58$$

$$y=\frac{|A_y|}{A}=\frac{-58}{-29}=2$$

$$|A_z|=\begin{vmatrix}3 & -2 & -4\\ 1 & 3 & 5\\ 2 & 2 & 11\end{vmatrix}\begin{matrix}3 & -2\\ 1 & 3\\ 2 & 2\end{matrix}=99-20-8-(-24+30-22)$$

$$=71+16=87$$

$$z=\frac{|A_z|}{A}=\frac{87}{-29}=-3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

میزان:

د y, x او z په لاس راغلي قیمتونه په اصلي سیستم کې وضع کوو:

$$3(2)-2(2)+2(-3)=6-4-6=-4 \quad \Rightarrow \quad -4=-4$$
$$2+3(2)-3=2+6-3=8-3=5 \quad \Rightarrow \quad 5=5$$
$$2(2)+2(2)-(-3)=4+4+3=11 \quad \Rightarrow \quad 11=11$$

پوښتنې

د لاندې معادلو سیستمونه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=2 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} x+y-az=0 \\ ax+2y-z=0 \\ 2x+ay+2z=0 \end{cases}$$

د معادلو د سیستم حل دګوس (Gouse) په طریقه

آیا کولای شو له میټریکس څخه په کار اخیستنې سره د x, y او z مجهول قیمتونه پیدا کړو.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

دګوس په طریقه د معادلو د سیستم د حل لپاره د ضریبونو میټریکس او ثابت قیمتونه لیکو وروسته په سطرونو او ستونونو، باندې لومړنی عملیې (جمع، تفریق، ضرب او تقسیم) سرته رسوو، یا سطرونه او ستونونه په یو سکالر کې ضربوو چې په پایله کې دوه مجهوله له منځه ځي او دریم مجهول محاسبه کېږي ، وروسته د نورو مجهولونو قیمت په لاس راوړو، د میټریکس سطرونه په $R_1, R_2, R_3, ...$ ښیو:

لومړی مثال: لاندې د خطي معادلو سیستم دګوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

حل: د ضریبونو میټریکس لیکو:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{لومړی سطر منفي دوم سطر د تفریق حاصل په دویم سطر کې}]{R_1 - R_2 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{دویم سطر په (1-) کې ضرب بدلون په دویم سطر کې}]{R_2 \cdot (-1) \to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow y=2 \,, \quad \begin{array}{l} x+2y=5 \\ x+2(2)=5 \Rightarrow x=5-4=x=1 \end{array}$$

پاملرنه: $R_1 - R_2 \to R_2$ په دې معنا چې له لومړي سطر څخه دویم سطر تفریق شوی او په دویم سطر کې بدلون لیکل شوی دی.

$R_2(-1) \to R_2$ داسې مفهوم لري چې دویم سطر په (-1) کې ضرب شوی او په دویم سطر کې لیکل شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

- د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم دگوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=-3 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

دویم مثال: د لاندي درې مجهوله معادلو سیستم دگوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ 3x+y+2z=11 \\ 4x-2y+z=3 \end{cases}$$

حل: لومړی د سیستم د مجهولینودضریبونو او ثابتو عددونو مټریکس لیکو:

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په لومړی پړاو کې د x ضریب په دویم سطر کې له منځه وړو. داسې چې لومړی سطر په -3 کې ضرب د دویم سطر له دوه چند سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-3R_1+2R_2 \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

په دویم گام کې د x ضریب په دریم سطر کې له منځه وړو داسې چې لومړی سطر په -2 کې ضرب له دریم سطر سره جمع او په دریم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{-2R_1+R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right)$$

په دریم پړاو کې د y ضریب له دریم سطر څخه حذفوو، داسې چې دویم سطر په -8 کې ضرب د دریم سطر له 7 چند سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{-8R_2+7R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -35 & -105 \end{array}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دریم سطر څخه کولای شو، د z قیمت په لاس راوړو:

$$-35z=-105 \Rightarrow z=3$$

د z قمیت په دویم سطر کې وضع او د y قیمت په لاس راوړو:

$$-7y+7z=7 \Rightarrow -7y+21=7 \Rightarrow -7y=-14 \quad , \quad y=2$$

په دریم پړاوکې د y او z قیمتونه په لومړي سطر کې ایږدو او x په لاس راځي.

$$2x+3y-z=5 \Rightarrow 2x+3\cdot 2-3=5 \Rightarrow 2x+3=5$$

$$2x=5-3=2 \quad , \quad x=1$$

د خطي معادلو د سیستم حل عبارت دی له: $(x,y,z)=(1,2,3)$

دریم مثال: د لاندې خطي معادلاتو سیستم دګوس په طریقه حل کړئ.

$$2x_1+4x_2+6x_3=18$$
$$4x_1+5x_2+6x_3=24$$
$$2x_1+7x_2+12x_3=40$$

حل:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&4&6&18\\4&5&6&24\\2&7&12&40\end{array}\right)\xrightarrow[-2R_1+R_2\to R_2]{\text{لومړی پړاو}}\left(\begin{array}{ccc|c}2&4&6&18\\0&-3&-6&-12\\2&7&12&40\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-R_1+R_3\to R_3]{\text{دویم پړاو}}\left(\begin{array}{ccc|c}2&4&6&18\\0&-3&-6&-12\\0&3&6&22\end{array}\right)\xrightarrow[R_2+R_3\to R_3]{\text{دریم پړاو}}\left(\begin{array}{ccc|c}2&4&6&18\\0&-3&-6&-12\\0&0&0&10\end{array}\right)$$

لیدل کېږي چې په لاس راغلی متریکس کې د x_2, x_1 او x_3 ضریبونه په دریم سطر کې صفر دی، په داسې حال کې چې په یاد شوي سطر کې ثابت عدد 10 دی او دا غیر ممکن دی چې ($x_1=x_2=x_3=0=10$) نو سیستم حل نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د لاندې معادلو سیستم حل او میزان کړئ.

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

پاملرنه: که چیرې د خطي معادلو په سیستم کې یو له مجهولینو څخه موجود نه وي، د هغه ضریب صفر په پام کې نیسو، وروسته د خطي معادلو د ضریبونو او د ثابتو مقدارونو متریکس تشکیلوو:

پوښتنې

د لاندې خطي معادلو سیستمونه د گوس په طریقه حل کړئ.

$$a)\ \begin{cases} 3x - y = -5 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 2x + 4y - 10z = -2 \\ 3x + 9y - 21z = 0 \\ x + 5y - 12z = 1 \end{cases} \qquad c)\ \begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ -3y = -6 \end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شپږم څپرکي مهم ټکي

د مټریکس تعریف: یوه ګېډۍ عددونه یا توري چې په سطري او ستوني ډول په یوه مستطیلي جدول کې ځای پر ځای شوې وي. د مټریکس(Matrix) په نامه یادېږي.

د مټریکسونو ډولونه:

- **سطري مټریکس**: هغه مټریکس چې یوازې یو سطر ولري.
- **ستوني مټریکس**: هغه مټریکس چې یوازې یو ستون ولري.
- **صفري مټریکس**: هغه مټریکس چې ټول عناصر یې صفرونه وي.
- **مربعي مټریکس**: هغه مټریکس چې د سطرونو او ستونونو شمېر یې سره برابر وي.
- **مساوي مټریکسونه**: دوه مټریکوسونه، هغه وخت سره مساوي دي چې ټول عناصر یې یو په یو سره برابر او مساوي وی.
- قطري مټریکس هغه مټریکس چې ټول عناصر یې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، قطر ي مټریکس بلل کېږي.
- **سکالر مټریکس**: هر قطري مټریکس چې د اصلي قطر عناصر یې سره برابر وي، سکالري مټریکس بلل کېږي.
- **واحد مټریکس**: په هر سکالري مټریکس کې که د اصلي قطر عناصر د 1 عدد وي، واحد مټریکس بلل کېږي.

په مټریکسونو باندې لومړني عملیات:

- **د مټریکسونو جمع او تفریق**: د مټریکسونو جمع او تفریق هغه وخت امکان لري چې:

$$A_{m\times n} \pm B_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} \pm (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m\times n} = (C_{ij})_{m\times n} = C_{m\times n}$$

د مټریکسونو د جمعې او تفریق خواص:

1) $A+B=B+A$
2) $A-B\neq B-A$
3) $(A\pm B)\pm C = A\pm(B\pm C)$
4) $A+0=0+A=A$
5) $A+(-A)=-A+A=0$

په مټریکس کې د سکالر ضربول: که $K\in IR$ او $A=(a_{ij})_{m\times n}$ وي، نو:

$$KA=K(a_{ij})_{m\times n}=(C_{ij})_{m\times n}=C_{m\times n}$$

په مټریکس کې د سکالر ضرب خواص:

a) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

b) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

c) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

د دوو مټریکسونو ضرب: د دوو مټریکسونو ضرب هغه وخت ممکن دی چې د لومړی مټریکس د ستونونو شمېر، د دویم مټریکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي، که $A=(a_{ij})_{m\times n}$ او $B=(b_{ij})_{n\times p}$ وي، نو:

$$A\cdot B=(a_{ij})_{m\times n}\cdot=(b_{ij})_{n\times p}=(C_{ij})_{m\times p}=C_{m\times p}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يعنې د دوو مټريکسونو د ضرب حاصل هغه دريم مټريکس دی چې د سطرونو شمېر يې له لومړي مټريکس سره او د ستونونو شمېر يې له دويم مټريکس سره برابر وي.

د مټريکسونو د ضرب خواص: که A او B دوه مټريکسونه وي، نو:

1) $AB \neq BA$ 2) $(AB)C = A(BC)$

3) $A(B+C) = AB + AC$ 4) $I \cdot A = A \cdot I = A$

5) $K(AB) = (KA)B = A(KB)$

د يوه مټريکس ترانسپوز مټريکس: که د يوه $A_{m\times n}$ مټريکس ستونونه په سطرونو او سطرونه په ستونونو بدل شي، هغه نوی مټريکس چې لاسته راځي ،د ترانسپوز مټريکس په نامه يادېږي. د A ترانسپوز مټريکس په A^T سره ښيي.

مثلثي مټريکس: که په يوه مټريکس کې د اصلي قطر پورتني او يا ښکتني عناصر ټول صفرونه وي، نوموړی مټريکس د مثلثي مټريکس په نامه يادېږي.

متناظر مټريکس: که د A يو مټريکس له خپل ترانسپوز A^T مټريکس سره برابر شي($A = A^T$) نو د A مټريکس ته متناظر مټريکس وايي.

ديترمېنانت: که د A مټريکس يوه حقيقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د A د مټريکس له ديترمېنانت څخه عبارت دی، او د $|A|$ يا $\det A$ په شکل سره ښودل کېږي.

د ديترمېنانت خواص:

1. که د $A_{n\times n}$ مټريکس د يوه سطر او يا ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو ديترمېنانت يې صفر دی، يعنې:
$\det A = |A| = 0$
2. که د ديترمېنانت دوه سطرونه او يا دوه ستونونه سره برابر(مساوي) وي، نو ديترمېنانت يې صفر دی. $|A| = 0$
3. که $A_{n\times n}$ مټريکس د يوه سطر يا ستون عناصر د بل سطر يا ستون د عناصرو مضرب وي، نو ديترمېنانت يې صفر دی. $|A| = 0$
4. د A مټريکس او د A ترانسپوز مټريکس ديترمېنانتونه سره مساوي وي، يعنې: $|A^T| = |A|$

د مټريکسونو ضربي معکوس: د $A = (a_{ij})_{m\times n}$ مربعي مټريکس په پام کې نيسو ،که چيرې د B مربعي مټريکس داسې موجود وي چې $AB = BA = I$ ، په دې صورت کې د B مټريکس د A د مټريکس معکوس دی او د A د مټريکس معکوس مټريکس په A^{-1} سره ښيي: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

د خطي معادلو د سيستم حل:

- له معکوس مټريکس څخه په ګټه اخيستنې د خطي معادلو د سيستم حل.
- د خطي معادلو د سيستم حل د کرامر په طريقه.
- دګوس په طريقه د خطي معادلو د سيستم حل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي پوښتنې

لاندې پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، له سم ځواب څخه کرۍ تاوکړئ.

1. که $|A|=3$ وي، نو $|A^{-1}|$ پیداکړئ.

$a)\ \frac{1}{3}$ $\quad b)\ 9$ $\quad c)\ \frac{1}{9}$ $\quad d)\ 3$

2. که $A=\begin{pmatrix} 2m-3 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$ معکوس منونکی مېټريکس وي، نو د m قیمت به څو وي؟

$a)\ m=1,\frac{1}{2}$ $\quad b)\ m\neq 1$ $\quad c)\ m=0$ $\quad d)\ m\neq 1,\frac{1}{2}$

3. که $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ وي، د x هغه مېټريکس په لاس راوړئ چې په دغه رابطه $Ax=A^{-1}$ کې صدق وکړي.

$a)\ \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 25 & 14 \end{pmatrix}$ $\quad b)\ \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -25 & 14 \end{pmatrix}$

$c)\ \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -25 & -16 \end{pmatrix}$ $\quad d)\ \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -25 & -12 \end{pmatrix}$

4. د $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ مېټريکس لاندې د $y=2x$ د خط بدلون منونکي خط پیداکړئ.

a) د y محور $\quad$ b) د x محور $\quad$ c) $y+2x=0$ $\quad$ d) $y=0$

5. د x په کومو قیمتونو دغه دیترمینانت $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$ صفر دی؟

6. $a)\ x=1,2$ $\quad b)\ x=3,1$ $\quad c)\ x=\frac{1}{2},3$ $\quad d)\ x=3,2$

7. د $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ دیترمینانت حاصل په لاس راوړئ.

$a)\ 29$ $\quad b)\ 39$ $\quad c)\ 19$ $\quad d)\ 9$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې پوښتنې حل کړئ.

1. که $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\0 & 4\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}-5 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}$ وي، لاندې محاسبې غوښتل شوې دي:

$a)\ 3A-2B$ $\qquad b)\ -4A+3B$

2. فرض کړئ که $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\-1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ او $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\-1 & 3\\2 & -1\end{pmatrix}$ راکړل شوی وي، نو AB او BA محاسبه کړئ

او ووایاست چې $AB=BA$ دی.

3. لاندې میټریکسونه په پام کې ونیسي:

$C=\begin{pmatrix}-2 & 4\\0 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 4\\-2 & 2\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}2 & 4\\0 & 1\end{pmatrix}$

اشتراکي خاصیت، توزیعي خاصیت او د میټریکسونو ضرب د درو میټریکسونو لپاره وښایاست.

4. لاندې دیترمینانت په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\1 & 0 & 2\\2 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

5. د لاندې میټریکس معکوس میټریکس د الحاق(ad joint) په طریقه پیدا کړئ.

$$M=\begin{pmatrix}2 & -5\\3 & -9\end{pmatrix}$$

6. د لاندې خطي معادلو سیستمونه دکرامر په طریقه حل کړئ.

$a)\begin{cases}2x+y+z=6\\x-2y+2z=10\\3x-y-z=4\end{cases}$ $\qquad b)\begin{cases}x_1-2x_2=4\\2x_1+4x_2=5\end{cases}$

7. د لاندې خطي معادلو سیستمونه دگوس په طریقه حل کړئ.

$a)\begin{cases}2x-3y+3z=0\\3x+2y-5z=0\\5x-4y-2z=0\end{cases}$ $\qquad b)\begin{cases}2x+3y-7=1\\2y+27=-2\end{cases}$

8. د لاندې خطي معادلو سیستمونه د معکوس میټریکس په طریقه حل کړئ.

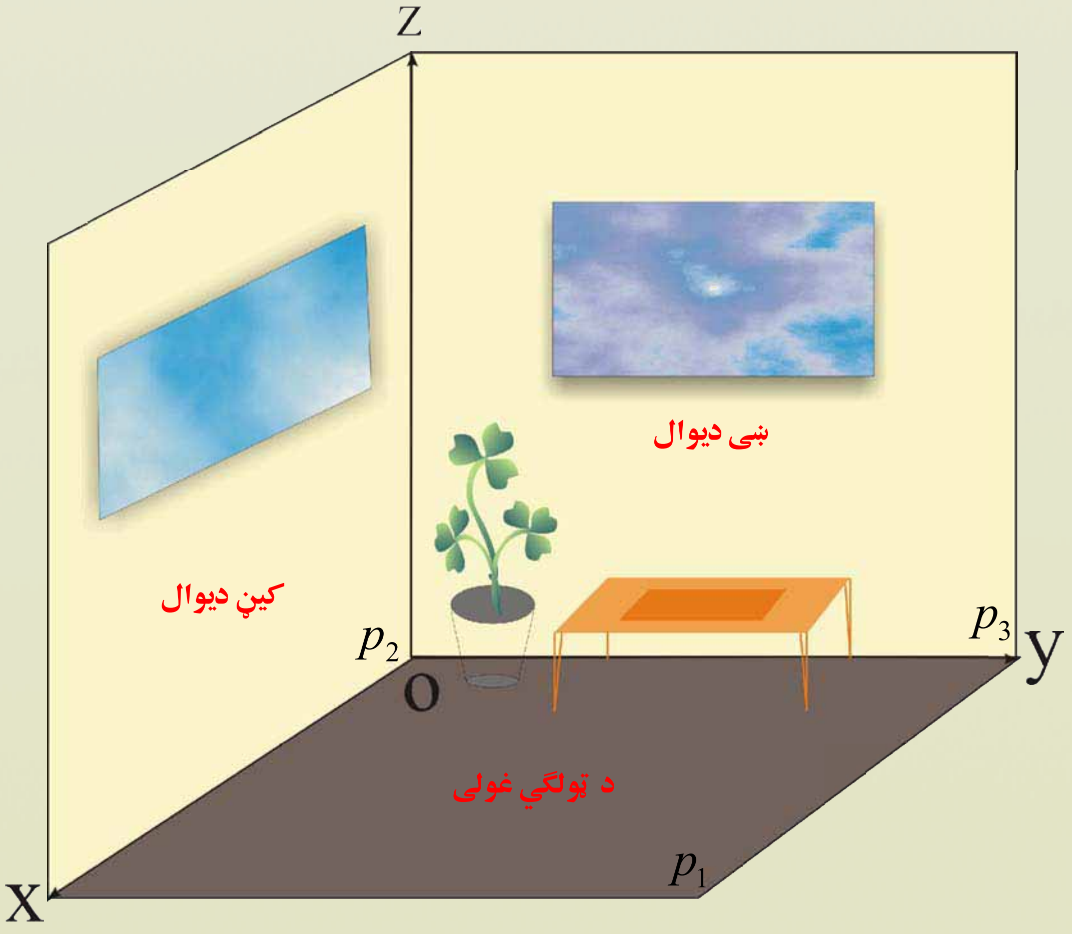
$a)\begin{cases}3x+y+1=0\\4x+3y-2=0\end{cases}$ $\qquad b)\begin{cases}x-y=2\\x+2y=-1\end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم څپرکی

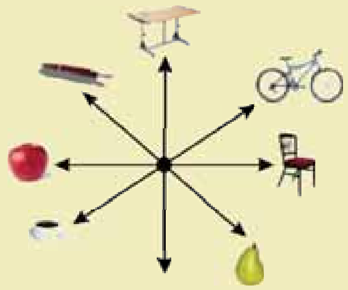
وکتورونه



(c) ketabton.com: The Digital Library

د وضیعه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه

له یوه ټاکلي ټکي څخه د هغې شاوخوا بېلابېلو پرتو شیانو ته لنډه لاره په نښه کړئ.



تعریف

جهت لرونکي قطعه خط ته وکتور وايي، یا په بل عبارت هغه کمیت چې هم مقدار لري او هم جهت لري؛ لکه قوه، فاصله، تعجیل او داسې نور. هر غشی د یو وکتور ممثل دی.

هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیتونو د قایم سیستم په مبداء کې پروت وي، د شعاع وکتور (Position Vector) په نامه یادیږي.

فعالیت

- د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې شعاع وکتور داسې رسم کړئ چې د پای ټکی یې د B (5,5) مختصات ولري.
- د پورتنی راکړل شوي وکتور درې ممثل وکتورونه په راکړل شوو قایمو مخصاتو کې داسې رسم کړئ چې وکتور او شعاع وکتورونه یې توپیر سره ولري.
- یو بل وکتور رسم کړئ چې له پورتني وکتور سره مساوي او مخالف لوري او شعاع وکتور وي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله ترلاسه کیږي.

پایله: په یوه مستوي او په فضا کې هر ممثل وکتور د خپل شعاع وکتور په اندازه وي، نولرو چې:

1. د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونه هغه وخت مساوي بلل کیږي، چې اوږدوالی یې مساوي، $(|\vec{a}|=|\vec{b}|)$ موازي او د یو جهت لرونکی وي.
2. که چیرې یو وکتور $\vec{AB}=0$ وي، په دې صورت کې د $\vec{AB}$ وکتور صفري وکتور(Zero Vector) بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

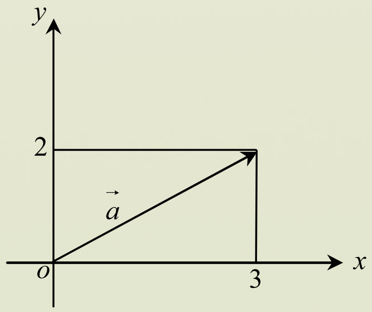
3. دوه وکتورونه هغه وخت مخالف یا منفي بلل کېږي چې اوږدوالی یې مساوي او جهت یې مخالف وي، د بېلګې په توګه:

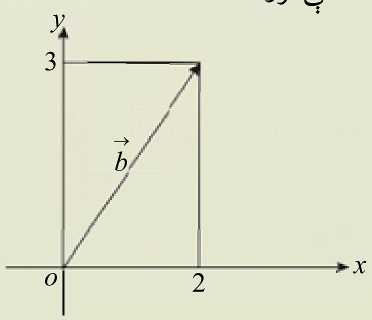
که $\vec{OA}=\vec{a}$ وي، نو $\vec{AO}=-\vec{a}$ دی، په داسې حال کې چې $(|\vec{OA}|=|\vec{AO}|)$ وي.

تعریف: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې یو وکتور په ستوني شکل داسې ښوول کېږي $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ په داسې حال کې چې a_x د x پرمحور وضعیه کمیت او a_y د y پرمحور د $\vec{a}$ وکتور فاصله او ترتیب ښیي.

لومړی مثال: د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د $\vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ او $\vec{b}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ وکتورونه وښایاست؟

حل: د پورتني تعریف له مخې لرو:





یادونه: د یو وکتور د ښوولو لپاره یوه مستوي په دې خاطر کارول کېږي، چې د قایم مختصاتو په سیستم کې د یو ټکي د ښودلو لپاره د مختصاتو په سیستم کې یوازې یو ځای شته، په داسې حال کې چې په مستوي کې د یو وکتور د ښودلو لپاره چې هماغه وکتور په مستوي کې ځای نیولی شي، بې نهایت ځایونه شته.

پوښتنې

1. د هغو وکتورونو لپاره چې په لومړي مثال کې ورکړل شوي دي، مطلوب دي:

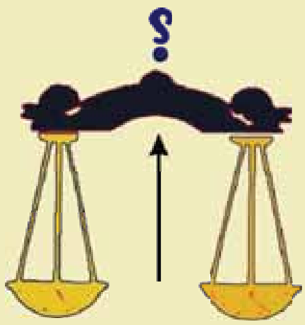
a. د هر یوه وکتور دریې ممثل وکتورونه رسم کړئ.

b. دواړه وکتورونه د شعاع وکتور په موقعیت کې رسم کړئ.

c. د هغوی مخالف وکتورونه کوم وکتورونه دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

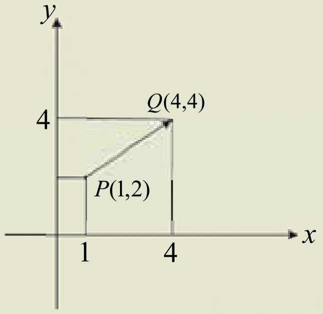
د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی



د تلې دوه یو شان او هم وزنه پلې په پام کې نیسو، چې د یو شاهین په دواړو خواووکې تړل شوي دي. د تلې د شاهین په لاس کې نیولو لپاره کوم ټکی وټاکو چې په نیولو یې د تلې پلې تعادل غوره کړي؟

فعالیت

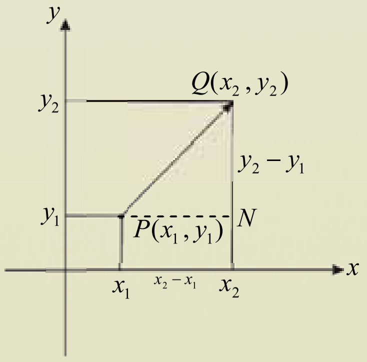
د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې د لاندې شکل په څیر $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ ټکې په پام کې ونیسئ:



- د $\vec{PQ}$ د وکتور اوږدوالی څومره دی؟
- آیا د $\vec{PQ}$ د وکتور د اوږدوالی یا د P او Q دوو ټکو ترمنځ د واټن لپاره فارمول ورکولای شئ؟
- د $\vec{PQ}$ د منځني ټکي وضعیه کمیتونه څومره دي؟
- آیا کولای شئ د دوو ټکو د واټن او د هغوی د منځني ټکي
- لپاره د فورمول په واسطه یو عمومي حالت څرګند کړئ؟

د پورتني فعالیت له پای څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

پایله: د $\vec{a}=\vec{PQ}$ وکتور د هرو دوو اختیاري ټکو لپاره چې $P(x_1,y_1)$ مبداء او $Q(x_2,y_2)$ انجام دی په دې صورت کې وکتور په $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ سره ښیو، د $P\overset{\Delta}{Q}N$ قایم الزاویه مثلث په پام کې نیولو سره د $|\vec{a}|$ د وکتور اوږدوالی عبارت دی، له: $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$

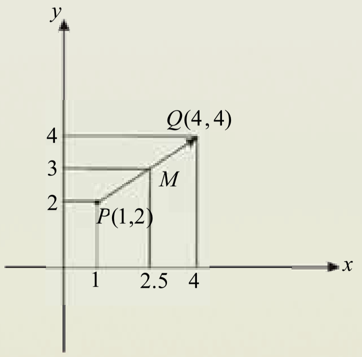


- د $\vec{PQ}$ منځنی ټکی عبارت دی، له:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x_1+x_2}{2}\\\frac{y_1+y_2}{2}\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د $P(1,2)$ او $Q(4,4)$ د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ؟



حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+4}{2}\\\frac{2+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{6}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.5\\3\end{pmatrix}$$

نو د منځني ټکي وضعیه کمیت له $M=\begin{pmatrix}2.5\\3\end{pmatrix}$ څخه عبارت دی او د P او Q د دوو ټکو د واټن د پیداکولو لپاره د فیثاغورث د قضیې په پام کې نیولو سره لرو:

$$|\vec{PQ}|=\sqrt{a_x^{\,2}+a_x^{\,2}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$$

دویم مثال: د $A(2,4)$ او $B(5,5)$ د ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ.

حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2+5}{2}\\\frac{5+4}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3.5\\4.5\end{pmatrix}$$

$$|\vec{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-2)^2+(5-4)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

پوښتنې

د لاندې درکړ شوو ټکو ترمنځ واټن او منځني ټکي پیدا کړئ.

$i)\ B(2,7)\quad,\quad A(3,4)$

$ii)\ N(5,1)\quad,\quad M(1,5)$

$iii)\ Q(8,8)\quad,\quad P(1,8)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورونه په سطح او فضا کې

د تلسکوپ په واسطه د ستورو د تګلوري لیدل په فضا کې ځانګړې وکتورونه ښیي.
د یوې سطحې پرمخ د وکتورونو لپاره یوه بېلګه راوړلای شئ؟

فعالیت

د لاندې شکل له مخې د وضعیه کمیاتو د قایم سیستم او د $IR^2=\{(x,y)\ /\ x,y\in IR\}$ سټ په پام کې نیولو سره لاندې فعالیت سرته ورسوئ.

- د وضعیه کمیاتو په سیستم کې د P یو ټکی چې وضعیه کمیتونه یې (x,y) دی، په مستوي کې وټاکئ.
- د $\vec{u}$ یو شعاع وکتور چې وضعیه کمیتونه یې $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ دي، د وضعیه کمیتونو په سیستم کې وښیئ.
- په مستوي کې د P یو ټکی چې وضعیه کمیتونه یې (x,y) دي، په مستوي کې له $\vec{u}$ یو وکتور سره څه توپیر لري چې وضعیه کمیتونه یې $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ وي؟
- د $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ دوه اختیاري وکتورونه او $a\in IR$ یو سکالر لپاره په هندسي توګه د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې په جلا جلا ډول وښیئ، چې:

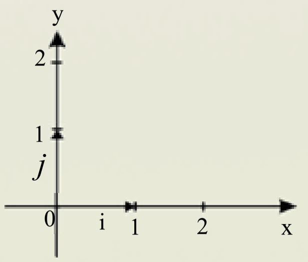
i) $\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$ (د جمعې قاعده)

ii) $a\cdot\vec{u}=a\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\ay\end{pmatrix}$ (دسکالري ضرب قاعده)

تعریف: د هغو ټولو مرتبو جوړو سټ چې د پورته قاعدې په څېر د جمعې او سکالري ضرب قاعدې پرې تطبیق وي، د IR^2 (مستوي) د وکتورونو فضا او یا په مستوي کې د وکتور په نامه یادېږي.

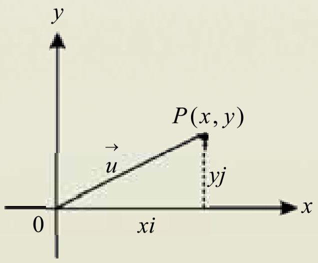
له پورتني فعالیت او تعریف څخه لاندې پایله لاسته راځي:

پایله: د دوو ځانګړو وکتورونو $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په پام کې نیولو سره چې اوږدوالی یې یو واحد او $|\vec{i}|=|\vec{j}|$ دي. هر اختیاري وکتور $\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ لپاره لرو:



$$\vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{u}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}$$



$\vec{i}$ او $\vec{j}$ واحد وکتورونه دي چې د x او y محورونو په امتداد پراته دي.

واحد وکتور(unit victor): هغه وکتور دی چې طول یې یو واحد او د مختصې د جهت د تزاید لپاره ترې کار اخلي.

لومړی مثال: که $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ وي، د لاندې وکتورونو قیمت پیدا کړئ.

(i): $\vec{u}+\vec{v}=?$ (ii): $4\vec{u}+2\vec{v}=?$ (iii): $\vec{u}-\vec{v}=?$

(iv): $\vec{u}-\vec{u}=?$ (v): $|\vec{u}|=?$

حل:

$$i)\quad \vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\\-3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=3\vec{i}+2\vec{j}$$

$$ii)\quad 4\vec{u}+2\vec{v}=4\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+4\\-12+10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-2\end{pmatrix}=8\vec{i}-2\vec{j}$$

$$iii)\quad \vec{u}-\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2\\-3-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-8\end{pmatrix}=-\vec{i}-8\vec{j}$$

$$iv)\quad \vec{u}-\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=0$$

$$v)\quad |\vec{u}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

پوښتنه

1. که $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ او $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ وي، $\vec{u}+2\vec{v}$، $\vec{u}-2\vec{v}$ او $2\vec{u}+4\vec{v}$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات

که د ټولګي په فضا کې یو ټکی وټاکئ آیا داسې یوه د حل لاره شته چې د ټکي واټن نسبت د ټولګي غولي او مجاور دیوال ته وټاکو؟

تعریف

درې بُعدي IR^3 فضا د ټولو هغو مرتبو درې ګونو (x,y,z) څخه عبارت دی چې په لاندې ډول تعریفیږي:

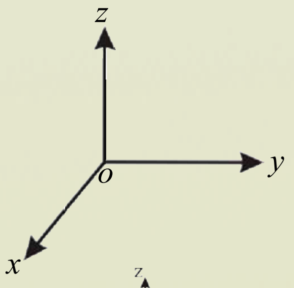
$$IR^3 = IR \times IR \times IR = \{(x,y,z) / x,y,z \in IR\}$$

هغه درې مستویګانې p_3, p_2, p_1 چې دوه په دوه یو په بل عمود دي، د درې بُعدي فضا د مختصاتو مستویګانې بلل کیږي.

د دغو مستویګانو د دوه په دوه ګډ فصل درې قایمې زاویې جوړوي چې هغه د درې بُعدي فضا قایم مختصات بولي. د درې بعدي فضا قایم مختصات داسې نوموي چې که یو تن ودریږي، هغه محور چې د لیدونکي د تنې په لور دی، د z محور او هغه محور چې د لیدونکي د لید په لور دی د y محور او هغه محور چې د لیدونکو د ښي لاس په لور پروت دی، د x محور دی او د دغو درې واړو محورونو د تقاطع ټکی له O ټکي څخه عبارت دی. چې د قایمو مختصاتو مبداء ښیي.

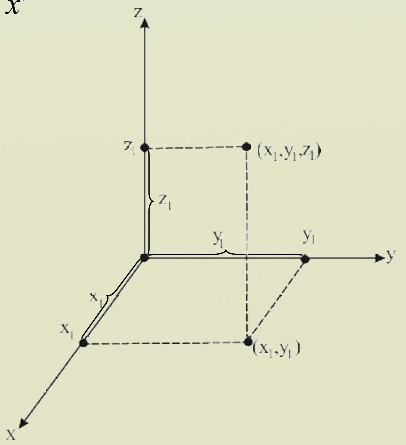
په درې بعدي فضا کې د یوه ټکي مختصات له هغه واټن څخه عبارت دی چې له درې واړو مستویګانو څخه یې لري.

د ټکي واټن د مختصاتو له مستویګانو څخه په $|x|$، $|y|$ او $|z|$ سره ښیي.



په درې بعدي فضا کې د یوه ټکي د ځای ټاکل:

د درې بعدي فضا په قایمو مختصاتو کې د $A(x_1, y_1, z_1)$ ټکي د ټاکلو لپاره د هرې مختصې په اړوند محور باندې د مختصې د علامې په پام کې نیولو سره فاصلې جلا کوو، لومړی د x له محور څخه موازي خط د y له محور سره رسموو، د تقاطع ټکی یې چې (x,y) دی، پیدا او وروسته له یاد شوي ټکي څخه یو بل خط موازي د z له محور سره رسموو، په پایله کې د تقاطع ټکی په لاس راځي چې په دې ترتیب د ټکي ټاکل په درې بعدي فضا کې بشپړیږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: په درې بعدي فضاکې د y, x او z مختصو منفي جهتونه د نومورو محورونو له امتداد یافته څخه عبارت دی.

فعالیت

- د $A(2,4,3)$ او $B(-2,-3,3)$ ټکي د درې بعدي فضا قایم سیستم کې وښایاست.

په فضاکې د $P(x,y,z)$ یو ټکی چې د $\vec{OP}$ وکتور له $\vec{u}$ سره مساوي دی، د IR^2 د فضا په شان په درې بعدي په فضا یا IR^3 کې هم د جمعې او سکالري ضرب قاعدې د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دواړو وکتورونو لپاره او د a سکالر لپاره صورت نیسي:

$$\vec{u}+\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$$ (د جمعې قاعده)

$$a\cdot\vec{u}=a\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\ay\\az\end{pmatrix}$$ (د سکالري ضرب قاعده)

لومړی مثال: که $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ او $\vec{w}=\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}$ وي، $\vec{v}+\vec{w}$ ، $\vec{v}-\vec{w}$ ، $2\vec{w}$ او $\left|\vec{v}-2\vec{w}\right|$ پیداکړئ.

حل: لرو چې:

$$i)\quad \vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1\\1+4\\3+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}$$

$$ii)\quad \vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1\\1-4\\3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix}$$

$$iii)\quad 2\vec{w}=2\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}$$

$$iv)\quad \left|\vec{v}-2\vec{w}\right|=\left|\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\8\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}2+2\\1-8\\3-0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}4\\-7\\3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4^2+(-7)^2+3^2}$$

$$=\sqrt{16+49+9}=\sqrt{74}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

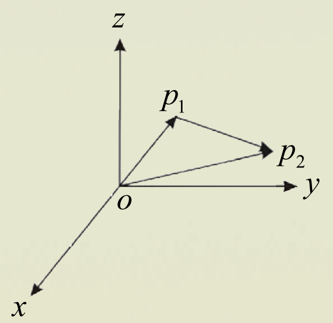
یادونه:

A- کیدای شي سطحې ته ورته درې واحد وکتورونه $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ، $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ چې:

$|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$ دي، په درې بعدي فضا کې په پام کې نیول شوی، د z,y,x محورونو په امتداد د واحد د وکتورونو په نامه یادکړو. د جمعې د قاعدې په پام کې نیولو سره د $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ هر اختیاري وکتور د واحد وکتور په پام کې نیولو سره په لاندې توګه ښودلی شو:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

B- **په فضا کې د دوو ټکو ترمنځ واټن:** که چېرې $\overrightarrow{OP_1}$ او $\overrightarrow{OP_2}$ د $P_1(x_1,y_1,z_1)$ او $P_2(x_2,y_2,z_2)$ د ټکو دوه شعاع وکتورونه وي، په دې توګه لرو:



$$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{p_1p_2}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\\z_2-z_1\end{pmatrix}$$

نو د P_1 او P_2 د ټکو ترمنځ د واټن د پیداکولو لپاره لرو:

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

پورتنی فورمول د P_1 او P_2 ټکو ترمنځ واټن ښیي.

C- که په درې بُعدې فضا کې د یو ټکي واټن له مبدأ څخه مطلوب وي یعنې $(x_1,y_1,z_1)=(0,0,0)$ او $(x_2,y_2,z_2)=(x,y,z)$ وي؛ نو د ټکي واټن له مبدأ څخه د لاندې فورمول په واسطه پیداکولای شو:

$$\left|\overrightarrow{p_1p_2}\right|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: که $\vec{a}=(-5\ ,\ 4\ ,\ 5)$ وی؛ نو د نوموړي شعاع وکتور طول څو دی؟

حل: د شعاع وکتور موقعیت ته په کتني خرنگه چې د شعاع وکتور مبدأ د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې پرته ده د C جز له فورمول څخه گټه اخلو:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2++y^2+z^2}=\sqrt{(-5)^2+4^2+5^2}=\sqrt{25+16+25}=\sqrt{66}$$

دریم مثال: که $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{v}=4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=6\vec{i}-9\vec{j}-3\vec{k}$ راکړل شوی وي.

ومومئ $ii)\ |\vec{u}-\vec{v}-\vec{w}|=?$ $\quad i)\ \vec{u}+2\vec{v}=?$

حل: لرو چې:

$$i)\ \vec{u}+2\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}+2(4\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k})$$

$$=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}+8\vec{i}+12\vec{j}+4\vec{k}=(10\vec{i}+15\vec{j}+5\vec{k})$$

$$ii)\ \left|(2-4-6)\vec{i}+(3-6-9)\vec{j}+(1-2+3)\vec{k}\right|=\left|-8\vec{i}-12\vec{j}+2\vec{k}\right|$$

$$=\sqrt{(-8)^2+(-12)^2+2^2}=\sqrt{64+144+4}$$

$$=\sqrt{212}$$

پوښتني

1. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو جهت ته واحد وکتور پيدا کړئ.
2. په دریم مثال کې چې $\vec{u},\vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونه راکړل شوي دي په پام کې ونیسئ او لاندې پوښتنو ته ځوابونه ومومئ.

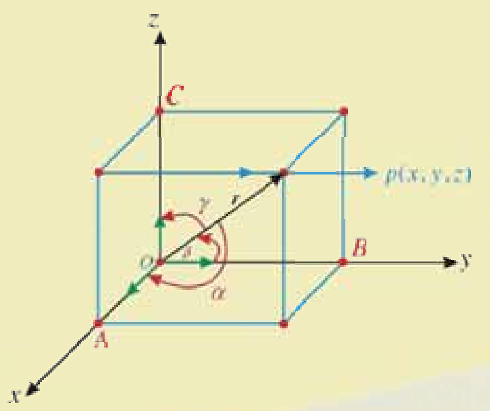
$a)\ 2\vec{u}-6\vec{v}+4\vec{w}=?$ $\qquad b)\ |\vec{u}-\frac{1}{3}\vec{v}-2\vec{w}|=?$

3. $\vec{u}$ او $\vec{v},\vec{v}$ او $\vec{w},\vec{w}$ او $\vec{u}$ وکتورونو ترمنځ واټن پيدا کړئ.
4. هغه وکتور واحدونه پيدا کړئ چې د $\vec{u},\vec{v}$ او $\vec{w}$ وکتورونو په جهت پراته دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه وکتور د جهت زاویې او کوساینونه



تعریف: که د $\vec{r}$ شعاع وکتور د قایمو مختصاتو له محورونو سره په ترتیب د β, α او γ زاویې جوړې کړي په دې صورت کې شکل ته په پام لیکلای شو:

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$$
$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_x$$
$$\overrightarrow{OB} = \vec{r}_y$$
$$\overrightarrow{OC} = \vec{r}_z$$

کولای شو د $\vec{r}$ د وکتور د جهت کوساینونه په لاندې ډول ولیکو:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cos\alpha$$
$$\cos\beta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\cos\beta$$
$$\cos\gamma = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r\cos\gamma$$

د پورتنیو اړیکو چپ لوری مربع کوو او وروسته یې سره جمع کوو:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}$$

پوهیږو چې $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ دی، نو:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

فعالیت

که چېرې په یوه درې بعدي فضا کې $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ وکتور چې د صفر خلاف دی، ورکړ شوی وي، داسې چې د پورته شکل په شان α, β او γ په ترتیب سره د $\vec{v}$ وکتور زاویې او $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ واحد وکتورونه وي، په دې ډول لاندې فعالیت اجرا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- آیا ویلاي شئ چې د α , β او γ زاویې په کومه اندازه تحول کوي؟
- آیا له پورتنیو زاویو څخه یوه یې منفي کیدای شي؟
- که چیرې له زاویو څخه یوه یې صفر شي، د وکتور د موقعیت په هکله څه ویلای شئ؟
- د $\vec{v}$ د وکتور جهت زاویو کوساین لپاره یوه ګډه اړیکه پیدا کړئ؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسیږو:

پایله: که په فضا کې د $\vec{v}$ یو وکتور، چې صفر نه وي، یعني $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$، راکړل شوی وي، نو د جهت د زاویو د کوساینونو ترمنځ لاندې اړیکې شته:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

د پورتنۍ پایلې د ثبوت لپاره پوهیږو، چې:

$$\left|\vec{v}\right|=\left|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right|=\left|x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

له بلې خوا د جهت د واحد وکتور یا د $\vec{v}=\vec{OP}$ مسیر عبارت دی، له:

$$\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\begin{pmatrix}\frac{\vec{v}_x}{|\vec{v}|}\\\frac{\vec{v}_y}{|\vec{v}|}\\\frac{\vec{v}_z}{|\vec{v}|}\end{pmatrix}$$

پوښتنې

1. که $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ وي، پیدا کړئ؟

$a)\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}=?$ $b)\ \vec{v}-3\vec{w}=?$ $c)\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

2. د α اندازه داسې پیدا کړئ چې د $\alpha\vec{i}+(\alpha+1)\vec{j}+2\vec{k}$ وکتور اوږدوالی مساوي په 3 وي.

د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل

د دوو وکتورونو د سکالر ضرب حاصل د انجینری او فزیك په زده کړه کې په کاریږي او د هغو ترمنځ زاویې په پام کې نیولو سره له یو سکالري کمیت سره مساوي دی، که چیرې: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$ وي، نو $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ ده، که نه؟

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$$

تعریف

$\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي په مستوي یا فضا کې په پام کې نیسو.

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ سکالري ضرب حاصل په $\vec{u}\cdot\vec{v}$ سره ښیو، چې حاصل یې عبارت دی، له: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاویه جوړه کړي او $(0\le\theta\le\pi)$ سره دي.

فعالیت

د وکتورونو د سکالري ضرب د حاصل په پام کې نیولو سره وښایاست، چې:

i) $\vec{i}\cdot\vec{i}=1,\quad \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\quad \vec{k}\cdot\vec{k}=1$

ii) $\vec{i}\cdot\vec{j}=0,\quad \vec{j}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{k}\cdot\vec{i}=0$

iii) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

iv) که $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د صفر خلاف او $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ وي، نو وکتورونه یو پر بل عمود دي.

- د دوه $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}$ وکتورونو لپاره د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ضرب حاصل د $a_1a_2+b_1b_2$ له سکالري قیمت سره مساوي دی.
- په فضاکې د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ د ضرب حاصل مطلوب یا غوښتل شوی په دې ډول چې $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ وي.

د وکتورونو د سکالري ضرب حاصل لپاره له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله لاسته راځي.

پایله: که $\vec{u}$، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ درې اختیاري وکتورونه او c یو حقیقي عدد وي، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

i) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

ii) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (د ضرب تبادلوي خاصیت یا ځانګړتیا).

iii) $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\,\vec{v}+\vec{u}\,\vec{w}$ (د ضرب توزیعي خاصیت په جمع).

iv) $(c\cdot\vec{u})\,\vec{v}=c(\vec{u}\cdot\vec{v})$ در ضرب توزیعي خاصیت.

لومړی مثال: که $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ دوه وکتورونه د صفر خلاف وي، د سکالري ضرب حاصل یې پیدا کړئ.

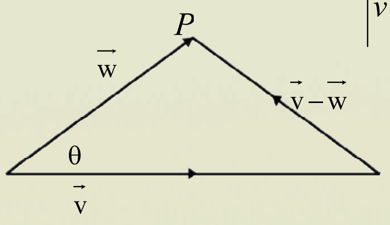
حل: د تعریف له مخې لرو چې:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$
$$=a_1\cdot a_2(\vec{i}\cdot\vec{i})+a_1b_2\cdot(\vec{i}\cdot\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\cdot\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\cdot\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\cdot\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\cdot\vec{k})$$
$$+c_1\cdot a_2(\vec{k}\cdot\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\cdot\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\cdot\vec{k})=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$$

دویم مثال: که $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$ او $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ د یو ي مستوي دوه وکتورونه وي، وښایاست چې:

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=x_1x_2+y_1y_2$$

حل: د تعریف له مخې لرو: $\left|\vec{v}-\vec{w}\right|^2=\left|\vec{v}\right|^2+\left|\vec{w}\right|^2-2\vec{v}\cdot\vec{w}\cdot\cos\theta$



څرنګه چې $\vec{v}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$، $\vec{w}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$ په پایله کې $\vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\y_1-y_2\end{pmatrix}$ دي، نو د پورتنی اړیکی څخه لرو:

$$|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2=|x_1^2+y_1^2|+|x_2^2+y_2^2|-2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\theta$$

$$\Rightarrow -2x_1x_2-2y_1y_2=-2|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\theta /\div -2$$

$$\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2=|\vec{w}|\cdot|\vec{v}|\cos\theta=\vec{v}\cdot\vec{w}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: که چېرې د $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ او $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ وکتورونه درکړ شوي وي، د سکالري ضرب حاصل يې پيدا کړئ.

حل: د فورمول په پام کې نيولو سره لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=i^2+4j^2+k^2=1+4+1=6$$

څلورم مثال: وښاياست چې د $\vec{u}=2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$ او $\vec{v}=4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k}$ وکتورونه يو پر بل عمود دي.

حل: په دې هکله لرو:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k})(4\vec{i}-3\vec{j}-4\vec{k})=(2)(4)+(-4)(-3)+(5)(-4)$$

$$=8+12-20=0 \quad \Rightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$$

څرنګه چې د وکتورونو د سکالري ضرب حاصل مساوي په صفر شو، نو وکتورونه يو پر بل عمود دي.

پنځم مثال: د α قيمت داسې پيدا کړئ چې د $2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k}$ او $3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k}$ وکتورونه يو پر بل عمود وي.

حل: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونو له عمود والي څخه دې پايلې ته رسېږو چې: $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ دی، نو لرو:

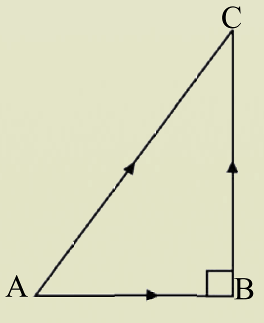
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(2\vec{i}+\alpha\vec{j}+5\vec{k})(3\vec{i}+\vec{j}+\alpha\vec{k})=0 \quad \Rightarrow \quad 6+\alpha+5\alpha=0 \ , \ \alpha=-1$$

شپږم مثال: وښاياست چې د $2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ ، $\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ او $3i-4j-4k$ وکتورونه د يو قايم الزاويه مثلث ضلعې دي.

حل: که $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ او $\overrightarrow{BC}=\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k}$ د مطلوب مثلث دوه ضلعې په پام کې ونيسو، نو دريمه ضلع يې د مثلث د وکتورونو د جمعې حاصل په پام کې نيولو سره چې د مثلث دريمه ضلع ټاکي عبارت دی له:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})+(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$

(چې د مثلث له دريمې ضلعې څخه عبارت دی) $3\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}$ اوس ښيو چې نوموړی مثلث قايم الزاويه دی، د دې لپاره د وکتوري ضرب حاصل $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ وي.



$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})(\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k})$$

$$=(2)(1)+(-1)(-3)+(1)(-5)=2+3-5=0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1. وښاياست چې د $\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}$ د وکتور مرتسمونه د $\vec{k},\vec{j},\vec{i}$ واحد کتورونو په امتداد په ترتيب سره له c,b,a سره مساوي دي.

2. وښاياست چې هر $\overset{\Delta}{ABC}$ کې لاندې اړيکې وجود لري:

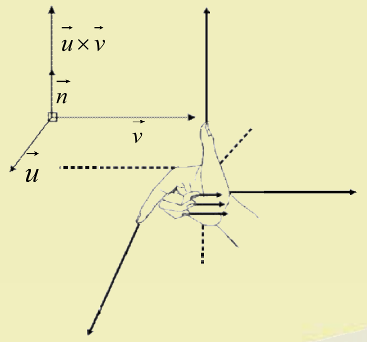
$i)\ a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A \qquad ii)\ a=b\cdot\cos C+c\cdot\cos B$

3. ثبوت کړئ چې: $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وکتوري ضرب حاصل

The cross Product



د راکړل شوي شکل له مخې د کوم لاس (ښي یا کیڼ) په واسطه د $\vec{v}\cdot\vec{u}$ او $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتورونـه داسـې وښـیو چې $\vec{u}$ د ورغـوي پـه جهت، $\vec{v}$ د ښنګل په جهت او $\vec{u}\times\vec{v}$ د ښی لاس د غټې ګوتې په لور واقع شي؟

تعریف

د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، په پام کې نیسو. د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوو وکتورونو د وکتوري ضرب حاصل په $\vec{u}\times\vec{v}$ چې($\vec{u}$ کرس $\vec{v}$ لوستل کیږي) عبارت دی، له: یعني د دوو وکتورونو وکتوري ضرب له هغه دریم وکتور څخه عبارت دی چې د دوی د مبدأ په ټکي عمود وي.

$$\vec{u}\times\vec{v}=(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\sin\theta)\,\vec{n}$$

په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ $(0\le\theta\le\pi)$ وکتورنو تر منځ زاویه او $\vec{n}$ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د وکتورونو په واسطه جوړه شوي مستوي لـه عمود واحد وکتور څخه عبارت دی، د ښي لاس قاعدې په واسطه (Right hand rule) ښودل کیږي.

د دوو وکتورونو وکتوري ضرب

مخکې له دې چې د دوو وکتورنو وکتوري ضرب توضیح کړو، لازمه ده چې د وکتورونو خطي ترکیب، وکتوري فضا، د وکتورونو خطي خپلواکي(استقلال) په لنډ ډول تر څېړنې لاندې ونیسو.

1. **د وکتورونو خطي ترکیب**: د یوه سټ د وکتورونو د سکالري مضربونو مجموعه د همغه سټ د وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

که $\vec{a}_n, \ldots, \vec{a}_2, \vec{a}_1$ د یوه سټ وکتورونه او $\alpha_n, \ldots, \alpha_2, \alpha_1 \in IR$ سکالرونه وي، په دې صورت کې د $\vec{a}$ وکتور په داسې حال کې چې $\vec{a}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n$ وي، $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a}_n, \ldots, \vec{a}_2, \vec{a}_1$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

لومړی مثال: که $\vec{a}_1=2i+j-3k$ او $\vec{a}_2=i+2j+2k$ وکتورونه راکړل شوي وي، د هغوی خطي ترکیب په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې $\alpha_1=5$ او $\alpha_2=2$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\vec{a} = 5\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 = 5(2i + j - 3k) + 2(i + 2j + 2k)$$
$$= 10i + 5j - 15k + 2i + 4j + 4k$$
$$= 12i + 9j - 11k$$

د $\vec{a}$ وکتور د $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

دویم مثال: که $\vec{a}_1 = (2,3)$ او $\vec{a}_2 = (5,1)$ وکتورونه راکړل شوی وي، وښایاست چې د $\vec{a} = (6\ ,\ -5)$ وکتور د $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونو خطي ترکیب دی.

حل: څرنګه چې $\alpha_1\ ,\ \alpha_2 \in IR$ سکالرونه دي، نو:

$$\vec{a} = (6\ ,-5) = \alpha_1(2\ ,\ 3) + \alpha_2(5\ ,1)$$
$$= (6\ ,-5) = (2\alpha_1\ ,3\alpha_1) + (5\alpha_2\ ,\ \alpha_2)$$
$$= (6\ ,-5) = (2\alpha_1 + 5\alpha_2\ \ ,3\alpha_1 + \alpha_2)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = -5 \end{cases}$$

له پورتني سیستم څخه د α_1 او α_2 قیمتونه په لاس راوړو:

$$\begin{array}{r} 3\\2 \end{array}\begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = -5 \end{cases}$$
$$6\alpha_1 + 15\alpha_2 = 18$$
$$-6\alpha_1 \pm 2\alpha_2 = \mp 10$$
$$13\alpha_2 = 28 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{28}{13}$$
$$2\alpha_1 + 5\frac{28}{13} = 6$$
$$2\alpha_1 + \frac{140}{13} = 6 \Rightarrow 2\alpha_1 = 6 - \frac{140}{13} = \frac{78-140}{13}$$
$$2\alpha_1 = \frac{-62}{13} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{62}{26} = -\frac{31}{13}$$
$$\vec{a} = (6\ ,\ -5) = \alpha_1(2\ ,\ 3) + \alpha_2(5\ ,\ 1)$$
$$\vec{a} = (6\ ,\ -5) = -\frac{31}{13}(2\ ,\ 3) + \frac{28}{13}(5\ ,\ 1)$$

یعنې که α_1 او α_2 قیمتونه په $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورنوکې ضرب شي، په پایله کې د $\vec{a}$ وکتور په لاس راځي، نو مولیدل چې $\vec{a}_1$ او $\vec{a}_2$ وکتورونه د $\vec{a}$ د وکتور خطي ترکیب دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د طبعي واحد وکتورونو د خطي ترکیب په واسطه د یوه وکتور ښودل:

که په دوه بعدي، درې بعدي او بلاخره په n بعدي فضاکې شعاع وکتورونه راکړل شوي وي. کولای شو هغه د واحد وکتورونو د ضریبونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول وښیو.

a) که دوه بعدي فضا وي $(x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0\ ,\ x_2)$

نو: $= x_1(1\ ,0) + x_2(0\ ,1)$

که $e_2 = (0,1)$ او $e_1 = (1\ ,0)$ وي.

نو: $(x_1, x_2) = e_1x_1 + e_2x_2$

او په بل ډول یې هم لیکلای شو:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1,0) + y(0\ ,1)$$
$$= xe_1 + ye_2 = xi + yj$$

b) که فضا درې بعدي وي، نو په لاندې ډول کړنه کوو:

$$(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z) = (x_1\ ,0\ ,0) + (0, x_2\ ,0) + (0\ ,0\ ,\ x_3)$$
$$= x_1(1,0\ ,0) + x_2\,(0\ ,1\ ,0) + x_3(0,0\ ,1)$$

څرنګه چې $e_1 = (1,0,0)$ ، $e_2 = (0,1,0)$ او $e_3 = (0,0,1)$ په درې بُعدي فضاکې واحد وکتورونه دي، نو:

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$
$$(x, y\ ,z) = xi + yj + zk$$

c) په عمومي حالت کې که فضا n بعدي وي

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1\ , 0, \dots, 0) + (0\ , x_2, \dots, 0) + \dots + (0,0,\dots,x_n)$$
$$= x_1(1\ ,0,\dots,0) + x_2(0,1,\dots,0) + \dots + x_n(0\ ,0,\dots,1)$$
$$= x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$$

په داسې حال کې چې $e_1, e_2, \dots, e_n$ طبعي واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو خطي خپلواکي: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ وکتورونه په یوه وکتوري ساحه کې خطي خپلواکي(خطي استقلال) لري، که چیرې دغه خطي ترکیب $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$ مساوي په صفر وي او همدارنګه $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ وي.

فعالیت

که $S = \{(1\ ,0\ \ ,0)\ ,(0\ ,1\ ,0)\ ,(0\ ,0\ ,1)\}$ وي وښایاست چې S خطي خپلواکي لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

غیر خپلواک خطي وکتورونه: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ وکتورونه خطاً مربوط(خطي غیر خپلواک) یا خطي انحصار لري، که چیرې یوازې او یوازې $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = 0$ وي او کم ترکمه یو له ضریبونو د $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ څخه د صفر خلاف وي.

یادونه:

ددې لپاره چې د وکتورونو یو سټ په لاس راوړو چې خطي خپلواکي ولري، نو لاندې پړاوونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: د وکتورونو ترکیب په لاس راوړو او له صفر وکتور سره یې مساوي نیسو.

دویم پړاو: د وکتورونو د جمعې عملیه سرته رسوو.

دریم پړاو: د معادلاتو سیستم تشکیلوو.

څلورم پړاو: د معادلاتو سیستم د سکالرونو لپاره حلوو،په هغه صورت کې چې ټول سکالرونه صفر شي نو وایو چې نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري او که چیرې له ټولو سکالرو څخه کم ترکمه یو سکالر د صفر خلاف وي، نو وکتورونه خطي خپلواکي نه لري.

مثـــــال: د $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ وکتورونـــــه پـــــه لانـــــدې ډول راکـــــړل شـــــوې دي $\vec{a}_1 = (1,2,0)$, $\vec{a}_2 = (0,3,1)$, $\vec{a}_3 = (2,3,1)$ وښایاســـت چې $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ او $\vec{a}_3$ وکتورونـــه خطـــي خپلواکي لري او که نه؟

حل: د خطي خپلواکو وکتورونو له اړیکې څخه په ګټې اخیستنې کولای شو، ولیکو:

لومړی پړاو: $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \alpha_1(1,2,0) + \alpha_2(0,3,1) + \alpha_3(2,3,1) = 0$

دویم پړاو:

$$= (\alpha_1, 2\alpha_1, 0) + (0, 3\alpha_2, \alpha_2) + (2\alpha_3, 3\alpha_3, \alpha_3) = (0,0,0)$$
$$= (\alpha_1 + 0 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3, 0 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0,0,0)$$

دریم پړاو:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 0 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 0 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

څلورم پړاو: اوس د معادلاتو سیستم د α_1 ، α_2 او α_3 لپاره حلوو:

$$\alpha_2 = -\alpha_3$$
$$2\alpha_1 + 3(-\alpha_3) + 3\alpha_3 = 2\alpha_1 - 3\alpha_3 + 3\alpha_3 = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 = 0 , \ \alpha_1 = 0$$
$$\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0$$
$$0 + 2\alpha_3 = 0 \ \Rightarrow \ \alpha_3 = 0$$
$$2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$$
$$0 + 3\alpha_2 + 0 = 0 \ \Rightarrow \ 3\alpha_2 = 0 \quad , \quad \alpha_2 = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځرنګه چې $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ دي، نو نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري.

فعالیت

د تعریف له مخې د ښي لاس د قاعدې په واسطه د $\vec{u}\times\vec{v}$ او $\vec{v}\times\vec{u}$ مسیر او یا جهت په مخامخ شکل کې وښییې.

- وښایاست چې $\vec{i}\times\vec{i}=0$ او $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ دی.
- د پورتنیو څېړنو له مخې د $\vec{j}\times\vec{j}$ ، $\vec{k}\times\vec{k}$ ، $\vec{j}\times\vec{k}$ او $\vec{k}\times\vec{i}$ وکتورونو د ضربونو حاصل په هکله څه ویلای شئ؟
- وښایاست چې: $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$ او $\vec{u}\times\vec{u}=0$ دی.
- **په عمومي ډول ویلای شو چې د $\vec{i},\vec{j}$ او $\vec{k}$ وکتورونو د ضرب حاصل په دایروي ډول د لومړني او دویم وکتور د ضرب له حاصل څخه دریم وکتور، لکه د ورکړل شوي دایرې په څېر لاس ته راځي.**

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې لاس ته راځي:

پایله: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوو وکتورونو (چې صفر نه وي). د وکتوري ضرب له حاصل څخه او د ښي لاس د قاعدې په کارولو سره لرو:

$$\text{i)}\quad \vec{u}\times\vec{u}=0$$

$$\text{ii)}\quad \vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$$

$$\text{iii)}\quad \vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$$

$$\text{iv)}\quad \vec{u}\times(k\vec{v})=(k\vec{u})\times\vec{v}=k\,(\vec{u}\times\vec{v})\ ,\quad k\in IR$$

د وکتوري ضرب د حاصل د تعریف له مخې د پورته پایلې ثبوت دې زده‌کوونکو ته پرېښودل شي.

لومړی مثال: که چېرې $\vec{u}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{v}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ وکتورونه صفر نه وي، نو وښایاست چې:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}=(b_1c_2-c_1b_2)\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\vec{k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د تعریف په کارولو لرو، چې:

$$\vec{u}\times\vec{v}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})\times(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$$

$$=a_1a_2(\vec{i}\times\vec{i})+a_1b_2(\vec{i}\times\vec{j})+a_1c_2(\vec{i}\times\vec{k})+b_1a_2(\vec{j}\times\vec{i})+b_1b_2(\vec{j}\times\vec{j})+b_1c_2(\vec{j}\times\vec{k})$$

$$+c_1a_2(\vec{k}\times\vec{i})+c_1b_2(\vec{k}\times\vec{j})+c_1c_2(\vec{k}\times k)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\\ \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}\end{array}\right\} \quad , \quad \left.\begin{array}{l}\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}\end{array}\right\} \quad , \quad \left.\begin{array}{l}\vec{i}\times\vec{i}=0\\ \vec{j}\times\vec{j}=0\\ \vec{k}\times\vec{k}=0\end{array}\right\}$$

$$=a_1b_2\cdot\vec{k}-a_1c_2\cdot\vec{j}-b_1a_2\cdot\vec{k}+b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\,\vec{j}-c_1b_2\cdot\vec{i}$$

$$=(b_1c_2\cdot\vec{i}+c_1a_2\cdot\vec{j}+a_1b_2\cdot\vec{k})-(c_1b_2\cdot\vec{i}+a_1c_2\,\vec{j}+b_1a_2\cdot\vec{k}$$

$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}+(c_1a_2-a_1c_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

$$=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

$$\Rightarrow\quad \vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=(b_1c_2-c_1b_2)\cdot\vec{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\cdot\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot\vec{k}$$

دویم مثال: وښایاست چې د $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ او $\vec{b}=4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ لپاره د $\vec{a}\times\vec{b}$ حاصل له $(-\vec{i}+6\vec{j}+8\vec{k})$ سره مساوي دی.

حل: د لومړي مثال په کارولو سره پوهېږو، چې:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})\times(4\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=8(\vec{i}\times\vec{i})+4(\vec{i}\times\vec{j})-2(\vec{i}\times\vec{k})$$

$$+4(\vec{j}\times\vec{i})+2(\vec{j}\times\vec{j})-(\vec{j}\times\vec{k})+4(\vec{k}\times\vec{i})+2(\vec{k}\times\vec{j})-(\vec{k}\times\vec{k})$$

$$=0+4\vec{k}+2\vec{j}-4\vec{k}+0-\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{i}-0=-3\vec{i}+6\vec{j}$$

د مخلوط ضرب حاصل(درې ګوني ضرب) Triple Product

تعریف: د دوو یا څو وکتورونو د ضرب لپاره څو امکانه شته چې هر یو یې په لاندې ډول تر څېړنې لاندې نیسو:

i) د $(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$ دضرب حاصل.

د پورتنيو $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونو د ضرب حاصل چې په سکالري ډول ضرب شوی، یو سکالر دی. وروسته نوموړی سکالر د $\vec{c}$ په وکتور کې ضرب شوی چې له پایله یې وکتور په لاس راځي دغه وکتور له $\vec{c}$ د وکتور سره هم جهت دی.

په پورتني ضرب کې لاندې قانون شته: $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \neq (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} \neq (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$

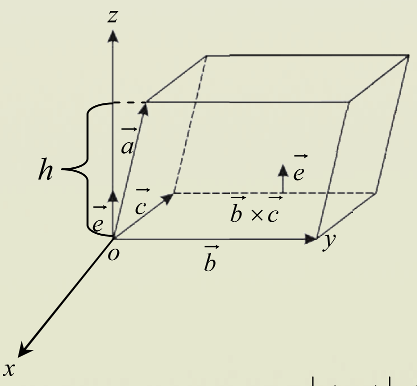
د $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ وکتور جهت د $\vec{a}$ د وکتور هم جهت او د $(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$ وکتور جهت د $\vec{b}$ د وکتور هم جهت دی.

i) $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

ii) $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}(\vec{a}\times\vec{b})$

iii) $\vec{a}(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$

iv) د $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$ اړیکه د هغه متوازي السطوح له حجم څخه عبارت دی چې a, b او c د متوازي‌السطوح اضلاع دي، ځرنګه چې په شکل کې لیدل کیږي $\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|$ د متوازي‌السطوح قاعده او h د متوازي‌السطوح جګوالی دی، نو له دې امله:



د متوازي‌السطوح حجم $= v = \left|\vec{b}\times\vec{c}\right|(\vec{a}\cdot\vec{e}) = \vec{b}\,|\,\vec{a}\times\vec{c}\,|\,\vec{e}$

$v = \vec{b}(\vec{a}\times\vec{c}) = \left|\vec{b}\times\vec{c}\right|h$

تطبیقاتي مسئلې:

1- که چیرې $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ او $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ وکتورونه راکړل شوي وي، هغه وکتور مطلوب او غوښتل کیږي چې پر دواړو وکتورونو عمود وي، ایا دغه وکتور یوازنی وکتور دی، که څنګه؟ دلیل مو څه دی؟

حل: د ښي لاس د قاعدې په کارولو پوهیږو چې د $\vec{a}\times\vec{b}$ وکتور پر هغو وکتورونو عمود دی، نو لرو:

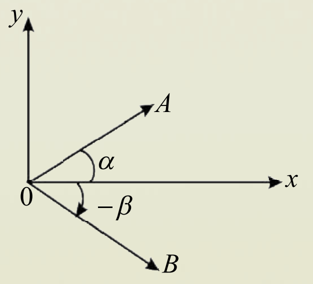
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 6\vec{j} - 10\vec{k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د $\vec{a}\times\vec{b} = 7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k}$ وکتور پر $\vec{a}$ او $\vec{b}$ وکتورونه یوازیني عمود وکتورونه دي، بلکې $\vec{b}\times\vec{a}$ وکتور هم د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په وکتورونو عمود دي، یعنې لرو:

$$\vec{b}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -7\vec{i}+6\vec{j}+10\vec{k} = -(7\vec{i}-6\vec{j}-10\vec{k}) = -\vec{a}\times\vec{b}$$

2- ثبوت کړئ چې د α او β د هرې اختیاري زاویې لپاره $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin B$.



حل: که $\vec{OA}$ او $\vec{OB}$ دوه وکتورونه د x, y په مستوي کې داسې راکړل شوي دي چې د x له محور سره د α او β زاویې جوړې کړي، له شکل څخه پوهیږو: $\hat{AOB} = \alpha+\beta$

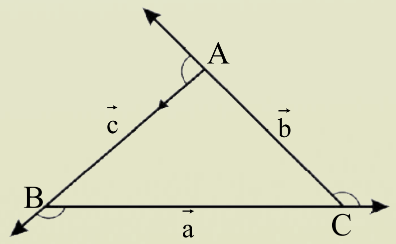
له بلې خوا پوهیږو چې $\vec{OA} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}$ او $\vec{OB} = \cos(-\beta)\,\vec{i} + \sin(-\beta)\,\vec{j}$ نو لرو:

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB} = (\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j})\times(\cos\beta\,\vec{i} - \sin\beta\,\vec{j}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \cos\beta & -\sin\beta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{k}(-\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta) = -\vec{k}\sin(\alpha+\beta)$$

$$\Rightarrow \quad \left|\vec{OA}\right|\times\left|\vec{OB}\right| = \left|-\vec{k}\right|\cdot\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)$$

3- په یوه کیفي مثلث کې وښیئ، چې: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$



حل: فرضوو چې د لاندې شکل له مخې د $\vec{a}$، $\vec{b}$ او $\vec{c}$ وکتورونه د $\overline{BC}$، $\overline{CA}$ او $\overline{AB}$ د مثلث د ضلعو په امتداد راکړل شوي دي، نو لرو: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$

$\Rightarrow \vec{b}+\vec{c} = -\vec{a}$ .... (i)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د مساوات دواړه خواوې په $\vec{c}$ وکتور کې وکتوري ضرب کړو، لاسته راځي، چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{c}=-\vec{a}\times\vec{c}$$

$$(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{c}\times\vec{c})=-\vec{a}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$$

$$\vec{c}\times\vec{c}=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a} \quad\Rightarrow\quad |\vec{b}\times\vec{c}|=|\vec{c}\times\vec{a}|$$

دپورتینو مساواتو د تعریف له مخې داسې لیکلای شو:

$$|\vec{b}|\ |\vec{c}|\sin A=|\vec{c}|\ |\vec{a}|\ \sin B$$

$$\Rightarrow\quad |\vec{b}|\,|\vec{c}|\ \sin A=|\vec{c}|\,|\vec{a}|\sin B \quad\Rightarrow\quad b\sin A=a\sin B\ /\div AB$$

$$\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin A}{a}\quad .... \ (ii) \qquad \text{یا} \qquad \frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}\quad .... \ (ii)$$

د پورته په شان که چیرې د (i) د رابطې دواړه خواوې په $\vec{b}$ وکتور کې په وکتوري ډول ضرب شي، لاسته راځي چې:

$$(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{b}=-\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{a}$$

$$(\vec{b}\times\vec{b})+(\vec{c}\times\vec{b})=\vec{b}\times\vec{a}$$

$$\vec{b}\times\vec{b}=0 \quad\Rightarrow\quad (\vec{c}\times\vec{b})=\vec{b}\times\vec{a}$$

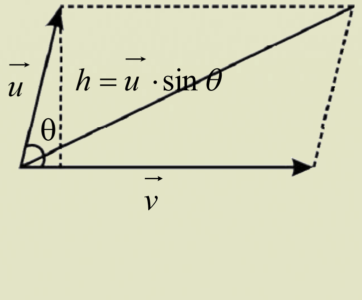
$$|\vec{c}||\vec{b}|\sin A=|\vec{b}||\vec{a}|\sin C$$

$$c\sin A=a\sin C\ \ /\div ac$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\quad .....\ iii \qquad \text{یا} \qquad \frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$$

د (ii) او (iii) معادلو له پرتلې (مقایسې) څخه د ساین قضیه لاسته راځي: $\frac{a}{SinA}=\frac{b}{SinB}=\frac{c}{SinC}$

4- د یوې متوازي الاضلاع مساحت: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه چې صفر نه وي، د دوی ترمنځ زاویه θ د لاندې شکل په څیر په پام کې نیسو. گورو چې $\vec{u}$ او $\vec{v}$ د متوازي الاضلاع ضلعې دي چې د هغې د مساحت د پیداکولو لپاره کولای شو، ولیکو:



ارتفاع × قاعده = د متوازي الاضلاع مساحت

څرنگه چې: $|\vec{v}|$ = قاعده او $h=|\vec{u}|\sin\theta$ = ارتفاع ده

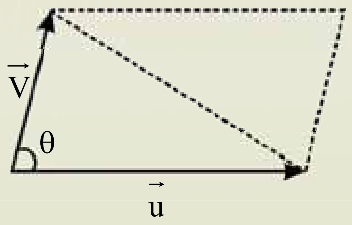
$|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta=|\vec{u}\times\vec{v}|$ = د متوازي الاضلاع مساحت

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعني د یوې متوازي الاضلاع مساحت، د یوې متوازي الاضلاع د ضلعو د وکتوري ضرب له حاصل څخه عبارت دی چې د متوازي الاضلاع ضلعې هم دي.

پایله: څرنګه چې د یوه مثلث مساحت د متوازي الاضلاع مساحت نیمایي دی، نو د مثلث مساحت د لاندې شکل په پام کې نیولو سره عبارت دی، له:

$$\text{د مثلث مساحت} = \frac{1}{2}(\text{د متوازي الاضلاع مساحت}) = \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$$



پوښتنې

1. که $\vec{a}_1 = t^2+t+2$, $\vec{a}_2 = 2t^2+t$ او $\vec{a}_3 = 3t^2+2t+2$ وي وښایاست چې نوموړي وکتورونه خطي خپلواکي لري؟

2. وښایاست چې $\vec{a} = 2i+3j+4k$ او $\vec{b} = 4i+6j+8k$ وکتورونه یو له بل سره کوم ډول خطي اړیکه لري؟

3. ثبوت کړئ چې $\vec{a}_1 = 2i$, $\vec{a}_2 = 5j$ او $\vec{a}_3 = 9k$ وکتورونه خطي خپلواکي لري.

4. د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې راسونه یې د $A(1,-1,1)$ ، د $B(2,1,-1$ او $C(-1,1,2)$ وکتورونو په واسطه درکړل شوي وي. همدارنګه هغه واحد وکتور چې پر ABC مستوي عمود وي، مطلوب دي.

5. د هغه متوازي الاضلاع مساحت پیدا کړئ چې: د $P(0,0,0)$, $Q(-1,2,4)$ ، $R(2,-1,4)$ او $S(1,1,8)$ وکتورونو په واسطه ځانګړې شوي وي.

6. که $\vec{u} = 2i-j+k$ ، $\vec{v} = 4i+2j-k$ سره وي، د لاندې وکتورونو د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

i) $\vec{u}\times\vec{u}$ ii) $\vec{u}\times\vec{v}$ iii) $\vec{v}\times\vec{u}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېړکي مهم ټکي

د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه: هغه کمیتونه چې هم جهت اوهم مقدار ولري وکتور نومېږي. هغه وکتورونه چې اوږدوالی یې مساوي او عین جهت ولري، یو له بله سره د ممثلو وکتورونو په نامه یادیږي. هغه وکتور چې مبداء یې د وضعیه کمیتونو د قایم سیستم په مبداء کې پرته وي شعاع وکتور (Position Vector) بلل کیږي. یو وکتور په مستوي کې د $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}$ په څېر ښودل کیږي. چې a_x د x او a_y د y محور پرمخ له فاصلې او ترتیب څخه عبارت دی.

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی: که $P(x_1,y_1)$ وکتور مبداء او $Q(x_2,y_2)$ د پای ټکی د $\vec{a}=\vec{PQ}$ وکتور وي. په دې ډول $\vec{a}$ وکتور په $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ ښیو او د $P\hat{Q}N$ قایم الزاویه مثلث او $|\vec{a}|$ وکتور اوږدوالي له مخې لرو چې:

د P او Q ټکو ترمنځ واټن، $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=|\vec{a}|=$ د $\vec{a}$ اوږدوالې د P او Q منځنی ټکی $\begin{pmatrix}\frac{x_1+x_2}{2}\\\frac{y_1+y_2}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_m\\y_m\end{pmatrix}=M$ د $\vec{PQ}$ د منځني ټکي وضعیه کمیتونه یا مختصات دی.

واحد وکتور: هغه وکتور چې د راکړل شوی وکتور په عین جهت پروت او یو واحد اوږوالی ولري، د واحد وکتور په نامه یادیږي.

مثال: $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په قایم سیستم کې د x او y د یوې مستوي د محورونو په جهت واحد وکتورونه دي، په داسې حال کې چې $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$، $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ او $\vec{k}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ په فضاکې د وضعیه کمیتونو په قایم سیستم کې د x، y او z محورونو په جهت واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو سکالري ضرب: د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د سکالري ضرب حاصل یې په مستوي او فضاکې عبارت دی له: $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,Cos\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

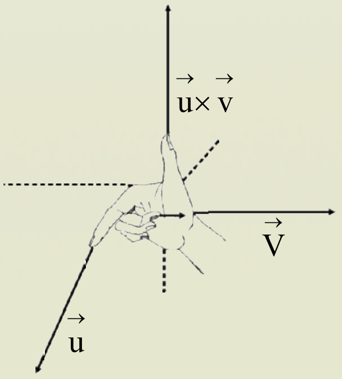
په داسې حال کې چې θ د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ ترمنځ زاویه ده. او د وکتوري ضرب حاصل یې یو وکتور دي چې د $\vec{u}\times\vec{v}$ په واسطه ښودل کیږي، عبارت دی، له: $\vec{u}\times\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\,Sin\theta\cdot\vec{n}$

په داسې حال کې چې د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتور د $\vec{u}$ او $\vec{v}$ پر وکتورونو عمود دی او $\vec{u}$ او $\vec{v}$ وکتورونه سره د ښی لاس قاعدې په واسطه تړاکل کیږي.

د ښي لاس قاعده: که د شهادت گوته په قایم ډول کږه شي، لکه د لاندې شکل په شان، په دې صورت کې د شهادت گوته د $\vec{u}$ محور په جهت، د خنگل په جهت د $\vec{v}$ محور او غټه گوته د $\vec{u}\times\vec{v}$ وکتور حاصل ضرب ښیي.

په فضا کې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب:

کـه $\vec{a}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$ او $\vec{b}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ ورکړل شوی وي، په دې صورت کې وکتوري حاصل ضرب یعنې $\vec{a}\times\vec{b}$ عبارت دی له:

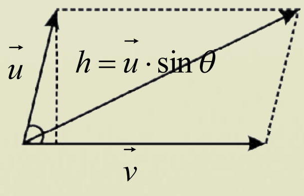


$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

مساحت او د وکتوري ضرب حاصل: د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د وکتوري ضرب قیمت یې د متوازي الاضلاع له مساحت څخه عبارت دی، چې د وکتورونو په واسطه په لاندې شکل کې تشکیلیږي.

$|\vec{u}\times\vec{v}|=$ د متوازي الاضلاع مساحت



(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي پوښتنې

1): که $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$ او $\vec{b}=4\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ وي:

a): $\vec{a}\cdot\vec{b}$ b): $\vec{b}\cdot\vec{a}$ مطلوب دی

2): که چېرې د $P(2,3)$ او $Q(6,-2)$ ټکي د $\vec{op}$ او $\vec{OQ}$ شعاع وکتورونو پای وي، په دې صورت کې د P او Q په مستوي کې د $xi+yj$ په څېر ولیکئ.

3): که چیرې $A(1,-1)$ ، $B(2,0)$ ، $C(-1,3)$ او $D(-2,2)$ درکړل شوي وي، د $\vec{AB}$ او $\vec{CD}$ وکتورونو حاصل جمع مطلوب ده.

4): که چیرې $A(2,5)$ ، $B(-1,1)$ او $C(2,-6)$ درکړل شوي وي، مطلوب دی:

$i)\ \vec{AB}=?$ $ii)\ 2\vec{AB}-\vec{CB}=?$ $iii)\ 2\vec{CB}-2\vec{CA}=?$

5): که چېرې $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ ، $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ او $\vec{w}=5\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$ ورکړل شوی وي، مطلوب دی:

$i)\ \vec{u}+2\vec{v}+\vec{w}$ $ii)\ \vec{v}-3\vec{w}$ $iii)\ \left|3\vec{v}+\vec{w}\right|=?$

iv): د $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ او $\vec{w}$ راکړل شوو وکتورنو په جهت واحد وکتورونه پیدا کړئ

6): د $\vec{a}$ او $\vec{b}$ درکړل شوو وکتورونو لپاره سکالري ضرب حاصل د $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ، $\vec{b}\cdot\vec{a}$ او وکتوري ضرب حاصل د $\vec{a}\times\vec{b}$ او $\vec{b}\times\vec{a}$ پیدا او دوه په دوه یې پرتله کړئ، که چیرې $\vec{a}$ او $\vec{b}$ په لاندې توګه وي:

$$i)\ \begin{cases}\vec{a}=2i+j-k\\ \vec{b}=i-j+k\end{cases} \qquad ii)\ \begin{cases}a=i+j\\ b=i-j\end{cases}$$

$$iii)\ \begin{cases}\vec{a}=3i-2j+k\\ \vec{b}=i+j\end{cases} \qquad iv)\ \begin{cases}\vec{a}=-4i+j-2k\\ \vec{b}=2i+j+k\end{cases}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

7): د هغو مثلثونو مساحت مطلوب دی چې راسونه يي د لاندې ټکو په واسطه ټاکل کيږي:

$i): \quad P(0,0,0), \quad Q(2,3,2), \quad R(-1,1,4)$

$ii): \quad P(1,-1,-1), \quad Q(2,0,-1), \quad R(0,2,1)$

8): د هغه متوازي الاضلاع مساحت مطلوب دی چې راسونه يې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل شوي وي.

$i): \quad A(0,0,0), \quad B(1,2,3), \quad C(2,-1,1), \quad D(3,1,4)$

$ii): \quad A(1,2,-1), \quad B(4,2,-3), \quad C(6,-5,2), \quad D(-3.5,-4)$

$iii): \quad A(1,-1,1), \quad B(-1,2,2), \quad C(-3,4,-5), \quad D(-3,5,-4)$

9): کوم وکتورونه عمود او کوم موازي دي؟

$i): \quad \vec{u} = 5i - j + k, \quad \vec{v} = j - 5k, \quad \vec{w} = -15i + 3j - 3k$

$ii): \quad \vec{u} = i + 2j - k, \quad \vec{v} = i + j + k, \quad \vec{w} = -\frac{\pi}{2}\vec{i} + \frac{\pi}{2}\vec{j}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم ځپرکی

احصائیه

$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}} = \frac{150kg}{170cm} = ?$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دبدلونونو ضریب

Coefficient Variations

که چیرې د یوې ټولنې پراګنده ګي په متر او د بلې ټولنې په کیلوګرام ښودل شوې وي. آیا فکر کولای شئ چې دغه دواړه پراګندګي په دواړو ټولنوکې د پرتلې وړ دي او که نه؟

$\frac{150kg}{170cm} = ?$ = وزن / ونه

فعالیت

10 تنه زده کوونکي له خپل ټولګي څخه په تصادفي ډول وټاکئ؟

- د زده کونکو ونه او وزن تشخیص کړئ.
- د زده کوونکو د ونې او وزن واریانس او معیاري انحراف محاسبه کړئ.
- آیا فکر کولای شئ چې د دې دواړو متحولینو د پراګندګي د میزان پرتله د واریانس او معیاري انحراف له لارې امکان لري؟ ولې؟
- که چیرې معیاري انحراف په اوسط ووېشل شي، نو د په لاس راغلي مقدار یا عدد واحد به څه وي؟
- د بدلونونو یا تغییراتو ضریب یا نسبي پراګنده ګي داسې کاروني لري، چې واریانس او معیاري انحراف هغه نه لري. یو له دغو کارونو څخه د دوو نا متجانسو ټولنو پرتله ده چې د یادولو وړ ده.

دبدلونونو یا تغییراتو ضریب چې په $C \cdot V$ ښودل کېږي عبارت له هغه خارج قسمت څخه دی، چې د معیاري انحراف پر اوسط مطلق بې واحده عدد دی په لاس راځي یعنې:

$$C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$$

یا

دبدلونونو یا تغییراتو ضریب = معیاري انحراف / اوسط

که د تغیراتو ضریب په 100 کې ضرب شي، د تحول ضریب په لاس راځي:

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}}$$

- د بدلون ضریب یوازې د مثبتو ډېټاوو لپاره تعریف شوي وي.
- که چیرې ټوله ډېټا سره برابره وي، د بدلون ضریب مساوي په صفر دی.
- که ټوله ډېټا په یو مثبت عدد کې ضرب شي، د بدلون ضریب تغیر نه کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- که په ټوله ډېټا یو مثبت عدد ورزیات شي، د بدلون نوی ضریب چې په لاس راځي له لومړي ضریب څخه کوچنی دی.

لومړی مثال: د لاندې ډېټا د بدلون ضریب محاسبه کړئ:

$$\{1,3,5\}$$

حل: د فورمول له مخې لیکلای شو:

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i}{n}=\frac{1+3+5}{3}=\frac{9}{3}=3$$

$$S^2=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{(1-3)^2+(3-3)^2(5-3)^2}{3}=\frac{4+4}{3}=2.67$$

$$S=\sqrt{2.67}$$

$$C\cdot V=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{\sqrt{2.67}}{3}=0.543$$

دویم مثال: د تصویري تلویزوني لامپونو یو تولیدونکی دوه ډوله لامپونه A او B تولیدوي، په داسې حال کې چې د A متوسط عمر مساوي په 1495 او د B متوسط عمر مساوي په 1875 ساعته دی او معیاري انحرافونه یې په ترتیب سره 280 او 310 دي، تولیدوي.

د کوم یوه تصویر لامپ تصویر له پاسینو ډولونو څخه د نسبي پراګنده ګي(یا دبدلون ضریب) قیمت زیات دی؟

حل: د فورمول له مخې لرو چې:

$$C\cdot V_A=\frac{S_A}{\bar{x}_A}=\frac{280}{1495}\cdot 100=18.7\%$$ د A لامپونو د بدلون ضریب

$$C\cdot V_B=\frac{S_B}{\bar{x}_B}=\frac{310}{1875}\cdot 100=16.5\%$$ د B لامپونو د بدلون ضریب

څرنګه چې $C\cdot V_A > C\cdot V_B$ څخه دی، له دې کبله د A لامپ ډېره پراګند ه ګي لري، ولې ټېنګښت یې کم دی.

پوښتنې

1. دلاندې ډېټا د بدلون یا تغیراتو ضریب حساب کړئ؟

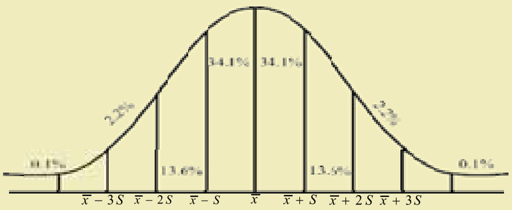
1 3 4 5 6

2. که چیرې اوسط مساوي په 4 او معیاري انحراف مساوي په 6 وي، د بدلون یا تغییراتو ضریب څو دی؟

3. ستاسو د ټولګي د زده‌کوونکو د سن دبدلون ضریب 10 کاله وروسته څومره تغییر یا بدلون کوي؟ کمېږي او که ډېرېږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په نورمال منحني کې پراګنده‌ګي(تیتوالی)

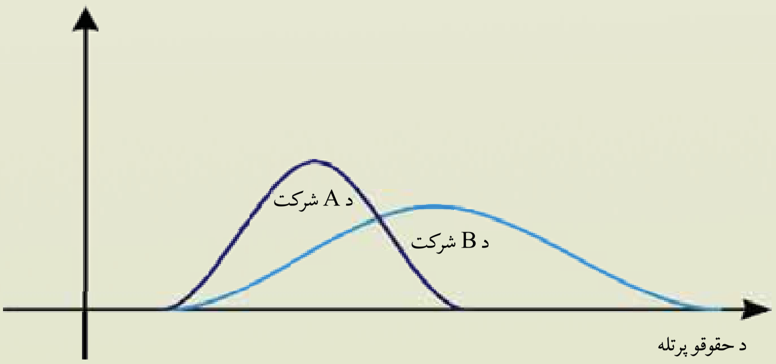


اوریدلي به مو وي چې وایي: یو ښه تصویر د زر کلمیو ارزښت لري.

لاندې شکل ته وګورئ، د هغه په اړوند فکر او بحث وکړئ.

فعالیت

لاندې دوه ګرافونو د دوه A او B شرکتونو د حقوقو تأدیه ښیي.



- کوم شرکت په اوسط ډول د حقوقو تادیه ډیره لري؟
- کوم شرکت د حقوقو د تأدیې په میزان کې خپلو کارمندانو ته لږه پراګنده‌ګي لري؟
- د دواړو شرکتونو د حقوقو تأدیات سره پر تله کړئ.

لاندې ټکي د اوسط او معیاري انحراف په نورمال منحني کې صدق کوي.

- که چیرې $\bar{x}$ اوسط او S معیاري انحراف وي؛ نو 68% دپلټنې موارد د $(\bar{x}-S\ ,\ \bar{x}+S)$ په فاصله کې یعنې د اوسط په شا او خوا د معیاري انحراف په فاصله کې ځای لري.
- 96% د پلټنې موارد د$(\bar{x}-2S\ ,\ \bar{x}+2S)$ په فاصله کې یعنې د اوسط په شاوخوا د دوه معیاري انحرافونو په فاصله کې ځای لري .
- 99% د پلټنې موارد $(\bar{x}-3S\ ,\ \bar{x}+3S)$ په فاصله کې یعنې د اوسط په دواړو خواوو درې معیاري انحرافونو په فاصله کې قرار لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- په یوه نورمال منحني کې له $2S$ څخه ډېر انحراف غیر عادي او له $3S$ څخه زیات انحراف زیات غیر عادي شمېرل کېږي.

هغه ډېټا چې د $3S$ په اندازه له اوسط څخه فاصله یا واټن ولري؛ نو باید د پراګنده ګي یا تیتې ډېټا په نامه وګڼل شي.

مثال: که د یوې مؤسسې د کارکوونکو د معاش اوسط 12500 افغانۍ او معیاري انحراف یې مساوي په 700 افغاني وي نو:

الف: له نورمال توزیع څخه د فیصدي په ګټه اخېستو، د ورکړل شوي معاش توزیع تشریح کړئ؟

ب: آیا ویلای شي چې د 1400 افغانیو معادل معاش یو غیر عادي معاش دي؟

د الف حل: لومړی د $\bar{x} \pm S$ ، $\bar{x} \pm 2S$ ، $\bar{x} \pm 3S$ قیمتونه په لاس راوړو.

فاصله د S له مخې	فاصله د افغانیو له مخې	فیصدي
$\bar{x} \pm S$	11800 – 13200	68%
$\bar{x} \pm 2S$	11100 – 13900	96%
$\bar{x} \pm 3S$	10400 – 14600	99.6 %

د ب حل: لومړي $\bar{x} - 1400$ په لاس راوړئ چې مساوي په 1500 کېږي؛ یعنې 1400 افغانیو په اندازه 1500 افغانۍ له اوسط څخه ډېرې دي، که چېرې اوس دغه رقم په S ووېشو په لاس را ځي:

$$\frac{1500}{700} = 2.1$$

په دې ډول د 1400 افغانیو معاش غیر عادي معاش دی، ځکه چې د 2S له اندازې څخه زیات او له $\bar{x}$ څخه پورته دی.

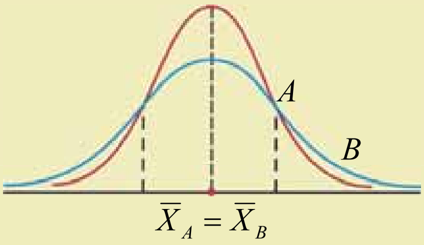
پوښتنه

که چیرې 62.28% فیصده مشاهدات د $(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$ په فاصله کې پراته وي، آیا ویلای شئ، چې 95.45% او 99.73% مشاهدات په کومه فاصله کې قرار لري؟ انټروالونه له نورمالي منحني سره وښایاست؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دنورمال توزیع دډول شاخصونه

د مرکزي پراګندګي دوه شاخصونه یو زیات شمېر د یوې احصایوي مجموعې اطلاعاتو ته په لنډ ډول انعکاس ورکوي.



ددې لپاره چې د یوې احصایوي مجموعې اطلاعات، تناظر او د مثبت او منفي اشارو لرونکي وي؛ نو له کوم ډول منحني څخه باید ګټه واخلو.

فعالیت

- په یو ه نورماله توزیع کې وسط، اوسط او د موډ شاخصونه څه وخت سره مساوي دي؟
- که توزیع د اوسط په اطراف کې متناظره نه وي، د وسط اوسط او موډ د کمیتونو په اړه څه فکر کوي؟
- که چیرې یوه توزیع متناظر ه وي؛ نو د اوسط او وسط تفاضل څو ده؟
- که چیرې دواړه توزیع ګانې یو شان اوسط او تناظر ولري؛ نو د جګوالي او ټیټوالي له اړخه به څه وضعیت ولري؟

دتوزیع د ډول شاخصونه په دوو لاندې حالتونو څېړل کېږي:

1- **د خیمېدلو**(skewness)**(خمیده ګي) شاخص**: هغه توزیع چې د اوسط په دواړو خواوو متناظره نه وي، خمېدل نومېږي، چې په دوو لاندې ضریبونو بنودل کېږي.

الف: د خمېدلو ضریب: دا هغه شاخص دی چې د خمېدلو د میزان د ټاکلو لپاره کارول کېږي، چې په لاندې ډول تعریف شوی دی:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^3}{S^3}$$

هغه عدد دی چې یوازې د پرتله کولو لپاره ترې کار اخیستل کېږي.

که $\alpha_3 = 0$ وي؛ نو توزیع متناظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي؛ توزیع مثبت خمېدل (possitve skewness)لري، یعنې ښي لورې ته خمېده‌ګي لري.

او که $\alpha_3 < 0$ وي؛ توزیع منحني منفي خمېدل (negative skewness)لري یعنې کیڼ لورې ته خمېده‌ګي لري.

که چیرې د کثرت جدول موجود وي، خمېده‌ګي(عدم تناظر) یې د $\alpha_3 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^3}{S^3}$ فورمول په واسطه پیداکېږي. چې f_i فریکونسي ښیي.

ب: د پیرسون د خمېدلو ضریب: د پیرسون ضریب په لاندې ډول تعریف شوی دی.

$$S k_{(p)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{S}$$

په مناظره توزیع کې د پیرسون د خلمیدلو ضریب مساوي په صفر دی. د پیرسون د خمېدلو د لو ضریب مثبت او منفي قیمتونه په ترتیب سره د توزیع د منحني مثبت یا منفي خمېدل ښیي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- **د پړسوب kurtosis شاخص**: د پړسوب شاخص ددې ښودونکی دی چې د توزیع یوه منحني څه وخت جګه او څه وخت ټيټوالي لري.

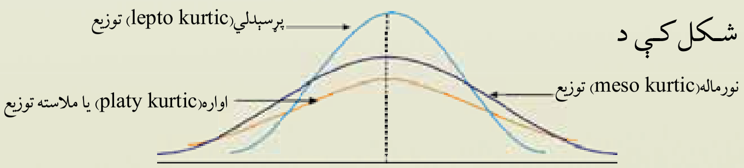
د پړسوب شاخص هغه معمولي شاخص دی چې د يوې منحني د پړسېدلو د اندازه کولو لپاره په کار اچول کېږي او په لاندې ډول تعریف شوی دی:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{S^4}$$

که د کثرت جدول په لاس کې ولرو، نو د پړسوب شاخص فورمول $\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^4}{S^4}$ دی چې دلته f_i فريکونسي، x_i ډېټا او $\bar{x}$ د x_i اوسط او S معياري انحراف دی.

د پړسوب شاخص د توزيع په ځای او پراګنده ګي پورې اړه نه لري. دغه شاخص د پرتله کيدو لپاره په کار لوېږي.

مثال: مخامخ شکل په پام کې ونيسئ د α_4 ضـريب د دري ډوله خمېدلو او پړسوب ډولونه چې پـه شـکل کـې د هغوی توزيع ښودل شوې ده ښيي.



حل: د نورمالي توزيع د پړسوب د درجې او ميزان د پرتله کېدو لپاره لکه يو سټنډرډ په کار اچول کېږي.

د نورمالي توزيع لپاره د α_4 قيمت مساوي په 3 دی، په داسې حال کې چې که چیرې α_4 له 3 څخه زياتـه وي نظر نورمال منحنی ته د منحنې پړسوب زيات دی.

يا په بل عبارت يوه پړسيدلي توزيع چې څوکه لـري او کـه چيـرې α_4 لـه 3 لـږ وي، نظـر نورمـالي منحنـي تـه يـې پړسوب کم دی چې د ملاستې يا اواري توزيع په نامه ياديږي.

پوښتني

د يوه ټولګي د زده کوونکو د احصايې د مضمون نمرې په لاند ې ډول ورکړ شوي دي، د پيرسون د پړسوب ضـريب حساب کړئ.

نمرې	د زده کوونکو شمېر
40-50	4
50-60	6
60-70	10
70-80	4
80-90	4
90-100	2

(c) ketabton.com: The Digital Library

څو متحوله ټولنې

که چیرې د خپل یوه ټولګیوال د ونې په اندازه وپوهېږئ، کولای شئ هغه ته په پام د هغه د وزن په اندازه پوه او په دې اړوند فکر وکړئ.

فعالیت

آیا په تېرو درسونو کې مو د اشخاصو د ونې او وزن په اړوند یو ځای مطالعه او څېړنه کړې ده.

- فکر کولای شئ چې د یوه سړي د ونې او وزن مقدار د یو متحول په توګه کولای شو چې ارائه کړو؟
- که وغواړو چې د یوه ټولګي د زده کوونکو د ونې او وزن مقدار یو ځای وڅېړو، نو دغه یوه ټولنه ده.
- دخپلو 10 تنو ټولګیوالو ونې او وزن اندازه کړئ.
- په لاس راغلې ډېټا د مرتبو جوړو په توګه ولیکئ.
- هغه ټکی چې د مرتبو جوړو په مرسته په مستوي کې ټاکل کېږي، څه ډول شکل لري؟د یوه خط په واسطه یې وصل کړئ.
- آیا ویلای شئ هغه ټکي چې په مستوي کې وصل شي، کوم شکل لري؟

له پاسني فعالیت څخه پوهېږو چې د بحث موضوع، دوه ډوله متحولین دي. تر اوسه مو په تېرو درسونو کې داسې ټولنې پلټلې چې ټولنو په هغوی کې یوازې یو متحول درلوده اوس غواړو داسې ټولنې ولټوو چې دوه او یا له هغو څخه زيات متحولين ولري، دکار دآسانې لپاره معمولاً د یو یا څو متحولینو تر منځ درياضيکي اړیکې په مرسته د قایمو مختصاتو په قایم سېستم کې جوړېږي.

په لومړي ګام کې په دې منظور د معادلو د جوړېدو لپاره لازم معلومات را ټول شي او په دویم ګام کې را ټول شوي معلومات د ارزښت لرونکو متحولینو په خبر په یوه مستوي کې راټول او په نښه کېږي، هغه شکل چې د دغو ټکو له وصلېدو څخه لاس ته راځي، مونږ ته یو ګراف را ښيي.

مثال: یو متخصص د غذايي رژیم یو ډول تأثیر په یو شمېر موږکانو څېړلی دی. په دې ډول یې د هر موږک لومړنی وزن اندازه کړی او بیا یې د عملیې په تطبیق پیل کړې چې په پای کې یې بیا د موږکانو وزن اندازه کړی چې لاندې ډېټا په لاس راغلې ده: $(2,4),(3,5),(1,7),(2,3),(1,8)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول لومړی مختصه د موږك لومړنی او دویمه مختصه د موږك وزن دغذایي رژیم له تطبیق څخه وروسته ښیي.

- ډېټا په یوه سطري او ستوني جدول کې ترتیب کړئ؟
- که چیرې ډېټا د یوې ټولنې په څېر وګڼل شي، نو دغه ټولنه به څو متحولین ولري؟

حل: لاندې سطري جدول په پام کې نیسو:

د موږکانو شمیر	1	2	3	4	5
د موږکانو لومړني وزن	1	2	1	3	2
د غذایي رژیم له تطبیق څخه وروسته د موږکانو وزن	8	3	7	5	4

لاندې ستوني جدول په پام کې نیسو.

د موږکانو شمیر	د موږکانو لومړني وزن	د غذایي رژیم له تطبیق څخه وروسته د موږکانو وزن
1	1	8
2	2	3
3	1	7
4	3	5
5	2	4

پاسنی ډېټا یوه دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

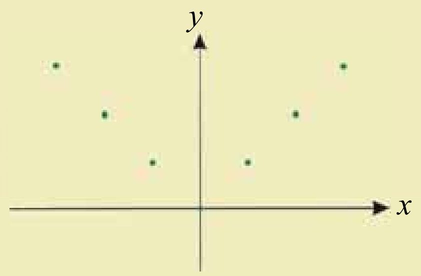
پوښتنه

د زراعتي محصولاتو دلوړوالي لپاره فکتورنه، لکه اوبه کود د کود ډول لمر او د خاورې ډول موثر ګڼل کېږي، آیا ویلی شئ چې په دغه ټولنه کې لږ تر لږه له څو ډوله متحولینو سره سروکار لرئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پراګنده ګي ګراف

Scatter diagram



مخامخ شکل ته په پام ، هغه ټکي چې په مستوي کې په نښه شوي دي، د مرتبو جوړو په ډول ترتیب او ریاضیکي معادله یې ولیکئ:

فعالیت

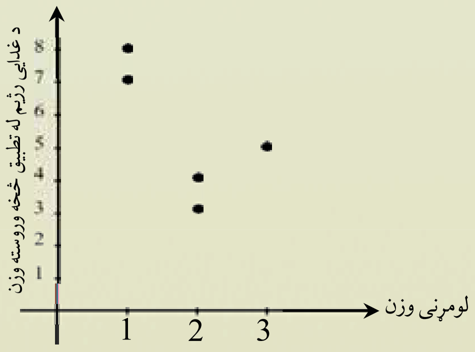
لاندې مرتبې جوړې ورکړل شوي دي:

(1,2) (2,3) (3,4) (4,5)

- د ورکړل شوو مرتبو جوړو ګراف په دقیق ډول رسم کړئ.
- مشخص شوي ټکي سره ونښلوئ او ریاضیکي معادله یې پیدا کړئ.
- په لاندې ډول د دغې ډېټا د هر یوه، دویمه مختصه په لاندې ډول بدلوو.
- د هر ټکي لپاره یوه سکه پورته وغورځوئ، که شېر راغله په y یو واحد اضافه او که خط راغی له y څخه یو واحد کم کړئ، د په لاس راغلو ټکو یا تغییراتو ګراف رسم کړئ.
- دغه عملیه څو ځلې تکرار، خو دا ځل کله چې قیمتونه زیات یا کموي، بدلون مه ورکوئ په x او y پورې تړلي قیمتونه څنګه تغیر کوي؟

مثال: لاندې مرتبې جوړې چې پر موږکانو دغذایي رژیم تأثیراتو څخه مو په لاس راوړي دي، په پام کې ونیسئ: (2,4) (3,5) (1,7) (2,3) (1,8)

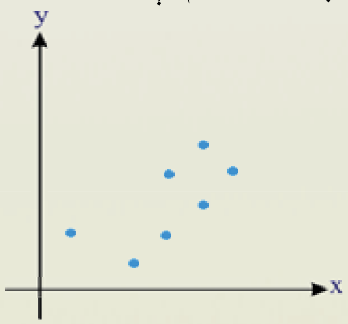
دغه مرتبې جوړې د مخامخ شکل په څېر په یوه مستوي کې ښودل شوي دي.



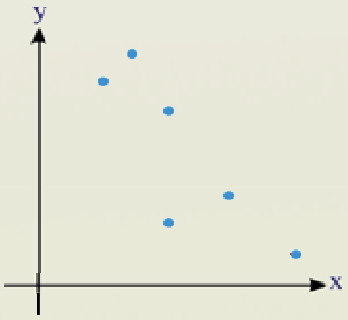
پاسنی ګراف چې د موږکانو وزن راښیي، د هغو پاشلو ټکو مجموعه په مستوي کې ده چې د اړوندې ډېټا په اندازه کېدلو په یوه دوه متحوله ټولنه کې د مختصاتو په سیستم کې لاسته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

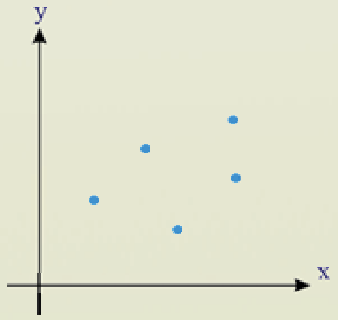
مثلاً: لاندې گرافونه په پام کې ونیسئ:



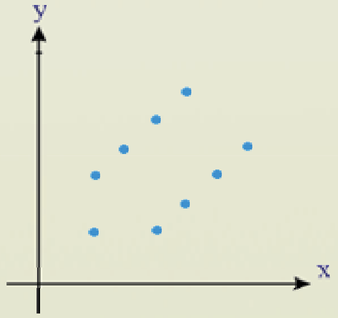
(الف)



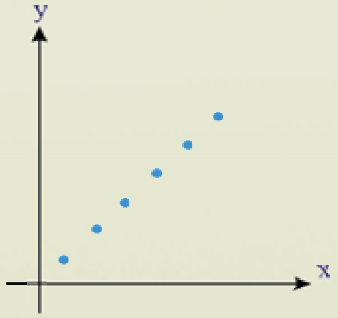
(ب)



(ج)



(د)



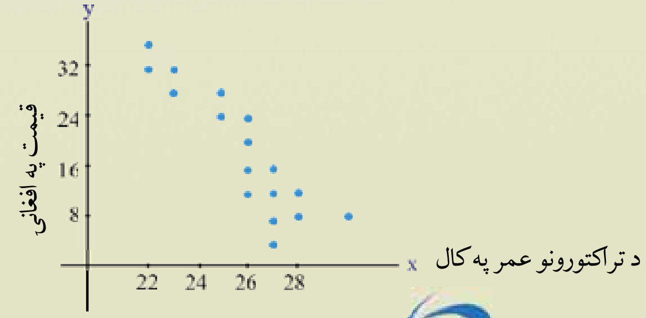
(هـ)

د(الف) په گراف کې لیدل کېږي چې که چیرې د x قیمتونه زیات شي؛ نو د y قیمتونه هم زیاتېږي، خو د (ب) په گراف کې بر عکس د x د قیمتونو په زیاتوالي د y قیمتونه کمېږي.

د(ج) په گراف کې د x په قیمت کې تغییرات هیڅ ډول اطلاع د y دبدلونونویه اړوند نه ورکوي ځکه د x قیمت په درلودلو سره په ډېر پام په دې گراف کې د(الف) او (ب) گرافونو په پرتله زیاته ده، د ( )په گراف کې د y د قیمت حدس په ډېرې پاملرنې صورت مومي.

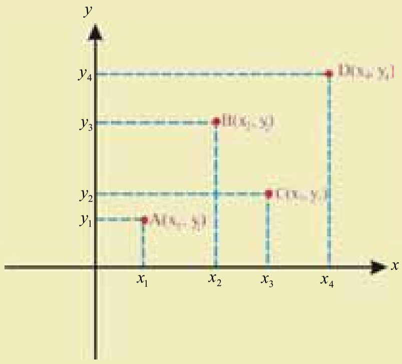
پوښتنې

لاندې گراف دیو شمیر تراکترونو عمر راښیي، آیا ددې دوو متحولینو تر منځ کومه اړیکه یا ارتباط وینې؟ توضیح یې کړئ.



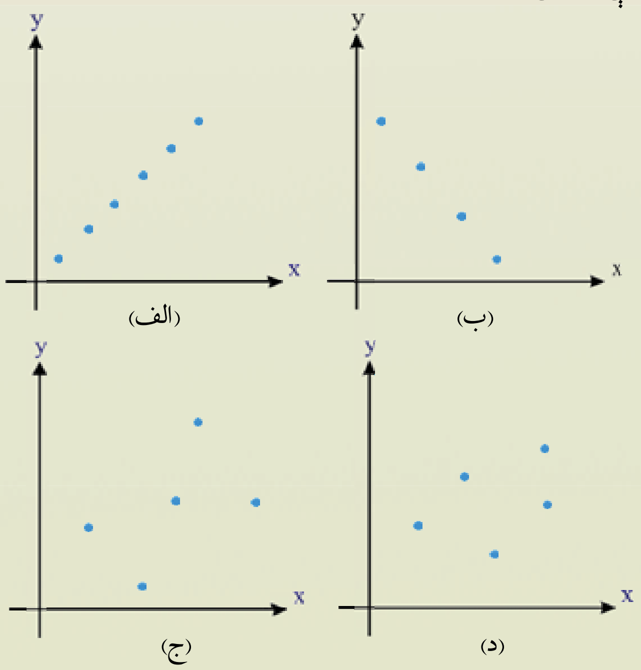
پیوستون او دپیوستون ضریب

د A, B, C او D ټکي لکه مخامخ شکل راکړل شوي دي، آیا شوني ده چې ټکي په یوه مستقیمه کرښه سره وصل شي، ولې؟



فعالیت

لاندې شکلونه په پام کې ونیسئ:



- د (الف) او (ب) په شکلونو کې کولای شو چې د y متحول د هغې کرښې په مرسته چې له دغو ټکو تېرېږي وټاکو.
- د (الف) او (ب) په شکلونو کې د x او y تر مینځ څه ډول اړیکه ده؟
- آیا کولای شو چې د(ج) او(د) په شکلونو کې داسې یوه کرښه وټاکو چې ټول ټکي پرې پراته وي؟
- د(ج) او (د) په شکلونو کې د x او y ترمنځ اړیکې په څه ډول دي؟
- - د (الف) او (ب) د شکلونو اړیکې د(ج) او(د) د شکلونو له اړیکو سره پرتله او ووایئ چې د y د متحول خطا د x د متحول په مرسته په کوم شکل کې ډېره ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پاسني فعالیت څخه داسې پوهېږو چې که چیرې ټکي په مستوي کې یوې مستقیمې کرښې ته نږدې پراته وي؛ نو په دې صورت کې y د متحول خطا نظر x ته لږ ده او برعکس هر څومره چې ټکي له کرښې لرې پراته وي، نو په هم هغه اندازه د y خطا ډېره ده.

له دې کبله داسې معیار غواړو در وپېژنو چې د ټکو پیوستون مونږ ته اندازه کړي.

هغه فورمول چې د پیوستون د محاسبې لپاره ورکړ شوې ده، د پیوستون د ضریب په نامه یاد او په r سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$r = \frac{\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ د ضرب د حاصل مجموعه}}{n} - (\text{د } x \text{ ونو اوسط})(\text{د } y \text{ ګانو اوسط})}{(\text{د } x \text{ ونو معیاري انحراف})(\text{د } y \text{ ګانو معیاري انحراف})} = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\,\bar{y}}{S_x\, S_y}$$

مثال: دموږکانو د لومړني وزن او غذایي رژیم څخه وروسته ډېټا لکه لاندې جدول په پام کې ونیسئ.

د موږکانو شمیره	لومړني ورن X	له عملیې څخه وروسته وزن y	د x او y دضرب حاصل
1	1	8	8
2	2	3	6
3	1	7	7
4	3	5	15
5	2	4	8
	$\sum 9$	$\sum 27$	$\sum 44$

دلومړني او وروسته د غذایي رژیم د وزنونو تر منځ د پیوستون ضریب محاسبه کړئ.

حل: که چیرې x لومړني وزنونه او y د غذایي رژیم له تطبیق څخه وروسته وزنونه او $n = 5$ د موږکانو شمېر په پام کې ونیسو، نو د x او y اوسطونه عبارت دي له:

$$\bar{x} = \frac{9}{5} = 1.8 \qquad , \qquad \bar{y} = \frac{27}{5} = 5.4$$

$$S_x^2 = \text{د } x \text{ ونو واریانس} = \frac{(1-1.8)^2 + (2-1.8)^2 + (1-1.8)^2 + (3-1.8)^2 + (2-1.8)^2}{5}$$

$$= \frac{0.64 + 0.04 + 0.64 + 1.44 + 0.04}{5} = \frac{2.8}{5} = 0.56$$

$$S_y^2 = \text{د } y \text{ ګانو واریانس} = \frac{(8-5.4)^2 + (3-5.4)^2 + (7-5.4)^2 + (5-5.4)^2 + (4-5.4)^2}{5}$$

$$= \frac{6.76 + 5.76 + 2.56 + 0.16 + 1.96}{5} = \frac{17.2}{5} = 3.44$$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ ګانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{\text{د ډېټا شمېر}} = \frac{\sum x \cdot \sum y}{n} = \frac{(1\cdot 8) + (2\cdot 3) + (1\cdot 7) + (3\cdot 5) + (2\cdot 4)}{5} = \frac{44}{5} = 8.8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول په پايله کې د پيوستون ضريب په لاندې ډول لاس ته را ځي:

$$r = \text{د پيوستون ضريب} = \frac{8.8-(1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56}\cdot\sqrt{3.44}} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

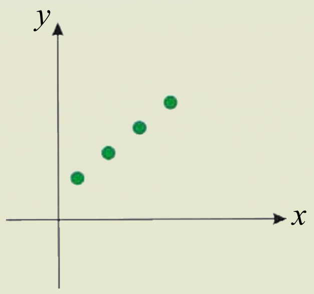
اوس داسې سوال را منځ ته کېږي چې د پيوستون د -0.67 ضريب د x او y ترمنځ د ډېر پيوستون ښودونکی ده او که نه؟ د دې سوال د ځواب د پيداکېدو لپاره د پيوستون ضريب له لاندې مثالونو څخه په څو مرحلو کې په لاس راوړو:

مثال: لاندې جدولونه په پام کې و نيسئ:

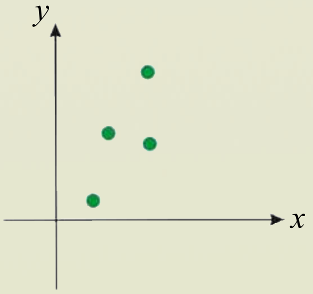
x	y
1	3
2	5
3	7
4	9

x	y
1	2
2	6
3	6
4	10

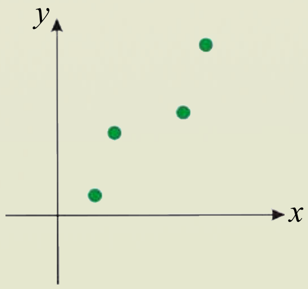
x	y
1	2.5
2	5.5
3	6.5
4	8.5



(الف)



(ب)



(ج)

د (الف) په شکل کې ټکي ټول په يوه کرښه پراته دي، نو په دې ډول د ټکو ترمنځ د پيوستون ضريب ډېر لوړ قيت لري.

د (ب) په شکل کې ټکي د يوې مستقيمې کرښې په شاخوا پراته دي، نو له دې کبله نظر د(الف) حالت ته د ټکو تر منځ د پيوستون ضريب لږ دی د (ج) په شکل کې څرنګه چې ټکي د مستقيمې کرښې د(ب) د حالت په اندازه نږدې پراته دي، نو بايد ضريب يې په دې حالت کې د(ب) له حالته زيات، خو د(الف) له حالته لږ دی، د دې خبرې د پخلي لپاره موضوع په لاندې ډول څېړو، د پيوستون ضريب د(الف) حالت لپاره:

$$\bar{x} = \frac{10}{4} = 2.5 \qquad \bar{y} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\text{د } x \text{ ونو واريانس} = \frac{(-1.5)^2+(-0.5)^2+(0.5)^2+(1.5)^2}{4} = \frac{2.25+0.25+0.25+2.25}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$\text{د } y \text{ ګانو واريانس} = \frac{(-3)^2+(-1)^2+1^2+3^2}{4} = \frac{9+1+1+9}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\text{د } x \text{ او } y \text{ ګانو دضرب حاصل} = (1\cdot3)+(2\cdot5)+(3\cdot7)+(9\cdot4) = 70$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r = \text{دپیوستون ضریب} = \frac{\frac{70}{4}-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{5}} = \frac{17.5-15}{\sqrt{6.25}} = \frac{2.5}{2.5} = 1$$

د پیوستون ضریب د (ب) په حالت کې:

$\bar{y} = \frac{24}{4} = 6$ ، $\bar{x} = 2.5$

د y ګانو واریانس $= \frac{16+0+0+16}{4} = 8$ ، د x ونو واریانس $= 1.25$

د x او y ګانو د ضرب د حاصل مجموعه $= 2+12+18+40 = 72$

$$\text{د پیوستون ضریب} = \frac{\frac{72}{4}-(2.5)(6)}{\sqrt{1.25}\cdot\sqrt{8}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0.9486$$

د (ج) په حالت کې د پیوستون ضریب: $\bar{y} = \frac{23}{4} = 5.75$ ، $\bar{x} = 2.5$

د y ګانو واریانس $= 4.6875$ ، د x ونو واریانس $= 1.25$

$$\frac{\text{د } x \text{ او } y \text{ ګانو د ضرب د حاصل مجموعه}}{4} = 16.75$$

$$\text{د پیوستون ضریب} = \frac{16.75-(2.5)(5.75)}{\sqrt{1.25}\sqrt{4.6875}} = \frac{2.375}{\sqrt{5.858}} = 0.9812$$

په یاد ولرئ چې په هغو شرایطو کې چې y لږ خطا و لري(د x او y مقدارونه خط ته نږدې پراته دي) که چیرې د پیوستون ضریبونه 1او -1 وي، x او y پر یوه مستقیمه کرښه پراته دي. غیر له هغه څخه د پیوستون ضریب د دغو دوو مقدارونو تر منځ پروت دی.

پوښتنې

1- لاندې ډېټا راکړل شوې ده.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

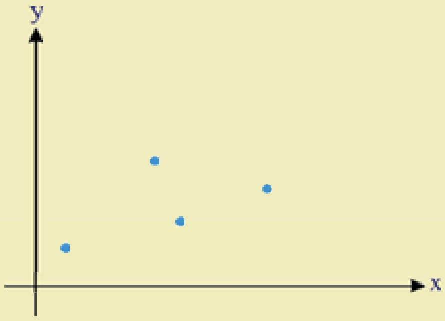
د ډېټا دپیوستون ضریب محاسبه کړئ.

2- د خپلو ټولګیوالو د ونې او وزن تر منځ د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خطي میلان معادله

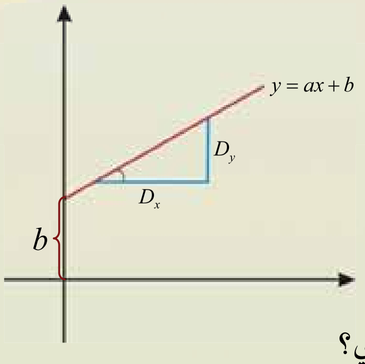
The linear regression equation



فرض کړئ چې یو پاشلي ګراف په لاندې ډول راکړل شوی وي. یوه مستقیمه کرښه چې معادله یې د $y = ax + b$ په ډول ورکړل شوې وي، پیدا کړئ چې ګراف یې ټولو ټکو ته نږدې فاصله یا واټن ولري.

فعالیت

په مخامخ شکل کې یوه خطي تابع(لومړی درجه) چې ګراف یې مستقیمه کرښه ده، رسم شوې ده.

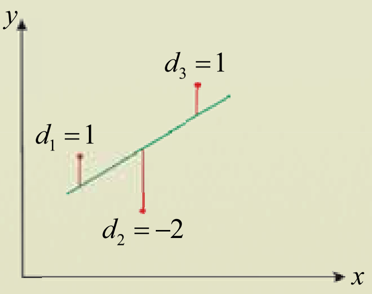


- د $y = ax + b$ خطي تابع کې a او b څه ډول مقدارونه دي؟
- د $y = ax + b$ په تابع کې د x او y متحولین په کوم نوم یادیږي؟
- د $y = ax + b$ مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ؟
- د $y = ax + b$ په معادله کې د y بدلون ، د یو واحد په اندازه په x کې و ټاکئ؟
- د $y = ax + b$ معادله کې که چیرې $a > 0$ وي؛ د تابع ګراف متزاید او که متناقص دی؟

همدغه راز که چیرې $a < 0$ سره وي، د تابع ګراف څه شکل لري؟

او که چیرې $a = 0$ وي، د تابع دګراف شکل و ټاکئ؟

مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:



د فاصلو مجموع $d_1 + d_2 + d_3$ او $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$ محاسبه کړئ.

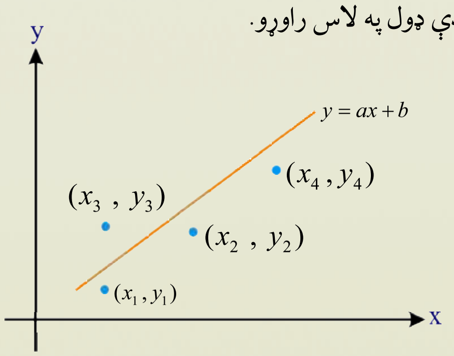
(c) ketabton.com: The Digital Library

له پاسني فعاليت څخه پوهېږو چې د $y = ax + b$ معادله یوه خطي تابع ده چې د a ضريب ددې معادلې ميل جوړ وي او کله چې a مثبت وي، مستقيمه کرښه متزايد او که چيرې a منفي وي، نو کرښه متناقصه ده.

پاملرنه وکړئ چې که د (x, y) جوړه د $y = ax + b$ په معادله کې صدق وکړي، په دې صورت کې نوموړې ټکي د مستقيمې کرښې په ګراف پروت دی.

هر څومره چې د ټکو پاشل مستقيمې کرښې ته نژدې وي، نو د پيوستون ضريب به -1 او $+1$ ته ورنژدې وي، که چيرې د يوې مستقيمې کرښې معادله ولرو او پوه شو چې د پيوستون ضريب مناسب او کولای شو د y د متحول په مرسته متحول وټاکو او که چيرې مستقيمه کرښه ونلرو، کولای شو چې دغه کرښه په داسې يوه تګلاره چې د لږکيو (ميتود اصغري سازي)[1] مربعو په نامه يادېږي، په لاندې ډول په لاس راوړو.

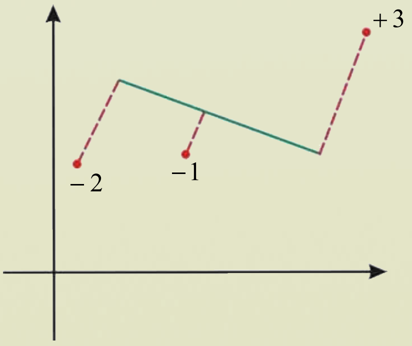
فرض کوو چې د پاشلو ټکو ګراف (متفرقه دياګرام يا Scatrter diagram) په دې ډول راکړل شوی وي.

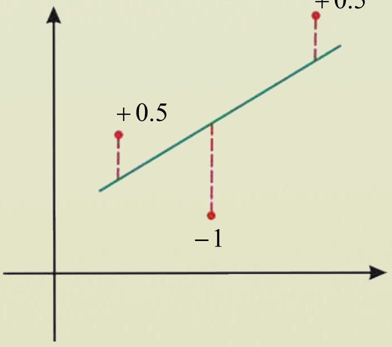


او غواړو داسې يوه کرښه چې معادله يې $y = ax + b$ وي، د ټکو له منځ څخه داسې تيره کړو چې ټولو ټکو ته نږدې وي. په دې تګلاره کې بايد په مناسب ډول د کرښې معادله داسې جوړه شي چې د عمودي انحرافونو د دويم توان مجموع له مستقيمې کرښې څخه لږ تر لږه اصغري وي، مخ کې له فورمول څخه لاندې مثال په پام کې نيسو:

x	1	5	9
y	6	5	7

لاندې شکلونه د دغې ډېټا لپاره رسموو او د کرښو خطاوې له مشاهدو څخه تشخيصوو.





---

[1] the method of least square

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښکاره ده چې رسم شوې کرښه د (ب) په حالت کې په مرتبو د(الف) له حالته ښه ده.

په دواړو حالتونو کې د کرښو د خطاګانو الجبري جمع صفر ده.

د (الف) حالت: $0 = 3 + (-1) + (-2) =$ د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

د (ب) حالت: $0 = 0.5 + (-1) + (0.5) =$ د کرښې د خطاګانو الجبري جمع.

څرنګه چې په دواړو حالتونو کې د جمعې حاصل مساوي په صفر ده، نو له دې کبله ویلای نشو چې کومه کرښه یوه مناسبه کرښه ده. ددې لپاره چې خطاوې مثبت او منفي یو بل له منځه یو نسي، نو هره کرښه وروسته له مربع کولو جمع کوو:

$$14 = (3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 =$$ د خطاګانو د دویم توان مجموع

$$1.5 = (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 =$$ د خطاګانو ددویم توان مجموع

له دې کبله د کرښې د خطاګانو د دویم توان مجموع څرنګه چې د(ب) په حالت کې نظر له(الف) حالت څخه یې قیمت لږ دی، نو ویلی شوچې:

مناسبه کرښه هغه ده چې د خطاګانو د مربعګانو مجموع یې له نورو کرښو کمه وي، دغه راز کرښو ته د ریګریشن کرښې وایي.

که چیرې د ریګریشن کرښې د مقدار او هغو مشاهداتو تر منځ د مقدارونو توپیرچې منځ ته راځي په $\bar{y}$ وښیو، په دې صورت کې د دویمو توانونو د مجموع د لا کوچني والي په خاطر په لاندې ډول عمل کوو:

$$\sum(y-\bar{y})^2 = \sum[y-(ax+b)]^2 =$$ د خطاګانو ددویمو توانونو مجموع

$$= \sum(y-b-ax)^2$$

$$= (ax_1+b-y_1)^2 + (ax_2+b-y_2)^2 + ...$$

په دې حالت کې x او y ثابت، a او b متحولین دي.

پرته له دې مونږ هغه تګلاره چې د a او b د محاسبې او په لاس راوړلو لپاره په کار لویدلی، ورننو ځو، یوازې د هغوی د محاسبې خطا په پام کې نیسو:

$$b = \text{د پیوستون ضریب} \times \frac{\text{د } y \text{ معیاري انحراف}}{\text{د } x \text{ معیاري انحراف}}$$

د a او b د محاسبې دغه لاره چې د لږکیو مربعګانو تګلارې په نامه یادیږي.

پایله: د ریګریشن کرښه هغه وسیله ده چې د یو متحول د مقدار د وړاند وینې لپاره د بل متحول په حسابولو چې ورسره تړلی دی، د استفادې وړ ګرځي.

مثال:لاندې ډېټا په پام کې ونیسئ.

x	1	2	3	4	5
y	4	3	2	1	0

د y د ریګریشن کرښه نظر x ته په لاس راوړئ.

حل: څرنګه چې:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4+3+2+1+0}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$S_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{2} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2 \quad \Rightarrow S_x = \sqrt{2}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} \quad \Rightarrow S_y = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sum x\,y}{n} = \frac{4+6+6+4+0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - \bar{x}\cdot\bar{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{4-3\cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

له دې کبله:

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - b\cdot 3$$

$$a = r\frac{S_y}{S_x} = -1\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - (-1)(3) = 2+3 = 5$$

په دې ډول د ریګریشن معادله عبارت ده له: $y = ax + b = -x + 5$

پوښتنه

که چیرې $y = 2x + 3$ د y د ریګریشن معادله نظر x ته او د x اوسط مساوي په 2 راکړل شوي وي، د y اوسط څومره وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اتم څپرکي مهم ټکي

د بدلون ضریب: د بدلون ضریب د معیاري انحراف له اوسط څخه عبارت دی چې مطلق بې واحده عدد دی؛ لکه:

$$\text{د بدلون ضریب} = \frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{اوسط}} \quad \text{یا} \quad C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}}$$

دغه ضریب ډېر خلې د فیصدي په ډول ښودل کېږي چې د تحول د ضریب په نامه یادېږي.

$$\text{د تحول ضریب} \quad C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}}$$

د بدلون ضریب د مثبتې ډېټا لپاره تعریفېږي، په یاد یې ولرئ که چیرې ډېټا سره مساوي وي، نو د پراګندګي ټول شاخصونه مساوي له صفر سره دي.

په نورمال منحني کې پراګندګي: نورمال منحني د احصایوي مجموعې یوه داسې توصیفي وسیله ده چې په نورمال منحني کې ډېټا په نورمال توزیع او کثرت منحني کې متناظر پراته دي؛ نو واریانس عمده نقش لري، په حقیقت کې د دوو پارامترو مشخص کیدل او معیاري انحراف په نورمال توزیع کې په عمومي ډول مشخص او د هر ډول شاخص د محاسبې زمینه برابره ده.

د نورمال توزیع شکل شاخصونه: د اوسط او معیاري انحراف په مرسته کولای شو د لید خرنګوالی د کږېدو(خمېدو) او پړسېدو(اوج) په ډول په ښه توګه څرګند او وړاندې کړو.

د کږېدلو شاخص د کږېدو او پیوستون ضریبونو په مرسته چې د اندازه کولو او اندازو د پرتله کولو لپاره یکارېږي په لاندې ډول لیکل کېږي:

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^3}{S^3} \quad , \quad \alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum f_i(x_i-\bar{x})^3}{S^3} \quad , \quad SK_{(p)} = \frac{3(\bar{x}-med)}{S}$$

د پړسېدو(جګېدلو) شاخص د پړسېدو د ضریب α_4 په مرسته اندازه او پرتله کېږي.

$$\alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^4}{S^4} \quad , \quad \alpha_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\bar{x})^4}{S^4}$$

څومتحوله ټولنې: په احصایوي څېړنو کې تر ټولو لویه موخه(هدف) وړاندوینه او د یو متحول ټاکل د بل متحول له مخې دی. کله چې د دوو شیانو ترمنځ اړیکې څېړل زموږ مقصد وي، په حقیقت کې هدف یوه دوه متحوله ټولنه ده؛ لکه د یو غاز د حجم او فشار ترمنځ اړیکه د صحت او حرکت د میزان ترمنځ اړیکه، د کرنې او د حاصل د مقدار ترمنځ اړیکه او یا هم د یوې دایرې د شعاع او مساحت ترمنځ اړیکه چې ټولې دغه راز اړیکې دوه متحوله ټولنې بیانوي. د آسانتیا لپاره معمولاً د دوه یا څو متحولینو ترمنځ اړیکه د ریاضي معادلو په مرسته وړاندې کوي.

د پراګنده‌ګي ګراف: د پراګنده‌ګي ګراف د رسمولو لپاره ډېټا د مرتبو جوړو په شکل پـه یـوه مستوي کې د قایمو مختصاتو په سېستم کې ښوول کېږي. کېدای شي د ټکو او پراګنده‌ګي ګراف په مرسته درې ډوله اطلاعـات زمـوږ پـه اختیار کې راکړي.

الف: آیا داسې نمونه چې د ځېړنو ترمنځ اړیکه ښیي، شته او که نه؟

ب: د یو ډول اړیکې د شتون په صورت کې دغه اړیکه خطي ده او که نه؟

ج: که چیرې اړیکه خطي وي، نو څه ډول اړیکه ده؟

پیوستون او د پیوستون ضریب: پیوستون د متحولینو ترمنځ د اړیکو د مېندلو درجه ده، کله کله دواړه متحـولین په یوه لوري بدلون کوي یعنې x او y دواړه په یوه کرښه لـوی او یـاهم کـوچني شي، چې پیوستون یـې مـستقیمه کرښه ده. که چیرې د دوو متحولینو اندازه یو د بل پر خلاف بدلون وکړي یعنې که چیرې x لـوی شـي y کـوچنی کېږي. او یا هم برعکس صورت نیسي.

د پېژندنې ډېر ښه معیار د پیوستون شتون او نه شتون دی او حتا د خطي پیوسـتون ډول، جهـت او میـزان د پیوسـتون ضریب دی، چې د لاندې فورمول په واسطه ښوول کېږي:

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - (\overline{x}\,\overline{y})}{S_x \cdot S_y}$$

په پورتنیو اړیکو کې $\sum xy$ د x ونو او y ګانو د ضرب د حاصـل مجمـوع، $\overline{x}$ د x ونـو اوسـط او $\overline{y}$ د y ګـانو اوسط دی، همداراز S_x د x ونو معیاري انحراف او S_y د y ګانو معیاري انحراف دی.

د ریګریشن کرښه: ریګریشن(تخمیني) د تابع د یوه متحول له قیمـت لاسـته راوړل او سـنجش څخـه عبـارت دی، چې د یو یا څو مستقلو متحولینو له ارزښت څخه په لاس راځي.

هغه معادله چې د متحولینو ترمنځ اړیکې افاده کوي، د ریګرېښن معادلې په نامه یادېږي.

کولای شو دغه معادله د ډېرو لږو مربعګانو د محاسبې په طریقـه حساب او همدارنګـه د a او b ضـریبونه د دغې طریقې په مرسته په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$a = \overline{y} - b\overline{x} \quad , \quad b = r\frac{S_y}{S_x}$$

چې S_y د y معیاري انحراف او S_x د x معیاري انحراف دی، په داسې حال کې چې r د پیوسـتون ضـریب، $\overline{x}$ د x ونو اوسط او $\overline{y}$ د y ګانو اوسط دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

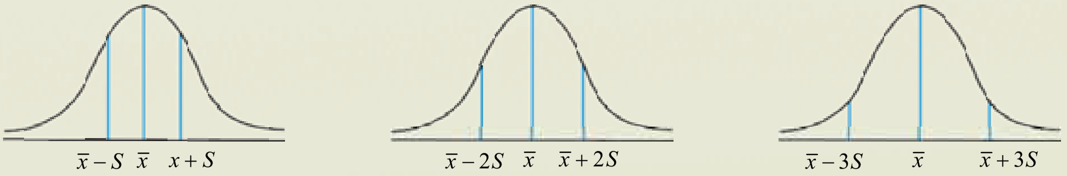
(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1-که چیرې په یوه ټولنه کې چې اوسط یې $\bar{x} = 50$ او واریانس یې $S^2 = 64$ سره وي، د بدلون ضریب y چې له $y = 2x + 10$ رابطې سره سم بدلون مومي څو دی؟

2-که چیرې د هر زده کوونکي په نمرو کې 20% نمبرې ورزیاتې شي، نو د نمرو د بدلون په ضریب څه اغیزه کوي؟

3- د هغو ټولنو فیصدي چې په لاندې درکړل شوو منحنیګانو کې پرته ده، ولیکئ؟



4- لاندې اړیکو ته په پاملرنې ووایاست چې کومه یوه له دغو اړیکو څخه یو متحوله، دوه متحوله او درې متحوله اړیکې دي.

الف: ستاسو د ټولګیوالو د ونو اندازه؟

ب: د یو شي د عمومي مصرف او جنس ترمنځ اړیکه؟

ج: د یوې استوانې د حجم، جګوالي او د قاعدې د مساحت تر منځ اړیکې؟

5- د یو ټولګي د مصرف شوو ساعتونو د شمېر او د زدکوونکو د نمبرو تر منځ چې د 20% له مخې اخیستل شوی دی، د مرتبو جوړو په شکل په لاندې ډول دي:

(2,10) , (3,10) , (3,14) , (4,10) , (4,14)
(5,14) , (5,16) , (6,12) , (6,16) , (6,18)
(7,14) , (7,18) , (7,20) , (8,16) , (8,18)

د زده کونکو د مصرف شوو ساعتونو او نمبرو تر منځ د اړیکو له مخې ګراف رسم او خپلې پایلې وڅیړئ؟

6- مخامخ ډیټا په پام کې ونیسئ:

x	1	1	2	3
y	1	5	4	2

په ورکړ شوې ډیټا کې د پیوستون ضریب حساب کړئ؟

7- که چیرې د پیوستون ضریب صفر ته نژدې وي، نو خطا ډېره، که لږه ده؟

8- که چیرې د پیوستون ضریب د 1+ او 1– عدد ته نژدې وي، نو د y د خطا په اړوند څه وایئ؟

9- د سروې له مخې چې د یوه ښوونځي په دو A او B ټولګیو کې شوې ده، لاندې عددونه د کیلوګرام په حساب د زده کوونکو د وزن لپاره راټول شوي دي:

A:	65	63	67	64	62	70	66	68	67	78	69	71
B:	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

د پاسنیو اعدادو په پام کې نیولو سره:

الف: د ډېټا د پراګندګۍ ګراف رسم کړئ؟

ب: د اړوندې مستقیمې کرښې معادله په لاس راوړئ a او b وټاکئ؟

ج: اړونده مستقیمه کرښه نظر د ریګرېشن معادلې ته رسم کړئ؟

10- که چیرې x او y سره بشپړ پیوستون او معکوس ولري، یعنې $S_x = S_y$، نو د y نسبت x ته د ریګرېشن خط کوم دی؟

1) $y=-\frac{1}{2}x+b$ 2) $y=\frac{1}{2}x+b$ 3) $y=x+b$ 4) $y=-x+b$

11- د 20 تنو زده کوونکو د ریاضي او فزیک د مضمون %20 د آزموینې پایلې چې په لاندې ډول ورکړ شوي، رسم کړئ؟

زده‌کوونکي	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
د ریاضي نمرې	18	8	12	18	16	6	10	6	16	10	12
د فزیک نمرې	16	10	8	18	14	10	10	6	10	14	10

زده‌کوونکي	12	13	14	15	16	17	18	19	20
د ریاضي نمرې	12	10	16	18	12	6	14	14	12
د فزیک نمرې	6	12	16	12	12	8	12	14	16

ـ د ریګریشن د کرښې معادله په لاس راوړئ؟

ـ آیا د دوو آزموینو د پایلو تر منځ اړیکې شتون لري؟

12- پر چنګښو د خوراک د مالګې د 5 او یو فیصده محلول اغیزې د یون پلازما پر میزان د هغوی په بدن کې په لاندې جدول کې ثبت شوي دي؟

د مالګې په محلول کې د پاتېکېدو وخت	50	40	30	20	10	5	0
د یون پلازما میزان(mm)	136	132	126	122	118	110	90

ـ په پاسنی جدول کې متحولین وځېړئ؟

ـ په پورتنیو متحولینو کې کوم یو خپلواک او کوم یو ناخپلواک متحول دی؟

ـ یو داسې ګراف رسم کړئ چې د دواړو متحولینو ترمنځ اړیکه وښیي؟

ـ د دې ګراف په رسم کې خپلواک متحول په افقي محور وښایاست؟

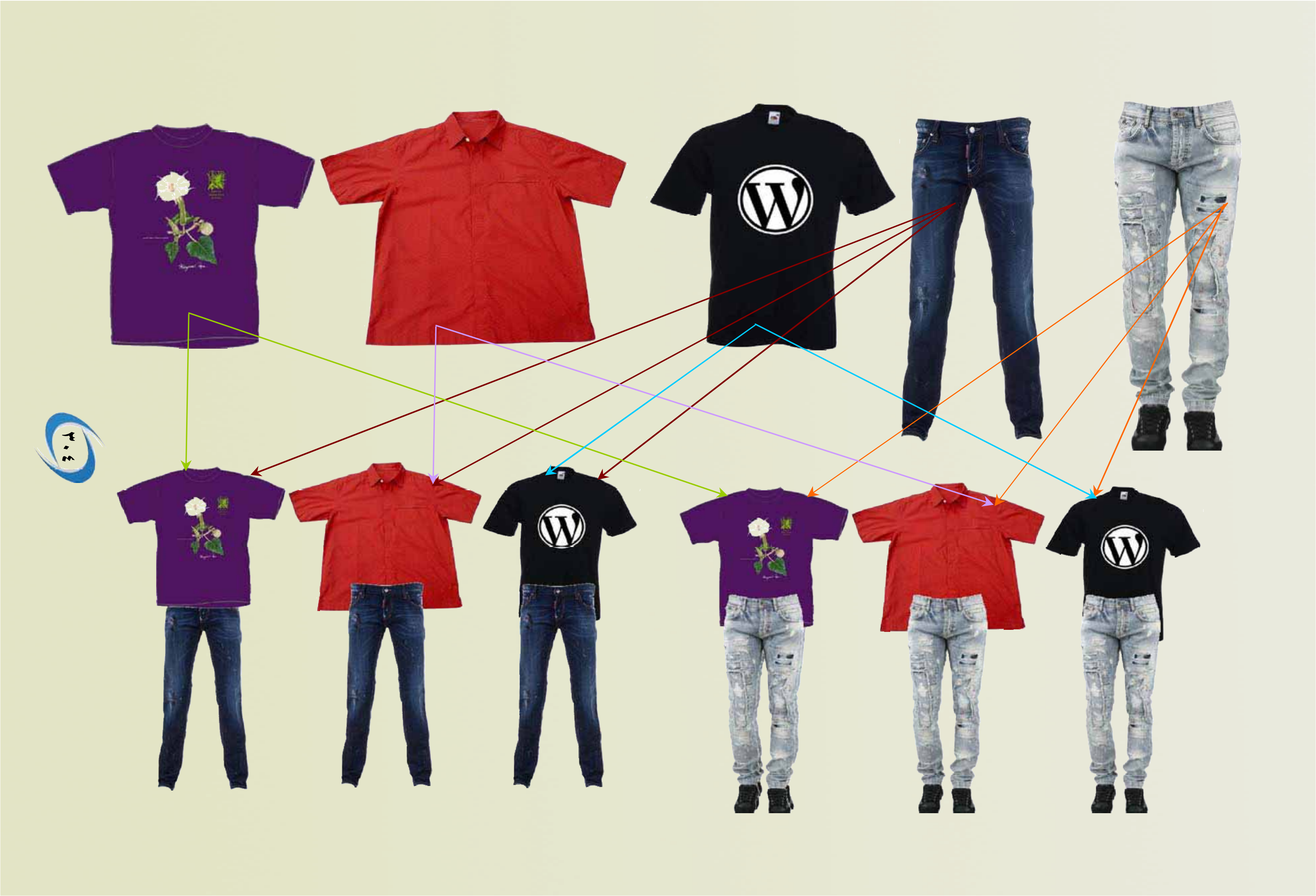
(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم څپرکی

احتمالات

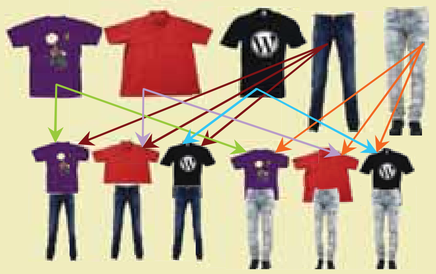
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library



پرموټېشن یا ترتیب

Permutation



که چېري درې بیلابیل کمیسونه او دوه پطلونونه ولرو، پــه څــو ډولــه کــولای شــو هغــه ســره جــوړه جــوړه واغوندو؟

فعالیت

خپل درې تنه ملګري وآزموئ چې په څو ډوله کولای شي په یو کتار کې و درېږي؟

- له درې یو رقمي اختیاري عددونو څخه څو درې رقمي عددونه کولای شو جوړ کړو.
- له پورتنیو عددونو څخه چې پورته مو د درې رقمي عددونو د جوړولو لپاره ټاکلي دي څــو درې رقمي عدونه جوړولاي شو، په دې شرط چې په عددکې رقم تکرار نه وي.
- د پاسني فعالیت د اول، دویم او دریم پاراګراف پایلې سره پرتله او ووایې چې څه اړیکی سره لري؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله

د n شیانو د ترتیب د شمېر ډولونه چې سره خوا په خوا راشي عبارت دي له:

- که تکرار مجاز نه وي مساوي په $n\cdot(n-1)\ \ldots\ 2\cdot 1$ سره دي.
- که تکرار مجاز وي مساوي په $\underbrace{n\cdot n\cdot\ \ldots\ \cdot n}_{n \text{ځلې}} = n^n$ سره دي.

تعریف: د یوه طبیعي عدد لپاره د $(1\cdot2\cdot3\cdot\ \ldots\ \cdot n)$ حاصل ضرب په لنډ ډول په n! (n – فکتوریل) ښودل کیږي. او د تعریف له مخې $1!=1, 0!=1$ سره دي.

2: د n عنصرونو د ترتیب ډولونه چې د n غړو د پرموټېشن(Permutation) په نامه هم یادیږي په P_n سره ښودل کیږي.که چیرې تکرار په ترتیب کې ناشوني او یا مجازنه وي.

نو د پاسني تعریف په پام کې نیولو سره $P_n = n!$ سره کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې په ترتیب تکرار شوني او یا مجاز وي، نو په دې صورت کې د ترتیب ډولونه او یا پرموټېشنونه په مجاز تکرار کې $P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!} \quad , \quad (k \le n)$

لومړی مثال:

(i) : د لاندې عددونو قیمت پیدا کړئ.

$3!, 8!, 5!$

(ii): د هر یو طبیعي عدد لپاره وښیئ چې $n! = n(n-1)!$ سره ده؟

حل (i): د تعریف له مخې لرو چې:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$
$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$
$$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

(ii) پوهېږو چې: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \dots \ \cdot n = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \dots \ \cdot n-1)(n) = n(n-1)!$

دویم مثال: د آزموینې لپاره په یوسالون کې 16 زده کوونکي له بېلابېلو ټولګیو د سویې آزموینې لپاره راغونډ شوې دي.

په څو ډوله کولای شو د 16 مېزونو تر شا په لیکه کښېنئ چې د هر یو د ځای تغییر د ناستې یو حالت وشمېرل شي.

حل: پوهېږو چې ځواب !16 دی چې تکرار پکې ناشونی دی. که چیرې تکرار مجاز وي، په دې صورت کې مسئله عبارت له ترتیب د n شیانو چې k عدده یې د مثال په ډول په تکراري ډول راښکاربږي، نو په دې صورت کې لرو چې: $P_n^k = \frac{n!}{k!} \quad , \quad (k \le n)$

مثلاً په پاسني مثال کې، که چیرې 16 زده کوونکي وغواړي خپل ځایونه په خپلو لاسي بکسونو ونیسي او له دې څخه 4 تنه یو ډول لاسي بکسونه ولري، نو لرو چې:

$$P_{16}^{(4)} = \frac{16!}{(16-4)!} = \frac{16!}{12!} = 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 43680$$

که چیرې د دې مسئلې عمومي حالت په پام کې ونیسو، نو په دې صورت کې د $P_n^{(k_1, k_2, \ \dots \ , k_n)}$ n ترتیبه یا پرموټېشنونه چې په هغه کې تکرار مجاز نه او په حقیقت کې، m ګروپه شیان چې هر یو یې په ترتیب سره د $k_1!, k_2! \cdot \ \dots \ \cdot k_n!$ په اندازه سره یو شان دي، لرو چې:

$$P_n^{(k_1, k_2, \ \dots \ , k_n)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \ \dots \ \cdot k_n!}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم مثال: له پنځه $(5,5,5,4,4)$ عددونو څخه په څو ډوله کولای شو، پنځه رقمي عددونه جوړ کړو.

حل: پوهېږو چې د فورمول له مخې د عددونو شمیر عبارت دي له: $P_3^{(2,3)} = \frac{5!}{2!.3!} = 10$

چې په خپله عددونه په لاندې ډول دي:

55544	55454	54554	45554	45545
45455	44555	54545	55445	54455

څلورم مثال: د سبا کاروان ټرانسپورټي شرکت د کابل جلال آباد په لین کې 5 لوی سروېسونه او د جلال آباد- کنړ په لاره 3 مېنې بسه لري. په څو ډوله کولای شو، د نوموړي ټرانسپورټ په سروېسونو او مېنې بسونو کې له کابله- کنړ ته سفر وکړو؟

حل:پوهېږو له کابله تر جلال آباد پورې د نوموړي شرکت له سروېسونو څخه یوازې 5 امکانه وجود لري، چې د هر یوه امکان په وړاندې 3 امکانه د مېنې بس د انتخاب چانس له جلال آباد څخه تر کنړه، د نوموړي شرکت وجود لري.

په دې ډول ټول امکانات مساي دي په: $5\times3=15$

پنځم مثال: د $2,7,8$ او 5 عددونو په مرسته څو درې رقمي عددونه(پرته له تکراره) جوړولای شو.

حل: دې خبرې ته په پاملرنې سره چې عددونه درې رقمي دي، نو درې خالي ځایونه لرو، چې په لاندې ډول د هغو ډکول په عددونو امکان لري:

د دریم رقم ځای	د دویم رقم ځای	د لومړي رقم ځای
2	3	4 دامکاناتو ډولونه

پوهېږو چې د لومړي رقم د ځای د ډکولو لپاره 4 امکانه شتون لري، په دې ډول د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره 3 امکانه پاتې کېږي، ځکه چې له څلور عددونو څخه یو د لومړي رقم لپاره نیول شوی دی، او بلې خواته څرنګه چې تکرار مجاز نه دی، نو یوازې 3 امکانه د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره شته او د دریم رقم د ځای د ډکولو لپاره دوه امکانه شته چې ټول حالتونه عبارت دي له: $4\cdot3\cdot2=24$ او د فورمول له مخې لروچې: $p_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$

(c) ketabton.com: The Digital Library

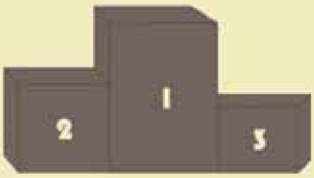
(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1. څو پنځه رقمي عددونه وجود لري چې لومړی رقم یې 2 او وروستی رقم یې مساوي په 4 وي، په عدد کې هیڅ رقم تکراري نه وي؟
2. په څو ډوله 10 نفره کولای شي، د یوه ګردی میز په شاوخوا کښیني چې له دې جملې څخه 2 تنه غواړي په هر حالت کې سره څوا په څوا کښیني.
3. په څو ډوله کولای شئ 3 سره توپونه، 2 آسماني او څلور زیړ توپونه سره څوا په څوا په یو کتار کې کېږدو. (د هم رنګه تو پونو په کتار کې د هم رنګه توپونو ځاي بدلول بل حالت نه شمېرل کېږي.)

ترکیب یا کمبینیشن

Combination



د 1 او 2 عددونو ترکیب څه دی؟

د 1 او 2 عددونو ترتیب کوم دی؟

ستا سو له نظره ترکیبونه او ترتیبونه څه سره توپیرلري؟

مخکي له دې چې لاندې فعالیت سرته ورسوو، لاندې تعریف چې په فعالیت کې به له هغه څخه کار واخلو په پام کې نیسو.

تعریف

د $\binom{n}{k}$ لیکدود چې n د k له پاسه ویل کېږي او په حقیقت کې د بینوم د ضریبونو په نامه یادېږي چې k د بینوم توان ښیي او په لاندې ډول دی:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0\le k\le n \;,\; k\wedge n\in IN$$

فعالیت

د پاسني تعریف په پام کې نیولو سره، د بینوم د $(a+b)^2$ د دوه حدي په انکشاف کې د بینوم ضرایب چې مساوي په $\binom{2}{k}$ $k=0,1,2,$ سره دی، پرتله کړئ:

$$(a+b)^2=\square a^2+\square ab+\square b^2$$

- د بینوم ضریبونه چې په پاسني انکشاف کې، په چوکاټونو کې نیول شوي، د $\binom{2}{k}$ $k=0,1,2$ له قیمتونو سره پرتله کړئ؟
- څرنګه چې $1=\binom{2}{0}=\binom{2}{2}$ سره دي، ویلای شئ چې د هر $n\in IN$ لپاره $\binom{n}{n}$ او د $\binom{n}{0}$ قیمتونه هم سره برابر او مساوي په 1 دي؟
- د $(a+b)^n$ په انکشاف کې د بینوم د ضریب د دویم حد قیمت د $\binom{n}{k}$ له مخې حساب کړئ.
- د $\binom{4}{k}$ $k=0,1,2,3,4,$ قیمتونه د بینوم د انکشاف له کومو ضریبونو سره مساوي دی، ویې لیکئ؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د هر n او k طبیعي عددونو لپاره، په داسې حال کې چې $0\le k\le n$ سره دی لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

(i) $\binom{n}{n}=1 \quad , \quad \binom{n}{0}=1$

(ii) $\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}$

(iii) له n شخه د r شیانو ترکیبونه عبارت د یو n عنصره سټ د غړو د ترکیب یا کمبینیشن د r له n شیانو شخه ده چې په C_r^n سره ښودل کېږي او قیمت یې عبارت دی له: $C_r^n=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$

لومړی مثال: په یوه ښوونځي کې د لسم 7 ټولګي شتون لري. د ښوونځي اداره غواړي چې لسم ټولګي له 7 تنو اول نمره ګانو، 4 تنه و ټاکي. په څو ډوله دغه انتخاب کیدلای شي؟

حل: لیدل کېږي چې له 7 تنو شخه د 4 تنو په ټاکنه کې هیڅ ډول برلاسي او ترتیب په پام کې نشته؛ یعني دا چې، مهمه نه ده زده کوونکي د کوم ټولګي دي؛ نو دا ډول مسئله عبارت له ترکیب شخه ده چې له 7 تنو شخه 4 تنه و ټاکو؛ نو لرو چې: $C_4^7=\binom{7}{4}=\frac{7!}{4!(7-4)!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4!}{3!\cdot4!}=\frac{5\cdot6\cdot7}{6}=35$

دویم مثال: که له 7 تنو زده کوونکو 4 تنه د لسم ټولګي د زده کوونکو د اتحادیې د مشرتابه لپاره، داسې چې لومړی تن رئیس، دویم معاون، دریم منشي او څلورم تن د مالي مسؤول په توګه و ټاکل شي، په دې صورت کې لرو چې:

څرنګه چې لیدل کیږي په دې ټاکنه کې ترتیب مهم دی، څکه چې د ABCD د انتخاب ترتیب په داسې حال کې چې A رئیس، B معاون، C منشي او D مالي مسؤول دی، په داسې حال کې چې د CABD په ترکیب کې C رئیس، A معاون، B منشي او D مالي مسؤول ګڼل کېږي.

دا ډول مسئله عبارت له ترتیب یا پرموټېشن شخه ده چې له 7تنو شخه د 4 تنو په ترتیب انتخاب دي؛ یعني لرو چې: $P(7,4)=\frac{7!}{(7-4)!}=\frac{7!}{3!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!}=120\cdot7=840$

پوښتنې

1- له اوو حرفونو شخه لکه A,B,C,D,E,F او G څو 4 حرفي کلمې، پرته له تکراري حرفه جوړولای شو؟

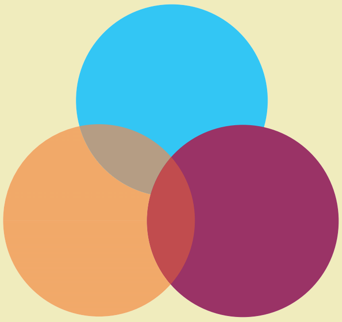
2- د والیبال په یوه لیګ کې، 7 ټیمونه ګډون لري. په څو ډوله ټیمونه کولای شي لومړی، دویم او دریم مقام لاس ته راوړي؟

3- له 4 نارینه وو او 6 مېرمنو شخه 2 نارینه او 3 ښځې داسې ټاکو چې نارینه په کې یو رئیس او دویم یې مالي مسؤول وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترکیب

Combination



آیا پوهیږئ چې اصلي رنګونه کوم دي؟

د نارنجي او بنفش رنګ ترکیب کوم رنګ دی؟

ستاسو په نظر ژیړ رنګ د کومو رنګونو له ترکیبه جوړیږي؟

آسماني رنګ، بنفش رنګ، نارنجي رنګ.

فعالیت

د خپلو 5 تنو ټولګیوالو څخه 3 تنه په څو ډوله ټاکلی شئ؟

- موضوع په عملي توګه په ټولګي کې تجربه او حالتونه یې و شمېرئ؟
- که چیرې له 5 تنو زده‌کوونکو څخه 3 تنه داسې و ټاکل شي چې، لومړی کس سرګروپ، دویم د سرګروپ مرستیال او دریم تن منشي وي، د درې تنو ګروپ، د ټاکلو ټول ډولونه څو دي؟
- د پورتني فعالیت لومړی او وروستی جزء یو تر بله څه توپیر لري؟
- آیا فکر کولای شئ د پاسنیو ګروپونو د ټاکلو شمېر مساوي له کوم عدد سره دی؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: دلته د k په شمېر غړو یو ګروپ له یو سټ څخه چې n غړي لري، په عمومي ډول په دوه ډوله صورت نیسي چې په یوه کې ترتیب په پام کې دی، خو په بل کې ترتیب مهم نه شمېرل کېږي، یوازې د هغوی ترکیب د پام وړ دی.

په دې ترتیب د یو ترکیب یا کمبینیشن چې k شیان له n بېلابېلو شیانو څخه مطلب دی، چې په لاندې تعریف کې بیانېږي.

تعریف: د k شیانو ترکیب له یوه n عنصره سټ څخه چې په C_k^n ښودل کېږي او عبارت له $\binom{n}{k}$ ترکیبي امکاناتو څخه دی چې د k په شمېر غړي یې پرته له ترتیب څخه ټاکل کېږي، عبارت دي له:

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad , \quad 0 \le k \le n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: له 30 تنو څخه د 4 تنو ټاکل چې ترتیب په کې مهم نه دی، حساب کړئ؟

حل: پوهېږو چې مسئله عبارت له 30 تنو څخه د 4 تنو دی چې د فورمول له مخې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_4^{30}=\binom{30}{4}=\frac{30!}{4!(30-4)!}=\frac{30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26!}{26!\cdot4!}=27405$$

دويم مثال: له $A=\{1,2,3,4,5\}$ سټ څخه څو 3 عنصره فرعي سټونه په لاس راځي؟

حل: پوهېږو چې مسئله په حقیقت کې له 5 غړو څخه د 3 غړو ټاکل دي چې شمېر يې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_3^5=\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!(5-3)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}=10$$

پوښتنې

1- که چیرې په یوه آزموینه کې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنو ته ځواب مطلوب وي، په څو ډوله کولای شو چې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنې د حل لپاره وټاکو؟

2- په یوه مستوي کې پنځه ټکي چې په یوه کرښه پراته نه دي، په پام کې ونیسئ د دې ټکو په نښلولو سره په څو ډوله مثلث جوړولای شو.

3- که چیرې $P(n,2)-C_2^n=36$ سره وي، د n قیمت پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

تبدیل
Variation

په یوه المپیاکې له 10 ورزشي ټیمونو څخه په څو ډولونو د سرو زرو، سپینو زرو او برونزو مډالونه شتون لري؟

فعالیت

- د n بیلابیلو شیانو په پام کې نیولو سره د k په شمیر شیان ټاکو،د هغوی مجموعي شمېر څو دی؟
- که چیرې د k شیانو په ټاکلو کې ترتیب داسې وي، چې په هغوی کې لومړی، دویم، دریم او ... شتون ولري، ټول مجموعي حالات به څو وي؟
- د پاسنیو دواړو ډولونو ترمنځ توپیر په کومه اندازه ده؟

پایله: د هغو ترکیبونو شمېر چې د k غړو د پرله پسې ترتیب په انتخاب کې له n غړو څخه په پام کې وي، نو په دې صورت کې یې شمېر مساوي په $k!\cdot C_k^n$ سره کیږي.

دغه ترکیب د وریشن Variation یا تبدیل په نامه یاد او په V_k^n سره ښودل کیږي چې عبارت دی له:

$$V_k^n = k!\cdot C_k^n = k!\cdot\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!} \Rightarrow V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: څو امکانه وجود لري چې په یوه انتخاباتي غونډه کې له 30 تنو ګډون کوونکو څخه 4 تنه د مشرتابه لپاره په داسې حال کې چې یو تن رئیس، یو لومړی مرستیال، یو دویم مرستیال او څلورم تن د منشي په توګه دنده ترسره کړي؟

حل:مسئله په حقیقت کې د 4 تنو تبدیل له 30 تنو څخه ده، چې د تعریف له مخې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{30\cdot27\cdot29\cdot28\cdot26!}{26!} = 657520$$

پورتني حالات چې تر اوسه مو د ترتیبونو، ترکیبونو او تبدیلونو لپاره تر بحث لاندې و نیول په لاندې جدول کې را ټول شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

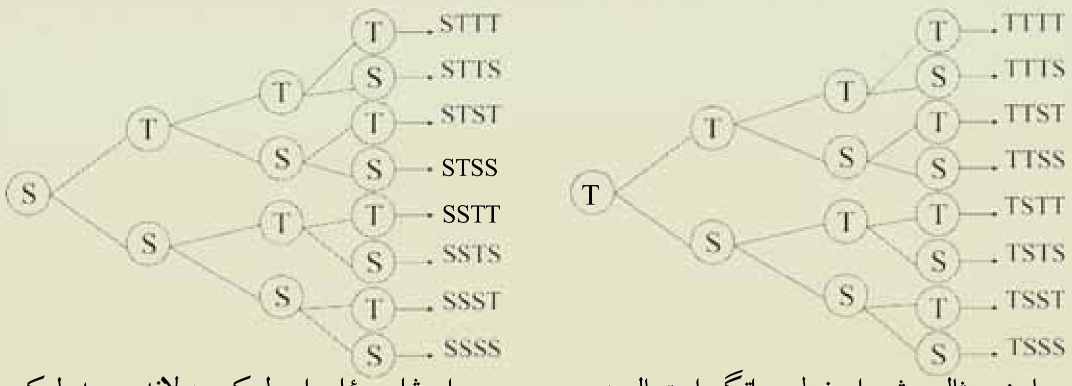
د ټاکنو ډول k غړي له n غړو څخه	د امکاناتو شمیر	
	پرته له تکراره $k \le n$	له تکرار سره $k \le n$
ترتیب یا پرموټېشن	$P(n,k) = n! \quad , \quad n = k$	$P(n,k) = \frac{n!}{k!}$
ترکیب یا کمبېنیشن	$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$C_k^n = \binom{n+k-1}{k}$
تبدیل یا وریشن	$V_k^n = k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	$V_k^n = n^k$

پوښتنې

1- په یوه ورزشي سیالۍ کې د فوټبال 12 ټیمونه، په څو ډوله لومړی، دویم او دریم مقام ګټلی شي؟

2- د یوولسم ټولګي له 20 تنو زده‌کوونکو څخه په څو ډوله 2 تنه د ټولګي د استازي او د استازي د مشر مرستیال په توګه ټاکلی شو؟

مثال: د یوې سکې په اچولو سره چې د راتګ امکان یې، شیر یا خط ممکن دی او د هرې خوا د راتګ احتمال یې مساوي په $\frac{1}{2}$ دی، په پام کې ونیسئ، که چیرې سکه 2 ځلې، درې ځلې، شپږ ځلې، اته ځلې او یا 16 ځلې وغورځوو، پوهېږو چې د هم چانسو لومړنیو پېښو په نمونه‌یي فضاکې په یوه ونه‌ییز ګراف کې لاندې حالت لرو: (شیر $= S$ او خط $= T$) دی.



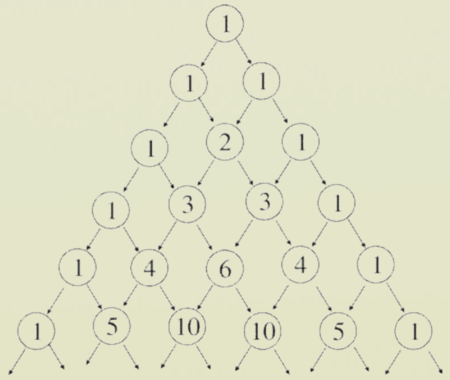
د پاسني مثال د شیر او خط د راتګ احتمال په یو، دوه، درې او څلور ځلې اچولو کې په لاندې جدول کې راټول شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورځله احتمال	څلورځله خط	درې ځله احتمال	درې ځله خط	دوه ځله احتمال	دوه ځله خط	یو ځل احتمال	یو ځل خط	هېڅ ځل احتمال	هېڅ ځل خط	د سکې غورځول
$1/16$	0	$1/8$	0	$1/4$	0	$1/2$	0	1	0	د خط د راتګ شمېر
$4/16$	1	$3/8$	1	$2/4$	1	$1/2$	1			
$6/16$	2	$3/8$	2	$1/4$	2					
$4/16$	3	$1/8$	3							
$1/16$	4									

که چیرې جدول ته په ځیر سره پاملرنه وکړئ، د هر وار د احتمال د کسرونو په صورت کې یو نظم وینو چې د بنیوم په انکشاف کې په ترتیب سره د حدونو ثابت غړي دي چې د لومړي ځل لپاره د پاسکال له خوا راوپېژندل شول او تر اوسه د هغه په نامه یادېږي.

دغه نظم مثلاً په مخامخ مثلث کې په یوه لیکه کې اعداد د کیڼې او ښي خوا د عددونو سره په پورته لیکه کې له جمعې لاس ته راغلي دي.



په دې ډول کولای شو چې مثلث ته تر بینهایت پورې دوام ورکړو، چې که چیرې هغوی د یو دوه جملهیي له انکشاف سره پرتله کړو، لکه د راکړل شوي پاسکال مثلث عددونه دي؛ مثلاً پاملرنه وکړئ چې د دوه

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله‌يي په انکشاف کې له هغو عددونو څخه مو حلقه تاو کړې ده د مثلث له اعدادو سره چې حلقه ترې تاوشوې ده يو شان ده:

$(a+b)^0 = \textcircled{1}$

$(a+b)^1 = \textcircled{1}a + \textcircled{1}b$

$(a+b)^2 = \textcircled{1}a^2 + \textcircled{2}ab + \textcircled{1}b^2$

$(a+b)^3 = \textcircled{1}a^3 + \textcircled{3}a^2b + \textcircled{3}ab^2 + \textcircled{1}b^3$

$(a+b)^4 = \textcircled{1}a^4 + \textcircled{4}a^3b + \textcircled{6}a^2b^2 + \textcircled{4}ab^3 + \textcircled{1}b^3$

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

چې دغه ضريبونه د $(a+b)^n$ په انکشاف کې n د k له پاسه د ضريبونو استعمال په لاندې ډول ليکلی‌شو:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

د " $\sum$ " علامه د پاسنی مجموع لپاره استعمال شوې ده.

په دې ډول د خط راتللو احتمال په k– امه مرتبه کې عبارت دی له: $P(\text{خط راتگ}) = \dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$

پوښتنې

1. د فوټبال په يوه سيالۍ کې 12 ټيمونه ګډون لري، په څو ډوله کولای شو ګټونکي لومړی، دويم او دريم مقام ته وټاکو.
2. د ښوونځي له 20 تنو زده‌کوونکو څخه په څو ډوله دوه تنه، د ټولګي د استازي او د استازي د مرستيال په توګه وټاکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بینوم قضیه

د پاسکال د مثلث له مخې د بینوم د انکشاف ضریبونه وټاکئ.

$$(a+b)^2 = \bigcirc a^2 + \bigcirc ab + \bigcirc b^2$$
$$(a+b)^3 = \bigcirc a^3 + \bigcirc a^2b + \bigcirc ab^2 + \bigcirc b^3$$
$$(a+b)^4 = \bigcirc a^4 + \bigcirc a^3b + \bigcirc a^2b^2 + \bigcirc ab^3 + \bigcirc b^4$$

```
          1
        1   1
      1   2   1
    1   3   3   1
  1   4   6   4   1
1   5  10  10   5   1
```

فعالیت

- په یوه ناڅاپي تجربه کې چې یوازې دوه ناڅاپي پیښې د A او $\overline{A}$ پیښېږي، یعنې د $\{A,\overline{A}\}$ نمونوي فضا لري. د A د پیښې احتمال عبارت دی له:
- که چیرې $P(A)=P$ د A د پیښې احتمال وي، د هغې د مکمله پیښې احتمال یعنې $\overline{A}$ څو دی
$P(\overline{A})=?$
- د پورتنی تجربې له بیا بیا تکرار څخه که چیرې د A حادثې پیښېدو ته 1 او د نه پیښېدو حالت ته یې 0 ووایو لاندې جدول د تجربې د بیا بیا تکرار یعنې $n=2$ لپاره بشپړ کړئ.

k	ممکني پایلې	احتمال	د بینوم د ضریبونو ارایه
0		$(1-p)^2$	$\binom{2}{0}.p^0.(1-p)^2$
1	10	$2p(1-p)$	
2	11		$\binom{2}{2}p^2(1-p)^2$
		$(p+(1-p))^2$	$\sum\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=?$

د بینوم د حدونو د انکشاف مجموع یعنې $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ پیدا کړئ؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

پایله: په یوه ناخاپي تجربه کې چې د نمونې فضا غړي یې په مساوي احتمال په تجربه کې بیابیا د تکرار وړ وي، نو د تجربې په n ځله تکرار کې د بینوم د انکشاف k – ام حد کې لاندې احتمال لري:

$$\binom{n}{k}.p^k(1-p)^{n-k}$$

پورتنی بینوم په $B(n,p,k)$ ښودل کېږي، د برنولي د پرابلم د احتمال په نامه یادېږي او لیکو:

$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ سره کېږي.

مثال: له n تنو څخه د 10 تنو په شمېر په ناخاپي ډول ټاکو، د k تنو انتخاب شوو خلکو له جملې څخه 2 تنه ټاکو، پیداکړئ د دې احتمال چې دواړه تنه په یوه ورځ زېږېدلي وي. $P(k\le n)=?$

حل: په دې ډول د Ω په نمونه‌یي فضاکې داسې فرضوو چې د هرې ورځې احتمال $\frac{1}{365}$ او د زېږېدنې ورځ د سوال وړ ده نه، د زېږېدنې کال.

په دې ډول Ω په نمونه‌یي فضاکې ټول امکانات له 365 ورځونه څخه د k شمېر لپاره عبارت دی له:

$|\Omega|=(365)^k$

په دې ډول اوس که چیرې د A ناخاپي پېښه چې لږترلږه دوه تنه په یوه ورځ زېږېدلي وي، په ساده ډول داسې د محاسبې وړ ده، چې د A د حادثې مکمله په پام کې نیسو، په دې ډول $\overline{A}$ عبارت له هغې نا څاپي پېښې څخه ده چې k تنه په بېلابېلو ورځو کې زېږېدلي دي. په دې ډول $\overline{A}$ عبارت د k پرموټېشن له 365 څخه ده چې لرو:

$$P(\overline{A})=(365,k)=\frac{365!}{(365-k)!}$$

په دې ډول:

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{|\overline{A}|}{|\Omega|}=1-(365,k)=1-\frac{365!}{(365-k)!}\cdot\frac{1}{(365)^k}$$

پوښتنې

وښیئ چې:

(I) $$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$$

(II) $$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه جمله یي احتمال

آیا کولای شو چې د هرې نمونه‌يي فضا پایلې په دوه ناځاپي پېښو چې له یو بل سره هیڅ ګډ عنصر نه‌لري، ترتیب کړو.

موضوع د سټ د تیوري له مخې په یوه اختیاري نمونه‌یي فضاکې، دوه ناځاپي پیښو ته چې اتحاد یې نمونه‌یي فضاوې په مثال کې یې تشریح کړي.

فعالیت

- د هغو تجربو څخه چې تر اوسه یې پېژنئ یا دونه وکړئ او یوه نمونه‌يي فضا د دوه اتفاقي یا ناځاپي پېښو په ارایه چې ټوله نمونه‌يي فضا یې یوازې دوه غړي ولري.
- آیا هغه ناځاپي تجربې چې نمونه‌يي فضاګاني یې له 2 څخه زیات غړي لري. کولای شو په داسې نمونه‌يي فضاګانو واړوو چې یوازې 2 غړي ولري؟ مثال راوړئ.
- په عمومي ډول څه ډول کولای شو چې یوه نمونه‌يي فضا چې ډیر غړي لري، په یوه داسې نمونه‌یي فضا چې 2 غړي لري، واړوو؟
- که چیرې د دا ډول فضاګانو د یو غړي د پیښې احتمال p وي، د بلې پیښې د احتمال قیمت به څو وي؟
- که چیرې تجربه n ځلې سرته ورسوو، او د k په شمیر له n ځلې($0 \le k \le n$) ورل او نور یې بایلودل وي، د k ځلې بریالیتوب (P) په n ځلې تکرار کې پیدا کړئ؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: د هرې ناځاپي تجربي نمونه‌يي فضا کولای شو چې په داسې یوې نمونه‌وي فضا واړوو چې دوه غړي ولري.

– که چیرې د دا ډول نمونه‌وي فضا د یو غړي احتمال (P) وي، نو هرو مرو د بل حالت احتمال $1-p$ او بایلل دي.

– که چیرې دا ډول تجربې n ځلې تکرار شي، نو د k – ام ځلې ورل په n ځلې تکرار کې او د بایللو احتمال به $q=1-p$ سره دي، یعنې لرو چې:

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad , \quad 0 \le k \le n$$

= ،k – ام ځلې ورل په n ځلې تکرار کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: پاملرنه وکړئ چې که چیرې په یوه تجربه کې د وړلو احتمال $\frac{1}{2}$، د بایللو احتمال هم مساوي په $\frac{1}{2}$ سره وي، په دې ډول ناځاپي پیښو کې پورتنی اړیکه په لاندې ډول حسابېږي:

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k}.(\frac{1}{2})^k.(1-\frac{1}{2})^{n-k}=\binom{n}{k}.\left(\frac{1}{2}\right)^k.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

پورتنی پایله د یوې تجربې په n ځله تکرار کې چې له هغې جملې څخه k ځلې یې وړل وي، یوې دوه عنصره نمونه‌یي فضا ته وځیرئ؟

دویم مثال: په یو 5 اولاده فامیل کې، د دې احتمال چې له اولادونو څخه 2 تنه هلکان او پاتې نجونې وي، څو دی؟

حل: که چیرې د اولادونو د هلك او نجلی زیږد برابر په پام کې ونیسو لرو چې:

څرنګه چې په دې مثال کې $p=\frac{1}{2}$ او $q=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ سره دی، نو لیکلای شو:

$$=\frac{\binom{5}{2}}{2^5}=\frac{10}{2^5}=\frac{5}{16}=0.3125=31.25\%$$ د دې احتمال چې دوه هلکان او درې نجونې وي.

دریم مثال: د رمل یوه دانه 6 ځلې غورځوو، د دې احتمال پیدا کړئ چې په 4 ځلې غورځېدو کې راغلي خالونه له دریو څخه لږ وي؟

حل: که چیرې له 3 څخه لږ راتلل حالت وړل په پام کې ونیسو؛ نو:

$$p=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=0.3333=33.33\%$$

$$q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}=0.6666=66.66\%$$

(د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدو کې له 6 ځلې څخه، خالونه له 3 څخه لږ وي)$=\binom{6}{4}.\left(\frac{1}{3}\right)^4.\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{20}{243}=0.0823=8.23\%$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: یوه فلزي سکه داسې جوړه شوې ده چې د خط راتلو احتمال يې مساوي په $\frac{1}{3}$ وي، که چیرې دغه سکه 4 ځلې وغورځول شي، د دې احتمال چې لږ تر لږه 3 ځلې شېر راشي، مطلوب دی.

حل: که چیرې د سکې د خط راتللو حالت ته وړل او احتمال يې p په پام کې ونیسو، نو د خط د نه راتللو یا شېر راتګ مساوي په $1-p$ سره دی؛ یعنې: $1-p=\frac{1}{3}p$

له دې څخه $p=\frac{3}{4}$ او $q=\frac{1}{4}$ په لاس راځي:

$$\left\langle \text{د دې احتمال چې په 4 خله غورځېدوکې لږ تر لږه 3 خله شېر راشي.} \right\rangle = \binom{4}{3}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^3}_{\text{3ځلې شېر}}\cdot\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)}_{\text{1 ځل خط}}+\binom{4}{4}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^4}_{\text{4 ځلې شېر}}=\frac{3}{64}+\frac{1}{256}=\frac{13}{256}$$

پنځم مثال: یوه نورماله سکه څو ځلې وغورځوو چې لږ تر لږه د خط راتلو احتمال يې له 0.99 څخه ډېر وي؟

حل: داسې فرضوو چې سکه n ځلې غورځوو د دې احتمال چې لږتر لږه یو ځل سکه خط راشي مساوي ده په:

(د هر n ځلې شیر راتګ احتمال) $-1=$ دی، لږ تر لږه یو ځل خط راتلو احتمال

$$=1-\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

په دې ډول ددې شرط $1-\frac{1}{2^n}>0.99$ یا $\frac{1}{2^n}<0.01$ سره دی چې $2^n>100$ یا $n\geq 7$ سره کېږي.

په دې ډول باید سکه 7 ځلې وغورځوو چې لږتر لږه یو ځل خط راشي، احتمال به يې له 0.99 څخه لوی وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

یوه سکه څو ځله غورځوو، د دې احتمال پیداکړې چې:

(i): په 4 ځله غورځیدوکې، 2 ځلې خط راشي.

(ii): په 6 ځله غورځیدلې، 3 ځلې خط راشي

(iii): په 8 ځله غور ځیدوکې، 4 ځلې خط راشي.

(iv): فکر وکړئ چې که سکه 2n ځلې وغورځول شي او n ځلې خط راشي، د n په ډېریدو، د p بدلون په څه ډول دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرکي مهم ټکي

فکټوريل: د هر طبيعي n عدد لپاره د $1\cdot2\cdot3\cdot\ \ldots\ \cdot n$ د ضرب حاصل په لنډ ډول په n! (n فکټوريل) ښودل کېږي، د تعريف له مخې $0!=1$ سره دی.

پرموټېشن يا ترتيب: د n غړو ترتيب په p_n ښودل کېږي که چېرې:

- په ترتيب کې تکرار مجاز او ممکن نه وي: $P_n = n!$

خو که چېرې تکرار مجاز وي، د ترتيبونو شمېر مساوي په P_k^n سره ده او داسې معنا ورکوي چې k ځلې په n ځلې ترتيبونو کې تکرار وجود لري. چې د پورتني حالت په پام کې نيولو سره ټول حالتونه مساوي دي په:

$$P_k^n = \frac{n!}{k!} \quad , \quad k \le n$$

$\binom{n}{k}$ د $n,$ او k **له پاسه**: د $\binom{n}{k}$ د $n,$ د k له پاسه، د بينوم هغه ضريبونه دي چې k د بينوم د توان په ټاکلو سره، د ضريبونو لپاره داسې صورت نيسي:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ ، } n,k \in IN \text{ ، } 0 \le k \le n$$

- له n شيانو څخه د r شيانو ترکيبونه په:

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \text{،} \quad r \le n$$

وريشن يا تبديلونه: په ترتيبونو کې چې پر له پسې ترتيب د k انتخابي غړو له n غړو څخه مطلوب وي، په نامه دی، n په k بديلونو ياد او ليکو:

$$V_k^n = k!\cdot C_k^n = k!\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

دبينوم قضيه: د $(a+b)^n$ دو جملهيي انکشاف عبارت دی له:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

د يوې تجربې په n ځلې تکرارکې، چې هر حالت يې p او د $q=1-p$ احتمال لري.

د $k-$ ام ځلې ورلو يعنې p له n ځلې څخه او نور پاتې حالتونه چې بايلول ګڼل کېږي؛يعنې $q=1-p$ سره دي او صورت نيسي:

$$\left\langle \begin{array}{c}\text{د k ځلې ورلو د احتمال قيمت د تجربې} \\ \text{د n ځلې په پای کې}\end{array} \right\rangle = \binom{n}{k}\cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \text{ ، } 0 \le k \le n$$

د څپرکي پوښتنې

1- د لاندې عددونو سټ په پام کې ونیسئ:

$$S = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

(i): په څو ډوله کولای شو له پاسنیو عددونو څخه 3 رقمي عددونه جوړ کړو.

(ii): ټول 3 رقمي جفت عددونه به څو وي؟

2- په څو ډوله 6 تنه زده‌کوونکي په یوه کتار کې څنګ په څنګ دریدلي شي؟

3- په څو ډوله ابوبکر، زبیر، یاسر، هنزله او خبیب کولای شي، په یو کتار کې خوا په خوا د یو یادګاري تصویر د اخیستلو لپاره ودریږي؟

4- په څو ډولونو کولای شو چې 9 تنه په دریو 3 ګروپونو وویشو؟

5- د پاسکال د مثلث له مخې د $(a+b)^7$ انکشاف په لاس راوړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library