





د پوهنې وزارت  
د تعلیمې نصاب د پراختیا، د ښوونکو د روزنې او  
د ساینس د مرکز مهمیت  
د تعلیمې نصاب د پراختیا او درسي کتابونو د تالیف  
لوی ریاست

# ریاضی ۱۱

## تولکشی

د چاپ کال: ۱۳۹۰ هـ.ش.



## ليکوالان:

- پوهنمل طلاباز حبيب زى د پوهني وزارت د درسي کتابونو د تاليف د پروژې غړی
- مهريه ناصر د پوهني وزارت د درسي کتابونو د تاليف د پروژې غړي
- پوهنډوی خالقاد فيرورکوهي د پوهني وزارت د درسي کتابونو د تاليف د پروژې غړی
- د مؤلف مرستيال محمد خالد ستوري(خدران)، د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف علمي غړی

## ژباړونکي:

- سر مؤلف نظام الدين د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف علمي غړی
- پوهنمل طلاباز حبيب زى د پوهني وزارت د درسي کتابونو د تاليف د پروژې غړی
- د مؤلف مرستيال محمد خالد ستوري(خدران)، د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف علمي غړی
- مختار نوید د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف علمي غړی

## علمي او مسلکي ايډيټي:

- ډاکټر عطاء الله واحديار د پوهني وزارت ستر سلاکار او د نشراتو رئيس.
- حبيب الله راحل د پوهني وزارت سلاکار د تعليمي نصاب د پراختيا په لوی رياست کې.
- د مؤلف مرستيال محمد خالد ستوري(خدران)، د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف علمي غړی

## د ژبني ايډيټي:

محمد قدوس دکو خيل

## دیني، سياسي او کلتوري کمیټه:

- مولوي عبدالوکيل د اسلامي تعليماتو علمي غړی.
- حبيب الله راحل د پوهني وزارت سلاکار د تعليمي نصاب د پراختيا په لوی رياست کې.

## د څارني کمیټه:

- ډکتور اسدالله محقق د تعليمي نصاب د پراختيا، د ښوونکو د روزني او د ساينس مرکز معين
- ډکتور شېر علي ظريفني د تعليمي نصاب د پراختيا د پروژې مسؤول
- د سر مؤلف مرستيال عبدالظاهر گلستاني د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تاليف لوی رئيس

## طرح او ډيزاين:

وليد «نويد» نسيمي



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



## ملي سرود

دا وطن افغانستان دی      دا عزت د هر افغان دی

کور د سولې کور د توري      هر بچی یې قهرمان دی

دا وطن د ټولو کور دی      د بلوڅو د ازبکو

د پښتون او هزاره وو      د ترکمنو د تاجکو

ورسره عرب، گوجر دي      پامپریان، نورستانیان

براهوي دي، قزلباش دي      هم ایماق، هم پشه یان

دا هیواد به تل خلیږي      لکه لمر پر شنه آسمان

په سینه کې د آسیا به      لکه زره وي جواویدان

نوم د حق مودی رهبر      وایو الله اکبر وایو الله اکبر



بسم الله الرحمن الرحيم

## د پوهني د وزير پينام گراو ښوونکو او زده کونکو،

ښوونه او روزنه د هر هېواد د پراختيا او پرمختگ بنسټ جوړوي. تعليمي نصاب د ښوونې او روزنې مهم توکی دی چې د معاصر علمي پرمختگ او ټولني د اړتياوو له مخې رامنځته کېږي. څرنگه ده چې علمي پرمختگ او ټولنيزې اړتياوې تل د بلون په حال کې وي. له دې امله لازمه ده چې تعليمي نصاب هم علمي او رښانه انگشاف ووموي. البته نه بنيادي چې تعليمي نصاب د سياسي، بدلونونو او د اشخاصو د نظريو او هيلو تابع شي. دا کتاب چې نن ستاسو په لاس کې دی، پر همدې ارزښتونو چمتو او ترتيب شوی دی. علمي گټورې موضوعگانې پکې زياتې شوې دي. د زده کړې په بهير کې د زده کوونکو فعال ساتل د تدرسي پلان برخه گرځيدلې ده. هيله من يم دا کتاب له لارښوونو او تعليمي پلان سره سم د فعالې زده کړې د ميتودونو د کارولو له لارې تدریس شي او د زده کوونکو ميندې او پلرونه هم د خپلو لوڼو او زامنو په باکفيته ښوونه او روزنه کې پرله پسې گډه مرسته وکړي چې د پوهنې د نظام هيلې ترسره شي او زده کوونکو او هېواد ته ښې برناوې ور په برخه کړي. پر دې ټکي پوره باور لرم چې زموږ گران ښوونکي د تعليمي نصاب په رښانه پلي کولو کې خپل مسؤليت په رښتوني توگه سرته رسوي.

د پوهنې وزارت تل زيار کاږي چې د پوهنې تعليمي نصاب د اسلام د سپېڅلي دين له بنسټونو، د وطن دوستی د پاک حس په ساتلو او علمي معيارونو سره سم د ټولني د څرگندو اړتياوو له مخې پراختيا ووموي. په دې ډگر کې د هېواد له ټولو علمي شخصيتونو، د ښوونې او روزنې له پوهانو او د زده کوونکو له ميندو او پلرونو څخه هيله لرم چې د خپلو نظريو او رښانه وړاندیزونو له لارې زموږ له مؤلفانو سره د درسي کتابونو په لايحه تاليف کې مرسته وکړي.

له ټولو هغو پوهانو څخه چې د دې کتاب په چمتو کولو او ترتيب کې يې مرسته کړې، له ملي او نړيوالو درنو مؤسسو، او نورو ملگرو هېوادونو څخه چې د نوي تعليمي نصاب په چمتو کولو او تلوين او د درسي کتابونو په چاپ او وپس کې يې مرسته کړې ده، مننه او درناوی کوم.

ومن الله التوفيق

فاروق وردگ

د افغانستان د اسلامي جمهوريت د پوهني وزير





۹۵	درېم څپرګۍ فضايي هندسه
۹۷	• اساسي مفاهيم او اګسيو موزنه
۱۰۱	• په درې بُعدي فضا کې کرښه او مستوي
۱۰۳	• په فضا کې موازي مستقيمونه
۱۰۵	• په فضا کې د دوو مستقيمو کرښو تر منځ زاويه
۱۰۷	• په فضا کې موازي مستقيمونه او موازي مستوي ګانې
۱۰۹	• په فضا کې معامدي مستقيمي کرښې او مستوي ګانې
۱۱۱	• د څپرګۍ مهم ټکي
۱۱۳	• د څپرګۍ پر بنسټي

### څلورم څپرګۍ تراذونه

۱۱۷	• تراذونه
۱۱۹	• حسابي تراذف
۱۲۷	• هندسي تراذف
۱۳۳	• د تراذونو فسمې مجموعه
۱۳۷	• د حساسي تراذف د 11 لومړيو حدودنو فسمې مجموعه
۱۴۱	• د يوه هندسي تراذف د 11 حدودنو د جمعي حاصل
۱۴۳	• لايتاهي هندسي سلسلې
۱۴۷	• د څلورم څپرګۍ مهم ټکي
۱۴۹	• د څپرګۍ پر بنسټي

### پنځم څپرګۍ لو ګارټيم

۱۵۳	• اکسيو نښيل تابع ګانې
۱۵۷	• لو ګارټيم
۱۵۹	• لو ګارټيمي تابع ګانې
۱۶۳	• معمولي لو ګارټيم
۱۶۷	• د لو ګارټيم قوانين
۱۷۱	• د لو ګارټيم د قاعدې اورول په بله قاعده
۱۷۵	• کرکټر سپيک او ماټيس
۱۷۹	• د لو ګارټيم جدول
۱۸۳	• انډي لو ګارټيم
۱۸۵	• خطي انډر پور لېشن
۱۸۹	• د لو ګارټيمي او اکسيو نښيل معادلو حل
۱۹۳	• درياضيکي عمليو په سرته رسو لو ګي له لو ګارټيم څخه کار اخيستنه
۱۹۷	• د څپرګۍ مهم ټکي
۱۹۹	• د څپرګۍ پر بنسټي





## شپږم څپرکی مټریکسونه

- مټریکسونه
- د مټریکسونو ډولونه
- د مټریکسونو جمع او تفریق
- په مټریکس کې د سکالر ضرب
- د دوو مټریکسونو ضرب
- د پوره مټریکس ترانسپوز مټریکس
- دپټر مېټر
- د دپټر مېټر خاصیتونه
- د  $2 \times 2$  مرتبې مټریکسونو ضربې معکوس
- له معکوس مټریکس څخه په کار اخیستنې د خطي معادلو د سیستم حل
- د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه
- د معادلو د سیستم حل د گوس(Gouss) په طریقه
- د شپږم څپرکی مهم ټکي
- د څپرکی پوښتنې

- ۲۰۵
- ۲۰۹
- ۲۱۳
- ۲۱۵
- ۲۱۷
- ۲۲۱
- ۲۲۳
- ۲۲۷
- ۲۲۹
- ۲۳۱
- ۲۳۵
- ۲۳۹
- ۲۴۳
- ۲۴۵
- ۲۴۹
- ۲۵۱
- ۲۵۳
- ۲۵۵
- ۲۵۹
- ۲۶۱
- ۲۶۵
- ۲۷۵
- ۲۷۷

## اووم څپرکی وکتورونه

- د وضیعه کمیتونو په قایم سیستم کې وکتورونه
- د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی
- وکتورونه په سطح او فضا کې
- په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات
- د پوره وکتور د جهت زاويې او کوساینونه
- د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل
- د وکتوري ضرب حاصل
- د څپرکی مهم ټکي
- د څپرکی پوښتنې

## انہم خیر کی احصیاء

- دیدلو نو نو ضریب
  - پہ نورمال منحنی کی پراگندہ گی (نتیوالی)
  - دنورمال توزیع دوول شاخصونہ
  - خر منحو لہ تو لہی
  - د پراگندہ گی گراف
  - پیوسنون او دیپوسنون ضریب
  - د خطی میلان معادلہ
  - د انہم خیر کی مہم لگی
  - د خیر کی پوربستی
- ۲۸۱  
۲۸۳  
۲۸۵  
۲۸۷  
۲۸۹  
۲۹۱  
۲۹۵  
۲۹۹  
۳۰۱

## نہم خیر کی احتمالات

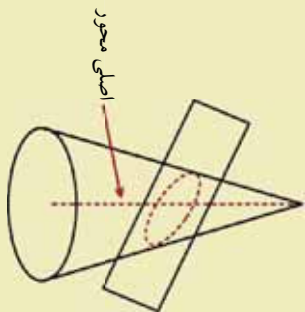
- پرموتیشن یا ترتیب
  - ترکیب یا کمیٹیشن
  - ترکیب
  - تبدیل
  - د بیوم قضیہ
  - دوہ جملہ بی احتمال
  - د خیر کی مہم لگی
  - د خیر کی پوربستی
- ۳۰۵  
۳۰۹  
۳۱۱  
۳۱۳  
۳۱۷  
۳۱۹  
۳۲۳  
۳۲۴

لوہری ڇپری

منڇرو طبي مقاطع



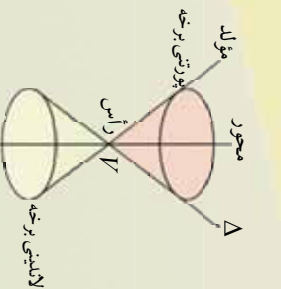




## مخروطي مقاطع sections of Conic

آيا ويلاي شی چې د یوې مستوي او مخروط د تقاطع له  
گډ فصل څخه څه ډول منحنی گانې په لاس راځي.

### د مخروطي مقاطعو تعريف



د  $\Delta$  او  $D$  دوه مستقیم خطوطه داسې په پام کې نیسو چې یو بل د  $V$  په ټکي کې قطع (برې) کړي. که چېرې د  $D$  خط ثابت او د  $\Delta$  خط د هغه په چاپیرو څرخیزې، له دې څرخولو څخه په فضا کې دوه شکلو ته چې یو یې د  $V$  (ټکي) پورته او بل یې د  $V$  د ټکي کېښته خواته جوړېږي، هر یو یې مخروط دی، لکه مخامخ شکل د  $D$  مستقیم خط د مخروط محور او د  $\Delta$

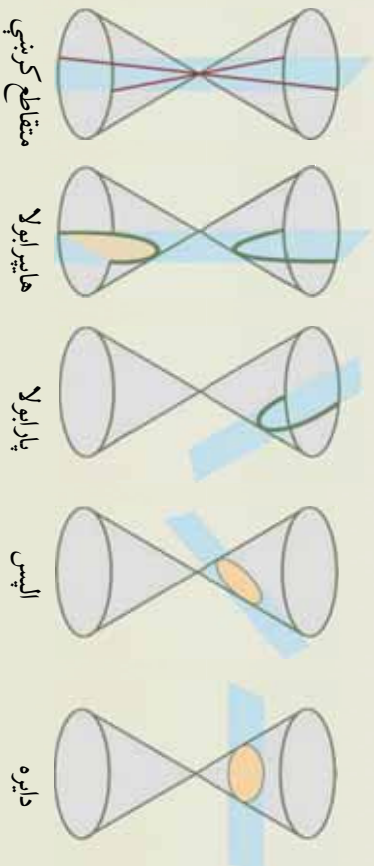
مستقیم خط د هغه مورل دی. د یوې مستوي په واسطه د یوه مخروط قطع کول مختلف حالتونه لري چې مختلفي منحنی گانې منځ ته راځي چې مخروطي مقاطع بلل کېږي. په هر یو په تفصیل سره ولوستل شي.

### فعالیت

- یو مخروط د مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط په اصلي محور باندې عمود او یا له قاعدو سره موازي وي، ویلاي شی، څه فصل یې څه ډول منحنی ده؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې د مستوي او مخروط له اصلي محور سره یې زاویه قایمه نه وي (نسبت اصلي محور ته مایل)، څه فصل یې څه ډول منحنی ده؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط له مورل سره موازي وي، تقاطع یا څه فصل یې څه ډول منحنی ده؟
- دوه مخروطه چې راسونه یې سر په سر (منطبق) او قاعدې یې موازي وي، د یوې مستوي په واسطه چې اصلي محور سره موازي وي قطع کړئ. ویلاي شی، چې له گډ فصل څخه یې څه ډول منحنی په لاس راځي؟
- یو مخروط د یوې مستوي په واسطه داسې قطع کړئ چې مستوي د مخروط اصلي محور په برکي ولري، تقاطع یا څه فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟



له پورته فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:



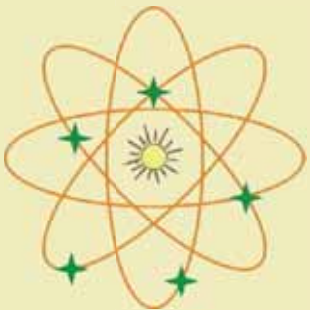
### پایله:

- که چېرې مستوي یو مخروط داسې قطع کړي چې مستوي د مخروط په اصلي محور عمود او یا موازي له قاعدو سره وي، نو گڼه فصل یې یوه دایره ده.
- که چېرې مستوي مخروط داسې قطع کړي چې مستوي او مخروط له اصلي محور سره یې زاویه قائمه نه وي، (مایل) لاس ته راغلي شکل الپس (Ellipse) یا بیضوي ده.
- که چېرې یوه مستوي یو مخروط داسې قطع کړي وي چې اصلي محور ته موازي او هغه په برکې ونه لري، نو په دې حالت کې د هغوی له گڼه فصل څخه پارابولا (Parabola) په لاس راځي.
- که چېرې یوې مستوي دوه سر په سر یا څوکه په څوکه مخروطونه چې اصلي محور ته موازي وي قطع کړي وي، له گڼه فصل څخه یې هایپربولا (Hyperbola) په لاس راځي.
- که چېرې یوه مستوي اصلي محور په برکې ولري، نو گڼه فصل یې له دوو متقاطع کرنيو څخه عبارت دی. چې هر یو یې په پورته شکلونو کې ښودل شوي دي.

### پوښتنې

- 1- د پورتنۍ شکل په پام کې نیولو سره، د مستوي او مخروط هغه متقاطع حالت رسم کړئ چې گڼه فصل یې یوه دایره او یا یو ټاکی وي.
- 2- که چېرې یوه مستوي دوه څوکه په څوکه مخروطونه داسې قطع کړي چې د دواړو مخروطونو اصلي محورونه په برکې ولري، گڼه فصل یې څه ډول هندسي شکل دی؟
- 3- د یوې مستوي او مخروط گڼه فصل په کوم حالت کې یوه کرښه ده؟ په دې حالت کې شکل رسم کړئ؟

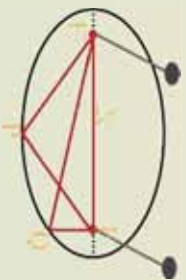




**بیضوی**  
*Ellipse*  
 د سیارو حرکت د لمر په شاوخوا یا شمسی نظام څه ډول  
 منحنی گانې جوړوی؟

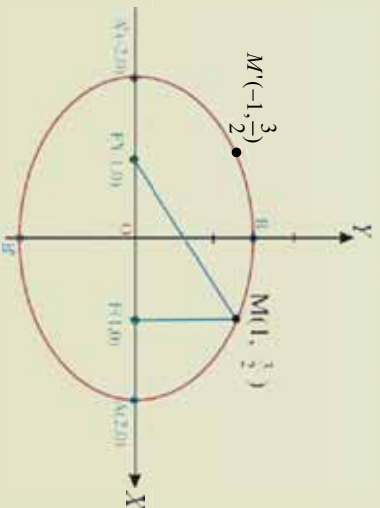
### فعالیت

- د یوې سینینې کاغذې پانې پر مخ دوه ستنې په یوه معین او ثابت واټن سره د  $F'$  او  $F$  په دوو ټکو کې وننومئ.
- د یو تار څوکې چې اوږدوالی یې د  $FF' = 2c$  څخه زیات دی، په دواړو ستنو کې وترئ، د لاندې شکل په پام کې نیولو سره یو پنسل د تار په غاړه د ستنو په شاوخوا اوڅرخوئ.
- هغه شکل چې د یوې بشپړې دورې په لاس راځي څه ډول منحنی ده؟  
 له پورته فعالیت څخه لاندې پایله بیانولای شو:
- **پایله:** هغه شکل چې ددوو ستنو تر منځ د معین او ثابت واټن په اندازه د تار په غاړه د پنسل له څرخولو څخه په لاس راځي، د ایس منحنی بلل کېږي، د  $F$  او  $F'$  ټکي د ایس د محرقونو په نامه یادېږي.



### فعالیت

- په مخامخ شکل کې د  $F, F', M, M', A, A'$  په مختلفو درکړل شوي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستني د  $|MF'|, |MF|$  او  $|AA'|$  اوږدوالی پیدا کړئ او بیا د  $|AA'|$  او  $|MF'| + |MF|$  اوږدوالی یو له بل سره پرتله کړئ.



- د  $M'(-1, \frac{3}{2})$  ټکی د ایس په محیط باندې په نښه او همدارنگه د  $M'$  ټکی هم په پام کې ونیسئ.

- وروسته د  $|MF| + |M'F|$  او  $|MF| + |M'F|$  قیمتونه یو له بله سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعريف بيانولای شو:

**تعريف:** په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له دوو ځای پر ځای ټکو څخه یې د فاصلو د جمعي

حاصل تل مساوي يا ثابت اوږدوالی ولري، بیضوي بلل کېږي، مستقر ټکی چې په  $F$  او  $F'$  تورو بنسود شوي، د

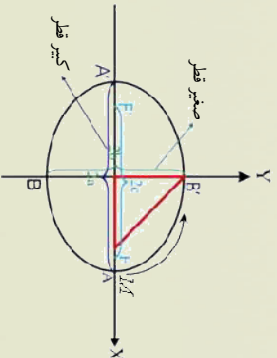
ایس محراقونه او  $A, A'$  د ایس راسونه چې  $AA' = 2a$  ثابت اوږدوالی دی.

$$|M'F| + |MF| = 2a, \quad |MF| + |M'F| = 2a$$

$$|M'F| + |MF| = |MF| + |M'F| = 2a$$

### د ایس قطرونه او راسونه:

ایس یې شمېره قطرونه لري، لوی یې کیر قطر یا اوږد قطر چې له محراقونو څخه تیرېږي او بیضوي په دوو ټکو د  $A, A'$  کې قطع کوي، د کیر قطر یا Major axis په نامه او کوچنی قطر یې د  $FF'$  د نیمايي په ټکي عمود دی چې د صغیر قطر یا Minor axis په نامه یادېږي. د  $A, A'$  او  $B, B'$  ټکی د ایس راسونه دي، کیر قطر په  $A, A'$  چې اوږدوالی یې یعنی  $AA' = 2a$  او صغیر قطر په  $B, B'$  چې اوږدوالی یې  $BB' = 2b$  دی، بنسودل کېږي.



### یادداشت

که چېرې د  $M$  ټکی د صغیر قطر په راسونو یعنی په  $B$  یا  $B'$  باندې منطبق شي، په دې صورت کې له پورته شکل

$$\overline{MF} = \overline{MF'}$$

څخه لیکلای شو:

له بلې خوا پوهیږو چې:

$$|MF| + |MF'| = 2a$$

$$2\overline{MF} = 2a$$

$$\overline{MF} = a$$



### د محراقونو او قطرونو ترمنځ رابطه:

د محراقونو او قطرونو ترمنځ اړیکې د فیثاغورث د قضیې له مخې لیکلای شو:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

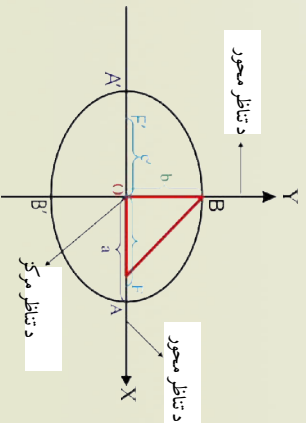
$$c = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$$

### د ایس تناظري مرکز او تناظري محور:

ایس دوه تناظري محورونه لري چې یو یې لوی محور د  $A'A'$  پر قطر باندې منطبق دی چې محراقي محور هم بلل کېږي او بل یې کوچنی تناظري محور چې د  $B'B'$  پر قطر باندې منطبق دی.

د دې دواړو محورونو د تقاطع ټکی د ایس تناظري مرکز بلل کېږي او په  $(O)$  سره ښودل کېږي.

$$\begin{aligned}\overline{OA} &= \overline{OA'} = a \\ \overline{OB} &= \overline{OB'} = b \\ \overline{OF} &= \overline{OF'} = c\end{aligned}$$



عن المركزیت (Eccentricity): د یوې بیضوي شکل د عن المركزیت په واسطه ټاکل کېږي عن المركزیت

د محراق او لوی محور له نسبت څخه عبارت دی، د بیضوي عن المركزیت په  $e$  سره ښودل کېږي او د  $e = \frac{c}{a}$  په شکل تعریف شوی دی.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

پوهیږو چې په هره بیضوي کې  $a < c < 1 < e < 0$  کېږي، د بیضوي د عن المركزیت او قطرونو تر

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

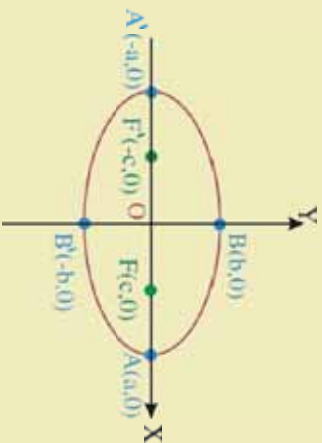
زده‌کونکي دې د قطرونو او محورونو ترمنځ د رابطې په کارونې سره نوموړي رابطه په لاس راوړي.

**يادونه:** که چیرې د  $e$  قیمت صفر ته نژدې شي، محراقونه يې د مرکز خوا ته نژدې کېږي. دلته بیضوي تقریباً دایروي شکل غوره کوي. که چیرې د  $e$  د 1 عدده ته نژدې شي، په دې صورت کې محراقونه د قطرونو د راسونو خوا ته نژدې کېږي چې یو اوږد شکل غوره کوي، د بیضوي په ډیرو مسایلو کې د عن مرکزیت څخه کار اخیستل کېږي.



### پوښتنې

- 1- که چیرې په بیضوي کې د کبير قطر او صغير قطر اوږدوالی یو له بل سره مساوي وي، څه ډول منحنی به لاس راځي؟
- 2- که چیرې د بیضوي عن مرکزیت  $\frac{2}{3}$  وي، په دې صورت کې د کبير قطر او صغير قطر نسبت پیدا کړئ.



### د بیضوي معادله

آیا د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیانو په مبداء کې وي، پیدا کولای شئ؟

### فعالیت

- داسې بیضوي رسم کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیانو په مبداء کې وي او محراقونه یې د  $x$  د محور په مخ وټاکئ.
- د  $M(x, y)$  یو اختیاري ټکی، د بیضوي پر محیط باندې وټاکئ او هغه له محراقونو سره ونښلوئ.
- د  $M$  او  $F$  د ټکو ترمنځ واټن او همدارنگه د  $M$  او  $F'$  د ټکو ترمنځ واټن پیدا کړئ او د دوی ټکو ترمنځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستې د بیضوي معادله په لاس راوړئ.

ثبوت لومړۍ حالت: موږ لرو:

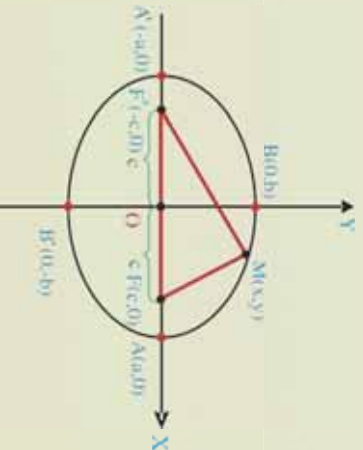
$$|MF| + |MF'| = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

یا:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$



د دواړو خواوو له مربع کولو وروسته لیکو چې:

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a^2 - x^2 - 2cx - c^2 - y^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$-4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad / \div (-4)$$



$$a^2 + cx = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

یا

د پورتنۍ رابطې دواړه خواوې بیا مربع کوو او لیکو:

$$(a^2 + cx)^2 = (a\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2$$

$$a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 = a^2[(x+c)^2 + y^2]$$

$$a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)$$

$$a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^4 + c^2x^2 - a^2x^2 - a^2c^2 - a^2y^2 = 0$$

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 - c^2x^2 - a^4 = 0$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

خړنگه چې  $c^2 + b^2 = a^2$  دی، نو  $a^2 - c^2 = b^2$  کېږي، په دې صورت کې پورتنۍ معادله په لاندې توګه لیکو:

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad | \div a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b$$

پورتنۍ معادله دداسې بیضوي معادله راښيي چې د محراقونو وضعیه کمیات یې  $(C, 0)$ ،  $(-C, 0)$  او د X پر

محور باندې واقع دي.

**ثبوت دویم حالت:** که چېرې د بیضوي محراقونه د Y په محور باندې وي، په دې صورت کې د بیضوي معادله

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

عبارت ده له:

زده کوونکي دې بیضوي رسم، د اوږد قطر، لنډ قطر او محراقونو مشخصات یې ولیکي.

**لومړی مثال:** که چېرې د Y پر محور باندې د بیضوي د اوږد قطر اوږدوالی یعنی  $|AA'| = 6$  او لنډ قطر

اوږدوالی یعنی  $|BB'| = 4$  او احصه وي، د بیضوي معادله پیدا کړئ.

**حل:**

$$|AA'| = 2a = 6$$

$$2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$|BB'| = 2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

اوس د a او b قیمتونه په عمومي معادله کې اېږدو او معادله لیکو:  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



**دویم مثال:** که چیري د یوې بیضوي د اوږده قطر اوږدوالی  $|AA'|=10$  او لنډه قطر اوږدوالی یې  $|BB'|=8$  واحد وي، د بیضوي د اوږده او لنډه قطرونو د راسونو او محراقونو مختصات، محراقي فاصله، د عن المרכזیت قیمت پیدا او گراف یې رسم کړئ.

**حل:** پوهیږو چې:

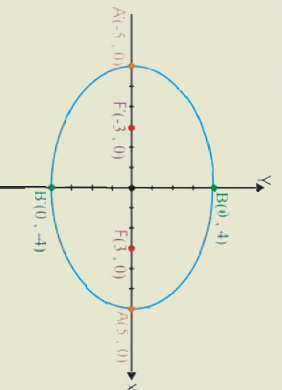
$$\begin{aligned} |AA'|=2a=10 &\Rightarrow a=\pm 5 \\ |BB'|=2b=8 &\Rightarrow b=\pm 4 \end{aligned}$$

لیال کیري چې  $b > a$  دی، نو اوږد قطر یې د  $x$  پر محور باندي پروت دی، د اوږده قطر د راسونو مختصات له  $A(5, 0)$  او  $A'(-5, 0)$  څخه عبارت دي.

د لنډ قطر د راسونو مختصات له:  $B(0, 4)$  او  $B'(0, -4)$  څخه عبارت دي.

د محراقونو د مختصاتو د پیدا کولو لپاره د  $c$  قیمتونه پیدا کوو:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ \Rightarrow (5)^2 &= (4)^2 + c^2 \\ c^2 &= a^2 - b^2 \Rightarrow 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 \\ c &= \pm 3 \end{aligned}$$



د محراقونو مختصات له  $F(3, 0)$  او  $F'(-3, 0)$  څخه عبارت دي.

عن المרכזیت:  $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$  دي

درېم مثال: د داسې بیضوي گراف رسم کړئ چې معادله یې  $4x^2 + y^2 = 16$  وي، د راسونو او محراقونو مختصات یې پیدا کړئ.

**حل:** د معادلې دواړه خواوې په 16 ویشو:

$$\begin{aligned} \frac{4x^2}{16} + \frac{y^2}{16} &= \frac{16}{16} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} &= 1 \end{aligned}$$

د راسونو مختصات:

$$\begin{aligned} a^2=16 &\Rightarrow a=\pm 4 \Rightarrow A(0, 4), A'(0, -4) \\ b^2=4 &\Rightarrow b=\pm 2 \Rightarrow B(2, 0), B'(-2, 0) \end{aligned}$$



د محورونو مختصات:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c^2 = (4)^2 - (2)^2$$

$$c^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow c = \pm\sqrt{12}$$

$$F(0, \sqrt{12}), F'(0, -\sqrt{12})$$

**څلورم مثال:** د بیضوي د محیط پر منځ د یوه ټکی مختصات  $P(2, 4)$  او د محورونو مختصات یې له

**حل:** د بیضوي د تعریف له مخې لرو چې:  $F''(-3\sqrt{2}, 0), F(3\sqrt{2}, 0)$  څخه عبارت دي. دا ورته او لنډه قطر اوږدوالی یې پیدا کړی.

$$|PF| + |PF''| = 2a$$

$$|PF| \text{ او } PF' \text{ د فاصلو اوږدوالی پیدا کوو } |PF| = \sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2}$$

پورتني قیمتونه د تعریف په رابطه کې اېږدو:

$$\sqrt{(2+3\sqrt{2})^2 + 4^2} + \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2 + 4^2} = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{4+12\sqrt{2}+18+16} + \sqrt{4-12\sqrt{2}+18+16} = 2a$$

$$\Rightarrow \left( \sqrt{38+12\sqrt{2}} + \sqrt{38-12\sqrt{2}} \right)^2 = (2a)^2$$

$$38+12\sqrt{2}+2\sqrt{(38+12\sqrt{2})(38-12\sqrt{2})}+38-12\sqrt{2} = 4a^2$$

$$76+2\sqrt{1444-288} = 4a^2 \Rightarrow 76+2 \cdot 34 = 4a^2$$

$$\Rightarrow 76+68 = 4a^2 \Rightarrow 144 = 4a^2 / \div 4$$

$$\Rightarrow 36 = a^2 \Rightarrow a = \pm 6$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 36 = b^2 = 18 \Rightarrow b = \pm 3\sqrt{2}$$

$$2a = 2 \cdot 6 = 12$$

$$2b = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6 \cdot \sqrt{2}$$

پوښتنې



1- لاندې معادلې په پام کې ونیسئ، د اوږده قطر اوږدوالی د راسونو او محورونو ترمنځ فاصله پیدا کړی.

$$a) \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$b) \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

2- د هغې ایس معادله ولیکئ چې عنالمرکزیت یې 0.8 وي.



### د هغې بیضوي معادله چې مرکز یې یو اختیاري ټکی وي

ایا داسې بیضوي معادله پیدا کولای شو چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې نه وي؟

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

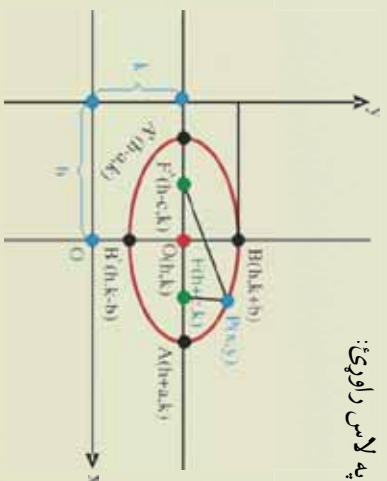
$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

### فعالیت

یوه بیضوي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې رسم کوئ چې مرکز یې  $(h, k)$  او لوی قطري د  $x$  له محور سره موازي وي.

د  $P(x, y)$  یو ټکی د بیضوي په محیط باندې په پام کې ونیسي او هغه له  $F$  او  $F'$  سره ونښلوئ. د بیضوي د مرکز مختصات  $(h, k)$  په پام کې نیولو سره د محراقونو  $F$  او  $F'$ ، راسونو  $A$ ،  $A'$  او  $B$ ،  $B'$  وضعیه کمیات په شکل کې ونښاست.

د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستې او د بیضوي د تعریف د رابطې په کارونې سره معادله په لاس راوړئ:



$$|PF| + |PF'| = 2a$$

$$|PF| = \sqrt{[x-(h+c)]^2 + (y-k)^2}$$

$$|PF'| = \sqrt{[x-(h-c)]^2 + (y-k)^2}$$

$$\sqrt{[x-(h+c)]^2 + (y-k)^2} + \sqrt{[x-(h-c)]^2 + (y-k)^2} = 2a$$

$$\sqrt{[x-h-c]^2 + (y-k)^2} = 2a - \sqrt{[x-h+c]^2 + (y-k)^2}$$

یا:

دواړه خواوې مربع او له اختصار وروسته لاندې رابطه په لاس راځي:

$$[x-(h+c)]^2 + (y-k)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{[x-(h-c)]^2 + (y-k)^2} + [(x-h)+c]^2 + (y-k)^2$$

$$x^2 - 2x(h+c) + (h+c)^2 + (y-k)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{[x-(h-c)]^2 + (y-k)^2} + [(x-h)+c]^2 + (y-k)^2$$

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2hx - 2cx + h^2 + 2hc + c^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2} + x^2 - 2hx + h^2 + 2cx - 2hc + c^2 \\
 4hc - 4cx &= 4(a^2 - a\sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2}) \\
 hc - cx &= a^2 - a\sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2} \\
 c(h - x) - a^2 &= -a\sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2} \quad / \div (-1) \\
 c(x - h) + a^2 &= a\sqrt{[x - (h - c)]^2 + (y - k)^2}
 \end{aligned}$$

دواړه خواوې مربع او لیکو:

$$\begin{aligned}
 c^2(h - x)^2 + 2ca^2(x - h) + a^4 &= a^2[\{x - (h + c)\}^2 + (y - k)^2] \\
 c^2(x - h)^2 + 2ca^2(x - h) + a^4 &= a^2[(x - h) + c]^2 + a^2(y - k)^2 \\
 c^2(x - h)^2 + 2ca^2(x - h) + a^4 &= a^2(x - h)^2 + 2a^2c(x - h) + a^2c^2 + a^2(y - k)^2 \\
 c^2(x - h)^2 - a^2(x - h)^2 - a^2(y - k)^2 &= a^2c^2 - a^4 \\
 (x - h)^2(c^2 - a^2) - a^2(y - k)^2 &= a^2(c^2 - a^2) \\
 -(x - h)^2(a^2 - c^2) - a^2(y - k)^2 &= -a^2(a^2 - c^2) \\
 \text{خړنگه چې په بیضوي کې } a^2 - c^2 = b^2 \text{ کېږي، نو لیکلای شو:} \\
 -b^2(x - h)^2 - a^2(y - k)^2 &= -a^2b^2 \quad / \div (-a^2b^2) \\
 &= \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1
 \end{aligned}$$

**لومړی مثال:** د یوې بیضوي د مرکز، محراقونو او اوږد قطر د انجاسونو مختصات چې معادله یې

$$\frac{(x - 6)^2}{36} + \frac{(y + 4)^2}{16} = 1$$

پیدا او گراف یې رسم کړئ.

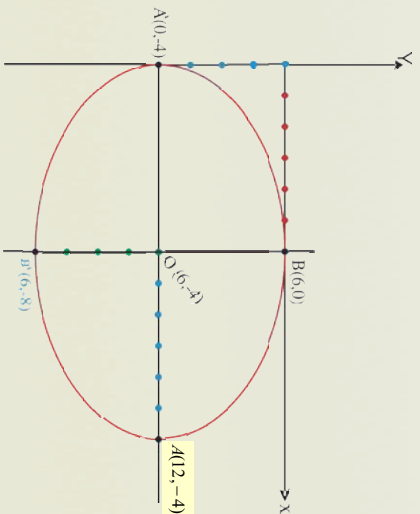
**حل:** خړنگه چې نوموړي معادله عمومي شکل لري، له دې امله د مرکز مختصات یې (6, -4) ده، لوی محور یې د x له محور سره موازي دی.

$$\begin{aligned}
 a^2 &= 36 \Rightarrow a = \pm 6 \\
 b^2 &= 16 \Rightarrow b = \pm 4 \\
 c &= \pm\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

د A او A' مختصات عبارت دي له:

$$\begin{aligned}
 A(h + a, k) &= A(6 + 6, -4) = A(12, -4) \\
 A'(h - a, k) &= A'(6 - 6, -4) = A'(0, -4)
 \end{aligned}$$





د B او B' مختصات عبارت دي له:

$$\begin{aligned} B(h, k + b) &= B(6, -4 + 4) = B(6, 0) \\ B'(h, k - b) &= B'(6, -4 - 4) = B'(6, -8) \\ F(h + c, k) &= F(6 + 2\sqrt{5}, -4) \\ F'(h - c, k) &= F'(6 - 2\sqrt{5}, -4) \end{aligned}$$

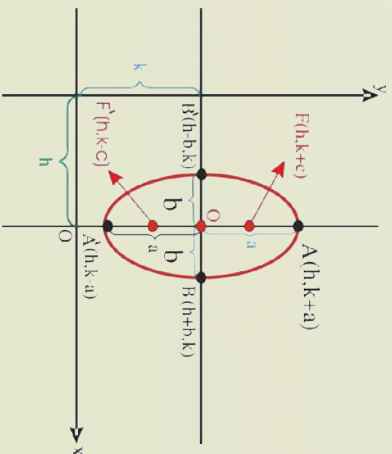
**دویم حالت:** که چېرې محراقي محور د  $y$  له محور سره

موازي وي، په دې حالت کې معادله لاندې بڼه غوره کوي.

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{aligned} A(h, k + a), \quad A'(h, k - a) \\ B'(h - b, k), \quad B(h + b, k) \\ F'(h, k - c), \quad F(h, k + c) \end{aligned}$$

د محراقونو او راسونو مختصات دې زده کوونکو ته دنده ورکړله شي.



یادونه: د  $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  معادله هم د بیضوي عمومي معادله ده، په داسې حال کې چې

$A \neq C$  او هم علامه وي، یعنی  $C > 0$  ، یا  $A > 0$  ،  $C < 0$  ،

**دویم مثال:** د  $16x^2 + 25y^2 - 64x + 50y - 311 = 0$  معادله د بیضوي د معیاري معادلې په ډول ولیکئ.

**حل:** د مربع له بشپړولو څخه په کار اخیستې سره یې په معیاري ډول بدلوو .

$$\begin{aligned} 16x^2 + 25y^2 - 64x + 50y &= 311 \\ 16(x^2 - 4x) + 25(y^2 + 2y) &= 311 \\ 16(x^2 - 4x + 4 - 4) + 25(y^2 + 2y + 1 - 1) &= 311 \\ 16[(x - 2)^2 - 4] + 25[(y + 1)^2 - 1] &= 311 \\ 16(x - 2)^2 - 64 + 25(y + 1)^2 - 25 &= 311 \\ 16(x - 2)^2 + 25(y + 1)^2 &= 311 + 64 + 25 \\ 16(x - 2)^2 + 25(y + 1)^2 &= 400 \end{aligned}$$

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1 \text{ په 400 وېشو:}$$

پورتني معادله دداسې بيضوي معادله ده چې مرکز يې د  $(-1, 2)$  ټکي دی.

**درېم مثال:** د بيضوي لاندي معادله د معادلې په ډول وليکئ:

$$x^2 + 9y^2 + 4x - 18y - 23 = 0$$

**حل:** لومړی معادله ترتيب بيا د مربع له بشپړولو څخه په کار اخېستې سره هغه په معياري شکل بدلوو:

$$x^2 + 4x + 9(y^2 - 2y) - 23 = 0$$

$$x^2 + 4x + (2)^2 - (2)^2 + 9[y^2 - 2y + (1)^2 - (1)^2] - 23 = 0$$

$$\underbrace{x^2 + 4x + (2)^2}_{\text{کامله مربع}} - (2)^2 + 9 \underbrace{[y^2 - 2y + (1)^2]}_{\text{کامله مربع}} - (1)^2 - 23 = 0$$

کامله مربع

کامله مربع

$$(x+2)^2 - 4 + 9(y-1)^2 - 9 - 23 = 0$$

$$(x+2)^2 + 9(y-1)^2 - 36 = 0$$

$$(x+2)^2 + 9(y-1)^2 = 36$$

د مساوات دواړه خواوې په 36 وېشو:

$$\frac{(x+2)^2}{36} + \frac{9(y-1)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(x+2)^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

### پوښتنې



1. د بيضوي په لاندي معادلو کې د مرکز، محرقونو او راسونو مختصات پيدا کړئ.

a)  $\frac{(x+3)^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

b)  $x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 20 = 0$

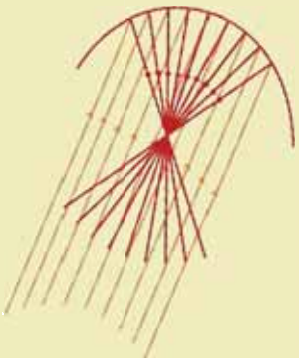
2. د داسې بيضوي معادله وليکئ چې مرکز يې د  $(0, 2)$  ټکي، محراق يې د  $(2, 6)$  ټکي او د  $(4, 6)$  له ټکي څخه تېره شي.

څخه تېره شي.

3. د بيضوي لاندي معادلې د معياري معادلو په ډول وليکئ، د مرکز، راسونو، محرقونو وضعيه کميات او همدا رنگه د اوږده قطر، لنډه قطر اوږدوالی، عن المרכזيت پيدا او گرافونه يې رسم کړئ.

a)  $9x^2 + 25y^2 - 36x - 150y + 36 = 0$

b)  $16x^2 + 4y^2 + 96x - 8y + 84 = 0$

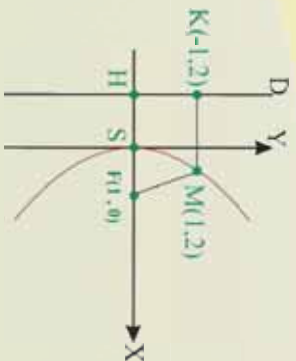


## پاراابولا

### Parabola

که چیري د لمر وړانگي په یوې معقري عدسي ولوبړي، انګکاسي (منکسه) وړانگي یې له کوم ټکي څخه تیرېږي؟ دغه ټکی څه نومېږي او د عدسي ګډ فصل له یوې متقاطع مستوي سره چې د عدسي محور په برکي ولري، څه ډول منځني ده؟

### فعالیت



د فعالیت د سرته رسولو لپاره مخامخ شکل په پام کې ونیسئ په شکل کې د  $M$ ،  $F$  او  $K$  ټکو مختصات درکړل شوي دي، د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستې سره د  $FM$  او  $KM$  هر یو اوږدوالی پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

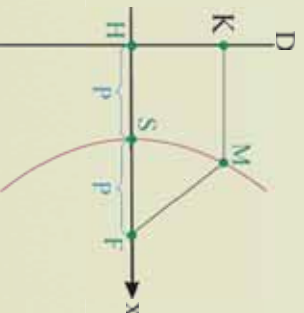
له پورته فعالیت څخه لاندې تعریف بیانولای شو:

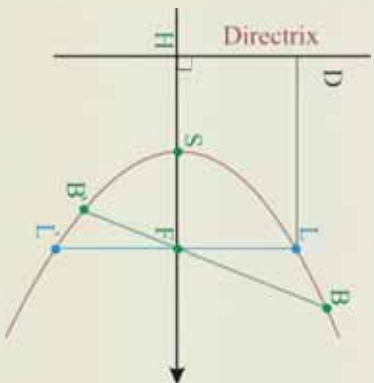
**تعریف:** په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د یوه ثابت یا مستقر ټکي او یوه ثابت مستقیم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کېږي. دغه ثابت یا مستقر ټکی د پارابولا محراق ( $F$ ) او د  $D$  ثابت مستقیم خط ته د پارابولا موجه ( $Directrix$ ) وایي  $\overline{MF} = \overline{MK}$

هغه مستقیم خط چې د پارابولا له محراق او راس څخه تیر او د موجه ( $D$ ) پر مستقیم خط عمود وي، د پارابولا د محراقي یا تناظري محور په نامه یادېږي.

د تناظري محور او منځني ګډ ټکی د پارابولا راس او په  $S$  سره نښدل کېږي.

آیا ویلای شئ چې  $S$  د  $\overline{FH}$  نیمایي ټکی دی، ولې؟  
په پارابولا کې عن المركزیت ( $e = 1$ ) دی ولې؟





### د پارابولا وترونه:

هغه مستقیم خط چې د پارابولا دوه ټکي سره ونښلوي، د پارابولا وتر بلل کېږي. په شکل کې  $\overline{BB'}$  چې د پارابولا له محراق څخه تیر شوي دی، محراقي وتر دی او  $LL'$  چې د محراق په ټکي کې د تناظر پر محور باندې عمود دی عمودي وتر بلل کېږي.



د پارابولا د محراقي وتر اوږدوالی د  $\overline{FH}$  څو برابره دی.

### د پارابولا معادله

د هغني پارابولا د معادلې د پيدا کولو لپاره چې راس يې د وضعيه کمپاټو په مبدا کې وي، لاندې فعاليت په پام کې ونيسئ.

$$y^2 = 4px$$
$$x^2 = 4py$$

### فعاليت

- د وضعيه کمپاټو قايم سيستم په پام کې ونيسئ او د  $Y$  له محور سره د هادي موازي خط رسم کړئ.
- د پارابولا منځني داسې رسم کړئ چې راس يې د وضعيه کمپاټو په مبدا کې وي.
- د  $X$  پر محور باندې محراق داسې وټاکئ چې فاصله يې له مبدا څخه د هادي خط له فاصلې سره مساوي وي.
- په منځني باندې د  $M(x, y)$  ټکي وټاکئ، هغه له  $F$  سره ونښلوئ او د  $M$  له ټکي څخه يو عمود پر هادي (موجه خط) باندې رسم او د تقاطع ټکي ته يې  $K$  ووايست.
- د  $F$  او  $K$  د ټکو مختصات وليکئ.

اوس د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې پيدا کولو له فارمول څخه په کار اخيستنې سره د  $M$  او  $F$ ،  $K$  ټکو ترمنځ فاصله پيدا کړئ او بيا د پارابولا معادله د  $|MK| = |MF|$  له رابطې څخه په لاس راوړئ.

**ثبوت لومړۍ حالت:** يو هير و چې:

$$|MF| = \sqrt{(p-x)^2 + y^2}$$

$$|MK| = x + p$$

اوس د  $|MF|$  او  $|MK|$  قيمتونه د  $|MF| = |MK|$  په رابطه کې ايرود:

$$\sqrt{(p-x)^2 + y^2} = x + p$$

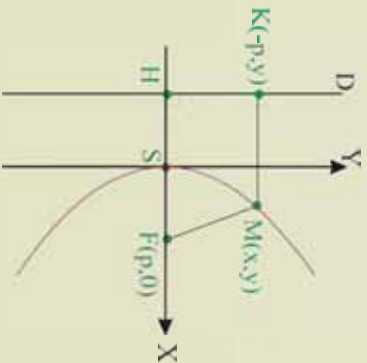
د پورته معادلې دواړه خواوې مربع کوو:

$$(\sqrt{y^2 + (p-x)^2})^2 = (x+p)^2$$

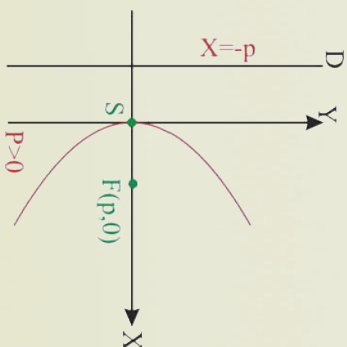
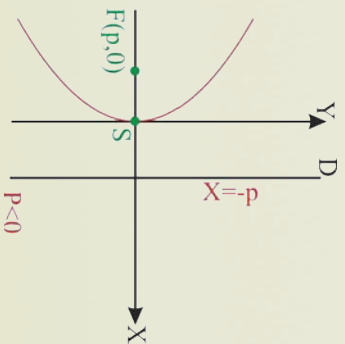
$$y^2 + (p-x)^2 = (x+p)^2$$

$$y^2 + p^2 - 2px + x^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 4px$$



وروستی، رابطه داسې پارابولا معادله راښيي چې راس یې د وضعیه کمیانو په مبدا کې  $F(p, 0)$  د پارابولا محراق د  $x$  بر محور باندې پروت دی او موچه خط یې  $x = -p$  دی. که چېرې  $p > 0$  وي، د پارابولا خوله په افقي محور ښي خوا ته خلاصه ده. که چېرې  $p < 0$  وي، د پارابولا خوله په افقي محور باندې کښي خوا ته خلاصه ده.



**لومړی مثال:** د داسې پارابولا معادله په لاس راوړئ چې د محراق مختصات یې  $F(2, 0)$ ، د هادي مستقیم خط معادله  $x = -2$  سره وي او همدا رنگه د عمودي وتر د انجانونو مختصات یې پیدا کړئ.

**حل:** د محراق مختصات چې د  $x$  په محور باندې دي، ویلای شو  $P = 2 > 0$ ، له دې امله د پارابولا خوله ښي خوا ته خلاصه ده.

لرو چې:  $px = 4$

اوس د  $P = 2$  قیمت په معادله کې اېږدو:

$$y^2 = 4 \cdot 2x \Rightarrow y^2 = 8x$$

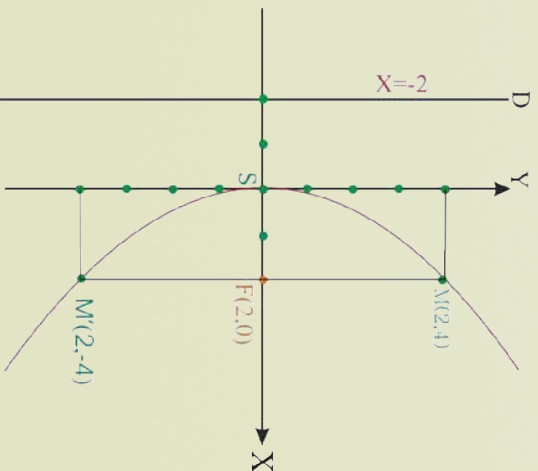
که چېرې د  $x = 2$  په معادله کې  $y^2 = 8x$  قیمت د  $x = 2$  په معادله کې کېږدو، په دې صورت کې د پارابولا دوه ټکي چې د عمودي وتر انجانونه دي په لاس راځي، هغه عبارت دي له:

$$y^2 = 8 \cdot 2 \Rightarrow y^2 = 16$$

$$y = \pm 4$$

$$M(2, 4) \quad , \quad M'(2, -4)$$

د پورته معلوماتو له مخې  $y^2 = 8x$  پارابولا گراف رسم کړئ.

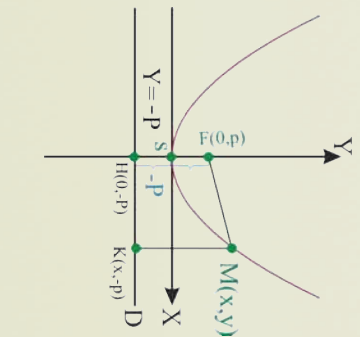


**دویم حالت:** که چیرې د پارابولا محراق ( $F$ ) د  $Y$  پر محور باندې پروت او د  $D$  مستقیم خط د  $X$  له محور سره موازي وي، د پارابولا معیاري معادله پیدا کړئ.

**حل:** د پورته غوښتنې لپاره په پارابولا باندې یوټکی، لکه:  $M(x, y)$  په پام کې نیسو، د پارابولا د تعریف له مخې

لیکلای شو:

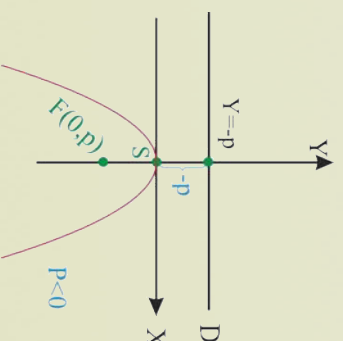
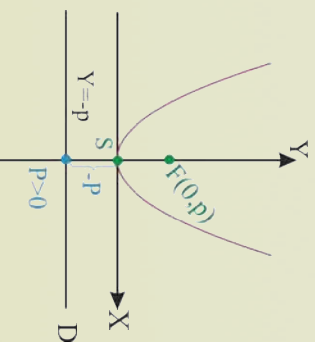
**ثبوت:**



$$\begin{aligned} |MF| &= |MK| \\ |\overline{MF}| &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2} \\ |\overline{MK}| &= \sqrt{(x-x)^2 + [(y-(-p))]^2} = \sqrt{(y+p)^2} \\ &\Rightarrow (\sqrt{x^2 + (y-p)^2})^2 = (\sqrt{(y+p)^2})^2 \\ &\Rightarrow x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \\ &\Rightarrow x^2 = 4py \end{aligned}$$

پورته معادله دداسې پارابولا معادله ده چې راس یې د وضعیه کمیاتور د سیستم په مبدا کې او محراقي محور یې د  $Y$  محور دی چې د محراق مختصات یې  $F(0, p)$  او  $Y = -p$  یې د همدې مستقیم خط معادله ده.

که چیرې  $p > 0$  وي، د پارابولا خوله پورته خوا ته خلاصه ده. که چیرې  $p < 0$  وي، د پارابولا خوله ښکته خوا ته خلاصه ده.



**دویم مثال:** د  $x^2 = 12y$  په معادله کې د پارابولا د راس، محراق مختصات، د هادي خط معادله پیدا او گراف یې رسم کړی.

**حل:** لومړي د  $4py = x^2 = 4p$  په معادله کې د  $P$  قیمت په لاس راوړو.

$$4p = 12$$

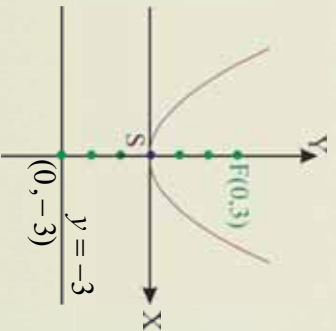
$$p = 3$$

خړنگه چې  $0 < P = 3$  څخه دی، نو د پارابولا خوله پورته خړنگه خلاصه ده.

$$\left. \begin{aligned} x^2 = 0 &\Rightarrow x = 0 \\ 3y = 0 &\Rightarrow y = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S(0, 0)$$

1- د راس مختصات عبارت دي له:  $F(0, 3)$

2- د محراق مختصات عبارت دي له:  $F(0, 3)$



### پوښتنې



1- د  $0 = 4x^2 - 2y^2$  او  $0 = 2x^2 - 4y^2$  معادلو کې د هرې پارابولا د راس وضعیه کمیات او د هادي (موجه خط) معادلي پیدا او گرافونه یې رسم کړی.

2- د لاندې قیمتونو له مخې د هرې پارابولا معادله پیدا کړی:

- a)  $S(0, 0)$                        $F(0, 5)$   
 b)  $S(0, 0)$                        $F(-2, 0)$



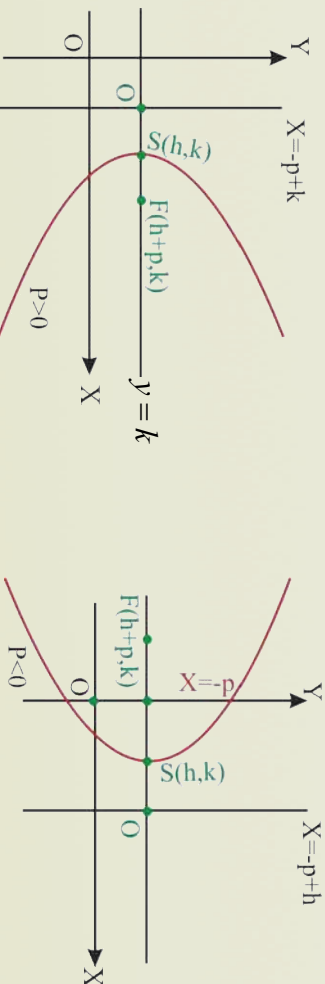


پورتی معادله د هغی پارابولا معادله ده، چي د راس وضعیه کمیات یی  $S(h, k)$  محراق یی  $F(h + p, k)$  او د

موجه خط معادله یی  $h - p + x = -p$ ، تناظری محور یی  $y = k$  دی.

که چیری  $p > 0$  وی، د پارابولا خوله ټی خواته خلاصه ده.

که چیری  $p < 0$  وی، د پارابولا خوله چپی خواته خلاصه ده.



**دویم حالت:** د هغی پارابولا معادله چي تناظری محور یی د  $y$  له محور سره موازی وی، عبارت ده

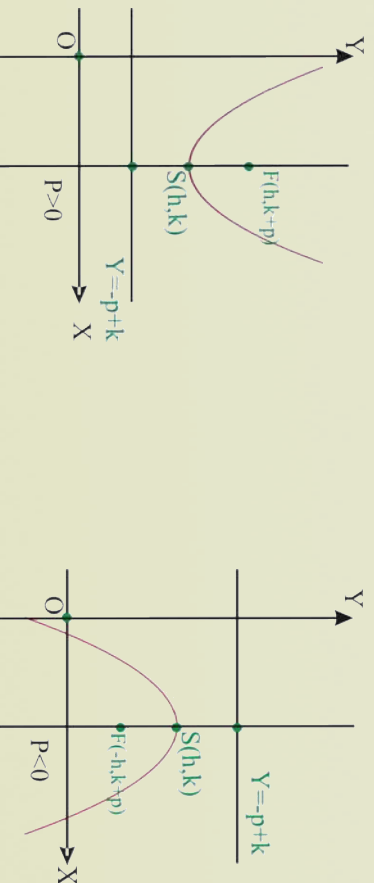
$$4p(y - k) = (x - h)^2$$

چي د پارابولا د راس مختصات  $S(h, k)$  او د محراق مختصات یی  $F(h, k + p)$  دي.

$p - k = y$  د پارابولا د هغی خط معادله او  $h - x = -h$  تناظری محور دی.

که چیری  $p > 0$  وی، د پارابولا خوله پورته خواته خلاصه ده.

که چیری  $p < 0$  وی، د پارابولا خوله ټیکنه خواته خلاصه ده.



**لومړی مثال:** غواړو د  $(y - 2) = 12(x - 1)^2$  د پارابولا په معادله کي د راس مختصات، د محراق مختصات،

د موجه خط معادله، تناظری محور او د عمودي وتر د انجاومنو مختصات پیدا کړو.

**حل:** څرنگه چي معادله د  $(y - k) = 4p(x - h)^2$  عمومي شکل لري.

$$S(1,2) \text{ نو } h=1, k=2 \text{ کيڙي، په دې صورت کي د پارابولا د رأس وضعيه کميات عبارت دي له: } S(1,2)$$

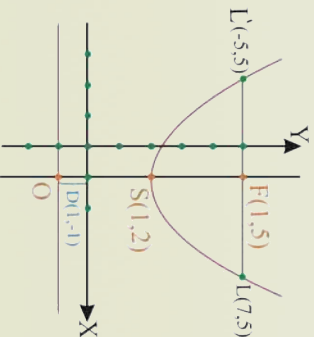
$$4p = 12 \Rightarrow p = \frac{12}{4} = 3$$

$$\text{د محراق مختصات: } F(1,5) \Rightarrow F(h, k+p) = F(1, 2+3)$$

$$\text{د موجه خط معادله } y = k - p \Rightarrow 2 - 3 = -1$$

$$\text{د تناظر محور: } x = h \Rightarrow x = 1$$

د عمودي و تر دانجامونو د مختصاتو د پيدا کولو لپاره د  $y$  قيمت چي په محراق کي لرو په عمومي معادله کي اېږدو يعني  $y = 5$  دی.



$$(x-2)^2 = 12(5-2)$$

$$(x-1)^2 = 12 \cdot 3 \Rightarrow (x-1)^2 = 36$$

$$(x-1) = \pm 6$$

$$x_1 = 6+1 = 7, x_2 = -6+1 = -5$$

$$L(7,5) \quad L'(-5,5)$$

**دويم مثال:** د  $(x+3)^2 = -6(x+4)$  معادله په پام کي ونيسئ، د پارابولا دراس او محراق مختصات د موجه خط معادله، تناظري محور معادله، د عمودي و تر د انجامونو مختصات پيدا او گراف يي رسم کړئ.

$$\text{حل: دراس مختصات: } S(-3,4) \Rightarrow k = 4, h = -3$$

$$4P = -6 \Rightarrow P = -\frac{3}{2}$$

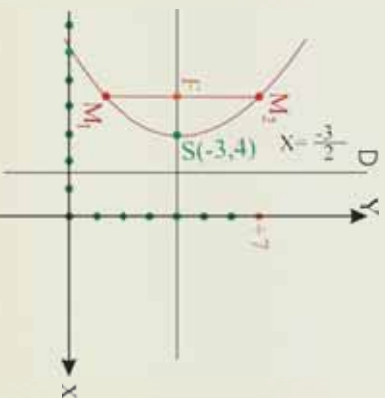
څرنگه چي  $0 < -\frac{3}{2} < 0$  ده، نو د پارابولا خوله چيپي خوله خلاصه ده.

$$\text{د محراق مختصات: } F(h+p, k) = (-\frac{9}{2}, 4)$$

$$\text{موجه خط معادله عبارت ده له: } x = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = h - p$$

$$\text{د تناظري محور معادله: } y = k \Rightarrow y = 4$$

د  $x = -\frac{3}{2}$  قيمت په معادله کي اېږدو او د عمودي و تر د انجامونو مختصات په لاس راځي.



$$(y-4)^2 = -6(x+3) = -6\left(-\frac{9}{2}+3\right)$$

$$(y-4)^2 = 9 \Rightarrow y-4 = \pm 3$$

$$y_1 = 3+4 = 7$$

$$y_2 = -3+4 = 1$$

$$M_2\left(-\frac{9}{2}, 7\right), M_1\left(-\frac{9}{2}, 1\right)$$

**يادونه:** د  $AX^2 + CY^2 + DX + EY + F = 0$  د معادلي گراف يوه پارابولا ده، په داسې حال کې چې  $C = 0, A \neq 0$  وي يا  $C \neq 0, A = 0$ .

**پوښتنه:** د  $(x-h)^2 = 4p(y-k)$  معادله په پراختيايي ډول وليکئ.

**درېم مثال:** د  $y^2 - 2y + 8x + 25 = 0$  پارابولا معادله، د پارابولا د معياري معادلي په ډول وليکئ د راس، محراق مختصات، د موجه خط معادله او تناظري محور يې پيدا کړئ.

**حل:** په راکړ شوي معادله کې  $A = 0$  دی، نو نظر د  $y$  متحول ته يې، مربع بشپړوو.

$$y^2 - 2y + (1)^2 - (1)^2 + 8x + 25 = 0$$

$$(y-1)^2 + 8x + 24 = 0 \Rightarrow (y-1)^2 + 8(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow (y-1)^2 = -8(x+3)$$

په معادله کې ليدل کېږي:  $P = -2 \Rightarrow 4P = -8$

دراس مختصات:  $S(-3, 1) \Rightarrow h = -3, k = 1$

$F(-5, 1) \Rightarrow F(h+p, k)$ ، د موجه خط معادله  $x = -3 + 2 = -1$

تناظر محور عبارت له  $y = 1 \Rightarrow y = k$  څخه دی.



1- د لاندي پارابولا معادله پيدا کړي، په داسې حال کې چې:

a)  $S(1,3), F(-1,3)$

2- د  $(x-4)^2 = 12(x-4)$  په معادله کې د پارابولا دراس مختصات، د محراق مختصات، د موجه خط

معادله او د تناظر محور پيدا او گراف يې رسم کړئ.

3- لاندي معادلي د پارابولا د معياري معادلي په ډول وليکئ او گراف يې رسم کړئ.

a)  $y^2 - 6y + 8x + 41 = 0$

b)  $x^2 - 2x - 6y - 53 = 0$



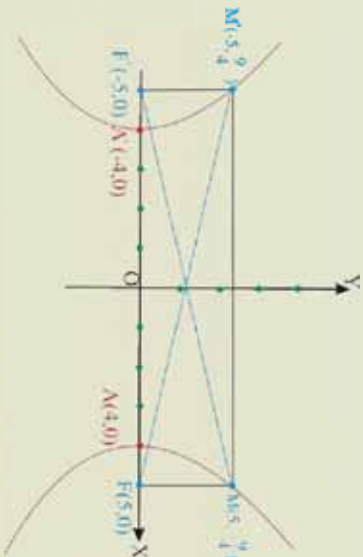
## هایپر بولا Hyperbola

په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو مستقرو ټکو څخه تل له یوه ثابت اوږدوالي سره مساوي وي، څه ډول یوه منحنی کېدلای شي؟

### فعالیت

- په لاندې شکل کې د  $F$ ,  $F'$ ,  $M$ ,  $M'$ ,  $A$  او  $A'$  ټکو مختصات درکړل شوي دي.
- د دوو ټکو ترمنځ د فاصلې دینیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د  $|MF|$ ,  $|M'F|$  او  $|AA'|$  اوږدوالي پیدا کړئ.

- د  $|MF| - |M'F|$  د تفریق حاصل په لاس راوړئ او د  $|AA'|$  له اوږدوالي سره یې پرتله کړئ.
- پورتني فعالیت د  $M'$  ټکي لپاره تطبیق او پایله یې ولیکئ
- د  $|MF| - |M'F|$  او  $|M'F| - |M'F'|$  د تفریق حاصل یو له بل سره پرتله کړئ.



د پورتني فعالیت له سرته رسولو وروسته لاندې تعريف بيانولای شو:

**تعريف:** په یوه مستوي کې دهغه ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو ځای ټکو څخه تل مساوي اوږدوالی ولري، هایپر بولا Hyperbola بل کېږي.

دوه مستقر ټکي د هایپر بولا محراقونو په نامه یادېږي، په شکل کې  $F$  او  $F'$  د هایپر بولا محراقونه  $M$  او  $M'$  د هایپر بولا دوه اختیاري ټکي دي، په دې صورت کې لیکو:

$$|M'F| - |M'F'| = |MF| - |MF'| = |AA'| = 2a$$

د  $FF'$  منځنی ټکی د هلیپربولا مرکز دی، د مرکز او هر یوه راس ترمنځ فاصله، لکه بیضوی په هلیپربولا کې هم  $AA' = 2a$  او  $FF' = 2c$  اوږدوالی لري.

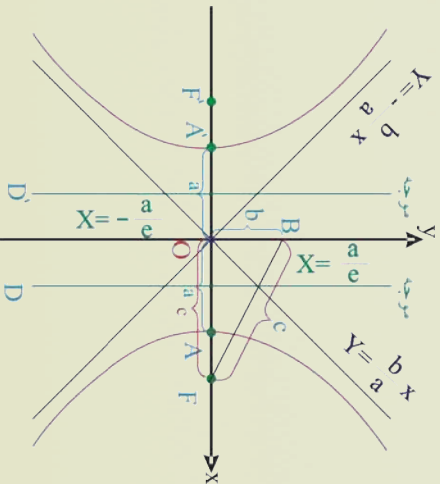
### د هلیپربولا تناظري محورونه او راسونه:

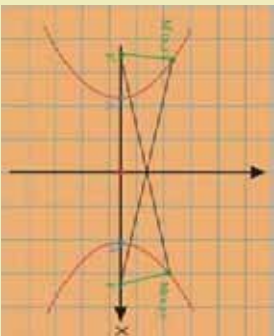
د بیضوي په ډول هلیپربولا هم دوه تناظري محورونه لري چې یو یې په  $FF'$  باندې منطبق او د هلیپربولا له راسونو څخه تیرېږي. بل یې د  $FF'$  عمودي نیمايي کونکې دی. د دې دواړو محورونو د تقاطع ټکی یا ځای، د هلیپربولا مرکز بلل کېږي. هغه تناظري محور چې له  $FF'$  څخه تیرېږي، د متقاطع محور په نامه یادېږي، ځکه چې هلیپربولا د  $A$  او  $A'$  په دوو ټکو کې قطع کوي چې دې دوو ټکو ته د هلیپربولا راسونه وايي او اوږدوالي له  $|AA'| = 2a$  څخه عبارت دی.

هغه خط چې د هلیپربولا په مرکز کې په متقاطع محور باندې عمود دی او هلیپربولا نه قطع کوي، خو د مرکز دواړو خواوو ته د  $B$  او  $B'$  دوه ټکي په پام کې نیسو چې  $OB = OB' = b$  وي، داده ټکي د هلیپربولا غیر حقيقي راسونه بلل کېږي چې  $|BB'| = 2b$  غیر حقيقي محور دی.

په یوه هلیپربولا کې د  $a$ ،  $b$  او  $c$  اوږدوالو ترمنځ داسې رابطه شته:  $c^2 = a^2 + b^2$

**عن المرکزیت:** څرنگه چې په هلیپربولا کې  $a > c$  دی، نو  $e > 1$  کېږي. چې د  $a$ ،  $b$ ،  $c$  او عن المرکزیت ترمنځ د  $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$  رابطه شته. زده کوونکي دې د  $e = \frac{c}{a}$  له رابطې څخه په کار اخیستي سره نوموړي رابطه په لاس راوړي.



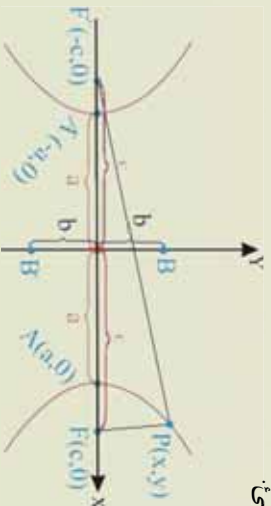


## د هاپیریولا معادله

آیا داسې یوه هاپیریولا رسمو لایې شته چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مېدا کې وي؟

### فعالیت

- داسې هاپیریولا رسم کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مېدا کې وي.
- د  $P(x, y)$  ټکی په هاپیریولا باندې وټاکئ او هغه د  $F$  او  $F'$  سره ونښلوئ
- د  $F, P, D$  او  $F', P, D$  ټکو ترمینځ د هاپیریولا د تعریف رابطه ولیکئ.
- د دوو ټکو ترمینځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستنې سره د  $PF$  او  $PF'$  فاصلې پیدا کړئ او بیا د هغو تفاضل په لاس راوړئ.
- د هاپیریولا د تعریف له مخې لیکو:  $|PF'| - |PF| = 2a$
- د دوو ټکو ترمینځ د فاصلې له فارمول څخه لیکلای شو.



$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

د مساوات د دواړو خواو له مربع او انکشاف څخه وروسته لرو:

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

$$\Rightarrow 4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \div 4$$

$$\Rightarrow cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

بیا هم د مساوات دواړه خواوې مربع او انکشاف ورکړو:

$$(cx - a^2)^2 = a^2(x-c)^2 + y^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$\Rightarrow c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

خړزنگه چې  $a > c$  دی، نو  $0 < a^2 - c^2 > a^2 - b^2 = c^2 - a^2$  کېږي، له بلې خوا پروهیږو چې  $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$  کې د  $a^2 - c^2$  قیمت په ایښودلو سره لیکلای شو:  $a^2 y^2 = b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$  د مساوات د واړه خواوې پر  $a^2 b^2$  باندي ویشو:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

پورتني معادله د داسې هلیپربولو معادله ده چې مرکزي د وضعیة کمیات په مبدأ او محراقونه یې په افقي محور پراته دي.

**دویم حالت:** که چیرې متقاطع محور یعنی  $A_1 A_2$  د  $y$  پر محور پروت وي، یعنی محراقونه په عمودي محور پراته وي، نو د هلیپربولو معادله عبارت ده له:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

پوښتنه

پوښتنه

پورتني فارمول او همدا رنگه د محراقونو او راسونو مختصات دې د شکل له مخې د زده کوونکو په واسط پیداشي.

### د هلیپربولو موجه خط:

که چیرې د هلیپربولو محراقونه د  $x$  یا  $y$  په محورونو پراته وي، په دې صورت کې لیکلای شو چې:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

له دې امله ولای شو چې دا موجه خطونه په متقاطع محور باندي عمود دي چې د هغو فاصله د هلیپربولا له مرکز

څخه د  $\pm \frac{a}{c}$  یا  $\pm \frac{a^2}{c}$  څخه عبارت ده.

د هغې هلیپربولو د هادي خط معادلې چې محراقونه یې د  $y$  پر محور باندي پراته دي له  $y = \pm \frac{a}{e}$  څخه عبارت دي.

او د هغې هلیپربولو د هادي خط معادلې چې محراقونه یې د  $x$  پر محور باندي پراته دي له  $x = \pm \frac{a}{e}$  څخه عبارت دي.

### د هلیپربولو مجانبونه:

هغه مستقیم خطونه چې د هلیپربولو له مرکز څخه تیر او په لايتناهي کې د هلیپربولو له منځني سره تماس وي، د هلیپربولو مجانبونه بلل کېږي.



د  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  هایپرېولا معادله په پام کې نیسو:

$$a^2 y^2 = b^2 x^2 - a^2 b^2$$

$$a^2 y^2 = b^2 (x^2 - a^2)$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2} \left[ x^2 \left( 1 - \frac{a^2}{x^2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

که چیرې په پورتني رابطه کې  $x$  لایتناهي ته نژدې شي د  $\frac{a^2}{x^2}$  کسر د صفر خواته نژدې کېږي، په پایله

کې  $\left( 1 - \frac{a^2}{x^2} \right)$  د یوه عدد ته تقرب کوي، په دې صورت کې  $y = \pm \frac{b}{a} x$  لاس ته راځي.

نو  $y = \pm \frac{b}{a} x$  د هغو مجانبونو معادلي دي چې د هایپرېولا محراقونه د  $x$  پر محور باندې پراته وي.

که چیرې محراقونه د  $y$  پر محور باندې پراته وي، د مجانبونو معادلي یې له  $y = \pm \frac{a}{b} x$  څخه عبارت دي.

**لومړي مثال:** د هایپرېولا  $1 - \frac{y^2}{4} = \frac{x^2}{16}$  په معادله کې د محراقونو مختصات، د راسونو مختصات، د موجې

خطونو معادلي او د مجانبونو معادلي پیدا او په شکل کې وښایاست.

**حل:** د راسونو مختصات:

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4 \Rightarrow A(4,0), A'(-4,0)$$

$$\text{د محراقونو مختصات: } c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \pm 2\sqrt{5} \Rightarrow F(2\sqrt{5}, 0), F'(-2\sqrt{5}, 0)$$

د موجې خطونو معادلي: څرنگه چې محراقونه د  $x$  پر محور باندې پراته دي.

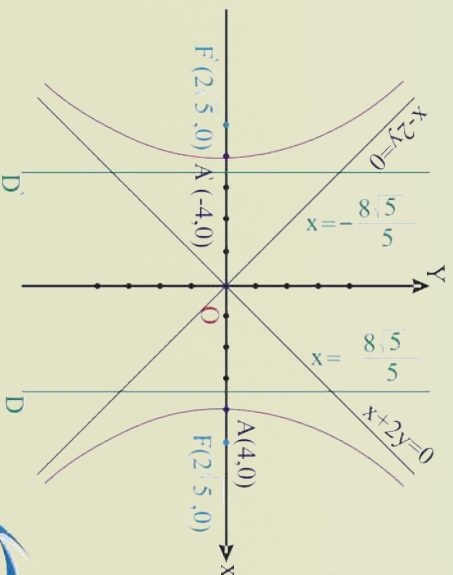
له دې امله:

$$x = \pm \frac{a}{c} = \pm \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$y = \pm \frac{b}{a} x \Rightarrow y = \pm \frac{2}{4} x = \pm \frac{1}{2} x$$

$$2y = \pm x$$

$$\text{یا: } x = \pm 2y \Rightarrow x + 2y = 0, x - 2y = 0$$



**دویم مثال:** ویناسټ چې  $1 = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$ ، د هایپرولا پیره معادله ده، په نوموړي معادله کې د محر اوقنونو، راسونو

مختصات، د مجانبونو او موجه خطونو معادلي پیدا او گراف یې رسم کړئ.

**حل:** پورتنۍ معادله د هایپرولا د معیاري معادلي شکل لري چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې او د  $y$  محور یې متقاطع محور دی چې محر اوقونه ور باندې پراته دي.

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \quad A(0, 2), A'(0, -2) \quad \text{د راسونو مختصات:}$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 4 + 9 = 13 \Rightarrow c = \pm\sqrt{13} \quad \text{د محر اوقونو مختصات:}$$

$$F(0, \sqrt{13}), F'(0, -\sqrt{13}) \quad \text{د مجانبونو معادلي:}$$

خرنگه چې متقاطع محور د  $y$  پر محور باندې منطبق دی، نو د مجانبونو معادلي عبارت دی له:

$$y = \pm \frac{a}{b}x \Rightarrow y = \pm \frac{2}{3}x \Rightarrow 3y = \pm 2x$$

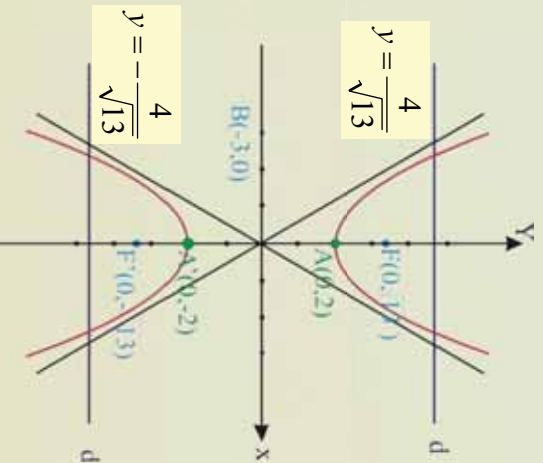
$$3y - 2x = 0, \quad 3y + 2x = 0$$

**د موجه خط معادله:** خرنگه چې د هایپرولا راسونه

د  $y$  پر محور باندې پراته دي، نو د موجه خطونو معادلي

عبارت دی له:

$$y = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c} = \pm \frac{4}{\sqrt{13}} = \pm 1,1$$



### پوښتنې



د  $4x^2 - y^2 = 16$  هایپرولا له معادلي څخه د محر اوقونو وضعیه کمیات، د راسونو وضعیه کمیات، د موجه خط معادلي او د مجانبونو معادلي په لاس راوړئ او په پای کې یې گراف رسم کړئ.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

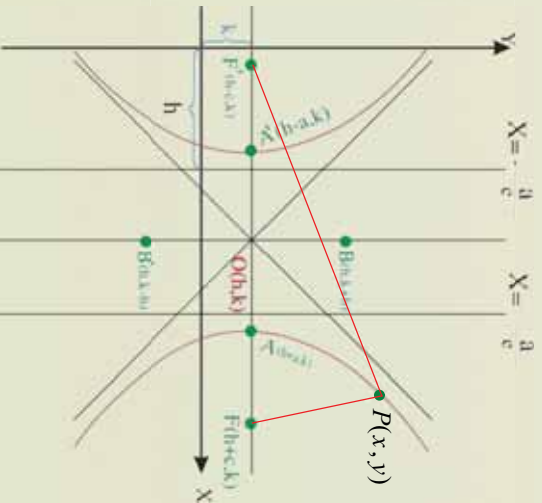
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

## د هغې هایپرېولا معادله چې مرکز یې یو اختیاري ټکی وي

آیا د داسې هایپرېولا معادله شته چې مرکزي د وضعیه کمیانو په مېدا کې نه وي؟

### فعالیت

- د وضعیه کمیانو په سیستم کې داسې هایپرېولا رسم کړئ چې د مرکز مختصات یې  $(h, k)$  او متقاطع محور یې موازي د  $x$  له محور سره وي.
  - په هایپرېولا باندې د  $P(x, y)$  یو ټکی په پام کې ونیسئ او هغه د  $F$  او  $F'$  سره ونښلوئ.
  - د هایپرېولا د معادلې په پام کې نیولو سره د  $(h, k)$  ټکي د محراقونو مختصات معنی  $F$  او  $F'$ ، د راسونو مختصات معنی  $A, B$  او  $A', B'$  په شکل کې وښایاست.
- د هایپرېولا د تعریف له مخې لیکو:
- $$|PF'| - |PF| = 2a$$



د دوو ټکو تر منځ د فاصلې د پیدا کولو له فارمول څخه په کار اخیستې سره لیکلای شو:

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2 + (y-k)^2} - \sqrt{[x-(h+c)]^2 + (y-k)^2} = 2a$$

$$\sqrt{[x-(h-c)]^2 + (y-k)^2} = 2a + \sqrt{[x-(h+c)]^2 + (y-k)^2}$$

یا

د پورتنۍ مساوات دواړه خواوې مربع کوو:

$$\left( \sqrt{[x-(h-c)]^2 + (y-k)^2} \right)^2 = \left( 2a + \sqrt{[x-(h+c)]^2 + (y-k)^2} \right)^2$$

$$[x-(h-c)]^2 + (y-k)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{[x-(h+c)]^2 + (y-k)^2} + [x-(h+c)]^2 + (y-k)^2$$

$$x^2 - 2x(h-c) + (h-c)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{[x-(h+c)]^2 + (y-k)^2} + x^2 - 2x(h+c) + (h+c)^2$$

د مشابه حلونو له جمعې او تفریق وروسته لیکلای شو:  $cx - (ch + a^2) = a\sqrt{[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2}$  بیا هم د مساوات دواړه خواوې مربع کوو:

$$\{cx - (ch + a^2)\}^2 = \{a\sqrt{[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2}\}^2$$

$$c^2x^2 - 2cx(ch + a^2) + (ch + a^2)^2 = a^2[x - (h + c)]^2 + (y - k)^2$$

د ضرب، او طاقتونو له ساده کولو وروسته مشابهه حلونه جمع او تفریقو او پورتني رابطه په لاندې ډول لیکو:

$$c^2x^2 - a^2x^2 + 2c^2hx + a^2hx + c^2h^2 - a^2h^2 - a^2(y - k)^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$x^2(c^2 - a^2) - 2hx(c^2 - a^2) + h^2(a^2 - c^2) - a^2(y - k)^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$(c^2 - a^2)(x^2 - 2hx + h^2) - a^2(y - k)^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$(c^2 - a^2)(x - h)^2 - a^2(y - k)^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$b^2(x - h)^2 - a^2(y - k)^2 = a^2b^2$$

خړنگه چې  $b^2 = c^2 - a^2$  دي، نو پورته رابطه په لاندې ډول لیکو:

دواړه خواوې په  $a^2b^2$  ویشو:

$$\frac{b^2(x-h)^2}{a^2b^2} - \frac{a^2(y-k)^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

د حقيقي راسونو مختصات:  $A(h + a, k)$   $A'(h - a, k)$

د غیر حقيقي راسونو مختصات:  $B(h, k + b)$   $B'(h, k - b)$

د محراقونو مختصات:  $F(h + c, k)$   $F'(h - c, k)$

$$y = \pm \frac{b}{a}(x - h) + k$$

که چېرې د هایپربول د مرکز مختصات  $(h, k)$  او متقاطع محورېي موازي د  $y'$  له محور سره وي په دې صورت

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

زده کوونکي دي د مرکز مختصات، د محراقونو مختصات، د موجه خط معادله او د مجانبونو معادلې وليکي؟

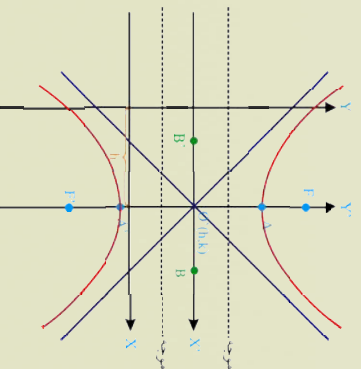
**دویم حالت:** که چېرې محراقونه د  $y'$  له محور سره موازي پر

متقاطع محور پراته وي، نو د هایپربولا معادله عبارت ده له:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

مختصات، محراقونو مختصات د موجه خطونو معادلې او د مجانبونو

معادلې پیدا کړي.



**يادونه:** د هايپربولا غزول شوي معادله له  $AX^2 + BY^2 + DX + EY + F = 0$  څخه عبارت ده په داسې حال

کې چې  $A \neq B$  يا  $A = B$  خو مختلف اشاره وي.

څرنگه کولای شو، د هايپربولا غزول شوي معادله په لاس راوړو؟

**لومړي مثال:** د  $9(x-3)^2 - 4(y+1)^2 = 144$  معادله په پام کې ونيسئ، د مرکز، د راسونو، محراقونو مشخصات او همدا رنگه د مجانبونو معادلي پيدا کړئ.

**حل:** راکړل شوي معادله په معياري ډول ليکو:

$$\frac{9(x-3)^2}{144} - \frac{4(y+1)^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{36} = 1$$

د مرکز مشخصات:  $h=3, k=-1$  يعني  $(3, -1)$  دي

$$d \text{ راسونو مشخصات: } a = \pm 4 \Rightarrow a^2 = 16$$

$A(h+a, k) = A(3+4, -1) = A(7, -1)$   
 $A'(h-a, k) = A'(3-4, -1) = A'(-1, -1)$   
 او همدا رنگه پوهېږو چې:

$$\begin{cases} b^2 = 36 \Rightarrow b = \pm 6 \\ B(h, k+b) = B(3, 6-1) = B(3, 5), B(h, k-b) = B(3, -6-1) = B(3, -7) \end{cases}$$

د محراقونو مشخصات:  $F(h+c, k) = F(3+\sqrt{52}, -1)$   $F'(h-c, k) = F'(3-\sqrt{52}, -1)$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 36 = 52 \Rightarrow c = \pm\sqrt{52}$$

پوهېږو چې په هايپربولا کې:

که چېرې متقاطع محور د  $x$  له محور سره موازي وي، نو د مجانبونو معادلي عبارت دي له:

$$y-k = \pm \frac{b}{a}(x-h) \Rightarrow y = \pm \frac{6}{4}(x-3) - 1 = \pm \frac{3}{2}(x-3) - 1$$

$$y = \pm \frac{3}{2}(x-3) - 1 / \cdot 2$$

$$2y = \pm 3(x-3) - 2 \Rightarrow 2y = 3x - 9 - 2 \Rightarrow 2y - 3x + 11 = 0$$

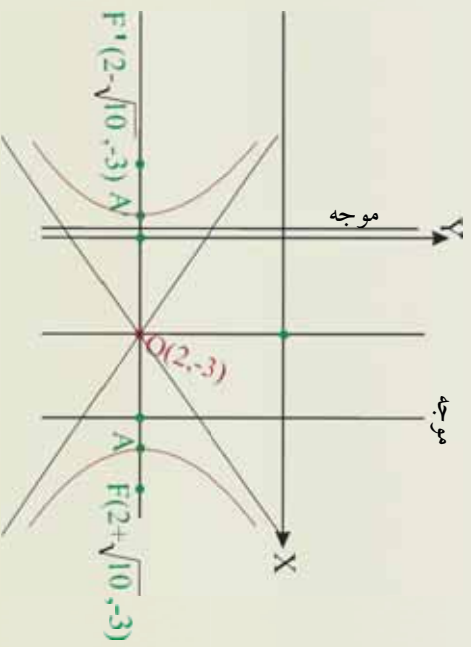
$$2y = -3x + 9 - 2 \Rightarrow 2y + 3x - 7 = 0$$

**دويم مثال:** د  $2x^2 - 8x - 3y^2 - 18y - 31 = 0$  معادله په پام کې ونيسئ.

د هايپربولا د مرکز مشخصات د راسونو مشخصات، د محراقونو مشخصات او د موجه خطونو معادلي، د مجانبونو معادلي په لاس راوړئ.

**حل:**

$$\begin{aligned}
2(x^2 - 4x) - 3(y^2 + 6y) - 31 &= 0 \\
2[(x-2)^2 - 4] - 3[(y+3)^2 - 9] - 31 &= 0 \\
2(x-2)^2 - 8 - 3(y+3)^2 + 27 - 31 &= 0 \\
2(x-2)^2 - 3(y+3)^2 + 27 - 39 &= 0 \\
2(x-2)^2 - 3(y+3)^2 - 12 &= 0 \\
2(x-2)^2 - 3(y+3)^2 &= 12 \\
\frac{2(x-2)^2}{12} - \frac{3(y+3)^2}{12} &= \frac{12}{12} \\
\frac{(x-2)^2}{6} - \frac{(y+3)^2}{4} &= 1
\end{aligned}$$



پورتی معادله پہ معیاری دول وارول مشوه، لیدل کیری چپی  $2$  او  $h = -3$  دی، د مرکز مختصات

بی:  $O(2, -3)$

له بلې خوا:

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2, \quad a^2 = 6 \Rightarrow a = \pm \sqrt{6}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \pm \sqrt{a^2 + b^2} = \pm \sqrt{6 + 4} = \pm \sqrt{10}$$

د محراقونو مختصات: بی  $F'(2 - \sqrt{10}, -3)$ ،  $F(2 + \sqrt{10}, -3)$ ,

د راسونو مختصات:  $A'(2 - \sqrt{6}, -3)$ ،  $A(2 + \sqrt{6}, -3)$ ,

$$d \text{ موجہ خطونو معادلي: } x - h = \pm \frac{a}{e} \Rightarrow x = \pm \frac{a}{e} + h = \pm \frac{6\sqrt{10}}{10} + 2$$

د مجانبونو معادلي:  $x$  له محور سره موازي دی، نو لیکلای شو:

$$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$$

$$y = \frac{2}{\sqrt{6}}(x - 2) - 3 \quad / \cdot \sqrt{6}$$

$$\sqrt{6}y = 2(x - 2) - 3\sqrt{6}$$

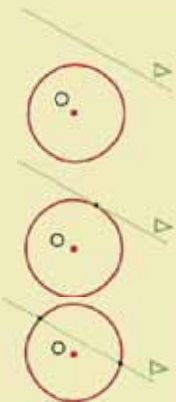
$$y + 3 = \pm \frac{2}{\sqrt{6}}(x - 2)$$

$$\sqrt{6}y = 2x - 4 - 3\sqrt{6}$$

$$\sqrt{6}y = -2(x - 2) - 3\sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{6}y + 2x - 4 + 3\sqrt{6} = 0$$



د  $9x^2 - 4y^2 + 54x + 16y - 79 = 0$  معادله د هایپرولا پر معیاری معادلي باندې واروی:



## دیوی کرښي موقعیت نظر مخروطي مقاطعو ته

یوه اختیاري کرښه، یوه دایره د امکان په صورت کې په  
خو ټکو کې قطع کولای شي؟

### فعالیت

د  $O$  دایره او د  $\Delta$  مستقیمه کرښه په پام کې ونیسئ:

- یوه دایره او مستقیمه کرښه داسې رسم کوئ، چې یوازې یو ګڼه ټکی سره ولري.
- آیا کېدای شي چې یوه مستقیمه کرښه، یوه دایره له دوو ونکو څخه په زیاتو ټکو کې قطع کوي؟
- که چېرې د یوې دایرې د مرکز او کرښې تر منځ واټن، د دایرې له شعاع یا وړانګې څخه لوی وي، دایره او کرښه څو ګڼه ټکي لري؟

له پورتنۍ فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

**پایله:** په یوه مستوي کې یوه اختیاري کرښه او یوه دایره امکان لري، یوازې یوه، دوه او یا هېڅ ګڼه ټکي ونلري.

**لومړي مثال:** د  $9 = x^2 + y^2 + 3x + 3$  دایره او  $y = x + 3$  مستقیمه کرښه رسم او موقعیت یې وښایاست.

**حل:** په شکل کې لیدل کېږي، چې پورتنۍ دایره او کرښه یو بل په  $(0, 3)$  او  $(-3, 0)$  دوو ټکو کې قطع کوي ددې پایلې د لاس راوړلو لپاره که چېرې د  $y$  قیمت د دایرې په معادله کې وضع کوو عین نتیجه به لاس راځي:

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$y = x + 3 \Rightarrow x^2 + (x + 3)^2 = 9$$

$$x^2 + x^2 + 6x + 9 = 9$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 6x = 0$$

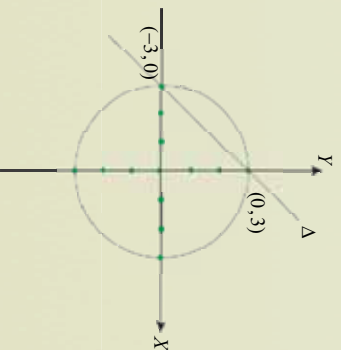
$$x_1 = 0, \quad x_2 = -3$$

د  $x$  قیمتونه د  $y = x + 3$  په معادله کې اېږدو او د  $y$  قیمت په لاس راځي.

$$y_1 = 0 + 3 \Rightarrow y_1 = 3$$

$$y_2 = -3 + 3 \Rightarrow y_2 = 0$$

د  $(0, 3)$  او  $(-3, 0)$  د دایرې او مستیمې کرښې د تقاطع ټکي دي.



په دې ډول د پورتنیو قیمتونو په پام کې نیولو سره د  $(0, 3)$  او  $(-3, 0)$  مرتبې جوړې چې د د وارو معادلو د تقاطع ټکي دي په لاس راځي.

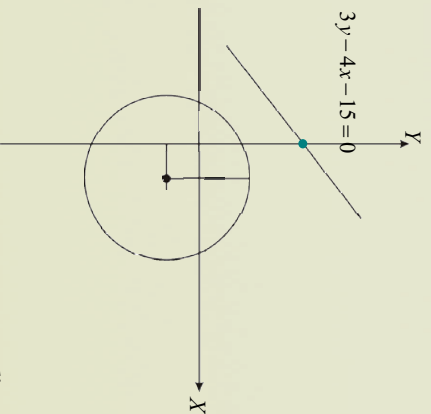
په عمومي ډول کله چې د مستقیمې کرنيې له معادلې څخه د  $x$  یا  $y$  متحول حل او د مخروطي مقطعو په معادله کې یې کېږدو، د حل لپاره یوه دویمه درجه معادله لاسته راځي چې حل یې د  $\Delta$  په قیمت پورې اړه لري. دغه مسئله په لاندې ډول د څېړلو، او پام وړ، پایې لري:

1- که چېرې  $\Delta > 0$  وي، معادله دوه حلونه لري، نو په دې ډول کرښه او منځني یو بل په دوو ټکو کې قطع کوي.  
 2- که چېرې  $\Delta = 0$  وي، معادله دوه مضاعف یا مساوي جذرونه لري او په دې ډول کرښه د مخروطي مقطعو له منځني سره یوازې یو گډ ټکی چې مماس بلل کېږي لري.

3- که چېرې  $\Delta < 0$  وي، معادله حل نلري، په بل عبارت، کرښه او منځني یو بل نه قطع کوي.  
**دویم مثال:** د  $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$  دایره او  $3y - 4x - 15 = 0$  کرښه په پام کې ونیسئ او موقعیتونه یې له یو بل سره وڅېړئ.

**حل:** دپورتنیو معادلو د بدلولو لپاره چې معیاري حالت ته راوغځول شي، په لاندې ډول گام پورته کوو:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 &= 0 \\ x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 + y^2 + 4y + (2)^2 - (2)^2 - 4 &= 0 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 - 9 &= 0 \\ \Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 &= 9 \quad C(1, -2) \end{aligned}$$



له پورتنی معادلې څخه پوهیږو چې د دایرې مرکز  $C(1, -2)$  او شعاع یې  $r = 3$  دی.  
 همداغه راز د مستقیمې کرنيې لپاره لرو:  $5 + x = \frac{4}{3}y \Rightarrow 3y = 4x + 15$



که چیري له پورتي معادلي څخه د  $y$  قیمت د دایري په معادله کې کیدو او معادله حل کړو، نو لاندې پایله به لاس راځي.

$$(x-1)^2 + \left(\frac{4}{3}x + 5 + 2\right)^2 = 9$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + \left(\frac{4}{3}x + 7\right)^2 = 9 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + \frac{16}{9}x^2 + 14\frac{4}{3}x + 49 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 9 \cdot \frac{25}{9}x^2 - 9 \cdot \frac{50}{3}x + 9 \cdot 40 = 0$$

$$\Rightarrow 25x^2 + 150x + 360 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 22500 - 36000 = -13500, \quad \Delta < 0$$

څرنگه چې  $\Delta < 0$  ده، کرښه او دایره ګڼېکې نه لري.  
**دویم مثال** : د  $y = x - 1$  د کرښې موقعیت د  $r - x^2 + 1 = 0$  پارابولا ته وڅیړئ.

**حل** : د پورتي مسألې د څیړلو لپاره د  $y$  قیمت د پارابول په معادله کې وضع کړو، او بیا ګام په ګام د معادلي حل په پام کې نیسو:

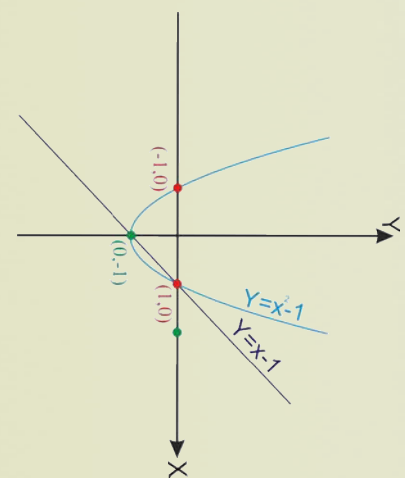
$$y = x - 1$$

$$y - x^2 + 1 = 0 \Rightarrow (x-1) - x^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x - 1 - x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-1) - 4(1)(0) \Rightarrow 1 - 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 1$$



څرنگه چې لیدل کېږي  $\Delta = 1 > 0$  څخه ده، نو مورې کرښه یعنې  $y = x - 1$  په لاندې ډول په لاس راځي او د  $r - x^2 + 1 = 0$  پارابول یو بل په دوو ټکو کې قطع کوي چې د دې دویمې درجې معادلي حل

$$x^2 - x = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0$$

که چیري په لاس راغلي قیمتونه د کرښې په معادله کې کیدو، نو د نوموړي کرښې او پارابولا د قطع کولو ټکي په لاس راځي، هغه عبارت دي له:  $(0, -1)$ ,  $(1, 0)$  دغه ټکي په ګراف کې هم په ښکاره ډول لیدل کېږي.

**څلورم مثال:** د  $x = 5$  د مستقيمي کرنيې او  $1 + \frac{y^2}{4} = \frac{(x-2)^2}{9}$  بیضوي موقعیتونه وڅیړئ.

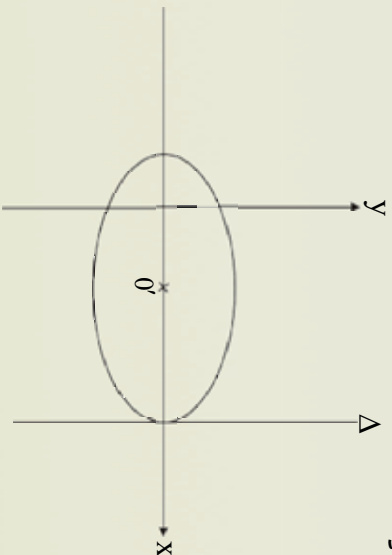
**حل:** که چېرې د  $x = 5$  د مستقيمي کرنيې قیمت د

بیضوي په معادله کې کینېږدو، نو په لاس راځي:

$$1 + \frac{y^2}{4} = 1 + \frac{9}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{4} = 1 - 1 = 0$$

خړنگه چې:  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$



په دې ډول ویلای شو چې مستقیمه کرښه او بیضوي یو ګاڼه لري چې په شکل کې په ښکاره ډول لیدل کېږي. **یادونه:** د مخروطي مقاطعو غزیدلی یا انکشاف ورکړل شوي، معادله په لاندې ډول ده:

$$A, B, D, E, F \in \mathbb{R}, Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

د پورتني معادلې د پېژندلو لپاره په یاد ولرئ چې:

1- که چېرې  $A = B$  یو شان علامې ولري، یوه دایره ده.

2- که چېرې  $A \neq B$  او یو شان علامې ولري، یو الیس دی.

3- که چېرې  $B < A$  یا  $A = B$  او مختلفې علامې ولري، هلیپربول ده.

4- که چېرې معادلې لاندې شکل ولري، ګراف یې یوه پارابول ده.

$$Ax^2 + By + Cx + D = 0 \text{ او } Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$$



1- لاندې معادلې د هغوی د ګرافونو د منځني له مخې وټاکئ:

a)  $y^2 - 2y + x + 3 = 0$

c)  $25x^2 + 16y^2 = 400$

e)  $y^2 + 6y - x + 2 = 0$

د  $9x^2 + 4y^2 = 36$  او  $9x^2 = 3$  د مستقیم خط یو بل په څو ټکو کې قطع کوي؟

د  $y = x$  او  $4 - 2y^2 - x^2 = 4$  هلیپربول د تقاطع ټکي پیدا کړئ.



$e = \frac{c}{a}$  دبیضوي دصن المرکزیت په نامه یادېږي.

**پاراېولا:** په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې د یوه ثابت یا مستقیم ټکي او ثابت مستقیم خط څخه په مساوي فاصله کې پراته وي، پارابولا بلل کېږي، دغه ثابت یا مستقیم ټکي ته د پارابولا محراق ( $F$ ) او ثابت مستقیم خط ته د پارابولا هاړي (موجه) وايي، معادله یې  $4y^2 = px$  ده

$i$	د پارابولا معادلې	دراس وضعیة کمیت	د محراق مختصات	د موجه خط معادله	تناظري محور
1	$y^2 = 4Px$	$S(0, 0)$	$F(P, 0)$	$x = -p$	$x = 0$
2	$x^2 = 4Py$	$S(0, 0)$	$F(0, P)$	$y = -p$	$y = 0$
3	$(y - k)^2 = 4P(x - h)$	$S(h, k)$	$F(h + p, k)$	$x = h - p$	$y = k$
4	$(x - h)^2 = 4P(y - k)$	$S(h, k)$	$F(h, k + p)$	$y = k - p$	$x = h$

د پارابولا غزول شوي معادله  $F = 0$  یا  $Ey + Dx + Cy^2 + Ax^2 = 0$  په داسې حال کې چې  $A = 0$  یا  $C = 0$  وي، نه دواړه. ( $A = 0$  یا  $C \neq 0$ ،  $A \neq 0$ ،  $C = 0$  وي) په پارابولا کې  $e = 1$  دی.

**هایپربول:** په یوه مستوي کې د هغو ټکو هندسي محل چې د فاصلو تفاضل یې له دوو ثابتو مستقیمو ټکو څخه تل ثابت اوږدوالی ولري، هایپربول بلل کېږي.

دوه ثابت مستقیم ټکي د هایپربول محراقونه دي، د دواړو محراقونو ترمنځ فاصله  $2c$  ده.

د هایپربول معادله  $1 = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$  د هایپربول محراقونه پر افقي محور پراته دي.

$1 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$  د هایپربول محراقونه پر عمودي محور پراته دي.

د هلیپربولا معادلي	د مرکز وضعیه کميات	د رأسونو وضعیه کميات	غیر حقيقي رأسونه	محراقونه
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$S(0,0)$	$(a,0), (-a,0)$ د $x$ پر محور پراته دي	$(0,b), (0,-b)$ د $y$ پر محور باندي	$F(c,0)$ $F'(-c,0)$ د $x$ پر محور باندي
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	$S(0,0)$	$(0,a), (0,-a)$ د $y$ پر محور پراته دي	$(b,0), (-b,0)$ د $x$ پر محور باندي	$F(0,\pm c)$ د $y$ پر محور باندي
$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$S(h,k)$	$A(h\pm a, k)$	$B(h, k\pm b)$	$F(h\pm c, k)$
$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	$S(h,k)$	$A(h, k\pm a)$	$B(h\pm b, k)$	$F(h, k\pm c)$

د موجہ خطونو معادلي	د مچانبونو معادلي
$x = \pm \frac{a}{c}$	$y = \pm \frac{b}{a}x$
$y = \pm \frac{a}{c}$	$y = \pm \frac{a}{b}x$
$x = h \pm \frac{a}{c}$	$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$
$y = k \pm \frac{a}{c}$	$y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$

هلیپربولا عمومي غزول شوي معادله:  $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$  څخه عبارت ده  
په داسې حال کې چې  $A = B$  یا  $A \neq B$ ، خو مختلف اشاره وي، عن مرکزیت  $e > 1$  دی.



## د څپرکي پوښتني

هرې پوښتنې ته څلور ځوابه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه او کرښه تړي تا و کړئ.

1- که چېرې یوه مستوي یو مخروط په مایل ډول قطع کړي، نو د مستوي او مخروطو ګډ فصل عبارت دی له:

a) بیضوي (b) دایره (c) هلیپربول (d) دوه متقاطع خطونه

2- د الیس محراقونه هغه ټکي دي چې د الیس له مرکز څخه:

a) برابر و این ولري (b) مختلف و اینونه لري

c) د اوږد قطر نیمایي و این لري (d) د لنډ قطر نیمایي ده.

3- که چېرې M د الیس یو ټکی F او F' محراقونه او 2a د اوږده قطر اوږه والي وي، نو په دې صورت کې لرو چې:

a)  $|MF| - |MF'| = 2a$  (b)  $|MF| + |MF'| = a$

c)  $|MF| + |MF'| = 2a$  (d)  $|MF'| + |MF| = 0$

4- د الیس عن المרכזیت له لاندې کومې بوي رابطې څخه په لاس راځي:

a)  $e = \frac{c}{a}$  (b)  $e = \frac{c}{b}$  (c)  $e = \frac{c}{a}$  (d)  $e = \frac{c}{b}$

5- د لنډ قطر او محراقونو ترمنځ اړیکه عبارت ده له:

a)  $a^2 = b^2 - e^2$  (b)  $a^2 + b^2 = c^2$

c)  $a^2 = b^2 + e^2$  (d)  $a^2 = b^2 + c^2$

6- د  $(x-h)^2 = 4p(x-k)$  په معادله کې  $p > 0$  سره وي، نو:

a) د پارابولا خوله پاس خواته خلاصه ده. (b) د پارابولا خوله لاندې خواته خلاص ده

c) د پارابولا خوله ښي خواته خلاص ده (d) د پارابولا خوله کښي خواته خلاص ده.

7- د  $(y-2)^2 = 8(x+1)$  یو پارابولا معادله په پام کې ونیسئ، دمخراق وضعیه کمیت یې عبارت دی له:

a)  $F(-1, -2)$  (b)  $F(-1, 4)$  (c)  $F(-1, 2)$  (d)  $F(-4, -1)$

8- که چېرې F او F' د هلیپربول محراقونه وي، د P ټکی په کوم شرط د هلیپربول د محیط یو ټکی کېدلای شي؟

a)  $|PF| + |PF'| = 2a$  (b)  $|PF| - |PF'| = a$

c)  $|PF| - |PF'| = 2a$  (d)  $|PF| - |PF'| = 0$

9: د  $x^2 = y$  د پارابولا گراف متناظر دی نظر:

a) د  $y$  محور ته

b) د  $x$  محور ته

c) د  $x$  او  $y$  محورونو ته

10: په لاندې څوابونو کې کوم یو د هلیپربول اړخ مرکزیت نښې؟

a)  $e < 1$

b)  $e = 1$

c)  $e > 1$

d)  $e = -1$

11: د  $1 = y^2 + \frac{x^2}{4}$  د بیضوي د اوږد قطر موقعیت:

a) د  $y$  پر محور باندې دی.

b) د  $x$  پر محور باندې دی.

c) د  $x$  پر محور عمود دی.

d) د  $y$  له محور سره موازي دی.

12: په یوه مستوي کې د ټولو هغو ټکو هندسي محل چې له یوه ثابت ټکی څخه مساوي فاصلي لري، د څه په نامه یادېږي؟

a) کره

b) دایره

c) پارابولا

d) بیضوي

13: د  $(x+2) = -4y^2$  پارابول دراس مختصات عبارت دي له:

a)  $(2,4)$

b)  $(4,2)$

c)  $(2,0)$

d)  $(-2,0)$

14: د  $0 = 3y + 8y^2 + 4y^3 + 4x^2$  معادله عبارت ده له:

a) دایري

b) بیضوي

c) پارابولا

d) هلیپربولا

15: د  $x = 2y$  مستقیم خط د  $1 = \frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4}$  هلیپربولا په څو ټکو کې قطع کوي؟

16: د  $3x = 2y$  مستقیم خط د  $0 = 5x - 6y - 2y^2$  منحنی په څو ټکو کې قطع کوي؟

17: لاندې معادلې په پام کې ونیسئ، لومړی هغه په معیاري ډول ولیکئ، بیا یې گرافونه رسم کړئ.

a)  $x^2 + 4y^2 = 4$

b)  $9x^2 + 2y^2 = 15$

c)  $16x^2 - 96x + 9y^2 + 90y + 225 = 0$

d)  $x^2 + 12x - 120y + 288 = 0$

18: د لاندې قیمتونو له مخې د هرې یوې بیضوي معادله پیدا کړئ:

a)  $(0,0)$  مرکزي مختصه،  $a = -2$ ،  $e = 0,75$  دي او لوی قطري د  $y$  پر محور باندې پروت دی.

b)  $(0,0)$  مرکزي مختصه،  $b = 64$ ،  $e = 0,5$  دي او لوی قطري د  $x$  پر محور باندې پروت دی.

19: له لاندې معادلو څخه د بیضوي ټول اجزاي پیدا کړئ:

a)  $4(x-1)^2 + y^2 = 4$

b)  $1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$



20: د پارابولا لاندې معادلي لومړي په معياري شکل وليکئ او بيلگي گرافونه رسم کړئ.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & x^2 - 11y = 0 \\ \text{b)} \quad & y^2 - 4y - 4x + 2 = 0 \end{aligned}$$

21: د پارابولا لاندې هره يوه معادله په معياري ډول واورئ:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 4x^2 - y^2 - 8y - 32 = 0 \\ \text{b)} \quad & 2y^2 + 4y - x^2 + 10x - 25 = 0 \end{aligned}$$

22: د هغې هايپربولا معادله پيدا کړئ چې  $(-4, 0)$  او  $(4, 0)$  د راسونو مختصات او  $x = \pm \frac{5}{4}y$  د مجانبونو

معادلي وي.

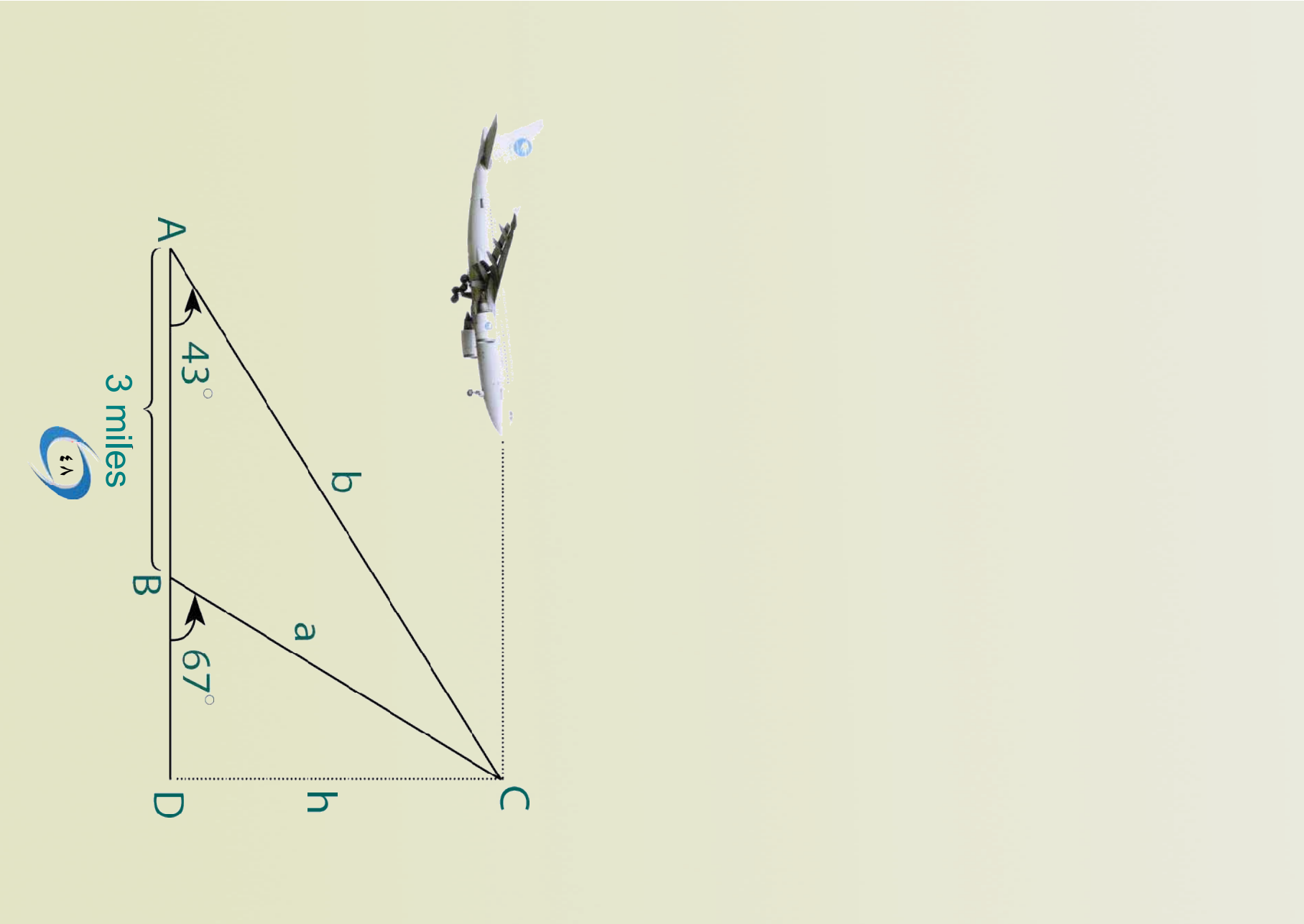
23: د هغې هايپربولا معادله پيدا کړئ چې  $(-1, 3)$  ،  $(1, 3)$  د راسونو مختصات او محراقي اوږدوالی يې 4 واحد وي.

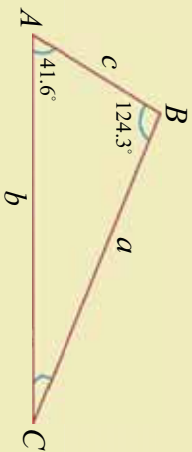
24: د  $2x = y$  مستقيم خط د  $1 = \frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x+1)^2}{4}$  هايپربولا په څو ټکو کې قطع کړي؟



# دویم خبرگی مثالثات





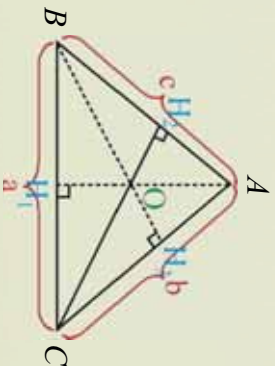


خړنگه کولای شو په مخالف شکل کې د  $a$  د ضلعې او  $C$  زاوې اندازه پیدا کړو؟

## د ساین قانون Law of sine

### فعالیت

- د  $ABC$  یو حاده الزویه مثلث رسم او د ضلعو اوږدوالی یې وټاکئ.
- د مثلث له هر رأس هغې پر مخالف ضلعې د ( $\overline{AH_1}$ ,  $\overline{BH_2}$ ,  $\overline{CH_3}$ ) ارتفاعگانې رسم کړئ.
- د  $ABH_1$  او  $BCH_1$  په قائم الزویه مثلثونو کې د ( $\overline{AH_1}$ ) ارتفاع د  $\sin B$  او  $\sin C$  له جنسه پيدا او یو له بله سره یې پرتله کړئ.



- د  $ABH_1$  او  $ACH_2$  په قائم الزویه مثلثونو کې د ( $\overline{BH_2}$ ) ارتفاع د  $\sin A$  او  $\sin C$  له جنسه پيدا او یو له بله سره یې پرتله کړي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې ثبوت په لاس راوړای شو.

**ثبوت:**

د  $ACH_1$  او  $BAH_1$  په قائم الزویه مثلثونو کې لرو چې:

$$\sin B = \frac{\overline{AH_1}}{AB} = \frac{\overline{AH_1}}{c}$$

$$\overline{AH_1} = c \sin B \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\sin C = \frac{\overline{AH_1}}{AC} = \frac{\overline{AH_1}}{b}$$

$$\overline{AH_1} = b \sin C \quad \dots\dots\dots (2)$$

د (1) او (2) اړیکو له پرتلې څخه لیکلی شو چې:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad \dots\dots\dots 1$$

په همدې ډول د  $ABH_3$  او  $BCH_3$  په قايم الزويه مثلثونو کې ليکلی شو چې:

$$\sin A = \frac{\overline{BH}_3}{c} \Rightarrow \overline{BH}_3 = c \sin A \dots\dots\dots (3)$$

$$\sin C = \frac{\overline{BH}_3}{a} \Rightarrow \overline{BH}_3 = a \sin C \dots\dots\dots (4)$$

د (3) او (4) اړيکې له پر تلې څخه لرو چې:

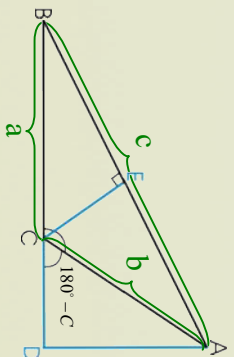
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c} \dots\dots\dots II$$

د  $I$  او  $II$  اړيکې له پر تلې څخه ليکلی شو چې:

**ښايه:** په هر  $\triangle ABC$  کې په داسې حال کې چې  $A, B, C$  زاويې او  $a, b, c$  د ضلعو اوږدوالی وي، لرو:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

**پورتنی اړیکه (رابطه) په يوه مثلث کې د ساين د قانون (Law of sine) په نامه يادېږي.**



د ساين د قضیې ثبوت په منفرج الزاويه مثلث کې:  
د  $ABC$  په مثلث کې چې د  $C$  زاويه يې منفرجه ده  
په پام کې نيسو د  $\overline{AD}$  او  $\overline{CE}$  ارتفاع گانې رسموو.

د  $ADC$  په قايم الزاويه مثلث کې لرو:  $\sin(180^\circ - C) = \frac{AD}{b}$

د بلې خوا د متمم زاويو څخه پوهېږو چې:  $\sin(180^\circ - C) = \sin C$

نو:  $\sin C = \frac{AD}{b} \dots\dots(I)$

همدا رنگه د  $ADB$  له قايم الزاويه مثلث څخه لرو چې: (2)  $\sin B = \frac{AD}{c} \dots\dots$

اوس (1) او (2) رابطې خوا په خوا يو پر بل وېشو:

نو:  $\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b} \rightarrow \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{b}{c} \dots\dots\dots(1)$

$$\sin A = \frac{\overline{CE}}{b} \dots (3)$$

$$\sin B = \frac{\overline{CE}}{a} \dots (4)$$

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \dots (5)$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

### الهام فعالیت

- زده کونکي دي، د ساين قانون په قايم الزاويه مثلث کې وڅېړي او ثبوت دې کړي.

**لومړی مثال:** که چيرې د  $ABC$  په مثلث کې د  $B = 60^\circ$  او  $b = 9\text{ cm}$  او  $c = 6\sqrt{3}\text{ cm}$  وي، ديوي ضلعي او دوو زاويو اندازې يې پيدا کړئ؟

**حل:** د ساين د قضیې يا قانون له مخې ليکلی شو چې:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{9}{\sin 60^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ}{9} = \frac{6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{9}$$

$$\sin C = \frac{3 \cdot 3}{9} = 1 \Rightarrow \sin C = 1$$

خرنگه چې:  $C = 90^\circ$  نو:  $\sin 90^\circ = 1$

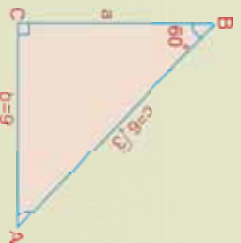
همدارنگه يو هېرو چې په يوه مثلث کې:

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$A + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$A = 180^\circ - 150^\circ$$

$$A = 30^\circ$$



د  $a$  ضلعي قیمت په لاندې ډول پیدا کولی شو:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow a = \frac{\sin A \cdot b}{\sin B} \Rightarrow a = \frac{\sin 30^\circ \cdot 9}{\sin 60^\circ}$$

$$a = \frac{1 \cdot 9}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$$

$$a = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

**دویم مثال:** یو ساختماني انجینر غواړي چې د دوو ټکو تر منځ واټن چې په منځ کې یې یوه غونډې پرته ده پیدا کړي.

**حل:** د سین د قانون په کارولو سره  $\sin A$  او  $\sin C$  په پام کې نیسو:

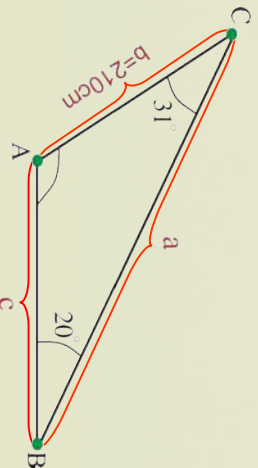
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

$$c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{422 \text{ ft} \cdot \sin 110^\circ}{\sin 30^\circ}$$

خړنگه چې:  $\sin 110^\circ = 0.9396$  او  $\sin 30^\circ = 0.5$ .

$$c = \frac{422 \text{ ft} \cdot 0.9396}{0.5} \Rightarrow c = 793.0224 \text{ ft}$$

**دویم مثال:** په مخامخ شکل کې د دوو زاویو او یوې ضلعي اندازه راکړل شوې ده، د یوې نامعلومې زاوې او دوو ضلعو اندازه پیدا کړئ.



**حل:** پوهیږو چې د یوه مثلث د داخلي زاویو مجموعه  $180^\circ$  ده، نو نامعلومې زاوې یې داسې پیدا کولی شو:

$$A = 180^\circ - (31^\circ + 20^\circ) = 180^\circ - 51^\circ$$

$$A = 129^\circ$$

د  $a$  دینا کولو لپاره لاندې تناسب په پام کې نیسو:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \Rightarrow \frac{\sin 129^\circ}{a} = \frac{\sin 20^\circ}{210}$$

$$a = \frac{\sin 129^\circ \cdot 210 \text{cm}}{\sin 20^\circ}$$

خړنگه چې  $\sin 20^\circ = 0.342$  او  $\sin 129^\circ = 0.7771$ ؛ نو:

$$a = \frac{0.7771 \cdot 210}{0.342} = \frac{163.191}{0.342} = 477.166 \text{cm}$$

$$a = 477.166 \text{cm}$$

اوس د  $c$  ضلعي اوږدوالی د  $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$  له رابطې څخه پيدا کړو:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \Rightarrow \frac{\sin 20^\circ}{210} = \frac{\sin 31^\circ}{c}$$

$$c = \frac{210 \text{cm} \cdot \sin 31^\circ}{\sin 20^\circ}$$

خړنگه چې  $\sin 31^\circ = 0.5150$  او  $\sin 20^\circ = 0.342$  دی د پورته قیمتونو په اړینو دلو سره لیکلای شو چې:

$$c = \frac{0.5150 \cdot 210}{0.342} = \frac{108.15}{0.342} = 316.2$$

يادونه:

د ساين قانون هغه وخت کارولی شو چې:

- دوي زاويې او دمنځ ضلع يې معلومه وي. ( $ASA$ ) ،  $A$  زاويه او  $S$  ضلع ښيي.
- دوه ضلعي او د منځ زاويه يې معلومه وي. ( $SAS$ ) ،  $S$  ضلع او  $A$  زاويه ښيي.



1. که چېرې د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی  $a = 8$ ،  $b = 5$  او  $c = 10$  واحد وي، د  $B$  د زاويې اندازه پیدا کړئ.

2. لاندې شکل په پام کې ونیسئ د  $A$  او  $B$  د ښارونو ترمنځ واټن پیدا کړئ؟







## د کوساين قانون

### Law of cosine

د يوه شکل چارټ د مېخ په مرسته د دېوال پر مېخ څرول شوی دی، که چېرې د مېخ د دوو خواوو د تار اوږدوالی هر يو  $4\text{ cm}$  وي او د مېخ زاويه يې  $60^\circ$  وي، د  $(x)$  تار د دوو ټکو تر مېخ واټن د کوم قانون په مرسته پيدا کولی شو؟

### فعاليت

- د  $ABC$  کيفي مثلث رسم او د هر رأس مخامخ ضلعي په ترتيب سره په  $a, b, c$  وښايست.
- د  $B$  له رأس څخه د  $AC$  پر ضلع ارتفاع رسم کړئ.
- په جوړ شوي قائم الزويه مثلثونو کې د فيثاغورث قضيه تطبيق کړئ.
- په قائم الزويه مثلثونو کې د  $BH$  او  $HC$  قيمتونه د  $B$  او  $C$  زاويو د  $\cos$  له جنسه، په ترتيب سره پيدا او د فيثاغورث په رابطه کې يې وضع کړئ.

- ممکنه الجبري محاسبي ترسره او وروستی رابطه يې وليکئ.
- د پورتنۍ فعاليت د سرته رسولو څخه وروسته داسې ثبوتوو:

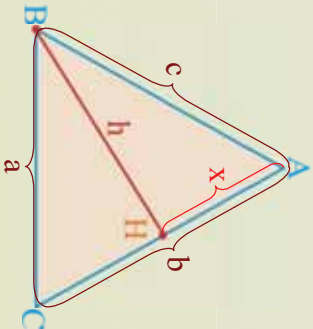
**ثبوت:** د  $ABC$  په حاده الزويه مثلث کې د  $BH$  ارتفاع رسموو

$$\overline{CH} = b - x, \quad \overline{AH} = x, \quad \overline{BH} = h$$

د  $BCH$  په قائم الزويه مثلث کې لرو:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2$$

$$a^2 = (b - x)^2 + h^2 \dots\dots\dots \text{I}$$



د  $AHB$  په قائم الزويه مثلث کې د  $h$  اوږدوالی پيدا کوو:

$$h^2 = c^2 - x^2 \dots\dots\dots \text{II}$$

د I او II له اړيکو څخه ليکلې شو چې:

$$a^2 = (b - x)^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 - 2bx + x^2 + c^2 - x^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx$$



$$\cos A = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cdot \cos A$$

د  $AHB$  په قائم الزاويه مثلث کې:

په پورتني اړيکه کې د  $x$  پر ځای  $c \cdot \cos A$  قيمت اېږدو، نو:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{یا} \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

**پایله:** په هر مثلث کې دا لاندې اړيکې سمې دي:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{یا} \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad \text{یا} \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cos C \quad \text{یا} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

### فعالیت

- په همدې مثلث کې دې دوی نورې اړيکې، یعنې  $\sin C$  او  $\sin B$  زده کوونکي ثبوت کړي. یادونه: د کوساین قانون هغه وخت کارولی شو چې:
  - چې دوی ضلعي او د منځ زاوې بې معلومې وي. ( $SAS$ )،  $S$  ضلع او  $A$  زاویه نښې.
  - د مثلث درې ضلعي معلومې وي. ( $SSS$ )،  $S$  یوه ضلع نښې.
- د ساین او کوساین د قانون له کارولو څخه، د مثلث د عناصرو د پیدا کولو لپاره له لاندې جدول څخه کار اخلو:

د یوه مثلث د عناصرو پیدا کول	
د کارولو فورمول	د کارولو شوی معلومات
د کوساین او وروسته دساین قانون	( $SSS$ ) ضلع، ضلع، ضلع
د ساین قانون	( $SAA$ ) (زاویه، زاویه، ضلع)
د ساین قانون	( $ASA$ ) (زاویه، ضلع، زاویه)
د کوساین قانون وروسته د ساین	( $SAS$ ) (ضلع، زاویه، ضلع)
امکان نه لري	( $AAA$ ) (زاویه، زاویه، زاویه)

لوپری مثال: د  $ABC$  په مثلث کې د هغو دريو ضلعو اندازې په لاندې ډول راکړل شوي دي، د  $A$  زاويې اندازہ وټاکئ.

حل:

$$a = \sqrt{28}, \quad b = 4, \quad c = 6, \quad A = ?$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$(\sqrt{28})^2 = (4)^2 + (6)^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos A$$

$$28 = 16 + 36 - 48 \cos A \Rightarrow 28 = 52 - 48 \cos A$$

$$48 \cos A = 52 - 28 \Rightarrow 48 \cos A = 24$$

$$\cos A = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$$

$$A = 60^\circ$$

دويم مثال: د  $ABC$  په مثلث کې که چيرې دوي ضلعي يې هر يوه  $a = 16$ ,  $b = 10$  واحده او د منځ زاويه يې  $C = 110^\circ$  وي، د  $c$  ضلعي اوږدوالی پيدا کړئ.

حل:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$c^2 = (16)^2 + (10)^2 - 2(16)10 \cos 110^\circ$$

$$c^2 = 256 + 100 - 320 \cos 110^\circ$$

$$c^2 = 356 - 320 \cos 110^\circ$$

$$c = \sqrt{356 - 320 \cos 110^\circ}$$

خړنگه چې:  $\cos 110^\circ = 0.342$  دی، نو:

$$c = \sqrt{356 - 320(0.342)} \Rightarrow c = \sqrt{356 - 109.44}$$

$$c = 15.70$$

دريم مثال: يو پينگ رکاغذ پړان له  $100m$  واټن تار سره په هوا کې دی، که تار د ځمکې له سطحې سره  $60^\circ$  زاويه جوړه کړي وي، له ځمکې څخه د پينگ لوړوالی پيدا کړئ.

حل: د  $OHL$  په قايم الزاويه مثلث کې لرو، چې:

$$\cos 60^\circ = \frac{OL}{OH} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 100 \cdot \cos 60^\circ = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50m$$



د کوساين قانون له مخې لرو چې:

$$\overline{HL}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{OL}^2 - 2\overline{OH} \cdot \overline{OL} \cdot \cos 60^\circ$$

$$\overline{HL}^2 = (100)^2 + (50)^2 - 2 \cdot 100 \cdot 50 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\overline{HL}^2 = 10000 + 2500 - 5000$$

$$\overline{HL}^2 = 7500m^2 \Rightarrow \overline{HL} = \sqrt{7500}m = 50\sqrt{3}m$$

$$\overline{HL} = 86.6m$$

**څلورم مثال:** که چېرې د  $ABC$  په مثلث کې  $60^\circ A = 8, c = 5, b = 5$  وي، د  $a$  او  $\sin C$  اندازه پيدا کړئ.

**حل:** لومړی د کوساين د قضیې په کارولو سره د  $a$  ضلع او بيا  $\sin C$  پيدا کوو.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow a^2 = 25 + 64 - 80 \cdot \frac{1}{2} = 89 - 40$$

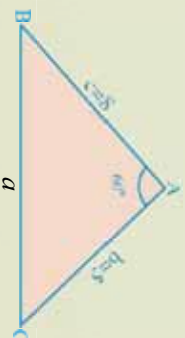
$$a^2 = 49 \Rightarrow a = 7$$

د ساين د قضیې له مخې ليکو چې:

$$\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\sin C = \frac{c \cdot \sin A}{a} = \frac{8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{7}$$

$$\sin C = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$



پوښتنې



1. که چېرې د  $ABC$  په مثلث کې  $a = 5ft, b = 4ft$  او  $A = 45^\circ$  وي، د مثلث نامعلومې ضلعي او زاويې پيدا کړئ.

2. که چېرې په يوه مثلث کې  $a = 3cm$  او  $b = 9cm$  او د دوی ترمنځ زاويه  $60^\circ$  وي د  $c$  ضلعي او برعکس پيدا کړئ؟

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$$

## د ټانجنټ قانون

### Law of tangent

په هر مثلث کې د زاویو او ضلعو ترمنځ د  $\tan$  له جنسه مخامخ اړیکه شتون لري.

### فعالیت

- د ساين قانون مساوي په  $D$  وليکئ.
- د  $\sin$  قانون هر دوه، نسبتونه يعنې  $\frac{a}{\sin A}$  او  $\frac{b}{\sin B}$  په جلا جلا ډول مساوي له  $D$  سره وليکئ.
- پورته دوه نسبتونه د ضلعو د اوږدوالي له مخې وليکئ.
- دوه پورتنۍ اړيکې لومړۍ جمع او بيا يې تفریق کړئ.
- لاسته راغلي اړيکې يو پر بل وروپښئ.
- الجبري محاسباتي ترسره او د پايلې فورمول وليکئ.

پورته فعاليت په لاندې ډول ثبوتوو.

**ثبوت:** د ساين قانون په پام کې نيسو:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = D$$

$$\frac{b}{\sin B} = D \Rightarrow b = D \sin B$$

$$\begin{aligned} a+b &= D(\sin A + \sin B) \\ a-b &= D(\sin A - \sin B) \end{aligned}$$

پورتنۍ اړيکې يو پر بل وپښو:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} &= \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}} \\ \frac{a+b}{a-b} &= \tan \frac{A+B}{2} \cdot \cot \frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

$$\text{خرنگه چې } \frac{A-B}{2} = \frac{1}{\tan \frac{A-B}{2}} \text{ دى.}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$$

نو په پايله کې ليکلی شو چې:



### فعاليت

- لاندې اړيکي پيدا کړئ.

$$\frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan \frac{C+A}{2}}{\tan \frac{C-A}{2}}, \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan \frac{B+C}{2}}{\tan \frac{B-C}{2}}$$

- پورتنی اړيکي په يوه مثلث کې د ضلعي او زاويې ترمينځ اړيکي د  $\tan$  اړيکه بلل کېږي.

لومړی مثال: د  $ABC$  په مثلث کې  $A = 90^\circ$  او  $\frac{b-c}{b+c} = \frac{1}{\sqrt{3}}$  دى، د  $B$  او  $C$  زاويو اندازه پيدا کړئ.

حل: يو شمېر چې په هر مثلث کې:

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$B + C = 180^\circ - 90^\circ$$

$$B + C = 90^\circ \Rightarrow \frac{B+C}{2} = 45^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{b-c}{b+c} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ A &= 90^\circ \\ B &=? \\ C &=? \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{b-c}{b+c} &= \frac{\tan \frac{B-C}{2}}{\tan \frac{B+C}{2}} \\ \frac{b-c}{b+c} &= \frac{\tan \frac{B-C}{2}}{\tan 45^\circ} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\tan \frac{B-C}{2}}{\tan 45^\circ}$$

$$\tan \frac{B-C}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^\circ, \quad \tan \frac{B-C}{2} = \tan 30^\circ$$

$$\frac{B-C}{2} = 30^\circ \Rightarrow B-C = 60^\circ \dots\dots\dots I$$

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$B + C = 180^\circ - A \Rightarrow B + C = 180^\circ - 90^\circ$$

$$B + C = 90^\circ \dots\dots\dots II$$

له بلې خوا په هر مثلث کې:



$$\begin{aligned} B - C = 60^\circ & \dots\dots\dots I \\ B + C = 90^\circ & \dots\dots\dots II \end{aligned}$$

له I او II اړیکو څخه لاندې پایله په لاس راځي:  
د نوموړي سیستم له حلولو څخه وروسته د B قیمت په لاس راوړو:

$$2B = 150^\circ$$

$$\boxed{B = 75^\circ}$$

اوس د B قیمت په اېښودلو سره د C زاویه پیدا کوو:

$$B - C = 60^\circ$$

$$75^\circ - C = 60^\circ$$

$$-C = 60^\circ - 75^\circ$$

$$\boxed{C = 15^\circ}$$

**دویم مثال:** که چېرې د ABC په یوه مثلث کې  $30^\circ$  ،  $B = 42^\circ$  ،  $C = 432$  او  $a = 925$  وي، د مثلث

نورې اجزای پیدا کړئ.

**حل:**

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A + C = 180^\circ - B \Rightarrow A + C = 180^\circ - 42^\circ - 30^\circ$$

$$A + C = 179^\circ - 60' - 42^\circ - 30' \Rightarrow A + C = 137^\circ - 30' \dots\dots\dots I$$

$$\frac{A + C}{2} = \frac{137^\circ - 30'}{2} \Rightarrow \frac{A + C}{2} = \frac{136^\circ - 90'}{2} = 68^\circ - 45'$$

$$\tan \frac{A + C}{2} = \frac{a + c}{a - c}$$

$$\tan \frac{A - C}{2} = \frac{a - c}{a + c}$$

اوس د زاویې او ضلعو قیمتونه په پورتنۍ اړیکه کې اېږدو، یعنې:

$$\frac{\tan 68^\circ - 45'}{\tan \frac{A - C}{2}} = \frac{925 + 432}{925 - 432} \Rightarrow \frac{\tan 68^\circ - 45'}{\tan \frac{A - C}{2}} = \frac{1357}{493}$$

$$1357 \cdot \tan \frac{A - C}{2} = 493 \cdot \tan 68^\circ - 45' \Rightarrow \tan \frac{A - C}{2} = \frac{493}{1357} \cdot \tan 68^\circ - 45'$$

یا:

له مثلثاتي جدول څخه پر هېرو چې  $\tan 68^\circ 45' = 2.5714$ ؛ نو:

$$\tan \frac{A-C}{2} = 0.9341 \Rightarrow \frac{A-C}{2} = 42^\circ 59'$$

$$\boxed{A-C = 85^\circ 58' \dots\dots \text{II}}$$

اوس د I او II اړيکو په پام کې نيولو سره لیکو:

$$A + C = 137^\circ 30' \dots\dots \text{I}$$

$$A - C = 85^\circ 58' \dots\dots \text{II}$$

$$2A = 222^\circ 88'$$

$$\boxed{A = 111^\circ 44'}$$

$$C = 137^\circ 30' - A \Rightarrow C = 137^\circ 30' - 111^\circ 44'$$

$$C = 136^\circ 90' - 111^\circ 44'$$

$$\boxed{C = 25^\circ 46'}$$

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \Rightarrow b = c \cdot \frac{\sin B}{\sin C}$$

$$b = \frac{432 \sin 42^\circ 30'}{\sin 25^\circ 46'}$$

$$\sin 42^\circ 30' = 0.6756$$

$$\sin 25^\circ 46' = 0.4346$$

$$b = \frac{432}{0.4346} \cdot 0.6756 = 994.01 \cdot 0.6756 = 671.5582 \text{ cm}$$

### پوښتنې

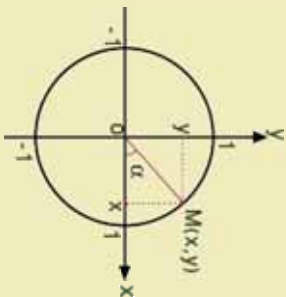


د لاندې ورکړل شویو عناصرو له مخې د مثلث نامعلومې اجزاوې پیدا کړئ.

(a) که چېرې  $a = 35 \text{ ft}$  ،  $B = 60^\circ$  ،  $C = 75^\circ$  وي.

(b) که چېرې  $\alpha = 45^\circ$  ،  $b = 37 \text{ m}$  او  $\gamma = 75^\circ$  وي.





## مثالتي مطابقونه Trigonometry identities

پوهيرو چي  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  يو الجبري  
مطابقت دی، ځکه د  $a$  او  $b$  په ټولو قيمتونو سره د  
مساوات داوړه خواوي برابرېږي.

آيا  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  يا  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  مطابقته کيدلی شي؟

### الهام فعاليت

- په لاندي جدول کې د  $\alpha$  د مختلفو قيمتونو لپاره د  $A$  او  $B$  افادو قيمتونه بشپړ کړئ.

$\alpha$	$A = \frac{\cot \alpha}{\csc \alpha - 1}$	$B = \frac{\csc \alpha + 1}{\cot \alpha}$
$0^\circ$		
$30^\circ$		
$45^\circ$		
$60^\circ$		
$90^\circ$		

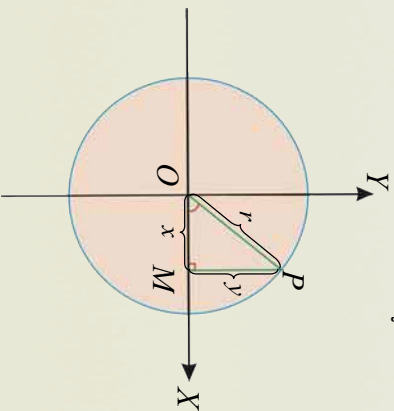
- د جدول له بشپړولو څخه وروسته د  $A$  او  $B$  قيمتونه پرتله او اړيکه يې وليکئ.  
له پورتنی فعالیت څخه لاندي تعريف لاسته راځي.

**تعريف:** هغه مثالتي مساوات چې د زاويې په ټولو قيمتونو سره ، د مساوات داوړه خواوي برابرې شي ،

مثالتي مطابقته بلل کېږي، لکه:

$$\frac{\cot \alpha}{\csc \alpha - 1} = \frac{\csc \alpha + 1}{\cot \alpha}$$

که  $\alpha$  هر قيمت واخلي ، د پورته مساوات داوړه خواوي مساوي کېږي.



د  $\alpha$  د زاويې د هر قيمت لپاره د  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  مطابقت ثبوت کړئ.

**ثبوت:** د  $C(O, r)$  په مثلثاتي دايره کې د  $OMP$  په قايم-الزاويه مثلث کې گورو او ليکلی شو چې:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} \quad \text{او} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

له بلې خوا د فيثاغورث له قضیې څخه لرو:

$$y^2 + x^2 = r^2$$

د مساوات دواړه خواوې په  $r^2$  وپشو:

$$\left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

اوس د  $\frac{y}{r}$  په ځای او  $\frac{x}{r}$  په ځای  $\cos \alpha$  ليکو.

نو ليکلی شو:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  یا  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

مثلثاتي اساسي اړيکې عبارت دي له:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha, \quad 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

د مثلثاتو فرعي اړيکې عبارت دي له:

$$\begin{aligned} \sec \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha}, & \cos \alpha \cdot \sec \alpha &= 1 \\ \csc \alpha &= \frac{1}{\sin \alpha}, & \sin \alpha \cdot \csc \alpha &= 1 \\ \tan \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, & \tan \alpha \cdot \cot \alpha &= 1, & \cot \alpha &= \frac{1}{\tan \alpha} \end{aligned}$$

اوس غواړو د  $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$  اړيکه ثبوت کړو.

**ثبوت:** د فيثاغورث د قضیې په کارلو سره ليکو  $x^2 + y^2 = r^2$

$$\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} \Rightarrow 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{r}{x}\right)^2.$$

د مساوات دواړه خواوې په  $x^2$  وپشو.

په نتيجه کې په پورته افاده کې د  $\frac{y}{x}$  او  $\frac{r}{x}$  د قيمتونو په ليکلو سره ليکو:  $1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$

- د مثلثاتي نسبتونو په کارولو سره ثبوت کړئ چې :  $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$   
 په عمومي توگه د مطابقتونو د حل يا ثبوت لپاره د مساوات له پورې خوا له افادې څخه د بلي خوا افاده لاسته راوړو، يعنې يوې خواته مختلفې عمليې لکه مربع کول، تجزيه، ضرب او نوري عمليې سرته رسوو، خو د بلي خوا افاده لاسته راشي، که چېرې په يوه الجبري افاده کې مثلثاتي نسبتونه يوه يا څو زاويې وي، مثلثاتي افاده بلل کېږي، د مثلثاتي اړيکو په واسطه مثلثاتي افادې ساده کولی شو.  
 د موضوع دلايه پوهېدو لپاره لاندي لارښوونې او مثالونه په پام کې ونيسئ.

لوړوی مثال : د  $\frac{\sin \alpha \cos \alpha \cdot \tan \alpha \cot \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$  مثلثاتي افاده ساده کړئ.

حل :

$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

دويم مثال : د  $\sin^2 \beta \cdot \cot^2 \beta + \cos^2 \beta \cdot \tan^2 \beta = 1 + \tan^2 \beta$  مطابق ثبوت کړئ.

حل : په لاندي ډول افاده ساده کوو:

$$\begin{aligned} \sin^2 \beta \cot^2 \beta + \cos^2 \beta \tan^2 \beta + \tan^2 \beta &= \sin^2 \beta \frac{\cos^2 \beta}{\sin^2 \beta} + \cos^2 \beta \cdot \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} \\ + \tan^2 \beta &= \cos^2 \beta + \sin^2 \beta + \tan^2 \beta = 1 + \tan^2 \beta \end{aligned}$$

دريم مثال : لاندي افاده د  $\cos \beta$  له جنسه حساب کړئ.

$$(1 - \sin^2 \beta) (1 + \sec^2 \beta) = ?$$

حل :  $(1 - \sin^2 \beta)(1 + \sec^2 \beta) = \cos^2 \beta \left(1 + \frac{1}{\cos^2 \beta}\right) = \cos^2 \beta \left(\frac{\cos^2 \beta + 1}{\cos^2 \beta}\right) = \cos^2 \beta + 1$

**خلوردم مثال:** ثبوت کریں چي  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$   
 حل: د مطابق د کچي اوج قوسونو ته انکشاف ورکرو.

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 2$$

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 2$$

$$2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2 \cdot 1 = 2$$

**پنجم مثال:** لاندی مطابق ثبوت کریں.

$$\frac{\sin A}{1 + \cos A} + \frac{1 + \cos A}{\sin A} = 2 \csc A$$

**حل:**

$$\frac{\sin A}{1 + \cos A} + \frac{1 + \cos A}{\sin A} = 2 \csc A$$

$$\frac{\sin^2 A + (1 + \cos A)^2}{\sin A(1 + \cos A)} = \frac{\sin^2 A + 1 + 2 \cos A + \cos^2 A}{\sin A(1 + \cos A)} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A + 1 + 2 \cos A}{\sin A(1 + \cos A)}$$

$$\frac{1 + 1 + 2 \cos A}{\sin A(1 + \cos A)} = \frac{2(1 + \cos A)}{\sin A(1 + \cos A)} = 2 \cdot \frac{1}{\sin A} = 2 \csc A$$

**شپوم مثال:** وښايست چي  $\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} = \tan^2 A$

**حل:**

$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$

$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

$\frac{1}{\csc^2 A}$

$$\frac{\sec^2 A}{\csc^2 A} = \tan^2 A \Rightarrow \frac{\frac{1}{\csc^2 A}}{\frac{1}{\sin^2 A}} = \frac{\sin^2 A}{\csc^2 A} = \tan^2 A$$

$$\tan^2 A = \tan^2 A$$

اووم مثال : لاندی مطابقت ثبوت کریں:

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)(\cot \alpha + \tan \alpha) = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha}$$

حل : د کئی خواہہ افادہ کی د  $\cot \alpha$  او  $\tan \alpha$  قیمتہ نہ د  $\sin \alpha$  او  $\cos \alpha$  لہ جنبہ اپرو۔

$$\begin{aligned} & (\sin \alpha + \cos \alpha) \left( \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) \\ &= (\sin \alpha + \cos \alpha) \left( \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \right) = (\sin \alpha + \cos \alpha) \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} \\ &= \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \\ & (\sin \alpha + \cos \alpha)(\cot \alpha + \tan \alpha) = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

اتم مثال : د  $\tan x + \cot y = \frac{\cos(x-y)}{\cos x \sin y}$  مطابقت ثبوت کریں:

حل :

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x-y)}{\cos x \sin y} &= \frac{\cos x \cos y + \sin x \sin y}{\cos x \sin y} \\ &= \frac{\cos x \cos y}{\cos x \sin y} + \frac{\sin x \sin y}{\cos x \sin y} \Rightarrow \frac{\cos y}{\sin y} + \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \cot y + \tan x = \tan x + \cot y \end{aligned}$$

نہم مثال : د  $\frac{\sin^2 x}{2} = \frac{\tan x - \sin x}{2 \tan x}$  مطابقت ثبوت کریں:

حل : پوہپرو چپی  $\frac{\sin^2 x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$  دی۔

اوس د معادلی دواہہ خواہی پہ  $\frac{\tan x}{\tan x}$  کی ضرورہ نو:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{2} &= \frac{\tan x - \sin x}{2 \tan x} \\ &= \frac{\tan x}{\tan x} \cdot \frac{1 - \cos x}{2} = \frac{\tan x - \tan x \cos x}{2 \tan x} \\ &= \frac{\tan x - \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right) \cos x}{2 \tan x} = \frac{\tan x - \sin x}{2 \tan x} \end{aligned}$$

لسم مثال : د  $2 \sec x = \frac{1 + \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$  مطابقت ثبوت کړئ.

حل:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} &= \frac{(1 + \sin x)^2 + \cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} \\ &= \frac{1 + 2 \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)} \\ &= \frac{1 + 2 \sin x + 1}{\cos x(1 + \sin x)} \\ &= \frac{2 + 2 \sin x}{\cos x(1 + \sin x)} \\ &= \frac{2(1 + \sin x)}{\cos x(1 + \sin x)} = 2 \cdot \frac{1}{\cos x} \\ &= 2 \sec x \end{aligned}$$

### پوښتني



1. د مثالونو د اساسي اړیکو په پام کې نیولو سره د هرې پوښتنې معادل افاده پیدا کړئ:

a)  $\frac{\sin 250^\circ}{\cos 250^\circ}$

b)  $\sqrt{\sec^2 \beta - 1}$

c)  $\frac{1}{\cos 80^\circ}$

2. هره افاده د  $\sin \beta$  له جنسه پیدا کړئ.

a)  $\cot \beta \cos \beta$

b)  $\cot^2 \beta$

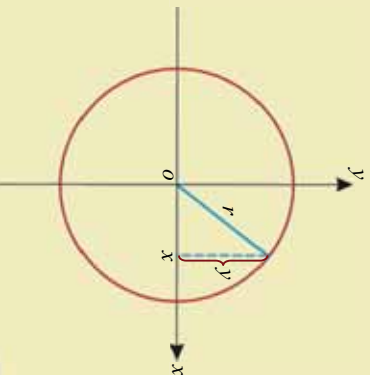
3. لاندې مطابقتونه ثبوت کړئ.

a)  $\frac{\cos \operatorname{csc} \alpha}{\cot \alpha \tan \alpha + \tan \alpha} = \cos \alpha$

b)  $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cos 2x$

c)  $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \operatorname{tag} \alpha$

d)  $\frac{\tan x - \cot x}{\tan + \cot x} = 1 - 2 \cos^2 x$



## مثلثاتي معادلي Trigonometric equation

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  يو مثلثاتي مطابقت دی،

آيا  $\sin \alpha + \cos \alpha = 1$  يو مطابقت دی که يوه

معادله؟

## فعاليت

- په لاندي جدول کي د  $1 - 2 \sin \beta = 0$  او  $1 + \tan^2 \beta = \sec^2 \beta$  د کومو قيمتونو لپاره صحيح دي.

$\beta$	$1 - 2 \sin \beta = 0$	$1 + \tan^2 \beta = \sec^2 \beta$
$0^\circ$		
$30^\circ$		
$60^\circ$		
$90^\circ$		

- د  $\beta$  د مختلفو قيمتونو لپاره د  $1 + \tan^2 \beta = \sec^2 \beta$  او  $1 - 2 \sin \beta = 0$  ترمنځ څه پل اړيکي شتون لري.

– آيا  $1 + \tan^2 \beta = \sec^2 \beta$  يو مطابقت دی، که يوه معادله؟

– آيا  $1 - 2 \sin \beta = 0$  يو مطابقت دی، که يوه معادله؟

له پورتنی فعالیت څخه لاندي تعريف په لاس راځي.

**تعريف:** هغه مثلثاتي مساوات چې د زاوي په ځينو قيمتونو سره د مساوات دواړه خواوي مساوي کېږي، مثلثاتي معادله بلل کېږي.

هر مثلثاتي مطابقت يوه معادله کېدای شي، خو هره مثلثاتي معادله، مثلثاتي مطابقت نه شي کېدلای. هره مثلثاتي معادله له لاندي څلورو حالتونو څخه به يو حالت باندي حلولاى شو.

**لومړی حالت:** د  $a \sin \alpha + b = 0$  معادله د پورتنۍ معادلې په حل کې د مناسب ځواب د پیدا کولو

لپاره لاندې مثالونه په پام کې ونیسئ.

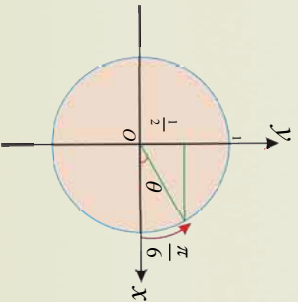
**مثال:** د  $2 \sin x - 1 = 0$  مثلثي معادلې د حل سټ پیدا کړئ.

**حل:** لومړی د  $\sin x$  لاسته راوړو:  $\frac{1}{2} \sin x = 1 \Rightarrow 2 \sin x = 1 \Rightarrow 2 \sin x - 1 = 0$

اوس د  $\left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$  په انټروال کې هغه زاویه پیدا کړو

چې  $\sin$  یې  $\frac{1}{2}$  شي.

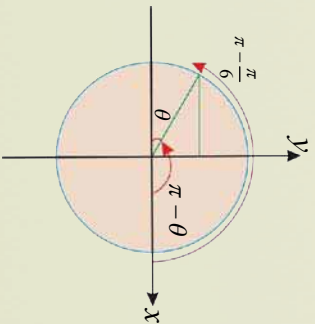
$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6}$$



یوه مثلثي دایره په پام کې نیسو او هغه زاوې پیدا کړو

چې  $\sin$  یې  $\frac{1}{2}$  وي.

$$x = \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6}, \dots, 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$



په دویمه مثلثي دایره کې  $(\pi - \theta)$  له رابطې څخه

هغه زاوې پیدا کړو چې  $\sin$  یې  $\frac{1}{2}$  وي.

$$x = \pi - \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}, 5\pi - \frac{\pi}{6}, \dots, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

نو د  $\sin x = \frac{1}{2}$  د معادلې حل په لاندې دوو سټونو کې دی.

$$A_1 = \left\{ \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6}, \dots, 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$A_2 = \left\{ \pi - \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}, 5\pi - \frac{\pi}{6}, \dots, (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

په عمومي ډول پورتنۍ سټونه په لاندې ډول لیکلی شو:

$$A_1 \cup A_2 = A = \left\{ x / x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \vee x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$



**دویم مثال :** د  $2 \sin x - 3 = 0$  مثلثي معادلي د حل سټ پیدا کړئ.

**حل :**  $2 \sin x - 3 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{3}{2}$

اوس د  $\left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$  په انټروال کې هغه زاویه پیدا کوو چې  $\sin x = \frac{3}{2}$  شي، دا چې د هرې زاوې  $\sin$  د

$-1$  او  $+1$  په منځ ( $-1 \leq \sin x \leq 1$ ) دی، نو هغه زاویه چې  $\sin$  یې  $\frac{3}{2}$  وي، وجود نه لري، نو په دې

اساس معادله حل نه لري.

**دویم حالت:**  $a \cos x + b = 0$

د پورتنۍ معادلي د حل مناسب ځواب د پیدا کولو لپاره لاندې مثالونو ته پام وکړئ.

**لومړی مثال :** د  $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$  مثلثي معادلي د حل سټ پیدا کړئ.

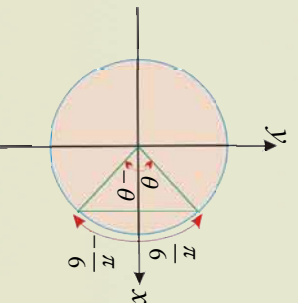
**حل :** له پورتنۍ معادلي څخه  $\cos x$  لاسته راوړو:

$$2 \cos x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2 \cos x = \sqrt{3} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

اوس د  $[0, \pi]$  په انټروال کې هغه زاویه پیدا کوو یا

لټوو چې  $\cos$  یې  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  وي، هغه له  $\frac{\pi}{6}$  څخه

عبارت دی، نو لیکلی شو چې  $\frac{\pi}{6} = \cos x$ .



اوس د مثلثي دایرې په پام کې نیولو سره ټولې هغه زاوې چې  $\frac{\pi}{6} = \cos x$  وي، پیدا کوو.

$$x = \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 4\pi + \frac{\pi}{6} \dots$$

$$x = -\frac{\pi}{6}, 2\pi - \frac{\pi}{6}, 4\pi - \frac{\pi}{6}$$

په عمومي توګه د پورتنیو حلونو سټ داسې لیکل کېږي:  $x = 2n\pi \pm \theta$

$$A = \left\{ x / x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \wedge x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

په عمومي توګه د هرې  $\theta$  زاوې لپاره لیکو:

$$A = \{ x / x = 2k\pi + \theta \wedge x = 2k\pi - \theta, k \in \mathbb{Z} \}$$

**دویم مثال :** د  $2 \cos x + \sqrt{2} = 0$  معادله په  $(0, 2\pi)$  انټروال کې خوځولنه لري؟

**حل :**  $2 \cos x = -\sqrt{2} \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

له بلې خوا پوهېږو چې د  $(0, 2\pi)$  په انټروال کې  $\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos x$  کېږي.

له دې امله د معادلې حل  $x = \frac{3\pi}{4}$  په لاس راځي.

د حل سټې بې مساوي دی له:

$$A = \left\{ x \mid x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \wedge x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

لیلل کېږي چې معادله د  $(0, 2\pi)$  په انټروال کې دوه حلونه لري.

$$x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \xrightarrow{k=0} x_1 = \frac{3\pi}{4}$$

$$x = 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \xrightarrow{k=1} x_2 = \frac{5\pi}{4}$$

**درېم حالت:**  $\tan x + b = 0$

د عمومي حل د پیدا کولو لپاره لاندې مثالونو ته څیر شئ.

**مثال :**  $\tan x - \sqrt{3} = 0$  حل کړئ.

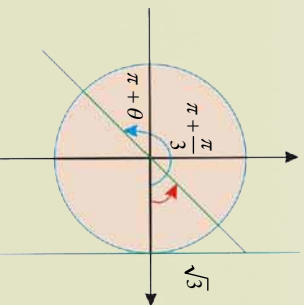
**حل :** له پورتنۍ تساوي څخه  $\tan x$  په لاس راوړو:  $\tan x = \sqrt{3}$

اوس د  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  په انټروال کې د  $x$  هغه زاویه لټوو چې  $\tan x = \sqrt{3}$  وي او هغه زاویه له  $60^\circ$  څخه عبارت دی.

له دې امله پورتنۍ معادله د  $\tan x = \tan \frac{\pi}{3}$  په صورت لاسته راځي، په مثلثي دایره کې وینو چې کومې زاويې له  $\frac{\pi}{3}$  سره مساوي دي.

$$x = \left\{ \frac{\pi}{3}, 2\pi + \frac{\pi}{3}, 4\pi + \frac{\pi}{3}, \dots \right\}$$

$$x = \left\{ \pi + \frac{\pi}{3}, 3\pi + \frac{\pi}{3}, 5\pi + \frac{\pi}{3}, \dots \right\}$$



$$A = \left\{ x / x = k\pi + \frac{\pi}{3} \quad k \in Z \right\}$$

په عمومي ډول پورتنی ستونډه داسې ليکلی شو چې:

$$A = \left\{ x / x = k\pi + \theta, \quad k \in Z \right\}$$

يا په عمومي ډول د هرې  $\theta$  زاويې لپاره لرو چې:

**دويم مثال:** لاندي معادله حل کړی.

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan x = \tan \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

حل:

$$A = \left\{ x / x = k\pi + \frac{\pi}{6} \quad k \in Z \right\}$$

د معادلي د حل سټ

**درېم مثال:** د  $\tan(2x - \frac{\pi}{4}) = \tan(x + \frac{\pi}{3})$  د معادلي حلونه د  $[0, 2\pi]$  په انټروال کې لاسته راوړی.

حل:

$$\tan(2x - \frac{\pi}{4}) = \tan(x + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = k\pi + (x + \frac{\pi}{3})$$

$$2x - x = k\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$$

د  $k$  پر ځای صحيح عددونه ليکو، تر څو زاويې چې د  $[0, 2\pi]$  په انټروال کې دي، لاسته راشي.

$$x = k\pi + \frac{7\pi}{12} \begin{cases} \xrightarrow{k=0} x_1 = \frac{7\pi}{12} \\ \xrightarrow{k=1} x_2 = \pi + \frac{7\pi}{12} = \frac{19\pi}{12} \end{cases}$$

**څلورم حالت:** د  $\cot x + b = 0$  معادله، د معادلي د عمومي حل لپاره لاندي مثالونو ته پام وکړی.

**لومړی مثال:** د  $\cot x - 1 = 0$  معادله حل کړی.

حل: له پورتنی معادلي څخه  $\cot x$  پيدا کوو:  $\cot x = 1 \Rightarrow \cot x - 1 = 0$

اوس د  $[0, 2\pi]$  په انټروال کې هغه زاويه گورو چې  $\cot$  يې  $(+1)$  وي او هغه زاويه له  $\frac{\pi}{4}$  يا  $45^\circ$  څخه

عبارت ده:



$$\text{نو: } \cot x = \cot \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}, 4\pi + \frac{\pi}{4}, \dots$$

$$x = \pi + \frac{\pi}{4}, 3\pi + \frac{\pi}{4}, 5\pi + \frac{\pi}{4}, \dots$$

نو د معادلي د حل سټ په لاندي ډول دی.

$$A_1 = \left\{ \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}, 4\pi + \frac{\pi}{4}, \dots \right\}$$

$$A_2 = \left\{ \pi + \frac{\pi}{4}, 3\pi + \frac{\pi}{4}, 5\pi + \frac{\pi}{4}, \dots \right\}$$

$$A = \left\{ x/x = k\pi + \frac{\pi}{4}, (2k+1)\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$A = \{x/x = k\pi + \theta \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

یا په عمومي ډول د هرې  $\theta$  زاويې لپاره داسې لیکو:

**دريم مثال:** د  $\cot 3x = \cot x$  معادله حل کړئ.

**حل:**

$$\cot 3x = \cot x \Rightarrow 3x = k\pi + x = 3x - x = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



**پوښتني**

د لاندي معادلو د عمومي حل ځوابونه پيدا کړئ.

a)  $3 \cos x + 5 = 0$

b)  $4 \tan x + \cot x - 5 = 0$

c)  $\tan x = \sqrt{3}$

## دويمه درجه مثلثاتي معادلي

په تېرو درسونو کې مو ساده مثلثاتي معادلي حل کړي دي او س دويمه درجه مثلثاتي معادلي خپرو. د مثلثاتي معادلي

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \sin x \cos x = d$$

عمومي شکل عبارت دی لـه:

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \sin x \cos x = d$$

،  $a, b, c$  او  $d$  ثابت عددونه دي.

**لومړی مثال:** د  $6 \sin^2 x - 5 \sin x + 1 = 0$  معادله حل کړئ.

**حل:** په پورتنۍ معادله کې د  $\sin x$  پر ځای  $y$  لیکو، او معادله داسې لیکلی شو:

$$6y^2 - 5y + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(6)(1)$$

$$\Delta = 25 - 24 \Rightarrow \Delta = 1$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{12}, \quad y_1 = \frac{5+1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$y_1 = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = y_1 = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = y_2 = \frac{1}{3}$$

په دې ډول هغه کوچني زاويه چې  $\sin$  يې  $\frac{1}{2}$  وي، له  $\frac{\pi}{6}$  څخه عبارت ده نو:

$$A = \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad k \in Z$$

او يا لیکلی شو چې:

$$x = n\pi + (-1)^n \alpha \Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

په همدې ډول د  $\sin x = \frac{1}{3}$  لپاره ډېره کوچنۍ زاويه 0.33 ده او د مثلثاتي جدول له مخې د  $\sin x = \frac{1}{3}$  لپاره  $19^\circ 30'$  يا  $\frac{13\pi}{120}$  دی.

$$A = \left\{ \begin{array}{l} x = 2k\pi + \frac{13\pi}{120} \\ x = (2k+1)\pi - \frac{13\pi}{120} \end{array} \right. \quad k \in Z$$

**دویم مثال:** د  $\cos 2x + \sin x = 0$  معادلې د حل سټي پيدا کړئ.

**حل:** پوره کړو چې  $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$  دی، نو لیکلی شو چې:

$$\begin{aligned} 1 - 2\sin^2 x + \sin x &= 0 \\ 2\sin^2 x - \sin x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

که چېرې په پورتنۍ معادلې کې د  $\sin x$  په ځای  $y$  وضع کړو، نو لیکو:

$$\begin{aligned} 2y^2 - y - 1 &= 0 \Rightarrow (2y+1)(y-1) = 0 \\ 2y+1 &= 0 \Rightarrow 2y = -1 \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2} \\ y-1 &= 0 \Rightarrow y_2 = 1 \end{aligned}$$

د  $\sin x = y$  د تعویض لپاره چې مو په پام کې نیولی دی، نو د لاسته راغلو قیمتونو لپاره لرو چې:

$$\begin{aligned} \sin x = y_1 &= -\frac{1}{2} \\ \sin x = y_2 &= 1 \end{aligned}$$

په دې ډول د  $\sin x = -\frac{1}{2}$  لپاره هغه کوچنۍ زاويه چې  $\sin$  یې  $-\frac{1}{2}$  وي له  $\frac{7\pi}{3}$  څخه عبارت ده.

بنا پر دي د حلونو سست ټپي عبارت دی له:

$$A = \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

$$A_1 = \left\{ \frac{\pi}{2}, 2\pi + \frac{\pi}{2}, 4\pi + \frac{\pi}{2}, \dots \right\}$$

$$A_2 = \left\{ 2\pi + \frac{7\pi}{6}, 4\pi + \frac{7\pi}{6}, 6\pi + \frac{7\pi}{6}, \dots \right\}$$

یا په عمومي ډول:

$$A = \left\{ x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}, x = 2n\pi + \frac{7\pi}{6}, n = 0, 1, 2, 3, \dots \right\}$$

**درېم مثال:** د  $2 \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x = 0$  معادله حل کړئ.

**حل:**

$$\sin x (2 \sin x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x_1 = 0^\circ$$

$$2 \sin x - \sqrt{2} = 0$$

$$2 \sin x = \sqrt{2}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{4}$$

د معادلې د حلونو سست عبارت دی له:

$$A_1 = \{0^\circ, \pi, 3\pi, 5\pi, \dots\}$$

$$A_2 = \{2\pi, 4\pi, \dots\}$$

په عمومي توګه لیکلای شو:

$$x = n\pi + (-1)^n \theta$$

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$$

### پوڀڻي



د لاندې معادلو د حل سټونه پيدا كړئ:

$$\cos 2x + 1 = 2 \sin^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$3 \cos^2 x + 2 \cos x - 5 = 0 \quad -2$$

$$\sin^2 x - (1 - \sqrt{3}) \sin x \cdot \cos x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0 \quad -3$$



$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \\ \cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

## د دوه مجهولہ مثلثاتی معادلو یا سیستمونو حل

د الجبري معادلو سیستم مو حل کر. آیا د مثلثاتی معادلو سیستم حل لای شی؟

دغه معادلي په شپږو گروپونو باندې وېشلې شو:

لومړی گروپ: د دغه گروپ معادلي په لاندې اتو سیستمونو کې راټولې شوې دي.

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

خړنگه چې  $a$  معلوم عدد او  $\alpha$  معلوم قوس یا زاویه ده،  $x$  او  $y$  مجهول قوسونه یا زاوې دي، یو له دغو سیستمونو څخه حلوو:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a \dots I \\ x + y = \alpha \dots II \end{cases}$$

د لومړی معادلي قیمت د ضرب د فورمولونو په کارولو سره لیکو، ځکه چې د دوو سینونو مجموعه ده.

$$\sin x + \sin y = a$$

$$\begin{cases} 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a \dots I \\ x + y = \alpha \dots II \end{cases}$$

په دې اساس:

اوس له  $II$  معادلي څخه د  $x + y$  قیمت یعنې  $a$  د  $I$  په معادله کې اېرود:

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a \dots I$$

د  $I$  اړیکې دواړه خواوې په  $2 \sin \frac{\alpha}{2}$  باندې وېشو:

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

تېصوره: د پورتنی معادلي ښی لوری له  $+1$  څخه لوی او له  $-1$  څخه کوچنی نه دی، ځکه چې د قوس یا زاوې سین دی. یا په بل عبارت مربع یې له یو څخه لوی نه دی.

$$-1 \leq \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} \leq 1$$

پورتنی غیر مساوات د  $1 < \frac{a}{\alpha \sin \frac{\alpha}{2}} < 0$ ، په شکل لیکو بیا یې دواړه خواوې مربع کوو:

$$\frac{a^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \leq 1$$

دواړه خواوې په  $0 \neq 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  کې ضربوو:

$$a^2 \leq 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$a^2 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq 0$$

پورتنی اړیکه د سیستم د حل له شرط څخه عبارت ده.

لومړی مثال: د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ x + y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

حل: په پورتنی سیستم کې  $a = 1$  او  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  دی، وینو چې راکړل شوی شرط د سیستم د حل لپاره

$$a^2 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \leq 0 \quad \text{صدق کوي او که نه؟}$$

د  $a$  او  $\alpha$  قیمتونه په پورتنی اړیکه کې اېږدو:

$$1 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{4} \leq 0 \Rightarrow 1 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{4} \leq 0 \Rightarrow 1 - 4 \left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^2 \leq 0$$

$$1 - 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow 1 - 4 \frac{2}{4} \leq 0 \Rightarrow 1 - 2 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq 0$$

لیدل کېږي چې سیستم د حل وړ دی، نو د تحويل د فورمولونو په مرسته د لومړي معادلې کین لوری شکل

$$\text{ته تغیر ورکوو: } 1 = \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{x-y}{2} = 1 \quad \text{خړنگه چې } x+y = \frac{\pi}{2} \text{ له دې امله } \frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{4} \text{ کېږي نو:}$$

$$2 \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \cos \frac{x-y}{2} = 1$$

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos \frac{x-y}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x-y = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} x-y = \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots I \\ x+y = \frac{\pi}{2} \dots\dots\dots II \end{cases} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

د  $x$  قیمت په  $I$  معادله کې اېږدو نو د  $y$  قیمت په لاس راځي:

$$\frac{\pi}{2} - y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \\ y = 0$$

**دویم ګروپ:** ددغه ګروپ اړوند سیستمونه په لاندې ډول دي:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \cos y = a \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

خړنگه چې  $a$  معلوم عدد او  $\alpha$  معلوم قوس یا زاویه ده.  $x$  او  $y$  مجهول قوسونه یا زاوې دي.

$$\text{د سیستم د حل شرط عبارت دی له: } -\cos^2 \frac{\alpha}{2} \leq a \leq \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

**دویم مثال:** د لاندې معادلو سیستم حل کړي.

$$\begin{cases} x+y = \pi \\ \sin x \sin y = 1 \end{cases}$$

حل: په پورتنۍ سیستم کې  $a = 1$ ،  $\alpha = \pi$  دی ددغو معادلو د حل د امکان شرط عبارت دی له:

$$-\cos^2 \frac{\alpha}{2} \leq a \leq \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$-\cos^2 \frac{\alpha}{2} = -\cos^2 \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$$

د سیستم د حل شرط ته په کتنې سره کولای شو ولیکو:

$$-\cos^2 \frac{\pi}{2} \leq a \leq \sin^2 \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq a \leq 1$$

د II معادلې کین لوری د تبدیل د فورمول په کارولو سره لاندې څانته غوره کوي:

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

خړنگه چې  $\sin x \sin y = 1$ ، بنا پر دې،

$$\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2$$

له بلې خوا  $x + y = \pi$  دی نو:  $\cos \pi = -1$  همدا رنگه پوهیږو چې  $\cos \pi = -1$  دی.

نو:

$$\cos(x - y) - (-1) = 2 \Rightarrow \cos(x - y) + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \cos(x - y) = 2 - 1 \Rightarrow \cos(x - y) = 1$$

$$\cos(x - y) = \cos 0^\circ$$

$$x - y = 0 \Rightarrow x = y$$

د I له معادلې څخه د  $x$  قیمت پیدا کوو:

$$x + y = \pi \Rightarrow x + x = \pi \Rightarrow 2x = \pi$$

$$x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = y = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2}$$

دریم گروپ: دغه گروپ څلور لاندې سیستمونه تشکیلوي، چې عبارت دي له:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases} \quad \begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$$

چې  $\alpha$  معلومه زاویه او  $a$  معلوم عدد دی.  $x$  او  $y$  مجهول قوسونه یا زاوې دي.

دریم مثال: لاندې مثلثي سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{3} \end{cases}$$

حل: لیدل کېږي چې دغه سیستم له دریم گروپ سره مطابقت لري نو، په لاندې ډول کرښه کوو یعنې د سیستم

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

دویمه معادله د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره داسې لیکو:

$$d \quad \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad \text{او} \quad \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

پورتنی اړیکه کې اېږدو:

$$\frac{2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}}{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

خړنگه چې  $\frac{\pi}{2} = x + y$  دی، نو  $\frac{\pi}{4} = \frac{x+y}{2}$  سره کېږي.

$$\cot \frac{\pi}{4} \tan \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

له بلې خوا  $1 = \cot \frac{\pi}{4}$  دی نو معادله لاندې شکل خائنه غوره کوي:

$$\tan \frac{x-y}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$\tan \frac{x-y}{2} = \tan 15^\circ \Rightarrow \frac{x-y}{2} = 15^\circ$$

$$x-y = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} \\ x-y = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

د معادلو سیستم حلو:

$$2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

$$x = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

اوس د  $x$  قيمت په پورتنۍ يوه معادله کې اېږدو او د  $y$  قيمت په لاس راځي:

$$x - y = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{3} - y = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = y \Rightarrow \frac{2\pi - \pi}{6} = y$$

$$y = \frac{\pi}{6}$$

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3} \text{ او } y = m\pi + (-1)^m \frac{\pi}{6}$$

**څلورم گروپ:** دغه گروپ اته لاندې سيستمونه تشکيلوي:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan y = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases}$$

خړنگه چې  $\alpha$  معلومه زاويه او  $a$  معلوم عدد دی.  $x$  او  $y$  مجهول قوسونه يا زاويې دي.

د سيستم د حل شرط عبارت دی، له:  $a^2 - 4 + 4a \cot \alpha \geq 0$

**څلورم مثال:** د لاندې معادلو سيستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \tan x - \tan y = -2\sqrt{3} \end{cases}$$

**حل:** کولی شو لومړی معادله داسې وليکو:  $\tan(x - y) = \tan \frac{\pi}{3}$

له بلې خوا پوهېږو چې  $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y} = \sqrt{3}$

$$\frac{-2\sqrt{3}}{1 + \tan x \cdot \tan y} = \sqrt{3} \quad \text{د } \tan x - \tan y = -2\sqrt{3} \text{ قيمت په پاسني معادله کې اېږدو:}$$

د مساوات دواړه خواوې په  $\sqrt{3}$  باندې وېشئ او ليکو.

$$\frac{-2}{1 + \tan x \cdot \tan y} = 1 \Rightarrow 1 + \tan x \cdot \tan y = -2$$

$$\Rightarrow \tan x \cdot \tan y = -3$$

$$\begin{cases} \tan x \cdot \tan y = -3 \dots\dots\dots \text{I} \\ \tan x - \tan y = -2\sqrt{3} \dots\dots\dots \text{II} \end{cases} \quad \text{نو:}$$

د  $\tan x$  قیمت له II معادلي څخه په لاس راوړو په I کې يې اېږدو:

$$\tan x = -2\sqrt{3} + \tan y$$

$$(-2\sqrt{3} + \tan y) \tan y = -3$$

$$\tan^2 y - 2\sqrt{3} \tan y + 3 = 0$$

$$(\tan y - \sqrt{3})^2 = 0 \Rightarrow \tan y - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan y = \sqrt{3}$$

$$y = \frac{\pi}{3}$$

هغه مثبت کوچنی قوس چې په دغه معادله کې صدق کوي، عبارت دی له:  $y = \frac{\pi}{3}$

د  $y$  د قیمت په پام کې نیولو سره د I له معادلي څخه د  $x$  قیمت په لاس راوړو.

$$\tan x \cdot \tan y = -3$$

$$\tan x \cdot \sqrt{3} = -3 \Rightarrow \tan x = \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

$$x = 2\frac{\pi}{3}$$

**پنځم گروپ:** دغه گروپ لاندې دوه سیستمونه تشکیلوي:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \cdot \tan y = a \end{cases}$$

د تیر په څېر بیا هم  $\alpha$  معلومه زاویه او  $a$  معلوم عدد دی.  $x$  او  $y$  معلوم قوسونه یا زاوې دي.

دپورتني سیستم د حل شرط عبارت دی، له:  $-1 \leq \frac{1+a}{1-a} \cos \alpha \leq 1$

**پنځم مثال:** د لاندې معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x + y = 7\frac{\pi}{6} \\ \tan x \cdot \tan y = 0 \end{cases}$$

لیدل کېږي چې دغه سیستم په پنځم گروپ پورې اړه لري او په لاندې ډول يې حلوو:

$$\tan x \tan y = \frac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)] \text{ او } \sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

د قيمتونه په اړونده اړيکه کې اېږدو.

$$\tan x \tan y = \frac{\frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]}{\frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]}$$

د  $x + y$  قيمت د سيستم له لومړي معادلې څخه په پورتنۍ اړيکه کې اېږدو:

$$\tan x \cdot \tan y = \frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}}$$

څرنگه چې  $\tan x \cdot \tan y = 0$  سره راکړل شوی دی، نو لیکو:

$$\frac{\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6}}{\cos(x-y) + \cos 7\frac{\pi}{6}} = 0$$

ددې لپاره چې کسر مساوي په صفر شي، نو بايد صورت يې له صفر سره برابر شي؛ يعنې:

$$\cos(x-y) - \cos 7\frac{\pi}{6} = 0$$

$$\cos 7\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(x-y) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\cos(x-y) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x-y = \frac{5\pi}{6}$$

هغه کوچني قوس چې په معادله کې صدق کوي، عبارت دی له:

نوموړی سيستم حلوو:

$$\begin{cases} x-y = 5\frac{\pi}{6} \\ x+y = 7\frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \frac{2x = \frac{5\pi}{6} + 7\frac{\pi}{6}}{2} = \frac{12\pi}{6} = 2\pi, \quad x = \pi$$



د  $x$  قیمت د  $I$  په معادله کې اېږدو او د  $y$  قیمت په لاس راځي:

$$x - y = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \pi - y = 5\frac{\pi}{6}, \quad -y = \frac{5\pi}{6} - \pi$$

$$y = \pi - \frac{5\pi}{6} \Rightarrow y = \frac{6\pi - 5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$y = \frac{\pi}{6}$$

شپږم گروپ: په دغه گروپ کې لاندې سیستمونه شتون لري:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x = a \\ \tan y = a \end{cases}$$

$$-1 \leq \frac{a-1}{a+1} \sin \alpha \leq 1$$

د حل د امکان شرط عبارت دی، له:

شپږم مثال:

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\tan x}{\tan y} = -3 \end{cases}$$

د تناسب د خواصو په پام کې نیولو سره لرو:

$$\frac{\tan x - \tan y}{\tan x + \tan y} = \frac{-3 - 1}{-3 + 1} = 2$$

د مساوات په کټنې خوا کې د صورت او مخخځ قیمتونه د  $\sin$  او  $\cos$  له جنسه داسې اېږدو:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)} &= 2 \\ \frac{\cos x \cos y}{\sin(x+y)} &= 2 \Rightarrow \frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)} = 2 \\ \frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} &= 2 \\ 2 \sin(x+y) &= \sin(x-y) \end{aligned}$$

خړنگه چې  $\frac{\pi}{2} = x - y$  دی، نو:

$$2 \sin(x+y) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sin(x+y) = \frac{1}{2}$$

همه کورچني قوس چي په معادله کي صدق کوي، عبارت دی له:  $\frac{\pi}{6}$  چي د معادلو لاندې سیستم

جوړو:

$$x+y = \frac{\pi}{6}$$

$$x-y = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{6} \dots\dots I \\ x-y = \frac{\pi}{2} \dots\dots II \end{cases}$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi+3\pi}{6} = \frac{4\pi}{6}$$

$$x = \frac{4\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

نوموړی سیستم حلو:

د  $x$  قیمت د  $I$  په معادله کي اېږدو او د  $y$  قیمت په لاس راځي:

$$x+y = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{6} + y = \frac{\pi}{6} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}$$

$$y = \frac{\pi-2\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$$

$$y = -\frac{\pi}{6}$$



د لاندې مثلثاتي معادلو سیستمونه حل او وړایاست چي په کوم گروپ پورې اړه لري؟

$$a) \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{4} \\ \tan x + \tan y = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x-y = \frac{\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \end{cases}$$



## د څپرکي مهم ټکي

د ساين قانون: د  $ABC$  په هر مثلث کې لاندې اړيکي شته:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

پورتنی اړیکه د ساين د قانون په نوم يادېږي.

د کوساين قانون: د  $ABC$  په هر مثلث کې چې دضلعو اوږدوالي يې  $a, b, c$  وي، د ضلعو او زاويو تر منځ لاندې اړيکي شته:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

د  $\tan$  قانون: د  $ABC$  په هر مثلث کې د هغه د ضلعو او زاويو ترمنځ د  $\tan$  له جنسه لاندې اړيکي شته:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}, \quad \frac{c+a}{c-a} = \frac{\tan \frac{C+A}{2}}{\tan \frac{C-A}{2}}, \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan \frac{B+C}{2}}{\tan \frac{B-C}{2}}$$

**مثلاثي مطابقت:** هغه مثلاثي مساوات چې د زاويې د ټولو قيمتونو لپاره د مساواتو دواړه خواوې مساوي شي، مثلاثي مطابقت بلل کېږي.

**مثلاثي معادلي:** هغه مساوات چې د زاويې په ځينو قيمتونو سره دواړه خواوې مساوي شي، معادله بلل کېږي.

د مثلاثي معادلو سيسټمونه

مثلاثي معادلو سيسټمونه په لاندې شپږو گروپونو وېشل شوي دي:

لومړی گروپ:

$$\begin{cases} \sin x \pm \sin y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x \pm \cos y = a \\ x \pm y = \alpha \end{cases}$$

دویم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \sin x \cdot \sin y = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cos x \cdot \cos y = a \end{cases}$$

دریم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$$

خلورم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x \pm \tan y = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \cot x \pm \cot y = a \end{cases}$$

پنجم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \tan x + \tan y = a \end{cases}$$

شپوم گروپ:

$$\begin{cases} x \pm y = \alpha \\ \frac{\tan x}{\tan y} = a \end{cases}$$



## د څپرکي پوښتني

لاندي پوښتني په څپر سره ولولئ، هرې بړې ته څلور څراونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه کړئ.

1. که چيرې  $A = 20^\circ$  ،  $b = 10$  ،  $c = 7$  وي، د  $a$  د ضلعي اوږدوالی عبارت دی له:  
a) 16.4                      b) 16                      c) 15.9                      d) 16.8
2. که چيرې  $a = 8$  ،  $b = 5$  او  $c = 10$  وي، د  $B$  زاويې اندازه عبارت ده له:  
a)  $28^\circ$                       b)  $29^\circ$                       c)  $29.4^\circ$                       d)  $28.5^\circ$
3. که چيرې  $A = 48^\circ$  ،  $B = 22^\circ$  ،  $a = 5$  ،  $B = 22^\circ$  ،  $a = 5$  وي د  $b$  اوږدوالی عبارت دی له:  
a) 8                      b) 8.5                      c) 9                      d) -9.5
4. د  $\sec x(\sec x - \cos x)$  مثلثي مطابق مساوي دی له :  
a)  $\tan x$                       b)  $\frac{1}{\tan x}$                       c)  $\cot x$                       d)  $\tan^2 x$

## لاندي پوښتني حل کړئ.

1. که چيرې د  $A = 30^\circ$  ،  $c = 8$  ،  $b = 5$  واحد وي، د  $a$  ضلع او  $\sin C$  پيدا کړئ.
2. که په يوه مثلث کې  $a = 8$  ،  $b = 5$  ،  $c = 10$  واحد وي، د  $B$  زاويې اندازه پيدا کړئ.
3. د  $ABC$  په مثلث کې که  $\frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  او  $A = 30^\circ$  وي، د  $B$  او  $C$  زاويو اندازه پيدا کړئ.
4. دوي بېړۍ د  $A$  له ټکي څخه په دوو خواوو داسې په حرکت پيل کوي چې د منځ زاويه يې  $30^\circ$  ده، که له يوه ساعت څخه وروسته، لومړۍ بېړۍ  $40 \text{ km}$  او دويمه بېړۍ  $60 \text{ km}$  واټن وهلي وي، د دوو بېړيو ترمنځ واټن پيدا کړئ.
5.  $\cot^2 \beta$  د  $\sin \beta$  او  $\cos \beta$  له جنسه محاسبه کړئ.



6. لاندې مطابقونہ سادہ کریں۔

a)  $\frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A$

b)  $\frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tan^2 A$

c)  $\tan A + \cot A = 2 \operatorname{csc} 2A$

d)  $\frac{1 - \cos A + \cos B - \cos(A+B)}{1 + \cos A - \cos B - \cos(A+B)} = \tan \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2}$

e)  $\frac{\cos A}{1 - \sin A} = \tan\left(45 + \frac{A}{2}\right)$

f)  $\cos \alpha \cos(60 - \alpha) \cos(60 + \alpha) = \frac{1}{4} \cos 3\alpha$

7. لاندې مثلثاتی معادلی حل کریں۔

a)  $\cos^2 x + \cos^4 x = 0$

b)  $\tan^2 x - 4 \tan x + 3 = 0$

c)  $4 \cos \beta - 2 = 0$

d)  $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$

e)  $\cos^2 x + 3 \sin x \cdot \cos x = -1$

8. آیا د  $2 \cos 2x + \sin x - \cos x = 2 \sin^2 x - \cos x$  مساوات یو مطابقت دی او کہ معادلہ؟

9. لاندې افادے سادہ کریں۔

a)  $\frac{2 \tan 15^\circ}{1 - \tan^2 15^\circ}$

b)  $1 - 2 \sin^2 \alpha + \cos 2\alpha = ?$

c)  $\cos 4x + 2 \sin^2 2x$

d)  $(\cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sin^2 x)^2$

10. د لاندې مثلثاتی معادلے سببتمونہ لومری تشخیص او بیانیہ حل کریں۔

a) 
$$\begin{cases} \tan x + \tan y = 1 \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} \sin(x+y) = \cos(x-y) \\ \tan x - \tan y = 1 \end{cases}$$

دریوم خیرگی

فضای هندسه



اقلیدس د دوه اړخیزې (دوه بعدې) او درې  
اړخیزې (درې بعدې) هندسي بنسټ اېښودونکی دی.







## اساسي مفاهيم او اکسيومونه

د اقليدس د هندسي مفاهيمو څېړنې په دوو بعلمونو کې د مسطحي هندسي په نامه يادېږي .  
هغه هندسي مفاهيم ، چې په دريو اړخونو(بعلمونو) کې څيړل کېږي ، فضايي هندسه نومېږي .

## فنايت

- د مفاهيمو په برخه کې لکه لومړنی اصطلاحات ، دليل ، برهان او قضيه په هکله فکر وکړئ . خپل مينځ کې خبرې او د موضوع په هکله بحث وکړئ .

له پورتنۍ بيان او بحث څخه وروسته کولای شو ، لاندي تعريف وکړو :

**لومړنی اصطلاح گاني Postulates** : د هر علم په برخه کې د لومړنيو اصطلاحگانو څخه سترگې پټولای شو د نورو علومو په ډول په هندسه کې هم هغه مفاهيم او مفکورې ، چې پرته له کوم تعريف څخه منل کېږي لومړني اصطلاحات بلل کېږي . لکه: ټکي(نقطه) ، کرښه(خط) ، مستوي او فضا .

**منطقي دليل او برهان Logical Reason**: برهان د ذهن هغه عمل ته ويل کېږي چې له يو لړ محکمنيو سمو وړانديزونو او څېړنو څخه وروستيو څېړنو ته رسېږي چې د هغې سوالی محکمي منل شوی وي . موز هم کولای شو ، هغه و منو .

**قضيه Theorem** : هغه ادعا چې د هغې سوالی او صحت يو لړ منطقي دلايلو ته اړتيا ولري ، قضيه بلل کېږي .

**ټکي(نقطه)** : موز نقطه د يو ذهني مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړنی اصطلاح(تعريف شوي نه ده) په توگه منو .

**مستقيم خط** : کش شوی تار ، دميز څنډه او د خط کش تبغه د مستقيم خط مفهوم او مطلب بيانوي . د مستقيم خط بېلېدونکي علاقي دا دي چې د دوو راکړل شوو ټکو څخه يوازې او يوازې يوه مستقيمه کرښه تيريدلای شي مستقيم خط د لومړنی اصطلاح(تعريف شوی نه دی) په ډول منو .

باید فکر مو وي چې يو مستقيم خط دواړو خواوو ته تر لايتناهي پورې غزېدلای شي .

**لومړی اصل** : دوي ښکاره او ټاکلي نقطې يوازې او يوازې يو مستقيم خط څرگندوي .

**دويم اصل** : هر مستقيم خط لږ تر لږه دوي څرگندي نقطې لري ، چې په يو مستقيم خط باندې واقع نه وي .  
داسې درې نقطې شتون لري چې په يوه مستقيم خط باندې واقع نه وي .

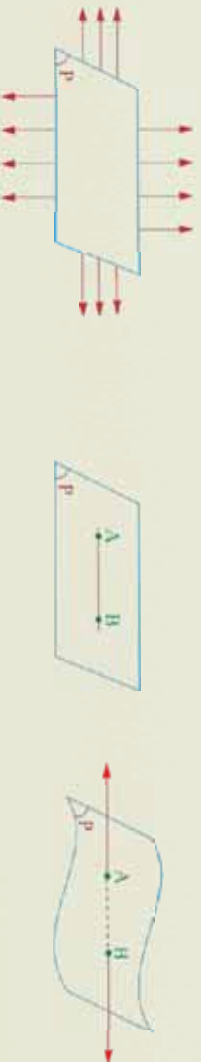
**درېيم اصل** : کولای شو په يوه مستقيم خط باندې د هرو دوو نقطو تر منځ يوه دريمه نقطه په لاس راوړو .

**مستوي** : د ولاړو اوبو سطح او د ټولگي تخنه د مستوي مفهوم څرگندوي او مستوي د لومړنی اصطلاح(تعريف شوي نه ده) په توگه منل کېږي .

**لومړی اصل** : په هره مستوي کې لږ تر لږه درې نقطې شتون لري چې د يوه مستقيم خط په استقامت واقع نه وي .

**دويم اصل** : له هرو دريو نقطو څخه ، چې د يوه مستقيم خط په استقامت پرته نه وي ، يوه مستوي تيرېږي .

**دویم اصل:** که چیرې د یوه مستقیم خط دوی نقطې په یوې مستوي کې وي، دا خط په مستوي کې دی. په مسطحه هندسه کې د مستوي رسمبارونه اړتیا نشته، ځکه چې ټول شکلونه لکه د کاغذ مخ، د لرگي تخته، چې هر یو یې یوه مستوي څرگندوي رسیمې، خو په فضايي هندسه کې د مستوي رسمول ته اړتیا شته، ځکه چې په فضايي هندسه کې مستوي یوه نه، بلکې ډیرې دي. زياتره په فضايي هندسه کې مستوي د متوازي الاضلاع، مستطیل او یا هوارې سطحې په واسطه ښودل کېږي او په یوه کونج کې یې یو توری لیکي.



دا مستوي گانې چې په تېرو شکلونو کې لیدل کېږي، په همدې پراخوالي نه دي، بلکې ترلايتاهي پورې امتداد لري. دا چې مستوي گانې په پورته شکلونو کې لیدل کېږي هغه متوازي الاضلاع او مستطیل نه دي، بلکې د مستوي په یوې هوارې سطحې کې ښودل دي.

ټولې نښې چې په مسطحه هندسه او رياضي کې استعمالېږي، په فضايي هندسه کې هم استعمالېږي. هغه اکسیومونه، چې په مسطحې هندسې کې موجود دي، په فضايي هندسه کې هم له دې اکسیومونو څخه کار اخیستل کېږي.

سربېره په مسطحه هندسه په فضايي هندسه کې هم یو لړ ځانگړي اکسیومونه شته چې په لاندې ډول بیانېږي. **د مستوي لومړنی اکسیوم:** هغه مستقیم خط چې د مستوي دوی مختلفې نقطې سره نښلوي په دې مستوي کې شامل دی.

**د مستوي دویم اکسیوم:** له هغو درېو نقطو څخه چې په یوه مستقیم خط واقع نه دي، یوازې او یوازې یوه مستوي تیرېږي.

**د متقاطع مستوي گانو اکسیوم:** که چیرې دوی مستوي گانې یو ګڼ ټکی ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چیرې یو ګڼ مستقیم خط ولري، دغه متقاطع خط ته د دوی مستوي گانو مشترک فصل وايي. **فضا:** هغه لومړنی اصطلاح (تعریف شوي نه ده) په توگه پېژنو.

**لومړی اصل:** دلایته یې نقطو مجموعې ته فضا وايي. **دویم اصل:** لږ تر لږه څلور داسې نقطې شته چې په یوه مستوي کې واقع نه دي.

## پوښتنې

1. څرگنده کړئ چې ولې درې پښې لرونکې میز د څلورو پښو لرونکې میز په پرتله ټینګ دی؟
2. ولې نقطه، کرښه او مستوي لومړنی اصطلاح گانې بولي؟
3. له دوو نقطو څخه څو مستوي گانې تیریدلای شي چې دواړه نقطې په کې برتې وي.



## په درې بُعدي فضا کې کرښه او مستوي

په فضا کې دوه قلمونه، دوه کتابونه، یو کتاب او یو قلم کوم حالتونه لري؟

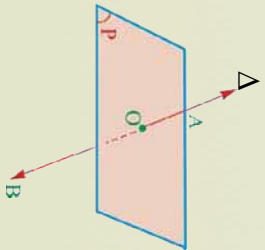
### درې بُعدي فضا:

هغه فضا، چې موږ په کې ژوند کوو، درې بُعدي فضا ده. دا درې بُعدي فضا یوه له نه تعریف شوو لومړنیو مفهومونو څخه ده.

فضا د لاینثاهي نقطو مجموعه ده، خط او مستوي هم په ترتیب سره یو بعد، دوه بعدونه لري چې هر یو د فضا د سټ یوه برخه (جزء) دی.

**د یوې مستقیمې کرښې او یوې مستوي نسبي حالت:** یوه مستقیمه کرښه او یوه مستوي لاندې درې حالتونه لري:

1. که چېرې یو مستقیم خط او یوه مستوي یوه مشترکه نقطه ولري، دا خط او مستوي یو له بل سره متقاطع دي. د مثال په ډول په دې شکل کې د  $\Delta$  مستقیمه کرښه د  $P$  مستوي د  $O$  په نقطه کې قطع کوي ده.



2. که چېرې یو مستقیم خط له یوې مستوي سره دوه او یا له دوو څخه زیاتې مشترکې نقطې ولري دا مستقیمه کرښه له مستوي سره منطبقه

ده او يا داسې ويل كېږي چې مستقيمه کرښه په مستوي كې شامله ده، د مثال په ډول د  $d$  مستقيم د  $P$  په مستوي كې شامل دی.

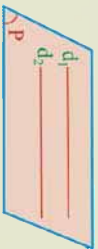
3. كه چيرې يوه مستقيمه کرښه له يوې مستوي سره هېڅ گډه نقطه ونه لري، دا مستقيم له مستوي سره موازي دي، مثلاً په لانديني شکل كې د  $d$  مستقيم خط له  $P$  مستوي سره موازي دی.



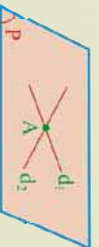
### له يو بل سره د دوو مستقيمو کرښو نسبي حالت:

1- كه چيرې دوه مستقيم خطونه په يوه مستوي كې شامل وي، نوموړي خطونه د همغږي مستوي خطونه بلل كېږي، او يو له لاندنيو حالتونو (ضعيفتونو) څخه لري.

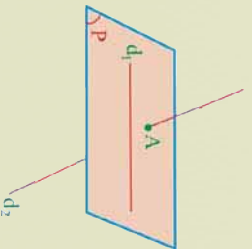
په يوې مستوي كې دوه خطونه هغه وخت موازي بلل كېږي چې هېڅ گډه كې ونه لري.

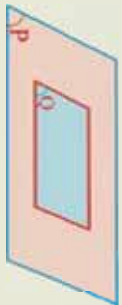


2- په يوه مستوي كې دوه خطونه، چې يوه گډه (مشترکه) نقطه ولري، متقاطع خطونه بلل كېږي.



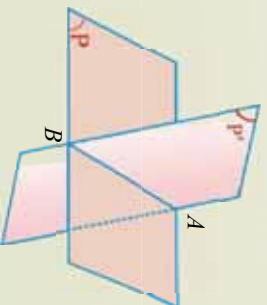
3- دوه مستقيم خطونه چې په يوه مستوي كې پراته نه وي او كومه مشترکه نقطه هم ونه لري، متناظر خطونه بلل كېږي؟



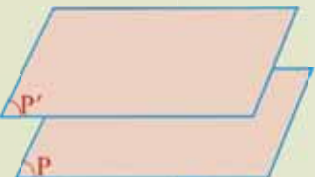


په عمومي ډول دوي مستوي گانې لاندې درې حالتونه لري.

**منطبق:** که چيرې دوي مستوي گانې لږ تر لږه درې مشترکې نقطې ولري چې د يو مستقيم خط په امتداد پرتې وي، يو پر بل منطبقې مستوي گانې بلل کېږي، لکه په مخامخ شکل کې د  $P$  او  $Q$  دوي مستوي گانې يو پر بل منطبقې دي.



**مقاطع مستوي گانې:** که چيرې دوي مستوي گانې يو ګډه مستقيم خط ولري مقاطع مستوي گانې بللې کېږي. دغه د  $AB$  مشترک خط ته مشترک فصل هم وايي. لکه مخامخ شکل.



3- که چيرې دوه مستوي گانې هېڅ کوم ګډه ټکي و نه لري، سره موازي دي، د مثال په توګه د  $P$  او  $P'$  مستوي گانې.

### فعاليت

- په فضا کې له يورې نقطې څخه څو مستقيم خطونه تيرېږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستقيم خطونه تيرېږي؟
- له يورې نقطې څخه څو مستوي گانې تيرېږي؟
- له دوو نقطو څخه څو مستوي گانې تيرېږي؟
- له دريو نقطو څخه څو مستوي گانې تيرېږي چې درې واړې نقطې ېکې شاملې وي؟



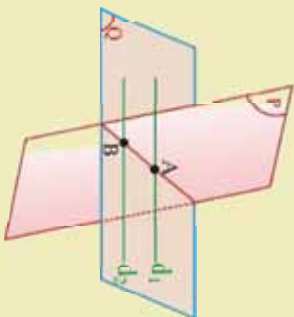
1- د  $R$  او  $T$  نقطې د  $P$  په مستوي کې پرته دي، د کوم دليل له مخې د  $\overline{RT}$  خط د  $P$  په مستوي کې پروت دی؟

2- که د  $\Delta$  مستقيم خط د  $P$  په مستوي کې پروت نه وي، د  $\Delta$  مسقيم خط به د  $P$  مستوي په څو نقطو کې قطع کړي؟

3- که چېرې د  $AB$  مستقيم خط او د  $P$  مستوي د  $M$  او  $K$  دوي گډې نقطې ولري، د  $\overline{AB}$  مستقيم خط د  $P$  په مستوي کې پروت دی؟

4- د  $A, B$  او  $C$  نقطې د  $P$  په مستوي کې واقع دي او هم د  $A, B$  او  $C$  نقطې د  $P'$  په مستوي کې پرته دي، د  $P$  او  $P'$  مستوي گانې يوه له بلې سره څه اړيکه لري؟

**په فضا کې موازي مستقيم خطونه**  
آيا په فضا کې مستقيم خطونه موازي دي؟



**تعريف:**

دوه مستقيم خطونه چې په يوې مستوي کې پراته او گډه نقطه ونه لري، موازي خطونه بلل کېږي.

**د موازاتو ا کسوم له يوې خارجي نقطې څخه له يوې مستقيمي کرني سره يوازي او يوازي يوه موازي مستقيمه کرښه رسمولای شو او بس.**

### فعاليت

● د  $A$  ټکی د  $P$  مستوي او د  $d_1$  مستقيم خط چې د  $A$  ټکی وړاندې پروت نه وي، په پام کې ونيسئ؟

● د  $A$  ټکی او د  $d_1$  له مستقيم خط څخه خو مستوي گانې تېرېدلای شي؟ ولې؟  
له پورتني فعاليت څخه د قضیې متن او ثبوت بيانو.

**قضيه:** له يوې خارجي نقطې څخه له يوه مستقيم خط سره يوازي يو موازي مستقيم خط رسمولای شو او بس.

**ثبوت:** د  $A$  له نقطې او د  $d_1$  له مستقيمي کرني څخه يوازي يو د  $P$  مستوي تېرېږي، ولې؟

اوس د  $P$  په مستوي کې د  $A$  له نقطې څخه يوازي د  $d_2$  مستقيم خط د  $d_1$  له مستقيم خط سره موازي رسمولای شو.

(پورتني ثبوت په مسطحه هندسه کې لوستل شوی). نو پورتني دعوا چې ټکی او خط په فضا کې وي، هم سوالی لري.

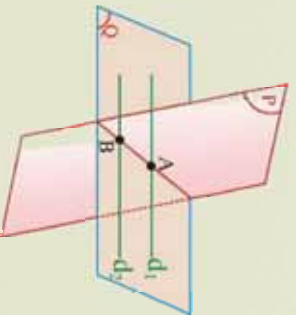


- دوه د  $d_1$  او  $d_2$  موازي خطونه او يوه د  $A$  نقطه د  $P$  له مستوي څخه بهر (خارج) په پام کې ونیسئ:
- آیا د  $d_1$  او  $d_2$  مستقیم خطونه يوه بله مستوي ټاکلي شي؟
  - که چيرې د  $P$  مستوي د  $Q$  مستوي د  $A$  په ټکي کې قطع کړي، آیا د  $P$  مستوي به د  $d_2$  مستقیم خط هم قطع کړي؟

• آیا دوي مستويگانې يوه بله د يوه مستقیم خط په اوردو کې قطع کوي، ولې؟  
د پورتنۍ فعاليت له سرته رسولو څخه وروسته د قضیې متن او ثبوت بیانوو.

**قضیه:** که دوه مستقیم خطونه موازي وي او مستوي يو له هغو څخه قطع کړي، بل يې هم قطع کوي.

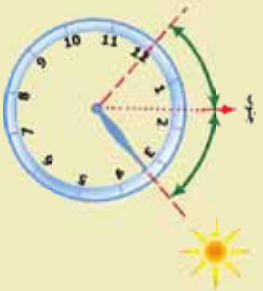
**ثبوت:** د  $d_1$  او  $d_2$  يو له بل سره موازي مستقیمونه د  $Q$  په مستوي کې پراته دي.  
که د  $P$  مستوي د  $d_1$  مستقیم د  $A$  په نقطه کې قطع کړي، نوموړي مستوي د  $d_2$  مستقیم هم د  $B$  په نقطه کې قطع کوي د تعريف له مخې د  $d_1$  او  $d_2$  موازي خطونه يوه د  $Q$  مستوي ټاکي، د  $P$  او  $Q$  مستوي-گانې د  $A$  يوه مشترکه نقطه لري، که چيرې دوي مستويگانې يوه بله په يوه نقطه کې قطع کړي، نو وړلاى شو چې هغوى يو بل د يوي مستقیمې کرنيې په اوردو کې قطع کوي، له دې امله د  $P$  او  $Q$  مستويگانې د  $d_2$  مستقیمه کرينه د  $B$  په نقطې کې هم قطع کوي.  
ځکه يو مستقیم خط چې په يوي مستوي کې له دوه موازي خطونو څخه يو قطع کړي، بل يې هم قطع کوي.



### پوښتنې

- 1- که چيرې دوه مستقیم خطونه له يوه دريم مستقیم خط سره موازي وي ثبوت کړئ چې دا مستقیم خطونه په خپل منځ کې هم موازي دي؟
- 2- که چيرې د  $E$  او  $F$  مستويگانې سره موازي او د  $L_1$  مستقیم خط د  $E$  مستوي کې او د  $L_2$  مستقیم خط د  $F$  په مستوي کې واقع وي آیا  $L_2 \parallel L_1$  دی؟
- 3- که د  $E$  او  $F$  مستويگانې سره متقاطع او د  $P$  مستوي هغوى دواړه قطع کړي، آیا د  $E$  او  $F$  گډ فصل د  $E$  او  $P$  له مشترک فصل او د  $F$  او  $P$  له مشترک فصل سره موازي دی؟





### په فضا کې د دوو مستقیمو کرښو تر منځ زاویه

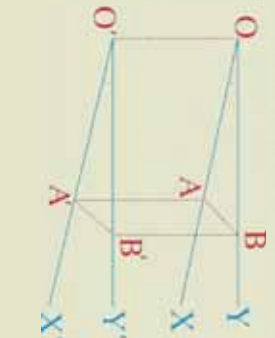
که چیرې د یوې زاوې دورانې لورې د ساعت د عقربې په مخالف لورې حرکت وکړي، زاویه مثبت او که د ساعت د عقربې په همجهت (عین لورې) وي زاویه منفي ده.

### فعالیت

- د  $XOY$  او  $X'O'Y'$  زاوې داسې په پام کې ونیسئ چې ضلعي یې سره موازي او هم جهته وي.
- د  $OX$  او  $O'X'$  له ضلعو څخه د  $OA$  او  $O'A'$  دوه مساوي قطعه خطونه او د  $OY$  او  $O'Y'$  له ضلعو څخه د  $OB$  او  $O'B'$  مساوي قطعه خطونه بیل کړئ.
- د  $OAA'O'$  شکل، کوم هندسي شکل لري، دلیل یې وواياست، د  $OAB$  او  $O'A'B'$  جوړ شوي مثبونه له یو بل سره څه اړیکه لري؟

د پورتنۍ فعالیت له مخې د قضیې متن او ثبوت په لاندې ډول بیانولی شو.

**قضیه:** په فضا کې دوه زاوې، چې دوه په دوه موازي او هم جهته ضلعي ولري، یوه له بلې سره مساوي دي.



**ثبوت:** د  $XOY$  او  $X'O'Y'$  زاوې په پام کې نيسو، داسې چې  $OX \parallel O'X'$  او  $OY \parallel O'Y'$  دي، یو لورې (یو جهت) هم لري. په شکل کې د  $OX$  او  $O'X'$  پر خطونو د  $OA$  او  $O'A'$  قطعه خطونه سره مساوي موازي او هم جهته دي.

نو د  $OAA'O'$  شکل یوه متوازي الاضلاع ده. له دې امله د  $OB$  او  $O'B'$  قطعه خطونه موازي، مساوي او هم لوري (هم جهت) دي. نو  $\angle ABB'A' = \angle A'O'B'$  دی.

د  $O'A'B'$  او  $OAB$  مثلثونه انطباق منونکي دي. ځکه  $\overline{OA} = \overline{A'O'}$ ،  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$  او  $\overline{OB} = \overline{O'B'}$  دي له دې امله  $\hat{A}OB = \hat{A'O'B'}$  دي.

**د قضیې پایله:**

- i) که په ترتیب سره د دوو زاویو ضلعي موازي او هم لوري وي، نوموړي زاويې یو له بل سره مساوي دي.
- ii) که د دوو زاویو یوه، یوه ضلع موازي او هم جهته وي او د هغو یوه، یوه ضلع یې موازي او مختلف جهته (لوري) ولري، د دغو دواړو زاویو پراخوالي  $180^\circ$  دي. (ثبوت یې د زده‌کونکو دنده ده).

### د دوو متناظر و مستقیمو کرښو ترمنځ زاویه:

**تعریف:** په فضا کې د دوو متناظر و مستقیمونو ترمنځ زاویه له هغې زاويې څخه عبارت ده چې د یوې مستوي په یوه اختیاري نقطه کې له هغو سره د دوو موازي مستقیمونو د رسولو په واسطه حاصلیږي



**پوښتنې**

- 1- که د دوو زاویو پراخوالی سره مساوي وي او د یوې زاويې یوه ضلع د بلې زاويې ضلعي سره موازي وي، آیا د هغو زاویو نورې ضلعي یو له بل سره موازي دي. ولې؟
- 2- که د دوو زاویو ضلعي سره موازي وي، ثابت کړئ چې د دغو زاویو، ناصف‌الزاويې سره موازي او یا سره عمود دي.
- 3- د  $d_1$ ،  $d_2$  دوو متناظر و مستقیمونو ترمنځ زاویه پیدا کړئ.



## په فضا کې موازي مستقیمونه او موازي مستوي گانې

یوه مستقیمه کرښه هغه وخت له یوې مستوي سره موازي بلل کېږي چې هیڅ گډ ټکی و نه لري. مستوي گانې په فضا کې هغه وخت سره موازي دي چې هیڅ گډ ټکی و نه لري.

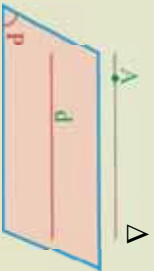
### فعالیت

که چیرې د  $d$  مستقیمه د  $P$  په مستوي کې پروت او د  $\Delta$  مستقیمه کرښه د  $P$  د مستوي بهر او د  $d$  مستقیم سره موازي وي، آیا د  $\Delta$  مستقیم د  $P$  له مستوي سره موازي کېدای شي؟

دوي د  $P$  او  $Q$  متقاطع مستوي گانې او یو مستقیم خط له دغو مستوي گانو څخه بهر د  $P$  او  $Q$  له مستوي گانو سره موازي په پام کې ونیسئ.

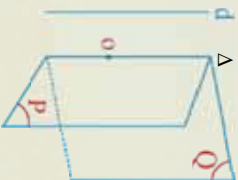
- د  $d$  مستقیم (مشترک فصل) د  $\Delta$  له مستقیم خط سره موازي کېدای شي؟
- له یوې ټاکلې نقطې څخه د  $d_1$  او  $d_2$  دوو مستیمو کرښو سره څو موازي مستوي گانې چې موازي نه وي رسمولای شو؟ د فعالیتونو د هرې برخې له تر سره کولو وروسته د قضیو متن او ثبوت په ترتیب بیانوو.

**قضیه:** که یو مستقیم خط د یوې مستوي له یوه خط سره موازي وي، نوموړی مستقیم خط له همدې مستوي سره موازي دی.



**ثبوت:** د  $d$  مستقیم خط چې د  $P$  په مستوي کې پروت او د  $\Delta$  مستقیمه کرښه د  $P$  د مستوي بهر او د  $d$  له مستقیم سره موازي راکړل شوې، ثابتوو چې د  $\Delta$  مستیمه کرښه د  $P$  له مستوي سره موازي ده، که د  $P$  مستوي د  $\Delta$  مستیمه کرښه قطع کړي، د  $d$  مستیمه کرښه چې د  $\Delta$  له مستیمې کرښې سره موازي ده هم قطع کوي. دا د فرضيې خلاف ده، ځکه د  $d$  مستیمه کرښه د  $P$  په مستوي کې پرته ده، نو د  $P$  مستوي د  $\Delta$  مستقیم قطع کولای نشي.

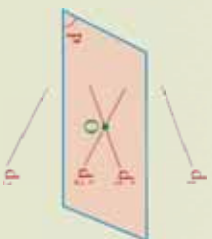
**قضيه:** که يوه مستقيمه کرښه له دوو متقاطع مستويگانو سره موازي وي، نوموړي مستقيمه کرښه د نوموړو مستويگانو له گڼو فصل سره موازي ده.



**ثبوت:** د  $P$  او  $Q$  دوي متقاطع مستويگانې په پام کې نيسو چې هره يوه يې د  $d$  له مستقيمي کرښې سره موازي ده، لکه مخامخ شکل.

که د  $P$ ،  $Q$  د مستويگانو د  $\Delta$  په مشترک فصل باندې د  $O$  نقطه وټاکو او له هغې نقطې څخه د  $d$  له مستقيمي کرښې سره يو موازي رسم کړو، دا موازي د  $\Delta$  په مستقيمي کرښې منطبق کېږي ځکه  $\Delta$  يوازني خط دی چې په دواړو مستويگانو يعني په  $P$  او  $Q$  کې شامل دی.

**قضيه:** د  $(O)$  له يوې ټاکلي نقطې څخه د  $d_1$  او  $d_2$  مستقيم خطونه چې يو له بل سره موازي نه دي يوازې يوه موازي مستوي رسمولای شو او بس.



**ثبوت:** د  $(O)$  له نقطې څخه د  $d_1'$  او  $d_2'$  خطونه چې په پر ترتيب له  $d_1$  او  $d_2$  مستقيمونو سره موازي وي، رسموو د  $P$  مستوي چې د  $(O)$  له نقطې څخه تېرېږي او د  $d_1'$  او  $d_2'$  مستقيمي کرښې په خپل ځان کې لري له  $d_1$  او  $d_2$  سره موازي دي؟ ولې؟

که چېرې  $d_1$  او  $d_2$  يو له بل سره موازي وي، نو  $d_1'$  او  $d_2'$  يو پر بل منطبق کېږي.

### پوښتني

1- که چېرې د  $d_1$  او  $d_2$  مستقيم خطونه سره موازي وي، څو موازي مستويگانې له هغو سره رسمولای شي؟

2- که چېرې د  $\Delta_1$ ،  $\Delta_2$  او  $\Delta_3$  موازي خطونه د  $P$  مستوي او د  $\Delta$  مستقيمي کرښې په واسطه په داسې حال کې چې د  $\Delta$  مستقيمه کرښه د  $P$  له مستوي سره موازي ده قطع شي، ثبوت کړئ چې مخامخ قطع شوي قطعات يو له بل سره مساوي دي.

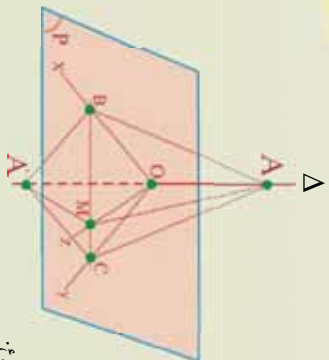


## په فضا کې متعامدي مستقیمې کرښې او مستوي گانې

که د  $\Delta$  مستقیمه کرښه د  $P$  مستوي په  $(O)$  ټکي کې عمود وي، آیا هغه ټول مستقیم خطونه چې د  $(O)$  له نقطې څخه تیرېږي، د  $\Delta$  په مستیمې کرښې باندې عمود دي؟

### فعالیت

- مخامخ شکل په پام کې ونیسئ د  $OX$  او  $OY$  مستیمونه د  $\Delta$  په مستیم د  $(O)$  په نقطه کې عمود رسم کړئ.



- د  $P$  په مستوي کې د  $OZ$  اختیاري مستیمه کرښه په پام کې ونیسئ.
  - د  $\Delta$  له مستیمې کرښې څخه د  $OA'$  او  $OB$  مساوي الفاصله قطعه خطونه جلا کړئ.
  - یو اختیاري قاطع داسې رسم کړئ چې د  $OX$  مستیمه کرښه د  $B$  او  $OY$  مستیمه کرښه د  $C$  او د  $OZ$  مستیمه کرښه د  $M$  په نقطو کې قطع کړي.  $OX$  او  $OY$  له  $AA'$  سره څه اړیکه لري.
  - د  $OZ$  مستیمه کرښه د  $\Delta$  پر مستیمه کرښه عمود ده؟ ولې؟
- د پورتنۍ فعالیت له تر سره کولو وروسته د قضیې متن او ثبوت داسې بیانوو.
- قضیه:** که د  $\Delta$  یوه مستیمه کرښه پر هغو دوو مستیمو کرښو چې دواړه د  $\Delta$  مستیمه کرښه د  $(O)$  په نقطه کې قطع کوي عمود وي، په هغو ټولو مستیمو خطونو باندې چې په مستوي کې متقاطع دي او د  $(O)$  له نقطې څخه تیرېږي، عمود ده.

**ثبوت:** دوي مستقيمې کرښې د  $\overline{OX}$  او  $\overline{OY}$  په پام کې نيسو، دا دوه مستقيموڼه د  $\Delta$  پر مستقيم چې د  $(O)$  له نقطې څخه تېرېږي، عمود دي او د  $P$  مستوي جوړوي، د  $P$  په مستوي کې د  $OZ$  اختياري (کيفي) مستقيمه کرښه په پام کې نيسو، د  $\Delta$  له مستقيمې کرښې څخه د  $\overline{OA'}$  او دوه متساوي الفاصله قطعه څطونه جلاکوو.

او د  $P$  په مستوي کې يو قاطع رسمو چې  $\overline{OX}$  د  $B$  او  $\overline{OY}$  د  $C$  او  $\overline{OZ}$  مستقيم د  $M$  په نقطه کې قطع کړي.

او  $\overline{OX}$  او  $\overline{OY}$  دواړه  $\overline{AA'}$  منځني عمودونه دي؛ نو

$$\overline{BA} = \overline{BA'}$$

$$\overline{CA} = \overline{CA'}$$

د  $ABC$  او  $A'B'C'$  مثلونه انطباق منونکي دي. د انطباق منلو د عمليې په وخت کې د  $C, B$  او  $M$  نقطې ثابتې پاتې کېږي او د  $A$  نقطه په  $A'$  او  $\overline{MA}$  په  $\overline{MA'}$  منطبق کېږي، نو لیکلی شو.  $\overline{MA'} = \overline{MA}$  د  $\triangle MA A'$  مثل متساوي الساقين دي او د  $\overline{MO}$  منځني (ميانه) په عين وخت کې د  $\overline{AA'}$  منځني عمود دی په نتيجه کې د  $\Delta$  مستقيمه کرښه د  $\overline{OZ}$  پر مستقيمې کرښې باندې عمود دی.

## فعايت

- که د  $B$  او  $C$  نقطې د  $P$  او  $Q$  له ټکو څخه متساوي الفاصله وي، د  $BC$  مستقيمې کرښې هره نقطه له  $P$  او  $Q$  څخه متساوي الفاصله ده. اوس د  $X$  يوه اختياري (کيفي) نقطه د  $BC$  پر مستقيمه کرښه وټاکي او ثابت کړئ چې  $X$  د  $P$  او  $Q$  څخه متساوي الفاصله دی.



- 1- که چېرې د  $d_1$  او  $d_2$  څطونه يو له بل سره موازي وي، له هغو سره څو موازي مستويگانې رسمولای شي؟
- 2- که د  $L$  خط د  $P$  پر مستوي عمود وي، آیا ټولې هغه مستويگانې چې د  $L$  خط په کې پروت دي د  $P$  په مستوي باندې عمود دي؟



## په فضا کې موازي مستوي گانې

دوي مستوي گانې چې هيڅ مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستوي گانې بلل کېږي.

### فعاليت

- د  $\Delta_1$  او  $\Delta_2$  مستقيم خطونه، چې د  $A$  په نقطه کې متقاطع دي، په پام کې ونيسئ
- له دې دوو مستقيمو خطونو او د  $A$  له نقطې څخه يوه مستوي تېرولی شو.
- له دې مستوي څخه بهر د  $d_1$  او  $d_2$  دوي مستقيمې کرنيې چې په ترتيب سره د  $\Delta_1$  او  $\Delta_2$  سره موازي او يو بل د  $B$  په ټکي کې قطع کړي، رسم کړئ.

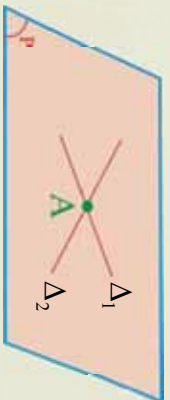
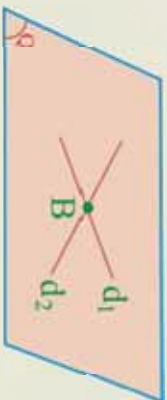


- هغه مستوي چې د  $\Delta_1$  او  $\Delta_2$  له نقطې څخه جوړه شوي، له هغې مستوي سره چې د  $d_1$  او  $d_2$  مستيمو کرښو او د  $B$  له ټکي څخه جوړه شوي ده، څه اړيکه لري؟
- د پورتني فعاليت له تر سره کولو وروسته د قضيه متن او ثبوت بيانولی شو.

**قضيه:** که د يوي مستوي دوي متقاطع مستيمې کرنيې د بلې مستوي له متقاطع مستيمو کرښو سره موازي وي، نوموړې مستوي گانې سره موازي دي.

**ثبوت:** د  $\Delta_1$  او  $\Delta_2$  مستقيم خطونه د  $A$  په نقطه کې متقاطع دي او يوه د  $P$  مستوي جوړوي. د  $B$  له نقطې څخه (چې د  $P$  مستوي بهر ده) د  $d_1$  او  $d_2$  مستقيم خطونه له  $\Delta_1$  او  $\Delta_2$  سره موازي رسم شوي دي، چې  $d_1$  او  $d_2$  هم يوه د  $O$  مستوي جوړوي، ثابتو چې د  $P$  او  $O$  مستوي گانې سره موازي دي.





خړنگه چې  $d_1$  او  $\Delta_1$  سره موازي دي، نو  $d_1$  د  $P$  له مستوي سره هم موازي دي. همدارنگه  $d_2$  له  $\Delta_2$  سره موازي دي نو  $d_2$  هم د  $P$  له مستوي سره موازي دي. اوس که چيرې د  $P$  او  $Q$  مستوگانې يو بل سره قطع کړې، مشترک فصل يې هم په همدې وخت کې له  $d_1$  او  $d_2$  سره موازي کېږي، ولې؟

دا امکان نه لري، ځکه چې د  $d_1$  او  $d_2$  مستقيم خطونه مقاطع دي، په نتيجه کې د  $P$  او  $Q$  مستوگانې يوه بله سره قطع کولای نشي، نو يو بل سره موازي دي.

### پوښتني



که چيرې د  $E$  او  $F$  مستوگانې سره موازي وي او د  $L_1$  مستقيمه کرښه په  $E$  مستوي او د  $L_2$  مستقيمه کرښه د  $F$  په مستوي کې پرته وي، آیا  $L_1 \parallel L_2$  دی؟



## د څپر کې مهم ټکي

1- د فضايي هندسې بنسټيز مفاهيم او اکسيومونه:

### لومړنۍ اصطلاحگانې Postulates:

هغه مفاهيم او مفکورې، چې پرته له كوم تعريف څخه منل کېږي، لومړني اصطلاحات بلل کېږي د مثال په توگه: ټکي (نقطه)، کرښه (خط)، مستوي او فضا.

### دليل او برهان Logical Reason:

برهان د ذهن هغه عمل ته ويل کېږي چې له يو لړ محکمنو سمو وړاندیزونو او څېړنو څخه وروسته وروستيو څېړنو ته رسېږي او د هغې سموالی محکمي منل شوی وي، مور هم کولی شو، هغه و منو.

### قضيه: Theorem

هغه ادعا چې د هغې سموالی او صحت يو لړ منطقي دلايلو ته اړتيا ولري، قضيه بلل کېږي.

**ټکي (نقطه):** مور نقطه د يو ذهني مفهوم په ډول پېژنو او هغه د لومړنۍ اصطلاح(تعريف شوي نه ده) په توگه منو.

**مستقيم خط:** کش شوی تار، د ميز څنډه او د خط کش ټيغه د مستقيم خط مفهوم او مطلب بيانوي.

مستقيم خط د لومړنۍ اصطلاح(تعريف شوی نه دی) په ډول منو.

**د مستوي لومړی اکسيوم:** هغه مستقيم خط چې د يوې مستوي ډوې مختلفې نقطې سره ونښلوي، په هماغه مستوي کې شامل دی.

**د مستوي دويم اکسيوم:** له هرو دريو نقطو څخه چې د يوه مستقيم خط په استقامت پرته نه وي، يوه مستوي تېرېږي.

**د متقاطع مستويگانو اکسيوم:** که چېرې دوه مستويگانې يو گڼه ټکي ولري، متقاطع دي او په همدې ډول که چېرې يو مستقيم خط ولري، دغه متقاطع خط ته د دوو مستويگانو مشترک فصل وايي.

**فضا:** فضا هم(تعريف شوي نه ده) لومړنۍ اصطلاح په توگه پېژنو.

**لومړی اصل:** فضا د لايتناهي نقطو مجموعه ده.

**دويم اصل:** لږ تر لږه د فضا څلور داسې نقطې شته چې په يوه مستوي کې واقع نه دي.



**په دري بُعدۀ فضا کي خط او مستوي:**  
**دري بعدي فضا:** هغه فضا چې مورب په کي ژوند کوو دري بعدي فضا ده.  
له يو بل سره په فضا کي د دوو مستقيمو خطونو نسبي حالت

موازي  
منطبق  
مقاطع  
متناظر

د يوې مستقيمي کرنيې او يوې مستوي نسبي حالت  
مقاطع  
منطبق  
موازي

**د دوو مستويگانو نسبي حالت**  
منطبق  
مقاطع  
عمود

**په فضا کي موازي مستيمونه:**  
دوي مستيمي کرنيې چې په يوې مستوي کي واقع او مشترکه نقطه ونه لري، موازي مستيمونه بلل کېږي.  
**په فضا کي د دوو مستيمونو تر منځ زاویه:** په فضا کي دوي متوازي الاضلاع او هم جهته زاويې سره مساوي دي.

**په فضا کي موازي مستيمونه او مستوي:** يو مستيم خط له يوې مستوي سره هغه وخت موازي بلل کېږي، چې هيڅ مشترکه(ګډه)نقطه ونه لري.  
**په فضا کي متعامد مستيمونه او مستويگانې:**

که د  $\Delta$  مستيم د  $(O)$  په نقطه کي د  $P$  پر مستوي عمود وي، ټول هغه مستيم خطونه چې د  $(O)$  له نقطې څخه تېرېږي، د  $\Delta$  پر مستيمه کرښه باندې عمود دي؟  
**په فضا کي موازي مستوي گانې:** دوي مستويگانې، چې هيڅ ګډ ټکی ونه لري، موازي مستويگانې بلل کېږي.



## د څپرکي پوښتني

هرې پوښتنې ته څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا او کړۍ تړې تاو کړئ.

1-  $P$  د مستوي د  $A$  او  $B$  نقطې مفروض دي. که د  $A$  او  $B$  د نقطو فاصله له  $P$  مستوي سره مساوي وي، د  $P$  مستوي په هر حال کې:

a-  $AB$  له خط سره موازي دی  
b-  $AB$  د  $AB$  خط بې له منځه تيرېږي  
c-  $AB$  خط عمودي ناصف دی  
د  $AB$  له خط سره موازي دي يا له  $AB$  څخه تيرېږي

2- که د  $\Delta$  خط د  $P$  د مستوي په ټولو خطونو عمود وي، نو:

a-  $\Delta$  خط د مستوي پر ټولو خطونو عمود دی.  
b-  $\Delta$  خط يوازې د  $P$  مستوي پر دوو خطونو عمود دی.

c- د  $\Delta$  خط د  $P$  مستوي له بې شمېره خطونو سره موازي دی.

d-  $\Delta$  خط يوازې د  $P$  مستوي له يوه خط سره موازي دی.  
3- په دقيق ډول له لاندې کومو اجزاو څخه يوه مستوي نه تيرېږي له:

a- هغو درې نقطو څخه چې پر يو مستقيم واقع دی.  
b- له دوو متقاطع خطونو څخه  
c- د يو خط او د هغې له خارجي نقطې څخه  
d- څلور متمايزې(مختلفې نقطې)

4- له لاندې ځوابونو څخه کوم يو بې هر وخت سم نه وي.

a- که د  $\Delta$  مستقيم خط د  $P$  له مستوي سره موازي وي او له هغه خط څخه يوه مستوي تېره کړو، دا مستوي د  $P$  له مستوي سره موازي دی.

b- که د  $\Delta$  او  $\Delta'$  دوه خطونه د  $d$  له خط سره موازي وي، هغه وخت  $\Delta$  او  $\Delta'$  يو له بل سره موازي دي.

c- که د  $\Delta$  او  $\Delta'$  دوه خطونه موازي وي او د  $P$  مستوي د  $\Delta$  خط قطع کړي، د  $\Delta'$  خط هم قطع کولای شي.

d- که دوي مختلفې مستوي گانې په يوه نقطه کې شريکې وي، نو نوموړې مستوي گانې د ياد شوي ټکي په امتداد شريکې دي.

5- د  $\Delta$  خط د  $P$  مستوي قطع کوي، خو د  $P$  پر مستوي عمود نه دی. دا خط د  $P$  د مستوي په څو خطونو باندې عمود دی؟

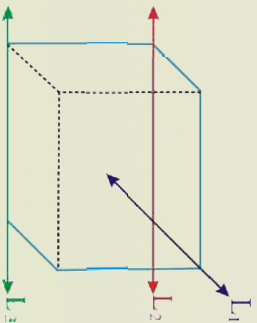
a) 0      b) 1      c) 2      d) بې شمېره

6- له لاندې څوابونو څخه کوم یو یې هر وخت سم نه دي.  
 a\_ که کوم خط د مستوي له خطونو سره موازي وي او متمايز وي، نوموړی خط د هغې له مستوي سره موازي دی.

- b\_ که یو خط یو له مقاطع مستوگانو څخه قطع کړي، بله هم قطع کوي.
- c\_ که یو خط یوه له دوو موازي مستوگانو څخه قطع کړي، بله یې هم قطع کوي.
- d\_ که یوه مستوي یوه له دوو موازي مستويگانو څخه قطع کړي، بله یې هم قطع کوي.

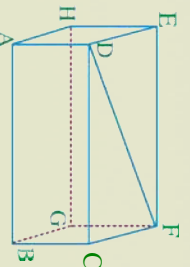
### لاندي سوالونه حل کړئ:

- 1- که دوه مستقیم خطونه له یوې مستوي سره موازي وي، نوموړي خطونه خپل منځ کې عمود کېدای شي.
- 2- په لاندې مستطیل کې د  $L_1, L_2, L_3$  خطونو موقعیت نظر یو بل ته څرگند کړئ. د دې خطونو کومې جوړې متقاطع، کومې جوړې یې موازي او کومې جوړې متنازې دي؟



3- که د  $P_1$  او  $P_2$  مستويگانې د  $P$  پر مستوي باندې عمود وي، د  $P_1$  او  $P_2$  مستويگانې په خپل منځ کې موازي دي؟

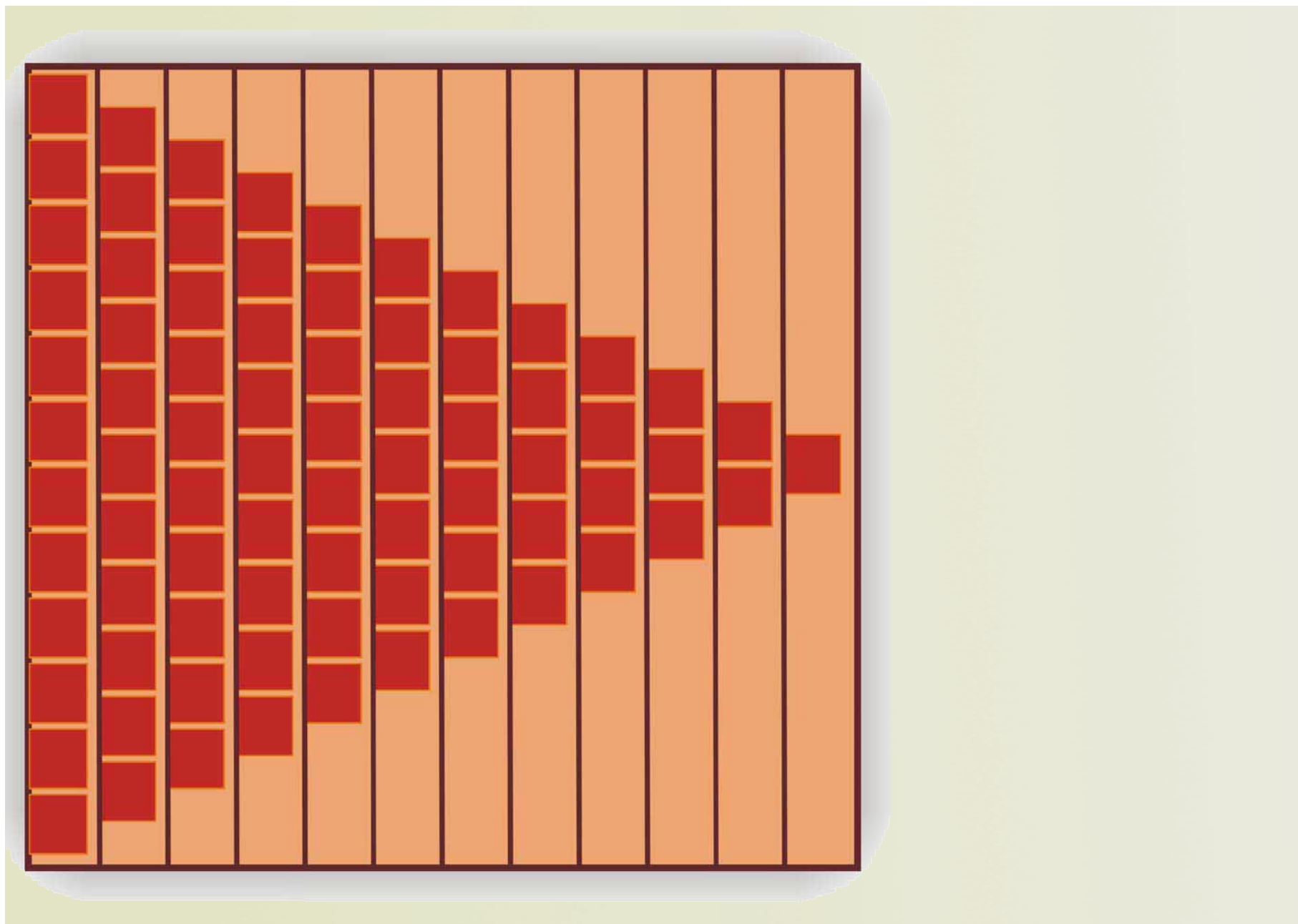
- 4- په مخامخ شکل کې هر څلور ضلعي یو مستطیل دی.
- a\_ د دوو مستويگانو نومونه واخلي؛ چې پر  $AD$  عمود وي او ووايي ولې عمود دي؟
- b\_ د دريو قطعنه خطونو، نومونه واخلي؛ چې پر  $ABCD$  مستوي باندې عمود وي.
- c\_ د  $EDF$  زاویه قايمه ده.
- d\_ د  $D\hat{F}C$  زاویه قايمه ده.

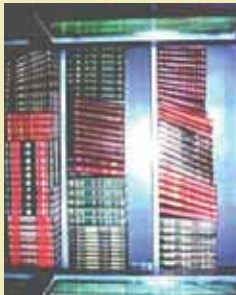


ڄلور م ڇپري

تراڊفونہ او سلسلي







**ترادفونہ**  
**Sequence**  
 په مخامخ شکل کې څه ډول ترتیب وینئ.  
 هر ترتیب چې شتون لري، توضیح یې کړئ.

**تعریف:** د  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  عددونه د عددونو د ترادف په نامه یادېږي، یا په بل عبارت ترادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعریف ناحیه یې طبیعي عددونه او د قیمتونو ناحیه یې حقیقي عددونه تشکیلوي. غیر منظم (نا مرتب) عددونو لیکل یو ترادف نه دی.

له پورتنیو عددونو څخه هر یو د نوموړي ترادف حدوده دی،  $a_1$  یې لومړی حد او  $a_n$  یې دویم حد او  $a_n$  د ترادف  $n$ -م حد دی، ترادف په لنډه ډول داسې لیکي:  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  په دې حالت کې  $a_n$  د ترادف  $n$ -م حد دی.

- د جفتو عددونو ترادف  
 $2, 4, 6, 8, \dots, 2n$
- د طاقو عددونو ترادف  
 $1, 3, 5, 7, \dots, 2n-1$
- د 5 د مضرب عددونو ترادف  
 $5, 10, 15, 20, \dots, 5n$

معمولاً یو ترادف د یوه اختیاري  $n$ -م حد په واسطه ټاکل او تعریفېږي؛ مثلاً:

$$\begin{aligned} a_n &= 2n & , & \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ b_n &= 2n-1 & , & \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ c_n &= 5n & , & \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

### فعالیت

- د  $\{a_n\} = \left\{ \frac{n+1}{n} \right\}$  ترادف په پر مختللي (انکشافی) شکل ولیکئ.
- د  $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  ترادف په پر مختللي (انکشافی) شکل ولیکئ.

هغه ترادف چې د حدودنو عددي قیمت یې په تدریجي ډول زیاتېږي متزايد ترادف بلل کېږي، لکه د جفت، طاق او 5 مضرب عددونو ترادفونه.

او هغه ترادف چې د حدودنو عددي قیمت یې په تدریجي ډول کمېږي، متناقص ترادف بلل کېږي، لکه د 5 مضرب عددونو معکوس ترادف  $\frac{1}{5n}, \dots, \frac{1}{15}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}$

لومړی مثال: د  $a_n = n^2$  او  $b_n = \frac{3}{n}$  ترادفونه متزايد دی، که متناقص؟  
حل:

$$a_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad a_n = 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$$

$$b_n = \frac{3}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad b_n = 3, \frac{3}{2}, 1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \dots$$

ليدل کېږي چې د  $a_n$  د ترادف د حدونو عددي او عددي قيمت په تدريجي ډول زياتېږي، نو د  $a_n$  ترادف متزايد، همدارنگه ليدل کېږي چې د  $b_n$  د ترادف د حدونو عددي قيمت په تدريجي ډول کمېږي، نو د  $b_n$  ترادف يو متناقص ترادف دی.

**يادونه:** هغه ترادفونه چې د حدونو شمېر يې معلوم وي معين ترادفونه او هغه ترادفونه چې د حدونو شمېر يې معلوم نه وي، د غير معين ترادفونو په نامه يادېږي.

**دویم مثال:** که د يوه ترادف  $a_n = \frac{n^2}{n+1}$  وروستي حد درکړل شوی وي، 5 لومړنی حدونه يې پيدا کړئ.

**حل:** د 5 لومړنیو حدونو د پيدا کولو لپاره  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  قيمتونه ورکړو او په ترادف کې يې وضع کوو چې په دې ډول د ترادف 5 لومړني عناصر (حدونه) په لاس راځي.

$$a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$$n=1, \quad a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$n=2, \quad a_2 = \frac{2^2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

$$n=3, \quad a_3 = \frac{3^2}{3+1} = \frac{9}{4}$$

$$n=4, \quad a_4 = \frac{4^2}{4+1} = \frac{16}{5}$$

$$n=5, \quad a_5 = \frac{5^2}{5+1} = \frac{25}{6}$$

پوښتنې

1- په لاندي ترادفونو کې  $m-n$  حد وټاکئ؟

$$\left. \begin{array}{l} 1, 3, 5, 7, \dots \\ 1, 1, 1 \\ \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \dots \end{array} \right\}$$

2- که يو ترادف  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  راځړل شوی وي، 6 لومړني پرله پسې حدونه يې وليکئ.





## حسابي تړادف Arithmetic Sequences

که په یوه تړادف کې د دوو پرله پسې (متعلقو) حلونو ترمنځ توپیر یو ثابت عدد وي، تړادف په څه نوم یادېږي.

### فعالیت

- مخامخ عددونه په پام کې ونیسئ 5, 8, 11, 14, 17, 20
  - د لومړي او ورپسې حلونو ترمنځ توپیر څو دی؟
  - د پورتنیو عددونو ترتیب له څو حلونو څخه جوړ شوی دی؟
  - له ښې څخه کيفي خواته د پورتنیو عددونو تړادف ولیکئ.
- له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله بیانېږي:

**تعریف:** که په یوه حسابي تړادف کې د دوو پرله پسې حلونو ترمنځ توپیر یو ثابت عدد وي، هغه د حسابي تړادف په نوم یادېږي.

دغه ثابت عدد له گڼ توپیر (Common difference's) څخه عبارت دی او په  $d$  سره ښودل کېږي که  $d$  یو مثبت عدد ( $d > 0$ ) وي، تړادف متزايد او که  $d$  منفي ( $d < 0$ ) وي، تړادف متناقص بلل کېږي، لکه په لاندې مثالونو کې:

$$\left. \begin{array}{l} 2, 5, 8, 11, 14, 17, \dots \\ d = 5 - 2 = 3 \\ d = 8 - 5 = 3 \\ d = 11 - 8 = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow d = 3 > 0$$

نو تړادف متزايد دی.

$$\begin{aligned}
 &4, 0, -4, -8, -12, -16, -20, \dots \\
 &d = 0 - 4 = -4 \\
 &d = -4 - 0 = -4 \\
 &d = -8 - (-4) = -4 \\
 &d = -12 - (-8) = -4 \\
 &d = -16 - (-12) = -4
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} &4, 0, -4, -8, -12, -16, -20, \dots \\ &d = 0 - 4 = -4 \\ &d = -4 - 0 = -4 \\ &d = -8 - (-4) = -4 \\ &d = -12 - (-8) = -4 \\ &d = -16 - (-12) = -4 \end{aligned}} \right\} \Rightarrow d = -4 < 0$$

ترادف متناقص دی.

لومړی مثال: داسې یو ترادف ولیکی چې لومړی حد یې  $\frac{3}{2}$  او گڼه توپیر یې 2 وي.

حل: څرنگه چې لومړی حد یې  $a_1 = \frac{3}{2}$  او گڼه توپیر یې  $d = 2$  دی، نو:

$a_1, a_2, a_3, \dots$

$$a_2 - a_1 = d \Rightarrow a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 - a_2 = d \Rightarrow a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 - a_3 = d \Rightarrow a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

اوس د  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  قیمتونه په ترادف کې وضع کوو:

$$a_1, (a_1 + d), (a_1 + 2d), \dots, (a_1 + 3d), \dots$$

$$\frac{3}{2}, \left(\frac{3}{2} + 2\right), \left(\frac{3}{2} + 2 + 2\right), \dots$$

$$\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \dots, \frac{15}{2}, \dots$$

دویم مثال: کوم یوله لاندې ترادفونو څخه حسابي ترادف دی.

$$a) 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \dots$$

$$b) 1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

د د جزه حل: د حسابي ترادف د تعریف په پام کې نیولو سره د حدونو گڼه توپیر په لاس راوړو:

$$1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4$$

$$d = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$d = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$d = 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$d = \frac{7}{2} - 3 = \frac{1}{2}$$

$$d = 4 - \frac{7}{2} = \frac{1}{2}$$

ليدل کيڙي چي د پورتنی ترادف د ٽولو حدونو ترمنځ گڼه توپير  $\frac{1}{2}$  ثابت عدد دی، نو د حسابي ترادف د

تعريف پر بنسټ ويلي شو چي نوموړی ترادف يو حسابي ترادف دی.

**د b جزء حل:**

$$1, 2, 4, 8, 16$$

$$d = 2 - 1 = 1$$

$$d = 4 - 2 = 2$$

$$d = 8 - 4 = 4$$

$$d = 16 - 8 = 8$$

ليدل کيڙي چي د پورتنی ترادف د ٽولو عناصرو ترمنځ گڼه توپير يو ثابت عدد نه دی، نو ياد شوی ترادف حسابي ترادف نه دی.

**په يوه حسابي ترادف کي د  $n$ -م حد ټاکل:**

که چيري د يوه حسابي ترادف  $a_1, a_2, \dots, a_n$  لومړی حد په  $a$  او گڼه توپير يې  $d$  وي، د  $n$ -م حد د پيدا کولو لپاره له لاندي تحليلي ثبوت څخه گڼه اخلو، ددي کار لپاره د  $5, 7, 9, 11, \dots$  ترادف په پام کي نيسو.

$$5, 7, 9, 11, \dots$$

$$d = 7 - 5 = 2$$

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

$$a_1, (a_1 + d), (a_1 + 2d), (a_1 + 3d), \dots$$

$$5, 5 + 2 \cdot 2, 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2, \dots$$

$$a_1 = 5, a_2 = 5 + 2 \cdot 2, a_3 = 5 + 2 \cdot 2 \cdot 2, \dots$$

د پورتني مثال په پام کې نيولو سره په عمومي توگه کولای شو وليکو چې:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 - a_1 &= d \Rightarrow a_2 = a_1 + d \\ a_3 - a_2 &= d \Rightarrow a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d \\ a_4 - a_3 &= d \Rightarrow a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d \\ &\vdots \\ a_n - a_{n-1} &= d \Rightarrow a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

لومړی حد	دویم حد	درېم حد	څلورم حد	م-م حد
$a$	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$a+(n-1)d$
↓	↓	↓	↓	↓
$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_n$

په پایله کې به لاس راځي چې د  $a$ ،  $d$ ،  $n$  او  $a_n$  ترمنځ لاندې اړیکه شتون لري:

$$a_n = a + (n-1)d$$

لومړی مثال: د دغه  $2, 5, 12, \dots$  حسابي ترادف 30-م حد پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{cases} a_1 = -2 & a_n = a + (n-1)d \\ d = 5 - (-2) = 7 & a_{30} = -2 + (30-1)7 \\ n = 30 & a_{30} = -2 + 29 \cdot 7 \\ a_{30} = ? & a_{30} = -2 + 203 \Rightarrow a_{30} = 201 \end{cases}$$

دویم مثال: دلاندې حسابي ترادف د حدونو شمېر په لاس راوړئ.

حل: یوهېرو چې:

$$\begin{aligned} 35, 40, 45, \dots, 2000 \\ a_n &= a + (n-1)d \\ a = 35 & 2000 = 35 + 5n - 5 \\ d = 40 - 35 = 5 & 2000 = 30 + 5n \\ a_n = 2000 & 2000 - 30 = 5n \\ n = ? & 1970 = 5n \Rightarrow n = 394 \end{aligned}$$

- کہ چترپي پہ يوه حسابي ترادف کي  $a_1 = -11, d = 4, a_2$  وي،  $a_3$  او  $a_n$  حدودنه پيدا کړي.

### د حسابي ترادف وسطي حد:

که د يوه حسابي ترادف دري پرله پسې حدودنه د  $a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$  ولرو، په داسې حال کي چې  $n = 2, 3, 4$ .

$$a_{n-1} + a_{n+1} = [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + nd]$$

$$= [a_1 + nd - 2d] + [a_1 + nd] = [a_1 + nd - 2d + a_1 + nd]$$

$$a_{n-1} + a_{n+1} = [2a_1 + 2nd - 2d] = 2[a_1 + (n-1)d] = 2a_n$$

$$\Rightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

لومړی مثال: د 7 او 23 عددونو حسابي اوسط عبارت دی، له:

$$a_n = \frac{7+23}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

دويم مثال: د  $x$  عدد داسې وټاکي، چې د  $2x+1, 2x-4, 3x+3$  درې حده حسابي ترادف تشکيل کړي، ترادف يې وليکي.

کړي، ترادف يې وليکي.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Rightarrow 2x - 4 = \frac{3x + 3 + 2x + 1}{2} = \frac{5x + 4}{2}$$

$$4x - 8 = 5x + 4 \Rightarrow 4x - 5x = 4 + 8 = 12 \Rightarrow -x = 12$$

$$x = -12$$

ترادف يې عبارت دی له:  $2(-12)+1$  ،  $2(-12)-4$  ،  $3(-12)+3$

$$-24+1, -24-4, -36+3 \Rightarrow -23, -28, -33, -38, -43, \dots$$

### يادونه

که د يوه حسابي ترادف  $n$ -ام او  $m$ -ام حدودنه معلوم وي، يعنې:

$$a_n = a + (n-1)d \quad \dots \dots \dots I$$

$$a_m = a + (m-1)d \quad \dots \dots \dots II$$

نود 1 له اړیکې څخه د II اړیکه کمه، په پایله کې کولای شو ګڼه توپیر داسې په لاس راوړو

$d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$  (ثبوت یې د زده‌کوونکو دنده ده) چې په یاد شوي فورمول کې  $d$  ګڼه توپیر،  $a_n$  د ترادف  $n - m$  حد،  $a_m$  د ترادف  $m - m$  حد دی.

**لومړی مثال:** د یوه حسابي ترادف پنځم حد 27 او نهم حد یې 47 دی، ګڼه توپیر او لومړی حد یې پیدا کړئ، په پای کې یې ترادف بشپړ کړئ.

، ، ، ، 27، ، ، ، 47

حل:

$$\left. \begin{aligned} a_n &= 47 \\ n &= 9 \\ a_m &= 27 \\ m &= 5 \\ d &=? \\ a &=? \end{aligned} \right\} \begin{aligned} d &= \frac{a_n - a_m}{n - m} = \frac{47 - 27}{9 - 5} = \frac{20}{4} \\ d &= 5 \\ a_n &= a + (n - 1)d \Rightarrow 47 = a + (9 - 1)5 = a + 40 \\ \Rightarrow 47 - 40 &= a \Rightarrow a = 7 \end{aligned}$$

ترادف یې عبارت دی له: 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47

هارمونيکي ترادف: د  $\{a_n\}$  یوه ترادف ته هغه وخت هارمونيکي ترادف وایي چې معکوس یې  $b_n = \frac{1}{a_n}$  یو حسابي ترادف وي.

**لومړی مثال:** د 2, 4, 6, 8, 10, ... ترادف یو حسابي ترادف دی، ځکه چې  $d = 2$  دی، د دغه ترادف د حدونو معکوس یعنې  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \dots$  یو هارمونيکي ترادف تشکیلوي.

**دویم مثال:** د طبيعي عددونو معکوس ترادف یو هارمونيکي ترادف دی.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \{a_n\} = \frac{1}{n}$$

دريم مثال : که چيري په يوه هارمونيکي ترادف کې  $a_1 = \frac{1}{4}$  او  $d = -3$  وي، هارمونيکي ترادف يې په

لاس راوړئ

حل :

$$\frac{1}{4}, \left(\frac{1}{4}-3\right), \left(\frac{1}{4}-3-3\right), \left(\frac{1}{4}-3-3-3\right), \dots$$

$$\frac{1}{4}, -\frac{11}{4}, -\frac{23}{4}, -\frac{35}{4}, -\frac{47}{4}, \dots$$

آيا د طبيعي طاقو عددونو معکوس ترادف يو هارمونيکي ترادف دی،  $n - m$  حد يې وليکئ.

هارمونيکي حسابي اوسط: که درې مسلسل عناصر  $a_{n-1}$ ،  $a_n$  او  $a_{n+1}$  په داسې حال کې چې

$$d = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}, \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}}$$

يوه هارمونيک ترادف حدونه دي لرو، چې:

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n-1}} \quad \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})} = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{a_{n-1} + a_{n+1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2a_{n+1} \cdot a_{n-1}}$$

$$a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1} + a_{n+1}}$$

په پايله کې پورتنی اړیکه چې هارمونيک حسابي اوسط بنې، ليکلای شو:

$$a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1} + a_{n+1}}$$

مثال : د 2 او 8 عددونو هارمونيکي اوسط پيدا کړئ.

حل: له  $a_n = \frac{2(a_{n-1})(a_{n+1})}{a_{n-1} + a_{n+1}}$  فارمول څخه په کار اخيستی سره لرو چې:

$$a_n = \frac{2(2 \cdot 8)}{2+8} = \frac{2 \cdot 16}{10} = \frac{16}{5} = 3.2$$



1- د مخامخ ترادف 35-ام حد پيدا کړئ.  $-2, 5, 12, \dots$

2- آیا  $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}$  يو حسابي ترادف تشکیلوي؟ د پوښتني د سموالی په صورت کې يې مشترک توپير پيدا کړئ.

3- د  $2\sqrt{2}$  او  $16\sqrt{2}$  تر منځ حسابي اوسط په لاس راوړئ.

4- که  $a_1 = -\frac{1}{2}$  ،  $a_{10} = \frac{84}{2}$  وي د  $d$  قيمت په لاس راوړئ.

5- له لاندي ترادفونو څخه کوم يو حسابي ترادف نه دی.

a)  $2, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \dots$

b)  $3, 6, 9, 12, \dots$





## هندسي ترادف

### Geometric Sequences

که د شطرنج د یوې تختې په لومړۍ خانه کې یوه دانه غنم او په دویمه خانه کې یې دوه دانې غنم په همدې ډول که په هره وروستی خانه کې په مخکنۍ خانې دوه برابره غنم کېښودل شي، نو د شطرنج د تختې په اخره خانه کې (یوه د شطرنج تخنه 64 خانې لري) به څو دانې غنم وي.

### فعالیت

- د محامخ ترادف عددونه په پام کې ونیسئ.
  - د پورتنی ترادف د عناصرو ترمنځ کومه اړیکه موجوده ده؟
  - د پورتنی ترادف د دوو پرله پسې حلدونو ترمنځ نسبت پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ.
- له پورتنی فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

### پایله

هغه ترادف چې د دوو پرله پسې حلدونو ترمنځ نسبت یې یو ثابت عدد  $q$  وي، د هندسي ترادف په نامه یادېږي، یعنې:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \cdot q, \quad n=1,2,3, \dots$$

$$a_{1+1} = a_1 \cdot q \Rightarrow a_2 = a_1 q$$

$$a_{2+1} = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$a_{3+1} = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

دلته  $q$  گڼه نسبت او  $a_1$  د ترادف لومړی حد دی.

هندسي ترادف هغه وخت پېژندل کېږي، چې لومړی حد او گڼه نسبت یې معلوم وي.

لومړی مثال: د  $6, 12, 24, 48, 96$  هندسي ترادف په پام کې ونیسئ، گڼه نسبت یې په لاس راوړئ.

حل: هر حد یې په مخکیني حد باندې وپشو:

$$\begin{array}{ccccccc}
 96 & \xrightarrow{\quad} & 48 & \xrightarrow{\quad} & 24 & \xrightarrow{\quad} & 12 & \xrightarrow{\quad} & 6 \\
 q = \frac{48}{96} = \frac{1}{2} & & q = \frac{24}{48} = \frac{1}{2} & & q = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} & & q = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}
 \end{array}$$

### فعالیت

- په یوه هندسي ترادف کې  $a_1 = 2$  او  $q = 3$  دی،  $a_2$ ،  $a_3$  او  $a_4$  حدوده پیدا کړئ.

### یادونه

- $q > 1$  لپاره ترادف متزايد دی.
- $q < 1$  لپاره ترادف متناقص دی.
- $q = 1$  لپاره ثابت ترادف په لاس راځي.

**دویم مثال:** د  $100, 300, 900, 2700$  هندسي ترادف په پام کې ونیسئ لومړی حد او گڼه نسبت یې په لاس راوړئ او وویایست چې پورتنی هندسي ترادف متزايد دی او که متناقص.

حل:

$$\text{حد لومړی } a = 2700$$

$$\text{گڼه نسبت } q = \frac{900}{2700} = \frac{1}{3}$$

په پورتنی مثال کې  $q = \frac{1}{3} < 1$  دی، نو نوموړی ترادف متناقص دی.

په هندسي ترادف کې د  $m-n$  حد پيدا کول:

که په يوه هندسي ترادف کې  $a$  لومړی حد،  $q$  ګڼه نسبت او  $n$  د ترادف د حدونو شمېر وي، نو د  $m-n$  حد پيدا کولو لپاره له لاندې تحليلي ثبوت څخه کار اخلو.

که چېرې هندسي ترادف د  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  په پام کې ونيسو، نو په لاندې ډول کرښه کوو:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= a_1 \\
 q &= \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q \\
 q &= \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2 \\
 q &= \frac{a_4}{a_3} \Rightarrow a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3 \\
 &\vdots \\
 q &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \Rightarrow a_n = a_{n-1} \cdot q = (a_1 q^{n-2}) \cdot q = a_1 q^{n-1}
 \end{aligned}$$

اوس د  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  په ترادف کې يې قيمتونه برده:

لومړی حد	دویم حد	درېم حد	څلورم حد	$m-n$ حد
$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$ , ... , $a_n$	
↓	↓	↓	↓ , ... , ↓	
$a_1$	$a_1 q$	$a_1 q^2$	$a_1 q^3$ , ... , $a_1 q^{n-1}$	

يعنې په هندسي ترادف کې  $m-n$  حد يا عمومي حد، د دغې اړيکې  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$  په واسطه پيدا کېږي.

لومړی مثال: د لاندې هندسي ترادف شپږم حد پيدا کړئ.  
حل:  $5, -10, 20, -40, \dots$

$$\left. \begin{array}{l} a = 5 \\ q = \frac{-10}{5} = -2 \\ n = 6 \\ a_6 = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_n = aq^{n-1} \\ a_6 = 5(-2)^{6-1} \\ a_6 = 5(-2)^5 \Rightarrow a_6 = 5(-32) \\ a_6 = -160 \end{array}$$

دویم مثال: د  $2, 4, 8, \dots$  هندسي ترادف دوولسم حد په لاس راوړئ.  
حل:

$$\left. \begin{array}{l} n = 12 \\ a = 8 \\ q = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_n = aq^{n-1} \\ a_{12} = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{12-1} = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{11} = 8 \frac{1}{2^{11}} \\ a_{12} = \frac{8}{2^{11}} = \frac{2^3}{2^{11}} = 2^{3-11} = 2^{-8} = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256} \end{array} \right.$$

د هندسي ترادف وسطي حد:

که  $a, M, b$  د هندسي ترادف پر له پسې حدوده وي، د  $a, M, b$  ترمنځ اړیکه پيدا کړئ.

$$\left. \begin{array}{l} q = \frac{M}{a} \\ q = \frac{b}{M} \end{array} \right\} q = q \Rightarrow \frac{M}{a} = \frac{b}{M} \Rightarrow M^2 = a \cdot b$$

$$M = \sqrt{a \cdot b}$$

له پاستي فورمول څخه ویلی شو که چېرې  $a$  او  $b$  دوه مثبت حقيقي عددونه وي، نو د  $M$  حقيقي مثبت عدد ته د  $a$  او  $b$  هندسي اوسط (Geometric mean) ویلي.

دریم مثال: د 3 او 12 عددونو هندسي وسط پیدا کړئ.

حل:

$$\left. \begin{array}{l} a = 3 \\ b = 12 \end{array} \right\} M = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$$

$$M = 6$$

څلورم مثال: د 2، 32، ؟، ؟، ؟، ؟ هندسي ترادف نا معلوم حدوده پیدا کړئ.

حل:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ n = 5 \\ a_5 = 32 \\ q = ? \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_5 = a \cdot q^{n-1} \Rightarrow 32 = 2q^{5-1} \Rightarrow 32 = 2q^4 \\ q^4 = \frac{32}{2} = 16 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow q^4 = 2^4 \Rightarrow q = 2 \end{array}$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = a_1 \cdot q = 2 \cdot 2 = 4$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3 = 2 \cdot 2^3 = 16$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \text{ یا } 2, 4, 8, 16, 32$$

نو هندسي ترادف نې عبارت دی له:

### فعالیت

- که په هندسي ترادف کې  $a_n$ ،  $m-n$  حد،  $n$  د ترادف د حدودو شمېر او  $q$  گڼه نسبت وي، د  $q$  لپاره عمومي فورمول پیدا کړئ.

لوېمری مثال:  $x$  داسې وټاکئ چې له لاندې حدودونو څخه یو هندسي ترادف جوړ شي.

$$x-1, x+3, x+1$$

$$M = \sqrt{a \cdot b} \Rightarrow (x+3) = \sqrt{(x-1)(x+1)} \Rightarrow (x+3)^2 = (x-1)(x+1)$$

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 - 1 \Rightarrow 6x + 10 = 0, x = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$$

$$x = -\frac{5}{3}$$



1- د هندسي ترادف 5 حلوڼه داسې وليکئ چې لومړی حد يې 5 او اخيري حد يې  $\frac{5}{16}$  وي.

2- کم يو له لاندې ترادفونو څخه هندسي ترادف دی.

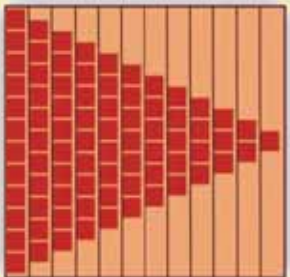
a)  $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \dots$

b)  $-4, -2, 0, 2, 4, \dots$

3- د  $\frac{5}{8}, \frac{5}{2}, 5$  هندسي ترادف دوولسم حد پيدا کړئ.

4- د  $\sqrt{3}$  ، هندسي وسط په لاس راوړي.

5- د 27 ، ؟ ، ؟ ، ؟ ،  $\frac{1}{3}$  حلوڼو تر منځ درې هندسي وسطونه په لاس راوړئ.



### د ترادفونو قسمي مجموعه

- a - په لسم کتار کې د قوطو شمېر څو دی؟
- b - په المارۍ کې د ټولو قوطو شمېر پیدا کړئ؟

### فعالیت

- د  $2, 4, 6, 8, \dots$  ترادف په پام کې ونیسئ.
  - د دویم او دریم حدونو د جمعې حاصل ولیکئ.
  - د لس لومړیو حدونو د جمعې حاصل پیدا کړئ.
  - د  $n - 1$ م حد د جمعې حاصل ولیکئ.
- له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله بیانېږي:

څرنگه چې د لومړی  $n$  حدونو د جمعې حاصل مشکل دی چې ټول  $n$  حدونه یې ولیکو، نو ځکه یې دوه یا درې لومړی حدونه لیکو او وروسته له درېو ټکو  $n - 1$ م حد لیکو.

څرنگه چې یو ترادف د بې نهایت حدونو لرونکی دی، که د زیاتو حدونو د جمعې حاصل، لکه: 100, 1000 او داسې نورو حدونو په پام کې وي، نو د جمعې حاصل یې سرخوږي جوړوي.

په عمومي ډول د ترادف  $n$  لومړیو حدونو  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  د جمعې حاصل په لاندې ډول لیکو:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

د اسانتیا او لنډیز لپاره په محاسبو کې د  $\sum$  له سمبول څخه کار اخلي.

د  $\sum$  پورتنی او ښکتنی نښې داراښتي چې  $i$  له 1 څخه تر  $n$  پورې ټول نام عددونه اخلي،  $i$  د انلوکس په نامه یادېږي. د یوې مجموعې د انلوکس لپاره هر حرف کارول کېږي، خو د  $j, k, n, i$  حروف ډېر معمول دي.

مثلاً:  $2n + 2n + 2n + \dots + 2n = \sum_{j=1}^n 2j = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot n$



لوپړی مثال: لاندې مجموع ( $\sum_{i=1}^7$ ) په غزیدلي شکل ولیکئ.

$$\sum_{i=1}^7 \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{1089}{420}$$

حل:

دویم مثال: لاندې د جمعې حاصل د مجموعې ( $\sum$ ) په شکل ولیکئ.

a)  $1+3+5+7+ \dots + (2n-1)$

b)  $1+4+9+ \dots + n^2$

د a جزء حل:

$$1+3+5+7+ \dots + (2n-1) = \sum_{i=1}^n (2i-1)$$

د b جزء حل:

$$1+4+9+ \dots + n^2 = \sum_{i=1}^n i^2$$

دریم مثال: لاندې مجموعه په پرمختللي (غزیدلي) شکل ولیکئ.

$$\sum_{i=4}^n i(i+2) = ?$$

حل:

$$\sum_{i=4}^n i(i+2) = 4(4+2) + 5(5+2) + 6(6+2) + 7(7+2) + \dots + n(n+2)$$

$$= 4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 8 + \dots + n(n+2)$$

$$= 24 + 35 + 48 + 63 + \dots + n(n+2)$$

څلورم مثال: د دغې مجموعې حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\sum_{n=7}^{10} \frac{n+1}{n-1} = \frac{7+1}{7-1} + \frac{8+1}{8-1} + \frac{9+1}{9-1} + \frac{10+1}{10-1} = \frac{8}{6} + \frac{9}{7} + \frac{10}{8} + \frac{11}{9}$$

$$= \frac{4032 + 3888 + 3780 + 3696}{3024} = \frac{15396}{3024} = \frac{5132}{108}$$



تراسه مویوازي دیوه ترادف د  $n$  حدونو د جمعی حاصل وڅیرل، که وغواړو دیوه ترادف  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  د ټولو حدونو د جمعی حاصل پیدا کړو، په دې صورت کې لیکو:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

په دې حالت کې  $i$  ټول طبیعي عددونه اخیستلای شئ:

د  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  سلسله د بې نهایت سلسلې (Series) په نامه یادېږي.

د  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$  عددونه د سلسلې حدونه او  $a_n$  د سلسلې  $n$ -م حد یا دسلسلې عمومي حد بلل کېږي.

څرنگه چې موز نشو کولای، د عددونو بې نهایت شمېر جمع کړو، خو په ریاضی کې د ځینو قاعدو په کارولو سره کولای شو، یوې سلسلې ته د یوې مجموعې نسبت ورکړو، خو دلته غواړو دیوې سلسلې د  $n$  حدونو مجموعه پیدا کړو.

دیوې سلسلې د  $n$  لومړنیو عناصرو مجموعه  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  د نوموړې سلسلې د  $n$  حدونو د قسمي مجموعې په نامه یادېږي، که هغه په  $S_n$  وښیو، نو لرو:

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \end{aligned}$$

مثال: د  $1 + 2 + 3 + \dots + n$  او  $S_8$  حساب کړئ.  
حل:

$$S_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

$$S_8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

که  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  او  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  دوي سلسلې او  $c$  يو ثابت عدد وي لاندې، خاصيتونه د قسمي مجموعو لپاره سم دي:

$$\sum_{k=1}^n c = c + c + \dots + c = nc$$

$$\sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$



پوښتنې

1. لاندې مجموعې حساب کړئ.

a)  $\sum_{i=1}^6 \sqrt{i}$

b)  $3 \sum_{i=1}^6 \frac{1}{i+1}$

c)  $\sum_{k=1}^3 (4k^2 - 3k)$

2. لاندې مجموعې د  $\sum$  په شکل کې وليکئ.

a)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{19}{20}$

b)  $1 + 4 + 9 + \dots + n^2$

c)  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1)$

3. لاندې قسمي مجموعې په لاس راوړئ.

a)  $\sum_{i=4}^n i(i+2)$

b)  $\sum_{i=1}^n (3i-2)$

c)  $\sum_{i=1}^n (2+5i)$

**د حسابي ترادف د  $n$  لومړيو حدودو قسمي مجموعه**  
 که  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  یو حسابي ترادف وي، نو  
 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  د یوې حسابي سلسلې  
 قسمي مجموعه کېدای شي؟

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \\ d &= \\ a_n &= \end{aligned} \right\} ?$$

$$1+2+3+4+\dots+n=$$

$$\frac{n}{2} \cdot [2a+(n-1) \cdot d]$$

که چېرې د یوه حسابي ترادف د حدودو ترمنځ د جمعې نښه وي، هغې ته حسابي سلسله ويل کېږي. بیا به بل عبارت د یوه حسابي ترادف د جمعې حاصل ته حسابي سلسله وایي.

په یوه حسابي ترادف کې چې لومړی حد یې  $a$  گڼد فرق یې  $d$  او اخیري حد یې  $a_n$  وي، د حدودو د جمعې لپاره عمومي فورمول داسې په لاس راوړو:

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \quad \dots \text{ I}$$

$$S = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a + 2d) + (a + d) + a \quad \dots \text{ II}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا جمع کوو:

$$2S = \underbrace{(a+a_n) + (a+a_n) + \dots + (a+a_n)}_{\substack{\text{ځلې } n \\ n(a+a_n)}} + a + a_n$$

$$2S = n(a+a_n) \Rightarrow S = \frac{n}{2}(a+a_n) \quad \dots \text{ I}$$

د I فورمول د حسابي سلسلې جمع راښيي چې لومړی حد، اخیري حد او د جملاتو شمېر یې معلوم وي.

لومړۍ مثال: د حسابي سلسلې د جمعې حاصل په لاس راوړئ، داسې چې  $a = 4$ ,  $a_n = 25$  او د حدونو شمېر يې 8 وي.

حل:

$$a = 4$$

$$a_n = 25 \quad S = \frac{n}{2}(a + a_n)$$

$$n = 8 \quad S = \frac{8}{2}(4 + 25) \Rightarrow S = 4(29) = 116$$

که چېرې په يوه حسابي سلسله کې لومړۍ حد، د حدونو شمېر او گڼه توپير ورکړل شوي وي، د جمعې حاصل يې له لاندې اړيکې څخه په لاس راځي:

$$S = \frac{n}{2}(a + a_n)$$

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$S = \frac{n}{2}[a + a + (n-1)d] \Rightarrow S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \dots\dots\dots \text{III}$$

دویم مثال: د لاندې سلسلې د 201 حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

$$7 + 11 + 15 + \dots$$

حل:

$$\left. \begin{array}{l} a = 7 \\ d = 4 \\ n = 201 \\ S_{201} = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\ S_{201} = \frac{201}{2}[2 \cdot 7 + (201-1)4] \\ S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 200 \cdot 4) \Rightarrow S_{201} = \frac{201}{2}(14 + 800) = \frac{201}{2} \cdot 814 \\ S_{201} = 81807 \end{array}$$

### فعالیت

- د طبیعی عددونو سلسله په پام کې ونیسئ؛ لومړی حد، گڼه توپیر او  $n - m$  حد یې ولیکئ وروسته د سلسلو طبیعي عددونو د جمعې د حاصل عمومي فورمول په لاس راوړئ.

په یاد ولرئ: د طبیعي جفت پرله پسې عددونو د جمعې حاصل هم یوه حسابي سلسله ده چې فورمول یې په لاندې ډول په لاس راوړو:  $2 + 4 + 6 + 8 \dots$

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \\ d = 2 \\ n = n \\ S_n = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \\ S_n = \frac{n}{2}[2 \cdot 2 + (n-1)2] \\ S_n = \frac{n}{2}[4 + 2n - 2] = \frac{n}{2}(2 + 2n) \Rightarrow S_n = n(n+1) \end{array}$$

درېیم مثال: د جفتو پرله پسې عددونو د سلسلې  $(2 + 4 + 6 + 8 + \dots)$  د 200 حدونو د جمعې حاصل په لاس راوړئ:

حل:

$$\left. \begin{array}{l} n = 200 \\ S_{200} = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} S_n = n(n+1) \\ S_{200} = 200(200+1) \Rightarrow S_{200} = 200(201) \\ S_{200} = 40200 \end{array}$$

### فعالیت

- د طبیعي طاقو پرله پسې عددونو د حسابي سلسلې د جمعې حاصل فورمول پیدا کړئ. او د طبیعي پرله پسې عددونو د جمعې حاصل د  $S = \frac{n}{2}(n+1)$  فورمول په واسطه محاسبه کړئ (د پورته فورمولونو ثبوت د زده‌کوونکو دنده ده).

### پوښتني

1. د لاندې حسابي ترادفونو لسم او  $n$ -ام حدوده پيدا او همدارنگه د نوموړو ترادفونو د لس حدودو د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

i)  $2, 0, -2, -4, \dots$

ii)  $1, 5, 9, 13, \dots$

iii)  $-2, -1, 0, 1, 2, \dots$

2. که يو ترادف د  $2, 5, 8, 11, \dots$  په ډول راځول شوی وي. د لاندې مجموعو قيمتونه حساب کوئ.

a)  $S_8$

b)  $S_{10}$



## د یوه هندسي ترادف د $n$ حدونو د جمعي حاصل

که چېرې یوه مټه نیمه او نیمه بیا نیمه او همداسې ادامه ورکړو یو هندسي ترادف په لاس راځي، له لومړۍ برخې نیولې، څو برخې سره جمع کړو چې د جمعي حاصل مساوي په 2 منو شي.

### فعالیت

- یو هندسي ترادف چې لومړۍ جمله یې  $a_1$  او د دوو پرله پسې جمله ترمنځ نسبت یې مساوي په  $q$  راکړل شوی وي، لاندې فعالیت سرته ورسوئ.
- د ترادف دویمه جمله څو ده؟
- که چېرې دویمه جمله په  $q$  کې ضرب شي، د ضرب حاصل یې له دریمې جمعي سره پرتله کړئ.
- د ترادف د  $n$  جمله د جمعي حاصل د فورمول پیدا کولو لپاره څه وړاندیز لري؟

**پایله:**

په یوه هندسي ترادف کې هر راتلونکی حد د مخکیني حد له ضرب څخه په  $q$  کې، په لاس راځي. دا خبره د ټولو حدونو لپاره یوه باوري خبره ده، په دې ډول د یوه هندسي ترادف  $\{a_n\}$  د  $n$  جمله د جمعي د

$$\text{حاصل } (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \text{ قیمت عبارت دی، له: } q \neq 1, \quad S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

د پورتنۍ اړیکې ثبوت کولای شو په اسانۍ سره په لاس راوړو:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} \dots \dots \dots I$$

$$S_n \cdot q = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \dots \dots \dots II$$

له  $I$  اړیکې څخه د  $II$  اړیکه کموو:

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_1q^n = a_1(1 - q^n)$$

$$S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{(1 - q)}, \quad q \neq 1$$

پاسنې اړیکه هغه اړیکه ده، چې د هندسي ترادف د  $n$  جمله د جمعي حاصل په لاس راځي.

**لومړی مثال:** په یوه هندسي ترادف کې لومړی حد  $a_1 = 2$  او ثابت نسبت  $q = \frac{1}{2}$  دی. د پاسني ترادف 5 لومړی متوالي حدونه او د لسو جمله د جمعي حاصل پیدا کړئ.

**حل:** پوره کړو چې  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$  ده، نو:

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ q = \frac{1}{2} \\ S = ? \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 2 \\ a_2 = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ a_3 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} a_4 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} \\ a_5 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8} \end{array}$$

$$S_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{10} = 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow S_{10} = 2 \cdot \frac{1024 - 1}{2 - 1} = 2 \cdot \frac{1024 - 1}{1} = \frac{1024 - 1}{2}$$

$$S_{10} = 2 \cdot \frac{1024 - 1}{1} = \frac{1023}{1} \cdot \frac{4}{1} = \frac{4092}{1} = 4092$$

**دویم مثال:** د لاندې هندسي ترادف د څو جمله مجموعه 80 کېږي؟

2, 6, 18, ...

**حل:**

$$\left. \begin{array}{l} a = 2 \\ q = \frac{6}{2} = 3 \\ n = ? \\ S = 80 \end{array} \right\} \begin{array}{l} S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \\ 80 = \frac{2[(3)^n - 1]}{3 - 1} \\ 80 = (3)^n - 1 \Rightarrow 80 + 1 = (3)^n \\ 81 = 3^n \Rightarrow (3)^4 = 3^n \\ \Rightarrow n = 4 \end{array}$$

يعني د پاسني هندسي ترادف د 4 جمله مجموعه 80 کېږي.

**پوښتني**

1. په  $\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \dots$  هندسي ترادف کې د 10 جمله د جمعي حاصل په لاس راوړئ.
2. د 3, 6, 12, ... هندسي ترادف د حدونو شمېر او مجموعه پیدا کړئ.
3. په  $4, 12, 36, \dots$  ترادف کې د څو جمله د جمعي حاصل 484 کېږي، د  $n$ -ام حد قیمت پیدا کړئ.



## لايتناهي هندسي سلسلي

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-q}, |q| < 1$$

که د ترادف جملو ته په غور پاملرنه وکړو، په اسانۍ ليدل کېږي چې ترادف، جمله په جمله کوچنی کېږي. آیا هر هندسي ترادف يوه عدد ته نږدې کېږي؟

که چيرې په يوه هندسي سلسله کې  $|q| \geq 1$  او د حدونو شمېر يې معلوم نه وي، هغه د متبايعې سلسلې (Divergent series) په نامه يادېږي.

او که چيرې  $|q| < 1$  وي، هغه د متقاربې سلسلې (Convergent series) په نامه يادېږي. د متقاربو او متبايعو سلسلو د جمعې حاصل د پيدا کولو فورمول:

$$S = a \frac{1-q^n}{1-q} = a \frac{-(q^n-1)}{-(q-1)} = a \left( \frac{q^n-1}{q-1} \right)$$

که سلسله متبايعه  $|q| \geq 1$  او د حدونو شمېر يې نهايت وي، يعنې  $n \rightarrow \infty$  نو پوهېږو چې:

$$S_{\infty} = \frac{aq^{\infty} - a}{q-1} = \frac{aq^{\infty} - a}{q-1} = \frac{\infty - a}{q-1} = \infty \Rightarrow S_{\infty} = \infty$$

که سلسله متقارب ( $|q| < 1$ ) او د جملو شمېر يې نهايت وي، نو  $q^n \rightarrow 0$  کوي.

$$S = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \Rightarrow S_{\infty} = \frac{a-aq^n}{1-q} = \frac{a-a \cdot 0}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

يعنې که سلسله متقارب ( $|q| < 1$ ) او د جملو شمېر يې نهايت وي، د نوموړی سلسلې د جمعې حاصل

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-q}$$

عبارت دی له:

لومړی مثال: د  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$  حاصل مجموعي د سلسلې د جملې محاسبه کړئ.

حل: په دې سلسله کې  $a = 1$ ،  $q = \frac{1}{2}$  دی، څرنگه چې  $\left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} < 1$  دی، نو سلسله متقارب ده:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

دویم مثال: که په یوه هندسي سلسله کې  $a_1 = 27$  او  $q = \frac{1}{3}$  وي، د سلسلې د حدونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل: پوهېږو چې  $\left| \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} < 1$  دی، نو سلسله متقارب ده:

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + \dots &= \frac{a}{1-q} \\ 27 + 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots &= \frac{27}{1-\frac{1}{3}} = \frac{27}{\frac{2}{3}} = \frac{27 \cdot 3}{2} = 40.5 \end{aligned}$$

درېم مثال:  $0.\overline{623}$  پېریودیک (متوالي) اعشاري کسر په عام کسر واړوئ.

حل: دا عدد کولای شو په لاندې ډول په هندسي ترادف واړوو.

$$\begin{aligned} 0.\overline{623} &= 0.6232323\dots = 0.6 + 0.023 + 0.00023 + 0.0000023 + \dots \\ &= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} + \frac{23}{100000} + \frac{23}{10000000} + \dots \\ &= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} \left[ 1 + \frac{1}{100} + \left( \frac{1}{10000} \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

په پاسني سلسله کي  $a = 1$  او  $\left| \frac{1}{100} \right| = \frac{1}{100} < 1$  دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} \left[ 1 + \frac{1}{100} + \left( \frac{1}{100} \right)^2 + \dots \right] \\
 &= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} \cdot \frac{100}{99} \\
 &= \frac{6}{10} + \frac{23}{1000} \cdot \frac{100}{99} \Rightarrow 0.6\bar{2}3 = \frac{6}{10} + \frac{23}{990} = \frac{594 + 23}{990} = \frac{617}{990} \Rightarrow 0.6\bar{2}3 = \frac{617}{990}
 \end{aligned}$$

**څلورم مثال:** د  $0.\bar{3}$  متوالي اعشاري کسر د هندسي سلسلې په کارولو سره په عام کسر وړوي.

**حل:** يو هېرو چي:

$$\begin{aligned}
 0.\bar{3} &= 0.3333 \dots = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \dots \\
 &= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \dots \\
 &= \frac{3}{10} \left[ 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots \right]
 \end{aligned}$$

ليدل کيږي چي په پاسني سلسله کي  $a = 1$  او  $\left| \frac{1}{10} \right| = \frac{1}{10} < 1$  دی، نو سلسله متقاربه ده.

$$\begin{aligned}
 0.\bar{3} &= \frac{3}{10} \cdot \frac{a}{1-q} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} \\
 &= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10-1} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow 0.\bar{3} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$



1. لاندي هندسي مجموعي په لاس راوړئ.

i)  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$

,

ii)  $5 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots$

2. لاندي اعشاري پيرويډيک (متوالي) کسرونه په عام کسر واوړئ.

a)  $0.2\bar{4}$

b)  $0.\bar{5}$

## د څلورم څپرکي مهم ټکي

د تړادف تعريف:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  د عددونو د تړادف په نامه يادېږي.

پاسني هر يوه عدد ته د تړادف حد يا جمله وايي،  $a_1$  د تړادف لومړی حد او  $a_n$  د تړادف  $n$ -ام حد دی يا په بل عبارت، تړادف له هغې تابع څخه عبارت دی چې د تعريف ناحیه يې طبيعي عددونه او د قيمتونو ناحیه يې حقيقي عددونه تشکيلوي.

**حسابي تړادف:** که په يوه تړادف کې د دوو پرله پسې حدونو ترمنځ گڼ توپير يو ثابت عدد وي، نو نوموړی تړادف د حسابي تړادف په نامه يادېږي.

**د حسابي تړادف وسطي حد:** که درې پرله پسې حدونه  $a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$  ولرو، نو:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

په حسابي تړادف کې د  $n$ -ام حد فورمول  $a_n = a + (n-1)d$

**هندسي تړادف:** هغه تړادف چې د هغه د هر حد او مخکيني حد ترمنځ نسبت يو ثابت عدد  $q$  وي، د هندسي تړادف په نامه يادېږي، په هندسي تړادف کې د  $n$ -ام حد فورمول:  $a_n = aq^{n-1}$

**د هندسي تړادف وسطي حد:** که درې پرله پسې حدونه  $a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$  په داسې حال کې چې  $a_n = \sqrt{(a_{n-1})(a_{n+1})}$ ، نو د تړادف وسطي حد عبارت له:  $a_n = \sqrt{(a_{n-1})(a_{n+1})}$

د تړادفونو قسيمي مجموعه:  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$

يادېږي.

او د  $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$  د نوموړی  $n$ -ام سلسلې د جمعې قسيمي حاصل دی.

د حسابي تړادف د  $n$  لومړيو حدونو قسيمي حاصل جمع:

$$S = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

د هندسي تړادف د  $n$  لومړيو جملو قسيمي حاصل جمع:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

بي نهايت هندسي سلسلي: په يوه هندسي سلسله کې که  $|q| < 1$  وي، سلسله متقارب او د  $n$  جملو د جمعې حاصل يې د  $\frac{a}{1-q}$  عدد ته نږدې کېږي او قيمت يې د دغه فرمول  $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q}$  په واسطه محاسبه او لاسته راځي.

هغه هندسي سلسله چې په هغې کې  $|q| \geq 1$  او د حدونو شمېر يې هم بې نهايت وي، سلسله متباعد او د  $n$  لومړيو جملو مجموعه يې هم بې نهايت ده، يعنې  $S_n = \infty$



## د څپرکي پوښتني

لاندي پوښتني ولولئ، د هرې پوښتني لپاره څلور څوابونه ورکړل شوي دي، سم څواب يې پيدا او له هغه څخه کرۍ تاو کړئ.

1. د  $\dots, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2$  ترادف  $n$ -م حد کوم دی؟

a)  $\frac{\sqrt{n}-1}{n}$       b)  $\frac{\sqrt{n+3}}{n+2}$       c)  $\frac{n}{n-1}$       d)  $\frac{n+1}{n}$

2. که  $a_n = \frac{3n-1}{2n-1}$  د ترادف  $n$ -م حد وي، د دغه ترادف څلورم حد  $\frac{11}{7}$  دی؟

a) 3      b) 4      c) 5      d) 6

3. د  $\dots, 3, -1, -5, -9$  حسابي ترادف دوولسم حد عبارت دی، له:

a) 35      b) 38      c) -35      d) -38

4. د  $\dots, 3, 1, 0.7, 0.4, 0.1$  حسابي ترادف گډ تهپير عبارت دی، له:

a) 0.3      b) 0.1      c)  $\frac{2}{3}$       d)  $-\frac{2}{3}$

5. د  $\dots, 6, 12, 24, 48, 96$  هندسي ترادف گډ نسبت عبارت له:

a)  $-\frac{1}{2}$       b)  $\frac{1}{2}$       c)  $\frac{2}{3}$       d)  $-\frac{2}{3}$

6. د  $\dots, \frac{5}{16}, \frac{4}{8}, \frac{3}{4}, 5$  هندسي ترادف لسم حد عبارت دی، له:

a)  $\frac{3}{512}$       b)  $\frac{5}{512}$       c)  $-\frac{5}{512}$       d)  $\frac{5}{512}$

7. د يوه هندسي ترادف د  $n$  جملو د جمعې حاصل فورمول عبارت دی، له:

a)  $S_n = a \frac{1+q^n}{1-q}$       b)  $S = a \frac{q^n - 1}{q - 1}$

c)  $S = a \frac{1+q^n}{1+q}$       d) هيڅ يو

8. په بې نهايت هندسي متقايرو سلسلو کې گډ نسبت عبارت دی، له:

a)  $q = 0$       b)  $|q| > 1$       c)  $|q| < 1$       d) هيڅ يو

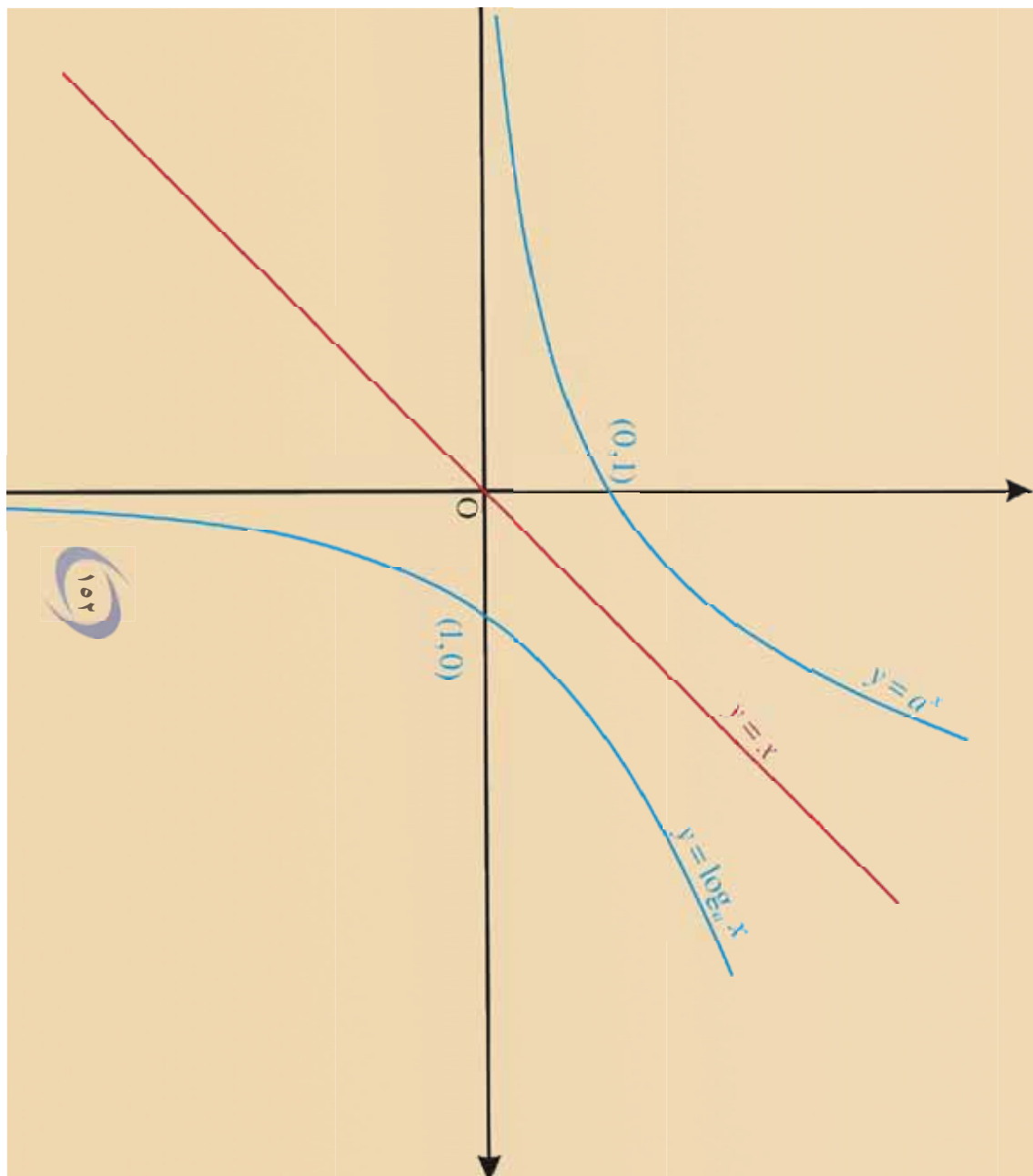
### لاندي پوښتني حل ڪري:

1. ڇو دوه رقمي طبعي عدونه لرو ڇي د څلورو مضرب وي؟
2. د 21 او 31 ترمنڃ په ٻيل ٻيل ڊول دري حسابي وسطونه وليکي. 31,  $\square$ ,  $\square$ ,  $\square$ , 21.
3. ڪه ديوه حسابي ترادف د لومري او وروستي جملې مجموعو  $a_1 + a_n = 24$  او د  $n$  لومريو جملو مجموعو ٻي 3720 وي، د نوموړي ترادف د حدونو شمير وٽاڪي؟  
4. لاندي ترادف د 100 جملو د جمعي حاصل په لاس راوري.  
3, 5, 7, 9, 11, ...
5. ڪه ديوه هندسي ترادف دويمه جمله 6 او اوومه جمله ٻي 192 وي، گه نسبت ٻي وٽاڪي.
6. ديوه هندسي ترادف د 8 لومريو جملو د جمعي قسمي حاصل 17 برابره، دهغه د څلورو لومريو جملو دي، د نوموړي ترادف گه نسبت حساب ڪري.
7. د لاندي سلسلي د جمعي قسمي حاصل په لاس راوري.  
 $0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \dots$
8. ديوه ناڀايه هندسي ترادف لومري حد 9 او پنجم حد ٻي  $\frac{1}{9}$  دي، د نوموړي ترادف د حدونو د جمعي حاصل پيدا ڪري.
9. د 3 او 96 عددونو ترمنڃ 4 هندسي وسطونه په ٻيل ٻيل ڊول وليکي.  
3,  $\square$ ,  $\square$ ,  $\square$ , 96
10.  $\dots + \frac{2}{9} + \frac{2}{3} + 2$  هندسي سلسلي د اته لومريو حدونو د جمعي حاصل په لاس راوري.
11. ڪه  $a = 4$  او  $d = 3$  وي، هارمونيڪي ترادف د  $n = 12$  لپاره په لاس راوري.
12. لاندي پيريوڊيڪ (متوالي) ڪسرونه په عامو ڪسرونو واروي.  
a)  $2.\bar{8}$       b)  $3.\bar{57}$



پنجم خیر کی  
لوگاریتم

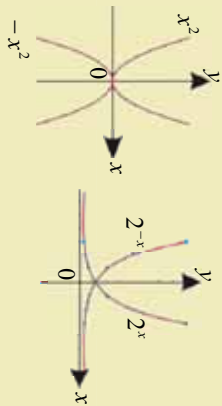




## اکسپوننشیل تابع گانې

### Exponential function

پوهیږئ چې د  $f(x) = x^2$  او  $f(x) = -x^2$  تابع گانو  
گرافونه نظرد لا محور ته یوله بل سره متناظر دي. آیا  
تراوسه مو د  $f(x) = 2^x$  او  $f(x) = 2^{-x}$  تابع گانو د  
گرافونو په هکله فکر کړی دی؟



### تعریف

که چېرې  $a$  یو مثبت عدد او  $a \neq 1$  وي، نو د  $f(x) = a^x$  تابع ته د  $a$  په قاعده اکسپوننشیل تابع وایي.

$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  ،  $x \in \mathbb{R}$  ،  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$f(x) = a^x$$

$f(x) = 2^x$  او  $f(x) = 2^{-x}$  اکسپوننشیل تابع گانې د 2 په قاعده دي.

### فعالیت

- د  $x \in Z$  مختلفو قیمتونو لپاره د  $f(x) = 2^x$  تابع گراف رسم کړئ.
- د  $f(x) = 2^x$  تابع گراف د  $y$  محور په کوم ټکي کې قطع کوي؟
- آیا د  $f(x) = 2^x$  تابع متزايد، متناقصه او که ثابت ده؟ ولې؟
- د  $f(x) = 2^x$  او  $f(x) = 2^{-x}$  تابع گانو گرافونه دوضیعه کمیاتو په سیستم کې رسم او یوله بله سره یې پرتله کړئ.
  - پورتنی فعالیت د  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  تابع لپاره سرته ورسوئ.
- له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.
  - د  $f(x) = 2^x$  تابع قیمت د  $x \in Z$  ټولو قیمتونو لپاره همیشه مثبت ده
  - د  $2^x = 2^{-x}$  او  $2^x = 2^{-x}$  تابع گانو گرافونه نظر  $y$  محور ته متناظر دي، یعنې د  $2^x = 2^{-x}$  تابع گراف هر ټکی د  $2^{-x} = 2^x$  تابع گراف له هر ټکي سره یوه یو متناظر دی.

که چيري په اکسپوننشيئل تابع کي  $a > 1$  وي متزايد، که  $a < 1$  وي متناقص او که  $a = 1$  وي ثابت تابع ده.

د  $y = 2^{-x}$  تابع متزايد ده، ځکه چې  $2 > 1$  دی.

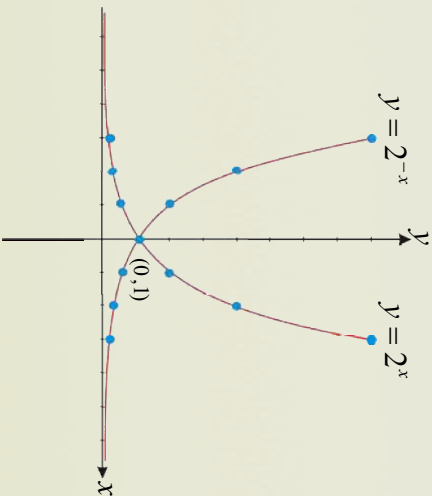
د  $y = 2^x$  او  $y = 2^{-x}$  تابع گانو گرافونه رسموو.

د  $y = 2^x$  تابع گراف

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

د  $y = 2^{-x}$  تابع گراف

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

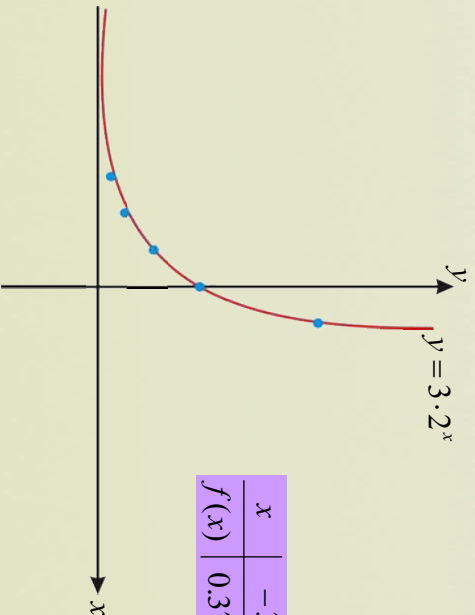


مثال: د  $f(x) = 3 \cdot 2^x$  اکسپوننشيئل تابع رسم کړئ

**حل:** د پایلي په پام کې نیولو سره پوهیږو چې د  $f(x) = 3 \cdot 2^x$  اکسپوننشيئل تابع قاعده  $a = 2$  ده، نو په دې اساس پورتنی اکسپوننشيئل تابع متزايد ده، ددې لپاره چې د پورتنی اکسپوننشيئل تابع دقیق رسم کړو، نو د  $x$  متحول ته مختلف قیمتونه ورکوو د  $y$  قیمتونه پیدا او په یوه جدول کې یې لیکو، وروسته دغه ټکي  $(x, y)$  د قایمو مختصانو په سیستم کې په نښه کوو.

چې له نښلولو وروسته یې گراف رسم کړي.

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.375	0.750	1.5	3	6	12	24



- د  $a^x = f(x)$  اکسيو نئشيل تابع په پام کې نيولو سره د  $x$  او  $y$  ټولو حقيقي عددونو لپاره ثبوت کړئ چې:

$$F(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

$$f(x - y) = \frac{f(x)}{f(y)}$$

$$f(a \cdot x) = (f(x))^a$$

د اکسيو نئشيل تابع خاصيتونه: له تيرو معلوماتو څخه په گټه اخيستنې سره د اکسيو نئشيل تابع خواص په لاندې

ډول بيانوو

1. د هرې اکسيو نئشيل تابع د تعريف ناحيه ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ناحيه يې مثبت حقيقي عددونه دي.
2. هره اکسيو نئشيل تابع يوه يوه (injective) ده يعنې د هر

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

4. هره اکسيو نئشيل تابع د  $a > 1$  لپاره متزايله او د  $a < 1$  لپاره متناقصه ده.

5. د هرې اکسيو نئشيل تابع گراف د  $(0, 1)$  له ټکي څخه تيرېږي.

6. د  $f(x) = a^x$  او  $g(x) = a^{-x}$  اکسيو نئشيل تابع گانو گرافونه نظر يا محورته متناظر پرته دي

7. هره اکسيو نئشيل تابع معکوس لري چې معکوسه تابع يې  $Log_a x$  دی او د  $f(x) = a^x$  اکسيو نئشيل تابع

معکوس تابع  $g(x) = a^{-x}$  دی.

## پوښتني



دلالتې اکسپوننشل تابع گانو گرافونه په قايمو مختصاوکې رسم کړئ.

a)  $f(x) = 2 \cdot 3^x$

b)  $f(x) = 2 \cdot 3^{-x}$

c)  $f(x) = (-2)^x$

d)  $f(x) = (-2)^{-x}$

## لوگاریتم

### Logarithm

آیا کو لای شئی، چي اکسپوننشنیل تابع په بل ډول هم

ولیکي؟

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

### فعالیت

لاندي جدول بشپړ کړئ

$y$ = درکړل شوي عددونه	0.0001	0.001	0.01	100	1000	10000
$a^x$ = طاقت لرونکي عددونه		$10^{-3}$				$10^4$
$x$ = توان	-4			2		

- د  $10^{-3}$  طاقت لرونکي عدد قاعده او توان خو دي؟
  - آیا ډیره عدد قاعده او توان د 1 عدد کېدلای شي؟
  - آیا تاسو کولای شئ چې طاقت لرونکي عدد په بل ډول وپنایست؟
- د پورتنی جدول له بشپړولو وروسته لاندي تعریف کولای شو، بیان کړو.
- تعریف:** د طاقت لرونکي عدد یوې بېلې شپونې ته لوگاریتم وايي، یا په بل عبارت د مجهول توان محاسبه د لوگاریتم په نامه یادېږي .

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

په پورتنی اړیکه کې  $a$  ته د لوگاریتم قاعده (Base) او  $y$  ته لوگاریتمي عدد وايي، د یوه طاقت لرونکي عدد توان له لوگاریتم څخه عبارت دی، که د قاعدې په اندازه توان لور شي، را کړل شوی عدد په لاس را کوي. په تیر جدول کې د 10 د قاعدو توانونه درکړل شوي عددونو له لوگاریتم څخه عبارت دي.

د ساري په توگه:  $3 = \log_{10} 10^{-3} = \log_{10} 0.001$   
هر مثبت عدد پرته له 1 څخه د لوگارېتم قاعده کېدای شي.

مثال: د لوگارېتم د تعريف په کارولو سره لاندي افادي په معادلر (طاقت لرونکو عددي) افادو وړوئ.

a)  $\log_2 8 = 3$

b)  $\log_{10} 1000 = 3$

حل:

$\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 8 = 2^3$

$\log_{10} 1000 = 3 \Leftrightarrow 1000 = 10^3$

### پوښتني

1. لاندي لوگارېتمې اړيکې د هغوی په اړوندو افادو وړوئ.

a)  $\log_{10} N = x$

b)  $\log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$

c)  $\log_9 81 = 2$

d)  $\log_5 5 = 1$

2. لاندي افادي ( طاقت لرونکي عددونه) د لوگارېتم په شکل وليکي

a)  $4^3 = 256$

b)  $2^5 = 32$

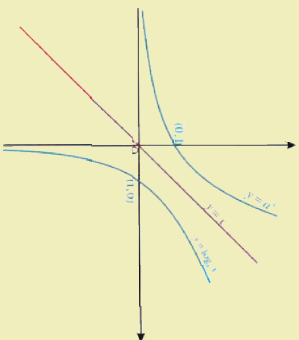
c)  $10^4 = 10000$

d)  $10^{-1} = 10^y$

e)  $y = 2^x$

f)  $y = 3^x$





**لوگاریتمی تابع گانې**  
 آیا ویلې شي چې کوم ډول تابع گانې معکوسي تابعگاني لري؟  
 آیا ویلې شي هغه تابع گانې چې معکوس لري، په فایمو مخصلاو کې نظر کوم مستقیم خط ته مناظرې دي.

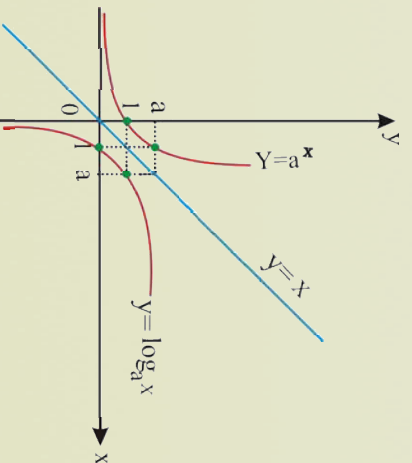
**تعریف:** د اکسپوننشل تابع معکوسه تابع د لوگاریتمی تابع په نامه یادېږي او هره اکسپوننشل تابع لوگاریتمی تابع ده.  
 د بیوي  $a \neq 1$  او  $a \in \mathbb{R}^+$  اکسپوننشل تابع، معکوسه تابع د  $a$  په قاعده، هغه لوگاریتمی تابع ده چې د  $\log_a x$  سره ښوول کېږي.

هره لوگاریتمی تابع، معکوسه تابع لري چې د  $f(x) = a^x$  او  $g(x) = \log_a x$  تابع گانې یو د بل معکوسي تابع گانې او گروونه یې د  $y = x$  مستقیم ته مناظرې دي.

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

$$f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = \log_a x, a \in \mathbb{R}^+, a \neq 1$$

د  $f(x) = a^x$  تابع گراف د  $x = 1$  لپاره لاندې شکل لري.



$x$	0	1	$a$	$+\infty$
$\log_a x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

که چیري  $a > 1$  وي، نو د  $IR$  لپاره لرو چې:

که  $\log_a x_2 > \log_a x_1$  وي؛ نو  $x_2 > x_1$  دی.

د  $f(x) = a^x$  تابع گراف د  $x = 0$  لپاره  $\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$

**لومړی مثال:** د  $y = 3^x$  او  $y = \log_3 x$  تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

**حل:** د  $y = 3^x$  تابع په پام کې نیسو:

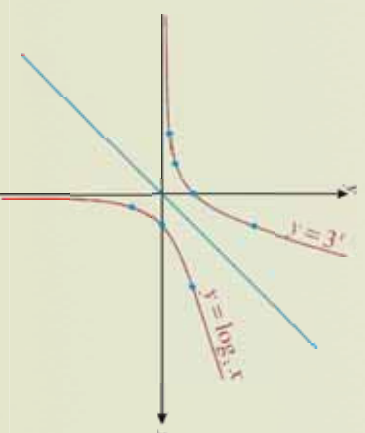
$x$	-2	-1	0	1	2
$y$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

اوس  $y = \log_3 x$  تابع په پام کې نیسو:

$$\left. \begin{array}{l} x=1 \\ y=\log_3 1 \end{array} \right\} (1,0) \qquad \left. \begin{array}{l} x=3 \\ y=\log_3 3 \end{array} \right\} (3,1)$$

$$x=\frac{1}{3}$$

$$y=\log_3 \frac{1}{3} = y = \log_3 3^{-1} = -1 \qquad \left. \right\} \left(\frac{1}{3}, -1\right)$$



$x$	$\frac{1}{3}$	0	1	3
$y$	-1	1	0	1

### فعالیت

د  $y = 2^x$  او  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  اکسپوننشل تابع گانو د گراف په پام کې نیولو سره او د اکسپوننشل تابع گانو د تعریف له مخې ددوی د اړوندو معکوسو اکسپوننشل تابع گانو قیمتونه د  $x = 1, 2$  لپاره پیدا کړئ او نتیجه یې په عمومي ډول ولیکنه.

**پایله:** د هري لوگاریتمی تابع لکه  $x = \log_a y$  د یوې اختیاري فاعلي لپاره لرو.

$$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1, a \in IR, a > 0, a \neq 1$$

**دویم مثال:** که چیری  $x = \log_3 f(x) = \log_3 x$  را کرل شوی وی نو  $f(3), f(9), f(3^{-2}), f(1)$  په لاس راوی.

**حل:** په را کرل شوی تابع کې د  $X$  پر ځای قیمتونه اېږدو.

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(3) = \log_3 3 = 1$$

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(9) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \cdot \log_3 3 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(3^{-2}) = \log_3 3^{-2} = -2 \cdot \log_3 3 = -2 \cdot 1 = -2$$

$$f(x) = \log_3 x \Rightarrow f(1) = \log_3 1 = 0$$

**دریم مثال:** که  $\log_3 x = 4$  وی، د  $x$  قیمت په لاس راوی.

$$\text{حل: پورتی لوگارتم د طاقت په شکل لیکو } x = 3^4 \Rightarrow x = 81$$

د تیرو معلوماتو په کارولو سره د لوگارتمی تابع خاصیت په لاندې ډول بیانېږي.

### د لوگارتمی تابع خاصیتونه:

1. د لوگارتمی تابع د قیمتونو ساحه د مثبتو عددونو، له ست څخه عبارت ده.
2. څرنگه چې  $\log_a 1$  د هرې اختیاري قاعدې لپاره مساوي په صفر ده، نو په دې اساس لوگارتمی تابع یوازې یو جنر  $x_0 = 1$  لري چې په ترتیب سره د لوگارتمی تابع گراف په قلمو مختصاتی کې د  $(1, 0)$  له ټکي څخه تیرېږي.
3. هره لوگارتمی تابع یو په یو یا انجکتیف (injective) ده یعنې  $x_1 \neq x_2$  لپاره تل  $f(x_1) \neq f(x_2)$  دی.

### د 2 په قاعده لوگارتم:

$$\text{د } x = \log_2 f(x) \text{ تابع قیمت د } \frac{1}{8}, 16, x \text{ لپاره پیدا کړی.}$$

**حل:** په را کرل شوی تابع کې د  $x$  برخای قیمتونه وضع کوو چې په پایله کې د تابع قیمت په لاس راځي.

$$f(x) = \log_2 x \Rightarrow f(16) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 \cdot \log_2 2 = 4 \cdot 1 = 4$$

$$f(x) = \log_2 x \Rightarrow f\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 2^{-3} = -3 \cdot \log_2 2 = -3 \cdot 1 = -3$$

## فعاليت

- د  $f(x) = \log_2 x$  تابع قيمت د  $x = 28, \sqrt{2}$  لپاره په لاس راوړئ.



## پوښتنې

1. د  $x$  د  $f(x) = \log_2 x$  تابع قيمتونه په  $f(2), f(1), f\left(\frac{1}{32}\right), f(32)$  کې پيدا کړئ.
2. د  $x$  د  $f(x) = \log_3 x$  تابع قيمتونه په  $f(1)$  او  $f\left(\frac{1}{81}\right)$  کې په لاس راوړئ.

$$\left. \begin{array}{l} \log_e N \\ \log_{10} 10^3 \end{array} \right\} = ?$$

**معمولي لوگاريتم Common logarithm**  
**طبيعي لوگاريتم Natural logarithm**  
 آيا يوازې 2 او 3 د لوگاريتم قاعدې دي او که نور عددونه هم د لوگاريتم قاعده کېدای شي ؟

### تعريف

خرنگه چې ومو ليدل، هر مثبت عدد پرته له 1 څخه کېدای شي د لوگاريتم قاعده شي، خو په عمل کې د 10 او e قاعدې معمول او په کار وړل کېږي.

1 - هغه لوگاريتم چې قاعده يې 10 وي، د معمولي لوگاريتم Common logarithm يا اعشاري (Briggs) لوگاريتم په نامه يادېږي چې د  $\log$  په سمبول يې ښيي او په لاندې ډول ښودل کېږي.

مثال: د  $10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3$  عددونو لوگاريتمنه پيدا کړئ.  
 $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_{10} x = \log x$

حل:

$$\log_{10} 10^0 x = \log 10^0 = y \Leftrightarrow 10^y = 1 \Rightarrow 10^y = 10^0 \Rightarrow y = 0$$

$$\log_{10} 10 = \log 10 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^1 \Rightarrow y = 1$$

$$\log_{10} 10^2 = \log 10^2 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^2 \Rightarrow y = 2$$

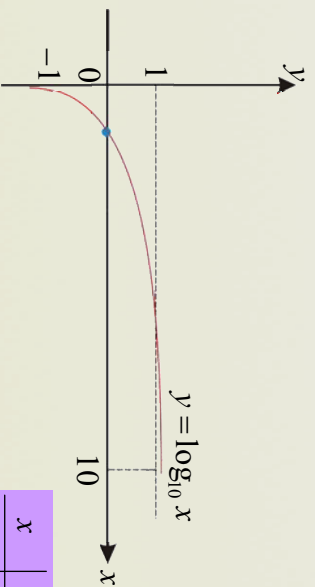
$$\log_{10} 10^3 = \log 10^3 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^3 \Rightarrow y = 3$$

$$\log_{10} 10^{-1} = \log 10^{-1} = y \Leftrightarrow 10^y = 10^{-1} \Rightarrow y = -1$$

⋮

$$n \in \mathbb{Z}, \log_{10} 10^n = \log 10^n = y \Leftrightarrow 10^y = 10^n \Rightarrow y = n$$

د  $x$  د مختلفو قیمتونو له مخې بې گراف رسموو



$x$	$\dots \cdot 10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-1}$	$10^0$	$10^1$	$10^2$	$10^3$
$\log x$	$\dots -3$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$3$

2- هغه لوگارېتم چې قاعده يې  $e$  وي د طبيعي لوگارېتم (Natural logarithm) په نامه يادېږي او په  $\ln$  سره بېنول کېږي،  $e$  يو ناطق عدد دی چې تقریبي قیمت يې عبارت دی له:  $e = 2.718281828\dots$  چې د بنسټول  $(1 + \frac{1}{x})^x$  فورمول څخه هغه وخت چې  $x$  بې نهایت ته نږدی شي په لاس راځي د  $e$  قیمت پيدا کول د لوړو رياضياتو کار دی. د  $e$  عدد د اولر عدد په نامه يادېږي او  $f(x) = e^x$  تابع د طبيعي اکسپوننشل تابع په نوم

يادېږي او داسې هم ليکي:  $Exp(x) = e^x$

د  $e^x = \gamma$  تابع گراف لکه  $\gamma = a^x$  تابع گراف په څېر ده.

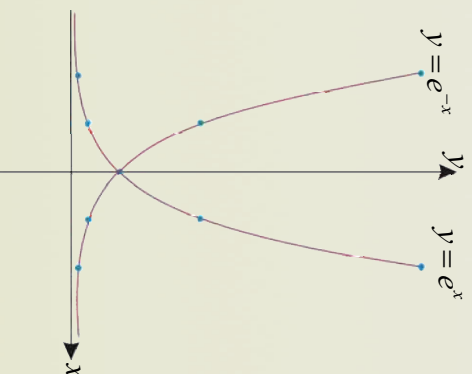
د  $e^x = \gamma$  په تابع کې  $x$  ته مختلف قیمتونه ورکوو:

$x$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$
$\gamma$	$\frac{1}{7.3}$	$\frac{1}{2.71}$	$1$	$2.71$	$7.34$

د  $e^{-x} = \gamma$  په تابع کې  $x$  ته بېلابېل قیمتونه ورکوو:

$x$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$
$\gamma$	$7.34$	$2.71$	$1$	$\frac{1}{2.7}$	$\frac{1}{7.3}$

د پورتنیو تقریبی قیمتونو په پام کې نیولو سره د  $y = e^x$  او  $y = e^{-x}$  تابع گانو گرافونه رسموو:

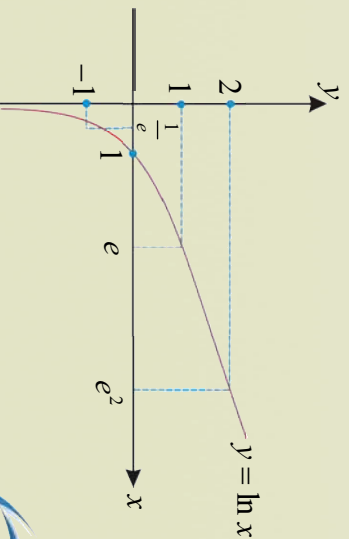


د طبیعي لوگارتم مطالعه په لوړو ریاضیاتو کې لکه ساینس، انجینرۍ، تجارت او تخنیک کې زیات استعمال لري. د طبیعي لوگارتم د تابع  $y = \ln x$  گراف په لاندې ډول دی.

مثال:  $\ln e^2, \ln e^3, \ln e^0, \ln e^{-1}, \ln e^{-2}$  او  $\ln e^1$  پیدا کړئ.  
حل: د تعریف په پام کې نیولو سره لرو چې:  $y = \ln x = \log_e x$

$$\begin{aligned} \ln e^1 = y &\Leftrightarrow e^y = e^1 \Rightarrow y = 1 \\ \ln e^2 = y &\Leftrightarrow e^y = e^2 \Rightarrow y = 2 \\ \ln e^3 = y &\Leftrightarrow e^y = e^3 \Rightarrow y = 3 \\ \ln e^0 = y &\Leftrightarrow e^y = e^0 \Rightarrow y = 0 \\ \ln e^{-1} = y &\Leftrightarrow e^y = e^{-1} \Rightarrow y = -1 \\ \ln e^{-2} = y &\Leftrightarrow e^y = e^{-2} \Rightarrow y = -2 \end{aligned}$$

د  $y = \ln x$  تابع گراف عبارت دی له:



- د  $\gamma = \ln \frac{1}{e^7}$  قیمت پیدا کړی او د  $\log 0.0001$  قیمت په لاس راوړی.

لاندي لوگاریتمونه حساب کړی.

a)  $\log_e e^8$

b)  $\ln \frac{1}{e^{-3}}$

c)  $\log 0.01$

d)  $\log \frac{1}{10^{-2}}$



## د لوگارتم قوانین

### Low of logarithm

پوهنځي چې د عددونو طاقت خپل قوانین لري، آیا د عددونو لوگارتم هم قوانین لري او که نه؟

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$
$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$
$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y$$
$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

### فعالیت

- د طاقت لرونکو عددونو د ضرب قوانین ولیکئ.
- د طاقت لرونکو عددونو د تقسیم قوانین ولیکئ.
- هر عدد د صفر او یادیوه په توان مسوولي په خوندی؟
- د طاقت قوانینو ته ورته لوگارتم هم څینې قوانین لري

**لومړی قانون:** د هر عدد لوگارتم د لوگارتم د تعریف په ساحه کې په خپله فاعله مساوي په یو دی؛ مثلاً:

$$a \in \mathbb{R}, a \neq 1, \log_a a = 1$$

**ثبوت:** پوهنځي چې  $a^1 = a$ ،  $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  دي، نو  $\log_a a = 1$

**لومړی مثال:**  $5^1 = 5 \Leftrightarrow \log_5 5 = 1$

**دویم قانون:** د 1 عدد لوگارتم په هره اختیاري فاعله مساوي په صفر دی؛ مثلاً:  $a^0 = 1$ ،  $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$  نو

$$\log_a 1 = 0$$

**دویم مثال:**  $1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{5})^0 = 1$

**دریم قانون:** د دوو یا خوعدوونو د حاصل ضرب لوگارتم د هغو د لوگارتمونو له مجموع سره مساوي دی یعنې:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

**ثبوت:** که چیرې  $x = a^p$  او  $y = a^q$  ولرو

$$x = a^p \quad \dots \quad \text{I}$$

$$y = a^q \quad \dots \quad \text{II}$$

I او II اړیکې خوا په خوا ضربوو:  $I \cdot II \Rightarrow x \cdot y = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$   
 د پورتنۍ اړیکې له دواړو خواوې لوگارتم نیسو:  
 $\log_a(x \cdot y) = p + q$   
 $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$  د  $p$  او  $q$  قیمتونو په اېښودلو سره لیکو:

**لومړي مثال:** د 50 عدد لوگارتم په لاس راوړئ.  
**حل:**  $\log 50 = \log(5 \cdot 10) = \log 5 + \log 10 = \log 5 + 1$   
**دویم مثال:**  $\log_4 2 + \log_4 8 = ?$

**حل:**

$$\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4 (2 \cdot 8) = \log_4 (4 \cdot 4) \\ = \log_4 4 + \log_4 4 = 1 + 1 = 2$$

### فعالیت

- دلاندې غیر مساواتو سم والی، د مثال په واسطه وښایاست.

$$\log_a(x + y) \neq \log_a x + \log_a y \\ \log_a(x \cdot y) \neq \log_a x \cdot \log_a y$$

**خلوړم قانون:** د دوو عددونو د تقسیم لوگارتم د لوگارتمونو له تفاضل سره مساوی دی، یعنې:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

**ثبوت:** که چیرې  $x = a^p$  او  $y = a^q$  ولرو:

$$\left. \begin{array}{l} x = a^p \dots\dots\dots I \\ y = a^q \dots\dots\dots II \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\log_a x}{\log_a y} = \frac{p}{q}$$

د I او II اړیکې خوا په خوا یو په بل وویشو.

$$\frac{I}{II} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

د پورتنۍ اړیکې له اطراف څخه لوگارتم نیسو:

$$\log_a \frac{x}{y} = p - q \\ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

د  $p$  او  $q$  قیمتونو په اېښودلو سره لیکو:

لوپوري مثال: د  $\log_2 \frac{5}{2}$  محاسبه کړئ داسې چې  $\log_2 5 = 0.6990$ ,  $\log_2 2 = 0.3010$  وي.

حل:  $\log_2 \frac{5}{2} = \log_2 5 - \log_2 2 = 0.6990 - 0.3010 = 0.3980$

دويم مثال:  $\log_y (2xy) - \log_y (10y^2x) - \log_y (2xy)$  حاصل په لاس راوړئ.  
حل: څلورم قانون له ټپي لوري چې لوري ته تطبیقوو.

$$\begin{aligned} \log_y (10y^2x) - \log_y (2xy) &= \log_y \frac{10y^2x}{2xy} \\ &= \log_y (5y) = \log_y y + \log_y 5 \\ &= \log_y 5 + 1 \end{aligned}$$

پنځم قانون: د يوه توان لرونکي عدد لوگارتم مساوي دی د توان او د طاقت د قاعدې د لوگارتم له حاصل ضرب سره يعنې که چېرې  $(a^x)^n$  ولرو نو  $\log_a x^n = n \log_a x$  دی.

$$\begin{aligned} \log_a x^n &= \log_a (x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x) \\ \log_a x^n &= \underbrace{\log_a x + \log_a x + \dots + \log_a x}_{\log_a x \text{ نې ځله } n} \end{aligned}$$

په پايله کې  $\log_a x^n = n \log_a x$   
له پنځم قانون څخه په گټې اخيستنې سره کولای شو وليکو.

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a (x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a x$$

لوپوري مثال:  $\log 625 = ?$        $\log 625 = 4 \log 5 = 4(0.6990) = 2.7960$   
حل:

دويم مثال: دغه لوگارتم  $\log_3 \sqrt[3]{9}$  پيدا کړئ؟

حل:  $\log_3 \sqrt[3]{9} = \log_3 3^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_3 3 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$

### فعاليت

- لاندې لوگارتمونه پيدا کړئ.

$\log_3 (0.12) = ?$        $\log_5 \sqrt{8} = ?$



1. لاندي ضربې افادې د جمعې د حاصل په شکل او د جمعې د حاصل افادې د حاصل ضرب په شکل وليکئ او د امکان په صورت کې يې وروستي قيمت په لاس راوړئ.

- a)  $\log_4(5x^2) = ?$   
 b)  $\log_{10}(10x^2y) = ?$   
 c)  $\log_{10} 5 + \log_{10} 20 = ?$   
 d)  $\log_{12} 36 + \log_{12} 4 = ?$

2. لاندي د خارج قسمت افادې په تفاضل او د تفاضل افادې په خارج قسمت واورئ، د امکان په صورت کې وروستي ځواب په لاس راوړئ.

- a)  $\log_7 \frac{63}{49} = ?$   
 b)  $\log \frac{125}{80} = ?$   
 c)  $\log_a(x^2a) - \log_a x^2 = ?$   
 d)  $\log_{10} 1000 - \log_{10} 100 = ?$

3. لاندي لوگارېتمونه حساب کړئ.

- a)  $\log_{10}(0.0001)$       b)  $\log_2(8)^{\frac{1}{3}}$

$$\log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

### د لوگارېتم د یوې قاعدې اول په بله قاعده

که د یوه عدد لوگارېتم په یوه مشخصه قاعده راکړل شوی وي، څرنگه کولای شو، نوموړی عدد په بله قاعده واړوو.

**شپږم قانون:** په عین قاعده مساوي دی په د دوو عددو نو د تقسیم د حاصل لوگارېتم:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

**ثبوت:** د  $x = \log_b m = b^x$  ثبوت لپاره معادل شکل یې لیکو. یعنې  $m = b^x$  اوس له اطرافو څخه د  $a$  په قاعده

$$\log_b m = \log_a b^x \Rightarrow \log_b m = x \log_a b$$

لوگارېتم نیسو:

$$\log_a m = \log_b m \cdot \log_a b$$

اوس د  $x$  قیمت په پورتني اړیکه کې اېږدو:

د پورتني اړیکې دواړه خواوې په  $\log_a b$  ویشو:

$$\frac{\log_a m}{\log_a b} = \frac{\log_b m \cdot \log_a b}{\log_a b} = \log_b m \Rightarrow \frac{\log_a m}{\log_a b} = \log_b m$$

لومړی مثال:  $\log_3 27$  محاسبه کړئ.

حل: له شپږم قانون څخه په کار اخیستني سره لرو:

$$\log_3 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 (3)^3}{\log_3 (3)^2} = \frac{3 \log_3 3}{2 \log_3 3} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

**دویم مثال:**  $\log_3 75$  حساب کړئ.

حل: بیا هم د شپږم قانون په کارولو سره لرو چې:

$$\log_3 75 = \frac{\log_5 75}{\log_5 3} = \frac{\log_5 (3 \cdot 5^2)}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2 \log_5 5}{\log_5 3} = \frac{\log_5 3 + 2}{\log_5 3}$$

یادونه: دیوه عدد معکوس لوگاریتم مساوی دی، د هغه عدد له منفي لوگاریتم خخه چي هغه د کو لوگاریتم (co-logarithm) په نامه یاد پیری.

$$\log_a \frac{1}{M} = -\log_a M = \text{co} \log_a M$$

مثال:  $\log_2 \frac{1}{32} = ?$

حل:  $\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 1 - \log_2 32 = \log_2 1 - \log_2 2^5 = 0 - 5 \log_2 2 = -5 \cdot 1 = -5$

اووم قانون: دیوه عدد معکوس لوگاریتم مساوی دی په:

$$\log_a M = \frac{1}{\log_M a} \quad \text{ثبوت: د ثبوت لپاره } x = \frac{1}{\log_M a} \text{ نيسو: } \log_M a^x = 1 \Rightarrow x \log_M a = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\log_M a}$$

د 1 عدد په ځای لیکلی شو چې  $\log_M M = 1$

$$\log_M a^x = \log_M M \Rightarrow \log a^x = \log M \Rightarrow a^x = M$$

اوس د دواړو خواوو لوگاریتم نيسو يعنې  $\log_a M = x$

$$\log_a M = x = \frac{1}{\log_M a} \quad \text{په پورتني اړيکه کې د } x \text{ په ځای قیمت اېږدو:}$$

مثال  $\log_{125} \sqrt{5} = ?$

حل:  $\log_{125} \sqrt{5} = \log_{125} (5)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_{125} 5 = \frac{1}{2 \log_5 125} = \frac{1}{2 \log_5 5^3} = \frac{1}{6 \log_5 5} = \frac{1}{6}$

### فنايت

لاندي لوگاریتمونه حساب کړی.

$$\log_{64} 2 = ? \quad \log_4 \sqrt{25^6} = ?$$

اتم قانون: دیوه عدد لوگاریتم په توان لرونکي قاعده مساوي دی په  $\log_a x = \frac{1}{n} \log_a x^n$

ثبوت: د ثبوت لپاره  $m = \log_a x^n \Rightarrow x^n = a^m \Rightarrow x = (a^m)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow x = a^{\frac{m}{n}}$  نيسو او هغه داروند طاقته په شکل لیکو:

$$\log_a x = m \Rightarrow x = a^m \Rightarrow x = (a^m)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow x = a^{\frac{m}{n}}$$

د بورتني رابطي د دواړو خواوو خخه لوگاریتم نيسو:  $\log_a x = \frac{1}{n} \log_a x^n \Rightarrow \log_a x = \frac{m}{n}$

$$\log_a x = \frac{1}{n} \log_a x^n$$

اوس د  $m$  په ځای قیمت اېږدو:

له پورتنی قانون څخه لاندې پایلې په لاس راځي

$$1) \log_a x^m = \frac{m}{n} \log_a x$$

$$2) \log_a \frac{1}{x} = \log_a x^{-1}$$

$$3) \log_a x^n = \log_a x^n$$

لومړی مثال:  $\log_{25} 125 = ?$

$$\log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2} \log_5 5 = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$$

حل:

دویم مثال:  $\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} (27)^2 = ?$

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} (27)^2 = \log_{\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}} (3^3)^2 = \log_{3^{-\frac{1}{2}}} (3^6) = \frac{6}{-\frac{1}{2}} \log_3 3 = \frac{6}{-\frac{1}{2}} \cdot 1 = -12$$

حل:

### فعالیت

د پورتنیو خاصیتونو په کارولو سره لاندې لوگاریتمونه ساده کړئ.

a) مخامخ لوگاریتم په معکوس ډول ولیکئ.  $\log_3 6 = ?$

$$b) \log_8 \sqrt[3]{4} = ?$$

د معمولي او طبیعي لوگاریتمونو ترمنځ اړیکه: د دغو دوو لوگاریتمونو (اصطاري او طبیعي) په پام کې

نیولو سره یعنې د 10 او  $e$  عددونه د  $\log_a b \cdot \log_b a = \log_a a = \log_a 10 = 1$  له اړیکې څخه په گټې اخیستې

چې  $a$  او  $b$  مثبت عددونه او  $a$  او  $b$  د 1 خلاف دي:

که چېرې  $e = a$  او  $b = 10$  وضع شي، نو لرو چې:

$$\log_{10} x = \frac{\log_e x}{\log_e 10}$$

$$\log_e x = \log_{10} x \cdot \log_e 10$$

پوهیږو چې  $\ln x = \log_e x$  دی، نو:

$$\ln x = \log_e 10 \cdot \log_e x$$

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log_e x$$

ڪه ڇيري  $e = b$  او  $a = 10$  وضع سٿي، تڙ:

$$\log_e x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e}$$

$$\log_{10} x = \log_e x \cdot \log_{10} e$$

$$\log x = \log_{10} e \cdot \ln x$$

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

ڌڙنگه ڇي  $\log_{10} e = 0.4343$ ، نو لاندې اڙيڪه لرو:

لومڙي مثال: د  $\ln 4.69$  قيمت په لاس راوڙي.

حل: پڙهڙوڇي:

$$\ln x = 2.3026 \cdot \log x$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot \log 4.69$$

$$\ln 4.69 = 2.3026 \cdot 0.6712 = 1.5455$$

دويم مثال: د  $\log 6.73$  قيمت پيدا ڪڙي، په داسي حال ڪي ڇي  $\ln 6.73 = 1.9066$  وي.

حل: د تيري اڙيڪي په ڪارولو سره لروڇي:

$$\log x = 0.4343 \cdot \ln x$$

$$\log 6.73 = 0.4343 \cdot \ln 6.73$$

$$= 0.4343 \cdot 1.9066 = 0.8280$$



پوڀڀڀي

لاندې لوگاريتمونه ساده ڪڙي.

- |                        |                          |
|------------------------|--------------------------|
| a) $\log_1 3^{-4} = ?$ | b) $\log_9 27 = ?$       |
| c) $\log_8 4 = ?$      | d) $\log_{12} 14641 = ?$ |
| e) $\ln 672000$        | f) $\ln 0.00927$         |
| g) $\ln 672000$        | h) $\ln 0.235$           |



$$\left. \begin{array}{l} \log 0.501 \\ \log 5.01 \\ \log 50.1 \\ \log 501 \end{array} \right\} = ?$$

## کرکترسٹیک او مانٹیس Characteristic and Mantissa

پوهنبرو چي:

$$\log_{10} 1 = 0, \log_{10} 100 = 2, \log_{10} 1000 = 3$$

دی. آیا دیوه عدد د ارقامو دشمبر او لوگارتم ترمنځ کومه

اړیکه شتون لري؟

### تعريف

پوهنبرو چي د  $x$  هر حقيقي مثبت عدد د " $x = S \cdot 10^n$ " په شکل ليکل کېدای شي، داسي چي  $1 \leq S < 10$  او  $n$  يو تام عدد وي.

که چيري د  $x$  لوگارتم غوښتل شوي وي، په لاندې ډول يې پيدا کولای شو.

$$\log x = \log(S \cdot 10^n) = \log S + \log 10^n = \log S + n \log 10 = \log S + n$$

د  $\log S$  په هغه صورت کې چي  $1 \leq S < 10$  وي،  $S$  د  $x$  د لوگارتم مانٹيس يا اعشاري برخه او  $n$  چي يو تام عدد دی، د  $x$  د لوگارتم مشخصه يا کرکترسټیک څخه عبارت دی. څرنگه چي  $1 \leq S < 10$  دي نو.

$$\log 1 \leq \log S < \log 10$$

$$0 \leq \log S < 1$$

له پورتي اړيکي څخه دا پيله په لاس راځي چي ديوه عدد لوگارتم د يو او صفر ترمنځ قرار لري.

### فعايت

- لاندي جدول بشپړ کړی.

د مجموعو يو کارنامي شکل	$0.001 = 10^{-3}$	$0.01 = 10^{-2}$	$1 = 10^0$	$1000 = 10^3$	$4 = 10^{0.602}$	$7 = 10^{0.845}$	$10 = 10^1$	$20 = 10^{1.390}$
د مجموعو يو کارنامي شکل	$\log_{10} 0.001$		$\log_{10} 1$			$\log_{10} 7$		$\log_{10} 20$
لوگارتم	-3	-2		3	0.602		1	

د هغو عددونو لوگارتمونه چي د  $0, 10, 100, 1000, 0.01$  د  $0.001$  عددونو ترمنځ واقع دي، مساوي له

څوسره دي؟

- آیا هر شماره چي عدد لوی شي لوگارتم يې هم لوثيري؟
- له 1 څخه د کوچنيو عددونو د لوگارتم علامه منفي ده، که مثبت؟

له پورتنې فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

- که چیرې  $1 \leq x < 10$  سره وي، کرکټر سټیک يې صفر دی.
- که چیرې  $10 \leq x < 100$  وي کرکټر سټیک يې مساوي له 1 سره دی.
- که چیرې  $1000 < x \leq 100$  وي، نو کرکټر سټیک يې 2 دی.

دپوه عدد په لوگارتم کې صحيح برخه کرکټر سټیک او اعشاري برخه يې ماننيس نومېږي. هغه وخت چې عدد د عدد ليکنې په علمي طريقه وليکل شي، د  $10^d$  عدد توان له کرکټر سټیک څخه عبارت دی.

### د عدد ليکنې علمي طريقه Scientific notation

کولای شو هر عدد د  $10^d$  د توان په څير وليکو، لکه: د  $N = a \cdot 10^n$  چې په دې حالت کې  $1 \leq a < 10$  او  $n$  يو نام عدد دی

لومړی مثال: لاندې عددونه د عدد ليکنې په علمي طريقه وليکئ.

- a) 2573                      b) 573216                      c) 0.0028
- حل:

- a)  $2573 = 2.373 \cdot 10^3$
- b)  $573216 = 5.73216 \cdot 10^5$
- c)  $0.0028 = \frac{28}{10000} = \frac{28}{10^4} = 28 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 2.8 \cdot 10^{-3}$

قاعدۀ: که چیرې دپوه عدد صحيح برخه چې د صفر خلاف وي، نو د هغه عدد د لوگارتم کرکټر سټیک مساوي دی، د صحيح برخې د ارقامو په شمير، منفي يو.

**دویم مثال:** د  $\log 526.9$  کرکتر سټیک مساوي له خو سره دی؟

**حل:** د صحیح ارقامو شمیر له 3 سره برابر دی، نو کرکتر سټیک یې  $2 = 3 - 1$  دی. او له یوه څخه د کوچنیو عددونو کرکتر سټیک منفي علامه لري او قیمت یې د اعشاري د علامې دیني خوا د صفرونو له شمیر څخه، د یوه په اندازه زیات دی.

**درېم مثال:** د  $\log 0.002$  کرکتر سټیک مساوي په خو دی؟

**حل:**

$$\begin{aligned}\log 0.002 &= \log(2 \cdot 10^{-3}) \\ &= \log 2 + \log 10^{-3} \\ &= \log 2 - 3 \log 10 = \log 2 - 3\end{aligned}$$

نو کرکتر سټیک یې  $3 -$  دی.

له تیرو دوو مثالونو څخه په کار اخیستنې سره کولای شو، د لاندې عددونو کرکتر سټیک په لاس راوړو.

لوگاریتمونه		کرکتر سټیک
$\log 89435$	$5 - 1$	4
$\log 56.784$	$2 - 1$	1
$\log 0.995$	$0 - 1$	-1
$\log 0.0789$	$-1 - 1$	-2

د لاندې لوگاریتمونو کړکړه سټیک په شفاهي ډول وړایاست؟

- a)  $\log 0.9560$
- b)  $\log 956.0$
- d)  $\log 2345$
- e)  $\log 3.875$
- c)  $\log 9560$
- f)  $\log 0.0009560$

## د لوگارېټم جدول

خرنگه چې په ټرولست کې مو ولوستل چې د یوه عدد لوگارېټم له دوو برخو (کرکټر سټویک او مانتیس) څخه تشکیل شوی دی. د مانتیس د پیدا کولو لپاره په څه ډول عمل کوئ.

$$\left. \begin{array}{l} \log 0.501 \\ \log 5.01 \\ \log 50.1 \\ \log 501 \end{array} \right\} = ?$$

### د مانتیس د پیدا کولو طریقې:

پوهیږو چې هر لوگارېټمي عدد له دوو یعنې صحیح او اعشاري برخو څخه جوړ شوی دی، خرنگه چې صحیح برخه یا مشخصه د خپل عدد د ارقامو له مخې او مانتیس یې د لوگارېټمي جدول له مخې چې مخکې ترتیب شوی، ټاکل کېږي، دغه جدول تر 7 څخې یې تر 4 او 3 اعشاري خانو پورې ترتیب شوی چې د مانتیس د پیدا کولو لپاره ترې کار اخلي چې د اعشاري نامو عددونو د ارقامو د شمیر په پام کې نیولو سره جدولونه نومول شوی دي. لکه 7 رقمي جدولونه 5، رقمي جدولونه او داسې نور.

د یوه عدد د مانتیس د پیدا کولو لپاره د نوموړي عدد ارقام له چپ لوري څخه په پام کې نیول کېږي په دې ډول چې بې لوري د یوه رقم په استثنا هغه د جدول په داسې ستون کې لټوو چې د بېي خوله رقم سره مطابقت ولري، نو هغه اعشاري عدد چې د سطر او ستون تقاطع وي، له مانتیس څخه عبارت دی.

مثال:

حل:

$$\begin{aligned} \log 765 &= ? \\ \log 765 &= \log(7.65 \cdot 10^2) \\ &= \log 7.65 + \log 10^2 \\ &= \log 7.65 + 2 \end{aligned}$$

مانتیس                      کرکټر سټویک

د 2 عدد د کرکټر سټویک څخه عبارت دی او د مانتیس د پیدا کولو لپاره یعنې  $\log 7.65$  په 76 سطر او 5 - ام ستون کې گورو چې د 8837 عدد سره مطابقت کوي یعنې د نوموړي عدد مانتیس 0.8837 دی چې په حقیقت کې د 765 عدد مانتیس دی.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7										
4										
7										
5										
7	0.88808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
6										
7										
7										
8										
7										
9										

$$\log 765 = \log 7.65 + 2 = 0.8837 + 2 = 2.8837$$

دویم مثال:  $\log 70.9$  په لاس راوړئ؟

حل:

$$\begin{aligned} \log 70.9 &= \log(7.09 \cdot 10) \\ &= \log 7.09 + \log 10^1 \\ &= \log 7.09 + 1 \end{aligned}$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
...										
79										

د 709 عدد د 9 ستون لاندې لټور چې له 8506 عدد سره مطابقت کوي، یعنې د 7.09 عدد ماننيس (دی، په پايله کې چې لوگارېتم داسې حسابوو:

$$\log 70.9 = 0.8506 + 1 = 1.8506$$

دویم مثال: د 0.0247 لوگارېتم حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\begin{aligned} \log 0.0247 &= \log(2.47 \cdot 10^{-2}) \\ &= \log 2.47 + \log 10^{-2} \\ &= \log 2.47 - 2 \end{aligned}$$

د 2.47 عدد په 24- ام سطر او 7- ام ستون لاندې لټوو چې له 3927 عدد سره مطابقت کوي يعنې د 2.47 عدد ماننيس عبارت دی له: 0.3927 په پايله کې د لوگارتم حاصل داسې په لاس راوړو:

$$\log 0.0247 = \log 2.24 - 2 = 0.3927 - 2 = \bar{2}.3927$$

**يادونه:** څرنگه چې ماننيس هميشه مثبت دی، که کرکټرسيک منفي وي او وغواړو دواړه د يوه مثبت عدد په شکل وليکو، نو منفي علامه د کرکټرسيک له پاسه ليکو؛ مثلاً په پورتي مثال کې:

$$0.3927 - 2 = \bar{2}3927$$

### فعاليت

- د لوگارتم د جدول په پام کې نيولو سره 9280 عدد لوگارتم حساب کړئ.
- څلورم مثال:** د لاندې جدول په پام کې نيولو سره د 15, 105, 900,  $\frac{3}{4}$ , 0.007 عددونو لوگارتمونه پيدا کړئ.

عدونه	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
لوگارتمونه	0.0000	0.30103	0.47712	0.60206	0.69897	0.77815	0.84570	0.90309	0.95424	1.0000

$$\log 15 = (3 \cdot 5) = \log 3 + \log 5 = 0.47712 + 0.69897 = 1.17609$$

$$\log(105) = \log(5 \cdot 3 \cdot 7) = \log 5 + \log 3 + \log 7$$

$$= 0.69897 + 0.47712 + 0.84570$$

$$= 2.02079$$

$$\log(900) = \log(9 \cdot 10^2) = \log 9 + \log 10^2$$

$$= 0.95424 + 2$$

$$= 2.95424$$

$$\log\left(\frac{3}{4}\right) = \log 3 - \log 4 = 0.47712 - 0.60206$$

$$= -0.12486$$

$$\log(0.007) = \log(7 \cdot 10^{-3}) = \log 7 + \log 10^{-3} = \bar{3}.84570$$



1. دلاندې لوگارېتمونو کړکړه سټېک په شفاهي ډول وړياست او هانتېس يې د جدول له مخې پيدا کړئ.

- |                   |                            |
|-------------------|----------------------------|
| a) $\log 222$     | b) $\log 0.921$            |
| c) $\log 928$     | d) $\log 527$              |
| e) $\log 0.024$   | f) $\log 2400$             |
| h) $\log 0.00024$ | j) $\log 24$               |
| a) $\log(2.73)^3$ | b) $\log \sqrt[3]{0.0762}$ |

2. د لاندي لوگارېتمونو قيمتونه په لاس راوړئ.



## انتي لوگارتم

### Anti Logarithm

که چیري د یوه عدد لوگارتم راکړل شوي وي څرنگه کولای شو، عدد یې پیدا کړو؟

$$\log 481 = 2.6821$$

$$\log N = 1.6580$$

$$N = ?$$

**تعریف:** که چیري  $x = \log y$  وي، نو  $y$  د  $x$  د لوگارتم انتي لوگارتم بلل کېږي. یعنې  $y = \text{anti log } x$  مثلاً که چیري  $\log 34 = 1.5315$  وي، نو د  $\log 34 = 1.5315$  انتي لوگارتم د 34 له عدد سره مساوي دی.

### فعالیت

- که چیري  $\log N = 2.8779$  وي، نو د  $N$  عدد وټاکئ.
- د نوموړي عدد کرکټر سټیک پیدا کړئ.
- د مانتیس په جدول کې د 0.8779 عدد له کوم سطر او ستون سره مطابقت لري؟
- له پورتنی فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:  
څرنگه چې د 2 عدد کرکټر سټیک دی، نو  $N$  یو درې رقمي عدد دی، مانتیس یې په جدول کې له 75 سطر او 5 ستون سره مطابقت لري، نو د  $N$  عدد عبارت دی له: 755
- **لومړي مثال:**  $\log N = 2.9939$  د  $N$  عدد په لاس راوړئ.

**حل:** د نوموړي لوگارتم د مانتیس برخه یعنې 0.9939 د لوگارتم په جدول کې پیدا کړو، گورو چې په کوم سطر او ستون کې ځای لري. دغه د سطر او ستون عدد داسې لیکو چې د ستون عدد داوڼد سطر ښي لوري ته قرار ولري چې عبارت دی له 9.86 څخه یعنې د 986 عدد مانتیس 0.9939 دی. په پورتنی پوښتنه کې د 2 کرکټر سټیک په توگه راکړل شوی، نو د صحیح رقمونو شمیرې 3 دی، چې مطلوب عدد عبارت دی له 986 یعنې:  $N = 986$   
 $\log 986 = 2.9939$   
 $\text{anti log } 2.9939 = 986$

9.5	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939	0.9943	0.9948	0.9952
9.6							↑			
9.7										
9.8										
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

**دویم مثال:** که چیري  $\log N = 0.9791$  وي  $N$  په لاس راوړئ.  
**حل:** دلته هم د 9791 عدد په جدول کې پیدا کوو، د سطر او ستون اړوند عددونه لکه د تیر په شان لیکو، څرنگه چې 953 ماننيس ښيي چې د مطلوب عدد 953 رقمونه دي څرنگه چې کرکټر سټیک صفر دی، نو مطلوب عدد يعنې  $N$  يو صحيح رقم لري چې عبارت دی له:

$$N = 9.53$$

$$\log 9.53 = 0.9791$$

$$\text{anti log } 0.9791 = 9.53$$

**درېم مثال:**  $\log N = -3.0531$  دی، د  $N$  عدد پیدا کړئ.

په مثال کې لیدل کېږي چې کرکټر سټیک او ماننيس دواړه منفي دي او په جدول کې منفي عدد وجود نه لري، ددې لپاره چې ماننيس مثبت شي، د 1 عدد له ماننيس سره جمع او له کرکټر سټیک څخه یې کموو، په مساواتو کې تغیره راځي.

اوس کولای شو د ماننيس 0.9469 په مرسته د  $N$  عدد له جدول څخه پیدا کړو، چې عبارت دی له 886.

کرکټر سټیک ښيي چې د اعشاري د علايقې او له چېې خوا څخه د لومړي 8 عدد تر منځ درې صفرونه ځای لري

$$\text{anti log } -3.0531 = 0.000885 \text{ نو } N = 0.000885$$

**څلورم مثال:** دلاندې عددونو لوگارېتمونه محاسبه کړئ.

$$a) 2 \quad b) 0.2 \quad c) 0.02 \quad d) 0.0002$$

**حل:**

$$a) \log 2 = 0.3010$$

$$b) \log 0.2 = 0.3010 - 1 = \bar{1}.3010$$

$$c) \log 0.02 = 0.3010 - 2 = \bar{2}.3010$$

$$d) \log 0.0002 = 0.3010 - 4 = \bar{4}.3010$$

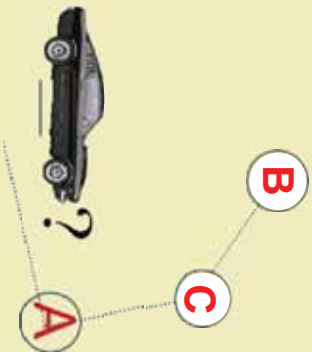
له پورتنی مثال څخه دا پایله په لاس راځي چې دیوه عدد د لوگارېتم ماننيس یوازې د رقمونو په ترتیب پورې اړه لري په پورتنی مثال کې ټول عددونه یو شان ماننيس 0.3010 لري، ښي او یا چې لوري ته د صفرونو زیاتول په ماننيس باندې کومه اغیزه نه لري.



دلاندې هر یوه انتی لوگارېتم قیمت په لاس راوړئ.

$$a) \text{anti log } 4.9479$$

$$b) \text{anti log } -5.0521$$



## خطي انٽرپوليشن

### Linear Interpolation

يوگنڊي موٽر په متوسط سرعت په 30 دقيقو ڪي د A ښار ته او يونټيم ساعت وروسته په همدغه سرعت د B ښار ته رسيږي، ورواښاست چي په همدې ثابت سرعت به نوموړي موٽر د C ښار ته چي د A او B ښارونو تر منځ پروت دی، په څومره وخت کي ورسېږي.

### فعاليت

• که چيرې  $\log A = a$ ,  $\log B = b$ , راکړل شوی وي او  $\log C = c$  وي، په داسې حال کې چې  $A < C < B$  دی.

- $\log C$  د حقيقي عددونو په کومه فاصله کې ځای لري.
- په اټکل ډول ووايست چې که  $(a, b)$  يوبل ته نژدې عددونه وي، نو د C لوگاريتم چيرې پروت دی؟
- د  $a$  او  $b$  تر منځ قيمتمنه د حسابي وسط له مخې په لاس راوړی.

**پايله:** که چيرې ديوه نامعلوم قيمت د پيدا کولو لپاره چې ددوو معلوم عددونو تر منځ پروت وي، د معلوم عددونو په مرسته نامعلوم عدد پيدا کړو، په دې صورت کې نوموړي طريقه د خطي انټرپوليشن په نامه يادېږي. که يو څلور رقمي عدد لکه: 1.234 ولرو، نه شوکولای د هغه لوگاريتم له درې رقمي جدول څخه په لاس راوړو، نو د دې ډول عددونو لوگاريتم د خطي انټرپوليشن په واسطه پيدا کولای شو.

**لومړې مثال:** د  $\log 5.235$  قيمت په لاس راوړی.

**حل:** ښکاره ده چې دنوموړي عدد لوگاريتم په جدول کې نشته، خو د 5.230 او 5.240 عددونو په منځ کې پراته دي چې لوگاريتمونه يې په جدول کې شته، او په لاندي ډول يې په لاس راوړو.

$$\log 5.230 = 0.7185$$

$$\log 5.240 = 0.7193$$

خزانگه چې  $5.24 < 5.235 < 5.23$  دی، نو:

$$\log 5.230 < \log 5.235 < \log 5.240$$

$$0.7185 < \log 5.235 < 0.7193$$

که چيرې  $x = \log 5.535$  په پام کې ونيسو، نو په دې صورت کې ليکو چې:  $0.7185 < x < 0.7193$

د عددونو د لوگارېتم او مائېسوزنو ترمېخ توپير په پام کې نېسو.

عددونه	لوگارېتمونه
5.240	0.7193
5.235	$x$
5.230	0.7185

د لوگارېتمونو توپير 0.0008  $\left[ \begin{matrix} 5.240 \\ 5.235 \\ 5.230 \end{matrix} \right]$

د خطي انټرپولېشن په طريقه کې له دې څلورو عددونو څخه يو تناسب چې يو له بل سره متناسب دي جوړوو او

نامعلوم قيمت پيدا کړو يعنې:

$$\frac{d}{0.0008} = \frac{0.005}{0.010} \Rightarrow d = \frac{0.005 \cdot 0.0008}{0.010} \Rightarrow d = \frac{0.000004}{0.010} = 0.0004$$

اوس د  $d$  قيمت د کوچني عدله مائېسوز سره جمع کړو، چې حاصل يې د مطلوب عدد لوگارېتم دی.

$$0.0004 + 0.7185 = 0.7189$$

$$\log 5.235 = 0.7189$$

**دويم مثال:** د  $0.0007957$  عدد لوگارېتم پيدا کړئ.

**حل:** يو همپرو چې:

$$\begin{aligned} \log 0.0007957 &= \log(7.957 \cdot 10^{-4}) \\ &= \log 7.957 + \log 10^{-4} \\ &= \log 7.957 - 4 \log 10 \\ &= \log 7.957 - 4 \end{aligned}$$

د  $7.957$  عدد لوگارېتم په جدول کې نشته، ليدل کېږي چې کرکټرستيک يې  $4 -$  دی، خو د  $7.96$  او  $7.95$  عددونو لوگارېتم په جدول کې شته.

$$\log 7.960 = 0.9009$$

$$\log 7.950 = 0.9004$$

څرنگه چې  $7.960 < 7.957 < 7.950$  نو:

$$\log 7.950 < \log 7.957 < \log 7.960$$

$x = \log 7.957$  په پام کې نیولو سره، د خطي انټرپولیشن پراسطه یې لوگارېتم په لاس راوړو.

عدونه	لوگارېتمونه
7.96	0.9009
7.957	$x$
7.950	0.9004

د لوگارېتمونو توپیر  $d$

$$\frac{d}{0.0005} = \frac{0.007}{0.01} \Rightarrow$$

$$d = 0.0005 \frac{0.007}{0.01} = 0.00035 \approx 0.0004$$

$$0.9004 + 0.0004 = 0.9008$$

اوس د  $d$  قیمت د کوچني عدد له ماتیس سره جمع کوو:

په پای کې په لاس راځي چې:

$$\log 0.0007957 = 0.9008 + (-4) = \bar{4}.9008$$

**درېم مثال:**  $4.5544$  عدد انټي لوگارېتم پیدا کړئ.

**حل:** که چېرې  $x = \text{anti} \log 4.5544$  وضع شي، نو باید  $x$  پیدا کړو، له پورتنی اړیکې څخه داسې پایله په لاس راځي.

$$\log x = 4.5544 = 4 + 0.5544$$

$$\log x = \log(t \cdot 10^4) = \log t + 4$$

د  $4.5544$  عدد په جدول کې نشته، خو د  $0.5539$  او  $0.5551$  عدونه په جدول کې شته، انټي لوگارېتم یې پیدا کړو، ددغه عدونو په مرسته د  $x$  قیمت د انټرپولیشن په طریقه پیدا کړو، د عدونو تفاضل لکه په تیرو مثالونو کې په لاس راوړو او تناسب یې د تیر په شان تشکیلوو.

عدونه	ماتیسونه
3.59	0.5551
$t$	0.5544
3.58	0.5539

د ماتیسونو توپیر  $0.0012$

$$\frac{d}{0.01} = \frac{0.0005}{0.0012}$$

$$d = 0.01 \cdot \frac{0.0005}{0.0012} = \frac{0.000005}{0.0012} = 0.0041667$$

$$d = 0.0042$$

$d$  و  $t$  د قیمت پیدا کولو لپاره  $d$  قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو.

$$t = 3.58 + d = 3.58 + 0.0042 \\ = 3.5842$$

$$\log x = \log(3.5842 \cdot 10^4)$$

$$\log x = \log 35842$$

هغه وخت چې ددو عددونو لوگارېتمونه سره مساوي وي، خپله عددونه په خپل منځ کې سره مساوي دي، نو:

$$x = 35842$$

پوښتني



په لاندې اړیکو کې  $d$  او  $X$  قیمتونه پیدا کوئ.

a)  $z = \log 0.001582$

b)  $x = \log 6.289$

## د لوگارېتمي او اکسپوننشل معادلو حل

### Exponential and logarithmic equations

آيا تر اوسه مود  $5^x = 5^{2-\frac{1}{x}}$  او  $\log_2(x^2 - 1) = 3$  معادلو د

حل په اړه فکر کړی دی؟

د  $x$  په کومو قيمتونو پورتنې مساوات سم دی؟

خرنگه کولای شو په دغه ډول معادلانو کې د  $x$  مجهول قيمت وټاکو.

$$\log_2(x^2 - 1) = 3$$
$$5^x = 5^{2-\frac{1}{x}}$$

### تعريف

هغه معادلي چې توانونه يې مجهول وي، دا اکسپوننشل معادلو په نامه يادېږي، د مجهول د پيدا کولو لپاره که چيرې وکړای شو، د دواړو خواوو قاعدې سره مساوي کړو، نو د طاقت د قوانينو له مخې، چې قاعدې مساوي وي، نو توانونه يې هم يو له بل سره مساوي دي.

لومړی مثال: که  $2^{x-1} = 32$  وي، د  $x$  قيمت په لاس راوړئ.

حل: د مساواتو د دواړو خواوو قاعدې سره مساوي کوو.

$$2^{x-1} = 32 \Rightarrow 2^{x-1} = 2^5 \Rightarrow x-1 = 5, \quad x = 6$$

دویم مثال: د  $8^{3x-1} = 2^4$  اکسپوننشل معادله حل او وازمؤئ.

حل:

$$8^{3x-1} = 2^4$$

$$(2^3)^{3x-1} = 2^{3(3x-1)} = 2^4$$

خرنگه چې قاعدې يو له بل سره مساوي دي، نو توانونه يې هم مساوي دي؛ نو ليکو:

$$3(3x-1) = 4$$

$$9x-3 = 4 \Rightarrow 9x = 4+3$$

$$9x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{9}$$

آزمونه:

$$8^{\frac{7}{9}-1} = 2^4$$

$$8^{\frac{7}{3}-1} = 2^4$$

$$8^{\frac{7-3}{3}} = 2^4 \Rightarrow 8^{\frac{4}{3}} = 2^4 \Rightarrow (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 \Rightarrow 2^4 = 2^4$$

### فعالیت

- د  $64^{x-2} = 16^{x+1}$  اکسپوننشل معادله کې د  $x$  قیمت پیدا کړئ.

### لوگارېتمي معادلې:

هغه لوگارېتمي افادې چې په هغوی کې متحول او یا مجهول شتون ولري، د لوگارېتمي معادلو په نامه یادېږي. له یوې لوگارېتمي معادلې څخه د مجهول قیمت پیدا کولو لپاره لومړی معادله د لوگارېتم د قوانینو له مخې ساده کوو، وروسته یې د الجبري قوانینو او یا له اکسپوننشل معادلو څخه په کار اخیستني سره د مجهول یا متحول قیمت په لاس راوړو.

لاندې مثالونه د لوگارېتمي معادلو بېلګې دي چې د مختلفو قوانینو له مخې د مجهول قیمت محاسبه شوی دی.

لومړی مثال: له لاندې لوگارېتمي معادلې څخه د  $x$  قیمت په لاس راوړئ.

حل:

$$\log_2(x^2 - 1) = 3$$

پورته لوگارېتمي شکل داسې لیکو:

$$x^2 - 1 = 2^3$$

$$x^2 = 1 + 8 = 9$$

$$x^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{9}, \quad x = \pm 3$$



**دویم مثال:** په  $9 = 2 \log_3 (x + 2) = \log_3 (x + 2)$  لوگاریتمي معادله کې د  $x$  قیمت پیدا کړئ.

**حل:**

$$\log_3 (x + 2) = 2 \log_3 9$$

$$\log_3 (x + 2) = \log_3 9^2$$

څرنگه چې د لوگاریتمونو قاعدې سره مساوي دي، نو عددونه هم پرله بل سره مساوي دي.

$$x + 2 = 9^2 \Rightarrow x = 81 - 2$$

$$x = 79$$

**درېم مثال:** په  $4 = \log_{\sqrt{5}} 5 + \log_{\sqrt{5}} 3 - \log_{\sqrt{5}} x - \log_{\sqrt{5}} x$  لوگاریتمي معادله کې د  $x$  قیمت په لاس

راوړئ.

**حل:** د دوو عددونو د لوگاریتم د ضرب او ویش په کارولو سره پورتنۍ معادله په لاندې ډول لیکو:

$$\log_{\sqrt{5}} x = \log_{\sqrt{5}} 3 + \log_{\sqrt{5}} 5 - \log_{\sqrt{5}} 4 = \log_{\sqrt{5}} \frac{3 \cdot 5}{4} = \log_{\sqrt{5}} \frac{15}{4} \Rightarrow x = \frac{15}{4}$$

**څلورم مثال:** په  $10 \log_3 (3^{2x} + 2) = x + 1$  معادله کې د  $x$  قیمت محاسبه کړئ.

**حل:**

$$\log_3 (3^{2x} + 2) = x + 1 \Rightarrow 3^{2x} + 2 = 3^{x+1}$$

$$3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0 \Rightarrow 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 2 = 0$$

$$(3^x)^2 - 3 \cdot 3^x + 2 = 0$$

که  $3^x = t$  وضع کړو، نو:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t-1)(t-2) = 0$$

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 2$$

$$3^x = t_1 = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$3^x = t_2 = 2 \Rightarrow \log_3 2 = x \Rightarrow x_2 = \log_3 2$$

**پنځم مثال:** په لاندې لوگاریتمي معادله کې د  $x$  قیمت محاسبه کړئ.

$$\log(x^2 + 36) - 2 \log(-x) = 1$$

حل:

$$\log(x^2 + 36) - \log(-x)^2 = 1$$

$$\log \frac{x^2 + 36}{x^2} = \log 10 \Rightarrow \frac{x^2 + 36}{x^2} = 10$$

$$x^2 + 36 = 10x^2 \Rightarrow 10x^2 - x^2 - 36 = 0$$

$$9x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 4$$

$$x_{1,2} = \pm 2, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = -2$$

پوڻيڻي



په لاندې لوگاريتمي او اڪسپوننشيئل معادلو کي د  $x$  قيمت په لاس راوړئ.

a)  $(11)^{3^{x-1}} = 11$

b)  $7^{2^{x-1}} = 3^{x+3}$

c)  $\log \sqrt{x} + 3 = 4$

d)  $\log_5 \frac{x-1}{x-2} = 2$

### در ریاضیکی عملیوه سرتیه رسو لو کی له لوگاریتیم خخته کار اخیستنه

آیا کو لانی شو د اعشاری عددونو عملی لکه ضرب، تقسیم، توان او جذر د لوگاریتیم په کارولو سره په اسانه سرتیه ورسوو.

$$\left. \begin{array}{r} 28.8 \\ \underline{78.8} \\ 3.17 \cdot 88.2 \end{array} \right\} = ?$$

د ضرب حاصل پیدا کول د لوگاریتیم په مرسته: کولای شو ددو یا څو عددونو د ضرب حاصل، د لوگاریتیم د

$$\text{لااندی قانون له مخی پیدا کړو: } \log(M \cdot N) = \log M + \log N$$

لوپړی مثال: غواړو چې د  $3.17 \cdot 88.2$  عددونو د ضرب حاصل د لوگاریتیم په مرسته پیدا کړو.

حل: د ضرب د قانون په اساس لیکلای شو:

$$\begin{aligned} \log(3.17 \cdot 88.2) &= \log 3.17 + \log 88.2 \\ &= 0.5011 + 1.9455 = 2.4466 \end{aligned}$$

لیدل کېږي چې د  $0.4466$  مانیتیس عدد په جدول کې نشته، خود  $0.4472$  او  $0.4472$  مانیتیسونو عددونه په جدول کې شته.

له جدول خخته لیدل کېږي چې:

$$\begin{aligned} \text{anti log } 0.4456 &= 2.79 \\ \text{anti log } 0.4472 &= 2.80 \end{aligned}$$

عددونه	مانیتیسونه
2.79	0.4456
$t$	0.4466
2.80	0.4472

د مانیتیسونو توپیر  $0.0006$

$$\begin{aligned} \frac{d}{0.01} = \frac{0.0006}{0.0016} &\Rightarrow d = \frac{0.0006 \cdot 0.01}{0.0016} = \frac{0.000006}{0.0016} \\ d &= 0.00375 \end{aligned}$$

د  $d$  قیمت له کوچني عدد سره جمع کوو:

$$t = 2.79 + 0.00375 = 2.79375$$

$$\log x = \log(2.79375 \cdot 10^2) \Rightarrow x = 297.375$$

$$3.17 \cdot 88.2 = 297.375$$

په داسې حال کې چې  $anti \log 2.4466 = 297.375$  دی، نو:

آیا پوهېږئ؟

ددو یا څو عددونو د ضرب لپاره لومړی د لوگارېتم د جمعې حاصل پیدا کوو، وروسته یې انټي لوگارېتم په لاس راوړو چې دغه انټي لوگارېتم د نوموړو عددونو د ضرب حاصل ټشکېلوي.

### فعالیت

- د  $2 \cdot 74.2 \cdot 62$  د ضرب حاصل د لوگارېتم په واسطه پیدا کوئ.

د خارج قسمت پیدا کول د لوگارېتم په موسته:

کولای شو د لوگارېتم له څلورم قانون څخه په کار اخیستې سره، د دوو اعشاري عددونو د تقسیم حاصل

$$\text{په لاس راوړو یعنې: } \log \frac{M}{N} = \log M - \log N$$

مثال: غاړو د  $\frac{8750}{3.49}$  خارج قسمت د لوگارېتم پواسطه پیدا کوو.

$$\log \frac{8750}{3.49} = \log 8750 - \log 3.49$$

حل:

د لوگارېتم له جدول څخه لرو چې:

$$\log 8750 = 3.9420$$

$$\log 3.49 = 0.5428$$

$$\log 8750 - \log 3.49 = 3.9420 - 0.5428 = 3.3992$$

$$anti \log 3.3992 = 2507$$

$$\frac{8750}{3.49} = 2507$$

**يادونه:** ددوو عددونو د خارج قسمت د حاصل پيداكولو لپاره لومړی دمقسوم له لوگارېتم څخه د مقسوم عليه لوگارېتم كموو، وروسته ددغه تفاوت انټي لوگارېتم په لاس راوړو چې دا مطلوب خارج قسمت حاصل دی.

#### فعاليت

- د  $\frac{374}{16.2}$  حاصل د لوگارېتم په مرسته په لاس راوړئ.

**د لوگارېتم په واسطه د توان لرونکي عدد محاسبه:**

د هغو توان لرونکو عددونو محاسبه چې توانونه يې تام اوبيا کسرونه وي، د لوگارېتم له پنځم قانون څخه کار اخلو يعنې  $\log M^n = n \log M$

**مثال:** غواړو چې د  $(1.05)^6$  عدد محاسبه کړو.

**حل:**

$$\log(1.05)^6 = 6 \log 1.05 = 6(0.0212) \\ = 0.1272$$

$$\text{بناړدی } \text{anti} \log 0.1272 = 1.340$$

**په لنډ ډول ويلای شو چې:** ديوه توان لرونکي عدد قيمت پيدا کولو لپاره لومړی د عدد توان په لوگارېتم کې ضربو، ددغه حاصل ضرب انټي لوگارېتم د توان لرونکي عدد قيمت دی.

#### فعاليت

- د  $(694)^2$  عدد قيمت د لوگارېتم په واسطه پيدا کړئ.



1. لاندي د ضرب حاصل د لوگارتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$0.097 \cdot 7.78 = ?$$

2. لاندي د تقسيم حاصل د لوگارتم په واسطه حساب کړئ.

$$a) \frac{8}{737} = ?$$

$$b) \frac{32.2}{25.1} = ?$$

3. لاندي تړان لرونکي عدد دلوگارتم په واسطه محاسبه کړئ.

$$(964)^{\frac{2}{3}} = ?$$

## د څپر کې مهم ټکي

اکسپوننشل تابع: که  $a$  يو مثبت عدد او  $a \neq 1$  وي، نو د  $a^x = f(x)$  تابع اکسپوننشل تابع د  $a$  په قاعده نومېږي. د اکسپوننشل تابع د تعريف ناحیه حقيقي عددونه او دقيمتونو ناحیه يې مثبت حقيقي عددونه دي.

د هر  $x_1 \neq x_2$  لپاره  $f(x_1) \neq f(x_2)$  دی.

د اکسپوننشل تابع گراف چې  $a \neq 1$  وي، منځني يې د  $(0, 1)$  له ټکي څخه تېرېږي.

د اکسپوننشل تابع گراف نظر  $Y$  محور ته متناظر واقع دی.

هره اکسپوننشل تابع معکوس لري چې معکوس تابع يې  $\text{Log}_a x$  دی.

**لوگارېتمي تابع:**  $x = \text{Log}_a x = y$  چې د  $y = a^x = \gamma$  اکسپوننشل تابع معکوس دی، د لوگارېتمي تابع په نامه يادېږي.

### د لوگارېتمي تابع خواص

دلوگارېتمي تابع د قيمتونو ساحه مثبت حقيقي عددونه تشکيلوي.

د لوگارېتمي تابع گراف په قايمو مختصانو کې د  $(1, 0)$  له ټکي څخه تېرېږي.

د هر  $x_1 \neq x_2$  لپاره تابع  $f(x_1) \neq f(x_2)$  دی.

د قايمو مختصانو په سيستم کې د هرې لوگارېتمي تابع  $x = \text{Log}_a f(x)$  د  $f(x)$  محاسب، د  $Y$  محور دی.

### د لوگارېتم قوانين:

- لومړی قانون  $\text{Log}_a a = 1$
- دويم قانون  $\text{Log}_a 1 = 0$
- درېم قانون  $\text{Log}_a x + \text{Log}_a y = \text{Log}_a (x \cdot y)$
- څلورم قانون  $\text{Log}_a x - \text{Log}_a y = \text{Log}_a \frac{x}{y}$
- پنځم قانون  $\text{Log}_a x^n = n \text{Log}_a x$
- شپږم قانون  $\text{Log}_a M = \frac{1}{\text{Log}_M a}$
- اووم قانون  $\text{Log}_a M = \frac{\text{Log}_b M}{\text{Log}_b a}$
- اتم قانون  $\text{Log}_a x = \frac{1}{n} \text{Log}_a x^n$

## د لوگارټم ډولونه:

معمومي لوگارټم هغه لوگارټم چې قاعده يې 10 وي، معمولي لوگارټم يا اعشاري (Briggs) لوگارټم بلل کېږي چې د (log) په سمبول سره ښودل کېږي.

طبيعي لوگارټم هغه لوگارټم چې قاعده يې e وي، د طبيعي لوگارټم په نامه يادېږي، چې طبيعي لوگارټم د ln په سمبول ښودل کېږي يعنې  $\log_e x = \ln x$

## کرکټوسټيک او مانټيس

کرکټوسټيک که چېرې  $\log S = n + \log x$  وي داسې چې  $10 < S \leq 10^n$  او  $n$  يو تام عدد دی  $n$  مشخصې يا کرکټوسټيک په نامه يادېږي چې د عدد د رقمونو له مخې ټاکل کېږي.

مانټيس: د (log S) اعشاري برخه د مانټيس په نامه يادېږي چې د جدول له مخې ټاکل کېږي، مانټيس يو مثبت عدد د صفر او يوه ترمنځ دی.

انټي لوگارټم (antilogarithm): که  $\log_e y = x$  وي، نو  $y = 10^x$  د لوگارټم انټي لوگارټم دی يعنې  $y = \text{anti} \log x$

خطي انټروپو ليشن: که يو نامعلوم عدد ددو معلومو عددونو په منځ کې واقع وي او د معلومو عددونو په مرسته نامعلوم عدد پيدا کړو، پدې صورت کې دا طريقه د خطي انټروپو ليشن په نامه يادېږي.

## اکسپوننشل او لوگارټمي معادلې

- اکسپوننشل معادلې هغه معادلې چې په هغې کې د حدونو، توازنه مجهول وي، د اکسپوننشل معادلې په نامه يادېږي، د مجهول د پيدا کولو لپاره د طاقت له قوانينو څخه گټه اخلي.
- لوگارټمي معادلې هغه لوگارټمي مساوات چې په هغوی کې مجهول موجود وي، د لوگارټمي معادلو په نامه يادېږي.





## د څپرکي پوښتني

لاندي پوښتني په غور ولولئ، د هرې پوښتني لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې پيدا اوله هغه څخه کړئ، تلو کړئ.

1.  $\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4}\right)$  مساوي له څو سره دی؟

- a) 4                      b) -4                      c) 3                      d) -3

2. د  $\sqrt[4]{81} = \frac{1}{4} \log_b 81$  اړیکه کې د b قیمت عبارت دی له:

- a)  $\frac{1}{4}$                       b) 81                      c)  $\sqrt{81}$                       d) -4

3. د  $\log_3 81 - \log 0.01$  افادې قیمت په لاس راوړئ.

- a) 0                      b) 4                      c) 8                      d) 9

4. د x قیمت په  $\log 3 = \log 2x - \log 81$  افاده کې مساوي له څو سره دی.

- a) 2                      b) 3                      c) 4                      d) 5

5.  $\log_2 16 = ?$

- a) 4                      b) 3                      c) 5                      d) -4

6.  $\log_1 125 = \frac{1}{5}$

- a) 3                      b) -3                      c) 4                      d) 5

7. د  $\log_{\frac{1}{2}} 2$  قیمت عبارت دی له:

- a)  $\frac{1}{2}$                       b)  $-\frac{1}{2}$                       c) 1                      d) -1

8. د x قیمت د  $9 = 3^{x-1}$  په معادله کې عبارت دی له:

- a)  $x = -3$                       b)  $x = 9$                       c)  $x = -9$                       d)  $x = 3$

9. د  $\log 234.21$  مشخصه یا کټر سټیک عبارت دی له:

- a) 0                      b) 1                      c) 2                      d) 3

10. د یوه عدد د لوگارتم معکوس عبارت دی له:

- a)  $\log_a m = \frac{1}{\log_a m}$                       b)  $\log_a m = -\frac{1}{\log_a m}$                       c)  $\log_a m = \frac{1}{\log_m a}$                       d) مخ یو



## د لوگارټيم جدول چي مانيس يي څلور اعشاري رقمونه لري

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
1.1	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
1.2	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
1.3	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
1.4	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
1.5	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
1.6	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
1.7	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
1.8	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
1.9	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
2.0	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
2.1	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
2.2	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
2.3	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
2.4	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
2.5	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
2.6	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
2.7	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
2.8	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
2.9	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
3.0	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
3.1	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
3.2	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
3.3	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
3.4	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
3.5	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
3.6	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
3.7	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
3.8	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
3.9	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
4.0	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
4.1	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
4.2	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
4.3	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
4.4	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
4.5	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
4.6	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
4.7	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
4.8	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
4.9	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
5.0	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
5.1	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
5.2	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
5.3	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
5.4	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
5.6	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
5.7	7539	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
5.8	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
5.9	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
6.0	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
6.1	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
6.2	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
6.3	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
6.4	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
6.5	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
6.6	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
6.7	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
6.8	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
6.9	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
7.0	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
7.1	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
7.2	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
7.3	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
7.4	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
7.5	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
7.6	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
7.7	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
7.8	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
7.9	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
8.0	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
8.1	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
8.2	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
8.3	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
8.4	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
8.5	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
8.6	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
8.7	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
8.8	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
8.9	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
9.0	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
9.1	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
9.2	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
9.3	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
9.4	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
9.5	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
9.6	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
9.7	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
9.8	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
9.9	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996



شپږم څپرکی

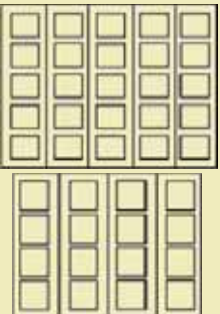
مټریکسونه





## مټریکسونه

### Matrixes



د څو پوړيزې ودانۍ، تصوير په پام کې نيسو، هره ودانۍ څو پوړه لري، په مخامخ شکل کې وينو چې د لويې ودانۍ د کرکيو شمېر  $5 \cdot 5 = 25$  دی، د کوچني ودانۍ د هر پوړ کرکي وشمېری.

### فعاليت

- د قايمو مختصانو په سيستم کې د  $M(x, y)$  ټکي وټاکئ.
- د  $M$  ټکي متناظر يعني  $M'(x', y')$  نظر  $x$  محور ته وټاکئ.
- د  $M$  او  $M'$  مختصانو تر منځ اړيکي وليکئ.
- پورتنۍ اړيکي د ضربونو په څېر وليکئ.
- د پورتنۍ فعاليت ټول مراحل، د  $P$  او د هغه متناظر  $P'$ ، نظر  $y$  محور ته  $S$  او د هغه متناظر  $S'$  نظر د وضعيه کمياتو مبداء ته سرته ورسوی.

د پورتنۍ فعاليت له اجراء څخه وروسته لاندې پايله ليکلای شو:

$$\begin{cases} x = x' \\ -y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x + 0y = x' \\ 0x - 1y = y' \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

په دې معنی چې د  $M$  ټکي د  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  په واسطه د  $M'$  په ټکي بدل او يا اوښتی دی.

پوهېږئ چې هر يود  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  او  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  د وضعيه کمياتو په مستوي کې د يوه ټکي ستوني ښوونه ده.

او دغه جدول  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  يوه نوي وسيله ده چې د لومړي ځل لپاره ناسوله هغې سره مخامخ کېږئ.



په همدې ډول:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ،  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  او  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  هر یو د  $p$ ،  $p'$  او  $s$  د ډګریدل شوي وسیله

ده.

لاڼدې هرې پرې وسیلې ته (چې د ډګر د بدلولو د بڼلیو دنده په غاړه لري) مټریکس وایي.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**تعریف:** د شیانو، عددونو یا تورو گډهښ چې په سطري او ستوني ډول، په یوه مستطیلي جدول کې ترتیب شي، د مټریکس (Matrix) په نامه یادېږي.

د مستطیلي جدول هر عنصر د مټریکس د عنصر په نامه یادېږي. لوی حروفونه د  $A, B, C, \dots$  مټریکس بڼې او وراړه حروفونه  $a, b, c, \dots$  د مټریکس عناصر دي. د عددونو هر یو لاندی جدول یو مټریکس په گوته کوي.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 7 & 5 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{لوړی سطر} \\ \text{دویم سطر} \\ \text{درېم سطر} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{لوړی ستون} \\ \text{دویم ستون} \\ \text{درېم ستون} \end{array}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{لوړی سطر} \\ \text{دویم سطر} \\ \text{درېم سطر} \end{array}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{لوړی سطر} \\ \text{دویم سطر} \end{array}$$

که چېرې  $a$  د یوه مټریکس په  $i$ -م سطر او  $j$ -م ستون کې ځای ولري، هغه د  $a_{ij}$  په شکل ښودلو کېږي چې  $i$  او  $j$  طبیعي عددونه دي، په ترتیب سره د سطر او ستون له شمېر څخه ښکارندويي کوي.

$$i=1,2,3,\dots, j=1,2,3,\dots$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



د متريکس مرتبه: که د  $A$  د متريکس د سطرونو شمېر  $m$  او د ستونونو شمېر يې  $n$  وي، وليو چې د  $A$  متريکس مرتبه د  $m \times n$  څخه عبارت دی او داسې ويل کېږي  $m$  په  $n$  کې متريکس او ليکو  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  د هر متريکس د سطرونو او ستونونو شمېر د همغه متريکس مرتبه بڼې.

### فعاليت

- د لاندې متريکسونو مرتبه وټاکئ.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

پاملرنه وکړئ، هغه متريکس چې يو سطر او يو ستون لري يعنې  $A = (X)_{1 \times 1}$ ، نو د  $A$  متريکس د هغه له

$$\text{داخلي عدد سره مساوي دی. } A = (7)_{1 \times 1} = 7$$

مثال: لاندې متريکسونه د مستطلي جدول په ډول وليکئ.

$$a) \quad (a_{ij})_{2 \times 2} = (i + j)_{2 \times 2} \quad b) \quad (a_{ij})_{3 \times 2} = (i \cdot j)_{3 \times 2}$$

حل: د پورتنی هر مثال د حل لپاره لومړی د متريکس عمومي شکل ليکو، د  $a$  جزء د متريکس عمومي شکل  $2 \times 2$  کې يو متريکس دی.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = i + j$$

$$a_{11} = 1 + 1 = 2, \quad a_{12} = 1 + 2 = 3, \quad a_{21} = 2 + 1 = 3, \quad a_{22} = 2 + 2 = 4$$

په پايله کې غوښتل شوی متريکس عبارت دی له:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

د  $b$  جزء: د  $b$  جزء د متريکس عمومي شکل يو  $(3 \times 2)$  کې متريکس دی، يعنې 3 سطره او 2 ستونه لري.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = 1 \cdot 1 = 1, \quad a_{21} = 2 \cdot 1 = 2, \quad a_{31} = 3 \cdot 1 = 3$$

$$a_{12} = 1 \cdot 2 = 2, \quad a_{22} = 2 \cdot 2 = 4, \quad a_{32} = 3 \cdot 2 = 6$$



$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ په پايله كې غوښتل شوی متریکس عبارت دی له:}$$

دوه، هم مرتبه متریکسونه هغه وخت سره مساوي دي چې د هغوی هر عنصر یو په یو سره مساوي وي،  
 مثلاً:  $\begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  هغه وخت یوله بل سره مساوي دي چې  $a = -1$  او  $b = 2$  وي، آیا  
 (1) او (2) متریکسونه یوله بل سره مساوي دي اوکه نه؟ ولې؟

### پوښتنې

1. د لاندې متریکسونو مرتبې ولیکئ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. لاندې متریکسونه د مستطلي جدول په شکل ولیکئ.

$$a) (a_{ij})_{3 \times 3} = (2i + 3j)_{3 \times 3} \quad b) (a_{ij})_{2 \times 3} = \left(\frac{i}{j}\right)_{2 \times 3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### د متريکسونو دو لونه

د متريکسونو مخامخ شکلونه څو سطرونه او څو ستونونه لري؟  
آيا صفرونه د متريکس عناصر کېدای شي؟

1. سطري متريکس (Row Matrix): هغه متريکس چې يوازې او يوازې يو سطر ولري، سطري متريکس يې بولي، مثلاً:

$$A = (4 \quad 5 \quad 9 \quad 0)_{1 \times 4}$$

2. ستوني متريکس (Column Matrix): هغه متريکس دی چې يوازې يو ستون ولري، د ستوني

$$A = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}_{3 \times 1}$$

متريکس په نامه يادېږي، مثلاً:

3. صفري متريکس (Null matrix): هغه متريکس چې ټول عناصر يې صفرونه وي، له صفري متريکس څخه عبارت دی او د  $0_{m \times n}$  په شکل يې نښي.

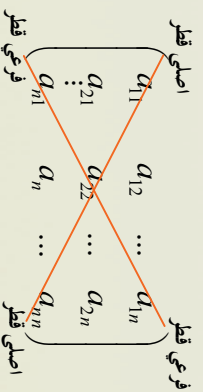
$$0_{2 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2 \times 4} \quad 0_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

4. مربعي متريکس (Square Matrix): که چېرې په يوه متريکس کې د سطرونو شمېر د ستونونو له شمېر سره برابر ( $m = n$ ) شي، د مربعي متريکس په نامه يادېږي، مثلاً:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 3}, \quad m = n \Rightarrow 3 = 3$$

هر مربعي متريکس دوه قطرونه لري.

هغه قطر چې عناصر يې  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  وي، اصلي قطر (Mean diagonal) او هغه قطر چې عناصر يې  $a_{1n}, a_{n1}, \dots, a_{nn}$  وي، فرعي قطر (Minor Diagonal) بلل کېږي.



### فعالیت

- داسې متريکسونه وليکئ چې مرتبې يې  $1 \times 3$ ،  $4 \times 1$  وي، دا څه ډول متريکسونه دي؟

5. قطري متريکس (Diagonal Matrix): هغه متريکس چې ټول عناصر يې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، د قطري متريکس په نامه يادېږي.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

6. سکالر متريکس (Scalar Matrix): هغه قطري متريکس چې د اصلي قطر عناصر يې سره مساوي وي، د سکالر متريکس په نامه يې يادوي، لکه:

$$A = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & K & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & K \end{pmatrix}_{m \times n}$$

7. واحد متريکس (Unit Matrix): که چېرې په يو سکالر يا قطري متريکس کې د اصلي قطر ټول عناصر د (1) عدد وي، دغه ډول متريکس ته واحد متريکس وايي او په  $I_n$  سره ښوول کېږي.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- یو د  $3 \times 3$  مرتبي مټریکس ولیکئ چې د اصلي قطر ښکته ټول عناصر يې صفرونه وي.
- په همدې ډول یو د  $3 \times 3$  مرتبي مټریکس ولیکئ چې د اصلي قطر پورتي عناصر يې ټول صفرونه وي.

له پورتي فعالیت څخه لاندې تعريف بیانېږي:

که چېرې په یوه مربعي مټریکس کې د اصلي قطر پورتي او یا ښکتي ټول عناصر يې صفرونه وي، په دغه صورت کې مټریکس د منلې مټریکس (Triangular matrix) په نامه یادېږي.

که چېرې د اصلي قطر پورتي ټول عناصر صفرونه وي، د پورتي منلې مټریکس (Upper triangular matrix) او که چېرې د اصلي قطر ښکتي ټول عناصر صفرونه وي، د ښکتي منلې مټریکس (lower triangular matrix) په نامه یادېږي.

په لاندې مثالونو کې  $A$  یو پورتي منلې مټریکس او  $B$  ښکتي منلې مټریکس دی.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

متقابل (متضاد) مټریکس:

که چېرې د  $A$  متقابل مټریکس په  $(-A)$  سره وښودل شي نو، دا هغه مټریکس دی چې هر عنصر د  $A$  د متناظر عنصر متضاد دی. که چېرې  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  یو مټریکس وي، نو متقابل (متضاد) مټریکس يې  $(-A)$  په لاندې ډول تعريفېږي:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \xrightarrow{\text{متقابل}} -A = (-a_{ij})_{m \times n}$$

لکه په لاندې مثال کې:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow -A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$



1. لاندي متريڪسونه به پام ڪي ونيسي، مرتبي او اروزند نومونه ٿي وٺاڪي:

$$a) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d) D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g) G = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b) B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e) E = (5 \quad -6 \quad 7 \quad 8)$$

$$h) H = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f) F = (1 \quad 2)$$

$$\left. \begin{array}{r} A+A= \\ A-A= \\ A+B= \\ A-B= \\ B+B= \\ B-B= \end{array} \right\} ?$$

## د متريکسونو جمع او تفریق

### Addition and subtraction of Matrix

په مطالخ متريکسونو کې د هغوی د جمعي او تفریق

په اړه د امکان په صورت کې څه ويلاى شي.

#### (1) د متريکسونو جمع :

که چيرې  $A=(a_{ij})_{m \times n}$  او  $B=(b_{ij})_{m \times n}$  دوه متريکسونه وي، نو  $A+B=C$  عبارت له هغه متريکس څخه دی چې د  $C_{ij}$  هر عنصر يې د  $a_{ij}$  او  $b_{ij}$  د جمعي له حاصل څخه لاس ته راغلي وي، يعنې د دوو متريکسونو جمع کول يوازې هغه وخت امکان لري چې د دواړو متريکسونو مرتبي سره مساوي وي. څرنگه چې  $C_{ij}$  د دوو حقيقي عددونو د جمعي حاصل دی، نو:

$$A_{m \times n} + B_{m \times n} = C_{m \times n} \Rightarrow (a_{ij})_{m \times n} + (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n} = (C_{ij})_{m \times n}$$

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}_{3 \times 2}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+2 \\ -2+1 & 0+2 \\ 1+0 & 7+(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = C_{3 \times 2}$$

#### 2 د متريکسونو تفریق:

د جمعي عملي ته ورته کولای شو، د دوو متريکسونو تفاضل يا د تفریق حاصل په لاس راوړو. که د جمعي عملي او  $A=(a_{ij})_{m \times n}$  او  $B=(b_{ij})_{m \times n}$  وي، نو د تفریق حاصل يې په لاندې ډول په لاس راوړای شو:

$$A_{m \times n} - B_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n} - (b_{ij})_{m \times n} = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n} = C_{m \times n}$$

#### فعاليت

- که  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$  وي،  $A - B$  په لاس راوړئ.



د متريکسونو د جمعي او تفریق خاصیتونه:

1. د متريکسونو جمع کول بدلون خاصیت لری، خو د متريکسونو تفریق د بدلون خاصیت نه لری، یعنی:

$$A + B = B + A$$

$$A - B \neq B - A$$

$$(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$$

2. د متريکسونو جمع او تفریق انحصاری خاصیت لری.

3. د عینیت عنصر (Identity Element) د متريکسونو په جمع کې صدق کوي، خو د متريکسونو په

$$A + 0 = 0 + A = A \quad \text{تفریق کې صدق نه کوي.}$$

$$\text{لومړی مثال: که } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ او } B = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ راکړل شوی وي، نو } A - B \text{ په لاس راوړئ.}$$

حل: څرنگه چې د دواړو متريکسونو مرتبه سره برابره  $(3 \times 3)$  ده، نو کولای شو د تفریق حاصل یې په لاس راوړو.

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -11 & 2 & -1 & 3 & -5 \\ 2 & -0 & 5 & -3 & 4 & -0 \\ 6 & -2 & 0 & -5 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

### فعالیت

• د یوه مثال په واسطه وینایاست چې  $A - B \neq B - A$  دی.

دویم مثال: که چېرې  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$  وي، د امکان په صورت کې  $A + B$  او  $A - B$  په لاس راوړئ.

حل: لیدل کېږي چې د  $A$  او  $B$  متريکسونو مرتبې سره خلاف دی، له دې امله یې جمع او تفریق امکان نه لري، ځکه د  $A$  د متريکس مرتبه  $3 \times 2$  او د  $B$  متريکس مرتبه  $2 \times 3$  ده.

### پوښتنې

لاندې متريکسونه د امکان تر حده جمع او تفریق کړئ:

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad c) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$





$$K \cdot A = K \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

### په مټریکس کې د سکالر ضرب

موز د مټریکسونو د جمعې او تفریق قاعده ویلله،  
که  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  یو مټریکس او  $K$  یو سکالر  
وي، د هغوی د ضرب حاصل په اړه څه فکر کوئ.

### فعالیت

- که  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$  یو مټریکس او  $k$  یو سکالر وي، د  $K \cdot A$  حاصل په لاس راوړئ.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad KA = \begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{pmatrix}$$

- د  $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$  مټریکس په کوم عدد کې ضرب شي، تر څو یې د ضرب حاصل یو واحد مټریکس شي.  
کولای شو د فعالیت له اجراء وروسته یې په لاندې ډول تعریف کوو.

**تعریف:** که  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  یو مټریکس او  $K \in IR$  یو حقیقي عدد وي، نو  $KA$  د  $C$  له مټریکس څخه عبارت دی، داسې چې د  $C$  هر عنصر د  $K$  د ضرب حاصل په  $a_{ij}$  کې دی.

$$C_{ij} = K(a_{ij})$$

**لومړی مثال:** که  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  وي، د  $KA$  د ضرب حاصل پیدا کوئ.

$$KA = 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 6 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 & 2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

حل:

په مټریکس کې د سکالر ضرب خاصیتونه:

که چېرې  $A$  او  $B$  دواړه د یو شان مرتبې مټریکسونه،  $\alpha$  او  $\beta$  دوه حقیقي عددونه وي، نو:

$$a) \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$$

$$b) (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$c) \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$$

دویم مثال: که چېرې  $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ ،  $\alpha = 3$ ،  $\beta = 2$  راکړل شوي وي، وپایاست چې

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$$

حل:

$$\alpha(\beta A) = 3 \begin{bmatrix} 2 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \\ 3 \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 6 \\ 2(-3) & 2 \cdot 9 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -6 & 18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 6 & 3 \cdot 12 \\ 3(-6) & 3 \cdot 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ -18 & 54 \end{pmatrix}$$

$$(\alpha\beta)A = (3 \cdot 2) \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \cdot 3 & 6 \cdot 6 \\ 6(-3) & 6 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ -18 & 54 \end{pmatrix}$$

$$\beta(\alpha A) = 2 \begin{bmatrix} 3 \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \\ 2 \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 & 3 \cdot 6 \\ 3(-3) & 3 \cdot 9 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ -9 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ -18 & 54 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$$

پوښتنې



1. که چېرې  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ،  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ، او  $\alpha = 2$ ،  $\beta = 1$  راکړل شوي وي، په

مټریکس کې د سکالر ضرب درې خاصیتونه تطبیق کړئ؟

2. که  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، او  $K=3$  وي،  $K A$  او  $\frac{1}{K} A$  پيدا کړئ.

## د دوو متريکسونو ضرب

### Multiplication of two Matrixes

آيا د دوو متريکسونو د ضرب لپاره کوم نظر ورکولای شى؟

تاسو د دوو متريکسونو د جمعې لپاره پيلا کړل چې

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

$A + B = B + A$ ، د متريکسونو د ضرب لپاره څه

فکر کوئ؟

### تعريف

دوه متريکسونه د  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  او  $B = (b_{ij})_{n \times p}$  په پام کې ونيسئ، د دې لپاره چې دا داوړه متريکسونه يو په بل کې ضرب شي، نو بايد د لومړي متريکس د ستونونو شمېر د دويم متريکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي. د متريکسونو د ضرب حاصل بيا هم يو متريکس دی، لکه:  $C = (a_{ij})_{m \times p}$  چې د سطرونو شمېر يې د لومړي متريکس د سطرونو په اندازه او د ستونونو شمېر يې د دويم متريکس د ستونونو له شمېر سره برابر دی.

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

د دوو متريکسونو د ضرب لپاره په لاندې ډول کرڼه کوو:

د لومړي متريکس لومړی سطر د دويم متريکس په ټولو ستونو کې په وار سره ضربوو او په هماغه سطر کې يې ليکو، په دويمه مرحله کې بيا هم د لومړي متريکس دويم سطر د دويم متريکس په ټولو ستونو کې په وار سره ضربوو او په هماغه (دويم سطر) کې يې ليکو، دغه عمل ته تر هغه دوام ورکوو، ترڅو ټول سطرونه د لومړي متريکس په دويم متريکس کې ضرب شي، په دغه ډول د متريکسونو د ضرب حاصل محاسبه کېږي. دغه مطلب کولای شو په لاندې ډول وښيو.

$$(a_{ij})_{m \times n} \cdot (b_{ij})_{n \times p} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij} = (C_{ij})_{m \times p}$$

لومړی مثال: که چیرې  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  راکړ شوی وي، نو  $A \cdot B$  پیدا کړئ.

حل: د دوو متريکسونو د ضرب له تعریف څخه پوهیږو:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

دویم مثال: که چیرې  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$  راکړ شوي وي، نو  $A \cdot B$  حاصل

په لاس راوړئ.

حل: بیا هم د متريکسونو د ضرب له تعریف څخه په کار اخیستني لرو چې:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) & 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 \\ (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & -2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+6+1 & 6+0-2 \\ -2+2-2 & -6+0+4 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

دویم مثال:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$  وي  $A \cdot B$  پیدا کړئ.

حل:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 3 \cdot 6 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 7 \\ 5 \cdot 3 + 2 \cdot 6 & 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 5 \cdot 0 + 2 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+18 & 2+3 & 0+21 \\ 15+12 & 10+2 & 0+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 5 & 21 \\ 27 & 12 & 14 \end{pmatrix}$$

- که  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$  وي، د ضرب د حاصل دشتون په صورت کې  $AB$  او  $BA$  پیدا او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

**څلورم مثال:** که  $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  او  $D = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$  وي،  $CD$  او  $DC$  پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

**حل:**

$$CD = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(-3) + (-1)(-4) & 2 \cdot 4 + (-1)(-3) \\ 1(-3) + 2(-4) & 1 \cdot 4 + 2(-3) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -6 + 4 & 8 + 3 \\ -3 - 8 & 4 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -11 & -2 \end{pmatrix} \\ DC = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & (-3)(-1) + 4 \cdot 2 \\ -4 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & -4(-1) + (-3) \cdot 2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -6 + 4 & 3 + 8 \\ -8 - 3 & 4 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -11 & -2 \end{pmatrix}$$

معلومېږي چې  $CD = DC$  دی.

**د متريکس د ضرب خواص:**

**لوهری خاصیت:** په عمومی ډول د دوو متريکسونو په ضرب کې د بدلون خاصیت صدق نه کوي.

یعني که  $A$  او  $B$  دوه متريکسونه او  $AB$  او  $BA$  تعریف شي، نو:  $AB \neq BA$

په ځانگړي حالت کې د  $m \times m$  مرتبې متريکسونه د تبدیلی خاصیت لري.

**دویم خاصیت:** د متريکسونو د ضرب د ضرب اتحادي خاصیت لري. که چېرې  $A, B$  او  $C$  د  $m \times n$  مرتبې متريکسونه وي، نو

$$(AB)C = A(BC)$$

**درېم خاصیت:** د متريکسونو ضرب توزیعي خاصیت د جمعې او ضرب لپاره لري، نو لرو:

- $A(B+C) = AB + AC$
- $(A+B)C = AC + BC$
- $K(AB) = (KA)B = A(KB)$  ،  $K \in IR$
- $IA = AI = A$

د لاندي متريکسونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

$$a) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ?$$

$$b) \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = ?$$

$$c) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = ?$$

## د یوه متریکس ترانسپوز متریکس

### Transpose of Matrix

که په یو متریکس کې سطرونه په ستونونو او ستونونه په سطرونو بدل شي نوي متریکس چې په لاس راځي په څه نوم یادېږي.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

### فعالیت

- د  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  متریکس په پام کې ونیسئ، سطرونه ستونونه او ستونونه سطرونو ته ولېږدوی، هغه

نوی متریکس چې په لاس راځي وبی لیکئ.

- که چېرې د یوه متریکس د سطرونو او ستونونو ځایونه یوله بل سره بدل کړاځي لیکې په عمودي او عمودي په افقي واړوو، هغه نوی متریکس چې لاس ته راځي، آیا له لومړی متریکس سره مساوي دي، نوی متریکس په څه نوم یادېږي؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې تعریف په لاس راځي.

تعریف: که چېرې د یوه متریکس چې مرتبه یې  $(m \times n)$  وي، سطر په ستون او ستون په سطر واړول شي، هغه نوی متریکس چې په لاس راځي، له ترانسپوز (Transpose) متریکس څخه عبارت دی، د  $A$  ترانسپوز متریکس په  $A^T$  ښودل کېږي. د ترانسپوز متریکس مرتبه  $(n \times m)$  ده.

مثلاً: که چېرې  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$  وي، نو ترانسپوز متریکس یې عبارت دی له:  $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$ ، که یو

ترانسپوز متریکس یعنی  $A^T$  له خپل ځان يعني  $A$  سره مساوي شي، نو په دې صورت کې  $A$  متریکس ته متناظر متریکس (Symmetric Matrix) وايي.

مثلاً:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$  یو متناظر متریکس دی، ځکه:  $A^T = A \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

د متناظر متریکس پېژندل: په متناظرو متریکسونو کې عناصر نظر اصلي قطر ته متناظر او مساوي دي:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & f \\ c & f & d \end{pmatrix}$$



### د ترانسپوز متریکس خواص:

لومړی خاصیت: د یوه ترانسپوز متریکس ترانسپوز له خپل لومړي متریکس سره مساوی دی.

$$(A^T)^T = A \Rightarrow [(a_{ij})^T]^T = (a_{ij})^T = (a_{ij}) = A$$

دویم خاصیت: د دوو یا څو ترانسپوز متریکسونو د جمعې او تفریق حاصل د دوی د هر یوه د جمعې او تفریق له

ترانسپوز متریکسونو سره مساوی دی.  $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$ .

او یا په عمومي ډول  $(A \pm B \pm C \pm \dots)^T = A^T \pm B^T \pm C^T \pm \dots$

درېم خاصیت:  $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

څلورم خاصیت:  $(\alpha A)^T = \alpha A^T$  ،  $\alpha \in \mathbb{R}$

$(-A)^T = -A^T$

### فعالیت

- که چېرې  $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$  راکړل شوی وي، وینایاست چې:

$$(A-B)^T = A^T - B^T , (A+B)^T = A^T + B^T$$

مثال: د لاندې متریکسونو ترانسپوز متریکسونه په لاس راوړئ.

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3} , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

حل:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \Rightarrow C^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -6 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

### پوښتنې

1. د  $A$  او  $B$  متریکسونه په پام کې ونیسئ، د هغوی ترانسپوز متریکسونه په لاس راوړئ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{3 \times 3} , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

2. په پورتنیو متریکسونو باندې د 3 عدد لپاره د ترانسپوز متریکس 4 خاصیتونه وینایاست.



$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

## دیتر مینانت Determinant

په یوه عددي مثال کې یو مربعي متریکس داسې وټاکئ، چې د  $ad - bc$  حاصل تفریق مساوي په صفر شي.

### تعريف

که چېرې د  $A$  متریکس یوه حقیقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د  $A$  د متریکس له دیتر مینانت څخه عبارت دی، د  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  د متریکس دیتر مینانت په  $|A|$  او یا  $\det A$  په ډول ښوول کېږي.

په همدې ډول که چېرې د  $n \times n$  مرتبي یو متریکس چې  $n$  سطرونه او  $n$  ستونزونه ولري، اړوند دیتر مینانت یې له  $n$  درجي څخه دی. د  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  یو مربعي متریکس په پام کې نیسو او د تعریف

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

سره سم لرو چې :

د  $2 \times 2$  مرتبي متریکسونو د دیتر مینانت محاسبه د  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  متریکس دیتر مینانت په لاندې ډول تعریفوو.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال: د  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$  متریکس دیتر مینانت حساب کړئ.

حل:  $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 7 \cdot 4 = 6 - 28 = -22$

### فعالیت

- د  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$  متریکس دیتر مینانت محاسبه کړئ.



د  $3 \times 3$  مټریکسونو د دیتر مینانت محاسبه: د  $A_{3 \times 3}$  مټریکس، دیتر مینانت په پام کې نیسو:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

حل: د  $A_{3 \times 3}$  دیتر مینانت د محاسبې لپاره لاندې ګامونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: اول ستون او دریم سطر له منځه وړو(حذفوو)، د  $2 \times 2$  مرتبې دیتر مینانت محاسبه او د لومړي ستون او دریم سطر د تقاطع په عنصر کې یې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) a_{31}$$

دویم پړاو: دریم ستون او دریم سطر حذف، د  $2 \times 2$  مرتبې دیتر مینانت محاسبه او د دریم ستون او دریم سطر د تقاطع په عنصر کې یې ضربوو، هېره دې نه وي چې د دیتر مینانت د محاسبې لپاره علامې په متناوب ډول بدلون مومي:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow -(a_{11} a_{23} - a_{21} a_{13}) a_{32}$$

دریم پړاو: دریم ستون او دریم سطر له منځه وړو(حذفوو)، د  $2 \times 2$  مرتبې دیتر مینانت محاسبه، د دریم سطر او دریم ستون د تقاطع په عنصر کې یې ضربوو:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) a_{33}$$

خلورم پړاو: د 1، 2 او 3 ټول پړاونه سره جمع کوو، په دې ډول د  $A$  دیتر مینانت مقدار په لاس راځي.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) a_{31} - (a_{11} a_{23} - a_{21} a_{13}) a_{32} + (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) a_{33} \\ &= a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} + a_{21} a_{13} a_{32} + a_{11} a_{22} a_{33} - a_{12} a_{21} a_{33} \end{aligned}$$

$$B = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

مثال : د لاندې دیتر مینانت مقدار په لاس راوړئ.

حل : له تېرو معلوماتو څخه کار اخلو :

$$I) \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = (6 \cdot 2 - 1(-3)) \cdot 4 = (12 + 3) \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60$$

$$II) \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 2 - 5(-3))(-1) = 4 + 15 = 19$$

$$III) \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = (2 \cdot 1 - 5(6)) \cdot 7 = (2 - 30) \cdot 7 = -28 \cdot 7 = -196$$

$$I + II + III = 60 + 19 - 196 = -117$$

### فعالیت

$a$	0	3
$d$	-4	2
	1	-1
	0	0

• د  $A = \begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$  له دیتر مینانت څخه د  $a$  قیمت په لاس راوړئ.

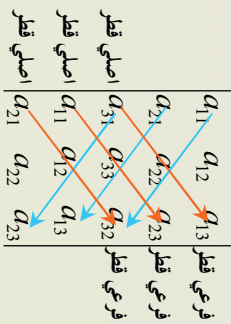
**دویمه طریقه :** د ساروس په طریقه د دیتر مینانت محاسبه : په دغه طریقه کې د دیتر مینانت دوه لومړي ستونزه بڼي لوري ته په لاندې ډول تکرار لیکو :

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

فرعي قطرونه
اصلي قطرونه

د اصلي قطر عناصر یوله بل سره ضرب او جمع کوو، په همدې ډول د فرعي قطر عناصر یوله بل سره ضربوو او وروسته یې جمع کوو، همدارنگه د اصلي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب له مجموع څخه، د فرعي قطرونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموع کموو، په دې ډول د  $A$  د مینرکس دیتر مینانت مقدار په لاس راځي :

$$|A| = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$



په دغه طریقه کې کولای شو د لومړی او دویم ستون د لېږد په ځای لومړی او دویم سطر د دیتر مینانت لاندینی برخې ته انتقال کړو او د تېر په ډول کړنه سرته رسوو.

**دویم مثال :** د لاندې دیتر مینانت قیمت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

**حل:**

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & 0 & -4 \\ 5 & -2 & 6 & 5 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (3 \cdot 3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 \cdot 5 + (-1)(-4)(-2)) - ((-1) \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 0 \cdot (-2) + 2(-4) \cdot 6)$$

$$= (54 + 0 - 8) - (-15 + 0 - 48) = 46 + 63 = 109$$

### فعالیت

- لاندې د  $|A|$  دیتر مینانت د ساروس په طریقه په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې دوه لومړني سطرونه د دیتر مینانت لاندې برخې ته ولېږدوئ او عملیه سرته ورسوئ.

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

### پوښتنې

1. د لاندې دیتر مینانتونو مقدار په لنډ ډول محاسبه کړئ.

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad d) \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

2. د لاندې دیتر مینانتونو مقدار د ساروس په طریقه په لاس راوړئ.

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$



$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

## د دیتر مینانت خاصیتونه

که چېرې په یوه دیتر مینانت کې د سطر ځای له ستون سره بدل شي، د دیتر مینانت په قیمت کې تغیر راځي او که نه؟

### فعالیت

- د  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$  او  $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$  دیتر مینانټونه محاسبه کړئ.
- د  $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$  دیتر مینانت په پام کې ونیسئ، ترانسپوز یې په لاس راوړئ، وروسته یې  $|A^T|$  دیتر مینانت محاسبه کړئ او وینایاست چې  $|A^T| = |A|$ .

له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي.

که چېرې  $A$  یو  $n \times n$  متریکس وي، د  $|A|$  دیتر مینانت لپاره لاندې خواص صادق کوي.

1. که د  $A$  متریکس د یوه سطر او یا یوه ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو د  $A$  دیتر مینانت مساوي له صفر سره دی.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

2. که چېرې د  $A$  متریکس دوه سطرونه یا دوه ستونونه سره مساوي وي، نو اړوند دیتر مینانت یې مساوي له صفر سره دی.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0$$

3. که د  $A$  متریکس د یوه سطر او یا یوه ستون عناصر د بل سطر او یا ستون د عناصرو ګڼو فکتور وي، نو

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda |A| = \lambda(0) = 0$$

4. د  $A$  متریکس دیتر مینانت او  $A^T$  متریکس دیتر مینانت یو له بل سره مساوي دي، په همدې ډول دیتر مینانت ځینې نور خاصیتونه یا ځانګړنې هم لري، لکه:

که چیري په یوه دیتر مینانت کې د دوو سطرونو یا دوو ستونونو خاویزه یو له بل سره بدل شي، د دیتر مینانت اشاره بدلون مومي.

**لومړی مثال:** د  $A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$  دیتر مینانت لومړي ستون له دویم ستون سره بدل کړئ او وروسته د دواړو دیتر مینانتونو قیمتونه سره پرتله کړئ.

**حل:**

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow (0+6+4) - (24-4+0) = -10$$

$$B = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0+24-4) - (4+6+0) = 20-10=10$$

لیلل کیري چې د  $A$  په دیتر مینانت کې دویم ستون له لومړي ستون سره بدل شوی، په ورته ډول کولای شوه دوه سطرونه هم یوله بل سره بدل کړو، نو داسې پایله په لاس راځي:  $|A| = -|B|$   
 که د  $K$  یو ثابت عدد په دیتر مینانت کې ضرب شي، دغه عدد یوازې په یوه سطر او یا یوه ستون کې په اختیاري ډول ضربیدلای شي. په همدې ډول کولای شو د یوه دیتر مینانت گڼعامل له یوه سطر او یا یوه ستون څخه گڼ عددونو ته چې د دیتر مینانت گڼ فکتور بلل کېږي.

**دویم مثال:** د  $|A|$  دیتر مینانت گڼ ضربې عامل پیدا کړئ.

$$A = \begin{vmatrix} 16 & 3 & 22 \\ 8 & 2 & 21 \\ 20 & 1 & 25 \end{vmatrix}$$

**حل:** لیدل کېږي چې د دیتر مینانت په لومړي ستون کې د 4 عدد گڼ ضربې عامل دی چې په حقیقت کې دا عدد د دیتر مینانت گڼ ضربې عامل دی.

$$|A| = \begin{vmatrix} 16 & 3 & 22 \\ 8 & 2 & 21 \\ 20 & 1 & 25 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 22 \\ 2 & 2 & 21 \\ 5 & 1 & 25 \end{vmatrix}$$

### پوښتنې



د دیتر مینانت دخواصو په مرسته د لاندې دیتر مینانتونو قیمت په لاس راوړئ.

a)  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix}$

b)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

c)  $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

## د $2 \times 2$ مرتري متريکسونو ضربني معکوس

### Multiplication inverse of $2 \times 2$ matrixes

آيا د حقيقي عددونو د ضرب قاعده مو په ياد ده؟

د  $a$  حقيقي عدد ضربني معکوس کوم عدد دی؟

په همدې ډول د ځينو مرتري متريکسونو لپاره هم دا خاصيت، د مرتريکسونو د خاصيتونو په پام کې نيولو سره شتون لري.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

### فعاليت

- د  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  متريکس په پام کې ونيسو او د دتر مېنانت يې محاسبه کوئ.
- د  $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$  متريکس د  $A$  له متريکس سره ضرب او پايله يې وليکئ.

له پورتنۍ فعاليت څخه لاندې پايله بيانولای شو:

**تعريف:** د  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  غير صفرې مرتري متريکس په پام کې نيسو، که چېرې د  $B$  مرتري متريکس داسې

$$AB = BA = I$$

په دې صورت کې د  $B$  متريکس د  $A$  د متريکس معکوس بلل کېږي او هغه په  $A^{-1}$  سره نښتي. له دې امله

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

په ياد ولرو: د  $A$  مرتري متريکس ته منفرد متريکس (Singular Matrix) ويل کېږي، کله چې  $|A| = 0$  وي او

همدارنگه د  $A$  مرتري متريکس ته غير منفرد متريکس (non singular matrix) ويل کېږي، که چېرې  $|A| \neq 0$  وي.

له دې امله هغه وخت يو متريکس د معکوس متريکس لرونکی دی چې:

1. متريکس مرتري وي.

2. د تر مېنانت يې د صفر خلاف وي.

**لومړی مثال:** وينااست چې  $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$ ،  $B = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$  يو د بل معکوس دي.

**حل:**

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)(-7) + 3(-2) & (-1)(-3) + 3(-1) \\ 2(-7) + (-7)(-2) & 2(-3) + (-7)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-6 & -21+21 \\ -2-2 & -6+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ليدل کېږي چې:  $AB = BA = I$ ، نو  $A$  او  $B$  يو د بل معکوس دي.

**الحاقی متریکس (Ad joint of matrix):** د  $2 \times 2$  مرتبې الحاقی متریکس د پیدا کولو لپاره د اصلي قطر د عناصرو ځایونه سره بدللو او فرعي قطر د اشارې په بدلون سره لیکو، هغه نوی متریکس چې لاس ته راځي، له الحاقی متریکس (adjoint=adj) څخه عبارت دی، د مثال په ډول:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow Adj A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj K = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

هغه وخت یو متریکس معکوس متریکس لري چې دټیرمېنانت یې د صفر خلاف وي، یعنې  $|A| \neq 0$ . البته د بحث موضوع  $2 \times 2$  مرتبې متریکس دی چې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj A \quad |A| \neq 0$$

**لومړی مثال:** که چېرې  $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$  وي، معکوس متریکس یې پیدا کړئ.

$$\text{حل: } |A| = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -18 + 10 = 8 \neq 0$$

لپدل کېږي چې د  $A$  متریکس دټیرمېنانت د صفر خلاف دی، نو د  $A$  متریکس معکوس متریکس لري.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj A = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{15}{4} & \frac{15}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

ازمونه:

په عمومي ډول ویلی شو، د هر  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  متریکس چې دټیرمېنانت یې د صفر خلاف یعنې  $|A| \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

وي، معکوس لري چې له دې فورمول څخه په لاس راځي:



پوښتنې

1. د لاندې متریکسونو څخه کوم یو متریکس معکوس لري.

a)  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$

b)  $B = \begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

2. د لاندې متریکسونو معکوس متریکس په لاس راوړئ او وازمئ.

1)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

2)  $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

3)  $C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$





## له معکوس متریکس څخه په کار اخیستنې د خطي معادلو د سیستم حل

آیا تر اوسه مو له معکوس متریکس څخه په ګټه اخیستنې د خطي معادلو د سیستم د حل په اړه فکر کړی دی؟

$$X = A^{-1} \cdot B$$

### فعالیت

د خطي دوه مجهوله معادلو سیستم  $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$  په پام کې ونیسئ:

- د ضربونو متریکس، د مجهولینو متریکس، د ضربونو او مجهولینو متریکس ولیکئ.
- هر متریکس د معادلې په ډول ولیکئ.

- د لاس ته راغلي معادلې اطراف د ضربونو د متریکس په معکوس کې ضرب کړئ. له پورتنۍ فعالیت څخه کولای شو لاندې پایله بیان کړو:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

څرګه چې  $A$  د سیستم د چپ لوري د ضربونو متریکس،  $B$  د ښي لوري د ثابتو عددونو ستوني متریکس او  $X$  د مجهولو عددونو ستوني متریکس دی، نو د  $A^{-1}$  په پام کې نیولو سره سیستم داسې حلېږي:

$$AX = B$$

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B \Rightarrow (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} \cdot B$$

$$IX = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B$$

لوپړی مثال: له معکوس متریکس څخه په کار اخیستنې سره، د خطي دوه مجهوله

سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  او  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$  دی.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

څرنگه چې د  $A$  متریکس ډیټرمننټ د صفر خلاف دی، نو د  $A$  متریکس معکوس لري او په لاندې ډول یې په لاس راوړو:

$$\text{Adj } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 \\ -1 \cdot 5 + 1 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 - 14 \\ -5 + 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x = 1, \quad y = 2$$

**دویم مثال:** له معکوس متریکس څخه په کار اخیستنې سره د دغه خطي معادلو

سیستم حل کړئ.

حل: پوهېږو چې:

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1 \Rightarrow A \neq 0$$

ليدل کبري چي  $|A| \neq 0$  دی، نو  $A$  معکوس متريکس لري.

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}A = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ -3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 6 \\ -6 + 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 4, \quad y = 9$$

دريم مثال: د  $x$  او  $y$  په کومو قيمتونو کي لاندې معادلي په يو وخت کي صدق کوي.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases}$$

د ياد شوي سيستم حل د سيستم د ضريبونو د متريکسونو له تشکيل څخه په لاس راوړو:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

څرنگه چي د  $A$  متريکس ديتريمنانت صفر دی، نو د  $A$  متريکس معکوس نه لري، په پايله کي ويلاي شو چي سيستم حل نه لري.

له معكوس ميٽريڪس ڇڏڻه ٻه گڻه اڄيٽي ، د لائڊي خطي معادلر سيسيٽمونه حل ڪري .

$$a) \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} a + b = 11 \\ 4a - b = 9 \end{cases}$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

## د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طریقه Cramer's rule

آیا کولای شو، د ضربونو د متریکس د دیترینانت او له مجهولینو یعنې د  $x, y, z$  سره د متناظرو متریکسونو د دیترینانت په واسطه د خطي معادلو د سیستم حل پیدا کړو؟

د خطي درې مجهوله معادلو سیستم په پام کې نیسو او د ضربونو متریکس یې په  $A$  سره ښیو:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = d_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = d_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = d_3$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

کولای شو د  $x, y, z$  او  $z$  قیمتونه له لاندې اړیکو څخه په لاس راوړو، په داسې حال کې چې  $|A| \neq 0$  وي.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}, \quad y = \frac{|A_y|}{|A|}, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

په پورتنیو اړیکو کې  $|A_x|$ ،  $|A_y|$  او  $|A_z|$  په ترتیب سره د  $x, y, z$  اړوند متناظر متریکسونو دیترینانتونه دي. د هغوی د محاسبې لپاره په لاندې ډول کرڼه کوو، د سیستم زیات شوي متریکس لیکو:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & d_3 \end{array} \right)$$

د  $|A_x|$  د محاسبي لپاره د لومړی ستون د  $x$  ضریبونو په ځای څلورم ستون (هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم بڼې لوري ته پراته دي) ځای پر ځای کوو، د  $3 \times 3$  مرتبې متريکس دیتر مینانت په لاس راوړو او د  $|A_y|$  د محاسبي لپاره د دویم ستون د  $y$  ضریبونو په ځای څلورم ستون (هغه ثابت مقدارونه چې د سیستم بڼې لوري ته پراته دي) ځای پر ځای کوو او د  $3 \times 3$  مرتبې د متريکس دیتر مینانت محاسبه کوو. او د  $|A_z|$  د محاسبي لپاره دریم ستون د  $z$  ضریبونو په ځای څلورم ستون ځای په ځای کوو او د  $3 \times 3$  مرتبې متريکس دیتر مینانت قیمت په لاس راوړو.

### فعالیت

- له پورتنیو معلوماتو څخه په گڼې اخیستې سره  $|A_x|$ ،  $|A_y|$  او  $|A_z|$  پیدا کړئ.

**لومړی مثال:** د 
$$\begin{cases} x - 3y = 3 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$
 سیستم حل د کرامر په طریقه په لاس راوړئ.

**حل:**  $0 \neq 7 = 1 + 6 = 1 - (-6) = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-6)$

خړنگه چې  $0 \neq |A|$  دی؛ نو سیستم حل لري.

اوس زیات شوی متريکس لیکو:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{3 - (-6)}{7} = \frac{3 + 6}{7} = \frac{9}{7}$$

$$x = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2 - 6}{7} = -\frac{4}{7}$$

دویم مثال: لائني دري مجهوله سیستم د کرامر په طریقہ حل کری.

$$\begin{cases} 3x - 2y + 2z = -4 \\ x + 3y + z = 5 \\ 2x + 2y - z = 11 \end{cases}$$

حل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -4 \\ 5 \\ 11 \end{matrix} \begin{matrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{matrix}$$

$$= -9 - 4 + 4 - 12 - 6 - 2$$

$$= -21 - 8 = -29 \neq 0$$

خونگه چي  $|A| \neq 0$  دئی نو له دي امله سیستم حل لري.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -4 \\ 5 \\ 11 \end{matrix} \begin{matrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{matrix}$$

$$= 12 - 22 + 20 - (66 - 8 + 10)$$

$$= 10 - 68 = -58$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-58}{-29} = 2$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 11 \end{matrix} \begin{matrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{matrix}$$

$$= -15 - 8 + 22 - (20 + 33 + 4)$$

$$= -23 + 22 - 57 = -58$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-58}{-29} = 2$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 11 \end{matrix} \begin{matrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{matrix}$$

$$= 71 + 16 = 87$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{87}{-29} = -3$$

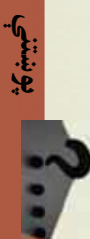
ميزان:

د  $x, y, z$  او  $z$  په لاس راضي قيمتونه په اصلي سيستم کي وضع کوو:

$$3(2) - 2(2) + 2(-3) = 6 - 4 - 6 = -4 \Rightarrow -4 = -4$$

$$2 + 3(2) - 3 = 2 + 6 - 3 = 8 - 3 = 5 \Rightarrow 5 = 5$$

$$2(2) + 2(2) - (-3) = 4 + 4 + 3 = 11 \Rightarrow 11 = 11$$



د لاندې معادلو سيستمونه حل کړئ.

$$a) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 2x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y - az = 0 \\ ax + 2y - z = 0 \\ 2x + ay + 2z = 0 \end{cases}$$



## د معادلو د سیستم حل د گوس (Gause) په طریقہ

آیا که لای شوی له متریکس څخه په کار اخیستې سره  
د  $x, y, z$  مجهول قیمتونه پیل اکړو.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

د گوس په طریقہ د معادلو د سیستم د حل لپاره د ضربونو متریکس او ثابت قیمتونه لیکو وروسته په سطرونو او ستونونو، باندې لومړنی عملي (جمع، تفریق، ضرب او تقسیم) سرته رسوو، یا سطرونه او ستونونه په یو سکالر کې ضربوو چې په پایله کې دوه مجهول له منځه ځي او دریم مجهول محاسبه کېږي، وروسته د نورو مجهولونو قیمت په لاس راوړو، د متریکس سطرونه په  
 $R_1, R_2, R_3, \dots$  نښو:

لومړی مثال: لاندې د خطي معادلو سیستم د گوس په طریقہ حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$$

حل: د ضربونو متریکس لیکو:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{لومړی سطر منفي دوم سطر تفریق حاصل په دوم سطر کې}} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{دوم سطر په (-1) کې ضرب بدلون په دوم سطر کې}} \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \cdot (-1) \rightarrow R_2}$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow y=2, \quad \begin{cases} x+2y=5 \\ x+2(2)=5 \Rightarrow x=5-4=x=1 \end{cases}$$

پاملرنه:  $R_1 - R_2 \rightarrow R_2$  په دې معنا چې له لومړي سطر څخه دویم سطر تفریق شوی او په دویم سطر کې بدلون لیکل شوی دی.

$R_2 \rightarrow R_2(-1)$  داسې مفهوم لري چې دویم سطر په  $(-1)$  کې ضرب شوی او په دویم سطر کې لیکل شوی دی.

- د خطي دوه معادلو سیسټم د گوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} x+2y=-3 \\ 2x-y=4 \end{cases}$$

دویم مثال: د لاندې درې مجهوله معادلو سیسټم د گوس په طریقه حل کړئ.

$$\begin{cases} 2x+3y-z=5 \\ 3x+y+2z=11 \\ 4x-2y+z=3 \end{cases}$$

حل: لومړی د سیسټم د مجهولینو دضریبونو او ثابتو عددونو متریکس لیکو:

$$\begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

په لومړی پړاو کې د  $x$  ضریب په دویم سطر کې له منځه وړو. داسې چې لومړی سطر په  $-3$  کې ضرب د دویم سطر له دوه چنده سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 11 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{-3R_1+2R_2 \rightarrow R_2} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

په دویم گام کې د  $x$  ضریب په دویم سطر کې له منځه وړو داسې چې لومړی سطر په  $-2$  کې ضرب له دویم سطر سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{-2R_1+R_3 \rightarrow R_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array} \right)$$

په دویم پړاو کې د  $x$  ضریب له دویم سطر څخه حذفوو، داسې چې دویم سطر په  $-8$  کې ضرب د دویم سطر له  $7$  چنده سره جمع او په دویم سطر کې یې لیکو:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & -8 & 3 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow{-8R_2+7R_3 \rightarrow R_3} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & -35 & -105 \end{array} \right)$$

له دریم سطر څخه کولای شو، د  $z$  قیمت په لاس راوړو:

$$-35z = -105 \Rightarrow z = 3$$

د  $z$  قیمت په دویم سطر کې وضع او د  $y$  قیمت په لاس راوړو:

$$-7y + 7z = 7 \Rightarrow -7y + 21 = 7 \Rightarrow -7y = -14, \quad y = 2$$

په دریم پړاو کې د  $y$  او  $z$  قیمتونه په لومړي سطر کې اېږدو او  $x$  په لاس راځي.

$$2x + 3y - z = 5 \Rightarrow 2x + 3 \cdot 2 - 3 = 5 \Rightarrow 2x + 3 = 5$$

$$2x = 5 - 3 = 2, \quad x = 1$$

د خطي معادلو د سیستم حل عبارت دی له:  $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ .

دریم مثال: د لاندې خطي معادلاتو سیستم د گوس په طریقه حل کړئ.

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18$$

$$4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24$$

$$2x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 40$$

حل:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 18 & & \\ 4 & 5 & 6 & 24 & -2R_1 + R_2 \rightarrow R_2 & \\ 2 & 7 & 12 & 40 & & \end{array} \right) \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 6 & 18 & & \\ & 0 & -3 & 0 & -6 & -12 \\ & 2 & 7 & 12 & & 40 \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} & 2 & 4 & 6 & 18 & \\ & & 0 & -3 & -6 & -12 \\ & & 0 & 3 & 6 & 22 \end{array} \right) \left( \begin{array}{ccc|ccc} & 2 & 4 & 6 & 18 & \\ & & 0 & -3 & -6 & -12 \\ & & 0 & 0 & 0 & 10 \end{array} \right) \left( \begin{array}{ccc|ccc} & 2 & 4 & 6 & 18 & \\ & & 0 & -3 & -6 & -12 \\ & & 0 & 0 & 0 & 10 \end{array} \right)$$

لیدل کېږي چې په لاس راغلی متريکس کې د  $x_1, x_2$ , او  $x_3$  ضریبونه په دریم سطر کې صفر دي، په داسې حال کې چې په یاد شوي سطر کې ثابت عدد 10 دی او دا غیر ممکن دی چې  $(10 = 0 = x_3 = x_2 = x_1)$  نو سیستم حل نه لري.

د لاندې معادلو سیستم حل او میزان کړئ:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

پاملرته: که چیرې د خطي معادلو په سیستم کې یو له مجهولینو څخه موجود نه وي، د هغه ضریب صفر په پام کې نیسو، وروسته د خطي معادلو د ضریبونو او د ثابتو مقدارونو متریکس تشکیلو:



پوښتني

د لاندې خطي معادلو سیستمونه د گوس په طریقه حل کړئ:

a) 
$$\begin{cases} 3x - y = -5 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 2x + 4y - 10z = -2 \\ 3x + 9y - 21z = 0 \\ x + 5y - 12z = 1 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} 2x + 2y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ -3y = -6 \end{cases}$$

## د شپږم څپرکي مهم ټکي

د مټریکس تعریف: یوه گڼه‌اندازه یا توري چې په سطري او ستوني ډول په یوه مستطيلي جدول کې ځای پر ځای شوې وي. د مټریکس (Matrix) په نامه یادېږي.

د مټریکسونو ډولونه:

- سطري مټریکس: هغه مټریکس چې یوازې یو سطر ولري.
- ستوني مټریکس: هغه مټریکس چې یوازې یو ستون ولري.
- صفري مټریکس: هغه مټریکس چې ټول عناصر یې صفرونه وي.
- مربعي مټریکس: هغه مټریکس چې د سطرونو او ستونونو شمېر یې سره برابر وي.
- مساوي مټریکسونه: دوه مټریکسونه، هغه وخت سره مساوي دي چې ټول عناصر یې په یو سره برابر او مساوي وي.

- قطري مټریکس هغه مټریکس چې ټول عناصر یې پرته له اصلي قطر څخه صفرونه وي، قطري مټریکس بلل کېږي.
  - سکالر مټریکس: هر قطري مټریکس چې د اصلي قطر عناصر یې سره برابر وي، سکالري مټریکس بلل کېږي.
  - واحد مټریکس: په هر سکالري مټریکس کې که د اصلي قطر عناصر د 1 عدد وي، واحد مټریکس بلل کېږي.
- په مټریکسونو باندې لومړني عملیات:

- د مټریکسونو جمع او تفریق: د مټریکسونو جمع او تفریق هغه وخت امکان لري چې:

$$A_{m \times n} \pm B_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n} \pm (b_{ij})_{m \times n} = (c_{ij})_{m \times n} = C_{m \times n}$$

د مټریکسونو د جمعي او تفریق خواص:

- 1)  $A + B = B + A$
- 2)  $A - B \neq B - A$
- 3)  $(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$
- 4)  $A + 0 = 0 + A = A$
- 5)  $A + (-A) = -A + A = 0$

په مټریکس کې د سکالر ضربول: که  $K \in IR$  او  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  وي، نو:

$$KA = K(a_{ij})_{m \times n} = (C_{ij})_{m \times n} = C_{m \times n}$$

په مټریکس کې د سکالر ضرب خواص:

- a)  $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$
- b)  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- c)  $\alpha(\beta A) = (\alpha \beta)A = \beta(\alpha A)$

د دوو مټریکسونو ضرب: د دوو مټریکسونو ضرب هغه وخت ممکن دی چې د لومړي مټریکس د ستونونو شمېر، د دویم مټریکس د سطرونو له شمېر سره برابر وي، که  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  او  $B = (b_{ij})_{n \times p}$  وي، نو:

$$A \cdot B = (a_{ij})_{m \times n} \cdot (b_{ij})_{n \times p} = (C_{ij})_{m \times p} = C_{m \times p}$$

يعني د دوو متریکسونو د ضرب حاصل هغه دریم متریکس دی چې د سطرونو شمېر يې له لومړي متریکس سره او د ستونزو شمېر يې له دویم متریکس سره برابر وي.

**د متریکسونو د ضرب خواص:** که  $A$  او  $B$  دوه متریکسونه وي، نو:

- 1)  $AB \neq BA$
- 2)  $(AB)C = A(BC)$
- 3)  $A(B + C) = AB + AC$
- 4)  $I \cdot A = A \cdot I = A$

**د یوه متریکس ترانسپوز متریکس:** که د یوه  $A_{m \times n}$  متریکس ستونونه په سطرونو او سطرونه په ستونونو بدل شي، هغه نوي متریکس چې لاسته راځي، د ترانسپوز متریکس په نامه یادېږي. د  $A$  ترانسپوز متریکس په  $A^T$  سره ښيي.

**مثلي متریکس:** که په یوه متریکس کې د اصلي قطر پورتي او یا ښکني عناصر ټول صفرونه وي، نوموړی متریکس د مثلي متریکس په نامه یادېږي.

**متناظر متریکس:** که د  $A$  یو متریکس له خپل ترانسپوز  $A^T$  متریکس سره برابر شي ( $A = A^T$ ) نو د  $A$  متریکس ته متناظر متریکس وایي.

**دیترېمینانت:** که د  $A$  متریکس یوه حقيقي عدد ته نسبت ورکړل شي، د  $A$  د متریکس له دیترېمینانت څخه عبارت دی، او د  $|A|$  یا  $\det A$  په شکل سره ښودل کېږي.

**د دیترېمینانت خواص:**

1. که د  $A_{n \times n}$  متریکس د یوه سطر او یا ستون ټول عناصر صفرونه وي، نو دیترېمینانت يې صفر دی، يعني:  $\det A = 0$
2. که د دیترېمینانت دوه سطرونه او یا دوه ستونونه سره برابر (مساوي) وي، نو دیترېمینانت يې صفر دی.  $|A| = 0$
3. که  $A_{n \times n}$  متریکس د یوه سطر یا ستون عناصر د بل سطر یا ستون د عناصرو مضرب وي، نو دیترېمینانت يې صفر دی.  $|A| = 0$
4. د  $A$  متریکس او د  $A$  ترانسپوز متریکس دیترېمینانته سره مساوي وي، يعني:  $|A^T| = |A|$

**د متریکسونو ضربي معکوس:** د  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  مربعي متریکس په پام کې نیسو، که چېرې د  $B$  مربعي متریکس داسې موجود وي چې  $AB = BA = I$ ، په دې صورت کې د  $B$  متریکس د  $A$  د متریکس معکوس دی او د  $A$  د متریکس معکوس متریکس په  $A^{-1}$  سره ښيي:

**د خطي معادلو د سیستم حل:**

- له معکوس متریکس څخه په گټه اخیستې د خطي معادلو د سیستم حل.
- د خطي معادلو د سیستم حل د کرامر په طريقه.
- د گوس په طريقه د خطي معادلو د سیستم حل.



## د څپرکي پوښتني

لاندي پوښتنو ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، له سم ځواب څخه کړۍ تاو کړۍ.

1. که  $|A|=3$  وي، نو  $|A^{-1}|$  پيدا کړۍ.

- a)  $\frac{1}{3}$       b) 9      c)  $\frac{1}{9}$       d) 3

2. که  $A = \begin{pmatrix} 2m-3 & -1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$  معکوس منونکی متريکس وي، نو د  $m$  قيمت به څو وي؟

- a)  $m=1, \frac{1}{2}$       b)  $m \neq 1$       c)  $m=0$       d)  $m \neq 1, \frac{1}{2}$

3. که  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$  وي، د  $x$  هغه متريکس په لاس راوړۍ چې په دغه رابطه  $Ax = A^{-1}$  کې صدق وکړي.

- a)  $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 25 & 14 \end{pmatrix}$       b)  $\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -25 & 14 \end{pmatrix}$   
c)  $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -25 & -16 \end{pmatrix}$       d)  $\begin{pmatrix} -9 & 5 \\ -25 & -12 \end{pmatrix}$

4. د  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$  متريکس لاندي د  $y=2x$  د خط بدلون منونکي خط پيدا کړۍ.

a)  $y=0$       b)  $x$  محور      c)  $y+2x=0$       d)  $x$  محور

5. د  $x$  په کومو قيمتونو دغه ديتريمنانت

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

صفر دی؟

- a)  $x=1, 2$       b)  $x=3, 1$       c)  $x=\frac{1}{2}, 3$       d)  $x=3, 2$

7. د  $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$  ديتريمنانت حاصل په لاس راوړۍ.

- a) 29      b) 39      c) 19      d) 9



### لاندي پوښتني حل ڪري:

1. که  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  وي، لاندي محاسبې غوڻيل شوي هي:

a)  $3A - 2B$       b)  $-4A + 3B$

2. فرض ڪريئ ڪه  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  او  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$  راکول شوي وي، نو  $AB$  او  $BA$  محاسبه ڪريئ

او وروياست چي  $AB = BA$  هي.

3. لاندي مٿريڪسونه په پام ڪي ونيسي:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اشتراڪي خاصيت، توزيعي خاصيت او د مٿريڪسونو ضرب د درو مٿريڪسونو لپاره وڻياست.

4. لاندي ديترمينات په لنڊه ڄول محاسبه ڪريئ.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

5. د لاندي مٿريڪس معڪوس مٿريڪس د الحاق (adjoint) په طريقه پيدا ڪريئ.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

6. د لاندي خطي معادلو سيسٽمونه د ڪرامر په طريقه حل ڪريئ.

a) 
$$\begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ x - 2y + 2z = 10 \\ 3x - y - z = 4 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 = 5 \end{cases}$$

7. د لاندي خطي معادلو سيسٽمونه د گوس په طريقه حل ڪريئ.

a) 
$$\begin{cases} 2x - 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 0 \\ 5x - 4y - 2z = 0 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 2x + 3y - 7 = 1 \\ 2y + 27 = -2 \end{cases}$$

8. د لاندي خطي معادلو سيسٽمونه د معڪوس مٿريڪس په طريقه حل ڪريئ.

a) 
$$\begin{cases} 3x + y + 1 = 0 \\ 4x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

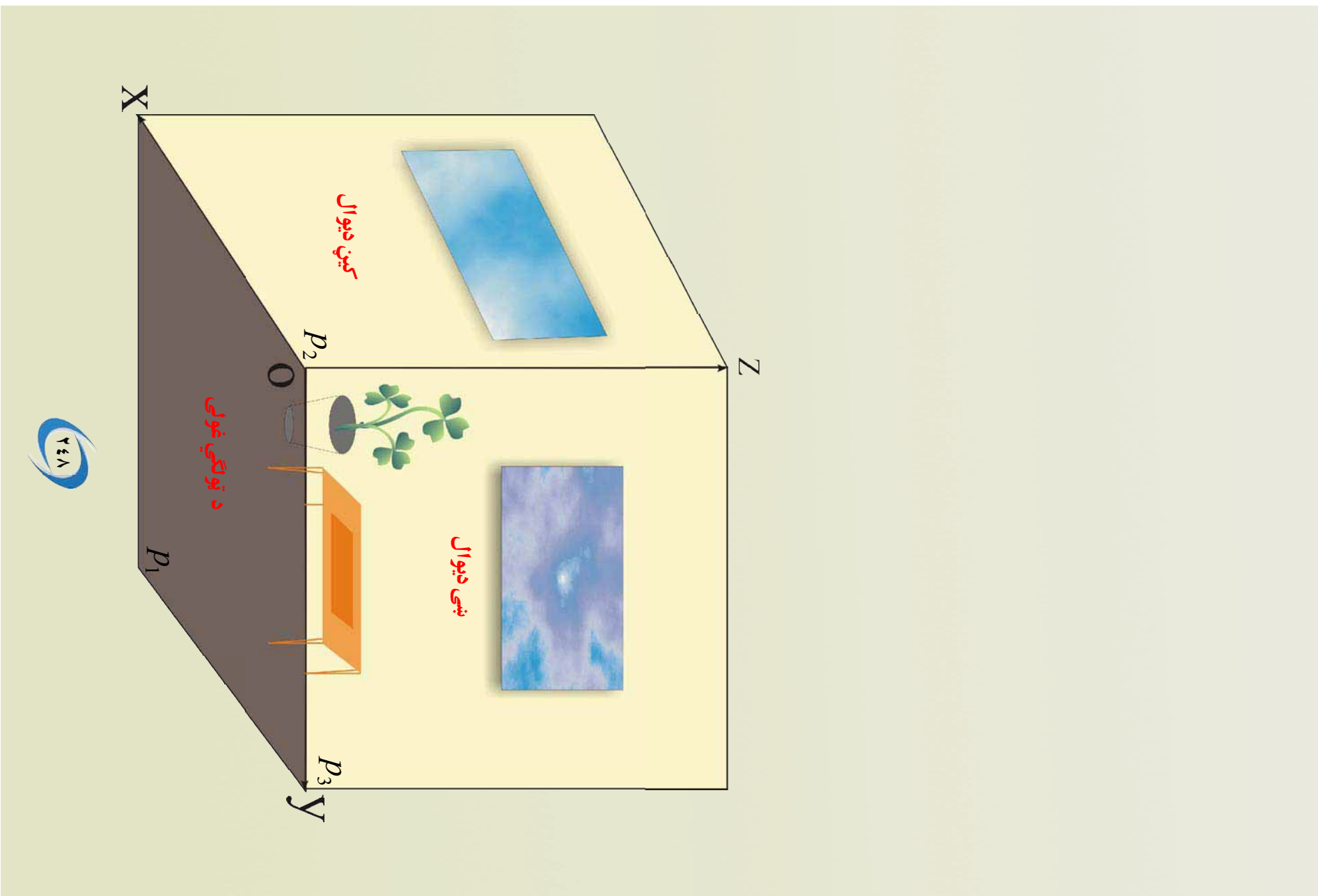
b) 
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$$





اووم خپرکی  
وکتورونه







## د وضعيه کمپونونو په قائم سيستم کې وکتورونه

له يوه ټاکلي ټکي څخه د هغې شاوخوا بيلابيلو بړنو شیانو ته لاره په نښه کړی.

### تعريف

جهت لرونکي قطعه خط ته وکتور وايي، يا په بل عبارت هغه کميت چې هم مقدار لري او هم جهت لري؛ لکه قوه، فاصله، تعجيل او داسې نور. هر غشي د يو وکتور ممثل دی.

هغه وکتور چې مبدا يې د وضعيه کمپونونو د قائم سيستم په مبدا کې پروت وي، د شعاع وکتور (Position Vector) په نامه يادېږي.

### فعاليت

- د وضعيه کميانو په قائم سيستم کې شعاع وکتور داسې رسم کړئ چې د پای ټکي يې د  $B(5,5)$  مختصات ولري.
  - د پورتنی راکړل شوي وکتور درې ممثل وکتورونه په راکړل شوو قائمو مختصاتو کې داسې رسم کړئ چې وکتور او شعاع وکتورونه يې توپير سره ولري.
  - يو بل وکتور رسم کړئ چې له پورتنی وکتور سره مساوي او مخالف لوري او شعاع وکتور وي. له پورتنی فعالیت څخه لاندي پايله ترلاسه کړي.
- پايله:** په يوه مستوي او په فضا کې هر ممثل وکتور د خپل شعاع وکتور په اندازه وي، نولرو چې:
1.  $\vec{a}$  او  $\vec{b}$  دوه وکتورونه هغه وخت مساوي بلل کېږي، چې اوږدوالی يې مساوي،  $(|\vec{a}| = |\vec{b}|)$  موازي او د يو جهت لرونکی وي.
  2. که چېرې يو وکتور  $\vec{AB} = 0$  وي، په دې صورت کې د  $\vec{AB}$  وکتور صفري وکتور (Zero Vector) بلل کېږي.

3. دوه وکتورونه هغه وخت مخالف یا منفي بلل کېږي چې اوږدوالی یې مساوي او جهت یې مخالف وي، د بېلګې په توګه:

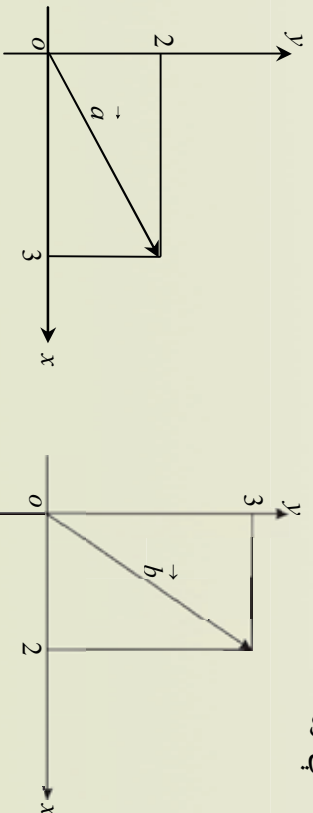
که  $\vec{OA} = a$  وي، نو  $\vec{AO} = -a$  دی، په داسې حال کې چې:  $|\vec{OA}| = |\vec{AO}|$  وي.

**تعریف:** د وضعیه کمیتونو په قائم سیستم کې یو وکتور په ستوني شکل داسې ښودل کېږي  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$  په

داسې حال کې چې  $a_x$  د  $x$  پر محور وضعیه کمیت او  $a_y$  د  $y$  پر محور د  $\vec{a}$  وکتور فاصله او ترتیب ښیي.

**لومړی مثال:** د وضعیه کمیتونو په قائم سیستم کې د  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  او  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  وکتورونه وښایاست؟

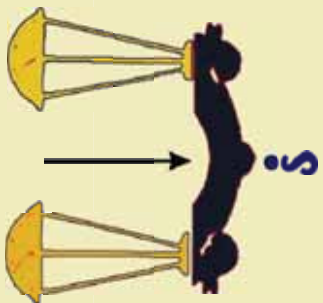
**حل:** د پورتنۍ تعریف له مخې لرو:



**یادونه:** د یو وکتور د ښودلو لپاره یوه مستوي په دې خاطر کارول کېږي، چې د قائم مختصاتو په سیستم کې د یو ټکي د ښودلو لپاره د مختصاتو په سیستم کې یوازې یو ځای شته، په داسې حال کې چې په مستوي کې د یو وکتور د ښودلو لپاره چې هماغه وکتور په مستوي کې ځای نیولی شي، بې نهایت ځایونه شته.

### پوښتنې

- د هغو وکتورونو لپاره چې په لومړي مثال کې ورکړل شوي دي، مطلوب دي:
  - د هر یوه وکتور درې ممثل وکتورونه رسم کړئ.
  - دواړه وکتورونه د شعاع وکتور په موقعیت کې رسم کړئ.
  - د هغوی مخالف وکتورونه کوم وکتورونه دي؟

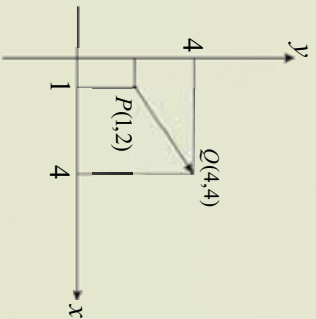


## د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی

د تلې دوه یو شان او هم وزنه پلې په پام کې نیسو، چې د یو شاهین په دواړو خواوو کې تړل شوي دي. د تلې د شاهین په لاس کې نیولو لپاره کوم ټکی وټاکو چې په نیولو یې د تلې پلې تعادل خوره کړي؟

### فعالیت

د وضعیه کمیاتو په قایم سیستم کې د لاندې شکل په څیر  $P(1,2)$  او  $Q(4,4)$  ټکی په پام کې ونیستی:

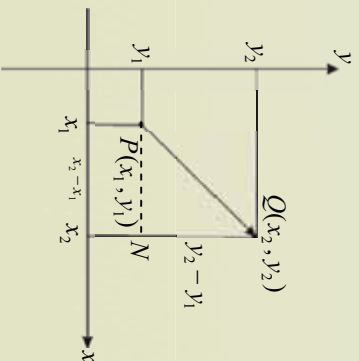


- د  $\vec{PQ}$  د وکتور اوږدوالی څومره دی؟
- آیا د  $\vec{PQ}$  د وکتور د اوږدوالی یاد  $P$  او  $Q$  دوو ټکو ترمنځ د واټن لپاره فارمول ورکولای شې؟

- د  $\vec{PQ}$  د منځني ټکي وضعیه کمیټونه څومره دي؟
- آیا کولای شې د دوو ټکو د واټن او د هغوی د منځني ټکي لپاره د فورمول په واسطه یو عمومي حالت څرگند کړئ؟
- د پورتنی فعالیت له پای څخه لاندې پایلې ته رسېږو:

**پایله:** د  $\vec{PQ} = a$  وکتور د هرو دوو اختیاري ټکو لپاره چې  $P(x_1, y_1)$  میځه او  $Q(x_2, y_2)$  انجام دی

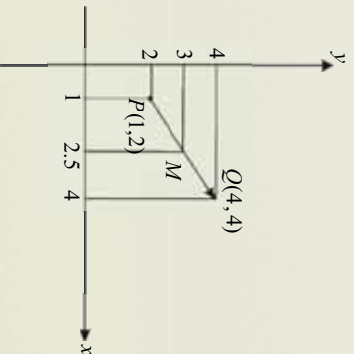
په دې صورت کې وکتور په  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$  سره نښو، د  $\vec{PQ}$  قایم الزامیه مثلث په پام کې



نیولو سره د  $|\vec{a}|$  د وکتور اوږدوالی عبارت دی، له:  $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

- د  $\vec{PQ}$  منځنی ټکی عبارت دی، له:

$$M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix}$$



$$M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+4}{2} \\ \frac{2+4}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

لومړی مثال: د  $P(1, 2)$  او  $Q(4, 4)$  د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ؟

حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

نو د منځني ټکي وضعيه کمپټ له  $M = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 3 \end{pmatrix}$  څخه عبارت دی او د  $P$  او  $Q$  د دوو ټکو د واټن د پیدا کولو لپاره د فیثاغورث د قضیې په پام کې نیولو سره لرو:

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

دویم مثال: د  $A(2, 4)$  او  $B(5, 5)$  د ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی پیدا کړئ.

حل: د منځني ټکي د فورمول په کارولو سره لرو:

$$M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+5}{2} \\ \frac{4+5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5 - 2)^2 + (5 - 4)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$



د لاندې درک شویو ټکو ترمنځ واټن او منځني ټکي پیدا کړئ:

- i)  $B(2, 7)$  ،  $A(3, 4)$
- ii)  $N(5, 1)$  ،  $M(1, 5)$
- iii)  $Q(8, 8)$  ،  $P(1, 8)$



## وکتورونه په سطح او فضا کې

د تلسکوپ په واسطه د ستورو د تگلوري لیدل په فضا کې ځانگړې وکتورونه ښيي.

د ښوي سطحې پرمخ د وکتورونو لپاره ښه بېلگه

راوړلای شې؟

### فعالیت

د لاندې شکل له مخې د وضعیه کمیانو د قائم سیستم او د  $\{x, y\} \in IR^2$  ست په پام کې نیولو سره لاندې فعالیت سرته ورسوی.

- د وضعیه کمیانو په سیستم کې د  $P$  یو ټکی چې وضعیه کمیونه یې  $(x, y)$  دی، په مستوي کې وټاکئ.
- د  $\vec{u}$  یو شعاع وکتور چې وضعیه کمیونه یې  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  دي، د وضعیه کمیونو په سیستم کې وښیئ.
- په مستوي کې د  $P$  یو ټکی چې وضعیه کمیونه یې  $(x, y)$  دي، په مستوي کې له  $\vec{u}$  یو وکتور سره څه توپیر لري چې وضعیه کمیونه یې  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  وي؟

- د  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  او  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  دوه اختیاري وکتورونه او  $a \in IR$  یو سکالر لپاره په هندسي توگه د وضعیه کمیونو په قائم سیستم کې په جلا جلا ډول وښیئ، چې:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} \quad \text{i) (د جمعي قاعده)}$$

$$a \cdot \vec{u} = a \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} \quad \text{ii) (دسکالري ضرب قاعده)}$$

**تعریف:** د هغو ټولو مرتبو جوړو ست چې د پورته قاعدې په څېر د جمعي او سکالري ضرب قاعدې پرې تطبیق وي، د  $IR^2$  (مستوي) د وکتورونو فضا او یا په مستوي کې د وکتور په نامه یادېږي.

له پورتني فعالیت او تعریف څخه لاندې پایله لاسته راځي:

**پایله:** د دوو ځانگړو وکتورونو  $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  او  $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  په پام کې نیولو سره چې اوږدوالی یې یو واحد او

$|\vec{i}| = 1$  دي. هر اختیاري وکتور لپاره لرو:

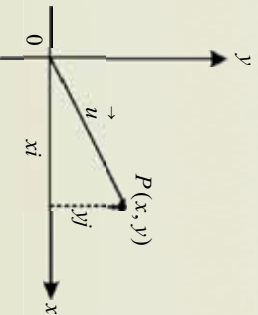
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = xi + yj$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xi + yj$$

$\vec{i}$  او  $\vec{j}$  واحد وکتورونه دی چې د  $x$  او  $y$  محورونو په امتداد پراته دي.

**واحد وکتور (unit vector):** هغه وکتور دی

چې طول یې یو واحد او د مختصې د جهت د تزیاد لپاره ترې کار اخلي.



**لومړی مثال:** که  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$  او  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  وي، د لاندې وکتورونو قیمت پیدا کړئ.

(i)  $\vec{u} + \vec{v} = ?$       (ii)  $4\vec{u} + 2\vec{v} = ?$       (iii)  $\vec{u} - \vec{v} = ?$

(iv)  $\vec{u} - \vec{u} = ?$       (v)  $|\vec{u}| = ?$       (v)  $\vec{u} - \vec{u} = ?$

**حل:**

i)  $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ -3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$

ii)  $4\vec{u} + 2\vec{v} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4 \\ -12+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} = 8\vec{i} - 2\vec{j}$

iii)  $\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ -3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -8 \end{pmatrix} = -\vec{i} - 8\vec{j}$

iv)  $\vec{u} - \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

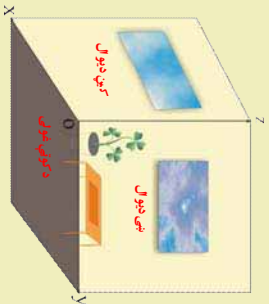
v)  $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

**پوښتنه**

1. که  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  او  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  وي،  $\vec{v} + 2\vec{u}$ ،  $\vec{u} - 2\vec{v}$  او  $2\vec{u} + 4\vec{v}$  پیدا کړئ.







## په درې بعدي فضا کې د ټکي مختصات

که د ټولګي په فضا کې یو ټکی وټاکئ آیا داسې یوه د حل لاره شته چې د ټکي واټن نسبت د ټولګي غولۍ او مجاور دیوال ته وټاکو؟

### تعریف

د درې بعدي  $IR^3$  فضا د ټول هغو مرتبو درې گونو  $(x, y, z)$  څخه عبارت دی چې په لاندې ډول تعریفېږي:

$$IR^3 = IR \times IR \times IR = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in IR\}$$

هغه درې مستو ښکاري  $P_1, P_2, P_3$  چې دوه په دوه یو په بل عمود دي، د درې بعدي فضا د مختصاتو مستو ښکاري بل کېږي.

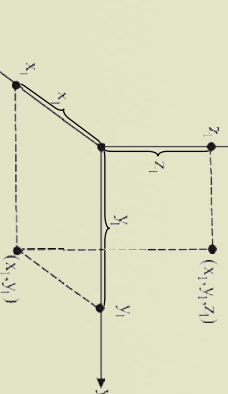
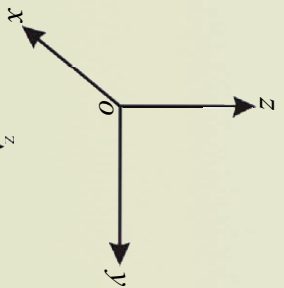
د دغو مستو ښکاريو د دوه په دوه گډه فصل درې قایمي زاويې جوړوي چې هغه د درې بعدي فضا قایم مختصات بولي. د درې بعدي فضا قایم مختصات داسې نوموي چې که یو تن ودرېږي، هغه محور چې د لیدونکي د نښې په لور دی، د  $Z$  محور او هغه محور چې د لیدونکي د لید په لور دی د  $Y$  محور او هغه محور چې د لیدونکو د نښې لاس په لور پورته دی، د  $X$  محور دی او د دغو درې واړو محورونو د تقاطع ټکی له  $O$  ټکي څخه عبارت دی چې د قایمو مختصاتو مبدا ښيي.

په درې بعدي فضا کې د یوه ټکي مختصات له هغه واټن څخه عبارت دی چې له درې واړو مستو ښکاريو څخه یې لرې.

د ټکي واټن د مختصاتو له مستو ښکاريو څخه په  $|x|$ ،  $|y|$  او  $|z|$  سره ښيي.

### په درې بعدي فضا کې د یوه ټکي د ځای ټاکل:

د درې بعدي فضا په قایمو مختصاتو کې د  $A(x_1, y_1, z_1)$  ټکي د ټاکلو لپاره د هرې مختصې په اړوند محور باندې د مختصې د علامې په پام کې نیولو سره فاصلې جلا کوو، لومړی د  $x$  له محور څخه موازي خط د  $y$  له محور سره رسموو، د تقاطع ټکی یې چې  $(x, y)$  دی، پینا او وروسته له یاد شوي ټکي څخه یو بل خط موازي د  $z$  له محور سره رسموو، په پایله کې د تقاطع ټکی په لاس راځي چې په دې ترتیب د ټکي ټاکل په درې بعدي فضا کې بشپړېږي.



**يادونه:** په درې بعدي فضا کې د  $x, y, z$  او  $A(2, 4, 3)$  او  $B(-2, -3, 3)$  ټکي د درې بعدي فضا قائم سيستم کې وښايي است. عبارت دی.

### فعاليت

- د  $A(2, 4, 3)$  او  $B(-2, -3, 3)$  ټکي د درې بعدي فضا قائم سيستم کې وښايي است. په فضا کې د  $(z, y, x)$  يو ټکی چې د  $\vec{OP}$  وکتور له  $u$  سره مساوي دی، د  $\mathbb{R}^2$  د فضا په شان په درې بعدي په فضا يا  $\mathbb{R}^3$  کې هم د جمعي او سکالري ضرب قاعدې د  $u$  او  $v$  دوو وکتورونو لپاره او د  $a$  سکالر لپاره صورت نيسي:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix} \quad \text{(د جمعي قاعده)}$$

$$a \cdot \vec{u} = a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \\ az \end{pmatrix} \quad \text{(د سکالري ضرب قاعده)}$$

لومړی مثال: که  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  او  $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$  وي،  $\vec{v} + \vec{w}$ ،  $\vec{v} - \vec{w}$  او  $2\vec{w}$  پيدا کړئ.

حل: لرو چې:

$$i) \quad \vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1+4 \\ 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$ii) \quad \vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 \\ 1-4 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$iii) \quad 2\vec{w} = 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$iv) \quad \|\vec{v} - 2\vec{w}\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2+2 \\ 1-8 \\ 3-0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4^2 + (-7)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 49 + 9} = \sqrt{74}$$

### يادونه:

A- کيدای شمی سطحی ته ورته درې واحد وکتورونه  $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ،  $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ،  $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  چې:

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$  دي، په درې بعدي فضا کې په پام کې نیول شوی، د  $x, y, z$  محورونو په امتداد د واحد

د وکتورونو په نامه یاد کړو. د جمعې د قاعدې په پام کې نیولو سره د  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  هر اختیاري وکتور د واحد

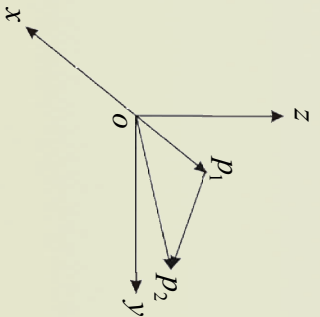
وکتور په پام کې نیولو سره په لاندې توگه بنسودلی شو:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

B- په فضا کې د دوو ټکو ترمنځ واټن: که چېرې  $\vec{OP}_1$  او  $\vec{OP}_2$  د  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  او

$P_2(x_2, y_2, z_2)$  د ټکو دوه شعاع وکتورونه وي، په دې توگه لرو:

$$\begin{aligned} \vec{OP}_1 + \vec{PP}_2 &= \vec{OP}_2 \Rightarrow \vec{PP}_2 = \vec{OP}_2 - \vec{OP}_1 \\ &\Rightarrow \vec{PP}_2 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



نو د  $P_1$  او  $P_2$  د ټکو ترمنځ د واټن د پیدا کولو لپاره لرو:

$$|\vec{PP}_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

پورتني فورمول د  $P_1$  او  $P_2$  ټکو ترمنځ واټن نښي.

C- که په درې بعدي فضا کې د یو ټکي واټن له مبدأ څخه مطلوب وي یعنې  $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$

او  $(x_2, y_2, z_2) = (x, y, z)$  وي؛ نو د ټکي واټن له مبدأ څخه د لاندې فورمول په واسطه پیدا کولای

شو:

$$|\vec{PP}_2| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

**دويم مثال:** که  $\vec{a} = (-5, 4, 5)$  وی؛ نو د نوموړي شعاع وکتور طول خو دی؟  
**حل:** د شعاع وکتور موقعیت ته په کتنې څرنگه چې د شعاع وکتور مبدأ وضعیه کمیانو په مبدأ کې پرته ده د C جز له فورمول څخه گټه اخلو:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{25 + 16 + 25} = \sqrt{66}$$

**درېم مثال:** که  $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ ،  $\vec{v} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$  او  $\vec{w} = 6\vec{i} - 9\vec{j} - 3\vec{k}$  راکړل شوی وي.

i)  $\vec{u} + 2\vec{v} = ?$

ii)  $|\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}| = ?$

ومومئ

**حل:** لرو چې:

i)  $\vec{u} + 2\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} + 2(4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k})$

$$= 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} + 8\vec{i} + 12\vec{j} + 4\vec{k} = (10\vec{i} + 15\vec{j} + 5\vec{k})$$

ii)  $|\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}| = |(2 - 4 - 6)\vec{i} + (3 - 6 - 9)\vec{j} + (1 - 2 + 3)\vec{k}| = |-8\vec{i} - 12\vec{j} + 2\vec{k}|$

$$= \sqrt{(-8)^2 + (-12)^2 + 2^2} = \sqrt{64 + 144 + 4} = \sqrt{212}$$

### پوښتنې



1. د  $\vec{v}$  او  $\vec{u}$  وکتورونو جهت ته واحد وکتور پیدا کړئ.

2. په درېم مثال کې چې  $\vec{v}$  او  $\vec{w}$  وکتورونه راکړل شوي دي په پام کې ونیسئ او لاندې پوښتنو ته ځوابونه ومومئ.

a)  $2\vec{u} - 6\vec{v} + 4\vec{w} = ?$

b)  $|\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} - 2\vec{w}| = ?$

3.  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$ ،  $\vec{v}$  او  $\vec{w}$  او  $\vec{u}$  وکتورونو ترمنځ واټن پیدا کړئ.

4. هغه وکتور واحدونه پیدا کړئ چې د  $\vec{u}$ ،  $\vec{v}$  او  $\vec{w}$  وکتورونو په جهت پراته دي؟

## د یوه وکتور د جهت زاويې او کوساینونه



**تعريف:** که د  $\vec{r}$  شعاع وکتور د فایمو مختصانو له محورونو سره په ترتیب د  $\alpha, \beta,$  او  $\gamma$  زاويې جوړې کړي په دې صورت کې شکل ته په پام لیکلای شو:

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \vec{r} \\ \vec{OA} &= \vec{r}_x \\ \vec{OB} &= \vec{r}_y \\ \vec{OC} &= \vec{r}_z\end{aligned}$$

کولای شو د  $\vec{r}$  د وکتور د جهت کوساینونه په لاندې ډول ولیکو:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \alpha$$

$$\cos \beta = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \cos \beta$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r \cos \gamma$$

د پورتنيو اړیکو چپ لوری مربع کولو او وروسته یې سره جمع کوو:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{r^2}{r^2} = 1 \quad \text{پوهېږو چې} \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \quad \text{نو، نو:}$$

### فعالیت

که چېرې په یوه درې بعدي فضا کې  $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  وکتور چې د صفر خلاف دی، ورکړ شوی وي، داسې چې د پورته شکل په شان  $\alpha, \beta,$  او  $\gamma$  په ترتیب سره د  $\vec{v}$  وکتور زاويې او  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  واحد وکتورونه وي، په دې ډول لاندې فعالیت اجرا کړئ.

• آیا ویرلائی شیء چئی د  $\alpha$ ,  $\beta$  او  $\gamma$  زاوئی په کومه اندازه تحول کوی؟

• آیا له پورتنیو زاویو څخه یوه بې منفي کیملی شیء؟

• که چیرې له زاویو څخه یوه بې صفر شیء، د وکتور د موقعیت په هکله څه ویرلائی شیء؟

• د  $\vec{v}$  د وکتور جهت زاویو کوساین لپاره یوه گډه اړیکه پیدا کړئ؟

له پورتنی فعالیت فعالیت څخه لاندې پایلې ته رسیږو:

**پایله:** که په فضا کې د  $\vec{v}$  یو وکتور، چې صفر نه وي، یعنې  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ، راکړل شوی وي، نو د جهت د

زاویو د کوساینونو ترمنځ لاندې اړیکې شته:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$|\vec{v}| = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{xi + yj + zk}$$

د پورتنی پایلې د ثبوت لپاره پوهیږو، چې:

$$\begin{pmatrix} \frac{v_x}{|v|} \\ \frac{v_y}{|v|} \\ \frac{v_z}{|v|} \end{pmatrix} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \vec{OP}$$

له بلې خوا د جهت د واحد وکتور یاد  $\vec{v} = OP$  مسیر عبارت دی، له:



1. که  $u = i + 2j - k$ ،  $v = 3i - 2j + 2k$  او  $w = 5i - j + 3k$  وي، پیدا کړئ؟

a)  $u + 2v + w = ?$       b)  $v - 3w = ?$       c)  $|3v + w| = ?$

2. د  $\alpha$  اندازه داسې پیدا کړئ چې د  $z + 2k + i + (\alpha + 1)j + \alpha i$  وکتور اوږدوالی مساوي په 3 وي.

## د دوو وکتورونو د سکالري ضرب حاصل

د دوو وکتورونو د سکالر ضرب حاصل د انجینری او فزیک په زده کړه کې په کاربري او د هغو ترمنځ زاويې په پام کې نیولو سره له یو سکالري کمیت سره مساوي دی، که چېرې:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

په داسې حال کې چې  $\theta$  د  $u$  او  $v$  ترمنځ زاویه جوړه کړي او  $(0 \leq \theta \leq \pi)$  سره دی.

### تعریف

$u$  او  $v$  دوه وکتورونه چې صفر نه وي په مستوي یا فضا کې په پام کې نیسو.

$u$  او  $v$  سکالري ضرب حاصل په  $u \cdot v$  سره نښو، چې حاصل یې عبارت دی، له  $\cos \theta$  سره  $|u| |v|$  سره داسې حال کې چې  $\theta$  د  $u$  او  $v$  ترمنځ زاویه جوړه کړي او  $(0 \leq \theta \leq \pi)$  سره دی.

### فعالیت

د وکتورونو د سکالري ضرب د حاصل په پام کې نیولو سره وښایاست، چې:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \quad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \quad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \\ (ii) \quad & \vec{i} \cdot \vec{j} = 0, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \\ (iii) \quad & u \cdot v = v \cdot u \end{aligned}$$

(iv) که  $u$  او  $v$  د صفر خلاف او  $u \cdot v = 0$  وي، نو وکتورونه یو پر بل عمود دي.

• د دوه  $\vec{j} = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}$  او  $\vec{b} = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}$  وکتورونو لپاره د  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  د ضرب حاصل د  $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$  له سکالري قیمت سره مساوي دی.

• په فضا کې د  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  د ضرب حاصل مطلوب یا غوښتل شوی په ډول چې  $\vec{b} = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}$  او  $\vec{a} = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}$  وي.

د وکتورونو د سکالري ضرب حاصل لپاره له پورتنی فعالیت څخه لاندې پايله لاسته راځي.

**پايله:** که  $u$ ،  $v$  او  $w$  درې اختیاري وکتورونه او  $C$  یو حقيقي عدد وي، نو لرو:



$$(i) \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

$$(ii) \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (\text{د ضرب تبادلي خاصيت يا خانگرتيا).}$$

$$(iii) \vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w} \quad (\text{د ضرب توزيعي خاصيت په جمع}).$$

$$(iv) \vec{c}(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{v} \quad (\text{د ضرب توزيعي خاصيت}).$$

**لومړی مثال:** که  $\vec{u} = a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}$  او  $\vec{v} = a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}$  دوه وکتورونه د صفر خلاف

وي، د سکالري ضرب حاصل يې پيدا کړئ.

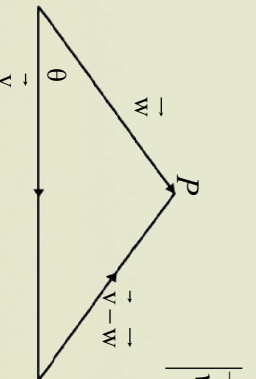
**حل:** د تعريف له مخې لرو چې:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k})(a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}) \\ &= a_1 \cdot a_2 (\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_1 b_2 (\vec{i} \cdot \vec{j}) + a_1 c_2 (\vec{i} \cdot \vec{k}) + b_1 a_2 (\vec{j} \cdot \vec{i}) + b_1 b_2 (\vec{j} \cdot \vec{j}) + b_1 c_2 (\vec{j} \cdot \vec{k}) \\ &\quad + c_1 \cdot a_2 (\vec{k} \cdot \vec{i}) + c_1 b_2 (\vec{k} \cdot \vec{j}) + c_1 c_2 (\vec{k} \cdot \vec{k}) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 \end{aligned}$$

**دویم مثال:** که  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$  او  $\vec{w} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$  د یوې مستوي دوه وکتورونه وي، وبنایاست چې:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

**حل:** د تعريف له مخې لرو:  $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \theta$



**خزانگه چې**  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$  ،  $\vec{w} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$  په پايله کې  $\vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}$  دي، نو د پورتني اړيکي څخه لرو:

$$\begin{aligned} |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 + |\vec{y}_1 - \vec{y}_2|^2 &= |x_1^2 + y_1^2| + |x_2^2 + y_2^2| - 2 \left| \vec{v} \cdot \vec{w} \right| \cos \theta \\ \Rightarrow -2x_1 x_2 - 2y_1 y_2 &= -2|\vec{v}| |\vec{w}| \cos \theta \quad / \div -2 \\ \Rightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 &= |\vec{v}| |\vec{w}| \cos \theta = \vec{v} \cdot \vec{w} \end{aligned}$$



**دریم مثال:** که چیري د  $\vec{u} = i + 2j - k$  او  $\vec{v} = i + 2j - k$  وکتورونه درکړ شوي وي، د سکالري ضرب حاصل يې پیدا کړئ.

**حل:** د فورمول په پام کې نیولو سره لرو:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (i + 2j - k) \cdot (i + 2j - k) = i^2 + 4j^2 + k^2 = 1 + 4 + 1 = 6$$

**څلورم مثال:** وینایاست چې د  $\vec{u} = 2i - 4j + 5k$  او  $\vec{v} = 4i - 3j - 4k$  وکتورونه یو پر بل عمود دی.

**حل:** په دې هکله لرو:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2i - 4j + 5k) \cdot (4i - 3j - 4k) = (2)(4) + (-4)(-3) + (5)(-4)$$

$$= 8 + 12 - 20 = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

څرنگه چې د وکتورونو د سکالري ضرب حاصل مساوي په صفر شو، نو وکتورونه یو پر بل عمود دي.

**پنځم مثال:** د  $\alpha$  قیمت داسې پیدا کړئ چې د  $\vec{u} = 2i + \alpha j + 5k$  او  $\vec{v} = 3i + j + \alpha k$  وکتورونه یو پر بل عمود وي.

**حل:** د  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  وکتورونو له عمود والي څخه دې پایلې ته رسېږو چې:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ، نو لرو:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2i + \alpha j + 5k) \cdot (3i + j + \alpha k) = 0 \Rightarrow 6 + \alpha + 5\alpha = 0, \alpha = -1$$

**شپږم مثال:** وینایاست چې د  $\vec{u} = 2i - j + k$ ،  $\vec{v} = i - 3j - 5k$  او  $\vec{w} = 3i - 4j - 4k$  وکتورونه د یو قائم الزاویه مثلث ضلعي دي.

**حل:** که  $\vec{u} = 2i - j + k$  او  $\vec{v} = i - 3j - 5k$  د مطلوب مثلث دوه ضلعي په پام کې ونیسو، نو

دریمه ضلع یې د مثلث د وکتورونو د جمعې حاصل په پام کې نیولو سره چې د مثلث دریمه ضلع ټاکي

$$\text{عبارت دی له: } \vec{AB} + \vec{BC} = (2i - j + k) + (i - 3j - 5k)$$

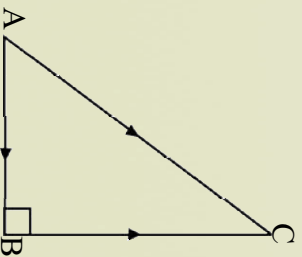
(چې د مثلث له درېمې ضلعي څخه عبارت دی)  $\vec{u} = 3i - 4j - 4k$  اوس بشپړو چې نوموړی مثلث قائم

الزویه دی، د دې لپاره د وکتوري ضرب حاصل  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$  وي.

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = (2i - j + k) \cdot (3i - 4j - 5k)$$

$$= (2)(3) + (-1)(-4) + (1)(-5) = 6 + 4 - 5 = 5$$

$$\Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{BC}$$



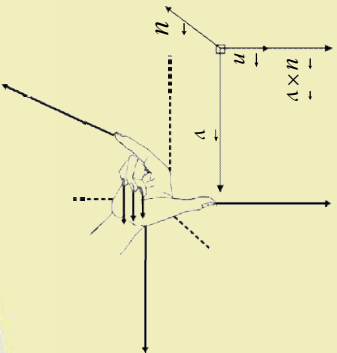


1. وڻياڻسٽ چڻي د  $\vec{r} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$  وڪٽور مرسمونڊه د  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  واحد ڪٽورونو په امتداد په ترتيب سره له  $a, b, c$  سره مساوي دي.

2. وڻياڻسٽ چڻي هر  $\triangle ABC$  کي لائڊي اريڪي وجود لري:

$$i) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \quad ii) a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$$

3. ثبوت ڪريئ چڻي:  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$



## د وکتوري ضرب حاصل

### The cross Product

د راکړل شوي شکل له مخې د کوم لاس (بڼې یا کښې) په واسطه د  $\vec{u} \times \vec{v}$  او  $\vec{v} \times \vec{u}$  وکتورونه داسې وپېژنو چې  $\vec{u}$  د ورغوي په جهت،  $\vec{v}$  د څنگل په جهت او  $\vec{u} \times \vec{v}$  د بڼې لاس د غټې گوټې په لور واقع شي؟

### تعريف

د  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، په پام کې نیسو. د  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  دوو وکتورونو د وکتوري ضرب له حاصل په  $\vec{u} \times \vec{v}$  چې ( $u$  کرس  $v$  لوستل کېږي) عبارت دی، له: یعنې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب له هغه دریم وکتور څخه عبارت دی چې د دوی د مبدأ په ټکي عمود وي.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \sin \theta) \vec{n}$$

په داسې حال کې چې  $\theta$  د  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  زاويه  $0 \leq \theta \leq \pi$  وکتورنو تر منځ زاويه او  $\vec{n}$  او  $\vec{v}$  د وکتورونو په واسطه جوړه شوې مستوي له عمود واحد وکتور څخه عبارت دی، د بڼې لاس قاصدي په واسطه (Right hand rule) ښودل کېږي.

### د دوو وکتورونو وکتوري ضرب

مخکې له دې چې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب توضیح کړو، لازمه ده چې د وکتورونو خطي ترکیب، وکتوري فضا، د وکتورونو خطي خپلواکي (استقلال) په لنډه ډول تر څېړنې لاندې وپېژنو.

1. د وکتورونو خطي ترکیب: د یوه سټ د وکتورونو د سکالري مضربونو مجموعه د همغه سټ د وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

که  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  د یوه سټ وکتورونه او  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  سکالرونه وي، په دې صورت کې د  $\vec{a}$  وکتور په داسې حال کې چې  $\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$  وي،  $\vec{a}$  وکتور د  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

**لومړی مثال:** که  $\vec{a}_1 = 2i + j - 3k$  او  $\vec{a}_2 = i + 2j + 2k$  وکتورونه راکړل شوي وي، د هغوی خطي ترکیب په لاس راوړئ، په داسې حال کې چې  $\alpha_1 = 5$  او  $\alpha_2 = 2$  وي.

حل:

$$\begin{aligned}\vec{a} = 5\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 &= 5(2i + j - 3k) + 2(i + 2j + 2k) \\ &= 10i + 5j - 15k + 2i + 4j + 4k \\ &= 12i + 9j - 11k\end{aligned}$$

د  $\vec{a}$  وکتور د  $\vec{a}_1$  او  $\vec{a}_2$  وکتورونو د خطي ترکیب په نامه یادېږي.

**دویم مثال:** که  $\vec{a}_1 = (2, 3)$  او  $\vec{a}_2 = (5, 1)$  وکتورونه راکړل شوی وي، وینایاست چې د  $\vec{a} = (6, -5)$  وکتور د  $\vec{a}_1$  او  $\vec{a}_2$  وکتورونو خطي ترکیب دی.

حل: خوځڼګه چې  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  سکالرونه دي، نو:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (6, -5) = \alpha_1(2, 3) + \alpha_2(5, 1) \\ &= (6, -5) = (2\alpha_1, 3\alpha_1) + (5\alpha_2, \alpha_2) \\ &= (6, -5) = (2\alpha_1 + 5\alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2) \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = -5 \end{cases}\end{aligned}$$

له پورتني سیستم څخه د  $\alpha_1$  او  $\alpha_2$  قیمتونه په لاس راوړو:

$$\begin{aligned}3 \begin{cases} 2\alpha_1 + 5\alpha_2 = 6 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = -5 \end{cases} \\ 6\alpha_1 + 15\alpha_2 = 18 \\ \underline{-6\alpha_1 + 2\alpha_2 = +10} \\ 13\alpha_2 = 28 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{28}{13} \\ 2\alpha_1 + 5\frac{28}{13} = 6 \\ 2\alpha_1 + \frac{140}{13} = 6 \Rightarrow 2\alpha_1 = 6 - \frac{140}{13} = \frac{78 - 140}{13} \\ 2\alpha_1 = \frac{-62}{13} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{62}{26} = -\frac{31}{13} \\ \vec{a} = (6, -5) = \alpha_1(2, 3) + \alpha_2(5, 1) \\ \vec{a} = (6, -5) = -\frac{31}{13}(2, 3) + \frac{28}{13}(5, 1)\end{aligned}$$

یعني که  $\alpha_1$  او  $\alpha_2$  قیمتونه په  $\vec{a}_1$  او  $\vec{a}_2$  وکتورونو کې ضرب شي، په پایله کې د  $\vec{a}$  وکتور په لاس راځي، نو وموږ لیدل چې  $\vec{a}_1$  او  $\vec{a}_2$  وکتورونه د  $\vec{a}$  د وکتور خطي ترکیب دی.



د طبعي واحد وکتورونو د خطي ترکیب په واسطه د یوه وکتور ښودل:

که په دوه بعدي، درې بعدي او بالاخره په  $\Pi$  بعدي فضا کې شعاع وکتورونه را کرل شوی وي. کولای شو هغه د واحد وکتورونو د ضربونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول وښیو.

$$\begin{aligned} \text{a) که دوه بعدي فضا وي } (x_1, x_2) &= (x_1, 0) + (0, x_2) \\ &= x_1(1, 0) + x_2(0, 1) \end{aligned}$$

نو:

$$\text{که } e_1 = (1, 0) \text{ او } e_2 = (0, 1) \text{ وي.}$$

$$\text{نو: } (x_1, x_2) = e_1 x_1 + e_2 x_2$$

او په بل ډول یې هم لیکلای شو:

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) \\ &= x e_1 + y e_2 = x i + y j \end{aligned}$$

b) که فضا درې بعدي وي، نو په لاندې ډول کرښه کوو:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= (x_1, y, z) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3) \\ &= x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) \end{aligned}$$

خړنگه چې  $e_1 = (1, 0, 0)$ ،  $e_2 = (0, 1, 0)$  او  $e_3 = (0, 0, 1)$  په درې بعدي فضا کې واحد وکتورونه دي، نو:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \\ (x, y, z) &= x i + y j + z k \end{aligned}$$

c) په عمومي حالت کې که فضا  $n$  بعدي وي

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, \dots, x_n) &= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, x_n) \\ &= x_1(1, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + x_n(0, 0, \dots, 1) \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \end{aligned}$$

په داسې حال کې چې  $e_1, e_2, \dots, e_n$  طبعي واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو خطي خپلواکي: د  $a_1, a_2, \dots, a_n$  وکتورونه په یوه وکتوري ساحه کې خطي

خپلواکي (خطي استقلال) لري، که چېرې دغه خطي ترکیب  $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$  مساوي

په صفر وي او همدارنگه  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$  وي.

که  $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  وي وښایاست چې  $S$  خطي خپلواکي لري.

غير ڇپلواڪ خطي وڪٽورونه:  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  وڪٽورونه خطاً مربوط خطي غير ڇپلواڪ) يا خطي انحصار لري، ڪه ڇيري يوازني اويوازي  $0 = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$  وي او ڪم ترڪمه يوله ضرينبو د  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  څخه د صفر خلاف وي.

**يادونه:**

ددي لپاره ڇي د وڪٽورونو يو سٽ په لاس راوړو ڇي خطي ڇپلواڪي ولري، نو لاندې پړاوونه په پام ڪي نيسو:

**لومړي پړاو:** د وڪٽورونو تركيب په لاس راوړو او له صفر وڪٽور سره يي مساوي نيسو.

**دوئيم پړاو:** د وڪٽورونو د جمعيه سرتنه رسوو.

**دريم پړاو:** د معادلانو سيسټم تشڪيلوو.

**څلورم پړاو:** د معادلانو سيسټم د سڪالرونو لپاره حلوو، په هغه صورت ڪي ڇي ٽول سڪالرونه صفر شي نو وايو ڇي نوموړي وڪٽورونه خطي ڇپلواڪي لري او ڪه ڇيري له ٽولو سڪالرو څخه ڪم ترڪمه يو سڪالر د صفر خلاف وي، نو وڪٽورونه خطي ڇپلواڪي نه لري.

**مثال:** د  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  وڪٽورونو په لاندې ډول راکر شلوي دي

$$\vec{a}_1 = (1, 2, 0), \vec{a}_2 = (0, 3, 1), \vec{a}_3 = (2, 3, 1)$$

وښايست ڇي  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  او  $\vec{a}_3$  وڪٽورونه خطي ڇپلواڪي لري او ڪه نه؟

**حل:** د خطي ڇپلواڪو وڪٽورونو له اړيڪي څخه په گڼي اخيستي ڪولاي شو، وليکو:

**لومړي پړاو:**

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \alpha_1 (1, 2, 0) + \alpha_2 (0, 3, 1) + \alpha_3 (2, 3, 1) = 0$$

**دوئيم پړاو:**

$$= (\alpha_1, 2\alpha_1, 0) + (0, 3\alpha_2, \alpha_2) + (2\alpha_3, 3\alpha_3, \alpha_3) = (0, 0, 0)$$

$$= (\alpha_1 + 0 + 2\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3, 0 + \alpha_2 + \alpha_3) = (0, 0, 0)$$

**دريم پړاو:**

$$\begin{cases} \alpha_1 + 0 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 0 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

**څلورم پړاو:** اوس د معادلانو سيسټم د  $\alpha_1, \alpha_2$  او  $\alpha_3$  لپاره حلوو:

$$\alpha_2 = -\alpha_3$$

$$2\alpha_1 + 3(-\alpha_3) + 3\alpha_3 = 2\alpha_1 - 3\alpha_3 + 3\alpha_3 = 0 \Rightarrow 2\alpha_1 = 0, \alpha_1 = 0$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0$$

$$0 + 2\alpha_3 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$$

$$2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$$

$$0 + 3\alpha_2 + 0 = 0 \Rightarrow 3\alpha_2 = 0, \alpha_2 = 0$$



خزنگه چې  $0 = \alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1$  دي، نو نوموړی وکتورونه خطي خپلواکي لري.

## فعالیت

د تعريف له مخې د تبتي لاس د قاعدې په واسطه د  $\vec{v} \times \vec{u}$  او

$\vec{u} \times \vec{v}$  مسير او يا جهت په مخامخ شکل کې وښيي.

• وښايست چې  $0 = \vec{i} \times \vec{i}$  او  $0 = \vec{j} \times \vec{j}$  دی.

• د پورتنیو څېړنو له مخې د  $\vec{j} \times \vec{i}$  ،  $\vec{k} \times \vec{j}$  او  $\vec{i} \times \vec{k}$  وکتورونو د ضربونو حاصل په هکله څه وړلای شئ؟

• وښايست چې:  $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$  او  $0 = \vec{u} \times \vec{u}$  دی.

• په عمومي ډول وړلای شو چې د  $\vec{i}$  ،  $\vec{j}$  او  $\vec{k}$  وکتورونو د ضرب حاصل په دایروي ډول د لومړنی او دویم وکتور د ضرب له حاصل څخه دریم وکتور، لکه د ورکړل شوي دایري په څېر لاس ته راځي.



له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایلې لاس ته راځي:

**پایله:** د  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  دوو وکتورونو (چې صفر نه وي). د وکتوري ضرب له حاصل څخه او د تبتي لاس د قاعدې په کارولو سره لرو:

- i)  $\vec{u} \times \vec{u} = 0$
- ii)  $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- iii)  $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
- iv)  $\vec{u} \times (k\vec{v}) = (ku) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v})$  ,  $k \in \mathbb{R}$

د وکتوري ضرب د حاصل د تعريف له مخې د پورته پایلې ثبوت دې زده کوونکو ته پرېښودل شي.

**لومړی مثال:** که چېرې  $\vec{c}_1 \vec{j} + \vec{b}_1 \vec{i} + \vec{u} = \vec{c}_2 \vec{k} + \vec{j} + \vec{b}_2 \vec{i} + \vec{a}_2 \vec{v}$  وکتورونه صفر نه

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1 c_2 - c_1 b_2) \vec{i} - (a_1 c_2 - c_1 a_2) \vec{j} + (a_1 b_2 - b_1 a_2) \vec{k}$$

وي، نو وښايست چې:

حل : د تعريف په کارولو لرو، چې:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= (a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k}) \times (a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k}) \\ &= a_1 a_2 (\vec{i} \times \vec{i}) + a_1 b_2 (\vec{i} \times \vec{j}) + a_1 c_2 (\vec{i} \times \vec{k}) + b_1 a_2 (\vec{j} \times \vec{i}) + b_1 b_2 (\vec{j} \times \vec{j}) + b_1 c_2 (\vec{j} \times \vec{k}) \\ &\quad + c_1 a_2 (k \times i) + c_1 b_2 (k \times j) + c_1 c_2 (k \times k) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \end{array} \right\} , \left. \begin{array}{l} \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \end{array} \right\} , \left. \begin{array}{l} \vec{i} \times \vec{i} = 0 \\ \vec{j} \times \vec{j} = 0 \\ \vec{k} \times \vec{k} = 0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} &= a_1 b_2 \cdot k - a_1 c_2 \cdot j - b_1 a_2 \cdot k + b_1 c_2 \cdot i + c_1 a_2 j - c_1 b_2 \cdot i \\ &= (b_1 c_2 \cdot i + c_1 a_2 \cdot j + a_1 b_2 \cdot k) - (c_1 b_2 \cdot i + a_1 c_2 \cdot j + b_1 a_2 \cdot k) \\ &= (b_1 c_2 - c_1 b_2) \cdot i + (c_1 a_2 - a_1 c_2) \cdot j + (a_1 b_2 - b_1 a_2) \cdot k \\ &= (b_1 c_2 - c_1 b_2) \cdot i - (a_1 c_2 - c_1 a_2) \cdot j + (a_1 b_2 - b_1 a_2) \cdot k \\ \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = (b_1 c_2 - c_1 b_2) \cdot \vec{i} - (a_1 c_2 - c_1 a_2) \cdot \vec{j} + (a_1 b_2 - b_1 a_2) \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

**دويم مثال :** وښايست چې د  $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  او  $\vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  لپاره د  $\vec{a} \times \vec{b}$  حاصل له حل : د لومړي مثال په کارولو سره پوهېږو، چې:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \times (4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) = 8(\vec{i} \times \vec{i}) + 4(\vec{i} \times \vec{j}) - 2(\vec{i} \times \vec{k}) \\ &\quad + 4(\vec{j} \times \vec{i}) + 2(\vec{j} \times \vec{j}) - (\vec{j} \times \vec{k}) + 4(\vec{k} \times \vec{i}) + 2(\vec{k} \times \vec{j}) - (\vec{k} \times \vec{k}) \\ &= 0 + 4\vec{k} + 2\vec{j} - 4\vec{k} + 0 - \vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{i} - 0 = -3\vec{i} + 6\vec{j} \end{aligned}$$

**د مخلوط ضرب حاصل (درې گوني ضرب) Triple Product**

**تعريف :** د دوو يا څو وکتورونو د ضرب لپاره څو امكانه شته چې هر يو يې په لاندې ډول تر څېړني لاندې نيسو:

$\vec{i}$  د  $\vec{c} \cdot (a \cdot b)$  د ضرب حاصل.



د پورتنیو  $a$  او  $b$  وکتورونو د ضرب حاصل چې په سکالري ډول ضرب شوی، یو سکالر دی. وروسته نوموړی سکالر د  $c$  په وکتور کې ضرب شوی چې له پایله یې وکتور په لاس راځي دغه وکتور له  $c$  د وکتور سره هم جهت دی.

په پورتنی ضرب کې لاندې قانون شته:  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$

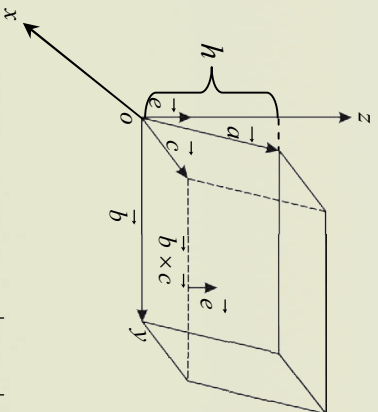
د  $a$  وکتور جهت د  $a$  وکتور جهت او د  $b$  وکتور جهت د  $b$  وکتور هم جهت دی.

$$i) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} a(b \times c)$$

$$ii) a(b \times c) = b(c \times a) = c(a \times b)$$

$$iii) a(a \times b) = 0$$

iv) د  $a(b \times c)$  اړیکه د هغه متوازي السطوح له حجم څخه عبارت دی چې  $a$ ،  $b$  او  $c$  د متوازي السطوح اضلاع دی، څرنگه چې په شکل کې لیدل کېږي  $|b \times c|$  د متوازي السطوح قاعده او  $h$  د متوازي السطوح جگوالی دی، نو له دې امله:



$$v = \left| b \times c \right| (a \cdot e) = b \left| a \times c \right| h$$

$$v = b(a \times c) = \left| b \times c \right| h$$

### تطبیقاتي مسئلې:

1- که چېرې  $a = 4i + 3j + k$  او  $b = 2i - j + 2k$  وکتورونه راځل شوي وي، هغه وکتور مطلوب او غوښتل کېږي چې پر دواړو وکتورونو عمود وي، آیا دغه وکتور یوازینی وکتور دی، که څنګه؟ دلیل مو څه دی؟  
 حل: د ښي لاس د قاعدې په کارولو پوهیږو چې د  $a \times b$  وکتور پر هغو وکتورونو عمود دی، نو لرو:

$$a \times b = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7\vec{i} - 6\vec{j} - 10\vec{k}$$



که د مساوات دواړه خواوې په  $\vec{c}$  وکتور کې وکتوري ضرب کړو، لاسته راځي، چې:

$$\begin{aligned} (\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{c} &= -a \times \vec{c} \\ (\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{c} \times \vec{c}) &= -a \times \vec{c} = \vec{c} \times a \\ \vec{c} \times \vec{c} = 0 &\Rightarrow \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times a \Rightarrow \left| \vec{b} \times \vec{c} \right| = \left| \vec{c} \times a \right| \end{aligned}$$

ډیورتینو مساواتو د تعریف له مخې داسې لیکلای شو:

$$\begin{aligned} |\vec{b}| |\vec{c}| \sin A &= |\vec{c}| |\vec{a}| \sin B \\ \Rightarrow |\vec{b}| |\vec{c}| \sin A &= |\vec{c}| |\vec{a}| \sin B \Rightarrow b \sin A = a \sin B \quad / \div AB \\ \frac{\sin B}{b} &= \frac{\sin A}{a} \quad \dots\dots\dots (ii) \quad \text{یا} \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \quad \dots\dots\dots (ii) \end{aligned}$$

د پورته په شان که چېرې د (i) د رابطې دواړه خواوې په  $\vec{b}$  وکتور کې په وکتوري ډول ضرب شي، لاسته راځي چې:

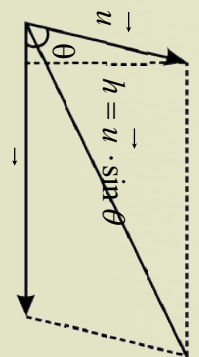
$$\begin{aligned} (\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b} &= -a \times \vec{b} = \vec{b} \times a \\ (\vec{b} \times \vec{b}) + (\vec{c} \times \vec{b}) &= \vec{b} \times a \\ \vec{b} \times \vec{b} = 0 &\Rightarrow (\vec{c} \times \vec{b}) = \vec{b} \times a \\ |\vec{c}| |\vec{b}| \sin A &= |\vec{b}| |\vec{a}| \sin C \\ c \sin A &= a \sin C \quad / \div ac \end{aligned}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \dots\dots\dots iii$$

$$\text{یا} \quad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

د (iii) او (ii) معادلو له پرتلې (مقایسې) څخه د سین قضیه لاسته راځي:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

4- د یوې متوازي الاضلاع مساحت: د  $u$  او  $v$  دوه وکتورونه چې صفر نه وي، د دوی ترمنځ زاویه  $\theta$  د لاندې شکل په څېر په پام کې نیسو. گورو چې  $u$  او  $v$  د متوازي الاضلاع ضلعې دي چې د مخې د مساحت د پیدا کولو لپاره کولای شو، ولیکو:

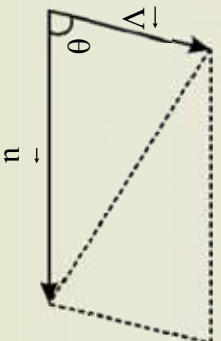


ارتفاع  $\times$  قاعده = د متوازي الاضلاع مساحت  
 څرنگه چې:  $|\vec{v}| =$  قاعده او  $h = |\vec{u}| \sin \theta$  ارتفاع ده  
 $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta =$  د متوازي الاضلاع مساحت

یعنی د یوې متوازي الاضلاع مساحت، د یوې متوازي الاضلاع د ضلعو د وکتوري ضرب له حاصل څخه عبارت دی چې د متوازي الاضلاع ضلعي هم دي.

**پایله:** څرنگه چې د یوه مثلث مساحت د متوازي الاضلاع مساحت نیمایي دی، نو د مثلث مساحت د لاندې شکل په پام کې نیولو سره عبارت دی، له:

$$\text{د متوازي الاضلاع مساحت} = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}| \quad \text{د مثلث مساحت} = \frac{1}{2}$$



### پوښتني

- که  $\vec{a}_1 = t^2 + t + 2$ ،  $\vec{a}_2 = 2t^2 + t$  او  $\vec{a}_3 = 3t^2 + 2t + 2$  وي وښايست چې نوموړی وکتورونه خطي خپلواکي لري؟
- وښايست چې  $\vec{a} = 2i + 3j + 4k$  او  $\vec{b} = 4i + 6j + 8k$  وکتورونه یو له بل سره کوم ډول خطي اړیکه لري؟
- ثبوت کوئ چې  $\vec{a}_1 = 2i$ ،  $\vec{a}_2 = 5j$ ، او  $\vec{a}_3 = 9k$  وکتورونه خطي خپلواکي لري.
- د هغه مثلث مساحت پیدا کوئ چې راسونه یې د  $A(1, -1, 1)$ ،  $B(2, 1, -1)$  او  $C(-1, 1, 2)$  وکتورونو په واسطه درکړل شوي وي. همدارنگه هغه واحد وکتور چې پر  $ABC$  مستوي عمود وي، مطلوب دي.
- د هغه متوازي الاضلاع مساحت پیدا کوئ چې: د  $Q(-1, 2, 4)$ ،  $P(0, 0, 0)$ ، او  $R(2, -1, 4)$  وکتورونو په واسطه ځانګړی شوي وي.
- که  $\vec{u} = 2i - j + k$ ،  $\vec{v} = 4i + 2j - k$ ، سره وي، د لاندې وکتورونو د ضرب حاصل پیدا کوئ؟
  - $\vec{u} \times \vec{u}$
  - $\vec{u} \times \vec{v}$
  - $\vec{v} \times \vec{u}$

## د څپر کې مهم ټکي

د وضعيه کمپونو په قائم سيستم کې وکتورونه: هغه کمپونه چې هم جهت اهم مقدار ولري وکتور نومېږي. هغه وکتورونه چې اوږدوالی يې مساوي او عين جهت ولري، يو له بله سره د مشلو وکتورونو په نامه يادېږي. هغه وکتور چې مبدا يې د وضعيه کمپونو د قائم سيستم په مبدا کې پرته وي شعاع وکتور (Position Vector) بلل کېږي. يو وکتور په مستوي کې د  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$  په څېر بنودل کېږي. چې  $a_x$

د  $x$  او  $a_y$  د  $y$  محور پرمخ له فاصلي او ترتيب څخه عبارت دی.

د دوو ټکو ترمنځ واټن او منځنی ټکی: که  $P(x_1, y_1)$  وکتور مبدا او  $Q(x_2, y_2)$  د پای ټکی د  $\vec{PQ} = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$  وکتور وي. په دې ډول  $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$  وکتور په  $\vec{PQ}$  قائم الزاويه مثلث او  $|\vec{a}|$  وکتور اوږدوالي له مخې لرو چې:

د  $P$  او  $Q$  ټکو ترمنځ واټن،  $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  اوږدوالی د  $P$  او  $Q$  منځنی ټکی  $M = \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \frac{y_1 + y_2}{2} \end{pmatrix}$  د منځني ټکي وضعيه کمپونه يا مختصات دی.

واحد وکتور: هغه وکتور چې د راکرل شوی وکتور په عين جهت پروت او يو واحد اوږوالی ولري، د واحد وکتور په نامه يادېږي.

مثال:  $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  او  $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  په قائم سيستم کې د  $x$  او  $y$  د يوې مستوي د محورونو په جهت واحد

وکتورونه دي، په داسې حال کې چې  $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ،  $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  او  $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  په فضا کې د وضعيه کمپونو په قائم سيستم کې د  $x$ ،  $y$  او  $z$  محورونو په جهت واحد وکتورونه دي.

د وکتورونو سکالري ضرب: د  $u$  او  $v$  دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د سکالري ضرب حاصل يې په مستوي او فضا کې عبارت دی له:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$

په داسې حال کې چې  $\theta$  د  $u$  او  $v$  ترمنځ زاویه ده. او د وکتوري ضرب حاصل یې یو وکتور دی چې د

$$u \times v \rightarrow = |u| |v| \sin \theta \rightarrow n$$

په داسې حال کې چې د  $u \times v$  وکتور د  $u$  او  $v$  پر وکتورونو عمود دی او  $n$  او  $v$  وکتورونه سره د بڼې لاس قاعدې په واسطه ټاکل کېږي.

د بڼې لاس قاعده: که د شهادت گوته په قایم ډول کره شي، لکه د لاندې شکل په شان، په دې صورت کې د شهادت گوته د  $n$  محور په جهت، د څنګل په جهت د  $v$  محور او غټه گوته د  $u \times v$  وکتور حاصل ضرب بڼې.

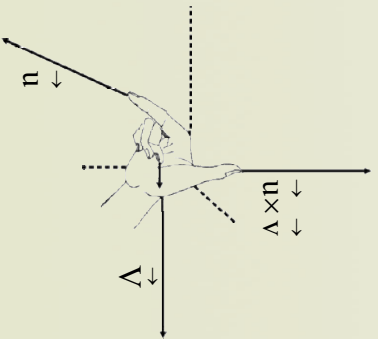
په فضا کې د دوو وکتورونو وکتوري ضرب:

$$b = a_2 i + b_2 j + c_2 k \quad \text{او} \quad a = a_1 i + b_1 j + c_1 k$$

ورکړل شوی وي، په دې صورت کې وکتوري حاصل ضرب

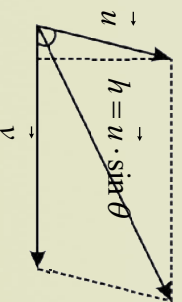
یعنې  $a \times b$  عبارت دی له:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$



مساحت او د وکتوري ضرب حاصل: د  $a$  او  $b$  دوه وکتورونه، چې صفر نه وي، د وکتوري ضرب قیمت یې د متوازي الاضلاع له مساحت څخه عبارت دی، چې د وکتورونو په واسطه په لاندې شکل کې تشکيلېږي.

$$|u \times v| = \text{د متوازي الاضلاع مساحت}$$





### د څپرکي پوښتنې

1: که  $\vec{a} = 3i - j + 5k$  او  $\vec{b} = 4i + 3j - 2k$  وي:

$\vec{a} \cdot \vec{b}$  :  $\vec{b} \cdot \vec{a}$  :  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  :  $\vec{b} \cdot \vec{a}$  مطلوب دی

2: که چېرې د  $P(2,3)$  او  $Q(6,-2)$  ټکي د  $OP$  او  $OQ$  شعاع وکتورونو پای وي، په دې صورت کې

د  $Q$  او  $P$  په مستوي کې د  $xj + yi$  په څېر ولیکئ.

3: که چېرې  $A(1,-1)$  ،  $B(2,0)$  ،  $C(-1,3)$  او  $D(-2,2)$  درکړل شوي وي، د  $AB$  او  $CD$  وکتورونو حاصل جمع مطلوب ده.

4: که چېرې  $A(2,5)$  ،  $B(-1,1)$  او  $C(2,-6)$  درکړل شوي وي، مطلوب دی:

i)  $\vec{AB} = ?$       ii)  $2\vec{AB} - \vec{CB} = ?$       iii)  $2\vec{CB} - 2\vec{CA} = ?$

5: که چېرې  $\vec{w} = 5i - j + 3k$  او  $\vec{v} = 3i - 2j + 2k$  ،  $\vec{u} = i + 2j - k$  ورکړل شوی وي، مطلوب دی:

i)  $\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}$       ii)  $\vec{v} - 3\vec{w}$       iii)  $|\vec{3v} + \vec{w}| = ?$

(iv)  $\vec{u}$  او  $\vec{v}$  را کړل شوو وکتورونو په جهت واحد وکتورونه پیدا کړئ

6: د  $\vec{a}$  او  $\vec{b}$  درکړل شوو وکتورونو لپاره سکالري ضرب حاصل د  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  ،  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  او  $\vec{b} \cdot \vec{a}$  وکتوري ضرب حاصل د  $\vec{a} \times \vec{b}$  او  $\vec{b} \times \vec{a}$  پیدا او دوه په دوه یې پرتله کړئ، که چېرې  $\vec{a}$  او  $\vec{b}$  په لاندې توګه وي:

i)  $\begin{cases} \vec{a} = 2i + j - k \\ \vec{b} = i - j + k \end{cases}$       ii)  $\begin{cases} \vec{a} = i + j \\ \vec{b} = i - j \end{cases}$

iii)  $\begin{cases} \vec{a} = 3i - 2j + k \\ \vec{b} = i + j \end{cases}$       iv)  $\begin{cases} \vec{a} = -4i + j - 2k \\ \vec{b} = 2i + j + k \end{cases}$

7: د هغو مثلثونو مساحت مطلوب دی چې راسونه یې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل کېږي:

i):  $P(0,0,0)$ ,  $Q(2,3,2)$ ,  $R(-1,1,4)$

ii):  $P(1,-1,-1)$ ,  $Q(2,0,-1)$ ,  $R(0,2,1)$

8: د هغه متوازي الاضلاع مساحت مطلوب دی چې راسونه یې د لاندې ټکو په واسطه ټاکل شوي وي.

i):  $A(0,0,0)$ ,  $B(1,2,3)$ ,  $C(2,-1,1)$ ,  $D(3,1,4)$

ii):  $A(1,2,-1)$ ,  $B(4,2,-3)$ ,  $C(6,-5,2)$ ,  $D(-3.5,-4)$

iii):  $A(1,-1,1)$ ,  $B(-1,2,2)$ ,  $C(-3,4,-5)$ ,  $D(-3.5,-4)$

9: کوم وکتورونه عمود او کوم موازي دي؟

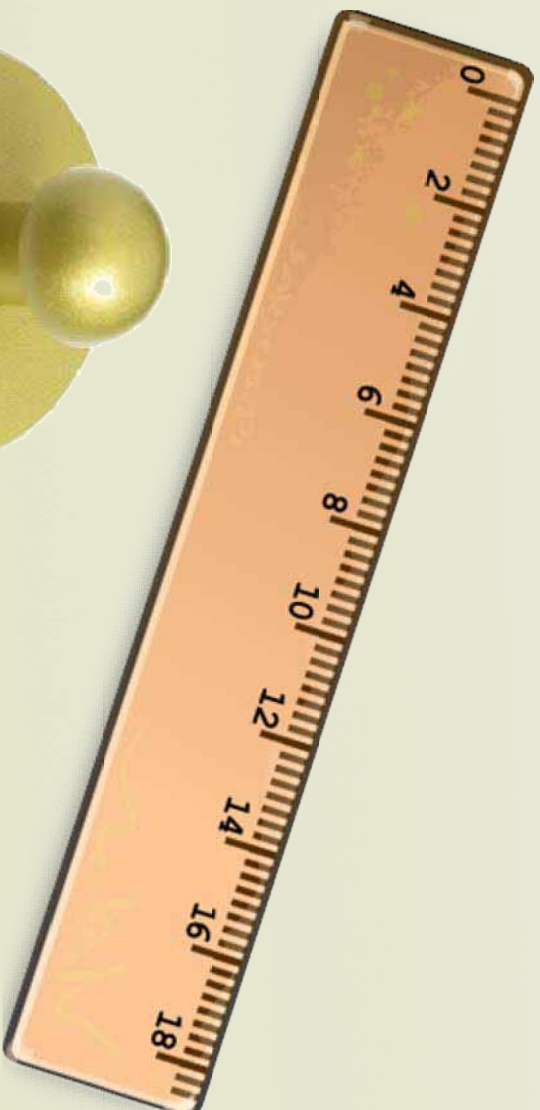
i):  $\vec{u} = 5i - j + k$ ,  $\vec{v} = j - 5k$ ,  $\vec{w} = -15i + 3j - 3k$

ii):  $\vec{u} = i + 2j - k$ ,  $\vec{v} = i + j + k$ ,  $\vec{w} = -\frac{\pi}{2}i + \frac{\pi}{2}j$



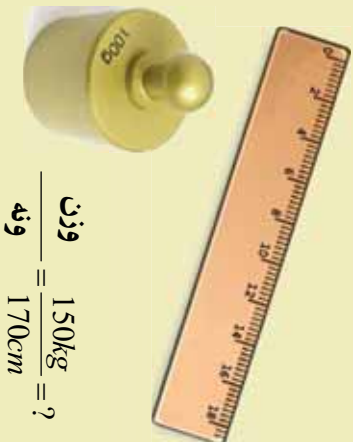
# ایم چپر کی احصائے





$$\begin{array}{l} \text{وزن} \\ \hline \text{150kg} \\ \text{وزنه} \\ \hline \text{170cm} \\ \hline = ? \end{array}$$





$$\frac{\text{وزن}}{\text{ونه}} = \frac{150\text{kg}}{170\text{cm}} = ?$$

## د بدلونونو ضریب

### Coefficient Variations

که چیرې د یوې ټولني پرانګه گي په متر او د بلې ټولني په کیلوگرام ښودل شوي وي. آیا فکر کولای شئ چې دغه دواړه پرانګه گي په دواړو ټولنو کې د پرتلي وړ دي او که نه؟

### فعالیت

10 تنه زده کوونکي له خپل ټولگي څخه په تصادفي ډول وټاکئ؟

- د زده کوونکو ونه او وزن تشخیص کړئ.
- د زده کوونکو د ونې او وزن واریانس او معیاري انحراف محاسبه کړئ.
- آیا فکر کولای شئ چې د دې دواړو متحولینو د پرانګه گي د میزان پرتله د واریانس او معیاري انحراف له لارې امکان لري؟ ولې؟

- که چیرې معیاري انحراف په اوسط ویشل شي، نو د په لاس راغلي مقدار یا عدد واحد به څه وي؟
- د بدلونونو یا تغیراتو ضریب یا نسبي پرانګه گي داسې کارونې لري، چې واریانس او معیاري انحراف هغه نه لري. یو له دغو کارونو څخه د دوو نا متجانسو ټولنو پرتله ده چې د یادولو وړ ده.

د بدلونونو یا تغیراتو ضریب چې په  $C \cdot V$  ښودل کېږي عبارت له هغه خارج قسمت څخه دی، چې د معیاري انحراف پر اوسط مطلق یې واحد عدد دی په لاس راځي. یعنې:

$$C \cdot V = \frac{S}{\bar{x}} \quad \text{یا} \quad \text{معیاري انحراف} = \frac{\text{د بدلونونو یا تغیراتو ضریب}}{\text{اوسط}}$$

که د تغیراتو ضریب په 100 کې ضرب شي، د تحول ضریب په لاس راځي:

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}}$$

- د بدلون ضریب یوازې د مثبتو ډیټاوو لپاره تعریف شوي وي.
- که چیرې ټوله ډیټا سره برابره وي، د بدلون ضریب مساوي په صفر دی.
- که ټوله ډیټا په یو مثبت عدد کې ضرب شي، د بدلون ضریب تغیر نه کوي.

- که په ټوله ډیټا یو مثبت عدد ورزیات شي، د بدلون نوی ضریب چې په لاس راځي له لومړي ضریب څخه کوچنی دی.

**لومړی مثال:** د لاندې ډیټا د بدلون ضریب محاسبه کړئ:

$$\{1, 3, 5\}$$

**حل:** د فورمول له مخې لیکلای شو:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+3+5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2}{3} = \frac{4+4}{3} = 2.67$$

$$S = \sqrt{2.67}$$

$$C.V = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2.67}}{3} = 0.543$$

**دویم مثال:** د تصویری تولیدی لایونو یو تولیدونکی دوه ډوله لایونه A او B تولیدوي، په داسې حال کې چې د A متوسط عمر مساوي په 1495 او د B متوسط عمر مساوي په 1875 ساعته دی او معیاري انحرافونه یې په ترتیب سره 280 او 310 دي، تولیدوي.

د کوم یوه تصویر لایب تصویر له پاسټو ډولونو څخه د نسبي پراگنده گي رڼا د بدلون ضریب) قیمت زیات دی؟  
**حل:** د فورمول له مخې لرو چې:

$$C.V_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{280}{1495} \cdot 100 = 18.7\% \quad \text{د } A \text{ لایونو د بدلون ضریب}$$

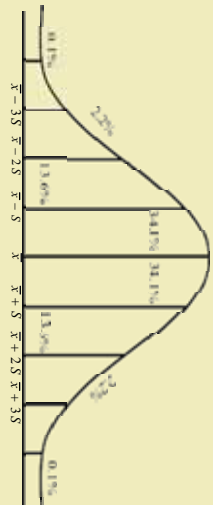
$$C.V_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} = \frac{310}{1875} \cdot 100 = 16.5\% \quad \text{د } B \text{ لایونو د بدلون ضریب}$$

څرنګه چې  $C.V_A > C.V_B$  څخه دی، له دې کبله د A لایب ډیره پراگنده گي لري، ولې ټینګښت یې کم دی.



**پوښتنې**

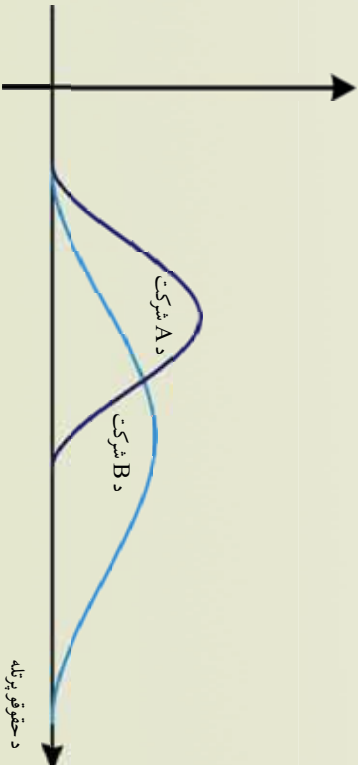
1. دلاندې ډیټا د بدلون یا تغیراتو ضریب حساب کړئ؟  
1    3    4    5    6
2. که چیرې اوسط مساوي په 4 او معیاري انحراف مساوي په 6 وي، د بدلون یا تغیراتو ضریب څو دی؟
3. ستاسو د ټولګي د زده‌کوونکو د سن د بدلون ضریب 10 کاله وروسته څومره تغیر یا بدلون کوي؟ کمېږي او که ډېرېږي؟



**په نورمال منحني کې پر اګنده ګي (ټيټوالی)**  
 اوریدلې به مو وي چې وايي: یو ښه تصویر د زر  
 کلمیو ارزښت لري.  
 لاندې شکل ته وګورئ، د هغه په اړوند فکر او  
 بحث وکړئ.

## فعالیت

لاندې دوه ګرافونو د دوه  $A$  او  $B$  شرکتونو د حقوقو تادیه ښيي.



- کوم شرکت په اوسط ډول د حقوقو تادیه ډیره لري؟
- کوم شرکت د حقوقو د تادیې په میزان کې خپلو کارمندانو ته لږه پراګنده ګي لري؟
- د دواړو شرکتونو د حقوقو تادیات سره پرتله کړئ.
- لاندې ټکي د اوسط او معیاري انحراف په نورمال منحني کې صدق کوي.
  - که چیرې  $\bar{x}$  اوسط او  $S$  معیاري انحراف وي؛ نو  $68\%$  دپلټې موارد د  $(\bar{x} - S, \bar{x} + S)$  په فاصله کې، یعنې د اوسط په شا او خوا د معیاري انحراف په فاصله کې ځای لري.
  - $96\%$  د پلټې موارد د  $(\bar{x} - 2S, \bar{x} + 2S)$  په فاصله کې، یعنې د اوسط په شاوخوا د دوه معیاري انحرافونو په فاصله کې ځای لري.
  - $99\%$  د پلټې موارد  $(\bar{x} - 3S, \bar{x} + 3S)$  په فاصله کې، یعنې د اوسط په دواړو خواوو درې معیاري انحرافونو په فاصله کې قرار لري.

- په يوه نورمال منځني کې له  $2S$  څخه ډېر انحراف غیر عادي او له  $3S$  څخه زیات انحراف زیات غیر عادي شمېرل کېږي.

هغه ډېټا چې د  $3S$  په اندازه له اوسط څخه فاصله یا واټن ولري؛ نو باید د پراگنده ګي یا تېټې ډېټا په نامه وګڼل شي.

**مثال:** که د یوې مؤسسي د کارکوونکو د معاش اوسط  $12500$  افغاني او معیاري انحراف یې مساوي په  $700$  افغاني وي نو:

**الف:** له نورمال توزیع څخه د فیصدي په ګټه اخیستو، د ورکړل شوي معاش توزیع تشریح کړی؟

**ب:** آیا ویلاي شي چې د  $1400$  افغانیو معادل معاش یو غیر عادي معاش دی؟

**د الف حل:** لومړی د  $\bar{x} \pm S$ ،  $\bar{x} \pm 2S$ ،  $\bar{x} \pm 3S$  قیمتونه په لاس راوړو.

فاصله د $S$ له مخې	فاصله د افغانیو له مخې	فیصدي
$\bar{x} \pm S$	$11800 - 13200$	68%
$\bar{x} \pm 2S$	$11100 - 13900$	96%
$\bar{x} \pm 3S$	$10400 - 14600$	99.6%

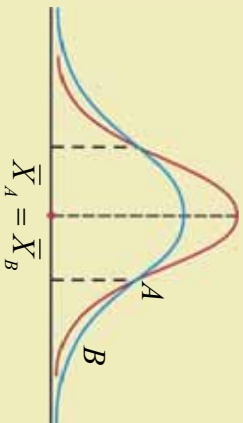
**د ب حل:** لومړي  $\bar{x} - 1400$  په لاس راوړئ چې مساوي په  $1500$  کېږي؛ یعنې  $1400$  افغانیو په اندازه  $1500$  افغاني له اوسط څخه ډیرې دي، که چېرې اوس دغه رقم په  $S$  وپوښو په لاس راځي:

$$\frac{1500}{700} = 2.1$$

په دې ډول د  $1400$  افغانیو معاش غیر عادي معاش دی، ځکه چې د  $2S$  له اندازي څخه زیات او له  $\bar{x}$  څخه پورته دی.



که چېرې  $62.28\%$  فیصده مشاهدات د  $(S + \bar{x}, S - \bar{x})$  په فاصله کې پراته وي، آیا ویلاي شي، چې  $95.45\%$  او  $99.73\%$  مشاهدات په کومه فاصله کې قرار لري؟ انټروالونه له نورمالې منځني سره وپایاست؟



## د نورمال توزیع د ډول شاخصونه

د مرکزي پراگندګۍ دوه شاخصونه یو زيات شمېر د یوې احصایوې مجموعې اطلاعاتو ته په لنډ ډول انعکاس ورکوي. ددې لپاره چې د یوې احصایوې مجموعې اطلاعات، تناظر او د مثبت او منفي اشارو لرونکي وي؛ نو له کوم ډول منحنی څخه باید ګټه واخلو.

- په یو نورماله توزیع کې وسط، اوسط او د موډ شاخصونه څه وخت سره مساوي دي؟
  - که توزیع د اوسط په اطراف کې متناظره نه وي، د وسط اوسط او موډ د کمیتونو په اړه څه فکر کوي؟
  - که چیرې یوه توزیع متناظره وي؛ نو د اوسط او وسط تفاضل څو ده؟
  - که چیرې دواړه توزیع ګانې یو شان اوسط او تناظر ولري؛ نو د جګوالي او تیتوالي له اړخه به څه وضعیت ولري؟
- د توزیع د ډول شاخصونه په دوو لاندې حالتونو څېړل کېږي:
- 1- د **خمېدلو (skewness)** **خمېدګۍ** **شاخص**: هغه توزیع چې د اوسط په دواړو متناظره نه وي، خمېدل نومېږي، چې په دوو لاندې ضریبونو بنېدل کېږي.

**الف: د خمېدلو ضریب**: دا هغه شاخص دی چې د خمېدلو د میزان د ټاکلو لپاره کارول کېږي، چې په لاندې ډول

$$\alpha_3 = \frac{1}{n} \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3}{s^3}$$

تعریف شوی دی:

هغه عدد دی چې یوازې د پرتله کولو لپاره ترې کار اخېستل کېږي.

که  $\alpha_3 = 0$  وي؛ نو توزیع متناظره ده.

که  $\alpha_3 > 0$  وي؛ توزیع مثبت خمېدل (positive skewness) لري، یعنې ټپې لورې ته خمېدګۍ لري.

او که  $\alpha_3 < 0$  وي؛ توزیع منحنی منفي خمېدل (negative skewness) لري یعنې کین لورې ته خمېدګۍ لري.

که چیرې د کثرت جدول موجود وي، خمېدګۍ (عدم تناظر) یې د  $\alpha_3 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^3}{s^3}$  فورمول په واسطه

پیدا کېږي. چې  $f_i$  فریکونسي ښيي.

**ب: د پیرسون د خمېدلو ضریب**: د پیرسون ضریب په لاندې ډول تعریف شوی دی.

$$Sk_{(p)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{S}$$

په مناظره توزیع کې د پیرسون د خمېدلو ضریب مساوي په صفر دی. د پیرسون د خمېدلو د لو ضریب مثبت او منفي قیمتونه په ترتیب سره د توزیع د منحنی مثبت یا منفي خمېدل ښيي.

2- د پر سوب kurtosis شاخص: د پر سوب شاخص ددي بنودونکی دی چې د توزیع یوه منحنی څخه وخت جگه او څه وخت تیتوالی لري.

د پر سوب شاخص هغه معمولي شاخص دی چې د یوې منحنی د پر سېلو د اندازه کولو لپاره په کار اچول کېږي او

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

په لاندې ډول تعريف شوی دی:

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

که د کثرت جدول په لاس کې ولرو، نو د پر سوب شاخص فورمول

فرکونسي،  $\bar{x}$  ډیټا او  $\bar{x}$  د  $\bar{x}$  اوسط او  $s$  معیاري انحراف دی.

د پر سوب شاخص د توزیع په ځای او پراگنده کې پورې اړه نه لري. دغه شاخص د بېرته کېدو لپاره په کار لوېږي.

مثال: مخامخ شکل په پام کې ونیسئ د  $\alpha_4$  ضریب د دري ډوله خپېلو او پر سوب ډولونه چې په شکل کې د

هغوي توزیع بنودل شوي ده نښي.



حل: د نورمالې توزیع د پر سوب د درجې او میزان د بېرته کېدو لپاره لکه یو سټنډرډ په کار اچول کېږي.

د نورمالې توزیع لپاره د  $\alpha_4$  قیمت مساوي په 3 دی، په داسې حال کې چې که چېرې  $\alpha_4$  له 3 څخه زیاته وي نظر نورمال منحنی ته د منحنی پر سوب زیات دی.

یا په بل عبارت یوه پر سېلي توزیع چې څوکه لري او که چېرې  $\alpha_4$  له 3 لږ وي، نظر نورمالې منحنی ته یې پر سوب کم دی چې د ملاستې یا اوارې توزیع په نامه یادېږي.

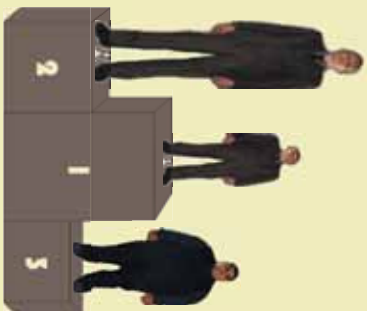


پوښتي

د یوه ډیټاګي د زده کوونکو د احصایې د مضمون نمري په لاندې ډول ورکړ شوي دي، د پیرسون د پر سوب ضریب حساب کړئ.

نمرې	د زده کوونکو شمېر
40-50	4
50-60	6
60-70	10
70-80	4
80-90	4
90-100	2





## څو متحول له ټولني

که چيرې د خپل يوه ټولگيوال د ونې په اندازه وپوهېږئ، کولای شئ هغه ته په پام د هغه د وزن په اندازه پوه او په دې اړوند فکر وکړئ.

## فنايت

آيا په تېرو درسونو کې مو د اشخاصو د ونې او وزن په اړوند يو ځای مطالعه او څېړنه کړې ده.

- فکر کولای شئ چې د يوه سړي د ونې او وزن مقدار د يو متحول په توگه کولای شو چې ارائه کړو؟
- که وغواړو چې د يوه ټولگي د زده کوونکو د ونې او وزن مقدار يو ځای وڅېړو، نو دغه يوه ټولنه ده.
- دخپلو 10 تنو ټولگيوالو ونې او وزن اندازه کړئ.
- په لاس راغلي دښتيا د مرتبو جوړو په توگه وليکئ.
- هغه ټکي چې د مرتبو جوړو په مرسته په مستوي کې ټاکل کېږي، څه ډول شکل لري؟ د يوه خط په واسطه يې وصل کړئ.

- آيا ويلاى شئ هغه ټکي چې په مستوي کې وصل شې، کوم شکل لري؟

له پاسني فعالیت څخه پوهېږو چې د بحث موضوع، دوه ډوله متحولين دي. تر اوسه مو په تېرو درسونو کې داسې ټولني پاتلې چې ټولو په هغوی کې يوازې يو متحول درلوده اوس غواړو داسې ټولني ولټوو چې دوه او يا له هغو څخه زيات متحولين ولري، دکار آساني لپاره معمولاً د يو يا څو متحولينو تر منځ درياضيکي اړيکي په مرسته د قايمو مختصاتو په قايم سېسټم کې جوړېږي.

په لومړي گام کې په دې منظور د معادلو د جوړېدو لپاره لازم معلومات را ټول شې او په دويم گام کې را ټول شوي معلومات د ارزښت لرونکو متحولينو په څېر په يوه مستوي کې راټول او په نښه کېږي، هغه شکل چې د دغو ټکو له وصلېدو څخه لاس ته راځي، مونږ ته يو گراف را ښيي.

**مثال:** يو متخصص د غذايي رژيم يو ډول تاثير په يو شمېر مورگانو څېړلی دی. په دې ډول يې د هر مورگان لومړنی وزن اندازه کړی او بيا يې د عمليې په تطبيق پيل کړي چې په پای کې يې بيا د مورگانو وزن اندازه کړی چې لاندې دښتيا په لاس راغلي ده: (2, 4), (3, 5), (1, 7), (2, 3), (1, 8).

په دې ډول لومړۍ مختصه د مورک لومړنی او دویمه مختصه د مورک وزن د غذایی رژیم له تطبیق څخه وروسته ښيي.

- ډیټا په یوه سطري او ستوني جدول کې ترتیب کړی؟
- که چېرې ډیټا د یوې ټولني په څېر وگڼل شي، نو دغه ټولنه به څو متحولین ولري؟

**حل:** لاندې سطري جدول په پام کې نیسو:

د مورکانو شمیر	1	2	3	4	5
د مورکانو لومړني وزن	1	2	1	3	2
د غذایی رژیم له تطبیق څخه وروسته د مورکانو وزن	8	3	7	5	4

لاندې ستوني جدول په پام کې نیسو.

د غذایی رژیم له تطبیق څخه وروسته د مورکانو وزن	د مورکانو لومړني وزن	د مورکانو شمیر
8	1	1
3	2	2
7	1	3
5	3	4
4	2	5

پاسنی ډیټا یوه دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

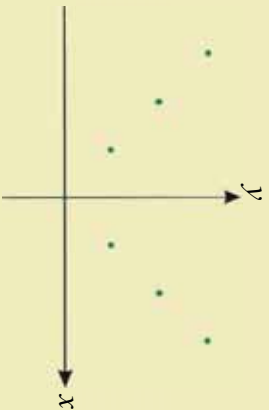
### پوښتنه

د زراعتي محصولاتو د لږوالي لپاره فکتورنه، لکه اوبه کود د کود ډول لمر او د خاورې ډول موثر گڼل کېږي، آیا ویلی شی چې په دغه ټولنه کې لږ تر لږه له څو ډوله متحولینو سره سروکار لری؟

## د پراگنده گي گراف

### Scatter diagram

مخامخ شکل ته په پام ، هغه ټکي چې په مستوي کې په نښه شوي دي، د مرتبو جوړو په ډول ترتيب او رياضيکي معادله يې وليکئ:



### فعاليت

لاندي مرتبي جوړي ورکړل شوي دي:

(1,2) (2,3) (3,4) (4,5)

- د ورکړل شوو مرتبو جوړو گراف په دقيق ډول رسم کړئ.
- مشخص شوي ټکي سره ونښلوئ او رياضيکي معادله يې پيدا کړئ.
- په لاندي ډول د دغې ډيټا د هر يوه، دويمه مخصوصه په لاندي ډول بدلون.
- د هر ټکي لپاره يوه سکه پورته وغورځوئ، که شپږ راغله په  $Y$  يو واحد اضافه او که خط راغی له  $Y$  څخه يو واحد کم کړئ، د په لاس راغلو ټکو يا تغييراتو گراف رسم کړئ.
- دغه عمليه څو ځلې تکرار، خو دا ځل کله چې قيمتونه زيات يا کموي، بدلون مه ورکوئ په  $X$  او  $Y$  پورې تړلي قيمتونه څنگه تغير کوي؟

**مثال:** لاندي مرتبي جوړې چې پر مورگانو دغذايي رژیم تاثيراتو څخه مو په لاس راوړي دي، په پام کې

ونیسئ: (2,4) (3,5) (1,7) (2,3) (1,8)

دغه مرتبي جوړې د مخامخ شکل په څېر په يوه مستوي

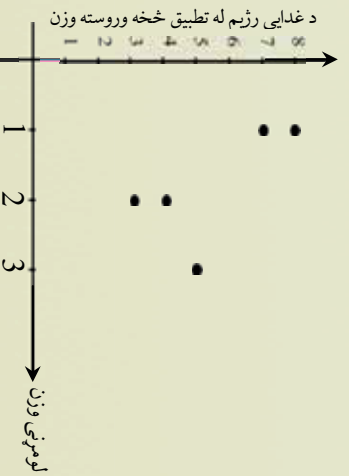
کې ښودل شوي دي.

پاسنی گراف چې د مورگانو وزن رانښيي، د هغو پاشلو

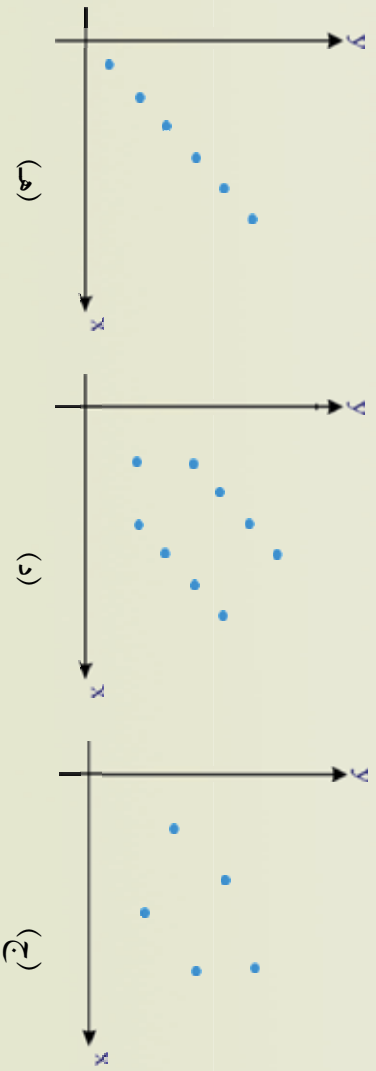
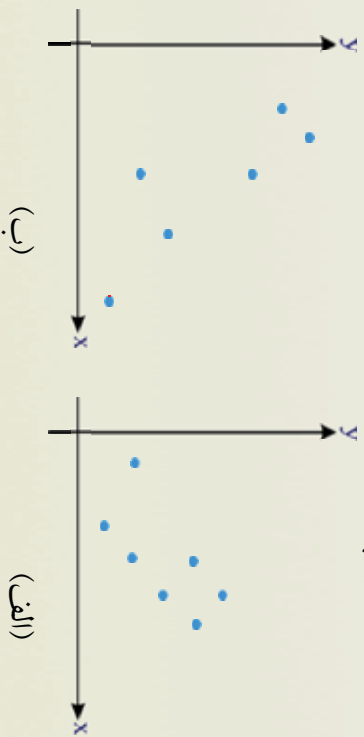
ټکو مجموعه په مستوي کې ده چې د اړوندي ډيټا په

اندازه کېدلو په يوه دوه متحوله ټولنه کې د مشخصاتو په

سیستم کې لاسته راځي.



مثلاً: لاندې گرافونه په پام کې ونیسئ:



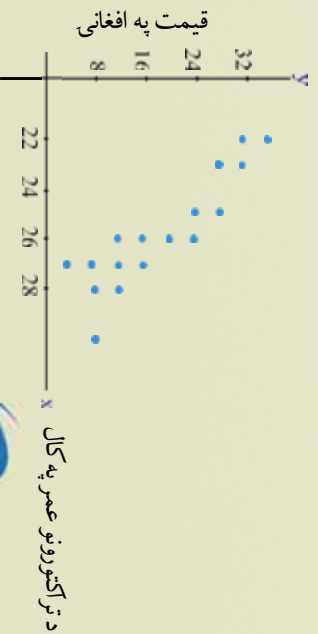
د(الف) په گراف کې لیدل کېږي چې که چېرې د  $X$  قیمتونه زیات شي؛ نو د  $Y$  قیمتونه هم زیاتېږي، خو د (ب) په گراف کې برعکس د  $X$  د قیمتونو په زیاتوالي د  $Y$  قیمتونه کمېږي.

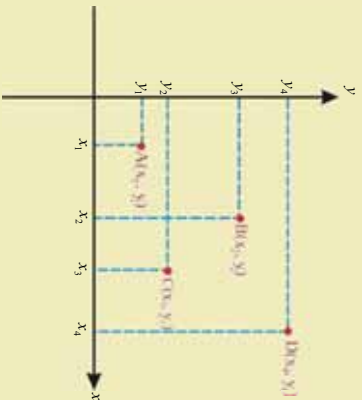
د(ج) په گراف کې د  $X$  په قیمت کې تغیرات هیڅ ډول اطلاع د  $Y$  د بدلونونو په اړوند نه ورکوي ځکه د  $X$  قیمت په درلودلو سره په هېر پام په دې گراف کې د(الف) او (ب) گرافونو په پرتله زیاته ده، د (په) گراف کې د  $Y$  د قیمت حدس په هېرې پاملرنې صورت مومي.

### پوښتنې



لاندې گراف د یو شمیر تراکترونو عمر راښيي، آیا ددې دوو متحولینو تر منځ کومه اړیکه یا ارتباط ونښي؟  
توضیح یې کړئ.



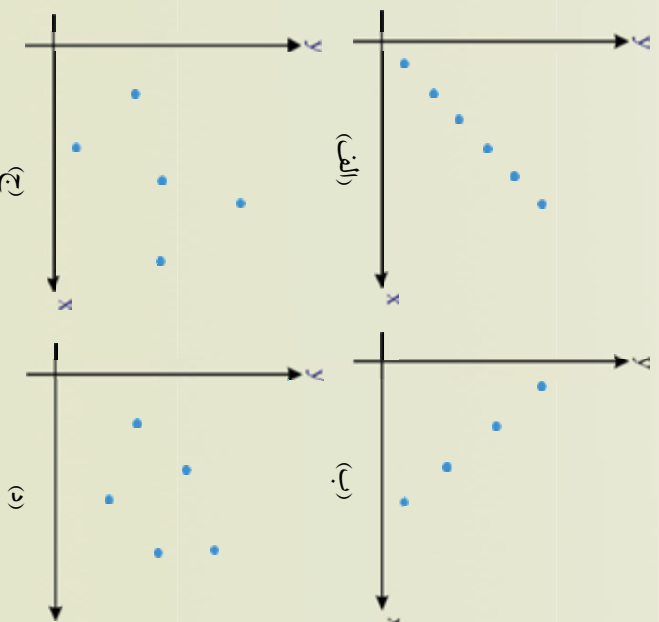


### پیوستون او دیوستون ضریب

د  $A, B, C$  او  $D$  ټکي لکه مخامخ شکل راځول شوي دي، آیا شونې ده چې ټکي په یوه مستقیمه کرښه سره وصل شي، ولې؟

### فعالیت

لاندي شکلونه په پام کې ونیسئ:



- د (الف) او (ب) په شکلونو کې کولای شو چې د  $Y$  متحول د هغې کرښې په مرسته چې له دغو ټکو تیرېږي وټاکو.
- د (الف) او (ب) په شکلونو کې د  $X$  او  $Y$  ترمنځ څه ډول اړیکه ده؟
- آیا کولای شو چې د (ج) او (د) په شکلونو کې داسې یوه کرښه وټاکو چې ټول ټکي پرې برابره وي؟
- د (ج) او (د) په شکلونو کې د  $X$  او  $Y$  ترمنځ اړیکې په څه ډول دي؟
- - د (الف) او (ب) د شکلونو اړیکې د (ج) او (د) د شکلونو له اړیکو سره پرتله او وروایي چې د  $Y$  د متحول خط د  $X$  د متحول په مرسته په کوم شکل کې جوړه ده؟

له باسني فعالیت څخه داسې پوهېږو چې که چيرې ټکي په مستوي کې بوي مستقيمي کرني ته نږدې پراته وي؛ نو په دې صورت کې  $r$  د متحول خط نظر  $X$  ته لږ ده او برعکس هر څومره چې ټکي له کرني لري پراته وي، نو په هم هغه اندازه د  $r$  خطا ډېره ده.

له دې کبله داسې معيار غواړو در وپېژنو چې د ټکو پيوستون موزن ته اندازه کړي.

هغه فورمول چې د پيوستون د محاسبي لپاره ورکړ شوي ده، د پيوستون د ضريب په نامه ياد او په  $r$  سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$r = \frac{\sum xy - \bar{x}\bar{y}}{n} = \frac{\sum xy - \bar{x}\bar{y}}{n} \quad \text{د } r \text{ گانو اوسط (د } x \text{ وړنو اوسط)} - \text{د } \bar{x} \text{ او } \bar{y} \text{ د ضرب د حاصل مجموعه}$$

$$r = \frac{\sum x_i y_i - \bar{x} \bar{y}}{n} \quad \text{د } r \text{ گانو معياري انحراف (د } x \text{ وړنو معياري انحراف)}$$

**مثال:** دمورگانو د لومړني وزن او غذايي رژیم څخه وروسته وپتيا لکه لاندي جدول په پام کې ونيسئ.

د $x$ او $y$ د ضرب حاصل	له عملي څخه وروسته وزن $y$	لومړني وزن $x$	د مورگانو شمېره
8	8	1	1
6	3	2	2
7	7	1	3
15	5	3	4
8	4	2	5
$\sum 44$	$\sum 27$	$\sum 9$	

دلومړني او وروسته د غذايي رژیم د وزنونو تر منځ د پيوستون ضريب محاسبه کړئ.

**حل:** که چيرې  $X$  لومړني وزنونه او  $Y$  د غذايي رژیم له تطبيق څخه وروسته وزنونه او  $n = 5$  د مورگانو شمېر په پام کې ونيسو، نو د  $X$  او  $Y$  اوسطونه عبارت دي له:

$$\bar{x} = \frac{9}{5} = 1.8, \quad \bar{y} = \frac{27}{5} = 5.4$$

$$S_x^2 = \frac{(1-1.8)^2 + (2-1.8)^2 + (1-1.8)^2 + (3-1.8)^2 + (2-1.8)^2}{5} = \frac{0.64 + 0.04 + 0.64 + 1.44 + 0.04}{5} = \frac{2.8}{5} = 0.56$$

$$S_y^2 = \frac{(8-5.4)^2 + (3-5.4)^2 + (7-5.4)^2 + (5-5.4)^2 + (4-5.4)^2}{5} = \frac{6.76 + 5.76 + 2.56 + 0.16 + 1.96}{5} = \frac{17.2}{5} = 3.44$$

$$\bar{x} \bar{y} = \frac{9}{5} \cdot \frac{27}{5} = \frac{243}{25} = 9.72$$

$$\sum xy = \frac{44}{5} = 8.8$$

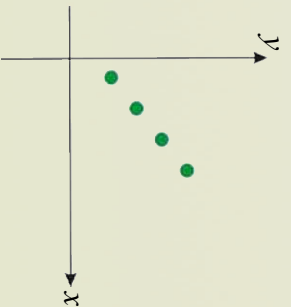
په دې ډول په پایله کې د پیوستون ضریب په لاندې ډول لاس ته راځي:

$$r = \frac{8.8 - (1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56} \cdot \sqrt{3.44}} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

اوس داسې سوال را منځ ته کېږي چې د پیوستون د  $-0.67$  ضریب د  $X$  او  $Y$  ترمنځ د ډېر پیوستون ښودونکي ده او که نه؟ د دې سوال د ځواب د پیدا کېدو لپاره د پیوستون ضریب له لاندې مثالونو څخه په څو مرحلو کې په لاس راوړو:

**مثال:** لاندې جدولونه په پام کې ونیسئ:

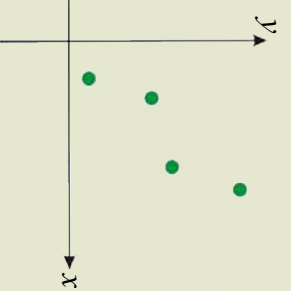
$x$	$y$
1	3
2	5
3	7
4	9



$x$	$y$
1	2
2	6
3	6
4	10



$x$	$y$
1	2.5
2	5.5
3	6.5
4	8.5



(الف)

(ب)

(ج)

د (الف) په شکل کې ټکي ټول په یوه کرښه پراته دي، نو په دې ډول د ټکو ترمنځ د پیوستون ضریب ډېر لوړ قیمت لري. د (ب) په شکل کې ټکي د یوې مستقیمې کرښې په شاخو پراته دي، نو له دې کبله نظر د (الف) حالت ته د ټکو ترمنځ د پیوستون ضریب لږ دی. د (ج) په شکل کې څرنگه چې ټکي د مستقیمې کرښې (د ب) د حالت په اندازه نږدې پراته دي، نو باید ضریب یې په دې حالت کې (د ب) له حالته لږ دی، د دې خبرې د پخلې لپاره موضوع په لاندې ډول څیړو، د پیوستون ضریب د (الف) حالت لپاره:

$$\bar{x} = \frac{10}{4} = 2.5 \quad \bar{y} = \frac{24}{4} = 6$$

$$d = \frac{(-1.5)^2 + (-0.5)^2 + (0.5)^2 + (1.5)^2}{4} = \frac{2.25 + 0.25 + 0.25 + 2.25}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$d = \frac{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2}{4} = \frac{9 + 1 + 1 + 9}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$d = (1 \cdot 3) + (2 \cdot 5) + (3 \cdot 7) + (9 \cdot 4) = 70$$

$$r = \frac{70}{4} - (2.5)(6) = \frac{17.5 - 15}{\sqrt{6.25}} = \frac{2.5}{2.5} = 1$$

د ډيو ستون ضريب د (ب) په حالت كې:

$$\bar{x} = 2.5, \quad \bar{y} = \frac{24}{4} = 6$$

$$x \text{ وړنو واريانس} \quad , \quad \text{د } r \text{ ګانو واريانس} = \frac{16+0+0+16}{4} = 8$$

$$x \text{ وړنو واريانس} \quad , \quad \text{د } r \text{ ګانو د ضرب د حاصل مجموعه} = 2 + 12 + 18 + 40 = 72$$

$$\text{ډيو ستون ضريب} = \frac{72}{4} - (2.5)(6) = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0.9486$$

$$\bar{x} = 2.5, \quad \bar{y} = \frac{23}{4} = 5.75$$

$$x \text{ وړنو واريانس} \quad , \quad \text{د } r \text{ ګانو واريانس} = 4.6875$$

$$\text{د } x \text{ او } r \text{ ګانو د ضرب د حاصل مجموعه} = 16.75$$

$$\text{ډيو ستون ضريب} = \frac{16.75 - (2.5)(5.75)}{\sqrt{1.25} \sqrt{4.6875}} = \frac{2.375}{5.858} = 0.9812$$

په ياد ولرئ چې په هغو شرايطو كې چې  $r$  لږ خطاو لري (د  $x$  او  $y$  مقدارونه خط ته نژدې پراته دي) كه چيرې د ډيو ستون ضريبونه 1 او -1 وي،  $x$  او  $y$  پر يوه مستقيمه کرښه پراته دي. غير له هغه څخه د ډيو ستون ضريب د دغو دوو مقدارونو تر منځ پروت دی.



پوښتنې

1- لاندې ډېټا راکړل شوي ده.

$x$	1	2	3	4	5
$y$	4	3	2	1	0

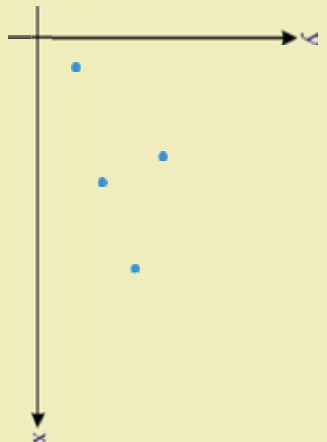
د ډېټا ډيو ستون ضريب محاسبه كړئ.

2- د خپلو ټولګيو الو د ونې او وزن تر منځ د ډيو ستون ضريب حساب كړئ؟



## د خطي ميلان معادله

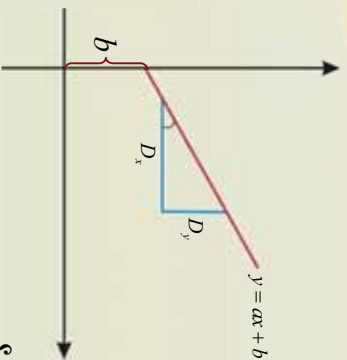
*The linear regression equation*



فرض کړئ چې یو پاشلې گراف په لاندې ډول را کړل شوی وي. یوه مستقیمه کرښه چې معادله یې د  $y = ax + b$  په ډول ورکړل شوي وي، پیدا کړئ چې گراف یې ټولو ټکو ته نږدې فاصله یا واټن ولري.

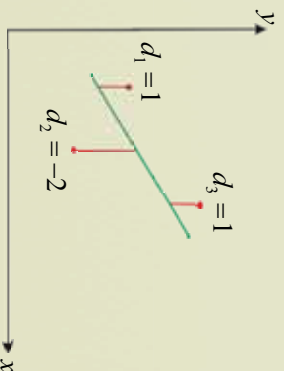
## فعالیت

په مخامخ شکل کې یوه خطي تابع (لومړی درجه) چې گراف یې مستقیمه کرښه ده، رسم شوي ده.



- د  $y = ax + b$  خطي تابع کې  $a$  او  $b$  څه ډول مقدارونه دي؟
- د  $y = ax + b$  په تابع کې د  $X$  او  $Y$  متحولین په کوم نوم یادېږي؟
- د  $y = ax + b$  مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ؟
- د  $y = ax + b$  په معادله کې د  $Y$  بدلون، د یو واحد په اندازه په  $x$  کې وټاکئ؟
- د  $y = ax + b$  چېرې  $a > 0$  وي؛ د تابع گراف متزايد او که متناقص دی؟ همدغه راز که چېرې  $a < 0$  سره وي، د تابع گراف څه شکل لري؟
- او که چېرې  $a = 0$  وي، د تابع دگراف شکل وټاکئ؟

مخامخ شکل په پام کې ونیسئ:



د فاصلو مجموع  $d_1 + d_2 + d_3$  او  $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$  محاسبه کړئ.

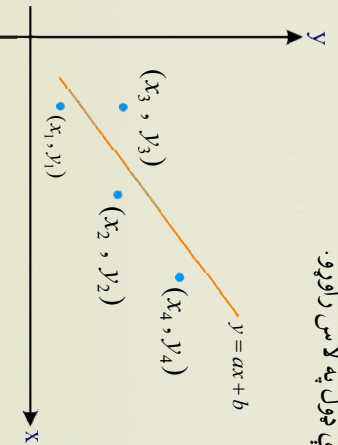
له پاسني فعالیت څخه پوهېږو چې د  $y = ax + b$  معادله يوه خطي تابع ده چې د  $a$  ضريب ددې معادلې ميل جوړوي او کله چې  $a$  مثبت وي، مستقيمه کرښه متزايد او که چېرې  $a$  منفي وي، نو کرښه متناقصه ده.

پاملرنه وکړئ چې که د  $(x, y)$  جوړه د  $y = ax + b$  په معادله کې صدق وکړي، په دې صورت کې نوموړې ټکي د مستقيمې کرښې په گراف پروت دی.

هر څومره چې د ټکو پاتل مستقيمې کرښې ته نژدې وي، نو د پيوستون ضريب به  $-1$  او  $+1$  ته ورژدې وي، که چېرې د يوې مستقيمې کرښې معادله ولرو او پوه شو چې د پيوستون ضريب مناسب او کولای شو د  $y$  د متحول په مرسته متحول وټاکو او که چېرې مستقيمه کرښه ونلرو، کولای شو چې دغه کرښه په داسې يوه تگلاره چې د لږکيو ميتود اصغري سازي<sup>1</sup> مربعو په نامه يادېږي، په لاندې ډول په لاس راوړو.

فرض کوو چې د باشلو ټکو گراف (متفرقه ډياگرام يا

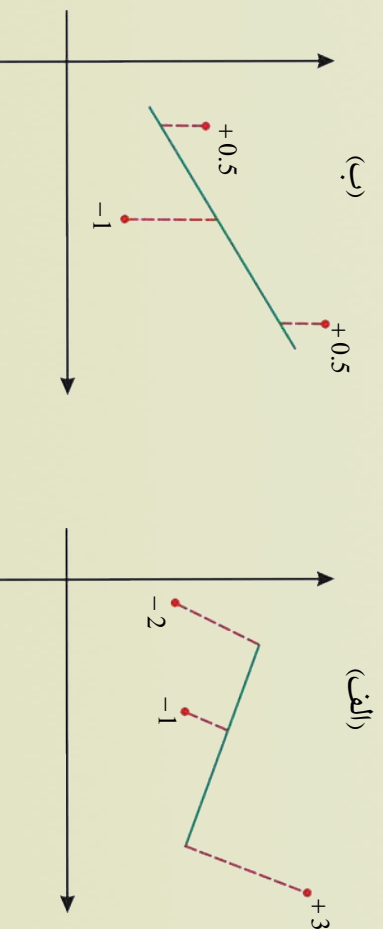
Scatter diagram) په دې ډول راکړل شوی وي.



او غواړو داسې يوه کرښه چې معادله يې  $y = ax + b$  وي، د ټکو له منځ څخه داسې تيره کړو چې ټولو ټکو ته نږدی وي. په دې تگلاره کې بايد په مناسب ډول د کرښې معادله داسې جوړه شي چې د صمغوي انحرافونو د درسم توان مجموع له مستقيمې کرښې څخه لږ تر لږه اصغري وي، منځ کې له فورمول څخه لاندې مثال په پام کې نيسو:

$x$	1	5	9
$y$	6	5	7

لاندې شکلونه د دغې ډوليا لپاره رسمو او د کرښو خطاوي له مشاهده څخه تشخيصوو.



<sup>1</sup> the method of least square -

ښکاره ده چې رسم شوي کرښه د (ب) په حالت کې په مرتبو د (الف) له حالته ښه ده.

په دواړو حالتونو کې د کرښو د خطاگانو الجبري جمع صفر ده.

د (الف) حالت:  $0 = 3 + (-1) + (-2) = 0$  د کرښې د خطاگانو الجبري جمع.

د (ب) حالت:  $0 = 0.5 + (-1) + (0.5) = 0$  د کرښې د خطاگانو الجبري جمع.

څرنگه چې په دواړو حالتونو کې د جمعي حاصل مساوي په صفر ده، نو له دې کبله وړای نشو چې کومه کرښه یوه مناسبه کرښه ده. ددې لپاره چې خطايي مثبت او منفي یو بل له منځه یوسي، نو هره کرښه وروسته له مربع کولو جمع کوو:

$$14 = (3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2 = \text{د خطاگانو د دویم توان مجموع}$$

$$1.5 = (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 = \text{د خطاگانو د دویم توان مجموع}$$

له دې کبله د کرښې د خطاگانو د دویم توان مجموع څرنگه چې درې) په حالت کې نظر له (الف) حالت څخه یې قیمت لږ دی، نو ویلی شو چې:

مناسبه کرښه هغه ده چې د خطاگانو د مربعگانو مجموع یې له نورو کرښو کمه وي، دغه راز کرښو ته د ریگریشن کرښې ویلي.

که چېرې د ریگریشن کرښې د مقدار او هغو مشاهداتو تر منځ د مقدارونو توپیر چې منځ ته راځي په  $\bar{y}$  وښو، په دې صورت کې د دویمو توانونو د مجموع د لا کوچني والي په خاطر په لاندې ډول عمل کوو:

$$\begin{aligned} \sum [y - (ax + b)]^2 &= \sum (y - \bar{y})^2 = \sum [y - (ax + b) + \bar{y} - \bar{y}]^2 \\ &= \sum (y - b - ax)^2 \\ &= \dots + (ay_2 + b - y_2)^2 + (ay_1 + b - y_1)^2 \end{aligned}$$

په دې حالت کې  $x$  او  $y$  ثابت،  $a$  او  $b$  متحولین دي.

پرتله له دې مونږ هغه تگلاره چې د  $a$  او  $b$  د محاسبې او په لاس راوړلو لپاره په کار لویږي، ورښو څو، یوازې د هغوي د محاسبې خطا په پام کې نیسو:

$$b = \frac{\sum y - a \sum x}{n} \quad \text{د } x \text{ معیاري انحراف}$$

د  $a$  او  $b$  د محاسبې دغه لاره چې د لږکیو مربعگانو تگلاري په نامه یادېږي.

**ډاډه:** د ریگریشن کرښه هغه وسیله ده چې د یو متحول د مقدار د وړاند وینې لپاره د بل متحول په حسابولو چې ورسره تړلی دی، د استفادې وړ ګرځي.

**مسئله:** لاندې ډیټا په پام کې ونیسئ.

$x$	1	2	3	4	5
$y$	4	3	2	1	0

د  $r$  د ریگریشن کورینه نظر  $x$  ته په لاس راوړئ.

**حل:** څرنگه چې:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3 \\ \bar{y} &= \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4+3+2+1+0}{5} = \frac{10}{5} = 2 \\ S_x^2 &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{2} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow S_x = \sqrt{2} \\ S_y^2 &= \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} \Rightarrow S_y = \sqrt{2} \\ \sum xy &= \frac{4+6+6+4+0}{5} = \frac{20}{5} = 4 \\ r &= \frac{\frac{1}{n} \sum xy - \bar{x} \cdot \bar{y}}{S_x \cdot S_y} = \frac{4 - 3 \cdot 2}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1\end{aligned}$$

له دې کبله:

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - b \cdot 3$$

$$a = r \frac{S_y}{S_x} = -1 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - (-1)(3) = 2 + 3 = 5$$

په دې ډول د ریگریشن معادله عبارت ده له:  $y = ax + b = -x + 5$

**پوښتنه**



که چیرې  $3 + 2x = y$  د  $r$  د ریگریشن معادله نظر  $x$  ته او د  $x$  اوسط مساوي په 2 راکړل شوي وي، د  $y$  اوسط څومره وي؟

## د اتم څپر کې مهم ټکي

د بدلون ضريب: د بدلون ضريب د معياري انحراف له اوسط څخه عبارت دی چې مطلق يې واحد عدد دی؛ لکه:

$$C.V = \frac{S}{\bar{x}} \text{ يا } C.V = \frac{\text{معياري انحراف}}{\text{اوسط}}$$

دغه ضريب ډېر ځلي د فيصلي په ډول بنودل کېږي چې د تحول د ضريب په نامه يادېږي.

$$C.V = 100 \cdot \frac{S}{\bar{x}} \text{ د تحول ضريب}$$

د بدلون ضريب د مثبتې ډولتيا لپاره تعريفېږي، په ياد يې ولرئ که چېرې ډولتيا سره مساوي وي، نو د پراگندگي ټول شاخصونه مساوي له صفر سره دي.

**په نورمال منحني کې پراگندگي:** نورمال منحني د احصايوي مجموعې يوه داسې توصيفي وسيله ده چې په نورمال منحني کې ډولتيا په نورمال توزيع او کثرت منحني کې متناظر پراته دي؛ نو رابنس عمده نقش لري، په حقيقت کې د دوو پارامټرو مشخص کيدل او معياري انحراف په نورمال توزيع کې په عمومي ډول مشخص او د هر ډول شاخص د محاسبي زمينه برباره ده.

**د نورمال توزيع شکل شاخصونه:** د اوسط او معياري انحراف په مرسته کولای شو د ليد څرنگوالی د کړيدلو (خمېدو) او پړسېدو (اوج) په ډول په ښه توگه څرگند او وړاندې کړو.

د کړيدلو شاخص د کړيدلو او پيوسټون ضريبونو په مرسته چې د اندازه کولو او اندازه کولو پکارېږي په لاندې ډول ليکل کېږي:

$$\alpha_3 = \frac{1}{n} \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3}{S^3}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{n} \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^3}{S^3}, \quad SK_{(p)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{S}$$

د پړسېدو (جگېدل) شاخص د پړسېدو د ضريب  $\alpha_4$  په مرسته اندازه او پرتله کېږي.

$$\alpha_4 = \frac{1}{n} \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4}{S^4}, \quad \alpha_4 = \frac{1}{n} \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^4}{S^4}$$

**څو متحوله ټولني:** په احصايوي څېړنو کې تر ټولو لويه موخه (هدف) وړاندوینه او د يو متحول ټاکل د بل متحول له مخې دی. کله چې د دوو شیانو ترمنځ اړيکې خپل زموږ مقصد وي، په حقيقت کې هدف يوه دوه متحوله ټولنه ده؛ لکه د يو غاز د حجم او فشار ترمنځ اړيکه د صحت او حرکت د ميران ترمنځ اړيکه، د کرنې او د حاصل د مقدار ترمنځ اړيکه او يا هم د يوې دايرې د شعاع او مساحت ترمنځ اړيکه چې ټولې دغه راز اړيکې دوه متحوله ټولني بيانوي. د آسانتيا لپاره معمولاً دوه يا څو متحولينو ترمنځ اړيکه د رياضي معادلو په مرسته وړاندې کوي.

**د پراگنده‌ګي ګراف:** د پراگنده‌ګي ګراف د رسمولو لپاره د وینا د مرتبو جوړو په شکل په یوه مستوي کي د قایمو مختصلانو په سیستم کي ښوول کېږي. کېدای شي د ټکو او پراگنده‌ګي ګراف په مرسته دري ټوله اطلاعات زموږ په اختیار کي راځي.

الف: آیا داسي نمونه چې د څېړنو ترمنځ اړیکه ښيي، شته او که نه؟

ب: د یو ډول اړیکي د شتون په صورت کي دغه اړیکه خطي ده او که نه؟

ج: که چېرې اړیکه خطي وي، نو څه ډول اړیکه ده؟

**پیوستون او د پیوستون ضریب:** پیوستون د متحولینو ترمنځ د اړیکو د مینلو درجه ده، کله کله دواړه متحولین په یوه لوري بدلون کوي یعنې  $x$  او  $y$  دواړه په یوه کرښه لوری او یا هم کوچني شي، چې پیوستون یې مستقیمه کرښه ده. که چېرې د دوو متحولینو اندازه یو د بل پر خلاف بدلون وکړي یعنې که چېرې  $x$  لوی شي یا کوچني کېږي، او یا هم برعکس صورت نیسي.

د پیژندنې ډېر ښه معیار د پیوستون شتون او نه شتون دی او حتا د خطي پیوستون ډول، جهت او میزان د پیوستون ضریب دی، چې د لاندې فورمول په واسطه ښوول کېږي:

$$r = \frac{1}{n} \frac{\sum xy - (\bar{x}\bar{y})}{S_x \cdot S_y}$$

په پورتنیو اړیکو کي  $\sum xy$  د  $x$  ډولنو او  $\bar{x}$  د ډولنو د ضرب د حاصل مجموع،  $\bar{x}$  د  $x$  ډولنو اوسط او  $\bar{y}$  د ډولنو اوسط دی، همداراز  $S_x$  د  $x$  ډولنو معیاري انحراف او  $S_y$  د ډولنو معیاري انحراف دی.

**د ریگریشن کوښښ:** ریگریشن (تخمیني) د تابع د یوه متحول له قیمت لاسته راوړل او سنجش څخه عبارت دی، چې د یو یا څو مستقلو متحولینو له ارزښت څخه په لاس راځي.

هغه معادله چې د متحولینو ترمنځ اړیکي افاده کوي، د ریگریشن معادلي په نامه یادېږي.

کو لای شو دغه معادله د ډېرو لږو مرعگانو د محاسبې په طریقه حساب او همدارنگه د  $a$  او  $b$  ضریبونه د دغې

$$\text{طریقي په مرسته په لاندې ډول په لاس راوړو:} \quad a = \bar{y} - b\bar{x} \quad , \quad b = r \frac{S_y}{S_x}$$

چې  $r$  د  $y$  معیاري انحراف او  $S_x$  د  $x$  معیاري انحراف دی، په داسي حال کي چې  $r$  د پیوستون ضریب،  $\bar{x}$  د  $x$  ډولنو اوسط او  $\bar{y}$  د  $y$  ډولنو اوسط دی.

## د خپرکي پوښتني



- 1- که چیرې په یوه ټولنه کې چې اوسط یې  $\bar{x} = 50$  او واریانس یې  $S^2 = 64$  سره وي، د بدلون ضریب  $\gamma$  چې له  $10 + 2x$  رابطي سره سم بدلون مومي خو دی؟
- 2- که چیرې د هر زده کونکي په نمره کې 20% نمرې ورنناتې شي، نو د نمره د بدلون په ضریب څه اغیزه کوي؟
- 3- د هغو ټولنو فیصدي چې په لاندې درکړل شوه منځني گانو کې پرته ده، ولیکي؟



- 4- لاندې اړیکو ته په پاملرنې وروایست چې کومه یوه له دغو اړیکو څخه یو متحوله، دوه متحوله او درې متحوله اړیکې دي.

الف: ستاسو د ټولگيالو د وزن اندازه؟

ب: د یو شی د عمومي مصرف او جنس ترومنځ اړیکه؟

ج: د یوې استوګنې د حجم، جگوالې او د قاعدې د مساحت ترمنځ اړیکې؟

- 5- د یو ټولگي د مصرف شویو ساعتونو د شمېر او د زد کونکو د نمره ترمنځ چې د 20% له مخې اخیستل شوی دی، د مرتبو جوړو په شکل په لاندې ډول دی:

(2,10) , (3,10) , (3,14) , (4,10) , (4,14)  
 (5,14) , (5,16) , (6,12) , (6,16) , (6,18)  
 (7,14) , (7,18) , (7,20) , (8,16) , (8,18)

د زده کونکو د مصرف شویو ساعتونو او نمره ترمنځ د اړیکو له مخې گراف رسم او خپلې پایلې وڅېړئ؟

6- مخالف ډیټا په پام کې ونیسئ:

$x$	1	1	2	3
$y$	1	5	4	2

په ورکړ شوي ډیټا کې د بیوستون ضریب حساب کړئ؟

7- که چیرې د بیوستون ضریب صفر ته نژدې وي، نو خطا جوړه، که لږه ده؟

8- که چیرې د بیوستون ضریب د  $1 +$  او  $1 -$  عدد ته نژدې وي، نو د  $\gamma$  د خطا په اړوند څه وایئ؟

- 9- د سروې له مخې چې د یوه ښوونځي په دوو 4 او B ټولگيو کې شوي ده، لاندې عددونه د کیلوگرام په حساب د زده کونکو د وزن لپاره راټول شوي دي:

A:	65	63	67	64	62	70	66	68	67	78	69	71
B:	68	66	68	65	69	66	68	65	71	67	68	70

د پاسنیو اعدادو په پام کې نیولو سره:

الف: د دوپټا د پراگندهگي گراف رسم کړئ؟

ب: د ارواندي مستقيمي کرښې معادله په لاس راوړئ او  $a$  او  $b$  وټاکئ؟

ج: اړونده مستقیمه کرښه نظر د ریگریشن معادلې ته رسم کړئ؟

10- که چیرې  $x$  او  $y$  سره بشپړ پیوستون او معکوس ولري، یعنې  $r = \sigma_x = \sigma_y$ ، نو د  $y$  نسبت  $x$  ته د ریگریشن خط کوم دی؟

1)  $y = -\frac{1}{2}x + b$

2)  $y = \frac{1}{2}x + b$

3)  $y = x + b$

4)  $y = -x + b$

11- د 20 تنو زده کونکو د ریاضي او فزیک د مضمون %20 د آزمونې پایلې چې په لاندې ډول ورکړ شوي، رسم کړئ؟

11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
زده کونکي											
12	10	16	6	10	6	16	18	12	8	18	د ریاضي نمرې
10	14	10	6	10	10	14	18	8	10	16	د فزیک نمرې

20	19	18	17	16	15	14	13	12			زده کونکي
12	14	14	6	12	18	16	10	12			د ریاضي نمرې
16	14	12	8	12	12	16	12	6			د فزیک نمرې

- د ریگریشن د کرښې معادله په لاس راوړئ؟

- آیا د دوو آزمونو د پایلو تر منځ اړیکې شتون لري؟

12- پر چگنبو د خوراک د مالگې د 5 او یو فیصده محلول اغیزې د یون پلازما پر میزان د هغوی په بدن کې په

لاندې جدول کې ثبت شوي دي؟

0	5	10	20	30	40	50					د مالگې په محلول کې د پټاپکېمو وخت
90	110	118	122	126	132	136					د یون پلازما میزان (mm)

- په پاسنی جدول کې متحولین وڅېړئ؟

- په یو ترتیبو متحولینو کې کوم یو خپلواک او کوم یو ناخپلواک متحول دی؟

- یو داسې گراف رسم کړئ چې د دواړو متحولینو تر منځ اړیکه وښيي؟

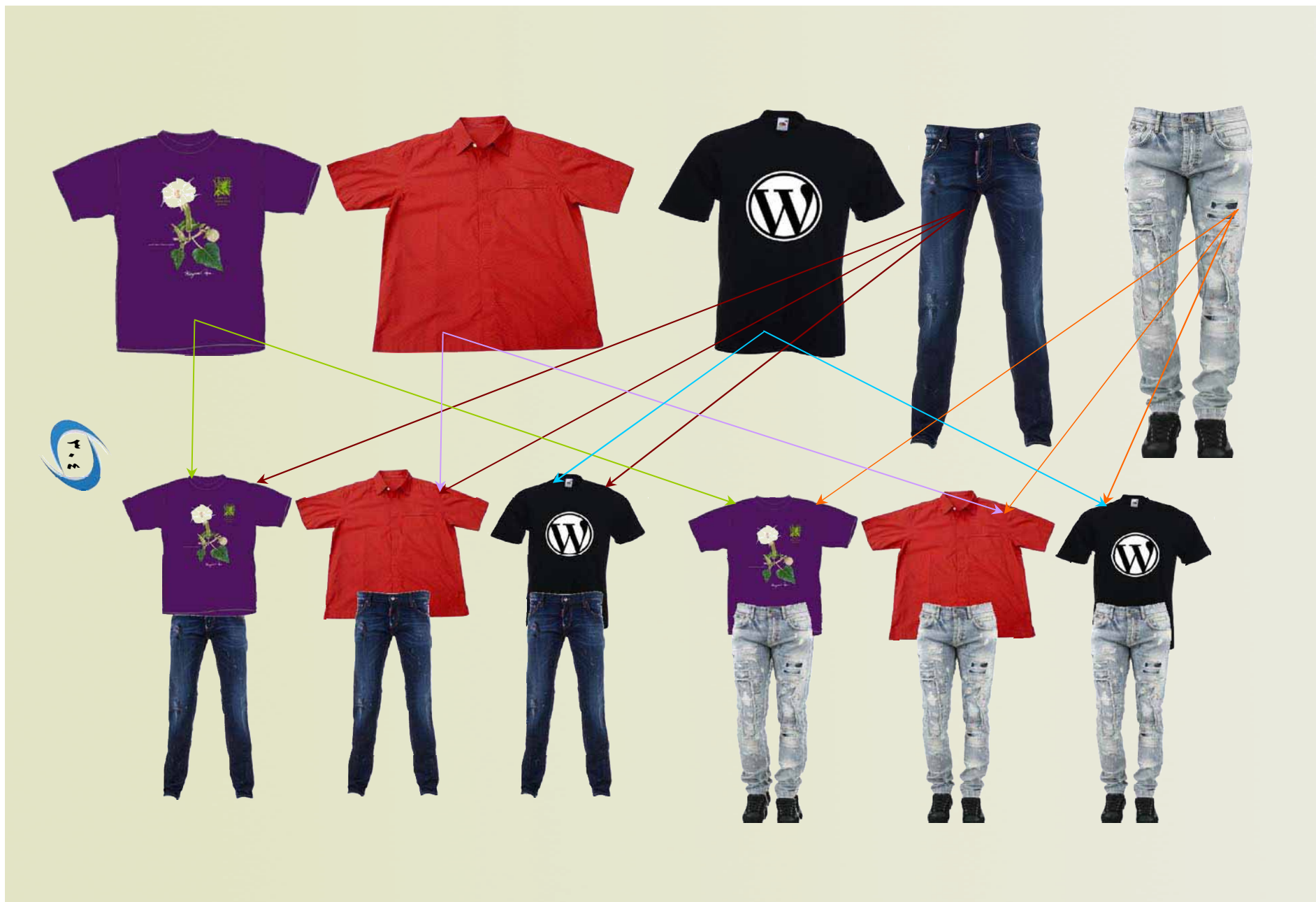
- د دې گراف په رسم کې خپلواک متحول په افقي محور وښایاست؟

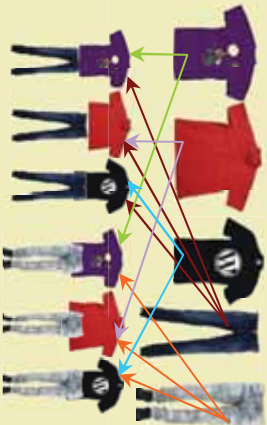




# فہم خپر کی احتمالات







## پرموټيشن يا ترتيب

### Permutation

که چیري دری بیلابیل کمیسونه او دوه پطلونونه ولرو،  
په څو ډوله کولای شو هغه سره جوړه جوړه  
واغونډو؟

#### فعالیت

- خپل درې تنه ملاگري و آزموی چې په څو ډوله کولای شي په یو کتار کې و درېزي؟
- له درې یو رقمي اختیاري عددونو څخه څو درې رقمي عددونه کولای شو جوړو کړو.
  - له پررتیو عددونو څخه چې پورته مو د درې رقمي عددونو د جوړولو لپاره ټاکلي دي څو درې رقمي عددونه جوړولای شو، په دې شرط چې په عددکې رقم تکرار نه وي.
  - د پاسني فعالیت د اول، دویم او دریم پاراگراف پایلې سره پرتله او وولای چې څه اړیکې سره لري؟
- له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

#### پایله

- د  $n$  شیانو د ترتیب د شمیر ډولونه چې سره خوا په خوا راښيي عبارت دي له:
- که تکرار مجاز نه وي مساوي په  $2 \cdot 1 \dots (n-1) \cdot n$  سره دي.
  - که تکرار مجاز وي مساوي په  $n \cdot n \cdot \dots \cdot n$  سره دي.

تعریف: د یوه طبیعي عدد لپاره د  $(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)$  حاصل ضرب په لنډه ډول په  $n!$  - فکتوریل) ښودل کېږي. او د تعریف له مخې  $1! = 1, 0! = 1$  سره دي.

2: د  $n$  عنصرونو د ترتیب ډولونه چې د  $n$  غړو د پرموټیشن (Permutation) په نامه هم یادېږي په  $P_n$  سره ښودل کېږي. که چیرې تکرار په ترتیب کې ناشوني او یا مجاز نه وي.

نو د پاسني تعریف په پام کې نیولو سره  $P_n = n!$  سره کېږي.

که چیري په ترتیب تکرار شوني او یا مجاز وي، نو په دې صورت کې د ترتیب ډولونه او یا پرمختلوننه په

$$P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!}, \quad (k \leq n)$$

لومړی مثال :

(i) : د لاندې عددونو قیمت پیدا کړئ.

$$3!, 8!, 5!$$

(ii) : د هر یو طبیعي عدد لپاره وښیئ چې  $n!(n-1)!$  سره ده؟

حل (i) : د تعریف له مخې لرو چې :

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$$

$$(ii) \text{ پوهېږو چې : } n!(n-1)! = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

**دویم مثال :** د آزمونې لپاره په یو سالون کې 16 زده کوونکي له بیلابیلو ټولګیو د سونې آزمونې لپاره راغونډ شوي دي.

په څو ډوله کولای شو د 16 میزونو تر شا په لیکه کښینئ چې د هر یو د ځای تغیر د ناستې یو حالت وشمېرل شي.

**حل :** پوهېږو چې ځواب 16! دي چې تکرار پکې ناشونی دی. که چیري تکرار مجاز وي، په دې صورت کې مسئله عبارت له ترتیب د n شیانو چې k عدده یې د مثال په ډول په تکراري ډول رابکارېږي، نو په دې

$$\text{صورت کې لرو چې : } P_n^k = \frac{n!}{k!}, \quad (k \leq n)$$

مثلاً په پانتي مثال کې، که چیري 16 زده کوونکي وغواړي خپل ځایونه په خپلو لاسي بکسونو ونيسي او له دې څخه 4 تنه یو ډول لاسي بکسونه ولري، نو لرو چې :

$$P_{16}^{(4)} = \frac{16!}{(16-4)!} = \frac{16!}{12!} = 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 = 43680$$

که چیري د دې مسئلې عمومي حالت په پام کې ونیسو، نو په دې صورت کې د  $P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_n)}$  ترتیب یا پرمختلوننه چې په هغه کې تکرار مجاز نه او په حقیقت کې،  $m$  گروهه شیان چې هر یو یې په ترتیب سره د  $k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!$  یوه اندازه سره یو شوشان دي، لرو چې :

$$P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_n)} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot k_3! \cdot \dots \cdot k_n!}$$



دریم مثال: له پنځه (4, 5, 5, 5) عددونو څخه په څو ډوله کولای شو، پنځه رقمي عددونه جوړ کړو.

حل: پوهیږو چې د فورمول له مخې د عددونو شمیر عبارت دی له:  $P_3^{(2,3)} = \frac{5!}{21 \cdot 3!} = 10$

چې په خپله عددونه په لاندې ډول دي:

45545, 45554, 54554, 55445,  
45455, 54455, 55445, 54545

**څلورم مثال:** د سبا کاروان ترانسپورتي شرکت د کابل جلال آباد په لاین کې 5 لوی سرویسونه او د جلال آباد- کنړ په لاره 3 مېني بسه لري. په څو ډوله کولای شو، د نوموړي ترانسپورت په سرویسونو او مېني بسونو کې له کابل- کنړ ته سفر وکړو؟

**حل:** پوهیږو له کابله تر جلال آباد پورې د نوموړي شرکت له سرویسونو څخه یوازې 5 امکانه وجود لري، چې د هر یوه امکان په وړاندې 3 امکانه د مېني بس د انتخاب چانس له جلال آباد څخه تر کنړه، د نوموړي شرکت وجود لري.

په دې ډول ټول امکانات مساوي دي په:  $5 \times 3 = 15$

**پنځم مثال:** د 2, 7, 8 او 5 عددونو په مرسته څو درې رقمي عددونه لیکلای شول (تکراره) جوړولای شو.

**حل:** دې خبرې ته په پاملرنې سره چې عددونه درې رقمي دي، نو درې خالي ځایونه لرو، چې په لاندې ډول د هغو ډکول په عددونو امکان لري:

د امکانانو ډولونه	2	3	4
د دریم رقم ځای			
د لومړي رقم ځای			

پوهیږو چې د لومړي رقم د ځای د ډکولو لپاره 4 امکانه شتون لري، په دې ډول د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره 3 امکانه پاتې کېږي، ځکه چې له څلور عددونو څخه یو د لومړي رقم لپاره نیول شوی دی، او بلې خواته څرنگه چې تکرار مجاز نه دی، نو یوازې 3 امکانه د دویم رقم د ځای د ډکولو لپاره شته او د دریم رقم د ځای د ډکولو لپاره دوه امکانه شته چې ټول حالتونه عبارت دي له:  $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$  او د فورمول له

$$P_4^{(3)} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$$



1. خو پنځه رقمي عددونه وجود لري چې لومړی رقم يې 2 او وروستی رقم يې مساوی په 4 وي، په عدد کې هېڅ رقم تکراري نه وي؟
2. په څو ډوله 10 نمره کولای شي، د يوه گردی ميز په شاوخوا کښيني چې له دې جملې څخه 2 تنه غواړي په هر حالت کې سره خوا په خوا کيني.
3. په څو ډوله کولای شي 3 سره تيوبونه، 2 آسماني او څلور زير تيوبونه سره خوا په خوا په يو کتار کې کېږدو. (د هم رنگه تيوبونو په کتار کې د هم رنگه تيوبونو ځای بدلول بل حالت نه شمېرل کېږي.)



## ترکیب یا کمبینیشن

### Combination

د 1 او 2 عددونو ترکیب څه دی؟

د 1 او 2 عددونو ترتیب کوم دی؟

ستا سو له نظره ترکیبونو او ترتیبونو څه سره توپیر لري؟

مخکي له دې چې لاندې فعالیت سرته ورسوو، لاندې تعریف چې

په فعالیت کې به له هغه څخه کار واخلو په پام کې نیسو.

### تعریف

د  $\binom{n}{k}$  لیکلورډ چې  $n$  د  $k$  له پاسه ویل کېږي او په حقیقت کې د ښوم د ضریبونو په نامه یادېږي چې  $k$

د ښوم توان ښيي او په لاندې ډول دی:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n, \quad k \wedge n \in \mathbb{N}$$

### فعالیت

د پاسني تعریف په پام کې نیولو سره، د ښوم د  $(a+b)^2$  دوه حدې په انکشاف کې د ښوم ضرایب چې

مساوي په  $\binom{2}{k}$  سره دي، پرته کړئ:

$$(a+b)^2 = \square a^2 + \square ab + \square b^2$$

- د ښوم ضریبونه چې په پاسني انکشاف کې، په چوکاټونو کې نیول شوي، د  $\binom{2}{k}$  له  $k=0, 1, 2$  له قیمتونو سره پرتله کړئ؟

- څرنگه چې  $1 = \binom{2}{2} = \binom{2}{0}$  سره دي، ویلای شئ چې د هر  $n \in \mathbb{N}$  لپاره  $\binom{n}{n}$  او د  $\binom{n}{0}$  قیمتونه هم سره برابر او مساوي په 1 دي؟

- د " $(a+b)^n$ " په انکشاف کې د ښوم د ضریب د دویم حد قیمت د  $\binom{n}{k}$  له مخې حساب کړئ.

- د  $\binom{4}{k}$ ،  $k=0, 1, 2, 3, 4$ ، قیمتونه د ښوم د انکشاف له کومو ضریبونو سره مساوي دي، وپي لیکي؟

له پاسني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

**پایله:** د هر  $n$  او  $k$  طبیعي عددونو لپاره، په داسې حال کې چې  $0 \leq k \leq n$  سره دی لرو:



$$(i) \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1$$

$$(ii) \quad \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r}$$

(iii) له  $n$  څخه د  $r$  شیانو ترکیونه عبارت د یو  $n$  عنصره سټ د ضرور د ترکیب یا کمپینیشن د  $r$  له  $n$

شیانو څخه ده چې په  $C_r^n$  سره ښودل کېږي او قیمت یې عبارت دی له:  $C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

لومړی مثال: په یوه ښوونځي کې د لسم 7 ټولګي شتون لري. د ښوونځي اداره غواړي چې لسم ټولګي له 7 تنو اول نمره گانو، 4 تنه و ټاکنې، په څو ډوله دغه انتخاب کېدلای شي؟

حل: لیدل کېږي چې له 7 تنو څخه د 4 تنو په ټاکنه کې هېڅ ډول برلاسي او ترتیب په پام کې نشته؛ یعنې دا چې، مهمه نه ده زده کوونکي د کوم ټولګي دي؛ نو دا ډول مسئله عبارت له ترکیب څخه ده چې له 7

$$\text{تنو څخه } 4 \text{ تنه و ټاکو؛ نو لرو چې: } C_4^7 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{6} = 35$$

دویم مثال: که له 7 تنو زده کوونکو 4 تنه د لسم ټولګي د زده کوونکو د متحدې د مشرانو لپاره، داسې چې لومړی تن رئیس، دویم معاون، دریم منشي او څلورم تن د مالي مسؤل په توګه و ټاکل شي، په دې صورت کې لرو چې:

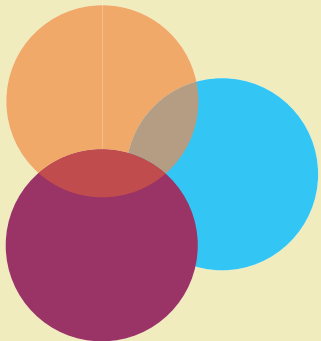
څرنگه چې لیدل کېږي په دې ټاکنه کې ترتیب مهم دی، ځکه چې د ABCD د انتخاب ترتیب په داسې حال کې چې A رئیس، B معاون، C منشي او D مالي مسؤل دی، په داسې حال کې چې د CABD په ترکیب کې C رئیس، A معاون، B منشي او D مالي مسؤل ګڼل کېږي.

دا ډول مسئله عبارت له ترتیب یا پرموټیشن څخه ده چې له 7 تنو څخه د 4 تنو په ترتیب انتخاب دي؛ یعنې لرو چې:  $P(7, 4) = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 120 \cdot 7 = 840$

### پوښتنې

- 1- له اوو حرفونو څخه لکه A, B, C, D, E, F او G څو 4 حرفي کلمې، پرته له تکراري حرفه جوړولای شو؟
- 2- د والیال په یوه لیګ کې، 7 تیمونه ګډون لري. په څو ډوله تیمونه کولای شي لومړی، دویم او دریم مقام لاس ته راوړي؟
- 3- له 4 نارینه او 6 مېرمنو څخه 2 نارینه او 3 ښځي داسې ټاکو چې نارینه په کې یو رئیس او دویم بې مالي مسؤل وي.





## ترکیب

### Combination

آيا پوهبريۍ چې اصلي رنگونه كوم دي؟  
 د نازنجي او بنفش رنگ تركيب كوم رنگ دی؟  
 ستاسو په نظر ژبر رنگ د كومو رنگونو له تركيبه جوړېږي؟  
 آسماني رنگ، بنفش رنگ، نازنجي رنگ.

### فعاليت

د خپلو ۵ تنو ټولگيالو څخه ۳ تنه په خو ډوله ټاکلی شی؟

- موضوع په عملي توگه په ټولگي کې تجربه او حالتونه يې و شمېری؟
- که چېرې له ۵ تنو زده‌کوونکو څخه ۳ تنه داسې و ټاکل شي، چې لومړی کس سرگروپ، دویم د سرگروپ مرستيال او دریم تن منشي وي، د درې تنو گروپ، د ټاکلو ټول ډولونه خو دي؟
- د پورتنۍ فعاليت لومړی او وروستی جزء يو تر بله څه توپير لري؟
- آيا فکر کولای شئ د پاسنيو گروپونو د ټاکلو شمېر مساوي له كوم عدد سره دی؟  
 له پاسني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

**پايله:** دلته د  $k$  په شمېر غړو يو گروپ له يو ست څخه چې  $n$  غړي لري، په عمومي ډول په دوه ډوله صورت نيسي چې په يوه کې ترتيب په پام کې دی، خو په بل کې ترتيب مهم نه شمېرل کېږي، يوازې د هغوي ترکیب د پام وړ دی.

په دې ترتيب د يو ترکیب يا کمپنیشن چې  $k$  شيان له  $n$  بېلابېلو شيانو څخه مطلب دی، چې په لاندې تعريف کې بيانېږي.

**تعريف:** د  $k$  شيانو ترکیب له يوه  $n$  عنصره ست څخه چې په  $C_k^n$  ښودل کېږي او عبارت له ترکیبي امکانانو څخه دی چې د  $k$  په شمېر غړي يې پرته له ترتيب څخه ټاکل کېږي، عبارت دی له:

$$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n$$

لومړی مثال: له 30 تنو څخه د 4 تنو ټاکل چې ترتیب په کې مهم نه دی، حساب کړئ؟  
 حل: پوهېږو چې مسئله عبارت له 30 تنو څخه د 4 تنو چې د فورمول له مخې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_4^{30} = \binom{30}{4} = \frac{30!}{4!(30-4)!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26!}{26! \cdot 4!} = 27405$$

دویم مثال: له  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  سټ څخه څو 3 عضوه فرعي سټونه په لاس راځي؟  
 حل: پوهېږو چې مسئله په حقیقت کې له 5 غړو څخه د 3 غړو ټاکل دي چې شمیر یې په لاندې ډول په لاس راځي:

$$C_3^5 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$$

### پوښتني



- 1- که چېرې په یوه آزمونه کې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتنو ته ځواب مطلوب وي، په څو ډوله کولای شو چې له 10 پوښتنو څخه 7 پوښتني د حل لپاره وټاکو؟
- 2- په یوه مستوي کې پنځه ټکي چې په یوه کرښه پراته نه دي، په پام کې ونیسئ د دې ټکو په نښلولو سره په څو ډوله مثلث جوړولای شو.
- 3- که چېرې  $C_n^2 - P(n, 2) = 36$  سره وي، د  $n$  قیمت پیدا کړئ؟



## تبدیل

### Variation

په یوه المپیا کې له 10 ورزشي ټیمونو څخه په څو ډولونو د سرو زرو، سپینو زرو او برونزو ملوالونه شتون لري؟

### فعالیت

- د  $n$  بیلابیلو شیانو په پام کې نیولو سره د  $k$  په شمیر شیان ټاکو، د هغوی مجموعي شمیر څو دی؟
- که چیرې د  $k$  شیانو په ټاکلو کې ترتیب داسې وي، چې په هغوی کې لومړی، دویم، دریم او ... شتون ولري، ټول مجموعي حالات به څو وي؟

• د پاسنیو دواړو ډولونو ترمنځ توپیر په کومه اندازه ده؟

**پایله:** د هغو ترکیبونو شمیر چې د  $k$  غړو د پرله پسې ترتیب په انتخاب کې له  $n$  غړو څخه په پام کې وي، نو په دې صورت کې یې شمیر مساوي په  $k! \cdot C_k^n$  سره کېږي.

دغه ترکیب د ورشش Variation یا تبدیل په نامه یاد او په  $V_k^n$  سره ښودل کېږي چې عبارت دی له:

$$V_k^n = k! \cdot C_k^n = k! \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \Rightarrow V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

**مثال:** څو امکانه وجود لري چې په یوه انتخابي غونډه کې له 30 ټوگرونو کونکو څخه 4 تنه د مشرتابه لپاره په داسې حال کې چې یو تن رئیس، یو لومړی مرستیال، یو دویم مرستیال او څلورم تن د منشي په توګه دنده ترسره کړي؟

**حل:** مسئله په حقیقت کې د 4 ټو تبدیل له 30 ټو څخه ده، چې د تعریف له مخې له لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{30 \cdot 27 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 26!}{26!} = 657520$$

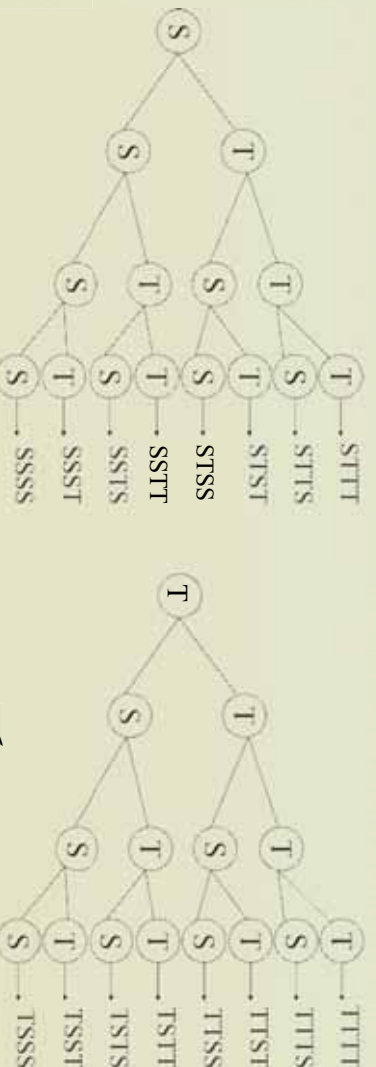
پورتي حالات چې تراوسه مو د ترتیبونو، ترکیبونو او تبدیلیونو لپاره تر بحث لاندې و نیول په لاندې جملو کې راټول شوي دي.

د ټاکنو ډول $k$ غړي له $n$ غړو	د امکاناتو شمیر
څخه	پرتله له تکراره $n \geq k$
ترتیب یا پرموتیشن	له تکرار سره $n \geq k$
ترکیب یا کمینیشن	
تبدیل یا ورشش	



- 1- په یوه ورزشي سیالی کې د فوټبال 12 ټیمونه، په څو ډوله لومړی، دویم او دریم مقام گڼلی شي؟
- 2- د بیورولسم ټولگي له 20 تنو زده کوونکو څخه په څو ډوله 2 تنه د ټولگي د استازي او د استازي د مشر مرستیال په توگه ټاکلی شو؟

**مثال:** د یوې سکې په اچولو سره چې د راټگ امکان یې، شیر یا خط ممکن دی او د هرې خوا د راټگ احتمال یې مساوي په  $\frac{1}{2}$  دی، په پام کې ونیسئ، که چیرې سکۀ 2 ځلې، درې ځلې، شپږ ځلې، اته ځلې او یا 16 ځلې وخور څو، پوهېږو چې د هم چانسو لومړنیو پېښو په نمونه یي فضا کې په یوه ونښیز گراف کې لاندې حالت لرو: (شیر = S او خط = T) دی.

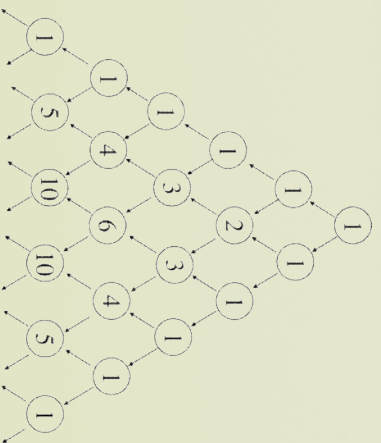


د پاسني مثال د شیر او خط د راټگ احتمال په یوه ډوه، درې او څلور ځلې اچولو کې په لاندې جدول کې راټول شوي دي.

د سګې غورځوول	هیڅ ځل		یو ځل		دوه ځله		درې ځله		څلور ځله	
	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال	خط	احتمال
د خط دراتګ شمېر	0	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{16}$
					1	$\frac{2}{4}$	1	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{4}{16}$
	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{2}{4}$	2	$\frac{3}{8}$	2	$\frac{6}{16}$		
			2	$\frac{1}{4}$	3	$\frac{1}{8}$	3	$\frac{4}{16}$		
						4	$\frac{1}{16}$			

که چیرې جدول ته په څېر سره پاملرنه وکړئ، د هر وار د احتمال د کسرونو په صورت کې یو نظم وینو چې د بنیوم په انکشاف کې په ترتیب سره د حدودو ثابت غړي دي چې د لومړي ځل لپاره د پاسکال له خوا راوپیژندل شول او تر اوسه د هغه په نامه یادېږي.

دغه نظم مثلاً په مخامخ مثلث کې په یوه لیکه کې اعداد د کښې او ښي خوا د عددونو سره په پورته لیکه کې له جمعي لاس ته راغلي دي.



په دې ډول کولای شو چې مثلث ته تر پینځه پورې دوام ورکړو، چې که چیرې هغوی د یو دوه جمله‌يي له انکشاف سره پرتله کړو، لکه د راکړل شوي پاسکال مثلث عدونه دي؛ مثلاً پاملرنه وکړئ چې د دوه

جمله‌بني په انکشاف کې له هغو عددونو څخه مو حلقه تاو کړې ده د مثلث له اعدادو سره چې حلقه تړي

تاو شوي ده يو شان ده:

$$\begin{aligned}
 (a+b)^0 &= \textcircled{1} && \textcircled{1} \\
 (a+b)^1 &= \textcircled{1}a + \textcircled{1}b && \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{1} \\
 (a+b)^2 &= \textcircled{1}a^2 + \textcircled{2}ab + \textcircled{1}b^2 && \textcircled{1} \quad \textcircled{3} \quad \textcircled{3} \quad \textcircled{1} \\
 (a+b)^3 &= \textcircled{1}a^3 + \textcircled{3}a^2b + \textcircled{3}ab^2 + \textcircled{1}b^3 && \textcircled{1} \quad \textcircled{4} \quad \textcircled{6} \quad \textcircled{4} \quad \textcircled{1} \\
 (a+b)^4 &= \textcircled{1}a^4 + \textcircled{4}a^3b + \textcircled{6}a^2b^2 + \textcircled{4}ab^3 + \textcircled{1}b^4 && \textcircled{1} \quad \textcircled{4} \quad \textcircled{6} \quad \textcircled{4} \quad \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

چې دغه ضریبونه د  $(a+b)^n$  په انکشاف کې  $n$  د  $k$  له پاسه د ضریبونو استعمال په لاندې ډول لیکلی شو:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

د "  $\sum$  " علامه د پاسني مجموع لپاره استعمال شوې ده.

په دې ډول د خط راتللو احتمال په  $k$  -امه مرتبه کې عبارت دي له:  $P = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$  (خط راتگ)

**پوښتنې**

1. د فوټبال په یوه سیالي کې 12 ټیمونه گډون لري، په څو ډوله کولای شو گټونکي لومړي، دویم او دریم مقام ته وټاکو.
2. د بیورلسم ټولگي له 20 تنو زده کورونکو څخه په څو ډوله دوه تنه، د ټولگي د استازي او د استازي د مرستیال په توگه وټاکو.



**پايله:** په يوه ناڅاپي تجربه کې چې د نمونې فضا غزوي يې په مساوي احتمال په تجربه کې بيا د تکرار وړ وي، نو د تجربې په  $n$  ځله تکرار کې د بېنوم د انکشاف  $k - m$  حد کې لاندې احتمال لري:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

پورتنۍ بېنوم په  $B(n, p, k)$  بنسودل کېږي، د بزنولي د برابرلم د احتمال په نامه يادېږي او ليکو:

$$B(n, p, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

**مثال:** له  $n$  تنو څخه د 10 تنو په شمېر په ناڅاپي ډول ټاکو، د  $k$  اتنو انتخاب شوو خلکو له جملې څخه

2 تنه ټاکو، پيدا کړئ د دې احتمال چې دواړه تنه په يوه ورځ زېږېدلي وي. ؟  $P(k \leq n) = ?$

**حل:** په دې ډول د  $\Omega$  په نمونېي فضا کې داسې فرضو چې د هرې ورځې احتمال  $\frac{1}{365}$  او د زېږېدنې ورځ د سوال وړ ده نه، د زېږېدنې کال.

په دې ډول  $\Omega$  په نمونېي فضا کې ټول امکانات له 365 ورځونه څخه د  $k$  شمېر لپاره عبارت دی له:

$$|\Omega| = (365)^k$$

په دې ډول اوس که چيرې د  $A$  ناڅاپي پېښه چې لږترلږه دوه تنه په يوه ورځ زېږېدلي وي، په ساده ډول داسې د محاسبې وړ ده، چې د  $A$  د حادثې مکمله په پام کې نيسو، په دې ډول  $\bar{A}$  عبارت له هغې ناڅاپي پېښې څخه ده چې  $k$  تنه په بېلابېلو ورځو کې زېږېدلي دي. په دې ډول  $\bar{A}$  عبارت د  $k$  پرومپشن له 365

$$P(\bar{A}) = (365, k) = \frac{365!}{(365 - k)!}$$

$$\text{په دې ډول: } P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{365!}{(365 - k)!} = 1 - \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|}$$



وښیئ چې:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \quad (I)$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n \quad (II)$$





## دوه جمله يي احتمال

آيا کولای شو چې د هرې نمونېي فضا پایلي په دوه ناڅاپي پېښو چې له یو بل سره هېڅ ګډ عنصر نه لري، ترتیب کړو. موضوع د سټ د تیوري له مخې په یوه اختیاري نمونېي فضا کې، دوه ناڅاپي پېښو ته چې اتحاد یې نمونېي فضاوي په مثال کې یې تشریح کړی.

### فعالیت

- د هغو تجربو څخه چې تر اوسه یې پېژنئ یا دونه وکړئ او یوه نمونېي فضا د دوه اتفاقي یا ناڅاپي پېښو په اړایه چې ټوله نمونېي فضا یې یوازې دوه غړي ولري.
  - آیا هغه ناڅاپي تجربې چې نمونېي فضاګانې یې له 2 څخه زیات غړي لري. کولای شو په داسې نمونېي فضاګانو واورو چې یوازې 2 غړي ولري؟ مثال راوړئ.
  - په عمومي ډول څه ډول کولای شو چې یوه نمونېي فضا چې ډیر غړي لري، په یوه داسې نمونېي فضا چې 2 غړي لري، واورو؟
  - که چیرې د دا ډول فضاګانو د یو غړي د پېښې احتمال  $P$  وي، د بلې پېښې د احتمال قیمت به څو وي؟
  - که چیرې تجربه  $n$  ځلې سرته ورسوو، او د  $k$  په شمیر له  $n$  ځلې ( $0 \leq k \leq n$ ) وړل او نور یې پایلو لري، د  $k$  ځلې بریالیتوب ( $P$ ) په  $n$  ځلې تکرار کې پیدا کړئ؟
- له پورتنی فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:
- پایله: د هرې ناڅاپي تجربې نمونېي فضا کولای شو چې په داسې یوې نمونېي فضا واورو چې دوه غړي ولري.
  - که چیرې د دا ډول نمونېي فضا د یو غړي احتمال ( $P$ ) وي، نو هرو مرو د بل حالت احتمال  $1 - P$  او پایل دی.
  - که چیرې دا ډول تجربې  $n$  ځلې تکرار شي، نو د  $k - m$  ځلې وړل په  $n$  ځلې تکرار کې او د پایلو احتمال به  $q = 1 - p$  سره دی، یعنې لرو چې:
- $$P_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n$$

**لومړی مثال:** پاملرنه وکړئ چې که چیرې په یوه تجربه کې د وړلو احتمال  $\frac{1}{2}$ ، د بایللو احتمال هم مساوي په  $\frac{1}{2}$  سره وي، په دې ډول ناڅاپي پیښو کې پورتنی اړیکه په لاندې ډول حسابېږي:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

پورتنی پایله د یوې تجربې په 11 ځله تکرار کې چې له هغې جملې څخه  $k$  ځلې یې وړل وي، یوې دوه عنصره نمونه یې فضا ته وڅیړئ؟

**دویم مثال:** په یو 5 اولاده فامیل کې، د دې احتمال چې له اولادونو څخه 2 تنه هلاکان او پاتې نښوني وي، څو دی؟

**حل:** که چیرې د اولادونو د هلاک او نښلی زېږد برابر په پام کې ونیسو لرو چې:

څرنگه چې په دې مثال کې  $p = \frac{1}{2}$  او  $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  سره دی، نو لیکلای شو:

$$\binom{5}{2} \frac{10}{2^5} = \frac{10}{16} = 0.3125 = 31.25\%$$

د دې احتمال چې دوه هلاکان او درې نښوني وي.

**درېم مثال:** درمل یوه دانه 6 ځلې غورځوو، د دې احتمال پیدا کړئ چې په 4 ځلې غورځېدو کې راغلي څارونه له دريو څخه لږ وي؟

**حل:** که چیرې له 3 څخه لږ راتلل حالت وړل په پام کې ونیسو؛ نو:

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.3333 = 33.33\%$$

$$q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = 0.6666 = 66.66\%$$

$$\binom{6}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{20}{243} = 0.0823 = 8.23\%$$

د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدو کې له 6 ځلې څخه، څارونه له 3 څخه لږ وي)

**څلورم مثال:** يوه فائزي سکه داسې جوړه شوې ده چې د خط راتلو احتمال يې مساوي په  $\frac{1}{3}$  وي، که

چيري دغه سکه 4 ځلي وغورځول شي، د دې احتمال چې لږ تر لږه 3 ځلي شپږ راشي، مطلوب دی.

**حل:** که چيري د سګې د خط راتلو حالت ته ورل او احتمال يې  $P$  په پام کې ونيسو، نو د خط د نه

راتلو يا شپږ راتګ مساوي په  $1 - P$  سره دی؛ يعنې:  $1 - p = \frac{1}{3} p$

له دې څخه  $p = \frac{3}{4}$  او  $q = \frac{1}{4}$  په لاس راځي:

$$\left\langle \begin{array}{l} \text{د دې احتمال چې په 4 ځله غورځېدو کې} \\ \text{لږ تر لږه 3 ځله شپږ راشي} \end{array} \right\rangle = \binom{4}{3} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^3}_{\text{3 ځلي شپږ}} + \underbrace{\binom{4}{4}}_{\text{1 ځل خط}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^4}_{\text{4 ځلي شپږ}} = \frac{3}{64} + \frac{1}{256} = \frac{13}{256}$$

**پنځم مثال:** يوه نورماله سکه غوځولې وغورځوو چې لږ تر لږه د خط راتلو احتمال يې له 0.99 څخه ډېر

وي؟

**حل:** داسې فرضوو چې سکه  $n$  ځلي غورځوو د دې احتمال چې لږ تر لږه يو ځل سکه خط راشي مساوي

ده په:

(د هر  $n$  ځلي شپږ راتګ احتمال)  $1 - 1 = 1$ ، لږ تر لږه يو ځل خط راتلو احتمال

$$= 1 - \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

په دې ډول ددې شرط  $0.99 > 1 - \frac{1}{2^n}$  يا  $0.01 < \frac{1}{2^n}$  سره دی چې  $n \geq 7$  سره کېږي.

په دې ډول بايد سکه 7 ځلي وغورځوو چې لږ تر لږه يو ځل خط راشي، احتمال به يې له 0.99 څخه لوي

وي.



يوه سکه خو څله غورځوو، د دې احتمال پيدا کړي چې:

- (i) په 4 څله غورځيدو کې، 2 ځلې خط راشي.
- (ii) په 6 څله غورځيدلي، 3 ځلې خط راشي.
- (iii) په 8 څله غور ځيدو کې، 4 ځلې خط راشي.
- (iv) فکر وکړئ چې که سکه  $2n$  ځلې وغورځول شي او  $n$  ځلې خط راشي، د  $n$  په ډېریدلو، د  $P$  بدلون په څه ډول دي؟

## د څپرکي مهم ټکي

فکتوریزل: د هر طبعي  $\Omega$  عدد لپاره د  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  حاصل په لنډه ډول په  $n!$  فکتوریزل) ښودل کېږي، د تعريف له مخې  $0! = 1$  سره دی.

پرموټېشن يا توټېب: د  $\Omega$  غړو ترتیب په  $P_n$  ښودل کېږي که چېرې:

- په ترتیب کې تکرار مجاز او ممکن نه وي:  $P_n = n!$

خو که چېرې تکرار مجاز وي، د ترتیبونو شمېر مساوي په  $P_k$  سره ده او داسې معنا ورکوي چې  $k$  ځلي په  $\Omega$  ځلي ترتیبونو کې تکرار وجود لري، چې د پورتي حالت په پام کې نیولو سره ټول حالتونه مساوي دی

$$\text{په: } P_k^n = \frac{n!}{k!}, \quad k \leq n$$

سره، د ضربونو لپاره داسې صورت نیسي:  $n, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$ ،  $k$  له پاسه، د  $\binom{n}{k}$  د  $n$ ،  $k$  له پاسه، د بینوم هغه ضربونه دي چې  $k$  د بینوم د توان په ټاکلو

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad r \leq n$$

- له  $\Omega$  شیانو څخه د  $T$  شیانو ترکیبونه په:

ورژن یا نښلولونه: په ترتیبونو کې چې پر له پسې ترتیب د  $k$  انتخابي غړو له  $\Omega$  غړو څخه مطرب وي، په نامه دی،  $\Omega$  په  $k$  بډیلونو یاد او لیکو:

$$V_k^n = k! \cdot C_k^n = k! \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$\text{د بینوم قضیه: د } (a+b)^n \text{ دو جملېني انکشاف عبارت دی له: } (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

د یوې تجربې په  $n$  ځلي تکرار کې، چې هر حالت یې  $p$  او د  $q=1-p$  احتمال لري.

د  $k$ -ام ځلي وړلو یعنی  $p$  له  $n$  ځلي څخه او نور پاتې حالتونه چې بډیول گڼل کېږي؛ یعنی  $q=1-p$  سره دي او صورت نیسي:

$$\left\langle \begin{matrix} \text{د } k \text{ ځلي وړلو د احتمال قسمت د تجربې} \\ \text{د } n \text{ ځلي په پای کې} \end{matrix} \right\rangle = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n$$



## د څپرکي پوښتني

1- د لاندې عددونو سټ په پام کې ونیسئ:

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(i) په څو ډوله کولای شوله پاسنیو عددونو څخه 3 رقمي عددونه جوړ کړو.

(ii) ټول 3 رقمي جفت عددونه به څو وي؟

2- په څو ډوله 6 تنه زده‌کوونکي په یوه کتار کې څنګ په څنګ درېدلې شي؟

3- په څو ډوله ابوبکر، زبیر، یاسر، هنزله او خبیب کولای شي، په یو کتار کې خوا په خوا د یو یادګاري

تصویر د اخیستلو لپاره ودرېږي؟

4- په څو ډولونو کولای شو چې 9 تنه په درې 3 گروپونو ووېشو؟

5- د پاسکال د مثلث له مخې د  $(a + b)^7$  انکشاف په لاس راوړئ؟

**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**