شمیرپوهنه (ریاضي)

د لسم ټولګي لپاره

برېښنا پته : smakhan1946@gmail.com

لیکونکی:

ډاکترماخان میرې شینواری

2016

Ketabton.com

جرمني د بن ښار

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

د لسم ټولګي لپاره

لیکونکی:

ډاکتر ماخان(میرزی) شینواری

Smakhan1946@gmail.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

سریزه...................................... ۴

پولینومشمیرنه ۶

د ګاوس الګوریتم.................... ۲۹

هورنرشیما.......................... ۴۶

اړیکې.............................. ۵۵

فنکشن(ځیرونه) یا تابع ۶۵

فنکشن او په ځتفنکشن ۹۱

ځلوری‌یا مربع توابع ۹۳

نورمال پارابل ۹۶

د ځلوری‌تکمیل له............... ۱۰۱

کرښیزبرابرونسیستم ۱۱۵

د مناسبځواب له پاره تلنلار.... ۱۲۳

مساواتسیستم بې له ۱۲۹

توان یا پوتنځ توابع ۱۳۳

کرښیزتوابع د ورکړ شوو ۱۳۸

مومړی حالت ۱۳۸

د کرښبرابرونونو ځانګړی ۱۴۲

n- مه درجه ټولراشنل توابع ۱۶۵

د ټولراشنل توابعوغوځتکي ۱۷۵

د بدلونقانونه ۱۷۸

شننیزه – یا تحلیی هندسه ۱۸۳

فنکشنونه (بل بدیل)............ ۲۰۲

درېکوډېکچ ۱۳۷

ګډوله – یا کمپلکسګڼونه ۲۷۹

د لیکونکیلیکلیاوژباړې..... ۳۱۵

د لیکوکیژنود ته لنډه کتنه...... ۳۲۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

سریزه

دا ځلوېښت کاله کېږي، چې زموږ هیواد هراړخیزه ستونزې لري او هر څه دې اوږده جنګ را خراب کړي

ګرانو هیوادوالو!

د نورو نیمګرتیاو په څیر زموږ درسي نصاب - په تیره شمیرپوهنه - هم ډېره د ناسمون سره مخامخ ده.

که دا کار د دولت په ځلوردیوالي ونه شو، نو زه به وهڅیږم، چې دا ما لیکلي کتابونه د ن ج له لارې له تاسو سره شریک کړم او دا د نړۍ په ستاندارد.

د ښوونځي په کتابونو کې د ستااتیستیک او احتمالوالي درس نور هم خورا ستونځمن دی، چې زه ترې دلته تیریږم او د ښوونځي د تیرو کتابونو څخه هم هیله ده- که زما کتابونه وړاندې نه شو- چې دابرخې یا سمې یا له درسي نصاب څخه ووېستل شي. په دې برخه باور وکړی، چې نه لیکونکی بوهیږي او نه بل لوستونکی پرې پوهیدلی شي.

زما په دې د ښوونځي کتابونو کې دا برخې نه شته، خو که وخت مې پیدا کړ دا به هم سمې کړم. ما په دې هکله د احتمالوالي او ستاتیستیک کتابونه ژباړلي او همداسې مې په هندسه کې هم احتمالوالي شمیرنه راوړي او د ستاتیستیک یو کتاب مې هم ژباړلي، چې زه به یې په مناسبوخت کې د لیدلو پتې ګرانو لوستونکو ته د ن ج له لارې ورکړم.

دا زما ځنې کتابونه او په ډېره مننه د www.ketabton.com ن ج کې ګرانولوستونکوته وړاندې شوي.

د شمیرپوهنې سم اند یا منطق زموږ د نصاب په لسم ټولګي کې راغلی او هغه هم لکه ستاتیستیک او ... د پوهیدلو نه دی. دا- لکه څنګه چې برېښي- دومره پیچلی نه دی، نو زه دا درس له دې امله د اوم ټولګي په سرکې راوړم، هیله ده چې ستونځې به رامنځ ته نه کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زه چې ترڅو ستاسو په منځ کې وم او د کار یم، ستاسو چوپړ کې به اوسم. راځئ، چې ستونځوبې(د ستونځو حل) سره شریک کړو.

زه دې لیکنو او پرې قضاوت کولو ته ځانله یم.

تکرار په کې زیات دی، خو د موصوع، نه د خودیونې. وایې چې تکرار د زده کړې مورده، نو پروا نه لري. کمښتونه هم په کې شته. سره د ټولو نیگرتیاوو دا د ښوونځي له پاراه ډېره گټوره او زه چې پوهیږم، یواځنی سمه لیکنه ده.

دا چې سمه لیکنه ، د ځان له امله نه وایم، دگرانو زده کوونکو او ښوونکو له پاره وایم. دا زما لیکنې نه دې، دا ما له نورو کتابونو څخه رانیولي، چې باید سمې وي.

زه به وهڅېږم، چې درسمي ښوونځي کتابونو نا سمونونه له تاسو سره شریک کړم، خو ډېر لږ، یواځې داسې د یادونې له امله.

په ډېره خواشینی باید ووایم، چې ملاتړی نه لرم، چې د لیکنې ستونځې راته په گوته کړي.

د نصاب د غړو څخه مې هیله ده، چې گټه ترې پورته کړي او په بنسټ یې د ښوونځي لیکنې سمې کړي.

د خوندیونې ټیکاوي کې پوښتنه نه شته، ځکه چې ما هم د نورو لیکنو څخه راټول کړي او هڅیدلی یم، چې سم یې ترې راونیسم.

باور وکړی زه د دې لیکنو سره لږ ستړی شوی یم، نو ځنې ځایونه به داسې نیمگړي پاتې وي، چې ستاسو پوهیدنې ته کوم زیان نه رسوي، د هغې بخښنه دې وي.

کله تمرینونه کم وي او کله تکرار راځي، چې دا بد مه گڼی.

په دې کتابونو ما دومره ځان بوخت کړی، چې باورکړی مغذ مې ترې نورموړ دی، نو له دې امله یې نور پایوم یا ورته د پای ټکی ږدم.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینومشمیرنه

پویلینوم څه شی دی؟

یو پولینوم د اووښتوني یا واریابلي –چي موړيږي د x سره په نښه کوو- له ډېرواره توان د زیاتون دی: د توان جګګښونه پیداپښتي یا طبیعي ګڼونه دي. زیاتون له دې برسیره پای دی.

بیلګه: $a_n \cdot x^n + \ldots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

همداسي

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

یا هم:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

دلته n یو پیداپښتي ګڼ اوپای دی او a_i ریلګڼونه دي د ټولو $i=0,1,\ldots n$ له پاره.

پیژند: د پولینمچګګڼ n د پولینوم درجه بلل کيږي، که $a_n \neq 0$ وي.

په یاد ولری: په پورته سر کې- د پولینوم لیکنبه د توان په همغږیزجګیدونکي لیکنبه اودا کښته یي د پولینوم د توان په همغیزټيټيدونکي لیکنبه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینومونو سره شمیرنه یا کارونې داسې لنډې څیړو

د پولینومونو زیاتون: که له

$$a_5 \cdot x^5 + ... + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

سره

$$b_5 \cdot x^5 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زیاته-وو، نو داسې مخ ته ځو:

په دې پورته برابرون کې ګورو، چې اووښتونې یا واریابله د څلور په جګ یعنې x^4 نه شته. دا په دې مانا ده،چې ځله وونی یا صریب یې صفر دی. یعنې $o\ x^4$ یا

$$b_5 \cdot x^5 + o\ x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زیاتونعملیه یا کارونه مح ته بیای:

$$a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$b_5 \cdot x^5 + o\ x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

$$(a_{5+} b_5\ )x^5 + (a_4 + o)x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + a_2 + b_2\ )x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0\ + b_0\ )$$

ګورو،چېد برابر توا یا برابر جګګې واریابلې سره زیاتیږي.

بیلګه:

$$3 \cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 7$$

$$2x^5 + o\ x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1$$

$$(a_{5+} b_5\ )x^5 + (a_4 + o)x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + a_2 + b_2\ )x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0\ + b_0\ )$$

د پولینومونو کمون کارونه:

کمون یې هم په همدې بیلګه داسې لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$a_5\cdot x^5 + a_4\cdot x^4 + a_3\cdot x^3 + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x + a_0$$

$$-(b_5\cdot x^5 + o\, x^4 + b_3\cdot x^3 + b_2\cdot x^2 + b_1\cdot x + b_0)$$

$$(a_5 - b_5)\cdot x^5 + (a_4 - o)x^4 + (a_3 - b_3)x^3 + (a - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

بيلګه:

$$3\cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4\cdot x^2 + 2\cdot x + 7$$

$$-(2x^5 + o\, x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1)$$

$$x^5 + 6x^4 \quad -7x^3 \quad -x^2 + x + 6$$

پيژند: دوه پولينومونه سره برابر دي، که خله ووني يا صريبونه يې سره برابر وي، دا په دې مانا چې

$$a_n\cdot x^n + \ldots + a_3\cdot x^3 + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x + a_0$$

او

$$b_n\cdot x^n + \ldots + b_3\cdot x^3 + b_2\cdot x^2 + b_1\cdot x + b_0$$

سره برابر دي که $b_i = a_i$ وي،د ټولو $i=1,2,:::n$ له پاره.

د پولينومونوپه هکله مو په اتم ټولګي کې د ترمونوبرخه کې پوره زده کړه کړې. په پولينوم کې هم ټول هغه شميرلارې، چې په ګڼونو کې باور لري باوري دي.

دا لاندې بيلګې دې هم داروښانه کړي:

د پولينومونوله پاره نورې بيلګې:

o $3x^2 + 2x + 5$

o $7x^3 + x^2 + 6x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

o $10x^5 + 3x^4 + 2x$

د پولینوم دوولونه:

په شمیرپوهنه کې د پولینوم مختلف دولونه شته.په شمیرپوهنه کې د بینوم لاندې یو پولینوم پوهیږو، چې له دوه غړو جوړ وي یا په بل ډول ویلی شوي، چې یو بینوم د دوه مونومونو زیاتون یا کمون دی.دا لاندې بیلګې دا هم ښايي، چې بینوم څنګه برېښي!

- $a + b$
- $x^3 + y^3$
- $x - 3$

پولینوم، چې له دري زیاتونونو جوړ دی‌ترینوم بلل کیږي. لاندې بیلګه دا روښانه کوي.

- $a^2 + b^2 + c^2$
- $6a^2 + 7a^3 + 8a^4$

زیاتون ته بیلګه

$$(-x^5-2x^4-3x^2-x+2) + (x^2+2) = -x^5-2x^4-2x^2-x+4$$

پولینومکمون ته بیلګه: په لاندې بیلګه کې ګورو، چې د برابر توانونو x یو له بل څخه کمیږي.

$$(x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x) – (3x^3 + 2x^2 + 6x) = x^4$$

ځل (ضرب):

دا لاندې دري بیلګې د ځل یا ضرب له پاره ورکړ شوي.

موږاو تاسې د دې لارې سره د بینوم فرمول او د ترمونو د ځله ونو له لارې بلد یو، چې دلته ستاسوپام ورته رااړول کیږي

$$(x-4)\cdot(x^2-2x+3)=x^3-6x^2+11x-12$$

$$(x-5)\,(x^2+3\,x+7)=x^3-2\,x^2-8\,x-35$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(x-3)(4x+7) = 4x^2 - 5x - 21$$

$$(x+1)(x^2+x-6) = x^3+x^2-6x+x^2+x-6 = \underline{\underline{x^3+2x^2-5x-6}}$$

پولینوموېش:

دا لاندې بېلګه د وېش له پاره راوړ، خو دا چې وېش لږ پېچلی دی، په دې به پوره وغږیو.

$(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x) : (x + 3) = x^3-x^2+5x-9 + (27)/(x+3)$

$-(x^4+3x^3)$
$-(-x^3-3x^2)$
$-(5x^2+15x)$
$-(-9x-27)$
پاتېRest: 27

کربنیزځله وونې سره ځل کیږي یا ضربیږي

$$f(x) = (x+1)(x+2)(x-1{,}5)$$

د ځله وونې ۲ سره غزول کیږي.

$$f(x) = (x^2+3x+2)(x-1{,}5)$$
$$= x^3 - 1{,}5x^2 + 3x^2 - 4{,}5x + 2x - 3$$
$$= x^3 + 1{,}5x^2 - 2{,}5x - 3 \quad /\cdot 2$$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم وېش:

که د یوه پولینوم صفرځای معلوم وي، نو کړی شو د پولینوم وېش له لارې د پولینوم درجه په یوه کمه کړو. که دا مو مربع مساوات ته لارښود کړي یا بوځیو نو ساده دی، چې نور صفرځایونه بیدا کړو. لاندې بېلګې دې د پولینوم وېش روښانه کړي.

د بیلګې په توګه د دریمې درجې تولراشنل تابع صفرځایونه معلوم دي، نو کیدی شي چې د تابع مساوات د کرښیزو ضریبونوپه څېر ولیکلی شو:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

چیرته چې $x_1; x_2; x_3$ صفرځایونه دي.

موږ اوس په څرګنده توکه تابع یا څیرونه د څیړنې لاندې نیسو

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$$

چیرته چې $x_1=2$ یو صفرځای دی، ځکه چې

$$f(2) = 2^3 - 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 8 - 4 - 10 + 6 = 0$$

له دې سره له دې سره کېدی شي د تابع مساوات د $x_1=2$ صفرځآی لاندې (له امله) په پام کې ونیسو او لکه چې لاس ته راځي و لیکو $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6 = (\dots\dots\dots)(x - 2)$

د صفرځای ټاکلو لپاره اینسوونه : $f(x)= 0 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=(\dots)(x-2)=0$
دا افاده $x^3-x^2-5x+6=(\dots)(x-2)=0$ څېړو

د نوکانو افادې یا وییني $(\dots)$ټاکو

دواړه لورې په $(x-2)$وېشو

$$(x^3-x^2-5x+6) :(x-2)=(\dots)$$

په دې توګه د نوکانو افاده $(\dots)$لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

وپش د ليکنيز وپش قانون سره سم مخ ته بيايو

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x - 2) = x^2 + x - 3 \\
\underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)} \\
\quad x^2 - 5x \\
\quad \underline{-\left(x^2 - 2x\right)} \\
\qquad -3x + 6 \\
\qquad \underline{-(-3x + 6)}
\end{array}
$$

د نوکانو افاده (...) اوسx^2+x-3 بنه لري

له دې لاس ته راځي د صفرځای ټاکنو لپاره اينووڼه:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=(\ldots)(x-2)=(x^2+x-3)(x-2)=0$$

نو دا مربع مساوات x^2+x-3 اوس حل کوو.

دا د p-q- فرمول سره ځوابوو:

$$p = 1;\ q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{array} \right.$$

صفرځايونه:

$$x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x محور سره غوځتکي:

$$P_{x1}(2|0);\ P_{x2}\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}\,|\,0\right);\ P_{x3}\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}\,|\,0\right)$$

تابع مساوات:

$$f(x)=(x-2)\left(x+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}\right)\Leftrightarrow f(x)=x^3-x^2-5x+6$$

د پولینوموېش او لیکنیز پولینوموېش په منځ کې اړیکې شته. په لاندې مخامخوالي کې دا د وېش بې له پاتې په حالت کې را ښایي.

$62228 : 47 = 1\ 3\ 2\ 4$	$(x^3-6x^2+11x-12) : (x-4) = x^2-2x+3$
$-47 \leftarrow 47\cdot 1$	$-(x^3-4x^2) \leftarrow (x-4)\cdot x^2$
152	$-2x^2+11x$
$-141 \leftarrow 47\cdot 3$	$-(-2x^2+8x) \leftarrow (x-4)\cdot(-2x)$
112	$3x-12$
$-94 \leftarrow 47\cdot 2$	$-(3x-12) \leftarrow (x-4)\cdot 3$
188	0
$-188 \leftarrow 47\cdot 4$	
0	

ګڼ ۶۲ د لومړیو دوه ځایونو څخه چوړ دی د دې وېشونو ګڼونو څخه د پروېشونې (۴۷)

سره وېشل کېږي. لاس ته راوړنه (۱) د (۴۷) سره څل یا ضرب کېږي او د ګڼ (۶۲) څخه کمېږي. د کمښت نتیجې کمښت (۱۵۲) سره په همدې ډول پرمخ ځو تر څو د کمښت لاس ته راوړنه صفر شي.

ازمايښت : $47\cdot 1324 = 62228$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\left(-6x^3+5x^2+14x-12\right):(-2x+3)=3x^2+2x-4$$

$$-\left(-6x^3+9x^2\right)$$

$$-4x^2+14x$$

$$-(-4x^2+6x)$$

$$8x-12$$

$$-(8x-12)$$

$$0$$

$$\text{Probe}:$$

$$\left(-6x^3+5x^2+14x-12\right)=\left(3x^2+2x-4\right)(-2x+3)$$

بیلګه:

$$\left(x^3+3x^2-6x-8\right):(x-2)=x^2+5x+4$$

$$-\left(x^3-2x^2\right)$$

$$5x^2-6x$$

$$-\left(5x^2-10x\right)$$

$$4x-8$$

$$-(4x-8)$$

$$0$$

$$\text{Probe: }\left(x^2+5x+4\right)(x-2)=\left(x^3+3x^2-6x-8\right)$$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\right) : (a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\underline{-\left(a^3 + a^2b\right)}$$

$$2a^2b + 3ab^2$$

$$\underline{-\left(2a^2b + 2ab^2\right)}$$

$$ab^2 + b^3$$

$$\underline{-\left(ab^2 + b^3\right)}$$

$$0$$

ازماپښت:

$$:\ \left(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\right) = \underbrace{\left(a^2 + 2ab + b^2\right)}_{\text{1. binomische Formel}}(a+b) = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b}_{\text{Linearfaktoren}}$$

بیلګه:

$$\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2\right) : (x-2) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$$

$$\underline{-\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2\right)}$$

$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$$

$$\underline{-\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x\right)}$$

$$-x + 2$$

$$\underline{-(-x+2)}$$

$$0$$

ازماپښت: $\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2\right) = \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1\right)(x-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه:

$$\begin{aligned}&\left(2x^3 \qquad -14x-12\right):(x-3)=2x^2+6x+4\\&\underline{-\left(2x^3-6x^2\right)}\\&\qquad 6x^2-14x\\&\qquad \underline{-\left(6x^2-18x\right)}\\&\qquad\qquad 4x-12\\&\qquad\qquad \underline{-(4x-12)}\\&\qquad\qquad\qquad 0\end{aligned}$$

په ځنو حالتونوکي دا ښه ده، چي د پولينوم ليکنوکي د اړتيا په وخت کبيوه تشيا پريږدو، کلکه په پورته بيلګه کي چيکورو.

يوه بله شونتيا يي داده، چي هغه تشيا د صفر سره ډکه کړو، لکه دا لاندي:

$$2x^3-14x-12=2x^3+0x^2-14x-12$$

بيلګه:

لاندي بيلګه يو وېش د پاتي سره مخ ته بيايي.لکه څنګه چي د ليکنيز وېش څخه راته څرګند دی.

$$\left(x^3+3x^2-6x-8\right):(x-1)=x^2+4x-2 \;\; (\text{Rest } -10)$$

$$\Rightarrow\left(x^3+3x^2-6x-8\right):(x-1)=x^2+4x-2-\frac{10}{(x-1)}$$

$$\begin{aligned}&\underline{-\left(x^3-x^2\right)}\\&\quad 4x^2-6x\\&\quad \underline{-\left(4x^2-4x\right)}\\&\qquad -2x-8\\&\qquad \underline{-(-2x+2)}\\&\qquad\quad -10 \quad \text{Rest}\end{aligned}$$

$$\text{Probe: } \left(x^2+4x-2-\frac{10}{(x-1)}\right)(x-1)=\left(x^3+3x^2-6x-8\right)$$

دا چي نوي بلدي يون کي د ناسمون سره مخامخ کيږي،غوره ده چي د دې ازمايښت هم وکړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینوموېش په کارونه کې که د پولینوموېش یوصفرځای څرګند وي، نو کیدی شي د پولینوم درجه په یوه وړه یا رکمه شي.

$x_1 = 2$ د پولینوم یو صفرځای دی.

$$\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x - 2) = \underbrace{x^2 + x - 3}_{\text{Restpolynom}}$$

$$\begin{array}{l} -\left(x^3 - 2x^2\right) \\ \hline \quad x^2 - 5x \\ \quad -\left(x^2 - 2x\right) \\ \hline \qquad -3x + 6 \\ \qquad -(-3x + 6) \\ \hline \end{array}$$

د پاتې پولینوم صفرځایونه اوس کیدیشي د څلورئ یا مربع پولینوم

$$x^2 + x - 3 = 0$$

له لارې پیدا کړو.

د سمون ازماېشت یې وکړئ.

بیلګه: پولینوموېش او ازماېښت یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(x^3+2x^2-5x-6\right):(x+1)=x^2+x-6$$
$$\underline{-\left(x^3+x^2\right)}$$
$$x^2-5x$$
$$\underline{-\left(x^2+x\right)}$$
$$-6x-6$$
$$\underline{-(-6x-6)}$$

Prob e: $(x+1)\left(x^2+x-6\right)=x^3+x^2-6x+x^2+x-6=\underline{\underline{x^3+2x^2-5x-6}}$

پوښتنې:

لاندې پولینوموېش مخ ته بوځئ

الف- $\left(x^3-3x^2-6x+8\right):(x+1)$ ب – $\left(2x^3-x^2-8x+4\right):\left(x^2-4\right)$

پـ - $\left(2x^3-3x+1\right):(2x-1)$ ت - $\left(6a^6+a^4b+25b^3\right):\left(3a^2+5b\right)$

ټ - $\left(8x^5-6x^7+2x\right):2x^2$

ث - $\left(9a^5b^3-12a^3b^5\right):3a^3b^3$

ج - $\left(15a^9-8a^6b+8b^3\right):\left(3a^3+2b\right)$ ،

چ – $\left(14a^4-a^3+5a^2-3a+1\right):\left(7a^2-4a+1\right)$

ح – $\dfrac{3x^5y^{n+2}+3x^2y^{3n+2}-2x^{m+3}y^{n+3}-2x^my^{3n+3}}{x^3+y^{2n}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځ - $\frac{48a^{n+x}+56a^{x}b^{x}-72a^{n}b^{c}-84b^{x+c}}{12a^{n}+14b^{x}}$

څ - $\frac{8a^{2n+1}-10a^{2n}b+15a^{3n-2}b-12a^{3n-1}}{2a^{2n}-3a^{3n-2}}$

خ - $\frac{2a^{5}b^{x+2}-2a^{3}b^{x+5}+3a^{4}b^{2x-1}-3a^{2}b^{2x+2}}{a^{2}-b^{3}}$

پولینوم برابرون:

د یوه برابرون په کینې اوښي لور د x مختلف توانونه یو پولینوم برابرون ورکوي

$$\text{Beispiel}: x^3-6x=3x^2-8$$

د داسېبرابرون د اوبی له پاره لومړیدا برابرون په داسې نامه صفربڼه اړوي. دا په دې مانا چې برابرون تر هغې په ورتهبڼه بدلوناړولکيږي، چې په ښیلور یواځې صفر پاتې شي.

$$\text{Beispiel}: x^3-6x=3x^2-8 \mid -3x^2$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-6x=-8 \mid +8$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-6x+8=0$$

د صفربڼې یا- فورم په ځای د پولینوم دې بڼې ته هم نورمال بڼه وایي.
موږ د پولینوم پنځه بدیلونهراړوږو

لومړی بدیل:

په برابرون کې د اووښتونې x یو یواځنی توان مخ ته راځي.

$$ax^n+b=0 \Rightarrow x=\sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که n ناجوړه وي،نوريښه وښتوني کيدی شي کميز ګڼ هم وي.
د رېښي ټيک يو حل شتون لري.
که n جوړه وي، نوريښه نيونی(هغه ګڼ چېريښه ييښيول کيږي) يوائې زياتيز ګڼ کيدی شي.
دوه اوبيوني شتون لري.
بيلګه:

$$
\begin{aligned}
& 8x^3 + 27 = 0 \mid -27 \\
\Leftrightarrow\ & 8x^3 = -27 \mid : 8 \\
\Leftrightarrow\ & x^3 = -\frac{27}{8} \mid \sqrt[3]{\ } \\
\Leftrightarrow\ & x = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2} \Rightarrow L = \left\{-\frac{3}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 2x^4 - 3 = 0 \mid +3 \\
\Leftrightarrow\ & 2x^4 = 3 \mid : 2 \\
\Leftrightarrow\ & x^4 = \frac{3}{2} \mid \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \\
\Leftrightarrow\ & x = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1,107 \Rightarrow L = \left\{\sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1,107\right\}
\end{aligned}
$$

په لومړي حالت کې n ناجوړه دې. ريښه نيوني کميزه هم کيدی شي
اويوائې يواوبی شتون لري.
په دويم حالت کې n جوړه دی، ريښه نيونی زياتيزدی.که کميزوي بيا برابرون اوبی نه لري.

دويم بديل:

پولينومبرابرون يوڅلوری‌برابرون (مربع مساوات) انځوروي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+px+q=0$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}_{D}}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$$

دا د -p-q- – فرمول له لارې اوبی –یا حلکیري

بیلګه

$$x^2-13x+36=0 \quad p=-13 \quad q=36$$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

$$=\left(\frac{13}{2}\right)^2-36=\frac{169}{4}-\frac{144}{4}=\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l}x_1=\frac{13}{2}+\frac{5}{2}=9\\ x_2=\frac{13}{2}-\frac{5}{2}=4\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow L=\{4;9\}$$

D د دېسکریمینانت له پاره لیکلکیږي چې هغې لرلو سره مخ دمخه سړی د اوبیونویا حلومو څومره وال یا ګڼون ټاکلی شي.

که صفر $< D$ وي ، نو څلورئ برابرون دوه اوبي یا حلونه لري

که صفر $= D$ وي،نو برابرون یواځې یو ډبل اوبیلري

که صفر $> D$ وي، نو برابرون اوبی نه لري په دې حالت کې نو سړی نور مخ ته نه ځي.

دریم بدیل

ولینومبرابرونیو دوه-څلورئ برابرون biquadratische انځوري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + pz + q = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{D}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$x^2 = z \Rightarrow x = \pm\sqrt{z} \text{ für } z \geq 0$$

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + pz + q = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{D}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$x^2 = z \Rightarrow x = \pm\sqrt{z} \text{ für } z \geq 0$$

د په ځا اېښووني يا سبستيچيوشن z د -p-q- فرمول په مرسته يا له لارې شميرل کيدی شي

پسي دې بيرته په ځايونه په ځسبستيچيوشن وکارول شي او ريښه دې ونيل شي.

ريښه تيک د زياتيز - p-q-z- ارزښتونو له پاره نيول کيدی شي.

بيلګه:

$$\frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} = 0$$

Substitution: $z = x^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{10}z^2 - \frac{9}{5}z + \frac{81}{10} = 0 \,|\cdot 10$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 18z + 81 = 0$$

$$p = -18 ;\ q = 81$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 - 81 = 0$$

$$z = -\frac{p}{2} = 9$$

Rücksubstitution

$$z = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-3;3\}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې حالت کې د یسکریمینانت صفر دئ، داسې چې د سبستیچیوشناووښتونې له پاره یو اوبې .(z = 9) شتون لري.
دا په دېمانا، چې د ۴ –مې درجې پولینوم ټیک دوه اوبې یا ځوابونه لري.

ځلورمبدیل:
په پولینومبرابرون کې هغه همغه ارژښته یا مطلقه غړی نه لرو.

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0 \Leftrightarrow x\left(ax^2 + bx + c\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{2/3}$$

اووښتونې یا مجهوله x کیدی شي له نوکانو راووېستلشي.
اوبیونې د صفرځل یا – صرب له جملې شمیرلکیدی شي (د فاکتورکولو تلنلار)،

بیلګه

$$\begin{aligned}
& x^3 + x^2 - 2x = 0 \\
& \Leftrightarrow x\left(x^2 + x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}} \\
& \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \\
& \Rightarrow p = 1;\ q = -2 \\
& \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} \\
& \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} \\
& \Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2 \end{array} \right. \\
& \Rightarrow \underline{\underline{L = \{-2;\ 0;\ 1\}}}
\end{aligned}$$

د صفر ځلوونې یا صریب دویم ځلوونی کیدی شي د p-q - فرمولسره سادهوشمیرلشي.
د صفرځلوونې جمله: یوخل یا صرب ټیک هلته صفردئ، چې یو ځلوونی صفر ړي.

پنځم بدیل:
پولینومبرابرون له بدیلونو ۱ – ۴ په ځیر نه دئ.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

په ډېرو حالتونوکېکیدی شي، د پوینوموېشله لارې اوبی ومیندلشي.
د دې له پاره باید یواوبی معلوم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د پولینوم یو اوبی معلوم وي،نو کیدی شید پولینوم درجه د وېش له لارېیه یوه کمه شي. که دا یو څلوری برابرون راکړي،نو اوبیونه یېبیا ساده ه، چې نور اوبي پیدا کړو.
لاندې بیلګه چې اوبی $x = 2$ معلوم دی،د پولینوم تلنلار روښانه یا معلوموي.
پولینوموېش همغه په راته څرګنده لیکنیزډول لاس ته راوړو.
Division.
وېشنه

$$\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x-2) = x^2 + x - 3$$
$$\underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)}$$
$$x^2 - 5x$$
$$\underline{-\left(x^2 - 2x\right)}$$
$$-3x + 6$$
$$\underline{-(-3x + 6)}$$

د نوکانو(....) وبینه یا افاده اوس دا بڼه $x^2 + x - 3$ لري.
له دې د نورو شمیرنوځای په ځای کول لاسته راځي
$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + x - 3\right)(x-2) = 0$$
اوس دا څلوری برابرون یا مربع مساوات $\left(x^2 + x - 3\right)$ د اوبیونې دي،چې د -p-q فرمول له لارې سرته رسیږي.

$$p = 1; q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{array} \right.$$

$$x_1 = 2; x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}}; x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$\Rightarrow L = \left\{ -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ 2; -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې د ګومان یا ازماېښت له لورې اوبی نه شي پیداکیدی، نوبیا د نومریک تلنلار څخه کار اخستلکیږي(دا به اوس زموږ دنده نه وي).

برابرونونو ته تمرینونه:

۱ - برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت یې سرت هورسوئ.

الف - $\frac{1}{5}x^3 - 25 = 0$ ب - $\frac{27}{10}x^3 - \frac{4}{5} = 0$ پ - $8x\left(x^2 - 1\right) = -8x + 1$

۲ – برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت یې سرت هورسوئ.

الف - $27x^3 - 8 = 0$ ب – $\frac{1}{16}x^3 - 4 = 0$ پ- $-2 + \frac{7}{8}x^3 = -\frac{5}{2}x^3 - 1$

۳ - برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت یې سرت هورسوئ.

الف- $4k^2x^3 - 2k = 0; k > 0$ ب – $\frac{1}{4b}\left(x^3 - b^3\right) = 0; b > 0$ پ - $(x + 2a)^3 = \frac{1}{8}$

۴ - برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت یې سرت هورسوئ.

$$\frac{k \cdot x^3}{4} - 2k = 0$$

۵ - ځانګړې باکتریاګاني د ۴ ساعتونو په منځ کې خپل ګڼو(تعداد) څلور برابره کوي.په یوه ساعت کې یې په سلوکې ډېروالی څومره دئ؟

۶ – د کال په پیل کې د موټروختارزښت نوی ټاکییا کره کیږي. د یوه پنځه کلن زوړ کارشوې یوم،ترپلورونکی € 8500 ورکوي.

د موټر کلنی زیان به څومره (د وختارزښت د په سلو کې) وي، که سړی له دې، که سړس داسېمخ ته لاړ شي چې دا په لومړیوپنځه کلونوکې برابر جګ وي؟

۷ – برابرونونه اوبی –یا حل کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

الف - $\frac{1}{4}x^3 - 4x = 0$ ب- $3x^3 + \frac{4}{3}x^2 = 0$ پ - $x^3 + x^2 - 2x = 0$

۸ – برابرونونه اوبیکړئ

الف- $4x(x^2 - x) = 7x^3 - 7x^2 - 6x$ ب- $\frac{3}{4}x^3 - 3x^2 = 0$

پ --- $\frac{1}{8}x^3 - x^2 + 2x = 0$

دا لاندې برابرونونه اوبي کړئ

الف- $x^3 + 4x^2 - 20x - 48 = 0$ ب - $-\frac{1}{2}x^3 + 4x = \frac{1}{2}x^2 - 4$

پ - $-2x^3 + 6x^2 - 4x = \frac{1}{2}x - 1$ ت- $x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2 = 0;\ x_1 = \frac{1}{2}$

ټ - $\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x^3 + 4x^2 - 2x\right) = \frac{3}{2}$

لاندې برابرونونه حل کړئ چې يو اوبی یا حل يېمعلوم وي

الف - $x^3 - 3x^2 - 6x - 2 = 0;\ x_1 = -1$

د پولینوم وېش څخه کارواخلی.

-- د پولینوموېش څخه کار واخلئ

الف- $\left(4x^3 - 6x + \frac{5}{2}\right) : (2x - 1)$ ب - $(x^3 - 2kx^2 - 2x + 4k) : (x^2 - 2)$

۱۲ – برابرون $x^3 - 4x^2 + (k + 4)x - 2k = 0$ ورکړشوی. وښايئ، چې د $x_1 = 2$ لپاره برابرون یواوبی دی. د k د کوم ارزښت لهپاره ټیک یو دبل اوبی شته؟

لاس ته راوړنه د کرښیزو څلوونو یا صریبونوپه څیر ولیکی.

پوښتنه:

a داسې وټاکئ، چې برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

(ax - 1)(x + 2)(x - 1/2) = 0
ټیک دوه اوبیونې یا حلونه ولري
یو د دریمې درجې برابرون دا دوه { 4- ; 2 } = L اوبیونې لري.
الف - د اوبیونو یا حلونوپه هکله ویناوې وکړئ.
ب – دوه برابرونونه ددې اوبیونې ورکړئ.
۳ – برابرونونه اوبیکړئ

الف- $2x^3 - x^2 - x = 0$ ب - $x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}$

۴ – برابرونونه اوبیکړئ

الف- $-3x^3 + 5x^2 + 4 = 0$ ب- $x^3 - \frac{16}{5}x^2 + \frac{17}{5}x - \frac{6}{5} = 0$

۵- برابرونونه اوبیا حلکړئ

الف - $x^3 + x^2 - \sqrt{2}x^2 - 2x - \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$

ب- $x^3 - 2,63x^2 - 1,45x + 3,08 = 0$

برابرونونه اوبی کړئ

الف – $-u^3 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{2}u - \frac{3}{2} = 0$ ب - $a^3 - 4a^2 - a + 4 = 0$

۷ – برابرونونه حل کړئ

الف - $x^3 - \left(3 + \sqrt{3}\right)x^2 + 3\sqrt{3}x = 0$

ب- $\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 0$ پ- $\frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + 1 = 0$

ت - $\frac{4}{10}x^3 - \frac{6}{10} = 0$ ټ - $x^3 - 5x^2 + 6,25x = 0$

ث - $\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0$ ج - $x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x = 0$

چ - $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ خ - $x^3 - 3x^2 = -4$

ځ - $(3x - 5)\frac{(x - 2)^2}{5} = 0$

پوښتنې
۱ - برابرونونه د پسې حل کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف ـ $\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+2=0$ ب $\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+2=0$

پ ـ $-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{4}=0$ ت ـ $\frac{1}{5}x^3-\frac{3}{5}x^2-5x+15=0$

ټ ـ $2x^3-x^2-5x-2=0$ ث ـ $(3x-1)(x+k)^2=0$

۱ ـ د x پسې یې اوبې کړی $(k\neq 0)$

الف ـ $\frac{1}{9k}\left(x^4+x^3-12x^2\right)=0$ ب ـ $\frac{k}{2}x^4-kx^3-\frac{3k}{2}x^2=0$

پ ـ $\frac{x^2}{5k^2}\left(x^2-3k\right)=0\,;\,k>0$ ت ـ $x^4-26x^2+25=0$

ټ ـ $-\frac{1}{2}x^4+3x^2-4=0$ ث ـ $\frac{1}{2}x^4-4x^2+2=0$

ج ـ $-\frac{1}{16}x^4+x^2-3=0$ چ ـ $\frac{1}{3}\left(x^2-3\right)^2-3=0$

ځ ـ $\frac{1}{3}x^4-2x^2+3=0$ ځ ـ $x^4-11x^2+18=0$

پوښتنې

حلونه یا اوبیونې وټاکئ

الف ـ $\frac{1}{3}x^4-3x^3=0$ ب ـ $\frac{1}{7}x^4-7=0$ پ ـ $\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^2+1=0$

ت ـ $-2x^4+x^2+x=0$ ټ ـ $\frac{1}{4}x^5-\frac{3}{4}x^3-x=0$ ث ـ $\frac{1}{3}\left(x^2-4\right)^2-3=0$

ج ـ $\frac{2}{5}\left(x^2-9\right)(x+2)^2=0$ چ ـ $\frac{1}{64}x^3+\frac{1}{4}x^2+x=0$ ځ ـ $x^4-5x^2-2x=0$

ځ ـ $x^4-6x^2+8=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس الګوریتم Der Gauß- Algorithmus

فکر دې وشي، چې دا برخه په یولسم ټولګي کې راشي. دلته يې راوړنه هم بده نه ده.

یادونه: خوارزمیة د Algorithmus عربي مانا ده : زما په اند دا الخوارزمیّة دی، چې په لاتین کې ترې الګوریتموس جوړ شوی دی.
الخواریزم د الګوریتم نومورکونکی، یوه شوروي پوست مارکې چې د الخواریزم د ۱۲۰۰ کلیزې جشن په هکله راوبېستلې وه.

الګوریتم د پرابلم یا د پرابلمونود ټولګي پا یوه یواځنۍ د اوبیوني تلنلار ړه.

الګوریتم یوه نړیواله تلنلار ده د په خوښه کړښیز برابرونونو سیستم اوبیوني ته

ننوتنبیلګې:

د کرښې ډول په توګه کار کوو. د لیکو له پاره اجازه شته : - بدلیدلی شي - د یوه ګڼ سره ځلیدلی شي. - په یوه ګڼ سره وېشلکیدی شي.	درې برابرونونه د درې اووښتونویا واریابلو یا متحولو سره له بنه بدلون څخه لرو	$7x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12$ $-x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5$ $-4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1$ شمیرنځیره یا شیما داسې لیکو

(c) ketabton.com: The Digital Library

- سره زياتيدی شي

- سره کم کړي

درځونه هم سره بدليدلی شي، که اووبنتوني يا واريابلي x ورسره واخستل شي.

د اوبيوني يا حل لاس ته راوړنه د بيرته په څټ اينسووني له راې هم کيدی شي.

$-14x_3 = -14$
$\Leftrightarrow x_3 = 1$
$-11x_2 + 23\cdot 1 = 23$
$\Leftrightarrow -11x_2 = 0$
$\Leftrightarrow x_2 = 0$
$7x_1 + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12$
$\Leftrightarrow 7x_1 = -7$
$\Leftrightarrow x_1 = -1$

$L = \{-1; 0; 1\}$

ازماښنت: په لاندې کې د رښتيا له پاره ځاې په ځاى دي.

$7\cdot(-1) + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12 \quad (w)$
$-1\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 4\cdot 1 = 5 \quad (w)$
$-4\cdot(-1) + 1\cdot 0 - 3\cdot 1 = 1 \quad (w)$

x_1	x_2	x_3	
7	3	−5	−12
−1	−2	4	5
−4	1	−3	1

x_1	x_2	x_3	
*	*	*	*
0	*	*	*
0	0	*	*

شميرنه داسې مخ ته بيايو: شننه يې بشي لور ته ده.

x_1	x_2	x_3		
7	3	−5	−12	|·4
−1	−2	4	5	|·28
−4	1	−3	1	|·7
28	12	−20	−48	
−28	−56	112	140	II + I
−28	7	−21	7	III + I
28	12	−20	−48	|: 4
0	−44	92	92	|: 4
0	19	−41	−41	
7	3	−5	−12	
0	−11	23	23	|·19
0	19	−41	−41	|·11
7	3	−5	−12	
0	−209	437	437	|: 19
0	209	−451	−451	III + II
7	3	−5	−12	
0	−11	23	23	
0	0	−14	−14	

د بيخي نويو له پاره يادونې:

د اوبيوني له پاره تلندول کيدی شي په کوچنيو پلونو توته شي.

۱ـ د اصلي ماتلاندې سره د ليکي له لارې ځل (ضرب) سره د د ماتونو مخه ونيسى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲- په لومړۍ کرښه لومړی ګڼ باید زیاتیز وي(که نه، بیا کیدی شي د ۱- سره ځل شي)

۳- د ځل یا وېش له لارې وهڅیږي چې په لومړي درځ کې ټول ګڼونه همغه ارزښت ولري.

په ۲ ــمه او ۳ ــمه لیکه کې دې لومړي ګڼونه کمیزوي.

۴- ۲ ــمې او ۳ ــمې لیکې هرې یوې ته دې لومړۍ لیکه ورزیاته شي. له دې سره په لومړي درځ کې ۲ صفرونه منځ ته راځي.

۵- په۲ ــمه لیکه کې دې دویم ګڼ زیاتیز وي(که نه، نو د ۱- سره دې ځل شي)

۶ ــد ځل یاوېش له لارې په دې نیت کې شي، چې له ۲-مې لیکې په دویم درځ کې ټول ګڼونه همغه ارزښت ولري.

۷ - و ۲ ــمېلیکې یا کرښې ته ۳ ــمه لیکه ورزیاته کړی. له دې سره په ۳-مه لیکه کې ۲ صفرونه منځ ته راځي.

۸ - لاس ته راوړی د اوبی یا حل په څټ لور کیږدی.

برابر پرمختګډول کیدی شي د هغو سیستمونو له پاره هم وکارول شي، چې له دریو زیات برابرونونه شتون ولري:

بڼه بدلونونه کړی شي سړی بل ډول هم مخ ته بوځي.دا چې ،، څنګه،، دا یواځې د شمیرپوهانو مهارت ته پریږدو. د زیاتو تمرینونوله لارې سړی یوه غوره لار پیدا کوي. د شونتیا پورې دې د ماتونومخه دې ونیولشي، چې د نا اړینې تیرونې مخه نیول شوي وي. که سړی ورته تازه وي، کیدی شي ډېر بڼه بدلونونه په یوه وخت جوړ کړي، له دېلارې لیکنه کیږي، خود ناسمون شونتیا زیاتیږي؟

د په څټ اینوولو له لارې د اوبي یا حل لاس ته راوړنه	لانې المانې:سره بدل کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

tausche: ⇄

x_1	x_2	x_3		
7	3	−5	−12	
−1	−2	4	5	$\vert\cdot(-1)$ I ⇄ II
−4	1	−3	1	
1	2	−4	−5	
7	3	−5	−12	II - 7·I
−4	1	−3	1	III + 4·I
1	2	-4	-5	
0	-11	23	23	$\vert\cdot 9$
0	9	-19	-19	$\vert\cdot 11$
1	2	−4	−5	
0	−99	207	207	$\vert : 9$
0	99	−209	−209	III + II
1	2	-4	-5	
0	-11	23	23	
0	0	-2	-2	

$-2x_3 = -2$

$\Leftrightarrow x_3 = 1$

$-11x_2 + 23\cdot 1 = 23$

$\Leftrightarrow -11y = 0$

$\Leftrightarrow x_2 = 0$

$x_1 + 2\cdot 0 - 4\cdot 1 = -5$

$\Leftrightarrow x_1 = -7$

$\Leftrightarrow x_1 = -1$

$L = \{-1; 0; 1\}$

ازماېښت:

$7\cdot(-1) + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12$ (w)

$-1\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 4\cdot 1 = 5$ (w)

$-4\cdot(-1) + 1\cdot 0 - 3\cdot 1 = 1$ (w)

بیلګه ۱ :(ساده یا اسانه)

د په څټ اینوولو له لارې د اوبیبا حل لاس ته راوړنه

$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 8$

$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -4$

$4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 1$

x_1	x_2	x_3		
2	−3	4	8	$\vert\cdot 6$
3	4	−5	−4	$\vert\cdot 4$
4	−6	3	1	$\vert\cdot 3$
12	−18	24	48	$\vert : 6$
12	16	−20	−16	II - I
12	−18	9	3	III - I
2	-3	4	8	
0	34	-44	-64	
0	0	-15	-45	

$-15x_3 = -45$

$\Leftrightarrow x_3 = 3$

$34x_2 - 44\cdot 3 = -64$

$\Leftrightarrow 34x_2 = 68$

$\Leftrightarrow x_2 = 2$

$2x_1 - 3\cdot 2 + 4\cdot 3 = 8$

$\Leftrightarrow 2x_1 = 2$

$\Leftrightarrow x_1 = 1$

$L = \{1; 2; 3\}$

Probe:

$2\cdot 1 - 3\cdot 2 + 4\cdot 3 = 8$ (w)

$3\cdot 1 + 4\cdot 2 - 5\cdot 3 = -4$ (w)

$4\cdot 1 - 6\cdot 2 + 3\cdot 3 = 1$ (w)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲ (منځنی سخته)

د په څټ اینوولو له لارې د اوبې یا حل لاس ته راوړنه

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2$$
$$4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 9$$
$$8x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 13$$

x_1	x_2	x_3		
3	2	−4	−2	|·8
4	−5	3	9	|·6
8	7	−9	13	|·3
24	16	−32	−16	|: 8
24	−30	18	54	II - I
24	21	−27	39	III - I
3	2	-4	-2	
0	-46	50	70	|:2 II ⇄ III
0	5	5	55	|:5
3	2	-4	-2	
0	1	1	11	|·23
0	-23	25	35	
3	2	−4	−2	
0	23	23	253	|: 23
0	−23	25	35	III + II
3	2	−4	−2	
0	1	1	11	
0	0	48	288	

$$48x_3 = 288$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 6}}$$
$$x_2 + 1 \cdot 6 = 11$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 5}}$$
$$3x_1 + 2 \cdot 5 - 4 \cdot 6 = -2$$
$$\Leftrightarrow 3x_1 = 12$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 4}}$$

$$L = \{4 ; 5 ; 6\}$$

ازمایښت:

$$3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 - 4 \cdot 6 = -2 \quad (w)$$
$$4 \cdot 4 - 5 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 9 \quad (w)$$
$$8 \cdot 4 + 7 \cdot 5 - 9 \cdot 6 = 13 \quad (w)$$

بیلګه ۳ : (سخته): لاندې درې برابرونونه غواړو اوبی کړو

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{4}{5}x_2 + \frac{3}{8}x_3 = 4$$
$$\frac{3}{4}x_1 + \frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 23$$
$$\frac{4}{5}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

x_1	x_2	x_3		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{8}$	4	$\mid \cdot 40$
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{5}$	23	$\mid \cdot 40$
$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	8	$\mid \cdot 20$
20	−32	15	160	$\mid \cdot 12$
30	15	8	920	$\mid \cdot 8$
16	−10	5	160	$\mid \cdot 15$
240	−384	180	1920	$\mid : 12$
240	120	64	7360	II - I
240	−150	75	2400	III - I
20	−32	15	160	
0	504	−116	5440	$\mid : 4$
0	234	−105	480	$\mid : 3$
20	−32	15	160	
0	126	−29	1360	$\mid \cdot 13$
0	78	−35	160	$\mid \cdot 21$
20	−32	15	160	
0	1638	−377	17680	$\mid : 13$
0	1638	−735	3360	III - II
20	-32	15	160	
0	126	-29	1360	
0	0	-358	-14320	

د په ښټ اینوولو له لارې حل لاس ته راوړنه

$$-358x_3 = -14320$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 40}}$$
$$126x_2 - 29 \cdot 40 = 1360$$
$$\Leftrightarrow 126x_2 = 2520$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 20}}$$
$$20x_1 - 32 \cdot 20 + 15 \cdot 40 = 160$$
$$\Leftrightarrow 20x_1 = 200$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 10}}$$
$$L = \{10 ; 20 ; 40\}$$

ازماېښت:

$$\frac{1}{2} \cdot 10 - \frac{4}{5} \cdot 20 + \frac{3}{8} \cdot 40 = 4$$
$$\Leftrightarrow 5 - 16 + 15 = 4 (w)$$
$$\frac{3}{4} \cdot 10 + \frac{3}{8} \cdot 20 + \frac{1}{5} \cdot 40 = 23$$
$$\Leftrightarrow \frac{15}{2} + \frac{15}{2} + 8 = 23 (w)$$
$$\frac{4}{5} \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 20 + \frac{1}{4} \cdot 40 = 8$$
$$\Leftrightarrow 8 - 10 + 10 = 8 (w)$$

د کاروني یا استعمال بیلګی
د تولراشنل فنکشن د فنکشن برابرون د شمیرلو له لارې، چې څلور تکي یې معلوم دي،
د ګاوس الګوریتم کارونه یا استعمال

د کاروني بیلګه۱:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|4) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 4$$
$$P_2(2|2) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 2$$
$$P_3(4|4) \Rightarrow \quad f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 4$$
$$P_4(5|20) \Rightarrow \quad f(5) = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 20$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	4	
1	2	4	8	2	II − I
1	4	16	64	4	III − I
1	5	25	125	20	IV − I
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	3	15	63	0	III − 3·II
0	4	24	124	16	IV − 4·II
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	0	6	42	6	
0	0	12	96	24	IV − 2·III
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	0	6	42	6	
0	0	0	12	12	

$\Rightarrow$

$$12a_3 = 12 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$6a_2 + 42a_3 = 6$$
$$\Leftrightarrow 6a_2 + 42 = 6 \,|\, -42$$
$$\Leftrightarrow 6a_2 = -36 \,|: 6 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -6}$$

$$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -2$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 18 + 7 = -2$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 11 = -2 \,|\, +11 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 4$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 9 - 6 + 1 = 4$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 4 = 4 \,|\, -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x}}$$

د کارونبیلګه ۲

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1\left(1| -\frac{11}{2}\right) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = -\frac{11}{2}$$
$$P_2\left(-1| \frac{9}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = \frac{9}{2}$$
$$P_3(-2|8) \Rightarrow \quad f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 8$$
$$P_4\left(-3| \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = \frac{5}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	$-\frac{11}{2}$	$\vert\cdot 2$
1	−1	1	−1	$\frac{9}{2}$	$\vert\cdot 2$
1	−2	4	−8	8	$\vert\cdot 2$
1	−3	9	−27	$\frac{5}{2}$	$\vert\cdot 2$
2	2	2	2	−11	
2	−2	2	−2	9	II − I
2	−4	8	−16	16	III − I
2	−6	18	−54	5	IV − I
2	2	2	2	−11	
0	−4	0	−4	20	$\vert:(-2)$
0	−6	6	−18	27	$\vert:3$
0	−8	16	−56	16	$\vert:4$
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	−2	2	−6	9	III + II
0	−2	4	−14	4	IV + II
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	0	2	−4	−1	
0	0	4	−12	−6	IV − 2·III
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	0	2	−4	−1	
0	0	0	−4	−4	

$\Rightarrow$

$$-4a_3 = -4 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 - 4a_3 = -1$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 - 4 = -1 \mid +4$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = 3 \mid :2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$$

$$2a_1 + 2a_3 = -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 2 = -10 \mid -2$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 = -12 \mid :2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$$

$$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -11$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 12 + 3 + 2 = -11$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 7 = -11 \mid +7$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 = -4 \mid :2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2}}$$

د کاروني بيلګه ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|-16) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -16$$

$$P_2(2|11) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 11$$

$$P_3(4|-11) \Rightarrow \quad f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = -11$$

$$P_4(6|-9) \Rightarrow \quad f(6) = 216a_3 + 36a_2 + 5a_1 + 1a_0 = -9$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	−16	
1	2	4	8	11	II − I
1	4	16	64	−11	III − I
1	6	36	216	−9	IV − I
1	−1	1	−1	−16	
0	3	3	9	27	|: 3
0	5	15	65	5	|: 5
0	7	35	217	7	|: 7
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	1	3	13	1	III − II
0	1	5	31	1	IV − II
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	−8	
0	0	4	28	−8	IV − 2·III
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	−8	
0	0	0	8	8	

$\Rightarrow$

$$8a_3 = 8 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 + 10a_3 = -8$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 10 = -8 \mid -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -18 \mid :2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -9}$$

$$a_1 + a_2 + 3a_3 = 9$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 9 + 3 = 9$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 6 = 9 \mid +6 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 15}$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = -16$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 15 - 9 - 1 = -16$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 25 = -16 \mid +25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 9}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 9}}$$

د کاروني بيلگه۴ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|7) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = 7$$
$$P_2(-2|6) \Rightarrow \quad f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 6$$
$$P_3(3|1) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 1$$
$$P_4(-3|-2) \Rightarrow \quad f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = -2$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	7	
1	−2	4	−8	6	II − I
1	3	9	27	1	III − I
1	−3	9	−27	−2	IV − I
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	4	8	28	−6	III + 4·II
0	−2	8	−26	−9	IV − 2·II
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	0	20	0	−10	
0	0	2	−12	−7	

$\Rightarrow$

$$20a_2 = -10 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{1}{2}}$$
$$2a_2 - 12a_3 = -7$$
$$\Leftrightarrow -1 - 12a_3 = -7 \,|\, +1$$
$$\Leftrightarrow -12a_3 = -6 \,|: (-12) \Leftrightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{2}}$$
$$-a_1 + 3a_2 - 7a_3 = -1$$
$$\Leftrightarrow -a_1 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -1$$
$$\Leftrightarrow -a_1 - 5 = -1 \,|\, +5$$
$$\Leftrightarrow -a_1 = 4 \,|: (-1) \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -4}$$
$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 3 = 7 \,|\, -3 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 4}$$

Die Funktionsgleichung: $$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$

د پررته المانيژباړه:د ځيروني يا تابع برابرون

د کاروني بيلګه ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$$P_1(2|22) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 22$$
$$P_2(4|44) \Rightarrow \quad f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 44$$
$$P_3(-4|4) \Rightarrow \quad f(-4) = -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = 4$$
$$P_4(8|40) \Rightarrow \quad f(8) = 512a_3 + 64a_2 + 8a_1 + 1a_0 = 40$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	2	4	8	22	
1	4	16	64	44	II − I
1	−4	16	−64	4	III − I
1	8	64	512	40	IV − I
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	−6	12	−72	−18	III + 3·II
0	6	60	504	18	IV − 3·II
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	0	48	96	48	
0	0	24	336	−48	$IV - \frac{1}{2}\cdot III$
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	0	48	96	48	
0	0	0	288	−72	

$\Rightarrow$

$$288a_3 = -72 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{4}}$$

$$48a_2 + 96a_3 = 48$$
$$\Leftrightarrow 48a_2 - 24 = 48 \,|\, +24$$
$$\Leftrightarrow 48a_2 = 72 \,|\, :48 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$$

$$2a_1 + 12a_2 + 56a_3 = 22$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 18 - 14 = 22$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 4 = 22 \,|\, -4$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 = 18 \,|\, :2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}$$

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 22$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 18 + 6 - 2 = 22$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 22 = 22 \,|\, -22 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

Die Funktionsgleichung: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x$

د پړرته المانیژباړه:د څیرونبیا تابع برابرون

د کاروني بیلګه۶ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{array}{llcll}
P_1(1|0) \Rightarrow & f(1) & = & 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 & = 0 \\
P_2(-1|-2) \Rightarrow & f(-1) & = & -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 & = -2 \\
P_3(2|16) \Rightarrow & f(2) & = & 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 & = 16 \\
P_4(-3|-4) \Rightarrow & f(-3) & = & -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 & = -4
\end{array}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	0	
1	−1	1	−1	−2	II − I
1	2	4	8	16	III − I
1	−3	9	−27	−4	IV − I
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	1	3	7	16	$III + \frac{1}{2} \cdot II$
0	−4	8	−28	−4	
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	3	6	15	|: 3
0	0	8	−24	1	|: 8
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	1	2	5	
0	0	1	−3	0	IV − III
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	1	2	5	
0	0	0	−5	−5	

$\Rightarrow$

$$-5a_3 = -5 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$a_2 + 2a_3 = 5$$
$$\Leftrightarrow a_2 + 2 = 5 \mid -2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 3}$$

$$-2a_1 - 2a_3 = -2$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -2 \mid +2$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 0}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 3 + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 4 = 0 \mid -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -4}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + 3x^2 - 4}}$$

د كاروني بيلكه ٧ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|1) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 1$$
$$P_2(2|0) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 0$$
$$P_3(-2|4) \Rightarrow \quad f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 4$$
$$P_4(3|9) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 9$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	1	
1	2	4	8	0	II − I
1	−2	4	−8	4	III − I
1	3	9	27	9	IV − I
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	−3	3	−9	3	$III + 3 \cdot II$
0	2	8	26	8	$IV - 2 \cdot II$
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	0	12	12	0	
0	0	2	12	10	$IV - \frac{1}{6} \cdot III$
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	0	12	12	0	
0	0	0	10	10	

$\Rightarrow$

$$10a_3 = 10 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$12a_2 + 12a_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 12a_2 + 12 = 0 \mid -12$$
$$\Leftrightarrow 12a_2 = -12 \mid : 12 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -1}$$

$$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -1$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 3 + 7 = -1$$
$$\Leftrightarrow a_1 + 4 = -1 \mid -4 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -5}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 5 - 1 + 1 = 1$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 5 = 1 \mid +5 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 6}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6}}$$

د کارونې بیلګه ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|6) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 6$$

$$P_2(3|-4) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -4$$

$$P_3\left(-\frac{1}{2}\,\Big|\,\frac{45}{8}\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{2}a_1 + 1a_0 = \frac{45}{8}$$

$$P_4\left(-\frac{3}{2}\,\Big|\,-\frac{77}{8}\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}a_3 + \frac{9}{4}a_2 - \frac{3}{2}a_1 + 1a_0 = -\frac{77}{8}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	6	
1	3	9	27	−4	
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{45}{8}$	$\|\cdot 8$
1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{27}{8}$	$-\frac{77}{8}$	$\|\cdot 8$
1	1	1	1	6	
2	3	9	27	−4	II − I
8	−4	2	−1	45	III − 8·I
8	−12	18	−27	−77	IV − 8·I
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	−12	−6	−9	−3	III + 6·II
0	−20	10	−35	−125	IV + 10·II
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	42	147	−63	|: 21
0	0	90	225	−225	|: 45
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	2	7	−3	
0	0	2	5	−5	IV − III
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	2	7	−3	
0	0	0	−2	−2	

$\Rightarrow$

$$-2a_3 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 - 7a_3 = -3$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 7 = -3 \mid -7$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -10 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -5}$$

$$2a_1 + 8a_2 + 26a_3 = -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 - 40 + 26 = -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 - 14 = -10 \mid +14$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 = 4 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 6$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 2 - 5 + 1 = 6$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 2 = 6 \mid +2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 8}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کارونې یا استعمال بیلګه۹ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1\left(1 \mid -\frac{9}{2}\right) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = -\frac{9}{2}$$

$$P_2\left(-1 \mid \frac{11}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = \frac{11}{2}$$

$$P_3\left(3 \mid -\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -\frac{5}{2}$$

$$P_4\left(-\frac{5}{2} \mid -8\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{125}{8}a_3 + \frac{25}{4}a_2 - \frac{5}{2}a_1 + 1a_0 = -8$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	$-\frac{9}{2}$	$\mid \cdot 8$
1	−1	1	−1	$\frac{11}{2}$	$\mid \cdot 8$
1	3	9	27	$-\frac{5}{2}$	$\mid \cdot 8$
1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$	$-\frac{125}{8}$	−8	$\mid \cdot 8$

$$-11a_3 = -11 \mid : (-11)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

8	8	8	8	−36	
8	−8	8	−8	44	II − I
8	24	72	216	−20	III − I
8	−20	50	−125	−64	IV − I
8	8	8	8	−36	|: 4
0	−16	0	−16	80	|: 4
0	16	64	208	16	|: 4
0	−28	42	−133	−28	|: 7
2	2	2	2	−9	
0	−4	0	−4	20	
0	4	16	52	4	III + II
0	−4	6	−19	−4	IV − II
2	2	2	2	−9	
0	−4	0	−4	20	
0	0	16	48	24	|: 8
0	0	6	−15	−24	|: 3

$\Rightarrow$

$$2a_2 + 6a_3 = 3$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 6 = 3 \mid -6$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -3 \mid : 2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{3}{2}}$$

$$-4a_1 - 4a_3 = 20$$
$$\Leftrightarrow -4a_1 - 4 = 20 \mid +4$$
$$\Leftrightarrow -4a_1 = 24 \mid : (-4)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$$

$$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -9$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 12 - 3 + 2 = -9$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 13 = -9 \mid +13$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 = 4 \mid : 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کارونې يا استعمال بيلګه ۱۰ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|25) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 25$$
$$P_2(-1|-49) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -49$$
$$P_3(3|27) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 27$$
$$P_4(5|5) \Rightarrow \quad f(5) = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 5$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	25	
1	−1	1	−1	−49	II − I
1	3	9	27	27	III − I
1	5	25	125	5	IV − I
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	2	8	26	2	III + II
0	4	24	124	−20	IV + 2·II
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	0	8	24	−72	
0	0	24	120	−168	IV − 3·III
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	0	8	24	−72	
0	0	0	48	48	

$\Rightarrow$

$$48a_3 = 48 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$8a_2 + 24a_3 = -72$$
$$\Leftrightarrow 8a_2 + 24 = -72 \,|\, -24$$
$$\Leftrightarrow 8a_2 = 96 \,|:8 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -12}$$

$$-2a_1 - 2a_3 = -74$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -74 \,|\, +2$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 = -72 \,|:(-2) \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 36}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 25$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 36 - 12 + 1 = 25$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 25 = 25 \,|\, -25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$$

پوښتنې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 0x_3 = 28 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 = 30 \\ 0x_1 + x_2 + x_3 = 32 \end{array}\right| \Rightarrow L = \{13\,;\,15\,;\,17\}$$

$$\left|\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 12 \\ 3x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 11 \\ 0x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10 \end{array}\right| \Rightarrow L = \{3\,;\,2\,;\,1\}$$

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{array}\right| \Rightarrow L = \{15\,;\,12\,;\,10\}$$

$$\left|\begin{array}{l} -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -8 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19 \end{array}\right| \Rightarrow L = \{-1\,;\,3\,;\,2{,}5\}$$

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 23 \end{array}\right| \Rightarrow L = \{5\,;\,3\,;\,1\}$$

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 20 \end{array}\right| \Rightarrow L = \{5\,;\,3\,;\,1\}$$

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 = -6 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -21 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 3 & -2 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & -4 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & -6 & 2 & -21 \end{array} \Rightarrow L = \{1\,;\,-1\,;\,2\,;\,-1\}$$

$$\left|\begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 - 8x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - 6x_2 - x_3 + 3x_4 = 20 \\ x_4 = 5 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline -2 & 3 & -4 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & -8 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -1 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \Rightarrow L = \{-1\,;\,-1\,;\,0\,;\,5\}$$

د لاس ته راوړني د کنترل له پاره دې ازمايښت وشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

Das Horner – Schema هورنر- شیما

د دي له پاره چې د جګودرجو ټولراشنلڅيرونو یا که غواړئ توابعو ګراف وکښلای شو، باید یو ارزښت جدول برابرکړو. دا به ډېر وخت اوځای ونیسي، چې د دې له پاره اړین څیره ارزښتونه یا فنکشنارزښتونه وشمیرو.

د هورنر – شیما دا شمیرنې ډېرې ساده کوي.

بیلګه : دریمه درجه ټولراشنل فنکشن یا راشنل څیرونه

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

د x د ډېرځله نوکانو بندولو له لاربمنځ ته راځي:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = x\left[a_3x^2 + a_2x + a_1\right] + a_0 = \underbrace{\underbrace{x\left[x\left(\underbrace{a_3x + a_2}_{e_2}\right) + a_1\right]}_{e_4} + a_0}_{E}$$

که سرې غواړي چې د $x = x_1$ له پاره فنکشن ارزښت وشمیري، نوکې دی شي سرې په لاندې ډول له دننه دباندې لورته مخ ته لاړ شي:

-- ګرد نوکان وشمیري

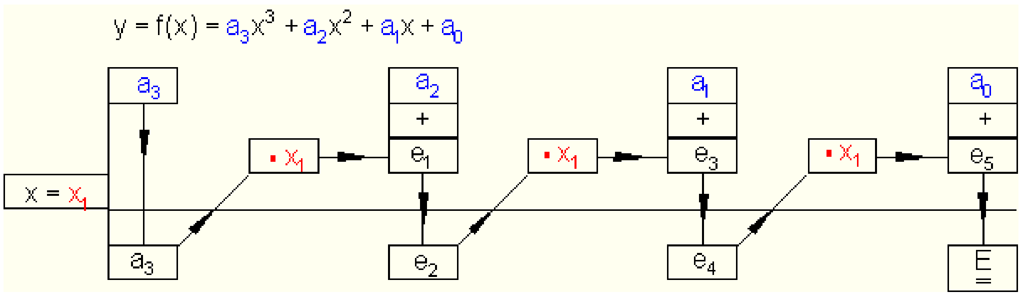
--منځ لاس ته راوړنه (ښه لیکنه به یې داسې وي: منځلاس –ته-راوړنه) د x_1 سره ځل کړي او a_1 ته یې ور زیات کړي

--لاس ته راوړنه د x_1 سره ځل کړي او a_0 ته یې ور زیات کړو

دا شمیرنکارونې یا که غواړئ شمیرنعملیې کیدی شي څیره ډوله یا شیماتیکي داسې انځور کړو:

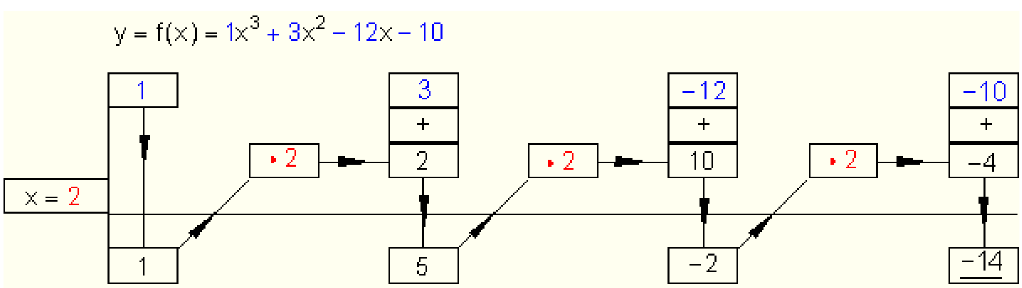
(c) ketabton.com: The Digital Library

تولیزه بڼه Allgemeines Schema:



بیلګه : $y = f\ (x) = x^3 + 3x^2\ -12x\ -10$

د $x = 2$ له پاره دې د $y = f\ (2)$ ارزښت د هورنر – شیما له لارې وشمیرل شي.



نولاس ته راځي یا باورلری: $y = f(2) = \underline{-14}$

د یوه دریمي درجي پولینوم له پاره- چې غواړو ګراف يې رسم کړو یا کاږو- باید یو ارزښتجدول جوړکړو.

$y = f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 \quad D_f = \{x \mid -4 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$

$a_3 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_1 = 1 \quad a_0 = -6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	1	4	1	−6	
x = −4		−4	0	−4	
	1	0	1	−10	= f(−4)
	1	4	1	−6	
x = −3		−3	−3	+6	
	1	1	−2	0	= f(−3)
	1	4	1	−6	
x = −2		−2	−4	+6	
	1	2	−3	0	= f(−2)
	1	4	1	−6	
x = −1		−1	−3	+2	
	1	3	−2	−4	= f(−1)
	1	4	1	−6	
x = 1		+1	+5	+6	
	1	5	6	0	= f(1)
	1	4	1	−6	
x = 2		+2	+12	+26	
	1	6	13	20	= f(2)
	1	4	1	−6	
x = 3		+3	+21	+66	
	1	7	22	60	= f(3)
	1	4	1	−6	
x = −2,5		−2,5	−3,75	+6,875	
	1	1,5	−2,75	0,875	= f(−2,5)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارزښتجدول؛

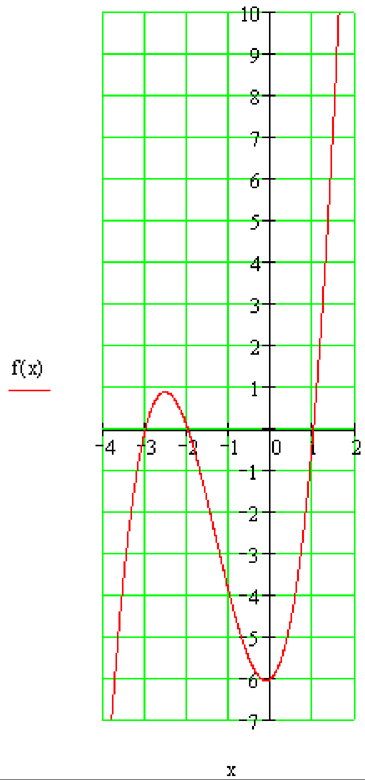
x	-4	-3	-2,5	-2	-1
f(x)	-10	0	0,875	0	-4
x	0	1	2	3	
f(x)	-6	0	20	60	

د لښتي- یا جدولارزښت سره کیدی شی په نږدې توګه ګراف وکښل شي.

که د ګراف کښلو کې څرګنده شي،چې یوبل ځای هم پاتې دی،دا کیدی شي هر وخت د هورنرشیما په مرسته پیدا شي.

ګراف په لاندې x – څایونوکې صفر ارزښتونه لري: -3; -2;1

دا y – محور په -6 کې غوڅوي.



که په کښلوکې څرګنده شي چې یوبل ځای هم پاتې دی، نو دا کیدی شي د هونرشیما په مرسته پیدا کړو،د بیلګیپه توګه(0,5) f

	1	4	1	-6	
x = 0,5		+0,5	+2,25	+1,624	
	1	4,5	3,25	-4,375	= f(0,5)

د پولینوم وېشني پر ځای کیدی شي د تولراشنل تابع درجه د هورنر شیما له لارې هم کمه شي.

موږ د هورنر شیما څیړو:

موږ بیرته تابع ترڅیرني لاندې نیسو

$$f(x)=x^3-x^2-5x+6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چیرته چي $x1=2$ یو صفرځای دی.

د $f(x)=x^3-x^2-5x+6$ لپاره د هورن شیما د $x1=2$ سره

موخه د ضریب (x-2) له نوکانو وتنه ده. $\begin{array}{ccccc} & 1 & -1 & -5 & 6 \\ x=2 & \downarrow & \underline{2} & \underline{2} & \underline{-6} \\ & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}$	په دریمه لیکه کې درې عددونه د وېش نتیجو لپاره هم د پاتي پولینوم ضریبونه بللکیږي. $f(x) = \underbrace{(x-2)}_{\text{Linearfaktor}} \underbrace{(1\cdot x^2 + 1\cdot x - 3)}_{\text{Restpolynom}}$ پاتي پولینوم کربنیز ضریب

د $f(x)$ د نورو صفرځایونو لپاره د پاتي یا باقي پولینوم صفرځایونه شمیرو. دا د اړونده مربع مساوات د حل له لاري کیږي.

نتیجه یې د لاندې پولینوم وېش بیلګې سره وګورئ.

بیلګه: $f(x)=\frac{1}{4}x^3+x^2-x-4$ چیرته چي $x_1=-2$ یو صفرځای دی.

$\begin{array}{ccccc} & \frac{1}{4} & 1 & -1 & -4 \\ x=-2 & \downarrow & -\frac{1}{2} & -1 & 4 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -2 & 0 \end{array}$	باقي یا پاتي پولینوم: $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-2$ $f(x)=(x+2)\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-2\right)$ د مربع مساوت حل $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-2=0$ له دي لاس ته راځي او معکوس: $x2=2$ او $x3=-4$

بیلګه:

$f(x)=-x^3+7x-6=-x^3+0\cdot x^2+7x-6$ چیرته چي $x_1=1$ یو صفرځای دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

باقي پولينوم: -1.x-1.x+6	$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 7 & -6 \\ x=1 & \downarrow & -1 & -1 & 6 \\ \hline & -1 & -1 & 6 & 0 \end{array}$
$f(x)=(x-1)(.x^2-x+6)$	
د مربعيز مساوات حل:	
.x²-x+6 له دې لاس تره اوپه	
ځت یا برعکس x2=2 او x3=-3	

لکه بیلګه چې ښايي، د هورن شيما سره د پاتې پولينوم ټاکنه ساده ده نسبت د پولينوم وېش ته.

دا تولې پورته تلنلارې مو د مربع مساوات حل ته لاربښودوي. که دا ونه توانيږو، نو د نومريکي تلنلارو څخه کار اخستل کيږي، چې دا دلته نه څېړل کيږي.

تمرينونه: د پولينوم وېش...

د لندې ترمونو لپاره د پولينوم وېش وکاروی:

لومړی - $\left(x^3+2x^2-5x-6\right):(x+1)$ دیم - $\left(2x^3-14x-12\right):(x-3)$

دریم - $\left(3x^3-15x^2-51x+63\right):(x-7)$ څلورم - $\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x+6\right):(x+2)$

پنځم - $\left(x^3+\frac{11}{2}x^2+5x-4\right):(x+2)$ شپږم - $\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3\right):(x-2)$

اوم - $\left(x^3-\frac{5}{4}x^2-\frac{23}{4}x+\frac{3}{2}\right):(x-3)$ اتم - $\left(x^3-\frac{5}{3}x^2-\frac{47}{3}x-5\right):(x+3)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم - $\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3\right):(x+3)$ لسم - $(3x^3-15x^2-51x+63):(x-1)$

تمرینونه: د ټول راشنل توابعو صفرځایونه.

تمرین ټولراشنل تابع **IV**

د صفرځایونو ټاکنه له مختلفو لارو څخه.

د یوه تاسو ته مناسب قانو له مخې د ټولراشنل توابعو صفرځایونه وټاکی. د x محور سره د ګراف غوڅټکي و ټاکي او د تابع مساوات د کرښیزو ضریبونو د ضرب په څیر انځور کړی.

اول - $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{13}{2}x^2+18$ دویم - $f(x)=x^3-4x^2+x+6$

دریم - $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1$ څلورم - $f(x)=-\frac{3}{2}x^4+\frac{75}{2}x^2-216$

پنځم - $f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{11}{4}x+3$ شپږم - $f(x)=-\frac{3}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x$

اوم - $f(x)=3x^4-3$ اتم - $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x-2$

نهم - $f(x)=2x^3-4x^2-16x$ لسم - $f(x)=2x^3+4x^2-26x+20$

پوښتنې

د ټول هوښیار یا راشنل توابعو محورغوڅټکي ګرافونه

صفرځایونه وشمیرئ او ګرافونه وکاږئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=x^4+2x^3+x^2$ ب - $f(x)=x^2-6x+9$

پ - $f(x)=\left(x^2-25\right)\left(\frac{1}{2}x+4\right)$ ت - $f(x)=x^6-x^4$

ټ - $f(x)=3x\left(\frac{2}{3}x-2\right)(-2x+3)$ ث - $f(x)=3\left(x^2+4\right)\left(x^2-4x+10\right)$

دویم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=x^4-6x^2+5$ ب - $f(x)=4x^4+6x^2-\frac{7}{4}$ پ - $f(x)=x^6-8x^4+20x^2$

دریم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=2x^3+4x^2-2x-4$ ب - $f(x)=x^3-12x+16$

پ - $f(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$ ت - $f(x)=2x^3-10x^2-4x+20$

ټ - $f(x)=x^4-\frac{11}{4}x^2-\frac{9}{4}x-\frac{1}{2}$ ث - $f(x)=-3x^3+3x^2-3x+3$

ج - $f(x)=-5x^3-10x^2-\frac{5}{2}x-5$ چ - $f(x)=x^4+3x^3+5x^2+9x+6$

څلورم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=-3x^4+15x^2-12$ ب - $f(x)=x^4-x^3-2x^2$

پ - $f(x)=-2x^3+2x^2+16x-24$ ت - $f(x)=\left(x^2-6x+9\right)(x-4)$

ټ - $f(x)=x^6-3x^4-4x^2$ ث - $f(x)=x^4-25x^2-60x-36$

پنځم: د لاندې ټولراشنل توبعو ګرافونه په یوه مناسب پروتولاړ یا کواودینات سیتم کې وکاږئ. د دې لپاره یو ارزښت جدول واچوئ او محور غوښتکي وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- $f(x)=x^3-6x^2+9x \quad D_f=\{x\,|-0,5\le x\le 4,5\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-2 \quad D_f=\{x\,|-3,5\le x\le 2,5\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f(x)=x^3-6x^2+9x-2 \quad D_f=\{x\,|-0,2\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \quad D_f=\{x\,|-3\le x\le 3,5\}_{\mathbb{R}}$

ټ - $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+2 \quad D_f=\{x\,|-2,5\le x\le 3,5\}_{\mathbb{R}}$

ث - ج - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x \quad D_f=\{x\,|-0,2\le x\le 8\}_{\mathbb{R}}$

شپږم: د لاندې توابعو صفرځایونه وټاکئ او ګراف يې تر شونې پولې پورې ښه وکاږئ. ارزښتجدول کيږدئ او ځنې ارزښتونه د جبشميري سره وشميرئ. ځنې صفرځايونه اټکل کړئ او که شوني وي، صفرځايونه وشميرئ.

الف- $f(x)=x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{10}{3}x-1$ ب - $f(x)=0,01\left(x^3-x^2-x+1\right)$

پ - $f(x)=0,1x^3-0,3x^2-9x-10$ ت - $f(x)=(x-1,7)\left(x^2-3\right)$

تر ۶۴۰ پورې دلته محورغوڅتيکيراځي؟

اړيکي "Relation":

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

یوه اړیکۀ له دوه شیانو جوړه ده:

١ – یوه وینابنه

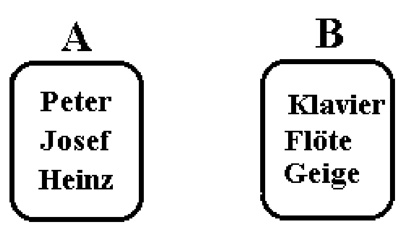
٢ – جوړه، چې دا وینا یې پوره کوي(چې وینابنه یوه رښتیا وینا کوي)۰

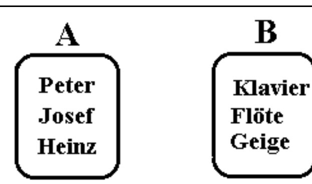
بیلګه :

دیوې کورنۍ د غړو ډیرۍ A دې ورکړ شوې وي او B د لوبو یا موزیک الو ډیرۍ۰

B	A
فوټبال	سپین
هاکي	
زیرګل	
والبال	
کوچۍ	

یا دا لاندې



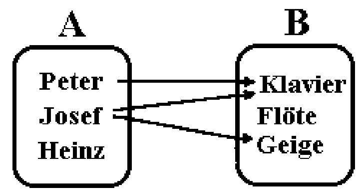
موزیک الې پیانو شپیلۍ ګایګي		د کسانونومونه: پتر یوسف هاینځ

د دواړو ډیریو په منځ کې یوه بینار وینابنه دې یوه وینابنه وي، چې سرۍ a اله bباندې لوبې کوي۰

جوړه ، چې وینابنه پوره کوي، کیدی شي د بیلګې په توګه لاندې جوړې وي:

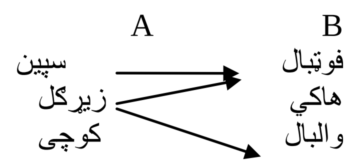
(c) ketabton.com: The Digital Library

پتر په کلاویر لوبه کوي، یوسف په کلاویر لوبه کوي ، یوسف په ګایګي لوبه کوي، د څیرې په توګه اړیکي داسي انځورېږي:



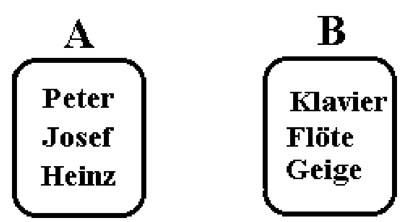
a spielt das Instrument b

یا دا لاندې



نورې بیلګې

موږ د مخه دا لاندې ډېرۍ منځ ته ر اوړې:

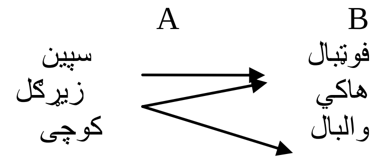


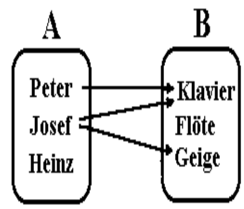
د دواړو ډېريو په منځ کې د اړيکو په څير موږ اړيکې «په اله لوبه کوي» راوړې
یا دا لاندې

فوټبال	سپين
هاکي	زېړګل
واليبال	کوچۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library

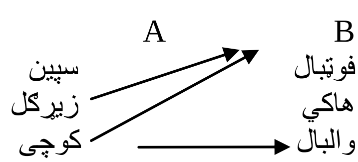
سرلیک

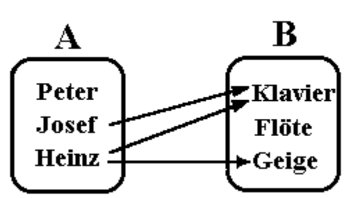




a spielt das Instrument b

په پورته کې ښوول کيږي، چې څوک په کومه اله لوبه کوي.
موږ اوس دواړه ډیرئ A او B ساتو ، مګر د دوي ترمنځ نوې اړيکې غواړو وپيژنو يا تعريف کړو:
بينار اړيکې دې اوس داسې وي، چې « اله لري» او « په اله باندې لوبه کوي» نور نهوي٠
د دې برسيره دې اړيکې « اله لري » لاندې درې جوړې ولری :
هاينځ کلاوير لري
هاينځ يوه ګايګې لري
يوسف يوه کلاوير لري
د څيرې په څير انځور يږي:





a besitzt das Instrument b

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدلکیږي، چې د دوه ډیریو په منځ کې مختلفې اړیکې منځ ته راتللی شي یا ټینګیدلی شي۰

شننیزه انځورونه
مخ ته تیرو مخونوکې مو زده کړل، یوې اړیکې پورې دوه شیان اړه لري: یوه وینا بڼه او یوه جوړه، چې دا وینابڼه پوره کوي۰
کله اړیین نه دي یا نه شي کیدی، چې ټولې جوړې ورکړای شو، کومې چې په یوه اړیکې پورې اړه لري۰

بیلګه ۱
ډیری $A = \{ 1,2,3\}$ او ډیری $B=\{1,2,3\}$ دې ورکړ شوي وي۰ وینابڼه کوچنی له یا لنډ >

هر زده کوونکی پوهیږي، چې جوړې $(1/2),(1/3)$ او $(2/3)$ دا وینابڼه پوره کوي۰
جوړو ګڼلو ته اړنه یو، بلکې دا د وینابڼې مخ ته پرتې ډیری A او B ته۰

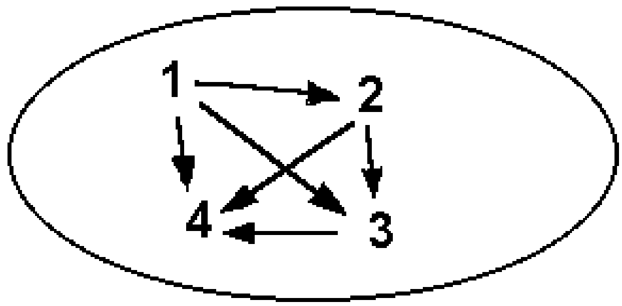
بیلګه ۲
په ځانګړې توګه دا هلته له پامه غورځول کیږي، چې ټولې جوړې وشمیري، کله چې وینابڼو ته مخ ته پرتې ډیری یا ډیرې لویې وي او یا ناپای۰
بیلګه : ډیری : $A = B = \{1, 2, 3, \ \dots \}$
وینابڼه: له هغې، چې لیدل کیږي، چې بیخې ناشونې ده، چې ټولې جوړې وشمیرل شي، چې دا وینابڼه پوره کوي۰

بیلګه ۳
کله کله اړیکه بیخې نه شي انځوریدلی۰
بیلګه : ډیری ناریڼه =M او ښځینه =F وینابڼه کې راوستل شي، چۀ « واده له سره »۰
دا څوک نه شي ګڼلی، چې څوک له چا سره واده دی او دا نه په برخه اخستونکو ډیریو M او F کې ورکړ شوې۰

د یوې اړیکې تیوپ یا ډول
اړیکه په دوه ګروپونو ویشل کیدی شي۰
۱ – ددوه ډیریو ترمنځ اړیکې
۲ – د یوې ډیری په دننه کې اړیکې

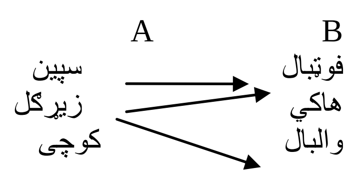
(c) ketabton.com: The Digital Library

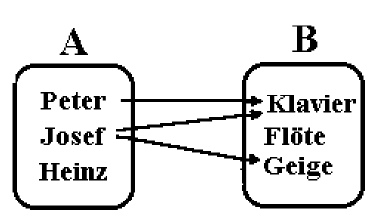
تیوپ ۱ – مورِ وپیژند
د تیوپ ۲ - لپاره بیلګه لاندې اړیکې دي(چې په څیره کې کښل شوي دي):



x له y څخه کوچنی دی

د مخ ته تیرو بیلګو په مخامخوالي یا تضاد دلته د ډیریو د توکو ترمنځ اړیکی پرتې دي
بنسټډیری ،موخه ډیری یا تر مخورشو پسې ورشو
Erklärungروښانه ونه
د ډیری A (بنسټډیری) او B (موخه ډیری) په اړیکو کې په ریښتوني د مخ ته ورشو (پتر ،یوس) همداسې ورپسې ورشو (کلاویر، ګایګې) اړیکې هغه توکي جوړوي، چې په کارونه کې ونډه لري.
A د لوبغاړو نومونه دي او B د لوبو نومونه دي





Grundmenge: { بنسټډیری : {سپين ، زيرګل، کوچی }
Zielmenge { موخه ډیری : { فوتبال ، هاکي ، واليبال }

(c) ketabton.com: The Digital Library

Vorbereich ترمخورشو {Peter, Josef} :
Nachbereich وريپسي ورشو {Klavier, Geige} :

ځني شميرپوهان دا مخورشو او همداسي پسي ورشو، تعريفډيرى ، ارزښتډيرى يا تعريفورشو همداسي ارزښتورشو بولي

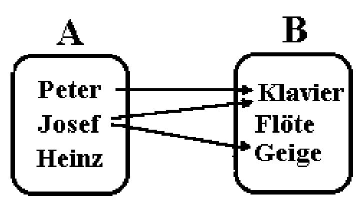
دRelationstafel اړيکو تخته

تراوسه مو تولې اړيکې د غشيدياګرام له لارې انځور کړل٠ يو شونوالى يا امکانات يې د اړيکو تختي له لارې انځورونه ده:

د دې لپاره د بنسټډيرى او موخه ډيرى توکي په يوه جدول کې ليکو٠ د بنسټډيرى توکي په پورته ليکه کې ليکو اود موخه ډيرىتوکي په کيڼ درځ يا کينه متډ کې ليکو٠

په صليبونه سره هغه پيژند يا تعريف ورکول کيږي، چې د موخه ډيرى په توکي باندې د بنسټډيرى يو توکى تنظيم شوى وي٠

د بيلګي په توګه بيرته همغه د ساز الو سره بيلګه راوړو



په دې پورې اړونده اړيکتخته په لاندې ډول ليدل کيږي

	Peter	Josef	Heinz
Klavier	x	x	
Flöte			
Geige		x	

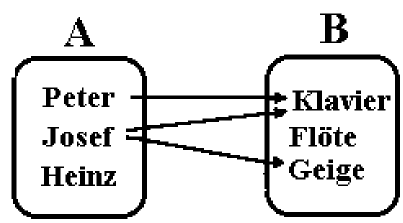
د کواوردينات سيستم انځوربنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

تراوسه مو اړيکې د غشيدياګرام او اړيکتختو له لارې انځور کړې. اوس يو دريم شوونوالی يا دريمه شوونتيا يا امکان غواړو وپيژنو:
انځورونه په يوه کواوردیناتسيستم کې :

د بنسټديری توکې د پروتمحور په نخښنه کوو او د موخه ډيری توکي په ولاړ محور په نخښنه کوو .
د ټکو سره هغه د بنسټديری توکي او ورسره د تنظيمديری تنظيم توکو ټاکلي وي

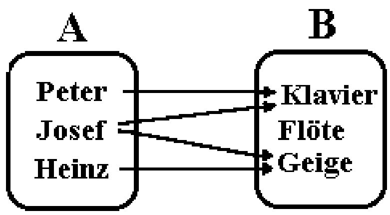
بيلګه
د بيلګی په توګه بيرته هغه بيلګه د لوبو يا موزيک الاتو سره ټاکو:
دلته په دې لاندې الماني ليکنپيا ښه يې :ځيره بسيا کړی شو



په کواوردیناتسيستم کې انځورونه داسې ليدل کيږي

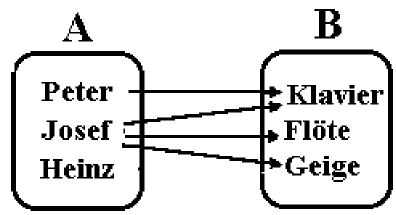
کڼې پوره کيدونکی اړيکې :
د Aڅخه هرتوکی کم له کمه د B په يوه توکي تنظيميږي(پيژندورشو يا مخ ته ورشو او بنسټيزه ډيری کټمټ دي)
ښي پوره اړيکې : دB هر توکی کم له کمه د ځيری په توګه منځ ته راځي (پسي ورشو او موخه ډيری کټمټ دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library



Linksvollständig

کیڼ پوره



rechtsvollständig

ښی پوره

ښی یواځنی اړیکې

د ښنسټډیرۍ (کیڼ) هر توکی په زیات ترزیاته د موخه ډیرۍ (ښی) باندې تنظیمیږي.

پام مرسته : غښي ښي « ښیلوریز) یواځنی دي.

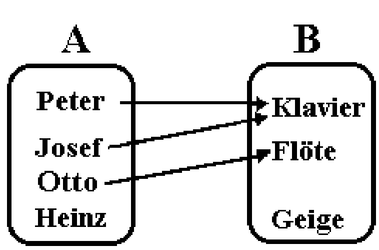
کیڼ یواځنی اړیکې :

د ښی ډیرۍ هر توکی زیات ترزیاته یو وار د یوې ډیرۍ (کینډیرۍ) د خیرې په ډول منځ ته راځي.

پام مرسته : غښي ښي لورته یواځني دي.

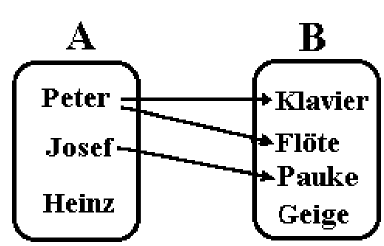
ناټیکوالی!

یا دا لاندې، چې د توپونو په ځای موزیک الې ورکړ شوي دي



rechtseindeutig

ښی



linkseindeutig

کیڼ یواځنی

یواځنی، .

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو کینپوره کیدونکی او بنی یواځنی اړیکي یواځنی اړیکي بلل کیږي (فنکشن او یا ځیروني)

په غشیدیاګرام کې یو فنکشن په دې پیژندل کیږي ، چې په هر توکی تیک یو غشی پیل کیږي

په خټ اړیکي : په خپ اړیکو کې

۱ – مخ – او پسي ورشوګاني سره بدلیږي(پیژنددیری او ارزښتدیری)

۲ – اوښتوني سره بدلیږي

رفلکسیو اړیکي reflexive relations

دیاګرام : په هرتوکي یوکړئ غشی شته

رفلکسیو اړیکي :

د رفلیکسو اړیکو پیژند : د هرو برابرو توکو جوړه اړیکو پوري اړج لري

د فرمو په ځیر یې لیکنه : د تولو a لپاره باور لري:
aRa

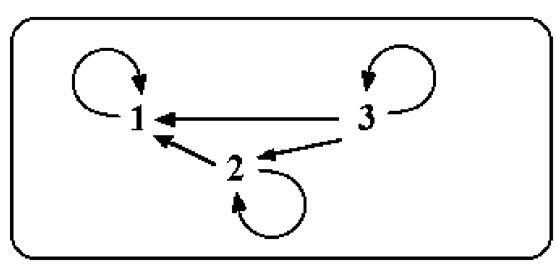
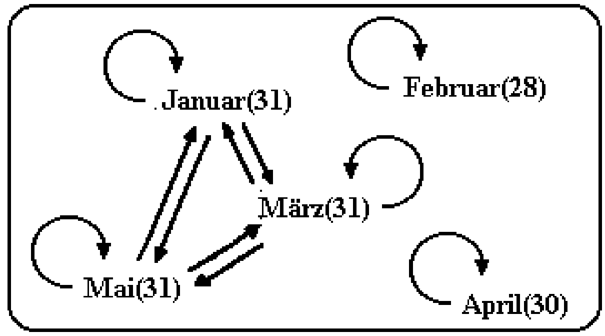


Bild: Die reflexive Relation ≥

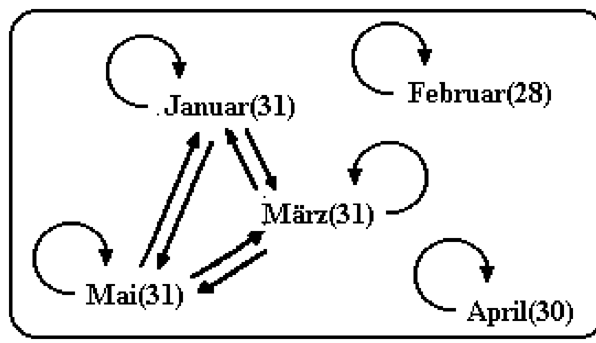
انتیرفلکسیو(ایرفلکسیو اړیکي
Antireflexive
(irreflexive)
Relationen

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند : په انتيرفلکسيو اړيکو کې په هيڅ توکي کړۍ غشی نه شته
د همغه توکي جوړه اړيکو پورې اړوند نه دی، يا په اړيکو ونده نه لري.
د فرمول په توګه ليکل يي : ¬(aRa)



سيومتريکي اړيکي : symetric relations
هر غشي ته په څټ غشی شته
که (a,b) اړيکو پورې اړه ولري ، نو   (b,a) هم په اړيکو پورې اړه لري.
د سيومري اړيکو څيره: « همغومره ورځې لري لکه»



انتيسيومتري اړيکي: Antiasymetric reltions
د انتيسيومتري اړيکو دياګرام : په څټ غشی نه شته .
که (a,b) په اړيکو اړه ولري،نو   (b,a) په اړيکو اړه نه لري، مګر که   a = b
وي.

فرمول: a = b   =>   a R b ∧ b R a

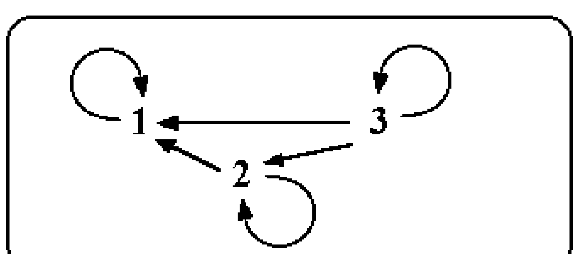


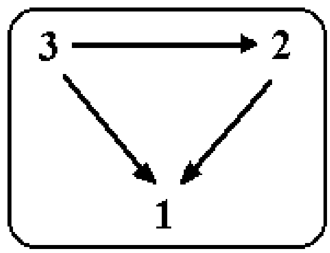
Bild: Die antisymmetrische Relation ≥

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناسيومتريک اړيکي پورته څېره :Antiasymetric reltions

اسيومتريکي اړيکي
asymetric relations (Asymmetrische Relationen)

د اسيومتريکي اړيکو دياګرام نه په ښت غشی لري او نه کړي غشی لري.
د اسيومتريکي اړيکو پيژند: انتيرفليکسيو او انتيسيومتريکي اړيکي
فرمول : ¬(bRa ⇒ aRb

څېره: اسيومتري اړيکي	

خيره کونه يا توابع Funktionen

p

يادونه: په انرېزي کي mapping د او الماني کي DieAbbildung په نامه ن,مولشوي، چي پښتومانا يي خيرونه يا خيره کونه ده.

فنکشندوه اوښتونيپا واريابلپلري، چي يوه خپلواکه اوبله ييواکه ده. له دپام له د فنکشن لهپاره ناسمد تابع نومورکړشويدی.

په رياضي يا شميرپوهنه کي خيرونه يا توابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

په شمیرپوهنه کې طبیعي ، تخنیکي یا هم نورو ورځنیو کارونو کې زیات وخت یوه لویه د بلې لوي په واک کې وي یا که غواړئ د هغې تابع وي، لکه د بیلګې په توګه د یوه موټر د بنزین سوزول یا استعمالول د هغه د تللې چټکتیا یا سرعت په واک کې یا تابع دی. دا ډول ساده اړیکې مو پخوا هم لوستلي او ګرافیکي مو په یوه کواوردینات – یا پروتولاړسیستم کې انځور کړي.

بیلګې:

د یوه شي یا جنس قیمتت د هغه د خرڅ شوې ډیرئ یا سټ په واک کې دی یا تابع دی.

ټوله دباندنۍ تودوخي د ورځې د وخت په واک کې ده.

د یوه بایسکلځغلونکي وهلې لار په مساوي چټکتیا یا سرعت د تلنې وخت په واک کې ده.

د موټر د بریک لار په روښانه توګه د هغه د چټکتیا په واک کې ده.

د یوه کوچني لوېدنه د هغه د عمر په واک ده.

د یوه ریاضي ازموینې نمرې د لاس ته راوړول ټکو په لاس کې ده.

د یوې بډایئ د ګټې قیمت یا لاس ته راوړنه د په د مخه ټاکلې ګټې سره دوخت تیرېدنې په واک کې ده.

تمرین ۱ : د داسې یو په واکوالي یا تابعیت لپاره نورې بیلګې هم پیدا کړئ.

له پورته بیلګې څخه لیدل کیږي، چې هر دوه لویې سره تنظیمیږي.

ډیرئ یا سټ ← وخت خرڅشوې سټ په قیمت اغیزه لري.

د ورځې وخت ← تودوخي. د ورځې وخت په اندازه شوې تودوخي اغیز لري.

د لاس ته راړلو ټکو تعداد یا ګڼون ← نمرې د یوې ازموینې نمرې د لاس ته راړلو ټکو اغیزمن کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین ۲ : د پاتې بیلګو لپاره او د هغو لپاره چې په تمرین ۱ کې مو میندلي اړیکې پیدا کړئ.

دا یو له بل سره تظیم شوې لویې متحولې(اووښتونې یا **Variablen**) بلل کیږي.

دلته دې دې ته پام وشي، چې کوم په واکوالی یا تابعیت د دوې په منځ کې شتون لري.

د ریاضي نمرې د ښوونکي له نظره د لاس ته راوړو ټکو په واک کې دي، مګر نه د نمرو د ټکو په واک کې.

سرې نمرې د بلواک یا تابع متحولو په حیث هم ښایي او د ټکو تعداد د خپلواک متحولو په حیث ښایي.

د ټکو او نمرو په منځ کې یو فنکشن یا بلواکیزې یا که غواړئ تابعیتي اړیکې شتون لري.

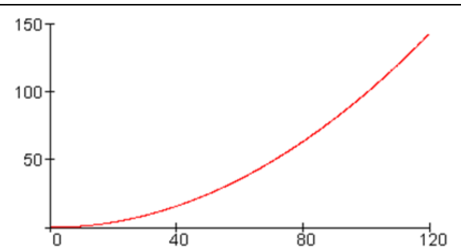
لکه د مخه درسونو څخه چې پوهیږو، ډېر امکانات شتون لري چې د دوه متحولو ترمنځ تابعیتي اړیکې تشریح کړو یا انځور کړو.

د مختلفو چټکتیاو لپاره د بریک لار اندازه کیږي او یو ارزښت جدول ترتیبیږي.

چټکتیا په km/h(x)	20	40	60	80	100	120
د بریکنیولو لار په m(y)	4	16	36	64	100	144

که د جدول ارزښتونه په یوه پروت ولاړ – یا کواوردینات سیستم کې وکښل شي، نو سرې ګراف لاس ته راوړي وروسته له هغې چې ټکي یو له بل سره وتړل شي کوم چې د چټکتیا او بریکلار ترمنځ اړیکې تشریح کوي.

د پراته محور ، چې ابسخیز هم بلل کیږي د خپلواکي متحولي x ارزښتونه پیدا کیږي، په ولاړ محور چې اوردینات هم بل کیږي د بلواک متحولي y = f(x)ارزښتونه میندل کیږي.



تمرین ۳ :   د ارزښت جدول سره سم په یوه مناسب پروتولاړ – یا کواوردیناتسیستم کې اړونده ټکې وکاږئ او دا په یوه ګراف کې سره ونښلوئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بریکلار د چټکتیا 90 ; 70 ; 50 ; 30 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې وټا کئ.

پولیس یوه د90 m د بریک لار اندازه کوي؟

دا موټر د کومې چټکتیا یا سرعت سره خغلي؟

زیات وخت دا هم شوني ده چې فنکشنال یا تابیعي اړیکي د تابع مساوات له لارې انځور شي.

د بریکلار لپاره باور لري: $y = f(x) = 0,01\ x^2$

دلته $y = f(x)$ د بریکلار لپاره اینبوول شوی ا و دا وايي، چې y -کواوردینات په کواوردیناتسیستم کې د متحولې x په واک کې دی، یعنې د خپلواک متحولېx یو تابع دی یا په واک کې دی. تابعمساوات دی، کوم چې هغه قانون ورکوي، چې ارزښتونه د f(x) تابع یا بلواک متحولې جوړوي.

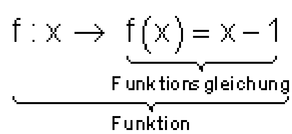
د تابع مساوات په ځاي هم وایو چې $f(x) = 0,01\ x^2$ د تابع قانون دی.

تمرین ۴ : که تابع مساوات $f(x) = 0,01\ x^2$ وي، نو لوستل شوي ارزښتونه وشمیرئ؟

له دا تراوسه شوې کار څخه کیدی شي ووایو:

پیژند یا تعریف:

د یوه تابع سره د خپلواک متحولېx هر ارزښت ټیک یو تابع ارزښت f(x) باندې- یا سره تنظیمیږي. سرې دا هم وايي چې یوه تابع یو یواځنی نظم دی.



لیکندول:f

پورته لومړۍیې په پښتو: تابع برابرون

که په راتلونکې کې له یوه تابع غږیږو، نو د دې تشریح لپاره فقط تابع مساوات ورکوو، یعني فقط $f(x) = ...$. ی.

د تابع نوم f دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا $f(x) \leftarrow x$ لیکندود روښانه کوي، د هر x –ارزښت سره يو ټاکلی تابع ارزښت f(x)اړه لري.

تابع مساوات $f(x) = x - 1$ د شميرلو قاعده يا قانون راکوي، چې تابع ارزښت څنګه جوړيږي.

د دې لپاره چې د نظم يواځنوالی بيا وښايو، لاندې بيلګه راوړو:

هر زده کوونکی يو ټاکلی د بوټانو لويوالی لري. دلته حتمي ده چې زيات زده کوونکي به يو- - يا هماغه د بوټانو لويوالی ولري.

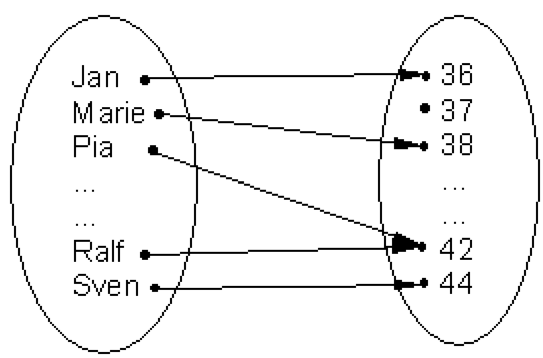
يواځنواوالی په زده کوونکو اړه لري ← د بوټانو لويوالی.

د متحولو سره کښلی يا ليکلې دا په دې معنا دی، چې د زده کوونکي نوم خپلواکه متحوله په ګوته کوي او هغه سره تنظيم شوې د بوټانو لويوالی بلواکه يا تابع متحوله جوړوی.

معکوس يا په څټ د زده کوونکو تنظيم يواځنی نه دی، ځکه چې ډېر زده کوونکي د بيلګې په توګه ۴۲ نمرې د بوټانو لويوالی لرودی شي.

دا ډول تابع د تابعمساوات نه لري، دا کيدی شي چې د ډېرئ ځيرې يا ستېعکس په ځير انځور شي.

يواځنی نظم(تابع يا فنکشن)



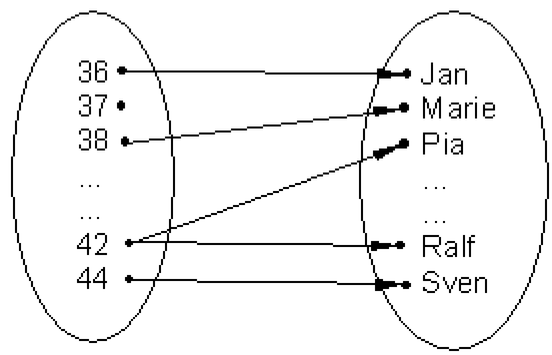
د بوټانولويوالی ډېرئ ياسټ د زده کوونکو سټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

(ارزښت ډېرى)　　　(تعریفډېرئ)

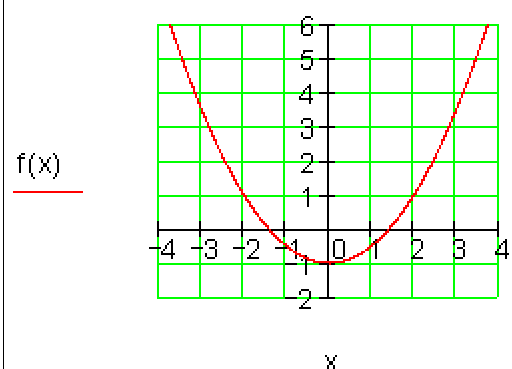
نظم یواځنی نه دی (تابع نه دی)



د دواړو ستونو بدلول

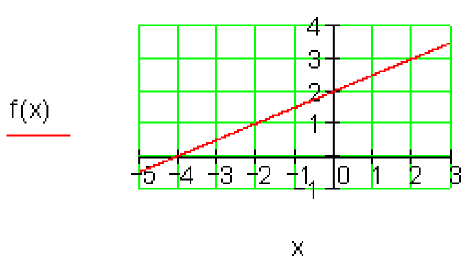
د ریاضیکي توابعو او تابعمساواتو بیلګي (له کیڼ و ښي لورته)

$f(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2 - 1$



مربع مساوات(پارا بل)

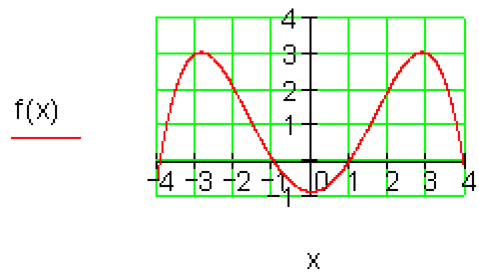
$f(x) := \frac{1}{2} \cdot x + 2$



کرښیز مساوات(ګرښنه)

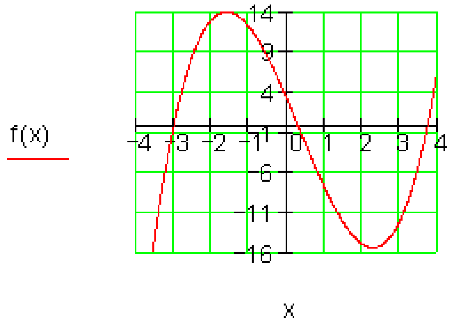
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) := \frac{-7}{120}\cdot x^4 + \frac{23}{24}\cdot x^2 - \frac{9}{10}$$



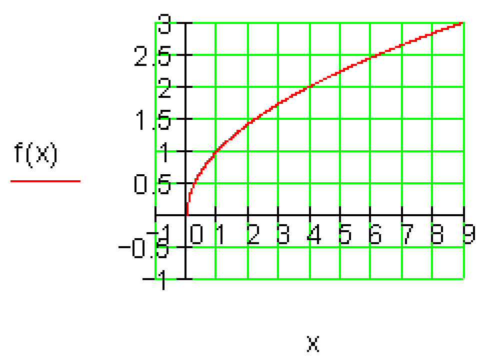
د ځلورمي درجي پولراشنل تابع

$$f(x) := x^3 - x^2 - 11x + 3$$



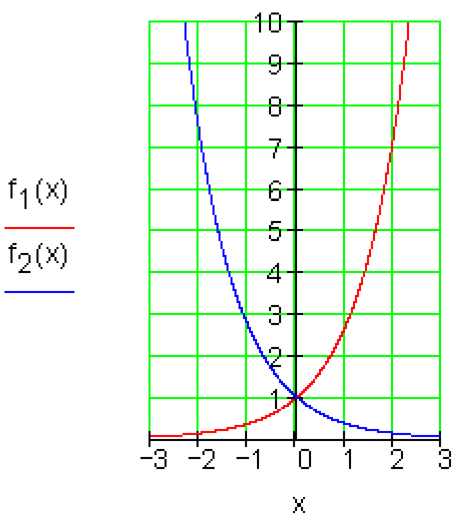
د دريمي درجي پولراشنل تابع

$$f(x) := \sqrt{x}$$



ريښه تابع

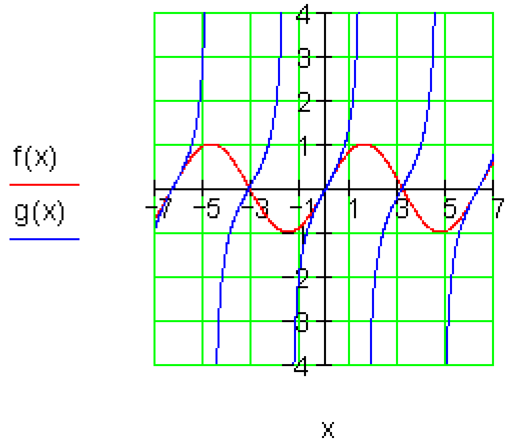
$$f_1(x) := e^x \qquad f_2(x) := e^{-x}$$



اکسپوننشل تابع

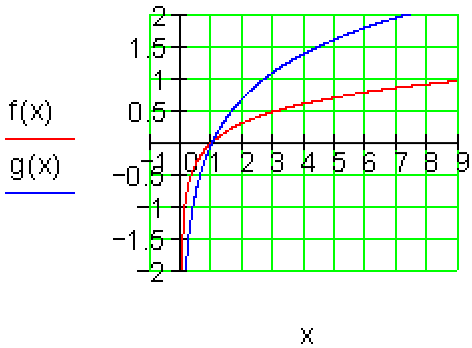
(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) := \sin(x) \qquad g(x) := \tan(x)$



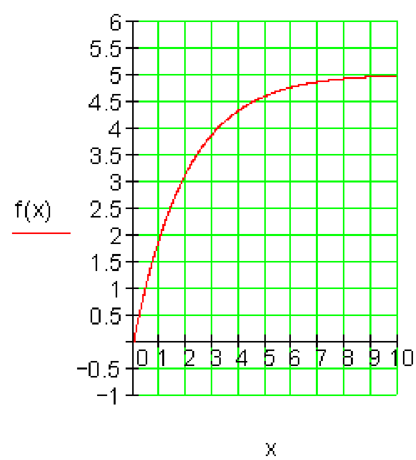
تريگونومتريکي(مثلثاتي) تابع

$f(x) := \log(x) \qquad g(x) := \ln(x)$



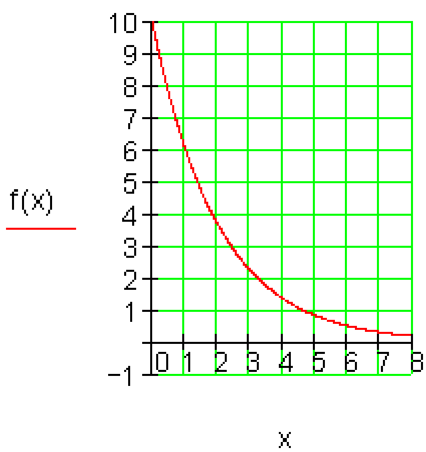
لوگاريتمتابع

$f(x) := 5\cdot\left(1 - e^{-0.5\cdot x}\right)$



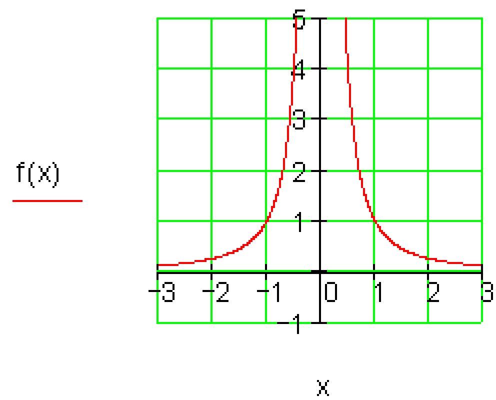
اکسپوننشل مربنتکره

$f(x) := 10e^{-0.5\cdot x}$



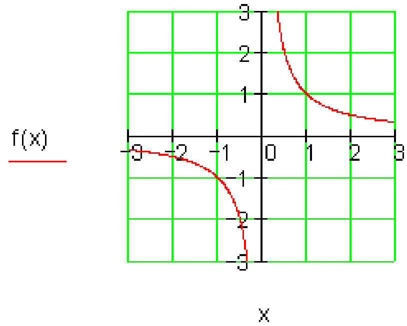
اکسپننشلي کښته کيدنه

$f(x) := \frac{1}{x^2}$



های پارابول محورسيومتريک

$f(x) := \frac{1}{x}$



های پارابول ټکی سيومتريک

تعريف- او ارزښتډېرئ يا - سټ

تعريف(پيژند):

د يوه تابع تعدريفسټ **D** د ټولو خپلواکو متحولو ډېرئ يا سټ ده، د کومو لپاره چې تابع تعريف دی.

ارزښت ډېرئ **W** د ټولو تابع ارزښتونو- يا بلواکو - سټ ده، چې د D له توکو منځ ته راځي.

بيلګه:

$f(x) = \frac{1}{x}$ تعريفسټ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ تعريفسټ D=R

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفر سره د وېش اجازه نه شته	R د حقیقيي اعدادو ډېرئ ده

بیلګه:

$f(x) = x^2 \quad D = \mathbb{R}\,;\, W = \mathbb{R}_+$ د تابع ارزښت په حیث فقط مثبت یا زیاتیز ارزښتونه رامنځ ته کیږي	$f(x) = x + 1 \quad D = \mathbb{R}\,;\, W = \mathbb{R}$ تابع هر په خوښه ارزښت نیولی شي.

شمیرپو هنیزه لیکندود او د هغه معنا

$f(4) = 7$ د خپلواکو متحولو د ارزښت x = 4 لپاره د تابع ارزښت 7 دی.

دا د ارزښتجوړه (7 | 4)په کواوردیناتسیستم کې د ټکي (7 | 4) P کواوردیناتونه جوړوي.

$f(x) = 9$ غوښتونی د x -ارزښت دی، چې په هغه پوري تابع ارزښت 9 اړه لري.

$y = f(5)$ د x = 5 لپاره تابع ارزښت دی.

تولکه:

یو یواځنی نظم، چې په هغه کې د تعریف ست D څخه خپلواکه متحوله x تیک یو تابع ارزښت f(x) باندې تنظیم شي ځیرونه (چېموږ یې تابع بولو) یا فنکشن بلل کیږي.

تابعي(خپلواکیز) یا فنکشنلي اړوندوالی د یوه تابع مساوات(د بیلګې په توګه: f(x) = 2x + 1) سره لیکل –یا تشریح کیږي.

تابع مساوات کې د x –ارزښتونو په اینښولو سره د تابع ارزښت لاس ته راځي، چې دا د x -ارزښتونو سره یوه ارزښت جدول کې اینښولی یا انځورولی شو.

د ارزښتجدول هره جوړه په کواوردینات سیستم کې تیک یو ټکی په ګوته کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په زياتو حالتونو کې کيدی شي دا منځ ته راغلي ټکي يوه ګراف ته سره رايوځای يا وتړل شي.

د ټول x - ارزښتونو ډېرئ، هغه چې په تابع مساوات کې ځای په ځای شي تعريف ډېرئ يا ــسټ بلل کيږي.

د ټول تابع ارزښتونو ډېرئ يا ــسټ، چې دلته منځ ته راځي، د تابع ارزښت ډېرئ W پورې اړه لري.

د تمرينونو حل

لومړی تمرين: د داسي بلواکوالي لپاره نورې بېلګې پيدا کړئ.

ځواب: - د يوه تيلسوزونکې ماشين قدرت د څرخونتعداد(د ماشين د څرخيدو تعداد) په واک کې دی.

- د يوې ګردئ يا دايرې سطحه د وړانګې يا شعاع په واک کې ده.

- د برېښنا پيسي د ثابت قيمت سره د انرژي يا برېښنا مصرف په واک کې ده.

دويم تمرين : د پاتې بيلګو او د هغو لپاره چې تاسو په لومړي تمرين کې وليدل ګډې اړيکې سره په فرمولبندئ کې راوړي.

ځواب:

لار → د خوزښت وخت: په مساوي پاتې چټکتيا د خوزښت وخت په وهلې لار اغيز لري.

بريکلار → چټکتيا: د يوه موټر چټکتيا د بريکلار باندې اغيزه لري.

ټوله ګټه → د تيريدنې وخت: د سرمايې اېښوني وخت د ګټې لاس ته راوړنه باندې اغيزه لري.

وده → عمر: د کوچني عمر د هغه په وده اغيزه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

قدرت → ځرخونتعداد: د يوه سوزونکي ماشين د تيلو سوزيدنه د هغه په ځرخونتعداد پورې اړه لري.

سطحه → وړانګه : د ګردۍ يا دايرې وړانګه د دايرې سطحه باندې اغيز لري.

د برېښنا حساب → انرژي ستې: د سوزولې برېښنا يا انرژۍ ستې يا ډېرۍ د برېښنا بل(هغه د مصارفو کاغز) اغيزمن کوي.

دريم تمرين:په يو مناسب کواورديناتسيستم کې د ارزښت جدول اړوند ټکي وکاږۍ او دا يوه ګراف ته سره وتړۍ.

د چټکتيا 90 ; 70 ; 50 ; 30 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې بريکلار پيدا کړۍ.

پوليس يوه د 90 m بريکلار کچوي. دا موټر دکومې چټکتيا سره تلی؟

ځواب:

د 30 km/h چټکتيا بريکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتيا بريکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتيا بريکلار 48 m ده

د 90 km/h چټکتيا بريکلار 80 m ده

د 110 km/h چټکتيا بريکلار 120 m ده

له 90 m بريکلار سره يو موټر 95 km/h د چټکتيا سره ځغلي.

تلنلار: په کواورديناتسيستم يا پروتولاړ سيستم کې د x -محور(ابسځيزا) د خپلواکو متحولو ډېرۍ نمايندګي کوي، د y –محور (اوردينات) د بلواک يا تابع متحولو نماينده ده.

د مخه له دې چې په يوه کواورديناتسيستم کې ارزښتونه ليکل –يا کښل کيږي بايد وکتل شي، چې کومه خپلواک- او کومه بلواک- يا تابع متحوله ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

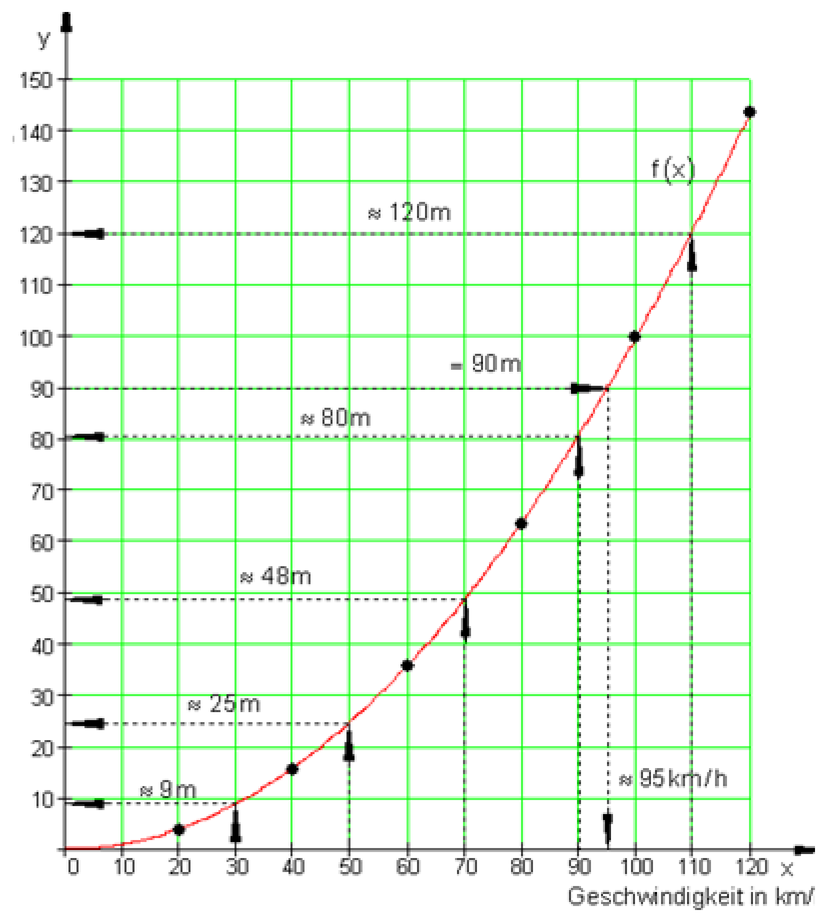
پسي دا هم غوره ده، چې د کچونې لپاره یوو بنه کچونی یا هغه اله چې اندازه پرې کچوو باید ومومو.

د دې لپاره د جدول لوي او کوچني ارزښتونه کتل کیږي او پرېکړه کیږي چ دواړه محورونه په څو برخو باید وویشل شي.

وروسته له هغې چې ټول په جدول کې ټکي په کواوردیناتسیستم کې ځای په ځای شوي، نو بیا دا ټکي د ګراف په توګه سره تړل – یا نښلول کیږي

کیدی شي له ګراف څخه د داسي x -ارزښتونو لپاره هغه لړ یا ډېر تابع ارزښتونه هم ولوستل شي، چې په ارزښت جدول کې مخ ته نه راځي.

معکوس کیدی شي د یوه ټاکلي تابعارزښت اړونده x -ارزښت ولوستل شي. د دې نتیجو ټیکوالی د دې په واک کې دی، چې ګراف څومره ټیک کښل شوی دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته کواوردينات – يا پروتولاړسيستم کي: پروت: چټکتيا په کيلومتر. ولاړ:بريکلار په متر

ځلورم تمرين:

لوستل شوي ارزښتونه وشميرئ، که تابع مساوات $f(x) = 0{,}01\, x^2$ وي.

ځواب:

تابعارزښتونه داسې شميرلکيږي، چې اړونده د x ارزښتونه په تابع مساوات کي کېښوول شي.

$$f(x) = 0{,}01x^2 = \frac{1}{100}x^2$$

$$x = 30 \Rightarrow f(30) = 0{,}01 \cdot 30^2 = 0{,}01 \cdot 900 = 9$$

$$x = 50 \Rightarrow f(50) = 0{,}01 \cdot 50^2 = 0{,}01 \cdot 2500 = 25$$

$$x = 70 \Rightarrow f(70) = 0{,}01 \cdot 70^2 = 0{,}01 \cdot 4900 = 49$$

$$x = 90 \Rightarrow f(90) = 0{,}01 \cdot 90^2 = 0{,}01 \cdot 8100 = 81$$

$$x = 110 \Rightarrow f(110) = 0{,}01 \cdot 110^2 = 0{,}01 \cdot 12100 = 121$$

د 30 km/h چټکتيا بريکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتيا بريکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتيا بريکلار 48 m ده

د 90 km/h چټکتيا بريکلار 80 m ده

د 110 km/h چټکتيا بريکلار 120 m ده

له 90 m بريکلار سره يو موټر 95 km/h د چټکتيا سره ځغلي.

بريکلار 90 m کچ شوی ، غواړو چټکتيا پيدا کړو.

پيل: $f(x) = 90 \Leftrightarrow 0{,}01x^2 = 90$ دا مساوات په x پسې ځواب کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$0{,}01x^2 = 90 \,|: 0{,}01 \Leftrightarrow x^2 = 9000 \,|\, \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{9000} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{900 \cdot 10} \Leftrightarrow |x| = 30\sqrt{10}$$

ارزښت حل کړئ.

$$|x| = 30\sqrt{10} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 30 \cdot \sqrt{10} \approx \pm 94{,}9$$

نسبت و پوښتني ته فقط مثبت یا زیاتیز ارزښتونه موخه ور دي، څکه چې مونږ مثبته چټکتیا په پام کې نیسو. د 90 m بریکلار سره د موټر چټکتیا 94,9 km/h وه.

یادونه:لومړی شمیرنه ټیک ارزښتونه راکوي، سره له دې هم موخه وردی، چې دا شمیرل شوي ارزښتونه په ګراف کې یا له ګراف څخه هم د لوستلو له لارې کنترول کړو.

پوښتنې

تابع I

لومړی:

ټول ټکي په کواوردینات سیستم کې په نخښه کړئ، چې کواوردینات یې ورکړ شوي شرایط پوره کوي.

الف- $y \le -1 \wedge x \ge 1$ ب- $y \in \mathbb{R} \wedge -2 \le x \le 3$ پ- $x \in \mathbb{R} \wedge y = 2$

ت - $0 \le x \le 4 \wedge y \ge 0$ ټ- $|x| \ge 1{,}5 \wedge |y| \le 2$ ث- $y > 0 \wedge x = -1$

دویم: په مناسب کواوردینات سیستم کې لاندې ټکي رسم کړئ.

$$A(40\,|\,220);\ B(10\,|\,250);\ C(200\,|\,300);\ D(80\,|\,240)$$

ایا د x – او y -کواوردیناتو ترمنځ کومې اړیکې شته؟ د دې لپاره یو ترم ولیکئ او نور درې ټکي ورکړئ.

دریم: د ټکو ځای وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- ټکي $P_t\left(t-1\left|\frac{1}{t+1}\right.\right)$ د t€R کوم ارزښت په لومړئ څلورئکي پروت دی؟

ب- ټکي $Q_t\left(t\left|t^2-1\right.\right)$ د t€R کوم ارزښت لپاره دx محور کښته لور ته پرته ده؟

څلورم:

د ټکوډېرئ یا ــسټ $A=\left\{(1|3);\left(2\left|\frac{3}{2}\right.\right);(3|1);\left(4\left|\frac{3}{4}\right.\right);\ldots\right\}$ ورکړ شوی دی.

د A نور دري توکي ورکړئ او دا ټکي په یوه کواوردینات سیتم کې وکاږئ. ایا د x- او y -کواوردیناتونو ترمنځ اړیکی شته؟

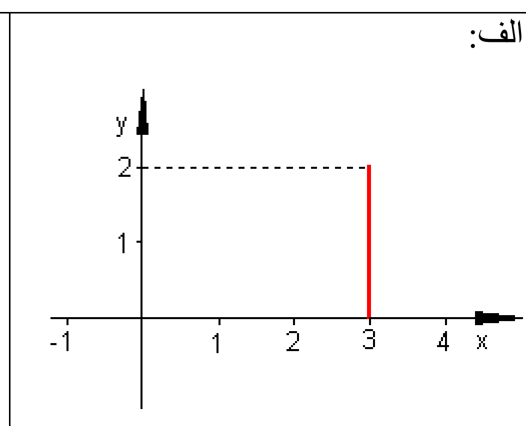
پنځم: یو ټکی $P\left(t\left|\frac{t}{2}+3\right.\right)$ د t€R سره ورکړشوی دی.

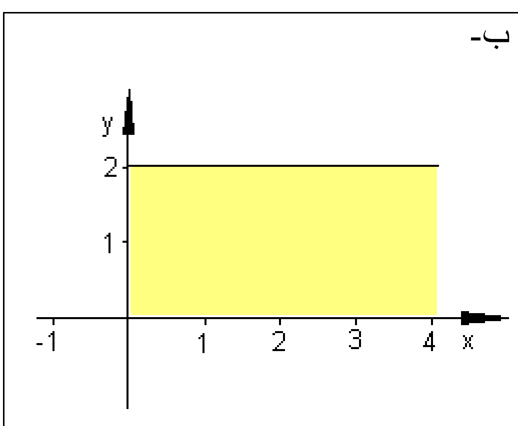
د t لپاره څه ارزښتونه ورکړي او دا د دې اړونده ټکي په یوه کواوردینات سیستم کې وکاږئ.

د کومو t -ارزښتونو لپاره باور لري:

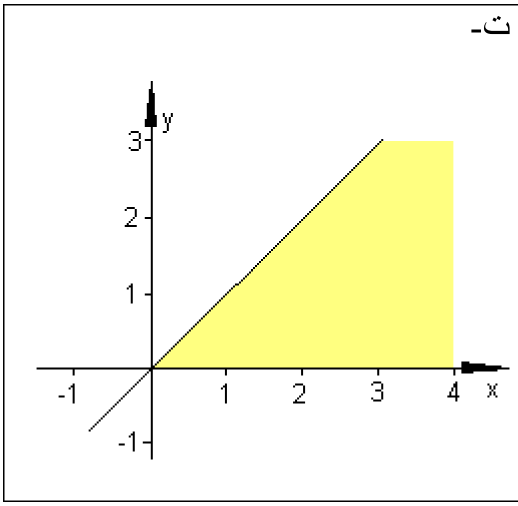
د ټکي P د x -کواوردینات د ټکي د y -کواوردینات سره برابر دي؟

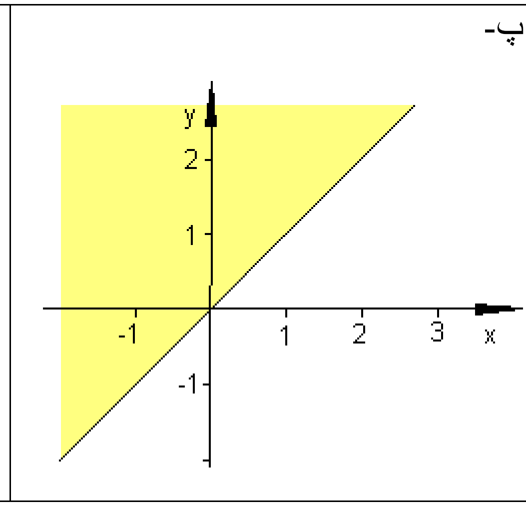
شپږم: په نخښه شوي کرښه او همداسې سطحه تشریح کړئ.





(c) ketabton.com: The Digital Library





پوښتنې

توابع II

لومړی

ښاغلی برګ د يوه ملفون(لاسي يا لاسي تلفون) قرارداد د لاندې شرايطو سره وکړ:

د مياشتې € 20 ، د تلفون قيمت په دقيقه € 0,35 .

الف- که دی 80 ,40 يا 120 دقيقې تلفون وکړي، نو مياشتنی حساب به يې څومره جګ وي؟

ب - لګښت لپاره يو ترم وليکئ چې په دقيقه کې د خبرو د دوام په واک کې وي.

پ – اړيکې ګرافيکي انځور کړئ.

دويم:يوه الوتکه د سوزونموادو کيروزين 10500 Liter ليتره زخيره لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په 100 km دا 180 Liter سوزوي.

الف- د په لیتر مصرف جدول جوړ کړئ. یو واټن له 0 km تر 5000 km پورې وټاکئ.

ب – اړیکې یې ګرافیکي ځور کړئ.

پ-له څومره کیلومتره وروسته به زخیره تمامه شوې وی؟

ت - د الوتنې د لار ترم د ټانک د خوندیونې په واکوالي کې وټاکئ.

دریم: یو د شمیراړونې جدول جوړ کړئ، چې ^{0} څلزیوس (^{0}C) په فارنهایت(^{0}F) اړوي د 20^0C - او 60^0C په ساحه یا ورشو کې. د دې لپاره اړین داتا تشریح کړئ. اړیکې ګرافیکي انځور کړئ. دا اړیکې کوم ترم په ګوته کوي؟ د ا د تبې تودوخئ کچونه (ترمومتر) د ناروغ د تبې په اندازه کئ چې ده ایا دا حرارت یا تودوخي د ژوند خطر لري؟

څلورم: یوه د مالونو لیږلو مغازه غواړي لګښت له امله یو د تحفې پاکټ ولیږي. د پاکټولو تخنیکي پرابلم له امله یې یو اړخ د 35 cm سره کره ټاکلی دی. د پوست د لګښت نظم باید په پام کې نیول شوی وي

د لګښت نظم: مربع ډوله پاکټونه دننه په هیواد کې.

خورا کوچنئ کتله(یا بهتره ډکی): اوږدوالی 15 cm ، سور 11 cm ، جګوالی1 cm .

خورا جګه کتله: اوږدوالی 60 cm ، سور 30 cm ، لوړوالی 15 cm یا اوږدوالی جمعه یې سور جمعه یې یا په ورزیات جګوالی = 90 cm. خورا زیات وزن 2 kg.

الف- د یوه ډکي یاحجم $V = 21\ dm^3$ لپاره د سور او جګوالي ترمنځ اړیکې وټاکي.

ب- دا ماکسیمال رسیدلوړ ډکی یا حجم څومره لوي دی؟

پنځم: فرمول ورکړشوی دی.

الف- ش څنګه تغیر خوري، که کوچنی شي.

ب- ایا لاندې اړیکې به د فرمول له لارې تشریح شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

A : د کرایې موټر ټول لګښت د عدد a د تللی کیلو متر او د هغه د یوه کیلو متر د قیمت c لپاره.

B : د ودرېدلو لار یا واټن a د بریکلارb او عکس العمل لارc څخه شمیرل کیږي.

پ-شي اړیکې ورکړئ چې د فرمول له لارې تشریح کیدی شي یا روښانه کیدی شي.

شپږم: یو ولاړګوډېز یا مستطیل U = 12 cm چاپیریال یا محیط لري.

الف- اړخونه څنګه یو د بل په واک کې کیدی شي.

ب- یو ترم وټاکئ، چې بلواکوالی د اړخ a څخه ورکوي یا د اړخ a په واک کې یا تابع دی.

پ- د a د کوم ارزښت لپاره سطحه خورا لویه وي؟

پوښتنې

توابع III

لومړی: توابع f(x) ورکړ شوي. یو مناسب ارزښتجدول وکاږئ. دې ته اړوند ګراف رسم کړئ.

الف - $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ ب - $f(x)=x^2$ پ - $f(x)=\frac{1}{x+3}$ ت- $f(x)=3^x$

دویم: فکر وکړئ، چې ایا یو ،،یواځنی نیظم،،د $x \to y$ لپاره مخ ته لرو: $x^2+y^2=1$

دریم: ټکی P ورکړ شوی دی. ایا یوه تابع مخ ته لرو؟ که هو، نو نظمقانو وټکئ او خورا لویه تعریفستې یا – ډېرئ هم وټاکئ.

$$P=\left\{(2|1);\left(5|\frac{1}{4}\right);\left(10|\frac{1}{9}\right);\left(25|\frac{1}{24}\right);.....\right\}$$

څلورم: یو ارزښتجدول ولیکئ او د تابع ګراف وکاږئ:

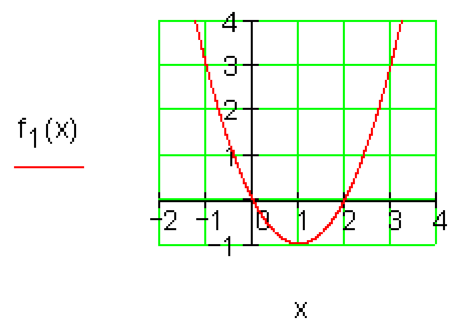
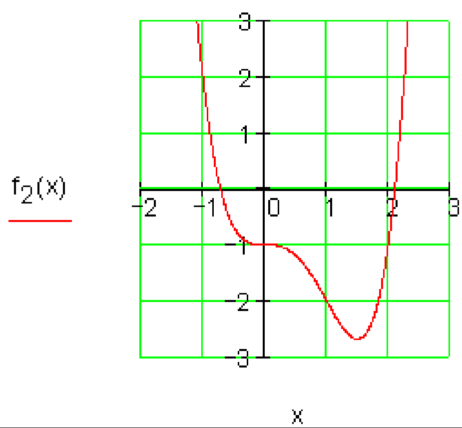
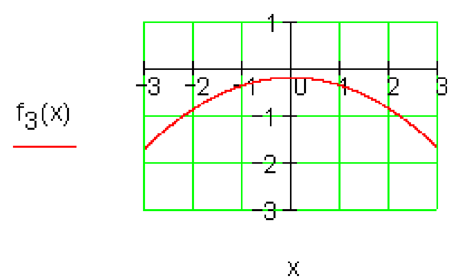
$$f(x)=\frac{1}{8}\left(x^3-2x-4\right);\ x\in\mathbb{R}$$

الف- د جبشمیري سره f (3) او f (- 2) وشمیرئ.

ب- په کوم ځای کې د تابع ارزښت صفر دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ-د کومو x -ارزښتونو لپاره تابعارزښت 1 دی؟
ت-د کومو x -ارزښتونو لپاره تابعارزښت کمیز یا منفي دی؟
ټ-د کومو x -ارزښتونو لپاره باور لري:1 > f (x) کړئ، چې د کوم تابع لپاره باور لري:
پنځم: د درې توابعو f1, f2, f3 ګراف ورکړ شوی دی. پرېکړه وکړئ:

الف- د تابع ارزښتونه هر چیرته صفر دي. ب- توابع په انټروال [1 ; 0,5] منفي یا کمیز دي پ-.f (2) < f (0) ت-.f (0) = - 1 ټ-.f (- 2) = f (2)	
	

پوښتنې

توابع **IV**

لومړی: تابع f ورکړ شوې د f(x) =-0,2(2-x); x€R سره

پرېکړه وکړئ، چې ایا لاندې ویناوې رښتیا او که نارښتیا دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځيل ځواب مدلل کړئ.

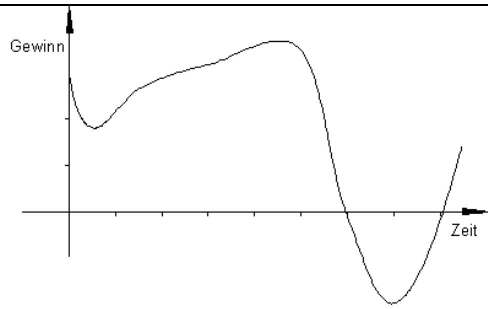
الف- د تابع ارزښتونه زياتيز يا مثبت دي د ټول x – ارزښتونو لپاره.

ب- $f(x) < 0$ د ټولو x€R لپاره.

پ- $f(x)$ د $x = 2$ لپاره منفي دی.

ت- يو ځای u شتون لري، چې د هغه لپاره $f(u) = f(u + 1)$ باور لري.

دويم: د رسم شوي تابعګراف تلنه تشريح کړئ. دلته هغه غوره ټکي په نخښخه کړئ. هغه ټکي، انتروالونه روښانه کړی يا تشريح کړئ په کومو کې چې ته اقتصادي پسمنظر(د شاته پراته دليل) فرمولبندي کوې.



کواوردیناتسيستم کې : پروت: وخت. ولاړ: ګټه

دريم: د يوه موټر د تيلو سوزول د چټکتيا په واک کې يا تابع دی. دا په ښنک کې ښيره د تيلو سوزول ښايي په ليټر په سل کيلو متر کې او د چټکتيا په واکوالي کې، که سری په ښلورم ګير Gang کې لاړ شي.

الف- کړه يا منحني روښانه کړه.

ب- په کومه چټکتيا کې استعمال ۶ ليټره په سل کيلومتر کې دی؟

پ- په کومه چټکتيا کې د تيلو سوزښت خورا کم دی؟

ت- کړه به ښنګه وځغلي، که په دريم ګير کې سری لاړ شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم: د لمبا په ډنډ کې $40\ m^3$ اوبه دي. دا اوبه د ډنډ د پاکوالي له امله د پمپ کولو سره وباسي، چې په دقیقه کې 350 Liter لیتره اوبه وځي.

الف- یو ترم د پاتې حجم یا ډکي لپاره په m^3 وټاکئ.

ب- څومره m^3 د ۲۰ دقیقو وروسته په لمباډنډ کې لا پاتې ي.

پوښتنې

توابع V

لومړی:د تابع $f(x)$ماکسیمال تعریفورشوD_{max} پیدا کړئ

الف- $f(x) = 2 - 3x$ ب - $f(x) = \sqrt{2x-3}$

ث- $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ ت - $f(x) = -x^2 + 1$

دویم: د تابع $f(x)$ارزښتورشو وټاکئ د $D = D_{max}$ سره.

الف- $f(x) = \dfrac{3}{2}x - 4$ ب - $f(x) = 1 + \sqrt{x+1}$

پ - $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ت - $f(x) = x^2 - 5$

دریم: تابع $f(x)$ ورکړ شوې ده. ماکسیمال تعریفورشوD_{max} وټاکئ. د $f(x)$ګراف وکاږئ.

د $x \in \left\{k\,;\, -\dfrac{2}{k}\,;\, k+1\,;\, k-4\right\}$ لپاره تابعارزښتونه وټاکئ.

الف- $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$ ب - $f(x) = 2x - \dfrac{2}{x}$ پ - $f(x) = x - x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت - $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ ټ - $f(x)=\sqrt{4-2x}$ ث - $f(x)=2^x-1$

څلورم: تابع $f(x)$ د $f(x)x^3$ سره ورکړشوې ده.

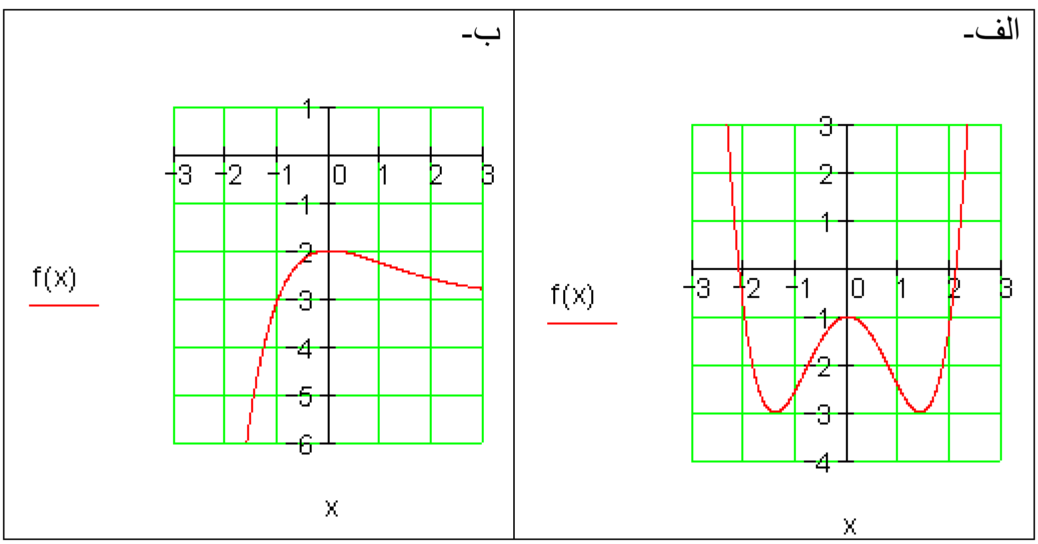
الف- ماکسیمال تعریفورشو D او ارزښتورشوW ورکړئ.

ب- د کوم $x\in D$ لپاره باور $f(x)=81$ لري؟

پ-د کوم $x\in D$ لپاره باور $f(x)\geq 9$لري؟

ت- و ښایئ: $f(x+1)=3.f(x)$ د ټولو $x\in D$ لپاره.

پنځم: تابع $f(x)$ د $D = IR$ لپاره تعریف ده. د رسمونو څخه ارزښت ډېرئ وښایئ.



پوښتنې

توابع VI

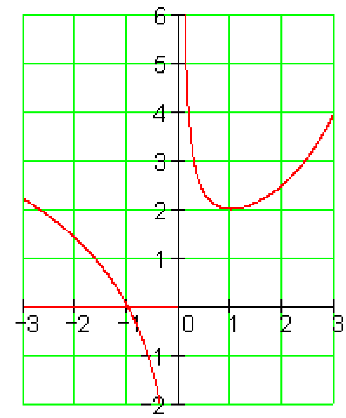
لومړی: د تابع$f(x)$ ارزښتښت د جبشمیري سره وشمیرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

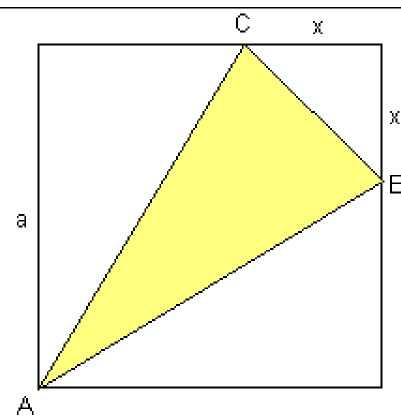
سرليک

$$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{2}{5}x^3-2$$ د D=R سره.

دويم:

 	دويم: ترڅنک کړه د تابع f(x) ګراف دی؟ ايا f(x) د ټولو x€R لپاره تعريف دی؟ د x د کومو ارزښتونو لپاره تابع ارزښت - له 2 لوي دی؟ - له صفرکوچنی دی؟

دريم:

 	يوه مربع يا خلورې د اړخ اوږدوالي a = 5 cm سره ورکړ شوې ده. د مثلث يا درېګوديABC د سطحي ترم A(x) وټاکئ

څلورم: د يوه مالک ټول لګښت K د يوه لاسته راوړني سټ x په واکوالي کې په سټ واحد يا ډېرئ يوون (ME) د ترم له لاري ليکل کيږي

$$K(x)=0{,}01x^3-x^2+100x+720$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- د x -ارزښتونو لپاره تر 100 پورې ټول لګښت وشمیرئ. يو مناسبتلنلاري ډول وټاکئ او د ټول لګښت ليدخيره رسم کړئ.

ب- د هر سټ – يا ډېري واحد خرڅلاو99 پيسپواحده دی. لاس ته راونې (د پيسو ځومره دي، که x(ME د سټ واحد) په بازار کې خرڅ شي؟

په لرلي کواورديناتسيستم کې د خرڅلاو(پيسو) د ليدلو ځيره و کاږئ.

پ-د ليدخيرې څخه ولولئ:

په کومه ورشو يا ساحه کې ګټه منځ ته راځي؟ د کوم x –ارزښتونو سره به خورا لويه ګټه لاس ته راشي؟

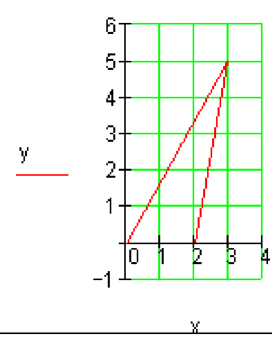
پوښتنې

توابعVII

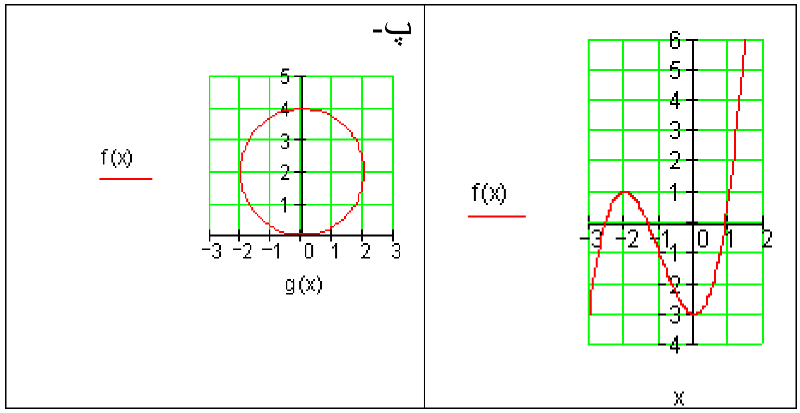
لومړی: توابع f(x) ورکړشوي دي. يو مناسب ارزښت جدول جوړ کړئ. له دې سره اړوند ګراف وکاږئ.

الف- $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ ب- $f(x)=x^2$

دويم: کوم ګراف په تابع $f:x\rightarrow f(x)$ پورې اړه لري؟ دليل يې راوړئ.

الف-	ب –
	

(c) ketabton.com: The Digital Library



دريم:د شميرپوهنيز لنډ ليکدود سره يې فرمولبندي کړئ.

الف- په ځای3 کې تابع f(x) تابعارزښت 12 لري.

ب- د تابع f(x) له لارې د x -ارزښت سره عدد 4- تنظيميږي.

پ-ټکی (5 | 2) P د f(x) په ليدخيره باندې پروت دی.

ت- f(x) د کومو ابسخيزا يا پراته ارزښتونو لپاره تابع ارزښت 4 لري.

ټ- د f(x) تابع تابع ارزښت له 7لوی دی د ټول x ∈ ℝ. لپاره.

ث- تابع f(x) د 17- ځای کې تا بع ارزښت 9 نيسي.

ج- توابع f او g د په ځای کې همغه ارزښت غوره کوي.

چ- په کوم ځای x کې fد تابعارزښت gد له تابعارزښت ځخه کوچنی دی؟

ح- د تابع f(x) د تابع ارزښت برابر 5 دی د ټولو x ∈ ℝ. لپاره.

خ- د يوه کږې ټکي Kf کواورديناتونه سره سر خوري.

ځلورم: د يوه نظم لپاره د يوې روځنۍ بيلګې نوم واخلئ، چې هغه تابع وي يا تابع نه وي.

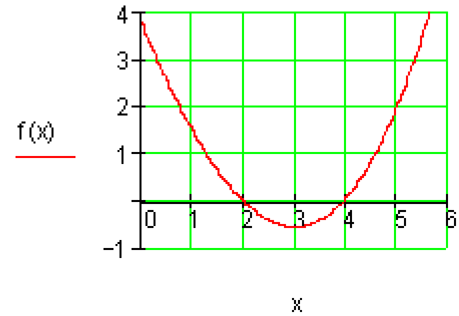
پنځم: دا ترځنګ کره يا منحني د تابع f(x) ګراف دی. له ګراف ځخه ولولئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف-د تابع ارزښت په ځای 5 کې

ب- یو ځای د $f(x)$ سره.

پ-په کوم ورشو $f(x) > 0$ باور لري؟



شیږم:کوم ارزښت جدول یوه تابع پورې اړه لري؟

الف -

x	−1	0	1	2	3
y	4	0	−2	4	4

ب -

x	−1	0	3	3	4
y	8	7	2	4	5

توابع او په څټ - یا معکوس توابع

تولیز:

د f د نظم قانون د تابع مساوات له لارې افاده کیږي، لکه د بیلګې په توګه

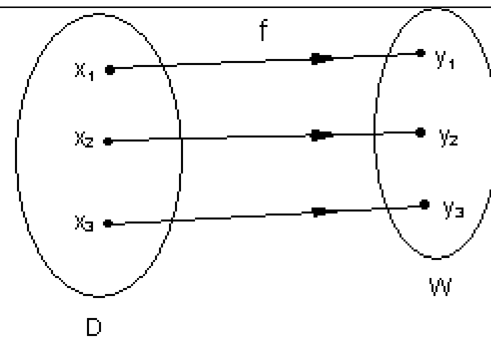
$$f = \{(x|y) \mid y = f(x) = 2x + 3\}_{D \times W}$$

یا په لنډه توګه: $y=f(x)=2x+3$

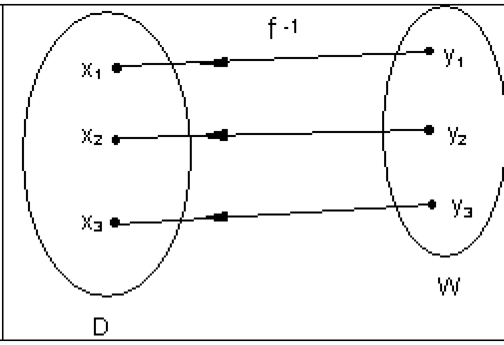
د یوه تابع د یو-یواځنوالي د f^{-1} یو-یواځنی نظم هم شتون لري.

دا نظم معکوس تابع یا په څټ تابع یا انورز inverse تابع بلل کیږي، لکه د بیلګې په توګه.

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$



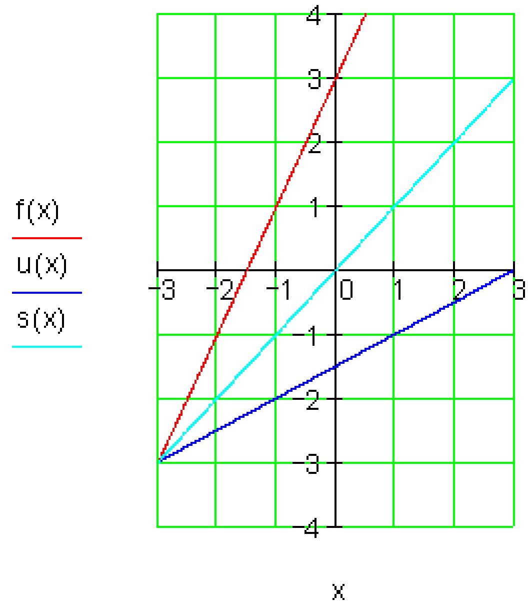
(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرښيز توابعو معکوس توابع

تابع: $y = f(x) = 2x + 3$ $x = f(y) \Leftrightarrow x = 2y + 3$ $\Leftrightarrow 2y + 3 = x \mid -3$ $\Leftrightarrow 2y = x - 3 \mid : 2$ $\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ معکوس تابع: $y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$	تابع $y = f(x) = 2x + 3$ ورکړ شوی غوښتنه معکوس تابع f^{-1} او د هغه ګراف ده تابع **f** جګوالی $m = 2$ لري. دا د خپل ګراف سره پروت محور په ټکي $P_x(-1,5 \mid 0)$ کې غوڅوي او ولار محور يا اوردينات په ټکي $P_y(0 \mid 3)$ کې غوڅوي. د هغه ګراف کرښه ده. که د تابع اووښتوني يا متحولې يو له بل سره بدلې شي او د y پسې په ورته توګه ښه بدلون منځ ته راشي، نو سړی معکوس تابع لاس ته راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د معکوس تابع ګراف د تابع د ګراف هندارونه(انعکاس) ده په 45^0- محور باندې. په تولیزه توګه باور لري: تابع $y = f(x) = a_1 x + a_0$ معکوس تابع $y = f^{-1}(x) = \frac{1}{a_1}x + \frac{a_0}{a_1}$ د ساده والي له امله معکوس تابع u(x) بولو.

مربع توابع

څلورى- يا مربع توابعو ته ننوتنه يا پيل

ننوتنه يا پيل

هرڅوک چي موټر زده کوي، بايد پوه وي، جي د بريک په وخت کې په پاخه سرک د بريک نيولو او د موټر دريدځای په منځ کې لار يا واټن څنګه سره يوځای کیدی شي يا جمعه کیدی شي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې موټر قانون سره سم له چټکتیا(سرعت) v په km/h (کیلومتر په ساعت) د عکس العمل لار r د بریک لار b په متر شمیرلکیدی شي.

پام (خبراوسه) : د بیلګې په توګه د المان پخوانی او له څخه نوي قانون.

له څخه د تملار په وچ اسفالت شوي سرک د پل بریکلار سره شمیرل کیږي.

د بریک لار $b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ د عکس $r = \frac{v}{10} \cdot 3$ العمل لار

یادونه: د څه وخت را په دې خوا په جرمني کې د بریکلار لپاره دا فرمول باور لري.:

$\text{I:}\ b = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2$

د بریک همدا ډول د عکس العمل لار په متر (m) راوځي، که چټکتیا یا سرعت په کیلومتر په ساعت (km/h)وي.

الف – د دواړو حالتونو لپاره د s = f(v) تابع مساوات و ټاکی ، د کوم لپاره چې په هره تللې چټکتیا یا سرعت تملار شمیرل کیدی شي.

ب - د تابع مشاوات s = f(v) د دواړو حالتونو لپاره د وهل شوی سرعت v = 0, 10, 20, 30, ... 100 km/h سره د ه یوه د ودرېد - یا توقف لار چې شمیرل کیږي.

پ : په کواوردیناتسیستم کې یا د وضعیه قیمتسیستم کې ګراف رسم کړی.

ت: ټوله لاس ته راوړې نتیجه تشریح کړی.

Problemlösung: د پرابلم حل:

الف: د تابع مساوات:

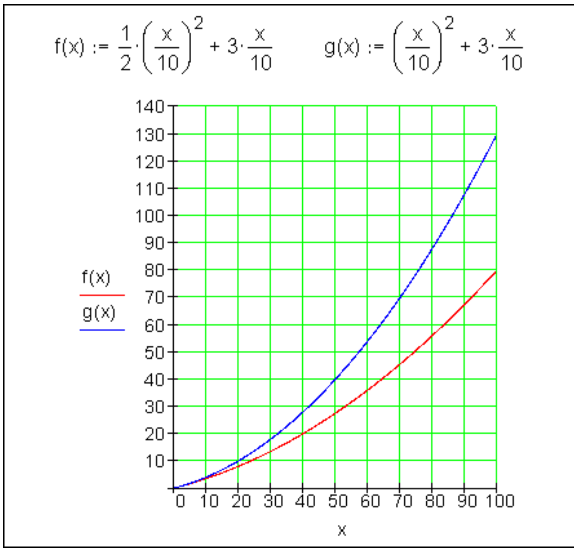
زوړ قانون:	$f(v) = \left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10} \cdot 3 = \frac{1}{100}v^2 + \frac{3}{10}v$
نوی قانون:	$\text{I:}\ f(v) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10} \cdot 3 = \frac{1}{200}v^2 + \frac{3}{10}v$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب - : ارزښتجدول(په کيلو متر په ساعت کې)

v (in km/h)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
f(v) (in m)	0	4	10	18	28	40	54	70	88	108	130	alt
f(v) (in m)	0	3,5	8	13,5	20	27,5	36	45,5	56	67,5	80	neu

پ - ګرافونه



د x محور هر ه وهل شوې لار په km/h په ګوته کوي.

د y - محور د هر همغه د توقفلار په m په ګوته کوي.

ت – کومنتار

د نوي نظم وروسته د د چټکتيا(سرعت) زياتيدني توپير تل زياتيږي. د 50 km/h چټکتيا سره نوی د تم کيدلو لار 27,5 m ده، دا د زړې لار40 m نږدې 69% ده. په 100 km/h دا نوې لار نوره فقط ده، دا د زړې 130 m لارېا نږدې 61% ده. د بريک نيولو لار کمېدنه د بريک ښه کيدو(ABS) سره موخه وره ده.

د تابع مساوات د ټيک پامورتيا او ګراف له امله موږ کره کوو، چې دا نه کرښيز مساوات دی او نه يوه کرښه. انځوروي.

د تابع مساوات لاندې بڼه لري:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

داسې تابع مربع تابع بولو او يا هم د2 –مې درجې ټول(تام) راشنل توابع.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګرافونه یې پارابول بلل کیږي.

تمرینونه:

د لاندې پارابولونو ګرافونه وکاږئ.

د دې لپاره ارزښت جدول ولیکئ

اول - $f(x) = x^2 + 4x - 5$ دویم $f(x) = x^2 + 2x + 5$

دریم - $f(x) = -x^2 + x + 6$ څلورم - $f(x) = x^2 - x$

پنځم - $f(x) = x^2 - \frac{1}{9}$ شپږم - $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$

اوم - $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ اتم - $f(x) = -2x^2 + 8x - 11$

نهم م- $f(x) = 3x^2 - 3x$ لسم - $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{11}{2}x + 10$

نورمال پارابل، بڼه ځل یا - ضریب او راکښنې

د کار قرارداد:

د a2 د مختلفو ارزښتونو لپاره تابع $f(x) = a_2x^2$ وڅیرئ او ګراف په وضعیه قیمت سیستم کې وکاږئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = \frac{3}{2}x^2 \quad f_3(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$$

د انځور شوي پارابل تابع مساوات یو له بل د x^2 ضریب a_2 له امله توپیروي.

$$f_1(x) = x^2$$

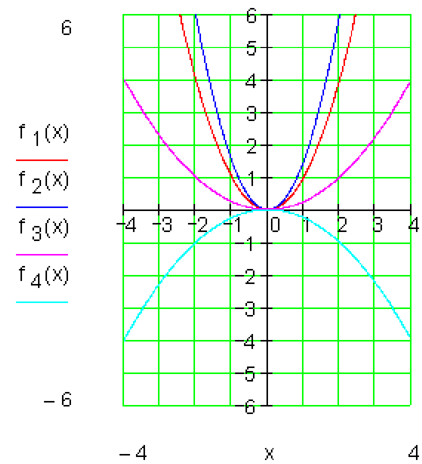
$$f_2(x) = \frac{3}{2}x^2$$

$$f_3(x) = \frac{1}{4}x^2$$

$$f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$$

دا ضریب a_2 د پارابل د بنې لپاره مسول او له دې امله د بنې ضریب بلل کیږي.

د تقاطع ټکی S وضعیه قیمتونه S (0 | 0) لري.



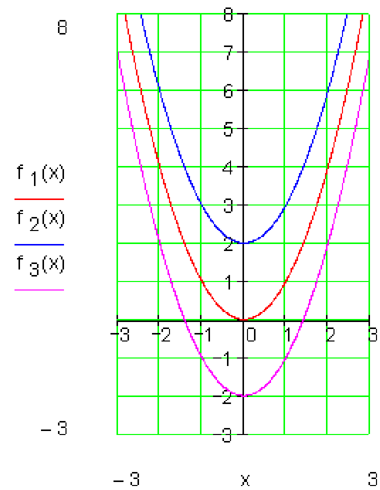
بنه ضریب د پارابل قوارې یا شکل ته څنګه تغیر ورکوي؟

ضریب بني		د پارابول په نخښنه ونه
$a = 1$	→	نورمال پارابو ل
$a > 1$	→	غزېدلی پارابول
$0 < a < 1$	→	کېکاږلی پارابول
$a = -1$	→	پهx محور هنداره شوی نورمال پارابول
$a < -1$	→	غزېدلی پارابول، په x -محور هنداره شوی
$-1 < a < 0$	→	کیکاږلی پاربول، په x –محور هنداره شوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کار قرارداد:

د a_0 د مختلفو ارزښتونو لپاره د $f(x) = x^2 + a_n$ تابع مطالع کړی او په وضعیه قیمتسیستم کې یې ګراف رسم کړی: $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$

 	دا یو راکښلی نورمال پارابل دی، چې ککری ټکی(د ر آس نقطه) S د a_0 په واحدونو راکښل شوې ده. $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$ راکښنه د y محور په اوږدوالي باندې صورت نیسي ، چیرته چې د راکښني لور د a_0 د مخنښي له لارې ټاکل کیدی شي. د تقاطع ټکی S کواوردینات S (0 | a_0) لري. $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$

د کار ورکوني قرارداد:

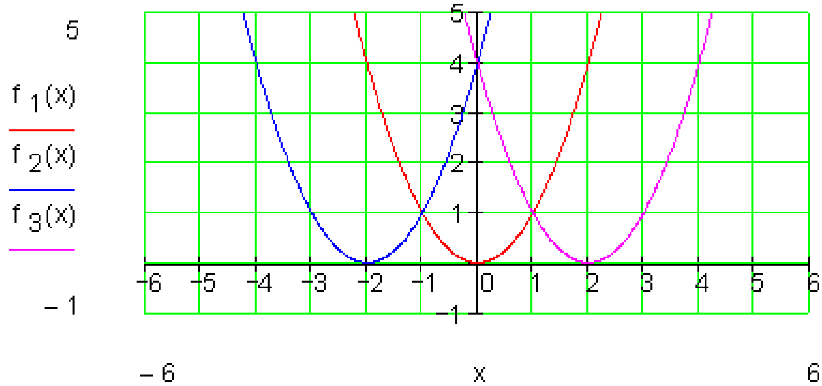
د $f(x) = (x+u)^2$ تابع د u د مختلفو ارزښتونو لپاره راکښنه وڅیړی او ګراف یې په وضعیه قیمتسیستم کې x رسم کړی

$f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = (x + 2)^2$ $f_3(x) = (x - 2)^2$

د ارزښت جدول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

f_1	x	−2	−1	0	1	2	f_2	x	−4	−3	−2	−1	0	f_3	x	0	1	2	3	4
	y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4



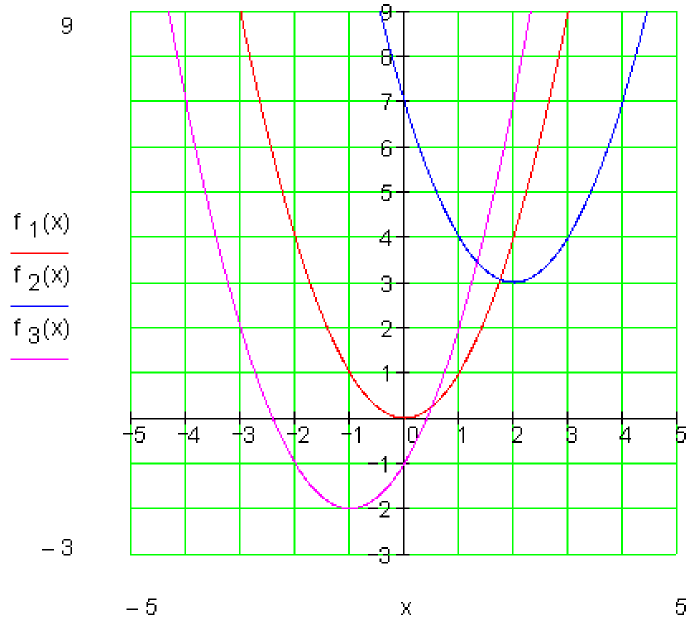
د ا يو راکښلی (چې ځای ته يې تغير ورکړ شوی وي) نورمال پارابول دی، چې ککرئ تکی(د رأس نقطه) S يې د u په واحدونو(يوونونو) دx په محور راکښل يا کښول شوې ده. دS غوڅتکی(نقطه تقاطع) يې کواوردينات (-u | 0)S لري.

کينې لور ته ښرخون يا ښرخول، ککرئ تکیS په u واحدونو يا يوونوو د پيل يا سرچينې کيڼ لورت پروت دی.	u>0 =>
ښی ښرخون يا ښرخول، ککرتکی S په u واحدونو د پيل يا سرچينې ښیَ لورته پروت دی.	u<0 =>

د کار (ورکونې) قرارداد: د u اوa0 دمختلفو ارزښتونو لپاره تابع f(x) = (x+u)² + a0 وڅيړی او ګراف يې په يوه کواوردينات(پروت ولاړ) سيستم کې انځور کړی.

$$f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = (x-2)^2 + 3 \qquad f_3(x) = (x+1)^2 - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د f_2 (x) ګراف بېرته يو نورمال پارابول دی، چې ککرئ ټکی S يې په دوه واحده ښی لور ته او په درې واحده پورته لور ته راکښلی دی.

د f_3 (x) ګراف هم يو نورمال پارابول دی، چې ککرټکی S (د رأسټکی) په يوه واحد(يوون) کيڼ او په درې واحده لاندې لور ته کښول شوی دی.

د $f(x) = (x+u)^2 + a_0$ ډول تابع د مربع تابع د ککرئ ټکي(رأس ټکي) بڼي تابع بلل کيږي.

د تابع ګراف نورمال پاربول دی، چې په u ارزښت دx محور په لور او په a_0 د yمحور په لور راکښل شوی دی.

که ککرټکی د $S(x_s | y_s)$ سره په نخښه کړو، نو د ککرټکي بڼي مربع تابع په دې ډول ده:

$$f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنډه بڼه:	$S(x_s \mid y_s) \Leftrightarrow f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$
بېلګه:	$S(3 \mid -1) \Leftrightarrow f(x) = (x-3)^2 - 1$

تر اوسه مو فقط نورمال پارابول راکښلی (را کش شوی) وو.

همدا یا برابره راکښنه کیدی شي د یوه په خوښه پارابول سره سرته ورسول شي.

دلته دې بیا فاکتور a_2 په پام کې ونیول شي.

په ټولیزه توګه باور لري:

$Ist\ f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ د یوه نورمال پارابول تابع (بلوان) دی، چي ککرتکی (د رأس ټکی) $S(x_s \mid y_s)$ لری، نو $f(x) = a_2(x - x_s)^2 + y_s$ د ککرټکي د تابع مساوات دي.

د خلوری تکمیلوني له لارې د رآس ټکي(ککری ټکي) ټاکل

مونږ پوهیږو چې صدق کوي:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \Leftrightarrow a_2(x - x_s)^2 + y_s \Rightarrow S(x_s \mid y_s)$$

په ککرټکي کې د ټولیز تابع مساواتو د ترم تابع له لارې کیدی شي د یوه پارابول ککرټکی (د ککری ټکی) وشمیرل شي.

بیلګه:

$F(x) = 3x^2 - 12x + 15$ دي په ککرئ ټکي مساوات واړول شي.

لومړی پل(قدم) : د x^2 تر مخه ضریب دې له نوکانو راوه وېستل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\Rightarrow f(x) = 3[x^2-4x+5]$$

دویم پل : مربع تکمیلونه] [او بنه بدلون

$$\Rightarrow f(x) = 3.[x^2 - 4x + (2)^2 - (2)^2 + 5] = 3.[(x-2)^2+1] = 3.(x-2)^2 + 3$$
$$\Rightarrow S(2;3)$$

بیلګه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = \frac{1}{2}\left[x^2 - 6x + 8\right] = \frac{1}{2}\left[x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 8\right]$$
$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left[(x-3)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{S\left(3 \mid -\frac{1}{2}\right)}}$$

بیلګه:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right] = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{4}\right]$$
$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{36}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{27}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S\left(-\frac{3}{4} \mid -\frac{9}{16}\right)}}$$

تمرینونه: د مربع تکمیلونې له لارې د رآس ټکي(ککرۍ ټکي) ټاکل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه پارابل تابع مساوات ورکړشوي دي(د دویمې درجې ټول راشنل تابع). د لاندې پارابولونو لپاره رآسټکو بڼه او رآسټکي پیدا کړی.

ګرافونه یې وکاږی:

لومړی: $f(x)=x^2+2x+5$ دویم: $f(x)=x^2+4x+1$

دریم: $f(x)=x^2-4x+1$ څلورم: $f(x)=x^2-3x+3{,}5$

پنځم: $f(x)=x^2+x-3$ شپږم: $f(x)=-x^2+2x+1$

اووم: $f(x)=-x^2+5x-5$ اتم: $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+2$

نهم: $f(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}$ لسم: $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$

بیلګه 1 :

د ټول راشنل تابع ګراف چې رسم کړای شو،په زیاتو حالتونو کې اړیند دی، چې ارزښتجدول وپیژنو. د دې لپاره جبشمیري له لارې کیدی شي. خو دا هم تل اړیین دی.

یو ه ساده بیلګه بې له جبشمیري څخه.

تابع مساوات : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

موږ د متحولې $x = 0$ څخه پیل کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = 0: f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$$
$$x = 1: f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$
$$x = 2: f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$
$$x = 3: f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$$
$$x = 4: f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$$
$$x = 5: f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8$$
$$x = 6: f(6) = 6^2 - 4 \cdot 6 + 3 = 36 - 24 + 3 = 15$$

تر هغې چې د تابع ارزښت له 10 $\pm$ لوی شي، کېدی شي چې پې کړي.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره تاکل کیږي.

$$x = -1: f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8$$
$$x = -2: f(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 3 = 4 + 8 + 3 = 15$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې کښل کیږي.

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
f (x)	15	8	3	0	−1	0	3	8	15

اوس له دې ارزښتونو سره کېدی شي د f(x) گراف رسم شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسې شمیرل کېدی شي

د بیلگې په توگه $x = \pm ½$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=-\frac{1}{2}: f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3=\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}+2+3=5\frac{1}{4}=5,25$$

$$x=\frac{1}{2}: f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-2+3=1\frac{1}{4}=1,25$$

هر څوک له جبشميري سره بنه بلد نه دی. په دې حالت کې کړی شي دا کسان له شميروني يا کمپيوتر څخه کار واخلي.

په لاندې کې HN د اصلي ګډ مخرج (ماتلاندې) په معنا دی.

يوه غوره بيلګه، چې ځنې برخې يې د جبشميري په مرسته حل شوي دي

د تابع مساوات $f(x)=\frac{4}{5}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}$

بادونه: په لاندې زيات ځايونه HN راغلي، دا د اصلی مخرج په مانا دي.

موږ د $x=0$ سره پيل کوو

$$x=0: f(0)=\frac{4}{5}\cdot 0^2-\frac{3}{4}\cdot 0-\frac{7}{2}=0-0-\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}=-3,5$$

$$x=1: f(1)=\frac{4}{5}\cdot 1^2-\frac{3}{4}\cdot 1-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}-\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}-\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{69}{20}=-3,45$$

$$x=2: f(2)=\frac{4}{5}\cdot 2^2-\frac{3}{4}\cdot 2-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}-\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=-\frac{18}{10}=-\frac{9}{5}$$

$$=-1,8$$

$$x=3: f(3)=\frac{4}{5}\cdot 3^2-\frac{3}{4}\cdot 3-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}-\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}-\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{29}{20}=1,45$$

$$x=4: f(4)=\frac{4}{5}\cdot 4^2-\frac{3}{4}\cdot 4-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}-3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}-\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{63}{10}=6,3$$

$$x=5: f(5)=\frac{4}{5}\cdot 5^2-\frac{3}{4}\cdot 5-\frac{7}{2}=20-\frac{15}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=4}{=}\frac{80}{4}-\frac{15}{4}-\frac{14}{4}=\frac{51}{4}=12,75$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکو.

$$x=-1:\ f(-1)=\frac{4}{5}\cdot(-1)^2-\frac{3}{4}\cdot(-1)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}+\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{39}{20}=-1{,}95$$

$$x=-2:\ f(-2)=\frac{4}{5}\cdot(-2)^2-\frac{3}{4}\cdot(-2)-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}+\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1{,}2$$

$$x=-3:\ f(-3)=\frac{4}{5}\cdot(-3)^2-\frac{3}{4}\cdot(-3)-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}+\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{119}{20}=5{,}95$$

$$x=-4:\ f(-4)=\frac{4}{5}\cdot(-4)^2-\frac{3}{4}\cdot(-4)-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}+3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}+\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{123}{10}=12{,}3$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې لیکل کیږي.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	12,3	5,95	1,2	-1,95	-3,5	-3,45	-1,8	1,45	6,3	12,75

د دې ارزښتونو سره اوس د ګراف کښل کیدی شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسي شمیرل کیدی شي

د بیلګې په توګه $x=\pm 5/2$

$$x=-\frac{5}{2}:\ f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$

$$=\frac{25}{5}+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}+\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=\frac{27}{8}=3{,}375$$

$$x=\frac{5}{2}:\ f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$

$$=\frac{25}{5}-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}-\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=-\frac{3}{8}=-0{,}375$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: په پورته کې (HN(Hauptnenner داصلې مخرج(ماتلاندې) یا مخرج مشترک په معنا دی.

د دې لپاره چې د یوه ټول ریښتوني یا تام راشنل تابع ګراف انځور کړای شو، په زیاتو حالتونو کې اړیین دی، چې ارزښت جدول وکاږو. د دې لپاره یو جبشمیروني ته اړتیا لرو.

یو ه ساده بیلګه بې له جبشمیري څخه.

تابع مساوات : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

موږ د تحولې $x = 0$ څخه پیل کوو

$$
\begin{aligned}
x = 0 &: f(0) = 0^2 - 4\cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3\\
x = 1 &: f(1) = 1^2 - 4\cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0\\
x = 2 &: f(2) = 2^2 - 4\cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1\\
x = 3 &: f(3) = 3^2 - 4\cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0\\
x = 4 &: f(4) = 4^2 - 4\cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3\\
x = 5 &: f(5) = 5^2 - 4\cdot 5 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8\\
x = 6 &: f(6) = 6^2 - 4\cdot 6 + 3 = 36 - 24 + 3 = 15
\end{aligned}
$$

تر هغې چې د تابع ارزښت له ± 10 لوی شي، کېدی شي چې پېع کړي.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکل کیږي.

$$
\begin{aligned}
x = -1 &: f(-1) = (-1)^2 - 4\cdot(-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8\\
x = -2 &: f(-2) = (-2)^2 - 4\cdot(-2) + 3 = 4 + 8 + 3 = 15
\end{aligned}
$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې کښل کیږي.

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	15	8	3	0	−1	0	3	8	15

اوس له دې ارزښتونو سره کېدی شي د f(x) ګراف رسم شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسې شمېرل کیدی شي

د بېلګې په توګه $x = \pm ½$

$$x = -\frac{1}{2} : f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} + 2 + 3 = 5\frac{1}{4} = 5,25$$

$$x = \frac{1}{2} : f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 2 + 3 = 1\frac{1}{4} = 1,25$$

هر څوک له جبشمېري سره ښه بلد نه دی. په دې حالت کې کړی شي دا کسان له شمیروني یا کمپیوتر څخه کار واخلي.

یوه غوره بیلګه، چې ځنې برخې یې د جبشمیري په مرسته حل شوي دي:

د تابع مساوات $f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{2}$

موږ د $x = 0$ سره بیل کوو

$$x = 0 : f(0) = \frac{4}{5} \cdot 0^2 - \frac{3}{4} \cdot 0 - \frac{7}{2} = 0 - 0 - \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} = -3,5$$

$$x = 1 : f(1) = \frac{4}{5} \cdot 1^2 - \frac{3}{4} \cdot 1 - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} - \frac{7}{2} \underset{HN=20}{=} \frac{16}{20} - \frac{15}{20} - \frac{70}{20} = -\frac{69}{20} = -3,45$$

$$x = 2 : f(2) = \frac{4}{5} \cdot 2^2 - \frac{3}{4} \cdot 2 - \frac{7}{2} = \frac{16}{5} - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \underset{HN=10}{=} \frac{32}{10} - \frac{15}{10} - \frac{35}{10} = -\frac{18}{10} = -\frac{9}{5} = -1,8$$

$$x = 3 : f(3) = \frac{4}{5} \cdot 3^2 - \frac{3}{4} \cdot 3 - \frac{7}{2} = \frac{36}{5} - \frac{9}{4} - \frac{7}{2} \underset{HN=20}{=} \frac{144}{20} - \frac{45}{20} - \frac{70}{20} = \frac{29}{20} = 1,45$$

$$x = 4 : f(4) = \frac{4}{5} \cdot 4^2 - \frac{3}{4} \cdot 4 - \frac{7}{2} = \frac{64}{5} - 3 - \frac{7}{2} \underset{HN=10}{=} \frac{128}{10} - \frac{30}{10} - \frac{35}{10} = \frac{63}{10} = 6,3$$

$$x = 5 : f(5) = \frac{4}{5} \cdot 5^2 - \frac{3}{4} \cdot 5 - \frac{7}{2} = 20 - \frac{15}{4} - \frac{7}{2} \underset{HN=4}{=} \frac{80}{4} - \frac{15}{4} - \frac{14}{4} = \frac{51}{4} = 12,75$$

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=-1:\ f(-1)=\frac{4}{5}\cdot(-1)^2-\frac{3}{4}\cdot(-1)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}+\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{39}{20}=-1{,}95$$

$$x=-2:\ f(-2)=\frac{4}{5}\cdot(-2)^2-\frac{3}{4}\cdot(-2)-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}+\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1{,}2$$

$$x=-3:\ f(-3)=\frac{4}{5}\cdot(-3)^2-\frac{3}{4}\cdot(-3)-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}+\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{119}{20}=5{,}95$$

$$x=-4:\ f(-4)=\frac{4}{5}\cdot(-4)^2-\frac{3}{4}\cdot(-4)-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}+3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}+\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{123}{10}=12{,}3$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې لیکل کیږي.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f (x)	12,3	5,95	1,2	-1,95	-3,5	-3,45	-1,8	1,45	6,3	12,75

د دي ارزښتونو سره اوس د ګراف کښل کیدی شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسي شمیرل کیدی شي

د بیلګې په توګه $x = \pm 5/2$

$$x=-\frac{5}{2}:\ f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}+\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=\frac{27}{8}=3{,}375$$

$$x=\frac{5}{2}:\ f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}-\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=-\frac{3}{8}=-0{,}375$$

پوښتني

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنسټونه مربع توابع II

لومړی - د لاندې پارابولونو د تابع مساوات ورکړی:

الف- $f(x)=x^2-4x+2$ ب ـ $f(x)=x^2+4x+2$

پ ـ $f(x)=-x^2-4x+3$ ت- $f(x)=-x^2+8x-9$

ټ- $f(x)=\frac{1}{2}x^2-4x+5$ ث ـ $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+6$

ج ـ $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-2$ چ ـ $f(x)=-\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{4}x+6$

ح- $f(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x-7$ خ - $f(x)=\frac{4}{5}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}$

(۱) د ککرۍ ټکي بڼه او ککرۍ ټکي وټاکی.

(۲) د محورونو غوڅټکي وشمیرۍ.

(۳) پل په پل تشریح کړی، چی f(x) د نورمال پارابول حخه څنګه منځ ته راځي او دا څنګه واز دی.

(۴) په یوه مناسب پروتولاړسیستم کې د f(x) ګراف وکاږۍ

دویم – سړی کړی شي د نورمال پارابول څخه هر په خوښه پارابول د د غوڅټکي د راکښني له لارې او د پرسېدني یا غزوني له لارې منځ ته اوړي. که دا کښته لور ته واز وي، نو دا دx محور باندې هنداره کیږي یا منعکس کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه پارابول په هکله لاندې ټکي پیژنو:

	Formfaktor بڼه ضریب	د x په لور راکښنه یا ځای بدلون	د y په لور راکښنه یا ځای بدلون
a)	$a_2 = 1$	په 2 واحدونو ښي لورته	په 2 واحدونو کښنه لور ته
b)	$a_2 = -1$	په 3 واحدونو کيڼ لورته	په 4 واحدونو پورته لور ته
c)	$a_2 = \frac{1}{2}$	په 2 واحدونو کيڼ لورته	په 4 واحدونو کښته لور ته
d)	$a_2 = -2$	په 1 واحد ښي لورته	په 5 واحدونو پورته لور ته
e)	$a_2 = -\frac{1}{4}$	په 4 واحدونو کيڼ لورته	په 3 واحدونو پورته لور ته
f)	$a_2 = \frac{3}{2}$	په 2,5 واحدونو ښي لورته	په 6 واحدونو کښنه لور ته
g)	$a_2 = -\frac{3}{4}$	په 3 واحدونو کيڼ لورته	په 3 واحدونو پورته لور ته
h)	$a_2 = 2$	په 3,5 واحدونو ښي لورته	په 4,5 واحدونو کښنه لور ته
i)	$a_2 = \frac{1}{3}$	په 2 واحدونو ښي لورته	په 3 واحدونو یا یوونونو کښنه لور ته
j)	$a_2 = -\frac{2}{3}$		په3 واحدونو پورته لور ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

په 4 واحدونو ښي لورته

(۱) د ککرئ ټکي ښه او ککرئ ټکي وټاکی.

(۲) د محوررونو غوځټکي وشميرى.

(۳) د تابع مساوات په پولينوم ښه $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$? ځنګه دي؟

(۴) په يو مناسب کواوردينات سيسم کې د f(x) ګراف وکاږی.

پوښتني

د مربع توابعو ښنسټونه IV

لومړی:

تابع f(x) ورکړ شوی دی. د شمېرنې له لارې وښايې، چې ګراف تابع په x محور کې لمسوي. ګراف وکاږی.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8} \quad x \in \mathbb{R}$$

دويم: د تابع مساوات(f(x د محور غوځټکي وشميرى، او ککرى ټکي. ګراف يې رسم کړی.

الف- $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x$ ب - $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$ پ- $f(x) = x^2 + 4x + 1$

ت - $f(x) = -0,25(4x^2 + 12x + 9)$ ټ _ $f(x) = 3x(1-x)$ ث-

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{5}{3}$$

دريم: دU = 18 cm محيط سره کوم مستطيل(ولاړکوډيز) خورا لويه سطحه لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم: د توابعو f(x) او g(x) ګرافونه چيرته د x محور غوڅوي؟ ککری چیرته پرتي دي؟ د دواړو ګرافونو ترمنځ کومې اړيکې پرتې دي؟ د ارزښت جدول په مرسته پوښتنې ځواب کړی.

الف –

x	–3	–2	–1	0	1	2
f(x)	–3,5	0,5	2,5	2,5	0,5	–3,5
g(x)	4	0	–2	–2	0	4

ب –

x	–2	–1	0	1	2	3
f(x)	–12	–5	0	3	4	3
g(x)	3,5	0	–2,5	–4	–4,5	–4

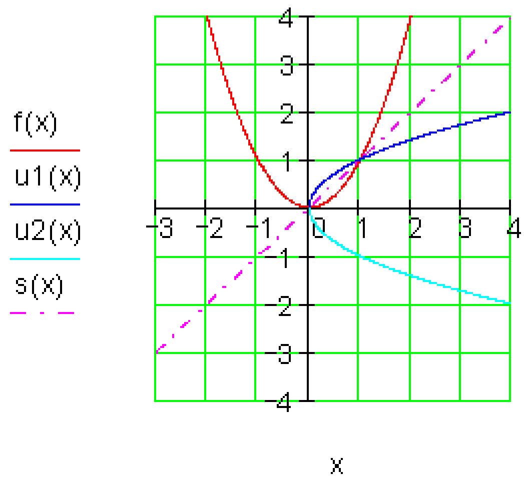
پنځم: د اړونده ګراف کوم خويونه د تابع مساوات څخه سيده لوستل کيدی شي؟

$$f(x) = -x^2 - x + 6;\quad g(x) = (2-x)(x+3);\quad h(x) = -(x+0,5)^2 + \frac{25}{4}$$

د مربع-يا څلورئ توابعو معکوس تابع

تلنلار (که غواړې: طريقه يا قانون) همداسې ده لکه پورته په کرښيزو توابعو کې چې وښوول شوه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y=(f(x)=x^2$ د متحولو x او y بدلول $x=f(y)=y^2 \Leftrightarrow y^2=x$ ريښه نيونه: له دې لاس ته راځي او برعکس $\Leftrightarrow \|y\| = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$ يا $y = -\sqrt{x}$ نو دوه معکوس توابع شتون لري: $y = u_1(x) = \sqrt{x}$ او $y = u_2(x) = -\sqrt{x}$ د معکوس تابع جوړولو سره تعريفورشو محدوده شوه، د دې لپاره چې يواځنی نظم منځ ته راشي	

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښیزبرابرونسیستم د ۲ برابرونونو او ۲ متحولو سره.

داسي سیستم له دوه مساوتو څخه جوړ دی. غوښتونی د دواړو مساواتو ګډ حل دی. مختلفي تلنلارې شته، چې سرې حل ته ورسیږي

په لاندې einsetzen in = په ... کې اینوول.

د جمعي تلنلار:

مساواتسیستم: (I) $5x - 2y = 1$ (II) $3x + 3y = 9$	د حل پل(قدم) غوښي(قطاع، که قطعه؟) د جمعي تلنلار ته لومړی امکان یا واریانت
(I) $5x - 2y = 1 \mid \cdot 1{,}5$ (II) $3x + 3y = 9$ (I) $7{,}5x - 3y = 1{,}5$ (II) $3x + 3y = 9$	لومړی: مساوات ورته داسې بڼه بدل کړئ، چې ضریبونه (ترمخ عددونه) د yمتحولي تر مخنخښي پورې سره سروخوري.
(I) $7{,}5x - 3y = 1{,}5$ (II) $3x + 3y = 9$ } + $10{,}5x = 10{,}5 \mid : 10{,}5$ $\Leftrightarrow$ $x = 1$	دویم: منځ ته راغلي مساوات سره جمعه کړې او د **x** - متحولي پسې یې حل کړئ
په $3x + 3y = 9$ کې اینوونه: $x = 1$	دریم: د **x** لپاره مینډل شوي ارزښتونه د دواړو څخه په یوه مساوات کې کیږدئ او **y** پسې یې حل کړې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$3\cdot 1+3y=9$ $\Leftrightarrow 3+3y=9 \mid -3$ $\Leftrightarrow \quad 3y=6 \mid :3$ $\Leftrightarrow \quad y=2$	
$L=\{(1\mid 2)\}$	خلورم: حلست یا حلډېرئ ولیکئ

پنځم:

ازماېښت د اېښوونې له لارې

$$(I)\quad 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$$
$$(II)\quad 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$$

مساواتسیستم

$$(I)\quad 5x-2y=1$$
$$(II)\quad 3x+3y=9$$

د حل پلونه قدمونه د جمعي تلنلار لپاره

دويم واريانت

لومړی: مساوات داسې ورته بنهبدل کړئ، چې د **x** ضريبونه(ترمخعددونه) تر مخنخښي پورې سره يوغږيز شي.

$$(I)\quad 5x-2y=1 \mid \cdot 3$$
$$(II)\quad 3x+3y=9 \mid \cdot(-5)$$
$$(I)\quad 15x-6y=3$$
$$(II)\quad -15x-15y=-45$$

دويم: منځ ته راغلی مساوات سره جمعه کړئ او متحولې **y** پسې يې حل کړئ.

$$\left.\begin{aligned}(I)\quad 15x-6y&=3\\(II)\quad -15x-15y&=-45\end{aligned}\right\}+$$
$$-21y=-42 \mid :(-21)$$
$$\Leftrightarrow \quad y=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم: بني لورته الماني د اينووني په مانا ده

$y = 2$ eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

$$3x + 3 \cdot 2 = 9$$
$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \mid -6$$
$$\Leftrightarrow 3x = 3 \mid : 3$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$$

د x لپاره ميندل شوي ارزښتونه له دي دوه پهيوه مساوت کي کيږدئ او د متحولې x پسې يې حال کړئ.

ځلروم: حلسټ يا د حلډيرئ وليکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1 \mid 2)\}}}$$

پنځم: د اينووني له لارې ازماپښت

$$(I) \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د برابراينووني تلنلار

د حل پل د برابراينووني تلنلار ته

واريانت 1

مساواتسيستم

$$(I) \quad 5x - 2y = 1$$
$$(II) \quad 3x + 3y = 9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}
&(I) \quad 5x - 2y = 1 \,|\, +2y \\
&(II) \quad 3x + 3y = 9 \,|\, -3y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(I) \quad 5x = 1 + 2y \,|: 5 \\
&(II) \quad 3x = 9 - 3y \,|: 3
\end{aligned}$$

لومړی: دواړه مساوات د اووښتوني یا متحولي **x** پسي حل کیږي.

$$\begin{aligned}
&(I) \quad x = \frac{1+2y}{5} \\
&(II) \quad x = \frac{9-3y}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(I) \quad x = \frac{1+2y}{5} \\
&(II) \quad x = 3 - y
\end{aligned}$$

دویم: د مساوات ښي ا ړخونه برابر اینوول کیږي او د متحولي **y** پسي حل کیږي.

$$\begin{aligned}
&\frac{1+2y}{5} = 3 - y \,|\cdot 5 \\
\Leftrightarrow\ & 1 + 2y = 15 - 5y \,|\, +5y \\
\Leftrightarrow\ & 1 + 7y = 15 \quad |-1 \\
\Leftrightarrow\ & 7y = 14 \quad |: 7 \\
\Leftrightarrow\ & y = 2
\end{aligned}$$

دریم: (د کیڼ لور الماني په پښتو: اینسول په ..کي)

د **y** میندل شوی ارزښت د دواړو څخه په یوه وتونمساوات کي اینسوول کیږي، او دا بیا د متحولي **x** پسي حل کیږي.

y = 2 eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

$$\begin{aligned}
& 3x + 3 \cdot 2 = 9 \\
\Leftrightarrow\ & 3x + 6 = 9 \,|\, -6 \\
\Leftrightarrow\ & 3x = 3 \,|: 3 \\
\Leftrightarrow\ & x = 1
\end{aligned}$$

څلورم: حلسټ یا ــدېرئ ولیکئ

$$L = \{(1 | 2)\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم: د ځا په ځای کولو یا ایښوولو له لارې ازماېښت

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5\cdot 1 - 2\cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$

$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د حل پل د برابرایښوولو له لارې

وارِیانت 2

مساواتسیستم

$$(I)\quad 5x - 2y = 1$$

$$(II)\quad 3x + 3y = 9$$

لومړی: دواړه مساوات د اووښتوني یا متحولې **y** پسې حل کیږي.

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \mid -5x$$

$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \mid -3x$$

$$(I)\quad -2y = 1 - 5x \mid : (-2)$$

$$(II)\quad 3y = 9 - 3x \mid : 3$$

$$(I)\quad y = \frac{1 - 5x}{-2}$$

$$(II)\quad y = \frac{9 - 3x}{3}$$

$$(I)\quad y = \frac{5x - 1}{2}$$

$$(II)\quad y = 3 - x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم: د دواړو مساواتو ښئ خوا برابره لیکل یا اینسوول کیږي او د متحولي **x** پسې حل کیږي.

$$\frac{5x-1}{2} = 3-x \,|\cdot 2$$
$$\Leftrightarrow 5x-1 = 6-2x \,|+2x$$
$$\Leftrightarrow 7x-1 = 6 \,|+1$$
$$\Leftrightarrow 7x = 7 \,|:7$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$$

درى(ښئ الماني: اینسوول په ...کې)

د **x** میندل شوی ارزښت د دداړو وتونمساواتو څخه په یوه کې اینسوول کیږي، دا بیا د متحولي **y** پسي حل کیږي.

x = 1 eingesetzt in (II): $3x+3y=9$
$$3\cdot 1+3y=9$$
$$\Leftrightarrow 3+3y=9 \,|-3$$
$$\Leftrightarrow 3y=6 \,|:3$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=2}}$$

څلورم: د حلسټ ولیکئ

$$\underline{\underline{L=\{(1|\,2)\}}}$$

پنځم د اینووني له لارې ازمایښت

$$(I)\quad 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$$
$$(II)\quad 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$$

د اینووني تلنلار: د اینووني تلنلار لپاره د حل پلونه(قدمونه)

وارینت 1

مساواتسیستم

$$(I)\qquad 5x-2y=1$$
$$(II)\qquad 3x+3y=9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: مساوات **(I)** د **x** پسې
حل کیږي.

$$\text{(I)}\quad 5x - 2y = 1 \,|\, +2y$$
$$\Leftrightarrow 5x = 2y + 1 \,|\, :5$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{5}y + \frac{1}{5}$$

دویم: د بنې اړخ مینډل شوی ترم
په مساوات **(II)** کې اینوول
کیږي او د **y** پسې حل کیږي.

$$x = \frac{2}{5}y + \frac{1}{5} \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y = 9$$
$$3\left(\frac{2}{5}y + \frac{1}{5}\right) + 3y = 9$$
$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}y + \frac{3}{5} + 3y = 9 \,\Big|\, -\frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}y + 3y = 9 - \frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{21}{5}y = \frac{42}{5} \,\Big|\, \cdot 5$$
$$\Leftrightarrow 21y = 42 \,|\, :21$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$$

دریم: د **y** لپاره مینډل شوی
ارزښت په یو د دې دوه
وتونمساواتو کې اینوول کیږي،
دا بیاپه **x** پسې حل کیږي.

$$y = 2 \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y = 9$$
$$3x + 3 \cdot 2 = 9$$
$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \,|\, -6$$
$$\Leftrightarrow 3x = 3 \,|\, :3$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$$

څلورم: د حل سټ ولیکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1 \,|\, 2)\}}}$$

پنځم: د اینوولو له لارې حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5\cdot 1 - 2\cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د حل پلونه(قدمونه) د اینوولو تلنلار لپاره

واریانت 2

مساواتسیستم

$$(I)\quad 5x - 2y = 1$$
$$(II)\quad 3x + 3y = 9$$

لومړی: مساوات**(II)** د متحولې **y** پسې حل کیږي.

$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \mid -3x$$
$$\Leftrightarrow \quad 3y = 9 - 3x \mid : 3$$
$$\Leftrightarrow \quad y = 3 - x$$

دویم: دښی لور میندل سوی ترم په مساوات **(I)**کې کیږدئ او په **x** پسې یې حل کړئ.

$$y = 3 - x \text{ eingesetzt in } (I): 5x - 2y = 1$$
$$5x - 2(3 - x) = 1$$
$$\Leftrightarrow 5x - 6 + 2x = 1 \mid +6$$
$$\Leftrightarrow 7x = 7 \mid : 7$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

3. دریم: د **x** لپاره میندل شوی ارزښت په یو د دې دوه وتونمساوتو کې اینوول کیږي، او دا بیا د متحولې **y** پسې حل کیږي.

$$x = 1 \text{ eingesetzt in } (II): 3x + 3y = 9$$
$$3\cdot 1 + 3y = 9$$
$$\Leftrightarrow 3 + 3y = 9 \mid -3$$
$$\Leftrightarrow 3y = 6 \mid : 3$$
$$\Leftrightarrow y = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$L = \{(1|2)\}$$

څلورم: جلسټ ولیکئ

پنځم: ازماېښت د اینوولو له لارې

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5\cdot 1 - 2\cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

ټولې درې تلنلارې د هغه د واریانتو سره په یوه ټکلي مساوتسیستم وکارول شو. که څوک یوګونې تلنلرې ټیک وګورې، پیژني، چې په واریانت ۲ کې لږ د شمیرلو کار غوښتونی دی.

په یوه ټاکلي تلنلار د شمیرلو کار د دې حل کوونکي مساوتسیستم په واک کې دی. له دې امله دې لومړی پام وشي، چې کومه تلنلار د لږ کار سره سرته رسیدی شي. د دې لپاره نو یو څو بیلګو ته اړ یو. لاندې بیګې دې د دې لپاره یوه کوچنۍ مرسته وي، چې مناسب د حل – یا څواب تلنلار پیداشي.

د مناسب ځواب تلنلار لپاره بیلګې

بیلګه ۱ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

<table>
<tr>
<td>x1=-1 په (1) کې اینوونه y=7x+8

$y = 7\cdot(-1)+8$
$\Leftrightarrow y = -7+8$
$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 1}}$

حل: L={(-1|1)}

ازماېښت

$(I)\ \ y = 7x+8 \Rightarrow y = 7\cdot(-1)+8$
$\Leftrightarrow y = -7+8 \Leftrightarrow y = 1\ (w)$
$(II)\ y = -2x-1 \Rightarrow y = -2\cdot(-1)-1$
$\Leftrightarrow y = 2-1 \Leftrightarrow y = 1\ (w)$</td>
<td>$(I)\ \ y = 7x+8$
$(II)\ y = -2x-1$

د برابر اینوونې لار

$7x+8 = -2x-1 \mid +2x$
$\Leftrightarrow 9x+8 = \quad -1 \mid -8$
$\Leftrightarrow 9x \quad = \quad -9 \mid :9$
$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = -1}}$</td>
</tr>
</table>

بیلګه۲:

<table>
<tr>
<td>Y=3 اینوونه په (1) کې 2x+4y=8

حل:

$2x - 12 = 8 \ \mid +12$
$\Leftrightarrow 2x \quad = 20 \mid :2$
$\Leftrightarrow \ \underline{\underline{x = 10}}$

ازماېښت

$(I)\ \ 2x+4y = 8 \Rightarrow 2\cdot 10 + 4\cdot(-3) = 8$
$\Leftrightarrow 20-12 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8\ (w)$
$(II)\ 2x-5y = 35 \Rightarrow 2\cdot 10 - 5\cdot(-3) = 35$
$\Leftrightarrow 20+15 = 35 \Leftrightarrow 35 = 35\ (w)$</td>
<td>$(I)\ \ 2x+4y = 8$
$(II)\ 2x-5y = 35$

د جمعي تلنلار:

$(II)\ 2x-5y = 35 \mid \cdot(-1)$
$\left.\begin{array}{ll}(I) & 2x+4y = 8 \\ (II) & -2x+5y = -35\end{array}\right\}+$
$9y = -27 \mid 9$
$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = -3}}$</td>
</tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۳ :

(I) $x + 2y = 5$ (II) $-x + y = 1$ د اینووني لار; (II) په y پسې حل کړئ $-x + y = 1 \mid +x$ $\Leftrightarrow \quad y = x + 1$ په (I) کې کیږدئ x+2y=5 $x + 2(x + 1) = 5$ $\Leftrightarrow x + 2x + 2 = 5 \mid -2$ $\Leftrightarrow \quad 3x = 3 \mid : 3$ $\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 1}}$	X=1 په (1) کې کیږدئ x+2y=5 $1 + 2y = 5 \mid -1$ $\Leftrightarrow 2y = 4 \mid : 2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$ حل: L= {(1|2)} ازمايښت (I) $x + 2y = 5 \Rightarrow 1 + 4 = 5$ $\Leftrightarrow 5 = 5 \ (w)$ (II) $-x + y = 1 \Rightarrow -1 + 2 = 1 = 35$ $\Leftrightarrow 1 = 1 \ (w)$ wد ربښتیا لپاره

بیلګه ۴ : په لاندې: einsetzen اینوونه په (1)کې اوبیونه یا حل:Lösung
ازمايښتProbe د زیاتون یا جمعې
لار:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$

$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$

$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{aligned}\text{(I)}\quad & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4\\ \text{(II)}\quad & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{aligned}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$

$$\Leftrightarrow -5=y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

$y=-5$ eingesetzt in (I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2|-5)\}\quad x,y\neq 0$

Probe:

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2 \Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2 \Leftrightarrow 2=2\ (w)$$

$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4 \Rightarrow \frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$

$$\Leftrightarrow 6-2=4 \Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4\\ (II) & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{array}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$

$$\Leftrightarrow -5=y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

$y=-5$ eingesetzt in (I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2|-5)\}\quad x,y\neq 0$

Probe:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\Rightarrow\frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2\Leftrightarrow 2=2\ (w)$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\Rightarrow\frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$

$$\Leftrightarrow 6-2=4\Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$
$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$
$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4\\ (II) & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{array}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$
$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$
$$\Leftrightarrow -5=y$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

$y=-5$ eingesetzt in (I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$
$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2|-5)\}\quad x,y\neq 0$

Probe:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2 \Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2 \Leftrightarrow 2=2\ (w)$$
$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4 \Rightarrow \frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$
$$\Leftrightarrow 6-2=4 \Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

یادونه:

مساواتسیستم د کسرونو ترمونو څخه جوړ دی. دا چې مخرج دد صفر کیدو اجازه نه لري یا نه شي صفر کیدی، تعریفست باید ورکړ شي. داسئ مساواتسیستم کرښنیز نه دی.

د رسمونې لار

$$(I)\qquad x-y=-2\qquad L_I=\{(-2|0);(-1|1);(0|2);(1|3);\ldots\}$$
$$(II)\ \wedge\ -2x-y=1\qquad L_{II}=\{(-2|3);(-1|1);(0|-1);(1|-3);\ldots\}$$

دواړه مساوات د y پسې حل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هر مساوات لپاره ارزښتجوړې د حل سټ په ګوته کوي.

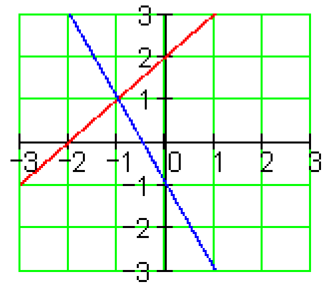
کا دا په یوه کواوردیناتسیستم کې وکښل شي، نو دوه کرښي ترې لاس ته راځي. د کرښو په غوښتکي یا نقطه تقاطع کې د دړو مساواتو حلسټ پروت دی.

حلسټ یا-ډېرئ: L={(-1|1)}

$$\begin{array}{ll} (I) & x - y = -2 \mid +y \\ (II) & -2x - y = 1 \mid +y \\ \hline (I) & x = -2 + y \mid +2 \\ (II) & -2x = 1 + y \mid -1 \\ \hline (I) & x + 2 = y \Leftrightarrow y = x + 2 \\ (II) & -2x - 1 = y \Leftrightarrow y = -2x - 1 \\ \hline \end{array}$$

په هر مساوات کې د x لپاره عددونه اېښوول کیږي.

x	-2	-1	0	1
y_I	0	1	2	3
y_{II}	3	1	-1	-3



د رسموني لار د مساوات او کرښو ترمنځ هندسي(ځمککچیزي) اړیکي لیدوړ کوي. د حل لار په حیث زیات وخت مناسب نه دی، چې د ګډغوښتکي کواودینات په ګرفیک کې ناتیک لوستل کیدی شي.

برابرون – یا مساواتسیستم بې له یواځني حل خخه

رسمیزه حل یا درسم له لارې حل د مساوات او کرښې ترمنځ هندسي اړیکي لیدوړ کوي.

- دوه کرښي کیدی شي چې نسبت یو بل ته مختلف پروتځایونه ولري.

- دا کیدی چې په یو ټکي کې سره غوښي کړي، لکه پورته بیلګه چې لیدوړ کوي، د دواړو کرښیز مساوات لپاره ټک یو حل شتون لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- دا کیدی شي یو بل سره غبرګې وي، نو په دې حالت کې کوم ټکی نه شته، چې دواړه کرښې یې یو له بل سره ګډ ولري. له دې سره اړونده مساوات له دې امله حل نه لري.

- دا کیدی شي یو په بل پرتې وي، یعنې کټمټ وي، نو هر ټکی د یوې کرښې به د بلې کرښې ټکی هم وي. نو له دې امله به دااړونده مساوات ناپای زیات حلونه ولري.

$$\begin{aligned} &(I)\quad 10x+4y=4 \\ &(II)\quad 5x+2y=1 \mid \cdot(-2) \\ \hline &(I)\quad 10x+4y=4 \\ &(II)\ -10x-4y=-2 \mid \end{aligned}\Bigg\}+$$ 0=2 نو دا ناټیک وینا ده، له دې لاس ته را ځي L={}	## مساوات سیستم حل نه لري چې دا د حل پیل مو یوه . لیدوړ دا په دې معنا دی، ې ځغلي او کوم ګډ ټکی نه لري.

دا مساواتسیستم ناپای ډېر ځوابونه یا حلونه لري

$$\begin{aligned} &(I)\quad 10x+4y=2 \\ &(II)\quad 5x+2y=1 \mid \cdot(-2) \\ \hline &(I)\quad 10x+4y=2 \\ &(II)\ -10x-4y=-2 \mid \end{aligned}\Bigg\}+$$ 0=0 له دې لاس ته راځي ربنتیا وینا	د ورته بڼه بدلون وروسته د مساوات (I) او مساوات (II) جمعه کونې یو بل سره پورته کوي یا له منځه وړي، دا په دې معنا چې مساوات ورته یا ایدنتیک دي. هره د اعدادو جوړه، چې مساوات (I) پوره کوي،دا مساوات (II)هم پوره کوي. لیدوړ دا په دې معنا دی، چې کرښې یو په بل پرتې دي.

پوښتنې

مساواتسیستم I

مساوات سیستم ته د دوه متحولو سره ګډوله پوښتنې، کرښیزمساواتسیستم، سیستم د کسري ترمونو سره او شي پوښتنې(د متن سره پ،ښتنې)

لومړی: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

الف- $\begin{cases} (I) & 5y - 3x = 1 \\ (II) & x = y + 1 \end{cases}$ ب - $\begin{cases} (I) & 4x + 5y = 32 \\ (II) & y = 5x - 11 \end{cases}$

پ- $\begin{cases} (I) & 15y - 4x = -50 \\ (II) & x = y + 7 \end{cases}$ ت - $\begin{cases} (I) & 3x = y + 15 \\ (II) & 2y - 10 = 2x \end{cases}$

د ویم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

a) $\begin{cases} (I) & 2y = 2x - 40 \\ (II) & 3x = 10 - 2y \end{cases}$ b) $\begin{cases} (I) & \frac{x}{2} - \frac{3y}{5} = 3 \\ (II) & \frac{x}{4} + y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (I) & \frac{2x}{15} + \frac{7y}{12} = 3 \\ (II) & \frac{7x}{25} - \frac{5y}{16} = \frac{3}{20} \end{cases}$ d) $\begin{cases} (I) & \frac{x+5}{y-7} = \frac{4}{3} \\ (II) & \frac{x+2}{y-5} = \frac{5}{8} \end{cases}$

دریم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

a) $\begin{cases} (I) & \frac{4}{3x+1} = \frac{2}{3y-13} \\ (II) & \frac{2}{5x-10} = \frac{4}{7y-6} \end{cases}$ b) $\begin{cases} (I) & \frac{7}{x} - \frac{12}{y} = \frac{5}{6} \\ (II) & \frac{4}{y} + \frac{5}{2} = \frac{9}{x} \end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) (I) $\frac{4}{x}+\frac{8}{y}=\frac{5}{3}$

(II) $\frac{2}{x}-\frac{4}{y}=-\frac{1}{6}$

d) (I) $\frac{3}{2x-1}-\frac{8}{3y+2}=-\frac{1}{5}$

(II) $\frac{5}{2x-1}+\frac{4}{3y+2}=\frac{8}{15}$

څلورم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

(I) $\frac{7}{2x-5}-\frac{9}{7y+5}=\frac{10}{3}$ (II) $\frac{24}{2x-5}+\frac{15}{7y+5}=\frac{19}{3}$

پنځم: یو پلار په دې لحضه کې څلورواره دومره عمر لري لکه ځوي يې او په ۵ کاله کې به فقط درې واره دومره عمر ولري. دا دواړه همدا اوس څومره عمر لري؟

شپږم: په کوم وخا کې به یو (اوبه) ساتونی (بیلر؟) له دوه نلونو څخه نیمم ډک شي، چې لومړی نل د ټول ساتوني د ډکولو لپاره ۱۸ دقیقې اودویم د دې لپاره ۲۲ دقیقو ته اړتیا ولري یا په کار ولري؟

اوم: د یوه مستېیل یا ولاړکونجیزچاپیریال یا محیط ۱۸۰ سانتي متره دی. اړخa څومره اوږد دی، که اړخ b ۳۰ سانتي متره وي؟

اتم: که د دوه ارزښتځاییزه پرته جمعه یا پروت زیاتون عدد9 دی. که ارزښتونه بدل شي، نو نوی عدد لاس ته راځي چې د زاړه عدد 7/4 ده. دواړه ځا ارزښتونه څومره دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

توان- يا پوتنځ توابع

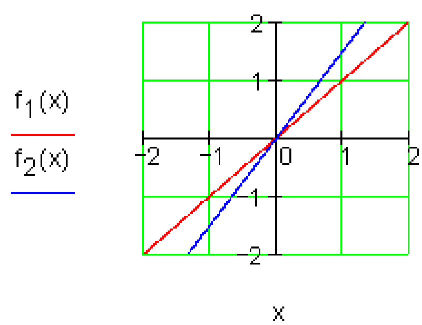
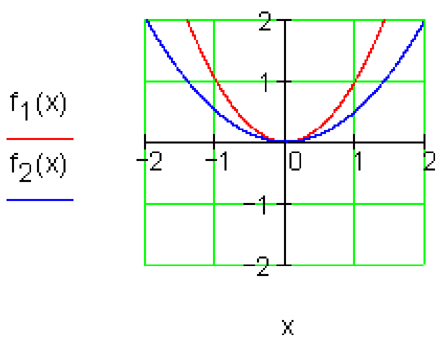
توان توابع

تعريف:

يوه تابع د تابع مساوات $f(x) = a_n x^n \quad ; n \in \mathbb{N} \quad ; a_n \in \mathbb{R}$ سره پوتنځ تابع بلل کيږي.

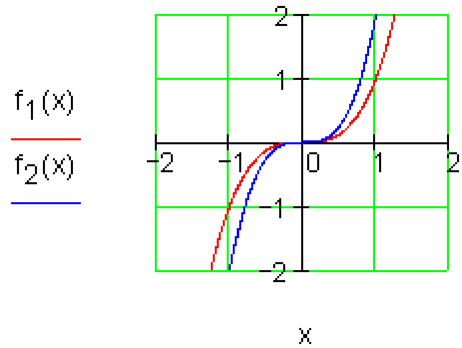
د n اکپوننت يا جګعدد د پوتنځ تابع درجه ټاکي او ضريب an د ګراف بڼه يا فورم او هغه د بڼي ضريب بلل کيږي.

بيلګې:

$f_1(x) := x$ $\quad f_2(x) := \frac{3}{2} \cdot x$  د لومړۍ دزجې توان تابع(کرښه)	$f_1(x) := x^2$ $\quad f_2(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2$  د دويمي درجي توان تابع (پارابول)

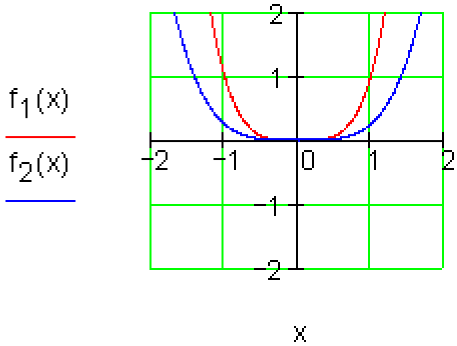
(c) ketabton.com: The Digital Library

$f_1(x) := x^3$ $f_2(x) := 2 \cdot x^3$

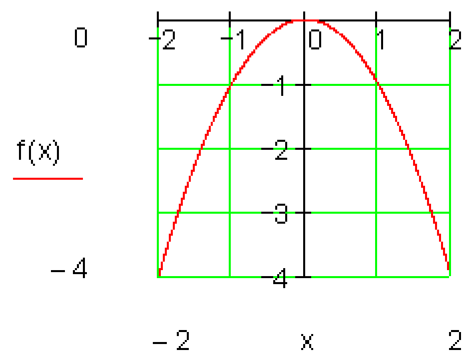


د دريمي درجې توانتابع

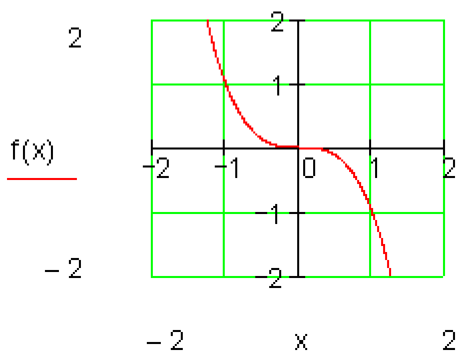
$f_1(x) := x^4$ $f_2(x) := \frac{1}{4} \cdot x^4$



د څلورمي درجې توانتابع



تابع مساوات ولیکی



تابع مساوات ولیکی

لاندې پوښتنې ځواب کړی:

ب – دn درجه او د a_n مختخښنه د گراف په تلنه کومه اغیزه لري؟

پ – د پوتنځ تابع n درجه د گراف په سیومتري کومه اغیزه لري؟

ت – د پوتنځ تابع د n په واکولي او د a_n مختخښې له امله کوم ارزښتست(ارزښتډیرې) لري؟

ټ - د a_n مطلق ارزښت د گراف په تلنه کوم اِیز لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځوابونه لږ وروسته راځي.

سیومتري

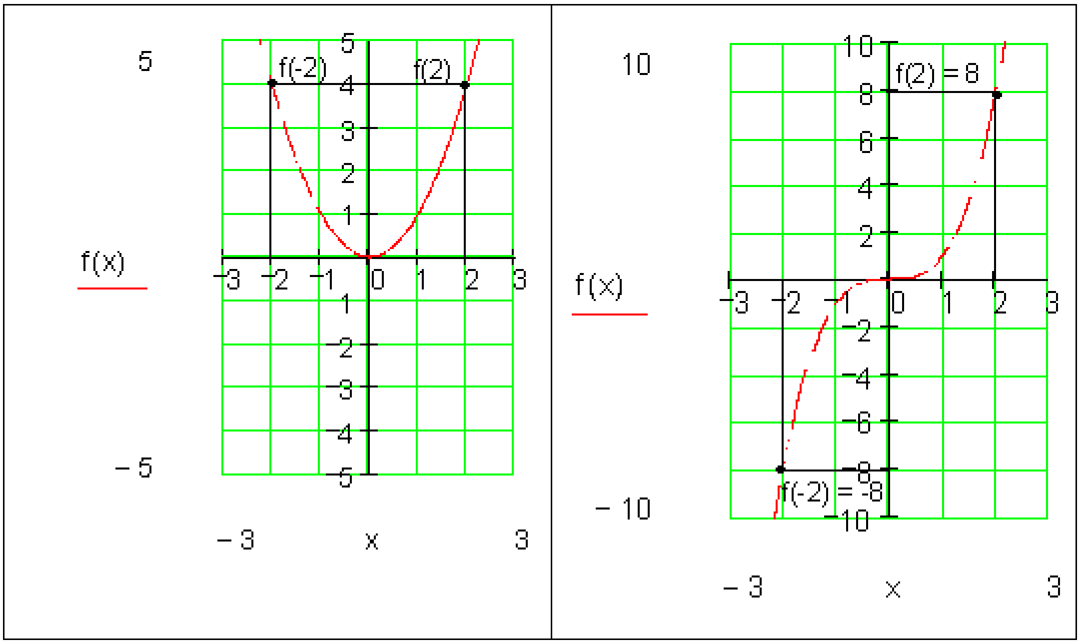
په سیومتري څنګه قضاوت کیدی شي، که څوک فقط د یوه توان(پوتنځ) تابع تابع مساوات پیژني؟

د دې لپاره د لاندې توابعو ګرافونه کاږو:

$f(x)=x^2$ او $f(x) = x^3$

او تابع د $x=-2$ او $x=2$ په ځایونو کې تر څیړنې لاندې نیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ګومان مو نږدې دی چې لاندې باور لري:

دx د جوړه ځګعدد سره د تابع ارزښتونه برابر دي. دا په دې معنا چې :

محورسيمتريک، نو $f(-x) = f(x)$

د x ناجوړه(طاقو) ځګعددونو لپاره د تابع ارزښت برابر مطلق قيمت لري، مګر متضادې مخنخښې لري.

دا په دي معنا جې:

ټکی سيومتريک، نو $f(-x) = -f(x)$

دا اړيکي د ټولو تانتوابعو لپاره باور لري (بې له ښوونې).

د يوه توان - يا طاقت تابع محورسيومتريک دی، که د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري: $f(-x)=f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه توانتابع ګراف ټکی سیمتریک دی،که د ټولو $x \in D$ ؛ لپاره باور ولري $f(-x)= - f(x)$

ټولګه:

د $a_n > 0$ لپاره باور لري:

ټول توان توابع د جوړه جګعدد سره محور سیومتریک دي. دا له II د .I څلورمې ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتوابع د ناجوړه(طاق) جګعدد سره ټکیسیومتریک دي. دوی له .IIIو .I څلورمې(ربع) ته ځغلي(خوزي).

د ټولو $0 >$ لپاره باور لري:

ټول توان توابع د جوړه جګعدد سره محور سیومتریک دي. دا له III د .IV څلورمې ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتوابع د ناجوړه(طاق) جګعدد سره ټکیسیومتریک دي. دوی له .IIو .IV څلورمې(ربع) ته ځغلي(خوزي).

تمرینونه:

د توان تابع خویونه.

د لاندې توانتوابعو درجه وټاکی، په سیمتریکي حالت، د ګراف په تلنه او او ارزښت دېرې يې یوه وینا وکړی د د هر ګراف يې په پروت ولاړسیستم (کواوردینات سیستم) کې رسم کړئ.

لومړی - $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ دویم - $f(x) = \frac{1}{4}x$

دریم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^4$ څلورم - $f(x) = \frac{1}{5}x^3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^5$ شپږم - $f(x) = -\frac{1}{2}x$

اوم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^3$ اتم - $f(x) = 2x^2$

نهم - $f(x) = \frac{1}{5}x^4$ لسم - $f(x) = -\frac{2}{5}x^4$

کربنیز ې توابع د ورکړشوو شرایطو سره

. لومړی حالت : د P تکي څخه تیرې کربښې د a_1 جګوالي سره

بیلګه:

یوه کربښه د a_1 د جګوالي سره د $P_1(x_1 | y_1)$ په تکي کې ځغلي.

د $f(x) = a_1x + a.$ تابع مساوات دې پیدا شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جګوالی: $a_1 = 1,5$ ټکی $P_1(-2 \mid 3)$

وتونمساوات $f(x) = a_1 x + a_0$

جګوالی ځای په ځای کړی
$f(x) = 1,5 \cdot x + a_0$

د a_0 لپاره دې ارزښت وشمیرل شي.

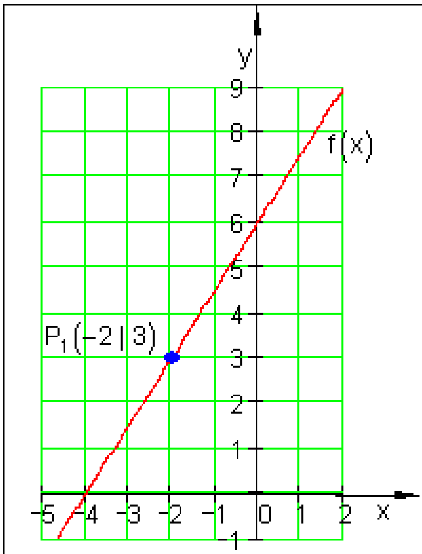
د $P_1(-2 \mid 3)$ لپاره ازمایښت

$$\begin{aligned} f(-2) = 3 \quad &\Leftrightarrow \quad 1,5 \cdot (-2) + a_0 &= 3 \\ &\Leftrightarrow \quad -3 + a_0 &= 3 \mid +3 \\ &\Leftrightarrow \quad a_0 &= 6 \end{aligned}$$

د تابع مساوات $f(x) = 1,5 \cdot x + 6$

ازمایښت:

$$P_1(-2 \mid 3) \Leftrightarrow f(-2) = 3$$
$$f(-2) = 1,5 \cdot (-2) + 6 = -3 + 6 = 3$$



بیلګه:

د حیواناتو ساتونکی د وښو اوتومات څخه د روځې 7,5 kg خوراک شته. دولس روځې، وروسته له هغې چې زیرمه له غذایي موادو ډکه شوې وه، هلته نور 250 kg پاتې دي.

الف - یو تابع مساوات ولیکی، چې دا حالت تشریح کړي

ب - په څومره ستې یا ډېرى به دا د وښو زیرمه دولس ورځې د مخه ډکه شوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل و الف ته - دx محور: وخت په ورځو

y محور : د وښو زېرمه په کيلوګرامkg .

$$f(x) = -7,5x + a_0$$

$$P(12 \mid 250) \Rightarrow f(12) = 250 \Leftrightarrow -7,5 \cdot 12 + a_0 = 250$$

$$\Leftrightarrow -90 + a_0 = 250 \mid +90$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 340 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -7,5x + 340}}$$

حل و ب ته- د ډکيدنې وخت $x = 0$ دی.

$$\Rightarrow f(0) = -7,5 \cdot 0 + 340 = 340$$

د وښو شتون دولس12 ورځې د مخه په 340 kg ډک شوی .

لکه څنګه په لومړي حالت کې چې د يوې کرښې جګوالی او يو ټکی معلوم دي، شمېرنه په همغه ډول د ورکړشوو داتن يا داتا Daten سره مخ ته ځي.

په داسې حالت کې شمېرنه ټويزه سرته رسيږي. دا مو بيا يو فرمول ته لارښوده وي.

يوه کرښه دa_1 جګوالي سره د$P_1(x_1 \mid y_1)$ ټکي څخه تيريږي.

د کرښمساواتو ټوليز فرمول دی: $f(x) = a_1 x + a_0$

$$P_1(x_1 \mid y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow a_1 \cdot x_1 + a_0 = y_1 \mid -a_1 \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - a_1 \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = a_1 \cdot x + y_1 - a_1 \cdot x_1 = a_1 \cdot x - a_1 \cdot x_1 + y_1 = a_1(x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$$

دا د ټکی - جګوالي فرمول هم بلل کيږي.

بيلګه:

په $a_1 = -2; P_1(-3 \mid 4)$ کې ځا په ځای کړی $f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$:

$$f(x) = -2(x - (-3)) + 4 = -2(x + 3) + 4 = -2x - 6 + 4 = \underline{\underline{-2x - 2}}$$

.

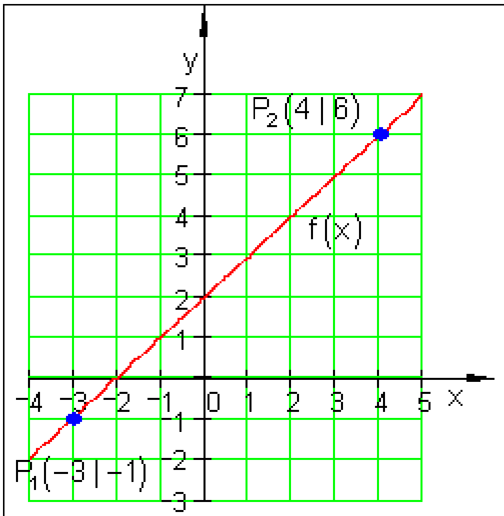
(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم حالت: کرښه له دوه ټکو تيرېږي

بيلګه:

دوه ټکی $P_1(x_1 \mid y_1)$ او $P_2(x_2 \mid y_2)$ په يوه کرښه پراته دي.

د $f(x) = a_1x + a_0$ تابع مساوات غواړو پيداکړو.



$P_1(-3 \mid -1)$ $P_2(4 \mid 6)$

وتونمساوات: $f(x) = a_1x + a_0$

د جګوالي ټاکنه:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-1)}{4-(-3)} = \frac{6+1}{4+3} = \frac{7}{7} = 1$$

جګوالی وضعه کړی $f(x) = 1 \cdot x + a_0$

وروسته له دې چې جګيدنه معلومه شوه، دا پوښتنه داسې حل کيږي لکه په لومړي حالت کې.

د ټکو ازمايښت لپاره بې پروا ده چې د دې لپاره کوم ټکي کارول کيږي، ځکه چې دواړه ټکي به په کرښه پراته وي.

د ټکو ازمايښت د $P_2(4 \mid 6)$ يا P_1 لپاره

$$P_2(4 \mid 6) \Rightarrow f(4) = 6 \Leftrightarrow 1 \cdot 4 + a_0 = 6 \mid -4 \Leftrightarrow a_0 = 2 \Rightarrow f(x) = x + 2$$

بيلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فزيک څخه پوهيږو چې د حرارت معلومولو (ګرمی کچونې) لپاره مختلفې دد حرارت سکالا کارول کيږي. د څلزيوس سکالاCelsiusskala او د فارنهايټ سکالا Fahrenheitskala

د دواړو ترمنځ کرښيزې اړيکې موجود دي.

$100\,^0C$ برابری دي د $212\,^0F$ سره . $0\,^0C$ برابر د ی په $32\,^0F$ سره.

د يوه تابع مساوات غواړو پيداکړو، چې د هغې په مرسته ^0C په ^0F اړول کيږي.

خپلواکه متحوله x په ^0C او بلواکه يا تابع متحوله $y = f(x)$ په ^0F .

ځګوالی:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5} \Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + a_0$$

$$P_1(0 \mid 32) \Rightarrow f(0) = 32 \Leftrightarrow \frac{9}{5} \cdot 0 + a_0 = 32 \Leftrightarrow a_0 = 32$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

په بدل شوی تابع x په $C°$ کې کيږدی نتيجه يې ده.

د بيلګې په دول:

$$x = 20\,^0C : f(20) = \frac{9}{5} \cdot 20 + 32 = 68 \Rightarrow 20\,^0C \triangleq 68\,^0F$$

د دويم حالت لپاره هم کيدی شي شميرنه په ټوليزه توګه مخ ته بوتلی شی:

دوه ټکی $P_1(x_1 \mid y_1)$ او $P_2(x_2 \mid y_2)$ په يوه کرښه پراته دي.

د مساواتو عمومي بنه ده:. $f(x) = a_1x + a_0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جګوالی: $$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + a_0$$

$$P_1(x_x \mid y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + a_0 =$$

$$= y_1 \mid - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 =$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

دا په دوه ټکو کې د کرښېزوومساواتو يو توليزه بڼه ده .

په زياتو ادبياتو کې په لاندې ډول ده:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \;;\; x_1 \neq x_2$$

چيرته چې $y = f(x)$ باور لري.

د عملي کاروني لپاره لاندې بڼه مساعده ده:

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

بيلګه:

په $P_1(2 \mid -1); P_2(-3 \mid 2)$ کې ځای په ځای کړی $f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{2-(-1)}{-3-2}(x-2)+(-1)=\frac{2+1}{-5}(x-2)-1=-\frac{3}{5}(x-2)-1=-\frac{3}{5}x+\frac{6}{5}-\frac{5}{5}$$
$$=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}\Leftrightarrow f(x)=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$$

تمرین:

د ^0F په ^0C باندې شمیرنې لپاره یو تابع مساوات ولیکئ

2.2.3.تمرین: د تابعمساواتو شمیرنه

یو کرښیز مساوات د a_1 جګوالی لري او د P له ټکي تیریږي.

د $f(x)$ تابعمساوات معلوم کړئ او د محورونو قاطع ټکي یا غوښتکي او ګراف انځور کړئ

اول - $P(2|-2)$ $a_1=\frac{1}{2}$ دویم - $P(-1|3)$ $a_1=\frac{3}{4}$

دریم - $P(3|-1)$ $a_1=2$ څلورم - $P\left(\frac{3}{2}\middle|4\right)$ $a_1=\frac{4}{5}$

یوه کرښه له ټکو P_1 او P_2 تیریږي.

د $f(x)$ تابع مساوات پیدا کړئ او د محور قاطع ټکي او ګراف رسم کړئ.

پنځم - $P_2(5|4)$ $P_1(2|1)$ شپږم - $P_2(2|3)$ $P_1(-3|-2)$

اوم - $P_2(4|-1)$ $P_1(-2|3)$ اتم - $P_2(3|1)$ $P_1(-4|-1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم - $P_2(4\mid -1)$ $P_1\left(-3\mid \frac{9}{2}\right)$ لسم - $P_2\left(\frac{7}{2}\mid 4\right)$ $P_1(-4\mid -2)$

. د کرښبرابروتو ځانګړی حالت:

د x- محور سره غبرګ کرښه:

$f(x) = a_0 ; a_0 \in \mathbb{R}$

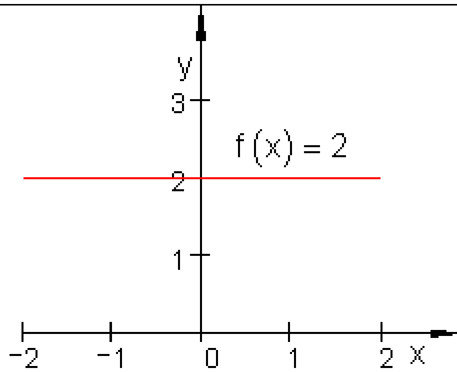
یو د 0 درجي تام راشنل تابع ده او

ثابته تابع هم بلل کیږي.

x- محور هم یوه ثابته تابع ده د

تابع مساوات $f(x) = 0$ سره.

د ثابتې تابع جګوالی تل صفر دی.



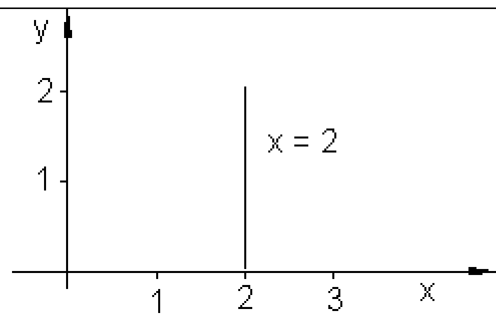
د y- محور سره غبرګه.

$x = a ; a \in \mathbb{R}$

کرښه د محور سره غبرګه (موازي) ځغلي.

دا د یوه تابع مساوات سره نه شي لیکل کیدی، ځکه چې یواځنی تنظیم نه شته یعني تابع نه ده.

$x = 0$ دy - محور مساوات دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

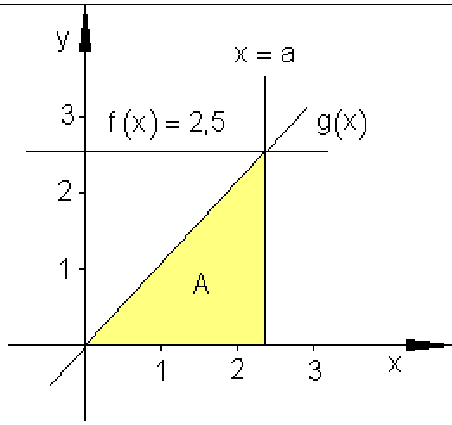
بیلګه:

یو f(x) = 2,5 ور کړ شوی او y- محور سره موازي دa واټن د 0 < a سره.

یوه سرچینیزه کرښه g د(P(a | f(x) ټکي څخه تیریږي.

دا دx - محور او د y- محور سره غبرګې کرښې سره یو مثلث جوړوي.

a داسې وټاکی چې وسطحه د سطحې څلور واحدونه (یوونونهFE) جوړ کړي. د دې حالت لپاره د(g(x تابع مساوات ځنګه دي؟



$A = \frac{g\cdot h}{2}$ د g = a او

h=f(x) = 2,5 سره

د مثلث سطه $\Rightarrow A = \frac{2,5\cdot a}{2} = \frac{5}{4}a$

$A = 4 \Leftrightarrow \frac{5}{4}a = 4 \,|\cdot\frac{4}{5} \Leftrightarrow a = \frac{16}{5}$

(ځکه چې د سرچینې
کرښه $g(x) = a_1 x \ (a_0 = 0$

د جګېدو له مثلث
ځخه $a_1 = \frac{5}{2} : \frac{16}{5} = \frac{25}{32}$

د تابع مساوات : $g(x) = \frac{25}{32}x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين: د ^0F بدلون شمیرنه په ^0C لپاره د تابع مساوات ولیکئ

حل :

د ^0C اړونه یا بدلون په^0F د متحولي لپاره دا معنا لري:

x په ^0F مستقله یا خپلواکه متحوله ده او $y = f(x)$ په^0C بلواکه یا تابع متحوله ده.

$$212\,^0F \triangleq 100\,^0C \Rightarrow P_1(212\,|\,100) \quad \text{او} \quad 32\,^0F \triangleq 0\,^0C \Rightarrow P_1(32\,|\,0)$$

دا چې د حرارت الو ترمنځ یوه کرښیزه اړیکه پرته ده، نو ټکي P_1 اوP_2 په یوه کرښه پراته دي.

د کرښې عمومي کرښیزه بڼه په دې ډول ده:.$f(x) = a_1x + a_0$

دلته ضریبونه a_1 او a_0 د ټاکلو دي.

جګوالی: $$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100-0}{212-32} = \frac{100}{180} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{9}x + a_0$$

ټکي ازمایښت د $P_1(32\,|\,0)$ سره.

$$\Rightarrow f(32) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{9}\cdot 32 + a_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{160}{8} + a_0 = 0\,|-\frac{160}{9} \Leftrightarrow a_0 = -\frac{160}{9}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} = \frac{5}{9}(x-32)$$

د ^0F اړونې په ^0C لپاره باور لري.

$$^0F \text{ in } ^0C \text{ gilt: } f(x) = \frac{5}{9}(x-32)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

x په ^{0}F او y په ^{0}C .

پوښتنې:

کرښيزې توابع III

لومړی: د g کرښو مساوات وټاکئ

الف: $P_1(-4|-2)$ او $P_2(2|0)$ په g پراته دي،

ب- g په $P_1(-3|1)$ او $P_2\left(1|\frac{11}{3}\right)$ کې ځغلي

پ- $P_1(1|-2)$ او $P_2(-2|10)$ په g پراته دي

ت- g محورونه په x = 2 او y = 6 کې غوځوي(قطع کوي)

ټ- g له (P(-6;1 تيرېږي او له h سره غبرګ دی د $h(x)=-\frac{2}{3}x+2$ مساوات سره

ث- g جګوالی $a_1=-4{,}5$ لري او له P(1;1,5) څخه تيرېږي.

ج- g جګوالی $a_1=3$ لري او له P(1;,1,5) څخه تيرېږي

چ- g دx محور په x = 3 کې غوځوي او د hکرښه د h(x) = 4x - 2 سره په x = -1 کې غوځوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم: د دوه کرښو g او h کرښیز مساوات پیدا کړی، چې له ټکی P(3;-2) تیرېږي.

دریم: یوه کرښه g د کرښیز تابع f(x) سره پیدا کړی، چې له ټکو P_1 او P_2 تیریږي او تابع مساوات وټاکی.

الف- $P_1(1,5\,|\,3)\,;\,P_2(3\,|\,2,5)$ ب - $P_1(-3\,|\,5)\,;\,P_2(1\,|\,2,5)$

پ- $P_1(4\,|\,0)\,;\,P_2\left(-1\,|\,-\sqrt{2}\right)$ ت - $P_1(k\,|\,3)\,;\,P_2(2k\,|\,-1)$

ټ - $P_1(1\,|\,0)\,;\,P_2(-1\,|\,k+1)$ ث - $P_1\left(2\sqrt{k}\,|\,\sqrt{2k}\right)\,;\,P_2\left(\sqrt{k}\,|\,0\right)$

څلورم: د f(x) کرښیزې تابع مساوات وټاکی.که معلوم وي:

الف-کرښه د $a_1 = \frac{5}{4}$ ا جګیدنې سره له P(4;-1) څخه تیرېږي.

ب-کرښه له ټکو $P_1(-5\,|\,-3)$ ؛ او $P_2(0\,|\,3)$ ؛ څخه تیرېږي.

پ-کرښه له P(4,5;2,7) ټکي تیرېږي. او د x محور سره 45° مایله ده.

ت-کرښه له P(-1,5;0) تیرېږي او د h(x) = 2x+2 سره غبرګه (موازي) ده.

پنځم: کر ښه g و کاږی او کرښیز مساوات وټاکی.

الف- $P(3\,|\,-1) \in g$ او g دy محور سره غبر؛(موازي) څغلي.

ب- $P(3,5\,|\,2,5) \in g$ او g دx محور سره موازي څغلي.

پ- g له P(-5;1)تېرېږي او د $h(x) = -\frac{1}{2}x + 4$ ا سره موازي ده.

ت- g له $P\left(1\,|\,\frac{3}{2}\right)$ تېرېږي او د کرښو سره چې له ټکو $P_1(-2\,|\,-3)$ او $P_2\left(\frac{3}{2}\,|\,-5\right)$ تېرېږي، موازي څغلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

کرښيز مساوات VI

لومړی –

د لاندې کرښيزو توابعو ګرافونه و کاږئ او د ارزښت سټ يا – دېرئ W و ټاکئ

الف- $f(x) = -2x + 2;\ D = \{x \mid -3 \le x \le 5\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4};\ D = \{x \mid -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f(x) = \frac{3}{4}x - 3;\ D = \{x \mid -2 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f(x) = 3x - 6;\ D = \{x \mid -1 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$

دويم –

ټکی P_1 او P_2 ورکړ شوي، چې په کرښه پراته دي. د $f(x)$ تابعمساوات پيدا کړئ او ګراف يې وکاږئ

الف- $P_1(3 \mid 4);\ P_2(7 \mid -1);\ D = \{x \mid 0 \le x \le 7\}_{\mathbb{R}}$

ب - $P_1(-8 \mid 1);\ P_2(2 \mid -3);\ D = \{x \mid -8 \le x \le 2\}_{\mathbb{R}}$

پ - $P_1(4 \mid 3);\ P_2(-7 \mid -1);\ D = \{x \mid -7 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

ت - $P_1(-4 \mid -4);\ P_2(4 \mid 2);\ D = \{x \mid -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

دريم –

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې مساواتو حلسټ يا حلډېرئ پيداکړئ. مساوات چې کسری راشنل ترمونه ولري، بايد د هغو تعريفورشو هم ورکړل شي.

الف- $9 = 5 - x$ ب - $25 = x + 8$ پ - $\frac{3}{4} = \frac{2}{3} - x$ ت - $\frac{1}{3} - x = \frac{5}{9}$

ټ - $16 - 4x = 88$ ث - $a + 3b = bx + a$ ج - $2 = (x+5) - 8$

چ - $6 = (5-x) + 9$ ح = $(x-6)(x+3) = (x-5)(x-2)$ خ -

خ - $(x+3)(x+7) = (x+2)(x+9)$ $\frac{x}{4} + \frac{5x}{6} + \frac{5}{6} = \frac{x}{2} + x$

ځ - $\frac{3}{2x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{9} + \frac{7}{3x}$ د - $\frac{ax}{b} - \frac{b}{ac} = \frac{a}{bc} - \frac{bx}{a}$ ډ - $\frac{x}{a-b} + \frac{x}{a+b} = a$

ذ- $23a - \{5ax - [9ax + (12a - 6ax)] - (3a - 8ax)\} - 15a = 5ax - 7a$

ځلورم:د لاندې توابعو د محورونو سره د تقاطع ټکي هم پيدا کړئ.

الف- $f(x) = 2x - 7$ ب - $f(x) = -2x + 6$ پ - $f(x) = 3x - 3$

ت - $f(x) = 2x + \frac{2}{3}$ ټ - $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$ ث - $f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{4}{5}$

ج - $f(x) = 3,5x + \frac{1}{2}$ چ – $f(x) = -2,5x + 2\frac{1}{2}$ ح - $f(x) = 1\frac{3}{4}x - 3\frac{2}{3}$

پنځم: د يوې کرښې دوه ټکي P_1 او P_2 ورکړ شوي د لاندې توابعو له I تر IV لپاروه وټاکئ:

I. $P_1(3 \mid 4); P_2(7 \mid -1); D = \{x \mid -2 \le x \le 8\}_{\mathbb{R}}$

II. $P_1(-8 \mid 1); P_2(2 \mid -3); D = \{x \mid -8 \le x \le 2\}_{\mathbb{R}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

III. $P_1(4 \mid 3); P_2(-7 \mid -1); D=\{x \mid -8 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

IV. $P_1(4 \mid 2); P_2(-4 \mid -4); D=\{x \mid -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

الف- د جګیدنې ضریب m.

ب - د کرښې تابعمساوات

پ - د y محور سره د تقاطع ټکی P_y

ت - د تقاطع ټکی P_y د x محور سره

ټ - په W باندې ارزښتډېرى W.

ث - په D کې د تابع ګراف

شپږم: لاندې مساواتسیستمونه حل کړئ:

الف- $\begin{cases} \text{I} & 5y-3x=1 \\ \text{II} & x=y+1 \end{cases}$ ب - $\begin{cases} \text{I} & 4x+5y=32 \\ \text{II} & y=5x-11 \end{cases}$ پ - $\begin{cases} \text{I} & 15y-4x=-50 \\ \text{II} & x=y+7 \end{cases}$

ت - $\begin{cases} \text{I} & 3x=y+15 \\ \text{II} & 2y-10=2x \end{cases}$ ټ - $\begin{cases} \text{I} & 2y=2x-40 \\ \text{II} & 3x=10-2y \end{cases}$ ث - $\begin{cases} \text{I} & x+y=a+b \\ \text{II} & x-y=a-b \end{cases}$

پوښتنې

کرښیز مساوات IX

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی:کرښه g له ټکو P1(4;-3,5) او P2(2,5;-1) تیرېږي.

کرښه h له ټکو $P_3(5|2,5)$ او $P_4\left(\frac{3}{2}|\frac{25}{3}\right)$. تیرېږي.

کرښې یو بل ته څه موقعیت لري یا څنګه پرتې دي؟

دویم:د f(x) کرښیزې تابع د تابع ترم او ارزښتساحه(ارزښتورشو) و ټاکی، که صدق ولري:

الف- $f(0)=20; f(12)=32; x>0$ ب- $f(-3)=6; f(2)=-8; x\in[-3;3]$

دریم:

د f(x)کرښیزې تابع ګراف په 3 LE اوږدوالی واحده کینې لور

ته خوزیږي. د راکښل شوې کرښې د f*(x) مساوات څنګه دي؟

$$f(x)=\frac{5}{3}x-2 \quad D=\mathbb{R}$$

څلورم: د f(x) او g(x) توابع ورکړ شوې دي. د کوم ارزښت لپاره f(x) > g(x) صدق کوي؟

$$f(x)=2x-3 \quad ; \quad g(x)=-0{,}5x+1 \quad x\in\mathbb{R}$$

پنځم: یوه g(x)کرښه ورکړ شوې.. دا د یوې کرښې h(x) له خوا قطع کیږي. د h(x)مساوات وټاکی، که باور ولري: $g(x)=-3x+2$

الف- قاطع یا غوڅی دx محور سره . ب - قاطع(غوڅی) په x = -5 کې

شپږم:

یوه د پیل کرښه د $a_1=-0{,}125$ جګوالي سره و داسی کښول کیږي. چې کرښه h د مساوات	$h(x)=-1{,}5(x-2)$ ؛

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره د x په محور قطع کوي. راکښنه تشریح کړی او د راکښل شوې کرښې ګراف و کاږی.	

اوم: یوه f(x) کربښیزه تابع ورکړ شوې. کرښه د $x = u$ مساوات سره د f(x) ګراف په P کې قطع کوي او د x محور په Q کې قطع کوي. یوه سکیڅې ترتیب کړی.

الف- د P او Q کواوردینات وټاکی، که $f(x) = 0,75x + 2$ وي.

ب- د u د کوم ارزښت لپاره P د x محور پورته لور ته پرته ده.

ت- $P(u \mid f(u))$ په 1 څلوری یا ربع کې پروت دی. $R(0 \mid 0)$, Q او P د یوه مثلث رآسونه (ککرټکي)جوړوي. د دې مثلث د مساحت A لپاره ترم وټاکی. u (محیط) داسې وټاکی، چې $A(u) = 10$ صدق وکړي.

اتم: د g کرښې ته موازي او عمود مساوات داسې وټاکی، چې له P ټکي تیر شي.

الف- $g: x + 2 - 3y = 0; P(0 \mid 3)$ ب- $g(x) = \frac{2}{3}x - 3; P(1 \mid 4)$

پ - $g(x) = -1,5kx; P(1 \mid 0)$

نهم: کرښه g له ټکو P_1 او P_2 تیریږي. د h کرښې ته یې ځای مطالعه کړی او د امکان په حالت کې یې د قاطع ټکی معلوم کړی.

$$P_1(-1 \mid 1,5); P_2(-2 \mid -2,5) \qquad h: \ -x - 6 - 4y = 0$$

لسم: و ښایی: کرښه g او کرښه h عمود دي.

$$g: \ y - \sqrt{2}x = 1 \qquad h: -2y - \sqrt{2}x + 6 = 0$$

$$g(x) = -3x + 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یولسم:

د A, B او C ټکي د یوه مثلث د رآس ټکي دي. د$k > 0$ د کوم ارزښت لپاره دا مثلث قایم الزاویه (ولاړګوډیز) دی؟ (ښی رآس په C پروت دی)	$A\left(\sqrt{3k}\mid\frac{k}{3}\right); B\left(-\sqrt{3k}\mid\frac{k}{3}\right); C(0\mid k)$

پوښتنې

کرښیز توابع **XI**

لومړی-

$$f_1(x)=\frac{1}{4}x+2\frac{1}{4}; f_2(x)=-4x-2; D=\{x\mid -9\le x\le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه له تابع f_1 (x) سره د دویمي کرښي د تابع(x) f_2 سره غوځیږي. وټاکئ:

الف – د کواوردیناتونو x_s او y_s سره غوڅټکی S .

ب – د دواړو کرښو غوڅټکي د y محور سره .

پ – د دواړو کرښو غوڅټکي دx محور سره .

ت - د دواړو توابعو ګراف په D کي .

دویم –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_1(x) = -\frac{2}{3}x + 4\,;\, D = \{x \mid 0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کربښه له تابع $f_1(x)$ سره په ټکي $S(3 \mid y_s)$ کې د تابع $f_2(x)$ سره له کربښې څخه غوڅیږي.

وټاکئ:

الف-د S پوره کواودینات

ب-تابع .$f_2(x)$.

پ-د دواړو کربښو غوڅټکي د کواوردینات محورونو سره.

ت-په D کې د دواړو توابعو ګراف.

دریم:

$$f_1(x) = -\frac{3}{8}x + 1;\, D = \{x \mid -7 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

کربښه د تابع $f_1(x)$ سره په ټکي $S(-4 \mid y_s)$ کې کې له کربښې څخه د تابع $f_2(x)$ سره ، چې پروتمحور په 7- کې غوڅوي، غوڅیږي.

وټاکئ:

الف – د S پوره کواوردینات.

ب – تابع $f_2(x)$.

پ – د دواړو کربښو غوڅټکي د کواودینات د محورونو سره.

ت – د واړو توابعو ګراف په D کې..

څلورم –

د یوه درېکوډي یا مثل ټکي P_1, P_2 او P_3 ورکړ شوي دي. د درېګوډي د اړخونو تابع وټاکئ. پخوا له دې یو پلان نقشه ترتیب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف-

$$[P_1P_2] \triangleq f_1 ; [P_2P_3] \triangleq f_2 ; [P_1P_3] \triangleq f_3$$
$$P_1\left(-6 \;\middle|\; \frac{3}{2}\right); P_2\left(-2 \;\middle|\; -\frac{3}{2}\right); P_3\,(-4 \mid 3)$$

ب –

$$[P_1P_2] \triangleq f_1 ; [P_2P_3] \triangleq f_2 ; [P_1P_3] \triangleq f_3$$
$$P_1\left(6 \;\middle|\; \frac{3}{2}\right); P_2\left(2 \;\middle|\; -\frac{3}{2}\right); P_3\,(4 \mid 3)$$

پنځم -

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x + 3 ; P_2(-2 \mid -3) ; D = \{x \mid -6 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع f_1 (x) سره د دویمې کرښې ځخه د تابع f_2 (x) سره ، چې له ټکيP_2 تیریږي ، په ټکي S کې ولاړکونجیزه غوښیږي.

وټاکئ:

الف - دf_2 (x) جګوالی m_2 .

ب- تابع f_2 (x) .

پ – د دواړو کرښو غوڅټکی S .

ت - د دواړ کرښو محورغوڅټکي.

ټ - د دواړو کرښو ګراف په D کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

کرښیز توابع XII

لومړی -

$$f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 3\,;\, P_2(2|-3)\,;\, D = \{x \mid 0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره له یوې دویمې کرښې د تابع $f_2(x)$ سره، چې له ټکي P_2 تیریږي په ټکي S کې ولاړکونجیزه غوځیږي.

وټاکئ.

لومړی:

الف – د $f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ب – تابع $f_2(x)$.

پ - د دواړو کرښو غوځټکی S .

ت - د دواړو کرښو د محورغوځټکي.

ټ - د دواړو کرښو ګراف په D کې.

دویم –

د کرښې تابع $f_2(x)$ وټاکئ، چې پروتمحور په P_{x2} کې غوځوي او له کرښې څخه د تابع $f_1(x)$ سره په S کې غوځیږي. د واړو کرښو غوځټکي وشمیرئ او د دواړو کرښو ګراف په D کې رسم کړئ.

الف- $f_1(x) = \frac{3}{2}x + 6\,;\, P_{x2}(-6|0)$; $S\left(x_s \,\middle|\, \frac{3}{2}\right)\,;\, D = \{x \mid -6 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f_1(x) = \frac{1}{2}x - 3\,;\, P_{x2}(4|0)$; $S(3 \mid y_s)\,;\, D = \{x \mid -1 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$

دریم -

$$P_1(-5|5)\,;\, P_2(-1|-1)\,;\, S(x_s \mid 2)\,;\, D = \{x \mid -6 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره له ټکو P_1 اوP_2 تیریږي او په ټکي S کې ولاړکونجیز له کرښې څخه د تابع $f_2(x)$ سره غوځیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وټاکئ:

الف- د $f_1(x)$ جګوالی m_1 .

ب – تابع $f_1(x)$.

پ – دS پوره کواوردينات.

ت – د$f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ټ – تابع$f_2(x)$.

ث – د $f_1(x)$ او$f_2(x)$ ګرافونه

څلورم -

$$P_1(5\,|\,5);\, P_2(1\,|\,-1);\, S(3\,|\,y_s);\, D=\{x\,|\,0\le x\le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره له ټکو P_1 اوP_2 څخه تيرېږي او په ټکي S کې ولاړکونجيزه له کرښې د تابع $f_2(x)$ سره غوڅيږي.

وټاکئ:

الف – د $f_1(x)$ جګوالی m_1 . ب - تابع $f_1(x)$.

پ - د S پوره کواوردیناتونه ت – د $f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ټ - تابع $f_2(x)$. د $f_1(x)$ او $f_2(x)$ ګرافونه.

پنځم -

$$f_2(x)=3x-3;\, S\left(\frac{3}{2}\,\middle|\,\frac{3}{2}\right);\, D=\{x\,|\,0\le x\le 6\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع $f_1(x)$ ګراف په ټکي S کې د تابع $f_2(x)$ له ګراف څخه ولاړکونجيزه غوڅيږي.

وټاکئ:

الف - تابع $f_1(x)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب – د دواړو کرښو د محورونو غوڅټکي.

پ – د دواړو توابعو ګراف په D کې.

پوښتنې

کرښيزې توابع برخه XIII

لومړی -

$$f_2(x)=\frac{4}{5}x+\frac{9}{10};\ S\left(2\ \middle|\ \frac{5}{2}\right);\ D=\{x\,|\,-1\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع$f_1(x)$ ګراف په ټکي S کې د تابع $f_2(x)$ له ګراف څخه ولاړکونجيز(قايم الزاويه) غوڅيږي.

وټاکی:

الف: تابع $f_1(x)$.

ب – د دواړو کرښو د محورونو غوڅټکي.

پ – د دواړو توابعو ګرافونه په D کې.

$$g:\quad y-\sqrt{2}x=1 \qquad \Rightarrow g(x)=\sqrt{2}x+1$$

$$h:-2y-\sqrt{2}x+6=0\Rightarrow h(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}x+3$$

د اورتوګوناليټي شرايط: $a_{1g}=-\dfrac{1}{a_{1h}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{1g} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1\cdot 2}{1\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad q.e.d$$

دويم:

د دوه کرښنو توابع $f_1(x)$ او $f_2(x)$ ورکړشوي او د يوې دريمې کرښې جګوالی m_3 د تابع $f_3(x)$ سره. تابع $f_3(x)$ داسې وټاکئ، چې ګراف يې د نورو دواړو کرښنو غوښتکي څخه تير شي. د درېواړو کرښنو محور غوښتکي وټاکئ او د درېواړو توابعو ګراف په D کې رسم کړئ.

الف-

$$f_1(x) = -4x - 2\,;\, m_3 = \frac{1}{4}$$

$$f_2(x) = 2x + 4\,;\;\; D = \{x \mid -9 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

ب –

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}\,;\, m_3 = -4$$

$$f_2(x) = 2x + 4\,;\;\; D = \{x \mid -9 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

دريم: کرښه دتابع $f_1(x)$ سره له ټکي P_1 تيرېږي او له يوې دويمې کرښې چې له ټکي P_2 تيريږي په ټکي S کې غوځيږي. توابع $f_1(x)$ او $f_2(x)$ وټاکئ د هغو محورغوښتکي اوپه D کې يې ګراف وکاږئ.

$$P_1\left(-2 \;\middle|\; \frac{3}{2}\right); P_2(3 \mid 5); S\left(2 \;\middle|\; \frac{5}{2}\right); D = \{x \mid -8 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

څلورم:

$$P_1\left(-1 \;\middle|\; \frac{5}{2}\right); P_2\left(-3 \;\middle|\; \frac{11}{2}\right); D = \{x \mid -9 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره محور په 8- کې غوڅوي. $f_1(x)$ ته غبرګه يوه دويمه کرښه د تابع $f_2(x)$ سره پروت محور په 4- کې غوڅوي. دواړه کرښې له يوې دريمې کرښې چې تابع $f_3(x)$ لري او له ټکو P_1 او P_2 تيريږي په ټکو P_3 او P_4 کې ولاړکونجيزه(قايوم الزاويه) غوڅوي. وټاکئ:

الف- تابع $f_3(x)$ ب - تابع$f_1(x)$

پ – تابع $f_2(x)$ ت – د دريواړو توابعو ګراف په D کې.

پنځم:

$$A\left(-\frac{13}{2} \,\middle|\, -\frac{3}{2}\right); B(3 \mid 2); D = \{x \mid -8 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$$

د يوه قايوم الزاويه مثلث(ولاړکونجيز درې ګوډي) څخه، چې ولاړ کونج(قايم الزاويه) يې پهC کې پرته ده، ټکي A اوB ورکړ شوي. د مثلث اړخ يا ضلع [BC] د تابع $f_3(x)$ سره د اوردينات يا ولاړ محور په 3 کې غوڅوي.

وټاکئ:

الف- د اړخ [AB] تابع $f_1(x)$ ب- د اړخ يا ضلعې [BC]تابع $f_3(x)$

پ- د اړخ [AC] تابع $f_2(x)$ ت- د ټکي C کواورديناتونه

ټ په D کې ګرافونه.

پوښتنې

کرښيزې توابع **XIV**

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: $A(-8|-6); C(-1|5); D=\{x\,|\,-8 \le x \le 2\}_{\mathbb{R}}$

له یوه قایمالزاویه مثلث، چې قایمه زاویه یې په B پرته ده، ټکی A او C ورکړ شوي دي. د مثلث ضلع (اړخ)[BC] د اوردینات محور (ولاړمحور) په 3کې قطع کوي.

دا وټاکی:

الف-

$[AB] = f_1 ; [BC] = f_2 ; [AC] = f_3$ د مثلث درې د ضلعو توابع.

ب- د B ټکي کواودینات یا وضعیه قیمت کې د ټکي B محورونه

پ -په D کې ګراف.

دویم:

$A(-4|-1); B(2|-4); D=\{x\,|\,-4 \le x \le 5\}_{\mathbb{R}}$

د یوه مثلث ټکيA او B ورکړ شوي دي. د مثلث [BC] ضلع دy محور په 12-کې قطع کوي; ضلع [AC] د x محور په 3- کې غوڅوي.

دا وټاکی:

الف-تابع $f_1(x)$ ضلع .[AB] قطع کوي

ب - تابع $f_2(x)$ ضلع [BC] غوڅوي.

پ - تابع $f_3(x)$ ضلع [AC]

ت - د C ټکي وضعیه قیمتونه

ټ - د D ټکي وضعیه قیمتونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: توابع $y = f(x) = 3x - 4$ او $g(x) = ax + 3$ ورکړ شوي.

د دواړو توابعو گرافونه په ټکي $S(3 \mid 5)$ کې غوڅوي.

د $h(x)$ تابع مساوات داسې وکاږئ، چې گراف په ټکي S عمود څغلي. په یوه وضیه قیمتسیستم کې دریواړه گرافونه رسم کړئ.

څلورم:

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}\,;\; f_2(x) = -4x - 2\,;\; D = \{x \mid -10 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$$

د $f_1(x)$ تابع سره کرښه د دویمې کرښې د $f_2(x)$ تابع سره قطعه کوي.

دا وټاکئ:

الف- د S قاطع ټکی د x_s او y_s کواودینات سره.

ب - د دواړو کرښو د قاطع ټکي د x محور سره.

پ - د دواړو کرښو قاطع ټکي د x محو سره.

ت - د دواړو توابعو گراف په D کې.

پنځم:

د $g(x)$ تابع ، چې په $f(x)$ عمود ده پیدا کړئ. د $g(x)$ گراف د y محور په $P_y(0 \mid 3)$ ټکي قطع کوي. دواړه کرښې په یوه وضعیه قیمت سیستم(پروت ولاړ سیستم) کې رسم کړئ.

الف - $f(x) = -2x + 2$ ب - $f(x) = 3x - 6$

پ - $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ ت - $f(x) = \frac{3}{4}x - 3$

شپږم: د دواړو کرښو غوڅټکی (نقاط تقاطع) و ټاکئ او گراف یې وکاږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - $f_1(x)=\frac{1}{4}x+2\frac{1}{4}\,;\,f_2(x)=-4x-2\,;\,D=\{x\mid -10\le x\le 1\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f_1(x)=-2x+2\,;\,f_2(x)=3x-6\,;\,D=\{x\mid -2\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f_1(x)=-\frac{2}{3}x+4\,;\,f_2(x)=\frac{3}{2}x-2\frac{1}{2}\,;\,D=\{x\mid -1\le x\le 7\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f_1(x)=-\frac{3}{8}x+1\,;\,f_2(x)=\frac{5}{6}x+5\frac{5}{6}\,;\,D=\{x\mid -8\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$

n -مه درجه ټول مات- یا راشنل توابع

n -مه درجه ټول راشن لفنکشن

يو تابع $f(x)$د

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

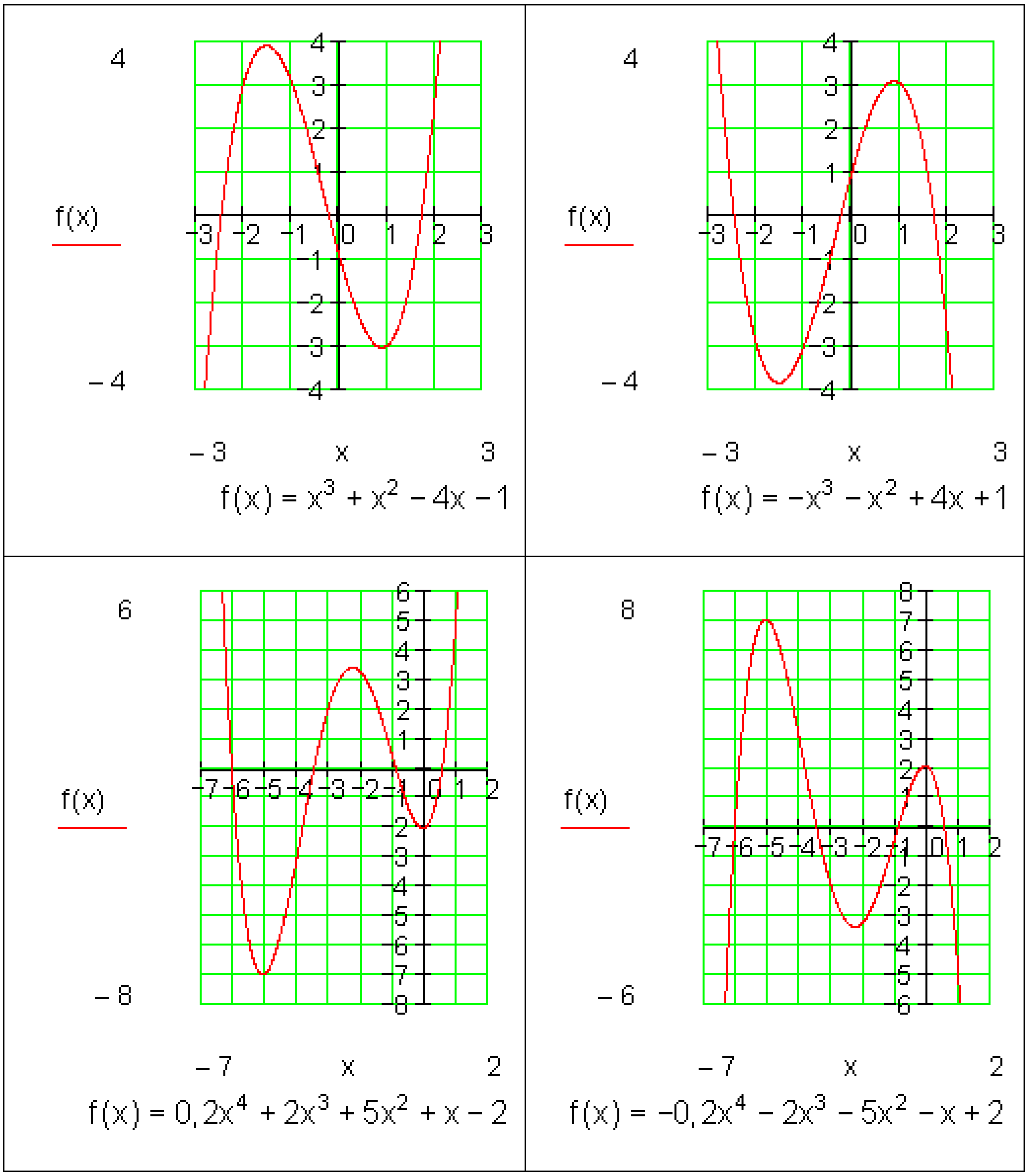
سره n -مه درجه ټول راشنل تابع بلل کيږي.

عددونه $a_n\,;\,a_{n-1}\,;\,a_{n-2}\,;\ldots a_2\,;\,a_1\,;\,a_0$ ضريبونه بلل کيږي.

ټول راشنل یا هوښیار توابع د توان توابعو يوځای ایښوولو له لارې لاس ته راځي.

بيلګې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ګراف تلنه

جمله:
د ټول راشنل تابع ګراف تلنه د خورا جګ توان زیاته وونې (د جمعي غړي) سره تاکل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

	n جوړه	n ناجوړه(طاق)
$a_n>0$	تلنه له II و I ته.	تلنه له III و I ته.
$a_n<0$	تلنه له III و IV ته.	تلنه له II و IV ته.

بيلګه: د الماي پينتو: ناجوړه(طاق) جوړه (جفت) ناجوړه

$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 7 \qquad n = 3\ (\text{ungerade}) \wedge a_n = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - I}}$

$f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 7 \qquad n = 4\ (\text{gerade}) \wedge a_n = -2 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - IV}}$

$f(x) = -5x^5 + 2x^4 + 9 \qquad n = 5\ (\text{ungerade}) \wedge a_n = -5 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{II - IV}}$

سيومتري

ګومان مو نږدې دی، هغه توابع، چې فقط د جوړه جګعددونو توانونو څخه يوځای شوي وي، محور سيومتريک دي او توابع چې فقط د ناجوړه(طاقو) جګعددونو توانونو څخه يوځای شوي وي، ټکی سيومتريک دي.

جمله

د يوه ټولراشنل تابع ګراف تيم هلته محورسيومتريک دی، که تابع مساوات فقط جوړه جګعددونه ولري.

د يوه ټولراشنل تابع ګراف ټيک هلته ټکيسيومتريک دی، که تابع مساوات فقط ناجوړه (طاق) جګعددونه ولري.

بيلګه:

$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$

$f(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x)^2 + 1 = 2x^4 + 3x^2 + 1 = f(x) \Rightarrow$

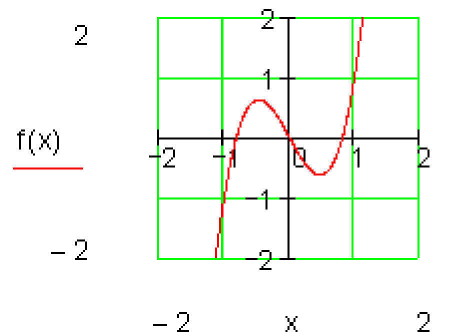
(c) ketabton.com: The Digital Library

محورسیومتریک

$$f(x) = 3x^3 - 2x$$

$$f(-x) = 3(-x)^3 - 2(-x) = -3x^3 + 2x = -(3x^3 - 2x) = -f(x) \Rightarrow$$

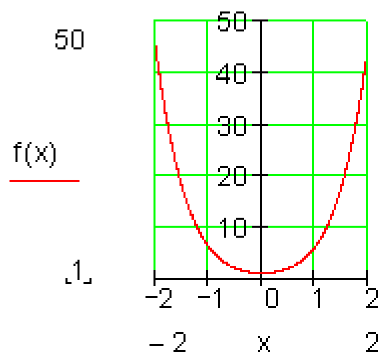
تکی سیومتریک



$$f(x) = 3x^3 - 2x$$

سرچیني ته سیومتریک دی

(تکی سیومتري)



$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$$

yمحور ته سیومتریک دی

(محورسیومتریک)

تمرینونه:

د ټول هوښیارو توابعو خویونه.

د لاندې تاوبعو په سیمتری، ټلنه او د صفرځایونو تعداد یا ګنون باندې ویناوې وکړی.

لومړی - $f(x) = 2x^2 - 1$ دویم - $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ریم - $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 + 2$ ځلورم - $f(x) = -x^5 - x^3 + x$

پنځم - $f(x) = x^6 - x^4 + 1$ شپږم - $f(x) = -\frac{1}{2}x^5 + x^2 - 2x$

اوم - $f(x) = \frac{1}{10}x^7 + \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x$ اتم - $f(x) = \frac{1}{100}x^{10} - \frac{1}{50}x^6 + \frac{1}{10}x^2$

نهم - $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{5}x - 1$ لسم - $f(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{1}{2}x$

په یوه خوښه ټکي ته سیومتریک

که د یوه ټکي سیومستري تابع ګراف په خوښه راکښل شي، نو سیومتري سرچینې ته ځي، چې موږ یې ټکی سیومتري بولو له منځه ځي. نسبت و موخېټکی ته دا ساتلې پاتې کیږي.

بیلګه:

د $f(x)=0,5x^3-1,5x$ تابع ګراف ټکی سیومتریک دی، یعنې سرچینې ته سیومتریک.

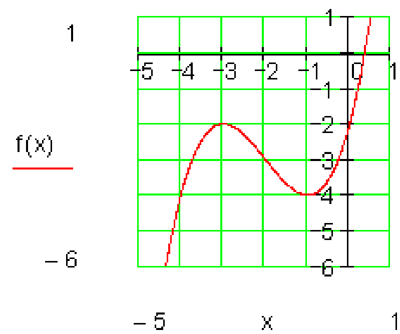
دا ګراف دې په ۲ واحدونو یا یوونونو کیڼ لور ته او په ۳ یوونونو یا واحدونو کښته لور ته راکښل شي.

د راکښلشوي ګراف تابع مساوات دي:

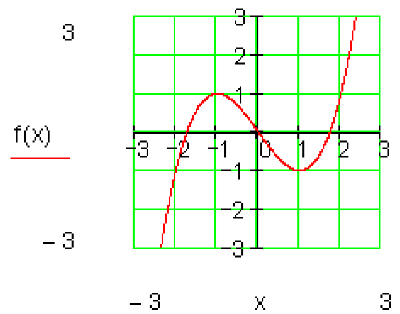
$$g(x) = 0,5(x+2)^3 - 1,5(x+2) - 3 = 0,5x^3 + 3x^2 + 4,5x - 2$$

$g(x)$ و ټکی $P_0(-2|-3)$ ته سیومتریک دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x) = 0,5x^3 + 3x^2 + 4,5x - 2$$



$$f(x) = 0,5x^3 - 1,5x$$

کواوردینانسیستم د ګراف په بڼه کوم رول نه لوبوي. تنها تابع مساواتوتغیر خورلی.

د حالت بیلګه: باید وازمایل شي، چې ایا د دریمې درجې د یوه ټول هوښیار تابع ګراف یوه ټاکلي ټکی ته ټکی سیومتریک دی.

ترمخ راوړنه.

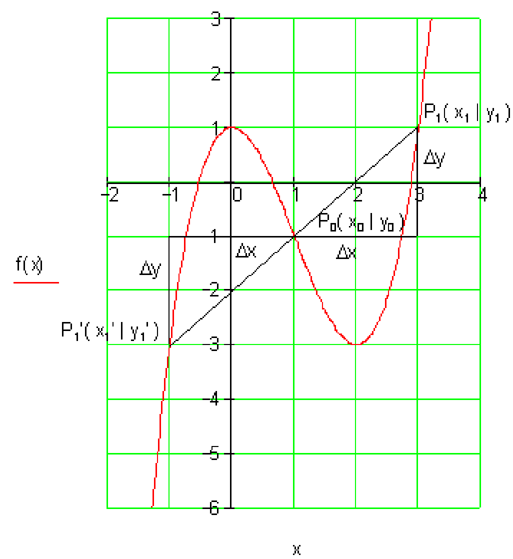
چمتووالی:

د ټکو کواوردینات لپاره باور لري:

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y$$
$$x_1' = x_0' - \Delta x$$
$$y_1' = y_0' - \Delta y$$
$$\Delta x = x_1 - x_0$$
$$\Delta y = y_1 - y_0$$

د هنداره-یا منعکس شوي ټکو کواوردیناتونه:

$$x_1' = x_0 - (x_1 - x_0) = \underline{\underline{2x_0 - x_1}}$$
$$y_1' = y_0 - (y_1 - y_0) = \underline{\underline{2y_0 - y_1}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

	د دې قاعدې یا لار سره تل کېدی شي په P_0 و P_1 ته یوه هنداورنه یا انعکاسونه کې اړونده هنداورنه P_1' وټاکل شي.

بیلګه:

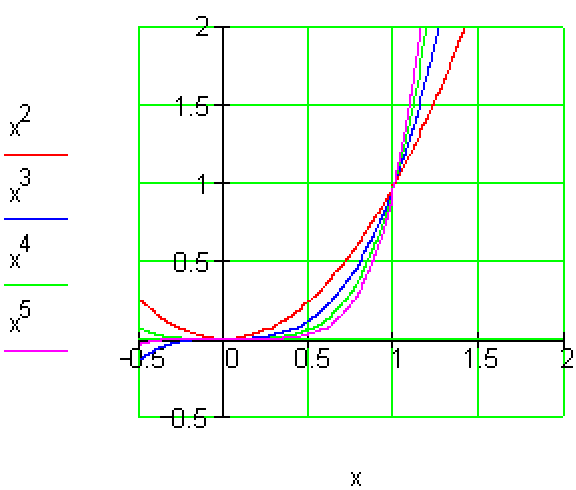
که هنداورنه په ګراف نه وي پرته ، نو ګراف و P_0 ته ټکی سیومتریک نه دی.

پوښتنې

ټول مات- یا راشنل توابع I

د توانتوابعو خویونه

لومړی –

	دا ترخنګ په 1 . څلورمه کې ګراف تر څیرنې لاندې ونیسی د x ارزښتونو لپاره د 0 او 1 ترمنځ دجګو درجو یو د توان تابع ګراف پروت دی د یوه توان تابع د ګراف لاندې یا کښته د ټیټې درجې. د $x > 1$ لپاره دا ټیک برعکس کېدونکې دي. د دې حالت لپاره لایل راوړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم – د دريمې درجې توان تابع گراف دې په دوه واحده کينې لور ته او ترلی په درې واحده پورته لور ته و کښل شي.

د دې راکښل شوې تابع مساوات لپاره دې د تابع مساوات ورکړ شي.

دريم –

د څلورمې درجې توان تابع گراف دې په درې واحده ښۍ لور ته او پسې ترلی دې په دوه ضريبه وغزول شي.

الف – د راکشل شوي گراف لپاره تابع مساوات ورکړئ

ب – وښايئ، چې گراف نه محور – او نه ټکی سيومتريک دی.

څلورم –

په کوم توان تابع $f(x) = x^n$ کې ټکی په گراف اړه لري؟

د دې توان توابعو مساوات ورکړئ.

الف - $P(-3 \mid -27)$ ب - $P(-2 \mid 16)$ پ - $P(0{,}5 \mid 0{,}25)$ ت - $P\left(\frac{1}{3} \middle| \frac{1}{27}\right)$

ټ - $P(0{,}1 \mid 0{,}0001)$ ث - $P(-1 \mid 1)$ ج - $P(-2 \mid 8)$ چ - $P\left(\frac{3}{4} \middle| \frac{81}{256}\right)$

پنځم –

د لاندې توان توابعو سيومتري او د گراف تلنه وټاکی او د هر يوه ارزښتدېرۍ(ارزشتست) او درجه ورکړې.

الف - $f(x) = 4x^3$ ب - $f(x) = -160x^2$ پ - $f(x) = -1500x$

ت - $f(x) = \sqrt{2} \cdot x^6$ ټ- $f(x) = 5$ ث - $f(x) = -25x^5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم –

لاندې تابع مساوات د پولینوم په بڼه انځور کړی.

هر ځل یې درجه ورکړی.

الف - $f(x)=(x-2)^2-4x^3$ ب- $f(x)=4(x+5)^3+(x-2)(x+2)$

پ- $f(x)=2x^3-(x-1)^2$ ت - $f(x)=(x-4)(x+1)^2$

ټ - $f(x)=(x^2-4)(x^3-x^2+4)$ ث - $f(x)=\frac{x-5}{8}(x-2)+\frac{3}{4}x^2$

اوم -

دلیل راوړی:

د یوه ناجوړه(طاق) درجې ټولراشنل تابع ګراف د x محور لږ ترلږه په یوه ځل غوڅوي.

دا هلته هم باور لري که درجه حوړه یا جفتوي؟

پوښتنې

ټول راشنل توابع II

سیومتری او تلنه

لومړی – و څېړی، چې ایا f(x) یو ټولراشنل تابع دی. په ورکړشوي حالت کې د تابع ګراف، درجه او د ضریبونو $a_0; a_1; a_2; \ldots an$ ارزښتونه ورکړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - $f(x)=2$ ب - $f(x)=4x$ پ - $f(x)=2^{x}$ ت - $f(x)=\frac{x^{3}-4x}{8}$

ټ - $f(x)=\sqrt{3}x^{4}$ ث - $f(x)=\frac{1}{x}$ ج - $f(x)=\sqrt{x}$ چ - $f(x)=\left(x-\sqrt{3}\right)^{2}$

ح - $f(x)=\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$ خ - $f(x)=16x^{3}-2x^{2}+5x^{2}-4$

دویم – د لاندې ټولراشنل توابعو څخه کوم یې محور سیومتریک او کوم یې ټکی سیومتریک دي؟

الف - $f(x)=x^{4}-6x^{2}+5$ ب - $f(x)=x^{3}+3x+1$ پ - $f(x)=(x-2)(x+2)$

ت - $f(x)=x^{6}-6x^{2}+\sqrt{3}$ ټ - $f(x)=(x-2)^{3}(x-1)$ ث - $f(x)=x^{4}-\sqrt{5}x^{2}$

ج - $f(x)=\left(2x^{4}+2x^{2}+5\right)x$ چ - $f(x)=\left(x^{2}-2x+3\right)(x+1)(x-1)$

ح - $f(x)=1-3x^{2}+x^{6}$

دریم – د c متحوله داسې وټاکی، چې د تابع ګراف ټکی سیومتریک او همداسې محورسیومتریک شي.

الف - $f(x)=x^{3}+4x+c$ ب - $f(x)=(x-c)(x+4)$ پ - $f(x)=x^{5}+x^{c}$

ت - $f(x)=x^{3}\left(x^{2}-cx\right)$ ټ - $f(x)=c+x^{3}$ ث - $f(x)=4x^{3}+x^{2}+cx^{2}+5x$

څلورم : د لاندې توابعو د ګراف تلنه معلومه کړی.

الف - $f(x)=2x^{5}-6x^{3}$ ب - $f(x)=-4x^{4}+3$

پ - $f(x)=2x-5$ ت - $f(x)=-2x^{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ - $f(x)=4x^4-3x^2+4x-5$ ث - $f(x)=-6x+3$

ج - $f(x)=4x^4+3x^3-6x^5$ چ - $f(x)=-2x^5+6x^3$

پنځم - د لاندې توابعو د ګراف تلنه او سیومتري ورکړی.

الف - $f(x)=\sqrt{3}x^2-\sqrt{5}x^4-2$ ب - $f(x)=x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(8-\frac{1}{2}x\right)$

پ - $f(x)=5x^6-4x^4+5$ ت - $f(x)=x^5+x^3-2x$

ټ - $f(x)=5$ ث - $f(x)=\left(x^2-25\right)\left(x^2+6x+9\right)$

ج - $f(x)=x^5+4x^4+4x^3$ چ - $f(x)=\left(4x^2-4\right)\left(x^3+8x^2+16x\right)\left(x^3+27\right)$

ح - $f(x)=-3$ خ - $f(x)=-x^5+x^3-2$

شپږم : د لاندې تابعو صفرځیونه وشمېرئ:

الف - $f(x)=(x-4)(x-2)(x+1)$ ب - $f(x)=(x-4)(-x+2)$

پ - $f(x)=x(x+5)^2$ ت - $f(x)=3(x-4)^3(x+2)$

ټ - $f(x)=(2x-4)(x+3)x^3$ ث - $f(x)=x^3-2x^2$

د ټولراشنل توابعو محور غوڅېټکي (د محور د تقاطع نقطی)

د ټولراسنل توابعو محور غوڅټکي (د محور د تقاطع نقطی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د y محور سره غوڅټکی $P_y(0|y_s)$: $P_y(0|y_s)$ شرط: $y_s = f(0)$

بیلګه : د یا په معنا

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 3 \Rightarrow f(0) = 3 \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 - 3 = 0 - 0 - 3 = -3$$
$$\Rightarrow P_y(0|-3) \text{ oder } P_y(0|f(0))$$

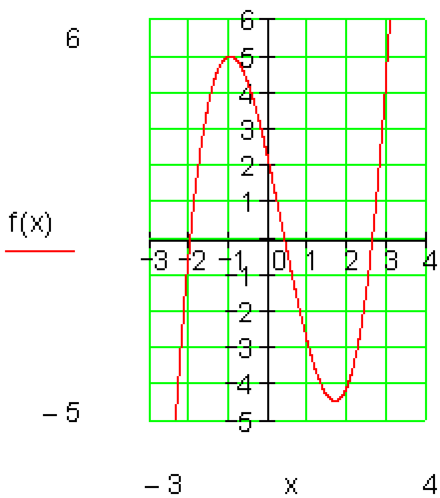
د P_y د y کواوردینات تل د ضریبونو a_0 سره کتمټ ده.

دا تل د تابع مساوات ځخه لوستل کیدی شي.

د x-محور سره غوڅټکی $P_y(x_s|0)$ صفرځای : شرط: $f(x) = 0$

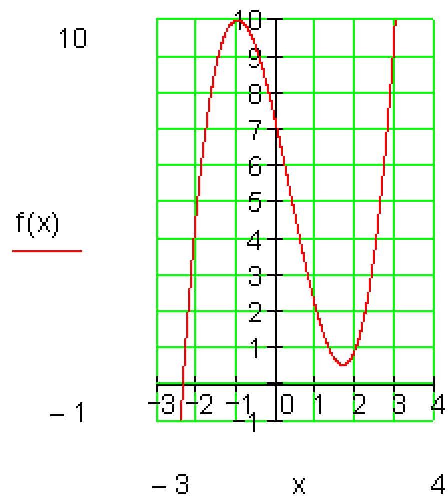
د مربع تابع (د دویمي درجي ټولراشنلتابع) ځخه بوهیږو، چي دا دوه ، یو ، یا هیڅ صفرځایونه لرودی شي. دا د جګ درجو ټول راشنلتابع سره څنګه دی؟

بیلګه:



$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$

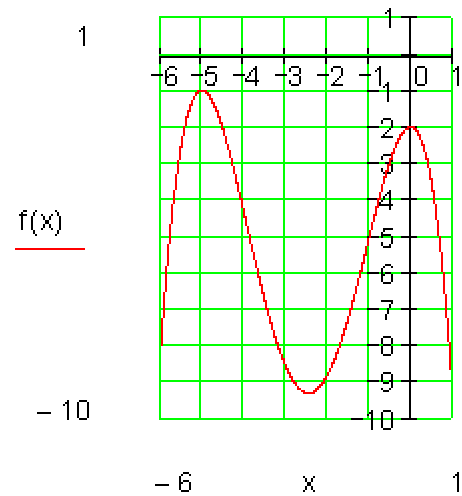
دري صفرځایونه لري



$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 7$

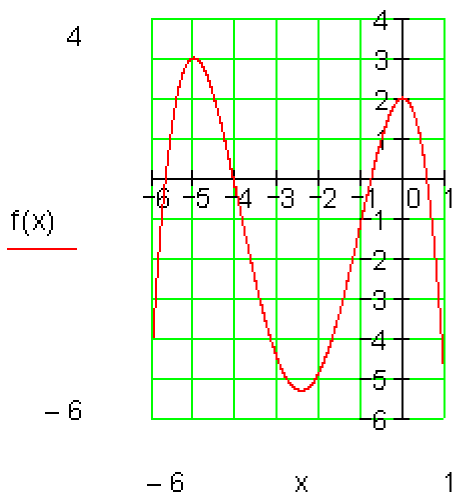
صفرځای نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 0,2x - 2$$

د صفرځای نه شتون



$$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 0,2x + 2$$

څلور صفرځایونه لري.

جمله:

یو د n -مي درجي تولراشنل تابع زیات له زیاته n صفرځایونه لري.

کهn جوړه وي، نو دا لږترلږه یو صفرځای لري.

د صفرځایونو شمیرني لار(تګلار)

د فکتوري کونو یا صریبونو تګلار:

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x = 0$$

فاکتور x له نوکانو راوتلی شي.

$$\Leftrightarrow x\left(2x^2 - 2x - 4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

او په نوکانو کې افاده یا وییله صفر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

مربع مساوات دی.

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \,|\, : 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$p = -1;\ q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

صفرځايونه :

$$x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_3 = -1$$

د x محور سره غوڅټکی

$$P_{x1}(0|0);\ P_{x2}(2|0);\ P_{x3}(-1|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x) = \underbrace{2x(x+1)(x-2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x$$

(پورته) د کرښيز ضريبونو ضرب

د بدلون قانون substitution:

يادونه: په دې معنا چې د يوې اووښتونې يا متحولې لپاره بله متحوله ځا په ځای کوو.

$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ بې مربعيز(بي ځلوريز) مساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون: $x^2=z$

$$\Rightarrow f(z) = z^2 - 13z + 36 = 0 \quad p = -13 \quad q = 36$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36 = \frac{169}{4} - \frac{144}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} z_1 = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9 \\ z_2 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = 4 \end{array} \right.$$

بدلون په ځت- یا بیرته گرځوو:

$$x^2 = z_1 = 9 \,|\, \sqrt{\ } \qquad x^2 = z_2 = 4 \,|\, \sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow |x| = \sqrt{9} \qquad |x| = \sqrt{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = -3 \qquad x_3 = 2 \quad x_4 = -2$$

د x محور سره غوخټکی

$$P_{x1}(3|0); P_{x2}(-3|0); P_{x3}(2|0); P_{x4}(-2|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x) = \underbrace{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

د کرښيز ضريبونو ضرب

پوښتنې

محور غوخټکي او د ټولراشنل یا ماتتوابعو گرافونهII

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د درېمې درجې یو تولهوښیار یا –راشنل تابع سرچینې سره سیومتریک ده، که
الف- له ټکو $P_1(1|2)$ او $P_2(3|-2)$ څخه تیره شي.
ب- که کرښهg د g(x)=3x سره پارابول په P(0|0) کې لمس کړي.

دویم: تابع f(x) د پیژندورشو یا تعریف ساحې D = IR سره ورکړ شوې ده. تابعf(x) په سیومتري وڅېړی، صفرځایونه وشمیری او ګراف وکاږی.

الف – $f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2$ ب – $f(x)=x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x$

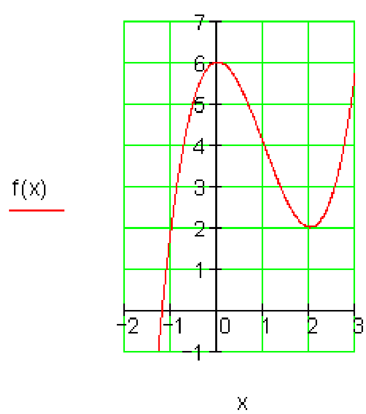
پ - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+5$ ت - $f(x)=\frac{1}{48}x^3-x$

ټ - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x$ ث - $f(x)=\frac{1}{5}x(3-x)(x+1)$

ج - $f(x)=\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{4}x-1\right)^2$ چ = $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{4}x^2-6x+\frac{9}{2}$

درېم: تابع $f(x)=x^3-3x^2+6\,;\,D=\mathbb{R}$ ورکړشوې ده.

الف - وښایی:
د f(x) صفرځای د (-1 ; -2) ترمنځ پروت دی
مدلل کړی، چېf(x) ټیک یو صفرځای لري، دا
ګراف باید څنګه راکښل
شي، چې له هغې سره دا ټیک دوه صفرځایونه
ولري؟
ب- کرښه x = u د f(x) ګراف په ټکي Q او د
x محور په P کې غوڅوي.
د لاندې درېګوډي یا مثلث 0PQ سطحه د2 = u
لپاره وښایی.
د مثلث د (خوندي) سطحې ترم د u په واکوالي
کې د 0 < u لپاره ورکړی.
g(x) څومره صفرځایونه د g(x)=3.f(x) سره
لري؟
دلایل یې راوړی.



خلورم: تابع $f(x)=5x^3-10,8x+4$ ورکړ شوې ده. وښای: x=0,4 یو صفرځای دی. پسې نور صفرځایونه وشمیری.

$$f(x)=5x^3-10,8x+4\,;\,D=\mathbb{R}$$

پنځم: د اووښتونې یا متحولې c په واکوالي کې د صفرځایونو تعداد وټاکی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2cx\,;\; D = \mathbb{R}$$

$$x^2 + 2x + 2c = 0 \Rightarrow p = 2\,;\; q = 2c \Rightarrow D = 1 - 2c$$
$$\text{für } D > 0 \Rightarrow 1 - 2c > 0 \Leftrightarrow c < 0{,}5$$
$$\text{für } D = 0 \Rightarrow 1 - 2c = 0 \Leftrightarrow c = 0{,}5 \Rightarrow x_{2/3} = -1$$
$$\text{für } D < 0 \Rightarrow 1 - 2c < 0 \Leftrightarrow c > 0{,}5$$
$$\text{für } c = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0\,;\; x_3 = -2$$

اړیکې:

د $c > 0{,}5$ لپاره $f(x)$ تیک یو صفرځای لري: $P_x(\,0 \mid 0\,)$

د $c = 0{,}5$ یا د $c = 0$ لباره $f(x)$ تیک دوه صفرځایونه لري.

د $c < 0{,}5$ او c د صفر سره نامساوي لپاره $f(x)$ تیک درې صفرځایونه لري.

پوښتنې

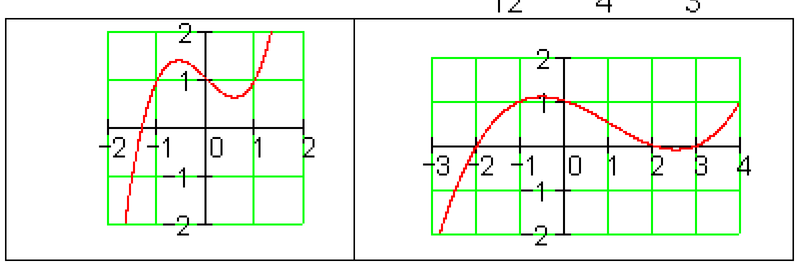
د ټول راشنل توابعو محور غوښتکي او ګرافونه III

تابع په یوه ګراف تنظیمیږي.

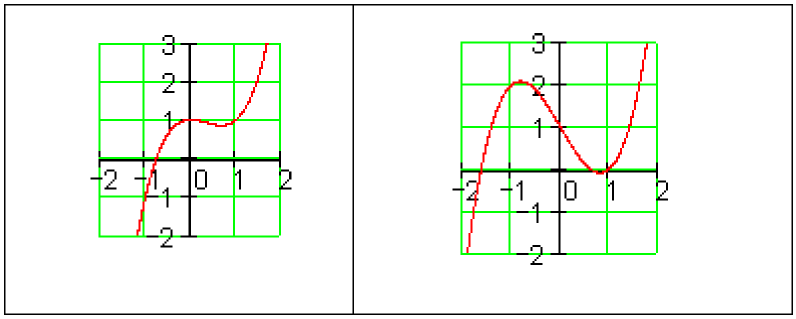
لومړی: هر د یوه تابع ترم سره تنظیم کړی او خپله پرېکړه په دلیل کلکه کړی.

$$f_1(x) = x^3 - x + 1;\; f_2(x) = x^3 - 2x + 1$$

$$f_3(x) = x^3 - x^2 + 1;\; f_4(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$$



(c) ketabton.com: The Digital Library



دویم: هر هغه څوک چې د لایسنس اخستلو لپاره ځان چمتو کوي، باید وپوهیږي، چې د یوه بریک وهونکي موټر تمکیدني واټن په یوه وچ پاخه سرک)چې طبعاً باید هوار وي) د عکسالعمل لار او د بریک لار څخه یوځای جوړه ده. د لاندې د موټې قانون یا لار(د دري ګوتو) څخه کیدی شي د چټکتیا v په km/h د عکسالعمل لار r او د بریک لار b په متر وشمیرل شي.

د بریک لار: $b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ همداسي $b = \frac{\left(\frac{v}{10}\right)^2}{2}$ ، د عکس العمل لار: $r = \frac{v}{10} \cdot 3$

د المان د3.3.04 راپن اخبار د اول له جولای1. Juli 2004 په وچ سره د تمځای لار په بل بریکلار شمیرل کیږي.(په افغانستن کې به داځنګه وي ؟نه پوهیږم)

الف- تابع مساوات $s = f(v)$ وټاکی، د کوم سره چې د هرې تلنې د چټکتیا یا سرعت تملار شمیرل کیدی شي.

ب – د لاندې تلل شوی چټکتیا $v = 0, 10, 20, 30, \ldots 50$ km/h لپاره په یوه ارزښت جدول کې د هغه هر یوه تمځای s سره یوځای کړی

پ – له دې سره د (60 ... 100 km/h) لپاره دs یو څونور ارزښتونه وشمیرئ او د دې تابع ګراف وکاږئ.

ت – د نوي بریک نیولو قانون(المانی) سره دا تراوسه شمیرل شوي ارزښتونه وشمیرئ او دا په همغه کواودینات سیستم کې وکاږئ او تولہ نتیجه په شننه یا کومنتار سره روښانه کړئ.

دریم: داتابعورکړ شوئ: $f(x) = x^3 - 0,5x^2 - 3x + 1,5 ; D = \mathbb{R}$

الف- وښایئ: $f(x) = 0,5(2x-1)(x^2-3)$

ب –ګراف د شوونتیا تر پولې ټیک وکاږئ.

پ – د x د کوم ارزښتونو لپاره$f(x)>0$ باور لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

شننيزه ځمككچپوهنه يا تحليلي هندسه:

تحليلی هندسه(وكتورهندسه هم) د هندسې يوه برخه ده، چې د هندسې پرابلمونو د حل د پاره د الجبري مرستندوی موادو (په ټوليزه توګه له كربنيز الجبر) څخه جمتو كوي. دا په ډېرو حالتونو كي ممكن كوي، چې ځمككچيزي پوښتنكوني سوچه شميرنيز حل كړی شو، بې له دي چې ليدوني يې مرستې ته راوبولي يعني چې شكل څنګه برېښي يا دی.

۱۶ - د سطحې شننيزه (تحليلي) هندسه

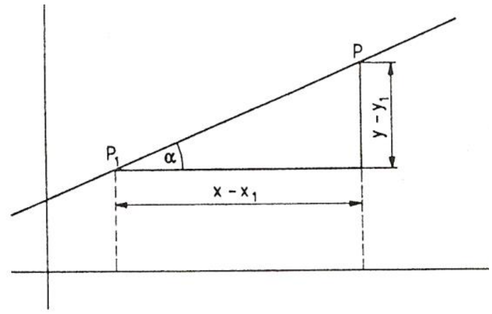
په دې برخه کی يوڅود تحليلي (شننيزې يا سپړنيزې) ځمككچپوهنې يا هندسي ټاكلي پرابلمونه څېړل كيږي.د تحليلي هندسي بنسټيزه تګلار به څرګنده (وښول) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شكلونو او ددې په شننيزې يا تحليلي څرګندونويی د هندسي خويونو جوړښت بنايي.

۱۶ . ۱ كربښه

د هندسي ټاكندو ټوټو له لارې مختلف امكانات شته دی، چې يوه كربښه يواځنی كره تعين كړاي شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د كربښبرابرونونو يا ـ مساواتو مختلفی بڼی شته دی. يوه كربښه د يوه ټكي او د هغه د لور(سمت) له لارې ټاكل كيدي شي . (ټكی او د ټكی ميلان معلوم دی) .

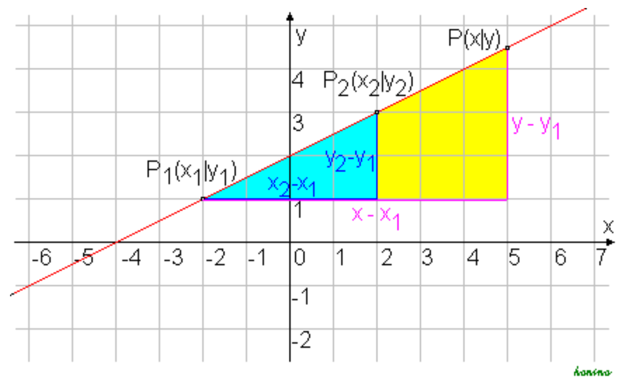
دلته دې($P1(x1 , y1$دا ټكي وي. $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ دې د جګيدو كونج،وي، چې د كربښی لور ټاكي (خ ۱۶ . ۱) او($P(x,y$ په كربښه يو اووښتونی (واريابل) ټكی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



نو د کرښی د ميلان $\tan\alpha = m$ لپاره باور لري: $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

(پورته ځيره دې وکتل شي(لاددې ځيره هم په همدې موخه کښل شوې ده))



له دې څخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1); ....(16,1)$$

پورته د کرښی ټکی لوربرابرون

که د y په محور P1وټاکل شي د کواورديناتو x1= 0, y1 = b سره، نو له (۱۶ . ۱)سملاسي په لاس راځي: y - b = m (x - 0) په همدې ډول(⇔)

$$y = mx + b \qquad (16 . 2)$$

دا پورته برابرون د کرښمساواتونورمال فورم (بڼه) بلل کيږي

يوه کرښه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دوه ټکي دي(P1(x1 , y1 او(P2 (x2 , y2 وي، د x1|=x2 سره ، (ځيره ش ۱۶ . ۲) د ځګيدونکی یا تنجنت $\tan\alpha = m$ لپاره داسی دي:

m = (y - y1) /(x -x1)

او

m = (y2-y1)/(x1-x2) = (y2-y1)/(x2-x1)

له کومو چی لاس ته راځي

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x - x_1};..................(16,3)$$

پورته د کرښی دوه ټکیزبرابرون

ځیره ده

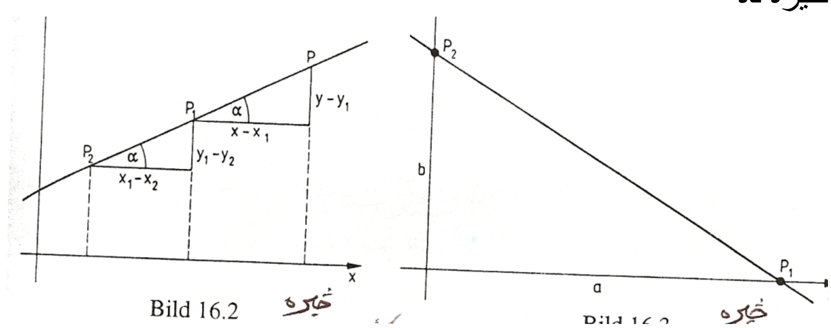


Bild 16.2 ځیره

Bild 16.3 ځیره

که د x - محور باندې د P1 ټکی ، د کواوردینات x1 = a |= 0 , y1 = 0 سره وټاکو او ټکیP2 دy- محور باندې د کواوردینات x1= 0, y2 = b|= 0 سره وټاکو، نو له (۱۶ . ۳) لاس ته راځي:

(y - 0) / (x - a) = (b - 0)/ (0 - a)

او له دې دا لاندې لاس ته راځي:

$$x/a+y/b = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (16,4)$$

پورته د کرښو د غوځي برابرون

ځلور پورتنی کرښمساوات ټول په x او y کی لاینیز دي.د مساوات عمومي فورم)یا ټولیزه بڼه (داسی دی:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (16 . 5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرښبرابرونونو ټولیزه بڼه(عمومي فورم)
دا فورم په ځانګړې توګه دا برابرون هم خوندي لري یا په بر کی نیسي
y = y0 (A = 0 ,B|=0)
او(x=x0(A|=0,B=0 چی د x - محور اوپه همدې ډول د y - محور ته غبرګي کرښي دي، په داسی حال کی چی تراوسه دومه لا نه ده څیړل شوې

بیلګه ۱۶ . ۱:

د کرښی برابرون یا لاینیز برابرون، چی له(P(-2 , 3 ټکي تیریږي او د جګوالي کونج $\alpha = 30°$ یی د $m = \tan\alpha \frac{1}{3}\sqrt{3}$ له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسی لیکل کیږي $y - 3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x+2)$

او نورمال فورم یي په لاندې ډول دی

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + (3 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$$

بیلګه ۱۶ . ۲ :

د لاینیزبرابرون یا دکرښوبرابرون په ټکو(P1 (3/2 ,-2 او(P2(1 , -4کی د (۱۶ . ۳)سره سم په لاندې ډول دي:

$$\frac{y+2}{x-\frac{3}{2}} = \frac{-y+2}{1-\frac{3}{2}}$$

له دې لاس ته راځي: $y + 2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}(x - \frac{3}{2})$

نو نورمال فورم y=4x-8 لرو(**اته** ناسم، په ځای یې شپږ دي)

بیلګه ۱۶ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښه د y =-(3/2)x+1 برابرون سره د y - محور په(P1(0,1 ټکي کی غوڅوي او
جګوالی یی 2/3 - دی ، دا په دې مانا چی د x - ارزښت تغیریدل په یو دy - ارزښت
په 2/3 - تغیروي، په دې ډول دوم د کرښي ټکی لاس ته راځي. د بیلګی په توګه
p2 (0+1 , 1-(3/ 2)=p2(1,-1/2)

(ځیره ۱۶ . ۴ لاندې کښل شوې)

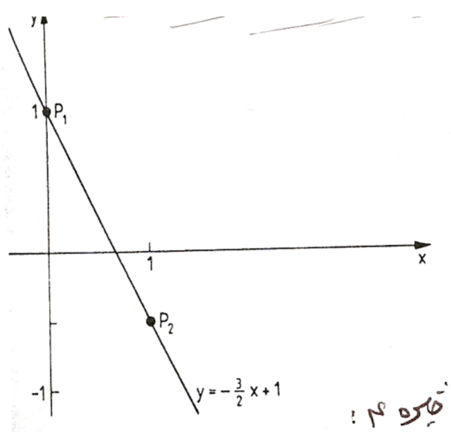
بیلګه ۱۶ . ۴ :

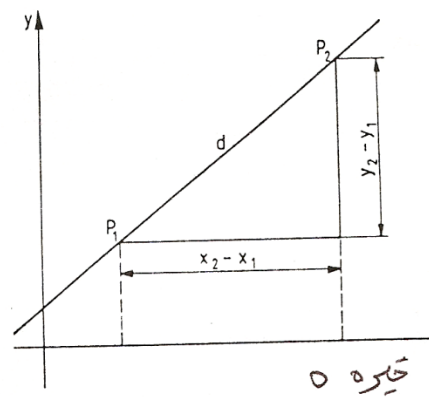
د کرښی د برابرونونو عمومي فورم x-2y-6 = 0 څخه دغوڅیدو فورم لاس ته راځي
x / 6 + y / 3 = 1
کرښه دکواوردینات محورونه په دې ټکو(P1(6 , 0), P2(o,-3 کې غوڅوي۰
په یوه کرښه د دوه ټکو(P1(xx,y1),P2(x2,y2ترمنځ فاصله (که د کرښي واټن P1P2
d = وي د پیتاګوراس(فیساغورس) له جملی (ځیره . ۱۶ . ۵) داسی ده

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};\text{.........................}(16,6)$$

پورته د ټکو P1 او P2 ترمنځ واټن

ځیرې ۱۶ . ۴ او - ۵





بیلګه ۱۶ . ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د درېګوډي ABC د اړخونواوږدوالی، چی کونجتکي یی دادي(A(3,1),B(- 1,1),C(2,5، په لاندې ډول دی

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37} = 6,08$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

دوه کرښې (نه کټمټی) چی (یو د بلی سره) غبرګې نه وي ټیك یو غوڅټکی لري. دا چی دا ټکی په دواړو کواور دیناتو پروت دی ، نو د دواړو کواوردیناتو برابرون باید پوره کړي . په دې حالت کي د غوڅټکي کواوردیناتو، د دوه لاینیزو برابرونونو سره چی دوه اوښتونې یا

ناپیژندونکی (مجهولی) ولري، د یوه سیستم یواځنی کره اوبیونه ترې لاس ته راځي. په ټولیزه توګه دا باور لري: که یو برابرونسیستم چی د دوه کرښو د برابرونونو څخه جوړ وي، او یو یواځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښې یو بل په دې ټکي کی سره پرې کوي.
که ناپای ډېرې اوبیونې شته وي، نو په دې حالت کی برابرون همغه یوه کرښه ښايي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښې یوبل سره غبرګې ځغلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بیلګه ۱۶ . ۶ :

د g1 : y = 3x-2 کرښی پروتځاي (موقعیت) د لاندې کرښو
الف) g2: -2x+y = 1,
ب) g3: 3x -y=5, ,
پ) g4 : -x+(1/3)y=-2/3
سره څیړو
اوبیونه : د g1 برابرونونو څیره داسی بدلیږي : 3x-y=2
الف) د برابرونونو سیستم 3x-y=2، -2x+y=1
ټیك یوه اوبنونه لري: x1=3 , y1=7
ددې څخه څرګندیږي چی ټکی(S(3 , 7 د کرښو g1 او g2 غوڅټکی دی .
ب) د برابرونونو سیستم

$$3x - y = 2$$

$$3x - y = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبی نه لري : برابرونونه یو بل ردوي یه نه زغمي . د g1 او g2 کرښی یو د بل سره غبرګي دي

پ) د برابرونونو سیستم 3x-y=2

-x+(1/3)y=-2/3

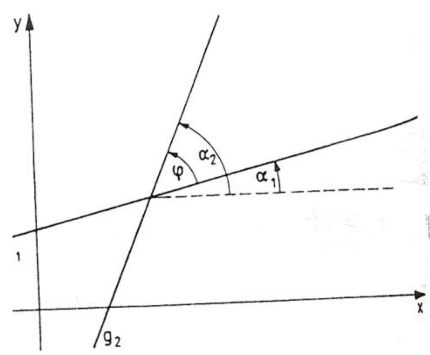
ناپای ډیر ې اوبیونې یا حلونه لري. برابرونونه یو بل سره برابر یا یو بل ته ورته دي. که په ۳ ضرب شي یو همغه پورته برابرون ترې لاس ته راځي .

g1 او g2 دوه کټ مټ برابرونونه دي ۰

که د دوه کرښو

g 1 : y = m1x + b1 g2 : y = m2x + b2

غوڅکونج ϕ ټاکو، نو د دواړو کرښو جګید کونجونو $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ کمون (کمښت یا توپیر)جوړوو (څ ۱۶ . ۶)



څېره ۱۶ . ۶

د کرښی له برابرونونو پوهیږو $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$

د زیاتون تیورم (بنسټیزه جمله) (برخه ۶ . ۵) څخه د $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$ لپاره (پر تله برخه ۴ . ۵) باوري ده

$$\tan\phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan\alpha_2 - \tan_1)/(1 + \tan\alpha_1 . \tan\alpha_2)$$

د کوم څخه چی د $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$ سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 . m_2};........................(16,7)$$

پورته د دوه کرښو غوڅکونج دیږ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې پورې اړه لري چې ایا $\phi > 0 \vee \phi < 0$ د پورته خبرې ۱۶ . ۶ کونج پڅ او که تیره دی.

بیلګه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو g1:y=x-1 او g2:y=(7/4)x+1 غوڅکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) څخه لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{\frac{7}{4}-1}{1+1.\frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15,255°$$

د g1 او g2 ترمنځ پڅکونج په دې ډول دی : $180-\phi = 164,745°$

د دوه کرښو یو بل ته ځانګړي حالتونه:

۱ – کرښې یوبل سره غبرګې ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180° \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1+m_1.m_2} = 0$$

ګورو چې د m2 - m1 = 0 لپاره باور لري، نو m2 = m1

(دلته باور لري : $m_1.m_2 = m_1^2 \neq -1$)

۲ - کرښې یو په بل (نیغې) ولاړې دي، نو لرو

$$\phi = 90° \Rightarrow \tan\phi = (m-m)/(1+m.m) = \infty$$

دا حالت د 1+m1.m2 = 0 لپاره منځ ته راځي،

یعنې د m2= -1/m1 لپاره (m1|=0,m2|= 0)

په کرښه(y=y0 (m1=0 باندې کرښه(x=x0(m2=oe نیغه ولاړه ده

د غبرګوالی لپاره شرطونه

m2 = m1 (16, 8)

د اورتوګونالیټی Orthogonalität(یو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

m2 = -1 / m1 (16 . 9)

بیلګه ۱۶ . ۸ : دکرښی g2 برابرون دې وټاکل شي چی له ټکي(P (2,-1 تیریږي، او له کرښی g1 : y = -2x +1 سره الف (غبرګه او ب(اورتوګونال (نیغه) ځغلي اوبیونه:

الف) د g2 کرښی میلان (جګوالی m2 = m1 = -2)دی. پام (۱۶ . ۱) ته دکرښي g2برابرون لپاره باور لري : (y+1=-2(x-2 همداسی y = -2x +3

ب) د g2 کرښي میلان یاجګیدنه ده m2=-1/m1=1/2 د(۱۶ . ۱) سره سم د g2 کرښي برابرون دی: y+1=(1/2)(x-2) <=> y=(1/2)x-2

بیلګه ۱۶ . ۹ :

د کرښی برابرون ټاکل کیږي چي د(P1(1/3,-1/6 ټکی تیریږي او په کرښه چی له ټکو(P2(-1,1 او(P3(-2,-1 تیریږي، ولاړه وي.

ځواب : کرښه چي له P2 ,P3 ټکو تیریږي، و (۱۶ . ۳) ته په پام لاندې برابرون لري (y-1)/(x+1)=(-1-1)/(-2+1) = 2 <=> y = 2x +3

په دې کرښی د (عمودي) ولاړې کرښی میلان یا جګوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د p_1 څخه تیریدونکی کرښي برابرون د m_2 میلان سره د(۱۶ . ۱) له مخی دي:

y+(1/6)=-(1/2)(x-173) <=> y=-(1/2)x

بیلګه ۱۶ . ۱۰ :

د g1:2x-y-1=0او g2: 3x+2y=5 کرښو د غوڅټکي S واټن له ټکي(P(6,13څومره دی او د کرښي برابرون څنګه دی چي د کواوردینات له سرچینی تیریږي او د S او P څخه تیریدونکی کربنه باندې ولاړه کربنه وي؟

ځواب : د غوڅټکي کواوردینات د لاندې برابرونونو سیستم څخه لاس ته راځي

2x-y=1

3x+2y=5

یعنی: xS=1 , yS=1

د S او P ټکو ترمنځ واټن له (۱۶ . ۶) څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = \sqrt{(1-6)+(1-13)^2} = 13$$

د (۱۶ . ۳) له مخی د کرښي برابرونونه چی له S او P تیریږي دي

$(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1) \Leftrightarrow y=(12/5)x-7/5$

(جګوالی: $m = 12 / 5$)

له S او P ټکو تیریدونکی کرښه باندې د ولاړې کرښي میلان

$m2 = -1/m = -5/12$

د (P0 (0,0 څخه تیریدونکی کرښه د m2 میلان سره د (۱۶ . ۱) له مخی لاندې برابرون لري

$y-0=-(5/12)(x-0) \Leftrightarrow y=-(5/12)x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ . ۷ تمرینونه

۱ – د هغو کرښو مساوات و ټاکی، کومې چې له P_1 ټکي تیریږي او د x–محور سره کونج α جوړوي

a) $P_1(2,-3)$, = 30º,   b) $P_1(-3,2)$ = 45º

c) $P_1(-1,-4)$, = 120º ,   d) $P_1(4,4)$, = 0º

e) $P_1(0,0)$, =150º ,   f) $P_1(1,-1)$, = 90º

۲ –د ټولو هغو کرښو مساوات وټاکی، کومې چې له ټکو P_1 او P_2 تیریږي

a) $P_1(0,0)$, $P_2(3,3)$,   b) $P_1(-3,3)$, $P_2(0,0)$,

c) $P_1(1,4)$, $P_2(-3,-4)$,   d) $P_1(1,2)$, $P_2(-1,1)$,

e) $P_1(0.1.-1)$, $P_2(-0,1,-3$,   f) $P_1(1,-1)$, $P_2(4,-2)$!

۳ – د محورونو غوڅي(لنډ : محورغوڅي) a,b د کرښې مساوات په نورمالفورم وټاکی او همداسې د غوڅټکو واټن d د محورغوڅټکو سره چې یو له بل یې لري وټاکی.

a) a = 5 , b = 2 , b) a = -1 , b =3 , c) a = 2 , b = -3 , d) a = -3 , b = -3

۴ – یو دریګوړی دا لاندې ګوډټکی لري A(-4,-1) , B(2,-2), C(1,3) . د هغو کرښو مساوات څنګه دي، په کومو چې د دریګوړیو اړخونه پراته دي او معلوم کړی چې د دریګوړي اړخونه څومره اوږده دي؟

۵ – د لاندې کرښمساواتو نورمالفورم او برخنوټوټنه یا –فورم څنګه دی؟

a) 3x -5y +15 = 0 ,   b) 4x -3y -18 = 0

c) -4x +2y -10 = 0 ,   d) -3x -4y +15 = 0 ?

۶ – د کرښې y = -(12 / 5)x +2 پروتڅای د کرښو

a) y+2,4x - 6 = 0 ,   b) 28x +10y = 0 ,   c) 8x + 5y =2,

d) 5y +12x -10 = 0 .   e) y +(12/5)x = 3 ,   f) 6x +2,5y = 5

سره وڅیړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – د لاندي کرښو د غوڅتکو کواوردیناتونه او غوڅکونج وټاکئ.

a) $2x + 3y = 7$, $3x - y = 5$,
b) $y = (1/2)x + 1$, $y = -2x + 6$,
c) $y - x = 7$, $y = 7$,
d) $x/3 - y/2 = 1$, $-x/2 + y/3 = 1$,
e) $6x - 2y + 10 = 0$, $y = 3x + 6$,
f) $y = 4x - 1$, $y = -3x + 5$!

۸ – کومه کرښه د کرښی $x - y = 4$ ، کرښی $3x + y = 8$ او برسیره پر دي له غوڅتکی P(0,5) څخه تیریږي ؟

۹ – د لاندي گوټو A(-4,-1), B(2,-2), C (1,3) سره د دریګوډي دننه کونجونه څومره لوي دی ؟ (پیلونه: دریکونجی وکاږی)

۱۰ – د ولاړپریوتي کرښي یا زوړندي مساوات له ټکی P(2,0) څخه په کرښه $y = 2x + 1$ څنګه دی؟

۱۱ – د ولاړکرښی مساوات په کرښه $y = 2x + 1$ باندي په ټکي P(-1,-2) څنګه د

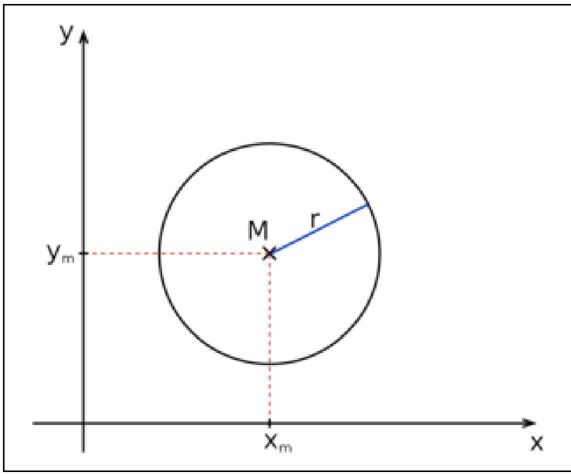
۱۲ – د کرښي $y = 2x + 1$ سره د غبرګي کرښي مساوات چي له ټکي P(-1,-3) تیریږي، څنګه دي؟

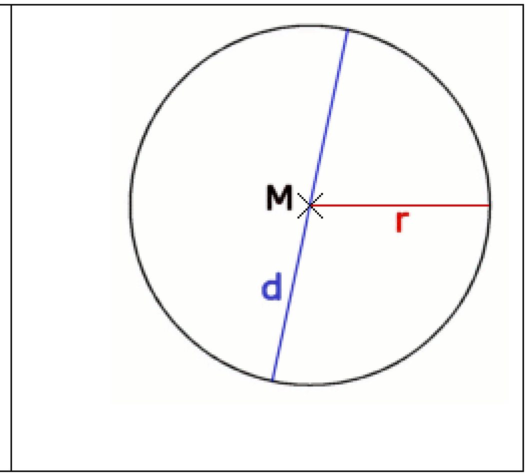
۱۶ . ۲ ګردی (داېره)

داېره(ګردی) د ټولو هغو ټکو ډیری(سټ) ده، چی د یوه کره ځای په ځاي ټکي ، داسي په نامه منځټکی څخه ، همغه واټن ولری. واټن ته یی وړانګه وایو او په rیی په نخښه کوو.
فورمال داسې ویل کیږي یا دا پیژند ورکوو، چې داېره (ګردی) k د د سطحې (هوارې) E د ټولو ټکو ډیری(سټ) ده،د کومو لپاره چې باور لري:

$$k = \left\{ X \in E \mid |\overline{MX}| = r \right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





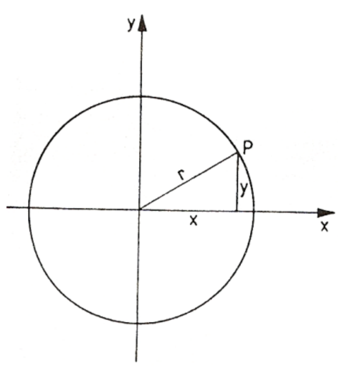


Bild 16.7 ځېره،

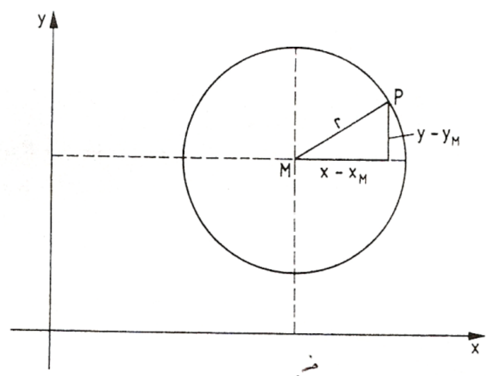


Bild 16.8 ځېره

په شننيزه هندسه کې کيدی شي، چې کردی د منځټکي $M(x_m,y_m)$ او وړانګې r سره (په هواره کې) د لاندې برابرون له مخې انځور شي.

$$(x-x_m)^2+(y-y_m)^2=r^2$$

پورته د کردی ټولیز برابرون

دا برابرون د پېژند او پیتاګوراس له جملې سملاسي ورکوي
د یوې کردی ځانګړي حالت او د کواوردیناتسیستم سره، چې منځټکی یې د کواوردینات
په سرچینه پروت وي لاس ته راځي

$$x^2+y^2=r^2$$

که د کردی منځ ټکی د کواوردیناتسیستم (ځیره ۱۶ . ۷) په سرچینه پروت وي، نو د
(پیوتاګوراس د جملې له مخې (د کردي په خوبنه ټکي (P(x,y لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16 . 10)$$

د گردئ منځټکي برابرون چی د گردي منځټکی(M(0,0او وړانګه r ده.

که د گردي منځټکی M کواوردینات (xM,yM) ولري (ځیره ۱۶ . ۸) نو د گردئ د خوښی ټکي P(x) لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د گردي د منځټکي برابرون وي د منځټکي $M(x_M,y_M)$ او وړانګي r سره

که په (۱۶ . ۱۱) کې د بینوم مربع وې شمیرو او برابرون په A|=0 فاکتور څلوو (بی له دې چی د گردي برابرون تغیر ومومي) ، پس پیژندل کیږي چی د گردیبرابرون د څلورئ یا مربع غړي په x اوy کی په فاکتور A لاینیز برابرون په x او y او ثابت غړي (چی یوه غړي په ځیري سره یوځاي شوي) لاس ته راوړو.

نو دا لاندې ټولیز(عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2+Cx+Dy+E = 0 . A |= 0 \quad (16 . 12)$$

د گردي برابرونونو(مساواتو) ټولیز فورم یا ټولیزه بڼه ۰
که د گردي برابرون په ټولیزه بڼه یا عمومي فورم ورکړشوي او که منځټکی او وړانګه یی څرګنده کوو یا معلوموو نو د گردي برابرون د منځټکي فورم باندې راوړو یا را اړوو. دا د څلورئ پوره کولو یا مربع تکمیلولو په بنسټ صورت نیسي . دوه ځیرې پورته وګورئ

بیلګه ۱۶ . ۱۱ :
د گردئ برابرون دې په ټولیزه - یا عمومي توګه وي:

$$2x^2+2y^2 +4x-12y = 0$$

له دې لاس ته راځي، که په دوه وویشل شي $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

$x^2-4x+4+y^2-6y +9 = 3+4+9$ (د څلورئ پوره کونه یا مربع تکمیلونه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

دبینوم د مربع له لارې انځورونه $(x+2)^2+(y-3)^2=16$
ګردۍ منځټکی(M(-2,3او وړانګه r=4 لري.

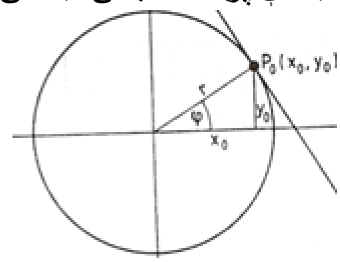
بیلګه ۱۶ . ۱۲ :
د ګردۍ برابرون ولیکی چی منځټکی یی(M(2;0 وي او په کوم چی ټکی(P(6,4-3 روت دی؟
اوبیونه : د(M(2,0 سره (۱۶ . ۱۱) داسی دئ
$(x-2)^2+y^2=r^2$
د P ټکی د ګردۍ برابرون پوره کوي $(6-2)^2+(4-3)^2=r^2$
له دې څخه د ګردۍ وړانګه په لاندې ډول لاس ته راځي: r = 8 او له دې سره د ګردۍ برابرون:
$(x-2)^2+y^2=64$
ګردۍ او کرښه یو بل ته درې مختلف ځایونه لرودی شي
۱ - کرښه ګردی غوځوي، نو له دې امله غوځی ده(سیکانتې)
۲ – کرښه ګردۍ په یوه ټکي کی لمسوي یعنی مماس دی (تانجنت یا جګوالی)
۳ - کرښه ټوله له ګردی دباندې پرته ده (له ګردۍ تیریدونکی، لنډ : تیرېدونې)
د غوځټکي(د تقاطع ټکي) کواوردینات باید د ګردۍ اوکرښی برابرون پوره کړي سرې د کرښي برابرون د ګردۍ په برابرونونو کی ږدي(y یا x پسی حل یا اوبۍ شوي) او په روښانه ډول یو مربع مساوات (څلوری برابرون) په x اوy کی لاس ته راوړي، کوم چی په څرګند ډول (پرتله برخه ۱۲ . ۲) دوه ریل اوبیونې یا ځوابونه لري، یو رییل ډبل اوبی او یا هېڅ رییل اوبی کیدی شي ولري، کوم چی له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ څخه عبارت دي.

بیلګه ۱۶ . ۱۳:
کوم پروت ځایونه ګردی kچی راکړشوی: $(x-2)^2+(y-3)^2=5$ اولاندې کرښی و یو بل ته لري؟
$g1: 2x+y=4$,$g2=2x+y=12$, $g3: -x+y/2=3$

اوبی: $g1: y=-2x+4$که د ګردیبرابرون کی ځاي کړو نو دا برابرون لاس ته راځي
$(x-2)^2+(-2x+4-3)^2=5 \iff 5x-8x=0$
ددې ځوابونو $x=0$, $y=4$ او $x=8/5$, $y=4/5$ سره به g1 د ګردي غوځوونی یا (Sekantسکانت) وي.
که $g2: y=-2x+12$ د ګردي مساواتو کی ځاي کړو نو لاندې لاس ته راځي
$(x-2)^2+(-2x+12-3)^2=5 \iff x^2-8x+16=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډېل اوبوني $x_{1,2} = 4$, $y_{1,2} = 4$ سره g2 يو تانجنت دی.
که g3 : $y=2x+6$ د ګردۍ مساوات کی ځاي کړو، نو لاندې لاس ته راځي:
$(x-2)^2+(2x+6-3)^2 \iff 5x^2+x+8=0$
دا څلورۍ برابرون يا مربعمساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه g3 له ګردۍ k دباندې پرته ده، يعنی دباندنی يا دباندونی ده.



په ګردي $x^2+y^2 = r^2$ (څېره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرون په ټکی ($P_0(x_0,y_0)$ د مساوات $x_0^2+y_0^2 = r^2 > 0$ سره غوښتل کيږي. تنجنت د مماس په ورانګه نيغ ولاړ دی

د مماسورانګه دا ميلان يا جګوالی لري $\tan\phi = \frac{y_0}{x_0}$ او

له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخی د تنجنت
$m = 1/\tan\phi = -x_0 / y_0; ....(16,13)$

د تنجنت يا جګي برابرون د (۱۶ . ۱) سره سم لاس ته راځي:
$y-y=-(x0/y0)(x-x0) \iff xx0+yy0=x0^2+y0^2=r^2$

$$xx_0+yy_0 = r^2 \qquad (16 . 14)$$

د ګردۍ تنجنت باربرون په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ په ګردي
$x^2+y^2 = r^2$

(حالتونه($P0(\pm r,0)$ او($P0(0,\pm r$ په (۱۶ . ۱۴) کی ځاي (دننه) دي.
(څېره . ۱۶ . ۱۰)

(c) ketabton.com: The Digital Library

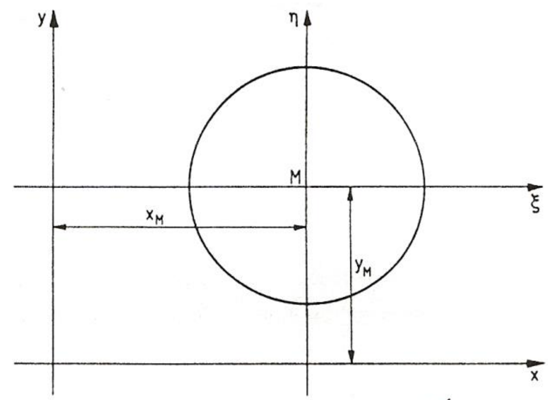


Bild 16.10

یادونه : که له دې مخ ته یا وروسته x0,y0 یا xM,yM او x_0, y_0 یا x_M, y_M ګورو نو کېمټ دي

بیلګه ۱۶ . ۱۴:

د دوه تنجنتو برابرون له ټکي(P1(-12,4 په ګردي $x^2+y^2=r^2$ په څه ډول دي؟
اوبیونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټکی پیداکوو. دا باید دګردۍ برابرون پوره کړي . ټکی P1 باید په تنجنت پروت وي یعنی د تنجنت برابرون (۱۶ . ۱۴) باید پوره کړي. نو باور لري

$x_0^2+y_0^2 = 16$ او $-12x_0 + 4y_0 = 16$

که دا لاینیزبرابرون د y0 په لور حل شي ، نو په x0 کي یو څلورۍ برابرون یا مربع مساوات لاس ته راځي

$x_0^2+(3x_0+4)^2 = 16$

همداسي $5x_0^2+12x_0=0$ د اوبیونو $x_{01}=0$, $x_{02}=-12/5$ سره. داهم په دې پوري اړه لري

$y_{01}=4$, $y_{02}=-16/5$

د تنجنت مساوات په ګردې، په ټکو(P01(0,4 او(P02(-12/5,16/5- د (۱۶ . ۱۴) له مخی په لاندې ډول دي

$0.x+4y=16 \Leftrightarrow y=4$

او

$(-12/5)x-(16/5)y=16 \Leftrightarrow y=(-3/4)x-5.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګردۍ مساوات (۱۶ . ۱۱) د منځڼکي M(xM,yM) سره د η,ζ -کواوردینات سیستم کی ، چی سرچینه يي په M کی پرته ده)(؟ ځیره ش . ۱۶ . ۱۰) لاندې فورم لري .

$$\zeta^2+\eta^2=r^2$$

د تنجنت مساوات په ټکي $P_0(\zeta_0,\eta_0)$ کی داسی دي

$$\zeta\zeta_0+\eta\eta_0=r^2; \qquad (16,15)$$

د η,ζ -کواوردیناتسیستم د y,x - کواوردیناتسیستم یو غبرګ کښوول (راکښل) دي، او د دواړو کواوردیناتسیستم کی لاندې اړیکی پرتی دي .

$$\zeta=x-x_M,\eta=y-y_M; \qquad (16,16)$$

که برابرون (۱۶ . ۱۶) د تنجنت مساواتو(۱۶. ۱۵)کی ځاي په ځاي شي، نو سړی بیا دا د y,x -کواوردینات سیستم ته ترانفورمیرکوي(کشوي یا راکاږي) :

$$(x-x_M)(x_0-x_M)+(y-y_M)(y_0-y_M)=r^2 \qquad (16.17)$$

په ټکي(Po(x0,y0 کی د ګردۍ تنجنت برابرو په ګردۍ

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$$

بیلګه ۱۶ . ۱۵:

په ګردۍ چی برابرن $x^2+y^2+16x+4y+43=0$ لري، د x - محور باندې، په ټکو

$$x_1=x_2=-5$$

سره تنجنت وکا ږو(کیږدو). برابرون یی څنګه دي؟

اوبیونه : د ګردۍ برابرون د منځڼکي فورم (۱۶. ۱۱) باندې بدلیږي:

$$x^2+16x+64+y^2-4y+4=-43+64+4$$

$$(x+8)^2+(y-2)^2=25$$

او له دې لاس ته راځي

$$x_M=-8,\ y_M=2,\ r=5$$

د ګردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه

$$x_1=x_2=-5$$

د دواړو ګردۍ ټکو په ګردیبرابرون کی ځایوو:

$$(-5+8)^2+(y-2)^2=25$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې داسی لاس ته راغلي دy لپاره ځلوریبرابرون یا مربع مساواتو د دواړو اوردیناتو
مماس ټکي لاس ته راځي : $y1 = 6$, $y2 = -2$
د (۱۶ . ۱۷) سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(6-2)=25 \Leftrightarrow 3x+4y=9$$

او

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(-2-2)=25 \Leftrightarrow 3x-4y=-7$$

تمرینونه:

۱۳ – د لاندې مساواتو سره ګردیمنځټکی او وړانګه وټاکئ:

a) $x^2 + y^2 = 20$ b) $x^2+y^2 +2x -4y + 1 = 0$

c) $x^2+y^2\ 9y = 0$, d) $4x^2 +4y^2+32x-8y+67 = 0$

e) $36x^2 +36y^2 -36x +24y -23 = 0$, f) $x^2+2x+y^2+2y = 16$!

۱۴ – د لاندې ګردیو مساوات وڅیړی

الف) چی منځ ټکی $M(-2,-1)$ لری او له سرچینی تیریږي

ب) هغه چی دري ټکی ($P_1(3,0)$, $P_2(5,\ 5\ -3)$, $P_3(\ 5\ 13,-1$ یی د غاړو ټ

پ) چی وړانګه $r = 6$ لري او له ټکو ($P_1(-1,11)$,$P_2(5,5$ څخه تیریږي.

ت) له ټکی $P_1(3,4)$ تیریږي او کرښه $y = -(4 / 3)x + 13$ په ټکي P_2 (4,3)
لمسوي.

ټ) چي منځ ټکی $M(2,2)$ لري او کرښه $y = -(4 / 3)x +13$ لمسوي.

ث) چي د هغي منځټکی په کرښه $y = 3x -19$ پروت دی او له ټکی ($P_1(7,-2$
او همداسی له ټکي $P_2(11,2)$ څخه تیریږي.

۱۵ – کوم پروتځایونه ګردی k چي فرمول لري $x^2+y^2-8x = 0$ او لاندي کرښي
یو له بل سره لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $g: y=2x+1$, b) $g: y=x$, c) $g: y=x-1$,
d) $g: y=4$, e) $g: y=-x-3$, f) $g: y=x-3$?

۱۶ – کوم پروتخاي کرښه $3x+4y=25$ ګردی $x^2+y^2=25$ ته لري؟

۱۷ – د تنجنت مساوات څنګه دی
الف) په ټکي $P_0(5,y_0)$ چې په ګردی $x^2+y^2=169$ پروت دی،
ب) په ټکي $P_0(x_0,-2)$ چې په ګردی $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ پروت دی؟
۱۸ – د هغو ګرديو منځتکي پيداکړی چې وړانګه يې $r=5$ وي، کومی چې کرښه $3x+4y=9$ په ټکي $P_0(-1,3)$ کی لمسوي!
۱۹ – په ګردی $x^2+y^2=25/4$ د هغه تنجنت مساوات وټاکی، کوم چې د کرښي $y=(4/3)x+2$ سره غبرګ څغلي؟

فنکشنونه(بلواك يا تابع)

د فنکشن کليمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چی ددې برخی په پيل کی دی کليمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کليمه کله د يواځنی ځيرونی، چی په هندسه کی خورا ډيره کارول کيږي يا استعمالیږي ، کله د بلواك او بيا زياته د فنکشن په نامه څموږ په دې کار کی بلل شوي چی موږ ورسره تراوسه د تابع د نامه لاندې هم بلد يو، څما په اند يا فکر که دا موږ ځيرونه وبولو، نو موخه ور يا هدفمند به مو نومولی وي او تابع خوبې له هغې بلواک دی. په لاندې کي به وګور چی خپلواکی او بلواکی ناپيوندونکی څموږ د ځيرلو متن جوړوی

پيژند ۱۵ . ۱:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې رييلې واريابلې (اووښتونې يا متحولې) Rرييل ارزښته فنكشن(لنډ: فنكشن يا ځيرونه) د رييلو ګڼونو ډيرى باندې ، د يوې ډيرى $D \subseteq R$ يوه يواځنى ځيرونه ده. D دپيژند ډيرى نوميږي .

د ټولو ارزښتونو ډيرئ چي y يې د ځان لپاره غوره کولی شي، که x د پيژندډيرى يا تعريف ډيري په دننه کې وځغلي، د ارزښت ډيرى W بلل كيږي .

د دي قانونمندئ f له مخې هرx $\in$ Mيواځني يوه y $\in$ W باندې تنظيميږي يا ځيره كيږي :

$y = f(x)$

اوس نو x خپلواك واريابل يا اووښتونى يا مجهوله بلل كيږي يا نوميږي او y بلواك واريابل يا اووښتونى بلل كيږي، له دې امله تابع، چې موږوايو، د ځيرونې هغه ځيره شوې خوا ده. (د فنكشن يا ځيرونې او تابع يا بلواک توپير)

د فنكشن مختلف انځورډولونو په منځ كې سرى توپيروي. د دې كليمه انځورونه كې له ماتماتيكې يا شميريز سومبوليك څخه تيريد شو،خو ، مګر ددې لپاره يو پيچلى، د تشريح شكل دى، چې

په لاندې كي به ورسره بلد شو.

بيلګه ۱۵ . ۱ : هر رييل ګڼ د همغه رييلګڼ په نيم ور زيات ۱ باندې تنظيميدل يا ځيره كيدل..

بيلګه ۱۵ . ۲ : هر يو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر يو مثبت ګڼ او صفر به د هغه په مربع تنظيم شي.

د شميرپوهنى سومبولونو تر استعمال لاندې، تحليلي (شننيزه) انځورونه د بلواک يا فنكشن تشريح ده. دلته x اوy د نورو رييلو ګڼونو سره د بنسټيزو كارونو يا عمليو ، زياتون، كمون ، ځل ، ويش ، او د بنسټيزو فنكشنونو له لارې تړل دي (پرتله برخه ۱۵ . ۴)

بيلګى ۱۵ . ۱ ته: $y=(x/2)+1$, $D=R$, $W=R$

بيلګى ۱۵ . ۲ ته :

د $x<0$ لپاره $y=|x|$

د $x>0$ لپاره $y=x^2$

دلته $D=R, W = [0,\infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام دې وي چې په داسې حالت کې له کيڼ و ښي لور ته يا ګډوډ لوستل کيږي يعنې داسې لولو: y د x مطلقه ارزښت سره مساوي دئ ، كه چيرې x له 0 كوچنی وي.

داسې ليكنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فكر كوم چې له اشتباه سره به نه مخامخ كيږو) . تحليلي(شننيزه) انځورونه اكسپليڅيت(واضح)روښانه و څرګند) explizit نوميږي، كه د فنكشن برابرون ، لكه په بيلګو ۱۵ ، ۱ ۱و ۱۵ . ۲ چې په يوه د y په لور حلكيدونكي فورم مخ ته پروت وي: $y = f(x)$

كه چيرې داسې نه وي نو د تحليلي - يا شننيزې انځوروني شكل $F(x,y)=0$ دی او فنكشن ايمپليڅيت (ورسره ځای شوي يا وراسره تړلی implizit) بلل كيږي يا نوميږي . د بيلګی په توګه به $2y-x-1=0$,D=R,W=R فنكشن د بيلګي ۱۵ . ۱ يو ايمپليڅيت انځورونه وی. ديوه فنكشن نه هره ايمپليڅيت شنينيزه بڼه (ايمپليڅيت تحليلي فورم) كيدی شي په اكسپليڅيت شننيزه يا سپړنيزه بڼه (تحليلي فورم) واړول شي.

د بيلګی په توګه:

كه $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اكسپليڅيت حل كيدونكی نه دی.

د يو فنكشن تحليلي يا شننيزې انځورونی ځانګړې بڼه پارامتری څرګندونه ده. دلته تنظيم د يوه مرستندوي اووښتونې يا واريابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لاربنوديږي. هر پارامتر (له يوه پارامتر ساحی څخه)

$$x = \varphi(t) \ , \ y = \Psi(t)$$

په يو ارزښتجوړې x,y تنظيميږي.

بيلګه ۱۵ . ۱ ته: x=2t ,y=t+1; -oe< t <oeبه يوه پارامتري انځورونه وی او x = t , y = t/2 + 1 به يوه بله پارامتري انځورونه وي.

زيات وخت فنكشنونه د جدول په څير وركول كيږي

بيلګي ۱۵ . ۱ته:

X ....-2	-1	0	1	2 ....
Y 2	0,5	1	1,5	2 .....

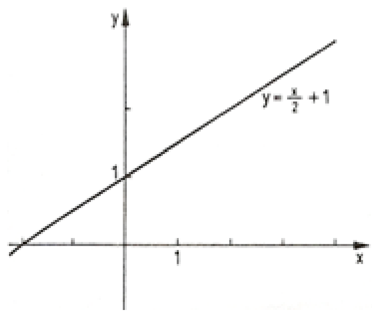
بيلګي ۱۵ ، ۲ ته:

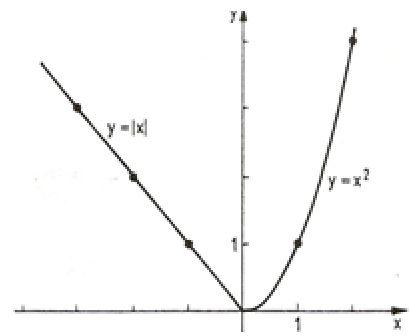
X....-3	2	-1	0	1	2	3 ...

(c) ketabton.com: The Digital Library

Y....3   2   1   0   1   4   9 ...

د فنکشن گرافیکی انځورونه (د یوې ټوټې) په x,y- کواوردینات سیستم کی د یوې کرښې له لارې، د هغه فنکشن انځورونی ځخه عبارت ده ، چی د واریابلو یا اووښتونوجوړې د x,y- هواره یا سطحه کی پواځني او دواخني ټکي باندې تنظیمیږي . ښیره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲) بیلګي ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته





۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ایترووال]a,b [کی هلته او هلته یا ټیك هلته مونوټون جګیدونکی (مونوټون لویدونکی) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو $x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$ لپاره د$x1<x2$ سره باور ولري:
$f(x1) \leq f(x2)$ $(f(x1)>f(x2))$
که د برابرونشنه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوټوني غږیږو.

وبیلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوټون دی

و بیلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اینتروال) [oe,0] کي مونوټون ټیټېدونکی یا -لویدونکی
او په اینتروال [oe,0) کی مونوټون جګیدونکی دی

پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

په يوه اينټروال [a,a-] کې يو تعريف شوی فنکشن ($y = f(x$ هلته او هلته جوړه (جفت) يا سيومتريك symetrisch,) ناجوړه (طاق) يا نا- يا انتيسيومتريكantisymetrisch بلل کيږي چې باوري وي

$$f(-x) = f(x) \qquad (f(-x) = -f(x))$$

د جوړه فنكشنونو څيري اكسيال يا محوري سيومتريك و y - محور ته ځغلي) دلته هم څيره شته ، نو تل به همغه څه ليکم؟ ۱۵ . ۳) ، طاق فنکشنونه و سرچينی ته منځني يا مرکزي سيومتريك ځغلي) بيا هم څيره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴)

بېلګه ۱۵ . ۴

فنکشن $y= x^3 ,D= R$

يو ناجوړه يا طاق فنکشن دی :

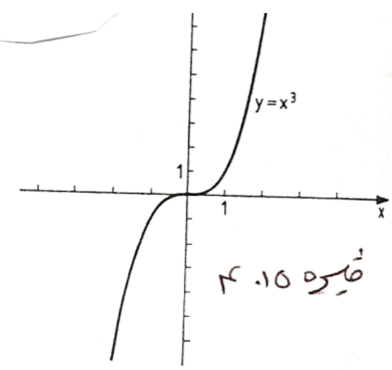
$$(-x^3) = -x^3$$

بېلګه ۱۵ . ۳ :

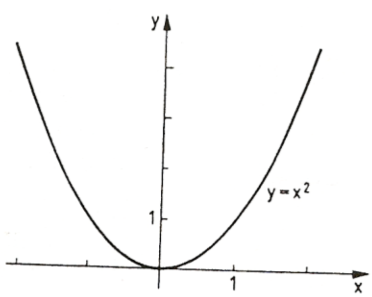
فنکشن $y=x^2,D=R$

يو جوړه يا جفت فنکشن دی:

$$(-x)^2 = x^2$$



څيره ۱۵.۴



څيره ۱۵.۳

د بېلګي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه يا جفت او نه ناجوړه يا طاق دي

پيژند ۱۵ . ۴:

($y = f(x$ تيك هلته په D (پيژندديری ده) بند يا رابند(محدود)بلل کيږي که يو $k > 0$ داسی شته وي چي دا باور ولري:

$$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$$

بېلګه ۱۵ . ۵:

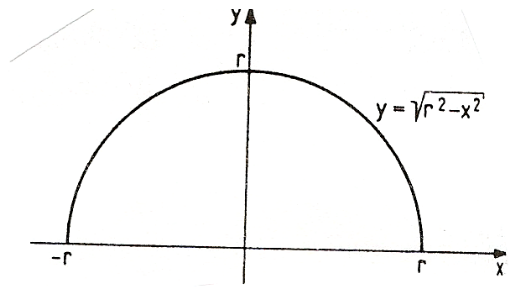
(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D = [-r , r]$

رابند یا راګیر(محدود» زه به دا له دې وروسته

بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم یوونګردی ځیره ده(

ش . ۱۵ . ۵ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \leq r$



پیژند ۱۵ . ۵:

$y = f(x)$ پریودیکي(دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل کیږي د دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:

$$f(x + p)= f(x)$$

د دورانی یا تل راګځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپیکي بیلګي تریګونومتریکي فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵ . ۳)

پیژند ۱۵ . ۶ :

ټول $x \in D$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځایونه بلل کیږي٠

د فنکشن صفرځایونه د مساوات $f (x) = 0$ د حل له لارې پیدا کیږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کرږې د غوڅټکو x - ارزښتونه دي.

بیلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2\ x + 1$ صفرځایونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دی (ځیره ۱۵ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه۰ ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:

$x^2 - 4 = 0 \iff x1 = 2 , \quad x2 = -2$

فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري.) بیا هم څیر ۱۵ . ۶)

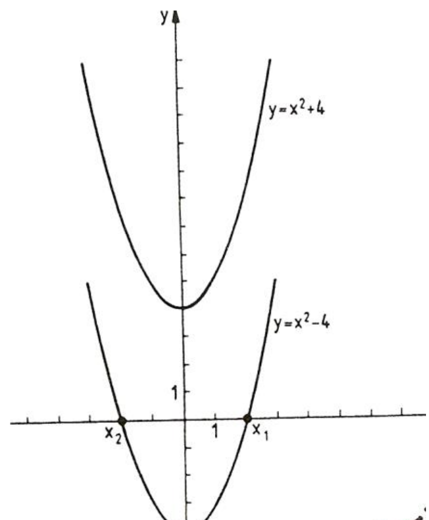


Bild 15.6 ځیره

پیژند ۱۵ . ۷:

$x \in D \; , \; y \in W \;\; y = f(x),$

یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کیږي، که هریو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی وي

یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ ځیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: ($y =$

$f(x$ یو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په ښکیدونکی دی ، دا په دې مانا چي دا

یو فنکشن ($x = g(y$ تعریفوي، یعني په ښت یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا

واریابلو د نخښی(نخونی) سره بدلی شي، نو د په ښت فنکشن په توګه لرو $y=g(x)$ دا

د فنکشن روڼنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه ځیره ده، چی x خپلواك

اوyبلواك ، دلته د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپیژندونکی دي د $y=f(x)$ په

ښت یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن $y = x$ د خپل په ښت فنکشن سره کتمټ(- ورته) identic دی۰د په ښت یا

برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرافیکی ځیره $y = x$ په کرښه د $y = f(x)$ هندارونه) یعنی په هنداره کی ځیرونه
او لنډ یی: هندارونه) ده.

بيلګي ۱۵ ، ۱ ته :

د فنکشن $y = f(x) = x/2 + 1$ چپه یا په ښت فنکشن داسی دی
$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$
سرېی $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبی کوي: $x=2y-2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
(ځيره. ۱۵ ۷ الف)
ډ

بيلګي ۱۵ . ۳ ته : فنکشن
$x \in D$ $y = x^2$,
ځيرره ش ۱۵ . ۳) په ښتکيدونکی دي یا په ښتکيدونکی نه دی.
هر $y \in W$ =[0,oe] پوري دوه= [-oe,oe] $x \in D$ اړه لري، یعنی x=+y او x=-y
مګر $y= x^2$ کلك مونوتون جګيدونکی دی (او په دي ډول یواځنی او یواځنی).

د $x \geq 0$ لپاره او كلك مونوتون لويدونکی د $x < 0$ لپاره. $y=x^2, x\geq 0$
ته چپه- یا په ښت فنکشن $y=+ x$ دی، او $x < 0$, $y = x^2$ ته چپه- یا په ښت فنکشن $y = -$
xدی. (ځيره ۱۵ . ۷ ب) .
په تولیزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

که $y = f(x)$ کلك مونوتون جګيدونکی) لويدونکی (وي ،نو په ښت فنکشن $y = f^{-1}(x)$
موجود دی او دا هم كلك مونوتون جګيدونکی (لويدونکی) دی.

۱۵ . ۳ . بنسټيز فنکشنونه

په دې برخه کي بنسټيز فنکشنونه تعریفيږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنځ یا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوګاريتم فنکشنونه، تریګونومتري فنکشنونه او ځيکلومتري فنکشنونه دي. دا بنسټيز فنکشنونه به د خپلوځانګړېوله خويونو له مخی وځيړل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به دفنکشن فنکشنونه (ځنځيری - یا تړلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشنونه) وخیرل شي. د فنکشنونو خیرل به د هغو ځانګړولو یا کرکتریستیکي خویونو له مخې هلته هم دوام ومومي، که د دیفرنشل شمیرنې کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پیژند ۱۵ . ۸ :

فنکشن

$$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a^2x^2+a_1x+a_0, n\in N; a_i\in R, a_n\neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x\in R$ لپاره تعریف دی او n - مه درجه ټولریشنلفنکشن نومیږي.دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه(یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه (n = 1) یالاینې فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته m او n په (۱۵ . ۱) کې پارامترونو a1 او a0 په مانا دي. د لاینې فنکشنونو څیره(ګراف) یوه کربنه ده چې په y = n کې دy - محور غوڅوي (x = 0) او جګوالی $m=\tan\alpha$

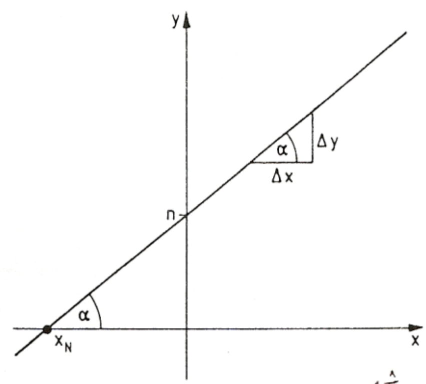


Bild 15.8 ګاره

لري (څیره پورته . ۱۵ . ۸) جګوالی د y - ارزښت د تغیر دx - ارزښت تغیر سره متناسب دی:

$$m = \Delta y / \Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

کربنه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که 0 =|m نیول شوی وي، ټیك یو صفرځاي (y = 0 لري: $x_N = -n/m$

که را په غاړه شي چې د یوې کرښې برابرون، چې له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2) تیریږي، پیدا کړو چي پو په بل نیغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرېټکی یا نوره ښه غوښتکی n په y - محور د برابرونسیستم

$$y1 = x1m + n , y2 = x2m + n$$

له مخې پیدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو

$$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$$

په بل پل)قدم(کی موږ ۲ -امه درجه ټولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو لکه په (۱۵ . ۱) کې $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$$y=ax^2+bx+c , a \; |= 0 \qquad (15 .3)$$

د مربع فنکشنونو څیره) ګراف (پارابول دی چې د هغې سیومتري محور و y - محور ته غبرګ ځغلي. کوایفیڅینت) ځله وونې یا ځلیدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاي او بڼه)فورم(ټاکی.

موږ د مربع فنکشن یو څو ځانګړي حالتونه تر څیړني لاندې نیسو.

1. $y=x^2(a=1 ,b=0,c=0)$ (15 . 4)

نورمال پارابول، د ککرې کواوردینات: $x_s = 0 , y_s = 0$

(خ . ۱۵ . ۹)

2. $y=x^2+px+q$ (a=1 , b=p , c=q) (15 . 5)

او $x^2 + px$ ته د ځلورۍ - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځي:

$$y=x^2+px\,(p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2 \qquad (15,5)$$

یو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په $q - p^2 /4$ راکښل (رابنکل-یا راکش -) شوی نورمال پارابول د ی ، دا په دې مانا چې په (۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککره لرې:

$$x_s = -p/2 , y_s =q - p^2/4$$

بیلګه ۱۵ . ۷:

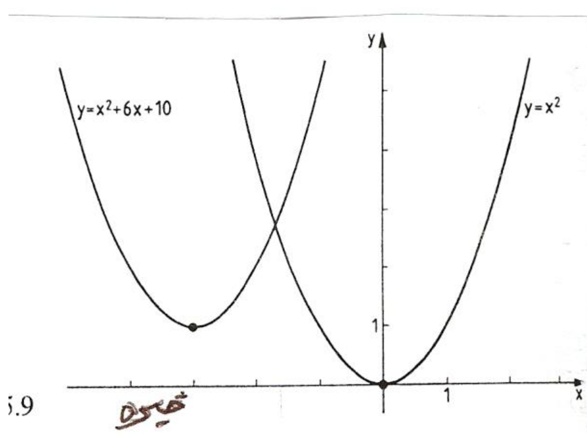
(c) ketabton.com: The Digital Library

y=x²+6x+10, xs=-6/2=-3,ys=10-6²/2=1
(خ،۱۵ . ۹)
3. $y = ax^2$ (a|=0,b=0, c = 0)
د ککرې (سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0$, $y_s = 0$

پارابول د 1 < |a|لپاره خور، د |a|<1 لپاره پرسیدلی،د a > 0 لپاره پورته لور ته او د a < 0لپاره کښته لورته واز دی (خلاص دی)

بيلګه ۱۵ . ۸:
$y = 2x^2$, $y = (1/2)x^2$, $y = -2x^2$
(خ . ۱۵ . ۱۰)
4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرې (رأس) کواوردینات داسی دی (لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللي یو)
$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c - b^2/4a^2$



بيلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$,(a=-1/2, b=1, c=4)
دککرې کواوردینات:
$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4 - 12/(4.(-1/2)) = 9/2$
دا چي a = -1/2 دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵ . ۱۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

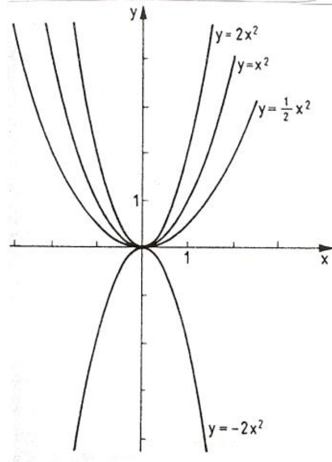


Bild 15.10

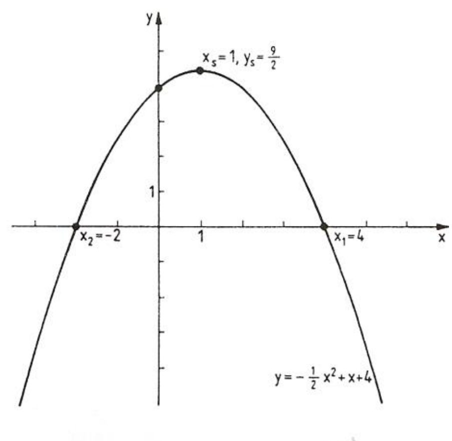


Bild 15.11

د فنکشن $y=ax^2+bx+c$د صفرځایونه د برابرون $ax^2+bx+c=0$ اوبیونې دي.
وبیلګي ۱۵ . ۹ ته (ځ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2+x+4=0$ ، چې دلته $x_1=4, x_2=-2$ دي.

و بیلګي ۱۵ . ۷ (ځیره ۱۵ . ۹) ته:
د $x^2+6x+10=0$ یاني $x_{1,2}=-3\pm\sqrt{9-10}=-3\pm\sqrt{-1}=-3\pm i$ څخه لاس ته راځي
چې برابرون رییل صفرځایونه نه لري.

فنکشن$y = x^2$ غبرګ یا جوړه(ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2}=0$ دي

د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دټولریشنلفنکشنونو بیلګي له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو
چې د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Horne rschema، معرفي شي. ددې لپاره به د(۱۵ . ۶) فورم بدل شي.

$y=[a_3x^2+a_2x+a_1]x+a_0=[(a_3x+a_2)x+a_1)x+a_0$ $x_{4,5}=-1\pm\sqrt{1-5}=-1\pm 2i$

هغه ورکړ شوي خپلواك x_1 پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1=f(x_1)$ کیدی شي له دې بڼې سره په لاندې ډول وشمیرل شي:
a3 لهx_1 سره ځل کیږي، دې سره a2 زیاتیږي، زیاتون یې له x_1سره ځل، او a1 ور زیاتوو، زیاتون د x_1 سره ځل او a0 ور زیاتوو. دا د عملیوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شیما (د هورنرشیما) له لارې په لیدوړ ډول مخ ته بیایو (ځرکندوو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

	a_2	a_1	a_0	ځلونه یا ضریبونه
	a_3x_1	$(a_3x_1+a_2)x_1$	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1$	منځنۍ ځلونه
a_3	$a_3x_1+a_2$	$(a_3x_1+a_2)x_1+a_1$	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1+a_0 = f(x_1)$	منځنۍ زیاتون

ددې شیما پوهیدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهیدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بیلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x1 = -2$ او $x2 = 5$ څخه شمیرل کیږي.

اوبیونه) :

که چرې ددریمی درجې ریشنلفنکشن یو صفرځاي ولري، نو کړی شو چې د پولینوم ویش له لارې دا لاینې فاکتور بیل کړو(پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بیلګې ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5): (x-5) =x^2+3x+1$ له دې امله لرو:
$y = x^3-2x^2 -5 = (x^2 + 3x +1) (x-5)$
د ویش پولینومونو ځلووني ، یعنی 1 د(x^2) سره ، 3 د (x) سره او 1 د هورنرشیما په اخره لیکه کی ولاړ دی. د هورنرشیما له لاری د صفرځاي شمیرلو سره په همغه وخت یا دمګړی کی د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او $f (x1) = 0$ چې د $(x-x_1)$ سره د ځلونې له لارې دا تصدیقیدلی شي. پاتی صفر ځایونه د ځلورې – یا مربع برابرنې د اوبیونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0; x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دریمی درجې فنکشن د درې لاینې فنکشنونو د ځلونې په څیر لیکل کیدی شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=x^3-2x^2-14x-5=(x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وینا په عمومي توګه د ټولوn- م درجو ریشنل ړرزرنړ
ړړطړتظداغظطافنکشنونولپاره لاندیجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ریشنلفنکشن n صفرځایونه لري . کیدي شي دا ټول یو له بل توپیر ولري او یادا صفرځایونه څوځله هم رامنځ ته شي، ریيل او یا جوړه کونجوګیري کملکس کیدی شي.

که $x_1, x_2, ..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځایونه وي

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلونې په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)a_n$$

د هورنرشیما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:

که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیځینت یا ځله وونې لپاره دې صفر ولیکل شي.

بیلګه ۱۵ . ۱۱ :

5 - مه درجه ټول ریشنلفنکشن

$y=2x^5-6x^3-20x^2-8x+80$ درې صفرځایونه $x_1=x_2=2, x_3=-2$ لري. نور صفرځایونه دې پیداکړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلونې په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې یو په بل پسی د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم لاس ته راکوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	2	0	-6	-20	-8	80
$x_1 = 2$		4	8	4	-32	-80
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0
$x_2 = 2$		4	16	36	40	....
	2	8	18	20	0=f(2)	
$x_3 = -2$		-4	-8	-20		
	2	4	10	0=f(-2)		

دا پاتی پولینوم $(2$ $x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله
د $x_{4,5} = -1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i$

لپاره لاندې د حل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i)$
$(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي
$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$

ددې لپاره چی د دریمي او جګو درجو د ټول ریشنلفنکشنونو یوه ځیره یا تصویر ولرودی شو، نور کرکتریستیکی یا د خویونو ټکی یی د دیفرنځیالشمیرنې له لارې لاسته راوستی شو(برخه ۲۰ . ۴)

بي له دې چی د دفیرنځیالشمیر له مرستي کار واخلو ، کیدی شي چی د هغه د ناپای په هکله وینا وي وکړی شو. مور په لیدیدونکی ډول د فنکشن د پولی کلیمه په کار اچوو، کومه به چی په برخه ۱۹ کی ټیك تعریف شي. دا د بیلګي په توګه دا مانا لري
چی $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ سره (f(x تل ارزښت g ته نزدې کیږي، که x د oe یانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty} [a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چی
xn -> oe

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي
او xn ->±oe د x ->±oe لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او a_n زياتيز يا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y=\infty; \lim_{x\to-\infty} y=\infty$
(کږه له - oe څخه oe د په لور ځي) .
که n جوړه او a_n کميز يا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=-\infty; \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$
کږه د - oe څخه د - oe په لور ځي).

که n ناجوړه او a_n کميز يا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=\infty; \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$
کږه له - oe څخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او a_n کميز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=-\infty; \lim_{x\to-\infty} y=\infty$
کږه له oe څخه د - oe - په لور ځي)

پيژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0};..........(15,7)$$
$$n,m\in N_0; a_k, b_i\in R; Q_m\neq 0$$

مات ريشنلفنکشن بلل کيږي او د ټولو x د $Q_m(x)\neq 0$ لپاره تعريف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نوميږي، که n<m وي او نااصلي مات دی
که n ≥ m ، نااصل مات فنکشن کيدی شي چي د پولينوم ويش له لارې تجزيه
(ټوټه) شي او د يوه ټول ريشنلفنکشن او يوه رينتونی ماتی برخی د زياتون په څير
وليکل شي.

بيلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y=\frac{2x^4-3x^3-6x^2+13x-6}{x^3-4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې فنکشن
باندې دماتباندې فنکشن ويش څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(2x^4-3x^3-6x^2+13x-6):(x^3-4x)=2x-3$$

د 2x²+x-6پاتی (باقي) سره. پس لرو:

$$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x).$$

فنکشن (۱۵ . ۷) د $x = x0$ لپاره يو صفرځاي لري، که $x = x0$وي نو باور لري:

$P_n(x_0) = 0$ مګر $Q_m(x) \neq 0$

دا د $x = x_L$لپاره تشځاي (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0) = 0$ او $Q_m(x)=0$

د $x = x_P$لپاره يو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P) \neq 0$ مګر $Q_m(x_P)=0$

بيلګه ۱۵ . ۱۳ :

فنکشن $y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x)$ د ماتباندې- او ماتلاندې فکشنونو توټي کولو وروسته په لاندې فورم د لايني فاکتورونوپه توګه ليکل کيږي.

$$y=\frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x = x_0 = 3/2$ لپاره ماتباندې صفر دی، مګر مات لاندې صفر نه دی (صفرځای)مات لاندې- او مات باندې فنکشونه د $x = x; L = -2$ لپاره صفر دي (تشځای)

د $x = x_{P1} = 0$ او $x = x_{P2} = 0$ لپاره ماتلاندې صفر او مات باندې صفر نه دی (قطب)

که x سره د قطب ځاي ته نزدې شي، نو y د ناپای په لور ځي چي د قطبځای (ټيك ناپای ځای بللکيږي) xpکی کره داسيمپتوټي کربني $x = xP$ ته نزدي کيږي.د يوه تشځای xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادې 0 / 0 شکل غوره کوي، له دې امله د $x = xL$ لپاره تعريف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن ځان نيونی ته:

د اصل ماتفنکشن (n<m) د x په جګ پوتنځ يعنی x^m د ماتباندې او ماتلاندې د ويش څخه لاس ته راځی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=\frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}}+\frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}}+\ldots+\frac{a_1}{x^{-1+m}}+\frac{a_0}{x^m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{0}{b_m}=0$$

داچی د x تول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x تول پوتنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن څيره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کيږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نيسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه يی د صفر په لور ځي، لکه تولريشنل برخه.
د نااصل مات فنکشن څيره د x -> ±oe سره ، ځان خپل تولريشنلبرخی ته نزدې کوي.

بیلګه ۱۵ . ۱۴:

الف: $y = x /(x^2+1)$ د $x0 = 0$ په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول يا قطب نه لري رييل اوبيونه نه لري) او د x -> ± oeلپاره دx- محور ($y = 0$) د اسيمپتوتی په څير لري (څيره. ۱۵ . ۱۲)

ب: $y=(x^2+2x-3)/(x+2)=x- 3/(x+2)$ صفرځايونه($x^2+2x-3 =0$) په $x1 =-3$ او $x1=1$کی لري . تشځای نه لري او په $x3 = -2$ کی قطب لري دا په دې مانا چی $x = -2$اسيمپتوتی دی، او د x →±oe لپاره فنکشن $y = x$ اسيمپتوتي کيږي)دا سيمپتوتی کليمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي)

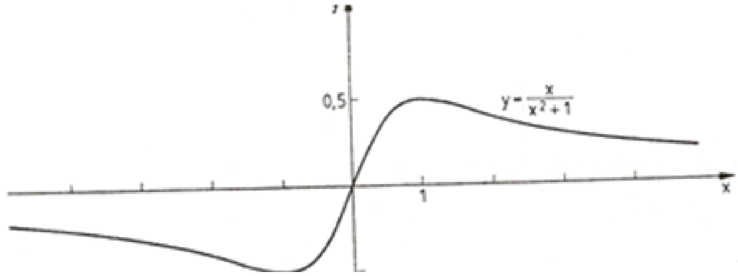
موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي تول - يا مات ريشنلفنکشنونه راوړو:
فنکشن

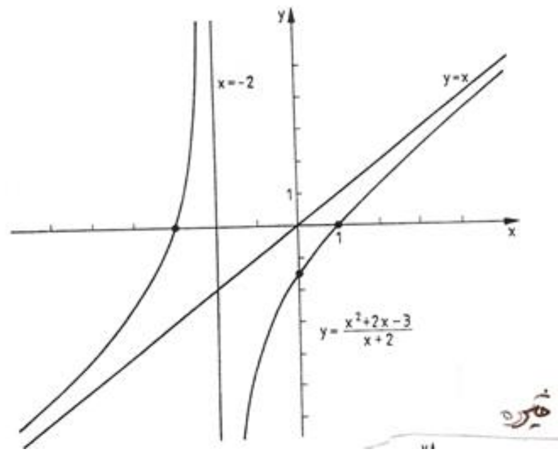
$$y=x^n;n\in Z\setminus\{0,1\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15,8_a)$$

يو ځانګړی پوتنځفنکشن دی(د پوتنځ پيژند 6 ۰ ۱)

(15.8)د زيږ اټ يز زياتيز يا مثبت تولګڼ n لپاره يو تولرشنل فنکشن دی. د جوړه تولګڼ nلپاره تولريشنل فنکشن دی. د تولګڼ n لپاره تولی کرېږ د تعريف ډيری(-) = D oe,oe، د ارزښت ډيری(W=(0,oeاو ګډ ټکی (1,1)، (0,0),(1,1) لري.
(څيره ١٤ الف ١٥) د ناجوړه ګڼ د n لپاره(D = (-oe,oe
او(W = (-oe,oe دي او (1,-1-) , (0,0). (1,1) ګډ ټکي دي (څيره ۱۵ . ۱۴ ب)۰

(c) ketabton.com: The Digital Library





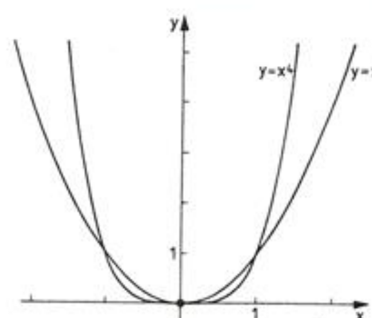


Bild 15.14a

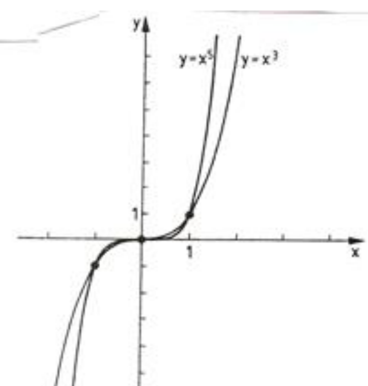


Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي ګڼ nلپاره یو مات ریشنل فنکشن دئ په $x = 0$ کی د یوه قطب او $y = 0$ کی یوې اسیمپټوټی په څیر. د جوړه ګڼون یا تعداد (کمیز) nلپاره ټولی کرۍ د پیژند ډیري

(c) ketabton.com: The Digital Library

(-1,1) ,(1,1) لري اوګډټکي W = (0,oe) د ارزښت ډيري(D = (-oe,oe)\{0}
؟؟؟ ښيره ش. ۱۵/۱۵الف) .
د ناجوړه ګڼون (کميز n)لپاره{ D = (-oe,oe)\{0 او(W=(-oe,oe او(1-،1-) (1,1)
ګډ ټکی دی (ښيره »۱۵ . ۱۵ ب) .
دوه ښيرې دي

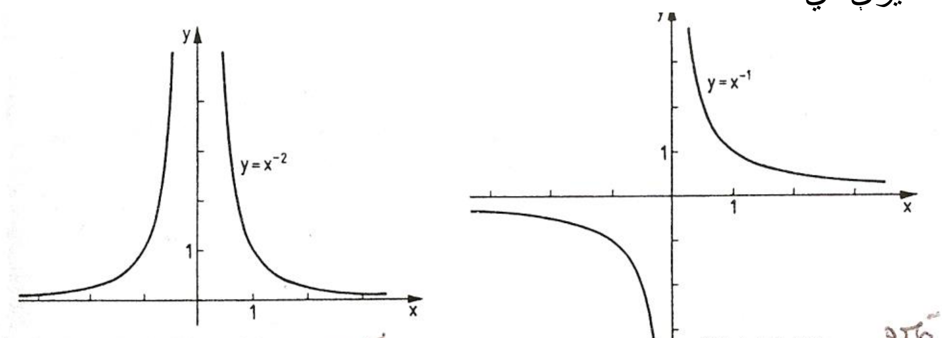


Bild 15.15a

Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر ښت بلواک لپاره دې د مونوتوني اينتروال په پام کی ونيول شي.(پرتله بيلګه(بيلګه ۱۵ .۳)
د فنکشن) لوستل له کيڼ وښي لور ته

$$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$$

چپه- يا پر ښت فنکشن په لاندې ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x}\ , n \in N \setminus \{1\}\ , D = [0,\infty), W = [0,\infty) .... (15,8_b)$$

او ريښه فنکشن نوميږي (پيژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنځ فنکشن کيدی شي و ريشنل ايکسپوننت ته پراخه شي) دلته لرو $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{n}{m}}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ريشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^n\ , a \in Q\ , x > 0 \qquad (15 . 8c)$$

نو د ريښي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دې د پوتنځ فنکشن په ښير وپوهيدی شي.

د پوتنځ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پرښت بيرته پوتنځ فنکشن دی.
ټوليز پوتنځ فنکشن پيژند د ريبل ايکسپوننت لپاره ورکړ شوی(د ريبلګڼونو کليمه دې وکتل شي برخه ۳ ۰ ۱ . ۴ کی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

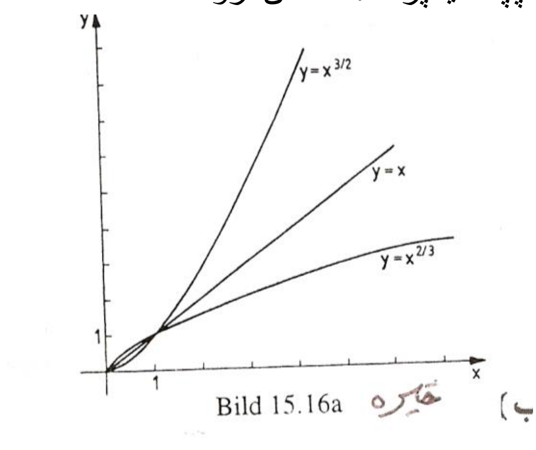
پيژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^{\alpha} \quad , \quad \alpha \in R \ , x > 0 \qquad (15.8d)$$

پوتنخ فنکشن نوميري

بيلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن $y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3} , x \geq 0$

لاندې چپه - يا پر ښت فنکشن لرو $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2} , x \geq 0$



ب) (خيره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندي چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, x > 0$

خيره ۱۵ . ۱۶ ب)

$$y = x^{-2} = 1/x^2 , x > 0$$

يادونه : په پيژند ٤ . ۲ کی مو وويل چی يوائی د ناکميز راديکاندو ريښه ويستل کيدو اجازه لرو. دا کړنلار دي د پرښت فنکشن جوړولو برسيره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په پام کی وي.

د بيلګي په توګه فنکشن $y=x^3$ په ټول تعريفديري کي مونوتون پورته کيدونکی دی او له دې امله ټول په ښت کيدونکی وی، د $y = \sqrt[3]{x}$ فنکشن $y = x^3$ په پيژنديري ($D = [0,oe$] کی پر ښت فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د $y= x^3$ پرښت فنکشن د $D= (-oe,0$ سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی(ش. ۱۵ . ۱۷) .

پيژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

$$y=a^x, a>0, a\neq 1 \text{..................................}(15,9)$$

ایکسپوننشلفنکشن یا په جګ(لنډ »جګ«) بلواك بلل کیږي۰

(د ایکسپوننت یا »جګ« کلیمی لپاره دی پېژند ۴ . ۱ وکتل شي)

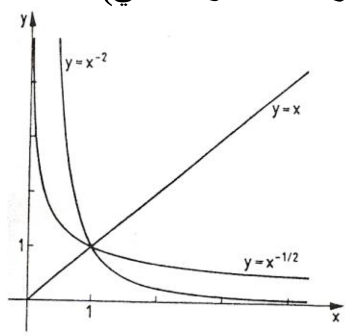


Bild 15.16b

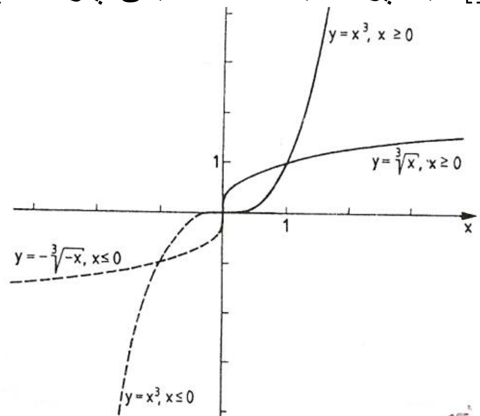
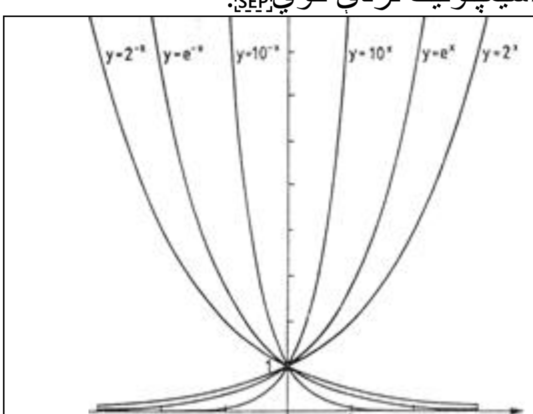


Bild 15.17

پورته دوه څیرې دې پام کې ونیول شي

فنکشن (۱۵ . ۹) لاندې   پیژنددیری(D=(-oe,oe او ارزښتدیری(W=(o,oe) لري. د $a^0=1$ له امله تکی(0,1 () د ټولو کږو ګډ تکی دی

د a>0 لپاره (۱۵ . ۹) په کلکه مونوتونجګیدونکی دی اود x->oe سره د x - محور ته اسیمپوتیك ورنږدې کیږي. د 0<a<1 لپاره) ۱۵ . ۹ (په کلکه مونوتون لویږي او ځان د oe -> x سره د x -محور ته اسیمپتوتیك نزدې کوي.

	کسپوننشل فنکشنونو یو څو بیلګګي (a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/1 څیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند ۱۵ . ۱۲ :

لاندې فنکشن د ايکسپوننشل فنکشن په ځېټ فنکشن دی

$y = \log_a x \, , \, a > 0 \, , \, a \,|= 1$ (15.10)

او لوګاريتم فنکشن بلل کيږي

د لوګاريتم کليمي لپاره پيژند ۵ . ۱ وګورئ) فنکشن (۱۵ . ۱۰) پيژنددېرى
$D = (0.oe \ )$ او د ارزښتديرى($W=(-oe,oe \ )$ لري.

د $y = \log_a x$ کرېږ د ګرو $y=a^x$ هنداورنه ده، په کرښه $y=x$. تکى $(1,0)$ د ټولوکړو ګډ
تکى دى (خيره شته دئ)

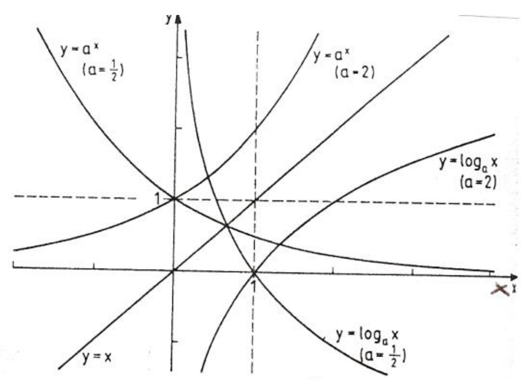


Bild 15.19 شکله

د $a>1$ لپاره(۱۵ . ۱۰) کلك مونوتونجګيدونکى اود $x->0$ لپاره اسيومپتوتيك د کميزو y -
محور ته نزدې کيږي. د $0<a<1$ لپاره (۱۵ . ۱۰) کلك مونوتون لويدونکى دى او
د $x> 0$ لپاره اسيمپتوتيك د زياتيز y - محور ته نزې کيږي. په شکل ۱۵ . ۱۹
کى $y=a^x$ او په ځېټ يى يعني $y = \log_a x$

د $a= 2$ او $a=1/2$ لپاره انځوريري.

په ځانګړې توګه ليکل کيږي $y = \log_{10} x = \lg x \, , \, y = \log_e x = \ln x$.

پيژند ۱۵ . ۱۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تريګونومتري فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې(پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کيږي یا راوړل کيږي.

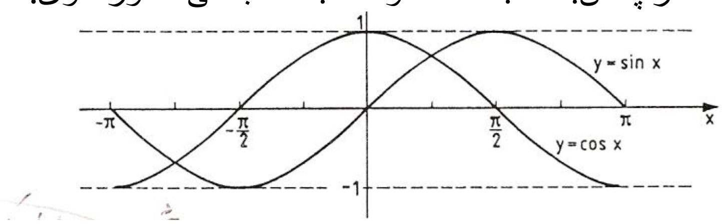
$$y=\sin x ;D=R,W=[1,1]\ldots\ldots(15,11_a)$$

$$y=\cos x; D=R, W=[-1,1]\ldots\ldots(15,11_b)$$

$$y=\tan x=\sin x/\cos x; D=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, W=R, k\in Z\ldots(15,11_c)$$

$$y=\cot x=\cos x/\sin x; D=R\setminus\{k\pi\}, W=R, k\in Z\ldots\ldots(15,11_d)$$

د دې کږوتګلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



تریګونومتریکی فنکشنونه y = sin x, y = tan x , y = cotx ناجوړه فنکشنونه، او y = cos x یو جوړه فنکشن یا – بلواک دی.

تريګونومتريکي فنکشنونه پريوديکي فنکشنونه دي(مقايسه ۱۵ . ۵)

فنکشنونه y=sinx , y= cosx پريودې 2π لري، دا په دې مانا چی لرو:

$$\sin (x+2k\pi) = \sin x ; \cos(x+2k\pi) = \cos x , k\in Z$$

لاندې فنکشنونه پريود π

(c) ketabton.com: The Digital Library

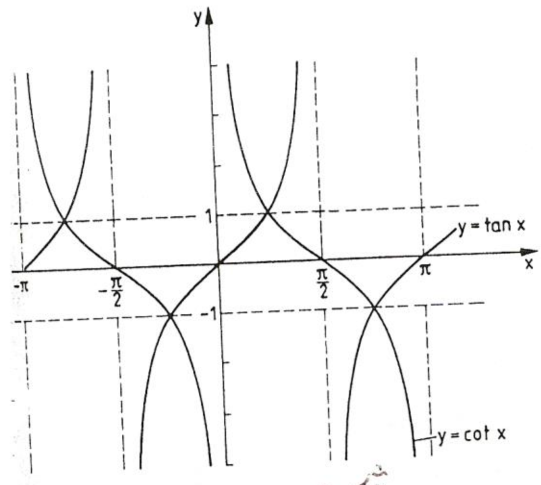


Bild 15.20b

لري $y=\tan x$, $y=\cot x$.دا په دې مانا چې

$$\tan(x+k\pi)=\tan x,\ \cot(x+k\pi)=\cot x,\ k\in Z$$

د تریګونومتریکي فنکشنونو صفرځایونه دي $x_k=k\pi, k\in Z$

د $y=\tan x$, $k\in Z$, $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $y=\sin x$ لپاره او د $y=\cos$

x , $y=\cot x$ لپاره تانجنت - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه(ناپاځایونه) لري

یعني $y=\tan x$ په $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$ او $y=\cot x$ په $x_k=k\pi$, $k\in Z$ کې.

د تریګونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلګي په توګه

فنکشن $y=\sin x$ په ایتروال $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ کي مونوتون جګیدونکی دی او په

ایتروال $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$

کی مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودې کی تکراریږي. پس ویلی شو:

د $y=\sin x$ لپاره جګیدونکی یا پورته کیدونکی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی، او په ورته توګه

د $-\pi+2k\pi \le x \le 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کیدونکی دی٠

د $0+2k\pi \le x \le \pi+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی

د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جګیدونکی دی

د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جګیدونکی دی ،

په تنجنت ـ او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځایونه د مونوتوني اینتروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینتروالونه دي.د ساین فنکشنونه د بیلګي په توګه د وخت په پریودیکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوینګونګ: رپیدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واریابل په t نخښنه کیږي.فنکشن

$$y = a \sin (\omega t + \varphi) \qquad (15 . 11e)$$

هارموني فنکشن بلل کیږي.

یادونه: فنکشن (۱۵ . ۱۱ت) د پیژند (۱۵ . ۱۵) له مخی ترلی یا ځنځیري فنکشن دی. موږ ترځیرني لاندې نیسو چي د سا ین فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واریابل t او زیاتوونکی د ساین فنکشن په خپلواك (Argoment) د کږنځیره باندي څه تاسیر اچوي.

۱ ـ د فاکتور a تاثیر په فنکشن y = a . sin t د y = sin t فنکشن ارزښت باندې غزول یا راکشول دی که (|a| > 1)او یا پرسول دي که (|a| < 1)وي y= a.sin x فنکشن ارزښت a ـ ځله د فنکشن ارزښت y = sin t دی، چیرته چی برسیره پردې د a < 0 لپاره په t ـ محور یوه اینه ځیرونه هم منځ ته راولي (څره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) (a = 2 , a = 1 / 2)

په فنکشن کی a امپلیتودې Amplitude(جګوالی(نومیږي او د شوینګنګ Schwingung رپیدنی پراخوالی یا بڼه : سور باندې تاثیر اچوي.

څیره شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

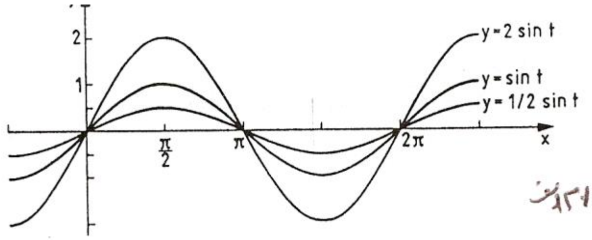


Bild 15.21a

۲ - په فنکشن $y = \sin\omega t$ کی فاکتور ω په فنکشن $y = \sin t$ باندې يو وختني غزول که $|\omega|<1$ يا پېرسول که $|\omega|>1$ وي تاثير اچوي.چيرته چی د $\omega < 0$ لپاره برسيره پردې يو په y- محور اينونه هم ده.

د يوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن $y = \sin\omega t$ يوه فنکشن ارزښت، د $y = \sin t$ خپلواك ω-ځله ، يعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي (ځيره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب).

ګردی فرکونڅ (Kreisfrequenz) بلل کيږي، دا په پريودې تاثير اچوي

او $y = \omega t$ پريودې $P = \frac{2\pi}{\omega}$ لري.

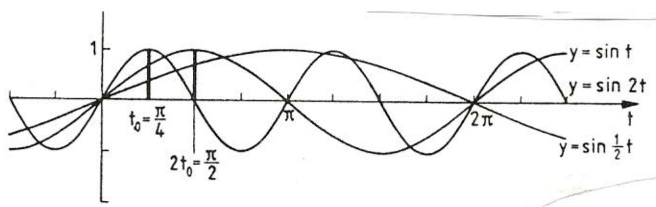


Bild 15.21b

۳ – زياتيدونکی φ په فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ کی د $y = \sin t$ باندې ديوې راکښنی تاثير په $|\varphi|$ له کينی لور $\varphi>0$ او يا له ښي لور $\varphi<0$ اچوي .

د يوه ټاکلي خپلواك $t = t0$ لپاره د فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ سره يو فنکشن ارزښت، چی د $y=\sin t$ لپاره۰

د φ په کچه راکښل شوی (يعنی د يوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی) وي، يعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(ځيره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

$$(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2})$$

په فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a.\sin(\omega t + \varphi) = a.\sin\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)$$

کی φ چی فازې نومیږي یو د راکښلو تاثیر په کږه $y = a.\sin\omega t$

د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.

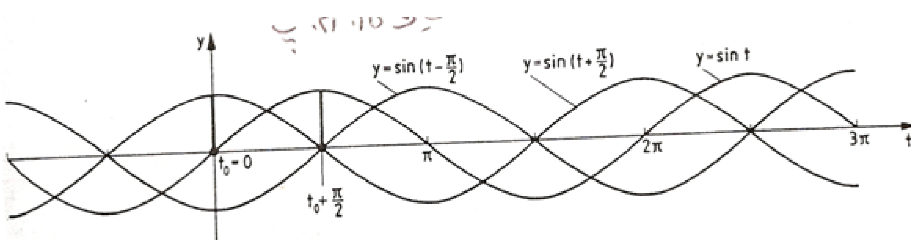
په شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2.\sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$ انځوردی.

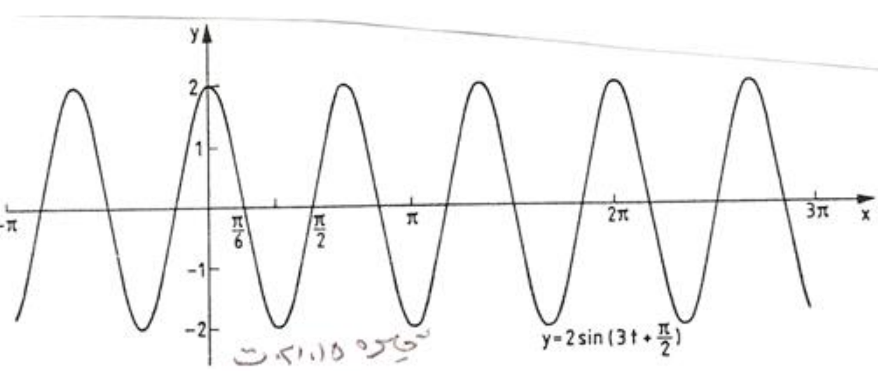
هغه امپلیتود $a = 2$ لري، پریودې یی $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{6}$

کي

د sint و کیڼ لورته راکښل شوی دی.

ځیره ۱۵ . ۲ پ $\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$





د تریګونومتري فنکشنونو(یواځني) په معکوسوالي یا په ځتوالي کی موږ په ځانګړو یوغږیزو یا مونوتوني اینتروالونو تکیه کوو، د لاندې تعریف سره مناسب

(c) ketabton.com: The Digital Library

پېژند ۱۵. ۰ ۱۴ : د لاندې فنکشنونو

$$1.\ y = \sin x, \quad D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad W = [-1, 1] \qquad (15.12a)$$

$$2.\ y = \cos x, \quad D = [0, \pi], \quad W = [-1, 1] \qquad (15.12b)$$

$$3.\ y = \tan x, \quad D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad W = \mathbf{R} \qquad (15.12c)$$

$$4.\ y = \cot x, \quad D = (0, \pi), \quad W = \mathbf{R} \qquad (15.12d)$$

پرځې یا چپه فنکشنونه لاندې ځیکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

$$1.\ y = \operatorname{Arc}\sin x, \quad D = [-1, 1], \quad W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad (15.13a)$$

$$2.\ y = \operatorname{Arc}\cos x, \quad D = [-1, 1], \quad W = [0, \pi] \qquad (15.13b)$$

$$3.\ y = \operatorname{Arc}\tan x, \quad D = \mathbf{R}, \quad W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad (15.13c)$$

$$4.\ y = \operatorname{Arc}\cot x, \quad D = \mathbf{R}, \quad W = (0, \pi) \qquad (15.13d)$$

د تریګونومتري فنکشنونو برخې په مونوتوني ایتروالونو) ۱۵ .۱۲ الف(تر) ۱۵ . ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵ . ۱۳ الف (تر) ۱۵ . ۱۳ ت (په ځیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.

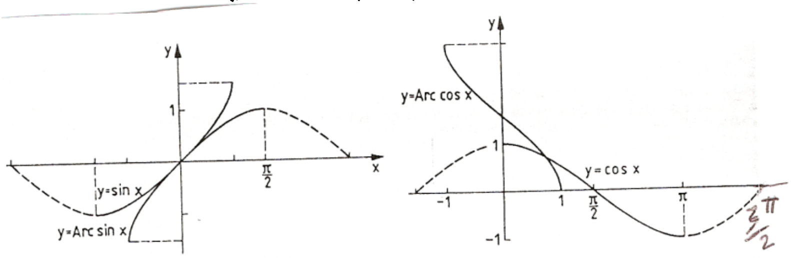


Bild 15.22 Bild 15.23

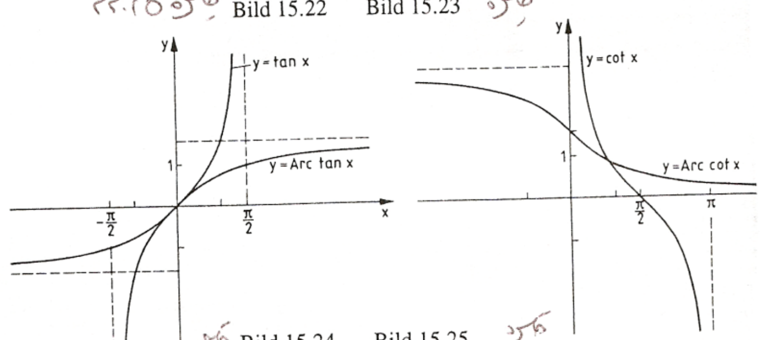


Bild 15.24 Bild 15.25

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ . ۴ ځنځيري (ترلي) فنکشنونه

پيژند ۱۵ . ۱۵ :

د $x \in D$ لپاره يو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتديري W سره ورکړ شوی او برسيره
پر دې د $z \in W$ لپاره يو فنکشن $y = f(z)$ ورکړشوی، نو

$$y = f(g(x)) \qquad (15 . 14)$$

د x ترلی (ځنځيري) فنکشن بلل کيږي٠

يادونه : يو ترلی فنکشن کيدی شي چې زياتو ځنځيرونو سره هم رامنځ ته شي: د بيلګي
په توګه $z = f(x$
د $x \in D, z \in W$ لپاره او $w=h(z)$ د $z \in W, w \in W^*$ لپاره
او $y=f(w)$ د $W^* \in W$ لپاره لرو،
نو $y=f[h(g(x))]$ هم د x يو ترلی فنکشن دی
بيلګه ۱۵ . ۱۶ :
الف : د $z = 2x + 4$ او $y = e^z$ سره ترلی فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي.
ب : په ترلي فنکشن $y = \sin x^2$ کې $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی. په ترلي فنکشن $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$ کې $z = \sin x$ د ننني - او $y = z^2$ دباندنی فنکشن دی
پ : د
$, y = \cos w \quad w = \sqrt{z} \quad , \quad z = 2x + 4,$
سره ترلي فنکشن $y = \cos \sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي
ت : په ترلي فنکشن $y=\text{Arctan}1/(x-1)$ کی $z=x-1$ دننني، $w=1/z$ منځنی او $y=\text{Arctan } w$ دباندنی فنکشن دی.

يادونه : د يوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځيري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شميرنی « له » دننه « پيل کيږي.

بيلګي ۱۵ . ۱۶ ته:
ب) د $x = 0.5$ لپاره دی
$z=x^2=0,5^2=0,25;y=\sin x^2=\sin z=\sin 0,25=0,24740$
او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$z=\sin x=\sin 0,5=0,47942; y=\sin^2 x=z^2=0,47942^2=0,22984$

پ) د $x = 2$ لپاره دی $z=x-1=2-1=1$; $w=1/z=1/1=1$

$y=\text{Arctan} w=\text{Arctan} 1=\frac{\pi}{4}$

روښانونه، تشریح:

$y=f(x)$ تحلیلي(ښنیزه) وینا بلل کیږي، که $f(x)$ له رییل ګڼونو او بسټیزو فنکشنونوڅخه د زیاتون، کمون،ځل، ویش، له لارو تړلی یا ناتړلي(ځنځیري یا نا ځنځیري) جوړیږي

د بیلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنځ بنسټ او همداډول رادیکاند منفی نه شي کیدلی، او یا باید مثبت وي، چی د لوګاریتم نومروس باید مثبت وي او $\text{Arc}\sin f(x)$ همداډول $\text{Arc}\cos f(x)$ ټیك د $x \in [-1,1]$ لپاره پیژند لري یا تعریف دي

بیلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحلیلي ویناو لپاره دې تعریفدیري پیداکړی شي.

الف $y = \sqrt{x^2 - 3}$

رادیکاند باید کمیز یا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 \iff x^2 \geq 3 \iff |x| \geq 3$ ($x \geq \sqrt{3}$ v $x \leq -\sqrt{3}$)

نو لرو $D =(-oe , - 3] \cup [3 ,oe]$

ب) $y=\lg(x+2)+1/(3+2x-x^2)$ له لمړي زیاتونی کی باید $\text{Numerus} > 0$ نومروس وي دا په دې مانا چی : $x +2 >0 \iff x >-2$ ،

پس $D1=(-2,oe)$

په دوم زیاتوني کی باید مات لاندې په صفر برابر نه وي ($\neq 0$) وي . د مات لاندې صفرځایونه

له $3-2x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي $x1=2,x2=-1$.

نو $D2=R\backslash(2;-1)$ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن تعریفېدیری باید دا اول زیاتونی او همداسی د دوم زیاتونی تعریفېدیري وي یعنی د

D1 او D2

غوڅېدیری: $D=D_1 \cap D_2 = (2, oe) \setminus \{2; -1\}$

پ) $y = \mathrm{Arc}\sin (x-1)/5$ د ارکوس ساین-فنکشن د تعریفېدیري په پام کی نیولو سره باید باور ولري-

$-1 \leq (x-1)/5 \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq x-1 \leq 5 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 6 \Rightarrow D=[-4,6]$

ت $(y = 1 / \sqrt{(x^2 - 4)}$

رادیکاند باید له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی

$x^2-4>0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow x>2$ یا $x<-2$

نو دی $D=(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

۱۵ . ۵ تمرینونه

۱ – د ایمپلیڅیت توابعو ایکسپلیڅیت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y – 8 = 0$

۲ - لاندې فنکشنونه په پارامترانځورونی ورکړ شوي

a) $x=2t \quad y=-t^2+3t$ b) $x=\sqrt{t} \quad y=2t+1$

c) $x=1/t \quad y=2(t-3)$ d) $x(/2)t-1 \quad y=t^2$

پارامتر له منځخه یوسی او په دې سره ورکړی $y=f(x)$

۳ - لاندې فنکشنونه په مونوتوني وڅیړی، او که ممکن وي نو مونوتونی اینتروالونه په تعریفېدیریو بیل(تجزیه) کړی؛ یا لوڅ ته کړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -2x + 3$ c) $y = x^2$

d) $y = -2x^2$ c) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = |x|$

۴ – پریکړه وکړی چی لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دووکوم نه دي:

a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = x - 1$

d) $y = 2x^2$ e) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = (x-1)^2$

g) $y = x^2 / 2$ h) $y = x^5$ i) $y = |x|$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = (x-1)(x+2)$ c) $y = x^2 - x - 2$

d) $y = 2x^2 - 12x + 18$ e) $y = x^2 + 1$ f) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په ځت فنکشونونه پیدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = x^2 + 1$, $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

c) $y = (x+1)^2$, $D = [-1, \infty)$, $W = [0, \infty)$, d) $y = x^3 / 2$, $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

۷ – لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوي دي

a) $y = 0{,}4x - 1{,}6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = (1/5)(3x + 1{,}5)$

d) $y = 2$ e) $3x - 3y - 7 = 0$ f) $4y + x = -1$

کرښې دې وکښل شي، جګوالي کونج α دې پیدا شي، او صفرځایونه x_N و ګنی!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تیریږي

a) (2,3) (5,5) b) (1,1) و (3,7) c) (-1,0) و (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك یا فنکشنونه ورکړ شوي

a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = x^2 - 8x + 16$ c) $y = x^2 - 6x + 10$

d) $y = (x-5x)(x-1)$ e) $2x^2 - 10x + 12$ f) $y = 3x^2 + 6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2} + x + 4$ h) $y = x^2/4 + x + 2$ i) $y = 5x^2 + 45$

د ککرې کواوردینات دې پیداشي، صفرځایونه دې وګنل شي او پارابول دې انځور شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ - د لاندې تولریشنل فنکشنونه دې دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لارې وګڼل شي. فنکشنونه دګ د خلفورم باندګ بانخور شي

a) $y = f(x) = x^3 - 6x + 5; \quad x_1 = 1 , x_2 = -1$

b) $y = f(x) = (1/2)x^3 - x^2 - (13/2)x - 5; x_1 = 1/5 \quad x_2 = 5$

c) $y = f(x) = x^3 + 2x + 2x \quad ; x_1 = -2 \quad x_2 = 0,2$

d) $y = f(x) = x^4 - x^3 - 28x^2 \; 32x + 40 ; x_1 = 2 \quad x_2 = 5$

e) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 6x^2 + 5x + 6 ; x_1 = 1,5 \quad x_2 = 2$

۱۱ - مات ریشنل فنکشنونه ورکړ شي :

a) $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$ b) $y = \frac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 5x + 6}$

c) $y = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^4 - 13x^2 + 36}$ d) $y = \frac{x}{(x^3 + 6x^2 + 9x)(x^2 - 4x + 4)}$

e) $y = \frac{2x^3 - x^2 + 6x - 3}{x^2 + 3}$.

صفرځایونه دې وګڼل شي، پول. تشځایونه او د 8 ± <- x لپاره ځان نیونه!

۱۲ - لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشنونه جوړ کړی

a) $y = 2^{x-1}$, D = R , W=(0,œ) b) $y = 2^x - 1$, D = R , W =(-1,œ)

c) $y = \log_3 x$, D = (0,œ), W = R d) y = ln(x-1) , D =(1,œ), W = R

۱۳ - لاندې فنکشنونو ته مونوتوني اینتروالونه ورکړی او برخه په څپ فنکشنونه:

a) $y = (x-1)^2$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y = (x+1)^2 + 1$

d) $y = x^2 - 4x + 5$ e) $y = 4x^2$ f) $y = (1/4)x^2 + x/2 + 1$

۱۴ - تړلي فنکشنونه $y = f[h(g(x))]$ په دننه او دباندې فنکشنونو

$y = f(w) \; , w = h(z) , z = g(x)$

بیل (تجزیه) کړی(د تعریف–او ارزښتډیریوورکولو څخه کیدی شي تیرشو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = e^{(x+1)^2}$ b) $y = (e^{x+1})^2$ c) $y = \lg\sqrt{2x-3}$

d) $y = \sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y = \tan\sqrt{x-3}$ f) $y = \sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y = \sqrt{\tan x - 3}$ h) $y = \tan\sqrt{x} - 3$ i) $y = \text{Arc}\sin x^2 +$

j) $y = [\text{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y = \ln\sin\frac{x}{3}$ l) $y = \sin\ln(x+\frac{1}{3}$

m) $y = \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ n) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y = \frac{1}{\sin\sqrt{x}}$

p) $y = \text{Arc}\cot e^{2x+1}$.

۱۵ - ترلي فنكشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندې او دتنه فنكشنونو

$y = f(v),\ v = h(w), w = (g(z)),\ z = k(x)$

بیل کړی (د تعریف- او ارزښتدیري باندې تیرونه کیدی شي)

a) $y = \left[\text{Arc}\cot(e^x+1)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\text{Arc}\cot(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^2$

d) $y = \sqrt{5-\tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln(x^2-1)+1\right]$ f) $y = \log_3\left[\sqrt{2^x+1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ - د لاندې شننیزویا سپړنیز (تحلیلي) افادو لپاره تعریفدیري پیدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3-x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2-9}$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$ e) $y = \frac{1}{x^2+x-6}$ f) $y = \ln(2x+5)$

g) $y = \text{Arc}\cos(2x-4)$ h) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ i) $y = \ln x + \frac{1}{x-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریګوډیکچ یا تریګونومتري Trigonometrie

تعریفونه

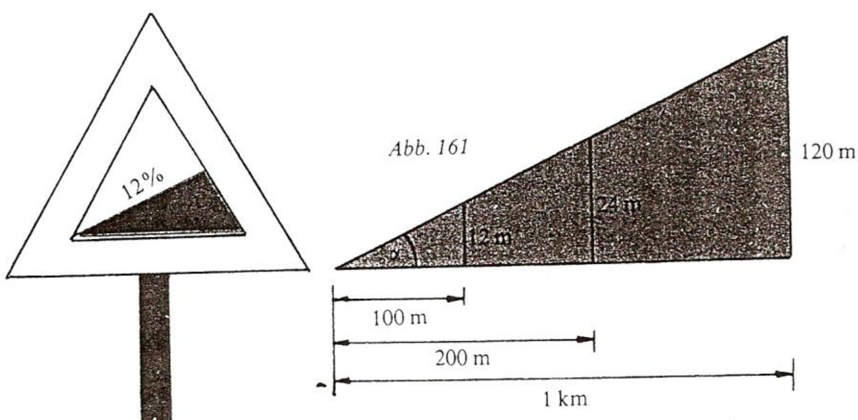
د دریګوډیکچ یا تریګونومتري دنده ده چې په هواره یا په هوا کی دریګوډي کچ کړي ، د ځانګړوبلواکو له لارې، دې په نامه تریګونومتریبلواکو. برسیره پر دې د دې په مرسته پریودیکی یعنی په منظمه فاصله پرلپسی تکراریدونکی پیښې (موږ يې تل راګرځیدوني بللی شو) څیړل کیږي.
تریګونمتري تر هیپارچ (Hipparch ۱۶۰ – ۱۲۵ له م پخوا) پوري تعقیبیدی شي، وروسته له مصري پتولیمویس Patolemäus چي په ۱۶۸ م کال کی مړ شوی او بیا له هندې او عربو شمیرپوهانو له خوا پرمختګ ورکړ شو. له پیل دا د کارونی یا عملي کیدو د ستونځو سره مخامخ وه. دریګوډیکچ خپل کارونه په استرنومي او فزیك، د ځمککچ یا اندازه کولو، د ځمك اندازونی، نقشو علم، او ابادۍ او نوتیك Nautik (د کیشتیو د لارو نقشه ویستلو پوهنه) کی مومي.
د تریګونومتري مانا یا مهموالی په ځانګړي ډول په دې ریښتینوالی یا واقعیت کی نغښتی، چې د دې په مرسته د پایکرښبلواکوالی ، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي(پام دې وي، چې دا تړاو شمیرپوهینیز مفهوم لري).

پیلبیلګه: د په مانایا مهم جګوالي یا لویدکرښو نخښه لوحی یا په بله عبارت د زوړي او پیچومی لیکتختی(دې ته دې پام وي چې ما دا کلیمی هر چیرې د زوړي او پیچومی په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چې په هغه مناسب ځای

(c) ketabton.com: The Digital Library

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي) وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟
پیچومی یا جګوال 12 % په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی یو جګوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیك ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جګوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توګه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جګوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جګوالي لیدیدونکي ۱۲۰ متره ته جګیږي. کتل کیري یا لیدل کیږي، چی په ورکړشوي پیچومي یا جګوالي کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځاننیونه و هوارې فاصلي ته تغیر خوري . د پایکرښو تناسب یا ځاننیونه تابث یا ځاي په ځاي پاتیږي او د په سلو کی ګڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جګوالي اوږدوالي معلومات نه

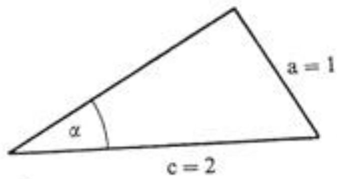


خیره۱۹۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن لپاره ما بلواک لیکلی یعنې همغه د درې له تابع څخه مې را اخستي، چې نورو ژبو کې یې بلواک ځیره ده، چې دې املې یې ځیره نمونه سمه ده اوکارونه یې ځیرونه ده.

ساینبلواک sinusfunktion: بلیکه:

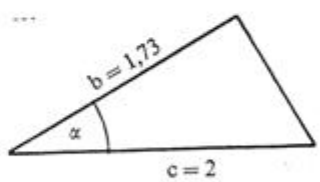


$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

ځیره ۱۹۶

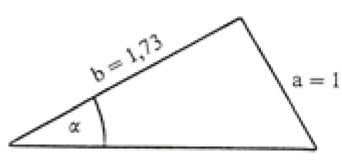
کوسایبلوک Cosinusfunktion بیلګه:



$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرته کتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$$

$\cos 30° = \frac{1,73}{2} = 0,8660$

تنجنتبلواك Tangensfunktion بیلګه:



$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروتکاتیت}}$$

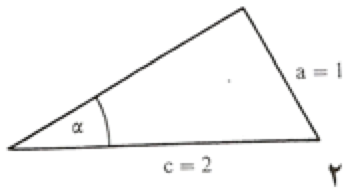
ځیره ۱۹۸

$\tan 30° = \frac{1}{1,73} = 0,577$

د کونجونو د پښونوموونې (دا ټول شته، خو بیاهم اړیین دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوسیکانسبلواك Kosekansfunktion بیلگه:



$$\operatorname{Cosec}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هیپوتینوزي}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

خیره ۲۰۱

$$\cos ec\alpha = \frac{2}{1} = 2$$

مورږ به زیات وخت لمړنی درې یا په همدې توګه لمړنی څلور بلواګه د کارونی لپاره راونیسو یا وکاروو.

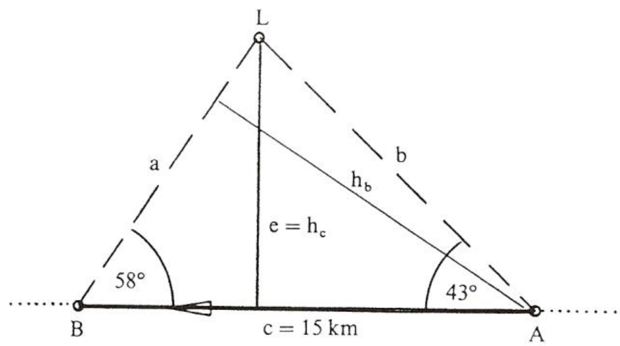
په ځوښه دریګوډیو کی شمیرنه

سره له دې چی کونجبلواکي یواځی په ولاړکونجیز دریګوډي کی باید تعریف کیږي، خو بیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جګوالی په جوړولو کی هر دریګوډی په ولاړو برخه دریګوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اخرني هنري، د مخکني مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکرښي وینا وي د پیل دریګوډي باندې لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشوو کونجونو.

پیلبیلګه
یوه کیښتی د رڼاډزکړي(کله چی کښتی له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کښتی یا یو بل څه ته که یوه کښتی وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کیږي چی له لرې ځرګندیږي او نورې خبر ورته لیږونکی په دې پوهیږي، چی څه پیښ شوي دي). دلته $\alpha = 43°$ د تګ په لور اندازه کیږي او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه تگ پایکربني $c = 15$ km او کونج $ß = 58°$ وروسته.
په دوم ډز کی کیبنتی له ډز رڼااور څخه څومره لرې ده؟
د A څخه و B ته د کیبنتی نزدې واټن e د ډزرڼااور څخه څومره لرې دی؟
په A کی له اور څخه څومره لرې وه ؟



څیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$\gamma = 180° - \alpha - ß = 79°$; $\sin ß = h_b / c$ او $\sin \gamma = h_b / b$

د h_b په لور اوبیول یا حلول او په همدې وخت کی لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin\beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin\gamma$$
$$\Rightarrow c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$
$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58°}{\sin 79°} = 12{,}959 \text{ km}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin\alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin\alpha = 12{,}959 \cdot \sin 43° = 8{,}838 \text{ km}$$

$$\sin\beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin\beta} = \frac{8{,}838}{\sin 58°} = 10{,}421 \text{ km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دریګوډي اړخونوa او b په شمیرنه کې مرستندوي لویی له منځه ځي او باور لري:

د ساین جمله :

په خوښه دریګوډي کې د اړخونو ځاننیونه یاتناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځاننیونه یا تناسب دی.

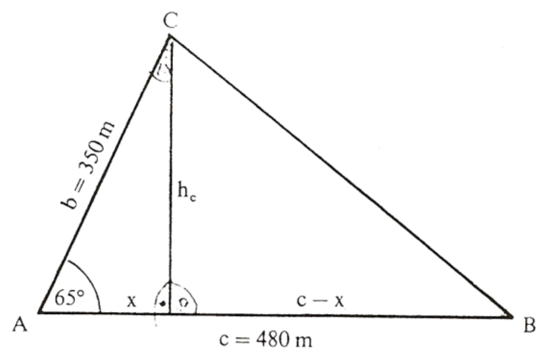
$\sin\alpha / \sin\beta = a / b$ $\sin\beta / \sin\gamma = b / c$

$\sin\gamma / \sin\alpha = c / a$

د ساین جمله په پڅ دریګوډي کې هم باورلري(تمرین دې وکتل شي). ددې سره په یوه دریګوډي کې نه موجودې ټوټې هلته شمیرل کیږي، چیرته چې دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي.
سږی بیا څه کوي که دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغوتر منځ راګیر کونج؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیلبیلګه : په یوه د ډبروسکرو کان کی دوه ستنی $b = 350\ m$ او $c = 480\ m$ دي او یو کونج $\alpha = 65°$ ښندوي.
د B څخه و C ته به د نښلولو ستن یا تیر څومره لوي وي ؟



څیره ۲۰۳

اوبی یا حل :

جګوالی یا جګی h_c کرښه $AB = c$ په دوه ټوټو x او $c-x$ ویشي.

دلته دی $x = b.\cos\alpha$ ،

څکه چی $\cos\alpha = x / b$ دی . د پیتاګوراس د جلی له مخی

لرو : $h_c^2 = b^2 - x^2$

او

$$a^2 = h_c^{\ 2} + (c-x)^2 .$$
$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb\cos\alpha$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړخونو اوږدوالی نومونی او کونج کیدی شي چي منظم بیرته راګرځیدونکی (ځیکلیکي یوناني کلیمه ده ګردی ډوله یا منظم بیرته راګرځیدونکی zyklisch) یو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

کوساین جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$$

په هر یوه دریګوټي کی د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زیاتون سره ترې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساین سره ځل.

د کوساین جمله د پیوتاګوراس د جملی عمومیت یا ټولیز ته هم وایي. (تمرین ۶ مخ دې وکتل شي)

د کونجبلواك له لارې یو بل متود، د ډیرګوټي شمیرلو لپاره ، تر څو دا په دریګوټیو ویشل کیدی شي چی پوره اړخونه او کونجونه یی څرګند وي، پیدا شو.

د دې ټولو سره د څلورګوټي یو وربرسیره بل د شمیر فرمول پیداشو:

$$A = 0,5.d_1.d_2.\sin\alpha$$

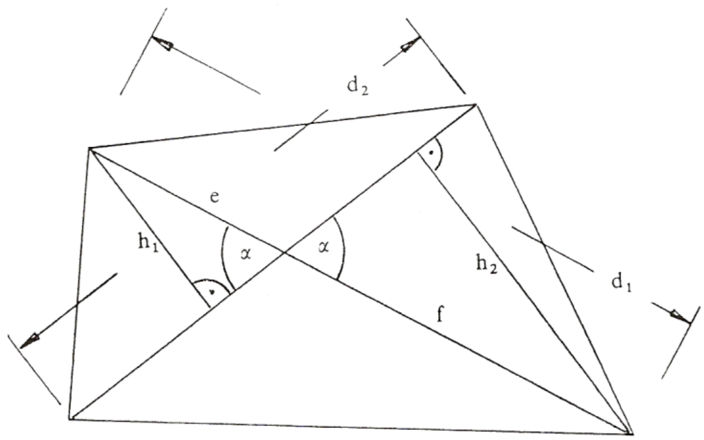
چیرته چي $\alpha = w(d_1; d_2)$ وي .

اوبی یا حل : $A=0,5(d_2h_1 + d_2h_2)$

که d_1 په e او f ټوټه یا تجزیه شي ، نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1 = e \cdot \sin\alpha$$
$$h_2 = f \cdot \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2 (e + f) \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2\, d_1 \sin\alpha$$



شیره۲۰۴

د په خوښه کونجونو تریګونومتریکي بلواکي

په اخره برخه کی مو وویل، چی کونجبلواك، نه یوائی د دننه لورته تیرو درېګوډیو لپاره ، بلکه د هغو کونجونو لپاره چی له ۹۰ درجو لوي وي ، هم هدفمند (موخور) تشریحوړ دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کړ.

دا پراختیا څنګه تصور یا د خیالوړ کیدی شي ؟

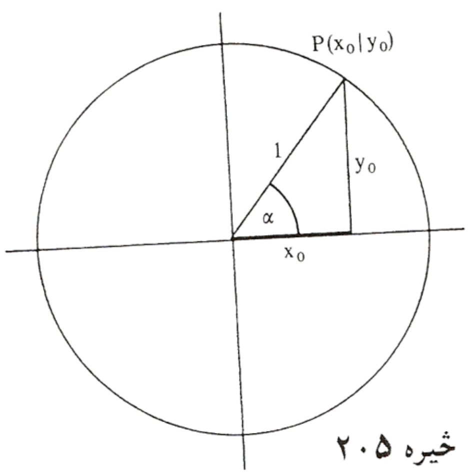
(c) ketabton.com: The Digital Library

په ښه توګه داسی کیدی شي چی په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم کی یوه ګردی ووهي چی وړانګه یي ۱ یعنی یو یوون یا واحد دی (دې ته یوونګردی ویل کیږي، ځکه چی وړانګه یی یو یوون دی) او د ګردی منځټکی او د پروت ولاړ سیستم کواوردینات سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریګوډی، چی د هغی یو کونج د ګردی ځنتریکونج دی، یعنی کونج یی د ګردې په منځ یا ځنتر پروت دی (ځیره ۲۴۳ |) کم له کمه یی یو اړخ ۱ یعنی یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریګوډی په دننه کی شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړکونجیز دریګوډي څخه پیل کوو، چی په لمړي لمړي څلورمه یا کوادرانت (Quadrant) کی پروت د ی . نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په ګردی ،د کونجټکی $P(x|_0y_0)$ په پام کی نیولو سره، باور لري:

$$\sin\alpha = y_0 / 1 = y_0 , \quad \cos\alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرښی د پریوستون او یا د سیوربدرځونو په ځیر لاس ته راځي، که موږ وړانګه د یوه ټالوهونکی مړوند په ځیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چی د محورغبرګي رڼا لاندې راشی.



ځیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریګوډي کی کیدی شي چی د پیتاګوراس جمله وکارول شي:

تریګونومتریکي پیتاګوراس:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

چیرته چی $\sin^2\alpha = \sin\alpha . \sin\alpha$ په مانا دی.

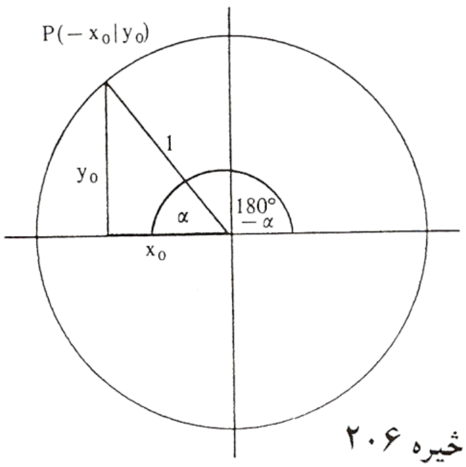
(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي ، چی پوښتنه وشي چی همدا « سیوری » بیا کله لاس ته راتلی شي.
دا حالت بیاهیك هلته لاس ته راځي، چی وړانګه د منفي x –محور سره یو کونج α جوړ کړي، یعني ځنتریکونج یی $180° - \alpha$ وي.
د « سیوروځیرو » ځخه لاس ته راځي:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

ځکه چی دا سیوری همغومره اوږد دی لکه د مخه، مګر اوس له صفر پیل مخامخ (منفی) لور ښايي.



ځیره ۲۰۶

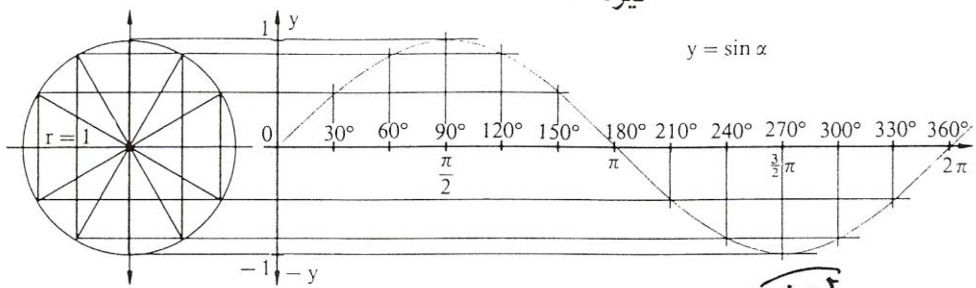
په ورته توګه لاس ته راځی :

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(360° - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

د کونج $\alpha+360°$ لپاره بیرته د سرچیني کونج اړیکی لاس ته راځي: همدا ډول د $\alpha+720$ لپاره اوهمداسی نور. په دې توګه د په خوښه کونجفنکشنونو یا کونجبلواکو لپاره د ساین او کوساین بلواك تعریف دي.
د $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ له امله (مقایسه مخ | ۵ |) دا د تنجنت بلواك لپاره هم صدق کوي. له دې امله لاندې د بلواکګرافونه لاس ته راځی

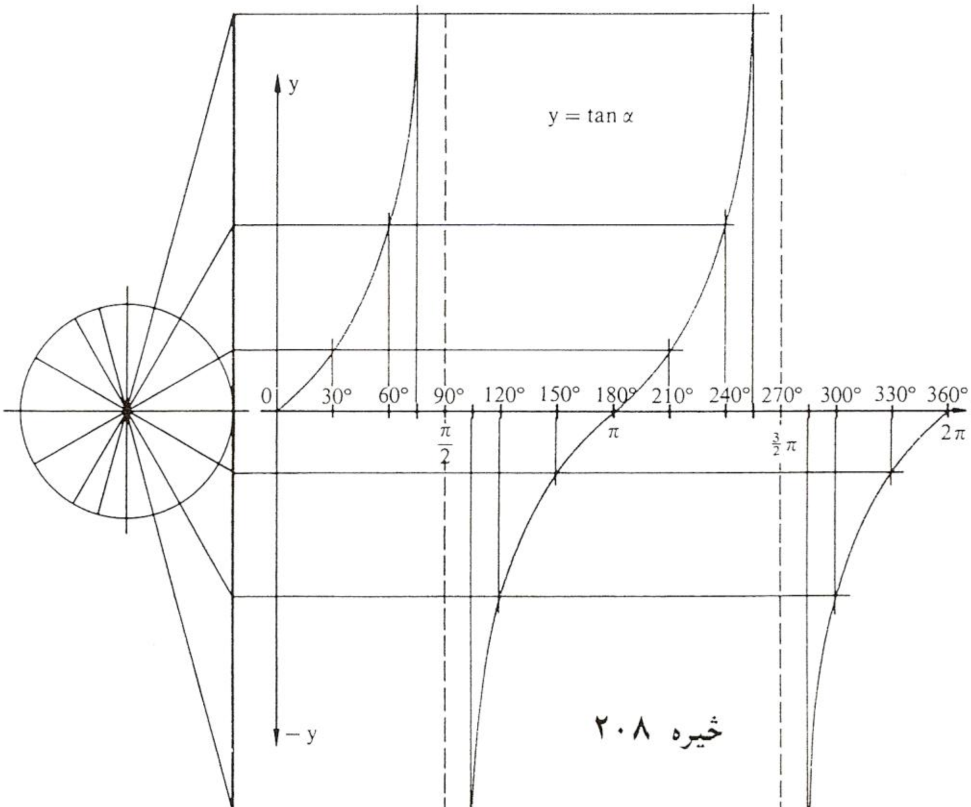
(c) ketabton.com: The Digital Library

خیره ۲۰۷



Die **Sinuskurve**: y = sin x; x ∈ ℝ; y ∈ [−1; 1]

د ساین کرښه

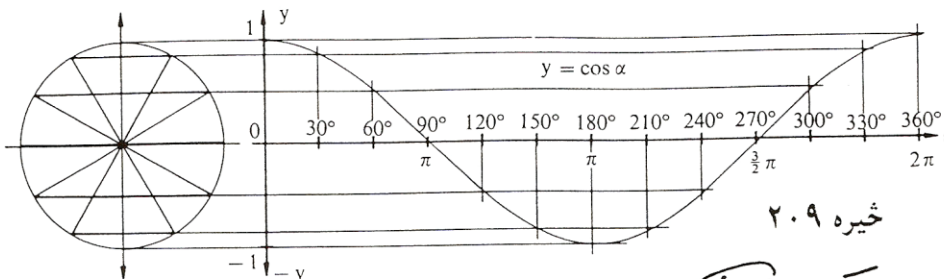


خیره ۲۰۸

Die **Tangenskurve**: $y = \tan x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

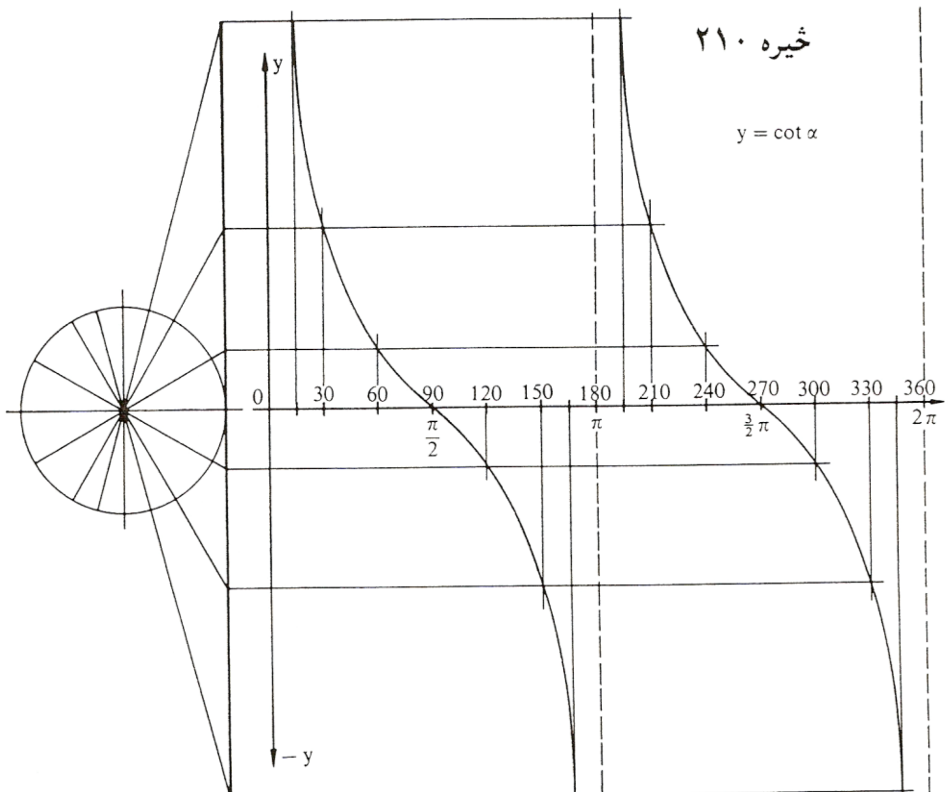
د تنجنت کرښه

(c) ketabton.com: The Digital Library



Die **Kosinuskurve**: $y = \cos x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$

دکوساین کی ۵



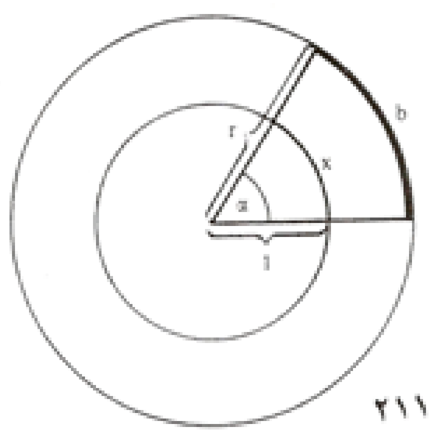
Die **Kotangenskurve**: $y = \cot x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

دکوتنجنت کی ۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

لینده اندازه (لینده کچ) Das Bogenmaß

په زره درجه د کونجکچ یا – اندازې سره بلد یو (دمخه ولیدل، چی ۳۶۰ درجی پوره گردی بنایي. هغه، چی لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده ، چی گردی په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دوارو کچیوتونو یا کچواحدونو کی ګډ دي، چی په ګښونو اندازه کیږي، بی له کچ یوون ارزښتدیری رییلګښونه دي، په داسی حال کي چی وتل ګښونه (= د تعریف ډیري ګښونه) یو یوون یا واحد (درجه یا ګون) لري. دا په کارونه یا عمل کی موږ زیات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لینديې کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.



ځیره ۲۱۱

کونج لویې په واقعیت کی یوون «راد (rad) » لري، مګر دا په کارونه یا عمل کی کیدی ونه لیکل شي یا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته مو نه راهڅوي. دا کونجکچونه چی د کونج لپاره په تریګونومتریکی بلواکو کی ابښودل کیږی (د بیلګي په توګه sin) ارګومنت (Argument تعریفډیری) بلل کیږي. په تعریفډیري کی کیدی شي چی نوې درجه ، زره درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چي په جیښمیري کی همغه مودوس په کار اچول شوي دی(راتلونکی دې وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په برخه ګرديبرخوکی وښوول شو (ګرديبرخی د مخه ځيړل شوي دي) چی هر کونج پورې يوه ګردبرخه يا ګردی لينده اړه لري، نو ټولی ګردی پورې ۳۶۰ درجی کونج يا $2\pi r$ اړه لري، يوه کونج ∝ پورې بيا يوه لينده b اړه لري، کومه چی په چاپېري کی ځانګړی همداسی نيسي لکه په پيل کی ∝ و ۳۶۰ درجو ته . دلته ګرديګڼ دی : $\pi = 3,14....$ (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

پيلبيلګه:

کونج $60° = \propto$ له ګردی د ۱۰ سانتيمتره وړانګي سره يوه په لاندې ډول ګردی لينده $b = 20\pi . 60° : 360° = 10,47$ cm غوځوي يا بيلوي. د ګردی چاپيری دی : $U = 20\pi = 62,83$ cm

همغه کونج ∝ د ۵ سانتي متره وړانګی سره ګرديلينده

$$b = 10\pi .60° : 360° = 5,236 \text{ cm}$$

غوځوي. دا ګردی لاندې چاپيری لري: $U = 10 = 31,416$ cm .

له ګردی د وړانګي $r = 1$ cm سره ددې په څېر يا برعکس کونج ګرديلينده

$$b = 2\pi . 60°: 360° = 1,047 \text{ cm}$$

غوځوي» د دې ګردي چاپيری فقط $U = 2\pi = 6,283$ دی .

له بيلګي څرګنديږي، چی لينده اندازه په همغه اندازه زياتيږي لکه وړانګه. له دې امله کيدی شي خپله شميرنه په يوونګردي د وړانګي ۱ سره رابنده يا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعريف: په يوونګردي د ګرديليندی اوږدوالي کچګڼ، چی په څنتريکونج

(c) ketabton.com: The Digital Library

باندې خیره شوي، لینده کچ بلل کیږي. لاندې شمیراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180^\circ).\pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x/\pi)\ 180^\circ = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$$

دا چې د وړانګي څرخون په پوره کونج هم وراوړیدی شي، نو له دې امله د لینده کچ لپاره په خوښه ریبلګڼونه پرېښوول شوي.

بیلګی :

$$\alpha = 1^\circ \Leftrightarrow x = \frac{1^\circ}{180^\circ}\pi = 0{,}0175\ (rad)$$

$$\alpha = 30^\circ \Leftrightarrow x = \frac{30^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236$$

$$\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow x = \frac{45^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854$$

$$\alpha = 60^\circ \Leftrightarrow x = \frac{60^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{3} = 1{,}0472$$

$$\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow x = \frac{90^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708$$

$$\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{180^\circ}\pi = \pi = 3{,}1416$$

$$\alpha = 360^\circ \Leftrightarrow x = \frac{360^\circ}{180^\circ}\pi = 2\pi = 6{,}2832$$

$$\alpha = 720^\circ \Leftrightarrow x = \frac{720^\circ}{360^\circ}\pi = 4\pi = 12{,}5664 \quad \text{usw.;}$$

$$\alpha = -75^\circ \Leftrightarrow x = \frac{-75^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{-5}{12}\pi = -1{,}309$$

ارکوسبلواکي Arcusfunkrionen

زیات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کیږي ، چي لکه په ورکړشوو کرښځاننیونو راپیداشوې کونجونه څنګه معلومیږي یا څنګه راڅرګندیږی یا بهتره څنګه ځانونه نیسی. ددې لپاره چی دا پوښتنه ځواب شي، باید امکانات ولټول شي، چی د کونجبلواك ارزښتونو څخه څنګه بیرته کونج یا په همدې توګه د هغه تعریفهیري ته، په لینده کچ راتلی شو. دا کونجبلواك پریودیکی یا تل بیرته راګرځیدونکي بلواك دی، دا په دې مانا ، چي د بلواك ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونولپاره یا .

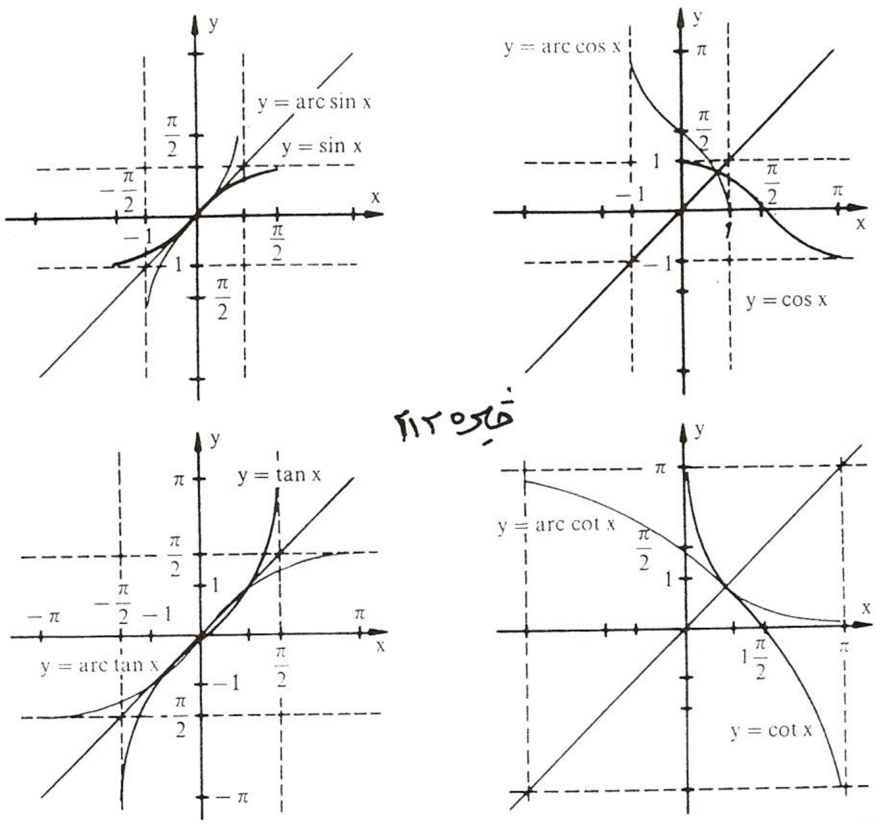
(c) ketabton.com: The Digital Library

مختلفو واټونو وروسته، بلواک ارزښتونه تکراریږي. د دې لپاره چې په ځټکیدنه ممکن شي، نو باید د خپل تعریف ډیرې په یوه برخه ډیرې رابند یا محدود شي.

تعریف : د یوه (رابند یا محدود) تریگونومتریکي بلواک په ځټ بلواکونه ارکوس بلواک Arcusfunktion بلل کیږي یا ځیکلومتریکي بلواک (لاتین ارکوس: Arcus = Bogen = لینده)

دلته (arc sin(x لوستل کیږي «د x ارکوس ساین. د کونجبلواک تعریفډیرې دلته اړونده ارکوسبلواک ارزښتډیرې دی او په ځټ ارگومنت یا تعریفډیرې دلته تل یو ریلگڼ دی.

Trigonometrische Funktion تریگونومتریکي بلواک	Arcusfunktion ارکوسبلواک
f: $x \mapsto \sin(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle\| -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arcsin(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle\| -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \mapsto \cos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| 0 \le x \le \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arccos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \{y \| 0 \le y \le \pi\}$
f: $x \mapsto \tan(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle\| -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -\infty < y < \infty\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arctan(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle\| -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \to \cot(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| 0 < x < \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -\infty < x < \infty\}$	f^{-1}: $x \to \text{arccot}(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \{y \| 0 < y < \pi\}$



شکل ۲۱۲

Beispiele: بېلګې:

1. arcsin (0,8) = 0,9273 (rad) = 53,13°

2. arccos (1) = 0 (rad) = 0°

3. arctan (−100) = −1,5608 (rad) = −89,43°

4. arccot (−70) = −0,0143 (rad) = −0,82°

۵ – دا چې کونجبلواك و ارکوسبلاك يو د بل په څټ بلواك دي نو باور لري·

$\sin(\arcsin(y)) = y; \quad \arcsin(\sin(x)) = x$

$\cos(\arccos(y)) = y; \quad \arccos(\cos(x)) = x$

$\tan(\arctan(y)) = y; \quad \arctan(\tan(x)) = x$

$\cot(\text{arccot}(y)) = y; \quad \text{arccot}(\cot(x)) = x$

يعنې په لاندې توګه

$\sin(\arcsin(0{,}4)) = \sin(23{,}58°) = 0{,}4$

$\arccos(\cos(\pi/3)) = \arccos(0{,}5) = 1{,}0472$

$\tan(\arctan(-40)) = \tan(-88{,}5679°) = -39{,}9999$

$\text{arccot}(\cot(60°)) = \text{arccot}(0{,}5774) = 1{,}0472$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جبشميري کاروني يا استعمال لپاره

داچي پخوا معمول جدولونه د بلواك تعريفېدېري او ارزښتېدېري شميرلو لپاره له كاره غورځول شوي دي او دنده يې ايلكترونيكي ماشينونو نيولې ده، غواړو چي د جبشميري استعمال په هكله هم څه ووايو
كوركمپيوتر زيات وخت داسې فنكشنونه يا بلواكي لري يا وظيفې په كلك اختيار كې لري، چي د درجي اوړون په لينده كچ او په څپ كوي، مګر شميردرځ په توګه بايد د شميرونكې په پروګرام كې ځاى په ځاي شوى وي.
پوره اسانتياوې او زياته كارونه د جبشميرې په غاړه پرته ده، دلته دې توكمې د < .... > سره په نخښه شي:
په قاعده كې دريې بلواك وركړشوي دي : < sin > ; < cos > ; < cot > كوتنجنت بيا داسې شميرلكيدی شي، د < tan><1/x > . د < INV > – توكمي سره سړی اركوسبلواك ته راځي: نو < INV><sin > اركوس ساين دی. په عمومي توګه كونج – بي پروا كه په لينده كچ او يا درجه كچ وركړ شوي وي – بايد د فنكشن له مخه وركړ.

بيلګي

١ لاندې جدول همغه د كاروني يا اتعمال لپاره د جبشميري چمتووالی ښاى :

Winkelmaß کونجکچ	TR-Modus په تخنونه	Beispiel بېلګه
Altgrad زړه درجه Neugrad نوې درجه Bogenmaß لېنده کچ	DEG GRAD RAD	$\sin 45° = 0{,}7071$ $\sin 50^{g} = 0{,}7071$ $\sin \frac{\pi}{4} = 0{,}7071$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
sin 45°	45⟨sin⟩	0.707106781	DEG
$\sin \frac{\pi}{6}$	⟨π⟩⟨:⟩6⟨sin⟩	0,5	RAD
cot 30°	30⟨tan⟩⟨1/x⟩	1.732050808	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	60(°)	DEG
arccos 0,5	0,5⟨INV⟩⟨cos⟩	$1{,}047 = \frac{\pi}{3}$	RAD
arccot 2	2⟨1/x⟩⟨INV⟩⟨tan⟩	26.56505118°	DEG
sin 220^g	220⟨sin⟩	−0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چی جبشمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه») د زاړه – یا نوي درجی همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جبشمیریو مودلونو سره د تکمی <DRG> خخه لاس ته راځی یا د بیلګي په توګه < MODE >.

د ورکړشوي درجه ګڼ اوړون په لینده کچ د < <-- DRG > سره سورت نیسي. بیرته یا په ختړ سړی داسی راځي- لکه چی لرل مو- د <INV> – تکمی سره.

بیلګی

60°	⟨DRG⟩	60(rad)
60	⟨DRG⟩	60(grad)
60°	⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨DRG →⟩	60°
60°	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	60°

دلته ګراد نښونه (gard) نوی درجه ده یعنی ګون(gon).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځنی جشمیري په دې برسیره نور زیات امکانات هم لري ، نتیجی یی په ګراد دقیقی، ثانیي اویا لسیز سیستم ورکړ شوي دي. بدلون بیا د تکمی < DMS-Dd> سره صورت نیسی:

26.75° 30°15′	⟨inv⟩⟨DMS − Dd⟩ ⟨DMS − Dd⟩	26°45′ 30.25°

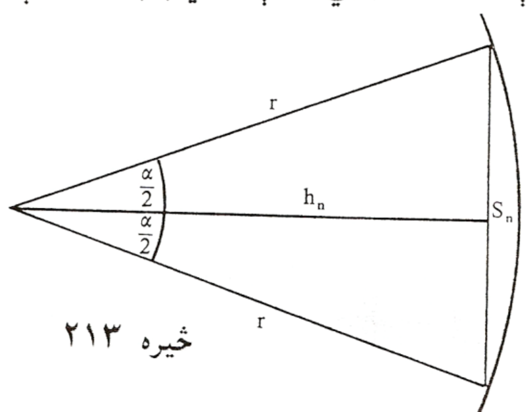
د " 30° 15" " ورکړه کیدی شي د جبشمیري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جبشمیری د لاس کتاب څخه ګټه واخستل شي (یادونه: زه پوهیږم چی داسی شیان موږ متآسفانه په خپل هیواد کي نه لرو ، خو په هر صورت یي لیکل ضرور دي، دا پرمختګ موږ هم خپل شاته نه شي پریښوولی)

پیلبیلګه: دلته دې S_n د یوه منظم n– ګوډي د اړخ اوږدوالی وي، چی په یوه ګردی کی چی وړانګه یی r = 5 cm ده، راګیر دی.

الف) وښایي چی

$$S_n = 2r \cdot \sin(180^\circ : n)$$

ب) د یوه داسی n– ګوډي چاپیری U_n وشمیری ، چی n = 8;16;32;128 وي، او په نږدې توګه یا تقریبي د دې ګردي چاپیری د دې وړانګي r سره وښایی .



خیره ۲۱۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په همدې ډول n– ګوډی له هوارو A_n څخه په نږدې توګه یا تقریبي د ګردی ــــ هواره A وښایي .

اوبی (حل : هر n– ګوډی کیدی شي په n مساوي دریګوډیو ټوټه کړی شي.
د هغو د ځینتریکونج ∝ لپاره باور لري $\alpha = 360° / n$. د جګی یا جګوالی h_c
د کښلو سره په هر مساوي پښیز دریګوډي کي ولاړکونجیزې نیایی د څنتریکونج
یا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\alpha}{2} = 360° / 2n = 180° / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n /2) / r = \sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow S_n = 2r . \sin\frac{\alpha}{2} = 2r . \sin(180° / n)$$

b) $U = n.S_n = 2r.n.\sin (180°/n) = 10n.\sin (180° / n)$

د ارزښتشمیرنو د غلطی مخنیوی لپاره همدفمند یا موخه ور دی، که
په دغه همغه لړیپرلپسی تکمی وکارول شي یا استعمال شي .

180° ⟨STO⟩ ⟨:⟩ 8 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 8 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 30.614675
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 16 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 16 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.214452
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 32 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 32 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.365485
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 64 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 64 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.403312
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 128 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 128 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.412773

پ) د ډیرګوډي هواره د دریګوډیو هوارو د یوځایوالی څخه لاس ته راځی
د هر دریګوډي هواره ده: $0,5 .S_n . h_n$. د

$$h_n = r.\cos(180° / n)$$

او

$$S_n = 2r . \sin (180°/ n)$$

له امله داسی دی

$$A = n \cdot 0,5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cos\left(\frac{180°}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0,5 \sin\left(\frac{360°}{n}\right)$$

له دې سره د نرې [illegible]

360° ⟨STO⟩ ⟨:⟩ 8 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 8 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 70.710678
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 16 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 16 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 76.536686
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 32 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 32 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.036129
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 64 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 64 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.413712
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 128 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 128 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.508279

د يوه جشميرې سره ، چې له يوې زخيرې زياتى ولري ، لکه چې پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسيره نورې ثابتي هم زخيره کيدی شي» په يوه منظم پروګرامور ماشين سره کيدي شي چې د دا ډول شميرنو لپاره د ګوډونو ګڼ ځخه ت شو يا د ګوډونو ګڼ باند ې صرفنظر وشي .

د تريګونومتريکي بلواکو خويونه

دا چې کونجکچ په درجه کچ او هم په لينده کچ ورکول کيدی شي، کيدی شي چې يوه کونج بلواك تعريفېدېری يا α او يا x وي. ددې لپاره چې د يوه بلواك خوي باندې ټينګار وکړو، بايد په لاندې په لينده کچ تکيه وکړو.
د لاندې خويونو لمړی ډله يوائې له تعريفمساوات (د مخه راغلی) او د پيتاګوراس له جملی لاس ته راځي (د مخه لوستل شوې) لاندې صدق کوي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پرته کاتیت}} = \frac{\dfrac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}}{\dfrac{\text{پرته کاتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دي لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \iff \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسیره پر دي لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دي سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x \; ; \quad 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تریګونومتریکي بلواکو کی هیله ده ، چی د پوتنځ لیکدود په پام کی ونیسی. په لاندي پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې gegeben ورکړی او gesucht غوښتونی یا پلټونی په مانا دي

gegeben ورکړی / gesucht غوښتونې	sin x	cos x	tan x	cot x
sin x	$\sin x$	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
cos x	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\frac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
tan x	$\pm\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cot x}$
cot x	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$	$\cot x$

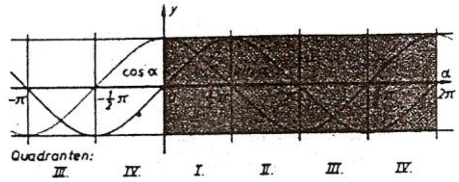
لکه چې د مخه مو په ګوته کړل، کیدی شي چې تریګونومتریکي بلواک د مختلفو ګونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواک ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توګه یا په کلکه توګه لاس ته راوړی شو

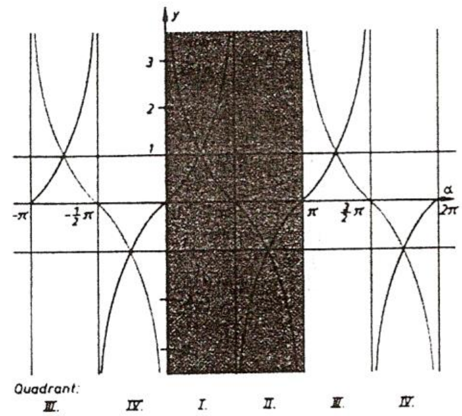
تعریف : تریګونومتریکي بلواک ټول پریودیکي یعني بیرته راګرځیدونکی دی، دا په دي مانا ، چې د بلواک ارزښتونه په منظمو واټنونو کی تکراریږي. په دې د ساین بلواک او د کوساین بلواک راګرځیدنه (یا ۳۶۰ درجې) لري،
کوتنجنتبلواک راګرځیدنه (یا ۱۸۰ درجې (°180)) لري.

$$\left.\begin{aligned}\sin(x \pm 2k\pi) &= \sin x\\ \tan(x \pm k\pi) &= \tan x\end{aligned}\right\}\quad k \in N$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(x \pm 2k\pi) &= \cos x\\ \cot(x \pm k\pi) &= \cot x\end{aligned}\right\}\quad k \in N$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





خیره ۲۱۴

د ساین - او کوساین فنکشن
پریود یا تن راګرځېدنه

د تنجنت او کوتنجنت فنکشن پریود
بېلګې :

$\sin 50°$	$= \sin(50° + 360°)$	$= \sin(50° - 720°)$	$= 0{,}76604$	
$\cos -30°$	$= \cos(-30° - 360°)$	$= \cos(-30° + 1080°)$	$= 0{,}86603$	
$\tan 2{,}5$	$= \tan(2{,}5 - \pi)$	$= \tan(2{,}5 + 5\pi)$	$= -0{,}74702$	
$\cot 10$	$= \cot(10 + \pi)$	$= \cot(10 - \pi)$	$= 1{,}54235$	
$\sin 35°$	$= \sin(180° - 35°)$	$= -\sin(180° + 35°)$	$= -\sin(360° - 35°)$	$= 0{,}573576$
$\cos 35°$	$= -\cos 145°$	$= -\cos 215°$	$= \cos 325°$	$= 0{,}81952$
$\tan 0{,}6109$	$= -\tan 2{,}5307$	$= \tan 3{,}7525$	$= -\tan 5{,}6723$	$= 0{,}700208$
$\cot 0{,}6109$	$= -\cot 2{,}5307$	$= \cot 3{,}7525$	$= -\cot 5{,}6723$	$= 1{,}428042$

که د فنکشن ګراف ته په ځیر شو نو په دې برسیره په ټینګه روښانیږي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	
$\sin x =$	$\sin(\pi - x) =$	$-\sin(\pi + x) =$	$-\sin(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\cos x =$	$-\cos(\pi - x) =$	$-\cos(\pi + x) =$	$\cos(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\tan x =$	$-\tan(\pi - x) =$	$\tan(\pi + x) =$	$-\tan(2\pi - x)$	(Abb. 180)
$\cot x =$	$-\cot(\pi - x) =$	$\cot(\pi + x) =$	$-\cot(2\pi - x)$	(Abb. 180)

بیلګی:

	α	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$360° - \alpha$
	35°	145°	215°	325°
sin	0,573576	0,573576	– 0,573576	– 0,573576
cos	0,819152	– 0,819152	– 0,819152	0,819152
tan	0,700208	– 0,700208	0,700208	– 0,700208
cot	1,428148	– 1,428148	1,428148	– 1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځی د جبشمیرې یا کمپیوتر څخه کار اخستل کیږي ، هدفمند بولو، چی یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin x bzw. sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos x bzw. cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
tan x bzw. tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	–	0
cot x bzw. cot α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

د دغه سطر د هغه اړدل په مانا دی او ییدی تیری یا څرګوی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې جدول څخه کيدی شي په خيال کی يا ګوماني لاس ته راوړی شو

sinx = cos (/2 -x)   cos x = sin (/2 -x)
tan x = cot (/2 - x)   cot x = tan (/2 -x)

دا ګومان کيدی شي په ولاړکونجيز دريګوډي کي د تعريف په مرسته په ساده توګه وښوول شي. :

sin = a / c او cos ß = a / c

د − ß = 90° له امله لاس ته راځي :

sin = cos (90° -)

په ورته توګه نور ې غوښتني هم لاس
ته راتلی شي.

دا له څيرو څخه هم لاس ته راوړل کيدی شي، څکه د ساين او کوساين بلواکو يا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنت بلواکو ګرافونه د x = /2 کرښی ته يو بل سره محورسيومتري څغلي :

له څيرو او بيلګو څخه په دې برسيره لاس ته راځي:

تعريف: د کوساين بلواك جفت دی ، لرو:

cos (x) = cos (-x)

ساين − ، تنجنت − او کوتنجنت بلواك ناجفت دي» د دوي لپاره باور لري:

sin (x) = -sin(-x), tan(x) = -tan(-x) ; cot (x) = -cot(-x)

يادونه : په دې نلواکو کي کيدی شي چی x له نوکانو دباندې هم وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگی:

$$\sin 60° = -\sin(-60°) = 0,86603$$
$$\cos 0,75 \quad = \cos(-0,75 \quad) = -0,70711$$
$$\tan 150° = -\tan(-150°) = -0,57735$$
$$\cot 1,3 = -\cot(-1,3) = o,27762$$

د زیاتون قضیي یا تیورمونه

دا چي کونجبلواك لاینې نه دي(د فنکشنګراف کرښه نه ده،بلکه کږه ده) ، نو ډبل تعریفدیري پورې ساده ډبل بلواك ارزښت اړه نه لري.
لکه

$\sin 30° = 0,5 \quad \sin 90° = 1 \quad \sin 180° = 0$

د داسی په نامه زیاتونمسئلی په مرسته ممکن کیږي، چی د بلواك ارزښت د کونج په دوه برابرولو یا په همدې ډول د دوه کونجونو یو په بل زیاتولو د یوګونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابي کړی شو.

بیلګی :

1 . $\sin(x + y) = \sin x .\cos y + \cos x . \sin y$

1' . $\sin(x - y) = \sin x . \cos y - \cos x . \sin y$

2 . $\cos(x + y) \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$

2 '. $cis(x - y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y$

3 . $\sin 2x = 2.\sin x . \cos x$

4 . $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

6. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

7. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 - \cos x)}$

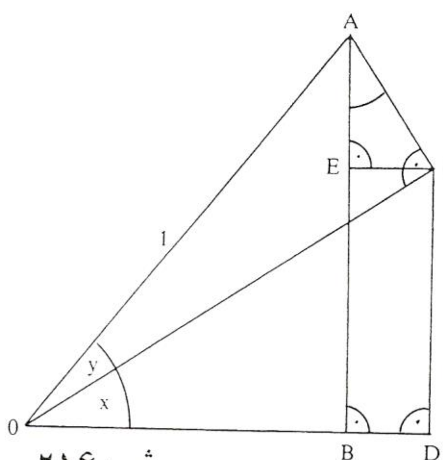
8. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 + \cos x)}$

9. $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

9′. $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

10. $\cot(x + y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$ mit $\cot x \neq -\cot y$

10′. $\cot(x - y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y}$ mit $\cot x \neq \cot y$



خیره ۲۱۶

1. und **2.**:

$|OA| = 1$

$|AC| = \sin y; \quad |OC| = \cos y$

$|AB| = \sin(x + y); \quad |OB| = \cos(x + y)$

$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$

$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

برسېره پر دې لرو :

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$
$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

د ګای په ځای کولو څخه ثبوت نه په لاس راځي

$$\sin(x + y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1'. **2'.:**

3. ı **4.:** $x = y$. ګای په ځای کړه

5.: Setze $z + t = x;\ z - t = y \Rightarrow z = \frac{x + y}{2};\ t = \frac{x - y}{2}$ کېږده

t $\sin x = \sin(z + t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$ پس لرو

$$= \sin\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2} + \cos\frac{x + y}{2}\sin\frac{x - y}{2}$$

$$\sin y = \sin(z - t) = \sin\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2} - \cos\frac{x + y}{2}\sin\frac{x - y}{2}$$ همداسې

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2}$$

6. ثبوت نه په ورته توګه څخه راځي

7.: $x = y = z/2$ کېږده

$$\Rightarrow \cos(x + y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2\frac{z}{2} - \cos z \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$$

دوهمه ثبوتي له لارې ثبوت نه لرو

8.: $(*)\ \sin^2\frac{z}{2}$ durch $1 - \cos^2\frac{z}{2}$. په (*) کې و لیکه یا کېږده

9 - 10: دا ډېر اسانه د ۱ او ۲ او ښجنت د تعلیق څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بلواك يا فنكشن $y = a \cdot \sin(bx+c) + d$

لكه چي په پيل كى مو وويل په طبيعت او تخنيك كي ډيرې پيښي شته دى چي تل بيرته راكرځي يا لنډ: راګرځي، يعني پريوديكي دي. د دې د تشريح لپاره په خپل سوچه يا خالصه بڼه تل د ساين بلواك بسيا نه كوي.
دا زيات علتونه لري : لمړى د ساينبلواك د ١- او ١ ترمنځ ارزښت نيسي، له بلي لور داواقعي د كونج په واك كى نه دي بلكه د وخت په واك كي دي د يوې راګرځيدنى سره، چى دا په ساده توګه د 2 په ډول نه شي رانيولكيدى. له دې امله د ساين بلواك د دې كارونو د روښانوولو لپاره بايد موډيفيځير شي يا يى بڼه واوړي. دا بڼه اوړون او د هغى تاثير په لاندې ليدنه كى راټول شويدي، ګراف يى ورزياتى ځيرونى لپاره دى. په ورته ډول د نورو كونجبلواكو لپاره باور لري په عمل كي مګر يواځي د ساينبلواك (په همدې توګه د هغي مخامخ د كوساين بلواك چي په $\pi/2$ سره راكښل شوى وي) د مانا ډك دي. (لوستل: له ښي لور څخه)

بلواك	تاثير	دكاروني ساحه	بيلګى
$y = \sin(x)$		ټولى تلبيرته راګرځيدونى تعامولونه	څېره ۲۱۷
$y = \sin(x) + d$	د Y - لور پاندې راكښنه	د يوه مساوي او بدل شپيالونګ يو په بل پرلوټل	څېره ۲۱۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

څېره ۲۱۹	په بدل پوښتنا جریان کې د پوښتنا او ښیالونک تحرک دوښانونه	د فاز تغییر یا ځای بدلون	$y = \sin(x+c)$
څېره ۳۲۰	دیوه پندول خوځېدنه	د امپلیتود د ځای بدلون فاکتور - 1 د 180° فاز ځای بدلون دی	$y = a \cdot \sin(x)$
څېره ۲۲۱	دیو بنسټیزو ځړېدو څېرونه په یوه وخت دا دېنه ره دهغې پورته لېمزه له تکلې په د ځوزنګ الو په او ازولوکی	د پریود تغییر یا بدلون $b>1$ سرعت $0<b<1$ په کراره کېدل $b<0$ په شا ګرځېدنه له محور دی	$y = \sin(bx)$
څېره ۲۲۲	کمپلکس پریودیک جریان یا عمل	عمومي حالت	$y = a \cdot \sin(bx+c)+d$

تمرینونه

۱ – د لاندې ورکړې سره څېره بله کړی

$4°6' = 4{,}1°$; $10°, 5' = 10°30$

a) $6{,}75° =$ b = $120{,}48° =$ c) $-75{,}65° =$

d) $52°16' =$ e) $97°13' =$ f) $44°44'44'' =$

۲ – په درجه کچ ي ولیکی

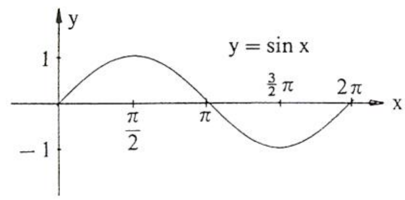
a) $x = \pi/3$, b) $x = -\pi/4$, c) $x\,(2/3)\pi$

d) $x = 4$ e) $x = -3$ f) $x = 4{,}7$

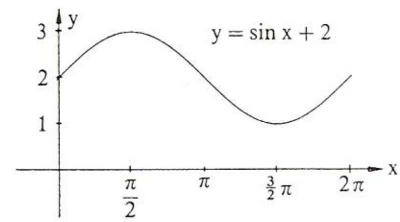
۳ – په لینده کچ یی ولیکي

a) $15°$ b) $-60°$ c) $540°$ d) $20°15'$ e) $15{,}75°$

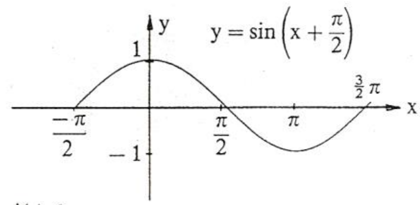
(c) ketabton.com: The Digital Library



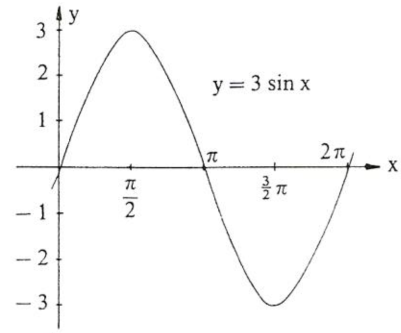
خیره ۲۱۷



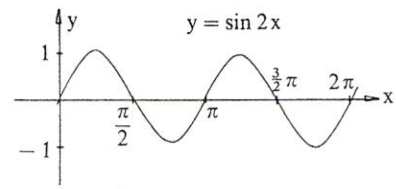
خیره ۲۱۸



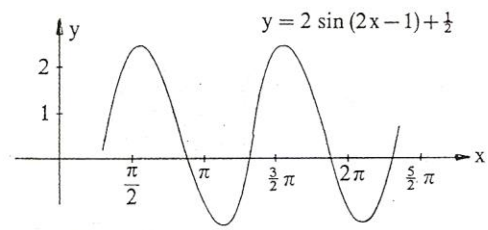
خیره ۲۱۹



خیره ۲۲۰



خیره ۲۲۱



خیره ۲۲۲

د دې بلواک ګراف د ساین کږې $y = \sin x$ څخه لکه چې ګورو لاس ته راځي:

۱ – د ارزښت دوه ځله کیدل

۲ – د نیمې راګرځید اوږدوالی باندې پرسیدنه

۳ – په یوه یوون د ښي لور ته راکښنه

۴ – په $1/2$ پورته لورته 100% راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ - وټاکی

a) sin20°　b) sin(-30°)　c) sin 172°　d) din1°4'

e) cos 35°　f) cos 380°　g) cos(-27°)　h) cos47,9°

i) tan 11°　k) tan (-15°)　l) tan 33,33°　m) tan 13°13'

n) cot 870°　o) cot (-11°)　p) cot 14°14'

q) cot (-2°2')

r) sin α =0,8　s) cos α = 0,9　t) tan α = 2,5

u) cot α =-1　v) sin φ = 0,3　w) cos φ = -0,13

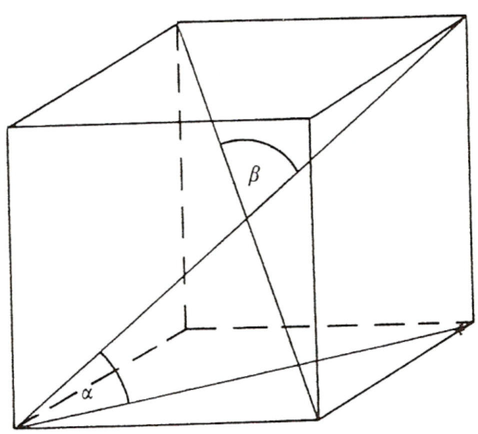
x) tan φ = -4　y) cot φ = 0,3　z) arcsin(x) = π /2

۵ - په یوه ولاړکونجیز دریګوړي کی لرو $\gamma = 90°$ او په دي برسیره :

a) a = 7 cm; b = 6cm

b) a = 16cm; = 66°45'

c) c = 5cm; a = 3cm



خیره ۲۲۳

پاتی توټی وشمیری

۶ - په مساوي پښیز دریګوړي کي (a = پښه ده) دی

a) a= 10cm ; α =80°40'

b) a= 12 cm ; h = 8cm

c) ß = 40°; a = 7cm

پاتی توټي وشمیري

۷ - د یوه پڅکونجیز (α > 90°) دریګوړي لپاره ساین وشمیری

۸ الف) کوساین د یوه پڅ کونجیز دریګوړي لپاره وشمیری (α > 90°)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟

۹ - په یوه مکعب کی د یوه هوا نیمي او بنستهواري ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

څیره .د دواړو هوا یا فضا یا بدن نیمیو ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

۱۰ - د دوه ګردیو وړانګی

$r_1 = 5\ cm \quad , r_2 = 4\ cm$

دي او همداسی د منځټکو واټن $|M_1M_2| = 8cm$ ورکړ شوی دی.

دد دواړو ګردیو د تماس

مماسونو غوڅکونجی وټاکی

او د کړي غوڅونی اوږدوالی .

۱۱ - په یوه دریګوډي کی د یوه

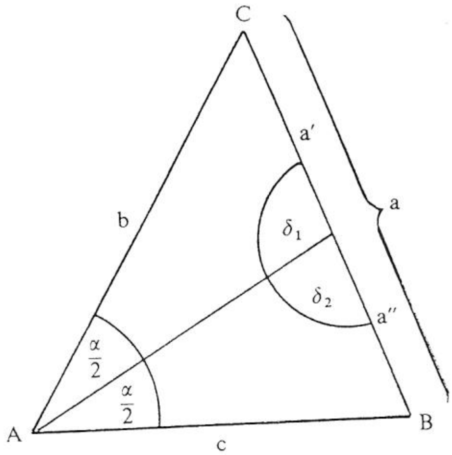
کونجنیمی مخامخ اړخ په داسی

ځان نیونه یا تناسب غوڅوي لکه

په دې پرتي خواوې. دا غوښتنه د

ساین جملی په مرسته حل

(اوبی) کړی(څیره۲۲۴).



څیره ۲۲۴

۱۲ - که یوه بار ځاي ته،

چي ۱،۵۰ متره جګ دی،

یوه زینه ورجګه شي

میلانکونج ‹ دې زیات ترزیات 33° وي، زینه دې څومره لویه وي؟

۱۳ - الف)د یوې پورته ختلی کوڅي جګوالي توپیردې څومره وي، که دا

کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او 12% جګه وي؟

ب) د ۱۵۴۰ پرتی لارې وهلو وروسته د جګوالي توپیر څومره دی ؟

پ) د یوه زوړندي پټیلار، چی ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کی څومره

لوي دی ، که دا د جګوالی توپیر ۵۰۰ متره ولري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴ – یو د اوبو بیلر (کتله = ۱۰۰ کیلوګرامه) په یوه دړه پورته خیژول کیږي، چی میلانکونج $\alpha = 25°$ لري. د وزنزور په زوړندزور تختی سره غبرګ او نورمال یعنی ولاړ زور (د فشارزور) ولاړ تجزیه یا توټه کیږي، دواړه زوره څومره لوي دی ؟ (۱ کیلو ګرام = ۹ ، ۸۱ نیوټن $1\ kg = 9{,}81N$).

۱۵ – یو تلفونستن په څلور رسیو، چی هره یوه یی **۵۳** متره اوږده ده، درول کیږي. درسیو میلانکونج $60°$ دی په پښه باندې په کوم جګوالي باید رسی وړلی شي ؟

۱۶ – د یوې **۵۳** متره جګي ونی سیوری **۵** ، ۱۲ متره اوږد دی. په ځمکه لمروړانګي په کوم جګوالی یوبل سره مخمامخ کیږي.؟

۱۷ – د یوه **۵** متره جګ کتونټکي (لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کیږي چی جګیدونکوج یی $\alpha = 18{,}5°$ او پښیټکی یی $\beta = 8°$ لوید کونج ، برج څومره جګ دی ؟ د لیدټکي څخه یی پروت لریوالی څومره دی ؟

۱۸ – الف) د پیزا (Pisa) کوږ برج ۴۷ متره جګ دی، او څوکه یی د پښی ټکي څخه ۵۰ ،۴ متره ور اوړي. دا برج څومره مایل دی ؟

ب) د یوه جومات برج چی ۱۵۰ متره جګ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په ځمکي ټکي (یعنی د سترګي جګوالی د برج بنسټټکي سره برابر وي)، څخه وکتل شي، چی د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟

پ) د ۵، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کیږي

– که جګوالی یی ۱۶۰ متره وي؟

– که جګوالی یي ۱۳۷ متره وي ؟

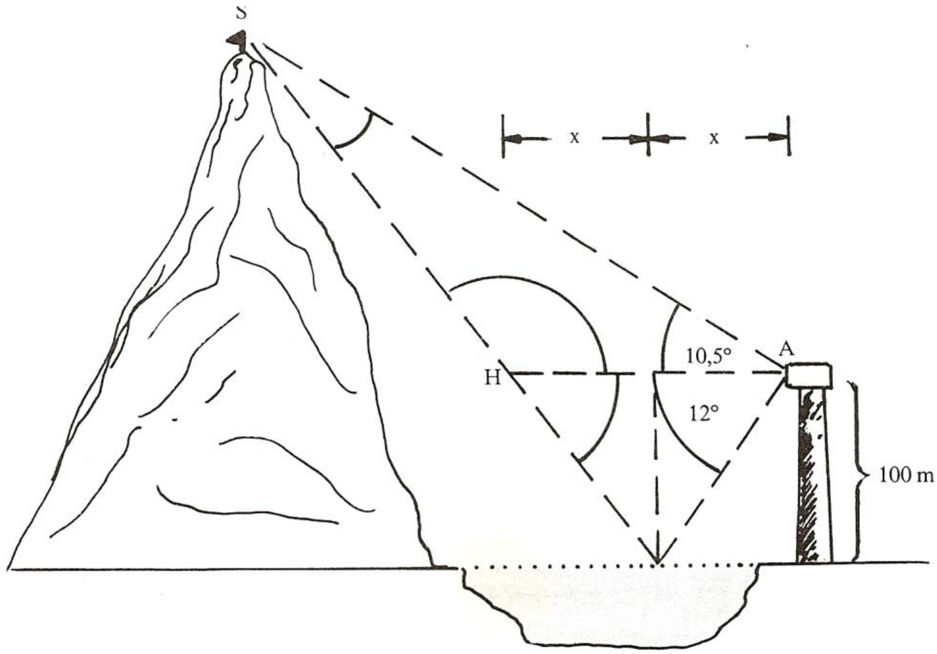
ت) د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې

– د بل برج څوکه ښکاریږي چی جګوالی یي ۱۴۳ متره وي ؟

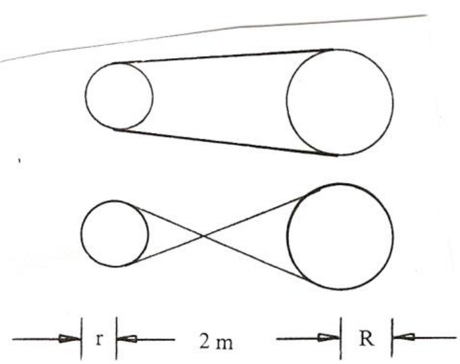
(c) ketabton.com: The Digital Library

–د پاریس د ایفل برج ښکاریږي چی جګوالی یي ۳۰۰ متره دی ؟
۱۹ – د ښیپپس اهرام(CHeopspyramide) ۱۳۷ متره جګوالی لري او د بنسټ
د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري
الف) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟
ب) د څنګهوارې دریواړه دننی کونجونه څومره لوي دي؟
۲۰ – یو ژوری یا قبر –۸ ، ۱ متره ژور دی، بنسټسور یی ۵ ، ۲ متره دی، د پورته
لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی
الف) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی څومره پراخ دی؟
ب) که ۱۰ متره اوږد وي، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جګوالی
یی ۵۰ ، ۱ متره وي؟
۲۱ – یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جګوالی لري د
بحیرې لور ته 14° میلان لري، د دننه لور ته 28° میلان لري. د ډنډ بنسټ
څومره سور لري؟ د هغی د نیمی هواره څومره ده؟
۲۲ – د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو ښه لید د ماترهورن (ماترنښکر یا د ماترن د
غره څوکه Matterhorn) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی
دی) اچول کیږي که دا د یوه لیدټکي څخه چی ۱۰۰ متره جګ دی د ډنډ په
لور ښکته وکتل شي، نو د غره د څوکي هندارونه د 12° پریوتکونج لاندې
لیدل کیږي. د غره څوکه د یوپورته کونج 11° لاندې لیدل کیږي. د ریفلډنډ
باندې د ماترنښکر څوکه څومره جګه پروته ده؟
څیره

(c) ketabton.com: The Digital Library



خيره ۲۲۵



خيره ۲۲۶

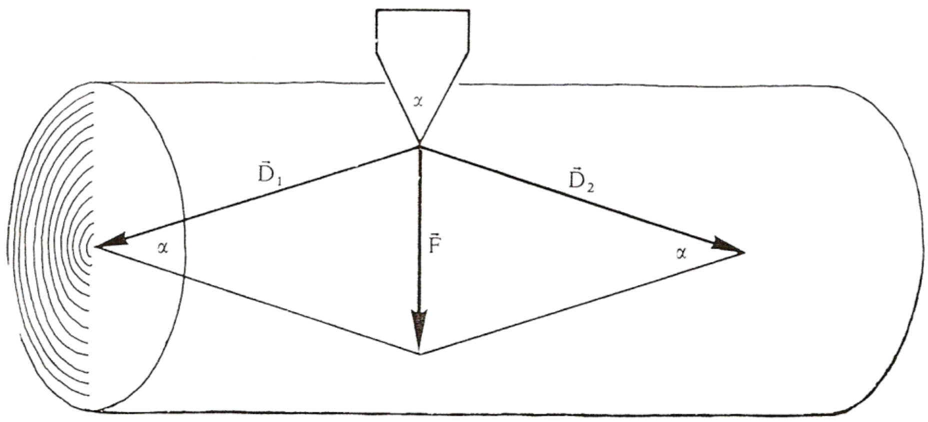
۲۳ - الف) يوه د کشولو کړی، چي په دوه دکښولو چيترو باندې راتاو ده، څومره اوږده ده، که لاندې اندازې ولري $r = 22$ cm , $R = 35$ cm , $|M_1M_2| = 2m$?

ب) دا کړی به څومره اوږدې وي که د اتيران په څير له څيتروګانو یا تيکليو راکي څيدلي وي ؟

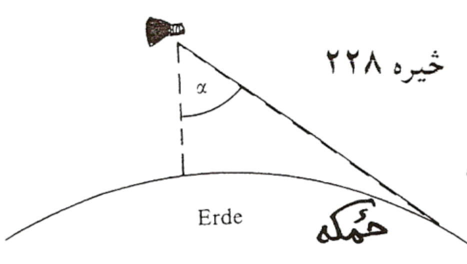
(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۴ الف) د ونی په سټه یو کایل)موړی) په څټك د D زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه D څومره لوي دي، کوم چی د سټی درځونه ، که د کایل یا تبرګي کونج $\alpha = 6°$ وي. (حیره ۱۹۴)؟

ب) په کومکایلکونج یا تبرګیکونج لرو: $|F|=|D|$ ؟



څیره ۲۲۷

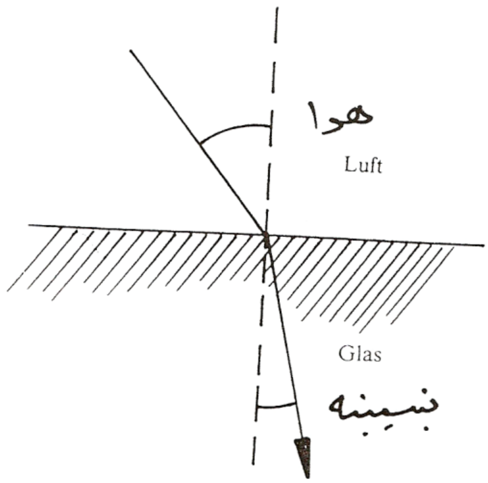


څیره ۲۲۸

۲۵ – د یوه الوتماشین څخه ځمکه د یوه α کونج لاندې لیدل کیږي (څیره) دا الوتماشین څومره جګ الوزي ؟ (د ځمکی وړانګه : ۶۳۷۰ کیلومتره)

۲۶ – یو ګادی د $v_{\alpha} = 120km/h$ سرعت سره روان دی، نو د باران څاڅکی په پټلی د تلنلور باندې په $= 115°$ کونج

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۲۹

د چیترو (مطلب د ګاډي د اوسپنی ټیر یا ګاډیل دی) مخامخ ځغلي. له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو د لویدلو سرعت v_g وټاکی ؟

۲۷ – که د لمروړانګه په دوه مختلفو طبقو ولویږي، نو خپلی لور ته تغیر یا بدلون ورکوي. د سنیلیوس Snellius د ماتقاعدې له مخی کیدی شي چی د ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون وایي، چی پروتوړانګه ، ماتوړانګه او ولاړکرښه یا عمود په بیلیدونکی هوارې په یوه هواره پراته دي او برسیره پر دې لاندې اړیکي باور لري یا صدق کوي:

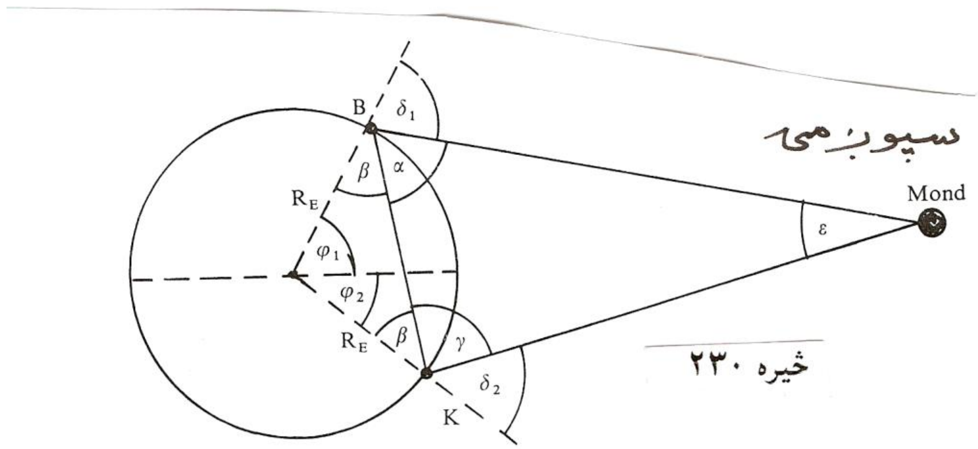
$$\sin \alpha \;/\; \sin \beta = n$$

که د رڼاوړانګه په یوه ښیښه (اوبو) پریوزي، نو n = 1,5 (1,33) دی. وښایي، چی ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چی په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

؟ 10,5°, 15,8°, 27,3° , 41,2°,67,6°,, 72,4°, 81,9°

۲۸ – په ۱۸ ا–مه میلادي پیړی کی د سپوږمی لریوالی تریګومتریکي وټاکل شو. په برلین کی (جغرافیوي اوږدوالی $\varphi_1 = 52,52°$) او لکه د ښو هیلو په کونج کی ($\varphi_2 = -33,93°$)، کوم چی په همغه اوږدګراد پراته دي، د سپوږمی سره په همغه وخت کی تړل کیږي. له دې لاس ته راغلل:
$\delta_2 = 55,72°$ او $\delta_1 = 32,08°$.
وشمیری |KM| , ß , |BK| او له دې څخه d_{EM} .

(c) ketabton.com: The Digital Library



شیره ۲۳۰

۲۹ – لړځیدنیSchwingungen تل د وخت په اړه شمیرل کیږي یعني د وخت t
تړواك لاندې دي. دا د بلواك (y = a . (sin (2 π /T)) .t + k له لارې
ورکړ شوي. دلته (2 π / T) t = x هغه کونج دی ، کوم چي په T وخت
کی وهلکیږي. 1 / T = f د یوه ځرخون پریود یا راګرځیدنی وخت په ګوته
کوي او د لړځیدنی دوام بلل کیږي» f فرکونځ frequenz بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ ۰ ګډوله ګڼونه یا کمپلیکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو ولیدل، چې څنګه یوه ګڼدیری پر بله ګڼدیری ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \qquad (7, 1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند لیدل کیږي، چې دا په رییلګڼونډیری کې اوبی یا حل نه لري، نو له دې امله باید (7 , 1)د ګڼنو ډیری وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, ...(7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي حل لپاره د رییل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کیږي چیرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, ...(7,3)$$

لیکو : دا پورته د لاندې سره

$$i^2 = -1 \qquad (7, 4)$$

د (7,1) ځاي نیسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رییل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ایماجینارګڼ imaginär(لاتین: فقط خیالي)یوون(واحد)وایو.

برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$x^2+a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a \quad , a > 0 \qquad (7,5)$$

کیدی شي په لاندې ډول ولیکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a.i}, ...(7,6)$$
$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a.i}$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, ...(5,7)$$

اوس د ایماجینار ګڼ یوون(واحد) تولیز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, ...(5,8)$$

ایماجیناریوون(واحد)$z= i$ یو ځانګړی ایماجینارګڼ $b=1$ دی

د تولیزې څلوری (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, ...(7,9)$$

په لاندې ډول د څلوری پوره کولو یا مربع تکمیلول له لارې

$$(x +p/2)^2 = x^2 + px +p^2 / 4$$

لاس ته راځی یالرو<=

$$x^2 +px + q = (x+ p/2)^2 = +(q-p^2/4) \qquad (7 , 10)$$

$$(x+p/2)^2 = p^2/4 – q \qquad (7 , 11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$(x+p/2)_{1,2} = \pm\sqrt{p^2/4-q}$$

نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, ...(7,12)$$

د $p^2 = 4q$ لپاره رییل «دبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رییل اوبیونې یا حلونه منځ ته راوړي٠

که $P^2 < 4q$ وي، نو رییل اوبی نه شته دئ

د ایماجینار ګڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q - p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a, b \in R$$

د دې فورم یا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتین: پوره کوونکي - یا پوره کیدونکي-) بلل کیږي

$$z = a+bi\ ,\ i^2 = -1;\ a,b \in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډیرئ په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z} = a - bi, ...(7,14)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګيري کمپلکس ګڼ بلل کيږي٠ لنډ کنجوګيري کمپلکس ګڼ يا اوښتی ګڼ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, ...(5,15)$$

د دې مطلقه يا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې رييل همدا رنګه ايماجينار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کيږي، که دوي په رييل او ايماجينار برخه کې يو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

موږ تل په پام کې لرو، چې $i^2 = -1$ اينبول شوي

ګډوله يا کمپلکس عدد کيدی شي په سطحه يا هاره کې د لاندې شکل سره سم(د ګاوس د اعدادوسطحه). سړی د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شميرنه کوي، لکه د حقيقي اعدادو سره او په پام کې نيسي چې: $i^2 = -1$

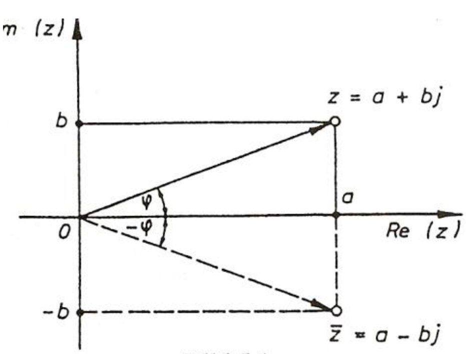


Bild 5.1

موږ دې سيستم ته پروت ولاړ سيستم وايو يا کواوردیناتسيستم Koordinaten systm

پورته ځيره دې وکتل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پروتولاړ سیستم ته د (x,y) - سیستم هم وايي په پروتولاړ سیستم کې پروت څرخون(محور) د x - محور ته د هوارې یاسطځې ریيلبرخه او ولاړ محور یا د y – محور ته بېایماجینار برخه وايې لکه څنګه، انځور شوي دي٠ په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته ر ائي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي٠(موږ دا اوس دا برخه نوره نه څیړو، خو دا د وکتورونو په ډول انځورېږي او کارونی یا عملي يې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه : هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنی د دې برخې سره بلدیږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځنې ویيونه یا لغاتونه یاکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې څیرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون څنګه دی

۱ ۰ ۷ زیاتون او کمون:

لاندې څیرو ته دې پام وي او ګورو، چې ریيل برخه او ایماجینار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2), ...(7,17)$$

بیلګه ۱ ۰ ۷ ورکړ شي:

$$\begin{aligned}
&z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i \\
&\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i \\
&\Rightarrow \\
&| z_1 | = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, | z_1 | = \sqrt{13} \\
&-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i
\end{aligned}$$

زیاتون یا جمعه (او په همدې توګه کمون یا تفریق یعني د(z2-) په زیاتون)کیدی شي د څېرې ۵ (په همدې توګه د څېرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

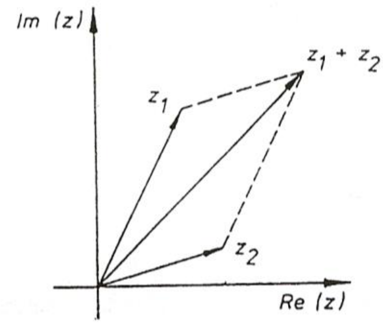


Bild 5.2

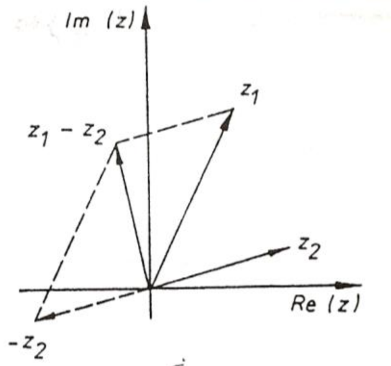
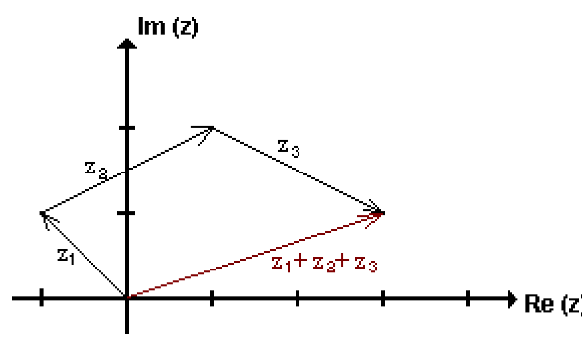
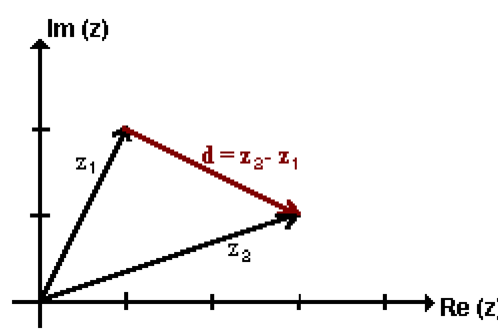


Bild 5.3

يا لاندې:



په پورته او لاندې ځيرو کې د کملپکس ګڼونو د زياتون او کمون انځور ليدلکيږي۰



دکملپکس ګڼونو ارزښت

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګڼونو ارزښت بلل کيږي۰

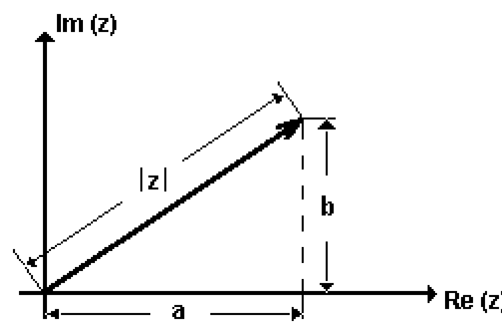
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د په |z| سره ښايو او د پيتاګوراس(فئثاغورث) د جملې

سره ښوول کيږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی ليکه

هم وکتل شي٠ مخامخ څيره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښايي



$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

په درې ګوډي کې د اړخونو ځاننيونه يا تباسب له امله باور لري

$$||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|, ...(7,18)$$

برسيره پر دې باور لري:

$$z_1 + z_2 = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

۷ . ۲ د کمپلکس ګڼونوځل:

د ورسره بلد نوک اينوولو له لارې لاس ته راځي

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$$
$$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 (-1)$$
$$\Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو بارورل ري

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2 - b_1 b_2)+(a_1 b_2 +a_2 b_1)i \qquad (7,20)$$

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتین توري په بدل ډول لیکل شوي، چې دا هم زما تخنیکي ستونځې دي، دا که په هرځایکي وي،دا به راته ګران د شمیرپوهنې مینه وال وبخښي٠ دا لاندې هم ساده ازمایل کیدی شي

$$\overline{z_1.z} = z_1.z_2 \quad , \quad |z_1 .z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بیلګه ۷ ٠ ۲

د $z.\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2+(-ab + ab)i = a^2+b^2$

او (۷ ، ۱۵) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7,22)$$

۷ ٠ ۳ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1i):(a_2+b_2i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_1 z_2} = \frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)} =$$

$$= \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i} = \qquad (7,23)$$

$$= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسی لاس ته راځي

$$|\frac{Z_1}{Z_2}|=\frac{|Z_1|}{|Z_2|},\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}=\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ۷ . ۳ :

د (۷ . ۲۴) د دوهمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}=\frac{\overline{Z}_1.Z_2}{\overline{Z}_2.Z_2}=\frac{(a_1-b_1i)(a_2+b_2i)}{(a_2-b_2i)(a_2+b_2i)}=$$

$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_1b_2-a_2b_1)i}{a_2^2+b_2^2}=$$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}-\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i=\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ۷ ۰ ٤ :د او Z1 لپاره له Z2 سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1:Z_2=\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{2-3i}{3+2i}=\frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)}=\frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2}=\frac{13}{13}i=-i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سېحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z=1-i$ b) $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

c) $z=2(1-\sqrt{3}i)$ d) $z=-1-i$

۱ . ۲ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $|z| = \sqrt{2}$ b) $|z| < \sqrt{2}$ c) $|z| > \sqrt{2}$ d) $|z| = r$

۲ – جمعه او تفریق(زاتون او کمون)

۲ . ۱ – د شمیرنې او کارنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(1+2i)+(2+i)$ b) $(-2+i)+1-2i)$

c) $(1-2i)-(1-2i)$ d) $(-1-2i)+(2-i)$

۲ . ۲ - د شمیرنې او کارنې یا رسم کونې له لارې پیدا کړئ

a) $(22 + 5i) + (2 + i)$ b) $(3 + 2i) - (5+2i)$

c) $(1+2i) - (1+2i)$ d) $i -(1-2i)$

۳ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقیقي ګڼونه دي.

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(2+\sqrt{3}\,i).(3-\sqrt{2}i)$ b) $(3+2\sqrt{2}\,i).(3-2\sqrt{2}\,i)$

c) $(1+\sqrt{5}\,i).(1-\sqrt{5}\,i).(13-12i))$ d) $\sqrt{3+\sqrt{7}i}.\sqrt{3-\sqrt{7}i}$

۳ . ۲ – وشمیرئ

a) $(x + y\,i)(2x + yi)$ b) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a-3bi\right)\cdot\left(\frac{4}{3}a+5bi\right)$ d) $(c-\sqrt{d}\,i)(-c-2\sqrt{d}\,i)$

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج یا ماتلاندې حقیقي ورګرځوئ (a ، b حقیقي دي)

3.3.1. a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$ b) $\frac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{56+33i}{12-5i}$ d) $\frac{63+16i}{4+3i}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3.3.2. a) $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\frac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\frac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\frac{3a+4bi}{4a-3bi}+\frac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)\,(6-i)+\frac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رایوځی شوې پوښتني

ګډوله ګنونه یا اعداد ورکړ شوي.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونوکي x وشمرئ.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

وشمیرئ:

4.1. a) z_1+z_2 b) z_1-z_2 c) $z_1\cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

4.2. a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$ d) $\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$

4.3. a) $|z_1+z_2|$ b) $|z_1-z_2|$ c) $\overline{z}_1+\overline{z}_2$ d) $\overline{z}_1-\overline{z}_2$

4.4. a) $|z_1|\cdot|z_2|$ b) $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ c) $|z_1\cdot z_2|$ d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $x^2 + (1 + i)\,x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\,x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

d) $16\,x^2 + 8\,(i + 1)\,x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

همدا موضوع له بلکتاب څخه

7 . ایماجینار او کمپلکس ګنونه

خوندیونهInhaltsverzeichnis

- د رییلو ګنونو بنستونه او نیوني یا فرضيي
- ایماجیارګنونه

کمپلکسګنونه

- په ګنونهواره کې د کمپلکس ګنونو انځورونه
- د کمپلکس ګنونو سره شمیرنه
- د کمپلکسګنونو زیاتون ، کمون
- د کمپلکسګنونو ځل
- د کمپلکس ګنونو ویش
- د کمپلکس ګنونو تولګنیز په توان
- د بینوم درسي جمله
- د موفري فرمول 5.6 Die Moivreschen Formeln
- د کمپلکس ګنونو رېښه 5.7 Wurzeln aus komplexen Zahlen
- توان د مختلفو جګګنونو سره
- 5.8 Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

د رییلګنونو بنستونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریيلګڼونو ډېرۍ لکه د مخه مو ، چې ګوته ورته ونیوله د راشنل او ایراشنل ګڼونو له ډېریو جوړه ده (د ریيلګڼونو برخه دې وکتل شي).

ایماجینار ګڼونه Imaginäre Zahlen

د ریيل ګڼونو سیستم پوره نه دی، ګورو، چې د یوه ګڼ څلورۍ یامربع، چې د کمیز ګڼ سره برابره وي، ریيله اوبیونه یا حل نه لري لکه لاندې

$$x^2 = -1$$

داسې یو ریيل ګڼ نه شته، چې پورته پوره کړي

یوه فورمال اوبیونه یې په لاندې ډول ده

$$x = \pm\sqrt{-1}\,,$$

چیرته ، چې $\sqrt{-1}$ ریيله اوبیونه نه ده.

دا څلورۍ یا مربع ریښه د i سره په نخښه کوو، چې له دې پرابلم څخه ووتی شو او څلورۍ یې په 1 - سره په نخښه کوو۰

د دې i لپاره باور لري:

$$i^2 = -1$$

اوس کړی شو، چې ولیکو

$$x_{1,2} = \pm i\,.$$

که ګڼ i د ریيلګڼونو سره زیات ځل یا ضرب کړو، نو د ګڼونو یوه د نوو ګڼونو ډېرۍ ترې لاس ته راځي، د بیلګي په توګه :

$$2i,\ 3i,\ -i,\ 1+i,\ 2+i,\ 1+2i,\ -23+78i,\ 0.45-0.93i$$

او داسې نور.

ټولیزه بڼه یې :

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$a + bi \, ,$$

پورته ګڼ کمپلکس ګڼ دی او a او b رییلګڼونه٠ له دې سره هم لګۀ د نورو ګڼونو سره ساده شمیرل کیږي، چیرته، چې د i^2 په ځای 1 - لیکلی شو یا په ځېټ: لاندې کې یې بیلګې ګورو

$$(1 + 2i) + (3 + 4i) = (1 + 3) + (2 + 4)i = 4 + 6i$$

په ټولیزه توګه:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

له دې سره ویش هم کړی شو، خودا ، چې ستونځمن دی وروسته یې راوړو.

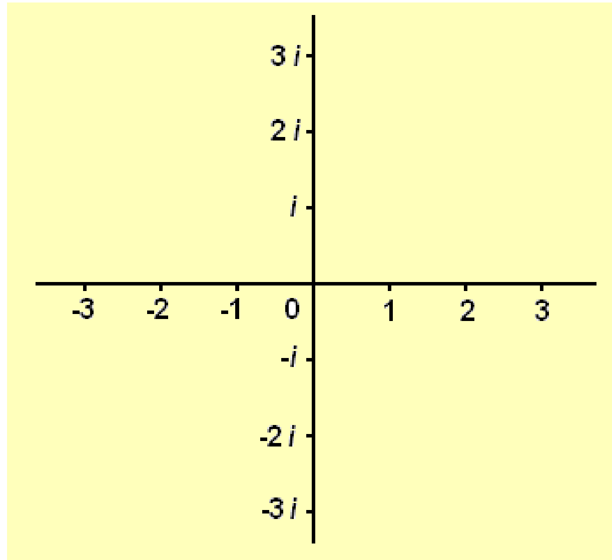
دا لاندې هم لرو

i.2i,i,0,-i,-2i,-3i٠٠٠3.....

دا ایماجینار ټولګڼونه بلل کیږ ي یا بولو ، چې دا هم صفرلري

موږ په لاندې کې د هوارې پروت محور لاندې د رییلګڼونو محور پو هیږو او ولاړ محور یا څرخونی یې د ایماجینار ګڼونو محور دی، چې د دواړو زیاتون کمپلکس ګڼونه دي یا د کمپلکس ګڼونو هواره انځوروي٠.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په لاندې کې يو کپلکس ګڼ په يوه رييل ګڼ يا پيداينتي ګڼ ويشل کيږي

$$mi : n = \frac{m}{n} i \ .$$

په پورته کې m او n رييلګڼونه دي او ايماجينار

$$x^2 = -a^2$$

په پورته کې a رييلګڼ دی، خو x غواړو لاس ته راوړو، لاس ته راوړنه يې يو ايماجينار ګڼ دی.

د دوه ايماجينار ګڼونو زياتون او ګمون::

$$a\,i \pm b\,i = (a \pm b)\ i\ .$$

ځل او ويش يې

$$\frac{i}{i} = 1\ .$$

د دې سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$pi \cdot qi = -pq$$

او

$$\frac{pi}{qi} = \frac{p}{q} \,,$$

چيرته چي p او q ريللګنونه دي.

لاس ته راوړنه : د دوه ايماجينار ګڼونو ځل يا ضرب او ويش څخه ريلګڼ لاس ته راځي، چي په لاندې کې يې ګورو .

$$i^2 = -1 \,, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i \,, \quad i^4 = i^3 \cdot i = 1 \,, \quad i^5 = i^4 \cdot i = i \,, \ldots$$

د ټولګڼ n لپاره لرو:

$$i^{-n} \equiv \frac{1}{i^n}$$

لاس ته راوړنی يې

Error!

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i \,, \quad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1 \,, \quad i^{-3} = \frac{1}{i^3} = -\frac{1}{i} = i \,, \quad i^{-4} = \frac{1}{i^4} = 1 \,, \ldots$$

.د سره شميرل ورسته کيدونکي دي

Komplexe Zahlen کملکس ګڼونه

ګډ يا مخطلت ځلورئ - يا مربع برابرون شميرو

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څلورۍ پوره کوونې یا تکمیلوني له لارې ، چې ورسره بلد یو ، اوبیونه یا حل پیداکوو

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3\,i\ .$$

د دې برابرن اوبیونه نه رییل ګڼ دی او نه ایماجینار ۰ دې ګن ته مورږ کمپلکس ګڼ وایو **komplexe Zahlen**.

د کمپلکس ګڼونو او د دې سره سره شمیرنه ۰

مورږ دا لاندې کمپلکس ګڼ لرو :

$$z = a + b\,i,$$

چیرته، چې a او b رییل ګڼونه دي

د کمپلکس ګڼونو په مرسته کړای شو، چې بې بندیزه څلورۍ- یا مربع فرمولونه اوبې کړو

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

لاس ته راځي.

دلته چې څه راځې هغه ګران لوستنکی پخپله هم پیدا کولی شي، زه به وهڅیږم، چې دا پرابلمونه پورته کړم یا لرې کړم ،

د لاندې لپاره

$$\frac{p^2}{4} - q \geq 0$$

یو یا دوه رییل اوبیونې لاس ته راځي۰

د

$$\frac{p^2}{4} - q < 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره اوبيوني په لاندې ډول ليکل کيږي

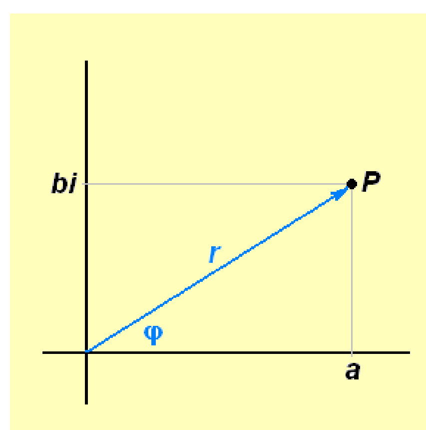
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\ .$$

اوبيوني کنجوګيري کمپلکس دي، دا په دې مانا، چې يو له بل د مخنځښي له مخه توپير کيږي٠

په ګڼونهواره يا ګڼسطحه کې د کمپلکس ګڼونو انځورونه

د کمپلکس ګڼونو ګرافيکي انځوروني لپاره هواره ځان رامنځ ته کوي، چې د رييل او ايماجينارګڼکرښو ځخه غزيدلې ده٠

کمپلکس ګڼونه a + bi د ټاکني له مخې(په بدل وار يا همغه وخت) د يوه ټکې P ، چې کواوردينات يا پروت ولاړ محورونه يې a او b ، چيرته، چې محور b ټکی bi په ايماجينار ګڼکرښی باندې په ګوته کوي، يا د» ښوونکرښې « OP سره انځور کيدی شي٠ دا د يوې اوږ دې r سره ښايو او د رييلي محور سره کونج fi جوړوي٠ (دا همغه د ټکی P انځورول دي په پولار کواوردينات کې، r د کمپلکس ګڼ مطلق ارزښت دی، fi يې فاز بلل کيږي٠



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دواړو انځوربنې لپاره لاندې ترانفورمیشنبرابرون باور لري(له دې څخه نوج زده کوونکې تیریدلی شي، چې ترانسفورمیشن باندې نه پوهیږي)

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}\,, \qquad a \neq 0$$

$$a = r\cos\varphi\,, \quad b = r\sin\varphi\,.$$

له $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ لاس ته راځي

$$\varphi = \arctan\frac{b}{a} + k\cdot 2\pi, \quad \text{wobei} \quad -\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{b}{a} < \frac{\pi}{2} \quad \text{und } k \text{ ganzzahlig ist.}$$

په پورته کې wobei د کوم سره یا چیرته چې په مانا دی او k ټولګې دی ۰

ارزښت

$$\varphi_0 = \arctan\frac{b}{a}$$

د فې φ اصلي ارزښت بلل کیږي۰ له دې نور ارزښتونه د k او 2π له زیاتون څخه لاس ته راځي۰

د دې له مخې کیدئ شي، چې کمپلکس ګڼ په لاندې توګه ولیکل شي ۰

$$z = a + bi = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.$$

" وروسته د اویلر فرمول "Eulerschen Formel په مرسته ترې لاس ته راځی

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

دریمه انځورونه یې لاندې ده:

$$z = a + bi = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\,e^{i\varphi}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کمپلکس ګڼ دا درې انځورونې په ترتيب داسې بلل کيږي اريتميتيکي بڼه کونومتريکي (يا تريګنومتريکي بڼه) او اکسپوننشل بڼه.

دا چې د اويلر فرمول وروسته ښوول کيږي، اکسپوننشل بڼهٔ دې دلته راوړل شوي وي، خو د ښوونې لپاره دې ترې کار نه اخستل ک يږي.

Rechnen mit komplexen Zahlen

د کمپلېکس ګڼونو سره شميرنه

دوه کمپلېکس ګڼونه دې ورکړ شوي وي

$$z_1 = a_1 + b_1 i\,, \quad z_2 = a_2 + b_2 i\,.$$

د کمپلکش ګڼونو زياتون او کمون

په زياتون او کمون کې د الجبر ي قوانينو له مخې i هم داسې په کار اچول کيږي لکه هره بله کومه د تورو لويه ، چې په کار اچول کيږي يا کارول کيږي

$$z_1 + z_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i$$

$$z_1 - z_2 = a_1 + b_1 i - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i$$

د کمپلکس ګڼونو « ښوونکرښه» (دا هغه کرښه ده، چهٔ د دواړو محورونو صفر ټکو څخه د هغه په هواره موخه ور ټکی په لور ګزيدلی وي، ياني د صفر ټکی څخه د هغه بل موخه ټکی په لور ، ځکه لوريزه ده)لکه وکتورونه سره زياتيدلی او کميدلی شي

Das Produkt komplexer Zahlen

د کمپلکس ګڼونو ځل

دی

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i.$$

دا ځل ترلی پيژند وړ ليدونکي مانا نه لري(ياني سملاسي ترې څه نه شو پوهيدلی) . که د دې په ښټ » پولارکواودينات » وکارول شي، نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_1a_2 - b_1b_2 = r_1r_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) = r_1r_2\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)$$

$$a_1b_2 + a_2b_1 = r_1r_2\left(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2\right) = r_1r_2\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right).$$

او له دې سرهt

$$z_1z_2 = r_1r_2\left[\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right].$$

نو دی

$$|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2| \quad \text{او} \quad \varphi\left(z_1z_2\right) = \varphi_1+\varphi_2.$$

د ځل – یا ضرب ارزښت د ارزښتونو ځل دی٠ د ځل یا ارګومنت یا فازې د ارګومنت یا فازې د زیاتون سره برابر دی٠

سملاسي پيژندل کيږي، چې دا د دوه فاکتورونو څخه زياتو فاکتورو يا ځله وونو لپاره هم باور لري

$$|z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n| = |z_1|\cdot|z_2|\cdot\ldots\cdot|z_n| \quad \text{او} \quad \varphi = \varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n.$$

د کمپلکس کڼونو ويش Division komplexer Zahlen

په ورته توګه پيدا کيږی، که z_2 د صفر سره برابر نه وي

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{او} \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

که کيږدو $z_1 = 1$ او $z_2 = z$, نو لاس ته راځي:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\left[\cos(0-\varphi) + i\sin(0-\varphi)\right] = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او په ځانګړي ډول د $z = i$

$$\frac{1}{i} = -i.$$

Ganzzahlige Potenzen einer komplexen Zahl

د کمپلکس ګڼونو توان (کپلکس ګڼ د يوه ناکميز توان سره د رييل ګڼونو په څير دی)

$$z^{-n} \equiv \frac{1}{z^n}.$$

د کمپلکس ګڼونو ځل دې وکتل شي

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n| \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n.$$

د همغه ځله وون يا ضريب z لپاره ترپلاس ته راځي

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

موږ لرو

$$z^p \cdot z^q = z^{p+q}, \quad (z^p)^q = z^{p \cdot q}, \quad z_1^p \cdot z_2^p = (z_1 \cdot z_2)^p, \quad \frac{z^p}{z^q} = z^{p-q}, \quad \frac{z_1^p}{z_2^p} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^p.$$

Der binomische Lehrsatz

د بينوم درسي جمله

د بينوم جملي لپاره هم لرو

د نوکانو د چاون قانون او ځل قانونو د زياتيز جګ ګڼ لپاره د بينوم جمله همغسي باور لري

$$(z_1 + z_2)^n = \binom{n}{0} z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \ldots + \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k + \ldots + \binom{n}{n} z_2^n.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې ځايه ښکته د ښوونځي زده کوونکو لپاره ستونځمن دی.

د موفری قانون Die Moivreschen Formeln

له برابرون څخه (پورته دې وکتلشي)

$$z^n = |z|^n \left(\cos n\varphi + i \sin n\varphi\right)$$

لاس ته راځي

$$|z| = 1: \qquad (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

له بلې خوا د زیاتیز ټولګنیز جګګڼ یا اکسپوننت سره د بینوم جملې څخه لاس ته راځئ:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi + i\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi$$

$$-i\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi + \ldots + i^n\binom{n}{n}\sin^n\varphi.$$

که د برابرون دوا

ړه خواوې برابار کینول شي او بیا په پام کې ونیول شي، چې رییل او ایماجینار برخه دوآړه باید برابر وینو د موفري برابرون ترې لاس ته راځي **Moivreschen Formeln**:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi - + \ldots,$$

او

$$\sin n\varphi = n\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\cdot\sin^5\varphi - + \ldots,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چيرته، چې ښی لور ترهغې پوره شي، تر څو چې ځله وونی یا ضريب صفر شي.

د کمپلکس ګڼونو ريښه Wurzeln aus komplexen Zahlen

د برابرون اوبیونه

$$x^n = z \qquad \text{n positiv ganzzahlig}$$

پورته کی n زياتيز ټولګڼ دی
د کمپلکس ګڼ z n -مه ريښه بلل کيږي :

$$x = \sqrt[n]{z}.$$

ږدو

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

او

$$x = \rho\left(\cos\psi + i\sin\psi\right),$$

د $z = x^n$ له امله لاس ته راځي

$$\rho^n = r \quad \text{und} \quad n\psi = \varphi$$

او د دې پسې

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{\varphi}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي

په ویشنه کې باید په پام کې ونیول شي، چې ارګومنت یا پروتمحور φ پریودي یا تل بیرته راګرځیدونی دی د پریودې یا راګرځیدنی 2π سره ، نو

$$\varphi = \varphi_0 + k \cdot 2\pi \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

پسي د ψ لپاره تیک n مختلف ارزښتونه لاس ته راځي، یاني

$$\psi = \frac{\varphi}{n},\quad \frac{\varphi + 2\pi}{n},\quad \frac{\varphi + 2 \cdot 2\pi}{n},\ \ldots\ \frac{\varphi + (n-1) \cdot 2\pi}{n}.$$

د $n = k$ ځانلۀ د مخه ارزښتونه (له دویم پسې) تکرایږي، نو باور لري:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}\right) \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (n-1)$$

هر له دې ارزښتونو د کمپلکس ګڼ z د n-مې رینبه بلل کیږي

$$\sqrt[n]{z} \quad \text{oder} \quad z^{\frac{1}{n}}$$

دا ټول n ارزښتونه په ګنهواره په یوې ګردی په O په یوه منظم n - ګوډي پرته ده , د څلوری رینبی لپاره له

$$i = i \sin\frac{\pi}{2}$$

لاندې ارزښتونه ترې لاس ته راځي

$$\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4},$$

او د څلوری رینبي لپاره له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-i = i\sin\frac{3\pi}{2}$$

پيداکيږي

$$\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}.$$

که موږ ونيسو لکه د رييل ګڼونو لپاره

$$z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^{m} = \left(\sqrt[n]{z}\right)^{m}$$

دې وي، چيرته چې n يو پيداينتج ګڼ او m يو په خوښه ټولګڼ دی، نو له دې سره د کمپلکس ګڼ سره جګګن يا کسپوننت وپيژندل شو يا تعريف شو۰ اوس نو اخرنی پل پاتې ، چې هغه د ايراشنلجګګڼ دی .

توان د په خوښه رييل جګګڼ سره

Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

اوس دې z له صفر مختلف په خوښه کمپلکس ګڼ وي .

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\left[\cos(\varphi + k\cdot 2\pi) + i\sin(\varphi + k\cdot 2\pi)\right],$$

چيرته چې

$$k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

دی ، نو د z^{ν} (ν رييلreell) لاندې هر دالاندې کمپلکس ګڼ پوهيږو:

$$r^{\nu}\left[\cos\nu(\varphi + k\cdot 2\pi) + i\sin\nu(\varphi + k\cdot 2\pi)\right].$$

لاربښود : د داسې په ټوليز پيژند يا تعريف سره د کمپلکس ګڼونو توان لپاره د د توان شميرنې بنسټيز قوانين باور لري ، يانې

$$z^{\mu}\cdot z^{\nu} = z^{\mu+\nu}, \quad z_1^{\mu}\cdot z_2^{\mu} = (z_1\cdot z_2)^{\mu}, \quad (z^{\mu})^{\nu} = z^{\mu\cdot\nu}$$

nicht mehrنور بس دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ ترانسځندنت برابرونونه یه ـ مساوات

دلته یواځې هغه ترانسځندنت مساوات څیړل کیږي، کوم چې بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي. دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په ریښه مساواتوکی، په خوبنه په بل شکل اړول کیږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو(فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چی اړولی فرمول زیاتي اوبیوني یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابرون تولې اوبیونې په پیل برابرون کی ځاي په ځاي یا کیښوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ریښه یي برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم یواځی رییل اوبیوني پلټل کیږي.

۱۳ . ۱ لوګاریتمي مساوات

د لوګاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پیدا کولو لپاره اړیین یا ضرور(ضروري یا اړیین شرایط) دی، چی د یو عدد(ګڼ) aلوګاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅیړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13,1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنسټ b = 10 لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره (ln a) کیدی شي (۱۳ . ۱)

سیده د جبشمیري له لارې پیداشي. په څټ یا برعکس د 10 =| b =|e لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کیږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b ....(13.2)$$

د لوګاریتمي مساواتو یو ساده ډول یا شکل (تیپ) دا دی

$$l\,\text{og}_b\, x = c.................................(13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱) ، (7. ۲) له مخی لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c ....(13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشمیري سره شمیرل کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۱ : $\log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$

په همدې ډول د (۱۳ . ۳) بڼې اوبیونه په لاندې تولیز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b f(x) = c...(13,5)$$

دلته (f(x یوه الجبري ویینه یا افاده ده، د (۱۳ . ۵) سره الجبري برابرون کتمټ (ورته) دی

$$f(x) = b^c ....(13,6)$$

تولې د (۱۳ . ۶) اوبیوني د (۱۳ . ۵) اوبیوني هم دي

بیلګه ۱۳ . ۲ : لوګاریتمیز برابرون

$$\log_2(x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کټمټ دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x^2+x+6=2^3=8$ (همداسی) $\Leftrightarrow x^2+x-2=0$

او لاندې اوبيونې لري

$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}; x_1=-2; x_2=1$$

يو د (۱۳ . ۵) ډول (تيپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کينه لور (ارخ) ته يود لوګاريتم ريشنل لاينيز کمبينشن الجبري وبينه يا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x)+r_2.\log_2(x)+r_3.\log_b g_3(x)+...=c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوګاريتم قوانينو (۷. ۷) ، (۷. ۹)کاروني يا استعمال څخه، ۷ برخه وګورئ، (۱۳ ، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x)=\{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}.................................(13,8)$$

بيلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x-1)+\frac{1}{2}\log_3 x-\frac{1}{2}\log_3(x-1)=2$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log[(x-1)(\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{2}}]$$

اوله دې څخه رېښه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1}=9$ ،

د کوم له څلوری یا مربع کولو څخه $x(x-1)=81$ يعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{324}{4}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{325}{4}}=\frac{1}{2}\pm(\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1=9,515; x_2=-8,515$$

تيك دا $x1=9,515$ پيل برابرون پوره کوي

. د $x=x2<0$ لپاره $\log x$ او په همدې ډول $\log(x-1)$ پيژند نه لري يا تعريف نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)] = 1$$

او نور پسی $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$$2x+3=bx-b$$
$$b+3=x(b-2)$$
$$x=(b+3)/b-1)$$

پيل وينه يا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره يا هدفمنده ده، يعني
که $(b+3)/b-2)>1$ وي.
د $b>2$يعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$
له دې لرو $-2<3$دا د ټولو b لپاره پوره دی
د. $b \le 2$ لپاره د $b+3 \le b-2$ $b+3 < b-2$ څخه $2 \le 3$ لاس ته راځي
اودا د هيڅ b لپاره باور نه لري .
له دې امله کره د $b > 2$ لپاره اوبی شته دی. د $b \le 2$ لپاره اوبيونه نه شته دی.

د لاندې لوګاريتمي تيپ برابرون هم کيدی شي په الجبري مساواتو بيرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13 . 9)$$

چيرته چی F او هم f الجبريزې ويينې يا افادې دي. د بدلون کاروايي يا عمليه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x) .... (13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13 . 11)$$

ددې اوبيونه ..y1,y2 په (۱۳/۱۰) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تيپ (۱۳/۵)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاريتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i ; \quad i = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots \qquad (13 . 12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13 . 13)$$

ددې لپاره چې و ازمائيلی شو چې ايادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبيونې يا ځوابونه بايد په پيل برابرون (۱۳/۹) کی کيښوول شي يا ځاي په ځای شي،

بيلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $\log^2 x-\lg x-2=0$ د سبستيځيوشن(بدلون) $y=\lg x$ سره په څلوری برابرون $y^2-y-2=0$ بدليږي .
د $y1 = 2$ او $y 2 = -1$ ځوابونو سره
له. $\lg x=2$ او $\lg x=-1$ لاس ته راځي

$x1 = 10^2=100$ او $x_2 = 10^{-1} = \dfrac{1}{10}$

دواړه ځوابونه د پيل برابرون ځوابونه دي.

بيلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6 /(\lg x +1)) + (8 / (\lg x -1)) = 3$
د,$x>0$ مګر ($x \neq 1/10, x \neq 10$) چې د اصلي ماتلاندي $(\lg x+1)(\lg x-1)$ سره ځل شی، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x-1)+8(\lg x+1)=3(\lg^2 -1)$$
$$,\ 6\lg x-6+8\lg x+8=3\lg^2 x-3$$
$$0=3\lg^2 x-14\lg x-5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې څلوری بڼې يا مربعفورم ته بيايي:

$$3y^2-14y-5=0 ,\ y^2-(14/3)y-5/3=0$$

د لاندې ځوابونو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_{1,2}=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{15}{9}}=\frac{7}{3}\pm\frac{8}{3}; y_1=lox_1=5; y_2=\lg x_2=-\frac{1}{3}$$

$$x_1=10^5; x_2=x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي.
که په یوه برابرون کی لوګاریتمونه د مختلفو بنسټونو bسره رامنځ ته شي، نو کیدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بیلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1)+\log_4(x-1)-1=0$

ځخه دلاندي برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1)=\frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1)+\frac{1}{2}\log_2(x-1)-1=0,\ \log_2(x-1)=\frac{2}{3},\ x-1=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4},$$

$$x=1+\sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2\sqrt[3]{4}+\log_4\sqrt[3]{4}-1=\frac{1}{3}\log_2 4+\frac{1}{3}\log_4 4-1=\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}-1=0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل – یا په جګګڼ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون(مساوات)

$$a^x=b; a>0, a\neq 1, b>0 \quad\text{..............................}(13,14)$$

کیدی شي چی د لوګاریتم نیولو سره سملاسي حل شي(ځواب شي)

$$x=\log_a b=\lg_b/\lg_a=\ln b/\ln a \qquad (13,15)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳ ، ۱۴) ډول (رقم (تیوپ) برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۸:

$$2^{x} + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^{x}(1-2^{2}) + 3^{x}(3^{2}-3) = 0, \text{ bzw. } 6 \cdot 3^{x} = 3 \cdot 2^{x}, \text{ bzw. } \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg \frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري وييني يا افادي($f(x)$ اکسپوننتونه یاجګګنونه وي، نو:

$$af(x)=b, a>0, a|=1, b>0 \qquad (13 . 16)$$

په دې ډول د لوګاریتمولو له لارې یو الجبري برابرون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_{a} b \text{..........................} (13,17)$$

د کومو ځوابونه چی د (۱۳ . ۱۶) ځوابونه هم دی.

بیلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^{2}+x-4} = 4$

مو لاندې خلورى برابرون يا مربع مساوات ته بیایي (لاربنودوي)

$$(x^{2}+x-4)=\log_{2} 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^{2} + x - 6 = 0$$

د $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چی د پیل برابرون اوبیونې یا ځوابونه هم دي۰

بیلګه ۱۳ . ۱۰ : په برابرون $\left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$ کی د یوه پوتنځ بنسټ د بل پوتنځ د بنسټ په څېر ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3 \, , \, x_2 = -4$$

بیلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کې کیدی شي چې ناپیژندونکی د اکسپوننت یا په جګ څخه د دوه واره لوګاریتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \qquad \text{یا oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = 1.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

یو د تیپ (۱۳ . ۱۶) مساوات دی، ځکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې امله

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کیڼ اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپوننتونو سره، کیدی شي چې د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)} . a_2^{f_2(x)} \ldots\ldots}{b_1^{g_1(x)} . b_2^{g_2(x)} \ldots\ldots} = c; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13{,}18)$$

څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + \ldots - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - \ldots\ldots = \lg c \qquad (13.19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چی د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري وبینه یا افاده F د الجبري اکسپوننت($f(x$سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x))})=0 \;;\ldots\ldots\ldots\ldots(13,20$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13.21)$$

د برابرون

$$F(y) \qquad (13.22)$$

د ټولواوبیونو $y_1, y_2, y_3;\ldots\ldots$ لپاره باید

$$a^{f(x)} = y_i; i=1,2,3\ldots\ldots \qquad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i \quad ; i = 1, 2, 3 \ldots\ldots \qquad (13.24)$$

اوبی شي

بیلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x} + 3^x = 2$ کیدی شي چی د بدلون $y = 3^x (y^2 = 3^{2x})$ سره په ځلوری

برابرون یا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بیرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې ځخه لاس ته راځي

$$x_1.\lg 3 = \lg 1 = 0, \; x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2.\lg 3 = \lg(-2)$ اوبیونه نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}}-\sqrt{e^{x^2-1}-1}=\sqrt{2e^{x^2-1}-1}......................(13,25)$$

کې داسی بدلوو:

$$y=e^{x^2-1}.....................................(13,26)$$

او لاس ته راوړو

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};..............................(13,27)$$

له دې څخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)}=0 => y(y-1)=0$$

$$y_1=0; y_2=1$$

تيك $y_2=1$ (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1;..(13,28)$$

بايد اوبی . د لوګاريتمولو څخه تعقيبيږي:

$x^2-1=\ln 1=0,$

$x1 = 1 , x2 = -1$

دواړه ارزښتونه پيلبرابرون پوره کوي٠
برسيره پر دې بايد وښوول شي، چې په برخی ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کی انځور شوي متودونو سره يوه د مساواتو ټوله لړی حل کيدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوګاريتم يوځاي رامنځ ته کيږي.

بيلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ څخه د بيلګي په توګه د بنسټ 2 لوګاريتموولو له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\ln^2 x - \ln x + 1 = \log_2 8 = 3$

که کیږدو $y = \ln x$ ، نو دا څلوری برابرون یا مربع مساوات $y^2 - y - 2 = 0$

لاس ته راځي،د ځوابونو

$y_1 = -1 \; , \; y_2 = 2$

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

$\ln x = -1 \; , \; \ln x = 2, \; x_1 = e^{-1} = 1/e \; , \; x_2 = e^2$

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې اوژباړې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د کتې – او کتې د کتې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

(c) ketabton.com: The Digital Library

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکټر ماخان شینواريد ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکټر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي. دا هم چاپ سوي.

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج ښخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو ښخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج ښخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي چاپ شوی

۱۶ - څمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډيرئ پوهنه يا سټ تيوري چاپ شوی

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي) چاپ شوی

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۳ – د شمیرپوهنې انګرېزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه چاپ شوی

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

دا لاندې د ښوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسیدل:

شمیرپوهنه د اوم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د اتم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د نهم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د لسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د یولسم ټولګي له پاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه د دولسم ټولګي له پاره

رياضي برای صنف دوازده

.

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرۍ شینواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکي میني د لومړني ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګي پیل او د دویم ټولګي څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي ښبنتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې ځانګه او اباسین نومیږي. ځانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library