شمیرپوهنه (ریاضي)

د لسم ټولګي لپاره

برېښنا پته : smakhan1946@gmail.com

لیکونکی:

ډاکترماخان میرې شینواری

2016

Ketabton.com

جرمني د بن ښار

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

د لسم ټولګي لپاره

لیکونکی:

ډاکتر ماخان(میرزی) شینواری

Smakhan1946@gmail.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

سریزه...................................... ۴
پولینومشمیرنه ۶
د ګاوس الګوریتم.............................. ۲۹
هورنرشیما.............................. ۴۶
اړیکي.............................. ۵۵
فنکشن(څیرونه) یا تابع ۶۵
فنکشن او په ځتفنکشن ۹۱
ځلوری‌یا مربع توابع ۹۳
نورمال پارابل ۹۶
د ځلوری‌تکمیل له.............. ۱۰۱
کرښیزبرابرونسیستم ۱۱۵
د مناسبځواب له پاره تلنلار.... ۱۲۳
مساواتسیستم بې له ۱۲۹
توان یا پوتنځ توابع ۱۳۳
کرښیزتوابع د ورکړ شوو ۱۳۸
مومړی حالت ۱۳۸
د کرښبرابرونونو ځانګړی ۱۴۲
n- مه درجه ټولراشنل توابع ۱۶۵
د ټولراشنل توابعوغوښتکي ۱۷۵
د بدلونقانونه ۱۷۸
شننیزه – یا تحلیی هندسه ۱۸۳
فنکشنونه (بل بدیل)............ ۲۰۲
دریکوډیکچ ۱۳۷
ګډوله – یا کمپلکسګڼونه ۲۷۹
د لیکونکیلیکلیاوژباړې..... ۳۱۵
د لیکوکیژنود ته لنډه کتنه...... ۳۲۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

سریزه

دا ځلوېښت کاله کېږي، چې زموږ هیواد هراړخیزه ستونزې لري او هر څه دې اوږده جنګ را خراب کړي

ګرانو هیوادوالو!

د نورو نیمګرتیاو په څیر زموږ درسي نصاب - په تیره شمیرپوهنه - هم ډېره د ناسمون سره مخامخ ده.

که دا کار د دولت په ځلوردیوالي ونه شو، نو زه به وهڅېږم، چې دا ما لیکلي کتابونه د ن ج له لارې له تاسو سره شریک کړم او دا د نړۍ په ستاندارد.

د ښوونځي په کتابونو کې د ستااتیستیک او احتمالوالي درس نور هم خورا ستونځمن دی، چې زه ترې دلته تیرېږم او د ښوونځي د تیرو کتابونو څخه هم هیله ده- که زما کتابونه وړاندې نه شو- چې دابرخې یا سمې یا له درسي نصاب څخه وویستل شي. په دې برخه باور وکړی، چې نه لیکونکی بوهیږي او نه بل لوستونکی پرې پوهیدلی شي.

زما په دې د ښوونځي کتابونو کې دا برخې نه شته، خو که وخت مې پیدا کړ دا به هم سمې کړم. ما په دې هکله د احتمالوالي او ستاتیستیک کتابونه ژباړلي او همداسې مې په هندسه کې هم احتمالوالي شمیرنه راوړي او د ستاتیستیک یو کتاب مې هم ژباړلي، چې زه به یې په مناسبوخت کې د لیدلو پټې ګرانو لوستونکو ته د ن ج له لارې ورکړم.

دا زما ځنې کتابونه او په ډېره مننه د www.ketabton.com ن ج کې ګرانولوستونکوته وړاندې شوي.

د شمیرپوهنې سم اند یا منطق زموږ د نصاب په لسم ټولګي کې راغلی او هغه هم لکه ستاتیستیک او ... د پوهیدلو نه دی. دا- لکه څنګه چې برېښي- دومره پیچلی نه دی، نو زه دا درس له دې امله د اوم ټولګي په سرکې راوړم، هیله ده چې ستونځې به رامنځ ته نه کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زه چې ترڅو ستاسو په منځ کې وم او د کار یم، ستاسو چوپړ کې به اوسم. راځئ، چې ستونځوبې(د ستونځو حل) سره شریک کړو.

زه دې لیکنو او پرې قضاوت کولو ته ځانله یم.

تکرار په کې زیات دئ، خو د موصوع، نه د خودیونې. وایې چې تکرار د زده کړې مورده، نو پروا نه لري. کمښتونه هم په کې شته. سره د ټولو نیګرتیاوو دا د ښوونځي له پاراه ډېره ګټوره او زه چې پوهیږم، یواځنۍ سمه لیکنه ده.

دا چې سمه لیکنه ، د ځان له امله نه وایم، دګرانو زده کوونکو او ښوونکو له پاره وایم. دا زما لیکنې نه دې، دا ما له نورو کتابونو څخه رانیولي، چې باید سمې وي.

زه به وهڅیږم، چې درسمي ښوونځي کتابونو نا سمونونه له تاسو سره شریک کړم، خو ډېر لږ، یواځې داسې د یادونې له امله.

په ډېره خواشینۍ باید ووایم، چې ملاتړی نه لرم، چې د لیکنې ستونځې راته په ګوته کړي.

د نصاب د غړو څخه مې هیله ده، چې ګټه ترې پورته کړي او په بنسټ یې د ښوونځي لیکنې سمې کړي.

د خوندیونې ټیکاوي کې پوښتنه نه شته، ځکه چې ما هم د نورو لیکنو څخه راټول کړي او هڅیدلی یم، چې سم یې ترې راونیسم.

باور وکړئ زه د دې لیکنو سره لږ ستړی شوی یم، نو ځنې ځایونه به داسې نیمګړي پاتې وي، چې ستاسو پوهیدنې ته کوم زیان نه رسوي، د هغې بخښنه دې وي.

کله تمرینونه کم وي او کله تکرار راځي، چې دا بد مه ګڼئ.

په دې کتابونو ما دومره ځان بوخت کړی، چې باورکړئ مغذ مې ترې نورموړ دئ، نو له دې امله یې نور پایوم یا ورته د پای ټکی ږدم.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینومشمیرنه

پویلینوم څه شی دی؟

یو پولینوم د اووښتوني یا واریابلي –چې موږيې د x سره په نښه کوو- له ډېرواره توان د زیاتون دی: د توان جګګڼونه پیداښتي یا طبیعي ګڼونه دي. زیاتون له دې برسیره پای دی.

بیلګه: $a_n \cdot x^n + \ldots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

همداسي

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

یا هم:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

دلته n یو پیداښتي ګڼ اوپای دی او a_i ریلګڼونه دي د ټولو $i=0,1,\ldots n$ له پاره.

پیژند: د پولینمچګګڼ n د پولینوم درجه بلل کیږي، که $a_n \neq 0$ وي.

په یاد ولری: په پورته سر کې- د پولینوم لیکنښه د توان په همغږیزجګیدونکي لیکنښه اودا کښته یي د پولینوم د توان په همغیزتیټیدونکي لیکنښه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینومونو سره شمیرنه یا کارونې داسې لنډې څېړو

د پولینومونو زیاتون: که له

$$a_5 \cdot x^5 + ... + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

سره

$$b_5 \cdot x^5 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زیاته-وو، نو داسې مخ ته ځو:

په دې پورته برابرون کې ګورو، چې اووښتونې یا واریابله د څلور په جګ یعنې x^4 نه شته. دا په دې مانا ده،چې ځله وونی یا صریب یې صفر دی. یعنې $o\ x^4$ یا

$$b_5 \cdot x^5 + o\ x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زیاتونعملیه یا کارونه مح ته بیای:

$$a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$b_5 \cdot x^5 + o\ x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

$$(a_{5+}\ b_5\ )x^5 + (a_4 + o)x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + a_2 + b_2\ \ )x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0\ + b_0\ )$$

ګورو،چېد برابر توا یا برابر جګګې واریابلې سره زیاتیږي.

بیلګه:

$$3 \cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 7$$

$$2x^5 + o\ x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1$$

$$(a_{5+}\ b_5\ )x^5 + (a_4 + o)x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + a_2 + b_2\ \ )x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0\ + b_0\ )$$

د پولینومونو کمون کارونه:

کمون یې هم په همدې بیلګه داسې لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$-(b_5 \cdot x^5 + o\, x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0)$$

$$(a_5 - b_5) \cdot x^5 + (a_4 - o)x^4 + (a_3 - b_3)x^3 + (a - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

بیلګه:

$$3 \cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 7$$

$$-(2x^5 + o\, x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1)$$

$$x^5 + 6x^4 \quad -7x^3 \quad -x^2 + x + 6$$

پیژند: دوه پولینومونه سره برابر دي، که خله ووني یا صریبونه یې سره برابر وي، دا په دې مانا چې

$$a_n \cdot x^n + \ldots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

او

$$b_n \cdot x^n + \ldots + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

سره برابر دي که $b_i = a_i$ وي،د ټولو $i=1,2,:::n$ له پاره.

د پولینومونوپه هکله مو په اتم ټولګي کې د ترمونوبرخه کې پوره زده کړه کړې. په پولینوم کې هم ټول هغه شمیرلارې، چې په ګڼونو کې باور لري باوري دي.

دا لاندې بیلګې دې هم داروښانه کړي:

د پولینومونوله پاره نورې بیلګې:

o $3x^2 + 2x + 5$

o $7x^3 + x^2 + 6x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

o $10x^5 + 3x^4 + 2x$

د پولینوم ډولونه:

په شمیرپوهنه کې د پولینوم مختلف ډولونه شته.په شمیرپوهنه کې د بینوم لاندې یو پولینوم پوهیږو، چې له دوه غړو جوړ وي یا په بل ډول ویلی شوي، چې یو بینوم د دوه مونومونو زیاتون یا کمون دی.دا لاندې بیلګې دا هم ښایي، چې بینوم څنګه برېښي!

- $a + b$
- $x^3 + y^3$
- $x - 3$

پولینوم، چې له درې زیاتونونو جوړ دی‌ترینوم بلل کیږي. لاندې بیلګه دا روښانه کوي.

- $a^2 + b^2 + c^2$
- $6a^2 + 7a^3 + 8a^4$

زیاتون ته بیلګه

$$(-x^5-2x^4-3x^2-x+2) + (x^2+2) = -x^5-2x^4-2x^2-x+4$$

پولینومکمون ته بیلګه: په لاندې بیلګه کې ګورو، چې د برابر توانونو x یو له بل څخه کمیږي.

$$(x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x) – (3x^3 + 2x^2 + 6x) = x^4$$

ځل (ضرب):

دا لاندې درې بیلګې د ځل یا ضرب له پاره ورکړ شوي.

موږاو تاسي د دې لارې سره د بینوم فرمول او د ترمونو د ځله ونو له لارې بلد یو، چې دلته ستاسوپام ورته رااړول کیږي

$$(x-4)\cdot(x^2-2x+3) = x^3-6x^2+11x-12$$

$$(x-5)\,(x^2+3\,x+7) = x^3-2\,x^2-8\,x-35$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(x-3)(4x+7) = 4x^2 - 5x - 21$$

$$(x+1)(x^2+x-6) = x^3 + x^2 - 6x + x^2 + x - 6 = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

پولینوموېش:

دا لاندې بېلګه د وېش له پاره راوړ، خو دا چې وېش لږ پیچلی دی، په دې به پوره وغږیو.

$$(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x) : (x + 3) = x^3-x^2+5x-9 + (27)/(x+3)$$

$-(x^4+3x^3)$
$-(-x^3-3x^2)$
$-(5x^2+15x)$
$-(-9x-27)$
پاتېRest: 27

کرښیزځله وونې سره ځل کیږي یا ضربیږي

$$f(x) = (x+1)(x+2)(x-1,5)$$

د ځله وونې ۲ سره غزول کیږي.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+3x+2)(x-1,5) \\ &= x^3 - 1,5x^2 + 3x^2 - 4,5x + 2x - 3 \\ &= x^3 + 1,5x^2 - 2,5x - 3 \quad /\cdot 2 \end{aligned}$$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم وېش:

که د یوه پولینوم صفرځای معلوم وي، نو کړی شو د پولینوم وېش له لارې د پولینوم درجه په یوه کمه کړو. که دا مو مربع مساوات ته لارښود کړي یا بوځیو نو ساده دی، چې نور صفرځایونه بیدا کړو. لاندې بېلګې دې د پولینوم وېش روښانه کړي.

د بیلګې په توګه د دریمې درجې ټولراشنل تابع صفرځایونه معلوم دي، نو کیدی شي چې د تابع مساوات د کرښیزو صریبونوپه څېر ولیکلی شو:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

چیرته چې $x_1; x_2; x_3$ صفرځایونه دي.

موږ اوس په څرګنده توکه تابع یا څیرونه د څیړنې لاندې نیسو

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$$

چیرته چې $x1=2$ یو صفرځای دی، ځکه چې

$$f(2) = 2^3 - 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 8 - 4 - 10 + 6 = 0$$

له دې سره له دې سره کېدی شي د تابع مساوات د $x1=2$ صفرځآی لاندې (له امله) په پام کې ونیسو او لکه چې لاس ته راځي و

لیکو $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6 = (\ldots\ldots\ldots)(x - 2)$

د صفرځای ټاکلو لپاره اینوونه : $f(x)= 0 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=(\ldots)(x-2)=0$

دا افاده $x^3-x^2-5x+6=(\ldots)(x-2)=0$ څېړو

د نوکانو افادې یا ویینې $(\ldots)$ټاکو

دواړه لورې په $(x-2)$وېشو

$$(x^3-x^2-5x+6) :(x-2)=(\ldots)$$

په دې توګه د نوکانو افاده $(\ldots)$لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

وپش د لیکنیز وپش قانون سره سم مخ ته بیایو

$$\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x-2) = x^2 + x - 3$$
$$\underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)}$$
$$x^2 - 5x$$
$$\underline{-\left(x^2 - 2x\right)}$$
$$-3x + 6$$
$$\underline{-(-3x + 6)}$$

د نوکانو افاده (…) اوسx^2+x-3 بنه لري

له دې لاس ته راځي د صفرځای ټاکنو لپاره اینوونه:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=(\ldots)(x-2)=(x^2+x-3)(x-2)=0$$

نو دا مربع مساوات x^2+x-3 اوس حل کوو.

دا د p-q- فرمول سره ځوابوو:

$$p = 1; q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{array} \right.$$

صفرځایونه:

$$x_1 = 2 ; x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} ; x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x محور سره غوڅټکي:

$$P_{x1}(2|0);\ P_{x2}\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}\,|\,0\right);\ P_{x3}\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}\,|\,0\right)$$

تابع مساوات:

$$f(x)=(x-2)\left(x+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}\right)\Leftrightarrow f(x)=x^3-x^2-5x+6$$

د پولینوموېش او لیکنیز پولینوموېش په منځ کې اړیکې شته. په لاندې مخامخوالي کې دا د وېش بې له پاتې په حالت کې را ښایي.

$62228 : 47 = 1\ 3\ 2\ 4$	$(x^3-6x^2+11x-12) : (x-4) = x^2-2x+3$
$-47 \leftarrow 47\cdot 1$	$-(x^3-4x^2) \leftarrow (x-4)\cdot x^2$
152	$-2x^2+11x$
$-141 \leftarrow 47\cdot 3$	$-(-2x^2+8x) \leftarrow (x-4)\cdot(-2x)$
112	$3x-12$
$-94 \leftarrow 47\cdot 2$	$-(3x-12) \leftarrow (x-4)\cdot 3$
188	0
$-188 \leftarrow 47\cdot 4$	
0	

ګڼ ۶۲ د لومړیو دوه ځایونو څخه چوړ دی د دې د وېشونو ګڼونو څخه د پروېشوني (۴۷)

سره وېشل کیږي. لاس ته راوړنه (۱) د (۴۷) سره څل یا ضرب کیږي او د ګڼ (۶۲) څخه کمیږي. د کمښت نتیجې کمښت (۱۵۲) سره په همدې ډول پرمخ ځو تر څو د کمښت لاس ته راوړنه صفر شي.

ازماېښت : $47\cdot 1324 = 62228$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\left(-6x^3+5x^2+14x-12\right):(-2x+3)=3x^2+2x-4$$

$$\underline{-\left(-6x^3+9x^2\right)}$$

$$-4x^2+14x$$

$$\underline{-(-4x^2+6x)}$$

$$8x-12$$

$$-\underline{(8x-12)}$$

$$0$$

Probe:

$$\left(-6x^3+5x^2+14x-12\right)=\left(3x^2+2x-4\right)(-2x+3)$$

بیلګه:

$$\left(x^3+3x^2-6x-8\right):(x-2)=x^2+5x+4$$

$$\underline{-\left(x^3-2x^2\right)}$$

$$5x^2-6x$$

$$\underline{-\left(5x^2-10x\right)}$$

$$4x-8$$

$$\underline{-(4x-8)}$$

$$0$$

Probe: $\left(x^2+5x+4\right)(x-2)=\left(x^3+3x^2-6x-8\right)$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right):(a+b)=a^2+2ab+b^2$$

$$\frac{-\left(a^3+a^2b\right)}{}$$

$$2a^2b+3ab^2$$

$$\frac{-\left(2a^2b+2ab^2\right)}{}$$

$$ab^2+b^3$$

$$\frac{-\left(ab^2+b^3\right)}{}$$

$$0$$

ازماینت:

$$:\ \left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)=\underbrace{\left(a^2+2ab+b^2\right)}_{\text{1. binomische Formel}}(a+b)=\underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)}_{\text{Linearfaktoren}}$$

بیلګه:

$$\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right):(x-2)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$$

$$\frac{-\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2\right)}{}$$

$$-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x$$

$$\frac{-\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x\right)}{}$$

$$-x+2$$

$$\frac{-(-x+2)}{}$$

$$0$$

ازماینت: $\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right)=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1\right)(x-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه:

$$
\begin{aligned}
&(2x^3 \qquad -14x-12):(x-3)=2x^2+6x+4\\
&-(2x^3-6x^2)\\
&\qquad 6x^2-14x\\
&\qquad -(6x^2-18x)\\
&\qquad\qquad 4x-12\\
&\qquad\qquad -(4x-12)\\
&\qquad\qquad\quad 0
\end{aligned}
$$

په ځنو حالتونوکي دا ښه ده، چي د پولينوم ليکنوکي د اړتيا په وخت کېيوه تشيا پرېږدو، کلکه په پورته بيلګه کي چېګورو.

يوه بله شونتيا يي داده، چي هغه تشيا د صفر سره ډکه کړو، لکه دا لاندي:

$$2x^3-14x-12=2x^3+0x^2-14x-12$$

بيلګه:

لاندي بيلګه يو وېش د پاتي سره مخ ته بيايي.لکه ځنګه چي د ليکنيز وېش ځخه راته ځرګند دی.

$$(x^3+3x^2-6x-8):(x-1)=x^2+4x-2\ \ (\text{Rest}\ -10)$$

$$
\begin{aligned}
&-(x^3-x^2)\\
&\qquad 4x^2-6x\\
&\qquad -(4x^2-4x)\\
&\qquad\qquad -2x-8\\
&\qquad\qquad -(-2x+2)\\
&\qquad\qquad\quad -10\ \ \text{Rest}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow (x^3+3x^2-6x-8):(x-1)=x^2+4x-2-\frac{10}{(x-1)}$$

$$\text{Probe: }\left(x^2+4x-2-\frac{10}{(x-1)}\right)(x-1)=(x^3+3x^2-6x-8)$$

دا چي نوي بلدي يون کي د ناسمون سره مخامخ کيږي،غوره ده چي د دې ازمايښت هم وکړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینوموېش په کارونه کې که د پولینوموېش یوصفرځای څرګند وي، نو کیدی شي د پولینوم درجه په یوه وړه یا رکمه شي.

$x_1 = 2$ د پولینوم یو صفرځای دی.

$$\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x - 2) = \underbrace{x^2 + x - 3}_{\text{Restpolynom}}$$

$$-\left(x^3 - 2x^2\right)$$

$$x^2 - 5x$$

$$-\left(x^2 - 2x\right)$$

$$-3x + 6$$

$$-(-3x + 6)$$

د پاتې پولینوم صفرځایونه اوس کیدیشي د څلورۍ یا مربع پولینوم

$$x^2 + x - 3 = 0$$

له لارې پیدا کړو.

د سمون ازماېښت یې وکړۍ.

بیلګه: پولینوموېش او ازماېښت یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(x^3+2x^2-5x-6):(x+1)=x^2+x-6$$

$$-(x^3+x^2)$$

$$x^2-5x$$

$$-(x^2+x)$$

$$-6x-6$$

$$-(-6x-6)$$

$$\text{Probe}:(x+1)(x^2+x-6)=x^3+x^2-6x+x^2+x-6=\underline{\underline{x^3+2x^2-5x-6}}$$

پوښتنې:

لاندې پولینوموېش مخ ته بوځئ

الف- $(x^3-3x^2-6x+8):(x+1)$ ب – $(2x^3-x^2-8x+4):(x^2-4)$

پ - $(2x^3-3x+1):(2x-1)$ ت - $(6a^6+a^4b+25b^3):(3a^2+5b)$

ټ - $(8x^5-6x^7+2x):2x^2$

ث - $(9a^5b^3-12a^3b^5):3a^3b^3$

ج - $(15a^9-8a^6b+8b^3):(3a^3+2b)$ ،

چ – $(14a^4-a^3+5a^2-3a+1):(7a^2-4a+1)$

ح – $\dfrac{3x^5y^{n+2}+3x^2y^{3n+2}-2x^{m+3}y^{n+3}-2x^my^{3n+3}}{x^3+y^{2n}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځ - $\frac{48a^{n+x}+56a^{x}b^{x}-72a^{n}b^{c}-84b^{x+c}}{12a^{n}+14b^{x}}$

 څ - $\frac{8a^{2n+1}-10a^{2n}b+15a^{3n-2}b-12a^{3n-1}}{2a^{2n}-3a^{3n-2}}$

خ - $\frac{2a^{5}b^{x+2}-2a^{3}b^{x+5}+3a^{4}b^{2x-1}-3a^{2}b^{2x+2}}{a^{2}-b^{3}}$

پولینوم برابرون:

د یوه برابرون په کېن اوښي لور د x مختلف توانونه یو پولینوم برابرون ورکوي

$$\text{Beispiel}: x^3-6x=3x^2-8$$

د داسېبرابرون د اوبی له پاره لومړیدا برابرون په داسې نامه صفربڼه اړوي. دا په دې مانا چې برابرون تر هغې په ورتهبنه بدلوناړولکیږي، چې په ښیلور یواځې صفر پاتې شي.

$$\text{Beispiel}: x^3-6x=3x^2-8 \mid -3x^2$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-6x=-8 \mid +8$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-6x+8=0$$

د صفربڼې یا- فورم په ځای د پولینوم دې بڼې ته هم نورمال بڼه وایي.
موږ د پولینوم پنځه بدیلونهراړوړو

لومړی بدیل:

په برابرون کې د اووښتونې x یو یواځنی توان مخ ته راځي.

$$ax^n+b=0 \Rightarrow x=\sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که n ناجوړه وي،نوريښه وېښتوني کيدی شي کميز ګڼ هم وي.
د ربښي ټيک يو حل شتون لري.
که n جوړه وي، نوريښه نيونی(هغه ګڼ چېريښه يېنيول کيږي) يواځې زياتيز ګڼ کيدی شي.
دوه اوبيونې شتون لري.
بيلګه:

$$
\begin{aligned}
& 8x^3 + 27 = 0 \mid -27 \\
\Leftrightarrow\ & 8x^3 = -27 \mid : 8 \\
\Leftrightarrow\ & x^3 = -\frac{27}{8} \mid \sqrt[3]{\ } \\
\Leftrightarrow\ & x = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2} \Rightarrow L = \left\{-\frac{3}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 2x^4 - 3 = 0 \mid +3 \\
\Leftrightarrow\ & 2x^4 = 3 \mid : 2 \\
\Leftrightarrow\ & x^4 = \frac{3}{2} \mid \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \\
\Leftrightarrow\ & x = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}107 \Rightarrow L = \left\{\sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}107\right\}
\end{aligned}
$$

په لومړي حالت کې n ناجوړه دې. ريښه نيوني کميزه هم کيدی شي
اويواځې يواوبی شتون لري.
په دويم حالت کې n جوړه دی، ريښه نيونی زياتيزدی.که کميزوي بيا برابرون اوبی نه لري.

دويم بديل:

پولينومبرابرون يوځلوری‌برابرون (مربع مساوات) انځوروي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+px+q=0$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}_{D}}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$$

دا د -p-q – فرمول له لارې اوبې –یا حلکیري

بیلګه

$$x^2-13x+36=0 \quad p=-13 \quad q=36$$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

$$=\left(\frac{13}{2}\right)^2-36=\frac{169}{4}-\frac{144}{4}=\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l}x_1=\frac{13}{2}+\frac{5}{2}=9\\ x_2=\frac{13}{2}-\frac{5}{2}=4\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{4;9\}}}$$

D د دېسکریمینانت له پاره لیکلکیږي چې هغې لرلو سره مخ دمخه سړی د اوبیونویا حلومو څومره وال یا ګڼون ټاکلی شي.

که صفر   < D وي ، نو څلوری برابرون دوه اوبې یا حلونه لري

که صفر   = D وي،نو برابرون یواځې یو ډبل اوبیلري

که صفر   > D وي، نو برابرون اوبی نه لري په دې حالت کې نو سړی نور مخ ته نه ځي.

دریم بدیل

ولینومبرابرونیو دوه-څلوری برابرون biquadratische انځوري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + pz + q = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{D}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$x^2 = z \Rightarrow x = \pm\sqrt{z} \text{ für } z \geq 0$$

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + pz + q = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{D}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$x^2 = z \Rightarrow x = \pm\sqrt{z} \text{ für } z \geq 0$$

د په ځا اېښووني يا سبستيچيوشن z د -p-q- فرمول په مرسته يا له لارې شميرل کيدی شي

پسې دې بيرته په ځايونه په ځسبستيچيوشن وکارول شي او ريښه دې ونيل شي.

ريښه تيک د زياتيز - p-q-z -ارزښتونو له پاره نيول کيدی شي.

بيلګه:

$$\frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} = 0$$

$$\text{Substitution: } z = x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10}z^2 - \frac{9}{5}z + \frac{81}{10} = 0 \mid \cdot 10$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 18z + 81 = 0$$

$$p = -18\,;\ q = 81$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 - 81 = 0$$

$$z = -\frac{p}{2} = 9$$

$$\text{Rücksubstitution}$$

$$z = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-3; 3\}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې حالت کې د یسکریمینانت صفر دی، داسې چې د سبستیچیوشناووښتونې له پاره یو اوبې .(z = 9) شتون لري.
دا په دېمانا، چې د ۴ –مې درجې پولینوم ټیک دوه اوبي یا ځوابونه لري.

ځلورمبدیل:
په پولینومبرابرون کې هغه همغه ارژښته یا مطلقه غړی نه لرو.

$$ax^3+bx^2+cx=0 \Leftrightarrow x\left(ax^2+bx+c\right)=0$$

$$x_1=0 \quad ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x_{2/3}$$

اووښتونې یا مجهوله x کیدی شي له نوکانو راووېستلشي.
اوبیونې د صفرځل یا – صرب له جملې شمیرلکیدی شي (د فاکتورکولو تلنلار)،

بیلګه

$$\begin{aligned}
&x^3+x^2-2x=0\\
&\Leftrightarrow x\left(x^2+x-2\right)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=0}}\\
&\Rightarrow x^2+x-2=0\\
&\Rightarrow p=1;\ q=-2\\
&\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}\\
&\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}\\
&\Rightarrow x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left|\begin{array}{l} x_2=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1\\ x_3=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-2\end{array}\right.\\
&\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-2;0;1\}}}
\end{aligned}$$

د صفر ځلوونې یا صریب دویم ځلوونی کیدی شي د p-q - فرمولسره سادهوشمیرلشي.
د صفرځلوونې جمله: یوځل یا صرب ټیک هلته صفردی، چې یو ځلوونی صفر ړي.

پنځم بدیل:
پولینومبرابرون له بدیلونو ۱ – ۴ په څیر نه دی.

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

په ډېرو حالتونوکېکیدی شي، د پوینوموېشله لارې اوبی ومیندلشي.
د دې له پاره باید یواوبی معلوم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د پولینوم یواوبی معلوم وي،نو کیدی شید پولینوم درجه د وېش له لارېیه یوه کمه شي. که دا یو څلوری برابرون راکړي،نو اوبیونه یېبیا ساده ه، چې نور اوبې پیدا کړو.
لاندې بیلګه چې اوبی $x = 2$ معلوم دی،د پولینوم تلنلار روښانه یا معلوموي.
پولینوموېش همغه په راته څرګنده لیکنیزډول لاس ته راوړو.
Division.
وېشنه

$$\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x - 2) = x^2 + x - 3$$
$$\underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)}$$
$$x^2 - 5x$$
$$\underline{-\left(x^2 - 2x\right)}$$
$$-3x + 6$$
$$\underline{-(-3x + 6)}$$

د نوکانو(....) ویینه یا افاده اوس دا بڼه $x^2 + x - 3$ لري.
له دې د نورو شمیرنوځای په ځای کول لاسته راځي
$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + x - 3\right)(x - 2) = 0$$

اوس دا څلوری برابرون یا مربع مساوات $\left(x^2 + x - 3\right)$ د اوبیوني دي،چې د
p-q- فرمول له لارې سرته رسیږي.

$$p = 1;\ q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{array} \right.$$

$$x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$\Rightarrow L = \left\{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ 2;\ -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}\right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چيرې د ګومان يا ازماېښت له لورې اوبی نه شي پيداکيدی، نوبيا د نومريک تلنلار څخه کار اخستلکيږي(دا به اوس زموږ دنده نه وي).

برابرونونو ته تمرينونه:

۱ - برابرونونه د x پسې اوبی – يا حل کړئ او ازماېښت يې سرت هورسوئ.

الف - $\frac{1}{5}x^3 - 25 = 0$ ب - $\frac{27}{10}x^3 - \frac{4}{5} = 0$ پ - $8x\left(x^2 - 1\right) = -8x + 1$

۲ – برابرونونه د x پسې اوبی – يا حل کړئ او ازماېښت يې سرت هورسوئ.

الف - $27x^3 - 8 = 0$ ب – $\frac{1}{16}x^3 - 4 = 0$ پ- $-2 + \frac{7}{8}x^3 = -\frac{5}{2}x^3 - 1$

۳ - برابرونونه د x پسې اوبی – يا حل کړئ او ازماېښت يې سرت هورسوئ.

الف- $4k^2x^3 - 2k = 0; k > 0$ ب – $\frac{1}{4b}\left(x^3 - b^3\right) = 0; b > 0$ پ - $(x + 2a)^3 = \frac{1}{8}$

۴ - برابرونونه د x پسې اوبی – يا حل کړئ او ازماېښت يې سرت هورسوئ.

$$\frac{k \cdot x^3}{4} - 2k = 0$$

۵ - ځانګړې باکترياګاني د ۴ ساعتونو په منځ کې خپل ګنو(تعداد) څلور برابره کوي.په يوه ساعت کې يې په سلوکې ډېروالی څومره دئ؟

۶ – د کال په پيل کې د موټروختارزښت نوی ټاکييا کره کيږي. د يوه پنځه کلن زوړ کارشوې يوم،ترپلورونکی € 8500 ورکوي.

د موټر کلنی زيان به څومره (د وختارزښت د په سلو کې) وي، که سړی له دې، که سړس داسېمخ ته لاړ شي چې دا په لومړيوپنځه کلونوکې برابر جګ وي؟

۷ – برابرونونه اوبی –يا حل کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

الف - $\frac{1}{4}x^3 - 4x = 0$ ب- $3x^3 + \frac{4}{3}x^2 = 0$ پ - $x^3 + x^2 - 2x = 0$

۸ – برابرونونه اوبیکړئ

الف- $4x\left(x^2 - x\right) = 7x^3 - 7x^2 - 6x$ ب- $\frac{3}{4}x^3 - 3x^2 = 0$

پ --- $\frac{1}{8}x^3 - x^2 + 2x = 0$

دا لاندې برابرونونه اوبي کړئ

الف- $x^3 + 4x^2 - 20x - 48 = 0$ ب - $-\frac{1}{2}x^3 + 4x = \frac{1}{2}x^2 - 4$

پ - $-2x^3 + 6x^2 - 4x = \frac{1}{2}x - 1$ ت- $x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2 = 0;\ x_1 = \frac{1}{2}$

ټ - $\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x^3 + 4x^2 - 2x\right) = \frac{3}{2}$

لاندې برابرونونه حل کړئ چې یو اوبی یا حل یېمعلوم وي

الف - $x^3 - 3x^2 - 6x - 2 = 0;\ x_1 = -1$

د پولینوم وېش څخه کارواخلی.

-- د پولینوموېش څخه کار واخلئ

الف- $\left(4x^3 - 6x + \frac{5}{2}\right) : (2x - 1)$ ب - $\left(x^3 - 2kx^2 - 2x + 4k\right) : \left(x^2 - 2\right)$

۱۲ – برابرون $x^3 - 4x^2 + (k + 4)x - 2k = 0$ ورکړشوی. وښایئ، چې د $x_1 = 2$ لپاره برابرون یواوبی دی. د k د کوم ارزښت لهپاره ټیک یو دبل اوبی شته؟

لاس ته راوړنه د کرښیزو ځلوونو یا صریبونوپه څیر ولیکی.

پوښتنه:

a داسې وټاکئ، چې برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(ax - 1)(x + 2)(x - 1/2) = 0$

ټیک دوه اوبیونې یا حلونه ولري

یو د دریمې درجې برابرون دا دوه { 4- ; 2 } = L اوبیونې لري.

الف - د اوبیونو یا حلونوپه هکله ویناوې وکړی.

ب – دوه برابرونونه ددې اوبیونې ورکړی.

۳ – برابرونونه اوبیکړی

الف- $2x^3 - x^2 - x = 0$ ب - $x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}$

۴ – برابرونونه اوبیکړی

الف- $-3x^3 + 5x^2 + 4 = 0$ ب- $x^3 - \frac{16}{5}x^2 + \frac{17}{5}x - \frac{6}{5} = 0$

۵- برابرونونه اوبیا حلکړی

الف - $x^3 + x^2 - \sqrt{2}x^2 - 2x - \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$

ب- $x^3 - 2,63x^2 - 1,45x + 3,08 = 0$

برابرونونه اوبی کړی

الف – $-u^3 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{2}u - \frac{3}{2} = 0$ ب - $a^3 - 4a^2 - a + 4 = 0$

۷ – برابرونونه حل کړی

الف - $x^3 - \left(3 + \sqrt{3}\right)x^2 + 3\sqrt{3}x = 0$

ب- $\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 0$ پ- $\frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + 1 = 0$

ت - $\frac{4}{10}x^3 - \frac{6}{10} = 0$ ټ - $x^3 - 5x^2 + 6,25x = 0$

ث - $\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0$ ج - $x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x = 0$

چ - $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ ځ - $x^3 - 3x^2 = -4$

څ - $(3x - 5)\frac{(x - 2)^2}{5} = 0$

پوښتنې

۱ - برابرونونه د پسې حل کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف – $\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+2=0$ ب $\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+2=0$

پ - $-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{4}=0$ ت - $\frac{1}{5}x^3-\frac{3}{5}x^2-5x+15=0$

ټ- $2x^3-x^2-5x-2=0$ ث - $(3x-1)(x+k)^2=0$

۱ –د x پسې يې اوبی کړی $(k\neq 0)$

الف - $\frac{1}{9k}(x^4+x^3-12x^2)=0$ ب - $\frac{k}{2}x^4-kx^3-\frac{3k}{2}x^2=0$

پ - $\frac{x^2}{5k^2}(x^2-3k)=0\,;\,k>0$ ت - $x^4-26x^2+25=0$

ټ – $-\frac{1}{2}x^4+3x^2-4=0$ ث - $\frac{1}{2}x^4-4x^2+2=0$

ج – $-\frac{1}{16}x^4+x^2-3=0$ چ - $\frac{1}{3}(x^2-3)^2-3=0$

څ - $\frac{1}{3}x^4-2x^2+3=0$ ځ - $x^4-11x^2+18=0$

پوښتنې

حلونه يا اوبيونې وټاکئ

الف – $\frac{1}{3}x^4-3x^3=0$ ب - $\frac{1}{7}x^4-7=0$ پ - $\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^2+1=0$

ت- $-2x^4+x^2+x=0$ ټ - $\frac{1}{4}x^5-\frac{3}{4}x^3-x=0$ ث - $\frac{1}{3}(x^2-4)^2-3=0$

ج - $\frac{2}{5}(x^2-9)(x+2)^2=0$ چ - $\frac{1}{64}x^3+\frac{1}{4}x^2+x=0$ څ - $x^4-5x^2-2x=0$

ځ - $x^4-6x^2+8=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس الګوريتم **Der Gauß- Algorithmus**

فکر دې وشي، چې دا برخه په يولسم ټولګي کې راشي. دلته يې راوړنه هم بده نه ده.

	يادونه: خوارزمية د Algorithmus عربي مانا ده : زما په اند دا الخوارزميةّ دی، چې په لاتين کې ترې الګوريتموس جوړ شوی دی. الخواريزم د الګوريتم نوموړکونکی، يوه شوروي پوست مارکې چې د الخواريزم د ۱۲۰۰ کليزې جشن په هکله راوېستلې وه. الګوريتم د پرابلم يا د پرابلمونود ټولګي پا يوه يواځنی د اوبيوني تلنلار ړه. الګوريتم يوه نږيواله تلنلار ده د په خوښه کرښيز برابرونونو سيستم اوبيوني ته

ننوتنبيلګې:

$7x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12$ $-x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5$ $-4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1$ شميرنځيره يا شيما داسې ليکو	درې برابرونونه د درې اووښتونويا واريابلو يا متحولو سره له بڼه بدلون څخه لرو	د کرښې ډول په توګه کار کوو. د ليکو له پاره اجازه شته : - بدليدلی شي - د يوه ګڼ سره ځليدلی شي. - په يوه ګڼ سره وېشلکيدی شي.

- سره زیاتیدی شي

- سره کم کړي

درځونه هم سره بدلیدلی شي، که اووښتوني یا واریابلي x ورسره واخستل شي.

د اوبیونې یا حل لاس ته راوړنه د بیرته په څټ اینوونې له راې هم کیدی شي.

$$-14x_3 = -14$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 1}}$$
$$-11x_2 + 23\cdot 1 = 23$$
$$\Leftrightarrow -11x_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 0}}$$
$$7x_1 + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12$$
$$\Leftrightarrow 7x_1 = -7$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -1}}$$

$$L = \{-1; 0; 1\}$$

ازماېښت: په لاندې کې د رښتیا له پاره ځاي په ځاى دي.

$$7\cdot(-1) + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12 \quad (w)$$
$$-1\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 4\cdot 1 = 5 \quad (w)$$
$$-4\cdot(-1) + 1\cdot 0 - 3\cdot 1 = 1 \quad (w)$$

x_1	x_2	x_3	
7	3	−5	−12
−1	−2	4	5
−4	1	−3	1

x_1	x_2	x_3	
*	*	*	*
0	*	*	*
0	0	*	*

شمیرنه داسي مخ ته بیایو: شننه یې ښي لور ته ده.

x_1	x_2	x_3		
7	3	−5	−12	$\mid\cdot 4$
−1	−2	4	5	$\mid\cdot 28$
−4	1	−3	1	$\mid\cdot 7$
28	12	−20	−48	
−28	−56	112	140	II + I
−28	7	−21	7	III + I
28	12	−20	−48	$\mid : 4$
0	−44	92	92	$\mid : 4$
0	19	−41	−41	
7	3	−5	−12	
0	−11	23	23	$\mid\cdot 19$
0	19	−41	−41	$\mid\cdot 11$
7	3	−5	−12	
0	−209	437	437	$\mid : 19$
0	209	−451	−451	III + II
7	3	−5	−12	
0	−11	23	23	
0	0	−14	−14	

د بیخي نویو له پاره یادونې:

د اوبیونې له پاره تلنډول کیدی شي په کوچنیو پلونو توټه شي.

۱ـ د اصلي ماتلاندې سره د لیکې له لارې ځل (ضرب) سره د د ماتونو مخه ونیسی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲- په لومړۍ کرښه لومړی ګڼ باید زیاتیز وي(که نه، بیا کیدی شي د -۱ سره ځل شي)

۳- د ځل یا وېش له لارې وهڅیږي چې په لومړي درځ کې ټول ګڼونه همغه ارزښت ولري.

په ۲ -مه او ۳ -مه لیکه کې دې لومړي ګڼونه کمیزوي.

۴- ۲ -مې او ۳ -مې لیکې هرې یوې ته دې لومړۍ لیکه ورزیاته شي. له دې سره په لومړي درځ کې ۲ صفرونه منځ ته راځي.

۵- په۲ -مه لیکه کې دې دویم ګڼ زیاتیز وي(که نه، نو د -۱ سره دې ځل شي)

۶ -د ځل یاوېش له لارې په دې نیت کې شي، چې له ۲-مې لیکې په دویم درځ کې ټول ګڼونه همغه ارزښت ولري.

۷ - و ۲ -مېلیکې یا کرښې ته ۳ -مه لیکه ورزیاته کړی. له دې سره په ۳-مه لیکه کې ۲ صفرونه منځ ته راځي.

۸ - لاس ته راوړی د اوبی یا حل په ښت لور کیږدی.

برابر پرمختګېول کیدی شي د هغو سیستمونو له پاره هم وکارول شي، چې له دریو زیات برابرونونه شتون ولري:

بڼه بدلونونه کړی شي سرې بل ډول هم مخ ته بوځي.دا چې ،، ښنګه،، دا یواځې د شمیرپوهانو مهارت ته پرېږدو. د زیاتو تمرینونوله لارې سړی یوه غوره لار پیدا کوي. د شونتیا پورې دې د ماتونومخه دې ونیولشي، چې د نا اړینې تیرونې مخه نیول شوي وي. که سړی ورته تازه وي، کیدی شي ډېر بڼه بدلونونه په یوه وخت جوړ کړي، له دېلارې لیکنه کیږي، خود ناسمون شونتیا زیاتیږي؟

د په ښت اینوولو له لارې د اوبي یا حل لاس ته راوړنه	لانې الماني:سره بدل کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

tausche: ⇄

x_1	x_2	x_3		
7	3	−5	−12	
−1	−2	4	5	$\mid\cdot(-1)$ I ⇄ II
−4	1	−3	1	
1	2	−4	−5	
7	3	−5	−12	II - 7·I
−4	1	−3	1	III + 4·I
1	2	-4	-5	
0	-11	23	23	$\mid\cdot 9$
0	9	-19	-19	$\mid\cdot 11$
1	2	−4	−5	
0	−99	207	207	$\mid : 9$
0	99	−209	−209	III + II
1	2	-4	-5	
0	-11	23	23	
0	0	-2	-2	

$-2x_3 = -2$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 1}}$

$-11x_2 + 23\cdot 1 = 23$

$\Leftrightarrow -11y = 0$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 0}}$

$x_1 + 2\cdot 0 - 4\cdot 1 = -5$

$\Leftrightarrow x_1 = -7$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -1}}$

$L = \{-1; 0; 1\}$

ازماپښت:

$7\cdot(-1) + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12 \quad (w)$

$-1\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 4\cdot 1 = 5 \quad (w)$

$-4\cdot(-1) + 1\cdot 0 - 3\cdot 1 = 1 \quad (w)$

بيلګه ۱ :(ساده يا اسانه)

د په ځټ اينوولو له لارې د اوبيا حل لاس ته راوړنه

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 8$$
$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -4$$
$$4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 1$$

x_1	x_2	x_3		
2	−3	4	8	$\mid\cdot 6$
3	4	−5	−4	$\mid\cdot 4$
4	−6	3	1	$\mid\cdot 3$
12	−18	24	48	$\mid : 6$
12	16	−20	−16	II - I
12	−18	9	3	III - I
2	-3	4	8	
0	34	-44	-64	
0	0	-15	-45	

$-15x_3 = -45$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 3}}$

$34x_2 - 44\cdot 3 = -64$

$\Leftrightarrow 34x_2 = 68$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 2}}$

$2x_1 - 3\cdot 2 + 4\cdot 3 = 8$

$\Leftrightarrow 2x_1 = 2$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 1}}$

$L = \{1; 2; 3\}$

Probe:

$2\cdot 1 - 3\cdot 2 + 4\cdot 3 = 8 \quad (w)$

$3\cdot 1 + 4\cdot 2 - 5\cdot 3 = -4 \quad (w)$

$4\cdot 1 - 6\cdot 2 + 3\cdot 3 = 1 \quad (w)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲ (منځنی سخته)

د په ښتې اینوولو له لارې د اوبې یا حل لاس ته راوړنه

$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2$ $4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 9$ $8x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 13$	$48x_3 = 288$ $\Leftrightarrow x_3 = 6$ $x_2 + 1\cdot 6 = 11$ $\Leftrightarrow x_2 = 5$ $3x_1 + 2\cdot 5 - 4\cdot 6 = -2$ $\Leftrightarrow 3x_1 = 12$ $\Leftrightarrow x_1 = 4$ $L = \{4; 5; 6\}$

x_1	x_2	x_3		
3	2	−4	−2	|·8
4	−5	3	9	|·6
8	7	−9	13	|·3
24	16	−32	−16	|: 8
24	−30	18	54	II - I
24	21	−27	39	III - I
3	2	-4	-2	
0	-46	50	70	|:2 II ⇄ III
0	5	5	55	|:5
3	2	-4	-2	
0	1	1	11	|·23
0	-23	25	35	
3	2	−4	−2	
0	23	23	253	|: 23
0	−23	25	35	III + II
3	2	−4	−2	
0	1	1	11	
0	0	48	288	

ازمایښت:

$$3\cdot 4 + 2\cdot 5 - 4\cdot 6 = -2 \quad (w)$$
$$4\cdot 4 - 5\cdot 5 + 3\cdot 6 = 9 \quad (w)$$
$$8\cdot 4 + 7\cdot 5 - 9\cdot 6 = 13 \quad (w)$$

بیلګه ۳ : (سخته): لاندې درې برابرونونه غواړو اوبی کړو

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{4}{5}x_2 + \frac{3}{8}x_3 = 4$$
$$\frac{3}{4}x_1 + \frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 23$$
$$\frac{4}{5}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

x_1	x_2	x_3		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{8}$	4	$\|\cdot 40$
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{5}$	23	$\|\cdot 40$
$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	8	$\|\cdot 20$
20	−32	15	160	$\|\cdot 12$
30	15	8	920	$\|\cdot 8$
16	−10	5	160	$\|\cdot 15$
240	−384	180	1920	$\|: 12$
240	120	64	7360	II - I
240	−150	75	2400	III - I
20	−32	15	160	
0	504	−116	5440	$\|: 4$
0	234	−105	480	$\|: 3$
20	−32	15	160	
0	126	−29	1360	$\|\cdot 13$
0	78	−35	160	$\|\cdot 21$
20	−32	15	160	
0	1638	−377	17680	$\|: 13$
0	1638	−735	3360	III - II
20	-32	15	160	
0	126	-29	1360	
0	0	-358	-14320	

د په څېړ اینوولو له لارې حل لاس ته راوړنه

$$-358x_3 = -14320$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 40}}$$
$$126x_2 - 29\cdot 40 = 1360$$
$$\Leftrightarrow 126x_2 = 2520$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 20}}$$
$$20x_1 - 32\cdot 20 + 15\cdot 40 = 160$$
$$\Leftrightarrow 20x_1 = 200$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 10}}$$
$$L = \{10 ; 20 ; 40\}$$

ازمايښت:

$$\frac{1}{2}\cdot 10 - \frac{4}{5}\cdot 20 + \frac{3}{8}\cdot 40 = 4$$
$$\Leftrightarrow 5 - 16 + 15 = 4(w)$$
$$\frac{3}{4}\cdot 10 + \frac{3}{8}\cdot 20 + \frac{1}{5}\cdot 40 = 23$$
$$\Leftrightarrow \frac{15}{2} + \frac{15}{2} + 8 = 23(w)$$
$$\frac{4}{5}\cdot 10 - \frac{1}{2}\cdot 20 + \frac{1}{4}\cdot 40 = 8$$
$$\Leftrightarrow 8 - 10 + 10 = 8(w)$$

د کاروني یا استعمال بیلګی

د ټولراشنل فنکشن د فنکشن برابرون د شمیرلو له لارې، چې څلور ټکي یې معلوم دي،

د ګاوس الګوریتم کارونه یا استعمال

د کاروني بیلګه۱:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$P_1(1|4) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 4$

$P_2(2|2) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 2$

$P_3(4|4) \Rightarrow \quad f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 4$

$P_4(5|20) \Rightarrow \quad f(5) = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 20$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	4	
1	2	4	8	2	II − I
1	4	16	64	4	III − I
1	5	25	125	20	IV − I
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	3	15	63	0	III − 3·II
0	4	24	124	16	IV − 4·II
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	0	6	42	6	
0	0	12	96	24	IV − 2·III
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	0	6	42	6	
0	0	0	12	12	

$\Rightarrow$

$12a_3 = 12 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$

$6a_2 + 42a_3 = 6$

$\Leftrightarrow 6a_2 + 42 = 6 \,|\, -42$

$\Leftrightarrow 6a_2 = -36 \,|: 6 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -6}$

$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -2$

$\Leftrightarrow a_1 - 18 + 7 = -2$

$\Leftrightarrow a_1 - 11 = -2 \,|\, +11 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}$

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 4$

$\Leftrightarrow a_0 + 9 - 6 + 1 = 4$

$\Leftrightarrow a_0 + 4 = 4 \,|\, -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

د کارونبيلګه ۲

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$P_1\left(1|-\frac{11}{2}\right) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = -\frac{11}{2}$

$P_2\left(-1|\frac{9}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = \frac{9}{2}$

$P_3(-2|8) \Rightarrow \quad f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 8$

$P_4\left(-3|\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = \frac{5}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	$-\frac{11}{2}$	$\vert \cdot 2$
1	−1	1	−1	$\frac{9}{2}$	$\vert \cdot 2$
1	−2	4	−8	8	$\vert \cdot 2$
1	−3	9	−27	$\frac{5}{2}$	$\vert \cdot 2$
2	2	2	2	−11	
2	−2	2	−2	9	II − I
2	−4	8	−16	16	III − I
2	−6	18	−54	5	IV − I
2	2	2	2	−11	
0	−4	0	−4	20	$\vert :(-2)$
0	−6	6	−18	27	$\vert :3$
0	−8	16	−56	16	$\vert :4$
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	−2	2	−6	9	III + II
0	−2	4	−14	4	IV + II
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	0	2	−4	−1	
0	0	4	−12	−6	IV − 2·III
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	0	2	−4	−1	
0	0	0	−4	−4	

$\Rightarrow$

$$-4a_3 = -4 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 - 4a_3 = -1$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 - 4 = -1 \mid +4$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = 3 \mid :2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$$

$$2a_1 + 2a_3 = -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 2 = -10 \mid -2$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 = -12 \mid :2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$$

$$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -11$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 12 + 3 + 2 = -11$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 7 = -11 \mid +7$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 = -4 \mid :2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2}}$$

د کاروني بیلګه ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|-16) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -16$$
$$P_2(2|11) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 11$$
$$P_3(4|-11) \Rightarrow \quad f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = -11$$
$$P_4(6|-9) \Rightarrow \quad f(6) = 216a_3 + 36a_2 + 5a_1 + 1a_0 = -9$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	−16	
1	2	4	8	11	II − I
1	4	16	64	−11	III − I
1	6	36	216	−9	IV − I
1	−1	1	−1	−16	
0	3	3	9	27	|: 3
0	5	15	65	5	|: 5
0	7	35	217	7	|: 7
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	1	3	13	1	III − II
0	1	5	31	1	IV − II
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	−8	
0	0	4	28	−8	IV − 2·III
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	−8	
0	0	0	8	8	

$\Rightarrow$

$$8a_3 = 8 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 + 10a_3 = -8$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 10 = -8 \mid -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -18 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -9}$$

$$a_1 + a_2 + 3a_3 = 9$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 9 + 3 = 9$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 6 = 9 \mid +6 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 15}$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = -16$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 15 - 9 - 1 = -16$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 25 = -16 \mid +25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 9}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 9}}$$

د کاروني بیلکه۴ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{aligned}
P_1(-1|7) &\Rightarrow & f(-1) &= -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 &= 7\\
P_2(-2|6) &\Rightarrow & f(-2) &= -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 &= 6\\
P_3(3|1) &\Rightarrow & f(3) &= 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 &= 1\\
P_4(-3|-2) &\Rightarrow & f(-3) &= -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 &= -2
\end{aligned}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	7	
1	−2	4	−8	6	II − I
1	3	9	27	1	III − I
1	−3	9	−27	−2	IV − I
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	4	8	28	−6	III + 4·II
0	−2	8	−26	−9	IV − 2·II
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	0	20	0	−10	
0	0	2	−12	−7	

$\Rightarrow$

$$20a_2 = -10 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{1}{2}}$$

$$2a_2 - 12a_3 = -7$$

$$\Leftrightarrow -1 - 12a_3 = -7 \,|\, +1$$

$$\Leftrightarrow -12a_3 = -6 \,|: (-12) \Leftrightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{2}}$$

$$-a_1 + 3a_2 - 7a_3 = -1$$

$$\Leftrightarrow -a_1 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow -a_1 - 5 = -1 \,|\, +5$$

$$\Leftrightarrow -a_1 = 4 \,|: (-1) \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -4}$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 3 = 7 \,|\, -3 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 4}$$

Die Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$

د پررته المانيژباره:د خيروني يا تابع برابرون

د کاروني بيلګه ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(2|22) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 22$$
$$P_2(4|44) \Rightarrow \quad f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 44$$
$$P_3(-4|4) \Rightarrow \quad f(-4) = -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = 4$$
$$P_4(8|40) \Rightarrow \quad f(8) = 512a_3 + 64a_2 + 8a_1 + 1a_0 = 40$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	2	4	8	22	
1	4	16	64	44	II − I
1	−4	16	−64	4	III − I
1	8	64	512	40	IV − I
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	−6	12	−72	−18	III + 3 · II
0	6	60	504	18	IV − 3 · II
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	0	48	96	48	
0	0	24	336	−48	$IV - \frac{1}{2} \cdot III$
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	0	48	96	48	
0	0	0	288	−72	

$\Rightarrow$

$$288a_3 = -72 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{4}}$$

$$48a_2 + 96a_3 = 48$$
$$\Leftrightarrow 48a_2 - 24 = 48 \,|\, +24$$
$$\Leftrightarrow 48a_2 = 72 \,|\, : 48 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$$

$$2a_1 + 12a_2 + 56a_3 = 22$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 18 - 14 = 22$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 4 = 22 \,|\, -4$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 = 18 \,|\, : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}$$

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 22$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 18 + 6 - 2 = 22$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 22 = 22 \,|\, -22 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

Die Funktionsgleichung: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x$

د پړرته المانيژباږه:د ځيرونبيا تابع برابرون

د کاروني بيلکه۶ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|0) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 0$$
$$P_2(-1|-2) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -2$$
$$P_3(2|16) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 16$$
$$P_4(-3|-4) \Rightarrow \quad f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = -4$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	0	
1	−1	1	−1	−2	II − I
1	2	4	8	16	III − I
1	−3	9	−27	−4	IV − I
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	1	3	7	16	$III + \frac{1}{2} \cdot II$
0	−4	8	−28	−4	
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	3	6	15	|: 3
0	0	8	−24	1	|: 8
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	1	2	5	
0	0	1	−3	0	IV − III
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	1	2	5	
0	0	0	−5	−5	

$\Rightarrow$

$$-5a_3 = -5 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$a_2 + 2a_3 = 5$$
$$\Leftrightarrow a_2 + 2 = 5 \,|\, -2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 3}$$

$$-2a_1 - 2a_3 = -2$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -2 \,|\, +2$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 0}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 3 + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 4 = 0 \,|\, -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -4}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + 3x^2 - 4}}$$

د کاروني بیلګه ۷ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|1) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 1$$
$$P_2(2|0) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 0$$
$$P_3(-2|4) \Rightarrow \quad f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 4$$
$$P_4(3|9) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 9$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	1	
1	2	4	8	0	II − I
1	−2	4	−8	4	III − I
1	3	9	27	9	IV − I
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	−3	3	−9	3	III + 3 · II
0	2	8	26	8	IV − 2 · II
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	0	12	12	0	
0	0	2	12	10	$IV - \frac{1}{6} \cdot III$
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	0	12	12	0	
0	0	0	10	10	

$\Rightarrow$

$$10a_3 = 10 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$12a_2 + 12a_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 12a_2 + 12 = 0 \,|\, -12$$
$$\Leftrightarrow 12a_2 = -12 \,|\, : 12 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -1}$$

$$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -1$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 3 + 7 = -1$$
$$\Leftrightarrow a_1 + 4 = -1 \,|\, -4 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -5}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 5 - 1 + 1 = 1$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 5 = 1 \,|\, +5 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 6}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6}}$$

د کاروني بیلګه ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|6) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 6$$

$$P_2(3|-4) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -4$$

$$P_3\left(-\frac{1}{2}\Big|\frac{45}{8}\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{2}a_1 + 1a_0 = \frac{45}{8}$$

$$P_4\left(-\frac{3}{2}\Big|-\frac{77}{8}\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}a_3 + \frac{9}{4}a_2 - \frac{3}{2}a_1 + 1a_0 = -\frac{77}{8}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	6	
1	3	9	27	−4	
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{45}{8}$	$\mid\cdot 8$
1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{27}{8}$	$-\frac{77}{8}$	$\mid\cdot 8$
1	1	1	1	6	
2	3	9	27	−4	II − I
8	−4	2	−1	45	III − 8·I
8	−12	18	−27	−77	IV − 8·I
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	−12	−6	−9	−3	III + 6·II
0	−20	10	−35	−125	IV + 10·II
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	42	147	−63	|: 21
0	0	90	225	−225	|: 45
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	2	7	−3	
0	0	2	5	−5	IV − III
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	2	7	−3	
0	0	0	−2	−2	

$\Rightarrow$

$$-2a_3 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 - 7a_3 = -3$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 7 = -3 \mid -7$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -10 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -5}$$

$$2a_1 + 8a_2 + 26a_3 = -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 - 40 + 26 = -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 - 14 = -10 \mid +14$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 = 4 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 6$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 2 - 5 + 1 = 6$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 2 = 6 \mid +2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 8}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کاروني یا استعمال بیلګه۹ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1\left(1 \middle| -\frac{9}{2}\right) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = -\frac{9}{2}$$

$$P_2\left(-1 \middle| \frac{11}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = \frac{11}{2}$$

$$P_3\left(3 \middle| -\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -\frac{5}{2}$$

$$P_4\left(-\frac{5}{2} \middle| -8\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{125}{8}a_3 + \frac{25}{4}a_2 - \frac{5}{2}a_1 + 1a_0 = -8$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	$-\frac{9}{2}$	$\mid \cdot 8$
1	−1	1	−1	$\frac{11}{2}$	$\mid \cdot 8$
1	3	9	27	$-\frac{5}{2}$	$\mid \cdot 8$
1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$	$-\frac{125}{8}$	−8	$\mid \cdot 8$

$$-11a_3 = -11 \mid : (-11)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

8	8	8	8	−36	
8	−8	8	−8	44	II − I
8	24	72	216	−20	III − I
8	−20	50	−125	−64	IV − I
8	8	8	8	−36	|: 4
0	−16	0	−16	80	|: 4
0	16	64	208	16	|: 4
0	−28	42	−133	−28	|: 7
2	2	2	2	−9	
0	−4	0	−4	20	
0	4	16	52	4	III + II
0	−4	6	−19	−4	IV − II
2	2	2	2	−9	
0	−4	0	−4	20	
0	0	16	48	24	|: 8
0	0	6	−15	−24	|: 3

$$2a_2 + 6a_3 = 3$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 6 = 3 \mid -6$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -3 \mid : 2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow$$

$$-4a_1 - 4a_3 = 20$$
$$\Leftrightarrow -4a_1 - 4 = 20 \mid +4$$
$$\Leftrightarrow -4a_1 = 24 \mid : (-4)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$$

$$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -9$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 12 - 3 + 2 = -9$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 13 = -9 \mid +13$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 = 4 \mid : 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کاروني يا استعمال بيلکه ۱۰ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|25) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 25$$
$$P_2(-1|-49) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -49$$
$$P_3(3|27) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 27$$
$$P_4(5|5) \Rightarrow \quad f(5) = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 5$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	25	
1	−1	1	−1	−49	II − I
1	3	9	27	27	III − I
1	5	25	125	5	IV − I
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	2	8	26	2	III + II
0	4	24	124	−20	IV + 2·II
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	0	8	24	−72	
0	0	24	120	−168	IV − 3·III
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	0	8	24	−72	
0	0	0	48	48	

$\Rightarrow$

$$48a_3 = 48 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$8a_2 + 24a_3 = -72$$
$$\Leftrightarrow 8a_2 + 24 = -72 \mid -24$$
$$\Leftrightarrow 8a_2 = 96 \mid :8 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -12}$$

$$-2a_1 - 2a_3 = -74$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -74 \mid +2$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 = -72 \mid :(-2) \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 36}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 25$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 36 - 12 + 1 = 25$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 25 = 25 \mid -25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x}}$$

پوښتنې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 0x_3 = 28 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 = 30 \\ 0x_1 + x_2 + x_3 = 32 \end{array} \right| \Rightarrow L = \{13\,;\,15\,;\,17\}$$

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 = 12 \\ 3x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 11 \\ 0x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 10 \end{array} \right| \Rightarrow L = \{3\,;\,2\,;\,1\}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 17 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 13 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{array} \right| \Rightarrow L = \{15\,;\,12\,;\,10\}$$

$$\left| \begin{array}{l} -4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -8 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19 \end{array} \right| \Rightarrow L = \{-1\,;\,3\,;\,2{,}5\}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 15 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 23 \end{array} \right| \Rightarrow L = \{5\,;\,3\,;\,1\}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 20 \end{array} \right| \Rightarrow L = \{5\,;\,3\,;\,1\}$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 = -6 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -21 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 3 & -2 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & -4 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & -6 & 2 & -21 \end{array} \Rightarrow L = \{1\,;\,-1\,;\,2\,;\,-1\}$$

$$\left| \begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 - 8x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - 6x_2 - x_3 + 3x_4 = 20 \\ x_4 = 5 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline -2 & 3 & -4 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & -8 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -1 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \Rightarrow L = \{-1\,;\,-1\,;\,0\,;\,5\}$$

د لاس ته راوړنې د کنترل له پاره دې ازماېښت وشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هورنر- شيما Das Horner – Schema

د دې له پاره چې د جګودرجو ټولراشنلځيرونو يا که غواړئ توابعو ګراف وکښلای شو، بايد يو ارزښت جدول برابرکړو. دا به ډېر وخت اوځای ونيسي، چې د دې له پاره اړين څيره ارزښتونه يا فنکشنارزښتونه وشميرو.

د هورنر – شيما دا شميرنې ډېرې ساده کوي.

بيلګه : دريمه درجه ټولراشنل فنکشن يا راشنل ځيرونه

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

د x د ډېرځله نوکانو بندولو له لارېمنځ ته راځي:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = x\left[a_3x^2 + a_2x + a_1\right] + a_0 = \underbrace{x\underbrace{\left[x\underbrace{\left(a_3x + a_2\right)}_{e_2} + a_1\right]}_{e_4} + a_0}_{E}$$

که سړی غواړي چې د $x = x_1$ له پاره فنکشن ارزښت وشميري، نوکی دی شي سړی په لاندې ډول له دننه دباندې لورته مخ ته لاړ شي:

-- ګرد نوکان وشميري

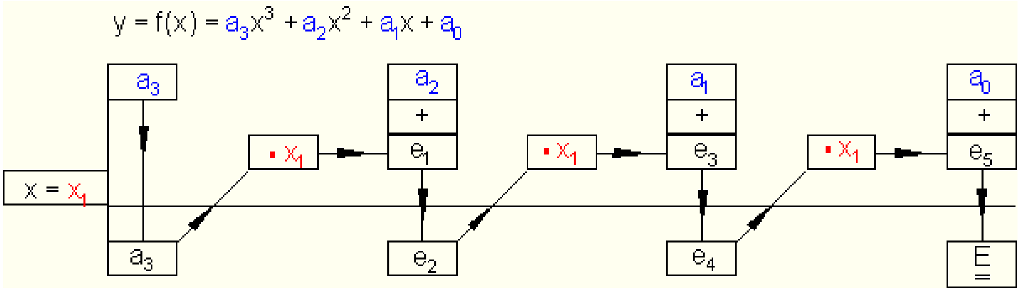
--منځ لاس ته راوړنه (ښه ليکنه به يې داسې وي: منځلاس –ته-راوړنه) د x_1 سره ځل کړي او a_1 ته يې ور زيات کړي

--لاس ته راوړنه د x_1 سره ځل کړي او a_0 ته يې ور زيات کړو

دا شميرنکارونې يا که غواړئ شميرنعمليې کيدی شي څيره ډوله يا شيماتيکي داسې انځور کړو:

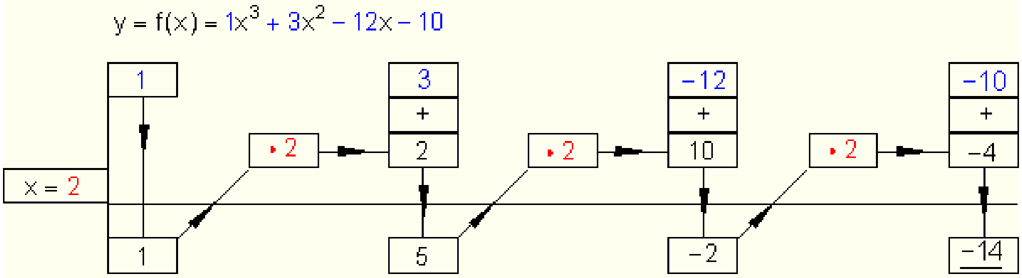
(c) ketabton.com: The Digital Library

Allgemeines Schema: تولیزه بڼه



بیلګه : $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 12x - 10$

د $x = 2$ له پاره دې د $y = f(2)$ ارزښت د هورنر – شیما له لارې وشمیرل شي.



نولاس ته راځي یا باورلری: $y = f(2) = \underline{-14}$

د یوه دریمې درجې پولینوم له پاره- چې غواړو ګراف یې رسم کړو یا کاږو- باید یو ارزښتجدول جوړکړو.

$y = f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 \quad D_f = \{x \mid -4 \leq x \leq 3\}_{\mathbb{R}}$

$a_3 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_1 = 1 \quad a_0 = -6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	1	4	1	−6	
x = −4		−4	0	−4	
	1	0	1	−10	= f(−4)
	1	4	1	−6	
x = −3		−3	−3	+6	
	1	1	−2	0	= f(−3)
	1	4	1	−6	
x = −2		−2	−4	+6	
	1	2	−3	0	= f(−2)
	1	4	1	−6	
x = −1		−1	−3	+2	
	1	3	−2	−4	= f(−1)
	1	4	1	−6	
x = 1		+1	+5	+6	
	1	5	6	0	= f(1)
	1	4	1	−6	
x = 2		+2	+12	+26	
	1	6	13	20	= f(2)
	1	4	1	−6	
x = 3		+3	+21	+66	
	1	7	22	60	= f(3)
	1	4	1	−6	
x = −2,5		−2,5	−3,75	+6,875	
	1	1,5	−2,75	0,875	= f(−2,5)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارزښتجدول؛

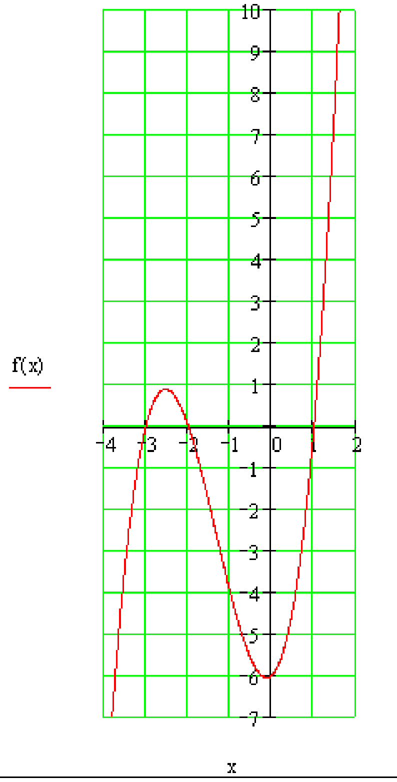
x	-4	-3	-2,5	-2	-1
f(x)	-10	0	0,875	0	-4
x	0	1	2	3	
f(x)	-6	0	20	60	

د لښتي- یا جدولارزښت سره کیدی شی په نږدې توګه ګراف وکښل شي.

که د ګراف کښلو کې څرګنده شي،چې یوبل ځای هم پاتې دی،دا کیدی شي هر وخت د هورنرشیما په مرسته پیدا شي.

ګراف په لاندې x – ځایونوکې صفر ارزښتونه لري: -3; -2;1

دا y – محور په -6 کې غوڅوي.



که په کښلوکې څرګنده شي چې یوبل ځای هم پاتې دی، نو دا کیدی شي د هونرشیما په مرسته پیدا کړو،د بیلګېپه توګه f (0,5)

	1	4	1	-6	
x = 0,5		+0,5	+2,25	+1,624	
	1	4,5	3,25	-4,375	= f(0,5)

د پولینوم وېشني پر ځای کیدی شي د ټولراشنل تابع درجه د هورنر شیما له لارې هم کمه شي.
موږ د هورنر شیما څیړو:

موږ بیرته تابع ترڅیرني لاندې نیسو

$$f(x)=x^3-x^2-5x+6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چيرته چي 2=x1يو صفرځای دی.

د $f(x)=x^3-x^2-5x+6$ لپاره د هورن شيما د 2=x1 سره

موخه د ضريب (x-2) له نوکانو وتنه ده. $$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -5 & 6 \\ x=2 & \downarrow & \underline{2} & \underline{2} & \underline{-6} \\ & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$	په دريمه ليکه کې دري عددونه د وېش نتيجو لپاره هم د پاتي پولينوم ضريبونه بللکيږي. $$f(x) = \underbrace{(x-2)}_{\text{Linearfaktor}} \underbrace{(1\cdot x^2 + 1\cdot x - 3)}_{\text{Restpolynom}}$$ پاتي پولينوم کربنيز ضريب

د f (x) د نورو صفرځايونو لپاره د پاتي يا باقي پولينوم صفرځايونه شميرو. دا د اړونده مربع مساوات د حل له لارې کيږي.

نتيجه يې د لاندي پولينوم وېش بيلګې سره وګورى.

بيلګه: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^2 - x - 4$ چيرته چي $x_1 = -2$ يو صفرځای دی.

$$\begin{array}{c|cccc} & \frac{1}{4} & 1 & -1 & -4 \\ x=-2 & \downarrow & -\frac{1}{2} & -1 & 4 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -2 & 0 \end{array}$$	باقي يا پاتي پولينوم: $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$ $$f(x) = (x+2)\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2\right)$$ د مربع مساوات حل $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0$ له دي لاس ته راځي او معکوس: 2=x2 او 4-=x3

بيلګه:

$f(x) = -x^3 + 7x - 6 = -x^3 + 0\cdot x^2 + 7x - 6$ چيرته چي $x_1 = 1$ يو صفرځای دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

باقي پولينوم: -1.x-1.x+6 f(x)=(x-1)(.x²-x+6) د مربعيز مساوات حل: .x²-x+6 له دي لاس تره اوپه څټ يا برعکس x2=2 او x3=-3	-1 0 7 -6 x = 1 ↓ -1 -1 6 -1 -1 6 0

لکه بيلګه چې ښايي، د هورن شيما سره د پاتې پولينوم ټاکنه ساده ده نسبت د پولينوم وېش ته.

دا ټولې پورته تلنلارې مو د مربع مساوات حل ته لاربښودوي. که دا ونه توانيږو، نو د نومريکي تلنلارو څخه کار اخستل کيږي، چې دا دلته نه څېړل کيږي.

تمرينونه: د پولينوم وېش...

د لندې ترمونو لپاره د پولينوم وېش وکاروی:

لومړی - $\left(x^3+2x^2-5x-6\right):(x+1)$ دیم - $\left(2x^3-14x-12\right):(x-3)$

دريم - $\left(3x^3-15x^2-51x+63\right):(x-7)$ څلورم - $\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x+6\right):(x+2)$

پنځم - $\left(x^3+\frac{11}{2}x^2+5x-4\right):(x+2)$ شپږم - $\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3\right):(x-2)$

اوم - $\left(x^3-\frac{5}{4}x^2-\frac{23}{4}x+\frac{3}{2}\right):(x-3)$ اتم - $\left(x^3-\frac{5}{3}x^2-\frac{47}{3}x-5\right):(x+3)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم - $\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3\right):(x+3)$ لسم - $\left(3x^3-15x^2-51x+63\right):(x-1)$

تمرینونه: د ټول راشنل توابعو صفرځایونه.

تمرین ټولراشنل تابع **IV**

د صفرځایونو ټاکنه له مختلفو لارو څخه.

د یوه تاسو ته مناسب قانو له مخې د ټولراشنل توابعو صفرځایونه وټاکی. د x محور سره د ګراف غوڅتکي و ټاکي او د تابع مساوات د کربنیزو ضریبونو د ضرب په څیر انځور کړی.

اول - $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{13}{2}x^2+18$ دویم - $f(x)=x^3-4x^2+x+6$

دریم - $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1$ څلورم - $f(x)=-\frac{3}{2}x^4+\frac{75}{2}x^2-216$

پنځم - $f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{11}{4}x+3$ شپږم - $f(x)=-\frac{3}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x$

اوم - $f(x)=3x^4-3$ اتم - $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x-2$

نهم - $f(x)=2x^3-4x^2-16x$ لسم - $f(x)=2x^3+4x^2-26x+20$

پوښتنې

د ټول هوښیار یا راشنل توابعو محور غوڅتکي ګرافونه

صفرځایونه وشمیرئ او ګرافونه وکاږئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د لاندې توابعو صفرځايونه وشميرئ

الف- $f(x)=x^4+2x^3+x^2$ ب - $f(x)=x^2-6x+9$

پ - $f(x)=\left(x^2-25\right)\left(\frac{1}{2}x+4\right)$ ت - $f(x)=x^6-x^4$

ټ - $f(x)=3x\left(\frac{2}{3}x-2\right)(-2x+3)$ ث - $f(x)=3\left(x^2+4\right)\left(x^2-4x+10\right)$

دويم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځايونه وشميرئ

الف- $f(x)=x^4-6x^2+5$ ب - $f(x)=4x^4+6x^2-\frac{7}{4}$ پ - $f(x)=x^6-8x^4+20x^2$

دريم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځايونه وشميرئ

الف- $f(x)=2x^3+4x^2-2x-4$ ب - $f(x)=x^3-12x+16$

پ - $f(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$ ت - $f(x)=2x^3-10x^2-4x+20$

ټ - $f(x)=x^4-\frac{11}{4}x^2-\frac{9}{4}x-\frac{1}{2}$ ث - $f(x)=-3x^3+3x^2-3x+3$

ج - $f(x)=-5x^3-10x^2-\frac{5}{2}x-5$ چ - $f(x)=x^4+3x^3+5x^2+9x+6$

څلورم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځايونه وشميرئ

الف- $f(x)=-3x^4+15x^2-12$ ب - $f(x)=x^4-x^3-2x^2$

پ - $f(x)=-2x^3+2x^2+16x-24$ ت - $f(x)=\left(x^2-6x+9\right)(x-4)$

ټ - $f(x)=x^6-3x^4-4x^2$ ث - $f(x)=x^4-25x^2-60x-36$

پنځم: د لاندې ټولراشنل توبعو ګرافونه په يوه مناسب پروتولاړ يا کواودينات سيتم کې وکاږئ. د دې لپاره يو ارزښت جدول واچوئ او محور غوښتکي وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- $f(x)=x^3-6x^2+9x \quad D_f=\{x\,|\,-0{,}5\le x\le 4{,}5\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-2 \quad D_f=\{x\,|\,-3{,}5\le x\le 2{,}5\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f(x)=x^3-6x^2+9x-2 \quad D_f=\{x\,|\,-0{,}2\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \quad D_f=\{x\,|\,-3\le x\le 3{,}5\}_{\mathbb{R}}$

ټ - $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+2 \quad D_f=\{x\,|\,-2{,}5\le x\le 3{,}5\}_{\mathbb{R}}$

ث - ج - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x \quad D_f=\{x\,|\,-0{,}2\le x\le 8\}_{\mathbb{R}}$

شپږم: د لاندې توابعو صفرځایونه وټاکئ او ګراف يې تر شونې پولې پورې ښه وکاږئ. ارزښتجدول کيږدئ او ځنې ارزښتونه د جبشميري سره وشميرئ. ځنې صفرځایونه اټکل کړئ او که شوني وي، صفرځایونه وشميرئ.

الف- $f(x)=x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{10}{3}x-1$ ب - $f(x)=0{,}01\left(x^3-x^2-x+1\right)$

پ - $f(x)=0{,}1x^3-0{,}3x^2-9x-10$ ت - $f(x)=(x-1{,}7)\left(x^2-3\right)$

تر ۶۴۰ پورې دلته محورغوځتکیراځي؟

اړيکي "Relation":

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

یوه اړیکهٔ له دوه شیانو جوړه ده:

۱ – یوه وینابنه

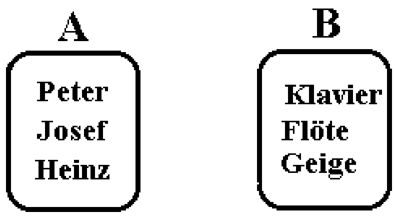
۲ – جوړه، چې دا وینا یې پوره کوي(چې وینابنه یوه رښتیا وینا کوي)٠

بیلګه :

دیوې کورنۍ د غړو ډیرۍ A دې ورکړ شوې وي او B د لوبو یا موزیک الو ډیرۍ٠

B	A
فوټبال	سپین
هاکي	
زیږګل	
والبال	
کوچۍ	

یا دا لاندې



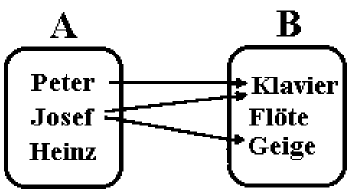
موزیک الي		د کسانونومونه:
پیانو شپیلۍ ګایګي		پتر یوسف هاینخ

د دواړو ډیریو په منځ کې یوه بینار وینابنه دې یوه وینابنه وي، چې سړی a اله bباندې لوبې کوي٠

جوړه ، چې وینابنه پوره کوي، کیدی شي د بیلګې په توګه لاندې جوړې وي:

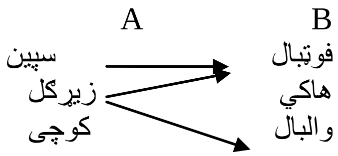
(c) ketabton.com: The Digital Library

پتر په کلاویر لوبه کوي، یوسف په کلاویر لوبه کوي ، یوسف په ګایګې لوبه کوي، د څیرې په توګه اړیکې داسې انځوریږي:



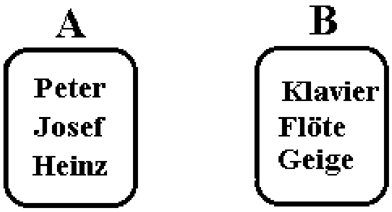
a spielt das Instrument b

یا دا لاندې



نورې بیلګې

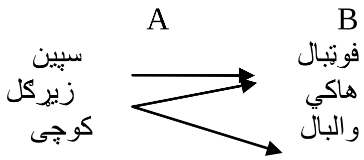
موږ د مخه دا لاندې ډیرۍ منځ ته ر اوړې:

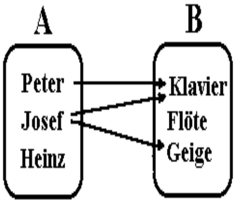


د دواړو ډیریو په منځ کې د اړیکو په څیر موږ اړیکې «په اله لوبه کوي» راوړې یا دا لاندې

فوټبال هاکي والبال	سپین زیړګل کوچی

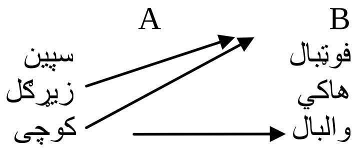
(c) ketabton.com: The Digital Library

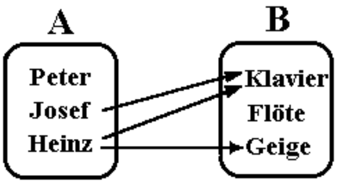




a spielt das Instrument b

په پورته کې ښوول کیږي، چې څوک په کومه اله لوبه کوي.
موږ اوس دواړه ډیری A او B ساتو ، مګر د دوي ترمنځ نوې اړیکې غواړو وپیژنو یا تعریف کړو:
بینار اړیکې دې اوس داسې وي، چې « اله لري» او « په اله باندې لوبه کوي» نور نهوي٠
د دې برسیره دې اړیکې « اله لري » لاندې درې جوړې ولری :
هاینځ کلاویر لري
هاینځ یوه ګایګې لري
یوسف یوه کلاویر لري
د ځیرې په ځیر انځور یږي:





a besitzt das Instrument b

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدلکیږي، چې د دوه ډیریو په منځ کې مختلفې اړیکې منځ ته راتللی شي یا ټینګیدلی شي.

شننیزه انځورونه
مخ ته تیرو مخونوکې مو زده کړل، یوې اړیکې پورې دوه شیان اړه لري: یوه وینا بڼه او یوه جوړه، چې دا وینابڼه پوره کوي.
کله اړیین نه دي یا نه شي کیدی، چې ټولې جوړې ورکړای شو، کومې چې په یوه اړیکې پورې اړه لري.

بیلګه ۱
ډیری $A = \{ 1,2,3\}$ او ډیری $B=\{1,2,3\}$ دې ورکړ شوي وي. وینابڼه کوچنی له یا لنډ <

هر زده کوونکی پوهیږي، چې جوړې $(1/2),(1/3)$ او $(2/3)$ دا وینابڼه پوره کوي.
جوړو ګڼلو ته اړنه یو، بلکې دا د وینابڼې مخ ته پرتې ډیری A او B ته.

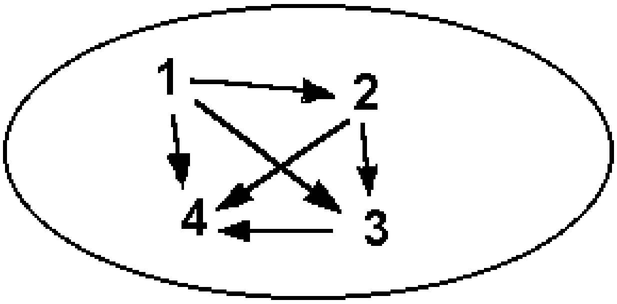
بیلګه ۲
په ځانګړې توګه دا هلته له پامه غورځول کیږي، چې ټولې جوړې وشمیرې، کله چې وینابڼو ته مخ ته پرتې ډیری یا ډېرې لویې وي او یا ناپای.
بیلګه : ډیری : $A = B = \{1, 2, 3, \ ... \}$
وینابڼه: له هغې، چې لیدل کیږي، چې بیخې ناشونې ده، چې ټولې جوړې وشمیرل شي، چې دا وینابڼه پوره کوي.

بیلګه ۳
کله کله اړیکه بیخي نه شي انځوریدلی.
بیلګه : ډیری ناریته =M او ښځینه =F وینابڼه کې راوستل شي، چه « واده له سره ».
دا څوک نه شي ګڼلی، چې څوک له چا سره واده دی او دا نه په برخه اخستونکو ډیریو M او F کې ورکړ شوې.

د یوې اړیکې تیوپ یا ډول
اړیکه په دوه ګروپونو ویشل کیدی شي.
۱ – ددوه ډېریو ترمنځ اړیکې
۲ – د یوې ډیری په دننه کې اړیکې

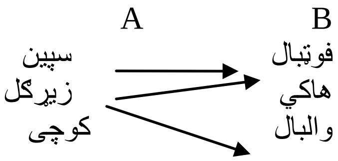
(c) ketabton.com: The Digital Library

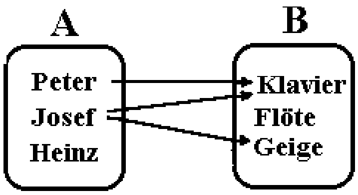
تیوپ ۱ – مورږ وپیژند
د تیوپ ۲ - لپاره بیلګه لاندې اړیکي دي(چې په څیره کي کښل شوي دي):



x له y څخه کوچنی دي

د مخ ته تیرو بیلګو په مخامخوالي یا تضاد دلته د ډیریو د توکو ترمنځ اړیکی پرتي دي
بنسټډیری ،موخه ډیری یا تر مخورشو پسي ورشو
Erklärungروښانه ونه
د ډیری A (بنسټډیری) او B (موخه ډیری) په اړیکو کې په ریښتوني د مخ ته ورشو (پتر ،یوس) همداسي ورپسي ورشو (کلاویر، ګایګي) اړیکي هغه توکي جوړوي، چې په کارونه کي ونډه لري٠
A د لوبغاړو نومونه دي او B د لوبو نومونه دي





Grundmenge: { سپین ، زیرګل، کوچی} : بنسټډیری
Zielmenge { فوتبال ، هاکي ، والیبال } : موخه ډیری

(c) ketabton.com: The Digital Library

Vorbereich ترمخورشو {Peter, Josef} :
Nachbereich وروسي ورشو {Klavier, Geige} :

ځني شميرپوهان دا مخورشو او همداسي پسي ورشو، تعريفډيرى ،
ارزښتډيرى يا تعريفورشو همداسي ارزښتورشو بولي

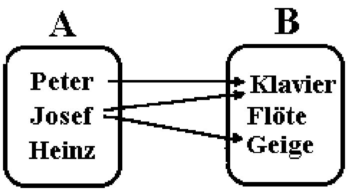
د اړيکو تختهRelationstafel

تراوسه مو تولي اړيکي د غشيدياګرام له لارې انځور کړل۰ يو شونوالى يا امکانات يې د اړيکو تختې له لارې انځورونه ده:

د دې لپاره د بنسټډيرى او موخه ډيرى توکي په يوه جدول کې ليکو ۰ د بنسټډيرى توکي په پورته ليکه کې ليکو اود موخه ډيرىتوکي په کيڼ درځ يا کينه متّه کې ليکو ۰

په صليبونه سره هغه پيژند يا تعريف ورکول کيږي، چې د موخه ډيرى په توکي باندې د بنسټډيرى يو توکى تنظيم شوى وي۰

د بيلګي په توګه بيرته همغه د ساز الو سره بيلګه راوړو



په دې پورې اړونده اړيکتخته په لاندې ډول ليدل کيږي

	Peter	Josef	Heinz
Klavier	x	x	
Flöte			
Geige		x	

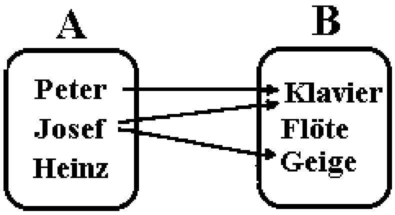
د کواوردينات سيستم انځوربنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

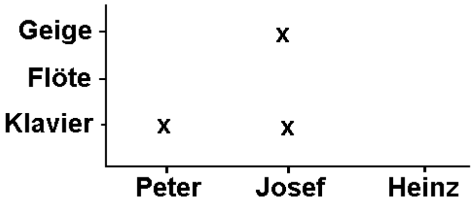
تراوسه مو اړيکې د غشيدياګرام او اړيکتختو له لارې انځور کړې۰ اوس يو دريم شوونوالی يا دريمه شوونتيا يا امکان غواړو وپيژنو:
انځورونه په يوه کواوردیناتسيستم کې :

د بنسټډيرۍ توکي د پروتمحور په نخښه کوو او د موخه ډيرۍ توکي په ولاړ محور په نخښه کوو ۰
د ټکو سره هغه د بنسټډيرۍ توکي او ورسره د تنظيمډيرۍ تنظيم توکو تاکلي وي

بيلګه
د بيلګی په توګه بيرته هغه بيلګه د لوبو يا موزيک الاتو سره تاکو:
دلته په دې لاندې الماني ليکنپيا ښه يې :ځيره بسيا کړی شو

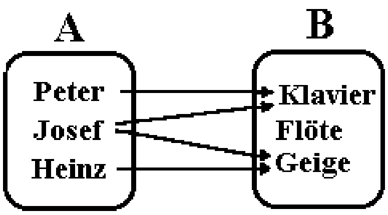


په کواوردیناتسيستم کې انځورونه داسې ليدل کيږي



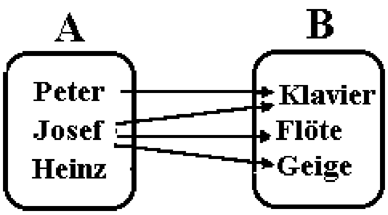
کڼ پوره کيدونکی اړيکې :
د Aڅخه هرتوکی کم له کمه د B په يوه توکي تنظيميږي(پيژندورشو يا مخ ته ورشو او بنسټيزه ډيری کټمټ دي)
ښي پوره اړيکې : دB هر توکی کم له کمه د ځيري په توګه منځ ته راځي (پسې ورشو او موخه ډيری کټمټ دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library



Linksvollständig

کینې پوره



rechtsvollständig

ښی پوره

ښیٔ یواځنی اړیکې

د ښنسټډیری (کینې) هر توکی په زیات ترزیاته د موخه ډیری (ښی) باندې تنظیمیږي٠

پام مرسته : غشي ښي « ښیلوریز) یواځنی دي٠

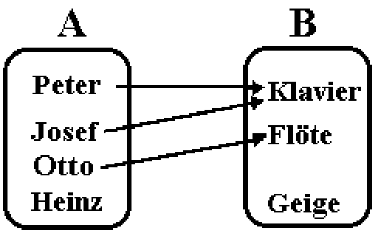
کینې یواځنی اړیکې :

د ښیٔ ډیری هر توکی زیات ترزیاته یو وار د یوې ډیری (کینډیری) د خیرې په ډول منځ ته راځي٠

پام مرسته : غشي ښي لورته یواځني دي٠

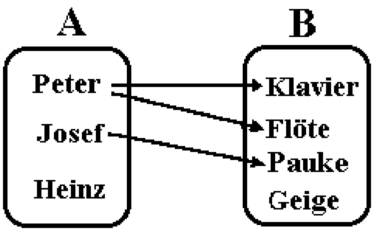
ناټیکوالی!

یا دا لاندې، چې د توپونو په ځای موزیک الې ورکړ شوي دي



rechtseindeutig

ښی



linkseindeutig

کینې یواځنی

یواځنی، .

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو کینپوره کیدونکی او بنی یواځنی اړیکي یواځنی اړیکي بلل کیږي (فنکشن او یا څیرونې)

په غشیدیاګرام کي یو فنکشن په دي پیژندل کیږي ، چې په هر توکی تیک یو غشی پیل کیږي

په ښت اړیکي : په ښپ اړیکو کې

۱ – مخ – او پسي ورشوګاني سره بدلیږي(پیژندېدیری او ارزښتدیری)

۲ – اوښتوني سره بدلیږي

رفلکسیو اړیکي reflexive relations

دیاګرام : په هرتوکي یوکړئ غشی شته

رفلکسیو اړیکي :

د رفلیکسو اړیکو پیژند : د هرو برابرو توکو جوړه اړیکو پورې اړج لري

د فرمو په څیر یي لیکنه : د تولو a لپاره باور لري:
aRa

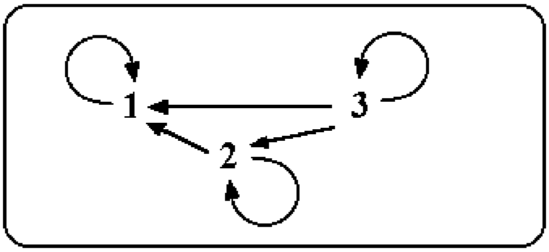
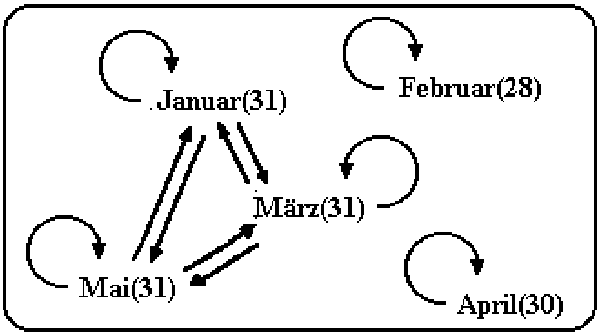


Bild: Die reflexive Relation ≥

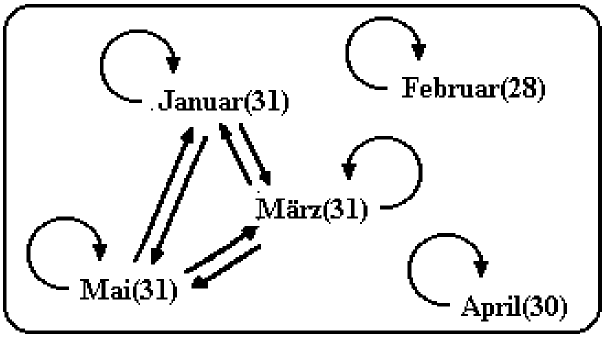
انتیرفلکسیو(ایرفلکسیو اړیکي
Antireflexive
(irreflexive)
Relationen

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند : په انتيرفلکسيو اړيکو کې په هيڅ توکي کړۍ غشی نه شته
د همغه توکي جوړه اړيکو پورې اړوند نه دی، يا په اړيکو ونده نه لري٠
د فرمول په توګه ليکل يې : (aRa)¬



سيومتريکي اړيکي : symetric relations
هر غشي ته په څټ غشی شته
که (a,b) اړيکو پورې اړه ولري ، نو   (b,a) هم په اړيکو پورې اړه لري٠
د سيومري اړيکو خيره: « همغومره ورځې لري لکه»



انتيسيومتري اړيکې: Antiasymetric reltions
د انتيسيومتري اړيکو دياګرام : په څټ غشی نه شته ٠
که (a,b) په اړيکو اړه ولري،نو   (b,a) په اړيکو اړه نه لري، مګر که   a = b
وي٠

فرمول: a R b /\ b R a => a = b

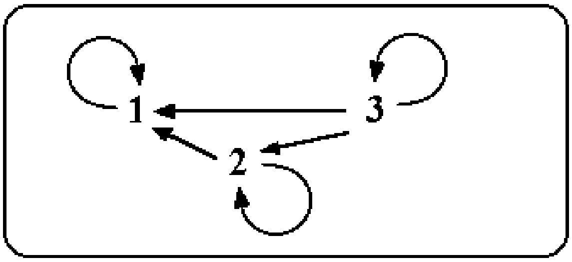


Bild: Die antisymmetrische Relation $\geq$

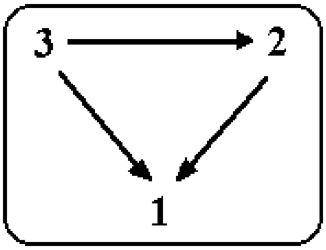
(c) ketabton.com: The Digital Library

Antiasymetric reltions: ناسيومتريک اړيکي پورته ښېره

اسيومتريکي اړيکي

asymetric relations (Asymmetrische Relationen)

د اسيومتريکي اړيکو دياګرام نه په ښت غشی لري او نه کړي غشی لري٠
د اسيومتريکي اړيکو پيژند: انتيرفليکسيو او انتيسيومتريکي اړيکي
فرمول : $\neg(bRa \Rightarrow aRb$

ښېره: اسيومتري اړيکي	

خيره کونه يا توابع Funktionen

p

يادونه: په انريزي کې mapping د او الماني کې DieAbbildung په نامه ن,مولشوي، چې پښتومانا يې خيرونه يا ښيره کونه ده.

فنکشندوه اوښتونيا واريابلپلري، چې يوه خپلواکه اوبله پېواکه ده. له دپام له د فنکشن لهپاره ناسمد تابع نومورکړشويدى.

په رياضي يا شميرپوهنه کې خيرونه يا توابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

په شميرپوهنه کې طبيعي ، تخنيکي يا هم نورو ورځنيو کارونو کې زيات وخت يوه لويه د بلې لوي په واک کې وي يا که غواړئ د هغې تابع وي، لکه د بيلګې په توګه د يوه موټر د بنزين سوزول يا استعمالول د هغه د تللې چټکتيا يا سرعت په واک کې يا تابع دی. دا ډول ساده اړيکې مو پخوا هم لوستلي او ګرافيکي مو په يوه کواوردينات – يا پروتولاړسيستم کې انځور کړي.

بيلګې:

د يوه شي يا جنس قيمتت د هغه د خرڅ شوې ډيرئ يا سټ په واک کې دی يا تابع دی.

ټوله دباندنئ تودوخي د ورځې د وخت په واک کې ده.

د يوه بايسکلځغلونکي وهلې لار په مساوي چټکتيا يا سرعت د تلنې وخت په واک کې ده.

د موټر د بريک لار په روښانه توګه د هغه د چټکتيا په واک کې ده.

د يوه کوچني لوېدنه د هغه د عمر په واک ده.

د يوه رياضي ازموېنې نمرې د لاس ته راوړول ټکو په لاس کې ده.

د يوې بډايئ د ګټې قيمت يا لاس ته راوړنه د په د مخه ټاکلې ګټې سره دوخت تيرېدنې په واک کې ده.

تمرين ۱ : د داسې يو په واکوالي يا تابعيت لپاره نورې بيلګې هم پيدا کړئ.

له پورته بيلګې څخه ليدل کيږي، چې هر دوه لويې سره تنظيميږي.

ډيرئ يا سټ ← وخت خرڅشوې سټ په قيمت اغيزه لري.

د ورځې وخت ← تودوخي. د ورځې وخت په اندازه شوې تودوخي اغيز لري.

د لاس ته راړلو ټکو تعداد يا ګڼون ← نمرې د يوې ازموېنې نمرې د لاس ته راړلو ټکو اغيزمن کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرین ۲ : د پاتي بیلګو لپاره او د هغو لپاره چې په تمرین ۱ کې مو میندلي اړیکې پیدا کړئ.

دا یو له بل سره تظیم شوې لویې متحولې(اووښتونې یا **Variablen**) بلل کیږي.

دلته دې دې ته پام وشي، چې کوم په واکوالی یا تابعیت د دوې په منځ کې شتون لري.

د ریاضي نمرې د ښوونکي له نظره د لاس ته راوړو ټکو په واک کې دي، مګر نه د نمرو د ټکو په واک کې.

سرې نمرې د بلواک یا تابع متحولو په حیث هم ښايي او د ټکو تعداد د خپلواک متحولو په حیث ښايي.

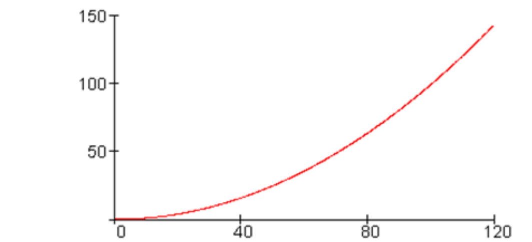
د ټکو او نمرو په منځ کې یو فنکشن یا بلواکیزې یا که غواړئ تابعیتي اړیکې شتون لري.

لکه د مخه درسونو څخه چې پوهیږو، ډېر امکانات شتون لري چې د دوه متحولو ترمنځ تابعیتي اړیکې تشریح کړو یا انځور کړو.

د مختلفو چټکتیاو لپاره د بریک لار اندازه کیږي او یو ارزښت جدول ترتیبیږي.

چټکتیا په km/h(x)	20	40	60	80	100	120
د بریکنیولو لار په m(y)	4	16	36	64	100	144

که د جدول ارزښتونه په یوه پروت ولاړ – یا کواوردینات سیستم کې وکښل شي، نو سرې ګراف لاس ته راوړي وروسته له هغې چې ټکي یو له بل سره وتړل شي کوم چې د چټکتیا او بریکلار ترمنځ اړیکې تشریح کوي.



د پراته محور ، چې ابسځیز هم بلل کیږي د خپلواکي متحولې x ارزښتونه پیدا کیږي، په ولاړ محور چې اوردینات هم بل کیږي د بلواک متحولې $y = f(x)$ ارزښتونه میندل کیږي.

تمرین ۳ : د ارزښت جدول سره سم په یوه مناسب پروتولاړ – یا کواوردیناتسیستم کې اړونده ټکې وکاږئ او دا په یوه ګراف کې سره ونښلوئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بریکلار د چټکتیا 90 ; 70 ; 50 ; 30 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې وټا کئ.

پولیس یوه د90 m د بریک لار اندازه کوي؟

دا موټر د کومې چټکتیا یا سرعت سره خغلي؟

زیات وخت دا هم شونې ده چې فنکشنال یا تابیعي اړیکې د تابع مساوات له لارې انځور شي.

د بریکلار لپاره باور لري: $y = f(x) = 0{,}01\ x^2$

دلته $y = f(x)$ د بریکلار لپاره اینسوول شوی ا و دا وایي، چې y -کواوردینات په کواوردیناتسیستم کې د متحولې x په واک کې دی، یعنې د خپلواک متحولېx یو تابع دی یا په واک کې دی. تابعمساوات دی، کوم چې هغه قانون ورکوي، چې ارزښتونه د f(x) تابع یا بلواک متحولې جوړوي.

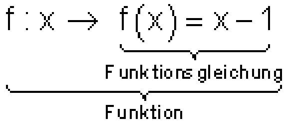
د تابع مساوات په ځاي هم وایو چې $f(x) = 0{,}01\ x^2$ د تابع قانون دی.

تمرین ۴ : که تابع مساوات $f(x) = 0{,}01\ x^2$ وي، نو لوستل شوي ارزښتونه وشمیرئ؟

له دا تراوسه شوې کار څخه کیدی شي ووایو:

پیژند یا تعریف:

د یوه تابع سره د خپلواک متحولېx هر ارزښت ټیک یو تابع ارزښت f(x) باندې- یا سره تنظیمیږي. سرې دا هم وایي چې یوه تابع یو یواځنی نظم دی.



لیکندول f:

پورته لومړۍیې په پښتو: تابع برابرون

که په راتلونکې کې له یوه تابع غږیږو، نو د دې تشریح لپاره فقط تابع مساوات ورکوو، یعنې فقط $f(x) = ...$ ی.

د تابع نوم f دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا $x \rightarrow f(x)$ لیکندود روښانه کوي، د هر x –ارزښت سره یو ټاکلی تابع ارزښت $f(x)$اړه لري.

تابع مساوات $f(x) = x - 1$ د شمیرلو قاعده یا قانون راکوي، چې تابع ارزښت څنګه جوړیږي.

د دې لپاره چې د نظم یواځنوالی بیا وښایو، لاندې بیلګه راوړو:

هر زده کوونکی یو ټاکلی د بوټانو لویوالی لري. دلته حتمې ده چې زیات زده کوونکي به یو- - یا هماغه د بوټانو لویوالی ولري.

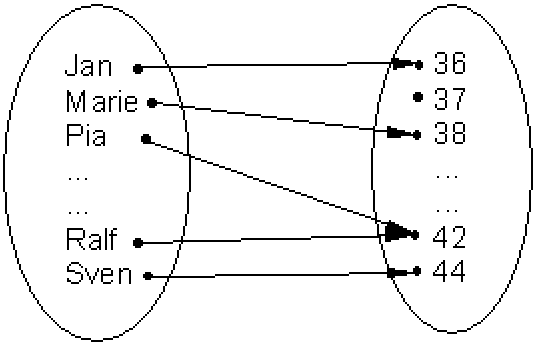
یواځنواوالی په زده کوونکو اړه لري ← د بوټانو لویوالی.

د متحولو سره کښلی یا لیکلې دا په دې معنا دی، چې د زده کوونکي نوم خپلواکه متحوله په ګوته کوي او هغه سره تنظیم شوې د بوټانو لویوالی بلواکه یا تابع متحوله جوړوی.

معکوس یا په څټ د زده کوونکو تنظیم یواځنی نه دی، ځکه چې ډېر زده کوونکي د بیلګې په توګه ۴۲ نمرې د بوټانو لویوالی لرودی شي.

دا ډول تابع د تابعمساوات نه لري، دا کیدی شي چې د ډېرئ څیرې یا ستعکس په څیر انځور شي.

یواځنی نظم(تابع یا فنکشن)



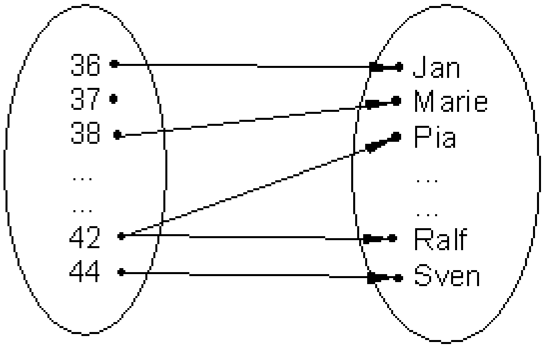
د بوټانولویوالی ډېرئ یاسټ   د زده کوونکو سټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

(ارزښت ډېرئ) (تعریفډېرئ)

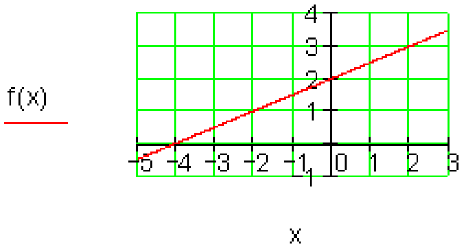
نظم یواځنی نه دی (تابع نه دی)



د دواړو ستونو بدلول

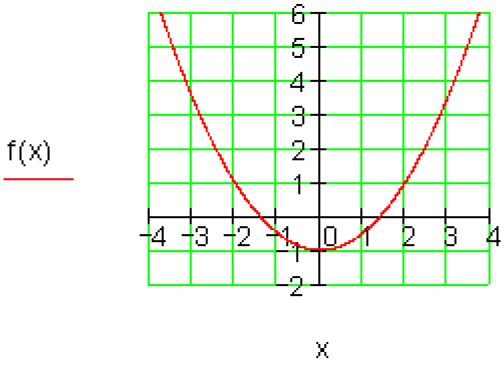
د ریاضیکي توابعو او تابعمساواتو بیلګي (له کیڼ و ښي لورته)

$f(x) := \frac{1}{2} \cdot x + 2$



کرښیز مساوات(ګرښه)

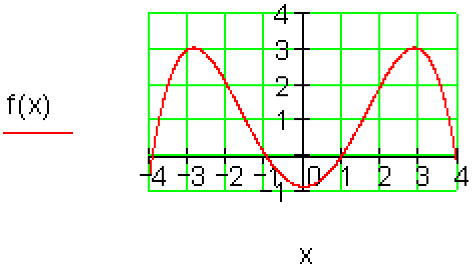
$f(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2 - 1$



مربع مساوات(پارا بل)

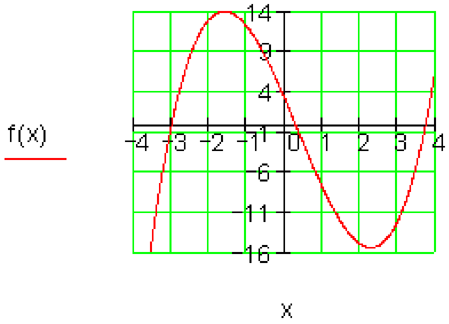
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) := \frac{-7}{120}\cdot x^4 + \frac{23}{24}\cdot x^2 - \frac{9}{10}$$



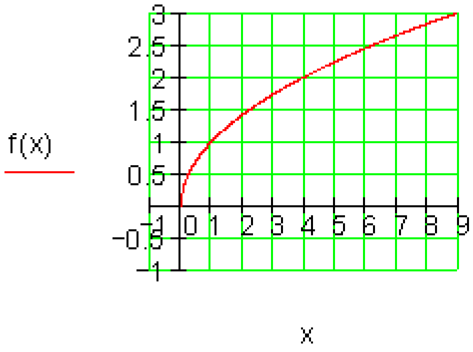
د ځلورمې درجې پولراشنل تابع

$$f(x) := x^3 - x^2 - 11x + 3$$



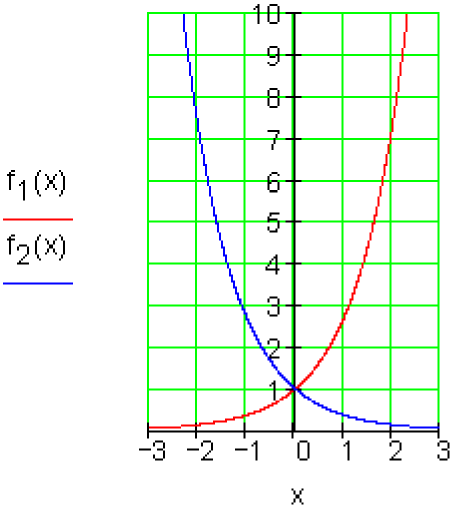
د درېمې
درجې
پولراشنل تابع

$$f(x) := \sqrt{x}$$



رېښه تابع

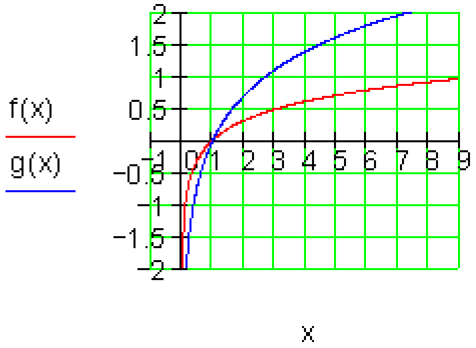
$$f_1(x) := e^x \qquad f_2(x) := e^{-x}$$



اکسپوننشل تابع

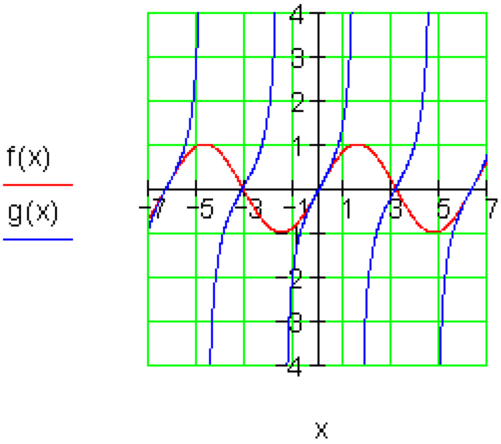
(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) := \log(x) \qquad g(x) := \ln(x)$



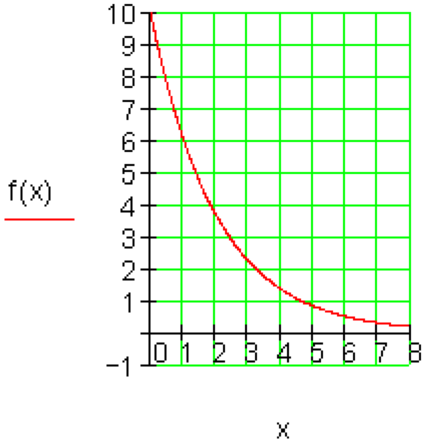
لوګاريتمتابع

$f(x) := \sin(x) \qquad g(x) := \tan(x)$



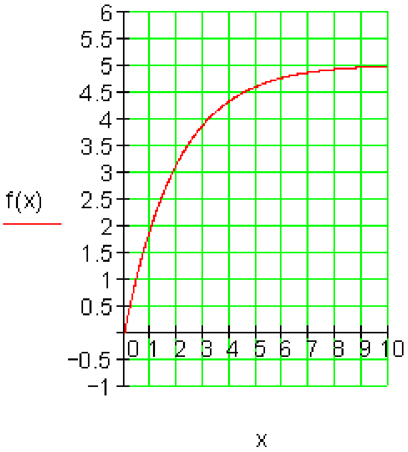
تريګونومتريکي(مثلثاتي) تابع

$f(x) := 10e^{-0.5 \cdot x}$



اکسپننشلي کبنته کيدنه

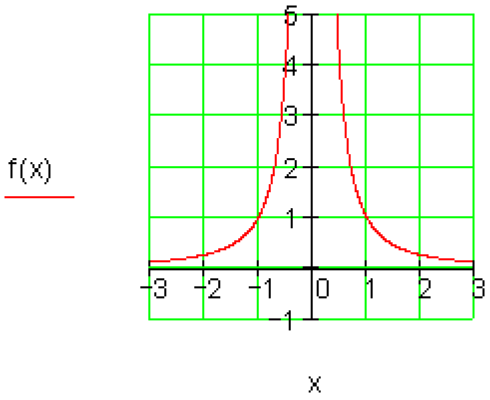
$f(x) := 5 \cdot \left(1 - e^{-0.5 \cdot x}\right)$



اکسپوننشل مربنتکره

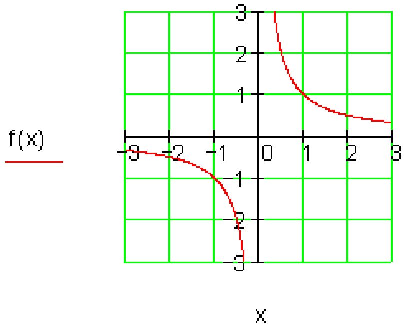
(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) := \frac{1}{x^2}$



های پارابول محورسیومتریک

$f(x) := \frac{1}{x}$



های پارابول ټکی سیومتریک

تعریف- او ارزښتډېرئ یا - سټ

تعریف(پیژند):

د یوه تابع تعدریفسټ **D** د ټولو خپلواکو متحولو ډېرئ یا سټ ده، د کومو لپاره چې تابع تعریف دی.

ارزښت ډېرئ **W** د ټولو تابع ارزښتونو- یا بلواکو - سټ ده، چې د D له توکو منځ ته راځي.

بیلګه:

$f(x) = \frac{1}{x}$ تعریفست $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ تعریفست D=R

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفر سره د وېش اجازه نه شته	R د حقیقیي اعدادو ډېرئ ده

بیلګه:

$f(x) = x^2 \quad D = \mathbb{R}; W = \mathbb{R}_+$ د تابع ارزښت په حیث فقط مثبت یا زیاتیز ارزښتونه رامنځ ته کیږي	$f(x) = x+1 \quad D = \mathbb{R}; W = \mathbb{R}$ تابع هر په خوښه ارزښت نیولی شي.

شمیرپوهنیزه لیکندود او د هغه معنا

$f(4) = 7$ د خپلواکو متحولو د ارزښت x = 4 لپاره د تابع ارزښت 7 دی.

دا د ارزښتجوړه (7 | 4)په کواوردیناتسیستم کې د ټکي (7 | 4) P کواوردیناتونه جوړوي.

$f(x) = 9$ غوښتونی د x -ارزښت دی، چې په هغه پورې تابع ارزښت 9 اړه لري.

$y = f(5)$ د x = 5 لپاره تابع ارزښت دی.

ټولګه:

یو یواځنی نظم، چې په هغه کې د تعریف سټ D څخه خپلواکه متحوله x ټیک یو تابع ارزښت f(x) باندې تنظیم شي ځیرونه (چېموږ یې تابع بولو) یا فنکشن بلل کیږي.

تابعي(خپلواکیز) یا فنکشنلي اړوندوالی د یوه تابع مساوات(د بیلګې په توګه: f(x) = 2x + 1) سره لیکل –یا تشریح کیږي.

تابع مساوات کې د x –ارزښتونو په اینولو سره د تابع ارزښت لاس ته راځي، چې دا د x -ارزښتونو سره یوه ارزښت جدول کې اینولی یا انځورولی شو.

د ارزښتجدول هره جوړه په کواوردینات سیستم کې ټیک یو ټکی په ګوته کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په زیاتو حالتونو کې کیدی شي دا منځ ته راغلي ټکي یوه ګراف ته سره رایوځای یا وتړل شي.

د ټول x - ارزښتونو ډېرئ، هغه چې په تابع مساوات کې ځای په ځای شي تعریف ډېرئ یا ـسټ بلل کیږي.

د ټول تابع ارزښتونو ډېرئ یا ـسټ، چې دلته منځ ته راځي، د تابع ارزښت ډېرئ W پورې اړه لري.

د تمرینونو حل

لومړی تمرین: د داسې بلواکوالي لپاره نورې بیلګې پیدا کړئ.

ځواب: - د یوه تیلسوزونکې ماشین قدرت د څرخونتعداد(د ماشین د څرخیدو تعداد) په واک کې دی.

- د یوې ګردئ یا دایرې سطحه د وړانګې یا شعاع په واک کې ده.

- د بریښنا پیسې د ثابت قیمت سره د انرژي یا بریښنا مصرف په واک کې ده.

دویم تمرین : د پاتې بیلګو او د هغو لپاره چې تاسو په لومړي تمرین کې ولیدل ګډې اړیکې سره په فرمولبندې کې راوړي.

ځواب:

لار ← د خوزښت وخت: په مساوي پاتې چټکتیا د خوزښت وخت په وهلې لار اغیز لري.

بریکلار ← چټکتیا: د یوه موټر چټکتیا د بریکلار باندې اغیزه لري.

ټوله ګټه ← د تیریدني وخت: د سرمایي ایښوني وخت د ګټي لاس ته راوړنه باندې اغیزه لري.

وده ← عمر: د کوچني عمر د هغه په وده اغیزه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

قدرت ⇾ څرخونتعداد: د یوه سوزونکي ماشین د تیلو سوزیدنه د هغه په څرخونتعداد پورې اړه لري.

سطحه ⇾ وړانګه : د ګردۍ یا دایرې وړانګه د دایرې سطحه باندې اغیز لري.

د بریښنا حساب ⇾ انرژي سټ: د سوزولې بریښنا یا انرژۍ سټ یا ډېرۍ د بریښنا بل(هغه د مصارفو کاغز) اغیزمن کوي.

دریم تمرین:په یو مناسب کواوردیناتسیستم کې د ارزښت جدول اړوند ټکي وکاږۍ او دا یوه ګراف ته سره وتړۍ.

د چټکتیا 90 ; 70 ; 50 ; 30 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې بریکلار پیدا کړۍ.

پولیس یوه د 90 m بریکلار کچوي. دا موټر دکومې چټکتیا سره تلی؟

ځواب:

د 30 km/h چټکتیا بریکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتیا بریکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتیا بریکلار 48 m ده

د 90 km/h چټکتیا بریکلار 80 m ده

د 110 km/h چټکتیا بریکلار 120 m ده

له 90 m بریکلار سره یو موټر 95 km/h د چټکتیا سره ځغلي.

تلنلار: په کواوردیناتسیستم یا پروتولاړ سیستم کې د x -محور(ابسڅیزا) د خپلواکو متحولو ډېرۍ نمایندګي کوي، د y –محور (اوردینات) د بلواک یا تابع متحولو نماینده ده.

د مخه له دې چې په یوه کواوردیناتسیستم کې ارزښتونه لیکل –یا کښل کیږي باید وکتل شي، چې کومه خپلواک- او کومه بلواک- یا تابع متحوله ده.

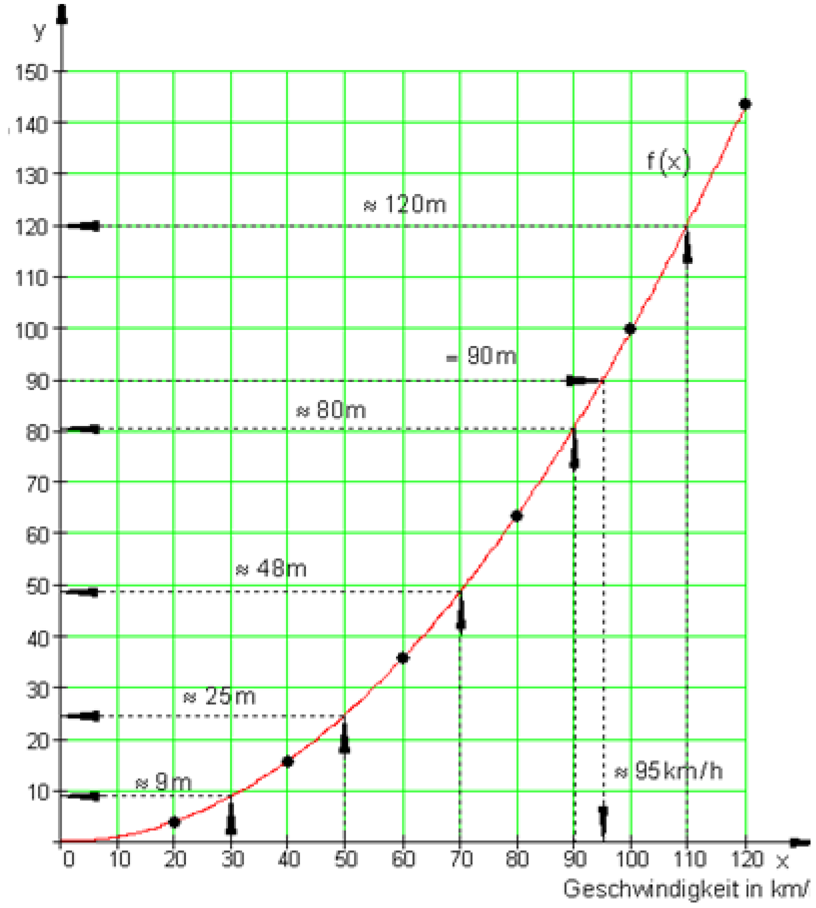
(c) ketabton.com: The Digital Library

پسي دا هم غوره ده، چې د کچونې لپاره يوو ښه کچونی يا هغه اله چې اندازه پرې کچوو باید ومومو.
د دې لپاره د جدول لوي او کوچني ارزښتونه کتل کيږي او پرېکړه کيږي چ دواړه محورونه په څو برخو باید وویشل شي.

وروسته له هغې چې ټول په جدول کې ټکي په کواورديناتسيستم کې ځای په ځای شوي، نو بیا دا ټکي د ګراف په توګه سره تړل – یا نښلول کیږي

کیدی شي له ګراف څخه د داسي x -ارزښتونو لپاره هغه لړ یا ډېر تابع ارزښتونه هم ولوستل شي، چې په ارزښت جدول کې مخ ته نه راځي.

معکوس کیدی شي د یوه ټاکلي تابعارزښت اړونده x -ارزښت ولوستل شي. د دې نتيجو ټيکوالی د دې په واک کې دی، چې ګراف څومره ټيک کښل شوی دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته کواوردينات – يا پروتولاړسيستم کي: پروت: چټکتيا په کيلومتر. ولاړ:بريکلار په متر

څلورم تمرين:

لوستل شوي ارزښتونه وشميرئ، که تابع مساوات $f(x) = 0{,}01\, x^2$ وي.

ځواب:

تابعارزښتونه داسې شميرلکيږي، چې اړونده د x ارزښتونه په تابع مساوات کې کيښوول شي.

$$f(x) = 0{,}01x^2 = \frac{1}{100}x^2$$

$$x = 30 \Rightarrow f(30) = 0{,}01 \cdot 30^2 = 0{,}01 \cdot 900 = 9$$

$$x = 50 \Rightarrow f(50) = 0{,}01 \cdot 50^2 = 0{,}01 \cdot 2500 = 25$$

$$x = 70 \Rightarrow f(70) = 0{,}01 \cdot 70^2 = 0{,}01 \cdot 4900 = 49$$

$$x = 90 \Rightarrow f(90) = 0{,}01 \cdot 90^2 = 0{,}01 \cdot 8100 = 81$$

$$x = 110 \Rightarrow f(110) = 0{,}01 \cdot 110^2 = 0{,}01 \cdot 12100 = 121$$

د 30 km/h چټکتيا بريکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتيا بريکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتيا بريکلار 48 m ده

د 90 km/h چټکتيا بريکلار 80 m ده

د 110 km/h چټکتيا بريکلار 120 m ده

له 90 m بريکلار سره يو موټر 95 km/h د چټکتيا سره ځغلي.

بريکلار 90 m کچ شوې ، غواړو چټکتيا پيدا کړو.

پيل: $f(x) = 90 \Leftrightarrow 0{,}01x^2 = 90$ دا مساوات په x پسې ځواب کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$0,01x^2 = 90 \,|\, : 0,01 \Leftrightarrow x^2 = 9000 \,|\, \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{9000} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{900 \cdot 10} \Leftrightarrow |x| = 30\sqrt{10}$$

ارزښت حل کړئ.

$$|x| = 30\sqrt{10} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 30 \cdot \sqrt{10} \approx \pm 94,9$$

نسبت و پوښتنې ته فقط مثبت یا زیاتیز ارزښتونه موخه ور دي، ځکه چې مونږ مثبته چټکتیا په پام کې نیسو. د 90 m بریکلار سره د موټر چټکتیا 94,9 km/h وه.

یادونه:لومړی شمیرنه تیک ارزښتونه راکوي، سره له دې هم موخه وردی، چې دا شمیرل شوي ارزښتونه په ګراف کې یا له ګراف څخه هم د لوستلو له لارې کنترول کړو.

پوښتنې

تابع I

لومړی:

ټول ټکي په کواوردینات سیستم کې په نخښه کړئ، چې کواوردینات یې ورکړ شوي شرایط پوره کوي.

الف- $y \leq -1 \wedge x \geq 1$ ب- $y \in \mathbb{R} \wedge -2 \leq x \leq 3$ پ- $x \in \mathbb{R} \wedge y = 2$

ت - $0 \leq x \leq 4 \wedge y \geq 0$ ټ- $|x| \geq 1,5 \wedge |y| \leq 2$ ث- $y > 0 \wedge x = -1$

دویم: په مناسب کواوردینات سیستم کې لاندې ټکي رسم کړئ.

$$A(40\,|\,220);\ B(10\,|\,250);\ C(200\,|\,300);\ D(80\,|\,240)$$

ایا د x – او y -کواوردیناتو ترمنځ کومې اړیکې شته؟ د دې لپاره یو ترم ولیکئ او نور درې ټکي ورکړئ.

دریم: د ټکو ځای وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- ټکي $P_t\left(t-1\left|\frac{1}{t+1}\right.\right)$ د t€R کوم ارزښت په لومړئ څلورئکي پروت دی؟

ب- ټکي $Q_t\left(t\left|t^2-1\right.\right)$ د t€R کوم ارزښت لپاره دx محور کښته لور ته پرته ده؟

څلورم:

د ټکوډېرئ يا –سټ $A=\left\{(1|3);\left(2\left|\frac{3}{2}\right.\right);(3|1);\left(4\left|\frac{3}{4}\right.\right);...\right\}$ ورکړ شوی دی.

د A نور درې توکي ورکړئ او دا ټکي په يوه کواوردينات سيتم کي وکاږئ. ايا د x- او y -کواورديناتونو ترمنځ اړيکی شته؟

پنځم: يو ټکی $P\left(t\left|\frac{t}{2}+3\right.\right)$ د t€R سره ورکړشوی دی.

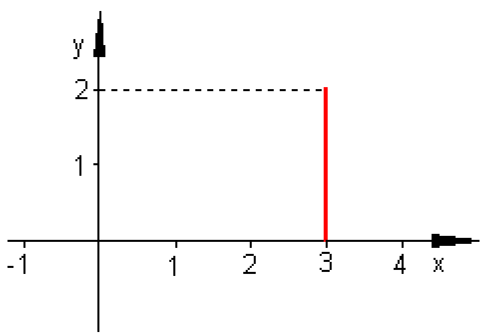
د t لپاره څه ارزښتونه ورکړي او دا د دې اړونده ټکي په يوه کواوردينات سيستم کي وکاږئ.

د کومو t -ارزښتونو لپاره باور لري:

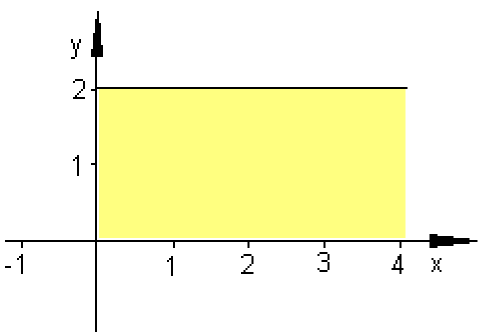
د ټکي P د x -کواوردينات د ټکي د y -کواوردينات سره برابر دي؟

شپږم: په نخښه شوي کربنه او همداسي سطحه تشريح کړئ.

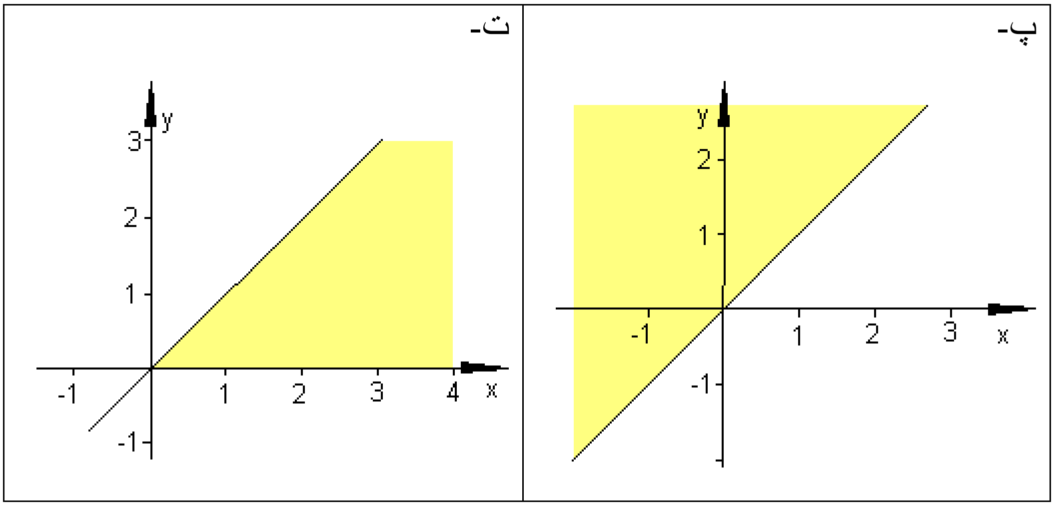
الف:



ب-



(c) ketabton.com: The Digital Library



پوښتنې

توابع II

لومړی

ښاغلی برګ د یوه ملفون(لاسي یا لاسي تلفون) قرارداد د لاندې شرایطو سره وکړ:

د میاشتې € 20 ، د تلفون قیمت په دقیقه € 0,35 .

الف- که دی 80 ,40 یا 120 دقیقې تلفون وکړي، نو میاشتنی حساب به یې څومره جګ وي؟

ب - لګښت لپاره یو ترم ولیکئ چې په دقیقه کې د خبرو د دوام په واک کې وي.

پ – اړیکې ګرافیکي انځور کړئ.

دویم:یوه الوتکه د سوزونموادو کیروزین 10500 Liter لیتره زخیره لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په 100 km دا 180 Liter سوزوي.

الف- د په لیتر مصرف جدول جوړ کړئ. یو واټن له 0 km تر 5000 km پورې وټاکئ.

ب – اړیکې یې ګرافیکي ځور کړئ.

پ-له څومره کیلومتره وروسته به زخیره تمامه شوې وی؟

ت - د الوتنې د لار ترم د ټانک د خوندیونې په واکوالي کې وټاکئ.

دریم: یو د شمیراړونې جدول جوړ کړئ، چې ^{0} څلزیوس (^{0}C) په فارنهایت(^{0}F) اړوي د 20^0C - او 60^0C په ساحه یا ورشو کې. د دې لپاره اړین داتا تشریح کړئ. اړیکې ګرافیکي انځور کړئ. دا اړیکې کوم ترم په ګوته کوي؟ د ا د تبې تودوخئ کچونه (ترمومتر) د ناروغ د تبې په اندازه کئ چې ده ایا دا حرارت یا تودوخي د ژوند خطر لري؟

څلورم: یوه د مالونو لیږلو مغازه غواړي لګښت له امله یو د تحفې پاکټ ولیږي. د پاکټولو تخنیکي پرابلم له امله یې یو اړخ د 35 cm سره کره ټاکلی دی. د پوست د لګښت نظم باید په پام کې نیول شوی وي

د لګښت نظم: مربع ډوله پاکټونه دننه په هیواد کې.

خورا کوچنئ کتله(یا بهتره ډکی): اوږدوالی 15 cm ، سور 11 cm ، جګوالی1 cm .

خورا جګه کتله: اوږدوالی 60 cm ، سور 30 cm ، لوړوالی 15 cm یا اوږدوالی جمعه یې سور جمعه یې یا په ورزیات جګوالی = 90 cm. خورا زیات وزن 2 kg.

الف- د یوه ډکي یاحجم $V = 21\ dm^3$ لپاره د سور او جګوالي ترمنځ اړیکې وټاکي.

ب- دا ماکسیمال رسیدلوړ ډکی یا حجم څومره لوي دی؟

پنځم: فرمول ورکړشوی دی.

الف- ش څنګه تغیر خوري، که کوچنی شي.

ب- ایا لاندې اړیکې به د فرمول له لارې تشریح شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

A : د کرايي موټر ټول لګښت د عدد a د تللی کيلو متر او د هغه د يوه کيلو متر د قيمت c لپاره.

B : د ودرېدلو لار يا واټن a د بريکلارb او عکس العمل لارc څخه شميرل کيږي.

پ-شي اړيکي ورکړئ چي د فرمول له لارې تشريح کيدی شي يا روښانه کيدی شي.

شپږم: يو ولاړګوډيز يا مستطيل U = 12 cm چاپيريال يا محيط لري.

الف- اړخونه څنګه يو د بل په واک کې کيدی شي.

ب- يو ترم وټاکئ، چې بلواکوالی د اړخ a څخه ورکوي يا د اړخ a په واک کې يا تابع دی.

پ- د a د کوم ارزښت لپاره سطحه خورا لويه وي؟

پوښتنې

توابع III

لومړی: توابع f(x) ورکړ شوي. يو مناسب ارزښتجدول وکاږئ. دې ته اړوند ګراف رسم کړئ.

الف - $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ ب - $f(x)=x^2$ پ - $f(x)=\frac{1}{x+3}$ ت- $f(x)=3^x$

دويم: فکر وکړئ، چې ايا يو ،،بيواځنی نيظم،،د $x \rightarrow y$ لپاره مخ ته لرو: $x^2+y^2=1$

دريم: ټکی P ورکړ شوی دی. ايا يوه تابع مخ ته لرو؟ که هو، نو نظمقانو وټکئ او خورا لويه تعريفسټ يا – ډيرئ هم وټاکئ.

$$P=\left\{(2|1);\left(5|\frac{1}{4}\right);\left(10|\frac{1}{9}\right);\left(25|\frac{1}{24}\right);\ldots\right\}$$

څلورم: يو ارزښتجدول وليکئ او د تابع ګراف وکاږئ:

$$f(x)=\frac{1}{8}\left(x^3-2x-4\right);\ x\in\mathbb{R}$$

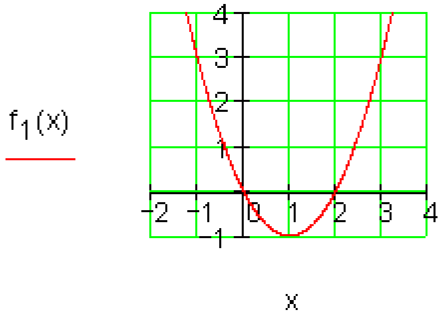
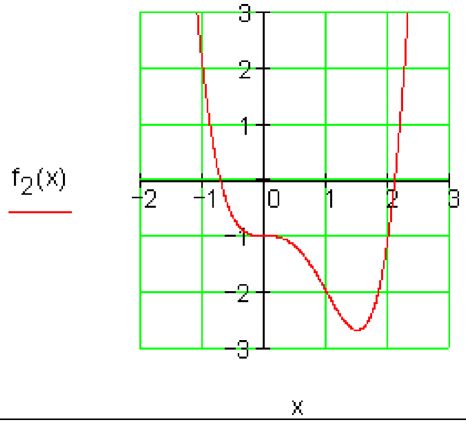
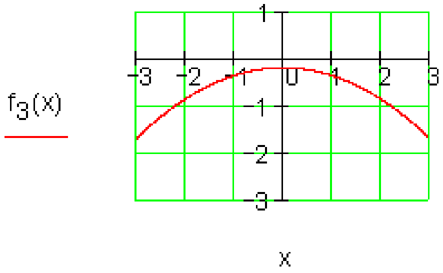
الف- د جبشميري سره f (3) او f (- 2) وشميرئ.

ب- په کوم ځای کې د تابع ارزښت صفر دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ-د کومو x -ارزښتونو لپاره تابعارزښت 1 دی؟
ت-د کومو x -ارزښتونو لپاره تابعارزښت کمیز یا منفي دی؟
ټ-د کومو x -ارزښتونو لپاره باور لري:1 < f (x) کړئ، چې د کوم تابع لپاره باور لري:

پنځم: د درې توابعو f1, f2, f3 ګراف ورکړ شوی دی. پرېکړه وکړئ:

الف- د تابع ارزښتونه هر چیرته صفر دي. ب- توابع په انتروال [0,5 ; 1] منفي یا کمیز دي پ-.f (2) < f (0) ت-.f (0) = - 1 ټ-.f (- 2) = f (2)	
	

پوښتنې

توابع **IV**

لومړی: تابع f ورکړ شوي د f(x) =-0,2(2-x); x€R سره

پرېکړه وکړئ، چې ایا لاندې وېناوې رښتیا او که نارښتیا دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیل ځواب مدلل کړئ.

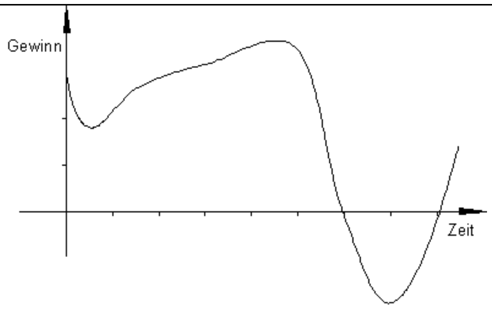
الف- د تابع ارزښتونه زیاتیز یا مثبت دي د ټول x – ارزښتونو لپاره.

ب- $f(x) < 0$ د ټولو $x€R$ لپاره.

پ- $f(x)$ د $x = 2$ لپاره منفي دی.

ت- یو ځای u شتون لري، چې د هغه لپاره $f(u) = f(u + 1)$ باور لري.

دویم: د رسم شوي تابعګراف تلنه تشریح کړئ. دلته هغه غوره ټکي په نخښخه کړئ. هغه ټکي، انتروالونه روښانه کړی یا تشریح کړئ په کومو کي چې ته اقتصادي پسمنظر(د شاته پراته دلیل) فرمولبندي کوې.



کواوردیناتسیستم کي : پروت: وخت. ولاړ: ګټه

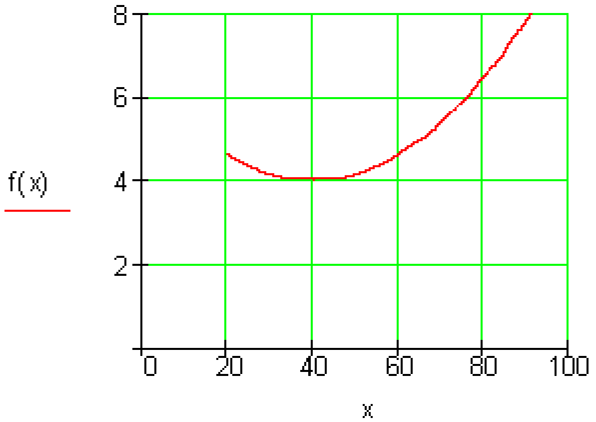
دریم: د یوه موټر د تیلو سوزول د چټکتیا په واک کي یا تابع دی. دا په ښنګ کي ښیره د تیلو سوزول ښایي په لیتر په سل کیلو متر کي او د چټکتیا په واکوالي کي، که سرې په ښلورم ګیر Gang کي لاړ شي.

الف- کره یا منحني روښانه کره.

ب- په کومه چټکتیا کي استعمال ۶ لیتره په سل کیلومتر کي دی؟

پ- په کومه چټکتیا کي د تیلو سوزښت خورا کم دی؟

ت- کره به ښنګه وځغلي، که په دریم ګیر کي سرې لاړ شي؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم: د لمبا په ډنډ کې $40\ m^3$ اوبه دي. دا اوبه د ډنډ د پاکوالي له امله د پمپ کولو سره وباسي، چې په دقیقه کې 350 Liter لیتره اوبه وځي.

الف- یو ترم د پاتې حجم یا ډکي لپاره په m^3 وټاکئ.

ب- څومره m^3 د ۲۰ دقیقو وروسته په لمباډنډ کې لا پاتې ي.

پوښتنې

توابع V

لومړی:د تابع f(x)ماکسیمال تعریفورشوD_{max} پیدا کړئ

الف- $f(x)=2-3x$ ب - $f(x)=\sqrt{2x-3}$

ث- $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ ت - $f(x)=-x^2+1$

دویم: د تابع f(x) ارزښتورشو وټاکئ د $D=D_{max}$ سره.

الف- $f(x)=\dfrac{3}{2}x-4$ ب - $f(x)=1+\sqrt{x+1}$

پ - $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ ت - $f(x)=x^2-5$

دریم: تابع f(x) ورکړ شوې ده. ماکسیمال تعریفورشوD_{max} وټاکئ. د f(x)ګراف وکاږئ.

د $x\in\left\{k;-\dfrac{2}{k};k+1;k-4\right\}$ لپاره تابعارزښتونه وټاکئ.

الف- $f(x)=\dfrac{1}{2}x+1$ ب - $f(x)=2x-\dfrac{2}{x}$ پ - $f(x)=x-x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت - $f(x)=\frac{1}{x+3}$ پ - $f(x)=\sqrt{4-2x}$ ث - $f(x)=2^{x}-1$

څلورم: تابع $f(x)$ د $f(x)x^3$ سره ورکړشوې ده.

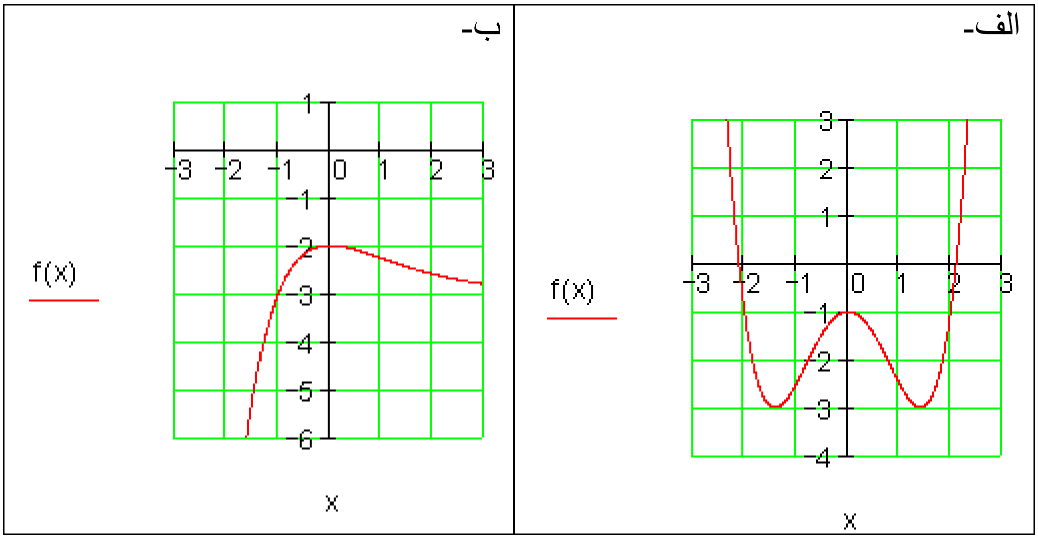
الف- ماکسیمال تعریفورشو D او ارزښتورشو W ورکړئ.

ب- د کوم $x\in D$ لپاره باور $f(x)=81$ لري؟

پ-د کوم $x\in D$ لپاره باور $f(x)\geq 9$لري؟

ت- و ښایئ: $f(x+1)=3.f(x)$ د ټولو $x\in D$ لپاره.

پنځم: تابع $f(x)$ د $D = IR$ لپاره تعریف ده. د رسمونو څخه ارزښت ډېرئ وښایئ.



پوښتنې

توابع VI

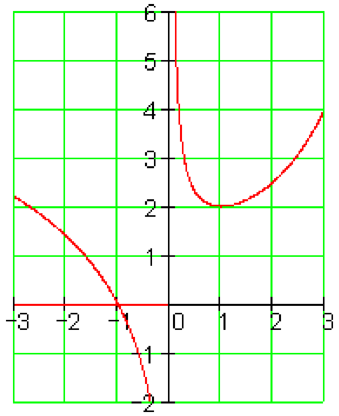
لومړی: د تابع$f(x)$ ارزښتسټ د جبشمیري سره وشمیرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

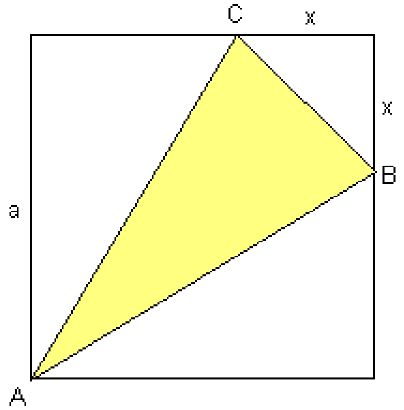
سرلیک

$$f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{2}{5}x^3 - 2$$ د D=R سره.

دويم:

	دويم: ترڅنګ کرﻩ د تابع f(x) ګراف دی؟ ايا f(x) د ټولو x€R لپاره تعريف دی؟ د x د کومو ارزښتونو لپاره تابع ارزښت - له 2 لوي دی؟ - له صفرکوچنی دی؟

دريم:

	يوه مربع يا ځلورې د اړخ اوږدوالي a = 5 cm سره ورکړ شوې ده. د مثلث يا درېګوديABC د سطحې ترم A(x) وټاکئ

ځلورم: د يوه مالک ټول لګښت K د يوه لاسته راوړني سټ x په واکوالي کې په سټ واحد يا ډېرئ يوون (ME) د ترم له لارې ليکل کيږي

$$K(x) = 0{,}01x^3 - x^2 + 100x + 720$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- د x -ارزښتونو لپاره تر 100 پورې ټول لګښت وشميرئ. يو مناسبتلنلارې ډول وټاکئ او د ټول لګښت ليدخيره رسم کړئ.

ب- د هر سټ – يا ډيري واحد خرڅلاو99 پيسپواحده دی. لاس ته راونې (د پيسو) څومره دي، که x(ME د سټ واحد) په بازار کې خرڅ شي؟

په لرلي کواوردیناتسيستم کي د خرڅلاو(پيسو) د ليدلو څيره و کاږئ.

پ-د ليدخيرې څخه ولولئ:

په کومه ورشو يا ساحه کې ګټه منځ ته راځي؟ د کوم x –ارزښتونو سره به خورا لويه ګټه لاس ته راشي؟

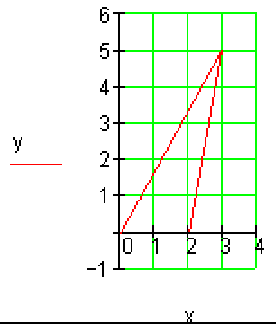
پوښتنې

توابعVII

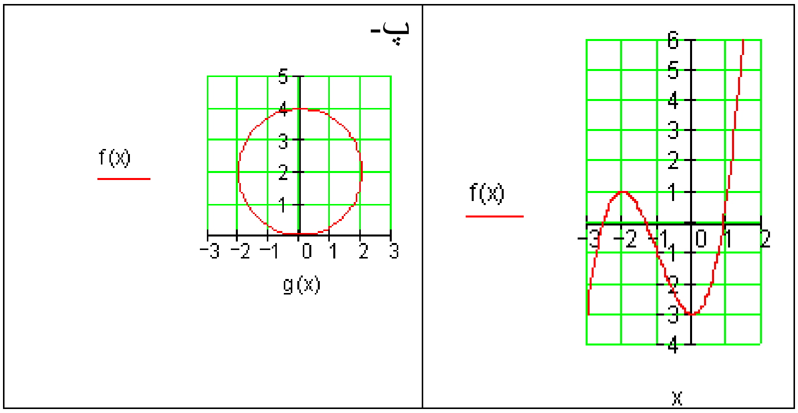
لومړی: توابع f(x) ورکړشوي دي. يو مناسب ارزښت جدول جوړ کړئ. له دې سره اړوند ګراف وکاږئ.

الف- $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ب- $f(x) = x^2$

دويم: کوم ګراف په تابع $f : x \to f(x)$ پورې اړه لري؟ دليل يې راوړئ.

الف-	ب –
	

(c) ketabton.com: The Digital Library



دريم:د شميرپو هنيز لنډ ليکدود سره يې فرمولبندي کړئ.

الف- په ځای3 کې تابع f(x) تابعارزښت 12 لري.

ب- د تابع f(x) له لارې د x -ارزښت سره عدد 4- تنظيميږي.

پ-ټکی P (2 | 5) د f(x) په ليدخيره باندې پروت دی.

ت- f(x) د کومو ابسخيزا يا پراته ارزښتونو لپاره تابع ارزښت 4 لري.

ټ- د f(x) تابع تابع ارزښت له 7لوی دی د ټول $x \in \mathbb{R}$. لپاره.

ث- تابع f(x) د 17- ځای کې تا بع ارزښت 9 نيسي.

ج- توابع f او g د په ځای کې همغه ارزښت غوره کوي.

چ- په کوم ځای x کې fد تابعارزښت gد له تابعارزښت څخه کوچنی دی؟

ح- د تابع f(x) د تابع ارزښت برابر 5 دی د ټولو $x \in \mathbb{R}$. لپاره.

خ- د يوه کړۍ ټکي K_f کواوردیناتونه سره سر خوري.

څلورم: د يوه نظم لپاره د يوې روځنۍ بيلګې نوم واخلئ، چې هغه تابع وي يا تابع نه وي.

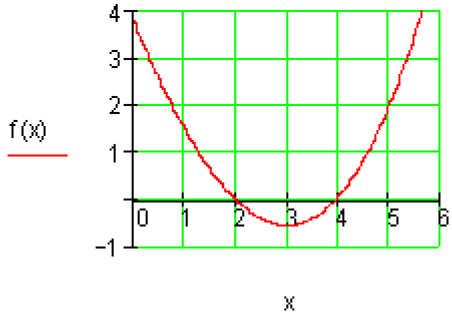
پنځم: دا ترڅنګ کره يا منحني د تابع f(x) ګراف دی. له ګراف څخه ولولئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف-د تابع ارزښت په ځای 5 کې

ب- يو ځای د f(x) سره.

پ-په کوم ورشو $f(x) > 0$ باور لري؟



شيپږم:کوم ارزښت جدول يوه تابع پوري اړه لري؟

الف -

x	-1	0	1	2	3
y	4	0	-2	4	4

ب -

x	-1	0	3	3	4
y	8	7	2	4	5

توابع او په ځت - يا معکوس توابع

تولیز:

د f د نظم قانون د تابع مساوات له لاري افاده کيږي، لکه د بيلګې په توګه

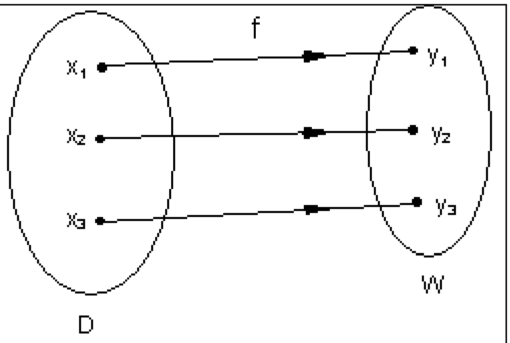
$$f = \{(x|y) \mid y = f(x) = 2x + 3\}_{D \times W}$$

يا په لنډه توګه: $y=f(x)=2x+3$

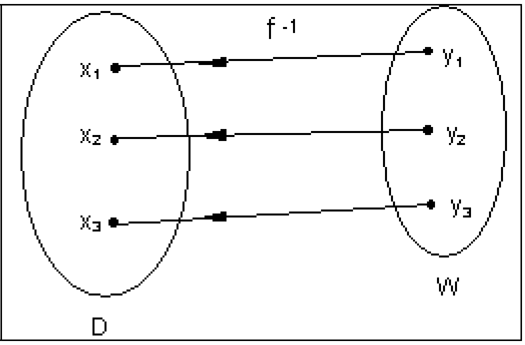
د يوه تابع د يو-يواځنوالي د f^{-1} يو-يواځنی نظم هم شتون لري.

دا نظم معکوس تابع يا په ځت تابع يا انورز inverse تابع بلل کيږي، لکه د بيلګې په توګه.

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$



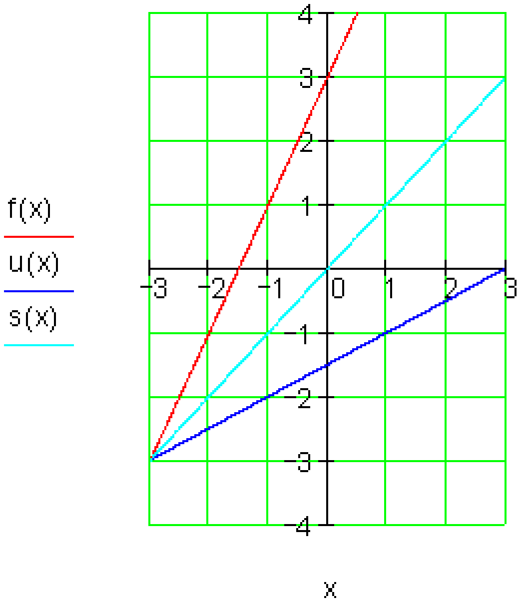
(c) ketabton.com: The Digital Library



د کرښيز توابعو معکوس توابع

تابع: $y = f(x) = 2x + 3$ $x = f(y) \Leftrightarrow x = 2y + 3$ $\Leftrightarrow 2y + 3 = x \mid -3$ $\Leftrightarrow 2y = x - 3 \mid : 2$ $\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ معکوس تابع: $y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$	تابع $y = f(x) = 2x + 3$ ورکړ شوی غوښتنه معکوس تابع f^{-1} او د هغه ګراف ده تابع **f** جګوالی $m = 2$ لري. دا د خپل ګراف سره پروت محور په ټکي $P_x(-1,5 \mid 0)$ کې غوڅوي او ولاړ محور یا اوردینات په ټکي $P_y(0 \mid 3)$ کې غوڅوي. د هغه ګراف کرښه ده. که د تابع اووښتوني یا متحولې یو له بل سره بدلې شي او د y پسې په ورته توګه بڼه بدلون منځ ته راشي، نو سړی معکوس تابع لاس ته راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د معکوس تابع ګراف د تابع د ګراف هندارونه(انعکاس) ده په 45^0- محور باندې. په تولیزه توګه باور لري: تابع $y = f(x) = a_1 x + a_0$ معکوس تابع $y = f^{-1}(x) = \frac{1}{a_1}x + \frac{a_0}{a_1}$ د ساده والي له امله معکوس تابع u(x) بولو.

مربع توابع

څلورې- یا مربع توابعو ته ننوتنه یا پیل

ننوتنه یا پیل

هرڅوک چې موټر زده کوي، باید پوه وي، چې د بریک په وخت کې په پاخه سرک د بریک نیولو او د موټر دریدځای په منځ کې لار یا واټن څنګه سره یوځای کیدی شي یا جمعه کیدی شي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې موټر قانون سره سم له چټکتیا(سرعت) v په km/h (کیلومتر په ساعت) د عکس العمل لار r د بریک لار b په متر شمیرلکیدی شي.

پام (خبراوسه) : د بیلګې په توګه د المان پخوانی او له څخه نوي قانون.

له څخه د تملار په وچ اسفالت شوي سرک د پل بریکلار سره شمیرل کیږي.

د بریک لار $b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ د عکس $r = \frac{v}{10} \cdot 3$ العمل لار

یادونه: د څه وخت را په دې خوا په جرمني کې د بریکلار لپاره دا فرمول باور لري:.

$$\text{ı: } b = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2$$

د بریک همدا ډول د عکس العمل لار په متر (m) راوځي، که چټکتیا یا سرعت په کیلومتر په ساعت (km/h)وي.

الف – د دواړو حالتونو لپاره د s = f(v) تابع مساوات و ټاکی ، د کوم لپاره چې په هره تللې چټکتیا یا سرعت تملار شمیرل کیدی شي.

ب - د تابع مشاوات s = f(v) د دواړو حالتونو لپاره د وهل شوی سرعت v = 0, 10, 20, 30, ... 100 km/h سره د ه یوه د ودریډ - یا توقف لار چې شمیرل کیږي.

پ : په کواوردیناتسیستم کې یا د وضعیه قیمتسیستم کې ګراف رسم کړی.

ت: ټوله لاس ته راوړې نتیجه تشریح کړی.

Problemlösung: د پرابلم حل:

الف: د تابع مساوات:

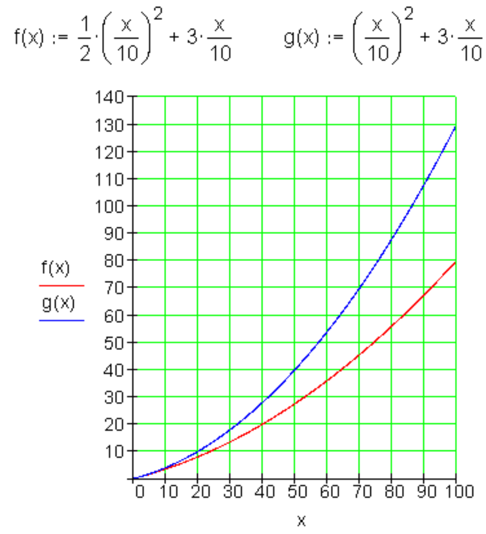
زوړ قانون:	$f(v) = \left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10} \cdot 3 = \frac{1}{100} v^2 + \frac{3}{10} v$
نوی قانون:	$\text{ı: } f(v) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10} \cdot 3 = \frac{1}{200} v^2 + \frac{3}{10} v$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب - : ارزښتجدول(په کيلو متر په ساعت کي)

v (in km/h)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
f(v) (in m)	0	4	10	18	28	40	54	70	88	108	130	alt
f(v) (in m)	0	3,5	8	13,5	20	27,5	36	45,5	56	67,5	80	neu

پ - گرافونه



د x محور هر ه وهل شوي لار په km/h په گوته کوي.

د y - محور د هر همغه د توقفلار په m په گوته کوي.

ت – کومنتار

د نوي نظم وروسته د د چټکتيا(سرعت) زياتيدني توپير تل زياتيږي. د 50 km/h چټکتيا سره نوی د تم کيدلو لار 27,5 m ده، دا د زړې لارm 40 نږدې 69% ده. په 100 km/h دا نوي لار نوره فقط ده، دا د زړې 130 m لارپا نږدې 61% ده. د بريک نيولو لار کمېدنه د بريک ښه کيدو(ABS) سره موخه وره ده.

د تابع مساوات د ټيک پامورتيا او گراف له امله موږ کره کوو، چې دا نه کرښيز مساوات دی او نه يوه کرښه. انځوروي.

د تابع مساوات لاندې بڼه لري:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

داسې تابع مربع تابع بولو او يا هم د2 –مې درجې ټول(تام) راشنل توابع.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګرافونه یې پارابول بلل کیږي.

تمرینونه:

د لاندې پارابولونو ګرافونه وکاږئ.

د دې لپاره ارزښت جدول ولیکئ

اول - $f(x)=x^2+4x-5$ دویم $f(x)=x^2+2x+5$

دریم - $f(x)=-x^2+x+6$ څلورم - $f(x)=x^2-x$

پنځم - $f(x)=x^2-\frac{1}{9}$ شپږم - $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+3$

اوم - $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$ اتم - $f(x)=-2x^2+8x-11$

نهم م- $f(x)=3x^2-3x$ لسم - $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{11}{2}x+10$

نورمال پارابل، بڼه ځل یا - ضریب او راکښني

د کار قرارداد:

د a2 د مختلفو ارزښتونو لپاره تابع $f(x)=a_2x^2$ وځیرئ او ګراف په وضعیه قیمت سیستم کې وکاږئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = \frac{3}{2}x^2 \quad f_3(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$$

د انځور شوي پارابل تابع مساوات یو له بل د x^2 ضریب a_2 له امله توپیروي.

$$f_1(x) = x^2$$

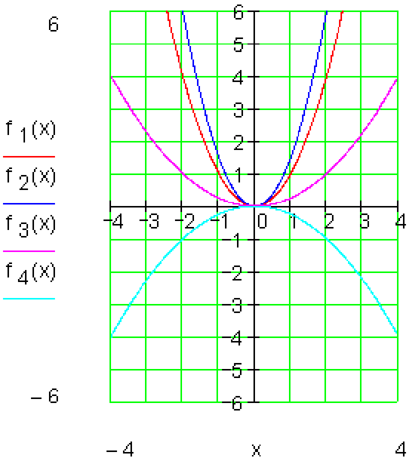
$$f_2(x) = \frac{3}{2}x^2$$

$$f_3(x) = \frac{1}{4}x^2$$

$$f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$$

دا ضریب a_2 د پارابل د بنې لپاره مسول او له دې امله د بنې ضریب بلل کيږي.

د تقاطع ټکی S وضعیه قیمتونه S (0 | 0) لري.



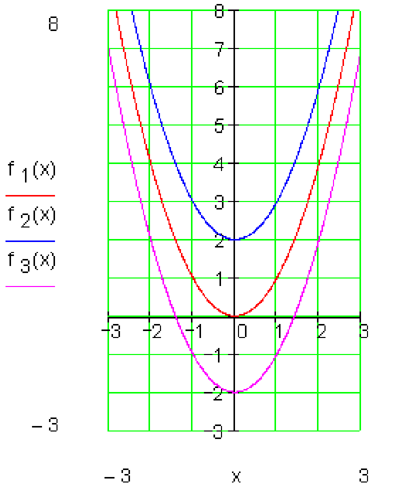
بڼه ضریب د پارابل قوارېِ یا شکل ته څنګه تغیر ورکوي؟

د پارابول په نخښنه ونه	ضریب بنې
نورمال پارابو ل غزېدلی پارابول کېکاږلی پارابول پهx محور هنداره شوی نورمال پارابول غزېدلی پارابول، په x -محور هنداره شوی کیکاږلی پاربول، په x –محور هنداره شوی	$a = 1$ → $a > 1$ → $0 < a < 1$ → $a = -1$ → $a < -1$ → $-1 < a < 0$ →

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کار قرارداد:

د a_0 د مختلفو ارزښتونو لپاره د $f(x) = x^2 + a_n$ تابع مطالع کړی او په وضعیه قیمتسیستم کې یې ګراف رسم کړی: $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$

دا یو راکبنلی نورمال پارابل دی، چې ککړئ ټکی(د ر آس نقطه) S د a_0 په واحدونو راکښل شوې ده. $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$ راکښنه دy محور په اوږدوالي باندې صورت نیسي ، چېرته چې د راکښنې لور د a_0د مختخښې له لارې ټاکل کیدی شي. د تقاطع ټکی S کواوردینات S (0 | a_0) لري. $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$	

د کار ورکوني قرارداد:

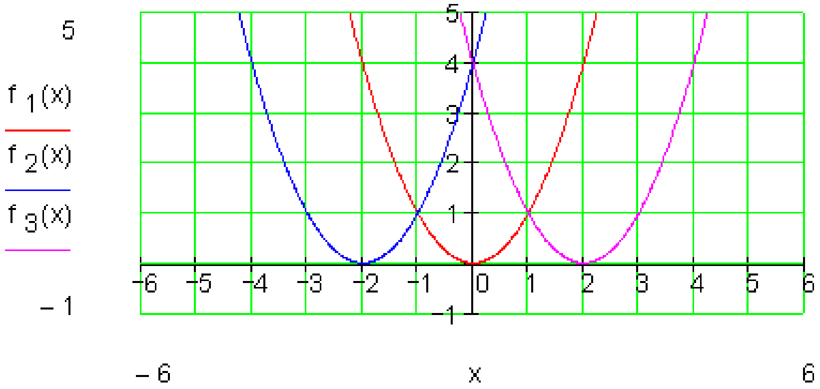
د$f(x) = (x+u)^2$ تابع د u د مختلفو ارزښتونو لپاره راکښنه وڅیړی او ګراف یې په وضعیه قیمتسیستم کې x رسم کړی

$f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = (x + 2)^2$ $f_3(x) = (x - 2)^2$

د ارزښت جدول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

f_1	x	−2	−1	0	1	2	f_2	x	−4	−3	−2	−1	0	f_3	x	0	1	2	3	4
	y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4



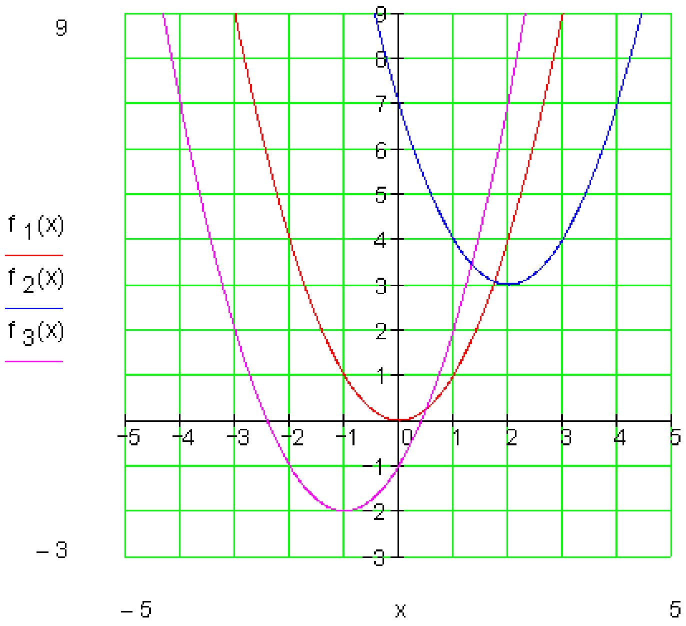
د ا یو راکښلی (چې ځای ته یې تغیر ورکړ شوی وي) نورمال پارابول دی، چې ککرئ تکی(د رأس نقطه) S یې د u په واحدونو(یوونونو) دx په محور راکښل یا کښول شوې ده. دS غوڅتکی(نقطه تقاطع) یې کواوردینات S (-u | 0)لري.

کینې لور ته څرخون یا څرخول، ککرئ تکیS په u واحدونو یا یوونوو د پیل یا سرچینې کیڼ لورت پروت دی.	u>0 =>
ښی څرخون یا څرخول، ککرتکی S په u واحدونو د پیل یا سرچینې ښیَ لورته پروت دی.	u<0 =>

د کار (ورکونې) قرارداد: د u او a0 دمختلفو ارزښتونو لپاره تابع f(x) = (x+u)² + a0 وخیړی او ګراف یې په یوه کواوردینات(پروت ولاړ) سیستم کې انځور کړی.

$$f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = (x-2)^2 + 3 \qquad f_3(x) = (x+1)^2 - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $f_2(x)$ ګراف بیرته یو نورمال پارابول دی، چې ککرئ ټکی S یې په دوه واحده ښی لور ته او په درې واحده پورته لور ته راکښلی دی.

د $f_3(x)$ ګراف هم یو نورمال پارابول دی، چې ککرټکی S (د رأسټکی) په یوه واحد(یوون) کیڼ او په درې واحده لاندې لور ته کښول شوی دی.

د $f(x) = (x+u)^2 + a_0$ ډول تابع د مربع تابع د ککرئ ټکي(رأس ټکي) بڼې تابع بلل کیږي.

د تابع ګراف نورمال پاربول دی، چې په u ارزښت دx محور په لور او په a_0 د yمحور په لور راکښل شوی دی.

که ککرټکی د $S(x_s \mid y_s)$ سره په نخښه کړو، نو د ککرټکي بڼې مربع تابع په دې ډول ده:

$$f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنډه بڼه:	$S(x_s \mid y_s) \Leftrightarrow f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$
بېلګه:	$S(3 \mid -1) \Leftrightarrow f(x) = (x - 3)^2 - 1$

تر اوسه مو فقط نورمال پارابول راکښلې (راکش شوی) وو.

همدا یا برابره راکښنه کېدی شي د یوه په خوښه پارابول سره سرته ورسول شي.

دلته دې بیا فاکتور a_2 په پام کې ونیول شي.

په ټولیزه توګه باور لري:

$\text{Ist } f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ د یوه نورمال پارابول تابع (بلوان) دی، چې ککرتکی (د رأس ټکی) $S(x_s \mid y_s)$ لری، نو $f(x) = a_2(x - x_s)^2 + y_s$ د ککرټکي د تابع مساوات دي.

د خلورى تکمیلوني له لارې د رآس ټکي(ککرى ټکي) ټاکل

موږ پوهیږو چې صدق کوي:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \Leftrightarrow a_2(x - x_s)^2 + y_s \Rightarrow S(x_s \mid y_s)$$

په ککرټکي کې د ټولیز تابع مساواتو د ترم تابع له لارې کېدی شي د یوه پارابول ککرټکی (د ککرى ټکی) وشمیرل شي.

بېلګه:

$F(x) = 3x^2 - 12x + 15$ دې په ککرئ ټکي مساوات واړول شي.

لوړمی پل(قدم) : د x^2 تر مخه ضریب دې له نوکانو راوه وېستل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$\Rightarrow f(x) = 3[x^2-4x+5]$$

دويم پل : مربع تکميلونه [ ] او بنه بدلون

$$\Rightarrow f(x) = 3.[x^2 - 4x +(2)^2 -(2)^2 +5] = 3.[(x-2)^2+1]=3.(x-2)^2 +3$$

$$\Rightarrow S(2;3)$$

بيلګه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = \frac{1}{2}\left[x^2 - 6x + 8\right] = \frac{1}{2}\left[x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 8\right]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left[(x-3)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow S\left(3 \mid -\frac{1}{2}\right)$$

بيلګه:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right] = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{4}\right]$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{36}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{27}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow S\left(-\frac{3}{4} \mid -\frac{9}{16}\right)$$

تمرينونه: د مربع تکميلوني له لارې د رآس ټکي(ککرى ټکي) ټاکل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه پارابل تابع مساوات ورکړشوي دي(د دویمې درجې ټول راشنل تابع). د لاندې بارابولونو لپاره رآسټکو بڼه او رآسټکي پیدا کړی.

ګرافونه يې وکاږی:

لومړی: $f(x) = x^2 + 2x + 5$ دویم: $f(x) = x^2 + 4x + 1$

دریم: $f(x) = x^2 - 4x + 1$ څلورم: $f(x) = x^2 - 3x + 3,5$

پنځم: $f(x) = x^2 + x - 3$ شپږم: $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

اووم: $f(x) = -x^2 + 5x - 5$ اتم: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$

نهم: $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$ لسم: $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

بیلګه 1 :

د ټول راشنل تابع ګراف چې رسم کړای شو،په زیاتو حالتونو کې اړیند دی، چې ارزښتجدول وپیژنو. د دې لپاره جبشمیري له لارې کیدی شي. خو دا هم تل اړیین دی.

یو ه ساده بیلګه بې له جبشمیري څخه.

تابع مساوات : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

موږ د متحولې $x = 0$ څخه پیل کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = 0: f(0) = 0^2 - 4\cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$$
$$x = 1: f(1) = 1^2 - 4\cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$
$$x = 2: f(2) = 2^2 - 4\cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$
$$x = 3: f(3) = 3^2 - 4\cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$$
$$x = 4: f(4) = 4^2 - 4\cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$$
$$x = 5: f(5) = 5^2 - 4\cdot 5 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8$$
$$x = 6: f(6) = 6^2 - 4\cdot 6 + 3 = 36 - 24 + 3 = 15$$

تر هغې چې د تابع ارزښت له 10 $\pm$ لوی شي، کېدی شي چې پع کړي.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکل کيږي.

$$x = -1: f(-1) = (-1)^2 - 4\cdot(-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8$$
$$x = -2: f(-2) = (-2)^2 - 4\cdot(-2) + 3 = 4 + 8 + 3 = 15$$

اوس ټول ارزښتونه په يوه جدول کې کښل کيږي.

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	15	8	3	0	−1	0	3	8	15

اوس له دې ارزښتونو سره کېدی شي د f(x) ګراف رسم شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بيا پسې شميرل کېدی شي

د بيلګې په توګه $x = \pm ½$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=-\frac{1}{2}:f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3=\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}+2+3=5\frac{1}{4}=5,25$$

$$x=\frac{1}{2}:f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-2+3=1\frac{1}{4}=1,25$$

هر څوک له جبشميري سره بنه بلد نه دی. په دې حالت کې کړی شي دا کسان له شميروني يا کمپيوتر څخه کار واخلي.

په لاندې کې HN د اصلي ګډ مخرج (ماتلاندې) په معنا دی.

يوه غوره بيلګه، چې ځنې برخې يې د جبشميري په مرسته حل شوي دي

د تابع مساوات $f(x)=\frac{4}{5}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}$

يادونه: په لاندې زيات ځايونه HN راغلي، دا د اصلی مخرج په مانا دي.

موږ د $x=0$ سره پيل کوو

$$x=0:f(0)=\frac{4}{5}\cdot0^2-\frac{3}{4}\cdot0-\frac{7}{2}=0-0-\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}=-3,5$$

$$x=1:f(1)=\frac{4}{5}\cdot1^2-\frac{3}{4}\cdot1-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}-\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}-\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{69}{20}=-3,45$$

$$x=2:f(2)=\frac{4}{5}\cdot2^2-\frac{3}{4}\cdot2-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}-\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=-\frac{18}{10}=-\frac{9}{5}$$

$$=-1,8$$

$$x=3:f(3)=\frac{4}{5}\cdot3^2-\frac{3}{4}\cdot3-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}-\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}-\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{29}{20}=1,45$$

$$x=4:f(4)=\frac{4}{5}\cdot4^2-\frac{3}{4}\cdot4-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}-3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}-\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{63}{10}=6,3$$

$$x=5:f(5)=\frac{4}{5}\cdot5^2-\frac{3}{4}\cdot5-\frac{7}{2}=20-\frac{15}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=4}{=}\frac{80}{4}-\frac{15}{4}-\frac{14}{4}=\frac{51}{4}=12,75$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکو.

$$x=-1:\ f(-1)=\frac{4}{5}\cdot(-1)^2-\frac{3}{4}\cdot(-1)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}+\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{39}{20}=-1{,}95$$

$$x=-2:\ f(-2)=\frac{4}{5}\cdot(-2)^2-\frac{3}{4}\cdot(-2)-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}+\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1{,}2$$

$$x=-3:\ f(-3)=\frac{4}{5}\cdot(-3)^2-\frac{3}{4}\cdot(-3)-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}+\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{119}{20}=5{,}95$$

$$x=-4:\ f(-4)=\frac{4}{5}\cdot(-4)^2-\frac{3}{4}\cdot(-4)-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}+3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}+\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{123}{10}=12{,}3$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې لیکل کیږي.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	12,3	5,95	1,2	-1,95	-3,5	-3,45	-1,8	1,45	6,3	12,75

د دي ارزښتونو سره اوس د ګراف کښل کیدی شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسي شمیرل کیدی شي

د بیلګې په توګه $x=\pm 5/2$

$$x=-\frac{5}{2}:\ f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}+\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=\frac{27}{8}=3{,}375$$

$$x=\frac{5}{2}:\ f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}-\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=-\frac{3}{8}=-0{,}375$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: په پورته کې (HN(Hauptnenner داصلې مخرج(ماتلاندې) یا مخرج مشترک په معنا دی.

د دې لپاره چې د یوه ټول ریښتونې یا تام راشنل تابع ګراف انځور کړای شو، په زیاتو حالتونو کې اړیین دی، چې ارزښت جدول وکاږو. د دې لپاره یو جبشمیروني ته اړتیا لرو.

یو ه ساده بیلګه بې له جبشمیري څخه.

تابع مساوات : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

موږ د تحولې $x = 0$ څخه پیل کوو

$$
\begin{aligned}
x = 0: f(0) &= 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3 \\
x = 1: f(1) &= 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0 \\
x = 2: f(2) &= 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \\
x = 3: f(3) &= 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0 \\
x = 4: f(4) &= 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3 \\
x = 5: f(5) &= 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8 \\
x = 6: f(6) &= 6^2 - 4 \cdot 6 + 3 = 36 - 24 + 3 = 15
\end{aligned}
$$

تر هغې چې د تابع ارزښت له ± 10 لوی شي، کېدی شي چې پېع کړي.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکل کیږي.

$$
\begin{aligned}
x = -1: f(-1) &= (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8 \\
x = -2: f(-2) &= (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 3 = 4 + 8 + 3 = 15
\end{aligned}
$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې کښل کیږي.

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	15	8	3	0	−1	0	3	8	15

اوس له دې ارزښتونو سره کېدی شي د $f(x)$ ګراف رسم شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسې شمېرل کیدی شي

د بېلګې په توګه $x = \pm ½$

$$x = -\frac{1}{2} : f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} + 2 + 3 = 5\frac{1}{4} = 5,25$$

$$x = \frac{1}{2} : f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 4\cdot\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 2 + 3 = 1\frac{1}{4} = 1,25$$

هر څوک له جبشمېري سره ښه بلد نه دی. په دې حالت کې کړی شي دا کسان له شمیروني یا کمپیوتر څخه کار واخلي.

یوه غوره بیلګه، چې ځنې برخې یې د جبشمیري په مرسته حل شوي دي:

د تابع مساوات $f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{2}$

موږ د $x = 0$ سره بیل کوو

$$x = 0 : f(0) = \frac{4}{5}\cdot 0^2 - \frac{3}{4}\cdot 0 - \frac{7}{2} = 0 - 0 - \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} = -3,5$$

$$x = 1 : f(1) = \frac{4}{5}\cdot 1^2 - \frac{3}{4}\cdot 1 - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} - \frac{7}{2} \underset{HN=20}{=} \frac{16}{20} - \frac{15}{20} - \frac{70}{20} = -\frac{69}{20} = -3,45$$

$$x = 2 : f(2) = \frac{4}{5}\cdot 2^2 - \frac{3}{4}\cdot 2 - \frac{7}{2} = \frac{16}{5} - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \underset{HN=10}{=} \frac{32}{10} - \frac{15}{10} - \frac{35}{10} = -\frac{18}{10} = -\frac{9}{5} = -1,8$$

$$x = 3 : f(3) = \frac{4}{5}\cdot 3^2 - \frac{3}{4}\cdot 3 - \frac{7}{2} = \frac{36}{5} - \frac{9}{4} - \frac{7}{2} \underset{HN=20}{=} \frac{144}{20} - \frac{45}{20} - \frac{70}{20} = \frac{29}{20} = 1,45$$

$$x = 4 : f(4) = \frac{4}{5}\cdot 4^2 - \frac{3}{4}\cdot 4 - \frac{7}{2} = \frac{64}{5} - 3 - \frac{7}{2} \underset{HN=10}{=} \frac{128}{10} - \frac{30}{10} - \frac{35}{10} = \frac{63}{10} = 6,3$$

$$x = 5 : f(5) = \frac{4}{5}\cdot 5^2 - \frac{3}{4}\cdot 5 - \frac{7}{2} = 20 - \frac{15}{4} - \frac{7}{2} \underset{HN=4}{=} \frac{80}{4} - \frac{15}{4} - \frac{14}{4} = \frac{51}{4} = 12,75$$

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=-1:\ f(-1)=\frac{4}{5}\cdot(-1)^2-\frac{3}{4}\cdot(-1)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}+\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{39}{20}=-1{,}95$$

$$x=-2:\ f(-2)=\frac{4}{5}\cdot(-2)^2-\frac{3}{4}\cdot(-2)-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}+\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1{,}2$$

$$x=-3:\ f(-3)=\frac{4}{5}\cdot(-3)^2-\frac{3}{4}\cdot(-3)-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}+\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{119}{20}=5{,}95$$

$$x=-4:\ f(-4)=\frac{4}{5}\cdot(-4)^2-\frac{3}{4}\cdot(-4)-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}+3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}+\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{123}{10}=12{,}3$$

اوس ټول ارزښتونه په يوه جدول کې ليکل کيږي.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	12,3	5,95	1,2	-1,95	-3,5	-3,45	-1,8	1,45	6,3	12,75

د دي ارزښتونو سره اوس د ګراف کښل کيدی شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بيا پسي شميرل کيدی شي

د بيلګې په توګه $x = \pm 5/2$

$$x=-\frac{5}{2}:\ f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}+\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=\frac{27}{8}=3{,}375$$

$$x=\frac{5}{2}:\ f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}-\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=-\frac{3}{8}=-0{,}375$$

پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنسټونه مربع توابع II

لومړی - د لاندې پارابولونو د تابع مساوات ورکړی:

الف- $f(x) = x^2 - 4x + 2$ ب – $f(x) = x^2 + 4x + 2$

پ – $f(x) = -x^2 - 4x + 3$ ت- $f(x) = -x^2 + 8x - 9$

ټ- $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5$ ث – $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

ج – $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 2$ چ – $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x + 6$

ح- $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 7$ خ - $f(x) = \frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{7}{2}$

(۱) د ککرئ ټکي بڼه او ککرئ ټکي وټاکی.

(۲) د محورونو غوځټکي وشمیرئ.

(۳) پل په پل تشریح کړئ، چې f(x) د نورمال پارابول حخه څنګه منځ ته راځي او دا څنګه واز دی.

(۴) په یوه مناسب پروتولاړسیستم کې د f(x) ګراف وکاږئ

دویم – سړی کړی شي د نورمال پارابول څخه هر په خوښه پارابول د د غوځټکي د راکښني له لارې او د پرسپدني یا غزوني له لارې منځ ته اوړي. که دا کښته لور ته واز وي، نو دا دx محور باندې هنداره کیږي یا منعکس کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه پارابول په هکله لاندې ټکي پیژنو:

	د y په لور راکښنه یا ځای بدلون	د x په لور راکښنه یا ځای بدلون	Formfaktor بڼه ضریب
a)	په 2 واحدونو کښنه لور ته	په 2 واحدونو ښي لورته	$a_2 = 1$
b)	په 4 واحدونو پورته لور ته	په 3 واحدونو کيڼ لورته	$a_2 = -1$
c)	په 4 واحدونو کښته لور ته	په 2 واحدونو کيڼ لورته	$a_2 = \frac{1}{2}$
d)	په 5 واحدونو پورته لور ته	په 1 واحد ښي لورته	$a_2 = -2$
e)	په 3 واحدونو پورته لور ته	په 4 واحدونو کيڼ لورته	$a_2 = -\frac{1}{4}$
f)	په 6 واحدونو کښنه لور ته	په 2,5 واحدونو ښي لورته	$a_2 = \frac{3}{2}$
g)	په 3 واحدونو پورته لور ته	په 3 واحدونو کيڼ لورته	$a_2 = -\frac{3}{4}$
h)	په 4,5 واحدونو کښنه لور ته	په 3,5 واحدونو ښي لورته	$a_2 = 2$
i)	په 3 واحدونو یا یوونونو کښنه لور ته	په 2 واحدونو ښي لورته	$a_2 = \frac{1}{3}$
j)	په3 واحدونو پورته لور ته		$a_2 = -\frac{2}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په 4 واحدونو بنې لورته

(۱) د ککرئ ټکي بڼه او ککرئ ټکي وټاکئ.

(۲) د محورونو غوځېکي وشميرئ.

(۳) د تابع مساوات په پولینوم بڼه $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$? څنګه دي؟

(۴) په يو مناسب کواوردينات سيسم کې د f(x) ګراف وکاږئ.

پوښتنې

د مربع توابعو بنسټونه IV

لومړئ:

تابع f(x) ورکړ شوی دی. د شمېرنې له لارې وښايئ، چې ګراف تابع په x محور کې لمسوي. ګراف وکاږئ.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8} \quad x \in \mathbb{R}$$

دويم: د تابع مساوات f(x) د محور غوځېکي وشميرئ، او ککرئ ټکي. ګراف يې رسم کړئ.

الف- $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x$ ب - $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$ پ- $f(x) = x^2 + 4x + 1$

ت - $f(x) = -0,25(4x^2 + 12x + 9)$ ټ _ $f(x) = 3x(1-x)$ ث-

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{5}{3}$$

دريم: د U = 18 cm محيط سره کوم مستطيل(ولاړکوډيز) خورا لويه سطحه لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم: د توابعو f(x) او g(x) ګرافونه چيرته د x محور غوځوي؟ ککرۍ چيرته پرتي دي؟ د دواړو ګرافونو ترمنځ کومې اړيکې پرتې دي؟ د ارزښت جدول په مرسته پوښتنې ځواب کړئ.

الف –

x	–3	–2	–1	0	1	2
f(x)	–3,5	0,5	2,5	2,5	0,5	–3,5
g(x)	4	0	–2	–2	0	4

ب –

x	–2	–1	0	1	2	3
f(x)	–12	–5	0	3	4	3
g(x)	3,5	0	–2,5	–4	–4,5	–4

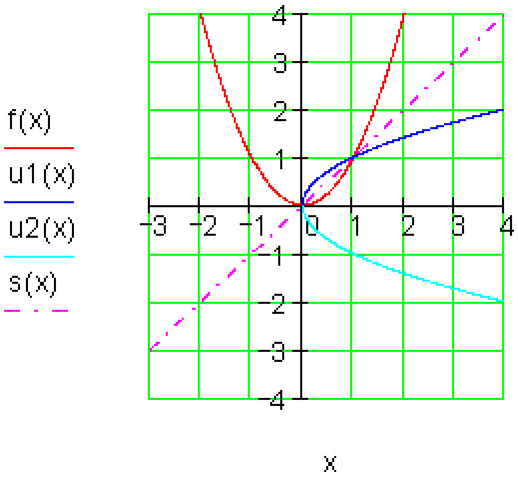
پنځم: د اړونده ګراف کوم خويونه د تابع مساوات څخه سيده لوستل کيدی شي؟

$$f(x) = -x^2 - x + 6;\quad g(x) = (2-x)(x+3);\quad h(x) = -(x+0,5)^2 + \frac{25}{4}$$

د مربع-يا ځلورئ توابعو معکوس تابع

تلنلار (که غواړې: طريقه يا قانون) همداسې ده لکه پورته په کرښيزو توابعو کې چې وښوول شوه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y=(f(x)=x^2$ د متحولو x او y بدلول $x=f(y)=y^2 \Leftrightarrow y^2=x$ رېښه نيونه: له دې لاس ته راځي او برعکس $\Leftrightarrow \lvert y \rvert = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$ يا $y = -\sqrt{x}$ نو دوه معکوس توابع شتون لري: $y = u_1(x) = \sqrt{x}$ او $y = u_2(x) = -\sqrt{x}$ د معکوس تابع جوړولو سره تعريفورشو محدوده شوه، د دې لپاره چې يواځنی نظم منځ ته راشي	

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښيزبرابرونسيستم د ۲ برابرونونو او ۲ متحولو سره.

داسي سيستم له دوه مساوتو څخه جوړ دی. غوښتونی د دواړو مساواتو ګډ حل دی. مختلفي تلنلارې شته، چې سرې حل ته ورسيږي

په لاندې einsetzen in = په ... کې اينوول.

د جمعي تلنلار:

مساواتسيستم: (I) $5x - 2y = 1$ (II) $3x + 3y = 9$	د حل پل(قدم) غوښي(قطاع، که قطعه؟) د جمعي تلنلار ته لومړی امکان يا واريانت
(I) $5x - 2y = 1 \mid \cdot 1{,}5$ (II) $3x + 3y = 9$ (I) $7{,}5x - 3y = 1{,}5$ (II) $3x + 3y = 9$	لومړی: مساوات ورته داسې بڼه بدل کړئ، چې ضريبونه (ترمخ عددونه) د yمتحولي تر مخنخښې پورې سره سروخوري.
(I) $7{,}5x - 3y = 1{,}5$ (II) $3x + 3y = 9$ } + $10{,}5x = 10{,}5 \mid : 10{,}5$ $\Leftrightarrow$ $x = 1$	دويم: منځ ته راغلي مساوات سره جمعه کړې او د **x** - متحولې پسې يې حل کړئ
په $3x + 3y = 9$ کې اينوونه: $x = 1$	دريم: د **x** لپاره ميندل شوي ارزښتونه د دواړو څخه په يوه مساوات کې کيږدئ او **y** پسې يې حل کړې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$3\cdot1+3y=9$ $\Leftrightarrow 3+3y=9 \mid -3$ $\Leftrightarrow 3y=6 \mid :3$ $\Leftrightarrow y=2$	
$L=\{(1\mid 2)\}$	څلورم: حلست یا حلډېرئ ولیکئ

پنځم:

ازماېښت د اېښووني له لارې

$$(I)\quad 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot1-2\cdot2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$$

$$(II)\quad 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot1+3\cdot2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$$

مساواتسیستم

$$(I)\quad 5x-2y=1$$

$$(II)\quad 3x+3y=9$$

د حل پلونه قدمونه د جمعي تلنلار لپاره

دويم واریانت

لومړی: مساوات داسي ورته بنهبدل کړئ، چي د **x** ضريبونه) ترمخعددونه) تر مخنخښي پورې سره يوغرېز شي.

$$(I)\quad 5x-2y=1 \mid \cdot 3$$

$$(II)\quad 3x+3y=9 \mid \cdot(-5)$$

$$(I)\quad 15x-6y=3$$

$$(II)\quad -15x-15y=-45$$

دويم: منځ ته راغلی مساوات سره جمعه کړئ او متحولې **y** پسې يې حل کړئ.

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & 15x-6y=3\\ (II) & -15x-15y=-45\end{array}\right\}+$$

$$-21y=-42 \mid :(-21)$$

$$\Leftrightarrow y=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم: بنې لورته المانې د اينوونې په مانا ده

$y = 2$ eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

د x لپاره ميندل شوې ارزښتونه له دې دوه پهيوه مساوت کې کيږدئ او د متحولې x پسې يې حال کړئ.

$$3x + 3 \cdot 2 = 9$$
$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \mid -6$$
$$\Leftrightarrow 3x = 3 \mid :3$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

خلروم: حلستې يا د حلډيرئ وليکئ

$$L = \{(1 \mid 2)\}$$

پنځم: د اينوونې له لارې ازماېښت

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د برابراينوونې تلنلار

مساواتسيستم

$$(I)\quad 5x - 2y = 1$$
$$(II)\quad 3x + 3y = 9$$

د حل پل د برابراينوونې تلنلار ته

واريانت 1

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned} &(I) \quad 5x - 2y = 1 \,|\, +2y \\ &(II) \quad 3x + 3y = 9 \,|\, -3y \end{aligned}$$

لومړی: دواړه مساوات د اووښتوني یا متحولې **x** پسې حل کيږي.

$$\begin{aligned} &(I) \quad 5x = 1 + 2y \,|: 5 \\ &(II) \quad 3x = 9 - 3y \,|: 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(I) \quad x = \frac{1+2y}{5} \\ &(II) \quad x = \frac{9-3y}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(I) \quad x = \frac{1+2y}{5} \\ &(II) \quad x = 3 - y \end{aligned}$$

دويم: د مساوات بني ا ړخونه برابر اينوول کيږي او د متحولې **y** پسې حل کيږي.

$$\begin{aligned} \frac{1+2y}{5} &= 3 - y \,|\cdot 5 \\ \Leftrightarrow 1 + 2y &= 15 - 5y \,|\, +5y \\ \Leftrightarrow 1 + 7y &= 15 \quad |-1 \\ \Leftrightarrow 7y &= 14 \quad |: 7 \\ \Leftrightarrow y &= 2 \end{aligned}$$

دريم: (د کين لور الماني په پښتو: اينسول په ..کي)

د **y** ميندل شوی ارزښت د دواړو څخه په يوه وتونمساوات کې اينسوول کيږي، او دا بيا د متحولې **x** پسې حل کيږي.

y = 2 eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

$$\begin{aligned} 3x + 3 \cdot 2 &= 9 \\ \Leftrightarrow 3x + 6 &= 9 \,|\, -6 \\ \Leftrightarrow 3x &= 3 \,|: 3 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \end{aligned}$$

ځلورم: حلسټ يا ـدېرئ وليکئ

$$L = \{(1 | 2)\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم: د ځا په ځای کولو یا ایښوولو له لارې ازماېښت

$$(I)\quad 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$$

$$(II)\quad 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$$

مساواتسیستم

د حل پل د برابرایښوولو له لارې

واریانت 2

$$(I)\quad 5x-2y=1$$

$$(II)\quad 3x+3y=9$$

لومړی: دواړه مساوت د اووښتونې یا متحولې **y** پسې حل کیږي.

$$(I)\quad 5x-2y=1 \mid -5x$$

$$(II)\quad 3x+3y=9 \mid -3x$$

$$(I)\quad -2y=1-5x \mid :(-2)$$

$$(II)\quad 3y=9-3x \mid :3$$

$$(I)\quad y=\frac{1-5x}{-2}$$

$$(II)\quad y=\frac{9-3x}{3}$$

$$(I)\quad y=\frac{5x-1}{2}$$

$$(II)\quad y=3-x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم: د دواړو مساواتو ښئ خوا برابره لیکل یا اینسوول کیږي او د متحولې **x** پسې حل کیږي.

$$\frac{5x-1}{2} = 3-x \mid \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow 5x-1 = 6-2x \mid +2x$$
$$\Leftrightarrow 7x-1 = 6 \mid +1$$
$$\Leftrightarrow 7x = 7 \mid :7$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

درى(ښئ الماني: اینسوول په ...کې)

د x میندل شوی ارزښت د دداړو وتونمساواتو څخه په یوه کې اینسوول کیږي، دا بیا د متحولې **y** پسې حل کیږي.

$x = 1$ eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

$$3 \cdot 1 + 3y = 9$$
$$\Leftrightarrow 3 + 3y = 9 \mid -3$$
$$\Leftrightarrow 3y = 6 \mid :3$$
$$\Leftrightarrow y = 2$$

څلورم: د حلسټ ولیکئ

$$L = \{(1 \mid 2)\}$$

پنځم د اینسووني له لارې ازمایښت

$$\text{(I)} \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$\text{(II)} \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د اینسووني تلنلار: د اینسووني تلنلار لپاره د حل پلونه(قدمونه)

وارینت 1

مساواتسیستم

$$\text{(I)} \quad 5x - 2y = 1$$
$$\text{(II)} \quad 3x + 3y = 9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\text{(I)}\ \ 5x - 2y = 1 \,|\, +2y$$
$$\Leftrightarrow 5x = 2y + 1 \,|: 5$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{5}y + \frac{1}{5}$$

لومړی: مساوات**(I)** د **x** پسې حل کيږي.

$$x = \frac{2}{5}y + \frac{1}{5} \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y = 9$$
$$3\left(\frac{2}{5}y + \frac{1}{5}\right) + 3y = 9$$
$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}y + \frac{3}{5} + 3y = 9 \,|\, -\frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}y + 3y = 9 - \frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{21}{5}y = \frac{42}{5} \,|\, \cdot 5$$
$$\Leftrightarrow 21y = 42 \,|: 21$$
$$\Leftrightarrow y = 2$$

دويم: د بني اړخ ميندل شوی ترم په مساوات **(II)** کې اينوول کيږي او د **y** پسې حل کيږي.

$$y = 2 \text{ eingesetzt in (II): } 3x + 3y = 9$$
$$3x + 3 \cdot 2 = 9$$
$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \,|\, -6$$
$$\Leftrightarrow 3x = 3 \,|: 3$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

دريم: د **y** لپاره ميندل شوی ارزښت په يو د دې دوه وتونمساواتو کې اينوول کيږي، دا بياپه **x** پسې حل کيږي.

خلورم: د حل سټ وليکئ

$$L = \{(1 \,|\, 2)\}$$

پنځم: د اينوولو له لارې حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(I)\quad 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$$

$$(II)\quad 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$$

مساواتسیستم

$$(I)\qquad 5x-2y=1$$

$$(II)\qquad 3x+3y=9$$

د حل پلونه(قدمونه) د اینوولو تلنلار لپاره

واریانت 2

لومړی: مساوات**(II)** د متحولې **y** پسې حل کیږي.

$$(II)\quad 3x+3y=9\,|\,-3x$$

$$\Leftrightarrow \quad 3y=9-3x\,|:3$$

$$\Leftrightarrow \quad y=3-x$$

دویم: دبنی لور میندل سوی ترم په مساوات **(I)**کې کیږدئ او په **x** پسې یې حل کړئ.

$$y=3-x \text{ eingesetzt in } (I): 5x-2y=1$$

$$5x-2(3-x)=1$$

$$\Leftrightarrow 5x-6+2x \quad =1\,|+6$$

$$\Leftrightarrow 7x \quad =7\,|:7$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=1}}$$

3. دریم: د **x** لپاره میندل شوی ارزښت په یو د دې دوه وتونمساوتو کې اینوول کیږي، او دا بیا د متحولې **y** پسې حل کیږي.

$$x=1 \text{ eingesetzt in } (II): 3x+3y=9$$

$$3\cdot 1+3y=9$$

$$\Leftrightarrow 3+3y=9\,|-3$$

$$\Leftrightarrow \quad 3y=6\,|:3$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y=2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم: جلسټ ولیکئ

$$L = \{(1|2)\}$$

پنځم: ازماېښت د اېښوولو له لارې

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5\cdot 1 - 2\cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

ټولي درې تلنلارې د هغه د واریانتو سره په یوه ټکلي مساوتسیستم وکارول شو. که ځوک یوګوني تلنلرې ټیک وګوري، پیژني، چې په واریانت ۲ کې لږ د شمیرلو کار غوښتونی دی.

په یوه ټاکلي تلنلار د شمیرلو کار د دې حل کوونکي مساوتسیستم په واک کې دی. له دې امله دې لومړی پام وشي، چې کومه تلنلار د لږ کار سره سرته رسیدی شي. د دې لپاره نو یو ځو بیلګو ته اړ یو. لاندې بیګې دې د دې لپاره یوه کوچنۍ مرسته وي، چې مناسب د حل – یا ځواب تلنلار پیداشي.

د مناسب ځواب تلنلار لپاره بیلګې

بیلګه ۱ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

x1=-1 په (1) کې اینوونه y=7x+8 $y = 7\cdot(-1)+8$ $\Leftrightarrow y = -7+8$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 1}}$ حل: L={(-1|1)} ازماېښت (I) $y = 7x+8 \Rightarrow y = 7\cdot(-1)+8$ $\Leftrightarrow y = -7+8 \Leftrightarrow y = 1$ (w) (II) $y = -2x-1 \Rightarrow y = -2\cdot(-1)-1$ $\Leftrightarrow y = 2-1 \Leftrightarrow y = 1$ (w)	(I) $y = 7x+8$ (II) $y = -2x-1$ د برابر اینوونې لار $7x+8 = -2x-1 \mid +2x$ $\Leftrightarrow 9x+8 = -1 \mid -8$ $\Leftrightarrow 9x = -9 \mid :9$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = -1}}$

بیلګه۲:

Y=3 اینوونه په (1) کې 2x+4y=8 حل: $2x - 12 = 8 \mid +12$ $\Leftrightarrow 2x = 20 \mid :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 10}}$ ازماېښت (I) $2x+4y = 8 \Rightarrow 2\cdot10+4\cdot(-3) = 8$ $\Leftrightarrow 20-12 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8$ (w) (II) $2x-5y = 35 \Rightarrow 2\cdot10-5\cdot(-3) = 35$ $\Leftrightarrow 20+15 = 35 \Leftrightarrow 35 = 35$ (w)	(I) $2x+4y = 8$ (II) $2x-5y = 35$ د جمعي تللار: (II) $2x-5y = 35 \mid \cdot(-1)$ (I) $2x+4y = 8$ (II) $-2x+5y = -35$ (+) $9y = -27 \mid 9$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۳ :

X=1 په (1) کې کیږدئ x+2y=5 $1+2y=5 \mid -1$ $\Leftrightarrow 2y=4 \mid :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y=2}}$ حل: L= {(1|2)} ازماېښت $(I)\quad x+2y=5 \Rightarrow 1+4=5$ $\Leftrightarrow 5=5\ (w)$ $(II)\quad -x+y=1 \Rightarrow -1+2=1=35$ $\Leftrightarrow 1=1\ (w)$ د ربښتیا لپاره w	$(I)\quad x+2y=5$ $(II)\quad -x+y=1$ د اینوونې لار; (II) په y پسې حل کړئ $-x+y=1 \mid +x$ $\Leftrightarrow \quad y=x+1$ په (I) کې کیږدئ x+2y=5 $x+2(x+1)=5$ $\Leftrightarrow x+2x+2=5 \mid -2$ $\Leftrightarrow 3x=3 \mid :3$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}$

بیلګه ۴ : په لاندې: einsetzen اینوونه په (1)کې اوبیونه یا حل:Lösung
ازماېښتProbe د زیاتون یا جمعې
لار:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{aligned}(I)\quad & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4\\ (II)\quad & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{aligned}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$

$$\Leftrightarrow -5=y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

y = −5 eingesetzt in (I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2\,|\,-5)\}\quad x,y\neq 0$

Probe:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2 \Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2 \Leftrightarrow 2=2\ (w)$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4 \Rightarrow \frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$

$$\Leftrightarrow 6-2=4 \Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{aligned}(I)\quad & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4\\ (II)\quad & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{aligned}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$

$$\Leftrightarrow -5=y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

y = −5 eingesetzt in $(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,\Big|-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,\Big|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2\,|\,-5)\}\quad x,y\neq 0$

Probe:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2 \Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2 \Leftrightarrow 2=2\ (w)$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4 \Rightarrow \frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$

$$\Leftrightarrow 6-2=4 \Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

(II) $\frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$

Additionsverfahren:

(I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$

(II) $\frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$

$$\left.\begin{aligned}(I)\quad & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4\\ (II)\quad & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{aligned}\right\}+$$

$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$

$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$

$\Leftrightarrow -5=y$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$

y = −5 eingesetzt in (I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$

$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$

$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$

Lösung: $L=\{(2\,|\,-5)\}\quad x,y\neq 0$

Probe:

(I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2 \Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2 \Leftrightarrow 2=2\ (w)$

(II) $\frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4 \Rightarrow \frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$

$\Leftrightarrow 6-2=4 \Leftrightarrow 4=4\ (w)$

یادونه:

مساواتسیستم د کسرونو ترمونو څخه جوړ دی. دا چې مخرج دد صفر کیدو اجازه نه لري یا نه شي صفر کیدی، تعریفست باید ورکړ شي. داسئ مساواتسیستم کرښنیز نه دی.

د رسموني لار

(I) $x-y=-2$ $\quad L_I=\{(-2\,|\,0);(-1\,|\,1);(0\,|\,2);(1\,|\,3);\ldots\}$

(II) $\wedge\ -2x-y=1$ $\quad L_{II}=\{(-2\,|\,3);(-1\,|\,1);(0\,|\,-1);(1\,|\,-3);\ldots\}$

دواړه مساوات د y پسې حل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هر مساوات لپاره ارزښتجوړې د حل سټ په ګوته کوي.

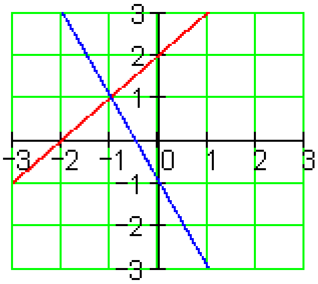
$$
\begin{array}{lrl}
(I) & x - y = -2 & | +y \\
(II) & -2x - y = 1 & | +y \\
\hline
(I) & x = -2 + y & | +2 \\
(II) & -2x = 1 + y & | -1 \\
\hline
(I) & x + 2 = y \Leftrightarrow y = x + 2 & \\
(II) & -2x - 1 = y \Leftrightarrow y = -2x - 1 & \\
\hline
\end{array}
$$

کا دا په یوه کواوردیناتسیستم کې وکښل شي، نو دوه کرښې ترې لاس ته راځي. د کرښو په غوښتکي یا نقطه تقاطع کې د دړو مساواتو حلسټ پروت دی.

حلسټ یا-دپړیځ: L={(-1|1)}

په هر مساوات کې د x لپاره عددونه اینوول کیږي.

x	-2	-1	0	1
y_I	0	1	2	3
y_{II}	3	1	-1	-3



د رسموني لار د مساوات او کرښو ترمنځ هندسي(ځمککچیزې) اړیکې لیدوړ کوي. د حل لار په حیث زیات وخت مناسب نه دی، چې د ګډغوښتکي کواودینات په ګرفیک کې ناتیک لوستل کیدی شي.

برابرون – یا مساواتسیستم بې له یواځني حل خخه

رسمیزه حل یا درسم له لارې حل د مساوات او کرښې ترمنځ هندسي اړیکې لیدوړ کوي.

- دوه کرښې کیدی شي چې نسبت یو بل ته مختلف پروتځایونه ولري.

- دا کیدی چې په یو ټکي کې سره غوځي کړي، لکه پورته بیلګه چې لیدوړ کوي، د دواړو کرښیز مساوات لپاره ټک یو حل شتون لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- دا کيدی شي يو بل سره غبرګې وي، نو په دې حالت کې کوم ټکی نه شته، چې دواړه کرښې يې يو له بل سره ګډ ولري. له دې سره اړونده مساوات له دې امله حل نه لري.

- دا کيدی شي يو په بل پرتې وي، يعنې کټمټ وي، نو هر ټکی د يوې کرښې به د بلې کرښې ټکی هم وي. نو له دې امله به دااړونده مساوات ناپای زيات حلونه ولري.

مساوات سيستم حل نه لري چې دا د حل پيل مو يوه . ليدوړ دا په دې معنا دی، ځغلي او کوم ګډ ټکی نه لري.	$\begin{aligned} &(I)\quad 10x+4y=4 \\ &(II)\quad 5x+2y=1 \mid \cdot(-2) \end{aligned}$ $\left.\begin{aligned} &(I)\quad 10x+4y=4 \\ &(II)\ -10x-4y=-2 \mid \end{aligned}\right\}+$ 0=2 نو دا ناټيک وينا ده، له دې لاس ته را ځي L={}

دا مساواتسيستم ناپای ډېر ځوابونه يا حلونه لري

د ورته بڼه بدلون وروسته د مساوات (I) او مساوات (II) جمعه کونې يو بل سره پورته کوي يا له منځه وړي، دا په دې معنا چې مساوات ورته يا ايدنتيک دي. هره د اعدادو جوړه، چې مساوات (I) پوره کوي،دا مساوات (II)هم پوره کوي. ليدوړ دا په دې معنا دی، چې کرښې يو په بل پرتې دي.	$\begin{aligned} &(I)\quad 10x+4y=2 \\ &(II)\quad 5x+2y=1 \mid \cdot(-2) \end{aligned}$ $\left.\begin{aligned} &(I)\quad 10x+4y=2 \\ &(II)\ -10x-4y=-2 \mid \end{aligned}\right\}+$ 0=0 له دې لاس ته راځي رښتيا وينا

پوښتنې

مساواتسيستم I

مساوات سيستم ته د دوه متحولو سره ګډوله پوښتنې، کرښيزمساواتسيستم، سيستم د کسري ترمونو سره او شي پوښتنې(د متن سره پ،ښتنې)

لومړی: د لاندې مساواتسيستم حلسټ وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

الف- (I) $5y - 3x = 1$ (II) $x = y + 1$

ب - (I) $4x + 5y = 32$ (II) $y = 5x - 11$

پ- (I) $15y - 4x = -50$ (II) $x = y + 7$

ت - (I) $3x = y + 15$ (II) $2y - 10 = 2x$

د ویم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

a) (I) $2y = 2x - 40$ (II) $3x = 10 - 2y$

b) (I) $\frac{x}{2} - \frac{3y}{5} = 3$ (II) $\frac{x}{4} + y = 8$

c) (I) $\frac{2x}{15} + \frac{7y}{12} = 3$ (II) $\frac{7x}{25} - \frac{5y}{16} = \frac{3}{20}$

d) (I) $\frac{x+5}{y-7} = \frac{4}{3}$ (II) $\frac{x+2}{y-5} = \frac{5}{8}$

دریم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

a) (I) $\frac{4}{3x+1} = \frac{2}{3y-13}$ (II) $\frac{2}{5x-10} = \frac{4}{7y-6}$

b) (I) $\frac{7}{x} - \frac{12}{y} = \frac{5}{6}$ (II) $\frac{4}{y} + \frac{5}{2} = \frac{9}{x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c)

(I) $\frac{4}{x}+\frac{8}{y}=\frac{5}{3}$

(II) $\frac{2}{x}-\frac{4}{y}=-\frac{1}{6}$

d)

(I) $\frac{3}{2x-1}-\frac{8}{3y+2}=-\frac{1}{5}$

(II) $\frac{5}{2x-1}+\frac{4}{3y+2}=\frac{8}{15}$

څلورم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

(I) $\frac{7}{2x-5}-\frac{9}{7y+5}=\frac{10}{3}$

(II) $\frac{24}{2x-5}+\frac{15}{7y+5}=\frac{19}{3}$

پنځم: یو پلار په دې لحضه کې څلورواره دومره عمر لري لکه ځوي يې او په ۵ کاله کې به فقط درې واره دومره عمر ولري. دا دواړه همدا اوس څومره عمر لري؟

شپږم: په کوم وخا کې به یو (اوبه) ساتونی (بیلر؟) له دوه نلونو څخه نیمم ډک شي، چې لومړی نل د ټول ساتوني د ډکولو لپاره ۱۸ دقیقې اودویم د دې لپاره ۲۲ دقیقو ته اړتیا ولري یا په کار ولري؟

اوم: د یوه مستېیل یا ولاړکونجیزچاپیریال یا محیط ۱۸۰ سانتي متره دی. اړخa څومره اوږد دی، که اړخ b ۳۰ سانتي متره وي؟

اتم: که د دوه ارزښتځاییزه پرته جمعه یا پروت زیاتون عدد9 دی. که ارزښتونه بدل شي، نو نوی عدد لاس ته راځي چې د زاړه عدد 7/4 ده. دواړه ځا ارزښتونه څومره دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

توان- يا پوتنځ توابع

توان توابع

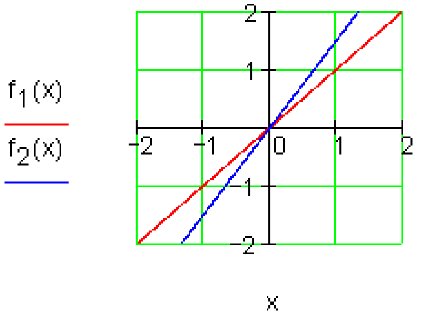
تعريف:

يوه تابع د تابع مساوات $f(x) = a_n x^n \quad ; n \in \mathbb{N} \quad ; a_n \in \mathbb{R}$ سره پوتنځ تابع بلل کيږي.

د n اکپوننت يا ځګعدد د پوتنځ تابع درجه ټاکي او ضريب an د ګراف بڼه يا فورم او هغه د بڼي ضريب بلل کيږي.

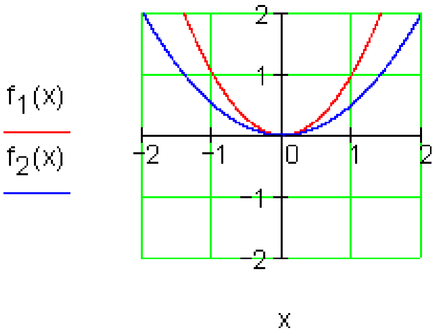
بيلګي:

$f_1(x) := x \qquad f_2(x) := \frac{3}{2} \cdot x$



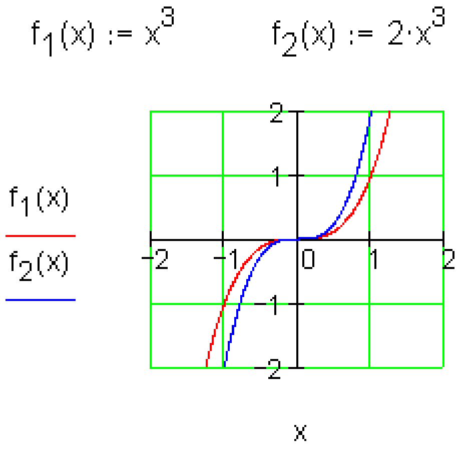
د لومړی دزجي توان تابع(کرښه)

$f_1(x) := x^2 \qquad f_2(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2$

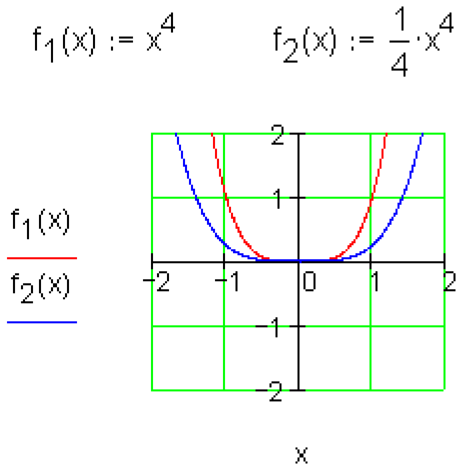


د دويمي درجي توان تابع (پارابول)

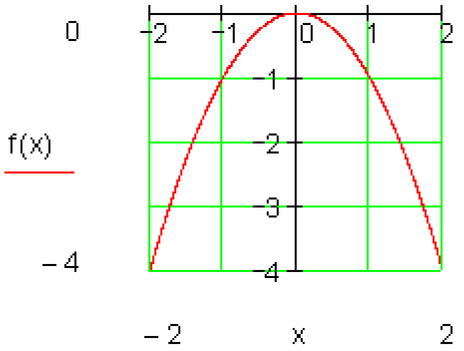
(c) ketabton.com: The Digital Library



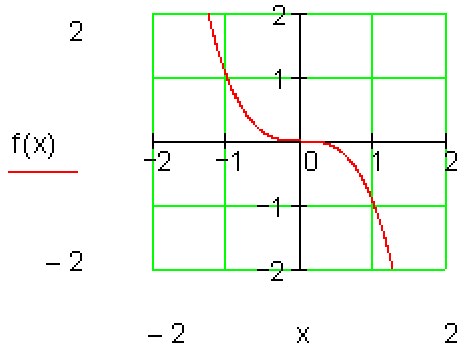
د دريمي درجي توانتابع



د څلورمي درجي توانتابع



تابع مساوات وليکی



تابع مساوات وليکی

لاندي پوښتني ځواب کړی:

ب – دn درجه او د a_n مختخبنه د ګراف په تلنه کومه اغيزه لري؟

پ – د پوتنځ تابع n درجه د ګراف په سيومتري کومه اغيزه لري؟

ت – د پوتنځ تابع د n په واکولي او د a_n مختخبني له امله کوم ارزښتسټ(ارزښتډپری) لري؟

ټ - د a_n مطلق ارزښت د ګراف په تلنه کوم اِيز لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځوابونه لږ. وروسته راځي.

سيومتري

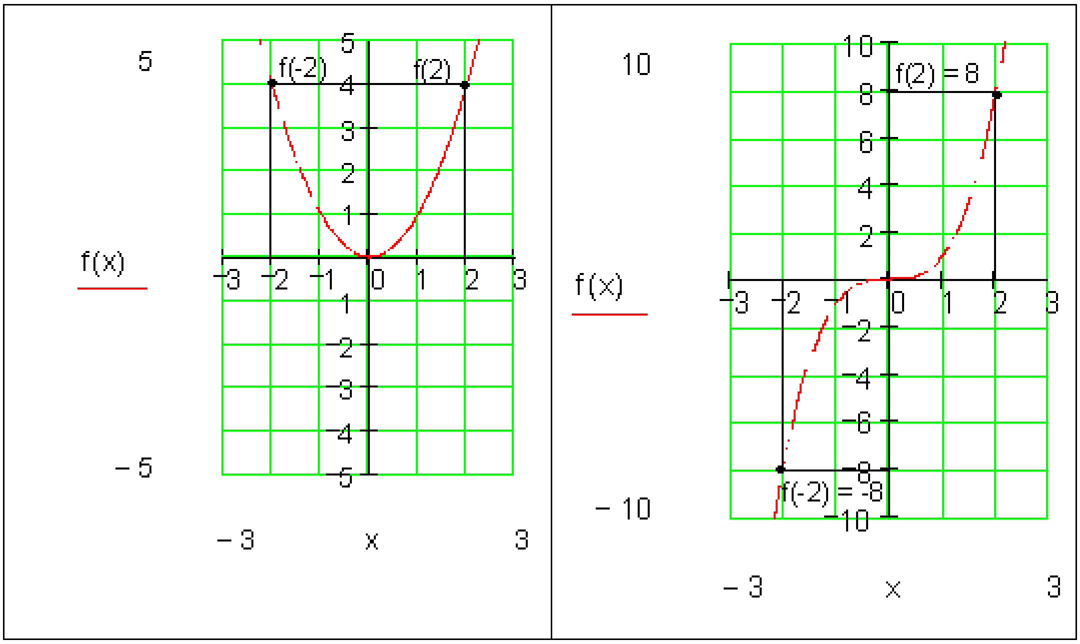
په سيومتري څنګه قضاوت کيدی شي، که څوک فقط د يوه توان(پوتنځ) تابع تابع مساوات پيژني؟

د دې لپاره د لاندې توابعو ګرافونه کاږو:

$f(x) = x^3$ او $f(x)=x^2$

او تابع د $x=-2$ او $x=2$ په ځايونو کې تر څېړنې لاندې نيسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ګومان مو نږدې دی چي لاندې باور لري:

دx د جوړه ګڼعدد سره د تابع ارزښتونه برابر دي. دا په دې معنا چي :

محورسيمتريک، نو $f(-x) = f(x)$

د x ناجوړه(طاقو) ګڼعددونو لپاره د تابع ارزښت برابر مطلق قيمت لري، مګر متضادي مختخبني لري.

دا په دې معنا چې:

ټکی سيومتريک، نو $f(-x) = -f(x)$

دا اړيکي د ټولو تانتوابعو لپاره باور لري (بې له ښوونې).

د يوه توان - يا طاقت تابع محورسيومتريک دی، که د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري: $f(-x)=f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه توانتابع ګراف ټکی سيمتريک دی،که د ټولو $x \in D$ ؛ لپاره باور ولري $f(-x) = -f(x)$

ټولګه:

د $a_n > 0$ لپاره باور لري:

ټول توان توابع د جوړه جګعدد سره محور سيومتريک دي. دا له II د I. څلورمې ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتوابع د ناجوړه(طاق) جګعدد سره ټکيسيومتريک دي. دوی له III.او I. څلورمې(ربع) ته ځغلي(خوزي).

د ټولو $0 >$ لپاره باور لري:

ټول توان توابع د جوړه جګعدد سره محور سيومتريک دي. دا له III د IV. څلورمې ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتوابع د ناجوړه(طاق) جګعدد سره ټکيسيومتريک دي. دوی له II.او IV. څلورمې(ربع) ته ځغلي(خوزي).

تمرينونه:

د توان تابع خويونه.

د لاندې توانتوابعو درجه وټاکی، په سيمتريکي حالت، د ګراف په تلنه او او ارزښت دېرې يې يوه وينا وکړی د د هر ګراف يې په پروت ولاړسيستم (کواوردينات سيستم) کې رسم کړی.

لومړی - $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ دويم - $f(x) = \frac{1}{4}x$

دريم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^4$ څلورم - $f(x) = \frac{1}{5}x^3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^5$ شپږم - $f(x) = -\frac{1}{2}x$

اوم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^3$ اتم - $f(x) = 2x^2$

نهم - $f(x) = \frac{1}{5}x^4$ لسم - $f(x) = -\frac{2}{5}x^4$

کربنيز ې توابع د ورکړشوو شرايطو سره

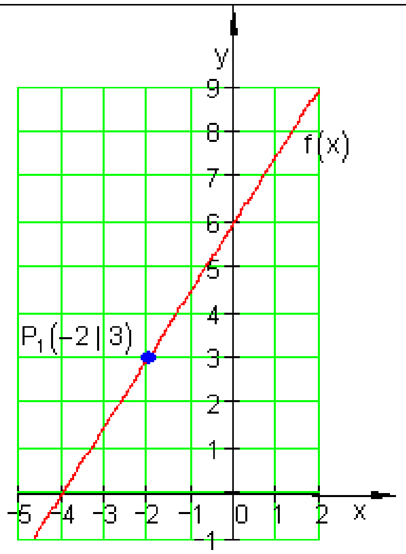
. لومړی حالت : د P تکي ځخه تيرې کربنې د a_1 جګوالي سره

بيلګه:

يوه کربنه د a_1 د جګوالي سره د $P_1(x_1 \mid y_1)$ په تکي کې ځغلي.

د $f(x) = a_1x + a.$ تابع مساوات دې پيدا شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



جګوالی: $a_1 = 1,5$: ټکی $P_1(-2|3)$

وتونمساوات $f(x) = a_1 x + a_0$

جګوالی ځای په ځای کړی

$f(x) = 1,5 \cdot x + a_0$

د a_0 لپاره دې ارزښت وشمیرل شي.

د $P_1(-2|3)$: لپاره ازمایښت

$$
\begin{aligned}
f(-2) = 3 \Leftrightarrow\ & 1,5 \cdot (-2) + a_0 = 3 \\
\Leftrightarrow\ & -3 + a_0 = 3 \,|+3 \\
\Leftrightarrow\ & a_0 = 6
\end{aligned}
$$

د تابع مساوات $f(x) = 1,5 \cdot x + 6$

ازمایښت:

$P_1(-2|3) \Leftrightarrow f(-2) = 3$

$f(-2) = 1,5 \cdot (-2) + 6 = -3 + 6 = 3$

بیلګه:

د حیواناتو ساتونکی د وښو اوتومات څخه د روځې 7,5 kg خوراک شته. دولس روځې، وروسته له هغې چې زیرمه له غذايي موادو ډکه شوې وه، هلته نور 250 kg پاتې دي.

الف - یو تابع مساوات ولیکی، چې دا حالت تشریح کړي

ب - په څومره سټ یا ډېری به دا د وښو زیرمه دولس ورځې د مخه ډکه شوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل و الف ته - دx محور: وخت په ورځو

y محور : د وښو زېرمه په کيلوګرامkg .

$f(x) = -7{,}5x + a_0$

$P(12 \mid 250) \Rightarrow f(12) = 250 \Leftrightarrow -7{,}5 \cdot 12 + a_0 = 250$

$\Leftrightarrow -90 + a_0 = 250 \mid +90$

$\Leftrightarrow a_0 = 340 \Rightarrow f(x) = -7{,}5x + 340$

حل و ب ته- د ډکيدنې وخت $x = 0$ دی.

$\Rightarrow f(0) = -7{,}5 \cdot 0 + 340 = 340$

د وښو شتون دولس12 ورځې د مخه په 340 kg ډک شوی .

لکه څنګه په لومړي حالت کې چې د يوې کرښې جګوالی او يو ټکی معلوم دي، شمېرنه په همغه ډول د ورکړشوو داتن يا داتا Daten سره مخ ته ځي.

په داسې حالت کې شميرنه ټويزه سرته رسيږي. دا مو بيا يو فرمول ته لاربنوده وي.

يوه کرښه دa_1 جګوالي سره د$P_1(x_1 \mid y_1)$ ټکي څخه تيرې.ي.

د کرښمساواتو ټوليز فرمول دی: $f(x) = a_1x + a_0$

$P_1(x_1 \mid y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow a_1 \cdot x_1 + a_0 = y_1 \mid -a_1 \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - a_1 \cdot x_1$

$\Rightarrow f(x) = a_1 \cdot x + y_1 - a_1 \cdot x_1 = a_1 \cdot x - a_1 \cdot x_1 + y_1 = a_1(x - x_1) + y_1$

$f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$

دا د ټکی - جګوالي فرمول هم بلل کيږي.

بيلګه:

په $a_1 = -2; P_1(-3 \mid 4)$: $f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$ کې ځا په ځای کړی

$f(x) = -2(x - (-3)) + 4 = -2(x + 3) + 4 = -2x - 6 + 4 = -2x - 2$

.

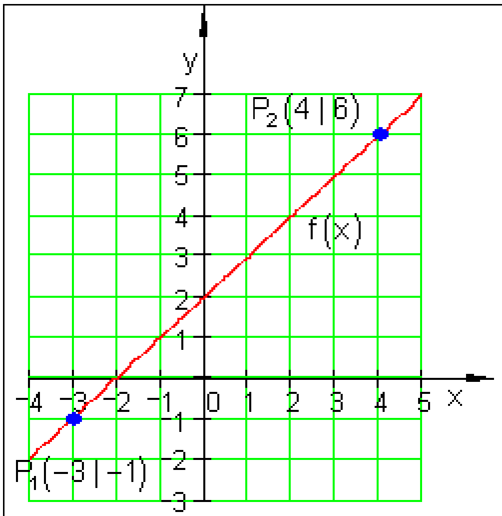
(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم حالت: کربنه له دوه ټکو تيريږي

بيلګه:

دوه ټکی $P_1(x_1 \mid y_1)$ او $P_2(x_2 \mid y_2)$ په يوه کربنه پراته دي.

د $f(x) = a_1x + a_0$ تابع مساوات غواړو پيداکړو.



$P_1(-3 \mid -1)$ $\qquad$ $P_2(4 \mid 6)$

وتونمساوات: $f(x) = a_1x + a_0$

د جګوالي ټاکنه:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-1)}{4-(-3)} = \frac{6+1}{4+3} = \frac{7}{7} = 1$$

جګوالی وضعه کړی $f(x) = 1 \cdot x + a_0$

وروسته له دې چې جګيدنه معلومه شوه، ادا پوښتنه داسې حل کيږي لکه په لومړي حالت کې.

د ټکو ازمايينت لپاره بې پروا ده چې د دې لپاره کوم ټکي کارول کيږي، ځکه چې دواړه ټکي به په کربنه پراته وي.

د ټکو ازمايينت د $P_2(4 \mid 6)$ يا P_1 لپاره

$$P_2(4 \mid 6) \Rightarrow f(4) = 6 \Leftrightarrow 1 \cdot 4 + a_0 = 6 \mid -4 \Leftrightarrow a_0 = 2 \Rightarrow f(x) = x + 2$$

بيلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فزیک څخه پوهیږو چې د حرارت معلومولو (ګرمی کچونې) لپاره مختلفې دد حرارت سکالا کارول کیږي. د څلزیوس سکالاCelsiusskala او د فارنهایټ سکالا Fahrenheitskala

د دواړو ترمنځ کرښیزې اړیکې موجود دي.

$100\,^0C$ برابری دي د $212\,^0F$ سره . $0\,^0C$ برابر د ی په $32\,^0F$ سره.

د یوه تابع مساوات غواړو پیداکړو، چې د هغې په مرسته ^0C په ^0F اړول کیږي.

خپلواکه متحوله x په ^0C او بلواکه یا تابع متحوله $y = f(x)$ په ^0F .

جګوالی:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5} \Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + a_0$$

$$P_1(0 \mid 32) \Rightarrow f(0) = 32 \Leftrightarrow \frac{9}{5} \cdot 0 + a_0 = 32 \Leftrightarrow a_0 = 32$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

په بدل شوی تابع x په C° کې کیږدی نتیجه یې ده.

د بیلګې په دول:

$$x = 20\,^0C : f(20) = \frac{9}{5} \cdot 20 + 32 = 68 \Rightarrow 20\,^0C \triangleq 68\,^0F$$

د دویم حالت لپاره هم کیدی شي شمیرنه په ټولیزه توګه مخ ته بوتلی شی:

دوه ټکی $P_1(x_1 \mid y_1)$ او $P_2(x_2 \mid y_2)$ په یوه کرښه پراته دي.

د مساواتو عمومي بڼه ده:. $f(x) = a_1x + a_0$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جګوالی: $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + a_0$

$$P_1(x_x \mid y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + a_0 =$$

$$= y_1 \mid - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 =$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

دا په دوه ټکو کې د کربنيزږومساواتو يو توليزه بڼه ده .

په زياتو ادبياتو کې په لاندې ډول ده:

$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \; ; x_1 \neq x_2$ چيرته چي $y = f(x)$ باور لري.

د عملي کاروني لپاره لاندې بڼه مساعده ده:

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

بيلګه:

په $P_1(2 \mid -1); P_2(-3 \mid 2)$ $f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ کي ځای په ځای کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{2-(-1)}{-3-2}(x-2)+(-1)=\frac{2+1}{-5}(x-2)-1=-\frac{3}{5}(x-2)-1=-\frac{3}{5}x+\frac{6}{5}-\frac{5}{5}$$
$$=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}\Leftrightarrow f(x)=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$$

تمرين:

د ^0F په ^0C باندې شميرنې لپاره يو تابع مساوات وليکئ

2.2.3.تمرين: د تابعمساواتو شميرنه

يو کرښيز مساوات د a_1 جګوالی لري او د P له ټکي تيريږي.

د$f(x)$ تابعمساوات معلوم کړئ او د محورونو قاطع ټکي يا غوڅټکي او ګراف انځور کړئ

اول - $P(2|-2)$ $a_1=\frac{1}{2}$ دويم - $P(-1|3)$ $a_1=\frac{3}{4}$

دريم - $P(3|-1)$ $a_1=2$ څلورم - $P\left(\frac{3}{2}\middle|4\right)$ $a_1=\frac{4}{5}$

يوه کرښه له ټکوP_1 او P_2 تيريږي.

د$f(x)$ تابع مساوات پيدا کړئ او د محور قاطع ټکي او ګراف رسم کړئ.

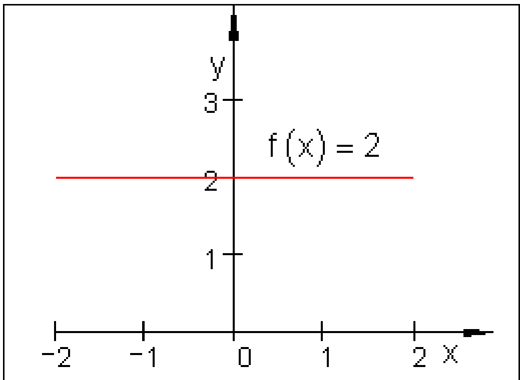
پنځم - $P_2(5|4)$ $P_1(2|1)$ شپږم - $P_2(2|3)$ $P_1(-3|-2)$

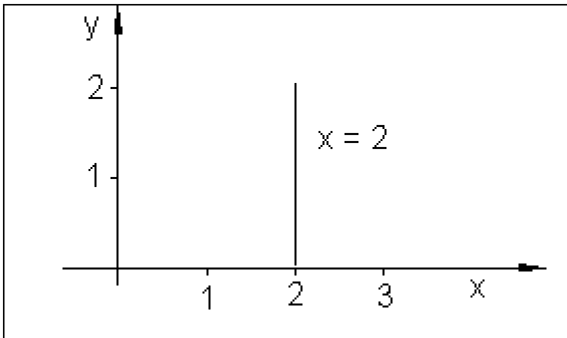
اوم - $P_2(4|-1)$ $P_1(-2|3)$ اتم - $P_2(3|1)$ $P_1(-4|-1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم - $P_2(4 \mid -1)$ $P_1\left(-3 \mid \frac{9}{2}\right)$ لسم - $P_2\left(\frac{7}{2} \mid 4\right)$ $P_1(-4 \mid -2)$

. د کرښبرابروتو ځانګړی حالت:

د x- محور سره غبرګ کرښه: $f(x) = a_0 ; a_0 \in \mathbb{R}$ يو د 0 درجي تام راشنل تابع ده او ثابته تابع هم بلل کيږي. x- محور هم يوه ثابته تابع ده د تابع مساوات $f(x) = 0$ سره. د ثابتې تابع جګوالی تل صفر دی.	

د y- محور سره غبرګه. $x = a ; a \in \mathbb{R}$ کرښه د محور سره غبرګه (موازي) ځغلي. دا د يوه تابع مساوات سره نه شي ليکل کيدی، ځکه چي يواځنۍ تنظيم نه شته يعني تابع نه ده. $x = 0$ دy - محور مساوات دي.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

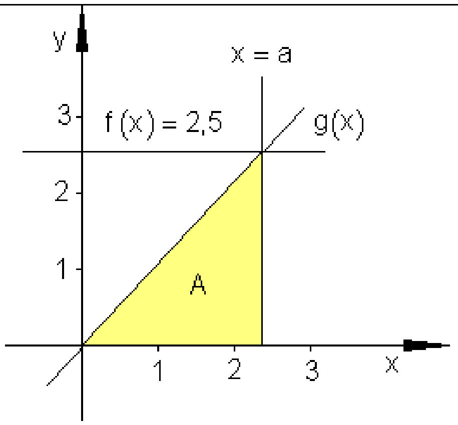
بیلګه:

یو f(x) = 2,5 ور کړ شوی او y- محور سره موازي دa واټن د a > 0 سره.

یوه سرچینیزه کربنه g د(P(a | f(x) ټکي څخه تیریږي.

دا دx - محور او د y- محور سره غبرګې کربنې سره یو مثلث جوړوي.

a داسي وټاکئ چې وسطحه د سطحې څلور واحدونه (یوونونهFE) جوړ کړي. د دې حالت لپاره دg(x) تابع مساوات څنګه دي؟

 	$A=\frac{g\cdot h}{2}$ د g = a او h=f(x) = 2,5 سره د مثلث سطه $\Rightarrow A=\frac{2,5\cdot a}{2}=\frac{5}{4}a$ $A=4\Leftrightarrow \frac{5}{4}a=4 \mid \cdot\frac{4}{5}\Leftrightarrow a=\frac{16}{5}$ (ځکه چې د سرچینې کربنه $g(x)=a_1x$ ($a_0=0$ د جګېدو له مثلث څخه $a_1=\frac{5}{2}:\frac{16}{5}=\frac{25}{32}$ د تابع مساوات : $g(x)=\frac{25}{32}x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين: د ^0F بدلون شميرنه په ^0C لپاره د تابع مساوات وليکئ

حل :

د ^0C اړونه يا بدلون په^0F د متحولي لپاره دا معنا لري:

x په ^0F مستقله يا خپلواکه متحوله ده او $y = f(x)$ په^0C بلواکه يا تابع متحوله ده.

$$212\,^0F \triangleq 100\,^0C \Rightarrow P_1(212\,|\,100) \quad \text{او} \quad 32\,^0F \triangleq 0\,^0C \Rightarrow P_1(32\,|\,0)$$

دا چې د حرارت الو ترمنځ يوه کرښيزه ا ړيکه پرته ده، نو ټکي P_1 اوP_2 په يوه کرښه پراته دي.

د کرښي عمومي کرښيزه بڼه په دې ډول ده:. $f(x) = a_1x + a_0$

دلته ضريبونه a_1 او a_0 د ټاکلو دي.

ځګوالی: $$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100-0}{212-32} = \frac{100}{180} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{9}x + a_0$$

ټکي ازمايښت د $P_1(32\,|\,0)$ سره.

$$\Rightarrow f(32) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{9}\cdot 32 + a_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{160}{8} + a_0 = 0\,\Big|\, -\frac{160}{9} \Leftrightarrow a_0 = -\frac{160}{9}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} = \frac{5}{9}(x-32)$$

د ^0F اړونې په ^0C لپاره باور لري.

$$^0F \text{ in } ^0C \text{ gilt: } f(x) = \frac{5}{9}(x-32)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

xپه ^{0}F او y په ^{0}C .

پوښتنې:

کرښیزي توابع III

لومړی: د g کرښو مساوات وټاکی

الف: $P_1(-4|-2)$ او $P_2(2|0)$ په g پراته دي،

ب- g په $P_1(-3|1)$ او $P_2\left(1|\frac{11}{3}\right)$ کې ځغلي

پ- $P_1(1|-2)$ او $P_2(-2|10)$ په g پراته دي

ت- g محورونه په x = 2 او y = 6 کې غوڅوي(قطع کوي)

ټ-g له (P(-6;1) تیریږي او له h سره غبرګ دی د $h(x) = -\frac{2}{3}x + 2$ مساوات سره

ث- g جګوالی $a_1 = -4,5$ لري او له P(1;1,5) څخه تیریږي.

ج- g جګوالی $a_1 = 3$ لري او له P(1;,1,5) څخه تیریږي

چ- g دx محور په x = 3 کې غوڅوي او د hکرښه د h(x) = 4x - 2 سره په x = -1 کې غوڅوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم: د دوه کرښو g او h کرښيز مساوات پيدا کړی، چې له ټکی P(3;-2) تيرېږي.

دريم: يوه کرښه g د کرښيز تابع f(x) سره پيدا کړی، چې له ټکو P_1 او P_2 تيريږي او تابع مساوات وټاکی.

الف- $P_1(-3|5);P_2(1|2,5)$ ب - $P_1(1,5|3);P_2(3|2,5)$

پ- $P_1(k|3);P_2(2k|-1)$ ت - $P_1(4|0);P_2\left(-1|-\sqrt{2}\right)$

ټ - $P_1(1|0);P_2(-1|k+1)$ ث - $P_1\left(2\sqrt{k}|\sqrt{2k}\right);P_2\left(\sqrt{k}|0\right)$

ځلورم: د f(x) کرښيزې تابع مساوات وټاکی.که معلوم وي:

الف-کرښه د $a_1=\frac{5}{4}$ جګيدني سره له P(4;-1) ځخه تيرېږي.

ب-کرښه له ټکو $P_1(-5|-3)$ او $P_2(0|3)$ ځخه تيرېږي.

پ-کرښه له P(4,5;2,7) ټکي تيرېږي. او د x محور سره 45° مايله ده.

ت-کرښه له P(-1,5;0) تيرېږي او د $h(x) = 2x+2$ سره غبرګه (موازي) ده.

پنځم: کر ښه g و کاږی او کرښيز مساوات وټاکی.

الف- $P(3|-1)\in g$ او g دy محور سره غبر؛(موازي) ځغلي.

ب- $P(3,5|2,5)\in g$ او g دx محور سره موازي ځغلي.

پ- g له P(-5;1)تېرېږي او د $h(x)=-\frac{1}{2}x+4$ سره موازي ده.

ت- g له $P\left(1|\frac{3}{2}\right)$ تېرېږي او د کرښو سره چې له ټکو $P_1(-2|-3)$ او $P_2\left(\frac{3}{2}|-5\right)$ تېرېږي، موازي ځغلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

کرښیز مساوات VI

لومړی –

د لاندې کرښیزو توابعو ګرافونه و کاږئ او د ارزښت سټ یا – ډېرئ W و ټاکئ

الف- $f(x) = -2x + 2; D = \{x | -3 \le x \le 5\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}; D = \{x | -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f(x) = \frac{3}{4}x - 3; D = \{x | -2 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f(x) = 3x - 6; D = \{x | -1 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$

دویم –

ټکی P_1 او P_2 ورکړ شوي، چې په کرښه پراته دي. د f (x) تابعمساوات پیدا کړئ او ګراف يې وکاږئ

الف- $P_1(3 \mid 4); P_2(7 \mid -1); D = \{x | 0 \le x \le 7\}_{\mathbb{R}}$

ب - $P_1(-8 \mid 1); P_2(2 \mid -3); D = \{x | -8 \le x \le 2\}_{\mathbb{R}}$

پ - $P_1(4 \mid 3); P_2(-7 \mid -1); D = \{x | -7 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

ت - $P_1(-4 \mid -4); P_2(4 \mid 2); D = \{x | -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

درېيم –

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې مساواتو حلسټ یا حلډېرۍ پیداکړئ. مساوات چې کسرې راشنل ترمونه ولري، باید د هغو تعریفورشو هم ورکړل شي.

الف- $x - 5 = 9$ ب - $8 + x = 25$ پ - $x - \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$ ت - $\frac{5}{9} = x - \frac{1}{3}$

ټ - $88 = 4x - 16$ ث - $a + bx = 3b + a$ ج - $8 - (x + 5) = 2$

چ - $9 + (5 - x) = 6$ ح = $(x - 6)(x + 3) = (x - 5)(x - 2)$ خ -

څ - $(x + 3)(x + 7) = (x + 2)(x + 9)$ خ - $\frac{x}{4} + \frac{5x}{6} + \frac{5}{6} = \frac{x}{2} + x$

ځ - $\frac{3}{2x} + \frac{2}{3x} = \frac{1}{9} + \frac{7}{3x}$ د - $\frac{ax}{b} - \frac{b}{ac} = \frac{a}{bc} - \frac{bx}{a}$ ډ - $\frac{x}{a - b} + \frac{x}{a + b} = a$

ذ- $23a - \{5ax - [9ax + (12a - 6ax)] - (3a - 8ax)\} - 15a = 5ax - 7a$

څلورم:د لاندې توابعو د محورونو سره د تقاطع ټکي هم پیدا کړئ.

الف- $f(x) = 2x - 7$ ب - $f(x) = -2x + 6$ پ - $f(x) = 3x - 3$

ت - $f(x) = 2x + \frac{2}{3}$ ټ - $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$ ث - $f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{4}{5}$

ج - $f(x) = 3{,}5x + \frac{1}{2}$ چ – $f(x) = -2{,}5x + 2\frac{1}{2}$ ح - $f(x) = 1\frac{3}{4}x - 3\frac{2}{3}$

پنځم: د یوې کرښې دوه ټکي P_1 اوP_2 ورکړ شوي د لاندې توابعو له I تر IV لپاروه وټاکئ:

I. $P_1(3 \mid 4); P_2(7 \mid -1); D = \{x \mid -2 \le x \le 8\}_{\mathbb{R}}$

II. $P_1(-8 \mid 1); P_2(2 \mid -3); D = \{x \mid -8 \le x \le 2\}_{\mathbb{R}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P_1(4 \mid 3); P_2(-7 \mid -1); D = \{x \mid -8 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$ .III

$P_1(4 \mid 2); P_2(-4 \mid -4); D = \{x \mid -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$ .IV

الف- د جګیدنې ضریب m.

ب - د کرښې تابعمساوات

پ - د y محور سره د تقاطع ټکی P_y

ت - د تقاطع ټکی P_y د x محور سره

ټ - په W باندې ارزښتډېری .W

ث - په D کې د تابع ګراف

شپږم: لاندې مساواتسیستمونه حل کړئ:

الف- $\begin{cases} \text{I} & 5y - 3x = 1 \\ \text{II} & x = y + 1 \end{cases}$ ب - $\begin{cases} \text{I} & 4x + 5y = 32 \\ \text{II} & y = 5x - 11 \end{cases}$ پ - $\begin{cases} \text{I} & 15y - 4x = -50 \\ \text{II} & x = y + 7 \end{cases}$

ت - $\begin{cases} \text{I} & 3x = y + 15 \\ \text{II} & 2y - 10 = 2x \end{cases}$ ټ - $\begin{cases} \text{I} & 2y = 2x - 40 \\ \text{II} & 3x = 10 - 2y \end{cases}$ ث - $\begin{cases} \text{I} & x + y = a + b \\ \text{II} & x - y = a - b \end{cases}$

پوښتنې

کرښیز مساوات IX

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی:کرښه g له ټکو P1(4;-3,5) او P2(2,5;-1) تیریږي.

کرښه h له ټکو $P_3(5|2,5)$ او $P_4\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{25}{3}\right)$ تیریږي.

ګرښې یو بل ته څه موقعیت لري یا څنګه پرتې دي؟

دویم:د f(x) کرښیزې تابع د تابع ترم او ارزښتساحه(ارزښتورشو) و ټاکئ، که صدق ولري:

الف- $f(0) = 20 ; f(12) = 32 ; x > 0$ ب- $f(-3) = 6 ; f(2) = -8 ; x \in [-3 ; 3]$

دریم:

د f(x)کرښیزې تابع ګراف په 3 LE اوږدوالی واحده کینې لور

ته خوزیږي. د راکښل شوې کرښې د f*(x) مساوات څنګه دي؟

$$f(x) = \frac{5}{3}x - 2 \quad D = \mathbb{R}$$

څلورم: د f(x) او g(x) توابع ورکړ شوې دي. د کوم ارزښت لپاره f(x) > g(x) صدق کوي؟

$$f(x) = 2x - 3 \quad ; \quad g(x) = -0,5x + 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

پنځم: یوه g(x)کرښه ورکړ شوې.. دا د یوې کرښې h(x) له خوا قطع کیږي. د h(x)مساوات وټاکئ، که باور ولري: $g(x) = -3x + 2$

الف- قاطع یا غوڅی دx محور سره . ب - قاطع(غوڅی) په x = -5 کې

شپږم:

یوه د پیل کرښه د $a_1 = -0,125$ جګوالي سره و داسی کښنول کیږي. چې کرښه h د مساوات	; $h(x) = -1,5(x-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره دx په محور قطع کوي. راکښنه تشریح کړی او د راکښل شوې کرښې ګراف و کاږی.	

اوم: یوه $f(x)$کرښیزه تابع ورکړ شوې. کرښه د $x = u$ مساوات سره د $f(x)$ ګراف په P کې قطع کوي او د x محور په Q کې قطع کوي. یوه سکیڅې ترتیب کړی.

الف- د P او Q کواوردینات وټاکی، که $f(x) = 0,75x + 2$ وي.

ب- دu د کوم ارزښت لپاره P دx محور پورته لور ته پرته ده.

ت- $P(u \mid f(u))$ په 1 څلوری یا ربع کې پروت دی. $R(0 \mid 0)$, Q او P د یوه مثلث رآسونه (ککرټکي)جوړوي. د دې مثلث د مساحت A لپاره ترم وټاکی. u (محیط) داسې وټاکی، چې $A(u) = 10$ صدق وکړي.

اتم: دg کرښې ته موازي او عمود مساوات داسې وټاکی، چې له P ټکي تیر شي.

الف- $g: x + 2 - 3y = 0; P(0 \mid 3)$ ب- $g(x) = \frac{2}{3}x - 3; P(1 \mid 4)$

پ - $g(x) = -1,5kx; P(1 \mid 0)$

نهم: کرښه g له ټکوP_1 اوP_2 تیریږي. دh کرښې ته یې ځای مطالعه کړی او د امکان په حالت کې یې د قاطع ټکی معلوم کړی.

$$P_1(-1 \mid 1,5); P_2(-2 \mid -2,5) \qquad h: \ -x - 6 - 4y = 0$$

لسم: و ښایی: کرښه g او کرښه h عمود دي.

$$g: \ y - \sqrt{2}x = 1 \qquad h: -2y - \sqrt{2}x + 6 = 0$$

$$g(x) = -3x + 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یولسم:

د A, B او C ټکي د یوه مثلث د رآس ټکي دي. د$k > 0$ د کوم ارزښت لپاره دا مثلث قایم الزاویه (ولاړګوډیز) دی؟ (ښی رآس په C پروت دی)	$A\left(\sqrt{3k} \mid \frac{k}{3}\right); B\left(-\sqrt{3k} \mid \frac{k}{3}\right); C(0 \mid k)$

پوښتې

کرښیز توابع **XI**

لومړی-

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}; f_2(x) = -4x - 2; D = \{x \mid -9 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه له تابع $f_1(x)$ سره د دویمي کرښي د تابع$f_2(x)$ سره غوڅیږي. وټاکی:

الف – د کواوردیناتونو x_s او y_s سره غوڅټکی S .

ب – د دواړو کرښو غوڅټکي د y محور سره .

پ – د دواړو کرښو غوڅټکي دx محور سره .

ت - د دواړو توابعو ګراف په D کي .

دویم –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_1(x) = -\frac{2}{3}x + 4\,;\, D = \{x \mid 0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه له تابع $f_1(x)$ سره په ټکي $S(3 \mid y_s)$ کې د تابع $f_2(x)$ سره له کرښې څخه غوڅیږي.

وټاکئ:

الف-د S پوره کواودینات

ب-تابع $f_2(x)$.

پ-د دواړو کرښو غوڅټکي د کواوردینات محورونو سره.

ت-په D کې د دواړو توابعو ګراف.

دریم:

$$f_1(x) = -\frac{3}{8}x + 1;\, D = \{x \mid -7 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره په ټکي $S(-4 \mid y_s)$ کې کې له کرښې څخه د تابع $f_2(x)$ سره ، چې پروتمحور په 7- کې غوڅوي، غوڅیږي.

وټاکئ:

الف – د S پوره کواوردینات.

ب – تابع $f_2(x)$.

پ – د دواړو کرښو غوڅټکي د کواودینات د محورونو سره.

ت – د واړو توابعو ګراف په D کې..

څلورم –

د یوه دربېکوډي یا مثل ټکي P_1, P_2 او P_3 ورکړ شوي دي. د دربېګوډي د اړخونو تابع وټاکئ. پخوا له دې یو پلان نقشه ترتیب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف-

$$[P_1P_2] \triangleq f_1 ; [P_2P_3] \triangleq f_2 ; [P_1P_3] \triangleq f_3$$

$$P_1\left(-6 \,\middle|\, \frac{3}{2}\right); P_2\left(-2 \,\middle|\, -\frac{3}{2}\right); P_3\,(-4 \mid 3)$$

ب –

$$[P_1P_2] \triangleq f_1 ; [P_2P_3] \triangleq f_2 ; [P_1P_3] \triangleq f_3$$

$$P_1\left(6 \,\middle|\, \frac{3}{2}\right); P_2\left(2 \,\middle|\, -\frac{3}{2}\right); P_3\,(4 \mid 3)$$

پنځم -

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x + 3 \,;\, P_2(-2 \mid -3) \,;\, D = \{x \mid -6 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع f_1 (x) سره د دویمې کرښې څخه د تابع f_2 (x) سره ، چې له ټکي P_2 تیریږي ، په ټکي S کې ولاړکونجیزه غوځیږي.

وټاکئ:

الف - دf_2 (x) جګوالی m_2 .

ب- تابع f_2 (x) .

پ – د دواړو کرښو غوځټکی S .

ت - د دواړ کرښو محورغوځټکي.

ټ - د دواړو کرښو ګراف په D کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

کرښيز توابع XII

لومړی -

$$f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 3\,;\,P_2(2\,|\,-3)\,;\,D = \{x\,|\,0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره له يوې دويمې کرښې د تابع $f_2(x)$ سره، چې له ټکي P_2 تيريږي په ټکي S کې ولاړکونجيزه غوځيږي.

وټاکی.

لومړی:

الف – د $f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ب – تابع $f_2(x)$.

پ - د دواړو کرښو غوځټکی S .

ت - د دواړو کرښو د محورغوځټکي.

ټ - د دواړو کرښو ګراف په D کې.

دويم –

د کرښې تابع $f_2(x)$ وټاکی، چې پروتمحور په P_{x2} کې غوځوي او له کرښې څخه د تابع $f_1(x)$ سره په S کې غوځيږي. د واړو کرښو غوځټکي وشميری او د دواړو کرښو ګراف په D کې رسم کړی.

الف- $f_1(x) = \frac{3}{2}x + 6\,;\,P_{x2}(-6\,|\,0)$ ، $S\left(x_s\,\middle|\,\frac{3}{2}\right);\,D = \{x\,|\,-6 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f_1(x) = \frac{1}{2}x - 3\,;\,P_{x2}(4\,|\,0)$ ، $S(3\,|\,y_s)\,;\,D = \{x\,|\,-1 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$

دريم -

$$P_1(-5\,|\,5)\,;\,P_2(-1\,|\,-1)\,;\,S(x_s\,|\,2)\,;\,D = \{x\,|\,-6 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره له ټکو P_1 او P_2 تيريږي او په ټکي S کې ولاړکونجيز له کرښې څخه د تابع $f_2(x)$ سره غوځيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وټاکئ:

الف- د $f_1(x)$ جګوالی m_1 .

ب – تابع $f_1(x)$.

پ – دS پوره کواوردينات.

ت – د$f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ټ – تابع$f_2(x)$.

ث – د $f_1(x)$ او$f_2(x)$ ګرافونه

څلورم -

$$P_1(5\,|\,5);\,P_2(1\,|\,-1);\,S(3\,|\,y_s);\,D=\{x\,|\,0\le x\le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره له ټکو P_1 اوP_2 څخه تيريږي او په ټکي S کې ولاړکونجيزه له کرښې د تابع $f_2(x)$ سره غوځيږي.

وټاکئ:

الف – د $f_1(x)$ جګوالی m_1 . ب - تابع $f_1(x)$.

پ - د S پوره کواوردیناتونه ت – د $f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ټ - تابع $f_2(x)$. د $f_1(x)$ او $f_2(x)$ ګرافونه.

پنځم -

$$f_2(x)=3x-3;\,S\left(\frac{3}{2}\,\middle|\,\frac{3}{2}\right);\,D=\{x\,|\,0\le x\le 6\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع $f_1(x)$ ګراف په ټکي S کې د تابع $f_2(x)$ له ګراف څخه ولاړکونجيزه غوځيږي.

وټاکئ:

الف - تابع $f_1(x)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب – د دواړو کرښو د محورونو غوڅټکي.

پ – د دواړو توابعو ګراف په D کې.

پوښتنې

کرښيزې توابع برخه XIII

لومړی -

$$f_2(x)=\frac{4}{5}x+\frac{9}{10};S\left(2\left|\frac{5}{2}\right.\right);D=\{x\mid -1\leq x\leq 4\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع $f_1(x)$ ګراف په ټکي S کې د تابع $f_2(x)$ له ګراف څخه ولاړکونجيز(قايم الزاويه) غوڅيږي.

وټاکی:

الف: تابع $f_1(x)$.

ب – د دواړو کرښو د محورونو غوڅټکي.

پ – د دواړو توابعو ګرافونه په D کې.

$$g:\quad y-\sqrt{2}x=1 \qquad \Rightarrow g(x)=\sqrt{2}x+1$$

$$h:-2y-\sqrt{2}x+6=0\Rightarrow h(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}x+3$$

د اورتوګوناليټي شرايط: $a_{1g}=-\frac{1}{a_{1h}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{1g} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1\cdot 2}{1\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad q.e.d$$

دويم:

د دوه کرښنو توابع $f_1(x)$ او $f_2(x)$ ورکړشوي او د يوې دريمي کرښې جګوالی m_3 د تابع $f_3(x)$ سره. تابع $f_3(x)$ داسې وټاکئ، چې ګراف يې د نورو دواړو کرښنو غوڅټکي څخه تير شي. د درېواړو کرښنو محور غوڅټکي وټاکئ او د درېواړو توابعو ګراف په D کې رسم کړئ.

الف-

$$f_1(x) = -4x - 2\,;\; m_3 = \frac{1}{4}$$
$$f_2(x) = 2x + 4\,;\;\; D = \{x \mid -9 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

ب –

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}\,;\; m_3 = -4$$
$$f_2(x) = 2x + 4\,;\;\; D = \{x \mid -9 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

دريم: کرښه دتابع $f_1(x)$ سره له ټکي P_1 تيرېږي او له يوې دويمي کرښې چې له ټکي P_2 تيرېږي په ټکي S کې غوڅېږي. توابع $f_1(x)$ او $f_2(x)$ وټاکئ د هغو محورغوڅټکي اوپه D کې يې ګراف وکاږئ.

$$P_1\left(-2 \;\middle|\; \frac{3}{2}\right);\, P_2(3 \mid 5);\, S\left(2 \;\middle|\; \frac{5}{2}\right);\, D = \{x \mid -8 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

څلورم:

$$P_1\left(-1 \;\middle|\; \frac{5}{2}\right);\, P_2\left(-3 \;\middle|\; \frac{11}{2}\right);\, D = \{x \mid -9 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره محور په 8- کې غوڅوي. $f_1(x)$ ته غبرګه یوه دویمه کرښه د تابع $f_2(x)$ سره پروت محور په 4- کې غوڅوي. دواړه کرښې له یوې دریمې کرښې چې تابع $f_3(x)$ لري او له ټکو P_1 او P_2 تیریږي په ټکو P_3 او P_4 کې ولاړکونجیزه(قایوم الزاویه) غوڅوي. وټاکئ:

الف- تابع $f_3(x)$ ب - تابع$f_1(x)$

پ – تابع $f_2(x)$ ت – د دریواړو توابعو ګراف په D کې.

پنځم:

$$A\left(-\frac{13}{2}\,\middle|\,-\frac{3}{2}\right); B(3\,|\,2); D=\{x\,|\,-8\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$$

د یوه قایوم الزاویه مثلث(ولاړکونجیز دریِ ګودي) څخه، چې ولاړ کونج(قایم الزاویه) یې پهC کې پرته ده، ټکي A اوB ورکړ شوي. د مثلث اړخ یا ضلع [BC] د تابع $f_3(x)$ سره د اوردینات یا ولاړ محور په 3 کې غوڅوي.

وټاکئ:

الف- د اړخ [AB] تابع $f_1(x)$ ب- د اړخ یا ضلعې [BC]تابع $f_3(x)$

پ- د اړخ [AC] تابع $f_2(x)$ ت- د ټکي C کواوردیناتونه

ټ په D کې ګرافونه.

پوښتنې

کرښیزې توابع **XIV**

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: $A(-8|-6); C(-1|5); D=\{x \mid -8 \le x \le 2\}_{\mathbb{R}}$

له یوه قایمالزاویه مثلث، چې قایمه زاویه یې په B پرته ده، ټکی A او C ورکړ شوي دي. د مثلث ضلع (اړخ)[BC] د اوردینات محور (ولاړمحور) په 3کې قطع کوي.

دا وټاکئ:

الف-

$[AB] = f_1$; $[BC] = f_2$; $[AC] = f_3$ د مثلث درې د ضلعو توابع.

ب- د B ټکي کواودینات یا وضعیه قیمت کې د ټکي B محورونه

پ -په D کې ګراف.

دویم:

$A(-4|-1); B(2|-4); D=\{x \mid -4 \le x \le 5\}_{\mathbb{R}}$

د یوه مثلث ټکيA او B ورکړ شوي دي. د مثلث [BC] ضلع دy محور په 12-کې قطع کوي; ضلع [AC] د x محور په 3- کې غوڅوي.

دا وټاکئ:

الف-تابع $f_1(x)$ ضلع .[AB] قطع کوي

ب - تابع $f_2(x)$ ضلع [BC] غوڅوي.

پ - تابع $f_3(x)$ ضلع [AC]

ت - د C ټکي وضعیه قیمتونه

ټ - د D ټکي وضعیه قیمتونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: توابع $y = f(x) = 3x - 4$ او $g(x) = ax + 3$ ورکړ شوي.

د دواړو توابعو ګرافونه په ټکي $S(3 \mid 5)$ کې غوځوي.

د $h(x)$ تابع مساوات داسې وکاږئ، چې ګراف په ټکي S عمود څغلي. په یوه وضیه قیمتسیستم کې دریواړه ګرافونه رسم کړئ.

څلورم:

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4};\ f_2(x) = -4x - 2;\ D = \{x \mid -10 \leq x \leq 1\}_{\mathbb{R}}$$

د $f_1(x)$ تابع سره کرښه د دویمې کرښې د $f_2(x)$ تابع سره قطعه کوي.

دا وټاکئ:

الف- د S قاطع ټکی د x_s او y_s کواودینات سره.

ب - د دواړو کرښو د قاطع ټکي د x محور سره.

پ - د دواړو کرښو قاطع ټکي د x محو سره.

ت - د دواړو توابعو ګراف په D کې.

پنځم:

د $g(x)$ تابع ، چې په $f(x)$ عمود ده پیدا کړئ. د $g(x)$ ګراف د y محور په $P_y(0 \mid 3)$ ټکي قطع کوي. دواړه کرښې په یوه وضعیه قیمت سیستم(پروت ولاړ سیستم) کې رسم کړئ.

الف - $f(x) = -2x + 2$ ب - $f(x) = 3x - 6$

پ - $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ ت - $f(x) = \frac{3}{4}x - 3$

شپږم: د دواړو کرښو غوځټکی (نقاط تقاطع) و ټاکئ او ګراف یې وکاږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - $f_1(x)=\frac{1}{4}x+2\frac{1}{4}\,;\,f_2(x)=-4x-2\,;\,D=\{x\mid -10\le x\le 1\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f_1(x)=-2x+2\,;\,f_2(x)=3x-6\,;\,D=\{x\mid -2\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f_1(x)=-\frac{2}{3}x+4\,;\,f_2(x)=\frac{3}{2}x-2\frac{1}{2}\,;\,D=\{x\mid -1\le x\le 7\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f_1(x)=-\frac{3}{8}x+1\,;\,f_2(x)=\frac{5}{6}x+5\frac{5}{6}\,;\,D=\{x\mid -8\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$

n -مه درجه ټول مات- یا راشنل توابع

n -مه درجه ټول راشن لفنکشن

یو تابع $f(x)$د

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

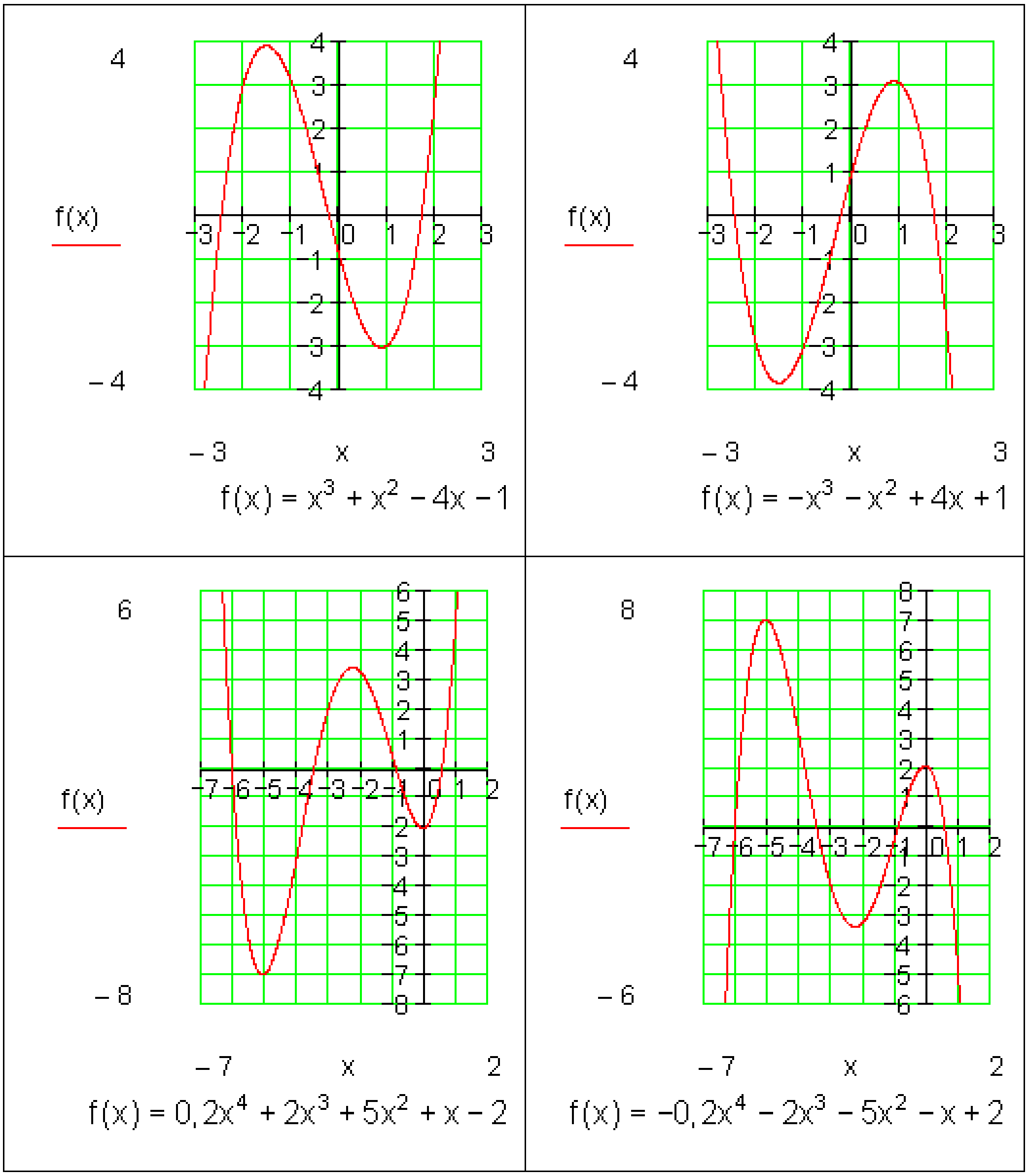
سره n -مه درجه ټول راشنل تابع بلل کيږي.

عددونه $a_n\,;\,a_{n-1}\,;\,a_{n-2}\,;\ldots\,a_2\,;\,a_1\,;\,a_0$ ضریبونه بلل کيږي.

ټول راشنل یا هوښیار توابع د توان توابعو یوځای اینوولو له لارې لاس ته راځي.

بیلګې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ګراف تلنه

جمله:
د ټول راشنل تابع ګراف تلنه د خورا جګ توان زیاته ووني (د جمعي غړي) سره تاکل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

	n جوړه	n ناجوړه(طاق)
$a_n>0$	تلنه له II و I ته.	تلنه له III و I ته.
$a_n<0$	تلنه له III و IV ته.	تلنه له II و IV ته.

بیلګه: د الماي پینتو: ناجوړه(طاق) جوړه (جفت) ناجوړه

$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 7$ $\quad n = 3\ (ungerade) \wedge a_n = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - I}}$

$f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 7$ $\quad n = 4\ (gerade) \wedge a_n = -2 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - IV}}$

$f(x) = -5x^5 + 2x^4 + 9$ $\quad n = 5\ (ungerade) \wedge a_n = -5 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{II - IV}}$

سیومتري

ګومان مو نږدې دی، هغه توابع، چې فقط د جوړه جګعددونو توانونو څخه یوځای شوي وي، محور سیومتریک دي او توابع چې فقط د ناجوړه(طاقو) جګعددونو توانونو څخه یوځای شوي وي، ټکی سیومتریک دي.

جمله

د یوه ټولراشنل تابع ګراف ټیم هلته محورسیومتریک دی، که تابع مساوات فقط جوړه جګعددونه ولري.

د یوه ټولراشنل تابع ګراف ټیک هلته ټکیسیومتریک دی، که تابع مساوات فقط ناجوړه (طاق) جګعددونه ولري.

بیلګه:

$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$$

$$f(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x)^2 + 1 = 2x^4 + 3x^2 + 1 = f(x) \Rightarrow$$

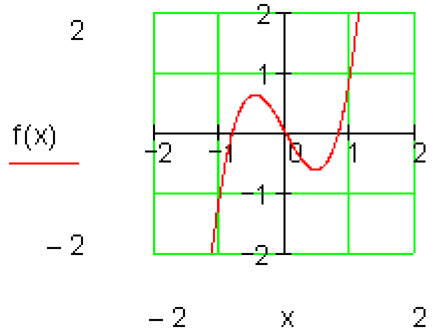
(c) ketabton.com: The Digital Library

محورسیومتریک

$$f(x) = 3x^3 - 2x$$

$$f(-x) = 3(-x)^3 - 2(-x) = -3x^3 + 2x = -(3x^3 - 2x) = -f(x) \Rightarrow$$

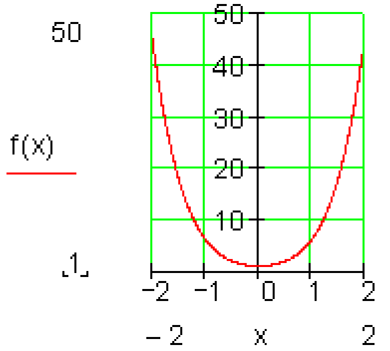
تکی سیومتریک



$f(x) = 3x^3 - 2x$

سرچیني ته سیومتریک دی

(تکی سیومتري)



$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$

yمحور ته سیومتریک دی

(محورسیومتریک)

تمرینونه:

د ټول هوښیارو توابعو خویونه.

د لاندې تاوبعو په سیمتری، تلنه او د صفرځایونو تعداد یا ګنون باندې ویناوې وکړی.

لومړی - $f(x) = 2x^2 - 1$ دویم - $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ريم - $f(x)=-\frac{1}{2}x^4+2x^2+2$ ‌ ‌ خلورم - $f(x)=-x^5-x^3+x$

پنځم - $f(x)=x^6-x^4+1$ ‌ ‌ شپږم - $f(x)=-\frac{1}{2}x^5+x^2-2x$

اوم - $f(x)=\frac{1}{10}x^7+\frac{1}{8}x^5-\frac{1}{6}x^3+x$ ‌ ‌ اتم - $f(x)=\frac{1}{100}x^{10}-\frac{1}{50}x^6+\frac{1}{10}x^2$

نهم - $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{2}{5}x-1$ ‌ ‌ لسم - $f(x)=\frac{3}{4}x^5-\frac{1}{2}x$

په يوه خوښه ټکي ته سيومتريک

که د یوه ټکي سیومستري تابع ګراف په خوښه راکښل شي، نو سیومتري سرچیني ته ځي، چې موږ يې ټکی سیومتري بولو له منځه ځي. نسبت و موخېټکی ته دا ساتلې پاتې کيږي.

بیلګه:

د $f(x)=0{,}5x^3-1{,}5x$ تابع ګراف ټکی سیومتریک دی، یعنې سرچینې ته سیومتریک.

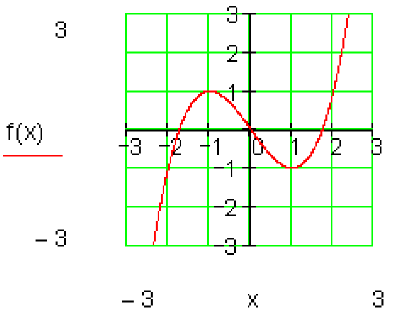
دا ګراف دې په ۲ واحدونو یا یوونونو کیڼ لور ته او په ۳ یوونونو یا واحدونو کښته لور ته راکښل شي.

د راکښلشوي ګراف تابع مسساوات دي:

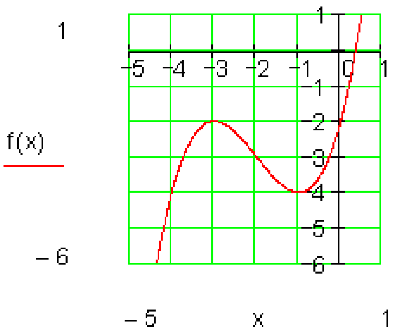
$$g(x)=0{,}5(x+2)^3-1{,}5(x+2)-3=0{,}5x^3+3x^2+4{,}5x-2$$

$g(x)$ و ټکی $P_0(-2|-3)$ ته سیومتریک دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x) = 0{,}5x^3 - 1{,}5x$$



$$f(x) = 0{,}5x^3 + 3x^2 + 4{,}5x - 2$$

کواوردينانسيستم د ګراف په بڼه کوم رول نه لوبوي. تنها تابع مساواتوتغير خوړلی.

د حالت بيلګه: بايد وازمايل شي، چې ايا د دريمي درجې د يوه ټول هوښيار تابع ګراف يوه ټاکلي ټکی ته ټکی سيومتريک دی.

ترمخ راوړنه.

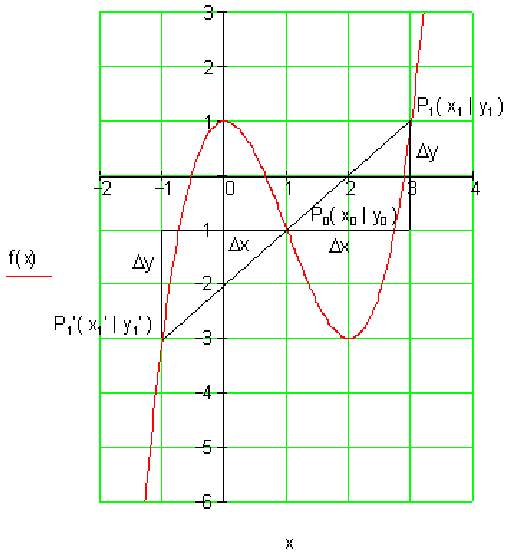
چمتووالی:

د ټکو کواوردينات لپاره باور لري:

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y$$
$$x_1' = x_0' - \Delta x$$
$$y_1' = y_0' - \Delta y$$
$$\Delta x = x_1 - x_0$$
$$\Delta y = y_1 - y_0$$

د هنداره-يا منعکس شوي ټکو کواوردیناتونه:

$$x_1' = x_0 - (x_1 - x_0) = \underline{\underline{2x_0 - x_1}}$$
$$y_1' = y_0 - (y_1 - y_0) = \underline{\underline{2y_0 - y_1}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

	د دې قاعدې يا لار سره تل کېدی شي په P_0 او P_1 ته يوه هنداړونه يا انعکاسونه کې اړونده هنداړونه P_1' وټاکل شي.

بيلګه:

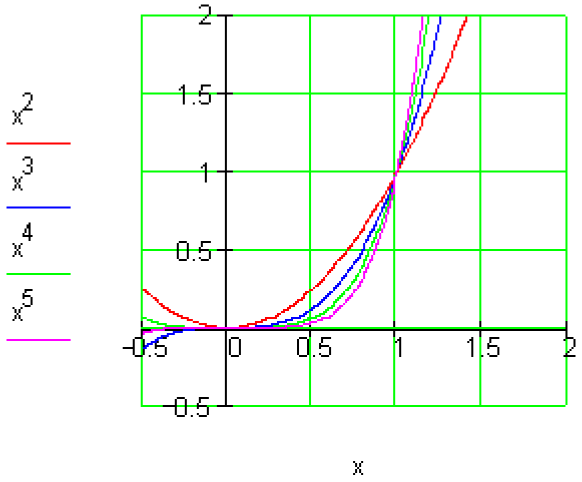
که هنداورنه په ګراف نه وي پرته ، نو ګراف و P_0 ته ټکی سيومتريک نه دی.

پوښتنې

ټول مات- يا راشنل توابعI

د توانتوابعو خويونه

لومړی –

 	دا ترخنګ په 1 . غلورمه کې ګراف تر ځيرنې لاندې ونيسی د x ارزښتونو لپاره د 0 او 1 ترمنځ دجګو درجو يو د توان تابع ګراف پروت دی د يوه توان تابع د ګراف لاندې يا کښته د ټيټې درجې. د $x > 1$ لپاره دا ټيک برعکس کېدونکې دي. د دې حالت لپاره لايل راوړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم – د دریمې درجې توان تابع کراف دې په دوه واحده کینې لور ته او ترلی په درې واحده پورته لور ته و کښل شي.

د دې راکښل شوې تابع مساوات لپاره دې د تابع مساوات ورکړ شي.

دریم –

د څلورمې درجې توان تابع ګراف دې په درې واحده ښۍ لور ته او پسې ترلی دې په دوه ضریبه وغزول شي.

الف – د راکشل شوي ګراف لپاره تابع مساوات ورکړئ

ب – وښایئ، چې ګراف نه محور – او نه ټکی سیومتریک دی.

څلورم –

په کوم توان تابع $f(x) = x^n$ کې ټکی په ګراف اړه لري؟

د دې توان توابعو مساوات ورکړئ.

الف - $P(-3 \mid -27)$ ب - $P(-2 \mid 16)$ پ - $P(0{,}5 \mid 0{,}25)$ ت - $P\left(\frac{1}{3} \mid \frac{1}{27}\right)$

ټ - $P(0{,}1 \mid 0{,}0001)$ ث - $P(-1 \mid 1)$ ج - $P(-2 \mid 8)$ چ - $P\left(\frac{3}{4} \mid \frac{81}{256}\right)$

پنځم –

د لاندې توان توابعو سیومتري او د ګراف تلنه وټاکئ او د هر یوه ارزښتدېرئ(ارزشتست) او درجه ورکړې.

الف - $f(x) = 4x^3$ ب - $f(x) = -160x^2$ پ - $f(x) = -1500x$

ت - $f(x) = \sqrt{2} \cdot x^6$ ټ - $f(x) = 5$ ث - $f(x) = -25x^5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم –

لاندې تابع مساوات د پولینوم په بڼه انځور کړی.

هر ځل يې درجه ورکړی.

الف - $f(x) = (x-2)^2 - 4x^3$ ب- $f(x) = 4(x+5)^3 + (x-2)(x+2)$

پ- $f(x) = 2x^3 - (x-1)^2$ ت - $f(x) = (x-4)(x+1)^2$

ټ - $f(x) = (x^2-4)(x^3-x^2+4)$ ث - $f(x) = \frac{x-5}{8}(x-2) + \frac{3}{4}x^2$

اوم -

دليل راوړی:

د يوه ناجوړه(طاق) درجې تولراشنل تابع ګراف دx محور لږ ترلږه په يوه ځل غوڅوي.

دا هلته هم باور لري که درجه حوړه يا جفتوي؟

پوښتنې

تول راشنل توابع II

سيومترى او تلنه

لومړی – و ځېرى، چې ايا f(x) يو تولراشنل تابع دی. په ورکړشوي حالت کې د تابع ګراف، درجه او د ضريبونو $a_0; a_1; a_2; \ldots an$ ارزښتونه ورکړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف ـ $f(x)=2$ ب ـ $f(x)=4x$ پ ـ $f(x)=2^x$ ت ـ $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{8}$

ټ ـ $f(x)=\sqrt{3}x^4$ ث ـ $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ج ـ $f(x)=\sqrt{x}$ چ ـ $f(x)=\left(x-\sqrt{3}\right)^2$

ح ـ $f(x)=\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$ خ ـ $f(x)=16x^3-2x^2+5x^2-4$

دویم – د لاندې ټولراشنل توابعو څخه کوم يې محور سيومتريک او کوم يې ټکی سيومتريک دي؟

الف ـ $f(x)=x^4-6x^2+5$ ب ـ $f(x)=x^3+3x+1$ پ ـ $f(x)=(x-2)(x+2)$

ت ـ $f(x)=x^6-6x^2+\sqrt{3}$ ټ ـ $f(x)=(x-2)^3(x-1)$ ث ـ $f(x)=x^4-\sqrt{5}x^2$

ج ـ $f(x)=\left(2x^4+2x^2+5\right)x$ چ ـ $f(x)=\left(x^2-2x+3\right)(x+1)(x-1)$

ح ـ $f(x)=1-3x^2+x^6$

دريم – د c متحوله داسی وټاکی، چې د تابع ګراف ټکی سيومتريک او همداسې محورسيومتريک شي.

الف ـ $f(x)=x^3+4x+c$ ب ـ $f(x)=(x-c)(x+4)$ پ ـ $f(x)=x^5+x^c$

ت ـ $f(x)=x^3\left(x^2-cx\right)$ ټ ـ $f(x)=c+x^3$ ث ـ $f(x)=4x^3+x^2+cx^2+5x$

څلورم : د لاندې توابعو د ګراف تلنه معلومه کړی.

الف ـ $f(x)=2x^5-6x^3$ ب ـ $f(x)=-4x^4+3$

پ ـ $f(x)=2x-5$ ت ـ $f(x)=-2x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ - $f(x)=4x^4-3x^2+4x-5$ ث - $f(x)=-6x+3$

ج - $f(x)=4x^4+3x^3-6x^5$ چ - $f(x)=-2x^5+6x^3$

پنځم - د لاندې توابعو د ګراف تلنه او سیومتري ورکړی.

الف - $f(x)=\sqrt{3}x^2-\sqrt{5}x^4-2$ ب - $f(x)=x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(8-\frac{1}{2}x\right)$

پ - $f(x)=5x^6-4x^4+5$ ت - $f(x)=x^5+x^3-2x$

ټ - $f(x)=5$ ث - $f(x)=\left(x^2-25\right)\left(x^2+6x+9\right)$

ج - $f(x)=x^5+4x^4+4x^3$ چ - $f(x)=\left(4x^2-4\right)\left(x^3+8x^2+16x\right)\left(x^3+27\right)$

ح - $f(x)=-3$ خ - $f(x)=-x^5+x^3-2$

شپږم : د لاندې تابعو صفرځیونه وشمېری:

الف - $f(x)=(x-4)(x-2)(x+1)$ ب - $f(x)=(x-4)(-x+2)$

پ - $f(x)=x(x+5)^2$ ت - $f(x)=3(x-4)^3(x+2)$

ټ - $f(x)=(2x-4)(x+3)x^3$ ث - $f(x)=x^3-2x^2$

د ټولراشنل توابعو محور غوڅټکي (د محور د تقاطع نقطی)

د ټولراسنل توابعو محور غوڅټکي (د محور د تقاطع نقطی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د y محور سره غوڅېکی $P_y(0|y_s)$ ؛ $P_y(0|y_s)$ شرط: $y_s = f(0)$

بیلګه : د یا په معنا

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 3 \Rightarrow f(0) = 3 \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 - 3 = 0 - 0 - 3 = -3$$
$$\Rightarrow P_y(0|-3) \text{ oder } P_y(0|f(0))$$

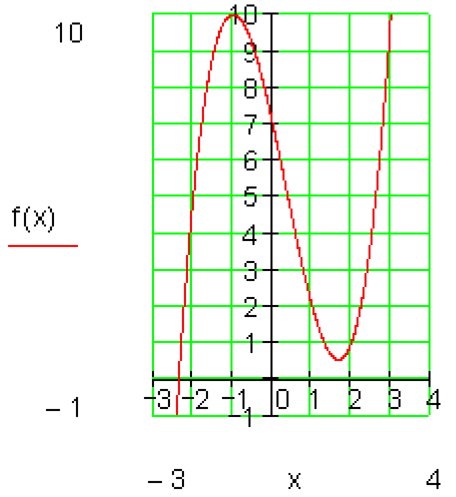
د P_y د y کواوردینات تل د ضریبونو a_0 سره کتمټ ده.

دا تل د تابع مساوات څخه لوستل کیدی شي.

د x-محور سره غوڅېکی $P_y(x_s|0)$ صفرځای : شرط: $f(x) = 0$

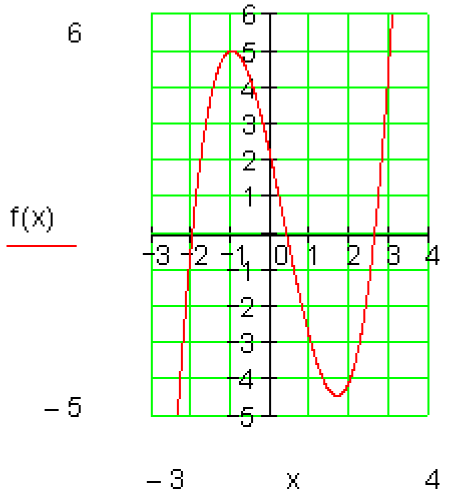
د مربع تابع (د دویمي درجې ټولراشنلتابع) څخه بوهیږو، چې دا دوه ، یو ، یا هیڅ صفرځایونه لرودی شي. دا د څک درجو ټول راشنلتابع سره څنګه دی؟

بیلګه:



$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 7$

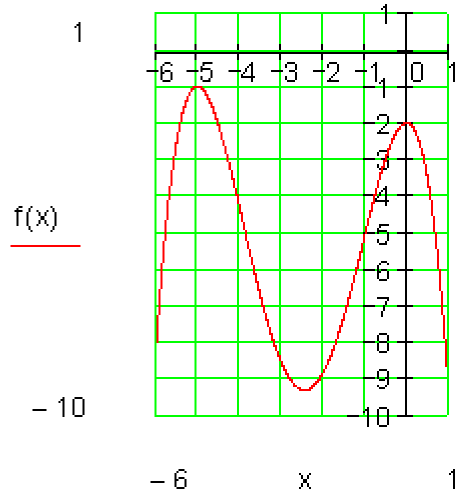
صفرځای نه لري



$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$

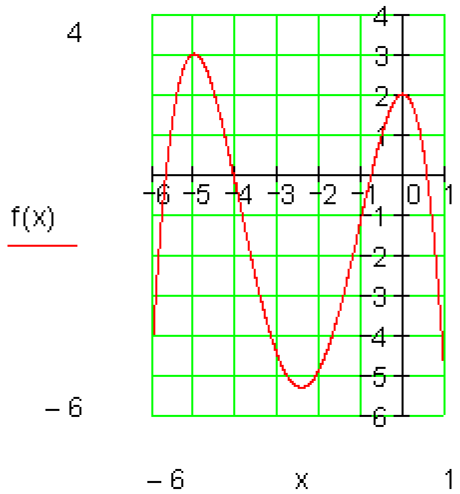
دري صفرځایونه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 0,2x - 2$$

د صفرځای نه شتون



$$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 0,2x + 2$$

خلور صفرځایونه لري.

جمله:

یو د n -مي درجې تولراشنل تابع زيات له زياته n صفرځايونه لري.

كهn جوړه وي، نو دا لږترلږه يو صفرځای لري.

د صفرځايونو شميرني لار(تګلار)

د فکتوري کونو يا صريبونو تګلار:

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x = 0$$

فاكتور x له نوكانو راوتلی شي.

$$\Leftrightarrow x\left(2x^2 - 2x - 4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

او په نوكانو کې افاده يا وبينه صفر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

مربع مساوات دی.

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \,|\, :2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$p = -1;\ q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

صفرځایونه :

$$x_1 = 0\,;\ x_2 = 2\,;\ x_3 = -1$$

د x محور سره غوځتکی

$$P_{x1}(0|0);\ P_{x2}(2|0);\ P_{x3}(-1|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x) = \underbrace{2x(x+1)(x-2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x$$

(پورته) د کرښیز ضریبونو ضرب

د بدلون قانون substitution:

يادونه: په دې معنا چې د يوې اووښتونې يا متحولې لپاره بله متحوله ځا په ځای کوو.

بې مربعيز(بي ځلوريز) مساوات $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

بدلون: $x^2=z$

$$\Rightarrow f(z) = z^2 - 13z + 36 = 0 \quad p = -13 \quad q = 36$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36 = \frac{169}{4} - \frac{144}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} z_1 = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9 \\ z_2 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = 4 \end{array} \right.$$

بدلون په څټ- یا بیرته ګرځوو:

$$x^2 = z_1 = 9 \,|\, \sqrt{} \qquad x^2 = z_2 = 4 \,|\, \sqrt{}$$

$$\Rightarrow |x| = \sqrt{9} \qquad |x| = \sqrt{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = -3 \qquad x_3 = 2 \quad x_4 = -2$$

د x محور سره غوڅټکی

$$P_{x1}(3|0); P_{x2}(-3|0); P_{x3}(2|0); P_{x4}(-2|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x) = \underbrace{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

د کرښیز ضریبونو ضرب

پوښتني

محور غوڅټکي او د ټولراشنل یا ماتتوابعو ګرافونه**II**

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د درېيمې درجې يو ټولهوښيار يا –راشنل تابع سرچيني سره سيومتريک ده، که
الف- له ټکو $P_1(1|2)$ او $P_2(3|-2)$ څخه تيره شي.
ب- که کرښهg د g(x)=3x سره پارابول په(0|0)P کې لمس کړي.
دويم: تابع f(x) د پېژندورشو يا تعريف ساحېD = IR سره ورکړ شوې ده. تابعf(x)
په سيومتري وڅېړی، صفرځايونه وشميری او ګراف وکاږی.

الف – $f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2$ ب – $f(x)=x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x$

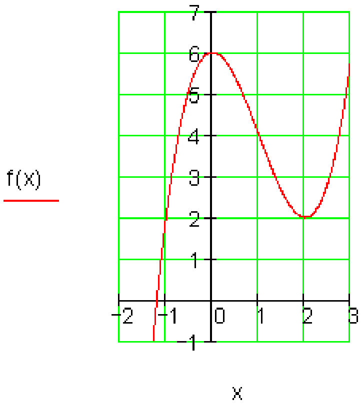
پ - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+5$ ت - $f(x)=\frac{1}{48}x^3-x$

ټ - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x$ ث - $f(x)=\frac{1}{5}x(3-x)(x+1)$

ج - $f(x)=\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{4}x-1\right)^2$ چ = $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{4}x^2-6x+\frac{9}{2}$

دريم: تابع $f(x)=x^3-3x^2+6\,;\,D=\mathbb{R}$ ورکړشوې ده.

الف - وښايی:
د f(x) صفرځای د (1- ; 2-) ترمنځ پروت دی
مدلل کړی، چېf(x) ټيک يو صفرځای لري، ادا
ګراف بايد څنګه راکښل
شي، چې له هغې سره دا ټيک دوه صفرځايونه
ولري؟
ب- کرښه x = u د f(x) ګراف په ټکي Q او د
x محور په P کې غوڅوي.
د لاندي درېګوډي يا مثلث 0PQ سطحه د2 = u
لپاره وښايی.
د مثلث د (خوندي) سطحې ترم د u په واکوالي
کې د 0 < u لپاره ورکړی.
g(x) څومره صفرځايونه د g(x)=3.f(x) سره
لري؟
دلايل يې راوړی.



څلورم: تابع $f(x)=5x^3-10{,}8x+4$ ورکړ شوې ده. وښای: x=0,4 يو صفرځای دی.
پسي نور صفرځايونه وشميری.
$f(x)=5x^3-10{,}8x+4\,;\,D=\mathbb{R}$
پنځم: د اووښتوني يا متحولي c په واکوالي کې د صفرځايونو تعداد وټاکی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$f(x)=x^3+2x^2+2cx\,;\,D=\mathbb{R}$$

$$x^2+2x+2c=0\Rightarrow p=2\,;\,q=2c\Rightarrow D=1-2c$$
$$\text{für } D>0\Rightarrow 1-2c>0\Leftrightarrow c<0{,}5$$
$$\text{für } D=0\Rightarrow 1-2c=0\Leftrightarrow c=0{,}5\Rightarrow x_{2/3}=-1$$
$$\text{für } D<0\Rightarrow 1-2c<0\Leftrightarrow c>0{,}5$$
$$\text{für } c=0\Leftrightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow x(x+2)=0\Rightarrow x_2=0\,;\,x_3=-2$$

اړيکې:

د $c > 0{,}5$ لپاره $f(x)$ تيک يو صفرځای لري:$P_x(0 \mid 0)$

د $c = 0{,}5$ يا د $c = 0$ لباره$f(x)$ تيک دوه صفرځايونه لري.

د$c < 0{,}5$ او c د صفر سره نامساوي لپاره $f(x)$ تيک درې صفرځايونه لري.

پوښتنې

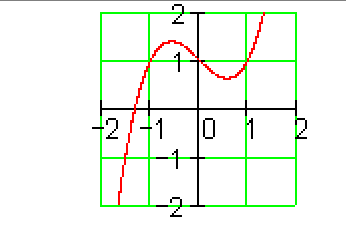
د ټول راشنل توابعو محور غوښتکي او ګرافونه**III**

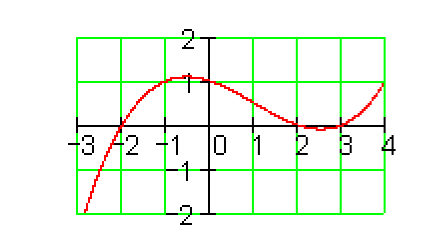
تابع په يوه ګراف تنظيميږي.

لومړی: هر د يوه تابع ترم سره تنظيم کړی او خپله پريکړه په دليل کلکه کړی.

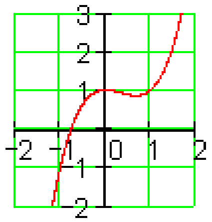
$$f_1(x)=x^3-x+1;\ f_2(x)=x^3-2x+1$$

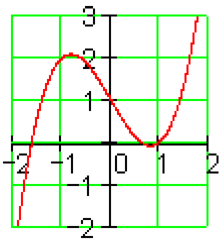
$$f_3(x)=x^3-x^2+1;\ f_4(x)=\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x+1$$





(c) ketabton.com: The Digital Library





دويم: هر هغه ځوک چې د لایسنس اخستلو لپاره ځان چمتو کوي، باید وپوهيږي، چې د يوه بريک وهونکي موټر تمکيدني واټن په يوه وچ پاخه سرک)چې طبعأ باید هوار وي) د عکسالعمل لار او د بريک لار څخه يوځای جوړه ده. د لاندې د موټې قانون يا لار(د دري ګوتو) څخه کيدی شي د چټکتيا v په km/h د عکسالعمل لارr او د بريک لار b په متر وشميرل شي.

د بريک لار: $b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ همداسي $b = \frac{\left(\frac{v}{10}\right)^2}{2}$ ، د عکس العمل لار: $r = \frac{v}{10} \cdot 3$

د المان د3.3.04 راپن اخبار د اول له جولای1. Juli 2004 په وچ سره د تمځای لار په بل بريکلار شميرل کيږي.(په افغانستن کي به داځنګه وي ؟نه پوهيږم)

الف- تابع مساوات $s = f(v)$ وټاکی، د کوم سره چې د هرې تلنې د چټکتيا يا سرعت تملار شميرل کيدی شي.

ب – د لاندې تلل شوی چټکتيا $v = 0, 10, 20, 30, \ldots 50$ km/h لپاره په يوه ارزښت جدول کې د هغه هر يوه تمځای s سره يوځای کړی

پ – له دې سره د (60 ... 100 km/h) لپاره دs يو څونور ارزښتونه وشميری او د دې تابع ګراف وکاږی.

ت – د نوې بريک نيولو قانون(المانی) سره دا تراوسه شميرل شوي ارزښتونه وشميری او دا په همغه کواوديناټ سيستم کې وکاږی او توله نتيجه په شننه يا کومنتار سره روښانه کړی.

دريم: داتابعورکړ شوي: $f(x) = x^3 - 0{,}5x^2 - 3x + 1{,}5 ; D = \mathbb{R}$

الف- وښايی: $f(x) = 0{,}5(2x - 1)(x^2 - 3)$

ب –ګراف د شوونتيا تر پولې ټيک وکاږی.

پ – د x د کوم ارزښتونو لپاره$f(x)>0$ باور لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

شننيزه ځمککچپوهنه يا تحليلي هندسه:

تحليلی هندسه(وکتورهندسه هم) د هندسي يوه برخه ده، چې د هندسي پرابلمونو د حل د پاره د الجبري مرستندوی موادو (په ټوليزه توګه له کرښيز الجبر) څخه جمتو کوي. دا په ډېرو حالتونو کې ممکن کوي، چې ځمککچيزې پوښتنکوني سوچه شميرنيز حل کړی شو، بې له دې چې ليدوني يې مرستې ته راوبولي يعنې چې شکل څنګه برېښي يا دی.

۱۶ - د سطحې شننيزه (تحليلي) هندسه

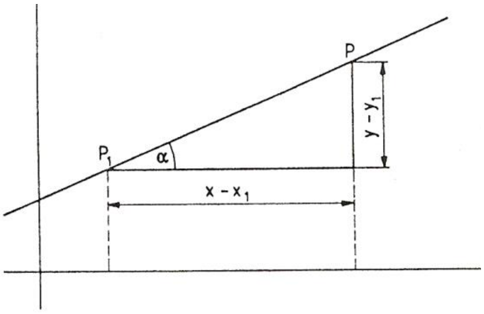
په دې برخه کی يوځود تحليلي (شننيزې يا سپړنيزې) ځمککچپوهنې يا هندسي ټاکلي پرابلمونه څېړل کيږي.د تحليلي هندسي بنسټيزه تګلار به څرګنده (وښول) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شکلونو او ددې په شننيزې يا تحليلي څرګندونيی د هندسي خويونو جوړښت بنايي.

۱۶ . ۱ کرښه

د هندسي ټاکندو ټوټو له لارې مختلف امکانات شته دی، چې يوه کرښه يواځنی کره تعين کړاي شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د کرښبرابرونونو يا - مساواتو مختلفی بڼی شته دی. يوه کرښه د يوه ټکي او د هغه د لور(سمت) له لارې ټاکل کيدي شي . (ټکی او د ټکی ميلان معلوم دی) .

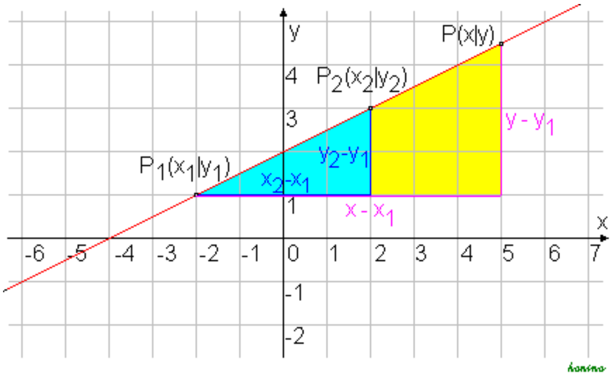
دلته دې($P1(x1 , y1$)دا ټکي وي. $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ دې د جګيدو کونج،وي، چې د کرښی لور ټاکي (خ ۱۶ . ۱) او $P(x,y)$ په کرښه يو اووښتونی (واريابل) ټکی دی٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



نو د کرښې د ميلان $\tan\alpha = m$ لپاره باور لري: $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

(پورته ځيره دې وکتل شي(لاددې ځيره هم په همدې موخه کښل شوې ده))



له دې ځخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1);....................(16,1)$$

پورته د کرښې ټکي لوربرابرون

که د y په محور P1وټاکل شي د کواوردیناتو x1= 0, y1 = b سره، نو له (١٦ . ١)سملاسي په لاس راځي: (y - b = m (x - 0 په همدې ډول(⇔)

$$y = mx + b \qquad (16 . 2)$$

دا پورته برابرون د کرښمساواتونورمال فورم (بڼه) بلل کيږي

يوه کرښه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دوه ټکي دي(P1(x1 , y1 او(P2 (x2 , y2 وي، د x1|=x2 سره ، (څیره ش ۱۶ . ۲) د جګیدونکی یا تنجنت $\tan\alpha = m$ لپاره داسی دي:

m = (y - y1) /(x -x1)

او

m = (y2-y1)/(x1-x2) = (y2-y1)/(x2-x1)

له کومو چی لاس ته راځي

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x - x_1};..................(16,3)$$

پورته د کرښی دوه ټکیز برابرون

څیره ده

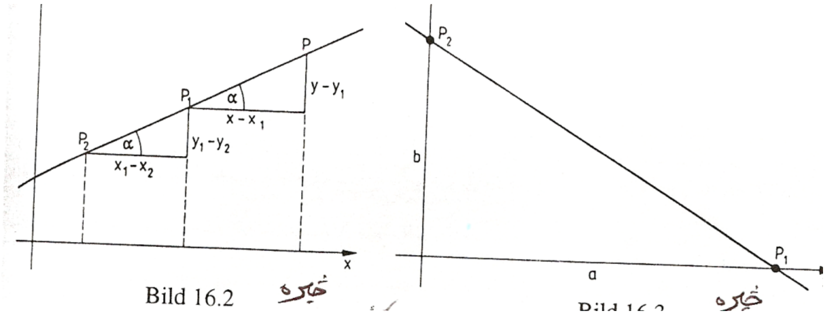


Bild 16.2 څیره

که د x - محور باندې د P1 ټکی ، د کواوردینات x1 = a |= 0 , y1 = 0 سره وټاکو او ټکیP2 دy- محور باندې د کواوردینات x1= 0, y2 = b|= 0 سره وټاکو، نو له (۱۶ . ۳) لاس ته راځي:

(y - 0) / (x - a) = (b - 0)/ (0 - a)

او له دې دا لاندې لاس ته راځي:

$$x/a+y/b = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (16,4)$$

پورته د کرښو د غوڅي برابرون

څلور پورتنی کرښمساوات ټول په x او y کی لاینیز دي.د مساوات عمومي فورم)یا ټولیزه بڼه (داسی دی:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (16 . 5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د كرښبرابرونونو تږليزه بڼه(عمومي فورم)
دا فورم په ځانګړې توګه دا برابرون هم خوندي لري يا په بر کی نيسي
$y = y0$ (A = 0 ,B|=0)
او(x=x0(A|=0,B=0 چی د x - محور اوپه همدې ډول د y - محور ته غبرګي کرښي دي، په داسی حال کی چی تراوسه دومه لا نه ده څېړل شوې

بيلګه ۱۶ . ۱:

د کرښی برابرون يا لاينيز برابرون، چی له(P(-2 , 3 ټکي تيريږي او د جګوالي کونج $\alpha = 30°$ يی د $m = \tan\alpha \frac{1}{3}\sqrt{3}$ له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسی ليکل کيږي $y - 3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x+2)$

او نورمال فورم يي په لاندې ډول دی

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + (3 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$$

بيلګه ۱۶ . ۲ :

د لاينيزبرابرون يا دکرښوبرابرون په ټکو(P1 (3/2 ,-2 او(P2(1 , -4کی د (۱۶ . ۳)سره سم په لاندې ډول دي:

$$\frac{y+2}{x-\frac{3}{2}} = \frac{-y+2}{1-\frac{3}{2}}$$

له دې لاس ته راځي: $y + 2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}(x - \frac{3}{2})$

نو نورمال فورم y=4x-8 لرو(**اته** ناسم، په ځای يې شپږ دي)

بيلګه ۱۶ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښه د y =-(3/2)x+1 برابرون   سره د y - محور په(P1(0,1 ټکي کی غوڅوي او
جګوالی یی 2/3 -   دی ، دا په دې مانا چی د x - ارزښت تغیریدل په یو دy - ارزښت
په 2/3 - تغیروي، په دې ډول دوم د کرښي ټکی لاس ته راځي. د بیلګی په توګه
p2 (0+1 , 1-(3/ 2)=p2(1,-1/2)

(ځیره ۱۶ . ۴ لاندې کښل شوې   )

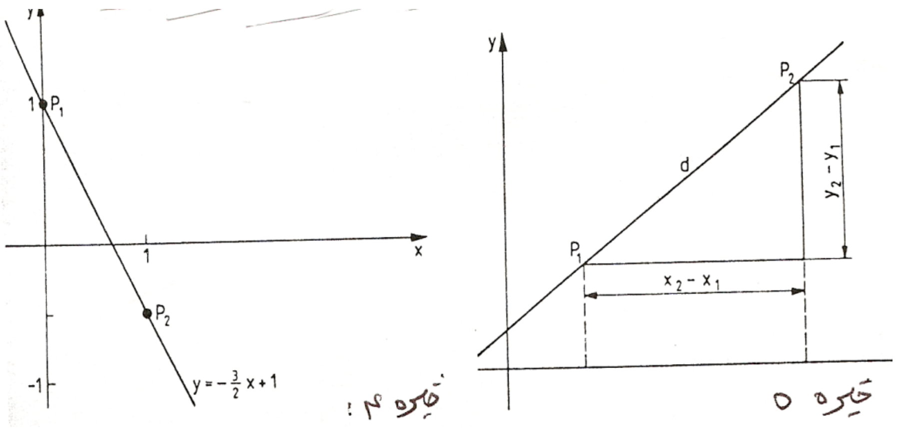
بیلګه ۱۶ . ۴ :

د کرښی د برابرونونو عمومي فورم x-2y-6 = 0 څخه دغوڅیدو فورم لاس ته راځي
x / 6 + y / 3 = 1
کرښه دکواوردینات محورونه په دې ټکو(P1(6 , 0), P2(o,-3 کې غوڅوي۰
په یوه کرښه د دوه ټکو(P1(xx,y1),P2(x2,y2ترمنځ فاصله (که د کرښي واټن P1P2
d = وي د پیتاګوراس(فیساغورس) له جملی (ځیره . ۱۶ . ۵) داسی ده

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};........................(16,6)$$

پورته د ټکو P1 او P2 ترمنځ واټن

ځیرې ۱۶ . ۴ او - ۵



بیلګه ۱۶ . ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د درېګوډي ABC د اړخونواوږدوالی، چی کونجتکي یی دادي(A(3,1),B(-
1,1),C(2,5، په لاندې ډول دی

$$a=\overline{BC}=\sqrt{(2+1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{25}=5$$

$$b=\overline{AC}=\sqrt{(2-3)^2+(5+1)^2}=\sqrt{37}=6,08$$

$$c=\overline{AB}=\sqrt{(-1-3)^2+(1+1)^2}=\sqrt{20}=4,47$$

دوه کرښي (نه کتمتی) چی (یو د بلی سره) غبرګي نه وي ټیك یو غوڅټکی لري. دا چی دا ټکی په دواړو کواور دیناتو پروت دی ، نو د دواړو کواوردیناتو برابرون باید پوره کړي . په دې حالت کي د غوڅټکي کواوردیناتو، د دوه لاینیزو برابرونونو سره چی دوه اوښتونې یا

ناپیژندونکی (مجهولی) ولري، د یوه سیستم یواځنی کره اوبیونه ترې لاس ته راځي. په ټولیزه توګه دا باور لري: که یو برابرونسیستم چی د دوه کرښو د برابرونونو څخه جوړ وي، او یو یواځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښي یو بل په دې ټکي کی سره پرې کوي.
که ناپای ډیرې اوبیونې شته وي، نو په دې حالت کی برابرون همغه یوه کرښه ښایي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښي یوبل سره غبرګي ځغلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بیلګه ۱۶ . ۶ :

د g1 : y = 3x-2 کرښی پروتځاي (موقعیت) د لاندې کرښو
الف) g2: -2x+y = 1,
ب) g3: 3x -y=5, ,
پ) g4 : -x+(1/3)y=-2/3
سره څیړو
اوبیونه : د g1 برابرونونو څیره داسی بدلیږي : 3x-y=2
الف) د برابرونونو سیستم 3x-y=2، -2x+y=1
ټیك یوه اوبونه لري: x1=3 , y1=7
ددې څخه څرګندیږي چی ټکی(S(3 , 7 د کرښو g1 او g2 غوڅټکی دی .
ب) د برابرونونو سیستم
3x - y = 2
3 x - y = 1

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبی نه لري : برابرونونه یو بل ردوي یه نه زغمي . د g1 او g2 کرښې یو د بل سره غبرګي دي

پ) د برابرونونو سیستم 3x-y=2

-x+(1/3)y=-2/3

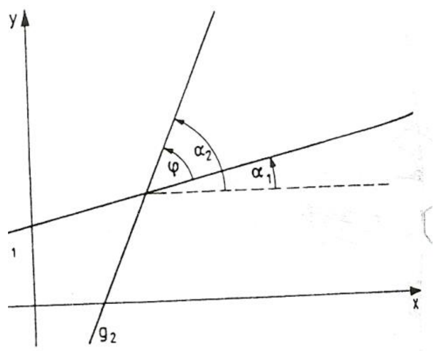
ناپای ډیر ې اوبیونې یا حلونه لري. برابرونونه یو بل سره برابر یا یو بل ته ورته دي. که په ۳ ضرب شي یو همغه پورته برابرون ترې لاس ته راځي .

g1 او g2 دوه کټ مټ برابرونونه دي ۰

که د دوه کرښو

g 1 : y = m1x + b1 g2 : y = m2x + b2

غوڅکونج ϕ ټاکو، نو د دواړو کرښو ځګید کونجونو $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ کمون (کمښت یا توپیر)جوړوو (ځ ۱۶ . ۶)



ځېره ۱۶ . ۶

د کرښې له برابرونونو پوهیږو $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$

د زیاتون تیورم (بنسټیزه جمله) (برخه ۶ . ۵) ځخه د $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$ لپاره (پر تله برخه ۴ . ۵) باوري ده

$$\tan\phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan\alpha_2 - \tan_1)/(1 + \tan\alpha_1.\tan\alpha_2)$$

د کوم ځخه چې د $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$ سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1.m_2};.........................(16,7)$$

پورته د دوه کرښو غوڅکونج دیر.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې پورې اړه لري چې ایا $\phi > 0 \vee \phi < 0$ د پورته ځېرې ۱۶ . ۶ کونج پخ او که تیره دی.

بیلګه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو g1:y=x-1 او g2:y=(7/4)x+1 غوځکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) څخه لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{\frac{7}{4}-1}{1+1.\frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15,255°$$

د g1 او g2 ترمنځ پڅکونج په دې ډول دی : $180-\phi = 164,745°$

د دوه کرښو یو بل ته ځانګړي حالتونه:

۱ – کرښې یوبل سره غبرګې ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180° \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1+m_1.m_2} = 0$$

ګورو چې د m2 - m1 = 0 لپاره باور لري، نو m2 = m1

(دلته باور لري : $m_1.m_2 = m_1^2 \neq -1$)

۲ - کرښې یو په بل (نیغې) ولاړې دي، نو لرو

$$\phi = 90° \Rightarrow \tan\phi = (m-m)/(1+m.m) = \infty$$

دا حالت د 1+m1.m2 = 0 لپاره منځ ته راځي،

یعنې د m2= -1/m1 لپاره (m1|=0,m2|= 0)

په کرښه(y=y0 (m1=0 باندې کرښه(x=x0(m2=oe نیغه ولاړه ده

د غبرګوالی لپاره شرطونه

m2 = m1 (16, 8)

د اورتوګونالیټی Orthogonalität(یو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$m2 = -1 / m1 \qquad (16 . 9)$

بیلگه ۱۶ . ۸ : دکرښی $g2$ برابرون دې وټاکل شي چی له ټکي(P (2,-1 تیریږي، او له کرښی $g1 : y = -2x +1$ سره الف (غبرگه او ب(اورتوگونال (نیغه) ځغلي اوبىونه:

الف) د $g2$ کرښی میلان (جگوالی $m2 = m1 = -2$)دی. پام (۱۶ . ۱) ته دکرښي $g2$برابرون لپاره باور لري : ($y+1=-2(x-2)$ همداسی $y = -2x +3$

ب) د $g2$ کرښي میلان یاجگیدنه ده $m2=-1/m1=1/2$ د(۱۶ . ۱) سره سم د $g2$ کرښي برابرون دی: $y+1=(1/2)(x-2) <=> y=(1/2)x-2$

بیلگه ۱۶ . ۹ :

د کرښی برابرون ټاکل کیږي چي د($P1(1/3,-1/6$ ټکی تیریږي او په کرښه چی له ټکو($P2(-1,1$ او($P3(-2,-1$ تیریږي، ولاړه وي.

ځواب : کرښه چي له $P2$,$P3$ ټکو تیریږي، و (۱۶ . ۳) ته په پام لاندې برابرون لري $(y-1)/(x+1)=(-1-1)/(-2+1) = 2 <=> y = 2x +3$

په دې کرښی د (عمودي) ولاړې کرښی میلان یا جگوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د p_1 څخه تیریدونکی کرښي برابرون د m_2 میلان سره د(۱۶ . ۱) له مخی دي:
$y+(1/6)=-(1/2)(x-173) <=> y=-(1/2)x$

بیلگه ۱۶ . ۱۰ :

د $g1:2x-y-1=0$او $g2: 3x+2y=5$ کرښو د غوڅټکي S واټن له ټکي($P(6,13$څومره دی او د کرښي برابرون څنگه دی چي د کواوردینات له سرچینی تیریږي او د S او P څخه تیریدونکی کرښه باندې ولاړه کرښه وي؟

ځواب : د غوڅټکي کواوردینات د لاندې برابرونونو سیستم څخه لاس ته راځي

$2x-y=1$

$3x+2y=5$

یعنی: $xS=1 , yS=1$

د S او P ټکو ترمنځ واټن له (۱۶ . ۶) څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = \sqrt{(1-6)+(1-13)^2} = 13$$

د (۱۶ . ۳) له مخی د کرښي برابرونونه چی له S او P تيريږي دي

(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1)<=>y=(12/5)x-7/5

(جګوالی: (m = 12 / 5

له S او P تکو تيريدونکی کرښه باندې د ولاړې کرښي ميلان

m2 = -1/m = -5/12

د (P0 (0,0څخه تيريدونکی کرښه د m2 ميلان سره د (۱۶ . ۱) له مخی لاندې برابرون لري

y-0=-(5/12)(x-0)<=> y=-(5/12)x

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ . ۷ تمرينونه

۱ – د هغو کرښو مساوات و ټاکئ، کومې چې له P_1 ټکي تيريږي او د x–محور سره کونج α جوړوي

a) $P_1(2,-3)$, $= 30°$, b) $P_1(-3,2)$ $= 45°$

c) $P_1(-1,-4)$, $= 120°$, d) $P_1(4,4)$, $= 0°$

e) $P_1(0,0)$, $=150°$, f) $P_1(1,-1)$, $= 90°$

۲ –د ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو P_1 او P_2 تيريږي

a) $P_1(0,0)$, $P_2(3,3)$, b) $P_1(-3,3)$, $P_2(0,0)$,

c) $P_1(1,4)$, $P_2(-3,-4)$, d) $P_1(1,2)$, $P_2(-1,1)$,

e) $P_1(0.1.-1)$, $P_2(-0,1,-3$, f) $P_1(1,-1)$, $P_2(4,-2)$!

۳ – د محورونو غوڅي(لنډ: محورغوڅي) a,b د کرښې مساوات په نورمالفورم وټاکئ او همداسې د غوڅټکو واټن d د محورغوڅټکو سره چې يو له بل يې لري وټاکئ.

a) a = 5 , b = 2 , b) a = -1 , b =3 , c) a = 2 , b = -3 , d) a = -3 , b = -3

۴ – يو دريګوډی دا لاندې ګوډټکی لري A(-4,-1) , B(2,-2), C(1,3) . د هغو کرښو مساوات څنګه دي، په کومو چې د دريګوډيو اړخونه پراته دي او معلوم کړئ چې د دريګوډي اړخونه څومره اوږده دي؟

۵ – د لاندې کرښمساواتو نورمالفورم او برختوټينه يا –فورم څنګه دی؟

a) $3x -5y +15 = 0$, b) $4x -3y -18 = 0$

c) $-4x +2y -10 = 0$, d) $-3x -4y +15 = 0$?

۶ – د کرښې $y = -(12/5)x +2$ پروتځای د کرښو

a) $y+2,4x - 6 = 0$, b) $28x +10y = 0$, c) $8x + 5y =2$,

d) $5y +12x -10 = 0$. e) $y +(12/5)x = 3$, f) $6x +2,5y = 5$

سره وڅيړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – د لاندې کرښو د غوڅتکو کواوردیناتونه او غوڅکونج وټاکئ.

a) $2x + 3y = 7$, $3x - y = 5$,

b) $y = (1/2)x + 1$, $y = -2x + 6$,

c) $y - x = 7$, $y = 7$,

d) $x/3 - y/2 = 1$, $-x/2 + y/3 = 1$,

e) $6x - 2y + 10 = 0$, $y = 3x + 6$,

f) $y = 4x - 1$, $y = -3x + 5$!

۸ – کومه کرښه د کرښی $x - y = 4$ ، کرښی $3x + y = 8$ او برسیره پر دې له غوڅتکی $P(0,5)$ څخه تیریږي ؟

۹ – د لاندې گوټ $A(-4,-1), B(2,-2), C(1,3)$ سره د دریگوډي دننه کونجونه څومره لوي دی ؟ (پیلونه: دریکونجی وکاږی)

۱۰ – د ولاړیریوتې کرښې یا زوړندې مساوات له ټکی $P(2,0)$ څخه په کرښه $y = 2x + 1$ څنګه دی؟

۱۱ – د ولاړکرښی مساوات په کرښه $y = 2x + 1$ باندې په ټکي $P(-1,-2)$ څنګه د

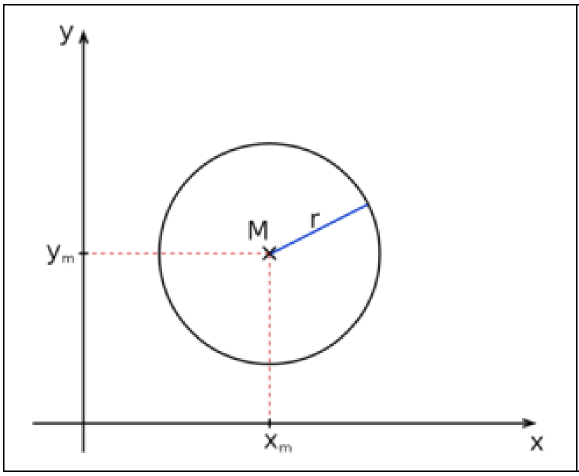
۱۲ – د کرښې $y = 2x + 1$ سره د غبرګې کرښې مساوات چې له ټکي $P(-1,-3)$ تیریږي، څنګه دي؟

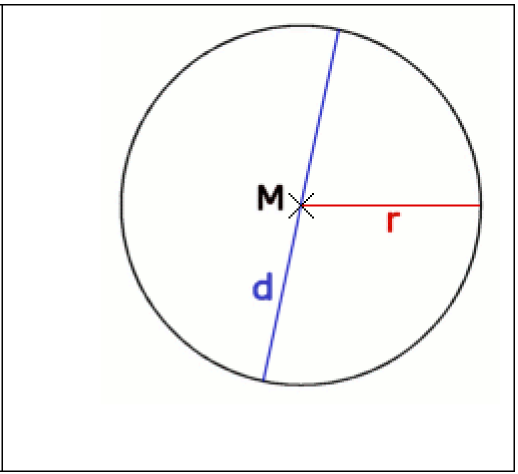
۱۶ . ۲ گردی (دایره)

دایره(گردی) د ټولو هغو ټکو ډیری(سټ) ده، چی د یوه کره ځای په ځای ټکي ، داسې په نامه منځټکی څخه ، همغه واټن ولری. واټن ته یی وړانگه وایو او په rیی په نخښه کوو.
فورمال داسې ویل کیږي یا دا پیژند ورکوو، چې دایره (گردی) k د د سطحې (هوارې) E د ټولو ټکو ډیری(سټ) ده،د کومو لپاره چې باور لري:

$$k = \left\{ X \in E \mid |\overline{MX}| = r \right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





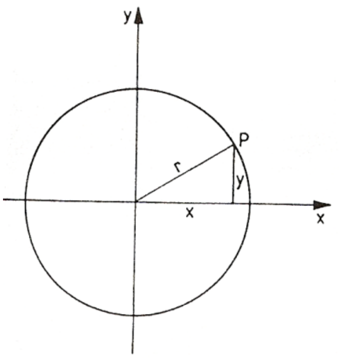


Bild 16.7 ، ځېره

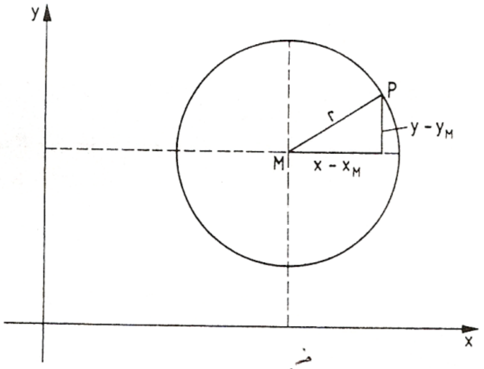


Bild 16.8 ځېره

په شننیزه هندسه کې کیدی شي، چې ګردۍ د منځټکي $M(x_m, y_m)$ او وړانګې r
سره (په هواره کې) د لاندې برابرون له مخې انځور شي.

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

پورته د ګردۍ ټولیز برابرون

دا برابرون د پېژند او پیتاګوراس له جملې سملاسي ورکوي
د یوې ګردۍ ځانګړي حالت او د کواوردیناتسیستم سره، چې منځټکی یې د کواوردینات
په سرچینه پروت وي لاس ته راځي

$$x^2 + y^2 = r^2$$

که د ګردۍ منځ ټکی د کواوردیناتسیستم (خیره ۱۶ . ۷) په سرچینه پروت وي، نو د
) پیوتاګوراس د جملې له مخې (د ګردي په خوبنه ټکي $P(x,y)$ لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16 . 10)$$

د ګردۍ منځټکي برابرون چی د ګردي منځټکی(M(0,0او وړانګه r ده.

که د ګردي منځټکی M کواوردینات (xM,yM) ولري (ځیره ۱۶ . ۸) نو د ګردۍ د خوښی ټکي P(x) لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د ګردي د منځټکي برابرون وي د منځټکي $M(x_M,y_M)$ او وړانګي r سره

که په (۱۶ . ۱۱) کې د بینوم مربع وې شمیرو او برابرون په A|=0 فاکتور ځلوو (بی له دې چی د ګردي برابرون تغیر ومومي) ، پس پیژندل کیږي چی د ګردیبرابرون د ځلورۍ یا مربع غړي په x اوy کی په فاکتور A لاینیز برابرون په x او y او ثابت غړي (چی یوه غړي په ځیري سره یوځاي شوي) لاس ته راوړو.

نو دا لاندې ټولیز(عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2+Cx+Dy+E = 0 . A |= 0 \quad (16 . 12)$$

د ګردي برابرونونو(مساواتو) ټولیز فورم یا ټولیزه بڼه ۰
که د ګردي برابرون په ټولیزه بڼه یا عمومي فورم ورکړشوي او که منځټکی او وړانګه یی څرګنده کوو یا معلوموو نو د ګردي برابرون د منځټکي فورم باندې راوړو یا را اړوو. دا د ځلورۍ پوره کولو یا مربع تکمیلولو په بنسټ صورت نیسي . دوه ځیرې پورته وګورئ

بیلګه ۱۶ . ۱۱ :
د ګردۍ برابرون دې په ټولیزه - یا عمومي توګه وي:

$$2x^2+2y^2 +4x-12y = 0$$

له دې لاس ته راځي، که په دوه وویشل شي $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

(د ځلورۍ پوره کونه یا مربع تکمیلونه) $x^2-4x+4+y^2-6y +9 = 3+4+9$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دبینوم د مربع له لارې انځورونه $(x+2)^2 +(y-3)^2 = 16$
ګردۍ منځټکی $M(-2,3)$ او وړانګه $r=4$ لري.

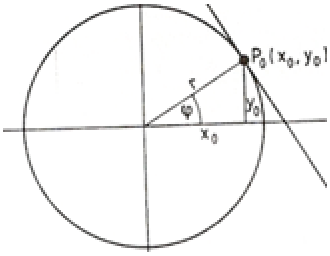
بېلګه ۱۶ . ۱۲ :
د ګردۍ برابرون ولیکی چې منځټکی یې $M(2;0)$ وي او په کوم چې ټکی $P(6,4-3)$ روت دی؟
اوبیونه : د $M(2,0)$ سره (۱۶ . ۱۱) داسې دی
$$(x-2)^2 + y^2 = r^2$$
د P ټکی د ګردۍ برابرون پوره کوي $(6-2)^2 +(4 - 3)^2 = r^2$
له دې څخه د ګردۍ وړانګه په لاندې ډول لاس ته راځي: $r = 8$ او له دې سره د ګردۍ برابرون:
$$(x-2)^2 + y^2 = 64$$
ګردۍ او کرښه یو بل ته درې مختلف ځایونه لرودی شي
۱ - کرښه ګردی غوڅوي، نو له دې امله غوڅی ده(سیکانتې)
۲ – کرښه ګردۍ په یوه ټکي کی لمسوي یعنی مماس دی (تانجنت یا جګوالی)
۳ - کرښه ټوله له ګردی دباندې پرته ده (له ګردۍ تیریدونکی، لنډ : تیریدونې)
د غوڅټکي(د تقاطع ټکي) کواوردینات باید د ګردۍ اوکرښی برابرون پوره کړي سرې د کرښي برابرون د ګردۍ په برابرونونو کی ږدي(y یا x پسی حل یا اوبۍ شوي) او په روښانه ډول یو مربع مساوات (څلوری برابرون) په x او y کی لاس ته راوړي، کوم چې په څرګند ډول (پرتله برخه ۱۲ . ۲) دوه ریل اوبیونې یا ځوابونه لري، یو رییل ډبل اوبی او یا هېڅ رییل اوبی کیدی شي ولري، کوم چی له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ څخه عبارت دي.

بېلګه ۱۶ . ۱۳:
کوم پروت ځایونه ګردی k چې راکړشوی: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ اولاندې کرښی و یو بل ته لري؟
$$g1 : 2x+y=4 ,g2=2x+y=12 , g3: -x+y/2=3$$

اوبی: $g1: y=-2x+4$ که د ګردیبرابرون کی ځای کړو نو دا برابرون لاس ته راځي
$$(x-2)^2+(-2x+4 -3)^2=5 <=> 5x-8x=0$$
ددې ځوابونو $x=0 , y=4$ او $x=8/5 , y=4/5$ سره به g1 د ګردي غوڅوونی یا سکانت (Sekant) وي.
که $g2: y=-2x+12$ د ګردي مساواتو کی ځای کړو نو لاندې لاس ته راځي
$$(x-2)^2+(-2x+12-3)^2=5 <=> x^2-8x+16=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډېل اوبوني x1,2 = 4 , y1,2 = 4 سره g2 یو تانجنت دی.
که g3 : y=2x+6 د ګردی مساوات کی ځاي کړو، نو لاندې لاس ته راځي:
$(x-2)^2+(2x+6-3)^2 <=> 5x^2+x+8=0$
دا ځلوری برابرون یا مربعمساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه g3 له ګردی k دباندې پرته ده، یعنی دباندنی یا دباندونی ده.



په ګردي $x^2+y^2 = r^2$ (څېره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرون په ټکی $P0(x0,y0)$ د مساوات $x0^2+y0^2 = r^2 >0$ سره غوښتل کیږي. تنجنت د مماس په ډول نیغ ولاړ دی
د مماسوړانګه دا میلان یا جګوالی لري $\tan\phi = \frac{y_0}{x_0}$ او
له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخی د تنجنت

$$m = 1/\tan\phi = -x_0 / y_0; ....(16,13)$$

د تنجنت یا جګي برابرون د (۱۶ . ۱) سره سم لاس ته راځي:
$y-y=-(x0/y0)(x-x0) <=> xx0+yy0=x0^2+y0^2=r^2$

$$xx_0+yy_0 = r^2 \qquad (16 . 14)$$

د ګردی تنجنت باربرون په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ په ګردي
$x^2+y^2 = r^2$

(حالتونه $P0(\pm r,0)$ او $P0(0,\pm r)$ په (۱۶ . ۱۴) کی ځاي (دننه) دي. (څېره . ۱۶ . ۱۰)

(c) ketabton.com: The Digital Library

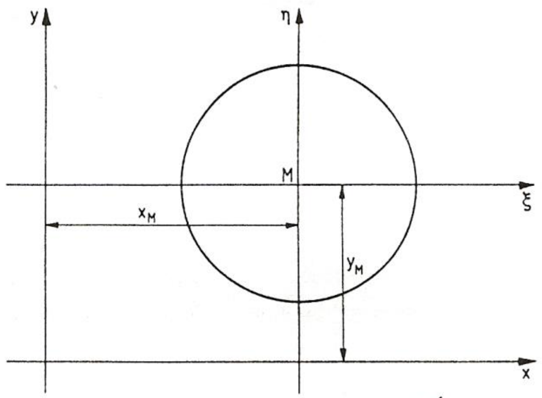


Bild 16.10 ځاکه

یادونه : که له دې مخ ته یا وروسته x0,y0 یا xM,yMاو x_0, y_0 یا x_M, y_M ګورو نو کتمټ دي

بیلګه ۱۶ . ۱۴:

د دوه تنجنتو برابرون له ټکي(P1(-12,4 په ګردي $x^2+y^2=r^2$ په څه ډول دي؟
اوبیونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټکی پیداکوو. دا باید دګردی برابرون پوره کړي . ټکی P1 باید په تنجنت پروت وي یعنی د تنجنت برابرون (۱۶ . ۱۴) باید پوره کړي. نو باور لري

$x_0^2+y_0^2 = 16$ او $-12x_0 + 4y_0 = 16$

که دا لاینیزبرابرون د y0 په لور حل شي ، نو په x0 کي یو څلوری برابرون یا مربع مساوات لاس ته راځي

$x_0^2+(3x_0+4)^2 = 16$

همداسي $5x_0^2+12x_0=0$د اوبیونو $x_{01}=0$, $x_{02}=-12/5$سره. داهم په دې پورې اړه لري

$y_{01}=4$, $y_{02}=-16/5$

د تنجنت مساوات په ګردې، په ټکو(P01(0,4او(P02(-12/5,16/5-)د (۱۶ . ۱۴) له مخی په لاندې ډول دي

$0.x+4y=16 \Leftrightarrow y=4$

او

$(-12/5)x-(16/5)y=16 \Leftrightarrow y=(-3/4)x-5.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګردۍ مساوات (۱۶ . ۱۱) د منځڼکي (M(xM,yM سره د η,ζ -کواوردينات سيستم کی ، چی سرچينه يي په M کی پرته ده)(؟ څيره ش . ۱۶ . ۱۰) لاندې فورم لري.

$$\zeta^2 + \eta^2 = r^2$$

د تنجنت مساوات په ټکي $P_0(\zeta_0, \eta_0)$ کی داسی دي

$$\zeta\zeta_0 + \eta\eta_0 = r^2; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16,15)$$

د η,ζ -کواوردیناتسیستم د y,x - کواوردیناتسیستم يو غبرګ کښوول (راکښل) دي، او د دواړو کواوردیناتسیستم کی لاندې اړيکی پرتی دي .

$$\zeta = x - x_M , \eta = y - y_M ; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16,16)$$

که برابرون (۱۶ . ۱۶) د تنجنت مساواتو(۱۶. ۱۵)کی ځاي په ځاي شي، نو سړی بيا دا y,xد -کواوردينات سيستم ته ترانفورميرکوي(کشوي يا راکاږي) :

$$(x-x_M)(x_0-x_M)+(y-y_M)(y_0-y_M)=r^2 \qquad (16.17)$$

په ټکي(Po(x0,y0کی د ګردۍ تنجنت برابرو په ګردۍ

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$$

بيلګه ۱۶ . ۱۵:

په ګردۍ چی برابرن $x^2+y^2+16x+4y+43 = 0$ لري، دx - محور باندې، په ټکو

$$x_1 = x_2 = -5$$

سره تنجنت وکا ږو(کيږدو). برابرون يی څنګه دي؟

اوبيونه : د ګردۍ برابرون د منځڼکي فورم (۱۶. ۱۱) باندې بدليږي:

$$x^2 +16x+64+y^2-4y+4 = -43+64+4$$

$$(x+8)^2 +(y-2)^2 = 25$$

او له دې لاس ته راځي

$$x_M = -8 , y_M = 2 , r = 5$$

د ګردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه

$$x_1 = x_2 = -5$$

د دواړو ګردۍ ټکو په ګرديبرابرون کی ځايوو:

$$(-5+8)^2+(y-2)^2=25$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې داسی لاس ته راغلي دy لپاره ځلوری‌برابرون یا مربع مساواتو د دواړو اوردیناتو مماس ټکي لاس ته راځي : $y1 = 6$, $y2 = -2$

د (۱۶ . ۱۷) سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي

$(x+8)(-5+8)+(y-2)(6-2)=25 \Leftrightarrow 3x+4y=9$

او

$(x+8)(-5+8)+(y-2)(-2-2)=25 \Leftrightarrow 3x-4y=-7$

تمرینونه:

۱۳ – د لاندې مساواتو سره ګردیمنځټکی او وړانګه وټاکئ:

a) $x^2 + y^2 = 20$

b) $x^2+y^2 +2x -4y + 1 = 0$

c) x^2+y^2 $9y = 0$,

d) $4x^2 +4y^2+32x-8y+67 = 0$

e) $36x^2 +36y^2 -36x +24y -23 = 0$,

f) $x^2+2x+y^2+2y = 16$!

۱۴ – د لاندې ګردیو مساوات وټاکئ

الف) چې منځ ټکی $M(-2,-1)$ لری او له سرچینی تیریږي

ب) هغه چې دري ټکی $P_1(3,0)$, $P_2(5, 5 -3)$, $P_3(5 \, ؛3,-1)$ یی د غاړو ټ

پ) چې وړانګه $r = 6$ لري او له ټکو $P_1(-1,11)$,$P_2(5,5)$ څخه تیریږي.

ت) له ټکی $P_1(3,4)$ تیریږي او کرښه $y = -(4 / 3)x + 13$ په ټکي $P_2(4,3)$
لمسوي.

ټ) چې منځ ټکی $M(2,2)$ لري او کرښه $y = -(4 / 3)x +13$ لمسوي.

ث) چې د هغي منځټکی په کرښه $y = 3x -19$ پروت دی او له ټکی $P_1(7,-2)$
او همداسی له ټکي $P_2(11,2)$ څخه تیریږي.

۱۵ – کوم پروتخایونه ګردی k چې فرمول لري $x^2+y^2-8x = 0$ او لاندې کرښې
یو له بل سره لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $g: y = 2x + 1$, b) $g: y = x$, c) $g: y = x - 1$,
d) $g: y = 4$, e) $g: y = -x - 3$, f) $g: y = x - 3$?

۱۶ – کوم پروتخاي کرښه $3x + 4y = 25$ ګردی $x^2 + y^2 = 25$ ته لري؟

۱۷ – د تنجنت مساوات څنګه دی

الف) په ټکي $P_0(5, y_0)$ چې په ګردی $x^2+y^2 = 169$ پروت دی،

ب) په ټکي $P_0(x_0, -2)$ چې په ګردی $(x - 1)^2 + (y-2)^2 = 25$ پروت دی؟

۱۸ – د هغو ګردیو منختکي پیداکړی چې وړانګه یې $r = 5$ وي، کومی چې کرښه $3x + 4y = 9$ په ټکي $P_0(-1, 3)$ کی لمسوي!

۱۹ – په ګردی $x^2 + y^2 = 25/4$ د هغه تنجنت مساوات وټاکی، کوم چې د کرښي $y = (4/3)x + 2$ سره غبرګ څغلي؟

فنکشنونه(بلواك يا تابع)

د فنکشن کليمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چې ددې برخی په پیل کی دی کلیمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کليمه کله د يواځنی څیرونی، چی په هندسه کی خورا ډیره کارول کیږي يا استعماليږي ، کله د بلواك او بيا زياته د فنکشن په نامه څموږ په دې کار کی بلل شوي چی موږ ورسره تراوسه د تابع د نامه لاندې هم بلد يو، څما په اند يا فکر که دا موږ څیرونه وبولو، نو موخه ور يا هدفمند به مو نومولی وي او تابع خوبې له هغې بلواک دی. په لاندې کې به وګور چی خپلواکی او بلواکی ناپیوندونکی څموږ د څیرلو متن جوړوی

پیژند ۱۵ . ۱:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې ريیلي وارياېلي (اووښتوني يا متحولې) Rريیل ارزښته فنکشن(لنډ: فنکشن يا ځيرونه) د ريیلو ګڼونو ډېرى باندې ، د يوې ډېرى $D \subseteq R$ يوه يواځنى ځيرونه ده.
D دپيژند ډېرى نوميږي .

د ټولو ارزښتونو ډېرئ چې y يى د ځان لپاره غوره کولى شي، که x د پيژندډيرى يا تعريف ډيري په دننه کى وځغلي، د ارزښت ډيرى W بلل کيږي .

د دي قانونمندى f له مخى هرx $\in$ Mيواځني يوه y $\in$ W باندې تنظيميږي يا ځيره کيږي :

$$y = f(x)$$

اوس نو x خپلواك واريابل يا اووښتونى يا مجهوله بلل کيږي يا نوميږي او y بلواك واريابل يا اووښتونى بلل کيږي، له دې امله تابع، چې موږوايو، د ځيروني هغه ځيره شوې خوا ده. (د فنکشن يا ځيروني او تابع يا بلواک توپير)

د فنکشن مختلف انځورډولونو په منځ کې سرى توپيروي. د دې کليمه انځورونه کې له ماتماتيکي يا شميريز سومبوليك څخه تيريد شو،خو ، مګر ددې لپاره يو پيچلى، د تشريح شکل دى، چې

په لاندې کې به ورسره بلد شو.

بيلګه ۱۵ . ۱ : هر ريیل ګڼ د همغه ريیلګڼ په نيم ور زيات ۱ باندې تنظيميدل يا ځيره کيدل..

بيلګه ۱۵ . ۲ : هر يو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر يو مثبت ګڼ او صفر به د هغه په مربع تنظيم شي.

د شميرپوهنى سومبولونو تر استعمال لاندې، تحليلي (شننيزه) انځورونه د بلواک يا فنکشن تشريح ده. دلته x اوy د نورو ريیلو ګڼونو سره د بنسټيزو کارونو يا عمليو ، زياتون، کمون ، ځل ، ويش ، او د بنسټيزو فنکشنونو له لارې تړل دي (پرتله برخه ۱۵ . ۴)

بيلګى ۱۵ . ۱ ته: $y=(x/2)+1, D=R , W=R$

بيلګى ۱۵ . ۲ ته :
$y=|x|$ د $x<0$ لپاره
$y=x^2$ د $x>0$ لپاره
دلته $D=R,W = [0,oe)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام دې وي چې په داسې حالت کي له کيڼ و ښې لور ته یا ګډوډ لوستل کیږی یعنی داسې لولو:
y د x مطلقه ارزښت سره مساوي دی ، که چیرې x له 0 کوچنی وي.

داسې لیکنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چې له اشتباه سره به نه مخامخ کیږو) . تحلیلي(شننیزه) انځورونه اکسپلیڅیت(واضح)روښانه و ځرګند) explizit نومیږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بیلګو ۱۵ ، ۱ ۱او ۱۵ . ۲ چې په یوه د y په لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي: y =f(x)
که چیرې داسې نه وي نو د تحلیلي - یا شننیزې انځوروني شکل F(x,y)=0 دی او فنکشن ایمپلیڅیت (ورسره ځای شوي یا وراسره تړلی implizit) بلل کیږي یا نومیږي . د بیلګی په توګه به 2y-x-1=0 ,D=R,W=R فنکشن د بیلګي ۱۵ . ۱ یو ایمپلیڅیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیڅیت شنینیزه بڼه (ایمپلیڅیت تحلیلي فورم) کیدی شي په اکسپلیڅیت شننیزه یا سپړنیزه بڼه (تحلیلي فورم) واړول شي.
د بیلګی په توګه:
که $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اکسپلیڅیت حل کیدونکی نه دی.
د یو فنکشن تحلیلي یا شننیزې انځورونی ځانګړې بڼه پارامتری ځرګندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتونې یا واریابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لاربنودیږي. هر پارامتر (له یوه پارامتر ساحی څخه)
$x = \varphi$ (t) , y = Ψ (t)

په یو ارزښتجوړې x,y تنظیمیږي.

بیلګه ۱۵ . ۱ ته: x=2t ,y=t+1; -oe< t <oeبه یوه پارامتري انځورونه وی
او x = t , y = t/2 + 1 به یوه بله پارامتري انځورونه وي.
زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کیږي

بیلګي ۱۵ . ۱ته:

X	-2	-1	0	1	2	....
Y	2	0,5	1	1,5	2	.....

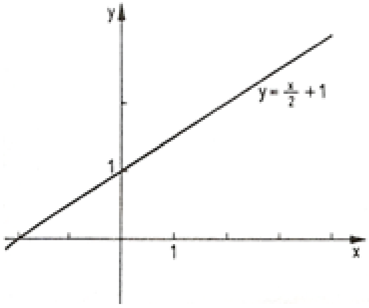
بیلګي ۱۵ ، ۲ ته:

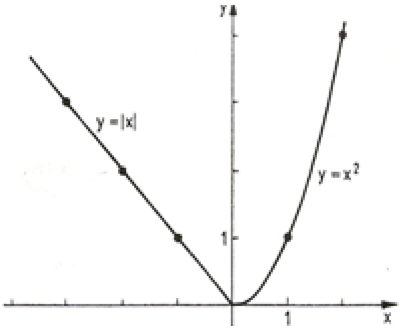
X....-3 2 -1 0 1 2 3 ...

(c) ketabton.com: The Digital Library

Y....3   2   1   0   1   4   9 ...

د فنکشن گرافیکی انځورونه (د یوې ټوټې) په x,y- کواوردینات سیستم کی د یوې کرښې له لارې، د هغه فنکشن انځورونی ځخه عبارت ده ، چې د واریابلو یا اووښتونوجوړې د x,y- هواره یا سطحه کی یواځني او یواځني ټکي باندې تنظیمیږي . ځیره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲) بیلګي ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته





۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: y = f(x)
په ایتروال] a,b [کی هلته او هلته یا ټیك هلته مونوتون جګیدونکی
(مونوتون لویدونکی) دی، چیرته چې ددوه په زړه پورې ارزښتونو
$x \in [a,b] \;\wedge\; y \in [a,b]$ لپاره د$x1<x2$ سره باور ولري:
$f(x1) \le f(x2)$ $(f(x1) > f(x2))$
که د برابرونښنه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږیږو.

وبیلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دی

و بیلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اینتروال) [oe,0] کي مونوتون ټیټیدونکی یا -لویدونکی
او په   اینتروال [oe,0) کی مونوتون جګیدونکی دی

پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه اینتروال [a,a-] کی یو تعریف شوی فنکشن ($y = f(x)$ هلته او هلته جوړه (جفت) یا سیومتریك symetrisch), ناجوړه (طاق) یا نا- یا انتیسیومتریك antisymetrisch بلل کیږي چی باوري وي

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$

د جوړه فنکشنونو ګیرې اکسیال یا محوري سیومتریك و y - محور ته ځغلي) دلته هم ګیره شته ، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵ . ۳ (، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا مرکزي سیومتریك ځغلي) بیا هم ګیره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴)

بیلګه ۱۵ . ۴

فنکشن $y= x^3 ,D= R$

یو ناجوړه یا طاق فنکشن دی :

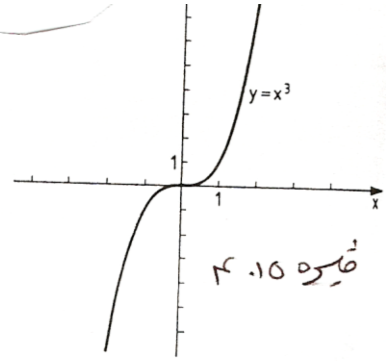
$$(-x^3) = -x^3$$

بیلګه ۱۵ . ۳ :

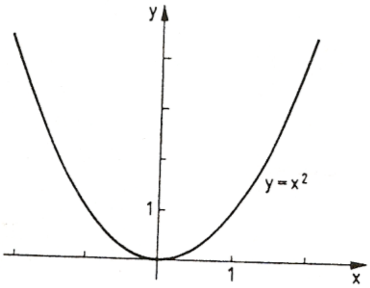
فنکشن $y=x^2,D=R$

یو جوړه یا جفت فنکشن دی:

$$(-x)^2 = x^2$$



ځیره ۱۵ . ۴



ځیره ۱۵ . ۳

د بیلګي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي

پیژند ۱۵ . ۴:

($y = f(x$ تیلك هلته په D (پیژندډیری ده) بند یا رابند(محدود)بلل کیږي که یو $k > 0$ داسی شته وي چي دا باور ولري:

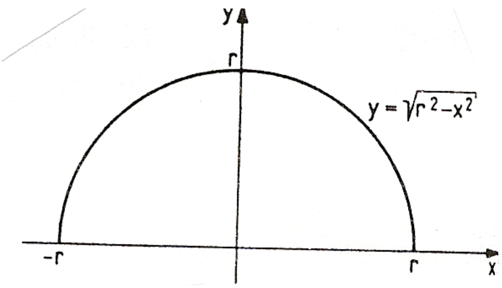
$$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$$

بیلګه ۱۵ . ۵:

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D = [-r , r]$
رابند يا راګير(محدود» زه به دا له دې وروسته
بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نيم يوونګردی څيره ده(

ش . ۱۵ . ۵ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \le r$



پيژند ۱۵ . ۵:

$y = f(x)$ پريوديکي(دوراني يا بيرته- يا تل بيرته راګرځيدونکی periodical بلل کيږي د دوران يا راګرځيدونی p سره ، که باور ولري:

$$f(x + p)= f(x)$$

د دورانی يا تل راکځيدونکو (پريوديکي) فنکشنونو تيوپيکي بيلګي ترېګونومتريکي فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵ . ۳)

پيژند ۱۵ . ۶ :

ټول $x \in D$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځايونه بلل کيږي٠

د فنکشن صفرځايونه د مساوات $f (x) = 0$ د حل له لارې پيدا کيږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کرږې د غوڅټکو x - ارزښتونه دي.

بيلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2 x + 1$ صفرځايونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دی (څيره ۱۵ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه۰ ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:

$$x^2 - 4 = 0 \iff x1 = 2 , \quad x2 = -2$$

فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري.) بیا هم ځیر ۱۵ . ۶ (

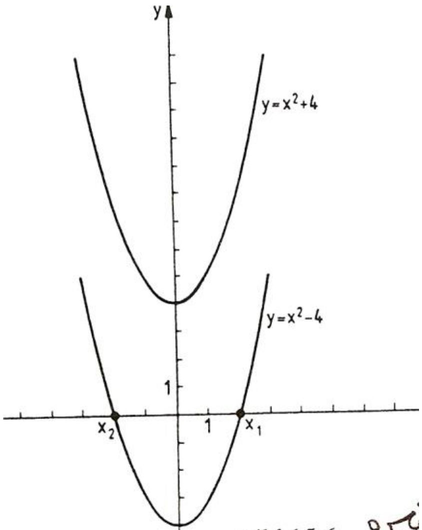


Bild 15.6

پیژند ۱۵ . ۷:

$x \in D \quad , \quad y \in W \quad y = f(x),$

یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کیږي، که هریو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی وي
یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ ځیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: (y = f(x)یو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په ځتکیدونکی دی ، دا په دې مانا چي دا یو فنکشن (x = g(y) تعریفوي، یعني په څټ یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا واریابلو د نخښی(نخونی) سره بدلی شي، نو د په څټ فنکشن په توګه لرو y=g(x) دا د فنکشن روځنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه ځیره ده، چی x خپلواك اوyبلواك ، دلته د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپیزندونکی دي د y=f(x) په څټ یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن y = x د خپل په څټ فنکشن سره کتمټ(- ورته) identic دی۰د په څټ یا برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرافيکی ښيره $y = x$ په کرښه د $y = f(x)$ هندارونه) يعنی په هنداره کی ښيرونه او لنډ يی: هندارونه) ده٠

بيلګي ۱۵ ، ۱ ته :

د فنکشن $y = f(x) = x/2 + 1$ چپه يا په ښټ فنکشن داسی دی
$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$
سږی $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبی کوي: $x = 2y - 2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
(ښيره. ۱۵ ۷ الف)
ړ

بيلګي ۱۵ . ۳ ته : فنکشن
$x \in D$ $y = x^2$,
ښيرره ش ۱۵ . ۳) په ښټکيدونکی دي يا په ښټکيدونکی نه دی.
هر $y \in W$ =[0,oe] پوري دوه= [-oe,oe] $x \in D$ اړه لري، يعنی $x=+y$او $x=-y$
مګر $y = x^2$کلك مونوتون جګيدونکی دی (او په دې ډول يواځنی او يواځنی).

د $x \geq 0$ لپاره او کلك مونوتون لويدونکی د $x < 0$ لپاره. $y=x^2, x \geq 0$
ته چپه- يا په ښټ فنکشن $y=+x$ دی، او $x < 0$, $y = x^2$ ته چپه- يا په ښټ فنکشن - = y
xدی. (ښيره ۱۵ . ۷ ب) .
په ټوليزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

که $y = f(x)$کلك مونوتون جګيدونکی) لويدونکی (وي ،نو په ښټ فنکشن $y = f^{-1}(x)$
موجود دی او دا هم کلك مونوتون جګيدونکی (لويدونکی) دی.

۱۵ . ۳ . بنسټيز فنکشنونه

په دې برخه کي بنسټيز فنکشنونه تعريفيري. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه، پوتنځ يا په توان فنکشنونه، ايکسپوننشل فنکشنونه او لوګاريتم فنکشنونه، ترېګونومتري فنکشنونه او ښيکلومتري فنکشنونه دي. دا بنسټيز فنکشنونه به د ځپلوځانګړدوله خويونو له مخی وڅيړل شي. په برخه ۱۵ . ۴ که به دفنکشن فنکشنونه (ځنځيری - يا تړلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشنونه) وڅېړل شي. د فنکشنونو څېړل به د هغو ځانګړولو یا کرکټریستیکي خویونو له مخې هلته هم دوام ومومي، که د دیفرنشل شمیرنې کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پیژند ۱۵ . ۸ :

فنکشن

$$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a^2x^2+a_1x+a_0, n\in N;\ a_i\in R, a_n\neq 0 \quad (15\ .1)$$

د ټولو $x\in R$ لپاره تعریف دی او n - مه درجه ټولریشنلفنکشن نومیږي.دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه(یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه (n = 1) یالاینی فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \qquad (15\ .2)$$

دلته m او n په (۱۵ . ۱) کې پارامترونو a1 او a0 په مانا دي. د لاینی فنکشنونو څېره(ګراف) یوه کرښه ده چې په y = n کې د y - محور غوڅوي (x = 0) او جګوالی $m=\tan\alpha$

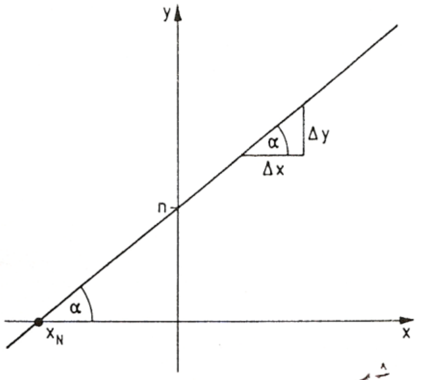


Bild 15.8 ګاره

لرې (څېره پورته . ۱۵ . ۸) جګوالی د y - ارزښت د تغیر د x - ارزښت تغیر سره متناسب دی:

$$m = \Delta y / \Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

کرښه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که 0 =|m نیول شوی وي، ټیك یو صفرځاي (= y 0 لري: $x_N = - n/m$

که را په غاړه شي چی د یوې کرښی برابرون، چی له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2) تیریږي، پیدا کړو چي پو په بل نیغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرنټکی یا نوره بڼه غوښتیکی n په y - محور د برابرونسیستم

$$y1 = x1m + n , y2 = x2m + n$$

له مخی پیدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو

$$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$$

په بل پل)قدم(کی موږ ۲ -امه درجه ټولریشنل فنکشنونه یا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو لکه په (۱۵ . ۱) کي $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$$y=ax^2+bx+c , a |= 0 \qquad (15 .3)$$

د مربع فنکشنونو څیره) ګراف (پارابول دی چی د هغي سیومتري محور و y - محور ته غبرګ ځغلي. کوایفیځینت) ځله ووني یا ځلیدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاي او بڼه)فورم(ټاکی.

موږ د مربع فنکشن یو څو ځانګړي حالتونه تر څیرني لاندې نیسو.

1. $y=x^2(a=1 ,b=0,c=0)$ (15 . 4)

نورمال پارابول، د ککرې کواوردینات: $x_s = 0 , y_s = 0$

(خ . ۱۵ . ۹)

2. $y=x^2+px+q$ $(a=1 , b=p , c=q)$ (15 . 5)

او $x^2 + px$ ته د خلورې - یا مربع تکمیلولو ورزیاتونی څخه لاس ته راځي:

$$y=x^2+px (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2 \qquad (15,5)$$

یو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په $q - p^2 /4$ راکښل) رابنکل-یا راکش - (شوی نورمال پارابول د ی ، دا په دې مانا چی په (۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککره لرې:

$$x_s = -p/2 , y_s =q - p^2/4$$

بیلګه ۱۵ . ۷:

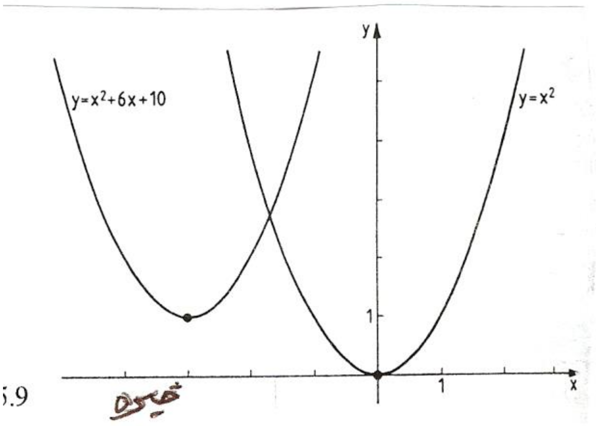
(c) ketabton.com: The Digital Library

$y=x^2+6x+10$, $x_s=-6/2=-3$, $y_s=10-6^2/2=1$
(خ،۱۵ . ۹)
3. $y = ax^2$ ($a|=0, b=0, c = 0$)
د ککرې (سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0$, $y_s = 0$

پارابول د $|a| > 1$ لپاره خور، د $|a|<1$ لپاره پرسیدلی،د $a > 0$ لپاره پورته لور ته او د a $0 <$ لپاره کښته لورته واز دی (خلاص دی)

بیلګه ۱۵ . ۸:
$y = 2x^2$, $y = (1/2)x^2$, $y = -2x^2$
(خ . ۱۵ . ۱۰)
4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرې (رأس) کواوردینات داسی دی (لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللي یو)
$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c-b^2/4a^2$



5.9 خیره

بیلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$,($a=-1/2$, $b=1$, $c=4$)
دککرې کواوردینات:
$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4-12/(4.(-1/2)) = 9/2$
دا چي $a = -1/2$ دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵ . ۱۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

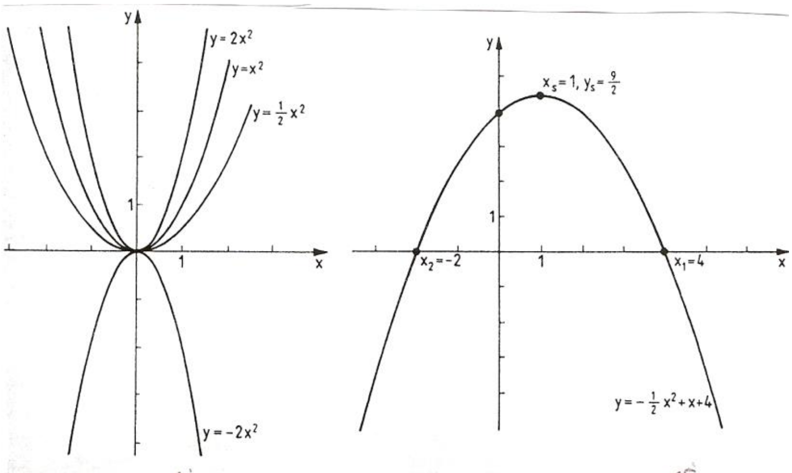


Bild 15.10 Bild 15.11

د فنکشن $y=ax^2+bx+c$ د صفرځايونه د برابرون $ax^2+bx+c=0$ اوبيونې دي.
وبيلګي ۱۵ . ۹ ته (خ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځايونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2+x+4=0$ ، چې دلته $x_1 = 4, x_2 = -2$ دي٠

و بيلګي ۱۵ . ۷ (ځيره ۱۵ . ۹) ته:
د $x^2+6x+10=0$ ياني $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$ څخه لاس ته راځي
چې برابرون رييل صفرځايونه نه لري.

فنکشن $y = x^2$ غبرګ يا جوړه(ډبل) صفرځايونه لري ياني $x_{1,2} = 0$ دي

د ټولريشنل فنکشن دريمو او لوړو درجو لپاره به د بيلګي په توګه دټولريشنلفنکشنونو بيلګي له مخې، دريمه درجه ټولريشنل فنکشن راوړو
چي د فنکشن ارزښت شميرلو يو ځانګړی ليدوړ فورم دی، د هورنرشيما(ښه Horne rschema، معرفي شي. ددې لپاره به د(۱۵ . ۶) فورم بدل شي.

$y = [a_3x^2 + a_2x + a_1]x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$ $x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$

هغه ورکړ شوي خپلواك x_1 پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1 = f(x_1)$ کيدی شي له دې ښځی سره په لاندې ډول وشميرل شي:
a3 له x1 سره ځل کيږي، دې سره a2 زياتيږي، زياتون يی له x1سره ځل، او a1 ور زياتوو، زياتون د x1 سره ځل او a0 ور زياتوو. دا د عمليوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شيما (د هورنرشيما) له لارې په ليدوړ ډول مخ ته بيايو (ځرکندوو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلونه یا ضریبونه	a_0	a_1	a_2	
منحنی خلونه	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1$	$(a_3x_1+a_2)x_1$	a_3x_1	
منحنی زیاتون	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1+a_0 = f(x_1)$	$(a_3x_1+a_2)x_1+a_1$	$a_3x_1+a_2$	a_3

ددې شیما پوهیدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهیدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بیلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x1 = -2$ او $x2 = 5$ څخه شمیرل کیږي.

اوبیونه) :

که چیرې ددریمی درجې ریشنلفنکشن یو صفرځاي ولري، نو کړی شو چې د پولینوم ویش له لارې دا لاینې فاکتور بیل کړو(پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بیلګې ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5):(x-5)=x^2+3x+1$ له دې امله لرو:

$y = x^3-2x^2-5 = (x^2+3x+1)(x-5)$

د ویش پولینومونو ځلووني ، یعنی 1 د(x^2) سره ، 3 د (x) سره او 1 د هورنرشیما په اخره لیکه کی ولاړ دی. د هورنرشیما له لاری د صفرځاي شمیرلو سره په همغه وخت یا دمګړی کی د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او $f(x1)=0$ چې د $(x-x_1)$ سره د ځلوني له لارې دا تصدیقیدلی شي. پاتی صفر ځایونه د ځلورۍ – یا مربع برابرنی د اوبیونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0; x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دریمی درجې فنکشن د درې لاینې فنکشنونو د ځلونې په څیر لیکل کیدی شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=x^3-2x^2-14x-5 = (x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وینا په عمومي توګه د ټولو n- م درجو ريشنل ړرزرنړ ړړطړتظداغظطافنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ريشنلفنکشن n صفرځایونه لري . کیدي شي دا ټول يو له بل توپير ولري او يادا صفرځایونه څوځله هم رامنځ ته شي، رييل او يا جوړه کونجوګيري کملکس کیدی شي.

که $x_1, x_2, ..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځايونه وي

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

نو دا د لاينيز فاکتورونو د ځلونې په څير په لاندې ډول ليکل کيدی شي:

$$y = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)a_n$$

د هورنرشيما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونيول شي:

که په يوه n - م درجه پولينوم کی يو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوايفيځينت يا ځله ووني لپاره دې صفر وليکل شي.

بيلګه ۱۵ . ۱۱ :

5 - مه درجه ټول ريشنلفنکشن

$y = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80$ درې صفرځايونه $x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2$

لري. نور صفرځايونه دې پيداکړی شي او فنکشن دې د لاينيزو فاکتورونو د ځلونې په څير وليکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې يو په بل پسی د پولينوم ويش يو پاتی 2 - مه درجه پولينوم لاس ته راکوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	2	0	-6	-20	-8	80
$x_1 = 2$		4	8	4	-32	-80
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0
$x_2 = 2$		4	16	36	40	....
	2	8	18	20	0=f(2)	
$x_3 = -2$		-4	-8	-20		
	2	4	10	0=f(-2)		

دا پاتی پولینوم $(2 \quad x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله
د $x_{4,5} = -1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i$

لپاره لاندې د ځل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي
$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$

ددې لپاره چی د دریمي او جګو درجو د ټول ریشنلفنکشنونو یوه څیره یا تصویر ولرودی شو، نور کرکتریستیکی یا د خویونو ټکی یی د دیفرنځیالشمیرنې له لارې لاسته راوستی شو(برخه ۲۰ . ۴)

بي له دې چی د دفیرنځیالشمیر له مرستي کار واخلو ، کیدی شي چی د هغه د ناپای په هکله وینا وي وکړی شو. موږ په لیدیدونکی ډول د فنکشن د پولی کلیمه په کار اچوو، کومه به چی په برخه ۱۹ کی ټیك تعریف شي. دا د بیلګي په توګه دا مانا لري
چی $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ سره (f(x تل ارزښت g ته نزدې کیږي، که x د oe یانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty}[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چی
xn -> oe

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي
او xn ->±oe د±oe<- x لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او a_n زیاتیز یا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$
(کږه له - oe څخه oeد په لور ځي) .
که n جوړه او a_nکمیز یا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$
کږه د - oe څخه د - oe په لور ځي) .

که n ناجوړه او a_n کمیز یا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = \infty; \lim_{x\to-\infty} y = -\infty$
کږه له - oe څخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او a_nکمیز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \lim_{x\to-\infty} y = \infty$
کږه لهoe څخه د - oe په لور ځي)

پیژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0};..........(15,7)$$
$$n, m \in N_0; a_k, b_i \in R; Q_m \neq 0$$

مات ریشنلفنکشن بلل کیږي او د ټولو x د $Q_m(x) \neq 0$ لپاره تعریف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نومیږي، که n<m وي او نااصلي مات دی
که n ≥ m ، نااصل مات فنکشن کیدی شي چې د پولینوم ویش له لارې تجزیه
(ټوټه) شي او د یوه ټول ریشنلفنکشن او یوه ریښتونی ماتی برخی د زیاتون په څیر
ولیکل شي.

بیلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y = \frac{2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{x^3 - 4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې فنکشن
باندې دماتباندې فنکشن ویش څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(2x^4-3x^3-6x^2+13x-6):(x^3-4x)=2x-3$$

د $2x^2+x-6$ پاتی (باقي) سره. پس لرو:

$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x).$

فنکشن (۱۵ . ۷) د $x = x0$ لپاره یو صفرځاي لري، که $x = x0$ وي نو باور لري:

$P_n(x_0)=0$ مګر $Q_m(x)\neq 0$

دا د $x=x_L$ لپاره تشځاي (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0)=0$ او $Q_m(x)=0$

د $x=x_P$ لپاره یو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P)\neq 0$ مګر $Q_m(x_P)=0$

بیلګه ۱۵ . ۱۳ :

فنکشن ($y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x$ د ماتباندې- او ماتلاندې فکشنونو توټي کولو وروسته په لاندې فورم د لاینې فاکتورونوپه توګه لیکل کیږي.

$$y=\frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x=x_0=3/2$ لپاره ماتباندې صفر دی، مګر مات لاندې صفر نه دی (صفرځای)مات لاندې- او مات باندې فنکشنونه د $x = x; L = -2$ لپاره صفر دې (تشځای)

د $x=x_{P1}=0$ او $x=x_{P2}=0$ لپاره ماتلاندې صفر او مات باندې صفر نه دی (قطب)

که x سره د قطب ځاي ته نزدې شي، نو y د ناپای په لور ځي چې د قطبځای (تیك ناپای ځای بللکیږي) xpکې کره داسیمپتوتي کرښي $x = xP$ ته نزدې کیږي.د یوه تشځای xL په حالت کې ماتفنکشن د نامعلومی افادې $0 / 0$ شکل غوره کوي، له دې امله د $x = xL$ لپاره تعریف نه دی.

په ناپای کې د فنکشن ځان نیونی ته:

د اصل ماتفنکشن ($n<m$) د x په جګ پوتنځ یعنی x^m د ماتباندې او ماتلاندې د ویش څخه لاس ته راځی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=\frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}}+\frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}}+\ldots+\frac{a_1}{x^{-1+m}}+\frac{a_0}{x^m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{0}{b_m}=0$$

داچی د x تول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x تول پوتنځونه د ناپاى په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن ځيره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کيږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نيسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه یی د صفر په لور ځي، لکه تولريشنل برخه.
د نااصل مات فنکشن ځيره د x -> ±oe سره ، ځان خپل تولريشنلبرخی ته نزدې کوي.

بيلګه ۱۵ . ۱۴:

الف: $y = x/(x^2+1)$ د $x0 = 0$ په ځاي کی صفرځاى لري. تشځاي او پول يا قطب نه لري ريیل اوبيونه نه لري) او دx -> ± oe لپاره دx- محور ($y = 0$) د اسيمپتوتی په څير لري (څيره. ۱۵ . ۱۲)

ب: $y=(x^2+2x-3)/(x+2)=x- 3/(x+2)$ صفرځايونه($x^2+2x-3 =0$) په $x1 =-3$ او $x1=1$ کی لري . تشځاى نه لري او په $x3 = -2$ کی قطب لري دا په دې مانا چی $x = -2$ اسيمپتوتی دی، او د x →±oe لپاره فنکشن $y = x$ اسيمپتوتي کيږي)دا سيمپتوتی کليمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي)

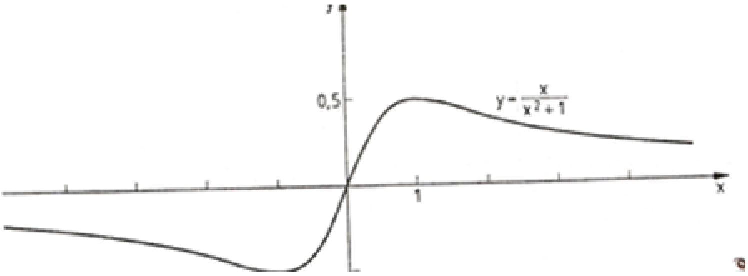
موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي تول - یا مات ريشنلفنکشنونه راوړو: فنکشن

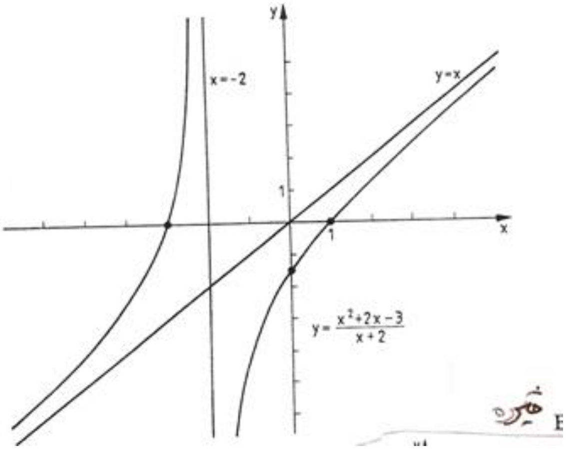
$$y = x^n; n \in Z\setminus\{0,1\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15,8_a)$$

یو ځانګړی پوتنځفنکشن دی(د پوتنځ پيژند 6 ۰ ۱)

(15.8)د زيـ اتـ يز زياتيز يا مثبت تولګڼ n لپاره یو تولرشنل فنکشن دی. د جوړه تولګڼ nلپاره تولريشنل فنکشن دی. د تولګڼ n لپاره تولی کرې د تعريف ډيری(-) = D oe,oe، د ارزښت ډيری(W=(0,oe او ګډ تکی (1,1)، (0,0),(1,1) لري.
(څيره ١٤ الف ١٥) د ناجوړه ګڼ د n لپاره(D = (-oe,oe
او(W = (-oe,oe دي او (-1,-1) , (0,0). (1,1) ګډ تکي دي (څيره ١۵ . ١۴ ب)۰

(c) ketabton.com: The Digital Library





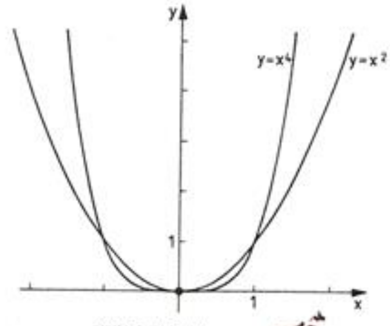


Bild 15.14a

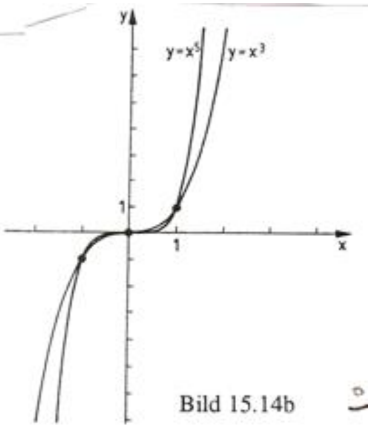


Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي ګڼ nلپاره یو مات ریشنل فنکشن دئ په $x = 0$ کی د یوه قطب او $y = 0$ کی یوې اسیمپټوټی په څیر. د جوړه ګڼون یا تعداد (کمیز) nلپاره ټولی کږې د پیژند ډیري

(c) ketabton.com: The Digital Library

D = (-oe,oe)\{0} د ارزښت ډیري(W = (0,oe لري اوګډټکي (1,1), (-1,1)
؟؟؟ ښیره ش. ۱۵/۱۵الف) .
د ناجوړه ګڼون (کمیز n)لپاره{ 0}\(D = (-oe,oe او W=(-oe,oe) او(1-،1-) (1,1)
ګډ ټکی دی (ښیره »۱۵ . ۱۵ ب) .
دوه ښیرې دي

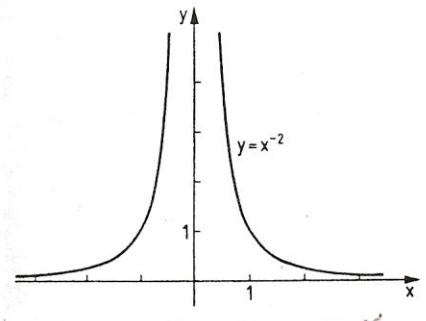


Bild 15.15a

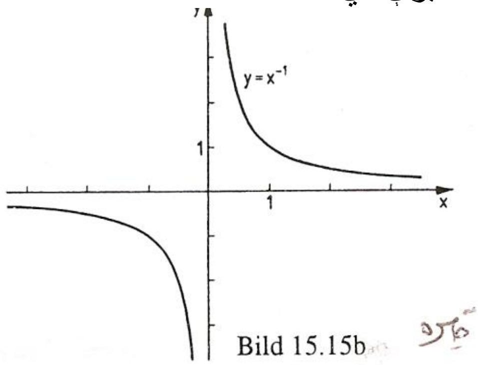


Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر ښت بلواک لپاره دې د مونوتوني اینتروال په پام کی ونیول شي.(پرتله بیلګه(بیلګه ۱۵ .۳)
د فنکشن) لوستل له کیڼ وښي لور ته

$$y=x^n; n\in N^*\{1\}, D=[0,\infty), W=[0,\infty)$$

چپه- یا پر ښت فنکشن په لاندې ډول دی.

$$y=\sqrt[n]{x}\ ,\ n\in N\setminus\{1\}\ ,\ D=[0,\infty), W=[0,\infty)...............(15,8_b)$$

او ریښه فنکشن نومیږي (پیژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنځ فنکشن کیدی شي و ریښنل ایکسپوننت ته پراخه شي) دلته لرو $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{n}{m}}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ریښنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y=x^n\ ,\ a\in Q\ ,\ x>0 \qquad (15\ .\ 8c)$$

نو د ریښي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دې د پوتنځ فنکشن په ښیر وپوهیدی شي.

د پوتنځ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پرښت بیرته پوتنځ فنکشن دی.
ټولیز پوتنځ فنکشن پیژند د رییل ایکسپوننت لپاره ورکړ شوی(د رییلګڼونو کلیمه دې وکتل شي برخه ۳ ۰ ۱ . ۴ کی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

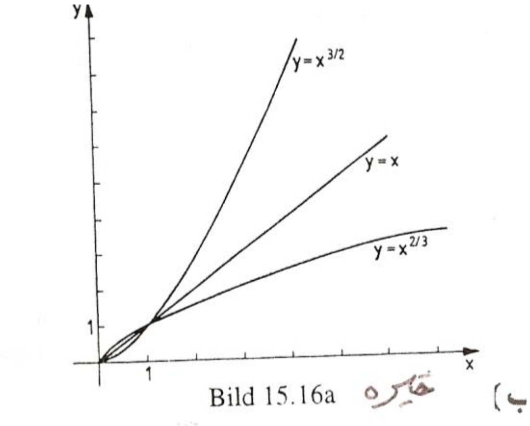
پیژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^{\alpha} \quad , \quad \alpha \in R \ , x > 0 \qquad (15.\ 8d)$$

پوتنځ فنکشن نومیږي

بیلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن $y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}\ , x \geq 0$

لاندې چپه - یا پر ښت فنکشن لرو $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}\ , x \geq 0$



(خیره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x},\ x > 0$

(خیره ۱۵ . ۱۶ ب)

$y = x^{-2} = 1/x^2\ , x > 0$

یادونه : په پیژند ٤ . ۲ کی مو وویل چی یوائې د ناکمیز رادیکاندو ریښه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دي د پرښت فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په پام کی وي.

د بیلګي په توګه فنکشن $y=x^3$ په ټول تعریفدیري کي مونوتون پورته کیدونکی دی او له دې امله ټول په ښت کیدونکی وی، $y = \sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پیژندډیری ($D = [0,\infty[$ کی پر ښت فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د $y= x^3$ پرښت فنکشن د $D= (-\infty,0$ سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی(ش. ۱۵ . ۱۷) .

پیژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=a^{x}, a>0, a\neq 1 ....(15,9)$$

ایکسپوننشلفنکشن یا په جګ(لنډ »جګ«) بلواك بلل کیږي۰

(د ایکسپوننت یا »جګ« کلیمی لپاره دی پېژند ۴ . ۱ وکتل شي)

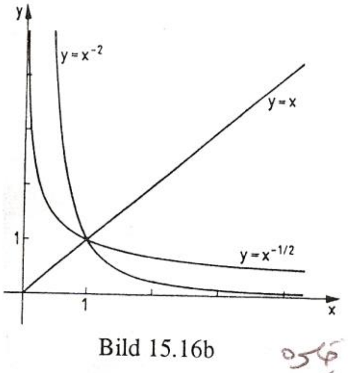


Bild 15.16b

څېره

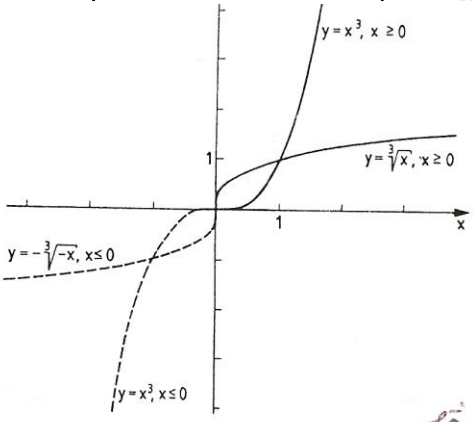
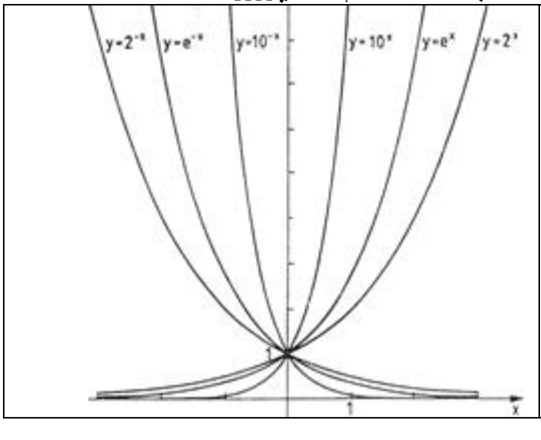


Bild 15.17 څېره

پورته دوه څیرې دې پام کې ونیول شي

فنکشن (۱۵ . ۹) لاندې پیژنددیری(D=(-oe,oe او ارزښتدیری(W=(o,oe لري. د $a^0 = 1$ له امله ټکی(0,1 () د ټولو کرو ګډ ټکی دی

د a>0 لپاره (۱۵ . ۹) په کلکهمونوتونجګیدونکی دی اود x->oe سرهد x - محور ته اسیمپوتیك ورنزدې کیږي.د 1>a>0 لپاره) ۱۵ . ۹ (په کلکه مونوتون لویږي او ځان د oe -> x سرهد x -محور ته اسیمپتوتیك نزدې کوي.



کسپوننشل فنکشنونو یو څو بیلګګي
(a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/1
څیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵ . ۱۲ :

لاندې فنکشن د ایکسپوننشل فنکشن په څېر فنکشن دی

$$y = \log_a x \,,\; a > 0 \,,\; a \neq 1 \qquad (15.10)$$

او لوګاریتم فنکشن بلل کیږي

د لوګاریتم کلیمي لپاره پیژند ۵ . ۱ وګورئ) فنکشن (۱۵ . ۱۰) پیژندډیرئ $D = (0.oe)$ او د ارزښتډیرئ $W=(-oe,oe)$ لري.

د $y = \log_a x$ کرښې د ګرږو $y=a^x$ هنداورنه ده، په کرښه $y=x$ ، تکی $(1,0)$ د ټولوکړږو ګډ تکی دی (خیره شته دی)

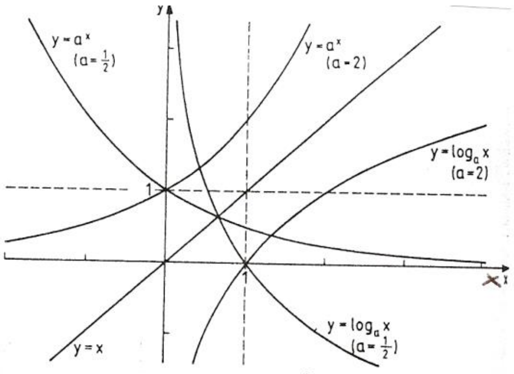


Bild 15.19 څېره

د $a>1$ لپاره(۱۵ . ۱۰) کلك مونوتونجګیدونکی اود $x\to 0$ لپاره اسیومپتوتیك د کمیزو - y محور ته نزدې کیږي. د $0<a<1$ لپاره (۱۵ . ۱۰) کلك مونوتون لویدونکی دی او د $x>0$ لپاره اسیمپتوتیك د زیاتیز y - محور ته نزې کیږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y=a^x$ او په څېر یی یعنی $y = \log_a x$

د $a=2$ او $a=1/2$ لپاره انځوریږي.

په ځانګړې توګه لیکل کیږي $y = \log_{10} x = \lg x \,,\; y = \log_e x = \ln x$.

پیژند ۱۵ . ۱۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تریګونومتري فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې(پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کیږي یا راوړل کیږي.

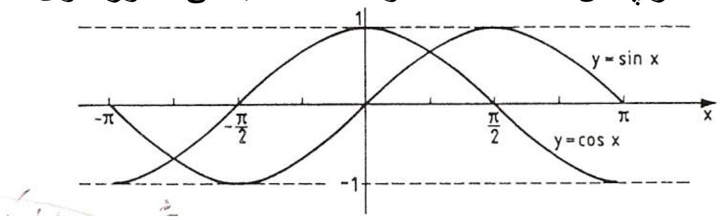
$$y=\sin x ;D=R,W=[1,1]\ldots\ldots(15,11_a)$$

$$y=\cos x; D=R, W=[-1,1]\ldots\ldots(15,11_b)$$

$$y=\tan x=\sin x/\cos x; D=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, W=R, k\in Z\ldots(15,11_c)$$

$$y=\cot x=\cos x/\sin x; D=R\setminus\{k\pi\}, W=R, k\in Z\ldots\ldots(15,11_d)$$

د دې ګرږوتګلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



تریګونومتریکی فنکشنونه y = sin x, y = tan x , y = cotx ناجوړه فنکشنونه، او y = cos x یو جوړه فنکشن یا – بلواک دی.

تریګونومتریکي فنکشنونه پریودیکي فنکشنونه دي(مقایسه ۱۵ . ۵)

فنکشنونه y=sinx , y= cosx پریودې 2π لري، دا په دې مانا چی لرو:

$$\sin (x+2k\pi) = \sin x ; \cos(x+2k\pi) = \cos x , k \in Z$$

لاندې فنکشنونه پریود π

(c) ketabton.com: The Digital Library

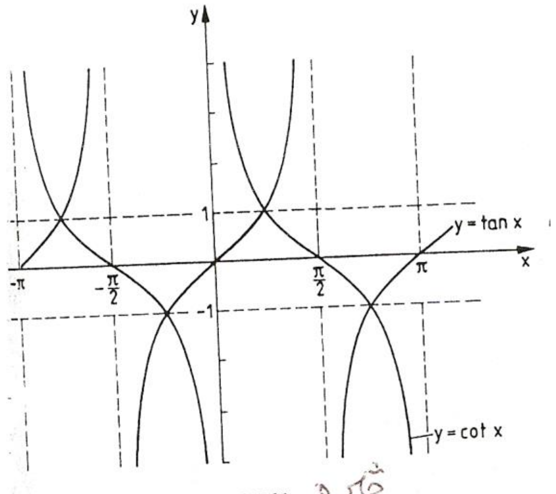


Bild 15.20b

لري y=tanx , y=cotx .دا په دې مانا چي

$$\tan(x + k\pi) = \tan x,\ \ \cot(x + k\pi) = \cot x,\ k \in Z$$

د تریګونومتریکي فنکشنونو صفرځایونه دي $x_k = k\pi, k \in Z$

د y=tanx , $k \in Z$ $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ y=sinx لپاره او د y = cos

y = cot x , xلپاره تانجنت - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځایونه(ناپاځایونه) لري

یعني y = tan x په $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$ او y = cot x په $x_k = k\pi$, $k \in Z$ کی.

د تریګونومتریکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خویونه په پام کی ونیول شي. د بیلګي په توګه

فنکشن y = sin x په ایتروال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ کي مونوتون جګیدونکی دی او په

ایتروال $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

کی مونوتون لویدونکی، او دا مونوتوني خویونه په یوه پوره پریودې کی تکراریږي. پس ویلی شو:

د y = sin x لپاره جګیدونکی یا پورته کیدونکی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی، او په ورته توګه

د $-\pi+2k\pi \le x \le 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کیدونکی دی۰

د $0+2k\pi \le x \le \pi+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی

د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جګیدونکی دی

د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جګیدونکی دی ،

په تنجنت ـ او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځایونه د مونوتوني اینتروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینتروالونه دي.د ساین فنکشنونه د بیلګي په توګه د وخت په پریودیکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوینګونګ: رپیدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واریابل په t نخښه کیږي.فنکشن

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) \qquad (15 . 11e)$$

هارموني فنکشن بلل کیږي.

یادونه: فنکشن (۱۵ . ۱۱ت) د پیژند (۱۵ . ۱۵) له مخی تړلی یا ځنځیري فنکشن دی. موږ ترخیرني لاندې نیسو چي د سا ین فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واریابل t او زیاتوونکی د ساین فنکشن په خپلواك)Argoment(د کږنخیره باندې څه تاسیر اچوي.

۱ ـ د فاکتور a تاثیر په فنکشن y = a . sin t د y = sin t فنکشن ارزښت باندې غزول یا راکشول دی که (|a| > 1)او یا پرسول دي که

|a| < 1)وي y= a.sin x فنکشن ارزښت a ـ ځله د فنکشن ارزښت

y = sin t دی، چیرته چی برسیره پردې د a < 0 لپاره په t ـ محور یوه

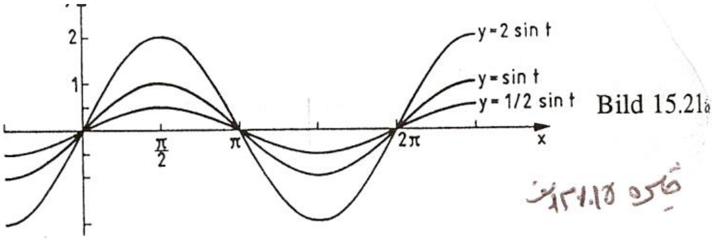
اینه ځیرونه هم منځ ته راولي (ځیره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) (a = 2 , a = 1 / 2

په فنکشن کی a امپلیتودې Amplitude(جګوالی(نومیږي او د شوینګنګ Schwingung

رپیدنی پراخوالی یا بنه : سور باندې تاثیر اچوي.

ځیره شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

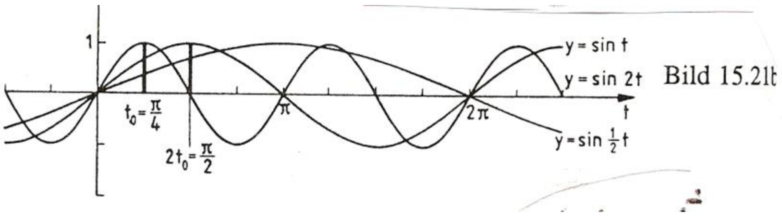


۲ - په فنکشن $y = \sin\omega t$ کې فاکتور ω په فنکشن $y = \sin t$ باندې یو وختني غزول که $|\omega|>1$ یا پرسول که $|\omega|<1$ وي تاثیر اچوي.چیرته چې د $\omega < 0$ لپاره برسیره پردې یو په y- محور اینونه هم ده.

د یوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن $y = \sin\omega t$ یوه فنکشن ارزښت، د$y = \sin t$ خپلواك ω-ځله ، یعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي (ځیره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب).

ګردی فرکونځ (Kreisfrequenz) بلل کیږي، دا په پریودې تاثیر اچوي

او $y = \omega t$ پریودې $P = \frac{2\pi}{\omega}$ لري.



۳ – زیاتیدونکی φ په فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ کې د $y = \sin t$ باندې دیوې راکښنې تاثیر په $|\varphi|$ له کینې لور $\varphi > 0$ او یا له ښي لور $\varphi < 0$ اچوي .

د یوه ټاکلي خپلواك $t = t0$ لپاره د فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ سره یو فنکشن ارزښت، چې د $y=\sin t$ لپاره۰

د φ په کچه راکښل شوی (یعنی د یوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی) وي، یعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(ځیره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

$(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2})$

په فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a.\sin(\omega t + \varphi) = a.\sin\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)$$

کی φ چی فازې نوميږي يو د راکښلو تاثير په کړه $y = a.\sin\omega t$

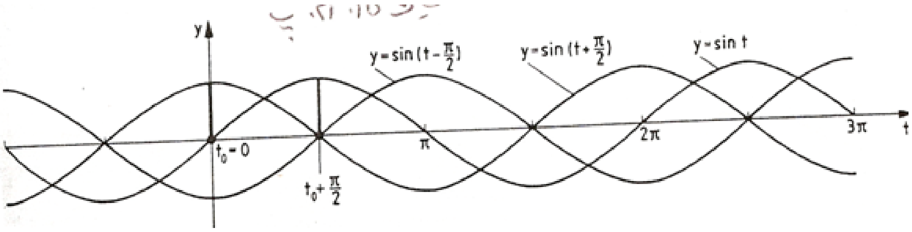
د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.

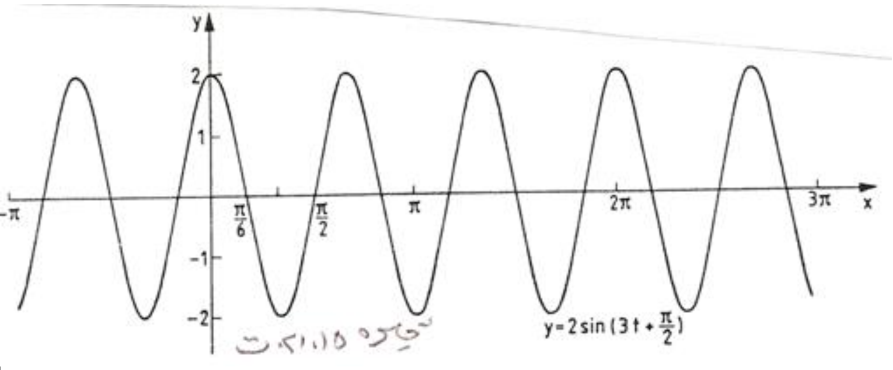
په شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارمونيفنکشن $y = 2.\sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$ انځوردی.

هغه امپليتود $a = 2$ لري، پريودې يی $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{6}$ کې

د $\sin t$ و کينې لورته راکښل شوی دی.

خېره ۱۵ . ۲ پ $\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$





د ټريګونومتري فنکشنونو(يوائني) په معکوسوالي يا په ښتوالي کی موږ په ځانګړو يوغږيزو يا مونوتوني اينتروالونو تکيه کوو، د لاندې تعريف سره مناسب

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند ۱۵. ۰ ۱۴ : د لاندې فنکشنونو

$$1.\ y=\sin x,\qquad D=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ W=[-1,1] \qquad (15.12a)$$
$$2.\ y=\cos x,\qquad D=[0,\pi],\qquad W=[-1,1] \qquad (15.12b)$$
$$3.\ y=\tan x,\qquad D=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right),\ W=\mathbf{R} \qquad (15.12c)$$
$$4.\ y=\cot x,\qquad D=(0,\pi),\qquad W=\mathbf{R} \qquad (15.12d)$$

پرخڼ یا چپه فنکشنونه لاندې ځیکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

$$1.\ y=\operatorname{Arc}\sin x,\qquad D=[-1,1],\qquad W=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \qquad (15.13a)$$
$$2.\ y=\operatorname{Arc}\cos x,\qquad D=[-1,1],\qquad W=[0,\pi] \qquad (15.13b)$$
$$3.\ y=\operatorname{Arc}\tan x,\qquad D=\mathbf{R},\qquad W=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \qquad (15.13c)$$
$$4.\ y=\operatorname{Arc}\cot x,\qquad D=\mathbf{R},\qquad W=(0,\pi) \qquad (15.13d)$$

د ترېګونومتري فنکشنونو برخی په مونوتوني ایتروالونو) ۱۵ .۱۲ الف(تر) ۱۵ . ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵ . ۱۳ الف (تر) ۱۵ . ۱۳ ت (په ځیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.

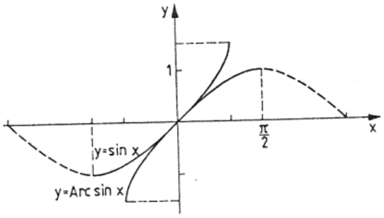


Bild 15.22

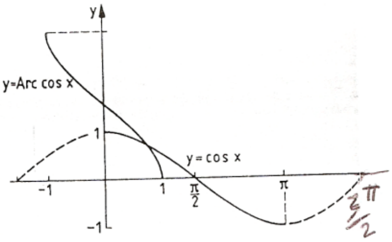


Bild 15.23

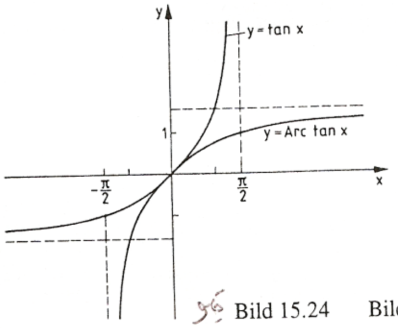


Bild 15.24

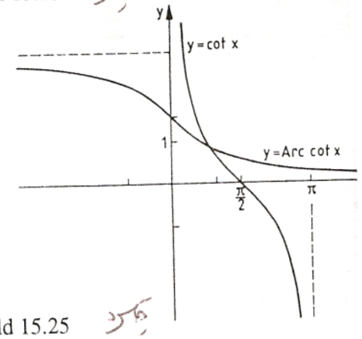


Bild 15.25

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ . ۴ ځنځیري (ترلي) فنکشنونه

پیژند ۱۵ . ۱۵ :

د x ∈ D لپاره یو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتدیري W سره ورکړ شوی او برسیره
پر دې د z ∈ W لپاره یو فنکشن $y= f(z)$ ورکړشوی، نو
$y = f(g(x))$ (15 . 14)
د x ترلی (ځنځیري) فنکشن بلل کیږي٠

یادونه : یو ترلی فنکشن کیدی شي چې زیاتو ځنځیرونو سره هم رامنځ ته شي: د بیلګي
په توګه $z = f(x)$
د x ∈ D, z ∈ W لپاره او $w=h(z)$ د z ∈ W,w ∈ W* لپاره
او $y=f(w)$ د W* ∈ W لپاره لرو،
نو $y=f[h(g(x))]$ هم د x یو ترلی فنکشن دی

بیلګه ۱۵ . ۱۶ :
الف : د $z = 2x + 4$ او $y = e^z$ سره ترلی فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي.
ب : په ترلي فنکشن $y = \sin x^2$ کې $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی. په ترلي فنکشن $y = \sin^2 x= (\sin x)^2$ کې $z = \sin x$ د ننني - او $y=z^2$ دباندنی فنکشن دی
پ : د
$z = 2x + 4$, $w = \sqrt{z}$, $y = \cos w$,
سره ترلي فنکشن $y = \cos\sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي
ت : په ترلي فنکشن $y=\text{Arctan}\,1/(x-1)$ کی $z=x-1$ دننني، $w=1/z$ منځنی او $y=\text{Arctan}\,w$ دباندنی فنکشن دی.

یادونه : د یوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځیري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شمیرنی له » دننه « پیل کیږي.

بیلګي ۱۵ . ۱۶ ته:
ب) د $x = 0.5$ لپاره دی
$z=x^2=0,5^2=0,25;y=\sin x^2=\sin z=\sin 0,25=0,24740$
او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$z=\sin x=\sin 0,5=0,47942; y=\sin^2 x=z^2=0,47942^2=0,22984$

پ) د $x = 2$ لپاره دی $z=x-1=2-1=1$; $w=1/z=1/1=1$

$y=\text{Arctan}w=\text{Arctan}1=\frac{\pi}{4}$

روښانونه، تشریح:

$y=f(x)$ تحلیلي(شننیزه) وینا بلل کیږي، که $f(x)$ له رییل ګڼونواو بستیزو فنکشنونوڅخه د زیاتون، کمون،ځل، ویش، له لارو ترلی یا ناترلي(ځنځیري یا نا ځنځیري) جوړیږي

د بیلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنځ بنسټ او همداډول رادیکاند منفی نه شي کیدلی، او یا باید مثبت وي، چی د لوګاریتم نومروس باید مثبت وي او $\text{Arc}\sin f(x)$ همداډول $\text{Arc}\cos f(x)$ تیك د $x \in [-1,1]$ لپاره پیژند لري یا تعریف دي

بیلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحلیلي ویناو لپاره دې تعریفډیري پیداکړی شي.

الف) $y = \sqrt{x^2 - 3}$

رادیکاند باید کمیز یا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 \iff x^2 \geq 3 \iff |x| \geq 3$ ($x \geq \sqrt{3}$ v $x \leq -\sqrt{3}$)

نو لرو $D =(-oe , - 3]\cup[3 ,oe]$

ب) $y=\lg(x+2)+1/(3+2x-x^2)$ له لمړي زیاتونی کی باید $\text{Numerus} > 0$ نومروس وي دا په دې مانا چي : $x+2 >0 \iff x >-2$ ،

پس $D1=(-2,oe)$

په دوم زیاتوني کی باید مات لاندې په صفر برابر نه وي ($\neq 0$) وي . د مات لاندې صفرځایونه

له $3-2x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي $x1=2,x2=-1$.

نو $D2=R\backslash(2;-1)$ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن تعریفڼیری باید دا اول زیاتونی او همداسی د دوم زیاتونی تعریفڼیري وي یعنی د

D1 او D2

غوڅڼیری: $D=D_1 \cap D_2 = (2, \infty) \setminus \{2; -1\}$

پ) $y = \text{Arc} \sin (x-1)/5$ د ارکوس ساین-فنکشن د تعریفڼیري په پام کی نیولو سره باید باور ولري-

$-1 \leq (x-1)/5 \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq x-1 \leq 5 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 6 \Rightarrow D=[-4,6]$

ت) $y = 1/\sqrt{(x^2-4)}$

رادیکاند باید له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی

$x^2-4>0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow x>2$ یا $x<-2$

نو دی $D=(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

۱۵ . ۵ تمرینونه

۱ – د ایمپلیڅیت توابعو ایکسپلیڅیت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y - 8 = 0$

۲ - لاندې فنکشنونه په پارامترانځورونی ورکړ شوي

a) $x=2t \quad y=-t^2+3t$ b) $x=\sqrt{t} \quad y= 2t+1$

c) $x=1/t \quad y=2(t-3)$ d) $x(/2)t-1 \quad y=t^2$

پارامتر له منځه یوسی او په دې سره ورکړی $y=f(x)$

۳ - لاندې فنکشنونه په مونوتوني وڅیړی، او که ممکن وي نو مونوتونی اینتروالونه په تعریفڼیریو بیل (تجزیه) کړئ یا لږ تر لږه کړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -2x + 3$ c) $y = x^2$

d) $y = -2x^2$ c) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = |x|$

۴ – پریکړه وکړئ چې لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دووکوم نه دي:

a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = x - 1$

d) $y = 2x^2$ e) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = (x-1)^2$

g) $y = x^2 /2$ h) $y = x^5$ i) $y = | x |$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر خایونه پیدا کړئ

a) $y = -2x + 3$ b) $y = (x-1)(x+2)$ c) $y = x^2 - x - 2$

d) $y = 2x^2 - 12x + 18$ e) $y = x^2 + 1$ f) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشونونه پیدا کړئ

a) $y = -2x + 3$ b) $y = x^2 + 1$, $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

c) $y = (x+1)^2$, $D = [-1, \infty)$, $W = [0, \infty)$, d) $y = x^3 /2$, $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

۷ – لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوي دي

a) $y = 0,4x - 1,6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = (1/5)(3x + 1,5)$

d) $y = 2$ e) $3x - 3y - 7 = 0$ f) $4y + x = -1$

کرښې دې وکښل شي، جګوالي کونج α دې پیدا شي، او صفرخایونه x_N و ګټئ!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تیریږي

a) (2,3) (5,5) b) (1 ,1) او (3,7) c) (-1,0) او (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك یا فنکشنونه ورکړ شوي

a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = x^2 - 8x + 16$ c) $y = x^2 - 6x + 10$

d) $y = (x-5x)(x-1)$ e) $2x^2 - 10x + 12$ f) $y = 3x^2 + 6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2} + x + 4$ h) $y = x^2 / 4 + x + 2$ i) $y = 5x^2 + 45$

د ککړې کواوردینات دې پیداشي، صفرخایونه دې وګټل شي او پارابول دې انځور شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ - د لاندې پولریشنل فنکشنونه دې دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لارې وګټل شي. فنکشنونه د ګا د خلفورم باندې انځور شي

a) $y = f(x) = x^3 - 6x + 5; \quad x_1 = 1, x_2 = -1$

b) $y = f(x) = (1/2)x^3 - x^2 - (13/2)x - 5; x_1 = 1/5 \quad x_2 = 5$

c) $y = f(x) = x^3 + 2x + 2x \quad ; x_1 = -2 \quad x_2 = 0,2$

d) $y = f(x) = x^4 - x^3 - 28x^2 \; 32x + 40 ; x_1 = 2 \quad x_2 = 5$

e) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 6x^2 + 5x + 6 ; x_1 = 1,5 \quad x_2 = 2$

۱۱ - مات ریشنل فنکشنونه ورکړی شي :

a) $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$

b) $y = \frac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 5x + 6}$

c) $y = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^4 - 13x^2 + 36}$

d) $y = \frac{x}{(x^3 + 6x^2 + 9x)(x^2 - 4x + 4)}$

e) $y = \frac{2x^3 - x^2 + 6x - 3}{x^2 + 3}$.

صفرځایونه دې وګټل شي، پول. تشځایونه او د $x \to \pm 8$ لپاره ځان نیونه!

۱۲ - لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشنونه جوړ کړی

a) $y = 2^{x-1}$, D = R , W=(0,œ) b) $y = 2^x - 1$, D = R , W =(-1,œ)

c) $y = \log_3 x$, D = (0,œ), W = R d) $y = \ln(x-1)$, D =(1,œ), W = R

۱۳ - لاندې فنکشنونو ته مونوتوني اینترروالونه ورکړی او برخه په څپ فنکشتونه:

a) $y = (x-1)^2$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y = (x+1)^2 + 1$

d) $y = x^2 - 4x + 5$ e) $y = 4x^2$ f) $y = (1/4)x^2 + x/2 + 1$

۱۴ - ترلي فنکشنونه $y = f[h(g(x))]$ په دننه او دباندې فنکشنونو

$y = f(w) \; , w = h(z) \, , z = g(x \,)$

بیل (تجزیه) کړی(د تعریف-او ارزښتدیریوورکولو څخه کیدی شي تیرشو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = e^{(x+1)^2}$ b) $y = (e^{x+1})^2$ c) $y = \lg\sqrt{2x-3}$

d) $y = \sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y = \tan\sqrt{x-3}$ f) $y = \sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y = \sqrt{\tan x - 3}$ h) $y = \tan\sqrt{x} - 3$ i) $y = \operatorname{Arc}\sin x^2 +$

j) $y = [\operatorname{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y = \ln\sin\frac{x}{3}$ l) $y = \sin\ln(x+\frac{1}{3}$

m) $y = \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ n) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y = \frac{1}{\sin\sqrt{x}}$

p) $y = \operatorname{Arc}\cot e^{2x+1}$.

۱۵ – ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندې او دننه فنکشنونو

$y = f(v),\ v = h(w), w = (g(z)),\ z = k(x)$

بیل کړی(د تعریف– او ارزښتدیري باندې تیرونه کیدی شي)

a) $y = \left[\operatorname{Arc}\cot(e^x+1)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\operatorname{Arc}\cot(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^2$

d) $y = \sqrt{5-\tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln(x^2-1)+1\right]$ f) $y = \log_3\left[\sqrt{2^x+1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ – د لاندې شننیزویا سپړنیز (تحلیلي) افادو لپاره تعریفدیري پیدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3-x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2-9}$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$ e) $y = \frac{1}{x^2+x-6}$ f) $y = \ln(2x+5)$

g) $y = \operatorname{Arc}\cos(2x-4)$ h) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ i) $y = \ln x + \frac{1}{x-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریګوډیکچ یا تریګونومتري Trigonometrie

تعریفونه

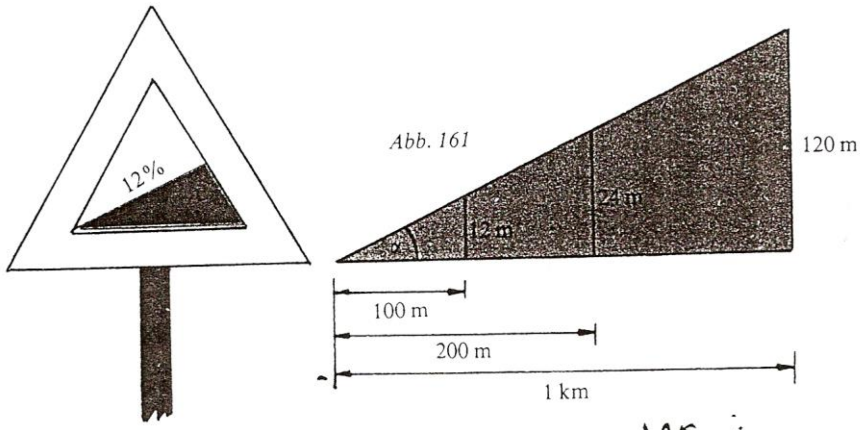
د دریګوډیکچ یا تریګونومتري دنده ده چې په هواره یا په هوا کی دریګوډي کچ کړي ، د ځانګړوبلواکو له لارې، دې په نامه تریګونومتریبلواکو. برسیره پر دې د دې په مرسته پریودیکی یعنی په منظمه فاصله پرلپسی تکراریدونکی پیښې (موږ یی تل راګرځیدوني بللی شو) څیړل کیږي.
تریګونمتري تر هیپارچ (Hipparch ۱۶۰ – ۱۲۵ له م پخوا) پوري تعقیبیدی شي، وروسته له مصري پتولیمویس Patolemäus چې په ۱۶۸ م کال کی مړ شوی او بیا له هندې او عربو شمیرپوهانو له خوا پرمختګ ورکړ شو. له پیل دا د کارونی یا عملي کیدو د ستونځو سره مخامخ وه. دریګوډیکچ خپل کارونه په استرنومي او فزیك، د ځمککچ یا اندازه کولو، د ځمك اندازونی، نقشو علم، او ابادۍ او نوتیك Nautik (د کیشتیو د لارو نقشه ویستلو پوهنه) کی مومي.
د تریګونومتري مانا یا مهموالی په ځانګړي ډول په دې ریښتینوالی یا واقعیت کی نغښتی، چی د دې په مرسته د پایکرښبلواکوالی ، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي(پام دې وي، چی دا تړاو شمیرپوهینیز مفهوم لري).

پیلبیلګه: د په مانایا مهم جګوالي یا لویدکرښو نخښنه لوحی یا په بله عبارت د زوړي او پیچومی لیکتختی(دې ته دې پام وي چی ما دا کلیمی هر چیرې د زوړي او پیچومی په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چی په هغه مناسب ځای

(c) ketabton.com: The Digital Library

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي) وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟
پیچومی یا جګوال 12 % په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی یو جګوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیك ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جګوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توګه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جګوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جګوالي لیدیدونکي ۱۲۰ متره ته جګیږي. کتل کیږي یا لیدل کیږي، چی په ورکړشوي پیچومي یا جګوالي کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځانښونه و هوارې فاصلي ته تغیر خوري . د پایکرښو تناسب یا ځانښونه تابث یا ځاي په ځاي پاتیږي او د په سلو کی ګڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جګوالي اوږدوالي معلومات نه

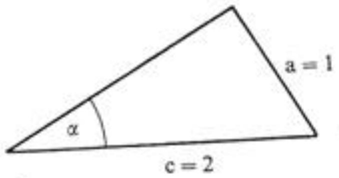


ځیره ۱۹۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن لپاره ما بلواک لیکلی یعنې همغه د درې له تابع څخه مې را اخستي، چې نورو ژبو کې یې بلواک څیره ده، چې دې امله یې څیره نمونه سمه ده اوکارونه یې څیرونه ده.

سواینبلواک sinusfunktion بلیګه:

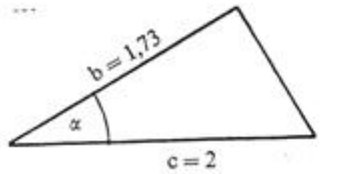


$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

څیره ۱۹۶

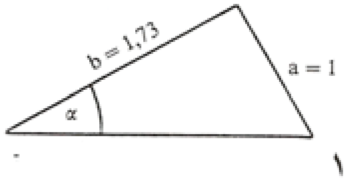
کوساینبلوک Cosinusfunktion بیلګه:



$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرته کتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$$

$\cos 30° = \frac{1,73}{2} = 0,8660$

تنجنتبلواک Tangensfunktion بیلګه:



$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروتکاتیت}}$$

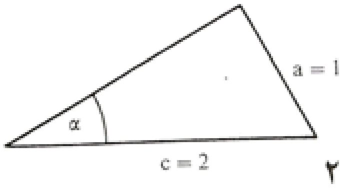
څیره ۱۹۸

$\tan 30° = \frac{1}{1,73} = 0,577$

د کونجونو د پینونوموونې (دا ټول شته، خو بیاهم اړیین دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوسیکانسبلواک Kosekansfunktion بیلګه:



$$\operatorname{Cosec}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هیپوتینوزې}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

خیره ۲۰۱

$$\cos ec\alpha = \frac{2}{1} = 2$$

موږ به زیات وخت لمړنی درې یا په همدې توګه لمړنی څلور بلواګه د کارونی لپاره راونیسو یا وکاروو.

په ځوښه دریګوډیو کی شمیرنه

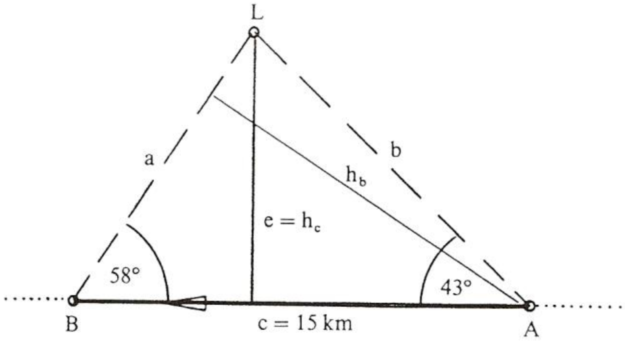
سره له دې چی کونجبلواکي یواځی په ولاړکونجیز دریګوډي کی باید تعریف کیږي، خو بیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جګوالی په جوړولو کی هر دریګوډی په ولاړو برخه دریګوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اخرني هنري، د مخکني مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکرښي وینا وي د پیل دریګوډي باندې لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشوو کونجونو.

پیلبیلګه

یوه کیښتی د رڼاډزکړي (کله چی کښتی له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کښتي یا یو بل څه ته که یوه کښتی وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کیږي چی له لرې ځرګندیږي او نورې خبر ورته لیږونکی په دې پوهیږي، چی څه پیښ شوي دي). دلته $\alpha = 43°$ د تګ په لور اندازه کیږي او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوه تګ پايکربني c = 15 km او کونج $\beta = 58°$ وروسته.
په دوم پړاو کې کيښتنی له پړاو رڼااور څخه څومره لرې ده؟
د A څخه و B ته د کيښتنی نژدې واټن e د پړاو رڼااور څخه څومره لرې دی؟
په A کې له اور څخه څومره لرې وه ؟



شيره ۲۰۲

اوبی يا حل:

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 79° ; \qquad \sin\beta = h_b / c \text{ او } \sin\gamma = h_b / b$$

د h_b په لور اوبی‌ول يا حلول او په همدې وخت کې لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin\beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin\gamma$$
$$\Rightarrow c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$
$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58°}{\sin 79°} = 12{,}959 \text{ km}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin\alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin\alpha = 12{,}959 \cdot \sin 43° = 8{,}838 \text{ km}$$

$$\sin\beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin\beta} = \frac{8{,}838}{\sin 58°} = 10{,}421 \text{ km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دریګوډي اړخونو a او b په شمیرنه کې مرستندوي لویی له منځه ځي او باور لري:

د ساین جمله :

په خوښه دریګوډي کې د اړخونو ځانیونه یاتناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځانیونه یا تناسب دی.

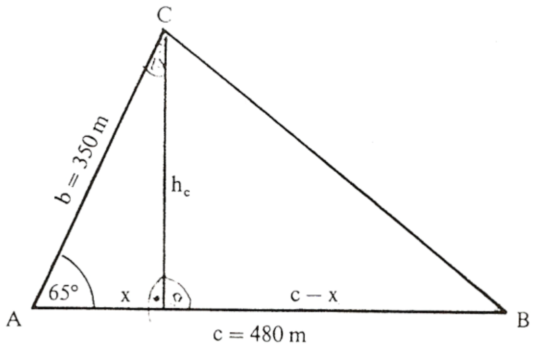
$$\sin\alpha / \sin\beta = a / b \qquad \sin\beta / \sin\gamma = b / c$$

$$\sin\gamma / \sin\alpha = c / a$$

د ساین جمله په پڅ دریګوډي کي هم باورلري(تمرین دي وکتل شي). ددې سره په یوه دریګوډي کی نه موجودې ټوټي هلته شمیرل کیږي، چیرته چی دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي.
سړی بیا څه کوي که دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغوتر منځ راګیر کونج؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیلبیلګه : په یوه د ډبروسکرو کان کې دوه ستنې $b = 350\ m$ او $c = 480\ m$ دي او یو کونج $\alpha = 65°$ ښندوي.
د B څخه و C ته به د نښلولو ستن یا تیر څومره لوي وي ؟



شیره ۲۰۳

اوبې یا حل :

جګوالی یا جګی h_c کرښه $AB = c$ په دوه ټوټو x او $c-x$ ویشي.

دلته دی $x = b.\cos\alpha$ ،

ځکه چې $\cos\alpha = x / b$ دی . د پیتاګوراس د جلی له مخی

لرو : $h_c^2 = b^2 - x^2$

او

$$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2 .$$
$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb\cos\alpha$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړخونو اوږدوالی نومونی او کونج کیدی شي چي منظم بیرته راګرځیدونکی (ځیکلیکي یوناني کلیمه ده ګردی ډوله یا منظم بیرته راګرځیدونکی zyklisch) یو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

کوساین جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$$

په هر یوه دریګوټي کی د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زیاتون سره تړې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او دډې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساین سره ځل.

د کوساین جمله د پیوتاګوراس د جملی عمومیت یا ټولیز ته هم وایي. (تمرین ۶ مخ دې وکتل شي)
د کونجبلواك له لارې یو بل متود، د ډیرګوټي شمیرلو لپاره ، تر څو دا په دریګوټیو ویشل کیدی شي چی پوره اړخونه او کونجونه یی څرګند وي، پیدا شو.
د دې ټولو سره د څلورګوټي یو وربرسیره بل د شمیر فرمول پیداشو:

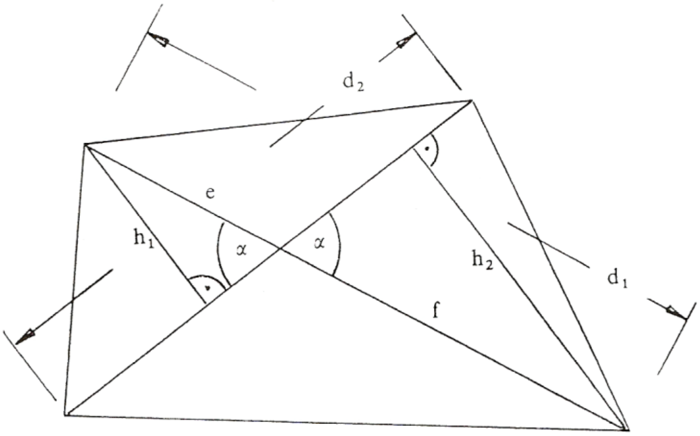
$$A = 0,5.d_1.d_2.\sin\alpha$$

چیرته چي $\alpha = w(d_1; d_2)$ وي .

اوبی یا حل : $A=0,5(d_2h_1 + d_2h_2)$
که d_1 په e او f ټوټه یا تجزیه شي ، نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1 = e \cdot \sin\alpha$$
$$h_2 = f \cdot \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2 (e + f) \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2\, d_1 \sin\alpha$$



ښیره۲۰۴

د په خوښه کونجونو تریګونومتریکي بلواکي

په اخره برخه کی مو وویل، چی کونجبلواک، نه یوائی د دننه لورته تیرو درېګوډیو لپاره ، بلکه د هغو کونجونو لپاره چی له ۹۰ درجو لوي وي ، هم هدفمند (موخور) تشریحوړ دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کړ.

دا پراختیا ښنګه تصور یا د خیالوړ کیدی شي ؟

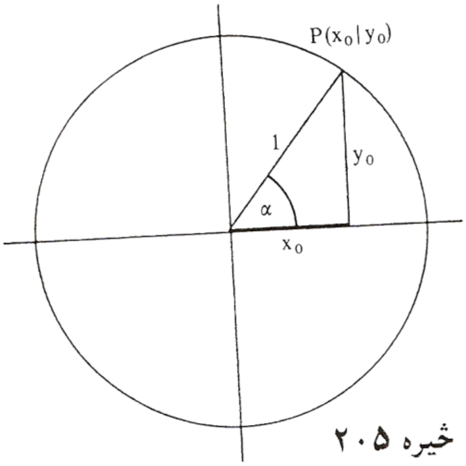
(c) ketabton.com: The Digital Library

په ښه توګه داسی کیدی شي چی په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم کی یوه ګردۍ ووهي چی وړانګه یي ۱ یعنی یو یوون یا واحد دی (دې ته یوونګردۍ ویل کیږي، ځکه چی وړانګه یی یو یوون دی) او د ګردۍ منځټکی او د پروت ولاړ سیستم کواوردېنات سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریګوډی، چی د هغی یو کونج د ګردۍ څنتریکونج دی، یعنی کونج یی د ګردې په منځ یا څنتر پروت دی، (څیره ۲۰۴) کم له کمه یی یو اړخ ۱ یعنی یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریګوډی په دننه کی شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړکونجیز دریګوډي څخه پیل کوو، چی په لمړي لمړي څلورمه یا کوادرانت (Quadrant) کی پروت د ی. نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په ګردۍ ،د کونجټکی $P(x_0|y_0)$ په پام کی نیولو سره، باور لري:

$$\sin\alpha = y_0 / 1 = y_0 , \quad \cos\alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرښی د پریوستون او یا د سیوربدرځونو په څیر لاس ته راځي، که موږ وړانګه د یوه ټالوهونکی مړوند په څیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چی د محورغبرګي رڼا لاندې راشی.



څیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریګوډي کی کیدی شي چی د پیتاګوراس جمله وکارول شي:

تریګونومتریکي پیتاګوراس:
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

چیرته چی $\sin^2\alpha = \sin\alpha . \sin\alpha$ په مانا دی.

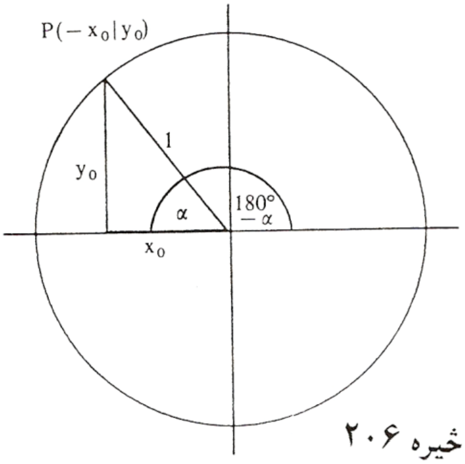
(c) ketabton.com: The Digital Library

کيدی شي ، چی پوښتنه وشي چی همدا « سيوری » بيا کله لاس ته راتلی شي.
دا حالت بياټيك هلته لاس ته راځي، چی وړانګه د منفي x –محور سره يو کونج ∝ جوړ کړي، يعني ښتريکونج يی ∝ - 180° وي.
د « سيوروڅيرو» ښخه لاس ته راځي:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

ځکه چی دا سيوری همغومره اوږد دی لکه د مخه، مګر اوس له صفر پيل مخامخ (منفی) لور ښايي.



څيره ۲۰۶

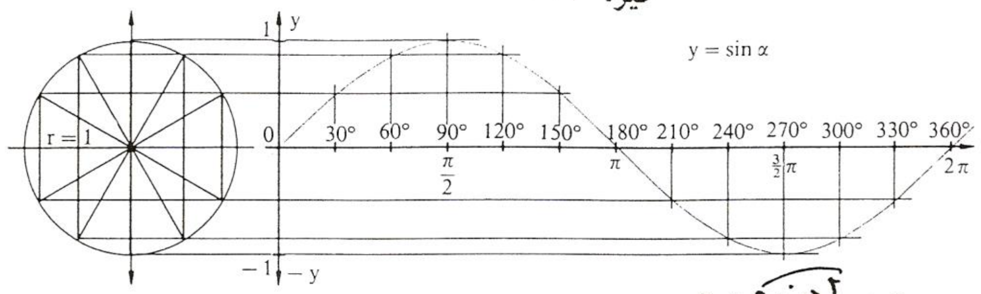
په ورته توګه لاس ته راځی :

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(360° - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

د کونج ∝+360° لپاره بيرته د سرچيني کونج اړيکی لاس ته راځي: همدا ډول د ∝+720 لپاره اوهمداسی نور. په دې توګه د په خوښه کونجفنکشنونو يا کونجبلواکو لپاره د ساين او کوساين بلواك تعريف دي.
د $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ له امله (مقايسه مخ ۱۵۱) دا د تنجنت بلواك لپاره هم صدق کوي. له دې امله لاندې د بلواکګرافونه لاس ته راځی

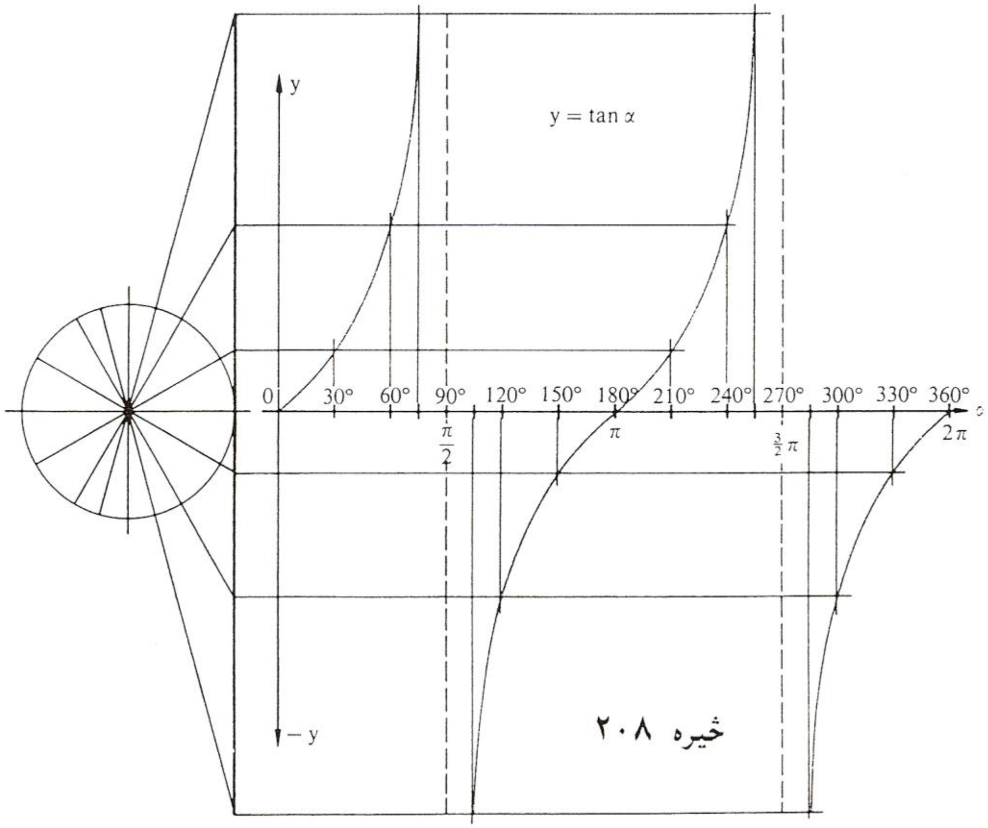
(c) ketabton.com: The Digital Library

شیره ۲۰۷



Die **Sinuskurve**: $y = \sin x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$

د ساین کږه

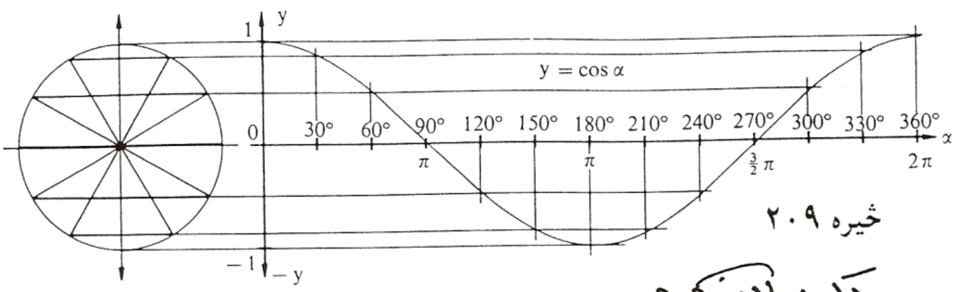


شیره ۲۰۸

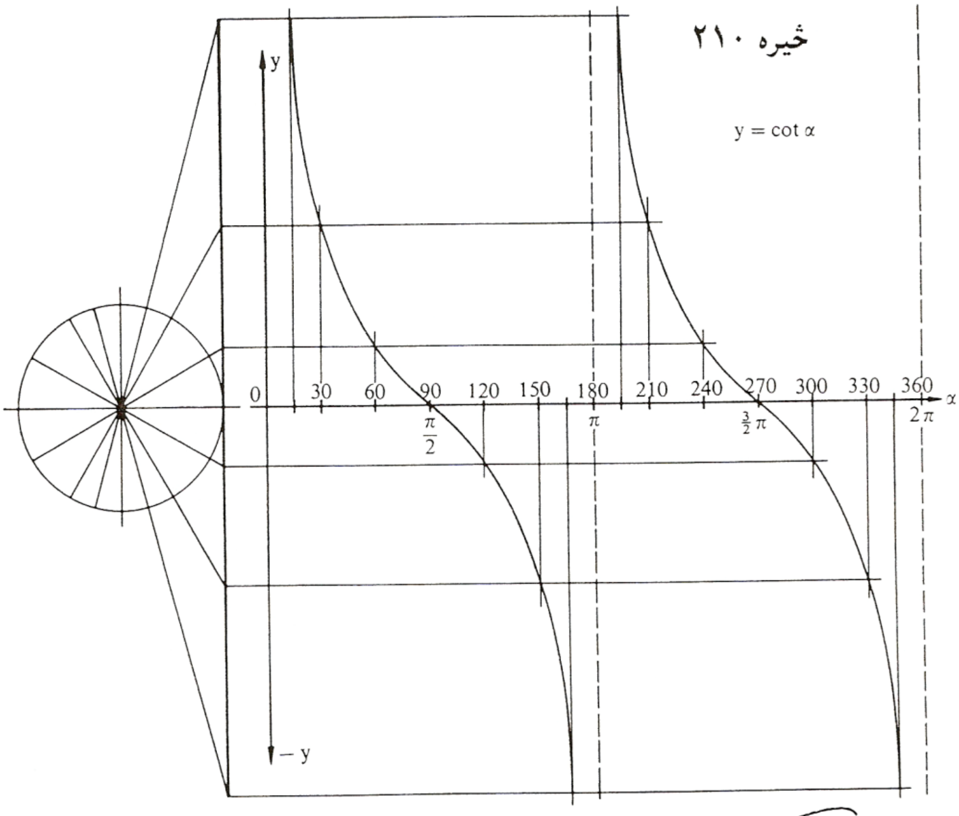
Die **Tangenskurve**: $y = \tan x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

د تنجنت کږه

(c) ketabton.com: The Digital Library



Die **Kosinuskurve**: $y = \cos x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$ دکوساین کږه

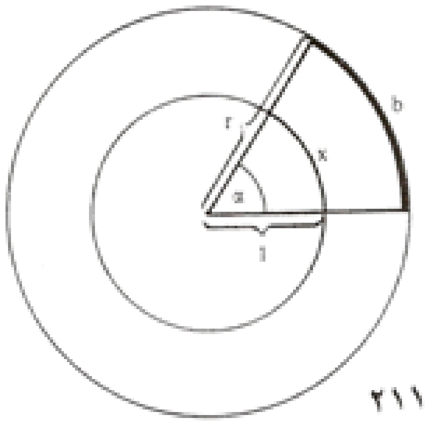


Die **Kotangenskurve**: $y = \cot x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$ دکوتنجنت کږه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لینده اندازه (لینده کچ) Das Bogenmaß

په زره درجه د کونجکچ یا – اندازې سره بلد یو (دمخه ولیدل، چې ۳۶۰ درجې پوره ګردي ښايي. هغه، چې لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده ، چې ګردي په ۴۰۰ مساوي برخو وېشل کېږي. دا په دوارو کچیوونونو یا کچواحدونو کې ګډ دي، چې په ګڼونو اندازه کېږي، بې له کچ یوون ارزښتدېرې رېیلګڼونه دي، په داسې حال کې چې وتل ګڼونه (= د تعریف ډېري ګڼونه) یو یوون یا واحد (درجه یا ګون) لري. دا په کارونه یا عمل کې مونږ زیات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندي کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.



شېره ۲۱۱

کونج لویې په واقعیت کې یوون «راد (rad) » لري، مګر دا په کارونه یا عمل کې کیدی ونه لیکل شي یا صرف نظر ترې وشي، که بدلون ته مو نه راهڅوي. دا کونجکچونه چې د کونج لپاره په ټریګونومتریکي بلواکو کې اېښودل کېږي (د بیلګې په توګه sin∝) ارګومنټ (Argument تعریفډېرې) بلل کېږي. په تعریفډېرې کې کیدی شي چې نوې درجه ، زره درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکي دې پام ولري چې په جیښمیرې کې همغه مودوس په کار اچول شوي دي(راټلونکي دې وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په برخه ګردیبرخوکی وښوول شو (ګردیبرخی د مخه څیړل شوي دي) چی هر کونج پورې یوه ګردبرخه یا ګردی لینده اړه لري، نو ټولی ګردی پورې ۳۶۰ درجی کونج یا $2\pi r$ اړه لري، یوه کونج ∝ پورې بیا یوه لینده b اړه لري، کومه چی په چاپېرۍ ځانګړي همداسی نیسي لکه په پیل کی ∝ و ۳۶۰ درجو ته . دلته ګردیګڼ دی : $\pi = 3,14....$ (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

پیلبیلګه:

کونج $60° = \propto$ له ګردی د ۱۰ سانتیمتره وړانګي سره یوه په لاندې ډول ګردی لینده $b = 20\pi . 60° : 360° = 10,47$ cm غوځوي یا بیلوي. د ګردی چاپیری دی : $U = 20\pi = 62,83$ cm

همغه کونج ∝ د ۵ سانتي متره وړانګی سره ګردیلینده

$$b = 10\pi . 60° : 360° = 5,236 \text{ cm}$$

غوځوي. دا ګردی لاندې چاپیری لري: $U = 10 = 31,416$ cm .

له ګردی د وړانګي $r = 1$ cm سره ددې په څېر یا برعکس کونج ګردیلینده

$$b = 2\pi . 60°: 360° = 1,047 \text{ cm}$$

غوځوي» د دې ګردي چاپیری فقط $U = 2\pi = 6,283$ دی .

له بیلګي څرګندیږي، چی لینده اندازه په همغه اندازه زیاتیږي لکه وړانګه. له دې امله کیدی شي خپله شمیرنه په یوونګردي د وړانګي ۱ سره رابنده یا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعریف: په یوونګردي د ګردیلیندی اوږدوالي کچګڼ، چی په څنتریکونج

(c) ketabton.com: The Digital Library

باندې ځيره شوي، لينده کچ بلل کيږي. لاندې شميراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180^\circ).\pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x/\pi)\,180^\circ = \frac{x}{\pi}\cdot 180^\circ$$

دا چې د وړانګي څرخون په پوره کونج هم وراوړيدی شي، نو له دې امله د لينده کچ لپاره په خوښه رييلګڼونه پرېښوول شوي.

بيلګی :

$$\alpha = 1^\circ \Leftrightarrow x = \frac{1^\circ}{180^\circ}\pi = 0{,}0175\ (rad) \qquad \alpha = 180^\circ \Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{180^\circ}\pi = \pi = 3{,}1416$$

$$\alpha = 30^\circ \Leftrightarrow x = \frac{30^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236 \qquad \alpha = 360^\circ \Leftrightarrow x = \frac{360^\circ}{180^\circ}\pi = 2\pi = 6{,}2832$$

$$\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow x = \frac{45^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854 \qquad \alpha = 720^\circ \Leftrightarrow x = \frac{720^\circ}{360^\circ}\pi = 4\pi = 12{,}5664 \quad \text{usw.;}$$

$$\alpha = 60^\circ \Leftrightarrow x = \frac{60^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{3} = 1{,}0472$$

$$\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow x = \frac{90^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \qquad \alpha = -75^\circ \Leftrightarrow x = \frac{-75^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{-5}{12}\pi = -1{,}309$$

ارکوسبلواکي Arcusfunkrionen

زيات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کيږي ، چې لکه په ورکړشوو کرښځانييونو راپيداشوې کونجونه څنګه معلوميږي يا څنګه راڅرګنديږی يا بهتره څنګه ځانونه نيسی. ددې لپاره چی دا پوښتنه ځواب شي، بايد امکانات ولټول شي، چی د کونجبلواک ارزښتونو څخه څنګه بيرته کونج يا په همدې توګه د هغه تعريفيږي ته، په لينده کچ راتلی شو. دا کونجبلواک پريوديکی يا تل بيرته راګرځيدونکي بلواک دی، دا په دې مانا ، چې د بلواک ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونولپاره يا .

(c) ketabton.com: The Digital Library

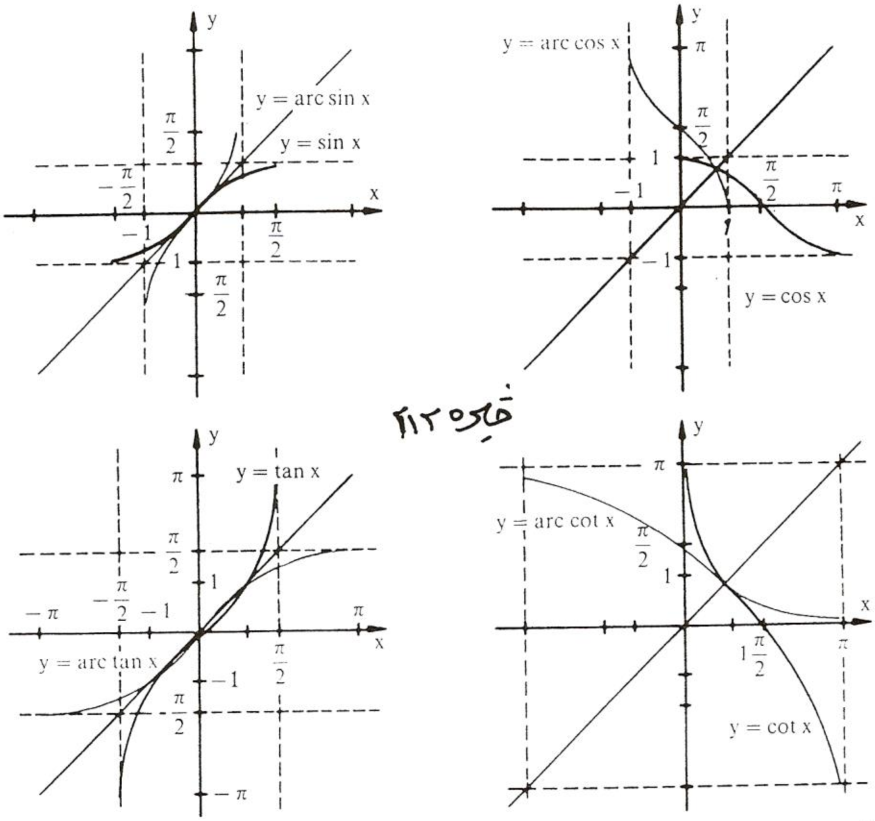
مختلفو واټنونو وروسته، بلواك ارزښتونه تکراريږي. د دې لپاره چې په څټکيدنه ممکن شي، نو بايد د خپل تعريف ډيرى په يوه برخه ډيري رابند يا محدود شي.

تعريف : د يوه (رابند يا محدود) تريگونومتريکي بلواك په څټ بلواکونه اركوس بلواك Arcusfunktion بلل کيږي يا څيکلومتريکي بلواك (لاتين :اركوس Arcus = Bogen = لينده)

دلته (arc sin(x لوستل کيږي »دx اركوس ساين. د کونجبلواك تعريفډيرى دلته اړونده اركوسبلواك ارزښتډيرى دى او په څټ اركومنت يا تعريفډيرى دلته تل يو ريبلگڼ دى.

Trigonometrische Funktion ترېگونومترېکي بلواک	Arcusfunktion ارکوسبلواک
f: $x \mapsto \sin(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arcsin(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \mapsto \cos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 \le x \le \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arccos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 \le y \le \pi\}$
f: $x \mapsto \tan(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arctan(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \to \cot(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 < x < \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < x < \infty\}$	f^{-1}: $x \to \operatorname{arccot}(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 < y < \pi\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



قېره ۲۱۲

Beispiele: بېلګې:

1. arcsin (0,8) = 0,9273 (rad) = 53,13°

2. arccos (1) = 0 (rad) = 0°

3. arctan (− 100) = − 1,5608 (rad) = − 89,43°

4. arccot (− 70) = − 0,0143 (rad) = − 0,82°

۵ – دا چې کونجبلواك و ارکوسبلاك يو د بل په څټ بلواك دي نو باور لري:

$$\sin(\arcsin(y)) = y; \quad \arcsin(\sin(x)) = x$$
$$\cos(\arccos(y)) = y; \quad \arccos(\cos(x)) = x$$
$$\tan(\arctan(y)) = y; \quad \arctan(\tan(x)) = x$$
$$\cot(\text{arccot}(y)) = y; \quad \text{arccot}(\cot(x)) = x$$

یعنې په لاندې توګه چې

$$\sin(\arcsin(0{,}4)) = \sin(23{,}58°) = 0{,}4$$
$$\arccos(\cos(\pi/3)) = \arccos(0{,}5) = 1{,}0472$$
$$\tan(\arctan(-40) = \tan(-88{,}5679°) = -39{,}9999$$
$$\text{arccot}(\cot(60°)) = \text{arccot}(0{,}5774) = 1{,}0472$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جبشمیري کارونی یا استعمال لپاره

داچی پخوا معمول جدولونه د بلواك تعریفېدیري او ارزښتېدیري شمیرلو لپاره له کاره غورځول شوي دی او دنده یی ایلکترونیکي ماشینونو نیولی ده، غواړو چي د جبشمیري استعمال په هکله هم څه ووایو

کورکمپیوتر زیات وخت داسی فنکشنونه یا بلواکي لري یا وظیفی په کلك اختیار کی لري، چی د درجي اوړون په لینده کج او په څپ کوي، مگر شمیردرخ په توګه باید د شمیرونکی په پروګرام کی ځای په ځاي شوی وي.

پوره اسانتیاوې او زیاته کارونه د جبشمیرې په غاړه پرته ده، دلته دې توکمی د < .... > سره په نخښه شي:

په قاعده کی دریی بلواك ورکړشوي دي : < sin > ; < cos > ; < cot > کوتنجنت بیا داسی شمیرلکیدی شي، د < tan><1/x > . د < INV > – توکمي سره سړی ارکوسبلواك ته راځي: نو < INV><sin > ارکوس ساین دی. په عمومی توګه کونج – بي پروا که په لینده کج او یا درجه کج ورکړ شوي وي – باید د فنکشن له مخه ورکړ.

بیلګي

۱ لاندې جدول همغه د کارونی یا استعمال لپاره د جبشمیري چمتووالی ښاي :

Winkelmaß کونجونه	TR-Modus په تخنبونه	Beispiel بېلګه
Altgrad زوړه درجه	DEG	$\sin 45° = 0,7071$
Neugrad نوې درجه	GRAD	$\sin 50^g = 0,7071$
Bogenmaß لینده کج	RAD	$\sin \frac{\pi}{4} = 0,7071$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
sin 45°	45⟨sin⟩	0.707106781	DEG
$\sin \frac{\pi}{6}$	⟨π⟩⟨:⟩6⟨sin⟩	0,5	RAD
cot 30°	30⟨tan⟩⟨1/x⟩	1.732050808	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	60(°)	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	$1.047 = \frac{\pi}{3}$	RAD
arccot 2	2⟨1/x⟩⟨INV⟩⟨tan⟩	26.56505118°	DEG
sin 220^g	220⟨sin⟩	−0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چی جبشمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه») د زاړه – یا نوي درجې همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جبشمیریو مودلونو سره د تکمی <DRG> څخه لاس ته راځی یا د بیلګي په توګه <MODE>.

د ورکړشوي درجه ګڼ اوړون په لینده کچ د <<- DRG> سره سورت نیسي.
بیرته یا په څټ سړی داسی راځي- لکه چی لرل مو- د <INV> – تکمی سره.

بیلګی

60°	⟨DRG⟩	60(rad)
60	⟨DRG⟩	60(grad)
60°	⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨DRG →⟩	60°
60°	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	60°

دلته ګراد نښونه (gard) نوی درجه ده یعنی ګون(gon).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځنې جشميري په دې برسيره نور زيات امکانات هم لري ، نتيجې يې په ګراد دقيقې، ثانيې اويا لسيز سيستم ورکړ شوي دي. بدلون بيا د تکمې <DMS-Dd> سره صورت نيسي:

26.75° 30°15′	⟨inv⟩⟨DMS – Dd⟩ ⟨DMS – Dd⟩	26°45′ 30.25°

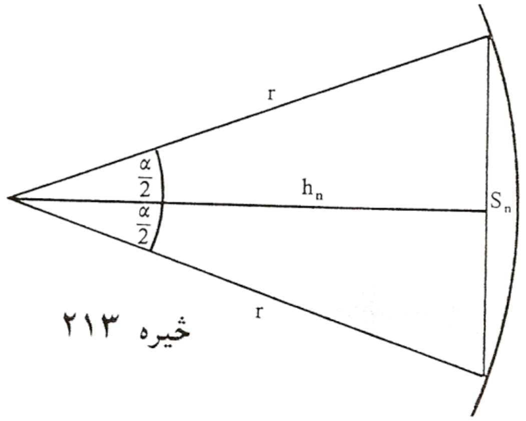
د " "15 °30 " ورکړه کيدی شي د جبشميري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جبشميرى د لاس کتاب ښخه ګټه واخستل شي (يادونه: زه پوهيږم چې داسې شيان موږ متآسفانه په خپل هيواد کې نه لرو ، خو په هر صورت يي ليکل ضرور دي، دا پرمختګ موږ هم خپل شاته نه شي پريښوولی)

پيلبيلګه: دلته دې S_n د يوه منظم n– ګوډي د اړخ اوږدوالی وي، چې په يوه ګردی کې چې وړانګه يې $r = 5$ cm ده، راګير دی.

الف) وښايي چې

$$S_n = 2r \cdot \sin(180° : n)$$

ب) د يوه داسې n– ګوډي چاپيرى U_n وشميرى ، چې $n = 8;16;32;128$ وي، او په نزدې توګه يا تقريبي د دې ګردي چاپيرى د دې وړانګې r سره وښايي .



خيره ۲۱۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په همدې ډول n– ګوډی له هوارو A_n څخه په نزدې توګه یا تقریبي د ګردی ـــ هواره A وښایی .

اوبی (حل : هر n– ګوډی کیدی شي په n مساوي دریګوډیو ټوټه کړی شي.

د هغو د څینتریکونج ∝ لپاره باور لري $\propto = 360° / n$. د جګی یا جګوالی h_c د کنبلو سره په هر مساوي پښیز دریګوډي کي ولاړکونجیزې نیایی د څنتریکونج یا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\propto}{2} = 360° / 2n = 180° / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n /2) / r = \sin\frac{\propto}{2} \Rightarrow S_n = 2r . \sin\frac{\propto}{2} = 2r . \sin(180° / n)$$

b) $U = n.S_n = 2r.n.\sin (180°/n) = 10n.\sin (180° / n)$

د ارزښتشمیرنو د غلطی مخنیوی لپاره همدفمند یا موخه ور دی، که په دغه همغه لړپیرلپسی تکمی وکارول شي یا استعمال شي .

180° ⟨STO⟩ ⟨ : ⟩ 8 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 8 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 30.614675
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 16 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 16 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 31.214452
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 32 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 32 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 31.365485
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 64 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 64 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 31.403312
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 128 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 128 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 31.412773

پ) د ډیرګوډي هواره د دریګوډیو هوارو د یوځایوالی څخه لاس ته راځی

د هر دریګوډي هواره ده: $0 , 5 .S_n . h_n$. د

$$h_n = r.\cos(180° / n)$$

او

$$S_n = 2r . \sin (180°/ n)$$

له امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = n \cdot 0{,}5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cos\left(\frac{180°}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0{,}5 \sin\left(\frac{360°}{n}\right)$$

له دې سره د نړې [illegible]

```
360° ⟨STO⟩ ⟨:⟩   8 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩   8 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 70.710678
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩  16 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩  16 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 76.536686
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩  32 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩  32 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.036129
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩  64 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩  64 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.413712
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 128 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 128 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.508279
```

د یوه جشمیرې سره ، چې له یوې زخیرې زیاتی ولري ، لکه چی پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسیره نورې ثابتي هم زخیره کیدی شي» په یوه منظم پروګرامونو ماشین سره کیدي شي چي د دا ډول شمیرنو لپاره د ګوډونو ګڼ شخه ت شو یا د ګوډونو ګڼ باند ې صرفنظر وشي .

د تریګونومتریکي بلواکو خویونه

دا چی کونجکچ په درجه کچ او هم په لینده کچ ورکول کیدی شي، کیدی شي چی یوه کونج بلواك تعریفېدیری یا ∝ او یا x وي. ددې لپاره چی د یوه بلواك خوي باندې تېنګار وکړو، باید په لاندې په لینده کچ تکیه وکړو.
د لاندې خویونو لمړی ډله یواځي له تعریفمساوات (د مخه راغلی) او د پیتاګوراس له جملی لاس ته راځي (د مخه لوستل شوې) لاندې صدق کوي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پرته کاتیت}} = \frac{\dfrac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}}{\dfrac{\text{پرته کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دې لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \iff \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسیره پر دې لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دې سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x \; ; \quad 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تریګونومتریکي بلواکو کی هیله ده ، چی د پوتنځ لیکدود په پام کی ونیسی.
په لاندې پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی gegeben ورکړی او gesucht غوښتونی یا پلټونی په مانا دي

gegeben [ورکړې] / gesucht [غوښتونې]	sin x	cos x	tan x	cot x
sin x	sin x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
cos x	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	cos x	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
tan x	$\pm\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	$\dfrac{1}{\cot x}$
cot x	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\dfrac{1}{\tan x}$	cot x

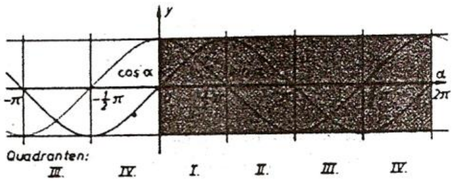
لکه چې د مخه مو په ګوته کړل، کیدی شي چې تریګونومتریکي بلواک د مختلفو ګونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواک ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توګه یا په کلکه توګه لاس ته راوړی شو

تعریف : تریګونومتریکي بلواک ټول پریودیکي یعني بیرته راګرځیدونکی دی، دا په دې مانا، چې د بلواک ارزښتونه په منظمو واټنونو کی تکراریږي. په دې د ساین بلواک او د کوساین بلواک راګرځیدنه (یا ۳۶۰ درجی) لري، کوتنجنتبلواک راګرځیدنه (یا ۱۸۰ درجی (180°)) لري.

$$\left.\begin{array}{l}\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x \\ \tan(x \pm k\pi) = \tan x\end{array}\right\} \quad k \in N$$

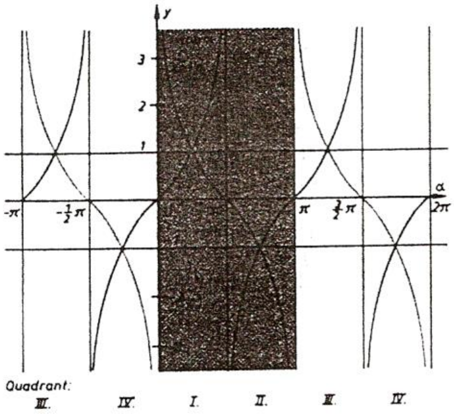
$$\left.\begin{array}{l}\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x \\ \cot(x \pm k\pi) = \cot x\end{array}\right\} \quad k \in N$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



شیره ۲۱۴

د ساین - او کوساین فنکشن پریودیکي راګرځیدنه



د تنجنت او کوتنجنت فنکشن پریود ښيي :

sin 50°	= sin (50° + 360°)	= sin (50° − 720°)	= 0,76604	
cos − 30°	= cos (− 30° − 360°)	= cos (− 30° + 1080°)	= 0,86603	
tan 2,5	= tan (2,5 − π)	= tan (2,5 + 5π)	= − 0,74702	
cot 10	= cot (10 + π)	= cot (10 − π)	= 1,54235	
sin 35°	= sin (180° − 35°)	= − sin (180° + 35°)	= − sin (360° − 35°)	= 0,573576
cos 35°	= − cos 145°	= − cos 215°	= cos 325°	= 0,81952
tan 0,6109	= − tan 2,5307	= tan 3,7525	= − tan 5,6723	= 0,700208
cot 0,6109	= − cot 2,5307	= cot 3,7525	= − cot 5,6723	= 1,428042

که د فنکشن ګراف ته په ځیر شو نو په دې برسیره په ټینګه روښانیږي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	

$$\sin x = \sin(\pi - x) = -\sin(\pi + x) = -\sin(2\pi - x) \quad \text{(Abb. 179)}$$
$$\cos x = -\cos(\pi - x) = -\cos(\pi + x) = \cos(2\pi - x) \quad \text{(Abb. 179)}$$
$$\tan x = -\tan(\pi - x) = \tan(\pi + x) = -\tan(2\pi - x) \quad \text{(Abb. 180)}$$
$$\cot x = -\cot(\pi - x) = \cot(\pi + x) = -\cot(2\pi - x) \quad \text{(Abb. 180)}$$

بېلګې:

	α	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$360° - \alpha$
	35°	145°	215°	325°
sin	0,573576	0,573576	– 0,573576	– 0,573576
cos	0,819152	– 0,819152	– 0,819152	0,819152
tan	0,700208	– 0,700208	0,700208	– 0,700208
cot	1,428148	– 1,428148	1,428148	– 1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځې د جبشمیرې یا کمپیوتر څخه کار اخستل کیږي ، هدفمند بولو، چې یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin x bzw. sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos x bzw. cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
tan x bzw. tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	–	0
cot x bzw. cot α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

د دغه جدول د هر اړخیز په مانا کې او [illegible].

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې جدول څخه کیدی شي په خیال کی یا ګوماني لاس ته راوړی شو

$\sin x = \cos(\ \ /2 - x)$ $\cos x = \sin(\ \ /2 - x)$
$\tan x = \cot(\ \ /2 - x)$ $\cot x = \tan(\ \ /2 - x)$

دا ګومان کیدی شي په ولاړکونجیز دریګوړي کي د تعریف په مرسته په ساده توګه وښوول شي. :

$\sin \ \ = a / c$ او $\cos ß = a / c$

د $ß = 90° -$ له امله لاس ته راځي :

$\sin \ \ = \cos(90° - \ \ )$

په ورته توګه نور ې غوښتني هم لاس ته راتلی شي.

دا له څیرو څخه هم لاس ته راوړل کیدی شي، څکه د ساین او کوساین بلواکو یا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنت بلواکو ګرافونه د $x = \ \ /2$ کرښی ته یو بل سره محورسیومتري ځغلي :

له څیرو او بیلګو څخه په دې برسیره لاس ته راځي:

تعریف: د کوساین بلواك جفت دی، لرو:

$\cos(x) = \cos(-x)$

ساین – ، تنجنت – او کوتنجنت بلواك ناجفت دي» د دوي لپاره باور لري:

$\sin(x) = -\sin(-x),\ \tan(x) = -\tan(-x)\ ;\ \cot(x) = -\cot(-x)$

یادونه : په دې نلواکو کي کیدی شي چی x له نوکانو دباندې هم وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګی:

$\sin 60° = -\sin(-60°) = 0{,}86603$

$\cos 0{,}75 = \cos(-0{,}75) = -0{,}70711$

$\tan 150° = -\tan(-150°) = -0{,}57735$

$\cot 1{,}3 = -\cot(-1{,}3) = o{,}27762$

د زیاتون قضیي یا تیورمونه

دا چي کونجبلواك لاینی نه دي(د فنکشنګراف کرښه نه ده،بلکه کږه ده) ، نو ډېل تعریفېدیري پورې ساده ډېل بلواك ارزښت اړه نه لري.
لکه

$\sin 30° = 0{,}5 \quad \sin 90° = 1 \quad \sin 180° = 0$

د داسی په نامه زیاتونمسئلی په مرسته ممکن کیږي، چی د بلواك ارزښت د کونج په دوه برابرولو یا په همدې ډول د دوه کونجونو یو په بل زیاتولو د یوګونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابي کړی شو.

بیلګی :

1 . $\sin(x + y) = \sin x . \cos y + \cos x . \sin y$

1' . $\sin(x - y) = \sin x . \cos y - \cos x . \sin y$

2 . $\cos(x + y) \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$

2 '. $\text{cis}(x - y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y$

3 . $\sin 2x = 2.\sin x . \cos x$

4 . $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

6. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

7. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 - \cos x)}$

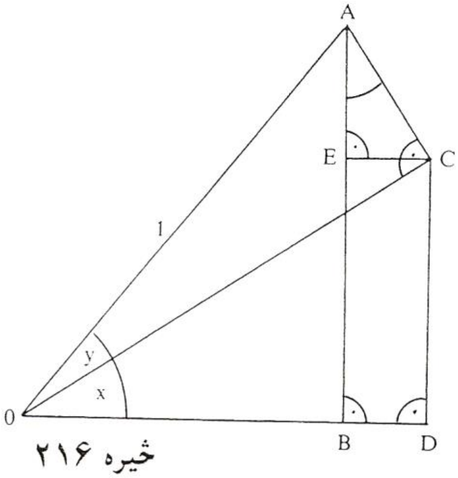
8. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 + \cos x)}$

9. $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

9′. $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

10. $\cot(x + y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$ mit $\cot x \neq -\cot y$

10′. $\cot(x - y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y}$ mit $\cot x \neq \cot y$



شیره ۲۱۶

1. und **2.**:

$|OA| = 1$

$|AC| = \sin y; \quad |OC| = \cos y$

$|AB| = \sin(x + y); \quad |OB| = \cos(x + y)$

$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$

$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

برسیره پر دې لرو :

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$
$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

د ځای په ځای کولو څخه ښوونه په لاس راځي

$$\sin(x + y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1′. **2′.:**

3. **4.:** $x = y$. ځای پر ځای کړه

5.: Setze $z + t = x$; $z - t = y \Rightarrow z = \frac{x+y}{2}$; $t = \frac{x-y}{2}$ کېږده

$\sin x = \sin(z + t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$ پس لرو

$$= \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$\sin y = \sin(z - t) = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ همداسې

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

6. ښوونه په ورته توګه څخه ځي

7.: $x = y = z/2$ کېږده

$$\Rightarrow \cos(x + y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2\frac{z}{2} - \cos z \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$$

د دوهمې نیونې له لارې ښوونه لرو

8.: $(*)$ $\sin^2\frac{z}{2}$ durch $1 - \cos^2\frac{z}{2}$. په (*) کې ولیکه یا لیکوده

9-10: د اا پرتله د 1 او 2 او تمرینونه د تعریف څخه لاسته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بلواك يا فنكشن $y = a . \sin(bx+c) +d$

لكه چې په پيل كې مو وويل په طبيعت او تخنيك كي ډيرې پيښي شته دی چي تل بيرته راګرځي يا لنډ: راګرځي، يعني پريوديكي دي. د دې د تشريح لپاره په خپل سوچه يا خالصه بڼه تل د ساين بلواك بسيا نه كوي.
دا زيات علتونه لري : لمړی د ساينبلواك د ۱- او ۱ ترمنځ ارزښت نيسي، له بلې لور داواقعي د كونج په واك كی نه دي بلكه د وخت په واك كي دي د يوې راګرځيدنی سره، چی دا په ساده توګه د 2 په ډول نه شي رانيولكيدی. له دې امله د ساين بلواك د دې كارونو د روښانوولو لپاره بايد موډيفيځير شي يا يی بڼه واوړې. دا بڼه اوړون او د هغی تاثير په لاندې ليدنه كی راڅول شويدي، ګراف يی ورزياتی څيرونی لپاره دی. په ورته ډول د نورو كونجبلواكو لپاره باور لري په عمل كي مګر يواځي د ساينبلواك (په همدې توګه د هغي مخامخ د كوساين بلواك چي په $\pi/2$ سره راكښل شوی وي) د مانا ډك دي. (لوستل: له ښي لوري څخه)

بیلګی	دکارونی ساحه	تاثیر	بلواك
څېره ۲۱۷	ټولی تلبيرته راګرځيدونی تعامولونه		$y = \sin(x)$
څېره ۲۱۸	د يوه مساوي او بدل ښپيالونو يو په بل پرلوتل	د y - لوري باندې راکښنه	$y = \sin(x) + d$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شېره ۲۱۹	په بدل بڼه جریان کې د بڼتنا او ښیالونکې تغیر روښانوي	د فاز تغیر ځای بدلون	$y = \sin(x+c)$
شېره ۲۲۰	د یوه پندول خوځېدنه	د امپلیتود د ځای بدلون فاکتور -1 د 180° فاز ځای بدلون دی	$y = a \cdot \sin(x)$
د شېره ۲۲۱	د یو بنسټیزې څپې خپرونه په یوه وخت او ورته رو هغې پورته لمېزه د نکل په د څوزېدنګ الوېه او ازولوکې	د پریود تغیر یا بدلون $b>1$ سرعت $0<b<1$ په کرار کېدل $b<0$ په شاته ګرځېدنه کله مخور دی	$y = \sin(bx)$
شېره ۲۲۲	کمپلکس پریودي جریان یا عمل	عمومي حالت	$y = a \cdot \sin(bx+c)+d$

تمرینونه

۱ – د لاندې ورکړې سره شېره بله کړی

$4°6' = 4{,}1°$; $10°, 5' = 10°30$

a) $6{,}75° =$ b = $120{,}48° =$ c) $-75{,}65° =$

d) $52°16' =$ e) $97°13' =$ f) $44°44'\ 44'' =$

۲ – په درجه کې ي ولیکی

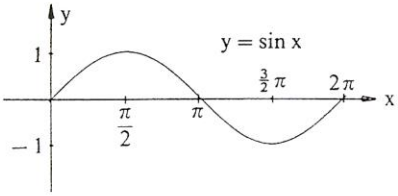
a) $x = \pi/3$, b) $x = -\pi/4$, c) $x\ (2/3)\pi$

d) $x = 4$ e) $x = -3$ f) $x = 4{,}7$

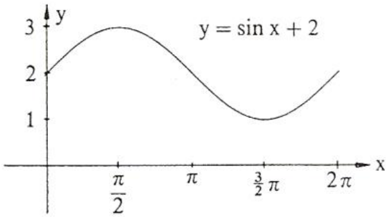
۳ – په لینده کې یی ولیکي

a) $15°$ b) $-60°$ c) $540°$ d) $20°15'$ e) $15{,}75°$

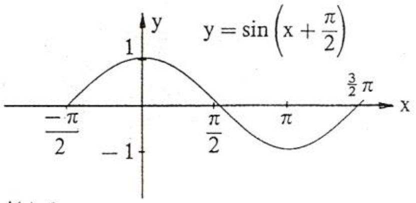
(c) ketabton.com: The Digital Library



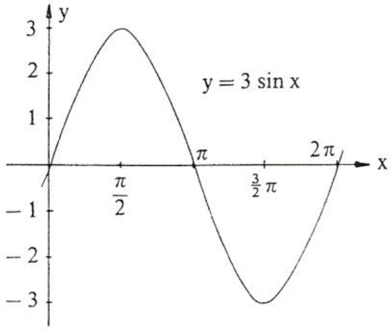
ثیره ۲۱۷



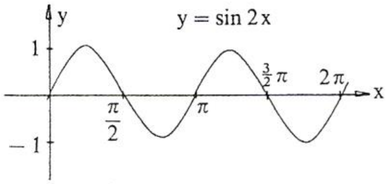
ثیره ۲۱۸



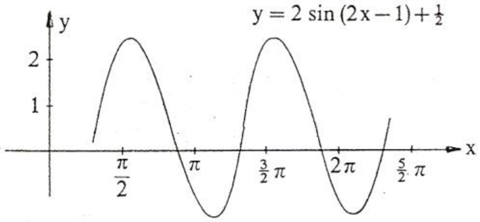
ثیره ۲۱۹



ثیره ۲۲۰



ثیره ۲۲۱



ثیره ۲۲۲

د دې بلواك ګراف د ساین کږې $y = \sin x$ څخه لکه چې ګورو لاس ته راځي:

۱ − د ارزښت دوه ځله کیدل

۲ − د نیمی راګرځید اوږدوالی باندې پرسیدنه

۳ − په یوه یوون د ښي لور ته راکښنه

۴ − په $1/2$ پورته لورته 100% راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – وټاکی

a) sin20° b) sin(-30°) c) sin 172° d) din1°4'

e) cos 35° f) cos 380° g) cos(-27°) h) cos47,9°

i) tan 11° k) tan (-15°) l) tan 33,33° m) tan 13°13'

n) cot 870° o) cot (-11°) p) cot 14°14'

q) cot (-2°2')

r) sin α =0,8 s) cos α = 0,9 t) tan α = 2,5

u) cot α =-1 v) sin φ = 0,3 w) cos φ = -0,13

x) tan φ = -4 y) cot φ = 0,3 z) arcsin(x) = π /2

۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی لرو $\gamma = 90°$ او په دې برسیره :

a) a = 7 cm; b = 6cm

b) a = 16cm; = 66°45'

c) c = 5cm; a = 3cm

پاتی ټوټی وشمیری

۶ – په مساوي پښیز دریګوډي

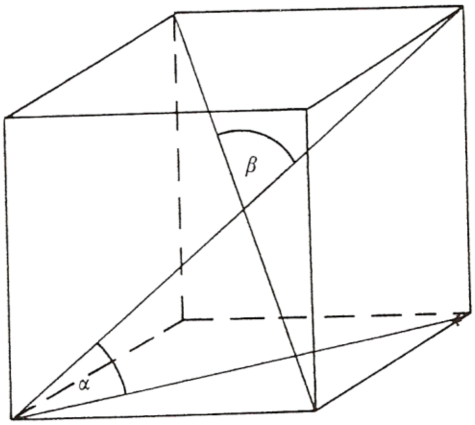
کي (a = پښه ده) دی

a) a= 10cm ; α =80°40'

b) a= 12 cm ; h = 8cm

c) ß = 40°; a = 7cm

پاتی ټوټي وشمیري



شیره ۲۲۳

۷ – د یوه پڅکونجیز (α > 90°)

دریګوډي لپاره ساین وشمیری

۸ الف) کوساین د یوه پڅ کونجیز

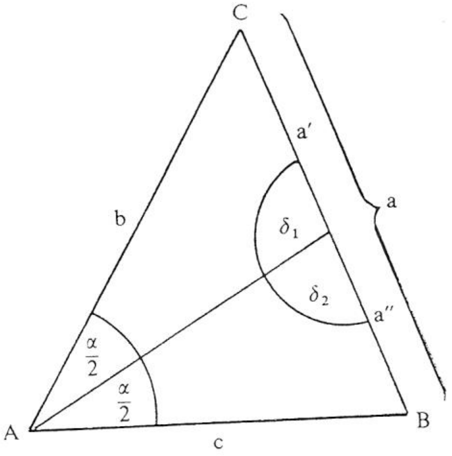
دریګوډي لپاره وشمیری (α > 90°)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟

۹ – په یوه مکعب کی د یوه هوا نیمي او بنستهواري ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟
څیره .د دواړو هوا یا فضا یا بدن نیمیو ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

۱۰ – د دوه ګردیو وړانګی
$r_1 = 5\ cm \quad , r_2 = 4\ cm$
دي او همداسی د منځټکو واټن $|M_1M_2| = 8cm$ ورکړ شوی دی.
دد دواړو ګردیو د تماس
مماسونو غوڅکونجی وټاکی
او د کړې غوڅونی اوږدوالی .



څیره ۲۲۴

۱۱ – په یوه دریګوډي کی د یوه
کونجنیمی مخامخ اړخ په داسی
ځان نیونه یا تناسب غوڅوي لکه
په دې پرتي خواوې. دا غوښتنه د
ساین جملی په مرسته حل
(اوبی) کړی(څیره۲۲۴).

۱۲ – که یوه بار ځاي ته،
چي ۱،۵۰ متره جګ دی،
یوه زینه ورجګه شي
میلانکونج ← دې زیات ترزیات 33° وي، زینه دې څومره لویه وي؟

۱۳ – الف)د یوې پورته ختلی کوځي جګوالي توپیردې څومره وي، که دا
کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او 12% جګه وي؟
ب) د ۱۵۴۰ پرتی لارې وهلو وروسته د جګوالي توپیر څومره دی ؟
پ) د یوه زوړندي پټیلار، چی ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کی څومره
لوي دی ، که دا د جګوالی توپیر ۵۰۰ متره ولري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴ – یو د اوبو بیلر (کتله = ۱۰۰ کیلوګرامه) په یوه دړه پورته خېژول کیږي، چې میلانکونج $\alpha = 25°$ لري. د وزنزور په زوړندزور تختی سره غبرګ او نورمال یعنی ولاړ زور (د فشارزور) ولاړ تجزیه یا ټوټه کیږي، دواړه زوره څومره لوي دی ؟ (۱ کیلو ګرام = ۹ ، ۸۱ نیوټن $1\ kg = 9{,}81N$).

۱۵ – یو تلفونستن په څلور رسیو، چې هره یوه یی ۵۳ متره اوږده ده، درول کیږي. درسیو میلانکونج $60°$ دی په پښه باندې په کوم جګوالي باید رسی وړلی شي ؟

۱۶ – د یوې ۵۳ متره جګي ونی سیوری ۵ ، ۱۲ متره اوږد دی. په ځمکه لمروړانګي په کوم جګوالی یوبل سره مخامخ کیږي.؟

۱۷ – د یوه ۵ متره جګ کتونټکي (لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کیږي چی جګیدونکوج یی $\alpha = 18{,}5°$ او پښیټکی یی $\beta = 8°$ لوید کونج ، برج څومره جګ دی ؟ د لیدټکي څخه یی پروت لریوالی څومره دی ؟

۱۸ – الف) د پیزا (Pisa) کوږ برج ۴۷ متره جګ دی، او څوکه یی د پښی ټکي څخه ۵۰ ،۴ متره ور اوړي. دا برج څومره مایل دی ؟

ب) د یوه جومات برج چی ۱۵۰ متره جګ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په ځمکي ټکي (یعنی د سترګي جګوالی د برج بنسټټکي سره برابر وي)، څخه وکتل شي، چی د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟

پ) د ۵، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کیږي
– که جګوالی یی ۱۶۰ متره وي؟
– که جګوالی یي ۱۳۷ متره وي ؟

ت) د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې
– د بل برج څوکه ښکاریږي چی جګوالی یي ۱۴۳ متره وي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

–د پاریس د ایفل برج ښکاریږي چی جګوالی یي ۳۰۰ متره دی ؟

۱۹ – د ښیپپس اهرام(CHeopspyramide) ۱۳۷ متره جګوالی لري او د بنسټ د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري

الف) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟

ب) د څنګهوارې دریواړه دنننی کونجونه څومره لوي دي؟

۲۰ – یو ژوری یا قبر –۸ ، ۱ متره ژور دی، بنستهسور یی ۵ ، ۲ متره دی، د پورته لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی

الف) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی څومره پراخ دی؟

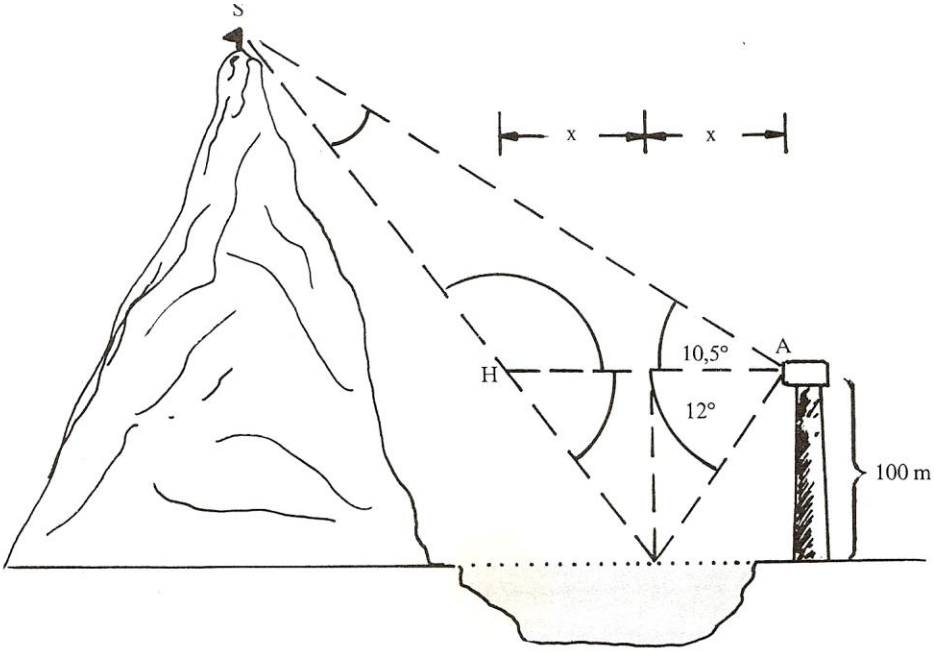
ب) که ۱۰ متره اوږد وي، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جګوالی یی ۵۰ ، ۱ متره وي؟

۲۱ – یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جګوالی لري د بحیرې لور ته 14° میلان لري، د دننه لور ته 28° میلان لري. د ډنډ بنسټ څومره سور لري؟ د هغی د نیمی هواره څومره ده؟

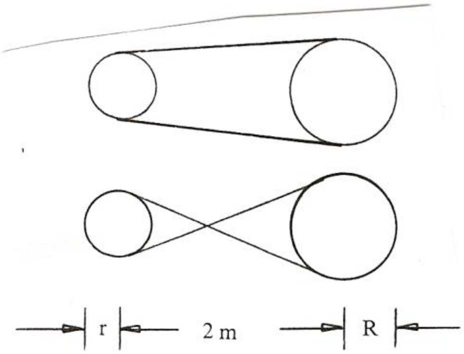
۲۲ – د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو ښه لید د ماترهورن (ماترنښکر یا د ماترن د غره څوکه Matterhorn) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی دی) اچول کیږي که دا د یوه لیدټکي څخه چی ۱۰۰ متره جګ دی د ډنډ په لور ښکته وکتل شي، نو د غره د څوکي هندارونه د 12° پریوتکونج لاندې لیدل کیږي. د غره څوکه د یوپورته کونج 11° لاندې لیدل کیږي. د ریفلډنډ باندې د ماترنښکر څوکه څومره جګه پروته ده؟

څیره

(c) ketabton.com: The Digital Library



شیره ۲۲۵



شیره ۲۲۶

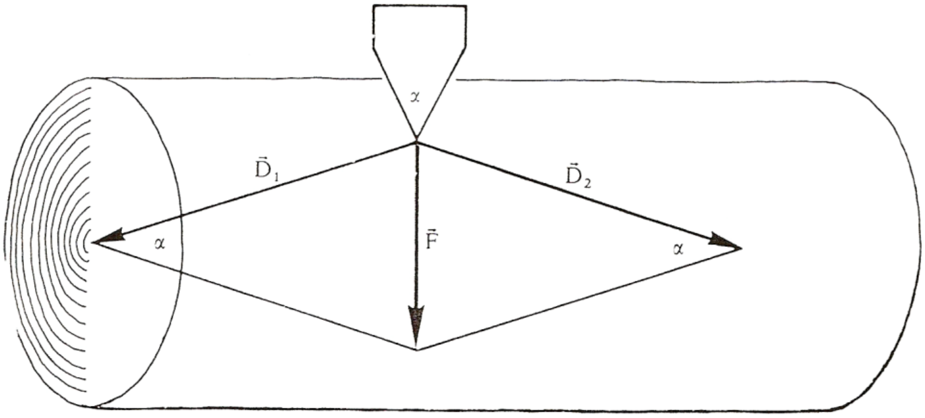
۲۳ - الف) یوه د کشولو کړی، چي په دوه دکښولو چیترو باندي راتاو ده، څومره اوږده ده، که لاندي اندازي ولري r = 22 cm , R = 35 cm , $|M_1M_2| = 2m$?

ب) دا کړی به څومره اوږدي وي که د اتیران په څیر له چیتروګانو یا ټیکلیو راکښل شوي وي ؟

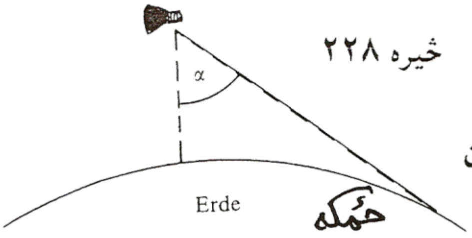
(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۴ الف) د ونی په سته یو کایل)موړی) په څټك د D زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه D څومره لوي دي، کوم چی د ستہی درځونه ، که د کایل یا تبرګي کونج $\alpha = 6°$ وي. (حیره ۱۹۴)؟

ب) په کومکایلکونج یا تبرګیکونج لرو: $|D|=|F|$ ؟



څیره ۲۲۷

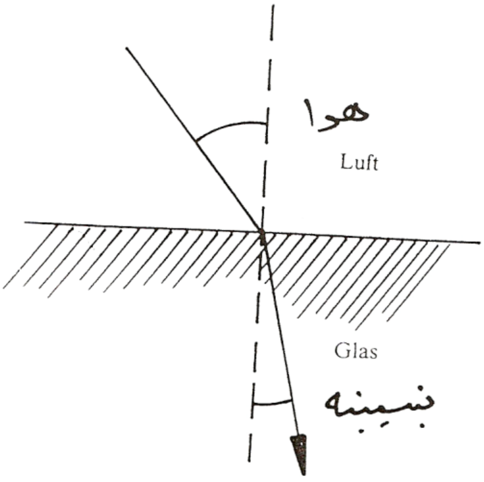


څیره ۲۲۸

۲۵ – د یوه الوتماشین څخه ځمکه د یوه α کونج لاندې لیدل کیږي (څیره) دا الوتماشین څومره جګ الوزي ؟ (د ځمکی وړانګه : ۶۳۷۰ کیلومتره)

۲۶ – یو ګادی د $v_{\alpha} = 120km/h$ سرعت سره روان دی، نو د باران څاڅکی په پټلی د تلنلور باندې په $= 115°$ کونج

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۲۹

د چیترو (مطلب د ګاډې د اوسپنی
ټیر یا ګاډیل دی) مخامخ ځغلي.
له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو
د لویدلو سرعت v_g وټاکی ؟

۲۷ – که د لمروړانګه په دوه مختلفو
طبقو ولویږي، نو خپلی لور ته تغیر
یا بدلون ورکوي. د سنیلیوس Snellius
د ماتقاعدې له مخی کیدی شي چی د
ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون
وايي، چی پروتوړانګه ، ماتوړانګه او
ولاړکرښه یا عمود په بیلیدونکی هوارې په یوه هواره پراته دي او برسیره پر
دې لاندې اړیکي باور لري یا صدق کوي:

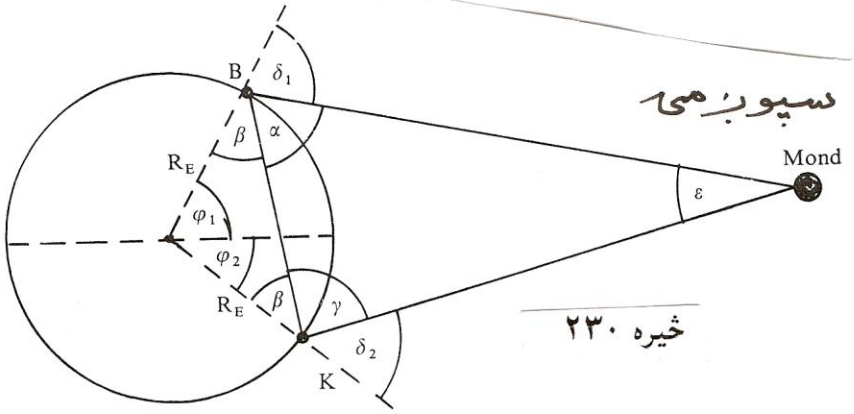
$$\sin \alpha \;/\; \sin \beta = n$$

که د رڼاوړانګه په یوه ښیښه (اوبو) پریوزي، نو $n = 1,5\ (1,33)$ دی. وښایي،
چی ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چی په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

$10,5°, 15,8°, 27,3°, 41,2°, 67,6°, 72,4°, 81,9°$ ؟

۲۸ – په ۱۸ –مه میلادي پیړی کی د سپوږمی لریوالی تریګومتریکي وټاکل
شو. په برلین کی (جغرافیوي اوږدوالی $\varphi_1 = 52,52°$) او لکه د ښو هیلو
په کونج کی ($\varphi_2 = -33,93°$)، کوم چی په همغه اوږدګراد پراته دي، د
سپوږمی سره په همغه وخت کی تړل کیږي. له دې لاس ته راغلل:
$\delta_1 = 32,08°$ او $\delta_2 = 55,72°$.
وشمیری $|KM|$, ß , $|BK|$ او له دې څخه d_{EM} .

(c) ketabton.com: The Digital Library



شیره ۲۳۰

۲۹ – لړځیدنیSchwingungen تل د وخت په اړه شمیرل کیږي یعني د وخت t تړواك لاندې دي. دا د بلواك $y = a . (\sin (2 \pi /T)) .t + k)$ له لارې ورکړ شوي. دلته $(2 \pi / T)\, t = x$ هغه کونج دی ، کوم چي په T وخت کې وهلکیږي. $1 / T = f$ د یوه څرخون پریود یا راګرځیدنی وخت په ګوته کوي او د لړځیدنی دوام بلل کیږي» f فرکونځ frequenz بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ ۰ ګډوله ګڼونه يا کمپليکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو وليدل، چې څنګه يوه ګڼديرئ پر بله ګڼديرئ ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \qquad (7,1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند ليدل کيږي، چې دا په رييلګڼونديرئ کې اوبی يا حل نه لري، نو له دې امله بايد (7 , 1)د ګڼنو ډيرئ وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, ...(7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي ځل لپاره د رييل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کيږي چيرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, ...(7,3)$$

ليکو : دا پورته د لاندې سره

$$i^2 = -1 \qquad (7,4)$$

د (7,1) ځاي نيسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رييل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ايماجينارګڼ imaginär(لاتين: فقط خيالي)يوون(واحد)وايو.

برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$x^2+a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a \quad , a > 0 \qquad (7,5)$$

کیدی شي په لاندې ډول ولیکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a.i}, ...(7,6)$$
$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a.i}$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, ...(5,7)$$

اوس د ایماجینار ګڼ یوون(واحد) ټولیز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, ...(5,8)$$

ایماجیناریوون(واحد)z= i یو ځانګړی ایماجینارګڼ b=1 دی

د ټولیزې څلوری (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, ...(7,9)$$

په لاندې ډول د څلوری پوره کولو یا مربع تکمیلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2/4$$

لاس ته راځی یالرو<=

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 = +(q-p^2/4) \qquad (7, 10)$$

$$(x+p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7, 11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$(x+p/2)_{1,2} = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$$

نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, \text{.....................(7,12)}$$

د $p^2 = 4q$ لپاره رییل «ډبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رییل اوبیونې یا حلونه منځ ته راوړي٠

که $P^2 < 4q$ وي، نو رییل اوبی نه شته دی

د ایماجینار ګڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q - p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a, b \in R$$

د دې فورم یا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتین: پوره کوونکي - یا پوره کیدونکي-) بلل کیږي

$$z = a+bi\ ,\ i^2 = -1;\ a,b \in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډیری په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z} = a - bi, \text{..................................(7,14)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوگيري کمپلکس ګڼ بلل کيږي٠ لنډ کنجوګيري کمپلکس ګڼ يا اوښتی ګڼ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, ...(5,15)$$

د دې مطلقه يا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې رييل همدا رنګه ايماجينار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کيږي، که دوي په رييل او ايماجينار برخه کې يو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

موږ تل په پام کې لرو، چې $i^2 = -1$ اينول شوی

ګډوله يا کمپلکس عدد کيدی شي په سطحه يا هاره کې د لاندې شکل سره سم(د ګاوس د اعدادوسطحه). سړی د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شميرنه کوي، لکه د حقيقي اعدادو سره او په پام کې نيسي چې: $i^2 = -1$

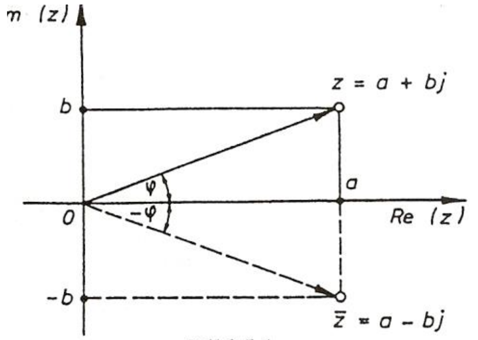


Bild 5.1

موږ دې سيستم ته پروت ولاړ سيستم وايو يا کواورديناتسيستم Koordinaten systm

پورته ځيره دې وکتل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پروتولاړ سيستم ته د (x,y) - سيستم هم وايي په پروتولاړ سيستم کې پروت ځرخون(محور) د x - محور ته د هوارې ياسطځې رييلبرخه او ولاړ محور يا د y – محور ته يپايماجينار برخه وايې لکه ښځگه، انځور شوي دي٠ په دې توگه په پروتولاړ سيستم کې يو ټکی منځ ته ر اځي، چې کمپلکس گڼ انځوروي٠(موږ دا اوس دا برخه نوره نه ځيړو، خو دا د وکتورونو په ډول انځوريږي او کارونی يا عملي يې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) يادونه : هغه گران هيوادوال، چې نوي د شميرپوهنی د دې برخې سره بلديږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځنې وييونه يا لغاتونه ياکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته يا لاندې ځيرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس گڼونو زياتون او کمون ښځگه دی

۷ ۰ ۱ زياتون او کمون:

لاندې ځيرو ته دې پام وي او گورو، چې رييل برخه او ايماجينار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښنه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2), ...(7,17)$$

بيلگه ۷ ۰ ۱ ورکړ شي:

$$\begin{aligned}
& z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i \\
& \Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i \\
& \Rightarrow \\
& | z_1 | = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, | z_1 | = \sqrt{13} \\
& -z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i
\end{aligned}$$

زياتون يا جمعه (او په همدې توگه کمون يا تفريق يعنې د(z2-) په زياتون)کيدی شي د ځېرې ۵ (په همدې توگه د ځېرې ۷ . ۳) د گراف له لارې هم ښوول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

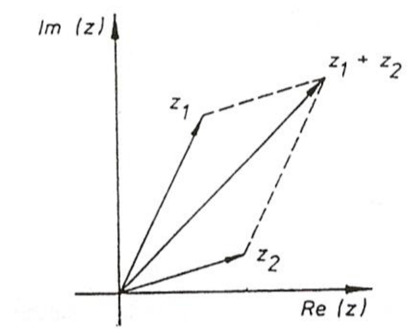


Bild 5.2 7.2

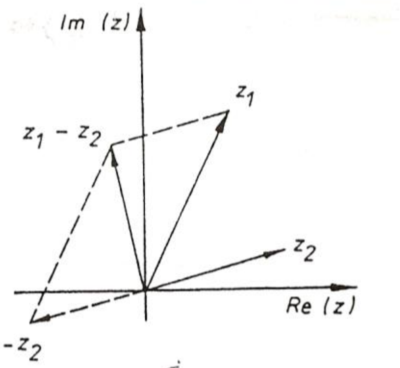
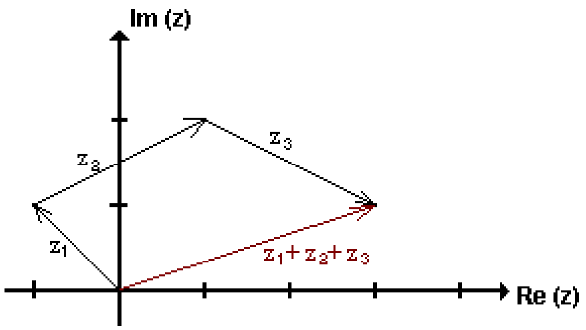
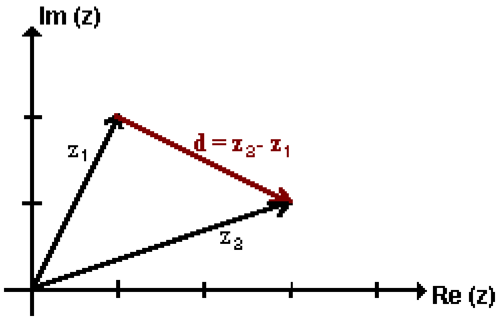


Bild 5.3 7.3

يا لاندې:



په پورته او لاندې ځیرو کې د کملپکس ګڼونو د زياتون او کمون انځور لیدلکیږي٠



دکملپکس ګڼونو ارزښت

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګڼونو ارزښت بلل کیږي٠

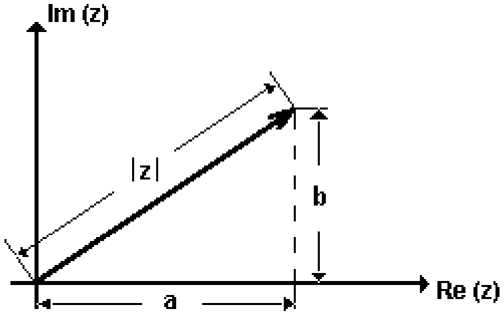
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د پـه |z| سره ښايو او د پيتاګوراس(فئثاغورث) د جملې

سره ښوول کيږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی ليکه

هم وکتل شي٠ مخامخ څيره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښايي



$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

په درې ګوډي کې د اړخونو ځانئيونه يا تباسب له امله باور لري

$$||z_1|-|z_2|| \leq |z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7,18)$$

برسيره پر دې باور لري:

$$z_1+z_2=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$$

۷ . ۲ د کمپلکس ګڼونوځل:

د ورسره بلد نوک اينوولو له لارې لاس ته راځي

$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$
$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2(-1)$
$\Rightarrow$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو باوورل ري

$$(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)=(a_1a_2 - b_1 b_2)+(a_1 b_2 +a_2 b_1)i \qquad (7, 20)$$

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتين توري په بدل ډول ليکل شوي، چې دا هم زما تخنيکي ستونځې دي، دا که په هرځايکې وي،دا به راته ګران د شميرپوهنې مينه وال وبخښي۰ دا لاندې هم ساده ازمايل کيدی شي

$$\overline{z_1.z} = z_1.z_2 \quad , \quad |z_1 .z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بيلګه ۷ ۰ ۲

د $z.\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2+(-ab + ab)i = a^2+b^2$

او (۱۵ ، ۷) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7, 22)$$

۷ ۰ ۳ ويش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1 i):(a_2+b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{\overline{z_2}}}{z_1\overline{\overline{z_2}}} = \frac{(a_1+b_1 i)(a_2-b_2 i)}{(a_2+b_2 i)(a_2-b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1 i}{a_2+b_2 i} = \qquad (7,23)$$

$$= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسی لاس ته راځي

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}, \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ۷ . ۳ :

د (۷ . ۲۴) د دوهمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{\overline{Z_1}.Z_2}{\overline{Z_2}.Z_2} = \frac{(a_1-b_1i)(a_2+b_2i)}{(a_2-b_2i)(a_2+b_2i)} =$$

$$= \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_1b_2-a_2b_1)i}{a_2^2+b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} - \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i = \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ۷ ۰ ٤ :د $Z1$ او $Z2$ لپاره له سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)} = \frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2} = \frac{13}{13}i = -i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سېحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z = 1 - i$ b) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

c) $z = 2(1 - \sqrt{3}i)$ d) $z = -1-i$

۱ . ۲ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $|z|=\sqrt{2}$ b) $|z|<\sqrt{2}$ c) $|z|>\sqrt{2}$ d) $|z|=r$

۲ – جمعه او تفريق(زاتون او کمون)

۲ . ۱ – د شميرنې او کارنې يا رسم کونې له لارې پيدا کړئ

a)(1+2i)+(2+i) b) (-2+i)+1-2i)

c) (1-2i)-(1-2i) d) (-1-2i)+(2-i)

۲ . ۲ - د شميرنې او کارنې يا رسم کونې له لارې پيدا کړئ

a) (22 + 5i) + (2 + i) b) (3 + 2i) - (5+2i)

c) (1+2i) - (1+2i) d) i -(1-2i)

۳ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقيقي ګڼونه دي.

۳ . ۲ – وشميرئ

a) $(2+\sqrt{3}\,i).(3-\sqrt{2}i)$ b) $(3+2\sqrt{2}\,i).(3-2\sqrt{2}\,i)$

c) $(1+\sqrt{5}\,i).(1-\sqrt{5}\,i).(13-12i))$ d) $\sqrt{3+\sqrt{7}i}.\sqrt{3-\sqrt{7}i}$

۳ . ۲ – وشميرئ

a) $(x+y\,i)\,(2x+yi)$ b) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a-3bi\right)\cdot\left(\frac{4}{3}a+5bi\right)$ d) $(c-\sqrt{d}\,i)(-c-2\sqrt{d}\,i)$

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج يا ماتلاندې حقيقي ورګرځوئ (a ، b حقيقي دي)

3.3.1. a) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$ b) $\dfrac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\dfrac{56+33i}{12-5i}$ d) $\dfrac{63+16i}{4+3i}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3.3.2. a) $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\frac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\frac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\frac{3a+4bi}{4a-3bi}+\frac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)(6-i)+\frac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رایوځی شوي پوښتنې

ګډوله ګڼونه یا اعداد ورکړ شوي.

$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2 = -\frac{1}{4}-\sqrt{3}\,\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونوکې x وشمرئ.

$z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2 = -\frac{1}{4}-\sqrt{3}\,\frac{i}{4}.$

وشمیرئ:

4.1.	a) z_1+z_2	b) z_1-z_2	c) $z_1\cdot z_2$	d) $\frac{z_1}{z_2}$
4.2.	a) $\lvert z_1\rvert$	b) $\lvert z_2\rvert$	c) $\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$	d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
4.3.	a) $\lvert z_1+z_2\rvert$	b) $\lvert z_1-z_2\rvert$	c) $\bar{z}_1+\bar{z}_2$	d) $\bar{z}_1-\bar{z}_2$
4.4.	a) $\lvert z_1\rvert\cdot\lvert z_2\rvert$	b) $\frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$	c) $\lvert z_1\cdot z_2\rvert$	d) $\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $x^2 + (1 + i)\,x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\,x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

d) $16\,x^2 + 8\,(i + 1)\,x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

همدا موضوع له بلکتاب څخه

7 . ایماجینار او کمپلکس ګنونه

Inhaltsverzeichnisخونديونه

- د رييلو ګنونو بنستونه او نيوني يا فرضيي
- ايماجيارګنونه

کمپلکسګنونه

- په ګنونهواره کې د کمپلکس ګنونو انځورونه
- د کمپلکس ګنونو سره شميرنه
- د کمپلکسګنونو زياتون ، کمون
- د کمپلکسګنونو ځل
- د کمپلکس ګنونو ويش
- د کمپلکس ګنونو تولګنيز په توان
- د بينوم درسي جمله
- د موفري فرمول 5.6 Die Moivreschen Formeln
- د کمپلکس ګنونو ريښه 5.7 Wurzeln aus komplexen Zahlen
- توان د مختلفو جګګنونو سره
- 5.8 Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

د رييلګنونو بنستونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریيلګڼونو ډیری لکه د مخه مو ، چې ګوته ورته ونیوله د راشنل او ایراشنل ګڼونو له ډېریو جوړه ده (د ریيلګڼونو برخه دې وکتل شي).

ایماجینار ګڼونه Imaginäre Zahlen

د ریيل ګڼونو سیستم پوره نه دی، ګورو، چې د یوه ګڼ ځلوری یامربع، چې د کمیز ګڼ سره برابره وي، ریيله اوبیونه یا حل نه لري لکه لاندې

$$x^2 = -1$$

داسې یو ریيل ګڼ نه شته، چې پورته پوره کړي

یوه فورمال اوبیونه یې په لاندې ډول ده

$$x = \pm\sqrt{-1}\ ,$$

چیرته ، چې $\sqrt{-1}$ ریيله اوبیونه نه ده.

دا ځلوری یا مربع ریښه د i سره په نخښه کوو، چې له دې پرابلم څخه ووتی شو او ځلوری یې په 1- سره په نخښه کوو.

د دې i لپاره باور لري:

$$i^2 = -1$$

اوس کړی شو، چې ولیکو

$$x_{1,2} = \pm i\ .$$

که ګڼ i د ریيلګڼونو سره زیات ځل یا ضرب کړو، نو د ګڼونو یوه د نوو ګڼونو ډیری ترې لاس ته راځي، د بیلګي په توګه :

$$2i,\ 3i,\ -i,\ 1+i,\ 2+i,\ 1+2i,\ -23+78i,\ 0.45-0.93i$$

او داسې نور.

تولیزه بڼه یې :

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$a + bi ,$$

پورته ګڼ کمپلکس ګڼ دئ او a او b ریيلګڼونه٠ له دې سره هم لکۀ د نورو ګڼونو سره ساده شميرل کيږي، چيرته، چې د i^2 په ځای 1 - ليکلی شو يا په ځېټ: لاندې کې يې بيلګې ګورو

$$(1 + 2i) + (3 + 4i) = (1 + 3) + (2 + 4)i = 4 + 6i$$

په ټوليزه توګه:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

له دې سره ويش هم کړی شو، خودا ، چې ستونځمن دئ وروسته يې راوړو.

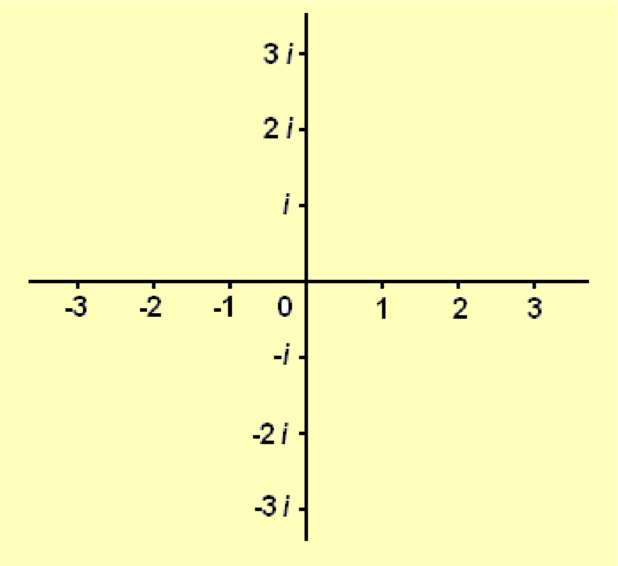
دا لاندې هم لرو

i.2i,i,0,-i,-2i,-3i٠٠٠3.....

دا ايماجينار ټولګڼونه بلل کيږ ي يا بولو ، چې دا هم صفرلري

موږ په لاندې کې د هوارې پروت محور لاندې د ريیلګڼونو محور پوهيږو او ولاړ محور يا څرخونی يې د ايماجينار ګڼونو محور دی، چې د دواړو زياتون کمپلکس ګڼونه دي يا د کمپلکس ګڼونو هواره انځوروي٠.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په لاندې کې يو کپلکس ګڼ په يوه رييل ګڼ يا پيدايښتي ګڼ ويشل کيږي

$$mi : n = \frac{m}{n} i \; .$$

په پورته کې m او n رييلګڼونه دي او ايماجينار

$$x^2 = -a^2$$

په پورته کې a رييلګڼ دی، خو x غواړو لاس ته راوړو، لاس ته راوړنه يې يو ايماجينار ګڼ دی.

د دوه ايماجينار ګڼونو زياتون او کمون::

$$a\,i \pm b\,i = (a \pm b)\;i \; .$$

ځل او ويش يې

$$\frac{i}{i} = 1 \; .$$

د دې سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$pi \cdot qi = -pq$$

او

$$\frac{pi}{qi} = \frac{p}{q} \, ,$$

چيرته چي p او q ريللګڼونه دي.

لاس ته راوړنه : د دوه ايماجينار ګڼونو حٔل يا ضرب او ويش څخه رييلګڼ لاس ته راځي، چې په لاندې کې يې ګورو .

$$i^2 = -1 \, , \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i \, , \quad i^4 = i^3 \cdot i = 1 \, , \quad i^5 = i^4 \cdot i = i \, , \ldots$$

د ټولګڼ n لپاره لرو:

$$i^{-n} \equiv \frac{1}{i^n}$$

لاس ته راوړنی يي

Error!

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i \, , \quad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1 \, , \quad i^{-3} = \frac{1}{i^3} = -\frac{1}{i} = i \, , \quad i^{-4} = \frac{1}{i^4} = 1 \, , \ldots$$

د سره شميرل ورسته کيدونکي دي.

Komplexe Zahlen کملکس ګڼونه

ګډ يا مخطلت ځلورى - يا مربع برابرون شميرو

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \, .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځلورئ پوره کوونې يا تکميلونې له لارې ، چې ورسره بلد يو ، اوبيونه يا حل پيداکوو

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3\,i\ .$$

د دې برابرن اوبيونه نه رييل ګڼ دئ او نه ايماجينار ٠ دې ګن ته موږ کمپلکس ګڼ وايو **komplexe Zahlen**.

د کمپلکس ګڼونو او د دې سره سره شميرنه ٠

موږ دا لاندې کمپلکس ګڼ لرو :

$$z = a + b\,i,$$

چيرته، چې a او b رييل ګڼونه دي

د کمپلکس ګڼونو په مرسته کړای شو، چې بې بنديزه ځلورئ- يا مربع فرمولونه اوبې کړو

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

لاس ته راځي.

دلته چې څه راځي هغه ګران لوستنکی پخپله هم پيدا کولی شي، زه به وهڅيږم، چې دا پرابلمونه پورته کړم يا لرې کړم ،

د لاندې لپاره

$$\frac{p^2}{4} - q \geq 0$$

يو يا دوه رييل اوبيونې لاس ته راځي٠

د

$$\frac{p^2}{4} - q < 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره اوبيوني په لاندې ډول ليکل کيږي

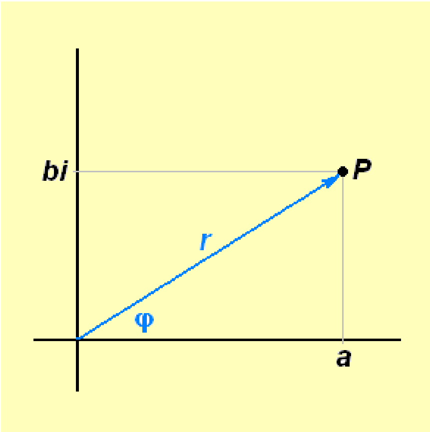
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} .$$

اوبيوني کنجوګيري کمپلکس دې، دا په دې مانا، چې يو له بل د مخنخښي له مخه توپير کيږي۰

په ګڼونهواره يا ګڼسطحه کې د کمپلکس ګڼونو انځورونه

د کمپلکس ګڼونو ګرافيکي انځوروني لپاره هواره ځان رامنځ ته کوي، چې د رييل او ايماجينارګڼکرښو ښخه غزيدلې ده۰

کمپلکس ګڼونه a + bi د ټاکنې له مخې(په بدل وار يا همغه وخت) د يوه ټکی P ، چې کواورديناټ يا پروت ولاړ محوررونه يې a او b ، چيرته، چې محور b ټکی bi په ايماجينار ګڼکرښی باندې په ګوته کوي، يا د» ښوونکرښې « OP سره انځور کيدی شي۰ دا د يوې اوږ دې r سره ښايو او د رييلې محور سره کونج fi جوړوي۰ (دا همغه د ټکی P انځورول دي په پولار کواورديناټ کې، r د کمپلکس ګڼ مطلق ارزښت دی، fi يې فاز بلل کيږي۰



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دواړو انځوربنې لپاره لاندې ترانفورمیشنبرابرون باور لري(له دې څخه نوج زده کوونکي تیریدلی شي، چې ترانسفورمیشن باندې نه پوهیږي)

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}\,, \qquad a \neq 0$$

$$a = r\cos\varphi\,, \quad b = r\sin\varphi\,.$$

له $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ لاس ته راځي

$$\varphi = \arctan\frac{b}{a} + k\cdot 2\pi, \quad \text{wobei} \quad -\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{b}{a} < \frac{\pi}{2} \quad \text{und } k \text{ ganzzahlig ist.}$$

په پورته کې wobei د کوم سره یا چیرته چې په مانا دی او k ټولګڼ دی ۰

ارزښت

$$\varphi_0 = \arctan\frac{b}{a}$$

د في φ اصلي ارزښت بلل کیږي۰ له دې نور ارزښتونه د k او 2π له زیاتون څخه لاس ته راځي۰

د دې له مخې کیدئ شي، چې کمپلکس ګڼ په لاندې توګه ولیکل شي ۰

$$z = a + bi = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)\,.$$

" وروسته د اویلر فرمول "Eulerschen Formel په مرسته ترې لاس ته راځی

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

دریمه انځورونه یې لاندې ده:

$$z = a + bi = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = r\,e^{i\varphi}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کمپلکس ګڼ دا دري انځوروني په ترتیب داسي بلل کیږي اریتمیتیکي بڼه کونومتریکي (یا تریګنومتریکي بڼه) او اکسپوننشل بڼه.

دا چي د اویلر فرمول وروسته ښوول کیږي، اکسپوننشل بڼۀ دي دلته راوړل شوي وي، خو د ښووني لپاره دي تري کار نه اخستل کیږي.

Rechnen mit komplexen Zahlen

د کملپکس ګڼونو سره شمیرنه

دوه کملپکس ګڼونه دي ورکړ شوي وي

$$z_1 = a_1 + b_1 i\,, \quad z_2 = a_2 + b_2 i\,.$$

د کمپلکش ګڼونو زیاتون او کمون

په زیاتون او کمون کي د الجبر ي قوانینو له مخي i هم داسي په کار اچول کیږي لکه هره بله کومه د تورو لویه ، چي په کار اچول کیږي یا کارول کیږي

$$z_1 + z_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i$$

$$z_1 - z_2 = a_1 + b_1 i - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i$$

د کمپلکس ګڼونو « ښوونکرښه» (دا هغه کرښه ده، چۀ د دواړو محورونو صفر ټکو څخه د هغه په هواره موخه ور ټکی په لور ګزیدلی وي، یاني د صفر ټکی څخه د هغه بل موخه ټکی په لور ، ځکه لوریزه ده)لکه وکتورونه سره زیاتیدلی او کمیدلی شي

Das Produkt komplexer Zahlen

د کمپلکس ګڼونو ځل

دی

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i.$$

دا ځل ترلی پیژند وړ لیدونکي مانا نه لري(یاني سملاسي تري څه نه شو پوهیدلی)۰ که د دي په ځټ « پولارکواودینات » وکارول شي، نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_1a_2 - b_1b_2 = r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) = r_1r_2\cos(\varphi_1+\varphi_2)$$

$$a_1b_2 + a_2b_1 = r_1r_2(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2) = r_1r_2\sin(\varphi_1+\varphi_2).$$

او له دې سره t

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

نو دی

$$|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2| \quad \text{او} \quad \varphi(z_1z_2) = \varphi_1 + \varphi_2.$$

د ځل – یا ضرب ارزښت د ارزښتونو ځل دی٠ د ځل یا ارگومنت یا فازې د ارگومنت یا فازې د زیاتون سره برابر دی٠

سملاسې پیژندل کیږي، چې دا د دوه فاکتورونو څخه زیاتو فاکتورو یا ځله وونو لپاره هم باور لري

$$|z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n| = |z_1|\cdot|z_2|\cdot\ldots\cdot|z_n| \quad \text{او} \quad \varphi = \varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n.$$

د کمپلکس کڼونو ویش **Division komplexer Zahlen**

په ورته توګه پیدا کیږی، که z_2 د صفر سره برابر نه وي

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{او} \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

که کیږدو $z_1 = 1$ او $z_2 = z$, نو لاس ته راځي:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}[\cos(0-\varphi) + i\sin(0-\varphi)] = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او په ځانګړي ډول د $z = i$

$$\frac{1}{i} = -i.$$

Ganzzahlige Potenzen einer komplexen Zahl

د کمپلکس ګڼونو توان (کپلکس ګڼ د يوه ناکميز توان سره د رييل ګڼونو په څير دی)

$$z^{-n} \equiv \frac{1}{z^n}.$$

د کمپلکس ګڼونو ځل دې وکتل شي

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n| \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n.$$

د همغه ځله وون يا ضريب z لپاره تربلاس ته راځي

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

موږ لرو

$$z^p \cdot z^q = z^{p+q}, \quad (z^p)^q = z^{p \cdot q}, \quad z_1^p \cdot z_2^p = (z_1 \cdot z_2)^p, \quad \frac{z^p}{z^q} = z^{p-q}, \quad \frac{z_1^p}{z_2^p} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^p.$$

Der binomische Lehrsatz

د بينوم درسي جمله

د بينوم جملي لپاره هم لرو

د نوکانو د چاون قانون او ځل قانونو د زياتيز جګ ګڼ لپاره د بينوم جمله همغسي باور لري

$$(z_1 + z_2)^n = \binom{n}{0} z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \ldots + \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k + \ldots + \binom{n}{n} z_2^n.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې ځایه ښکته د ښوونځي زده کوونکو لپاره ستونځمن دی.

Die Moivreschen Formeln د موفری قانون

له برابرون څخه (پورته دې وکتلشي)

$$z^n = |z|^n \left(\cos n\varphi + i \sin n\varphi\right)$$

لاس ته راځي

$$|z| = 1: \qquad (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

له بلې خوا د زیاتیز ټولګنیز جګګڼ یا اکسپوننت سره د بینوم جملې څخه لاس ته راځئ:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi + i\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi$$

$$-i\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi + \ldots + i^n\binom{n}{n}\sin^n\varphi.$$

که د برابرون دوا

ړه خواوي برابار کینبول شي او بیا په پام کې ونیول شي، چې رییل او ایماجینار برخه دوآړه باید برابر وینو د موفري برابرون ترې لاس ته راځي **Moivreschen Formeln**:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi - + \ldots,$$

او

$$\sin n\varphi = n\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\cdot\sin^5\varphi - + \ldots,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چیرته، چې ښی لور ترهغې پوره شي، تر څو چې ځله وونی یا ضریب صفر شي.

د کمپلکس ګڼونو ریښه Wurzeln aus komplexen Zahlen

د برابرون اوبیونه

$$x^n = z \qquad \text{n positiv ganzzahlig}$$

پورته کی n زیاتیز ټولګڼ دی
د کمپلکس ګڼ z n -مه ریښه بلل کیږي :

$$x = \sqrt[n]{z}.$$

ږدو

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

او

$$x = \rho\left(\cos\psi + i\sin\psi\right),$$

د $z = x^n$ له امله لاس ته راځي

$$\rho^n = r \quad \text{und} \quad n\psi = \varphi$$

او د دې پسې

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{\varphi}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي

په ویشنه کې باید په پام کې ونیول شي، چې ارګومنت یا پروتمحور φ پریودي یا تل بیرته راګرځیدونی دی د پریودې یا راګرځیدنی 2π سره ، نو

$$\varphi = \varphi_0 + k \cdot 2\pi \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

پسي د ψ لپاره تیک *n* مختلف ارزښتونه لاس ته راځي، یاني

$$\psi = \frac{\varphi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2\cdot 2\pi}{n}, \ \ldots \ \frac{\varphi + (n-1)\cdot 2\pi}{n}.$$

د $n = k$ ځانلۀ د مخه ارزښتونه (له دویم پسې) تکرایږي، نو باور لري:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}\right) \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (n-1)$$

هر له دې ارزښتونو د کمپلکس ګڼ z د n-مې رینه بلل کیږي

$$\sqrt[n]{z} \quad \text{oder} \quad z^{\frac{1}{n}}$$

دا ټول n ارزښتونه په ګڼهواره په یوې ګردی په O په یوه منظم n - ګوډي پرته ده , د څلورې ریښی لپاره له

$$i = i\sin\frac{\pi}{2}$$

لاندې ارزښتونه ترې لاس ته راځي

$$\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4},$$

او د څلورې ریښي لپاره له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-i = i \sin \frac{3\pi}{2}$$

پیداکیږي

$$\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}.$$

که موږ ونیسو لکه د رییل ګڼونو لپاره

$$z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m$$

دې وي، چیرته چې n یو پیداینتج ګڼ او m یو په خوښه ټولګڼ دی، نو له دې سره د کمپلکس ګڼ سره جګګڼ یا کسپوننت وپیژندل شو یا تعریف شو۰ اوس نو اخرنی پل پاتې ، چې هغه د ایراشنلجګګڼ دی .

توان د په خوښه رییل جګګڼ سره

Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

اوس دې z له صفر مختلف په خوښه کمپلکس ګڼ وي .

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\left[\cos(\varphi + k\cdot 2\pi) + i\sin(\varphi + k\cdot 2\pi)\right],$$

چیرته چې

$$k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

دی ، نو د z^ν (ν رییلreell) لاندې هر دالاندې کمپلکس ګڼ پوهیږو:

$$r^\nu\left[\cos\nu(\varphi + k\cdot 2\pi) + i\sin\nu(\varphi + k\cdot 2\pi)\right].$$

لاربنود : د داسې په ټولیز پیژند یا تعریف سره د کمپلکس ګڼونو توان لپاره د د توان شمیرنې بنسټیز قوانین باور لري ، یانې

$$z^\mu \cdot z^\nu = z^{\mu+\nu}, \quad z_1^\mu \cdot z_2^\mu = (z_1\cdot z_2)^\mu, \quad (z^\mu)^\nu = z^{\mu\cdot\nu}$$

nicht mehrنور بس دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ ترانسڅندنت برابرونونه یه ـ مساوات

دلته یواځي هغه ترانسځندنت مساوات څیړل کیږي، کوم چی بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي. دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په ریښه مساواتوکی، په خوبنه په بل شکل اړول کیږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو(فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چی اړولی فرمول زیاتي اوبیوني یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابرون تولې اوبیونې په پیل برابرون کی ځاي په ځاي یا کیښوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ریښه يي برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم یواځی رییل اوبیوني پلټل کیږي.

۱۳ . ۱ لوګاریتمي مساوات

د لوګاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پیدا کولو لپاره اړیین یا ضرور(ضروري یا اړیین شرایط) دی، چی د یو عدد(ګڼ) aلوګاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅیړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1............................(13,1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنسټ $b = 10$ لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره (ln a) کيدی شي (١٣ . ١)

سيده د جبشميري له لارې پيداشي. په ځټ يا برعکس د 10 =| b |=e لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کيږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b \ldots\ldots\ldots\ldots(13.2)$$

د لوګاريتمي مساواتو يو ساده ډول يا شکل (تيپ) دا دی

$$\log_b x = c \ldots\ldots\ldots\ldots(13.3)$$

دا برابرون د (7. ١) ، (7. ٢) له مخی لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c \ldots\ldots\ldots\ldots(13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشميري سره شميرل کيدی شي.

بيلګه ١٣ . ١ : $\log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$

په همدې ډول د (١٣ . ٣) بڼې اوبيونه په لاندې ټوليز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b f(x) = c \ldots\ldots\ldots\ldots(13,5)$$

دلته (f(x يوه الجبري وينه يا افاده ده، د (١٣ . ٥) سره الجبري برابرون کټمټ (ورته) دی

$$f(x) = b^c \ldots\ldots\ldots\ldots(13,6)$$

ټولې د (١٣ . ۶) اوبيونې د (١٣ . ٥) اوبيونې هم دي

بيلګه ١٣ . ٢ : لوګاريتميز برابرون

$$\log_2(x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کټمټ دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$ (همداسی) $x^2+x+6=2^3=8$

او لاندې اوبیونې لري

$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}; x_1=-2; x_2=1$$

یو د (۱۳ . ۵) ډول (تیپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کینه لور (ارخ) ته یود لوګاریتم ریشنل لاینیز کمبینشن الجبري وبینه یا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x)+r_2.\log_2(x)+r_3.\log_b g_3(x)+...=c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوګاریتم قوانینو (۷. ۷) ، (۷. ۹)کاروني یا استعمال څخه، ۷ برخه وګورئ، (۱۳ ، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x)=\{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}.....................................(13,8)$$

بیلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x-1)+\frac{1}{2}\log_3 x-\frac{1}{2}\log_3(x-1)=2$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log[(x-1)(\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{2}}]$$

اوله دې څخه رېښه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1}=9$ ،

د کوم له څلوری یا مربع کولو څخه $x(x-1)=81$ یعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{324}{4}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{325}{4}}=\frac{1}{2}\pm(\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1=9,515; x_2=-8,515$$

تیک دا $x1 = 9,515$ پیل برابرون پوره کوي

. د $x=x2<0$ لپاره log x او په همدې ډول log(x-1) پیژند نه لري یا تعریف نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)] = 1$$

او نور پسی $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$2x+3=bx-b$

$b+3=x(b-2)$

$x=(b+3)/b-1)$

پیل وېینه یا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعني که $1<(b+3)/b-2)$ وي.

د $b>2$یعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$

له دې لرو $3>-2$دا د ټولو b لپاره پوره دی

د. $2 \le b$ لپاره د $b+3 \le b-2$ $b+3 < b-2$ څخه $2 \le 3$ لاس ته راځي

اودا د هیڅ b لپاره باور نه لري .

له دې امله کره د $2 < b$ لپاره اوبی شته دی. د $2 \le b$ لپاره اوبیونه نه شته دی.

د لاندې لوګاریتمي تیپ برابرون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13 . 9)$$

چیرته چی F او هم f الجبریزې وېینې یا افادې دي. د بدلون کاروایي یا عملیه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13 . 11)$$

ددې اوبیونه ..y1,y2 په (۱۳/۱۰) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تیپ (۱۳/۵)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i ; \quad i = 1,2,3,........ \qquad (13.12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13.13)$$

ددې لپاره چې و ازمائیلی شو چې ایادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبیوني یا ځوابونه باید په پیل برابرون (۱۳/۹) کی کېښوول شي یا ځاي په ځای شي،

بیلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $\log^2x-\lg x-2=0$ د سبستیځیوشن(بدلون) $y=\lg x$ سره په څلوری برابرون $y^2-y-2=0$ بدلیږي .
د $y1 = 2$ او $y2 = -1$ ځوابونو سره
له. $\lg x=2$ او $\lg x=-1$ لاس ته راځي

$x1 = 10^2=100$ او $x_2=10^{-1}=\frac{1}{10}$

دواړه ځوابونه د پیل برابرون ځوابونه دي.

بیلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6 /(\lg x +1)) + (8 / (\lg x -1)) = 3$
د, $x>0$ مګر $(x \neq 1/10, x \neq 10)$ چې د اصلي ماتلاندي
$(\lg x+1)(\lg x-1)$ سره ځل شی، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x-1)+8(\lg x+1)=3(\lg^2 -1)$$
$$,\quad 6\lg x-6+8\lg x+8=3\lg^2x-3$$
$$0=3\lg^2x-14\lg x-5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې څلوری بڼې یا مربعفورم ته بیایي:

$$3y^2-14y-5=0 , \ y^2-(14/3)y-5/3=0$$

د لاندې ځوابونو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_{1,2}=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{15}{9}}=\frac{7}{3}\pm\frac{8}{3}; y_1=lox_1=5; y_2=\lg x_2=-\frac{1}{3}$$

$$x_1=10^5; x_2=x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پيل مساوات پوره کوي.
که په يوه برابرون کی لوګاريتمونه د مختلفو بنسټونو bسره رامنځ ته شي،
نو کيدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بيلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1)+\log_4(x-1)-1=0$

څخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1)=\frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1)+\frac{1}{2}\log_2(x-1)-1=0,\ \log_2(x-1)=\frac{2}{3},\ x-1=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4},$$

$$x=1+\sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پيل برابرون اوبی يا ځواب هم دی:

$$\log_2\sqrt[3]{4}+\log_4\sqrt[3]{4}-1=\frac{1}{3}\log_2 4+\frac{1}{3}\log_4 4-1=\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}-1=0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل – يا په جګګڼ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون(مساوات)

$$a^x=b; a>0, a\neq 1, b>0 \qquad (13,14)$$

کيدی شي چی د لوګاريتم نيولو سره سملاسي حل شي(ځواب شي)

$$x=\log_a b=\lg_b/\lg_a=\ln b/\ln a \qquad (13,15)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳ ، ۱۴) ډول (رقم (تيوپ) برابرونونو باندې اړول کيدی شي.

بيلګه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2) + 3^x(3^2-3) = 0, \text{ bzw. } 6 \cdot 3^x = 3 \cdot 2^x, \text{ bzw. } \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg \frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري وييني يا افادي(f (x اکسپوننتونه ياجګګنونه وي، نو:

$$af(x)=b,a>0\ ,a|=1,b>0 \qquad (13 . 16)$$

په دې ډول د لوګاريتمولو له لارې يو الجبري برابرون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b.............................(13,17)$$

د کومو ځوابونه چې د (۱۳ . ۱۶) ځوابونه هم دی.

بيلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4} = 4$

مو لاندې خلورى برابرون يا مربع مساوات ته بيايي (لاربنودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د $x_1 = 2 , x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چې د پيل برابرون اوبيونې يا ځوابونه هم دي٠

بيلګه ۱۳ . ۱۰ : په برابرون $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$ کی د يوه پوتنځ بنسټ د بل پوتنځ د بنسټ په څټ ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې ځخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3 \,,\; x_2 = -4$$

بیلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کې کیدی شي چې ناپیژندونکی د اکسپوننت یا په جګ ځخه د دوه واره لوګاریتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \qquad \text{یا oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = 1.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

یو د تیپ (۱۳ . ۱۶) مساوات دی، ځکه چې باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې امله

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کیڼ اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپوننتونو سره، کیدی شي چې د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)}.a_2^{f_2(x)}........}{b_1^{g_1(x)}.b_2^{g_2(x)}........} = c; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13{,}18)$$

ځخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + \ldots - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - \ldots\ldots = \lg c \qquad (13.19)$$

كه يو مساوات مو مخ ته پروت وي، په كوم کی چی د يوه اكسپوننشل افادې
يوه الجبري وييئه يا افاده F د الجبري اکسپوننت(f(x سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x)})=0 \;;\ldots\ldots\ldots\ldots(13,20$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13.21)$$

د برابرون

$$F(y) \qquad (13.22)$$

د ټولواوبيونو $y_1 , y_2 , y_3 ;\ldots\ldots$ لپاره بايد

$$a^{f(x)} = y_i ; i=1,2,3\ldots\ldots \qquad (13.23)$$

په همدي ډول

$$f(x) = \log_a y_i \quad ; i = 1, 2, 3 \ldots\ldots \qquad (13.24)$$

اوبی شي

بيلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x} + 3^x = 2$ کيدی شي چی د بدلون $y = 3^x (y^2 = 3^{2x})$
سره په خلوری

برابرون يا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بيرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1.\lg 3 = \lg 1 = 0, \; x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2.\lg 3 = \lg(-2)$ اوبيونه نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}}-\sqrt{e^{x^2-1}-1}=\sqrt{2e^{x^2-1}-1}\text{.........................}(13,25)$$

کې داسی بدلوو:

$$y=e^{x^2-1}\text{.......................................}(13,26)$$

او لاس ته راوړو

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};\text{...............................}(13,27)$$

له دې څخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)}=0 => y(y-1)=0$$

$$y_1=0; y_2=1$$

تیک $y_2=1$ (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1;\text{...}(13,28)$$

باید اوبی . د لوګاریتمولو څخه تعقیبیږي:

x²-1=ln1=0,

x1 = 1 , x2 =-1

دواړه ارزښتونه پیلبرابرون پوره کوي.

برسیره پر دې باید وښوول شي، چې په برخی ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کی انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړی حل کیدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادي او لوګاریتم یوځاي رامنځ ته کیږي.

بیلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ څخه د بیلګي په توګه د بنسټ 2 لوګاریتموولو له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ln^2x-\ln x+1=\log_2 8 = 3$$

که کیږدو $y = \ln x$ ، نو دا څلوری برابرون یا مربع مساوات $y^2-y-2=0$

لاس ته راځي،د ځوابونو

$$y_1 = -1 , y_2 = 2$$

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

$$\ln x=-1 , \ln x=2, x_1=e^{-1}=1/e , x_2=e^2$$

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې اوژباړې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

(c) ketabton.com: The Digital Library

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

.يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواريد ،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،ميرې،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي. دا هم چاپ سوي.

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج ښخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو ښخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج ښخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

<u>Bonn (Germany):</u>

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي چاپ شوی

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډیرۍ پوهنه یا سټ تیوري چاپ شوی

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي) چاپ شوی

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۳ – د شمیرپوهنې انګرېزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویيونو په پښتو روښانه ونه چاپ شوی

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

دا لاندې د ښوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسیدل:

شمیرپوهنه د اوم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د اتم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د نهم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د لسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د یولسم ټولګي له پاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

شمیرپوهنه د دولسم ټولګي له پاره

ریاضي برای صنف دوازده

.

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

	ماخان په اولني نوم میرې شینواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي. د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپټبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان میرېي په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library