شمیرپوهنه (رياضي)

د لسم ټولګي لپاره

برېښنا پته : smakhan1946@gmail.com

لیکونکی:

ډاکترماخان میرې شینواری

2016

Ketabton.com

جرمني د بن ښار

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه

د لسم ټولګي لپاره

لیکونکی:

ډاکتر ماخان(میرزی) شینواری

Smakhan1946@gmail.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

سریزه.................................... ۴	n- مه درجه ټولراشنل توابع ۱۶۵
پولینومشمیرنه ۶	د ټولراشنل توابعوغوښتکي ۱۷۵
د ګاوس الګوریتم.................... ۲۹	د بدلونقانونه ۱۷۸
هورنرشیما.......................... ۴۶	شننیزه – یا تحلیی هندسه ۱۸۳
اړیکې.............................. ۵۵	فنکشنونه (بل بدیل)............ ۲۰۲
فنکشن(څیرونه) یا تابع ۶۵	درېکوډيکچ ۱۳۷
فنکشن او په ښتفنکشن ۹۱	ګډوله – یا کمپلکسګڼونه ۲۷۹
څلوری‌یا مربع توابع ۹۳	د لیکونکیلیکلیاوژباړې..... ۳۱۵
نورمال پارابل ۹۶	د لیکوکیڅنود ته لنډه کتنه...... ۳۲۰
د څلوری‌تکمیل له............... ۱۰۱	
کرښیزبرابرونسیستم ۱۱۵	
د مناسبځواب له پاره تلنلار.... ۱۲۳	
مساواتسیستم بې له ۱۲۹	
توان یا پوتنځ توابع ۱۳۳	
کرښیزتوابع د ورکړ شوو ۱۳۸	
مومړی حالت ۱۳۸	
د کرښبرابرونونو ځانګړی ۱۴۲	

(c) ketabton.com: The Digital Library

سریزه

دا ځلوېښت کاله کيږي، چې زموږ هيواد هراړخيزه ستونزې لري او هر څه دې اوږده جنګ را خراب کړي

ګرانو هيوادوالو!

د نورو نيمګرتياو په څير زموږ درسي نصاب - په تيره شميرپوهنه - هم ډېره د ناسمون سره مخامخ ده.

که دا کار د دولت په ځلورديوالي ونه شو، نو زه به وهڅيږم، چې دا ما ليکلي کتابونه د ن ج له لارې له تاسو سره شريک کړم او دا د نړۍ په ستاندارد.

د ښوونځي په کتابونو کې د ستااتيستيک او احتمالوالي درس نور هم خورا ستونځمن دی، چې زه ترې دلته تيريږم او د ښوونځي د تيرو کتابونو ځخه هم هيله ده- که زما کتابونه وړاندې نه شو- چې دابرخې يا سمې يا له درسي نصاب ځخه ووېستل شي. په دې برخه باور وکړی، چې نه ليکونکی بوهيږي او نه بل لوستونکی پرې پوهيدلی شي.

زما په دې د ښوونځي کتابونو کې دا برخې نه شته، خو که وخت مې پيدا کړ دا به هم سمې کړم. ما په دې هکله د احتمالوالي او ستاتيستيک کتابونه ژباړلي او همداسې مې په هندسه کې هم احتمالوالي شميرنه راوړي او د ستاتيستيک يو ګتاب مې هم ژباړلي، چې زه به يې په مناسبوخت کې د ليدلو پټې ګرانو لوستونکو ته د ن ج له لارې ورکړم.

دا زما ځني کتابونه او په ډېره مننه د www.ketabton.com ن ج کې ګرانولوستونکوته وړاندې شوي.

د شميرپوهني سم اند يا منطق زموږ د نصاب په لسم ټولګي کې راغلی او هغه هم لکه ستاتيستيک او ... د پوهيدلو نه دی. دا- لکه څنګه چې بربښي- دومره پيچلی نه دی، نو زه دا درس له دې امله د اوم ټولګي په سرکې راوړم، هيله ده چې ستونځې به رامنځ ته نه کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زه چې ترڅو ستاسو په منځ کې وم او د کار یم، ستاسو چوپړ کې به اوسم. راځئ، چې ستونځوبې(د ستونځو حل) سره شریک کړو.

زه دې لیکنو او پرې قضاوت کولو ته ځانله یم.

تکرار په کې زیات دئ، خو د موضوع، نه د خودیونې. وایې چې تکرار د زده کړې مورده، نو پروا نه لري. کمښتونه هم په کې شته. سره د ټولو نیګرتیاوو دا د ښوونځي له پاراه ډېره ګټوره او زه چې پوهیږم، یواځنۍ سمه لیکنه ده.

دا چې سمه لیکنه ، د ځان له امله نه وایم، دګرانو زده کوونکو او ښوونکو له پاره وایم. دا زما لیکنې نه دې، دا ما له نورو کتابونو څخه رانیولي، چې باید سمې وي.

زه به وهڅیږم، چې درسمي ښوونځي کتابونو نا سمونونه له تاسو سره شریک کړم، خو ډېر لږ، یواځې داسې د یادونې له امله.

په ډېره خواشینۍ باید ووایم، چې ملاتړی نه لرم، چې د لیکنې ستونځې راته په ګوته کړي.

د نصاب د غړو څخه مې هیله ده، چې ګټه ترې پورته کړي او په بنسټ یې د ښوونځي لیکنې سمې کړي.

د خوندیونې ټیکاوي کې پوښتنه نه شته، ځکه چې ما هم د نورو لیکنو څخه راټول کړي او هڅیدلی یم، چې سم یې ترې راونیسم.

باور وکړئ زه د دې لیکنو سره لږ ستړی شوی یم، نو ځنې ځایونه به داسې نیمګړي پاتې وي، چې ستاسو پوهیدنې ته کوم زیان نه رسوي، د هغې بخښنه دې وي.

کله تمرینونه کم وي او کله تکرار راځي، چې دا بد مه ګڼئ.

په دې کتابونو ما دومره ځان بوخت کړی، چې باورکړئ مغذ مې ترې نورموړ دئ، نو له دې امله یې نور پایوم یا ورته د پای ټکی ږدم.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولينومشميرنه

پويلينوم څه شی دی؟

يو پولينوم د اووښتوني يا واريابلي –چي موږيې د x سره په نښه کوو- له ډېرواره توان د زياتون دی: د توان جګګښونه پيداېښتي يا طبيعي ګڼونه دي. زياتون له دې برسيره پای دی.

بيلګه: $a_n \cdot x^n + ... + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

همداسي

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

يا هم:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

دلته n يو پيداېښتي ګڼ اوپای دی او a_i ريلګڼونه دي د ټولو $i=0,1,\ldots n$ له پاره.

پيژند: د پولينمچګګڼ n د پولينوم درجه بلل کيږي، که $a_n \neq 0$ وي.

په ياد ولرئ: په پورته سر کې- د پولينوم ليکنبه د توان په همغږيزجګيدونکي ليکنبه اودا کښته يې د پولينوم د توان په همغيزتيټيدونکي ليکنبه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینومونو سره شمیرنه یا کارونې داسې لنډې څېړو

د پولینومونو زیاتون: که له

$$a_5 \cdot x^5 + ... + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

سره

$$b_5 \cdot x^5 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زیاته-وو، نو داسې مخ ته ځو:

په دې پورته برابرون کې ګورو، چې اووښتونې یا واریابله د ځلور په جګ یعني x^4 نه شته. دا په دې مانا ده،چې ځله وونی یا ضریب یې صفر دی. یعني $o\ x^4$ یا

$$b_5 \cdot x^5 + o\ x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زیاتونعملیه یا کارونه مح ته بیای:

$$a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$b_5 \cdot x^5 + o\ x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

$$(a_{5+}\ b_5\ )x^5 + (a_4 + o)x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + a_2 + b_2\ \ )x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0\ \ + b_0\ )$$

ګورو،چېد برابر توا یا برابر جګګڼ واریابلې سره زیاتیږي.

بیلګه:

$$3 \cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 7$$

$$2x^5 + o\ x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1$$

$$(a_{5+}\ b_5\ )x^5 + (a_4 + o)x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + a_2 + b_2\ \ )x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0\ \ + b_0\ )$$

د پولینومونو کمون کارونه:

کمون یې هم په همدې بیلګه داسې لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$-(b_5 \cdot x^5 + o\, x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0)$$

$$(a_5 - b_5) \cdot x^5 + (a_4 - o)x^4 + (a_3 - b_3)x^3 + (a - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

بیلګه:

$$3 \cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 7$$

$$-(2x^5 + o\, x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1)$$

$$x^5 + 6x^4 \quad -7x^3 \quad -x^2 + x + 6$$

پیژند: دوه پولینومونه سره برابر دي، که خله ووني یا صریبونه یې سره برابر وي، دا په دې مانا چې

$$a_n \cdot x^n + \ldots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

او

$$b_n \cdot x^n + \ldots + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

سره برابر دي که $b_i = a_i$ وي،د ټولو $i=1,2,:::n$ له پاره.

د پولینومونوپه هکله مو په اتم ټولګي کې د ترمونوبرخه کې پوره زده کړه کړې. په پولینوم کې هم ټول هغه شمیرلارې، چې په ګڼونو کې باور لري باوري دي.

دا لاندې بیلګې دې هم داروښانه کړي:

د پولینومونوله پاره نورې بیلګې:

- $3x^2 + 2x + 5$
- $7x^3 + x^2 + 6x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

o $10x^5 + 3x^4 + 2x$

د پولینوم ډولونه:

په شمیرپوهنه کې د پولینوم مختلف ډولونه شته.په شمیرپوهنه کې د بینوم لاندې یو پولینوم پوهیږو، چې له دوه غړو جوړ وي یا په بل ډول ویلی شوي، چې یو بینوم د دوه مونومونو زیاتون یا کمون دی.دا لاندې بیلګې دا هم ښایي، چې بینوم څنګه برېښي!

- $a + b$
- $x^3 + y^3$
- $x - 3$

پولینوم، چې له درې زیاتونونو جوړ دی‌ترینوم بلل کیږي. لاندې بیلګه دا روښانه کوي.

- $a^2 + b^2 + c^2$
- $6a^2 + 7a^3 + 8a^4$

زیاتون ته بیلګه

$$(-x^5-2x^4-3x^2-x+2) + (x^2+2) = -x^5-2x^4-2x^2-x+4$$

پولینومکمون ته بیلګه: په لاندې بیلګه کې ګورو، چې د برابر توانونو x یو له بل څخه کمیږي.

$$(x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x) - (3x^3 + 2x^2 + 6x) = x^4$$

ځل (ضرب):

دا لاندې درې بیلګې د ځل یا ضرب له پاره ورکړ شوي.

موږاو تاسي د دې لارې سره د بینوم فرمول او د ترمونو د ځله ونو له لارې بلد یو، چې دلته ستاسوپام ورته رااړول کیږي

$$(x-4)\cdot(x^2-2x+3) = x^3-6x^2+11x-12$$

$$(x-5)(x^2+3x+7) = x^3-2x^2-8x-35$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(x-3)(4x+7) = 4x^2 - 5x - 21$$

$$(x+1)(x^2+x-6) = x^3 + x^2 - 6x + x^2 + x - 6 = \underline{\underline{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}}$$

پولینوموېش:

دا لاندې بېلګه د وېش له پاره راوړ، خو دا چې وېش لږ پیچلی دی، په دې به پوره وغږیو.

$(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x) : (x + 3) = x^3 - x^2 + 5x - 9 + (27)/(x+3)$

$-(x^4+3x^3)$

$-(-x^3-3x^2)$

$-(5x^2+15x)$

$-(-9x-27)$

پاتېRest: 27

کرښېزځله ووني سره ځل کیږي یا ضربیږي

$$f(x) = (x+1)(x+2)(x-1{,}5)$$

د ځله ووني ۲ سره غزول کیږي.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+3x+2)(x-1{,}5) \\ &= x^3 - 1{,}5x^2 + 3x^2 - 4{,}5x + 2x - 3 \\ &= x^3 + 1{,}5x^2 - 2{,}5x - 3 \quad /\cdot 2 \end{aligned}$$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم وېش:

که د یوه پولینوم صفرځای معلوم وي، نو کړی شو د پولینوم وېش له لارې د پولینوم درجه په یوه کمه کړو. که دا مو مربع مساوات ته لارښود کړي یا بوځیو نو ساده دی، چې نور صفرځایونه بیدا کړو. لاندې بېلګې دې د پولینوم وېش روښانه کړي.

د بیلګې په توګه د دریمې درجې ټولراشنل تابع صفرځایونه معلوم دي، نو کیدی شي چې د تابع مساوات د کرښیزو صریبونوپه څېر ولیکلی شو:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

چیرته چې $x_1 ; x_2 ; x_3$ صفرځایونه دي.

موږ اوس په څرګنده توکه تابع یا څیرونه د څیرنې لاندې نیسو

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$$

چیرته چې $x1=2$ یو صفرځای دی، ځکه چې

$$f(2) = 2^3 - 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 8 - 4 - 10 + 6 = 0$$

له دې سره له دې سره کېدی شي د تابع مساوات د $x1=2$ صفرځآی لاندې (له امله) په پام کې ونیسو او لکه چې لاس ته راځي و لیکو $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6 = (\ldots\ldots\ldots)(x - 2)$

د صفرځای ټاکلو لپاره اینسوونه : $f(x)= 0 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=(\ldots)(x-2)=0$
دا افاده $x^3-x^2-5x+6=(\ldots)(x-2)=0$ څېړو

د نوکانو افادې یا وېینې $(\ldots)$ټاکو

دواړه لورې په $(x-2)$وېشو

$$(x^3-x^2-5x+6) :(x-2)=(\ldots)$$

په دې توګه د نوکانو افاده $(\ldots)$لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

وېش د لیکنیز وېش قانون سره سم مخ ته بیایو

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x-2) = x^2 + x - 3 \\
\underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)} \\
\quad x^2 - 5x \\
\quad \underline{-\left(x^2 - 2x\right)} \\
\quad\quad -3x + 6 \\
\quad\quad \underline{-(-3x + 6)}
\end{array}
$$

د نوکانو افاده (...) اوسx^2+x-3 بنه لري

له دې لاس ته راځي د صفرځای ټاکنو لپاره اینوونه:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=(\dots)(x-2)=(x^2+x-3)(x-2)=0$$

نو دا مربع مساوات x^2+x-3 اوس حل کوو.

دا د p-q- فرمول سره ځوابوو:

$$p = 1;\ q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{array} \right.$$

صفرځایونه:

$$x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

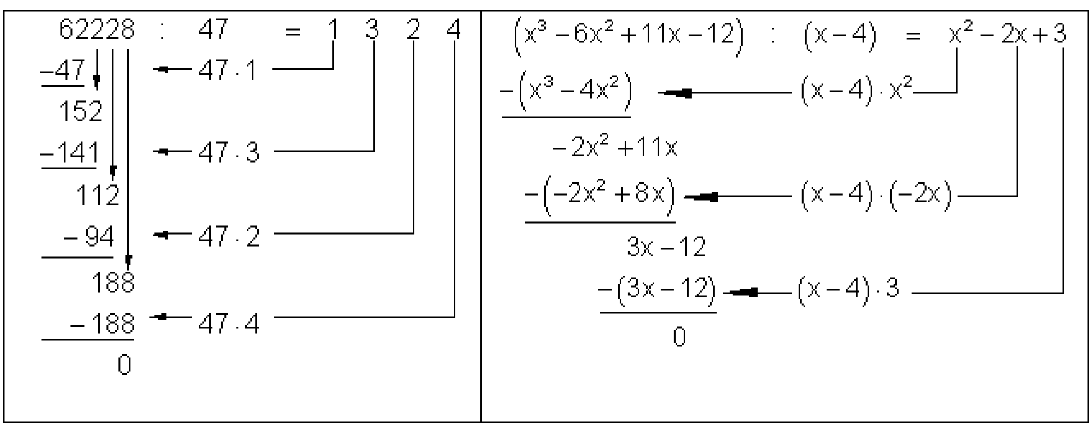
د x محور سره غوڅټکي:

$$P_{x1}(2|0);\ P_{x2}\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}\,|\,0\right);\ P_{x3}\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}\,|\,0\right)$$

تابع مساوات:

$$f(x)=(x-2)\left(x+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}\right)\Leftrightarrow f(x)=x^3-x^2-5x+6$$

د پولینوموېش او لیکنیز پولینوموېش په منځ کې اړیکې شته. په لاندې مخامخوالي کې دا د وېش بې له پاتې په حالت کې را ښایي.



ګڼ ۶۲ د لومړیو دوه ځایونو څخه چوړ دی د دې د وېشونو ګڼونو څخه د پروېشوني (۴۷)

سره وېشل کیږي. لاس ته راوړنه (۱) د (۴۷) سره څل یا ضرب کیږي او د ګڼ (۶۲) څخه کمیږي. د کمښت نتیجې کمښت (۱۵۲) سره په همدې ډول پرمخ ځو تر څو د کمښت لاس ته راوړنه صفر شي.

ازمایښت : $47\cdot 1324=62228$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\left(-6x^3+5x^2+14x-12\right):(-2x+3)=3x^2+2x-4$$

$$\underline{-\left(-6x^3+9x^2\right)}$$

$$-4x^2+14x$$

$$\underline{-(-4x^2+6x)}$$

$$8x-12$$

$$-\underline{(8x-12)}$$

$$0$$

Probe:

$$\left(-6x^3+5x^2+14x-12\right)=\left(3x^2+2x-4\right)(-2x+3)$$

بیلګه:

$$\left(x^3+3x^2-6x-8\right):(x-2)=x^2+5x+4$$

$$\underline{-\left(x^3-2x^2\right)}$$

$$5x^2-6x$$

$$\underline{-\left(5x^2-10x\right)}$$

$$4x-8$$

$$\underline{-(4x-8)}$$

$$0$$

Probe: $\left(x^2+5x+4\right)(x-2)=\left(x^3+3x^2-6x-8\right)$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right):(a+b)=a^2+2ab+b^2$$
$$\underline{-\left(a^3+a^2b\right)}$$
$$2a^2b+3ab^2$$
$$\underline{-\left(2a^2b+2ab^2\right)}$$
$$ab^2+b^3$$
$$\underline{-\left(ab^2+b^3\right)}$$
$$0$$

ازماېښت:

$$:\ \left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)=\underbrace{\left(a^2+2ab+b^2\right)}_{\text{1. binomische Formel}}(a+b)=\underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)}_{\text{Linearfaktoren}}$$

بېلګه:

$$\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right):(x-2)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$$
$$\underline{-\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2\right)}$$
$$-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x$$
$$\underline{-\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x\right)}$$
$$-x+2$$
$$\underline{-(-x+2)}$$
$$0$$

ازماېښت: $\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right)=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1\right)(x-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه:

$$
\begin{array}{l}
\left(2x^{3} \qquad -14x-12\right):(x-3)=2x^{2}+6x+4 \\
\underline{-\left(2x^{3}-6x^{2}\right)} \\
\qquad 6x^{2}-14x \\
\qquad \underline{-\left(6x^{2}-18x\right)} \\
\qquad\qquad 4x-12 \\
\qquad\qquad \underline{-(4x-12)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

په ځنو حالتونوکي دا ښه ده، چي د پولينوم ليکنوکي د اړتيا په وخت کښيوه تشيا پريږدو، کلکه په پورته بيلګه کي چيګورو.

يوه بله شونتيا يي داده، چي هغه تشيا د صفر سره ډکه کړو، لکه دا لاندي:

$$2x^{3}-14x-12=2x^{3}+0x^{2}-14x-12$$

بيلګه:

لاندي بيلګه يو وېش د پاتي سره مخ ته بيايي.لکه ځنګه چي د ليکنيز وېش څخه راته څرګند دی.

$$
\begin{array}{l}
\left(x^{3}+3x^{2}-6x-8\right):(x-1)=x^{2}+4x-2 \quad (\text{Rest } -10) \\
\underline{-\left(x^{3}-x^{2}\right)} \qquad\qquad \Rightarrow\left(x^{3}+3x^{2}-6x-8\right):(x-1)=x^{2}+4x-2-\dfrac{10}{(x-1)} \\
\qquad 4x^{2}-6x \\
\qquad \underline{-\left(4x^{2}-4x\right)} \\
\qquad\qquad -2x-8 \\
\qquad\qquad \underline{-(-2x+2)} \\
\qquad\qquad\quad -10 \quad \text{Rest}
\end{array}
$$

$$\text{Probe: } \left(x^{2}+4x-2-\frac{10}{(x-1)}\right)(x-1)=\left(x^{3}+3x^{2}-6x-8\right)$$

دا چي نوي بلدي يون کي د ناسمون سره مخامخ کيږي،غوره ده چي د دې ازماېښت هم وکړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینوموېش په کارونه کې که د پولینوموېش یوصفرځای ځرګند وي، نو کیدی شي د پولینوم درجه په یوه وړه یا رکمه شي.

$x_1 = 2$ د پولینوم یو صفرځای دی.

$$\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x-2) = \underbrace{x^2 + x - 3}_{\text{Restpolynom}}$$

$$\begin{array}{l} -\left(x^3 - 2x^2\right) \\ \hline \quad x^2 - 5x \\ \quad -\left(x^2 - 2x\right) \\ \hline \qquad -3x + 6 \\ \qquad -(-3x + 6) \\ \hline \end{array}$$

د پاتې پولینوم صفرځایونه اوس کیدیشي د څلورئ یا مربع پولینوم

$$x^2 + x - 3 = 0$$

له لارې پیدا کړو.

د سمون ازماېښت یې وکړئ.

بیلګه: پولینوموېش او ازماېښت یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(x^3+2x^2-5x-6\right):(x+1)=x^2+x-6$$
$$\underline{-\left(x^3+x^2\right)}$$
$$x^2-5x$$
$$\underline{-\left(x^2+x\right)}$$
$$-6x-6$$
$$\underline{-(-6x-6)}$$

$$\text{Prob e}:(x+1)\left(x^2+x-6\right)=x^3+x^2-6x+x^2+x-6=\underline{\underline{x^3+2x^2-5x-6}}$$

پوښتنې:

لاندې پولینوموېش مخ ته بوځئ

الف- $\left(x^3-3x^2-6x+8\right):(x+1)$ ب – $\left(2x^3-x^2-8x+4\right):\left(x^2-4\right)$

پـ - $\left(2x^3-3x+1\right):(2x-1)$ ت - $\left(6a^6+a^4b+25b^3\right):\left(3a^2+5b\right)$

ټ - $\left(8x^5-6x^7+2x\right):2x^2$

ث - $\left(9a^5b^3-12a^3b^5\right):3a^3b^3$

ج - $\left(15a^9-8a^6b+8b^3\right):\left(3a^3+2b\right)$ ،

چ – $\left(14a^4-a^3+5a^2-3a+1\right):\left(7a^2-4a+1\right)$

ح – $\dfrac{3x^5y^{n+2}+3x^2y^{3n+2}-2x^{m+3}y^{n+3}-2x^my^{3n+3}}{x^3+y^{2n}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځ - $\dfrac{48a^{n+x}+56a^{x}b^{x}-72a^{n}b^{c}-84b^{x+c}}{12a^{n}+14b^{x}}$

څ - $\dfrac{8a^{2n+1}-10a^{2n}b+15a^{3n-2}b-12a^{3n-1}}{2a^{2n}-3a^{3n-2}}$

خ - $\dfrac{2a^{5}b^{x+2}-2a^{3}b^{x+5}+3a^{4}b^{2x-1}-3a^{2}b^{2x+2}}{a^{2}-b^{3}}$

پولينوم برابرون:

د يوه برابرون په کيڼ اوښي لور د x مختلف توانونه يو پولينوم برابرون ورکوي

$$\text{Beispiel}: x^3-6x=3x^2-8$$

د داسېبرابرون د اوبی له پاره لومړيدا برابرون په داسي نامه صفربڼه اړوي. دا په دې مانا چي برابرون تر هغې په ورتهبڼه بدلوناړولکيږي، چې په ښيلور يواځې صفر پاتې شي.

$$\text{Beispiel}: x^3-6x=3x^2-8 \mid -3x^2$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-6x=-8 \mid +8$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-6x+8=0$$

د صفربڼې يا- فورم په ځای د پولينوم دې بڼې ته هم نورمال بڼه وايي.
موږ د پولينوم پنځه بديلونهراړوړو

لومړی بديل:

په برابرون کې د اووښتونې x يو يواځنی توان مخ ته راځي.

$$ax^n+b=0 \Rightarrow x=\sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که n ناجوړه وي،نوريښه وښتوني کيدی شي کميز ګڼ هم وي.
د ريښې ټيک يو حل شتون لري.
که n جوړه وي، نوريښه نيونی(هغه ګڼ چېريښه يېنيول کيږي) يواځې زياتيز ګڼ کيدی شي.
دوه اوبيونې شتون لري.
بيلګه:

$$
\begin{aligned}
& 8x^3 + 27 = 0 \mid -27 \\
\Leftrightarrow\ & 8x^3 = -27 \mid : 8 \\
\Leftrightarrow\ & x^3 = -\frac{27}{8} \mid \sqrt[3]{\ } \\
\Leftrightarrow\ & x = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2} \Rightarrow L = \left\{-\frac{3}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 2x^4 - 3 = 0 \mid +3 \\
\Leftrightarrow\ & 2x^4 = 3 \mid : 2 \\
\Leftrightarrow\ & x^4 = \frac{3}{2} \mid \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \\
\Leftrightarrow\ & x = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}107 \Rightarrow L = \left\{\sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}107\right\}
\end{aligned}
$$

په لومړي حالت کې n ناجوړه دې. ريښه نيوني کميزه هم کيدی شي
اويواځې يواوبی شتون لري.
په دويم حالت کې n جوړه دی، ريښه نيونی زياتيزدی.که کميزوي بيا برابرون اوبی نه لري.

دويم بديل:

پولينومبرابرون يوځلوری‌برابرون (مربع مساوات) انځوروي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+px+q=0$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}_{D}}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$$

دا د -p-q- – فرمول له لارې اوبې –یا حلکيري

بيلګه

$$x^2-13x+36=0 \quad p=-13 \quad q=36$$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

$$=\left(\frac{13}{2}\right)^2-36=\frac{169}{4}-\frac{144}{4}=\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1=\frac{13}{2}+\frac{5}{2}=9 \\ x_2=\frac{13}{2}-\frac{5}{2}=4 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow L=\{4;9\}$$

D د دېسکريمينانت له پاره ليکلکيږي چې هغې لرلو سره مخ دمخه سړی د اوبيونويا حلومو څومره وال يا ګڼون ټاکلی شي.

که صفر $< D$ وي ، نو څلوری برابرون دوه اوبي يا حلونه لري

که صفر $= D$ وي،نو برابرون يواځې يو ډبل اوبيلري

که صفر $> D$ وي، نو برابرون اوبی نه لري په دې حالت کې نو سړی نور مخ ته نه ځي.

دريم بديل

ولينومبرابرونيو دوه-څلوری برابرون biquadratische انځوري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + pz + q = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{D}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$x^2 = z \Rightarrow x = \pm\sqrt{z} \text{ für } z \geq 0$$

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \Leftrightarrow z^2 + pz + q = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{D}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$x^2 = z \Rightarrow x = \pm\sqrt{z} \text{ für } z \geq 0$$

د په ځا اېښووني يا سبستيچيوشن z د -p-q- فرمول په مرسته يا له لارې شميرل کيدى شي

پسې دې بيرته په ځايونه په ځتسبستيچيوشن وکارول شي او ريښه دې ونيل شي.

ريښه تيک د زياتيز - p-q-z -ارزښتونو له پاره نيول کيدى شي.

بيلګه:

$$\frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} = 0$$

$$\text{Substitution: } z = x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10}z^2 - \frac{9}{5}z + \frac{81}{10} = 0 \mid \cdot 10$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 18z + 81 = 0$$

$$p = -18\,;\ q = 81$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 - 81 = 0$$

$$z = -\frac{p}{2} = 9$$

$$\text{Rücksubstitution}$$

$$z = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-3; 3\}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې حالت کې د يسکريمينانت صفر دئ، داسې چې د سبستيچيوشناووښتونې له پاره يو اوبې .(z = 9) شتون لري.
دا په دېمانا، چې د ۴ –مې درجې پولينوم ټيک دوه اوبې يا ځوابونه لري.

ځلورمبديل:
په پولينومبرابرون کې هغه همغه ارژښته يا مطلقه غړی نه لرو.

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0 \Leftrightarrow x\left(ax^2 + bx + c\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{2/3}$$

اووښتونې يا مجهوله x کيدی شي له نوکانو راووېستلشي.
اوبيونې د صفرځل يا – صرب له جملې شميرلکيدی شي (د فاکتورکولو تلنلار)،

بيلګه

$$\begin{aligned}
&x^3 + x^2 - 2x = 0\\
&\Leftrightarrow x\left(x^2 + x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}\\
&\Rightarrow x^2 + x - 2 = 0\\
&\Rightarrow p = 1;\ q = -2\\
&\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}\\
&\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}\\
&\Rightarrow x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1 \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2 \end{array} \right.\\
&\Rightarrow \underline{\underline{L = \{-2;0;1\}}}
\end{aligned}$$

د صفر ځلوونې يا صريب دويم ځلوونی کيدی شي د p-q - فرمولسره سادهوشميرلشي.
د صفرځلوونې جمله: يوخل يا صرب ټيک هلته صفردئ، چې يو ځلوونی صفر ړي.

پنځم بديل:
پولينومبرابرون له بديلونو ۱ – ۴ په ځير نه دئ.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

په ډېرو حالتونوکېکيدی شي، د پوينوموېشله لارې اوبی وميندلشي.
د دې له پاره بايد يواوبی معلوم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د پولینوم یواوبی معلوم وي،نو کیدی شید پولینوم درجه د وېش له لارېيه يوه کمه شي. که دا یو څلوری برابرون راکړي،نو اوبیونه يېبیا ساده ه، چې نور اوبي پيدا کړو.
لاندې بیلګه چې اوبی $x = 2$ معلوم دی،د پولینوم تلنلار روښانه یا معلوموي.
پولینوموېش همغه په راته څرګنده لیکنیزدول لاس ته راوړو.
Division.
وېشنه

$$\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x - 2) = x^2 + x - 3$$
$$\underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)}$$
$$x^2 - 5x$$
$$\underline{-\left(x^2 - 2x\right)}$$
$$-3x + 6$$
$$\underline{-(-3x + 6)}$$

د نوکانو(....) ويينه یا افاده اوس دا بڼه $x^2 + x - 3$ لري.
له دې د نورو شمیرنوځای په ځای کول لاسته راځي
$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + x - 3\right)(x - 2) = 0$$
اوس دا څلوری برابرون یا مربع مساوات $\left(x^2 + x - 3\right)$ د اوبیونې دي،چې د p-q- فرمول له لارې سرته رسیږي.

$$p = 1;\ q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{array} \right.$$

$$x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$\Rightarrow L = \left\{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ 2;\ -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}\right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرې د ګومان یا ازماېښت له لورې اوبی نه شي پیداکیدی، نوبیا د نومریک تلنلار څخه کار اخستلکیږي(دا به اوس زموږ دنده نه وي).

برابرونونو ته تمرینونه:

۱ - برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت یې سرت هورسوئ.

الف - $\frac{1}{5}x^3 - 25 = 0$ ب - $\frac{27}{10}x^3 - \frac{4}{5} = 0$ پ - $8x\left(x^2 - 1\right) = -8x + 1$

۲ – برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت یې سرت هورسوئ.

الف - $27x^3 - 8 = 0$ ب – $\frac{1}{16}x^3 - 4 = 0$ پ- $-2 + \frac{7}{8}x^3 = -\frac{5}{2}x^3 - 1$

۳ - برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت یې سرت هورسوئ.

الف- $4k^2x^3 - 2k = 0; k > 0$ ب – $\frac{1}{4b}\left(x^3 - b^3\right) = 0; b > 0$ پ - $(x + 2a)^3 = \frac{1}{8}$

۴ - برابرونونه د x پسې اوبی – یا حل کړئ او ازماېښت یې سرت هورسوئ.

$$\frac{k \cdot x^3}{4} - 2k = 0$$

۵ - ځانګړې باکتریاګاني د ۴ ساعتونو په منځ کې خپل ګنو(تعداد) څلور برابره کوي.په یوه ساعت کې یې په سلوکې ډېروالی څومره دی؟

۶ – د کال په پیل کې د موټروختارزښت نوی ټاکییا کره کیږي. د یوه پنځه کلن زوړ کارشوې یوم،ترپلورونکی € 8500 ورکوي.

د موټر کلنی زیان به څومره (د وختارزښت د په سلو کې) وي، که سړی له دې، که سړس داسېمخ ته لاړ شي چې دا په لومړیوپنځه کلونوکې برابر جګ وي؟

۷ – برابرونونه اوبی –یا حل کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

الف - $\frac{1}{4}x^3 - 4x = 0$ ب- $3x^3 + \frac{4}{3}x^2 = 0$ پ - $x^3 + x^2 - 2x = 0$

۸ – برابرونونه اوبیکړئ

الف- $4x\left(x^2 - x\right) = 7x^3 - 7x^2 - 6x$ ب- $\frac{3}{4}x^3 - 3x^2 = 0$

پ --- $\frac{1}{8}x^3 - x^2 + 2x = 0$

دا لاندې برابرونونه اوبې کړئ

الف- $x^3 + 4x^2 - 20x - 48 = 0$ ب - $-\frac{1}{2}x^3 + 4x = \frac{1}{2}x^2 - 4$

پ - $-2x^3 + 6x^2 - 4x = \frac{1}{2}x - 1$ ت- $x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2 = 0;\ x_1 = \frac{1}{2}$

ټ - $\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x^3 + 4x^2 - 2x\right) = \frac{3}{2}$

لاندې برابرونونه حل کړئ چې یو اوبی یا حل یېمعلوم وي

الف - $x^3 - 3x^2 - 6x - 2 = 0;\ x_1 = -1$

د پولینوم ویش ځخه کارواخلی.

-- د پولینوموېش ځخه کار واخلئ

الف- $\left(4x^3 - 6x + \frac{5}{2}\right) : (2x - 1)$ ب - $\left(x^3 - 2kx^2 - 2x + 4k\right) : \left(x^2 - 2\right)$

۱۲ – برابرون $x^3 - 4x^2 + (k + 4)x - 2k = 0$ ورکړشوی. وښایئ، چې د $x_1 = 2$ لپاره برابرون یواوبی دی. د k د کوم ارزښت لهپاره ټیک یو ډبل اوبی شته؟

لاس ته راوړنه د کرښیزو ځلوونو یا صریبونوپه څیر ولیکی.

پوښتنه:

a داسې وټاکئ، چې برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

(ax - 1)(x + 2)(x - 1/2) = 0

ټیک دوه اوبیونې یا حلونه ولري

یو د دریمې درجې برابرون دا دوه { 4- ; 2 } = L اوبیونې لري.

الف - د اوبیونو یا حلونوپه هکله ویناوې وکړی.

ب – دوه برابرونونه ددې اوبیونې ورکړی.

۳ – برابرونونه اوبیکړی

الف- $2x^3 - x^2 - x = 0$ ب - $x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}$

۴ – برابرونونه اوبیکړی

الف- $-3x^3 + 5x^2 + 4 = 0$ ب- $x^3 - \frac{16}{5}x^2 + \frac{17}{5}x - \frac{6}{5} = 0$

۵- برابرونونه اوبیا حلکړی

الف - $x^3 + x^2 - \sqrt{2}x^2 - 2x - \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$

ب- $x^3 - 2,63x^2 - 1,45x + 3,08 = 0$

برابرونونه اوبی کړی

الف – $-u^3 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{2}u - \frac{3}{2} = 0$ ب - $a^3 - 4a^2 - a + 4 = 0$

۷ – برابرونونه حل کړی

الف - $x^3 - \left(3 + \sqrt{3}\right)x^2 + 3\sqrt{3}x = 0$

ب- $\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 0$ پ- $\frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + 1 = 0$

ت - $\frac{4}{10}x^3 - \frac{6}{10} = 0$ ټ - $x^3 - 5x^2 + 6,25x = 0$

ث - $\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0$ ج - $x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x = 0$

چ - $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ څ - $x^3 - 3x^2 = -4$

ځ - $(3x - 5)\frac{(x - 2)^2}{5} = 0$

پوښتنې

۱ - برابرونونه د پسې حل کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

الف ـ $\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+2=0$ ب $\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+2=0$

پ ـ $-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{4}=0$ ت ـ $\frac{1}{5}x^3-\frac{3}{5}x^2-5x+15=0$

ټ ـ $2x^3-x^2-5x-2=0$ ث ـ $(3x-1)(x+k)^2=0$

۱ ـد x پسې یې اوبی کړی $(k\neq 0)$

الف ـ $\frac{1}{9k}\left(x^4+x^3-12x^2\right)=0$ ب ـ $\frac{k}{2}x^4-kx^3-\frac{3k}{2}x^2=0$

پ ـ $\frac{x^2}{5k^2}\left(x^2-3k\right)=0\,;\,k>0$ ت ـ $x^4-26x^2+25=0$

ټ ـ $-\frac{1}{2}x^4+3x^2-4=0$ ث ـ $\frac{1}{2}x^4-4x^2+2=0$

ج ـ $-\frac{1}{16}x^4+x^2-3=0$ چ ـ $\frac{1}{3}\left(x^2-3\right)^2-3=0$

خ ـ $\frac{1}{3}x^4-2x^2+3=0$ ځ ـ $x^4-11x^2+18=0$

پوښتنې

حلونه یا اوبیونې وټاکئ

الف ـ $\frac{1}{3}x^4-3x^3=0$ ب ـ $\frac{1}{7}x^4-7=0$ پ ـ $\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^2+1=0$

ت ـ $-2x^4+x^2+x=0$ ټ ـ $\frac{1}{4}x^5-\frac{3}{4}x^3-x=0$ ث ـ $\frac{1}{3}\left(x^2-4\right)^2-3=0$

ج ـ $\frac{2}{5}\left(x^2-9\right)(x+2)^2=0$ چ ـ $\frac{1}{64}x^3+\frac{1}{4}x^2+x=0$ خ ـ $x^4-5x^2-2x=0$

ځ ـ $x^4-6x^2+8=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس الګوریتم **Der Gauß- Algorithmus**

فکر دې وشي، چې دا برخه په یولسم ټولګي کې راشي. دلته یې راوړنه هم بده نه ده.

	یادونه: خوارزمیة د Algorithmus عربي مانا ده : زما په اند دا الخوارزميّة دی، چې په لاتین کې ترې الګوریتموس جوړ شوی دی. الخواریزم د الګوریتم نومورکونکی، یوه شوروي پوست مارکې چې د الخواریزم د ۱۲۰۰ کلیزې جشن په هکله راوېستلې وه. الګوریتم د پرابلم یا د پرابلمونود ټولګي پا یوه یواځنۍ د اوبیونې تلنلار ړه. الګوریتم یوه نړیواله تلنلار ده د په خوښه کرښیز برابرونونو سیستم اوبیونې ته

ننوتنبيلګې:

$7x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12$ $-x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5$ $-4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1$ شمیرنخیره یا شیما داسې لیکو	درې برابرونونه د درې اووښتونویا واریابلو یا متحولو سره له بڼه بدلون څخه لرو	د کرښې ډول په توګه کار کوو. د لیکو له پاره اجازه شته : - بدلیدلی شي - د یوه ګڼ سره ځلیدلی شي. - په یوه ګڼ سره وېشلکیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- سره زیاتیدی شي

- سره کم کړي

درځونه هم سره بدلیدلی شي، که اووبنتوني یا واریابلي x ورسره واخستل شي.

د اوبیوني یا حل لاس ته راوړنه د بیرته په څټ اینسوونې له راې هم کیدی شي.

$-14x_3 = -14$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 1}}$

$-11x_2 + 23\cdot 1 = 23$

$\Leftrightarrow -11x_2 = 0$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 0}}$

$7x_1 + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12$

$\Leftrightarrow 7x_1 = -7$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -1}}$

$L = \{-1; 0; 1\}$

ازماېښت: په لاندي کي د رښتیا له پاره ځاي په ځاي دي.

$7\cdot(-1) + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12 \quad (w)$

$-1\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 4\cdot 1 = 5 \quad (w)$

$-4\cdot(-1) + 1\cdot 0 - 3\cdot 1 = 1 \quad (w)$

x_1	x_2	x_3	
7	3	−5	−12
−1	−2	4	5
−4	1	−3	1

x_1	x_2	x_3	
*	*	*	*
0	*	*	*
0	0	*	*

شمیرنه داسي مخ ته بیایو: شننه يې بشي لور ته ده.

x_1	x_2	x_3		
7	3	−5	−12	|·4
−1	−2	4	5	|·28
−4	1	−3	1	|·7
28	12	−20	−48	
−28	−56	112	140	II + I
−28	7	−21	7	III + I
28	12	−20	−48	|: 4
0	−44	92	92	|: 4
0	19	−41	−41	
7	3	−5	−12	
0	−11	23	23	|·19
0	19	−41	−41	|·11
7	3	−5	−12	
0	−209	437	437	|: 19
0	209	−451	−451	III + II
7	3	−5	−12	
0	−11	23	23	
0	0	−14	−14	

د بیخي نویو له پاره یادونې:

د اوبیوني له پاره تلندول کیدی شي په کوچنیو پلونو توته شي.

۱ـ د اصلي ماتلانډي سره د لیکي له لاري ځل (ضرب) سره د د ماتونو مخه ونیسی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲- په لومړۍ کرښه لومړی ګڼ باید زیاتیز وي(که نه، بیا کیدی شي د ۱- سره ځل شي)

۳- د ځل یا ویش له لارې وهڅیږي چې په لومړي درځ کې ټول ګڼونه همغه ارزښت ولري.

په ۲ -مه او ۳ -مه لیکه کې دې لومړي ګڼونه کمیزوي.

۴- ۲ -مې او ۳ -مې لیکې هرې یوې ته دې لومړۍ لیکه ورزیاته شي. له دې سره په لومړي درځ کې ۲ صفرونه منځ ته راځي.

۵- په۲ -مه لیکه کې دې دویم ګڼ زیاتیز وي(که نه، نو د ۱- سره دې ځل شي)

۶ -د ځل یاوېش له لارې په دې نیت کې شي، چې له ۲-مې لیکې په دویم درځ کې ټول ګڼونه همغه ارزښت ولري.

۷ - و ۲ -مېلیکې یا کرښې ته ۳ -مه لیکه ورزیاته کړی. له دې سره په ۳-مه لیکه کې ۲ صفرونه منځ ته راځي.

۸ - لاس ته راوړی د اوبی یا حل په ښخټ لور کیږدی.

برابر پرمختګډول کیدی شي د هغو سیستمونو له پاره هم وکارول شي، چې له دریو زیات برابرونونه شتون ولري:

بڼه بدلونونه کړی شي سړی بل ډول هم مخ ته بوځي.دا چې ،، ځنګه،، دا یواځې د شمیرپوهانو مهارت ته پریږدو. د زیاتو تمرینونوله لارې سړی یوه غوره لار پیدا کوي. د شونتیا پورې دې د ماتونومخه دې ونیولشي، چې د نا اړینې تیرونې مخه نیول شوي وي. که سړی ورته تازه وي، کیدی شي ډېر بڼه بدلونونه په یوه وخت جوړ کړي، له دېلارې لیکنه کیږي، خود ناسمون شونتیا زیاتیږي؟

د په ښخټ اینوولو له لارې د اوبي یا حل لاس ته راوړنه	لانې الماني:سره بدل کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

tausche: ⇄

x_1	x_2	x_3		
7	3	−5	−12	
−1	−2	4	5	$\vert\cdot(-1)$ I ⇄ II
−4	1	−3	1	
1	2	−4	−5	
7	3	−5	−12	II - 7·I
−4	1	−3	1	III + 4·I
1	2	-4	-5	
0	-11	23	23	$\vert\cdot 9$
0	9	-19	-19	$\vert\cdot 11$
1	2	−4	−5	
0	−99	207	207	$\vert : 9$
0	99	−209	−209	III + II
1	2	-4	-5	
0	-11	23	23	
0	0	-2	-2	

$-2x_3 = -2$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 1}}$

$-11x_2 + 23\cdot 1 = 23$

$\Leftrightarrow -11y = 0$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 0}}$

$x_1 + 2\cdot 0 - 4\cdot 1 = -5$

$\Leftrightarrow x_1 = -7$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -1}}$

$L = \{-1; 0; 1\}$

ازمايښت:

$7\cdot(-1) + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12 \quad (w)$

$-1\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 4\cdot 1 = 5 \quad (w)$

$-4\cdot(-1) + 1\cdot 0 - 3\cdot 1 = 1 \quad (w)$

بېلګه ۱ :(ساده يا اسانه)

د په ځټ اينوولو له لارې د اوبيبا حل لاس ته راوړنه

$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 8$

$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -4$

$4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 1$

x_1	x_2	x_3		
2	−3	4	8	$\vert\cdot 6$
3	4	−5	−4	$\vert\cdot 4$
4	−6	3	1	$\vert\cdot 3$
12	−18	24	48	$\vert : 6$
12	16	−20	−16	II - I
12	−18	9	3	III - I
2	-3	4	8	
0	34	-44	-64	
0	0	-15	-45	

$-15x_3 = -45$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 3}}$

$34x_2 - 44\cdot 3 = -64$

$\Leftrightarrow 34x_2 = 68$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 2}}$

$2x_1 - 3\cdot 2 + 4\cdot 3 = 8$

$\Leftrightarrow 2x_1 = 2$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 1}}$

$L = \{1; 2; 3\}$

Probe:

$2\cdot 1 - 3\cdot 2 + 4\cdot 3 = 8 \quad (w)$

$3\cdot 1 + 4\cdot 2 - 5\cdot 3 = -4 \quad (w)$

$4\cdot 1 - 6\cdot 2 + 3\cdot 3 = 1 \quad (w)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲ (منځنی سخته)

د په ښتې اینوولو له لارې د اوبې یا حل لاس ته راوړنه

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2$$
$$4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 9$$
$$8x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 13$$

x_1	x_2	x_3		
3	2	−4	−2	$\|\cdot 8$
4	−5	3	9	$\|\cdot 6$
8	7	−9	13	$\|\cdot 3$
24	16	−32	−16	$\|: 8$
24	−30	18	54	II - I
24	21	−27	39	III - I
3	2	-4	-2	
0	-46	50	70	$\|:2$ II $\rightleftarrows$ III
0	5	5	55	$\|:5$
3	2	-4	-2	
0	1	1	11	$\|\cdot 23$
0	-23	25	35	
3	2	−4	−2	
0	23	23	253	$\|: 23$
0	−23	25	35	III + II
3	2	−4	−2	
0	1	1	11	
0	0	48	288	

$$48x_3 = 288$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 6}}$$
$$x_2 + 1\cdot 6 = 11$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 5}}$$
$$3x_1 + 2\cdot 5 - 4\cdot 6 = -2$$
$$\Leftrightarrow 3x_1 = 12$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 4}}$$

$$L = \{4; 5; 6\}$$

ازماېښت:

$$3\cdot 4 + 2\cdot 5 - 4\cdot 6 = -2 \quad (w)$$
$$4\cdot 4 - 5\cdot 5 + 3\cdot 6 = 9 \quad (w)$$
$$8\cdot 4 + 7\cdot 5 - 9\cdot 6 = 13 \quad (w)$$

بیلګه ۳ : (سخته): لاندې درې برابرونونه غواړو اوبی کړو

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{4}{5}x_2 + \frac{3}{8}x_3 = 4$$
$$\frac{3}{4}x_1 + \frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 23$$
$$\frac{4}{5}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

x_1	x_2	x_3		
$\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3}{8}$	4	$\mid \cdot 40$
$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{5}$	23	$\mid \cdot 40$
$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	8	$\mid \cdot 20$
20	−32	15	160	$\mid \cdot 12$
30	15	8	920	$\mid \cdot 8$
16	−10	5	160	$\mid \cdot 15$
240	−384	180	1920	$\mid : 12$
240	120	64	7360	II - I
240	−150	75	2400	III - I
20	−32	15	160	
0	504	−116	5440	$\mid : 4$
0	234	−105	480	$\mid : 3$
20	−32	15	160	
0	126	−29	1360	$\mid \cdot 13$
0	78	−35	160	$\mid \cdot 21$
20	−32	15	160	
0	1638	−377	17680	$\mid : 13$
0	1638	−735	3360	III - II
20	-32	15	160	
0	126	-29	1360	
0	0	-358	-14320	

د په څټ اینوولو له لارې حل لاس ته راوړنه

$$-358x_3 = -14320$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 40}}$$
$$126x_2 - 29\cdot 40 = 1360$$
$$\Leftrightarrow 126x_2 = 2520$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 20}}$$
$$20x_1 - 32\cdot 20 + 15\cdot 40 = 160$$
$$\Leftrightarrow 20x_1 = 200$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 10}}$$
$$L = \{10 ; 20 ; 40\}$$

ازماېښت:

$$\frac{1}{2}\cdot 10 - \frac{4}{5}\cdot 20 + \frac{3}{8}\cdot 40 = 4$$
$$\Leftrightarrow 5 - 16 + 15 = 4\,(w)$$
$$\frac{3}{4}\cdot 10 + \frac{3}{8}\cdot 20 + \frac{1}{5}\cdot 40 = 23$$
$$\Leftrightarrow \frac{15}{2} + \frac{15}{2} + 8 = 23\,(w)$$
$$\frac{4}{5}\cdot 10 - \frac{1}{2}\cdot 20 + \frac{1}{4}\cdot 40 = 8$$
$$\Leftrightarrow 8 - 10 + 10 = 8\,(w)$$

د کاروني یا استعمال بیلګی

د تولراشنل فنکشن د فنکشن برابرون د شمیرلو له لارې، چې څلور ټکي یې معلوم دي،

د ګاوس الګوریتم کارونه یا استعمال

د کاروني بیلګه۱:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|4) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 4$$
$$P_2(2|2) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 2$$
$$P_3(4|4) \Rightarrow \quad f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 4$$
$$P_4(5|20) \Rightarrow \quad f(5) = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 20$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	4	
1	2	4	8	2	II − I
1	4	16	64	4	III − I
1	5	25	125	20	IV − I
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	3	15	63	0	III − 3·II
0	4	24	124	16	IV − 4·II
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	0	6	42	6	
0	0	12	96	24	IV − 2·III
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	0	6	42	6	
0	0	0	12	12	

$\Rightarrow$

$$12a_3 = 12 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$6a_2 + 42a_3 = 6$$
$$\Leftrightarrow 6a_2 + 42 = 6 \mid -42$$
$$\Leftrightarrow 6a_2 = -36 \mid : 6 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -6}$$

$$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -2$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 18 + 7 = -2$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 11 = -2 \mid +11 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 4$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 9 - 6 + 1 = 4$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 4 = 4 \mid -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

د کارونپیلکه ۲

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1\left(1 \mid -\frac{11}{2}\right) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = -\frac{11}{2}$$
$$P_2\left(-1 \mid \frac{9}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = \frac{9}{2}$$
$$P_3(-2 \mid 8) \Rightarrow \quad f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 8$$
$$P_4\left(-3 \mid \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = \frac{5}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	$-\frac{11}{2}$	$\vert\cdot 2$
1	−1	1	−1	$\frac{9}{2}$	$\vert\cdot 2$
1	−2	4	−8	8	$\vert\cdot 2$
1	−3	9	−27	$\frac{5}{2}$	$\vert\cdot 2$
2	2	2	2	−11	
2	−2	2	−2	9	II − I
2	−4	8	−16	16	III − I
2	−6	18	−54	5	IV − I
2	2	2	2	−11	
0	−4	0	−4	20	$\vert:(-2)$
0	−6	6	−18	27	$\vert:3$
0	−8	16	−56	16	$\vert:4$
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	−2	2	−6	9	III + II
0	−2	4	−14	4	IV + II
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	0	2	−4	−1	
0	0	4	−12	−6	IV − 2·III
2	2	2	2	−11	
0	2	0	2	−10	
0	0	2	−4	−1	
0	0	0	−4	−4	

$\Rightarrow$

$-4a_3 = -4 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$

$2a_2 - 4a_3 = -1$

$\Leftrightarrow 2a_2 - 4 = -1 \,|\, +4$

$\Leftrightarrow 2a_2 = 3 \,|: 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$

$2a_1 + 2a_3 = -10$

$\Leftrightarrow 2a_1 + 2 = -10 \,|\, -2$

$\Leftrightarrow 2a_1 = -12 \,|: 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$

$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -11$

$\Leftrightarrow 2a_0 - 12 + 3 + 2 = -11$

$\Leftrightarrow 2a_0 - 7 = -11 \,|\, +7$

$\Leftrightarrow 2a_0 = -4 \,|: 2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2$$

د کارونې بیلګه ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|-16) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -16$$

$$P_2(2|11) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 11$$

$$P_3(4|-11) \Rightarrow \quad f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = -11$$

$$P_4(6|-9) \Rightarrow \quad f(6) = 216a_3 + 36a_2 + 5a_1 + 1a_0 = -9$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	−16	
1	2	4	8	11	II − I
1	4	16	64	−11	III − I
1	6	36	216	−9	IV − I
1	−1	1	−1	−16	
0	3	3	9	27	|: 3
0	5	15	65	5	|: 5
0	7	35	217	7	|: 7
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	1	3	13	1	III − II
0	1	5	31	1	IV − II
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	−8	
0	0	4	28	−8	IV − 2·III
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	−8	
0	0	0	8	8	

$\Rightarrow$

$$8a_3 = 8 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 + 10a_3 = -8$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 10 = -8 \mid -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -18 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -9}$$

$$a_1 + a_2 + 3a_3 = 9$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 9 + 3 = 9$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 6 = 9 \mid +6 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 15}$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = -16$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 15 - 9 - 1 = -16$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 25 = -16 \mid +25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 9}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 9}}$$

د کاروني بيلګه۴ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|7) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = 7$$
$$P_2(-2|6) \Rightarrow \quad f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 6$$
$$P_3(3|1) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 1$$
$$P_4(-3|-2) \Rightarrow \quad f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = -2$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	7	
1	−2	4	−8	6	II − I
1	3	9	27	1	III − I
1	−3	9	−27	−2	IV − I
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	4	8	28	−6	III + 4·II
0	−2	8	−26	−9	IV − 2·II
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	0	20	0	−10	
0	0	2	−12	−7	

$\Rightarrow$

$$20a_2 = -10 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{1}{2}}$$
$$2a_2 - 12a_3 = -7$$
$$\Leftrightarrow -1 - 12a_3 = -7 \mid +1$$
$$\Leftrightarrow -12a_3 = -6 \mid :(-12) \Leftrightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{2}}$$
$$-a_1 + 3a_2 - 7a_3 = -1$$
$$\Leftrightarrow -a_1 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -1$$
$$\Leftrightarrow -a_1 - 5 = -1 \mid +5$$
$$\Leftrightarrow -a_1 = 4 \mid :(-1) \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -4}$$
$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 3 = 7 \mid -3 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 4}$$

Die Funktionsgleichung: $$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$

د پېرته المانيژباړه:د څيروني يا تابع برابرون

د کاروني بيلګه ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{aligned}
P_1(2|22) \Rightarrow\ f(2) &= 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 &= 22\\
P_2(4|44) \Rightarrow\ f(4) &= 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 &= 44\\
P_3(-4|4) \Rightarrow\ f(-4) &= -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 &= 4\\
P_4(8|40) \Rightarrow\ f(8) &= 512a_3 + 64a_2 + 8a_1 + 1a_0 &= 40
\end{aligned}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	2	4	8	22	
1	4	16	64	44	II − I
1	−4	16	−64	4	III − I
1	8	64	512	40	IV − I
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	−6	12	−72	−18	III + 3·II
0	6	60	504	18	IV − 3·II
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	0	48	96	48	
0	0	24	336	−48	$IV - \frac{1}{2}\cdot III$
1	2	4	8	22	
0	2	12	56	22	
0	0	48	96	48	
0	0	0	288	−72	

$\Rightarrow$

$$288a_3 = -72 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{4}}$$

$$48a_2 + 96a_3 = 48$$
$$\Leftrightarrow 48a_2 - 24 = 48 \mid +24$$
$$\Leftrightarrow 48a_2 = 72 \mid : 48 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$$

$$2a_1 + 12a_2 + 56a_3 = 22$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 18 - 14 = 22$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 4 = 22 \mid -4$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 = 18 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}$$

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 22$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 18 + 6 - 2 = 22$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 22 = 22 \mid -22 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

Die Funktionsgleichung: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x$

د پورته المانيژباړه:د ځيرونبيا تابع برابرون

د کاروني بيلکه۶ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{array}{llcll}
P_1(1|0) \Rightarrow & f(1) & = & 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 & = 0 \\
P_2(-1|-2) \Rightarrow & f(-1) & = & -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 & = -2 \\
P_3(2|16) \Rightarrow & f(2) & = & 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 & = 16 \\
P_4(-3|-4) \Rightarrow & f(-3) & = & -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 & = -4
\end{array}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	0	
1	−1	1	−1	−2	II − I
1	2	4	8	16	III − I
1	−3	9	−27	−4	IV − I
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	1	3	7	16	$III + \frac{1}{2} \cdot II$
0	−4	8	−28	−4	
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	3	6	15	|: 3
0	0	8	−24	1	|: 8
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	1	2	5	
0	0	1	−3	0	IV − III
1	1	1	1	0	
0	−2	0	−2	−2	
0	0	1	2	5	
0	0	0	−5	−5	

$\Rightarrow$

$$-5a_3 = -5 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$a_2 + 2a_3 = 5$$
$$\Leftrightarrow a_2 + 2 = 5 \mid -2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 3}$$

$$-2a_1 - 2a_3 = -2$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -2 \mid +2$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 0}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 3 + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 4 = 0 \mid -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -4}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + 3x^2 - 4}}$$

د کاروني بیلګه ۷ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{array}{llcll} P_1(1|1) \Rightarrow & f(1) & = & 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 & = 1 \\ P_2(2|0) \Rightarrow & f(2) & = & 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 & = 0 \\ P_3(-2|4) \Rightarrow & f(-2) & = & -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 & = 4 \\ P_4(3|9) \Rightarrow & f(3) & = & 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 & = 9 \end{array}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	1	
1	2	4	8	0	II − I
1	−2	4	−8	4	III − I
1	3	9	27	9	IV − I
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	−3	3	−9	3	III + 3·II
0	2	8	26	8	IV − 2·II
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	0	12	12	0	
0	0	2	12	10	$IV - \frac{1}{6} \cdot III$
1	1	1	1	1	
0	1	3	7	−1	
0	0	12	12	0	
0	0	0	10	10	

$\Rightarrow$

$10a_3 = 10 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$

$12a_2 + 12a_3 = 0$
$\Leftrightarrow 12a_2 + 12 = 0 \,|\, -12$
$\Leftrightarrow 12a_2 = -12 \,|:12 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -1}$

$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -1$
$\Leftrightarrow a_1 - 3 + 7 = -1$
$\Leftrightarrow a_1 + 4 = -1 \,|\, -4 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -5}$

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$
$\Leftrightarrow a_0 - 5 - 1 + 1 = 1$
$\Leftrightarrow a_0 - 5 = 1 \,|\, +5 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 6}$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6}}$$

د کارونې بیلګه ۸ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|6) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 6$$

$$P_2(3|-4) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -4$$

$$P_3\left(-\frac{1}{2} \,\middle|\, \frac{45}{8}\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{2}a_1 + 1a_0 = \frac{45}{8}$$

$$P_4\left(-\frac{3}{2} \,\middle|\, -\frac{77}{8}\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}a_3 + \frac{9}{4}a_2 - \frac{3}{2}a_1 + 1a_0 = -\frac{77}{8}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	6	
1	3	9	27	−4	
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{45}{8}$	$\|\cdot 8$
1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{27}{8}$	$-\frac{77}{8}$	$\|\cdot 8$
1	1	1	1	6	
2	3	9	27	−4	II − I
8	−4	2	−1	45	III − 8·I
8	−12	18	−27	−77	IV − 8·I
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	−12	−6	−9	−3	III + 6·II
0	−20	10	−35	−125	IV + 10·II
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	42	147	−63	|: 21
0	0	90	225	−225	|: 45
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	2	7	−3	
0	0	2	5	−5	IV − III
1	1	1	1	6	
0	2	8	26	−10	
0	0	2	7	−3	
0	0	0	−2	−2	

$\Rightarrow$

$$-2a_3 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 - 7a_3 = -3$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 7 = -3 \,|\, -7$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -10 \,|: 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -5}$$

$$2a_1 + 8a_2 + 26a_3 = -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 - 40 + 26 = -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 - 14 = -10 \,|\, +14$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 = 4 \,|: 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 6$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 2 - 5 + 1 = 6$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 2 = 6 \,|\, +2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 8}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د كاروني يا استعمال بيلګه۹ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1\left(1 \mid -\frac{9}{2}\right) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = -\frac{9}{2}$$

$$P_2\left(-1 \mid \frac{11}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = \frac{11}{2}$$

$$P_3\left(3 \mid -\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -\frac{5}{2}$$

$$P_4\left(-\frac{5}{2} \mid -8\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{125}{8}a_3 + \frac{25}{4}a_2 - \frac{5}{2}a_1 + 1a_0 = -8$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	$-\frac{9}{2}$	$\mid \cdot 8$
1	−1	1	−1	$\frac{11}{2}$	$\mid \cdot 8$
1	3	9	27	$-\frac{5}{2}$	$\mid \cdot 8$
1	$-\frac{5}{2}$	$\frac{25}{4}$	$-\frac{125}{8}$	−8	$\mid \cdot 8$

$$-11a_3 = -11 \mid : (-11)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

8	8	8	8	−36	
8	−8	8	−8	44	II − I
8	24	72	216	−20	III − I
8	−20	50	−125	−64	IV − I
8	8	8	8	−36	|: 4
0	−16	0	−16	80	|: 4
0	16	64	208	16	|: 4
0	−28	42	−133	−28	|: 7
2	2	2	2	−9	
0	−4	0	−4	20	
0	4	16	52	4	III + II
0	−4	6	−19	−4	IV − II
2	2	2	2	−9	
0	−4	0	−4	20	
0	0	16	48	24	|: 8
0	0	6	−15	−24	|: 3

$$2a_2 + 6a_3 = 3$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 6 = 3 \mid -6$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -3 \mid : 2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad -4a_1 - 4a_3 = 20$$
$$\Leftrightarrow -4a_1 - 4 = 20 \mid +4$$
$$\Leftrightarrow -4a_1 = 24 \mid : (-4)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$$

$$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -9$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 12 - 3 + 2 = -9$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 13 = -9 \mid +13$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 = 4 \mid : 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کاروني يا استعمال بيلګه ۱۰ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|25) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 25$$
$$P_2(-1|-49) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -49$$
$$P_3(3|27) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 27$$
$$P_4(5|5) \Rightarrow \quad f(5) = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 5$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	25	
1	−1	1	−1	−49	II − I
1	3	9	27	27	III − I
1	5	25	125	5	IV − I
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	2	8	26	2	III + II
0	4	24	124	−20	IV + 2·II
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	0	8	24	−72	
0	0	24	120	−168	IV − 3·III
1	1	1	1	25	
0	−2	0	−2	−74	
0	0	8	24	−72	
0	0	0	48	48	

$\Rightarrow$

$$48a_3 = 48 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$8a_2 + 24a_3 = -72$$
$$\Leftrightarrow 8a_2 + 24 = -72 \mid -24$$
$$\Leftrightarrow 8a_2 = 96 \mid : 8 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -12}$$

$$-2a_1 - 2a_3 = -74$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -74 \mid +2$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 = -72 \mid : (-2) \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 36}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 25$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 36 - 12 + 1 = 25$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 25 = 25 \mid -25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x}}$$

پوښتنې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{vmatrix} x_1+x_2+0x_3=28 \\ x_1+0x_2+x_3=30 \\ 0x_1+x_2+x_3=32 \end{vmatrix} \Rightarrow L=\{13;15;17\}$$

$$\begin{vmatrix} 2x_1+3x_2+0x_3=12 \\ 3x_1+0x_2+2x_3=11 \\ 0x_1+3x_2+4x_3=10 \end{vmatrix} \Rightarrow L=\{3;2;1\}$$

$$\begin{vmatrix} x_1+x_2-x_3=17 \\ x_1-x_2+x_3=13 \\ -x_1+x_2+x_3=7 \end{vmatrix} \Rightarrow L=\{15;12;10\}$$

$$\begin{vmatrix} -4x_1+3x_2-2x_3=8 \\ 5x_1+4x_2-6x_3=-8 \\ -3x_1+2x_2+4x_3=19 \end{vmatrix} \Rightarrow L=\{-1;3;2,5\}$$

$$\begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3=9 \\ x_1+2x_2+4x_3=15 \\ x_1+3x_2+9x_3=23 \end{vmatrix} \Rightarrow L=\{5;3;1\}$$

$$\begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3=9 \\ x_1+2x_2+3x_3=14 \\ x_1+3x_2+6x_3=20 \end{vmatrix} \Rightarrow L=\{5;3;1\}$$

$$\begin{vmatrix} x_1+3x_2-2x_3+x_4=-7 \\ -2x_1+x_2-4x_3-5x_4=-6 \\ x_1-3x_2+x_3=6 \\ -3x_1+4x_2-6x_3+2x_4=-21 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 3 & -2 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & -4 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & -6 & 2 & -21 \end{array} \Rightarrow L=\{1;-1;2;-1\}$$

$$\begin{vmatrix} -2x_1+3x_2-4x_3+2x_4=9 \\ 3x_1+4x_2-8x_3+x_4=-2 \\ x_1-6x_2-x_3+3x_4=20 \\ x_4=5 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline -2 & 3 & -4 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & -8 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -1 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \Rightarrow L=\{-1;-1;0;5\}$$

د لاس ته راوړنې د کنترل له پاره دې ازمايښت وشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هورنر- شیما Das Horner – Schema

د دې له پاره چې د جګودرجو ټولراشنلځیرونو یا که غواړۍ توابعو ګراف وکښلای شو، باید یو ارزښت جدول برابرکړو. دا به ډېر وخت اوځای ونیسي، چې د دې له پاره اړین ځیره ارزښتونه یا فنکشنارزښتونه وشمیرو.

د هورنر – شیما دا شمیرنې ډېرې ساده کوي.

بیلګه : دریمه درجه ټولراشنل فنکشن یا راشنل ځیرونه

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

د x د ډېرځله نوکانو بندولو له لارېمنځ ته راځي:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = x\left[a_3x^2 + a_2x + a_1\right] + a_0 = \underbrace{x\underbrace{\left[x\left(\underbrace{a_3x + a_2}_{e_2}\right) + a_1\right]}_{e_4} + a_0}_{E}$$

که سرۍ غواړي چې د $x = x_1$ له پاره فنکشن ارزښت وشمیري، نوکی دی شي سرۍ په لاندې ډول له دننه دباندې لورته مخ ته لاړ شي:

-- ګرد نوکان وشمیري

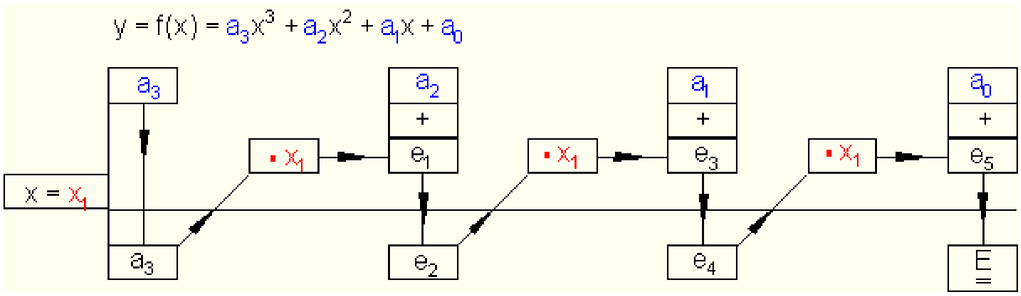
--منځ لاس ته راوړنه (ښه لیکنه به یې داسې وي: منځلاس –ته-راوړنه) د x_1 سره ځل کړي او a_1 ته یې ور زیات کړي

--لاس ته راوړنه د x_1 سره ځل کړي او a_0 ته یې ور زیات کړو

دا شمیرنکارونې یا که غواړۍ شمیرنعملیې کیدی شي ځیره ډوله یا شیماتیکي داسې انځور کړو:

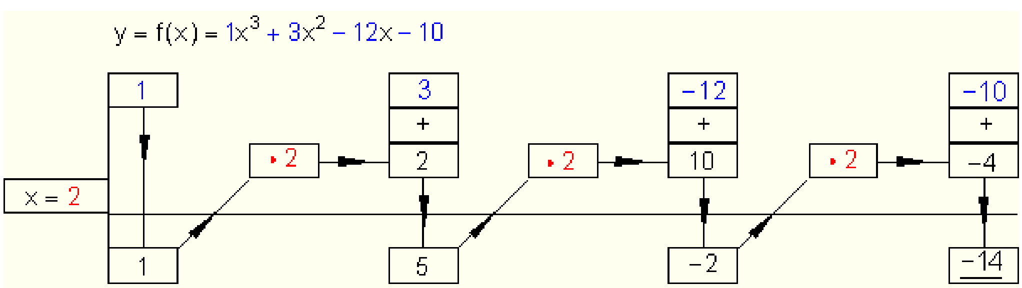
(c) ketabton.com: The Digital Library

تولیزه بڼه Allgemeines Schema:



بيلګه : $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 12x - 10$

د $x = 2$ له پاره دې د $y = f(2)$ ارزښت د هورنر – شيما له لارې وشميرل شي.



نولاس ته راځي يا باورلرى: $y = f(2) = \underline{-14}$

د يوه دريمي درجي پولينوم له پاره- چې غواړو ګراف يې رسم کړو يا کاږو- بايد يو ارزښتجدول جوړکړو.

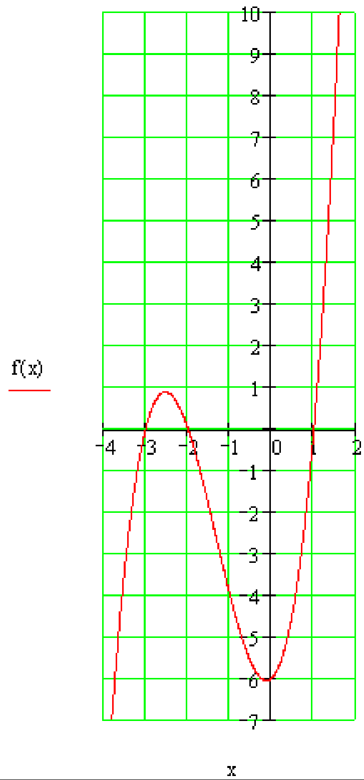
$y = f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 \quad D_f = \{x \mid -4 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$

$a_3 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_1 = 1 \quad a_0 = -6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	1	4	1	−6	
x = −4		−4	0	−4	
	1	0	1	−10	= f(−4)
	1	4	1	−6	
x = −3		−3	−3	+6	
	1	1	−2	0	= f(−3)
	1	4	1	−6	
x = −2		−2	−4	+6	
	1	2	−3	0	= f(−2)
	1	4	1	−6	
x = −1		−1	−3	+2	
	1	3	−2	−4	= f(−1)
	1	4	1	−6	
x = 1		+1	+5	+6	
	1	5	6	0	= f(1)
	1	4	1	−6	
x = 2		+2	+12	+26	
	1	6	13	20	= f(2)
	1	4	1	−6	
x = 3		+3	+21	+66	
	1	7	22	60	= f(3)
	1	4	1	−6	
x = −2,5		−2,5	−3,75	+6,875	
	1	1,5	−2,75	0,875	= f(−2,5)

(c) ketabton.com: The Digital Library



ارزښتجدول؛

x	-4	-3	-2,5	-2	-1
f(x)	-10	0	0,875	0	-4
x	0	1	2	3	
f(x)	-6	0	20	60	

د لښتي- يا جدولارزښت سره کيدی شی په نږدې توګه ګراف وکښل شي.

که د ګراف کښلو کې څرګنده شي،چې يوبل ځای هم پاتې دی،دا کيدی شي هر وخت د هورنرشيما په مرسته پيدا شي.

ګراف په لاندې x – ځايونوکې صفر ارزښتونه لري: -3; -2;1

دا y – محور په -6 کې غوڅوي.

که په کښلوکې څرګنده شي چې يوبل ځای هم پاتې دی، نو دا کيدی شي د هونرشيما په مرسته پيدا کړو،د بيلګيپه توګه f (0,5)

x = 0,5	1	4	1	-6	
		+0,5	+2,25	+1,624	
	1	4,5	3,25	-4,375	= f(0,5)

د پولينوم وېشني پر ځای کيدی شي د تولراشنل تابع درجه د هورنر شيما له لارې هم کمه شي.
موږ د هورنر شيما څيړو:

موږ بيرته تابع ترڅيرني لاندې نيسو

$$f(x)=x^3-x^2-5x+6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چيرته چي $x1=2$ يو صفرځای دی.

د $f(x)=x^3-x^2-5x+6$ لپاره د هورن شيما د $x1=2$ سره

موخه د ضريب $(x-2)$ له نوکانو وتنه ده. $\begin{array}{ccccc} & 1 & -1 & -5 & 6 \\ x=2 & \downarrow & \underline{2} & \underline{2} & \underline{-6} \\ & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}$	په دريمه ليکه کې دري عددونه د وېش نتيجو لپاره هم د پاتي پولينوم ضريبونه بللکيږي. $f(x) = \underbrace{(x-2)}_{\text{Linearfaktor}} \underbrace{(1\cdot x^2 + 1\cdot x - 3)}_{\text{Restpolynom}}$ پاتي پولينوم کربنيز ضريب

د $f(x)$ د نورو صفرځايونو لپاره د پاتي يا باقي پولينوم صفرځايونه شميرو. دا د اړونده مربع مساوات د حل له لاري کيږي.

نتيجه يي د لاندي پولينوم وېش بيلګي سره وګورى.

بيلګه: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^2 - x - 4$ چيرته چي $x_1 = -2$ يو صفرځای دی.

$\begin{array}{ccccc} & \frac{1}{4} & 1 & -1 & -4 \\ x=-2 & \downarrow & -\frac{1}{2} & -1 & 4 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -2 & 0 \end{array}$	باقي يا پاتي پولينوم: $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$ $f(x) = (x+2)\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2\right)$ د مربع مساوت حل $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0$ له دي لاس ته راځي او معکوس: $x2=2$ او $x3=-4$

بيلګه:

$f(x) = -x^3 + 7x - 6 = -x^3 + 0\cdot x^2 + 7x - 6$ چيرته چي $x_1 = 1$ يو صفرځای دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

باقي پولينوم:-1.x-1.x+6 f(x)=(x-1)(.x²-x+6) د مربعيز مساوات حل: .x²-x+6له دي لاس تره اوپه ځت يا برعکس x2=2 اوx3=-3	$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & 7 & -6 \\ x=1 & \downarrow & -1 & -1 & 6 \\ \hline & -1 & -1 & 6 & 0 \end{array}$

لکه بيلګه چې ښايي، د هورن شيما سره د پاتې پولينوم ټاکنه ساده ده نسبت د پولينوم وېش ته.

دا ټولې پورته تلنلارې مو د مربع مساوات حل ته لاربښودوي. که دا ونه توانيږو، نو د نومريکې تلنلارو څخه کار اخستل کيږي، چې دا دلته نه څېړل کيږي.

تمرينونه: د پولينوم وېش...

د لندې ترمونو لپاره د پولينوم وېش وکاروی:

لومړی - $\left(x^3+2x^2-5x-6\right):(x+1)$ دیم - $\left(2x^3-14x-12\right):(x-3)$

دريم - $\left(3x^3-15x^2-51x+63\right):(x-7)$ څلورم - $\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x+6\right):(x+2)$

پنځم - $\left(x^3+\frac{11}{2}x^2+5x-4\right):(x+2)$ شپږم - $\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3\right):(x-2)$

اوم - $\left(x^3-\frac{5}{4}x^2-\frac{23}{4}x+\frac{3}{2}\right):(x-3)$ اتم - $\left(x^3-\frac{5}{3}x^2-\frac{47}{3}x-5\right):(x+3)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم - $\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3\right):(x+3)$ لسم - $\left(3x^3-15x^2-51x+63\right):(x-1)$

تمرینونه: د ټول راشنل توابعو صفرځایونه.

تمرین ټولراشنل تابع **IV**

د صفرځایونو ټاکنه له مختلفو لارو څخه.

د یوه تاسو ته مناسب قانو له مخې د ټولراشنل توابعو صفرځایونه وټاکی. د x محور سره د ګراف غوځتکي و ټاکي او د تابع مساوات د کرښیزو ضریبونو د ضرب په څیر انځور کړی.

اول - $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{13}{2}x^2+18$ دویم - $f(x)=x^3-4x^2+x+6$

دریم - $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1$ څلورم - $f(x)=-\frac{3}{2}x^4+\frac{75}{2}x^2-216$

پنځم - $f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{11}{4}x+3$ شپږم - $f(x)=-\frac{3}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x$

اوم - $f(x)=3x^4-3$ اتم - $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x-2$

نهم - $f(x)=2x^3-4x^2-16x$ لسم - $f(x)=2x^3+4x^2-26x+20$

پوښتنې

د ټول هوښیار یا راشنل توابعو محورغوځتکي ګرافونه

صفرځایونه وشمیرئ او ګرافونه وکاږئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=x^4+2x^3+x^2$ ب - $f(x)=x^2-6x+9$

پ - $f(x)=\left(x^2-25\right)\left(\frac{1}{2}x+4\right)$ ت - $f(x)=x^6-x^4$

ټ - $f(x)=3x\left(\frac{2}{3}x-2\right)(-2x+3)$ ث - $f(x)=3\left(x^2+4\right)\left(x^2-4x+10\right)$

دویم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=x^4-6x^2+5$ ب - $f(x)=4x^4+6x^2-\frac{7}{4}$ پ - $f(x)=x^6-8x^4+20x^2$

دریم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=2x^3+4x^2-2x-4$ ب - $f(x)=x^3-12x+16$

پ - $f(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$ ت - $f(x)=2x^3-10x^2-4x+20$

ټ - $f(x)=x^4-\frac{11}{4}x^2-\frac{9}{4}x-\frac{1}{2}$ ث - $f(x)=-3x^3+3x^2-3x+3$

ج - $f(x)=-5x^3-10x^2-\frac{5}{2}x-5$ چ - $f(x)=x^4+3x^3+5x^2+9x+6$

څلورم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=-3x^4+15x^2-12$ ب - $f(x)=x^4-x^3-2x^2$

پ - $f(x)=-2x^3+2x^2+16x-24$ ت - $f(x)=\left(x^2-6x+9\right)(x-4)$

ټ - $f(x)=x^6-3x^4-4x^2$ ث - $f(x)=x^4-25x^2-60x-36$

پنځم: د لاندې ټولراشنل توبعو ګرافونه په یوه مناسب پروتولاړ یا کواودینات سیتم کې وکاږئ. د دې لپاره یو ارزښت جدول واچوئ او محور غوښتکي وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad D_f = \{x \mid -0,5 \le x \le 4,5\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2 \quad D_f = \{x \mid -3,5 \le x \le 2,5\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \quad D_f = \{x \mid -0,2 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad D_f = \{x \mid -3 \le x \le 3,5\}_{\mathbb{R}}$

ټ - $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \quad D_f = \{x \mid -2,5 \le x \le 3,5\}_{\mathbb{R}}$

ث - ج - $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x \quad D_f = \{x \mid -0,2 \le x \le 8\}_{\mathbb{R}}$

شپږم: د لاندې توابعو صفرځایونه وټاکئ او ګراف یې تر شونې پولې پورې ښه وکاږئ. ارزښتجدول کیږدئ او ځنې ارزښتونه د جبشمیري سره وشمیرئ. ځنې صفرځایونه اټکل کړئ او که شوني وي، صفرځایونه وشمیرئ.

الف- $f(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{3}x - 1$ ب - $f(x) = 0,01\left(x^3 - x^2 - x + 1\right)$

پ - $f(x) = 0,1x^3 - 0,3x^2 - 9x - 10$ ت - $f(x) = (x - 1,7)\left(x^2 - 3\right)$

تر ۶۴۰ پورې دلته محورغوښتکیراځي؟

اړیکې "Relation":

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

یوه اړیکۀ له دوه شیانو جوړه ده:

١ – یوه وینابنه

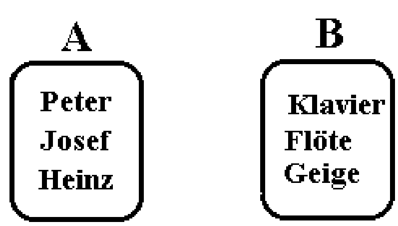
٢ – جوړه، چې دا وینا یې پوره کوي(چې وینابنه یوه رښتیا وینا کوي)٠

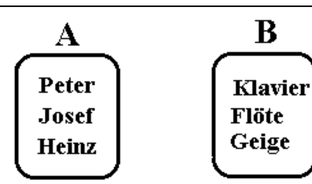
بیلګه :

دیوې کورنۍ د غړو ډیرۍ A دې ورکړ شوې وي او B د لوبو یا موزیک الو ډیرۍ٠

B	A
فوټبال	سپین
هاکي	
زیرګل	
والبال	
کوچۍ	

یا دا لاندې



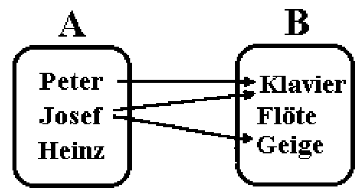
موزیک الې پیانو شپیلۍ ګایګي		د کسانونومونه: پتر یوسف هاینخ

د دواړو ډیریو په منځ کې یوه بینار وینابنه دې یوه وینابنه وي، چې سرۍ a اله bباندې لوبې کوي٠

جوړه ، چې وینابنه پوره کوي، کیدی شي د بیلګې په توګه لاندې جوړې وي:

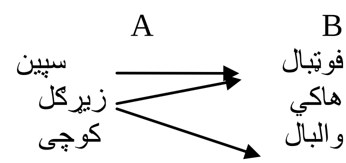
(c) ketabton.com: The Digital Library

پتر په کلاوير لوبه کوي، يوسف په کلاوير لوبه کوي ، يوسف په ګايګي لوبه کوي، د ځيرى په توګه اړيکي داسي انځورېږي:



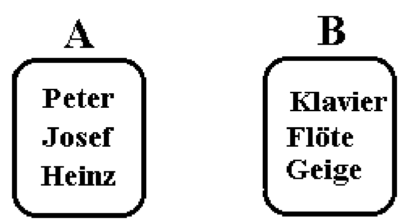
a spielt das Instrument b

يا دا لاندې



نورې بیلګی

موږ د مخه دا لاندې ډیری منځ ته ر اوړې:

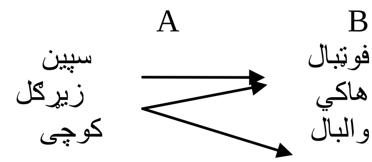


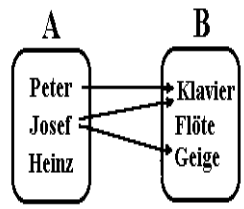
د دواړو ډيريو په منځ کي د اړيکو په ځير موږ اړيکې «په اله لوبه کوي» راوړې
يا دا لاندې

فوټبال	سپين
هاکي	زېرګل
والبال	کوچی

(c) ketabton.com: The Digital Library

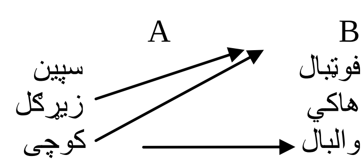
سرلیک

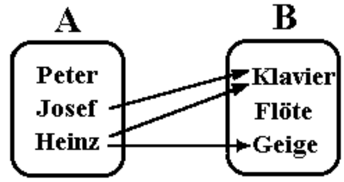




a spielt das Instrument b

په پورته کې ښوول کیږي، چې څوک په کومه اله لوبه کوي.
موږ اوس دواړه ډیرۍ A او B ساتو ، مګر د دوي ترمنځ نوې اړیکې غواړو وپیژنو یا تعریف کړو:
بینار اړیکې دې اوس داسې وي، چې « اله لري» او « په اله باندې لوبه کوي» نور نهوي۰
د دې برسیره دې اړیکې « اله لري » لاندې درې جوړې ولری :
هاینځ کلاویر لري
هاینځ یوه ګایګې لري
یوسف یوه کلاویر لري
د ځیرې په ځیر انځور یږي:





a besitzt das Instrument b

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدلکیږي، چې د دوه ډېریو په منځ کې مختلفې اړیکې منځ ته راتللی شي یا ټینګیدلی شي۰

شننیزه انځورونه
مخ ته تیرو مخونوکې مو زده کړل، یوې اړیکې پورې دوه شیان اړه لري: یوه وینا بڼه او یوه جوړه، چې دا وینابڼه پوره کوي۰
کله اړیین نه دي یا نه شي کیدی، چې ټولې جوړې ورکړای شو، کومې چې په یوه اړیکې پورې اړه لري۰

بیلګه ۱
ډېری $A = \{ 1,2,3\}$ او ډېری $B=\{1,2,3\}$ دې ورکړ شوي وي۰ وینابڼه کوچنی له یا لنډ >

هر زده کوونکی پوهیږي، چې جوړې $(1/2),(1/3)$ او $(2/3)$ دا وینابڼه پوره کوي۰
جوړو ګڼلو ته اړنه یو، بلکې دا د وینابڼې مخ ته پرتې ډېری A او B ته۰

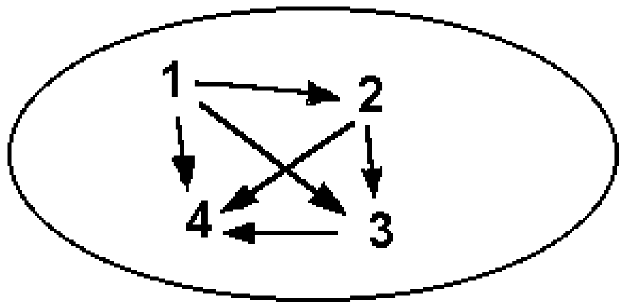
بیلګه ۲
په ځانګړې توګه دا هلته له پامه غورځول کیږي، چې ټولې جوړې وشمیري، کله چې وینابڼو ته مخ ته پرتې ډېری یا ډېرې لویې وي او یا ناپای۰
بیلګه : ډېری : $A = B = \{1, 2, 3, \ \dots \}$
وینابڼه: له هغې، چې لیدل کیږي، چې بیخې ناشونې ده، چې ټولې جوړې وشمیرل شي، چې دا وینابڼه پوره کوي۰

بیلګه ۳
کله کله اړیکه بیخې نه شي انځوریدلی۰
بیلګه : ډېری نارینه =M او ښځینه =F وینابڼه کې راوستل شي، چهٔ « واده له سره »۰
دا څوک نه شي ګڼلی، چې څوک له چا سره واده دی او دا نه په برخه اخستونکو ډېریو M او F کې ورکړ شوې۰

د یوې اړیکې تیوپ یا ډول
اړیکه په دوه ګروپونو ویشل کیدی شي۰
۱ – ددوه ډېریو ترمنځ اړیکې
۲ – د یوې ډېری په دننه کې اړیکې

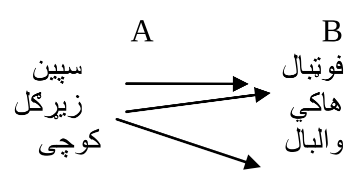
(c) ketabton.com: The Digital Library

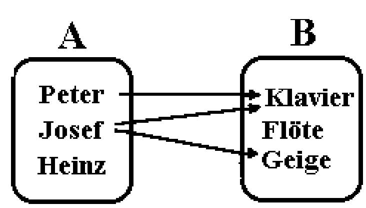
تیوپ ۱ – موړ وپیژند
د تیوپ ۲ - لپاره بیلګه لاندې اړیکې دي(چې په څیره کې کښل شوي دي):



x له y څخه کوچنی دی

د مخ ته تیرو بیلګو په مخامخوالي یا تضاد دلته د ډیریو د توکو ترمنځ اړیکی پرتې دي
بنسټډیری ،موخه ډیری یا تر مخورشو پسې ورشو
Erklärungروښانه ونه
د ډیری A (بنسټډیری) او B (موخه ډیری) په اړیکو کې په ریښتوني د مخ ته ورشو (پتر ،یوس) همداسې ورپسې ورشو (کلاویر، ګایګې) اړیکې هغه توکې جوړوي، چې په کارونه کې ونډه لري٠
A د لوبغاړو نومونه دي او B د لوبو نومونه دي





Grundmenge: { سپین ، زیرګل، کوچی } : بنسټډیری
Zielmenge { فوتبال ، هاکي ، والیبال } : موخه ډیری

(c) ketabton.com: The Digital Library

Vorbereich ترمخورشو {Peter, Josef} :
Nachbereich ورپسي ورشو {Klavier, Geige} :

ځني شميرپوهان دا مخورشو او همداسي پسي ورشو، تعريفډيرى ،
ارزښتډيرى يا تعريفورشو همداسي ارزښتورشو بولي

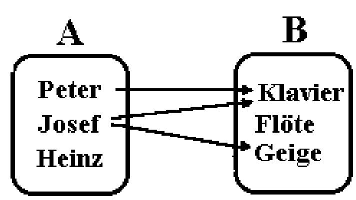
د اړيکو تختهRelationstafel

تراوسه مو تولې اړيکې د غشيدياګرام له لارې انځور کړل٠ يو شونوالى يا امکانات يې د اړيکو تختې له لارې انځورونه ده:

د دې لپاره د بنسټډيرى او موخه ډيرى توکي په يوه جدول کې ليکو٠ د بنسټډيرى توکي په پورته ليکه کې ليکو اود موخه ډيرىتوکي په کيڼ درځ يا کينه متېه کې ليکو٠

په صليبونه سره هغه پيژند يا تعريف ورکول کيږي، چې د موخه ډيرى په توکي باندې د بنسټډيرى يو توکى تنظيم شوى وي٠

د بيلګې په توګه بيرته همغه د ساز الو سره بيلګه راوړو



په دې پورې اړونده اړيکتخته په لاندې ډول ليدل کيږي

	Peter	Josef	Heinz
Klavier	x	x	
Flöte			
Geige		x	

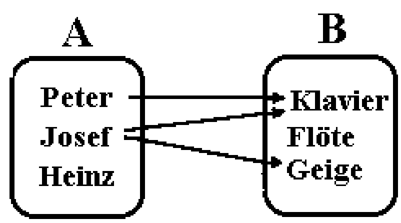
د کواوردينات سيستم انځوربنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

تراوسه مو اړيکي د غشيدياګرام او اړيکتختو له لارې انځور کړې٠ اوس يو دريم شوونوالی يا دريمه شوونتيا يا امکان غواړو وپيژنو:
انځورونه په يوه کواوردیناتسیستم کې :

د بنسټډيرۍ توکي د پروتمحور په نخښنه کوو او د موخه ډيرۍ توکي په ولاړ محور په نخښنه کوو ٠
د ټکو سره هغه د بنسټډيرۍ توکي او ورسره د تنظيمډيرۍ تنظيم توکو ټاکلي وي

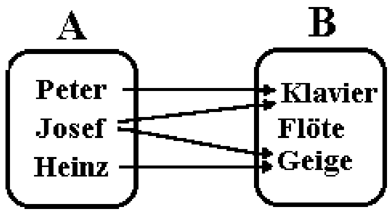
بيلګه
د بيلګی په توګه بيرته هغه بيلګه د لوبو يا موزيک الاتو سره ټاکو:
دلته په دې لاندې الماني ليکنپيا ښه يي :ځيره بسيا کړی شو



په کواوردیناتسیستم کې انځورونه داسې ليدل کيږي

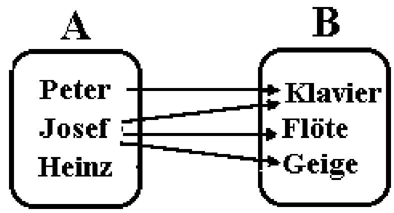
کښ پوره کيدونکی اړيکې :
د Aڅخه هرتوکی کم له کمه د B په يوه توکي تنظيميږي(پيژندورشو يا مخ ته ورشو او بنسټيزه ډيری کټمټ دي)
ښي پوره اړيکي : دB   هر توکی کم له کمه د ځيرې په توګه منځ ته راځي (پسې ورشو او موخه ډيری کټمټ دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library



Linksvollständig

کيڼ پوره



rechtsvollständig

ښی پوره

ښی یواځنی اړیکې

د ښنسټډیرۍ (کيڼ) هر توکی په زيات ترزیاته د موخه ډیری (ښی) باندې تنظیمیږي۰

پام مرسته : غشي ښي « ښيلوريز) یواځنی دي۰

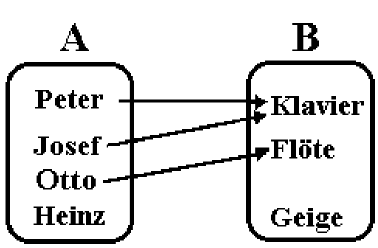
کيڼ یواځنی اړیکې :

د ښی ډیری هر توکی زيات ترزیاته یو وار د یوې ډیری (کينډيری) د خیرې په ډول منځ ته راځي۰

پام مرسته : غشي ښي لورته یواځني دي۰

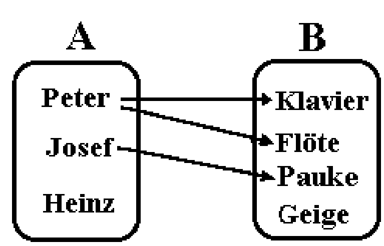
ناټيکوالی!

یا دا لاندې، چې د توپونو په ځای موزیک الې ورکړ شوي دي



rechtseindeutig

ښی



linkseindeutig

کيڼ یواځنی

یواځنی، .

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو کينپوره کيدونکی او بنی يواځنی اړيکي يواځنی اړيکي بلل کيږي (فنکشن او يا ځيروني)

په غشيدياګرام کي يو فنکشن په دي پيژندل کيږي ، چي په هر توکی تيک يو غشی پيل کيږي

په ښڅ اړيکي : په ښپ اړيکو کي

١ – مخ – او پسي ورشوګاني سره بدليږي(پيژندديری او ارزښتديری)

٢ – اوښتوني سره بدليږي

رفلکسيو اړيکي reflexive relations

دياګرام : په هرتوکي يوکړئ غشی شته

رفلکسيو اړيکي :

د رفليکسو اړيکو پيژند : د هرو برابرو توکو جوړه اړيکو پوری اړه لري

د فرمو په ځير يي ليکنه : د تولو a لپاره باور لري:
aRa

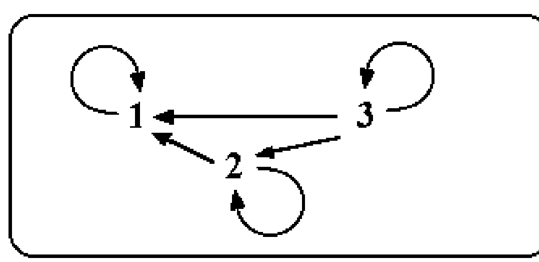
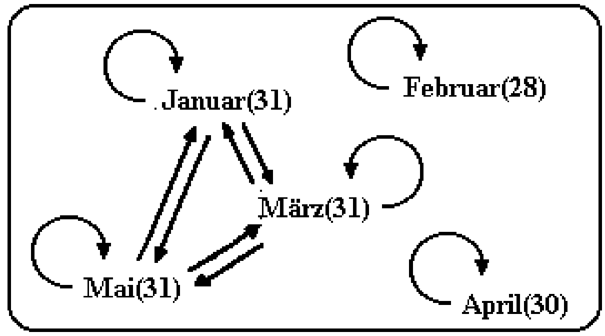


Bild: Die reflexive Relation ≥

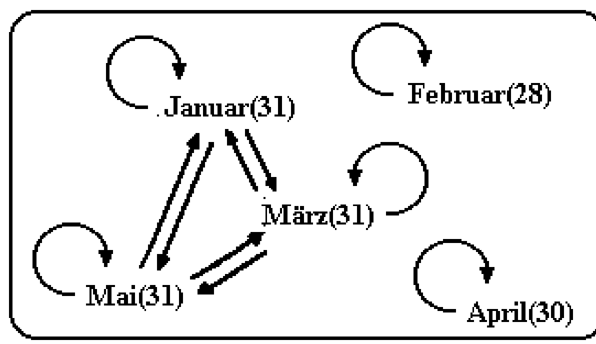
انتيرفلکسيو(ايرفلکسيو اړيکي
Antireflexive
(irreflexive)
Relationen

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند : په انتیرفلکسیو اړیکو کې په هیڅ توکي کړۍ غشی نه شته
د همغه توکي جوړه اړیکو پورې اړوند نه دی، یا په اړیکو ونډه نه لري.
د فرمول په توګه لیکل یې : ¬(aRa)



سیومتریکي اړیکي : symetric relations
هر غشي ته په څټ غشی شته
که (a,b) اړیکو پورې اړه ولري ، نو (b,a) هم په اړیکو پورې اړه لري.
د سیومري اړیکو خیره: « همغومره ورځې لري لکه»



انتیسیومتري اړیکې: Antiasymetric reltions
د انتیسیومتري اړیکو دیاګرام : په څټ غشی نه شته .
که (a,b) په اړیکو اړه ولري،نو (b,a) په اړیکو اړه نه لري، مګر که a = b وي.

فرمول: $a R b \wedge b R a \Rightarrow a = b$

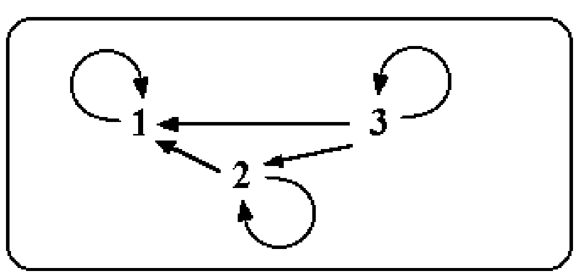


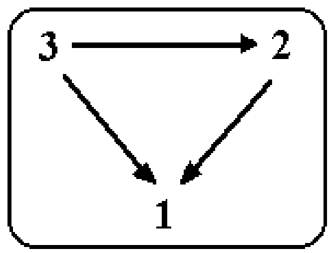
Bild: Die antisymmetrische Relation ≥

(c) ketabton.com: The Digital Library

Antiasymetric reltions: ناسیومتریک اړیکي پورته ښېره

اسیومتریکي اړیکي
asymetric relations (Asymmetrische Relationen)

د اسیومتریکي اړیکو دیاګرام نه په ښت غشی لري او نه کړي غشی لري٠
د اسیومتریکي اړیکو پیژند: انتیرفلیکسیو او انتیسیومتریکي اړیکي
فرمول : $\neg(bRa \Rightarrow aRb$

	ښېره: اسیومتري اړیکي

خیره کونه یا توابع Funktionen

p

یادونه: په انرېزي کي mapping د او الماني کي DieAbbildung په نامه ن,مولشوي، چې پښتوما‌نا یې خیرونه یا خیره کونه ده.

فنکشندوه اوښتونېیا واریابلېلري، چې یوه خپلواکه اوبله بېواکه ده. له دېام له د فنکشن لهپاره ناسمد تابع نومورکړشویدی.

په ریاضي یا شمیرپوهنه کې خیرونه یا توابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

په شمیرپوهنه کې طبیعي ، تخنیکي یا هم نورو ورځنیو کارونو کې زیات وخت یوه لویه د بلې لوي په واک کې وي یا که غواړئ د هغې تابع وي، لکه د بیلګې په توګه د یوه موټر د بنزین سوزول یا استعمالول د هغه د تللې چټکتیا یا سرعت په واک کې یا تابع دی. دا ډول ساده اړیکې مو پخوا هم لوستلي او ګرافیکي مو په یوه کواوردینات – یا پروتولاړسیستم کې انځور کړي.

بیلګې:

د یوه شي یا جنس قیمتت د هغه د خرڅ شوې ډیرئ یا سټ په واک کې دی یا تابع دی.

ټوله دباندنئ تودوخي د ورځې د وخت په واک کې ده.

د یوه بایسکلځغلونکي وهلې لار په مساوي چټکتیا یا سرعت د تلنې وخت په واک کې ده.

د موټر د بریک لار په روښانه توګه د هغه د چټکتیا په واک کې ده.

د یوه کوچني لوېدنه د هغه د عمر په واک ده.

د یوه ریاضي ازموېنې نمرې د لاس ته راوړول ټکو په لاس کې ده.

د یوې بډایئ د ګټې قیمت یا لاس ته راوړنه د په د مخه ټاکلې ګټې سره دوخت تیرېدنې په واک کې ده.

تمرین ۱ : د داسې یو په واکوالي یا تابعیت لپاره نورې بیلګې هم پیدا کړئ.

له پورته بیلګې څخه لیدل کیږي، چې هر دوه لویې سره تنظیمیږي.

ډیرئ یا سټ ← وخت خرڅشوې سټ په قیمت اغیزه لري.

د ورځې وخت ← تودوخي. د ورځې وخت په اندازه شوې تودوخي اغیز لري.

د لاس ته راړلو ټکو تعداد یا ګڼون ← نمرې د یوې ازموېنې نمرې د لاس ته راړلو ټکو اغیزمن کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين ۲ : د پاتې بيلګو لپاره او د هغو لپاره چې په تمرين ۱ کې مو ميندلي اړيکې پيدا کړئ.

دا يو له بل سره تظيم شوي لويې متحولې(اووښتونې يا **Variablen**) بلل کيږي.

دلته دې دې ته پام وشي، چې کوم په واکوالی يا تابعيت د دوي په منځ کې شتون لري.

د رياضي نمرې د ښوونکي له نظره د لاس ته راوړو ټکو په واک کې دي، مګر نه د نمرو د ټکو په واک کې.

سړی نمرې د بلواک يا تابع متحولو په حيث هم ښايي او د ټکو تعداد د خپلواک متحولو په حيث ښايي.

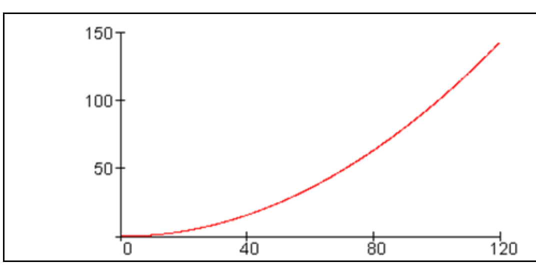
د ټکو او نمرو په منځ کې يو فنکشن يا بلواکيزې يا که غواړئ تابعيتي اړيکې شتون لري.

لکه د مخه درسونو څخه چې پوهيږو، ډېر امکانات شتون لري چې د دوه متحولو ترمنځ تابعيتي اړيکې تشريح کړو يا انځور کړو.

د مختلفو چټکتياو لپاره د بريک لار اندازه کيږي او يو ارزښت جدول ترتيبيږي.

چټکتيا په km/h(x)	20	40	60	80	100	120
د برېکنيولو لار په m(y)	4	16	36	64	100	144

که د جدول ارزښتونه په يوه پروت ولاړ – يا کواوردينات سيستم کې وکښل شي، نو سړی ګراف لاس ته راوړي وروسته له هغې چې ټکي يو له بل سره وتړل شي کوم چې د چټکتيا او بريکلار ترمنځ اړيکې تشريح کوي.



د پراته محور ، چې ابسځيز هم بلل کيږي د خپلواکي متحولي x ارزښتونه پيدا کيږي، په ولاړ محور چې اوردينات هم بل کيږي د بلواک متحولي $y = f(x)$ ارزښتونه ميندل کيږي.

تمرين ۳ : د ارزښت جدول سره سم په يوه مناسب پروتولاړ – يا کواوردیناتسيستم کې اړونده ټکې وکاږئ او دا په يوه ګراف کې سره ونښلوئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بریکلار د چټکتیا 90 ; 70 ; 50 ; 30 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې وټا کئ.

پولیس یوه دm 90 د بریک لار اندازه کوي؟

دا موټر د کومې چټکتیا یا سرعت سره خغلي؟

زیات وخت دا هم شوني ده چې فنکشنال یا تابیعي اړیکي د تابع مساوات له لارې انځور شي.

د بریکلار لپاره باور لري:$y = f(x) = 0{,}01\ x^2$

دلته $y = f(x)$ د بریکلار لپاره اینووول شوی ا و دا وایي، چې y -کواوردینات په کواوردیناتسیستم کې د متحولې x په واک کې دی، یعنې د خپلواک متحولېx یو تابع دی یا په واک کې دی. تابعمساوات دی، کوم چې هغه قانون ورکوي، چې ارزښتونه د $f(x)$ تابع یا بلواک متحولې جوړوي.

د تابع مساوات په ځاي هم وایو چې $f(x) = 0{,}01\ x^2$ د تابع قانون دی.

تمرین ۴ : که تابع مساوات $f(x) = 0{,}01\ x^2$ وي، نو لوستل شوي ارزښتونه وشمیرئ؟

له دا تراوسه شوې کار څخه کیدی شي ووایو:

پیژند یا تعریف:

د یوه تابع سره د خپلواک متحولېx هر ارزښت ټیک یو تابع ارزښت $f(x)$ باندې- یا سره تنظیمیږي. سرې دا هم وایي چې یوه تابع یو یواځنی نظم دی.

$$\underbrace{f : x \to \underbrace{f(x) = x - 1}_{\text{Funktionsgleichung}}}_{\text{Funktion}}$$

لیکندول:f

پورته لومړۍیې په پښتو: تابع برابرون

که په راتلونکې کې له یوه تابع غږیږو، نو د دې تشریح لپاره فقط تابع مساوات ورکوو، یعنې فقط $f(x) = ...$. ی.

د تابع نوم f دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا $x \rightarrow f(x)$ ليکندود روښانه کوي، د هر x –ارزښت سره يو ټاکلی تابع ارزښت f(x)اړه لري.

تابع مساوات $f(x) = x - 1$ د شميرلو قاعده يا قانون راکوي، چې تابع ارزښت څنګه جوړيږي.

د دې لپاره چې د نظم يواځنوالی بيا وښايو، لاندې بيلګه راوړو:

هر زده کوونکی يو ټاکلی د بوټانو لويوالی لري. دلته حتمي ده چې زيات زده کوونکي به يو- - يا هماغه د بوټانو لويوالی ولري.

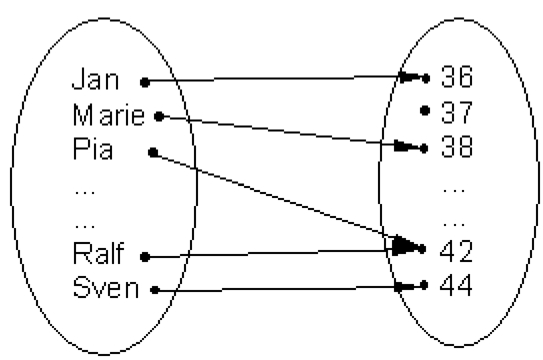
يواځنواوالی په زده کوونکو اړه لري ← د بوټانو لويوالی.

د متحولو سره کښلی يا ليکلې دا په دې معنا دی، چې د زده کوونکي نوم خپلواکه متحوله په ګوته کوي او هغه سره تنظيم شوې د بوټانو لويوالی بلواکه يا تابع متحوله جوړوی.

معکوس يا په څټ د زده کوونکو تنظيم يواځنی نه دی، ځکه چې ډېر زده کوونکي د بيلګې په توګه ۴۲ نمرې د بوټانو لويوالی لرودی شي.

دا ډول تابع د تابعمساوات نه لري، دا کيدی شي چې د ډېرئ څيرې يا ستعکس په څير انځور شي.

يواځنی نظم(تابع يا فنکشن)

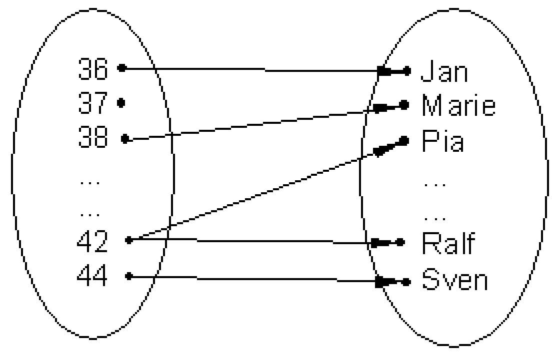


د بوټانولويوالی ډېرئ ياسټ   د زده کوونکو سټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

(ارزښت ډېرۍ)   (تعریفډېرۍ)

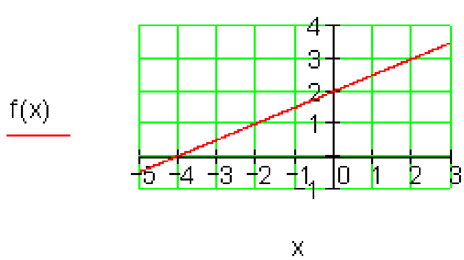
نظم یواځنی نه دی (تابع نه دی)



د دواړو ستونو بدلول

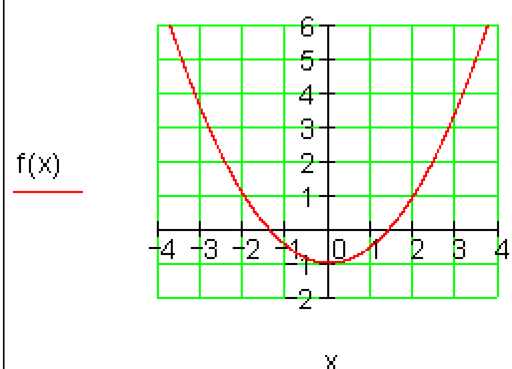
د رياضيکي توابعو او تابعمساواتو بیلګي (له کيڼ و ښي لورته)

$f(x) := \frac{1}{2} \cdot x + 2$



کرښیز
مساوات(ګرښنه
(

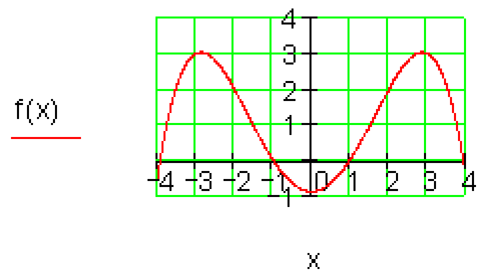
$f(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2 - 1$



مربع
مساوات(پارا
بل)

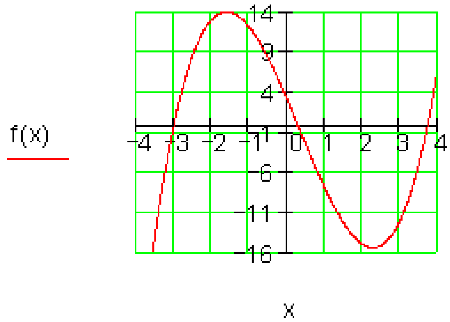
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) := \frac{-7}{120}\cdot x^4 + \frac{23}{24}\cdot x^2 - \frac{9}{10}$$



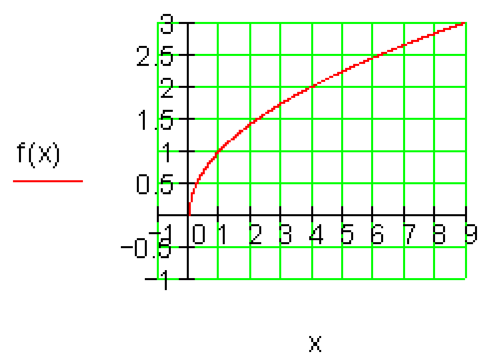
د خلورمي درجي تولراشنل تابع

$$f(x) := x^3 - x^2 - 11x + 3$$



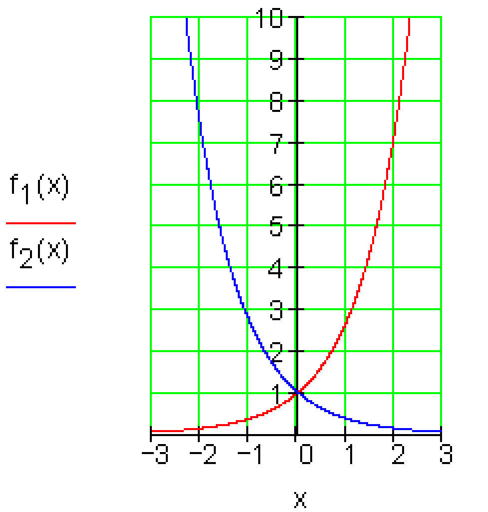
د دريمي درجي تولراشنل تابع

$$f(x) := \sqrt{x}$$



ريښه تابع

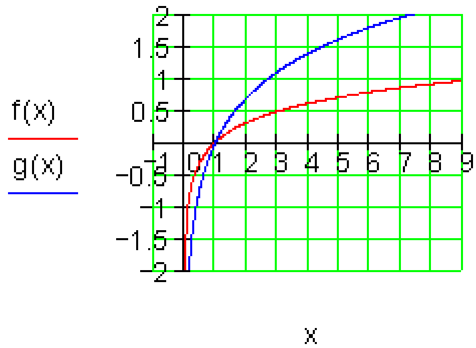
$$f_1(x) := e^x \qquad f_2(x) := e^{-x}$$



اكسپوننشل تابع

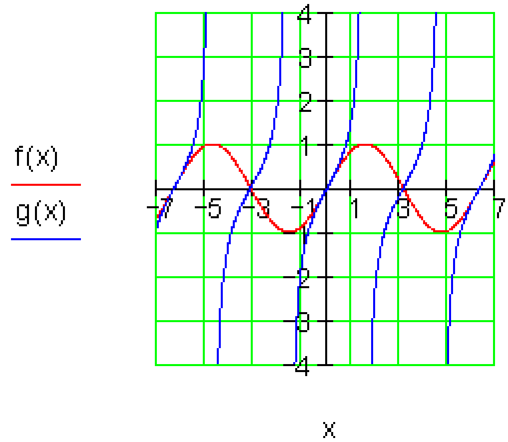
(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) := \log(x) \qquad g(x) := \ln(x)$



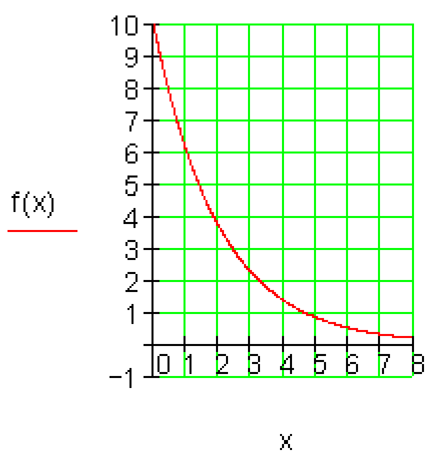
لوگاریتمتابع

$f(x) := \sin(x) \qquad g(x) := \tan(x)$



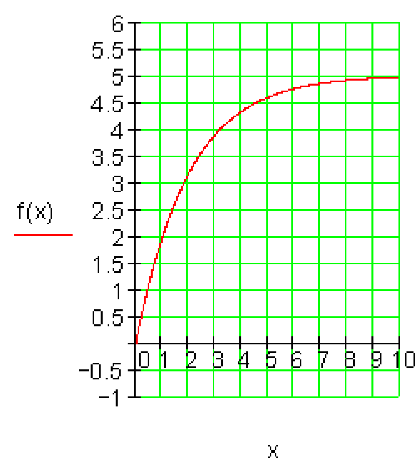
تریگونومتریکي(مثلثاتي) تابع

$f(x) := 10e^{-0.5 \cdot x}$



اکسپیننشلي کښته کیدنه

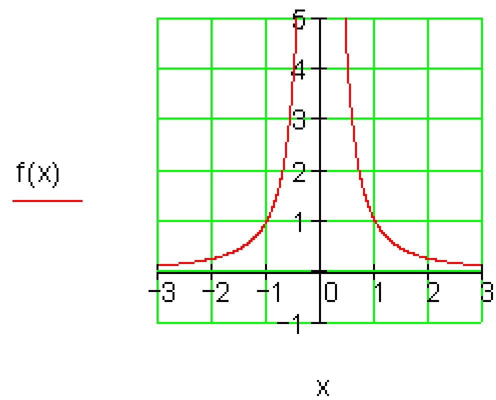
$f(x) := 5 \cdot \left(1 - e^{-0.5 \cdot x}\right)$



اکسپوننشل مربنتکره

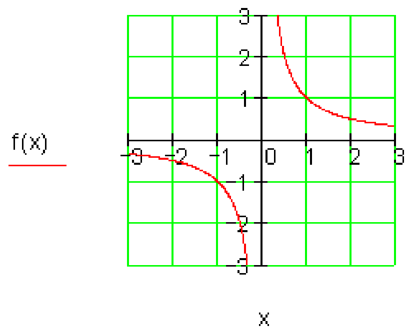
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) := \frac{1}{x^2}$$



های پارابول محورسیومتریک

$$f(x) := \frac{1}{x}$$



های پارابول ټکی سیومتریک

تعریف- او ارزښتډېرئ یا - سټ

تعریف(پیژند):

د یوه تابع تعدریفسټ **D** د ټولو خپلواکو متحولو ډېرئ یا سټ ده، د کومو لپاره چې تابع تعریف دی.

ارزښت ډېرئ **W** د ټولو تابع ارزښتونو- یا بلواکو - سټ ده، چې د D له ټوکو منځ ته راځي.

بیلګه:

$f(x) = \frac{1}{x}$ تعریفست $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ تعریفست D=R

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفر سره د وېش اجازه نه شته	Rد حقيقيي اعدادو ډېرئ ده

بيلګه:

$f(x) = x^2 \quad D = \mathbb{R} ; W = \mathbb{R}_+$ د تابع ارزښت په حيث فقط مثبت يا زياتيز ارزښتونه رامنځ ته کيږي	$f(x) = x + 1 \quad D = \mathbb{R} ; W = \mathbb{R}$ تابع هر په خوښه ارزښت نيولی شي.

شميرپو هنيزه ليکندود او د هغه معنا

$f(4) = 7$ د خپلواکو متحولو د ارزښت $x = 4$ لپاره د تابع ارزښت 7 دی.

دا د ارزښتجوړه (7 | 4)په کواوردیناتسیستم کې د ټکي (7 | 4) P کواوردیناتونه جوړوي.

$f(x) = 9$ غوښتونی د x -ارزښت دی، چې په هغه پوري تابع ارزښت 9 اړه لري.

$y = f(5)$ د $x = 5$ لپاره تابع ارزښت دی.

ټولګه:

يو يواځنی نظم، چې په هغه کې د تعريف ست D څخه خپلواکه متحوله x ټيک يو تابع ارزښت $f(x)$ باندې تنظيم شي څيرونه (چېموړ يې تابع بولو) يا فنکشن بلل کيږي.

تابعي(خپلواکيز) يا فنکشنلي اړوندوالی د يوه تابع مساوات(د بيلګې په توګه: $f(x) = 2x + 1$) سره ليکل –يا تشريح کيږي.

تابع مساوات کې د x –ارزښتونو په اينولو سره د تابع ارزښت لاس ته راځي، چې دا د x -ارزښتونو سره يوه ارزښت جدول کې اينولی يا انځورولی شو.

د ارزښتجدول هره جوړه په کواوردينات سيستم کې ټيک يو ټکی په ګوته کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په زياتو حالتونو کې کيدی شي دا منځ ته راغلي ټکي يوه ګراف ته سره رايوځای يا وتړل شي.

د ټول x - ارزښتونو ډېرئ، هغه چې په تابع مساوات کې ځای په ځای شي تعريف ډېرئ يا –سټ بلل کيږي.

د ټول تابع ارزښتونو ډېرئ يا –سټ، چې دلته منځ ته راځي، د تابع ارزښت ډېرئ W پورې اړه لري.

د تمرينونو حل

لومړی تمرين: د داسي بلواکوالي لپاره نوري بيلګې پيدا کړئ.

ځواب: - د يوه تيلسوزونکې ماشين قدرت د څرخونتعداد(د ماشين د څرخيدو تعداد) په واک کې دی.

- د يوې ګردئ يا دايرې سطحه د وړانګې يا شعاع په واک کې ده.

- د بريښنا پيسي د ثابت قيمت سره د انرژي يا بريښنا مصرف په واک کې ده.

دويم تمرين : د پاتې بيلګو او د هغو لپاره چې تاسو په لومړي تمرين کې وليدل ګډې اړيکې سره په فرمولبندۍ کې راوړي.

ځواب:

لار → د خوزښت وخت: په مساوي پاتې چټکتيا د خوزښت وخت په وهلې لار اغيز لري.

بريکلار → چټکتيا: د يوه موټر چټکتيا د بريکلار باندې اغيزه لري.

ټوله ګټه → د تيريدني وخت: د سرمايې ايښوني وخت د ګټې لاس ته راوړنه باندې اغيزه لري.

وده → عمر: د کوچني عمر د هغه په وده اغيزه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

قدرت ← څرخونتعداد: د یوه سوزونکي ماشین د تیلو سوزیدنه د هغه په څرخونتعداد پورې اړه لري.

سطحه ← وړانګه : د ګردۍ یا دایرې وړانګه د دایرې سطحه باندې اغیز لري.

د بریښنا حساب ← انرژي سټ: د سوزولې بریښنا یا انرژۍ سټ یا ډېرۍ د بریښنا بل(هغه د مصارفو کاغز) اغیزمن کوي.

دریم تمرین:په یو مناسب کواوردیناتسیستم کې د ارزښت جدول اړوند ټکي وکاږئ او دا یوه ګراف ته سره وتړئ.

د چټکتیا 90 ; 70 ; 50 ; 30 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې بریکلار پیدا کړئ.

پولیس یوه د 90 m بریکلار کچوي. دا موټر دکومې چټکتیا سره تلی؟

ځواب:

د 30 km/h چټکتیا بریکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتیا بریکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتیا بریکلار 48 m ده

د 90 km/h چټکتیا بریکلار 80 m ده

د 110 km/h چټکتیا بریکلار 120 m ده

له 90 m بریکلار سره یو موټر 95 km/h د چټکتیا سره ځغلي.

تلنلار: په کواوردیناتسیستم یا پروتولاړ سیستم کې د x -محور(ابسڅیزا) د خپلواکو متحولو ډېرۍ نمایندګي کوي، د y –محور (اوردینات) د بلواک یا تابع متحولو نماینده ده.

د مخه له دې چې په یوه کواوردیناتسیستم کې ارزښتونه لیکل –یا کښل کیږي باید وکتل شي، چې کومه خپلواک- او کومه بلواک- یا تابع متحوله ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

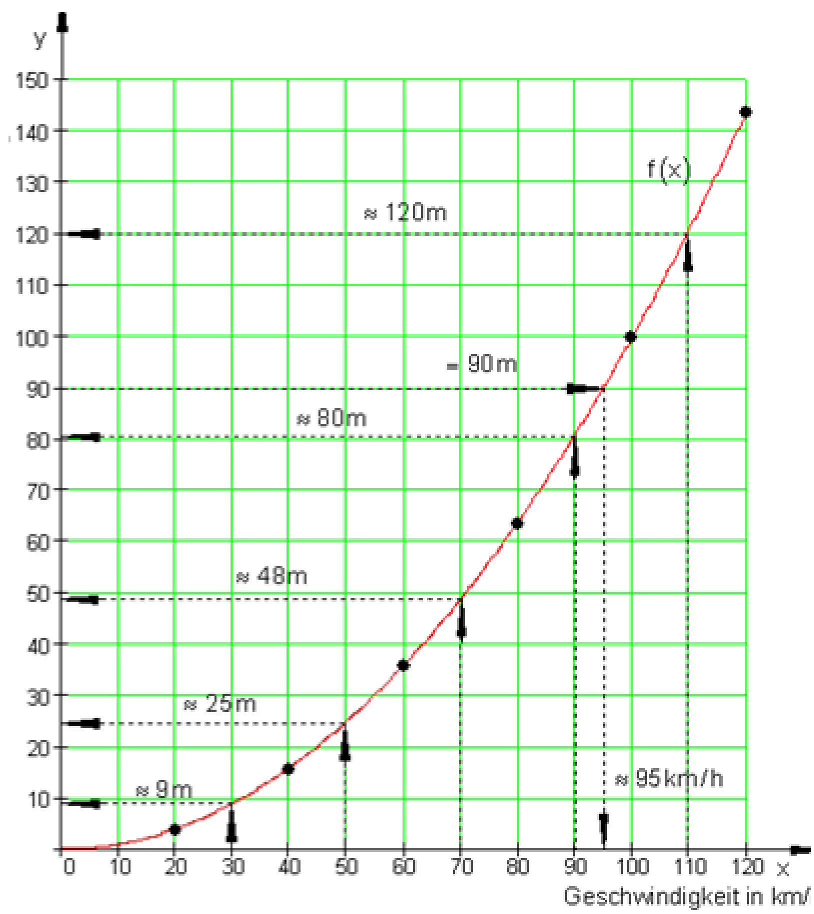
پسي دا هم غوره ده، چې د کچونې لپاره یوو ښه کچونی یا هغه اله چې اندازه پرې کچوو باید ومومو.

د دې لپاره د جدول لوي او کوچني ارزښتونه کتل کیږي او پرېکړه کیږي چ دواړه محورونه په څو برخو باید وویشل شي.

وروسته له هغې چې ټول په جدول کې ټکي په کواوردیناتسیستم کې ځای په ځای شوي، نو بیا دا ټکي د ګراف په توګه سره تړل – یا نښلول کیږي

کیدی شي له ګراف څخه د داسي x -ارزښتونو لپاره هغه لړ یا ډېر تابع ارزښتونه هم ولوستل شي، چې په ارزښت جدول کې مخ ته نه راځي.

معکوس کیدی شي د یوه ټاکلي تابعارزښت اړونده x -ارزښت ولوستل شي. د دې نتیجو ټیکوالی د دې په واک کې دی، چې ګراف څومره ټیک کښل شوی دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته کواوردینات – یا پروتولاړسیستم کي: پروت: چټکتیا په کیلومتر. ولاړ:بریکلار په متر

ځلورم تمرین:

لوستل شوي ارزښتونه وشمیرئ، که تابع مساوات $f(x) = 0,01\,x^2$ وي.

ځواب:

تابعارزښتونه داسې شمیرلکیږي، چې اړونده د x ارزښتونه په تابع مساوات کې کېښوول شي.

$$f(x) = 0{,}01x^2 = \frac{1}{100}x^2$$

$$x = 30 \Rightarrow f(30) = 0{,}01 \cdot 30^2 = 0{,}01 \cdot 900 = 9$$

$$x = 50 \Rightarrow f(50) = 0{,}01 \cdot 50^2 = 0{,}01 \cdot 2500 = 25$$

$$x = 70 \Rightarrow f(70) = 0{,}01 \cdot 70^2 = 0{,}01 \cdot 4900 = 49$$

$$x = 90 \Rightarrow f(90) = 0{,}01 \cdot 90^2 = 0{,}01 \cdot 8100 = 81$$

$$x = 110 \Rightarrow f(110) = 0{,}01 \cdot 110^2 = 0{,}01 \cdot 12100 = 121$$

د 30 km/h چټکتیا بریکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتیا بریکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتیا بریکلار 48 m ده

د 90 km/h چټکتیا بریکلار 80 m ده

د 110 km/h چټکتیا بریکلار 120 m ده

له 90 m بریکلار سره یو موټر 95 km/h د چټکتیا سره ځغلي.

بریکلار 90 m کچ شوې ، غواړو چټکتیا پیدا کړو.

پیل: $f(x) = 90 \Leftrightarrow 0{,}01x^2 = 90$ دا مساوات په x پسې ځواب کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$0,01x^2 = 90 \,|: 0,01 \Leftrightarrow x^2 = 9000 \,|\, \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{9000} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{900 \cdot 10} \Leftrightarrow |x| = 30\sqrt{10}$$

ارزښت حل کړئ.

$$|x| = 30\sqrt{10} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 30 \cdot \sqrt{10} \approx \pm 94,9$$

نسبت و پوښتنې ته فقط مثبت یا زیاتیز ارزښتونه موخه ور دي، ځکه چې موږ مثبته چټکتیا په پام کې نیسو. د 90 m بریکلار سره د موټر چټکتیا 94,9 km/h وه.

یادونه:لومړی شمیرنه تیک ارزښتونه راکوي، سره له دې هم موخه وردی، چې دا شمیرل شوي ارزښتونه په ګراف کې یا له ګراف څخه هم د لوستلو له لارې کنترول کړو.

پوښتنې

تابع I

لومړی:

ټول ټکي په کواوردينات سيستم کې په نخښه کړئ، چې کواوردينات يې ورکړ شوي شرايط پوره کوي.

الف- $y \le -1 \wedge x \ge 1$ ب- $y \in \mathbb{R} \wedge -2 \le x \le 3$ پ- $x \in \mathbb{R} \wedge y = 2$

ت - $0 \le x \le 4 \wedge y \ge 0$ ټ- $|x| \ge 1,5 \wedge |y| \le 2$ ث- $y > 0 \wedge x = -1$

دويم: په مناسب کواوردينات سيستم کې لاندې ټکي رسم کړئ.

$$A(40 \,|\, 220);\ B(10 \,|\, 250);\ C(200 \,|\, 300);\ D(80 \,|\, 240)$$

ايا د x – او y -کواوردیناتو ترمنځ کومې اړیکې شته؟ د دې لپاره يو ترم ولیکئ او نور درې ټکي ورکړئ.

دريم: د ټکو ځای وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- ټکي $P_t\left(t-1 \mid \frac{1}{t+1}\right)$ د t€R کوم ارزښت په لومړئ ځلورئکي پروت دی؟

ب- ټکي $Q_t\left(t \mid t^2-1\right)$ د t€R کوم ارزښت لپاره دx محور کښته لور ته پرته ده؟

ځلورم:

د ټکوډېرئ یا –سټ $A=\left\{(1|3);\left(2 \mid \frac{3}{2}\right);(3|1);\left(4 \mid \frac{3}{4}\right);\ldots\right\}$ ورکړ شوی دی.

د A نور دري توکي ورکړئ او دا ټکي په یوه کواوردینات سیتم کې وکاږئ. ایا د x- او y -کواوردیناتونو ترمنځ اړیکې شته؟

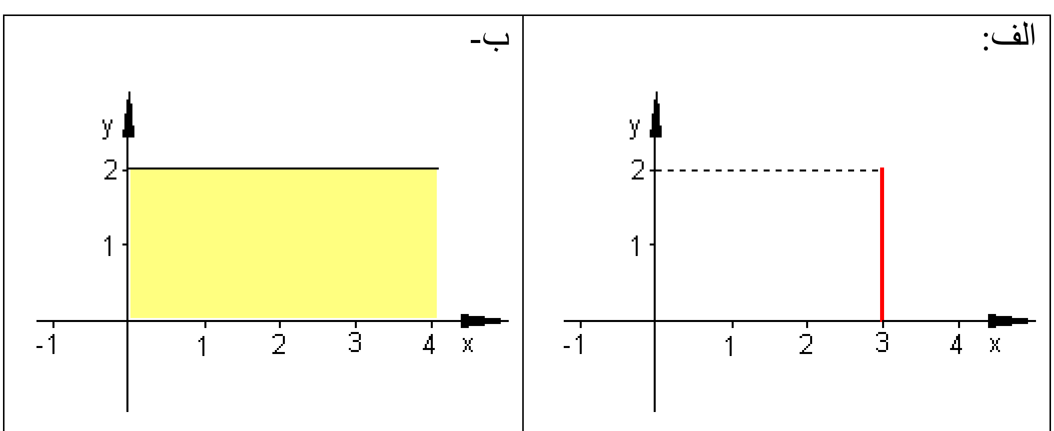
پنځم: یو ټکی $P\left(t \mid \frac{t}{2}+3\right)$ د t€R سره ورکړشوی دی.

د t لپاره څه ارزښتونه ورکړي او دا د دې اړونده ټکي په یوه کواوردینات سیستم کې وکاږئ.

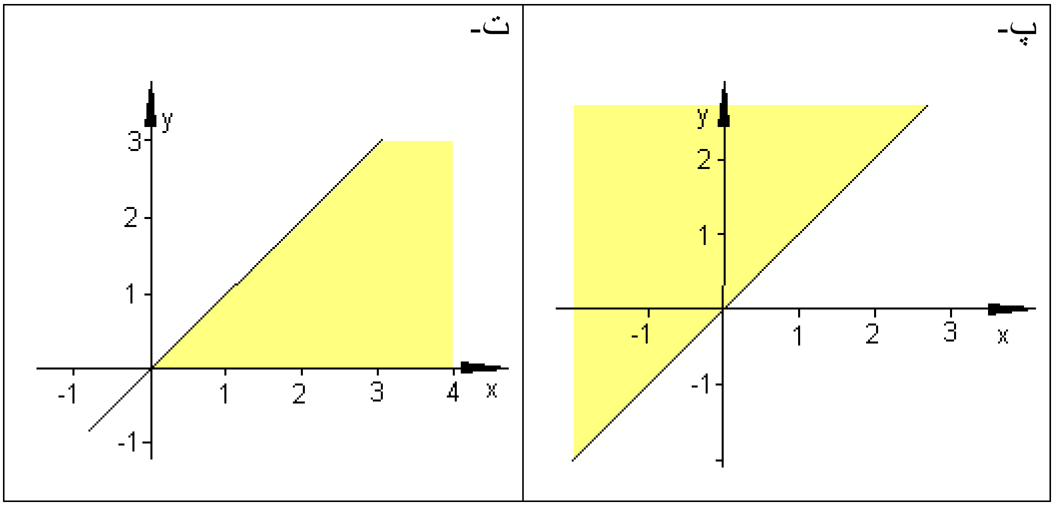
د کومو t -ارزښتونو لپاره باور لري:

د ټکي P د x -کواوردینات د ټکي د y -کواوردینات سره برابر دي؟

شپږم: په نخښه شوي کربنه او همداسي سطحه تشریح کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library



پوښتنې

توابع II

لومړی

ښاغلی برګ د یوه ملفون(لاسي یا لاسي تلفون) قرارداد د لاندې شرایطو سره وکړ:

د میاشتې € 20 ، د تلفون قیمت په دقیقه € 0,35 .

الف- که دی 40, 80 یا 120 دقیقې تلفون وکړي، نو میاشتنی حساب به یې څومره جګ وي؟

ب - لګښت لپاره یو ترم ولیکئ چې په دقیقه کې د خبرو د دوام په واک کې وي.

پ – اړیکې ګرافیکي انځور کړئ.

دویم:یوه الوتکه د سوزونموادو کیروزین 10500 Liter لیتره زخیره لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په 100 km دا 180 Liter سوزوي.

الف- د په لیتر مصرف جدول جوړ کړئ. یو واټن له 0 km تر5000 km پورې وټاکئ.

ب – اړیکې یې ګرافیکي ځور کړئ.

پ-له څومره کیلومتره وروسته به زخیره تمامه شوې وی؟

ت - د الوتنې د لار ترم د ټانک د خوندیونې په واکوالي کې وټاکئ.

دریم: یو د شمیراړونې جدول جوړ کړئ، چې ^{0} څلزیوس (^{0}C) په فارنهایت(^{0}F) اړوي د 20^{0}C - او 60^{0}C په ساحه یا ورشو کې. د دې لپاره اړین داتا تشریح کړئ. اړیکې ګرافیکي انځور کړئ. دا اړیکې کوم ترم په ګوته کوي؟ د ا د تبې تودوخئ کچونه (ترمومتر) د ناروغ د تبې په اندازه کئ چې ده ایا دا حرارت یا تودوخي د ژوند خطر لري؟

څلورم: یوه د مالونو لیږلو مغازه غواړي لګښت له امله یو د تحفې پاکټ ولیږي. د پاکټولو تخنیکي پرابلم له امله یې یو اړخ د 35 cm سره کره ټاکلی دی. د پوست د لګښت نظم باید په پام کې نیول شوی وي

د لګښت نظم: مربع ډوله پاکټونه دننه په هیواد کې.

خورا کوچنئ کتله(یا بهتره ډکی): اوږدوالی 15 cm ، سور 11 cm ، جګوالی1 cm .

خورا جګه کتله: اوږدوالی 60 cm ، سور 30 cm ، لوړوالی 15 cm یا اوږدوالی جمعه یې سور جمعه یې یا په ورزیات جګوالی = 90 cm. خورا زیات وزن 2 kg.

الف- د یوه ډکي یاحجم V = 21 dm^3 لپاره د سور او جګوالي ترمنځ اړیکې وټاکي.

ب- دا ماکسیمال رسیدلوړ ډکی یا حجم څومره لوي دی؟

پنځم: فرمول ورکړشوی دی.

الف- ش څنګه تغیر خوري، که کوچنی شي.

ب- ایا لاندې اړیکې به د فرمول له لارې تشریح شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

A : د کرایې موټر ټول لګښت د عدد a د تللی کیلو متر او د هغه د یوه کیلو متر د قیمت c لپاره.

B : د ودرېدلو لار یا واټن a د بریکلارb او عکس العمل لارc څخه شمیرل کیږي.

پ-شي اړیکې ورکړئ چې د فرمول له لارې تشریح کیدی شي یا روښانه کیدی شي.

شپږم: یو ولاړګوډیز یا مستطیل U = 12 cm چاپیریال یا محیط لري.

الف- اړخونه څنګه یو د بل په واک کې کیدی شي.

ب- یو ترم وټاکئ، چې بلواکوالی د اړخ a څخه ورکوي یا د اړخ a په واک کې یا تابع دی.

پ- د a د کوم ارزښت لپاره سطحه خورا لویه وي؟

پوښتنې

توابع III

لومړی: توابع f(x) ورکړ شوي. یو مناسب ارزښتجدول وکاږئ. دې ته اړوند ګراف رسم کړئ.

الف - $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ ب - $f(x)=x^2$ پ - $f(x)=\frac{1}{x+3}$ ت- $f(x)=3^x$

دویم: فکر وکړئ، چې ایا یو ،،یواځنی نیظم،،د x →y لپاره مخ ته لرو: $x^2+y^2=1$

دریم: ټکی P ورکړ شوی دی. ایا یوه تابع مخ ته لرو؟ که هو، نو نظمقانو وټکئ او خورا لویه تعریفسټ یا – ډیرئ هم وټاکئ.

$$P=\left\{(2|1);\left(5|\frac{1}{4}\right);\left(10|\frac{1}{9}\right);\left(25|\frac{1}{24}\right);\ldots\right\}$$

څلورم: یو ارزښتجدول ولیکئ او د تابع ګراف وکاږئ:

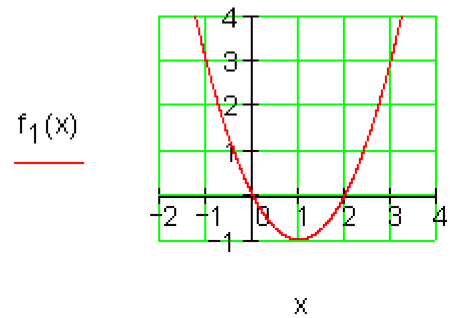
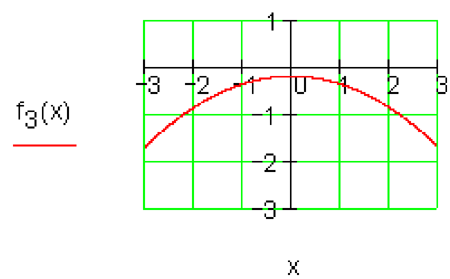
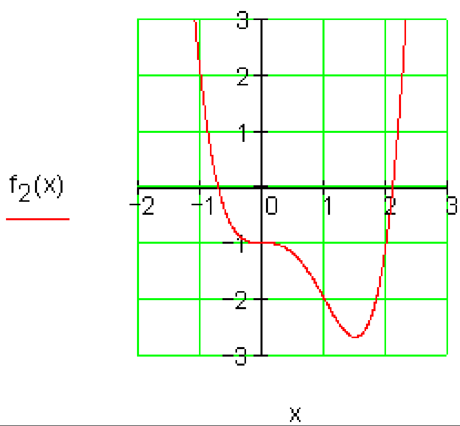
$$f(x)=\frac{1}{8}\left(x^3-2x-4\right);\ x\in\mathbb{R}$$

الف- د جبشمیري سره f (3) او f (- 2) وشمیرئ.

ب- په کوم ځای کې د تابع ارزښت صفر دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ-د کومو x -ارزښتونو لپاره تابعارزښت 1 دی؟
ت-د کومو x -ارزښتونو لپاره تابعارزښت کمیز یا منفي دی؟
ټ-د کومو x -ارزښتونو لپاره باور لري:$f (x) < 1$ کړئ، چې د کوم تابع لپاره باور لري:
پنځم: د درې توابعو f1, f2, f3 ګراف ورکړ شوی دی. پرېکړه وکړئ:

	الف- د تابع ارزښتونه هر چېرته صفر دي. ب- توابع په انټروال [0,5 ; 1] منفي یا کمیز دي پ-.$f (2) < f (0)$ ت-.$f (0) = - 1$ ټ-.$f (- 2) = f (2)$
	

پوښتنې

توابع **IV**

لومړی: تابع f ورکړ شوې د $f(x) =-0,2(2-x); x€R$ سره

پرېکړه وکړئ، چې ایا لاندې وېناوې رښتیا او که نارښتیا دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیل ځواب مدلل کړئ.

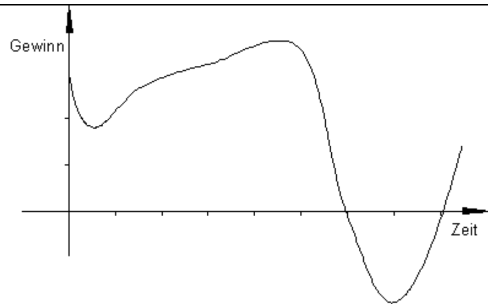
الف- د تابع ارزښتونه زیاتیز یا مثبت دي د ټول x – ارزښتونو لپاره.

ب- $f(x) < 0$ د ټولو x€R لپاره.

پ- $f(x)$ د $x = 2$ لپاره منفي دی.

ت- یو ځای u شتون لري، چې د هغه لپاره $f(u) = f(u + 1)$ باور لري.

دویم: د رسم شوي تابعګراف تلنه تشریح کړئ. دلته هغه غوره ټکي په نخښخه کړئ. هغه ټکي، انتروالونه روښانه کړی یا تشریح کړئ په کومو کي چې ته اقتصادي پسمنظر(د شاته پراته دلیل) فرمولبندي کوې.



کواوردیناتسیستم کې : پروت: وخت. ولاړ: ګټه

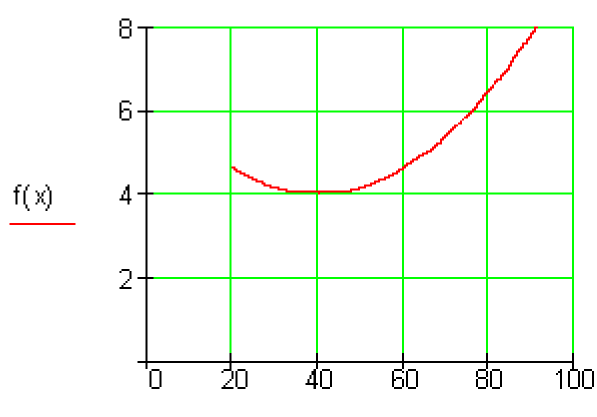
دریم: د یوه موټر د تیلو سوزول د چټکتیا په واک کې یا تابع دی. دا په ښنګ کې څیره د تیلو سوزول ښایي په لیتر په سل کیلو متر کې او د چټکتیا په واکوالي کې، که سرې په څلورم ګیر Gang کې لاړ شي.

الف- کره یا منحني روښانه کره.

ب- په کومه چټکتیا کې استعمال ۶ لیتره په سل کیلومتر کې دی؟

پ- په کومه چټکتیا کې د تیلو سوزښت خورا کم دی؟

ت- کره به ښنګه وځغلي، که په دریم ګیر کې سرې لاړ شي؟



(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم: د لمبا په ډنډ کې $40\ m^3$ اوبه دي. دا اوبه د ډنډ د پاکوالي له امله د پمپ کولو سره وباسي، چې په دقیقه کې 350 Liter لیتره اوبه وځي.

الف- یو ترم د پاتې حجم یا ډکي لپاره په m^3 وټاکئ.

ب- څومره m^3 د ۲۰ دقیقو وروسته په لمباډنډ کې لا پاتې ي.

پوښتنې

توابع V

لومړی:د تابع $f(x)$ماکسیمال تعریفورشو D_{max} پیدا کړئ

الف- $f(x) = 2-3x$ ب - $f(x) = \sqrt{2x-3}$

ث- $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ ت - $f(x) = -x^2+1$

دویم: د تابع $f(x)$ ارزښتورشو وټاکئ د $D = D_{max}$ سره.

الف- $f(x) = \dfrac{3}{2}x-4$ ب - $f(x) = 1+\sqrt{x+1}$

پ - $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ت - $f(x) = x^2-5$

دریم: تابع $f(x)$ ورکړ شوې ده. ماکسیمال تعریفورشو D_{max} وټاکئ. د $f(x)$ ګراف وکاږئ.

د $x \in \left\{k;-\dfrac{2}{k};k+1;k-4\right\}$ لپاره تابعارزښتونه وټاکئ.

الف- $f(x) = \dfrac{1}{2}x+1$ ب - $f(x) = 2x-\dfrac{2}{x}$ پ - $f(x) = x-x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت - $f(x)=\frac{1}{x+3}$ ټ - $f(x)=\sqrt{4-2x}$ ث - $f(x)=2^x-1$

خلورم: تابع f(x) د $f(x)x^3$ سره ورکړشوې ده.

الف- ماکسيمال تعريفورشو D او ارزښتورشوW ورکړئ.

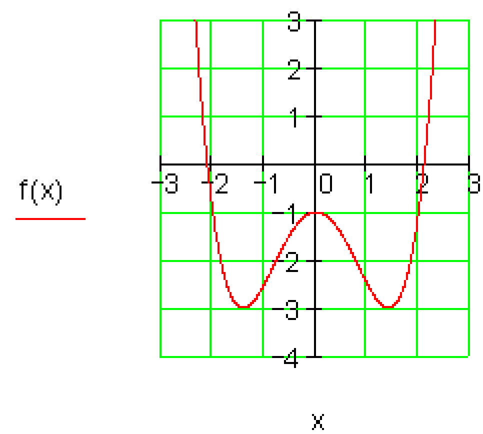
ب- د کوم $x \in D$ لپاره باور f(x)=81 لري؟

پ-د کوم $x \in D$ لپاره باور $f(x) \geq 9$لري؟

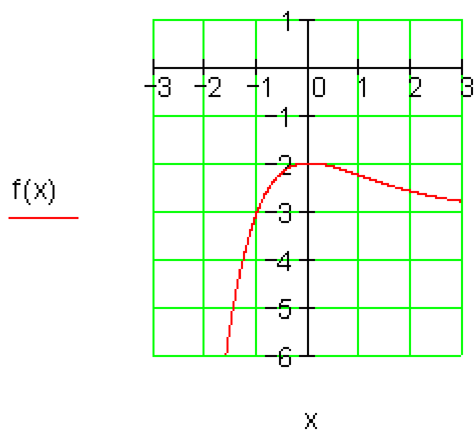
ت- و ښايئ: f(x+1)=3.f(x) د ټولو $x \in D$ لپاره.

پنځم: تابع f(x) د D = IR لپاره تعريف ده. د رسمونو څخه ارزښت ډېرئ وښايئ.

الف-



ب-



پوښتنې

توابع VI

لومړی: د تابعf(x) ارزښتښت د جبشميري سره وشميرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{2}{5}x^3 - 2$$ د D=R سره.

دویم:

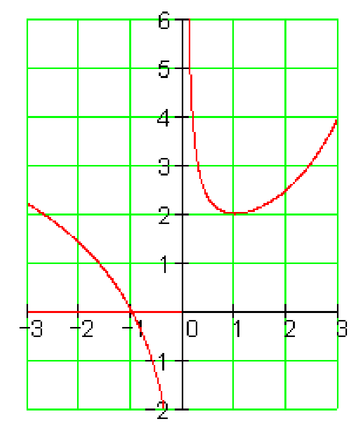
دویم: ترڅنګ کړه د تابع f(x) ګراف دی؟

ایا f(x) د ټولو x€R لپاره تعریف دی؟

د x د کومو ارزښتونو لپاره تابع ارزښت

- له 2 لوي دی؟

- له صفرکوچنی دی؟

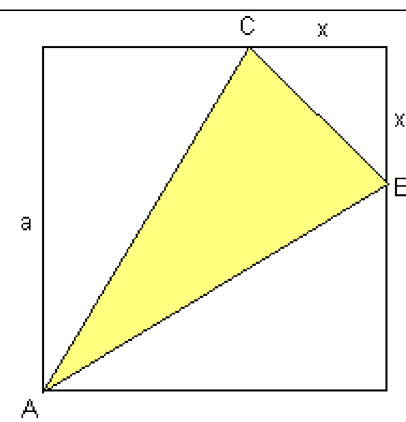


دریم:

یوه مربع یا څلورې د اړخ اوږدوالي

a = 5 cm سره ورکړ شوې ده.

د مثلث یا درېګودې ABC د سطحې ترم A(x) وټاکئ



څلورم: د یوه مالک ټول لګښت K د یوه لاسته راوړني سټ x په واکوالي کې په سټ واحد یا ډېرئ یوون (ME) د ترم له لارې لیکل کیږي

$$K(x) = 0{,}01x^3 - x^2 + 100x + 720$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- د x -ارزښتونو لپاره تر 100 پورې ټول لګښت وشمیرئ. یو مناسبتلنلارې ډول وټاکئ او د ټول لګښت لیدخیره رسم کړئ.

ب- د هر سټ – یا ډېرې واحد خرڅلاو99 پیسپواحده دی. لاس ته راونې (د پیسو ځومره دي، که x(ME د سټ واحد) په بازار کې خرڅ شي؟

په لرلي کواوردیناتسیستم کې د خرڅلاو(پیسو) د لیدلو ځیره و کاږئ.

پ-د لیدخیرې ځخه ولولئ:

په کومه ورشو یا ساحه کې ګټه منځ ته راځي؟ د کوم x –ارزښتونو سره به خورا لویه ګټه لاس ته راشي؟

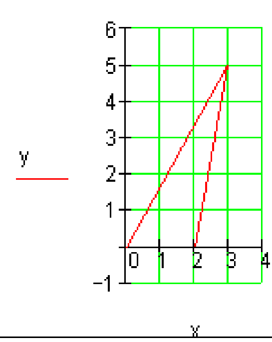
پوښتنې

توابعVII

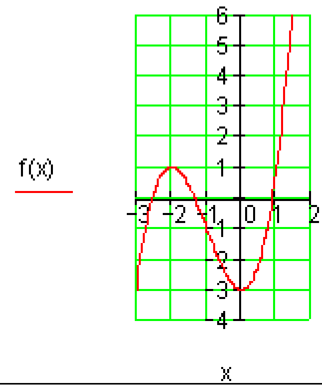
لومړی: توابع f(x) ورکړشوي دي. یو مناسب ارزښت جدول جوړ کړئ. له دې سره اړوند ګراف وکاږئ.

الف- $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ب- $f(x) = x^2$

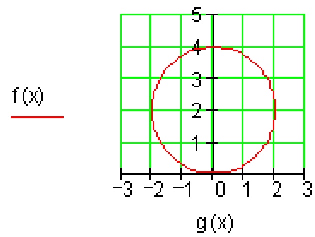
دویم: کوم ګراف په تابع $f : x \rightarrow f(x)$ پورې اړه لري؟ دلیل یې راوړئ.

الف-	ب – 

(c) ketabton.com: The Digital Library



پ-



دریم:د شمیرپو هنیز لنډ لیکدود سره یې فرمولبندي کړئ.

الف- په ځای3 کې تابع f(x) تابعارزښت 12 لري.

ب- د تابع f(x) له لاري د x -ارزښت سره عدد 4- تنظیمیږي.

پ-ټکی (P (2 | 5 د f(x) په لیدخیره باندې پروت دی.

ت- f(x) د کومو ابسخیزا یا پراته ارزښتونو لپاره تابع ارزښت 4 لري.

ټ- د f(x) تابع تابع ارزښت له 7لوی دی د ټول $x \in \mathbb{R}$. لپاره.

ث- تابع f(x) د 17- ځای کې تا بع ارزښت 9 نیسي.

ج- توابع f او g د په ځای کې همغه ارزښت غوره کوي.

چ- په کوم ځای x کې fد تابعارزښت gد له تابعارزښت څخه کوچنی دی؟

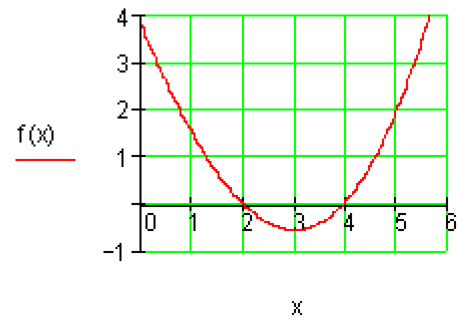
ح- د تابع f(x) د تابع ارزښت برابر 5 دی د ټولو $x \in \mathbb{R}$. لپاره.

خ- د یوه کږې ټکي K_f کواوردیناتونه سره سر خوري.

څلورم: د یوه نظم لپاره د یوې روخنۍ بیلګې نوم واخلئ، چې هغه تابع وي یا تابع نه وي.

پنځم: دا ترڅنګ کږه یا منحني د تابع f(x) ګراف دی. له ګراف څخه ولولئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



الف-د تابع ارزښت په ځای 5 کې

ب- یو ځای د f(x) سره.

پ-په کوم ورشو $f(x) > 0$ باور لري؟

شپږم:کوم ارزښت جدول یوه تابع پورې اړه لري؟

الف -

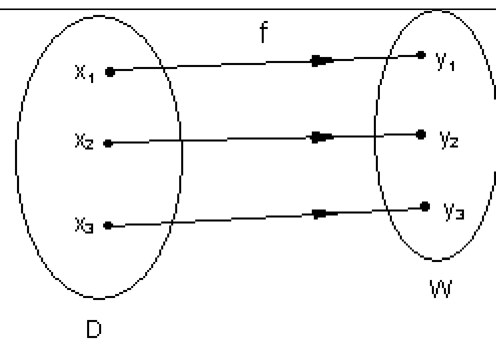
x	−1	0	1	2	3
y	4	0	−2	4	4

ب -

x	−1	0	3	3	4
y	8	7	2	4	5

توابع او په څټ - یا معکوس توابع

تولیز:



د f د نظم قانون د تابع مساوات له لارې افاده کیږي، لکه د بیلګې په توګه

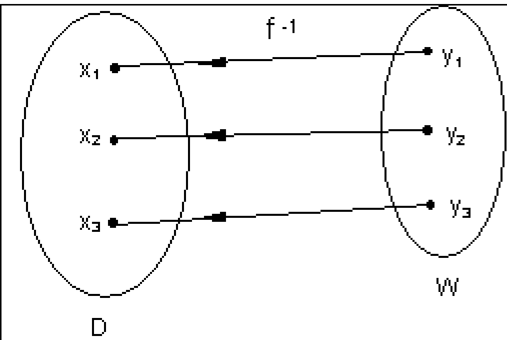
$$f = \{(x \mid y) \mid y = f(x) = 2x + 3\}_{D \times W}$$

یا په لنډه توګه:y=f(x)=2x+3

د یوه تابع د یو-یواځنوالي د f^{-1} یو-یواځنی نظم هم شتون لري.
دا نظم معکوس تابع یا په څټ تابع یا انورز inverse تابع بلل کیږي، لکه د بیلګې په توګه.

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$

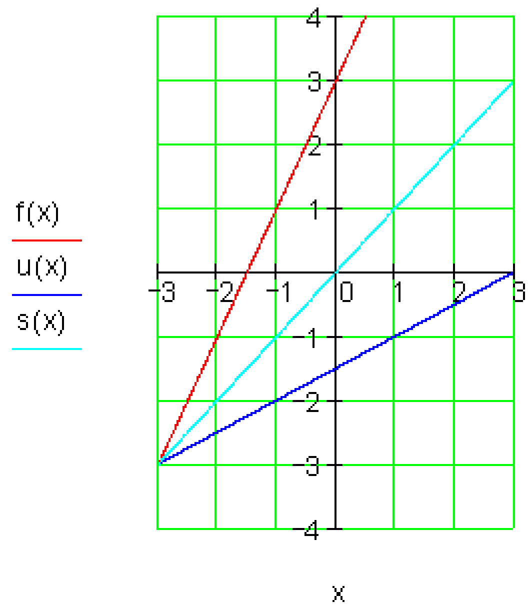
(c) ketabton.com: The Digital Library



د کرښیز توابعو معکوس توابع

تابع: $y = f(x) = 2x + 3$ $x = f(y) \Leftrightarrow x = 2y + 3$ $\Leftrightarrow 2y + 3 = x \mid -3$ $\Leftrightarrow 2y = x - 3 \mid : 2$ $\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ معکوس تابع: $y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$	تابع $y = f(x) = 2x + 3$ ورکړ شوی غوښتنه معکوس تابع f^{-1} او د هغه ګراف ده تابع **f** جګوالی $m = 2$ لري. دا د خپل ګراف سره پروت محور په ټکي $P_x(-1,5 \mid 0)$ کې غوڅوي او ولاړ محور یا اوردینات په ټکي $P_y(0 \mid 3)$ کې غوڅوي. د هغه ګراف کرښه ده. که د تابع اووښتوني یا متحولي یو له بل سره بدلې شي او د y پسې په ورته توګه بڼه بدلون منځ ته راشي، نو سړی معکوس تابع لاس ته راوړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

 	د معکوس تابع ګراف د تابع د ګراف هندارونه(انعکاس) ده په 45^0- محور باندې. په توليزه توګه باور لري: تابع $y = f(x) = a_1 x + a_0$ معکوس تابع $y = f^{-1}(x) = \frac{1}{a_1} x + \frac{a_0}{a_1}$ د ساده والي له امله معکوس تابع u(x) بولو.

مربع توابع

خلورى- يا مربع توابعو ته ننوتنه يا پيل

ننوتنه يا پيل

هرڅوک چي موټر زده کوي، بايد پوه وي، چي د بريک په وخت کې په پاخه سرک د بريک نيولو او د موټر دريدځای په منځ کې لار يا واټن څنګه سره يوځای کيدی شي يا جمعه کيدی شي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې موټر قانون سره سم له چټکتیا(سرعت) v په km/h (کیلومتر په ساعت) د عکس العمل لار r د بریک لار b په متر شمیرلکیدی شي.

پام (خبراوسه) : د بیلګې په توګه د المان پخوانی او له څخه نوي قانون.

له څخه د تملار په وچ اسفالت شوي سرک د پل بریکلار سره شمیرل کیږي.

د بریک لار $b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ د عکس $r = \frac{v}{10} \cdot 3$ العمل لار

یادونه: د څه وخت را په دې خوا په جرمني کې د بریکلار لپاره دا فرمول باور لري:.

$ \text{:} \; b = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2$

د بریک همدا ډول د عکس العمل لار په متر (m) راوځي، که چټکتیا یا سرعت په کیلومتر په ساعت (km/h)وي.

الف – د دواړو حالتونو لپاره د s = f(v) تابع مساوات و تاکی ، د کوم لپاره چې په هره تللي چټکتیا یا سرعت تملار شمیرل کیدی شي.

ب - د تابع مشاوات s = f(v) د دواړو حالتونو لپاره د وهل شوی سرعت v = 0, 10, 20, 30, ... 100 km/h سره د ه یوه د ودرېد - یا توقف لار چې شمیرل کیږي.

پ : په کواوردیناتسیستم کې یا د وضعیه قیمتسیستم کې ګراف رسم کړی.

ت: ټوله لاس ته راوړې نتیجه تشریح کړی.

Problemlösung: د پرابلم حل:

الف: د تابع مساوات:

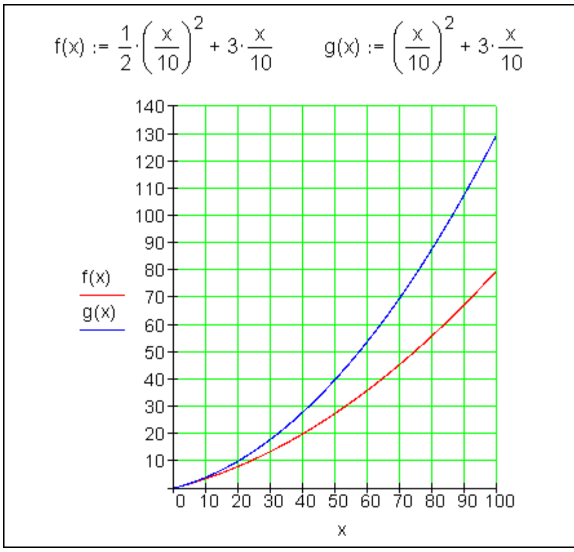
$f(v) = \left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10} \cdot 3 = \frac{1}{100}v^2 + \frac{3}{10}v$	زوړ قانون:
$\text{:} \; f(v) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10} \cdot 3 = \frac{1}{200}v^2 + \frac{3}{10}v$	نوی قانون:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب - : ارزښتجدول(په کيلو متر په ساعت کې)

v (in km/h)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	
f(v) (in m)	0	4	10	18	28	40	54	70	88	108	130	alt
f(v) (in m)	0	3,5	8	13,5	20	27,5	36	45,5	56	67,5	80	neu

پ - ګرافونه



د x محور هر ه وهل شوې لار په km/h په ګوته کوي.

د y - محور د هر همغه د توقفلار په m په ګوته کوي.

ت – کومنتار

د نوي نظم وروسته د د چټکتيا(سرعت) زياتيدني توپير تل زياتيږي. د 50 km/h چټکتيا سره نوی د تم کيدلو لار 27,5 m ده، دا د زړې لار40 m نږدې 69% ده. په 100 km/h دا نوې لار نوره فقط ده، دا د زړې 130 m لارپا نږدې 61% ده. د بريک نيولو لار کمېدنه د بريک ښه کيدو(ABS) سره موخه وره ده.

د تابع مساوات د ټيک پامورتيا او ګراف له امله موږ کره کوو، چې دا نه کرښيز مساوات دی او نه يوه کرښه. انځوروي.

د تابع مساوات لاندې بڼه لري:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

داسې تابع مربع تابع بولو او يا هم د2 –مې درجې ټول(تام) راشنل توابع.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګرافونه يې پارابول بلل کيږي.

تمرينونه:

د لاندې پارابولونو ګرافونه وکاږئ.

د دې لپاره ارزښت جدول ولیکئ

اول - $f(x)=x^2+4x-5$ دويم $f(x)=x^2+2x+5$

دريم - $f(x)=-x^2+x+6$ څلورم - $f(x)=x^2-x$

پنځم - $f(x)=x^2-\frac{1}{9}$ شپږم - $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+3$

اوم - $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$ اتم - $f(x)=-2x^2+8x-11$

نهم م- $f(x)=3x^2-3x$ لسم - $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{11}{2}x+10$

نورمال پارابل، بڼه ځل يا - ضريب او راکښني

د کار قرارداد:

د a2 د مختلفو ارزښتونو لپاره تابع $f(x)=a_2x^2$ وڅیړی او ګراف په وضعیه قیمت سیستم کې وکاږئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = \frac{3}{2}x^2 \quad f_3(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$

د انځور شوي پارابل تابع مساوات یو له بل د x^2 ضریب a_2 له امله توپیروي.

$f_1(x) = x^2$

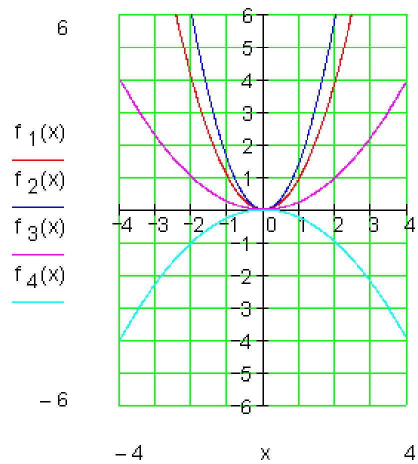
$f_2(x) = \frac{3}{2}x^2$

$f_3(x) = \frac{1}{4}x^2$

$f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$

دا ضریب a_2 د پارابل د بنې لپاره مسول او له دې امله د بنې ضریب بلل کیږي.

د تقاطع ټکی S وضعیه قیمتونه S (0 | 0) لري.



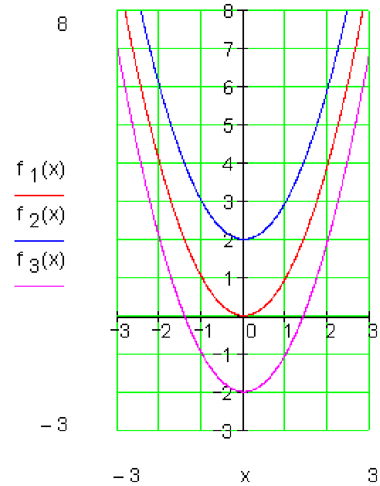
بنه ضریب د پارابل قوارې یا شکل ته څنګه تغیر ورکوي؟

د پارابول په نخښه ونه	ضریب بني	
نورمال پارابو ل	$a = 1$	→
غزېدلی پارابول	$a > 1$	→
کیکاږلی پارابول	$0 < a < 1$	→
په x محور هنداره شوی نورمال پارابول	$a = -1$	→
غزېدلی پارابول، په x -محور هنداره شوی	$a < -1$	→
کیکاږلی پاربول، په x –محور هنداره شوی	$-1 < a < 0$	→

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کار قرارداد:

د a_0 د مختلفو ارزښتونو لپاره د $f(x) = x^2 + a_n$ تابع مطالع کړی او په وضعیه قیمتسیستم کې یې ګراف رسم کړی:
$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = x^2 + 2 \quad f_3(x) = x^2 - 2$

	دا یو راکښلی نورمال پارابل دی، چې ککرئ ټکی(د ر آس نقطه) S دa_0 په واحدونو راکښل شوې ده. $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$ راکښنه دy محور په اوږدوالي باندې صورت نیسي ، چېرته چې د راکښنې لور د a_0د مخنخښې له لارې ټاکل کیدی شي. د تقاطع ټکی S کواوردینات S (0 | a_0) لري. $f_1(x) = x^2$ $f_2(x) = x^2 + 2$ $f_3(x) = x^2 - 2$

د کار ورکوني قرارداد:

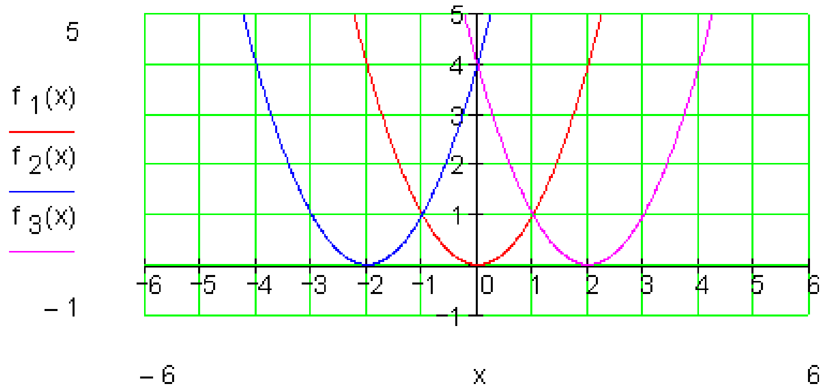
د$f(x) = (x+u)^2$ تابع د u د مختلفو ارزښتونو لپاره راکښنه وڅیړی او ګراف یې په وضعیه قیمتسیستم کې x رسم کړی

$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = (x + 2)^2 \quad f_3(x) = (x - 2)^2$

د ارزښت جدول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

f_1	x	−2	−1	0	1	2	f_2	x	−4	−3	−2	−1	0	f_3	x	0	1	2	3	4
	y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4		y	4	1	0	1	4



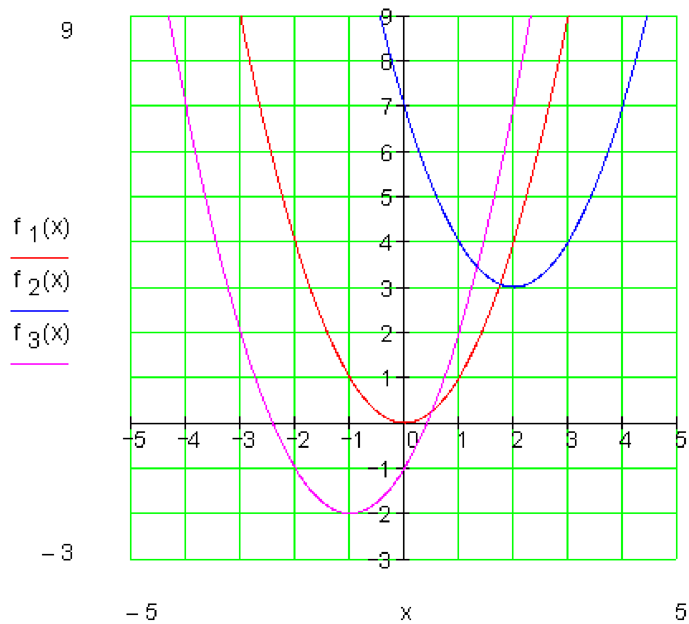
د ا يو راکښلی (چې ځای ته يې تغير ورکړ شوی وي) نورمال پارابول دی، چې ککرۍ ټکی(د رأس نقطه) S يې د u په واحدونو(يوونونو) دx په محور راکښل يا کښول شوې ده. دS غوښتکی(نقطه تقاطع) يې کواوردينات ($S(-u \mid 0)$ لري.

u>0 =>	کيڼې لور ته ښرخون يا ښرخول، ککرۍ ټکیS په u واحدونو يا يوونوو د پيل يا سرچينې کيڼ لورت پروت دی.
u<0 =>	ښی ښرخون يا ښرخول، ککرټکی S په u واحدونو د پيل يا سرچينې ښیۍ لورته پروت دی.

د کار (ورکونې) قرارداد: د u او a0 دمختلفو ارزښتونو لپاره تابع $f(x) = (x+u)^2 +$ a0 وښيرۍ او ګراف يې په يوه کواوردينات(پروت ولاړ) سيستم کې انځور کړی.

$$f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = (x-2)^2 + 3 \qquad f_3(x) = (x+1)^2 - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د f_2 (x) ګراف بیرته یو نورمال پارابول دی، چې ککرئ ټکی S یې په دوه واحده ښی لور ته او په درې واحده پورته لور ته راکښلی دی.

د f_3 (x) ګراف هم یو نورمال پارابول دی، چې ککرټکی S (د رأسټکی) په یوه واحد(یوون) کیڼ او په درې واحده لاندې لور ته کښول شوی دی.

د $f(x) = (x+u)^2 + a_0$ ډول تابع د مربع تابع د ککرئ ټکي(رأس ټکي) بڼې تابع بلل کیږي.

د تابع ګراف نورمال پاربول دی، چې په u ارزښت دx محور په لور او په a_0 د yمحور په لور راکښل شوی دی.

که ککرټکی د $S(x_s | y_s)$ سره په نخښه کړو، نو د ککرټکي بڼې مربع تابع په دې ډول ده:

$$f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنده بڼه:	$S(x_s \mid y_s) \Leftrightarrow f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$
بیلګه:	$S(3 \mid -1) \Leftrightarrow f(x) = (x - 3)^2 - 1$

تر اوسه مو فقط نورمال پارابول راکښلی (را کش شوی) وو.

همدا یا برابره راکښنه کیدی شي د یوه په خوښه پارابول سره سرته ورسول شي.

دلته دې بیا فاکتور a_2 په پام کې ونیول شي.

په ټولیزه توګه باور لري:

$\text{Ist } f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ د یوه نورمال پارابول تابع (بلوان) دی، چې ککرتکی (د رأس ټکی) $S(x_s \mid y_s)$ لری، نو $f(x) = a_2(x - x_s)^2 + y_s$ د ککرتکي د تابع مساوات دي.

د خلوری تکمیلوني له لارې د رآس ټکي(ککری ټکي) ټاکل

موږ پوهیږو چې صدق کوي:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \Leftrightarrow a_2(x - x_s)^2 + y_s \Rightarrow S(x_s \mid y_s)$$

په ککرتکي کې د تولیز تابع مساواتو د ترم تابع له لارې کیدی شي د یوه پارابول ککرټکی (د ککری ټکی) وشمیرل شي.

بیلګه:

$F(x) = 3x^2 - 12x + 15$ دي په ککرئ ټکي مساوات واړول شي.

لوړمی پل(قدم) : د x^2 تر مخه ضریب دې له نوکانو راوه وېستل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$\Rightarrow f(x) = 3[x^2-4x+5]$$

دويم پل : مربع تکميلونه [ ] او بنه بدلون

$$\Rightarrow f(x) = 3.[x^2 - 4x +(2)^2 -(2)^2 +5] = 3.[(x-2)^2+1]=3.(x-2)^2 +3$$
$$\Rightarrow S(2;3)$$

بيلګه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = \frac{1}{2}\left[x^2 - 6x + 8\right] = \frac{1}{2}\left[x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 8\right]$$
$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left[(x-3)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow S\left(3 \middle| -\frac{1}{2}\right)$$

بيلګه:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right] = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{4}\right]$$
$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{36}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{27}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow S\left(-\frac{3}{4} \middle| -\frac{9}{16}\right)$$

تمرينونه: د مربع تکميلونې له لارې د رآس ټکي(ککرۍ ټکي) ټاکل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه پارابل تابع مساوات ورکړشوي دي(د دويمې درجې ټول راشنل تابع). د لاندې پارابولونو لپاره رآسټکو بڼه او رآسټکي پيدا کړئ.

ګرافونه يې وکاږئ:

لومړی: $f(x) = x^2 + 2x + 5$ دويم: $f(x) = x^2 + 4x + 1$

دريم: $f(x) = x^2 - 4x + 1$ څلورم: $f(x) = x^2 - 3x + 3{,}5$

پنځم: $f(x) = x^2 + x - 3$ شپږم: $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

اووم: $f(x) = -x^2 + 5x - 5$ اتم: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$

نهم: $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$ لسم: $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

بيلګه 1 :

د ټول راشنل تابع ګراف چې رسم کړای شو،په زياتو حالتونو کې اړيند دی، چې ارزښتجدول وپيژنو. د دې لپاره جبشميري له لارې کيدی شي. خو دا هم تل اړيين دی.

يو ه ساده بيلګه بې له جبشميري څخه.

تابع مساوات : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

موږ د متحولې $x = 0$ څخه پيل کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=0: f(0)=0^2-4\cdot 0+3=0-0+3=3$$
$$x=1: f(1)=1^2-4\cdot 1+3=1-4+3=0$$
$$x=2: f(2)=2^2-4\cdot 2+3=4-8+3=-1$$
$$x=3: f(3)=3^2-4\cdot 3+3=9-12+3=0$$
$$x=4: f(4)=4^2-4\cdot 4+3=16-16+3=3$$
$$x=5: f(5)=5^2-4\cdot 5+3=25-20+3=8$$
$$x=6: f(6)=6^2-4\cdot 6+3=36-24+3=15$$

تر هغې چې د تابع ارزښت له 10 $\pm$ لوی شي، کېدی شي چې پع کړي.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکل کيږي.

$$x=-1: f(-1)=(-1)^2-4\cdot(-1)+3=1+4+3=8$$
$$x=-2: f(-2)=(-2)^2-4\cdot(-2)+3=4+8+3=15$$

اوس ټول ارزښتونه په يوه جدول کې کښل کيږي.

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
f (x)	15	8	3	0	−1	0	3	8	15

اوس له دې ارزښتونو سره کېدی شي د $f(x)$ ګراف رسم شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بيا پسې شميرل کېدی شي

د بيلګې په توګه $x=\pm ½$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=-\frac{1}{2}:f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3=\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}+2+3=5\frac{1}{4}=5,25$$

$$x=\frac{1}{2}:f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-2+3=1\frac{1}{4}=1,25$$

هر څوک له جبشميري سره بنه بلد نه دی. په دې حالت کې کړی شي دا کسان له شميروني يا کمپيوتر څخه کار واخلي.

په لاندې کې HN د اصلي ګډ مخرج (ماتلاندې) په معنا دی.

يوه غوره بيلګه، چې ځنې برخې يې د جبشميري په مرسته حل شوي دي

د تابع مساوات $f(x)=\frac{4}{5}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}$

يادونه: په لاندې زيات ځايونه HN راغلي، دا د اصلی مخرج په مانا دي.

موږ د $x=0$ سره پيل کوو

$$x=0:f(0)=\frac{4}{5}\cdot 0^2-\frac{3}{4}\cdot 0-\frac{7}{2}=0-0-\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}=-3,5$$

$$x=1:f(1)=\frac{4}{5}\cdot 1^2-\frac{3}{4}\cdot 1-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}-\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}-\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{69}{20}=-3,45$$

$$x=2:f(2)=\frac{4}{5}\cdot 2^2-\frac{3}{4}\cdot 2-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}-\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=-\frac{18}{10}=-\frac{9}{5}$$

$$=-1,8$$

$$x=3:f(3)=\frac{4}{5}\cdot 3^2-\frac{3}{4}\cdot 3-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}-\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}-\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{29}{20}=1,45$$

$$x=4:f(4)=\frac{4}{5}\cdot 4^2-\frac{3}{4}\cdot 4-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}-3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}-\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{63}{10}=6,3$$

$$x=5:f(5)=\frac{4}{5}\cdot 5^2-\frac{3}{4}\cdot 5-\frac{7}{2}=20-\frac{15}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=4}{=}\frac{80}{4}-\frac{15}{4}-\frac{14}{4}=\frac{51}{4}=12,75$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکو.

$$x=-1: f(-1)=\frac{4}{5}\cdot(-1)^2-\frac{3}{4}\cdot(-1)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}+\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{39}{20}=-1{,}95$$

$$x=-2: f(-2)=\frac{4}{5}\cdot(-2)^2-\frac{3}{4}\cdot(-2)-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}+\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1{,}2$$

$$x=-3: f(-3)=\frac{4}{5}\cdot(-3)^2-\frac{3}{4}\cdot(-3)-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}+\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{119}{20}=5{,}95$$

$$x=-4: f(-4)=\frac{4}{5}\cdot(-4)^2-\frac{3}{4}\cdot(-4)-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}+3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}+\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{123}{10}=12{,}3$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې لیکل کیږي.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	12,3	5,95	1,2	-1,95	-3,5	-3,45	-1,8	1,45	6,3	12,75

د دي ارزښتونو سره اوس د ګراف کښل کیدی شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسي شمیرل کیدی شي

د بیلګې په توګه $x=\pm 5/2$

$$x=-\frac{5}{2}: f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}+\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=\frac{27}{8}=3{,}375$$

$$x=\frac{5}{2}: f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}-\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=-\frac{3}{8}=-0{,}375$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: په پورته کې (HN(Hauptnenner داصلي مخرج(ماتلاندې) یا مخرج مشترک په معنا دی.

د دې لپاره چې د یوه ټول ریښتوني یا تام راشنل تابع ګراف انځور کړای شو، په زیاتو حالتونو کې اړیین دی، چې ارزښت جدول وکاږو. د دې لپاره یو جبشمیروني ته اړتیا لرو.

یو ه ساده بیلګه بې له جبشمیري څخه.

تابع مساوات : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

موږ د تحولې $x = 0$ څخه پیل کوو

$$x = 0: f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$$
$$x = 1: f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$
$$x = 2: f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$
$$x = 3: f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$$
$$x = 4: f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$$
$$x = 5: f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8$$
$$x = 6: f(6) = 6^2 - 4 \cdot 6 + 3 = 36 - 24 + 3 = 15$$

تر هغې چې د تابع ارزښت له ± 10 لوی شي، کېدی شي چې پع کړي.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکل کیږي.

$$x = -1: f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8$$
$$x = -2: f(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 3 = 4 + 8 + 3 = 15$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې کښل کیږي.

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
f (x)	15	8	3	0	−1	0	3	8	15

اوس له دې ارزښتونو سره کېدی شي د f(x) ګراف رسم شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسې شمېرل کیدی شي

د بېلګې په توګه $x = \pm ½$

$$x=-\frac{1}{2}: f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3=\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}+2+3=5\frac{1}{4}=5,25$$

$$x=\frac{1}{2}: f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-2+3=1\frac{1}{4}=1,25$$

هر څوک له جبشمېري سره ښه بلد نه دی. په دې حالت کې کېږی شي دا کسان له شميروني يا کمپيوتر څخه کار واخلي.

یوه غوره بیلګه، چې ځنې برخې يې د جبشميري په مرسته حل شوي دي:

د تابع مساوات $f(x)=\frac{4}{5}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}$

موږ د $x = 0$ سره بیل کوو

$$x=0: f(0)=\frac{4}{5}\cdot 0^2-\frac{3}{4}\cdot 0-\frac{7}{2}=0-0-\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}=-3,5$$

$$x=1: f(1)=\frac{4}{5}\cdot 1^2-\frac{3}{4}\cdot 1-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}-\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}-\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{69}{20}=-3,45$$

$$x=2: f(2)=\frac{4}{5}\cdot 2^2-\frac{3}{4}\cdot 2-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}-\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=-\frac{18}{10}=-\frac{9}{5}=-1,8$$

$$x=3: f(3)=\frac{4}{5}\cdot 3^2-\frac{3}{4}\cdot 3-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}-\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}-\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{29}{20}=1,45$$

$$x=4: f(4)=\frac{4}{5}\cdot 4^2-\frac{3}{4}\cdot 4-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}-3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}-\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{63}{10}=6,3$$

$$x=5: f(5)=\frac{4}{5}\cdot 5^2-\frac{3}{4}\cdot 5-\frac{7}{2}=20-\frac{15}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=4}{=}\frac{80}{4}-\frac{15}{4}-\frac{14}{4}=\frac{51}{4}=12,75$$

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=-1:\ f(-1)=\frac{4}{5}\cdot(-1)^2-\frac{3}{4}\cdot(-1)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}+\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{39}{20}=-1{,}95$$

$$x=-2:\ f(-2)=\frac{4}{5}\cdot(-2)^2-\frac{3}{4}\cdot(-2)-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}+\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1{,}2$$

$$x=-3:\ f(-3)=\frac{4}{5}\cdot(-3)^2-\frac{3}{4}\cdot(-3)-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}+\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{119}{20}=5{,}95$$

$$x=-4:\ f(-4)=\frac{4}{5}\cdot(-4)^2-\frac{3}{4}\cdot(-4)-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}+3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}+\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{123}{10}=12{,}3$$

اوس ټول ارزښتونه په يوه جدول کې ليکل کيږي.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f (x)	12,3	5,95	1,2	-1,95	-3,5	-3,45	-1,8	1,45	6,3	12,75

د دي ارزښتونو سره اوس د ګراف کښل کيدی شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بيا پسې شميرل کيدی شي

د بيلګې په توګه $x=\pm 5/2$

$$x=-\frac{5}{2}:\ f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}+\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=\frac{27}{8}=3{,}375$$

$$x=\frac{5}{2}:\ f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}-\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=-\frac{3}{8}=-0{,}375$$

پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنسټونه مربع توابع II

لومړی - د لاندې پارابولونو د تابع مساوات ورکړی:

الف- $f(x)=x^2-4x+2$ ب - $f(x)=x^2+4x+2$

پ - $f(x)=-x^2-4x+3$ ت- $f(x)=-x^2+8x-9$

ټ- $f(x)=\frac{1}{2}x^2-4x+5$ ث - $f(x)=-\frac{1}{2}x^2-2x+6$

ج - $f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-2$ چ - $f(x)=-\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{4}x+6$

ح- $f(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x-7$ خ - $f(x)=\frac{4}{5}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}$

(۱) د ککرئ ټکي بڼه او ککرئ ټکي وټاکی.

(۲) د محورونو غوڅټکي وشمیرئ.

(۳) پل په پل تشریح کړی، چې f(x) د نورمال پارابول حخه څنګه منځ ته راځي او دا څنګه واز دی.

(۴) په یوه مناسب پروتولاړسیستم کې د f(x) ګراف وکاږئ

دویم – سړی کړی شي د نورمال پارابول څخه هر په خوبنه پارابول د د غوڅټکي د راکښني له لارې او د پرسېدني یا غزوني له لارې منځ ته اوړي. که دا کښته لور ته واز وي، نو دا د x محور باندې هنداره کيږي یا منعکس کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه پارابول په هکله لاندې ټکي پيژنو:

د y په لور راکښنه يا بدلون	د x په لور راکښنه يا ځای بدلون	Formfaktor بڼه ضريب	
په 2 واحدونو کښنه لور ته	په 2 واحدونو ښي لورته	$a_2 = 1$	a)
په 4 واحدونو پورته لور ته	په 3 واحدونو کيڼ لورته	$a_2 = -1$	b)
په 4 واحدونو کښته لور ته	په 2 واحدونو کيڼ لورته	$a_2 = \frac{1}{2}$	c)
په 5 واحدونو پورته لور ته	په 1 واحد ښي لورته	$a_2 = -2$	d)
په 3 واحدونو پورته لور ته	په 4 واحدونو کيڼ لورته	$a_2 = -\frac{1}{4}$	e)
په 6 واحدونو کښنه لور ته	په 2,5 واحدونو ښي لورته	$a_2 = \frac{3}{2}$	f)
په 3 واحدونو پورته لور ته	په 3 واحدونو کيڼ لورته	$a_2 = -\frac{3}{4}$	g)
په 4,5 واحدونو کښنه لور ته	په 3,5 واحدونو ښي لورته	$a_2 = 2$	h)
په 3 واحدونو يا يوونونو کښنه لور ته	په 2 واحدونو ښي لورته	$a_2 = \frac{1}{3}$	i)
په3 واحدونو پورته لور ته		$a_2 = -\frac{2}{3}$	j)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په 4 واحدونو بنې لورته

(۱) د ککرئ ټکي بڼه او ککرئ ټکي وټاکئ.

(۲) د محورونو غوځټکي وشمیرئ.

(۳) د تابع مساوات په پولینوم بڼه $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$? ځنګه دي؟

(۴) په یو مناسب کواوردینات سیسم کې د f(x) ګراف وکاږئ.

پوښتنې

د مربع توابعو بنسټونه IV

لومړی:

تابع f(x) ورکړ شوی دی. د شمیرنې له لارې وښایئ، چې ګراف تابع په x محور کې لمسوي. ګراف وکاږئ.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8} \quad x \in \mathbb{R}$$

دویم: د تابع مساوات(f(x د محور غوځټکي وشمیرئ، او ککرئ ټکي. ګراف یې رسم کړئ.

الف- $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x$ ب - $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$ پ- $f(x) = x^2 + 4x + 1$

ت - $f(x) = -0,25(4x^2 + 12x + 9)$ ټ _ $f(x) = 3x(1-x)$ ث- $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{5}{3}$

دریم: دU = 18 cm محیط سره کوم مستطیل(ولاړکوډیز) خورا لویه سطحه لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم: د توابعو $f(x)$ او $g(x)$ ګرافونه چیرته د x محور غوڅوي؟ ککړی چیرته پرتې دي؟ د دواړو ګرافونو ترمنځ کومې اړیکې پرتې دي؟ د ارزښت جدول په مرسته پوښتنې ځواب کړئ.

الف –

x	−3	−2	−1	0	1	2
f(x)	−3,5	0,5	2,5	2,5	0,5	−3,5
g(x)	4	0	−2	−2	0	4

ب –

x	−2	−1	0	1	2	3
f(x)	−12	−5	0	3	4	3
g(x)	3,5	0	−2,5	−4	−4,5	−4

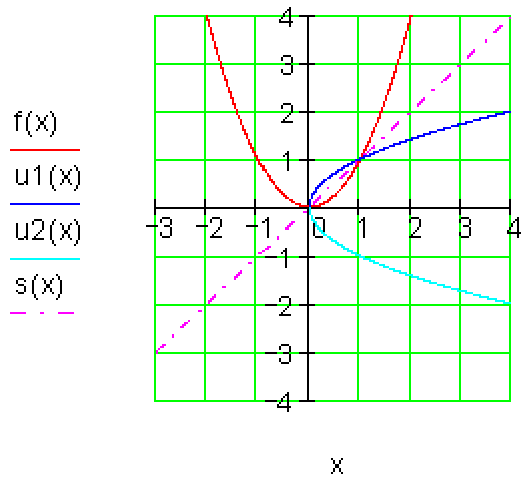
پنځم: د اړونده ګراف کوم خویونه د تابع مساوات څخه سیده لوستل کیدی شي؟

$$f(x) = -x^2 - x + 6; \quad g(x) = (2-x)(x+3); \quad h(x) = -(x+0,5)^2 + \frac{25}{4}$$

د مربع-یا ځلورئ توابعو معکوس تابع

تلنلار (که غواړې: طریقه یا قانون) همداسې ده لکه پورته په کرښیزو توابعو کې چې وښوول شوه.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$y=(f(x)=x^2$

د متحولو x او y بدلول

$x=f(y)=y^2 \Leftrightarrow y^2=x$

ريښنه نيونه:

له دې لاس ته راځي او برعکس

$\Leftrightarrow |y| = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$

يا $y = -\sqrt{x}$

نو دوه معکوس توابع شتون لري:

$y = u_1(x) = \sqrt{x}$

او

$y = u_2(x) = -\sqrt{x}$

د معکوس تابع جوړولو سره تعريفورشو محدوده شوه، د دې لپاره چې يو اځنی نظم منځ ته راشي

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښيزبرابرونسيستم د ۲ برابرونونو او ۲ متحولو سره.

داسي سيستم له دوه مساوتو څخه جوړ دی. غوښتونی د دواړو مساواتو ګډ حل دی. مختلفي تلنلارې شته، چې سرې حل ته ورسيږي

په لاندې einsetzen in = په ... کې اينوول.

د جمعي تلنلار:

مساواتسيستم: (I) $5x - 2y = 1$ (II) $3x + 3y = 9$	د حل پل(قدم) غوښي(قطاع، که قطعه؟) د جمعي تلنلار ته لومړی امکان يا واريانت
(I) $5x - 2y = 1 \mid \cdot 1,5$ (II) $3x + 3y = 9$ (I) $7,5x - 3y = 1,5$ (II) $3x + 3y = 9$	لومړی: مساوات ورته داسي بڼه بدل کړئ، چې ضريبونه (ترمخ عددونه) د yمتحولي تر مخنخښي پورې سره سروخوري.
(I) $7,5x - 3y = 1,5$ (II) $3x + 3y = 9$ (+) $10,5x = 10,5 \mid : 10,5$ $\Leftrightarrow$ $x = 1$	دويم: منځ ته راغلي مساوات سره جمعه کړې او د **x** - متحولي پسې يې حل کړئ
په $3x + 3y = 9$ کې اينوونه: $x = 1$	دريم: د **x** لپاره ميندل شوي ارزښتونه د دواړو څخه په يوه مساوات کې کيږدئ او **y** پسې يې حل کړې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$3 \cdot 1 + 3y = 9$ $\Leftrightarrow 3 + 3y = 9 \mid -3$ $\Leftrightarrow 3y = 6 \mid : 3$ $\Leftrightarrow y = 2$	
$L = \{(1 \mid 2)\}$	څلورم: حلسټ یا حلډېرۍ ولیکۍ

پنځم:

ازماېښت د اېښوونې له لارې

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$

$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

مساواتسیستم

$$(I)\quad 5x - 2y = 1$$

$$(II)\quad 3x + 3y = 9$$

د حل پلونه قدمونه د جمعي تلنلار لپاره

دویم واریانت

لومړی: مساوات داسې ورته بنهبدل کړئ، چې د **x** ضریبونه(ترمخعددونه) تر مخنښې پورې سره یوغرېز شي.

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \mid \cdot 3$$

$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \mid \cdot (-5)$$

$$(I)\quad 15x - 6y = 3$$

$$(II)\quad -15x - 15y = -45$$

دویم: منځ ته راغلی مساوات سره جمعه کړئ او متحولې **y** پسې يې حل کړئ.

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & 15x - 6y = 3 \\ (II) & -15x - 15y = -45\end{array}\right\} +$$

$$-21y = -42 \mid : (-21)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

درېم: بنې لورته الماني د اينوونې په مانا ده

$y = 2$ eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

د x لپاره مېندل شوي ارزښتونه له دې دوه پهيوه مساوت کې کېږدئ او د متحولې x پسې يې حل کړئ.

$$3x + 3 \cdot 2 = 9$$
$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \mid -6$$
$$\Leftrightarrow 3x = 3 \mid : 3$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

څلروم: حلستې يا د حلډېرئ وليکئ

$$L = \{(1 \mid 2)\}$$

پنځم: د اينوونې له لارې ازماېښت

$$\text{(I)}\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$\text{(II)}\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د برابراېينوونې تلنلار

مساواتسيستم

$$\text{(I)}\quad 5x - 2y = 1$$
$$\text{(II)}\quad 3x + 3y = 9$$

د حل پل د برابراېينوونې تلنلار ته

واريانت 1

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}
&(I) \quad 5x - 2y = 1 \mid +2y\\
&(II) \quad 3x + 3y = 9 \mid -3y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(I) \quad 5x = 1 + 2y \mid : 5\\
&(II) \quad 3x = 9 - 3y \mid : 3
\end{aligned}$$

لومړی: دواړه مساوات د اووښتوني یا متحولې **x** پسې حل کيږي.

$$\begin{aligned}
&(I) \quad x = \frac{1+2y}{5}\\
&(II) \quad x = \frac{9-3y}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(I) \quad x = \frac{1+2y}{5}\\
&(II) \quad x = 3 - y
\end{aligned}$$

دويم: د مساوات بني ا ړخونه برابر اينوول کيږي او د متحولې **y** پسې حل کيږي.

$$\begin{aligned}
\frac{1+2y}{5} &= 3 - y \mid \cdot 5\\
\Leftrightarrow 1 + 2y &= 15 - 5y \mid +5y\\
\Leftrightarrow 1 + 7y &= 15 \quad \mid -1\\
\Leftrightarrow 7y &= 14 \quad \mid : 7\\
\Leftrightarrow \underline{\underline{y}} &\underline{\underline{= 2}}
\end{aligned}$$

دريم: (د کين لور الماني په پښتو: اينسول په ..کې)

د **y** ميندل شوی ارزښت د دواړو څخه په يوه وتونمساوات کې اينسوول کيږي، او دا بيا د متحولې **x** پسې حل کيږي.

$$\begin{aligned}
&y = 2 \text{ eingesetzt in } (II): 3x + 3y = 9\\
&3x + 3 \cdot 2 = 9\\
\Leftrightarrow\ &3x + 6 = 9 \mid -6\\
\Leftrightarrow\ &3x = 3 \mid : 3\\
\Leftrightarrow\ &\underline{\underline{x = 1}}
\end{aligned}$$

څلورم: حلسټ يا ـدېرئ وليکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1 \mid 2)\}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم: د ځا په ځای کولو یا اینوولو له لارې ازماېښت

$$\text{(I)}\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5\cdot 1 - 2\cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$\text{(II)}\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

مساواتسیستم

$$\text{(I)}\quad 5x - 2y = 1$$
$$\text{(II)}\quad 3x + 3y = 9$$

د حل پل د برابراینوولو له لارې

واریانت 2

لومړی: دواړه مساوت د اووښتوني یا متحولي**y** پسې حل کیږي.

$$\text{(I)}\quad 5x - 2y = 1 \mid -5x$$
$$\text{(II)}\quad 3x + 3y = 9 \mid -3x$$

$$\text{(I)}\quad -2y = 1 - 5x \mid : (-2)$$
$$\text{(II)}\quad 3y = 9 - 3x \mid : 3$$

$$\text{(I)}\quad y = \frac{1 - 5x}{-2}$$
$$\text{(II)}\quad y = \frac{9 - 3x}{3}$$

$$\text{(I)}\quad y = \frac{5x - 1}{2}$$
$$\text{(II)}\quad y = 3 - x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم: د دواړو مساواتو ښئ خوا برابره ليکل يا اينسوول کيږي او د متحولې **x** پسې حل کيږي.

$$\frac{5x-1}{2} = 3 - x \mid \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow 5x - 1 = 6 - 2x \mid +2x$$
$$\Leftrightarrow 7x - 1 = 6 \mid +1$$
$$\Leftrightarrow 7x = 7 \mid : 7$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$$

درى(ښئ الماني: اينسوول په ...کې)

د **x** ميندل شوى ارزښت د دداړو وتونمساواتو څخه په يوه کې اينسوول کيږي، دا بيا د متحولې **y** پسې حل کيږي.

x = 1 eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

$$3 \cdot 1 + 3y = 9$$
$$\Leftrightarrow 3 + 3y = 9 \mid -3$$
$$\Leftrightarrow 3y = 6 \mid : 3$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$$

څلورم: د حلسټ وليکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1 \mid 2)\}}}$$

پنځم د اينوونې له لارې ازماېښت

$$\text{(I)} \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$\text{(II)} \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د اينسووني تلنلار: د اينسووني تلنلار لپاره د حل پلونه(قدمونه)

وارينت 1

مساواتسيستم

$$\text{(I)} \quad 5x - 2y = 1$$
$$\text{(II)} \quad 3x + 3y = 9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: مساوات **(I)** د **x** پسي حل کيږي.

$$(I)\ \ 5x - 2y = 1 \mid +2y$$
$$\Leftrightarrow 5x = 2y + 1 \mid :5$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{5}y + \frac{1}{5}$$

$$x = \frac{2}{5}y + \frac{1}{5} \text{ eingesetzt in } (II):\ 3x + 3y = 9$$
$$3\left(\frac{2}{5}y + \frac{1}{5}\right) + 3y = 9$$

دويم: د بني اړخ ميندل شوی ترم په مساوات **(II)** کې اينوول کيږي او د **y** پسي حل کيږي.

$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}y + \frac{3}{5} + 3y = 9 \mid -\frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}y + 3y = 9 - \frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{21}{5}y = \frac{42}{5} \mid \cdot 5$$
$$\Leftrightarrow 21y = 42 \mid :21$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$$

دريم: د **y** لپاره ميندل شوی ارزښت په يو د دې دوه وتونمساواتو کې اينوول کيږي، دا بيا په **x** پسي حل کيږي.

$$y = 2 \text{ eingesetzt in } (II):\ 3x + 3y = 9$$
$$3x + 3 \cdot 2 = 9$$
$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \mid -6$$
$$\Leftrightarrow 3x = 3 \mid :3$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$$

څلورم: د حل سټ وليکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1 \mid 2)\}}}$$

پنځم: د اينوولو له لارې حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(I)\quad 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$$
$$(II)\quad 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$$

مساواتسيستم

$$(I)\qquad 5x-2y=1$$
$$(II)\qquad 3x+3y=9$$

د حل پلونه(قدمونه) د اينوولو تلنلار لپاره

واريانت 2

لومړی: مساوات**(II)** د متحولې **y** پسې حل کيږي.

$$(II)\quad 3x+3y=9\,|-3x$$
$$\Leftrightarrow\qquad 3y=9-3x\,|:3$$
$$\Leftrightarrow\qquad y=3-x$$

دويم: دبنی لور ميندل سوی ترم په مساوات **(I)**کې کيږدئ او په **x** پسې يې حل کړئ.

$$y=3-x \text{ eingesetzt in } (I): 5x-2y=1$$
$$5x-2(3-x)=1$$
$$\Leftrightarrow 5x-6+2x\quad =1\,|+6$$
$$\Leftrightarrow 7x\qquad =7\,|:7$$
$$\Leftrightarrow\qquad \underline{\underline{x=1}}$$

3. دريم: د **x** لپاره ميندل شوی ارزښت په يو د دې دوه وتونمساوتو کې اينوول کيږي، او دا بيا د متحولې **y** پسې حل کيږي.

$$x=1 \text{ eingesetzt in } (II): 3x+3y=9$$
$$3\cdot 1+3y=9$$
$$\Leftrightarrow 3+3y=9\,|-3$$
$$\Leftrightarrow\qquad 3y=6\,|:3$$
$$\Leftrightarrow\qquad \underline{\underline{y=2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم: جلسټ ولیکئ

$L = \{(1|2)\}$

پنځم: ازماېښت د اېښوولو له لارې

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

ټولې درې تلنلارې د هغه د واریانتو سره په یوه ټکلي مساوتسیستم وکارول شو. که ځوک یوګوني تلنلرې ټیک وګوري، پيژني، چې په واریانت ۲ کې لږ د شمیرلو کار غوښتونی دی.

په یوه ټاکلي تلنلار د شمیرلو کار د دې حل کوونکي مساوتسیستم په واک کې دی. له دې امله دې لومړی پام وشي، چې کومه تلنلار د لږ کار سره سرته رسیدی شي. د دې لپاره نو یو ځو بیلګو ته اړ یو. لاندې بیګې دي د دې لپاره یوه کوچنۍ مرسته وي، چې مناسب د حل – یا ځواب تلنلار پیداشي.

د مناسب ځواب تلنلار لپاره بیلګې

بیلګه ۱ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

x1=-1 په (1) کې اینوونه y=7x+8 $y = 7\cdot(-1)+8$ $\Leftrightarrow y = -7+8$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 1}}$ حل: L={(-1|1)} ازماینت $(I)\ y = 7x+8 \Rightarrow y = 7\cdot(-1)+8$ $\Leftrightarrow y = -7+8 \Leftrightarrow y = 1\ (w)$ $(II)\ y = -2x-1 \Rightarrow y = -2\cdot(-1)-1$ $\Leftrightarrow y = 2-1 \Leftrightarrow y = 1\ (w)$	$(I)\ y = 7x+8$ $(II)\ y = -2x-1$ د برابر اینوونې لار $7x+8 = -2x-1 \mid +2x$ $\Leftrightarrow 9x+8 = -1 \mid -8$ $\Leftrightarrow 9x = -9 \mid :9$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = -1}}$

بیلګه۲:

Y=3 اینوونه په (1) کې 2x+4y=8 حل: $2x-12 = 8 \mid +12$ $\Leftrightarrow 2x = 20 \mid :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 10}}$ ازماینت $(I)\ 2x+4y = 8 \Rightarrow 2\cdot 10+4\cdot(-3) = 8$ $\Leftrightarrow 20-12 = 8 \Leftrightarrow 8 = 8\ (w)$ $(II)\ 2x-5y = 35 \Rightarrow 2\cdot 10-5\cdot(-3) = 35$ $\Leftrightarrow 20+15 = 35 \Leftrightarrow 35 = 35\ (w)$	$(I)\ 2x+4y = 8$ $(II)\ 2x-5y = 35$ د جمعي تلنلار: $(II)\ 2x-5y = 35 \mid \cdot(-1)$ $(I)\ 2x+4y = 8$ $(II)\ -2x+5y = -35$ (+) $9y = -27 \mid 9$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -3}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۳ :

X=1 په (1) کې کیږدئ x+2y=5 $1+2y=5 \mid -1$ $\Leftrightarrow 2y=4 \mid :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{y=2}}$ حل: L= {(1|2)} ازماېښت $(I)\quad x+2y=5 \Rightarrow 1+4=5$ $\Leftrightarrow 5=5\ (w)$ $(II)\quad -x+y=1 \Rightarrow -1+2=1=35$ $\Leftrightarrow 1=1\ (w)$ wد رښتیا لپاره	$(I)\quad x+2y=5$ $(II)\quad -x+y=1$ د اینووني لار; (II) په y پسې حل کړئ $-x+y=1 \mid +x$ $\Leftrightarrow \quad y=x+1$ په (I) کې کیږدئ x+2y=5 $x+2(x+1)=5$ $\Leftrightarrow x+2x+2=5 \mid -2$ $\Leftrightarrow 3x=3 \mid :3$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=1}}$

بیلګه ۴ : په لاندې: einsetzen اینوونه په (1)کې اوبیونه یا حل:Lösung
ازماېښتProbe د زیاتون یا جمعې
لار:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$$

$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4$$

Additionsverfahren:

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \mid \cdot 2$$

$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \mid : (-2)$$

$$\left.\begin{aligned} \text{(I)}\quad & \frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 4 \\ \text{(II)}\quad & -\frac{6}{x} - \frac{5}{y} = -2 \end{aligned}\right\} +$$

$$-\frac{10}{y} = 2 \mid \cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10 = 2y \mid : 2$$

$$\Leftrightarrow -5 = y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -5}}$$

y = −5 eingesetzt in (I) $\frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$

$$\frac{3}{x} - \frac{5}{2(-5)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} + \frac{1}{2} = 2 \mid -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{3}{2} \mid \cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3 = \frac{3}{2}x \mid \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}}$$

Lösung: $L = \{(2 \mid -5)\}\quad x, y \neq 0$

Probe:

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{5}{2(-5)} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2\ (w)$$

$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \Rightarrow \frac{12}{2} + \frac{10}{-5} = 4$$

$$\Leftrightarrow 6 - 2 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4\ (w)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4 \\ (II) & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{array}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$

$$\Leftrightarrow -5=y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

y = −5 eingesetzt in (I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2\,|\,-5)\}\ x,y\neq 0$

Probe:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2 \Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2 \Leftrightarrow 2=2\ (w)$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4 \Rightarrow \frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$

$$\Leftrightarrow 6-2=4 \Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$
$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$
$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(I)} & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4\\ \text{(II)} & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{array}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$
$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$
$$\Leftrightarrow -5=y$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

$y=-5$ eingesetzt in (I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$
$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2|-5)\}\quad x,y\neq 0$

Probe:

$$\text{(I)}\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2\Leftrightarrow 2=2\ (w)$$
$$\text{(II)}\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\Rightarrow \frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$
$$\Leftrightarrow 6-2=4\Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

یادونه:

مساواتسیستم د کسرونو ترمونو څخه جوړ دی. دا چي مخرج دد صفر کیدو اجازه نه لري یا نه شي صفر کیدی، تعریفسټ باید ورکړ شي. داسئ مساواتسیستم کرښیز نه دی.

د رسموني لار

$$\text{(I)}\qquad x-y=-2\qquad L_I=\{(-2|0);(-1|1);(0|2);(1|3);\ldots\}$$
$$\text{(II)}\ \wedge\ -2x-y=1\qquad L_{II}=\{(-2|3);(-1|1);(0|-1);(1|-3);\ldots\}$$

دواړه مساوات د y پسي حل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هر مساوات لپاره ارزښتجوړي د حل سټ په ګوته کوي.

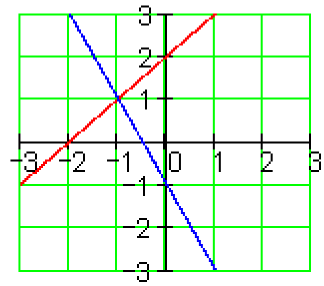
$$\begin{array}{ll} (I) & x - y = -2 \mid +y \\ (II) & -2x - y = 1 \mid +y \\ \hline (I) & x = -2 + y \mid +2 \\ (II) & -2x = 1 + y \mid -1 \\ \hline (I) & x + 2 = y \Leftrightarrow y = x + 2 \\ (II) & -2x - 1 = y \Leftrightarrow y = -2x - 1 \\ \hline \end{array}$$

کا دا په يوه کواورديناتسيستم کې وکښل شي، نو دوه کرښې ترې لاس ته راځي. د کرښو په غوڅېدکي يا نقطه تقاطع کې د دواړو مساواتو حلسټ پروت دی.

حلسټ يا-دپړئ: L={(-1|1)}

په هر مساوات کې د x لپاره عددونه اينښول کيږي.

x	-2	-1	0	1
y_I	0	1	2	3
y_{II}	3	1	-1	-3



د رسموني لار د مساوات او کرښو ترمنځ هندسي(ځمککچيزي) اړيکي ليدوړ کوي. د حل لار په حيث زيات وخت مناسب نه دی، چې د ګډغوڅېدکي کواودينات په ګرفيک کې ناټيک لوستل کيدی شي.

برابرون – يا مساواتسيستم بې له يواځني حل څخه

رسميزه حل يا درسم له لارې حل د مساوات او کرښې ترمنځ هندسي اړيکي ليدوړ کوي.

- دوه کرښې کيدی شي چې نسبت يو بل ته مختلف پروتځايونه ولري.

- دا کيدی چې په يو ټکي کې سره غوڅي کړي، لکه پورته بېلګه چې ليدوړ کوي، د دواړو کرښيز مساوات لپاره ټک يو حل شتون لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- دا کیدی شي یو بل سره غبرګې وي، نو په دې حالت کې کوم ټکی نه شته، چې دواړه کرښې یې یو له بل سره ګډ ولري. له دې سره اړونده مساوات له دې امله حل نه لري.

- دا کیدی شي یو په بل پرتې وي، یعني کټمټ وي، نو هر ټکی د یوې کرښې به د بلې کرښې ټکی هم وي. نو له دې امله به دااړونده مساوات ناپای زیات حلونه ولري.

مساوات سیستم حل نه لري چې دا د حل پیل مو یوه . لیدوړ دا په دې معنا دی، ې ځغلي او کوم ګډ ټکی نه لري.	$(I)\quad 10x+4y=4$ $(II)\quad 5x+2y=1\,|\cdot(-2)$ $(I)\quad 10x+4y=4$ $(II)\; -10x-4y=-2\,|$ $\}+$ 0=2 نو دا ناټیک وینا ده، له دې لاس ته را ځي$L=\{\}$

دا مساواتسیستم ناپای ډېر ځوابونه یا حلونه لري

د ورته بڼه بدلون وروسته د مساوات (I) او مساوات (II) جمعه کونې یو بل سره پورته کوي یا له منځه وړي، دا په دې معنا چې مساوات ورته یا ایدنتیک دي. هره د اعدادو جوړه، چې مساوات (I) پوره کوي،دا مساوات (II)هم پوره کوي. لیدوړ دا په دې معنا دی، چې کرښې یو په بل پرتې دي.	$(I)\quad 10x+4y=2$ $(II)\quad 5x+2y=1\,|\cdot(-2)$ $(I)\quad 10x+4y=2$ $(II)\; -10x-4y=-2\,|$ $\}+$ 0=0 له دې لاس ته راځي ربښتیا وینا

پوښتنې

مساواتسیستم I

مساوات سیستم ته د دوه متحولو سره ګډوله پوښتنې، کرښیزمساواتسیستم، سیستم د کسري ترمونو سره او شي پوښتنې(د متن سره پ،ښتنې)

لومړی: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

الف- $\begin{cases} (I) & 5y - 3x = 1 \\ (II) & x = y + 1 \end{cases}$ ب - $\begin{cases} (I) & 4x + 5y = 32 \\ (II) & y = 5x - 11 \end{cases}$

پ- $\begin{cases} (I) & 15y - 4x = -50 \\ (II) & x = y + 7 \end{cases}$ ت - $\begin{cases} (I) & 3x = y + 15 \\ (II) & 2y - 10 = 2x \end{cases}$

د ویم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

a) $\begin{cases} (I) & 2y = 2x - 40 \\ (II) & 3x = 10 - 2y \end{cases}$

b) $\begin{cases} (I) & \frac{x}{2} - \frac{3y}{5} = 3 \\ (II) & \frac{x}{4} + y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (I) & \frac{2x}{15} + \frac{7y}{12} = 3 \\ (II) & \frac{7x}{25} - \frac{5y}{16} = \frac{3}{20} \end{cases}$

d) $\begin{cases} (I) & \frac{x+5}{y-7} = \frac{4}{3} \\ (II) & \frac{x+2}{y-5} = \frac{5}{8} \end{cases}$

دریم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

a) $\begin{cases} (I) & \frac{4}{3x+1} = \frac{2}{3y-13} \\ (II) & \frac{2}{5x-10} = \frac{4}{7y-6} \end{cases}$

b) $\begin{cases} (I) & \frac{7}{x} - \frac{12}{y} = \frac{5}{6} \\ (II) & \frac{4}{y} + \frac{5}{2} = \frac{9}{x} \end{cases}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) (I) $\frac{4}{x}+\frac{8}{y}=\frac{5}{3}$

(II) $\frac{2}{x}-\frac{4}{y}=-\frac{1}{6}$

d) (I) $\frac{3}{2x-1}-\frac{8}{3y+2}=-\frac{1}{5}$

(II) $\frac{5}{2x-1}+\frac{4}{3y+2}=\frac{8}{15}$

څلورم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

(I) $\frac{7}{2x-5}-\frac{9}{7y+5}=\frac{10}{3}$ (II) $\frac{24}{2x-5}+\frac{15}{7y+5}=\frac{19}{3}$

پنځم: یو پلار په دې لحضه کې څلورواره دومره عمر لري لکه ځوي يې او په ۵ کاله کې به فقط درې واره دومره عمر ولري. دا دواړه همدا اوس څومره عمر لري؟

شپږم: په کوم وخا کې به یو (اوبه) ساتونی (بیلر؟) له دوه نلونو څخه نیمم ډک شي، چې لومړی نل د ټول ساتوني د ډکولو لپاره ۱۸ دقیقې اودویم د دې لپاره ۲۲ دقیقو ته اړتیا ولري یا په کار ولري؟

اوم: د یوه مستېیل یا ولاړکونجیزچاپیریال یا محیط ۱۸۰ سانتي متره دی. اړخa څومره اوږد دی، که اړخ b ۳۰ سانتي متره وي؟

اتم: که د دوه ارزښتځاییزه پرته جمعه یا پروت زیاتون عدد9 دی. که ارزښتونه بدل شي، نو نوی عدد لاس ته راځي چې د زاړه عدد 7/4 ده. دواړه ځا ارزښتونه څومره دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

توان- یا پوتنځ توابع

توان توابع

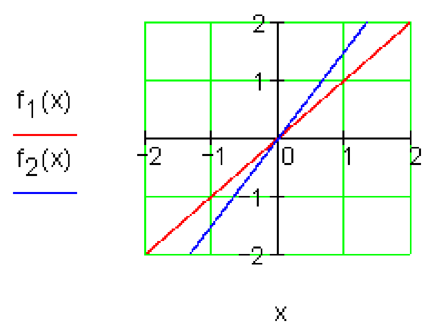
تعریف:

یوه تابع د تابع مساوات $f(x) = a_n x^n \quad ; n \in \mathbb{N} \quad ; a_n \in \mathbb{R}$ سره پوتنځ تابع بلل کیږي.

د n اکپوننت یا جګعدد د پوتنځ تابع درجه ټاکي او ضریب an د ګراف بڼه یا فورم او هغه د بنې ضریب بلل کیږي.

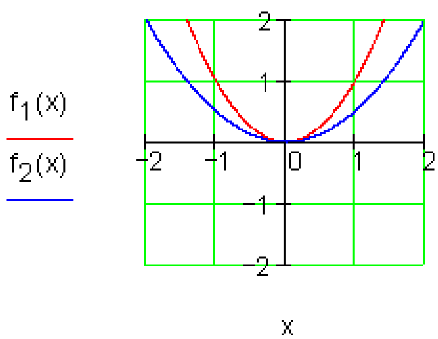
بیلګې:

$f_1(x) := x \qquad f_2(x) := \frac{3}{2} \cdot x$



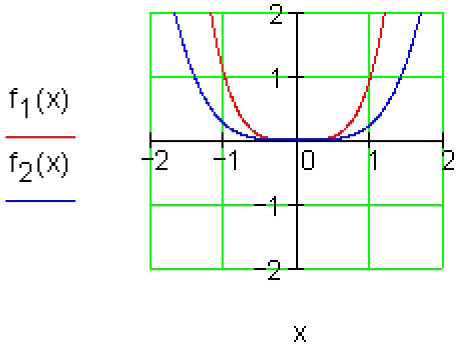
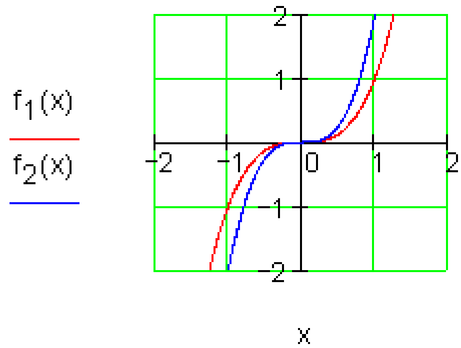
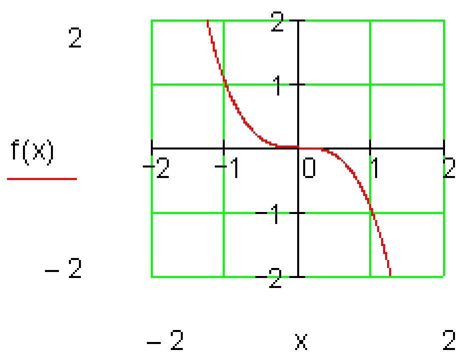
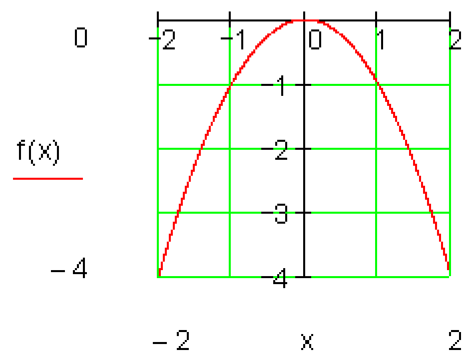
د لومړی دزجې توان تابع(کرښه)

$f_1(x) := x^2 \qquad f_2(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2$



د دویمي درجې توان تابع (پارابول)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f_1(x) := x^4$ $f_2(x) := \frac{1}{4}\cdot x^4$  د څلورمي درجې توانتابع	$f_1(x) := x^3$ $f_2(x) := 2\cdot x^3$  د دریمي درجې توانتابع
 تابع مساوات ولیکی	 تابع مساوات ولیکی

لاندې پوښتني ځواب کړی:

ب – د n درجه او د a_n مختخبنه د ګراف په تلنه کومه اغیزه لري؟

پ – د پوتنخ تابع n درجه د ګراف په سیومتري کومه اغیزه لري؟

ت – د پوتنخ تابع د n په واکولي او د a_n مختخبني له امله کوم ارزښتسټ(ارزښتډېرى) لري؟

ټ - د a_n مطلق ارزښت د ګراف په تلنه کوم اِیز لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځوابونه لږ وروسته راځي.

سیومتري

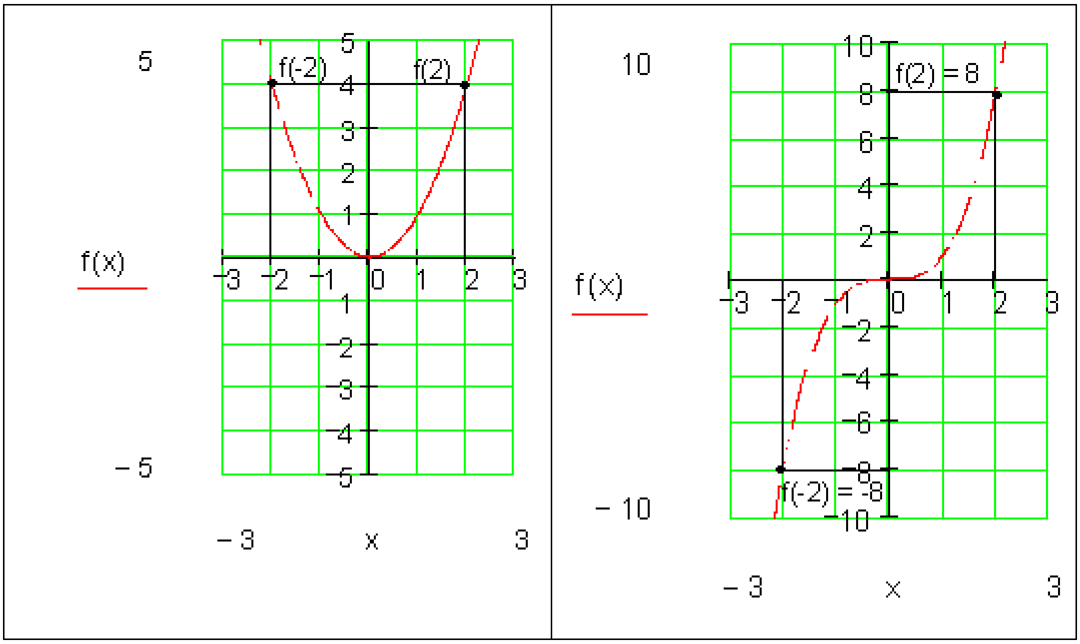
په سیومتري څنګه قضاوت کیدی شي، که څوک فقط د یوه توان(پوتنځ) تابع تابع مساوات پیژني؟

د دې لپاره د لاندې توابعو ګرافونه کاږو:

$f(x)=x^2$ او $f(x) = x^3$

او تابع د $x=-2$ او $x=2$ په ځایونو کې تر څیړنې لاندې نیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ګومان مو نړدې دی چې لاندې باور لري:

دx د جوړه ځګعدد سره د تابع ارزښتونه برابر دي. دا په دې معنا چې :

محورسیمتریک، نو $f(-x) = f(x)$

د x ناجوړه(طاقو) ځګعددونو لپاره د تابع ارزښت برابر مطلق قیمت لري، مګر متضادې مخنخښې لري.

دا په دي معنا جې:

ټکی سیومتریک، نو $f(-x) = -f(x)$

دا اړیکې د ټولو تانتوابعو لپاره باور لري (بې له ښوونې).

د یوه توان - یا طاقت تابع محورسیومتریک دی، که د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري: f(-x)=f(x)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه توانتابع ګراف ټکی سیمتریک دی،که د ټولو $x \in D$ ؛ لپاره باور ولري $f(-x)= - f(x)$

ټولګه:

د $a_n > 0$ لپاره باور لري:

ټول توان توابع د جوړه جګعدد سره محور سیومتریک دي. دا له II د .I څلورمې ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتوابع د ناجوړه(طاق) جګعدد سره ټکیسیومتریک دي. دوی له .IIIو .I څلورمې(ربع) ته ځغلي(خوزي).

د ټولو 0 > لپاره باور لري:

ټول توان توابع د جوړه جګعدد سره محور سیومتریک دي. دا له III د .IV څلورمې ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتوابع د ناجوړه(طاق) جګعدد سره ټکیسیومتریک دي. دوی له .IIو .IV څلورمې(ربع) ته ځغلي(خوزي).

تمرینونه:

د توان تابع خویونه.

د لاندې توانتوابعو درجه وټاکی، په سیمتریکي حالت، د ګراف په تلنه او او ارزښت دېرې یې یوه وینا وکړی د د هر ګراف یې په پروت ولاړسیستم (کواوردینات سیستم) کې رسم کړئ.

لومړی - $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ دویم - $f(x) = \frac{1}{4}x$

دریم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^4$ خلورم - $f(x) = \frac{1}{5}x^3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^5$ شپږم - $f(x) = -\frac{1}{2}x$

اوم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^3$ اتم - $f(x) = 2x^2$

نهم - $f(x) = \frac{1}{5}x^4$ لسم - $f(x) = -\frac{2}{5}x^4$

کرښيز ي توابع د ورکړشوو شرايطو سره

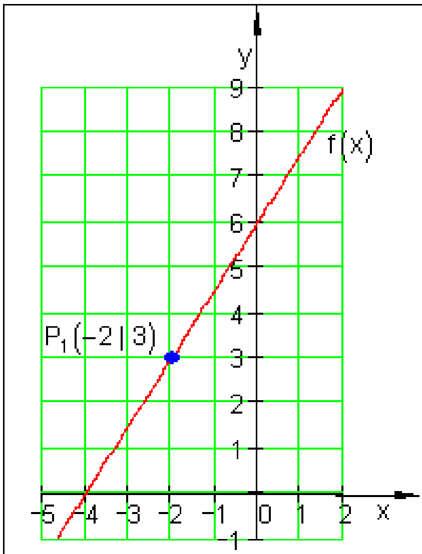
. لومړی حالت : د P تکي ځخه تيرې کرښې د a_1 جګوالي سره

بيلګه:

يوه کرښه د a_1 د جګوالي سره د $P_1(x_1 | y_1)$ په تکي کې ځغلي.

د $f(x) = a_1x + a.$ تابع مساوات دې پيدا شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



جګوالی: $a_1 = 1,5$: ټکی $P_1(-2|3)$

وتونمساوات $f(x) = a_1x + a_0$

جګوالی ځای په ځای کړی
$f(x) = 1,5 \cdot x + a_0$

د a_0 لپاره دې ارزښت وشمیرل شي.

د $P_1(-2|3)$: لپاره ازمایښت

$$\begin{aligned} f(-2) = 3 \Leftrightarrow 1,5 \cdot (-2) + a_0 &= 3 \\ \Leftrightarrow -3 + a_0 &= 3 \mid +3 \\ \Leftrightarrow a_0 &= 6 \end{aligned}$$

د تابع مساوات $f(x) = 1,5 \cdot x + 6$

ازمایښت:

$P_1(-2|3) \Leftrightarrow f(-2) = 3$

$f(-2) = 1,5 \cdot (-2) + 6 = -3 + 6 = 3$

بیلګه:

د حیواناتو ساتونکی د وښو اوتومات څخه د روځې 7,5 kg خوراک شته. دولس روځې، وروسته له هغې چې زیرمه له غذايي موادو ډکه شوې وه، هلته نور 250 kg پاتې دي.

الف - یو تابع مساوات ولیکی، چې دا حالت تشریح کړي

ب - په څومره سټ یا ډېرى به دا د وښو زیرمه دولس ورځې د مخه ډکه شوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل و الف ته - دx محور: وخت په ورځو

y محور : د وښو زېرمه په کيلوګرامkg .

$$f(x) = -7{,}5x + a_0$$

$$P(12 \mid 250) \Rightarrow f(12) = 250 \Leftrightarrow -7{,}5 \cdot 12 + a_0 = 250$$

$$\Leftrightarrow -90 + a_0 = 250 \mid +90$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 340 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -7{,}5x + 340}}$$

حل و ب ته- د ډکيدنې وخت $x = 0$ دی.

$$\Rightarrow f(0) = -7{,}5 \cdot 0 + 340 = 340$$

د وښو شتون دولس12 ورځې د مخه په 340 kg ډک شوی .

لکه څنګه په لومړي حالت کې چې د يوې کرښې جګوالی او يو ټکی معلوم دي، شمېرنه په همغه ډول د ورکړشوو داتن يا داتا Daten سره مخ ته ځي.

په داسې حالت کې شميرنه ټويزه سرته رسيږي. دا مو بيا يو فرمول ته لاربنوده وي.

يوه کرښه دa_1 جګوالي سره د$P_1(x_1 \mid y_1)$ ټکي څخه تيرېږي.

د کرښمساواتو ټوليز فرمول دی: $f(x) = a_1x + a_0$

$$P_1(x_1 \mid y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow a_1 \cdot x_1 + a_0 = y_1 \mid -a_1 \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - a_1 \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = a_1 \cdot x + y_1 - a_1 \cdot x_1 = a_1 \cdot x - a_1 \cdot x_1 + y_1 = a_1(x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$$

دا د ټکی - جګوالي فرمول هم بلل کيږي.

بيلګه:

په $a_1 = -2;\ P_1(-3 \mid 4)$: $f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$ کې ځا په ځای کړی

$$f(x) = -2(x - (-3)) + 4 = -2(x + 3) + 4 = -2x - 6 + 4 = \underline{\underline{-2x - 2}}$$

.

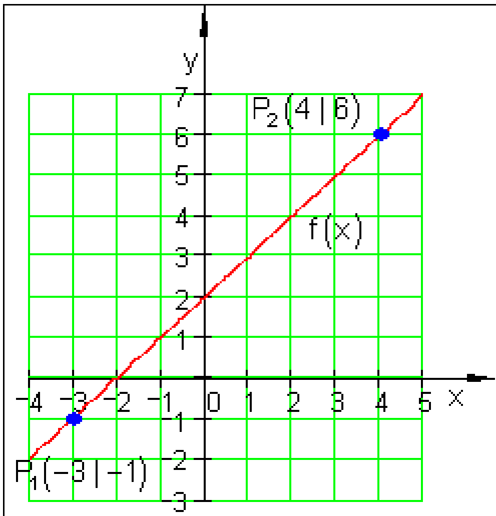
(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم حالت: کرښه له دوه ټکو تیریږي

بیلګه:

دوه ټکی $P_1(x_1 \mid y_1)$ او $P_2(x_2 \mid y_2)$ په یوه کرښه پراته دي.

د $f(x) = a_1x + a_0$ تابع مساوات غواړو پیداکړو.



$P_1(-3 \mid -1)$ $P_2(4 \mid 6)$

وتونمساوات: $f(x) = a_1x + a_0$

د ځګوالي ټاکنه:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-1)}{4-(-3)} = \frac{6+1}{4+3} = \frac{7}{7} = 1$$

ځګوالی وضعه کړی $f(x) = 1 \cdot x + a_0$

وروسته له دې چې ځګیدنه معلومه شوه، دا پوښتنه داسي حل کیږي لکه په لومړي حالت کي.

د ټکو ازمایښت لپاره بې پروا ده چې د دې لپاره کوم ټکي کارول کیږي، ځکه چې دواړه ټکي به په کرښه پراته وي.

د ټکو ازمایښت د $P_2(4 \mid 6)$ یا P_1 لپاره

$$P_2(4 \mid 6) \Rightarrow f(4) = 6 \Leftrightarrow 1 \cdot 4 + a_0 = 6 \mid -4 \Leftrightarrow a_0 = 2 \Rightarrow f(x) = x + 2$$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فزيک څخه پوهيږو چې د حرارت معلومولو (ګرمۍ کچونې) لپاره مختلفې دد حرارت سکالا کارول کيږي. د څلزيوس سکالاCelsiusskala او د فارنهايټ سکالا Fahrenheitskala

د دواړو ترمنځ کرښيزې اړيکې موجود دي.

$100\,^0C$ برابرې دي د $212\,^0F$ سره . $0\,^0C$ برابر د ی په $32\,^0F$ سره.

د يوه تابع مساوات غواړو پيداکړو، چې د هغې په مرسته ^0C په ^0F اړول کيږي.

خپلواکه متحوله x په ^0C او بلواکه يا تابع متحوله $y = f(x)$ په ^0F .

ځګوالی:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5} \Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + a_0$$

$$P_1(0\,|\,32) \Rightarrow f(0) = 32 \Leftrightarrow \frac{9}{5} \cdot 0 + a_0 = 32 \Leftrightarrow a_0 = 32$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

په بدل شوی تابع x په C° کې کيږدی نتيجه يې ده.

د بيلګې په دول:

$$x = 20\,^0C : f(20) = \frac{9}{5} \cdot 20 + 32 = 68 \Rightarrow 20\,^0C \triangleq 68\,^0F$$

د دويم حالت لپاره هم کيدی شي شميرنه په ټوليزه توګه مخ ته بوتلی شی:

دوه ټکی $P_1(x_1\,|\,y_1)$ او $P_2(x_2\,|\,y_2)$ په يوه کرښه پراته دي.

د مساواتو عمومي بڼه ده:. $f(x) = a_1x + a_0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + a_0$$ جګوالی:

$$P_1(x_x \mid y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + a_0 =$$

$$= y_1 \mid -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 =$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

دا په دوه ټکو کې د کرښيزږومساواتو يو توليزه بڼه ده .

په زياتو ادبياتو کې په لاندې ډول ده:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \; ; x_1 \neq x_2$$ چيرته چې $y = f(x)$ باور لري.

د عملي کاروني لپاره لاندې بڼه مساعده ده:

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

بيلګه:

په $P_1(2 \mid -1); P_2(-3 \mid 2)$ $f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ کې ځای په ځای کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{2-(-1)}{-3-2}(x-2)+(-1)=\frac{2+1}{-5}(x-2)-1=-\frac{3}{5}(x-2)-1=-\frac{3}{5}x+\frac{6}{5}-\frac{5}{5}$$
$$=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}\Leftrightarrow f(x)=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$$

تمرين:

د ^0F په ^0C باندې شميرنې لپاره يو تابع مساوات وليکئ

2.2.3.تمرين: د تابعمساواتو شميرنه

يو کرښيز مساوات د a_1 جګوالی لري او د P له ټکي تيريږي.

د$f(x)$ تابعمساوات معلوم کړئ او د محورونو قاطع ټکي يا غوښتکي او ګراف انځور کړئ

اول - $P(2|-2)$ $a_1=\frac{1}{2}$ دويم - $P(-1|3)$ $a_1=\frac{3}{4}$

دريم - $P(3|-1)$ $a_1=2$ څلورم - $P\left(\frac{3}{2}\middle|4\right)$ $a_1=\frac{4}{5}$

يوه کرښه له ټکو P_1 او P_2 تيريږي.

د$f(x)$ تابع مساوات پيدا کړئ او د محور قاطع ټکي او ګراف رسم کړئ.

پنځم - $P_2(5|4)$ $P_1(2|1)$ شپږم - $P_2(2|3)$ $P_1(-3|-2)$

اوم - $P_2(4|-1)$ $P_1(-2|3)$ اتم - $P_2(3|1)$ $P_1(-4|-1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم - $P_2(4 \mid -1)$ $P_1\left(-3 \mid \frac{9}{2}\right)$ لسم - $P_2\left(\frac{7}{2} \mid 4\right)$ $P_1(-4 \mid -2)$

. د کرښبرابروتو ځانګړی حالت:

د x- محور سره غبرګ کرښه:

$f(x) = a_0 ; a_0 \in \mathbb{R}$

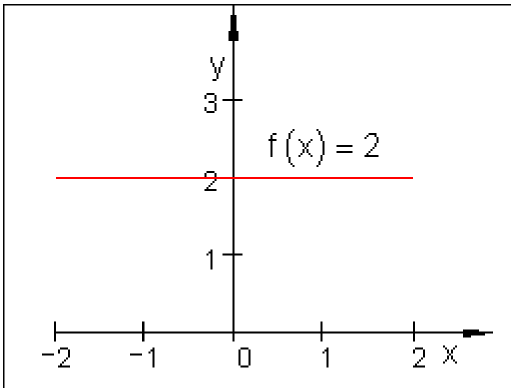
یو د 0 درجي تام راشنل تابع ده او

ثابته تابع هم بلل کيږي.

x- محور هم یوه ثابته تابع ده د

تابع مساوات $f(x) = 0$ سره.

د ثابتي تابع جګوالی تل صفر دی.



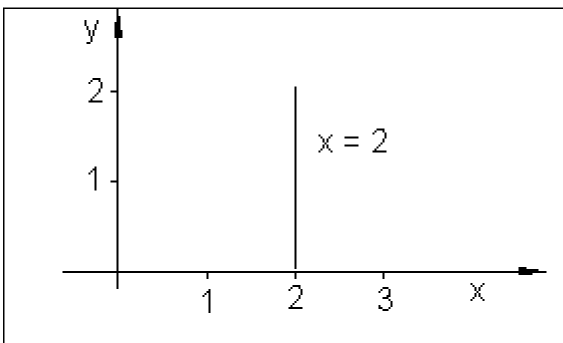
د y- محور سره غبرګه.

$x = a ; a \in \mathbb{R}$

کرښه د محور سره غبرګه (موازي) ځغلي.

دا د یوه تابع مساوات سره نه شي لیکل کیدی، ځکه چي یواځنی تنظیم نه شته یعني تابع نه ده.

$x = 0$ دy - محور مساوات دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

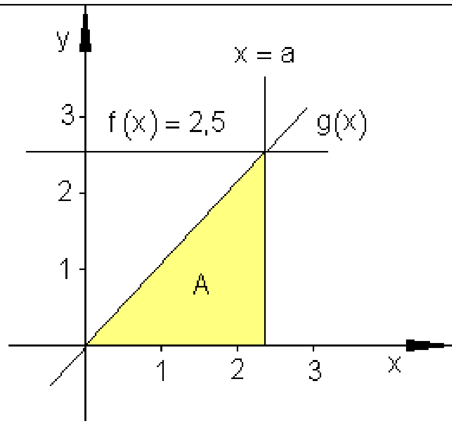
بيلګه:

يو $f(x) = 2{,}5$ ور کړ شوی او y- محور سره موازي دa واټن د $a > 0$ سره.

يوه سرچينيزه کرښه g د($P(a \mid f(x))$ ټکي څخه تيريږي.

دا دx - محور او د y- محور سره غبرګې کرښې سره يو مثلث جوړوي.

a داسي وټاکی چې وسطحه د سطحي څلور واحدونه (يوونونهFE) جوړ کړي. د دې حالت لپاره د$g(x)$ تابع مساوات څنګه دي؟



د $g = a$ او $A = \frac{g \cdot h}{2}$

$h=f(x) = 2{,}5$ سره

د مثلث سطه $\Rightarrow A = \frac{2{,}5 \cdot a}{2} = \frac{5}{4}a$

$$A = 4 \Leftrightarrow \frac{5}{4}a = 4 \,|\cdot \frac{4}{5} \Leftrightarrow a = \frac{16}{5}$$

(ځکه چې د سرچيني کرښه $g(x) = a_1 x \ (a_0 = 0$

د جګېدو له مثلث

څخه $a_1 = \frac{5}{2} : \frac{16}{5} = \frac{25}{32}$

د تابع مساوات : $g(x) = \frac{25}{32}x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرين: د ^0F بدلون شميرنه په ^0C لپاره د تابع مساوات وليکئ

حل :

د ^0C اړونه يا بدلون په^0F د متحولې لپاره دا معنا لري:

x په ^0F مستقله يا خپلواکه متحوله ده او $y = f(x)$ په^0C بلواکه يا تابع متحوله ده.

$$212\,^0F \triangleq 100\,^0C \Rightarrow P_1(212\,|\,100) \quad \text{او} \quad 32\,^0F \triangleq 0\,^0C \Rightarrow P_1(32\,|\,0)$$

دا چې د حرارت الو ترمنځ يوه کرښيزه ا ړيکه پرته ده، نو ټکي P_1 اوP_2 په يوه کرښه پراته دي.

د کرښې عمومي کرښيزه بڼه په دې ډول ده:.$f(x) = a_1x + a_0$

دلته ضريبونه a_1 او a_0 د ټاکلو دي.

جګوالی:
$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100-0}{212-32} = \frac{100}{180} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{9}x + a_0$$

ټکي ازمايښت د $P_1(32\,|\,0)$ سره.

$$\Rightarrow f(32) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{9}\cdot 32 + a_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{160}{8} + a_0 = 0\,|-\frac{160}{9} \Leftrightarrow a_0 = -\frac{160}{9}$$
$$\Rightarrow f(x) = f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} = \frac{5}{9}(x-32)$$

د ^0F اړونې په ^0C لپاره باور لري.

$$^0F \text{ in } ^0C \text{ gilt: } f(x) = \frac{5}{9}(x-32)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

xپه ^0F او y په ^0C .

پوښتنې:

کرښیزې توابع III

لومړی: د g کرښو مساوات وټاکئ

الف: $P_1(-4|-2)$ او $P_2(2|0)$ په g پراته دي،

ب- g په $P_1(-3|1)$ او $P_2\left(1|\frac{11}{3}\right)$ کې ځغلي

پ- $P_1(1|-2)$ او $P_2(-2|10)$ په g پراته دي

ت- g محورونه په x = 2 او y = 6 کې غوځوي(قطع کوي)

ټ-g له (P(-6;1) تیرېږي او له h سره غبرګ دی د $h(x)=-\frac{2}{3}x+2$ مساوات سره

ث- g جګوالی $a_1=-4,5$ لري او له P(1;1,5) څخه تیرېږي.

ج- g جګوالی $a_1=3$ لري او له P(1;,1,5) څخه تیرېږي

چ- g دx محور په x = 3 کې غوځوي او د hکرښه د h(x) = 4x - 2 سره په x = -1 کې غوځوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم: د دوه کرښو g او h کرښیز مساوات پیدا کړی، چې له ټکی P(3;-2) تیرېږي.

دریم: یوه کرښه g د کرښیز تابع f(x) سره پیدا کړی، چې له ټکو P_1 او P_2 تیریږي او تابع مساوات وټاکی.

الف- $P_1(1,5 \mid 3); P_2(3 \mid 2,5)$ ب - $P_1(-3 \mid 5); P_2(1 \mid 2,5)$

پ- $P_1(4 \mid 0); P_2\left(-1 \mid -\sqrt{2}\right)$ ت - $P_1(k \mid 3); P_2(2k \mid -1)$

ټ - $P_1(1 \mid 0); P_2(-1 \mid k+1)$ ث - $P_1\left(2\sqrt{k} \mid \sqrt{2k}\right); P_2\left(\sqrt{k} \mid 0\right)$

څلورم: د f(x) کرښیزې تابع مساوات وټاکی.که معلوم وي:

الف-کرښه د $a_1 = \frac{5}{4}$ جګیدني سره له P(4;-1) څخه تیرېږي.

ب-کرښه له ټکو $P_1(-5 \mid -3)$ او $P_2(0 \mid 3)$ څخه تیرېږي.
پ-کرښه له P(4,5;2,7) ټکي تیرېږي. او د x محور سره 45° مایله ده.

ت-کرښه له P(-1,5;0) تیرېږي او دh(x) = 2x+2 سره غبرګه (موازي) ده.

پنځم: کر ښه g و کاږی او کرښیز مساوات وټاکی.

الف- $P(3 \mid -1) \in g$ او g دy محور سره غبر؛(موازي) څغلي.

ب- $P(3,5 \mid 2,5) \in g$ او g دx محور سره موازي څغلي.

پ- g له P(-5;1)تېرېږي او د $h(x) = -\frac{1}{2}x + 4$ سره موازي ده.

ت- g له $P\left(1 \mid \frac{3}{2}\right)$ تېرېږي او د کرښو سره چې له ټکو $P_1(-2 \mid -3)$ او $P_2\left(\frac{3}{2} \mid -5\right)$ تېرېږي، موازي څغلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

کرښيز مساوات VI

لومړی –

د لاندې کرښيزو توابعو گرافونه و کاږی او د ارزښت سټ يا – دېری W و ټاکی

الف- $f(x) = -2x + 2;\ D = \{x | -3 \le x \le 5\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4};\ D = \{x | -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f(x) = \frac{3}{4}x - 3;\ D = \{x | -2 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f(x) = 3x - 6;\ D = \{x | -1 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$

دويم –

ټکی P_1 او P_2 ورکړ شوي، چې په کرښه پراته دي. د f (x) تابعمساوات پيدا کړی او گراف يي وکاږی

الف- $P_1(3 | 4);\ P_2(7 | -1);\ D = \{x | 0 \le x \le 7\}_{\mathbb{R}}$

ب - $P_1(-8 | 1);\ P_2(2 | -3);\ D = \{x | -8 \le x \le 2\}_{\mathbb{R}}$

پ - $P_1(4 | 3);\ P_2(-7 | -1);\ D = \{x | -7 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

ت - $P_1(-4 | -4);\ P_2(4 | 2);\ D = \{x | -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

دريم –

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لاندې مساواتو حلسټ يا حلډېرۍ پيداکړی. مساوات چې کسری راشنل ترمونه ولري، بايد د هغو تعريفورشو هم ورکړل شي.

الف- $x-5=9$ ب ـ $8+x=25$ پ ـ $x-\frac{2}{3}=\frac{3}{4}$ ت ـ $\frac{5}{9}=x-\frac{1}{3}$

ټ ـ $88=4x-16$ ث ـ $a+bx=3b+a$ ج ـ $8-(x+5)=2$

چ ـ $9+(5-x)=6$ ح = $(x-6)(x+3)=(x-5)(x-2)$ خ ـ

ځ ـ $(x+3)(x+7)=(x+2)(x+9)$ $\frac{x}{4}+\frac{5x}{6}+\frac{5}{6}=\frac{x}{2}+x$

څ ـ $\frac{3}{2x}+\frac{2}{3x}=\frac{1}{9}+\frac{7}{3x}$ د ـ $\frac{ax}{b}-\frac{b}{ac}=\frac{a}{bc}-\frac{bx}{a}$ ډ ـ $\frac{x}{a-b}+\frac{x}{a+b}=a$

ذ- $23a-\{5ax-[9ax+(12a-6ax)]-(3a-8ax)\}-15a=5ax-7a$

څلورم:د لاندې توابعو د محورونو سره د تقاطع ټکي هم پيدا کړی.

الف- $f(x)=2x-7$ ب ـ $f(x)=-2x+6$ پ ـ $f(x)=3x-3$

ت ـ $f(x)=2x+\frac{2}{3}$ ټ ـ $f(x)=\frac{3}{4}x+2$ ث ـ $f(x)=-\frac{3}{4}x+\frac{4}{5}$

ج ـ $f(x)=3{,}5x+\frac{1}{2}$ چ ـ $f(x)=-2{,}5x+2\frac{1}{2}$ ح ـ $f(x)=1\frac{3}{4}x-3\frac{2}{3}$

پنځم: د يوې کرښې دوه ټکي P_1 او P_2 ورکړ شوي د لاندې توابعو له I تر IV لپاروه وټاکی:

I. $P_1(3\mid 4);P_2(7\mid -1);D=\{x\mid -2\le x\le 8\}_{\mathbb{R}}$

II. $P_1(-8\mid 1);P_2(2\mid -3);D=\{x\mid -8\le x\le 2\}_{\mathbb{R}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

III. $P_1(4 \mid 3)\,;\,P_2(-7 \mid -1)\,;\,D=\{x \mid -8 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

IV. $P_1(4 \mid 2)\,;\,P_2(-4 \mid -4)\,;\,D=\{x \mid -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

الف- د جګیدنې ضریب m.

ب - د کرښې تابعمساوات

پ - د y محور سره د تقاطع ټکی P_y

ت - د تقاطع ټکی P_y د x محور سره

ټ - په W باندې ارزښتډېرى W.

ث - په D کې د تابع ګراف

شپږم: لاندې مساواتسیستمونه حل کړی:

الف- $\begin{cases} \text{I} & 5y-3x=1 \\ \text{II} & x=y+1 \end{cases}$ ب - $\begin{cases} \text{I} & 4x+5y=32 \\ \text{II} & y=5x-11 \end{cases}$ پ - $\begin{cases} \text{I} & 15y-4x=-50 \\ \text{II} & x=y+7 \end{cases}$

ت - $\begin{cases} \text{I} & 3x=y+15 \\ \text{II} & 2y-10=2x \end{cases}$ ټ - $\begin{cases} \text{I} & 2y=2x-40 \\ \text{II} & 3x=10-2y \end{cases}$ ث - $\begin{cases} \text{I} & x+y=a+b \\ \text{II} & x-y=a-b \end{cases}$

پوښنتې

کرښیز مساوات IX

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی:کرښه g له ټکو P1(4;-3,5) او P2(2,5;-1) تیرېږي.

کرښه h له ټکو $P_3(5\,|\,2{,}5)$ او $P_4\left(\frac{3}{2}\,|\,\frac{25}{3}\right)$. تیرېږي.

کرښې یو بل ته څه موقعیت لري یا څنګه پرتې دي؟

دویم:د f(x) کرښیزې تابع د تابع ترم او ارزښتساحه(ارزښتورشو) و ټاکی، که صدق ولري:

الف- $f(0)=20\,;\,f(12)=32\,;\,x>0$ ب- $f(-3)=6\,;\,f(2)=-8\,;\,x\in[-3\,;\,3]$

دریم:

د f(x)کرښیزې تابع ګراف په 3 LE اوږدوالی واحده کیڼ لور

ته خوزیږي. د راکښل شوې کرښې د f*(x) مساوات څنګه دي؟

$$f(x)=\frac{5}{3}x-2 \quad D=\mathbb{R}$$

څلورم: د f(x) او g(x) توابع ورکړ شوې دي. د کوم ارزښت لپاره f(x) > g(x) صدق کوي؟

$f(x)=2x-3 \quad ; \quad g(x)=-0{,}5x+1 \quad x\in\mathbb{R}$

پنځم: یوه g(x)کرښه ورکړ شوې.. دا د یوې کرښې h(x) له خوا قطع کیږي. د h(x)مساوات وټاکی، که باور ولري: $g(x)=-3x+2$

الف- قاطع یا غوڅی دx محور سره . ب - قاطع(غوڅی) په x = -5 کې

شپږم:

یوه د پیل کرښه د $a_1=-0{,}125$ جګوالي سره و داسی کښنول کیږي. چې کرښه h د مساوات	$h(x)=-1{,}5(x-2)$;

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره دx په محور قطع کوي. راکښنه تشریح کړی او د راکښل شوې کرښې ګراف و کاږی.	

اوم: یوه $f(x)$کرښیزه تابع ورکړ شوې. کرښه د $x = u$ مساوات سره د $f(x)$ ګراف په P کې قطع کوي او د x محور په Q کې قطع کوي. یوه سکیڅې ترتیب کړی.

الف- د P او Q کواوردینات وټاکی، که $f(x) = 0,75x + 2$ وي.

ب- دu د کوم ارزښت لپاره P دx محور پورته لور ته پرته ده.

ت- $P(u \mid f(u))$ په 1 څلوری یا ربع کې پروت دی.$R(0 \mid 0)$, Q او P د یوه مثلث رآسونه (ککرټکې)جوړوي. د دې مثلث د مساحت A لپاره ترم وټاکی. u (محیط) داسې وټاکی، چې $A(u) = 10$ صدق وکړي.

اتم: دg کرښې ته موازي او عمود مساوات داسې وټاکی، چې له P ټکي تیر شي.

الف- $g: x + 2 - 3y = 0; P(0 \mid 3)$ ب- $g(x) = \frac{2}{3}x - 3; P(1 \mid 4)$

پ - $g(x) = -1{,}5kx; P(1 \mid 0)$

نهم: کرښه g له ټکوP_1 اوP_2 تیریږي. دh کرښې ته یې ځای مطالعه کړی او د امکان په حالت کې یې د قاطع ټکی معلوم کړی.

$$P_1(-1 \mid 1{,}5); P_2(-2 \mid -2{,}5) \qquad h: \ -x - 6 - 4y = 0$$

لسم: و ښایی: کرښه g او کرښه h عمود دي.

$$g: \ y - \sqrt{2}x = 1 \qquad h: -2y - \sqrt{2}x + 6 = 0$$

$$g(x) = -3x + 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يولسم:

د A, B او C ټکي د يوه مثلث د رآس ټکي دي. دk > 0 د کوم ارزښت لپاره دا مثلث قايم الزاويه (ولاړګوډيز) دی؟ (ښی رآس په C پروت دی)	$A\left(\sqrt{3k} \mid \frac{k}{3}\right); B\left(-\sqrt{3k} \mid \frac{k}{3}\right); C(0 \mid k)$

پوښتې

کرښيز توابع **XI**

لومړی-

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}; f_2(x) = -4x - 2; D = \{x \mid -9 \leq x \leq 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه له تابع f_1 (x) سره د دويمي کرښي د تابع(x) f_2 سره غوځيږي. وټاکی:

الف – د کواورديناتونو x_s او y_s سره غوڅټکی S .

ب – د دواړو کرښو غوڅټکي د y محور سره .

پ – د دواړو کرښو غوڅټکي دx محور سره .

ت - د دواړو توابعو ګراف په D کي .

دويم –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_1(x) = -\frac{2}{3}x + 4\,;\, D = \{x \mid 0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه له تابع $f_1(x)$ سره په ټکي $S(3 \mid y_s)$ کې د تابع $f_2(x)$ سره له کرښې څخه غوڅيږي.

وټاکئ:

الف-د S پوره کواودينات

ب-تابع $f_2(x)$.

پ-د دواړو کرښو غوڅټکي د کواوردينات محورونو سره.

ت-په D کې د دواړو توابعو ګراف.

دريم:

$$f_1(x) = -\frac{3}{8}x + 1;\, D = \{x \mid -7 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره په ټکي $S(-4 \mid y_s)$ کې کې له کرښې څخه د تابع $f_2(x)$ سره ، چې پروتمحور په 7- کې غوڅوي، غوڅيږي.

وټاکئ:

الف – د S پوره کواوردينات.

ب – تابع $f_2(x)$.

پ – د دواړو کرښو غوڅټکي د کواودينات د محورونو سره.

ت – د واړو توابعو ګراف په D کې..

څلورم –

د يوه درېکوڼي يا مثل ټکي P_1, P_2 او P_3 ورکړ شوي دي. د درېګوڼي د اړخونو تابع وټاکئ. پخوا له دې يو پلان نقشه ترتيب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف-

$$[P_1P_2] \triangleq f_1 ; [P_2P_3] \triangleq f_2 ; [P_1P_3] \triangleq f_3$$
$$P_1\left(-6 \,\middle|\, \frac{3}{2}\right); P_2\left(-2 \,\middle|\, -\frac{3}{2}\right); P_3\,(-4 \mid 3)$$

ب –

$$[P_1P_2] \triangleq f_1 ; [P_2P_3] \triangleq f_2 ; [P_1P_3] \triangleq f_3$$
$$P_1\left(6 \,\middle|\, \frac{3}{2}\right); P_2\left(2 \,\middle|\, -\frac{3}{2}\right); P_3\,(4 \mid 3)$$

پنځم -

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x + 3 ; P_2(-2 \mid -3) ; D = \{x \mid -6 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره د دويمې کرښې څخه د تابع $f_2(x)$ سره ، چې له ټکي P_2 تيريږي ، په ټکي S کې ولاړکونجيزه غوځيږي.

وټاکئ:

الف - د $f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ب- تابع $f_2(x)$.

پ – د دواړو کرښو غوڅټکی S .

ت - د دواړ کرښو محورغوڅټکي.

ټ - د دواړو کرښو ګراف په D کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

کرښيز توابع XII

لومړی -

$$f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 3\,;\, P_2(2\,|\,-3)\,;\, D = \{x\,|\,0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع f_1 (x) سره له يوې دويمې کرښې د تابع f_2 (x) سره، چې له ټکي P_2 تيريږي په ټکي S کې ولاړکونجيزه غوڅيږي.

وټاکۍ.

لومړی:

الف – د f_2 (x) جګوالی m_2 .

ب – تابع f_2 (x) .

پ - د دواړو کرښو غوڅټکی S .

ت - د دواړو کرښو د محورغوڅټکي.

ټ - د دواړو کرښو ګراف په D کې.

دويم –

د کرښې تابع f_2 (x) وټاکۍ، چې پروتمحور په P_{x2} کې غوڅوي او له کرښې څخه د تابع f_1 (x) سره په S کې غوڅيږي. د واړو کرښو غوڅټکي وشميرۍ او د دواړو کرښو ګراف په D کې رسم کړۍ.

الف-
$$f_1(x) = \frac{3}{2}x + 6\,;\, P_{x2}(-6\,|\,0)$$
$$S\left(x_s\,\middle|\,\frac{3}{2}\right);\, D = \{x\,|\,-6 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$$

ب -
$$f_1(x) = \frac{1}{2}x - 3\,;\, P_{x2}(4\,|\,0)$$
$$S(3\,|\,y_s)\,;\, D = \{x\,|\,-1 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

دريم -

$$P_1(-5\,|\,5)\,;\, P_2(-1\,|\,-1)\,;\, S(x_s\,|\,2)\,;\, D = \{x\,|\,-6 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع f_1 (x) سره له ټکو P_1 اوP_2 تيريږي او په ټکي S کې ولاړکونجيز له کرښې څخه د تابع f_2 (x) سره غوڅيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وټاکئ:

الف- د $f_1(x)$ جګوالی m_1 .

ب – تابع $f_1(x)$.

پ – دS پوره کواوردینات.

ت – د$f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ټ – تابع$f_2(x)$.

ث – د $f_1(x)$ او$f_2(x)$ ګرافونه

څلورم -

$$P_1(5\,|\,5);\,P_2(1\,|\,-1);\,S(3\,|\,y_s);\,D=\{x\,|\,0\le x\le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کربښه د تابع $f_1(x)$ سره له ټکو P_1 اوP_2 څخه تیریږي او په ټکي S کې ولاړکونجیزه له کربښې د تابع $f_2(x)$ سره غوځیږي.

وټاکئ:

الف – د $f_1(x)$ جګوالی m_1 . ب - تابع $f_1(x)$.

پ - د S پوره کواوردیناتونه ت – د $f_2(x)$ جګوالی m_2 .

ټ - تابع $f_2(x)$. د $f_1(x)$ او $f_2(x)$ ګرافونه.

پنځم -

$$f_2(x)=3x-3;\,S\left(\frac{3}{2}\,\middle|\,\frac{3}{2}\right);\,D=\{x\,|\,0\le x\le 6\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع $f_1(x)$ ګراف په ټکي S کې د تابع $f_2(x)$ له ګراف څخه ولاړکونجیزه غوځیږي.

وټاکئ:

الف - تابع $f_1(x)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب – د دواړو کرښو د محورونو غوڅټکي.

پ – د دواړو توابعو ګراف په D کې.

پوښتنې

XIII کرښيزې توابع برخه

لومړی -

$$f_2(x)=\frac{4}{5}x+\frac{9}{10};\ S\left(2\ \middle|\ \frac{5}{2}\right);\ D=\{x\mid -1\leq x\leq 4\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع(x) f_1 ګراف په ټکي S کې د تابع (x) f_2 له ګراف څخه ولاړکونجيز(قايم الزاويه) غوڅيږي.

وټاکی:

الف: تابع (x) f_1 .

ب – د دواړو کرښو د محورونو غوڅټکي.

پ – د دواړو توابعو ګرافونه په D کې.

$$g:\quad y-\sqrt{2}x=1 \qquad \Rightarrow g(x)=\sqrt{2}x+1$$

$$h:-2y-\sqrt{2}x+6=0\Rightarrow h(x)=-\frac{1}{2}\sqrt{2}x+3$$

د اورتوګوناليټي شرايط: $a_{1g}=-\frac{1}{a_{1h}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{1g} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1\cdot 2}{1\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\ \text{q.e.d}$$

دويم:

د دوه کرښنو توابع $f_1(x)$ او $f_2(x)$ ورکړشوي او د يوې دريمې کرښې جګوالی m_3 د تابع $f_3(x)$ سره. تابع $f_3(x)$ داسې وټاکئ، چې ګراف يې د نورو دواړو کرښنو غوښتکي څخه تير شي. د درېواړو کرښنو محور غوښتکي وټاکئ او د درېواړو توابعو ګراف په D کې رسم کړئ.

الف-

$$f_1(x) = -4x - 2;\ m_3 = \frac{1}{4}$$
$$f_2(x) = 2x + 4;\ D = \{x \mid -9 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

ب –

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4};\ m_3 = -4$$
$$f_2(x) = 2x + 4;\ D = \{x \mid -9 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

دريم: کرښه دتابع $f_1(x)$ سره له ټکي P_1 تيرېږي او له يوې دويمې کرښې چې له ټکي P_2 تيريږي په ټکي S کې غوځيږي. توابع $f_1(x)$ او $f_2(x)$ وټاکئ د هغو محورغوښتکي اوپه D کې يې ګراف وکاږئ.

$$P_1\left(-2 \,\middle|\, \frac{3}{2}\right); P_2(3 \mid 5); S\left(2 \,\middle|\, \frac{5}{2}\right); D = \{x \mid -8 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

څلورم:

$$P_1\left(-1 \,\middle|\, \frac{5}{2}\right); P_2\left(-3 \,\middle|\, \frac{11}{2}\right); D = \{x \mid -9 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کربنه د تابع $f_1(x)$ سره محور په 8- کې غوڅوي. $f_1(x)$ ته غبرګه یوه دویمه کربنه د تابع $f_2(x)$ سره پروت محور په 4- کې غوڅوي. دواړه کربنې له یوې دریمې کربنې چې تابع $f_3(x)$ لري او له ټکو P_1 او P_2 تیریږي په ټکو P_3 او P_4 کې ولاړکونجیزه(قایوم الزاویه) غوڅوي. وټاکئ:

الف- تابع $f_3(x)$ ب - تابع$f_1(x)$

پ – تابع $f_2(x)$ ت – د دریواړو توابعو ګراف په D کې.

پنځم:

$$A\left(-\frac{13}{2} \,\middle|\, -\frac{3}{2}\right); B(3 \mid 2); D=\{x \mid -8 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$$

د یوه قایوم الزاویه مثلث(ولاړکونجیز درې ګوډي) څخه، چې ولاړ کونج(قایم الزاویه) یې پهC کې پرته ده، ټکي A اوB ورکړ شوي. د مثلث اړخ یا ضلع [BC] د تابع $f_3(x)$ سره د اوردینات یا ولاړ محور په 3 کې غوڅوي.

وټاکئ:

الف- د اړخ [AB] تابع $f_1(x)$ ب- د اړخ یا ضلعې [BC]تابع $f_3(x)$

پ- د اړخ [AC] تابع $f_2(x)$ ت- د ټکي C کواوردیناتونه

ټ په D کې ګرافونه.

پوښتنې

کرښیزې توابع **XIV**

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: $A(-8|-6); C(-1|5); D=\{x \mid -8 \le x \le 2\}_{\mathbb{R}}$

له یوه قایمالزاویه مثلث، چې قایمه زاویه یې په B پرته ده، ټکی A او C ورکړ شوي دي. د مثلث ضلع (اړخ)[BC] د اوردینات محور (ولاړمحور) په 3کې قطع کوي.

دا وټاکئ:

الف-

د مثلث دري د ضلعو توابع. $[AB] = f_1$; $[BC] = f_2$; $[AC] = f_3$

ب- د B ټکي کواودینات یا وضعیه قیمت کې د ټکي B محورونه

پ -په D کې ګراف.

دویم:

$A(-4|-1); B(2|-4); D=\{x \mid -4 \le x \le 5\}_{\mathbb{R}}$

د یوه مثلث ټکيA او B ورکړ شوي دي. د مثلث [BC] ضلع دy محور په 12-کې قطع کوي; ضلع [AC] د x محور په 3- کې غوځوي.

دا وټاکئ:

الف-تابع $f_1(x)$ ضلع .[AB] قطع کوي

ب - تابع $f_2(x)$ ضلع [BC] غوځوي.

پ - تابع $f_3(x)$ ضلع [AC]

ت - د C ټکي وضعیه قیمتونه

ټ - د D ټکي وضعیه قیمتونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم: توابع $y = f(x) = 3x - 4$ او $g(x) = ax + 3$ورکړ شوي.

د دواړو توابعو ګرافونه په ټکي $S(3 \mid 5)$کې غوڅوي.

د$h(x)$ تابع مساوات داسې وکاږئ، چې ګراف په ټکي S عمود څغلي. په يوه وضيه قيمتسيستم کې درېواړه ګرافونه رسم کړئ.

څلورم:

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}\,;\; f_2(x) = -4x - 2\,;\; D = \{x \mid -10 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$$

د$f_1(x)$ تابع سره کرښه د دويمې کرښې د$f_2(x)$ تابع سره قطعه کوي.

دا وټاکئ:

الف- دS قاطع ټکی د x_s او y_s کواودينات سره.

ب - د دواړو کرښو د قاطع ټکي د x محور سره.

پ - د دواړو کرښو قاطع ټکي د x محو سره.

ت - د دواړو توابعو ګراف په D کې.

پنځم:

د $g(x)$ تابع ، چې په $f(x)$ عمود ده پيدا کړئ. د $g(x)$ ګراف د y محور په $P_y(0 \mid 3)$ ټکي قطع کوي. دواړه کرښې په يوه وضعيه قيمت سيستم(پروت ولاړ سيستم) کې رسم کړئ.

الف - $f(x) = -2x + 2$ ب - $f(x) = 3x - 6$

پ - $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ ت - $f(x) = \frac{3}{4}x - 3$

شپږم: د دواړو کرښو غوڅټکی (نقاط تقاطع) و ټاکئ او ګراف يې وکاږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - $f_1(x)=\frac{1}{4}x+2\frac{1}{4}\,;\,f_2(x)=-4x-2\,;\,D=\{x\mid -10\le x\le 1\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f_1(x)=-2x+2\,;\,f_2(x)=3x-6\,;\,D=\{x\mid -2\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f_1(x)=-\frac{2}{3}x+4\,;\,f_2(x)=\frac{3}{2}x-2\frac{1}{2}\,;\,D=\{x\mid -1\le x\le 7\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f_1(x)=-\frac{3}{8}x+1\,;\,f_2(x)=\frac{5}{6}x+5\frac{5}{6}\,;\,D=\{x\mid -8\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$

n -مه درجه ټول مات- یا راشنل توابع

n -مه درجه ټول راشن لفنکشن

يو تابع $f(x)$ د

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

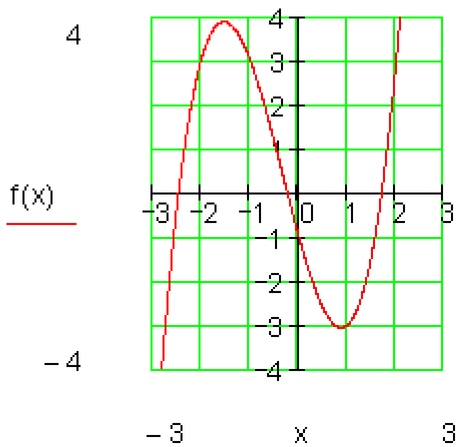
سره n -مه درجه ټول راشنل تابع بلل کيږي.

عددونه $a_n\,;\,a_{n-1}\,;\,a_{n-2}\,;\,\ldots\,a_2\,;\,a_1\,;\,a_0$ ضريبونه بلل کيږي.

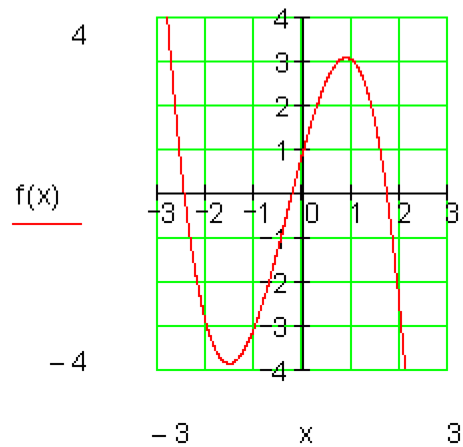
ټول راشنل یا هوښيار توابع د توان توابعو يوځای اينوولو له لارې لاس ته راځي.

بيلګې:

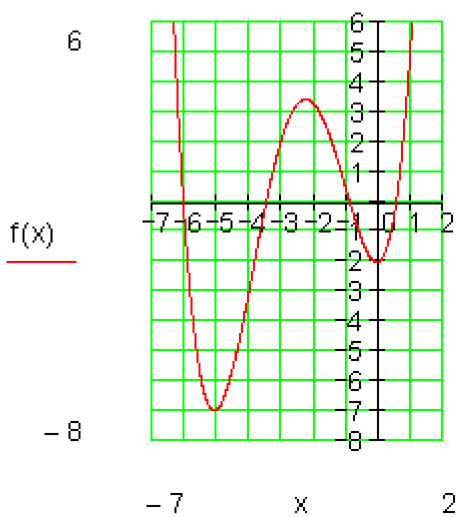
(c) ketabton.com: The Digital Library



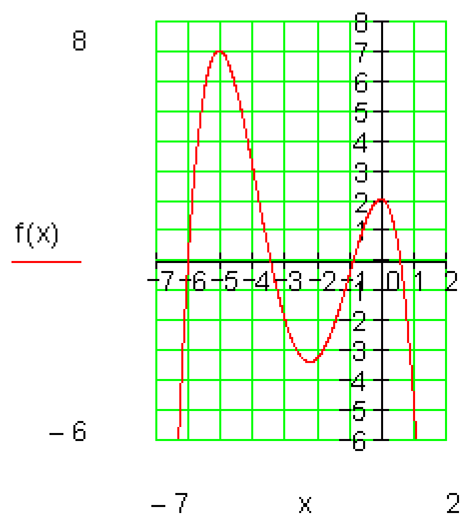
$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$



$f(x) = -x^3 - x^2 + 4x + 1$



$f(x) = 0,2x^4 + 2x^3 + 5x^2 + x - 2$



$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - x + 2$

د ګراف تلنه

جمله:
د ټول راشنل تابع ګراف تلنه د خورا جګ توان زياته ووني (د جمعي غړي) سره تاکل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

	n جوړه	n ناجوړه(طاق)
$a_n>0$	تلنه له II و I ته.	تلنه له III و I ته.
$a_n<0$	تلنه له III و IV ته.	تلنه له II و IV ته.

بيلګه: د الماي پينتو: ناجوړه(طاق) جوړه (جفت) ناجوړه

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 7 \qquad n = 3\,(\text{ungerade}) \wedge a_n = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - I}}$$

$$f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 7 \qquad n = 4\,(\text{gerade}) \wedge a_n = -2 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - IV}}$$

$$f(x) = -5x^5 + 2x^4 + 9 \qquad n = 5\,(\text{ungerade}) \wedge a_n = -5 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{II - IV}}$$

سيومتري

ګومان مو نږدې دی، هغه توابع، چې فقط د جوړه جګعددونو توانونو څخه يوځای شوي وي، محور سيومتريک دي او توابع چې فقط د ناجوړه(طاقو) جګعددونو توانونو څخه يوځای شوي وي، ټکی سيومتريک دي.

جمله

د يوه ټولراشنل تابع ګراف تيم هلته محورسيومتريک دی، که تابع مساوات فقط جوړه جګعددونه ولري.

د يوه ټولراشنل تابع ګراف ټيک هلته ټکيسيومتريک دی، که تابع مساوات فقط ناجوړه (طاق) جګعددونه ولري.

بيلګه:

$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$$

$$f(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x)^2 + 1 = 2x^4 + 3x^2 + 1 = f(x) \Rightarrow$$

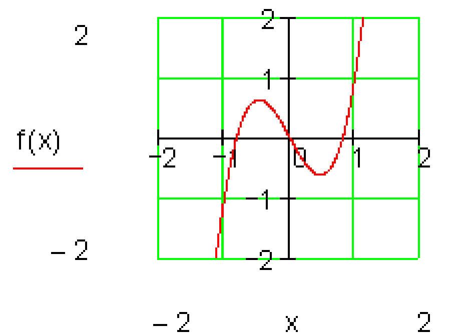
(c) ketabton.com: The Digital Library

محورسیومتریک

$$f(x) = 3x^3 - 2x$$

$$f(-x) = 3(-x)^3 - 2(-x) = -3x^3 + 2x = -(3x^3 - 2x) = -f(x) \Rightarrow$$

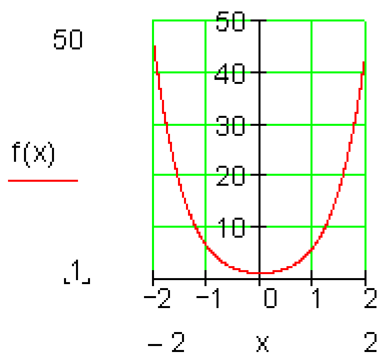
تکی سیومتریک



$f(x) = 3x^3 - 2x$

سرچینې ته سیومتریک دی

(تکی سیومتري)



$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$

yمحور ته سیومتریک دی

(محورسیومتریک)

تمرینونه:

د ټول هوښیارو توابعو خویونه.

د لاندې تاوبعو په سیمتری، تلنه او د صفرځایونو تعداد یا ګنون باندي ویناوې وکړی.

لومړی - $f(x) = 2x^2 - 1$ دویم - $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ريم - $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 + 2$ ځلورم - $f(x) = -x^5 - x^3 + x$

پنځم - $f(x) = x^6 - x^4 + 1$ شپږم - $f(x) = -\frac{1}{2}x^5 + x^2 - 2x$

اوم - $f(x) = \frac{1}{10}x^7 + \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x$ اتم - $f(x) = \frac{1}{100}x^{10} - \frac{1}{50}x^6 + \frac{1}{10}x^2$

نهم - $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{5}x - 1$ لسم - $f(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{1}{2}x$

پە یوه خوښه ټکي ته سیومتریک

که د یوه ټکي سیومستري تابع ګراف پە خوښه راکښل شي، نو سیومتري سرچینې ته ځي، چې موږ یې ټکی سیومتري بولو له منځه ځي. نسبت و موخېټکی ته دا ساتلې پاتې کیږي.

بیلګه:

د $f(x)=0,5x^3-1,5x$ تابع ګراف ټکی سیومتریک دی، یعنې سرچینې ته سیومتریک.

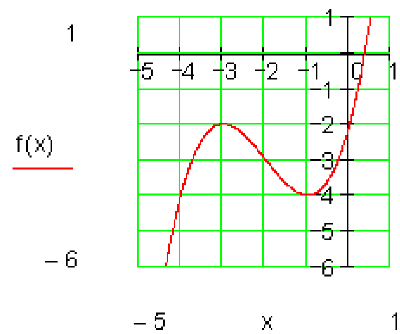
دا ګراف دې پە ۲ واحدونو یا یوونونو کیڼ لور ته او پە ۳ یوونونو یا واحدونو کښته لور ته راکښل شي.

د راکښلشوي ګراف تابع مساوات دي:

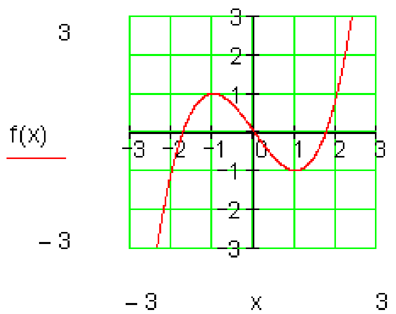
$$g(x) = 0,5(x+2)^3 - 1,5(x+2) - 3 = 0,5x^3 + 3x^2 + 4,5x - 2$$

$g(x)$ و ټکی $P_0(-2|-3)$ ته سیومتریک دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x) = 0,5x^3 + 3x^2 + 4,5x - 2$$



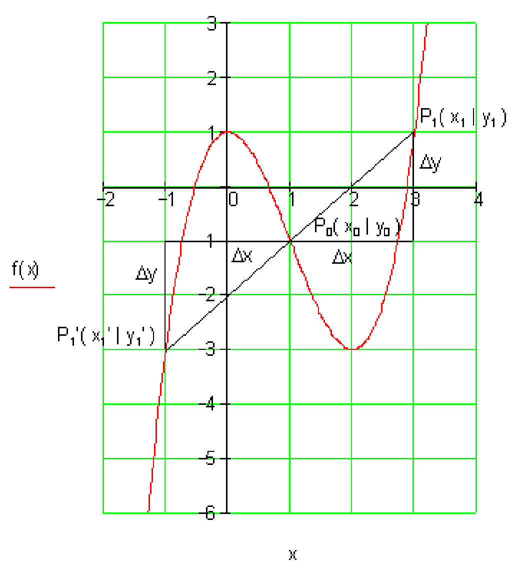
$$f(x) = 0,5x^3 - 1,5x$$

کواوردیناسیستم د ګراف په بڼه کوم رول نه لوبوي. تنها تابع مساواتوتغیر خوړلی.

د حالت بیلګه: باید وازمایل شي، چې ایا د دریمې درجې د یوه ټول هوښیار تابع ګراف یوه ټاکلي ټکی ته ټکی سیومتریک دی.

ترمخ راوړنه.

چمتووالی:



د ټکو کواوردینات لپاره باور لري:

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y$$

$$x_1' = x_0' - \Delta x$$

$$y_1' = y_0' - \Delta y$$

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

$$\Delta y = y_1 - y_0$$

د هنداره-یا منعکس شوي ټکو کواوردیناتونه:

$$x_1' = x_0 - (x_1 - x_0) = \underline{\underline{2x_0 - x_1}}$$

$$y_1' = y_0 - (y_1 - y_0) = \underline{\underline{2y_0 - y_1}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې قاعدې یا لار سره تل کېدی شي پهP_0 و P_1 ته یوه هنداروته یا انعکاسونه کې اړونده هنداروته P_1' وټاکل شي.	

بيلګه:

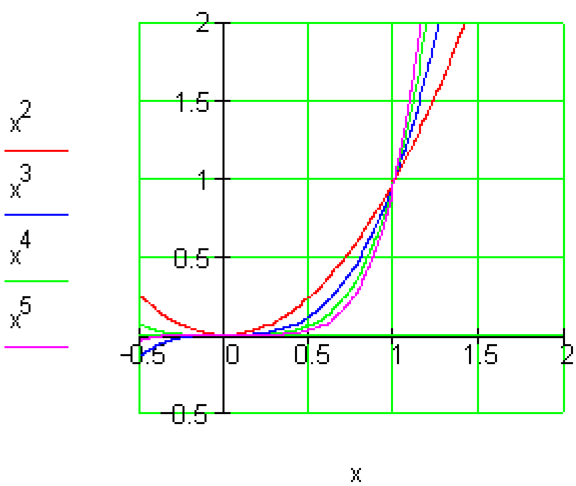
كه هنداورنه په ګراف نه وي پرته ، نو ګراف وP_0 ته ټکی سیومتریک نه دی.

پوښتني

تول مات- یا راشنل توابع I

د توانتوابعو خویونه

لومړی –

	دا ترخنګ په 1 . څلورمه کې ګراف تر څیرنې لاندې ونیسی د x ارزښتونو لپاره د 0 او 1 ترمنځ دجګو درجو یو د توان تابع ګراف پروت دی د یوه توان تابع د ګراف لاندې یا کښته د ټیټې درجې. د$x > 1$ لپاره دا ټیک برعکس کېدونکي دي. د دې حالت لپاره لایل راوړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم – د دريمې درجې توان تابع كراف دې په دوه واحده كينې لور ته او ترلى په درې واحده پورته لور ته و كښل شي.

د دې راكښل شوې تابع مساوات لپاره دې د تابع مساوات وركړ شي.

دريم –

د څلورمې درجې توان تابع گراف دې په درې واحده ښى لور ته او پسې ترلى دې په دوه ضريبه وغزول شي.

الف – د راكشل شوي گراف لپاره تابع مساوات وركړئ

ب – وښايئ، چې گراف نه محور – او نه ټكي سيومتريک دی.

څلورم –

په كوم توان تابع $f(x) = x^n$ كې ټكى په گراف اړه لري؟

د دې توان توابعو مساوات وركړئ.

الف - $P(-3 \mid -27)$ ب - $P(-2 \mid 16)$ پ - $P(0{,}5 \mid 0{,}25)$ ت - $P\left(\frac{1}{3} \mid \frac{1}{27}\right)$

ټ - $P(0{,}1 \mid 0{,}0001)$ ث - $P(-1 \mid 1)$ ج - $P(-2 \mid 8)$ چ - $P\left(\frac{3}{4} \mid \frac{81}{256}\right)$

پنځم –

د لاندې توان توابعو سيومتري او د گراف تلنه وټاكئ او د هر يوه ارزښتدېرى(ارزشتست) او درجه وركړې.

الف - $f(x) = 4x^3$ ب - $f(x) = -160x^2$ پ - $f(x) = -1500x$

ت - $f(x) = \sqrt{2} \cdot x^6$ ټ- $f(x) = 5$ ث - $f(x) = -25x^5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم –

لاندې تابع مساوات د پولینوم په بنه انځور کړی.

هر ځل یې درجه ورکړی.

الف - $f(x)=(x-2)^2-4x^3$ ب- $f(x)=4(x+5)^3+(x-2)(x+2)$

پ- $f(x)=2x^3-(x-1)^2$ ت - $f(x)=(x-4)(x+1)^2$

ټ - $f(x)=(x^2-4)(x^3-x^2+4)$ ث - $f(x)=\frac{x-5}{8}(x-2)+\frac{3}{4}x^2$

اوم -

دلیل راړی:

د یوه ناجوړه(طاق) درجې ټولراشنل تابع ګراف دx محور لږ ترلږه په یوه ځل غوځوي.

دا هلته هم باور لري که درجه جوړه یا جفتوي؟

پوښتنې

ټول راشنل توابع II

سیومتری او تلنه

لومړی – و څېړی، چې ایا f(x) یو ټولراشنل تابع دی. په ورکړشوي حالت کې د تابع ګراف، درجه او د ضریبونو $a_0; a_1; a_2; \ldots an$ ارزښتونه ورکړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - $f(x)=2$ ب - $f(x)=4x$ پ - $f(x)=2^x$ ت - $f(x)=\frac{x^3-4x}{8}$

ټ - $f(x)=\sqrt{3}x^4$ ث - $f(x)=\frac{1}{x}$ ج - $f(x)=\sqrt{x}$ چ - $f(x)=\left(x-\sqrt{3}\right)^2$

ح - $f(x)=\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$ خ - $f(x)=16x^3-2x^2+5x^2-4$

دویم – د لاندې ټولراشنل توابعو څخه کوم یې محور سیومتریک او کوم یې ټکی سیومتریک دي؟

الف - $f(x)=x^4-6x^2+5$ ب - $f(x)=x^3+3x+1$ پ - $f(x)=(x-2)(x+2)$

ت - $f(x)=x^6-6x^2+\sqrt{3}$ ټ - $f(x)=(x-2)^3(x-1)$ ث - $f(x)=x^4-\sqrt{5}x^2$

ج - $f(x)=\left(2x^4+2x^2+5\right)x$ چ - $f(x)=\left(x^2-2x+3\right)(x+1)(x-1)$

ح - $f(x)=1-3x^2+x^6$

دریم – د c متحوله داسې وټاکئ، چې د تابع ګراف ټکی سیومتریک او همداسې محورسیومتریک شي.

الف - $f(x)=x^3+4x+c$ ب - $f(x)=(x-c)(x+4)$ پ - $f(x)=x^5+x^c$

ت - $f(x)=x^3\left(x^2-cx\right)$ ټ - $f(x)=c+x^3$ ث - $f(x)=4x^3+x^2+cx^2+5x$

څلورم : د لاندې توابعو د ګراف تلنه معلومه کړئ.

الف - $f(x)=2x^5-6x^3$ ب - $f(x)=-4x^4+3$

پ - $f(x)=2x-5$ ت - $f(x)=-2x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ - $f(x)=4x^4-3x^2+4x-5$ ث - $f(x)=-6x+3$

ج - $f(x)=4x^4+3x^3-6x^5$ چ - $f(x)=-2x^5+6x^3$

پنځم - د لاندې توابعو د ګراف تلنه او سیومتري ورکړی.

الف - $f(x)=\sqrt{3}x^2-\sqrt{5}x^4-2$ ب - $f(x)=x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(8-\frac{1}{2}x\right)$

پ - $f(x)=5x^6-4x^4+5$ ت - $f(x)=x^5+x^3-2x$

ټ - $f(x)=5$ ث - $f(x)=\left(x^2-25\right)\left(x^2+6x+9\right)$

ج - $f(x)=x^5+4x^4+4x^3$ چ - $f(x)=\left(4x^2-4\right)\left(x^3+8x^2+16x\right)\left(x^3+27\right)$

ح - $f(x)=-3$ خ - $f(x)=-x^5+x^3-2$

شپږم : د لاندې تابعو صفرځیونه وشمېرئ:

الف - $f(x)=(x-4)(x-2)(x+1)$ ب - $f(x)=(x-4)(-x+2)$

پ - $f(x)=x(x+5)^2$ ت - $f(x)=3(x-4)^3(x+2)$

ټ - $f(x)=(2x-4)(x+3)x^3$ ث - $f(x)=x^3-2x^2$

د ټولراشنل توابعو محور غوڅښتکي (د محور د تقاطع نقطی)

د ټولراسنل توابعو محور غوڅښتکي (د محور د تقاطع نقطی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د y محور سره غوڅيکی $P_y(0|y_s)$: $P_y(0|y_s)$ شرط: $y_s = f(0)$

بيلګه : د يا په معنا

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 3 \Rightarrow f(0) = 3 \cdot 0^4 - 2 \cdot 0^2 - 3 = 0 - 0 - 3 = -3$$
$$\Rightarrow P_y(0|-3) \text{ oder } P_y(0|f(0))$$

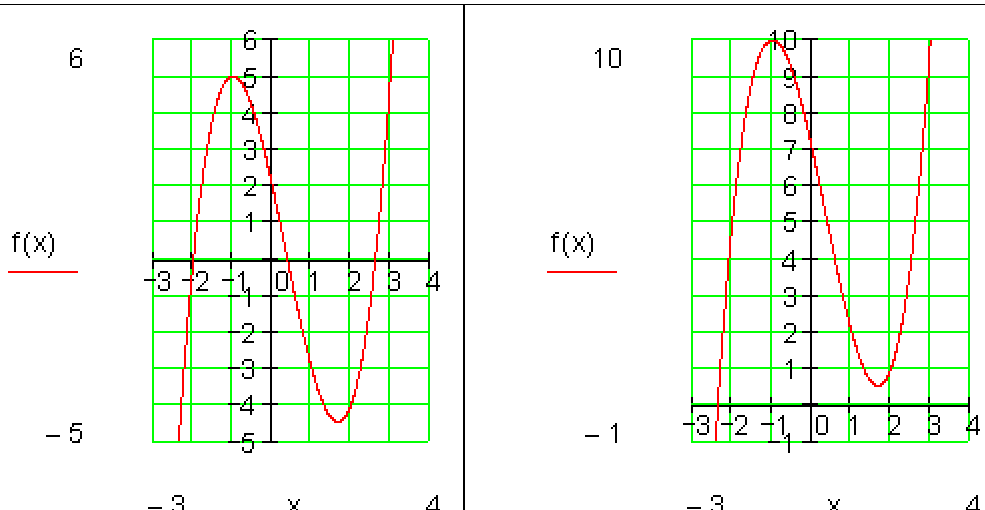
د P_y د y کواوردينات تل د ضريبونو a_0 سره کتمټ ده.

دا تل د تابع مساوات څخه لوستل کيدی شي.

د x-محور سره غوڅيکی $P_y(x_s|0)$ صفرځای : شرط: $f(x) = 0$

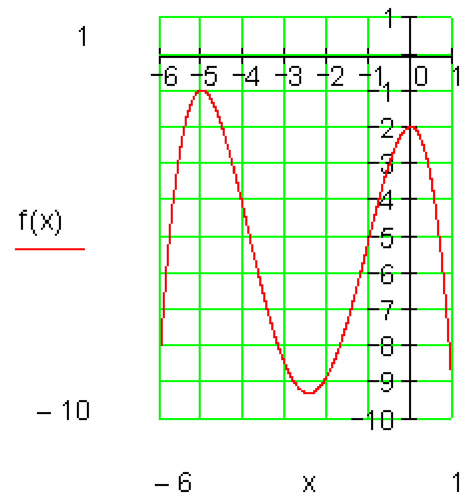
د مربع تابع (د دويمي درجې ټولراشنلتابع) څخه بوهيږو، چې دا دوه ، يو ، يا هيڅ صفرځايونه لرودی شي. دا د جګ درجو ټول راشنلتابع سره څنګه دی؟

بيلګه:



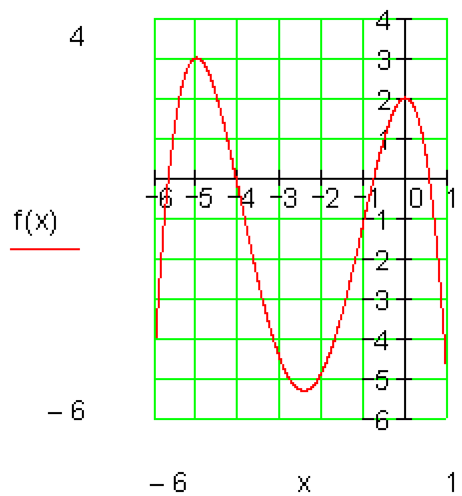
$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$	$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 7$
دري صفرځايونه لري	صفرځای نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 0,2x - 2$$

د صفرځای نه شتون



$$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 0,2x + 2$$

خلور صفرځايونه لري.

جمله:

يو د n -مي درجې پولراشنل تابع زيات له زياته n صفرځايونه لري.

كهn جوړه وي، نو دا لږترلږه يو صفرځای لري.

د صفرځايونو شميرنې لار(تګلار)

د فکتوري کونو يا ضربيونو تګلار:

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x = 0$$

فاكتور x له نوكانو راوتلی شي.

$$\Leftrightarrow x\left(2x^2 - 2x - 4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

او په نوكانو كې افاده يا ويينه صفر دى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

مربع مساوات دی.

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \,|\, : 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$p = -1;\; q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

صفرځایونه :

$$x_1 = 0;\; x_2 = 2;\; x_3 = -1$$

د x محور سره غوڅتکی

$$P_{x1}(0|0);\; P_{x2}(2|0);\; P_{x3}(-1|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x) = \underbrace{2x(x+1)(x-2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x$$

(پورته) د کرښيز ضريبونو ضرب

د بدلون قانون substitution:

يادونه: په دې معنا چې د يوې اووښتونې يا متحولې لپاره بله متحوله ځا په ځای کوو.

$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ بې مربعيز(بي ځلوريز) مساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون: $x^2=z$

$$\Rightarrow f(z) = z^2 - 13z + 36 = 0 \quad p = -13 \quad q = 36$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36 = \frac{169}{4} - \frac{144}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} z_1 = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9 \\ z_2 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = 4 \end{array} \right.$$

بدلون په څټ- یا بیرته ګرځوو:

$$x^2 = z_1 = 9 \,|\, \sqrt{\ } \qquad x^2 = z_2 = 4 \,|\, \sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow |x| = \sqrt{9} \qquad |x| = \sqrt{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = -3 \qquad x_3 = 2 \quad x_4 = -2$$

د x محور سره غوڅټکی

$$P_{x1}(3|0);\ P_{x2}(-3|0);\ P_{x3}(2|0);\ P_{x4}(-2|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x) = \underbrace{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

د کرښیز ضریبونو ضرب

پوشتنې

محور غوڅټکي او د تېولراشنل یا ماتتوابعو ګرافونه II

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د درېمې درجې يو تولهوښيار يا ــراشنل تابع سرچينې سره سيومتريک ده، که

الف- له ټکو $P_1(1|2)$ او $P_2(3|-2)$ څخه تيره شي.

ب- که کرښه g د $g(x)=3x$ سره پارابول په $P(0|0)$ کې لمس کړي.

دويم: تابع $f(x)$ د پيژندورشو يا تعريف ساحې $D = IR$ سره ورکړ شوې ده. تابع $f(x)$ په سيومتري وڅېړی، صفرځايونه وشميرئ او ګراف وکاږئ.

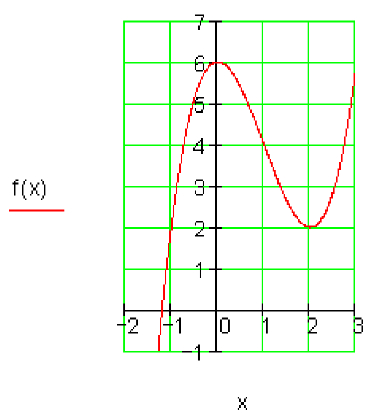
الف — $f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2$ ب — $f(x)=x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x$

پ - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+5$ ت - $f(x)=\frac{1}{48}x^3-x$

ټ - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x$ ث - $f(x)=\frac{1}{5}x(3-x)(x+1)$

ج - $f(x)=\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{4}x-1\right)^2$ چ = $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{4}x^2-6x+\frac{9}{2}$

درېم: تابع $f(x)=x^3-3x^2+6\,;\,D=\mathbb{R}$ ورکړشوې ده.

الف - وښايئ: د $f(x)$ صفرځای د (1- ; 2-) ترمنځ پروت دی مدلل کړئ، چې $f(x)$ تيک يو صفرځای لري، دا ګراف بايد ښکه راکښل شي، چې له هغې سره دا تيک دوه صفرځايونه ولري؟ ب- کرښه $x = u$ د $f(x)$ ګراف په ټکي Q او د x محور په P کې غوڅوي. د لاندې درېګوډي يا مثلث 0PQ سطحه د $u = 2$ لپاره وښايئ. د مثلث د (خوندي) سطحې ترم د u په واکوالي کې د $u > 0$ لپاره ورکړئ. $g(x)$ څومره صفرځايونه د $g(x)=3.f(x)$ سره لري؟ دلايل يې راوړئ.	

څلورم: تابع $f(x)=5x^3-10,8x+4$ ورکړ شوې ده. وښاى: $x=0,4$ يو صفرځای دی. پسې نور صفرځايونه وشميرئ.

$f(x)=5x^3-10,8x+4\,;\,D=\mathbb{R}$

پنځم: د اووښتونې يا متحولې c په واکوالي کې د صفرځايونو تعداد وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2cx \,;\, D = \mathbb{R}$$

$$x^2 + 2x + 2c = 0 \Rightarrow p = 2 \,;\, q = 2c \Rightarrow D = 1 - 2c$$

$$\text{für } D > 0 \Rightarrow 1 - 2c > 0 \Leftrightarrow c < 0{,}5$$

$$\text{für } D = 0 \Rightarrow 1 - 2c = 0 \Leftrightarrow c = 0{,}5 \Rightarrow x_{2/3} = -1$$

$$\text{für } D < 0 \Rightarrow 1 - 2c < 0 \Leftrightarrow c > 0{,}5$$

$$\text{für } c = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \,;\, x_3 = -2$$

اړیکې:

د $c > 0{,}5$ لپاره f(x) تیک یو صفرځای لري:($P_x(0 \mid 0)$

د $c = 0{,}5$ یا د $c = 0$ لباره(f(x تیک دوه صفرځایونه لري.

د$c < 0{,}5$ او c د صفر سره نامساوي لپاره f(x) تیک درې صفرځایونه لري.

پوښتنې

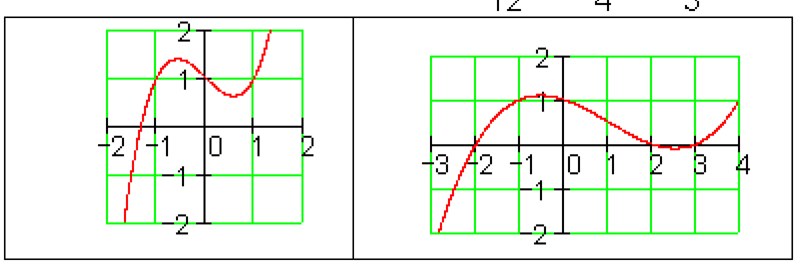
د ټول راشنل توابعو محور غوځتکي او ګرافونهIII

تابع په یوه ګراف تنظیمیږي.

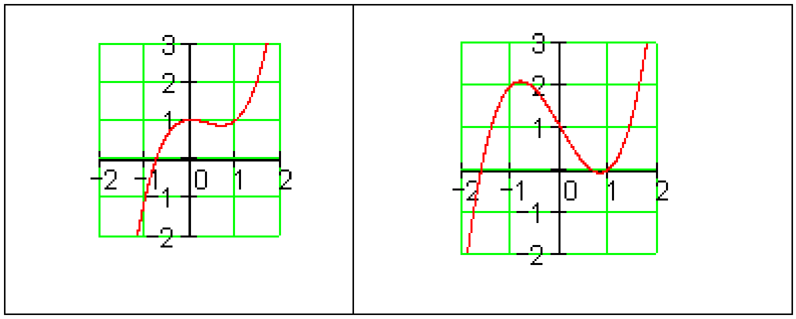
لومړی: هر د یوه تابع ترم سره تنظیم کړی او خپله پرېکړه په دلیل کلکه کړی.

$$f_1(x) = x^3 - x + 1;\; f_2(x) = x^3 - 2x + 1$$

$$f_3(x) = x^3 - x^2 + 1;\; f_4(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$$



(c) ketabton.com: The Digital Library



دويم: هر هغه څوک چې د لايسنس اخستلو لپاره ځان چمتو کوي، بايد وپوهيږي، چې د يوه بريک وهونکي موټر تمکيدني واټن په يوه وچ پاخه سرک)چې طبعاً بايد هوار وي) د عکسالعمل لار او د بريک لار څخه يوځای جوړه ده. د لاندې د موټي قانون يا لار(د درې ګوتو) څخه کيدی شي د چټکتيا v په km/h د عکسالعمل لار r او د بريک لار b په متر وشميرل شي.

د بريک لار: $b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ همداسې $b = \frac{\left(\frac{v}{10}\right)^2}{2}$ ، د عکس العمل لار: $r = \frac{v}{10} \cdot 3$

د المان د3.3.04 راپن اخبار د اول له جولای1. Juli 2004 په وچ سره د تمځای لار په بل بريکلار شميرل کيږي.(په افغانستن کې به داځنګه وي ؟نه پوهيږم)

الف- تابع مساوات s = f(v) وټاکی، د کوم سره چې د هرې تلنې د چټکتيا يا سرعت تملار شميرل کيدی شي.

ب – د لاندې تلل شوی چټکتيا v = 0, 10, 20, 30, ... 50 km/h لپاره په يوه ارزښت جدول کې د هغه هر يوه تمځای s سره يوځای کړی

پ – له دې سره د (60 ... 100 km/h) لپاره دs يو ځونور ارزښتونه وشميری او د دې تابع ګراف وکاږی.

ت – د نوې بريک نيولو قانون(المانی) سره دا تراوسه شميرل شوې ارزښتونه وشميری او دا په همغه کواوديناټ سيستم کې وکاږی او توله نتيجه په شننه يا کومنتار سره روښانه کړی.

دريم: داتابعورکړ شوې: $f(x) = x^3 - 0,5x^2 - 3x + 1,5\,;\, D = \mathbb{R}$

الف- وښايی: $f(x) = 0,5(2x-1)(x^2-3)$

ب –ګراف د شوونتيا تر پولې ټيک وکاږی.

پ – د x د کوم ارزښتونو لپاره f(x)>0 باور لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

شننیزه ځمککچپوهنه یا تحلیلي هندسه:

تحلیلی هندسه(وکتورهندسه هم) د هندسې یوه برخه ده، چې د هندسې پرابلمونو د حل د پاره د الجبري مرستندوی موادو (په ټولیزه توګه له کرښیز الجبر) څخه جمتو کوي. دا په ډېرو حالتونو کې ممکن کوي، چې ځمککچیزې پوښتنکونې سوچه شمیرنیز حل کړی شو، بې له دې چې لیدونې یې مرستې ته راوبولې یعنې چې شکل څنګه برېښي یا دی.

۱۶ - د سطحې شننیزه (تحلیلي) هندسه

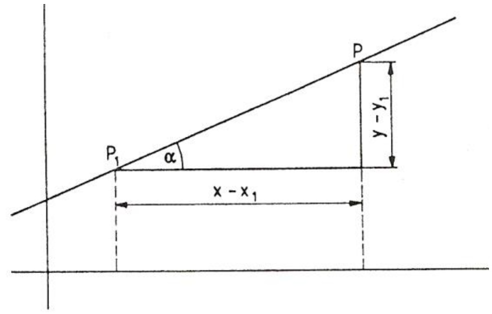
په دې برخه کی یوڅود تحلیلي (شننیزې یا سپړنیزې) ځمککچپوهنې یا هندسې ټاکلې پرابلمونه څېړل کیږي.د تحلیلي هندسې بنسټیزه تګلار به څرګنده (وښول) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شکلونو او ددې په شننیزې یا تحلیلي څرګندونویی د هندسي خویونو جوړښت بنایي.

۱۶ . ۱ کرښه

د هندسي ټاکندو ټوټو له لارې مختلف امکانات شته دی، چې یوه کرښه یواځنی کره تعین کړای شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د کرښبرابرونونو یا - مساواتو مختلفی بڼی شته دی. یوه کرښه د یوه ټکي او د هغه د لور(سمت) له لارې ټاکل کیدي شي . (ټکی او د ټکی میلان معلوم دی) .

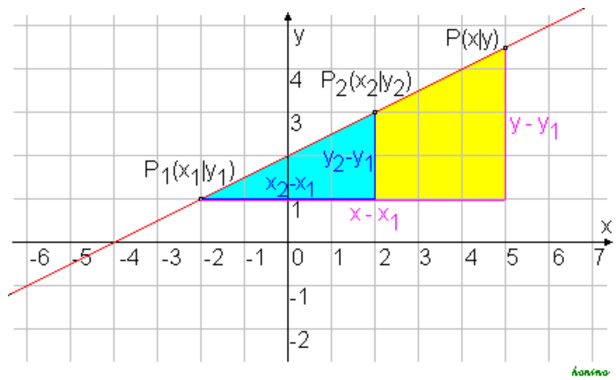
دلته دې(P1(x1 , y1دا ټکي وي. $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ دې د جګیدو کونج،وي، چې د کرښی لور ټاکي (خ ۱۶ . ۱) او(P(x,y په کرښه یو اووښتونی (واریابل) ټکی دی٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



نو د کرښی د میلان $\tan\alpha = m$ لپاره باور لري: $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

(پورته ځیره دې وکتل شي(لانديې ځيره هم په همدې موخه کښل شوې ده))



له دې ځخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1); \text{.....................} (16,1)$$

پورته د کرښی ټکی لوربرابرون

که د y په محور P1وټاکل شي د کواوردیناتو x1= 0, y1 = b سره، نو له (۱۶ . ۱)سملاسي په لاس راځي: (y - b = m (x - 0 په همدې ډول(⇔)

$$y = mx + b \qquad (16 . 2)$$

دا پورته برابرون د کرښمساواتونورمال فورم (بڼه) بلل کیږي

یوه کرښه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دوه ټکي دي(P1(x1 , y1 او(P2 (x2 , y2 وي، د x1|=x2 سره ، (څیره ش ۱۶ . ۲) د جګیدونکی یا تنجنت $\tan\alpha = m$ لپاره داسی دي:

m = (y - y1) /(x -x1)

او

m = (y2-y1)/(x1-x2) = (y2-y1)/(x2-x1)

له کومو چی لاس ته راځي

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x \ \ - x_1};..................(16,3)$$

پورته د کرښی دوه ټکیزبرابرون

څیره ده

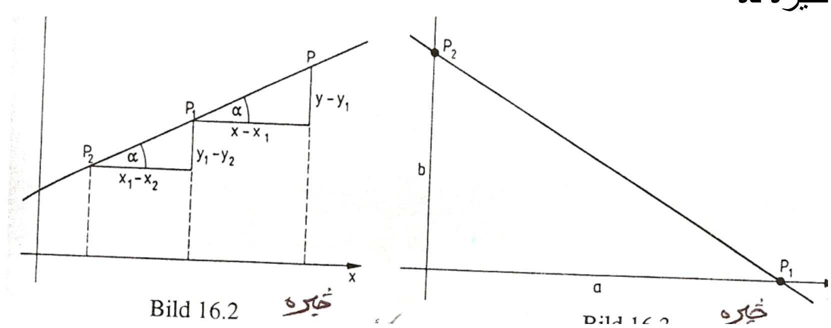


Bild 16.2 څیره

Bild 16.3 څیره

که د x - محور باندې د P1 ټکی ، د کواوردینات x1 = a |= 0 , y1 = 0 سره وټاکو او ټکیP2 دy- محور باندې د کواوردینات x1= 0, y2 = b|= 0 سره وټاکو، نو له (۱۶ . ۳) لاس ته راځي:

(y - 0) / (x - a) = (b - 0)/ (0 - a)

او له دې دا لاندې لاس ته راځي:

$$x/a+y/b = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (16,4)$$

پورته د کرښو د غوځي برابرون

څلور پورتنی کرښمساوات ټول په x او y کی لاینیز دي.د مساوات عمومي فورم)یا ټولیزه بنه (داسی دئ:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (16 . 5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرښبرابرونونو ټولیزه بڼه(عمومي فورم)
دا فورم په ځانګړې توګه دا برابرون هم خوندي لري یا په بر کی نیسي
$y = y0$ ($A = 0$,$B|=0$)
او($x=x0(A|=0,B=0$ چی د x - محور اوپه همدې ډول د y - محور ته غبرګي کرښي دي، په داسی حال کی چی تراوسه دومه لا نه ده څېړل شوې

بیلګه ۱۶ . ۱:

د کرښی برابرون یا لاینیز برابرون، چی له(P(-2 , 3 ټکي تیریږي او د جګوالي کونج $\alpha = 30°$ یی د $m = \tan\alpha \frac{1}{3}\sqrt{3}$ له امله، د (۱۶ . ۱) سره سم داسی لیکل کیږي $y - 3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x+2)$

او نورمال فورم یي په لاندې ډول دی

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + (3 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$$

بیلګه ۱۶ . ۲ :

د لاینیزبرابرون یا دکرښوبرابرون په ټکو(P1 (3/2 ,-2 او(P2(1 , -4کی د (۱۶ . ۳)سره سم په لاندې ډول دي:

$$\frac{y+2}{x-\frac{3}{2}} = \frac{-y+2}{1-\frac{3}{2}}$$

له دې لاس ته راځي: $y + 2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}(x - \frac{3}{2})$

نو نورمال فورم $y=4x-8$ لرو(**اته** ناسم، په ځای یې شپږ دي)

بیلګه ۱۶ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

کربښه د y =-(3/2)x+1 برابرون سره د y - محور په(P1(0,1 ټکي کی غوڅوي او جګوالی یی 2/3 - دی ، دا په دې مانا چی د x - ارزښت تغیریدل په یو دy - ارزښت په 2/3 - تغیروي، په دې ډول دوم د کرښي ټکی لاس ته راځي. د بیلګی په توګه p2 (0+1 , 1-(3/ 2)=p2(1,-1/2)

(ښیره ۱۶ . ۴ لاندې کښل شوې)

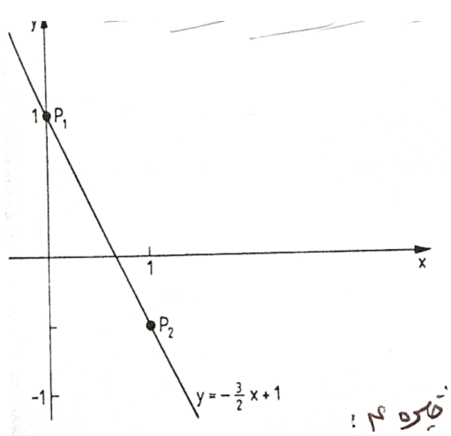
بیلګه ۱۶ . ۴ :

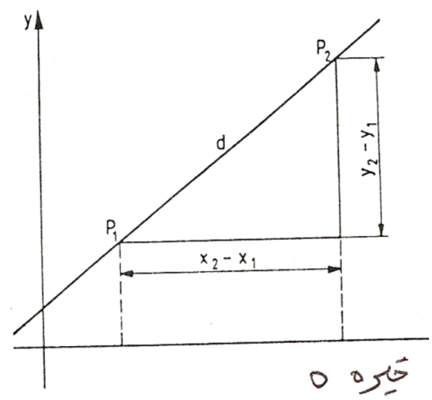
د کرښی د برابرونونو عمومي فورم x-2y-6 = 0 څخه دغوڅیدو فورم لاس ته راځي
x / 6 + y / 3 = 1
کرښه دکواوردینات محورونه په دې ټکو(P1(6 , 0), P2(o,-3 کې غوڅوي۰
په یوه کرښه د دوه ټکو(P1(xx,y1),P2(x2,y2ترمنځ فاصله (که د کرښي واټن P1P2
d = وي د پیتاګوراس(فیساغورس) له جملی (ښیره . ۱۶ . ۵) داسی ده

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2};.........................(16,6)$$

پورته د ټکو P1 او P2 ترمنځ واټن

ښیرې ۱۶ . ۴ او - ۵





بیلګه ۱۶ . ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

د درېګوډي ABC د اړخونواوږدوالی، چی کونجټکي یی دادي(-)A(3,1),B
1,1),C(2,5، په لاندې ډول دی

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37} = 6,08$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

دوه کرښي (نه کڼمټی) چی (یو د بلی سره) غبرګي نه وي ټيك یو غوځټکی لري. دا چی دا ټکی په دواړو کواور دیناتو پروت دی ، نو د دواړو کواوردیناتو برابرون باید پوره کړي . په دې حالت کي د غوځټکي کواوردیناتو، د دوه لاینیزو برابرونونو سره چی دوه اوښتونې یا

ناپیژندونکی (مجهولی) ولري، د یوه سیستم یواځنی کره اوبیونه ترې لاس ته راځي. په ټولیزه توګه دا باور لري: که یو برابرونسیستم چی د دوه کرښو د برابرونونو څخه جوړ وي، او یو یواځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښي یو بل په دې ټکي کی سره پرې کوي.
که ناپای ډیرې اوبیونې شته وي، نو په دې حالت کی برابرون همغه یوه کرښه ښایي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښي یوبل سره غبرګي ځغلي (پرتله ۱۱ . ۱ . ۲)

بیلګه ۱۶ . ۶ :

د g1 : y = 3x-2 کرښی پروتځاي (موقعیت) د لاندې کرښو
الف) g2: -2x+y = 1,
ب) g3: 3x -y=5, ,
پ) g4 : -x+(1/3)y=-2/3
سره څیړو
اوبیونه : د g1 برابرونونو څیره داسی بدلیږي : 3x-y=2
الف) د برابرونونو سیستم 3x-y=2، -2x+y=1
ټيك یوه اوبونه لري: x1=3 , y1=7
ددې څخه څرګندیږي چی ټکی(S(3 , 7 د کرښو g1 او g2 غوځټکی دی .
ب) د برابرونونو سیستم

3x - y = 2

3 x - y = 1

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوبی نه لري : برابرونونه يو بل ردوي يه نه زغمي . د g1 او g2 کرښې يو د بل سره غبرګي دي

پ) د برابرونونو سيستم 3x-y=2

-x+(1/3)y=-2/3

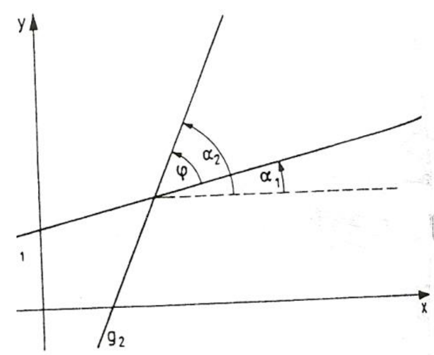
ناپای ډير ې اوبيونې يا حلونه لري. برابرونونه يو بل سره برابر يا يو بل ته ورته دي. که په ۳ ضرب شي يو همغه پورته برابرون ترې لاس ته راځي .

g1 او g2 دوه کټ مټ برابرونونه دي ٠

که د دوه کرښو

g 1 : y = m1x + b1 g2 : y = m2x + b2

غوڅکونج ϕ ټاکو، نو د دواړو کرښو جګيد کونجونو $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ کمون (کمښت يا توپير)جوړوو (ځ ۱۶ . ۶)



ځېره ۱۶ . ۶

د کرښی له برابرونونو پوهيږو $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$

د زياتون تيورم (بنسټيزه جمله) (برخه ۶ . ۵) ځخه د $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$ لپاره (پر تله برخه ۴ . ۵) باوري ده

$$\tan\phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan\alpha_2 - \tan_1)/(1 + \tan\alpha_1 . \tan\alpha_2)$$

د کوم ځخه چی د $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$ سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 . m_2};........................(16,7)$$

پورته د دوه کرښو غوڅکونج دير.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې پورې اړه لري چې ایا $\phi > 0 \vee \phi < 0$ د پورته خبرې ۱۶ . ۶ کونج پڅ او که تیره دی.

بیلګه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو g1:y=x-1او g2:y=(7/4)x+1 غوڅکونج لپاره له (۱۶ ، ۷) څخه لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{\frac{7}{4}-1}{1+1.\frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15,255°$$

د g1 او g2 ترمنځ پڅکونج په دې ډول دی : $180-\phi = 164,745°$

د دوه کرښو یو بل ته ځانګړي حالتونه:

۱ – کرښی یوبل سره غبرګی ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180° \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1+m_1.m_2} = 0$$

ګورو چې د m2 - m1 = 0 لپاره باور لري، نو m2 = m1

(دلته باور لري : $m_1.m_2 = m_1^2 \neq -1$)

۲ - کرښی یو په بل (نیغی) ولاړې دي، نو لرو

$$\phi = 90° \Rightarrow \tan\phi = (m-m)/(1+m.m) = \infty$$

دا حالت د 1+m1.m2 = 0لپاره منځ ته راځي،

یعنی دm2= -1/m1 لپاره (m1|=0,m2|= 0)

په کرښه(y=y0 (m1=0 باندې کرښه(x=x0(m2=oe نیغه ولاړه ده

د غبرګوالی لپاره شرطونه

m2 = m1 (16, 8)

د اورتوګونالیټی Orthogonalität(یو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

m2 = -1 / m1   (16 . 9)

بیلګه ۱۶ . ۸ : دکرښی g2 برابرون دې وټاکل شي چی له ټکي(P (2,-1 تيريږي، او له کرښی g1 : y = -2x +1 سره الف (غبرګه او ب(اورتوګونال (نيغه) څغلي اوببونه:

الف) د g2 کرښی ميلان (جګوالی m2 = m1 = -2) دی. پام (۱۶ . ۱) ته دکرښي g2برابرون لپاره باور لري : (y+1=-2(x-2 همداسی y = -2x +3

ب) د g2 کرښي ميلان ياجګيدنه ده m2=-1/m1=1/2 د(۱۶ . ۱) سره سم د g2 کرښي برابرون دی: y+1=(1/2)(x-2) <=> y=(1/2)x-2

بیلګه ۱۶ . ۹ :

د کرښی برابرون ټاکل کيږي چي د(P1(1/3,-1/6 ټکی تيريږي او په کرښه چی له ټکو(P2(-1,1 او(P3(-2,-1 تيريږي، ولاړه وي.

ځواب : کرښه چي له P2 ,P3 ټکو تيريږي، و (۱۶ . ۳) ته په پام لاندې برابرون لري (y-1)/(x+1)=(-1-1)/(-2+1) = 2 <=> y = 2x +3

په دې کرښی د (عمودي) ولاړې کرښی ميلان يا جګوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د p_1 څخه تيريدونکی کرښي برابرون د m_2 ميلان سره د(۱۶ . ۱) له مخی دي:

y+(1/6)=-(1/2)(x-173) <=> y=-(1/2)x

بیلګه ۱۶ . ۱۰ :

د g1:2x-y-1=0او g2: 3x+2y=5 کرښو د غوڅټکي S واټن له ټکي(P(6,13څومره دی او د کرښي برابرون څنګه دی چي د کواوردينات له سرچينی تيريږي او د S او P څخه تيريدونکی کرښه باندې ولاړه کرښه وي؟

ځواب : د غوڅټکي کواوردينات د لاندې برابرونونو سيستم څخه لاس ته راځي

2x-y=1

3x+2y=5

يعنی: xS=1 , yS=1

د S او P ټکو ترمنځ واټن له (۱۶ . ۶) څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d = \sqrt{(1-6)+(1-13)^2} = 13$$

د (۱۶ . ۳) له مخی د کرښي برابرونونه چی له S او P تیریږي دي

(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1)<=>y=(12/5)x-7/5

(جګوالی: (m = 12 / 5)

له S او P تکو تیریدونکی کرښه باندې د ولاړې کرښي میلان

m2 = -1/m = -5/12

د (P0 (0,0ټخه تیریدونکی کرښه د m2 میلان سره د (۱۶ . ۱) له مخی لاندې برابرون لري

y-0=-(5/12)(x-0)<=> y=-(5/12)x

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ . ۷ تمرینونه

۱ – د هغو کرښو مساوات و ټاکئ، کومې چې له P_1 ټکي تیریږي او د x–محور سره کونج α جوړوي

a) $P_1(2,-3)$, = 30º, b) $P_1(-3,2)$ = 45º

c) $P_1(-1,-4)$, = 120º , d) $P_1(4,4)$, = 0º

e) $P_1(0,0)$, =150º , f) $P_1(1,-1)$, = 90º

۲ –د ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو P_1 او P_2 تیریږي

a) $P_1(0,0)$, $P_2(3,3)$, b) $P_1(-3,3)$, $P_2(0,0)$,

c) $P_1(1,4)$, $P_2(-3,-4)$, d) $P_1(1,2)$, $P_2(-1,1)$,

e) $P_1(0.1.-1)$, $P_2(-0,1,-3$, f) $P_1(1,-1)$, $P_2(4,-2)$!

۳ – د محورونو غوڅي(لنډ : محورغوڅي) a,b د کرښې مساوات په نورمالفورم وټاکئ او همداسې د غوڅټکو واټن d د محورغوڅټکو سره٬چې یو له بل یې لري وټاکئ.

a) a = 5 , b = 2 , b) a = -1 , b =3 , c) a = 2 , b = -3 , d) a = -3 , b = -3

۴ – یو دریګوړی دا لاندې ګوړټکی لري A(-4,-1) , B(2,-2), C(1,3) . د هغو کرښو مساوات څنګه دي، په کومو چې د دریګوړیو اړخونه پراته دي او معلوم کړئ چې د دریګوړي اړخونه څومره اوږده دي؟

۵ – د لاندې کرښمساواتو نورمالفورم او برختوټینه یا –فورم څنګه دی؟

a) 3x -5y +15 = 0 , b) 4x -3y -18 = 0

c) -4x +2y -10 = 0 , d) -3x -4y +15 = 0 ?

۶ – د کرښې $y = -(12/5)x + 2$ پروتخای د کرښو

a) y+2,4x - 6 = 0 , b) 28x +10y = 0 , c) 8x + 5y =2,

d) 5y +12x -10 = 0 . e) y +(12/5)x = 3 , f) 6x +2,5y = 5

سره وڅیړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – د لاندې کرښو د غوڅټکو کواوردیناتونه او غوڅکونج وټاکئ.

a) $2x + 3y = 7$, $3x - y = 5$,   b) $y = (1/2)x + 1$, $y = -2x + 6$,   c) $y - x = 7$, $y = 7$,

d) $x/3 - y/2 = 1$, $-x/2 + y/3 = 1$,   e) $6x - 2y + 10 = 0$, $y = 3x + 6$,   f) $y = 4x - 1$, $y = -3x + 5$!

۸ – کومه کرښه د کرښی $x - y = 4$ ، کرښی $3x + y = 8$ او برسیره پر دې له غوڅټکی P(0,5) څخه تیریږي ؟

۹ – د لاندې ګوټ A(-4,-1), B(2,-2), C (1,3) سره د دریګوډي دننه کونجونه څومره لوي دي ؟ (پیلونه: دریکونجی وکاږی)

۱۰ – د ولاړپریوتي کرښي یا زوړندې مساوات له ټکی P(2,0) څخه په کرښه $y = 2x + 1$ څنګه دی؟

۱۱ – د ولاړکرښی مساوات په کرښه $y = 2x + 1$ باندې په ټکي P(-1,-2) څنګه د

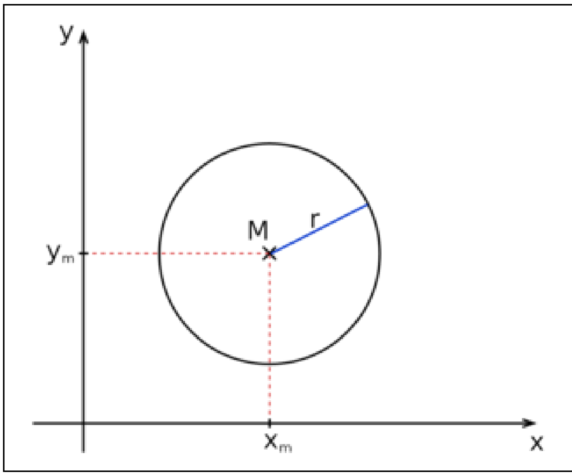
۱۲ – د کرښې $y = 2x + 1$ سره د غبرګې کرښې مساوات چې له ټکي P(-1,-3) تیریږي، څنګه دي؟

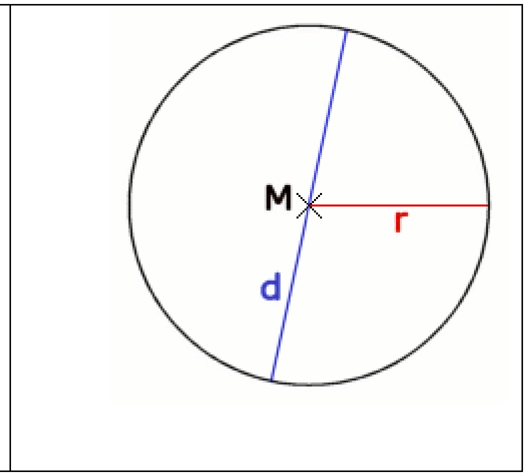
۱۶ . ۲ گردی (داېره)

داېره(گردی) د ټولو هغو ټکو ډیری(سټ) ده، چی د یوه کره ځای په ځاي ټکي ، داسي په نامه منځټکی څخه ، همغه واټن ولری. واټن ته یی وړانگه وایو او په rیی په نخښنه کوو.
فورمال داسې ویل کیږي یا دا پیژند ورکوو، چې داېره (گردی) k د د سطحې (هوارې) E د ټولو ټکو ډیری(سټ) ده،د کومو لپاره چې باور لري:

$$k = \left\{ X \in E \mid |\overline{MX}| = r \right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





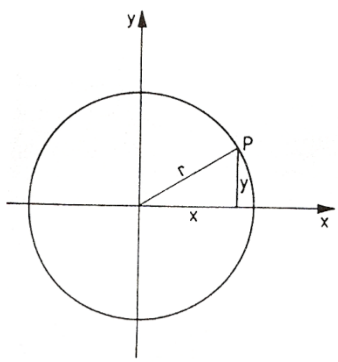


Bild 16.7 څېره

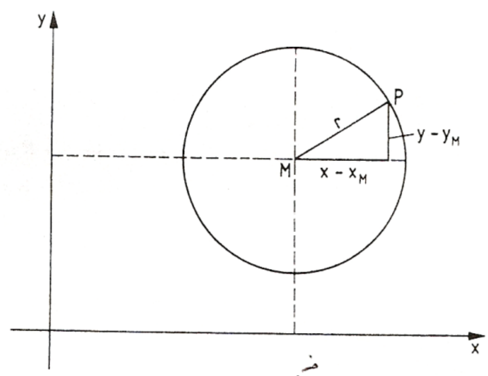


Bild 16.8 څېره

په شننيزه هندسه کې کيدی شي، چې ګردی د منځټکي $M(x_m,y_m)$ او وړانګې r سره (په هواره کې) د لاندې برابرون له مخې انځور شي.

$$(x-x_m)^2+(y-y_m)^2=r^2$$

پورته د ګردی ټولیز برابرون

دا برابرون د پېژند او پیتاګوراس له جملې سملاسي ورکوي
د يوې ګردی ځانګړې حالت او د کواوردیناتسیستم سره، چې منځټکی يې د کواوردينات په سرچينه پروت وي لاس ته راځي

$$x^2+y^2=r^2$$

که د ګردی منځ ټکی د کواوردیناتسیستم (څيره ۱۶ . ۷) په سرچينه پروت وي، نو د (پیوتاګوراس د جملې له مخې (د ګردي په خوښه ټکي P(x,y) لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16 . 10)$$

د ګردۍ منځټکي برابرون چی د ګردي منځټکی(M(0,0او وړانګه r ده.

که د ګردي منځټکی M کواوردینات (xM,yM) ولري (ځیره ۱۶ . ۸) نو د ګردۍ د خوښی ټکي P(x) لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د ګردي د منځټکي برابرون وي د منځټکي $M(x_M,y_M)$ او وړانګي r سره

که په (۱۶ . ۱۱) کې د بینوم مربع وې شمیرو او برابرون په A|=0 فاکتور ځلوو (بی له دې چی د ګردي برابرون تغیر وعمومي) ، پس پیژندل کیږي چی د ګردیبرابرون د ځلورۍ یا مربع غړي په x اوy کی په فاکتور A لاینیز برابرون په x او y او ثابت غړي (چی یوه غړي په ځیري سره یوځاي شوي) لاس ته راوړو.

نو دا لاندې ټولیز(عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2+Cx+Dy+E = 0 . A |= 0 \quad (16 . 12)$$

د ګردي برابرونونو(مساواتو) ټولیز فورم یا ټولیزه بڼه ۰
که د ګردي برابرون په ټولیزه بڼه یا عمومي فورم ورکړشوي او که منځټکی او وړانګه یی ځرګنده کوو یا معلوموو نو د ګردي برابرون د منځټکي فورم باندې راوړو یا را اړوو. دا د ځلورۍ پوره کولو یا مربع تکمیلولو په بنسټ صورت نیسي . دوه ځیرې پورته وګورۍ

بیلګه ۱۶ . ۱۱ :
د ګردۍ برابرون دې په ټولیزه - یا عمومي توګه وي:
$$2x^2+2y^2 +4x-12y = 0$$
له دې لاس ته راځي، که په دوه وویشل شي $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

(د ځلورۍ پوره کونه یا مربع تکمیلونه) $x^2-4x+4+y^2-6y +9 = 3+4+9$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دبينوم د مربع له لارې انځورونه $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$
ګردی منځټکی $M(-2,3)$ او وړانګه $r=4$ لري.

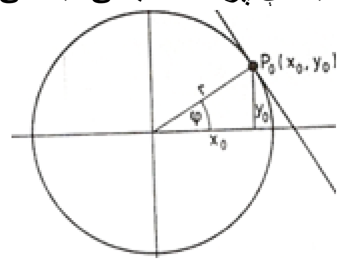
بیلګه ۱۶ . ۱۲ :
د ګردی برابرون ولیکی چی منځټکی یی $M(2;0)$ وي او په کوم چی ټکی $P(6,4-3)$ روت دی؟
اوبیونه : د $M(2,0)$ سره (۱۶ . ۱۱) داسی دئ
$(x-2)^2 + y^2 = r^2$
د P ټکی د ګردی برابرون پوره کوي $(6-2)^2 + (4-3)^2 = r^2$
له دې څخه د ګردئ وړانګه په لاندې ډول لاس ته راځي: $r = 8$ او له دې سره د ګردئ برابرون:
$(x-2)^2 + y^2 = 64$
ګردئ او کرښه یو بل ته درې مختلف ځایونه لرودی شي
۱ - کرښه ګردی غوڅوي، نو له دې امله غوڅی ده(سیکانتې)
۲ – کرښه ګردئ په یوه ټکي کی لمسوي یعنی مماس دی (تانجنت یا جګوالی)
۳ - کرښه ټوله له ګردی دباندې پرته ده (له ګردئ تیریدونکی، لنډ : تیرېدونې)
د غوڅټکي(د تقاطع ټکي) کواوردینات باید د ګردئ اوکرښی برابرون پوره کړي سرې د کرښي برابرون د ګردئ په برابرونونو کی ږدي(y یا x پسی حل یا اوبئ شوي) او په روښانه ډول یو مربع مساوات (څلورئ برابرون) په x او y کی لاس ته راوړي، کوم چی په څرګند ډول (پرتله برخه ۱۲ . ۲) دوه ریل اوبیونې یا ځوابونه لري، یو رییل ډبل اوبی او یا هیڅ رییل اوبی کیدی شي ولري، کوم چی له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ څخه عبارت دي.

بیلګه ۱۶ . ۱۳:
کوم پروت ځایونه ګردی k چی راکړشوی: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ اولاندې کرښی و یو بل ته لري؟
$g1: 2x+y=4, g2=2x+y=12, g3: -x+y/2=3$

اوبی: $g1: y=-2x+4$ که د ګردئ برابرون کی ځاي کړو نو دا برابرون لاس ته راځي
$(x-2)^2+(-2x+4-3)^2=5 \Leftrightarrow 5x-8x=0$
ددې ځوابونو $x=0, y=4$ او $x=8/5, y=4/5$ سره به g1 د ګردي غوڅوونی یا سکانت (Sekant) وي.
که $g2: y=-2x+12$ د ګردي مساواتو کی ځاي کړو نو لاندې لاس ته راځي
$(x-2)^2+(-2x+12-3)^2=5 \Leftrightarrow x^2-8x+16=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډېل اوبونې $x_{1,2} = 4$, $y_{1,2} = 4$ سره g2 یو تانجنت دی.
که $g3 : y=2x+6$ د ګردی مساوات کی ځاي کړو، نو لاندې لاس ته راځي:
$(x-2)^2+(2x+6-3)^2 \Leftrightarrow 5x^2+x+8=0$
دا څلوری برابرون یا مربعمساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه g3 له ګردی k دباندې پرته ده، یعنی دباندنی یا دباندونی ده.



په ګردي $x^2+y^2 = r^2$ (څېره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرون په ټکی $P0(x0,y0)$ د مساوات $x0^2+y0^2 = r^2 > 0$ سره غوښتل کیږي. تنجنت د مماس په وړانګه نیغ ولاړ دی

د مماسوړانګه دا میلان یا جګوالی لري $\tan\phi = \frac{y_0}{x_0}$ او

له دې امله د (۱۶ . ۹) له مخی د تنجنت

$m = 1/\tan\phi = -x_0 / y_0;..........(16,13)$

د تنجنت یا جګي برابرون د (۱۶ . ۱) سره سم لاس ته راځي:

$y-y=-(x0/y0)(x-x0) \Leftrightarrow xx0+yy0=x0^2+y0^2=r^2$

$$xx_0+yy_0 = r^2 \qquad (16.14)$$

د ګردی تنجنت باربرون په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ په ګردي
$x^2+y^2 = r^2$

(حالتونه $P0(\pm r,0)$ او $P0(0,\pm r)$ په (۱۶ . ۱۴) کی ځاي (دننه) دي.
(څېره . ۱۶ . ۱۰)

(c) ketabton.com: The Digital Library

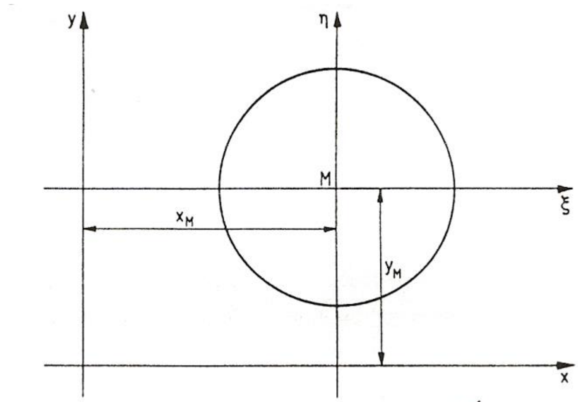


Bild 16.10

یادونه : که له دې مخ ته یا وروسته x0,y0 یا xM,yMاو x_0, y_0 یا x_M, y_M ګورو نو کټمټ دي

بیلګه ۱۶ . ۱۴:

د دوه تنجنتو برابرون له ټکي(P1(-12,4 په ګردي $x^2+y^2=r^2$ په څه ډول دي؟
اوبیونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټکی پیداکوو. دا باید دګردئ برابرون پوره کړي . ټکی P1 باید په تنجنت پروت وي یعنی د تنجنت برابرون (۱۶ . ۱۴) باید پوره کړي. نو باور لري

$x_0^2+y_0^2 = 16$ او $-12x_0 + 4y_0 = 16$

که دا لاینیزبرابرون د y0 په لور حل شي ، نو په x0 کي یو څلورئ برابرون یا مربع مساوات لاس ته راځي

$x_0^2+(3x_0+4)^2 = 16$

همداسي $5x_0^2+12x_0=0$د اوبیونو $x_{01}=0\ ,\ x_{02}=-12/5$سره. داهم په دې پورې اړه لري

$y_{01}=4\ ,\ y_{02}=-16/5$

د تنجنت مساوات په ګردې، په ټکو(P01(0,4او(P02(-12/5,16/5-د (۱۶ . ۱۴) له مخی په لاندې ډول دي

$0.x+4y=16 \Leftrightarrow y=4$

او

$(-12/5)x-(16/5)y=16 \Leftrightarrow y=(-3/4)x-5.$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګردۍ مساوات (۱۶ . ۱۱) د منځنټکي M(xM,yM) سره د η,ζ -کواوردینات سیستم کی ، چی سرچینه يي په M کی پرته ده)(؟ څیره ش . ۱۶ . ۱۰) لاندې فورم لري۰

$$\zeta^2+\eta^2=r^2$$

د تنجنت مساوات په ټکي $P_0(\zeta_0,\eta_0)$ کی داسی دي

$$\zeta\zeta_0+\eta\eta_0=r^2;....................................(16,15)$$

د η,ζ -کواوردیناتسیستم د y,x - کواوردیناتسیستم یو غبرګ کښوول (راکښل) دي، او د دواړو کواوردیناتسیستم کی لاندې اړیکی پرتی دي ۰

$$\zeta=x-x_M,\eta=y-y_M;...........................(16,16)$$

که برابرون (۱۶ . ۱۶) د تنجنت مساواتو(۱۶. ۱۵)کی ځاي په ځاي شي، نو سړی بیا دا د y,x -کواوردینات سیستم ته ترانفورمیرکوي(کشوي یا راکاږي) :

$$(x-x_M)(x_0-x_M)+(y-y_M)(y_0-y_M)=r^2 \quad (16.17)$$

په ټکي(Po(x0,y0 کی د ګردۍ تنجنت برابرو په ګردۍ

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$$

بیلګه ۱۶ . ۱۵:

په ګردۍ چی برابرن $x^2+y^2+16x+4y+43 = 0$ لري، د x - محور باندې، په ټکو

$$x_1 = x_2 =-5$$

سره تنجنت وکاږو(کیږدو). برابرون یی څنګه دي؟

اوبیونه : د ګردۍ برابرون د منځنټکي فورم (۱۶. ۱۱) باندې بدلیږي:

$$x^2 +16x+64+y^2-4y+4 = -43+64+4$$

$$(x+8)^2 +(y-2)^2 = 25$$

او له دې لاس ته راځي

$$x_M = -8 , y_M = 2 , r = 5$$

د ګردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه

$$x_1 = x_2 = -5$$

د دواړو ګردۍ ټکو په ګردیبرابرون کی ځایوو:

$$(-5+8)^2+(y-2)^2=25$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې داسې لاس ته راغلي دy لپاره ځلورې‌برابرون یا مربع مساواتو د دواړو اوردیناتو
مماس ټکي لاس ته راځي : $y1 = 6$, $y2 = -2$
د (۱۶ . ۱۷) سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي
$(x+8)(-5+8)+(y-2)(6-2)=25 \iff 3x+4y=9$
او
$(x+8)(-5+8)+(y-2)(-2-2)=25 \iff 3x-4y=-7$

تمرینونه:

۱۳ – د لاندې مساواتو سره ګردیمنځټکي او وړانګه وټاکئ:

a) $x^2 + y^2 = 20$ b) $x^2+y^2 +2x -4y + 1 = 0$

c) $x^2+y^2 9y = 0$, d) $4x^2 +4y^2+32x-8y+67 = 0$

e) $36x^2 +36y^2 -36x +24y -23 = 0$, f) $x^2+2x+y^2+2y = 16$!

۱۴ – د لاندې ګردیو مساوات وښیی

الف) چې منځ ټکی $M(-2,-1)$ لری او له سرچینی تیریږي

ب) هغه چې دري ټکی $P_1(3,0)$, $P_2(5, 5 -3)$, $P_3(5 \,؛3,-1)$ یی د غاړو ټ

پ) چې وړانګه $r = 6$ لري او له ټکو $P_1(-1,11)$,$P_2(5,5)$ څخه تیریږي.

ت) له ټکی $P_1(3,4)$ تیریږي او کرښه $y = -(4 / 3)x + 13$ په ټکي $P_2(4,3)$ لمسوي.

ټ) چې منځ ټکی $M(2,2)$ لري او کرښه $y = -(4 / 3)x +13$ لمسوي.

ث) چې د هغې منځټکی په کرښه $y = 3x -19$ پروت دی او له ټکی $P_1(7,-2)$ او همداسې له ټکي $P_2(11,2)$ څخه تیریږي.

۱۵ – کوم پروتخایونه ګردی k چې فرمول لري $x^2+y^2-8x = 0$ او لاندې کرښې یو له بل سره لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $g: y = 2x + 1$, b) $g: y = x$, c) $g: y = x - 1$,
d) $g: y = 4$, e) $g: y = -x - 3$, f) $g: y = x - 3$?

۱۶ – کوم پروتخاي کرښه $3x + 4y = 25$ ګردی $x^2 + y^2 = 25$ ته لري؟

۱۷ – د تنجنت مساوات څنګه دی

الف) په ټکي $P_0(5, y_0)$ چې په ګردی $x^2+y^2 = 169$ پروت دی،

ب) په ټکي $P_0(x_0, -2)$ چې په ګردی $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ پروت دی؟

۱۸ – د هغو ګردیو منځتکي پیداکړی چې وړانګه یې $r = 5$ وي، کومې چې کرښه $3x + 4y = 9$ په ټکي $P_0(-1, 3)$ کی لمسوي!

۱۹ – په ګردی $x^2 + y^2 = 25/4$ د هغه تنجنت مساوات وټاکی، کوم چې د کرښي $y = (4/3)x + 2$ سره غبرګ څغلي؟

فنکشنونه(بلواك يا تابع)

د فنکشن کلیمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چی ددې برخی په پیل کی دی کلیمي ته د لوستونکو پام راوګرځوم: د فنکشن کلیمه کله د یواځنی څیرونی، چی په هندسه کی خورا ډیره کارول کیږي یا استعمالیږي ، کله د بلواك او بیا زیاته د فنکشن په نامه څموږ په دې کار کی بلل شوې چی موږ ورسره تراوسه د تابع د نامه لاندې هم بلد یو، څما په اند یا فکر که دا موږ څیرونه وبولو، نو موخه ور یا هدفمند به مو نومولی وي او تابع خوبې له هغې بلواک دی. په لاندې کي به وګور چی خپلواکی او بلواکی ناپیوندونکی څموږ د څیرلو متن جوړوی

پیژند ۱۵ . ۱:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې ريیلی واريابلی (اووښتونې يا متحولې) Rريیل ارزښته فنکشن(لنډ: فنکشن يا ځيرونه) د ريیلو ګڼونو ډيرى باندې ، د يوې ډيرى $D \subseteq R$ يوه يواځنى ځيرونه ده. D دپيژند ډيری نوميږي .

د ټولو ارزښتونو ډيرئ چي y يې د ځان لپاره غوره کولی شي، که د x پيژندډيری يا تعريف ډيري په دننه کې وځغلي، د ارزښت ډيری W بلل کيږي .

د دې قانونمندی f له مخی هر $x \in M$يواځني يوه $y \in W$ باندې تنظيميږي يا ځيره کيږي :

$$y = f(x)$$

اوس نو x خپلواك واريابل يا اووښتونی يا مجهوله بلل کيږي يا نوميږي او y بلواك واريابل يا اووښتونی بلل کيږي، له دې امله تابع، چي موږوايو، د ځيرونې هغه ځيره شوې خوا ده. (د فنکشن يا ځيرونې او تابع يا بلواک توپير)

د فنکشن مختلف انځورډولونو په منځ کې سرې توپيروي. د دې کليمه انځورونه کې له ماتماتيکي يا شميريز سومبوليك څخه تيريد شو،خو ، مګر ددې لپاره يو پيچلی، د تشريح شکل دی، چی

په لاندې کي به ورسره بلد شو.

بيلګه ۱۵ . ۱ : هر ريیل ګڼ د همغه ريیلګڼ په نيم ور زيات ۱ باندې تنظيميدل يا ځيره کيدل..

بيلګه ۱۵ . ۲ : هر يو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر يو مثبت ګڼ او صفر به د هغه په مربع تنظيم شي.

د شميرپوهنی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحليلي (شننيزه) انځورونه د بلواک يا فنکشن تشريح ده. دلته x او y د نورو ريیلو ګڼونو سره د بنسټيزو کارونو يا عمليو ، زياتون، کمون ، ځل ، ويش ، او د بنسټيزو فنکشنونو له لارې ترل دي (پرتله برخه ۱۵ . ۴)

بيلګی ۱۵ . ۱ ته: y=(x/2)+1, D=R , W=R

بيلګی ۱۵ . ۲ ته :

د x<0 لپاره y=|x|
د x>0 لپاره $y=x^2$
دلته D=R,W = [0,oe)

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام دې وي چې په داسې حالت کې له کيڼ و ښي لور ته يا ګډوډ لوستل کيږی يعنی داسی لولو:
x دy مطلقه ارزښت سره مساوي دی ، که چيرې x له 0 کوچنی وي.

داسې ليکنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چی له اشتباه سره به نه مخامخ کيږو) .   تحليلي(شننيزه) انځورونه اکسپليځيت(واضح)روښانه و څرګند) explizit نوميږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بيلګو ۱۵ ، ۱ ۱و ۱۵ . ۲ چی په يوه د y په لور حلکيدونکي فورم مخ ته پروت وي: y =f(x)
که چيرې داسي نه وي نو د تحليلي - يا شننيزې انځوروني شکل F(x,y)=0 دی او فنکشن ايمپليځيت (ورسره ځای شوي يا وراسره تړلی implizit) بلل کيږي يا نوميږي . د بيلګی په توګه به   2y-x-1=0 ,D=R,W=R فنکشن د بيلګي ۱۵ . ۱ يو ايمپليځيت انځورونه وی. ديوه فنکشن نه هره ايمپليځيت شنينيزه بڼه (ايمپليځيت تحليلي فورم) کيدی شي په اکسپليځيت شننيزه يا سپړنيزه بڼه (تحليلي فورم) واړول شي.
د بيلګی په توګه:
که $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اکسپليځيت حل کيدونکی نه دی.
د يو فنکشن تحليلي يا شننيزې انځورونی ځانګړې بڼه پارامتری څرګندونه ده. دلته تنظيم   د يوه مرستندوي اووښتونې يا واريابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لاربښوديږي. هر پارامتر (له يوه پارامتر ساحی څخه)
$x = \varphi$ (t) , y = Ψ (t)

په يو ارزښتجوړې x,y تنظيميږي.

بيلګه ۱۵ . ۱ ته: x=2t ,y=t+1; -oe< t <oeبه يوه پارامتري انځورونه وی او x = t , y = t/2 + 1 به يوه بله پارامتري انځورونه وي.
زيات وخت فنکشنونه د جدول په څير ورکول کيږي

بيلګي ۱۵ . ۱ته:

X ....-2	-1	0	1	2	....
Y 2	0,5	1	1,5	2	.....

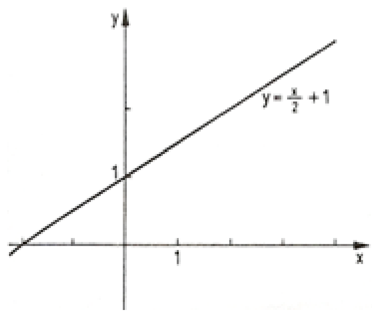
بيلګي ۱۵ ، ۲ ته:

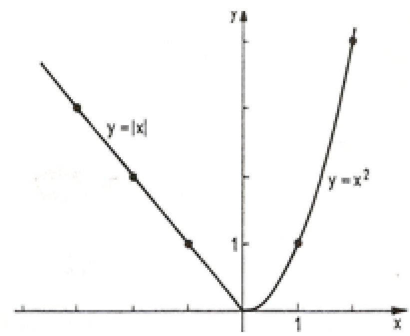
X....-3 2 -1 0 1 2 3 ...

(c) ketabton.com: The Digital Library

Y....3 2 1 0 1 4 9 ...

د فنکشن گرافیکی انځورونه (د یوې ټوټې) په x,y- کواوردینات سیستم کی د یوې کرښې له لارې، د هغه فنکشن انځورونی ځخه عبارت ده ، چی د واریابلو یا اووښتونوجوړې د x,y- هواره یا سطحه کی یواځني او یواځني ټکي باندې تنظیمیږي . ځیره ۱۵ . ۱ . او ۱۵ . ۲ بیلګي ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته





۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ایترووال] a,b [کی هلته او هلته یا ټیك هلته مونوتون جګیدونکی (مونوتون لویدونکی) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو $x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$ لپاره د$x1<x2$ سره باور ولري:
$f(x1) \leq f(x2)$ $(f(x1)>f(x2))$
که د برابروننخښه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږیږو.

وبیلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دئ

و بیلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اینتروال) [oe,0] کي مونوتون ټیټیدونکی یا -لویدونکی
او په اینتروال [oe,0) کی مونوتون جګیدونکی دی

پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه اینتروال [a,a-] کی یو تعریف شوی فنکشن $y = f(x)$ هلته او هلته جوړه (جفت) یا سیومتریك symetrisch,) ناجوړه (طاق) یا نا- یا انتیسیومتریكantisymetrisch بلل کیږي چی باوري وي

$$f(-x) = f(x) \qquad (f(-x) = -f(x))$$

د جوړه فنکشنونو څیري اکسیال یا محوري سیومتریك y و - محور ته څغلي) دلته هم څیره شته ، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵ . ۳ (، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا مرکزي سیومتریك څغلي) بیا هم څیره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴)

بیلګه ۱۵ . ۴

فنکشن $y= x^3 ,D= R$

یو ناجوړه یا طاق فنکشن دی :

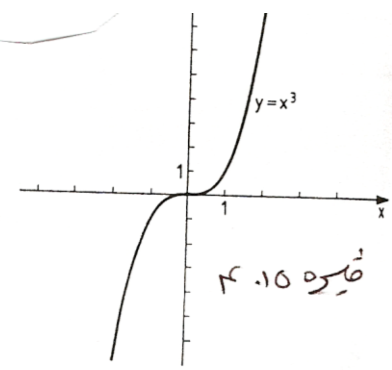
$$(-x^3) = -x^3$$

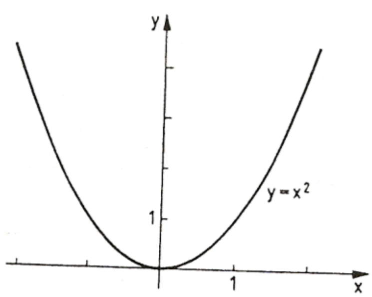
بیلګه ۱۵ . ۳ :

فنکشن $y=x^2,D=R$

یو جوړه یا جفت فنکشن دی:

$$(-x)^2 = x^2$$





ځېره ۱۵. ۳

د بیلګي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي

پیژند ۱۵ . ۴:

$y = f(x)$ تیك هلته په D (پیژندډیری ده) بند یا رابند(محدود)بلل کیږي که یو $k > 0$ داسی شته وي چي دا باور ولري:

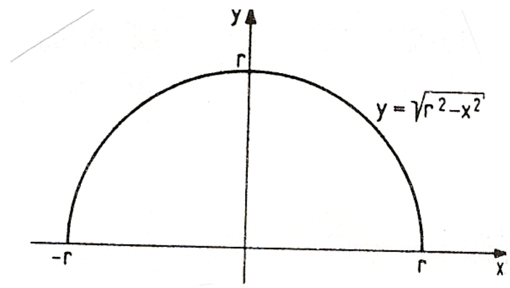
$$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$$

بیلګه ۱۵ . ۵:

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $D = [-r , r]$
رابند یا راګیر(محدود» زه به دا له دي وروسته
بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم یوونګردی څیره ده(

ش . ۱۵ . ۵ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \leq r$



پیژند ۱۵ . ۵:
$y = f(x)$ پریودیکي(دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل کیږي د دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:

$$f(x + p)= f(x)$$

د دورانی یا تل راګځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپیکي بیلګي تریګونومتریکي فنکشنونه دي (پرتله برخه ۱۵ . ۳)

پیژند ۱۵ . ۶ :

ټول $x \in D$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځایونه بلل کیږي.

د فنکشن صفرځایونه د مساوات $f (x) = 0$ د حل له لارې پیدا کیږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کرږې د غوڅټکو x - ارزښتونه دي.

بیلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2\ x + 1$ صفرځایونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دی (څیره ۱۵ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه۰ ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:
$x^2 - 4 = 0 \iff x1 = 2 , \quad x2 = -2$
فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري.) بیا هم څیر ۱۵ . ۶)

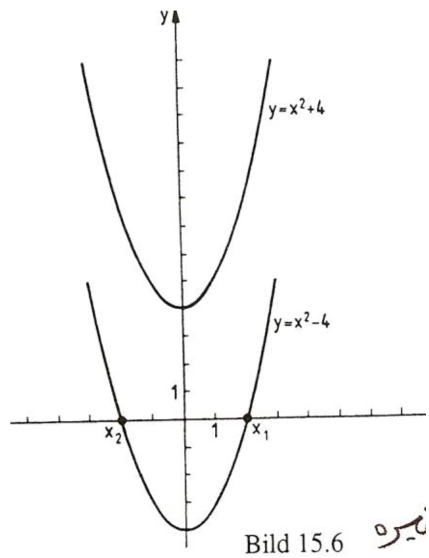


Bild 15.6

پیژند ۱۵ . ۷:

$x \in D \quad , \quad y \in W \quad y = f(x),$
یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کیږي، که هریو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی وي
یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ څیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: (y =
f(x)یو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په څټکیدونکی دی ، دا په دي مانا چي دا
یو فنکشن (x = g(y تعریفوي، یعني په څټ یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا
واریابلو د نخښی(نخونی) سره بدلی شي، نو د په څټ فنکشن په توګه لرو y=g(x) دا
د فنکشن روڼنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه څیره ده، چی x خپلواك
اوyبلواك ، دلته د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپیژندونکی دي د y=f(x) په
څټ یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن $y = x$ د خپل په څټ فنکشن سره کټمټ(- ورته) identic دی۰ د په څټ یا
برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرافیکی څیره $y = x$ په کرښه د $y = f(x)$ هندارونه) یعنی په هنداره کی څیرونه
او لنډ یی: هندارونه) ده٠

بيلګي ١۵ ، ١ ته :

د فنکشن $y = f(x)= x/2 +1$ چپه یا په څټ فنکشن داسی دی
$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$
سږی $y = x/2 + 1$ د x په لور اوبی کوي: $x=2y-2$ او بالاخره x او y سره بدلوي .
(څیره. ١۵ ٧ الف)
ړ

بيلګي ١۵ . ٣ ته : فنکشن
$x \in D$ $y = x^2$,
څیرره ش ١۵ . ٣) په څټکیدونکی دي یا په څټکیدونکی نه دی.
هر $y \in W$ $=[0,oe]$ پورې دوه $= [-oe,oe]$ $x \in D$ اړه لري، یعنی $x=+y$ او $x=-y$
مګر $y= x^2$ کلك مونوتون جګیدونکی دی (او په دې ډول یواځنی او یواځنی).

د $x \geq 0$ لپاره او کلك مونوتون لویدونکی د $x < 0$ لپاره. $y=x^2,x\geq0$
ته چپه- یا په څټ فنکشن $y=+ x$ دی، او $x < 0$, $y = x^2$ ته چپه- یا په څټ فنکشن - = y
x دی. (څیره ١۵ . ٧ ب) .
په ټولیزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ١۵ . ١ :

که $y = f(x)$ کلك مونوتون جګیدونکی) لویدونکی (وي ،نو په څټ فنکشن $y = f^{-1}(x)$
موجود دی او دا هم کلك مونوتون جګیدونکی (لویدونکی) دی.

١۵ . ٣ . بنسټیز فنکشنونه

په دې برخه کي بنسټیز فنکشنونه تعریفیږي. دا ټول راشنل فنکشنونه، مات راشنل فنکشنونه،
پوتنځ یا په توان فنکشنونه، ایکسپوننشل فنکشنونه او لوګاریتم فنکشنونه، تریګونومتري
فنکشنونه او څیکلومتري فنکشنونه دي. دا بنسټیز فنکشنونه به د خپلوځانګړډوله خویونو
له مخی وڅیړل شي. په برخه ١۵ . ۴ که به دفنکشن فنکشنونه (ځنځیری - یا تړلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشنونه) وخیړل شي. د فنکشنونو څیړل به د هغو ځانګړولو یا کرکتریستیکي خویونو له مخې هلته هم دوام ومومي، که د دیفرنشل شمیرنی کومکي مواد مو مخ ته پراته وي (برخه ۲۰ . ۴)

پیژند ۱۵ . ۸ :

فنکشن

$$y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a^2x^2+a_1x+a_0, n \in N; a_i \in R, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x \in R$ لپاره تعریف دی او n - مه درجه ټولریشنلفنکشن نومیږي.دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه(یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه ($n = 1$) یالایني فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته m او n په (۱۵ . ۱) کی پارامترونو a1 او a0 په مانا دي. د لاینې فنکشنونو څیره(ګراف) یوه کرښه ده چي په $y = n$ کی y د - محور غوڅوي ($x = 0$) او جګوالی $m = \tan\alpha$

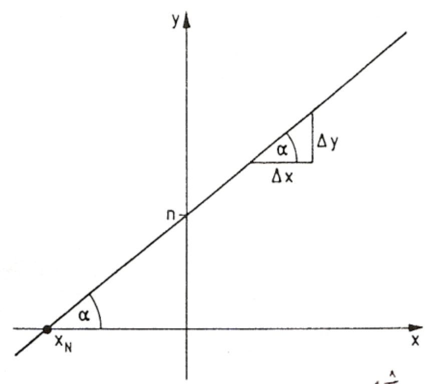


Bild 15.8 ځاکره

لري (څیره پورته . ۱۵ . ۸) جګوالی د y - ارزښت د تغیر د x - ارزښت تغیر سره متناسب دی:

$$m = \Delta y / \Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

کرښه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

دx - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که 0 =|m نيول شوی وي، ټيك يو صفرځاي (y = 0 لري: $x_N = - n/m$

که را په غاړه شي چی د يوې کرښی برابرون، چی له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2) تيريږي، پيدا کړو چي پو په بل نيغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرښکی يا نوره ښه غوښتکی n په y - محور د برابرونسيستم

$$y1 = x1m + n , y2 = x2m + n$$

له مخی پيدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو

$$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$$

په بل پل)قدم(کی موږ ۲ -امه درجه ټولريشنل فنکشنونه يا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو لکه په (۱۵ . ۱) کې $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$

$$y=ax^2+bx+c , a \neq 0 \qquad (15 .3)$$

د مربع فنکشنونو څيره) ګراف (پارابول دی چی د هغي سيومتري محور و y - محور ته غبرګ ځغلي. کوايفيڅينت) ځله ووني يا ځليدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاي او بڼه)فورم(ټاکی.

موږ د مربع فنکشن يو څو ځانګړي حالتونه تر څيړني لاندې نيسو.

1. $y=x^2(a=1 ,b=0,c=0)$ (15 . 4)

نورمال پارابول، د ککرې کواورديناتː $x_s = 0 , y_s = 0$

(خ . ۱۵ . ۹)

2. $y=x^2+px+q$ (a=1 , b=p , c=q) (15 . 5)

او $x^2 + px$ ته د ځلورې - يا مربع تکميلولو ورزياتونی څخه لاس ته راځي:

$$y=x^2+px (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2 \quad (15,5)$$

يو و (نسبت) (۱۵ . ۴) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په $q - p^2 /4$ راکښل (راښکل-يا راکش -) شوی نورمال پارابول د ی ، دا په دې مانا چی په (۱۵ . ۵) راکښل شوی پارابول دا ککره لرې:

$$x_s = -p/2 , y_s =q - p^2/4$$

بيلګه ۱۵ . ۷:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y=x^2+6x+10,\ xs=-6/2=-3, ys=10-6^2/2=1$
(خ،۱۵ . ۹)

3. $y = ax^2$ ($a|=0, b=0,\ c = 0$)

د ککرۍ (سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0$, $y_s = 0$

پارابول د $|a| > 1$ لپاره خور، د $|a|<1$ لپاره پرسیدلی،د $a > 0$ لپاره پورته لور ته او د a <0 لپاره کښته لورته واز دی (خلاص دی)

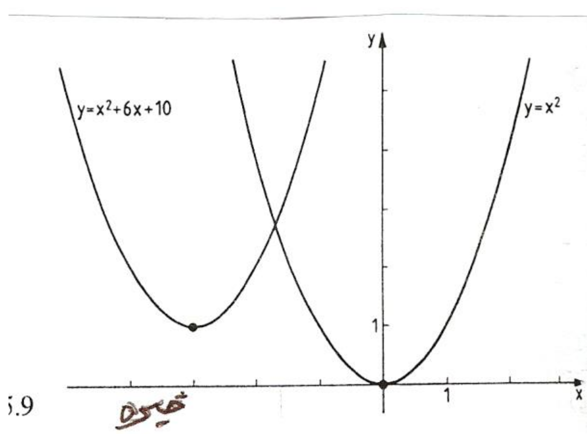
بیلګه ۱۵ . ۸:

$y = 2x^2$, $y = (1/2)x^2$, $y = -2x^2$
(خ . ۱۵ . ۱۰)

4. $y=ax^2+bx+c=a[x^2+(b/a)x+c/a]$

د ککرۍ (رأس) کواوردینات داسی دی (لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللي یو)

$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c-b^2/4a^2$



بیلګه ۱۵ . ۹:

$y=-(1/2)x^2+x+4$,($a=-1/2$, $b=1$, $c=4$)

دککرۍ کواوردینات:

$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4-12/(4.(-1/2)) = 9/2$

دا چي $a = -1/2$ دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی (ش ۱۵ . ۱۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

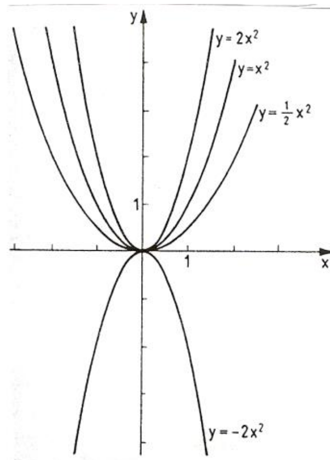


Bild 15.10

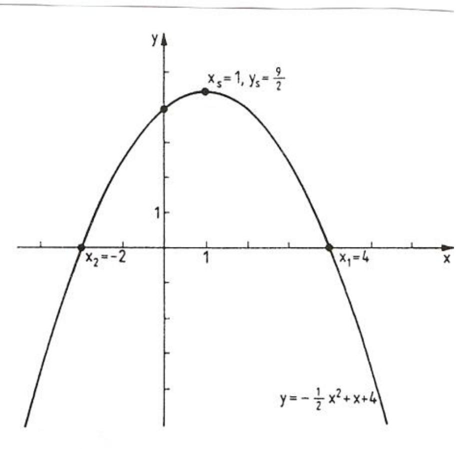


Bild 15.11

د فنکشن $y=ax^2+bx+c$د صفرځایونه د برابرون $ax^2+bx+c=0$ اوبیونې دي.
وبیلګي ۱۵ . ۹ ته (ځ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2+x+4=0$ ، چې دلته $x_1 = 4, x_2 = -2$ دي٠

و بیلګي ۱۵ . ۷ (ځیره ۱۵ . ۹) ته:
د $x^2+6x+10=0$ یاني $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-10} = -3 \pm \sqrt{-1} = -3 \pm i$ څخه لاس ته راځي
چې برابرون رییل صفرځایونه نه لري.

فنکشن $y = x^2$ غبرګ یا جوړه(ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2} = 0$ دي

د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دټولریشنلفنکشنونو بیلګي له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو
چې د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Horne rschema، معرفي شي. ددې لپاره به د(۱۵ . ۶) فورم بدل شي.

$$y = [a_3x^2 + a_2x + a_1]x + a_0 = [(a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0 \quad x_{4,5} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm 2i$$

هغه ورکړ شوي خپلواك x_1 پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1 = f(x_1)$ کیدی شي له دې بڼې سره په لاندې ډول وشمیرل شي:
a3 له x_1 سره ځل کیږي، دې سره a2 زیاتیږي، زیاتون یې له x_1سره ځل، او a1 ور زیاتوو، زیاتون د x_1 سره ځل او a0 ور زیاتوو. دا د عملیوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شیما (د هورنرشیما) له لارې په لیدوړ ډول مخ ته بیایو (څرګندوو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

	a_2	a_1	a_0	خلونه یا ضریبونه
	a_3x_1	$(a_3x_1+a_2)x_1$	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1$	منځنی خلونه
a_3	$a_3x_1+a_2$	$(a_3x_1+a_2)x_1+a_1$	$[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1+a_0 = f(x_1)$	منځنی زیاتون

ددې شیما پوهیدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهیدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بیلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x1 = -2$او $x2 = 5$ څخه شمیرل کیږي.

اوبیونه (:

که چرې ددریمی درجې ریشنلفنکشن یو صفرځاي ولري، نو کړی شو چې د پولینوم ویش له لارې دا لاینې فاکتور بیل کړو(پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بیلګي ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5): (x-5) =x^2+3x+1$ له دې امله لرو:
$y = x^3-2x^2 -5 = (x^2 + 3x +1) (x-5)$
د ویش پولینومونو خلووني ، یعنی 1 د(x^2) سره ، 3 د (x) سره او 1 د هورنرشیما په اخره لیکه کی ولاړ دی. د هورنرشیما له لاری د صفرځاي شمیرلو سره په همغه وخت یا دمګړی کی د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او$f (x1) = 0$ چې د $(x-x_1)$سره د خلوني له لارې دا تصدیقیدلی شي. پاتی صفر ځایونه د خلوری – یا مربع برابرنی د اوبیونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0; x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دریمی درجې فنکشن د درې لاینې فنکشنونو د خلوني په څیر لیکل کیدی شي (پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=x^3-2x^2-14x-5 = (x-5)[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}][x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}]$$

د جملی۱۲ . ۵ وینا په عمومي توګه د ټولوn- م درجو ریشنل ږرزرنږ
ږرطږتظداغظطافنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ریشنلفنکشن n صفرځایونه لري . کیدي شي دا ټول یو له بل توپیر ولري او یادا صفرځایونه څوځله هم رامنځ ته شي، رییل او یا جوړه کونجوګیري کملکس کیدی شي.

که $x_1, x_2, ..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځایونه وي

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

نو دا د لاینیز فاکتورونو د ځلونې په څیر په لاندې ډول لیکل کیدی شي:

$$y = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)a_n$$

د هورنرشیما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونیول شي:
که په یوه n - م درجه پولینوم کی یو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوایفیځینت یا ځله وونې لپاره دي صفر ولیکل شي.

بیلګه ۱۵ . ۱۱ :

5 - مه درجه ټول ریشنلفنکشن
$y = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80$ درې صفرځایونه $x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2$ لري. نور صفرځایونه دې پیداکړی شي او فنکشن دې د لاینیزو فاکتورونو د ځلونې په څیر ولیکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې یو په بل پسی د پولینوم ویش یو پاتی 2 - مه درجه پولینوم لاس ته راکوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	2	0	-6	-20	-8	80
x_1 = 2		4	8	4	-32	-80
	2	4	5	-1	-40	0 = f(0
x_2 = 2		4	16	36	40	....
	2	8	18	20	0=f(2)	
x_3 = -2		-4	-8	-20		
	2	4	10	0=f(-2)		

دا پاتی پولینوم (2 $x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله
د $x_{4,5} = -1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i$
لپاره لاندې د حل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي
$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$

ددې لپاره چی د دریمي او جګو درجو د ټول ریشنلفنکشنونو یوه څیره یا تصویر ولرودی شو، نور کرکتریستیکی یا د خویونو ټکی یی د دیفرنځیالشمیرنې له لارې لاسته راوستی شو(برخه ۲۰ . ۴)

بي له دې چی د دفیرنځیالشمیر له مرستي کار واخلو ، کیدی شي چی د هغه د ناپای په هکله وینا وي وکړی شو. موږ په لیدیدونکی ډول د فنکشن د پولی کلیمه په کار اچوو، کومه به چی په برخه ۱۹ کی ټیك تعریف شي. دا د بیلګي په توګه دا مانا لري
چی $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ سره (f(x تل ارزښت g ته نزدې کیږي، که x د oe یانې ناپای په لور لاړشي. د

(۱۵ . ۱) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty}[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چی
xn -> oe

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي
او xn ->±oe د x ->±oe لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او a_n زیاتیز یا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y=\infty; \lim_{x\to-\infty} y=\infty$
(کړه له oe - څخه oe د په لور ځي) .
که n جوړه او a_n کمیز یا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=-\infty; \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$
کړه د oe - څخه د oe - په لور ځي).

که n ناجوړه او a_n کمیز یا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=\infty; \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$
کړه له oe - څخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او a_n کمیز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=-\infty; \lim_{x\to-\infty} y=\infty$
کړه لهoe څخه د oe - په لور ځي)

پيژند ۱۵ . ۹ :
فنکشن

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0};..........(15,7)$$
$$n,m\in N_0; a_k, b_i\in R; Q_m\neq 0$$

مات ریشنلفنکشن بلل کیږي او د ټولو x د $Q_m(x)\neq 0$ لپاره تعریف دی.

فنکشن (۱۵ . ۷) اصلي مات نومیږي، که n<m وي او نااصلي مات دی
که $n\geq m$ ، نااصل مات فنکشن کیدی شي چي د پولینوم ویش له لارې تجزیه
(توټه) شي او د یوه ټول ریشنلفنکشن او یوه ریښتونی ماتی برخی د زیاتون په څیر
ولیکل شي.

بیلګه ۱۵ . ۱۲:

فنکشن $y=\frac{2x^4-3x^3-6x^2+13x-6}{x^3-4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې فنکشن
باندې دماتباندې فنکشن ویش څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(2x^4-3x^3-6x^2+13x-6):(x^3-4x)=2x-3$$

د $2x^2+x-6$ پاتی (باقي) سره. پس لرو:

$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x)$.

فنکشن (۱۵ . ۷) د $x = x0$ لپاره یو صفرځاي لري، که $x = x0$ وي نو باور لري:

$P_n(x_0)=0$ مګر $Q_m(x)\neq 0$

دا د $x=x_L$ لپاره تشځاي (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0)=0$ او $Q_m(x)=0$

د $x=x_P$ لپاره یو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P) \neq 0$ مګر $Q_m(x_P)=0$

بیلګه ۱۵ . ۱۳ :

فنکشن ($y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x$) د ماتباندې- او ماتلاندې فکشنونو توټي کولو وروسته په لاندې فورم د لاینې فاکتورونوپه توګه لیکل کیږي.

$$y=\frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x=x_0=3/2$ لپاره ماتباندې صفر دی، مګر مات لاندې صفر نه دی (صفرځای)مات لاندې- او مات باندې فنکشونه د $x = x; L = -2$ لپاره صفر دي (تشځای)

د $x=x_{P1}=0$ او $x=x_{P2}=0$ لپاره ماتلاندې صفر او مات باندې صفر نه دی (قطب)

که x سره د قطب ځاي ته نزدې شي، نو y د ناپای په لور ځي چې د قطبځای (تیك ناپای ځای بللکیږي) xp کی کره داسیمپتوتي کربنې $x = xP$ ته نزدې کیږي.د یوه تشځای xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادې $0 / 0$ شکل غوره کوي، له دې امله د $x = xL$ لپاره تعریف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن ځان نیونی ته:

د اصل ماتفنکشن (n<m) د x په جګ پوتنځ یعنی x^m د ماتباندې او ماتلاندې د ویش څخه لاس ته راځی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=\frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}}+\frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}}+\ldots+\frac{a_1}{x^{-1+m}}+\frac{a_0}{x^m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{0}{b_m}=0$$

داچی د x تول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x تول پوتنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن ځیره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کیږي. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نیسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه یی د صفر په لور ځي، لکه تولریشنل برخه.
د نااصل مات فنکشن ځیره د x -> ±oe سره ، ځان خپل تولریشنلبرخی ته نزدې کوي.

بیلګه ۱۵ . ۱۴:

الف: $y = x/(x^2+1)$ د $x0 = 0$ په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول یا قطب نه لري ربیل اوبیونه نه لري) او دx -> ± oeلپاره دx- محور ($y = 0$) د اسیمپتوتی په ځیر لري (ځیره. ۱۵ . ۱۲)

ب: $y=(x^2+2x-3)/(x+2)=x- 3/(x+2)$ صفرځایونه($x^2+2x-3 =0$) په $x1 =-3$ او $x1=1$کی لري . تشځای نه لري او په $x3 = -2$ کی قطب لري دا په دې مانا چی $x = -2$اسیمپتوتی دی، او د x →±oe لپاره فنکشن $y = x$ اسیمپتوتي کیږي)دا سیمپتوتی کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي)

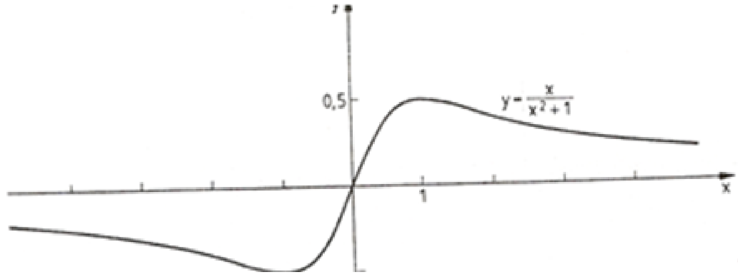
موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي تول - یا مات ریشنلفنکشنونه راوړو:
فنکشن

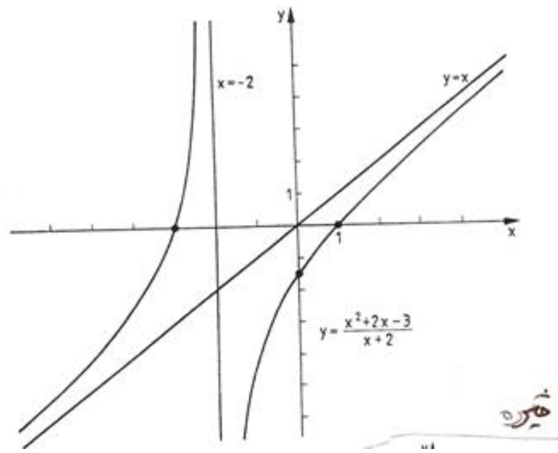
$$y=x^n; n\in Z\setminus\{0,1\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15,8_a)$$

یو ځانګړی پوتنځفنکشن دی(د پوتنځ پیژند 6 ۰ ۱)

(15.8)د زیږ اتد یز زیاتیز یا مثبت تولګني n لپاره یو تولرشنل فنکشن دی. د جوړه تولګنی nلپاره تولریشنل فنکشن دی. د تولګنې n لپاره تولی کرږې د تعریف ډیری(-) = D oe,oe، د ارزبنت ډیری(W=(0,oeاو ګډ تکی (1,1) ،(0,0),(1,1) لري.
(ځیره ١٤ الف ١٥) د ناجوړه ګڼ د n لپاره(D = (-oe,oe
او(W = (-oe,oe دي او (-1,-1) , (0,0). (1,1) ګډ تکي دي (ځیره ۱۵ . ۱۴ ب)۰

(c) ketabton.com: The Digital Library





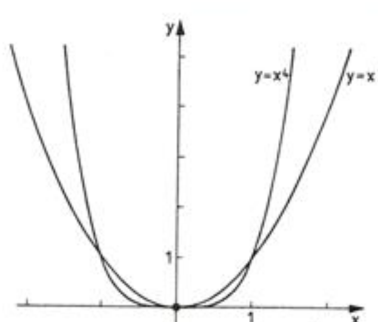


Bild 15.14a

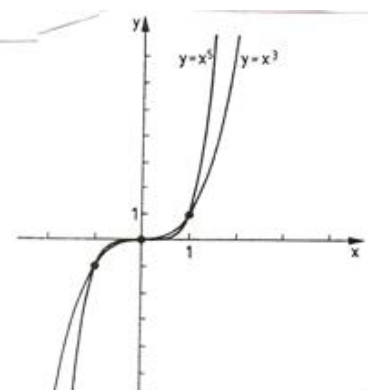


Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي ګڼ n لپاره یو مات ریشنل فنکشن دئ په $x = 0$ کی د یوه قطب او $y = 0$ کی یوې اسیمپټوټی په څیر. د جوړه ګڼون یا تعداد (کمیز) n لپاره ټولی کرږې د پیژند ډیري

(c) ketabton.com: The Digital Library

(-1,1) ,(1,1) لري اوګډټکي W = (0,oe) د ارزښت ډيري(D = (-oe,oe)\{0}

؟؟؟ ځيره ش. ۱۵/۱۵الف) .

د ناجوړه ګڼون (کميز n)لپاره{ D = (-oe,oe)\{0 او(W=(-oe,oe او(1-،1-) (1,1)

ګډ ټکی دی (ځيره »۱۵ . ۱۵ ب) .

دوه ځيرې دي

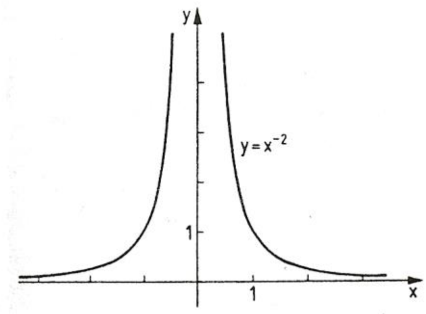


Bild 15.15a

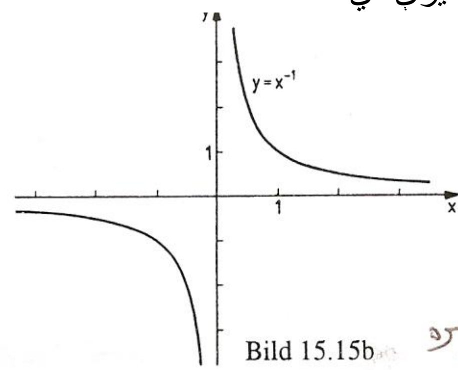


Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر ځښ بلواک لپاره دې د مونوتوني اينتروال په پام کی ونيول شي.(پرتله بيلګه(بيلګه ۱۵ .۳)

د فنکشن) لوستل له کيڼ وښي لور ته

$$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$$

چپه- يا پر ځښ فنکشن په لاندې ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x}\ ,\ n \in N \setminus \{1\}\ ,\ D = [0,\infty), W = [0,\infty) ....(15,8_b)$$

او ريښه فنکشن نوميږي (پيژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنځ فنکشن کيدی شي و ريشنل ايکسپوننت ته پراخه شي) دلته لرو $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{n}{m}}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ريشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^n\ ,\ a \in Q\ ,\ x > 0 \qquad (15 . 8c)$$

نو د ريښي فنکشن (۱۵ . ۸ ب) دې د پوتنځ فنکشن په ځير وپوهيدی شي.

د پوتنځ فنکشن (۱۵ . ۸ ث) پرځښ بيرته پوتنځ فنکشن دی.

ټوليز پوتنځ فنکشن پيژند د رييل ايکسپوننت لپاره ورکړ شوی(د رييلګڼونو کليمه دې وکتل شي برخه ۳ ۰ ۱ . ۴ کی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

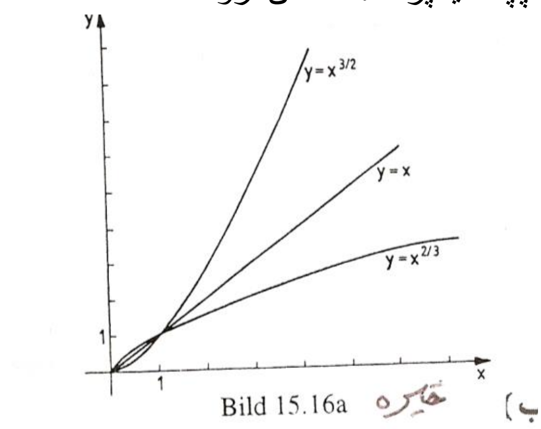
پیژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^{\alpha} \quad , \quad \alpha \in R \ , x > 0 \qquad (15.8d)$$

پوتنځ فنکشن نومیږي

بیلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن $y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3} , x \geq 0$

لاندې چپه - یا پر ښت فنکشن لرو $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2} , x \geq 0$



(ښیره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1 / \sqrt{x}, x > 0$

ښیره ۱۵ . ۱۶ ب)

$$y = x^{-2} = 1/x^2 , x > 0$$

یادونه : په پیژند ٤ . ۲ کې مو وویل چې یوازې د ناکمیز رادیکاندو ریښه ویستل کیدو اجازه لرو. دا کړنلار دې د پرښت فنکشن جوړولو برسیره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په پام کې وي.

د بیلګي په توګه فنکشن $y=x^3$ په ټول تعریفیدیري کې مونوتون پورته کیدونکی دی او له دې امله ټول په ښت کیدونکی وی، $y = \sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پیژندډیری ($D = [0,oe$ کې پر ښت فنکشن دی، په داسې حال کې، چې د$y= x^3$ پرښت فنکشن د] $D= (-oe,0$ سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کې ورکړ شوی دی(ش. ۱۵ . ۱۷) .

پیژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y=a^x, a>0, a\neq 1 \text{..................................}(15,9)$$

ایکسپوننشلفنکشن یا په جګ(لنډ »جګ«) بلواك بلل کیږي۰

(د ایکسپوننت یا »جګ« کلیمی لپاره دی پېژند ۴ . ۱ وکتل شي)

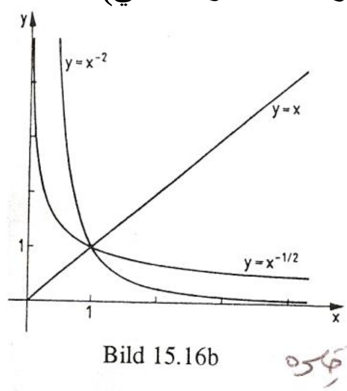


Bild 15.16b څېره

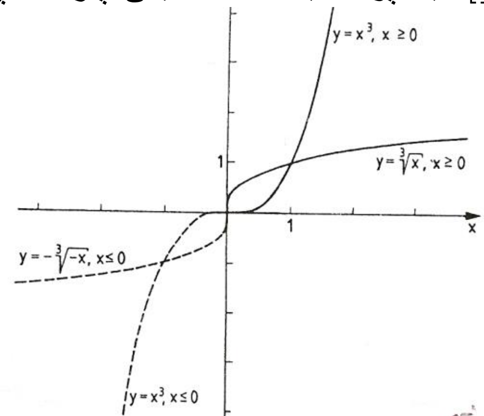
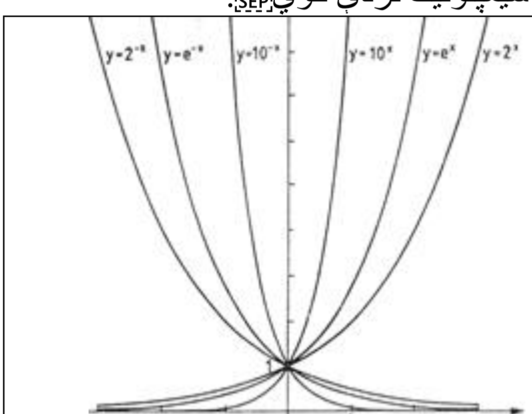


Bild 15.17 څېره

پورته دوه څېرې دې پام کې ونیول شي

فنکشن (۱۵ . ۹) لاندې پېژندډیری(D=(-oe,oe او ارزښتډیری(W=(o,oe لري. د $a^0=1$ له امله ټکی(0,1 () د ټولو کرو ګډ ټکی دی

د a>0 لپاره (۱۵ . ۹) په کلکه مونوتونجګېدونکی دی اود x->oe سره د x - محور ته اسیمپوتیك ورنږدې کیږي. د 0<a<1 لپاره) ۱۵ . ۹ (په کلکه مونوتون لوېږي او ځان د x -> oe سره د x -محور ته اسیمپتوتیك نزدې کوي.



کسپوننشل فنکشنونو یو څو بیلګګي (a=2; e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/10 څیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند ۱۵ . ۱۲ :

لاندې فنکشن د ايکسپوننشل فنکشن په ځېټ فنکشن دی

$y = \log_a x \, , \, a > 0 \, , \, a \,|= 1$ (15.10)

او لوګاريتم فنکشن بلل کيږي

د لوګاريتم کليمي لپاره پيژند ۵ . ۱ وګورئ) فنکشن (۱۵ . ۱۰) پيژندديری
D = (0.oe) او د ارزښتديری(W=(-oe,oe لري.

د $y = \log_a x$ کرې د ګرو $y=a^x$ هندارونه ده، په کرښه $y=x$ ٠ تکی(1,0) د ټولوکرو ګډ
تکی دی (ځيره شته دی)

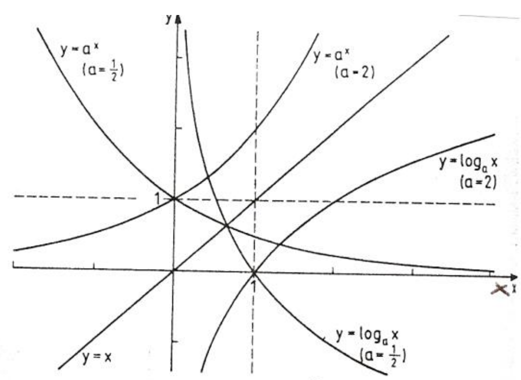


Bild 15.19 ځېره

د a>1 لپاره(۱۵ . ۱۰) کلك مونوتونجګيدونکی اود x->0 لپاره اسيومپتوتيك د کميز y -
محور ته نزدې کيږي. د 0< a<1 لپاره (۱۵ . ۱۰) کلك مونوتون لويدونکی دی او
د x> 0 لپاره اسيمپتوتيك د زياتيز y - محور ته نزې کيږي. په شکل ۱۵ . ۱۹
کی $y=a^x$ او په ځېټ يی يعني $y = \log_a x$
د a= 2 او a=1/2 لپاره انځوريږي.
په ځانګړې توګه ليکل کيږي $y = \log_{10} x = \lg x \, , \, y = \log_e x = \ln x$ ٠

پيژند ۱۵ . ۱۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تریګونومتري فنکشنونو یا د کونجفنکشنونو لاندې(پرتله برخه ۶ . ۳) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کیږي یا راوړل کیږي.

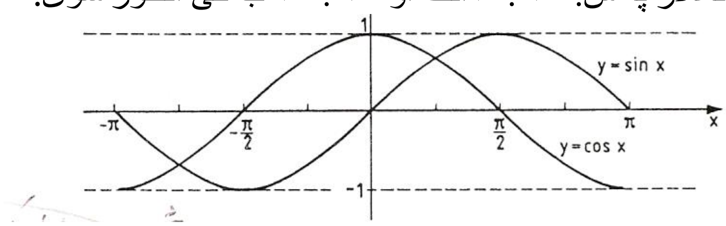
$$y=\sin x ;D=R,W=[1,1] \ldots\ldots (15,11_a)$$

$$y=\cos x; D=R, W=[-1,1] \ldots\ldots (15,11_b)$$

$$y=\tan x=\sin x/\cos x; D=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, W=R, k\in Z \ldots (15,11_c)$$

$$y=\cot x=\cos x/\sin x; D=R\setminus\{k\pi\}, W=R, k\in Z \ldots\ldots (15,11_d)$$

د دې کږوتګلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کی انځور شوی.



تریګونومتریکی فنکشنونه $y = \sin x, y = \tan x , y = \cot x$ ناجوړه فنکشنونه، او $y = \cos x$ یو جوړه فنکشن یا – بلواک دی.

تریګونومتریکي فنکشنونه پریودیکي فنکشنونه دي(مقایسه ۱۵ . ۵)

فنکشنونه $y=\sin x , y= \cos x$پریودې 2π لري، دا په دې مانا چی لرو:

$$\sin (x+2k \pi) = \sin x ; \cos(x+2k\pi)= \cos x , k \in Z$$

لاندې فنکشنونه پریود π

(c) ketabton.com: The Digital Library

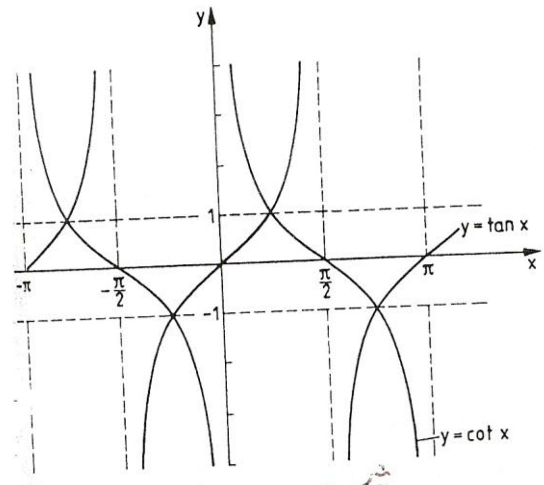


Bild 15.20b

لري y=tanx , y=cotx .دا په دې مانا چي

$\tan(x + k\pi) = \tan x, \ \cot(x + k\pi) = \cot x , k \in Z$

د تريګونومتريکي فنکشنونو صفرځايونه دي $x_k = k\pi, k \in Z$

د y=tanx , $k \in Z$, $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ y=sinx لپاره او د y = cos

x , y = cot x لپاره تانجنت - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځايونه(ناپاځايونه) لري

يعني y = tan x په $k \in Z$, $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ او y = cot x په $k \in Z$, $x_k = k\pi$ کی.

د تريګونومتريکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خويونه په پام کی ونيول شي. د بيلګي په توګه

فنکشن y = sin x په ايتروال $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ کي مونوتون جګيدونکی دئ او په

ايتروال $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

کی مونوتون لويدونکی، او دا مونوتوني خويونه په يوه پوره پريودې کی تکراريږي. پس ويلی شو:

د y = sin x لپاره جګيدونکی يا پورته کيدونکی دئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی، او په ورته توګه

د $-\pi+2k\pi \le x \le 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کیدونکی دی٠

د $0+2k\pi \le x \le \pi+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی

د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جګیدونکی دی

د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جګیدونکی دی ،

په تنجنت ـ او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځایونه د مونوتوني اینتروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینتروالونه دي.د ساین فنکشنونه د بیلګي په توګه د وخت په پریودیکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوینګونګ: رپیدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واریابل په t نخښنه کیږي.فنکشن

$$y = a \sin (\omega t + \varphi) \qquad (15 . 11e)$$

هارموني فنکشن بلل کیږي.

یادونه: فنکشن (۱۵ . ۱۱ت) د پیژند (۱۵ . ۱۵) له مخی تړلی یا ځنځیري فنکشن دی. موږ ترڅیرني لاندې نیسو چي د سا ین فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واریابل t او زیاتوونکی د ساین فنکشن په خپلواك)Argoment(د کرښخیره باندې څه تاسیر اچوي.

۱ ـ د فاکتور a تاثیر په فنکشن y = a . sin t د y = sin t فنکشن ارزښت باندې غزول یا راکشول دی که (|a| > 1)او یا پرسول دي که |a| < 1)وي y= a.sin x فنکشن ارزښت a ـ ځله د فنکشن ارزښت y = sin t دی، چیرته چی برسیره پردې د a < 0 لپاره په t ـ محور یوه اینه څیرونه هم منځ ته راولي (څیره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) (a = 2 , a = 1 / 2)

په فنکشن کی a امپلیتودې Amplitude(جګوالی(نومیږي او د شوینګنګ Schwingung رپیدنی پراخوالی یا بڼه : سور باندې تاثیر اچوي.
څیره شته

(c) ketabton.com: The Digital Library

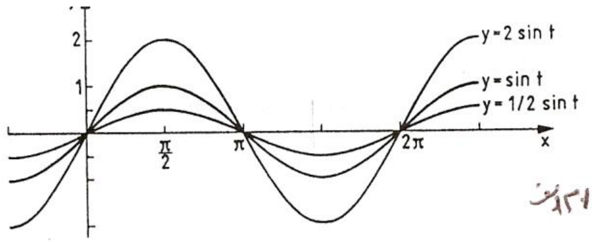


Bild 15.21a

۲ - په فنکشن $y = \sin\omega t$ کی فاکتور ω په فنکشن $y = \sin t$ باندې يو وختني غزول که $|\omega|<1$ يا پرسول که $|\omega|>1$ وي تاثير اچوي.چيرته چی د $\omega<0$ لپاره برسيره پردې يو په y- محور اينونه هم ده.

د يوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن $y = \sin\omega t$ يوه فنکشن ارزښت، د $y = \sin t$ خپلواك ω-ځله ، يعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي (ځيره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب).

ګردی فرکونځ (Kreisfrequenz) بلل کيږي، دا په پريودې تاثير اچوي او $y = \omega t$ پريودې $P = \frac{2\pi}{\omega}$ لري.

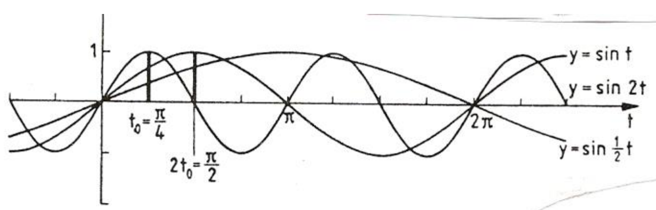


Bild 15.21b

۳ – زياتيدونکی φ په فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ کی د $y = \sin t$ باندې ديوې راکښنی تاثير په $|\varphi|$ له کينی لور $\varphi>0$ او يا له ښي لور $\varphi<0$ اچوي .

د يوه ټاکلي خپلواك $t = t0$ لپاره د فنکشن $y = \sin(t+\varphi)$ سره يو فنکشن ارزښت، چی د $y=\sin t$ لپاره٠

د φ په کچه راکښل شوی (يعنی د يوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی) وي، يعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(ځيره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

$(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2})$

په فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a.\sin(\omega t + \varphi) = a.\sin\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)$$

کی φ چی فازې نوميږي يو د راکښلو تاثير په کږه $y = a.\sin\omega t$

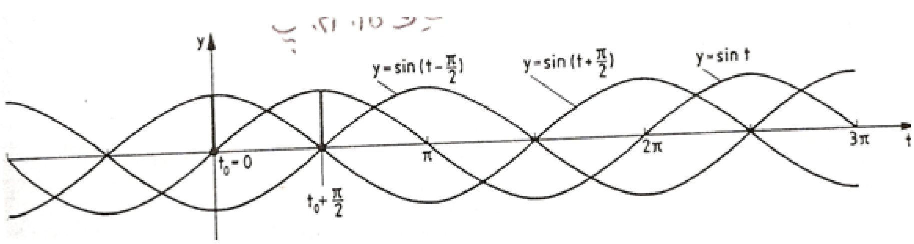
د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.

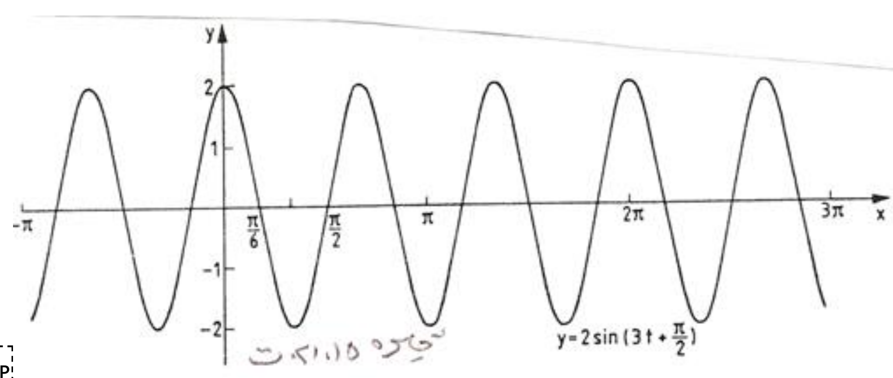
په شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2.\sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$ انځوردی.

هغه امپليتود $a = 2$ لري، پريودې يی $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{6}$ کې

د $\sin t$ و کینې لورته راکښل شوی دی.

څېره ۱۵ . ۲ پ $\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$





د تريګونومتري فنکشنونو(يواځني) په معکوسوالي يا په څېوالي کی مورږ په ځانګړو يو غږيزو يا مونوتوني اينتروالونو تکيه کوو، د لاندې تعريف سره مناسب

(c) ketabton.com: The Digital Library

پېژند .۱۵ ۰ ۱۴ : د لاندې فنکشنونو

1. $y = \sin x, \quad D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad W = [-1, 1]$ (15.12a)

2. $y = \cos x, \quad D = [0, \pi], \quad W = [-1, 1]$ (15.12b)

3. $y = \tan x, \quad D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad W = \mathbf{R}$ (15.12c)

4. $y = \cot x, \quad D = (0, \pi), \quad W = \mathbf{R}$ (15.12d)

پرخښ یا چپه فنکشنونه لاندې ښکلومتریکي فنکشنونه (ارکوس فنکشنونه) دي:

1. $y = \text{Arc}\sin x, \quad D = [-1, 1], \quad W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (15.13a)

2. $y = \text{Arc}\cos x, \quad D = [-1, 1], \quad W = [0, \pi]$ (15.13b)

3. $y = \text{Arc}\tan x, \quad D = \mathbf{R}, \quad W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (15.13c)

4. $y = \text{Arc}\cot x, \quad D = \mathbf{R}, \quad W = (0, \pi)$ (15.13d)

د تریګونومتري فنکشنونو برخی په مونوتوني ایتروالونو) ۱۵ .۱۲ الف(تر) ۱۵ . ۱۲ ت (او د هغوي چپه) ۱۵ . ۱۳ الف (تر) ۱۵ . ۱۳ ت (په ښیرو ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.

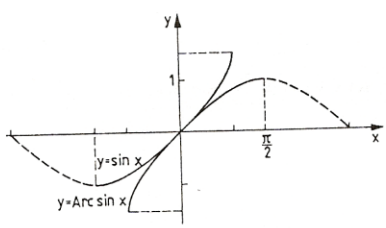


Bild 15.22

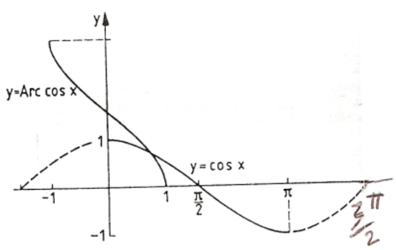


Bild 15.23

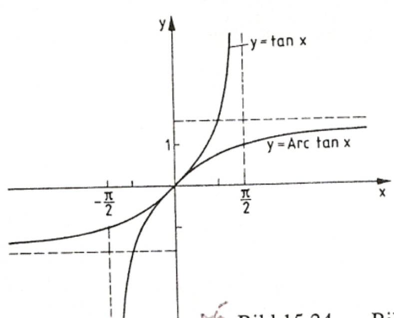


Bild 15.24

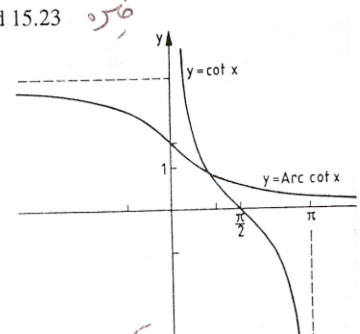


Bild 15.25

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ . ۴ ځنځيري (تړلي) فنکشنونه

پيژند ۱۵ . ۱۵ :

د $x \in D$ لپاره يو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتديري W سره ورکړ شوی او برسيره
پر دې د $z \in W$ لپاره يو فنکشن $y = f(z)$ ورکړشوی، نو

$$y = f(g(x)) \qquad (15.14)$$

د x تړلی (ځنځيري) فنکشن بلل کيږي •

يادونه : يو تړلی فنکشن کيدی شي چې زياتو ځنځيرونو سره هم رامنځ ته شي: د بيلګي
په توګه $z = f(x)$
د $x \in D,\ z \in W$ لپاره او $w = h(z)$ د $z \in W,\ w \in W^*$ لپاره
او $y = f(w)$ د $W^* \in W$ لپاره لرو،
نو $y = f[h(g(x))]$ هم د x يو تړلی فنکشن دی

بيلګه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د $z = 2x + 4$ او $y = e^z$ سره تړلی فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي.

ب : په تړلي فنکشن $y = \sin x^2$ کې $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی. په تړلي فنکشن $y = \sin^2 x = (\sin x)^2$ کې $z = \sin x$ د ننني - او $y = z^2$ دباندنی فنکشن دی

پ : د
$, y = \cos w \quad w = \sqrt{z} \quad , \quad z = 2x + 4,$
سره تړلي فنکشن $y = \cos\sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي

ت : په تړلي فنکشن $y = \mathrm{Arctan}\,1/(x-1)$ کی $z = x-1$ دننني، $w = 1/z$ منځنی او $y = \mathrm{Arctan}\ w$ دباندنی فنکشن دی.

يادونه : د يوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځيري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شميرنی له » دننه « پيل کيږي.

بيلګي ۱۵ . ۱۶ ته:

ب) د $x = 0.5$ لپاره دی

$$z = x^2 = 0{,}5^2 = 0{,}25; y = \sin x^2 = \sin z = \sin 0{,}25 = 0{,}24740$$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library

$z=\sin x=\sin 0,5=0,47942; y=\sin^2 x=z^2=0,47942^2=0,22984$

پ) د $x = 2$ لپاره دی $z=x-1=2-1=1$; $w=1/z=1/1=1$

$y=\text{Arctan}w=\text{Arctan}1=\frac{\pi}{4}$

روښانونه، تشریح:

$y=f(x)$ تحلیلي(شننیزه) وینا بلل کیږي، که $f(x)$ له رییل ګڼونواو بسټیزو فنکشنونوڅخه د زیاتون، کمون،ځل، ویش، له لارو تړلی یا ناتړلي(ځنځیري یا نا ځنځیري) جوړیږي

د بیلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنخ بنسټ او همداډول رادیکاند منفی نه شي کیدلی، او یا باید مثبت وي، چی د لوګاریتم نومروس باید مثبت وي او $\text{Arc}\sin f(x)$ همداډول $\text{Arc}\cos f(x)$ ټیك د $x \in [-1,1]$ لپاره پیژند لري یا تعریف دي

بیلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحلیلي ویناو لپاره دې تعریفډیري پیداکړی شي.

الف $y = \sqrt{x^2 - 3}$

رادیکاند باید کمیز یا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 3 \Leftrightarrow |x| \geq 3$ ($x \geq \sqrt{3}$ v $x \leq -\sqrt{3}$)

نو لرو $D =(-oe , - 3]\cup[3 ,oe]$

ب) $y=\lg(x+2)+1/(3+2x-x^2)$ له لمړي زیاتونی کی باید Numerus > 0 نومروس وي دا په دې مانا چی : $x+2 >0 \Leftrightarrow x >-2$ ،

پس $D1=(-2,oe)$

په دوم زیاتوني کی باید مات لاندې په صفر برابر نه وي (=| 0) وي . د مات لاندې صفرځایونه

له $3-2x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي $x1=2, x2=-1$.

نو $D2=R\backslash(2;-1)$ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن تعریفېدیری باید دا اول زیاتونی او همداسی د دوم زیاتونی تعریفېدیري وي یعنی د

D1 او D2

غوڅېدیری: $D=D_1 \cap D_2 = (2, \infty) \setminus \{2; -1\}$

پ) $y = \text{Arc} \sin (x-1)/5$ د ارکوس ساین-فنکشن د تعریفېدیري په پام کی نیولو سره باید باور ولري-

$-1 \le (x-1)/5 \le 1 \Leftrightarrow -5 \le x-1 \le 5 \Leftrightarrow -4 \le x \le 6 \Rightarrow D=[-4,6]$

ت $(y = 1 / \sqrt{(x^2 - 4)}$

رادیکاند باید له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی

$x^2-4>0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow x>2$ یا $x<-2$

نو دی $D=(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

۱۵ . ۵ تمرینونه

۱ – د ایمپلیځیت توابعو ایکسپلیځیت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y - 8 = 0$

۲ – لاندې فنکشنونه په پارامترانځورونی ورکړ شوي

a) $x=2t \quad y=-t^2+3t$ b) $x=\sqrt{t} \quad y=2t+1$

c) $x=1/t \quad y=2(t-3)$ d) $x(/2)t-1 \quad y=t^2$

پارامتر له منځه یوسی او په دې سره ورکړی $y=f(x)$

۳ – لاندې فنکشنونه په مونوتوني وڅیړی، او که ممکن وي نو مونوتونی اینتروالونه په تعریفېدیریو بیل (تجزیه) کړی، یا لږ تر لږه کړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = 2x - 3$　b) $y = -2x + 3$　c) $y = x^2$

d) $y = -2x^2$　c) $y = 2x^2 + 1$　f) $y = |x|$

۴ – پریکړه وکړی چی لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دووکوم نه دي:

a) $y = x$　b) $y = x + 1$　c) $y = x - 1$

d) $y = 2x^2$　e) $y = 2x^2 + 1$　f) $y = (x-1)^2$

g) $y = x^2 / 2$　h) $y = x^5$　i) $y = |x|$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړی

a) $y = -2x + 3$　b) $y = (x-1)(x+2)$　c) $y = x^2 - x - 2$

d) $y = 2x^2 - 12x + 18$　e) $y = x^2 + 1$　f) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په ځې فنکشونونه پیدا کړی

a) $y = -2x + 3$　b) $y = x^2 + 1$, $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

c) $y = (x+1)^2$, $D = [-1, \infty)$, $W = [0, \infty)$,　d) $y = x^3 / 2$, $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

۷ – لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوي دي

a) $y = 0,4x - 1,6$　b) $y = -x + 1$　c) $y = (1/5)(3x + 1,5)$

d) $y = 2$　e) $3x - 3y - 7 = 0$　f) $4y + x = -1$

کرښې دې وکښل شي، جګوالي کونج α دې پیدا شي، او صفرځایونه x_N و ګټی!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تیریږي

a) (2,3)　(5,5)　b) (1,1) او (3,7)　c) (-1,0) او (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك یا فنکشنونه ورکړ شوي

a) $y = x^2 - 4x + 3$　b) $y = x^2 - 8x + 16$　c) $y = x^2 - 6x + 10$

d) $y = (x-5x)(x-1)$　e) $2x^2 - 10x + 12$　f) $y = 3x^2 + 6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2} + x + 4$　h) $y = x^2 / 4 + x + 2$　i) $y = 5x^2 + 45$

د ککرې کواوردینات دې پیداشي، صفرځایونه دې وټکل شي او پارابول دې انځور شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۰ – د لاندي تولريشنل فنکشنونه دي دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشيما د استعمال له لاري وګټل شي. فنکشنونه د د خلفورم باند انخور شي

a) $y = f(x) = x^3 - 6x + 5; \quad x_1 = 1 , x_2 = -1$

b) $y = f(x) = (1/2)x^3 - x^2 - (13/2)x - 5; x_1 = 1/5 \quad x_2 = 5$

c) $y = f(x) = x^3 + 2x + 2x \quad ; x_1 = -2 \quad x_2 = 0,2$

d) $y = f(x) = x^4 - x^3 - 28x^2 \; 32x + 40 ; x_1 = 2 \quad x_2 = 5$

e) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 6x^2 + 5x + 6 ; x_1 = 1,5 \quad x_2 = 2$

۱۱ – مات ريشنل فنکشنونه ورکړ شي :

a) $y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$

b) $y = \frac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 5x + 6}$

c) $y = \frac{x^3 + 2x^2 + x}{x^4 - 13x^2 + 36}$

d) $y = \frac{x}{(x^3 + 6x^2 + 9x)(x^2 - 4x + 4)}$

e) $y = \frac{2x^3 - x^2 + 6x - 3}{x^2 + 3}$.

صفرځايونه دي وګټل شي، پول. تشځايونه او د ± 8 <- x لپاره ځان نيونه!

۱۲ – لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشنونه جوړ کړی

a) $y = 2^{x-1}$, D = R , W=(0,œ) b) $y = 2^x - 1$, D = R , W =(-1,œ)

c) $y = \log_3 x$, D = (0,œ), W = R d) $y = \ln(x-1)$, D =(1,œ), W = R

۱۳ – لاندي فنکشنونو ته مونوتوني اينتروالونه ورکړی او برخه په څپ فنکشتونه:

a) $y = (x-1)^2$ b) $y = x^2 - 1$ c) $y = (x+1)^2 + 1$

d) $y = x^2 - 4x + 5$ e) $y = 4x^2$ f) $y = (1/4)x^2 + x/2 + 1$

۱۴ – تړلي فنکشنونه $y = f[h(g(x))]$ په دننه او دباندي فنکشنونو

$y = f(w) \;, w = h(z) , z = g(x)$

بيل (تجزيه) کړی(د تعريف–او ارزښتډيريوورکولو څخه کيدی شي تيرشو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $y = e^{(x+1)^2}$ b) $y = (e^{x+1})^2$ c) $y = \lg\sqrt{2x-3}$

d) $y = \sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y = \tan\sqrt{x-3}$ f) $y = \sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y = \sqrt{\tan x - 3}$ h) $y = \tan\sqrt{x} - 3$ i) $y = \text{Arc}\sin x^2 +$

j) $y = [\text{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y = \ln\sin\frac{x}{3}$ l) $y = \sin\ln(x + \frac{1}{3}$

m) $y = \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ n) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y = \frac{1}{\sin\sqrt{x}}$

p) $y = \text{Arc}\cot e^{2x+1}$.

۱۵ – ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندې او دننه فنکشنونو

$$y = f(v),\ v = h(w),\ w = (g(z)),\ z = k(x)$$

بیل کړی(د تعریف– او ارزښتدیري باندې تیرونه کیدی شي)

a) $y = \left[\text{Arc}\cot(e^x + 1)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\text{Arc}\cot(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^2$

d) $y = \sqrt{5 - \tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln(x^2 - 1) + 1\right]$ f) $y = \log_3\left[\sqrt{2^x + 1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

۱۶ – د لاندې ښننیزویا سپرنیز (تحلیلي) افادو لپاره تعریفدیري پیدا کړی.

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3-x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2-9}$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$ e) $y = \frac{1}{x^2+x-6}$ f) $y = \ln(2x+5)$

g) $y = \text{Arc}\cos(2x-4)$ h) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ i) $y = \ln x + \frac{1}{x-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریګوډیکچ یا تریګونومتري Trigonometrie

تعریفونه

د دریګوډیکچ یا تریګونومتري دنده ده چې په هواره یا په هوا کی دریګوډي کچ کړي ، د څانګړوبلواکو له لارې، دې په نامه تریګونومتریبلواکو. برسیره پر دې د دې په مرسته پریودیکی یعنی په منظمه فاصله پرلپسی تکراریدونکی پیښې (موږ یی تل راګرځیدوني بللی شو) څیړل کیږي.

تریګونمتري تر هیپارچ (Hipparch ۱۶۰ – ۱۲۵ له م پخوا) پوري تعقیبیدی شي، وروسته له مصري پتولیمویس Patolemäus چې په ۱۶۸ م کال کی مړ شوی او بیا له هندې او عربو شمیرپوهانو له خوا پرمختګ ورکړ شو. له پیل دا د کاروني یا عملي کیدو د ستونځو سره مخامخ وه. دریګوډیکچ خپل کارونه په استرنومي او فزیك، د ځمککچ یا اندازه کولو، د ځمك اندازوني، نقشو علم، او ابادۍ او نوتیك Nautik (د کیشتیو د لارو نقشه ویستلو پوهنه) کی مومي.

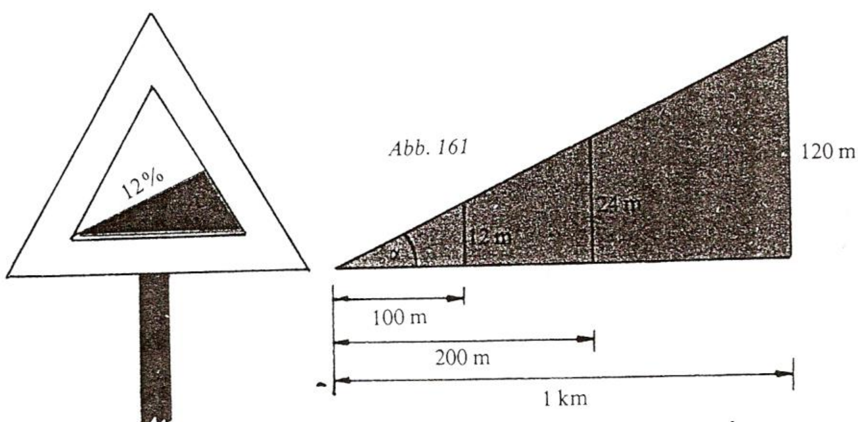
د تریګونومتري مانا یا مهموالی په څانګړي ډول په دې ریښتینوالی یا واقعیت کی نغښتی، چې د دې په مرسته د پایکرښبلواکوالی ، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي(پام دې وي، چې دا تړاو شمیرپوهینیز مفهوم لري).

پیلبیلګه: د په مانایا مهم جګوالي یا لویدکرښو نخښه لوحی یا په بله عبارت د زوري او پیچومی لیکتختی(دې ته دې پام وي چې ما دا کلیمی هر چیرې د زوري او پیچومی په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چې په هغه مناسب ځای

(c) ketabton.com: The Digital Library

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي) وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟
پیچومی یا جګوال 12 % په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی یو جګوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیك ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جګوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توګه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جګوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جګوالي لیدیدونکي ۱۲۰ متره ته جګیږي. کتل کیري یا لیدل کیږي، چی په ورکړشوي پیچومي یا جګوالي کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځاننیونه و هوارې فاصلي ته تغیر خوري . د پایکرښو تناسب یا ځاننیونه تابث یا ځاي په ځاي پاتیږي او د په سلو کی ګڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جګوالي اوږدوالي معلومات نه

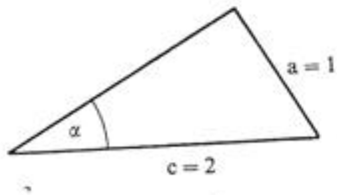


خیره۱۹۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشن لپاره ما بلواک لیکلی یعنې همغه د درې له تابع څخه مې را اخستي، چې نورو ژبو کې يې بلواک څیره ده، چې دې امله يې څیره نمونه سمه ده اوکارونه يې څیرونه ده.

ساینبلواک sinusfunktion بلیکه:

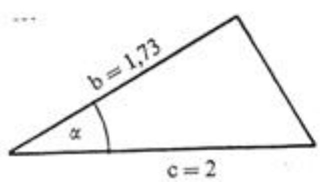


$\sin\alpha = \frac{a}{c}$ = مخامخ کاتیت / هیپوتینوزې

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

څیره ۱۹۶

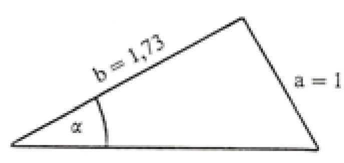
کوسایبلوک Cosinusfunktion بیلګه:



$\cos\alpha = \frac{b}{c}$ = پرته کتیت / هیپوتینوزې

$\cos 30° = \frac{1,73}{2} = 0,8660$

تنجنتبلواک Tangensfunktion بیلګه:



$\tan\alpha = \frac{a}{b}$ = مخامخ کاتیت / پروتکاتیت

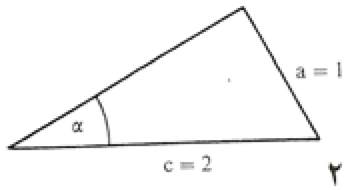
څیره ۱۹۸

$\tan 30° = \frac{1}{1,73} = 0,577$

د کونجونو د پینونومونې (دا ټول شته، خو بیاهم اړیین دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوسیکانسبلواك Kosekansfunktion بیلګه:



$$\operatorname{Cosec}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هیپوتینوزي}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

خیره ۲۰۱

$$\cos ec\alpha = \frac{2}{1} = 2$$

موږ به زیات وخت لمړنی دري یا په همدې توګه لمړنی ځلور بلواکه د کارونی لپاره راونیسو یا وکاروو.

په خوښه دریګوډیو کی شمیرنه

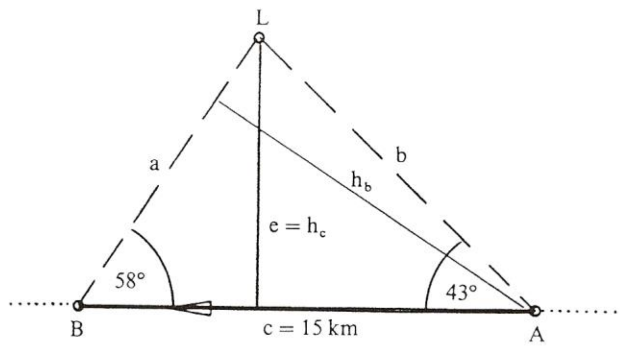
سره له دې چی کونجبلواکي یواځی په ولاړکونجیز دریګوډي کی باید تعریف کیږي، خو بیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جګوالی په جوړولو کی هر دریګوډی په ولاړو برخه دریګوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اخرني هنري، د مخکني مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکرښي وینا وي د پیل دریګوډي باندې لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشوو کونجونو.

پیلبیلګه

یوه کیښتی د رڼاډزکړي(کله چی کښتی له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کښتی یا یو بل څه ته که یوه کښتی وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کیږي چی له لرې څرګندیږي او نورې خبر ورته لیږونکی په دې پوهیږي، چی څه پیښ شوي دي). دلته $\alpha = 43°$ د تګ په لور اندازه کیږي او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه تګ پایکرښي $c = 15\ km$ او کونج $\beta = 58°$ وروسته.
په دوم ډز کی کیښتی له ډز رڼااور څخه څومره لرې ده؟
د A څخه و B ته د کیښتی نزدې واټن e د ډزرڼااور څخه څومره لرې دی؟
په A کی له اور څخه څومره لرې وه ؟



څیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 79°$; $\sin\beta = h_b / c$ او $\sin\gamma = h_b / b$

د h_b په لور اوبیول یا حلول او په همدې وخت کی لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin\beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin\gamma$$
$$\Rightarrow c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$
$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58°}{\sin 79°} = 12{,}959\ km$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin\alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin\alpha = 12{,}959 \cdot \sin 43° = 8{,}838 \text{ km}$$

$$\sin\beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin\beta} = \frac{8{,}838}{\sin 58°} = 10{,}421 \text{ km}$$

لکه چې په ياد راوړل شو، د همغه دريګوډي اړخونوa او b په شميرنه کې مرستندوي لويی له منځه ځي او باور لري:

د ساين جمله :

په خوښه دريګوډي کی د اړخونو ځاننيونه ياتناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساين ځاننيونه يا تناسب دی.

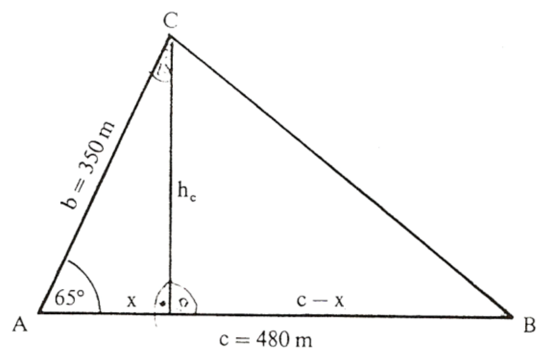
$\sin\alpha / \sin\beta = a / b$ $\sin\beta / \sin\gamma = b / c$

$\sin\gamma / \sin\alpha = c / a$

د ساين جمله په پڅ دريګوډي کي هم باورلري(تمرين دې وکتل شي). ددې سره په يوه دريګوډي کی نه موجودې ټوټې هلته شميرل کيږي، چيرته چی دوه اړخونه او يو مخامخ کونج يا دوه کونجونه او يو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي.
سړی بيا څه کوي که دريواړه اړخونه ورکړ شوي وي او يا دوه اړخونه او د هغوتر منځ راګير کونج؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیلبیلګه : په یوه د ډبروسکرو کان کی دوه ستنی $b = 350\ m$
او $c = 480\ m$ دي او يو کونج $\alpha = 65^\circ$ ښندوي.
د B څخه و C ته به د نښلولو ستن يا تير څومره لوي وي ؟



څيره ۲۰۳

اوبی یا حل :
جګوالی یا جګی h_c کرښه $AB = c$ په دوه ټوټو x او $c-x$ ویشي.
دلته دی $x = b.\cos\alpha$ ،
ځکه چی $\cos\alpha = x / b$ دی . د پیتاګوراس د جلی له مخی
لرو : $h_c^2 = b^2 - x^2$
او

$$a^2 = h_c^{\,2} + (c-x)^2 .$$
$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb\cos\alpha$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړخونو اوږدوالی نوموني او کونج کیدی شي چي منظم بیرته راګرځیدونکی (څیکلیکي یوناني کلیمه ده ګردی ډوله یا منظم بیرته راګرځیدونکی zyklisch) یو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

کوساین جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos \gamma$$

په هر یوه دریګوټي کی د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زیاتون سره ترې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساین سره ځل.

د کوساین جمله د پیوتاګوراس د جملی عمومیت یا ټولیز ته هم وایي. (تمرین ۶ مخ دې وکتل شي)

د کونجبلواك له لارې یو بل متود، د ډیرګوټي شمیرلو لپاره ، تر څو دا په دریګوټیو ویشل کیدی شي چی پوره اړخونه او کونجونه یی څرګند وي، پیدا شو.

د دې ټولو سره د څلورګوټي یو وربرسیره بل د شمیر فرمول پیداشو:

$$A = 0,5.d_1.d_2.\sin \alpha$$

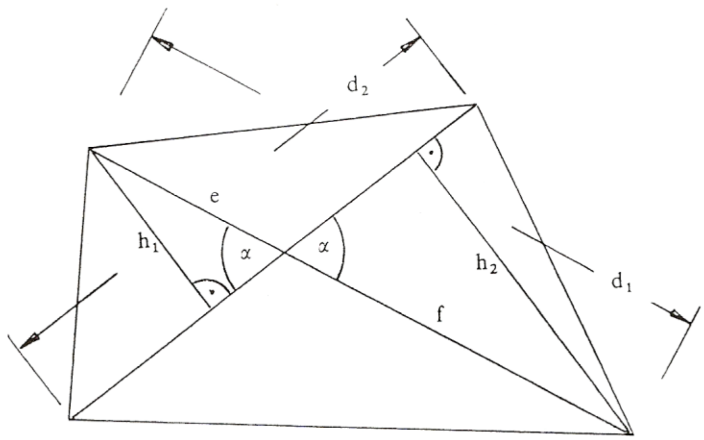
چیرته چي $\alpha = w(d_1; d_2)$ وي.

اوبی یا حل : $A=0,5(d_2h_1 + d_2h_2)$

که d_1 په e او f ټوټه یا تجزیه شي ، نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1 = e \cdot \sin \alpha$$
$$h_2 = f \cdot \sin \alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2 (e + f) \sin \alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2\, d_1 \, \sin \alpha$$



شیره۲۰۴

د په خوښه کونجونو تریګونومتریکي بلواکي

په اخره برخه کی مو وویل، چی کونجبلواک، نه یوائی د دننه لورته تیرو دریګوډیو لپاره ، بلکه د هغو کونجونو لپاره چی له ۹۰ درجو لوي وي ، هم هدفمند (موخور) تشریحوړ دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کړ.

دا پراختیا څنګه تصور یا د خیالوړ کیدی شي ؟

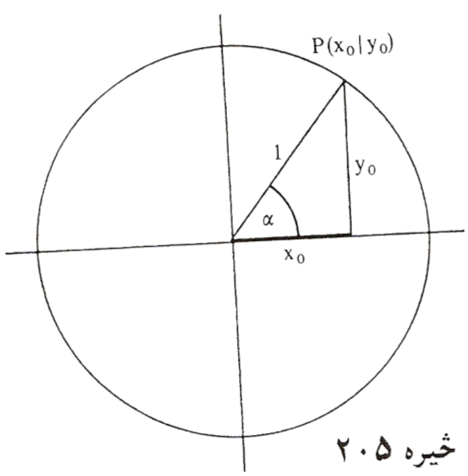
(c) ketabton.com: The Digital Library

په ښه توګه داسې کیدی شي چې په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یوه ګردۍ ووهي چې وړانګه یې ۱ یعنې یو یوون یا واحد دی (دې ته یوونګردۍ ویل کیږي، ځکه چې وړانګه یې یو یوون دی) او د ګردۍ منځټکی او د پروت ولاړ سیستم کواوردېنات سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریګوډۍ، چې د هغې یو کونج د ګردۍ څنتریکونج دی، یعنې کونج یې د ګردۍ په منځ یا څنتر پروت دی، (څیره ۲۰۴) کم له کمه یې یو اړخ ۱ یعنې یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریګوډۍ په دننه کې شمیرنه او اړیکې اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړکونجیز دریګوډي څخه پیل کوو، چې په لمړي لمړي څلورمه یا کوادرانت (Quadrant) کې پروت د ی. نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په ګردۍ ،د کونجټکی $P(x|_0y_0)$ په پام کې نیولو سره، باور لري:

$$\sin\alpha = y_0 / 1 = y_0, \quad \cos\alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرښې د پریوستون او یا د سیوربدرځونو په څیر لاس ته راځي، که موږ وړانګه د یوه ټالوهونکې مروند په څیر ونیسو یعنې فرض کړو، کوم چې د محورغبرګې رڼا لاندې راشي.



څیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریګوډي کې کیدی شي چې د پیتاګوراس جمله وکارول شي:

تریګونومتریکې پیتاګوراس:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

چیرته چې $\sin^2\alpha = \sin\alpha . \sin\alpha$ په مانا دی.

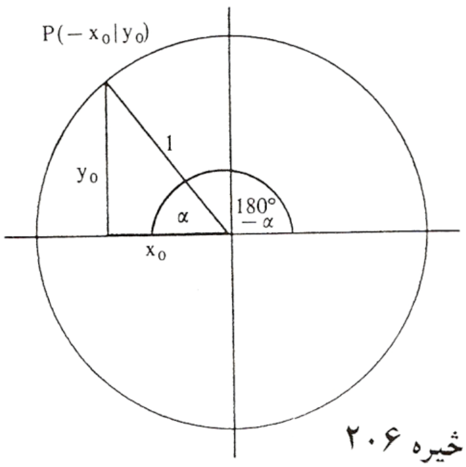
(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي ، چی پوښتنه وشي چی همدا « سیوری » بیا کله لاس ته راتلی شي.
دا حالت بیاهیك هلته لاس ته راځي، چی وړانګه د منفي x –محور سره یو کونج α جوړ کړي، یعني ښتریکونج یی $180° - \alpha$ وي.
د « سیوروښیرو» ښخه لاس ته راځي:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

ځکه چی دا سیوری همغومره اوږد دی لکه د مخه، مګر اوس له صفر پیل مخامخ (منفی) لور ښایي.



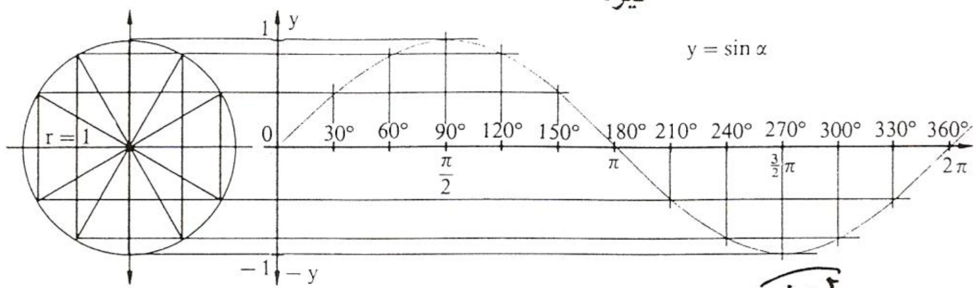
ښیره ۲۰۶

په ورته توګه لاس ته راځی :

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(360° - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

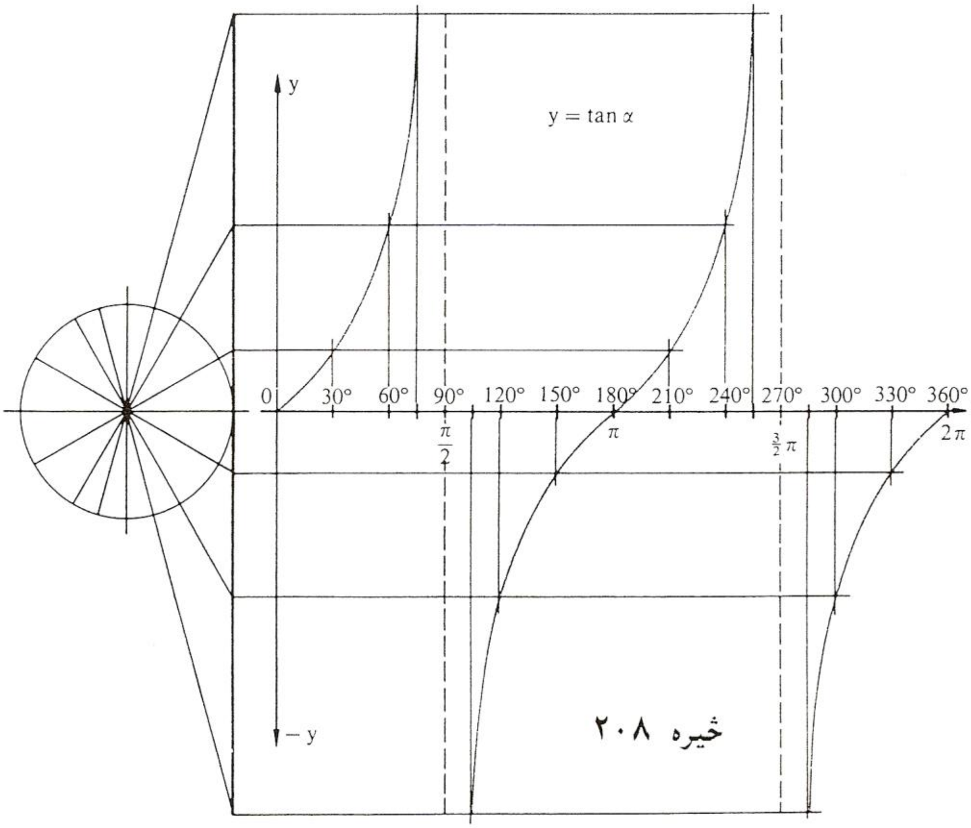
د کونج $\alpha+360°$ لپاره بیرته د سرچیني کونج اړیکی لاس ته راځي: همدا ډول د $\alpha+720$ لپاره اوهمداسی نور. په دې توګه د په خوښه کونجفنکشنونو یا کونجبلواکو لپاره د ساین او کوساین بلواك تعریف دي.
د $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ له امله (مقایسه مخ | ۱۵) دا د تنجنت بلواك لپاره هم صدق کوي. له دې امله لاندې د بلواکګرافونه لاس ته راځی

خیره ۲۰۷



Die **Sinuskurve**: $y = \sin x$; $x \in \mathbb{R}$; $y \in [-1; 1]$

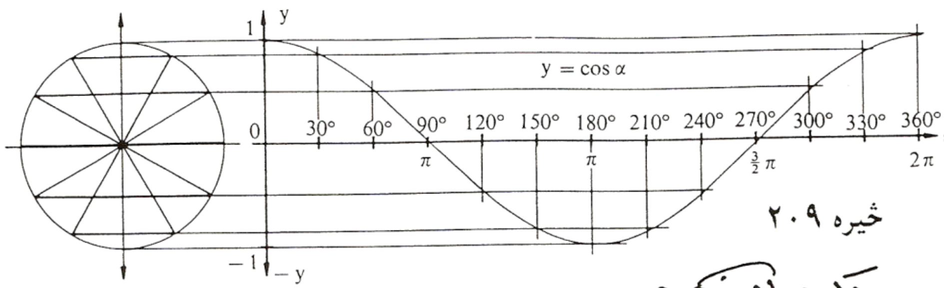
د ساین کږه



Die **Tangenskurve**: $y = \tan x$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$; $y \in \mathbb{R}$

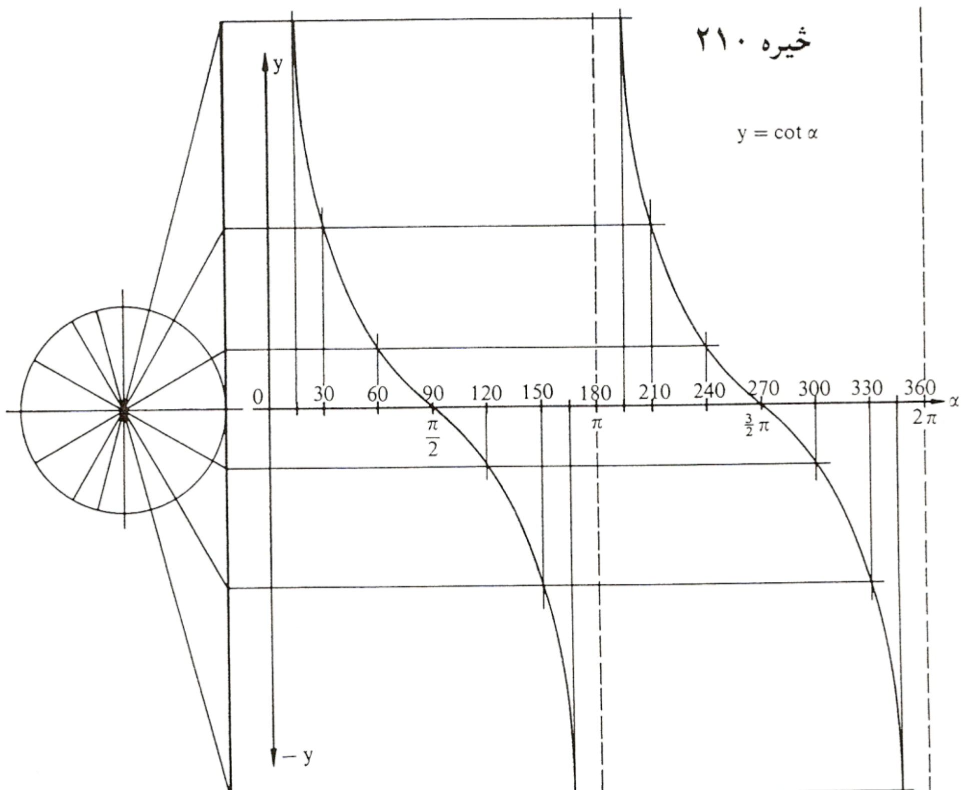
د تنجنت کږه

(c) ketabton.com: The Digital Library



Die **Kosinuskurve**: $y = \cos x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$

دکوساین کږه



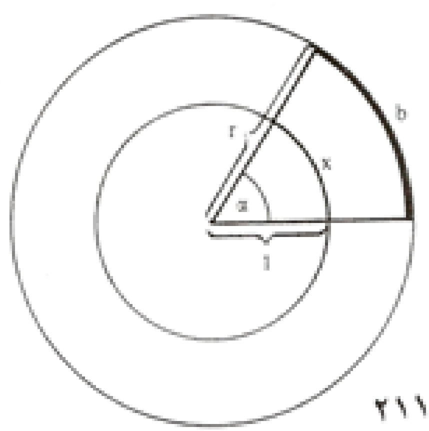
Die **Kotangenskurve**: $y = \cot x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

دکوتنجنت کږه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لینده اندازه (لینده کچ) Das Bogenmaß

په زره درجه د کونجکچ یا – اندازې سره بلد یو (دمخه ولیدل، چې ۳۶۰ درجې پوره گردي بنايي. هغه، چې لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده ، چې گردی په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دوارو کچیوونونو یا کچواحدونو کې کډ دي، چې په گښونو اندازه کیږي، بې له کچ یوون ارزښتډيرى ریبلگښونه دي، په داسې حال کې چې وتل گښونه (= د تعریف ډیري گښونه) یو یوون یا واحد (درجه یا گون) لري. دا په کارونه یا عمل کې موږ زیات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندې کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.



خیره ۲۱۱

کونج لویې په واقعیت کې یوون «راد (rad) » لري، مگر دا په کارونه یا عمل کې کیدی ونه لیکل شي یا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته مو نه راهځوي. دا کونجکچونه چې د کونج لپاره په تریگونومتریکی بلواکو کې اېښودل کیږي (د بیلگې په توگه sin)

ارگومنت (Argument تعریفډيرى) بلل کیږي. په تعریفډيري کې کیدی شي چې نوې درجه ، زره درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چې په جیښمیري کې همغه مودوس په کار اچول شوي دي(راتلونکی دې وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په برخه ګردیبرخوکی وښوول شو (ګردیبرخی د مخه څیړل شوي دي) چی هر کونج پورې یوه ګردبرخه یا ګردۍ لینده اړه لري، نو ټولی ګردۍ پورې ۳۶۰ درجی کونج یا $2\pi r$ اړه لري، یوه کونج ∝ پورې بیا یوه لینده b اړه لري، کومه چی په چاپېرۍ کی ځانګړی همداسی نیسي لکه په پیل کی∝ و ۳۶۰ درجو ته . دلته ګردیګڼ دی : $\pi = 3,14....$ (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

پیلبیلګه:

کونج $60° = \propto$ له ګردۍ د ۱۰ سانتیمتره وړانګي سره یوه په لاندې ډول ګردۍ لینده $b = 20\pi . 60° : 360° = 10,47$ cm غوځوي یا بیلوي. د ګردۍ چاپیری دی : $U = 20\pi = 62,83$ cm

همغه کونج ∝ د ۵ سانتي متره وړانګی سره ګردیلینده

$$b = 10\pi .60° : 360° = 5,236 \text{ cm}$$

غوځوي. دا ګردۍ لاندې چاپیری لري: $U = 10 = 31,416$ cm .

له ګردۍ د وړانګي $r = 1$ cm سره ددې په څټ یا برعکس کونج ګردیلینده

$$b = 2\pi . 60°: 360° = 1,047 \text{ cm}$$

غوځوي» د دې ګردي چاپیری فقط $U = 2\pi = 6,283$ دی .

له بیلګي څرګندیږي، چی لینده اندازه په همغه اندازه زیاتیږي لکه وړانګه. له دې امله کیدی شي خپله شمیرنه په یوونګردي د وړانګي ۱ سره رابنده یا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعریف: په یوونګردي د ګردیلیندی اوږدوالي کچګڼ، چی په څنتریکونج

(c) ketabton.com: The Digital Library

باندې خیره شوي، لینده کچ بلل کیږي. لاندې شمیراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180°) . \pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x / \pi)\, 180° = \frac{x}{\pi} \cdot 180°$$

دا چې د وړانګي څرخون په پوره کونج هم وراوړیدی شي، نو له دې امله د لینده کچ لپاره په خوښه ریبلګڼونه پریښوول شوي.

بیلګی :

$$\alpha = 1° \Leftrightarrow x = \frac{1°}{180°}\pi = 0{,}0175\ (rad) \qquad \alpha = 180° \Leftrightarrow x = \frac{180°}{180°}\pi = \pi = 3{,}1416$$

$$\alpha = 30° \Leftrightarrow x = \frac{30°}{180°}\pi = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236 \qquad \alpha = 360° \Leftrightarrow x = \frac{360°}{180°}\pi = 2\pi = 6{,}2832$$

$$\alpha = 45° \Leftrightarrow x = \frac{45°}{180°}\pi = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854 \qquad \alpha = 720° \Leftrightarrow x = \frac{720°}{360°}\pi = 4\pi = 12{,}5664 \quad \text{usw.;}$$

$$\alpha = 60° \Leftrightarrow x = \frac{60°}{180°}\pi = \frac{\pi}{3} = 1{,}0472$$

$$\alpha = 90° \Leftrightarrow x = \frac{90°}{180°}\pi = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \qquad \alpha = -75° \Leftrightarrow x = \frac{-75°}{180°}\pi = \frac{-5}{12}\pi = -1{,}309$$

ارکوسبلواکي Arcusfunkrionen

زیات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کیږي ، چې لکه په ورکړشوو کرښځاننیونو راپیداشوې کونجونه څنګه معلومیږي یا څنګه راڅرګندیږی یا بهتره څنګه ځانونه نیسی. ددې لپاره چی دا پوښتنه ځواب شي، باید امکانات ولټول شي، چی د کونجبلواک ارزښتونو څخه څنګه بیرته کونج یا په همدې توګه د هغه تعریفیږي ته، په لینده کچ راتلی شو. دا کونجبلواک پریودیکی یا تل بیرته راګرځیدونکي بلواک دی، دا په دې مانا ، چې د بلواک ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونولپاره یا .

(c) ketabton.com: The Digital Library

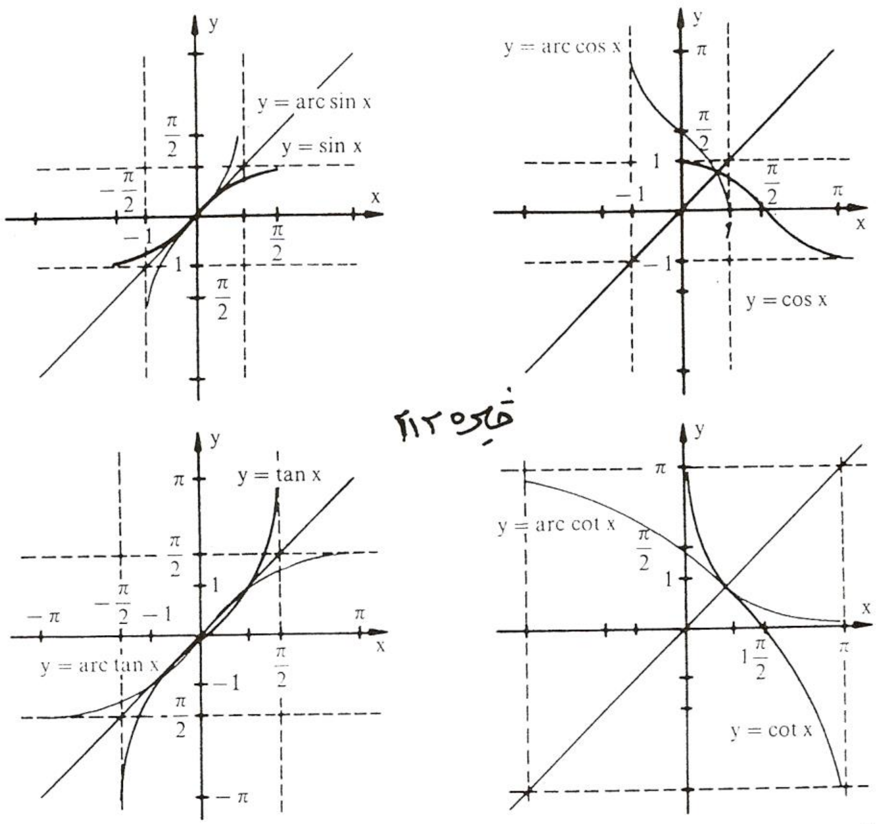
مختلفو واټنونو وروسته، بلواك ارزښتونه تکرارېږي. د دې لپاره چې په ځتکېدنه ممکن شي، نو باید د خپل تعریف ډېرى په یوه برخه ډېري رابند یا محدود شي.

تعریف : د یوه (رابند یا محدود) تریګونومتریکي بلواك په څټ بلواکونه ارکوس بلواك Arcusfunktion بلل کیږي یا څیکلومتریکي بلواك (لاتین ارکوس: Arcus = Bogen = لینده)

دلته (arc sin(x لوستل کیږي »دx ارکوس ساین. د کونجبلواك تعریفډېرى دلته اړونده ارکوسبلواك ارزښتډېرى دى او په څټ ارګومنت یا تعریفډېرى دلته تل یو ریبلګڼ دى.

Trigonometrische Funktion تریګونومتریکي بلواك	Arcusfunktion ارکوسبلواك
f: $x \mapsto \sin(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle\| -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arcsin(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle\| -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \mapsto \cos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| 0 \le x \le \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -1 \le y \le 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arccos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \{y \| 0 \le y \le \pi\}$
f: $x \mapsto \tan(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle\| -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -\infty < y < \infty\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arctan(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle\| -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \to \cot(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| 0 < x < \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -\infty < x < \infty\}$	f^{-1}: $x \to \operatorname{arccot}(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \{y \| 0 < y < \pi\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



شکل ۲۱۲

Beispiele: بېلګې :

1. arcsin (0,8) $= 0{,}9273(\text{rad}) = 53{,}13°$

2. arccos (1) $= 0(\text{rad}) = 0°$

3. arctan (−100) $= -1{,}5608(\text{rad}) = -89{,}43°$

4. arccot (−70) $= -0{,}0143(\text{rad}) = -0{,}82°$

۵ – دا چې کونجبلواك و ارکوسبلاك يو د بل په څټ بلواك دي نو باور لري.

$$\sin(\arcsin(y)) = y; \quad \arcsin(\sin(x)) = x$$
$$\cos(\arccos(y)) = y; \quad \arccos(\cos(x)) = x$$
$$\tan(\arctan(y)) = y; \quad \arctan(\tan(x)) = x$$
$$\cot(\text{arccot}(y)) = y; \quad \text{arccot}(\cot(x)) = x$$

یعنې په لاندې توګه چې

$$\sin(\arcsin(0{,}4)) = \sin(23{,}58°) = 0{,}4$$
$$\arccos(\cos(\pi/3)) = \arccos(0{,}5) = 1{,}0472$$
$$\tan(\arctan(-40)) = \tan(-88{,}5679°) = -39{,}9999$$
$$\text{arccot}(\cot(60°)) = \text{arccot}(0{,}5774) = 1{,}0472$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جبشميري کاروني يا استعمال لپاره

داچي پخوا معمول جدولونه د بلواك تعريفېدېري او ارزښتېدېري شميرلو لپاره له کاره غورځول شوي دي او دنده يې ايلکترونيکي ماشينونو نيولې ده، غواړو چې د جبشميري استعمال په هکله هم څه ووايو

کورکمپيوتر زيات وخت داسې فنکشنونه يا بلواکي لري يا وظيفې په کلك اختيار کې لري، چې د درجي اوړون په لينده کچ او په څپ کوي، مګر شميردرځ په توګه بايد د شميرونکې په پروګرام کې ځای په ځاي شوی وي.

پوره اسانتياوې او زياته کارونه د جبشميرې په غاړه پرته ده، دلته دې توکمې د < .... > سره په نخښنه شي:

په قاعده کې دريې بلواك ورکړشوي دي : < sin > ; < cos > ; < cot > کوتنجنت بيا داسې شميرلکيدی شي، د < tan><1/x > . د < INV > – توکمي سره سړی ارکوسبلواك ته راځي: نو < INV><sin > ارکوس ساين دی. په عمومې توګه کونج – بي پروا که په لينده کچ او يا درجه کچ ورکړ شوي وي – بايد د فنکشن له مخه ورکړ.

بيلګي

۱ لاندې جدول همغه د کاروني يا اتعمال (س) لپاره د جبشميري چمتووالی ښای :

Winkelmaß کونجکچ	TR-Modus په نخښنونه	Beispiel بېلګه
Altgrad زړه درجه Neugrad نوې درجه Bogenmaß لينده‌کچ	DEG GRAD RAD	$\sin 45° = 0{,}7071$ $\sin 50^g = 0{,}7071$ $\sin \frac{\pi}{4} = 0{,}7071$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.

Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
sin 45°	45⟨sin⟩	0.707106781	DEG
$\sin \frac{\pi}{6}$	⟨π⟩⟨:⟩6⟨sin⟩	0,5	RAD
cot 30°	30⟨tan⟩⟨1/x⟩	1.732050808	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	60(°)	DEG
arccos 0,5	0,5⟨INV⟩⟨cos⟩	$1{,}047 = \frac{\pi}{3}$	RAD
arccot 2	2⟨1/x⟩⟨INV⟩⟨tan⟩	26.56505118°	DEG
sin 220^{g}	220⟨sin⟩	−0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چی جبشمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه ») د زاړه – یا نوي درجی همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جبشمیریو مودلونو سره د تکمی <DRG> څخه لاس ته راځی یا د بیلګي په توګه . < MODE >

د ورکړشوي درجه ګڼ اوړون په لینده کچ د < <- DRG > سره سورت نیسي.
بیرته یا په ځټ سړی داسی راځي- لکه چی لرل مو- د <INV> – تکمی سره.

بیلګی

60°	⟨DRG⟩	60(rad)
60	⟨DRG⟩	60(grad)
60°	⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨DRG →⟩	60°
60°	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	60°

دلته ګراد نښونه (gard) نوی درجه ده یعنی ګون(gon).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځنی جشميري په دې برسيره نور زيات امکانات هم لري ، نتيجی يی په ګراد دقيقی، ثانيي اويا لسيز سيستم ورکړ شوي دي. بدلون بيا د تکمی <DMS-Dd> سره صورت نيسی:

26°45′ 30.25°	⟨inv⟩⟨DMS – Dd⟩ ⟨DMS – Dd⟩	26.75° 30°15′

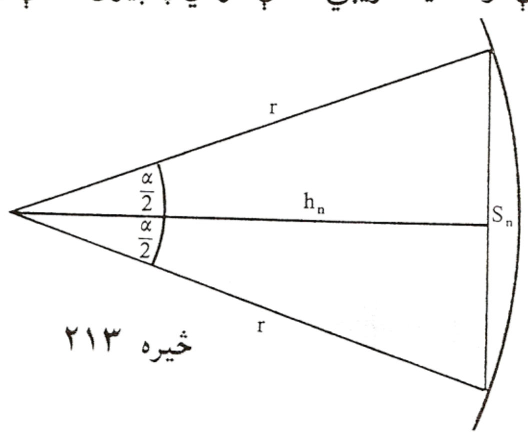
د " 15″ °30 " ورکړه کيدی شي د جبشميري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جبشميری د لاس کتاب څخه ګټه واخستل شي (يادونه: زه پوهيږم چی داسی شيان موږ متآسفانه په خپل هيواد کي نه لرو ، خو په هر صورت يي ليکل ضرور دي، دا پرمختګ موږ هم خپل شاته نه شي پريښوولی)

پيلبيلګه: دلته دې S_n د يوه منظم n– ګوټي د اړخ اوږدوالی وي، چی په يوه ګردی کی چی وړانګه يی $r = 5\ cm$ ده، راګير دی.

الف) وښايي چی

$$S_n = 2r \cdot \sin(180° : n)$$

ب) د يوه داسی n– ګوټي چاپيری U_n وشميری ، چی $n = 8;16;32;128$ وي، او په نږدې توګه يا تقريبي د دې ګردي چاپيری د دې وړانګي r سره وښايی .



خيره ۲۱۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په همدې ډول n– ګوډی له هوارو A_n څخه په نزدې توګه یا تقریبي د ګردی ـــ هواره A وښایی .

اوبی (حل : هر n– ګوډی کیدی شي په n مساوي دریګوډیو ټوټه کړی شي.

د هغو د څینتریکونج ∝ لپاره باور لري $\propto = 360° / n$. د جګی یا جګوالی h_c د کنبلو سره په هر مساوي پښیز دریګوډي کي ولاړکونجیزې نیایی د ځنتریکونج یا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\propto}{2} = 360° / 2n = 180° / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n /2) / r = \sin\frac{\propto}{2} \Rightarrow S_n = 2r \cdot \sin\frac{\propto}{2} = 2r \cdot \sin(180° / n)$$

b) $U = n.S_n = 2r.n.\sin(180°/n) = 10n.\sin(180° / n)$

د ارزښتشمیرنو د غلطی مخنیوی لپاره همدفمند یا موخه ور دی، که په دغه همغه لړیپرلپسی تکمی وکارول شي یا استعمال شي .

```
180° ⟨STO⟩ ⟨:⟩    8 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩    8 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 30.614675
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩   16 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩   16 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.214452
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩   32 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩   32 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.365485
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩   64 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩   64 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.403312
     ⟨RCL⟩ ⟨:⟩  128 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩  128 ⟨·⟩ 10 ⟨=⟩ 31.412773
```

پ) د ډیرګوډي هواره د دریګوډیو هوارو د یوځایوالی څخه لاس ته راځی

د هر دریګوډي هواره ده: $0,5.S_n.h_n$. د

$$h_n = r.\cos(180° / n)$$

او

$$S_n = 2r \cdot \sin(180°/ n)$$

له امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = n \cdot 0{,}5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cos\left(\frac{180°}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0{,}5 \sin\left(\frac{360°}{n}\right)$$

له دې سره د نرې [illegible]

$$360° \langle STO \rangle \langle : \rangle \; 8 \langle = \rangle \langle SIN \rangle \langle \cdot \rangle \; 8 \langle \cdot \rangle 12.5 \langle = \rangle 70.710678$$
$$\langle RCL \rangle \langle : \rangle \; 16 \langle = \rangle \langle SIN \rangle \langle \cdot \rangle \; 16 \langle \cdot \rangle 12.5 \langle = \rangle 76.536686$$
$$\langle RCL \rangle \langle : \rangle \; 32 \langle = \rangle \langle SIN \rangle \langle \cdot \rangle \; 32 \langle \cdot \rangle 12.5 \langle = \rangle 78.036129$$
$$\langle RCL \rangle \langle : \rangle \; 64 \langle = \rangle \langle SIN \rangle \langle \cdot \rangle \; 64 \langle \cdot \rangle 12.5 \langle = \rangle 78.413712$$
$$\langle RCL \rangle \langle : \rangle \; 128 \langle = \rangle \langle SIN \rangle \langle \cdot \rangle \; 128 \langle \cdot \rangle 12.5 \langle = \rangle 78.508279$$

د یوه جشمیرې سره ، چې له یوې زخیرې زیاتی ولري ، لکه چی پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسیره نورې ثابتي هم زخیره کیدی شي» په یوه منظم پروګرامور ماشین سره کیدي شي چې د دا ډول شمیرنو لپاره د ګوډونو ګڼ څخه ت شو یا د ګوډونو ګڼ باند ې صرفنظر وشي .

د تریګونومتریکي بلواکو خویونه

دا چی کونجکچ په درجه کچ او هم په لینده کچ ورکول کیدی شي، کیدی شي چی یوه کونج بلواک تعریفېدیری یا α او یا x وي. ددې لپاره چی د یوه بلواک خوي باندې ټینګار وکړو، باید په لاندې په لینده کچ تکیه وکړو.

د لاندې خویونو لمړۍ ډله یوائې له تعریفمساوات (د مخه راغلی) او د پیتاګوراس له جملی لاس ته راځي (د مخه لوستل شوې) لاندې صدق کوي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پرته کاتیت}} = \frac{\frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}}{\frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دې لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \iff \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسیره پر دې لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دې سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x \; ; \quad 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تریګونومتریکي بلواکو کې هیله ده ، چې د پوتنځ لیکدود په پام کې ونیسی. په لاندې پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کی gegeben ورکړی او gesucht غوښتونی یا پلټونی په مانا دي

gegeben ورکړي / gesucht غوښتونې	sin x	cos x	tan x	cot x
sin x	sin x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\dfrac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
cos x	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	cos x	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\dfrac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
tan x	$\pm\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	tan x	$\dfrac{1}{\cot x}$
cot x	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm\dfrac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\dfrac{1}{\tan x}$	cot x

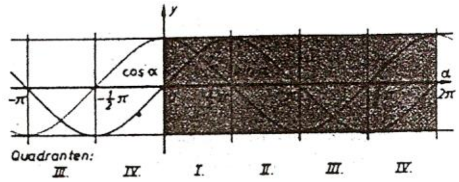
لکه چی د مخه مو په ګوته کړل، کیدی شي چی تریګونومتریکي بلواك د مختلفو ګونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواك ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توګه یا په کلکه توګه لاس ته راوړی شو

تعریف : تریګونومتریکي بلواك ټول پریودیکي یعني بیرته راګرځیدونکی دی، دا په دې مانا، چی د بلواك ارزښتونه په منظمو واټنونو کی تکراریږي. په دې د ساین بلواك او د کوساین بلواك راګرځیدنه (یا ۳۶۰ درجی) لري، کوتنجنتبلواك راګرځیدنه (یا ۱۸۰ درجی ($180°$)) لري.

$$\left.\begin{array}{l}\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x \\ \tan(x \pm k\pi) = \tan x\end{array}\right\} \quad k \in N$$

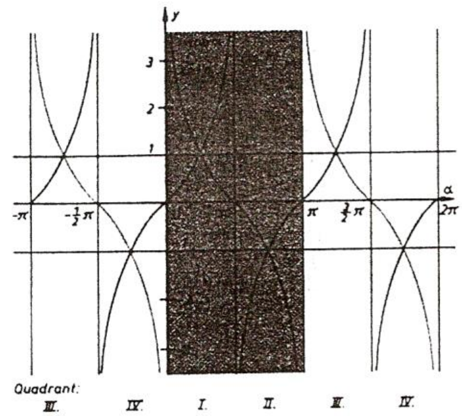
$$\left.\begin{array}{l}\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x \\ \cot(x \pm k\pi) = \cot x\end{array}\right\} \quad k \in N$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



شیره ۲۱۴

د ساین - او کوساین فنکشن پریودیانی راګرځیدنه



د تنجنت او کوتنجنت فنکشن پریود بیلګې :

$\sin 50°$	$= \sin(50° + 360°)$	$= \sin(50° - 720°)$	$= 0{,}76604$	
$\cos -30°$	$= \cos(-30° - 360°)$	$= \cos(-30° + 1080°)$	$= 0{,}86603$	
$\tan 2{,}5$	$= \tan(2{,}5 - \pi)$	$= \tan(2{,}5 + 5\pi)$	$= -0{,}74702$	
$\cot 10$	$= \cot(10 + \pi)$	$= \cot(10 - \pi)$	$= 1{,}54235$	
$\sin 35°$	$= \sin(180° - 35°)$	$= -\sin(180° + 35°)$	$= -\sin(360° - 35°)$	$= 0{,}573576$
$\cos 35°$	$= -\cos 145°$	$= -\cos 215°$	$= \cos 325°$	$= 0{,}81952$
$\tan 0{,}6109$	$= -\tan 2{,}5307$	$= \tan 3{,}7525$	$= -\tan 5{,}6723$	$= 0{,}700208$
$\cot 0{,}6109$	$= -\cot 2{,}5307$	$= \cot 3{,}7525$	$= -\cot 5{,}6723$	$= 1{,}428042$

که د فنکشن ګراف ته په ځیر شو نو په دې برسیره په ټینګه روښانیږي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	π − x	π + x	2π − x	
$\sin x =$	$\sin(\pi - x) =$	$-\sin(\pi + x) =$	$-\sin(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\cos x =$	$-\cos(\pi - x) =$	$-\cos(\pi + x) =$	$\cos(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\tan x =$	$-\tan(\pi - x) =$	$\tan(\pi + x) =$	$-\tan(2\pi - x)$	(Abb. 180)
$\cot x =$	$-\cot(\pi - x) =$	$\cot(\pi + x) =$	$-\cot(2\pi - x)$	(Abb. 180)

بیلګې:

	α	180° − α	180° + α	360° − α
	35°	145°	215°	325°
sin	0,573576	0,573576	− 0,573576	− 0,573576
cos	0,819152	− 0,819152	− 0,819152	0,819152
tan	0,700208	− 0,700208	0,700208	− 0,700208
cot	1,428148	− 1,428148	1,428148	− 1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځې د جبشمیرې یا کمپیوتر څخه کار اخستل کیږي ، هدفمند بولو، چې یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin x bzw. sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0
cos x bzw. cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	−1	0	1
tan x bzw. tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	–	0
cot x bzw. cot α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	−1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

د دغه جدول د [illegible] په مانا [illegible].

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې جدول څخه کیدی شي په خیال کی یا ګوماني لاس ته راوړی شو

$$\sin x = \cos(\;\;/2 - x) \qquad \cos x = \sin(\;\;/2 - x)$$
$$\tan x = \cot(\;\;/2 - x) \qquad \cot x = \tan(\;\;/2 - x)$$

دا ګومان کیدی شي په ولاړکونجیز دریګوډي کي د تعریف په مرسته په ساده توګه وښوول شي. :

$$\sin \;\; = a / c \quad \text{او} \quad \cos ß = a / c$$

د $\;\; - 90° = ß$ له امله لاس ته راځي :

$$\sin \;\; = \cos(\,90° - \;\;)$$

په ورته توګه نور ې غوښتني هم لاس ته راتلی شي.

دا له څیرو څخه هم لاس ته راوړل کیدی شي، څکه د ساین او کوساین بلواکو یا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنت بلواکو ګرافونه د $/2 \;\; = x$ کرښی ته یو بل سره محورسیومتري څغلي :

له څیرو او بیلګو څخه په دې برسیره لاس ته راځي:

تعریف: د کوساین بلواك جفت دی ، لرو:

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

ساین – ، تنجنت – او کوتنجنت بلواك ناجفت دي» د دوي لپاره باور لري:

$$\sin(x) = -\sin(-x),\;\; \tan(x) = -\tan(-x)\;;\; \cot(x) = -\cot(-x)$$

یادونه : په دې نلواکو کي کیدی شي چی x له نوکانو دباندې هم وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلگی:

$$\sin 60° = -\sin(-60°) = 0,86603$$
$$\cos 0,75 = \cos(-0,75) = -0,70711$$
$$\tan 150° = -\tan(-150°) = -0,57735$$
$$\cot 1,3 = -\cot(-1,3) = o,27762$$

د زياتون قضيي يا تيورمونه

دا چي کونجبلواك لايني نه دي(د فنکشنگراف کرښه نه ده،بلکه کږه ده) ، نو ډېل تعريفډيري پورې ساده ډېل بلواك ارزښت اړه نه لري.
لکه

$\sin 30° = 0,5$ $\sin 90° = 1$ $\sin 180° = 0$

د داسی په نامه زياتونمسئلی په مرسته ممکن کيږي، چی د بلواك ارزښت د کونج په دوه برابرولو يا په همدې ډول د دوه کونجونو يو په بل زياتولو د يوگونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابي کړی شو.

بيلگی :

1 . $\sin(x + y) = \sin x .\cos y + \cos x . \sin y$

1' . $\sin(x - y) = \sin x . \cos y - \cos x . \sin y$

2 . $\cos(x + y) \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$

2 '. $cis(x- y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y$

3 . $\sin 2x = 2.\sin x . \cos x$

4 . $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

6. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

7. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 - \cos x)}$

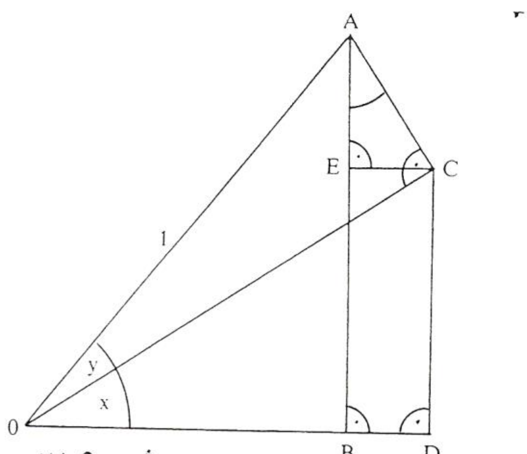
8. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 + \cos x)}$

9. $\tan(x + y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

9′. $\tan(x - y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

10. $\cot(x + y) = \dfrac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$ mit $\cot x \neq -\cot y$

10′. $\cot(x - y) = \dfrac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y}$ mit $\cot x \neq \cot y$



خیره ۲۱۶

1. und **2.**:

$|OA| = 1$

$|AC| = \sin y$; $|OC| = \cos y$

$|AB| = \sin(x + y)$; $|OB| = \cos(x + y)$

$\dfrac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$

$\dfrac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

نو سربېره پر دې لرو:

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$
$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

د ځای په ځای کولو څخه ثبوت په لاس راځي

$$\sin(x + y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1′. 2′.:

3. ι 4.: x = y. ځای په ځای کړه

5.: Setze $z + t = x;\ z - t = y \Rightarrow z = \frac{x+y}{2};\ t = \frac{x-y}{2}$ کېږده

t $\sin x = \sin(z + t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$ پس لرو

$$= \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$\sin y = \sin(z - t) = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$ همداسې

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

6. ثبوت په ورته توګه څخه لاس ته راځي

7.: $x = y = z/2$ کېږده

$$\Rightarrow \cos(x + y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2\frac{z}{2} - \cos z \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$$

د ولېښه ښوونې له لارې ثبوت لرو

8.: $(*)\ \sin^2\frac{z}{2}$ durch $1 - \cos^2\frac{z}{2}$. په (*) کې و لیکه او کېږده

۹-۱۰: دا اړیکې له ۱ او ۲ او تنجنت د تعریف څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

بلواك يا فنكشن $y = a . \sin(bx+c) +d$

لكه چي په پيل كى مو وويل په طبيعت او تخنيك كي ډيري پيښي شته دى چي تل بيرته راكرځي يا لنډ: راګرځي، يعني پريوديكي دي. د دې د تشريح لپاره په خپل سوچه يا خالصه بڼه تل د ساين بلواك بسيا نه كوي.
دا زيات علتونه لري : لمړی د ساينبلواك د ١- او ١ ترمنځ ارزښت نيسي، له بلي لور داواقعي د كونج په واك كى نه دي بلكه د وخت په واك كي دي د يوې راګرځيدنى سره، چى دا په ساده توګه د 2 په ډول نه شي رانيولكيدى. له دې امله د ساين بلواك د دې كارونو د روښانوولو لپاره بايد موډيفيځير شي يا يى بڼه واوړي. دا بڼه اوړون او د هغى تاثير په لاندې ليدنه كى راټول شويدي، ګراف يى ورزياتى ځيرونى لپاره دى. په ورته ډول د نورو كونجبلواكو لپاره باور لري په عمل كي مګر يواځي د ساينبلواك (په همدې توګه د هغي مخامخ د كوساين بلواك چي په $\pi/2$ سره راكښل شوى وي) د مانا ډك دي. (لوستل: له ښي لوري څخه)

بیلګی	دکارونی ساحه	تاثیر	بلواك
ځیره ۲۱۷	ټولی تلبیرته راګرځیدونی تعامولونه		$y = \sin (x)$
ځیره ۲۱۸	د یوه مساوي او بدل سپیالږنګ یو په بل پرلوتل	د y-لور باندې راکښنه	$y = \sin(x) +d$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځېره ۲۱۹	په بدل برېښنا جریان کې د برېښنا او ښیانو تک تغیر روښانوي	د فاز تغیر یا ځای بدلون	$y = \sin(x+c)$
ځېره ۳۲۰	دیوه پندول خوځېدنه	د امپلیتود د ځای بدلون فاکتور 1- د 180° فاز ځای بدلون دی	$y = a \cdot \sin(x)$
د ځېره ۲۲۱	دیوه بیستون خپرونه په یوه وخت کې د ... الوېه او ازولوکې	د پیریود تغیر یا بدلون: سرعت $b>1$؛ په کراره کیدل $0<b<1$؛ په شاته ګرځیدنه کم مخور دی $b<0$	$y = \sin(bx)$
ځېره ۲۲۲	کمپلکس پریودیک جریان یا عمل	عمومي حالت	$y = a \cdot \sin(bx+c)+d$

تمرینونه

۱ – د لاندې ورکړې سره ځیره بله کړی

$4°6' = 4{,}1°$; $10°, 5' = 10°30$

a) $6{,}75° =$ b = $120{,}48° =$ c) $-75{,}65° =$

d) $52°16' =$ e) $97°13' =$ f) $44°44'\,44'' =$

۲ – په درجه کچ ي ولیکی

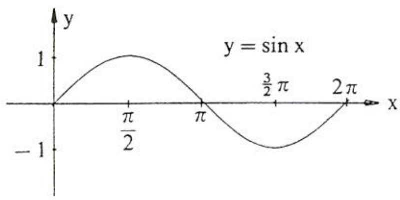
a) $x = \pi/3$, b) $x = -\pi/4$, c) $x\,(2/3)\pi$

d) $x = 4$ e) $x = -3$ f) $x = 4{,}7$

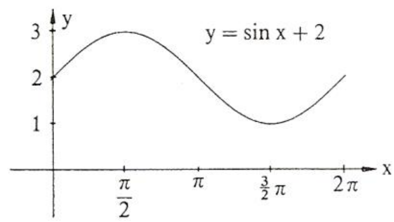
۳ – په لینده کچ یی ولیکي

a) $15°$ b) $-60°$ c) $540°$ d) $20°15'$ e) $15{,}75°$

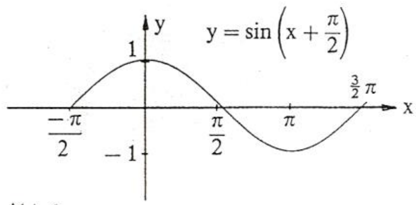
(c) ketabton.com: The Digital Library



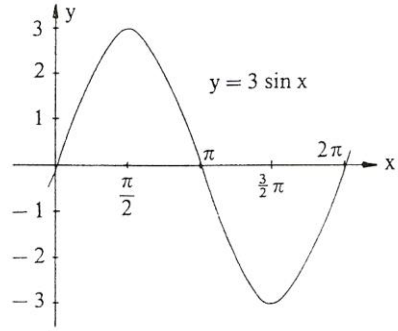
شیره ۲۱۷



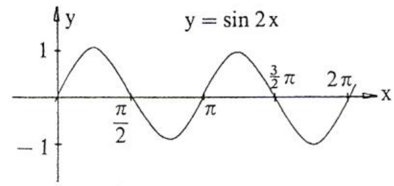
شیره ۲۱۸



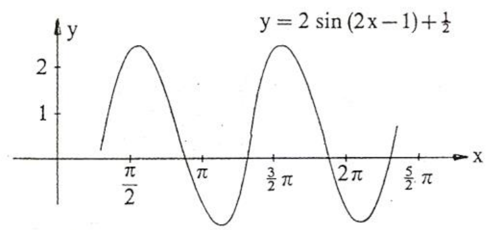
شیره ۲۱۹



شیره ۲۲۰



شیره ۲۲۱



شیره ۲۲۲

د دې بلواك ګراف د ساين کږې $y = \sin x$ څخه لکه چې ګورو لاس ته راځي:

۱ – د ارزښت دوه ځله کيدل

۲ – د نيمی راګرځيد اوږدوالی باندې پرسيدنه

۳ – په يوه يوون د ښي لور ته راکښنه

۴ – په 2 / 1 پورته لورته 100% راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – وټاکی

a) $\sin 20°$ b) $\sin(-30°)$ c) $\sin 172°$ d) din1°4'

e) $\cos 35°$ f) $\cos 380°$ g) $\cos(-27°)$ h) $\cos 47{,}9°$

i) $\tan 11°$ k) $\tan(-15°)$ l) $\tan 33{,}33°$ m) $\tan 13°13'$

n) $\cot 870°$ o) $\cot(-11°)$ p) $\cot 14°14'$

q) $\cot(-2°2')$

r) $\sin\alpha = 0{,}8$ s) $\cos\alpha = 0{,}9$ t) $\tan\alpha = 2{,}5$

u) $\cot\alpha = -1$ v) $\sin\varphi = 0{,}3$ w) $\cos\varphi = -0{,}13$

x) $\tan\varphi = -4$ y) $\cot\varphi = 0{,}3$ z) $\arcsin(x) = \pi/2$

۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی لرو $\gamma = 90°$ او په دې برسیره :

a) a = 7 cm; b = 6cm

b) a = 16cm; = 66°45'

c) c = 5cm; a = 3cm

پاتی ټوټې وشمیرى

۶ – په مساوي پښیز دریګوډي

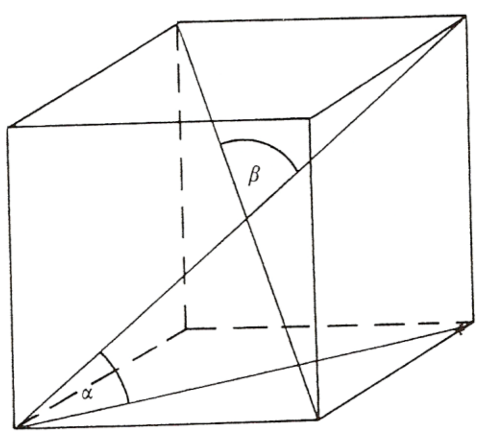
کي (a = پښه ده) دی

a) a= 10cm ; α =80°40'

b) a= 12 cm ; h = 8cm

c) ß = 40°; a = 7cm

پاتی ټوټي وشميري



شیره ۲۲۳

۷ – د یوه پڅکونجیز ($\alpha > 90°$)

دریګوډي لپاره ساین وشمیری

۸ الف) کوساین د یوه پڅ کونجیز

دریګوډي لپاره وشمیری ($\alpha > 90°$)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟

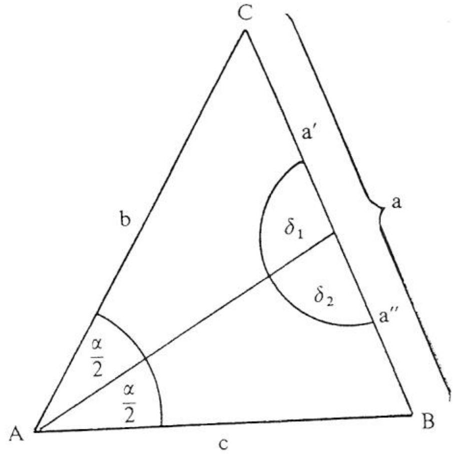
۹ – په یوه مکعب کی د یوه هوا نیمي او بنستهواري ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟
څیره .د دواړو هوا یا فضا یا بدن نیمیو ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

۱۰ – د دوه ګردیو وړانګی

$r_1 = 5$ cm , $r_2 = 4$ cm

دي او همداسی د منځټکو واټن $|M_1M_2| = 8$cm ورکړ شوی دی.
دد دواړو ګردیو د تماس
مماسونو غوڅکونجی وټاکی
او د کلډي غوڅونی اوږدوالی .

۱۱ – په یوه دریګوډي کی د یوه
کونجنیمی مخامخ اړخ په داسی
ځان نیونه یا تناسب غوڅوي لکه
په دې پرتي خواوې. دا غوښتنه د
ساین جملی په مرسته حل
(اوبی) کړی(څیره۲۲۴).



څیره ۲۲۴

۱۲ – که یوه بار ځای ته،
چي ۱،۵۰ متره جګ دی،
یوه زینه ورجګه شي
میلانکونج ﮐ دې زیات ترزیات 33° وي، زینه دې څومره لویه وي؟

۱۳ – الف)د یوې پورته ختلی کوځي جګوالي توپیردې څومره وي، که دا
کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او 12% جګه وي؟
ب) د ۱۵۴۰ پرتی لارې وهلو وروسته د جګوالي توپیر څومره دی ؟
پ) د یوه زوړندي پټیلار، چی ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کی څومره
لوي دی ، که دا د جګوالی توپیر ۵۰۰ متره ولري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۴ – یو د اوبو بیلر (کتله = ۱۰۰ کیلوګرامه) په یوه دره پورته خیژول کیږي، چی میلانکونج $= 25°$ لري. د وزنزور په زوړندزور تختی سره غبرګ او نورمال یعنی ولاړ زور (د فشارزور) ولاړ تجزیه یا ټوټه کیږي، دواړه زوره څومره لوي دی ؟ (۱ کیلو ګرام = ۹ ، ۸۱ نیوټن $1\ kg = 9{,}81N$).

۱۵ – یو تلفونستن په څلور رسیو، چی هره یوه یی **۵۳** متره اوږده ده، درول کیږي. درسیو میلانکونج $60°$ دی په پښه باندې په کوم جګوالي باید رسی وړلی شي ؟

۱۶ – د یوې **۵۳** متره جګې ونی سیوری **۵** ، ۱۲ متره اوږد دی. په څمکه لمروړانګي په کوم جګوالی یوبل سره مخمامخ کیږي.؟

۱۷ – د یوه **۵** متره جګ کتونټکي (لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کیږي چی جګیدونکوج یی $= 18{,}5°$ او پښیتکی یی $ß=8°$ لوید کونج ، برج څومره جګ دی ؟ د لیدټکي څخه یی پروت لریوالی څومره دی ؟

۱۸ – الف) د پیزا (Pisa) کوږ برج ۴۷ متره جګ دی، او څوکه یی د پښی ټکي څخه ۵۰ ،۴ متره ور اوړي. دا برج څومره مایل دی ؟

ب) د یوه جومات برج چی ۱۵۰ متره جګ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په څمکي ټکي (یعنی د سترګي جګوالی د برج بنسټټکي سره برابر وي)، څخه وکتل شي، چی د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟

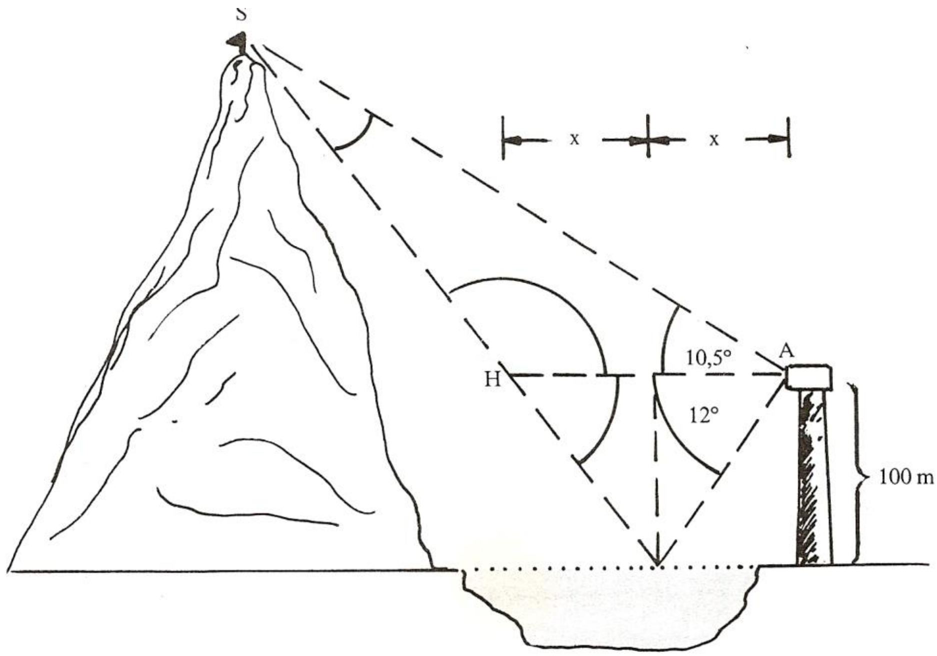
پ) د ۵، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کیږي
- که جګوالی یی ۱۶۰ متره وي؟
- که جګوالی يي ۱۳۷ متره وي ؟

ت) د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې
- د بل برج څوکه ښکاريږي چی جګوالی یي ۱۴۳ متره وي ؟

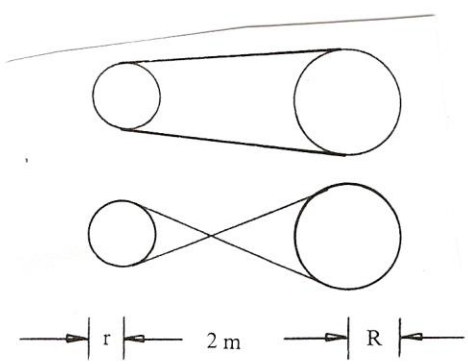
(c) ketabton.com: The Digital Library

–د پاریس د ایفل برج ښکاریږي چی جګوالی یي ۳۰۰ متره دی ؟
۱۹ – د ښیپپس اهرام (CHeopspyramide) ۱۳۷ متره جګوالی لري او د بنسټ
د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري
الف) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟
ب) د څنګهوارې دریواړه دنننی کونجونه څومره لوي دي؟
۲۰ – یو ژوری یا قبر –۸ ، ۱ متره ژور دی، بنسټسور یی ۵ ، ۲ متره دی، د پورته
لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی
الف) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی څومره پراخ دی؟
ب) که ۱۰ متره اوږد وي، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جګوالی
یی ۵۰ ، ۱ متره وي؟
۲۱ – یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جګوالی لري د
بحیرې لور ته 14° میلان لري، د دننه لور ته 28° میلان لري. د ډنډ بنسټ
څومره سور لري؟ د هغی د نیمی هواره څومره ده؟
۲۲ – د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو ښه لید د ماترهورن (ماترنښکر یا د ماترن د
غره څوکه Matterhorn) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی
دی) اچول کیږي که دا د یوه لیدټکي څخه چی ۱۰۰ متره جګ دی د ډنډ په
لور ښکته وکتل شي، نو د غره د څوکي هندارونه د 12° پریوتکونج لاندې
لیدل کیږي. د غره څوکه د یوپورته کونج 11° لاندې لیدل کیږي. د ریفلډنډ
باندې د ماترنښکر څوکه څومره جګه پروته ده؟
څیره

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۲۵



خیره ۲۲۶

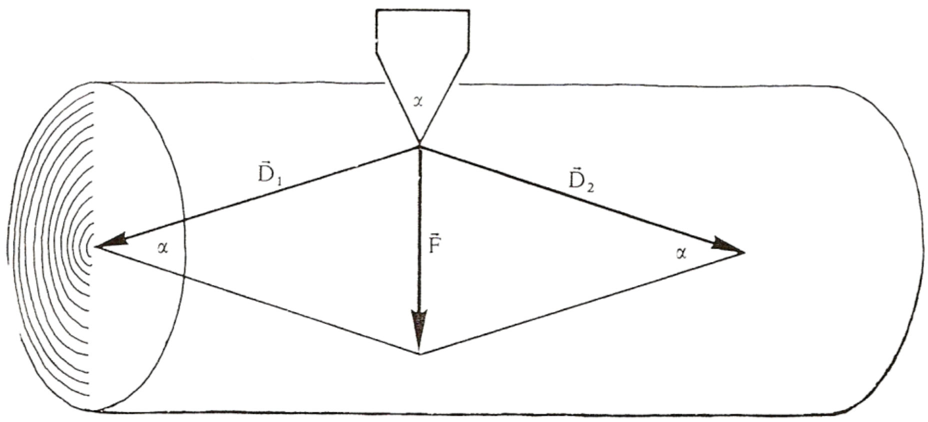
۲۳ - الف) یوه د کشولو کړی، چي په دوه دکښولو چیترو باندې راتاو ده، څومره اوږده ده، که لاندې اندازې ولري
$r = 22\ cm$, $R = 35\ cm$,
$|M_1M_2| = 2m$?

ب) دا کړی به څومره اوږدې وي که د اتیران په څیر له چیتروګانو یا تیکلیو داکی څیدلی وي ؟

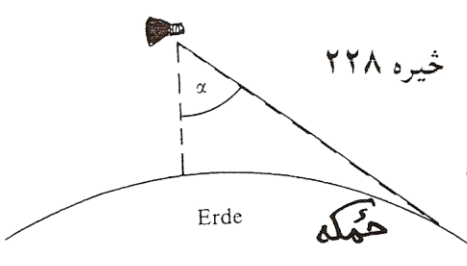
(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۴ الف) د ونی په ستنه یو کایل)موړی) په څټك د D زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه D څومره لوي دي، کوم چې د ستنی درځونه ، که د کایل یا تبرگي کونج $\alpha = 6°$ وي. (حیره ۱۹۴)؟

ب) په کومکایلکونج یا تبرگیکونج لرو: $|D|=|F|$ ؟



څیره ۲۲۷

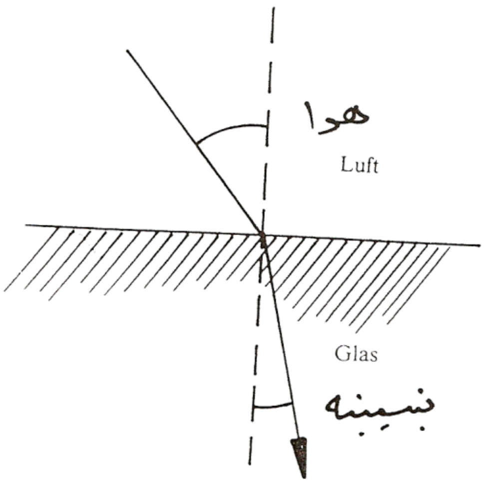


څیره ۲۲۸

۲۵ – د یوه الوتماشین څخه ځمکه د یوه α کونج لاندې لیدل کیږي (څیره) دا الوتماشین څومره جګ الوزي ؟ (د ځمکی وړانگه : ۶۳۷۰ کیلومتره)

۲۶ – یو گادی د $v_{\alpha} = 120km/h$ سرعت سره روان دی، نو د باران څاڅکی په پټلی د تلنلور باندې په $= 115°$ کونج

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۲۹

د چیترو (مطلب د ګاډي د اوسپنی
ټیر یا ګاډیل دی) مخامخ ځغلي.
له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو
د لویدلو سرعت v_g وټاکی ؟

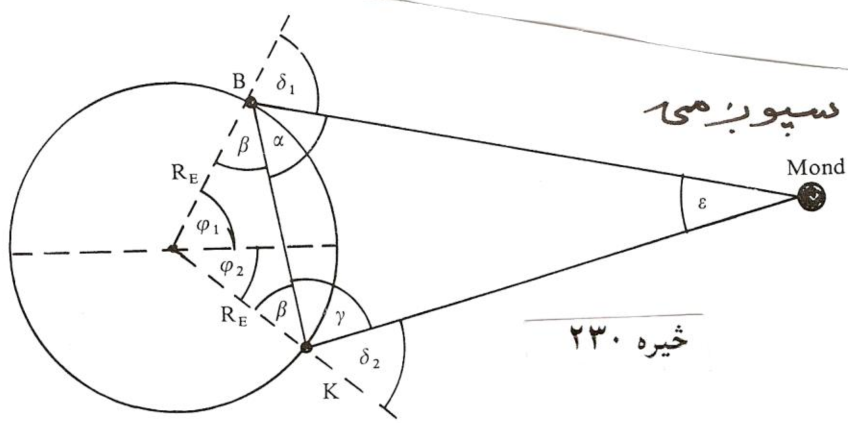
۲۷ – که د لمروړانګه په دوه مختلفو
طبقو ولویږي، نو خپلی لور ته تغیر
یا بدلون ورکوي. د سنیلیوس Snellius
د ماتقاعدې له مخی کیدی شي چی د
ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون
وایي، چی پروتوړانګه ، ماتوړانګه او
ولاړکرښه یا عمود په بیلیدونکی هوارې په یوه هواره پراته دي او برسیره پر
دې لاندې اړیکي باور لري یا صدق کوي:

$$\sin \alpha \; / \; \sin \beta = n$$

که د رڼاوړانګه په یوه ښیښه (اوبو) پریوزي، نو $n = 1,5$ (1,33) دی. وښایي،
چی ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چی په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

؟ 10,5°, 15,8°, 27,3° , 41,2°,67,6°,, 72,4°, 81,9°

۲۸ – په ۱۸ ا–مه میلادي پیړی کی د سپوږمی لریوالی تریګومتریکي وټاکل
شو. په برلین کی (جغرافیوي اوږدوالی $\varphi_1 = 52, 52°$) او لکه د ښو هیلو
په کونج کی ($\varphi_2 = -33,93°$)، کوم چی په همغه اوږدګراد پراته دي، د
سپوږمی سره په همغه وخت کی تړل کیږي. له دې لاس ته راغلل:
. $\delta_2 = 55,72°$ او $\delta_1 = 32,08°$
وشمیری |KM| , ß , |BK| او له دې څخه d_{EM} .



شیره ۲۳۰

۲۹ – لړځیدنیSchwingungen تل د وخت په اړه شمیرل کیږي یعني د وخت t تړواك لاندې دي. دا د بلواك $y = a . (\sin (2 \pi /T)) .t + k)$ له لارې ورکړ شوي. دلته $(2 \pi / T) t = x$ هغه کونج دی ، کوم چې په T وخت کی وهلکیږي. $1 / T = f$ د یوه ځرخون پریود یا راګرځیدنی وخت په ګوته کوي او د لړځیدنی دوام بلل کیږي» f فرکونځ frequenz بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ ۰ ګډوله ګڼونه يا کمپليکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو وليدل، چې څنګه يوه ګڼډيرۍ پر بله ګڼډيرۍ ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \qquad (7,1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند ليدل کيږي، چې دا په رييلګڼونډيرۍ کې اوبی يا حل نه لري، نو له دې امله بايد (7 , 1)د ګڼنو ډيرۍ وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, ...(7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي حٔل لپاره د رييل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کيږي چيرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, ...(7,3)$$

ليکو : دا پورته د لاندې سره

$$i^2 = -1 \qquad (7,4)$$

د (7,1) ځاي نيسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رييل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ايماجينارګڼ imaginär(لاتين: فقط خيالي)يوون(واحد)وايو.

برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2+a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a \quad , a > 0 \qquad (7,5)$$

کیدی شي په لاندې ډول ولیکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a.i}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,6)$$
$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a.i}$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, \ldots\ldots\ldots\ldots (5,7)$$

اوس د ایماجینار ګڼ یوون(واحد) ټولیز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5,8)$$

ایماجیناریوون(واحد) z= i یو ځانګړی ایماجینارګڼ b=1 دی

د ټولیزې څلوری (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,9)$$

په لاندې ډول د څلوری پوره کولو یا مربع تکمیلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2 / 4$$

لاس ته راځی یالرو<=

$$x^2 + px + q = (x + p/2)^2 = +(q - p^2/4) \qquad (7, 10)$$

$$(x+p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7, 11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$(x+p/2)_{1,2} = \pm\sqrt{p^2/4 - q}$$

نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4 - q}, ...(7,12)$$

د $p^2 = 4q$ لپاره رییل «دبل» اوبی یا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رییل اوبیونې یا حلونه منځ ته راوړي۰

که $P^2 < 4q$ وي، نو رییل اوبی نه شته دئ

د ایماجینار ګڼ په مرسته کیدی شي ولیکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{[q - \frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q - p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبیونې یا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a, b \in R$$

د دي فورم یا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونهKomplexe Zahlen (لاتین: پوره کوونکي - یا پوره کیدونکي-) بلل کیږي

$$z = a+bi\ ,\ i^2 = -1;\ a,b \in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډیرئ په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z} = a - bi, ...(7,14)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګيري کمپلکس ګڼ بلل کيږي٠ لنډ کنجوګيري کمپلکس ګڼ يا اوښتی ګڼ

$$| z |= \sqrt{a^2 + b^2},..............................(5,15)$$

د دې مطلقه يا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې رييل همدا رنګه ايماجينار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کيږي، که دوي په رييل او ايماجينار برخه کې يو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

موږ تل په پام کې لرو، چې$i^2 = -1$ اينول شوې

ګڼوله يا کمپلکس عدد کيدی شي په سطحه يا هاره کې د لاندې شکل سره سم(د ګاوس د اعدادوسطحه). سرې د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شميرنه کوي، لکه د حقيقي اعدادو سره او په پام کې نيسي چې:$i^2 = -1$

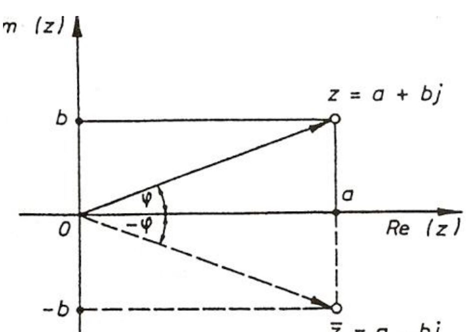


Bild 5.1

موږ دې سيستم ته پروت ولاړ سيستم وايو يا کواوردیناتسيستم Koordinaten systm

پورته خيره دې وکتل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پروتولاړ سيستم ته د (x,y) - سيستم هم وايي په پروتولاړ سيستم کې پروت څرخون(محور) د x - محور ته د هوارې ياسطځې ريیلبرخه او ولاړ محور يا د y – محور ته يېايماجينار برخه وايې لکه ځنګه، انځور شوي دي٠ په دې توګه په پروتولاړ سيستم کې يو ټکی منځ ته ر ائحي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي٠(موږ دا اوس دا برخه نوره نه څيړو، خو دا د وکتورونو په ډول انځوريږي او کاروني يا عملي يې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) يادونه : هغه ګران هيوادوال، چې نوي د شميرپوهنی د دې برخې سره بلديږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځنې وييونه يا لغاتونه ياکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته يا لاندې څيرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زياتون او کمون ځنګه دی

۷ ۰ ۱ زياتون او کمون:

لاندې څيرو ته دې پام وي او ګورو، چې رييل برخه او ايماجينار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2), ...(7,17)$$

بيلګه ۷ ۰ ۱ ورکړ شي:

$$\begin{aligned}
& z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i \\
& \Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i \\
& \Rightarrow \\
& |z_1| = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, |z_1| = \sqrt{13} \\
& -z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i
\end{aligned}$$

زياتون يا جمعه (او په همدې توګه کمون يا تفريق يعني د(z2-) په زياتون)کيدی شي د څيرې ۵ (په همدې توګه د څيرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

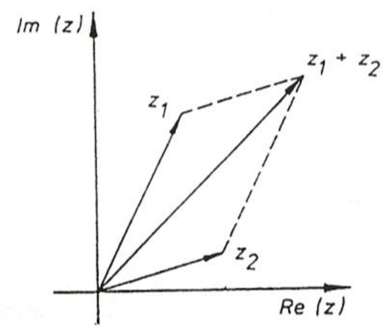


Bild 5.2 7.2 ځیره

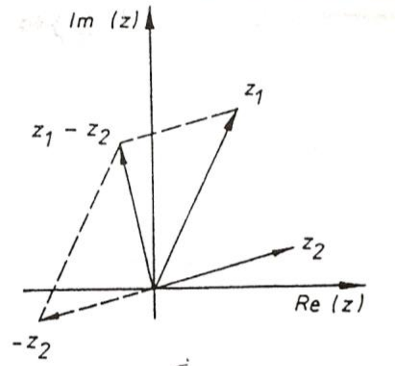
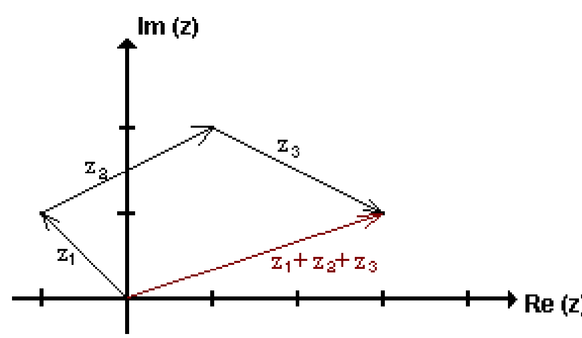
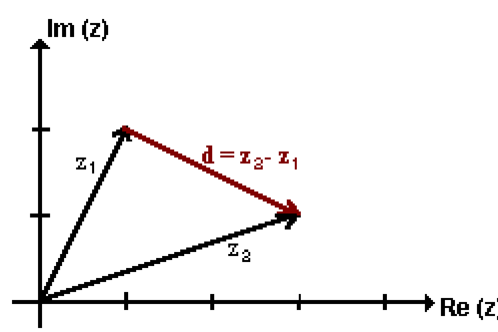


Bild 5.3 7 ځیره

یا لاندې:



په پورته او لاندې ځیرو کې د کملپکس ګڼونو د زیاتون او کمون انځور لیدلکیږي.



دکملپکس ګڼونو ارزښت

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګڼونو ارزښت بلل کیږي.

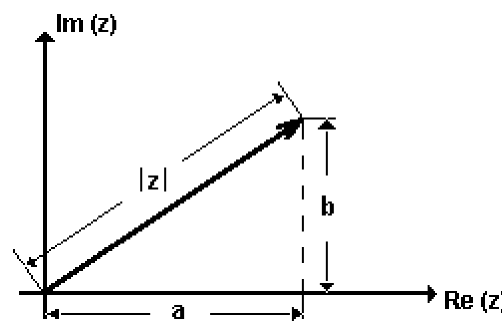
(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د پہ |z| سره ښايو او د پيتاګوراس(فئثاغورث) د جملې

سره ښوول کيږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی ليکه

هم وکتل شي٠ مخامخ څيره موږ ته د کمپلکس ګڼې

د ارزښت انځور ښايي



$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

په درې ګوډي کې د اړخونو ځانتيونه يا تباسب له امله باور لري

$$||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|, ...(7,18)$$

برسيره پر دې باور لري:

$$z_1 + z_2 = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

۷ . ۲ د کمپلکس ګنونځل:

د ورسره بلد نوک اينوولو له لارې لاس ته راځي

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$$
$$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 (-1)$$
$$\Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو بارورل ري

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2 - b_1 b_2)+(a_1 b_2 +a_2 b_1)i \qquad (7, 20)$$

ګران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتین توري په بدل ډول لیکل شوي، چې دا هم زما تخنیکي ستونځې دي، دا که په هرځایکي وي،دا به راته ګران د شمیرپوهنې مینه وال وبخښي٠ دا لاندې هم ساده ازمایل کیدی شي

$$\overline{z_1.z} = z_1.z_2 \quad , \quad |z_1 .z_2| = |z_1||z_2| \qquad (7,21)$$

بیلګه ۷ ٠ ۲

د $z.\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2+(-ab + ab)i = a^2+b^2$

او (۱۵ ، ۷) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7, 22)$$

۷ ٠ ۳ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1i):(a_2+b_2i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{\bar{z}}_2}{z_1\bar{\bar{z}}_2} = \frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)} = $$
$$= \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$(7,23) \qquad z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i} = $$
$$= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې پسې لاس ته راځي

$$|\frac{Z_1}{Z_2}| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}, \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ۷ . ۳ :

د (۷ . ۲۴) د دوېمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{\overline{Z_1}.Z_2}{\overline{Z_2}.Z_2} = \frac{(a_1-b_1i)(a_2+b_2i)}{(a_2-b_2i)(a_2+b_2i)} =$$

$$= \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_1b_2-a_2b_1)i}{a_2^2+b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} - \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2} i = \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ۷ ۰ ٤ :د او Z1 لپاره له Z2 سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)} = \frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2} = \frac{13}{13} i = -i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سېحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z = 1 - i$ b) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

c) $z = 2(1 - \sqrt{3}i)$ d) $z = -1-i$

۱ . ۲ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $|z| = \sqrt{2}$ b) $|z| < \sqrt{2}$ c) $|z| > \sqrt{2}$ d) $|z| = r$

۲ – جمعه او تفريق(زاتون او کمون)

۲ . ۱ – د شميرنې او کارنې يا رسم کونې له لارې پيدا کړئ

a)(1+2i)+(2+i) b) (-2+i)+1-2i)

c) (1-2i)-(1-2i) d) (-1-2i)+(2-i)

۲ . ۲ - د شميرنې او کارنې يا رسم کونې له لارې پيدا کړئ

a) (22 + 5i) + (2 + i) b) (3 + 2i) - (5+2i)

c) (1+2i) - (1+2i) d) i -(1-2i)

۳ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقيقي ګڼونه دي.

۳ . ۲ – وشميرئ

a) $(2+\sqrt{3}\,i).(3-\sqrt{2}i)$ b) $(3+2\sqrt{2}\,i).(3-2\sqrt{2}\,i)$

c) $(1+\sqrt{5}\,i).(1-\sqrt{5}\,i).(13-12i))$ d) $\sqrt{3+\sqrt{7}i}.\sqrt{3-\sqrt{7}i}$

۳ . ۲ – وشميرئ

a) $(x + y\,i)\,(2x + yi)$ b) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a-3bi\right)\cdot\left(\frac{4}{3}a+5bi\right)$ d) $(c-\sqrt{d}\,i)(-c-2\sqrt{d}\,i)$

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج يا ماتلاندې حقيقي ورګرځوئ (a ، b حقيقي دي)

3.3.1. a) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$ b) $\dfrac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\dfrac{56+33i}{12-5i}$ d) $\dfrac{63\ +\ 16i}{4\ +\ 3i}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3.3.2. a) $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\frac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\frac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\frac{3a+4bi}{4a-3bi}+\frac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)\,(6-i)+\frac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رایوځی شوې پوښتنې

ګډوله ګڼونه يا اعداد ورکړ شوي.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

۳ ـ د لوګاريتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرينونوکې x وشمرئ.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

وشميرئ:

4.1.	a) z_1+z_2	b) z_1-z_2	c) $z_1\cdot z_2$	d) $\frac{z_1}{z_2}$
4.2.	a) $\lvert z_1\rvert$	b) $\lvert z_2\rvert$	c) $\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$	d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
4.3.	a) $\lvert z_1+z_2\rvert$	b) $\lvert z_1-z_2\rvert$	c) $\bar{z}_1+\bar{z}_2$	d) $\bar{z}_1-\bar{z}_2$
4.4.	a) $\lvert z_1\rvert\cdot\lvert z_2\rvert$	b) $\frac{\lvert z_1\rvert}{\lvert z_2\rvert}$	c) $\lvert z_1\cdot z_2\rvert$	d) $\left\lvert\frac{z_1}{z_2}\right\rvert$

۴ . ۵ ــ د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $x^2 + (1 + i)\,x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\,x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

d) $16\,x^2 + 8\,(i + 1)\,x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

همدا موضوع له بلکتاب څخه

7 . ایماجینار او کمپلکس ګنونه

خوندیونهInhaltsverzeichnis

- د ریيلو ګنونو بنستونه او نیوني یا فرضيي
- ایماجیارګنونه

کمپلکسګنونه

- په ګنونهواره کې د کمپلکس ګنونو انځورونه
- د کمپلکس ګنونو سره شمیرنه
- د کمپلکسګنونو زیاتون ، کمون
- د کمپلکسګنونو ځل
- د کمپلکس ګنونو ویش
- د کمپلکس ګنونو تولګنيز په توان
- د بینوم درسي جمله
- د موفري فرمول 5.6 Die Moivreschen Formeln
- د کمپلکس ګنونو ریښه 5.7 Wurzeln aus komplexen Zahlen
- توان د مختلفو جګګنونو سره
- 5.8 Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

د ریيلګنونو بنستونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ريیلګڼونو ډیری لکه د مخه مو ، چې ګوته ورته ونیوله د راشنل او ایراشنل ګڼونو له ډیریو جوړه ده (د ريیلګڼونو برخه دې وکتل شي).

ایماجینار ګڼونه Imaginäre Zahlen

د ريیل ګڼونو سیستم پوره نه دی، ګورو، چې د یوه ګڼ ځلوری یامربع، چې د کمیز ګڼ سره برابره وي، ریيله اوبیونه یا حل نه لري لکه لاندې

$$x^2 = -1$$

داسې یو ریيل ګڼ نه شته، چې پورته پوره کړي

یوه فورمال اوبیونه یې په لاندې ډول ده

$$x = \pm\sqrt{-1}\,,$$

چېرته ، چې $\sqrt{-1}$ ریيله اوبیونه نه ده.

دا ځلوری یا مربع ریښه د i سره په نخښه کوو، چې له دې پرابلم څخه ووتی شو او ځلوری یې په 1 - سره په نخښه کوو.

د دې i لپاره باور لري:

$$i^2 = -1$$

اوس کړی شو، چې ولیکو

$$x_{1,2} = \pm i\,.$$

که ګڼ i د ريیلګڼونو سره زیات ځل یا ضرب کړو، نو د ګڼونو یوه د نوو ګڼونو ډیری ترې لاس ته راځي، د بیلګي په توګه :

$$2i,\ 3i,\ -i,\ 1+i,\ 2+i,\ 1+2i,\ -23+78i,\ 0.45-0.93i$$

او داسې نور.

تولیزه بڼه یې :

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$a + bi \, ,$$

پورته ګڼ کمپلکس ګڼ دئ او a او b ریيلګڼونه٠ له دې سره هم لګۀ د نورو ګڼونو سره ساده شميرل کيږي، چيرته، چې د i^2 په ځاى 1 - ليکلى شو يا په ځېت: لاندې کې يې بيلګې ګورو

$$(1 + 2i) + (3 + 4i) = (1 + 3) + (2 + 4)i = 4 + 6i$$

په ټوليزه توګه:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

له دې سره ويش هم کړى شو، خودا ، چې ستونځمن دئ وروسته يې راوړو.

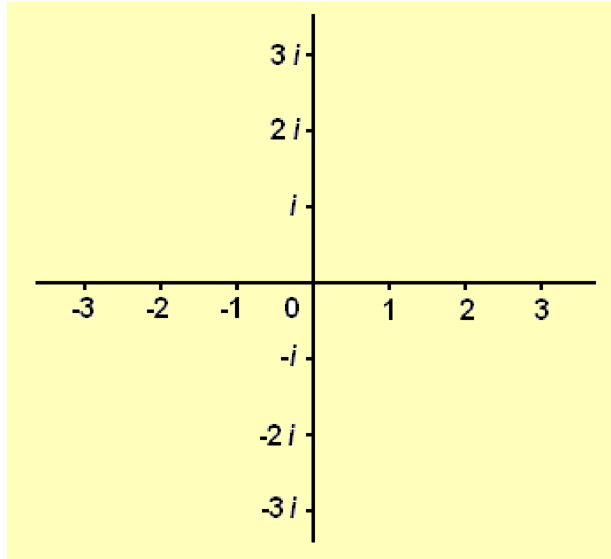
دا لاندې هم لرو

i.2i,i,0,-i,-2i,-3i٠٠٠3.....

دا ايماجينار ټولګڼونه بلل کيږ ي يا بولو ، چې دا هم صفرلري

موږ په لاندې کې د هوارې پروت محور لاندې د ريیلګڼونو محور پوهيږو او ولاړ محور يا ځرخونى يې د ايماجينار ګڼونو محور دى، چې د دواړو زياتون کمپلکس ګڼونه دي يا د کمپلکس ګڼونو هواره انځوروي٠.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په لاندې کې يو کپلکس ګڼ په يوه رييل ګڼ يا پيداينتي ګڼ ويشل کيږي

$$mi : n = \frac{m}{n} i \ .$$

په پورته کې m او n رييلګنونه دي او ايماجينار

$$x^2 = -a^2$$

په پورته کي a رييلګڼ دی، خو x غواړو لاس ته راوړو، لاس ته راوړنه يې يو ايماجينار ګڼ دی.

د دوه ايماجينار ګڼونو زياتون او کمون::

$$a\,i \pm b\,i = (a \pm b)\ i\ .$$

څل او ويش يې

$$\frac{i}{i} = 1\ .$$

د دې سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$pi \cdot qi = -pq$$

او

$$\frac{pi}{qi} = \frac{p}{q}\,,$$

چیرته چې p او q ریللګنونه دي.

لاس ته راوړنه : د دوه ایماجینار ګنونو ځل یا ضرب او ویش څخه ریيلګڼ لاس ته راځي، چې په لاندې کې یې ګورو۰

$$i^2 = -1\,,\quad i^3 = i^2 \cdot i = -i\,,\quad i^4 = i^3 \cdot i = 1\,,\quad i^5 = i^4 \cdot i = i\,,\ldots$$

د تولګڼ n لپاره لرو:

$$i^{-n} \equiv \frac{1}{i^n}$$

لاس ته راوړنی یې

Error!

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i\,,\quad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1\,,\quad i^{-3} = \frac{1}{i^3} = -\frac{1}{i} = i\,,\quad i^{-4} = \frac{1}{i^4} = 1\,,\ldots$$

د سره شمیرل ورسته کیدونکي دي.

Komplexe Zahlen کملکس ګنونه

ګډ یا مخطلت خلوری - یا مربع برابرون شمیرو

$$x^2 - 4x + 13 = 0\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څلورئ پوره کوونې یا تکمیلونې له لارې ، چې ورسره بلد یو ، اوبیونه یا حل پیداکوو

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3\,i\ .$$

د دې برابرن اوبیونه نه ریيل ګڼ دئ او نه ایماجینار ۰ دې ګڼ ته موږ کمپلکس ګڼ وایو **komplexe Zahlen**.

د کمپلکس ګڼونو او د دې سره سره شمیرنه ۰

موږ دا لاندې کمپلکس ګڼ لرو :

$$z = a + b\,i,$$

چیرته، چې a او b ریيل ګڼونه دي

د کمپلکس ګڼونو په مرسته کړای شو، چې بې بندیزه څلورئ- یا مربع فرمولونه اوبې کړو

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

لاس ته راځي.

دلته چې څه راځي هغه ګران لوستنکی پخپله هم پیدا کولی شي، زه به وهڅیږم، چې دا پرابلمونه پورته کړم یا لرې کړم ،

د لاندې لپاره

$$\frac{p^2}{4} - q \geq 0$$

یو یا دوه ریيل اوبیونې لاس ته راځي۰

د

$$\frac{p^2}{4} - q < 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لېاره اوبيوني په لاندې ډول ليکل کيږي

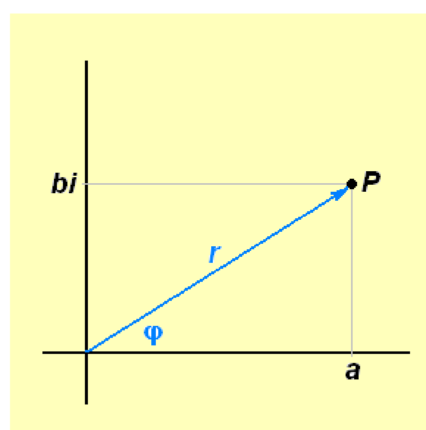
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\ .$$

اوبيوني کنجوګيري کمپلکس دې، دا په دې مانا، چې يو له بل د مختښې له مخه توپير کيږي ۰

په ګنونهواره يا ګنسطحه کې د کمپلکس ګنونو انځورونه

د کمپلکس ګنونو ګرافيکي انځوروني لپاره هواره ځان رامنځ ته کوي، چې د رييل او ايماجينارګڼکرښو څخه غزيدلې ده ۰

کمپلکس ګنونه a + bi د ټاکني له مخې(په بدل وار يا همغه وخت) د يوه ټکي P ، چې کواوردينات يا پروت ولاړ محوروونه يې a او b ، چيرته، چې محور b ټکی bi په ايماجينار ګڼکرښې باندې په ګوته کوي، يا د» ښوونکرښې « OP سره انځور کيدی شي ۰ دا د يوې اوږ دې r سره ښايو او د رييلې محور سره کونج fi جوړوي ۰ (دا همغه د ټکی P انځورول دي په پولار کواوردينات کې، r د کمپلکس ګڼ مطلق ارزښت دی، fi يې فاز بلل کيږي ۰



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوارو انځوربني لپاره لاندې ترانفورميشنبرابرون باور لري(له دې څخه نوج زده کوونکې تيريدلی شي، چې ترانسفورميشن باندې نه پوهيږي)

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}\,, \qquad a \neq 0$$

$$a = r\cos\varphi\,, \quad b = r\sin\varphi\,.$$

له $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ لاس ته راځي

$$\varphi = \arctan\frac{b}{a} + k\cdot 2\pi, \quad \text{wobei} \quad -\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{b}{a} < \frac{\pi}{2} \quad \text{und } k \text{ ganzzahlig ist.}$$

په پورته کې wobei د کوم سره يا چيرته چې په مانا دی او k ټولګې دی ۰

ارزښت

$$\varphi_0 = \arctan\frac{b}{a}$$

د في φ اصلي ارزښت بلل کيږي۰ له دې نور ارزښتونه د k او 2π له زياتون څخه لاس ته راځي۰

د دې له مخې کيدئ شي، چې کمپلکس ګڼ په لاندې توګه وليکل شي ۰

$$z = a + bi = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.$$

" وروسته د اويلر فرمول "Eulerschen Formel په مرسته ترې لاس ته راځی

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

دريمه انځورونه يې لاندې ده:

$$z = a + bi = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\,e^{i\varphi}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کمپلکس ګڼ دا درې انځورونې په ترتیب داسې بلل کیږي اریتمیتیکي بڼه کونومتریکي (یا تریګنومتریکي بڼه)
او اکسپوننشل بڼه۰

دا چې د اویلر فرمول وروسته ښوول کیږي، اکسپوننشل بڼهٔ دې دلته راوړل شوي وي، خو د ښووني لپاره دې ترې
کار نه اخستل ک یږي۰

Rechnen mit komplexen Zahlen

د کملپکس ګڼونو سره شمیرنه

دوه کملپکس ګڼونه دې ورکړ شوي وي

$$z_1 = a_1 + b_1 i\,, \quad z_2 = a_2 + b_2 i\,.$$

د کمپلکش ګڼونو زیاتون او کمون

په زیاتون او کمون کې د الجبر ي قوانینو له مخې i هم داسې په کار اچول کیږي لکه هره بله کومه د
تورو لویه ، چې په کار اچول کیږي یا کارول کیږي

$$z_1 + z_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i$$

$$z_1 - z_2 = a_1 + b_1 i - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i$$

د کملپکس ګڼونو « ښوونکرښه» (دا هغه کرښه ده، چهٔ د دواړو محورونو صفر ټکو څخه د هغه په
هواره موخه ور ټکی په لور ګزیدلی وي، یاني د صفر ټکی څخه د هغه بل موخه ټکی په لور ، ځکه
لوریزه ده)لکه وکتورونه سره زیاتیدلی او کمیدلی شي

Das Produkt komplexer Zahlen

د کمپلکس ګڼونو ځل

دی

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i.$$

دا ځل تړلی پیژند ور لیدونکي مانا نه لري(یاني سملاسي ترې څه نه شو پوهیدلی)۰ که د دې په ښټ »
پولارکواودینات » وکارول شي، نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_1a_2 - b_1b_2 = r_1r_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) = r_1r_2\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)$$

$$a_1b_2 + a_2b_1 = r_1r_2\left(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2\right) = r_1r_2\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right).$$

او له دې سره t

$$z_1z_2 = r_1r_2\left[\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right].$$

نو دی

$$|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2| \quad \text{او} \quad \varphi\left(z_1z_2\right) = \varphi_1+\varphi_2.$$

د ځل – یا ضرب ارزښت د ارزښتونو ځل دی. د ځل یا ارګومنت یا فازې د ارګومنت یا فازې د زیاتون سره برابر دی.

سملاسې پیژندل کیږي، چې دا د دوه فاکتورونو څخه زیاتو فاکتورو یا ځله وونو لپاره هم باور لري

$$\left|z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n\right| = |z_1|\cdot|z_2|\cdot\ldots\cdot|z_n| \quad \text{او} \quad \varphi = \varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n.$$

د کمپلکس ګڼونو ویش Division komplexer Zahlen

په ورته توګه پیدا کیږی، که z_2 د صفر سره برابر نه وي

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{او} \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

که کیږدو $z_1 = 1$ او $z_2 = z$, نو لاس ته راځي:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\left[\cos(0-\varphi) + i\sin(0-\varphi)\right] = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او په ځانګړي ډول د $z = i$

$$\frac{1}{i} = -i.$$

Ganzzahlige Potenzen einer komplexen Zahl

د کمپلکس ګڼونو توان (کپلکس ګڼ د يوه ناکميز توان سره د رييل ګڼونو په څير دی)

$$z^{-n} \equiv \frac{1}{z^n}.$$

د کمپلکس ګڼونو ځل دې وکتل شي

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n| \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n.$$

د همغه ځله وون يا ضريب z لپاره ترپلاس ته راځي

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

موږ لرو

$$z^p \cdot z^q = z^{p+q}, \quad (z^p)^q = z^{p \cdot q}, \quad z_1^p \cdot z_2^p = (z_1 \cdot z_2)^p, \quad \frac{z^p}{z^q} = z^{p-q}, \quad \frac{z_1^p}{z_2^p} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^p.$$

Der binomische Lehrsatz

د بينوم درسي جمله

د بينوم جملي لپاره هم لرو

د نوکانو د چاون قانون او ځل قانونو د زياتيز جګ ګڼ لپاره د بينوم جمله همغسې باور لري

$$(z_1 + z_2)^n = \binom{n}{0} z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \ldots + \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k + \ldots + \binom{n}{n} z_2^n.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې ځايه ښکته د ښوونځي زده کوونکو لپاره ستونځمن دی.

Die Moivreschen Formeln د موفری قانون

له برابرون څخه (پورته دي وکتلشي)

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

لاس ته راځي

$$|z| = 1: \qquad (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

له بلې خوا د زياتيز ټولګنيز جګګڼ يا اکسپوننت سره د بينوم جملې څخه لاس ته راځئ:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi + i\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi$$

$$-i\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi + \ldots + i^n\binom{n}{n}\sin^n\varphi.$$

که د برابرون دوا

ړه خواوې برابار کينول شي او بيا په پام کې ونيول شي، چې رييل او ايماجينار برخه دواړه بايد برابر وينو د موفري برابرون ترې لاس ته راځي **Moivreschen Formeln**:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi - + \ldots,$$

او

$$\sin n\varphi = n\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\cdot\sin^5\varphi - + \ldots,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چیرته، چې ښی لور ترهغې پوره شي، تر څو چې ځله وونی یا ضریب صفر شي.

د کمپلکس ګڼونو ریښه Wurzeln aus komplexen Zahlen

د برابرون اوبیونه

$$x^n = z \qquad \text{n positiv ganzzahlig}$$

پورته کی n زیاتیز ټولګڼ دی
د کمپلکس ګڼ z n -مه ریښه بلل کیږي :

$$x = \sqrt[n]{z}.$$

ږدو

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

او

$$x = \rho\left(\cos\psi + i\sin\psi\right),$$

د $z = x^n$ له امله لاس ته راځي

$$\rho^n = r \quad \text{und} \quad n\psi = \varphi$$

او د دې پسې

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{\varphi}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دي

په ويشنه کې بايد په پام کې ونيول شي، چې ارګومنت يا پروتمحور φ پريودي يا تل بيرته راګرځيدونی دی د پريودې يا راګرځيدنی π2 سره ، نو

$$\varphi = \varphi_0 + k \cdot 2\pi \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

پسي د ψ لپاره تيک *n* مختلف ارزښتونه لاس ته راځي، ياني

$$\psi = \frac{\varphi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2 \cdot 2\pi}{n}, \ \ldots \ \frac{\varphi + (n-1) \cdot 2\pi}{n}.$$

د $n = k$ ځانلۀ د مخه ارزښتونه (له دويم پسې) تکرارېږي، نو باور لري:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} \right) \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (n-1)$$

هر له دې ارزښتونو د کمپلکس ګڼ z د n-مې رېښه بلل کيږي

$$\sqrt[n]{z} \quad \text{oder} \quad z^{\frac{1}{n}}$$

دا ټول n ارزښتونه په ګنهواره په يوې ګردی په O په يوه منظم n - ګوډي پرته ده , د ځلوری ريښی لپاره له

$$i = i \sin \frac{\pi}{2}$$

لاندې ارزښتونه ترې لاس ته راځي

$$\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4},$$

او د ځلوری ريښي لپاره له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-i = i\sin\frac{3\pi}{2}$$

پیداکیږي

$$\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}.$$

که موږ ونیسو لکه د رییل ګڼونو لپاره

$$z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m$$

دې وي، چیرته چې n یو پیداینتج ګڼ او m یو په خوښه ټولګڼ دی، نو له دې سره د کمپلکس ګڼ سره جګګن یا کسپوننت وپیژندل شو یا تعریف شو۰ اوس نو اخرنی پل پاتې ، چې هغه د ایراشنلجګګڼ دی .

توان د په خوښه رییل جګګڼ سره

Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

اوس دې z له صفر مختلف په خوښه کمپلکس ګڼ وي .

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\left[\cos(\varphi + k\cdot 2\pi) + i\sin(\varphi + k\cdot 2\pi)\right],$$

چیرته چې

$$k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

دی ، نو د z^ν (ν reellرییل) لاندې هر دالاندې کمپلکس ګڼ پو هیږو:

$$r^\nu\left[\cos\nu(\varphi + k\cdot 2\pi) + i\sin\nu(\varphi + k\cdot 2\pi)\right].$$

لاربښود : د داسې په ټولیز پیژند یا تعریف سره د کمپلکس ګڼونو توان لپاره د د توان شمیرنې بنسټیز قوانین باور لري ، یانې

$$z^\mu\cdot z^\nu = z^{\mu+\nu},\quad z_1^\mu\cdot z_2^\mu = (z_1\cdot z_2)^\mu,\quad (z^\mu)^\nu = z^{\mu\cdot\nu}$$

nicht mehrنور بس دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ ترانسځندنت برابرونونه یه - مساوات

دلته یواځي هغه ترانسځندنت مساوات څیړل کیږي، کوم چی بیرته په الجبري مساواتو اړول کیدی شي. دا بیرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په ریښه مساواتوکی، په خوښه په بل شکل اړول کیږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو(فورم بدلون یا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کیدی شي چی اړولی فرمول زیاتي اوبیوني یا حلونه نسبت د پیل برابرون ته ولري. له دې امله باید د اړول شوي برابرون ټولې اوبیونې په پیل برابرون کی ځاي په ځاي یا کیښوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پیل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ریښه یي برابرونونو یا مساواتو کی ، دلته هم یواځی رییل اوبیوني پلټل کیږي.

۱۳ . ۱ لوګاریتمي مساوات

د لوګاریتمي مساواتو او اکسپوننشل یا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پیدا کولو لپاره اړیین یا ضرور(ضروري یا اړیین شرایط) دی، چی د یو عدد(ګڼ) aلوګاریتم، د b په بنسټ، معلوم کړو یا وڅیړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13,1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنسټ $b = 10$ لپاره(lga) او د بنسټ b=e لپاره (ln a) کیدی شي (۱۳ . ۱)

سیده د جبشمیري له لارې پیداشي. په خټ یا برعکس د 10 =| b =|e لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کیږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b......................(13.2)$$

د لوګاریتمي مساواتو یو ساده ډول یا شکل (تیپ) دا دی

$$l\,\text{og}_b\, x = c..................................(13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱) ، (7. ۲) له مخې لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c ....(13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشمیري سره شمیرل کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۱ : $\log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$

په همدې ډول د (۱۳ . ۳) بڼې اوبیونه په لاندې تولیز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b\, f(x) = c...(13,5)$$

دلته (f(x یوه الجبري وبینه یا افاده ده، د (۱۳ . ۵) سره الجبري برابرون کټمټ (ورته) دی

$$f(x) = b^c ....(13,6)$$

ټولې د (۱۳ . ۶) اوبیونې د (۱۳ . ۵) اوبیونې هم دي

بیلګه ۱۳ . ۲ : لوګاریتمیز برابرون

$$\log_2(x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کټمټ دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x^2+x+6=2^3=8$ (همداسی) ⇔ $x^2+x-2=0$

او لاندې اوبيوني لري

$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2};x_1=-2;x_2=1$$

يو د (۱۳ . ۵) ډول (تيپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کينه لور (ارخ) ته يود لوګاريتم ريشنل لاينيز کمبينشن الجبري ويينه يا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x)+r_2.\log_2(x)+r_3.\log_b g_3(x)+...=c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوګاريتم قوانينو (۷. ۷) ، (۷. ۹)کاروني يا استعمال ځخه، ۷ برخه وګورئ، (۱۳ ، ۵) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x)=\{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}..................................(13,8)$$

بيلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x-1)+\frac{1}{2}\log_3 x-\frac{1}{2}\log_3(x-1)=2$ ځخه لاندې لاس ته راځي

$$\log[(x-1)(\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{2}}]$$

اوله دې ځخه رېښه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1}=9$ ،

د کوم له ځلورى يا مربع کولو ځخه $x(x-1)=81$ يعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{324}{4}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{325}{4}}=\frac{1}{2}\pm(\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1=9,515;x_2=-8,515$$

ټيك دا $x1=9,515$ پيل برابرون پوره کوي

. د $x=x2<0$ لپاره log x او په همدې ډول log(x-1) پيژند نه لري يا تعريف نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)] = 1$$

او نور پسی $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$$2x+3=bx-b$$
$$b+3=x(b-2)$$
$$x=(b+3)/b-1)$$

پیل وینه یا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره یا هدفمنده ده، یعني
که $(b+3)/b-2)>1$) وي.
د $b>2$یعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$
له دې لرو $-2<3$دا د ټولو b لپاره پوره دی
د. $b \leq 2$ لپاره د $b+3 \leq b-2$ $b+3 < b-2$ څخه $2 \leq 3$ لاس ته راځي
اودا د هیڅ b لپاره باور نه لري .
له دې امله کره د $b > 2$ لپاره اوبی شته دی. د $b \leq 2$ لپاره اوبیونه نه شته دی.

د لاندې لوګاریتمي تیپ برابرون هم کیدی شي په الجبري مساواتو بیرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13.9)$$

چیرته چی F او هم f الجبریزې وییني یا افادې دي. د بدلون کاروايي یا عملیه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13.11)$$

ددې اوبیونه ..$y1,y2$ په (۱۳/۱۰) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تیپ (۱۳/۵)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i ;\quad i = 1,2,3,\dots\dots\dots \qquad (13 . 12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13 . 13)$$

ددې لپاره چې و ازمائيلي شو چې ايادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبيونې يا ځوابونه بايد په پيل برابرون (۱۳/۹) کې کيښوول شي يا ځاي په ځای شي،

بيلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $\log^2 x-\lg x-2=0$ د سبستيټيوشن(بدلون) $y=\lg x$سره په څلوری برابرون $y^2-y-2=0$ بدليږي .
د $y1 = 2$ او $y 2 = -1$ ځوابونو سره
له. $\lg x=2$ او $\lg x=-1$ لاس ته راځي

$x1 = 10^2=100$ او $x_2=10^{-1}=\dfrac{1}{10}$

دواړه ځوابونه د پيل برابرون ځوابونه دي.

بيلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6 /(\lg x +1)) + (8 / (\lg x -1)) = 3$
د,$x>0$ مګر $(x \neq 1/10, x \neq 10)$ چې د اصلي ماتلاندې
$(\lg x-1)(\lg x+1)$ سره ځل شی، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x-1)+8(\lg x+1)=3(\lg^2 -1)$$
$$,\quad 6\lg x-6+8\lg x+8=3\lg^2 x-3$$
$$0=3\lg^2 x-14\lg x-5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې څلوری بڼې يا مربعفورم ته بيايي:

$$3y^2-14y-5=0 ,\ y^2-(14/3)y-5/3=0$$

د لاندې ځوابونو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_{1,2}=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{15}{9}}=\frac{7}{3}\pm\frac{8}{3}; y_1=lox_1=5; y_2=\lg x_2=-\frac{1}{3}$$

$$x_1=10^5; x_2=x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي.
که په یوه برابرون کې لوګاریتمونه د مختلفو بنسټونو bسره رامنځ ته شي،
نو کیدی شي د (۱۳ . ۲) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بیلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1)+\log_4(x-1)-1=0$

ځخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1)=\frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1)+\frac{1}{2}\log_2(x-1)-1=0,\ \log_2(x-1)=\frac{2}{3},\ x-1=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4},$$

$$x=1+\sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2\sqrt[3]{4}+\log_4\sqrt[3]{4}-1=\frac{1}{3}\log_2 4+\frac{1}{3}\log_4 4-1=\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}-1=0.$$

۱۳ . ۲ اکسپوننشل – یا په ځګګڼ برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون(مساوات)

$$a^x=b; a>0, a\neq 1, b>0 \ldots\ldots\ldots\ldots(13,14)$$

کیدی شي چی د لوګاریتم نیولو سره سملاسي حل شي(ځواب شي)

$$x=\log_a b=\lg_b/\lg_a=\ln b/\ln a \qquad (13,15)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندني برابرونونه په ساده ډول په (۱۳ ، ۱۴) ډول (رقم (تیوپ)
برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2) + 3^x(3^2-3) = 0,\ \text{bzw.}\ \ 6\cdot 3^x = 3\cdot 2^x\ ,\ \ \text{bzw.}\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg\frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

که په (۱۳ . ۱۴) د الجبري ویيني یا افادي(f (x اکسپوننتونه
یاجګګنونه وي، نو:

$$af(x)=b,a>0\ ,a|=1,b>0 \qquad (13\ .\ 16)$$

په دې ډول د لوګاریتمولو له لارې یو الجبري برابرون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b............................(13,17)$$

د کومو ځوابونه چې د) ۱۳ . ۱۶ (ځوابونه هم دی.

بیلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4} = 4$

مو لاندې خلورې برابرون یا مربع مساوات ته بیایي (لاربنودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د $x_1 = 2\ ,\ x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چې د پیل برابرون اوبیونې یا
ځوابونه هم دي٠

بیلګه ۱۳ . ۱۰ : په برابرون $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$ کی د یوه پوتنځ بنسټ د
بل پوتنځ د بنسټ په څېر ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې ځخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3\ ,\ x_2 = -4$$

بیلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

کی کیدی شي چی ناپیژندونکی د اکسپونتنت یا په جګ ځخه د دوه واره لوګاریتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \quad \text{یا oder} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad x = 1.$$

بیلګه ۱۳ . ۱۲ : $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

یو د تیپ (۱۳ . ۱۶) مساوات دی، ځکه چی باور لري

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې امله

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کیڼ اړخ د اکسپوننشل افادو ځلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنستېونو او مختلفو الجبري اکسپوننتونو سره، کیدی شي چی د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.

له

$$\frac{a_1^{f_1(x)}.a_2^{f_2(x)}........}{b_1^{g_1(x)}.b_2^{g_2(x)}........} = c;.................................(13,18)$$

ځخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + \ldots - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - \ldots\ldots = \lg c \qquad (13.19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چی د یوه اکسپوننشل افادې یوه الجبري وبینه یا افاده F د الجبري اکسپوننت($f(x$سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x))})=0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(13,20$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13.21)$$

د برابرون

$$F(y) \qquad (13.22)$$

د ټولواوبیونو $y_1, y_2, y_3;\ldots\ldots\ldots\ldots$ لپاره باید

$$a^{f(x)} = y_i; i=1,2,3\ldots\ldots \qquad (13.23)$$

په همدي ډول

$$f(x) = \log_a y_i \quad ; i = 1, 2, 3 \ldots\ldots \qquad (13.24)$$

اوبی شي

بیلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x}+3^x = 2$ کیدی شي چی د بدلون $y = 3^x\,(y^2 = 3^{2x})$ سره په څلوری

برابرون یا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بیرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1.\lg 3 = \lg 1 = 0,\ x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2.\lg 3 = \lg(-2)$ اوبیونه نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}}-\sqrt{e^{x^2-1}-1}=\sqrt{2e^{x^2-1}-1}\ldots\ldots\ldots\ldots(13,25)$$

کې داسی بدلوو:

$$y=e^{x^2-1}\ldots\ldots\ldots\ldots(13,26)$$

او لاس ته راوړو

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};\ldots\ldots\ldots\ldots(13,27)$$

له دې څخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)}=0 \Rightarrow y(y-1)=0$$

$$y_1=0; y_2=1$$

ټيك $y_2=1$ (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1;\ldots\ldots\ldots\ldots(13,28)$$

بايد اوسی . د لوګاريتمولو څخه تعقيبيږي:

$x^2-1=\ln 1=0,$

$x1 = 1 , x2 =-1$

دواړه ارزښتونه پيلبرابرون پوره کوي٠
برسيره پر دې بايد وښوول شي، چی په برخی ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کی انځور شوي متودونو سره يوه د مساواتو ټولهلړی حل کيدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوګاريتم يوځای رامنځ ته کيږي.

بيلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ څخه د بيلګي په توګه د بنسټ 2 لوګاريتموولو له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ln^2 x - \ln x + 1 = \log_2 8 = 3$$

که کیږدو $y = \ln x$ ، نو دا ځلوری برابرون یا مربع مساوات $y^2 - y - 2 = 0$

لاس ته راځي،د ځوابونو

$$y_1 = -1 , y_2 = 2$$

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

$$\ln x = -1 , \ln x = 2, x_1 = e^{-1} = 1/e , x_2 = e^2$$

د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې اوژباړې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

ځلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

(c) ketabton.com: The Digital Library

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواريې د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي. دا هم چاپ سوي.

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي چاپ شوی

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري چاپ شوی

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي) چاپ شوی

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویيونو په پښتو روښانه ونه چاپ شوی

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

دا لاندې د ښوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسیدل:

شمیرپوهنه د اوم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د اتم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د نهم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د لسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د یولسم ټولګي له پاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

شمیرپوهنه د دولسم ټولګي له پاره

ریاضي برای صنف دوازده

.

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرې شینواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو ځخه) ځخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې ځخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر ځخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ ځخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغي وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ ځخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوی ته لوی ځښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library