# شمیرپوهنه ( ریاضي)

د لسم ټولګي لپاره

برېښنا پته : smakhan1946@gmail.com

لیکونکی:

ډاکترماخان میرزي شینواری

2016

Ketabton.com

جرمني د بن ښار

(c) ketabton.com: The Digital Library



# شمیرپوهنه

## د لسم ټولګي لپاره

لیکونکی:

ډاکتر ماخان(میرزی) شینواری

Smakhan1946@gmail.com

(c) ketabton.com: The Digital Library



# نیولیک

سریزه..................................... ۴
پولینومشمیرنه ......................... ۶
د ګاوس الګوریتم.............. ۲۹
هورنرشیما......................... ۴۶
اړیکې............................. ۵۵
فنکشن(ځیرونه) یا تابع ....... ۶۵
فنکشن او په ځتفنکشن ......... ۹۱
ځلوری‌یا مربع توابع ............ ۹۳
نورمال پارابل .................. ۹۶
د ځلوری‌تکمیل له............. ۱۰۱
کربنیزبرابرونسیستم ........... ۱۱۵
د مناسبځواب له پاره تلنلار.... ۱۲۳
مساواتسیستم بې له ............ ۱۲۹
توان یا پوتنځ توابع ............ ۱۳۳
کربنیزتوابع د ورکړ شوو ....... ۱۳۸
مومړی حالت ...................... ۱۳۸
د کربنبرابرونونو ځانګړی ...... ۱۴۲
n- مه درجه ټولراشنل توابع ...... ۱۶۵
د ټولراشنل توابعوغوځتکي ...... ۱۷۵
د بدلونقانونه ....................... ۱۷۸
شننیزه – یا تحلیی هندسه ....... ۱۸۳
فنکشنونه (بل بدیل)........... ۲۰۲
درېکوډېکچ ................. .. ۱۳۷
ګډوله – یا کمپلکسګڼونه ..... ۲۷۹
د لیکونکیلیکلیاوژباړې..... ۳۱۵
د لیکوکیژنود ته لنډه کتنه...... ۳۲۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



# سریزه

دا ځلوېښت کاله کېږي، چې زموږ هیواد هراړخیزه ستونزې لري او هر څه دې اوږده جنګ را خراب کړي

ګرانو هیوادوالو!

د نورو نیمګرتیاو په څیر زموږ درسي نصاب - په تیره شمیرپوهنه - هم ډېره د ناسمون سره مخامخ ده.

که دا کار د دولت په ځلوردیوالي ونه شو، نو زه به وهڅیږم، چې دا ما لیکلي کتابونه د ن ج له لارې له تاسو سره شریک کړم او دا د نړۍ په ستاندارد.

د ښوونځي په کتابونو کې د ستااتیستیک او احتمالوالي درس نور هم خورا ستونځمن دی، چې زه ترې دلته تیریږم او د ښوونځي د تیرو کتابونو څخه هم هیله ده- که زما کتابونه وړاندې نه شو- چې دابرخې یا سمې یا له درسي نصاب څخه ووېستل شي. په دې برخه باور وکړی، چې نه لیکونکی بوهیږي او نه بل لوستونکی پرې پوهیدلی شي.

زما په دې د ښوونځي کتابونو کې دا برخې نه شته، خو که وخت مې پیدا کړ دا به هم سمې کړم. ما په دې هکله د احتمالوالي او ستاتیستیک کتابونه ژباړلي او همداسې مې په هندسه کې هم احتمالوالي شمیرنه راوړي او د ستاتیستیک یو کتاب مې هم ژباړلی، چې زه به یې په مناسبوخت کې د لیدلو پټې ګرانو لوستونکو ته د ن ج له لارې ورکړم.

دا زما ځني کتابونه او په ډېره مننه د www.ketabton.com ن ج کې ګرانولوستونکوته وړاندې شوي.

د شمیرپوهني سم اند یا منطق زموږ د نصاب په لسم ټولګي کې راغلی او هغه هم لکه ستااتیستیک او ... د پوهیدلو نه دی. دا- لکه څنګه چې برېښي- دومره پیچلی نه دی، نو زه دا درس له دې امله د اوم ټولګي په سرکې راوړم، هیله ده چې ستونځې به رامنځ ته نه کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



زه چې ترڅو ستاسو په منځ کې وم او د کار یم، ستاسو چوپړ کې به اوسم. راځئ، چې ستونځوبې( د ستونځو حل) سره شریک کړو.

زه دې لیکنو او پرې قضاوت کولو ته ځانله یم.

تکرار په کې زیات دی، خو د موصوع، نه د خودیونې. وایې چې تکرار د زده کړې مورده، نو پروا نه لري. کمښتونه هم په کې شته. سره د ټولو نیګرتیاوو دا د ښوونځي له پاراه ډېره ګټوره او زه چې پوهېږم، یواځنۍ سمه لیکنه ده.

دا چې سمه لیکنه ، د ځان له امله نه وایم، دګرانو زده کوونکو او ښوونکو له پاره وایم. دا زما لیکنې نه دې، دا ما له نورو کتابونو څخه رانیولې، چې باید سمې وي.

زه به وهڅېږم، چې درسمي ښوونځي کتابونو نا سمونونه له تاسو سره شریک کړم، خو ډېر لږ، یواځې داسې د یادونې له امله.

په ډېره خواشینۍ باید ووایم، چې ملاتړی نه لرم، چې د لیکنې ستونځې راته په ګوته کړي.

د نصاب د غړو څخه مې هیله ده، چې ګټه ترې پورته کړي او په بنسټ یې د ښوونځي لیکنې سمې کړي.

د خوندیونې ټیکاوي کې پوښتنه نه شته، ځکه چې ما هم د نورو لیکنو څخه راټول کړي او هڅیدلی یم، چې سم یې ترې راونیسم.

باور وکړی زه د دې لیکنو سره لږ ستړی شوی یم، نو ځنې ځایونه به داسې نیمګړي پاتې وي، چې ستاسو پوهیدنې ته کوم زیان نه رسوي، د هغې بخښنه دې وي.

کله تمرینونه کم وي او کله تکرار راځي، چې دا بد مه ګڼۍ.

په دې کتابونو ما دومره ځان بوخت کړی، چې باورکړی مغذ مې ترې نورموړ دی، نو له دې امله یې نور پایوم یا ورته د پای ټکی ږدم.

(c) ketabton.com: The Digital Library



# پولینومشمیرنه

## پویلینوم څه شی دی؟

یو پولینوم د اووښتوني یا واریابلي –چي موږيي د x سره په نښه کوو- له ډېرواره توان د زیاتون دی: د توان جګګنونه پیداښتي یا طبيعي ګنونه دي. زیاتون له دې برسیره پای دی.

بیلګه: $a_n \cdot x^n + \ldots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$

همداسي

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

یا هم:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

دلته n یو پیداښتي ګڼ اوپای دی او $a_i$ ریلګنونه دي د ټولو $i=0,1,\ldots n$ له پاره.

پیژند: د پولینمچګګڼ n د پولینوم درجه بلل کیږي، که $a_n \neq 0$ وي.

په یاد ولری: په پورته سر کې- د پولینوم لیکنبنه د توان په همغږیزجګیدونکي لیکنبنه اودا کښته یي د پولینوم د توان په همغیزټیټیدونکي لیکنبنه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولینومونو سره شمیرنه یا کارونې داسې لنډې څیړو

د پولینومونو زیاتون: که له

$$a_5 \cdot x^5 + ... + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

سره

$$b_5 \cdot x^5 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زیاته-وو، نو داسې مخ ته ځو:

په دې پورته برابرون کې ګورو، چې اووښتونې یا واریابله د ځلور په جګ یعنې $x^4$ نه شته. دا په دې مانا ده،چې ځله وونی یا صریب یې صفر دی. یعنې $o\ x^4$ یا

$$b_5 \cdot x^5 + o\ x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

زیاتونعملیه یا کارونه مح ته بیای:

$$a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$b_5 \cdot x^5 + o\ x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

---

$$(a_{5+}\ b_5\ )x^5 + (a_4 + o)x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + a_2 + b_2\ \ )x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0\ \ + b_0\ )$$

ګورو،چېد برابر توا یا برابر جګګڼ واریابلې سره زیاتیږي.

بیلګه:

$$3 \cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 7$$

$$2x^5 + o\ x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1$$

---

$$(a_{5+}\ b_5\ )x^5 + (a_4 + o)x^4 + (a_3 + b_3)x^3 + a_2 + b_2\ \ )x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0\ \ + b_0\ )$$

د پولینومونو کمون کارونه:

کمون یې هم په همدې بیلګه داسې لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$$-(b_5 \cdot x^5 + o\, x^4 + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0)$$

---

$$(a_5 - b_5) \cdot x^5 + (a_4 - o)x^4 + (a_3 - b_3)x^3 + (a - b_2)x^2 + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0)$$

بیلګه:

$$3 \cdot x^5 + 6x^4 + x^3 + 4 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 7$$

$$-(2x^5 + o\, x^4 + 8x^3 + 5x^2 + x + 1)$$

---

$$x^5 + 6x^4 \quad -7x^3 \quad -x^2 + x + 6$$

پيژند: دوه پولینومونه سره برابر دي، که خله ووني یا صریبونه یې سره برابر وي، دا په دې مانا چې

$$a_n \cdot x^n + \ldots + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

او

$$b_n \cdot x^n + \ldots + b_3 \cdot x^3 + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0$$

سره برابر دي که $b_i = a_i$ وي،د ټولو $i=1,2,:::n$ له پاره.

د پولینومونوپه هکله مو په اتم ټولګي کې د ترمونوبرخه کې پوره زده کړه کړې. په پولینوم کې هم ټول هغه شمیرلارې، چې په ګڼونو کې باور لري باوري دي.

دا لاندې بیلګې دې هم داروښانه کړي:

د پولینومونوله پاره نورې بیلګې:

- $3x^2 + 2x + 5$
- $7x^3 + x^2 + 6x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



- $10x^5 + 3x^4 + 2x$

د پولینوم ډولونه:

په شمیرپوهنه کې د پولینوم مختلف ډولونه شته.په شمیرپوهنه کې د بینوم لاندې یو پولینوم پوهیږو، چې له دوه غړو جوړ وي یا په بل ډول ویلی شوي، چې یو بینوم د دوه مونومونو زیاتون یا کمون دی.دا لاندې بیلګې دا هم ښايي، چې بینوم څنګه برېښي!

- $a + b$
- $x^3 + y^3$
- $x - 3$

پولینوم، چې له درې زیاتونونو جوړ دی‌ترینوم بلل کیږي. لاندې بیلګه دا روښانه کوي.

- $a^2 + b^2 + c^2$
- $6a^2 + 7a^3 + 8a^4$

زیاتون ته بیلګه

$$(-x^5-2x^4-3x^2-x+2) + (x^2+2) = -x^5-2x^4-2x^2-x+4$$

پولینومکمون ته بیلګه: په لاندې بیلګه کې ګورو، چې د برابر توانونو x یو له بل څخه کمیږي.

$$(x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 6x) – (3x^3 + 2x^2 + 6x) = x^4$$

ځل ( ضرب):

دا لاندې درې بیلګې د ځل یا ضرب له پاره ورکړ شوي.

موږاو تاسي د دې لارې سره د بینوم فرمول او د ترمونو د ځله ونو له لارې بلد یو، چې دلته ستاسوپام ورته رااړول کیږي

$$(x-4)\cdot\left(x^2-2x+3\right)=x^3-6x^2+11x-12$$

$$(x-5)\,(x^2+3\,x+7)=x^3-2\,x^2-8\,x-35$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$(x-3)(4x+7) = 4x^2 - 5x - 21$$

$$(x+1)(x^2+x-6) = x^3 + x^2 - 6x + x^2 + x - 6 = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

# پولینوموېش:

دا لاندي بیلګه د وېش له پاره راوړ، خو دا چې وېش لږ پیچلی دی، په دې به پوره وغږیو.

$(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x) : (x + 3) = x^3-x^2+5x-9 + (27)/(x+3)$

$-(x^4+3x^3)$
$-(-x^3-3x^2)$
$-(5x^2+15x)$
$-(-9x-27)$
پاتېRest: 27

کربنیزځله وونې سره ځل کیږي یا ضربیږي

$$f(x) = (x+1)(x+2)(x-1{,}5)$$

د ځله وونې ۲ سره غزول کیږي.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2+3x+2)(x-1{,}5) \\ &= x^3 - 1{,}5x^2 + 3x^2 - 4{,}5x + 2x - 3 \\ &= x^3 + 1{,}5x^2 - 2{,}5x - 3 \quad /\cdot 2 \end{aligned}$$

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



# پولينوم وېش:

که د يوه پولينوم صفرځای معلوم وي، نو کړی شو د پولينوم وېش له لارې د پولينوم درجه يه يوه کمه کړو. که دا مو مربع مساوات ته لارښود کړي يا بوځيو نو ساده دی، چې نور صفرځايونه بيدا کړو. لاندې بېلګې دې د پولينوم وېش روښانه کړي.

د بيلګې په توګه د دريمې درجې ټولراشنل تابع صفرځايونه معلوم دي، نو کيدی شي چې د تابع مساوات د کرښيزو صريبونوپه څېر وليکلی شو:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

چيرته چې $x_1 ; x_2 ; x_3$ صفرځايونه دي.

موږ اوس په څرګنده توکه تابع يا څيرونه د څېړنې لاندې نيسو

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$$

چيرته چې x1=2 يو صفرځای دی، څکه چې

$$f(2) = 2^3 - 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 8 - 4 - 10 + 6 = 0$$

له دې سره له دې سره کېدی شي د تابع مساوات د x1=2 صفرځآی لاندې ( له امله) په پام کې ونيسو او لکه چې لاس ته راځي و ليکو $f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6 = (\ldots\ldots\ldots)(x - 2)$

د صفرځای ټاکلو لپاره اينووونه : $f(x)= 0 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=(\ldots)(x-2)=0$
دا افاده $x^3-x^2-5x+6=(\ldots)(x-2)=0$ څېړو

د نوکانو افادې يا ويينې $(\ldots)$ټاکو

دواړه لورې په $(x-2)$ وېشو

$$(x^3-x^2-5x+6) :(x-2)=(\ldots)$$

په دې توګه د نوکانو افاده $(\ldots)$ لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



سرليک

وېش د ليکنيز وېش قانون سره سم مخ ته بيايو

$$\begin{array}{l}(x^3-x^2-5x+6):(x-2)=x^2+x-3\\ \underline{-(x^3-2x^2)}\\ \quad x^2-5x\\ \quad \underline{-(x^2-2x)}\\ \quad\quad -3x+6\\ \quad\quad \underline{-(-3x+6)}\end{array}$$

د نوکانو افاده (…) اوس$x^2+x-3$ بنه لري

له دې لاس ته راځي د صفرځای ټاکنو لپاره اینوونه:

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x^2-5x+6=(\dots)(x-2)=(x^2+x-3)(x-2)=0$

نو دا مربع مساوات $x^2+x-3$ اوس حل کوو.

دا د p-q- فرمول سره ځوابوو:

$$p=1;\ q=-3 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}+3=\frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad \left|\begin{array}{l} x_2=-\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{13}{4}}\\ x_3=-\dfrac{1}{2}-\sqrt{\dfrac{13}{4}}\end{array}\right.$$

## صفرځایونه:

$$x_1=2;\ x_2=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}};\ x_3=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د x محور سره غوځتکي:

$$P_{x1}\left(2|\,0\right);\,P_{x2}\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}\,|\,0\right);\,P_{x3}\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}\,|\,0\right)$$

تابع مساوات:

$$f\left(x\right)=\left(x-2\right)\left(x+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}\right)\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}}\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)=x^3-x^2-5x+6$$

د پولینوموېش او لیکنیز پولینوموېش په منځ کې اړیکې شته. په لاندې مخامخوالي کې دا د وېش بې له پاتې په حالت کې را ښایي.

| | |
|---|---|
| $62228 : 47 = 1\ 3\ 2\ 4$ | $\left(x^3-6x^2+11x-12\right) : \left(x-4\right) = x^2-2x+3$ |
| $-47 \leftarrow 47\cdot 1$ | $-\left(x^3-4x^2\right) \leftarrow \left(x-4\right)\cdot x^2$ |
| $152$ | $-2x^2+11x$ |
| $-141 \leftarrow 47\cdot 3$ | $-\left(-2x^2+8x\right) \leftarrow \left(x-4\right)\cdot\left(-2x\right)$ |
| $112$ | $3x-12$ |
| $-94 \leftarrow 47\cdot 2$ | $-\left(3x-12\right) \leftarrow \left(x-4\right)\cdot 3$ |
| $188$ | $0$ |
| $-188 \leftarrow 47\cdot 4$ | |
| $0$ | |

ګڼ ۶۲ د لومړیو دوه ځایونو ځخه چوړ دی د دې د وېشونو ګڼونو ځخه د پروېشوني (۴۷)

سره وېشل کیږي. لاس ته راوړنه ( ۱ ) د (۴۷) سره ځل یا ضرب کیږي او د ګڼ (۶۲) ځخه کمیږي. د کمښت نتیجې کمښت ( ۱۵۲ ) سره په همدې ډول پرمخ ځو تر ځو د کمښت لاس ته راوړنه صفر شي.

ازماېښت : $47\cdot 1324 = 62228$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library



سرلیک

$$\left(-6x^3+5x^2+14x-12\right):(-2x+3)=3x^2+2x-4$$

$$\frac{-\left(-6x^3+9x^2\right)}{-4x^2+14x}$$

$$\frac{-(-4x^2+6x)}{8x-12}$$

$$\frac{-(8x-12)}{0}$$

Probe:

$$\left(-6x^3+5x^2+14x-12\right)=\left(3x^2+2x-4\right)(-2x+3)$$

بیلګه:

$$\left(x^3+3x^2-6x-8\right):(x-2)=x^2+5x+4$$

$$\frac{-\left(x^3-2x^2\right)}{5x^2-6x}$$

$$\frac{-\left(5x^2-10x\right)}{4x-8}$$

$$\frac{-(4x-8)}{0}$$

Probe: $\left(x^2+5x+4\right)(x-2)=\left(x^3+3x^2-6x-8\right)$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library



سرلیک

$$\left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right):(a+b)=a^2+2ab+b^2$$

$$\underline{-\left(a^3+a^2b\right)}$$

$$2a^2b+3ab^2$$

$$\underline{-\left(2a^2b+2ab^2\right)}$$

$$ab^2+b^3$$

$$\underline{-\left(ab^2+b^3\right)}$$

$$0$$

ازماښت:

$$:\ \left(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\right)=\underbrace{\left(a^2+2ab+b^2\right)}_{\text{1. binomische Formel}}(a+b)=\underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)}_{\text{Linearfaktoren}}$$

بیلګه:

$$\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right):(x-2)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$$

$$\underline{-\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2\right)}$$

$$-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x$$

$$\underline{-\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x\right)}$$

$$-x+2$$

$$\underline{-(-x+2)}$$

$$0$$

ازماښت: $\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right)=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1\right)(x-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



بيلګه:

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 \qquad -14x-12):(x-3)=2x^2+6x+4 \\
\underline{-(2x^3-6x^2)} \\
\qquad 6x^2-14x \\
\qquad \underline{-(6x^2-18x)} \\
\qquad\qquad 4x-12 \\
\qquad\qquad \underline{-(4x-12)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

په ځنو حالتونوکي دا بنه ده، چي د پولينوم ليکنوکي د اړتيا په وخت کبيوه تشيا پريږدو، کلکه په پورته بيلګه کي چېګورو.

يوه بله شونتيا يي داده، چي هغه تشيا د صفر سره ډکه کړو، لکه دا لاندي:

$$2x^3-14x-12=2x^3+0x^2-14x-12$$

بيلګه:

لاندي بيلګه يو وېش د پاتي سره مخ ته بيايي.لکه ښنګه چي د ليکنيز وېش ښخه راته ځرګند دی.

$$
\begin{array}{l}
(x^3+3x^2-6x-8):(x-1)=x^2+4x-2 \quad (\text{Rest } -10) \\
\underline{-(x^3-x^2)} \qquad\qquad \Rightarrow (x^3+3x^2-6x-8):(x-1)=x^2+4x-2-\frac{10}{(x-1)} \\
\qquad 4x^2-6x \\
\qquad \underline{-(4x^2-4x)} \\
\qquad\qquad -2x-8 \\
\qquad\qquad \underline{-(-2x+2)} \\
\qquad\qquad\quad -10 \quad \text{Rest}
\end{array}
$$

$$\text{Probe: } \left(x^2+4x-2-\frac{10}{(x-1)}\right)(x-1)=(x^3+3x^2-6x-8)$$

دا چي نوي بلدې يون کي د ناسمون سره مخامخ کيږي،غوره ده چي د دې ازماېښت هم وکړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولینوموېش په کارونه کې که د پولینوموېش یوصفرځای ځرګند وي، نو کیدی شي د پولینوم درجه په یوه وړه  یا رکمه شي.

$x_1 = 2$ د پولینوم یو صفرځای دی.

$$\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x - 2) = \underbrace{x^2 + x - 3}_{\text{Restpolynom}}$$

$$\begin{array}{l} \underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)} \\ \quad x^2 - 5x \\ \quad \underline{-\left(x^2 - 2x\right)} \\ \qquad -3x + 6 \\ \qquad \underline{-(-3x + 6)} \end{array}$$

د پاتې پولینوم صفرځایونه اوس کیدیشي د ځلورۍ یا مربع پولینوم

$$x^2 + x - 3 = 0$$

له لارې پیدا کړو.

د سمون ازماېشت یې وکړۍ.

بیلګه: پولینوموېش او ازماېښت یې

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\left(x^3+2x^2-5x-6\right):(x+1)=x^2+x-6$$

$$\underline{-\left(x^3+x^2\right)}$$

$$x^2-5x$$

$$\underline{-\left(x^2+x\right)}$$

$$-6x-6$$

$$\underline{-(-6x-6)}$$

$$\text{Prob e}:(x+1)\left(x^2+x-6\right)=x^3+x^2-6x+x^2+x-6=\underline{\underline{x^3+2x^2-5x-6}}$$

## پوښتنې:

لاندې پولینوموېش مخ ته بوځئ

الف- $\left(x^3-3x^2-6x+8\right):(x+1)$ ب – $\left(2x^3-x^2-8x+4\right):\left(x^2-4\right)$

پ - $\left(2x^3-3x+1\right):(2x-1)$ ت - $\left(6a^6+a^4b+25b^3\right):\left(3a^2+5b\right)$

ټ - $\left(8x^5-6x^7+2x\right):2x^2$

ث - $\left(9a^5b^3-12a^3b^5\right):3a^3b^3$

ج - $\left(15a^9-8a^6b+8b^3\right):\left(3a^3+2b\right)$ ،

چ – $\left(14a^4-a^3+5a^2-3a+1\right):\left(7a^2-4a+1\right)$

ح – $\dfrac{3x^5y^{n+2}+3x^2y^{3n+2}-2x^{m+3}y^{n+3}-2x^my^{3n+3}}{x^3+y^{2n}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځ - $\frac{48a^{n+x}+56a^{x}b^{x}-72a^{n}b^{c}-84b^{x+c}}{12a^{n}+14b^{x}}$

څ - $\frac{8a^{2n+1}-10a^{2n}b+15a^{3n-2}b-12a^{3n-1}}{2a^{2n}-3a^{3n-2}}$

خ - $\frac{2a^{5}b^{x+2}-2a^{3}b^{x+5}+3a^{4}b^{2x-1}-3a^{2}b^{2x+2}}{a^{2}-b^{3}}$

## پولینوم برابرون:

د یوه برابرون په کیڼ اوښي لور د x مختلف توانونه یو پولینوم برابرون ورکوي

$$\text{Beispiel}: x^3-6x=3x^2-8$$

د داسېبرابرون د اوبی له پاره لومړیدا برابرون په داسي نامه صفربڼه اړوي. دا په دې مانا چي برابرون تر هغې په ورتهبڼه بدلوناړولکیږي، چې په ښیلور یواځې صفر پاتې شي.

$$\text{Beispiel}: x^3-6x=3x^2-8\,|\,-3x^2$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-6x=-8\,|\,+8$$
$$\Leftrightarrow x^3-3x^2-6x+8=0$$

د صفربڼې یا- فورم په ځای د پولینوم دې بڼې ته هم نورمال بڼه وایي.
موږ د پولینوم پنځه بدیلونهراړوړو

## لومړی بدیل:

په برابرون کې د اووښتونې x یو یواځنی توان مخ ته راځي.

$$ax^n+b=0 \Rightarrow x=\sqrt[n]{\frac{-b}{a}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



که n ناجوړه وي،نوريښه وښتوني کيدی شي کميز ګڼ هم وي.
د ريښي ټيک يو حل شتون لري.
که n جوړه وي، نوريښه نيونی(هغه ګڼ چېريښه يېنيول کيږي) يواځې زياتيز ګڼ کيدی شي.
دوه اوبيونې شتون لري.
بيلګه:

$$
\begin{aligned}
& 8x^3 + 27 = 0 \,|\, -27 \\
\Leftrightarrow\ & 8x^3 = -27 \,|\, :8 \\
\Leftrightarrow\ & x^3 = -\frac{27}{8} \,|\, \sqrt[3]{\ } \\
\Leftrightarrow\ & x = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = -\frac{3}{2} \Rightarrow L = \left\{-\frac{3}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 2x^4 - 3 = 0 \,|\, +3 \\
\Leftrightarrow\ & 2x^4 = 3 \,|\, :2 \\
\Leftrightarrow\ & x^4 = \frac{3}{2} \,|\, \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \\
\Leftrightarrow\ & x = \sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}107 \Rightarrow L = \left\{\sqrt[4]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}107\right\}
\end{aligned}
$$

په لومړي حالت کې n ناجوړه دې. ريښه نيوني کميزه هم کيدی شي
اويواځې يواوبی شتون لري.
په دويم حالت کې n جوړه دی، ريښه نيونی زياتيزدی.که کميزوي بيا برابرون اوبی نه لري.

## دويم بديل:

پولينومبرابرون يوځلوریبرابرون (مربع مساوات) انځوروي

(c) ketabton.com: The Digital Library



سرلیک

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+px+q=0$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}_{D}}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$$

دا د -p-q – فرمول له لارې اوبی –یا حلکیري

بیلګه

$$x^2-13x+36=0 \quad p=-13 \quad q=36$$

$$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$$

$$=\left(\frac{13}{2}\right)^2-36=\frac{169}{4}-\frac{144}{4}=\frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1=\frac{13}{2}+\frac{5}{2}=9 \\ x_2=\frac{13}{2}-\frac{5}{2}=4 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow L=\{4;9\}$$

D د دېسکریمینانت له پاره لیکلکیږي چې هغې لرلو سره مخ دمخه سړی د اوبیونویا حلومو څومره وال یا ګڼون ټاکلی شي.

که صفر $<$ D وي ، نو څلوری برابرون دوه اوبي یا حلونه لري

که صفر $=$ D وي،نو برابرون یواځې یو ډبل اوبیلري

که صفر $>$ D وي، نو برابرون اوبی نه لري په دې حالت کې نو سړی نور مخ ته نه ځي.

دریم بدیل

ولینومبرابرونیو دوه-څلوری برابرون biquadratische انځوري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



## سرلیک

$$ax^4+bx^2+c=0 \Leftrightarrow z^2+pz+q=0$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}_{D}}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$$

$$x^2=z \Rightarrow x=\pm\sqrt{z} \text{ für } z\geq 0$$

$$ax^4+bx^2+c=0 \Leftrightarrow z^2+pz+q=0$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\underbrace{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}_{D}}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$$

$$x^2=z \Rightarrow x=\pm\sqrt{z} \text{ für } z\geq 0$$

د  په ځا اېښووني يا سبستيچيوشن  z د  -p-q- فرمول په مرسته يا له لارې  شميرل کيدی شي
پسي دې بيرته په ځايونه په ځتسبستيچيوشن وکارول شي او ريښه دې ونيل شي.
ريښه  تيک د  زياتيز - p-q-z - ارزښتونو  له پاره نيول کيدی شي.

بيلګه:

$$\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}=0$$

$$\text{Substitution: } z=x^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10}z^2-\frac{9}{5}z+\frac{81}{10}=0 \mid \cdot 10$$

$$\Leftrightarrow z^2-18z+81=0$$

$$p=-18;\ q=81$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=81-81=0$$

$$z=-\frac{p}{2}=9$$

$$\text{Rücksubstitution}$$

$$z=9 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x_{1/2}=\pm 3$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-3;3\}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په دې حالت کې د یسکریمینانت صفر دی، داسې چې د سبستیچیوشناووښتونې له پاره یو اوبي .(z = 9) شتون لري.
دا په دېمانا، چې د ۴ –مې درجې پولینوم ټیک دوه اوبي یا څوابونه لري.

څلورمبدیل:
په پولینومبرابرون کې هغه همغه ارژښته یا مطلقه غړی نه لرو.

$$ax^3+bx^2+cx=0 \Leftrightarrow x\left(ax^2+bx+c\right)=0$$

$$x_1=0 \quad ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x_{2/3}$$

اووښتونې یا مجهوله x کیدی شي له نوکانو راووېستلشي.
اوبیونې د صفرځل یا – صرب له جملې شمیرلکیدی شي ( د فاکتورکولو تلنلار)،

بیلګه

$$x^3+x^2-2x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(x^2+x-2\right)=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=0}}$$

$$\Rightarrow x^2+x-2=0$$

$$\Rightarrow p=1;\ q=-2$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1 \\ x_3=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-2 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L=\{-2;0;1\}}}$$

د صفر څلوونې یا صریب دویم څلوونی کیدی شي د p-q - فرمولسره سادهوشمیرلشي.
د صفرځلوونې جمله: یوځل یا صرب ټیک هلته صفردی، چې یو ځلوونی صفر ړي.

پنځم بدیل:
پولینومبرابرون له بدیلونو ۱ – ۴ په څیر نه دی.

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

په ډېرو حالتونوکېکیدی شي، د پوینوموېشله لارې اوبی ومیندلشي.
د دې له پاره باید یواوبی معلوم وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



که د پولینوم یواوبی معلوم وي،نو کیدی شید پولینوم درجه د وېش له لارېيه یوه کمه شي. که دا
یو څلوری برابرون راکړي،نو اوبیونه یېبیا ساده ه، چې نور اوبي پيدا کړو.
لاندې بیلګه چې اوبی $x = 2$ معلوم دی،د پولینوم تلنلار روښانه یا معلوموي.
پولینوموېش همغه په راته څرګنده لیکنیزدول لاس ته راوړو.
Division.
وېشنه

$$\left(x^3 - x^2 - 5x + 6\right) : (x-2) = x^2 + x - 3$$
$$\underline{-\left(x^3 - 2x^2\right)}$$
$$x^2 - 5x$$
$$\underline{-\left(x^2 - 2x\right)}$$
$$-3x + 6$$
$$\underline{-(-3x + 6)}$$

د نوکانو(....) وبینه یا افاده اوس دا بڼه $x^2 + x - 3$ لري.
له دې د نورو شمیرنوځای په ځای کول لاسته راځي
$$x^3 - x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + x - 3\right)(x-2) = 0$$

اوس دا څلوری برابرون یا مربع مساوات $\left(x^2 + x - 3\right)$ د اوبیونې دي،چې د
p-q- فرمول له لارې سرته رسيږي.

$$p = 1;\ q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{array} \right.$$

$$x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$\Rightarrow L = \left\{ -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}};\ 2;\ -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



که چيرې د ګومان يا ازماېښت له لورې اوبی نه شي پيداکيدی، نوبيا د نومريک تلنلار څخه کار اخستلکيږي( دا به اوس زموږ دنده نه وي).

## برابرونونو ته تمرينونه:

۱ - برابرونونه د x پسې اوبی – يا حل کړئ او ازماېښت يې سرت هورسوئ.

الف - $\frac{1}{5}x^3 - 25 = 0$ ب - $\frac{27}{10}x^3 - \frac{4}{5} = 0$ پ - $8x\left(x^2 - 1\right) = -8x + 1$

۲ – برابرونونه د x پسې اوبی – يا حل کړئ او ازماېښت يې سرت هورسوئ.

الف - $27x^3 - 8 = 0$ ب – $\frac{1}{16}x^3 - 4 = 0$ پ- $-2 + \frac{7}{8}x^3 = -\frac{5}{2}x^3 - 1$

۳ - برابرونونه د x پسې اوبی – يا حل کړئ او ازماېښت يې سرت هورسوئ.

الف- $4k^2x^3 - 2k = 0; k > 0$ ب – $\frac{1}{4b}\left(x^3 - b^3\right) = 0; b > 0$ پ - $(x + 2a)^3 = \frac{1}{8}$

۴ - برابرونونه د x پسې اوبی – يا حل کړئ او ازماېښت يې سرت هورسوئ.

$$\frac{k \cdot x^3}{4} - 2k = 0$$

۵ - ځانګړې باکترياګاني د ۴ ساعتونو په منځ کې خپل ګنو( تعداد) څلور برابره کوي.په يوه ساعت کې يې په سلوکې ډېروالی څومره دئ؟

۶ – د کال په پيل کې د موټروختارزښت نوی ټاکيبا کره کيږي. د يوه پنځه کلن زوړ کارشوې يوم،ترپلورونکی 8500 € ورکوي.

د موټر کلنی زيان به څومره ( د وختارزښت د په سلو کې) وي، که سړی له دې، که سړس داسېمخ ته لاړ شي چې دا په لومړيوپنځه کلونوکې برابر جګ وي؟

۷ – برابرونونه اوبی –يا حل کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library



سرلیک

الف - $\frac{1}{4}x^3 - 4x = 0$ ب- $3x^3 + \frac{4}{3}x^2 = 0$ پ - $x^3 + x^2 - 2x = 0$

۸ – برابرونونه اوبیکړئ

الف- $4x\left(x^2 - x\right) = 7x^3 - 7x^2 - 6x$ ب- $\frac{3}{4}x^3 - 3x^2 = 0$

پ --- $\frac{1}{8}x^3 - x^2 + 2x = 0$

دا لاندې برابرونونه اوبي کړئ

الف- $x^3 + 4x^2 - 20x - 48 = 0$ ب - $-\frac{1}{2}x^3 + 4x = \frac{1}{2}x^2 - 4$

پ - $-2x^3 + 6x^2 - 4x = \frac{1}{2}x - 1$ ت- $x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2 = 0;\ x_1 = \frac{1}{2}$

ټ - $\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x^3 + 4x^2 - 2x\right) = \frac{3}{2}$

لاندې برابرونونه حل کړئ چې یو اوبی یا حل یېمعلوم وي
الف - $x^3 - 3x^2 - 6x - 2 = 0;\ x_1 = -1$
د پولینوم ویش څخه کارواخلی.
-- د پولینوموېش څخه کار واخلئ

الف- $\left(4x^3 - 6x + \frac{5}{2}\right):(2x - 1)$ ب - $\left(x^3 - 2kx^2 - 2x + 4k\right):\left(x^2 - 2\right)$

۱۲ – برابرون $x^3 - 4x^2 + (k + 4)x - 2k = 0$ ورکړشوی. وښایئ، چې
د $x_1 = 2$ لپاره برابرون یواوبی دی. د $k$ د کوم ارزښت لهپاره ټیک یو
دبل اوبی شته؟
لاس ته راوړنه د کرښیزو څلوونو یا صریبونوپه څیر ولیکی.
پوښتنه:

a داسې وټاکئ، چې برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library



(ax - 1)(x + 2)(x - 1/2) = 0
ټیک دوه اوبیونې یا حلونه ولري
یو د دریمې درجې برابرون دا دوه { 4- ; 2 } = L اوبیونې لري.
الف - د اوبیونو یا حلونوپه هکله ویناوې وکړی.
ب – دوه برابرونونه ددې اوبیونې ورکړی.
۳ – برابرونونه اوبیکړی

الف- $2x^3 - x^2 - x = 0$ ب - $x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}$

۴ – برابرونونه اوبیکړی

الف- $-3x^3 + 5x^2 + 4 = 0$ ب- $x^3 - \frac{16}{5}x^2 + \frac{17}{5}x - \frac{6}{5} = 0$

۵- برابرونونه اوبیا حلکړی

الف - $x^3 + x^2 - \sqrt{2}x^2 - 2x - \sqrt{2}x + 2\sqrt{2} = 0$

ب- $x^3 - 2,63x^2 - 1,45x + 3,08 = 0$

برابرونونه اوبی کړی

الف – $-u^3 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{5}{2}u - \frac{3}{2} = 0$ ب - $a^3 - 4a^2 - a + 4 = 0$

۷ – برابرونونه حل کړی

الف - $x^3 - \left(3 + \sqrt{3}\right)x^2 + 3\sqrt{3}x = 0$

ب- $\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = 0$ پ- $\frac{1}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}x + 1 = 0$

ت - $\frac{4}{10}x^3 - \frac{6}{10} = 0$ ټ - $x^3 - 5x^2 + 6,25x = 0$

ث - $\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 = 0$ ج - $x^3 - x^2 - \frac{3}{4}x = 0$

چ - $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ ځ - $x^3 - 3x^2 = -4$

خ - $(3x - 5)\frac{(x - 2)^2}{5} = 0$

پوښتنې
۱ - برابرونونه د پسې حل کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library



سرلیک

الف ـ $\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+2=0$ ب $\frac{1}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{3}x+2=0$

پ ـ $-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{4}=0$ ت ـ $\frac{1}{5}x^3-\frac{3}{5}x^2-5x+15=0$

ټـ $2x^3-x^2-5x-2=0$ ث ـ $(3x-1)(x+k)^2=0$

۱ ـ د x پسې یې اوبې کړی $(k\neq 0)$

الف ـ $\frac{1}{9k}\left(x^4+x^3-12x^2\right)=0$ ب ـ $\frac{k}{2}x^4-kx^3-\frac{3k}{2}x^2=0$

پ ـ $\frac{x^2}{5k^2}\left(x^2-3k\right)=0\,;\,k>0$ ت ـ $x^4-26x^2+25=0$

ټ ـ $-\frac{1}{2}x^4+3x^2-4=0$ ث ـ $\frac{1}{2}x^4-4x^2+2=0$

ج ـ $-\frac{1}{16}x^4+x^2-3=0$ چ ـ $\frac{1}{3}\left(x^2-3\right)^2-3=0$

خ ـ $\frac{1}{3}x^4-2x^2+3=0$ ځ ـ $x^4-11x^2+18=0$

پوښتنې

حلونه یا اوبیونې وټاکئ

الف ـ $\frac{1}{3}x^4-3x^3=0$ ب ـ $\frac{1}{7}x^4-7=0$ پ ـ $\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^2+1=0$

تـ $-2x^4+x^2+x=0$ ټ ـ $\frac{1}{4}x^5-\frac{3}{4}x^3-x=0$ ث ـ $\frac{1}{3}\left(x^2-4\right)^2-3=0$

ج ـ $\frac{2}{5}\left(x^2-9\right)(x+2)^2=0$ چ ـ $\frac{1}{64}x^3+\frac{1}{4}x^2+x=0$ خ ـ $x^4-5x^2-2x=0$

ځ ـ $x^4-6x^2+8=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library



## د ګاوس الګوریتم Der Gauß- Algorithmus

فکر دې وشي، چې دا برخه په يولسم ټولګي کې راشي. دلته يې راوړنه هم بده نه ده.

| | |
|---|---|
| يادونه: خوارزمية د Algorithmus<br>عربي مانا ده : زما په اند دا الخوارزميّة دی، چې په لاتين کې ترې الګوريتموس جوړ شوی دی.<br>الخواريزم د الګوريتم نوموړکونکی، يوه شوروي پوست مارکې چې د الخواريزم د ۱۲۰۰ کليزې جشن په هکله راوېستلې وه.<br>الګوريتم د پرابلم يا د پرابلمونود ټولګي پا يوه يواځنۍ د اوبيوني تلنلار ړه.<br>الګوريتم يوه نړيواله تلنلار ده د په خوښه کرښيز برابرونونو سيستم اوبيوني ته | |

## ننوتنبيلګې:

| | | |
|---|---|---|
| د کرښې ډول په توګه کار کوو.<br>د ليکو له پاره اجازه شته :<br>- بدليدلی شي<br>- د يوه ګڼ سره ځليدلی شي.<br>- په يوه ګڼ سره وېشلکيدی شي. | درې برابرونونه د درې اووښتونويا واريابلو يا متحولو سره<br>له بنه بدلون څخه لرو | $7x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -12$<br>$-x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5$<br>$-4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1$<br>شميرنځيره يا شيما داسې ليکو |

(c) ketabton.com: The Digital Library



- سره زیاتیدی شي

- سره کم کړي

درځونه هم سره بدلیدلی شي، که اووښتوني يا واريابلي x ورسره واخستل شي.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|
| * | * | * | * |
| 0 | * | * | * |
| 0 | 0 | * | * |

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | |
|---|---|---|---|
| 7 | 3 | −5 | −12 |
| −1 | −2 | 4 | 5 |
| −4 | 1 | −3 | 1 |

شمیرنه داسي مخ ته بیایو: شننه يې بشي لور ته ده.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | | |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 3 | −5 | −12 | $\|\cdot 4$ |
| −1 | −2 | 4 | 5 | $\|\cdot 28$ |
| −4 | 1 | −3 | 1 | $\|\cdot 7$ |
| 28 | 12 | −20 | −48 | |
| −28 | −56 | 112 | 140 | II + I |
| −28 | 7 | −21 | 7 | III + I |
| 28 | 12 | −20 | −48 | $\|: 4$ |
| 0 | −44 | 92 | 92 | $\|: 4$ |
| 0 | 19 | −41 | −41 | |
| 7 | 3 | −5 | −12 | |
| 0 | −11 | 23 | 23 | $\|\cdot 19$ |
| 0 | 19 | −41 | −41 | $\|\cdot 11$ |
| 7 | 3 | −5 | −12 | |
| 0 | −209 | 437 | 437 | $\|: 19$ |
| 0 | 209 | −451 | −451 | III + II |
| 7 | 3 | −5 | −12 | |
| 0 | −11 | 23 | 23 | |
| 0 | 0 | −14 | −14 | |

د اوبیوني يا حل لاس ته راوړنه د بیرته په ښت اینووني له راې هم کیدی شي.

$$-14x_3 = -14$$
$$\Leftrightarrow x_3 = 1$$
$$-11x_2 + 23\cdot 1 = 23$$
$$\Leftrightarrow -11x_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_2 = 0$$
$$7x_1 + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12$$
$$\Leftrightarrow 7x_1 = -7$$
$$\Leftrightarrow x_1 = -1$$

$$L = \{-1; 0; 1\}$$

ازمایښت: په لاندې کې د رښتیا له پاره ځاې په ځاې دي.

$$7\cdot(-1) + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12 \quad (w)$$
$$-1\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 4\cdot 1 = 5 \quad (w)$$
$$-4\cdot(-1) + 1\cdot 0 - 3\cdot 1 = 1 \quad (w)$$

**د بیخي نويو له پاره یادوني:**

**د اوبیوني له پاره تلندول کیدی شي په کوچنیو پلونو توته شي.**

**۱ـ د اصلي ماتلانديِ سره د لیکي له لارې ځل ( ضرب) سره د د ماتونو مخه ونیسی.**

(c) ketabton.com: The Digital Library



**۲- په لومړۍ کربښه لومړی ګڼ باید زیاتیز وي( که نه، بیا کیدی شي د ۔۱ سره ځل شي)**

**۳- د ځل یا وېش له لارې وهڅېري چې په لومړي درځ کي تیول ګڼونه همغه ارزښت ولري.**

**په ۲ ـمه او ۳ ـمه لیکه کي دې لومړي ګڼونه کمیزوي.**

۴- ۲ ـمې او ۳ ـمې لیکې هرې یوې ته دې لومړۍ لیکه ورزیاته شي. له دې سره په لومړي درځ کې ۲ صفرونه منځ ته راځي.

۵- په۲ ـمه لیکه کې دې دویم ګڼ زیاتیز وي( که نه، نو د ۔۱ سره دې ځل شي)

۶ ـد ځل یاوېش له لارې په دې نیت کې شي، چې له ۲-مې لیکې په دویم درځ کې تېول ګڼونه همغه ارزښت ولري.

۷ - و ۲ ـمېلیکې یا کربښې ته ۳ ـمه لیکه ورزیاته کړی. له دې سره په ۳-مه لیکه کې ۲ صفرونه منځ ته راځي.

۸ - لاس ته راوړی د اوبی یا حل په ښت لور کیږدی.

برابر پرمختګړول کیدی شي د هغو سیستمونو له پاره هم وکارول شي، چې له دریو زیات برابرونونه شتون ولري:

بنه بدلونونه کړی شي سړی بل ډول هم مخ ته بوځي.دا چې ،، ښنګه،، دا یواځې د شمیرپوهانو مهارت ته پرېږدو. د زیاتو تمرینونوله لارې سړی یوه غوره لار پیدا کوي. د شونتیا پورې دې د ماتونومخه دې ونیولشي، چې د نا اړینې تیرونې مخه نیول شوي وي. که سړی ورته تازه وي، کیدی شي ډېر بنه بدلونونه په یوه وخت جوړ کړي، له دېلارې لیکنه کیږي، خود ناسمون شونتیا زیاتیږي؟

| | |
|---|---|
| د په ښت اینوولو له لارې د اوبي یا حل لاس ته راوړنه | لانې الماني:سره بدل کړۍ |

(c) ketabton.com: The Digital Library



tausche: ⇄

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | | |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 3 | −5 | −12 | |
| −1 | −2 | 4 | 5 | \|·(−1) I ⇄ II |
| −4 | 1 | −3 | 1 | |
| 1 | 2 | −4 | −5 | |
| 7 | 3 | −5 | −12 | II - 7·I |
| −4 | 1 | −3 | 1 | III + 4·I |
| 1 | 2 | -4 | -5 | |
| 0 | -11 | 23 | 23 | \|·9 |
| 0 | 9 | -19 | -19 | \|·11 |
| 1 | 2 | −4 | −5 | |
| 0 | −99 | 207 | 207 | \|: 9 |
| 0 | 99 | −209 | −209 | III + II |
| 1 | 2 | -4 | -5 | |
| 0 | -11 | 23 | 23 | |
| 0 | 0 | -2 | -2 | |

$-2x_3 = -2$

$\Leftrightarrow x_3 = 1$

$-11x_2 + 23\cdot 1 = 23$

$\Leftrightarrow -11y = 0$

$\Leftrightarrow x_2 = 0$

$x_1 + 2\cdot 0 - 4\cdot 1 = -5$

$\Leftrightarrow x_1 = -7$

$\Leftrightarrow x_1 = -1$

$L = \{-1; 0; 1\}$

ازماېښت:

$7\cdot(-1) + 3\cdot 0 - 5\cdot 1 = -12$ (w)

$-1\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 4\cdot 1 = 5$ (w)

$-4\cdot(-1) + 1\cdot 0 - 3\cdot 1 = 1$ (w)

بیلګه ۱ :( ساده یا اسانه)

د په ځتې اینوولو له لارې د اوبییا حل لاس ته راوړنه

$$2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 8$$
$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -4$$
$$4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 1$$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | −3 | 4 | 8 | \|·6 |
| 3 | 4 | −5 | −4 | \|·4 |
| 4 | −6 | 3 | 1 | \|·3 |
| 12 | −18 | 24 | 48 | \|: 6 |
| 12 | 16 | −20 | −16 | II - I |
| 12 | −18 | 9 | 3 | III - I |
| 2 | -3 | 4 | 8 | |
| 0 | 34 | -44 | -64 | |
| 0 | 0 | -15 | -45 | |

$-15x_3 = -45$

$\Leftrightarrow x_3 = 3$

$34x_2 - 44\cdot 3 = -64$

$\Leftrightarrow 34x_2 = 68$

$\Leftrightarrow x_2 = 2$

$2x_1 - 3\cdot 2 + 4\cdot 3 = 8$

$\Leftrightarrow 2x_1 = 2$

$\Leftrightarrow x_1 = 1$

$L = \{1; 2; 3\}$

Probe:

$2\cdot 1 - 3\cdot 2 + 4\cdot 3 = 8$ (w)

$3\cdot 1 + 4\cdot 2 - 5\cdot 3 = -4$ (w)

$4\cdot 1 - 6\cdot 2 + 3\cdot 3 = 1$ (w)

(c) ketabton.com: The Digital Library



## بیلګه ۲ (منځنی سخته)

د په ښځ اینوولو له لارې د اوبي یا حل لاس ته راوړنه

$$3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -2$$
$$4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 9$$
$$8x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 13$$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 2 | −4 | −2 | \|·8 |
| 4 | −5 | 3 | 9 | \|·6 |
| 8 | 7 | −9 | 13 | \|·3 |
| 24 | 16 | −32 | −16 | \|: 8 |
| 24 | −30 | 18 | 54 | II - I |
| 24 | 21 | −27 | 39 | III - I |
| 3 | 2 | -4 | -2 | |
| 0 | -46 | 50 | 70 | \|:2 II ⇄ III |
| 0 | 5 | 5 | 55 | \|:5 |
| 3 | 2 | -4 | -2 | |
| 0 | 1 | 1 | 11 | \|·23 |
| 0 | -23 | 25 | 35 | |
| 3 | 2 | −4 | −2 | |
| 0 | 23 | 23 | 253 | \|: 23 |
| 0 | −23 | 25 | 35 | III + II |
| 3 | 2 | −4 | −2 | |
| 0 | 1 | 1 | 11 | |
| 0 | 0 | 48 | 288 | |

$$48x_3 = 288$$
$$\Leftrightarrow x_3 = 6$$
$$x_2 + 1\cdot 6 = 11$$
$$\Leftrightarrow x_2 = 5$$
$$3x_1 + 2\cdot 5 - 4\cdot 6 = -2$$
$$\Leftrightarrow 3x_1 = 12$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 4$$

$$L = \{4; 5; 6\}$$

ازماېښت:

$$3\cdot 4 + 2\cdot 5 - 4\cdot 6 = -2 \quad (w)$$
$$4\cdot 4 - 5\cdot 5 + 3\cdot 6 = 9 \quad (w)$$
$$8\cdot 4 + 7\cdot 5 - 9\cdot 6 = 13 \quad (w)$$

## بیلګه ۳ : (سخته): لاندې درې برابرونونه غواړو اوبی کړو

$$\frac{1}{2}x_1 - \frac{4}{5}x_2 + \frac{3}{8}x_3 = 4$$
$$\frac{3}{4}x_1 + \frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 23$$
$$\frac{4}{5}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = 8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}$ | $-\frac{4}{5}$ | $\frac{3}{8}$ | 4 | $\vert\cdot 40$ |
| $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{5}$ | 23 | $\vert\cdot 40$ |
| $\frac{4}{5}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 8 | $\vert\cdot 20$ |
| 20 | −32 | 15 | 160 | $\vert\cdot 12$ |
| 30 | 15 | 8 | 920 | $\vert\cdot 8$ |
| 16 | −10 | 5 | 160 | $\vert\cdot 15$ |
| 240 | −384 | 180 | 1920 | $\vert : 12$ |
| 240 | 120 | 64 | 7360 | II - I |
| 240 | −150 | 75 | 2400 | III - I |
| 20 | −32 | 15 | 160 | |
| 0 | 504 | −116 | 5440 | $\vert : 4$ |
| 0 | 234 | −105 | 480 | $\vert : 3$ |
| 20 | −32 | 15 | 160 | |
| 0 | 126 | −29 | 1360 | $\vert\cdot 13$ |
| 0 | 78 | −35 | 160 | $\vert\cdot 21$ |
| 20 | −32 | 15 | 160 | |
| 0 | 1638 | −377 | 17680 | $\vert : 13$ |
| 0 | 1638 | −735 | 3360 | III - II |
| 20 | -32 | 15 | 160 | |
| 0 | 126 | -29 | 1360 | |
| 0 | 0 | -358 | -14320 | |

د په څټ اینوولو له لارې حل لاس ته راوړنه

$$-358x_3 = -14320$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 40}}$$
$$126x_2 - 29\cdot 40 = 1360$$
$$\Leftrightarrow 126x_2 = 2520$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 20}}$$
$$20x_1 - 32\cdot 20 + 15\cdot 40 = 160$$
$$\Leftrightarrow 20x_1 = 200$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 10}}$$
$$L = \{10 ; 20 ; 40\}$$

**ازماېښت:**

$$\frac{1}{2}\cdot 10 - \frac{4}{5}\cdot 20 + \frac{3}{8}\cdot 40 = 4$$
$$\Leftrightarrow 5 - 16 + 15 = 4 (w)$$
$$\frac{3}{4}\cdot 10 + \frac{3}{8}\cdot 20 + \frac{1}{5}\cdot 40 = 23$$
$$\Leftrightarrow \frac{15}{2} + \frac{15}{2} + 8 = 23 (w)$$
$$\frac{4}{5}\cdot 10 - \frac{1}{2}\cdot 20 + \frac{1}{4}\cdot 40 = 8$$
$$\Leftrightarrow 8 - 10 + 10 = 8 (w)$$

**د کاروني یا استعمال بیلګې**

**د تولراشنل فنکشن د فنکشن برابرون د شمیرلو له لارې، چې څلور ټکي یې معلوم دي،**

**د ګاوس الګوریتم کارونه یا استعمال**

**د کاروني بیلګه۱:**

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|4) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 4$$
$$P_2(2|2) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 2$$
$$P_3(4|4) \Rightarrow \quad f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 4$$
$$P_4(5|20) \Rightarrow \quad f(5) = 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 20$$

| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 2 | II − I |
| 1 | 4 | 16 | 64 | 4 | III − I |
| 1 | 5 | 25 | 125 | 20 | IV − I |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | |
| 0 | 1 | 3 | 7 | −2 | |
| 0 | 3 | 15 | 63 | 0 | III − 3·II |
| 0 | 4 | 24 | 124 | 16 | IV − 4·II |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | |
| 0 | 1 | 3 | 7 | −2 | |
| 0 | 0 | 6 | 42 | 6 | |
| 0 | 0 | 12 | 96 | 24 | IV − 2·III |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 4 | |
| 0 | 1 | 3 | 7 | −2 | |
| 0 | 0 | 6 | 42 | 6 | |
| 0 | 0 | 0 | 12 | 12 | |

$\Rightarrow$

$$12a_3 = 12 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$6a_2 + 42a_3 = 6$$
$$\Leftrightarrow 6a_2 + 42 = 6 \,|\, -42$$
$$\Leftrightarrow 6a_2 = -36 \,|\, :6 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -6}$$

$$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -2$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 18 + 7 = -2$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 11 = -2 \,|\, +11 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 4$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 9 - 6 + 1 = 4$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 4 = 4 \,|\, -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x}}$$

## د کارونبیلگه ۲

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1\left(1 \,|\, -\frac{11}{2}\right) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = -\frac{11}{2}$$
$$P_2\left(-1 \,|\, \frac{9}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = \frac{9}{2}$$
$$P_3(-2|8) \Rightarrow \quad f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 8$$
$$P_4\left(-3 \,|\, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = \frac{5}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | $-\frac{11}{2}$ | $\|\cdot 2$ |
| 1 | −1 | 1 | −1 | $\frac{9}{2}$ | $\|\cdot 2$ |
| 1 | −2 | 4 | −8 | 8 | $\|\cdot 2$ |
| 1 | −3 | 9 | −27 | $\frac{5}{2}$ | $\|\cdot 2$ |
| 2 | 2 | 2 | 2 | −11 | |
| 2 | −2 | 2 | −2 | 9 | II − I |
| 2 | −4 | 8 | −16 | 16 | III − I |
| 2 | −6 | 18 | −54 | 5 | IV − I |
| 2 | 2 | 2 | 2 | −11 | |
| 0 | −4 | 0 | −4 | 20 | $\|:(-2)$ |
| 0 | −6 | 6 | −18 | 27 | $\|:3$ |
| 0 | −8 | 16 | −56 | 16 | $\|:4$ |
| 2 | 2 | 2 | 2 | −11 | |
| 0 | 2 | 0 | 2 | −10 | |
| 0 | −2 | 2 | −6 | 9 | III + II |
| 0 | −2 | 4 | −14 | 4 | IV + II |
| 2 | 2 | 2 | 2 | −11 | |
| 0 | 2 | 0 | 2 | −10 | |
| 0 | 0 | 2 | −4 | −1 | |
| 0 | 0 | 4 | −12 | −6 | IV − 2·III |
| 2 | 2 | 2 | 2 | −11 | |
| 0 | 2 | 0 | 2 | −10 | |
| 0 | 0 | 2 | −4 | −1 | |
| 0 | 0 | 0 | −4 | −4 | |

$\Rightarrow$

$$-4a_3 = -4 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 - 4a_3 = -1$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 - 4 = -1 \mid +4$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = 3 \mid :2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$$

$$2a_1 + 2a_3 = -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 2 = -10 \mid -2$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 = -12 \mid :2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$$

$$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -11$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 12 + 3 + 2 = -11$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 7 = -11 \mid +7$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 = -4 \mid :2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2}}$$

**د کاروني بيلګه ۳ :**

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|-16) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -16$$
$$P_2(2|11) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 11$$
$$P_3(4|-11) \Rightarrow \quad f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = -11$$
$$P_4(6|-9) \Rightarrow \quad f(6) = 216a_3 + 36a_2 + 5a_1 + 1a_0 = -9$$

| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −1 | 1 | −1 | −16 | |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 11 | II − I |
| 1 | 4 | 16 | 64 | −11 | III − I |
| 1 | 6 | 36 | 216 | −9 | IV − I |
| 1 | −1 | 1 | −1 | −16 | |
| 0 | 3 | 3 | 9 | 27 | \|: 3 |
| 0 | 5 | 15 | 65 | 5 | \|: 5 |
| 0 | 7 | 35 | 217 | 7 | \|: 7 |
| 1 | −1 | 1 | −1 | −16 | |
| 0 | 1 | 1 | 3 | 9 | |
| 0 | 1 | 3 | 13 | 1 | III − II |
| 0 | 1 | 5 | 31 | 1 | IV − II |
| 1 | −1 | 1 | −1 | −16 | |
| 0 | 1 | 1 | 3 | 9 | |
| 0 | 0 | 2 | 10 | −8 | |
| 0 | 0 | 4 | 28 | −8 | IV − 2·III |
| 1 | −1 | 1 | −1 | −16 | |
| 0 | 1 | 1 | 3 | 9 | |
| 0 | 0 | 2 | 10 | −8 | |
| 0 | 0 | 0 | 8 | 8 | |

$\Rightarrow$

$$8a_3 = 8 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$2a_2 + 10a_3 = -8$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 10 = -8 \,|\, -10$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -18 \,|: 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -9}$$

$$a_1 + a_2 + 3a_3 = 9$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 9 + 3 = 9$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 6 = 9 \,|\, +6 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 15}$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = -16$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 15 - 9 - 1 = -16$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 25 = -16 \,|\, +25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 9}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 9}}$$

**د کاروني بیلګه۴ :**

(c) ketabton.com: The Digital Library



$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$P_1(-1|7) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = 7$

$P_2(-2|6) \Rightarrow \quad f(-2) = -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 6$

$P_3(3|1) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 1$

$P_4(-3|-2) \Rightarrow \quad f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = -2$

| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | −1 | 1 | −1 | 7 | |
| 1 | −2 | 4 | −8 | 6 | II − I |
| 1 | 3 | 9 | 27 | 1 | III − I |
| 1 | −3 | 9 | −27 | −2 | IV − I |
| 1 | −1 | 1 | −1 | 7 | |
| 0 | −1 | 3 | −7 | −1 | |
| 0 | 4 | 8 | 28 | −6 | III + 4·II |
| 0 | −2 | 8 | −26 | −9 | IV − 2·II |
| 1 | −1 | 1 | −1 | 7 | |
| 0 | −1 | 3 | −7 | −1 | |
| 0 | 0 | 20 | 0 | −10 | |
| 0 | 0 | 2 | −12 | −7 | |

$\Rightarrow$

$20a_2 = -10 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{1}{2}}$

$2a_2 - 12a_3 = -7$

$\Leftrightarrow -1 - 12a_3 = -7 \,|\, +1$

$\Leftrightarrow -12a_3 = -6 \,|\, :(-12) \Leftrightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{2}}$

$-a_1 + 3a_2 - 7a_3 = -1$

$\Leftrightarrow -a_1 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -1$

$\Leftrightarrow -a_1 - 5 = -1 \,|\, +5$

$\Leftrightarrow -a_1 = 4 \,|\, :(-1) \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -4}$

$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7$

$\Leftrightarrow a_0 + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$

$\Leftrightarrow a_0 + 3 = 7 \,|\, -3 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 4}$

Die Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$

**د پررته المانیژباړه:د خیروني یا تابع برابرون**

**د کاروني بیلګه ۵ :**

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(2|22) \Rightarrow f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 22$$
$$P_2(4|44) \Rightarrow f(4) = 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 44$$
$$P_3(-4|4) \Rightarrow f(-4) = -64a_3 + 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = 4$$
$$P_4(8|40) \Rightarrow f(8) = 512a_3 + 64a_2 + 8a_1 + 1a_0 = 40$$

| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 4 | 8 | 22 | |
| 1 | 4 | 16 | 64 | 44 | II − I |
| 1 | −4 | 16 | −64 | 4 | III − I |
| 1 | 8 | 64 | 512 | 40 | IV − I |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 22 | |
| 0 | 2 | 12 | 56 | 22 | |
| 0 | −6 | 12 | −72 | −18 | III + 3·II |
| 0 | 6 | 60 | 504 | 18 | IV − 3·II |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 22 | |
| 0 | 2 | 12 | 56 | 22 | |
| 0 | 0 | 48 | 96 | 48 | |
| 0 | 0 | 24 | 336 | −48 | $IV - \frac{1}{2}\cdot III$ |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 22 | |
| 0 | 2 | 12 | 56 | 22 | |
| 0 | 0 | 48 | 96 | 48 | |
| 0 | 0 | 0 | 288 | −72 | |

$$288a_3 = -72 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{4}}$$

$$48a_2 + 96a_3 = 48$$
$$\Leftrightarrow 48a_2 - 24 = 48 \,|\, +24$$
$$\Leftrightarrow 48a_2 = 72 \,|\, :48 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{2}}$$

$\Rightarrow$

$$2a_1 + 12a_2 + 56a_3 = 22$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 18 - 14 = 22$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 + 4 = 22 \,|\, -4$$
$$\Leftrightarrow 2a_1 = 18 \,|\, :2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}$$

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 22$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 18 + 6 - 2 = 22$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 22 = 22 \,|\, -22 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

Die Funktionsgleichung: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x$

**د پېرته المانيژباره:د ځيرونبيا تابع برابرون**

**د کاروني بيلګه۶ :**

(c) ketabton.com: The Digital Library



$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$P_1(1|0) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 0$

$P_2(-1|-2) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -2$

$P_3(2|16) \Rightarrow \quad f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 16$

$P_4(-3|-4) \Rightarrow \quad f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = -4$

| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 1 | −1 | 1 | −1 | −2 | II − I |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | III − I |
| 1 | −3 | 9 | −27 | −4 | IV − I |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 0 | −2 | 0 | −2 | −2 | |
| 0 | 1 | 3 | 7 | 16 | $III + \frac{1}{2} \cdot II$ |
| 0 | −4 | 8 | −28 | −4 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 0 | −2 | 0 | −2 | −2 | |
| 0 | 0 | 3 | 6 | 15 | \|: 3 |
| 0 | 0 | 8 | −24 | 1 | \|: 8 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 0 | −2 | 0 | −2 | −2 | |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 5 | |
| 0 | 0 | 1 | −3 | 0 | IV − III |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | |
| 0 | −2 | 0 | −2 | −2 | |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 5 | |
| 0 | 0 | 0 | −5 | −5 | |

$\Rightarrow$

$-5a_3 = -5 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$

$a_2 + 2a_3 = 5$

$\Leftrightarrow a_2 + 2 = 5 \,|\, -2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 3}$

$-2a_1 - 2a_3 = -2$

$\Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -2 \,|\, +2$

$\Leftrightarrow -2a_1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 0}$

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$

$\Leftrightarrow a_0 + 3 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow a_0 + 4 = 0 \,|\, -4 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -4}$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

**د کاروني بیلګه ۷ :**

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{aligned}
P_1(1|1) &\Rightarrow & f(1) &= 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 &= 1\\
P_2(2|0) &\Rightarrow & f(2) &= 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 &= 0\\
P_3(-2|4) &\Rightarrow & f(-2) &= -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 &= 4\\
P_4(3|9) &\Rightarrow & f(3) &= 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 &= 9
\end{aligned}$$

| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 2 | 4 | 8 | 0 | II − I |
| 1 | −2 | 4 | −8 | 4 | III − I |
| 1 | 3 | 9 | 27 | 9 | IV − I |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 0 | 1 | 3 | 7 | −1 | |
| 0 | −3 | 3 | −9 | 3 | III + 3·II |
| 0 | 2 | 8 | 26 | 8 | IV − 2·II |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 0 | 1 | 3 | 7 | −1 | |
| 0 | 0 | 12 | 12 | 0 | |
| 0 | 0 | 2 | 12 | 10 | $IV - \frac{1}{6}\cdot III$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 0 | 1 | 3 | 7 | −1 | |
| 0 | 0 | 12 | 12 | 0 | |
| 0 | 0 | 0 | 10 | 10 | |

$\Rightarrow$

$$10a_3 = 10 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$12a_2 + 12a_3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 12a_2 + 12 = 0 \mid -12$$
$$\Leftrightarrow 12a_2 = -12 \mid :12 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -1}$$

$$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -1$$
$$\Leftrightarrow a_1 - 3 + 7 = -1$$
$$\Leftrightarrow a_1 + 4 = -1 \mid -4 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -5}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 5 - 1 + 1 = 1$$
$$\Leftrightarrow a_0 - 5 = 1 \mid +5 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 6}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6}}$$

**د کاروني بیلګه ۸ :**

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|6) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 6$$

$$P_2(3|-4) \Rightarrow \quad f(3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -4$$

$$P_3\left(-\frac{1}{2}\middle|\frac{45}{8}\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}a_3 + \frac{1}{4}a_2 - \frac{1}{2}a_1 + 1a_0 = \frac{45}{8}$$

$$P_4\left(-\frac{3}{2}\middle|-\frac{77}{8}\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}a_3 + \frac{9}{4}a_2 - \frac{3}{2}a_1 + 1a_0 = -\frac{77}{8}$$

| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | |
| 1 | 3 | 9 | 27 | −4 | |
| 1 | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{8}$ | $\frac{45}{8}$ | $\mid\cdot 8$ |
| 1 | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{9}{4}$ | $-\frac{27}{8}$ | $-\frac{77}{8}$ | $\mid\cdot 8$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | |
| 2 | 3 | 9 | 27 | −4 | II − I |
| 8 | −4 | 2 | −1 | 45 | III − 8·I |
| 8 | −12 | 18 | −27 | −77 | IV − 8·I |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | |
| 0 | 2 | 8 | 26 | −10 | |
| 0 | −12 | −6 | −9 | −3 | III + 6·II |
| 0 | −20 | 10 | −35 | −125 | IV + 10·II |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | |
| 0 | 2 | 8 | 26 | −10 | |
| 0 | 0 | 42 | 147 | −63 | \|: 21 |
| 0 | 0 | 90 | 225 | −225 | \|: 45 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | |
| 0 | 2 | 8 | 26 | −10 | |
| 0 | 0 | 2 | 7 | −3 | |
| 0 | 0 | 2 | 5 | −5 | IV − III |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 6 | |
| 0 | 2 | 8 | 26 | −10 | |
| 0 | 0 | 2 | 7 | −3 | |
| 0 | 0 | 0 | −2 | −2 | |

$\Rightarrow$

$-2a_3 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$

$2a_2 - 7a_3 = -3$

$\Leftrightarrow 2a_2 + 7 = -3 \mid -7$

$\Leftrightarrow 2a_2 = -10 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -5}$

$2a_1 + 8a_2 + 26a_3 = -10$

$\Leftrightarrow 2a_1 - 40 + 26 = -10$

$\Leftrightarrow 2a_1 - 14 = -10 \mid +14$

$\Leftrightarrow 2a_1 = 4 \mid : 2 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 6$

$\Leftrightarrow a_0 + 2 - 5 + 1 = 6$

$\Leftrightarrow a_0 - 2 = 6 \mid +2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 8}$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



## د کاروني یا استعمال بیلګه۹ :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1\left(1 \mid -\frac{9}{2}\right) \Rightarrow \quad f(1) = 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = -\frac{9}{2}$$

$$P_2\left(-1 \mid \frac{11}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-1) = -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = \frac{11}{2}$$

$$P_3\left(3 \mid -\frac{5}{2}\right) \Rightarrow \quad f(-3) = 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = -\frac{5}{2}$$

$$P_4\left(-\frac{5}{2} \mid -8\right) \Rightarrow \quad f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{125}{8}a_3 + \frac{25}{4}a_2 - \frac{5}{2}a_1 + 1a_0 = -8$$

| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | $-\frac{9}{2}$ | $\mid \cdot 8$ |
| 1 | −1 | 1 | −1 | $\frac{11}{2}$ | $\mid \cdot 8$ |
| 1 | 3 | 9 | 27 | $-\frac{5}{2}$ | $\mid \cdot 8$ |
| 1 | $-\frac{5}{2}$ | $\frac{25}{4}$ | $-\frac{125}{8}$ | −8 | $\mid \cdot 8$ |

$$-11a_3 = -11 \mid : (-11)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 8 | 8 | 8 | −36 | |
| 8 | −8 | 8 | −8 | 44 | II − I |
| 8 | 24 | 72 | 216 | −20 | III − I |
| 8 | −20 | 50 | −125 | −64 | IV − I |
| 8 | 8 | 8 | 8 | −36 | \|: 4 |
| 0 | −16 | 0 | −16 | 80 | \|: 4 |
| 0 | 16 | 64 | 208 | 16 | \|: 4 |
| 0 | −28 | 42 | −133 | −28 | \|: 7 |
| 2 | 2 | 2 | 2 | −9 | |
| 0 | −4 | 0 | −4 | 20 | |
| 0 | 4 | 16 | 52 | 4 | III + II |
| 0 | −4 | 6 | −19 | −4 | IV − II |
| 2 | 2 | 2 | 2 | −9 | |
| 0 | −4 | 0 | −4 | 20 | |
| 0 | 0 | 16 | 48 | 24 | \|: 8 |
| 0 | 0 | 6 | −15 | −24 | \|: 3 |

$\Rightarrow$

$$2a_2 + 6a_3 = 3$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 + 6 = 3 \mid -6$$
$$\Leftrightarrow 2a_2 = -3 \mid : 2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{3}{2}}$$

$$-4a_1 - 4a_3 = 20$$
$$\Leftrightarrow -4a_1 - 4 = 20 \mid +4$$
$$\Leftrightarrow -4a_1 = 24 \mid : (-4)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = -6}$$

$$2a_0 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 = -9$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 12 - 3 + 2 = -9$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 - 13 = -9 \mid +13$$
$$\Leftrightarrow 2a_0 = 4 \mid : 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



**د کاروني يا استعمال بيلکه ۱۰ :**

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{aligned}
P_1(1|25) &\Rightarrow & f(1) &= 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 &= 25\\
P_2(-1|-49) &\Rightarrow & f(-1) &= -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 &= -49\\
P_3(3|27) &\Rightarrow & f(3) &= 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 &= 27\\
P_4(5|5) &\Rightarrow & f(5) &= 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 &= 5
\end{aligned}$$

| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | |
| 1 | −1 | 1 | −1 | −49 | II − I |
| 1 | 3 | 9 | 27 | 27 | III − I |
| 1 | 5 | 25 | 125 | 5 | IV − I |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | |
| 0 | −2 | 0 | −2 | −74 | |
| 0 | 2 | 8 | 26 | 2 | III + II |
| 0 | 4 | 24 | 124 | −20 | IV + 2·II |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | |
| 0 | −2 | 0 | −2 | −74 | |
| 0 | 0 | 8 | 24 | −72 | |
| 0 | 0 | 24 | 120 | −168 | IV − 3·III |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 25 | |
| 0 | −2 | 0 | −2 | −74 | |
| 0 | 0 | 8 | 24 | −72 | |
| 0 | 0 | 0 | 48 | 48 | |

$\Rightarrow$

$$48a_3 = 48 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$$

$$8a_2 + 24a_3 = -72$$
$$\Leftrightarrow 8a_2 + 24 = -72 \mid -24$$
$$\Leftrightarrow 8a_2 = 96 \mid :8 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -12}$$

$$-2a_1 - 2a_3 = -74$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 - 2 = -74 \mid +2$$
$$\Leftrightarrow -2a_1 = -72 \mid :(-2) \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 36}$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 25$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 36 - 12 + 1 = 25$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 25 = 25 \mid -25 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x}}$$

**پوښتنې:**

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| $\begin{vmatrix} x_1+x_2+0x_3=28 \\ x_1+0x_2+x_3=30 \\ 0x_1+x_2+x_3=32 \end{vmatrix} \Rightarrow L=\{13;15;17\}$ | $\begin{vmatrix} 2x_1+3x_2+0x_3=12 \\ 3x_1+0x_2+2x_3=11 \\ 0x_1+3x_2+4x_3=10 \end{vmatrix} \Rightarrow L=\{3;2;1\}$ |
| $\begin{vmatrix} x_1+x_2-x_3=17 \\ x_1-x_2+x_3=13 \\ -x_1+x_2+x_3=7 \end{vmatrix} \Rightarrow L=\{15;12;10\}$ | $\begin{vmatrix} -4x_1+3x_2-2x_3=8 \\ 5x_1+4x_2-6x_3=-8 \\ -3x_1+2x_2+4x_3=19 \end{vmatrix} \Rightarrow L=\{-1;3;2,5\}$ |
| $\begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3=9 \\ x_1+2x_2+4x_3=15 \\ x_1+3x_2+9x_3=23 \end{vmatrix} \Rightarrow L=\{5;3;1\}$ | $\begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3=9 \\ x_1+2x_2+3x_3=14 \\ x_1+3x_2+6x_3=20 \end{vmatrix} \Rightarrow L=\{5;3;1\}$ |

$$\begin{vmatrix} x_1+3x_2-2x_3+x_4=-7 \\ -2x_1+x_2-4x_3-5x_4=-6 \\ x_1-3x_2+x_3=6 \\ -3x_1+4x_2-6x_3+2x_4=-21 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 1 & 3 & -2 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & -4 & -5 & -6 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & -6 & 2 & -21 \end{array} \Rightarrow L=\{1;-1;2;-1\}$$

$$\begin{vmatrix} -2x_1+3x_2-4x_3+2x_4=9 \\ 3x_1+4x_2-8x_3+x_4=-2 \\ x_1-6x_2-x_3+3x_4=20 \\ x_4=5 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline -2 & 3 & -4 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & -8 & 1 & -2 \\ 1 & -6 & -1 & 3 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \Rightarrow L=\{-1;-1;0;5\}$$

د لاس ته راوړني د کنترل له پاره دې ازمایښت وشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



## هورنر- شیما Das Horner – Schema

د دې له پاره چې د جګودرجو پولراشنلځیرونو یا که غواړئ توابعو ګراف وکښلای شو، باید یو ارزښت جدول برابرکړو. دا به ډېر وخت اوځای ونیسي، چې د دې له پاره اړین ځیره ارزښتونه یا فنکشنارزښتونه وشمیرو.

د هورنر – شیما دا شمیرنې ډېرې ساده کوي.

بیلګه : دریمه درجه پولراشنل فنکشن یا راشنل ځیرونه

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

د x د ډېرځله نوکانو بندولو له لاربېمنځ ته راځي:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = x\left[a_3x^2 + a_2x + a_1\right] + a_0 = \underbrace{x\left[\underbrace{x\left(\underbrace{a_3x + a_2}_{e_2}\right) + a_1}_{e_4}\right] + a_0}_{E}$$

که سړی غواړي چې د $x = x_1$ له پاره فنکشن ارزښت وشمیري، نوکی دی شي سړی په لاندې ډول له دننه دباندې لورته مخ ته لاړ شي:

-- ګرد نوکان وشمیري

--منځ لاس ته راوړنه ( ښه لیکنه به یې داسې وي: منځلاس –ته-راوړنه) د $x_1$ سره ځل کړي او $a_1$ ته یې ور زیات کړي

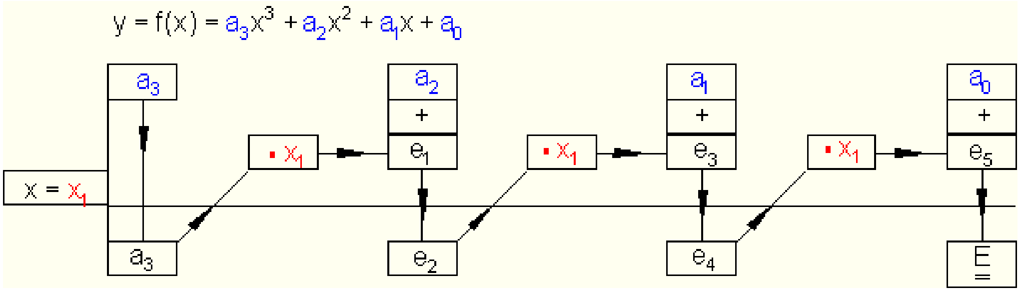
--لاس ته راوړنه د $x_1$ سره ځل کړي او $a_0$ ته یې ور زیات کړو

دا شمیرنکارونې یا که غواړئ شمیرنعملیې کیدی شي ځیره ډوله یا شیماتیکي داسې انځور کړو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

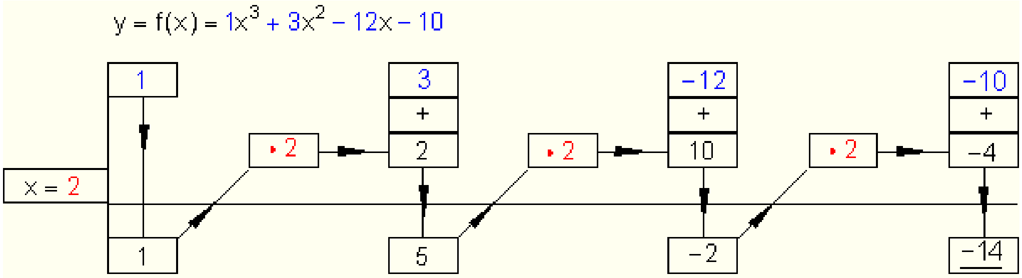


تولیزه بنه Allgemeines Schema:




بیلګه : $y = f(x) = x^3 + 3x^2 - 12x - 10$

د $x = 2$ له پاره دې د $y = f(2)$ ارزښت د هورنر – شیما له لارې وشمیرل شي.




نولاس ته راځي یا باورلری: $y = f(2) = \underline{-14}$

د یوه دریمي درجې پولینوم له پاره- چې غواړو ګراف یې رسم کړو یا کاږو- باید یو ارزښتجدول جوړکړو.

$y = f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6 \quad D_f = \{x \mid -4 \leq x \leq 3\}_{\mathbb{R}}$

$a_3 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_1 = 1 \quad a_0 = -6$

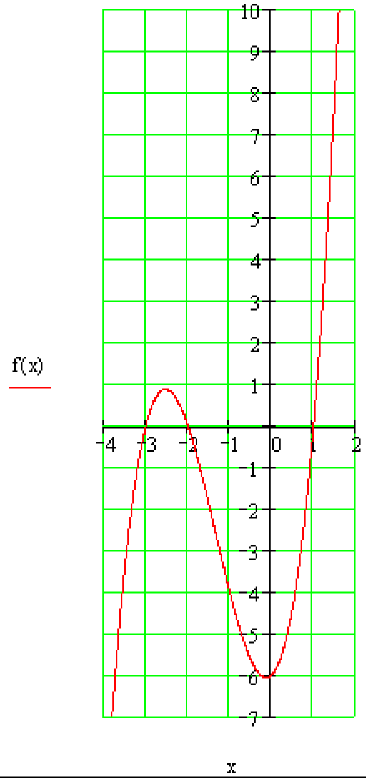
(c) ketabton.com: The Digital Library



| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 4 | 1 | −6 | |
| x = −4 | | −4 | 0 | −4 | |
| | 1 | 0 | 1 | −10 | = f(−4) |
| | 1 | 4 | 1 | −6 | |
| x = −3 | | −3 | −3 | +6 | |
| | 1 | 1 | −2 | 0 | = f(−3) |
| | 1 | 4 | 1 | −6 | |
| x = −2 | | −2 | −4 | +6 | |
| | 1 | 2 | −3 | 0 | = f(−2) |
| | 1 | 4 | 1 | −6 | |
| x = −1 | | −1 | −3 | +2 | |
| | 1 | 3 | −2 | −4 | = f(−1) |
| | 1 | 4 | 1 | −6 | |
| x = 1 | | +1 | +5 | +6 | |
| | 1 | 5 | 6 | 0 | = f(1) |
| | 1 | 4 | 1 | −6 | |
| x = 2 | | +2 | +12 | +26 | |
| | 1 | 6 | 13 | 20 | = f(2) |
| | 1 | 4 | 1 | −6 | |
| x = 3 | | +3 | +21 | +66 | |
| | 1 | 7 | 22 | 60 | = f(3) |
| | 1 | 4 | 1 | −6 | |
| x = −2,5 | | −2,5 | −3,75 | +6,875 | |
| | 1 | 1,5 | −2,75 | 0,875 | = f(−2,5) |

(c) ketabton.com: The Digital Library






ارزښتجدول؛

| x | -4 | -3 | -2,5 | -2 | -1 |
|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | -10 | 0 | 0,875 | 0 | -4 |
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | |
| f(x) | -6 | 0 | 20 | 60 | |

د لښتي- يا جدولارزښت سره کيدی شی په نږدې توګه ګراف وکښل شي.

که د ګراف کښلو کي څرګنده شي،چي يوبل ځای هم پاتې دی،دا کيدی شي هر وخت د هورنرشيما په مرسته پيدا شي.

ګراف په لاندې x – ځايونوکې صفر ارزښتونه لري: -3; -2;1

دا y – محور په -6 کې غوڅوي.

که په کښلوکې څرګنده شي چي يوبل ځای هم پاتې دی، نو دا کيدی شي د هونرشيما په مرسته پيدا کړو،د بيلګېپه توګه(0,5) f

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 4 | 1 | -6 | |
| x = 0,5 | | +0,5 | +2,25 | +1,624 | |
| | 1 | 4,5 | 3,25 | -4,375 | = f(0,5) |

د پولينوم وېشني پر ځای کيدی شي د ټولراشنل تابع درجه د هورنر شيما له لارې هم کمه شي.

موږ د هورنر شيما څيرو:

موږ بيرته تابع ترڅيرني لاندې نيسو

$f(x)=x^3-x^2-5x+6$

(c) ketabton.com: The Digital Library



چیرته چي $x1=2$ یو صفرځای دی.

د $f(x)=x^3-x^2-5x+6$ لپاره د هورن شیما د $x1=2$ سره

| | |
|---|---|
| موخه د ضریب $(x-2)$ له نوکانو وتنه ده.<br>$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -5 & 6 \\ x=2 & \downarrow & 2 & 2 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$ | په دریمه لیکه کې درې عددونه د وېش نتیجو لپاره هم د پاتي پولینوم ضریبونه بللکیږي.<br>$$f(x) = \underbrace{(x-2)}_{\text{Linearfaktor}} \underbrace{(1\cdot x^2 + 1\cdot x - 3)}_{\text{Restpolynom}}$$<br>کربنیز ضریب     پاتي پولینوم |

د $f(x)$ د نورو صفرځایونو لپاره د پاتي یا باقي پولینوم صفرځایونه شمیرو. دا د اړونده مربع مساوات د حل له لارې کیږي.

نتیجه یې د لاندې پولینوم وېش بیلګې سره وګورئ.

**بیلګه:** $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^2 - x - 4$ چیرته چي $x_1 = -2$ یو صفرځای دی.

| | |
|---|---|
| $$\begin{array}{c|cccc} & \frac{1}{4} & 1 & -1 & -4 \\ x=-2 & \downarrow & -\frac{1}{2} & -1 & 4 \\ \hline & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -2 & 0 \end{array}$$ | باقي یا پاتي پولینوم: $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$<br>$$f(x) = (x+2)\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2\right)$$<br>د مربع مساوات حل $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = 0$ له دې لاس ته راځي او معکوس: $x2=2$ او $x3=-4$ |

بیلګه:

$f(x) = -x^3 + 7x - 6 = -x^3 + 0\cdot x^2 + 7x - 6$ چیرته چي $x_1 = 1$ یو صفرځای دی

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| باقي پولينوم: $-1.x-1.x+6$<br><br>$f(x)=(x-1)(.x^2-x+6)$<br><br>د مربعيز مساوات حل:<br><br>$.x^2-x+6$ له دي لاس تره اوپه<br><br>څت يا برعکس $x2=2$ او $x3=-3$ | $\begin{array}{r\|rrrr} & -1 & 0 & 7 & -6 \\ x=1 & \downarrow & -1 & -1 & 6 \\ \hline & -1 & -1 & 6 & 0 \end{array}$ |

لکه بيلګه چې ښايي، د هورن شيما سره د پاتي پولينوم ټاکنه ساده ده نسبت د پولينوم وېش ته.

دا ټولې پورته تلنلارې مو د مربع مساوات حل ته لاربشودوي. که دا ونه توانيږو، نو د نومريکي تلنلارو څخه کار اخستل کيږي، چې دا دلته نه څېړل کيږي.

## تمرينونه: د پولينوم وېش...

د لندې ترمونو لپاره د پولينوم وېش وکاروی:

لومړی - $\left(x^3+2x^2-5x-6\right):(x+1)$ دیم - $\left(2x^3-14x-12\right):(x-3)$

دریم - $\left(3x^3-15x^2-51x+63\right):(x-7)$ څلورم - $\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-2x+6\right):(x+2)$

پنځم - $\left(x^3+\frac{11}{2}x^2+5x-4\right):(x+2)$ شپږم - $\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3\right):(x-2)$

اوم - $\left(x^3-\frac{5}{4}x^2-\frac{23}{4}x+\frac{3}{2}\right):(x-3)$ اتم - $\left(x^3-\frac{5}{3}x^2-\frac{47}{3}x-5\right):(x+3)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



نهم - $\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3\right):(x+3)$ لسم - $\left(3x^3-15x^2-51x+63\right):(x-1)$

## تمرینونه: د ټول راشنل توابعو صفرځایونه.

تمرین ټولراشنل تابع **IV**

د صفرځایونو ټاکنه له مختلفو لارو څخه.

د یوه تاسو ته مناسب قانو له مخې د ټولراشنل توابعو صفرځایونه وټاکئ. د x محور سره د ګراف غوڅټکي و ټاکي او د تابع مساوات د کربنيزو ضريبونو د ضرب په څير انځور کړئ.

اول - $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{13}{2}x^2+18$ دویم - $f(x)=x^3-4x^2+x+6$

دریم - $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1$ څلورم - $f(x)=-\frac{3}{2}x^4+\frac{75}{2}x^2-216$

پنځم - $f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{11}{4}x+3$ شپږم - $f(x)=-\frac{3}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x$

اوم - $f(x)=3x^4-3$ اتم - $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x-2$

نهم - $f(x)=2x^3-4x^2-16x$ لسم - $f(x)=2x^3+4x^2-26x+20$

## پوښتنې

د ټول هوښيار يا راشنل توابعو محورغوڅټکي ګرافونه

صفرځایونه وشميرئ او ګرافونه وکاږئ

(c) ketabton.com: The Digital Library



لومړی: د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=x^4+2x^3+x^2$ ب - $f(x)=x^2-6x+9$

پ - $f(x)=\left(x^2-25\right)\left(\frac{1}{2}x+4\right)$ ت - $f(x)=x^6-x^4$

ټ - $f(x)=3x\left(\frac{2}{3}x-2\right)(-2x+3)$ ث - $f(x)=3\left(x^2+4\right)\left(x^2-4x+10\right)$

دویم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=x^4-6x^2+5$ ب - $f(x)=4x^4+6x^2-\frac{7}{4}$ پ - $f(x)=x^6-8x^4+20x^2$

دریم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=2x^3+4x^2-2x-4$ ب - $f(x)=x^3-12x+16$

پ - $f(x)=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$ ت - $f(x)=2x^3-10x^2-4x+20$

ټ - $f(x)=x^4-\frac{11}{4}x^2-\frac{9}{4}x-\frac{1}{2}$ ث - $f(x)=-3x^3+3x^2-3x+3$

ج - $f(x)=-5x^3-10x^2-\frac{5}{2}x-5$ چ - $f(x)=x^4+3x^3+5x^2+9x+6$

څلورم: لومړی: د د لاندې توابعو صفرځایونه وشمیرئ

الف- $f(x)=-3x^4+15x^2-12$ ب - $f(x)=x^4-x^3-2x^2$

پ - $f(x)=-2x^3+2x^2+16x-24$ ت - $f(x)=\left(x^2-6x+9\right)(x-4)$

ټ - $f(x)=x^6-3x^4-4x^2$ ث - $f(x)=x^4-25x^2-60x-36$

پنځم: د لاندې ټولراشنل توبعو ګرافونه په یوه مناسب پروتولاړ یا کواودینات سیتم کې وکاږئ. د دې لپاره یو ارزښت جدول واچوئ او محور غوڅټکي وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library



الف- $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \quad D_f = \{x \mid -0,5 \le x \le 4,5\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - 2 \quad D_f = \{x \mid -3,5 \le x \le 2,5\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \quad D_f = \{x \mid -0,2 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \quad D_f = \{x \mid -3 \le x \le 3,5\}_{\mathbb{R}}$

ټ - $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \quad D_f = \{x \mid -2,5 \le x \le 3,5\}_{\mathbb{R}}$

ث - ج - $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x \quad D_f = \{x \mid -0,2 \le x \le 8\}_{\mathbb{R}}$

شپږم: د لاندې توابعو صفرځایونه وټاکئ او ګراف یې تر شونې پولې پورې ښه وکاږئ. ارزښتجدول کيږدئ او ځنې ارزښتونه د جبشميري سره وشميرئ. ځنې صفرځایونه اټکل کړئ او که شوني وي، صفرځایونه وشميرئ.

الف- $f(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{3}x - 1$ ب - $f(x) = 0,01(x^3 - x^2 - x + 1)$

پ - $f(x) = 0,1x^3 - 0,3x^2 - 9x - 10$ ت - $f(x) = (x - 1,7)(x^2 - 3)$

تر ۶۴۰ پورې دلته محورغوځتيکيراځي؟

## اړيکي "Relation":

(c) ketabton.com: The Digital Library



یوه اړیکۀ له دوه شیانو جوړه ده:

۱ – یوه وینابنه

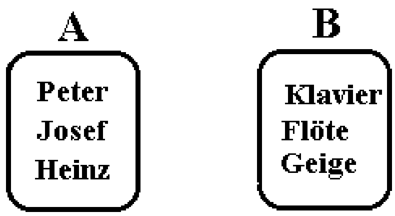
۲ – جوړه، چې دا وینا يې پوره کوي( چې وینابنه یوه رښتیا وینا کوي)۰

بیلګه :

دیوې کورنۍ د غړو ډیرۍ A دې ورکړ شوې وي او B د لوبو یا موزیک الو ډیرۍ۰

| B | A |
|---|---|
| فوټبال | سپین |
| هاکي | |
| زیرګل | |
| والبال | |
| کوچۍ | |

یا دا لاندې




| موزیک الي<br>پیانو<br>شپیلی<br>ګایګي | | د کسانونومونه:<br>پتر<br>یوسف<br>هاینخ |
|---|---|---|

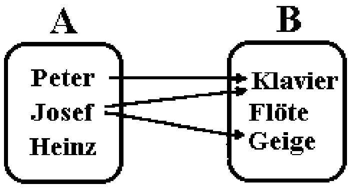
د دواړو ډیریو په منځ کې یوه بینار وینابنه دې یوه وینابنه وي، چې سرۍ a اله bباندې لوبې کوي۰

جوړه ، چې وینابنه پوره کوي، کیدی شي د بیلګې په توګه لاندې جوړې وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

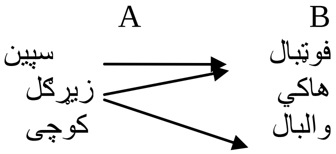


پتر په کلاویر لوبه کوي، یوسف په کلاویر لوبه کوي ، یوسف په ګایګې لوبه کوي، د ځیرې په توګه اړیکې داسې انځوریږي:



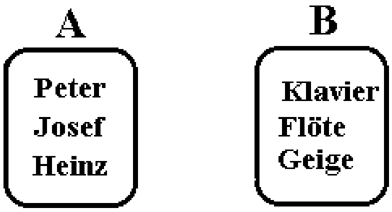

a spielt das Instrument b

یا دا لاندې




نورې بيلګې

موږ د مخه دا لاندې ډيرې منځ ته ر اوړې:

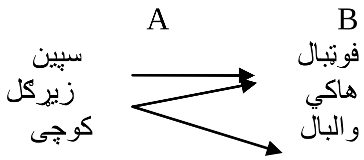


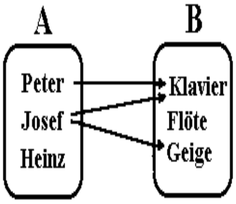

د دواړو ډيريو په منځ کې د اړيکو په ځير موږ اړيکې «په اله لوبه کوي» راوړې
یا دا لاندې

| | |
|---|---|
| فوټبال | سپين |
| هاکي | زيږکل |
| واليبال | کوچی |

(c) ketabton.com: The Digital Library

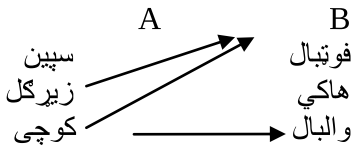


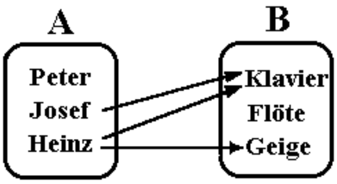



a spielt das Instrument b

په پورته کې ښوول کیږي، چې څوک په کومه اله لوبه کوي.
موږ اوس دواړه ډیرۍ A او B ساتو ، مګر د دوي ترمنځ نوې اړیکې غواړو وپیژنو یا تعریف کړو:
بینار اړیکې دې اوس داسې وي، چې « اله لري» او « په اله باندې لوبه کوي» نور نهوي٠
د دې برسیره دې اړیکې « اله لري » لاندې درې جوړې ولرې :
هاینځ کلاویر لري
هاینځ یوه ګایګې لري
یوسف یوه کلاویر لري
د ډیرې په ډیر انځور یږي:




a besitzt das Instrument b

(c) ketabton.com: The Digital Library



لیدلکیږي، چې د دوه ډیریو په منځ کې مختلفې اړیکې منځ ته راتللی شي یا ټینګیدلی شي٠

شننیزه انځورونه
مخ ته تیرو مخونوکې مو زده کړل، یوې اړیکې پورې دوه شیان اړه لري: یوه وینا بڼه او یوه جوړه، چې دا وینابڼه پوره کوي٠
کله اړیین نه دي یا نه شي کیدی، چې ټولې جوړې ورکړای شو، کومې چې په یوه اړیکې پورې اړه لري٠

بیلګه ۱
ډیری $A = \{ 1,2,3\}$ او ډیری $B=\{1,2,3\}$ دې ورکړ شوي وي٠ وینابڼه کوچنی له یا لنډ <

هر زده کوونکی پوهیږي، چې جوړې $(1/2),(1/3)$ او $(2/3)$ دا وینابڼه پوره کوي٠ جوړو ګڼلو ته اړنه یو، بلکې دا د وینابڼې مخ ته پرتې ډیری A او B ته٠

بیلګه ۲
په ځانګړې توګه دا هلته له پامه غورځول کیږي، چې ټولې جوړې وشمیري، کله چې وینابڼو ته مخ ته پرتې ډیری یا ډېرې لویې وي او یا ناپای٠
بیلګه : ډیری : $A = B = \{1, 2, 3, \ \dots \}$
وینابڼه: له هغې، چې لیدل کیږي، چې بیخي ناشوني ده، چې ټولې جوړې وشمیرل شي، چې دا وینابڼه پوره کوي٠

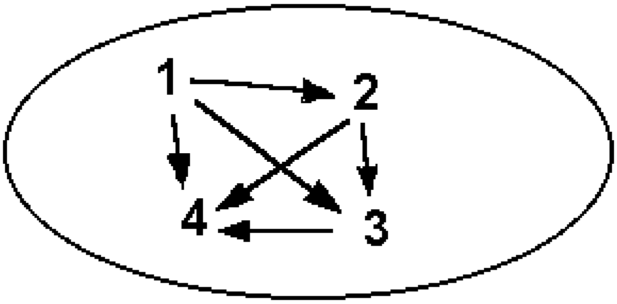
بیلګه ۳
کله کله اړیکه بیخي نه شي انځوریدلی٠
بیلګه : ډیری نارینه $=M$ او ښځینه $=F$ وینابڼه کې راوستل شي، چه « واده له سره »٠
دا څوک نه شي ګڼلی، چې څوک له چا سره واده دی او دا نه په برخه اخستونکو ډیریو M او F کې ورکړ شوې٠

د یوې اړیکې تیوپ یا ډول
اړیکه په دوه ګروپونو ویشل کیدی شي٠
۱ – ددوه ډېریو ترمنځ اړیکې
۲ – د یوې ډیری په دننه کې اړیکې

(c) ketabton.com: The Digital Library

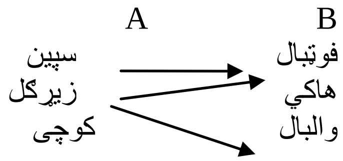


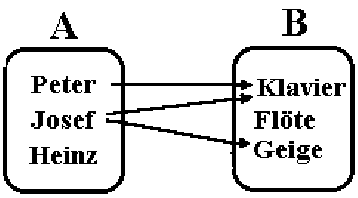
تيوپ ۱ – مورږ وپيژند
د تيوپ ۲ - لپاره بيلګه لاندې اړيکي دي( چې په څيره کې کښل شوي دي):




x له y څخه کوچنی دي

د مخ ته تيرو بيلګو په مخامخوالي يا تضاد دلته د ډيريو د توکو ترمنځ اړيکی پرتې دي
بنسټډيری ،موخه ډيری يا تر مخورشو پسې ورشو
Erklärungروښانه ونه
د ډيری A ( بنسټډيری ) او B ( موخه ډيری ) په اړيکو کې په رېښتوني د مخ ته ورشو ( پتر ،يوس ) همداسې ورپسې ورشو ( کلاوير، ګايګې ) اړيکې هغه توکي جوړوي، چې په کارونه کې ونډه لري٠
A د لوبغاړو نومونه دي او B د لوبو نومونه دي




Grundmenge: { سپين ، زيرګل، کوچی} : بنسټډيری
Zielmenge { فوټبال ، هاکي ، واليبال } : موخه ډيری

(c) ketabton.com: The Digital Library



Vorbereich ترمخورشو {Peter, Josef} :
Nachbereich وروسته ورشو {Klavier, Geige} :

ځني شميرپوهان دا مخورشو او همداسي پسي ورشو، تعريفدېرى ،
ارزښتډيرى يا تعريفورشو همداسي ارزښتورشو بولي

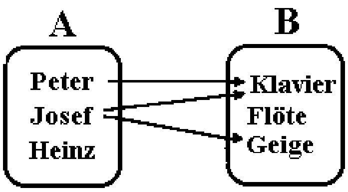
## Relationstafelد اړيکو تخته

تراوسه مو تولي اړيکي د غشيدياګرام له لارې انځور کړل٠ يو شونوالى يا امکانات يې د اړيکو تختي له لارې انځورونه ده:

د دې لپاره د بنسټډيرى او موخه ډيرى توکي په يوه جدول کي ليکو ٠ د بنسټډيرى توکي په پورته ليکه کي ليکو اود موخه ډيرىتوکي په کيڼ درځ يا کينه متَه کي ليکو ٠

په صليبونه سره هغه پيژند يا تعريف ورکول کيږي، چي د موخه ډيرى په توکي باندي د بنسټډيرى يو توکى تنظيم شوى وي٠

د بيلګي په توګه بيرته همغه د ساز الو سره بيلګه راوړو




په دې پورې اړونده اړيکتخته په لاندې ډول ليدل کيږي

| | Peter | Josef | Heinz |
|---|---|---|---|
| Klavier | x | x | |
| Flöte | | | |
| Geige | | x | |

د کواورډينات سيستم انځوربنه

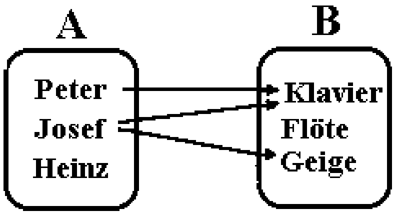
(c) ketabton.com: The Digital Library



تراوسه مو اړیکې د غشیدیاګرام او اړیکتختو له لارې انځور کړې٠ اوس یو دریم
شوونوالی  یا دریمه شوونتیا یا امکان غواړو وپیژنو:
انځورونه په یوه کواوردیناتسیستم کې :

د بنسټډیرۍ توکي د پروتمحور په نخښه کوو او د موخه ډیرۍ توکي په ولاړ محور په
نخښه کوو ٠
د ټکو سره  هغه د بنسټډیرۍ توکي او ورسره د تنظیمډیرۍ  تنظیم توکو ټاکلي وي

بیلګه
د بیلګی په توګه بیرته هغه بیلګه د لوبو یا  موزیک الاتو سره ټاکو:
دلته په دې لاندې الماني لیکنیپا ښه یې :ځیره  بسیا کړی شو

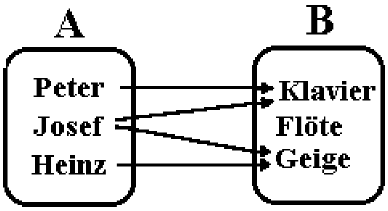



په کواوردیناتسیستم کې انځورونه داسې لیدل کیږي

کڼ پوره کیدونکی اړیکې  :
د  Aځخه هرتوکی کم له کمه د  B په یوه توکي تنظیمیږي( پیژندورشو
یا مخ ته ورشو او بنسټیزه ډیری کټمټ دي)
ښي پوره اړیکې : دB   هر توکی کم له کمه د ځیري په توګه منځ ته
راځي ( پسې ورشو او موخه ډیری کټمټ دي )

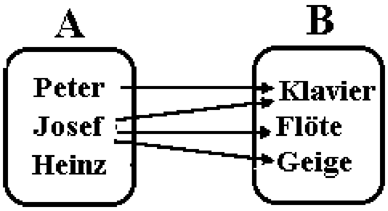
(c) ketabton.com: The Digital Library






Linksvollständig

کيڼ پوره




rechtsvollständig

ښی پوره

ښیَ یواځنی اړیکې

د ښنسټډیریَ (کيڼ) هر توکی په زیات ترزیاته د موخه ډیریَ ( ښی) باندې تنظیمیږي.

پام مرسته : غشي ښي « ښیلوریز) یواځنی دي.

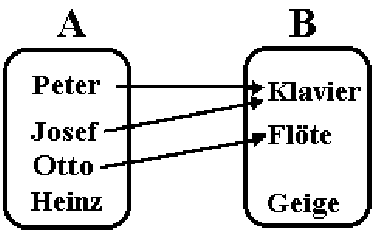
کيڼ یواځنیَ اړیکې :

د ښیَ ډیری هر توکی زیات ترزیاته یو وار د یوې ډیری ( کیڼډیریَ ) د خیرې په ډول منځ ته راځي.

پام مرسته : غشي ښي لورته یواځني دي.

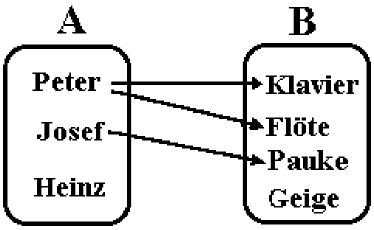
ناټیکوالیَ!

یا دا لاندې، چې د توپونو په ځای موزیک الې ورکړ شوي دي




rechtseindeutig

ښی




linkseindeutig

کيڼ یواځنی

یواځنی، .

(c) ketabton.com: The Digital Library



يو کينپوره کيدونکی او بنی يواځنی اړيکي يواځنی اړيکي بلل کيږي ( فنکشن او يا څيرونې)

په غشيدياګرام کې يو فنکشن په دې پيژندل کيږي ، چې په هر توکی تيک يو غشی پيل کيږي

په ځت اړيکي : په څپ اړيکو کې

١ – مخ – او پسې ورشوګانې سره بدليږي( پيژنددیری او ارزښتديری )

٢ – اوښتونې سره بدليږي

رفلکسيو اړيکي reflexive relations

دياګرام : په هرتوکي يوکړئ غشی شته

رفلکسيو اړيکي :

د رفليکسو اړيکو پيژند : د هرو برابرو توکو جوړه اړيکو پوری اړ ج لري

د فرمو په څير يې ليکنه : د تولو a لپاره باور لري:
aRa

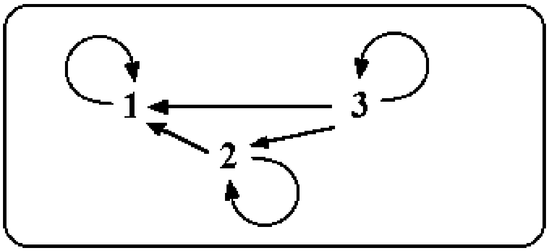


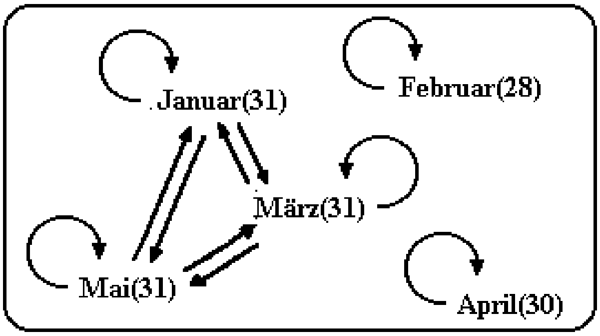
Bild: Die reflexive Relation ≥

انتيرفلکسيو( ايرفلکسيو اړيکي
Antireflexive (irreflexive) Relationen

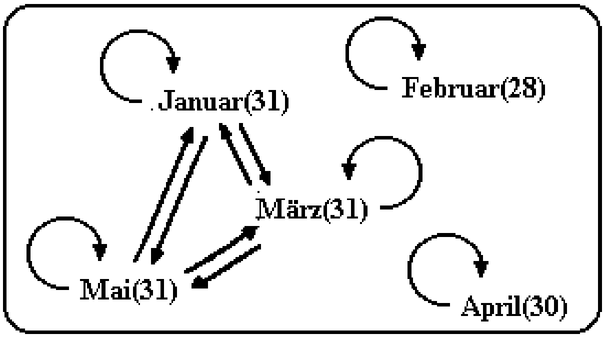
(c) ketabton.com: The Digital Library



پیژند : په انتیرفلکسیو اړیکو کې  په هیڅ توکي کړۍ غشی نه شته
د همغه توکي جوړه اړیکو پورې اړوند نه دی، یا په اړیکو ونډه نه لري٠
د فرمول په توګه لیکل یې : (aRa)¬




سیومتریکي اړیکي : symetric relations
هر غشي ته  په ځټ غشی شته
که  (a,b) اړیکو پورې اړه ولري ، نو   (b,a) هم په اړیکو پورې اړه لري٠
د سیومري اړیکو ځیره: « همغومره ورځې لري لکه»




انتیسیومتري اړیکي: Antiasymetric reltions
د انتیسیومتري اړیکو دیاګرام : په ځټ غشی نه شته ٠
که  (a,b)  په اړیکو اړه ولري،نو   (b,a) په اړیکو اړه نه لري، مګر که   a = b
وي٠

فرمول:  a = b   <=  a R b /\   b R a

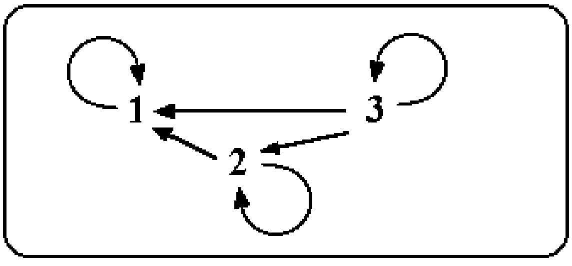



Bild: Die antisymmetrische Relation  ≥

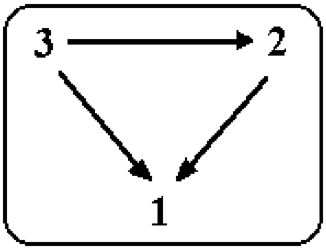
(c) ketabton.com: The Digital Library



Antiasymetric reltions: ناسیومتریک اړیکي پورته ښېره

اسيومتريكي اړيكي
asymetric relations (  Asymmetrische  Relationen)

د اسيومتريكي اړيكو دياګرام نه په ښت غشی لري او نه كړي غشی لري٠
د اسيومتريكي اړيكو پيژند: انتيرفليكسيو  او  انتيسيومتريكي اړيكي
فرمول :  ¬(bRa ⇒ aRb

| | |
|---|---|
|  | ښېره: اسيومتري اړيكي |

# خيره كونه يا توابع Funktionen

p

یادونه: په انرېزي کې mapping د او الماني کې DieAbbildung په نامه ن,مولشوي، چې پښتومانا يې خیرونه یا ښیره کونه ده.

فنکشندوه اوبنتونبیا واریابلپلري، چې یوه خپلواکه اوبله بېواکه ده. له دېام له د فنکشن لهپاره ناسمد تابع نومورکړشویدی.

## په رياضي يا شميرپوهنه كې خيرونه يا  توابع

(c) ketabton.com: The Digital Library



په شمیرپوهنه کې طبیعي ، تخنیکي یا هم نورو ورځنیو کارونو کې زیات وخت یوه لویه د بلې لوي په واک کې وي یا که غواړئ د هغې تابع وي، لکه د بیلګې په توګه د یوه موټر د بنزین سوزول یا استعمالول د هغه د تللې چټکتیا یا سرعت په واک کې یا تابع دی. دا ډول ساده اړیکې مو پخوا هم لوستلي او ګرافیکي مو په یوه کواوردینات – یا پروتولاړسیستم کې انځور کړي.

بیلګې:

د یوه شي یا جنس قیمتت د هغه د خرڅ شوې ډیرئ یا سټ په واک کې دی یا تابع دی.

ټوله دباندنئ تودوخي د ورځې د وخت په واک کې ده.

د یوه بایسکلځغلونکي وهلې لار په مساوي چټکتیا یا سرعت د تلنې وخت په واک کې ده.

د موټر د بریک لار په روښانه توګه د هغه د چټکتیا په واک کې ده.

د یوه کوچني لوېدنه د هغه د عمر په واک ده.

د یوه ریاضي ازموېنې نمرې د لاس ته راوړول ټکو په لاس کې ده.

د یوې بډایئ د ګټې قیمت یا لاس ته راوړنه د په د مخه ټاکلې ګټې سره دوخت تیرېدنې په واک کې ده.

تمرین ۱ : د داسې یو په واکوالي یا تابعیت لپاره نورې بیلګې هم پیدا کړئ.

له پورته بیلګې څخه لیدل کیږي، چې هر دوه لویې سره تنظیمیږي.

ډیرئ یا سټ ← وخت   خرڅشوې سټ په قیمت اغیزه لري.

د ورځې وخت ← تودوخي.   د ورځې وخت په اندازه شوې تودوخي اغیز لري.

د لاس ته راړلو ټکو تعداد یا ګڼون ← نمرې   د یوې ازموېنې نمرې د لاس ته راړلو ټکو اغیزمن کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرین ۲ : د پاتې بیلګو لپاره او د هغو لپاره چې په تمرین ۱ کې مو میندلي اړیکې پیدا کړئ.

دا یو له بل سره تظیم شوې لویې متحولې(اووښتونې یا **Variablen** ) بلل کیږي.

دلته دې دې ته پام وشي، چې کوم په واکوالی یا تابعیت د دوي په منځ کې شتون لري.

د ریاضي نمرې د ښوونکي له نظره د لاس ته راوړو ټکو په واک کې دي، مګر نه د نمرو د ټکو په واک کې.

سرې نمرې د بلواک یا تابع متحولو په حیث هم ښایي او د ټکو تعداد د خپلواک متحولو په حیث ښایي.

د ټکو او نمرو په منځ کې یو فنکشن یا بلواکیزې یا که غواړئ تابعیتي اړیکې شتون لري.

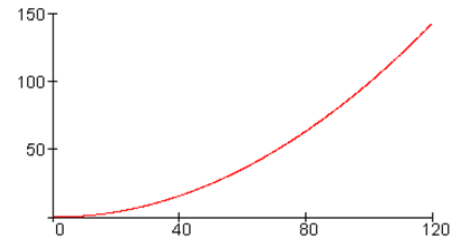
لکه د مخه درسونو څخه چې پوهیږو، ډېر امکانات شتون لري چې د دوه متحولو ترمنځ تابعیتي اړیکې تشریح کړو یا انځور کړو.

د مختلفو چټکتیاو لپاره د بریک لار اندازه کیږي او یو ارزښت جدول ترتیبیږي.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| چټکتیا په km/h(x) | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 |
| د بریکنیولو لار په m(y) | 4 | 16 | 36 | 64 | 100 | 144 |

که د جدول ارزښتونه په یوه پروت ولاړ – یا کواوردینات سیستم کې وکښل شي، نو سرې ګراف لاس ته راوړي وروسته له هغې چې ټکي یو له بل سره وتړل شي کوم چې د چټکتیا او بریکلار ترمنځ اړیکې تشریح کوي.

د پراته محور ، چې ابسخیز هم بلل کیږي د خپلواکي متحولي x ارزښتونه پیدا کیږي، په ولاړ محور چې اوردینات هم بل کیږي د بلواک متحولي y = f(x) ارزښتونه میندل کیږي.




تمرین ۳ : د ارزښت جدول سره سم په یوه مناسب پروتولاړ – یا کواوردیناتسیستم کې اړونده ټکې وکاږئ او دا په یوه ګراف کې سره ونښلوئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د بریکلار د چټکتیا 90 ; 70 ; 50 ; 30 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې وټا کئ.

پولیس یوه د90 m د بریک لار اندازه کوي؟

دا موټر د کومې چټکتیا یا سرعت سره خغلي؟

زیات وخت دا هم شونې ده چې فنکشنال یا تابیعي اړیکې د تابع مساوات له لارې انځور شي.

د بریکلار لپاره باور لري: $y = f(x) = 0{,}01\ x^2$

دلته $y = f(x)$ د بریکلار لپاره اینبوول شوی ا و دا وایي، چې y -کواوردینات په کواوردیناتسیستم کې د متحولې x په واک کې دی، یعني د خپلواک متحولېx یو تابع دی یا په واک کې دی. تابعمساوات دی، کوم چې هغه قانون ورکوي، چې ارزښتونه د f(x) تابع یا بلواک متحولې جوړوي.

د تابع مساوات په ځاي هم وایو چې $f(x) = 0{,}01\ x^2$ د تابع قانون دی.

تمرین ۴ : که تابع مساوات $f(x) = 0{,}01\ x^2$ وي، نو لوستل شوي ارزښتونه وشمیرئ؟

له دا تراوسه شوې کار څخه کیدی شي ووایو:

پیژند یا تعریف:

د یوه تابع سره د خپلواک متحولېx هر ارزښت ټیک یو تابع ارزښت f(x) باندې- یا سره تنظیمیږي. سړی دا هم وایي چې یوه تابع یو یواځنی نظم دی.

$$\underbrace{f : x \rightarrow \underbrace{f(x) = x - 1}_{\text{Funktionsgleichung}}}_{\text{Funktion}}$$

لیکندول:f

پورته لومړیې په پښتو: تابع برابرون

که په راتلونکې کې له یوه تابع غږیږو، نو د دې تشریح لپاره فقط تابع مساوات ورکوو، یعنې فقط ..... = f(x) . ی.

د تابع نوم f دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا $x \rightarrow f(x)$ ليکندود روښانه کوي، د هر x –ارزښت سره يو ټاکلی تابع ارزښت f(x)اړه لري.

تابع مساوات $f(x) = x - 1$ د شميرلو قاعده يا قانون راکوي، چې تابع ارزښت څنګه جوړيږي.

د دې لپاره چې د نظم يواځنوالی ښيا وښايو، لاندې بيلګه راوړو:

هر زده کوونکی يو ټاکلی د بوټانو لويوالی لري. دلته حتمي ده چې زيات زده کوونکي به يو- - يا هماغه د بوټانو لويوالی ولري.

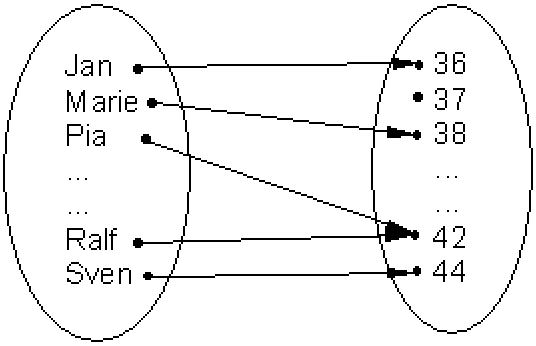
يواځنواوالی په زده کوونکو اړه لري ← د بوټانو لويوالی.

د متحولو سره کښلی يا ليکلې دا په دې معنا دی، چې د زده کوونکي نوم خپلواکه متحوله په ګوته کوي او هغه سره تنظيم شوې د بوټانو لويوالی بلواکه يا تابع متحوله جوړوی.

معکوس يا په څټ د زده کوونکو تنظيم يواځنی نه دی، ځکه چې ډېر زده کوونکي د بيلګې په توګه ۴۲ نمرې د بوټانو لويوالی لرودی شي.

دا ډول تابع د تابعمساوات نه لري، دا کيدی شي چې د ډېرئ څيرې يا ستعکس په څير انځور شي.

يواځنی نظم(تابع يا فنکشن)




د بوټانولويوالی ډېرئ ياسټ     د زده کوونکو سټ

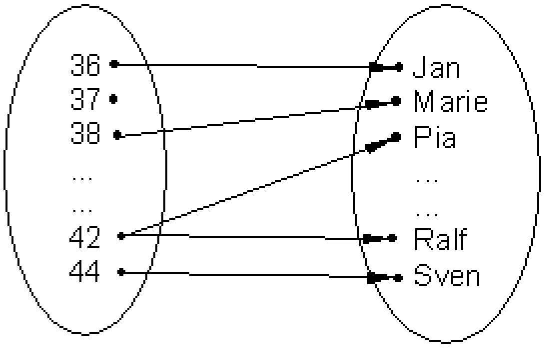
(c) ketabton.com: The Digital Library



سرلیک

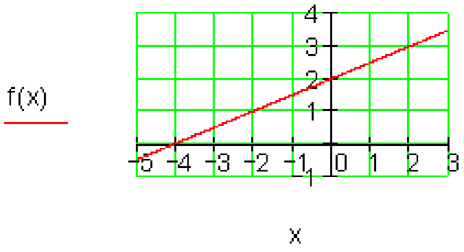
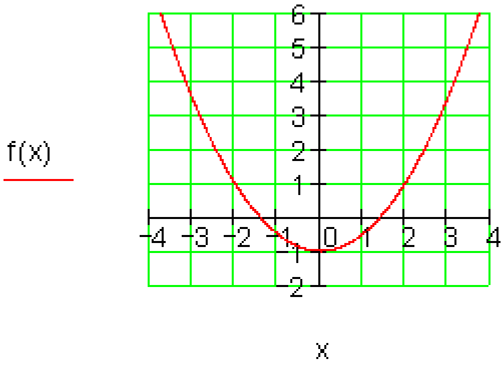
( ارزښت ډېرئ)　　　　(تعریفډېرئ)

نظم یواځنی نه دی ( تابع نه دی)




د دواړو ستونو بدلول

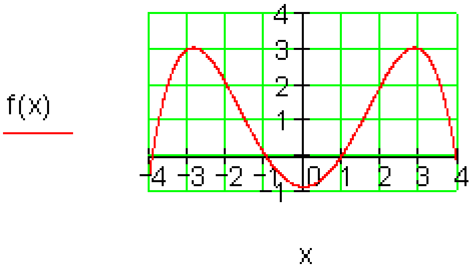
د رياضيکي توابعو او تابعمساواتو بيلګي ( له کينې و ښي لورته)

| | |
|---|---|
| $f(x) := \frac{1}{2}\cdot x + 2$   کرښنيز مساوات(کرښنه ( | $f(x) := \frac{1}{2}\cdot x^2 - 1$   مربع مساوات(پارا بل) |

(c) ketabton.com: The Digital Library

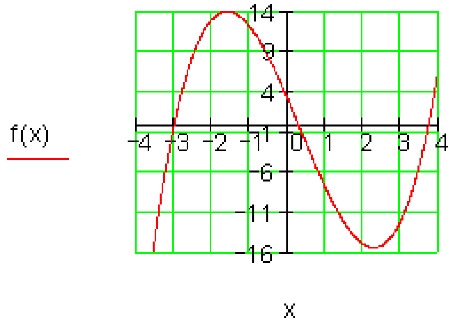


$$f(x) := \frac{-7}{120}\cdot x^4 + \frac{23}{24}\cdot x^2 - \frac{9}{10}$$



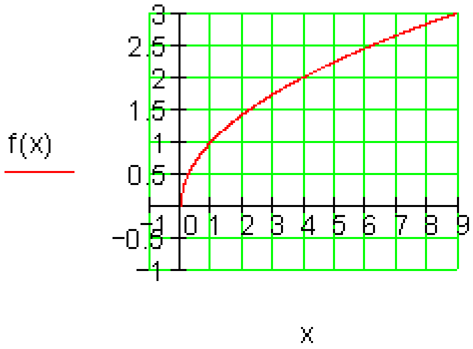

د څلورمي درجي پولراشنل تابع

$$f(x) := x^3 - x^2 - 11x + 3$$



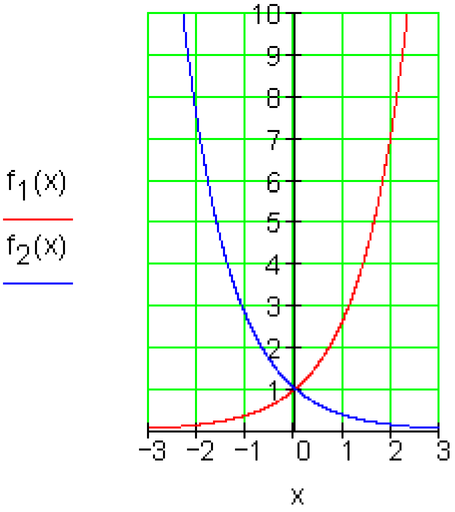

د دریمي
درجي
پولراشنل تابع

$$f(x) := \sqrt{x}$$




ریښه تابع

$$f_1(x) := e^x \qquad f_2(x) := e^{-x}$$

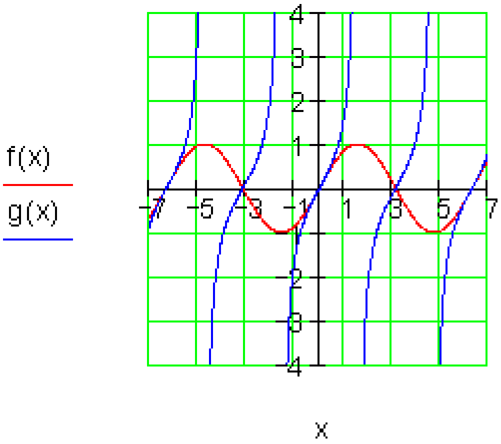



اکسپوننشل تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

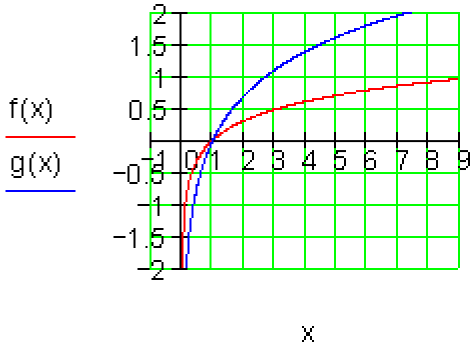


$f(x) := \sin(x) \qquad g(x) := \tan(x)$



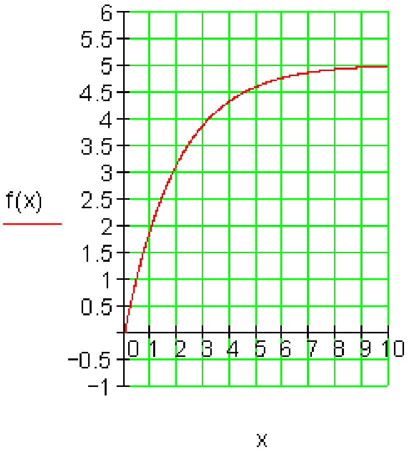

ترېګونومتريکي(مثلثاتي) تابع

$f(x) := \log(x) \qquad g(x) := \ln(x)$



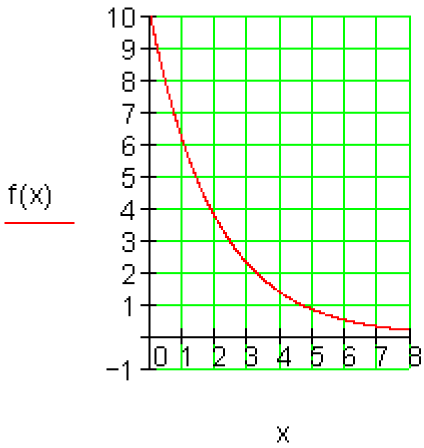

لوګاريتمتابع

$f(x) := 5\cdot\left(1 - e^{-0.5\cdot x}\right)$




اکسپوننشل مړبنتکړه

$f(x) := 10e^{-0.5\cdot x}$

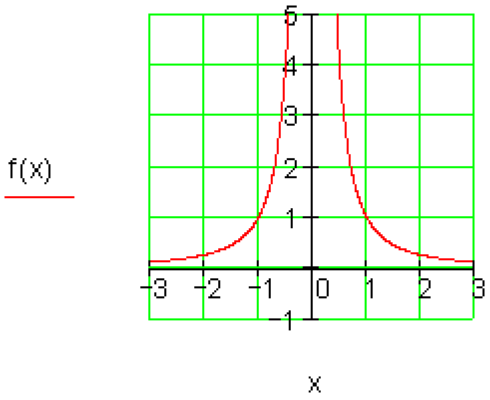



اکسپننشلي کښته کيدنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

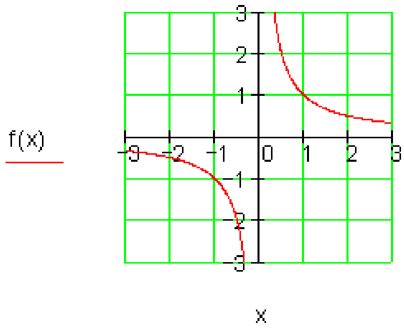


$$f(x) := \frac{1}{x^2}$$




های پارابول محورسیومتریک

$$f(x) := \frac{1}{x}$$




های پارابول ټکی سیومتریک

# تعریف- او ارزښتډېرئ یا - سټ

تعریف(پیژند):

د یوه تابع تعدریفسټ **D** د ټولو خپلواکو متحولو ډېرئ یا سټ ده، د کومو لپاره چې تابع تعریف دی.

ارزښت ډېرئ **W** د ټولو تابع ارزښتونو- یا بلواکو - سټ ده، چې د D له ټوکو منځ ته راځي.

بیلګه:

| | |
|---|---|
| $f(x) = \frac{1}{x}$ تعریفسټ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ تعریفسټ D=R |

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| د صفر سره د وېش اجازه نه شته | Rد حقيقيي اعدادو ډېرئ ده |

بيلګه:

| | |
|---|---|
| $f(x) = x^2 \quad D = \mathbb{R}; W = \mathbb{R}_+$<br>د تابع ارزښت په حيث فقط مثبت يا زياتيز ارزښتونه رامنځ ته کيږي | $f(x) = x + 1 \quad D = \mathbb{R}; W = \mathbb{R}$<br>تابع هر په خوښه ارزښت نيولی شي. |

## شميرپو هنيزه ليکندود او د هغه معنا

$f(4) = 7$ د خپلواکو متحولو د ارزښت $x = 4$لپاره د تابع ارزښت 7 دی.

دا د ارزښتجوړه ( 7 | 4 )په کواورديناتسيستم کې د ټکي ( 7 | 4 ) P کواورديناتونه جوړوي.

$f(x) = 9$غوښتونی د x -ارزښت دی، چې په هغه پورې تابع ارزښت 9 اړه لري.

$y = f(5)$ د $x = 5$ لپاره تابع ارزښت دی.

تولکه:

يو يواځنی نظم، چې په هغه کې د تعريف ست D څخه خپلواکه متحوله x ټيک يو تابع ارزښت f(x)باندې تنظيم شي ځيرونه ( چېمور يې تابع بولو) يا فنکشن بلل کيږي.

تابعي(خپلواکيز) يا فنکشنلي اړوندوالی د يوه تابع مساوات( د بيلګې په توګه: $f(x) = 2x + 1$ ) سره ليکل –يا تشريح کيږي.

تابع مساوات کې د x –ارزښتونو په اينولو سره د تابع ارزښت لاس ته راځي، چې دا د x -ارزښتونو سره يوه ارزښت جدول کې اينولی يا انځورولی شو.

د ارزښتجدول هره جوړه په کواوردينات سيستم کې ټيک يو ټکی په ګوته کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په زياتو حالتونو کې کيدی شي دا منځ ته راغلي ټکي يوه ګراف ته سره رايوځای يا وتړل شي.

د ټول x - ارزښتونو ډېرئ، هغه چې په تابع مساوات کې ځای په ځای شي تعريف ډېرئ يا ـسټ بلل کيږي.

د ټول تابع ارزښتونو ډېرئ يا ـسټ، چې دلته منځ ته راځي، د تابع ارزښت ډېرئ W پورې اړه لري.

# د تمرينونو حل

لومړی تمرين: د داسې بلواکوالي لپاره نورې بيلګې پيدا کړئ.

ځواب: - د يوه تيلسوزونکې ماشين قدرت د څرخونتعداد( د ماشين د څرخيدو تعداد) په واک کې دی.

- د يوې ګردئ يا دايرې سطحه د وړانګې يا شعاع په واک کې ده.

- د بريښنا پيسې د ثابت قيمت سره د انرژي يا بريښنا مصرف په واک کې ده.

دويم تمرين : د پاتې بيلګو او د هغو لپاره چې تاسو په لومړي تمرين کې وليدل ګډې اړيکې سره په فرمولبندۍ کې راوړي.

ځواب:

لار → د خوزښت وخت: په مساوي پاتې چټکتيا د خوزښت وخت په وهلې لار اغيز لري.

بريکلار → چټکتيا: د يوه موټر چټکتيا د بريکلار باندې اغيزه لري.

ټوله ګټه → د تيريدنې وخت: د سرمايې ايښونې وخت د ګټې لاس ته راوړنه باندې اغيزه لري.

وده → عمر: د کوچنې عمر د هغه په وده اغيزه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



قدرت → څرخونتعداد: د یوه سوزونکي ماشین د تیلو سوزیدنه د هغه په څرخونتعداد پورې اړه لري.

سطحه → وړانګه : د ګردئ یا دایرې وړانګه د دایرې سطحه باندې اغیز لري.

د بریښنا حساب → انرژي ستې: د سوزولې بریښنا یا انرژئ ستې یا ډېرئ د بریښنا بل(هغه د مصارفو کاغز) اغیزمن کوي.

دریم تمرین:په یو مناسب کواوردیناتسیستم کې د ارزښت جدول اړوند ټکي وکاږئ او دا یوه ګراف ته سره وتړئ.

د چټکتیا 90 ; 70 ; 50 ; 30 او 110 km/h لپاره د لوستلو له لارې بریکلار پیدا کړئ.

پولیس یوه د 90 m بریکلار کچوي. دا موټر دکومې چټکتیا سره تلی؟

ځواب:

د 30 km/h چټکتیا بریکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتیا بریکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتیا بریکلار 48 m ده

د 90 km/h چټکتیا بریکلار 80 m ده

د 110 km/h چټکتیا بریکلار 120 m ده

له 90 m بریکلار سره یو موټر 95 km/h د چټکتیا سره ځغلي.

تلنلار: په کواوردیناتسیستم یا پروتولاړ سیستم کې د x -محور(ابسڅیزا) د خپلواکو متحولو ډېرئ نمایندګي کوي، د y –محور (اوردینات) د بلواک یا تابع متحولو نماینده ده.

د مخه له دې چې په یوه کواوردیناتسیستم کې ارزښتونه لیکل –یا کښل کیږي باید وکتل شي، چې کومه خپلواک- او کومه بلواک- یا تابع متحوله ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



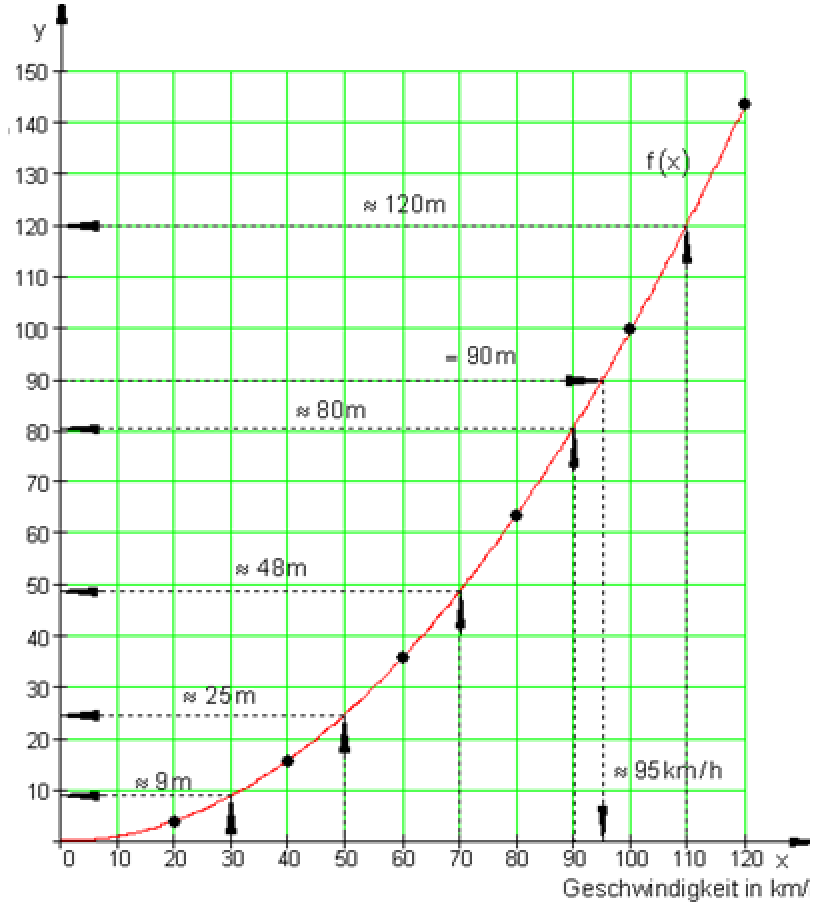
پسي دا هم غوره ده، چې د کچوني لپاره يوو ښه کچونی يا هغه اله چې اندازه پرې کچوو بايد وموmو.

د دې لپاره د جدول لوي او کوچني ارزښتونه کتل کيږي او پرېکړه کيږي چ دواړه محورونه په څو برخو بايد وويشل شي.

وروسته له هغې چې ټول په جدول کې ټکي په کواوردیناتسیستم کې ځای په ځای شوي، نو بیا دا ټکي د ګراف په توګه سره تړل – يا نښلول کيږي

کيدی شي له ګراف څخه د داسي x -ارزښتونو لپاره هغه لړ يا ډېر تابع ارزښتونه هم ولوستل شي، چې په ارزښت جدول کې مخ ته نه راځي.

معکوس کيدی شي د يوه ټاکلي تابعارزښت اړونده x -ارزښت ولوستل شي. د دې نتيجو ټيکوالی د دې په واک کې دی، چې ګراف څومره ټيک کښل شوی دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library



پورته کواوردینات – یا پروتولاړسیستم کي: پروت: چټکتیا په کیلومتر. ولاړ:بریکلار په متر

ځلورم تمرین:

لوستل شوي ارزښتونه وشمیرئ، که تابع مساوات $f(x) = 0,01\,x^2$ وي.

ځواب:

تابعارزښتونه داسې شمیرلکیږي، چې اړونده د x ارزښتونه په تابع مساوات کي کیښوول شي.

$$f(x) = 0,01x^2 = \frac{1}{100}x^2$$

$$x = 30 \Rightarrow f(30) = 0,01 \cdot 30^2 = 0,01 \cdot 900 = 9$$

$$x = 50 \Rightarrow f(50) = 0,01 \cdot 50^2 = 0,01 \cdot 2500 = 25$$

$$x = 70 \Rightarrow f(70) = 0,01 \cdot 70^2 = 0,01 \cdot 4900 = 49$$

$$x = 90 \Rightarrow f(90) = 0,01 \cdot 90^2 = 0,01 \cdot 8100 = 81$$

$$x = 110 \Rightarrow f(110) = 0,01 \cdot 110^2 = 0,01 \cdot 12100 = 121$$

د 30 km/h چټکتیا بریکلار 9 m ده

د 50 km/h چټکتیا بریکلار 25 m ده

د 70 km/h چټکتیا بریکلار 48 m ده

د 90 km/h چټکتیا بریکلار 80 m ده

د 110 km/h چټکتیا بریکلار 120 m ده

له 90 m بریکلار سره یو موټر 95 km/h د چټکتیا سره ځغلي.

بریکلار 90 m کچ شوې ، غواړو چټکتیا پیدا کړو.

پیل: $f(x) = 90 \Leftrightarrow 0,01x^2 = 90$ دا مساوات په x پسې ځواب کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$0{,}01x^2 = 90 \,|\, : 0{,}01 \Leftrightarrow x^2 = 9000 \,|\, \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{9000} \Leftrightarrow |x| = \sqrt{900 \cdot 10} \Leftrightarrow |x| = 30\sqrt{10}$$

ارزښت حل کړئ.

$$|x| = 30\sqrt{10} \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 30 \cdot \sqrt{10} \approx \pm 94{,}9$$

نسبت و پوښتنې ته فقط مثبت یا زیاتیز ارزښتونه موخه ور دي، ځکه چې موږ مثبته چټکتیا په پام کې نیسو. د 90 m بریکلار سره د موټر چټکتیا 94,9 km/h وه.

یادونه:لومړی شمیرنه ټیک ارزښتونه راکوي، سره له دې هم موخه وردی، چې دا شمیرل شوي ارزښتونه په ګراف کې یا له ګراف څخه هم د لوستلو له لارې کنترول کړو.

## پوښتنې

## تابع I

لومړی:

ټول ټکي په کواوردینات سیستم کې په نخښه کړئ، چې کواوردینات یې ورکړ شوي شرایط پوره کوي.

الف- $y \le -1 \wedge x \ge 1$ ب- $y \in \mathbb{R} \wedge -2 \le x \le 3$ پ- $x \in \mathbb{R} \wedge y = 2$

ت - $0 \le x \le 4 \wedge y \ge 0$ ټ- $|x| \ge 1{,}5 \wedge |y| \le 2$ ث- $y > 0 \wedge x = -1$

دویم: په مناسب کواوردینات سیستم کې لاندې ټکي رسم کړئ.

$$A(40\,|\,220);\ B(10\,|\,250);\ C(200\,|\,300);\ D(80\,|\,240)$$

ایا د x – او y -کواوردیناتو ترمنځ کومې اړیکې شته؟ د دې لپاره یو ترم ولیکئ او نور درې ټکي ورکړئ.

دریم: د ټکو ځای وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library



الف- ټکي $P_t\left(t-1|\frac{1}{t+1}\right)$ د t€R کوم ارزښت په لومړئ څلورئکې پروت دی؟

ب- ټکي $Q_t\left(t|t^2-1\right)$ د t€R کوم ارزښت لپاره دx محور کښته لور ته پرته ده؟

څلورم:

د ټکوډېرئ يا –سټ $A=\left\{(1|3);\left(2|\frac{3}{2}\right);(3|1);\left(4|\frac{3}{4}\right);...\right\}$ ورکړ شوی دی.

د A نور درې توکي ورکړئ او دا ټکي په يوه کواوردينات سيتم کې وکاږئ. ايا د x- او y -کواوردیناتونو ترمنځ اړيکې شته؟

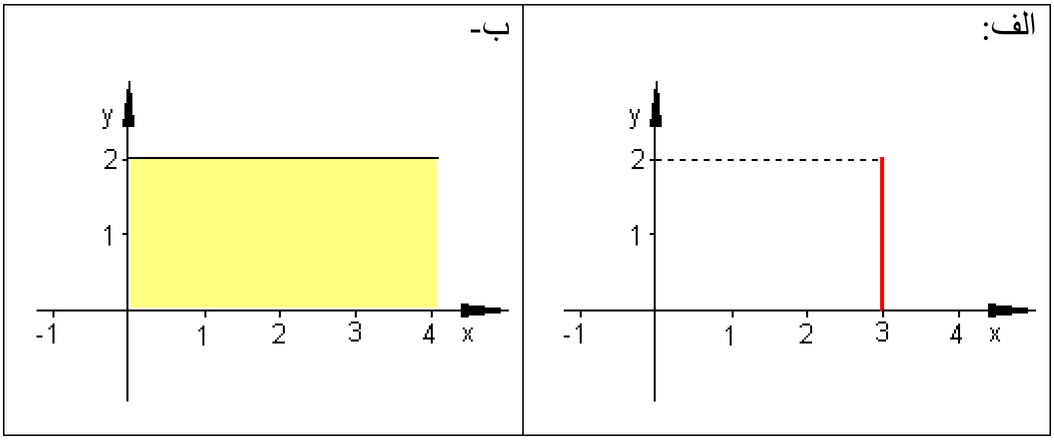
پنځم: يو ټکی $P\left(t|\frac{t}{2}+3\right)$ د t€R سره ورکړشوی دی.

د t لپاره څه ارزښتونه ورکړي او دا د دې اړونده ټکي په يوه کواوردينات سيستم کې وکاږئ.

د کومو t -ارزښتونو لپاره باور لري:

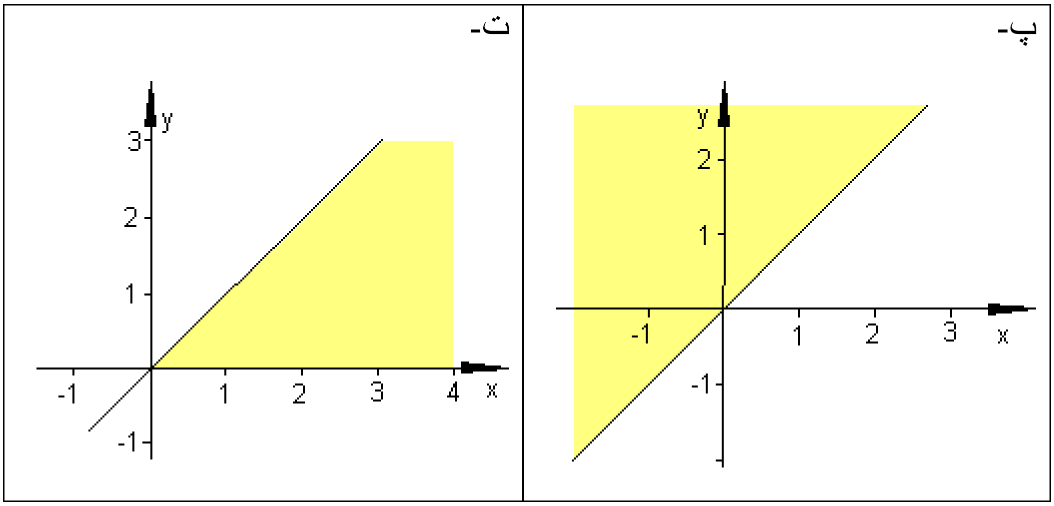
د ټکي P د x -کواوردينات د ټکي د y -کواوردينات سره برابر دي؟

شپږم: په نخښه شوي کرښه او همداسي سطحه تشريح کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library






## پوښتنې

## توابع II

لومړی

ښاغلی برگ د یوه ملفون(لاسي یا لاسي تلفون) قرارداد د لاندې شرایطو سره وکړ:

د میاشتې 20 € ، د تلفون قیمت په دقیقه 0,35 € .

الف- که دی 40, 80 یا 120 دقیقې تلفون وکړي، نو میاشتنی حساب به یې څومره جگ وي؟

ب - لگښت لپاره یو ترم ولیکئ چې په دقیقه کې د خبرو د دوام په واک کې وي.

پ – اړیکې گرافیکي انځور کړئ.

دویم:یوه الوتکه د سوزونموادو کیروزین 10500 Liter لیتره زخیره لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په 100 km دا 180 Liter سوزوي.

الف- د په ليتر مصرف جدول جوړ کړئ. يو واټن له 0 km تر 5000 km پورې وټاکئ.

ب – اړيکې يې ګرافيکي ځور کړئ.

پ-له څومره کيلومتره وروسته به زخيره تمامه شوې وی؟

ت - د الوتنې د لار ترم د ټانک د خونديونې په واکوالي کې وټاکئ.

دريم: يو د شميراړونې جدول جوړ کړئ، چې $^0$ څلزيوس ($^0$C) په فارنهايت($^0$F) اړوي د 20$^0$C - او 60$^0$C په ساحه يا ورشو کې. د دې لپاره اړين داتا تشريح کړئ. اړيکې ګرافيکي انځور کړئ. دا اړيکې کوم ترم په ګوته کوي؟ د ا د تبې تودوخئ کچونه (ترمومتر) د ناروغ د تبې په اندازه کئ چې ده ايا دا حرارت يا تودوخي د ژوند خطر لري؟

څلورم: يوه د مالونو ليږلو مغازه غواړي لګښت له امله يو د تحفې پاکټ وليږي. د پاکټولو تخنيکي پرابلم له امله يې يو اړخ د 35 cm سره کره ټاکلی دی. د پوست د لګښت نظم بايد په پام کې نيول شوی وي

د لګښت نظم: مربع ډوله پاکټونه دننه په هيواد کې.

خورا کوچنئ کتله( يا بهتره ډکی): اوږدوالی 15 cm ، سور 11 cm ، جګوالی1 cm
.

خورا جګه کتله: اوږدوالی 60 cm ، سور 30 cm ، لوړوالی 15 cm يا اوږدوالی جمعه يې سور جمعه يې يا په ورزيات جګوالی = 90 cm. خورا زيات وزن 2 kg.

الف- د يوه ډکي ياحجم V = 21 dm$^3$ لپاره د سور او جګوالي ترمنځ اړيکې وټاکي.

ب- دا ماکسيمال رسيدلوړ ډکی يا حجم څومره لوي دی؟

پنځم: فرمول ورکړشوی دی.

الف- ش څنګه تغير خوري، که کوچنی شي.

ب- ايا لاندې اړيکې به د فرمول له لارې تشريح شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



A : د کرایي موټر ټول لګښت د عدد a د تللی کیلو متر او د هغه د یوه کیلو متر د قیمت c لپاره.

B : د ودرېدلو لار یا واټن a د بریکلارb او عکس العمل لارc ځخه شمیرل کیږي.

پ-شي اړیکي ورکړئ چې د فرمول له لارې تشریح کیدی شي یا روښانه کیدی شي.

شپږم: یو ولاړګوډیز یا مستطیل U = 12 cm چاپیریال یا محیط لري.

الف- اړخونه څنګه یو د بل په واک کې کیدی شي.

ب- یو ترم وټاکئ، چې بلواکوالی د اړخ a څخه ورکوي یا د اړخ a په واک کې یا تابع دی.

پ- د a د کوم ارزښت لپاره سطحه خورا لویه وي؟

## پوښتنې

## توابع III

لومړی: توابع f(x) ورکړ شوي. یو مناسب ارزښتجدول وکاږئ. دې ته اړوند ګراف رسم کړئ.

الف - $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ ب - $f(x)=x^2$ پ - $f(x)=\frac{1}{x+3}$ ت- $f(x)=3^x$

دویم: فکر وکړئ، چې ایا یو ،،یواځنی نیظم،،د $x \rightarrow y$ لپاره مخ ته لرو: $x^2+y^2=1$

دریم: ټکی P ورکړ شوی دی. ایا یوه تابع مخ ته لرو؟ که هو، نو نظمقانو وټکئ او خورا لویه تعریفسټ یا – ډېرئ هم وټاکئ.

$$P=\left\{(2|1);\left(5|\frac{1}{4}\right);\left(10|\frac{1}{9}\right);\left(25|\frac{1}{24}\right);.....\right\}$$

څلورم: یو ارزښتجدول ولیکئ او د تابع ګراف وکاږئ:

$$f(x)=\frac{1}{8}\left(x^3-2x-4\right);\ x\in\mathbb{R}$$

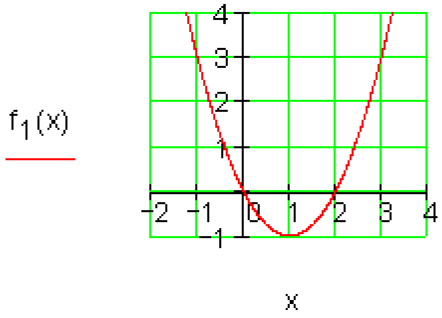
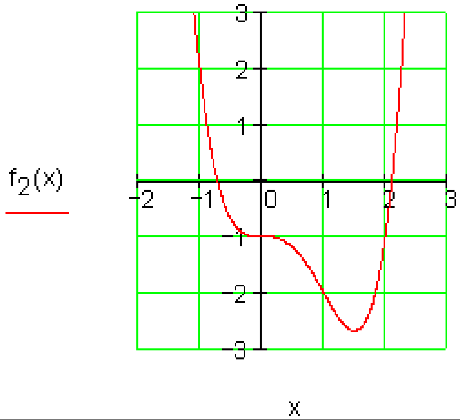
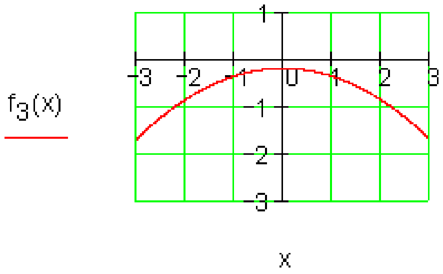
الف- د جبشمیري سره f ( 3 ) او f ( - 2 ) وشمیرئ.

ب- په کوم ځای کې د تابع ارزښت صفر دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



پ-د کومو x -ارزښتونو لپاره تابعارزښت 1 دی؟
ت-د کومو x -ارزښتونو لپاره تابعارزښت کمیز یا منفي دی؟
ټ-د کومو x -ارزښتونو لپاره باور لري:1 < f ( x ) کړئ، چې د کوم تابع لپاره باور لري:
پنځم: د درې توابعو f1, f2, f3 ګراف ورکړ شوی دی. پرېکړه وکړئ:

| | |
|---|---|
| الف- د تابع ارزښتونه هر چيرته صفر دي.<br>ب- توابع په انتروال [ 1 ; 0,5 ] منفي يا کميز دي<br>پ-. f ( 2 ) < f ( 0 )<br>ت-. f ( 0 ) = - 1<br>ټ-. f ( - 2 ) = f ( 2 ) |  |
|  |  |

پوښتنې

توابع **IV**

لومړی: تابع f ورکړ شوې د f(x) =-0,2(2-x); x€R سره

پرېکړه وکړئ، چې ايا لاندې وېناوې رښتيا او که نارښتيا دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



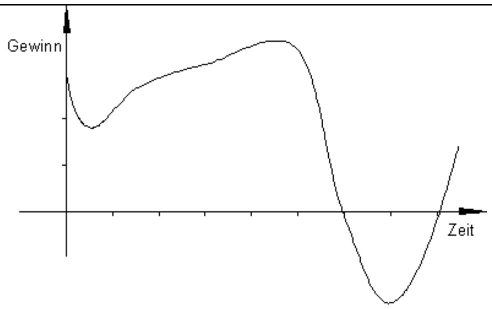
ځيل ځواب مدلل کړئ.

الف- د تابع ارزښتونه زياتيز يا مثبت دي د ټول x – ارزښتونو لپاره.

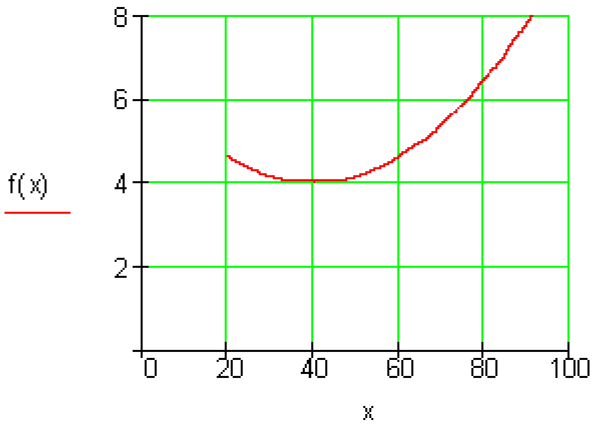
ب- $f(x) < 0$ د ټولو x€R لپاره.

پ- $f(x)$ د $x = 2$ لپاره منفي دی.

ت- يو ځای u شتون لري، چې د هغه لپاره $f(u) = f(u + 1)$ باور لري.

| | |
|---|---|
| دويم: د رسم شوي تابعګراف تلنه تشريح کړئ. دلته هغه غوره ټکي په نخښخه کړئ. هغه ټکي، انتروالونه روښانه کړی يا تشريح کړئ په کومو کې چې ته اقتصادي پسمنظر(د شاته پراته دليل ) فرمولبندي کوې. | <br>کواورديناتسيستم کې : پروت: وخت. ولاړ: ګټه |

دريم: د يوه موټر د تيلو سوزول د چټکتيا په واک کې يا تابع دی. دا په ځنګ کې ښيره د تيلو سوزول ښايي په ليتر په سل کيلو متر کې او د چټکتيا په واکوالي کې، که سرى په څلورم ګير Gang کې لاړ شي.

| | |
|---|---|
|  | الف- کره يا منحني روښانه کړه.<br><br>ب- په کومه چټکتيا کې استعمال ۶ ليتره په سل کيلومتر کې دی؟<br><br>پ- په کومه چټکتيا کې د تيلو سوزښت خورا کم دی؟<br><br>ت- کره به ځنګه وځغلي، که په دريم ګير کې سرى لاړ شي؟ |

(c) ketabton.com: The Digital Library



څلورم: د لمبا په ډنډ کې $40\ m^3$ اوبه دي. دا اوبه د ډنډ د پاکوالي له امله د پمپ کولو سره وباسي، چې په دقیقه کې 350 Liter لیتره اوبه وځي.

الف- یو ترم د پاتې حجم یا ډکي لپاره په $m^3$ وټاکئ.

ب- څومره $m^3$ د ۲۰ دقيقو وروسته په لمباډنډ کي لا پاتي ي.

## پوښتنې

## توابع V

لومړی:د تابع $f(x)$ماکسيمال تعريفورشو$D_{max}$ پيدا کړئ

الف- $f(x) = 2-3x$ ب - $f(x) = \sqrt{2x-3}$

ث- $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ ت - $f(x) = -x^2+1$

دويم: د تابع $f(x)$ ارزښتورشو وټاکئ د $D = D_{max}$ سره.

الف- $f(x) = \dfrac{3}{2}x-4$ ب - $f(x) = 1+\sqrt{x+1}$

پ - $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ ت - $f(x) = x^2-5$

دريم: تابع $f(x)$ ورکړ شوی ده. ماکسيمال تعريفورشو $D_{max}$ وټاکئ. د $f(x)$ګراف وکاږئ.

د $x \in \left\{k\,;\,-\dfrac{2}{k}\,;\,k+1\,;\,k-4\right\}$ لپاره تابعارزښتونه وټاکئ.

الف- $f(x) = \dfrac{1}{2}x+1$ ب - $f(x) = 2x-\dfrac{2}{x}$ پ - $f(x) = x-x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ت - $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ ټ - $f(x)=\sqrt{4-2x}$ ث- $f(x)=2^{x}-1$

خلورم: تابع $f(x)$ د $f(x)x^3$ سره ورکړشوې ده.

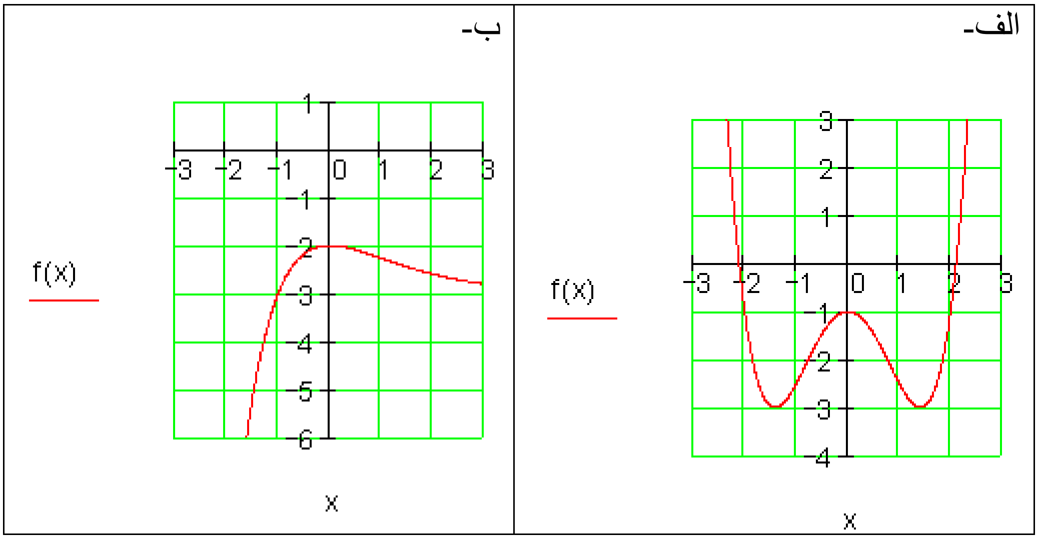
الف- ماکسیمال تعریفورشو D او ارزښتورشو W ورکړئ.

ب- د کوم $x\in D$ لپاره باور $f(x)=81$ لري؟

پ-د کوم $x\in D$ لپاره باور $f(x)\geq 9$لري؟

ت- و ښایئ: $f(x+1)=3.f(x)$ د ټولو $x\in D$ لپاره.

پنځم: تابع $f(x)$ د $D = IR$ لپاره تعریف ده. د رسمونو څخه ارزښت ډیرئ وښایئ.




## پوښتنې

## توابع VI

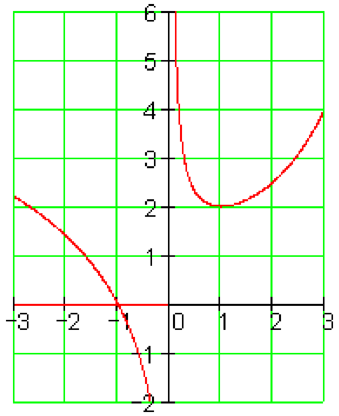
لومړی: د تابع$f(x)$ ارزښتښت د جبشمیري سره وشمیرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

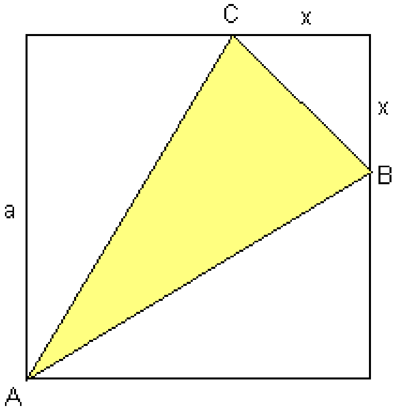


$$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{2}{5}x^3-2$$ د D=R سره.

دویم:

| | |
|---|---|
|  | دویم: ترخنګ کړه د تابع f(x) ګراف دی؟<br>ایا f(x) د ټولو x€R لپاره تعریف دی؟<br>د x د کومو ارزښتونو لپاره تابع ارزښت<br>ـ له 2 لوي دی؟<br>ـ له صفرکوچنی دی؟ |

دریم:

| | |
|---|---|
|  | یوه مربع یا څلوري د اړخ اوږدوالي<br>a = 5 cm سره ورکړ شوې ده.<br>د مثلث یا درېګوديABC د سطحي ترم<br>A(x) وټاکئ |

څلورم: د یوه مالک ټول لګښت K د یوه لاسته راوړني سټ x په واکوالي کې په سټ واحد یا ډېرئ یوون (ME) د ترم له لارې لیکل کیږي

$$K(x)=0{,}01x^3-x^2+100x+720$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



الف- د x -ارزښتونو لپاره تر 100 پورې ټول لګښت وشمیرئ. یو مناسبتلنلارې ډول وټاکئ او د ټول لګښت لیدخیره رسم کړئ.

ب- د هر سټ – یا ډېرې واحد خرخلاو99 پیسپواحده دی. لاس ته راونې (د پیسو ځومره دي، که x( ME د سټ واحد) په بازار کې خرخ شي؟

په لرلي کواوردیناتسیستم کې د خرخلاو(پیسو) د لیدلو ځیره و کاږئ.

پ-د لیدخیرې ځخه ولولئ:

په کومه ورشو یا ساحه کې ګټه منځ ته راځي؟ د کوم x –ارزښتونو سره به خورا لویه ګټه لاس ته راشي؟

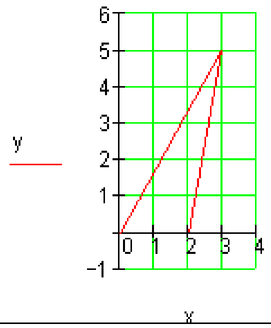
## پوښتنې

## توابعVII

لومړی: توابع f(x) ورکړشوي دي. یو مناسب ارزښت جدول جوړ کړئ. له دې سره اړوند ګراف وکاږئ.

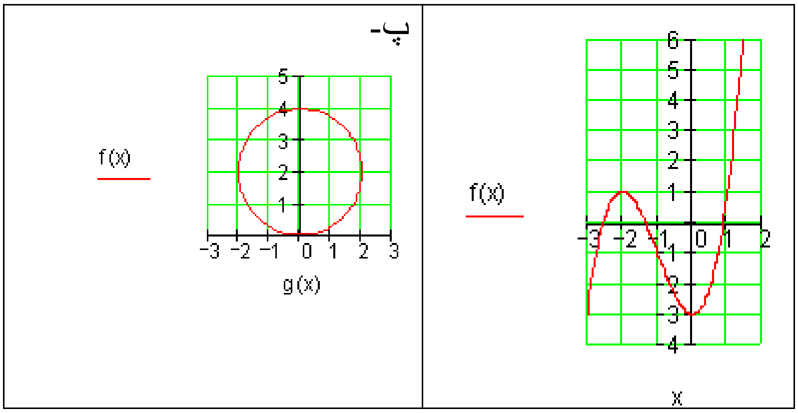
الف- $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ ب- $f(x) = x^2$

دویم: کوم ګراف په تابع $f : x \to f(x)$ پورې اړه لري؟ دلیل یې راوړئ.

| الف- | ب – |
| --- | --- |
| |  |

(c) ketabton.com: The Digital Library






دریم:د شمیرپوهنیز لنډ لیکدود سره يې فرمولبندي کړئ.

الف- په ځای3 کې تابع f(x) تابعارزښت 12 لري.

ب- د تابع f(x) له لارې د x -ارزښت سره عدد 4- تنظیمیږي.

پ-ټکی ( 5 | 2 ) P د f(x) په لیدخیره باندې پروت دی.

ت- f(x) د کومو ابسځیزا یا پراته ارزښتونو لپاره تابع ارزښت 4 لري.

ټ- د f(x) تابع تابع ارزښت له 7لوی دی د ټول $x \in \mathbb{R}$. لپاره.

ث- تابع f(x) د 17- ځای کې تا بع ارزښت 9 نیسي.

ج- توابع f او g د په ځای کې همغه ارزښت غوره کوي.

چ- په کوم ځای x کې fد تابعارزښت gد له تابعارزښت څخه کوچنی دی؟

ح- د تابع f(x) د تابع ارزښت برابر 5 دی د ټولو $x \in \mathbb{R}$. لپاره.

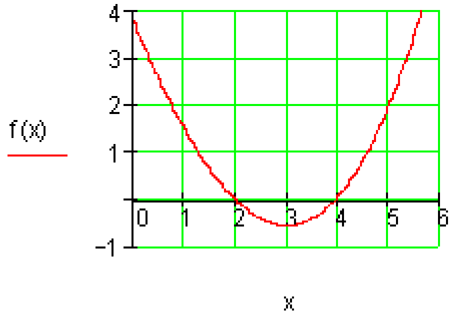
خ- د یوه کړې ټکي $K_f$ کواوردیناتونه سره سر خوري.

څلورم: د یوه نظم لپاره د یوې روځنۍ بیلګې نوم واخلئ، چې همغه تابع وي یا تابع نه وي.

پنځم: دا ترڅنګ کره یا منحني د تابع f(x) ګراف دی. له ګراف څخه ولولئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library






الف-د تابع ارزښت په ځای 5 کې

ب- یو ځای د f(x) سره.

پ-په کوم ورشو $f(x) > 0$ باور لري؟

شپږم:کوم ارزښت جدول یوه تابع پورې اړه لري؟

الف -

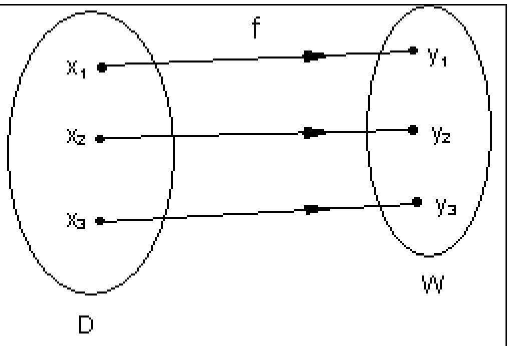
| x | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 4 | 0 | −2 | 4 | 4 |

ب -

| x | −1 | 0 | 3 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 8 | 7 | 2 | 4 | 5 |

# توابع او په ښت - یا معکوس توابع

تولیز:




د f د نظم قانون د تابع مساوات له لارې افاده کیږي، لکه د بیلګې په توګه

$$f = \{(x|y) \mid y = f(x) = 2x + 3\}_{D \times W}$$

یا په لنډه توګه: $y=f(x)=2x+3$

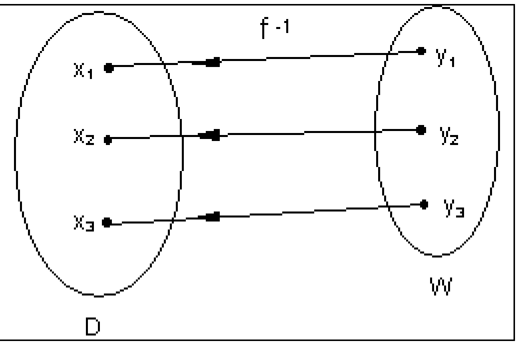
د یوه تابع د یو-یواځنوالي د $f^{-1}$ یو-یواځنی نظم هم شتون لري.

دا نظم معکوس تابع یا په ښت تابع یا انورز inverse تابع بلل کیږي، لکه د بیلګې په توګه.

$$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



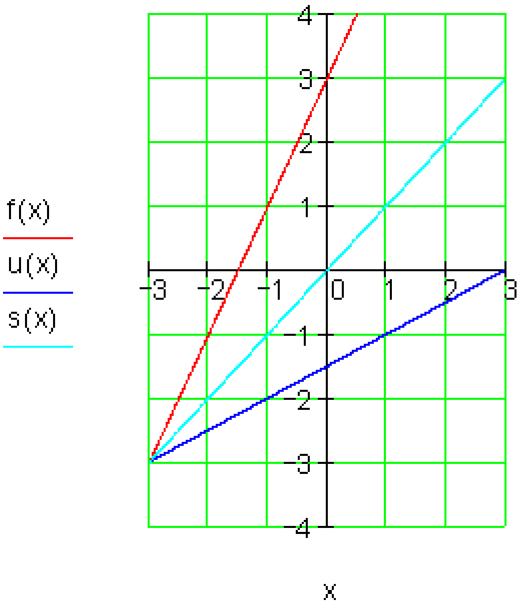
| | |
|---|---|
|   | |

## د کرښیز توابعو معکوس توابع

| | |
|---|---|
| تابع:<br>$y = f(x) = 2x + 3$<br>$x = f(y) \Leftrightarrow x = 2y + 3$<br>$\Leftrightarrow 2y + 3 = x \mid -3$<br>$\Leftrightarrow 2y = x - 3 \mid : 2$<br>$\Leftrightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$<br>معکوس تابع:<br>$y = f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$ | تابع $y = f(x) = 2x + 3$ ورکړ شوی<br>غوښتنه معکوس تابع $f^{-1}$ او د هغه گراف ده<br>تابع **f** جگوالی $m = 2$ لري. دا د خپل گراف سره پروت محور په ټکي $P_x(-1{,}5 \mid 0)$ کې غوڅوي او ولاړ محور یا اوردینات په ټکي<br>$P_y(0 \mid 3)$ کې غوڅوي. د هغه گراف کرښه ده.<br>که د تابع اووښتوني یا متحولي یو له بل سره بدلې شي او د $y$ پسې په ورته توگه بڼه بدلون منځ ته راشي، نو سړی معکوس تابع لاس ته راوړي. |

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| د معکوس تابع ګراف د تابع د ګراف هنداروනه(انعکاس) ده په $45^0$- محور باندې.<br><br>په تولیزه توګه باور لري:<br>$y = f(x) = a_1 x + a_0$ تابع<br><br>معکوس تابع<br><br>$y = f^{-1}(x) = \frac{1}{a_1}x + \frac{a_0}{a_1}$<br><br>د ساده والي له امله معکوس تابع u(x) بولو. |  |



# مربع توابع

## ځلورۍ- یا مربع توابعو ته ننوتنه یا پیل

ننوتنه یا پیل

هرڅوک چې موټر زده کوي، باید پوه وي، جې د بریک په وخت کې په پاخه سرک د بریک نیولو او د موټر دریدځای په منځ کې لار یا واټن څنګه سره یوځای کیدی شي یا جمعه کیدی شي..

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لاندي موټر قانون سره سم له چټکتيا( سرعت) v په km/h ( کيلومتر په ساعت ) د عکس العمل لار r د بريک لار b په متر شميرلکيدی شي.

پام ( خبراوسه) : د بيلګي په توګه د المان پخوانی او له څخه نوي قانون.

له څخه د تملار په وچ اسفالت شوي سرک د پل بريکلار سره شميرل کيږي.

د بريک لار $b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ د عکس $r = \frac{v}{10} \cdot 3$ العمل لار

يادونه: د څه وخت را په دې خوا په جرمني کې د بريکلار لپاره دا فرمول باور لري:.

$$\text{ן: } b = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2$$

د بريک همدا ډول د عکس العمل لار په متر (m) راوځي، که چټکتيا يا سرعت په کيلومتر په ساعت (km/h)وي.

الف – د دواړو حالتونو لپاره د s = f(v) تابع مساوات و تاکی ، د کوم لپاره چې په هره تللي چټکتيا يا سرعت تملار شميرل کيدی شي.

ب - د تابع مشاوات s = f(v) د دواړو حالتونو لپاره د وهل شوی سرعت v = 0, 10, 20, 30, ... 100 km/h سره د ه يوه د ودريد - يا توقف لار چې شميرل کيږي.

پ : په کواورديناتسيستم کې يا د وضعيه قيمتسيستم کې ګراف رسم کړی.

ت: ټوله لاس ته راوړې نتيجه تشريح کړی.

Problemlösung: د پرابلم حل:

الف: د تابع مساوات:

| | |
|---|---|
| $f(v) = \left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10} \cdot 3 = \frac{1}{100}v^2 + \frac{3}{10}v$ | زوړ قانون: |
| $\text{ן: } f(v) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2 + \frac{v}{10} \cdot 3 = \frac{1}{200}v^2 + \frac{3}{10}v$ | نوی قانون: |

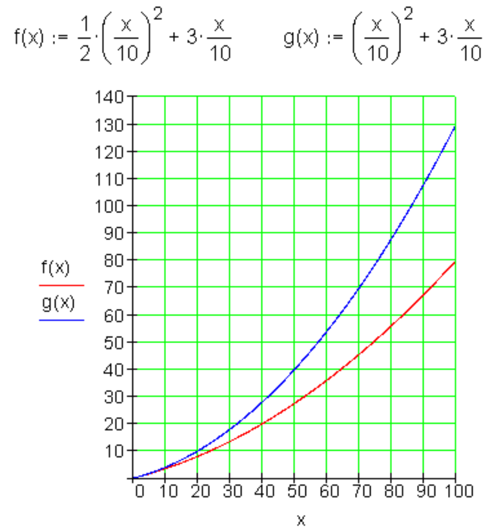
(c) ketabton.com: The Digital Library



ب - : ارزښتجدول( په کيلو متر په ساعت کي)

| v (in km/h) | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(v) (in m) | 0 | 4 | 10 | 18 | 28 | 40 | 54 | 70 | 88 | 108 | 130 | alt |
| f(v) (in m) | 0 | 3,5 | 8 | 13,5 | 20 | 27,5 | 36 | 45,5 | 56 | 67,5 | 80 | neu |

پ - گرافونه




د x محور هر ه وهل شوي لار په km/h په گوته کوي.

د y - محور د هر همغه د توقفلار په m په گوته کوي.

ت – کومنتار

د نوي نظم وروسته د د چټکتيا(سرعت) زياتيدني توپير تل زياتيږي. د 50 km/h چټکتيا سره نوی د تم کيدلو لار 27,5 m ده، دا د زړې لار40 m نږدې 69% ده. په 100 km/h دا نوي لار نوره فقط ده، دا د زړې 130 m لارپا نږدې 61% ده. د بريک نيولو لار کمېدنه د بريک ښه کيدو(ABS) سره موخه وره ده.

د تابع مساوات د ټيک پامورټيا او گراف له امله موږ کره کوو، چې دا نه کرښيز مساوات دی او نه يوه کرښه. انځوروي.

د تابع مساوات لاندې بڼه لري:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

داسې تابع مربع تابع بولو او يا هم د2 –مې درجې ټول(تام) راشنل توابع.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ګرافونه یې پارابول بلل کیږي.

## تمرینونه:

د لاندې پارابولونو ګرافونه وکاږئ.

د دې لپاره ارزښت جدول ولیکئ

اول - $f(x)=x^2+4x-5$ دویم $f(x)=x^2+2x+5$

دریم - $f(x)=-x^2+x+6$ څلورم - $f(x)=x^2-x$

پنځم - $f(x)=x^2-\frac{1}{9}$ شپږم - $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x+3$

اوم - $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$ اتم - $f(x)=-2x^2+8x-11$

نهم م- $f(x)=3x^2-3x$ لسم - $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{11}{2}x+10$

# نورمال پارابل، بڼه ځل یا - ضریب او راکښنې

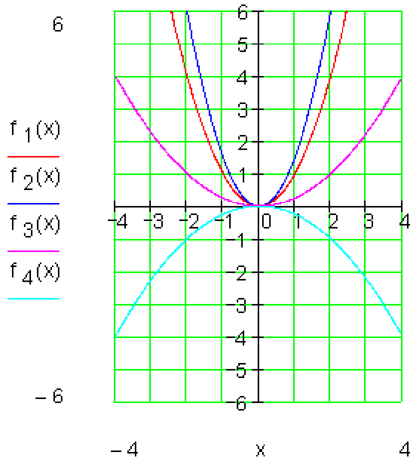
د کار قرارداد:

د a2 د مختلفو ارزښتونو لپاره تابع $f(x)=a_2x^2$ وخیرئ او ګراف په وضعیه قیمت سیستم کې وکاږئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$f_1(x) = x^2 \quad f_2(x) = \frac{3}{2}x^2 \quad f_3(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$

| | |
|---|---|
|  | د انځور شوي پارابل تابع مساوات یو له بل د $x^2$ ضریب $a_2$ له امله توپیروي.<br>$f_1(x) = x^2$<br>$f_2(x) = \frac{3}{2}x^2$<br>$f_3(x) = \frac{1}{4}x^2$<br>$f_4(x) = -\frac{1}{4}x^2$<br>دا ضریب $a_2$ د پارابل د بنې لپاره مسول او له دې امله د بنې ضریب بلل کیږي.<br><br>د تقاطع ټکی S وضعیه قیمتونه S ( 0 \| 0 ) لري. |

بڼه ضریب د پارابل قوارې یا شکل ته څنګه تغیر ورکوي؟

| ضریب بنې | | د پارابول په نخښنه ونه |
|---|---|---|
| $a = 1$ | → | نورمال پارابو ل<br>غزېدلی پارابول<br>کیکاږلی پارابول<br>په x محور هنداره شوی نورمال پارابول<br>غزېدلی پارابول، په x -محور هنداره<br>شوی کیکاږلی پاربول، په x –محور<br>هنداره شوی |
| $a > 1$ | → | |
| $0 < a < 1$ | → | |
| $a = -1$ | → | |
| $a < -1$ | → | |
| $-1 < a < 0$ | → | |

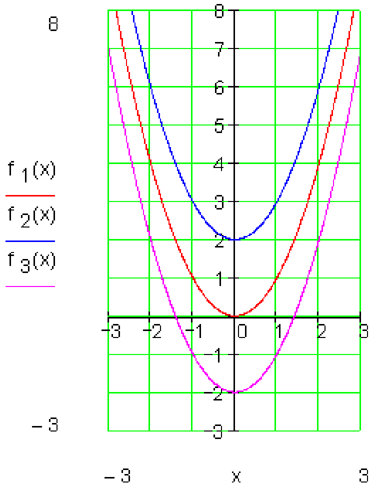
(c) ketabton.com: The Digital Library



د کار  قرارداد:

د $a_0$ د مختلفو ارزښتونو لپاره د $f(x) = x^2 + a_n$ تابع  مطالع کړی او په وضعیه قیمتسیستم کې یې ګراف  رسم کړی: $f_1(x) = x^2$   $f_2(x) = x^2 + 2$   $f_3(x) = x^2 - 2$

<table>
<tr>
<td>




</td>
<td>

دا یو راکښلی نورمال پارابل دی، چې ککړئ ټکی( د ر آس نقطه) S د$a_0$ په واحدونو راکښل شوی ده.

$f_1(x) = x^2$

$f_2(x) = x^2 + 2$

$f_3(x) = x^2 - 2$

راکښنه دy  محور  په اوږدوالي باندې صورت نیسي ، چېرته چې  د راکښنې لور د د$a_0$  مخنخښې له لارې  ټاکل کیدی شي.

د تقاطع ټکی S کواوردینات $S(0 \mid a_0)$ لري.

$f_1(x) = x^2$

$f_2(x) = x^2 + 2$

$f_3(x) = x^2 - 2$

</td>
</tr>
</table>

د کار  ورکوني  قرارداد:

د$f(x) = (x+u)^2$ تابع  د  u  د مختلفو ارزښتونو لپاره  راکښنه وڅیړی او ګراف یې په وضعیه قیمتسیستم کې  x  رسم کړی

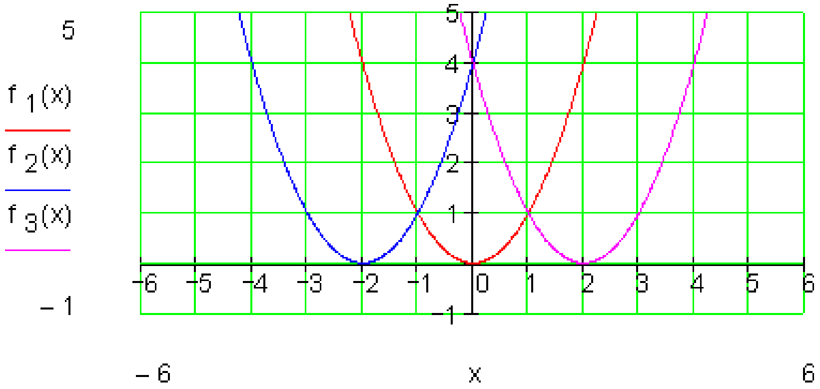
$f_1(x) = x^2$   $f_2(x) = (x+2)^2$   $f_3(x) = (x-2)^2$

د ارزښت جدول:

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | x | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | $f_2$ | x | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | $f_3$ | x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | y | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | | y | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | | y | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 |




د ا یو راکښلی (چې ځای ته یې تغیر ورکړ شوی وي) نورمال پارابول دی، چې ککرۍ ټکی(د رأس نقطه) S یې د u په واحدونو(یوونونو) دx په محور راکښل یا کښول شوې ده. دS غوڅټکی(نقطه تقاطع) یې کواوردینات ( -u | 0 )S لري.

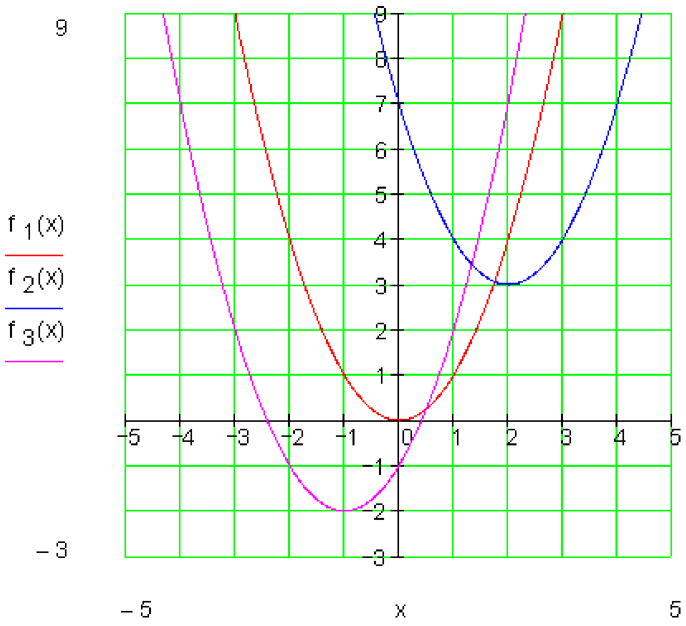
| | |
|---|---|
| کیڼې لور ته ښرخون یا ښرخول، ککرۍ ټکیS په u واحدونو یا یوونوو د پیل یا سرچینې کیڼ لورت پروت دی. | u>0 => |
| ښی ښرخون یا ښرخول، ککرټکی S په u واحدونو د پیل یا سرچینې ښیۍ لورته پروت دی. | u<0 => |

د کار (ورکوني) قرارداد: د u او a0 دمختلفو ارزښتونو لپاره تابع + f(x) = (x+u)² a0 وڅیړی او ګراف یې په یوه کواوردینات(پروت ولاړ) سیستم کې انځور کړی.

$f_1(x) = x^2 \qquad f_2(x) = (x-2)^2 + 3 \qquad f_3(x) = (x+1)^2 - 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library






د $f_2$ (x) ګراف بيرته يو نورمال پارابول دی، چې ککرئ ټکی S يې په دوه واحده ښی لور ته او په درې واحده پورته لور ته راکښلی دی.

د $f_3$ (x) ګراف هم يو نورمال پارابول دی، چې ککرټکی S (د رأسټکی) په يوه واحد(يوون) کيڼ او په درې واحده لاندې لور ته کښول شوی دی.

د $f(x) = (x+u)^2 + a_0$ ډول تابع د مربع تابع د ککرئ ټکي(رأس ټکي) بڼې تابع بلل کيږي.

د تابع ګراف نورمال پاربول دی، چې په u ارزښت دx محور په لور او په $a_0$ د yمحور په لور راکښل شوی دی.

که ککرټکی د $S(x_s|y_s)$ سره په نخښه کړو، نو د ککرټکي بڼې مربع تابع په دې ډول ده:

$$f(x) = (x-x_s)^2 + y_s$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| لنډه بڼه: | $S(x_s \mid y_s) \Leftrightarrow f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$ |
| بیلګه: | $S(3 \mid -1) \Leftrightarrow f(x) = (x-3)^2 - 1$ |

تر اوسه مو فقط نورمال پارابول راکښلي (را کش شوی) وو.

همدا یا برابره راکښنه کیدی شي د یوه په خوښه پارابول سره سرته ورسول شي.

دلته دې بیا فاکتور $a_2$ په پام کې ونیول شي.

په ټولیزه توګه باور لري:

$Ist\ f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ د یوه نورمال پارابول تابع (بلوان) دی، چې ککرتکی (د رأس ټکی) $S(x_s \mid y_s)$ لری، نو $f(x) = a_2(x - x_s)^2 + y_s$ د ککرتکي د تابع مساوات دي.

## د خلوری تکمیلوني له لارې د رآس ټکي( ککری ټکي) ټاکل

موږ پوهیږو چې صدق کوي:

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \Leftrightarrow a_2(x - x_s)^2 + y_s \Rightarrow S(x_s \mid y_s)$$

په ککرتکي کې د تولیز تابع مساواتو د ترم تابع له لارې کیدی شي د یوه پارابول ککرتکی ( د ککری ټکی) وشمیرل شي.

بیلګه:

$F(x) = 3x^2 - 12x + 15$ دي په ککرئ ټکي مساوات واړول شي.

لوړمی پل(قدم) : د $x^2$ تر مخه ضریب دې له نوکانو راوه وېستل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library





$$\Rightarrow f(x) = 3[x^2-4x+5]$$

دويم پل : مربع تکميلونه [ ] او بڼه بدلون

$$\Rightarrow f(x) = 3.[x^2 - 4x +(2)^2 -(2)^2 +5] = 3.[(x-2)^2+1]=3.(x-2)^2 +3$$
$$\Rightarrow S(2;3)$$

بيلګه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = \frac{1}{2}\left[x^2 - 6x + 8\right] = \frac{1}{2}\left[x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 8\right]$$
$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left[(x-3)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow S\left(3 \mid -\frac{1}{2}\right)$$

بيلګه:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right] = -\frac{1}{3}\left[x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{4}\right]$$
$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{36}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{27}{16}\right] = -\frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow S\left(-\frac{3}{4} \mid -\frac{9}{16}\right)$$

تمرينونه: د مربع تکميلونې له لارې د رآس ټکي( ککرۍ ټکي) ټاکل

(c) ketabton.com: The Digital Library



د يوه پارابل تابع مساوات ورکړشوي دي( د دويمې درجې ټول راشنل تابع). د لاندې بارابولونو لپاره رآسته‌کو بڼه او رآسته‌کي پيدا کړی.

ګرافونه يې وکاږی:

لومړی: $f(x) = x^2 + 2x + 5$ دويم: $f(x) = x^2 + 4x + 1$

دريم: $f(x) = x^2 - 4x + 1$ څلورم: $f(x) = x^2 - 3x + 3{,}5$

پنځم: $f(x) = x^2 + x - 3$ شپږم: $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

اووم: $f(x) = -x^2 + 5x - 5$ اتم: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 2$

نهم: $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}$ لسم: $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

بيلګه 1 :

د ټول راشنل تابع ګراف چې رسم کړای شو،په زياتو حالتونو کې اړيند دی، چې ارزښتجدول وپيژنو. د دې لپاره جبشميري له لارې کيدی شي. خو دا هم تل اړيين دی.

يو ه ساده بيلګه بې له جبشميري څخه.

تابع مساوات : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

موږ د متحولې $x = 0$ څخه پيل کوو

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$x = 0 : f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$$
$$x = 1 : f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$
$$x = 2 : f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$
$$x = 3 : f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$$
$$x = 4 : f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$$
$$x = 5 : f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8$$
$$x = 6 : f(6) = 6^2 - 4 \cdot 6 + 3 = 36 - 24 + 3 = 15$$

تر هغې چې د تابع ارزښت له $\pm 10$ لوی شي، کېدی شي چې پع کړي.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي $x$ ارزښتونو لپاره ټاکل کیږي.

$$x = -1 : f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8$$
$$x = -2 : f(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 3 = 4 + 8 + 3 = 15$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې کښل کیږي.

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 15 | 8 | 3 | 0 | $-1$ | 0 | 3 | 8 | 15 |

اوس له دې ارزښتونو سره کېدی شي د $f(x)$ ګراف رسم شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسې شمیرل کېدی شي

د بیلګې په توګه $x = \pm ½$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$x=-\frac{1}{2}: f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3=\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}+2+3=5\frac{1}{4}=5,25$$

$$x=\frac{1}{2}: f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-4\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{4}-2+3=1\frac{1}{4}=1,25$$

هر څوک له جبشميري سره بنه بلد نه دی. په دې حالت کې کړی شي دا کسان له شميروني يا کمپيوتر څخه کار واخلي.

په لاندې کې HN د اصلي ګډ مخرج ( ماتلاندې ) په معنا دی.

يوه غوره بيلګه، چې ځنې برخې يې د جبشميري په مرسته حل شوي دي

د تابع مساوات $f(x)=\frac{4}{5}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{7}{2}$

يادونه: په لاندې زيات ځايونه HN راغلي، دا د اصلی مخرج په مانا دي.

موږ د $x=0$ سره پيل کوو

$$x=0: f(0)=\frac{4}{5}\cdot 0^2-\frac{3}{4}\cdot 0-\frac{7}{2}=0-0-\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}=-3,5$$

$$x=1: f(1)=\frac{4}{5}\cdot 1^2-\frac{3}{4}\cdot 1-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}-\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}-\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{69}{20}=-3,45$$

$$x=2: f(2)=\frac{4}{5}\cdot 2^2-\frac{3}{4}\cdot 2-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}-\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}-\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=-\frac{18}{10}=-\frac{9}{5}$$

$$=-1,8$$

$$x=3: f(3)=\frac{4}{5}\cdot 3^2-\frac{3}{4}\cdot 3-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}-\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}-\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{29}{20}=1,45$$

$$x=4: f(4)=\frac{4}{5}\cdot 4^2-\frac{3}{4}\cdot 4-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}-3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}-\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{63}{10}=6,3$$

$$x=5: f(5)=\frac{4}{5}\cdot 5^2-\frac{3}{4}\cdot 5-\frac{7}{2}=20-\frac{15}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=4}{=}\frac{80}{4}-\frac{15}{4}-\frac{14}{4}=\frac{51}{4}=12,75$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکو.

$$x=-1:\ f(-1)=\frac{4}{5}\cdot(-1)^2-\frac{3}{4}\cdot(-1)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}+\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{39}{20}=-1{,}95$$

$$x=-2:\ f(-2)=\frac{4}{5}\cdot(-2)^2-\frac{3}{4}\cdot(-2)-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}+\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1{,}2$$

$$x=-3:\ f(-3)=\frac{4}{5}\cdot(-3)^2-\frac{3}{4}\cdot(-3)-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}+\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{119}{20}=5{,}95$$

$$x=-4:\ f(-4)=\frac{4}{5}\cdot(-4)^2-\frac{3}{4}\cdot(-4)-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}+3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}+\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{123}{10}=12{,}3$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې لیکل کیږي.

| x | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 12,3 | 5,95 | 1,2 | -1,95 | -3,5 | -3,45 | -1,8 | 1,45 | 6,3 | 12,75 |

د دې ارزښتونو سره اوس د ګراف کښل کیدی شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بیا پسي شمیرل کیدی شي

د بیلګې په توګه $x = \pm\ 5/2$

$$x=-\frac{5}{2}:\ f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}+\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=\frac{27}{8}=3{,}375$$

$$x=\frac{5}{2}:\ f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}-\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=-\frac{3}{8}=-0{,}375$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



یادونه: په پورته کې  HN( Hauptnenner)  داصلي مخرج(ماتلاندې) یا مخرج مشترک په معنا دی.

د دې لپاره چې د یوه ټول ریښتوني یا تام راشنل تابع ګراف انځور کړای شو، په زیاتو حالتونو کې اړیین دی، چې ارزښت جدول وکاږو. د دې لپاره یو جبشمیروني ته اړتیا لرو.

یو ه ساده بیلګه بې له جبشمیري څخه.

تابع مساوات : $f(x) = x^2 - 4x + 3$

موږ د تحولې $x = 0$ څخه پیل کوو

$$x = 0: f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$$
$$x = 1: f(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$
$$x = 2: f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$
$$x = 3: f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$$
$$x = 4: f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$$
$$x = 5: f(5) = 5^2 - 4 \cdot 5 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8$$
$$x = 6: f(6) = 6^2 - 4 \cdot 6 + 3 = 36 - 24 + 3 = 15$$

تر هغې چې د تابع ارزښت له $\pm 10$ لوی شي، کېدی شي چې پع کړي.

اوس د تابع ارزښتونه د منفي x ارزښتونو لپاره ټاکل کیږي.

$$x = -1: f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8$$
$$x = -2: f(-2) = (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 3 = 4 + 8 + 3 = 15$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې کښل کیږي.

| x | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 15 | 8 | 3 | 0 | −1 | 0 | 3 | 8 | 15 |

اوس له دې ارزښتونو سره کېدی شي د f(x) ګراف رسم شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه شته نه وي ، دا بيا پسې شمېرل کيدی شي

د بېلګې په توګه $x = \pm ½$

$$x = -\frac{1}{2} : f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} + 2 + 3 = 5\frac{1}{4} = 5,25$$

$$x = \frac{1}{2} : f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 4\cdot\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 2 + 3 = 1\frac{1}{4} = 1,25$$

هر څوک له جبشمېري سره ښه بلد نه دی. په دې حالت کې کړی شي دا کسان له شمېروني يا کمپيوتر څخه کار واخلي.

يوه غوره بېلګه، چې ځنې برخې يې د جبشميري په مرسته حل شوي دي:

د تابع مساوات $f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{2}$

موږ د $x = 0$ سره بيل کوو

$$x = 0 : f(0) = \frac{4}{5}\cdot 0^2 - \frac{3}{4}\cdot 0 - \frac{7}{2} = 0 - 0 - \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} = -3,5$$

$$x = 1 : f(1) = \frac{4}{5}\cdot 1^2 - \frac{3}{4}\cdot 1 - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} - \frac{7}{2} \underset{HN=20}{=} \frac{16}{20} - \frac{15}{20} - \frac{70}{20} = -\frac{69}{20} = -3,45$$

$$x = 2 : f(2) = \frac{4}{5}\cdot 2^2 - \frac{3}{4}\cdot 2 - \frac{7}{2} = \frac{16}{5} - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \underset{HN=10}{=} \frac{32}{10} - \frac{15}{10} - \frac{35}{10} = -\frac{18}{10} = -\frac{9}{5} = -1,8$$

$$x = 3 : f(3) = \frac{4}{5}\cdot 3^2 - \frac{3}{4}\cdot 3 - \frac{7}{2} = \frac{36}{5} - \frac{9}{4} - \frac{7}{2} \underset{HN=20}{=} \frac{144}{20} - \frac{45}{20} - \frac{70}{20} = \frac{29}{20} = 1,45$$

$$x = 4 : f(4) = \frac{4}{5}\cdot 4^2 - \frac{3}{4}\cdot 4 - \frac{7}{2} = \frac{64}{5} - 3 - \frac{7}{2} \underset{HN=10}{=} \frac{128}{10} - \frac{30}{10} - \frac{35}{10} = \frac{63}{10} = 6,3$$

$$x = 5 : f(5) = \frac{4}{5}\cdot 5^2 - \frac{3}{4}\cdot 5 - \frac{7}{2} = 20 - \frac{15}{4} - \frac{7}{2} \underset{HN=4}{=} \frac{80}{4} - \frac{15}{4} - \frac{14}{4} = \frac{51}{4} = 12,75$$

اوس د تابع ارزښتونه د منفي $x$ ارزښتونو لپاره ټاکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$x=-1:\ f(-1)=\frac{4}{5}\cdot(-1)^2-\frac{3}{4}\cdot(-1)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{16}{20}+\frac{15}{20}-\frac{70}{20}=-\frac{39}{20}=-1{,}95$$

$$x=-2:\ f(-2)=\frac{4}{5}\cdot(-2)^2-\frac{3}{4}\cdot(-2)-\frac{7}{2}=\frac{16}{5}+\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{32}{10}+\frac{15}{10}-\frac{35}{10}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=1{,}2$$

$$x=-3:\ f(-3)=\frac{4}{5}\cdot(-3)^2-\frac{3}{4}\cdot(-3)-\frac{7}{2}=\frac{36}{5}+\frac{9}{4}-\frac{7}{2}\underset{HN=20}{=}\frac{144}{20}+\frac{45}{20}-\frac{70}{20}=\frac{119}{20}=5{,}95$$

$$x=-4:\ f(-4)=\frac{4}{5}\cdot(-4)^2-\frac{3}{4}\cdot(-4)-\frac{7}{2}=\frac{64}{5}+3-\frac{7}{2}\underset{HN=10}{=}\frac{128}{10}+\frac{30}{10}-\frac{35}{10}=\frac{123}{10}=12{,}3$$

اوس ټول ارزښتونه په یوه جدول کې  لیکل کیږي.

| x | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f (x) | 12,3 | 5,95 | 1,2 | -1,95 | -3,5 | -3,45 | -1,8 | 1,45 | 6,3 | 12,75 |

د دي ارزښتونو سره اوس د  ګراف کښل کیدی شي.

که د رسمولو په وخت کې نور منځ ارزښتونه  شته نه وي ،  دا بیا پسي شمیرل کیدی شي

د بیلګې په توګه   $x=\pm 5/2$

$$x=-\frac{5}{2}:\ f\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5+\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}+\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=\frac{27}{8}=3{,}375$$

$$x=\frac{5}{2}:\ f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}=\frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4}-\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2}-\frac{7}{2}$$
$$=\frac{25}{5}-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}=5-\frac{15}{8}-\frac{7}{2}\underset{HN=8}{=}\frac{40}{8}-\frac{15}{8}-\frac{28}{8}=-\frac{3}{8}=-0{,}375$$

## پوښتني

(c) ketabton.com: The Digital Library



# بنسټونه مربع توابع II

لومړی - د لاندې پارابولونو د تابع مساوات ورکړی:

الف- $f(x) = x^2 - 4x + 2$ ب - $f(x) = x^2 + 4x + 2$

پ - $f(x) = -x^2 - 4x + 3$ ت- $f(x) = -x^2 + 8x - 9$

ټ- $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 5$ ث - $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

ج - $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 2$ چ - $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x + 6$

ح- $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 7$ خ - $f(x) = \frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{7}{2}$

(۱) د ککرئ ټکي بڼه او ککرئ ټکي وټاکی.

(۲) د محورونو غوڅټکي وشمیری.

(۳) پل په پل تشریح کړی، چی f(x) د نورمال پارابول حخه څنګه منځ ته راځي او دا څنګه واز دی.

(۴) په یوه مناسب پروتولاړسیستم کې د f(x) ګراف وکاږی

دویم – سړی کړی شي د نورمال پارابول څخه هر په خوښه پارابول د د غوڅټکي د راکښني له لارې او د پرسېدني یا غزوني له لارې منځ ته اوړي. که دا کښته لور ته واز وي، نو دا د x محور باندې هنداره کیږي یا منعکس کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د یوه پارابول په هکله لاندې ټکي پیژنو:

| | د y په لور راکښنه یا ځای بدلون | د x په لور راکښنه یا ځای بدلون | Formfaktor بڼه ضریب |
|---|---|---|---|
| a) | په 2 واحدونو کښنه لور ته | په 2 واحدونو ښي لورته | $a_2 = 1$ |
| b) | په 4 واحدونو پورته لور ته | په 3 واحدونو کیڼ لورته | $a_2 = -1$ |
| c) | په 4 واحدونو کښته لور ته | په 2 واحدونو کیڼ لورته | $a_2 = \frac{1}{2}$ |
| d) | په 5 واحدونو پورته لور ته | په 1 واحد ښي لورته | $a_2 = -2$ |
| e) | په 3 واحدونو پورته لور ته | په 4 واحدونو کیڼ لورته | $a_2 = -\frac{1}{4}$ |
| f) | په 6 واحدونو کښنه لور ته | په 2,5 واحدونو ښي لورته | $a_2 = \frac{3}{2}$ |
| g) | په 3 واحدونو پورته لور ته | په 3 واحدونو کیڼ لورته | $a_2 = -\frac{3}{4}$ |
| h) | په 4,5 واحدونو کښنه لور ته | په 3,5 واحدونو ښي لورته | $a_2 = 2$ |
| i) | په 3 واحدونو یا یوونونو کښنه لور ته | په 2 واحدونو ښي لورته | $a_2 = \frac{1}{3}$ |
| j) | په3 واحدونو پورته لور ته | | $a_2 = -\frac{2}{3}$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library



په 4 واحدونو بنې لورته

(۱) د ککرئ ټکي بنه او ککرئ ټکي وټاکئ.

(۲) د محورونو غوځټکي وشميرئ.

(۳) د تابع مساوات په پولينوم بڼه $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ ? څنګه دي؟

(۴) په يو مناسب کواوردينات سيسم کې د f(x) ګراف وکاږئ.

## پوښتنې

د مربع توابعو بنسټونه IV

لومړئ:

تابع f(x) ورکړ شوی دی. د شميرنې له لارې وښايئ، چې ګراف تابع په x محور کې لمسوي. ګراف وکاږئ.

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8} \quad x \in \mathbb{R}$$

دويم: د تابع مساوات f(x) د محور غوځټکي وشميرئ، او ککرئ ټکي. ګراف يې رسم کړئ.

الف- $f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x$ ب - $f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$ پ- $f(x) = x^2 + 4x + 1$

ت - $f(x) = -0,25(4x^2 + 12x + 9)$ ټ _ $f(x) = 3x(1-x)$ ث- $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{5}{3}$

دريم: د U = 18 cm محيط سره کوم مستطيل(ولاړکوډيز) خورا لويه سطحه لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځلورم: د توابعو f(x) او g(x) ګرافونه چیرته د x محور غوڅوي؟ ککرۍ چیرته پرتې دي؟ د دواړو ګرافونو ترمنځ کومې اړیکې پرتې دي؟ د ارزښت جدول په مرسته پوښتنې ځواب کړئ.

الف –

| x | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | −3,5 | 0,5 | 2,5 | 2,5 | 0,5 | −3,5 |
| g(x) | 4 | 0 | −2 | −2 | 0 | 4 |

ب –

| x | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | −12 | −5 | 0 | 3 | 4 | 3 |
| g(x) | 3,5 | 0 | −2,5 | −4 | −4,5 | −4 |

پنځم: د اړونده ګراف کوم خویونه د تابع مساوات څخه سیده لوستل کیدی شي؟

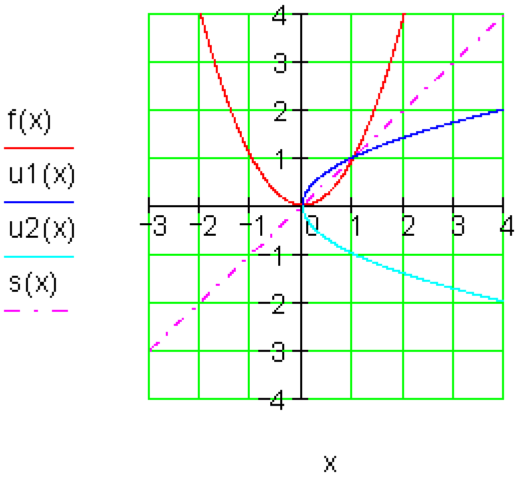
$$f(x) = -x^2 - x + 6; \quad g(x) = (2-x)(x+3); \quad h(x) = -(x+0,5)^2 + \frac{25}{4}$$

## د مربع-یا څلورئ توابعو معکوس تابع

تلنلار (که غواړې: طریقه یا قانون) همداسې ده لکه پورته په کرښیزو توابعو کې چې وښوول شوه.

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| $y=(f(x)=x^2$<br>د متحولو x او y بدلول<br>$x=f(y)=y^2 \Leftrightarrow y^2=x$<br>رېښه نيونه:<br>له دې لاس ته راځي او برعکس<br>$\Leftrightarrow \|y\| = \sqrt{x} \Leftrightarrow y = \sqrt{x}$<br>يا $y = -\sqrt{x}$<br>نو دوه معکوس توابع شتون لري:<br>$y = u_1(x) = \sqrt{x}$<br>او<br>$y = u_2(x) = -\sqrt{x}$<br>د معکوس تابع جوړولو سره تعريفورشو محدوده شوه، د دې لپاره چې يواځنی نظم منځ ته راشي | <br> |

(c) ketabton.com: The Digital Library



# کربنیزبرابرونسیستم د ۲ برابرونونو او ۲ متحولو سره.

داسي سيستم له دوه مساوتو څخه جوړ دی. غوښتونی د دوارو مساواتو ګډ حل دی. مختلفي تلنلارې شته، چې سرې حل ته ورسيږي

په لاندي einsetzen in = په ... کي اينوول.

د جمعي تلنلار:

| | |
|---|---|
| مساواتسيستم:<br>(I) $5x - 2y = 1$<br>(II) $3x + 3y = 9$ | د حل پل(قدم) غوښي(قطاع، که قطعه؟) د جمعي تلنلار ته لومړی امکان يا واريانت |
| (I) $5x - 2y = 1 \mid \cdot 1{,}5$<br>(II) $3x + 3y = 9$<br>(I) $7{,}5x - 3y = 1{,}5$<br>(II) $3x + 3y = 9$ | لومړی: مساوات ورته داسي بڼه بدل کړئ، چي ضريبونه (ترمخ عددونه) د yمتحولي تر مخنخښي پورې سره سروخوري. |
| (I) $7{,}5x - 3y = 1{,}5$<br>(II) $3x + 3y = 9$ } +<br>$10{,}5x = 10{,}5 \mid : 10{,}5$<br>$\Leftrightarrow \quad x = 1$ | دويم: منځ ته راغلي مساوات سره جمعه کړي او د **x** - متحولي پسي يي حل کړئ |
| په $3x + 3y = 9$ کي اينوونه: $x = 1$ | دريم: د **x** لپاره ميندل شوي ارزښتونه د دوارو څخه په يوه مساوات کي کيږدئ او **y** پسي يي حل کړې. |

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| $3\cdot 1+3y=9$<br>$\Leftrightarrow 3+3y=9 \mid -3$<br>$\Leftrightarrow \quad 3y=6 \mid :3$<br>$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y=2}}$ | |
| $\underline{\underline{L=\{(1\mid 2)\}}}$ | ځلورم: حلست یا حلډیرئ ولیکئ |

پنځم:

ازماېښت د اينووني له لارې

$$(I)\quad 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$$

$$(II)\quad 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$$

مساواتسيستم

$$(I)\quad 5x-2y=1$$
$$(II)\quad 3x+3y=9$$

د حل پلونه قدمونه د جمعي تلنلار لپاره

دويم واريانت

لومړی: مساوات داسي ورته بنهبدل کړئ، چې د **x** ضريبونه( ترمخعددونه) تر مخنخښي پورې سره يوغږيز شي.

$$(I)\quad 5x-2y=1 \mid \cdot 3$$
$$(II)\quad 3x+3y=9 \mid \cdot(-5)$$

$$(I)\quad 15x-6y=3$$
$$(II)\quad -15x-15y=-45$$

دويم: منځ ته راغلی مساوات سره جمعه کړئ او متحولې **y** پسې يې حل کړئ.

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & 15x-6y=3\\ (II) & -15x-15y=-45\end{array}\right\}+$$

$$-21y=-42 \mid :(-21)$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y=2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دريم: بني لورته الماني د اینووني په مانا ده

$y = 2$ eingesetzt in (II): $3x + 3y = 9$

$$3x + 3 \cdot 2 = 9$$
$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \mid -6$$
$$\Leftrightarrow 3x = 3 \mid : 3$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

د x لپاره میندل شوي ارزښتونه له دې دوه پهیوه مساوت کې کیږدئ او د متحولې x پسې یې حال کړئ.

څلروم: حلستې یا د حلډېرئ ولیکئ

$$L = \{(1 \mid 2)\}$$

پنځم: د اینوونې له لارې ازماېښت

$$(I) \quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$(II) \quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

د برابراینووني تلنلار

مساواتسیستم

$$(I) \quad 5x - 2y = 1$$
$$(II) \quad 3x + 3y = 9$$

د حل پل د برابراینووني تلنلار ته

واریانت 1

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$
\begin{array}{lll}
(I) & 5x - 2y = 1 & | +2y \\
(II) & 3x + 3y = 9 & | -3y \\
\hline
(I) & 5x = 1 + 2y & |: 5 \\
(II) & 3x = 9 - 3y & |: 3 \\
\hline
(I) & x = \frac{1+2y}{5} & \\
(II) & x = \frac{9-3y}{3} & \\
\hline
(I) & x = \frac{1+2y}{5} & \\
(II) & x = 3 - y &
\end{array}
$$

لومړی: دواړه مساوات د اووښتوني یا متحولې **x** پسې حل کيږي.

$$
\begin{array}{lll}
& \frac{1+2y}{5} = 3 - y & | \cdot 5 \\
\Leftrightarrow & 1 + 2y = 15 - 5y & | +5y \\
\Leftrightarrow & 1 + 7y = 15 & | -1 \\
\Leftrightarrow & 7y = 14 & |: 7 \\
\Leftrightarrow & y = 2 &
\end{array}
$$

دویم: د مساوات بنې ا ړخونه برابر اینوول کيږي او د متحولې **y** پسې حل کيږي.

دریم: (د کین لور الماني په پښتو: اینسول په ..کې)

$$y = 2 \text{ eingesetzt in } (II): \; 3x + 3y = 9$$

$$
\begin{array}{ll}
& 3x + 3 \cdot 2 = 9 \\
\Leftrightarrow & 3x + 6 = 9 \;| -6 \\
\Leftrightarrow & 3x = 3 \;|: 3 \\
\Leftrightarrow & x = 1
\end{array}
$$

د **y** میندل شوی ارزښت د دواړو څخه په یوه وتونمساوات کې اینسوول کيږي، او دا بیا د متحولې **x** پسې حل کيږي.

$$L = \{(1 | 2)\}$$

څلورم: حلست یا ـدېرئ ولیکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library



پنځم: د ځا په ځای کولو یا ایښوولو له لارې ازماېښت

$$(I)\quad 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$$

$$(II)\quad 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$$

مساواتسیستم

د حل پل د برابرایښوولو له لارې

واریانت 2

$$(I)\quad 5x-2y=1$$

$$(II)\quad 3x+3y=9$$

لومړی: دواړه مساوت د اووښتونې یا متحولې **y** پسې حل کیږي.

$$\begin{array}{ll}
(I) & 5x-2y=1 \mid -5x \\
(II) & 3x+3y=9 \mid -3x \\
\hline
(I) & -2y=1-5x \mid :(-2) \\
(II) & 3y=9-3x \mid :3 \\
\hline
(I) & y=\dfrac{1-5x}{-2} \\
(II) & y=\dfrac{9-3x}{3} \\
\hline
(I) & y=\dfrac{5x-1}{2} \\
(II) & y=3-x
\end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دويم: د دواړو مساواتو ښئ خوا برابره ليکل يا اينسوول کيږي او د متحولې **x** پسې حل کيږي.

$$\frac{5x-1}{2} = 3-x \mid \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow 5x-1 = 6-2x \mid +2x$$
$$\Leftrightarrow 7x-1 = 6 \mid +1$$
$$\Leftrightarrow 7x = 7 \mid :7$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

درى(ښئ الماني: اينسوول په ...کې)

د **x** ميندل شوى ارزښت د دداړو وتونمساواتو څخه په يوه کې اينسوول کيږي، دا بيا د متحولې **y** پسې حل کيږي.

x = 1 eingesetzt in (II): $3x+3y=9$

$$3\cdot 1+3y=9$$
$$\Leftrightarrow 3+3y=9 \mid -3$$
$$\Leftrightarrow 3y=6 \mid :3$$
$$\Leftrightarrow y=2$$

څلورم: د حلسټ وليکئ

$$L=\{(1\mid 2)\}$$

پنځم د اينسووني له لارې ازمايښت

$$\text{(I)}\quad 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$$
$$\text{(II)}\quad 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$$

د اينسووني تلنلار: د اينسووني تلنلار لپاره د حل پلونه(قدمونه)

وارينت 1

مساواتسيستم

(I) $5x-2y=1$

(II) $3x+3y=9$

(c) ketabton.com: The Digital Library



لومړی: مساوات(I) د x پسې حل کيږي.

$$(I)\ 5x - 2y = 1 \mid +2y$$
$$\Leftrightarrow 5x = 2y + 1 \mid : 5$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2}{5}y + \frac{1}{5}$$

$$x = \frac{2}{5}y + \frac{1}{5} \text{ eingesetzt in } (II):\ 3x + 3y = 9$$

دويم: د بنې اړخ ميندل شوی ترم په مساوات (II) کې اېښوول کيږي او د y پسې حل کيږي.

$$3\left(\frac{2}{5}y + \frac{1}{5}\right) + 3y = 9$$
$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}y + \frac{3}{5} + 3y = 9 \mid -\frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}y + 3y = 9 - \frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow \frac{21}{5}y = \frac{42}{5} \mid \cdot 5$$
$$\Leftrightarrow 21y = 42 \mid : 21$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$$

درېيم: د y لپاره ميندل شوی ارزښت په يو د دې دوه وتونمساواتو کې اېښوول کيږي، دا بياپه x پسې حل کيږي.

$$y = 2 \text{ eingesetzt in } (II):\ 3x + 3y = 9$$
$$3x + 3 \cdot 2 = 9$$
$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 9 \mid -6$$
$$\Leftrightarrow 3x = 3 \mid : 3$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 1}}$$

څلورم: د حل سټ وليکئ

$$\underline{\underline{L = \{(1 \mid 2)\}}}$$

پنځم: د اېښوولو له لارې حل

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$(I)\quad 5x-2y=1 \Rightarrow 5\cdot 1-2\cdot 2=1 \Leftrightarrow 5-4=1 \Leftrightarrow 1=1 \quad (w)$$

$$(II)\quad 3x+3y=9 \Rightarrow 3\cdot 1+3\cdot 2=9 \Leftrightarrow 3+6=9 \Leftrightarrow 9=9 \quad (w)$$

د حل پلونه(قدمونه) د اینوولو تلنلار لپاره

واریانت 2

مساواتسیستم

$$(I)\qquad 5x-2y=1$$

$$(II)\qquad 3x+3y=9$$

لومړی: مساوات**(II)** د متحولې **y** پسې حل کیږي.

$$(II)\quad 3x+3y=9\,|\,-3x$$

$$\Leftrightarrow \quad 3y=9-3x\,|:3$$

$$\Leftrightarrow \quad y=3-x$$

دویم: دېنی لور میندل سوی ترم په مساوات **(I)**کې کیږدئ او په **x** پسې یې حل کړئ.

$$y=3-x \text{ eingesetzt in } (I):\ 5x-2y=1$$

$$5x-2(3-x)=1$$

$$\Leftrightarrow 5x-6+2x \quad =1\,|+6$$

$$\Leftrightarrow 7x \quad =7\,|:7$$

$$\Leftrightarrow \quad x=1$$

3. دریم: د **x** لپاره میندل شوی ارزښت په یو د دې دوه وتونمساوتو کې اینوول کیږي، او دا بیا د متحولې **y** پسې حل کیږي.

$$x=1 \text{ eingesetzt in } (II):\ 3x+3y=9$$

$$3\cdot 1+3y=9$$

$$\Leftrightarrow 3+3y=9\,|-3$$

$$\Leftrightarrow \quad 3y=6\,|:3$$

$$\Leftrightarrow \quad y=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



څلورم: جلسټ ولیکئ

$$L = \{(1|2)\}$$

پنځم: ازماېښت د اینوولو له لارې

$$(I)\quad 5x - 2y = 1 \Rightarrow 5\cdot 1 - 2\cdot 2 = 1 \Leftrightarrow 5 - 4 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \quad (w)$$
$$(II)\quad 3x + 3y = 9 \Rightarrow 3\cdot 1 + 3\cdot 2 = 9 \Leftrightarrow 3 + 6 = 9 \Leftrightarrow 9 = 9 \quad (w)$$

تولي درې تلنلارې د هغه د واریانتو سره په یوه ټکلي مساوتسیستم وکارول شو. که څوک یوګوني تلنلرې ټیک وګورې، پیژني، چې په واریانت ۲ کې لږ د شمیرلو کار غوښتونی دی.

په یوه ټاکلي تلنلار د شمیرلو کار د دې حل کوونکي مساوتسیستم په واک کې دی. له دې امله دې لومړی پام وشي، چې کومه تلنلار د لږ کار سره سرته رسیدی شي. د دې لپاره نو یو څو بیلګو ته اړ یو. لاندې بیګې دې د دې لپاره یوه کوچنۍ مرسته وي، چې مناسب د حل – یا څواب تلنلار پیداشي.

## د مناسب ځواب تلنلار لپاره بیلګې

بیلګه ۱ :

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| $x_1=-1$ په (1) کې اينوونه $y=7x+8$<br><br>$y=7\cdot(-1)+8$<br>$\Leftrightarrow y=-7+8$<br>$\Leftrightarrow y=1$<br><br>حل: $L=\{(-1\|1)\}$<br><br>ازماينت<br><br>(I) $y=7x+8 \Rightarrow y=7\cdot(-1)+8$<br>$\Leftrightarrow y=-7+8 \Leftrightarrow y=1$ (w)<br>(II) $y=-2x-1 \Rightarrow y=-2\cdot(-1)-1$<br>$\Leftrightarrow y=2-1 \Leftrightarrow y=1$ (w) | (I) $y=7x+8$<br>(II) $y=-2x-1$<br><br>د برابر اينووني لار<br><br>$7x+8=-2x-1 \mid +2x$<br>$\Leftrightarrow 9x+8=-1 \mid -8$<br>$\Leftrightarrow 9x=-9 \mid :9$<br>$\Leftrightarrow x=-1$ |

بيلگه۲:

| | |
|---|---|
| $Y=3$ اينوونه په (1) کې $2x+4y=8$<br><br>حل:<br><br>$2x-12=8 \mid +12$<br>$\Leftrightarrow 2x=20 \mid :2$<br>$\Leftrightarrow x=10$<br><br>ازماينت<br><br>(I) $2x+4y=8 \Rightarrow 2\cdot 10+4\cdot(-3)=8$<br>$\Leftrightarrow 20-12=8 \Leftrightarrow 8=8$ (w)<br>(II) $2x-5y=35 \Rightarrow 2\cdot 10-5\cdot(-3)=35$<br>$\Leftrightarrow 20+15=35 \Leftrightarrow 35=35$ (w) | (I) $2x+4y=8$<br>(II) $2x-5y=35$<br><br>د جمعي تلنلار:<br><br>(II) $2x-5y=35 \mid \cdot(-1)$<br>(I) $2x+4y=8$<br>(II) $-2x+5y=-35$ (+)<br>$9y=-27 \mid 9$<br>$\Leftrightarrow y=-3$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library



بيلګه ۳ :

| | |
|---|---|
| (I) $x + 2y = 5$<br>(II) $-x + y = 1$<br><br>د اينسووني لار;<br><br>(II) په y پسي حل کړئ<br><br>$-x + y = 1 \mid +x$<br>$\Leftrightarrow \quad y = x + 1$<br><br>په (I) کې کيږدئ x+2y=5<br><br>$x + 2(x + 1) = 5$<br>$\Leftrightarrow x + 2x + 2 = 5 \mid -2$<br>$\Leftrightarrow \quad 3x = 3 \mid : 3$<br>$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 1}}$ | X=1 په (1) کې کيږدئ x+2y=5<br><br>$1 + 2y = 5 \mid -1$<br>$\Leftrightarrow 2y = 4 \mid : 2$<br>$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = 2}}$<br><br>حل: L= {(1\|2)}<br><br>ازماېښت<br><br>(I) $x + 2y = 5 \Rightarrow 1 + 4 = 5$<br>$\Leftrightarrow 5 = 5 \ (w)$<br>(II) $-x + y = 1 \Rightarrow -1 + 2 = 1 = 35$<br>$\Leftrightarrow 1 = 1 \ (w)$<br><br>د رښتيا لپاره w |

بيلګه ۴ : په لاندې: einsetzen اينسوونه په (1)کې اوبيونه يا حل:Lösung
ازماېښتProbe د زياتون يا جمعې
لار:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$\left.\begin{array}{ll}(I) & \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4\\ (II) & -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2\end{array}\right\}+$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$

$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$

$$\Leftrightarrow -5=y$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

y = −5 eingesetzt in $(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$

$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2\,|\,-5)\}\quad x,y\neq 0$

Probe:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2 \Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2 \Leftrightarrow 2=2\ (w)$$

$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4 \Rightarrow \frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$

$$\Leftrightarrow 6-2=4 \Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



(I) $\frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$

(II) $\frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4$

Additionsverfahren:

(I) $\frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \mid \cdot 2$

(II) $\frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \mid : (-2)$

(I) $\frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 4$

(II) $-\frac{6}{x} - \frac{5}{y} = -2$ (+)

$-\frac{10}{y} = 2 \mid \cdot y$

$\Leftrightarrow -10 = 2y \mid : 2$

$\Leftrightarrow -5 = y$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{y = -5}}$

y = −5 eingesetzt in (I) $\frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2$

$\frac{3}{x} - \frac{5}{2(-5)} = 2$

$\Leftrightarrow \frac{3}{x} + \frac{1}{2} = 2 \mid -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \frac{3}{x} = \frac{3}{2} \mid \cdot x$

$\Leftrightarrow 3 = \frac{3}{2}x \mid \cdot \frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 2}}$

Lösung: $L = \{(2 \mid -5)\}\ x, y \neq 0$

Probe:

(I) $\frac{3}{x} - \frac{5}{2y} = 2 \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{5}{2(-5)} = 2$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2\ (w)$

(II) $\frac{12}{x} + \frac{10}{y} = 4 \Rightarrow \frac{12}{2} + \frac{10}{-5} = 4$

$\Leftrightarrow 6 - 2 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4\ (w)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$$
$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4$$

Additionsverfahren:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2\,|\cdot 2$$
$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4\,|:(-2)$$

$$(I)\quad \frac{6}{x}-\frac{5}{y}=4$$
$$(II)\quad -\frac{6}{x}-\frac{5}{y}=-2 \quad +$$

$$-\frac{10}{y}=2\,|\cdot y$$
$$\Leftrightarrow -10=2y\,|:2$$
$$\Leftrightarrow -5=y$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{y=-5}}$$

y = −5 eingesetzt in (I) $\frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2$

$$\frac{3}{x}-\frac{5}{2(-5)}=2$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}+\frac{1}{2}=2\,|-\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{x}=\frac{3}{2}\,|\cdot x$$
$$\Leftrightarrow 3=\frac{3}{2}x\,|\cdot\frac{2}{3}$$
$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

Lösung: $L=\{(2|-5)\}\quad x,y\neq 0$

Probe:

$$(I)\quad \frac{3}{x}-\frac{5}{2y}=2 \Rightarrow \frac{3}{2}-\frac{5}{2(-5)}=2$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2 \Leftrightarrow 2=2\ (w)$$
$$(II)\quad \frac{12}{x}+\frac{10}{y}=4 \Rightarrow \frac{12}{2}+\frac{10}{-5}=4$$
$$\Leftrightarrow 6-2=4 \Leftrightarrow 4=4\ (w)$$

یادونه:

مساواتسیستم د کسرونو ترمونو څخه جوړ دی. دا چې مخرج دد صفر کیدو اجازه نه لري یا نه شي صفر کیدی، تعریفست باید ورکړ شي. داسئ مساواتسیستم کربنیز نه دی.

## د رسموني لار

$$(I)\qquad x-y=-2 \quad L_I=\{(-2|0);(-1|1);(0|2);(1|3);\ldots\}$$
$$(II)\ \wedge\ -2x-y=1 \quad L_{II}=\{(-2|3);(-1|1);(0|-1);(1|-3);\ldots\}$$

دواړه مساوات د y پسې حل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د هر مساوات لپاره ارزښتجوړي د حل سټ په ګوته کوي.

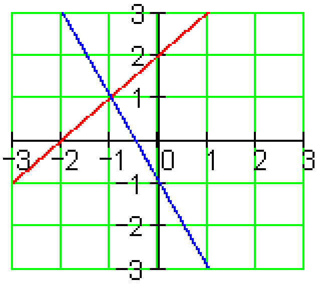
$$
\begin{array}{ll}
(I) & x - y = -2 \mid +y \\
(II) & -2x - y = 1 \mid +y \\
\hline
(I) & x = -2 + y \mid +2 \\
(II) & -2x = 1 + y \mid -1 \\
\hline
(I) & x + 2 = y \Leftrightarrow y = x + 2 \\
(II) & -2x - 1 = y \Leftrightarrow y = -2x - 1 \\
\hline
\end{array}
$$

کا دا په یوه کواوردیناتسیستم کې وکښل شي، نو دوه کرښې ترې لاس ته راځي. د کرښو په غوځېکي یا نقطه تقاطع کې د دواړو مساواتو حلسټ پروت دی.

حلسټ یا-دېړئ: $L=\{(-1|1)\}$

په هر مساوات کې د $x$ لپاره عددونه اینوول کیږي.

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $y_I$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $y_{II}$ | 3 | 1 | -1 | -3 |




د رسموني لار د مساوات او کرښو ترمنځ هندسي(ځمککچیزې) اړیکې لیدوړ کوي. د حل لار په حیث زیات وخت مناسب نه دی، چې د ګډغوځېکي کواودینات په ګرفیک کې ناتیک لوستل کیدی شي.

## برابرون – یا مساواتسیستم بې له یواځني حل څخه

رسمیزه حل یا درسم له لارې حل د مساوات او کرښې ترمنځ هندسي اړیکې لیدوړ کوي.

- دوه کرښې کیدی شي چې نسبت یو بل ته مختلف پروتځایونه ولري.

- دا کیدی چې په یو ټکي کې سره غوځي کړي، لکه پورته بیلګه چې لیدوړ کوي، د دواړو کرښیز مساوات لپاره ټک یو حل شتون لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



- دا کیدی شي یو بل سره غبرګې وي، نو په دې حالت کې کوم ټکی نه شته، چې دواړه کربښې یې یو له بل سره ګډ ولري. له دې سره اړونده مساوات له دې امله حل نه لري.

- دا کیدی شي یو په بل پرتې وي، یعنې کټمټ وي، نو هر ټکی د یوې کربښې به د بلې کربښې ټکی هم وي. نو له دې امله به دااړونده مساوات ناپای زیات حلونه ولري.

| | |
|---|---|
| **مساوات سیستم حل نه لري**<br><br>چې دا د حل پیل مو یوه<br>. لیدوړ دا په دې معنا دی،<br>ې ځغلي او کوم ګډ ټکی نه<br>لري. | $$\begin{array}{ll}(I) & 10x + 4y = 4 \\ (II) & 5x + 2y = 1 \mid \cdot(-2) \\ \hline (I) & 10x + 4y = 4 \\ (II) & -10x - 4y = -2 \mid \end{array}\Bigg\}+$$<br>0=2 نو دا ناټیک وینا ده، له دې لاس ته را ځي L={} |

## دا مساواتسیستم ناپای ډېر ځوابونه یا حلونه لري

| | |
|---|---|
| د ورته بڼه بدلون وروسته د مساوات (I) او مساوات (II) جمعه کونې یو بل سره پورته کوي یا له منځه وړي، دا په دې معنا چې مساوات ورته یا ایدنتیک دي. هره د اعدادو جوړه، چې مساوات (I) پوره کوي،دا مساوات (II)هم پوره کوي. لیدوړ دا په دې معنا دی، چې کربښې یو په بل پرتې دي. | $$\begin{array}{ll}(I) & 10x + 4y = 2 \\ (II) & 5x + 2y = 1 \mid \cdot(-2) \\ \hline (I) & 10x + 4y = 2 \\ (II) & -10x - 4y = -2 \mid \end{array}\Bigg\}+$$<br>0=0 له دې لاس ته راځي ربښتیا وینا |

پوښتنې

مساواتسیستم I

مساوات سیستم ته د دوه متحولو سره ګډوله پوښتنې، کربښېزمساواتسیستم، سیستم د کسري ترمونو سره او شي پوښتنې( د متن سره پ،ښتنې)

لومړی: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library



سرلیک

الف- (I) $5y - 3x = 1$ (II) $x = y + 1$ ب - (I) $4x + 5y = 32$ (II) $y = 5x - 11$

پ- (I) $15y - 4x = -50$ (II) $x = y + 7$ ت - (I) $3x = y + 15$ (II) $2y - 10 = 2x$

د ویم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

a) (I) $2y = 2x - 40$ (II) $3x = 10 - 2y$

b) (I) $\frac{x}{2} - \frac{3y}{5} = 3$ (II) $\frac{x}{4} + y = 8$

c) (I) $\frac{2x}{15} + \frac{7y}{12} = 3$ (II) $\frac{7x}{25} - \frac{5y}{16} = \frac{3}{20}$

d) (I) $\frac{x+5}{y-7} = \frac{4}{3}$ (II) $\frac{x+2}{y-5} = \frac{5}{8}$

دریم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

الف- ب - پ - ت -

a) (I) $\frac{4}{3x+1} = \frac{2}{3y-13}$ (II) $\frac{2}{5x-10} = \frac{4}{7y-6}$

b) (I) $\frac{7}{x} - \frac{12}{y} = \frac{5}{6}$ (II) $\frac{4}{y} + \frac{5}{2} = \frac{9}{x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



c) (I) $\frac{4}{x}+\frac{8}{y}=\frac{5}{3}$ (II) $\frac{2}{x}-\frac{4}{y}=-\frac{1}{6}$

d) (I) $\frac{3}{2x-1}-\frac{8}{3y+2}=-\frac{1}{5}$ (II) $\frac{5}{2x-1}+\frac{4}{3y+2}=\frac{8}{15}$

څلورم: د لاندې مساواتسیستم حلسټ وټاکئ

(I) $\frac{7}{2x-5}-\frac{9}{7y+5}=\frac{10}{3}$ (II) $\frac{24}{2x-5}+\frac{15}{7y+5}=\frac{19}{3}$

پنځم: یو پلار په دې لحضه کې څلورواره دومره عمر لري لکه ځوي یې او په ۵ کاله کې به فقط درې واره دومره عمر ولري. دا دواړه همدا اوس څومره عمر لري؟

شپږم: په کوم وخا کې به یو (اوبه) ساتونی (بیلر؟) له دوه نلونو څخه نیمم ډک شي، چې لومړی نل د ټول ساتوني د ډکولو لپاره ۱۸ دقیقې اودویم د دې لپاره ۲۲ دقیقو ته اړتیا ولري یا په کار ولري؟

اوم: د یوه مستېیل یا ولاړکونجیزچاپیریال یا محیط ۱۸۰ سانتي متره دی. اړخa څومره اوږد دی، که اړخ b ۳۰ سانتي متره وي؟

اتم: که د دوه ارزښتځاییزه پرته جمعه یا پروت زیاتون عدد9 دی. که ارزښتونه بدل شي، نو نوی عدد لاس ته راځي چې د زاړه عدد 7/4 ده. دواړه ځا ارزښتونه څومره دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



# توان- يا پوتنخ توابع

## توان توابع

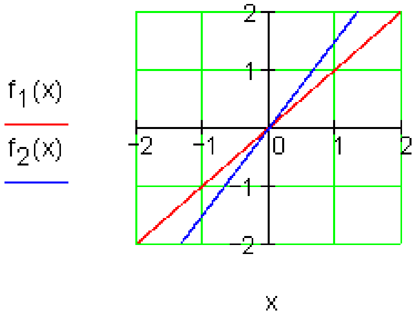
تعريف:

يوه تابع د تابع مساوات $f(x) = a_n x^n \quad ; n \in \mathbb{N} \quad ; a_n \in \mathbb{R}$ سره پوتنخ تابع بلل کيږي.

د n اکپوننت يا جګعدد د پوتنخ تابع درجه ټاکي او ضريب an د ګراف بنه يا فورم او هغه د بنې ضريب بلل کيږي.

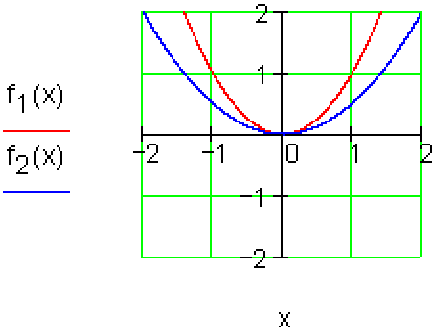
بيلګې:

$f_1(x) := x \qquad f_2(x) := \frac{3}{2} \cdot x$




د لومړۍ دزجي توان تابع( کرښه)

$f_1(x) := x^2 \qquad f_2(x) := \frac{1}{2} \cdot x^2$

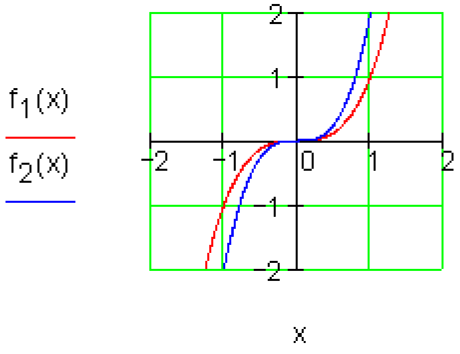



د دويمي درجي توان تابع ( پارابول)

(c) ketabton.com: The Digital Library

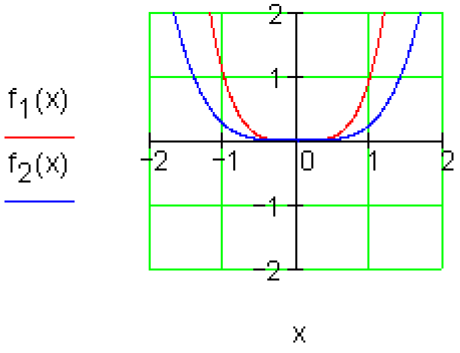


$f_1(x) := x^3 \qquad f_2(x) := 2 \cdot x^3$

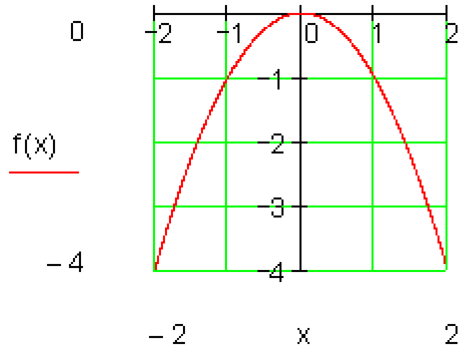



د دريمي درجي توانتابع

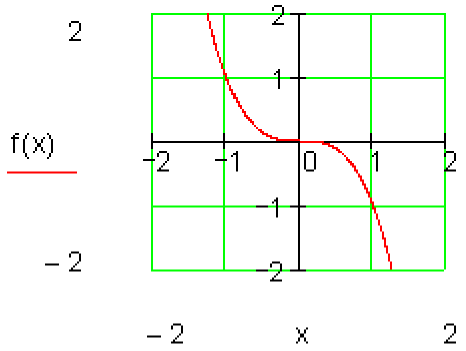
$f_1(x) := x^4 \qquad f_2(x) := \frac{1}{4} \cdot x^4$




د څلورمي درجي توانتابع




تابع مساوات وليکی




تابع مساوات وليکی

لاندې پوښتنې ځواب کړی:

ب – د $n$ درجه او د $a_n$ مختخبنه د ګراف په تلنه کومه اغيزه لري؟

پ – د پوتنځ تابع $n$ درجه د ګراف په سيومتري کومه اغيزه لري؟

ت – د پوتنځ تابع د $n$ په واکولي او د $a_n$ مختخبني له امله کوم ارزښتسټ(ارزښتډپری) لري؟

ټ - د $a_n$ مطلق ارزښت د ګراف په تلنه کوم اِيز لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځوابونه لږ وروسته راځي.

سیومتري

په سیومتري څنګه قضاوت کیدی شي، که څوک فقط د یوه توان(پوتنځ) تابع  تابع مساوات پیژني؟

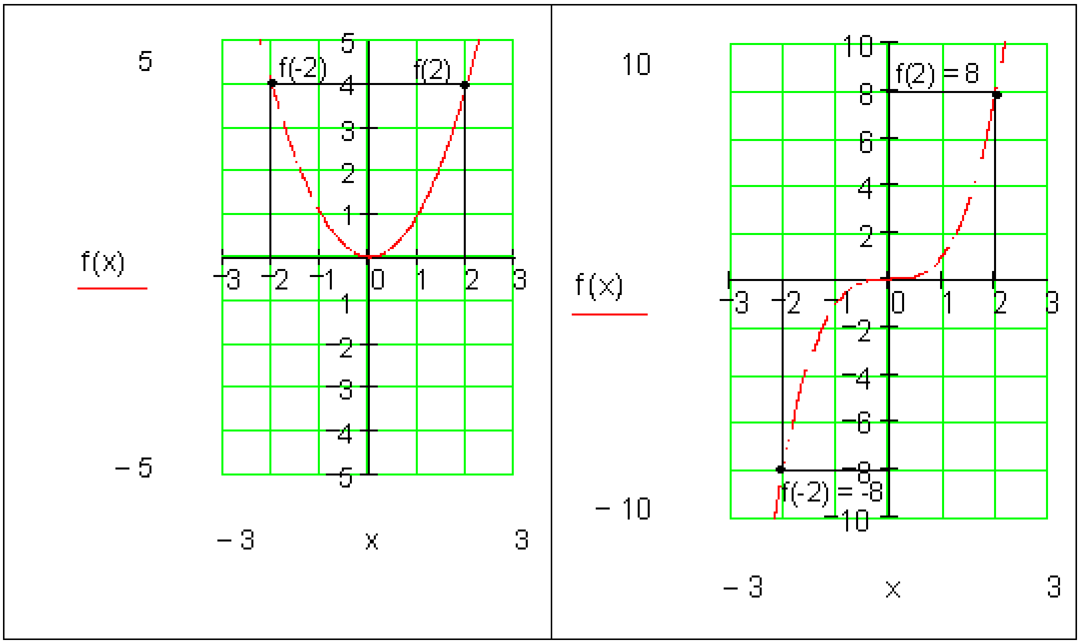
د دې لپاره د لاندې توابعو ګرافونه کاږو:

$f(x)=x^2$ او $f(x) = x^3$

او تابع د $x=-2$ او $x=2$ په ځایونو کې تر څیړنې لاندې نیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library






ګومان مو نږدې دی چې لاندې باور لري:

د x د جوړه ځګعدد سره د تابع ارزښتونه برابر دي. دا په دې معنا چي :

محورسيمتريک، نو $f(-x) = f(x)$

د x ناجوړه(طاقو) ځګعددونو لپاره د تابع ارزښت برابر مطلق قيمت لري، مګر متضادي مخنخښي لري.

دا په دي معنا چې:

ټکی سيومتريک، نو $f(-x) = -f(x)$

دا اړيکي د ټولو تانتوابعو لپاره باور لري (بې له ښوونې).

د يوه توان - يا طاقت تابع محورسيومتريک دی، که د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري: $f(-x)=f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د يوه توانتابع ګراف ټکی سيمتريک دی،که د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري $f(-x)= - f(x)$

ټولګه:

د $a_n > 0$ لپاره باور لري:

ټول توان توابع د جوړه جګعدد سره محور سيومتريک دي. دا له II د I. څلورمې ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتوابع د ناجوړه(طاق) جګعدد سره ټکيسيومتريک دي. دوی له III.او I. څلورمې(ربع) ته ځغلې(خوزي).

د ټولو $0 >$ لپاره باور لري:

ټول توان توابع د جوړه جګعدد سره محور سيومتريک دي. دا له III د IV. څلورمې ته ځغلي(خوزي).

ټول توانتوابع د ناجوړه(طاق) جګعدد سره ټکيسيومتريک دي. دوی له II.او IV. څلورمې(ربع) ته ځغلې(خوزي).

## تمرينونه:

د توان تابع خويونه.

د لاندې توانتوابعو درجه وټاکی، په سيمتريکي حالت، د ګراف په تلنه او او ارزښت دېرې يې يوه وينا وکړی د د هر ګراف يې په پروت ولاړسيستم ( کواوردينات سيستم ) کې رسم کړئ.

لومړی - $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$ دويم - $f(x) = \frac{1}{4}x$

دريم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^4$ څلورم - $f(x) = \frac{1}{5}x^3$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پنځم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^5$ شپږم - $f(x) = -\frac{1}{2}x$

اوم - $f(x) = -\frac{1}{10}x^3$ اتم - $f(x) = 2x^2$

نهم - $f(x) = \frac{1}{5}x^4$ لسم - $f(x) = -\frac{2}{5}x^4$

# کرښيز ي توابع د ورکړشوو شرايطو سره

## . لومړی حالت : د P تکي ځخه تيرې کرښې د $a_1$ جګوالي سره

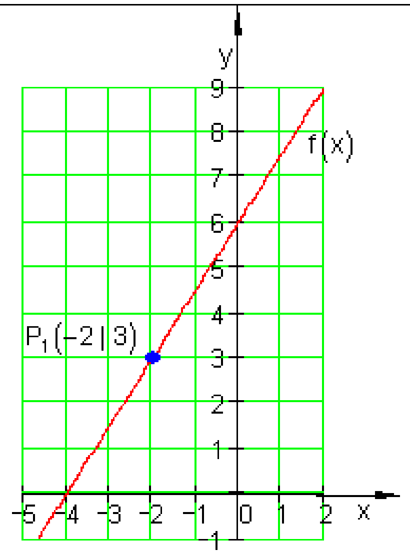
بيلګه:

يوه کرښه د $a_1$ د جګوالي سره د $P_1( x_1 | y_1 )$ په تکي کې ځغلي.

د $f(x) = a_1x + a.$ تابع مساوات دې پيدا شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library






جګوالی: $a_1 = 1,5$ : ټکی $P_1(-2|3)$

وتونمساوات $f(x) = a_1x + a_0$

جګوالی ځای په ځای کړی

$f(x) = 1,5 \cdot x + a_0$

د $a_0$ لپاره دې ارزښت وشمیرل شي.

د $P_1(-2|3)$: لپاره ازمايښت

$$
\begin{aligned}
f(-2) = 3 \Leftrightarrow\; 1,5 \cdot (-2) + a_0 &= 3 \\
\Leftrightarrow\; -3 + a_0 &= 3 \,|+3 \\
\Leftrightarrow\; a_0 &= 6
\end{aligned}
$$

د تابع مساوات $f(x) = 1,5 \cdot x + 6$

ازمايښت:

$P_1(-2|3) \Leftrightarrow f(-2) = 3$

$f(-2) = 1,5 \cdot (-2) + 6 = -3 + 6 = 3$

بیلګه:

د حیواناتو ساتونکی د وښو اوتومات څخه د روځې 7,5 kg خوراک شته. دولس روځې، وروسته له هغې چې زیرمه له غذايي موادو ډکه شوې وه، هلته نور 250 kg پاتې دي.

الف - یو تابع مساوات ولیکی، چې دا حالت تشریح کړي

ب - په څومره ستې يا ډېرى به دا د وښو زیرمه دولس ورځې د مخه ډکه شوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



حل و الف ته - د $x$ محور: وخت په ورځو

$y$ محور : د وښو زېرمه په کیلوګرام kg .

$$f(x) = -7{,}5x + a_0$$

$$P(12\,|\,250) \Rightarrow f(12) = 250 \Leftrightarrow -7{,}5 \cdot 12 + a_0 = 250$$

$$\Leftrightarrow -90 + a_0 = 250 \,|\, +90$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 340 \Rightarrow f(x) = -7{,}5x + 340$$

حل و ب ته- د ډکیدنې وخت $x = 0$ دی.

$$\Rightarrow f(0) = -7{,}5 \cdot 0 + 340 = 340$$

د وښو شتون دولس12 ورځې د مخه په 340 kg ډک شوی .

لکه څنګه په لومړي حالت کې چې د یوې کرښې جګوالی او یو ټکی معلوم دي، شمېرنه په همغه ډول د ورکړشوو داتن یا داتا Daten سره مخ ته ځي.

په داسې حالت کې شمیرنه تویزه سرته رسیږي. دا مو بیا یو فرمول ته لاربښوده وي.

یوه کرښه د$a_1$ جګوالي سره د$P_1(x_1\,|\,y_1)$ ټکي څخه تیرېږي.

د کرښمساواتو تولیز فرمول دی: $f(x) = a_1x + a_0$

$$P_1(x_1\,|\,y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow a_1 \cdot x_1 + a_0 = y_1 \,|\, -a_1 \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - a_1 \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = a_1 \cdot x + y_1 - a_1 \cdot x_1 = a_1 \cdot x - a_1 \cdot x_1 + y_1 = a_1(x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$$

دا د ټکی - جګوالي فرمول هم بلل کیږي.

بیلګه:

په $a_1 = -2;\, P_1(-3\,|\,4)$ $f(x) = a_1(x - x_1) + y_1$ کې ځا په ځای کړی

$$f(x) = -2(x - (-3)) + 4 = -2(x + 3) + 4 = -2x - 6 + 4 = \underline{\underline{-2x - 2}}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

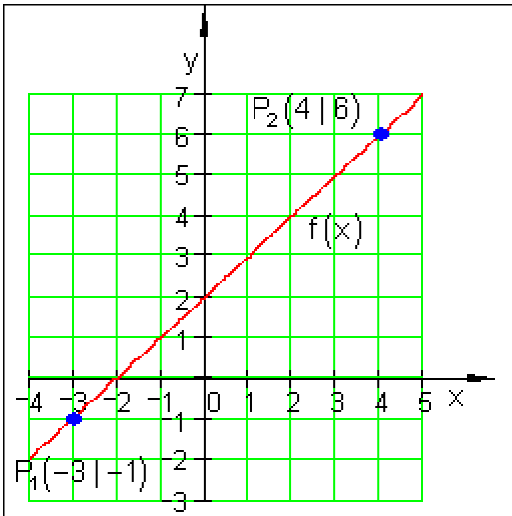


## دويم حالت: کرښه له دوه ټکو تيريږي

بيلګه:

دوه ټکی $P_1(x_1 \mid y_1)$ او $P_2(x_2 \mid y_2)$ په يوه کرښه پراته دي.

د $f(x) = a_1x + a_0$ تابع مساوات غواړو پيداکړو.




$P_1(-3 \mid -1)$ $\qquad P_2(4 \mid 6)$

وتونمساوات: $f(x) = a_1x + a_0$

د جګوالي ټاکنه:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-(-1)}{4-(-3)} = \frac{6+1}{4+3} = \frac{7}{7} = 1$$

جګوالی وضعه کړی $f(x) = 1 \cdot x + a_0$

وروسته له دې چې جګيدنه معلومه شوه، دا پوښتنه داسې حل کيږي لکه په لومړي حالت کې.

د ټکو ازمايښت لپاره بې پروا ده چې د دې لپاره کوم ټکي کارول کيږي، ځکه چې دواړه ټکي به په کرښه پراته وي.

د ټکو ازمايښت د $P_2(4 \mid 6)$ يا $P_1$ لپاره

$$P_2(4 \mid 6) \Rightarrow f(4) = 6 \Leftrightarrow 1 \cdot 4 + a_0 = 6 \mid -4 \Leftrightarrow a_0 = 2 \Rightarrow f(x) = x + 2$$

بيلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library



د فزیک څخه پوهیږو چې د حرارت معلومولو ( ګرمی کچوني) لپاره مختلفي دد حرارت سکالا کارول کیږي. د څلزیوس سکالاCelsiusskala او د فارنهایټ سکالا Fahrenheitskala

د دواړو ترمنځ کرښیزي اړیکي موجود دي.

$100\,^0C$ برابری دي د $212\,^0F$ سره . $0\,^0C$ برابر د ی په $32\,^0F$ سره.

د یوه تابع مساوات غواړو پیداکړو، چې د هغې په مرسته $^0C$ په $^0F$ اړول کیږي.

خپلواکه متحوله x په $^0C$ او بلواکه یا تابع متحوله $y = f(x)$ په $^0F$ .

جګوالی:

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5} \Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + a_0$$

$$P_1(0 \mid 32) \Rightarrow f(0) = 32 \Leftrightarrow \frac{9}{5} \cdot 0 + a_0 = 32 \Leftrightarrow a_0 = 32$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{9}{5}x + 32$$

په بدل شوی تابع x په C° کې کیږدی نتیجه یې ده.

د بیلګې په دول:

$$x = 20\,^0C : f(20) = \frac{9}{5} \cdot 20 + 32 = 68 \Rightarrow 20\,^0C \triangleq 68\,^0F$$

د دویم حالت لپاره هم کیدی شي شمیرنه په ټولیزه توګه مخ ته بوتلی شی:

دوه ټکی $P_1(x_1 \mid y_1)$ او $P_2(x_2 \mid y_2)$ په یوه کرښه پراته دي.

د مساواتو عمومي بڼه ده:. $f(x) = a_1x + a_0$.

(c) ketabton.com: The Digital Library



جګوالی:
$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + a_0$$

$$P_1(x_x \mid y_1) \Rightarrow f(x_1) = y_1 \Leftrightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + a_0 =$$
$$, = y_1 \mid - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 \Leftrightarrow a_0 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 =$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

دا په دوه ټکو کې د کربنیزړومساواتو یو تولیزه بڼه ده .

په زیاتو ادبیاتو کې په لاندې ډول ده:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \; ; x_1 \neq x_2$$ چیرته چې $y = f(x)$ باور لري.

د عملي کاروني لپاره لاندې بڼه مساعده ده:
$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

بیلګه:

$P_1(2 \mid -1); P_2(-3 \mid 2)$ په $f(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$ کې ځای په ځای کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x)=\frac{2-(-1)}{-3-2}(x-2)+(-1)=\frac{2+1}{-5}(x-2)-1=-\frac{3}{5}(x-2)-1=-\frac{3}{5}x+\frac{6}{5}-\frac{5}{5}$$
$$=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}\Leftrightarrow f(x)=-\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}$$

تمرین:

د $^0F$ په $^0C$ باندې شمیرنې لپاره یو تابع مساوات ولیکئ

## 2.2.3.تمرین: د تابعمساواتو شمیرنه

یو کرښیز مساوات د $a_1$ جګوالی لري او د P له ټکي تیریږي.

د f(x) تابعمساوات معلوم کړئ او د محورونو قاطع ټکي یا غوښتکي او ګراف انځور کړئ

اول - $P(2|-2)$ $a_1=\frac{1}{2}$ دویم - $P(-1|3)$ $a_1=\frac{3}{4}$

دریم - $P(3|-1)$ $a_1=2$ څلورم - $P\left(\frac{3}{2}\middle|4\right)$ $a_1=\frac{4}{5}$

یوه کرښه له ټکو $P_1$ او $P_2$ تیریږي.

د f(x) تابع مساوات پیدا کړئ او د محور قاطع ټکي او ګراف رسم کړئ.

پنځم - $P_2(5|4)$ $P_1(2|1)$ شپږم - $P_2(2|3)$ $P_1(-3|-2)$

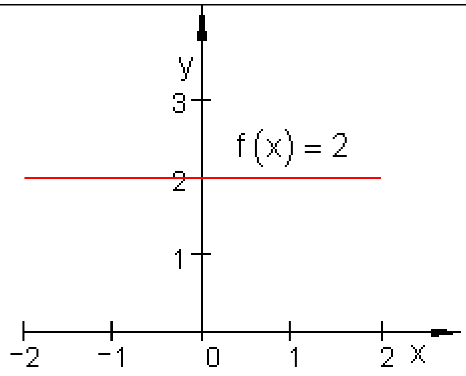
اوم - $P_2(4|-1)$ $P_1(-2|3)$ اتم - $P_2(3|1)$ $P_1(-4|-1)$

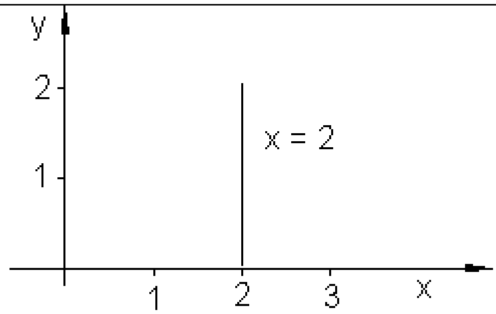
(c) ketabton.com: The Digital Library



نهم - $P_2(4\,|\,-1)$ $P_1\left(-3\,\middle|\,\frac{9}{2}\right)$ لسم - $P_2\left(\frac{7}{2}\,\middle|\,4\right)$ $P_1(-4\,|\,-2)$

## . د کرښبرابروتو ځانګړی حالت:

| | |
|---|---|
| د x- محور سره غبرګ کرښه:<br>$f(x) = a_0\,;\, a_0 \in \mathbb{R}$<br>یو د 0 درجې تام راشنل تابع ده او<br>ثابته تابع هم بلل کیږي.<br>x- محور هم یوه ثابته تابع ده د<br>تابع مساوات $f(x) = 0$ سره.<br>د ثابتې تابع جګوالی تل صفر دی. |  |

| | |
|---|---|
| د y- محور سره غبرګه.<br>$x = a\,;\, a \in \mathbb{R}$<br>کرښه د محور سره غبرګه (موازي) ځغلي.<br>دا د یوه تابع مساوات سره نه شي لیکل کیدی، ځکه چې یواځنۍ تنظیم نه شته یعني تابع نه ده.<br>$x = 0$ دy - محور مساوات دي. |  |

(c) ketabton.com: The Digital Library



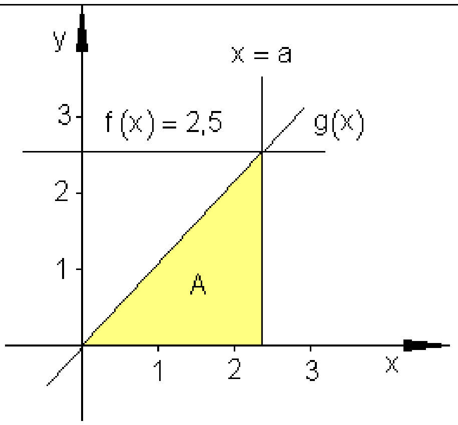
بیلګه:

یو $f(x) = 2,5$ ور کړ شوی او y- محور سره موازي دa واټن د $a > 0$ سره.

یوه سرچینییزه کرښه g د( $P( a \mid f(x) )$ ټکي څخه تیریږي.

دا دx - محور او د y- محور سره غبرګې کرښې سره یو مثلث جوړوي.

a داسي وټاکی چې وسطحه د سطحي څلور واحدونه (یوونونهFE) جوړ کړي. د دې حالت لپاره دg(x) تابع مساوات څنګه دي؟

| | |
|---|---|
|  | $A = \frac{g \cdot h}{2}$ د $g = a$ او<br>$h=f(x) = 2,5$ سره<br>د مثلث سطه $\Rightarrow A = \frac{2,5 \cdot a}{2} = \frac{5}{4}a$<br>$A = 4 \Leftrightarrow \frac{5}{4}a = 4 \mid \cdot \frac{4}{5} \Leftrightarrow a = \frac{16}{5}$<br>(ځکه چې د سرچینې کرښه $g(x) = a_1x$ ($a_0 = 0$<br>د جګېدو له مثلث څخه $a_1 = \frac{5}{2} : \frac{16}{5} = \frac{25}{32}$<br>د تابع مساوات : $g(x) = \frac{25}{32}x$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرين: د $^0F$ بدلون شميرنه په $^0C$ لپاره د تابع مساوات وليکئ

حل :

د $^0C$ اړونه يا بدلون په$^0F$ د متحولې لپاره دا معنا لري:

x په $^0F$ مستقله يا خپلواکه متحوله ده او $y = f(x)$ په$^0C$ بلواکه يا تابع متحوله ده.

$$212\,^0F \triangleq 100\,^0C \Rightarrow P_1(212\,|\,100) \quad \text{او} \quad 32\,^0F \triangleq 0\,^0C \Rightarrow P_1(32\,|\,0)$$

دا چې د حرارت الو ترمنځ يوه کرښيزه ا ړيکه پرته ده، نو ټکي $P_1$ او$P_2$ په يوه کرښه پراته دي.

د کرښي عمومي کرښيزه بڼه په دې ډول ده:.$f(x) = a_1x + a_0$

دلته ضريبونه $a_1$ او $a_0$ د ټاکلو دي.

جګوالی:
$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{100-0}{212-32} = \frac{100}{180} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \Rightarrow f(x) = \frac{5}{9}x + a_0$$

ټکي ازمايښت د $P_1(32\,|\,0)$ سره.

$$\Rightarrow f(32) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{9}\cdot 32 + a_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{160}{8} + a_0 = 0 \,|\, -\frac{160}{9} \Leftrightarrow a_0 = -\frac{160}{9}$$
$$\Rightarrow f(x) = f(x) = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9} = \frac{5}{9}(x-32)$$

د $^0F$ اړونې په $^0C$ لپاره باور لري.

$$^0F \text{ in } ^0C \text{ gilt: } f(x) = \frac{5}{9}(x-32)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



xپه $^0F$ او y په $^0C$ .

## پوښتنې:

## کرښيزې توابع III

لومړی: د g کرښنو مساوات وټاکئ

الف: $P_1(-4|-2)$ او $P_2(2|0)$ په g پراته دي،

ب- g په $P_1(-3|1)$ او $P_2\left(1|\frac{11}{3}\right)$ کې ځغلي

پ- $P_1(1|-2)$ او $P_2(-2|10)$ په g پراته دي

ت- g محورونه په x = 2 او y = 6 کې غوڅوي( قطع کوي)

ټ-g له P(-6;1)) تيرېږي او له h سره غبرګ دی د $h(x) = -\frac{2}{3}x+2$ مساوات سره

ث- g جګوالی $a_1 = -4,5$ لري او له P(1;1,5) څخه تيرېږي.

ج- g جګوالی $a_1 = 3$ لري او له P(1;,1,5) څخه تيرېږي

چ- g دx محور په x = 3 کې غوڅوي او د hکرښه د h(x) = 4x - 2 سره په x = -1 کې غوڅوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



دویم: د دوه کرښو g او h کرښیز مساوات پیدا کړی، چې له ټکی P(3;-2) تیریږي.

دریم: یوه کرښه g د کرښیز تابع f(x) سره پیدا کړی، چې له ټکو $P_1$ او $P_2$ تیریږي او تابع مساوات وټاکی.

الف- $P_1(-3\mid 5); P_2(1\mid 2,5)$ ب - $P_1(1,5\mid 3); P_2(3\mid 2,5)$

پ- $P_1(k\mid 3); P_2(2k\mid -1)$ ت - $P_1(4\mid 0); P_2\left(-1\mid -\sqrt{2}\right)$

ټ - $P_1\left(2\sqrt{k}\mid \sqrt{2k}\right); P_2\left(\sqrt{k}\mid 0\right)$ ث - $P_1(1\mid 0); P_2(-1\mid k+1)$

څلورم: د f(x) کرښیزې تابع مساوات وټاکی.که معلوم وي:

الف-کرښه د $a_1 = \frac{5}{4}$ جګیدنې سره له P(4;-1) څخه تیریږي.

ب-کرښه له ټکو $P_1(-5\mid -3)$ او $P_2(0\mid 3)$ څخه تیریږي.
پ-کرښه له P(4,5;2,7) ټکي تیریږي. او د x محور سره 45° مایله ده.

ت-کرښه له P(-1,5;0) تیریږي او د h(x) = 2x+2 سره غبرګه ( موازي) ده.

پنځم: کر ښه g و کاږی او کرښیز مساوات وټاکی.

الف- $P(3\mid -1) \in g$ او g دy محور سره غبر؛( موازي) څغلي.

ب- $P(3,5\mid 2,5) \in g$ او g دx محور سره موازي څغلي.

پ- g له P(-5;1)تیریږي او د $h(x) = -\frac{1}{2}x + 4$ سره موازي ده.

ت- g له $P\left(1\mid \frac{3}{2}\right)$ تیریږي او د کرښو سره چې له ټکو $P_1(-2\mid -3)$ او $P_2\left(\frac{3}{2}\mid -5\right)$ تیریږي، موازي څغلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



# پوښتني

## کرښيز مساوات VI

لومړی –

د لاندې کرښيزو توابعو ګرافونه و کاږی او د ارزښت سټ يا – ډېری W و ټاکی

الف- $f(x)=-2x+2;\ D=\{x|-3\le x\le 5\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{4};\ D=\{x|-4\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f(x)=\frac{3}{4}x-3;\ D=\{x|-2\le x\le 6\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f(x)=3x-6;\ D=\{x|-1\le x\le 3\}_{\mathbb{R}}$

دويم –

ټکی $P_1$ او $P_2$ ورکړ شوي، چې په کرښه پراته دي. د f (x) تابعمساوات پيدا کړی او ګراف يې وکاږی

الف- $P_1(3\mid 4);\ P_2(7\mid -1);\ D=\{x|0\le x\le 7\}_{\mathbb{R}}$

ب - $P_1(-8\mid 1);\ P_2(2\mid -3);\ D=\{x|-8\le x\le 2\}_{\mathbb{R}}$

پ - $P_1(4\mid 3);\ P_2(-7\mid -1);\ D=\{x|-7\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$

ت - $P_1(-4\mid -4);\ P_2(4\mid 2);\ D=\{x|-4\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$

دريم –

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لاندې مساواتو حلسټ یا حلډېرۍ پیداکړئ. مساوات چې کسرې راشنل ترمونه ولري، باید د هغو تعریفورشو هم ورکړل شي.

الف- $x-5=9$ ب - $8+x=25$ پ - $x-\frac{2}{3}=\frac{3}{4}$ ت - $\frac{5}{9}=x-\frac{1}{3}$

ټ - $88=4x-16$ ث - $a+bx=3b+a$ ج - $8-(x+5)=2$

چ - $9+(5-x)=6$ ح = $(x-6)(x+3)=(x-5)(x-2)$ خ -

خ - $(x+3)(x+7)=(x+2)(x+9)$ $\frac{x}{4}+\frac{5x}{6}+\frac{5}{6}=\frac{x}{2}+x$

څ - $\frac{3}{2x}+\frac{2}{3x}=\frac{1}{9}+\frac{7}{3x}$ د - $\frac{ax}{b}-\frac{b}{ac}=\frac{a}{bc}-\frac{bx}{a}$ ډ - $\frac{x}{a-b}+\frac{x}{a+b}=a$

ذ- $23a-\{5ax-[9ax+(12a-6ax)]-(3a-8ax)\}-15a=5ax-7a$

څلورم:د لاندې توابعو د محورونو سره د تقاطع ټکي هم پیدا کړئ.

الف- $f(x)=2x-7$ ب - $f(x)=-2x+6$ پ - $f(x)=3x-3$

ت - $f(x)=2x+\frac{2}{3}$ ټ - $f(x)=\frac{3}{4}x+2$ ث - $f(x)=-\frac{3}{4}x+\frac{4}{5}$

ج - $f(x)=3{,}5x+\frac{1}{2}$ چ – $f(x)=-2{,}5x+2\frac{1}{2}$ ح - $f(x)=1\frac{3}{4}x-3\frac{2}{3}$

پنځم: د یوې کرښې دوه ټکي $P_1$ او $P_2$ ورکړ شوي د لاندې توابعو له I تر IV لپاروه وټاکئ:

I. $P_1(3\mid 4);P_2(7\mid -1);D=\{x\mid -2\le x\le 8\}_{\mathbb{R}}$

II. $P_1(-8\mid 1);P_2(2\mid -3);D=\{x\mid -8\le x\le 2\}_{\mathbb{R}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



III. $P_1(4 \mid 3);\ P_2(-7 \mid -1);\ D=\{x \mid -8 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

IV. $P_1(4 \mid 2);\ P_2(-4 \mid -4);\ D=\{x \mid -4 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$

الف- د جګیدني ضریب m.

ب - د کرښې تابعمساوات

پ - دy محور سره د تقاطع ټکی $P_y$

ت - د تقاطع ټکی $P_y$ د x محور سره

ټ - پهW باندې ارزښتډېری W.

ث - په D کې د تابع ګراف

شپږم: لاندې مساواتسیستمونه حل کړی:

الف- $\begin{cases} \text{I} & 5y-3x=1 \\ \text{II} & x=y+1 \end{cases}$  ب - $\begin{cases} \text{I} & 4x+5y=32 \\ \text{II} & y=5x-11 \end{cases}$  پ - $\begin{cases} \text{I} & 15y-4x=-50 \\ \text{II} & x=y+7 \end{cases}$

ت - $\begin{cases} \text{I} & 3x=y+15 \\ \text{II} & 2y-10=2x \end{cases}$  ټ - $\begin{cases} \text{I} & 2y=2x-40 \\ \text{II} & 3x=10-2y \end{cases}$  ث - $\begin{cases} \text{I} & x+y=a+b \\ \text{II} & x-y=a-b \end{cases}$

پوښتنې

## کرښیز مساوات IX

(c) ketabton.com: The Digital Library



لومړی:کرښه g له ټکو P1(4;-3,5) او P2(2,5;-1) تیرېږي.

کرښه h له ټکو $P_3(5|2,5)$ او $P_4\left(\frac{3}{2}|\frac{25}{3}\right)$ تیرېږي.

کرښې یو بل ته څه موقعیت لري یا څنګه پرتې دي؟

دویم:د f(x) کرښیزې تابع د تابع ترم او ارزښتساحه(ارزښتورشو) و ټاکئ، که صدق ولري:

الف- $f(0) = 20;\ f(12) = 32;\ x > 0$ ب- $f(-3) = 6;\ f(2) = -8;\ x \in [-3;3]$

دریم:

د f(x)کرښیزې تابع ګراف په 3 LE اوږدوالی واحده کینې لور

ته خوزیږي. د راکښل شوې کرښې د f*(x) مساوات څنګه دي؟

$$f(x) = \frac{5}{3}x - 2 \quad D = \mathbb{R}$$

څلورم: د f(x) او g(x) توابع ورکړ شوې دي. د کوم ارزښت لپاره f(x) > g(x) صدق کوي؟

$$f(x) = 2x - 3 \quad ; \quad g(x) = -0,5x + 1 \quad x \in \mathbb{R}$$

پنځم: یوه g(x)کرښه ورکړ شوې.. دا د یوې کرښې h(x) له خوا قطع کیږي. د h(x)مساوات وټاکئ، که باور ولري: $g(x) = -3x + 2$

الف- قاطع یا غوڅی دx محور سره . ب - قاطع(غوڅی) په x = -5 کې

شپږم:

| | |
|---|---|
| یوه د پیل کرښه د $a_1 = -0,125$ جګوالي سره و داسی کښنول کیږي. چې کرښه h د مساوات | ; $h(x) = -1,5(x-2)$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| سره د$x$ په محور قطع کوي.<br>راکښنه تشريح کړی او د راکښنل شوې کرښې ګراف و کاږی. | |

اوم: يوه $f(x)$کرښيزه تابع ورکړ شوې. کرښه د $x = u$ مساوات سره د $f(x)$ ګراف په $P$ کې قطع کوي او د $x$ محور په $Q$ کې قطع کوي. يوه سکيڅې ترتيب کړی.

الف- د $P$ او $Q$ کواوردينات وټاکی، که $f(x) = 0,75x + 2$ وي.

ب- دu د کوم ارزښت لپاره $P$ د$x$ محور پورته لور ته پرته ده.

ت- $P(u \mid f(u))$ په 1 څلورې يا ربع کې پروت دی. $R(0 \mid 0)$, $Q$ او$P$ د يوه مثلث رآسونه ( ککرټکي)جوړوي. د دې مثلث د مساحت $A$ لپاره ترم وټاکی. $u$ (محيط) داسي وټاکی، چې $A(u) = 10$ صدق وکړي.

اتم: دg کرښې ته موازي او عمود مساوات داسې وټاکی، چې له $P$ ټکي تير شي.

الف- $g: x + 2 - 3y = 0; P(0 \mid 3)$ ب- $g(x) = \frac{2}{3}x - 3; P(1 \mid 4)$

پ - $g(x) = -1,5kx; P(1 \mid 0)$

نهم: کرښه $g$ له ټکو$P_1$ او$P_2$ تيريږي. د$h$ کرښې ته يې ځای مطالعه کړی او د امکان په حالت کې يې د قاطع ټکی معلوم کړی.

$$P_1(-1 \mid 1,5); P_2(-2 \mid -2,5) \qquad h: \ -x - 6 - 4y = 0$$

لسم: و ښايی: کرښه $g$ او کرښه $h$ عمود دي.

$$g: \ y - \sqrt{2}x = 1 \qquad h: -2y - \sqrt{2}x + 6 = 0$$

$$g(x) = -3x + 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



یولسم:

| | |
|---|---|
| د A, B او C ټکي د یوه مثلث د رآس ټکي دي. د $k > 0$ د کوم ارزښت لپاره دا مثلث قایم الزاویه ( ولاړګوډیز ) دی؟ ( ښی رآس په C پروت دی) | $A\left(\sqrt{3k}\mid\frac{k}{3}\right); B\left(-\sqrt{3k}\mid\frac{k}{3}\right); C(0\mid k)$ |

## پوښتنې

کرښیز توابع **XI**

لومړی-

$$f_1(x)=\frac{1}{4}x+2\frac{1}{4}; f_2(x)=-4x-2; D=\{x\mid -9\le x\le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه له تابع $f_1(x)$ سره د دویمې کرښې د تابع $f_2(x)$ سره غوځیږي. وټاکئ:

الف – د کواوردیناتونو $x_s$ او $y_s$ سره غوځتکی S .

ب – د دواړو کرښو غوځتکي د y محور سره .

پ – د دواړو کرښو غوځتکي دx محور سره .

ت - د دواړو توابعو ګراف په D کې .

دویم –

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f_1(x) = -\frac{2}{3}x + 4 ; D = \{x \mid 0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه له تابع $f_1(x)$ سره په ټکي $S(3 \mid y_s)$ کې د تابع $f_2(x)$ سره له کرښې څخه غوځیږي.

وټاکئ:

الف-د S پوره کواودینات

ب-تابع $f_2(x)$.

پ-د دواړو کرښو غوځټکي د کواوردینات محورونو سره.

ت-په D کې د دواړو توابعو ګراف.

دریم:

$$f_1(x) = -\frac{3}{8}x + 1; D = \{x \mid -7 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره په ټکي $S(-4 \mid y_s)$ کې کې له کرښې څخه د تابع $f_2(x)$ سره ، چې پروتمحور په 7- کې غوځوي، غوځیږي.

وټاکئ:

الف – د S پوره کواوردینات.

ب – تابع $f_2(x)$ .

پ – د دواړو کرښو غوځټکي د کواودینات د محورونو سره.

ت – د واړو توابعو ګراف په D کې..

څلورم –

د یوه دربېکوډي یا مثلث ټکي $P_1, P_2$ او $P_3$ ورکړ شوي دي. د دربېګوډي د اړخونو تابع وټاکئ. پخوا له دې یو پلان نقشه ترتیب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



الف-

$$[P_1P_2] \triangleq f_1 ; [P_2P_3] \triangleq f_2 ; [P_1P_3] \triangleq f_3$$
$$P_1\left(-6 \;\middle|\; \frac{3}{2}\right); P_2\left(-2 \;\middle|\; -\frac{3}{2}\right); P_3\,(-4 \mid 3)$$

ب –

$$[P_1P_2] \triangleq f_1 ; [P_2P_3] \triangleq f_2 ; [P_1P_3] \triangleq f_3$$
$$P_1\left(6 \;\middle|\; \frac{3}{2}\right); P_2\left(2 \;\middle|\; -\frac{3}{2}\right); P_3\,(4 \mid 3)$$

پنځم -

$$f_1(x) = \frac{1}{2}x + 3 ; P_2(-2 \mid -3) ; D = \{x \mid -6 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره د دویمې کرښې څخه د تابع $f_2(x)$ سره ، چې له ټکي $P_2$ تیریږي ، په ټکي S کې ولاړکونجیزه غوڅیږي.

وټاکئ:

الف - د $f_2(x)$ جګوالی $m_2$ .

ب- تابع $f_2(x)$ .

پ – د دواړو کرښو غوڅټکی S .

ت - د دواړ کرښو محورغوڅټکي.

ټ - د دواړو کرښو ګراف په D کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library



## پوښتني

## کرښيز توابع XII

لومړی -

$$f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 3\,;\,P_2(2\,|\,-3)\,;\,D = \{x\,|\,0 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره له يوې دويمې کرښې د تابع $f_2(x)$ سره، چې له ټکي $P_2$ تيريږي په ټکي S کې ولاړکونجيزه غوڅيږي.

وټاکی.

لومړی:

الف – د $f_2(x)$ جګوالی $m_2$ .

ب – تابع $f_2(x)$ .

پ - د دواړو کرښو غوڅټکی S .

ت - د دواړو کرښو د محورغوڅټکي.

ټ - د دواړو کرښو ګراف په D کې.

دويم –

د کرښې تابع $f_2(x)$ وټاکی، چې پروتمحور په $P_{x2}$ کې غوڅوي او له کرښې څخه د تابع $f_1(x)$ سره په S کې غوڅيږي. د واړو کرښو غوڅټکي وشميرئ او د دواړو کرښو ګراف په D کې رسم کړئ.

الف- $f_1(x) = \frac{3}{2}x + 6\,;\,P_{x2}(-6\,|\,0)$ ؛ $S\left(x_s\,\middle|\,\frac{3}{2}\right);\,D = \{x\,|\,-6 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f_1(x) = \frac{1}{2}x - 3\,;\,P_{x2}(4\,|\,0)$ ؛ $S(3\,|\,y_s)\,;\,D = \{x\,|\,-1 \le x \le 6\}_{\mathbb{R}}$

دريم -

$$P_1(-5\,|\,5)\,;\,P_2(-1\,|\,-1)\,;\,S(x_s\,|\,2)\,;\,D = \{x\,|\,-6 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

کرښه د تابع $f_1(x)$ سره له ټکو $P_1$ او $P_2$ تيريږي او په ټکي S کې ولاړکونجيز له کرښې څخه د تابع $f_2(x)$ سره غوڅيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



وټاکئ:

الف- د $f_1$ (x) جګوالی $m_1$ .

ب – تابع $f_1$ (x) .

پ – دS پوره کواوردینات.

ت – د$f_2$ (x) جګوالی $m_2$ .

ټ – تابع$f_2$ (x) .

ث – د $f_1$ (x) او$f_2$ (x) ګرافونه

ځلورم -

$$P_1(5\,|\,5);\, P_2(1\,|\,-1);\, S(3\,|\,y_s);\, D=\{x\,|\,0\le x\le 6\}_{\mathbb{R}}$$

کربښه د تابع $f_1$ (x) سره له ټکو $P_1$ او$P_2$ څخه تیرېږي او په ټکي S کې ولاړکونجیزه له کربښې د تابع $f_2$ (x) سره غوځیږي.

وټاکئ:

الف – د $f_1$ (x) جګوالی $m_1$ . ب - تابع $f_1$ (x) .

پ - د S پوره کواوردیناتونه ت – د $f_2$ (x) جګوالی $m_2$ .

ټ - تابع $f_2$ (x) . د $f_1$ (x) او $f_2$ (x) ګرافونه.

پنځم -

$$f_2(x)=3x-3;\, S\left(\frac{3}{2}\,\middle|\,\frac{3}{2}\right);\, D=\{x\,|\,0\le x\le 6\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع $f_1$ (x) ګراف په ټکي S کې د تابع $f_2$ (x) له ګراف څخه ولاړکونجیزه غوځیږي.

وټاکئ:

الف - تابع $f_1$ (x) .

(c) ketabton.com: The Digital Library



ب – د دواړو کرښو د محورونو غوڅتکي.

پ – د دواړو توابعو ګراف په D کې.

## پوښتني

## کرښيزي توابع برخه XIII

لومړی -

$$f_2(x) = \frac{4}{5}x + \frac{9}{10}; S\left(2 \left| \frac{5}{2}\right.\right); D = \{x \mid -1 \leq x \leq 4\}_{\mathbb{R}}$$

د تابع$f_1(x)$ ګراف په ټکي S کې د تابع $f_2(x)$ له ګراف څخه ولاړکونجيز(قايم الزاويه) غوڅيږي.

وټاکی:

الف: تابع $f_1(x)$ .

ب – د دواړو کرښو د محورونو غوڅتکي.

پ – د دواړو توابعو ګرافونه په D کې.

$$g: \quad y - \sqrt{2}x = 1 \qquad \Rightarrow g(x) = \sqrt{2}x + 1$$

$$h: -2y - \sqrt{2}x + 6 = 0 \Rightarrow h(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}x + 3$$

د اورتوګوناليتي شرايط: $a_{1g} = -\frac{1}{a_{1h}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$a_{1g} = -\frac{1}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1\cdot 2}{1\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad q.e.d$$

دويم:

د دوه کرښنو توابع $f_1(x)$ او $f_2(x)$ ورکړشوي او د يوې دريمي کرښي جګوالی $m_3$ د تابع $f_3(x)$ سره. تابع $f_3(x)$ داسي وټاکئ، چې ګراف يې د نورو دواړو کرښنو غوښتکي ځخه تير شي. د درياوړو کرښنو محور غوښتکي وټاکئ او د درياوړو توابعو ګراف په D کې رسم کړئ.

الف-

$$f_1(x) = -4x - 2;\ m_3 = \frac{1}{4}$$
$$f_2(x) = 2x + 4;\ D = \{x \mid -9 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

ب –

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4};\ m_3 = -4$$
$$f_2(x) = 2x + 4;\ D = \{x \mid -9 \le x \le 0\}_{\mathbb{R}}$$

دريم: کرښه دتابع $f_1(x)$ سره له ټکي $P_1$ تيرېږي او له يوې دويمي کرښي چې له ټکي $P_2$ تيريږي په ټکي S کې غوځيږي. توابع $f_1(x)$ او $f_2(x)$ وټاکئ د هغو محورغوښتکي اوپه D کې يې ګراف وکاږئ.

$$P_1\left(-2 \,\middle|\, \frac{3}{2}\right); P_2(3 \mid 5); S\left(2 \,\middle|\, \frac{5}{2}\right); D = \{x \mid -8 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

څلورم:

$$P_1\left(-1 \,\middle|\, \frac{5}{2}\right); P_2\left(-3 \,\middle|\, \frac{11}{2}\right); D = \{x \mid -9 \le x \le 3\}_{\mathbb{R}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



کرښه د تابع $f_1(x)$ سره محور په 8- کې غوڅوي. $f_1(x)$ ته غبرګه يوه دويمه کرښه د تابع $f_2(x)$ سره پروت محور په 4- کې غوڅوي. دواړه کرښي له يوې دريمي کرښي چې تابع $f_3(x)$ لري او له ټکو $P_1$ او $P_2$ تيريږي په ټکو $P_3$ او $P_4$ کې ولاړکونجيزه(قايوم الزاويه) غوڅوي. وټاکئ:

الف- تابع $f_3(x)$ ب - تابع$f_1(x)$

پ – تابع $f_2(x)$ ت – د دريواړو توابعو ګراف په D کې.

پنځم:

$$A\left(-\frac{13}{2} \middle| -\frac{3}{2}\right); B(3 \mid 2); D = \{x \mid -8 \le x \le 4\}_{\mathbb{R}}$$

د يوه قايوم الزاويه مثلث(ولاړکونجيز دريګودي) څخه، چې ولاړ کونج(قايم الزاويه) يې پهC کې پرته ده، ټکي A اوB ورکړ شوي. د مثلث اړخ يا ضلع [BC] د تابع $f_3(x)$ سره د اورډينات يا ولاړ محور په 3 کې غوڅوي.

وټاکئ:

الف- د اړخ [AB] تابع $f_1(x)$ ب- د اړخ يا ضلعي [BC]تابع $f_3(x)$

پ- د اړخ [AC] تابع $f_2(x)$ ت- د ټکي C کواورديناتونه

ټ په D کې ګرافونه.

پوښتني

کرښيزې توابع **XIV**

(c) ketabton.com: The Digital Library



لومړی: $A(-8|-6);\ C(-1|5);\ D=\{x\mid -8\le x\le 2\}_{\mathbb{R}}$

له یوه قایمالزاویه مثلث، چې قایمه زاویه یې په B پرته ده، ټکی A او C ورکړ شوي دي. د مثلث ضلع (اړخ)[BC] د اوردینات محور ( ولاړمحور) په 3کې قطع کوي.

دا وټاکئ:

الف-

[AB] = $f_1$ ; [BC] = $f_2$ ; [AC] = $f_3$ د مثلث درې د ضلعو توابع.

ب- د B ټکي کواودینات یا وضعیه قیمت کې د ټکي B محورونه

پ -په D کې ګراف.

دویم:

$A(-4|-1);\ B(2|-4);\ D=\{x\mid -4\le x\le 5\}_{\mathbb{R}}$

د یوه مثلث ټکيA او B ورکړ شوي دي. د مثلث [BC] ضلع دy محور په 12-کې قطع کوي; ضلع [AC] د x محور په 3- کې غوڅوي.

دا وټاکئ:

الف-تابع $f_1$ (x) ضلع .[AB] قطع کوي

ب - تابع $f_2$ (x) ضلع [BC] غوڅوي.

پ - تابع $f_3$ (x) ضلع [AC]

ت - د C ټکي وضعیه قیمتونه

ټ - د D ټکي وضعیه قیمتونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



دريم: توابع $y = f(x) = 3x - 4$ او $g(x) = ax + 3$ ورکړ شوي.

د دواړو توابعو ګرافونه په ټکي $S(3 \mid 5)$ کې غوڅوي.

د $h(x)$ تابع مساوات داسې وکاږۍ، چې ګراف په ټکي S عمود څغلي. په يوه وضيه قيمتسيستم کې دريواړه ګرافونه رسم کړۍ.

څلورم:

$$f_1(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{1}{4}\,;\; f_2(x) = -4x - 2\,;\; D = \{x \mid -10 \le x \le 1\}_{\mathbb{R}}$$

د $f_1(x)$ تابع سره کرښه د دويمې کرښې د $f_2(x)$ تابع سره قطعه کوي.

دا وټاکۍ:

الف- د S قاطع ټکی د $x_s$ او $y_s$ کواودينات سره.

ب - د دواړو کرښو د قاطع ټکي د x محور سره.

پ - د دواړو کرښو قاطع ټکي د x محو سره.

ت - د دواړو توابعو ګراف په D کې.

پنځم:

د $g(x)$ تابع، چې په $f(x)$ عمود ده پيدا کړۍ. د $g(x)$ ګراف د y محور په $P_y(0 \mid 3)$ ټکي قطع کوي. دواړه کرښې په يوه وضعيه قيمت سيستم(پروت ولاړ سيستم) کې رسم کړۍ.

الف - $f(x) = -2x + 2$ ب - $f(x) = 3x - 6$

پ - $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ ت - $f(x) = \frac{3}{4}x - 3$

شپږم: د دواړو کرښو غوڅټکی ( نقاط تقاطع) و ټاکۍ او ګراف يې وکاږۍ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



الف - $f_1(x)=\frac{1}{4}x+2\frac{1}{4}\,;\,f_2(x)=-4x-2\,;\,D=\{x\mid -10\le x\le 1\}_{\mathbb{R}}$

ب - $f_1(x)=-2x+2\,;\,f_2(x)=3x-6\,;\,D=\{x\mid -2\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$

پ - $f_1(x)=-\frac{2}{3}x+4\,;\,f_2(x)=\frac{3}{2}x-2\frac{1}{2}\,;\,D=\{x\mid -1\le x\le 7\}_{\mathbb{R}}$

ت - $f_1(x)=-\frac{3}{8}x+1;\,f_2(x)=\frac{5}{6}x+5\frac{5}{6}\,;\,D=\{x\mid -8\le x\le 4\}_{\mathbb{R}}$

## **n** -مه درجه ټول مات- یا راشنل توابع

**n** -مه درجه ټول راشن لفنکشن

یو تابع $f(x)$د

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$$

سره $n$ -مه درجه ټول راشنل تابع بلل کیږي.

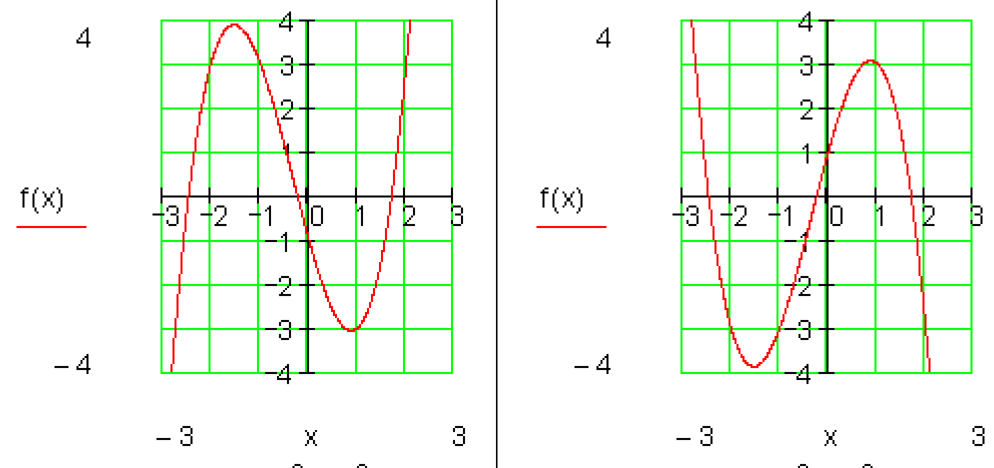
عددونه $a_n\,;\,a_{n-1}\,;\,a_{n-2}\,;\,\dots\,a_2\,;\,a_1\,;\,a_0$ ضریبونه بلل کیږي.

ټول راشنل یا هوښیار توابع د توان توابعو یوځای اینوولو له لارې لاس ته راځي.

بیلګې:

(c) ketabton.com: The Digital Library






$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$

$f(x) = -x^3 - x^2 + 4x + 1$

$f(x) = 0{,}2x^4 + 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

$f(x) = -0{,}2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - x + 2$

د گراف تلنه

جمله:
د ټول راشنل تابع ګراف تلنه د خورا جګ توان  زیاتهووني ( د جمعي غړي ) سره تاکل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | n جوړه | n ناجوړه(طاق) |
|---|---|---|
| $a_n>0$ | تلنه له II و I ته. | تلنه له III و I ته. |
| $a_n<0$ | تلنه له III و IV ته. | تلنه له II و IV ته. |

بيلګه: د الماي پيښتو: ناجوړه(طاق) جوړه (جفت) ناجوړه

$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 7 \quad n = 3\ (\text{ungerade}) \wedge a_n = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - I}}$

$f(x) = -2x^4 + 3x^2 - 4x + 7 \quad n = 4\ (\text{gerade}) \wedge a_n = -2 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{III - IV}}$

$f(x) = -5x^5 + 2x^4 + 9 \quad n = 5\ (\text{ungerade}) \wedge a_n = -5 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{II - IV}}$

## سيومتري

ګومان مو نږدې دی، هغه توابع، چې فقط د جوړه جګعددونو توانونو څخه يوځای شوي وي، محور سيومتريک دي او توابع چې فقط د ناجوړه(طاقو) جګعددونو توانونو څخه يوځای شوي وي، ټکی سيومتريک دي.

جمله

د يوه ټولراشنل تابع ګراف تيم هلته محورسيومتريک دی، که تابع مساوات فقط جوړه جګعددونه ولري.

د يوه ټولراشنل تابع ګراف ټيک هلته ټکيسيومتريک دی، که تابع مساوات فقط ناجوړه (طاق) جګعددونه ولري.

بيلګه:

$$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$$

$$f(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x)^2 + 1 = 2x^4 + 3x^2 + 1 = f(x) \Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

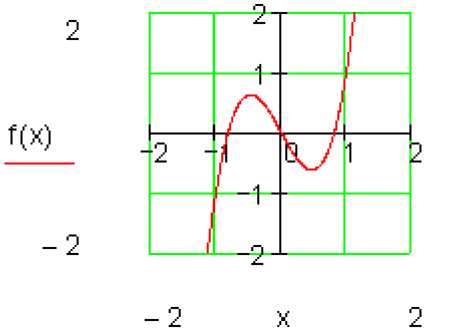


محورسیومتریک

$$f(x) = 3x^3 - 2x$$

$$f(-x) = 3(-x)^3 - 2(-x) = -3x^3 + 2x = -(3x^3 - 2x) = -f(x) \Rightarrow$$

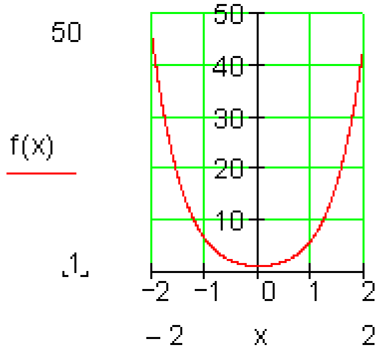
تکی سیومتریک




$f(x) = 3x^3 - 2x$

سرچینې ته سیومتریک دی

( تکی سیومتري)




$f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 1$

yمحور ته سیومتریک دی

(محورسیومتریک)

## تمرینونه:

د ټول هوښیارو توابعو خویونه.

د لاندې تاوبعو په سیمتری، تلنه او د صفرځایونو تعداد یا ګنون باندې ویناوې وکړی.

لومړی - $f(x) = 2x^2 - 1$ دویم - $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ریم - $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 + 2$ ‏ خلورم - $f(x) = -x^5 - x^3 + x$

پنځم - $f(x) = x^6 - x^4 + 1$ ‏ شپږم - $f(x) = -\frac{1}{2}x^5 + x^2 - 2x$

اوم - $f(x) = \frac{1}{10}x^7 + \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + x$ ‏ اتم - $f(x) = \frac{1}{100}x^{10} - \frac{1}{50}x^6 + \frac{1}{10}x^2$

نهم - $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{5}x - 1$ ‏ لسم - $f(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{1}{2}x$

په یوه خوښه ټکي ته سیومتریک

که د یوه ټکي سیومستري تابع ګراف په خوښه راکښل شي، نو سیومتري سرچیني ته ځي، چې موږ یې ټکی سیومتري بولو له منځه ځي. نسبت و موخېټکی ته دا ساتلې پاتې کیږي.

بیلګه:

د $f(x)=0,5x^3-1,5x$ تابع ګراف ټکی سیومتریک دی، یعنې سرچینې ته سیومتریک.

دا ګراف دې په ۲ واحدونو یا یوونونو کیڼ لور ته او په ۳ یوونونو یا واحدونو کښته لور ته راکښل شي.

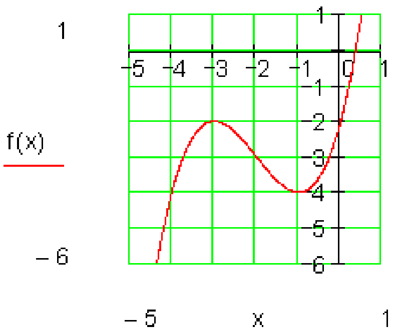
د راکښلشوي ګراف تابع مساوات دي:

$$g(x) = 0,5(x+2)^3 - 1,5(x+2) - 3 = 0,5x^3 + 3x^2 + 4,5x - 2$$

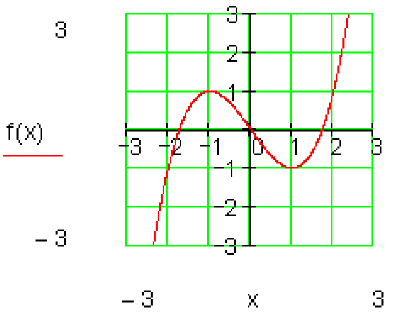
$g(x)$ و ټکی $P_0(-2|-3)$ ته سیومتریک دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library






$$f(x) = 0,5x^3 + 3x^2 + 4,5x - 2$$



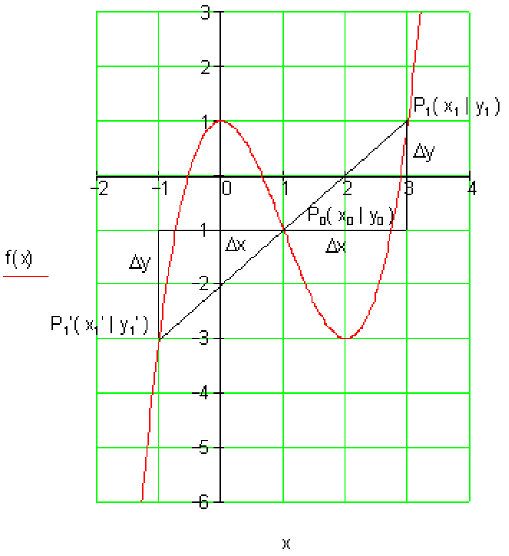

$$f(x) = 0,5x^3 - 1,5x$$

کواوردینانسیستم  د ګراف په بڼه کوم رول نه لوبوي.  تنها تابع مساواتوتغیر خوړلی.

د حالت بیلګه:  باید وازمایل شي، چې ایا د دریمې درجې د یوه ټول هوښیار تابع ګراف یوه ټاکلي ټکی ته ټکی سیومتریک دی.

ترمخ راوړنه.

چمتووالی:




د ټکو کواوردینات لپاره باور لري:

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$
$$y_1 = y_0 + \Delta y$$
$$x_1' = x_0' - \Delta x$$
$$y_1' = y_0' - \Delta y$$
$$\Delta x = x_1 - x_0$$
$$\Delta y = y_1 - y_0$$

د هنداره-یا منعکس شوي ټکو کواوردیناتونه:

$$x_1' = x_0 - (x_1 - x_0) = \underline{\underline{2x_0 - x_1}}$$
$$y_1' = y_0 - (y_1 - y_0) = \underline{\underline{2y_0 - y_1}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| | د دې قاعدې یا لار سره تل کېدی شي په $P_0$ و $P_1$ ته یوه هنداورنه یا انعکاسونه کې اړونده هنداورنه $P_1'$ وټاکل شي. |

بیلګه:

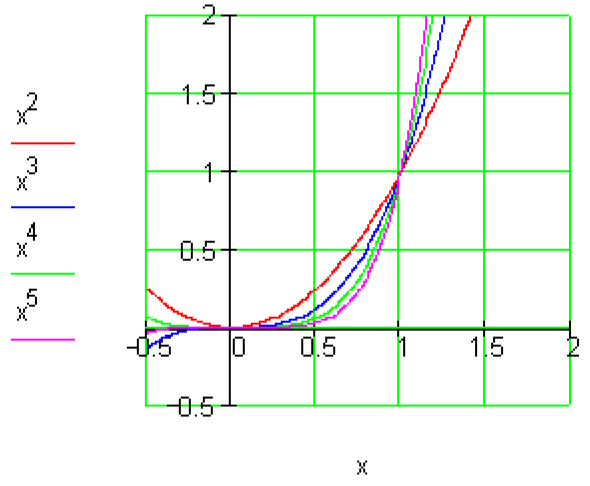
که هنداورنه په ګراف نه وي پرته ، نو ګراف و $P_0$ ته ټکی سیومتریک نه دی.

## پوښتنې

## تول مات- یا راشنل توابع I

د توانتوابعو خویونه

لومړی –

| | |
|---|---|
|  | دا ترخنګ په 1 . خلورمه کې ګراف تر ځیرنې لاندې ونیسی<br>د x ارزښتونو لپاره د 0 او 1 ترمنځ دجګو درجو یو د توان تابع ګراف پروت دی<br>د یوه توان تابع د ګراف لاندې یا کښته د ټیټې درجې.<br>د $x > 1$ لپاره دا ټیک برعکس کېدونکي دي.<br>د دې حالت لپاره لایل راوړی. |

(c) ketabton.com: The Digital Library



دویم – د دریمې درجې توان تابع کراف دې په دوه واحده کینې لور ته او ترلی په درې واحده پورته لور ته و کښل شي.

د دې راکښل شوې تابع مساوات لپاره دې د تابع مساوات ورکړ شي.

دریم –

د څلورمې درجې توان تابع ګراف دې په درې واحده ښی لور ته او پسې ترلی دې په دوه ضریبه وغزول شي.

الف – د راکشل شوي ګراف لپاره تابع مساوات ورکړئ

ب – وښایئ، چې ګراف نه محور – او نه ټکی سیومتریک دی.

څلورم –

په کوم توان تابع $f(x) = x^n$ کې ټکی په ګراف اړه لري؟

د دې توان توابعو مساوات ورکړئ.

الف - $P(-3\,|\,-27)$ ب - $P(-2\,|\,16)$ پ - $P(0{,}5\,|\,0{,}25)$ ت - $P\left(\frac{1}{3}\,\middle|\,\frac{1}{27}\right)$

ټ - $P(0{,}1\,|\,0{,}0001)$ ث - $P(-1\,|\,1)$ ج - $P(-2\,|\,8)$ چ - $P\left(\frac{3}{4}\,\middle|\,\frac{81}{256}\right)$

پنځم –

د لاندې توان توابعو سیومتري او د ګراف تلنه وټاکئ او د هر یوه ارزښتدېرئ( ارزشتسټ) او درجه ورکړې.

الف - $f(x) = 4x^3$ ب - $f(x) = -160x^2$ پ - $f(x) = -1500x$

ت - $f(x) = \sqrt{2} \cdot x^6$ ټ - $f(x) = 5$ ث - $f(x) = -25x^5$

(c) ketabton.com: The Digital Library



شپږم –

لاندې تابع مساوات د پولینوم په بڼه انځور کړی.

هر ځل يې درجه ورکړی.

الف - $f(x)=(x-2)^2-4x^3$ ب- $f(x)=4(x+5)^3+(x-2)(x+2)$

پ- $f(x)=2x^3-(x-1)^2$ ت - $f(x)=(x-4)(x+1)^2$

ټ - $f(x)=(x^2-4)(x^3-x^2+4)$ ث - $f(x)=\frac{x-5}{8}(x-2)+\frac{3}{4}x^2$

اوم -

دلیل راړی:

د یوه ناجوړه(طاق) درجې تولراشنل تابع ګراف دx محور لږ ترلږه په یوه ځل غوڅوي.

دا هلته هم باور لري که درجه جوړه يا جفتوي؟

## پوښتنې

# تول راشنل توابع II

## سیومتری او تلنه

لومړی – و څېړی، چې ایا $f(x)$ یو تولراشنل تابع دی. په ورکړشوي حالت کي د تابع ګراف، درجه او د ضریبونو $a_0; a_1; a_2; \ldots an$ ارزښتونه ورکړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



الف - $f(x)=2$ ب - $f(x)=4x$ پ - $f(x)=2^x$ ت - $f(x)=\frac{x^3-4x}{8}$

ټ - $f(x)=\sqrt{3}x^4$ ث - $f(x)=\frac{1}{x}$ ج - $f(x)=\sqrt{x}$ چ - $f(x)=\left(x-\sqrt{3}\right)^2$

ح - $f(x)=\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)$ خ - $f(x)=16x^3-2x^2+5x^2-4$

دویم – د لاندې ټولراشنل توابعو څخه کوم یې محور سیومتریک او کوم یې ټکی سیومتریک دي؟

الف - $f(x)=x^4-6x^2+5$ ب - $f(x)=x^3+3x+1$ پ - $f(x)=(x-2)(x+2)$

ت - $f(x)=x^6-6x^2+\sqrt{3}$ ټ - $f(x)=(x-2)^3(x-1)$ ث - $f(x)=x^4-\sqrt{5}x^2$

ج - $f(x)=\left(2x^4+2x^2+5\right)x$ چ - $f(x)=\left(x^2-2x+3\right)(x+1)(x-1)$

ح - $f(x)=1-3x^2+x^6$

دریم – د c متحوله داسې وټاکئ، چې د تابع ګراف ټکی سیومتریک او همداسې محورسیومتریک شي.

الف - $f(x)=x^3+4x+c$ ب - $f(x)=(x-c)(x+4)$ پ - $f(x)=x^5+x^c$

ت - $f(x)=x^3\left(x^2-cx\right)$ ټ - $f(x)=c+x^3$ ث - $f(x)=4x^3+x^2+cx^2+5x$

څلورم : د لاندې توابعو د ګراف تلنه معلومه کړئ.

الف - $f(x)=2x^5-6x^3$ ب - $f(x)=-4x^4+3$

پ - $f(x)=2x-5$ ت - $f(x)=-2x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ټ ـ $f(x) = 4x^4 - 3x^2 + 4x - 5$ ث ـ $f(x) = -6x + 3$

ج ـ $f(x) = 4x^4 + 3x^3 - 6x^5$ چ ـ $f(x) = -2x^5 + 6x^3$

پنځم ـ د لاندې توابعو د ګراف تلنه او سیومتري ورکړی.

الف ـ $f(x) = \sqrt{3}x^2 - \sqrt{5}x^4 - 2$ ب ـ $f(x) = x\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(8 - \frac{1}{2}x\right)$

پ ـ $f(x) = 5x^6 - 4x^4 + 5$ ت ـ $f(x) = x^5 + x^3 - 2x$

ټ ـ $f(x) = 5$ ث ـ $f(x) = \left(x^2 - 25\right)\left(x^2 + 6x + 9\right)$

ج ـ $f(x) = x^5 + 4x^4 + 4x^3$ چ ـ $f(x) = \left(4x^2 - 4\right)\left(x^3 + 8x^2 + 16x\right)\left(x^3 + 27\right)$

ح ـ $f(x) = -3$ خ ـ $f(x) = -x^5 + x^3 - 2$

شپږم : د لاندې تابعو صفرځیونه وشمېرئ:

الف ـ $f(x) = (x-4)(x-2)(x+1)$ ب ـ $f(x) = (x-4)(-x+2)$

پ ـ $f(x) = x(x+5)^2$ ت ـ $f(x) = 3(x-4)^3(x+2)$

ټ ـ $f(x) = (2x-4)(x+3)x^3$ ث ـ $f(x) = x^3 - 2x^2$

# د ټولراشنل توابعو محور غوځېدکي ( د محور د تقاطع نقطی)

د ټولراسنل توابعو محور غوځېتکي ( د محور د تقاطع نقطی)

(c) ketabton.com: The Digital Library



د y محور سره غوڅېکی $P_y(0|y_s)$ : $P_y(0|y_s)$ شرط: $y_s = f(0)$

بیلګه : د یا په معنا

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 - 3 \Rightarrow f(0) = 3\cdot 0^4 - 2\cdot 0^2 - 3 = 0 - 0 - 3 = -3$$
$$\Rightarrow P_y(0|-3) \text{ oder } P_y(0|f(0))$$

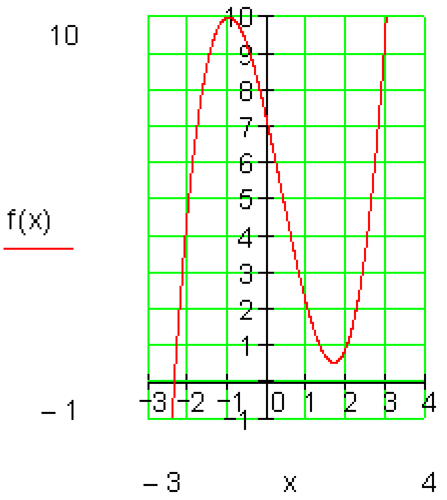
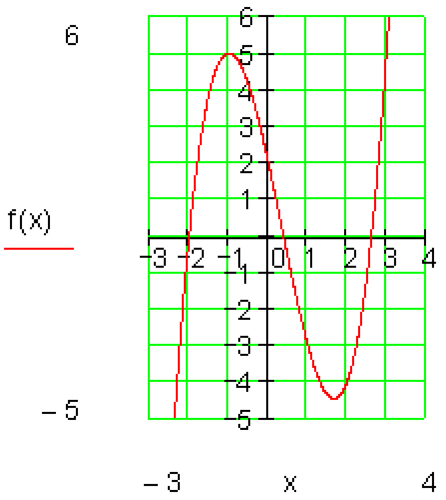
د $P_y$ د y کواوردینات تل د ضریبونو $a_0$ سره کتمټ ده.

دا تل د تابع مساوات څخه لوستل کیدی شي.

د x-محور سره غوڅېکی $P_y(x_s|0)$ صفرځای : شرط: $f(x) = 0$

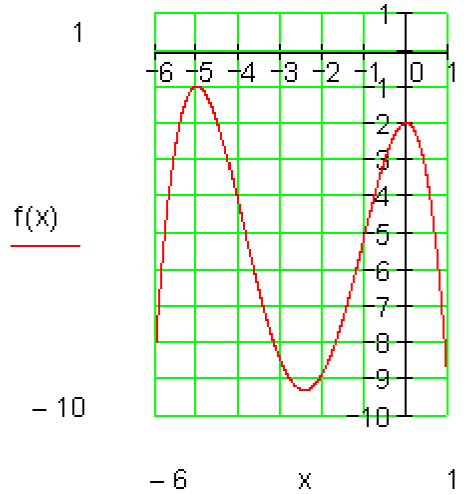
د مربع تابع ( د دویمي درجې ټولراشنلتابع) څخه بوهیږو، چې دا دوه ، یو ، یا هیڅ صفرځایونه لرودی شي. دا د څګ درجو ټول راشنلتابع سره څنګه دی؟

بیلګه:

| | |
|---|---|
| <br>$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 7$<br>صفرځای نه لري | <br>$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$<br>دري صفرځایونه لري |

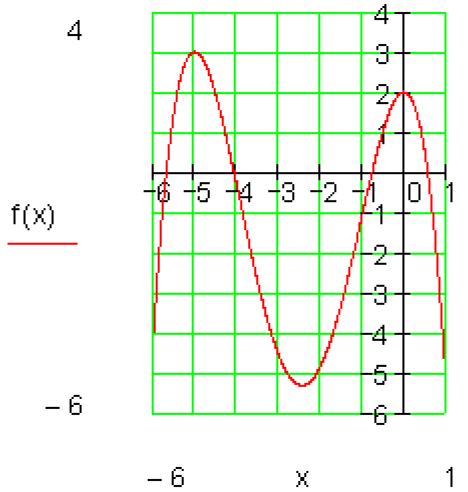
(c) ketabton.com: The Digital Library






$$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 0,2x - 2$$

د صفرځای نه شتون




$$f(x) = -0,2x^4 - 2x^3 - 5x^2 - 0,2x + 2$$

ځلور صفرځایونه لري.

جمله:

یو د n -مي درجي تولراشنل تابع زیات له زیاته n صفرځایونه لري.

کهn جوړه وي، نو دا لږترلږه یو صفرځای لري.

د صفرځایونو شمیرني لار(تګلار)

د فکتوري کونو یا صریبونو تګلار:

$$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x = 0$$

فاکتور x له نوکانو راوتلی شي.

$$\Leftrightarrow x\left(2x^2 - 2x - 4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

او په نوکانو کې افاده یا وییئه صفر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



سرليک

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$$

مربع مساوات دی.

$$2x^2 - 2x - 4 = 0 \mid : 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$p = -1;\ q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

صفرځایونه :

$$x_1 = 0;\ x_2 = 2;\ x_3 = -1$$

د x محور سره غوڅتکی

$$P_{x1}(0|0);\ P_{x2}(2|0);\ P_{x3}(-1|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x) = \underbrace{2x(x+1)(x-2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x$$

(پورته) د کرښیز ضریبونو ضرب

## د بدلون قانون substitution:

یادونه: په دې معنا چې د یوې اووښتونې یا متحولې لپاره بله متحوله ځا په ځای کوو.

$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ بې مربعیز( بي ځلوریز) مساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library



بدلون: $x^2=z$

$$\Rightarrow f(z) = z^2 - 13z + 36 = 0 \quad p = -13 \quad q = 36$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36 = \frac{169}{4} - \frac{144}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} z_1 = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9 \\ z_2 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = 4 \end{array} \right.$$

بدلون په څټ- یا بیرته ګرځوو:

$$x^2 = z_1 = 9 \,|\, \sqrt{\ } \qquad x^2 = z_2 = 4 \,|\, \sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow |x| = \sqrt{9} \qquad |x| = \sqrt{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = -3 \qquad x_3 = 2 \quad x_4 = -2$$

د x محور سره غوخڼکی

$$P_{x1}(3|0); P_{x2}(-3|0); P_{x3}(2|0); P_{x4}(-2|0)$$

د تابع مساوات:

$$f(x) = \underbrace{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

د کرښیز ضریبونو ضرب

پوښتني

## محور غوخڼکي او د ټولراشنل یا ماتتوابعو ګرافونهII

(c) ketabton.com: The Digital Library



لومړی: د درېمي درجي يو تولهوښيار يا –راشنل تابع سرچيني سره سيومتريک ده، که

الف- له ټکو $P_1(1|2)$ او $P_2(3|-2)$ څخه تيره شي.

ب- که کرښهg د g(x)=3x سره پارابول په P(0|0) کي لمس کړي.

دويم: تابع f(x) د پيژندورشو يا تعريف ساحيD = IR سره ورکړ شوي ده. تابعf(x) په سيومتري وخيړی، صفرځايونه وشميری او ګراف وکاږی.

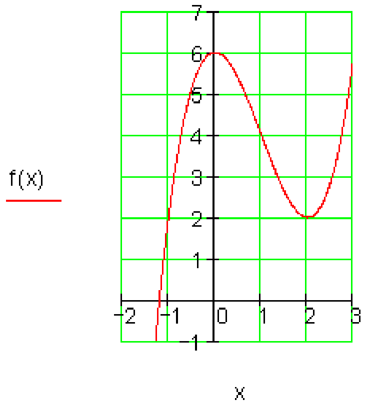
الف – $f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2$ ب – $f(x)=x^3-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{3}x$

پ - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+5$ ت - $f(x)=\frac{1}{48}x^3-x$

ټ - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x$ ث - $f(x)=\frac{1}{5}x(3-x)(x+1)$

ج - $f(x)=\frac{1}{2}x\left(\frac{1}{4}x-1\right)^2$ چ = $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{4}x^2-6x+\frac{9}{2}$

دريم: تابع $f(x)=x^3-3x^2+6\,;\,D=\mathbb{R}$ ورکړشوي ده.

| | |
|---|---|
| الف - وښايی:<br>د f(x) صفرځای د ( 1- ; 2- ) ترمنځ پروت دی مدلل کړی، چيf(x) تيک يو صفرځای لري، ادا ګراف بايد څنګه راکښل شي، چي له هغي سره دا تيک دوه صفرځايونه ولري؟<br>ب- کرښه x = u د f(x) ګراف په ټکي Q او د x محور په P کي غوڅوي.<br>د لاندي درېګوډي يا مثلث 0PQ سطحه د2 = u لپاره وښايی.<br>د مثلث د (خوندي) سطحي ترم د u په واکوالي کي د 0 < u لپاره ورکړی.<br>g(x) څومره صفرځايونه د g(x)=3.f(x) سره لري؟<br>دلايل يي راوړی. | <br> |

څلورم: تابع $f(x)=5x^3-10{,}8x+4$ ورکړ شوي ده. وښای: x=0,4 يو صفرځای دی. پسي نور صفرځايونه وشميری.

$$f(x)=5x^3-10{,}8x+4\,;\,D=\mathbb{R}$$

پنځم: د اووښتوني يا متحولي c په واکوالي کي د صفرځايونو تعداد وټاکی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 2cx\,;\; D = \mathbb{R}$$

$$x^2 + 2x + 2c = 0 \Rightarrow p = 2\,;\; q = 2c \Rightarrow D = 1 - 2c$$

$$\text{für } D > 0 \Rightarrow 1 - 2c > 0 \Leftrightarrow c < 0{,}5$$

$$\text{für } D = 0 \Rightarrow 1 - 2c = 0 \Leftrightarrow c = 0{,}5 \Rightarrow x_{2/3} = -1$$

$$\text{für } D < 0 \Rightarrow 1 - 2c < 0 \Leftrightarrow c > 0{,}5$$

$$\text{für } c = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0\,;\; x_3 = -2$$

اړيکي:

د $c > 0{,}5$ لپاره $f(x)$ تيک يو صفرځای لري:$P_x(\,0 \mid 0\,)$

د $c = 0{,}5$ يا د $c = 0$ لباره$f(x)$ تيک دوه صفرځايونه لري.

د$c < 0{,}5$ او $c$ د صفر سره نامساوي لپاره $f(x)$ تيک درې صفرځايونه لري.

پوښتنې

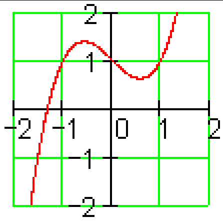
## د ټول راشنل توابعو محور غوښتکي او ګرافونه III

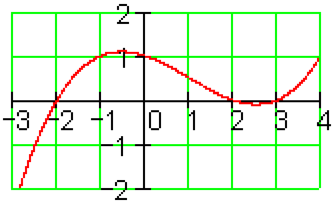
## تابع په يوه ګراف تنظيمېږي.

لومړی: هر د يوه تابع ترم سره تنظيم کړی او خپله پرېکړه په دليل کلکه کړی.

$$f_1(x) = x^3 - x + 1;\; f_2(x) = x^3 - 2x + 1$$

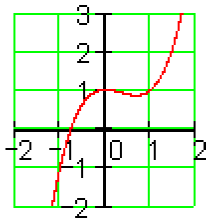
$$f_3(x) = x^3 - x^2 + 1;\; f_4(x) = \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$$

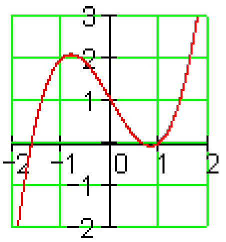


(c) ketabton.com: The Digital Library






دويم: هر هغه ځوک چې د لايسنس اخستلو لپاره ځان چمتو کوي، بايد وپوهيږي، چې د يوه بريک وهونکي موټر تمکيدني واټن په يوه وچ پاخه سرک)چې طبعأ بايد هوار وي) د عکسالعمل لار او د بريک لار څخه يوځای جوړه ده. د لاندې د موټي قانون يا لار( د درې ګوتو) څخه کيدی شي د چټکتيا v په km/h د عکسالعمل لارr او د بريک لار b په متر وشميرل شي.

د بريک لار: $b = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ همداسي $b = \frac{\left(\frac{v}{10}\right)^2}{2}$ ، د عکس العمل لار: $r = \frac{v}{10} \cdot 3$

د المان د3.3.04 راپن اخبار د اول له جولای1. Juli 2004 په وچ سره د تمځای لار په بل بريکلار شميرل کيږي.( په افغانستن کې به داخځګه وي ؟نه پوهيږم)

الف- تابع مساوات $s = f(v)$ وټاکی، د کوم سره چې د هرې تلنې د چټکتيا يا سرعت تملار شميرل کيدی شي.

ب – د لاندې تلل شوی چټکتيا $v = 0, 10, 20, 30, \ldots 50$ km/h لپاره په يوه ارزښت جدول کې د هغه هر يوه تمځای s سره يوځای کړی

پ – له دې سره د (60 ... 100 km/h) لپاره د s يو ځونور ارزښتونه وشميری او د دې تابع ګراف وکاږی.

ت – د نوې بريک نيولو قانون(المانی) سره دا تراوسه شميرل شوي ارزښتونه وشميری او دا په همغه کواوديناټ سيستم کې وکاږی او تولـه نتيجه په شننه يا کومنتار سره روښانه کړی.

دريم: داتابعورکړ شوي: $f(x) = x^3 - 0{,}5x^2 - 3x + 1{,}5\,;\ D = \mathbb{R}$

الف- وښايی: $f(x) = 0{,}5(2x - 1)(x^2 - 3)$

ب –ګراف د شوونتيا تر پولې ټيک وکاږی.

پ – د x د کوم ارزښتونو لپاره $f(x)>0$ باور لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



# شننیزه ځمککچپوهنه یا تحلیلي هندسه:

تحلیلی هندسه( وکتورهندسه هم) د هندسي یوه برخه ده، چې د هندسي پرابلمونو د حل د پاره د الجبري مرستندوی موادو ( په ټولیزه توګه له کرښیز الجبر) څخه جمتو کوي. دا په ډېرو حالتونو کې ممکن کوي، چې ځمککچیزې پوښتنکوني سوچه شمیرنیز حل کړی شو، بې له دې چې لیدوني یې مرستې ته راوبولي یعنې چې شکل څنګه برېښي یا دی.

## ۱۶ - د سطحې شننیزه ( تحلیلي) هندسه

په دې برخه کې یوځود تحلیلي ( شننیزې یا سپړنیزې) ځمککچپوهنې یا هندسي ټاکلي پرابلمونه څېړل کیږي.د تحلیلي هندسي بنسټیزه تګلار به څرګنده ( وښول ) شي، په نامه هندسي جوړښتونه، ددې هندسي شکلونو او ددې په شننیزې یا تحلیلي څرګندونویی د هندسي خویونو جوړښت بنایي.

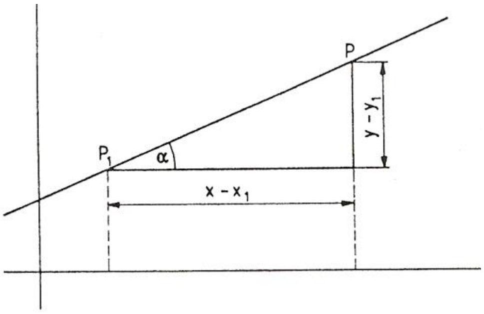
### ۱۶ . ۱ کرښه

د هندسي ټاکندو ټوټو له لارې مختلف امکانات شته دی، چې یوه کرښه یواځنی کره تعین کړاي شو. ددې په لاس ته راوړنو له امله د کرښبرابرونونو یا - مساواتو مختلفی بڼی شته دی. یوه کرښه د یوه ټکي او د هغه د لور( سمت) له لارې ټاکل کیدې شي . ( ټکی او د ټکی میلان معلوم دی) .

دلته دې( $P1(x1\ ,\ y1)$دا ټکي وي. $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ دې د جګیدو کونج،وي، چې د کرښی لور ټاکي (خ ۱۶ . ۱ ) او $P(x,y)$ په کرښه یو اووښتونی (واریابل ) ټکی دی٠

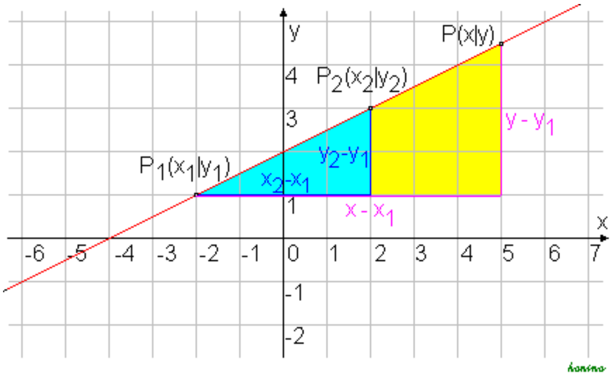
(c) ketabton.com: The Digital Library






نو د کرښې د میلان $\tan\alpha = m$ لپاره باور لري: $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

(پورته ځیره دې وکتل شي( لاددې ځیره هم په همدې موخه کښل شوې ده))




له دې ځخه لاندې لاس ته راځي:

$$y - y_1 = m(x - x_1);......................(16,1)$$

پورته د کرښې ټکی لوربرابرون

که د y په محور P1وټاکل شي د کواوردیناتو x1= 0, y1 = b سره، نو له ( ۱۶ . ۱ )سملاسي په لاس راځي: y - b = m (x - 0 ) په همدې ډول(⇔)

$$y = mx + b \qquad ( 16 . 2 )$$

دا پورته برابرون د کرښمساواتونورمال فورم (بڼه) بلل کيږي

یوه کرښه د دوه ټکو له لارې ټاکل شوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا دوه ټکي دي( P1( x1 , y1 او( P2 (x2 , y2 وي، د x1|=x2 سره ، ( څيره ش ۱۶ . ۲ ) د جګیدونکی یا تنجنت $\tan\alpha = m$ لپاره داسی دي:

m = (y - y1 ) /(x -x1)

او

m = ( y2-y1)/(x1-x2) = (y2-y1)/(x2-x1)

له کومو چی لاس ته راځي

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x \ \ - x_1};..................(16,3)$$

پورته د کرښی دوه ټکیزبرابرون

څيره ده

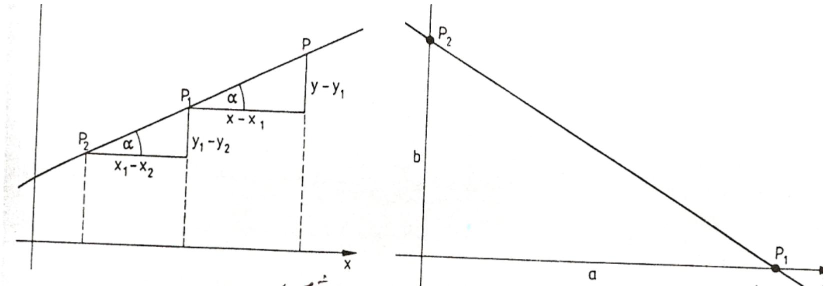



Bild 16.2 څيره

Bild 16.3 څيره

که د x - محور باندې د P1 ټکی ، د کواوردينات x1 = a |= 0 , y1 = 0 سره وټاکو او ټکیP2 دy- محور باندې د کواوردينات x1= 0, y2 = b|= 0 سره وټاکو، نو له (۱۶ . ۳) لاس ته راځي:

(y - 0 ) / ( x - a) = ( b - 0)/ (0 - a )

او له دې دا لاندې لاس ته راځي:

$$x/a+y/b = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (16,4)$$

پورته د کرښو د غوڅي برابرون

څلور پورتنی کرښمساوات ټول په x او y کی لاينيز دي.د مساوات عمومي فورم )یا ټوليزه بڼه ( داسی دی:

$$Ax + By + C = 0 \qquad (16 . 5 )$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د کرښبرابرونونو ټولیزه بڼه( عمومي فورم)
دا فورم په ځانګړې توګه دا برابرون هم خوندي لري یا په بر کی نیسي
y = y0 ( A = 0 ,B|=0)
او( x=x0(A|=0,B=0 چی د x - محور اوپه همدې ډول د y - محور ته غبرګي کرښي دي، په داسی حال کی چی تراوسه دومه لا نه ده څېړل شوې

بیلګه ۱۶ . ۱:

د کرښی برابرون یا لاینیز برابرون، چی له( P(-2 , 3 ټکي تیریږي او د جګوالي کونج $\alpha = 30°$ یی د $m = \tan\alpha \frac{1}{3}\sqrt{3}$ له امله، د ( ۱۶ . ۱ ) سره سم داسی لیکل کیږي $y - 3 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x+2)$

او نورمال فورم یي په لاندې ډول دی

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + (3 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$$

بیلګه ۱۶ . ۲ :

د لاینیزبرابرون یا دکرښوبرابرون په ټکو( P1 (3/2 ,-2 او( P2( 1 , -4کی د (۱۶ . ۳ )سره سم په لاندې ډول دي:

$$\frac{y+2}{x-\frac{3}{2}} = \frac{-y+2}{1-\frac{3}{2}}$$

له دې لاس ته راځي: $y + 2 = \frac{-2}{-\frac{1}{2}}(x - \frac{3}{2})$

نو نورمال فورم y=4x-8 لرو( **اته** ناسم، په ځای یې شپږ دي)

بیلګه ۱۶ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library



کرښه د y =-(3/2)x+1 برابرون سره د y - محور په( P1(0,1 ټکي کی غوڅوي او جګوالی یی 2/3 - دی ، دا په دې مانا چی د x - ارزښت تغیریدل په یو دy - ارزښت په 2/3 - تغیروي، په دې ډول دوم د کرښي ټکی لاس ته راځي. د بیلګی په توګه p2 (0+1 , 1-(3/ 2)=p2(1,-1/2)

(ښیره ۱۶ . ۴ لاندې کښل شوې )

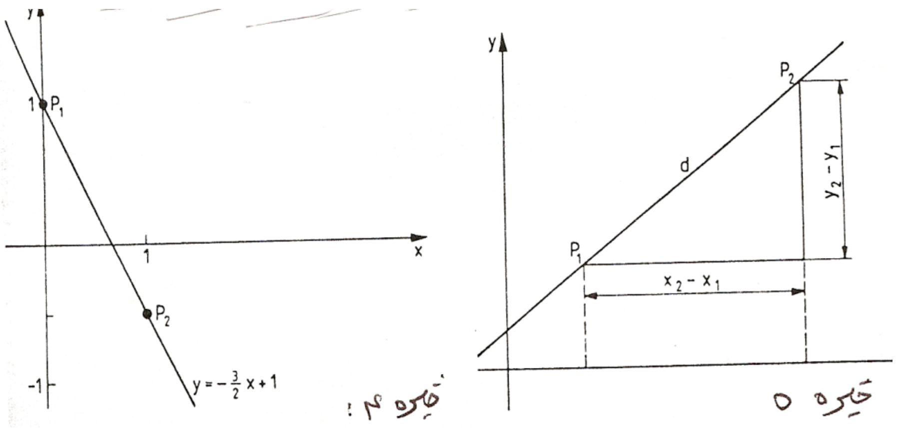
بیلګه ۱۶ . ۴ :

د کرښی د برابرونونو عمومي فورم x-2y-6 = 0 څخه دغوڅیدو فورم لاس ته راځي
x / 6 + y / 3 = 1
کرښه دکواوردینات محورونه په دې ټکو( P1(6 , 0), P2(o,-3 کې غوڅوي٠
په یوه کرښه د دوه ټکو( P1(xx,y1),P2(x2,y2ترمنځ فاصله ( که د کرښي واټن P1P2
d = وي د پیتاګوراس( فیساغورس) له جملی ( ښیره . ۱۶ . ۵ ) داسی ده

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};.........................(16,6)$$

پورته د ټکو P1 او P2 ترمنځ واټن

ښیرې ۱۶ . ۴ او - ۵




بیلګه ۱۶ . ۵ :

(c) ketabton.com: The Digital Library



د درېګوډي ABC د اړخونواوږدوالی، چی کونجټکي یی دادي( A(3,1),B(-1,1),C(2,5، په لاندې ډول دی

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-3)^2 + (5+1)^2} = \sqrt{37} = 6,08$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(-1-3)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

دوه کرښي ( نه کېمټی ) چی ( یو د بلی سره) غبرګي نه وي ټیك یو غوځټکی لري. دا چی دا ټکی په دواړو کواور دیناتو پروت دی ، نو د دواړو کواوردیناتو برابرون باید پوره کړي . په دې حالت کي د غوځټکي کواوردیناتو، د دوه لاینیزو برابرونونو سره چی دوه اوښتونې یا

ناپیژندونکی ( مجهولی ) ولري، د یوه سیستم یواځنی کره اوبیونه ترې لاس ته راځي. په ټولیزه توګه دا باور لري: که یو برابرونسیستم چی د دوه کرښو د برابرونونو څخه جوړ وي، او یو یواځنی ټاکلی حل لري، نو دواړه کرښي یو بل په دې ټکي کی سره پرې کوي.
که ناپای ډیرې اوبیونې شته وي، نو په دې حالت کی برابرون همغه یوه کرښه ښایي، که کوم اوبی ونه لري، نو کرښي یوبل سره غبرګي ځغلي ( پرتله ۱۱ . ۱ . ۲ )

بیلګه ۱۶ . ۶ :

د g1 : y = 3x-2 کرښی پروتځاي ( موقعیت) د لاندې کرښو

الف) g2: -2x+y = 1,

ب) g3: 3x -y=5, ,

پ) g4 : -x+(1/3)y=-2/3

سره څیرو

اوبیونه : د g1 برابرونونو څیره داسی بدلیږي : 3x-y=2

الف ) د برابرونونو سیستم 3x-y=2، -2x+y=1

ټیك یوه اوبنونه لري: x1=3 , y1=7

ددې څخه څرګندیږي چی ټکی( S(3 , 7 د کرښو g1 او g2 غوځټکی دی .

ب ) د برابرونونو سیستم

3x - y = 2

3 x - y = 1

(c) ketabton.com: The Digital Library



اوبی نه لري : برابرونونه يو بل ردوي يه نه زغمي . د g1 او g2 کرښی يو د بل سره غبرګي دي

پ ) د برابرونونو سيستم 3x-y=2

-x+(1/3)y=-2/3

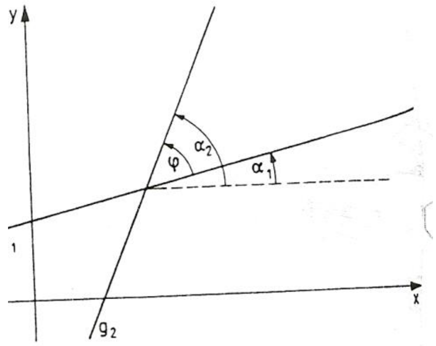
ناپای ډير ې اوبيونې يا حلونه لري. برابرونونه يو بل سره برابر يا يو بل ته ورته دي. که په ۳ ضرب شي يو همغه پورته برابرون ترې لاس ته راځي .

g1 او g2 دوه کټ مټ برابرونونه دي ۰

که د دوه کرښو

g 1 : y = m1x + b1 g2 : y = m2x + b2

غوڅکونج $\phi$ ټاکو، نو د دواړو کرښو ځګيد کونجونو $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ کمون (کمښت يا توپير)جوړوو (ځ ۱۶ . ۶ )




ځېره ۱۶ . ۶

د کرښی له برابرونونو پوهيږو $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$

د زياتون تيورم ( بنسټيزه جمله) ( برخه ۶ . ۵ ) څخه د $\tan(\alpha_2 - \alpha_1)$ لپاره ( پر تله برخه ۴ . ۵ ) باوري ده

$$\tan\phi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = (\tan\alpha_2 - \tan_1)/(1 + \tan\alpha_1 . \tan\alpha_2)$$

د کوم څخه چی د $\tan\alpha_1 = m_1 \wedge \tan\alpha_2 = m_2$ سره دا لاندې لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 . m_2} ; ........................(16,7)$$

پورته د دوه کرښو غوڅکونج دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا په دې پورې اړه لري چې ایا $\phi > 0 \vee \phi < 0$ د پورته ځېرې ۱۶ . ۶ کونج پڅ او که تیره دئ.

بیلګه ۱۶ . ۷ :

د دوه کرښو g1:y=x-1 او g2:y=(7/4)x+1 غوڅکونج لپاره له ( ۱۶ ، ۷ ) څخه لاس ته راځي:

$$\tan\phi = \frac{\frac{7}{4}-1}{1+1.\frac{7}{4}} = \frac{3}{11}; \phi = 15,255°$$

د g1 او g2 ترمنځ پڅکونج په دې ډول دی : $180-\phi = 164,745°$

د دوه کرښو یو بل ته ځانګړي حالتونه:

۱ – کرښې یوبل سره غبرګې ځغلي. نو لرو:

$$\phi = 180° \vee \phi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1.m_2} = 0$$

ګورو چې د 0 = m2 - m1 لپاره باور لري، نو m2 = m1

(دلته باور لري : $m_1.m_2 = m_1^2 \neq -1$ )

۲ - کرښې یو په بل (نیغې) ولاړې دي، نو لرو

$$\phi = 90° \Rightarrow \tan\phi = (m-m)/(1+m.m) = \infty$$

دا حالت د 1+m1.m2 = 0 لپاره منځ ته راځي،

یعنی د m2= -1/m1 لپاره (m1|=0,m2|= 0)

په کرښه( m1=0) y=y0 باندې کرښه(x=x0(m2=oe نیغه ولاړه ده

د غبرګوالی لپاره شرطونه

m2 = m1 (16, 8)

د اورتوګونالیټی Orthogonalität(یو په بل ولاړوالي) لپاره شرطونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$m2 = -1 / m1 \qquad (16 . 9)$

بیلګه ۱۶ . ۸ : دکرښی g2 برابرون دې وټاکل شي چی له ټکي( P (2,-1 تیریږي، او له کرښی g1 : y = -2x +1 سره الف ( غبرګه او ب( اورتوګونال (نیغه) څغلي اوبونه:
الف ) د g2 کرښی میلان ( جګوالی m2 = m1 = -2 )دی. پام ( ۱۶ . ۱ ) ته دکرښي g2برابرون لپاره باور لري : ( y+1=-2(x-2 همداسی y = -2x +3
ب ) د g2 کرښي میلان یاجګیدنه ده m2=-1/m1=1/2 د( ۱۶ . ۱ ) سره سم د g2 کرښي برابرون دی: y+1=(1/2)(x-2) <=> y=(1/2)x-2

بیلګه ۱۶ . ۹ :

د کرښی برابرون ټاکل کیږي چي د( P1(1/3,-1/6 ټکی تیریږي او په کرښه چی له ټکو( P2(-1,1 او( P3(-2,-1 تیریږي، ولاړه وي.
ځواب : کرښه چي له P2 ,P3 ټکو تیریږي، و ( ۱۶ . ۳ ) ته په پام لاندې برابرون لري (y-1)/(x+1)=(-1-1)/(-2+1) = 2 <=> y = 2x +3

په دې کرښی د (عمودي) ولاړې کرښی میلان یا جګوالی داسی دی:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{2}$$

د $p_1$ څخه تیریدونکی کرښي برابرون د $m_2$ میلان سره د( ۱۶ . ۱ ) له مخی دي:
y+(1/6)=-(1/2)(x-173) <=> y=-(1/2)x

بیلګه ۱۶ . ۱۰ :

د g1:2x-y-1=0او g2: 3x+2y=5 کرښو د غوڅټکي S واټن له ټکي( P(6,13خومره دی او د کرښي برابرون څنګه دی چي د کواوردینات له سرچینی تیریږي او د S او P څخه تیریدونکی کرښه باندې ولاړه کرښه وي؟
ځواب : د غوڅټکي کواوردینات د لاندې برابرونونو سیستم څخه لاس ته راځي
2x-y=1
3x+2y=5
یعنی: xS=1 , yS=1
د S او P ټکو ترمنځ واټن له ( ۱۶ . ۶ ) څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$d = \sqrt{(1-6)+(1-13)^2} = 13$$

د ( ۱۶ . ۳ ) له مخې د کرښي برابرونونه چې له S او P تيريږي دي

(y-1)/(x-1)=(13-1)/(6-1)<=>y=(12/5)x-7/5

( جګوالی: ( m = 12 / 5

له S او P تکو تيريدونکی کرښه باندې د ولاړې کرښي ميلان

m2 = -1/m = -5/12

د ( P0 (0,0څخه تيريدونکی کرښه د m2 ميلان سره د ( ۱۶ . ۱ ) له مخې لاندې برابرون لري

y-0=-(5/12)(x-0)<=> y=-(5/12)x

(c) ketabton.com: The Digital Library



# ۱۶ . ۷ تمرینونه

۱ – د هغو کرښو مساوات و ټاکئ، کومې چې له $P_1$ ټکي تیریږي او د x–محور سره کونج $\alpha$ جوړوي

a ) $P_1(2,-3)$ , $= 30°$, b) $P_1(-3,2)$ $= 45°$

c ) $P_1(-1,-4)$, $= 120°$ , d) $P_1(4,4)$ , $= 0°$

e ) $P_1(0,0)$ , $=150°$ , f ) $P_1(1,-1)$, $= 90°$

۲ –د ټولو هغو کرښو مساوات وټاکئ، کومې چې له ټکو $P_1$ او $P_2$ تیریږي

a ) $P_1(0,0)$, $P_2(3,3)$, b ) $P_1(-3,3)$, $P_2(0,0)$,

c) $P_1(1,4)$, $P_2(-3,-4)$, d ) $P_1(1,2)$, $P_2(-1,1)$,

e ) $P_1(0.1.-1)$, $P_2(-0,1,-3$, f ) $P_1(1,-1)$, $P_2(4,-2)$ !

۳ – د محورونو غوځي (لنډ : محورغوځي ) a,b د کرښې مساوات په نورمالفورم وټاکئ او همداسې د غوځټکو واټن d د محورغوځټکو سره چې یو له بل یې لري وټاکئ.

a ) a = 5 , b = 2 , b ) a = -1 , b =3 , c ) a = 2 , b = -3 , d ) a = -3 , b = -3

۴ – یو دریګوټی دا لاندې ګوډټکی لري A(-4,-1) , B(2,-2), C(1,3) . د هغو کرښو مساوات څنګه دي، په کومو چې د دریګوټیو اړخونه پراته دي او معلوم کړئ چې د دریګوټي اړخونه څومره اوږده دي؟

۵ – د لاندې کرښمساواتو نورمالفورم او برختوټینه یا –فورم څنګه دی؟

a ) $3x -5y +15 = 0$ , b) $4x -3y -18 = 0$

c ) $-4x +2y -10 = 0$ , d ) $-3x -4y +15 = 0$ ?

۶ – د کرښې $y = -(12 / 5)x +2$ پروتځای د کرښو

a ) $y+2,4x - 6 = 0$ , b ) $28x +10y = 0$ , c ) $8x + 5y =2$,

d ) $5y +12x -10 = 0$ . e ) $y +(12/5)x = 3$ , f ) $6x +2,5y = 5$

سره وڅیړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



۷ – د لاندې کرښو د غوښتکو کواوردیناتونه او غوښکونج وټاکئ.

a ) $2x + 3y = 7$  b ) $y = (1/2)x + 1$  c ) $y - x = 7$

$3x - y = 5$ ,  $y = -2x + 6$,  $y = 7$,

d ) $x/3 - y/2 = 1$  e ) $6x - 2y + 10 = 0$  f ) $y = 4x - 1$

$-x/2 + y/3 = 1$ ,  $y = 3x + 6$ ,  $y = -3x + 5$ !

۸ – کومه کرښه د کرښې $x - y = 4$ ، کرښې $3x + y = 8$ او برسیره پر دې له غوښتکې $P(0,5)$ څخه تیریږي ؟

۹ – د لاندې کوټ $A(-4,-1)$, $B(2,-2)$, $C(1,3)$ سره د دریګوډي دننه کونجونه څومره لوي دی ؟ ( پیلونه: دریکونجی وکاږی)

۱۰ – د ولاړپریوتې کرښې یا زوړندې مساوات له ټکی $P(2,0)$ څخه په کرښه $y = 2x + 1$ څنګه دی؟

۱۱ – د ولاړ کرښې مساوات په کرښه $y = 2x + 1$ باندې په ټکي $P(-1,-2)$ څنګه د

۱۲ – د کرښې $y = 2x + 1$ سره د غبرګې کرښې مساوات چې له ټکي $P(-1,-3)$ تیریږي، څنګه دي؟

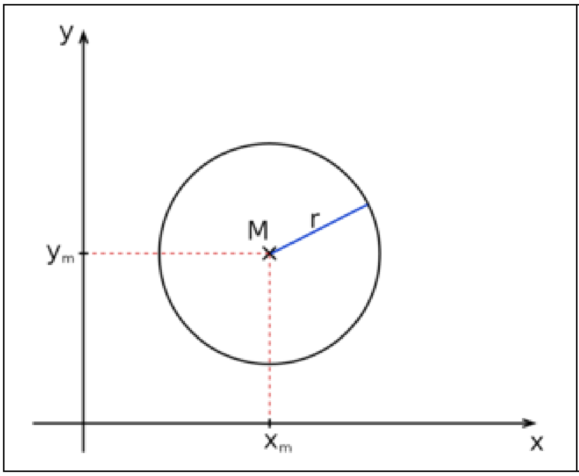
## ۲ . ۱۶ ګردی (داېره)

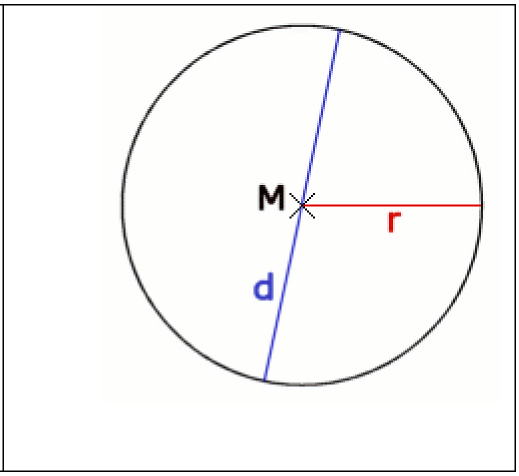
داېره(ګردۍ) د ټولو هغو ټکو ډیرۍ(سټ) ده، چې د یوه کره ځای په ځاي ټکي ، داسې په نامه منځټکی څخه ، همغه واټن ولری. واټن ته یی وړانګه وایو او په rیی په نخښه کوو.
فورمال داسې ویل کیږي یا دا پیژند ورکوو، چې داېره (ګردۍ) $k$ د د سطحې (هوارې) $E$ د ټولو ټکو ډیرۍ(سټ) ده،د کومو لپاره چې باور لري:

$$k = \left\{ X \in E \mid |\overline{MX}| = r \right\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library





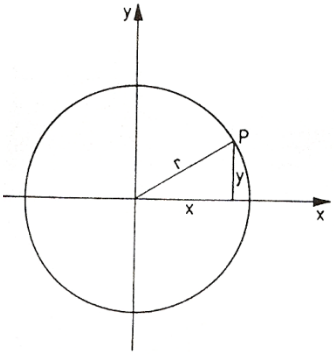




Bild 16.7 څېره،

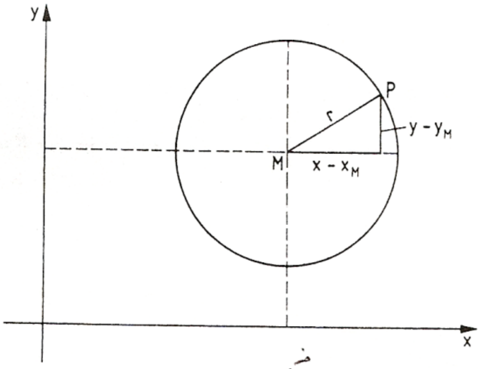



Bild 16.8 څېره

په شننيزه هندسه کې کيدی شي، چې ګردی د منځټکي $M(x_m, y_m)$ او وړانګې r سره (په هواره کې) د لاندې برابرون له مخې انځور شي.

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2$$

پورته د ګردی ټوليز برابرون

دا برابرون د پېژند او پيتاګوراس له جملې سملاسي ورکوي
د يوې ګردۍ ځانګړي حالت او د کواورديناتسيستم سره، چې منځټکی يې د کواوردينات په سرچينه پروت وي لاس ته راځي
$$x^2 + y^2 = r^2$$
که د ګردی منځ ټکی د کواورديناتسيستم ( څيره ۱۶ . ۷ ) په سرچينه پروت وي، نو د ) پيوتاګوراس د جملی له مخی ( د ګردي په خوبنه ټکي ( P(x,y لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (16 . 10)$$

د ګردی منځټکي برابرون چی د ګردي منځټکی( M(0,0او وړانګه r ده.

که د ګردي منځټکی M کواوردينات (xM,yM) ولري (ځيره ۱۶ . ۸ ) نو د ګردی د خوښی ټکي P(x) لپاره باور لري

$$(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 = r^2 \quad (16,11)$$

که د ګردي د منځټکي برابرون وي د منځټکي ($M(x_M,y_M)$ او وړانګي r سره

که په ( ۱۶ . ۱۱) کې د بينوم مربع وې شميرو او برابرون په A|=0 فاکتور ځلوو (بی له دې چی د ګردي برابرون تغير ومومي) ، پس پيژندل کيږي چی د ګرديبرابرون د څلوری يا مربع غړي په x اوy کی په فاکتور A لاينيز برابرون په x او y او ثابت غړي ( چی يوه غړي په ځيري سره يوځاي شوي ) لاس ته راوړو.

نو دا لاندې ټوليز(عمومي) جوړښت لري

$$Ax^2 + Ay^2+Cx+Dy+E = 0 . A |= 0 \quad (16 . 12 )$$

د ګردي برابرونونو(مساواتو) ټوليز فورم يا ټوليزه بڼه ۰
که د ګردي برابرون په ټوليزه بڼه يا عمومي فورم ورکړشوي او که منځټکی او وړانګه يی څرګنده کوو يا معلوموو نو د ګردي برابرون د منځټکي فورم باندې راوړو يا را اړوو. دا د څلوری پوره کولو يا مربع تکميلولو په بنسټ صورت نيسي . دوه ځيرې پورته وګوری

بيلګه ۱۶ . ۱۱ :
د ګردی برابرون دې په ټوليزه - يا عمومي توګه وي:

$$2x^2+2y^2 +4x-12y = 0$$

له دې لاس ته راځي، که په دوه وويشل شي $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

(د څلوری پوره کونه يا مربع تکميلونه) $x^2-4x+4+y^2-6y +9 = 3+4+9$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دبینوم د مربع له لارې انځورونه $(x+2)^2 +(y-3)^2 = 16$
ګردۍ منځټکی( M(-2,3 او وړانګه $r=4$ لري.

بېلګه ۱۶ . ۱۲ :
د ګردۍ برابرون ولیکی چی منځټکی یی( M(2;0 وي او په کوم چی ټکی( P(6,4-3 روت دی؟
اوبیونه : د( M(2,0 سره ( ۱۶ . ۱۱ ) داسی دی
$$(x-2)^2 + y^2 = r^2$$
د P ټکی د ګردۍ برابرون پوره کوي $(6-2)^2 +(4 - 3 )^2 = r^2$
له دې څخه د ګردۍ وړانګه په لاندې ډول لاس ته راځي: $r = 8$ او له دې سره د ګردۍ برابرون:
$$(x-2)^2 + y^2 = 64$$
ګردۍ او کرښه یو بل ته درې مختلف ځایونه لرودی شي
۱ - کرښه ګردی غوڅوي، نو له دې امله غوڅی ده( سیکانتې)
۲ – کرښه ګردۍ په یوه ټکي کی لمسوي یعنی مماس دی ( تانجنت یا جګوالی)
۳ - کرښه ټوله له ګردی دباندې پرته ده ( له ګردی تیریدونکی، لنډ : تیرېدونې)
د غوڅټکي( د تقاطع ټکي) کواوردینات باید د ګردۍ اوکرښی برابرون پوره کړي سړی د کرښي برابرون د ګردۍ په برابرونونو کی ږدي( y یا x پسی حل یا اوبۍ شوي) او په روښانه ډول یو مربع مساوات (څلوری برابرون) په x او y کی لاس ته راوړي، کوم چی په څرګند ډول ( پرتله برخه ۱۲ . ۲ ) دوه ریل اوبیونې یا ځوابونه لري، یو رییل ډبل اوبی او یا هېڅ رییل اوبی کیدی شي ولري، کوم چی له حالتونو ۱ ، ۲ ، ۳ څخه عبارت دي.

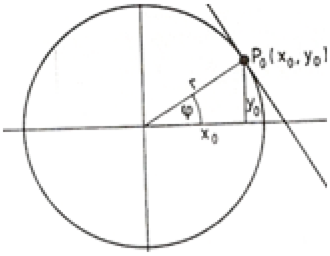
بېلګه ۱۶ . ۱۳:
کوم پروت ځایونه ګردی k چی راکړشوی: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$ اولاندې کرښی و یو بل ته لري؟
$$g1 : 2x+y=4 ,g2=2x+y=12 , g3: -x+y/2=3$$

اوبی: $g1: y=-2x+4$ که د ګردیبرابرون کی ځاي کړو نو دا برابرون لاس ته راځي
$$(x-2)^2+(-2x+4 -3)^2=5 <=> 5x-8x=0$$
ددې ځوابونو $x=0 , y=4$ او $x=8/5 , y=4/5$ سره به g1 د ګردي غوڅوونی یا ( Sekantسکانت ) وي.
که $g2: y=-2x+12$ د ګردي مساواتو کی ځاي کړو نو لاندې لاس ته راځي
$$(x-2)^2+(-2x+12-3)^2=5 <=> x^2-8x+16=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ډېل اوبونې 4 = x1,2 , 4 = y1,2 سره g2 یو تانجنت دی.
که y=2x+6 : g3 د ګردی مساوات کی ځاي کړو، نو لاندې لاس ته راځي:
$(x-2)^2+(2x+6-3)^2 <=> 5x^2+x+8=0$
دا څلوری برابرون یا مربعمساوات ځواب نه لري، نو له دې امله کرښه g3 له ګردی k دباندې پرته ده، یعنی دباندنی یا دباندونی ده.




په ګردي ($x^2+y^2 = r^2$ (خېره ۱۶ . ۹) باندې د تنجنت برابرون په ټکی( P0(x0,y0د مساوات $x_0^2+y_0^2 = r^2 >0$ سره غوښتل کیږي. تنجنت د مماس په وړانګه نیغ ولاړ دی

د مماسوړانګه دا میلان یا جګوالی لري $\tan\phi = \frac{y_0}{x_0}$ او

له دې امله د ( ۱۶ . ۹ ) له مخی د تنجنت

$m = 1/\tan\phi = -x_0 / y_0; ..........(16,13)$

د تنجنت یا جګي برابرون د ( ۱۶ . ۱ ) سره سم لاس ته راځي:
$y-y=-(x_0/y_0)(x-x_0) <=> xx_0+yy_0=x_0^2+y_0^2=r^2$

$$xx_0+yy_0 = r^2 \qquad (16.14)$$

د ګردی تنجنت باربرون په ټکي $P_0(x_0,y_0)$ په ګردي
$x^2+y^2 = r^2$

(حالتونه( P0(±r,0او( P0(0,±r په ( ۱۶ . ۱۴ ) کی ځاي ( دننه ) دي.
( خېره . ۱۶ . ۱۰ )

(c) ketabton.com: The Digital Library



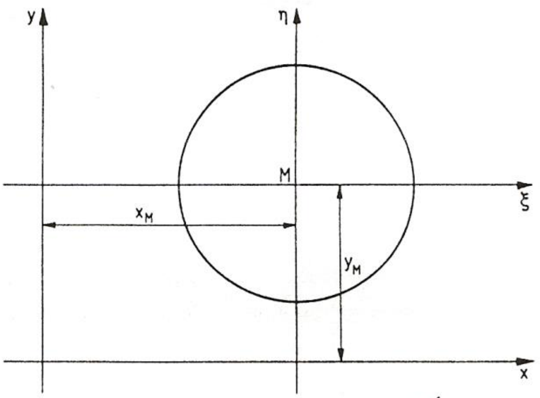


Bild 16.10

یادونه : که له دې مخ ته یا وروسته x0,y0 یا xM,yMاو $x_0, y_0$ یا $x_M, y_M$ ګورو نو کټمټ دي

بیلګه ۱۶ . ۱۴:

د دوه تنجنتو برابرون له ټکي( P1(-12,4 په ګردي $x^2+y^2=r^2$ په څه ډول دي؟
اوبیونه : لمړی د دواړو تنجنتو د مماس ټکی پیداکوو. دا باید دګردی برابرون پوره کړي . ټکی P1 باید په تنجنت پروت وي یعنی د تنجنت برابرون ( ۱۶ . ۱۴ ) باید پوره کړي. نو باور لري

$x_0 + 4y_0 = 16$ 12- او $x_0^2+y_0^2 = 16$

که دا لاینیزبرابرون د y0 په لور حل شي ، نو په x0 کي یو څلوری برابرون یا مربع مساوات لاس ته راځي

$x_0^2+(3x_0+4)^2 = 16$

همداسي $5x_0^2+12x_0=0$ د اوبیونو $x_{01}=0$ , $x_{02}=-12/5$ سره. داهم په دې پورې اړه لري

$y_{01}=4$ , $y_{02}=-16/5$

د تنجنت مساوات په ګردې، په ټکو( P01(0,4او( P02(-12/5,16/5-)د ( ۱۶ . ۱۴ ) له مخی په لاندې ډول دي

$0.x+4y=16 \Leftrightarrow y=4$

او

$(-12/5)x-(16/5)y=16 \Leftrightarrow y=(-3/4)x-5.$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ګردۍ مساوات ( ۱۶ . ۱۱ ) د منځنکي ( M(xM,yM سره د $\eta,\zeta$ -کواوردينات سيستم کی ، چی سرچينه يي په M کی پرته ده)( ؟ څيره ش . ۱۶ . ۱۰ ) لاندې فورم لري ·

$$\zeta^2+\eta^2=r^2$$

د تنجنت مساوات په ټکي $P_0(\zeta_0,\eta_0)$ کی داسی دي

$$\zeta\zeta_0+\eta\eta_0=r^2;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16,15)$$

د $\eta,\zeta$ -کواوردیناتسیستم د y,x - کواوردیناتسیستم یو غبرګ کښوول ( راکښل) دي، او د دواړو کواوردیناتسیستم کی لاندې اړیکی پرتی دي ·

$$\zeta=x-x_M,\eta=y-y_M;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16,16)$$

که برابرون ( ۱۶ . ۱۶ ) د تنجنت مساواتو( ۱۶. ۱۵)کی ځاي په ځاي شي، نو سړی بيا دا دy,x -کواوردينات سيستم ته ترانفورميرکوي( کشوي يا راکاږي) :

$$(x-x_M)(x_0-x_M)+(y-y_M)(y_0-y_M)=r^2 \quad (16.17)$$

په ټکي( Po(x0,y0 کی د ګردۍ تنجنت برابرو په ګردۍ

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$$

بيلګه ۱۶ . ۱۵:

په ګردۍ چی برابرن $x^2+y^2+16x+4y+43=0$ لري، دx - محور باندې، په ټکو

$$x_1=x_2=-5$$

سره تنجنت وکاږو( کیږدو). برابرون يی څنګه دي؟

اوبيونه : د ګردۍ برابرون د منځنکي فورم ( ۱۶. ۱۱ ) باندې بدليږي:

$$x^2+16x+64+y^2-4y+4=-43+64+4$$

$$(x+8)^2+(y-2)^2=25$$

او له دې لاس ته راځي

$$x_M=-8,\ y_M=2,\ r=5$$

د ګردۍ د دواړو ټکو ارزښتونه

$$x_1=x_2=-5$$

د دواړو ګردۍ ټکو په ګرديبرابرون کی ځايوو:

$$(-5+8)^2+(y-2)^2=25$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



له دې داسې لاس ته راغلي دy لپاره څلوری‌برابرون یا مربع مساواتو د دواړو اوردیناتو مماس ټکي لاس ته راځي : $y1 = 6 , y2 = -2$

د ( ۱۶ . ۱۷ ) سره سم د تنجنت مساوات لاس ته راځي

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(6-2)=25 \Leftrightarrow 3x+4y=9$$

او

$$(x+8)(-5+8)+(y-2)(-2-2)=25 \Leftrightarrow 3x-4y=-7$$

تمرینونه:

۱۳ – د لاندې مساواتو سره گردیمنځټکی او وړانگه وټاکی:

a ) $x^2 + y^2 = 20$

b) $x^2+y^2 +2x -4y + 1 = 0$

c ) $x^2+y^2 9y = 0$ ,

d ) $4x^2 +4y^2+32x-8y+67 = 0$

e ) $36x^2 +36y^2 -36x +24y -23 = 0$,

f ) $x^2+2x+y^2+2y = 16$ !

۱۴ – د لاندې گردیو مساوات وڅیړی

الف ) چی منځ ټکی $M(-2,-1)$ لری او له سرچینی تیریږي

ب ) هغه چی دري ټکی $P_1(3,0)$, $P_2(5,\ 5 -3)$, $P_3(\ 5 ؛3,-1)$ یی د غاړو ټ

پ ) چی وړانگه $r = 6$ لري او له ټکو $P_1(-1,11)$,$P_2(5,5)$ څخه تیریږي.

ت ) له ټکی $P_1(3,4)$ تیریږي او کرښه $y = -(4 / 3)x + 13$ په ټکي $P_2(4,3)$ لمسوي.

ټ ) چي منځ ټکی $M(2,2)$ لري او کرښه $y = -(4 / 3)x +13$ لمسوي.

ث ) چي د هغي منځټکی په کرښه $y = 3x -19$ پروت دی او له ټکی $P_1(7,-2)$ او همداسی له ټکي $P_2(11,2)$ څخه تیریږي.

۱۵ – کوم پروتخایونه گردی k چي فرمول لري $x^2+y^2-8x = 0$ او لاندي کرښي یو له بل سره لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library



a) $g: y = 2x + 1$, b) $g: y = x$, c) $g: y = x - 1$,
d) $g: y = 4$, e) $g: y = -x - 3$, f) $g: y = x - 3$ ?

۱۶ – کوم پروتخاي کرښه $3x + 4y = 25$ ګردی $x^2 + y^2 = 25$ ته لري؟

۱۷ – د تنجنت مساوات څنګه دی
الف ) په ټکي $P_0(5, y_0)$ چې په ګردی $x^2+y^2 = 169$ پروت دی،
ب ) په ټکی $P_0(x_0, -2)$ چې په ګردی $(x - 1)^2 + (y-2)^2 = 25$ پروت دی؟
۱۸ – د هغو ګردیو منځتکي پیداکړی چې وړانګه یې $r = 5$ وي، کومی چې کرښه $3x + 4y = 9$ په ټکی $P_0(-1, 3)$ کی لمسوي!
۱۹ – په ګردی $x^2 + y^2 = 25/4$ د هغه تنجنت مساوات وټاکی، کوم چې د کرښي $y = (4/3)x + 2$ سره غبرګ څغلي؟

## فنکشنونه( بلواك يا تابع)

### د فنکشن کلیمه او د فنکشن انځورونه:

غواړم چی ددې برخی په پیل کی دی کلیمي ته د لوستونکو پام راواوګرځوم: د فنکشن کلیمه کله د یواځنی څیرونی، چی په هندسه کی خورا ډیره کارول کیږي یا استعمالیږي ، کله د بلواك او بیا زیاته د فنکشن په نامه څموږ په دې کار کی بلل شوي چی موږ ورسره تراوسه د تابع د نامه لاندې هم بلد یو، څما په اند یا فکر که دا موږ څیرونه وبولو، نو موخه ور یا هدفمند به مو نومولی وي او تابع خوبې له هغې بلواک دی. په لاندې کي به وګور چی خپلواکی او بلواکی ناپیوندونکی څموږ د څیرلو متن جوړوی

پیژند ۱۵ . ۱:

(c) ketabton.com: The Digital Library



د یوې ریبلی واریابلی ( اووښتوني یا متحولي) Rریبل ارزښته فنکشن( لنډ: فنکشن یا ځیرونه ) د ریبلو ګڼونو ډېری باندې ، د یوې ډېری $D \subseteq R$ یوه یواځنی ځیرونه ده. D دپیژند ډېری نوميږي .

د ټولو ارزښتونو ډېری چې y یې د ځان لپاره غوره کولی شي، که x د پیژندډیری یا تعریف ډیري په دننه کې وځغلي، د ارزښت ډیری W بلل کيږي .

د دې قانونمندی f له مخی هر $x \in M$ یواځني یوه $y \in W$ باندې تنظيميږي یا ځیره کيږي :

$$y = f(x)$$

اوس نو x خپلواك واریابل یا اووښتونی یا مجهوله بلل کيږي یا نوميږي او y بلواك واریابل یا اووښتونی بلل کيږي، له دې امله تابع، چې موږوایو، د ځیروني هغه ځیره شوې خوا ده. ( د فنکشن یا ځیروني او تابع یا بلواک توپیر)

د فنکشن مختلف انځورډولونو په منځ کې سرې توپیروي. د دې کليمه انځورونه کې له ماتماتیکي یا شميریز سومبوليك څخه تیرید شو،خو ، مګر ددې لپاره یو پیچلی، د تشریح شکل دی، چې

په لاندې کي به ورسره بلد شو.

بیلګه ۱۵ . ۱ : هر ریبل ګڼ د همغه ریبلګڼ په نیم ور زیات ۱ باندې تنظیمیدل یا ځیره کیدل..

بیلګه ۱۵ . ۲ : هر یو منفي ګڼ به د هغه په مطلقه ارزښت او هر یو مثبت ګڼ او صفر به د هغه په مربع تنظیم شي.

د شميرپوهنی سومبولونو تر استعمال لاندې، تحلیلي ( شننیزه) انځورونه د بلواک یا فنکشن تشریح ده. دلته x او y د نورو ریبلو ګڼونو سره د بنسټیزو کارونو یا عملیو ، زیاتون، کمون ، ځل ، ویش ، او د بنسټیزو فنکشنونو له لارې ترل دي (پرتله برخه ۱۵ . ۴)

بیلګی ۱۵ . ۱ ته: $y=(x/2)+1, D=R , W=R$

بیلګی ۱۵ . ۲ ته :
$y=|x|$ لپاره $x<0$ د
$y=x^2$ لپاره $x>0$ د
دلته $D=R, W = [0,\infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پام دې وي چې په داسې حالت کې له کیڼ و ښي لور ته یا ګډوډ لوستل کیږی یعنی داسې لولو:
x دy مطلقه ارزښت سره مساوي دی ، که چیرې x له 0 کوچنی وي.

داسې لیکنو ته دې ګران لوستونکی پوره پام ولري او فکر کوم چې له اشتباه سره به نه مخامخ کیږو) . تحلیلي( شننیزه) انځورونه اکسپلیڅیت( واضح)روښانه و څرګند) explizit نومیږي، که د فنکشن برابرون ، لکه په بیلګو ۱۵ ، ۱ ۱او ۱۵ . ۲ چې په یوه د y په لور حلکیدونکي فورم مخ ته پروت وي: y =f(x)
که چیرې داسې نه وي نو د تحلیلي - یا شننیزې انځوروني شکل F(x,y)=0 دی او فنکشن ایمپلیڅیت ( ورسره ځای شوي یا وراسره تړلی implizit ) بلل کیږي یا نومیږي . د بیلګی په توګه به 2y-x-1=0 ,D=R,W=R فنکشن د بیلګي ۱۵ . ۱ یو ایمپلیڅیت انځورونه وی. دیوه فنکشن نه هره ایمپلیڅیت شنینیزه بڼه ( ایمپلیڅیت تحلیلي فورم) کیدی شي په اکسپلیڅیت شننیزه یا سپړنیزه بڼه (تحلیلي فورم) واړول شي.
د بیلګی په توګه:
که $x+y+y^5-1=0$ وي، نو دا د y په لور اکسپلیڅیت حل کیدونکی نه دی.
د یو فنکشن تحلیلي یا شننیزې انځورونی ځانګړې بڼه پارامتری څرګندونه ده. دلته تنظیم د یوه مرستندوي اووښتونې یا واریابلی t ، دا په نامه پارامتر، له لاري لارښودیږي. هر پارامتر ( له یوه پارامتر ساحی څخه)

$$x = \varphi\ (t)\ ,\ y = \Psi\ (t)$$

په یو ارزښتجوړې x,y تنظیمیږي.

بیلګه ۱۵ . ۱ ته: x=2t ,y=t+1; -oe< t <oeبه یوه پارامتري انځورونه وی
او x = t , y = t/2 + 1 به یوه بله پارامتري انځورونه وي.
زیات وخت فنکشنونه د جدول په څیر ورکول کیږي

بیلګي ۱۵ . ۱ته:

| X ....... | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 .... |
|---|---|---|---|---|---|
| Y . ..... | 2 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 ..... |

بیلګي ۱۵ ، ۲ ته:

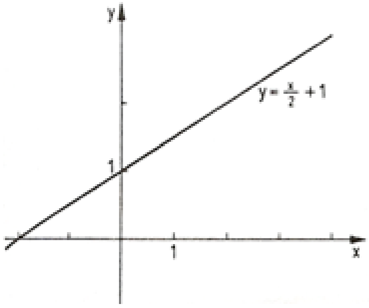
| X....-3 | 2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 ... |
|---|---|---|---|---|---|---|

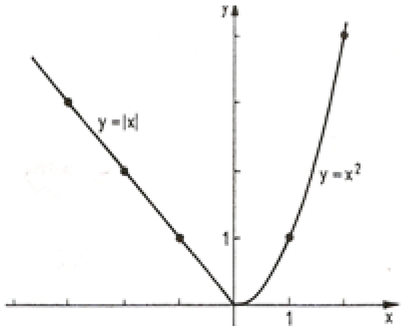
(c) ketabton.com: The Digital Library



Y....3  2  1  0  1  4  9 ...

د فنکشن گرافیکی انځورونه (د یوې ټوټې) په x,y- کواوردینات سیستم کی د یوې کږې له
لارې، د هغه فنکشن انځورونی څخه عبارت ده ، چی د واریابلو یا اووښتونوجوړې د
x,y- هواره یا سطحه کی یواځني او یواځني ټکي باندې تنظیمیږي . ځیره ۱۵ . ۱ . او
۱۵ . ۲ بیلګي ۱۵ . ۲ته بیلګي ۱۵ . ۱ته




## ۱۵ . ۲ د فنکشنونو- یا بلواکو خویونه

پیژند ۱۵ . ۲: $y = f(x)$
په ایترول ]a,b[ کی هلته او هلته یا ټیك هلته مونوتون جګیدونکی
( مونوتون لویدونکی ) دی، چیرته چی ددوه په زړه پورې ارزښتونو
$x \in [a,b] \wedge y \in [a,b]$ لپاره د$x1<x2$ سره باور ولري:
$f(x1) \le f(x2)$  $(f(x1)>f(x2))$
که د برابرونځښه باور ونه لري نو له کره یا کلکی مونوتوني غږیږو.

وبیلګي ۱۵ . ۱ ته: $y=(1/2)x+1$ په $D = R$ کی کلك مونوتون دی

و بیلګي ۱۵ . ۲ ته: $y=|x|$ د $x<0$ لپاره
او $y= x^2$ د $x>0$ لپاره
په اینتروال ) [oe,0) کي مونوتون ټیټیدونکی یا -لویدونکی
او په اینتروال [oe,0) کی مونوتون جګیدونکی دی

## پیژند یا تعریف ۱۵ . ۳ :

(c) ketabton.com: The Digital Library



په یوه انټروال [ $-a,a$ ] کی یو تعریف شوی فنکشن ( $y = f(x)$ هلته او هلته جوړه (جفت ) یا سیومتریك symetrisch, ( ناجوړه (طاق) یا نا- یا انتیسیومتریك antisymetrisch بلل کیږي چی باوري وي

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x))$$

د جوړه فنکشنونو ځیرې اکسیال یا محوري سیومتریك او y - محور ته ځغلي ) دلته هم ځیره شته ، نو تل به همغه څه لیکم؟ ۱۵ . ۳ ( ، طاق فنکشنونه و سرچینی ته منځني یا مرکزي سیومتریك ځغلي ) بیا هم ځیره او ۰۰۰۰ش ۱۵ . ۴ )

بیلګه ۱۵ . ۴

فنکشن $y= x^3 ,D= R$

یو ناجوړه یا طاق فنکشن دی :

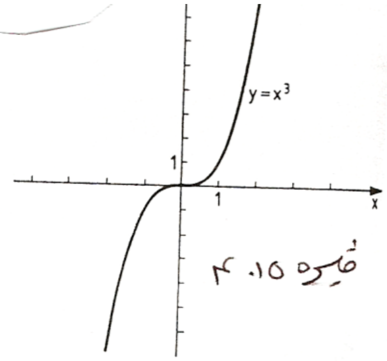
$$(-x^3) = -x^3$$

بیلګه ۱۵ . ۳ :

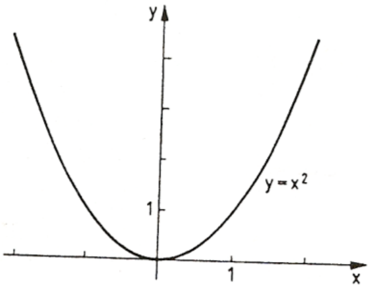
فنکشن $y=x^2,D=R$

یو جوړه یا جفت فنکشن دی:

$$(-x)^2 = x^2$$




شکره ۱۵ . ۴




شکره ۱۵ . ۳

د بیلګي ۱۵ . ۱ او ، ۱۵ . ۲ فنکشنونه نه جوړه یا جفت او نه ناجوړه یا طاق دي

پیژند ۱۵ . ۴:

( $y = f(x$ تیك هلته په D ( پیژندډیرى ده) بند یا رابند( محدود)بلل کیږي که یو $k > 0$ داسی شته وي چي دا باور ولري:

$$|f(x)| < k \quad \forall x \in D$$

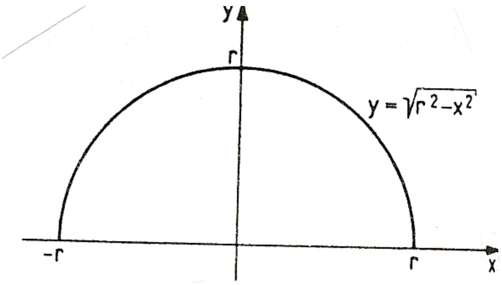
بیلګه ۱۵ . ۵:

(c) ketabton.com: The Digital Library



فنکشن $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ , $D = [\,-r , r]$
رابند یا راګیر( محدود» زه به دا له دې وروسته
بند وبولم) دی، ځکه چی لرو:نیم یوونګردی ځیره ده(

ش . ۱۵ . ۵ $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \leq r$




پیژند ۱۵ . ۵:
$y = f(x)$ پریودیکي( دوراني یا بیرته- یا تل بیرته راګرځیدونکی periodical بلل کیږي د دوران یا راګرځیدونی p سره ، که باور ولري:

$$f(x + p)= f( x )$$

د دورانی یا تل راکځیدونکو (پریودیکي) فنکشنونو تیوپیکي بیلګي تریګونومتریکي فنکشنونه دي ( پرتله برخه ۱۵ . ۳)

پیژند ۱۵ . ۶ :

ټول $x \in D$ د $f(x)=0$ سره، د فنکشن $f(x)$ صفر ځایونه بلل کیږي.

د فنکشن صفرځایونه د مساوات $f ( x ) = 0$ د حل له لارې پیدا کیږي. داحلونه د x- محور سره د فنکشن کرږې د غوځېکو x - ارزښتونه دي.

بیلګی ۱۵ . ۱ته:

د فنکشن $y = 1/2\ x + 1$ صفرځایونه د مساوات $x/2 + 1 = 0$ اوبی $x = -2$ دی (ځیره ۱۵ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library



## بیلګه۰ ۱۵ . ۶:

فنکشن $y = x^2 - 4$ دوه صفرځایونه لري:

$x^2 - 4 = 0 \iff x_1 = 2 , \quad x_2 = -2$

فنکشن $y = x^2 + 4$ صفرځایونه نه لري. ) بیا هم ځیر ۱۵ . ۶ )

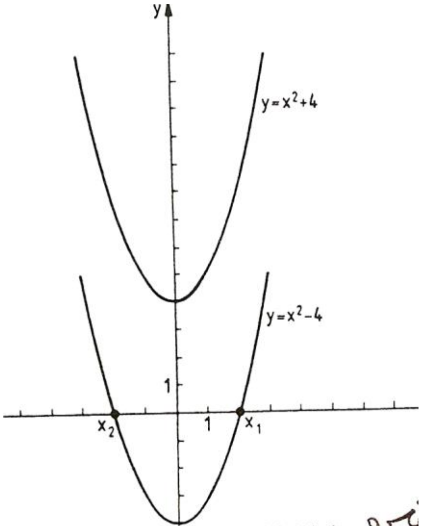



Bild 15.6

## پیژند ۱۵ . ۷:

$x \in D \quad , \quad y \in W \quad y = f(x),$

یویواځنی« یا یواځنی او یواځنی بلل کیږي، که هریو $y \in W$ د یوه $x \in D$ په واك کی وي یا هر یو $y \in W$ ته یوه $x \in D$ ځیره شوی وي، د کوم لپاره چی باور ولري: ( $y =$ $f(x)$يو یویواځنی یایواځنی او یواځنی فنکشن په ښکیدونکی دی ، دا په دې مانا چي دا یو فنکشن ( $x = g(y)$ تعریفوي، یعني په څټ یا چپه فنکشن. که دلته د اووښتونو یا واریابلو د نخښی( نخونی) سره بدلی شي، نو د په څټ فنکشن په توګه لرو $y=g(x)$ دا د فنکشن روڼنی یا وسره بده یا که غواړی مروجه ځیره ده، چی x خپلواك اوyبلواك ، دلته د x په واك کی واریابل یامجهولی یا ناپیژندونکی دي د $y=f(x)$ په څټ یا برعکس فنکشن لپاره داسی هم لیکلی شو: $y = f^{-1}(x)$

فنکشن $y = x$ د خپل په څټ فنکشن سره کتمټ(- ورته ) identic دی۰د په څټ یا برعکس فنکشن $y = f^{-1}(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



كرافيكى ښيره $y = x$ په كرښه د $y = f(x)$ هندارونه) يعنى په هنداره كى ښيرونه او لنډ يى: هندارونه) ده٠

بيلګي ۱۵ ، ۱ ته :

د فنكشن $y = f(x)= x/2 + 1$ چپه يا په ښټ فنكشن داسى دى
$y = f^{-1}(x) = 2x - 2$
سرېى $y = x/2 + 1$ د $x$ په لور اوبى كوي: $x=2y-2$ او بالاخره $x$ او $y$ سره بدلوي .
(ښيره. ۱۵ ۷ الف)
ړ

بيلګي ۱۵ . ۳ ته : فنكشن
$x \in D$ $y = x^2$ ,
ښيرره ش ۱۵ . ۳ ) په ښكيدونكى دي يا په ښكيدونكى نه دى.
هر $y \in W$ $=[0,oe]$ پورې دوه $= [-oe,oe]$ $x \in D$ اړه لري، يعنى $x=+y$ او $x=-y$
مګر $y= x^2$ كلك مونوتون جګيدونكى دى ( او په دې ډول يواځنى او يواځنى ).

د $x \geq 0$ لپاره او كلك مونوتون لويدونكى د $x < 0$ لپاره. $y=x^2, x\geq 0$
ته چپه- يا په ښټ فنكشن $y=+x$ دى، او $x < 0$ , $y = x^2$ ته چپه- يا په ښټ فنكشن $y = -x$ دى. ( ښيره ۱۵ . ۷ ب) .
په ټوليزه (عمومي) توګه لاندې جمله باور لري

جمله ۱۵ . ۱ :

كه $y = f(x)$ كلك مونوتون جګيدونكى ) لويدونكى ( وي ،نو په ښټ فنكشن $y = f^{-1}(x)$
موجود دى او دا هم كلك مونوتون جګيدونكى (لويدونكى ) دى.

۱۵ . ۳ . بنسټيز فنكشنونه

په دې برخه كي بنسټيز فنكشنونه تعريفيري. دا ټول راشنل فنكشنونه، مات راشنل فنكشنونه، پوتنځ يا په توان فنكشنونه، ايكسپوننشل فنكشنونه او لوګاريتم فنكشنونه، تريګونومتري فنكشنونه او ښيكلومتري فنكشنونه دي. دا بنسټيز فنكشنونه به د خپلوځانګړېدوله خويونو له مخى وښيرل شي. په برخه ۱۵ . ۴ كه به دفنكشن فنكشنونه (ځنځيرى - يا تړلي

(c) ketabton.com: The Digital Library



فنکشنونه) وځیړل شي. د فنکشنونو څیړل به د هغو ځانګړولو یا کرکتریستیکي خویونو له مخې هلته هم دوام ومومي، که د دیفرنشل شمیرنې کومکي مواد مو مخ ته پراته وي ( برخه ۲۰ . ۴ )

## پیژند ۱۵ . ۸ :

فنکشن

$$y=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a^2 x^2 + a_1 x + a_0, n \in N; a_i \in R, a_n \neq 0 \quad (15.1)$$

د ټولو $x \in R$ لپاره تعریف دی او $n$ - مه درجه ټولریشنلفنکشن نومیږي.دې ډول فنکشنونو ته پولینوم فنکشنونه( یا لنډ : پولینوم) هم ویل کیږي

یو ساده ټول ریشنل - ۱ - امه درجه ( $n = 1$ ) یالاینې فنکشن په لاندې ډول دی:

$$y = mx + n \qquad (15.2)$$

دلته m او n په ( ۱۵ . ۱ ) کې پارامترونو a1 او a0 په مانا دي. د لاینې فنکشنونو څیره(ګراف ) یوه کربنه ده چې په $y = n$ کې دy - محور غوڅوي $(x = 0)$ او جګوالی $m = \tan\alpha$

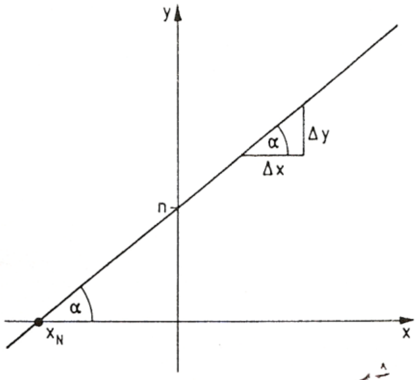


Bild 15.8

لري (څیره پورته . ۱۵ . ۸) جګوالی د y - ارزښت د تغیرد x - ارزښت تغیر سره متناسب دی: $m = \Delta y / \Delta x = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

کربنه جګیږي که $m > 0$ او لویږي یا ټیټیږي که $m < 0$ وي اوکه $m = 0$ وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library



دx - محور سره غبرګه ځغلي . کرښه ،که 0 =|m نیول شوی وي، ټيك يوصفرځاي ( = y
0 لري: $x_N = -n/m$
که را په غاړه شي چی د يوې کرښی برابرون، چی له دوه ټکو (x1,y1) او (x2,y2)
تيريږي، پيدا کړو چي يو په بل نيغي نه وي ولاړې ، نو د هغو جګوالی m او د هغو پرېټکی يا
نوره ښه غوڅيکی n په y - محور د برابرونسیستم

$$y1 = x1m + n , y2 = x2m + n$$

له مخی پيدا کوو او په دې توګه لاس ته راوړو
$$(y-y1)/(x-x1)=(y2-y1)/(x2-x1)$$

په بل پل)قدم( کی موږ ۲ -امه درجه ټولريشنل فنکشنونه يا مربع فنکشنونه رامنځ ته کوو
لکه په ( ۱۵ . ۱ ) کي $a_2 = a, a_1 = b, a_0 = c$
$y=ax^2+bx+c , a |= 0$ ( 15 .3)

د مربع فنکشنونو ځيره ) ګراف ( پارابول دی چی د هغي سيومتري محور و y - محور ته
غبرګ ځغلي. کوايفيځينت) ځله ونني يا ځليدونکی (a,b,c) د پارابول د ککرې ځاي او
بنه)فورم( ټاکی.
موږ د مربع فنکشن يو څو ځانګړي حالتونه تر ځيرني لاندې نيسو.
1. $y=x^2(a=1 ,b=0,c=0 )$ ( 15 . 4 )

نورمال پارابول، د ککرې کواوردينات: $x_s = 0 , y_s = 0$
(خ . ۱۵ . ۹)
2. $y=x^2+px+q$ (a=1 , b=p , c=q ) ( 15 . 5 )

او $x^2 + px$ ته د ځلورې - يا مربع تکميلولو ورزياتونی څخه لاس ته راځي:
$y=x^2+px (p/2)^2+q-(p/2)^2=(x+p/2)^2+q-p^2/2$ (15,5)
يو و (نسبت) ( ۱۵ . ۴ ) ته (مخامخ) د x - لور په p/2 - اودy - لور په
$q - p^2 /4$ راکښل ( رابنکل-يا راکش -) شوی نورمال پارابول د ی ، دا په دې مانا چی په )
۱۵ . ۵ ) راکښل شوی پارابول دا ککره لري:
$x_s = -p/2 , y_s =q - p^2/4$

بيلګه ۱۵ . ۷:

(c) ketabton.com: The Digital Library

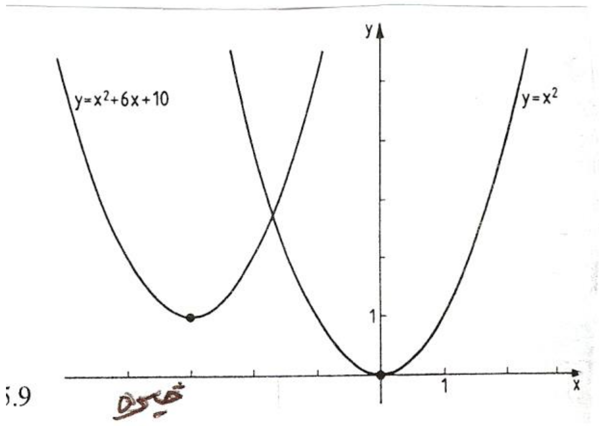


y=x²+6x+10, xs=-6/2=-3,ys=10-6²/2=1
(خ،۱۵ . ۹ )
3. y = ax² ( a|=0,b=0, c = 0 )
د ککرۍ ( سر یا رآس) کواوردینات . $x_s = 0$ , $y_s = 0$

پارابول د 1 < |a|لپاره خور، د |a|<1 لپاره پرسیدلی،د a > 0 لپاره پورته لور ته او د a 0 >لپاره کښته لورته واز دی ( خلاص دی)

بیلګه ۱۵ . ۸:
y = 2x² , y = (1/2)x², y = -2x²
(خ . ۱۵ . ۱۰)
4. y=ax²+bx+c=a[x²+(b/a )x+c/a]

د ککرۍ (رأس) کواوردینات داسی دی ( لکه په ۱۵ . ۵ کی یی چی مخ ته تللي یو)
$x_s = -b/2a; y_s = a[(c/a)-(b^2/4a^2)] = c - b^2/4a^2$




بیلګه ۱۵ . ۹:

y=-(1/2)x²+x+4 ,(a=-1/2, b=1, c=4)
دککرۍ کواوردینات:
$x_s = -1/(2.(1/2)) = 1, y_s = 4 - 12/(4.(-1/2)) = 9/2$
دا چی a = -1/2 دی، نو پارابول پرسیدلی او لاندې لور ته واز دی ( ش ۱۵ . ۱۱ )

(c) ketabton.com: The Digital Library



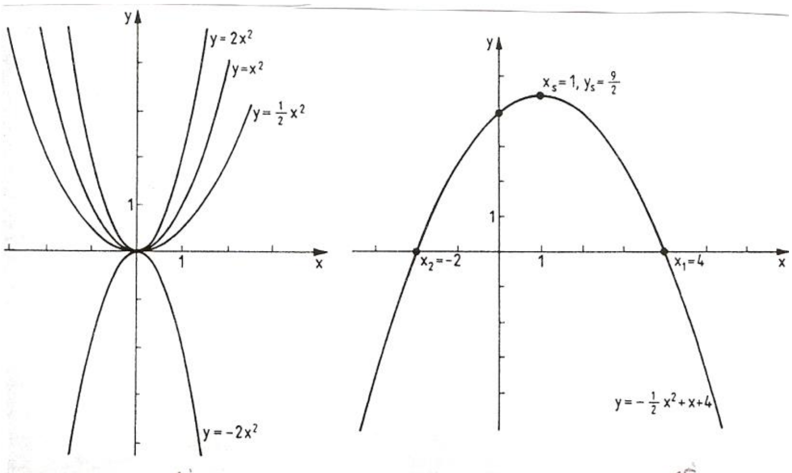



Bild 15.10 Bild 15.11

د فنکشن $y=ax^2+bx+c$ د صفرځایونه د برابرون $ax^2+bx+c=0$ اوبیونې دي.
وبیلګي ۱۵ . ۹ ته (څ. ۱۵ . ۱) :
صفر ځایونه له دې لاس ته راځي : $-(1/2)x^2+x+4=0$ ، چې دلته $x_1=4, x_2=-2$ دي۰

و بیلګي ۱۵ . ۷ (ځیره ۱۵ . ۹ ) ته:
د $x^2+6x+10=0$ یاني $x_{1,2}=-3\pm\sqrt{9-10}=-3\pm\sqrt{-1}=-3\pm i$ څخه لاس ته راځي
چې برابرون رییل صفرځایونه نه لري.

فنکشن $y=x^2$ غبرګ یا جوړه( ډبل) صفرځایونه لري یاني $x_{1,2}=0$ دي

د ټولریشنل فنکشن دریمو او لوړو درجو لپاره به د بیلګي په توګه دټولریشنلفنکشنونو بیلګي له مخې، دریمه درجه ټولریشنل فنکشن راوړو
چې د فنکشن ارزښت شمیرلو یو ځانګړی لیدوړ فورم دی، د هورنرشیما(بنه) Hornerschema، معرفي شي. ددې لپاره به د( ۱۵ . ۶ ) فورم بدل شي.

$y=[a_3x^2+a_2x+a_1]x+a_0=[(a_3x+a_2)x+a_1)x+a_0$ $x_{4,5}=-1\pm\sqrt{1-5}=-1\pm 2i$

هغه ورکړ شوي څپلواك $x_1$ پورې اړوند فنکشن ارزښت $y_1=f(x_1)$ کیدی شي له دې بڼې سره په لاندې ډول وشمیرل شي:
a3 له x1 سره ځل کیږي، دې سره a2 زیاتیږي، زیاتون یې له x1 سره ځل، او a1 ور زیاتوو، زیاتون د x1 سره ځل او a0 ور زیاتوو. دا د عملیوپرلپسی په لاندې ډول د لاندې شیما (د هورنرشیما) له لارې په لیدوړ ډول مخ ته بیایو (څرکندوو)

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| خلونه یا ضریبونه | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | |
| منحنی خلونه | $[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1$ | $(a_3x_1+a_2)x_1$ | $a_3x_1$ | |
| منحنی زیاتون | $[(a_3x_1+a_2)x_1+a_1]x_1+a_0$ $= f(x_1)$ | $(a_3x_1+a_2)x_1+a_1$ | $a_3x_1+a_2$ | $a_3$ |

ددي شیما پوهیدل لږ نابلد دی او څه فکر غواړي، خو پرې پوهیدل له نورو مساواتو څخه روښان دی.

بیلګه ۱۵ . ۱۰ : د فنکشن $y=x^3-3x^2-14x-5$ لپاره دفنکشن ارزښتونه له لاندې خپلواکو $x1 = -2$ او $x2 = 5$ څخه شمیرل کیږي.

اوبیونه ) :

که چرې ددریمی درجې ریشنلفنکشن یو صفرځاي ولري، نو کړی شو چې د پولینوم ویش له لارې دا لایني فاکتور بیل کړو( پرتله ۱۲ - امه برخه، جمله ۱۲ . ۴)

بیلګي ۱۵ . ۱۰ ته: $(x^3-2x-14x-5): (x-5) =x^2+3x+1$ له دې امله لرو:

$y = x^3-2x^2 -5 = (x^2 + 3x +1) (x-5)$

د ویش پولینومونو ځلووني ، یعنی 1 د$(x^2)$ سره ، 3 د ( x ) سره او 1 د هورنرشیما په اخره لیکه کی ولاړ دی. د هورنرشیما له لارې د صفرځاي شمیرلو سره په همغه وخت یا دمګړی کی د پولینوم ویش صورت نیسي. لرو:

$$[a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0):(x-x_1)=a_3x^2+(a_3x_1+a_2)x+[(a_2x_1+a_1)x_1+a_1]$$

او $f(x1) = 0$ چې د $(x-x_1)$سره د ځلوني له لارې دا تصدیقیدلی شي. پاتی صفر ځایونه د ځلورې – یا مربع برابرنی د اوبیونې له لارې لاس ته راځي

$$x^2+3x+1=0; x_{2,3}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=-(3\pm\sqrt{5})/2$$

په دې ډول د دریمی درجې فنکشن د درې لایني فنکشنونو د ځلونې په څیر لیکل کیدی شي ( پرتله: برخه ۱۲ جمله ۱۲ . ۵)

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$y=x^3-2x^2-14x-5 = (x-5)\left[x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right]\left[x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right]$$

د جملی۱۲ . ۵ وينا په عمومي توګه د ټولوn- م درجو ريشنل ړرزرنړ
ړړطړتظداغظطافنکشنونولپاره لاندېجمله باور ي کوي

## جمله ۱۵ . ۲ :

هر n - م درجه ټول ريشنلفنکشن n صفرځايونه لري . کيدي شي دا ټول يو له بل توپير ولري
او يادا صفرځايونه ځوځله هم رامنځ ته شي، رييل او يا جوړه کونجوګيري کملکس
کيدی شي.

که $x_1, x_2, ..., x_n$ دلاندې فنکشن n صفر ځايونه وي

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

نو دا د لاينيز فاکتورونو د ځلونې په څير په لاندې ډول ليکل کيدی شي:

$$y=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)a_n$$

د هورنرشيما په استعمال کی دې لاندې په پام کی ونيول شي:
که په يوه n - م درجه پولينوم کی يو x - پوتنځ نه وي ، نو د هغه د کوايفيځينت يا ځله ووني
لپاره دې صفر وليکل شي.

## بيلګه ۱۵ . ۱۱ :

5 - مه درجه ټول ريشنلفنکشن
$y = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80$ درې صفرځايونه $x_1 = x_2 = 2, x_3 = -2$
لري. نور صفرځايونه دې پيداکړی شي او فنکشن دې د لاينيزو فاکتورونو د ځلونې په څير
وليکل شي.

ځواب : د هورن جملی له لارې يو په بل پسی د پولينوم ويش يو پاتی 2 - مه درجه پولينوم
لاس ته راکوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 0 | -6 | -20 | -8 | 80 |
| $x_1 = 2$ | | 4 | 8 | 4 | -32 | -80 |
| | 2 | 4 | 5 | -1 | -40 | 0 = f(0 |
| $x_2 = 2$ | | 4 | 16 | 36 | 40 | .... |
| | 2 | 8 | 18 | 20 | 0=f(2) | |
| $x_3 = -2$ | | -4 | -8 | -20 | | |
| | 2 | 4 | 10 | 0=f(-2) | | |

دا پاتی پولینوم $x^2+4x+10 = 2(x^2+2x+5\ 2)$ د $x^2+2x+5 = 0$ له امله
د $x_{4,5} = -1\pm\sqrt{1-5} = -1\pm 2i$
لپاره لاندې د حل فورم لري $2x^2+4x+10 = 2(x+1-2i)(x+1+2i)$

په دې ډول ورکړشوی پولینوم په لاندې ډول لیکل کیږي
$y=2(x-2)^2(x+2)(x+1-2i)(x+1+2i)$

ددې لپاره چی د دریمي او جګو درجو د ټول ریشنلفنکشنونو یوه څیره یا تصویر ولرودی شو، نور کرکتریستیکی یا د خویونو ټکی یی د دیفرنځیالشمیرنې له لارې لاسته راوستی شو( برخه ۲۰ . ۴)

بي له دې چی د دفیرنځیالشمیر له مرستي کار واخلو ، کیدی شي چی د هغه د ناپای په هکله وینا وي وکړی شو. موږ په لیدیدونکی ډول د فنکشن د پولی کلیمه په کار اچوو، کومه به چی په برخه ۱۹ کی ټیك تعریف شي. دا د بیلګي په توګه دا مانا لري
چی $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$ سره ( f(x تل ارزښت g ته نږدې کیږي، که x د oe یانې ناپای په لور لاړشي. د

( ۱۵ . ۱ ) لپاره باورلري:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} x^n . \lim_{x\to\pm\infty}[a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}] = a_n \lim_{x\to\pm\infty} x^n$$

دا چی
xn -> oe

(c) ketabton.com: The Digital Library



د x -> ± oe لپاره که n جوړه (جفت) وي
او xn ->±oe د x ->±oe لپاره که n ناجوړه (طاق) وي، او له دې لاس ته راځي

که n جوړه او $a_n$ زیاتیز یا مثبت وي، نو لرو $\lim_{x\to\infty} y=\infty; \lim_{x\to-\infty} y=\infty$
(کږه له - oe څخه د oe په لور ځي) .

که n جوړه او $a_n$کمیز یا منفي وي، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=-\infty; \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$
کږه د - oe څخه د - oe په لور ځي).

که n ناجوړه او $a_n$ کمیز یا مثبت وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=\infty; \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$
کږه له - oe څخه د oe په لور ځي)

کهن n ناجوړه او$a_n$ کمیز وي ، نو لرو: $\lim_{x\to\infty} y=-\infty; \lim_{x\to-\infty} y=\infty$
کږه لهoe څخه د oe - په لور ځي)

**پيژند ۱۵ . ۹ :**
فنکشن

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0};..........(15,7)$$
$$n,m\in N_0; a_k,b_i\in R; Q_m\neq 0$$

مات ريشنلفنکشن بلل کيږي او د ټولو x د $Q_m(x)\neq 0$ لپاره تعريف دی.

فنکشن ( ۱۵ . ۷ ) اصلي مات نوميږي، که n<m وي او نااصلي مات دی
که $n\geq m$ ، نااصل مات فنکشن کيدی شي چي د پولينوم ويش له لارې تجزيه ( توټه ) شي او د يوه ټول ريشنلفنکشن او يوه ريښتونی ماتی برخی د زياتون په څير وليکل شي.

**بيلګه ۱۵ . ۱۲:**

فنکشن $y=\frac{2x^4-3x^3-6x^2+13x-6}{x^3-4x}$ اصل مات نه دی(n =4,m=3) په ماتلاندې فنکشن
باندې دماتباندې فنکشن ويش څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$(2x^4-3x^3-6x^2+13x-6):(x^3-4x)=2x-3$$

د $2x^2+x-6$ پاتی ( باقي ) سره. پس لرو:

$y=2x-3+(2x^2+x-6)/(x^3-4x)$.

فنکشن ( ۱۵ . ۷ ) د $x = x0$ لپاره يو صفرځاي لري، که $x = x0$ وي نو باور لري:

$P_n(x_0)=0$ مګر $Q_m(x)\neq 0$

دا د $x=x_L$ لپاره تشځاي (Lücke) لري،که وي: $P_n(x_0)=0$ او $Q_m(x)=0$

د $x=x_P$ لپاره يو قطب pol لري که وي: $P_n(x_P)\neq 0$ مګر $Q_m(x_P)=0$

بيلګه ۱۵ . ۱۳ :

فنکشن ( $y=(2x^2+x-6)/(x^3-4x$ ) د ماتباندي- او ماتلاندي فکشنونو توټي کولو وروسته په لاندې فورم د لايني فاکتورونوپه توګه ليکل کيږي.

$$y=\frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{x(x+2)(x-2)}$$

د $x=x_0=3/2$ لپاره ماتباندي صفر دی، مګر مات لاندې صفر نه دی ( صفرځای)مات لاندي- او مات باندي فنکشونه د $x = x; L = -2$ لپاره صفر دي ( تشځای)
د $x=x_{P1}=0$ او $x=x_{P2}=0$ لپاره ماتلاندي صفر او مات باندي صفر نه دی ( قطب )
که x سره د قطب ځاي ته نزدې شي، نو y د ناپای په لور ځي چې د قطبځای ( ټيك ناپای ځای بللکيږي) xpکی کره داسيمپتوټي کربني $x = xP$ ته نزدې کيږي.د يوه تشځای xL په حالت کی ماتفنکشن د نامعلومی افادې $0 / 0$ شکل غوره کوي، له دې امله د $x = xL$ لپاره تعريف نه دی.

په ناپای کی د فنکشن ځان نيونی ته:

د اصل ماتفنکشن ( $n<m$ ) د x په جګ پوتنځ يعنی $x^m$ د ماتباندي او ماتلاندي د ويش څخه لاس ته راځی:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$y=\frac{\frac{a_n}{x^{-n+m}}+\frac{a_{n-1}}{x^{-n+1+m}}+\ldots+\frac{a_1}{x^{-1+m}}+\frac{a_0}{x^m}}{b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{0}{b_m}=0$$

داچی د x تول اکسپوننتونه مثبت دي، او د x تول پوتنځونه د ناپای په لور ځي ، نو د آصل مات فنکشن ځيره د x->±oe لپاره د x - محور ته نزدې کيري. فنکشنونه

چی آصل مات نه وي نو د x->±oe لپاره داسی ځانونه نیسي، چی اصل د ماتفنکشن برخه یی د صفر په لور ځي، لکه تولريشنل برخه.
د نااصل مات فنکشن ځيره د x -> ±oe سره ، ځان خپل تولريشنلبرخی ته نزدې کوي.

بیلګه ۱۵ . ۱۴:

الف: $y = x /(x^2+1)$ د $x0 = 0$ په ځاي کی صفرځای لري. تشځاي او پول یا قطب نه لري ربیل اوبیونه نه لري) او دx -> ± oeلپاره دx- محور ($y = 0$) د اسیمپتوتی په خير لري ( ځيره. ۱۵ . ۱۲)

ب: $y=(x^2+2x-3)/(x+2)=x- 3/(x+2)$ صفرځایونه($x^2+2x-3 =0$) په $x1 =-3$ او $x1=1$کی لري . تشځای نه لري او په $x3 = -2$ کی قطب لري دا په دې مانا چی $x = -2$اسیمپتوتی دی، او د x →±oe لپاره فنکشن $y = x$ اسیمپتوتي کيږي)دا سیمپتوتی کلیمه دې په برخه ۱۶ . ۴ کی هم وکتل شي)

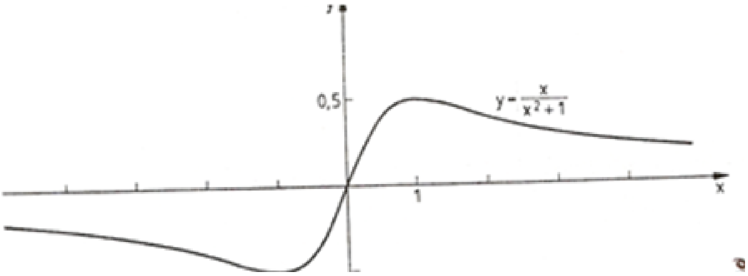
موږ په دې پسی ځانله شوي ځانګړي تول - یا مات ریشنلفنکشنونه راوړو:
فنکشن
$$y = x^n; n \in Z \setminus \{0,1\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15{,}8_a)$$

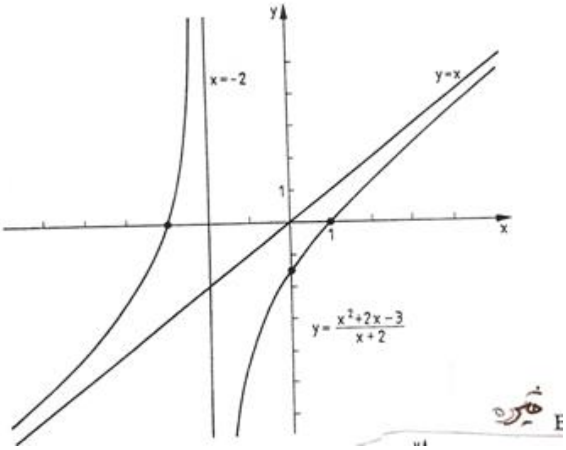
یو ځانګړی پوتنځفنکشن دی( د پوتنځ پيژند 6 ۰ ۱ )

( 15.8)د زیات یز زیاتیز یا مثبت تولګڼ n لپاره یو تولرشنل فنکشن دی. د جوړه تولګڼ nلپاره تولریشنل فنکشن دی. د تولګڼ n لپاره تولی کرې د تعریف ډیری( $D = (-$ oe,oe، د ارزښت ډیری( $W=(0,oe$او ګډ تکی ( 1,1 )، ( 0,0 ),( 1,1) لري.
( ځيره ١٤ الف ١٥ ) د ناجوړه ګڼ د n لپاره( $D = (-oe,oe$
او( $W = ( -oe,oe$ ديو ( -1,-1 ) , (0,0 ). ( 1,1) ګډ تکي دي ( ځيره ۱۵ . ۱۴ ب)۰

(c) ketabton.com: The Digital Library





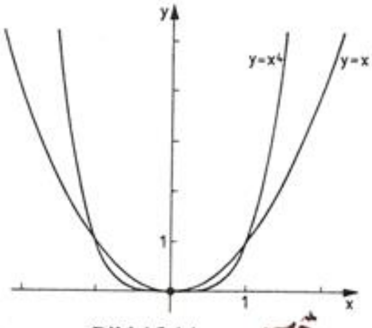




Bild 15.14a

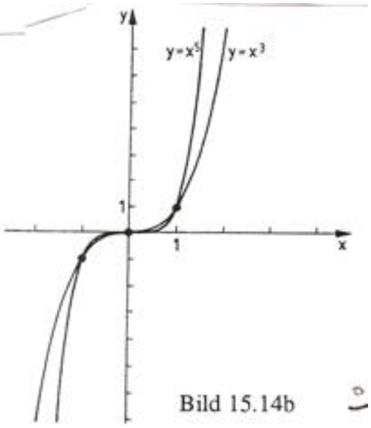



Bild 15.14b

(۱۵ ، ۸ الف) د ټول کمیز یا منفي ګڼ nلپاره یو مات ریشنل فنکشن دئ په $x = 0$ کی د یوه
قطب او $y = 0$ کی یوې اسیمپټوټی په څیر. د جوړه ګڼون یا تعداد ( کمیز) nلپاره
ټولی کرږې د پیژند ډیري

(c) ketabton.com: The Digital Library



د D = ( -oe,oe)\{0} ارزښت ډيري( W = (0,oe) لري اوګډټکي (1,1), (-1,1)

؟؟؟ ځيره ش. ۱۵/۱۵الف) .

د ناجوړه ګڼون ( کميز n)لپاره{ D = (-oe,oe)\{0} او( W=(-oe,oe او(1-،1-) ( 1,1 )

ګډ ټکی دی ( ځيره »۱۵ . ۱۵ ب) .

دوه ځيرې دي

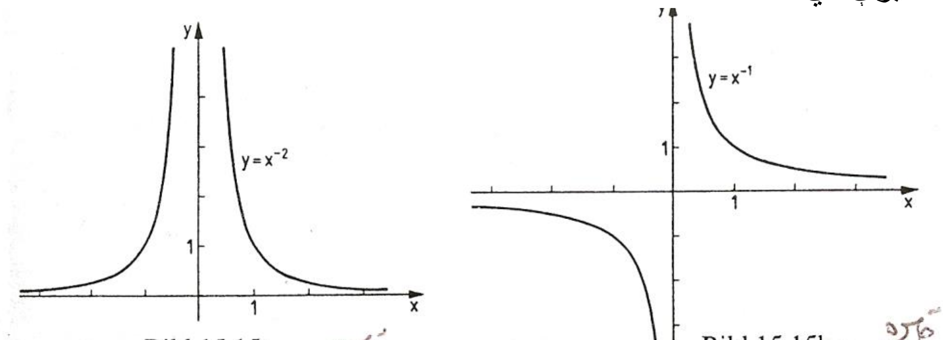



Bild 15.15a

Bild 15.15b

د پوتنځ فنکشن پر څټ بلواک لپاره دې د مونوتوني اينتروال په پام کی ونيول شي.( پرتله بيلګه( بيلګه ۱۵ .۳)

د فنکشن) لوستل له کيڼ وښي لور ته

$$y = x^n; n \in N^*\{1\}, D = [0,\infty), W = [0,\infty)$$

چپه- يا پر څټ فنکشن په لاندې ډول دی.

$$y = \sqrt[n]{x}\ ,\ n \in N \setminus \{1\}\ ,\ D = [0,\infty), W = [0,\infty) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15,8_b)$$

او ريښه فنکشن نوميږي (پيژند ۶ . ۲ دې وکتل شي) پوتنځ فنکشن کيدی شي و

ريشنل ايکسپوننت ته پراخه شي ) دلته لرو $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{n}{m}}$ (پرتله برخه ۴)

که پوتنځ فنکشنونه د ريشنل فنکشنونو لپاره راوړل شي:

$$y = x^n\ ,\ a \in Q\ ,\ x > 0 \qquad (15\ .\ 8c)$$

نو د ريښي فنکشن ( ۱۵ . ۸ ب ) دې د پوتنځ فنکشن په ځير وپوهيدی شي.

د پوتنځ فنکشن ( ۱۵ . ۸ ث) پرڅټ بيرته پوتنځ فنکشن دی.

ټوليز پوتنځ فنکشن پيژند د رييل ايکسپوننت لپاره ورکړ شوی( د رييلګڼونو کليمه دې وکتل شي برخه ۳ ۰ ۱ . ۴ کی)

(c) ketabton.com: The Digital Library



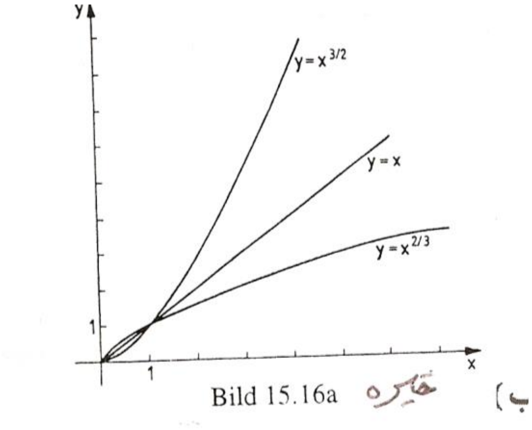
پيژند ۱۵ . ۱۰ : فنکشن

$$y = x^{\alpha} \quad , \quad \alpha \in R \; , x > 0 \qquad (15.8d)$$

پوتنځ فنکشن نوميږي

بيلګه ۱۵ . ۱۵ : فنکشن $y = x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3} \; , x \geq 0$

لاندې چپه - يا پر ښت فنکشن لرو $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2} \; , x \geq 0$




(خيره ۱۵ . ۱۶ الف)

فنکشن لاندې چپه فنکشن لري: $y = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}, \; x > 0$

خيره ۱۵ . ۱۶ ب)

$$y = x^{-2} = 1/x^2 \; , x > 0$$

يادونه : په پيژند ٤ . ۲ کی مو وويل چی يوائې د ناکميز راديکاندو ريښه ويستل کيدو اجازه لرو. دا کړنلار دي د پرښت فنکشن جوړولو برسيره د مونوتوني غوښتلو لپاره هم په پام کی وي.

د بيلګي په توګه فنکشن $y=x^3$ په ټول تعريفيدري کي مونوتون پورته کيدونکی دی او له دې امله ټول په ښت کيدونکی وی، $y = \sqrt[3]{x}$ د فنکشن $y = x^3$ په پيژنديری ( ]$D = [0,\infty$ کی پر ښت فنکشن دی، په داسی حال کی، چی د $y= x^3$ پرښت فنکشن د $D= (-\infty,0$ سره په $y = -\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{|x|}$ فنکشن کی ورکړ شوی دی( ش. ۱۵ . ۱۷) .

پيژند ۱۵ . ۱۱: فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library



$y=a^x, a>0, a\neq 1$..................................(15,9)

ایکسپوننشلفنکشن یا  په جګ( لنډ »جګ«) بلواك  بلل کیږي۰

(د ایکسپوننت یا »جګ« کلیمی لپاره دی پېژند ۴ . ۱ وکتل شي)

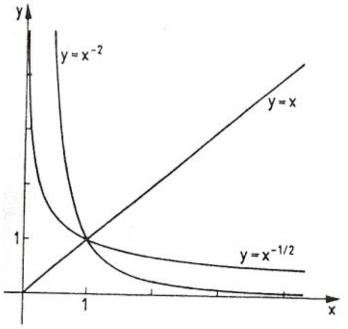



Bild 15.16b څېره

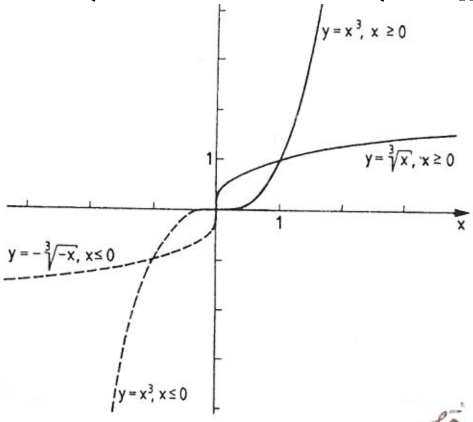
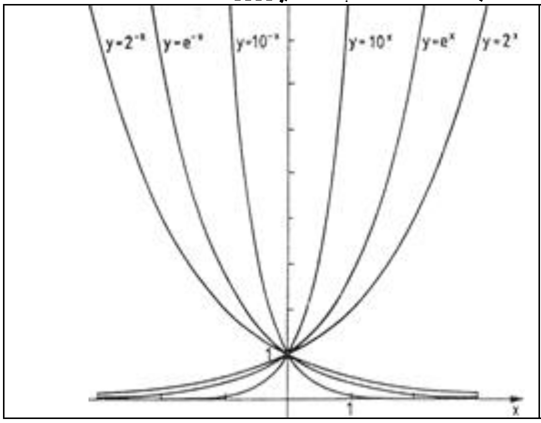



Bild 15.17 څېره

پورته دوه څیرې دې پام کې ونیول شي

فنکشن ( ۱۵ . ۹ ) لاندې پېژندډیری( D=(-oe,oe او ارزښتډیری( W=(o,oe لري. د $a^0=1$ له امله ټکی( 0,1 () د ټولو کرو ګډ ټکی دی

د a>0 لپاره ( ۱۵ . ۹ ) په کلکه مونوتونجګیدونکی دی اود x->oe سره د x - محور ته اسیمپوتیك ورنږدې کیږي. د 1>a>0 لپاره ) ۱۵ . ۹ ( په کلکه مونوتون لویږي او ځان د oe -> x سره د x -محور ته اسیمپتوتیك نژدې کوي.




کسپوننشل فنکشنونو یو څو بیلګګې
(a=2;  e ; 10 ; 1 /2 ; 1/e ; 1/1
څیره ۱۵ . ۱۸ کی انځور شوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



## پيژند ۱۵ . ۱۲ :

لاندې فنکشن د ايکسپوننشل فنکشن په ځېر فنکشن دی

$$y = \log_a x \,,\ a > 0 \,,\ a \neq 1 \qquad (15.10)$$

او لوګاريتم فنکشن بلل کيږي

د لوګاريتم کليمي لپاره پيژند ۵ . ۱ وګورئ) فنکشن ( ۱۵ . ۱۰ ) پيژندديری $D = (0.oe\ \ )$ او د ارزښتدیری $W=(-oe,oe\ \ )$ لري.

د $y = \log_a x$ کرې د ګرو $y=a^x$ هنداورنه ده، په کرښه $y=x$ ۰ تکې $(1,0)$ د ټولوکرو ګډ تکی دی ( څېره شته دی)

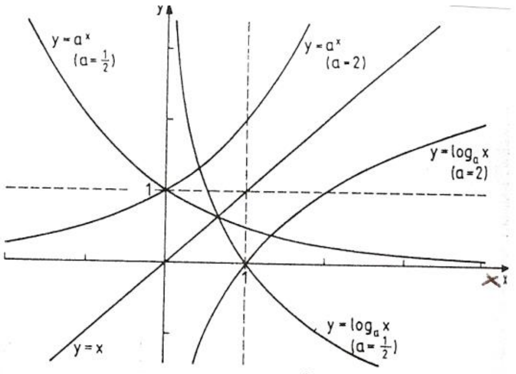



Bild 15.19 څېره

د $a>1$ لپاره( ۱۵ . ۱۰ ) کلك مونوتونجګيدونکی اود $x\to 0$ لپاره اسيومپتوتيك د کميزو - y محور ته نزدې کيږي. د $0<a<1$ لپاره ( ۱۵ . ۱۰ ) کلك مونوتون لويدونکی دی او د $x>0$ لپاره اسيمپتوتيك د زياتيز - y محور ته نږي کيږي. په شکل ۱۵ . ۱۹ کی $y=a^x$ او په ځېر يی يعني $y = \log_a x$

د $a= 2$ او $a=1/2$ لپاره انځورېږي.

په ځانګړې توګه ليکل کيږي $y = \log_{10} x = \lg x \,,\ y = \log_e x = \ln x$ ۰

## پيژند ۱۵ . ۱۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ټريګونومتري فنکشنونو يا د کونجفنکشنونو لاندې( پرتله برخه ۶ . ۳ ) دا لاندني فنکشنونه په نخښه کيږي يا راوړل کيږي.

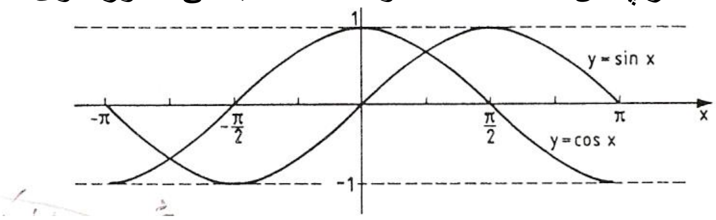
$y=\sin x ;D=R,W=[1,1]$.....................................................$(15,11_a)$

$y=\cos x; D=R, W=[-1,1]$.............................................$(15,11_b)$

$y=\tan x=\sin x/\cos x; D=R\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}, W=R, k\in Z$....$(15,11_c)$

$y=\cot x=\cos x/\sin x; D=R\setminus\{k\pi\}, W=R, k\in Z$...........$(15,11_d)$

د دې ګړوتګلار په ش. ۱۵ .۲۰الف او ۱۵ . ۲۰ ب کې انځور شوی.




ټريګونومتريکی فنکشنونه y = sin x, y = tan x , y = cotx ناجوړه فنکشنونه، او y = cos x يو جوړه فنکشن يا – بلواک دی.

ټريګونومتريکي فنکشنونه پريوديکي فنکشنونه دي( مقايسه ۱۵ . ۵)

فنکشنونه y=sinx , y= cosx پريودې $2\pi$ لري، دا په دې مانا چی لرو:

$\sin(x+2k\pi) = \sin x ; \cos(x+2k\pi) = \cos x , k\in Z$

لاندې فنکشنونه پريود $\pi$

(c) ketabton.com: The Digital Library



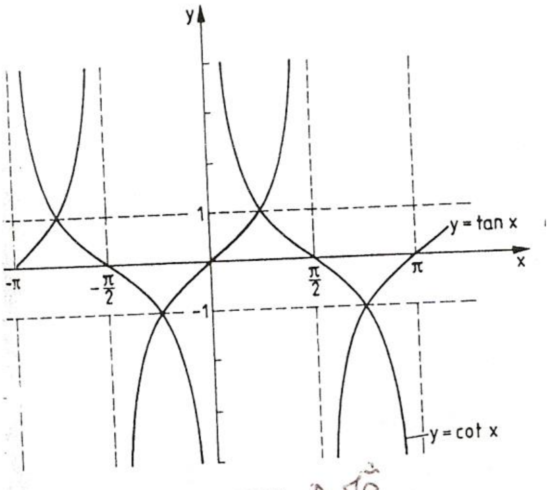



Bild 15.20b

لري y=tanx , y=cotx .دا په دې مانا چي

$$\tan(x+k\pi)=\tan x,\ \cot(x+k\pi)=\cot x,\ k\in Z$$

د تريګونومتريکي فنکشنونو صفرځايونه دي $x_k=k\pi, k\in Z$

د y=tanx, $k\in Z$, $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ y=sinx لپاره او د y = cos

y = cot x , x لپاره تانجنت - او کوتنجنت فنکشنونه قطب ځايونه(ناپاڅايونه ) لري

يعني y = tan x په $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$ , $k\in Z$ او y = cot x په $x_k=k\pi$ , $k\in Z$ کی.

د تريګونومتريکی فنکشنونو لپاره دې د هغو مونوتوني خويونه په پام کی ونيول شي. د بيلګي په توګه

فنکشن y = sin x په ايتروال $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ کي مونوتون جګيدونکی دئ او په

ايتروال $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$

کی مونوتون لويدونکی، او دا مونوتوني خويونه په يوه پوره پريودې کی تکراريږي. پس ويلی شو:

د y = sin x لپاره جګيدونکی يا پورته کيدونکی دئ

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی، او په ورته توګه

د $-\pi+2k\pi \leq x \leq 0+2k\pi$ لپاره y = cos x پورته کیدونکی دی.

د $0+2k\pi \leq x \leq \pi+2k\pi$ لپاره لویدونکی دی

د $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}+2k\pi$ لپاره y = tan x جګیدونکی دی

د $0+k\pi < x < \pi+k\pi; k \in Z$ لپاره y =cot x جګیدونکی دی ،

په تنجنت ـ او کوتنجنت فنکشنونو کی د قطب ځایونه د مونوتوني اینتروالونو ترمنځ پراته دي، له دې امله دا مونوتوني ایتروالونه واز اینتروالونه دي.د ساین فنکشنونه د بیلګي په توګه د وخت په پریودیکي انځور کی خپل استعمال مومي Schwingung (شوینګونګ: رپیدنه=. په عمومي ډول دلته خپلواك واریابل په t نخښه کیږي.فنکشن

$$y = a \sin(\omega t + \varphi) \qquad (15 . 11e)$$

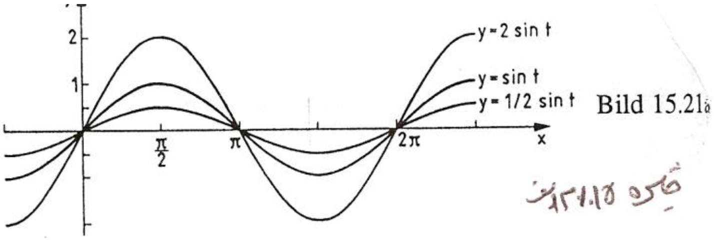
هارموني فنکشن بلل کیږي.

یادونه: فنکشن ( ۱۵ . ۱۱ت) د پیژند ( ۱۵ . ۱۵ ) له مخی تړلی یا ځنځیري فنکشن دی. موږ ترخیرني لاندې نیسو چي د سا ین فنکشن د مخه فاکتور a فاکتور د خپلواك واریابل t او زیاتوونکی د ساین فنکشن په خپلواك )Argoment( د کږېخیره باندې څه تاسیر اچوي.

۱ ـ د فاکتور a تاثیر په فنکشن y = a . sin t د y = sin t فنکشن ارزښت باندې غزول یا راکشول دی که ( |a| > 1)او یا پرسول دي که |a| < 1)وي y= a.sin x فنکشن ارزښت a ـ ځله د فنکشن ارزښت y = sin t دی، چیرته چی برسیره پردې د a < 0 لپاره په t ـ محور یوه اینه خیرونه هم منځ ته راولي ( څېره ش. ۱۵ ۲۱ الف .) (a = 2 , a = 1 / 2 په فنکشن کی a امپلیتودې Amplitude(جګوالی( نومیږي او د شوینګنګ Schwingung رپیدنی پراخوالی یا ښه : سور باندې تاثیر اچوي. خیره شته

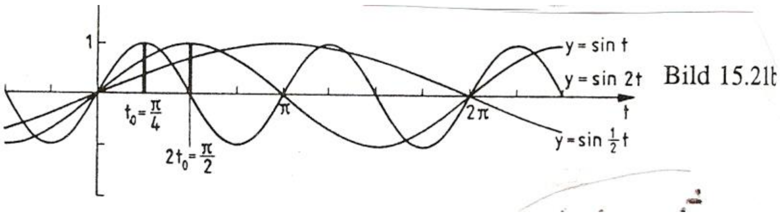
(c) ketabton.com: The Digital Library






۲ - په فنکشن $y = \sin\omega t$ کی فاکتور $\omega$ په فنکشن $y = \sin t$ باندې یو وختني غزول که $|\omega|<1$ یا پرسول که $|\omega|>1$ وي تاثیر اچوي.چیرته چی د $\omega<0$ لپاره برسیره پردې یو په y- محور اینونه هم ده.

د یوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره په فنکشن $y = \sin\omega t$ یوه فنکشن ارزښت، د$y = \sin t$ خپلواك $\omega$-ځله ، یعني $t = \omega t_0$ لپاره غوره کوي ( ځیره ؟؟ ش . ۱۵ . ۲۱ ب ).
ګردی فرکونځ ( Kreisfrequenz ) بلل کیږي، دا په پریودې تاثیر اچوي
او $y = \omega t$ پریودې $P = \frac{2\pi}{\omega}$ لري.




۳ – زیاتیدونکی $\varphi$ په فنکشن $y = \sin (t+\varphi)$ کی د $y = \sin t$ باندې دیوې راکښنی تاثیر په $|\varphi|$ له کینی لور $\varphi>0$ او یا له ښي لور $\varphi<0$ اچوي .

د یوه ټاکلي خپلواك $t = t_0$ لپاره د فنکشن $y = \sin (t+\varphi)$ سره یو فنکشن ارزښت، چی د $y=\sin t$ لپاره۰

د $\varphi$ په کچه راکښل شوی ( یعنی د یوه ځاي څخه بل ځای ته وړل شوی ) وي، یعني د $t = t_0+\varphi$ لپاره، غوره کوي.(ځیره ، ۱۵ . ۲۱ پ)

$(\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2})$

په فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$y = a.\sin(\omega t + \varphi) = a . \sin\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)$$

کی $\varphi$ چی فازې نوميږي يو د راکښلو تاثير په کړه $y = a.\sin\omega t$

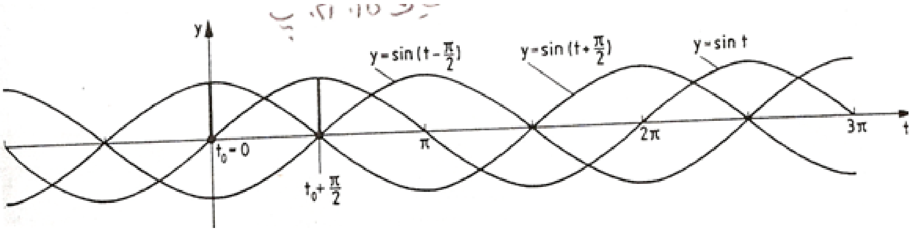
د $\frac{\varphi}{\omega}$ په اندازه اچوي.

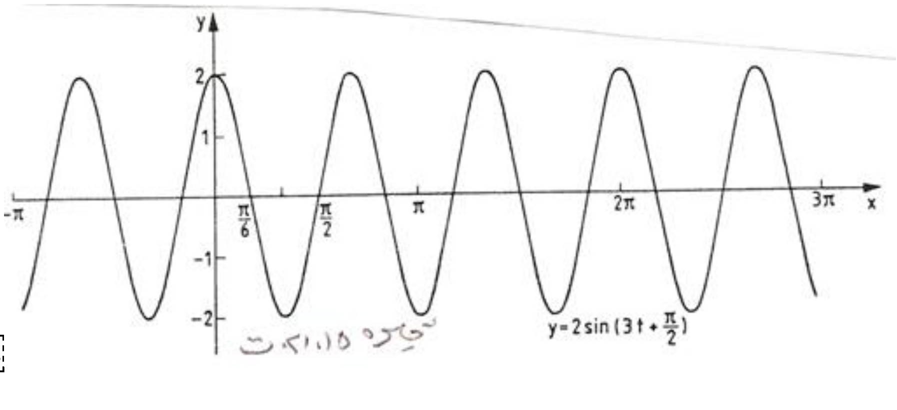
په شکل ۱۵ .۲۱ ت کی هارموني فنکشن $y = 2 . \sin\left(3t + \frac{\pi}{2}\right)$ انځوردی.

هغه امپليتود $a = 2$ لري، پريودې يې $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2}{3}\pi$ او په $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{6}$ کې

د $\sin t$ و کيڼ لورته راکښل شوی دی.

ځېره ۱۵ . ۲ پ $\varphi = \frac{\pi}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$




د تريګونومتري فنکشنونو( يوائني) په معکوسوالي يا په ځېوالي کی مو ږ په ځانګړو يو غږيزو يا مونوتوني اينتروالونو تکيه کوو، د لاندې تعريف سره مناسب

(c) ketabton.com: The Digital Library



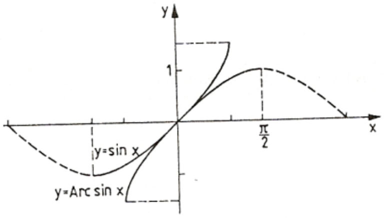
پېژند ۱۵. ۰ ۱۴ : د لاندې فنکشنونو

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $y = \sin x,$ | $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$ | $W = [-1, 1]$ | (15.12a) |
| 2. $y = \cos x,$ | $D = [0, \pi]\,,$ | $W = [-1, 1]$ | (15.12b) |
| 3. $y = \tan x\,,$ | $D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$ | $W = \mathbf{R}$ | (15.12c) |
| 4. $y = \cot x\,,$ | $D = (0, \pi)\,,$ | $W = \mathbf{R}$ | (15.12d) |

پرځې یا چپه فنکشنونه لاندې ځيکلومتريکي  فنکشنونه ( ارکوس فنکشنونه ) دي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $y = \mathrm{Arc}\sin x\,,$ | $D = [-1, 1]\,,$ | $W = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ | (15.13a) |
| 2. $y = \mathrm{Arc}\cos x\,,$ | $D = [-1, 1]\,,$ | $W = [0, \pi]$ | (15.13b) |
| 3. $y = \mathrm{Arc}\tan x\,,$ | $D = \mathbf{R}\,,$ | $W = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ | (15.13c) |
| 4. $y = \mathrm{Arc}\cot x\,,$ | $D = \mathbf{R}\,,$ | $W = (0, \pi)$ | (15.13d) |

د تريګونومتري فنکشنونو برخې په مونوتوني ایټروالونو ) ۱۵ .۱۲ الف( تر) ۱۵ . ۱۲ ت ( او د هغوي چپه ) ۱۵ . ۱۳ الف ( تر ) ۱۵ . ۱۳ ت ( په ځیرو  ۱۵ . ۲۲ تر ۱۵ ۲۵ پورې انځور دي.




شکره ۱۵.۲۲ Bild 15.22

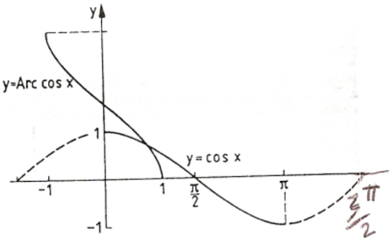
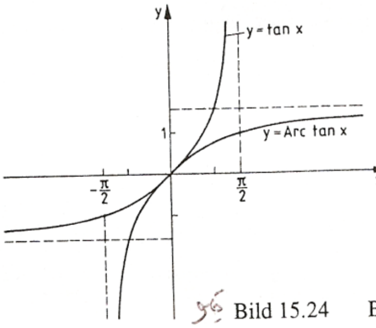



Bild 15.23 شکره




شکره Bild 15.24

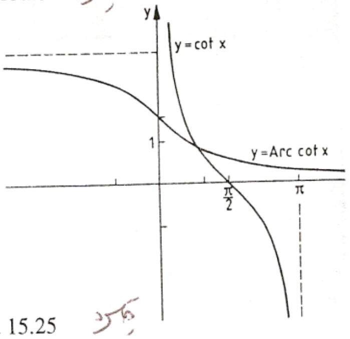



Bild 15.25 شکره

(c) ketabton.com: The Digital Library



## ۱۵ . ۴ ځنځيري ( تړلي ) فنکشنونه

### پيژند ۱۵ . ۱۵ :

د $x \in D$ لپاره يو فنکشن $z = g(x)$ د ارزښتديري W سره ورکړ شوی او برسيره
پر دې د $z \in W$ لپاره يو فنکشن $y= f(z)$ ورکړشوی، نو

$$y = f(g(x)) \qquad (15 . 14)$$

د x تړلی ( ځنځيري) فنکشن بلل کيږي٠

يادونه : يو تړلی فنکشن کيدی شي چې زياتو ځنځيرونو سره هم رامنځ ته شي: د بيلګي
په توګه $z = f(x$
د $x\in D, z\in W$ لپاره او $w=h(z)$ د $z\in W, w\in W^*$ لپاره
او $y=f(w)$ د $W^*\in W$ لپاره لرو،
نو $y=f[h(g(x))]$ هم د x يو تړلی فنکشن دی

بيلګه ۱۵ . ۱۶ :

الف : د $z = 2x + 4$ او $y = e^z$ سره تړلی فنکشن $y = e^{2x+4}$ لاس ته راځي.

ب : په تړلي فنکشن $y = \sin x^2$ کې $z = x^2$ دننني - او $y = \sin z$ د باندنی فنکشن دی. په تړلي فنکشن $y = \sin^2 x= (\sin x)^2$ کې $z = \sin x$ د ننني - او $y=z^2$ دباندنی فنکشن دی

پ : د
$z = 2x + 4$, $w = \sqrt{z}$, $y = \cos w$,
سره تړلي فنکشن $y = \cos \sqrt{2x + 4}$ لاس ته راځي

ت : په تړلي فنکشن $y=\text{Arctan}1/(x-1)$ کی $z=x-1$ دننني، $w=1/z$ منځنی او $y=\text{Arctan } w$ دباندنی فنکشن دی.

يادونه : د يوه ورکړشوي x - ارزښت لپاره د ځنځيري فنکشنونو د فنکشن ارزښت شميرنی له » دننه « پيل کيږي.

بيلګي ۱۵ . ۱۶ ته:

ب) د $x = 0.5$ لپاره دی

$z=x^2=0,5^2=0,25; y=\sin x^2=\sin z=\sin 0,25=0,24740$

او

(c) ketabton.com: The Digital Library



z=sinx=sin0,5=0,47942;y=sin²x=z²=0,47942²=0,22984

پ) د 2 = x لپاره دی z=x-1=2-1=1 ; w=1/z=1/1=1

$y=Arctanw=Arctan1=\frac{\pi}{4}$

روښانونه، تشریح:

y=f(x ) تحلیلي( شننیزه) وینا بلل کیږي، که f(x ) له رییل ګڼونواو بستیزو فنکشنونوڅخه د زیاتون، کمون،ځل، ویش، له لارو ترلی یا ناترلي( ځنځیري یا نا ځنځیري) جوړیږي

د بیلګي په توګه دې په پام کی وي، چي ماتلاندې فنکشن دې صفر نه وي د پوتنځ بنسټ او همداډول رادیکاند منفی نه شي کیدلی، او یا باید مثبت وي، چی د لوګاریتم نومروس باید مثبت وي او Arc sin f(x ) همداډول Arc cosf(x ) تیك د $x\in[-1,1]$ لپاره پیژند لري یا تعریف دي

بیلګه ۱۵ . ۱۷ :

د لاندې تحلیلي ویناو لپاره دې تعریفېدیري پیداکړی شي.

الف $y = \sqrt{x^2 - 3}$

رادیکاند باید کمیز یا منفي نه وي، چی دا مان لري:

$x^2-3 \geq 0 \iff x^2 \geq 3 \iff |x| \geq 3$ ( $x \geq \sqrt{3}$ v $x \leq -\sqrt{3}$)

نو لرو D =(-oe , - 3]∪[3 ,oe]

ب ) y=lg(x+2)+1/(3+2x-x² )( له لمړي زیاتونی کی باید Numerus > 0 نومروس وي دا په دې مانا چی : $x+2>0 \iff x>-2$ ،
پس D1=(-2,oe )
په دوم زیاتوني کی باید مات لاندې په صفر برابر نه وي ( =| 0 ) وي . د مات لاندې صفرځایونه
له $3-2x-x^2 = 0$ څخه لاس ته راځي او دي .x1=2,x2=-1
نو D2=R\(2;-1) دی

(c) ketabton.com: The Digital Library



د فنکشن تعريفډيرى بايد دا اول زياتونى او همداسى د دوم زياتونى تعريفډيري وي يعنى د

D1 او D2

غوڅډيرى: $D=D_1 \cap D_2 = (2, oe) \setminus \{2; -1\}$

پ) $y = Arc \sin (x-1)/5$ د اركوس ساين-فنكشن د تعريفډيري په پام کی نيولو سره بايد باور ولري-

$-1 \le (x-1)/5 \le 1 \Leftrightarrow -5 \le x-1 \le 5 \Leftrightarrow -4 \le x \le 6 \Rightarrow D=[-4,6]$

ت $y = 1 / \sqrt{(x^2 - 4)}$

راديكاند بايد له صفر لوي وي او مات لاندې دصفرسره نامساوي، دا په دې مانا چی

$x^2-4>0 \Leftrightarrow x^2<4 \Leftrightarrow x>2$ يا $x<-2$

نو دی $D=(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

۱۵ . ۵ تمرينونه

۱ – د ايمپليڅيت توابعو ايکسپليڅيت انځورونه ورکړئ

الف - $6x-10y=15$ ب - $x+y/3 = 5$

پ - $2x^2 -3y +3 = 0$ ت – $x^2 -4x + 2y – 8 = 0$

۲ - لاندې فنکشنونه په پارامترانځوروني ورکړ شوي

a) $x = 2t \quad y = -t^2 + 3t$ b) $x = \sqrt{t} \quad y = 2t+1$

c) $x = 1/t \quad y = 2(t-3)$ d) $x(/2)t-1 \quad y = t^2$

پارامتر له منځه يوسی او په دې سره ورکړی $y = f(x)$

۳ - لاندې فنکشنونه په مونوتوني وڅيړی، او که ممکن وي نو مونوتونی اينتروالونه په تعريفډيريو بيل (تجزيه ) کړیء يا لو ته کړ ی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



a) $y = 2x - 3$ b) $y = -2x + 3$ c) $y = x^2$

d) $y = -2x^2$ c) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = |x|$

۴ – پریکړه وکړی چی لاندې فنکشنونه جفت، ناجفت او یا له دې دووکوم نه دي:

a) $y = x$ b) $y = x + 1$ c) $y = x - 1$

d) $y = 2x^2$ e) $y = 2x^2 + 1$ f) $y = (x-1)^2$

g) $y = x^2 / 2$ h) $y = x^5$ i) $y = |x|$

۵ – د لاندې فنکشنونو د صفر ځایونه پیدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = (x-1)(x+2)$ c) $y = x^2 - x - 2$

d) $y = 2x^2 - 12x + 18$ e) $y = x^2 + 1$ f) $y = x^3$

۶ – لاندېفنکشنونو ته په ځت فنکشونونه پیدا کړی

a) $y = -2x + 3$ b) $y = x^2 + 1$, $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

c) $y = (x+1)^2$, $D = [-1, \infty)$, $W = [0, \infty)$, d) $y = x^3 / 2$, $D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$

۷ – لاندې لاینې فنکشنونه ورکړ شوي دي

a) $y = 0,4x - 1,6$ b) $y = -x + 1$ c) $y = (1/5)(3x + 1,5)$

d) $y = 2$ e) $3x - 3y - 7 = 0$ f) $4y + x = -1$

کرښې دې وکښل شي، جګوالي کونج $\alpha$ دې پیدا شي. او صفرځایونه $x_N$ و ګنی!

۸ – کومه کرښه له لاندې ټکو تیریږي

a) (2,3) (5,5) b) (1,1) او (3,7) c) (-1,0) او (-2,-3) ?

۹ – لاندې مربع بلواك یا فنکشنونه ورکړ شوي

a) $y = x^2 - 4x + 3$ b) $y = x^2 - 8x + 16$ c) $y = x^2 - 6x + 10$

d) $y = (x-5x)(x-1)$ e) $2x^2 - 10x + 12$ f) $y = 3x^2 + 6x$

g) $y = -\frac{x^2}{2} + x + 4$ h) $y = x^2 / 4 + x + 2$ i) $y = 5x^2 + 45$

د ککرې کواوردینات دې پیداشي، صفرځایونه دې وګڼل شي او پارابول دې انځور شي

(c) ketabton.com: The Digital Library



۱۰ - د لاندې تولریشنل فنکشنونه دې دورکړشوو x ارزښتونو سره د هورنرشیما د استعمال له لارې وګټل شي. فنکشنونه د ګا د خلفورم باندې انخور شي

a ) $y = f(x) = x^3 - 6x + 5; \quad x_1 = 1 , x_2 = -1$

b ) $y = f(x) = (1/2)x^3 - x^2 - (13/2)x - 5; x_1 = 1/5 \quad x_2 = 5$

c ) $y = f(x) = x^3 + 2x + 2x \quad ; x_1 = -2 \quad x_2 = 0,2$

d ) $y = f(x) = x^4 - x^3 - 28x^2 \; 32x + 40 ; x_1 = 2 \quad x_2 = 5$

e ) $y = f(x) = 2x^4 - 3x^2 - 6x^2 + 5x + 6 ; x_1 = 1,5 \quad x_2 = 2$

۱۱ - مات ریشنل فنکشنونه ورکړی شي :

a) $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$

b) $y = \dfrac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x^2 + 5x + 6}$

c) $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 + x}{x^4 - 13x^2 + 36}$

d) $y = \dfrac{x}{(x^3 + 6x^2 + 9x)(x^2 - 4x + 4)}$

e) $y = \dfrac{2x^3 - x^2 + 6x - 3}{x^2 + 3}$.

صفرځایونه دې وګټل شي، پول. تشځایونه او د $x \to \pm 8$ لپاره ځان نیونه!

۱۲ - لاندېفنکشنونو ته په څټ فنکشنونه جوړ کړی

a ) $y = 2^{x-1}$ , D = R , W=(0,œ) b ) $y = 2^x - 1$, D = R , W =(-1,œ)

c ) $y = \log_3 x$, D = (0,œ), W = R d) $y = \ln(x-1)$ , D =(1,œ), W = R

۱۳ - لاندې فنکشنونو ته مونوتوني اینتروالونه ورکړی او برخه په څپ فنکشتونه:

a ) $y = (x-1)^2$ b ) $y = x^2 - 1$ c) $y = (x+1)^2 + 1$

d) $y = x^2 - 4x + 5$ e) $y = 4x^2$ f ) $y = (1/4)x^2 + x/2 + 1$

۱۴ - تړلي فنکشنونه $y = f[h(g(x))]$ په دننه او دباندې فنکشنونو

$y = f(w) \; , w = h(z) , z = g(x \;)$

بیل ( تجزیه ) کړی( د تعریف-او ارزښتدیریوورکولو څخه کیدی شي تیرشو )

(c) ketabton.com: The Digital Library



a) $y = e^{(x+1)^2}$ b) $y = (e^{x+1})^2$ c) $y = \lg\sqrt{2x-3}$

d) $y = \sqrt{\lg(2x-3)}$ e) $y = \tan\sqrt{x-3}$ f) $y = \sqrt{\tan(x-3)}$

g) $y = \sqrt{\tan x - 3}$ h) $y = \tan\sqrt{x} - 3$ i) $y = \operatorname{Arc}\sin x^2 +$

j) $y = [\operatorname{Arc}\cos(3x-2)]^{\frac{1}{2}}$ k) $y = \ln\sin\frac{x}{3}$ l) $y = \sin\ln(x+\frac{1}{3}$

m) $y = \sqrt{\frac{1}{\sin x}}$ n) $y = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ o) $y = \frac{1}{\sin\sqrt{x}}$

p) $y = \operatorname{Arc}\cot e^{2x+1}$.

**۱۵ – ترلي فنکشنونه $y = f[h\{g(k(x))\}]$ په دباندې او دننه فنکشنونو**

$$y = f(v),\ v = h(w),\ w = (g(z)),\ z = k(x)$$

**بیل کړی (د تعریف– او ارزښتدیري باندې تیرونه کیدی شي )**

a) $y = \left[\operatorname{Arc}\cot(e^x+1)\right]^{\frac{1}{2}}$ b) $y = e^{\operatorname{Arc}\cot(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$ c) $y = \sin\left[\cos\frac{x-4}{3}\right]^2$

d) $y = \sqrt{5-\tan\sqrt{x}}$ e) $y = \cos\left[\ln(x^2-1)+1\right]$ f) $y = \log_3\left[\sqrt{2^x+1}\right]$

g) $y = e^{\tan\sqrt{7x-1}}$ h) $y = \tan e^{\sqrt{7x-1}}$.

**۱۶ – د لاندې شننیزو یا سپړنیز (تحلیلي ) افادو لپاره تعریفدیري پیدا کړی.**

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \sqrt{3-x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2-9}$

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$ e) $y = \frac{1}{x^2+x-6}$ f) $y = \ln(2x+5)$

g) $y = \operatorname{Arc}\cos(2x-4)$ h) $y = \sqrt{x}+\frac{1}{x}$ i) $y = \ln x + \frac{1}{x-1}$.

(c) ketabton.com: The Digital Library



# دریګوډیکچ یا تریګونومتري Trigonometrie

## تعریفونه

د دریګوډیکچ یا تریګونومتري دنده ده چې په هواره یا په هوا کې دریګوډي کچ کړي ، د ځانګړوبلواکو له لارې، دې په نامه تریګونومتریبلواکو. برسیره پر دې د دې په مرسته پریودیکی یعنی په منظمه فاصله پرلپسی تکراریدونکی پیښې ( موږ یې تل راګرځیدوني بللی شو ) ځیرل کیږي.
تریګونمتري تر هیپارچ ( Hipparch ۱۶۰ – ۱۲۵ له م پخوا ) پوري تعقیبیدی شي، وروسته له مصري پتولیمویس Patolemäus چي په ۱۶۸ م کال کې مړ شوی او بیا له هندي او عربو شمیرپوهانو له خوا پرمختګ ورکړ شو. له پیل دا د کاروني یا عملي کیدو د ستونځو سره مخامخ وه. دریګوډیکچ خپل کارونه په استرنومي او فزیك، د ځمککچ یا اندازه کولو، د ځمك اندازونې، نقشو علم، او ابادۍ او نوتیك Nautik ( د کیشتیو د لارو نقشه ویستلو پوهنه ) کې مومي.
د تریګونومتري مانا یا مهموالی په ځانګړي ډول په دې ریښتینوالي یا واقعیت کې نغښتې، چې د دې په مرسته د پایکرښبلواکوالی ، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي( پام دې وي، چې دا تړاو شمیرپوهینیز مفهوم لري ).

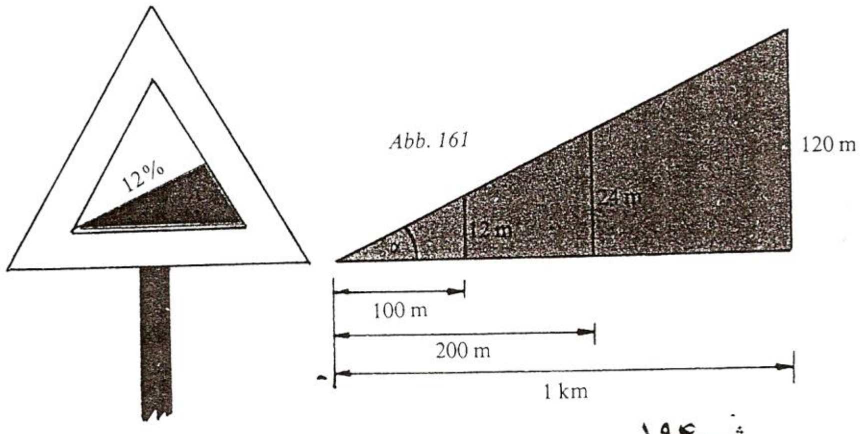
پیلبیلګه: د په مانایا مهم جګوالي یا لویدکرښو نخښه لوحی یا په بله عبارت د زوړي او پیچومی لیکتختی( دې ته دې پام وي چې ما دا کلیمی هر چیرې د زوړي او پیچومی په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چې په هغه مناسب ځای

(c) ketabton.com: The Digital Library



کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي ) وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟
پیچومی یا جګوال 12 % په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی یو جګوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیک ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جګوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توګه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جګوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جګوالي لیدیدونکي ۱۲۰ متره ته جګیږي. کتل کیري یا لیدل کیږي، چی په ورکړشوي پیچومي یا جګوالي کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځاننیونه و هوارې فاصلي ته تغیر خوري . د پایکرښو تناسب یا ځاننیونه تابث یا ځاي په ځاي پاتیږي او د په سلو کی ګڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جګوالي اوږدوالي معلومات نه

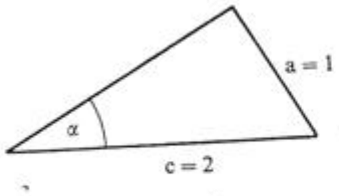


(c) ketabton.com: The Digital Library



د فنکشن لپاره ما بلواک لیکلی یعنې همغه د درې له تابع څخه مې را اخستي، چې نورو ژبو کې یې بلواک څیره ده، چې دې امله یې څیره نمونه سمه ده اوکارونه یې څیرونه ده.

ساینبلواک sinusfunktion بلیگه:

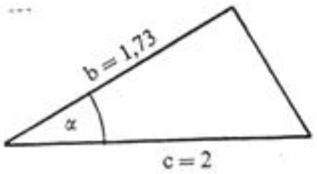



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

څیره ۱۹۶

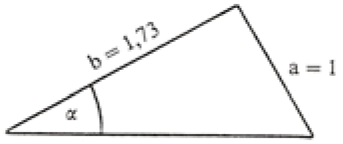
کوسایبلوک Cosinusfunktion بیلگه:




$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرته کتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$$

$\cos 30° = \frac{1,73}{2} = 0,8660$

تنجنتبلواک Tangensfunktion بیلگه:




$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروتکاتیت}}$$

څیره ۱۹۸

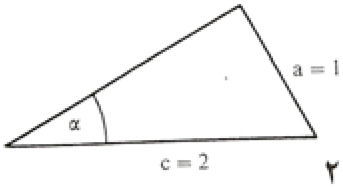
$\tan 30° = \frac{1}{1,73} = 0,577$

د کونجونو د پېښونوموونې ( دا ټول شته، خو بیاهم اړیین دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



کوسیکانسبلواک Kosekansfunktion بیلګه:




$$Cosec\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هیپوتینوزي}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

خیره ۲۰۱

$$\cos ec\alpha = \frac{2}{1} = 2$$

موږ به زیات وخت لمړنی درې یا په همدې توګه لمړنی څلور بلواکه د کارونی لپاره راونیسو یا وکاروو.

## په څوبنه دریګوډیو کی شمیرنه

سره له دې چی کونجبلواکي یواځی په ولاړکونجیز دریګوډي کی باید تعریف کیږي، خو بیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جګوالی په جوړولو کی هر دریګوډی په ولاړو برخه دریګوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اخرني هنري، د مخکني مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکربنې وینا وي د پیل دریګوډي باندې لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشوو کونجونو.

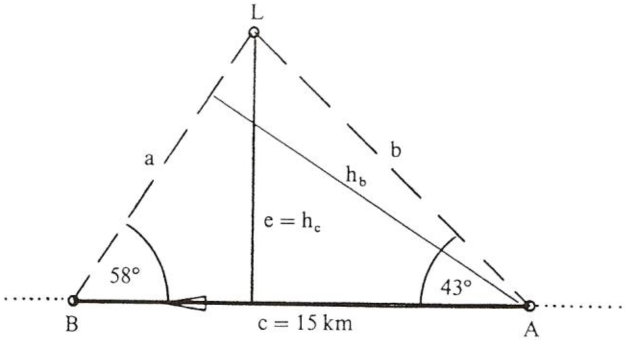
پیلبیلګه

یوه کیبنتی د رڼاډزکړي ( کله چی کښتی له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کښتي یا یو بل څه ته که یوه کښتی وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کیږي چی له لرې څرګندیږي او نورې خبر ورته لیږونکی په دې پوهیږي، چی څه پیښ شوي دي ). دلته $43° = \alpha$ د تګ په لور اندازه کیږي او له

(c) ketabton.com: The Digital Library



یوه تګ پایکربښي $c = 15$ km او کونج $\beta = 58°$ وروسته.
په دوم پړاو کې کیښتنی له پرز رڼا اور څخه څومره لرې ده؟
د A څخه و B ته د کیښتنی نژدې واټن e د پرزرڼا اور څخه څومره لرې دی؟
په A کې له اور څخه څومره لرې وه ؟




شیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 79°$ ; $\sin\beta = h_b / c$ او $\sin\gamma = h_b / b$

د $h_b$ په لور اوبیول یا حلول او په همدې وخت کې لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin\beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin\gamma$$
$$\Rightarrow c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$
$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58°}{\sin 79°} = 12{,}959 \text{ km}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin\alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin\alpha = 12{,}959 \cdot \sin 43° = 8{,}838 \text{ km}$$

$$\sin\beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin\beta} = \frac{8{,}838}{\sin 58°} = 10{,}421 \text{ km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دریګوټي اړخونو a او b په شمیرنه کې مرستندوي لویې له منځه ځي او باور لري:

## د ساین جمله :

په خوښه دریګوټي کې د اړخونو ځانښیونه یاتناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځانښیونه یا تناسب دی.

$$\sin\alpha / \sin\beta = a / b \qquad \sin\beta / \sin\gamma = b / c$$

$$\sin\gamma / \sin\alpha = c / a$$

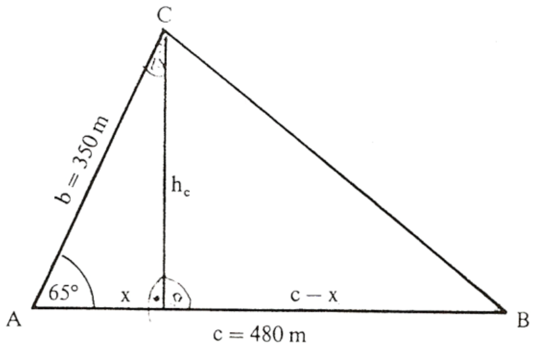
د ساین جمله په پڅ دریګوټي کي هم باورلري( تمرین دي وکتل شي ). ددې سره په یوه دریګوټي کې نه موجودې ټوټې هلته شمیرل کیږي، چیرته چې دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي.
سړی بیا څه کوي که دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغوتر منځ راګیر کونج؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



**پیلبیلګه** : په یوه د ډبروسکرو کان کی دوه ستنی $b = 350\ m$ او $c = 480\ m$ دي او یو کونج $\alpha = 65°$ ښندوي.

د B ځخه و C ته به د نښلولو ستن یا تیر څومره لوی وي ؟




شیره ۲۰۳

اوبی یا حل :

جګوالی یا جګی $h_c$ کرښه $AB = c$ په دوه ټوټو x او c-x ویشي.

دلته دی $x = b.\cos\alpha$ ،

ځکه چی $\cos\alpha = x / b$ دی . د پیتاګوراس د جلی له مخی

لرو : $h_c^2 = b^2 - x^2$

او

$$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2 .$$
$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb \cos\alpha$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د اړخونو اوږدوالی نومونی او کونج کیدی شي چي منظم بیرته راګرځیدونکی (ځیکلیکي یوناني کلیمه ده ګردی ډوله یا منظم بیرته راګرځیدونکی zyklisch ) یو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

## کوساین جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$$

په هر یوه دریګوډي کی د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زیاتون سره ترې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساین سره ځل.

د کوساین جمله د پیوتاګوراس د جملی عمومیت یا ټولیز ته هم وایي. ( تمرین ۶ مخ دې وکتل شي )

د کونجبلواك له لارې یو بل متود، د ډیرګوډي شمیرلو لپاره ، تر څو دا په دریګوډیو ویشل کیدی شي چی پوره اړخونه او کونجونه یی څرګند وي، پیدا شو.

د دې ټولو سره د څلورګوډي یو وربرسیره بل د شمیر فرمول پیداشو:

$$A = 0,5.d_1.d_2.\sin\alpha$$

چیرته چي $\alpha = w(d_1; d_2)$ وي .

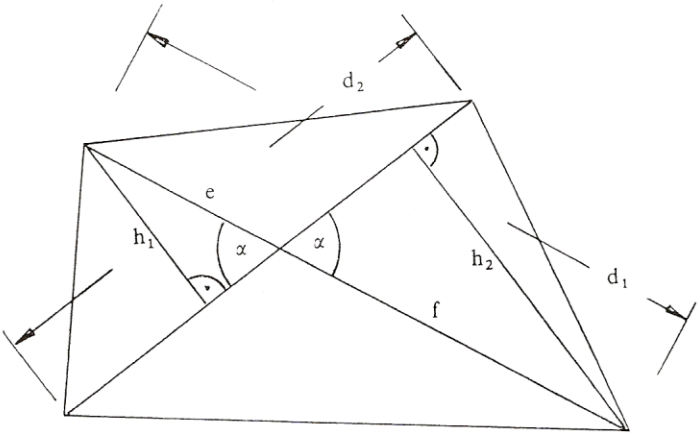
اوبی یا حل : $A=0,5(d_2h_1 + d_2h_2)$

که $d_1$ په e او f ټوټه یا تجزیه شي ، نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$h_1 = e \cdot \sin\alpha$$
$$h_2 = f \cdot \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0,5 \cdot d_2(e+f)\sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0,5 \cdot d_2\, d_1\, \sin\alpha$$




شیره۲۰۴

# د په خوښه کونجونو تریګونومتریکي بلواکي

په اخره برخه کی مو وویل، چی کونجبلواك، نه یوائی د دننه لورته تیرو دریګوډیو لپاره ، بلکه د هغو کونجونو لپاره چی له ۹۰ درجو لوي وي ، هم هدفمند (موخور ) تشریحوړ دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کړ.

دا پراختیا څنګه تصور یا د خیالوړ کیدی شي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

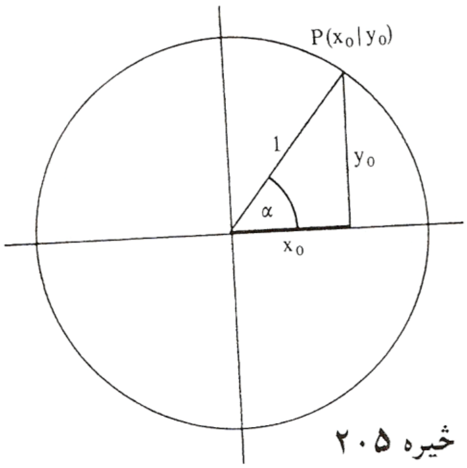


په ښه توګه داسی کیدی شي چی په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم کی یوه ګردی ووهي چی وړانګه یي ۱ یعنی یو یوون یا واحد دی ( دې ته یوونګردی ویل کیږي، ځکه چی وړانګه یی یو یوون دی) او د ګردی منځټکی او د پروت ولاړ سیستم کواوردېنات سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریګوډی، چی د هغی یو کونج د ګردی ځنتریکونج دی، یعنی کونج یی د ګردې په منځ یا ځنتر پروت دی، (ځیره ۲۰۴) کم له کمه یی یو اړخ ۱ یعنی یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریګوډی په دننه کی شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړکونجیز دریګوډي ځخه پیل کوو، چی په لمړي لمړي ځلورمه یا کوادرانت (Quadrant) کی پروت د ی . نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په ګردی ،د کونجټکی $P(x|_0y_0)$ په پام کی نیولو سره، باور لري:

$$\sin\alpha = y_0 / 1 = y_0\,,\quad \cos\alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرښی د پریوستون او یا د سیورېدرځونو په ځیر لاس ته راځي، که موږ وړانګه د یوه ټالوهونکی مړوند په ځیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چی د محورغبرګي ړنا لاندې راشی.




ځیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریګوډي کی کیدی شي چی د پیتاګوراس جمله وکارول شي:

| |
|---|
| تریګونومتریکي پیتاګوراس: |
| $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ |

چیرته چی $\sin^2\alpha = \sin\alpha \cdot \sin\alpha$ په مانا دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

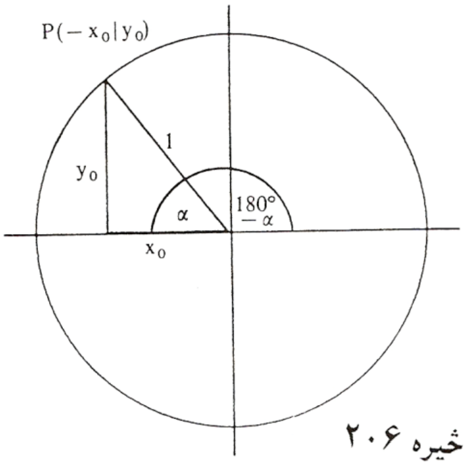


کیدی شي ، چی پوښتنه وشي چی همدا « سیوری » بیا کله لاس ته راتلی شي.
دا حالت بیاټیك هلته لاس ته راځي، چی وړانګه د منفي $x$ –محور سره یو کونج $\alpha$ جوړ کړي، یعني ښنتریکونج یی $180° - \alpha$ وي.
د « سیوروڅیرو » ښخه لاس ته راځي:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

ځکه چی دا سیوری همغومره اوږد دی لکه د مخه، مګر اوس له صفر پیل مخامخ (منفی) لور ښایي.




شیره ۲۰۶

په ورته توګه لاس ته راځی :

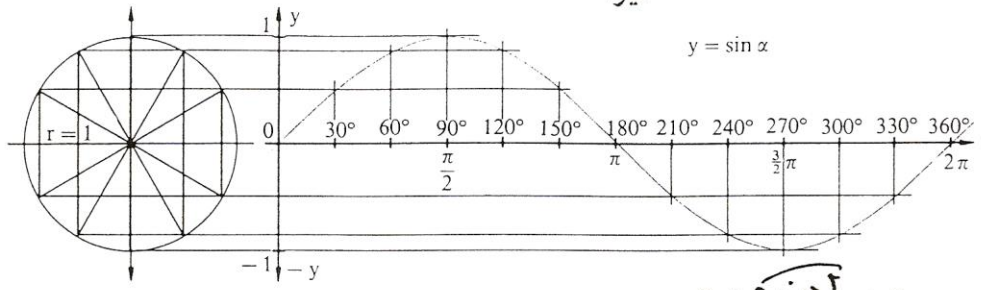
$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(360° - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

د کونج $\alpha$+360° لپاره بیرته د سرچیني کونج اړیکی لاس ته راځي: همدا ډول د $\alpha$+720 لپاره اوهمداسی نور. په دې توګه د په خوښه کونجفنکشنونو یا کونجبلواکو لپاره د ساین او کوساین بلواك تعریف دي.
د $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ له امله ( مقایسه مخ |٥| ) دا د تنجنت بلواك لپاره هم صدق کوي. له دې امله لاندې د بلواکګرافونه لاس ته راځی

(c) ketabton.com: The Digital Library

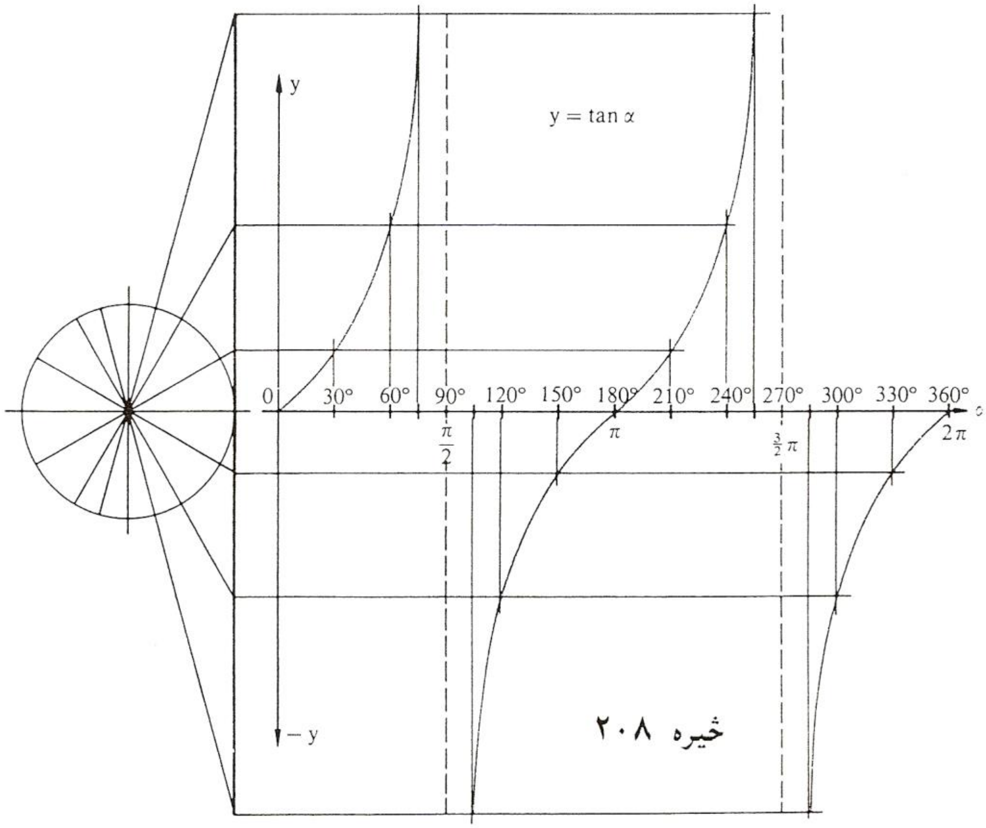


شیره ۲۰۷




Die **Sinuskurve**: $y = \sin x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1;\ 1]$

د ساین کږه

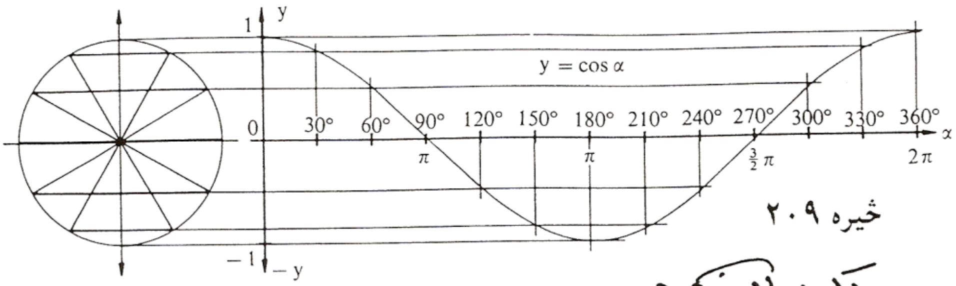



Die **Tangenskurve**: $y = \tan x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

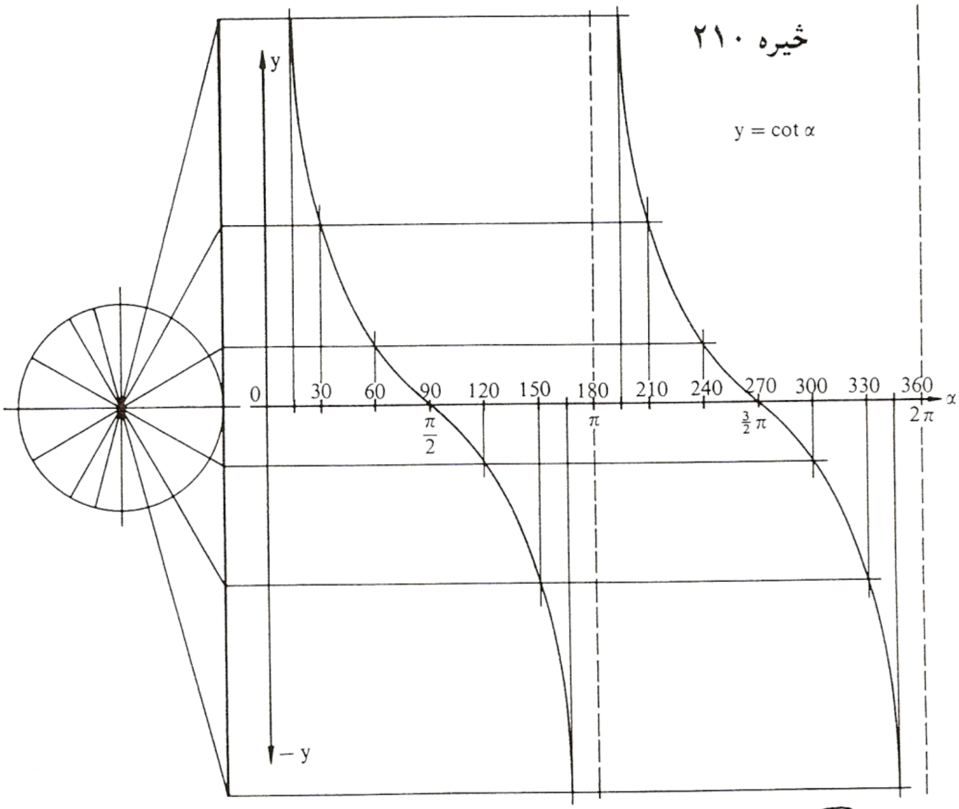
د تنجنت کږه

(c) ketabton.com: The Digital Library






Die **Kosinuskurve**: $y = \cos x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$




Die **Kotangenskurve**: $y = \cot x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

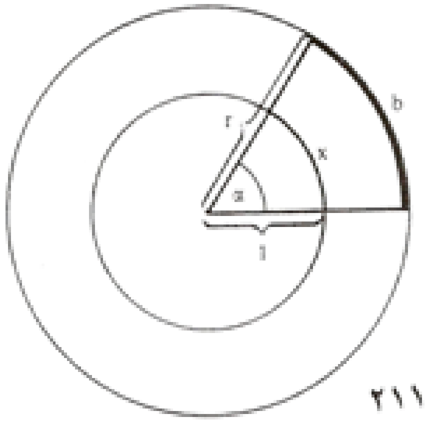
(c) ketabton.com: The Digital Library



## لینده اندازه (لینده کچ ) Das Bogenmaß

په زره درجه د کونجکچ یا – اندازې سره بلد یو ( دمخه ولیدل، چی ۳۶۰ درجی پوره گردی بنایي. هغه، چی لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده ، چی گردی په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دواړو کچیوونونو یا کچواحدونو کی کډ دي، چی په گنهونو اندازه کیږي، بی له کچ یوون ارزښتډیری ریبلگنهونه دي، په داسی حال کي چی وتل گنهونه ( = د تعریف ډیري گنهونه ) یو یوون یا واحد ( درجه یا گون ) لري. دا په کارونه یا عمل کی موږ زیات وبنت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندې کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.

کونج لویي په واقعیت کی یوون «راد ( rad ) » لري، مگر دا په کارونه یا عمل کی کیدی ونه لیکل شي یا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته مو نه راهڅوي. دا کونجکچونه چی د کونج لپاره په تریگونومتریکی بلواکو کی اینبودل کیږی ( د بیلگي په توگه sin ) ارگومنت ( Argument تعریفډیری ) بلل کیږي. په تعریفډیري کی کیدی شي چی نوې درجه ، زره درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چي په جیښمیري کی همغه مودوس په کار اچول شوي دی( راتلونکی دې وکتل شي )




شیره ۲۱۱

(c) ketabton.com: The Digital Library



په برخه ګردیبرخوکی وښوول شو ( ګردیبرخی د مخه څیړل شوي دي ) چې هر کونج پورې یوه ګردبرخه یا ګردۍ لینده اړه لري، نو ټولې ګردۍ پورې ۳۶۰ درجې کونج یا $2\pi r$ اړه لري، یوه کونج ∝ پورې بیا یوه لینده b اړه لري، کومه چې په چاپیرۍ ځانګړې همداسې نیسي لکه په پیل کې ∝ و ۳۶۰ درجو ته . دلته ګردیګڼ دی : $\pi = 3,14....$ (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

## پیلبیلګه:

کونج $60° = ∝$ له ګردۍ د ۱۰ سانتیمتره وړانګې سره یوه په لاندې ډول ګردۍ لینده $b = 20\pi . 60° : 360° = 10,47$ cm غوځوي یا بیلوي. د ګردۍ چاپیری دی : $U = 20\pi = 62,83$ cm

همغه کونج ∝ د ۵ سانتي متره وړانګې سره ګردیلینده

$b = 10\pi .60° : 360° = 5,236$ cm

غوځوي. دا ګردۍ لاندې چاپیرۍ لري: $U = 10 = 31,416$ cm .

له ګردۍ د وړانګې $r = 1$ cm سره ددې په څټ یا برعکس کونج ګردیلینده

$b = 2\pi . 60°: 360° = 1,047$ cm

غوځوي» د دې ګردي چاپیری فقط $U = 2\pi = 6,283$ دی .

له بیلګې څرګندیږي، چې لینده اندازه په همغه اندازه زیاتیږي لکه وړانګه. له دې امله کیدی شي خپله شمیرنه په یوونګردي د وړانګې ۱ سره رابنده یا محدوده کړي او روښانه کړي:

**تعریف:** په یوونګردي د ګردیلیندی اوږدوالي کچګڼ، چې په څنتریکونج

(c) ketabton.com: The Digital Library



باندې څېره شوي، لینده کچ بلل کیږي. لاندې شمیراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha/180°).\pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x/\pi)\,180° = \frac{x}{\pi}\cdot 180°$$

دا چی د وړانګي څرخون په پوره کونج هم وراوړیدی شي، نو له دې امله د لینده کچ لپاره په خوښه ریبلګڼونه پرېښوول شوي.

بیلګی :

$$\alpha = 1° \Leftrightarrow x = \frac{1°}{180°}\pi = 0{,}0175\ (rad) \qquad \alpha = 180° \Leftrightarrow x = \frac{180°}{180°}\pi = \pi = 3{,}1416$$

$$\alpha = 30° \Leftrightarrow x = \frac{30°}{180°}\pi = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236 \qquad \alpha = 360° \Leftrightarrow x = \frac{360°}{180°}\pi = 2\pi = 6{,}2832$$

$$\alpha = 45° \Leftrightarrow x = \frac{45°}{180°}\pi = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854 \qquad \alpha = 720° \Leftrightarrow x = \frac{720°}{360°}\pi = 4\pi = 12{,}5664 \quad usw.;$$

$$\alpha = 60° \Leftrightarrow x = \frac{60°}{180°}\pi = \frac{\pi}{3} = 1{,}0472$$

$$\alpha = 90° \Leftrightarrow x = \frac{90°}{180°}\pi = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \qquad \alpha = -75° \Leftrightarrow x = \frac{-75°}{180°}\pi = \frac{-5}{12}\pi = -1{,}309$$

## ارکوسبلواکي Arcusfunkrionen

زیات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کیږي ، چي لکه په ورکړشوو کرښځاننیونو راپیداشوې کونجونه څنګه معلومیږي یا څنګه راڅرګندیږی یا بهتره څنګه ځانونه نیسی. ددې لپاره چی دا پوښتنه ځواب شي، باید امکانات ولټول شي، چی د کونجبلواک ارزښتونو څخه څنګه بیرته کونج یا په همدې توګه د هغه تعریفېږي ته، په لینده کچ راتلی شو. دا کونجبلواک پریودیکی یا تل بیرته راګرځیدونکي بلواک دی، دا په دې مانا ، چي د بلواک ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونولپاره یا .

(c) ketabton.com: The Digital Library



مختلفو واټونو وروسته، بلواك ارزښتونه تکراریږي. د دې لپاره چې په ښتکیدنه ممکن شي، نو باید د خپل تعریف ډیری په یوه برخه ډیري رابند یا محدود شي.

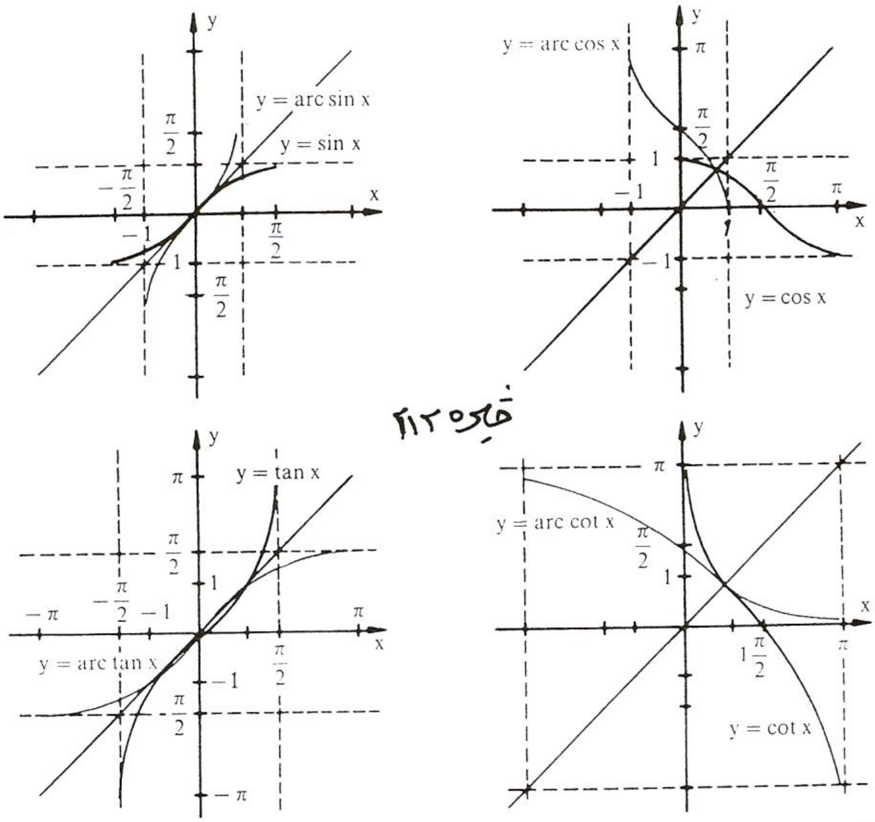
> **تعریف :** د یوه ( رابند یا محدود ) تریګونومتریکي بلواك په څټ بلواکونه ارکوس بلواك Arcusfunktion بلل کیږي یا څیکلومتریکي بلواك ( لاتین ارکوس: Arcus = Bogen = لینده )

دلته arc sin(x ) لوستل کیږي »دx ارکوس ساین. د کونجبلواك تعریفډیری دلته اړونده ارکوسبلواك ارزښتډیری دی او په څټ ارګومنت یا تعریفډیری دلته تل یو ریبلګڼ دی.

| Trigonometrische Funktion تریګونومتریکي بلواك | Arcusfunktion ارکوسبلواك |
|---|---|
| f: $x \mapsto \sin(x)$<br>$\mathbb{D} = \left\{x \,\middle\|\, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$<br>$\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$ | $f^{-1}$: $x \mapsto \arcsin(x)$<br>$\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$<br>$\mathbb{W} = \left\{y \,\middle\|\, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$ |
| f: $x \mapsto \cos(x)$<br>$\mathbb{D} = \{x \mid 0 \le x \le \pi\}$<br>$\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$ | $f^{-1}$: $x \mapsto \arccos(x)$<br>$\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$<br>$\mathbb{W} = \{y \mid 0 \le y \le \pi\}$ |
| f: $x \mapsto \tan(x)$<br>$\mathbb{D} = \left\{x \,\middle\|\, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$<br>$\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$ | $f^{-1}$: $x \mapsto \arctan(x)$<br>$\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$<br>$\mathbb{W} = \left\{y \,\middle\|\, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$ |
| f: $x \to \cot(x)$<br>$\mathbb{D} = \{x \mid 0 < x < \pi\}$<br>$\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < x < \infty\}$ | $f^{-1}$: $x \to \text{arccot}(x)$<br>$\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$<br>$\mathbb{W} = \{y \mid 0 < y < \pi\}$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library






شکل ۲۱۲

**Beispiele:** بیلګی:

1. arcsin (0,8) = 0,9273 (rad) = 53,13°
2. arccos (1) = 0 (rad) = 0°
3. arctan (−100) = −1,5608 (rad) = −89,43°
4. arccot (−70) = −0,0143 (rad) = −0,82°

۵ – دا چې کونجبلواک و ارکوسبلاک یو د بل په څټ بلواک دي نو باور لري:

$$\sin(\arcsin(y)) = y; \quad \arcsin(\sin(x)) = x$$
$$\cos(\arccos(y)) = y; \quad \arccos(\cos(x)) = x$$
$$\tan(\arctan(y)) = y; \quad \arctan(\tan(x)) = x$$
$$\cot(\text{arccot}(y)) = y; \quad \text{arccot}(\cot(x)) = x$$

یعنې په لاندې توګه هم

$$\sin(\arcsin(0,4)) = \sin(23,58°) = 0,4$$
$$\arccos(\cos(\pi/3)) = \arccos(0,5) = 1,0472$$
$$\tan(\arctan(-40)) = \tan(-88,5679°) = -39,9999$$
$$\text{arccot}(\cot(60°)) = \text{arccot}(0,5774) = 1,0472$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



# د جبشميري کاروني يا استعمال لپاره

داچې پخوا معمول جدولونه د بلواك تعريفېدېري او ارزښتېدېري شميرلو لپاره له كاره غورځول شوي دي او دنده يې ايلكترونيكي ماشينونو نيولې ده، غواړو چې د جبشميري استعمال په هكله هم څه ووايو

كوركمپيوتر زيات وخت داسې فنكشنونه يا بلواكي لري يا وظيفې په كلك اختيار كې لري، چې د درجې اوړون په لينده كچ او په څپ كوي، مګر شميردرځ په توګه بايد د شميرونكي په پروګرام كې ځاى په ځاي شوى وي.

پوره اسانتياوې او زياته كارونه د جبشميرې په غاړه پرته ده، دلته دې توكمې د < .... > سره په نخښنه شي:

په قاعده كې دريې بلواك وركړشوي دي : < sin > ; < cos > ; < cot > كوتنجنت بيا داسې شميرلكيدى شي، د < tan><1/x > . د < INV > – توكمي سره سړى اركوسبلواك ته راځي: نو < INV><sin > اركوس ساين دى. په عمومي توګه كونج – بې پروا كه په لينده كچ او يا درجه كچ وركړ شوي وي – بايد د فنكشن له مخه وركړ.

## بيلګي

١ لاندې جدول همغه د كاروني يا اتعمال لپاره د جبشميري چمتوالى ښاى :

| Winkelmaß کونجیچ | TR-Modus په نخښنونه | Beispiel بېلګه |
|---|---|---|
| Altgrad زړه درجه<br>Neugrad نوې درجه<br>Bogenmaß لینده‌یي کچ | DEG<br>GRAD<br>RAD | $\sin 45° = 0{,}7071$<br>$\sin 50^{g} = 0{,}7071$<br>$\sin \frac{\pi}{4} = 0{,}7071$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library



2.

| Zu ermitteln | Tastenfolge | Anzeige im Display | Modus |
|---|---|---|---|
| sin 45° | 45⟨sin⟩ | 0.707106781 | DEG |
| $\sin \frac{\pi}{6}$ | ⟨π⟩⟨:⟩6⟨sin⟩ | 0,5 | RAD |
| cot 30° | 30⟨tan⟩⟨1/x⟩ | 1.732050808 | DEG |
| arccos 0,5 | 0.5⟨INV⟩⟨cos⟩ | 60(°) | DEG |
| arccos 0,5 | 0.5⟨INV⟩⟨cos⟩ | $1.047 = \frac{\pi}{3}$ | RAD |
| arccot 2 | 2⟨1/x⟩⟨INV⟩⟨tan⟩ | 26.56505118° | DEG |
| sin 220$^g$ | 220⟨sin⟩ | −0,3090 | GRAD |

دلته مهم دی، چی جبشمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه» ) د زاړه – یا نوي درجې همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جبشمیریو مودلونو سره د تکمی <DRG> څخه لاس ته راځی یا د بیلګي په توګه < MODE >.

د ورکړشوي درجه ګڼ اوړون په لینده کچ د <<- DRG > سره سورت نیسي.

بیرته یا په څټ سړی داسی راځي- لکه چی لرل مو- د <INV> – تکمی سره.

## بیلګی

| | | |
|---|---|---|
| 60° | ⟨DRG⟩ | 60(rad) |
| 60 | ⟨DRG⟩ | 60(grad) |
| 60° | ⟨DRG →⟩ | 1.047197551(rad) |
| 1.047197551 | ⟨DRG →⟩ | 66.66666667(grad) |
| 66.66666667 | ⟨DRG →⟩ | 60° |
| 60° | ⟨INV⟩⟨DRG →⟩ | 66.66666667(grad) |
| 66.66666667 | ⟨INV⟩⟨DRG →⟩ | 1.047197551(rad) |
| 1.047197551 | ⟨INV⟩⟨DRG →⟩ | 60° |

دلته ګراد نښونه ( gard ) نوی درجه ده یعنی ګون( gon ).

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځنې جشميري په دې برسيره نور زيات امکانات هم لري ، نتيجې يې په ګراد دقيقې، ثانيي اويا لسيز سيستم ورکړ شوي دي. بدلون بيا د تکمې <DMS-Dd> سره صورت نيسي:

| | | |
|---|---|---|
| 26.75°<br>30°15′ | ⟨inv⟩⟨DMS – Dd⟩<br>⟨DMS – Dd⟩ | 26°45′<br>30.25° |

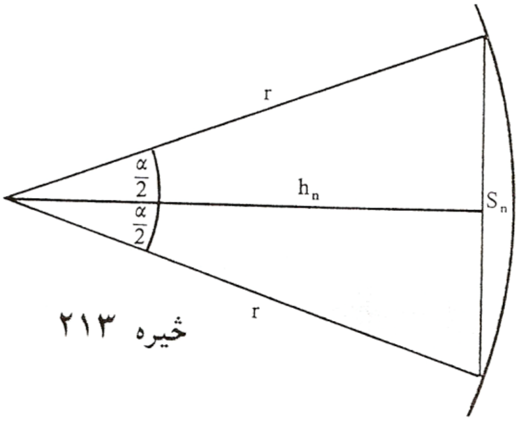
د " 15″ °30 " ورکړه کيدې شي د جبشميري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جبشميرې د لاس کتاب څخه ګټه واخستل شي ( يادونه: زه پوهيږم چې داسې شيان موږ متآسفانه په خپل هيواد کې نه لرو ، خو په هر صورت يې ليکل ضرور دي، دا پرمختګ موږ هم خپل شاته نه شي پريښوولی )

پيلبيلګه: دلته دې $S_n$ د يوه منظم n– ګوډي د اړخ اوږدوالی وي، چې په يوه ګردۍ کې چې وړانګه يې r = 5 cm ده، راګير دی.

الف ) وښايي چې

$$S_n = 2r \cdot \sin(180° : n)$$

ب ) د يوه داسې n– ګوډي چاپيرې $U_n$ وشميرې ، چې n = 8;16;32;128 وي، او په نږدې توګه يا تقريبي د دې ګردي چاپيرې د دې وړانګې r سره وښايې .




خيره ۲۱۳

(c) ketabton.com: The Digital Library



ب ) په همدې ډول n– ګوډی له هوارو $A_n$ څخه په نږدې توګه یا تقریبي د ګردی ـــ هواره A وښایي .

اوبی (حل : هر n– ګوډی کیدی شي په n مساوي دریګوډیو ټوټه کړی شي.
د هغو د څینتریکونج ∝ لپاره باور لري $\propto = 360° / n$ . د جګی یا جګوالی $h_c$ د کنبلو سره په هر مساوي پښیز دریګوډي کي ولاړکونجیزې نیایي د څنتریکونج یا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\propto}{2} = 360° / 2n = 180° / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n /2) / r = \sin\frac{\propto}{2} \Rightarrow S_n = 2r \cdot \sin\frac{\propto}{2} = 2r \cdot \sin(180° / n)$$

b ) $U = n.S_n = 2r.n.\sin(180°/n) = 10n.\sin(180° / n)$

د ارزښتشمیرنو د غلطی مخنیوی لپاره همدفمند یا موخه ور دی، که په دغه همغه لړپیرلپسی تکمی وکارول شي یا استعمال شي .

180° ⟨STO⟩ ⟨ : ⟩ 8 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 8 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 30.614675
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 16 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 16 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 31.214452
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 32 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 32 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 31.365485
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 64 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 64 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 31.403312
⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 128 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 128 ⟨ · ⟩ 10 ⟨ = ⟩ 31.412773

پ ) د ډیرګوډي هواره د دریګوډیو هوارو د یوځایوالی څخه لاس ته راځی
د هر دریګوډي هواره ده: $0,5.S_n.h_n$ . د

$$h_n = r.\cos(180° / n)$$

او

$$S_n = 2r \cdot \sin(180°/ n)$$

له امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A = n \cdot 0{,}5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0{,}5 \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$$

له دې سره د نرې [illegible]

$$360^\circ \langle STO \rangle \langle : \rangle \; 8 \langle = \rangle \langle SIN \rangle \langle \cdot \rangle \; 8 \langle \cdot \rangle 12.5 \langle = \rangle 70.710678$$
$$\langle RCL \rangle \langle : \rangle \; 16 \langle = \rangle \langle SIN \rangle \langle \cdot \rangle \; 16 \langle \cdot \rangle 12.5 \langle = \rangle 76.536686$$
$$\langle RCL \rangle \langle : \rangle \; 32 \langle = \rangle \langle SIN \rangle \langle \cdot \rangle \; 32 \langle \cdot \rangle 12.5 \langle = \rangle 78.036129$$
$$\langle RCL \rangle \langle : \rangle \; 64 \langle = \rangle \langle SIN \rangle \langle \cdot \rangle \; 64 \langle \cdot \rangle 12.5 \langle = \rangle 78.413712$$
$$\langle RCL \rangle \langle : \rangle \; 128 \langle = \rangle \langle SIN \rangle \langle \cdot \rangle \; 128 \langle \cdot \rangle 12.5 \langle = \rangle 78.508279$$

د یوه جشمیرې سره ، چې له یوې زخیرې زیاتی ولري ، لکه چی پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسیره نورې ثابتي هم زخیره کیدی شي» په یوه منظم پروګراموړ ماشین سره کیدي شي چې د دا ډول شمیرنو لپاره د ګوډونو ګڼ څخه ت شو یا د ګوډونو ګڼ باند ې صرفنظر وشي .

## د تریګونومتریکي بلواکو خویونه

دا چې کونجکچ په درجه کچ او هم په لینده کچ ورکول کیدی شي، کیدی شي چې یوه کونج بلواك تعریفېږی یا $\alpha$ او یا x وي. ددې لپاره چې د یوه بلواك خوي باندې ټینګار وکړو، باید په لاندې په لینده کچ تکیه وکړو.
د لاندې خویونو لمړی ډله یوائې له تعریفمساوات ( د مخه راغلی ) او د پیتاګوراس له جملی لاس ته راځي ( د مخه لوستل شوې ) لاندې صدق کوي :

(c) ketabton.com: The Digital Library



**تعریف :**

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پرته کاتیت}} = \frac{\frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}}{\frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دې لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \iff \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسیره پر دې لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دې سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x \; ; \quad 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تریگونومتریکي بلواکو کی هیله ده ، چی د پوتنځ لیکدود په پام کی ونیسی.
په لاندې پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په لاندې کې gegeben ورکړی او gesucht غوښتونی یا پلټونی په مانا دي

| gegeben ورکړی / gesucht غوښتونکی | sin x | cos x | tan x | cot x |
|---|---|---|---|---|
| sin x | $\sin x$ | $\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$ | $\pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ | $\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$ |
| cos x | $\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ | $\cos x$ | $\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ | $\pm\frac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$ |
| tan x | $\pm\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$ | $\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$ | $\tan x$ | $\frac{1}{\cot x}$ |
| cot x | $\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$ | $\pm\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$ | $\frac{1}{\tan x}$ | $\cot x$ |

لکه چې د مخه مو په ګوته کړل، کیدی شي چې تریګونومتریکي بلواك د مختلفو ګونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواك ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توګه یا په کلکه توګه لاس ته راوړی شو

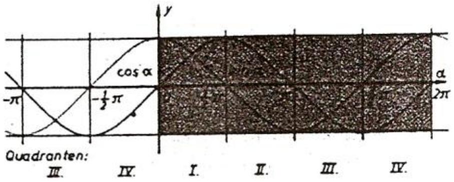
**تعریف :** تریګونومتریکي بلواك ټول پریودیکي یعني بیرته راګرځیدونکی دی، دا په دې مانا، چې د بلواك ارزښتونه په منظمو واټنونو کی تکراریږي. په دې د ساین بلواك او د کوساین بلواك راګرځیدنه (یا ۳۶۰ درجی ) لري، کوتنجنتبلواك راګرځیدنه (یا ۱۸۰ درجی ( 180° )) لري.

$$\left.\begin{aligned}\sin(x \pm 2k\pi) &= \sin x\\ \tan(x \pm k\pi) &= \tan x\end{aligned}\right\}\quad k \in N$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(x \pm 2k\pi) &= \cos x\\ \cot(x \pm k\pi) &= \cot x\end{aligned}\right\}\quad k \in N$$

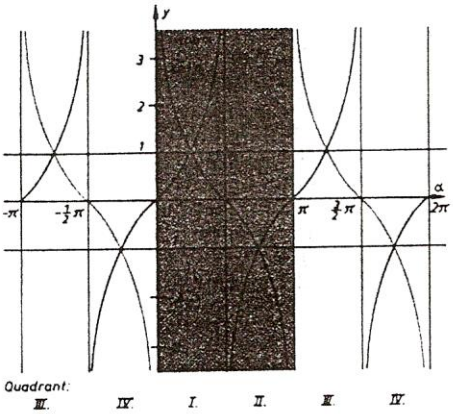
(c) ketabton.com: The Digital Library






شیره ۲۱۴

د ساین - او کوساین فنکشن پریودیائی راګرځیدنه




د تنجنت او کوتنجنت فنکشن پریود بېلګې :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\sin 50°$ | $= \sin(50° + 360°)$ | $= \sin(50° - 720°)$ | $= 0{,}76604$ | |
| $\cos -30°$ | $= \cos(-30° - 360°)$ | $= \cos(-30° + 1080°)$ | $= 0{,}86603$ | |
| $\tan 2{,}5$ | $= \tan(2{,}5 - \pi)$ | $= \tan(2{,}5 + 5\pi)$ | $= -0{,}74702$ | |
| $\cot 10$ | $= \cot(10 + \pi)$ | $= \cot(10 - \pi)$ | $= 1{,}54235$ | |
| $\sin 35°$ | $= \sin(180° - 35°)$ | $= -\sin(180° + 35°)$ | $= -\sin(360° - 35°)$ | $= 0{,}573576$ |
| $\cos 35°$ | $= -\cos 145°$ | $= -\cos 215°$ | $= \cos 325°$ | $= 0{,}81952$ |
| $\tan 0{,}6109$ | $= -\tan 2{,}5307$ | $= \tan 3{,}7525$ | $= -\tan 5{,}6723$ | $= 0{,}700208$ |
| $\cot 0{,}6109$ | $= -\cot 2{,}5307$ | $= \cot 3{,}7525$ | $= -\cot 5{,}6723$ | $= 1{,}428042$ |

که د فنکشن ګراف ته په ځير شو نو په دې برسيره په ټينګه روښانيږي :

(c) ketabton.com: The Digital Library



| x | $\pi - x$ | $\pi + x$ | $2\pi - x$ | |
|---|---|---|---|---|
| $\sin x =$ | $\sin(\pi - x) =$ | $-\sin(\pi + x) =$ | $-\sin(2\pi - x)$ | (Abb. 179) |
| $\cos x =$ | $-\cos(\pi - x) =$ | $-\cos(\pi + x) =$ | $\cos(2\pi - x)$ | (Abb. 179) |
| $\tan x =$ | $-\tan(\pi - x) =$ | $\tan(\pi + x) =$ | $-\tan(2\pi - x)$ | (Abb. 180) |
| $\cot x =$ | $-\cot(\pi - x) =$ | $\cot(\pi + x) =$ | $-\cot(2\pi - x)$ | (Abb. 180) |

## بیلګی:

| | $\alpha$ | $180° - \alpha$ | $180° + \alpha$ | $360° - \alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| | 35° | 145° | 215° | 325° |
| sin | 0,573576 | 0,573576 | – 0,573576 | – 0,573576 |
| cos | 0,819152 | – 0,819152 | – 0,819152 | 0,819152 |
| tan | 0,700208 | – 0,700208 | 0,700208 | – 0,700208 |
| cot | 1,428148 | – 1,428148 | 1,428148 | – 1,428148 |

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځی د جبشمیرې یا کمپیوتر څخه کار اخستل کیږي ، هدفمند بولو، چی یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

| x | $\alpha$ | $\sin x$ bzw. $\sin\alpha$ | $\cos x$ bzw. $\cos\alpha$ | $\tan x$ bzw. $\tan\alpha$ | $\cot x$ bzw. $\cot\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0° | 0 | 1 | 0 | – |
| $\frac{\pi}{6}$ | 30° | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | 45° | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | 1 | 1 |
| $\frac{\pi}{3}$ | 60° | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | 90° | 1 | 0 | – | 0 |
| $\frac{2}{3}\pi$ | 120° | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\sqrt{3}$ | $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ |
| $\frac{3}{4}\pi$ | 135° | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $-1$ | $-1$ |
| $\frac{5}{6}\pi$ | 150° | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | $-\sqrt{3}$ |
| $\pi$ | 180° | 0 | $-1$ | 0 | – |
| $\frac{3}{2}\pi$ | 270° | $-1$ | 0 | – | 0 |
| $2\pi$ | 360° | 0 | 1 | 0 | – |

د دغه جدول د هغه اړوند په مانا دی او کیدی تیزې یا څوی .

(c) ketabton.com: The Digital Library



له دې جدول څخه کیدی شي په خیال کی یا ګوماني لاس ته راوړی شو

$\sin x = \cos(\ \ /2 - x)$　　$\cos x = \sin(\ \ /2 - x)$
$\tan x = \cot(\ \ /2 - x)$　　$\cot x = \tan(\ \ /2 - x)$

دا ګومان کیدی شي په ولاړکونجیز دریګوډي کي د تعریف په مرسته په ساده توګه وښوول شي. :

$\sin \ \ = a / c$ او $\cos ß = a / c$

د $ß = 90° -$ له امله لاس ته راځي :

$\sin \ \ = \cos(90° - \ \ )$

په ورته توګه نور ې غوښتني هم لاس ته راتلی شي.

دا له ځیرو څخه هم لاس ته راوړل کیدی شي، ځکه د ساین او کوساین بلواکو یا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنت بلواکو ګرافونه د $x = \ \ /2$ کرښی ته یو بل سره محورسیومتري ځغلي :

له ځیرو او بیلګو څخه په دې برسیره لاس ته راځي:

---

**تعریف:** د کوساین بلواك جفت دی، لرو:

$\cos(x) = \cos(-x)$

ساین – ، تنجنت – او کوتنجنت بلواك ناجفت دي» د دوي لپاره باور لري:

$\sin(x) = -\sin(-x), \ \tan(x) = -\tan(-x) \ ; \cot(x) = -\cot(-x)$

---

یادونه : په دې نلواکو کي کیدی شي چی x له نوکانو دباندې هم وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



بيلګی:

$$\sin 60° = -\sin(-60°) = 0{,}86603$$
$$\cos 0{,}75 \quad = \cos(-0{,}75 \quad) = -0{,}70711$$
$$\tan 150° = -\tan(-150°) = -0{,}57735$$
$$\cot 1{,}3 \quad = -\cot(-1{,}3) = o{,}27762$$

## د زياتون قضيي يا تيورمونه

دا چي کونجبلواك لايني نه دي( د فنکشنګراف کربښه نه ده،بلکه کږه ده ) ، نو ډېل تعريفډيري پورې ساده ډېل بلواك ارزښت اړه نه لري.
لکه

$$\sin 30° = 0{,}5 \quad \sin 90° = 1 \quad \sin 180° = 0$$

د داسی په نامه زياتونمسئلی په مرسته ممکن کيږي، چی د بلواك ارزښت د کونج په دوه برابرولو يا په همدې ډول د دوه کونجونو پو په بل زياتولو د يوګونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابي کړی شو.

بيلګی :

1 . $\sin(x + y) = \sin x . \cos y + \cos x . \sin y$

1' . $\sin(x - y) = \sin x . \cos y - \cos x . \sin y$

2 . $\cos(x + y) \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$

2 '. $cis(x - y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y$

3 . $\sin 2x = 2.\sin x . \cos x$

4 . $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

(c) ketabton.com: The Digital Library



5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

6. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

7. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 - \cos x)}$

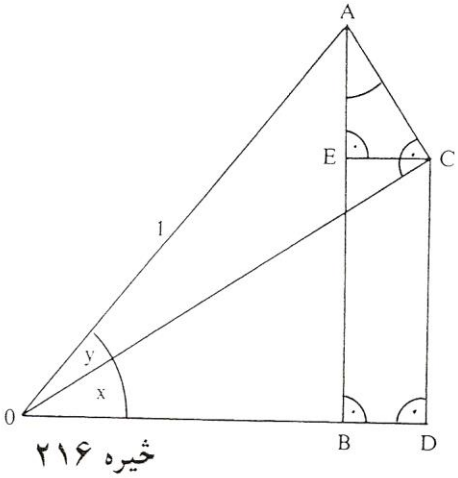
8. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 + \cos x)}$

9. $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

9′. $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

10. $\cot(x + y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$ mit $\cot x \neq -\cot y$

10′. $\cot(x - y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y}$ mit $\cot x \neq \cot y$




شیره ۲۱۶

**1.** und **2.**:

$|OA| = 1$

$|AC| = \sin y;\quad |OC| = \cos y$

$|AB| = \sin(x + y);\quad |OB| = \cos(x + y)$

$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$

$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

پر مبنا پر دې لرو :

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$
$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

د ځای په ځای کولو څخه ښوونه په لاس راځي

$$\sin(x + y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1'. 2'.:

3. ı 4.: ... $x = y$. ځای په ځای کړه

5.: Setze $z + t = x;\ z - t = y \Rightarrow z = \frac{x+y}{2};\ t = \frac{x-y}{2}$ کېږده

پس لرو $\sin x = \sin(z + t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$

$$= \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

همداراز $\sin y = \sin(z - t) = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

6. ښوونه په ورته توګه څخه ته راځي

7.: $x = y = z/2$ کېږده

$$\Rightarrow \cos(x + y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2\frac{z}{2} - \cos z \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$$

دوهمه ښوونه له لارې ښوونې لرو
په (*) کې و لیکه یا لیکل ده

8.: $(*)\ \sin^2\frac{z}{2}$ durch $1 - \cos^2\frac{z}{2}$.

9-10: د 11 پوښتنې له 1 او 2 او تنجنت د تعریف څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



## بلواك يا فنكشن $y = a . \sin(bx+c) + d$

لکه چی په پیل کی مو وویل په طبیعت او تخنیك كي ډيرې پيښي شته دی چي تل بیرته راکرځي يا لنډ: راګرځي، يعني پريوديکي دي. د دې د تشریح لپاره په خپل سوچه يا خالصه بڼه تل د ساين بلواك بسيا نه کوي.

دا زيات علتونه لري : لمړی د ساينبلواك د ۱- او ۱ ترمنځ ارزښت نيسي، له بلي لور داواقعي د کونج په واك کی نه دي بلکه د وخت په واك كي دي د يوې راګرځيدنی سره، چی دا په ساده توګه د 2 په ډول نه شي رانيولکيدی. له دې امله د ساين بلواك د دې کارونو د روښانوولو لپاره بايد موډيفيځير شي يا يی بڼه واوړي. دا بڼه اوړون او د هغی تاثير په لاندې ليدنه کی راڅول شويدي، ګراف يی ورزياتی څیرونی لپاره دی. په ورته ډول د نورو کونجبلواکو لپاره باور لري په عمل کي مګر يواځي د ساينبلواك ( په همدې توګه د هغي مخامخ د کوساين بلواك چي په $\pi/2$ سره راکښل شوی وي ) د مانا ډك دي. ( لوستل: له ښي لور څخه)

| بیلګی | دکارونی ساحه | تاثیر | بلواك |
|---|---|---|---|
| شمیره ۲۱۷ | ټولی تلبیرته راګرځیدونی تعامولونه | | $y = \sin(x)$ |
| شمیره ۲۱۸ | د ټوه مساوی او بدل شتپالونګ یو په بل پرلوتل | د y-لور یانډې راکښنه | $y = \sin(x) + d$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | | | |
|---|---|---|---|
| شکل ۲۱۹ | په بدل بدلېدنا جريان کې د بدلېدنا او ښيالونک تحني دوه ښالونه | د فاز تغير یا ځای بدلون | $y = \sin(x+c)$ |
| شکل ۲۲۰ | دیوه پندل خوځېدنه | د امپلیټود د ځای بدلون فاکتور -1 د $180°$ فاز ځای بدلون دی | $y = a . \sin(x)$ |
| د شکل ۲۲۱ | دیوه بستینځي د ځړی څپونه په پوره وخت داد پوله او رهغږ پوري لمږه لکه په د موزیک الو په او ازونوکی | د پریود تغیر یا بدلون<br>$b>1$ سرعت<br>$0<b<1$ په کرار کیدل<br>$b<0$ په شا ګرځېدنه کم محور دی | $y = \sin(bx)$ |
| شکل ۲۲۲ | کمپلکس پریودیک جریان یا عمل | عمومي حالت | $y = a . \sin(bx+c)+d$ |

## تمرينونه

۱ – د لاندې ورکړې سره ښېره بله کړی

$4°6' = 4{,}1°$ ; $10°, 5' = 10°30$

a) $6{,}75° =$ b $= 120{,}48° =$ c) $-75{,}65° =$

d) $52°16' =$ e ) $97°13' =$ f) $44°44'\ 44'' =$

۲ – په درجه کچ ي وليکی

a ) $x = \pi/3$ , b ) $x = -\pi/4$ , c ) $x\ (2/3)\pi$

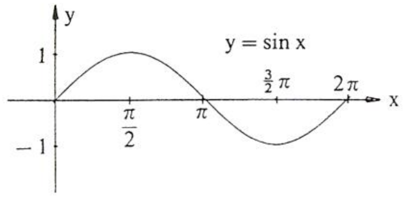
d ) $x = 4$ e) $x = -3$ f ) $x = 4{,}7$

۳ – په لينده کچ یی وليکي

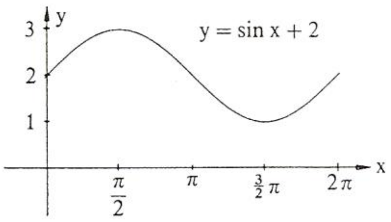
a ) $15°$ b) $-60°$ c ) $540°$ d ) $20°15'$ e ) $15{,}75°$

(c) ketabton.com: The Digital Library

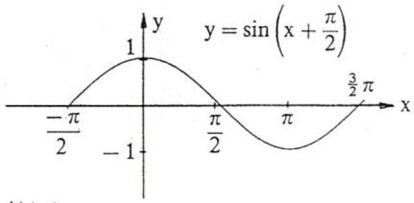




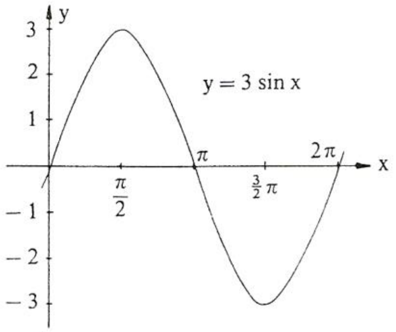
شیره ۲۱۷



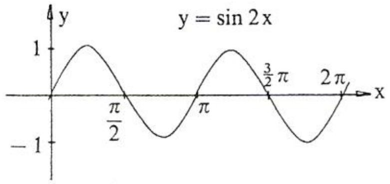
شیره ۲۱۸



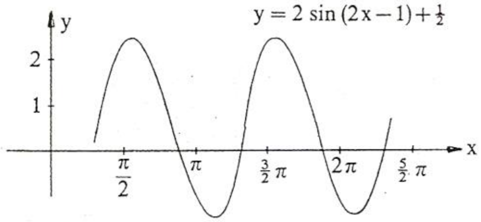
شیره ۲۱۹



شیره ۲۲۰



شیره ۲۲۱



شیره ۲۲۲

د دې بلواک ګراف د ساین کرېږ $y = \sin x$ څخه لکه چې ګورو لاس ته راځي:

۱ – د ارزښت دوه ځله کیدل

۲ – د نیمی راګرځید اوږدوالی باندې پرسیدنه

۳ – په یوه یوون د ښي لور ته راکښنه

۴ – په $1/2$ پورته لورته 100% راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library



۴ – وښاکی

a ) sin20° b) sin(-30°) c) sin 172° d) din1°4'

e) cos 35° f) cos 380° g) cos(-27°) h) cos47,9°

i) tan 11° k) tan (-15°) l) tan 33,33° m) tan 13°13'

n) cot 870° o) cot (-11°) p) cot 14°14'

q) cot (-2°2')

r) $\sin\alpha = 0{,}8$ s) $\cos\alpha = 0{,}9$ t) $\tan\alpha = 2{,}5$

u) $\cot\alpha = -1$ v) $\sin\varphi = 0{,}3$ w) $\cos\varphi = -0{,}13$

x) $\tan\varphi = -4$ y) $\cot\varphi = 0{,}3$ z) $\arcsin(x) = \pi/2$

۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی لرو $\gamma = 90°$ او په دې برسیره :

a ) a = 7 cm; b = 6cm

b ) a = 16cm; = 66°45'

c ) c = 5cm; a = 3cm

پاتی ټوټی وشمیری

۶ – په مساوي پښیز دریګوډي

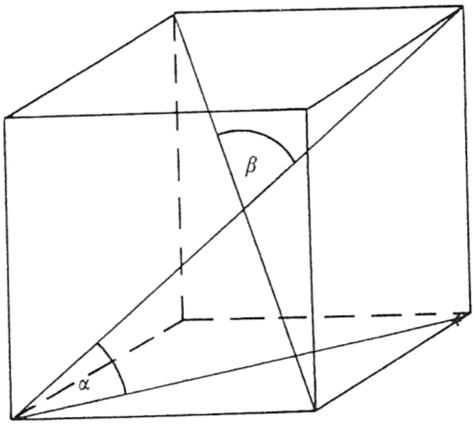
کي ( a = پښه ده ) دی

a) a= 10cm ; $\alpha$ =80°40'

b ) a= 12 cm ; h = 8cm

c) ß = 40°; a = 7cm

پاتی ټوټي وشمیري




شیره ۲۲۳

۷ – د یوه پڅکونجیز ( $\alpha > 90°$ )

دریګوډي لپاره ساین وشمیری

۸ الف ) کوساین د یوه پڅ کونجیز

دریګوډي لپاره وشمیری ( $\alpha > 90°$ )

(c) ketabton.com: The Digital Library



ب ) په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟

۹ – په یوه مکعب کې د یوه هوا نیمي او بنستهواري ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

ځیره .د دواړو هوا یا فضا یا بدن نیمیو ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

۱۰ – د دوه ګردیو وړانګی

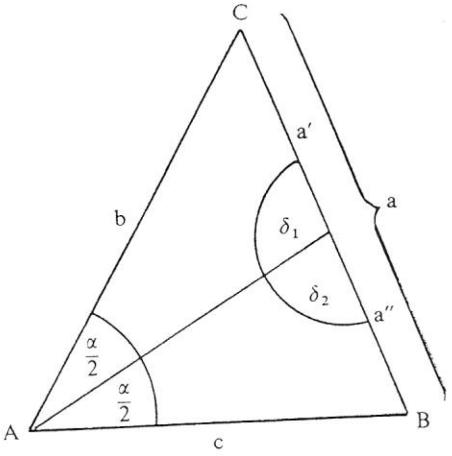
$r_1 = 5$ cm , $r_2 = 4$ cm

دي او همداسی د منځټکو واټن $|M_1M_2| = 8$cm ورکړ شوی دی.

دد دواړو ګردیو د تماس

مماسونو غوڅکونجی وټاکی

او د کډې غوڅونی اوردوالی .




ځیره ۲۲۴

۱۱ – په یوه دریګوډي کی د یوه

کونجنیمی مخامخ اړخ په داسی

ځان نیونه یا تناسب غوڅوي لکه

په دې پرتي خواوې. دا غوښتنه د

ساین جملی په مرسته حل

( اوبی ) کړی( ځیره۲۲۴ ).

۱۲ – که یوه بار ځاي ته،

چي ۰ ۵ ، ۱ متره جګ دی،

یوه زینه ورجګه شي

میلانکونج ✓ دې زیات ترزیات 33° وي، زینه دې څومره لویه وي؟

۱۳ – الف )د یوې پورته ختلی کوڅي جګوالي توپیردې څومره وي، که دا

کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او 12% جګه وي؟

ب ) د ۱۵۴۰ پرتی لارې وهلو وروسته د جګوالي توپیر څومره دی ؟

پ ) د یوه زوړندي پټیلار، چی ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کی څومره

لوي دی ، که دا د جګوالی توپیر ۵۰۰ متره ولري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



۱۴ – یو د اوبو بیلر ( کتله = ۱۰۰ کیلوګرامه ) په یوه دړه پورته خیژول کیږي، چې میلانکونج $\measuredangle = 25°$ لري. د وزنزور په زوړندزور تختې سره غبرګ او نورمال یعنې ولاړ زور( د فشارزور ) ولاړ تجزیه یا ټوټه کیږي، دواړه زوره څومره لوي دی ؟ ( ۱ کیلو ګرام = ۹ ، ۸۱ نیوټن $1 kg = 9{,}81N$ ).

۱۵ – یو تلفونستن په څلور رسیو، چې هره یوه یې ۵۳ متره اوږده ده، درول کیږي.
درسیو میلانکونج $60°$ دی په پښه باندې په کوم جګوالي باید رسی وړلی شي ؟

۱۶ – د یوې ۵۳ متره جګې ونی سیوری ۵ ، ۱۲ متره اوږد دی. په ځمکه لمروړانګې په کوم جګوالی یوبل سره مخامخ کیږي.؟

۱۷ – د یوه ۵ متره جګ کتونټکي ( لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی ) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کیږي چې جګیدونکوج یې $\measuredangle = 18{,}5°$ او پښیټکی یې $ß=8°$ لوید کونج ، برج څومره جګ دی ؟ د لیدټکي څخه یې پروت لریوالی څومره دی ؟

۱۸ – الف ) د پیزا (Pisa ) کوږ برج ۴۷ متره جګ دی، او څوکه یې د پښی ټکي څخه ۵۰ ،۴ متره ور اوړي. دا برج څومره مایل دی ؟

ب ) د یوه جومات برج چې ۱۵۰ متره جګ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په ځمکي ټکي (یعنی د سترګي جګوالی د برج بنسټټکي سره برابر وي )، څخه وکتل شي، چې د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟

پ ) د ۵، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کیږي
– که جګوالی یې ۱۶۰ متره وي؟
– که جګوالی يي ۱۳۷ متره وي ؟

ت ) د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې
– د بل برج څوکه ښکاریږي چې جګوالی يي ۱۴۳ متره وي ؟

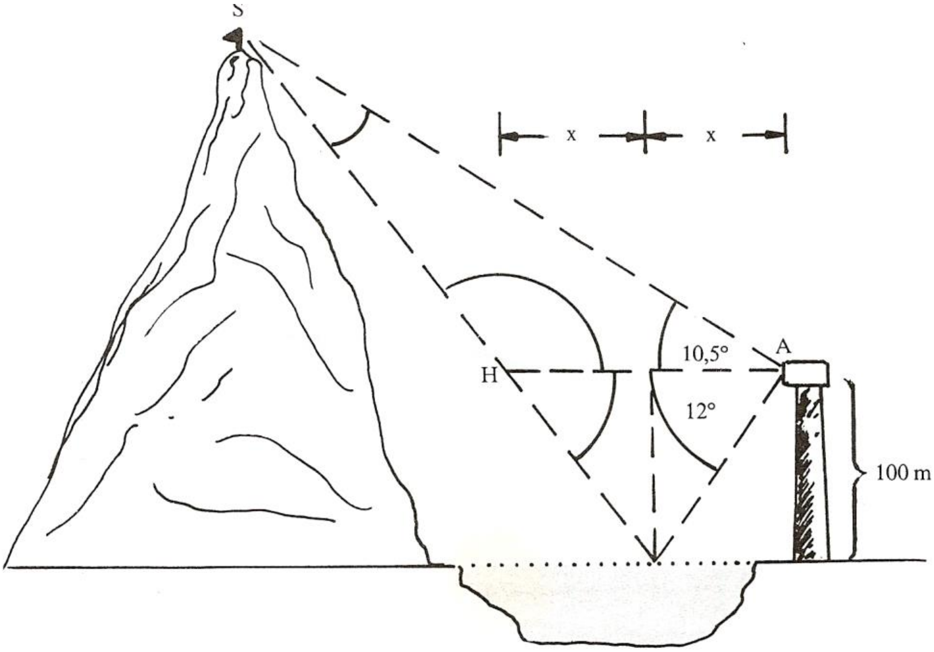
(c) ketabton.com: The Digital Library



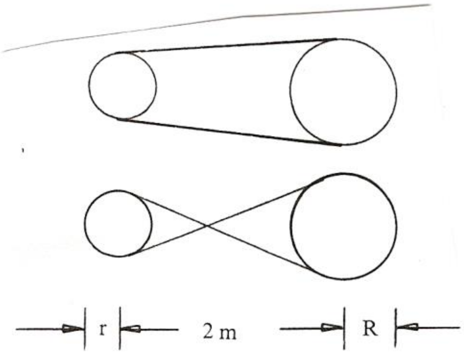
–د پاریس د ایفل برج ښکاریږي چی جګوالی یی ۳۰۰ متره دی ؟
۱۹ – د ښیپپس اهرام(CHeopspyramide ) ۱۳۷ متره جګوالی لري او د بنسټ
د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري
الف ) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟
ب ) د څنګهوارې دریواړه دننی کونجونه څومره لوي دي؟
۲۰ – یو ژوری یا قبر –۸ ، ۱ متره ژور دی، بنسټسور یی ۵ ، ۲ متره دی، د پورته
لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی
الف ) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی څومره پراخ دی؟
ب ) که ۱۰ متره اوږد وي، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جګوالی
یی ۵۰ ، ۱ متره وي؟
۲۱ – یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جګوالی لري د
بحیرې لور ته 14° میلان لري، د دننه لور ته 28° میلان لري. د ډنډ بنسټ
څومره سور لري؟ د هغی د نیمی هواره څومره ده؟
۲۲ – د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو ښه لید د ماترهورن (ماترنښکر یا د ماترن د
غره څوکه Matterhorn ) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی
دی ) اچول کیږي که دا د یوه لیدټکي څخه چی ۱۰۰ متره جګ دی د ډنډ په
لور ښکته وکتل شي، نو د غره د څوکي هندارونه د 12° پریوتکونج لاندې
لیدل کیږي. د غره څوکه د یوپورته کونج 11° لاندې لیدل کیږي. د ریفلډنډ
باندې د ماترنښکر څوکه څومره جګه پروته ده؟
څیره

(c) ketabton.com: The Digital Library






شیره ۲۲۵




شیره ۲۲۶

۲۳ – الف ) یوه د کشولو کړی، چي په دوه دکښولو چیترو باندې راتاو ده، شومره اوږده ده، که لاندې اندازې ولري
r = 22 cm , R = 35 cm ,
$|M_1M_2| = 2m$?

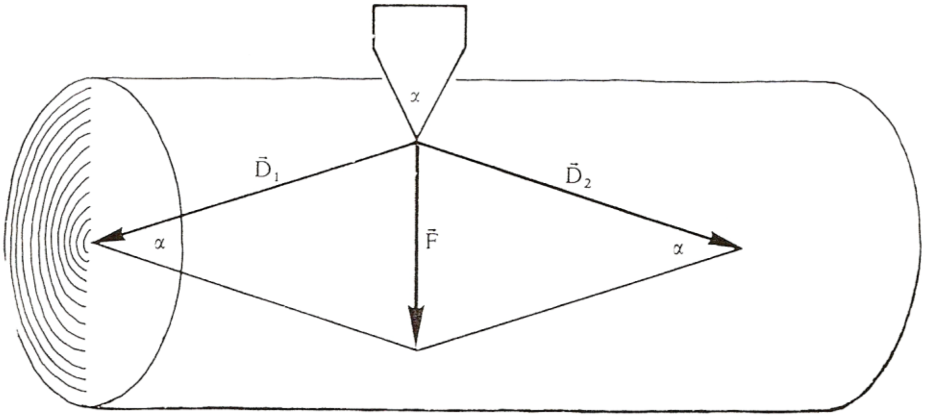
ب ) دا کړی به شومره اوږدې وي که د اتیران په شیر له چیتروګانو یا ټیکلیو راکې څیدلی وي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

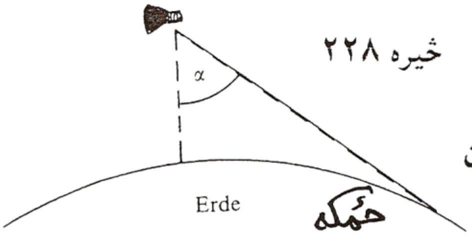


۲۴ الف ) د ونی په ستهه یو کایل )موړی ) په څټك د D زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه D څومره لوي دي، کوم چی د ستهی درځونه ، که د کایل یا تبرګي کونج $\alpha = 6°$ وي. ( حیره ۱۹۴ )؟

ب ) په کومکایلکونج یا تبرګیکونج لرو: $|D|=|F|$ ؟




څیره ۲۲۷



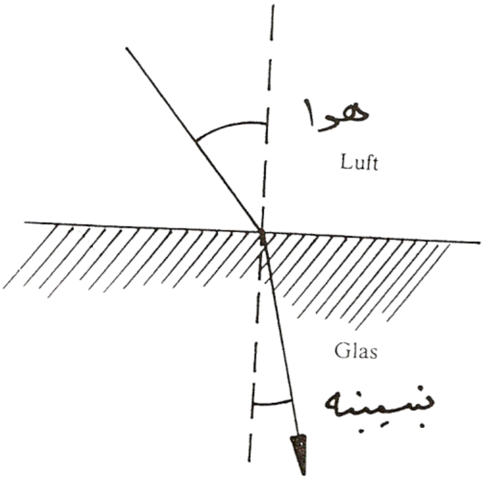

څیره ۲۲۸

۲۵ – د یوه الوتماشین څخه ځمکه د یوه $\alpha$ کونج لاندې لیدل کیږي ( څیره ) دا الوتماشین څومره جګ الوزې ؟ ( د ځمکی وړانګه : ۶۳۷۰ کیلومتره )

۲۶ – یو ګادی د $v_{\alpha} = 120km/h$ سرعت سره روان دی، نو د باران څاڅکی په پټلی د تلنلور باندې په $= 115°$ کونج

(c) ketabton.com: The Digital Library






خیره ۲۲۹

د چیترو (مطلب د ګاډي د اوسپنی ټیر یا ګاډیل دی) مخامخ ځغلي.
له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو د لویدلو سرعت $v_g$ وټاکی ؟

۲۷ – که د لمروړانګه په دوه مختلفو طبقو ولویږي، نو خپلی لور ته تغیر یا بدلون ورکوي. د سنیلیوس Snellius د ماتقاعدې له مخی کیدی شي چی د ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون وايي، چی پروتوړانګه ، ماتوړانګه او ولاړکرښه یا عمود په بیلیدونکی هوارې په یوه هواره پراته دي او برسیره پر دې لاندې اړیکي باور لري یا صدق کوي:

$$\sin \alpha \;/\; \sin \beta = n$$

که د رڼاوړانګه په یوه ښیښه ( اوبو ) پریوزي، نو $n = 1{,}5\ (1{,}33)$ دی. وښایي، چی ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چی په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

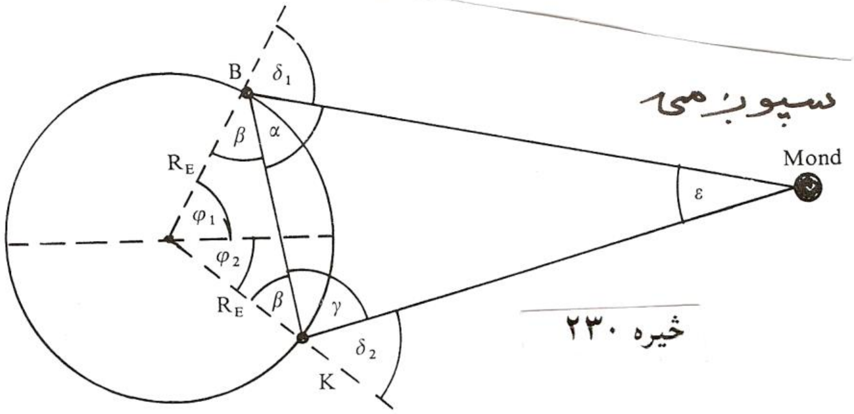
؟ 10,5°, 15,8°, 27,3° , 41,2°,67,6°,, 72,4°, 81,9°

۲۸ – په ۱۸ –مه میلادي پیړی کی د سپوږمی لریوالی تریګومتریکي وټاکل شو. په برلین کی ( جغرافیوي اوږدوالی $\varphi_1 = 52{,}52°$) او لکه د ښو هیلو په کونج کی ( $\varphi_2 = -33{,}93°$ )، کوم چی په همغه اوږدګراد پراته دي، د سپوږمی سره په همغه وخت کی تړل کیږي. له دې لاس ته راغلل:
$\delta_2 = 55{,}72°$ او $\delta_1 = 32{,}08°$ .

وشمیری $|KM|$ , ß , $|BK|$ او له دې څخه $d_{EM}$ .

(c) ketabton.com: The Digital Library






خيره ۲۳۰

۲۹ – لړځیدنیSchwingungen تل د وخت په اړه شمیرل کیږي یعني د وخت t ترواك لاندې دي. دا د بلواك $(y = a . (\sin ( 2 \pi /T)) .t + k)$ له لارې ورکړ شوي. دلته $(2 \pi / T)\, t = x$ هغه کونج دی ، کوم چې په T وخت کی وهلکیږي. $1 / T = f$ د یوه څرخون پریود یا راګرځیدنی وخت په ګوته کوي او د لړځیدنی دوام بلل کیږي» f فرکونځ frequenz بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



## ۷ ۰ ګډوله ګڼونه يا کمپليکس اعداد Komplexe Zahlen

د مخه مو وليدل، چې څنګه يوه ګنډيرۍ پر بله ګنډيرۍ ودانه شوې ده۰ که ولرو

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \qquad (7,1)$$

که پورته برابرون ته وګورو، نو څرګند ليدل کيږي، چې دا په رييلګڼونډيرۍ کې اوبې يا حل نه لري، نو له دې امله بايد ( 7 , 1 )د ګڼنو ډيرۍ وغزول شي۰ له

$$x_1 = \sqrt{-1}, x_2 = -\sqrt{-1}, .........(7,2)$$

د $\sqrt{-1}$ ګڼ، چې د لومړي حٔل لپاره د رييل مانانه لري، دا سومبول د $i = \sqrt{-1}$

ټاکل کيږي چيرته، چې لرو: $i^2 = -1$ د

$$x_1 = i, x_2 = -i \Leftrightarrow x_{12} = \pm i, ..................(7,3)$$

ليکو : دا پورته د لاندې سره

$$i^2 = -1 \qquad (7,4)$$

د (7,1) ځاي نيسي، ځکه، چې باور لري

$$x_1^2 = i^2 = -1 \Leftrightarrow x_2^2 = i^2 = -1$$

دا چې i رييل مانا نه لري، نو دې سومبول ته ايماجينارګڼ imaginär( لاتين: فقط خيالي)يوون(واحد)وايو.

برابرون

(c) ketabton.com: The Digital Library



سرليک

$$x^2+a = 0 \Leftrightarrow x^2 = -a \quad , a > 0 \qquad (7,5)$$

کيدی شي په لاندې ډول وليکل شي

$$x_1 = \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a.i}, ..................(7,6)$$

$$x_2 = -\sqrt{-a} = -\sqrt{a}.\sqrt{-1} = -\sqrt{a.i}$$

دلته د(7,4) له امله باور لري

$$x_1{}^2 = ai^2 = -a, x_2{}^2 = (-\sqrt{a})^2 i^2 = -a, .............(5,7)$$

اوس د ايماجينار ګڼ يوون(واحد) ټوليز کوو

$$z = bi, b \in R, i^2 == -1, ................(5,8)$$

ايماجيناريوون(واحد)i =z يو ځانګړی ايماجينارګڼ b=1 دی

د ټوليزې څلوری (عمومي مربع) برابرون(مساوات) اوبی(حل) :

$$x^2 + px + q = 0, p, q \in R, ...................(7,9)$$

په لاندې ډول د څلوری پوره کولو يا مربع تکميلول له لارې

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + p^2 / 4$$

لاس ته راځی يالرو<=

$$x^2 + px + q = (x+ p/2)^2 = +(q-p^2/4) \qquad (7 , 10)$$

$$(x+p/2)^2 = p^2/4 - q \qquad (7 , 11)$$

او که فورمال پسی وګڼل شي

$$(x+p/2)_{1,2} = \pm\sqrt{p^2/4-q}$$

نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$x_{12} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{p^2/4-q},.....................(7,12)$$

د $p^2 = 4q$ لپاره رييل «دبل» اوبی يا حل لاس ته راځي

$$x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$$

که $p^2 > 4q$ وي نو(7,12) دوه مختلف رييل اوبيونې يا حلونه منځ ته راوړي.

که $P^2 < 4q$ وي، نو رييل اوبی نه شته دئ

د ايماجينار ګڼ په مرسته کيدی شي وليکو

$$\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} = \sqrt{[q-\frac{p^2}{4}](-1)} = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}.i$$

که اوس ځاي پر ځاي کړو

$$-\frac{p}{2} = a \in R, \sqrt{q-p^2/4} = b \in R$$

نو په لاندې بڼه دوه اوبيونې يا حلونه لاس ته راځي

$$x_{1,2} = a \pm bi; a,b \in R$$

د دې فورم يا بڼې ګڼونه کمپلکس ګڼونه(Komplexe Zahlen (لاتين: پوره کوونکي - يا پوره کيدونکي-) بلل کيږي

$$z = a+bi \text{ , } i^2 =-1; a,b \in R \qquad (7,13)$$

د کمپلکس ګڼونوډيری په C سره په نخښه کوو

$$\bar{z} = a-bi,..................................(7,14)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا پورته (7,14) و(7.13) ته کنجوګيري کمپلکس ګڼ بلل کيږي٠ لنډ کنجوګيري کمپلکس ګڼ يا اوښتی ګڼ

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5,15)$$

د دې مطلقه يا ساده ارزښت

$$a = re(z) \Leftrightarrow b = Im(z) \qquad (7,16)$$

د دې رييل همدا رنګه ايماجينار برخه

دوه کمپلکسګڼونه برابر بلل کيږي، که دوي په رييل او ايماجينار برخه کې يو له بل سره برابر وي:

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

موږ تل په پام کې لرو، چې$i^2 = -1$ اينول شوی

ګڼوله يا کمپلکس عدد کيدی شي په سطحه يا هاره کې د لاندې شکل سره سم( د ګاوس د اعدادوسطحه). سړی د کمپلکسو اعدادو سره همغسې شميرنه کوي، لکه د حقيقي اعدادو سره او په پام کې نيسي چې:$i^2 = -1$

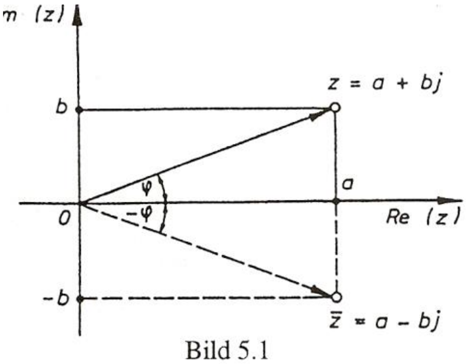


Bild 5.1

موږ دې سيستم ته پروت ولاړ سيستم وايو يا کواورديناتسيستم Koordinaten systm

پورته ځيره دې وکتل شي

(c) ketabton.com: The Digital Library



پروتولاړ سیستم ته د (x,y) - سیستم هم وايي په پروتولاړ سیستم کې پروت څرخون( محور ) د x - محور ته د هوارې یاسطځې ریيلبرخه او ولاړ محور یا د y – محور ته یېایماجینار برخه وایې لکه څنګه، انځور شوي دي٠ په دې توګه په پروتولاړ سیستم کې یو ټکی منځ ته ر اځي، چې کمپلکس ګڼ انځوروي٠(موږ دا اوس دا برخه نوره نه څېړو، خو دا د وکتورونو په ډول انځورېږي او کارونی یا عملي یې هم همداسې دي، لکه د ورسره بلدو وکتورونو) یادونه : هغه ګران هیوادوال، چې نوي د شمیرپوهنی د دې برخې سره بلدیږي، د هغو لپاره دې په دا لومړي ځل ځنې وییونه یا لغاتونه یاکلمې په پام کې نه راځی، لکه د وکتور کلمه، خو دا پورته یا لاندې څېرو کې کتلی شو، چې د کمپلکس ګڼونو زیاتون او کمون څنګه دی

۷ ۰ ۱ زیاتون او کمون:

لاندې څیرو ته دې پام وي او ګورو، چې ریيل برخه او ایماجینار برخه د Re(z) او Im(z) سره په نخښنه شوي دي

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2), .......(7,17)$$

بیلګه ۷ ۰ ۱ ورکړ شي:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 3 + 2i$$
$$\Rightarrow z_1 + z_2 = 5 - i, z_1 - z_2 = -1 - 5i$$
$$\Rightarrow$$
$$| z_1 | = \sqrt{2^2 + 3} = \sqrt{13}, | z_1 | = \sqrt{13}$$
$$-z_1 = -2 + 3i, -z_2 = -3 - 2i$$

زیاتون یا جمعه ( او په همدې توګه کمون یا تفریق یعنې د( z2-) په زیاتون)کیدی شي د څېرې ۵ ( په همدې توګه د څېرې ۷ . ۳) د ګراف له لارې هم ښوول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



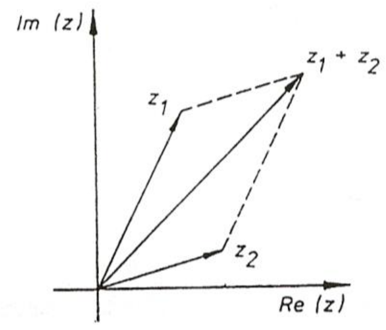



Bild 5.2 7.2 څېره

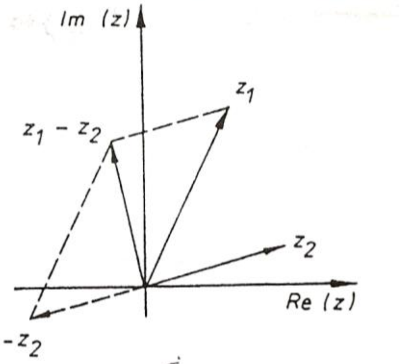
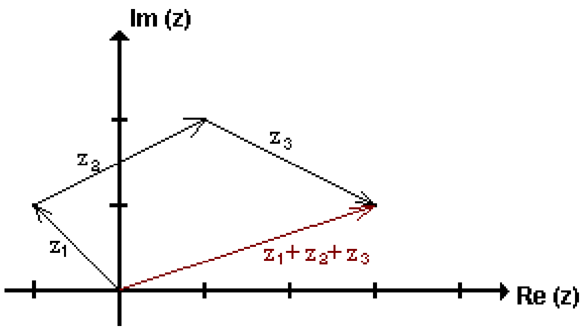
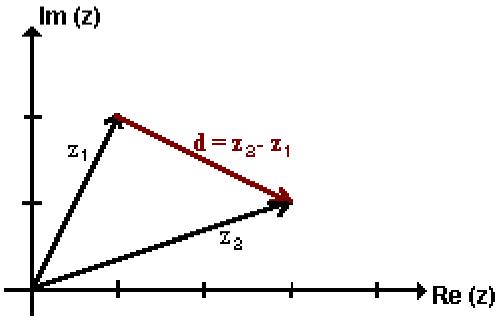



Bild 5.3 7 څېره

يا لاندې:




په پورته او لاندې څيرو کې د کملپکس ګڼونو د زياتون او کمون انځور ليدلکيږي۰




**دکملپکس ګڼونو ارزښت**

د وکتورz اوږدوالی د کملپکس ګڼونو ارزښت بلل کيږي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

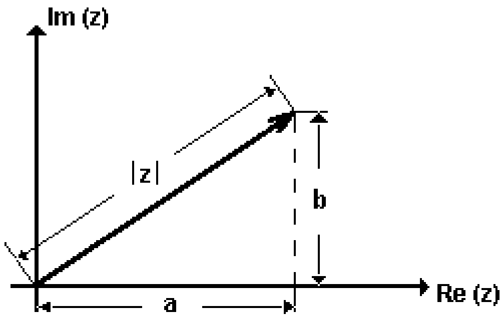


دا د  په |z| سره ښايو او د پيتاګوراس( فئثاغورث) د جملې

سره ښوول کيږي، د دې لپاره دې پورته اخرنی ليکه

هم وکتل شي٠ مخامخ څيره موږ ته د کمپلکس ګڼ

د ارزښت انځور ښايي




$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

په درې ګوڼي کې د اړخونو ځاننيونه يا تباسب له امله باور لري

$$||z_1|-|z_2|| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7,18)$$

برسيره پر دې باور لري:

$$z_1 + z_2 = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

۷ . ۲  د کمپلکس ګڼونو ځل:

د ورسره بلد نوک اينوولو له لارې لاس ته راځي

$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$

$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 (-1)$

$\Rightarrow$

(c) ketabton.com: The Digital Library



نو بارورل ري

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2 - b_1 b_2 )+(a_1 b_2 +a_2 b_1 )i \qquad (7, 20)$$

گران لوستونکی به زما په ستونځو پوه شي، چې لاتين توري په بدل ډول ليکل شوي، چې دا هم زما تخنيکي ستونځې دي، دا که په هرځايکې وي،دا به راته گران د شميرپوهنې مينه وال وبخښي۰ دا لاندې هم ساده ازمايل کيدی شي

$$\overline{z_1.z} = z_1.z_2 \quad , \quad |z_1 .z_2 | = |z_1 ||z_2 | \qquad (7,21)$$

بیلگه ۷ ۰ ۲

د $z.\bar{z} = (a+bi) ( a-bi) = a^2+b^2+(-ab + ab)i =a^2+b^2$

او (۱۵ ، ۷ ) له امله لاس ته راځي:

$$\Rightarrow \quad z.\bar{z} = |z|^2 \qquad (7, 22)$$

۷ ۰ ۳ ویش

$$z_1 : z_2 = (a_1+b_1i):( a_2 +b_2 i) = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1}{a_2+b_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_1\bar{z}_2} = \frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_2-b_2i)} = \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$$

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i \qquad (7,23)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په دې پسې لاس ته راځي

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}, \left(\overline{\frac{Z_1}{Z_2}}\right) = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad (7,24)$$

بیلګه ۷ . ۳ :

د ( ۷ . ۲۴ ) د دوېمې برخې ښوونه:

$$\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} = \frac{\overline{Z}_1.Z_2}{\overline{Z}_2.Z_2} = \frac{(a_1-b_1i)(a_2+b_2i)}{(a_2-b_2i)(a_2+b_2i)} =$$

$$= \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_1b_2-a_2b_1)i}{a_2^2+b_2^2} =$$

$$= \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2} - \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i = \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}$$

بیلګه ۷ ۰ ٤ :د او Z1 لپاره له Z2 سره سم لاس ته راځي:

$$Z_1 : Z_2 = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)(3-2i)}{(+2i)(3-2i)} = \frac{(6-6)-(4+9)i}{3^2+2^2} = \frac{13}{13}i = -i$$

۷ . ۴ . تمرینونه

۱ - مېلق یا همغه ارزښتونه او انځورونه

۱ . ۱ – لاندې په اریتمیتیکي یا شمیرنیزه توګه ورکړ شوي ورکړ شوي کمپلکس عددونه په ګاوس سیحه کې انځور کړئ! د دې عددونو مېلقه ارزښتونه وشمیرئ.

a) $z = 1 - i$ b) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

c) $z = 2(1 - \sqrt{3}i)$ d) $z = -1 - i$

۱ . ۲ – د ګاوس د عددونو سطحه کې د هغو لاندې مخلوط یا کمپلکس عددونو ځای ورکړئ، د کومو لپاره چې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library



a) $|z|=\sqrt{2}$  b) $|z|<\sqrt{2}$  c) $|z|>\sqrt{2}$  d) $|z|=r$

۲ – جمعه او تفريق(زاتون او کمون)

۲ . ۱ – د شميرنې او کارنې يا رسم کونې له لارې پيدا کړئ

a)(1+2i)+(2+i)  b) (-2+i)+1-2i)

c) (1-2i)-(1-2i)  d) (-1-2i)+(2-i)

۲ . ۲ - د شميرنې او کارنې يا رسم کونې له لارې پيدا کړئ

a) (22 + 5i) + (2 + i)  b) (3 + 2i) - (5+2i)

c) (1+2i) - (1+2i)  d) i -(1-2i)

۳ . ضرب(ځل) او وېش:

په لاندې کې a,b,c,d,x,y حقيقي ګڼونه دي.

۳ . ۲ – وشميرئ

a) $(2+\sqrt{3}\,i).(3-\sqrt{2}i)$  b) $(3+2\sqrt{2}\,i).(3-2\sqrt{2}\,i)$

c) $(1+\sqrt{5}\,i).(1-\sqrt{5}\,i).(13-12i))$  d) $\sqrt{3+\sqrt{7}i}.\sqrt{3-\sqrt{7}i}$

۳ . ۲ – وشميرئ

a) $(x+y\,i)\,(2x+yi)$  b) $(\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i)(\sqrt{x}-\sqrt{y}\,i)$

c) $\left(\frac{2}{3}a-3bi\right)\cdot\left(\frac{4}{3}a+5bi\right)$  d) $(c-\sqrt{d}\,i)(-c-2\sqrt{d}\,i)$

۳ . ۳ – د لاندې ماتونو مخرج يا ماتلاندې حقيقي ورګرځوئ ( a ، b حقيقي دي)

3.3.1. a) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i}$  b) $\frac{1-20\sqrt{5}\,i}{7-2\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{56+33i}{12-5i}$  d) $\frac{63+16i}{4+3i}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



3.3.2. a) $\frac{5i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i}$ b) $\frac{3-27\sqrt{5}\,i}{7-3\sqrt{5}\,i}$

c) $\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,i-2}$ d) $\frac{i}{8-i}(i+1)$

3.3.3. a) $\frac{3a+4bi}{4a-3bi}+\frac{4a-3bi}{4a+3bi}$ b) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,i}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,i}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}\,i}{\sqrt{b}-\sqrt{a}\,i}$

c) $\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\,i}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\,i}-\frac{\sqrt{1-a}+\sqrt{1+a}\,i}{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}\,i}$

d) $(5-i)\,(6-i)+\frac{5-i}{6-i}$

۴ . سره رایوځی شوې پوښتنې

ګډوله ګڼونه یا اعداد ورکړ شوي.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ او $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

۳ - د لوګاریتم بنسټ فرمولونو استعمال. په لاندې تمرینونوکې x وشمرئ.

$z_1=\frac{1}{2}\sqrt{3}-\frac{i}{2}$ und $z_2=-\frac{1}{4}-\sqrt{3}\frac{i}{4}.$

وشمیرئ:

4.1. a) $z_1+z_2$ b) $z_1-z_2$ c) $z_1\cdot z_2$ d) $\frac{z_1}{z_2}$

4.2. a) $|z_1|$ b) $|z_2|$ c) $\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$ d) $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

4.3. a) $|z_1+z_2|$ b) $|z_1-z_2|$ c) $\bar{z}_1+\bar{z}_2$ d) $\bar{z}_1-\bar{z}_2$

4.4. a) $|z_1|\cdot|z_2|$ b) $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ c) $|z_1\cdot z_2|$ d) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

۴ . ۵ – د لاندې مربع مساواتو حلونه ورکړئ!

(c) ketabton.com: The Digital Library



a) $x^2 + (1 + i)\,x - 2\,(1 - i) = 0$

b) $x^2 + (3 - 2i)\,x + 3\,(1 - i) = 0$

c) $x^2 - \frac{i}{2}\,\sqrt{2}\,x + 1 = 0$

d) $16\,x^2 + 8\,(i + 1)\,x + 2\,(i + \frac{9}{2}) = 0$

همدا موضوع له بلکتاب څخه

7 . ایماجینار او کمپلکس ګنونه

# Inhaltsverzeichnisخوندیونه


- د ریيلو ګنونو بنستونه او نیوني یا فرضیي
- ایماجیارګنونه

کمپلکسګنونه

- په ګنونهواره کي د کمپلکس ګنونو انځورونه
- د کمپلکس ګنونو سره شمیرنه
- د کمپلکسګنونو زیاتون ، کمون
- د کمپلکسګنونو ځل
- د کمپلکس ګنونو ویش
- د کمپلکس ګنونو تولګنیز په توان
- د بینوم درسي جمله
- د موفري فرمول 5.6 Die Moivreschen Formeln
- د کمپلکس ګنونو ریښه 5.7 Wurzeln aus komplexen Zahlen
- توان د مختلفو جګګنونو سره
- 5.8 Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten


## د ریيلګنونو بنستونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ریيلګڼونو ډیری لکه د مخه مو ، چې ګوته ورته ونیوله د راشنل او ایراشنل ګڼونو له ډیریو جوړه ده ( د ریيلګڼونو برخه دې وکتل شي).

## ایماجینار ګڼونه Imaginäre Zahlen

د رییل ګڼونو سیستم پوره نه دی، ګورو، چې د یوه ګڼ ځلوری یامربع، چې د کمیز ګڼ سره برابره وي، رییله اوبیونه یا حل نه لري لکه لاندې

$$x^2 = -1$$

داسې یو رییل ګڼ نه شته، چې پورته پوره کړي

یوه فورمال اوبیونه یې په لاندې ډول ده

$$x = \pm\sqrt{-1}\,,$$

چیرته ، چې $\sqrt{-1}$ رییله اوبیونه نه ده.

دا ځلوری یا مربع ریښه د i سره په نخښه کوو، چې له دې پرابلم څخه ووتی شو او ځلوری یې په 1 - سره په نخښه کوو.

د دې i لپاره باور لري:

$$i^2 = -1$$

اوس کړی شو، چې ولیکو

$$x_{1,2} = \pm i\,.$$

که ګڼ i د ریيلګڼونو سره زیات ځل یا ضرب کړو، نو د ګڼونو یوه د نوو ګڼونو ډیری ترې لاس ته راځي، د بیلګي په توګه :

$$2i,\ 3i,\ -i,\ 1+i,\ 2+i,\ 1+2i,\ -23+78i,\ 0.45-0.93i$$

او داسې نور.

تولیزه بڼه یې :

(c) ketabton.com: The Digital Library



سرلیک

$$a + bi ,$$

**پورته ګڼ کمپلکس ګڼ دی او a او b رییلګنونه۰ له دې سره هم لکهٔ د نورو ګنونو سره ساده شمیرل کیږي، چیرته، چې د $i^2$ په ځای 1 - لیکلی شو یا په ځېټ: لاندې کې یې بیلګې ګورو**

$$(1+2i)+(3+4i)=(1+3)+(2+4)i=4+6i$$

په ټولیزه توګه:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

$$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

له دې سره ویش هم کړی شو، خودا ، چې ستونځمن دئ وروسته یې راوړو.

دا لاندې هم لرو

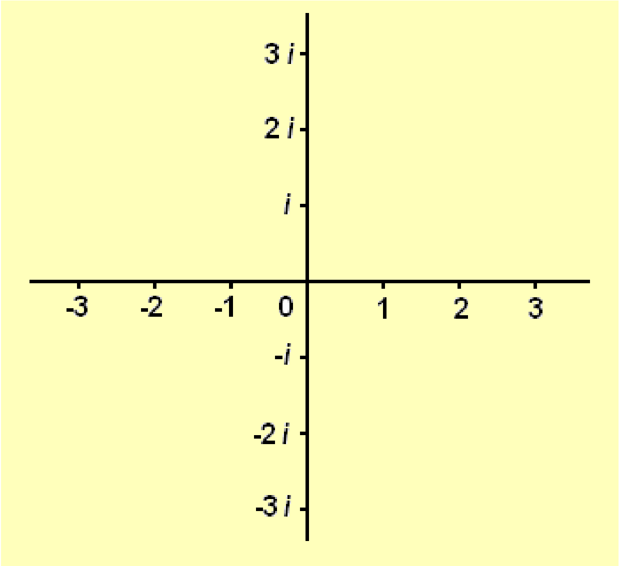
i.2i,i,0,-i,-2i,-3i۰۰۰3.....

دا ایماجینار ټولګنونه بلل کیږ ي یا بولو ، چې دا هم صفرلري

موږ په لاندې کې د هوارې پروت محور لاندې د رییلګنونو محور پوهیږو او ولاړ محور یا څرخونی یې د ایماجینار ګنونو محور دی، چې د دواړو زیاتون کمپلکس ګنونه دي یا د کمپلکس ګنونو هواره انځوروي۰.

(c) ketabton.com: The Digital Library






په لاندې کې يو کپلکس ګڼ په يوه رييل ګڼ يا پيداينتي ګڼ ويشل کيږي

$$mi : n = \frac{m}{n} i \ .$$

په پورته کې m او n رييلګڼونه دي او ايماجينار

$$x^2 = -a^2$$

په پورته کې a رييلګڼ دی، خو x غواړو لاس ته راوړو، لاس ته راوړنه يې يو ايماجينار ګڼ دی.

د دوه ايماجينار ګڼونو زياتون او کمون::

$$a\,i \pm b\,i = (a \pm b)\;i \ .$$

ځل او ويش يې

$$\frac{i}{i} = 1 \ .$$

د دې سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



سرليک

$$pi \cdot qi = -pq$$

او

$$\frac{pi}{qi} = \frac{p}{q}\,,$$

چيرته چي p او q ريللګنونه دي.

لاس ته راوړنه : د دوه ايماجينار ګڼونو حٔل يا ضرب او ويش څخه رييلګڼ لاس ته راځي، چې په لاندې کې يې ګورو ۰

$$i^2 = -1\,, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i\,, \quad i^4 = i^3 \cdot i = 1\,, \quad i^5 = i^4 \cdot i = i\,, \ldots$$

د ټولګڼ n لپاره لرو:

$$i^{-n} \equiv \frac{1}{i^n}$$

لاس ته راوړنی يي

**!Error**

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i\,, \quad i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1\,, \quad i^{-3} = \frac{1}{i^3} = -\frac{1}{i} = i\,, \quad i^{-4} = \frac{1}{i^4} = 1\,, \ldots$$

د سره شميرل ورسته کيدونکي دي.

## کملکس ګڼونه Komplexe Zahlen

ګډ يا مخطلت خلورى - يا مربع برابرون شميرو

$$x^2 - 4x + 13 = 0\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ځلورئ پوره کوونې يا تکميلونې  له لارې ، چې ورسره بلد يو ، اوبيونه يا حل پيداکوو

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3\,i\ .$$

د دې برابرن اوبيونه نه  رييل ګڼ دئ او نه ايماجينار ٠ دې ګڼ ته موږ کمپلکس ګڼ وايو    **komplexe Zahlen**.

د کمپلکس ګڼونو او د دې سره  سره شميرنه ٠

موږ  دا لاندې کمپلکس ګڼ لرو :

$$z = a + b\,i,$$

چيرته، چې a  او  b  رييل ګڼونه دي

د کمپلکس ګڼونو په مرسته کړای شو، چې بې بنديزه ځلورئ- يا مربع فرمولونه اوبې کړو

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

لاس ته راځي.

دلته چې څه راځي هغه ګران لوستنکی پخپله هم پيدا کولی شي، زه به وهڅيږم، چې دا پرابلمونه  پورته کړم يا لرې کړم ،

د لاندې لپاره

$$\frac{p^2}{4} - q \geq 0$$

يو يا دوه رييل اوبيونې لاس ته راځي٠

د

$$\frac{p^2}{4} - q < 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



لپاره اوبيوني په لاندې ډول ليکل کيږي

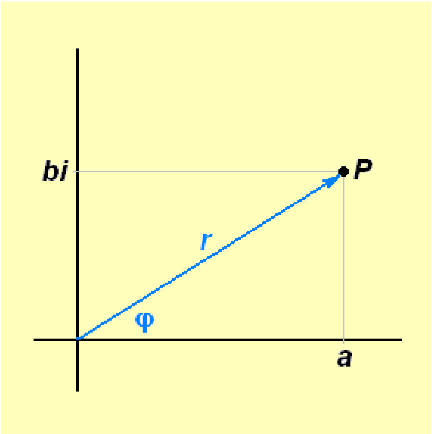
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\ .$$

اوبيوني کنجوګيري کمپلکس دې، دا په دې مانا، چې يو له بل د مخنخښي له مخه توپير کيږي٠

## په ګڼونهواره يا ګڼسطحه کې د کمپلکس ګڼونو انځورونه

د کمپلکس ګڼونو ګرافيکي انځوروني لپاره هواره ځان رامنځ ته کوي، چې د ريبل او ايماجينارګڼکرښو ځخه غزيدلې ده٠

کمپلکس ګڼونه a + bi د ټاکنې له مخې(په بدل وار يا همغه وخت) د يوه ټکی P ، چې کواورډينات يا پروت ولاړ محورونه يې a او b ، چيرته، چې محور b ټکی bi په ايماجينار ګڼکرښی باندې په ګوته کوي، يا د» ښوونکرښې « OP سره انځور کيدی شي٠ دا د يوې اوږ دې r سره ښايو او د ريبلې محور سره کونج fi جوړوي٠ ( دا همغه د ټکی P انځورول دي په پولار کواورډينات کې، r د کمپلکس ګڼ مطلق ارزښت دی، fi يې فاز بلل کيږي٠



(c) ketabton.com: The Digital Library



د دواړو انځوربنې لپاره لاندې ترانفورمیشنبرابرون باور لري( له دې څخه نوج زده کوونکې تیریدلی شي، چې ترانسفورمیشن باندې نه پوهیږي)

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\,, \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}\,, \qquad a \neq 0$$

$$a = r\cos\varphi\,, \quad b = r\sin\varphi\,.$$

له $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ لاس ته راځي

$$\varphi = \arctan\frac{b}{a} + k\cdot 2\pi, \quad \text{wobei} \quad -\frac{\pi}{2} < \arctan\frac{b}{a} < \frac{\pi}{2} \quad \text{und } k \text{ ganzzahlig ist.}$$

په پورته کې wobei د کوم سره یا چیرته چې په مانا دی او k ټولګڼ دی ۰

ارزښت

$$\varphi_0 = \arctan\frac{b}{a}$$

د في $\varphi$ اصلي ارزښت بلل کیږي۰ له دې نور ارزښتونه د $k$ او $2\pi$ له زیاتون څخه لاس ته راځي۰

د دې له مخې کیدئ شي، چې کمپلکس ګڼ په لاندې توګه ولیکل شي ۰

$$z = a + bi = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,.$$

" وروسته د اویلر فرمول "Eulerschen Formel په مرسته ترې لاس ته راځی

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

دریمه انځورونه یې لاندې ده:

$$z = a + bi = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\,e^{i\varphi}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د کمپلکس ګڼ دا درې انځورونې په ترتیب داسي بلل کیږي اریتمیتیکي بڼه کونومتریکي ( یا تریګنومتریکي بڼه ) او اکسپوننشل بڼه.

دا چې د اویلر فرمول وروسته ښوول کیږي، اکسپوننشل بڼهٔ دي دلته راوړل شوي وي، خو د ښووني لپاره دي تري کار نه اخستل ک یږي.

## Rechnen mit komplexen Zahlen

## د کملپکس ګڼونو سره شمیرنه

دوه کملپکس ګڼونه دې ورکړ شوي وي

$$z_1 = a_1 + b_1 i\,, \quad z_2 = a_2 + b_2 i\,.$$

## د کمپلکش ګڼونو زیاتون او کمون

په زیاتون او کمون کې د الجبر ي قوانینو له مخې i هم داسي په کار اچول کیږي لکه هره بله کومه د تورو لویه ، چي په کار اچول کیږي یا کارول کیږي

$$z_1 + z_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i$$

$$z_1 - z_2 = a_1 + b_1 i - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i$$

د کمپلکس ګڼونو « ښوونکرښه» ( دا هغه کرښه ده، چهٔ د دواړو محورونو صفر ټکو څخه د هغه په هواره موخه ور ټکی په لور ګزیدلی وي، یاني د صفر ټکی څخه د هغه بل موخه ټکی په لور ، ځکه لوریزه ده)لکه وکتورونه سره زیاتیدلی او کمیدلی شي

## Das Produkt komplexer Zahlen

## د کمپلکس ګڼونو ځل

دی

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i.$$

دا ځل ترلی پیژند وړ لیدونکي مانا نه لري( یاني سملاسي تري څه نه شو پوهیدلی ) . که د دې په ښت « پولارکواودینات » وکارول شي، نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$a_1a_2 - b_1b_2 = r_1r_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) = r_1r_2\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)$$

$$a_1b_2 + a_2b_1 = r_1r_2\left(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2\right) = r_1r_2\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right).$$

او له دې سره t

$$z_1z_2 = r_1r_2\left[\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right].$$

نو دی

$$|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2| \quad \text{او} \quad \varphi\left(z_1z_2\right) = \varphi_1 + \varphi_2.$$

د ځل – یا ضرب ارزښت د ارزښتونو ځل دی٠ د ځل یا ارگومنت یا فازې د ارگومنت یا فازې د زیاتون سره برابر دی٠

سملاسې پیژندل کیږي، چې دا د دوه فاکتورونو څخه زیاتو فاکتورو یا ځله وونو لپاره هم باور لري

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n| \quad \text{او} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n.$$

## د کمپلکس کڼونو ویش Division komplexer Zahlen

**په ورته توگه پیدا کیږی، که $z_2$ د صفر سره برابر نه وي**

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{او} \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

**که کیږدو $z_1 = 1$ او $z_2 = z$, نو لاس ته راځي:**

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|}\left[\cos(0-\varphi) + i\sin(0-\varphi)\right] = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



او په ځانګړي ډول د $z = i$

$$\frac{1}{i} = -i.$$

## Ganzzahlige Potenzen einer komplexen Zahl

د کمپلکس ګڼونو توان ( کپلکس ګڼ د يوه ناکميز توان سره د ريبل ګڼونو په څير دی )

$$z^{-n} \equiv \frac{1}{z^n}.$$

د کمپلکس ګڼونو ځل دې وکتل شي

$$|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n| \quad \text{und} \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n.$$

د همغه ځله وون يا ضريب z لپاره ترپلاس ته راځي

$$z^n = |z|^n \left(\cos n\varphi + i \sin n\varphi\right).$$

مورږ لرو

$$z^p \cdot z^q = z^{p+q}, \quad \left(z^p\right)^q = z^{p \cdot q}, \quad z_1^p \cdot z_2^p = \left(z_1 \cdot z_2\right)^p, \quad \frac{z^p}{z^q} = z^{p-q}, \quad \frac{z_1^p}{z_2^p} = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^p.$$

## Der binomische Lehrsatz

**د بينوم درسي جمله**

### د بينوم جملي لپاره هم لرو

د نوکانو د چاون قانون او ځل قانونو د زياتيز جګ ګڼ لپاره د بينوم جمله همغسي باور لري

$$(z_1 + z_2)^n = \binom{n}{0} z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \ldots + \binom{n}{k} z_1^{n-k} z_2^k + \ldots + \binom{n}{n} z_2^n.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



له دې ځایه ښکته د ښوونځي زده کوونکو لپاره ستونځمن دی.

## Die Moivreschen Formeln د موفری قانون

له برابرون څخه ( پورته دې وکتلشي)

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

لاس ته راځي

$$|z| = 1 : \qquad (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

له بلې خوا د زیاتیز ټولګنیز جګګڼ یا اکسپوننت سره د بینوم جملې څخه لاس ته راځئ:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi + i\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi$$

$$-i\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi + \ldots + i^n\binom{n}{n}\sin^n\varphi.$$

که د برابرون دوا

ږه خواوې بربار کینبول شي او بیا په پام کې ونیول شي، چې رییل او ایماجینار برخه دوآژه باید برابر وینو د موفري برابرون ترې لاس ته راځي **Moivreschen Formeln**:

$$\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\cdot\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\cdot\sin^4\varphi - + \ldots,$$

او

$$\sin n\varphi = n\cos^{n-1}\varphi\cdot\sin\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-3}\varphi\cdot\sin^3\varphi + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\cdot\sin^5\varphi - + \ldots,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



چيرته، چې ښی لور ترهغې پوره شي، تر څو چې ځله وونی یا ضریب صفر شي.

## د کمپلکس ګڼونو ریښه Wurzeln aus komplexen Zahlen

د برابرون اوبیونه

$$x^n = z \qquad \text{n positiv ganzzahlig}$$

پورته کی n زیاتیز ټولګڼ دی
د کمپلکس ګڼ z n -مه ریښه بلل کیږي :

$$x = \sqrt[n]{z}.$$

ږدو

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

او

$$x = \rho\left(\cos\psi + i\sin\psi\right),$$

د $z = x^n$ له امله لاس ته راځي

$$\rho^n = r \quad \text{und} \quad n\psi = \varphi$$

او د دې پسې

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{\varphi}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دي

په ویشنه کې باید په پام کې ونیول شي، چې ارګومنت یا پروتمحور φ پریودي یا تل بیرته راګرځیدونی دی د پریودې یا راګرځیدنی 2π سره ، نو

$$\varphi = \varphi_0 + k \cdot 2\pi \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

پسي د ψ لپاره تیک $n$ مختلف ارزښتونه لاس ته راځي، یاني

$$\psi = \frac{\varphi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2\cdot 2\pi}{n}, \ \ldots \ \frac{\varphi + (n-1)\cdot 2\pi}{n}.$$

د $n = k$ ځانلۀ د مخه ارزښتونه ( له دویم پسې ) تکرارېږي، نو باور لري:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}\right) \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (n-1)$$

هر له دې ارزښتونو د کمپلکس ګڼ z د n-مې رېښه بلل کېږي

$$\sqrt[n]{z} \quad \text{oder} \quad z^{\frac{1}{n}}$$

دا ټول n ارزښتونه په ګڼهواره په یوې ګردی په O په یوه منظم n - ګوډي پرته ده , د څلوری ریښی لپاره له

$$i = i\sin\frac{\pi}{2}$$

لاندې ارزښتونه ترې لاس ته راځي

$$\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4},$$

او د څلوری ریښي لپاره له

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$-i = i \sin \frac{3\pi}{2}$$

پیداکیږي

$$\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \quad \text{und} \quad \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}.$$

که موږ ونیسو لکه د رییل ګڼونو لپاره

$$z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m$$

دې وي، چیرته چې n یو پیداینتج ګڼ او m یو په خوښه ټولګڼ دی، نو له دې سره د کمپلکس ګڼ سره جګګن یا کسپوننت وپیژندل شو یا تعریف شو٠ اوس نو اخرنی پل پاتې ، چې هغه د ایراشنلجګګڼ دی .

**توان د په خوښه رییل جګګڼ سره**

## Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten

اوس دې z له صفر مختلف په خوښه کمپلکس ګڼ وي .

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\left[\cos(\varphi + k\cdot 2\pi) + i\sin(\varphi + k\cdot 2\pi)\right],$$

چیرته چې

$$k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

دی ، نو د $z^\nu$ ($\nu$ رییلreell) لاندې هر دالاندې کمپلکس ګڼ پوهیږو:

$$r^\nu\left[\cos\nu(\varphi + k\cdot 2\pi) + i\sin\nu(\varphi + k\cdot 2\pi)\right].$$

لاربنود : د داسې په ټولیز پیژند یا تعریف سره د کمپلکس ګڼونو توان لپاره د د توان شمیرنې بنسټیز قوانین باور لري ، یانې

$$z^\mu \cdot z^\nu = z^{\mu+\nu}, \quad z_1^\mu \cdot z_2^\mu = (z_1 \cdot z_2)^\mu, \quad (z^\mu)^\nu = z^{\mu\cdot\nu}$$

**nicht mehrنور بس دی**

(c) ketabton.com: The Digital Library



## ۱۳ ترانسڅندنت برابرونونه يه ـ مساوات

دلته يواځي هغه ترانسځندنت مساوات څېړل کيږي، کوم چی بيرته په الجبري مساواتو اړول کيدی شي. دا بيرته په الجبري مساواتو اړول، لکه څنګه په ريښه مساواتوکی، په خوبنه په بل شکل اړول کيږي او په داسي ډول دي لکه هملته:

د فرمول په اړولو( فورم بدلون يا بڼه بدلون) سره کوم ځواب له منځه نه ځي، خو کيدی شي چی اړولی فرمول زياتي اوبيوني يا حلونه نسبت د پيل برابرون ته ولري. له دې امله بايد د اړول شوي برابرون ټولې اوبيونې په پيل برابرون کی ځاي په ځاي يا کيښوول شي او وکتل شي چی کوم له دې د پيل مساوات حلونه هم دي

لکه څنګه په ريښه يي برابرونونو يا مساواتو کی ، دلته هم يواځی رييل اوبيوني پلټل کيږي.

### ۱۳ . ۱ لوګاريتمي مساوات

د لوګاريتمي مساواتو او اکسپوننشل يا په جګ سماواتو د حل (اوبي) پيدا کولو لپاره اړيين يا ضرور(ضروري يا اړيين شرايط) دی، چی د يو عدد(ګڼ) aلوګاريتم، د b په بنسټ، معلوم کړو يا وڅيړو.

$$x = \log_b a; a > 0, b >, b \neq 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (13,1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د بنسټ $b = 10$ لپاره(lga)او د بنسټ b=e لپاره ( ln a) کيدی شي ( ۱۳ . ۱ )

سيده د جبشميري له لارې پيداشي. په ځټ يا برعکس د 10 =| b =|e لپاره برابرونونه په دې ډول اړول کيږي

$$x = \log_b a = \lg a / \lg b = \ln a / \ln b......................(13.2)$$

د لوګاريتمي مساواتو يو ساده ډول يا شکل ( تيپ ) دا دی

$$l\,\text{og}_b\, x = c..................................(13.3)$$

دا برابرون د (7. ۱ ) ، (7. ۲ ) له مخی لاندې ته ورته دی:

$$x = b^c..........................................(13,4)$$

دا سی افاده هم د جبشميري سره شميرل کيدی شي.

بيلګه ۱۳ . ۱ $:\log_2 x = 1,5; x = 2^{1,5} = 2.8284$

په همدې ډول د ( ۱۳ . ۳ ) بنې اوبيونه په لاندې ټوليز شوي شکل هم ساده دی

$$\log_b f(x) = c........................................(13,5)$$

دلته f(x) يوه الجبري وينه يا افاده ده، د ( ۱۳ . ۵ ) سره الجبري برابرون کټمټ ( ورته ) دی

$$f(x) = b^c..........................................(13,6)$$

ټولې د ( ۱۳ . ۶ ) اوبيونې د ( ۱۳ . ۵ ) اوبيونې هم دي

بيلګه ۱۳ . ۲ : لوګاريتميز برابرون

$$\log_2(x^2 + x + 6) = 3$$

دلاندې مساواتوسره کټمټ دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$ (همداسی) $x^2+x+6=2^3=8$

او لاندې اوبيوني لري

$$x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2};x_1=-2;x_2=1$$

يو د ( ۱۳ . ۵ ) ډول ( تيپ) برابرون هم مخ ته لرو، که د هغه کينه لور ( ارخ) ته يود لوګاريتم ريشنل لاينيز کمبينشن الجبري ويينه يا افاده موجوده وي

$$r_1.\log_b g_1(x)+r_2.\log_2(x)+r_3.\log_b g_3(x)+...=c.........(13,7)$$

دلته ځلوني ri راشنل ګڼونه دي. د لوګاريتم قوانينو (۷. ۷ ) ، (۷. ۹ )کاروني يا استعمال څخه، ۷ برخه وګورئ، ( ۱۳ ، ۵ ) لاس ته راځي او دا د لاندې برابرونونو سره

$$f(x)=\{g_1(x)\}^{r_1}.\{g_2(x)\}^{r_2}....................................(13,8)$$

بيلګه ۱۳ . ۳:

لومړی له $\log_3(x-1)+\frac{1}{2}\log_3 x-\frac{1}{2}\log_3(x-1)=2$ څخه لاندې لاس ته راځي

$$\log[(x-1)(\frac{x}{x-1})^{\frac{1}{2}}]$$

اوله دې څخه رينه برابرون $\sqrt{x}.\sqrt{x-1}=9$ ،

د کوم له څلوری يا مربع کولو څخه $x(x-1)=81$ يعني $x^2-x-81=0$

د لاندې ځواب سره

$$x_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{324}{4}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{325}{4}}=\frac{1}{2}\pm(\frac{1}{2}).18.03;$$

$$x_1=9,515;x_2=-8,515$$

تيك دا $x1=9,515$ پيل برابرون پوره کوي

. د $x=x2<0$ لپاره log x او په همدې ډول ( log(x-1 پيژند نه لري يا تعريف نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه ۱۳ . ۴:

له $\log_b(2x+3)=\log_b(x-1)-1$ څخه لاس ته راځي

$$\log_b[(2x+3)/(x-1)] = 1$$

او نور پسی $\frac{2x+3}{x-1} = b^1 = b$ پس

$2x+3=bx-b$

$b+3=x(b-2)$

$x=(b+3)/b-1)$

پيل وينه يا افاده د $x>1$ لپاره موخه وره يا هدفمنده ده، يعني که $1<( b+3)/b-2)$ وي.

د $b>2$ يعنی $b-2>0$ څخه لاس ته راځ $b+3 > b-2$

له دې لرو $3>-2$دا د ټولو b لپاره پوره دی

د. $2 \le b$ لپاره د $b+3 \le b-2$ څخه $b+3 < b-2$ $2 \le 3$ لاس ته راځي

اودا د هيڅ b لپاره باور نه لري .

له دې امله کره د $2 < b$ لپاره اوبی شته دی. د $2 \le b$ لپاره اوبيونه نه شته دی.

د لاندې لوګاريتمي تيپ برابرون هم کيدی شي په الجبري مساواتو بيرته واړول شي

$$F(\log_b f(x)) = 0 \qquad (13.9)$$

چیرته چی F او هم f الجبريزې وينې يا افادې دي. د بدلون کاروايي يا عمليه اجرا کوو

$$y=\log_b f(x)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13,10)$$

او په لمړي پل کی الجبري برابرون اوبی کوو

$$F(y)=0 \qquad (13.11)$$

ددې اوبيونه ..$y1,y2$ په ( ۱۳/۱۰ ) کی ږدو، نو د هر yi لپاره د تيپ ( ۱۳/۵ )

(c) ketabton.com: The Digital Library



لوګاریتمي مساوات لاس ته راځي:

$$\log_b f(x) = y_i; \quad i = 1,2,3,......... \qquad (13.12)$$

له دې څخه لاندې الجبري مساوات لاس ته راځي

$$f(x)=b^{y_i} \qquad (13.13)$$

ددې لپاره چې و ازمائیلی شو چې ایادا هم برابرون پوره کوي، نو ټول ددې برابرونونو اوبیوني یا ځوابونه باید په پیل برابرون ( ۱۳/۹ ) کی کینوول شي یا ځاي په ځای شي،

بیلګه ۱۳ . ۵ : برابرون $\log^2 x-\lg x-2=0$ د سبستیځیوشن(بدلون) $y=\lg x$سره په څلوری برابرون $y^2-y-2=0$ بدلیږي .
د $y1 = 2$ او $y 2 = -1$ ځوابونو سره
له. $\lg x=2$ او $\lg x=-1$ لاس ته راځي

$x1 = 10^2=100$ او $x_2=10^{-1}=\dfrac{1}{10}$

دواړه ځوابونه د پیل برابرون ځوابونه دي.

بیلګه ۱۳ . ۶ :

له برابرون $(6 /(\lg x +1)) + (8 / (\lg x -1)) = 3$
د,$x>0$ مګر $( x \neq 1/10, x \neq 10)$ چې د اصلي ماتلاندي
$(\lg x+1)(\lg x-1)$ سره ځل شی، لاس ته ترې راځي

$$6(\lg x-1)+8(\lg x+1)=3(\lg^2 -1)$$
$$, \quad 6\lg x-6+8\lg x+8=3\lg^2 x–3$$
$$0=3\lg^2 x-14\lg x-5$$

او د بدلون $y = \lg x$ سره مو لاندې څلوری بڼي یا مربعفورم ته بیایي:

$$3y^2-14y-5=0 , y^2-(14/3)y-5/3=0$$

د لاندې ځوابونو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$y_{1,2}=\frac{7}{3}\pm\sqrt{\frac{49}{9}+\frac{15}{9}}=\frac{7}{3}\pm\frac{8}{3}; y_1=lox_1=5; y_2=\lg x_2=-\frac{1}{3}$$

$$x_1=10^5; x_2=x^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$$

دواړه ارزښتونه پیل مساوات پوره کوي.
که په یوه برابرون کی لوګاریتمونه د مختلفو بنسټونو bسره رامنځ ته شي،
نو کیدی شي د ( ۱۳ . ۲ ) په مرسته په همغه برابر بنسټ واړول شي

بیلګه ۱۳ . ۷ :

له $\log_2(x-1)+\log_4(x-1)-1=0$

څخه دلاندې برابرون په مرسته لاس ته راځي:

$$\log_4(x-1)=\frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4}=\frac{1}{2}\log_2(x-1),$$

$$\log_2(x-1)+\frac{1}{2}\log_2(x-1)-1=0,\ \log_2(x-1)=\frac{2}{3},\ x-1=2^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[3]{4},$$

$$x=1+\sqrt[3]{4}.$$

دا ارزښت د پیل برابرون اوبی یا ځواب هم دی:

$$\log_2\sqrt[3]{4}+\log_4\sqrt[3]{4}-1=\frac{1}{3}\log_2 4+\frac{1}{3}\log_4 4-1=\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}-1=0.$$

## ۱۳ . ۲ اکسپوننشل – یا په جګګن برابرونونه

ساده اکسپوننشل برابرون( مساوات)

$$a^x=b; a>0, a\neq 1, b>0 \text{.............................} (13,14)$$

کیدی شي چی د لوګاریتم نیولو سره سملاسي حل شي( ځواب شي)

$$x=\log_a b=\lg_b/\lg_a=\ln b/\ln a \qquad (13,15)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



لاندني برابرونونه په ساده ډول په ( ۱۳ ، ۱۴ ) ډول (رقم ( تیوپ )
برابرونونو باندې اړول کیدی شي.

بیلګه ۱۳ . ۸:

$$2^x + 3^{x+2} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0.$$

$$2^x(1-2^2)+3^x(3^2-3)=0,\ \text{bzw.}\ 6\cdot 3^x = 3\cdot 2^x,\ \text{bzw.}\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,$$

$$x = \frac{\lg 2}{\lg \frac{2}{3}} = \frac{\lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -1{,}7095.$$

که په ( ۱۳ . ۱۴ ) د الجبري وییني یا افادي( f (x اکسپوننتونه
یاجګګنونه وي، نو:

$$af(x)=b, a>0, a|=1, b>0 \qquad (13 . 16)$$

په دې ډول د لوګاریتمولو له لارې یو الجبري برابرون لاس ته راځي

$$f(x)=\log_a b ............................(13,17)$$

د کومو ځوابونه چې د ) ۱۳ . ۱۶ ( ځوابونه هم دی.

بیلګه ۱۳ . ۹ : مساوات $2^{x^2+x-4} = 4$

مو لاندې خلورى برابرون یا مربع مساوات ته بیایي ( لاربنودوي)

$$(x^2+x-4)=\log_2 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 6 = 0$$

د $x_1 = 2 , x_2 = -3$ ځوابونوسره ، کوم چې د پیل برابرون اوبیونې یا
ځوابونه هم دي.

بیلګه ۱۳ . ۱۰ : په برابرون $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$ کی د یوه پوتنځ بنسټ د
بل پوتنځ د بنسټ په څېر ارزښت دی. له دې امله باور لري

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1 + 1 = -3\ ,\ x_2 = -4$$

**بیلګه ۱۳ . ۱۱ : په مساوات** $16^{(3^x)} = 4^{(6^x)}$

**کې کیدی شي چې ناپېژندونکی د اکسپونتت یا په جګ څخه د دوه واره لوګاریتمولو له لارې لاس ته راشي (راحل شي):**

$$3^x \cdot \lg 16 = 6^x \cdot \lg 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{6}\right)^x = \frac{\lg 4}{\lg 16} \Leftrightarrow x \cdot \lg 0{,}5 = \lg \frac{\lg 4}{\lg 16} = \lg \frac{2\lg 2}{4\lg 2},$$

$$x \cdot \lg 0{,}5 = \lg 0{,}5 \qquad \text{یا oder } \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2},$$

$$x = 1 \qquad x = 1.$$

**بیلګه ۱۳ . ۱۲ :** $7\sqrt[x]{22} - 15\sqrt[x]{25} = 0$

**یو د تیپ ( ۱۳ . ۱۶ ) مساوات دی، څکه چې باور لري**

$$\frac{\sqrt[x]{22}}{\sqrt[x]{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \sqrt[x]{\frac{22}{25}} = \frac{15}{7} \Leftrightarrow \left(\frac{22}{25}\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{15}{7}$$

او له دې امله

$$\frac{1}{x} = \frac{\lg \frac{15}{7}}{\lg \frac{22}{25}} \Leftrightarrow x = \frac{\lg 22 - \lg 25}{\lg 15 - \lg 7} = 0{,}1677.$$

که د مساوات په کېڼ اړخ د اکسپوننشل افادو څلونه او یا ویشونه هم وي، د مختلفو بنسټونو او مختلفو الجبري اکسپونتونو سره، کیدی شي چې د لوګاریتمولو له لارې الجبري مساوات لاس ته راشی.
له

$$\frac{a_1^{f_1(x)}.a_2^{f_2(x)}........}{b_1^{g_1(x)}.b_2^{g_2(x)}........} = c;....................................(13{,}18)$$

څخه لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f_1(x)\lg a_1 + f_2(x)\lg a_2 + \ldots - g_1(x)\lg b_1 - g_2(x)\lg b_2 - \ldots\ldots = \lg c \qquad (13.19)$$

که یو مساوات مو مخ ته پروت وي، په کوم کی چی د یوه اکسپوننشل افادې
یوه الجبري وبینه یا افاده F د الجبري اکسپوننت( f(x سره رامنځ ته شي

$$F(a^{f(x)})=0 \;;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13,20$$

نو دا بدلونه کوو

$$y = a^{f(x)} \qquad (13.21)$$

د برابرون

$$F(y) \qquad (13.22)$$

د ټولواوبیونو $y_1, y_2, y_3;\ldots\ldots\ldots$ لپاره باید

$$a^{f(x)} = y_i ; i=1,2,3\ldots\ldots \qquad (13.23)$$

په همدې ډول

$$f(x) = \log_a y_i \quad ; i = 1, 2, 3 \ldots\ldots \qquad (13.24)$$

اوبی شي

بیلګه ۱۳ . ۱۳:

برابرون $3^{2x} + 3^x = 2$ کیدی شي چی د بدلون $y = 3^x (y^2 = 3^{2x})$
سره په خلوری

برابرون یا مربع مساوات $y^2+y-2=0$ بیرته واړول شي. لاس ته راځي

$$y_{1.2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}; y_1 = 3^x = 1; y_2 = 3^x = -2$$

له دې څخه لاس ته راځي

$$x_1.\lg 3 = \lg 1 = 0, x_1 = 0$$

دا برابرون $x_2.\lg 3 = \lg(-2)$ اوبیونه نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه ۱۳ . ۱۴ :

په برابرون

$$\sqrt{e^{x^2-1}}-\sqrt{e^{x^2-1}-1}=\sqrt{2e^{x^2-1}-1}\ldots\ldots\ldots\ldots(13,25)$$

کې داسی بدلوو:

$$y=e^{x^2-1}\ldots\ldots\ldots\ldots(13,26)$$

او لاس ته راوړو

$$\sqrt{y}-\sqrt{y-1}=\sqrt{2y-1};\ldots\ldots\ldots\ldots(13,27)$$

له دې ښخه د مربع کوولو له لارې لاس ته راځي:

$$y+y-1-2\sqrt{y(y-1)}=2y-1\Rightarrow -2\sqrt{y(y-1)}=0 \Rightarrow y(y-1)=0$$

$$y_1=0; y_2=1$$

تیك $y_2=1$ (۱۳ ، ۲۷) پوره کوي. له دې امله

$$e^{x^2-1}=1;\ldots\ldots\ldots\ldots(13,28)$$

باید اوبی . د لوګاریتمولو ښخه تعقیبیږي:

$x^2-1=\ln 1=0,$

$x1 = 1 , x2 = -1$

دواړه ارزښتونه پیلبرابرون پوره کوي٠
برسیره پر دې باید وښوول شي، چی په برخی ۱۳ . ۱ او ۱۳ ۲ کی انځور شوي متودونو سره یوه د مساواتو ټوله لړی حل کیدی شي، په کوم کی اکسپوننشل افادې او لوګاریتم یوځای رامنځ ته کیږي.

بیلګه ۱۳ . ۱۵ :

له $2^{(\ln^2 x-\ln x+1)}=8$ ښخه د بیلګي په توګه د بنسټ 2 لوګاریتموولو له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



$\ln^2x-\ln x+1=\log_2 8 = 3$

که کیږدو $y = \ln x$ ، نو دا څلورۍ برابرون یا مربع مساوات $y^2-y-2=0$

لاس ته راځي،د ځوابونو

$y1 = -1 , y2 = 2$

سره او له دې بیا لاس ته راځي:

$\ln x=-1 , \ln x=2, x1=e-1=1/e , x2=e^2$

## د ډاکتر ماخان شینواري لیکنې اوژباړې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

*Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

(c) ketabton.com: The Digital Library



دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه( هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون ( دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

(c) ketabton.com: The Digital Library



1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

.يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواريد ،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،ميرې،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي. دا هم چاپ سوي.

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج ښخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د ښتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو ښخه چې د ښتوتګارت پوهنتون ن ج ښخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

(c) ketabton.com: The Digital Library



سرلیک

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې چاپ شوی

۱۶ - ځمککچپوهنه ( هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري چاپ شوی

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند ( منطق ریاضي) چاپ شوی

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

(c) ketabton.com: The Digital Library



۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګریزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه چاپ شوی

۲۶ - د زړه له کومې( دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

دا لاندې د ښوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسیدل:

شمیرپوهنه د اوم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د اتم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د نهم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د لسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د یولسم ټولګي له پاره

(c) ketabton.com: The Digital Library



شمیرپو هنه د دولسم ټولګي له پاره

رياضي برای صنف دوازده

.

## د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

| | |
|---|---|
| | ماخان په اولني نوم ميړي شينواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمريز کې د شينوارو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.<br><br>د هسکې مينې د لومړنې ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه ) څخه وروسته د رحمان بابا ليسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې( ښوونځي له لومړي ټولګې پيل او د دويم ټولګې څخه ګام او پای). |

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتريش برس، چې هلته يې د شميرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير( صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د رياضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیری سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغئ.

ده د میرمن ښاپیری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

**Get more e-books from www.ketabton.com**
**Ketabton.com: The Digital Library**