رياضي (شميرپوهنه)

برای صنف ۱۲ – م

ليکونکی   ډاکتر ماخان (میرې) شينواری

2016

سریزه

ګرنو هیوادوالو!

ما په کلونو کې د نصاب لهپاره دا د دولسم ټولګي د پښتو او دري کتابونه لیکلي وو، خو په هغه وخت کې دا کتابونه د پوهنې وزارت له خوا چاپ نه شو او په ډېره خواشینی سره باید ووایم، چې په ځای یې کتابونه چاپ کړل، خو ناسم، چې نه یې ژبه سمه وه او نه یې شمیرپوهنیزه خوندویونه.

دا زما له خوا لیکل شوې کتابونه د معیار (د نړۍ د معیار) سره سم لیکل شوي او د لته یې ګرانو زده کوونکو ته وړاندې کوم، هیله ده، چې ګټه به ترې واخلي.

د نصاب له پاره د چاپ شوي کتاب د بوې برخې ناسمون به د کتاب په اخر کې ځای په ځای کړم.

ما څو واره د افغانستان د پهنې وزارت څخه هیله کړې، چې اجازه راکړي، تول د ښوونځي کتابونه ، چې ما لیکلي، دوی ته وړاندې او د سرهسم ولیم، خو د کتابونو د ناسمون مسئولیت او یا هیڅ څوک د څه مسئولیت په غاړه نه لري.

زه دا ټول د ښوونځي کتابونه ګرانو لوستونکو ته وړاندې کوم، خو ځنو کتابونو کې به داسې راغلي وي، چې زما د ناتوانی له امله به مې د یوه کتاب ځنې برخې بل کتاب کې ځای په ځای کړې وي، چې له دې امله د ګرانو لوستونکو څخه هیله، چې د هر څه له مخه دې، د کتاب سریزه وګوري.

ما چې لیکنې جمهورریس او د پوهنې وزارت ته لیکلي، هم مل دي.

ګرانو هیوادوالو!

ماته به بخښنه کړی، زه له دې نور زیات زور نه لرم، چې ښه سریزه او نور اړین څه ولیکم. دا زما لیکنې نورې همداسې ومنی، چې څنګه درته وړاندې کیږي. په لیکنو کې به زما د لیکنیزو ناسمونو نور ناسمونونه نه وي. هیله ده، چې ګټه به ترې پورته کړي.

لیمیت یا حد ("The Limit")

ما ترادف زیل اعداد را دا ر یم :

$$(I)\quad \frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...,\frac{1}{n}$$

$$(II)\quad \frac{3}{2},\frac{4}{3},...,\frac{n+1}{n}$$

$$(III)\quad 2,4,6,...,2n$$

اگر n به لایتناهي تقرب کند، ازترادف هاي بالا (۱) به طرف صفر، (۲) به طرف یک و (۳) به طرف لایتناهي میرود

معنی لیمیت Limit (لاتین) حد میباشد، که ازان عبور کردن اجازه نه دارد. در روم قدیم نام قلعه یک شهر هم Limit بود. در ریاضیات، طوری کي در ترادف مشاهده نمودیم ، لیمیت به معني حد میباشد.

مفهوم استعمال حد درین نهفته است، که سلوک یا عمل تابع طوری مطالعه شود مثل که تابع به محور افقي (به x- محور یعني (abscissa)) به یک حد (نقطه) نزدیک شود. طوری که در مثالهای ورودي بالا دیدیم که ترادفها بالای محورافقي به یک حد میرود.

خواهیم دید که حد در ریاضیات برای این استعمال میشود که مشتق را بشناسیم.

فعالیت :

-ايا شما در زندگي روزمره به کلمه حد اشنايي داريد؟

- ايا شما در زندگي روزمره يک مثال اورده ميتوانيد که به يک حد از هر دو طرف ، از طرف راست به طرف چپ و همين طور از طرف چپ به طرف راست نزديک ميشويد؟ - ايا مرز بين حيرتان و ترمزحد بين افغانستان و تاجکستان ازهردو طرف حد هست يا نه؟

- ايا اين حد ميباشد در يک جاي معين و يا چه طور؟

از فعاليتهاي بالا نتيجه زير بدست مي ايد:

،،مثالهاي حد،، که در بالا اورده شد در يک جاي معين حد توابع يا مثالهاي عملي ميباشد، که ما هم در رياضيات در يک جاي معين انرا ليمت يا حد ميناميم.

ما براي روشن ساختن شروع مثال زير را مي اوريم:

مثال۱ : يک تابع f(x)=2x و يک نقطه P_0 دا ده شده باشد، که در نقطه P_0 قيمتهاي وضعيه ان (3,6) باشد، پس :

۱) جدول تابع را بنويسيد

۲) گراف تابع يا شکل تابع را رسم کنيد.

۳) f(3) را پيداکنيد و به حرکت f(x) بحث کنيد، وقتيکه x به قيمت 3 نزديک ميشود.

۴) تقارب تابع f(x) به ليمت را در شکل روشن کنيد.

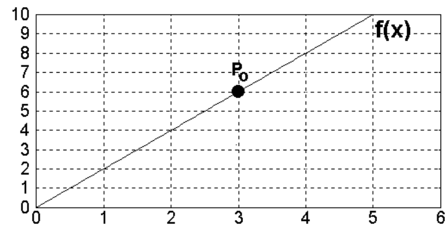
حل مثال :

۱) جدول تابع (در ۳) امده)

---

۲) شکل تابع

۳) $f(3) = 6$ و میخواهیم که از سه قیمتها که از طرف راست و چپ به 3 نزدیک میشود، ببینیم، که دراین سه جاي قیمتها به کجا میرود.



براي این قیمتهاي پایئن را در دوجدول مطالع میکنیم: جدول عمود:

x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

از جدول بالا میبینیم، که به قیمتهای f از بالا به پاین از طرف چپ به 6 نزدیک میشویم و به همین طور از طرف راست از پاین به بالا به قیمت 6 نزدیک میشویم.

جدول افقي مياوريم:

از راست به طرف چپ　　　از چپ به طرف راست

$$\longrightarrow 3 \longleftarrow$$

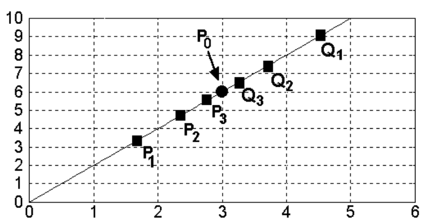
x	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
f(x)	5.96	5.98	5.998		6,002	6.02	6.04

$$\longrightarrow 6 \longleftarrow$$

در سه قدم که قیمت(3)f به قیمتهاي f(x) مقایسه میشود، وقت که x به "3" نزدیک میشود.

این حالت نشان میدهد که: اگر x به 3 نزدیک شود، پس لیمیت f(x) برابر به 6 میشود و به اینطور مینویسیم: $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$

۴) حالا گراف را قرار زیر رسم میکنیم و به طرف راست و چپ نقاط مطلوبه را – مثل که در جدول بالا - نشاني میکنیم.

از روي شکل روبرو نقاط $P_1, P_2, P_3,$ ... در نظر میگیریم، که به نقطه P_0 همیشه از طرف چپ نزدیک میشود. و به همین طور نقاط $Q_1, Q_2, Q_3,$ ... که ازطرف راست به نقطه P_0 نزدیک میشود.	

دیده میشود: به هر اندازه ، که نقاط بالا به نقطه P_0 نزدیک میشود، به همان اندازه قیمتهاي تابع به 6 نزدیک میشود(از بابت قیمت نقطه $P_0(3,6)$)

اگر در گراف x به جای x=3 نزدیک شود، پس قیمت تابع به قیمت 6 نزدیک میشود.

میگویم: ۶ لیمیت تابع f(x) میباشد. براي $x \to 3$ (اینطورخوانده مي شود: x به طرف3 میرود).و مینویسیم: $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$

از فعالیتها و مثال هاي بالا این تعریف را به دست میاوریم:

تعریف : تابع f(x) یک حد L دارد ، برای x اگر x متصل به طرف یک عدد حقیقي c برود و به این طور مینویسیم: $\lim_{x \to c} f(x) = L$ خواندن: لیمیت f(x)برابر به L است، برای x->c .

در بعض توابع، مثل که پیش دیدیم، ،، حد،، را به این سادگي بدست اورده نمیتوانیم.

یک مثال را مي اوریم که دران سوالهاي زیر حل شده باشد.

- ایا یک تابع، درجاي که تعریف نه باشد، میتواند حد را داشته باشد؟
- اگر این کار شدني باشد چه طور صورت گرفته میتواند؟

برای روشن ساختن این سوال ما مثال زیر را مطالع میکنیم:

مثال ۲ :

تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1};x\neq 1$ داده شده است.

۱) جدول و گراف تابع را بکشید.

x از راست په۱ نزدیک میشود   x از چپ به۱ نزدیک میشود

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

1.02	1.01	1.001		0.999	0.99	0.98	**x**
2.02	2.01	2.001		1.999	1.99	1.98	**f(x)**

$\longrightarrow 2 \longleftarrow$

حرکت تابع f(x) زیر بحث بگیرید اگر x به 1 نزدیک شود یعنی $x\to 1$. از هر دویعني ازگراف و از جدول ما مینویسیم که f(x) به طرف عدد حقیقي2 میرود. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$	شکل

از شکل فوق میتوان گفت که تابع در نقطه تعریف نه دارد، که دران نقطه حد شمرده شده.

حل حسابي: اگر یک تابع که در صورت و مخرج براي قیمتهاي مربوطه صفر داشته باشد و این جای صفر از بین برده میشود – طور که در مثال ما دیده میشود- پس برای یافتن لیمت یا حد قرار ذیل به پیش میرویم:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}=\lim_{x\to1}x+1=2$$

و میگویم که این قسم تابع در جاي صفر خالیگاه،، دارد (یعني درین جا تعریف نیست).

فعالیت: تخته رو برو طرف راست سرک داریم: - بگوئید که این تخته چي مفهوم را دارد؟ به همین ترتیب طرف چپ سرک هم به همین قسم یک تخته موجود است این هم به همین مفهوم..	

این سوال ما را به روشن ساختن زیر رهنمایي میکند.

مثال۳ : تابع $x\neq0$, $f(x)=\frac{|x|}{x}$ را داده شده.

1) تابع نوشته کنید ، بدون اینکه نشانه یاسمبول "| |" را به کار ببرید:

2) گراف تابع را رسم کنید.

3) قیمت f(x) را پیداکنید، که دران x از طرف راست به1 نزدیک میشود.

---

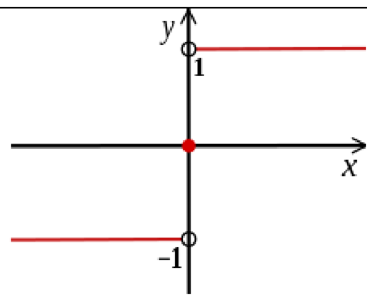
4) قیمت f(x) را دریابید، اگر x از طرف چپ به1- نزدیک شود

5) نشان دهید، که تابع فوقf(x) چند حد دارد.

ثبوت : ۱) تابع بدون سمبول "|" قرار اتي نوشته میشود:

$$f(x)=\begin{cases}1; x>0\\ -1; x<0\end{cases}$$

2) گراف تابع را رسم مینمایم : رو برو



3) قیمت f(x) اگر x از طرف راست به 1 نزدیک شود، لیمیت زیل را به ما میدهد

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1$$

4) لیمیت f(x) ، اگر x از طرف چپ به 1- نزدیک شود، قرار زیر میباشد.

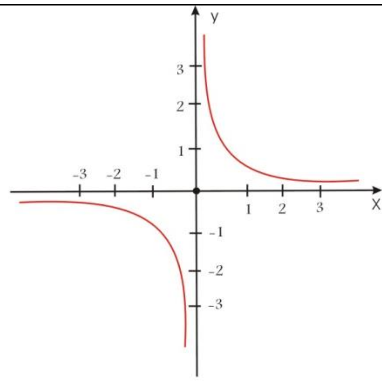
$$\lim_{x\to -1} f(x)=-1$$

5) مشاهده میشود، که اگر x به دو قیمت 1 و1- نزدیک شود ، دو لیمیت دارد، یعني $\lim_{x\to \pm 1} f(x)=\pm 1$، پس ازین قرار f(x) لیمیت نه دارد.

نتیجه از مثال بالاله:

در مثال بالا براي $x\to -1$ تابع لیمیت راست دارد و براي $x\to 1$ لیمیت چپ دارد.

براي این میتوان گراف رسم شده در بالا هم دیده شود.

مثال۴ : تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را داريم ، که $X\neq 0$ ميباشد. تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ براي x=0 قيمت نه دارد يعني در x=0 تعريف نيست. اين در جاي صفر قطب(Pol) دارد. براي اين شکل روبرو ديده شود	

يادداشت : تابع، که مخرج ان صفر باشد و صورت شان صفر نمي باشد، ميگويم که تابع درين جاي صفر مخرج قطب(Pol) دارد.

براي نزديک شدن به x=0 ترادف $(x_n)=\frac{1}{n}$ را تعين مينمايم.

ترادف قيمت مربوطه تابع $n=\left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right)=(x_n)$ ميباشد.

اين براي n>0 يک ترادف نامحدود صعودي ميباشد،

و براي n<0 ترادف نزولي- يا متناقص ميباشد.

اين به معنی، که تابع f(x) در جاي 0 حد نه دارد. اين دران جا يک قطب دارد.

براي ليميت توابع دست اورد زيرداريم:

تابع $f(x), x\in D_f$ در جای x_0 يک ليميت $a_l=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$ سمت چپ داريم ، اگر برای هر ترادف (x_n)، که n اعظمي شان طرف چپ x_0 واقع باشد و قيمتهای توابعو $f(x_n)$ به سمت a_l ميکوشد.

به تور مشابه ليمت سمت راست:

تابع $f(x), x \in D_f$ در جای x_0 یک لیمیت $a_r = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ سمت چپ داریم ، اگر برای هر ترادف (x_n) ، که n اعضي شان طرف راست x_0 واقع باشد و قیمتهای توابعو $f(x_n)$ به سمت a_l میکوشد.

اگرتابع f(x) همان حد L داشته باشد ،اگرx از طرف راست یا چپ به c نزدیک شود، پس حد موجود است و مساوي به L میباشد.

و به اینطور مینویسیم: $\lim_{x \to c} f(x) = L$

تمرین

به هر یک از تابع باين ناحیه تعریف (domain) وناحیه قیمت(range یا codomain) را پیدا نماید، گراف توابع را رسم نمائیدو حد تابع را پیدا نمائید.

1) $\lim_{x \to -1} (x^2 + x)$ 2) $\lim_{x \to 4} (x^2 + x)$ 3) $\lim_{x \to -2} 2x + 3$

4) $\lim_{x \to 0} |x|$ 5) $\lim_{x \to 2} \frac{x}{x}$ 6) $\lim_{x \to 1} 7$

7) $\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{x^2}{x}}$ 8) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ 9) $\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^9 - 9}$

10) اگر باشد : $f(x) = \begin{cases} 2 + x; x < 1 \\ x^2 \quad ; x \geq 1 \end{cases}$

الف) گراف تابع را رسم کنید

ب) $\lim_{x \to -1} f(x)$ را پیدانمایئد

خواص حدود : " **Properties of Limits** "

میفهمیم: در ریاضیات تمام توابع که داریم ترکیب combination توابع ساده میباشد و مثل که جمع،تفریق، ضرب، تقسیم(مخرج به صفر مساوي نمیباشد) و توابع زنجیري.combination F . ما دو توابع منتخب و ساده $f(x) = c$ و $g(x) = x$را داریم. اگر هردو توابع با هم جمع کنیم بدست مي اید:

$h(x) = x + C$, یا$L(x) = cx$, یا $m(x) = x.x= x^2$ و دیگر و دیگر.

خواهیم دید که درینجا هم تمام عملیه چهارگانه صدق میکند مثل که در عملیه ترادف اعداد.

فعالیت :

درین حصه حدود توابع اختیاري ثابت و – مشابه Identity function از طریق جمع، تفریق، ضرب و تقسیم (که محرج شان صفر نه باشد) را بشمارید(پسان خواهیم دید که این توابع زیر نام خواص توابع لیمیت مطالعه میشود)

- حد یک تابع پولینوم اختیاري را پیدا نمائید.

-- از توابع $f(x) = x, g(x) = x - 2,$ استفاده نمائید، که سه توابع دیگري از ان بدست بیاورید. لیمیتهاي این توابع را دریابد. این لیمیتها را جمع، ضرب و تقسیم(که مخرج صفر نه باشد) نمائید. -- اگر ممکن باشد لیمیت یک تابع را از حل تابع بدست اورده بتوانیم، یعني اگر به طور مثال داشته باشیم $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} 3 = 3$ پس این تابع چي قسمي خواهیم نوشت؟

-- ایا مثل عملیه بالا این عملیه براي هر تابع ثابت و مشابه صدق میکند؟

ما از بالا نتیجه زیر را میگیریم:

يادداشت: به طور عمليه فوق همين مساوات براي هر تابع ثابت صدق ميکند.

حد يک ثابت: اگر a و c ثابت ميباشد، پس $\lim_{x\to a} c = c$ صدق ميکند.

به همين ترتيب توابع مشابه يا ايدنتيک f(x) = I (x) = x را هم داريم ، اگر c يک عدد حقيقي باشد، پس x به c نزديک ميشود. ...... اين در واقعيت همينطور است مثل که f(x) = I(x) به c نزديک شود.

فعاليت:

1) اگر f(x) = x، g(x) = 2 باشد، پس داريم :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1 \;, \lim_{x\to 1} g(x) = 2$$

2) اگر $h(x) = f(x) + g(x)$ باشد، پس داريم: $h(x) = x + 2$

3) گراف h(x)

4) حد تابع از راه جدول

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

0	.5	.8	1	1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

$\longrightarrow 3 \longleftarrow$

به ياد داشته باشيد: $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x)$ و $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1}(x+2) = 3$

از بالا خاصيت اول ليميت را بدست مي ايد:

خواص حدود

اول: خاصیت جمع لیمیت: لیمیت جمع دو یا چند توابع مساوي به جمع لیمیت همان دو یا چند توابع میباشد: $\lim\limits_{x\to 1} h(x)=\lim\limits_{x\to 1} f(x)+\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

دم: خاصیت تفریق لیمیت: این حل دارد که مشابه بالا میباشد. این وظیفه را شاگردان عزیز به عهده بگیرد

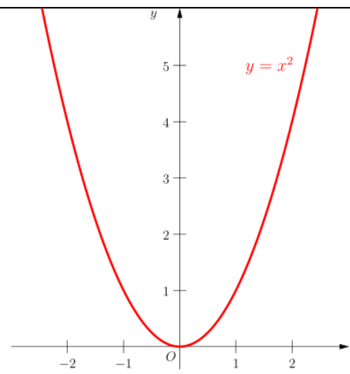
مثآل1: آگر $g(x)=x^2$ و $f(x)=x$ باشد، پس دریابید:

الف) $f(x)\cdot f(x)=g(x)$

ب) شکل تابع را رسم کنید

پ) دریابید $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

ت) دریابید: $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$



حل : الف) $f(x)\cdot f(x)=x\cdot x=x^2=g(x)$

ب)

x	-2	-1	0	1	2
f (x)	4	1	0	1	4

پ) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} x=2$

ت) از گراف بدست میاید: $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$

پس اوين بابت داريم : $\lim_{x\to 2} x^2 = \lim_{x\to 2}(x\cdot x) = \lim_{x\to 2} x \cdot \lim_{x\to 2} x = 2\cdot 2 = 4$

از بالا نتيجه زير بدست مي ايد:

سوم: خاصيت ضرب ليميت:

ليمت ضرب توابع دو يا زياد مساوي است به ضرب ليميتهاي توابع مربوط.

$$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a}(x\cdot x) = \lim_{x\to a} x \cdot \lim_{x\to a} x = a\cdot a = a^2$$

مثال:

اگر باشد $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ ، ليميتهاي زير را دريابيد:

$a)\ \lim_{x\to -1} f(x)\ ,\ \lim_{x\to -1} g(x)$ $\qquad b)\ \lim_{x\to -1} f(x)\cdot \lim_{x\to -1} g(x)$

$c)\ h(x) = g(x)\cdot f(x)$ $\qquad d)\ \lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1}(x) = -1$

دريابيد: $\lim_{x\to -1} h(x)$

حل: الف: $a)\ f(x)\cdot f(x) = x\cdot x = x^2 = g(x) \Rightarrow \lim_{x\to -1} x^2 = 1$

x	-2	-1	0	1	2
f (x)	4	1	0	1	4

$b)\ \lim_{x\to -1} f(x)\cdot \lim_{x\to -1} g(x) = -1\cdot 1 = -1 \Rightarrow \lim_{x\to -1} x^2 = 1$

$c)\ h(x) = x^2\cdot x = x^3$, $d)\ \lim_{x\to -1} h(x) = \lim_{x\to -1} x^3 = -1$

مثال:

تابع $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$ را داريم، $\lim_{x\to 3} f(x)$ را دريابيد.

حل: $f(x)$ تقسيم دو توابعو $g(x)=x^2-2x+5$ و $L(x)=2x^2+1$ است.

اگر x به3 نږدېک شود ميتواند ليميت از طريق حل تابع در $x=3$ يافت شود:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} f(x) &= \lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+5}{2x^2+1}\\ &= \frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-2x+5)}{\lim\limits_{x\to 3}(2x^2+1)}\\ &= \frac{3^2-2\cdot 3+5}{2\cdot 3^2+1}=\frac{8}{19}\end{aligned}$$

از مثال بالا نتيجه زير بدست مي ايد:

چهارم: خاصيت تقسيم ليميت(که مخرج په صفر مساوي نه باشد:

ليميت يک تابع کسري(يعني يک تابع که از تقسيم دو توابع(مخرج به صفر مساوي نيست) بدست امده باشد) برابر است به تقسيم ليميت صورت و ليميت مخرج (که مخرج مساوي به صفر نه باشد).

مثال: گراف $\mathrm{g(x)}=\sqrt{3-\mathrm{x}}$ را رسم کنيد و دريابيد:

$$a)\ \lim_{x\to 2} g(x)\quad ,\ b)\ \lim_{x\to -1} g(x)\ ,\ c)\ \lim_{x\to 3} g(x)$$

حل: به طور زير به پيش ميرويم:

الف)

$$\lim_{x\to 2} g(x)=1$$
$$\lim_{x\to 2}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to 2}(3-x)}=\sqrt{1}=1$$

ب) از گراف: $\lim_{x\to -1} g(x)=2$

یاد داشت: $\lim_{x\to -1}\sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to -1}(3-x)} = 2\sqrt{4}$

$$c)\ \lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-}\sqrt{3-x} = \sqrt{\lim_{x\to 3^-}(3-x)} = \sqrt{0} = 0$$

(براي $f(x) \geq 0$ و براي تمام قيمتهاي x ، که بهc نزديک ميشود).

از بالا نتيجه زير بدست مي ايد:

پنجم: خاصيت جذري ليميت: ليميت يک تابع که زير جذر باشد مساوي است به اگر تابع و ليميت هر دو زير جذر گرفته شود.

سوال: اگر $\lim_{x\to -2} f(x) = 3$ باشد، پس $\lim_{x\to -2}(f(x))^n$ را دريابيد.

يادداشت: ليميت يک پولينوم به طور شمرده ميشود، مثل ليميت يک تابع. در پيش کفتم که يک پولينوم از عمليات مختلف توابع ساده بدست مي ايد.

تمرينونه.

اگر $\lim_{x\to 4} h(x) = -2$, $\lim_{x\to 4} g(x) = 0$ و $\lim_{x\to 4} f(x) = 5$ باشد، پس دريابيد:

1) $\lim_{x\to 4}(f+g)(x)$, 2) $\lim_{x\to 4}\left(\frac{g}{f}\right)(x)$, 3) $\lim_{x\to 4}(fg)(x)$

4) $\lim_{x\to 4}(h(x))$, 5) $\lim_{x\to 4}\left(\frac{g}{f}\right)(x)$, 6) $\lim_{x\to 4}(2h-3g)(x)$

7) $\lim_{x\to 4}(f\cdot h(x)$, 8) $\lim_{x\to 4}\left(\frac{2h}{3f-g}\right)(x)$, 9) $\lim_{x\to 4}(h(x)+f^2(x))$

10) $\lim_{x\to 2}(6x^3-2x+5x-3)$, 11) $\lim_{x\to -2}\frac{3x-2}{x^2+1}$

--- -----------

ليميت توابع کسري يا ناطق" Limit of Rational functions "

ما تقسيم زير پولينومها را داريم:

$$R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0}{b_m x^m+b_{n-1}x^{m-1}+...+b_0};P_m\neq 0$$

و در باره ليميت شان فکر ميکنيم و با $b_0\neq 0$ بدست مي ايد $\frac{a_0}{b_0}$.

فعاليت :

اگر ما پولينوم $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ داشته باشيم. حد اين پولينوم را براي قيمتهاي مختلف x به چطور دريافت کرده ميتوانيم ؟

- اگر x →0 به طرف صفر بروديا به صفر نزديک شود.
- اگر x→1 به يک عدد معين نزديک شود.
- اگر $x->\infty$ به سوي لايتناهي برود.

- اگر پولينوم $5x^3+3x^2+3$ درجه سه را داشته باشيم، پس حد اين پولينوم براي چهار قيمت دلخوا دريابيد.

ميدانيم، که حد توابع پولينومي - براي يک قيمت داده شده x ، طوري که در توابع ساده ديگر ، که به قسم جمعي، تفريق،ضرب و تقسيم(که مخرج شان صفر نه باشد) داده شده شمار کرده ميتوانيم. ميخواهيم حد توابع ناطق يا -کسري را دريابيم.

براي اين که حد توابع ناطق را ، درصورت که موجود باشد، دريابيم، پس از طرق مختلف استفاده ميکنيم:

اگر داشته باشيم :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

پس خواص تابع براي $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$ ساده ميسازيم، که حد تقسيم پولينوم بالا، که تابع کسري ميباشد، بشماريم.

فعاليت : اگر $\frac{x^2-4}{x+2}$ داشته باشيم در صورت که $x\neq -2$ باشد.

- حد اين تابع درصورت که $x->-2$ باشد دريابيد.
- حد اين تابع را دريابيد اگر1→x باشد.
- حد اين تابع را دريابيد در صورت که 1-→x باشد.
- ساحه تعريف تابع را بنوييد!
- اين تابع به چه قسم ساده کرده ميتوانيد، که حد شان براي 2-→x بدست اورده بتوانيم؟

به اساس فعاليت بالا ميتوانيم، که حد توابع کسري براي اعداد مختلف دريابيم و همين طور يک تابع کسري، اگر ممکن باشد ، به همان جاهاي که در نزديک شان باشد هم دريابيم ، درکدام شان که تابع تعريف نه باشد.

براي وضاحت موضوع چند مثال از توابع ناطق را مطالعه ميکنيم:

مثال ۱: $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}$ را دريابيد

اگر $x = 1$ باشد، پس تابع تعريف است و داريم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}=\frac{(1)^2+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

اگر $x=1$ جا به جا کنيم(Substitue) پس به دست مي ايد: $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$

مثال : $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3}$ را دريابيد

حل : تابع براي $x = 0$ تعريف است، پس داريم: $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x+3}=\frac{0-1}{0+3}=-\frac{1}{3}$

مثال ۳ : $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}$ دريابيد.

حل : براي $x = 1$ تابع تعريف است، پس داريم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}=\frac{1^2+1-2}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

اگر دريک جاي يا براي يک عدد که تابع تعريف نه باشد، پس از طريق مختلف استفاده ميکنيم، که حد را دريابيم، اگر موجود باسد.

مثال۴: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}$ دريابيد.

حل : براي اين که تابع $f(x)$ براي$x=2$ تعريف نيست، پس براي حل حد تابع طريقه نمي توانيم دريابيم. حد را ميتوانيم پيداکنيم ، که تابع به ضريبها تجزيه نمايم .

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)}$$

حد تابع اگر x به 2 نزديکي شود، به اين معني است، اگر $x \neq 2$ باشد.

اين تابع کسري به $\lim_{x\to 2}(x-4)$ کرته ميشود:

$\lim_{x\to 2}$ (x-4) = 2-4 = -2

مثال ۵: $\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$ را دريابيد.

مشاهده ميشود، که تابع براي x = 16 تعريف نيست، بدين معني که $x \neq 16$.

به ياد داشته باشيد که : $\sqrt{b}-\sqrt{a}$ به $\sqrt{b}+\sqrt{a}$ مزدوج يک ديگر ميباشد

حل: صورت و مخرج تابع فوق به مزدوج $\sqrt{x}-4$ يعني $\sqrt{x}+4$ ضرب مينمايم

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16} &= \lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}\\ &= \lim_{x\to 16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}\\ &= \lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{\sqrt{16}+4}=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

مثال ۶ : دريابيد : $\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$

حل : تابع به $x=3$ تعريف نيست ، پس مخرج و صورت به مزدوج مخرج ضرب مي نمايم و داريم:

$$\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)}$$

$$=\lim_{x\to3}-1(\sqrt{x+1}+2)$$

$$=\lim_{x\to3}-(\sqrt{3+1}+2=-4$$

مثال۷ : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$ را در يابيد.

حل : تابع در$x = 1$ تعريف نيست، پس به طريق زير حد اين تابع را در مي يابيم:

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{5+10x-15}{2x-3}}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{10}{(2x-3)(x+1)}=\frac{10}{(2(1)-3)(1+1)}$$

$$=\frac{10}{-2}=-5$$

ليميت اعداد کسري از طريق کلاسيک :

حالا يک تابع ديگري زر مطالع مي گيريم، که انرا $g(x)$ مي ناميم: $g(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

درينجا هم سوال ميکنيم، که اگر $x \to 1$ نزديک شود، پس تابع $g(x)$ کدام قيمتهاي تابع را اختيار ميکند: ما باز جاي را در فکر ميگيريم، که $x \to 1$ از طرف پيش(طرف چپ) پسيار نزديک افتيده باشد و به همان جاي، که $x \to 1$ از پشت سر يا طرف راست بسيار نزديک افتيده باشد:

$$g(1-h) = \frac{(1-h)^2 + (1-h) - 2}{(1-h) - 1}$$
$$= \frac{(1-2h+h)^2 + (1-h) - 2}{-h} = \frac{-3h + h^2}{-h} = 3 - h$$
$$g(1+h) = \frac{(1+h)^2 + (1+h) - 2}{(1+h) - 1}$$
$$= \frac{(1+2h+h)^2 + (1+h) - 2}{h} = \frac{-3h + h^2}{h} = 3 + h$$

اين هردو نتايج را حالا قرار زيل تشريح ميکنيم: اگر h لاينتاهي کوچک تعين نمايم يعني جا هاي را در نظر بگيريم که $x \to 1$ لايهتناهي نزديک شود، پس قيمتهاي تابع هم به قيمت 3 لايتناهي نزديک ميشود. عدد3 براي جاي $x=1$ حد تابع $g(x)$ ميباشد. براي اين مينويسيم: $\lim_{x \to 1} g(x) = 3$

تمرينها: در صورتيکه موجود باشد ليميتهاي زير را دريابيد.

1) $\lim_{x \to 2}(6x^3 - 2x^2 + 5x + 3)$

2) $\lim_{x \to -1}(x^7 + 2x - 5)$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{(x+2)^2 - 4}{x}$

4) $\lim_{x \to 0} \frac{5x^2 + 7x}{(2x-3)^2 - 9}$

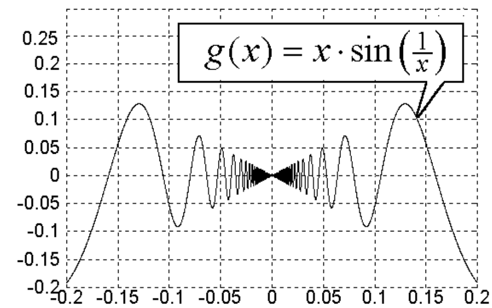
5) $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+3} - \frac{1}{3}}{x}$

6) $\lim_{x \to 4}(\frac{1}{x} - \frac{1}{4})(\frac{1}{x-4})$

7) $\lim_{x \to 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1} - \frac{4}{5}}{x-2}$

8) $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x} - 2}$

حد توابع مثلثاتي Limit of trigometric function



فعاليت:

- حدساين $\lim_{x \to a} \sin x$ براي قيمتهاي مختلف x دريابيد،

- اگر $x \in [0; 2\pi]$ باشد. - اگر که 0→ x باشد. - اگر که 30→x باشد

- اگر 45 →x باشد - اگر 60→x باشد - اگر 90→x باشد - اگر 135→x باشد

- اگر که 270→x باشد - اگر $x -> 2\pi$ باشد

فعاليت :

براي قيمتهاي که بالا داده شده حد Cos x دريابيد.

قضيه : اگر x به راديان داده شده باشد،پس داريم: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

ثبوت: براي x=0 تابع $\frac{\sin x}{x}$ تعريف نيست و شکل مبهم $\frac{0}{0}$ دارد.

ما میخواهیم براي $x \to 0$ و $\frac{\sin x}{x}$ طور زیر یک جدول بنویسیم(درمساوات بالا x به رادیان اندازه میشود):

$\frac{\sin x}{x}$	$\sin x$	x به رادیان	x به درجه
0.9948	0.1736	0.1745	10°
0.9988	0.0872	0.0873	5°
0.9996	0.05233	0.05235	3°
0.9995	0.0174524	0.0174532	1°
0.99999	0.00872653	0.00872664	$30'$
≈ 1	0.00174532	0.00174532	$6'$
≈ 1	0.00087266	0.00087266	$3'$
≈ 1	0.000291	0.000291	$1'$
⋮	⋮	⋮	⋮

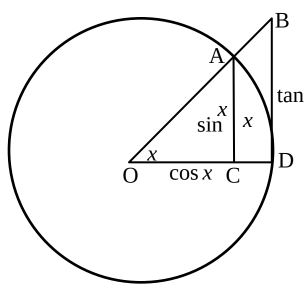
در جدول بالا میبینیم، که براي x قیمت $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ میباشد.

حل $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ به طریقه ریاضي طور زیر به پیش میبریم: یک دایره را در نظر میگیریم، که مرکز شان (0) وشعاع آن0D و $\overline{OA}=\overline{OD}=1$ باشد. (3-16) شکل از نقطه A به $\overline{OD}$ یک عمود رسم میکنیم، که این شعاع را در

نقطه C قطعه مینماید.

از نقطه D بالاي دایره یک مماس رسم میکنیم. این مماس از $\overline{OA}$ خط دراز شده در نقطه B قطعه میکند

ما داریم :



$$\sin x = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AC}}{1} = \overline{AC}$$

$$\cos x = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \overline{OC}$$

$$\tan x = \frac{\overline{DB}}{\overline{OD}} = \overline{DB}$$

این که x به رادیان اندازه میشود، پس داریم: $\overset{\frown}{AD} = X$

از شکل بالا نا مساوات پاین داریم:

$$O\overset{\Delta}{B}D > A\overset{\angle}{O}D > A\overset{\Delta}{O}C$$

به همین طور داریم:

$$\frac{1}{2}\cos x.\sin x < \frac{1}{2}\overline{OD^2}.x < \frac{1}{2}\overline{OD}.\tan x$$

در نامساوات بالا $\overline{OD} = 1$ جا به جا میکنیم و تمام اطراف نامساوات به دو ضرب میکنیم پس داریم: $\cos x.\sin x < x < \tan x$

یا به همیم طور نوشته میتوانیم: $\cos x.\sin x < x < \dfrac{\sin x}{\cos x}$

اگر تمام اطراف نامساوات به $\sin x$ تقسیم نمایم، نتیجه زیر را خواهیم داشت:

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

یا:

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > \lim_{x\to 0}\cos x$$

ازین که $x \to 0^+$ پس برای $\cos x \to 1$ ، بدست میاید:

$$\frac{1}{1} > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > 1$$

$$1 > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > 1$$

می بینیم که در عین وقت $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ بزرگتر و کوچکتر از 1 میباشد، نتیجه میشود که :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

دقت : اگر $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ او $x = -\alpha$ بنویسسم ، نتیجه زیر بدست می اید:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{-\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$

از هر دو مساوات فوق نتیجه زیر بدست مي اید: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

مثال ۱ : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$ حل نمائید

حل : اگر $\alpha = 2x$ واگر $x \to 0$ باشد، پس $\alpha \to 0$ و $\frac{\sin 2x}{2x} = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ داریم.

از مساوات بالا نتیجه زیل داریم :

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \Rightarrow 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2\cdot 1 = 2$$

مثال ۲ : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{2x}$ نشاد دهید

اگر $y = 5x$ باشد،و $x \to 0$ ، پس $y \to 0$ و هم داریم

$$\frac{\sin 5x}{5x} \quad \frac{5}{2} = \frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)} \quad \frac{5}{2} = \frac{\sin 5x}{2x}$$
$$= \frac{5}{2}\frac{\sin y}{y}$$

بدین اساس داریم

$$\frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}\frac{5}{2} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x}$$
$$= \frac{5}{2}\cdot 1 = \frac{5}{2}$$

تمرین:

این قضیه منتخب را ثبوت کنید.

اگر x به رادیان داده شده باشد، پس داریم $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ و اجرات زیر را انجام دهید:

الف) تانجنت $\tan x$ به ترمهاي $\sin x$ و $\cos x$ بنویسید.

ب) $\frac{\tan x}{x}$ به ترمهاي $\sin x$ و $\cos x$ بنویسید.

پ) لیمیت قضیه بالا را دریابید.

ت) ایا قضیه راست است؟

لیمیتهاي زیر را بشمارید.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}\ ,\ 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x},\ \ 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x}\ ,$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x}\ ,\ 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}\ ,\ 6)\ \lim_{x\to 0}\sin 5x\cos 3$$

$$7)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}\ ,\ \ 8)\ \lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}+\sin^2 x)$$

لیمیت براي $x\to\pm\infty$

لیمیتها براي توابع کسري $\frac{Q(x)}{P(x)};\ P(x)\neq 0$ را شمردیم، که x احتیاري اختیاري بود.

حالا میخواهیم لیمیت را براي $\frac{Q(x)}{P(x)};\ P(x)\neq 0$ بشماریم، اگر $x\to\pm\infty$ باشد.

فعاليت :

شاگردان اشکال توابع زير را رسم نمايد، و دقت نمايد که چي طور گرافها در ساحه تفريف حرکت ميکند.

اول : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x-2}$

نتيجه تقسيم عدد ۵ به يک عدد لايتناهي مثبت(منفي) يک عدد بسيار کوچک مثبت(منفي) ميباشد يعني $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x-2}=\frac{5}{\pm\infty}=0^{\pm}$.

گراف G_f يک اسيمپتوت - يا مجانب افقي y=0 دارد ، که او بالا و پاييد به گراف نزديک ميشود.

دوم : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x+1}$ ليميت را بشماريد

نتيجه تقسيم عدد3- به يک عدد لايتناهي مثبت(منفي) عدد بسيار کوچک مثبت(منفي) ميباشد ، يعنی $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x+1}=\frac{-3}{\pm\infty}=0^{\pm}$ □□ .

گراف G_f يک اسيمپتوت (مجانب) y=0 دارد ، که از بالا و پايين به گراف نزديک ميشود.

سوم : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x^2-2x}$ دريابيد

در مخرج فقط x^2 رول بزرگ را بازي نيکند. از طريق مربع ساختن هر عدد مثبت ميشود. آگر 5 به يک عدد لايتاهي مثبت تقسيم شود، يک عدد بسيار کوچک مثبت بدست مي ايد، يعني $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x^2-2x}=\frac{5}{+\infty}=0^{+}$

گراف G_f یک اسیمپتوت افقي(مجانب افقي) $y=0$ دارد، به نزدیک فقط او طرف بالا .

جهارم : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x^2-2}$ بشمارید

به مربع ساختن مخرج ، اعداد منفي هم مثبت میشود. به تقسیم 3- به یک عدد لایتناهي مثبت، یک عدد بسیار کوچک منفي را بدست مي اوریم، یعني

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{x^2-2}=\frac{-3}{+\infty}=0^-$$.-

گراف G_f یک اسیمپتوت $y=0$ دارد، که فقط به گراف پایئن نزدیک مي شود.

اصول صرفنظر کردن

اول : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}$ دریابید

در صورت اکسپوننت x ، در مخرج اکسپوننت x^2 در نظر مي گیریم و همین طور از تمام اعداد ثابت صرف نظر مي کنیم و باز x را کتاه مي کنیم. اگر ۱ به یک عدد لایتناهي مثبت(منفي) تقسیم شود. پس ازان بدست مي اید.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0^{\pm}$$

شکل G_f اسیمپتوت(مجانب) افقي $y=0$ دارد، که از بالا به به پایین به او نزدیک مي شود.

دوم : حد تابع $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2}{x+2}$ را مي خواهیم دریابیم.

حل : در صورت تمام توانهاي (اکسپوننت) x^2 و در مخرج تمام توانهاي x در

نظر مي گيريم او از تمام ثابت صرفنظر مي كنيم و بعداً به x اختصار كنيم . به تمام وضاحت حدود $\pm\infty$ بدست مي ايد يعني $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2}{x+2}$.

شكل G_f مجانب مايل را مي دهد، براي اين كه در صورت درجه نسبت به مخرج به اندازه ۱ بزرگ است.

سوم : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}$ دريابيد

در صورته و مخرج تمام توان x^2 در نظر مي گيريم و از تمام ثابت صرف نظر مي كنيم و بعداً به x^2 اختصار مي كنيم.

تمام حدود به طور واضح 2/3- راميدهد يعني

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2-2}{3x^2+2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2}{3x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

شكل G_f اسيمپتوت افقي را ميدهد ، كه $y=-2/3$ ميباشد.

چهام : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}$ دريابيد

در صورت از تمام توانهاي كه كوچكتر از x^2 باد و در مخرج آز تمآم توآنهآي كه كوچكتر آز x^3 و به همين ترتيب آز تمآم ثابتو صرف نظر ني منيم . آگر به لآيتنآهي تقسيم شود، يک عدد كوچكترين مثبت يا منفي رآ بدست مي آوريم يعني

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2}{3x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2}{3x} = \frac{-2}{\pm\infty} = 0^{\pm}$$ رآ ميدهد.

شكل $\mathbf{G_f}$ يک مجانب افقي$y = 0$ را مي دهد، كه از طرف بالا به پائين به او نزديک مي شود.

حل به طریق شمارش:

اول : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-x-1}{x^2-2}$ رادریابید

در صورت و مخرج x^2 را از قوسها بیرون مي آوریم و بعدا به x^2 احتصار مي نمایم. بعد از احتصار مخرج به طرف 1 میرود و صورت به طرف صفر میرود، یعني ترمهآ صورت به صفر نزدیک میشود.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{0^\pm}{1}=0^\pm$$

شکل G_f یک مجانب مایل دارد، ازان که درجه صورت از درجه مخرج به 1 کوچک است.

دوم: بشمارید: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}$

در صورت و مخرج عدد توان بزرگ x یعني x^4 از قوس پیورن مي گیریم و بعدآ به ترتیب عملیه حسابي را به پیش مي بریم، ازا بدست مي اید:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0^-}{1}=0^-$$

روشن است .

خواص عمومي :

مثال ۱: بیابید: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^2-2}{x+1}$

در مثال بالا به طور پیش رفته یم ، که در مخرج از همه اعداد صرف نظر مي نمایم، که توان متحول مستقل از ۱ کوچک باشد یعني صفر باشد و در صورت از همه اعداد که توا شان از ۲ کوچک باشد صرف نظر مي میکنیم. مي بینیم، که در صورت x به کدام ضریب مي ماند، ازین دلیل تابع تابع بالا به سوي لایتناهي مثبت-منفي میرود.

مثال ۲ : دریابید: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2-2}$ در مثال بالا در په صورت از ۱ و در مخرج از ۲ صرف نظر مي شیم و بعدآ صورت و مخرج به x تقسیم میکنیم، نتیجه شان بدست امدن یک عدد ثابت است ، که به x تقسیم میشود ، که به تابع به ± 0 میرود یعني: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2-2}=\pm 0$

مثال ۳ : دریابید: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2-2}{3x^2+2x}$ در صورت از ۲ و در مخرج از 2x صرف نظر میکنیم و به x^2 اختصار مي نمایم و به همین طور نتیجه زیر را بدست مي اید :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=-\frac{2}{3}$$

تمرینونه: حدهای تمرینات زیر را از راه های مختلفکه اده شده بالا بشمارید

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6}{x^2-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+x^2-x+9}{x^4+x^2-x-5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2-x+7}{x^3-x+5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$$

متماديت "Continuity"

درين قسمت درس مي خوانيم، که يک تابع در يک نقطه يا يک اينتروال کدام حالت را به خود اختيار ميکند. ايا تابع در کدام جاي خيز ميزند، يا قطع ميشود و يا به صورت متمادي در داخل اينتروال حرکت ميکند.

ما درين موضوع متماديت يک تابع را مطالعه ميکنيم و متماديت را تعريف مينمايم.

فعاليت: ما توابع زير را داريم:

$$f(x)=x^2-1\ ,\ f(x)=\frac{1}{x}\ ,\ f(x)=\frac{|x|}{x}$$

- اشکال اين سه توابع را رسم کنيد.

- تماشا کنيد، که گراف توابع چي قسم حرکت ميکند. در کدام تابع گراف بسته حرکت کوي او درکدام قطع ميشود، خيز ميزند و يا ...

از فعاليت بالا نتيجه زير داريم:

متماديت تابع Continuous functions

درين موصوع ما متماديت يک تابع را مالع ميکنيم و تعريف متماديت را ميديهيم.

تعريف:

b يک عدد حقيقي در ساحه تعريف يک تابع f باشد. تابع f در b متمادي ناميده ميشود، اگر در نزديک نقطه (b.f(b)) گراف f رسم گردد، بدون اين که پنسل از روي کاغذ بلند شود.

ازين دليل تابع $f(x) = x^2 -1$ و تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در نقطه x=b متمادي است.

تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ در x=o متمادي نيست يعني قطع ميشود ويا بهتر خيز ميزند.

تابع در $x = a$ متمادي نيست، اگر قطع شود(خاليگاه داشته باشد) ، خيز بزند و يا بشکند.

داريم $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ و $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ پس ازين دليل $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x}$ در x = 0 موجود نيست.

نتيجه: چون ليمت دست راست و چپ با هم مساوي نيست پس تابع در0 = x ليمت ندارد، يعني تابع در نقطه x = 0 تابع متصل(متمادي) نيست.

مثال ۱ :

اگر $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; \quad x \ge 1 \\ 1-x & ; \quad x < 1 \end{cases}$ باشد، پس:

الف) گراف تابع را رسم کنيد گراف

ب) $\lim_{x \to 3} f(x)$ را دريابيد

پ) $\lim_{x \to 1} f(x)$ را دريابيد

اگر تابع در x=3 و x=1 متمادي باشد

حل :

الف) گراف طرف چپ رسم شده

ب) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = (2x+1) = 7$

$f(3) = 7$

پ
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x+1) = 3$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (1-x) = 0$$

از ب) و پ) داریم:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

ازين دليل تابع در $x = 3$ متمادي و در $x = 1$ نامتمادی است.

مثال ۲ :

اگر $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x3+x}{x} & ; \ x \neq 0 \\ 3 & ; \ x = 0 \end{cases}$ **باشد**

الف) فنکشن رسم کنید

رسم را شاگردن عزيز بکشد

ب) زير بحث بگيريد، که تابع در $x = 2$ و در $x = 0$ متمادي است يا خير؟

حل : الف) برا گراف تابع

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	5	2	3	2	5

ب) $f(x) = \lim_{x\to2} \frac{x^3+x}{x} = \lim_{x\to2} (x^2+1) = 2^2+1 = 5 \lim_{x\to2}$

$f(2) = \frac{2^3+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$

ازين که حد f موجود است و $\lim_{x\to2} f(x) = f(2)$ ، پس تابع در $x = 2$ متمادي است.

باشد $x = 0$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x^3+x}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{x^3+x}{x} = 1$$

$f(0) = 3.$ وبه اين مهوم است که $\lim_{x\to0} f(x) = 1$ اين بدين معني است که

اين بدين معني است ، که $\lim_{x\to0} f(x) \neq f(o)$

تابع در $x = 0$ غيرمتمادي است

مثال ۳ :

اگر $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ ، $x \neq -3$ باشد.

ايا تابع در $x = -3$ متمادي است؟

حل) تابع $f(-3)$ تعريف نيست، ازين علت تابع در $x = -3$ متمادي نيست.

از جمله بالا و درسهاي گزشته تعريف زير را داريم:

تعريف :

اگر f يک تابع باشد، که براي تمام x در همه ا اينتروال هاي باز، که x=c داشته باشد، تعريف باشد، پس تابع f در x = c متمادي ناميده ميشود ، اگر شرايط زيرين را پور کند.

۱) اگر f(x) تعريف باشد.

۲) اگر $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودباشد

۳) اگر $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ صدق کند.

اگر تابع براي تمام $x \in (a,b)$ متمادي باشد ، پس تابع در اينتروال باز (a, b) هم متمادي است.

مثال ۴ :

اگر $f(x) = \begin{cases} 2x^2+1; & x \le 1 \\ 4+x \quad ; & x > 1 \end{cases}$ باشد.

ببينيد، که تابع در کجا متمادي و در کجا نامتمادي است.

حل : تابعf در $x = 1$ تعريف نيست

.

$$f(x) = 3$$
$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (2x^2 + 1) = 3$$
$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (4 + x) = 5$$
$$\lim_{x \to -1} f(x) \neq \lim_{x \to -1} f(x)$$

ازين دليل تابع در $x = 1$ نامتمادي است

مثال ۵ :

اگر $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & ; \quad x < 2 \\ 3 & ; \quad x = 2 \\ x + 3 & ; \quad x > 2 \end{cases}$ باشد، پس متماديت تابع $f(x)$ در $x = 2$ مطالعه کنيد.

حل : تابع $f(x)$ در $x = 2$ تعريف است و $f(2) = 3$ داريم.

$$\lim_{x \to 2^+} = \lim_{x \to 2^+} (x + 3) = 5$$
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$$
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 + 1) = 5 \ \Rightarrow \ \lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

دا چې $f(x) = 3$ دی، نو له دې امله $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$)

به اين معني است، که تابع در $x = 2$ نامتمادي است .

مثال ۶ :

اگر $f(x)=\begin{cases} 2\sin x & ; \quad x\le \frac{\pi}{2} \\ ax^2+\pi^2 & ; \quad x>\frac{\pi}{2} \end{cases}$ باشد،

a طوري دريابيد، که f در $x=\frac{\pi}{2}$ متمادي باشد.

حل :

$$\lim_{x\to\frac{\pi^+}{2}} f(x) = a\,\frac{\pi^2}{4}+\pi \,;\ \lim_{x\to\frac{\pi^-}{2}} f(x) = 2$$

f(x) متمادي است، پس ازين بدست مي ايد :

$$a\,\frac{\pi^2}{4}+\pi^2=2$$

و

$$=\frac{a}{4}\pi^2=2-\pi^2$$

$$a\,\pi^2=8-4\,\pi^2 \Rightarrow a=\frac{8}{\pi^2}-4$$

تمرين

۱) یک تابع دلخواه را بنويسيد وگراف تابع را رسم نمائد و ببينيد، که تابع در کجا تعريف است ومتماديت انرا ثبوت نمائد.

در تمرینهاي زیرمطا لعه نماید،که تابع در نقطه داده شده متمادي یا عیرمتمادي است.

2) $f(x) = x^2 + 5(x-2)^7 \;;\; x = 3$

3) $f(x) = \dfrac{x+3}{(x^2+2x-5} \;;\; x = -1$

4) $f(x)\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \;;\; x = -2$

5) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3^3)} \;;\; x = 3$

6) $f(x) = |x-3| \;;\; x = 3$

7) $g(x) = \dfrac{|x|}{x} \;;\; x = 0$

خواص توابع متمادي

درینجا خواص متمادیت همان خواص لیمیت است

فعالیت:

۱) جمع توابع f وg را دریابید

$(f+g)(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

۲) در x=2 توابع f و g متمادي است ، پس :

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots \;\; \& \;\; \lim\limits_{x\to a} g(x) =$

۳) از حد توایع استفاده نمایئد

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a}(f+g)(x)$$
$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots:\ldots$$
$$=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots:\ldots=(f+g)(a)$$

ازین دلیل (f+g) در x=a متمادي است.

اگرتابع f وg در x=c متمادي باسد، پس از توابعو زیر هره کدام در x=c متمادي است

۱) جمع توابع f +g

۲) تفریق توابع f – g

۳) ضرب توابع f.g

تقسیم توابع $\frac{f}{g};g\neq 0$

مثال ۱ :

اگر باشد $g(x) = x^2 + 3x - 2$ و$(x) = \sin x + 1$.

پس ۱) f و g در x=1 متمادي است.

۲) تحلیل نمایئد، که ایا

الف) $f(x)+g(x)=\sin x+x^2+3x-1$ و

ب) $(\sin x+1)(x^2+x^2+3x-1)$ در x=1 متمادي و یا غیرمتمادي است

حل :

$$1)\ \lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \sin 1 + 1$$

پس f در x = 1 متمادي است

$$\lim_{x\to 1} g(x) = g(1) = 2$$

پسg در x = 1 متمادياست

۲ - الف)

$$a)\ \sin x + x^2 + 3x - 1 = (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

جمع توابع متمادي در x = 1 متمادي است

ب) :

$$(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) = f(x)\cdot g(x) = (f\cdot g)(x)$$

پس ضرب توابع متمادي در1 = x متمادي است

مثال ۲ :

اگر $f(x) = x + 1\ ,\ g(x) = 3x - 2$ باشد، مطالعه نماید، که ایا $f(x)\cdot g(x)$ در $x = 2$ متمادي است.

حل:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 3$$
$$\lim_{x\to 2} g(x) = 4 = g(2)$$
$$f(x)\cdot g(x) = 3x^2 + x - 2$$
$$\lim_{x\to 2} f(x)\cdot g(x) = 3(4) + 2 - 2 = 12$$
$$= \lim_{x\to 2} f(x)\cdot \lim_{x\to 2} g(x) = f(2)\cdot g(2) = 3.4 = 12$$

از بالا بدست مي ايد، كه $f(x)\cdot g(x)$ متمادي است

به طرف چپ در انتروال محدود [a,b] گراف متمادي تابع را نشان دهيد، در جاي كه $f(a) \neq f(b)$. باشد.

اگر $f(a) < k < f(b)$ داشته باشيم، گراف از نقطه $(b, f(b))$ ترسيم نمي شود تا كه خط افقي y = k به ثابت k قطع نه نمايد .

از بالا ميتوانيم جمله مهم را بنوسيم:

اگر تابع f دراينتروال محدود يا بند [a,b] متمادي و k در بين a و b باشد، پس درانجا كم ازكم يک عددc در بين f(a) و f(b) موجود است، طور كه f(c) = k است.

مثال ۳ : اگر $f(x) = x^3 + 4x\ ,\ x \in [1,2]$ باشد.

نشان دهيد، كه يک $c \in (1,2)$ طور موجود است، كه $f(c) = 11$ مي باشد.

حل : f(x) يک پولينوم است، پس f در اينتروال محدود [1,2] متمادي است.

زير را داريم:

$$f(1) = 1^3 + 4(1) = 5 \quad ; \quad f(2) = 8 + 4(2) = 16$$
$$5 < 11 < 16 \quad , \quad f(1) \neq f(2)$$

از اين دليل يک عدد $c \in (1,2)$ موجود ست، طور كه $f(c) = 11$ ميباشد

مثال ۴ :

اگر $f(x)=\begin{cases}2x+4 & ; \ -1\le x<2\\ |x-10| & ; \ 2\le x\le \mathbf{20}\end{cases}$ باشد ، پس

الف) امتحان کنید، که تابع متمادي است.

ب) امتحان کنید، که یک $c\in(-1, 20)$ موجود است، طور که $f(c) = 6$ میباشد و قیمت c را بیا بید.

حل :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=2x+4=8$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=10-2=8$$

بدین اساس داریم:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2} f(x)=8$$
$$f(x)=10-2=8$$

میبینیم، که تابع در $[-1, 20]$ متمادي است

$$b)\ f\ (-1)2x\ -1+4=2$$
$$f\ (20)\,|\,20-10\,|=10 \ \Rightarrow\ f\ (-1)\ne f\ (20)$$

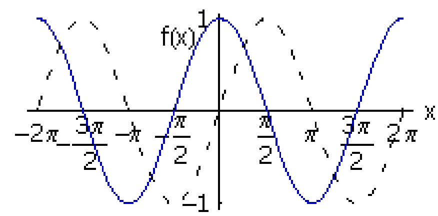
به دین اساس داریم $2<6<10$

به این اساس داریم $c\in(-1,20):\ f(c)=6$

قیمتهاي c قرار زیل است 1, 4, 16 .

مثال۵ : اگر باشد: $f(x) = 2\sin x + 3;\ x\in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$، پس

نشان دهید که $c\in\ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ موجود است، براي ان که صدق میکند$f(c)=4$ و c را دریابید.

حل : تابع f تابع ساین میباشد، پس بدین اساس f متمادي است $f(-\frac{\pi}{2}) = 2\sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2(-1) + 3 = 1$ $f(\frac{\pi}{2}) = 2\sin\frac{\pi}{2} + 3 = 2(1) + 3 = 5$ $f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2})$اما داریم : تابع fمتمادي است و داریم: $1 < 4 < 5$	 نقطه نقطه گراف ساین میاشد. اگر این گراف در ۲ ضرب و ۳ به ان علاوه شود مان گراف مثال ما میباشد.

این به معني است، که $c \in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ موجود است، براي ان که $f(c) = 4$ صدقمیکند.

براي این که c پیدا نمایم، پس به دست مي اید: $f(c) = 2\sin c + 3 = 4$

$$2\sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

ازگراف واضح دیده میشود،که f در انتروا ل [a,b] متمادي است، f(a) و f(b) علامات متضادې دارد، پس c در بین f(a) وf(b) به اساس جمله قیمت وسطي به K=0 کم اوکمه یک C در بین a وb موجود است، که ازان نتیجه مي گیریم f(c) = 0 .

این به معني است، که x=c یک حل مساوات f(x) = 0 میباشد.

مثال۶ :

اگر باشد: $f(x) = x^3 + 5x - 23$ ، پس نشان دهید، که تابع f ، x –محور را در اینتروال (2.3) قطع میکند.

حل : f تایع پولینوم است، پس f دراینتروال [2,3] متمادي است.

$$f(2) = 2^3 + 5(2) - 23 = -5$$
$$f(3)3^3 + 5(3) - 23 = 19$$

به علامات متضاد $f(2) \neq f(3)$

بدین اساس $c \in (2,3)$ داریم،که $f(c) = 0$ است

کوتاه: توابع غیر متادي انست، که در کوام جای تعریف نه باشد.

تمرین ۱ ــ ۶

نشان دهید، که تابع درنقطهداده سده متمادي است.

1) $f(x) = x^3 - 2(x+1)^5 \quad ; \quad x = 2$

2) $g(x) = \dfrac{x^2 + 3}{(x^2 - x + 5)(x^2 + 2x} \quad ; \quad x = -1$

3) $h(x) = \dfrac{x\sqrt{x} + 1}{(x+2)^3} \quad ; \quad x = 4$

---

۴) تشريح نمايد، که چرا تابع $f(X)=\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ در x = 0 نامتمادي است.

۵) اگر $f(x)=\dfrac{18}{x}+2,\ x\in[2,3]$ باشد، نشاد دهيد، که $c\in(2,3)$ موجود، طور که $f(c)=10$ مي باشد و c را پيدانمايد.

۶) ثبوت نمايد، که براي مساوات زير يک حل موجود است:

$$x^3-4x+1=0;\ x\in[1,2]$$

۷) اگر $f(x)=\sin x+\cos x\quad;\quad x\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ باشد

ثبوت نمايد، که مساوات $\sin x+\cos x=0$ در اينتروال $(\frac{\pi}{2},\pi)$ يک حل دارد.

۸) باشد: $f(x)=\begin{cases}x^2-2 & ; \quad -1\le x\le 3\\ 13-2x & ; \quad 3<x\le 7\end{cases}$

الف) ايا f در x = 3 يک تابع متمادي است؟

ب) يک $c\in(-1,7)$ طور پيدا نمايد. که $f(c)=0$ باشد.

مجموعه فصل اول " Chapter Summary "

تعریف:

تابع f(x) یک حد L دارد، اگرx بسته به یک عد حقيقي c برود. این به معني است، که اگر f(x) بسته بهL میرود x بسته به close to c برود، و به طور زیل مینویسیم :

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

قصيه : اگرf(x) همان حدL داشته باشد ،اگر x از طرف راست یا چپ به c برود ، پس حد موجود است و برابر به L است.

این را بدین طور مینویسیم: $\lim_{x \to c} f(x) = L$

خواص حد :

کهf او g توابع وي، c;L او M حقيقي اعداد وي داسي چي $\lim_{x \to c} f(x) = L$

او $\lim_{x \to c} g(x) = M$ ، نو دا په لاندي توګه ليکلی شو:

$$1)\ \lim_{x \to c} (f+g)(x) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) = L + M$$

$$2)\ \lim_{x \to c} (f-g)(x) = \lim_{x \to c} (f(x)-g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x) = L - M$$

$$3)\ \lim_{x \to c} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x) = L \cdot M$$

$$4)\ \lim_{x \to c} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M};\ (M \neq 0)$$

$$5)\ \lim_{x \to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

(براي $f(x) \geq 0$ و بجاي تمام قيمتهاي x ، که به c نزديک ميشود.

قضيه : اگرx به راديان داده شده باشد، پس داريم : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

قضيه : اگر x به راديان داده شده باشد، پس داريم: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

> تعريف :
>
> f يک تابع باشد، که براي تمام x در همه ا اينتروال هاي باز، که x=c داشته باشد تعريف ميباشد.
>
> تابع f در x = c متمادي ناميده ميشود ، اگر شرايط زيرين را پور کند.
>
> ۱) اگر f(x) تعريف باشد. ۲) اگر $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودباشد
>
> ۳) اگر ($\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ صدق کند.
>
> اگر تابع براي تمام $x \in (a,b)$ متمادي باشد ، پس تابع در اينتروال باز (a, b) هم متمادي است.

اگر تابع براي تمام $x \in (a, b)$ متمادي باشد، پس تابع در تمام انتروال (a, b) متمادي ميباشد.

تعريف : ميگويم که يک تابع در يک انتروال محدود [a, b] متمادي است، اگر تابع از طرف راست در x = a متمادي باشد و از طرف چپ در x = b و در انتروال واز

(a, b) در هر قيمت متمادي ميباشد.

خواص توابع متمادي: اگر f و g درx = c متمادي باشد، پس توابع زير هرکدام شاد در x= c متمادي ميباشد.

اول) جمع توابعو يعني f+g تابع

دم) تفريق توابعو يعني f-g

سوم) ضرب توابعو یعنی f.g

چهارم) تقسيم توابعو يعني $\frac{f(x)}{g(x)}\ ;\ g(x)\neq 0$

قضيه قيمت وسطي: اگر تابعf در انتروال محدود [a,b] متمادي باشد و k در بين f(a) و f(b) يک عدد باشد، پس کم از کم در بين a و b يک عدد c موجود است، براي ان که f(c)=k صدق ميکند.

تمرينات فصل

جواب صحيح را انتخاب نمائيد.

اگر $\lim_{x\to 2} f(x)=4$ باشد، پس $\lim_{x\to 2}(3x-20)(x+1)$ است:

a) b) -5 c) 4 d) 3

ب) دريابيد: $\lim_{x\to 1}\frac{x2+1}{x2+3x-2}$

a) 1   b) 2   c) 1   d) $\frac{1}{2}$

1- لیمیت را دریابید $\lim_{x \to 5} \frac{|x+5|}{x^2+3x-2}$

a) 1   b) 5   c) -1   d) -5

2- $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$ است.

a) -2   b) -1   c) 1   d) 2

3- $\lim_{x \to 0} \frac{3x - \sin x}{x}$ است.

a) 2   b) -2   c) 1   d) 3

4- $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 2}$ است.

d) 1   c) 0   b) $\frac{5}{3}$ a) $-\frac{5}{3}$

5- $\lim_{x \to 1.4} [2x + 0.3]$ است.

a) 1   b) 3   c) 0   d) نشته

6- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x}$ است.

d) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{2}$ b) 0   a) 1

7- $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ است.

a) $2+\sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4

8- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin}{1+\cos 2x}$ است.

a) 1 b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) 4

9- توابع زیر را جمع نمائد.

$$\lim_{x\to 3} f(x)=5 \quad \& \quad \lim_{x\to 3}(x)=-2$$

10- اگر $f(x)=x^2+1$ باشد، دریابید:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

11- تابع $f(x)=\begin{cases}3x-b & ; \quad x\le 3\\ 10-x & ; \quad x>3\end{cases}$ در $x=3$ متمادي است، b را دریابید.

12- نشان دهیدئ، که تابع $f(x)=3x^2-x-5$ در اینتروال $(1,2)$ حل دارد.

۱۳ - لیمیتهاي توابع ۱ – ۹ را حساب کنید.

1) $\lim\limits_{x\to -1}(x^2+x)$ 2) $\lim\limits_{x\to 4}(x^2+x)$ 3) $\lim\limits_{x\to -2} 2x+3$

4) $\lim\limits_{x\to 0}|x|$ 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x}$ 6) $\lim\limits_{x\to 1} 7$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{x^2}{x}}$ 8) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$ 9) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^9-9}$

۱٤-- اگر باشد: $f(x)=\begin{cases}2+x; x<1\\ x^2 \quad ; x\ge 1\end{cases}$

الف) گراف تابع را رسم کنید.

ب) $\lim_{x \to -1} f(x)$ دریابید .

15: توابع که در یک عدد به طور مثال در صفر تعریف نه داشت باشد، چي نامدیده میشوده.

16 دریابید: $\lim_{x \to 1} \dfrac{\dfrac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

--17 $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}$ بشمارید.

--18

اگر $f(x) = \begin{cases} 2x^2+1 & ; \quad x < 2 \\ 3 & ; \quad x = 2 \\ x+3 & ; \quad x > 2 \end{cases}$ باشد، پس متمادیت تابع $f(x)$ را $x = 2$ بشمارید.

۱۹- یک تابع اختیاري بنویسید و گراف تابع را رسم کنید و ببینید، که تابع در کجا تعریف است و متمادیت شاد را نشاد دهید.

۲۰ - در پرسانهاي زیر ۲ – ۷ مطالع میکنیم، که ایا تابع در ساحه داده شده متمادي یا غیرمتمادي است.

2) $f(x) = x^2 + 5(x-2)^7 \;;\; x = 3$

3) $f(x) = \dfrac{x+3}{(x^2+2x-5} \;;\; x = -1$

4) $f(x)\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \;;\; x = -2$

5) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3^3)} \;;\; x = 3$

6) $f(x) = |x-3| \;;\; x = 3$

7) $g(x) = \dfrac{|x|}{x} \;;\; x = 0$

۲۱- تشریح نمائید، که چرا تابع $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ در $x = 0$ غیرمتمادي است؟

۲۲- اگر $x \in [2,3]$, $f(x) = \dfrac{18}{x} + 2$ باشد، نشان دهيد که $c \in (2,3)$ موجود است طوري که $f(c) = 10$ ميباشد و c را دريابيد.

۲۳- نشان دهيد که براي مساوات زير يک حل موجود است:

$$x^3 - 4x + 1 = 0 \quad ; \quad x \in [1,2]$$

۲٤- باشد: $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$; $f(x) = \sin x + \cos x$ نشان دهيد که مساوات $\sin x + \cos x = 0$ در اينتروال $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ يک حل دارد.

۲۵- وي دي:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & ; \quad -1 \le x \le 3 \\ 13 - 2x & ; \quad 3 < x \le 7 \end{cases}$$

الف) ايا f در $x = 0$ يک تابع متمادي ميباشد؟

ب) $c \in (-1,7)$ ذوري دريابيد که $f(c) = 0$ باشد.

کوتاه: توابع غيرمتمادي ان هستند، که در ندام جاي تعريف نه باشد.

۲٦-- اگر $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; $f(x) = 2\sin x + 3$ باشد، پس نشان دهيد که $c \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ موجود است، دريابيد که براي اين $f(c) = 4$ و c صدق ميکند

۲۵ الف: مطالعه نمايئد، که ايا توابع زير در جاي x_0 مفمادي ميباشد.

$x_0 = 1$ د $x \le 1$ لپاره $x_0 = 1$ د $x > 1$ لپاره		د$x_0 = 0$ $x \le 0$ لپاره د$x_0 = 0$ ، $x > 0$ لپاره د$x_0 = 0$ $x \le 0$ لپاره	

$x_0 = 1$ د $x \le 1$ لپاره	b) $f(x) = \begin{cases} 2 \\ x^2 + 1 \end{cases}$	$x_0 = 0$ د $x > 0$ لپاره	a) $f(x) = \begin{cases} -2x \\ \sqrt{x} \end{cases}$
$x_0 = 1$ د $x > 1$ لپاره	d) $f(x) = \begin{cases} -x + 1 \\ \ln x \end{cases}$		c) $f(x) = \begin{cases} \sin x \\ e^x \end{cases}$

۲۶-- اگر $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; $f(x) = 2\sin x + 3$ باشد، پس نشان دهید، که $c \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ موجود است، براي ان که $f(c) = 4$ صدق کند و c را دریابید.

۲۷: حد هاي زير را بشماريد

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

$$\lim_{x\to 0} \sin 5x \cot 3x \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}$$

$$\lim_{x\to \pi} \sqrt{\cos 2x - \cos x + 1} \qquad \lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}$$

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} \qquad \lim_{x\to 1} (\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{x} \qquad \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1}$$

20) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-2x}{x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\cos\frac{\pi x}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\tan 2x}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^3+2x^2}$$

26) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x+\frac{\pi}{4})}{x+\frac{\pi}{4}}$$

25) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$$

28) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-x\cos 3x}{x}$$

27) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{x(x-\frac{\pi}{4})}$$

30) $$\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}$$

29) $$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 3x-\sin 5x}$$

32) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}$$

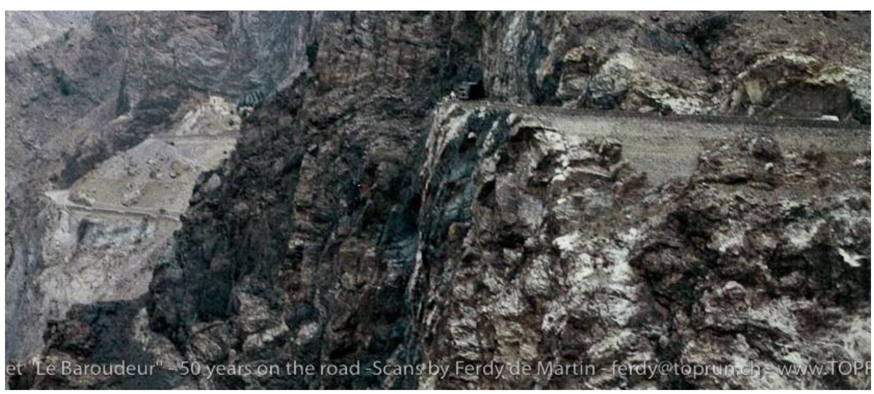
31) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\sin^2 x-1}}{x}$$

34) $$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+5x}{\sin 2x}$$

33) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(3x-3)}{1-x^3}$$

تغير قيمت وسطي تابع Average rate of change

د ماهيپر يا د سالنگ سرک څېره (دا څېره که د کمپيوترکارانو سره وي ور وادې چول شي)



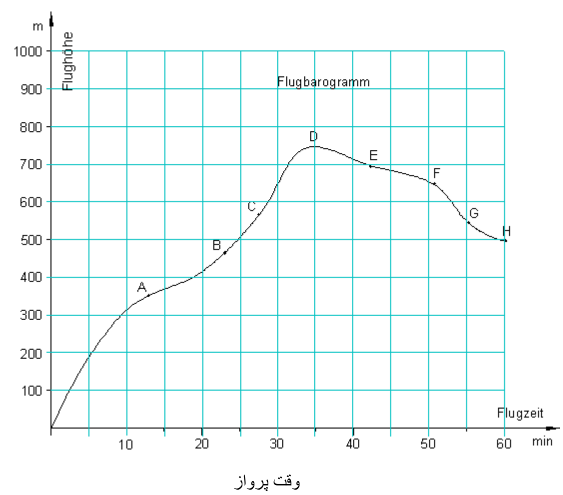
درين قسمت کتاب موضوع مهمي رياضيات را مطالعه ميکنيم، که ميتوان ان را هسته رياضيات بناميم. پس لازم ديده ميشود، که اين شی بحث به حيث يک يادداشت بياوريم:

اگر از يک جاي به جاي ديگر از تغير قيمت وسطي (Averagerate of change) حرف ميزنيم ، هدف ازين ميل و يا بلندي تانجنت تابع ميباشد، دريک نقطه معين(هر کدام اين دوکلمه به يک معني هستند) يا دو نقطه و مي بينيم، که به همين طور تقسيم تفاضل (Difference quotient) هم.

اين کلمات را در انگليسي slop ميگويد، که در ادبيات ما به اسم ميل ياد مي شود.

میل گراف تابع در یک نقطه(بلندي)

هواپیما یک اله به نام (Flight barogramm) (اله نوشتن پرواز در طياره) ساخته شده، که بلندي طیاره را رسم میکند و این بلندي در اختیار زمان میباشد، یعني تابع که بلندي پرواز را رسم میکند در اختیار زمان است.



در گراف بالا ارتفاع پرواز یک تیاره در اوقات مختلف نشان داده شده.

فعالیت :

- در شکل بالا میل گراف را در نقطه A با نقطه B مقایسه کنید. به همین ترتیب میل گراف را در نقطه E با نقطه G مقایسه کنید.

- در شکل بالا ارتفاع نقطه A را با ارتفاع نقطهB و ارتفاع نقطه E را با ارتفاع نقطه G مقایسه کنید.

-روشن سازید، که چرا در یک نقطه باید از بلندي، میل یا تانجنت حرف میزنیم؟

- کوشش کنید، که براي یافتن میل گراف در یک نقطه یک طریقه یا یک متود تعریف کنید و از شکل در نقاط A وB میل را تعین نماید.

-ايا فکر مي کنيد، که ميل در نقطه B نسبت به ميل در نقطه A زياد ميباشد؟

- ايا فکر مي کنيد، که در نقاط E و G ميل منفي است. درينجا در نقطه E از روي قيمت، ميلان زياد است نسبت به نقطه G ؟

- ايا بلندي يک خط و به همين ترتيب يک منحني در هر جاي فرق دارد يا نه؟

نتيجه:

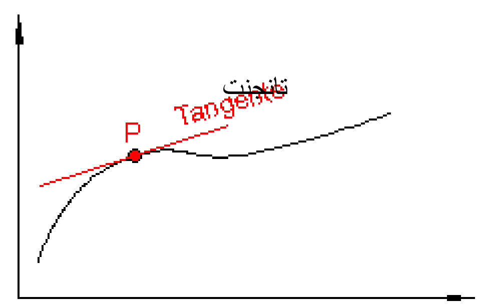
مي بينيم، که در يک منحني ميل (بلندي) گراف در هر جاي يا هر نقطه برابر نيست ازين سبب بايد نقطه را نشان دهيم، که دران جا ميل مطالع ميشود.

در مثال زير روشن مي سازيم، که تنها ميل خط مستقيم در هرجا مساوي است، بدين اساس درينجا ما از ميل يک خط صحبت مي کنيم.

ديده ميشود، که تعريف زير عاقلانه است.

تعريف:

ميل گراف يک تابع در يک نقطه P در همان نقطه به ميل تانجنت گراف مساوي است.



ديده ميشود، که در اين جا تانجنت تعريف خط را دارد، که در احاطه نقطه به امکانات موجود، به مماس خوب نزديک ميشود.

از روي اين تعريف ميل يک گراف ميل يک خط مي باشد.

۶۰ تغير قيمت وسطي

براي تعين گراف در نقاط A و B در هريک يک خط (تانجنت) رسم ميکنيم، که به گراف بسيار نزديک شود يا تقرب کند.

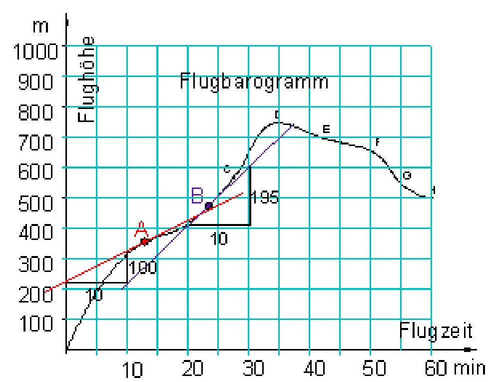
به کمک مثلث ميل، ميل به طور ساده شمرده ميشود:

ميل در نقطه A:

$$\frac{100\ \text{m}}{10\ \text{min}} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$$

ميلان در نقطه B :

$$\frac{195\ \text{m}}{10\ \text{min}} = 19{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$$



براي مثال ما ميل در يک نقطه معين به معني ميل سرعت لحظوي مي باشد.

درنقطه A: وقت پرواز نزديک به 12,5 min مي باشد، ميلان سرعت نزديک به 10 m / min مي باشد.

درنقطه B: وقت پرواز نزديک به 23,0 min مي باشد ، سرعت ميلان تقريبآ 19,5 m / min مي باشد.

تانجنت تا به حال فقط از روي چشمديد تعريف شده، که در ساحه يا محيط نقطه مماس بسيار نزديک ميشود. به اين دليل ممکن بود، که ميل گراف در نقاط A و B هم تنها به طور تقريبي تعين گردد، اين در عمل قابل قناعت نيست.

ميل (بلندي)گراف يک تابع در يک نقطه :

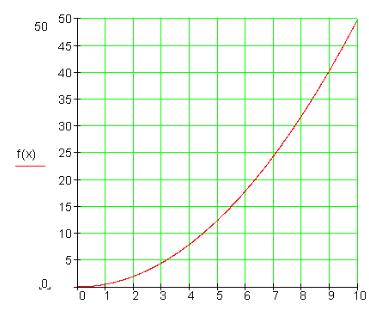
مي فهميم ، که يک ريل بعد از حرکت از استادگاه سرعت خود را اهسته اهسته زياد ميکند. راه طی شده(از استاد گاه) هميشه زياد ميشود. دور شدن از استادگاه در اختيار(تابع) سرعت ميباشد

عمل از طريق مساوات زير تابع نوشته کرده ميتوانيم.

درينجا وقت x براي ثانيه و راه s را براي مترتعين گرديده و مينوسيم:

$$s = f(x) = 0{,}5x^2$$

شکل مقابل يا پاين : گراف تابع



فعاليت:

۱ - حالا بايد تغير وسطيAveragerat of change (ميل وسطي) در بين ثانيه ۳ –م و ۷ –م شمرده شود.

۲ - براي اين قاطع يا سيکانت مربوط ترسيم شود و ميل ان را شمرده شود.

۳ - حالا قيمت تغير (ميل وسطي) در بين ثانيه ۳ –م و ٤ –م شمرده شود.

---

۴ – نشان دهید که در ثانیه سوم قیمت تغیر یا میل چي قدر مي باشد؟

تقسیم تفاضل Difference quotient

میل یک خط بدون گرفتن مشتق تعین شده مي تواند.

خط $y=f(x) = mx+a$ را داریم.

فرمول میل یا بلندي(ارتفاع) یک خط قرار زیر میباشد:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

قاطع (secante) :

قاطع خط است که منحني را در دو نقطه P_0 و P_1 قطع میکند.

میل یا بلندي قاطع (secante):

این که قاطع هم یک خط است، پس ،،میل (بلندي) ،، هم به طور میل شمرده میشود.

در زیر m_S برای بلندي نوشته میشود.

$$m_s=m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

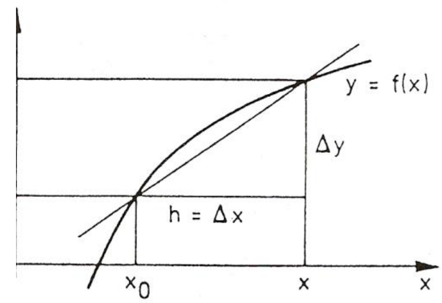
تعریف:

یک تابع $y = f(x)$ در یک احاطه x_0 و در خود x_0 یک تابع تعریف شده باشد، x جدا از x_0 مگر در محیط یک جاي دلخواه است (شکل دیده شود).

پس تقسیم تفاضل یا qutient Difference یا میل سیکانت موجود است، که قرار زیل مینویسیم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



فرمول براي تابع f : $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

اين فرمول در گراف f در بين دو نقطه شمردن ميل ميباشد. اين نقاط بالاي محور x نقاط x ، $x+h$ ميباشد .

تقسيم تفاضل براي تعريف مشتق به کار مي ايد.

مثال :

تابع $y=f(x)=3x^2-5x+4$ داده شده باشد. تقسيم تفاضل اين تابع را دريابيد.

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\frac{3(x+h)^2-5(x+h)+4-(3x^2-5x+4)}{h}\\&=\frac{3x^2+6xh+3h^2-5x-5h+4-3x^2+5x-4}{h}\\&=\frac{6xh+3h^2-5h}{h}\\&=6x+3h-5\end{aligned}$$

تمرين:

۱ -- قيمت تقسيم تفاضل در نقاط P و Q را تعين نمائيد.

a) P(3,2) , Q(5,4)   b) P(2,4) , Q(3,1)

۲ – در جاي $x = x_0$ بلندي تانجنت تابع f را تعينن نمايئد..

$a)\ f(x) = x^2\ ,\ x_0 = 2\ ,\quad b)\ f(x) = 0.5x^2\ ,\ x_0 = 3$

۳ -- زير تقسيم تفاضل و مشتق چي مي فهميم و در بين اين چه فرق موجود ميباشد؟

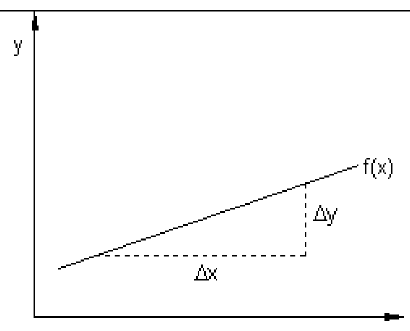
٤-- زير سيکات(قاطع) يک تابع چي ميفهميم و زير بلندي تانجنت چي ميفهميم؟ و در بين اين کدام روابط برقرار است؟

شمردن مشتق Diffrentialcaculation

فعاليت:

فکرکنيد، مثل که در يک ميل ثابت $a_1 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = constant$ ، به طور مثال در يک تابع خطي يا لايني $f(x) = a_1 x + a_0$ ميل هست يا نه؟

- دقت کنيد، که اين ميل کدام خواص خاص دارد؟ ايا ميل در هر جا فرق دارد و يا ثٍابت ميباشد ؟



ایا در اوقات مختلف ضرور میبینید ، که درحالت تغیر(حالت میل) حالت حرکت تابع را تحقیق کنید؟

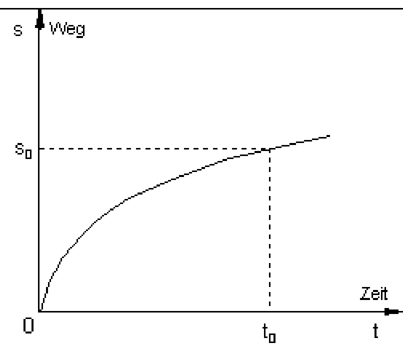
- و یا ازین سبب سرعت لحظوی $v(t_0)$ در دیاگرام فاصله- وقت تحقیق نماید؟

ا-ایا به کمک شمردن مشتق این پرابلم حل میشود؟

تعین میل یک تابع د ر یک جاي که پیش داده شده به نام مشتق گرفتن تابع یاد میشود

د در فکر گرفته شده $t_0 \hat{=}$

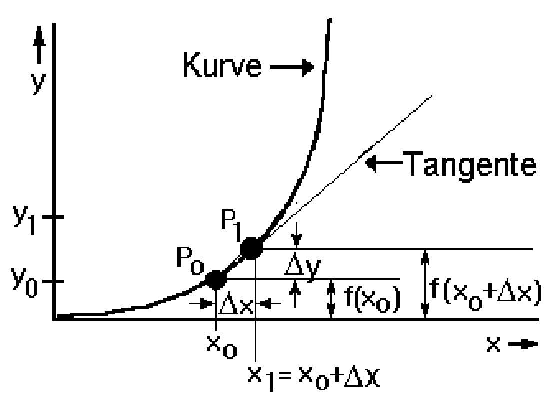
راه که تا این زما طي شده $s_0 \hat{=}$



یادداشت: در شکل فوقZeit به معني وقت و Weg به معني راه میباشد.

مشتق = میل یک منحني (Differential caculation

تانجنت: اگر نقطه P_1 و P_0 به یکدیگر لایتناهي نزدیک شود، پس ازسیکانت تانجنت جور میشود.



۶۶ شمردن مشتق

میل تانجنت: میل تانجنت حد ،، لیمت ،Limit„ میل سیکانت میاشد.

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

فعالیت :

۱ – از شکل بالا و از تحقیق مربوطه براي مشتق چه فکر مي کنید ؟

۲ – زیر کلمه derivative (مشتق) چه مي فهمیم ؟

و این به دري ساده چي معني دارد؟
۳ – از تقسیم تفاضل چطور به مشتق مي ایم؟ درین بابت به استفاده از شکل بالا نظر خود را اظهار

نماید.

۴ – از فعالیت ۲ بگوید، که چرا این حساب یا شمارکردن جدا کردن یا مشتق نامیده میشود؟
دقت: مثل که در پیش اشاره کردم، کلمه derivative نو است، پس ازین بابت این چند نقاط را در نظر میگیریم : derivative به معني مشتق یا جدا کردن است، که ما این را مشتق مي نامیم.

اگر در تقسیم تفاضل تابع $x \to x_0$ و (همینطور) $\Leftrightarrow x -> 0$ و یا (به همین ترتیب) $\Leftrightarrow h -> 0$ یک حد داشته باشد , پس تابع $y = f(x)$ در جاي $x = x_0$ قابلیت مشتق دارد ، و براي این مینویسیم:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}; \ldots$$

اين ليميت را به اينطور نشان ميديهيم : $(\frac{dx}{dy})_{x=x_0} = f'(x);$

در جاي x_0 مشتق(Derivativ,) تابع $y = f(x)$ ، يک راه ديگر مستقيم يا منحني طور ديگر را جدا ميکند.

براي شمردن ساده مشتق يک مثال:
مشتق تابع $f(x) = x^2 - 3x + 2$ را ميخواهيم پيدا نمايم:
تقسيم تفاضلي اين قرار زيل ميپاشد :

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$= \frac{((x_0+\Delta x)^2 - 3(x_0+\Delta x)+2) - (x_0^2 - 3x_0 + 2)}{\Delta x}$$
$$= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3x_0 - 3\Delta x + 2 - x_0^2 + 3x_0 - 2}{\Delta x}$$
$$= \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x}$$
$$= 2x_0 + \Delta x - 3$$

همراه حد $\Delta x \to 0$ مشتق بدست مي ايد:

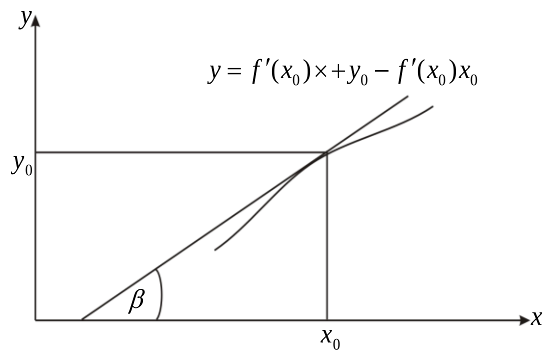
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x - 3) = 2x_0 - 3.$$

براي اين تعريف زير را ميدهيم:

اگر يک تابع $y = f(x)$ در جاي x_0 قابليت مشتق داشته باشد، پس خط زيرکه از نقطه (x_0, y_0) ميگزرد و ميل شان $f'(x) = \tan\beta$ باشد قرار زيل نوشته ميکنيم:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = f'(x) \Leftrightarrow y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0$$

و در نقطه (x_0, y_0) تانجنت منحني داده شده $y = f(x)$ ناميده ميشود(مقايسه شکل)



در پايئن شمردن مشتق چند توابع ساده و اساسي را زير بحث ميگيريم.

مثال ۱:

مشتق يک ثابت :

ما تابع زير را داريم، که قيمت شان يک ثابت ميباشد.

$y = f(x) = c = Const$ ثابت، پس براي هر جاي x_0 داريم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

$$\Rightarrow (\frac{dy}{dx})_{x=x_0} = f'(x_0) = 0$$

مثال۲: يک تابع خطي $f(x) = x$ داده شده باشد

در جاي x_0 ميخواهيم مشتق تابع را دريابيم و تابع مشتق هم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0 + \Delta x - + x_0}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 = \underline{\underline{1}}$$

پس $f'(x_0)=1$ در جاي x_0 مشتق تابع است و تابع مشتق $f'(x_0)=1$ $f'(x_0)=1$ است يعني يک ثابت ميباشد.

مثال ۳ :

مشتق تابع $y=f(x)=c.u(x)$ همراه يک ثابت c.

قانون ثابت:

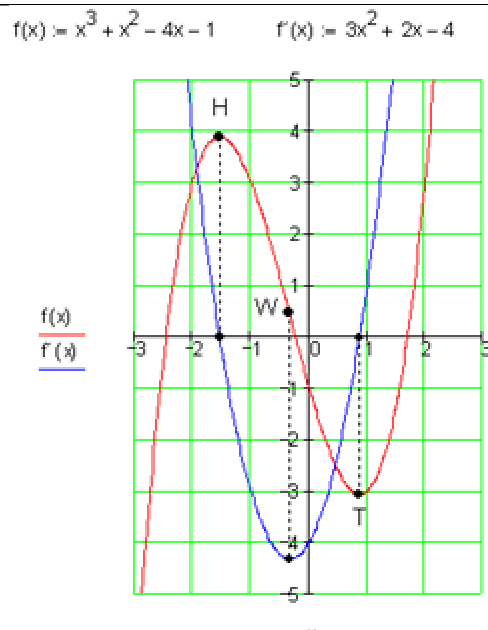
يک تابع، که از ضرب يک تابع ساده و يک ثابت بدست امده باشد، برابر است به مشتق تابع ساده، که به يک ثابتيِ c= ضر ب شده باشد يعني از $y=f(x)=c.u(x)$ داريم:
$\Rightarrow\ f'(x)=c.u'(x)$

ثبوت:

$$\Rightarrow\ f(x_0)=c.u(x_0)$$
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot u(x_0+\Delta x)-c\cdot u(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0} c\cdot\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} c}_{c}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underline{\underline{c\cdot u'(x_0)}}$$

تمرين:

- زير تقسيم تفاضل و زير مشتق چه مي فهميم؟
- روابط پين تقسيم تفاضل و مشتق را نشان دهيد.
- **زير ميل قاطع(سکانت) و تانجنت چه ميفهميم؟**

در شکل منحني سرخ تابع، منحني سبز مشتق تابع و خواهیمدید، که از همین دلیل تابع مشتق هم میباشد.	

فعالیت :

۱ – در جاي x_0 مشتق تابع یعني چه؟

۲ - بعد از مشتقگرفتن یک تابع این مشتق را چه مینامیم یا چه بنامیم؟

۳ – اگر مشتق تابع را تابع مشتق بینامیم، واضح نمایئد، که چرا تابع است و درجه این تابع به درجه تابع اول مقایسه نمایئد.

ایا ازین فرق کلمه مشتق واضح کرده میتوانید؟

براي واضح ساختن این از مثال زیر کار میگیریم:

مثال۱ : تابع $y = f(x) = x^2$ داده شده باشد.

میخواهم در جاي $x = x_0$ و بالخصوص در جاي $x_0 = 2$ پیش از همه چیز تقسیم تفاضل را دریابیم.

$$x = x_0 :$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

حالا از طریق بدست اوردن لیمیت به ضریب مشتق مي ایم:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

پس $\underline{\underline{f'(x_0) = 2x_0}}$ داریم و براي $x_0 = 2$ قیمت $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ صدق میکند.

در جاي $x_0 = 2$ مشتق اول تابع $y = f(x) = x^2$ به 4 مساوي است، این به این معنی که تابع در جاي $x_0 = 2$ میل 4 دارد.

نتیجه شان:

میتواند از طریق گراف تابع امتحان شود، طور که تانجنت در نقطه $P_0(x_0 | y_0) = P_0(2 | 4)$

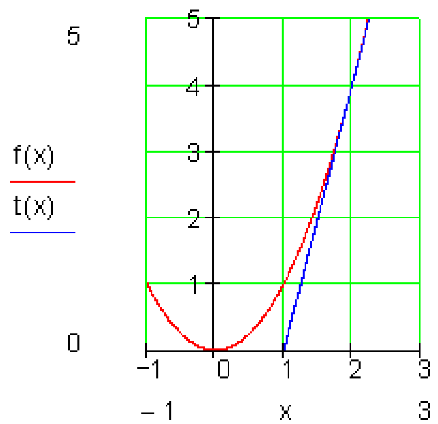
ترسيم کنيم و از مثلث ميل، بلندي(ميل) بدست بياوريم.

در مثال بالا : $y = f(x) = x^2$

در هر جاي دلخواه x_0 تابع را پيدا ميکنيم:

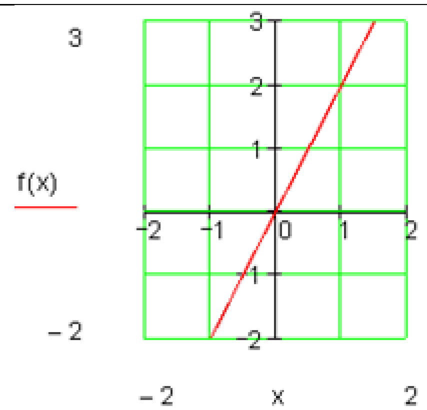
$y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	4



گراف يک خط رسم ميکند،و $f'(x) = 2x$ مشتق تابع ناميده ميشود

ياداشت : اگرمشتق يک تابع گرفته شود، پس بار ديگرهم يک تابع بدست مي ايد و اين تابع مشتق ناميده ميشود.



تابع مشتق : قيمتهاي تابع در هر نقطه، تابع داده شده (اساسي) را ترسيم ميکند، ازين لحاظ اين تابع ميل هم ناميده ميشود.

مثال ۲ : تابع $f(x) = x^3$ داده شده باشد.

فعاليت: شاگردان عزيز گراف تابع $f(x) = x^3$ را رسم کند.

ما ميخواهيم مشتق تابع بالا را در نقطه x_0 دريابيم و به همين طور تابع مشتق.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0^{\ 3}}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0^{\ 3}+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x_0^{\ 3}}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2))}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2)$$
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2=3x_0^2$$

پس $\underline{\underline{f'(x_0)=3x_0^2}}$ در نقطه x_0 مشتق تابع $f(x)=x^3$ میباشد.

تابع مشتق به این قرار است: $\underline{\underline{f'(x_0)=3x_0^2}}$

مثال ۳ یک تابع $f(x)=\dfrac{1}{x}$ **داده شده.**

الف: گراف تابع زیر را به یاد بیاورید.

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-x_0-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$ $$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$ $$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot x_0(x_0+\Delta x)}$$ $$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$ $$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}$$	در نقطه x_0 مشتق تابع را پیدا مي کنیم و تابع مشتق: $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$ $$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}}{\Delta x}$$ $$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0}{x_0(x_0+\Delta x)}-\frac{(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$ $$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

براي $\Delta x \to 0$ ليميت مساوات با لا ميگيريم:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(-\frac{1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x}\right) = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x}$$

پس داريم: $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$ در جاي x_0 مشتق f ميباشد .

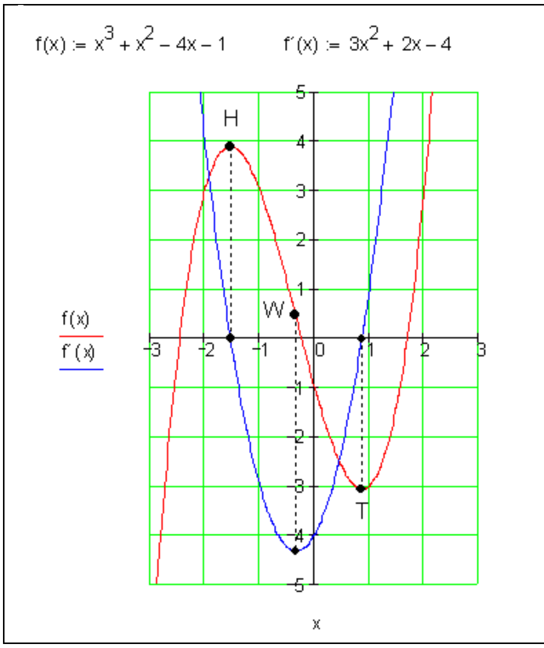
پس تابع مشتق قرارزيل است: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

کميات وضعيه تابع و مشتق تابع :

تابع (سرخ) : $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$

مشتق تابع : $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

مشتق يک تابع نيزتابع است. ما اين را تابع مشتق و يا تابع ميل مي ناميم.



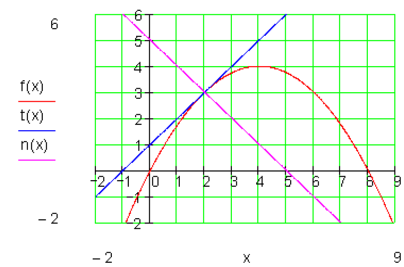
تمرينات:

در معدلات زيل مشتق توابع و توابع متق را دريابيد

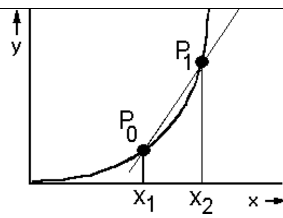
$a)\ f(x) = 4x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 1$ $\qquad b)\ f(x) = x - \sqrt{x}$

$c)\ f(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{x^3}$ $\qquad d)\ f(x) = 3x^2 + 0.4x - 5$

تعریفهای تانجنت و عمود و خواص ان

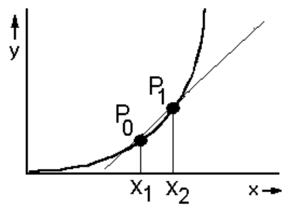


شکل رو برودر نقاط P_0 و P_1 یک منحني و یک قاطع را نشا ن میدهد

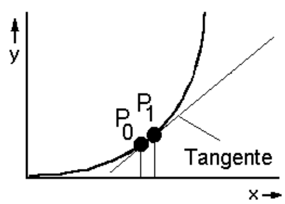


که نقطه P_0 به طرف نقطه P_1 حرکت دهیم.

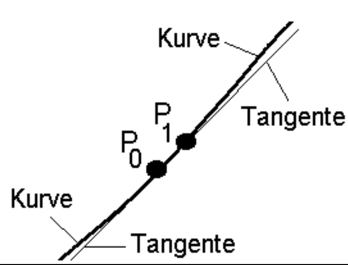
یادداشت: به این صورت قاطع میل خود را تغیر میدهد.



بالاخره میخواهیم، که نقطه P_1 به نقطه P_0 لایتناهي نزدیک شود، قاطع درینجا به تانجنت نزدیک میشود.



اگر مکمل شناخته شد، که اطراف نقاط P_1 و P_0 را بزگ میسازیم: اگر نقطه P_1 به P_0 لایتناهي نزدیک شود، پس دیده میشود، که تانجنت در نقطه P_0 همین حالت را اخطیار میکند، مثل که منحني در نقطه P_0 .



فعالیت:

۱ – اشکال بالا را به هم مقایسه کنید و در باره میل فکر کنید، که کدام بلندي زیاد میباشد؟

۲ – تانجنت را تعریف نماید و در شکل بالا نشان دهید.

۳ – قاطع (سیکانت) را تعریف کنید و در شکل بالا انرا نشان دهید.

در زیر فرمول عمومي تانجنت و نورمال(عمود) را برون نویس میکنیم:

شروع : تانجنت گراف $f(x)$ را در نقطه $P(x_0, f(x_0))$ لمس کند. عمود (نورمال) گراف $f(x)$ را در نقطه $P(x_0, f(x_0))$ عمود قطع کند.

مساوات تانجنت : $t(x) = m_t \cdot x + b_t$

به $m_t = f\,'(x_0)$ نوشته میکنیم: (1) $\quad t(x) = f\,'(x_0) \cdot x + b_t$

براي این که $P(x_0, f(x_0))$ یک نقطه تانجنت میباشد، پس این نتیجه را میگیریم:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f\,'(x_0) \cdot x + b_t = f(x_0)$$
$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f\,'(x_0) \cdot x_0$$

در (۱) جا به جا میکنیم، پس داریم:

$$t(x) = f\,'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f\,'(x_0) \cdot x_0 = f\,'(x_0) \cdot x - f\,'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)$$
$$= f\,'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

عمود (نورمال) به منحني درهمان نقطه، که تانجنت دران واقع است، عمود مي افتد.

میل نورمال:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$
$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

مثال :

تابع $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ را داریم.

تانجنت و عمود(نورمال) تابع را بیابید:

حل:

مشتق تابع را قرار زیل میشماریم و گراف شان را(در زیر رسم شده) رسم میکنیم:

پس داریم: $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

میل تانجنت در نقطه x_0 **قیمت** 3 **دارد.**

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$
$$f(x) = f(-2) = 2 \cdot (-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

در نقطه $P(-2,-5)$ تانجنت بالای $f(x)$ قیمت 3 دارد.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad , P(2, f(2))$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

در جاي $x_0 = 2$ داریم:

$$t(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4-1 = 3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2-1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x-2)+3 = x-2+3 = \underline{\underline{x+1}}$$

دریافت عمود یا نورمال:

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \ , \quad P(2|\, f(2))$$

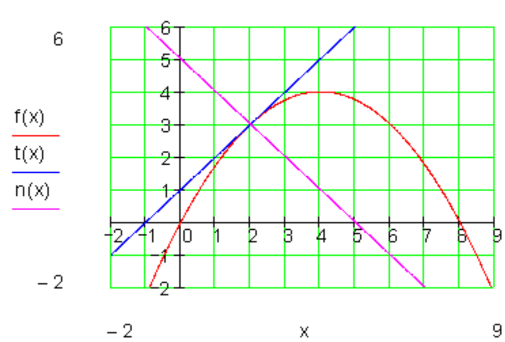
$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) + f(x_0)$$

در $x_0 = 2$ زیر را میدهد:

$$n(x) = \frac{1}{f'(2)}(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4-1 = 3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2-1 = 1$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x-2)+3 = -x+2+3 = \underline{\underline{-x+5}}$$



مساوات عمومي تانجنت و عمود:

مثال(یا قضیه؟): تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ لرو.

میل تانجنت :

میل گراف یک تابع در یک نقطه $P(x_0 \mid f(x_0))$ همان معني دارد، مثلي که میل تانجنت درین نقطه.

ما تابع f(x) و مشتق تابع را دقیق در فکر میگیریم.

ما مربع تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ **را داریم.**

مشتق تابع $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

جدول قیمتها:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
$f'(x)$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

از جدول قیمتهاي f(x) خوانده میشود، که رآس مربع تابع S(-1, 0,75) است.

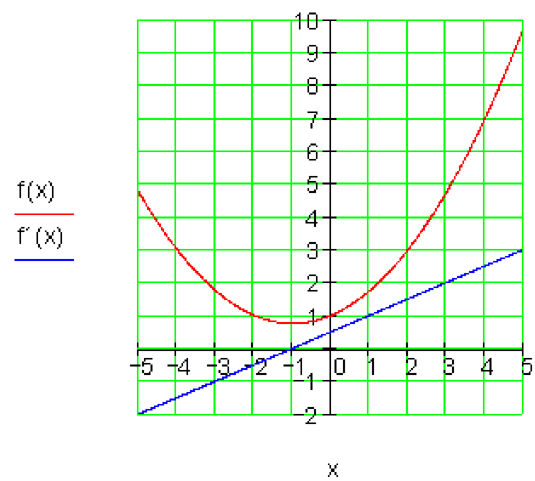
براي قیمت x=-1 قیمت میل تابع f'(-1) = 0 میباشد :

این به معنی است، که در نقطه رآس میل f'(x) صفر میباشد.

تانجنت در S هم این معنی دارد، که صفر است، این درانجا افقي حرکت میکند. یعنی به محور x موازي حرکت میکند.

گرافها:

$f(x) := \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ $\qquad$ $f'(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



مثال:

تابع لرو: $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 7$

تانجنت را پیدا شود، که گراف $f(x)$ را در نقطه $P(-2, f(-2))$ لمس میکند،

$$f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 7 \;\Rightarrow\; f'(x) = 6x^2 + 14x + 1 \quad P(-2 \mid f(2)) \;\Rightarrow x_0 = -2$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$f'(x_0) f'(-2) = 24 - 28 + 1 = -3$$
$$f(x_0) = f(-2) = -16 + 28 - 2 - 7 = 3$$
$$\Rightarrow t(x) = -3(x+2) + 3 = -3x - 6 + 3 = \underline{\underline{-3x - 3}}$$

نتیجه: در گراف تابع $f(x)$ تانجنت وعمود در نقطه $P(x_0, f(x_0))$ شکل زیر را دارد.

مساوات عمود

$$n(x) = -\underbrace{\frac{1}{f'(x_0)}}_{}(x - x_0) + f(x_0)\ ;\ \ f'(x_0) \neq 0$$

ارتفاع

مساوات تانجنت

$$t(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{}(x - x_0) + f(x_0)$$

ارتفاع

تمرینونه: د لاندې توابعو گرافونه وکاږئ، د تانجنت او د عمود مساوات ولیکئ.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad x_0 = 2$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{x} + 3 \qquad x_0 = 1$$

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \qquad x_0 = -\frac{3}{2}$$

قوانین شمارش مشتق

قوانین شمارش مشتق طور که در اعداد، ترادفها، و لیمیت اجرا گردیده، په همین ترتیب در مشتق هم این قوانین اعتبار درارد.

نشان خواهیم داد، که جمع،تفریق، .... مشتقها، مشتقهاي جمع،... میباشد(در حالت تقسیم مخرج باید غیر مساوي به صفر باشد)

فعالیت :

اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = x^3 + 2$ داشته باشیم، $(f(x) + f(x))'$ در باره د

ریافت $(f(x)\cdot g(x))'$, $(f(x)-g(x))$ و $(\frac{f(x)}{g(x)})'$ $g(x)\neq 0$, فکر کنید.

مساوات عمود

مساوات تانجنت

قضيه (قاعده جمعي):
اگر يک تابع $f(x)$ حاصل جمع دو توابعو $u(x)$ و $v(x)$ تشکيل شده باشد، پس مشتق شان هم از حاصل جمع هر دو تابع تشکيل شده، يعني:

$$f(x)=u(x)+v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x)=u'(x)+v'(x)$$

حل:

$$f(x_0)=u(x_0)+v(x_0)$$
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]+[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]}{\Delta x}+\frac{[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\right]}_{u'(x_0)}+\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x}\right]}_{v'(x_0)}$$
$$\Leftrightarrow f'(x)=\underline{\underline{u'(x_0)+v'(x_0)}}$$

مثال:
اگر توابع $f(x)=5x^2+3x$, $u(x)=5x^2$, $v(x)=3x$ داشته باشیممشتق شان را دریابید.

$$f(x)=5x^2+3x \quad , \quad u(x)=5x^2 \quad , \quad v(x)=3x$$
$$\Rightarrow u'(x)=10x \qquad v'(x)=3$$
$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$$

فعاليت: اگر f_1،f_2،.....، f_n توابع و k_1،k_2،....، k_n اعداد ثابت باشد ، پس نشان دهيد که داريم بون ثبوت):

$$[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+.....+k_n f_n(x)]'$$
$$=k_1 f_1'(x)+k_2 f_2'(x)+.....+k_n f_n'(x)$$

قضيه (قاعده ضرب): اگر f (x) و g(x) دو توابع باشد، پس نشان ميديهيم كه:

$$(f(x).g(x))'=f(x)'.g(x)+f(x).g'(x)$$

ثبوت:

به اساس تعويض فورم مناسب يعني اگر در صورت $-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)$ جمع نمايم، زير را بدست مي اوريم:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

از بالا بدست مي ايد عني ليميټت هردو طرف را کيگيريم:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

مثال:

اگر $g(x) = x^2-1$ و $h(x)=\sqrt{x}$ داشته باشيم، پس مشتق $f(x)=g(x)h(x)$ را ميخواهيم دريابيم.

ثبوت : طور زير به پيش ميرويم:

$$f(x)=(x^2-1)\sqrt{x},\ f'(x)=2x\sqrt{x}+(x^2-1)\frac{1}{\sqrt[2]{x}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه تقسیم(قانون تقسیم):

f و g دو توابع باشد. میخواهیم ثبوت کنیم که:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} \qquad g(x)\neq 0$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

میخواهیم $f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)$ به صورت جمع نمایم، پس داریم:

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x)}[\lim_{h\to 0} g(x)\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}[g(x).f'(x) - f(x).g'(x)] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

مثال:

مشتق تابع $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$ (که $x^2-4\neq 0$ باشد) را ميخواهيم دريابيم.

حل: اگر $g(x)=x^2$ و $h(x)=x^2-4$ وضع شود، پس بيدست مي ايد:

$$g'(x)=2x$$
$$h'(x)=2x$$

و از قانون تقسيم داريم:

$$f'(x)=\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]'=\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$
$$=\frac{2x(x^2-4)-x^2.2x}{[x^2-4]^2}$$
$$=\frac{-8x}{[x^2-4]^2}$$

تمرينها:

اگر $f(x)=3x^2+5x-8$ و $g(x)=5x^3-3x+4$ داشته باشيم، پس مشتق جمعي، ضرب و تقسيم ($f(x)\neq 0$) توبع را از راههاي مختلف ، اگر ممکن باشد، دريابيد.

- مشتق توابع از روي قانون توان دريابيد.

مشتق توابع الجبري

تعريف توابع الجبري و توابع غيره :

۱ – يک تابع اساسي الجبري ناميده ميشود، اگر قانون ترتيبش از طريق مساوات داده شده باشد، که در ترمها به مساوات متحول فقط عمليه هاي الجبري(جمع،تفريق، ضرب، تقسيم(که مخرج شان صفر نه باشد)، طاقت، جذر گرفتن(که اکسپوننتهاي طاقت و

مثبت و اعداد تام میباشد) به کاربرده شد..

۲ - توابع غیر الجبري ترانسسندنت نامیده میشود، مثل توابع اکسپوننشل،- ولوگاریمی و توابع زاوایا(توابع مثلثاتي).

۳ – یک تابع الجبري راشنل یا کسري نامیده میشود، اگر قانون ترتیب شان به یک مساوات داده شده باشد، در ان که قوانیم تا لایتناهي عملیات شمردن ((جمع،تفریق، ضرب، تقسیم(که مخرج شان صفر نه باشد) طاقت و جذ گرفتن(اکسپوننتهاي طاقت و جذر باید مثبتو اعداد تام باشد)) (» به کار برده شده باشد.

فعالیت :

- تابع f(x) اگر به شکل

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0$$

به $n \in N \wedge a_i \in R$ نوشته شده باشد، چي نامیده میشود.

- داریم : $u(x) = x^2 + 4x + 4$ و $v(x) = 3x + 6$

تابع f به شکل تقسیم دو توابعو u و v مثل $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ به $v(x) \neq 0$ نوشته کنید.

- ساحه تعریف تابع را نشاد دهید و باز مشتق هر یک از تابع v; u را بگیرید و بعدآ تقسیم مشتقها را نشان دهید و تقسیم مشتق به مشتق مقایسه کنید.

مثال: تابع $f(x)=\sqrt{x}$ داده شده. در نقطه x_0 مشتق تابع را دریابید و تابع مشتق را نشاني کنید.

ثبوت:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}})}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}}}$$

$$f'(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

پس در جاي x_0 مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق تابع ميباشد: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

به اسشس درسهاي گزشته $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ تابع مشتق ميباشد.

مشتق توابع قسم $f(x)=x^q\,;q\in Q$:

از طريق شمردن نتايج زير بدست مي ايد:

تابع	تابع مشتق تابع	
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$f'(x)=1\cdot x^0$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2\cdot x$	$f'(x)=2\cdot x^1$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3\cdot x^2$	$f'(x)=3\cdot x^2$
$f(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$f'(x)=-1.x^{-2}$
$f(x)=\sqrt{x}=x\dfrac{1}{2}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}}$

اگر پنج مشتقهاي بالا را به همديگر مقايسه نمايئم، پس حدس زده ميشود، که قوانين ساختار زير بدست مي ايدکه:

د توان قانون (بدون ثبوت):

۱ – اکسپوننت پيشين متحول x به شکل ضريب نوشته مشود.

۲) اکسپوننت جديد همان اکسپوننت پيشين منفي يک ميباشد.

$$q\in Q \text{ با } f(x)=x^q \Rightarrow f'(x)=q\cdot x^{q-1}$$

مثال : مشتق $f(x)=\frac{1}{x^2}$ را دريابيد.

ثبوت: $f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2} \Rightarrow f'(x)=-2x^{-3}=-\underline{\underline{\frac{2}{x^3}}}$

مثال : مشتق تابع $f(x)=3x^4$ را دريابيد.

ثبوت:

$$f(x)=3x^4 \qquad c=3 \qquad u(x)=x^4 \Rightarrow u'(x)=4x^3$$
$$f'(x)=c\cdot u'(x)=3\cdot 4x^3=\underline{\underline{12x^3}}$$

مثال: ميخواهيم مشتق تابع f(x) را در جاي x =2 دريابيم:

حل:

$$f(x)=x^2+3$$
$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=4+\Delta x$$
$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=\underline{\underline{4}}$$
$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=2u+\Delta x$$
$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2u+\Delta x)=\underline{\underline{2u}}$$

مثال: مشتق تا بع $f(x)=\frac{1}{x+1}$ درجاي x =2 را دريابيد.

حل:

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$
$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{1}{3(3+\Delta x)}$$
$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-1}{3(3+\Delta x)}\right)=-\frac{1}{9}$$
$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}$$
$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}=-\frac{1}{(u+1)^2}$$

مثال:

مشتق یک توان ، که اکسپوننت شان عدد طبیعي میباشد:

ما تابع $y=f(x)=x^n,\ n=1,2,3\ldots$ را داریم و میخواهیم مشتق شان را دریابیم:

ثبوت: ما قرار زیر به پیش میرویم.

به اساس جمله بینوم در هر جاي x_0 اعتبار دارد:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{h}$$
$$=\frac{\binom{n}{0}x_0^n+\binom{n}{1}x_0^{n-1}h+\binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2+\ldots+\binom{n}{n}h^n-x_0^n}{h}$$
$$=\frac{1}{h}\left(x_0^n+nx_0^{n-2}h+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h^2+\ldots+h^n-x_0^n\right)$$
$$=nx_0^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h+\ldots+h^{n-1}$$

براي $h\to 0$ تابع $y=x^n$ در هر جاي x_0 ، به مشتق زیر، قابلیت مشتق دارد :

$(dy/dx)_{x=x_0} = f'(x) = nx^{n-1}$

ثبوت ديگرگون مثال بالا به حيث تمرين باشد.

تمرين: : _ اگر يک پولينوم $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... a_1 x + a_0$
با $a_1 \in R \quad \wedge \quad n \in N$ داده شده باشد، مشتق شان را دريابيد.
- مشتق توابع زير را از روي قانون توان دريابيد.

$b)\ f(x) = x^6 \qquad a)\ f(x) = x^5$

$d)\ f(x) = \frac{1}{x^5} \qquad c)\ f(x) = \frac{1}{x^2}$

$f(x) = \sqrt[4]{x^3} \qquad e)\ f(x) = \sqrt{x}$

$h)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \qquad g)\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

مشتق توابع مرکب(- زنجيري)

ميتواند به تابعv بسته شود، اگر تابع بيروني (قاعده زنجري) ساحه تعريف D(u) به ساحه تابع داخلي W(v) عناصر مشترک دا شته باشد.

براي اين مينويسيم:

u°v(x) = u(v(x))، اگر تابع f به y = f(x)=u(z) و z=v(x) باشد.

فعاليت:
_ در تابع زنجيري $f(g(x))$ ساحه تعريف و به همين قسم در باره ساحه تعريف تابع نظر خد را ابراز داريد.
_ بگويئد که قيمت تابع $f(g(x)) = (x^2 + 2x + 1)^2$ درجاي $x = 3$ کدام است و ساحه هاي تعريف کدام است و در باره مشتق گرفتن فکر کنيد.

در تابع مرکب (زنجيري) دلخوا در باره ساحه تعريف و به همين طور ساحه تابع نظر خود را اظهار نمائد.

حالا در جاي $x = x\,o$ قابليت مشتق تابع مرکب يا زنجيري $y = f\,(g\,(x))$ را خواهيم مطالعه کرد:

$$f\,(x) = f\,[g\,(x)]$$
$$\Rightarrow f\,'(x) = \quad f\,'(g) \quad . \quad g\,'(x)$$

مشتق داخلي مشتق بيروني

براي اين فرض ميکنيم که:

۱ – تابع داخلي $z = g(x)$ در جاي $x = x0$ قابليت مشتق را دارد. اين بايد در يک ساحه تعريف شده معلوم $x0$ متمادي باشد وي.

ما داريم : $g(\,xo) \;-->\; g\,(\,x+h)$ براي0 <- h .

به هميد طور$(\Leftrightarrow)$ $g\,(x_0+h) = g(x_0)+k$

طور که 0 <- k براي 0 <- h .

۲ - اگر تابع بيروني$y=f(z)$ در $z = z_0 = g(x_0)$ مشتق داشته باشد.

تقسيم تفاضل $y=f(g(x)$ ميتواند به طور زير داده شود و فورم شان هم تغير شود:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)}$$
$$= \frac{f(z_0+k) - f(z_0)}{k} . \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

اگر 0 <- h برود (به همين ترتيب 0 <- k ميرود) ، پس اين روابط به مشتق ميرود:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=\left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o}=\left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)}\cdot\left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0};........(*)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=\left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o}=\left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)}\cdot\left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

اگر براي جا به جا (فيکس) $x = x0$ را x انتخاب کنيم، ميتوان،که فرمول (*) به قسم زير به طور کوتا داده شود و براي $y = f(z), z = g(x)$ صدق کند:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx};.....................................(**)$$

در نظر

دا شته باشيم، که dy / dx براي جاي $z = g(x)$ بايد ترتيب(تنظيم) شود.

اين فرمول (*) فرمول قاعده مرکب ناميده ميشود و با فرضيه هاي بالا اعتبار دارد. اين به طور ساده ميتوانيم به ياد داشته باشيم ، زيرا که طرف راست از طرف چپ به طور فورمال به زياد شدن dz بدست امده.

از ثبوت بالا جمله زير بدست مي ايد:

قاعده مرکب داريم : $f(z)=f(g(x))$ ، پس تابع $z = g(x)$ در x و تابع $y = f(z)$ در$z = g(x)$ قابليت مشتق را دارد، پس متصل به تابع $y = f(g(x))$ هم در x قابليت مشتق را ميباشد و اين اعتبار دارد:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{\frac{df}{dg}}{\frac{dx}{dg}}==f\,'(g(x)).g\,'(x)$$

کوتاه : $(fog)'(x)= f(g(x))'$

مثال :

$$f(x) = \left(x^2 + 2\right)^2$$

Substitution: $z(x) = x^2$ بدلون $^2 \Rightarrow f'(z) = 2z \quad z'(x) = 2x$

$$f'(x) = f'(z) \cdot z'(x) = 2z \cdot 2x = 2\left(x^2 + 2\right) \cdot 2x = \underline{\underline{4x^3 + 8x}}$$

مثال۲ . ۱۱ : تابع $y = \sin x^2$ به طور زير يک تابع داده شده مرکب ميباشد:

$$y = \sin z \, , \; z = x^2$$

اين هر دو توابع در هر جاي قابل مشتق است. پس ازين دليل در هر جاي اعتبار دارد:

$$\frac{d \sin x^2}{dx} = \frac{d \sin z}{dz} . \frac{dx^2}{dx} = \cos z . 2x = 2x . \cos x^2$$

مثال : تابع $y = \sin^2 x$ به طرو زير متصل داده شده.

$$y = z^2 \, , \; z = \sin x$$

درين جا هم هر دو توابع در هر جا قابليت مشتق را دارد. پس بدين لحاظ در هر جا اعتبار دارد:

$$\frac{d \sin^2 x}{dx} = \frac{dz^2}{dz} . \frac{d \sin x}{dx} = 2z . \cos x = 2 \sin x . \cos x = \sin 2x$$

مثال : مشتق تابع $f(x) = (x^5 + 4)^8$ را بپنماريد!

حل: هرگاه که $g(x) = x^8$ و $h(x) = x^5 + 4$ را وضع ميکنيم، پس داريم:

$$f(x) = g(h(x))$$

$$f'(x) = (g(h(x))' = g'(h(x)).h'(x)$$

$g'(x)=8x^7$ $h'(x)=5x^4$ است، پس داریم:

$$f(x)=8(h(x))^7 5x^4 = 40(x^5+4)^7 .x^4$$

تمرینها:

۱ - $h(x)=\dfrac{1}{(x^3-4x^2+1)^2}$

۲ - اگر $f(x)=(3-2x+x^2)^4$ باشد f' را دریابید

مشتق توابع زیر را هم بگیرید

1: $f(x)=(1-2x^3)^4$

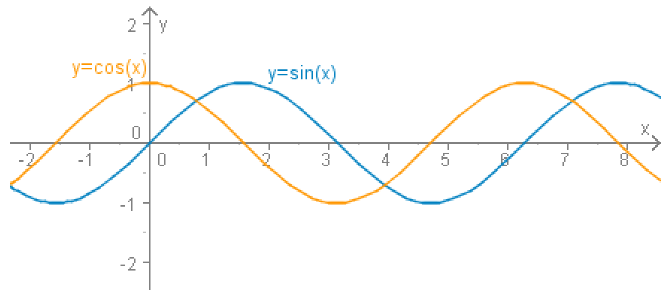
2: $f(x)=(2x^2+1)^{-2}$

3: $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2+x^2+x^3}}$

4: $h(z)=\sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$

5: $f(t)=\sqrt[3]{3t+1}$

مشتق توابع مثلثاتي



$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \ I$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \ II$$

فعاليت:

ايا ميدانيد ، كه مساوات زير مشتقهاي توابع اند.

a: $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

b: $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

$$f'(x) = \frac{d\tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

ما در زير سه حالت مساوات بالا را ثبوت ميکنيم و ثبوت باقي مانده ديگران را به شاگردان عزيز مي گزاريم.

قضيه : مشتق تابع ساين را ميخواهيم دريابيم، $f'(x)=(\sin x)' = \cos x$ است:

براي ثبوت اين قضه در ورودي بالا دو فرمول اول به کار مي ايد.

تابع ساين $y=f(x)=\sin x$ براي هر x تعريف دارد ، پس براي تعينن دلخواه x_0 بدست مي ايد:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}$$

$$=\frac{2}{h}\cos\frac{2x_0+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}=\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\ .$$

با در نظر داشت حصه ليميت داريم :

$$\lim_{h\to 0}\left(\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)=\cos x_0.$$

تابع ساين در هرجاي ، با مشتق زير، قابل مشتق است:

$$\left(\frac{d\sin x}{dx}\right)_{x=x_0}=f\,'(x_0)=\cos x_0\,,$$ (X به قوس يا راديان)

قضيه : به همين طور ثبوت مي شود، که تابع کوساين هم در هرجاي قابل مشتق است، با مشتق زير:

$$\left(\frac{d\cos x}{dx}\right)_{x=x_0}=f\,'(x_0)=-\sin x_0,$$ X به راديان

$: b$

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

از فرمول دوم ورودي داريم:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}.\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin(x+\frac{h}{2}).\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$=-\lim_{h\to 0}[\sin(x+\frac{h}{2}).\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}]$$

از قاعده ضرب ليمت بدست مي ايد :

$$= -\lim_{h\to 0} \sin(x+\frac{h}{2}) \ . \ \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$

از مساوات بالا بدست مي ايد: $\frac{d\ \cos x}{dx} = -\sin x$

قضيه : مي خواهيم ثبوت كنيم،كه تابع تانجنت $f(x) = \tan x$ قابليت مشتق را درا ميباشد و مشتق شان $f\ '(x) = \frac{d\ \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ است.

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}(\frac{\sin x}{\cos x})$$

$$= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x . \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

فعاليت : شاگردان عزيز مشتق تابع $f(x) = x^2 \sin x$ را دريابد!

ياد داشت: $g(x) = x^2$ و $h(x) = \sin x$ را وضع كنيد.

مثال: ميخواهيم مشتق تابع $y = \cos\frac{\pi x}{180}$ را دريابيم.

حل: عوض ميكنيم : $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \frac{\pi x}{180}$ ، پس y به طور زير نوشته ميشود:

$$y = f(g(x))$$

حالا به اساس قاعده مرکب داریم:

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$= \cos'(g(x)) \cdot (\frac{\pi}{180} \cdot x)'$$
$$= -\sin(g(x)) \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180} \cdot \sin\frac{\pi x}{180}$$

مشتق توابع زیر را دریابید!

$\tan^4 x$	$:b$	$\cos^2 2x$	$:a$
$\sin(3x-1)$	$:d$	$\sec x \cdot \cot anx$	$:c$
$\sec(\sec(x))$	$:f$	$\sin^2 x - \cos x$	$:e$

حل a: به اساس قاعده مرکب و یک فرمول تابع طاقت داریم:

$$(\cos^2 2x)' = 2\cos(2x) \cdot \cos'(2x)$$
$$= 2\cos(2x)(-\sin(2x)).2$$
$$= -4\cos 2x \cdot \sin 2x$$

$:b$

$$(\tan^4 x)' = 4\tan^3 x \cdot (\tan x)'$$
$$= 4\tan^3 x \cdot \sec^2 x$$

$:c$

$$(\sec x.\cot x)' = (\sec x)'\cot x + (\cot x)'\sec x$$
$$= (\sec x.\tan x)\cot x + (-\csc^2 x)\sec x$$
$$= \sec x - \csc^2 x \cdot \sec x$$
$$= \sec x(1 - \csc^2 x)$$

$$[\sin(3x-1)]' = \cos(3x-1).(3x-1)' \qquad : d$$
$$= \cos(3x-1)\cdot 3 = 3\cos(3x-1)$$

$$[\sin^2 x - \cos x]' = (\sin^2 x)' - (\cos x)' \qquad : e$$
$$= 2\sin x(\sin x)' - (-\sin x)$$
$$= 2\sin x \cdot \cos x + \sin x$$
$$= \sin x(2\cos x + 1)$$

مثال :

۱ - چهار مشتق اول تابع $f(x) = \sin x$ را دریابید.

$f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin x$; $f'''(x) = -\cos x$; $f^{(4)}(x) = -(-\sin x) = \sin x$

۲ - مشتق تابع $f(x) = x.\sin x$ را دریابید:
از قانون ضرب بدست مي ايد.
$f'(x) = 1.\sin x + x\cos x = \sin x + x.\cos x$

۳ – براي پيدا كردن مشتق تابع $f(x) = \sin\frac{1}{x}; x \neq 0$ از قانون مركب را ميگيريم:

و آز $z = \frac{1}{x^2}$ و $u(z) = \sin z$ ئدست مي آيد: $f'(x) = -\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}$

تمرينها:

مشتق توابع زير را دريابيد.

$a)\ f(x)=\sin 3x$ $b)\ f(x)\sin x\cdot\cos x$ $c)\ f(x)=\sin^2 x$

$d)\ f(x)=\tan x+2\sin 2x$ $e)\ f(x)=\sin x^2$ $f)\ f(x)=\sin\dfrac{x-1}{x+1}$

-- براي تابع $f(x)=\sin^n x(n\in IN)$ فرمول مشتق اول را نشان دهيد.

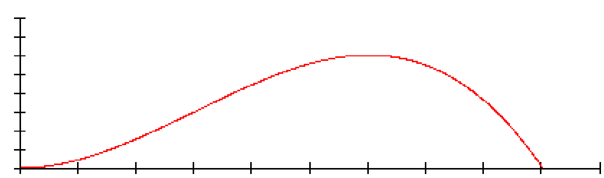
-- براي تابع تانجنت به کومک قانون ساين و کوساين قانونن مشتق را نشان دهيد.

-- نشان دهيد که براي f(x) = tanx هم صدق ميکند: $f'(x)=1+\tan^2(x)$.

-- از روي قانون تقسيم قانون کوتانجنت را دريابيد و او هم از روي قانون تانجنت.

-- چرا تابع ساين و تابع کوساين اختياري بسيار قابل مشتق ميباشد.

استعمال مشتق در علوم طبيعي



اوقات زياد در رياضياتو توابع اورده ميشود، که در اختيار يک متحول x ميباشد.

در علوم طبيعي اوقات زياد توابع را بررسي ميکنيم، که در اختيار وقت ميباشد.

مثل که در شکل راه زده شده انداختن يک توپ (اين پسانتر رڼشن ميشود)

فعاليت:

شاگردان عزيز از درسهای فزيک تعريف سرعت و عجله را بدهد و فرمولهای ره و وقت، سرعت و عجله را بدهد..

مثال: براي تعجیل طور مساوي یک شي يي پرتاب شده با سرعت.... $v_0 = 4\frac{m}{s}$ و با تعجیل $a = 1{,}8\frac{m}{s^2}$ قانون

راه - وقت قرار زیر میباشد:

$$\boxed{s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t}$$

v_0 که در بالا داده شده اعتبار دارد: $S(t) = 0{,}9t^2 + 4t$

(t به (ثانیه) ، s(t) به m (متر))

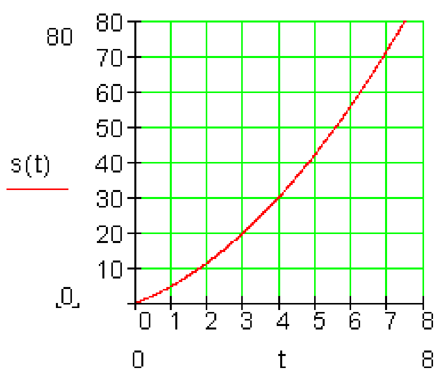
سرعت وسطي $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ است

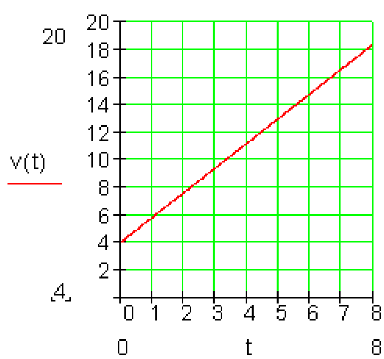
سرعت لحظوی قرار زیر میباشد:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v$$

$$v = s'(t) = 1{,}8t + 4$$

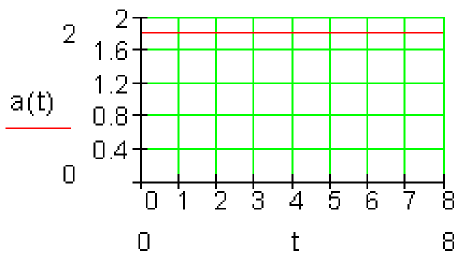
دیاگرام(گراف) یک خط به دست مي اید، به معني که سرعت به قسم ثابت زیاد میشود. درینجا $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ بلندي(میل) ثابت است و $a = 1{,}8\frac{m}{s^2}$ تعجیل میباشد.





برای تعجیل مساوات زیر را صدق میکند :

$$v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$



در نظر داشته باشید : براي یک حرکت تعجیلي ثابت داریم:

$$|\, s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \,| \qquad v(t) = s'(t) = at + v_0 \qquad a(t) = v'(t) = a$$

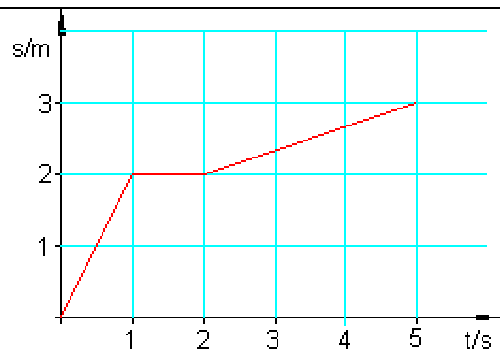
براي یک سرعت v در زمان براي مشتق راه $v(t)=s'(t)$ داریم. براي به طور زیر هم مینویسیم: $v(t) = s'(t)$.

فعالیت:

۱ - براي یک جسم متحرک دیاگرام (گراف) فاصله و زمان داده شده.

الف: این حرکت را تشریح نمائد.

ب : دیاگرام(گراف) سرعت و وقت مربوط را رسم نمائد.



۲) یک سنگ به سرعت اولیه $v_0 = 7\frac{m}{s}$ عمود به طرف بالا انداخته میشود.

قانون فاصله-زمان است: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ به $g = 10\frac{m}{s^2}$ روند اف) را گردول Round ot)

الف) بعد از کدام زمان سرعت سنگ صفر میباشد؟

ب) بلندي میل که بلندي اعظمي باشد بشمارید.

---

۳ - گراف فاصله –زمان را نشان میدهد.

الف) از زندگي روزمره یک مثال را بیاورید، که براي ان این حرکت درست باشد.

حرکت منخني براي $t > 3$ چي مفهوم فزیکي دآرد؟

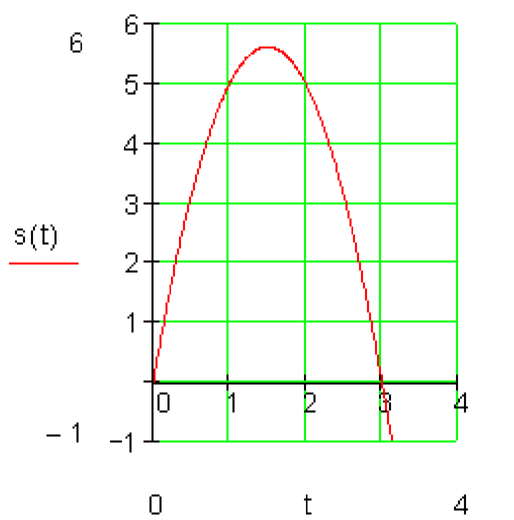
ب) براي حرکت، گراف فاصله در زمان طور زیر میباشد:

$$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

a و v_0 را تعین نمایئد.

پ) گراف تعجیل و زمان مربوط را رسم نمایئد و تشریح نمایئد.

یک سرعت منفي، چي مفهوم دارد؟



٤) یک جسم که ازاد به طرف بالا انداخت میشود طور حرکت میکند، که در زمان t فاصله $s(t) = 5 \cdot t^2$ را میزند.

در زمان $t=1;2;3$ سرعت لحظوي را نشان دهید.

حل:

سرعت لحظوي به قیمت تغیر لحظوي به معني زیر میباشد:

$$t = 1: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1+\Delta x) - s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x \Rightarrow$$

$$10 + 5\Delta x \to 10$$

براي $\Delta x \to 0$ اعتبار دارد یا صدق میکند: $10 + 5\Delta x \to 10$

$$t = 2 : \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2 + \Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + 5\Delta x \Rightarrow f$$

براي $\Delta x \to 0$ صدق میکند: $20 + 5\Delta x \to 20$

$\Delta x \to 0$

$$t = 3 : \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3 + \Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow f$$

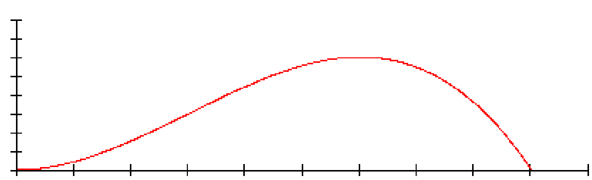
براي $\Delta x \to 0$ صدق میکند: $30 + 5\Delta x \to 30$

تمرین :

پایئن گراف تابع

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 \; ; x > 0$$

و به طور تقریبي در میدان فوتبال منحني پروازي توپ را نشان میدهد، که شکل زیر را دارا میباشد.



پرسانهای زیر را جواب دهید

الف:توپ کدام بلندي اعظمي را دارد و از نقطه شوت کدام فاصله را دارميباشد؟

ب : توپ از نقطه شوت شده به کدام فاصله پس به زمین مي افتد؟

پ : ددیوار دفاع از جاي توب زدن ۹ متره دور است و ۲ متره بلند. ایا توپ ازین جا بلند پرواز میکند؟

ت : توپ از تورلاین(محور x) به ۲ متر بلندي دارد. به کدام فاصله این این شوت ازاد از گول زده شده؟

مشتق درجه بلند

برعلاوه مشتق درجه اول مشتقهاي درجه بلند هم موجود است، که از مشتق بعدي بدست مي اید.

به باز مشتق گرفتن $f'(x)$ تابع مشتق $f''(x)$ بدست مي اید، که تابع مشتق دوم نامیده میشود.

مثال:

$$f(x)=x^3+x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2+2x+1 \Rightarrow \underline{\underline{f''(x)=6x+2}}$$

باز مشتق گرفتن $f''(x)$ به مشتق سوم و دوام اوداسې نور.

$$f(x)=x^3+x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)=3x^2+2x+1 \Rightarrow f''(x)=6x+2 \Rightarrow \underline{\underline{f'''(x)=6}}$$

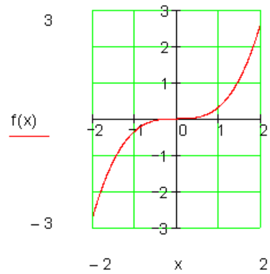
از تابع $f(x)=\frac{x^3}{3}$ ۴ دفعه مشتق گرفته شود

$$f(x)=\frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2}{3}=x^2 \Rightarrow f''(x)=2x \Rightarrow f'''(x)=2 \Rightarrow f''''(x)=0$$

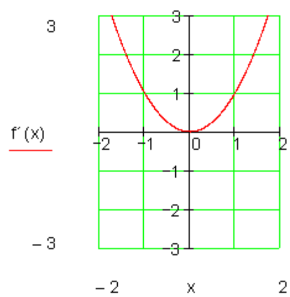
گراف تابع :

رسم کردن یک تابع به تابع مشتق مربوط:

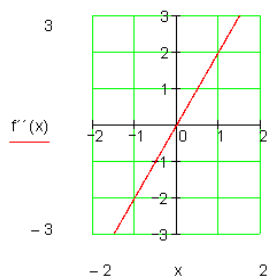
$$f(x) = \frac{x^3}{3}$$



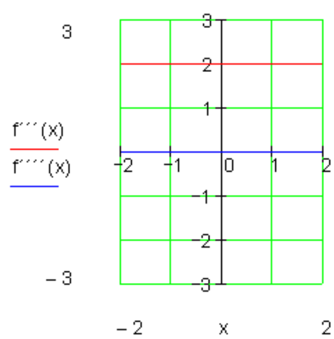
$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = x^2$$

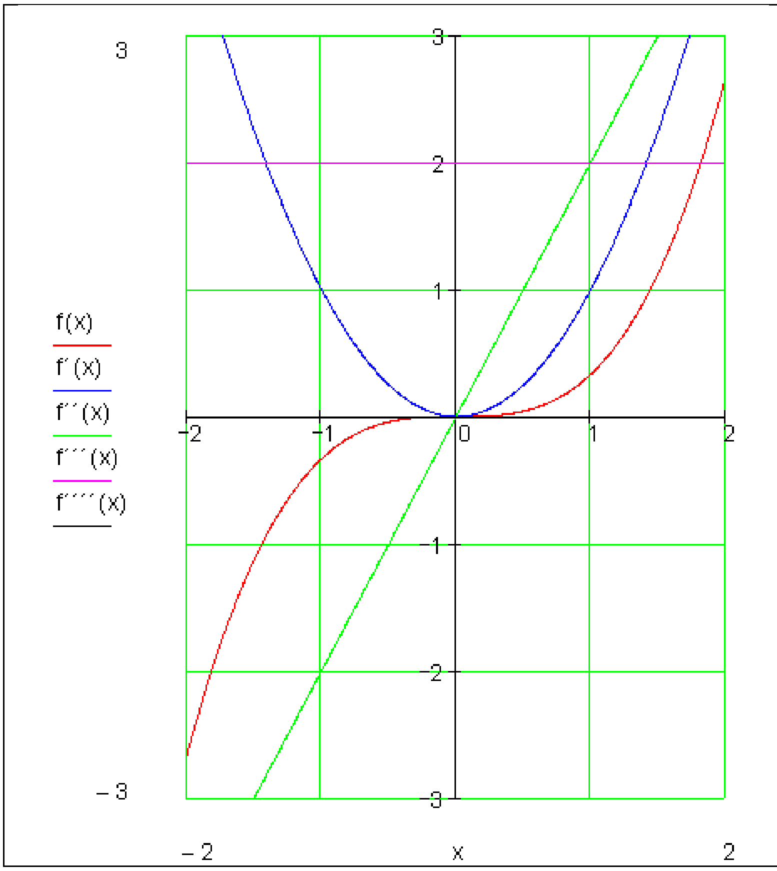


$$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$$



$$f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$$



	گراف تمامي توابع در یک سیستم کمیات وضعیه

مثال:

اول : مشتق تابع $f(x)=4x^3-2x^2+x-2$ را سه مرتبه دریابید

$$f(x)=4x^3-2x^2+x-2$$
$$f'(x)=12x^2-4x+1$$
$$f''(x)=24x-4$$
$$f'''(x)=24$$

دوم: مشتق تابع $f(x)=\frac{3}{4}x^3-12x^2+\frac{1}{4}x$ **را سه مرتبه دریابید**

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$$
$$f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 24x + \frac{1}{4}$$
$$f''(x) = \frac{9}{2}x - 24$$
$$f'''(x) = \frac{9}{2}$$

مجموعه: مشتق اول f(x) تابع مشتق f(x) یعني $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ میباشد.

مشتق دوم f(x) تابع مشتق f'(x) یعني $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ میباشد.

مشتق سوم f(x) تابع مشتق f''(x) یعني $f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$ میباشد.

به طور خاص: یک تابع دلخواه کسري f(x) قابلیت مشتق دلخواه را دارد.

تمرین: سه دفعه مشتق توابع زیر را بگیرید:

1- $f(x) = 3x + 4$

2- $f(x) = 2x - 4 + x^3 - 5x + 4x^3$

3- $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$

4- $f(x) = (2x+1)^3$

5- $f(x) = x - x^4 + 3 + x$

6- $f(x) = 1 - 2x - 3x - 4x + x^4$

7- $f(x) = a + b + c^2 - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$

8- $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2$

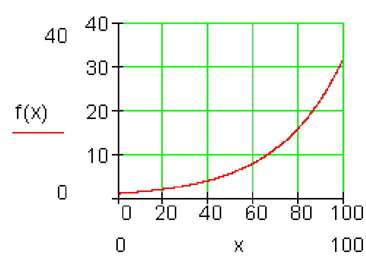
مشتق توابع اکسپوننشل

ساختار مساوات تابع

کولي باکتريا Coli - Bakterien در روده انسان کار را تکميل ميکند. اينها از طريق تقسيم حجرات تکثير ميبابد و زير شرايط مساعد اينها در هر ۲۰ دقيقه خود را تجزيه ميکند. براي اين عمليه يک جدول قيمت ميسازيم و يک گراف را رسم ميکنيم. درينجا متحول x براي وقت به دقيقه ميباشد.

متحول يا متغير y براي تعداد باکتريا ميباشد.

x = Minuten	0	20	40	60	80	100
y = Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32



فعاليت : د دي تابع وليکئ

قضيه : هر تابع اکسپوننشل $y = b^x, (b > 0)$ براي تمام اعداد ريئل قابل مشتق ميباشد و صدق ميکند: $f' = b^x \ln b$

ثبوت:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad , \; f(x) = b^x$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{b^x - b^{x_0}}{x - x_0}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{b^{x - x_0} - 1}{x - x_0} \qquad , \; x - x_0 = h$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

از بالا داريم $\begin{cases} b^h - 1 = k \\ h = \log_b(1+k) \end{cases}$ و حالا ازين بدست مي ايد

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{1}{\frac{1}{k} \cdot \log_b(1+k)}$$

از قانون لوگاريتم داريم: $n \cdot \log x = \log x^n$ و بدست مي ايد

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{k}{\log_b(1+k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b[\lim\limits_{k \to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}]} \; , \lim_{k \to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}} = e$$

از بالا بدست مي ايد

$$= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b e} \quad , \ \log_b e = \frac{1}{\ln b}$$

$$= b^{x_0} \cdot \ln b \ ; \quad x_0 \in IR \ ; b \in IR^{>0}$$

$$\Rightarrow f\ ' : f\ '(x) = b^x \cdot \ln b \ ; \ D\ '(f\ ) = IR \ ; b \in IR^{>0}$$

$$f\ '(x) = b^x \cdot \ln b$$

قضيه : مشتق $y = f\ (x) = e^x$ را دريابيد.

ثبوت:

$$y = f(x) = e^x$$

$$f\ '(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

ما اين داسته را در فکر مي گيريم: $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} . e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

ما براي قيمت کوچک شده هميش Δx مطاعه ميکنيم $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

به اساس اين ما بدست مي اوريم:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

به اساس شمردن ما اين اين معني دارد :

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

اگر x_0 به جای x جا به جا کنیم، پس داریم:

$$f(x) = e^x \quad و \quad f'(x) = e^x$$

اکسپوننشل تابع $y = f(x) = e^x$ در حقیقت $y' = f'(x) = e^x$ مشتق دارد

یعني از مشتق تابع e^x پس تابع e^x بدست مي اید.

بیلگه: لرو :

- $f : f(x) = b^{3x^2} - 10;\ D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}$
  د پورته تابع مشتق ونیسئ.

$$D'(f) = D(f) = IR \quad \Rightarrow D(f') = IR$$

$$f(x) = b^{3x^2 - 10} = g[h(x)]$$
$$g(z) = b^z \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b};\ z \in IR$$
$$h(z) = 3x^2 - 10 \Rightarrow h'(x) = \underline{6x};\ x \in IR$$
$$f'(x) = g'(x) \cdot h'(x)$$
$$= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \Rightarrow z = 3x^2 - 10$$
$$= b^{3x^2 - 10} \cdot \ln b \cdot 6x;\ x \in IR$$
$$= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2};\ D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}}}$$

تمرينها

د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

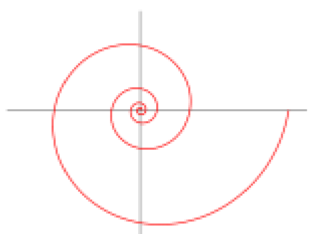
$a)\ f(x)=3\cdot e^{-2x+1}$ $b)\ f(x)=e^{x^2+2x-1}$ $c)\ f(x)=(x-1)\cdot e^{x}$

$d)\ f(x)=\sqrt{e^{x}}$ $e)\ f(x)=x^{n}\cdot e^{e}$ $f)\ f(x)=e^{kx}$

$g)\ f(x)=2^{\frac{1}{2x}}$ $h)\ f(x)=(\frac{1}{4})^{3x}$ $i)\ f(x)=x\cdot a^{\sqrt{x}}$

$k)\ f(x)=\sqrt{e^{x}+1}$ $l)\ f(x)=\frac{e^{x}}{1-e^{x}}$ $m)\ f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

مشتق لوگاریتم



فعالیت:
- لوگاریتم را تعریف نمایئد
- توان را تعریف نمایئد.
- روابط بین لوگاریتم و توان را نشان دهید

قضیه :

مشتق تابع لوگاریتم:

قضیه: هر تابع لوگاریتم $y=f(x)=\log_b x$ براي $b>0, b\neq 0, x>0$ قابل مشتق است و صدق میکند: $f'(x)=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x.\ln b}$

ثبوت: تابع $y=f(x)=\log_b x$ تنها براي $x>0$ تعریف دارد. در هر جاي كه $x>0$ باشد، پس این پاین صدق میکند:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\log_b(x_0+h)-\log_b x_0}{h}=\frac{1}{h}\log_b\frac{x_0+h}{x_0}=\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}$$

و از روي حصه اول این پاین بدست مي اید:

$$\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\left[\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right]^{\frac{1}{x_0}}\rightarrow e^{\frac{1}{x_0}}$$

و ازین بابت

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\log_b e^{\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{x_0}\log_b e$$

تابع لوگاریتم بذاي مشتق داده شده در تمام ساحه تعریف قابل مشتق میباشد.

$f'(x)=\frac{1}{x}\log_b e$ به هین قسم $f'(x)=\frac{1}{x}.\frac{\ln e}{\ln b}$ این که $\ln e=1$ ، پس صدق کیکند:

$f'(x)=\frac{1}{x.\ln b}$. چیوي که باید نشان داده میشد.

به طور خاص این پایین را صدق میکند:

$$\left(\frac{d(\ln x)}{dx}\right)_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$$

مثال: مشتق $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ **را ؛پشمارید.**

ثبوت: به طور زیر به پیش میرویم:

$$f(x)=\log\sqrt{x^3}=\log_{10}x^{3/2}=\frac{3}{2}\log_{10}x$$

$$\Rightarrow\ f'(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 10}$$

$$=0.6514\cdot\frac{1}{x};\ D(f')=IR^{>0}$$

مثال: مشتق تابع $y=\ln\frac{x-2}{x+2}$ را دریائد.

ثبوت: ما میتوانیم بنویسییم :

$$y = \ln \frac{x-2}{x+2}$$
$$= \ln(x-2) - \ln(x+2)$$

این که $(\ln(x-2))' = \frac{1}{x-2}$ و $(\ln(x+2))' = \frac{1}{x+2}$ است، پس داریم:

$$y' = (\ln(x-2))' - (\ln(x+2))'$$
$$= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}$$
$$= \frac{4}{x^2-4}$$

مثال:

داریم: $f(x) = \log_2(x)$

میخواهیم دریابیم: ۱. مشتق $f'(x)$

مشتق در جاي $x_0=16$

ثبوت: براي ثبوت از فرمول بالا کار میگیریم: $f'(x) = 1/(x\cdot\ln 2$

حالا در جاي $x_0=16$ مشتق را تعین میکنیم:

$f'(x_0)= 1/(16\cdot\ln 2)= 1/(16\cdot 0.69)=$ <u>0.09</u>

تمرینات:

مشتق اول تابع را دریابید و یا تعین نمائد.

$a)\ f(x) = \ln\sqrt{x}$ $\quad b)\ f(x) = \ln(x^2-4)$ $\quad c)\ f(x) = \ln\frac{2}{x^3}$

$d)\ f(x) = \ln\frac{x+1}{x}$ $\quad e)\ f(x) = x\cdot\log_2 x^2$ $\quad f)\ f(x) = (x^4-1)\cdot\log$

$g)\ f(x) = \frac{\ln}{x+2}$ $\quad h)\ f(x) = \frac{x^4}{\ln x}$

قابليت مشتق يک تابع

ما ديديم، که يک تابع دهرجا تعريف نه درد، درهرجا حد نه دارد وهمين طور در هر جا متمادي نيست. به مين ترتيب در هر جا قابلين مشتق نه دارد.

تابع $f(x) = |x|$ در جاي 0 تعريف نه دارد:

براي تمامي $x > 0$ اعتبار دارد : $f(x) = x$
و با اين

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x-0}=1$$

براي تمامي $x < 0$ برعکس بالا $f(x) = -x$ اعتبار دارد و يا اين

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

مي بينيم که حد چپ و راست به هم ديگر سر نميخورد، پس حد وجود نه دارد. درين جاي اورده شده قابليت مشتق نه دارد

در تمام جاها تا به حال مشتق گرفتن تابع هميشه داد هشده.

مشتق کېدنه په نورو ټولو ځايونو کې تر اوسه تل ورکړ شوي.

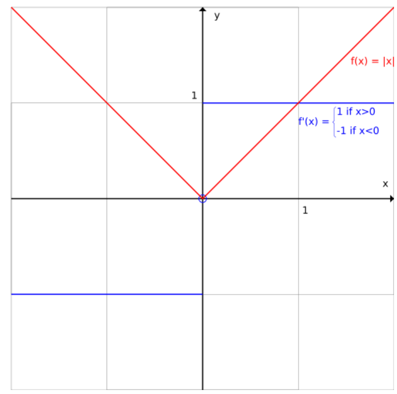
باز هم درين جا مشتق طرف راست داده شده، يعني داريم:

$$f'+(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=1$$

و مشتق طرف چپ

قابليت مشتق يک تابع

$$f'-(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{-x-0}{x-0} = -1$$

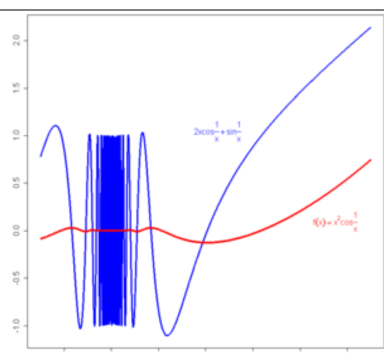


اگر به گراف بالا ديده شود، خواهيم فهميد،که يک تابع قابل مشتق بايد شکسته نه باشد يا به عبارہ ديگر زاويه را تشکيل نه کند.

مثال براي يک تابع غير متمادي قابل مشتق:

يک تابع متمادي قابل مشتق ناميده ميشود، اگر مشتق ان متمادي باشد.

اگر يک تابع در هر جا قابل مشتق باشد، بايد نيست که مشتق شان هم متمادي باشد به



طور مثال:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

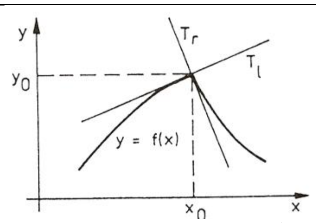
تابع در هر نقطه حتي در $x = 0$ قابل مستق است. مشتق شان

$$f'(x)=\begin{cases}2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

بر خلاف در جاي 0 متمادي نيست.

مشتق به فرضيه هاي ممکن و ازين سبب درانجا هدفمند است، درجاي که به حد رفتن ان ممکن باشد يعني درجاي که تقسيم تفاضل يک حد داشته باشد براي $x \to 0$.

اگر منحني درکدام جاي شکسته باشد (شکل ۴)، ميبينيم که درانجا تانجنت نيست و به همين ترتيب بلندي و تقسيم تفاضل هم موجود نيست. پس قابليت مشتق خواص مخصوص يک تابع ميباشد، مثل متماديت.

اگر در شکل ٤ منحني ترسيم شده در جاي x0 تانجنت يگانه هم نه داشته باشد و ازين سبب مشتق هم نه داشته باشد ، مگر درينجا يک تانجنت طرف چپ T_1 و يا ميل طرف چپ و به همين دليل مشتق طرف چپ و تانجنت طرف راست Tr و به همين ترتيب مشتق طرف راست موجود است.	 شکل ۴

در يک تابع نامتمادي پرسان تانجنت و يا مشتق بي معني ميباشد.

حالا اين مسئله کي درينجا ترسيم شده زير فرمول درست مي اورويم

ديده شد اگر در جايx0 که تابع غير متمادي باشد، پرسان مشتق بي معني است. فرض ميکنيم، که اين ثبوت شده باشد. اين روشن است،که هر تابع متمادي حتمآ بايد قابل مشتق نباشد. به طور مثال اگر تابع زاويه داشته باشد.

به اين ضرورت است نشان دهيم، که تنها توابع متمادي قابليت مشتق را دارا ميباشد، اين باز به معني است که هر تابع قابل مشتق کم از کم بايد متمادي باشد و به دين ترتيب مشتق متماديت را درخود پنهان دارد. اين به معني است، که متماديت براي قابليت مشتق شرط ضروري ميباشد.

جمله۲ . ۱ :

اگر تابع (y=f(x در جاي x0 قابل مشتق باشد، درانجا ضرور متمادي ميباشد.

ثبوت : از تعريف مشتق بدست مي ايد ، که ليميت موجود است، يعني

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

حد تنها درجاي ميتواند موجود باشد، که براي x->x0 همراه مخرج صورت هم به صفر تقرب کند يعني f(x)-f(x0)->0 برود.

پس اعتبار دارد: f(x)->f(x0) براي x->x0

اين تعريف متماديت ميباشد

اين تقسيم تفاضل به طور ديگري هم تشکيل شده ميتواند، اگر $x = x_0 + \Delta x$ به کار ببريم.

درينجا مشتق (f'(x به طور زير داده شده:

قابليت مشتق يک تابع براي دفعه اول يک خواص مربوط به جاي (lokal) است يعني در يک جاي x=x0 تعريف ميباشد.

مثل که در متماديت (حصه اول ديده شود) قابليت مشتق و مشتق به يک انتروال باز امتداد بياد.

تعريف :

يک تابع y=f(x) در يک اينتروال باز (a,b) قابل مشتق ناميده ميشود، با مشتق زير

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) \ ; \ a < x < b$$

اگر اين در هرجاي $x = x_0 \in (a,b)$ قابليت مشتق داشته باشد با مشتق (f'(x0 . اين در اينتروال محدود[a,b] قابل مشتق ناميده ميشود، اگر اين برعلاوه در جاي a طرف راست ودرجاي b طرف چپ قابل مشتق ميباشد.

مثال ۲ . ۶ :

تابع طاقت $y = x^n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$ در هرجاي قابلیت مشتق را دارا میباشد با مشتق زیر:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

تابع ساین $y=\sin x$ و تابع کوساین $y=\cos x$ در هرجاي کی قابل مشتق است، با مشتقهاي زیر

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sin x}{dx} = \cos x,\quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

تابع قابل مشتق در یک انتروال باز سپس تابع $y=f'(x)$ میباش، پس به این طور پرسان قابلیت مشتق شان و متمادیت شان شده میتواناند.

تعریف ۲ . ۴:

تابع قابل مشتق $y=f(x)$ در ساحه $x=x0$ درجاي $x=x0$ دو مرتبه قابلیت مشتق را دارد، اگر مشتق $y'=f'(x)$ ان درانجا قابلیت مشتق را دارا میباشد. مشتق $f'(x)$ مشتق دوم تابع $y=f(x)$ نامیده میشود و براي این مینویسیم:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0} = f''(x_0) = \left(\frac{df'(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

در یک انتروال باز یک تابع $y=f(x)$ قابل مشتق $y=f(x)$ دران جا دو مرتبه قابل مشتق میباشد اگر مشتق $y'=f'(x)$ شان درانجا قابل مشتق میباشد.

برای این مینویسیم:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$$

تمرین:

نشان دهید، که ایا $y=c$; $y=x^n$; $y=\cos x$ در هر جا دو مرتبه قابیت مشتق را دارد؟

مشتق تابع معکوس

فعالیت:

- تابع معکوس یک تابع را تعریف نمایئد.
- ساحه تعریف تابع $f(x) = \frac{x^2+5x}{x^3-8}$ را نشان دهید.
- مشتق اول و دوم تابع بالا را بشمارید.
- معکوس تابع بالا را با ساحه تعریف نشان دهید.

حالا تابع معکوسه را بررسي شود. درینجا فرض شود، که y = f (x) در x = x0 به f(x)=0 و در یک ساحه x0 متزاید است (f′(x0) > 0) و یا متناقص قوي(واضح) (f′ (x0) < 0)میباشد و بدین لحاظ معکوس شدني هم است، یعني $x = f^{-1}(y)$ ، پس براي تقسیم تفاضل تابع معکوس بدست مي اید.

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

و حالا که x -> x0 و از لحاض متمادیت (f (x هم y0 -> y ، و اعتپار دارد.

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \left(\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}}$$

اگر براي جاي نقطه x = x0 به طور ساده پس x بنویسیم، پس براي ( ) فزرم کوتاه میتوانیم بنویسیم : براي y = f(x) اعتبار دارد:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

از فرضيه داده شده بالا پس تقسيم تفاضل را بدست مي اوريم، که به انها به قسم تقسيم مروج ميتوان شمرد، طوري که

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

جمله 2-7: معکوس تابع مشتق:

اگر تابع $y = f(x)$ در يک محيط x به تابع $x=f^{-1}(y)$ معکوس و در انجا به $f'(x)\neq 0$ قابل مشتق باشد، نو تابع معکوس به $y = f(x)$ قابل مشتق است و اعتبار دارد:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

حل:

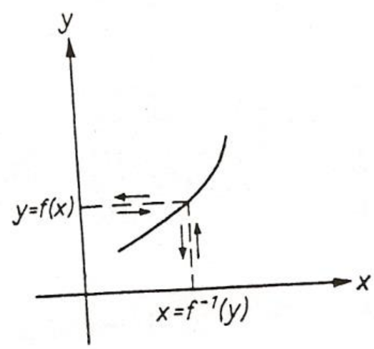
ميتوانيم که از مشتق تابع f مشتق تابع معکوس f^{-1} بدست بياوريم. ازين لحاظ از- x >0 وهم از 0<-y و از معکوس به $y = f(x+ x)-f(x)$، بدست بياوريم:

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

به $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ و $(f^{-1})'(y)=\frac{dx}{dy}$.

بالاخره داريم:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$



تمرين:

-- براي تابع $y = f(x) = x^n; n = 1, 2, 3, 4......$ اگر $x \geq 0$ تعين شود و به همين ترتيب تابع معکوس $x = \sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}; y \geq 0$ ، پس مشتق تابع معکوس را بشماريد.

-- مشتق تابع معکوس تابع $y = x^{\frac{m}{n}}$, $m, n \in N$ را بگيريد.

مشتق توابع ايمپليڅيتImplicit

يادونه: ايمپليڅيت(منطقي ترې لاس ته راتلنه)
اشکال استعمال زياد تابع از روي مساوات تابع و به دادن ساحه تعريف تابع به طور اکسپليڅيتExplicit ، که متحول تابع در يک طرف مساوات جدا شده باشد و متحول مستقل طرف ديگري تابع قرار داشته باشد.
به طور مثال: $Y = 3x^2+7x$

-- ---------------------

اشکال تابع وقت زیاد از روي مساوات تابع، طور ایمپلیڅپت Implicit به داده شدن ساحه تعریف میباشد. به طور مثال: $Ex^2+7x+y=0$

فعالیت:

- اگر $Ex^2+7x+y=0$ داشته باشیم، چطور میتوانیم، که مشتق این تابع را بیابیم؟

قضیه:

یک تابع داریم به طرو ایمپلیڅیت$x^2+xy-y^2=1$ ، میخواهیم $\frac{dy}{dx}$ دریابیم:

ثبوته:

$$\frac{d}{dx}(x^2+xy-y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$2x+(1\cdot y+x\frac{dy}{dx})-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}(2y-x)$$

$$\frac{2x+y}{2y-x}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{-x+2y} \quad \vee \quad \frac{2x+y}{2y-x}$$

مشتق ایمپلیڅیت یک امکان است براي گرفتن مشتق یک تابع، که ناایمپلیڅیت به یک ترم داده شده باشد، بلکه ایمپلیڅیت یعني به شکل یک مساوات داده شده باشد. این طریقه براي این هم به کار برده میشود، که یک تابع به صورت اکسپلیڅیت داده شده باشد، مگر گرفتن مشتق شان مشکل باشد.

مثال :

مشتق تابع $f(x)=x^x$ را به طریق قوانین مشتقگرفتن اشنا گرفته نمیشود، ازین بابت که در اساس و در اکسپوننت شان متحولها به جا شده. به طریق لوگاریتم گرفتن ممکن است اکسپوننت متحول از بین برده شود: $\ln f(x)=x\ln x$

حالا اين را ايمپليخيت حل ميکنيم، طورى که به هردو طرف شان پسي متجول x مشتق ميگيريم: $\frac{\mathrm{d}(\ln f(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{\mathrm{d}x}$

مشتق اين مساوات از طريق قانون زنجيري صورت ميگيرد:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}y} f'(x) = \frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{\mathrm{d}x}$$

درينجا $y = f(x)$ است.

از قانون مشتق لوگاريتم و ضرب به دست مي ايد:

$$\frac{1}{y} f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x}$$

اگر پسي $f'(x)$ حل شود و براي y دوباره(پس) $f(x) = x^x$ جابه جا کنيم، پس اين حل بدست مي:

$$f'(x) = y\,(\ln x + 1) = x^x\,(\ln x + 1)$$

مثال:

دايره به شعاع r مساوات $x^2 + y^2 = r^2$ را دارد. ازين بابت بعضي جا هاي شان به گراف تابع $y = f(x)$ نوشته شده ميتواند مشتق اين از طريق مشتق ايمپليخيت به طور زيل حل ميشود.

در مساوات تعريف شده $y = f(x)$ جابه جا ميکنيم:

$$x^2 + f(x)^2 = r^2$$

از طريق مشتق اين مساوات داريم: $2\,x + 2\,f(x)\,f'(x) = 0.$

ازراه طریق حل $f'(x)$ بدست مي ايد:

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y}$$

همراه این مساوات به طور مثال بدست مي ايد، که تانجنت به دايره در نقطه (x,y) بلندي $-\frac{x}{y}$ دارد.

مثال: انتيگرال گرفتن ايمپليثيت فرمول بيضوي.

یک تابع $y = f(x)$ ایمپلیثیت یعني از روي مساوات به x و y داده هشده، پس هردوطرف پیوسته پسي x مشتق مشود.

درین جا تنها به این افاده ها یعنې به $y = f(x)$ قانون زنجيري استعمال شود.

مثال:

مشتق به $E:\; x^2 + 3y^2 = 7$ داده شده اليپسي گرفته شود.

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

به هين طور

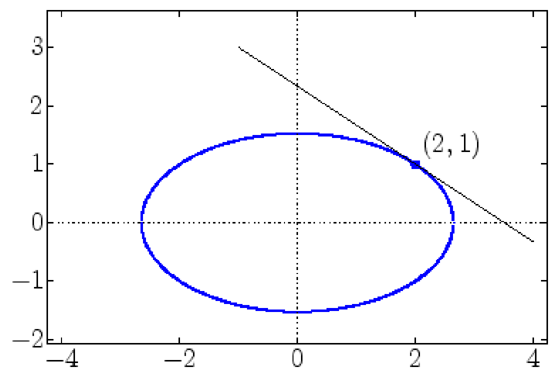
$$y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$$

میتواند به یک نقطه مسطوي E به $y \neq 0$ بلندي تانجنت شمرده شود.

به طور مثال براي $(2,1)$ بدست مي ايد:

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$

.



به طور مشابه مشتقها ي بلند هم شمر ده ميشود. براي yy' از رو استعمال قانون ضرب داريم:

$$\frac{d}{dx}(2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

ازين بدست مي ايد:

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

$y'(x)$

به یک نقطه E جا به جا کردن قیمتهاي وضعيه و به وضع کردن هردو قيمت ميتواند قیمتهاي معين شمرده شود.

تمرين:

جدول مشتقهاي اساسي

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	فرضيه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	x عدد تام و $x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \quad x > 0$
5	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \quad a \quad reell$
7	a^x	$a^x \ln\ a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \quad a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0$

10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin x$	$\cos x$	
12	$\cos x$	$-\sin x$	
13	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z$
14	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$	$x \neq k\pi,\ k\ \ k \in z\ (\mathrm{Z})$

به کومک جدول بالا میتواند که کم از کم فورمال اختیاري براي هر افاده تحلیلي به طور تحلیلي مشتق را بدست اورده شود با وجود این باید فرضیه هاي مربوطه در فکر گرفته شود.

خلص فصل

تقسیم تفاضلDifferenzenquotient (بلندي قاطع) یا تغیر قیمت وسطي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(fx_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتقDifferetialquotient (بلندي تانجنت یا قیمت تْغیر لحظوي)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

قانون ثابت

$$f(x) = c \cdot u(x) mit\ c = constant$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\boxed{f' = c \cdot u'}$$

قانون جمعي

$$f(x) = u(x) + v(x)$$
$$\Rightarrow \; f'(x) = u'(x) + v(x)$$
$$\boxed{f' = u' + v'}$$

قانون ضرب

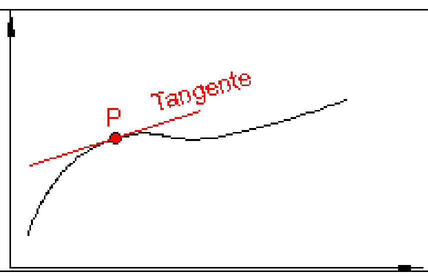
$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$
$$\Rightarrow \; f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$
$$\boxed{f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

قانون تقسیم

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{[v(x)]^2}$$
$$\boxed{f = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

قانون زنجیري

$$f(x) = f[z(x)]$$
$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \quad \cdot \quad z'(x)$$

تعریف : گراف میل یا بلندي یک تابع در یک نقطهP در همان نقطه با میل یا بلندي تانجنت گراف برابر است.	

تقسیم تفاضل Difference quotient

بلندي یک نقطه بدون مشتق گرفتن تعین شده:

خذي $y=f(x) = mx+a$ داريم

فرمول بلندي خط قرار ذیل میباشد:

$$\boxed{m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$$

تمرینات فصل

(۱) کمښتویش (د تفاضل وېش) ارزښت د P او Q په ټکو کې وټاکئ.

a) P(3,2) , Q(5,4) b) P(2,4) , Q(3,1)

(۲) د $x = x_0$ په ځاي کې د f تابع د تانجنت جګوالی وټاکئ.

$a)\ f(x)=x^2\ ,\ x_0=2$ $b)\ f(x)=0.5x^2\ ,\ x_0=3$

(۳) د کمښتویش(د تفاضل ویش) او مشتق لاندې څه پوهیږو او ترمنځ یې توپیر څه دی

(٤) د یوه تابع د سکانت( ) لاندې څه پوهیږو او د تانجنت جګېدو لاندې څه پوهیږو؟ او دوي ترمنځ کومې اړیکې پرتې دي؟

(٥) د تابع مشتق د توان قانون له مخې پیداکړئ.

$a)\ f(x)=x^5$ $b)\ f(x)=x^6$

$c)\ f(x)=\frac{1}{x^2}$ $d)\ f(x)=\frac{1}{x^5}$

$e)\ f(x)=\sqrt{x}$ $f(x)=\sqrt[4]{x^3}$

$g)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $h)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

---

(٦) د تابع مشتق د ثابت د قانون له مخې پیداکړئ.

$a)\ f(x) = 0.2x^5 - 3$ $\qquad b)\ f(x)2x^4 + 1$

$c)\ f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ $\qquad d)\ f(x) = \dfrac{3}{x^3} + 2$

$e)\ f(x) = 6\sqrt{x}$ $\qquad f)\ f(x)\dfrac{8}{\sqrt{x}} - 5$

(۷) د تابع د ګراف په مرسته وښایئ، چې ټول g(x) + c ترمونه همغه مشتق لري.

یاودونه: پابت عدد که هرکوم ارزښت ونیسي.

(۸) وښایئ، چې د a.g(x) د مشتق سره د a ضریب (ځله وونی) ساتلی پاتې کیږي.

(۹) د f تابع مشتق د جمعي قانون سره وښایئ

$a)\ f(x) = 4x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 1$ $\qquad b)\ f(x) = x - \sqrt{x}$

$c)\ f(x) = \dfrac{1}{2}x^3 + \dfrac{1}{x^3}$ $\qquad d)\ f(x) = 3x^2 + 0.4x - 5$

(۱۰)د f تابع مشتق د ضرب قانون سره وټاکئ.

$a)\ f(x) = x^3(x^2 - 2x + 1)$ $\qquad b)\ f(x) = (2x^2 + 1)(x - 1)$

$c)\ f(x) = (x^2 - 5)(2x^3 + x^2 + x)$ $\qquad d)\ f(x) = (4x^2 - x + 4)(3x + 2)$

(۱۱) د f تابع مشتق د ویش قانون له مخې وټاکئ.

$a)\ f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{4 - x^2}$ $\qquad b)\ f(x) = \dfrac{2x^2 + x + 3}{x + 1}$

$c)\ f(x) = \dfrac{4 - x - x^3}{2x^2 + 3}$ $\qquad d)\ f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x}$

تمرينات فصل

---

(۱۲) د وېش قانون له مخې په ځتې ارزښت(پرعکس ارزښت) وټاکئ.

(۱۲ الف) د لاندې تابع مشتق وشمېرئ.

$$f(x)=\frac{1}{g(x)}\Rightarrow f'(x)=\frac{-g'(x)}{g(x)\cdot g(x)}$$

د $g(x)\neq 0$ سره

(۱۳) د f تابع ارزښت د زنځير قانون له مخې وټاکئ.

$a)\ f(x)=(4x^4-x)^2$ $\qquad b)\ f(x)=(3x^2+4x-5)^2$

$c)\ f(x)=(2x-7)^3$ $\qquad d)\ f(x)=(5-3x^3)^4$

(۱٤) د لاندې توابعو مشتق وتاکئ.

$a)\ f(x)=\dfrac{1}{(2x^2+x)^3}$ $\qquad b)\ f(x)=\dfrac{1}{(x-5)^4}$

$c)\ f(x)=(1+\sqrt{x})^2$ $\qquad d)\ f(x)=\sqrt{1-x^3}$

(۱۵) د لاندې توابعو درې واره مشتق ونيسئ.

$a)\ f(x)=x^3-2x^2+1$ $\qquad b)\ f(x)2x^4+3x^3-x^2+x-5$

$c)\ f(x)\dfrac{3x-4}{x}$ $\qquad d)\ f(x)=\dfrac{x^2-1}{2-x}$

(١٦) د يو n-م درجې تابع بايد څو واره مشتق ونيول شي چې يوه ثابته ترې لاس ته راشي.

(١٧) د لاندې توابعو لومړی مشتق و ټاکئ.

$a)\ f(x)=\sin 3x$ $\quad b)\ f(x)\sin x\cdot\cos x$ $\quad c)\ f(x)=\sin^2 x$

$d)\ f(x)=\tan x+2\sin 2x$ $\quad e)\ f(x)=\sin x^2$ $\quad f)\ f(x)=\sin\dfrac{x-1}{x+1}$

(١٨) د $f(x)=\sin^n x(n\in IN)$ تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښاياست يا وټاکئ.

(١٩) د تانجنت تابع لپاره د ساين او کوساين قانون په مرسته د مشتق قانون و ښاياست.

(٢٠) وښاياست چې د f(x) = tanx لپاره $f'(x)=1+\tan^2(x)$ هم باور لري.

(٢١) د ويش قانون له مخې د کوتانجنت قانون پيداکړئ او هم د تانجنت قانون له مخې.

(٢٢) ولې د ساين تابع او د کوساين تابع په خوښه زيات مشتقوړ دي.

(٢٣) د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

$a)\ f(x)=3\cdot e^{-2x+1}$ $\quad b)\ f(x)=e^{x^2+2x-1}$ $\quad c)\ f(x)=(x-1)\cdot e^x$

$d)\ f(x)=\sqrt{e^x}$ $\quad e)\ f(x)=x^n\cdot e^e$ $\quad f)\ f(x)=e^{kx}$

$g)\ f(x)=2^{\frac{1}{2x}}$ $\quad h)\ f(x)=(\dfrac{1}{4})^{3x}$ $\quad i)\ f(x)=x\cdot a^{\sqrt{x}}$

$k)\ f(x)=\sqrt{e^x+1}$ $\quad l)\ f(x)=\dfrac{e^x}{1-e^x}$ $\quad m)\ f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

---

(۲٤)د $f(x) = (x^2 + 2) \cdot \lg x \quad (x > 0).$ مشتق دې پیدا شي.

مشتق یې وټاکئ یا پیدا کړئ.

$a)\ f(x) = \ln\sqrt{x} \qquad b)\ f(x) = \ln(x^2 - 4) \qquad c)\ f(x) = \ln\frac{2}{x^3}$

$d)\ f(x) = \ln\frac{x+1}{x} \qquad e)\ f(x) = x \cdot \log_2 x^2 \qquad f)\ f(x) = (x^4 - 1)\cdot\log$

$g)\ f(x) = \frac{\ln}{x+2} \qquad h)\ f(x) = \frac{x^4}{\ln x}$

(۳۵) د لاندې توابعو لپاره خورا لویه تعریف ورشو(ساحه) ورکړئ او لومړی مشتق یې وټاکئ.

د تعریف سټ(ډېرئ) هغه ورشو(ساحه) ورکړئ، په کومه کې چې توابع مشتقوړ دي.

$a)\ f(x) = \sqrt{x+3} \qquad b)\ f(x) = \sqrt{(x-2)(x-4)}$

$c)\ f(x) = x\sqrt{x} \qquad d)\ f(x) = \sqrt{x^2+2}$

(۳٦) ولې باید د تیک شمېرنې لپاره لوګاریتمي توابعو ته همداسې سوچ وشي، لکه ریښنه توابعو ته ؟

(۳۷) ۹۰ ــمه پوښتنه د لوګاریتمي توابعو لپاره ځواب کړئ.

$a)\ f(x) = \ln(x^4 - 1) \qquad b)\ f(x) = \ln(2x + 4)$

(۳۸) ــ د لاندې توابعو لومړی مشتق پیداکړئ.

---

(۳۹) - لومړی مشتق وټاکئ

$a)\ f(x)=\sin^{n}$ $\qquad$ $b)\ f(x)=(\ln x)^{n}$

$c)\ f(x)=s+\dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $d)\ f(x)=(1+\dfrac{1}{x})^{n}$

(٤٠)– د هرې تابع لومړي درې مشتقونه وټاکئ

$a)\ f(x)=e^{x^2}$ $\qquad$ $b)\ f(x)=\sin x\cdot\cos x$

$c)\ f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $d)\ f(x)=x^2\cdot e^{x}$

(٤١)– په کوم تابع کې لومړی مشتق f د f سره برابر دی.

(٤٢)–

الف: د کو fتابع لپاره $f'(x)=2f(x)$ دی؟

ب: د کو fتابع لپاره $f'(x)=-f(x)$ دی؟

(٤٣)- د f(x)=sinx څوم مشتق د f سره سر خوري یا برابر دی؟

(٤٤)– د لاندې توابعو لپاره -م مشتق ته وده ورکړئ.

$a)\ f(x)=e^{ax}$ $\qquad$ $b)\ f(x)=\ln(x+1)$

.
.
.

قضيه رول (Theorem of Rolle)

اگر يک تابع f در اينتروال بند $[a,b]$ متمادي و k دربين a و b واقع باشد، پس درانجا کم از کم يک عدد c در بين $f(a)$ و $f(b)$ موجود است، طوری که $f(c)=k$ است.

فعاليت:

_اگر تابع f در يک اينتروال محدود $[1,3]$ ثابت ميباشد، اين به يک تابع چې معني خواهد داشت، که چې قسم حرکت ميکند؟ ايا اين تابع نقطه عظمي يا نقطه اصغري خواهد داشت و يا چې طور؟ اين را روشن سازيد و در سه نقاط دلخوا وسطي انتروال قيمتها با يک ديگر مقايسه نمايئد.

_ ثبوت کنيد، که تابع $f(x)=-x$ در انتروال $[-1,1]$ نقاط عظمي و اصغري در کجا دارد و در بين يک و منفي يک براي سه قيمت x در گراف قيمتهاي f نشان دهيد و نشان دهيد، که ين از ديگر تفاوت دارد ئه نه؟

_ از طريق رسم نشان دهيد، که x^2 کدام نقاط عظمي ئا اصغري دارد و يا چطور و اگر داشته باشد در کجا؟

قضيه وايرشتراس Weierstrass

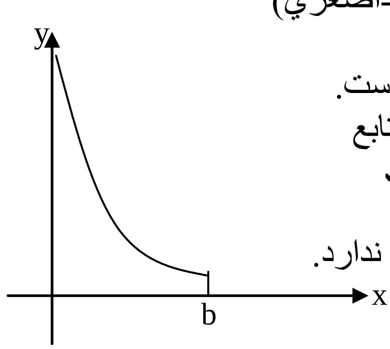
اگر يک تابع f در انتروال محدود [a,b] متمادي باشد، پس f درين انتروال کم از کم يک قيمت اعظمي و يک قيمت اصغري دارد.

درينجا جواب تحليلي داده نميشود، اين افاده ديدني معقول معلوم ميشود.

ميتواند قيمت همنواخت(مونوتون يا اعظمي-اصغري)
در انجام لنتروال هم واقع باشد.

محدود بودن انتروال بي قيد و شرط حتمي است.

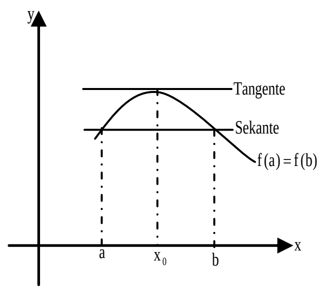
به طور مثال در انتروال نيم محدود (0,b] تابع
$y=f(x)=\frac{1}{x}$ متمادي است، مگر طرف بالا
محدود نيست، که بدين لحاظ نقطه اعظي را ندارد.



قضيه قيمت وسطي مشتق

در بين تانجنت و قاطع و به همين قسم در بين مشتق و تقسيم تفاضل روابط نزديک موجود ميباشد، که در قضيه هاي قيمتهاي وسطي انانليز تشريح ميشود.
از خواص تابع و انحراف تابع اولاً پيوسته قضيه رول بدست مي ايد.

قضيه رول (Rolle) :
يک تابع f بالاي انروال محدود [a,b] متمادي باشد با f(a)=f(b) و بالاي انتروال باز (a,b) قابل مشتق، پس کم از کم يک جاي $c \in (a,b)$ موجود است با f'(x0)=0



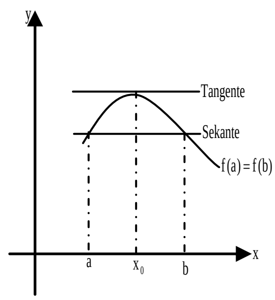
حل :
۱) اگر f ثابت باشد فوراً بدست ميايد0=f'(x)
۲) اگر f ثابت نه باشد، پس از روي قضيه وايرستراس کم از کم يک قيمت اعظمي و يک قيمت اصغري تابع موجود مي باشد. اين قيمتها با هم فرق دارد، از لحاظ که f ثابت نمي باشد.

پس ازين لحاظ کم از کم يک قيمت نامساوي با (f(a)=f(b موجود ميباشد. بدين اساس در داخل انتروال يک جاي مونوتون(اعظمي- اصغرئ) x_0 موجود است. موجوديت مونوتوني يه يکنواخت بودن(قيمت اعظمي- اصغري) يک تابع قابل مشتق از روي قضيه شرايط ضروري بدست مي ايد: f'(x)=0

تا به حال نشان داديم، که زير شرايط لازم به يک قاطع افقي يک تانجنت افقي هم موجود ميباشد.
اين پرابلم هندسي ميتواند عمومي شود.
پرسان دربين مي افتد، که ايا به يک قاطع مائل به همين قسم يک تانجنت به همان ميل ميتواند تشکيل شود؟

جواب شان قضيه زير ميدهد.

قضيه قيمت وسطي مشتق :



اگر تابعy=f(x) بالاي انتروال محدود [a,b] غير متمادي و بالاي انتروال باز (a,b) قابل مشتق باشد، پس در انجا يک جاي $x\in(a,b)$ موجود ميباشد، که براي ان داريم:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$

حل:
اين پرابلم به يک تابع کمکي په اين طور تعريف ميشود، که قضيه رول استعمال يابد.
براي اين مساوات قاطع را به پيش مياوريم:

$$y=g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

به طور تابع کمکي تابع مشتق تشکيل ميشود:

$$h:\ h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),$$

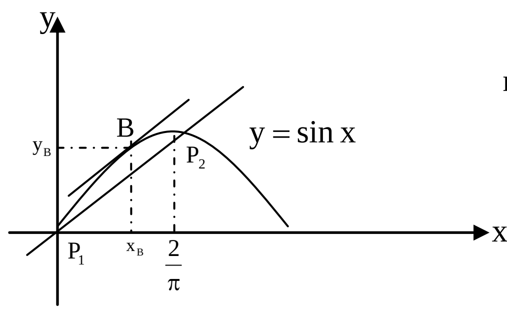
پس اعتبار دارد:h(a)=h(b)=0 . برعلاوه اين h بالاي (a,b) قابليت مشتق را دارا ميباشد و بالاي [a,b]متمادي است. بدين لحاظ فرضيه قضيه رول داده شده، اين به معني است که يک جاي $x\in(a,b)$ موجود است باh'(x)=0 ، که از روي ان داريم:

$$h'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0, \text{ يعني } f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

دست اورد بالا با مثالها زير روشنتر خواهد شد.

مثال:
يک تابع f(x)=sinx به طور داده شده باشد، که در يک نقطه $B(X_B,Y_B)$ تانجنت مماس منحني ميباشد و کدام که در نقاط $P_1(0,0)$ و $P_2(\frac{\pi}{2},1)$ همان ميل داشته باشد مثل قاطع.
حل: ميل يا بلندي سيکانت

۱۴۰. قضيه رول



$$m = \frac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \frac{2}{\pi}$$

ميل منحني در نقطه $B(x_B : y_B)$: $f'(x_B) = \cos x_B = \frac{2}{\pi}$

بدين لحاظ بدست مي ايد: $x_B = \arccos\frac{2}{\pi} = 0{,}88\iota$ و $f(x_B) = f(0{,}88) = 0{,}77$

نقطه مماس: $B(0{,}88 : 0{,}77)$

مساوات تانجنت: $y = \frac{2}{\pi}(x - 0{,}88) + 0{,}77$

از عموميت قضيه وسطي بدست مي ايد:

قضيه وسعت يافته قيمتهاي وسطي:

اگر $u = f(x)$ و $v = g(f)$ توابع متمادي بالاي اينتروال محدود[a,b]با شد و بالاي اينتروال باز (a,b) قابل مشتق و $g'(x) \neq 0$ صدق کند، پس براي تمام $x \in (a,b)$، کم از کمه يک جاي $x_0 \in (a,b)$ موجود ميباشد که ازان بدست مي ايد:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حل: از لحاظ $g'(x) \neq 0$ تابعg معکوس شدني ميباشد و مساوات v=g(x) به طرف x انعکاس نشان ميدهد، يعني $x = g^{-1}(V)$

اگر در تابع f هم متحول نو جا به جا شود، پس يک تابع مرکپ بدست مي ايد:

$$u = f(x) = f(g^{-1}(v)) = h(v)$$

از لحاظ قاعده ترکيبي مشتق زير بدست مي ايد:

اگر بالاي تابع$u=h(x)$ با $V_1 = g(a)$ و $V_2 = g(b)$

قضيه قيمت وسطي استعمال شود، پس جاى $V_0 \in (V_1;V_2)$ به طور زير موجود ميباشد:

$$\frac{h(v_2) - h(v_1)}{v_2 - v_1} = h'(v_0)$$

ازين با $h(v)=f(x),v=g(x)$ و $x_0 = g^{-1}(v_0)$ بدست مي ايد:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

تمرينها:

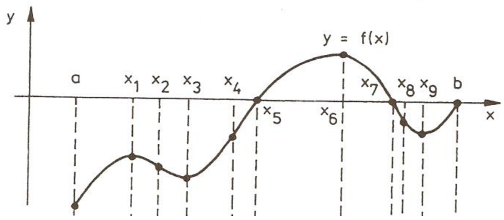
توابع زير دوتا جاهاي صفر دارد. همان قيمتهاي بحراني را دريابيد، که در بين هردو جا هاي صفر واقع باشد.

$a)\ f(x) = x^4 - 5x^3 + 7x - 5x + 6$

$b)\ f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x$

توابع همنواخت(Monotony (يوناني: همنواخت، قسم مساوي)

توابع متزايد و متناقس



فعاليت:

- در شکل بالا تمام جاهاي را نشان دهيد، که دران تابع متزايد ميباشد.

- در شکل بالا تمام جاها را نشان دهيد، که دران تابع نزولي مي باشد.

- در شکل بالا تمام جا ها را نشاني کنيد، که دران ميل تابع افقي ميباشد.

اگر يک تابع f در يک انتروال $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$ باشد براي تمام $x_1 < x_2$ ، پس تابع درين انتروال مونوتون متزايد (-متناقص) ناميده ميشود، اگر $f(x_1) = f(x_2)$ اجازه نه داشته باشد ، پس اين $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ مونوتون متزايد(- متناقص) قوي ناميده ميشود.

قواعد زير، که از هماهنگي بدست مي ايد، برا ي حالت هماهنگي مفيد ميباشد.

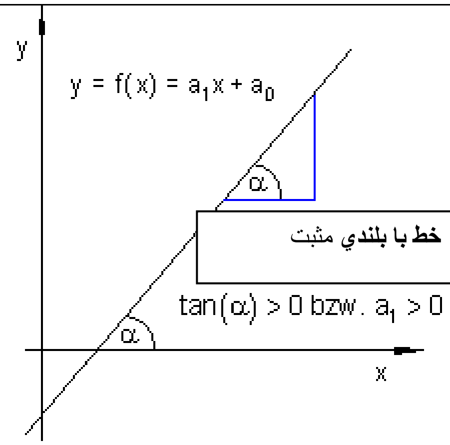
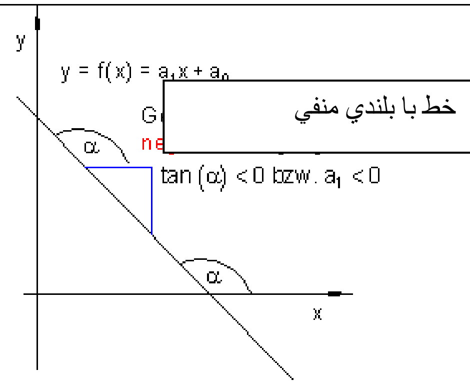
يک تابع f فقط در جاي ساحه تعريف D مونوتون متزايد ميباشد، اگر براي x_1 و x_2 اختياري، که در D واقع باشد، اعتبار داشته باشد يا صدق کند:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

بک تابع f که در D واقع باشد، فقط درانجاي مونوتون متناقص است در x_1 و x_2 دلخوا، که در D واقع باشد اعتبار داشته باشد:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

يکنواخت بودن Monotony جمله متزايد و متناقص

این تابع $1\ f(x) = a_1x + a_n$ خطي(لاینیز)، تابع بسیار ساده میباشد، که انحني ندارد. براي این متزاید بودن یا بلندي ثابت، $a_1 = \tan(\alpha)$ مسئول میباشد، در حال که α یک زاویه در بین خط و طرف مثبت محور x میباشد. در شکل روبرو :خط باميل مثبت $a_1 > 0 \Leftrightarrow \tan\alpha > 0$	
اگر $0 < \alpha < 90^0$ یا $0 < a_1 < \infty$ باشد ، به این معني که $a_1 > 0 \vee \alpha > 0$ ، پس خط بلند میشود. و این به معنی است، که به بلندي x ارزښت تابع f(x) هم بلند میشود. در شکل رو برو: خط با بلندي منفي: $\tan\alpha < 0$ همین تور($\Leftrightarrow$) $a_1 < 0$	 بالا به این قسم میباشد: $tan\alpha < 0$ همیتور $a_1 < 0$

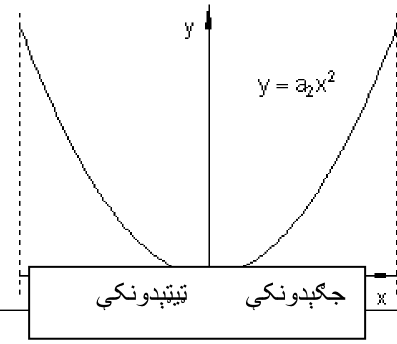
اگر $90^0 < \alpha < 180^0$ یا $-\infty < a_1 < 0$ باشد، این بدین معنی، که $\alpha < 0$ همینتقسم $a_1 < 0$ ، پس خط متناقص میباشد. این بدین معنی، که با x متزاید قیمت تابع f(x) کوچک کیشود.

در هردو حالت تابع مونوتون(تابع بلند یا باین شدني) حرف میزنیم و از یم تابع مونوتون بلند شدني، اگر $a_1 > 0$ باشد. و از یک تابع مونوتون متناقص حرف است اگر $a_1 < 0$ باشد.

این کلمه مونوتوني در ان توابع هم استعمال میشود، که حرکت منحنیها میدهد، اگر فکر شود، که به طور عموم به نقطه گراف منحنی یک تانجنت کشده میشود.

بدين لحاظ برا ي $f(x) = a_2 x^2$ اعتبار دارد:

در اينتروال $I_1 = \{x \mid -\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ تابع f(x) مونوتون متناقص ميباشد و در اينتروال $I_2 = \{x \mid 0 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ تابع f(x) مونوتون متزايد ميباشد.



مثل که در گراف خطي، که بلندي شان ثابت بود، حالا اين حالت را در پيش نه دارم، يعني بلندي ثابت نيست، بلکه اين از يک نقطه منحني به نقطه ديگر تغير ميخورد.

بلندي تانجنت >0 ← منحني مونوتون بلند ميشود

بلندي تانجنت < 0 ← منحني مونوتون پاين ميشود

بلندي تانجنت، اگر صفر ميباشد، به همان حالت باقي ميماند.

اشکار است که مشتق اول تابع f(x) ميل تابع f'(x) را ميدهد. به همين قضيه مونوتونی قضيه به طور زير فرمولبندي ميکنيم .

قضيه:

تابع f(x) در اينتروال I قابل مشتق باشد.

-- اگر تابع f(x) در اينتروال I مونوتون متزايد ميباشد، پس اعتبار دارد: $f'(x) \geq 0$ به تمام $x \in I$

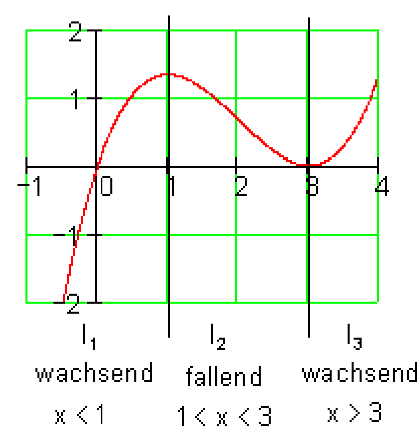
-- اگرf(x) در اينتروال I مونوتون متناقص ميباشد، پس اعتبار دارد: $f'(x) \leq 0$ براي تمام $x \in I$.

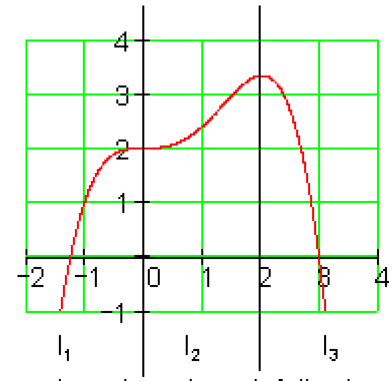
- اگر $f'(x) \geq 0$ باشد، براي تمام $x \in I$ ، پس $f(x)$ در اينتروال I مونوتون متزايد ميباشد.

- اگر $f'(x) \leq 0$ باشد، براي تمام $x \in I$ ، پس $f(x)$ در ايتروالI مونوتون متناقص ميباشد.
- اگر $f'(x) > 0$ باشد، براي تمام $x \in I$ ، پس $f(x)$ در اينتروال I مونوتون متزايد قوي ميباشد

- اگر $f'(x) < 0$ باشد، براي تمام $x \in I$ ، پس $f(x)$ در اينتروال I مونوتون متناقص قوي ميباشد.

تعين ساحه تعريف مونوتوني

مثال : اوقات زياد ميتواند از گراف تابع ساحه مونوتوني صحيح خوانده شود. براي $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_{\mathbb{R}}$ ل تابع $f(x)$ مونوتون متزايد قوي ميباشد. براي $I_2 = \{1 < x < 3\}_{\mathbb{R}}$ تابع $f(x)$ مونوتون متناقص ميباشد. براي r $I_3 = \{3 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ تابع $f(x)$ مونوتون متناقص قوي ميباشد.	$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ 

از روي گراف ساحه هاي مونوتوني زير خوانده ميشود. براي $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ تآبع f(x) مونوتون متزايد قوي ميباشد. براي $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbb{R}}$ تابع f(x) مونوتون متزايد ميباشد. براي $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ تابع f(x) مونوتون متناقص ميباشد.	$f(x) := \frac{-1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2$ 

تمرين:

---توابع راشنل زير را به خواص همنوايی تحليل نماييد.

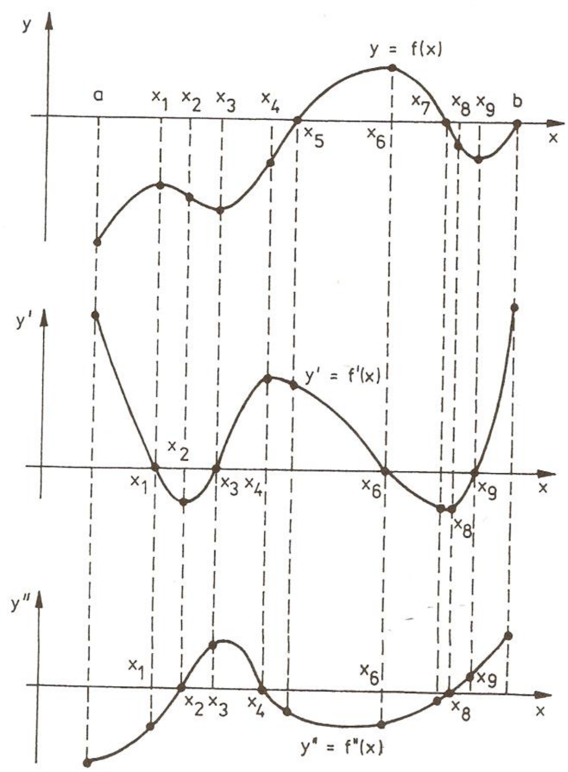
$a)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ $\qquad b)\ f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 12x$

$c)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ $\qquad d)\ f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x + 2$

--- حالت مونوتوني توابع کسري راشنل زير را در تابعيت a بدهيد.

$a)\ f(x) = \frac{1}{ax+2}$ $\qquad b)\ f(x) = \frac{1}{ax^2+1}$

نقاط افراطي مربوط به جاي (local extrema)



ما بعضي اوقات برای نقاط افراطي بحراني نويشتم، توجه برايش باشد.

فعاليت:

گرافهاي توابع مختلف و در باره ان بحث، که در کجا نقاط پخراني دارد.

- در شکل بالا براي تابع نقاط نسبي عظمي، - اصغري و مطلق نقاط اعظمي و - اصغري را نشان دهيد.

.

- در شکل بالا نشان دهيد، که نقاط عظمي نسبي و به همين قسم نقاط اعظمي مطلق، نقاط اصغري نسبي و به همين قسم نقاط اصغري مطلق منحني به هر دو طرف چطور حرکت ميکند؟

- اگر يک تابع $2x^2 + 12x+8$ داشته باشيم

- در شکل بالا به نقاط کي بحراني باشد متوجه شويد که تابع دران جا چه خواص دارد؟

- به همين نقطه تابع ببينيد، که مشتق اول شان کدام قيمت دارا ميباشد؟

ما از تحليلهاي بالا بدست مي اوريم:

اگر در جاي x_0 براي f(x) ما $f'(x) = 0$ داشته باشيم، پس يک نقطه اصغري نسبي در پيش داريم.

اگر برعکس اين $f'(x) = 0$ و $f''(x) < 0$ داشته باشيم، پس يک قيمت اصغري نسبي در پيش داريم.

نقاط بحراني (مينيموم يا ماکسيموم) خاصيت دارد، که$f'(x) = 0$ مي باشد و علامه $f''(x)$ يعني + ، - به اين فيصله ميکند که ايا نقطه اعظمي ويا -اصغري در پيش داريم.

براي روابط بالا يادداشتهاي زير ضروري ميباشد:

۱ – اين روابط تنها براي x_0 قابل ارزش است، که در داخل ست تعريف واقع باشد و درانجا تابع دفعه زياد قابل مشتق باشد، براي نقاط و جاهاي که دران تابع $y = f(x)$ کم يا هيچ قابل مشتق نه باشد، براي تحليل جداگانه ضرورت دارد.

۲ – شرايط که $f'(x) = 0$ باشد(تابع قابل مشتق) تنها براي يک قيمت افراطي ضرور است

٣ - شرايط که $f'(x) = 0$ و $f''(x) \neq 0$ باشد، براي قيمت بحراني تنها تکميلکننده است و نه ضروري

مثال : گراف تابع $f(x) = x^2 + 2$ را رسم نمايئد و اگر قيمتهاي انحرافي داشته باشد ، انها را از طريقه گراف و مشتق تعين نمايئد.

حل:

از گراف مثال روشن است، که تابع در جاي x=0 نقطه مطلق اصغري دارد.

شرايط ضروري براي نقطه بحراني :

١ – مشتق اول تابع است: $f(x)' = 2x$. درين مساوات مشتق تابع براي x_0 جاي صفر دارد، يعني درينجا يک نقطه بحراني موجود است.

٢ – مشتق دوم تابع: $f(x)'' = 2$. بدين لحاظ که $f''(x) > 0$ ، پس يک نقطه اصغري نسبي را در پيش داريم.

مثال : تابع $y = x^4$ براي $x = x0 = 0$ نقطه اصغري نسبي دارد و صدق ميکند:

$$f'(x) = 4x^3 = , \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 , \quad f''(0) = 0$$

ميبينيم که مشتق دوم نه از صفر کلان و نه از صفر کوچک است.

از تحليل بالا تعريف زير بدست مي ايد:

تعريف :

تابع$y = f(x)$ که در ساحه $x = x_0$ تعريف شده باشد. يک نقطه اعظمي به همينطور يک نقطه اصغري دارد، اگر براي x که به تمام x_0 نزديک باشد صدق کند:

$f(x) \geq f(x0)$ به همينطور($\Leftrightarrow$) $f(x) \leq f(x0)$

جمله :

(شرايط ضروري براي يک نقطه افراطي):

اگر يک تابع $y = f(x)$ قابل مشتق يک نقطه افراطي در x_0 داشته باشد پس داريم:

$$f'(x) = 0$$

اين جمله براي ما نشان ميدهد(يادداشت ۲ مقايسه شود): جاي که $f'(x) \neq 0$ باشد، پس در انجا نقطه اکستريم موجود نيست، براي نقطه بحراني تنها جاي x_0 در پرسان مي ايد، که براي ان $f'(x)=0$داريم ،

مگر حتمي نيست که $y = f(x)$ بايد يک نقطه بحراني داشته باشد.

جمله ۲۰ . ۱۳ : (شرايط تکميلکننده براي يک نقطه افراطي(بحراني)):

اگر براي يک تابع $y = f(x)$ که در $x = x_0$ دو مرتبه قابل مشتق باشد و داشته باشيم :

$$f'(x) = 0 \quad , \quad f''(x) \neq 0$$

پس تابع $y = f(x)$ درانجا يک اکستريموم دارد.

نقطه اصغري به پيش داريم، اگر داشته بالشيم: $f''(x) > 0$

نقطه اعظمي به پيش داريم، اگر داشته باشيم: $f''(x) < 0$

تمرين:

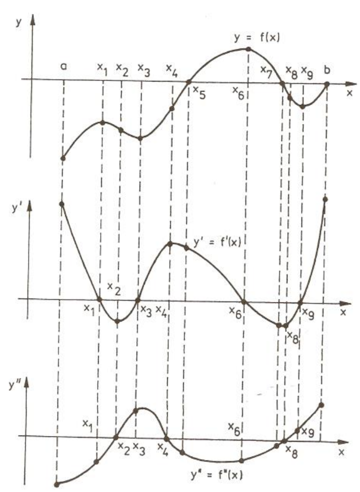
نقاط افراطي (انحرافي) توابع را دريابيد

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

2) $f(x) = x^4 - 3x^3 + x + 1$

3) $f(x) = 7x^7 - 6x^6 6 + 4x^4 x^3 + 2x + 1$

انحنا از طرف راست و انحنا از طرف چپ(مقعر و محدب)



فعاليت:

- در شکل بالال مقعريت و محدبيت را نشان دهيد.

- در شکل بالا از روي مشتقها مقعريت و محدبيت را نشان انگشتنما کنيد

اگر در اينتروال ا ز تابع قابل مشتق f مشتق دوم $f''>0$ ميباشد، پس درين اينتروال گراف چپ خم شده يا انحني چپ دارد و اگر دويم مشتق دو $f''<0$ ميباشد، پس گراف تابع راست خم شده يا انحي راست دارد.

مثال:

تمام توابع غير ناطق(راشنل تابع) f به $f(x)=x^3-2x^2+4x-1$ در کدام ساحه چپ خم يا انحني چپ دارد (يا مقعر است)) و در کدام ساحه راست خم است (انحني راست دارد(محدب است))؟

مشتق دوم: (از مشتق اول):

$$f'(x)=3x^2-4x+4$$
$$f''(x)=6x-4$$

براي $x>\frac{2}{3} \Rightarrow 6x-4>0$ خم بودن چپ(انحني چپ (يامقعر))

براي $x<\frac{2}{3} \Rightarrow 6x-4<0$ خم بودن راست(انحني راست(يامحدب))

مثال:

گراف تابع کسري راشنل $f(x)=\frac{1}{x+2}$ یک های پاررابول است. کدام طرف های پارابولا چپ خم است يا انحني(مقعر) چپ دارد، و کدام یک راست خم است انحني راست دارد(محدب است)؟

مشتق دوم: $f''(x)=\frac{2}{(x+2)^3}$; $f'(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$ صورت همیشه مثبت است.

براي $x < -2$ مخرج و به همين طور قيمت كسر منفي ميباشد. شاخه های‌پارابول خمي راست دارد يا انحني دارد(محدب است).

براي $x > -2$ مخرج و به همين طور تمام كسر مثبت ميباشد.

های بارابول [پ خم است يا انحني چپ دارد(يامقعر است).

مثال: انحني از هر دو توابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{x^3}$ از هر دو طرف باهم مقايسه شود.

هر دو توابع براي x>0 تعريف است.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad g'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \qquad g'' = \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

مشتقها دوم براي $x \in R^+$ تعريف هستند.

درين ساحه $f''(x) < 0$ است. گراف مربوطه انحنا راست دارد، اين يكي به طرف راست پارابول باز را نشان ميدهد.

در همين ساحه $g''(x) > 0$ ميباشد. گراف مربوطه انحنا چپ دارد. گراف مربوط یک انحنا چپ درارد، اين طرف بالا پارابول باز ميباشد.

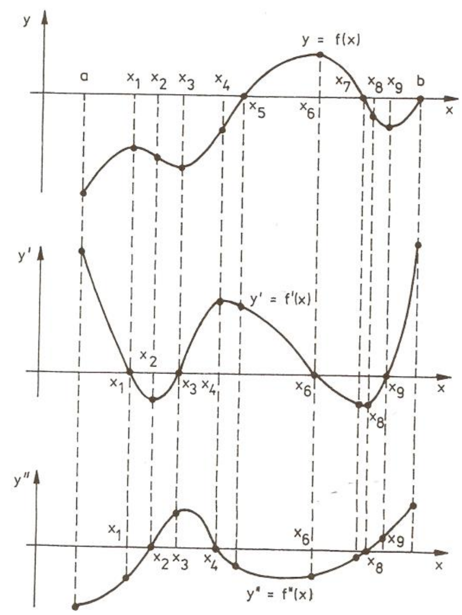
تمرينها:

نشان دهيد، كه توابع مقعريت و مخدبيت توابع زير كدام است؟

$$a) \qquad f(x) = x^3 + 4x^2 + x$$

$$b) \qquad g(x) = 2x^3 + 3x - 2$$

نقاط انعطاف Inflection Points



فعاليت :

- شکل بالا را بدقت ببينيد و نشان دهيد، که در کجا يا در کدام نقطه منحني سمت حرکت خودرا (از طرف چپ به راست) تبديل ميکند؟

- در اطراف نقاط انعطاف هم فکر کنيد، که کدام نقاط نقاط برجسته هستند و از خواص ان خواص نقطه انعطاف را تعين نمايد.

- در شکل فکر کنيد، که در اطرف نقطه انعطاف منحني چطور حرکت ميکند.

- در باره شکل از فکر خود چيزي بگويد و به اسشس فکر خود دلايل خود را روشد سازيد.

ما از شکل بالا حدث زده ميتوانيم که: اگر در جا x_0 اين زير داشته باشيم

$f''(x) = 0,\ f'''(x) > 0$

پس یک نقطه انعطاف راست – چپ در پیش داریم.

برعکس:

اگر داشته باشیم: $f''(x) = 0\ ,\ \ f'''(x) < 0$ پس یک نقطه انعطاف چپ – راست در پیش داریم.

تعین کننده خاصیت نقطه انعطاف است، که $f''(x) = 0$ باشد، براي این که نقطه انعطاف راست-چپ و یا چپ-راست میباشد، انرا علامه پیشرو(طرف چپ) $f''(x)$ تعین میکند.

٤ – شرایط $f''(x) = 0$ براي نقطه انعطاف تنها ضروري است.

براي $y = x^4$ میباشد $f''(0) = 0$، مگر نقطه انعطاف در پیش ندارم.

۵ - شرایط $f''(x_0) = 0$ او $f'''(x_0) \neq 0$ براي نفطه انعطاف تکمیل کننده است.

مي بینیم که تابع $y = f(x) = x^5$ در جاي $x = x_0 = 0$ یک نقطه انعطاف دارد و صدق میکند:

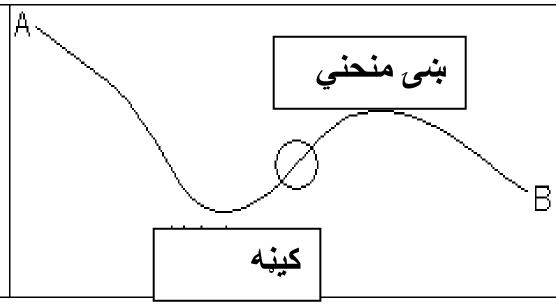
$$f'(x) = 5x^4 \quad , \quad f'(0) = 0$$
$$f''(x) = 20x^3 \quad , \quad f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = 60x^2 \quad , \quad f'''(x) = 0$$

نقطه اصغري ، زیرا که مشتق سوم $f'''(x)$ نه از صفر خورد و نه بزرگ است.

پیشگفتار و روشن ساختنکلمه:

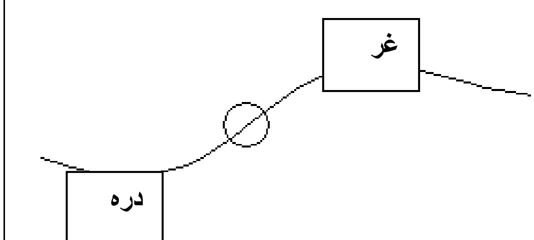
براي روشن ساختن بیشتر این کلمه طور زیر به پیش میرویم:

بایسکل دوان که از A حرکت میکند، از منحنی میگذرد و به B میرسد. حالت اندل همان زمان بایسکلدوان را در فکر داشته باشید. بعد ازمنحني چپ(حالت اندل طرف چپ) در منحني راست میدواند.



در بین منحني چپ - راست باید اندل بایسکل سیده استاده باشد(عمود باشد)، که عوض اندل میباشد از طرف چپ به راست. این عوض بین منحني چپ و راست و یا نقطه انعطاف نامیده میشود.

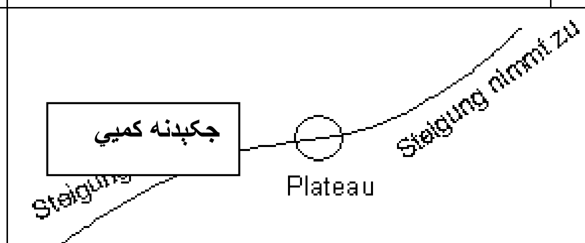
شما به بایسکل سر یم یک تپه میدوانید. بعد ازان که از تاله (ژورۍ) میگذرید، پس را به بلند شدن شروع میکند. در اول نرم و بعداً قوي بلند میشود، پس ازین بلندي باز کم میشود، که بالا به رآس تپه قیمت صفر را میگیرد. در یک جاي بالا به تپه به قیمت صفر میرسد. در یک جاي بلندي بسیار بلند بود. دران جا نقطه انعطاف میباشد.



حالت دیگر بایسکلدوان، که از گراف رو برو انرا میگیریم:

میل بایسکلدوان اول کم میشود، که از سر پس بلند شود..

در بین این یک ساحه موجود است، با بلندي کم(نسبتآ مسطح)ˇ درین جاي نسبتآ مسطح بلندي قطعه خط نسبت به جاي دیگر کم میباشد.



ازطرف چپ به راست ترجمه: بلندي کم میشود، هموار، بلندي، زیاد میشود

	درانجا نقطه انعطاف واقع ميباشد.

ميفهميم، که مشتق اول يک تابع، بلندي تابع ميباشد، که بلندي شان از گراف خوانده ميشود. براي اين که نقطه انعطاف نقطه بزرگ يا خورد ميتوان باشد، طوري پيدا ميشود، که قيمتهاي افراطي بحراني تابع مشتق را دريابيم.

اين عمل کرد همانطور است، مثل که براي تابع اوليه**f(x)** تعين کرديم. حالا به تابع مشتق **f'(x)** اين عملکرد اجرا ميشود.

شرايط نقطه انعطاف را قرار زير جمع اوري ميکنيم:

شرايط ضرور براي قيمت بحراني: $f'(x_E) = 0$ و $f''(x_E) \neq 0$

شرايط تکميلکننده براي قيمت بحراني : $f''(x_W) = 0$ و $f'''(x_W) \neq 0$

پيش ازين که يک سلسله جملات براي نقاط بحراني و نقاط انعطاف برسي ميکنيم، ميخواهيم اين کلمه را تعريف نمايم.

هردو کلمه را به شکل نقطه بحراني نسبي خواهيم جمع اوري کرد.

تعريف: تابع قابل مشتق $y = f(x)$ در يک ساحه $x = x_0$ يک نقطه انعطاف چپ - راست و به همين قسم نقطه انعطاف راست - چپ دارد، اگر مشتق ان درانجا يک نقطه اعظمي و يا يک نقطه اصغري دشته باشد.

جمله: (شرايط ضرور براي يک نقطه بحراني):
اگر يک تابع قابل مشتق $y=f(x)$ در x_0 نقطه بحراني داشته باشد، پس داريم: $f'(x)=0$

اين جمله به ما نشان ميدهد (يادداشت ۲ مقايسه شود): در جاي که $f'(x) \neq 0$ باشد، پس درانجا نقطه بحراني موجود نيست، براي نقطه بحراني تنها جاي x_0 در پرسان مي .
.

ايد، که براي ان $f(x)=0$ داريم، اما حتمي نيست که بايد $y = f(x)$ يک نقطه بحراني داشته باشد.

از استعمال جمله بالا به $y' = f'(x)$ جمله زير بدست مي ايد.

جمله ۲ . ۱۲ : (شرايط ضروري براي نقطه انعطاف):

اگر يک تابع $y = f(x)$ که در $x = x_0$ دو مرتبه قابل مشتق باشد و درانجا يک نقطه انعطاف داشته باشد ، پس بدست مي ايد: $f''(x) = 0$

درينجا هم قابل اعتبار است(يادداشت۴ را مقايسه شود): جاي که$f''(x) \neq 0$باشد، پس درانجا ميتواند يک نقطه انعطاف موجود باشد. اگر $f''(x) = 0$ باشد، ميتواند نقطه انعطاف موجود باشد، اما ضرور نيست که درانجا نقطه انعطاف موجود باشد.

از بالا جمله زير بدست مي ايد:

جمله :(شرايط تکميل کننده براي نقطه انعطاف): اگر براي يک تابع $y = f(x)$که سه دفعه در $x = x_0$ قابل مشتق باشد، داشته باشيم:

$$f''(x) = 0 \text{ , او } f'''(x) \neq 0$$

پس درانجا يک نقطه انعطاف موجود است. اگر $f'''(x) < 0$ ، پس يک نقطه انعطاف چپ-راست به پيش داريم. براي $f'''(x) > 0$ يک نفطه انعطاف

راست- چپ به پيش داريم.

مثال تحليلي:

---

۱ - مساوات تابع با مشتق ان

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$
$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$
$$f''(x) = -4x + 8$$
$$f'''(x) = -4$$

۲ – مشتق دوم را صفر کنيد

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 8 = 0$$
$$\Rightarrow x_W = 2$$

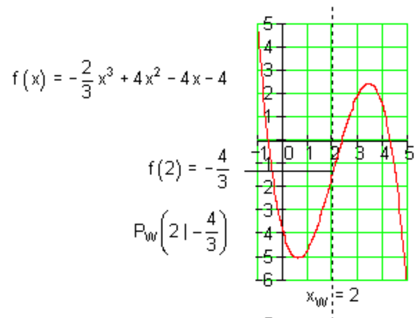
۳ – ثبوت از روي نقطه انعطاف، که ايا نقطه انعطاف موجود است؟

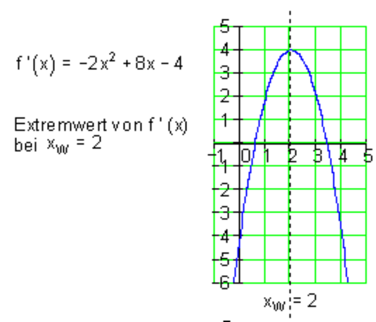
$$f'''(x_W) = f'''(2) = -4$$

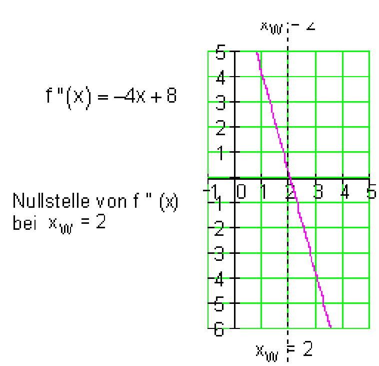
۴ - تعين نقطه انعطاف از طريق جا به جا کردن جا هاي انعطاف در f(x)

$$f(x_W) = f(2) = -\frac{2}{3}(2)^3 + 4(2)^2 - 4(2) - 4 = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_W\left(2 \mid -\frac{4}{3}\right)}}$$







$R_W(2 \mid -1{,}33)$ **یا**	

دقت: در جاي انعطاف x_W گراف f(x) انحني مي يابد.

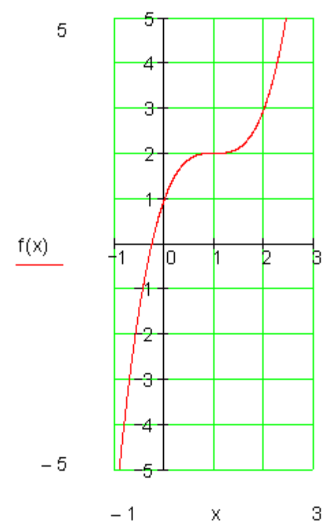
در يک نقطه دلخوا x_0 براي انحني صدق ميکند:

. ۱۶۰ نقاط انعطاف

$F''(x) > 0$ بدين معني است، که f(x) طرف چپ انحني ميکند

$F''(x) < 0$ بدین معنی است، که گراف تابع f(x) به طرف راست انحني ميکند

نقطه زين **Der Sattelpunkt**

يک حالت استثني نقطه انعطاف نقطه زين ميباشد. اين نقطه انعطاف است که ميل (بلندي) ان صفر ميباشد. اگر از طرف چپ به ان نزديک شويم فکر ميشود، که نقطه عظمي نسبي را در پيش داريم. اگر از طرف راست به ان نزديک شويم، فکر ميشود که يک نقطه اصغري نسبي را در پيش داريم. حالا اين حالت را از رو رياضيات بررسي ميکنيم: مشتق: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$ $f''(x) = 6x - 6$ $f'''(x) = 6$	

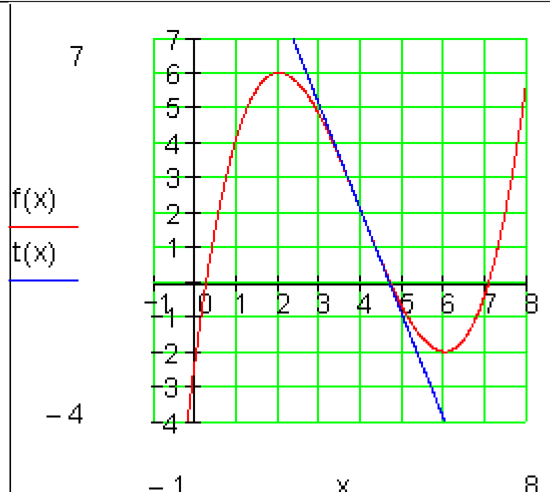
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \quad \Rightarrow x_{1/2} = 1$$

<= به x=1 نقطه انعطاف | <= به x=1 نقطه زین	$f''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0$ $f'''(1) = 6$

شرایط براي نقطه انعطاف تکمليل است.

بناآ از لحاظ $f''(1) = 0$ نقطه انعطاف در پيش داريم، پس اين نقطه انعطاف همان نقطه زين ميباشد.

يافتن نقطه انعطاف:
تانجنت بالاي گراف تابع در نقطه انعطاف تانجنت انعطاف ناميده ميشود. تانجنت انعطاف به همان تور يافته ميشود مثل که تانجنت در يک نقطه گراف تابع، که مساوات تانجنت تعين ميشود.

 تانجنت انعطاف گراف $f(x)$ را در نقطه انعطاف $Pw(4,2)$ قطع ميکند و مساوات زير دارد:	$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 2$ $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$ $f''(x) = \frac{3}{2}x - 6 \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$ $f''(x_W) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 6 = 0$ براي $\Rightarrow x_W = 4$ و $f'''(x_W) = \frac{3}{2} \neq 0$ و براي

$f(x_W) = f(4) = 2 \Rightarrow \underline{P_W(4\mid 2)}$ مساوات تانجنت صدق ميکند. براي x_w مساوات تانجنت $t(x) = f'(x_W)(x - x_W) + f(x_W)$ با $f'(x_W) = f'(4) = -3$ ، تور زير ميباشد $t(x) = -3(x-4) + 2 = \underline{\underline{-3x + 14}}$	$t(x) = -3x + 14$

يافتن تانجنت انعطاف:

تانجنت گراف تابع در نقطه انعطاف، تانجنت انعطاف ناميده ميشود

مساوات تانجنت انعطاف به همان طور تعين ميگردد مثل که مساوات تانجنت بالا نقطه دلخوا گراف

حالتهاي ، مثل $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = 0$ درين جا بررسي نميشود

تمرين:

۱: نقاط انعطاف تابع f با $x \neq 1$, $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{(x-1)^2}$ را دريابيد.

۲ - نقاط انعطاف توابع زير را در يابيد.

$a)\ f(x) = \dfrac{2x-2}{x^2}$ $\qquad b)\ f(x) = \dfrac{x}{x^2+3}$

$c)\ f(x) = \dfrac{x^3}{3(x-1)^2}$ $\qquad d)\ f(x) = \dfrac{x^3-8}{4x}$

۳ -- نشان دهید، که تابع $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}e$ نقطه زین نقطه انعطاف میباشد.

٤ -- د لاندې توابعو د انعطاف ټکي (اوړونټکي) پيداکړئ.

$a)\ f(x)-=x\cdot e^{-x^2}$ $b)\ f(x)=\ln\frac{1}{x^2+1}$

بحث منحني (Kurven Diskusion):

یک تابع $y=x^3+x^2-3$ داریم. بع شکل رسم کړئ او بیا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټکي او د انعطاف ټکي په نخښه کړئ، رښانه کړئ، چې انحنا چېرته له کيڼې لور و ښئ لورې ته او له ښئ لورې و کيڼې لورې ته ده.

فعالیت:

- تناظر تعریف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جگ ټکي، ټيټ ټکي او د انعطاف ټکي يې پيدا اکړئ.
- x^3+x
- $3x^3+x+2$

- جدول و شکل تابع ورودي را بکشید.

- ایا میتوانید، که شکل تابع را به طور ساده رسم کنید، بدون این که از جدول استفاده به عمل بیاید؟

- نقاط برجسته تابع کدام نقاط میباشد؟ نشان دهید.

- ايا خواهيد توانست که ازين نقاط تابع را رسم نمايد. درين کار ميتوانيد، که از شکل ترتيب شده تان استفاده به عمل بياوريد، که از کدام نقاط استفاده به عمل مي ايد.

براي اين که يک تابع را رسم کرده بتوانيم، ساده خواهد بود که نقاط برجسته تابع را بشناسيم. اين بحث را بحث منحني ميناميم. ما به اين قسم بحث به تور سيستماتيک به پيش خواهيم رفت.

کاربرد يا عمل کرد به طريق زير مفيد خواهيم يافت:

ساحه تعريف: بررسي تابع تنها درين ساحه هدفمند است.

. ۱۶۴ بحث منحني

متناظر **Symmetrien** : تعين بايد شد، که تابع متناظرمحوري ويا متناظرنقطه است.

براي متناظرمحوري صدق ميکند: $f(-x) = f(x)$

براي متناظر ن؛قذه سدق ميکند. $f(-x) = -f(x)$

براي هردو حالت بالا بايد فقط $x \geq 0$ بررسي شود.

به صورت عموم براي توابع حقيقي به ياد ميگيريم، که اگر اکسپوننت(ورجه بولينوم) جفت باشد، پولينوم متناظر محوري ميباشد و اگر اکسپوننت پولينوم طاق (درجه پولينوم طاق) باشد، پولينوم نظر به نقط متناظر ميباشد.

نقاط افراطي**Extrema** : تعين نقاط بحراني نسبي(نقاط اعظمي، نقاط اصغري)

شرايط تکمل کننده نقطه اعظمي نسبي:

$$f'(x_1) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_1) < 0$$

نقطه انعطاف Inflection Point :

شرايط تکميل کننده براي تعين کردن نقاط انعطاف و به همين قسم نقاط زين:

$$f''(x_W) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_W) \neq 0$$

نقطه انعطاف نقطه زين ميباشد به تانجنت افقي.

نقطه تقاطع محورِ: نقطه تقاطع با محور x : $P_y(0 \mid y_s) \Rightarrow f(0)$ و با محور y نقطه تقاطع (جاي صفر) را تعين ميکند. $P_{xi}(x_i \mid 0) \Rightarrow f(x) = 0$

رسم گرافها : با تمام معلومات که تا به حال جمع اوري شده، ميتوانيم گراف را رسم کنيم. براي اين اول يک جدول قيمتها ترتيب ميشود. اين جدول براي ما نشاني خواهد کرد،که کدام قيمتهاي ديگري شمرده ميشود.

حالت انحني و يکنواخت بودن:

در نقطه انعطاف X_w گراف f(x) تغير ميخورد.

در يک نقطه دلخواه x_0 براي انحني صدق ميکند:

$f''(x_0) > 0$ بدين معني است، که گراف تابع f(x) انحني چپ دارد (کونوکس)

$f''(x_0) < 0$ بدين معني است، گراف تابع f(x) انحني راست دارد(کونکاو)

يکنواخت بودن

۱ – اگر $f'(x) \geq 0$ براي تمام $x \in I$ باشد، پس f(x) در اينتروال I يکنواخت متزايد است.

اگر $f'(x) \leq 0$ براي تمام $x \in I$ باشد, پس f(x) در اينتروال I يکنواخت متناقص است.

۲ - اگر $f'(x) > 0$ براي تمام $x \in I$ باشد، پس تابع f(x) در اينتروال I متزايد يکنواخت قوي ميباشد.

اگر $f'(x) < 0$ براي تمام $x \in I$ باشد، پس تابع $f(x)$ درانيتروالI يکنواخت متناقص قوي ميباشد.

ساحه تعريف نقطه کنار:

مطالعه کنار تابع در نقطه ساحه تعريف. اگر ساحه تعريف نامحدود باشد، پس حدود $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \to \infty} f(x)$ قابل تعين ميباشد.

مثال: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

. ۱۶۶ بحث منحني

مشتق گرفتن:

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$
$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$
$$y''' = f'''(x) = 6 \quad D = \mathbb{R}$$

نقطه بحراني نسبي

$P_{min}(3|-2) \quad P_{max}(1|2)$

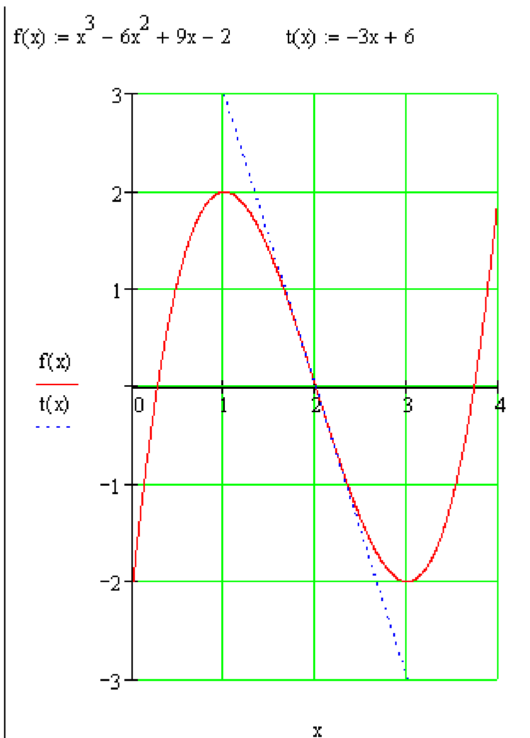
نقطه انعطاف و تانجنت

$P_w(2|0) \quad y = f_t(x) = -3x + 6$

جا هاي صفر:

$P_{x1}(2|0) \quad P_{x2}(3,7|0) \quad P_{x3}(0,3|0)$

با محور y



	نقطه تقاطع: $P_y(0\mid -2)$

حالت تابع در $x\to -\infty$ و $x\to\infty$: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) = \infty$ تناظر (سیومتري): نه دارد	یکنواخت بودنی(مونوتوني) در $I_1=\{x\mid -\infty<x\leq 1\}_{\mathbb{R}}$ متزاید بودن یکنواخت. در $I_3=\{x\mid 3\leq x<\infty\}_{\mathbb{R}}$ یکنواخت بلند میشود.

حالت انحني:

انحنا راست(محدب) : $I_4=\{x\mid -\infty<x<2\}_{\mathbb{R}}$

انحني چپ (مقعر) : $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$

تمرين:

به توابع زير بحث كنيد و به نقاط برجسته:

اول) از طريق شمردن نشان دهيد.

دوم) در شكل نشاني كنيد.

$a)\quad 2x^3 + x^2 + 1$

$b)\quad x^3 + x^2 + 3x$

$c)\quad x^3 + 2x^2 + x + 3$

حد افاده هاي نامعين

$$0.\infty \;,\; \frac{0}{0} \;,\; 0^{\infty} \;.\frac{\infty}{\infty},.....$$

اگر داشته باشيم $x \neq 5$; $\frac{x^2+3x+2}{x+5}$ ، ديديم، که ليميت اين قسم توابع را دريافت کرده ميتانيم.

اين قسم تابع افاده هاي معين ناميده ميشود، ازين که مشتق شان شمرده ميشود، يعني حد تقسيم تفاضل را تعين کرده ميتوانيم.

اگر تابع $\frac{\sin 2x}{5x}$ داشته باشيم، پس مشتق تابع را به طور معمول يافته نميتوانيم، که ازين بابت ان را افاده هاي نامعين مينامیم.

فعاليت:

- بکوشيد که مشتقهاي توا؛بع بالا در ورودي را دريابيد.
- اگر داشته ؛باشيم $\frac{x^2-4x-5}{x-5}$ ، پس مشتق تابع در کجا گرفته ميشود، اگر مشتق شان براي5= x ممکن باشد، مشتق شان را بگيريد.

مطاعات اوي: حالت $\frac{0}{0}$:

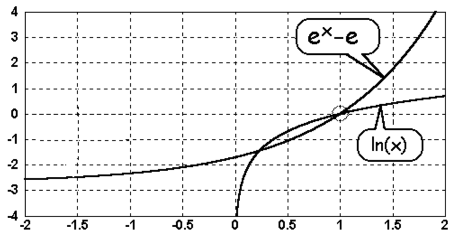
. .

١٦٩ نـ امعـ ين هاى افـ اده حد

اگر در تشکيل حد يک کسر به وجود بيايد، که دران صورت و مخرج هردو به صفر تقرپ کنند يا صفر شود، پس اين حد را افاده غير معين مينامیم.

مثال:

$$\lim_{x \to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$$



در شکل حصه توابع رسم شده، یعني گراف هاي صورت و همینطور مخرج.

میبینیم: قیمتهاي توابع صورت و مخرج هر دو به صفر میرود. (اگرx به طرف۱ برود)

طرز نوشتن: براي افاده

$$\frac{\text{Zähler} \to 0}{\text{Nenner} \to 0}$$

در شمارش حد به طور کوتاه مینویسیم:

$$\frac{0}{0}$$

این در حقیقت دقیق نیست، مگر به صورت عموم بدین قسم معمول است.

روشن ساختن :

افاده هاي غیر معین چي میباشد؟

۱۷۰ حد اده اف های ین امعـ ذ

این سوال دربین مي افتد، که این کلمه غیر معین اسم خود را از کجا میگیرد. این غیرمعین نامیده میشود، زیرا که حد شان از طرق عادي شمرده نمي شود. این شمارش با ریاضیات بالاممکن شد(به طور مثال ازروي قانون دي لو پیتال، که بعداً بررسي خواهد شد)

تشریح به روشن ساختن:

حالا نشان میدیهیم، که شمردن چرا ناممکن است.

ما باز مثال صفحه قبلي را بدست میگیریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{\ln x} = \frac{\to 0}{\to 0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{Nenner \to}$$

صورت

مخرج

۱ – اگر کوشش شود، که حد را دریابیم، و براي x=1 درکسر جا به جا کنیم، پس افاده 0:0 به دست مي اید، که بدین لحاظ این کسر تعریف نیست، زیرا که تقسیم به صفراجازه نه دارد.

۲ – ما پیش براي شمردن افاده هاي نامعین، یعني شمردن حد کسري ناطق از چل ول کار گرفتیم. حالا ازین چل کار گرفته نمیتوانیم، مثل که در مثال بالا دیده شد.

۳ –قیاس حد هم ناممکن است: در مرحله اول ممکن است که به فکر بیایم، که اگر صورت و مخرج به صفر برود ، پس کسر ممکن به طرف ۱ حرکت کند. یعني:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001} = 1$$

اگر صورت و مخرج به صفر نزديک شود، اين فقط معني خواهد داشت، که هر دو از روي قيمت تقريبآ برابر خواهد شد. اين به معني نيست، که نسبت صورت و مخرج به هم مساو ميشود:

$$\frac{0.000000100}{0.000000001} = 100$$

طور که ميبينيم صورت و مخرج از روي قيمت تقريبآ مساوي ميباشد(اين به معنی، که هر دو به طرف صفر ميرود)، مگر نسبت دربين اينها بسيار بزرگ است يعني (100)،

حدود نامعين يا ليميت افاده هاي نامعين

$$0.\infty \;,\; \frac{0}{0} \;,\; 0^{\infty} \;.\frac{\infty}{\infty},.....$$

که و لرو $x \neq 5$; $\frac{x^2+3x+2}{x+5}$ ، ومو ليدل، چې د داسې توابعو ليميټ په پيداکولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلې افادې وايې، ځکه چې مشتق يې نيول کېدی شي، يعني د کمبنتونو ويش(د تفاضلونو ويش) حد يې ټاکل کيدی شي.

که $\frac{\sin 2x}{5x}$ توابع ولرو،نود $x = 0$ لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توگه نه شو نيولی، چې له دې امله ناټاکلې افادې ورته وايو.

حد اف اده های ن امع ين ١٧٢

فعاليتونه:

١- اگر تابع $f(x) = \frac{\sin x}{x^2+x}$ داده شده.

اول - حد تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x^2+x}$ را يعني $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+x}$ از درس ليمت که در حصه اول
خوانده شده دريابيد.
۲ -- بالا در ورودي کوشش کنيد که مشتق هتي توابع را دريابيد.
۳- اگر داشته باشيم $\frac{x^2-4x-5}{x-5}$، پس مشتق د تابع در کجا گرفته ميشود، اگر براي x=5 ممکن مشتق شان را بگيريد.

در تعين يا بررسي حدود توابع تقسيم طور $\frac{f(x)}{g(x)}$ رول مخصوص بازي ميکند.
اين حالت به طور مخصوص درانجا ظهور ميکند، که مخرج و صورت در همان جاي x_0 صفر داشته باشد. اين افاده نامعين $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{0}{0}$ هدفمنده نيست. ميتواند که حد تقسيم $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ بررسي شود، که براي انها صورت و مخرج به طرف صفر ميرود. به طور عموم براي اين مناسب است که ترمهاي توابع را بطلبيم. به طور مثال تابع

$$f:\quad y=f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}$$

درصورت و مخرج همان جاي صفر $x_0=-2$ دارد، با وجود اين هم حد موجود ميباشد.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^2}{x+2}=\lim_{x\to -2}(x+2)=0$$

اين طور حدود به کمک مشتق شمرده ميشود، که از نتايج توابع صورت و مخرج بدست مي ايد. اين قسم قاعده به نام تطبيق قضيه قيمت وسطي وسعتيافته نيز ياد ميشود.

قاعده برنولي و دو لو، پيتال:

Bernoulli and de l'Hospital

اگر در یک ساحه $U(x_0)$ در جاي x_0 توابع $u=f(x)$ و $v=g(x)$ قابل مشتق باشد با $g'(x)\neq 0$ و براي تمام $x\in U(x)$ و x_0 جاي صفر f و g باشد، با $f(x_0)=g(x_0)=0$ ،
پس صدق میکند:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

تا که حد طرف راست موجود باشد.
به همین قسم بدست میاید:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

حل: تابع فرضیه هاي قضیه قیمت وسطي وسعتیافته را تکمیل میکند. براي هر $x\in U(x_0)$ یک x_m با $x_m\in(x_0,x)$ موجود است، طور که: $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$

از لحاظ $f(x_0)=0 \;\wedge\; g(x_0)=0$ داریم:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

بناآ به $x\to x_0$ هم $x_m\to x_0$ حرکت میکند.

در حالت $x\text{->}o$ ما $x=1/z$ جا به جا میکنیم و به کمک قضیه مرکب(-زنجیري) بدست مي اید:

$$u=f(\frac{1}{z})$$

با مشتق $du/dz=f(1/z)\cdot(-1-z^2)$ و مشتق $\frac{dv}{dz}=g'(\frac{1}{z}).(\frac{-1}{z^2})$ ، داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ياد داشت: اگردر حالت بالا $f'(x_0)=g'(x_0)=0$ هم باشد، اين قاعده باز به تقسيم از سر استعمال ميشود. اگر کسي بعد از قدم n-م موفق باشد پس قاعده زير را داريم:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

جاي که $f^{(n)}$ و $g^{(n)}$ به معني مشتقn -م تابع ميباشد.

رقم يا تيپ: $\frac{0}{0}$

مثال: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{1}=\frac{0}{1}=0$

مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$

مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=\frac{0}{1}=1$

تيپ يا رقم: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0\qquad \alpha>0.$$

براي اکسپوننت يک عدد حقيقي مثبت α، يک توان دلخواه x^{α} براي $x \to \infty$ قوي بلندميشودو نسبت به لوگاريم تابع$\ln$
د يوه مثبت حقيقي اکسپوننت(جگعدد) α لپاره يو په خوښه توان x^{α} $x \to \infty$ لپاره په کلکه جگيږي، نسبت به تابع لوگاريتم $\ln$ براي $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0$$

اين تابع $f(x)=\frac{x^{n}}{e^{x}}$ بعد از چند دفعه استعمال قاعده دو لو،پيتال بدسا مي ايد:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n}}{e^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^{x}}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^{x}}=0$$

اکسپونشل تابع e^{x} برايx از هر تابع اکسپوننت قوي بلند ميشود:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n}}{e^{x}}=0 \qquad n\in N$$

حالتهاي ديگري ميتوان به صورت يا تيپ $\frac{0}{0}$ و يا $\frac{\infty}{\infty}$ پس عوض شود.

از صورت يا تيپ ∞-∞ به صورت يا تيپ$\frac{0}{0}$

براي اين حالت تابه زير ميتوان به حيث مثال اورد:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$$

براي$x \to 0$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

از این بابت که درینجامشتق سپس به صورت یا تیپ $\frac{0}{0}$ است، پس قاعده لو، پیتال استعمال میشود.

از قسم $0.(\pm\infty)$ به قسم $\frac{\pm\infty}{\infty}$:

حالت صورت $0.(-\infty)$ به طور مثال تابع $f(x)=x.\ln x$ را نشان میدهد براي $x\to 0$.
حالت تیپ $0.(-\infty)$ په طور مثال تابع $f(x)=x.\ln x$ است برای $x\to 0$ ، دران که ضرب به قسم تقسیم نوشته میشود، بس به استعمال قاعده دو لو، پیتال زیر بدست مي اید:

$$\lim_{x\to+0}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+0}(-x)=0$$

از شکل 0^0 به e^0:

درینجا ما به ذور مقال تابع $f(x)=x^x$ برا $x\to 0$ بررسي میکنیم.
تبدیل شکل یا فورم به قاعده e به کمک یک تشکیل زیر به صورت موفقانه بدست مي اید:

$$\lim_{x\to+0}x^x=\lim_{x\to+0}e^{\ln(x^x)}=\lim_{x\to+0}e^{x\cdot\ln x}=e^0=1$$

از شکل 1^∞ به شکل $e^{0.\infty}$

به طور مثال حل حد تابع $f(x)=(1+\frac{\mu}{x})^x$ کیباشد براي $\mu\in R^+$ و $x\to\infty$ با $x\in R^+$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}e^{x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{x})}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{2}))}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\eta}{2}\right)}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{\mu}{2}}\cdot\frac{-\mu}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mu}{1+\frac{\mu}{x}}}=e^{\mu}$$

براي $\mu=1$ بدست مي اید:

قاعده برنولي..... ۱۷۷

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

از سکل ∞^0 به شکل $e^{0.(\pm\infty)}$

این عمل ذریع یک مثال واضح میسشزیم:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=\lim_{x\to+0}e^{\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}(\sin x\cdot\ln\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to+0}\frac{x\cdot(\frac{-1}{x^2}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot\cos x}=\lim_{x\to+0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x-x\cdot\sin x}=0$$

با $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=1$

جدول زیر اشکال ثبوت شده بالا مطالعه عمومي تبدیل اشکال را ممکن مي سازد.

نوع (تیپ)	$f(x)\to$	$g(x)\to$	تبدیلي شکل یا کوتاه: تبدیلي
$-\infty$	0		$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}=\frac{g(x)-f(x)}{f(x)\cdot g(x)}\to\frac{0}{0}$
∞	0		$f(x)\cdot g(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\to\frac{0}{0}$ $\wedge(Or)$ $f(x)\cdot g(x)=\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\to\frac{\infty}{\infty}$
∞	0 1 0	0 0	$(f(x))^{g(x)}=e^{\ln(f(x)^{g(x)})}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\to e^{0\cdot\infty}$ به f(x)>0.

 قاعده برنولي.....

تمرینها:

در بالا مثالهای زیاد حل شده. ازانهای باید چند تا مثاها اړرده شد.

۱) قیمت حدهای زیر را بشمارید:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{2^x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[x]{x}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{e^x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right)$

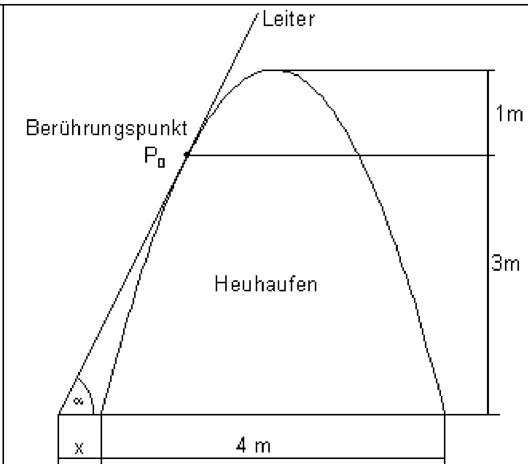
برای $x \to \infty$ حدهای توابع راشنل را به قاعده دو، لو، پیتال بشمارید.

a) $f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1}$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$

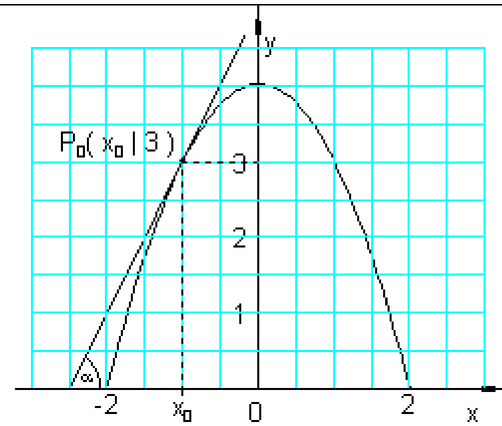
مثال استعمال یک تابع براي تانجنت:

بالا زمین به انبار علف یک زینه را میگزاریم. این زینه به ارتفاع سه متر به انبار تماس میگیرد.



انبار علف شکل یک پارابول فشار اورده شده داشته باشد، که قاعده شان ٤ متر عرض دارد و ارتفاع شان هم٤ متر میباشد. مي خواهیم به ان یک زینه بمانیم، که با انبار علف تانجنت تشکیل کندیا تانجنت بسازد. این زینه به کدام زاویه باید جابه جا شود؟

این زینه به کدام فاصله از قاعده انبار علف بالاي زمین بایدگزاشته شود؟



ما محور y پارابول را طور رسم میکنیم، که از رآس پارابول بگزرد.

پارابول مساوات زیر تابع را دارد:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$

$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

ما قیمت را برا x_0 تعین میکنیم:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$

$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$$

شمردن :

ما براي شمردن دیگر قیمت $x_0 = -1$ به کار میبریم. زینه مماس انبارر در نقطه $P_0(-1,3)$ میباشد. ما مساوات تانجنت را در نقطه $P_0(-1,3)$ تعین میکنیم:

$$f(x) = -x^2 + 4 \qquad P_0(-1|3) \Rightarrow \bar{x}_0 = -1;\ \bar{f}(x_0) = 3$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

با $f'(x) = -2x$ بدست مي ايد:

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

زاويه تشکيل شده: $\tan\alpha = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 63{,}4^0}}$

فاصله بين انبار علف و زمين فاصله بين جاي صفر تابع**f(x)** و جاي صفر تانجنت**t(x)** ميباشد.

جاهاي صفر:

داريم:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$
$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2{,}5$$

فاصله دربين 2- و قيمت هاي x که 2,5- است 0,5 ميباشد.

زينه بايد از انبار علف به فاصله نيم متر گزاشته شود.

ما ازين پحث ياد گرفتم، که چه طور مساوات تانجنت تعين ميشود، که در جاي تعريف شده يک گراف مماس باشد.

قضیه مفاد بیشترین

این،، قضیه مفاد یا نفع بیشترین،، معني عملي بزگ دارد، که به طور زیر ذریعه چند مثال بررسي خواهد شد.

تقریبآ در تمام پروسه هاي که در عمل به کار برده میشود، محتاج به استعمال معین یک جنس هستیم، که در عمل به کار مي اید، انان که ما در حدود مخصوص در اختیار میتوانیم داشته باشیم.

ما تنها بروسه هاي بررسي میکنیم که تابع یک مجهول x میباشد.

این در اختیار دیگر، ذریعه یک تابع $y = f(x)\ ,\ x \in D$ بررسي کرده میتوانیم.

اگر y تمام مصارف را نشاني کند، پس x باید طوري تعین گردد، که f(x) مینیمال یا اصغري(بسیارکم) شود.

اگربرعکس y مفاد باشد، پس x باید طور بدست اورده شود، که f(x) ماکسیمال (اعظمي یا بسیار بزرگ) باشد. در قاعده مؤثره لویه یا به عبارت دیگر، واریابل مستقل x در بین حدود$-\infty$ و ∞ تعین کننده مستقل نیست، بلکه از لحاظ تخنيك یا علم تخنيك، تنها در حدود معین میباشد یعدي

$$a \leq x \leq b \qquad (*)$$

بدین اساس مسئله مفاد عملي دلخواه مربوط این است ، که این مفاد است و یا مصارف.

$$y = f(x) = \max! \qquad (a \leq x \leq b \qquad ($$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \leq x \leq b) \qquad ($$

این روابط عمیق دارد با پرابلمهاي حصه قیمتهاي بحراني یا به انها بستهگي محكمي دارد.

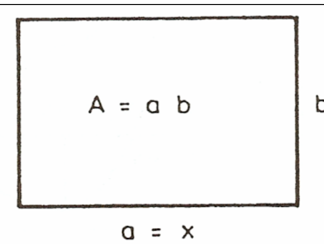
درینجا علاقه ما به طور خصوص به كار بردن پرابلمهاي زیر میباشد:

۱ – پیدا كردن روابط مشترک توابع (y = f(x ، متصل به دادن وظیفه(پرابلم شكل و رقم یا پاربلم مودالیتي)

۲ - در یاد داشتن حدود علم تخنيك (*)

این از طریق دو مثال ثبوت شود.

مثال : براي احاطه زمین یک سیم خاردار داریم، كه تمام درازي شان L میباشد. ذریعه این سیم باید یک مستوي مربع شكل احاطه شود كه تا حد ممكن باید بزرگ باشد. این وظیفه یا به عباره دیگر خواست است.

	حالا پرابلم مودالیتي: مطلب ما پیدا كردن یک جهارضلعي میباشد. به طور معمول یک ضلع این چهارضلعي را به a نشاني میكنیم و دیگر شان به b نشاني میكنیم (شكل مقابل).

این در شروع یا اول دو كمیتهاي موثر a و b میباشد. از دلیل $L = 2a + 2b, \quad b = (L/2) - a$

ما به یک کمیت موثر ضرورت داریم، به طور مثال a = x ، این مفاد(سطح A) قرار زیل میباشد:

$$A = ab = x((L/2)-x)$$

این روشن که صدق میکند. $0 \leq x \leq L/2$

ازین دلیل پرابلم مفاد ب.رگ قرار اتي میباشد:

$$y = f(x) = x((L/2)-x)=Max! \quad (0 < x < L/2fh)$$

از بابت $f(0) = f(L/2) = 0$ باید ماکس در بین 0 و $\frac{L}{2}$ موجود باشد براي ماکس ضرور است:

$$y' = f'(x) = \frac{L}{2} - 2x = 0$$

براي ماکس تنها $x = \frac{L}{4}$ زیر سوال میاید.

براي این میباشد: $y'' = f''(x) = -2 < 0$.

در حقیقت یک ماکس در پیش داریم. درین حدهاي علم تخنیک0 و $\frac{L}{2}$ رول بازي.

پس صدق میکند: $a = b = L/4$.

استعمال مشتق در تولید

فعاليت : يک فابريک توليد ميکند. به اين توليدد مصارف ميشود، که اين را تابع توليد مينامیم و ان را به $K(x)$ نشاندي ميکنيم.

چي قسم ميتوانيم، که براي توليد زياد مصرف را پايين بياوريم؟

تابع مصرف $K(x)$ رابطه بين ست توليد و تمام مصارف قايم ميکند.

اگر توليد در حدود Δx زياد شود، پس مصارف هم در حدود ΔK زياد ميشود.

تقسيم تفاضل $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ زياد شدن مصارف وسطي را نشان ميدهد، با تغير **توليد** Δx (تغير وسطي)

در جاي x_0 قيمت تغير لحضوي قيمت مشتق ناميده ميشود. اين به قيمت ليميت $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ تعين ميشود، اين به معني ، که مشتق تابع مصارف K .

تعريف : مشتق تابع مصارف **K(x)** به نام قيمت مشتق**K'(x)** ياد ميشود و يا انرا مصارف قيمت هاي حد**K'(x)** هم مينامیم.

مثال: قيمت تابع مصارف $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$ داده شده باشد.

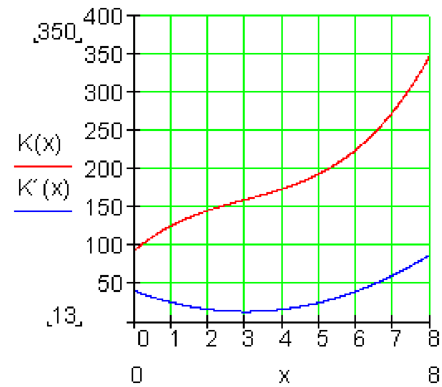
الف: قيمت مشتق را تعين نمايئد، يک جدول مصارف را براي **K(x)** و **K'(x)** ترتيب کنيد و در سيستم قيمت وضعيه گراف انرا بکشيد.

براي **I = [0 ; 6]** قيمت ليميت به وسعت ۱ قدم.

ب : زيادشدن مصارف بسيار کمی را تعين نمايئد:

.

.



تابع زیر را داریم:

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$

قیما مشتق $K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$

جدول قیمتها

x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40

زیاد شدن مصارف بسیار کمیدر رآس پارابول **K'(x)** قرار دارد، یعني در انجاي که دتانجنت **K'(x)** افقي افتاده باشد

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

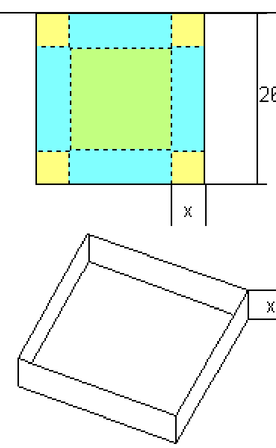
برا ي افقیت تانجنت : $K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$

یاد داشت: این موضوع بالا در موضوع افراطیت روشن شده.

تمرینها : از این کارتون مربع(د کلک کاغذ خځه جوړ) که ۲۶ سانتیمتر درازي ضلع دارد یک بکس مي سازیم که بلندي x دارد.

الف: ترم یک تابع را تعین نمایئد، که حجم بکس V در تابعیت x نشان میدهد.

ب – گراف را رسم نماید و به قسم فقریبي حجم ماکزیمال را تعین نماید.

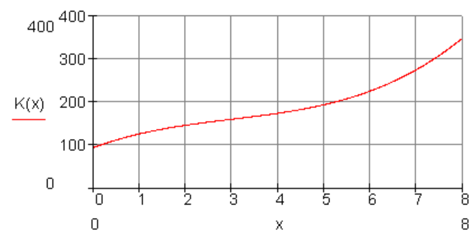


-- --------

سرلیک

- در یک شفاخانه د نرختابع(مصرف تابع)K(x) د ناروغانو ګڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړیکې انځوروي، داسې چې x = 1 د 100 ناروغانو معنی او y = 1 دی معنی چې .1000 € / Tag د روځې زر یورو(.1000 € / Tag) .

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



الف : تابع مصارف در کتاپچه خود بنویسید.

ب: مشتق تابع مصرف به نام مشتق مصرف یا حد مصرف یاد میشود. شما زیادشدن مصرف درتابعیت مریضان تشریح کنید. بلندشدن K(x)). K'(x) را تعین نماید و ګراف شان را در سیستم وضعیه رسم نماید.

پ: به کدام تعداد مریضان زیاد شدن مصارف بسیار به پین میاید؟ این قیمتها را بشارید.

ب : د لګښت تابع مشتق د مشتق لګښت (-مصرف) یا دحدمصرف په نامه یادیږي. تاسو د لګښت زیاتېدنه د ناروغانو په واکوالي یا تابعیت کې تشریح کړئ. (د K(x) جګېدونه). K'(x) وټاکئ او ګراف یې په وضعیه سیستم (پروت- ولاړ-سیستم) کې انځور کړئ)

پ : د ناروغانو د کوم تعداد سره د لګښت زیاتوال خورا کم دی؟ دا قیمتونه وشمېرئ.

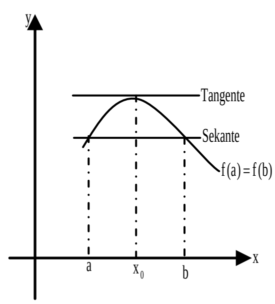
--- ----------

تولګه:

قضیه رول ((Theorem of Rolle)

اگر یک تابع f در اینتروال بند $[a,b]$ متمادي و k دربین a و b واقع باشد، پس درانجا کم از کم یک عدد c در بین $f(a)$ و $f(b)$ موجود است، طوری که $f(c)=k$ است.

قضیه قیمت وسطي مشتق :



اگر تابع y=f(x) بالاي انتروال محدود [a,b] غیر متمادي و بالاي انتروال باز (a,b) قابل مشتق باشد، پس در انجا یک جاي $x\in(a,b)$ موجود میباشد، که براي ان داریم:

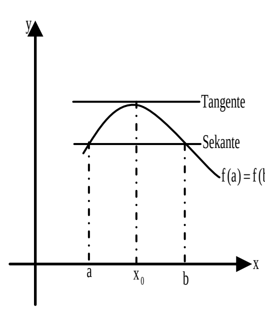
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$

قضیه وسعت یافته قیمتهاي وسطي:

اگر $u=f(x)$ و $v=g(f)$ توابع متمادي بالاي اینتروال محدود[a,b]با شد و بالاي اینتروال باز (a,b) قابل مشتق و $g'(x)\neq 0$ صدق کند، پس براي تمام $x\in(a,b)$، کم از کمه یک جاي $x_0\in(a,b)$ موجود میباشد که ازان بدست مي اید:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

قضیه قیمت وسطي مشتق :



اگر تابع y=f(x) بالاي انتروال محدود [a,b] غیر متمادي و بالاي انتروال باز (a,b) قابل

مشتق باشد، پس در انجا یک جاي $x \in (a,b)$
موجود میباشد، که براي ان داریم:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$

قضیه:

تابع f(x) در اینتروال I قابل مشتق باشد.

-- اگر تابع f(x) در اینتروال I مونوتون متزاید میباشد، پس اعتبار دارد: $f'(x) \geq 0$ به تمام $x \in I$

-- اگر f(x) در اینتروال I مونوتون متناقص میباشد، پس اعتبار دارد: $f'(x) \leq 0$ براي تمام $x \in I$.

- اگر $f'(x) \geq 0$ باشد، براي تمام $x \in I$ ، پس f(x) در اینتروال I مونوتون متزاید میباشد.

- اگر $f'(x) \leq 0$ باشد، براي تمام $x \in I$ ، پس f(x) در ایتروالI مونوتون متناقص میباشد.

- اگر $f'(x) > 0$ باشد، براي تمام $x \in I$ ، پس f(x) در اینتروال I مونوتون متزاید قوي میباشد

- اگر $f'(x) < 0$ باشد، براي تمام $x \in I$ ، پس f(x) در اینتروال I مونوتون متناقص قوي میباشد.

تعریف : تابع$y = f(x)$ که در ساحه $x = x_0$ تعریف شده باشد. یک نقطه اعظمي به همینطور یک نقطه اصغري دارد، اگر براي x که به تمام x_0 نزدیک باشد صدق کند:

$f(x) \geq f(x0)$ به همینطور($\Leftrightarrow$) $f(x) \leq f(x0)$

جمله :

(شرایط ضروري براي یک نقطه افراطي):

اگر یک تابع $y = f(x)$ قابل مشتق یک نقطه افراطي در x_0 داشته باشد پس داریم:

$$f'(x) = 0$$

جمله ۲۰ . ۱۳ : (شرایط تکمیلکننده براي یک نقطه افراطي(بحراني)):

اگر براي یک تابع $y = f(x)$ که در $x = x_0$ دو مرتبه قابل مشتق باشد و داشته باشیم :

$$f'(x) = 0 \quad , \quad f''(x) \neq 0$$

پس تابع $y = f(x)$ درانجا یک اکستریموم دارد.

نقطه اصغري به پیش داریم، اگر داشته بالشیم: $f''(x) > 0$

نقطه اعظمي به پیش داریم، اگر داشته باشیم: $f''(x) < 0$

مشتق دوم: (از مشتق اول):

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$
$$f''(x) = 6x - 4$$

براي $x > \frac{2}{3} \Rightarrow 6x - 4 > 0$ خم بودن چپ(انحني چپ (یامقعر))

براي $x < \frac{2}{3} \Rightarrow 6x - 4 < 0$ خم بودن راست(انحني راست(یامحدب))

تعریف: تابع قابل مشتق $y = f(x)$ در یک ساحه $x = x_0$ یک نقطه انعطاف چپ - راست و به همین قسم نقطه انعطاف راست - چپ دارد، اگر مشتق ان درانجا یک نقطه اعظمي و یا یک نقطه اصغري دشته باشد.

جمله: (شرایط ضرور براي یک نقطه بحراني):

اگر یک تابع قابل مشتق $y=f(x)$ در x_0 نقطه بحراني داشته باشد، پس داريم: $f'(x)=0$

جمله ۲ . ۱۲ : (شرایط ضروري براي نقطه انعطاف):

اگر یک تابع $y = f(x)$ که در $x = x_0$ دو مرتبه قابل مشتق باشد و درانجا یک نقطه انعطاف داشته باشد ، پس بدست مي اید: $f''(x) = 0$

جمله :(شرایط تکمیل کننده براي نقطه انعطاف): اگر براي یک تابع $y = f(x)$که سه دفعه در $x = x_0$ قابل مشتق باشد، داشته باشیم:

$$f''(x) = 0, \quad \text{او} \quad f'''(x) \neq 0$$

پس درانجا یک نقطه انعطاف موجود است. اگر $f'''(x) < 0$ ، پس یک نقطه انعطاف چپ-راست به پیش داریم. براي $f'''(x) > 0$ یک نفطه انعطاف راست- چپ به پیش داریم.

متناظر **Symmetrien** : تعین باید شد، که تابع متناظرمحوري ويا متناظرنقطه است.

براي متناظرمحوري صدق میکند: $f(-x) = f(x)$

براي متناظر ن؛قذه سدق میکند. $f(-x) = -f(x)$

براي هردو حالت بالا باید فقط $x \geq 0$ بررسي شود.

یکنواخت بودن

۱ – اگر $f'(x) \geq 0$ براي تمام $x \in I$ باشد، پس $f(x)$ در اینتروال I یکنواخت متزاید است.

اگر $f'(x) \leq 0$ براي تمام $x \in I$ باشد, پس $f(x)$ در اینتروال I یکنواخت متناقص است.

۲ - اگر $f'(x) > 0$ براي تمام $x \in I$ باشد، پس تابع $f(x)$ در اینتروال I متزاید یکنواخت قوي میباشد.

اگر $f'(x) < 0$ براي تمام $x \in I$ باشد، پس تابع $f(x)$ دراینتروال I یکنواخت متناقص قوي میباشد.

قاعده برنولي و دو لو، پیتال:

Bernoulli and de l'Hospital

اگر در یک ساحه $U(x_0)$ در جاي x_0 توابع $u=f(x)$ و $v=g(x)$ قابل مشتق باشد با $g'(x) \neq 0$ و براي تمام $x \in U(x)$ و x_0 جاي صفر f و g باشد، با $f(x_0)=g(x_0)=0$ ، پس صدق میکند:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

تا که حد طرف راست موجود باشد.

به همین قسم بدست میاید:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

تعریف : مشتق تابع مصارف **K(x)** به نام قیمت مشتق **K'(x)** یاد میشود و یا انرا مصارف قیمت هاي حد **K'(x)** هم مینامیم.

تمرينات فصل:

۱ -- حالت مونوتوني توابع کسري زير را در تابعيت a بدهيد.

$$a)\ \ f(x)=\frac{1}{ax+2} \qquad b)\ \ f(x)=\frac{1}{ax^2+1}$$

۲ -- مطالعهه کنيد، که ايا توابع زير در ساحه تعريف خود مونوتون و يا قوي مونوتون دي.

$$a)\ \ f(x)=\frac{e^x}{2+e^x} \qquad b)\ \ f(x)=2x^5-7$$

۳ -- توابع نا راشنل يا کسري زير را به خواص همنوايي مطالعه کنيد.

$$a)\ \ f(x)=e^{x^2} \qquad b)\ \ f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$$

٤ -- تمام نقاط لوکال انحرافي توابع زير را دريابيد.

$$a)\ \ f(x)=e^{-4x^2} \qquad b)\ \ f(x)=(x^2-3)\cdot e^x$$

$$c)\ \ f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) \qquad d)\ \ f(x)=\ln(x^2+1)$$

٥ -- تمام قيمتاهي افراطي لوکال (مربوط جاي) در انتروال زير دريابيد]

$$-2\pi \le 2\pi.$$

$$a)\ \ f(x)=\sin^2 x \qquad b)\ \ f(x)=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2})$$

٦ -- تمام نقاط لوکال و گلوبال انحرافي توابع زير را دريابيد.

$a)\ f(x)=\sqrt{x^2+x}$ $b)\ f(x)=\sqrt{x^2+3}$

$c)\ f(x)=x-\sqrt{x}$ $d)\ f(x)=3+\sqrt[3]{x^2}$

۷ -- اول قیمت مطلقه را بشمارید و بعدآ تمام قیمتهاي افراذي را تعین نمائید.

$a)\ f(x)=|x|+x^2$ $b)\ f(x)=|x^2+2x-8|$

۸ – از تابع f با $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}, x\neq 1$ نقاط انعطاف را دریابید.

۹ -- براي x1=1 و x2=2 قیمتهاي تابع را بشمارید و هم بلندي تابع f را با

$f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 1.$

۱۰ – در جاي صفر تابع $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ کدام بلندي را دارد.

۱۱ -- گراف $f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 0,5x^2 + x - 4$ بلندي $f'(x) = 1$ در کدام نقاط دارد؟

۱۲---- در جاي x0=-1 میخواهیم قیمت تابع

$f(x) = \dfrac{x^4 - 8x^2 + 16}{x - 1}, \quad (x \neq 1)$ و بلندي گراف را دریابیم.

۱۳ – به کومک قاعده لو، پیتال براي $x\to\infty$ قیمتهاي حد توابع را بشماریم.

$a)\ f(x)=\dfrac{2x^3-x+4}{3x^3+1}$ $b)\ f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{4x^3+3x^2-2x+5}$

۱٤ -- براي توابع زیر بحث تحلیلي را پیش ببرید و گرافهاي شاد را رسم نمیئد.

$a)\ f(x) = -x^3 + x^2 + 4$ $\qquad$ $b)\ f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$

$c)\ f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2$ $\qquad$ $d)\ f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

۱۵ – براي توابع زير بحث مكمل منحني ها را مطالعه و گرافهاي شان را رسم نمائيد.

$a)\ f(x) = \frac{x}{4} - \frac{2}{x^2}$ $\qquad$ $b)\ f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$

$c)\ f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1}$ $\qquad$ $d)\ f(x) = \frac{9}{x^2 + 3}$

۱٦ – جا هاي صفر توابع زير را دريابيد.

$a)\ f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x - 3$ $\qquad$ $b)\ f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$

$c)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ $\qquad$ $d)\ f(x) = x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}$

$e)\ f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ $\qquad$ $f)\ f(x) = x^4 + 6x^3 - 11x^2 - 60x + 100$

۱۷ -- د دريمې درجې تام راشنل گراف د x -محور د $x_1=-2$, $x_2 = 0$ او $x_3=4$ په ټکو کې غوڅوي.

د تابع مساوات كوم دي، كه سربېره پر دې گراف د $P(2,-8)$ ټكي څخه هم تېر شي؟

۱۸ -- د يوه څلورمې درجې تام راشنل تابع د x - محور د $x_1=0,5$ او $x_2=3$ په ټكو كې غوڅوي.

د تابعبرابرون څنگه دی، كه پرسېره پردې گراف د y - محور د $P(0,9)$ په ټكي كې هم لمس كړي.

۱۹ -- د څلورمې درجې د يو تام راشنل تابع گراف د وضعيه قيمت سيستم پيل او له $P(\frac{1}{2} / -\frac{15}{8})$. ټكي تېريږي. د تابع مساوات څنگه دي، كه گراف د x– محور هم د

-- ----

x1=-1 سره لمس کړي او په x2 = 2 کې غوڅ کړي.

۲۰ -- جا هاي صفر توابع زير را دريابيد.

$$a)\ f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 4} \qquad b)\ f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x}$$

$$c)\ f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{x - 0.5} \qquad d)\ f(x)\frac{x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x}{x + 5}$$

۲۱ – از یک تابع مسېي راشنل f با $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx + c}{x + d}$, اعداد ثابت a,b,c و d را دريابيد، اگر با x1=-2, x2=-(1:2) جا هاي صفر واقع باشد و تابع در x=0 يک جاي خالي داشته باشد.

$f(x) = \frac{(x-1)^3}{x}, \quad (x \neq 0)$

۲۳ – تابع کسري راشنل f تابع در x1=1 با سه جاهاي صفر دارد.

به کومک تقسيم يک ساحه مطالع کنيد که در همين ربع جاهاي صفر حرکت دارد و يا جاهاي صفر ربع را تغير ميدهد.

۲٤ -- يک ترم را طوري تعين نمائيد، که جاهاي صفر پريديکي زير توابع را بدهد.

از طريق شمردن جاهاي صفر بنامين که در انتروال $-2\pi \le x \le 2\pi$ واقع باشد.

$$a)\ f(x) = \frac{1}{2}\sin 3x \qquad b)\ f(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$$

$$c)\ f(x) = 1 - \sin^2 x \qquad d)\ f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$$

۲٦ – چرا توابع زير جاهاي صفر نه دارد؟

$a)\ f(x) = \ln(x^2+3)$ $\qquad$ $b)\ f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

$c)\ f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$ $\qquad$ $d)\ f(x) = 1+\sin^2 x$

۲۷ -- چرا ممکن است که یک تابع بسیار جاهاي صفر داشته باشد، ولي به محور y تنها یک جاي صفر دارا میباشد؟

۲۸-- در باره تعداد جاهاي صفر چیزي گفته میتوانید، که براي یک تابع f در ساحه تعریف شان یک تابع معکوس f^{-1} هم موجود میباشد؟

۲۹ـــبا محور y نقاط تقاطع توابع زیر را دریابید.

$a)\ f(x) = x^3+2x-1$ $\qquad$ $b)\ f(x) = (x+1)\cdot\ln(x+1)$

$c)\ f(x) = \dfrac{x^4-3x^2+x}{x+2}$ $\qquad$ $d)\ f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+9}}$

$e)\ f(x) = (x-2)\cdot e^{x-1}$ $\qquad$ $f)\ f(x) = e^{\frac{2}{1-x}}$

۳۰-- از تابع تام راشنل $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ با $a_0 \neq 0$ میتواند دقطه تقاطع با محور y از طریق خواندن تعین شود. بدین رابذه دلایلي را بیاورید .

۳۱ـــبراي x1=1 و x2=2 قیمتهاي تابع را بشمارید و هم بلندي تابع f با

$f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 1$

۳۲ـــتابع $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ در جاي صفر کدام بلندي دارد.

۳۹-- توابع زیر درکدام جاها تانجنت افقي دارد؟

$a)\ f(x) = x^2e^{-x}$ $\qquad$ $b)\ f(x) = \ln(x^2+1)$

۴۰-- براي كدام قيمتهاي a گراف $f(x) = (x + a) \cdot e^x$ در جاي $x_0 = 0$ بلندي ۲ دارا ميباشد؟

۴۱- تمام نقاط اعظمي لوكال توابع زير را نشان دهيد.

$a)\ f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ $\qquad b)\ f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1$

$c)\ f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 15x + 7$ $\qquad d)\ f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$

$e)\ f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x$ $\qquad f)\ f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{10}{3}x^3 + 6x^2 - 2$

۴۳-- یک تابع تام راشنل درجه n-م چند جاهاي لوكال انحراف كه بسيار زياد باشد ميتواند داشته باشد؟

۴۴-- چرا براي تقطه اعظمي شرايط $f''(x) < 0$ ضرور نمي باشد؟

۴۵-- جاهاي لوكال انحرافي توابع زير را تعين نمايئد.

$a)\ f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 + 8x - 1$ $\qquad b)\ f(x) = \frac{1}{3}x^4 + 1$

$c)\ f(x) = \frac{1}{3}x^4 - 2x^2 + \frac{8}{3}x$ $\qquad d)\ f(x) = x^4 - 4$

۴۷-- تمام قيمتهاي افراطي تابع f د ر انتروال جتجو شود.

$-2\pi \leq 2\pi.$

$a)\ f(x) = \sin^2 x$ $\qquad b)\ f(x) = \sin(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2})$

۴۸-- تمام نقاط لوكال و گلوبال توابع زير را پيدا شود.

$a)\ f(x)=\sqrt{x^2+x}$ $b)\ f(x)=\sqrt{x^2+3}$

$c)\ f(x)=x-\sqrt{x}$ $d)\ f(x)=3+\sqrt[3]{x^2}$

- نقاط انعطاف تابع f با $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}, x\neq 1$ را دريابيد.

٥٣-- تمام جاهاي انعطاف در انتروال $0\le x\le 2\Pi$ يافته شود.

a) f(x) = x + sinx b) f(x) = 2(1-sin2x)

٥٤-- توابع زير را در x_0 به قابليت مشتق مطالع شود.

$a)\ f(x)=\begin{cases}\cos x & x\le 0\\ x^2+1 & x>0\end{cases},\quad x_0=0$

$b)\ f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ x^2 & x\ge 1\end{cases},\quad x_0=1$

$c)\ f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ e^{x-1} & x\ge 1\end{cases},\quad x_0=1$

$d)\ f(x)=\begin{cases}\ln x & x\le 1\\ x-1 & x>1\end{cases},\quad x_0=1$

٥٥-- چرا متماديت براي قابليت مشتق شرطضروري، مگر قابليت مشتق براي متماديت لپاره شرط تکميل کننده است؟

٥٦ـــبه کدام دليل توابع تام راشنل براي $x\in R$ قابل مشتق ميباشد؟

٥٩-- تحليل کنيد، که ايا توابع زير در ساحه تعريف خود دقيقآ مونوتون ميباشد.

$a)\ f(x)=\dfrac{e^x}{2+e^x}$ $b)\ f(x)=2x^5-7$

٦٠-- در کدام ساحه توابع تام راشنل زير يک خمي چپ دارد و درکدام خمي راست دارد.

$a)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 2$ $\qquad b)\ f(x) = -2x^3 + 3x^2 - x - 4$

٦١-- حالت توابع زیر را تحلیل نمائید، اگر $|x| \to \infty$ به سوي برود.

$a)\ f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x - 5$ $\qquad b)\ f(x) = -3x^4 + x^3 - 2x^2 + x$

$c)\ f(x) = \frac{1}{3}x^5 - x + 6$ $\qquad d)\ f(x) = -\frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$

$e)\ f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}$ $\qquad f)\ f(x) = -x^3 - x^2 - x - \frac{1}{3}$

٦٢ چرا براي $x \to +\infty$ به طور ساده در باره لیمیت پیش از پیش چیزي گفته نمي تواند شود:

$a)\ f(x) = x^3 \cdot \frac{1}{\ln x}$ $\qquad b)\ f(x) = x \cdot e^{-x}$

٦٣-- با اکسپوننت جفته توابع تام راشنل کدام قسم سیومتري دارد؟

٦٤-- بااکسپوننت طاق یک تابع تام رشنل فقط در جاي با نقطه شروع نقطه سیومتري میباشد، که قیمت مطلق صفر شود؟

٦٥-- توابع زیر خواص سیومتري که در اساس خوانده شده نه دارد. نشان دهید که این باز هم سیومتریک میباشد.

$a)\ f(x) = (x+2)^2$ $\qquad b)\ f(x) = 1 + \frac{1}{x}$

$c)\ f(x) = -(x+1)^2 + 3$ $\qquad d)\ f(x) = 2 + \frac{1}{x-4}$

٦٦-- توابع تام راشنل به محدودیت مطالعه نمائید.

٢٠٠ تمرینونه

$a)\ f(x)=x^2-2x+4$ $b)\ f(x)=3x^4-4x^3+12x^2-24x$

$c)\ f(x)=-(x+3)^2+1$ $d)\ f(x)=x^3-2x+1$

۶۷-- به کومک قاعده دو لو، پیتال براي $x\to\infty$ قیمت لیمیت توابع کسري راشنل شمرده شود.

$$a)\ f(x)=\frac{2x^3-x+4}{3x^3+1} \qquad b)\ f(x)=\frac{x^2+2x-3}{4x^3+3x^2-2x+5}$$

۶۸-- براي تابع راشنل تام نقاط انعطاف و نورمال یا عمود را بنویسید.

$$a)\ f(x)=-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3} \qquad b)\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+2x+10$$

۶۹-- نقاط انعطاف مساوات تابع f_t را بنویسید.

$$f_t(x)=\frac{4}{3}t^2x^3+3tx^2+3x \quad (t\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$$

۷۰-- براي توابع زیر بحث تحلیلي منحنیها را کنید و گرافهاي شان را رسم نمائید.

$a)\ f(x)=-x^3+x^2+4$ $b)\ f(x)=-\dfrac{1}{9}x^4+\dfrac{2}{3}x^2$

$c)\ f(x)=x^3+3x^2-2x-2$ $d)\ f(x)=x^4-2x^2+1$

تجزیه کردن به کسور قسمي

الف) کسور اصلي، که مخرج شان ضریبهاي مختلف خطي دارد.

اساس: اگر پولینوم مخرج $P_n(x)$ یک پولنوم اصلي $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ به ضریبهاي مختلف خطي $P_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ ...\ (x-x_n)$ قابل تجزیه میباشد، پس پولینوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ به طور زیل $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}\ ...\ \frac{N}{x-x_n}$ عوض میشود.

به این قسمي شکل تجزیه به کسور قسمي نامیده میشود، اعداد A,B,C,...,N اعداد حقیقي میباشد.

فعالیت :در ورودي بالا نشان دهید،که این کسور قسمي در کجا تعریف دارد؟

- براي یک کسر دلخواه تجزیه یک کسر قسمي و ساحه تعریف شان داده شود.

مثال: پولینوم اصلي $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ به کسور قسمي تجزیه نمائد.

حل : حل او ل مساوات $x^3-4x^2-7x+10=0$ که $x_1=1$ است از راه امتحان پیدا میکنیم.

تقسيم پولينوم $(x^3 - 4x^2 - 7x + 10):(x-1) = x^2 - 3x - 10$ ما را به تجزيه $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x^2 - 3x - 10)(x-1)$ رهنمايي ميكند مساوات $x^2 - 3x - 10$ حالا حلهاي ديگري دارد: $x_2 = -2$ و $x_3 = 5$.

بدين اساس داريم: $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = (x-5)(x-1)(x+2)$.

تجزيه كسر اصلي $\dfrac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$ به كسورقسمي:

از طريق قاعده شمردن پولينوم ميتواند كسر داده شده به سه قسمت جمع كسور قسمي تجزيه شود، مخرجهاي شان ضريبهاي خطي ميباشد:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$$

جمع كسور قسمي با وسعت:

د غزېدنې سره د ټوټه کسر جمعه:

مخرج اصلي مخرج پولينوم كسر تجزيه شده ميباشد.

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{A(x-1)(x+2) + B(x-5)(x+2) + C(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{Ax^2 + Ax - 2A + Bx^2 - 3Bx - 10B + Cx^2 - 6Cx + 5C}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$$

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{(A+B+C)x^2 + (A - 3B - 6C)x + (-2A - 10B + 5C)}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10}$$

تعين قيمت صورتها A ,B و C از طريق مقايسه ضريبها:

در كسر مخرجهاي مساوي كفايت ميكند كه صورتها با هم مقايسه شود. درين حالت بايد تواتنهاي ضريبهاي مساوي، به اين معني كه x^2, x و x_0 بايد مساوي باشد.

$$A + B + C = 4 \qquad \text{I}$$
$$A - 3B - 6C = -1 \qquad \text{II}$$
$$-2A - 10B + 5C = 39 \qquad \text{III}$$

ضرب مساوات I و II به فاکتور 2 و جمع هر دو با III سه مساوات بالا را به دو مساوات پاین با دو متحول کوتاه میسازد:

$$-8B = -72 \qquad \text{V}$$
$$-16B - 7C = -41 \qquad \text{IV}$$

مساوات IV.V مساوي کيشود به: $-24B = -72 \Rightarrow B = 3$

جا به جا کردن $B = 3$ در V : $-16.3 - 7C = -41 \Rightarrow C = -1$

جا به جا کردن د$B = 3$ و $C = -1$ در I : $A + 3 - 1 = 4 \Rightarrow A = 2$

به جا به جا کردن در فرمول تجزيه کسر قسمي مطلوب بدست مي ايد:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x-5} + \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

ما اين را به یک امتحان میتوتنيم امتحان کنيم.

امتحان:

$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{(x-1)(x+2) + 3(x-5)(x+2) - 1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)}$$
$$\frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} = \frac{4x^2 - x - 39}{x^3 - 4x^2 - 7x + 10} =$$

تمرينها:

کسور پولينومهاي اصلي پاين را به کسور قسمي تجزيه نمائند.

$$a)\ \frac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x+6}\ ,\ b)\ \frac{x^2+1}{x^3-x}\ ,\ c)\ \frac{4x+10+12}{x^2+6x+8}$$

كسور پولينوم اصلي، كه مخرج شان فاكتورهاي مساوي خطي دارد.

اگر مخرج $P_n(x)$ پولينوم اصلي $\frac{P(x)}{P_n(x)}$ توان فاكتور خطي $x-x_0$ يعني $\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)^n}+...+\frac{N}{(x-x_0)^n}$ ميباشد، پس براي اين فاكتورهاي خطي پولينوم شكل زير را به خود اختيار ميكند:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$$

كسور قسمي تمام فاكتورها خطي كه به طور ساده بدست امده به شيوه(شكل) اشنا داده ميشود.

مثال:

براي كسر پولينوم اصلي $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ تجزيه به كسور قسمي داده شود.

تجزيه مخرج به فاكتورهاي خطي:

حل اول $x_1=1$ پولينوم $x^3-4x^2+5x-2=0$ از طريق امتحان دريافت ميشود.

تقسيم پولينوم $(x^3-4x^2+4x-2):(x-1)=x^2+3x+2$ مارا به تجزيه زير رهنمايي ميکند.

$$x^3-4x^2+4x-2=(x^2+5x-2)(x-1)$$

مساوات $x^2-3x+2=0$ حل $x_2=1$ و $x_3=2$ را دارد. پس ازين بابت براي مخرج حل دبل است: $x^3-4x^2+5x-2)=(x-2)(x-1)^2$

شروع کسر قسمي:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

جمع کسرقسمي از طريق وسعت (امتداد):

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{x^3-4x+5x-2}$$

قيمت صورتهاي A,B و C از طريق مقايسه کردن ضريبها:

$$\begin{array}{ll} A+B=3 & \text{I} \\ -2A-3B+C=-6 & \text{II} \\ A+2B-2C=2 & \text{III} \end{array}$$

ضرب مساوات II به 2 و جمع به III همراه با I دوو مساوات را ميدهد به دو متحول:

$$\begin{array}{ll} A+B=3 & \text{I} \\ -3A-4B=-10 & \text{II} \end{array}$$

ضرب I به 4 و جمع شان به IV : A = 2

جا به جا کردن A = 2 در I : $2+B=3 \Rightarrow B=1$

چا به جا کردن A = 2 و B = 1 در III : $2+2.2-2C=2 \Rightarrow C=1$

از فرمول تجزيه کسور قسمپي بدست مي ايد:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

تمرينونه:

تجزيه کردن پولينوم اصلي اتي را به کسور قسمي بدهيد:

$$a)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8} \qquad b)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$$

$$c)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1} \qquad d)\ -\frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$$

پ) کسور پولينوم اصلي، که مخرج شان به فاکتور هاي خطي تجزيه نمي شود.

اساس:

اگر پولينوم مخرج $P_n(x)$ يک پولينوم اصلي کسري $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ ديگر به ضريب حقيقي تجزيه نه شدني ax²+bx+c در پيش داريم، پس براي تجزيه کردن به شکل $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ اورده شود.

مثال:

براي كسر پولينوم $\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ تجزيه به كسور قسمي داده شود.

تجزه مخرج به ضريبها خطي :

حل اول $x_1=-1$ مساوات $x^3+3x^2+6x+4=0$ از طريق امتحاني درياف ميشود

تقسيم بولينوم $(x^3+3x^2+6x+4):(x+1)=x^2+2x+4$ ما را به پاين رهنمايي ميكند:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

ازين بابت كه مساوات x^2+2x+4 حل حقيقي نه دارد، پس در ساحه اعداد حقيقي تجزيه زيادي ناممكن است.

ازين بابت كسر پولينوم شكل زير را دارا ميباشد: $\frac{Ax}{x^2+2x+4}$

يكجا با كسر فورم $\frac{c}{x+1}$ مارا به تجزيه كردن كسرقسمي ميبرد:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

ازز طريق امتداد جمع كسور قسمي:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

تعین ضریبها A,B,C از طریق مقایسه کردن:

A+C = 5 I

A + B + 2C = 8 II

B + 4C = 9 III

از طریق تفریق III از مساوات II همراه با I دو مساوات بدست مي ايد، که دو متحول را دارد:

A − 2C = 5 IV

A + C = 5 I

مساواتIII منقي از مساواتII : $-3C = -6 \Rightarrow C = 2$

با جا به جا کردن C = 2 در I: $A + 4.2 = 9 \Rightarrow B = 1$

با جا به جا کردن C = 2 در III : $B + 4.2 = 9 \Rightarrow B = 1$

اگر این بالا را در فرمول تجزیه کردن جا به جا کنیم، پس به دست میاید:

$$\frac{5x^2 + 8x + 9}{x^3 + 3x^2 + 6x + 4} = \frac{3x + 1}{x^2 + 2x + 4} + \frac{2}{x + 1}$$

تمرین:

تجزیه پولینومهاي کسري رير را به کسور قسمي بدهید:

$$a)\ \frac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5} \qquad b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$$

$$c)\ \frac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x} \qquad d)\ \frac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$$

ج) کسور پولينوم نا اصلي

اگر درجه پولينوم صورت يک پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ از درجه پولينوم مخرج بزرگ باشد، پس اين پولينوم به يک پولينوم ناطق تام و يک پولينوم کسري اصل ميتواند تجزيه شود.

مثال:

پولينوم کسري $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ به کسور قسمي تجزيه نمائيد.

درجه صورت پولينوم سه است و از مخرج دو. پس بدين اساس يک پولينوم نا اصلي را در پيش داريم.

تقسيم پولينوم:

$$(3x^3-6x^2-20x-1):\ (x^2-2x-8)=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$$

$$\frac{-(3x^3-6x^2-24x)}{4x-1}$$

براي کسر باقيمانده $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$ عمليه تجزيه به کسور قسمي را به پيش ميبريم.

مخرج را به ضريبهاي خطي تجزيه مينمايم:

براي مساوات $x^2 - 2x - 8 = 0$ حل $x_1 = -2$ و $x_2 = 4$ را داريم.

پس است: $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$.

براي تجزيه کسور قسمي جا به جا ميکنيم:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$$

جمع کردن کسور قسمي از طريق امتداد:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

تعين A و B به کومک مقايسه کردن ضريبها:

$$A + B = 4 \qquad \text{I}$$

$$2A - 4B = 4 \qquad \text{II}$$

ضرب I با 2 و تفريق از II : $6B = 9 \Rightarrow B = \frac{3}{2}$

در II جا به جا کردن: $2A - 4\frac{3}{2} = -1 \Rightarrow A = \frac{5}{2}$

دست اورد وسطي : $\frac{4x-1}{x^2-2x-8} = \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{(2(x+2)}$

متحول را تجزيه کردن به کسور قسمي شکل زير را به خود اختيار ميکند:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8} = 3x + \frac{5}{2(x-4)} + \frac{3}{2(x+2)}$$

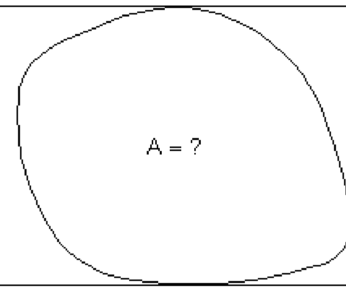
تمرینونه:

تجزیه به کسور قسمي کسور زیر را بدهید.

$$a)\ \frac{3x^2+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8} \qquad b)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$$

$$c)\ \frac{2x^3+x^2}{x^3-1} \qquad d)\ \frac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$$

پيشگفتار براي شمردن انتيگرال



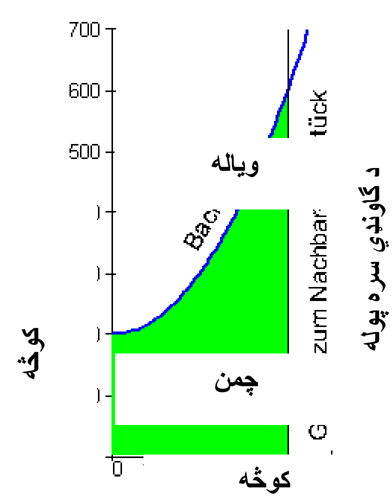
به يونانيهاي قديم شمردن سطح محدود از منحني معلوم بود. اين شمردن مستق، که ما حالا به ان سروکار داريم، بسيار پسان (رد اواخر قرن هفده) از سوي علما علوم طبيعي لايبنيځ و نيوتن اختراع شد.

فعاليت:

- براي شمردن سطح محدود شکل بالا را پيشنهادها کنيد.
- ايا شما به شمردن اين قسم مستوي اشنايي داريد؟
- ايا شما مساحت مستوي نزديک به اين شمردي ؟
- اگر بلي پس انرا بنويسيد.

-اين مستوي بالا از طريق قيمت وضعيه به چهار حصه تقريبآ مساوي تقسيم کنيد و و در باره انتيگرال ان فکر کنيد.

مثال:



اين چمن تصوير شده به فروش ميرسد. از طرف بالا به جويچه محدود است ، از طرف راست زمين همسايه است، طرف چپ کوچه و از طرف پايين هم زريعه يک کوچه محدود ميباشد.

براي اين که چمن فروخته شود بايد سطح مستوي شناخته شود.

سطحي فروشنده بايد تقريبا پوره مگر به هيچنگاه کم شمرده نه شود. گيرنده هم براي خود شان فکر ميکند که پول بايد

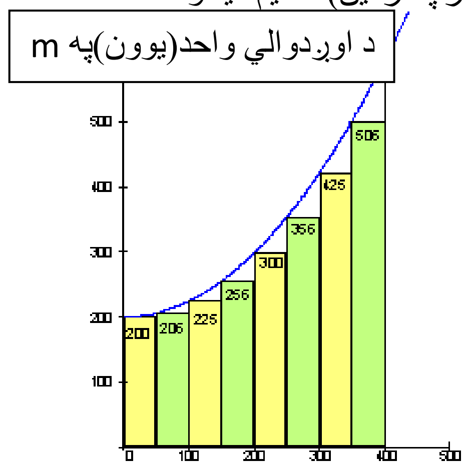
تاديه شود، مگر به هيچنگاه قيمت زمين
بايد از اصل زياد شمرده نشود.

بعد ازين كه فروشنده و گيرنده سطح چمن را تعين كرد، هر دو براي تاديه پول يكجا ميشود و به اين مطلوب به موافقه ميرسد.

جويچه مساوات تا بع $f(x)=\frac{1}{400}x^2+200$ را دارد.

حل ممكنه براي گيرنده.

زمين به طور زيل به قسمتهاي دراز (پارچه زمين) تقسيم ميشود



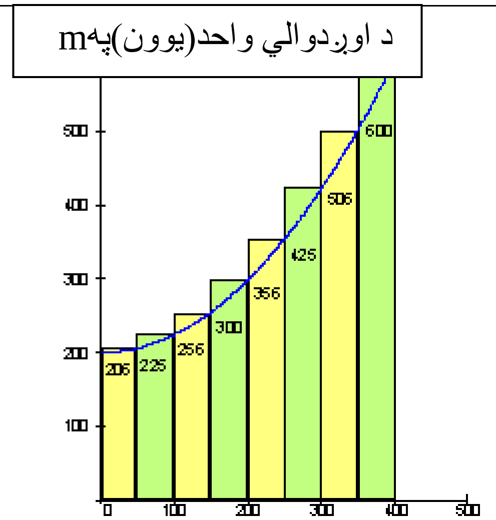
هر قسمت(زمين مستطيلي)50m عرض دارد و بلندي در رسم داده شده دارد. سطحي تمام مستوي را يكجا ميشماريم.

$$200\cdot 50=10000$$
$$206\cdot 50=10300$$
$$225\cdot 50=11250$$
$$256\cdot 50=12800$$
$$300\cdot 50=15000$$
$$256\cdot 50=12800$$
$$425\cdot 50=21250$$
$$506\cdot 50=25300$$
$$\underline{123700}$$

براي گيرنده تمام سطحه تقريآ ***123700 m²*** است.

حل ممكنه براي فروشنده :

هر قسمت(زمين مستطيلي)50m عرض دارد و بلندي در رسم داده شده دارد. سطحي تمام زمين مستوي را يكجا ميشماريم.



$$206 \cdot 50 = 10300$$
$$225 \cdot 50 = 11250$$
$$256 \cdot 50 = 12800$$
$$300 \cdot 50 = 15000$$
$$356 \cdot 50 = 12800$$
$$425 \cdot 50 = 21250$$
$$506 \cdot 50 = 25300$$
$$600 \cdot 50 = 30000$$
$$\underline{143700}$$

براي فروشنده مساحت تمام مستوي تقريباً $\boldsymbol{143700\ m^2}$ است.
فروشنده و گيرنده هر دو بايد به قيمت وسطي بيايد، اين به معني كه هر دو شان قيمت وسطي با هم بقبولاند. يعني قيمت وسطي زمين، كه $\frac{123700 + 143700}{2} = 133700\ unt^2$ است:
اين پسانتر در حصه انتيگرال معين شمرده خواهد شد، كه قيمت حقيقي $133333.\bar{3}m^2$ ميباشد.
حساب كردن اين قسمي براي گيرنده ،، جمع پاين،، ناميده ميشود.
حساب كردن اين قسمي براي فروشنده ،،جمع بالاي،، ناميده ميشود.
اين قيمت اصلي زمين كدام جا در وسط واقع است.
براي اين بايد يک راه ره بيافيم، كه ازان قيمت حقيقي را بدست بياوريم. براي اين كار يک كمي راه امادگي مووجود است.

تمرينها

گراف تابع $3x^2+1$ را رسم كنيد.

دربين انتروال $[1,3]$ سطح تابع را نشاني كنيد.

جمع بالا سطح داده شده را تشكيل كنيد.

جمع پاين سطح را تشكيل كنيد.

شمردن انتیګرال Integralcalculation

پیشگفتار براي تابع مستوي:
این مفهوم هندسي انتیګرال هم است.
در سیستم قیمت وضعیه در شروع ګراف یک خط را رسم میکنیم. میخواهیم که سطح را دریابیم، که بین ګراف تابع و محور x در اختیار یا تابعیت x وافع باشد.

انتیگرال(معین) ریمن

دلته دې یوه ځېره راوړل (د یوه ډنډ او یا.....)

فعالیت:

- یک شکل دلخواه هندسي را رسم کنید، که به ترتیب از سه، پنج و هفت خط محدود باشد. سطح این اشکال را به قسم که به ان اشنا هستید بشمارید.
- در سیستم قیمت وضعیه یک منحني را رسم کنید و بکوشید، که مساحت سطح را بین منحني و محور x قرار دارد، به طور تقریبي دریابید.

یادداشت: انتگرال چیست؟

انتیگرال گرفتن Integration به معني یکجا کردن است، مثل که یک شخص در یک اجتماع خارجي یکجا میشود یعني خواص اجتماع بیگانه را به خود میگیرد، یعني این شخص به این اجتماع زیاد میشود. درینجا هم این موضوع به همین معني به مطالع پیش میشود، که چه قسم از یک تابع درجه پاین به تابع درجه بالا میرویم.

تعريف هندسي انتيگرال

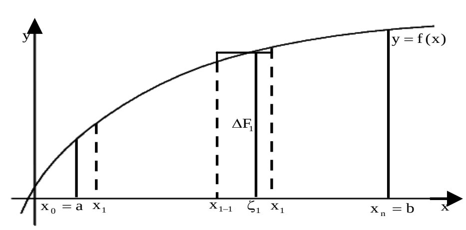
مستوي جهتدار- تعريف انتيگرال:

اگر يک تابع f داشته باشيم، پس دربين محور x و تابع سطحي که شمردن ميشود از راه انتيگرال صورت ميگيرد. درين مستوي طرف بالا محور x مستوي علامه مثبت و طرف پاين محور x علامه منفي دارد.

تعريف تحليلي:

تعريف: يک تابع f داده شده، که بالاي يک انتروال [a,b] تعريف شده، پس از a تا b از انتيگرال تابع به محور x در بين گراف f و خط x=a و x=b يک مستوي جهتدار ميفهميم.

درين حصه ميخواهيم، که به کلمه انتيگرال توسعه دهيم. از اندازه کردن سطح ميتوانيم به شمردن انتيگرال بيايم، ازين بابت انتيگرال شمردن عمليه معکوس مشتق ميباشد.

	يک تابع $y = f(x)$ داريم. ميخواهيم مساحتت را بشماريم که دربين گراف اين تابع و نقاط $x_0 = a$ و $x_n = b$ بالاي محور x موقعيت دارد طور که ($f(x)>0$) باشد. خيره (۱ . ۱)

براي حل اين وظيفه انتروال [a,b] را به n پارچه(نا ضروري) برابر انترو الهاي $[x_{i-1}, x_i]$ تجزيه ميکنيم.

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} x_i < \ldots < x_n = b$$
$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

.

در اينتروال $[x_{i-1}, x_i]$ دلخوا $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ تعين ميکنيم.

سطح در بين $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$ سطح مستطيل پاين موجود است.

$$\Delta F_i(x) = f(\xi_i).\Delta x_i ;............................(4,1)$$

از تمام سطوح کوچک قسم مستطيلي بالا، به طريق جمع تقريبآ تمام سطح مطلوبه بدست مي ايد.

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \sum f(\xi)\Delta x_i ;..............................(4,2)$$

اين تقرب تاحدي بهتر ميشود تا حدي که تقسيم اينتروال [a , b] نازک ميشود يعني ($\max \Delta x \to 0$ ، تا هر حد که شمار اجزا جمع زياد شود ($n \to \infty$) .

اگر (٤ . ٢) هميشه ليمت F داشته باشد، مرب،ط به اين نه که اينتروال [a , b] چي طور تقسيم شده و $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ چي قسم تعين شده، پس f (x) در اينتروال [a,b] قابل اينتيگرال ميباشد. اين حالت، به طور مثال، تمام اجزا پارچه ، متمادي و محدود توابع y = f (x) ميباشد.

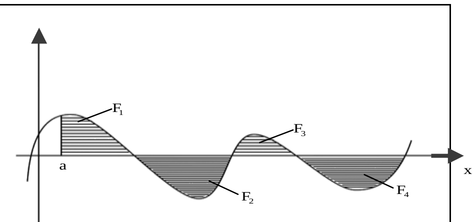
> تعريف) ٤ . ١ : اگر ليميت
>
> $$\lim_{x \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F;(\max \Delta x \to 0),........(4,3)$$
>
> در اينتروال [a , b] موجود باشد، پس اين را انتيگرال معين f (x) مينامیم يا
>
> F- Riemann (سطح ريمن). درينجا a حد پاين انتيگرال و b حد بالاي انتيگرال ناميده ميشود و [a,b] انتروال انتيگرال و f (x) (Integrand) (اينتيگرال شدني)) و x متحول انتيگرال (Integrationsvariable) ناميده ميشود.

ياد داشت۱ : متحول ايتيګريشن ميتواند دلخوا تعين شود(علامه شان دلخوا تعين شود.

داريم: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$

ياد داشت۲ : تعريف ٤ . ۱ بالا ميتواند به حالت کشيده شود، درجاي که f (x) > 0 صدق نکند . اگر f (x) < 0 باشد پس اين اينتيګرال معين باز زير محور x سطي منفي دارد .

اگر منحني y = f (x) (ش ۲,٤) در انتروال انتيګرال ګرفتن محور x را قطع کند پس اين فرمول مقابل به سطحي پاين صدق ميکند: $F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 \ldots$



متصل تعريف ٤ . ۱ جمله زير را داريم:

جمله٤ . ۱ : اگر f (x) در [a , b] قابل اينتيګرال باشد و $c \in [a,b]$ باشد، پس صدق ميکند:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

براي اين که مساوات بالا به قيمتها c کشيده پتوانيم، بايد c در بيرون اينتروال [a,b] افتيده نه باشد. يعني بايد نقاط a,b و c در يک اينتروال واقع باشد، که دران تابع f ( ) x قابل اينتيګرال باشد. ما تعريف پاين را داريم :

پيژند يا تعريف ٤ . ۲ : اگر f (x) در يک انتروال محدود[a, b] قابل اينتيګرال باشد، پس صدق ميکند: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

از روي تعريف ٤ . ١ هميشه صدق ميكند: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

تمرينها:

ګراف توابع زير را رسم كنيد و در بين ګراف و محور x جهت سطح مثبت و منفي را نشاني كنيد:

الف : $4x^3 + 5x^2 + x + 6$ ،

ب: $x^2-4x-+16$ ،

پ: $x^4 + 5x^2 - 2x - 7$

تابع اساسي يا اوليه

$$F'(x) = f(x)$$

فعاليت

- در مساوات بالا $F(x)$ چي طور نوسته كرده ميتوانيم؟

- F (x) نسبت به f (x) چي ناميده ميشود و برعکس f (x) از F (x) چي ناميده ميشود؟

در هردو سوال بالا فکر کنيد، که پاين نتيجه شان ميباشد:

براي اينکه روابط دربين انتيگرال گرفتن و مشتق گرفتن بدست بياوريم، کلمه تابع اوليه را قرار زيل تعريف ميکنيم:

تعريف 3.2:

تابع y = f (x) در يک اينتروال باز I تعريف باشد. هر يک تابع F (x) درانجا موجود وقابل مشتق ميباشد، که شرايط(F' (x) = f (x را صدق کند، تابع اساسي، ساده و يا

اوليه f (x) ناميده ميشود.

به طور ساده ديده ميشود که براي يک تابع f (x) نه تنها يک تابع F (x) موجود است:

به طور مثال توابع $F_0(x) = x^2,\ F_1(x) = x^2 + 1,\ F_2(x) = x^2 + 2$ به صورت عموم F (x) $= x^2 + C$، که تمام اينها مشتقهاي مساوي f (x) = 2x دارد.

دست اورد ثبوت بالا که کسي چطور تابع اوليه يک تابع متمادي f (x) را پيدا ميکند، به طور زير ميباشد:

جمله : y = f (x) در يک اينتروال باز I تابع متمادي باشد، پس براي $a \in I$ ،

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

يک تابع اوليه براي تابع اوليه f (x) است، براي تمام $c \in I$.

هر تابع اوليه ديگر تابه $f(x)$ شكل زير را داراميباشد:

$$F(x) = F_a(x) + C, \qquad C \in R$$

جواب : ثبوت ميكنيم كه $Fa(x)$ تابع اوليه $f(x)$ ميباشد. براي ثبوت اين نشان ميديهيم كه $Fa(x)$ براي تعريف بالا صدق ميكند. مشتق $Fa(x)$ براي $x \in I$ و $x \neq a$ طور زير ميباشد.

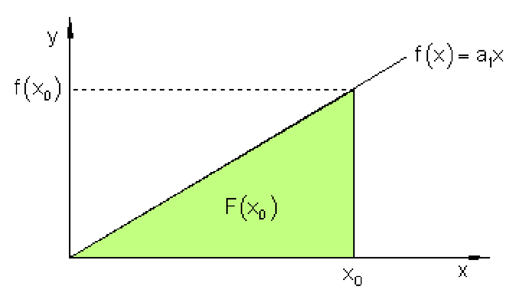
$$\begin{aligned} F_a'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt \right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \int_a^{x+h} f(t)dt \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(\xi), \ \ \xi \in [x, x+h] \end{aligned}$$

(از روي ليميت قضيه قيمت وسطي يک ξ اين طوري موجود ميباشد)

(از روي متماديت $(f(\xi) \to f(x)$ $\qquad = f(x)$

مستوي و تابع اوليه:

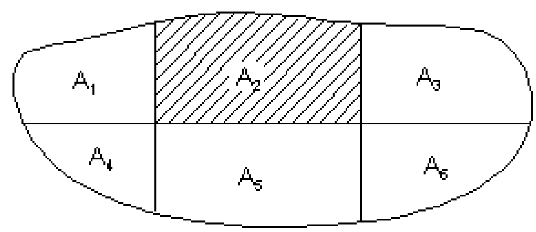
براي تابع سطح پيشگفتار:

 	گراف تابع $f(x) = a_1 x$ در شروع سيستم قيمت وضعيه يک خط ترسيم ميكند. ما ميخواهيم يک تابع را پيدا كنيم، كه در بين گراف و محور x ، در تابعيت x_0 مستوي را نشاني كنيم. نظر به اين كه مستوي بدست امده يک مثلث است، پس حل شان به فرمول سطح

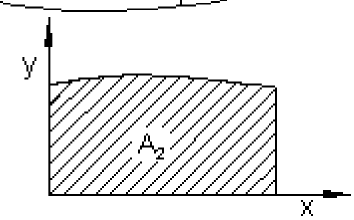
$F(x_0)=\frac{x_0\cdot f(x_0)}{2}$ به $f(x_0)=a_1x_0$ قرار زیل میباشد: $F(x_0)=\frac{x_0\cdot a_1x_0}{2}=\frac{a_1}{2}x_0^2$	مثلث $A=\frac{g\cdot h}{2}$ ساده دریافت میشود: براي مسئله ما متحول را قرار زيل تغير ميديهيم: $A\to F(x_0);\ g\to x_0;\ h\to f(x_0)=a_1x_0$

تابع $F(x_0)$ سطح دربین گراف و متحول x که در تابعیت x_0 باشد تشریح میکند. ما این تابع را تابع مستوي مینامیم.

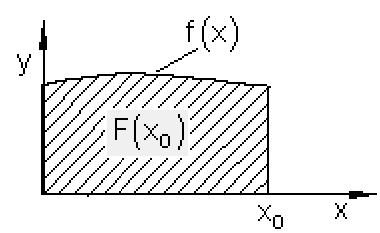
پرابلم سطح:



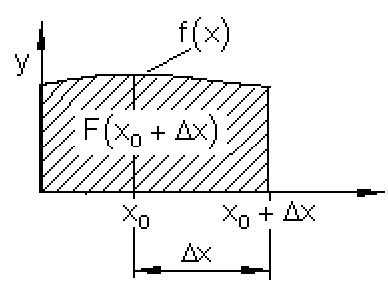
هر مستوي محدود از منحنيها در قدمهاي متناهي، که دران فقط یک یک خطم محني به بين ميايد، تمام محدوديتهاي ديگر خطوط مستقيم ميباشد.



هر یک قطعه مستوي(به طور مثال درينجا **A_2**) ميتواند در سيستم قيمت وضعيه به شکل یک سطح ترسيم شود، که دربين خط منحني و محور افقي قرار دارد.

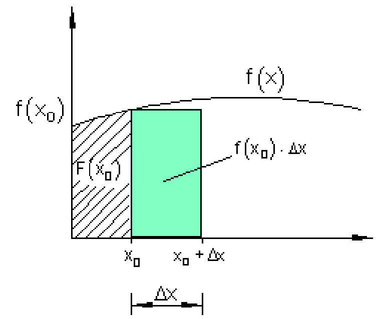


اگر گراف خطوط منحني محدود از تابع متمادي **f (x)** باشد، پس سوال به وجود ميايد که ايا یک تابع موجود است که **x_0** محور افقي را به سطح **$F(x_0)$** تنظيم کند مثل که در مثال شروع امده بود.

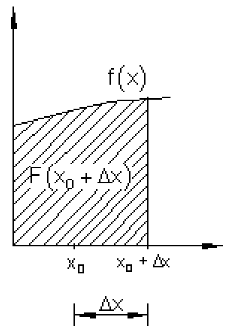


اگر به اين قسم یک تابعF و سطح **$F(x_0)$** که تنظيم محور افقي**x_0** موجود باشد، پس بايد قيمت محور افقي $(x_0+\Delta x)$ به سطح $F(x_0+\Delta x)$ تنظيم شود.

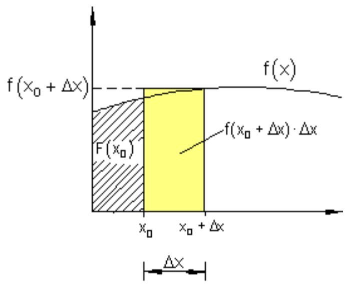
محدود کردن مستوي در مستطيل:



سطح نشاني شده زير منحني از سطحه از سطح راستين کوچک ميباشد.



$F(x_0+\Delta x)$
سطح واقعي يا حقيقي است.



سطح نشاني شده زير منحني از سطح حقيقي بزرگ ميباشد.

اگر مستطيلهاي سطح هر قدر کوچک شود، به همان اندازه مساحت شان از سطح اصلي کم ميشود. از روي رياضيات طولي به طور زيل ميتواند فرمول بندي شود:

$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x$	$F(x_0+\Delta x)$	$F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$

اين ما را به نامساوات زير رهنمايي يا تشويق مينمايد

$$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x) \le F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad | F(x_0)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x)-F(x_0) \le f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |:\Delta x$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) \le \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \le f(x_0+\Delta x)$$

ليميت را ميگيريم:

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0) \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)$$

$$f(x_0) \le F'(x_0) \le f(x_0)$$

$$f(x_0) = F'(x_0) = f(x_0)$$

پس داريم: $\underline{\underline{F'(x_0)=f(x_0)}}$

.

این به معني، که مشتق سطح F(x) به قیمت منحني تابع $f(x_0)$ در جاي x_0 برابر است.

ما مینویسیم: $F'(x_0)=\frac{dF(x_0)}{dx}=f(x_0)$

یا $\boxed{F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)}$

اگر ما موفق شویم این قسم یک تابع F(x) را دریابیم، که مشتق تابع محدود f(x) میباشد، پس F(x) تابع سطحي میباشد.

اگر ما یک تابع را از تابع اولیه جدا کنیم، پس اینرا مشتق گرفتن مینامیم. پیداکردن تابع یک مستوي به طور روشن برعکس این عمل میباشد. فورمال میتوان گفت:

تابع مساحت یک مستوي، که بیافیم، این معني را دارد که یکجا کردن یا انتیگرال را مي شماریم.

به مثال تابع یک توان ساده از روي احساس میتواند یک طریقه پیدا شود، که این را به چه قسم انتیگرال میگیریم.

تابع توان : $f(x)=x^3 \quad \Rightarrow f'(x)=3\cdot x^{3-1}=3x^2$

مشتق به معني که: اکسپوننت به یک کوچک میشودو پوتنځتابع به پوتنځ کهنه ضرب میشود.

انتیگرال گرفتن (زیاد کردن یا مشترک شدن) پب این معني که: اکسپوننت به یک بلند میشود و تابع پوتنځ به اکسپوننت نو تقسیم میشود..

این را همین حالا امتحان میکنیم:

توانتابع: $f(x)=3x^2 \;\Rightarrow F(x)=\frac{3}{2+1}x^{2+1}=\underline{\underline{x^3}}$

تابع **F(x)** تابع اولیه تابع f(x) نامیده میشود، زیرا که f(x) از **F(x)** بدست مي اید.

تمرین: - نشان دهید، که توابع F و G توابع اولیه همان تابع f میباشد.

$$a)\;\; F(x)=x^3+x+4 \qquad , \qquad G(x)=x^3+x+1$$

$$b)\;\; F(x)=(x-3)^2 \qquad , \qquad G(x)=x^2-6x+4$$

$$c)\;\; F(x)=\frac{x+1}{x+2} \qquad , \qquad G(x)=\frac{3x+5}{x+2}$$

$$d)\;\; F(x)=1+\sin x \qquad , \qquad G(x)=\sin x$$

انتيگرال نامعين

$$\int f(x)\,dx$$

فعاليتونه:

-- در شکل بالا $\int$ به چي مفهوم است.

-- در بخش گزشته ما F(x) را چي f(x) ناميديم و حالا $F(x)=\int f(x)\,dx$ به تابع اوليه چي فرق خواهد داشت؟

خواهيم ديد، که انتيگرال نامعين يک اسم ديگري است براي تابع اوليه.

اگر تابع اوليه **F(x)** يک تابع f(x) داده شده را بشناسيم، پس با جمع کردن يک ثابت c ستِ G تمام تابع اوليه f(x) را بدست ميا اوريم (c يک عدد حقيقي دلخوا ميباشد).

ما تابع **f(x)** را تعين کردن تابع اوليه **F(x)** يا انتيگرال کردن هم ميناميم و براي اين مينويسيم:

$$\frac{dF}{dx}=f(x) \quad\Leftrightarrow\quad dF(x)=f(x)dx \quad\Leftrightarrow\quad F(x)=\int dF(x)=\int f(x)dx$$

پس داريم: $F(x)=\int f(x)\,dx$

اين تا بحال طور نوشتن فورمال بود . حالا اين را په زندگي صدا ميکنيم.

ما تزابع اوليه پيداميکنيم.

مثال:

تابع اوليه F(x) را يافته شود، که مشتق شان f(x) = 2x ميباشد.

قاعده قرار زيل ميباشد: $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x\,dx$

ما امتحان ميکنيم:

$F(x)=x^2$ از بابت که $F'(x)=2x=f(x)$

$F(x)=x^2+2$ از بابت که $F'(x)=2x=f(x)$. به صورت عموم صدق ميکند::

$F(x)=x^2+C$ از بابت که در هر حالت داريم: $F'(x)=2x=f(x)$

هر دو توابع اختلاف در عضو ثابت دارد. مگر همان مشتق دارد، از بابت که به مشتق گرفتن عضو

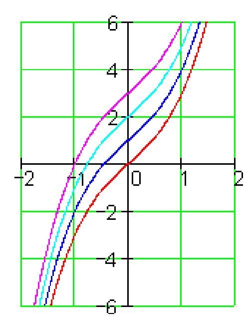
ثابت از بين ميرود. ازين دليل بايد به طريق خود تغير دهيم.

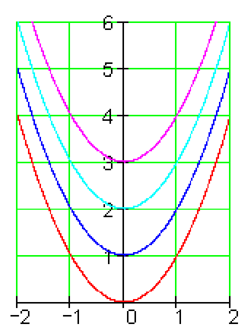
قاعده (طریقه): صدق میکند: $\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$

ستِ توابع اولیه:
مثال نشان میدهد، که براي تابع f(x) نه تنها یک تابع اولیه بلکه تابع زیاد متناهي موجود میباشد، که تنها عدد ثابت شان از یکدیگر فرق دارد.

مثال:
یک تابع اولیه F(x) یافته شود، که مشتق شان $f(x) = 3x^2 + 2$ میباشد.
$F(x) = x^3 + 2x + C$ ، ازین بابت که $F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x)$
ستِ تمام توابع اولیه به شکل گروپ منحنیها رسم شود، که فقط در عدد ثابت از یکدیگر فرق دارد.
براي این دو مثال پاین گرافها دیده شود.

$F(x) = x^3 + 2x + C$ $\qquad$ $F(x) = x^2 + C$





تمرین: براي توابع پاین توابع اولیه را دریابید و نتایج شان از طریق مشتق امتحان کنید.

$a)\ f(x) = x^2$ $\qquad$ $b)\ f(x) = 2x^2$ $\qquad$ $c)\ f(x) = x$

$d)\ f(x) = -2x$ $\qquad$ $e)\ f(x) = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad$ $f)\ f(x) = -\frac{1}{4}x$

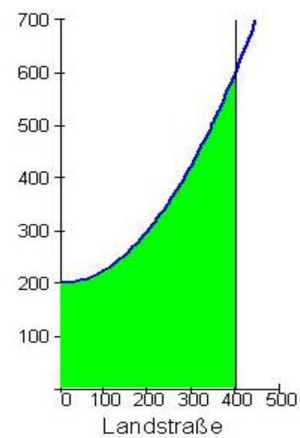
$g)\ f(x) = x^3$ $\qquad$ $h)\ f(x) = 4x^3$ $\qquad$ $i)\ f(x) = 2$

$j)\ f(x) = x + 1$ $\qquad$ $k)\ f(x) = x^2 + x - 3$ $\qquad$ $l)\ f(x) = x^n;\ n \in N$

$m)\ f(x) = x^2$ $\qquad$ $n)\ f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

شمردن انتيگرال معين

انتيگرال معين همان انتيگرال ريمن است، که يک مستوي بين گراف تابع و محورx ميشمارد.



انتيگرال معين:

اگر f يک تابع حقيقي باشد، پس زير انتيگرال معين $\int_a^b f(x)dx$ (خوندن: انتيگرا $f(x)$ از حد a تا حد b يا انتيگرال بالاي $f(x)$ از a تا b) يک مستوي جهتدار ميفهميم در بين a و b و زير گرافد f قرار داشته باشد.

فعاليت:

-- بگوئيد که در انتيگرال بالا $f(x)$ چي ناميده ميشود؟

G در انتروال محدود $a \le x \le b$ تابع اولیه g(x) میباشد، با $G(x) = \int_a^x f(t)dt$، پس صدق میکند: $\int_a^t f(t)dt = G(b)$

اینکه در بین توابع اولیه F و G یک فرق ثابت C میباشد، پس صدق میکند: G(x) = F(x) + C.

براي این بدست میاوریم: G(b) = F(b) + C

اینکه $G(x) = \int_a^a f(t)dt = 0$ است و G(a)=F(a)+C است، پس C = -F(a) داریم.

این به معني که G(b) = F(b) – F(a) به همین طور $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$

بعد از تبدیل عوض اسم متحول بدست میاوریم $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

بدین ترتیب ما قضیه مشتق و انتیگرال را بدست اوردیم

یا افاده که قضیه اساسي شمردن مشتق و انتیگرال نامیده میشود:

تعریف: تابع f در انتروال $a \le x \le b$ متمادي است و F تابع اولیه f است، پس انتیگرال معین میباشد: $\int_a^b f(x)dx = [F(x)_a^b = F(b) - F(a).$

برای F(b) – F(a) وقت زیاد مینویسیم: $\left[F(x)\right]_a^b$. به این قشم است:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

ما به این شمردن انتیگرال معین پس به انتیگرال اولیه عوض کردیم و دربین مشتق و انتیگرال روابط را قایم ساختیم.

مثالها:

$$a)\ \int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{x}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$b)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2} dx = \int_2^4 x^{-2} dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^4 = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^4 = \frac{1}{4}$$

$$c)\ \int_1^3 \sqrt{x}\, dx = \int_1^3 x^{\frac{1}{2}}\, dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}[\sqrt{x^3}]_1^3 (\sqrt{3^3} - \sqrt{1^3}$$

$$= \frac{2}{3}(3\sqrt{3} - 1) = 2(\sqrt{3} - \frac{1}{3})$$

برای انتیگرالهای معین قضیه های زیر راست است:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx +$$

مثال: قيمت انتيگرال معين $\int_{1}^{3} x^2 dx$ را تعيين شود. از روی قانون توان يا طاقت تابع اوليه يعني $F(x)=\frac{x^3}{3}+C$ را دريابيد.

شمردن قيمت انتيگرال مطلوبه:

$$\int_{1}^{3} x^2 dx = \left[\frac{x^2}{3}+C\right]_1^3 = F(3)-F(1) = \frac{3^3}{3}+C-\left(\frac{1^3}{3}+C\right) = \frac{27}{3}+C-\frac{1}{3}-C$$

$$\int_{1}^{3} x^2 dx = \frac{26}{3}$$

اساسات تکميل کننده:

از د ليل F(b) – F(a) ثابت C انتگرال گرفتن از بين ميرود. ازين بابت ميتوانيم براي تعين ثابت انتيگرال بنويسيم C =0 .

مثال : قيمت انتيگرال معين $\int_{-\pi}^{+0,5\pi} \cos x dx$ را تعيين نماييد.

ثبوت: ما قرار زيل ثبوت ميکنيم:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi} \cos x\, dx = [\sin x]_{-\pi}^{0.5\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(-\pi) = 1-0 = 1$$

يادداشت: ازين بابت که درين حصه تنها قيمت انتيگرال معين خواسته شده و نه مستوي زير منحني ، پس حتمي نيست که جاهاي صفر مد نظر گرفته شود.

يادداشت مهم: بايد در نظر داشته باشيم که انتيگرال معين يک عدد است و انتيگرال نامعين يک تابع.

تمرينونه:

قيمتهاي انتيگرال معين زير را بشماريد.

$$a)\ \int_0^3 4dx \qquad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx \qquad c)\ \int_1^e \frac{1}{x}dx$$

$$d)\ \int_1^e (2+\frac{1}{x})dx \qquad e)\ \int_{-1}^0 e^x dx \qquad f)\ \int_0^\pi \sin x\, dx$$

$$i)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{\cos^2 x}dx \qquad j)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x}dx \qquad k)\ \int_{-2}^2 x^3 dx$$

$$l)\ \int_2^6 (1+x)dx \qquad m)\ \int_1^2 (x^2-x^5)dx \qquad n)\ \int_{-2}^0 \left(\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}\right)dx$$

از انتيگرال نامعين به انتيگرال معين

پيشگفتار

ما ديديم که چطور براي يک تابع f(x) تابع اوليه F(x) به بين اورده ميتوانيم، پس لايتناهي زياد توابع اوليه موجود است، که فرق شان از يکديگر فقط در جمع کردن يک ثابت ميباشد.

فعاليت :

-- در باره فرق بين $\int f(x)dx$ و $\int_a^b f(x)dx$ فکر کنيد؟

-- نتيجه $\int f(x)dx$ و $\int_a^b f(x)dx$ چي ميباشد ؟

- این فرق را با اساس یک مثال روشن سازید.

مثال:

داریم: تابع $f(x) = 3x^2 + 2$ و ستِ توابعو اولیه شان $f(x) = x^3 + 2x + C$

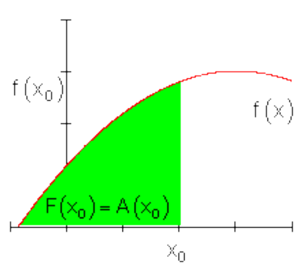
تعریف: ست تام توابع اولیه نسبت به یک تابع f(x) ،،انتيگرال نامعين،، نامیده میشود و براي این مینویسیم: $\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$

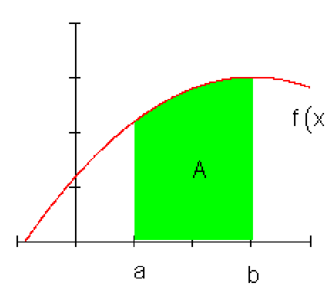
روابط بین مشتق- و انتيگرال شمردن میتواند از طریق جمله زیر بدست بیاید.

جمله(قضيه) : شمردن انتيگرال معين معکوس شمردن مشتق میباشد.

$$\frac{d[f(x)]+C}{dx} = [F(x)+C]' = f(x)$$

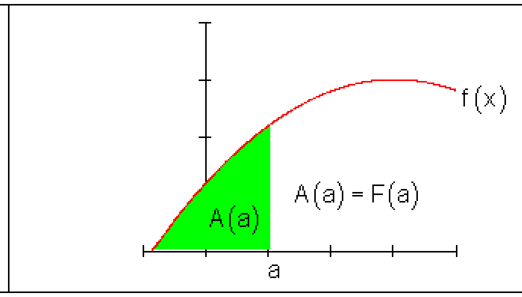
مستوي زيرگراف تابع و در بین انتروال [a ; b] تعين شود. درین پرابم ما تاحال از علم بدست اورده استفاده میکنیم.

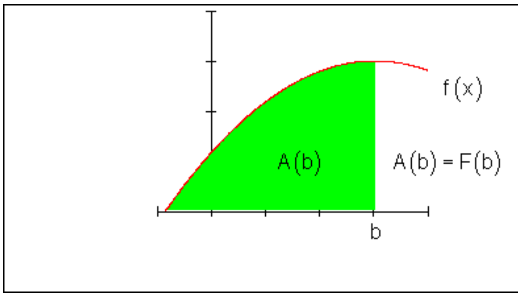


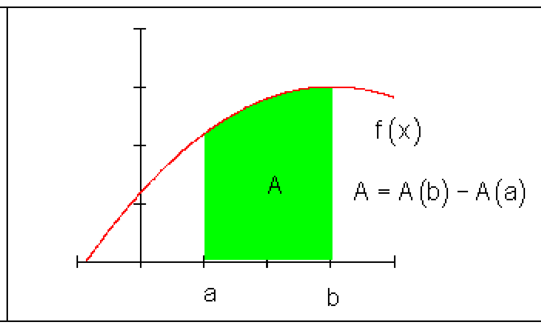


فکر موجودیت یک تابع مستوي ما را به
یاد گرفتن زیر رهنمایي میکند:

روابط بین یک مستوي کي زیر گراف یک تابع $f(x)$ زیر نظر ما درجاي x_0 و یک تابع $F'(x)$ که مشتق تابع $F(x)$ در جاي x_0 با قیمت تابع $f(x)$ در جاي x_0 برابر باشد موجود است.







پیداکردن سطح در بین حدود انتروال $[a,b]$ از منفي کردن گراف تابع در جاي $b,A(b)$ و $a,A(a)$ یعني $A= A(b) – A(a)$
به همین قسم $F= F(b) – F(a)$ بدست مي اید.

مستوي زیر تابع درانتروال $[a,b]$ تفریق توابع اولیه میباشد.

$$\boxed{A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x)dx}$$

این انتیگرال انتیگرال معین هم نامیده میشود. $\int_a^b F(x)dx$

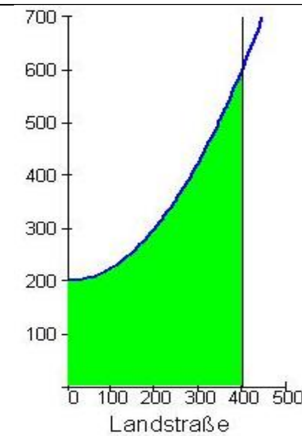
جمله : به اساس معلومات که تا حال بدست اوردیم، میتوانیم سطحي را بشماریم که درمثال اول اورده شده.

عدد ثابت به تفریق گردن از بین میرود. در عمل براي حل این مسئله راه دیگري مفید دیده شده.

$$A = \int_0^{400} \left(\frac{1}{400} x^2 + 200 \right) dx = \frac{1}{1200} x^3 + 200 \cdot x \Big|_0^{400}$$

$$= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 \underline{\left[\frac{1}{1200} 0^3 + 200 \cdot 0 \right]}$$

$$= \frac{1}{1200} \cdot 400^3 + 200 \cdot 400 = \underline{\underline{133333.\bar{3}}}$$



تمرینونه:

dx

$\left(\frac{1}{2} x^2 - 4 \right) dx$

۵. استعمال شمارش اینتیگرال

۵ . ۱ مساحت مسطوي، که در بین گراف f(x) و محور x قرار دارد.

مساحت $\int_a^b f(x)dx = f(b)-f(a)$ در حصه چهارم خوانده شد، که اینتیگرال معین
x=aو خط (0)= y درx، و محور y=f(x)را نشان میدهد، که از منحنيA مستوي
در داخل انتروال y=f(x)محدود باشد. ما ازین پیش رفتیم که) (مقایسه ٤ . x=b١ و
حرکت میکند، مگر میتواند که پاین محور هم حرکت xاینتیگرال طرف بالاي محور
نماید..

فعالیت:
و یا در بین دو توابع x- براي شمردن مستوي دلخواه در بین یک منحني یا خط و محور
پیشنهاد کنید.
- براي شمردن این هم در فکر داشته باشید، که اگر منحني و یا خط طرف پایین محور
قرار داشته باشد.x
- یک تابع دلخوا داده شده باشد، تابع را ترسیم نمایئد و انتیگرال تابع را در نقاط معین
بشمارید..xمحور
میرود. تابع x- یک تابع دلخوا را بنوسید، که در داخل یک انتروال به طرف پاین محور
را ترسیم نمایئد و نشان دهید که تابع کدام علامه دارد؟ رسم تابع را بکشید و نظر به این
که مستوي همیشه مثبت است، پس به دادن علامه مطالعه کنید که چرا؟.
یادداشت: اگر در شمردن مسطوي همان عددي را بنویسیم، پس باید به یاد داسته باشیم، که واحد
مسطوي همراهش میباشد. ممکن این نوشته نه باشد، مگر این را همیشه باید در فکر داشته باشیم.

این فعالیتهاي بالا ما را به مثالهاي زیر سوق میکند:

مثال :
مساحت مستوي دربین $y=\frac{1}{2}x^2-1 \ , \ y=0 \ , \ x_1=2 \ , \ x_2=4$
قرار ویل میباشد(شکل روبرو)

$$A=\int_{2}^{4}\left(\frac{1}{2}x^{2}-1\right)dx=\left(\frac{1}{6}x^{3}-x\right)\Big|_{2}^{4}$$

$$=\frac{1}{6}.64-4-\frac{1}{6}.8+2$$

$$=\frac{22}{3}$$

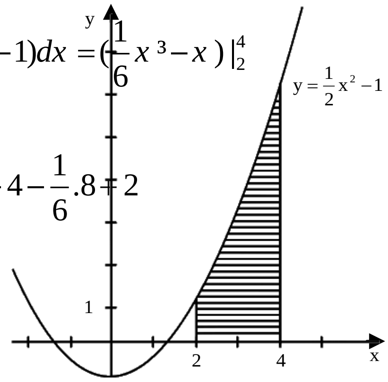


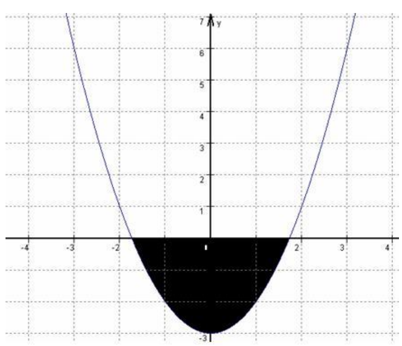
Bild 21,3

میباشد، پس این انتیگرال معین x طرف پاین محور y=f(x) اگر سطح حرکت منحني تابع منفي میباشد. براي این که مساحت مثبت مستوي را بدست بیاوریم ، قیمت مطلقه انتیگرال را میگیریم یعني انتیگرال منفي.

مثال:

با محور x گراف f(x)=x²-3 یک مسطوي را احاطه میکند. در تمام مساحت بین گراف و محور x مستوي را بشمارید.

طریقه:



۱ - براي این که این مسئله براي ما خوب روشن شده باشد، رسم بالا را ترسیم میکنیم.

۲ - براي این که حد هاي انتیگرال را بدست اورده بتوانیم، باید جا هاي صفر را دریابیم.

$$0=x^{2}-3$$
$$x=\pm\sqrt{3}$$

۳ – حالا براي شمردن مساحت مسطوي انتیگرال مربوط را مینویسیم.

ضرب 2 انتیگرال میشماریم و نتیجه شان را به $\sqrt{3}$ تا 0به اساس تناظر اول از میکنیم، پس داریم:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (x^2-3)dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2)dx - 3\cdot\int_0^{\sqrt{3}} 1dx = \sqrt{3} - 3\cdot\sqrt{3} = |-2\cdot\sqrt{3}|$$

$$A = 2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{3} = 4\cdot\sqrt{3}$$

مثال ۵ . ۲ :

بشمارید: (شکل زیر) مساحت مستوي در بين $y=\frac{1}{2}x^3-5\ ,\ y=0\ ,\ x_1=-1\ ,\ x_2=2$

$$A = \left|\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}x^3-5)dx\ \right|$$

$$= -\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}x^3-5)dx$$

$$= (-\frac{1}{8}x^4+5x)\,|_{-1}^{2}$$

$$= (-2+10+1/8+5) = \frac{105}{8}$$

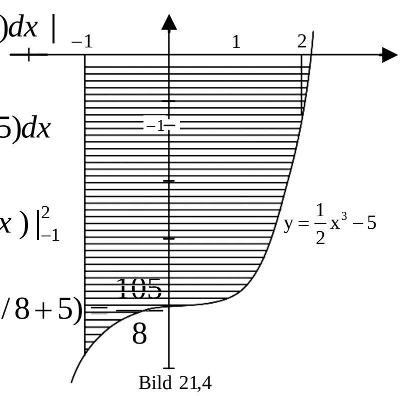
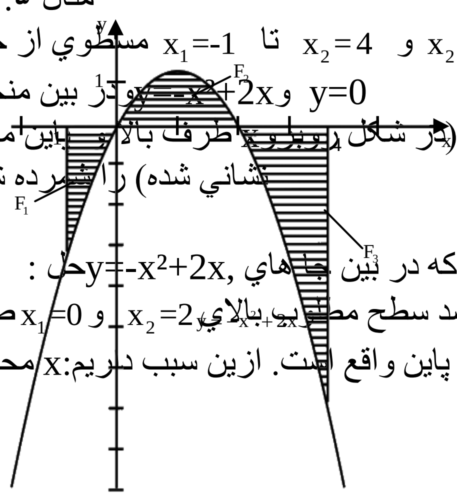


Bild 21,4

مثال ۵. ۳ :

مسطوي از حدود $x_1=-1$ تا $x_2=4$ و $x_2=4$ در بين منحني $y=-x^2+2x$ و $y=0$ (در شکل روبرو طرف بالا و پاين محور x نشاني شده) را شمرده شود:



حل : تابع $y=-x^2+2x$, که در بين جا هاي $x_1=0$ و $x_2=2$ بالاي محور x واقع باشد سطح مطلوب صفر و باقيمانده پاين واقع است. ازين سبب داريم:

سرلیک

$$A=-F_1+F_2-F_3$$

$$=\int_{-1}^{0}(-x^2+2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx-\int_{2}^{4}(-x^2+2x)dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{0}^{2}-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{2}^{4}=\frac{28}{3}$$

(بالا و پاین $y=0$ و $y=-x^2+2x$ و در بین منحني $x=4$ تا $x=-1$ دربین حدود x محور)

تمرینها:

بشمارید.x: - در انتروال داده شده سطح را در بین گراف و محور

$a)\ \ f(x)=x-2 \qquad , \quad x\in[-2;3]$

$b)\ \ f(x)=x^2-x-x \qquad , \quad x\in[1;5]$

$c)\ \ f(x)=x^2-8x+12 \qquad , \quad x\in[0;8]$

شمردن مساحت مستوي که از دو گراف محدود باشد.

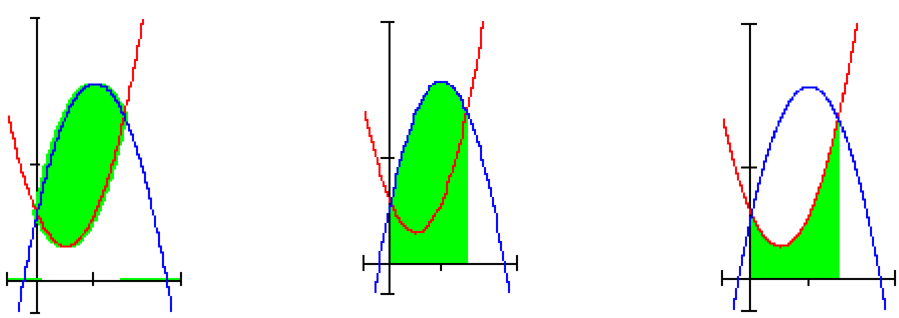
اگر یک حوض این قسمي داشته باشیم، فکر کنید که مساحت شانرا چطور میشماریم؟

فعالیت:

اگر یک حوض مشابه بالا را داشته باشیم، پس حدس بزنید، که مساحت انرا چه قسم بشماریم؟

در بعضي ازسوالات مساحت مستوي شمرده میشود، که دربین گراف دو توابع قرار داشته باشد.

مساحت مستوي این قسمي میتوتند از طریق تفاضل انتیگرال معین شمرده شود. اگر هردو گراف بالای محور x باشد، پس از شیما زیر به پیش میرویم:



A A_1 A_2

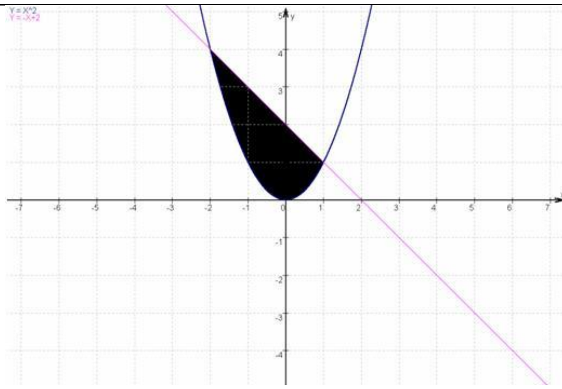
$$A = A_1 - A_2$$

مثال :

مساحت مستوي را ميخواهيم بشماريم، که در بين گراف دو توابع $f(x) = x^2$

و $g(x) = -x+2$ محدود باشد:

طريقه راه حل: درينجا هم يک شکل يا گراف را رسم ميکنيم، که اين حالت را روشن بسازد.



۲ - براي اين که انتيگرال را بشماريم(شکل بالا را ببينيد)، نقاط قاطع گراف را پيدا ميکنيم.

$x^2 = -x+2$

$x^2+x-2= 0$

- فرمول P;q

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

۳ – به طور ساده دیده میشود:

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

پس صدق میکند:

$$A = \int_{1}^{-2} (-x+2)dx - \int_{1}^{-2} x^2\,dx = -1\cdot\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-6-\left(\frac{(-2)^3}{3}\right)-\frac{1}{3}$$
$$= -1,5-6++=-4.5$$
$$A = 4,5$$

ی تمام . O

گراف در بین a و b طرف بالای g حرکت میکند، پس برای سطح مستوي محدود در انتروال هردو گراف صدق میکند.

$$A = \int_{a}^{b} (f(x)-g(x))\,dx$$

مثال ۶ . ۵:

میخواهیم که مساحت مستوي بین گرافهای توابع f(x) = x² -2x +2 و

g(x) = -x²+4x +2. را دریابیم.

هردو گراف حدود انتیگرال را تشکیل میسازد. x قیمتهاي نقاط تقاطع نقاط تقاطع: x تعین کردن قیمتهاي وضعیه

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 -2x+2 = -x^2 +4x + 2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \quad \Leftrightarrow$

$x_1 = 0$ و $x_2 = 3$. حدود لیمیت اینتیکرال میباشد.

ساختن یا تشکیل اینتگرال:

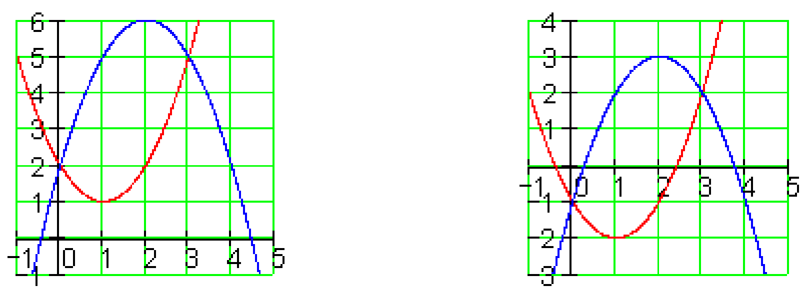
$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 2\cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 =$$
$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

ازین سبب که سطح بین دو گراف همیشه مثبت میباشد، پس باید از قیمت بزرگ به قیمت کوچک کاسته یا کم شود.

$$A = \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

طوري که میدانیم، علامه یک مستوي در اختیار این است که ایا مسوي بالای محور افتیده و یا پایین. ما مطالعه میکنیم، که ایا تاثیرات شان در مثال بالا افتیده یا نه. ما طرف پاین میبریم و سطح را از نو یا از سر **y**مستوي به ۳ واحد بالای محور میشماریم.



اگر از چشمدید قضاوت کنیم، پس تمام دست اورد مساوي خواهد بود.
و با این حدود انتیگرال هم بي تغیر میماند.x نقاط تقاطع قیمتهاي

$f(x) = x^2 - 2x - 1$ و $g(x) = -x^2 + 4x - 1$

جا به جا میکنیم:

$$A=\int_0^3 f(x)dx-\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3 (f(x)-g(x))\,dx$$

از $f(x)-g(x)=2x^2-6x$:بدست مياوريم

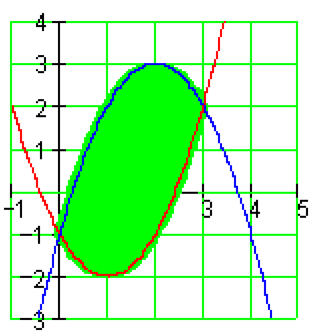
$$A=\int_0^3 (2x^2-3x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3=\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9=18-27=\underline{\underline{-9}}$$

مستوي دربين دو منحني مستوي فزيکي ميباشد، فلهازا دست اورد شان بايد عددد مثبت ميباشد.

اين از طريق قيمت بدست مي اوريم.

$$A=\left|\int_0^3 (2x^2-6x)\,dx=\left|\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3\right|=\left|\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9\right|=|18-27|=|-9|=\underline{\underline{9}}\right|$$

عمومي ساختن اين متود:



مستوي بين دو گراف:

اگر يک مستوي از يک منحني بالا و يک منحني پاين محدود باشد، که مربوط تابع f(x) و باشد، پس از اين مساحت محدود به تابع g(x) صورت پايين ميشماريم:

$$A=\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right|$$

نقاط تقاطع هردو b و a حدود انتيگرال گرفتن ميباشد. x گراف قيمت وضعيه محور

منحني ... y=f (x)

و y=

و y

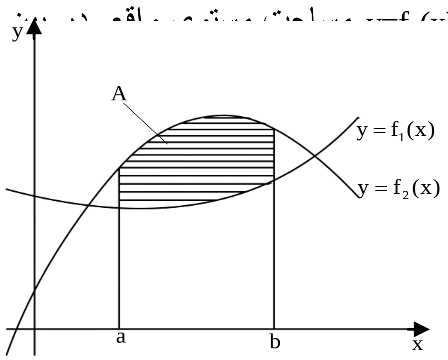


Bild 21,6

به طور به [a,b] در انتروال f1(x)<f2(x)

دست میاید که مستوي زیر تابع $y=f_2(x)$

تفریق شود. $y=f_1(x)$ مستوي زیر منحني

$$A=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

و(f1(x به طور ساده میتوانیم خود را به این معتمد بسازیم که ش ۲ . ٦ له دې مستقل که کدام علامه به خود اختیار میکند صدق میکند.[a,b] در انتروال f2(x)

مثال : میخواهیم که در بین پارابولهای زیر سطح را بشماریم:
$y=x^2-1$ او $y=-x^2+1$)
حل : حدود اینتیگرال نقاط تقاطع محور افقي میباشد یعنې
$x^2-1=-x^2+1$ $\qquad 2x^2=2 \quad x^2=1$
$x_1=a=1, x_2=b=-1$
$-x^2+1>x^2-1$ در انتروال [1 , 1 -] اینتیگرال گرفتن داریم:
در نظر گرفت نه شود، پس این$f2(x)>f1(x)$کی) ۲.۱(و په [a,b] (اگر در اینتروال اینتیگرال منفی میشود و باز انتیگرال قیمت مطلقه گرفته میشود. ازین بابت داریم::

$$A=\int_{-1}^{1}\left[-x^2+1-(x^2-1)\right]dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-2x^2+2)\,dx$$

$$=(-2/3x^3+2x)\Big|_{-1}^{1}=8/3$$

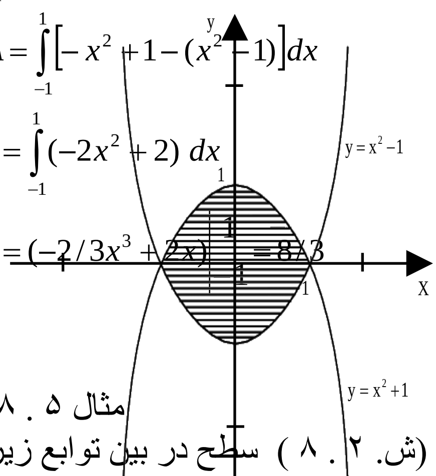
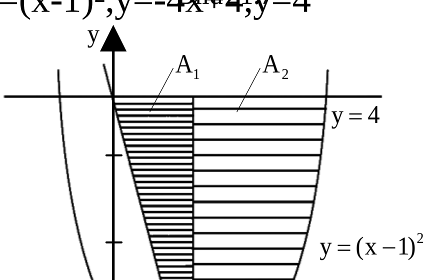


Bild 21.7

مثال ۵ . ۸:
مطابق (ش. ۲ . ۸) سطح در بین توابع زیر شمرده میشود.
$y=(x-1)^2, y=-4x+4, y=4$



حل :
این مستوي در بین منحني که شمرده میشود،
بدست میاید A2 و A1 از یکجا شدن دو مستوي

مستوي
A1 در بین منحنیها y=4 و y=-4x+4
قرار دارد.
حدود اینتیګرال اول نقاط تقاطع به
محور x در بین، میباشد y=4 و y=-4x+4 .

داریم $4=-4x+4,\ x_1=0$ ،
به همین قسم نقطه تقاطع اول راست
قیمت وضعیه (کواوردینات) در بین $y=-4x+4$ و $y=(x-1)^2$:
$-4x+4=(x-1)^2,\ x^2+2x-3=0$

$x_{2,3}=-1\pm 2,\ x_3=1.$

و قیمت x1=1 واقع است، حدود اینتیګرال $y=(x-1)^2$ و,و y=-4 در بین A2 میبینیم که
وضعیه اول نقطه تقاطع راست y=4 و $y=(x-1)^2$.

مستوي که میخواستیم بدست اورد.:

$$A=A_1+A_2=\int_0^1[4-(-4x+4)]dx+\int_0^1\left[4-(x-1)^2\right]dx$$
$$=\int_0^1 4x\,dx+\int_0^1(-x^2+2x+3)dx=2x^2\Big|_0^1+(\frac{1}{3}x^3+x+3x)\Big|_4^3=7\frac{1}{3}$$

تمرینونه:

د لاندې توابعو ترمنځ سطحې و شمېرئ

سرليک

1) $f(x)=x^2-x-6\ ;\quad g(x)=4x-10$

2) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+3\ ;\quad g(x)=3x$

3) $f(x)=0.75(x^2-5x+4)\ ;\quad g(x)=0.75x+3$

4) $f(x)=x^2+5x+\frac{9}{4}\ ;\quad g(x)=-\frac{3}{2}x-\frac{21}{4}$

5) $f(x)=(x-2)^2-4\ ;\quad g(x)=x-1$

6) $f(x)=x^2-4x+1\ ;\quad g(x)=-x^2+2x+1$

7) $f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+3\ ;\quad g(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$

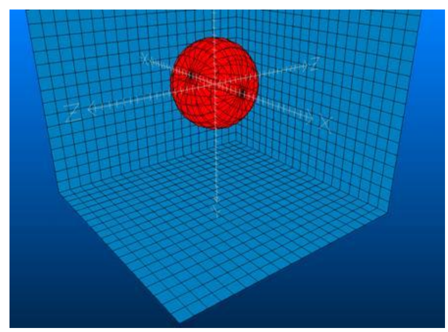
8) $f(x)=x^2+3x\ ;\quad g(x)=0.5x^2$

9) $f(x)0.5x^2-2x-1\ ;\quad g(x)=2x^2+2x+1$

10) $f(x)=-0.5x^2+2\ ;\quad g(x)=-\frac{1}{9}(x-1)^2+1$

حجم اجسام دوراني

ننوتنه د ځو مختلو اجسامو د حجمونو ليکل:



فعاليت:

- حجم يک مکعب را به صورت عادي بنويسيد.

- حجم کره، استوانه و مخروط را که به ان اشنا هستيد بنويسيد.

يادداشت: اين هميشه در فکر باشد: اگر کدام عدد از شمردن انتيگرال بدست مي ايد، پس اين عدد حجم يک جسم را نشان ميدهد. اگر نوشته نه شد، ازان واحد مطلوبه حجم را ميفهميم.

اجسام دوراني:

اجسام دوراني در هندسه همان اجسام ميباشد، که به محور دوراني از طريق دوران يک خط و يا يک منحني به وجود مي ايد. خط که منحني به يک مستوي قرار دارد، محور هم به همين مستوي قرار دارد. منحني محور را قطع نميکند و يا اکثرآ ممکن لمس کند، که مثالهاي عمده شان در پايين خواهيم مطالع کرد.

دوران به محور x:

مثل که پيش گفتيم، حجم هم يک انتيگرال ميباشد. اين به قسم به وجود مي ايد، که اگر يک تابع به محور x دور بخورد.

حجم يک جسم دوراني

براي حجم يک جسم دوراني که به محور x از دوران مستوي از گراف تابعf، از محور x و در بين هردو خط $x = a$ و $x = b$ به وجود مي ايد، در انتروال [a,b] محدود باشد.

شمردن حجم قرار زيل ميباشد:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

دوران به محور y

به دوران يک مستوي(به محورy)، که در انتروال [a,b] از گراف تابع f به محور y و دربين هردو خط $y = f(a)$ و $y = f(b)$ محدود باشد، بايد شکل $y = f(x)$ به تابع معکوس

$x = f^{-1}(y)$ عوض شود شود. اين موجود ميباشد، اگر متمادي ميباشد و قوي هماهنگ يا مونوتون. اگر نه (مثل شکل بالا) پس شايد ممکن باشد، که f به پارچها پارچه شود، که دران متمادي و حقيقي يکنواخت(مونوتون) باشد. اين حجمهاي بدست امده باز تنها شمرده ميشود و باهم جمع ميشود.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2\ dy$$

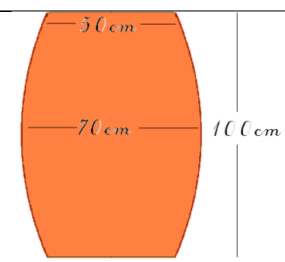
اگر درینجا $x = f^{-1}(y)$ عوض کنیم، پس به محور x حجم قرار زیل به دست مي اوريم:

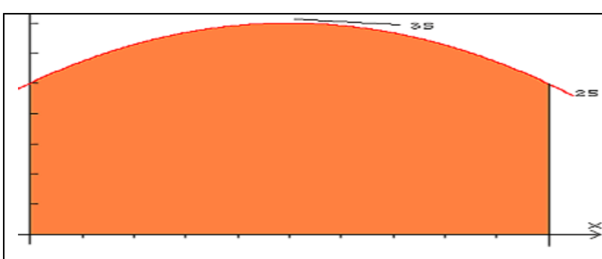
$$V = \pi \cdot \int_{\min\,(f(a),\ f(b))}^{\max\,(f(a),\ f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)|\, dx$$

قیمت مطلق 'f و درحدود انتیگرال بلندترین – پاينترين (min/max) قیمت توابع یک انتیگرال مثبت را تنظیم میکند.

به دوران مستوي (به محور y)، که ذریع گراف تابع f و هردو خط $x = a$ و $x = b$ محدود باشد، فرمول زیل معتبر است:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f))^2\, dx$$

	حجم یک مرتبان: میخواهیم حجم یک مرتبان را پیداکنیم، که بلندي شان ۱ متر، شعاع شان ۲۵ سانتیمتر در اواخر و ۳۵ سانتیمتر در بین شان میباشد.

	اگر مرتبان را به 90° درجه و دوران دهیم، پس شکل پارابول مربع را به خود اختیار میکند. تابع کنار باید طرف پايين پارابول باز باشد، مثل که در این شکل پاین.

حل: شکل نوشتن تابع پارابول میتواند به طور ساده به رآس تابع نوشته شود.

به صورت عموم صدق میکند:

$$f(x)-a\cdot(x-5)^2+3.5$$ (قیمت به dm)

به طور روشن 5- ازکش گردن رآس به سوي x+ میدهد و 3,5 به سوي y+ .

ضریب وسعت به طرف a ضرور است، که به طظف زیر بارابول باز به دست بیاوریم. حالا فقط ضریب a نیست. اگر در فرمول یک نقطه معین را جا به جا کنیم، ممکن خواهد بود که a شمرده شود. این نقطه (0/2,5) میباشد.

$$f\ (x)=-a\cdot(x\ -5)^2+3.5\quad\Rightarrow -a\cdot(0-5)^2+3.5$$

پس a قرار زیل میباشد:

$$\frac{2.5-3.5}{25}=-0.04$$

و مساوات مکمل نامیده میشود.

$$f(x)=-0.04\cdot(x-5)^2+3.5$$

براي ساده ساختن فرمول نقطه رآس به پورم عمود(نورمال) تبدیل میکنیم.

$$f(x)=-0.04x^2+0.4x+2.5$$

تابع را مربع سازید

$$f(x)=(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2$$

پس است

$$f(x)=0.0016x^2-0.032x^3-0.04x^2+2x+6.25$$

تابع اولیه $f(x)=\frac{0.0016x^2}{5}\cdot x^5-\frac{0.032x^3}{4}\cdot\frac{-0.04x^2}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x$

برای شمردن حجم انتیگرال معین است :

$$\pi\cdot\int_0^{10}(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2\,dx=\pi\cdot\int_0^{10}(-0.0016\,x^2-0.032\,x^3-2x+6.25)\;dx$$

$$=\pi\left[\frac{0.0016}{5}\cdot10^5-\frac{0.032}{4}\cdot x^4-\frac{0.04}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x\right]_0^{10}$$

$$=\pi\left[32-80-13\frac{1}{3}+100+62.5\right]_0^{10}$$

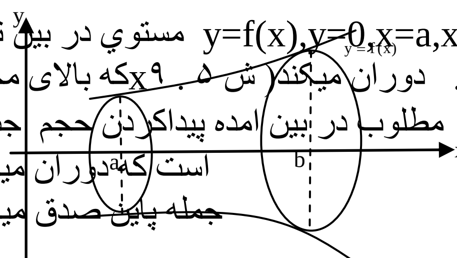
$$=\pi\;\cdot101.167$$

واحد های حجم

ازین که ما در شوع به دیسیمتر شمردیم، پس طبعآ این به لیتر شمرده میشود..

$$=317.824\;liter$$

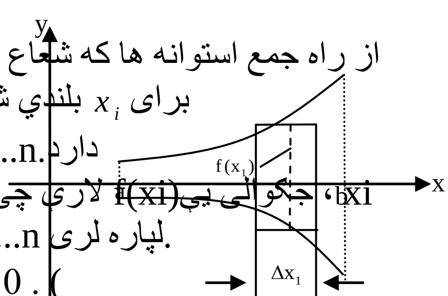
مستوي در بين تابع y=f(x),y=0,x=a,x=b
دوران ميکند(ش ۵ . ۹ xکه بالای محور).
مطلوب در بين امده پيداکردن حجم جسم
است که دوران ميکند.
جمله پاين صدق ميکند:



جمله ۵ . ۸) حجم جسم دوراني:
تابع y=f(x) در انتروال [a,b] متمادي باشد، حجم جسم دوراني که دربين مستويها y=f(x),y=0,x=a,x=b به وجود ميايد اين قرار زيل ميباشد:

$$V=\pi\cdot\int_a^b\left[f(x)\right]^2dx$$

حل: Vاز راه جمع استوانه ها که شعاع شان
$f(x_i)$ بلندي شان x_i برای
i=1,2,3,...n. دارد
xi، جګوالی يې f(xi) لاري چې وړانګه يې
د i=1,2,3,...n لپاره لری.
) ش510 . (
حجم استوتنه iم ميباشد:-



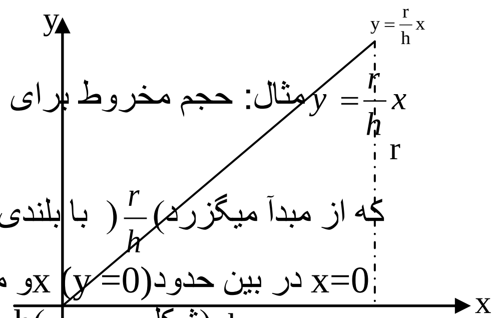
$$\Delta_iV=\pi\cdot\left[f(x_i)\right]^2\cdot\Delta x_i$$

است:n حمع تمام استوانه های

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi \left[f(x_i) \right]^2 \cdot \Delta x_i$$

(مطابق تعریف انتیگرال اولیه) حجم $n \to \infty,\ x_i \to 0$ ساختن قیمتهای حدود

$V = \pi \cdot \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$. را میدهد



مثال: حجم مخروط برای خط $y = \frac{r}{h} x$

که از مبدآ میگزرد) $\frac{r}{h}$ (با بلندی خط

x=0 در بین حدود(y=0) وx محور

تا x=h(شکل رو برو) .h

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[\frac{r}{h} x \right]^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3} \bigg|_0^h = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

این نتیجه معلوم میباشد از محاسبه اساسات.

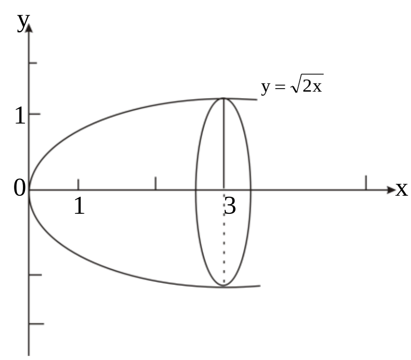
مثال:

به x و بالای محور $y = \sqrt{2x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$ حجم پارابولوئید دورانی که در بین وجود امده میباشد. (شکل پاین)

$$V = \pi \cdot \int_0^3 \left[\sqrt{2x} \right]^2 dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^3 x dx$$

$$= 2\pi \cdot \frac{x^2}{2} \bigg|_0^3 = 9\pi.$$



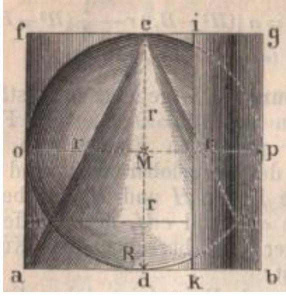
جمله ارشیمیدس Archimedischer Satz

تناسب بین حجمهای استوانه،کره و مخروط:

$$V_{(\text{استوانه})} : V_{(\text{کره})} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$$

زک یوه درسي کتاب څخه 1886د

Figur 120.



Die Volumen der drei Körper verhalten sich wie die Ausdrücke unter 1), 2) und 3); man hat somit die Proportion:

$$\textit{Cyl.} : \textit{Kugel} : \textit{Kegel} = 2r^3\pi : \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{2r^3\pi}{3}$$

$$\text{oder: } \,,, : \,,, : \,,, = 2 : \frac{4}{3} : \frac{2}{3}$$

$$,, : \,,, : \,,, = 6 : 4 : 2$$

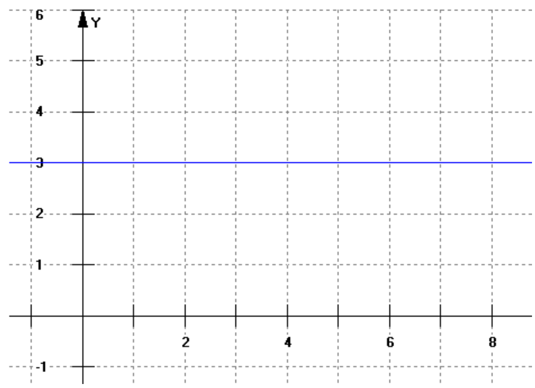
$$,, : \,,, : \,,, = 3 : 2 : 1$$

Archimedes war der erste, welcher dieses Verhältnis fand, daher heisst der hierdurch ausgedrückte Satz der Archimedische Satz.

المانی بالا به دري:ارشیمیدس کس اول بود که تناسب بالا را یافت، به این دلیل جمله که درین جا امده به نام جمله ارشمیدس یاد میشود.

مثال ۵ . ۱۱:

استوانه:



میباشد) $f(x) = 3$ (درین حالت x به محور $f(x) = c$ استوانه از دوران تابع ثابت بدست مي اید.

شمردن حجم یک استواتنه:

حجم استوانه را شمرده شود. فرمول عمومي برای شمردن حجم [0;5]حالا در انتروال استوانه $V = \pi r^2 \cdot h$.میباشد

قیمت تابع هم همان است. x . برای هر قیمت $h=5$ و $r=3$ درین حالت داریم

زیر مطالعه بگیریم و میخواهیم یک $r^2 \cdot h$ فقط $V = \pi r^2 \cdot h$از همه اول میخواهیم از طریقه را بیافیم، که ازان طریقه به کومک انتیگرال حجم مطلوبه را شمرده بتوانیم.
مساحت مستوي به کومک انتیگرال شمرده میشود.

$$\int_0^5 r\,dx = \int_0^5 f(x)\,dx$$

به f(x) اگر انتيگرال اين مستطيلهای کوچک لايتناهي را بسازيم (مساحت مربع که به طرف صفر برود)، پس بدست مي ايد: dx ضخامت

$$\int_0^5 r dx = \int_0^5 \left[f(x)\right]^2 dx$$

اين به معني است که انتيگرال چيزي ديگری نيست به غير که از فرمول بالاي حجم استوانه شمرده شود. اگر اين را از اول ضرب نمايم، پس به دست مي ايد:

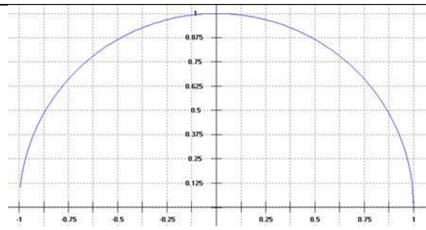
$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 \left[f(x)\right]^2 dx$$

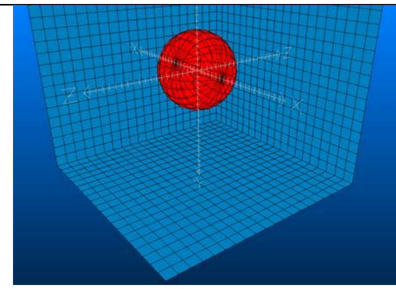
حجم شمردن اين استوانه داده شده:

$$\pi \int_0^5 \left[f(x)\right]^2 dx = \pi \int_0^5 \left[9(x)\right]_0^5 = \pi \int_0^5 \left[45-0\right]_0^5 = 45\pi$$

برای مقايسه: $\pi r^2 h = 45\pi$

کره (غونډاری):





حجم کره را بیدون انتیګرال بنویسید.

حجم استوانه را بنویسید.

- حجم مخروط را بنویسید.

- هر سی حجمها را با هم مقایسه کنید.

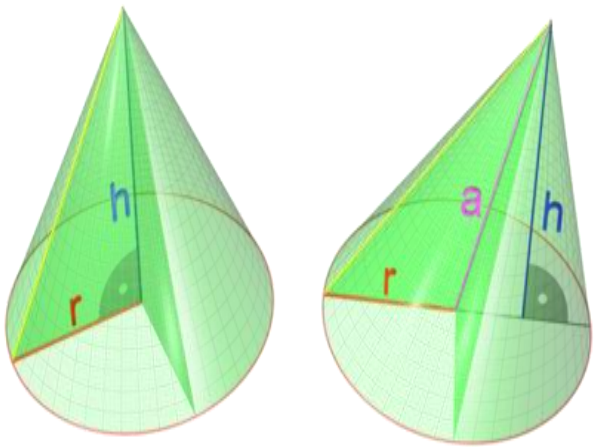
کره به وجود مي ايد. x به محور $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ از دوران تابع

اين تابع ميتواند به پارچه هاي دايروي پارچه شود، تابع قطعه کننده افقي ميباشد. ازين پارچه ها ميتواند حجم شمرده شود. $q(x) = \pi[f(x)]^2$

درين مثال حجم شمرده شود، که بالاي محور x از صفر تا صفر از دوران تابع $f(x)=\sqrt{1^2-x^2}$ به وجود ميايد، يعنى در انتروال [-1;1].

$$\pi\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$$

مخروط Kegel (Geometrie)



اين هم ممکن است، که يک مخروط را به nيک اهرام که از يک سطح اساسي که از

به لايتناهي nزاويه منظم محدود شده باشد(ميرود) نزديک کنيم.

حجم مخروط:

براي شمردن حجم مخروط مستقيم به کومک انتيگرال يک راه ديگری کومکي ميباشد.

يک سيستم قيمت وضعيه به کار انداخته ميشود، که به زريعه رآس مخروط در شروع $(0|0)$ و نقطه مرکزي در نقطه $(0|h)$ واقع باشد. حالا ممکن است، که مخروط را در فکر بگيريم که از يکجا شدن استوانه های کو چک لايتناهي به وجود امده باشد، که بلندي (ضخامت) شان dx ميباشد.

ازين بابت که فاصله پارچه هاي دايروي استوانه اين قسم از رآس مخروط در سيستم قيمت وضعيه به x داده شده، از جمله شعاع(در افغانستان به نام جمه تالس ياد ميشود) صدق ميکند.

شعاع يک استوانه لايتناهي کوچک:

$$r\,z\,(h) = \frac{r}{h} \cdot x$$

حجم استوانه لايتناهي کوچک:

$$(\frac{r}{h} \cdot x)^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2\, dx$$

حجم تمام استوانه هاي کوچک اين قسمي حجم تمام مخروط دوراني ميباشد. براي شمردن شان انتيگرال معين به کار ميبريم، با حدود انتيگرال 0و h :

$$V = \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]^h$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right)$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

ما ازين به فرمول مشهور (که داشتيم) ميايم:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

f(x) (به طور مثال f(x) = mx دوران يک تابع خطي xدوران يک مخروط به محور = 0,5x ميباشد.)

شمردن مخروط

درينجا اول حجم کوادر (مربع – ، مستطيل المکعب) را شمرده نميتوانيم. درينجا چيزي که زير گراف ميباشد په پارچه هاي کوچک پارچه کردن است که ضخامت شان dx دارد، به اسم تابع تقاطع افقي و f(x)ميباشد. مساحت اين پارچه ها را بشماريد، که شعاع انتيگرال شان را بگيريد. [0;5]بعدآ در انتروال داده شده

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi \left[\frac{1}{12} x^3 \right]_0^5 = 32.72$$

براي مقايسه کردن شکل حجم معياري(ستاندارد) مخروط ديده شود.

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h = 32.72$$

کوتاه :

دوران داده شودو حجم که بدست مي ايد، که ما اين y يا x اگر يک منحني به محور و به همين قسم x جسم را به پارچه هاي کوچک يا زون پارچه ميکنيم، به ضخامت و اين را به طور نزديک مشابه به استوانه ها تبديل ميکنيم ، پس به طور نزديک، y مثل که در باره حجم پيش گفته شد، شکل زير را بدست مي ايد:

دوران به محور x : $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

دوران به محور y: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

مثال:

گراف تابع $y = x^2/4$ در انتروال $[0, 2]$. به محورهاي قيمت وضعيه دور ميخورد. اين جسم که ذريع دوران به وجود امده چي قدر است؟

دورا به محور x : $y^2 = x^4/16, x_1 = 0, x_2 = 2$

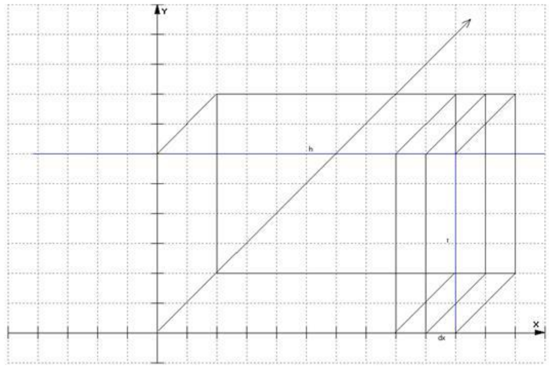
$$V_x = \pi \cdot \int_0^2 \frac{x^4}{16} dx = 0.4\pi$$

دوران به محور y : $x^2 = 4y, y_1 = 0, y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y\, dy = 2\pi$$

حجم جسم نادوراني.

مستطيل- يا مربع المکعب(جسم شش ضلعي) Quader



این شکل که دیده میشود از استوانه براي ما معلوم است فقط حالا دوران نمیخورد. حجم شان میتواند به حیث مستطیلالکعب شمرده شود ($V = r^2h$) و یا به مربع ضخامت dx ،که به طرف صفر میرود، پارچه شود. براي این سطح قاطع افقي شمرده شود، یعني تابع قاطع افقي q(x) جور شود. بعدآ انتیگرال شان باید گرفته شود. این به صورت عموم معني زیر را دارد:

$$V = \int_a^b q(x)dx$$

درین مثال که تصادفآ تابع قاطع افقي مربع تابع (د ژی، غاړه، بغلي) میباشد: $q(x) = [f(x)]^2$

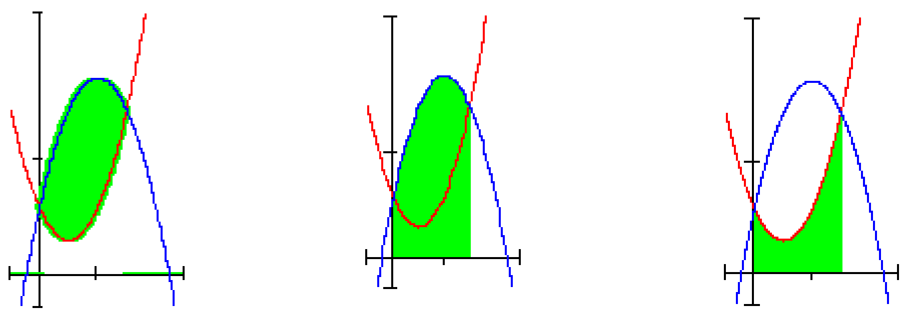
اگر ما تابع $f(x) = 3$ در انتروال از 0 تا5 به تابع قاطع افقي انتیگرال نمایم، پس باید $V = r^2h = 45$ بدست بیاید. ما داریم: $\int_0^5 q(x)dx = [9x]_0^5 = 45$

نقاط مهم فصل

میباشد، پس این انتیگرال x طرف پاین محور $y=f(x)$ اگر سطح حرکت منحني تابع معین منفي میباشد. براي این که مساحت مثبت مستوي را بدست بیاوریم ، قیمت مطلقه انتیگرال را میگیریم یعني انتیگرال منفي.

در بعضي ازسوالات مساحت مستوي شمرده میشود، که دربین گراف دو توابع قرار داشته باشد.

مساحت مستوي اين قسمي ميتوتند از طريق تفاضل انتيگرال معين شمرده شود. اگر هردو گراف بالای محور x باشد، پس از شيما زير به پيش ميرويم:



A A_1 A_2

$$A = A_1 - A_2$$

تناسب بين حجمهای استوانه،کره و مخروط:

V(استوانه) : V(کره) : V(مخروط) = 3 : 2 : 1

دوران يک تابع خطي f(x) = mx (به طور مثال f(x) = 0,5x) دوران يک مخروط به محور x میباشد.

اگر يک منحني به محور x يا y دوران داده شودو حجم که بدست مي ايد، که ما اين را به همين قسم جسم را به پارچه هاي کوچک يا زون پارچه ميکنيم، به ضخامت □x يا □y و اين را به طور نزديک مشابه به استوانه ها تبديل ميکنيم ، پس به طور نزديک، مثل که در باره حجم پيش گفته شد، شکل زير را بدست مي ايد:

دوران به محور x : $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

دوران به محورy: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

کره به وجود مي ايد. x به محور $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ از دوران تابع

اين تابع ميتواند به پارچه هاي دايروي پارچه شود، تابع قطعه کننده افقي ميباشد. ازين پارچه ها ميتواند حجم شمرده شود. $q(x) = \pi[f(x)]^2$

تمرينات:

۱- سطح دربين $y = f(x) = x^2$ و تابع معکوس شان را بشماريد.

۲- مساحت همان مستوي را بشماريد، که از مساوات منحني هاي داده شده محدود باشد:

a) $y = e^{0,5x}, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2:$

b) $y = \frac{1}{2}x^3, \quad y = 0, \quad x - 2, \quad x = 2:]$

c) $y = \frac{1}{x^2}, \quad y = 0 \quad x = 9, \quad x = -3, \quad x = 3:$

d) $y = \cos x, \quad y = 0$

e) $y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{5\pi}{6}:$

f) $y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 4:$

g) $y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2:$

h) $y = x^3 + 7, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2:$

i) $y = x^3 + 7, \quad y = x^3 - x^2 + 3x + 5:$

$j) \quad y = 3 - \frac{1}{2}x^4, \quad y = 3 - 4x:$

$k) \quad y = \frac{1}{x}, \quad 3y + 3x = 10:$

$l) \quad y = \cos x, \quad y = \sin x$

$m) \quad y = \sqrt{3x+1}, \quad y = 1, \quad x = 8:$

$n) \quad y = \frac{x^2}{4}, \quad y = \frac{8}{4+x^2}:$

$o) \quad y = x^2, \quad x = y^2:$

$p) \quad y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3:$

۳- گراف هاي توابع زير هريک شان به محور x دوران ميخورد. حجمهاي اجسام به وجود امده را بشماريد.

$a) \quad f(x) = 2 + \sqrt{x}, \quad | = [0;4] \qquad b) \quad f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1, \quad | [2;4]$

٤ - - گراف هاي توابع زير هريک شان به محور x دوران ميخورد. حجمهاي اجسام به وجود امده را بشماريد و به شمردن ساده انرا مقايسه کنيد.

$a) \quad f(x) = -x + 5, \quad | = [0;3] \qquad b) \quad f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, \quad | [1;5]$

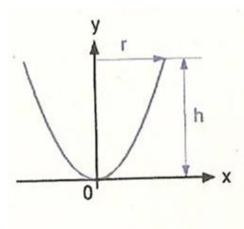
٥- گراف هاي توابع زير هريک شان به محور y دوران ميخورد. حجمهاي اجسام به وجود امده را بشماريد.

$a) \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad 1 = [0;4] \qquad b) \quad f(x) = (x-2)^2, \quad 1 = [1;3]$

٦- گراف هاي توابع زير هريک شان به محور y دوران ميخورد. حجمهاي اجسام به وجود امده را بشماريد. حجمهاي اجسام به وجود امده را به طور ساده بشماريد.

$a)\ \ f(x)=x+1\ \ ,\ \ 1=[1;4]$ $b)\ \ f(x)=-\frac{1}{2}x+2\ \ ,\ \ 1=[0;4]$

به محور سیومتري دوران پارابول یک جسم به وجود میاید. ثبوت کنید که $v=\frac{\pi}{2}\cdot r^2\cdot h$ حجم دارد.



$v=\frac{\pi}{2}\cdot r^2\cdot h$

د ډاکتر ماخان (میرې) شینواري چاپ او ناچاپې لیکنې:

په ډېره مننه، چې زما کتابونه به ټول www.ketabto.com ته پورته شي.

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهني پښتوټول كتابونه په المان كې د ،، افغانستان كلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهني ستر كتاب : د شميرپوهني برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونكو او زده كوونكو لپاره (دا كتاب په ۹۰۰ مخونو كې چاپ او دا نوې ليكنه به يې ځنو ځايونو غزېدلي او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمككچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو كې شميرنه، د ګټي – او كټي د كټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه كتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره كوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهني انګرېزي – پښتو ډكشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کربنيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور بریښي)

د ښوودځي کتابونه له ۷-م لګي څخه تر ۱۲-م ټولګي پورې.

۱ – د دولسم ټولګی شمیرپ،هنه

زما لیکونه:

Dr. Makhan Shinwari ډاکتر ماخان شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د افغانستان اسلامي حمهوریت جمهور ریس جلاتمآب

ډاکتر محمد اشرف غني ته په ډېر درنښت.

له هر څه د مخه دې بخښنه وي، چې ستاسو ډېر د ارزښت ډک وخت نیسم، خو دا راته ډېر اړیین برېښي او پرته له تاسو به يې څوک دومره جدي هم ونه نيسي.

پوهيږو، چې د پوهنې وزارت د ولس د پوهنې مغز جوړوي، پوهه له همدې ځایه پيليږي، چې بنسټ يې باید سم وي. همداسې نصاب د یوه هیواد د پوهنې مغز دی، نو باید همداسې ورته د هره اړخه په درنه سترګه او غور وکتل شي.

زه خبره را لنډوم او د افغانستان د نصاب ستونځو ته په لنډ ډول ګوته نیسم او په همدې ډول ستونځوبیو یا د ستونځو حل ته يې.

ما د ۱۲ ـــم ټولګي د پښتو او دري کتابونه وليکل او زه ترې المان ته لاړم، قرارداد پای ته ورسید. زما د کتابونو په ځای نور کتابونه چاپ شول، چې ناسم وو. په دې هکله د پوهنې وزارت ته زما ليکنه مل ده. دا کتابونه ما بيا له سره ترتيب کړل(ليکنې مې يې درلودلې) او چاپ ته مې چمتو کړل، خو دا مې باور نه کيده، چې دا به بيا بې زما له شتون چاپ شي.

ما د کتابونو د ليکلو لپاره پيسې اخستي او دا ليکنې هم دا دی لرم، چې چاپ ته چمتو دي

ما چې دا نور کتابونه وکتل، نو دا مې لازم وګڼله، چې دا کتابونه هم زه له سره وليکم، مواد يې لرم، ځکه چې ما ډېر د شميرپوهنې يا رياضي کتابونه ليکلي او ژباړلي(نږدې تر ۴۰ کتابونو پورې). د کتابونو منځپانګه د ښوونځي کتابونو لپاره هم پوره ده، تخنيکي کارونه يې بايد له يوه مسلکي کس سره سرته ورسول شي.

اوس مې يې په ليکلو او د ښوونځي لپاره په سمون پيل کړي دی.

زما ليکنې مسلکي ناسمون نه لري، معياري او د وخت د غوښتنو سره سمې دي، چې دا زما د اخرنيو اوولس کالو د هڅو په اساس باوري ده.

زه څه کولی شم؟

دا چې په دې هکله بل کوم هيوادوال څه نه دي ويلي يا ليکلي، نو باور لرم، چې زه يوازېنی کس یم چې دې ته مې فکر را اوښتی. زه دا څه چې ليکم دا په پوره مسئوليت ليکم.

ما چې دا څومره ليکنې کړي، دا زما د ارمان د پوره کولو لپاره دي او په دې هکله ځان د ولس پوروړی بولم.

که د دې کتابونو د لیکنې دنده راته وسپارل شوه، نو د کار میوه به مې وي او دا کار به په نړیوال معیار او ښه توګه سرته ورسوم.

دا اخر یونیم کال مې یواځې د ښوونځې له کتابونو سره سر خوږولی، چې د هر ځل لوستنې سره یې پوره زوریږم او د هر ځل لوستلو سره یې په ناسمون سر خوږوم.

زه هیله لرم، چې دا وخت راته راکړئ، چې د افغانستان ریاضی معیاري کولو کې مرسته وکړم او نه دا چې مرسته وکړم بلکه معیاري یې کړم. دا کار مې لکه د مخه مې چې ګوته ورته ونیوله هم کړی.

زه کړی شم، چې دا کار د المان څخه هم سرته ورسوم. که ماته دا وخت راکړ شو، نو زه به له حکومت څخه د معاش غوښتنه هم ونه کړم او دا کار زما له خوا ساده کیدونکی دی.

د ښوونځې د ریاضي لپاره به یو بنسټ کیښوول شي، چې په هغې د راتلونکی وخت شمیرپوهنه یا ریاضي ابادېدی شي. دا بنستیز مسلک به په نړیواله کچه سم شي.

زما مسئولیت مې په دې لیکنه سرته ورساوه.

له هر څه د مخه ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکتر ماخان شینواری

د نصاب د کتابونو د ناسمون په ځنو برخو د نمونې لپاره لنډه څیړنه شوې، چې د دې لیک سره مل ده.

د پوهنې محترم وزارت ته زما لیکنه هم مل ده.

ډاکتر ماخان شینواری

د ۲۰۱۳ زکـ لومړی نیمایې

سرلیک

Dr. Makhan Shinwari

Lansbergerstr.3

5311- Bonn

Germany

smakhan1946@gmail.com

د افغانستان اسلامي جمهوریت د پوهنې محترم وزیر صاحب ته په ډېر درنښت!

ډېرو درنو!

غواړم دا لاندې دوه ټکي د تاسو محترم سره شریک کړم:

لومړی: ما له مارچ ۲۰۰۸ ز کال څخه تر دسمبر ۲۰۰۹ ز ک پورې د درسي کتابونو لیکنه کې ونډه لرله او د ۱۲ ـــم ټولګي د شمیر پوهنې یا ریاضي کتابونه مې په پښتو او درې ولیکل.

ما دا څه موده د مخه د پوهنې وزارت په ن ج پاڼه کې د ۱۲ ـــم ټولګي د شمیرپوهنې (ریاضي)کتاب ولوسته، چې ګورم هلته په کې زما د نوم درک هم نه شته.

دویم : د کتاب خوندېوني یا متن ته چې ننوتم، ګورم، چې هغه څه چې ما لیکلي ووهغه یا نه شته او یا تخریب شوي دي.

ما په ډېر زور او د زړه خوراک سره د کتاب لومړۍ برخه یعنې د ،، پولي ارزښت،، یا لیمیټ برخه وکتله، چې ګورم، نو دا مې ترې لاس ته راوړه، چې دا نه ریا ضي ده او نه پښتو او هغه چا چې دا لیکلې نه دا چې په ریاضي نه پوهیږي په پښتو هم نه پوهیږي.

زما په لیکنو کې نوښت:

دا باید په ګوته کړم، چې زما لیکنه په نړیوال معیار وه، چې منځپانګه یا متن يې طبعآ زه لرم.

لومړي: دا لومړي ځل دی، چې کتاب مې لومړی په پښتو او بیا په درې ولیکه.

دویم: دا لومړۍ لیکنه وه، چې په لیکنه کې له ایراني کتابونو ګټه نه وه اخستل شوې او لیکنه له الماني ادبیاتو او داسې څه له انګرېزي ادبیاتو رانیول شوي وه.

دریم: زما کتاب معیاري لیکل شوی وو او ترې ښه لیکنې یې شونتیا نه لرله.

په لاندې توګه مې غوښتنه او هیله :

اول - زه باید پوه شم چې ولې داسې شوي، چې زما نوم له کتاب څخه وتلي؟

که یواځې یوه لیکنه هم په کې زما پاتې وي، نو باید زما نوم په کې وی. دا ماته له ما سره او زما د دوه کاله په دې لار کې د ستونځو ګاللو له امله او نه اخر زما د علمي کار سره هم تیری بریښي؟

تاسو پوهیږۍ، چې د ۱۲ —م ټولګي کتاب لیکلو لپاره ماډېرې پیسې اخستي او لپاره مې یې ښه کار کړی وو، چې لاس ته راوړنه یې باید داسې نه وی.

دویم- د کتاب دا لیکلې لومړۍ او هم داسې سرسري دویمه برخه، چې ما لوستلې، د ښوونځیو لپاره د زغم نه دي.

زما وړاندیز: دا کتابونه باید راټول شي او بیا ولیکل شي، ځکه چې په دې خو لیکونکي نه پوهیږي ، نو له دې امله نه ښوونکي پرې پوهیدی شي او نه زده کوونکي او د پوهیدلو معقول څه هم نه لري. دې ته ګوته نیسم، چې په دې نورو کتابونوکې به هم ورته ستونځې وي، خو زما یې کتنه اوس د لاسه نه کیږي، ځکه چې .....

د داسې کتابونو لیکل او ښوونځیو ته وېشل د پوهنې وزارت لپاره توهین دی.

زه له دې امله د کوچني اختر وروسته کابل ته درځم او هیله لرم، چې د هرچا لومړی له تاسو سره وګورم. زه به د اګست په ۱۷ یو ځل وزارت ته درشم.

یادونه: ما په دې اخرو څو ورځو کې د کتاب ډېر ځایونه داسې ځغلند وکتل، باور وکړئ، چې د هرې موضوع د لوستلو سره زورېدلی یم.

زه به په دې هکله ــ که لوي څښتن کول- له تاسو سره په کابل کې وغږېږم.

له هر څه د مخه له تاسو ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکتر ماخان شینواری

یوه هیله

زه د افغانستان د ټولو ن ج ، نورو پاڼو او رادیو تلویزیونو څخه هیله لرم، چې دا زما لیکنه ګرانو لوستونکو ته وړاندې او په نورو اړونده لیکنو هم همدا مرسته وکړي.

د ریاضي کتابونو د چاپ مخه ونیول شي

ولې؟

په دې نږدې څو میاشتو کې د نصاب کتابونه بیا چاپ ته وړاندې کیږي او ګومان مې دی، چې داسې د معیار سره سم سمون به په کې نه وي راغلی، نو له دې امله یې د چاپ مخنیوی اړیین او په همدې ډول یې سمون هم اړین دی، چې په لاندې کې یې ستونځو او ستونځوبیو (د ستونځو حل) ته هم ګوته نیسم.

زه د شمیرپوهنې ټول د نصاب پوهانو ته درناوی لرم او هیله ده، چې دا لیکنه شخصي وه نه نیسي.

-- ما له نږدې ۱۹۹۸ ز ک وروسته د شمیرپوهنې په کتابونو پیل وکړ، چې تراوسه مې نږدې څه کم څلوېښت کتابونه لیکلي، چې له جملې یې له شلو ډېر چاپ او نور ناچاپ دي. د دې کتابونو ۱۴ غوره یې په www.kitabtoon.com (دې پاڼه کېاوس نه شته) کې خپاره شوي او همداسې له ما څخه شمیرپوهنې ته ځانګړې شوې پاڼه کې تر ۲۵ کتابونو ن ج ته پورته شوي او دا نور به هم په خپل وار ن ج ته پورته شي. زما پاڼه smakhan.wordpress.com

دا زما ن ج پاڼه په نا ښکلې ډول یواځې زما د شمیرپوهنې کتابونو ته ځانګړې شوې، چې زما زیات کتابونه په کې خپاره شوي او نور به هم په کې خواره شي. پاڼه ښکلې نه، خو خپله موخه پوره کولی شي او موږ ټولو سره مرسته کولی شي، چې شمیرپوهنه په ګډه سمه او معیاري کړو.

ګرانو هیوادوالو!

افغانستان دې اوږدې جګړې په هر اړخ کې بې ساری زیانمن کړی او همداسې په پوهنیز اړخ کې هم. د افغانستان نصاب هم له دې ناخوالو بې برخې نه دی پاتې شوی.

لکه څنګه چې پوهنه د هیواد مغز جوړوي، همداسې نصاب د پوهنې مغز دی، نو له دې امله زیاته پامرنه هم غواړي.

ما په نصاب کې د دولسم ټولګي پښتو او درې کتابونه ولیکل، د قرارداد وخت پوره شو، پیسې مې واخستلې او زه ترې لاړم، چې متآسفانه له ما لیکلي کتابونه چاپ نه شول – علت یې دا وو، چې ګران لیکونکي یا لیکونکي وښايي، چې دوي دا کار ښه کوي، نو ولې دا د هیواد دباندې افغانان دې دې کار ته راوبلل شي- او په ځای یې متآسفانه ناسم کتابونه چآپ شول. په دې هکله مې په ۲۰۱۲ ز ک کې پوهنې وزارت ته یو لیک هم لیږلی وو، چې

ما متآسفانه چې پوره ناوخته دا نور د ښوونځي چاپ کتابونه وکتل او دې نتیجې ته ورسیدم، چې د ریاضي کتابونه باید سم او معیاري چاپ شي او نه دا ناسم بیا چاپ شي.

دا وړاندیز ولې ما په نصاب کې نه دۍ کړي؟

په خواشینۍ سره به ووایم، چې د کار په سر کې مسئولو چې په کار پوه نه وو، بل ځوک هم کار ته نه پرېږدي او د چا خبره د چا غوږ ته هم نه رسیږي. ما په همغه وخت کې هم د ټولو لیکنو لپاره وړاندیزونه لروده او هلته مې ورته چاپ او په میز اېښودلي وو، خو چا نه غوښتل ګټه ترې واخلي او یا یې ترې د ګټې اخستلو توان نه لاره.

ما ته د هغو د لیکنې متود ښه ونه برېښیده، ځکه چې استادان د دارنګه لیکنو سره بلد نه دي، نو له دې امله د پوهنې متن سره له هغې ځو واره زیاتې ځنګیزې لیکنې کوي، چې موخه ور نه دي.

ما چې پټیل، چې د کتابونو د چاپ مخه باید ونیول شي، نو دې ته مې هم چمتووالی باید ښوولی وي، چې د کتابونو معیاري او سم لیکلو امکان هم باید شته وي.

دا امکان شته. ما دا کار سرته رسولی، کتابونه مې ټول داسې خام پوره کړې، چې زیاتو برخو ته یې ، ځو واره وړاندیزون هم شته.

که د کتابونو د چاپ کار باید ډېر په بیړه وشي، نو دا کار هم کیدونکی دی، خو باید ځو تخنیکي کسان د مرستې لپاره چمتو وي.

د چاپ کتابونو په ناسمون مې لیکنه کړې، چې ګران لوستونکي یې په smakhan.wordpress.com کې لوستلی شي او که ن ج ته پورته نه شو، نو مینه وال او په دې هکله لیوال یې د برېښنا پټې له لارې لاس ته راوړی شي..

ما د هرکتاب څخه لږ ترلږه یوه برخه داسې د نمونې په څیر څیرلې.

د دې لپاره چې د شمیرپوهنې مینه وال ګران لوستونکي په ستونځو وپوهیږي، نو اړیین بولم، چې د ښوونځي کتابونه هم وګوري او اړونده موضوعګانې زما د چاپ او ناچاپه لیکنو سره پرتله کړي(کتابونه په پورته ن ج کې شته دی، چې ځنې یې راکښته کیدی شي او هم یې هلته ګران لوستونکي لوستلی شي).

زه په دولت کې او له دولت دباندې د ټولو اغیزمنو هیوادوالو څخه هیله کوم، چې په دې لار کې له ما او له دې لارې زمونږ د ځوان راتلونکي سره مرسته وکړي او د شمیرپوهنې معیاري کولواو سمون امکانات راته چمتو شي.

زما د کار دوه امکانات شته:
لمړی: دا کار زه کړی شم، چې له المان څخه هم سرته ورسوم او په ښه توګه، په دې حالت کې به زه د زحمت په مقابل کې له اجورې - د ځوانانو سره د مرستې له امله - تیر شم.

دویم: په افغانستان کې که دا کار سرته ورسیږي، دا به ګټور وي، ځکه چې په افغانستان کې به په ټولو خواوو کاروشي.

داځه وروستی خبرې ما هم رامخ ته کړې.

په لاندې کې زما لیکنې د افغانستان اسلامي جمهوریت جمهورر ریس جلالتمآب اشرف غني او د پوهنې محترم وزارت ته لیک کې هم لوستلی شی او هیله مې ده، چې ویئ لولی.

ستاسو له ګڼو مشورو به ډېر منندوی یم.

زما د برېښنا لیک پته: smakhan1946@gmail.com

ستاسو ماخان

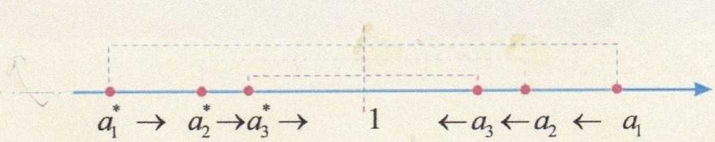
د نصاب د دولسم ټولګي کتاب ناسمونونو ته کتنه:

لومړي: په دولسم ټولګي کې پیل له ترادفونو شوی او په سر کې یې دوه ترادوفونه راوړي او دا یې بیا په یوه ګراف یا کرښه د ښي او کیڼې لورې یوې پولې ته څغلولي.

د کتاب ۳ ــم مخ

پایله:لیدل کېږي، چې د a_n ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د a_n^* ترادف له کیڼ لوري څخه د 1 عدد ته د n په زیاتېدو سره نږدې کېږي، یعنې:

ـ د a_n ترادف کله چې n بې نهایت ته تقرب وکړي، مساوي په(1) سره کېږي او همداشان د a_n^* د ترادف $n-$ام حد که n بې نهایت ته نږدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.



ددې لپاره چې د لیمیټ مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړی پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګراف په پام کې نیولو سره تر څېړنې لاندې نیسو.

زه پوهیږم، چې دا کار دې درنو لیکوالانو ولې کړی؟

له همدې پیله روښانیږي، چې محترم لیکونکي د درس سره کومه بلدتیا نه لري.

په پورته کې دا دوه پرلپسې هیڅکله له) ۱ « سره نه برابریږي، لکه ښاغلی لیکوال چې لیکي.

پسې یې بیا د پرلپسې یا ردیفونو لپاره بیل بیل ګرافونه کښلي.

په پرلپسیو یا ردیفونوکې چې موږ لیمټ راوړو، نو موخه ترې د پرلپسې کونورګنت او ډیورګنت دي. په پرلپسې کې اړین نه ده، چې د کونورګنت حالت کې دې پرلپسې له دواړو لورو پولې ته لاړ شي، خو داسې پرلپسې شته او هغه یو ترادف دی نه دوه.

دویم: دا لاندې څه چې راغلي، هم کوم درس پورې اړوندوالی نه لري، همداسې څه یې لیکلي. دی د ناسم د ترادف درس څخه سملاسې داسې یوې موضوع ته راغلی او بیا د ښي او کیڼ لورې لیمیټ ته راځي او که وکتل شي، نو په لیکنو کې کوم توپیر نه شته. دلته د زده کړې څه نه لیدل کیږي او دا اخره کرښه یې داسې ده، چې په دې موضوع کې کومه پوهه هم نه لري.

که چیرې دا ټیک هم وي، نو ځای یې بې ځایه ځکه راوړي، چې د ښی او کیڼي لور لیمټونه، چې هلته هم ناسم دي، په اووم مخ کې څیړل(که چیرې څیړنه یې وبولو)

په لاندې کې ،، د متحول تقرب،، یعني څه؟ دا هیڅ مفهوم یا ترې پوهیدنه نه لري. که ... ترادف وي هم باید د ترادف په ډول ولیکل شي او که تابع وي هم باید د تابع په ډول ولیکل شي.

د متحول تقرب: ویل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختیاري ډول د a عدد ته نږدې کېږي، یعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچنی دی یا په لاندې ډول:

$$\forall\delta>0: |x-a|<\delta \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to a} x = a \quad \text{یا} \quad x\to a \quad \text{یا} \quad |x-a|\to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x\to a^+$) که چیرې د x د قیمتونو یو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدې شي.

$$x:\ a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ ...\ \to\ a^+$$

له کینې لوري د متحول تقرب: ($x\to a^-$) که چیرې د x د قیمتونو یو متزاید ترادف موجود وي په داسې حال کې چې x په تدریجي ډول د a اختیاري عدد ته نږدې شي.

$$x:\ a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ ...\ \to\ a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ یعنې:

$$x\to a \iff (x\to a^+\ ,\ x\to a^-)$$

د

$$\forall\delta>0: |x-a|<\delta \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to a} x = a \quad \text{یا} \quad x\to a \quad \text{یا} \quad |x-a|\to 0$$

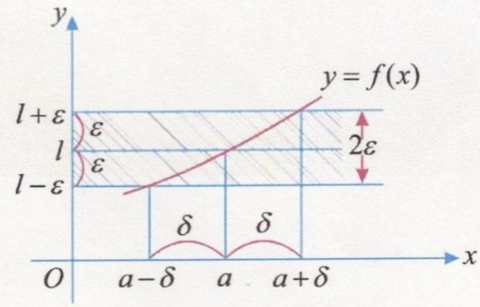
ډول لیکنو سره ګران لیکونکي بلدتیا نه لري او نه داسې څه د مخه راغلي، چې روښانه شوې وي

داسې لیکنې د ښوونځیو لپاره ستونځمنې دي. له دې امله ماهم په خپلو لیکنو کې نه وې راوړې. ګورو چې د کتاب ناسموونکې هم دا څه ناسم یا بې له تشریح کارولې.

په دې هکله زما لیکنه په لاندې کې شته.

دریم: په لاندې تعریف کې د پوهیدلو څه نه شته او په دې ریاضیکي تعریف خو نه پوهیږي، ځکه چې په لاندې یې د پوښتنې د حل نتیجه راوستلې او دا بحث له دې سره په ربښتیا کې هیڅ سر او کارنه لري.

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر ترلي انټروال کې چې د a عدد په هغې کې ګډون لري کیدای شي چې تابع په a کې نه وي تعریف شوی. که چیرې د x متحول د a عدد ته نږدې شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نږدې کېږي، نو ویل کېږي چې د $f(x)$ تابع لیمیټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي نو داسې یې لیکو: $\lim_{x\to a} f(x)=l$ یا $\begin{matrix} x\to a \\ f(x)\to l \end{matrix}$



$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 \;:\; |x-a|<\delta \;\Rightarrow\; |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=l \;\Leftrightarrow\; (|x-a|\to 0 \Rightarrow |f(x)-l|\to 0)$$

دا سومبولونه ∀ او ∃ نه دې ښوول شوي، چې څه شی دی او څه بلل کيږي.

ښاغلي ليکونکی په اووم مخ کې بيلګه راوړي او بيا دا ښايي، ښي او کيڼې لورې ليميټ يې شميري.

باید د $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$ ، لپاره $x \neq 3$ وليکي،چې هلته فنکشن تعريف نه دی. دی بيا په ناسمه توګه په جدول کې ليکي. دا چې دا بايد څنګه وليکل شي، زماپه ليکنو کې شته.

دویمه بېلګه: و ښيئ چې $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$ سره دی.

حل: د ښي او کيڼي خوا لېميتونه تر څېړنې لاندې نیسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

لیدل کېږي چې د ښی خوا او کیڼي خوا لېمیتونه سره مساوي دي، نو $\lim_{x\to 3}=\frac{x^2-9}{x-3}=6$ دي.

په پورته کې xد 3 قیمت نه شي اخستلی، هلته فنکشن تعریف نه دی، نو له دې امله په جدول کې، نه د ښی لورې او نه د کیڼې لورې دا ارزښت 3 اخستلی شي، هلته 3 ته ور نږدې کیږي.

د بیلګې حل یې هم بیا سم نه دی کړي، په هغه ورسره بلده لار.

دا هغه د کاغي او د زرکي خبره ده.........

دویمه طریقه: د لېمیټ د تعریف په پام کې نیولو سره فرضوو چې د هر اختیاري کوچني عدد ε لپاره یو δ شتون لري داسې چې:

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0:\ |x-a|<\delta\ \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$|x-3|<\delta\ \Rightarrow\left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|=|x+3-6|=|x-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon=\delta$$

د بیلګې د حل نتیجه

$\varepsilon = \delta$

دا د دی بحث سره سر او کار نه لري یعنې دا مو موخه نه ده، نو باید ووایم، چې درونډ لیکونکي د موضوع څخه بوي هم نه وړي.(بخښنه دې وي، که زما لیکنې داسې لږ توندې برېښي)

او بې ځایه مخ ته ځي، چې څه ترې پوهیدل کیږي هم نه.

له پورتنی اړیکې څخه دا معلومیږي چې ε له δ سره اړیکه لري، که δ ته قیمت ورکړو ε قیمت اخلي او که ε ته قیمت ورکړو δ قیمت اخلي، بنا پر دې هغه تعریف چې د لیمیټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لیمیټ لري، یعنې: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$

دې پورته ته په لنډه توګه زما نوره لیکنه او ټیکاوی:

د کتاب په پیل کې راوړل شوې د ترادف یا پرلپسې موضوع باید د یوولسم ټولګې کتاب کې پوره څیړل شوې وی، مګر هلته یې یواځې دا نومونه راوړل شوي او نور لیکونکي – بې له دې، چې د موضوع اړیین څه راوړي - له موضوع څخه تیر شوی.

د دې موعوع څخه موخه د ترادف پولې ته تلنه یا کونورګنت او له پولې اووښتنه یا ناپای ته تلنه یا ډیورګنت او... دي، چې بې له دې په رښتیا کې د ترادف یا پرلپسې څیرنه کوم غوره والی یا اهمیت نه لري، یعنې خپله موخه له لاسه ورکوي. دا د یوولسم ټوګي د ترادف درس، نو په رښتیا کې خپل غوره والی او اړیینوالی له لاسه ورکوي. نور سموالي او ناسموالي ته یې ګوته نه نسم، همدا بسیا کوي، چې څه په کې نه دي ویل شوي یا لیکل شوي.

د ۱۲ ـــم ټولګې کتاب ته:

یادونه: دا چې ګومان کیږي د داسې لیکنو سره به بلدتیا لږ وي، نو تشریح به راڅخه لږ ډیره شي.

د ،، پوله ارزښت،، په څیره کې ښوونه

که $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ د حقیقي اعدادو (ګڼونو) ترادف یا پرلپسي وي، نو عدد $a \in \mathbb{R}$ د دې ترادف یا پرلپسي پوله ارزښت بلل کیږي او پرلپسي a ته کونورګیر کیږي یا a ته هڅیږي یا نږدې کیږي، که د هر $\varepsilon > 0$ لپاره په انتروال $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ کې له یوه اندکس یا پیژند نخښې اخوا یا وروسته یا پسې د پرلپسي یا ترادف ټول غړي(دوي یي حدونه یا جملې بولي، نه پوهیږم ولې؟) د انتروال په دننه کې او فقط پاې ډېر غړي له انتروال څخه دباندې پراته وي.

(دنورې اوږدې روښانه ونکي شننې څخه تیریږم)

لنډ پیژند یې:

عدد $a \in \mathbb{R}$ د ترادف $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ پوله بلل کیږي، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو طبیعي یا پیداښتي عدد N شتون ولري، داسې چې $|a_n - a| < \varepsilon$ باور ولري، که $n \geq N.$ وي.

دا پیژند راکوي، چې: د هر $\varepsilon > 0$ لپاره یو ایندکس N شته، داسې چې له دې ایندکس یا پیژندنخښې وروسته د پرلپسي(ترادف) ټول غړې د ε څخه په کم واټن له a لرې پراته دي یعني له ε څخه چې a ته څومره نږدې دی دا نور هم a ته نږدې دي.

د $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ د پولې ارزښت لیکلو لپاره خپل ځانله سومبول لرو: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

د دې لیکدود سره سم د یوې پرلپسي پوله ارزښت تعریف داسې رالنډولی شو:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \iff \quad \forall\varepsilon > 0\;\exists N \in \mathbb{N}\;\forall n \geq N:\;|a_n - a| < \varepsilon$$

د داسې لیکنو لپاره د ε (لوستل: اپیسیلون) توری ورځنی یا مروج شوی.

بیلګه:

په یوه بیلګه کې یې روښانه کوو:

د دې لپاره چې د $\frac{1}{n}$ پرلپسي یا ردیف و 0 ته کونورګنټ وښایو، یو د مخه ورکړ شوي ε ته یوه په خوښه طبیعي عدد یا ګڼ N ټاکو، چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وی، نو د ټولو $N < n > N$ لپاره باور لري:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

موضوع اوږدولی نه شم، ځکه چې دا یو درس نه دی، دا فقط په موضوع داسې لږ رڼا اچونه ده.

د فنکشن پوله ارزښت:

یادونه: د دې ۱۲ – م ټولګي د درس دا هغه اصلي موضوع ده.

د فنکشن پوله ارزښت په لاندې توګه پیژنو یا تعریفوو:

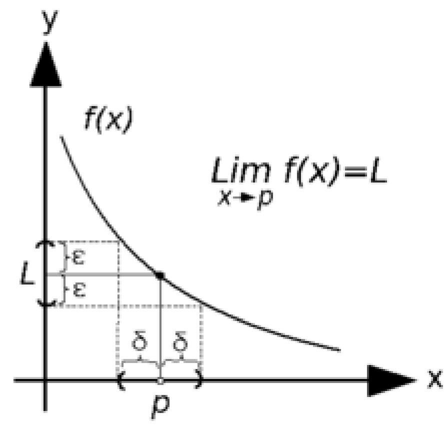
پیژند: د فنکشن f پوله ارزښت، د x لپاره چې p ته نږدې کیږي، L دی او داسې یې لیکو: $\lim_{x \to p} f(x) = L$

لوستل یې هم همداسې دي لکه پورته تعریف

داسې یې شمیرپوهنیز لیک دود باندې تعریفوو:

فنکشن f پوله ارزښت L لري، که د هر $0 < \varepsilon$ لپاره یو $0 < \delta$ شتون ولري، داسې چې د هر x لپاه د $\delta > |x-p| > 0$ سره $\varepsilon > |f(x)-L|$ هم باور ولري.

د پورته شمیرپوهنیز یا ریاضیکي فنکشن پوله ارزښت لپاره لاندې ځیره



پورته دوه تعریفونه برابر ارزښته دي یعني له یوه څخه بل لاس ته راځي او په ځټ یا برعکس یعني لیکو:

تعریف: د فنکشن f پوله ارزښت، چې x و p ته نږدې کیږي، L دی، تیک هلته یا هلته او هلته یا هلته او په څټ، یا له دې لاس ته راځې او په څټ یا برعکس چې د هر $\varepsilon >$ 0 لپاره یو $0 < \delta$ شتون ولري، داسې چې د هر x لپاه د $\delta > |x-p| > 0$ سره $|f(x)-L| < \varepsilon$ هم باور ولري.

دلته هم په همدومره بسیا کوو، که څه هم روښانه کیدل نورې شننې ته هم اړتیا لري.

دې ته دلته په اخر کې بیا ګوته نیسم، چې دا شمیرپوهنیز یا ریاضیکې ډول لیکنې ستونځمنې دي او باید ترې تیر شو، د ترادفونو او فنکشنونو لپاره.

دا نور پاتې درس هم په همدې ترتیب ګران لیکونکي لیکلی چې زه نور پرې نه غږیږم.

دا بسیا کوي، چې کتاب د ښوونځیو څخه راټول شي او له سره ولیکل شي.

ستاسو له سرې سینې څخه – که ومو لوسته- ډېره مننه.

ستاسو ډاکتر ماخان شینواری.

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې   انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل   دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکټر ماخان ،،میرزي،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي. دا هم چاپ سوي.

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

٣ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ١

٧ – انالیزې ٢

٨ – کرښیز الجبر

٩ - د شمیرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل انالیز

١٢ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کربنیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي چاپ شوی

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډیری پوهنه یا سټ تیوري چاپ شوی

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي) چاپ شوی

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګریزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه چاپ شوی

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

دا لاندې د ښوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسیدل:

شمیرپوهنه د اوم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د اتم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د نهم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د لسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د یولسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د دولسم ټولګي له پاره

ریاضي برای صنف دوازده

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرې شینواری د ارواښادې پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترگې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړني ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولگې پیل او د دویم ټولگې څخه گام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانگه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانگه او اباسین نومیږي. څانگه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.