شمیرپوهنه (ریاضي)

ددولسم ټولګي لپاره

لیکونکی ډاکتر ماخان (میرې) شینواری

2016

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

سريزه

ګرنو هيوادوالو!

ما په کلونو کې د نصاب لهپاره دا د دولسم ټولګي د پښتو او دري کتابونه ليکلي وو، خو په هغه وخت کې دا کتابونه د پوهنې وزارت له خوا چاپ نه شو او په ډېره خواشينۍ سره بايد ووايم، چې په ځای يې کتابونه چاپ کړل، خو ناسم، چې نه يې ژبه سمه وه او نه يې شميرپوهنيزه خوندويونه.

دا زما له خوا ليکل شوي کتابونه د معيار (د نړۍ د معيار) سره سم ليکل شوي او د لته يې ګرانو زده کوونکو ته وړاندې کوم، هيله ده، چې ګټه به ترې واخلي.

د نصاب له پاره د چاپ شوي کتاب د بوې برخې ناسمون به د کتاب په اخر کې ځای په ځای کړم.

ما څو واره د افغانستان د پهنې وزارت څخه هيله کړې، چې اجازه راکړي، تول د ښوونځي کتابونه ، چې ما ليکلي، دوی ته وړاندې او د سرهسم وليم، خو د کتابونو د ناسمون مسئوليت او يا هيڅ څوک د څه مسئوليت په غاړه نه لري.

زه دا ټول د ښوونځي کتابونه ګرانو لوستونکو ته وړاندې کوم، خو ځنو کتابونو کې به داسې راغلي وي، چې زما د ناتوانۍ له امله به مې د يوه کتاب ځنې برخې بل کتاب کې ځای په ځای کړې وي، چې له دې امله د ګرانو لوستونکو څخه هيله، چې د هر څه له مخه دې، د کتاب سريزه وګوري.

ما چې ليکنې جمهورريس او د پوهنې وزارت ته ليکلي، هم مل دي.

ګرانو هيوادوالو!

ماته به بخښنه کړی، زه له دې نور زيات زور نه لرم، چې ښه سريزه او نور اړين څه وليکم. دا زما ليکنې نورې همداسې ومنی، چې څنګه درته وړاندې کيږي. په ليکنو کې به زما د ليکنيزو ناسمونو نور ناسمونونه نه وي. هيله ده، چې ګټه به ترې پورته کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . پوله ارزښت

۱ . لیمیت یا حـد(پوله ارزښت) "The Limit"

موږ لاندې د

اعدادو ترادف لرو:

$$(I) \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}$$
$$(II) \quad \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \ldots, \frac{n+1}{n}$$
$$(III) \quad 2, 4, 6, \ldots, 2n$$

که n د ناپای په لور لاړ شي، نو د پورته ترادفونو څخه (I)د صفر په لور، (II) د یو په لور او (III) د ناپاي په لور ځي.

د Limit (لاتین) معنا پوله یا حد دی. په پخواني روم کې د یوه ښار د کلا نوم هم Limit وو، چې په ریاضیاتوکې ، د پولې مفهوم لري. د حد د کاروني مفهوم په دې کې پروت دی، چې د یوې تابع سلوک داسې وڅیړو لکه په افقي محور(دx محور یعنې"abscissa ") باندې، چې د تابع د x قیمتونه یوه حد(پولې) ته ورنږدې کیږي.

وبه ګورو، چې لیمیټ په ریاضیاتو کې د مشتق د پیژندلو لپاره کارول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليتونه:

- ايا تاسو په ورځني ژوند کې د ليميټ يا پولې له کلمې سره بلد ياست؟

- ايا تاسو په ورځني ژوند کې يوه بيلگه راوړی شئ، چې يوه ليميټ ته له دواړو لورو، يعني له ښئ لورې څخه و کيڼې لورې ته او همداډول له کيڼې لورې څخه و ښئ لورې ته نږدې شئ؟

- ايا د حيرتان او ترمز ترمنځ پول د افغانستان او ازبکستان ترمنځ له دواړو لورو پوله يا حد دی، که څنگه؟

- ايا دا په ټاکلي ځاي کي پوله ياحد دی، که څنگه؟

د پورته فعاليتونو څخه دا لاندې د لاسه کوو:

پورته راوړل شوې د ليميټ بيلگې په يوه ټاکلي ځای کې د توابعو يا د ځنو عملي بيلگو ليميټونه يا حدونه دي، چې موږ يې په رياضياتو کې هم په يوه ټاکلي ځای کې ليميټ، پوله يا حد بولو.

موږ اوس لاندې بيلگه د پايليزې روښانه ونې لپاره راوړو:

بيلگه ۱:

يوه د $f(x)=2x$ تابع او د P_0 يوټکی دې ورکړ شوی وي، چې د P_0 ټکی د وضعيه کمياتو په سيستم کې $(3,6)$ وضعيه قيمتونه لري نو :

1- دتابع جدول وکاږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوله ۳

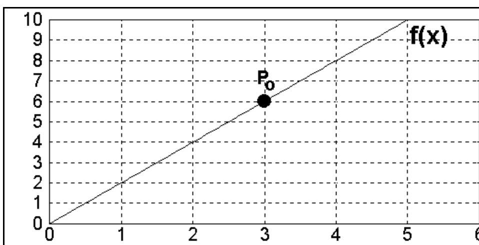
2- د تابع گراف یا ځیره انځور کړئ.

3- د$f(3)$ قیمت پیداکړئ او د$f(x)$ پرحرکت باندې بحث وکړئ که x و3 ته نږدې شي.

4- په شکل کې د $f(x)$ حد ته تلنه روښانه کړئ.

ښوونه:

1- د تابع جدول

2- د تابع شکل 3 - موږ $f(3) = 6$ لرو او غواړو د درې قیمتونوڅخه چې له ښۍ او کیڼې لورې 3 ته ورنږدې کیږي، و گورو، چې په دې درې ارزښتونو کې تابع چېرته ځي.	

ولاړ جدول:

x_k	$f(x_k)$	x_k	$f(x_k)$
2,98	5,96	3,001	6,002
2,99	5,98	3,01	6,02
2,999	5,998	3,02	6,04

په پورته جدول کې گورو،چې د f ارزښتونو سره له کیڼې لورې له پورته څخه وکښته لورې ته 6 ته نږدې کیږو او همداسې له ښۍ لورې له کښته څخه و پورته لورې ته هم6 ته نږدې کیږو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوله ۴

پروت جدول روړو:

له ښۍ لورې څخه کيڼې لورې ته   له کيڼې لورې څخه ښۍ لورې ته

$\longrightarrow\ 3\ \longleftarrow$

x	2.98	2.99	2.999		3.001	3.01	3.02
f(x)	5.96	5.98	5.998		6,002	6.02	6.04

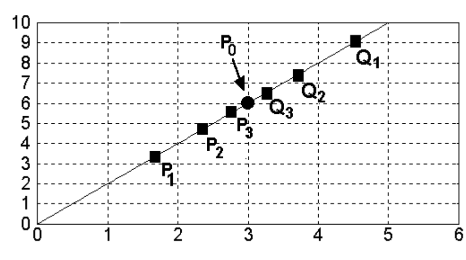
$\longrightarrow\ 6\ \longleftarrow$

په درې پلونو يا قدمونوکې د f(3) قيمت دf(x) له قيمتونو سره پرتله کوو، کهx و3 ته ورنږدې شي.

دا حالت موږ ته په ګوته کوي چې: که x و 3 ته ورنږدې شي، نو د f(x) ليميټ به په 6 برابر شي او داسې يې ليکو: $\lim_{x\to 3} f(x)=6$

او داسې يې لولو: د f(x) ليميټ يا پوله که x د درې په لور لاړ شي.

4- اوس ګراف په لاندې توګه رسموو او کيڼې لورې ته هدفمند ټکي - لکه په پورته جدول کې- په نخښه کوو.

	د مخامخ شکل له مخې... $P_1, P_2, P_3,$ ټکي په پام کې نيسو، چې د P_0ټکي ته تل له کيڼې لورې نږدې کيږي. او همداسې ... $Q_1, Q_2, Q_3,$ ټکي چې له ښۍ لورې P_0 ټکي ته نږدې کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

کتل کيږي: هرڅومره، چې پورته ټکي و P_0 ټکي ته نږدې کيږي په همغه کچه د تابع قيمتونه و 6 ته نږدې کيږي (د $P_0(3,6)$ ټکي قيمت له امله).که په ګراف کې x د x=3 ځای ته نږدې شو، نو د تابع قيمت و 6 قيمت ته نږدې کيږي.

وايو: 6 د f(x) تابع ليميټ دی، د $x \to 3$ (لوستل: x د3 (درې) په لورې ځي يا درې ته نږدې کيږي) لپاره.

د ليميټ لپاره ليکبڼه په دې ډول تعريف شوې: $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$

د پورته فعاليتونو او بيلګو څخه دا تعريف لاس ته راوړو:

پيژند(تعريف): د f(x) تابع يو ليميټ (حد)L لري، د x لپاره که x د يوه حقيقي عدد c په لورې تړلی لاړ شي او داسې يې ليکو: $\lim_{x\to c} f(x) = L$ لوستل: د f(x) ليميټ برابر په L دی، د c <- x لپاره.

په ځنو توابعو کې ليميټ، لکه چې وليدل شو، په داسې سادګۍ لاس ته نه شو راوړي.

يوه بيلګه راوړو، چې دا لاندې پوښتنې په کې ځواب شوې وي:

- ايا يوه تابع په خپل ورکړ شوي ځای کې ليميټ درلودی شي، چې هلته تعريف نه وي ؟

- اودا کار که کدونکی وي ، څنګه کيدی شي؟

بيلګه ۲ : تابع $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}; x \neq 1$ راکړ شوې.

د تابع جدول او ګراف وکاږئ.

x له ښی لورې څخه1ته نږدې کيږي x له کيڼې لورې 1 ته نږدې کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

x	0.98	0.99	0.999		1.001	1.01	1.02
f(x)	1.98	1.99	1.999		2.001	2.01	2.02

$\longrightarrow 2 \longleftarrow$

د f(x) تابع حرکت تر بحث لاندې ونیسئ که x و 1 ته نږدې شي یعنې $x \to 1$. له دواړو یعنې له ګراف او جدول څخه دا پایله لرو، چې f(x) د حقیقي عدد 2 په لور هڅیږي، یعنې: $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$	خپره کښل کيږي

له پورته شکل څرګندیږي: تابع په هغه ټکي کې چې لیمیټ یې شمیرل شوی، تعریف نه ده.

شمیرنیزه بښوونه: که یوه تابع په صورت او مخرج کې داړونده قیمت لپاره صفر ولري او دا صفرځایونه له منځه تللی شي- لکه زموږ په بیلګه کې- نو د لیمیټ یا بولې پیدا کولو لپاره داسې مخ ته ځو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1} x+1=2$$

او وایو چې دا ډول تابع په صفر ځای کې تشیا (خالیګاه) لري یعنې په دې ځای کې تعریف نه ده .

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت:

د سرک ښي لورې ته دا مخامخ تخته لرو:

- ووايئ، چې دا تخته څه مفهوم لري؟

په همدې توګه د سرک په سر کيڼي لورې ته هم همداسې يوه تخته ځړول شوې. دا هم په همغه مفهوم.

دا پوښتنه مو دې لاندې روښانه وني ته لاښودوي:

بيلګه ۳: د $x \neq 0$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$ تابع راکړ شوې.

1- تابع وليکئ، بې له دې، چې د مطلقه قيمت نښه | | استعمال کړئ.

2- د تابع ګراف وکاږئ.

3- که x له ښي لورې 1 ته نږدې شي، نو د $f(x)$ قيمت پيدا کړئ.

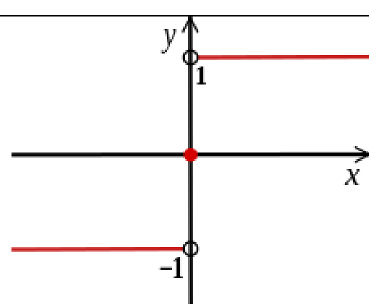
4- که x له کيڼې لورې1- ته نږدې شي، نو د$f(x)$ قيمت پيدا کړئ.

5- وښاياست چې پورته تابع يعنې $f(x)$ څو حدونه لري.

ښوونه: 1-تابع بې له سمبول ،، ،،| | په لاندې ډول ليکو

$$f(x) = \begin{cases} 1; x > 0 \\ -1; x < 0 \end{cases}$$

2-د تابع ګراف انځوروو: مخامخ



(c) ketabton.com: The Digital Library

3- که x له ښي لور1ته نږدې شي، نود لرو:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -1$$

4- کهx له کيڼې لور 1- ته نژدې شي، نو دf(x) ليميټ دی: $\lim_{x\to -1} f(x) = -1$

5- ګورو چې که x دوه قيمتونو 1 او1- ته نږدې شي، نو f(x) دوه د ليميټ قيمتونه لري يعني$\lim_{x\to \pm 1} f(x) = \pm 1$ ، نو له دې امله f(x) ليميټ نه لري.

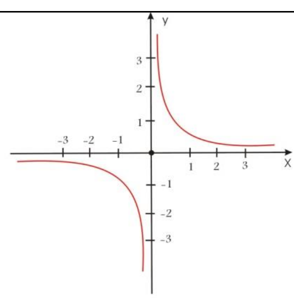
له پورته بيلګې پايله:

په پورته بيلګه کې د$x \to -1$ لپاره تابع ښی ليميټ لري او د $x \to 1$ لپاره کيڼ ليميټ لري.

د دې لپاره دې د ګراف پورته کښل شوی شکل هم وکتل شي.

بيلګه۴: $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع لرو، چې $x \neq 0$ دی

د $f(x) = \frac{1}{x}$تابع په x=0 ځای کې ارزښت نه شي نيولی، يعني په x=0 کې تعريف نه لري. دا تابع په صفرځای کې قطب(Pol) لري. مخامخ شکل دې وکتل شي.



يادونه: هغه تابع، چې مخرج يې صفر وي او صورت يې صفر نه وي، وايو چې تابع په دې د مخرج په صفرځای کې قطب Pol لري.

$x=0$ته د نږدې کېدو لپاره ترادف $(x_n) = \frac{1}{n}$ ، ټاکو.

د اړوندې تابع د قيمتونوترادف $= n$ $\left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right) = (x_n)$دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا د $n>0$ لپاره یو نامحدود صعودي(جگېدونکی) ترادف دی.
او د $n<0$ لپاره نزولي- یا متناقص(ټيټېدونکی) ترادف دی.
دا په دې معنا، چې د(f(x تابع په صفرځای کې لیمیټ نه لري. دا هلته یو قطب لري.

د توابعو د لیمیټ لپاره دا لاندې پایله لرو:
د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځاي کې یو کينې اړخيز ليميټ $a_l = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ لري، که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي يې د x_0 کینې لور ته پراته و ي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_l په لور هڅيږي.

په ورته توگه ښی اړخيزه لیمیټ: د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځاي کې یو ښی اړخیز ليميټ $a_r = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ لري، که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي يې د x_0 ښي لور ته پراته و ي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_r په لور وهڅيږي..

که تابع (f(x همغه ليميټ L ولري که x له ښی اويا کينې لورې و c ته نږدې شي، نو **لیمیټ** شته دی او د L سره برابر دی.

دا داسې لیکو: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

تمرينونه :

د دې لاندې هرې تابع (پيژند ورشو(د تعريف ناحيه) domain اوارزښت ورشو(د قېمتونو ناحيه))range يا codomainپيدا کړئ. د توابعو گراف وکاږئ او حدونه (پولې) يې پيداکړئ.

$$1)\ \lim_{x \to -1} (x^2 + x) \quad , \quad 2)\ \lim_{x \to 4} (x^2 + x) \quad , \quad 3)\ \lim_{x \to 0} |x| \quad , \quad 4)\ \lim_{x \to 2} \frac{x}{x}$$

$$5)\ \lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{x^2}{x}} \quad , \quad 6)\ \lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} \quad , \quad 7)\ \lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^9 - 9}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

10- که وي: $f(x)=\begin{cases} 2+x; x<1 \\ x^2 \quad ; x\geq 1 \end{cases}$

الف) د تابع ګراف وکاږئ.

ب) $\lim_{x\to -1} f(x)$ پیدا کړئ.

۱. ۲ د لیمیټونو یا پوله ارزښت خویونه:

" Properties of Limits "

پوهیږو: په ریاضیاتو کې ټول توابع چې لرو، د ساده توابعو ترکیب combination دی، لکه دتوابعو جمع، تفریق، ضرب، وېش (چې مخرج یې صفر نه وي) او زنځیرونه compositon . موږ دوه غوره او ساده توابع $f(x) = c$ او $g(x) = x$ لرو.که دواړه توابع سره یوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$h(x) = x + C$, یا $L(x) = cx$, یا $m(x) = x.x = x^2$ او داسې نور.

وبه ګورو،چې دلته هم ټولې څلور عملیې همداسې اجراکیږي، لکه د اعدادو په ترادفونوکې.

فعالیت:

په دې برخه کې د په خوښه د ثابتو توابعواو کېمټ یا ایدنتیک توابعو Identity function لیمیټونه د جمعې، تفریق، ضرب او همداسې د ویش(چې مخرج یې صفر نه وي) له لارې وشمیرئ (وروسته به وګورو، چې دا د لیمیټ خویونو تر نامه څېړل کیږي).

- د په خوښه یوه پولینوم تابعو لیمیټ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د $f(x) = x$ او $g(x) = x - 2$ توابعوڅخه کار واخلئ، چې درې نورې په خوښه توابع ترې لاس ته راوړئ. د دې توابعو لیمیټونه پیداکړئ. دا لیمیټونه جمع ، تفریق، ضرب او تقسیم(چې مخرج صفر نه وي) کړئ.

- که شوني شي، چې د یوې تابع لیمیټ د تابع له حل څخه لاس ته راوړلای شو، یعني که د بیلګې په توګه ولرو: $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} 3 = 3$ نودا تابع به څنګه لیکو؟

- ایا د پورته عملیې په څیر دا عملیه د هرې ثابتې او کثمتې تابع لپاره ریښتونې ده؟

موږ له پورته څخه دا لاندې پایله لرو:

که $f(x) = x$ او $g(x) = 2$ ولرو، نو لرو: $\lim_{x\to 1} f(x) = 1 \;, \lim_{x\to 1} g(x) = 2$

2- که $h(x) = f(x) + g(x)$ وي، نو لرو: $h(x) = x + 2$

3- د h(x) ګراف وکاږئ.

4- د تابع لیمیټ د جدول له لارې

$\longrightarrow 1 \longleftarrow$

0	.5	.8		1.2	1.5	2
2	2.5	2.8		3.2	3.5	4

$\longrightarrow 3 \longleftarrow$

په یاد ولرئ: $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1}(x+2) = 3$ او $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x)$

له پورته څخه د لیمیټ لومړی خوې لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی: د لیمیټ د جمعي خوې: د د وه یا څو توابعو د جمعي لیمیټ د همغو اعدادو د لیمیټ د جمعي سره برابر دی: $\lim\limits_{x\to1} h(x) = \lim\limits_{x\to1} f(x) + \lim\limits_{x\to1} g(x)$

دویم: د لیمیټ د تفریق خوې: دا د پورته سره ورته حل لري. دا کار دې ګران زده کوونکي سرته ورسوي.

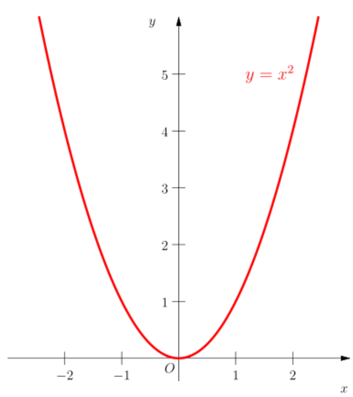
بیلګه ۱: که $g(x)=x^2$ او $f(x)=x$ وي،

نو پیدا کړی: $f(x)\cdot f(x)=g(x)$

ب) د تابع شکل وکاږئ:

پ) پیدا کړی: $\lim\limits_{x\to2} f(x)$

ت) پیدا کوی: $\lim\limits_{x\to2} g(x)$



حل: الف) $f(x)\cdot f(x) = x\cdot x = x^2 = g(x)$

ب)

x	-2	-1	0	1	2
f (x)	4	1	0	1	4

پ) $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2} x = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت) له ګراف څخه لاس ته راځي: $\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2} x^2=4$

له دې امله لرو: $\lim_{x\to 2} x^2=\lim_{x\to 2}(x\cdot x)=\lim_{x\to 2} x\cdot\lim_{x\to 2} x=2\cdot 2=4$

له پورته بیلګې څخه دا پایله لرو:

دریم: د لیمیټ د ضرب خوي:

د دوه یا ډیرو توابع د ضرب لیمیټ د هغو توابعو د لیمیټونو د ضرب سره برابر دی.

$$\lim_{x\to a} x^2=\lim_{x\to a}(x\cdot x)=\lim_{x\to a} x\cdot\lim_{x\to a} x=a\cdot a=a^2$$

بیلګه:

که $f(x)=x$, $g(x)=x^2$ وي، دا لاندې لیمیټونه پیدا کړئ:

$a)\ \lim_{x\to -1} f(x)\ ,\ \lim_{x\to -1} g(x)$ $\quad b)\ \lim_{x\to -1} f(x)\cdot\lim_{x\to -1} g(x)$

$c)\ h(x)=g(x)\cdot f(x)$ $\quad d)\ \lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(x)=-1$

پیدا کړئ: $\lim_{x\to -1} h(x)$

حل:a $\quad a)\ f(x)\cdot f(x)=x\cdot x=x^2=g(x)\ \Rightarrow \lim_{x\to -1} x^2=1$

x	-2	-1	0	1	2
f (x)	4	1	0	1	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b)\ \lim_{x\to -1} f(x)\cdot \lim_{x\to -1} g(x) = -1\cdot 1 = -1 \ \Rightarrow\ \lim_{x\to -1} x^2 = 1$$

$$c)\ h(x) = x^2\cdot x = x^3 \quad ,\ d)\ \lim_{x\to -1} h(x) = \lim_{x\to -1} x^3 = -1$$

بیلگه:

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$ تابع لرو، $\lim_{x\to 3} f(x)$ پیدا کړئ.

حل: $f(x)$ د دوه توابعو $g(x) = x^2 - 2x + 5$ او $L(x) = 2x^2 + 1$ وېش دی.

که x و3 ته نږدې شي کیدای شي لیمیټ د تابع د حل له لارې په $x = 3$ کې پیدا شي:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x + 5}{2x^2 + 1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 3}(x^2 - 2x + 5)}{\lim_{x\to 3}(2x^2 + 1)}$$

$$= \frac{3^2 - 2\cdot 3 + 5}{2\cdot 3^2 + 1} = \frac{8}{19}$$

له پورته بیلگې څخه لاندې لاس ته راځي:

څلورم: د لیمیټ د ویش خوي(مخرج د صفر سره برابر نه دی):

دیوې کسرې تابع لیمیټ(یعني یوه تابع، چې د دوه توابعو له وېش(مخرج له صفر سره برابر نه

دی) څخه لاس ته راغلې وي) د تابع د صورت لیمیټ او د مخرج لیمیټ (مخرج له صفر سره

نابرابر دی) د وېش سره برابر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

د $g(x)=\sqrt{3-x}$ ګراف وکاږئ او پیدا کړئ.

$$a)\ \lim_{x\to 2} g(x)\ \ ,\ b)\ \lim_{x\to -1} g(x)\ ,\ c)\ \lim_{x\to 3} g(x)$$

حل: په لاندې توګه مخ ته ځو:

الف)

$$\lim_{x\to 2} g(x)=1$$
$$\lim_{x\to 2}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to 2}(3-x)}=\sqrt{1}=1$$

ب) له ګراف څخه: $\lim_{x\to -1} g(x)=2$

یادونه: $\lim_{x\to -1}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to -1}(3-x)}=2\sqrt{4}$

$$c)\ \lim_{x\to 3^-} g(x)=\lim_{x\to 3^-}\sqrt{3-x}=\sqrt{\lim_{x\to 3^-}(3-x)}=\sqrt{0}=0$$

(د $f(x)\geq 0$ لپاره او د ټولو x قیمتونولپاره، چې c ته نږدې کیږي).

له پورته څخه لاس ته راوړنه:

پنځم: د لیمیټ د جذر (ریښې)خوې: د یوې تابع چې د جذر (ریښې) لاندې وي لیمیټ برابر دی، که چیرې تابع او لیمیټ دواړه د جذر لاندې ونیول شي.

پوښتنه: که $\lim_{x\to -2} f(x)=3$ وي، نو $\lim_{x\to -2}(f(x))^n$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: د یوه پولینوم حد تیک داسې شمیرل کیږي، لکه د یوې تابع حد. د مخه مو وویل،چې یو پولینوم د ساده توابعو د مختلو نښلونو څخه لاس ته راځي.

تمرینونه.

که $\lim\limits_{x\to4} h(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to4} g(x)=0$ او $\lim\limits_{x\to4} f(x)=5$ وي، نو پیدا کړئ:

1) $\lim\limits_{x\to4}(f+g)(x)$, 2) $\lim\limits_{x\to4}\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$, 3) $\lim\limits_{x\to4}(fg)(x)$

4) $\lim\limits_{x\to4}(h(x))$, 5) $\lim\limits_{x\to4}\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$, 6) $\lim\limits_{x\to4}(2h-3g)(x)$

7) $\lim\limits_{x\to4}(f\cdot h(x)$, 8) $\lim\limits_{x\to4}\left(\dfrac{2h}{3f-g}\right)(x)$, 9) $\lim\limits_{x\to4}(h(x)+f^2(x))$

10) $\lim\limits_{x\to2}(6x^3-2x+5x-3)$, 11) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x-2}{x^2+1}$

د کسري - یا ماتو توابعو لیمیټ" Lmit of Rational functions

مورږ د پولینومونو دا لاندې ویش لرو:

$$R(x)=\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0}{b_mx^m+b_{n-1}x^{m-1}+...+b_0};P_m\neq0$$

او د لیمیټ په هکله یې فکر کوو، چې د $b_0\neq0$ سره $\dfrac{a_0}{b_0}$ ترې لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت:

موږ پولينوم $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ لرو. ددې پولينوم ليميټ دx د مختلفو قېمتونو لپاره څنګه پيداکولای شو؟

- که $x\to 0$ د صفر په لورې لاړ شي يا صفر ته ورنږدې شي.

- که $x\to 1$ يوه ټاکلي عدد ته ور نږدې شي.

- که $x\to\infty$ د ناپای په لورې لاړ شي.

-که د دريمې درجې پولينوم $P(x)=5x^3+3x^2+3$ ولرو، نو ددې پولينوم ليميټ دځلورو په خوښه قيمتونو لپاره پيداکړئ.

پوهيږو، چې د پولينومي توابعو ليميټ د ورکړل شوو x قېمتونو لپاره، لکه د نورو ساده توابعو په څېر، چې د جمعې، تفريق،ضرب او وېش(چې مخرج صفر نه وي) په څير ورکړل شوي دي، شمېرلای شو. غواړو د ناطقو توابعويا کسري توابعو ليميټ پيداکړو.

د ناطقو توابعو د ليميټونوشميرلو لپاره،که شته وي، له مختلفو لاروڅخه کار اخلو:

که ولرو: $\dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$، نو د تابع خويونه د $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$ لپاره ساده کوو او د پورته پولينوم وېش، چې کسري تابع ده، ليميټ شميرو.

فعاليت: که $\dfrac{x^2-4}{x+2}$ ولرود $x\neq -2$ سره.

- ددې تابع حد د $x->-2$ لپاره پيدا کړئ.

- ددې تابع حد د $x\to 1$ لپاره پيدا کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

- ددې تابع حد د $x \to -1$ لپاره پیدا کړئ

- د تابع پیژندورشو ولیکئ!

- دا تابع څنګه ساده کولی شئ، چې پوله یې د $x \to -2$ لپاره وشمیرلی شو؟

د پورته فعالیت په بنسټ کولای شو، چې دکسري توابعو حدونه د مختلفو اعدادو لپاره پیداکړو او همداسې یوه کسري تابع که شوني وي، هغه ځایونو ته ورنږدې هم پیدا کړو، په کومو کې چې تابع تعریف نه وي.

ددې موضوع د روښانولو لپاره د مختلفو کسري توابعو څو بیلګې راوړو:

بیلګه ۱:

پیداکړئ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{x+2}$ که $x=1$ وي. دا تابع تعریف ده او لرو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{x+2}=\frac{(1)^2+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

که $x=1$ ځای په ځای کړو(Substitue) نو لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$

بیلګه ۲: پیدا کړئ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x+3}$

حل: دا چې تابع په $x=0$ کې تعریف ده، نو لرو: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{x+3}=\dfrac{0-1}{0+3}=-\dfrac{1}{3}$

بیلګه ۳: پیدا کړئ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: دا چې تابع په $x=1$ کې تعريف ده، نو لرو:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x+1}=\frac{1^2+1-2}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

که په يوه ځای يا عدد کې تابع تعريف نه لري، نو د مختلفو لارو يا متودونو څخه کار اخلو، چې ليميټ يې پيداکړو، که شته وي.

بيلگه ۴: پيداکړئ: $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}$

حل: دا چې $f(x)$ تابع په $x=2$ چې تعريف نه لري، نو حد د تابع د حل له لارې نه شي پيداکيدای. داکيدای شي داسې پيدا کړو، چې د تابع صورت په ضريبونو تجزيه کړو.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)}$$

د تابع ليميټ که x و 2 ته نږدې شي، دا مانا لري، چې $x\neq 2$ دی.

دا کسري تابع و $\lim_{x\to 2}(x-4)$ رالنډيږي او لاندې ليميټ لري:

$$\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

بيلگه ۵: پيداکړئ: $\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

گورو، چې تابع په $x=16$ کې تعريف نه لري يعني بايد $x\neq 16$ وي.

په ياد ولرئ چې: $\sqrt{b}-\sqrt{a}$ او $\sqrt{b}+\sqrt{a}$ يو د بل مزدوج دي.

حل: د پورته تابع صورت او مخرج د $\sqrt{x}-4$ له مزدوج $\sqrt{x}+4$ سره ضرب کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\lim_{x\to16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}$$
$$=\lim_{x\to16}\frac{(x-16)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$
$$=\lim_{x\to16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{\sqrt{16}+4}=\frac{1}{8}$$

بیلګه ۶: پیدا کړئ: $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}$

حل: تابع په $x=3$ کې تعریف نه لري، نو مخرج او صورت د مخرج په مزدوج ضربوو اولرو:

$$\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1-4)}$$
$$=\lim_{x\to3}-1(\sqrt{x+1}+2)$$
$$=\lim_{x\to3}-(\sqrt{3+1}+2=-4$$

بیلګه ۷:

پیدا کړئ: $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

حل: تابع په $x=1$ کې تعریف نه لري، نو په لاندې توګه مخ ته ځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{5+10x-15}{2x-3}}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{10x-10}{(2x-3)(x^2-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{10(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{10}{(2x-3)(x+1)}=\frac{10}{(2(1)-3)(1+1)}$$
$$=\frac{10}{-2}=-5$$

د کلاسیک لارې د کسري اعدادو لیمیټ:

اوس یوه بله تابع د څېړنې لاندې نیسو، چې $g(x)$ یې بولو: $g(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$
دلته هم دا پوښتنه کوو، چې که $x=1$ ځای ته نږدې شي، نو د $g(x)$ تابع د کوم قېمتونه غوره کوي: مونږ
بیا هغه ځای په پام کې نیسو، چې $x=1$ د مخ لورې(کینې لورې) ته خورا نږدې پروت وي او هغه ځای، چې د $x=1$ وروسته یا ښۍ لورې ته خورا نږدې پروت وي:

$$g(1-h)=\frac{(1-h)^2+(1-h)-2}{(1-h)-1}$$
$$=\frac{(1-2h+h)^2+(1-h)-2}{-h}=\frac{-3h+h^2}{-h}=3-h$$
$$g(1+h)=\frac{(1+h)^2+(1+h)-2}{(1+h)-1}$$
$$=\frac{(1+2h+h)^2+(1+h)-2}{h}=\frac{-3h+h^2}{h}=3+h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا دواړه لاس ته راوړني یا پایلې اوس داسې تشریح کوو:

که h ناپای کوچنی وټاکو، یعنې هغه ځایونه راونیسو چې $x=1$ ځای ته ناپای نږدې پراته وي، نو د تابع ارزښتونه به هم و 3 ته ناپای نږدې پراته وي. عدد 3 د $x=1$ ځای لپاره د $g(x)$ تابع د حد قیمت دی. ددې لپاره لیکو: $\lim_{x\to 1} g(x)=3$

تمرینونه:

د لاندې معادلو حدونه پیدا کړئ، که شته وي.

1) $\lim_{x\to 2}(6x^3-2x^2+5x+3)$

2) $\lim_{x\to -1}(x^7+2x-5)$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)^2-4}{x}$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{5x^2+7x}{(2x-3)^2-9}$

5) $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+3}-\frac{1}{3}}{x}$

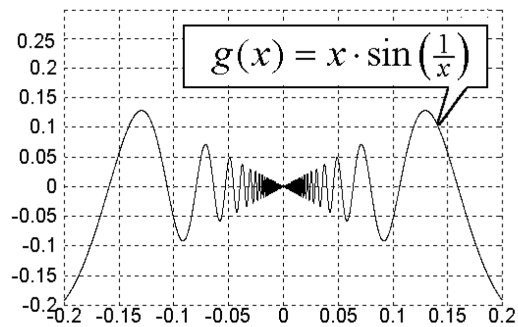
6) $\lim_{x\to 4}(\frac{1}{x}-\frac{1}{4})(\frac{1}{x-4})$

7) $\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2}$

8) $\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي توابعو حدونه Limit of trigometric function



فعالیت:

_ دساین پوله یعني $\lim_{x\to a} \sin x$ د x د مختلفوقیمتونولپاره پیدا کړئ،که $x \in [0;2\pi]$ وي:

_ که $x\to 0$ وي. _ که $x\to 30$ وي. _ که $x\to 45$ وي._ که $x\to 60$ وي.

_ که $x\to 90$ وي.- که $x\to 135$ وي.- که $x\to 270$ وي._ که $x->2\pi$ وي.

- د پورته ورکړشوو قیمتونولپاره د کوساین $\cos x$ لیمیت پیدا کړئ.

قضیه: که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ دی.

ښوونه: دx=0 لپاره تابع $\frac{\sin x}{x}$ تعریف نه لري او ناټاکلي بڼه $\frac{0}{0}$ لري.

موږ غواړو، د $x\to 0$ او $\frac{\sin x}{x}$ لپاره په لاندې ډول یو جدول ولیکو(په پورته مساوات کې x په رادیان اندازه کیږي):

(c) ketabton.com: The Digital Library

x		$\sin x$	$\frac{\sin x}{x}$
په درجه	په راديان		
10°	0.1745	0.1736	0.9948
5°	0.0873	0.0872	0.9988
3°	0.05235	0.05233	0.9996
1°	0.0174532	0.0174524	0.9995
$30'$	0.00872664	0.00872653	0.99999
$6'$	0.00174532	0.00174532	≈ 1
$3'$	0.00087266	0.00087266	≈ 1
$1'$	0.000291	0.000291	≈ 1
. . .	. . .	. . .	. . .

په پورته جدول کې گورو، چه د x لپاره $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ قيمت غوره کوي.

په شميرنيزه توگه د $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ښوونه په لاندې ډول مخ ته بيايو:

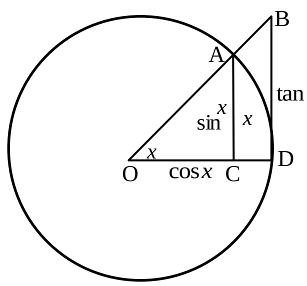
يوه دايره په پام کې نيسو چې د هغې مرکز (0) اوشعاع يې OD او 1 = $\overline{OA}=\overline{OD}=1$ ده (لاندې شکل وگورئ). د A له ټکی څخه پر $\overline{OD}$ يو عمود رسمو، چې دا وړانگه په C ټکي کې غوڅوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د D په ټکي باندې پر دايرې يو مماس رسموو، دامماس له $\overline{OA}$ څخه غځېدلي کر ښه د B په ټکي کې غوڅوي.

اوس A د D سره تړو:

موږ لرو :



$$\sin x = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AC}}{1} = \overline{AC}$$

$$\cos x = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \overline{OC}$$

$$\tan x = \frac{\overline{DB}}{\overline{OD}} = \overline{DB}$$

دا چې x په راديان اندازه کيږي، نو لرو: $\overset{\frown}{AD} = x$

له پورته شکل څخه لاندې نا مساوات لرو: $O\overset{\Delta}{B}D > A\overset{\angle}{O}D > A\overset{\Delta}{O}C$

همداسې لرو:

$$\frac{1}{2}\cos x.\sin x < \frac{1}{2}\overline{OD}^2.x < \frac{1}{2}\overline{OD}.\tan x$$

په پورته نامساواتو کې $\overline{OD} = 1$ ږدو او د نامساواتو ټولې خواوې په دوو کې ضربوو، نو لرو: $\cos x.\sin x < x < \tan x$

يا په همدې ډول ليکلای شو: $\cos x.\sin x < x < \dfrac{\sin x}{\cos x}$

که د پورته نامساواتو ټولې خواوې پر $\sin x$ وويشو، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

یا:

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > \lim_{x\to 0}\cos x$$

دا چې د $x \to 0^+$ لپاره $\cos x \to 1$ دی، نو لرو:

$$\frac{1}{1} > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > 1$$

$$1 > \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > 1$$

گورو چې په عین وخت کې $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ له 1 لوی او هم له یو 1 کوچنی دی، نو له دې نامساواتو څخه دا لاندې مساوات لرو:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

پام: که $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ او $x = -\alpha$ و لیکو، نو دا لاندې ترې لاس ته راځي:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{-\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin\alpha}{\alpha}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورته دوارو مساواتو څخه غوښتنه لاس ته راځي:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

بیلګه ۱: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$ پیدا کړئ.

حل: که $2x=\alpha$ اوکه $x\to 0$ وي، نو $\alpha\to 0$ او $\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ لرو.

له پورته مساواتو څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1\Rightarrow 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2\cdot 1=2$$

بیلګه ۲:

وښایاست $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$

که $y=5x$ وي او $x\to 0$، نو $y->0$ هم لرو:

$$\frac{\sin 5x}{5x}\ \frac{5}{2}=\frac{\sin 5x}{\frac{5}{2}(2x)}\ \frac{5}{2}=\frac{\sin 5x}{2x}$$

$$=\frac{5}{2}\frac{\sin y}{y}$$

له دې امله لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{5}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin y}{y}\frac{5}{2}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{2x}$$
$$=\frac{5}{2}\cdot 1=\frac{5}{2}$$

تمرینونه: دا لاندې غوره قضیه وښایاست.

که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ او لاندې اجرات وکړئ:

الف) تانجنت $\tan x$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو ولیکئ.

ب) $\frac{\tan x}{x}$ د $\sin x$ او $\cos x$ په ترمونو و لیکئ.

پ) دپورته قضیې لیمیټ پیدا کړئ.

ت) ایا قضیه رښتیا ده؟

لاندې لیمیټونه (حدونه)وشمېرئ.

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}}\ ,\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x},\quad 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x}\ ,$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x}\ ,\quad 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x}\ ,\quad 6)\ \lim_{x\to 0}\sin 5x\cos 3$$

$$7)\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1}\ ,\quad 8)\ \lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}+\sin^2 x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x \to \pm\infty$ لپاره پوله ارزښت یا لیمیټ

د $\frac{Q(x)}{P(x)};\ P(x) \neq 0$ کسري توابعو لپاره مو لیمیټونه وشمیرل، چې x په خوښه وو.

اوس $\frac{Q(x)}{P(x)};\ P(x) \neq 0$ لپاره لیمیټونه غواړو و شمیرو، که $x \to \pm\infty$ وي.

فعالیت:
زده کوونکي دې د هرې لاندې تابع د حد له شمېرلو د مخه، د توابعو ګرافونه انځور کړي او په ګرافونو کې دې یې دې ته پام وي،چې دا څنګه په تعریف شوې ورشوې کې ځغلي.

لومړی: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{5}{x-2}$ پیدا کړئ.

د 5 وېشنه په یوه ډېر لوی (ناپای) مثبت(منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي یعنې $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{5}{x-2} = \frac{5}{\pm\infty} = 0^{\pm}$.
ګراف G_f یو پروت اسیمپټوت $y = 0$ لري، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نږدې کیږي.

دویم: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3}{x+1}$ پیدا کړئ.

د -3 وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت(منفي) عدد باندې یو ډېر کوچنی مثبت(منفي) عدد ورکوي یانې $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{-3}{x+1} = \frac{-3}{\pm\infty} = 0^{\pm}$.
ګراف G_f یو پروت اسیمپټوت $y = 0$ لري، چې له پورته او کښته ګراف ته ور نزدې کیږي.

دریم: $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{5}{x^2-2x}$ پیدا کړئ.

په مخرج کې یوازې x^2 ستر رول لوبوي. د مربع کونې له لارې هر عدد مثبت

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیږي.که 5 په یوه ډېر لوی مثبت عدد وویشل شي، نو یو خورا کوچنی مثبت عدد ترې لاس ته راځي، یعنې $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5}{x^2-2x} = \frac{5}{+\infty} = 0^+$
ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري، یوازې له پورته لور ور نږدې کېدني سره.

ځلورم: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3}{x^2-2}$ پیدا کړئ.

د مخرج مربع کونې سره منفي عددونه هم مثبت کیږي.د -3 وېشنه په یوه ډېر لوی مثبت عدد باندې یو ډېر کوچنی منفي عدد ورکوي یانې $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3}{x^2-2} = \frac{-3}{+\infty} = 0^-$.
ګراف G_f یو پروت اسیمپتوت $y=0$ لري، یوازې له کښته ګراف ته ور نږدې کیږي.

د پرېښودنې- یا ترې صرفنظر کونې یا له ترې تیرېدنې اصول:

لومړی: $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2}$ پیدا کړئ.

په صورت کې د x جګعدد(توان؟)، په مخرج کې د x^2 توان په پام کې نیسو او همداسې له ټولو ثابتو تېرېږو (ټولې ثابتې پرېښول کیږي،صرف نظر ترې کیږي) او بیا x لنډیږي.
که 1 په ډېر لوی مثبت(منفي) عدد ووېشل شي، نو
$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{x^2-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0^\pm$ ترې لاس ته راځي.

(څیره G_f پروت ګاونډ(مجانب) $y=0$ لري، چې له پورته او کښته ورنږدې کیږي.

دویم: غواړو د $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2}{x+2}$ تابع حل پیدا کړو.

حل: په صورت کې د x^2 او په مخرج کې د x له ټولو توانونو په پام کې نیولو او له ټولو ثابتو تریږو(صرفنظر ترې کوو) او بیا یې د x سره لنډوو. په روښانه توګه ټول حدونه $\pm\infty$ لاس ته راځي یعنې $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2}{x+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$.
شکل G_f مائله اسیمپتوت راکوي، ځکه چې د صورت درجه له مخرج څخه د 1 په اندازه ستره ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}$ پیدا کړئ.

په صورت او مخرج کې د x^2 ټول توانونه په پام کې نیسو او له ټولو ثابتو تیرېږو او بیایې د x^2 سره لنډوو.

ټولې پولې په روښانه توګه $\frac{2}{3}$-راکوي

یعني $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3}=-\frac{2}{3}$

شکل G_f پرته اسیمپتوت راکوي، چې $y=-2/3$ ده.

څلورم: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}$ پیداکړئ

په صورت کې له x^2 څخه کوچنیو ټولو توانونو او په مخرج کې د x^3 له ټولو کوچنیو توانونو او همداسې له ثابتو تیرېږو. که -2 په $\pm\infty$ وویشل شي، نو یو کوچنی مثبت یا منفي عدد یعنې $0^{\pm}$ $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2+2x-1}{3x^3+2x^2-3x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2}{3x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2}{3x}=\frac{-2}{\pm\infty}=0^{\pm}$ ترې لاس ته راځي.

شکل(څیره) G_f یو پروت اسیمتوت $y=0$ لري، چې له پورته او کښته لور ورنږدې کیږي.

شمیرنیز حلونه(د شمیرنې له لارې حل):

اول: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}$ وشمیرئ.

په صورت او مخرج x^2 له نوکانو(لینده کیو یاقوسونو) راوستنې او بیا د x^2 سره لنډوني وروسته مخرج د 1 په لور ځي او صورت دصفر په لور، یعنې صورت ترمونه صفر ته نژدې کیږي.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-1}{x^2-2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{0^{\pm}}{1}=0^{\pm}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شکل G_f يوه مايله اسيومپټوت(مجانب) لري، ځکه چې د صورت درجه د مخرج له درجې څخه په 1 کوچنۍ ده.

دويم: وشميرئ: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}$

په صورت او مخرج کې هغه د لوی توان x يعنې x^4 له نوکانو يا لينډکيوبهر نيسو او بيا په ترتيب شميرنيزه عمليه مخ ته بيايو ، نو لاس ته ترې راځي:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0^-}{1}=0^-$$

ټوليز خويونه:

بيلگه۱: پيداکړئ: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^2-2}{x+1}$

په پورته بيلگه کې داسې مخ ته تللي يو،چې په صورت کې له ټولو عددونو څخه تيرېږو، چې د خپلواکې متحولې توان له 1 کوچنی يعنې صفر وي او په صورت کې له ټولو هغو خپلواک متحولو تيرېږو، چې توان يې له 2 څخه کوچنی وي.. گورو، چې په صورت کې x له کوم ضريب سره پاتې کيږی، له دې امله پورته تابع د مثبت-منفي ناپای په لور ځي.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(3x-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{+\infty}{1}=+\infty$$

بيلگه ۲: پيدا کړئ: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2-2}$

په پورته بيلگه کې په صورت کې له 1 او مخرج کې له 2 څخه تېرېږو او بيا صورت او مخرج په x ويشو. لاس ته راوړنه يې د x په يوه ثابت عدد وېشل دي. چې د $x\to\infty$ سره تابع ± 0 ته ځي، يعنې: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2-2}=0\pm$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۳: پیدا کړئ: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}$

په صورت کې له 2 او مخرج کې له $2x$ څخه تیرېږو او د x^2 سره یې لنډوو او په دې ډول لاندې پایله لرو: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-2}{3x^2+2x}=-\frac{2}{3}$

تمرینونه:

د لاندې تمرینونو حدونه د پورته ورکړشوو مختلفو لارو له لارې وشمیرئ:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{6}{x^2-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4+x^2+x+6}{x^3-3x+4}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5+x^2-x+9}{x^4+x^2-x-5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2-x+7}{x^3-x+5}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-2}{x+1}$$

متمادیت(ناپرېکیدنه)“Continuity”

د درس په دې برخه کې لولو ، چې یوه تابع په یوه ټکي یا یوه انټروال کې کوم حالت غوره کوي. ایا دا تابع په کوم ځای کې ټوپ وهي، یا پرې کیږي او که یا په متمادي یعنې نه پرېکیدنې ډول د اینتروال په دننه کې ځغلي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ په دې موضوع د تابع متماديت څيړو او متماديت تعريفوو

فعاليت:

لاندې توابع لرو:

$$f(x)=x^2-1 \ , \ f(x)=\frac{1}{x} \ , \ f(x)=\frac{|x|}{x}$$

- د دې درې توابعو شکلونه وکاږئ.

- وګورئ، چې د توابعو ګرافونه څنګه ځغلي. په کومه تابع کې ګراف ترلی ځغلي او چرته ماتيږي، ټوپ وهي او ...

له پورته فعاليتونو څخه لاندې پايله لرو:

د توابعو متماديت Continuous functions

په دې موضوع کې موږ د يوې تابع د متماديت په هکله څيړنه کوو او د متماديت پيژند(تعريف) ورکوو.

پيژند:

که b د f تابع تعريفورشو (- ساحه) کې يو حقيقي عدد وي. د f تابع په b متمادي بلل کيږي، که د ټکي (b.f(b)) نږدې د f ګراف داسې وکښلی شو، بې له دې چې د پنسل څوکه له کاغذ څخه پورته کړو.

له دې امله $f(x)=x^2-1$ تابع او $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع د $x=b$ په ټکي کې متمادي ده.

$f(x)=\frac{|x|}{x}$ تابع په $x=0$ متمادي نه ده ياني ټوپ وهي کيږي.(څيره په ۵ –م مخ کې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع په $x = a$ کې غير متمادي ده، که پرې شي(تشيا ولري)، ټوپ ووهي او يا ماته شي.

لرو: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ او $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = -1$ نو له دې امله $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ په $x = 0$ کې نشته يعني تابع د $x = 0$ په ټکي کې متمادي نه ده.

بيلګه ۱:

که $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; \quad x \ge 1 \\ 1-x & ; \quad x < 1 \end{cases}$ وي، نو:

الف) د تابع ګراف وکاږئ.

ب) پيدا کړئ $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

پ) پيداکړئ: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

که تابع په $x = 3$ او $x = 1$ کې متمادي وي.

حل:

الف) ګراف دې د ګرانو لوستونک دنده وي.

ب)
$$\lim_{x\to 3} f(x) = (2x+1) = 7$$
$$f(3) = 7$$

پ)
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (2x+1) = 3$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (1-x) = 0$$

د ب) او پ) له مخې لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to1^+} f(x) \neq \lim_{x\to1^-} f(x)$$

له دې امله تابع په $x=3$ ناپرېکيدونې او $x=1$ کې پرېکيدونکې ده.

بیلګه ۲:

که $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x3+x}{x} & ; \ x\neq0\\ 3 & ; \ x=0\end{cases}$ **وي.**

الف) فنکشن رسم کړئ

ب) و څيرئ، چې تابع په $x=2$ او $x=0$ کې متمادي ده او که نه؟

حل: الف) د تابع ګراف لپاره

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	5	2	3	2	5

ب) $\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^3+x}{x} = \lim\limits_{x\to2} (x^2+1) = 2^2+1 = 5$

$$f(2) = \frac{2^3+2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

له دې امله د f ليميټ شته او $\lim\limits_{x\to2} f(x) = f(2)$ دی، نو تابع متمادي دی که $x=2$ وي.

وي دې $x = 0$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{x^3+x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{x^3+x}{x} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې معنا دا ده، چې $\lim_{x\to 0} f(x)=1$ او په دې معنا دی، چې $f(0)=3$

دا دا معنا لري، چې $\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$

تابع په $x=0$ کې غیرمتمادي ده.

بیلگه۳: که $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$, $x\neq -3$ وي.

ایا $f(x)$ تابع په $x=-3$ کې متمادي ده؟

حل: تابع $f(-3)$ تعریف نه لري، نوله دې

امله تابع په $x=-3$ کې متمادي نه ده.

له دې بیلگې او د تیرو درسونو څخه لرو:

تعریف (پیژند):

که f یوه تابع وي، چې د ټولو x لپاره په همغه واز اینتروال کې چې $x=c$ لري تعریف وي،نو د f تابع په $x=c$ کې متمادي بلل کیږي، که دا لاندې شرایط پوره وي:

1- که $f(x)$ تعریف وي.

2- که $\lim_{x\to c} f(x)$ شته وي (موجود وي).

3- که $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$ رښتیا وي.

که تابع د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره متمادي وي، نو تابع په واز اینتروال (a,b) کې هم متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۴:

که $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ; \quad x\le 1\\ 4+x & ; \quad x>1\end{cases}$ وي.

وگورئ، چې تابع چیرته متمادي او چیرته غیرمتمادي ده.

حل: په $x=1$ کې f تعریف لري

$$f(x)=3$$
$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(2x^2+1)=3$$
$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}(4+x)=5$$
$$\lim_{x\to -1} f(x)\neq \lim_{x\to -1} f(x)$$

له دې امله تابع په $x=1$ کې غیرمتمادي ده

بیلگه ۵:

که $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ; \quad x<2\\ 3 & ; \quad x=2\\ x+3 & ; \quad x>2\end{cases}$ وي، نود $f(x)$ تابع متمادیت په $x=2$ کې وڅیرئ.

حل: تابع $f(x)$ په $x=2$ کې تعریف لري او لرو $f(2)=3$

$$\lim_{x\to 2^+} = \lim_{x\to 2^+}(x+3)=5$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2+1)=5 \Rightarrow \lim_{x\to 2} f(x)=5$$

دا چې $f(x)=3$ دی، نو له دې امله $\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا دی، چې تابع په $x = 2$ کې غیرامتمادي ده.

بیلګه ۶:

که $f(x) = \begin{cases} 2\sin x & ; \quad x \le \dfrac{\pi}{2} \\ ax^2 + \pi^2 & ; \quad x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ وي، نو:

a داسې پیدا کړئ، چې f په $x = \dfrac{\pi}{2}$ کې متمادي وي.

حل: $\lim_{x \to \frac{\pi^-}{2}} f(x) = 2 \quad ; \quad \lim_{x \to \frac{\pi^+}{2}} f(x) = a\dfrac{\pi^4}{4} + \pi$

$f(x)$ متمادي ده، نو له دې څخه لاس ته راځي:

$$a\,\frac{\pi^2}{4} + \pi^2 = 2$$

و

$$= \frac{a}{4}\pi^2 = 2 - \pi^2$$

$$a\,\pi^2 = 8 - 4\,\pi^2 \Rightarrow a = \frac{8}{\pi^2} - 4$$

تمرینونه:

1- یوه په خوښه تابع ولیکئ او د تابع ګراف وکاږئ او وګورئ، چې تابع چیرته تعریف ده او متمادیت یې وښایاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې پوښتنو کې وڅیړی، چې تابع په ورکړشوي ټکي کې متمادي یا غیرمتمادي دي.

2) $f(x) = x^2 + 5(x-2)^7 \;\; ; \;\; x = 3$

3) $f(x) = \dfrac{x+3}{(x^2+2x-5} \;\; ; \;\; x = -1$

4) $f(x)\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \;\; ; \;\; x = -2$

5) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3^3)} \;\; ; \;\; x = 3$

6) $f(x) = |x-3| \;\; ; \;\; x = 3$

7) $g(x) = \dfrac{|x|}{x} \;\; ; \;\; x = 0$

د متمادي یا ناپرېکیدونکو توابعو خویونه

دلته دا خویونه همغه د لیمیټ خویونه دي.

فعالیت:

-1 د f او g توابعو جمع پیداکړئ:

$(f+g)(x) =$...........

-2 د f او g توابع په $x=2$ کې متمادي دي، نو:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) =$ .... & $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$

-3 د لیمیټ قیمتونه استعمال کړئ:

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$

$=$ .... :...

$=$ .... :... $= (f+g)(a)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې امله $(f+g)$ په $x=a$ کې متمادي ده.

که f او g توابع په $x=c$ کې متمادي وي، نو د لاندې توابعو څخه یې هره یوه په $x=c$ کې متمادي ده.

1- د توابعو جمع $f+g$

2- د توابعو تفریق $f-g$

3- د توابعو ضرب $f \cdot g$

د توابعو وېش $\dfrac{f}{g}\ ;\ g \neq 0$

بیلگه۱:

که $f(x)=\sin x+1$ **او** $g(x)=x^2+3x-2$ **وي، نو:**

1- f او g په $x=1$ کې متمادي دي.

2- وښیرئ، چې ایا

الف) $f(x)+g(x)=\sin x+x^2+3x-1$ او

ب) $(\sin x+1)(x^2+x^2+3x-1)$ په $x=1$ کې متمادي او که غیرمتمادي دي.

حل: $1)\ \lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=\sin 1+1$

نو f په $x=1$ کې متمادي دی.

$$\lim_{x\to 1} g(x)=g(1)=2$$

نو g په $x=1$ کې متمادي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- الف):

$$a)\ \sin x + x^2 + 3x - 1 = (\sin x + 1) + (x^2 + 3x - 2)$$
$$= f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

د متمادي توابعو جمع په $x = 1$ کې متمادي ده.

ب) : $$(\sin x + 1)(x^2 + 3x - 2) = f(x) \cdot g(x)$$
$$= (f \cdot g)(x)$$

نو د متمادي توابعو ضرب په $x = 1$ کې متمادي دی.

بیلګه ۲:

که $g(x) = 3x - 2$, $f(x) = x + 1$ وي، وښیئ، چې ایا $f(x) \cdot g(x)$ په $x = 2$ کې متمادي ده.

حل:

له پورته ښخه لاس ته راځئ، چې $f(x) \cdot g(x)$ متمادي

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 3$$
$$\lim_{x \to 2} g(x) = 4 = g(2)$$
ده. $f(x) \cdot g(x) = 3x^2 + x - 2$
$$\lim_{x \to 2} f(x) \cdot g(x) = 3(4) + 2 - 2 = 12$$
$$= \lim_{x \to 2} f(x) \cdot \lim_{x \to 2} g(x) = f(2) \cdot g(2) = 3.4 = 12$$

دکینې لورې بند انتروال په [a,b] کې ګراف متمادي تابع په ګوته کوي یا ښايي، هلته چې $f(a) \neq f(b)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ولرو $f(a) < k < f(b)$ ګراف له $(b, f(b))$

ټکي ځخه نشي انځورېدلی تر څو افقي کرښه

$y = k$ د ثابتې k سره غوځه نه کړي.

له پورته څخه دا لاندې غوره جمله لیکلی شو:

که تابع f په بند اینتروال [a,b] کې متمادي اوk د a اوb ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه یو عددc د f(a) اوf(b) ترمنځ شته، داسې چې f(c) = k دی.

بیلګه ۳: که $f(x) = x^3 + 4x\ ,\ \ x \in [1,2]$ وي، نو **وښایئ، چې یو** $c \in (1,2)$ **شته، داسې چې** $f(c) = 11$ **وي.**

حل: $f(x)$ یو پولینوم دی نو f په بند اینتروال [1,2] کې متمادي دی.

لاندې لرو:

$$f(1) = 1^3 + 4(1) = 5 \quad ; \quad f(2) = 8 + 4(2) = 16$$
$$5 < 11 < 16 \quad , \quad f(1) \neq f(2)$$

له دې امله یو عدد $c \in (1,2)$ شته، داسې چې $f(c) = 11$ دی.

بیلګه ۴:

که $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & ; \ -1 \le x < 2 \\ |x-10| & ; \ 2 \le x \le \mathbf{20} \end{cases}$ ي ، نو:

الف) وآزمایئ، چې تابع متمادي ده.

ب) وآزمایئ، چې یو $c \in (-1,20)$ شته داسې چې $f(c) = 6$ دی او د c ارزښت پیدا کړئ.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2x+4 = 8$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 10-2 = 8$$

له دې امله لرو:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 8$$
$$f(x) = 10-2 = 8$$

ګورو چې تابع په [-1, 20] کې متمادي ده.

$$b)\ f(-1)2x\ -1+4 = 2$$
$$f(20)|20-10| = 10 \Rightarrow f(-1) \neq f(20)$$

په دې اساس لرو: $2 < 6 < 10$

له دې امله لرو: $c \in (-1,20): f(c) = 6$

$$2x+4 = 6 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \in (-1, 2)$$
$$|x-10| = 6$$
$$x-10 = 6 \Rightarrow x = 16 \in (-2,20)$$
$$10-x = 6 \Rightarrow x = 4 \in (-2,20)$$

$$= 6 \qquad |x-10| \Rightarrow$$

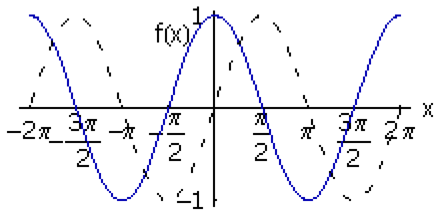
د c ارزښتونه 1, 4, 16 دي.

بیلګه ۵ :

که وي: $f(x) = 2\sin x + 3;\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$ ، نو وښایی چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

نشاد دهيد كه -] $\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$[$c\in$ شته دى د كوم لپاره چې $f(c)=4$ او c پيدا كړى.

حل : تابع f د ساين تابع ددى ، نو له دې امله f متمادي دى. $f(-\frac{\pi}{2}) = 2\sin -\frac{\pi}{2} + 3 = 2(-1) + 3 = 1$ $f(\frac{\pi}{2}) = 2\sin\frac{\pi}{2} + 3 = 2(1) + 3 = 5$ $f(-\frac{\pi}{2}) \neq f(\frac{\pi}{2})$ مو، لرو : تابع fمتمادي دى او لرو: $1 < 4 < 5$	 ټكي ټكي د ساين ګراف دى. دا ګراف كه په ۳ كې ضرب كړى او ۳ ورزيات كړي د بيلګې ګراف راكوي.

دا په دې معنا چې، كه $c\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ موجود وي، د هغه لپاره $f(c) = 4$ صدق كوي.

كه د دې لپاره c پيدا كړو ، نو په لاس راځي:

$$f(c) = 2\sin c + 3 = 4$$

$$2\sin c = 1 \Rightarrow \sin c = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{6}$$

له ګراف څخه واضح ايدل كيږي،، چې f په انتروا ل [a,b] كې متمادي دى، f(a) او f(b) متضادې علامې لري، نو c د منځنى ارزښت قضيې په بنسټ د f(a) اوf(b) په

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځ کې و K=0 ته لږ تر لږه یو C د a او b په منځ کې داسې شتون لري، چې له هغې نتیجه f(c) = 0 لاس ته راځي.

دا په دې معنا، چې x=c د برابرون یا مساوات f(x) = 0 یو حل دی.

بیلګه۶ :

که $f(x)=x^3+5x-23$ **وي، نو وښایئ،چې د f تابع د x ـمحور په اینټروال** (2.3) **کې غوڅوي.**

حل: f **پولینوم تابع ده ، نو f په اینټروال** [2,3] **کې متمادي دی.**

$$f(2)=2^3+5(2)-23=-5$$
$$f(3)3^3+5(3)-23=19$$

$f(2)\neq f(3)$ **او د متضادو مخنخښو(علامو) سره.**

له دې امله د $c\in(2,3)$ لپاره لرو چې $f(c)=0$ دی.

لنډ: غیرمتمادي توابع هغه دي، چې په یو کوم ځای کې تعریف نه وي

تمرینونه:

وښایئ چې تابع په ورکړ شوي ټکي کې متمادي ده.

1) $f(x)=x^3-2(x+1)^5$; $x=2$

2) $g(x)=\dfrac{x^2+3}{(x^2-x+5)(x^2+2x}$; $x=-1$

3) $h(x)=\dfrac{x\sqrt{x}+1}{(x+2)^3}$; $x=4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4- تشریح کړئ، چې ولې تابع $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ په $x=0$ کې غیرمتمادي ده؟

5- که $x \in [2,3]$, $f(x) = \dfrac{18}{x} + 2$ وي، و ښایئ چې $c \in (2,3)$ شته داسې چې $f(c) = 10$ وي او c پیدا کړئ.

6- وښایئ چې د لاندې مساوات لپاره یوحل شته:

$$x^3 - 4x + 1 = 0 \quad ; \quad x \in [1,2]$$

7- وي دې: $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$; $f(x) = \sin x + \cos x$ وښایئ، چې مساوات $\sin x + \cos x = 0$ په اینټروال $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ کې یو حل لري.

8- وي دې:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & ; \quad -1 \le x \le 3 \\ 13 - 2x & ; \quad 3 < x \le 7 \end{cases}$$

الف) ایا f په $x=0$ کې یو متمادي تابع دی؟

ب) $c \in (-1,7)$ داسې پیدا کړئ، چې $f(c) = 0$ وي.

د لـــومړي څپـــرکي ټولګه "Chapter Summary "

پیژند:

د $f(x)$ تابع یو لیمیټ L لري، که x ترلی یو حقیقي عدد c ته لاړ شي. په دې معنا چې $f(x)$ لپاره، چې ترلیLته ځي دا دی، چې x ترلی c ته لاړشي او داسې یې لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

--------------------- -- ---------------------

د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځاي کې يو کيڼ اړخيز ليميټ $a_l = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ لري،

که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي يې د x_0 کيڼ لور ته پراته و ي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_l په لور هڅيږي.

په ورته توګه ښی اړخيزه ليميټ:

د $f(x), x \in D_f$ تابع د x_0 په ځاي کې يو ښی اړخيز ليميټ $a_r = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ لري،

که د هر ترادف (x_n) لپاره، چې n غړي يې د x_0 ښي لور ته پراته و ي او د توابعو ارزښتونه $f(x_n)$ د a_r په لور وهڅيږي..

که تابع f(x) همغه ليميټ L ولري که x له ښی اويا کيڼي لورې و c ته نږدې شي، نو ليميټ شته دی او د L سره برابر دی.

دا داسې ليکو: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

د پولې يا حد خويونه(خواص) :

که f او g توابع وي، c;L او M حقيقي اعداد وي داسې چې $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ او $\lim\limits_{x \to c} g(x) = M$، نو دا په لاندې توګه ليکلی شو:

$$1)\ \lim_{x \to c} (f + g)(x) = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x) = L + M$$

$$2)\ \lim_{x \to c} (f - g)(x) = \lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x) = L - M$$

$$3)\ \lim_{x \to c} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x) = L \cdot M$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

4) $\lim\limits_{x \to c}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \lim\limits_{x \to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}; \ (M \neq 0)$

5) $\lim\limits_{x \to c}\sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

(د $f(x) \geq 0$ او د x د ټولو قیمتونو لپاره، چې c ته ور نږدې کیږي.

قضیه: که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو: $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$

قضیه: که x په رادیان ورکړ شوی وي، نو لرو: $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\tan x}{x} = 1$

پیژند: f دې یوه تابع وي او د ټولو x لپاره په یوه واز انتروال کې چې $x = c$ وي ،تعریف وي، نو وایو: f په $x = c$ کې متمادي دی، د لاندې شرایطو سره:

1) $f(x)$ تعریف لري 2) $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ شته دی

3) $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

که تابع د ټولو $x \in (a, b)$ لپاره متمادي وي، نو تابع په ټول انتروال (a, b) ې متمادي ده.

تعریف یا پیژند : وایو چې یو تابع په یوه بند انتروال $[a, b]$ ې متمادي ده، که تابع له ښئ لورې په $x = a$ کې متمادي وي او له کینې لورې په $x = b$ کې او د واز انتروال (a, b) په هر قیمت کې متمادي وي.

د متمادي توابعو خویونه(خواص): که f او g په $x = c$ کې متمادي وي، نو دا لاندې هره یوه تابع په $x = c$ کې متمادي ده.

لومړی) د توابعو جمع یعنې $f+g$ تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

--------------------- ---

دويم) د توابع تفريق يعنې f-g تابع

دريم) د توابعو ضرب يعنی f.g

ځلورم) د توابعو ويش يعنې $g(x) \neq 0$; $\frac{f(x)}{g(x)}$

د منځني قيمت قضيه:

كه تابع f په بند انتروال [a,b] كې متمادي وي او k د f(a) او f(b) ترمنځ يو عدد وي، نو لږ تر لږه د a او b ترمنځ يو عدد c شته، د كوم لپاره چې f(c)=k باور لري.

د ځېرکي تمرينونه:

سم ځواب وټاكئ:

كه $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ وي، نو $\lim_{x \to 2}(3x - 20)(x + 1)$ ی:

a) 5   b) -5   c) 4   d) 3

ب) پيدا كړئ $\lim_{x \to 1} \frac{x2+1}{x2+3x-2}$

a) 1   b) 2   c) 1   d) $\frac{1}{2}$

1- ليميت پيداكړئ $\lim_{x \to 5} \frac{|x+5|}{x^2+3x-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) 1 b) 5 c) -1 d) -5

-2 $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x}$ دی.

a) -2 b) -1 c) 1 d) 2

-3 $\lim_{x \to 0} \frac{3x - \sin x}{x}$ دی.

a) 2 b) -2 c) 1 d) 3

-4 $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 2}$ دی.

a) $-\frac{5}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) 0 d) 1

-5 $\lim_{x \to 1.4} [2x + 0.3]$ دی.

a) 1 b) 3 c) 0 d)نشته

-6 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 2x}$ دی.

a) 1 b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{2}{3}$

-7 $\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ دی.

a) $2 + \sqrt{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4

(c) ketabton.com: The Digital Library

---------------------- --

8- $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin}{1+\cos 2x}$ دی.

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 4

9- لاندې توابع سره جمع کړئ.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 5 \quad \& \quad \lim_{x \to 3}(x) = -2$$

10- که $f(x) = x^2 + 1$ وي، پیداکړئ:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

11- تابع $f(x) = \begin{cases} 3x - b & ; \quad x \le 3 \\ 10 - x & ; \quad x > 3 \end{cases}$ په $x = 3$ کې متمادي دی، b پیدا کړئ.

12- وښایئ، چې تابع $f(x) = 3x^2 - x - 5$ په اینتروال $(1,2)$ کې حل لري.

۱۳ - د لاندې ۱ – ۹ توابعو لیمیټونه وشمېرئ.

1) $\lim_{x \to -1} (x^2 + x)$ 2) $\lim_{x \to 4} (x^2 + x)$ 3) $\lim_{x \to -2} 2x + 3$

4) $\lim_{x \to 0} |x|$ 5) $\lim_{x \to 2} \frac{x}{x}$ 6) $\lim_{x \to 1} 7$

7) $\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{x^2}{x}}$ 8) $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ 9) $\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{x^9 - 9}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱٤-- که وي: $f(x)=\begin{cases}2+x; x<1\\ x^2 \quad ; x\geq 1\end{cases}$

الف) د تابع گراف وکاږئ.

ب) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ پيدا کړئ.

15: هغه توابع چې په يوه عدد د بېلگې په توگه صفر کې تعريف نه لري ، څه بلل کيږي

16 پيدا کړئ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\dfrac{5}{2x-3}+5}{x^2-1}$

17-- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-2x^2+1}{x^4-2x^2+2}$ وشمېرئ.

18--

که $f(x)=\begin{cases}2x^2+1 & ; \quad x<2\\ 3 & ; \quad x=2\\ x+3 & ; \quad x>2\end{cases}$ وي، نود $f(x)$ تابع متماديت په $x=2$ کې وڅېړئ.

۱۹- يوه په خوښه تابع وليکئ او د تابع گراف وکاږئ او وگورئ، چې تابع چېرته تعريف ده او متماديت يې وښاياست.

۲۰ - په لاندې له ۲ – ۷ پوښتنو کې څېړو، چې ايا تابع په ورکړشوي ټکي کې متمادي يا غيرمتمادي دي.

2) $f(x)=x^2+5(x-2)^7 \;;\; x=3$

3) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x^2+2x-5} \;;\; x=-1$

4) $f(x)\dfrac{\sqrt{8-x^2}}{2x^2-5} \;;\; x=-2$

5) $f(x)=\dfrac{1}{(x-3^3)} \;;\; x=3$

6) $f(x)=|x-3| \;;\; x=3$

7) $g(x)=\dfrac{|x|}{x} \;;\; x=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---------------------- --

۲۱- تشريح کړئ، چې ولې تابع $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x}$ په $x=0$ کې غيرمتمادي ده؟

۲۲- که $f(x)=\dfrac{18}{x}+2\ ,\ x\in[2,3]$ وي، و ښايئ چې $c\in(2,3)$ شته داسې چې $f(c)=10$ وي او c پيدا کړئ.

۲۳- وښايئ چې د لاندې مساوات لپاره يوحل شته:

$$x^3-4x+1=0 \quad ; \quad x\in[1,2]$$

۲٤- وي دې: $x\in(\dfrac{\pi}{2},\pi)$; $f(x)=\sin x+\cos x$ وښايئ، چې مساوات $\sin x+\cos x=0$ په اينتروال $(\dfrac{\pi}{2},\pi)$ کې يو حل لري.

۲۵ الف: وڅيړئ، چې ايا لاندې تابع د x_0 په ځاي کې مفمادي ده.

a) $f(x)=\begin{cases}-2x\\ \sqrt{x}\end{cases}$ c) $f(x)=\begin{cases}\sin x\\ e^x\end{cases}$	$x\le 0$ د $x_0=0$ لپاره $x>0$ د $x_0=0$ لپاره $x\le 0$ د $x_0=0$ لپاره $x>0$ د $x_0=0$ لپاره	b) $f(x)=\begin{cases}2\\ x^2+1\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases}-x+1\\ \ln x\end{cases}$	$x\le 1$ د $x_0=1$ لپاره $x>1$ د $x_0=1$ لپاره $x\le 1$ د $x_0=1$ لپاره $x>1$ د $x_0=1$ لپاره

۲٦-- که $f(x)=2\sin x+3\ ;\ x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ وي، نو وښايئ چې $c\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ شته،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه لپاره چې رښتیا وي $f(c)=4$ او c پیداکړئ.

۲۷: لاندې لیمیټونه وشمېرئ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{6})}{x+\frac{\pi}{6}} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\tan^2 x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 3x} \qquad \lim_{x\to 0}\sin 5x\cot 3x$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\tan(2x-1)}{4x^2-1} \qquad \lim_{x\to\pi}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}$$

$$\lim_{x\to 1}(\cos^2 x+\sin^2 x) \qquad \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 2\theta}{\sin 3\theta} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sin(\sqrt{x}-1)}{x-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-2x}{x}$$

20) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\tan 2x}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\cos\frac{\pi x}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^3+2x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

25) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$$

26) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x+\frac{\pi}{4})}{x+\frac{\pi}{4}}$$

27) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{x(x-\frac{\pi}{4})}$$

28) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x-x\cos 3x}{x}$$

29) $$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 3x-\sin 5x}$$

30) $$\lim_{x\to 0}\frac{|\sin x|}{x}$$

31) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\sin^2 x-1}}{x}$$

32) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2x-\pi}$$

33) $$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(3x-3)}{1-x^3}$$

34) $$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2+5x}{\sin 2x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويمه برخه: مشتق يا رابيليدنه

په تيره برخه کې مو د پولې ځيړنه وکړه. وبه ګورو، چې دا د پولې درس د مشتق يا رابيليدنې لپاره اړيين دی.

د تابع منځ ارزښت تغير Average rate of change

دلته دې د سالنګ يا ماهيپر د سرک خيره راشي.(دلته ځېره راځي)

دکتاب په دې برخه کې موږ د رياضياتو يوه غوره برخه، چې د رياضياتو زړی ورته ويلی شو، تر ځيړنې لاندې نيسو، نو له دې امله لازم ګڼم، چې په دې هکله داسې مهم څه

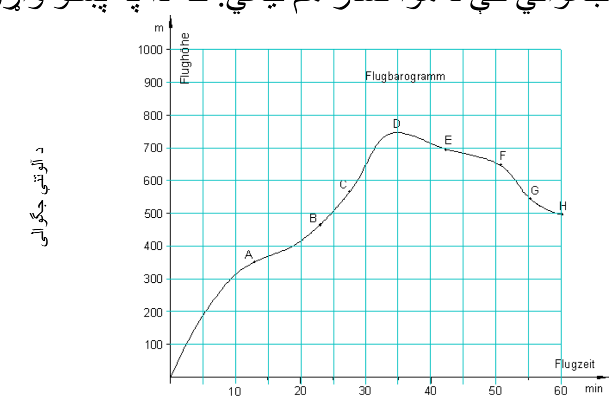
(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه يادښت په څير راوړم: که له يوه ځای څخه وبل ځای ته د تابع د تغير منځ ارزښت Averagerate of change څخه غږيږو ، نو موخه ترې په يوه ټکي يا دوه ټکو کې د تابع جگوالی، ميل اويا تانجنت دی او دا دريواړه کلمې د رياضياتو له مخې په همغه يوه معنا دي او وبه گورو، چې همداسې کمښتوېش يا د تفاضل وېش(Difference quotient) هم.

دې کلمو ته په انگريزي کې **slop** وايي، چې زموږ ادبيتو د ميل په نامه بلل کيږي.

په يوه ټکي کې د تابع د گراف ميل(جگيدنه)

الوتکوکې د الوتنې دليک(الوتنليک) الې (Flight barogramm) جوړې دي، چې تل الوتنې جگوالی د الوتنې د وخت په واک کې يا د وخت تابعيت کې رسموي او په هر جگوالي کې د هوا فشار هم ليکي. که دا په پښتو واړوو، نو د ليک بکس به ورته ووايو.



Flight barogramm

په پورته گراف کې د يوې الوتکې د الوتنې د بيلا بيلو وختونوجگوالی ښوول شوی.

فعاليتونه:

_ په پورته څيره کې د گراف جگوالی د A په ټکي کې د B ټکې سره پرتله کړئ. په ورته توگه دگراف ميل د E په ټکي کې د G ټکې سره پرتله کړئ.

_ روښانه کړئ، چې ولې په يوه ټکي کې بايد له جگوالي، ميل يا تانجنت څخه غږيږو؟

_ وهڅيږئ، چې په يوه ټکي کې د گراف جگوالي لپاره يو متود تعريف کړئ او له انځور څخه د A او B په ټکو کې جگوالی وټاکئ.

_ ايا فکر کوئ، چې پهB ټکي کې نسبت وA ټکي ته جگوالی زيات دی؟

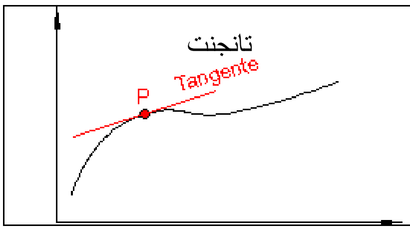
_ ايا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جگوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جگوالی زيات دی نسبت د G ټکي ته؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

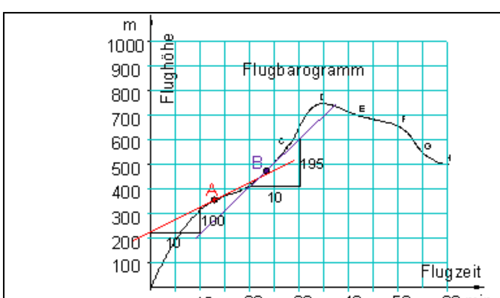
_ ايا د يوې کربښې جګوالى او په همدې ترتيب د يوې منحني هرچيرته توپير لري او که نه ؟

لاس ته راوړنه:
ګورو، چې په يوه منحني کې د ګراف جګوالى هرچيرته برابر نه دى، نو له دې امله بايد ټکى په ګوته کړو، چې هلته ميل څيرل کيږي.
په لاندې بيلګه کې به روښانه کړو، چې تنها د يوې (سيده)کربښې ميل هرچيرته برابر دى، نو له دې امله دلته د يوې کربښې د ميل يا جګوالي څخه غږيږو.
بريښي چې لاندې پيژند يا تعريف عاقلانه دى.

(تعريف):
د يوې تابع ګراف ميل(جګوالى) د P په يوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنت د ميل د ګراف سره برابر دى.



ليدل کيږي چې دلته يو تانجنت د کربښې تعريف لري، چې د لمستکي(مماس) په چاپيريال کې د امکاناتو سره سم لمستکي(مماس) ته ښه ور نږدې کيږي.
ددې پيژند يا تعريف له مخې په يوه ټکي کې د يوه ګراف ميل د يوې کربښې ميل دى.
د ګراف د جګېدنې ټاکلو لپاره د A اوB په ټکو هر يوه کې يوه کربښه (تانجنت) انځوروو، چې ګراف ته خورا زياته نږدې کيږي.
د ميل يا جګېدنې مثلث په مرسته جګېدنه په شدل يا ساده ډول شميرل کيدى شي:
A په ټکي کې جګيدنه:



$$\frac{100\,m}{10\min} = 10\,\frac{m}{\min}$$

د B په ټکي کې جګيدنه:

$$\frac{195\,m}{10\min} = 15.5\,\frac{m}{\min}$$

زموږ د بيلګې لپاره ميل يا جګيدنه په يوه ټاکلي ټکي کې د لحظوي(سملاسي) ميل سرعت په معنا دى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

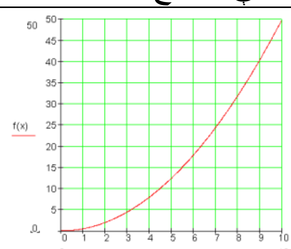
د A په ټکي کې: د الوتنې وخت نږدې $12.5\,\text{min}$، د میل یاجګیدنې چټکتیا (سرعت) نږدې $10\,\dfrac{m}{\text{min}}$ ده.

د B په ټکي کې: د الوتنې وخت نږدې $23.0\,\text{min}$، د جګیدنې سرعت نږدې $19.5\,\dfrac{m}{\text{min}}$ دی.

تانجنت تر اوسه فقط د لیدنې له مخې تعریف شوی، چې د لمسټکي چاپېریال ته خورا ډېر نږدې کیږي. له دې امله ممکن وه، چې د ګراف میل د A او B په ټکو کې هم یوازې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی.

په یوه ټکي کې د تابع دګراف میل (جګیدنه):
معلومه ده، چې یو ریلګاډی د تمځای ځخه له خوزېدو(حرکت) وروسته خپله چټکتیا(سرعت) په کراره کراره زیاتوي. وهلی لار(د تمځای څخه لرېوالی) تل زیاتیږي. د تمځای څخه لرېوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کې یا تابع دی.

عمل د لاندې تابعمساوات له لارې لیکلی شو.(مخامخ یا لاندې د تابع ګراف) دلته د x وخت د ثانیې او د s لار د متر لپاره ټاکلې او لیکو: $S = f(x) = 0.5x^2$



فعالیت:
1- اوس دې منځنی تغیر ارزښت Averagerat of change(منځنی میل ارزښت) د $3-$ مې او $7-$ مې ثانیې ترمنځ وشمېرل شي.
2- ددې لپاره دې اړونده قاطع یا سیکانت انځور شي او د هغې جګوالی دې وشمیرل شي.
3- اوس دې د تغیر ارزښت(منځنی جګوالی) د $3-$ مې او $7-$ مې ثانیو ترمنځ وشمیرل شي.
4- وښایاست، چې په دریمه ثانیه کې د ارزښت تغیر یا جګوالی څومره دی؟

کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient

د یوې کربڼې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي.
کربڼه $y = f(x) = mx + a$ لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

قاطع(غوڅې seconce):

قاطع هغه کرښه ده، چې منحني د P_0 او P_1 په دوه ټکو کې غوڅوي.

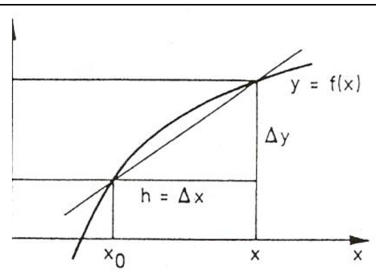
د قاطع میل یا جګیدنه(جګوالیsecant):

دا چې قاطع هم یوه کرښه ده نو میل(جګوالی) یې هم د یوې کرښې میل په ډول شمیرل کیږي.

په لاندې کې m_S د جګوالي لپاره لیکل کیږي.

$$m_s=m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

(تعریف): د $y=f(x)$ تابع دې د x_0 په یوه چاپیریال او په x_0 کې پخپله تعریف شوې تابع وي، x د x_0 څخه بیل خو د چاپیریال په یوه خوښه یا په زړه پورې ځای دی(مخامخ څیره دې وکتل شي). نو د تفاضل یا کمبنتویش Difference qutient د قاطع میل شته دی، چې په لاندې ډول یې لیکو:



$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

د f تابع لپاره فرمول: $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

دا فرمول د f په ګراف باندې د دوه ټکو ترمنځ د قاطع د میل شمیرنه ده. د ا ټکي د $x-$ محور باندې د x او $x+h$ ټکي دي.

د کمبنت وېش یا د تفاضلونو ویش د مشتق د تعریف لپاره په کار راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

د $y = f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ تابع دې ورکړ شوې وي. د دې تابع کمښت ویش(دتفاضل وېش) پیدا کړئ.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{3(x+h)^2 - 5(x+h) + 4 - (3x^2 - 5x + 4)}{h}$$

$$= \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 4 - 3x^2 + 5x - 4}{h}$$

$$= \frac{6xh + 3h^2 - 5h}{h}$$

$$= 6x + 3h - 5$$

تمرینونه:

1 - کمښتویش (د تفاضل وېش) ارزښت د P او Q په ټکو کې وټاکئ.

a) P(3,2) , Q(5,4) b) P(2,4) , Q(3,1)

2- د $x = x_0$ په ځاې کې د f تابع د تانجنت جګوالی وټاکئ.

$a)\ f(x) = x^2\ ,\ x_0 = 2$ $b)\ f(x) = 0.5x^2\ ,\ x_0 = 3$

د کمښتویش(د تفاضل ویش) او مشتق لاندې څه پوهیږو او د دوي ترمنځ توپیر څه دی؟

4 - د یوې تابع د سکانت(قاطع) لاندې څه پوهیږو او د تانجنت جګیدو لاندې څه پوهیږو؟ او د دوي ترمنځ کومې اړیکې پرتې دي؟

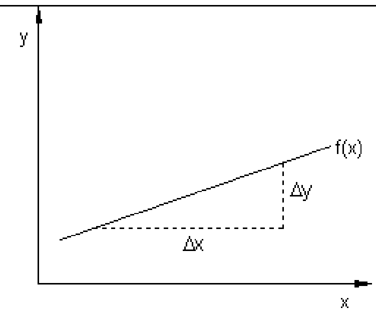
(c) ketabton.com: The Digital Library

رابیلیدنه یا مشتقشمیرنه **Diffrentialcaculation**

فعالیت:

پام وکړئ، لکه په یوه ثابت میل $a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = constant$ کې، د بیلګې په توګه په خطي یا لاینیز تابع کې د $f(x) = a_1 x + a_0$ سره میل شته او که نه؟

_ پام وکړئ، چې دا میل به څه ځانګړي خویونه ولري؟ ایا جګیدنه به په هر ځای کې فرق ولري اوکه ثابت به وي؟



ایا په مختلفو وختونوکې اړین بولی، چې د تغیرحالت(د میل حالت) کې د تابع د تلنې حالت و څیړئ؟

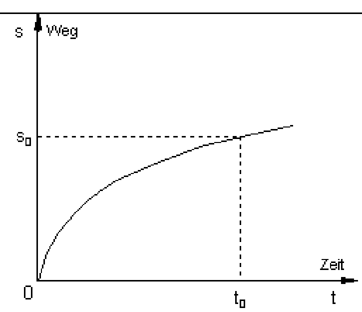
_ او یا له دې امله لحظوی چټکتیا(سرعت) $v(t_0)$ په لار- وخت- دیاګرام کې وڅیړئ؟

_ ایا د مشتق شمیرنې په مرسته دا پرابلم حل کیدی شي؟

په پام کې نیولې لحظه $t_0 \,\hat{=}$

دا تر دې وخت وهل شوې لار $s_0 \,\hat{=}$

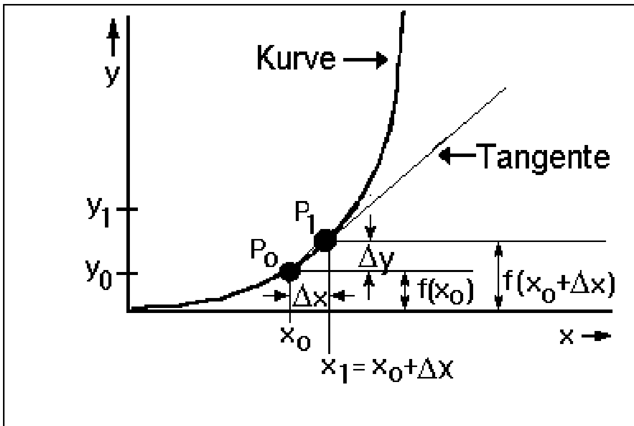
یادونه: مخامخ Zeit د وخت ا و Weg د لار په معنا دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتقشمیرنه = د يوې منحني ميل يا جګيدنه (Differential caculation

تانجنت: كه د P_1 او P_0, ټكي يو بل ته ناپاى نږدې شي، نو له قاطع څخه تانجنت جوړيږي.



د تانجنت جګيدنه: د تانجنت جګيدنه د قاطع د جګيدنې،، ليمت ،Limit„ يا حد دى.

$$\boxed{m_t = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$$

فعاليت:

1- له پورته څيړې او اړونده شننې څخه د مشتق لپاره څه فكر كوى؟

2- د derivative (مشتق) كلمې لاندې څه پوهيږو؟

او دا په ساده پښتو څه معنى وركوي؟

3- له كمښت وېش(د تفاضلونو ويش) څخه ځنګه و مشتق ته راځو؟ په دې هكله د پورته څېړې څخه په ګټه اخسلوخپل نظر وواياست.

4- له $2-$م فعاليت څخه وواياست، چې ولې دا شمېرنه رابېلېدنه يا مشتق بلل كيږي؟

پام: لكه د مخه مو چې ګوته ورته ونيوله، د derivative كلمه نوې ده، نو له دې امله دا څو ټكي په پام كې نيسو: derivative د رابيليدنې په معنا دى، چې موږ يې تراوسه مشتق بولو.

: كه د تابع دا كمښتويش(د تفاضل وېش) $x->x_0$ او(همداسې) $x->0 \Leftrightarrow$ او يا په (همدې ډول) $h->0 \Leftrightarrow$ لپاره يو حد ولري, نو د $y=f(x)$ تابع د $x=x_0$ په ځاى كې د مشتق قابليت لري او ددې لپاره ليكو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(\frac{dy}{dx})_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h};...$$

دا ليميټ داسې ښايو: $(\frac{dy}{dx})_{x=x_0} = f'(x)$

د x_0 ځای کې د $y = f(x)$ له مشتق(Derivativ,) يا رابيلدنې) څخه يوه بله سيده يا بل ډول کړه لار رابيله وو.

د مشتق ساده شميرنې لپاره يوه بيلګه:

د $f(x) = x^2 - 3x + 2$ مشتق غواړو پيدا کړو.

ددې کمښتوپش په لاندې ډول دی:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \frac{((x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) + 2) - (x_0^2 - 3x_0 + 2)}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3x_0 - 3\Delta x + 2 - x_0^2 + 3x_0 - 2}{\Delta x}$$

$$= \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= 2x_0 + \Delta x - 3$$

او د ليميټ $\Delta x \to 0$ سره يې مشتق لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x - 3) = 2x_0 - 3.$$

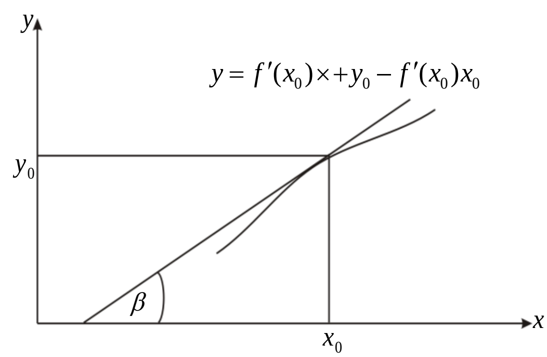
د دې لپاره دا لاندې تعريف(پيژند) ورکوو:

که يو د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځای کې مشتق وړ وي، نو هغه لاندنی کرښه چې د (x_0, y_0) کې څخه تېرېږي او ميل يا جګوالی يې $f'(x) = \tan\beta$ دې او په لاندې ډول ليکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = f^{'}(x) \Leftrightarrow y = f'(x_0)x + y_0 - f'(x_0)x_0$$

او دا د (x_0, y_0) په ټکي کې د ورکړ شوې منحني $y = f(x)$ تانجنت بلل کيږي(پرتله پورته کيڼ شکل)



موږ اوس د څو بنسټيزو توابعو مشتق شميرنه تر څيړنې لاندې نيسو.

بيلګه۱ :

د يوې ثابتې مشتق:

موږ دالاندې تابع لرو،چې ارزښت يې يوثابت دی.

ثابت $y = f(x) = c = Cons$ ، نو د هر x_0 ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0$$

$$\Rightarrow (\frac{dy}{dx})_{x=x_0} = f'(x_0) = 0$$

بيلګه۲ :

يوه $f(x) = x$ خطي(کرښيزه) تابع لرو، د x_0 په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پيدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0 + \Delta x - + x_0}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 = \underline{\underline{1}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $f'(x_0)=1$ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده یعنې یوه ثابته ده.

بیلګه ۳ :
د $y=f(x)=c.u(x)$ ډوله تابع مشتق د c=ثابتې سره.

د ثابتې قانون:
د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د(ثابتې $=c$) سره ضر ب شوی وي. یعنې له $y=f(x)=c.u(x)$ څخه لرو: $f'(x)=c.u'(x)$ $\Rightarrow$

ثبوت:

$$\Rightarrow f(x_0)=c.u(x_0)$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c\cdot u(x_0+\Delta x)-c\cdot u(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0} c\cdot\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0} c}_{c}\cdot\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=c\cdot u'(x_0)$$

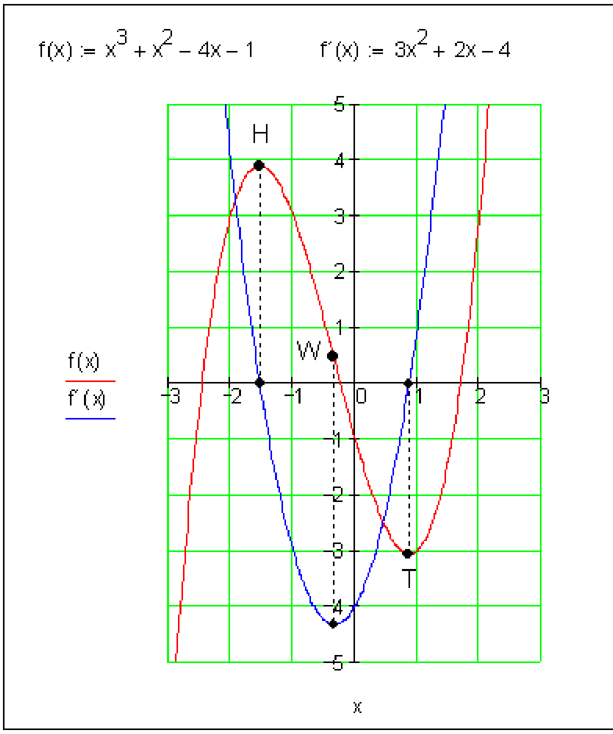
تمرینونه:

1- د تفاضل وېش او د مشتق لاندې څه پوهېږو؟
2- د دوی ترمنځ څه اړیکې (پرتې) دي؟
3- د قاطع (سکانت) او تانجنت جګېدنې لاندې څه پوهېږو؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

شکل کې سره منحني تابع، شنه کرښهمنحني د تابع مشتق او وبه ګورو، چې له همدې امله د مشتق تابع هم ده.



فعالیت:

1- د x_0 په ځای کې د تابع مشتق یعنې څه؟

2- د یوې تابع له مشتق نیونې وروسته دې مشتق ته څه وو ایو؟

3- که د تابع مشتق د مشتق تابع ونومو، روښانه کړئ، چې ولې تابع ده او ددې تابع درجه، د لومړی تابع سره پرتله کړئ.؟

• ایا له دې توپیر څخه د مشتق کلمه روښانه کولی شئ؟

ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بیلګې څخه کار اخلو

بیلګه۱ : تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوې وي. غواړو د $x = x_0$ په ځای کې او په ځانګړې توګه د $x_0 = 2$ په ځای کې د هر څه لومړی کمښتویش(د تفاضل وېش) پیداکوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = x_0:$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

اوس د لیمیټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضریب ته راځو:

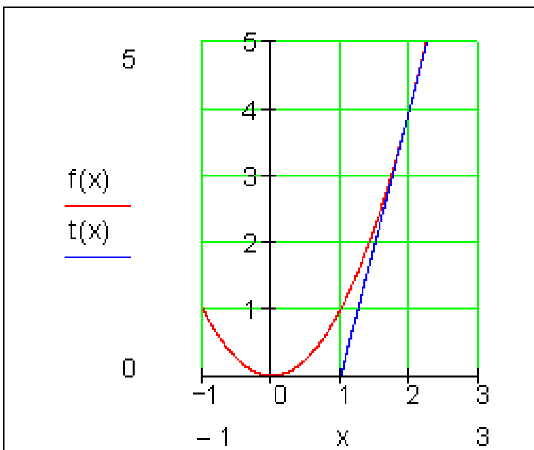
$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $\underline{\underline{f'(x_0) = 2x_0}}$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

د $x_0 = 2$ په ځای کې د تابع $y = f(x) = x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0 = 2$ په ځای کې میل یاجګوالی 4 لري.

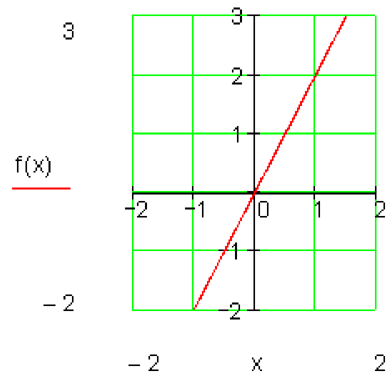
لاس ته راوړنه یې:

کیدی شي، د تابع د ګراف له لارې و ازمایل شي، په داسې ډول چې د $P_0(x_0 | y_0) = P_0(2|4)$ په ټکي کې تانجنت انځور کړو او د میل د مثلث له لارې جګیدنه لاس ته راوړو.



پورته بیلګه کې: $y = f(x) = x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پیداکوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$$

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	4

ګراف یوه کرښه $f'(x) = 2x$ انځوروي، چې د تابع مشتق بلل کیږي

پام: که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو بیرته هم یوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکیږي.
د مشتق تابع: د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنسټ تابع انځوروي، له دې امله دا د میل تابع هم بلل کیږي.

بیلګه ۲:
د $f(x) = x^3$ تابع دې ورکړ شوی وي.
فعالیت: ګران لوستونکي دې د $f(x) = x^3$ تابع او د تابع د مشتق ګراف وروسته له حله رسم کړي.

موږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پیدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0{}^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x^2)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = 3x_0^2$$

نو $\underline{\underline{f'(x_0) = 3x_0^2}}$ د $f(x) = x^3$ تابع مشتق دی په ځای یا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسې ده: $\underline{\underline{f'(x_0) = 3x_0^2}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۳: یوه د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع ورکړشوې.
غوښتنې یا ثبوت:

الف: د تابع ګراف په یاد راوړئ.

ب: په x_0 ټکي کې د تابع مشتق پیداکړئ.

پ: په x_0 ټکي کې د مشتق تابع هم پیدا کړئ.

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0}{x_0(x_0+\Delta x)}-\frac{(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-x_0-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{\Delta x\cdot x_0(x_0+\Delta x)}$ $\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$ $\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}$

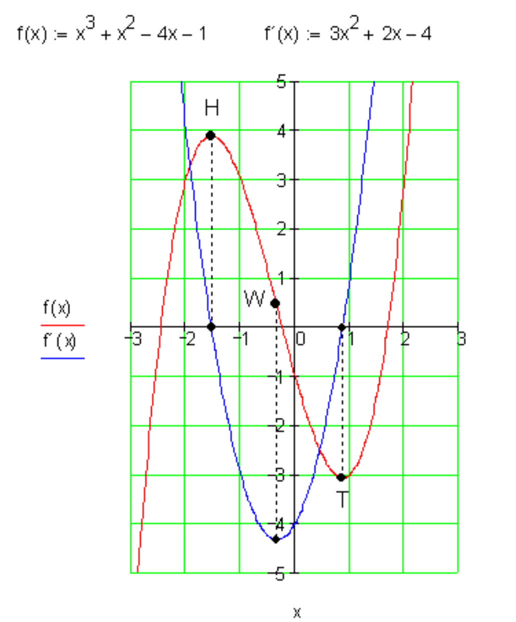
د پورته اخري مساوات لیمیټ د $\Delta x\to 0$ لپاره نیسو:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}\right)=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}$$

نو لرو: $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$. دا د x_0 په ځای کې د f مشتق دی.

د مشتق تابع هم دی: $\underline{\underline{f'(x)=-\frac{1}{x^2}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وضعیه کمیاتو سیستم کې تابع او د تابع مشتق: تابع(سور): $f(x)=x^3+x^2-4x-1$ د تابع مشتق(شین): $f'(x)=3x^2+2x-4$ د تابع مشتق هم تابع دع. مورږ دا د مشتق یا د میل تابع بللې.	

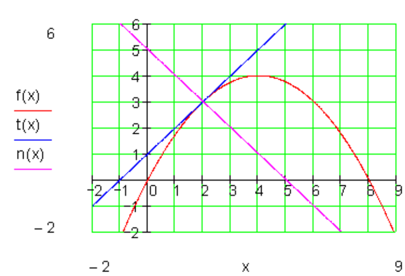
تمرینونه:

په لاندې مساواتو کې د f تابع مشتق او د مشتق تابع وښایئ

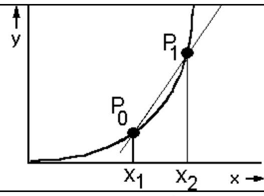
$a)\ \ f(x)=4x^4-3x^3+x^2-x-1$ $\qquad b)\ \ f(x)=x-\sqrt{x}$

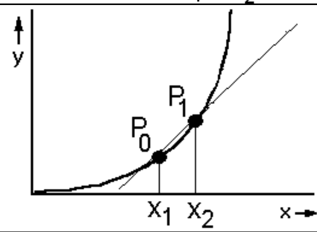
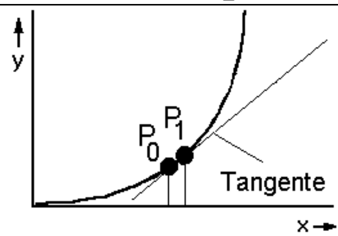
$c)\ \ f(x)=\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{1}{x^3}$ $\qquad d)\ \ f(x)=3x^2+0.4x-5$

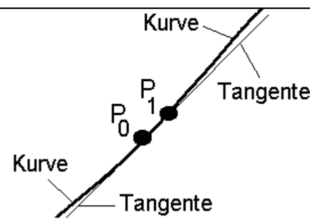
د تانجنت او عمود تعریفونه او خویونه



(c) ketabton.com: The Digital Library

<table>
<tr><td>لاندې یا مخاکخ څیره یو منحني او یوه قاطع(غوڅی) په ټکو P_0 اوP_1 کې ښایي.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>اوس غواړو، چې ټکی P_0 د ټکي P_1په لور و خوځیږي.

پام: ددې سره قاطع خپل میل تغیروي</td><td>
</td></tr>
<tr><td>بالاخره غواړو، چېP_1 ټکی وP_0 ټکي ته ناپای ډېر نږدې شي. په دې حالت کې قاطع داسې په نامه تانجنت ته ورنږدې کیږي.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>که پوره وپیژندلی شو، چې د ټکو P_1 او P_0په شاو خوا غزوو یا لویوو :

که د P_1 ټکی و P_0 ټکي ته ناپای نږدې شي، نو کتل کیږي، چې تانجنت په ټکي P_0 کې همداسې حالت غوره کوي، لکه منحني په P_0 ټکي کې.</td><td>
</td></tr>
</table>

د دې خویونو غوره غوره والی یا پایله:
ومو لیدل، چې د تانجنت میل پهP_0 ټکي کې په همدې ټکي کې د منحني میل هم دی. له دې دا پایله لرو، چې که څوک غواړي د منحني میل په P_0 ټکي کې پیدا کړو، بسیا کوی، چې د تانجنت جګوالی یا میل په P_0 ټکي کې پیدا کړي.

فعالیتونه:

1- پورته شکلونه بیا سره پرتله کړئ. د میل په هکله یې فکر وکړئ، چې کوم میل زیات دی؟

2- تانجنت تعریف کړئ او په شکل کې یې وښایاست.

3- قاطع (سیکانت) تعریف کړئ او په څېره کې یې وښایاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې د تانجنت او عمود عمومي فرمول راباسو:

پيل: تانجنت دې د $f(x)$ گراف د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ گراف د په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې عمود يا ولاړ غوڅ کړي.

د تانجنت مساوات: $t(x) = m_t \cdot x + b_t$:

د $m_t = f'(x_0)$ سره ليکو: $\qquad (1) \qquad t(x) = f'(x_0)\cdot x + b_t$

دا چې $P(x_0), f(x_0))$ تانجنت يو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0)\cdot x + b_t = f(x_0)$$
$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لر:

$$t(x) = f'(x_0)\cdot x + f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0 = f'(x_0)\cdot x_0 + f(x_0)$$
$$= f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

عمود (نورمال): د منحني سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود څغلي.

د عمود ميل:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

بيلگه:

د $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ تابع لرو.

د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پيدا کړئ:

حل:په لاندې توگه د تابع مشتق نيسو او گراف يې(څيره لاندې کښل شوې) کاږو:

نو لرو: $\qquad f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

د تانجنت ميل **په ټکي** x_0 **کې د ميل ارزښت** 3 **لري.**

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2\cdot(-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $P(-2,-5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x \qquad ,P(2,f(2))$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

د $x_0=2$ په ځای کې لرو:

$$t(x)=f'(2)(x-2)+f(2)$$

$$f(2)=2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot(2)^2=4-1=3 \qquad f'(2)-\frac{1}{2}\cdot 2=2-1=1$$

$$\Rightarrow t(x)=1(x-2)+3=x-2+3=\underline{\underline{x+1}}$$

د نورمال یا عمود پیدا کونه:

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x \ , \quad P(2\,|\,f(2))$$

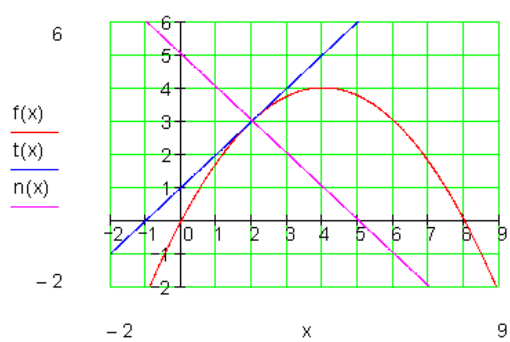
$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

د $x_0=2$ سره لاندې راکوي:

$$n(x)=\frac{1}{f'(2)}(x-2)+f(2)$$

$$f(2)=2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot(2)^2=4-1=3 \qquad f'(2)-\frac{1}{2}\cdot 2=2-1=1$$

$$\Rightarrow n(x)=-\frac{1}{1}(x-2)+3=-x+2+3=\underline{\underline{-x+5}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت او ولاړ یا عمود عمومي مساوات

بیلګه: تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ لرو.

د تانجنت میل:

د یوه تابع د ګراف میل په ټکي $P(x_0 \mid f(x_0))$ کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

موږ $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ مربع تابع لرو

د تابع مشتق $f'(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

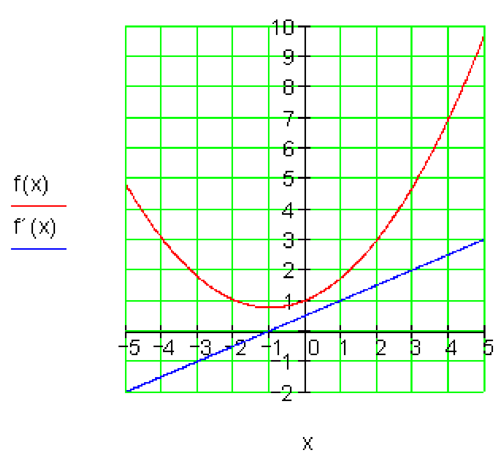
ارزښتجدول:

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f'(x)	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزښتجدول څخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککرټکی دی: $S(-1,\ 0.75)$ د $x=-1$ ارزښت لپاره $f'(-1)=0$ د میل تابع ارزښت دی: دا دا معنی لري، چې په ککرټکي(د رآس ټکی) کې د $f'(x)$ میل صفر دی. تانجنت په S کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت(افقي) ځغلي؛ یعني د $x-$ محور سره غبرګ ځغلي.

ګرافونه:

$f(x) := \frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+1$ $\quad f'(x) := \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

تابع لرو: $f(x)=2x^3+7x^2+x-7$

تانجنت دې پیداکړی شي، چې د $f(x)$ ګراف د $P(-2,\ f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

$$f(x)=2x^3+7x^2+x-7 \Rightarrow f'(x)=6x^2+14x+1 \quad P(-2\,|\,f(2)) \Rightarrow x_0=-2$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x_0)\,f'(-2)=24-28+1=-3$$

$$f(x_0)=f(-2)=-16+28-2-7=3$$

$$\Rightarrow t(x)=-3(x+2)+3=-3x-6+3=\underline{\underline{-3x-3}}$$

پایله:

د $f(x)$ تابع ګراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0\,,f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري**.**

د تانجنت مساوات

$$t(x)=\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګېدنه}}(x-x_0)+f(x_0)$$

د عمود مساوات

$$n(x)=-\frac{1}{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګیدنه}}}(x-x_0)+f(x_0)\ ;\quad f'(x_0)\neq 0$$

تمرینونه: د لاندې توابعو ګرافونه وکاږئ، د تانجنت او د عمود مساوات ولیکئ.

$$f(x)=x^3-6x^2+9x \qquad x_0=2$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{x}+3 \qquad x_0=1$$

$$f(x)=x^3-x^2-5x-2 \qquad x_0=-\frac{3}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق شميرني قوانين

د مشتقشميرنې شميرقوانين، لک څنګه په اعدادو، ترادفونو او حدونو(پوله ارزښتونو) کې اجرا کيږي،په همدې ډول مشتقشمېرنه کې هم دا قوانين باوري دي.

وبه ښايو، چې د جمعې، ضرب او ... مشتقونه د مشتقونو جمع، ضرب او ... ده. (په وېش کې بايد مخرج صفر نه وي).

فعاليت:

که $f(x)=x^2+x$ او $g(x)=x^3+2$ ولرو، $(f(x)+f(x))'$ د $(f(x)\cdot g(x))'$, $(f(x)-g(x))$ او $(\frac{f(x)}{g(x)})'$, $g(x)\neq 0$ د پيدا کولو په هکله فکر وکړئ.

قضيه (د جمعې قاعده):

که يو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعې څخه جوړ وي، نو مشتق يې هم د هر تابع د مشتق د جمعې څخه جوړ دی، يعنې:

$$f(x)=u(x)+v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x)=u'(x)+v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0)=u(x_0)+v(x_0)$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]+[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]}{\Delta x}+\frac{[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\right]}_{u'(x_0)}+\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x}\right]}_{v'(x_0)}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\underline{\underline{u'(x_0)+v'(x_0)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه:

که توابعو $f(x)=5x^2+3x\ ,\ u(x)=5x^2\ ,v(x)=3x$ ولرو شتق وشمرئ.

ښوونه:

$$f(x)=5x^2+3x \quad u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$$
$$\Rightarrow u'(x)=10x \qquad v'(x)=3$$
$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$$

فعاليت: که چيرې $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$ توابع او $k_1, k_2, \ldots, k_n$ ثابت عددونه وي نو لرو(پې له ښوونې):

$$[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+\ldots\ldots+k_n f_n(x)]' = k_1 f_1'(x)+k_2 f_2'(x)+\ldots\ldots+k_n f_n'(x)$$

قضيه (د ضرب قاعده): که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښايو:

$$(f(x)\cdot g(x)'= f(x)'\cdot g(x)\cdot g(x)'$$

ښوونه: $\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

د مناسب فورم- يا بڼه بدلون يعنې په صورت کې د $-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)$ ورزياتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

له پورته څخه لاس راځي يعنې د دواړو لورو ليميټ نيسو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:
که $g(x)=x^2-1$ او $h(x)=\sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x)=g(x)h(x)$ مشتق غواړو پیدا کړو.
ښوونه:
په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$f(x)=(x^2-1)\sqrt{x},\ f'(x)=2x\sqrt{x}+(x^2-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د وېش قانون): f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښایو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښایو(ثبوت کړو).
لومړی لار یا طریقه یې په لاندې کې ښایو او دویمه لار دې ګران زده کوونکي وښايي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}\quad ,\quad g(x)\neq 0$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

غواړو $f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)$ صورت ته ور زیات کړو، نو لرو:.

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x)}[\lim_{h\to 0}g(x)\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x).f'(x)-f(x).g'(x)\right]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يعني لرو: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]^{/}=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^{2}}$

بيلګه:

د $f(x)=\frac{x^{2}}{x^{2}-4}$ تابع (د $x^{2}-4\neq 0$ سره) مشتق غواړو پيدا کړو.

حل: که چېرې $g(x)=x^{2}$ او $h(x)=x^{2}-4$

وضع شي نو لرو:

$$g'(x)=2x$$
$$h'(x)=2x$$

او د ويش قانون له مخې لرو:

$$f'(x)=\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]'=\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{[h(x)]^{2}}$$

$$=\frac{2x(x^{2}-4)-x^{2}.2x}{[x^{2}-4]^{2}}$$

$$=\frac{-8x}{[x^{2}-4]^{2}}$$

پوښتنې:

که $f(x)=3x^{2}+5x-8$ او $g(x)=5x^{3}-3x+4$ ولرو، نو :

- د توابعو د توابعو د جمعي مشتق، د ضرب مشتق د توابعو د وېش($f(x)\neq 0$) مشتق پيداکړئ، که شونې وي له مختلفو لارو.

د الجبري توابعو مشتق

الجبري او نورو توابعو پيژندونه(تعريفونه):

1- يو بنستيز تابع الجبري بلل کيږي، که د ترتيب قانون يې د مساواتو له لارې ورکړ شوی وي،په هغو کې چې په ترمونو کې د مساواتو د متحولو سره فقط الجبري

(c) ketabton.com: The Digital Library

عمليی(جمع،تفريق، ضرب، تقسيم(چې مخرج يې صفر نه وي)توانکونه او جذرنيونه(د توان-اوريښې اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي) کارول شوي وي.

2- ناالجبري توابع ترانسځندنت بلل کيږي، لکه اکسپوننشل-ولوګاريمی- او د زاويو توابع.

3- يو الجبري تابع راشنل بللکيږ ي، که د ترتيب قانون يې د يو مساوات سره ورکړ شوی وي، په کوم کې چې ناپای ډيرې راشنل د شمير عمليی ((جمع،تفريق، ضرب، تقسيم(چې مخرج يې صفر نه وي)توانکونه او جذرنيونه(د توان-اوريښې اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي)) کارول شوي وي.

فعاليت:

په ځېر د $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...a_1x+a_0$ يوه تابع د $f(x)$ _ که د $n\in N \quad \wedge \quad a_1\in R$ سره ليکل شوې وي، څه بلل کيږي؟

په د ويش v او u د دوه توابعو تابع f د $v(x)=3x+6$ او $u(x)x^2+4x+4$ _ لرو:

سره وليکئ $v(x)\neq 0$ د $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ ځېر لکه

تابع مشتق ونيسئ. پسې د $v;u$ _ د تابع تعريف ساحه وښاياست او بيا د هرې يوې مشتقونو وېش په نښه کولو پسې د مشتقونو وېش(چې مخرج صفر نه وي)، د مشتق سره پرتله کړئ.

بيلګه:

د $f(x)=\sqrt{x}$ تابع ورکړ شوې په x_0 کې د تابع مشتق پيدا کړئ او د مشتق تابع په ګوته کړئ.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}})}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}})}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x+\sqrt{x_0}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو د x_0 په ځای کې $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د تابع $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق دی.

د تېرو درسونو پر بنسټ $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ د مشتق تابع ده.

د $q\in Q$; $f(x)=x^q$ ډوله توابعو مشتق:

د شمیرنې له مخې لاندې لاس ته را وړنې لرو:

تابع	د مشتق تابع	
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$f'(x)=1\cdot x^0$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2\cdot x$	$f'(x)=2\cdot x^1$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3\cdot x^2$	$f'(x)=3\cdot x^2$
$f(x)=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$f'(x)=-1.x^{-2}$
$f(x)=\sqrt{x}=x\dfrac{1}{2}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x)=\dfrac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}}$

که دا پورته پنځه مشتقونه یو د بل سره پرتله کړو، نو اټکل کیږي، چې لاندې جوړښتقانون باور لري:

د توان قانون (بې له بنونې)
(پونتخ) قانون:
1- مختني اکسپوننت د متحولې x د مخ د فاکتور په څیر لیکل کیږي.

2- نوی اکسپوننت همغه پخوانی اکسپوننت دی، چې په یو کم شوی.

سره $q\in Q$ **د** $f(x)=x^q \Rightarrow f'(x)=q\cdot x^{q-1}$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=\frac{1}{x^2}$ مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2} \Rightarrow f'(x)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$$

بیلګه:

د $f(x)=3x^4$ تابع مشتق پیدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=3x^4 \qquad c=3 \qquad u(x)=x^4 \Rightarrow u'(x)=4x^3$$
$$f'(x)=c\cdot u'(x)=3\cdot 4x^3=12x^3$$

بیلګه:

غواړو د $f(x)$ تابع مشتق د $x=2$ په ځای کې ونیسو:

$$f(x)=x^2+3$$
$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=4+\Delta x$$
$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$$
$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=2u+\Delta x$$
$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2u+\Delta x)=2u$$

بیلګه:

د تا بع $f(x)=\frac{1}{x+1}$ مشتق د $x=2$ په ځای کې پیداکړئ.

ښوونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{1}{3(3+\Delta x)}$$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-1}{3(3+\Delta x)}\right)=\underline{\underline{-\frac{1}{9}}}$$

$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}$$

$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}=\underline{\underline{-\frac{1}{(u+1)^2}}}$$

بیلګه:

(توان(Potence) مشتق، چی طبیعي جګ عدد یا اکسپوننت لري:

موږ د $1, 2, 3,...$, $y(f(x)=x^n$ تابع لرو او غواړو مشتق يې پيداکړو:

ښوونه: موږ په لاندې توګه مخ ته ځو.

د بینوم جملی په بنسټ په هر x_0 ځای کې دا لاندې باورلري.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{}$$

$$=\frac{\binom{n}{0}x_0^n+\binom{n}{1}x_0^{n-1}h+\binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2+...+\binom{n}{n}h^n-x_0^n}{h}$$

$$=\frac{1}{h}\left(x_0^n+nx_0^{n-2}h+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h^2+...+h^n-x_0^n\right)$$

$$=nx_0^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h+...+h^{n-1}$$

د $h\to 0$ لپاره تابع $y=x^n$ د x_0 په هرځای کي، د لاندي مشتق سره، د مشتق قابليت لري:

$$(dy/dx)_{x=x_0}=f'(x)=nx^{n-1}$$

ددې پورته بیلګې بل ډول ښوونه دې د پوښتنې په ځبر وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرينونه: _ که يو پولينوم $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...a_1x+a_0$
د $a_1 \in R \quad \wedge \quad n \in N$ سره ورکړ شوی وي، مشتق يې پيداکړئ.
- د توابع مشتق د توان قانون له مخې پيداکړئ.

$a)\ f(x)=x^5 \qquad b)\ f(x)=x^6$

$c)\ f(x)=\dfrac{1}{x^2} \qquad d)\ f(x)=\dfrac{1}{x^5}$

$e)\ f(x)=\sqrt{x} \qquad f(x)=\sqrt[4]{x^3}$

$g)\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}} \qquad h)\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

د زنځيري(مرکب) توابعو مشتق

تابع کيدی شي د v تابع سره وتړل شي، که د د باندني تابع(ځنځيرونې قاعده)، پيژند ورشو (دتعريف ساحه) $D(u)$ د دنني تابع د $W(v)$ سره ګډ توکي يا عناصر ولري.

ددې لپاره ليکو: $u^\circ v(x)=u(v(x))$، که د f تابع د $y=f(x)=u(z)$ سره او $Z=v(x)$ وي.

فعاليت:
_ په زنځيري تابع کې د $f(g(x))$ پيژند ورشو او همداسې د تابع ورشو په هکله خپل نظر څرګند کړئ.
په ځاي کې څه دی او $x=3$ تابع ارزښت د $f(g(x))=(x^2+2x+1)^2$ _ ووایاست، چې د د تابع ساحې کومې دي او په مشتق نيولو کې يې فکر وکړئ.
_ که يوه په خوښه زنځيري تابع ولرو، نو د تابع ورشو په ګوته کړئ او وڅېړئ، چې مشتق يې پيدا کړئ.

اوس نو د $x=x_0$ ځای کې د $y=f(g(x))$ تړلي يا ځنځيري تابع مشتقوړوالی څيرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=f\left[g(x)\right]$$
$$\Rightarrow f'(x)= \quad f'(g) \quad . \quad g'(x)$$

دننني مشتق د باندنی مشتق(دادې ورپورته شي)
ددې لپاره نيسو چې:

1- د $g(x)$ دننني تابع د $x=x_0$ په ځای کې مشتقوړ ده. دانو بيا بايد د x_0 په يوه معلوم تعريف شوي چاپيريال کی متمادي(نه پريکيدونکی) وي.

موږ لرو : $g(x+h)->g(x_0)$ د $h->0$ لپاره.

همداسې $g(x_0+h)=g(x_0)+k$ داسې، چې $k->0$ د $h->0$ لپاره.

2- که د $y=f(z)$ دباندنی تابع په $z=z_0g(x_0)$ کې د مشتق قابليت ولري.

د $y=f(g(x))$ کمبنتويش کيدی شي په لاندې ډول ورکړ شي او بڼه(فورم) يې هم بدله شي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}=\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)}$$
$$=\frac{f(z_0+k)-f(z_0)}{k}.\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}$$

که $h->0$ لاړه شي (همداسې $k->0$ خواته ځي) نو دا اړيکی مشتق ته ځي:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=\left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o}=\left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)}.\left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0} \quad ;........(*)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=\left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o}=\left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)}.\left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

که چيرې د ځای په ځای(فيکس) ځای $x=x_0$ لپار بيرته x نيسو، نو کيدی شي چې (*) فرمول په لاندې لنډ ډول ورکړشي او د $y=(z)$, $z=g(x)$ لپاره باور ولري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx};.....................................(**)$$

په پام کې دې وي، چې $\frac{dy}{dx}$ د $z=g(x)$ په ځای کې باید ترتيب(تنظيم) شي.

دا (*) فرمول ځنځيري قاعده(لار،قانون) بلل کيږي او د پورته نيونو يا فرضيو سره باوري دی. دا په ساده ډول په ياد لرلی شو، ځکه چې ښۍ خوا د کيڼې خوا سره د فورمال dzزياتيدلو له لارې منځ ته راغلي.

د پورته ښوونې لاس ته راوړنه دا لاندې جمله ده:

زنځيري يا مرکبه قاعده

لرو : $f(z)=f(g(x))$ ، نود $z=g(x)$ تابع په x او د $y=f(z)$ تابع په $z=g(x)$ کې د مشتق قابليت لري يا مشتقوړ دی، نوترلی ورکړ شوی د $y=f(g(x))$ تابع هم په x کې د مشتق قابليت لري او دا باوري کيږي.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{\frac{df}{dg}}{\frac{dx}{dg}}==f\ '(g(x)).g'(x)$$

لنډ: $(fog)'(x)=f(g(x))'$

بيلګه:

د $f(x)=(x^2+2)^2$ مشتق ونيسئ.

$$f(x)=\left(x^2+2\right)^2$$

بدلون tion: $z(x)=x^2+2 \quad f(z)=z^2 \Rightarrow f'(z)=2z \quad z'(x)=2x$

$$f'(x)=f'(z)\cdot z'(x)=2z\cdot 2x=2\left(x^2+2\right)\cdot 2x=\underline{\underline{4x^3+8x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه:

د $y=\sin x^2$ تابع يوه په لاندې توګه ورکړ شوی ځنځيري تابع ده:

$$y=\sin z \quad , \quad z=x^2$$

دا دواړه توابع په هرځای کې مشتق وړدي. له دې امله هر چيرته باور لري:

$$\frac{d\sin x^2}{dx}=\frac{d\sin z}{dz}.\frac{dx^2}{dx}=\cos z.2x=2x.\cos x^2$$

بېلګه:

د $y = \sin^2 x$ تابع په لاندې ډول تړلی ورکړ شوی.

$$y = z^2 \quad , z = \sin x$$

دلته هم دواړه توابع هرچيرته مشتقوړ دي. نو له دې امله هرچيرته باور لري:

$$\frac{d\sin^2 x}{dx}=\frac{dz^2}{dz}.\frac{d\sin x}{dx}=2z.\cos x=2\sin x.\cos x=\sin 2x$$

بېلګه:

د $f(x)=(x^5+4)^8$ تابع مشتق وشمېرئ!

حل: هرکله چې $g(x)=x^8$ او $h(x)=x^5+4$ وضع کوو نو لرو:

$$f(x)=g(h(x))$$

$$f'(x)=(g(h(x))'=g'(h(x)).h'(x)$$

$g'(x)=8x^7$ $h'(x)=5x^4$ دی، نو لرو:

$$f(x)=8(h(x))^7 5x^4=40(x^5+4)^7.x^4$$

تمرينونه:

۱ - $h(x)=\dfrac{1}{(x^3-4x^2+1)^2}$

۲ - که چيرې $f(x)=(3-2x+x^2)^4$ وي، نو f' پيداکړئ.

د لاندې تابعو مشتقونه هم ونيسئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

1: $f(x)=(1-2x^3)^4$

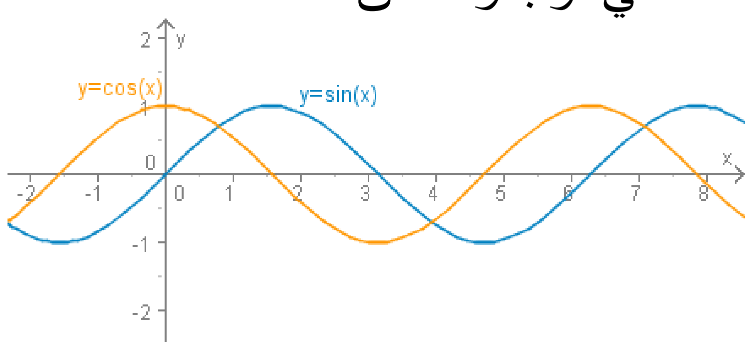
2: $f(x)=(2x^2+1)^{-2}$

3: $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2+x^2+x^3}}$

4: $h(z)=\sqrt{\dfrac{1-z}{1+z}}$

5: $f(t)=\sqrt[3]{3t+1}$

د مثلثاتي توابعو مشتق



$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \ I$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \quad .... \ II$$

فعالیت:

د لاندې توابعو مشتقونه وشمېرئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad :a$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad :b$$

$$f\,'(x) = \frac{d\ \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad c$$

موږ په لاندې کې پورتني درې حالتونه ښايو او د نورو درې حالتونوښوونه ګرانو زده کوونکو ته پرېږدو.

قضيه:

د ساين تابع مشتق غواړو وښايوو چې $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$ دی:

ددې قضيې د ښوولو لپاره پورتني په ننوتنه کې دوه لومړني فرمولونه په کار راځي.

د $y = f(x) = \sin x$ ساين تابع د هر x لپاره تعريف ده، نو د x_0 په خوښه ټاکلوڅخه لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h}$$

$$= \frac{2}{h}\cos\frac{2x_0+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2} = \cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\ .$$

د ليميټ د برخې په پام کی لرلو سره لرو:

$$\lim_{h\to 0}\left(\cos\left(x_0+\frac{h}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) = \cos x_0.$$

د ساين تابع په هر ځاي کی، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابليت لري يا مشتقوړ ده:

$$\left(\frac{d\sin x}{dx}\right)_{x=x_0} = f\,'(x_0) = \cos x_0\,,$$ (Xپه لينده کچ يا راديان)

قضيه:

همداسي ښوول کيږي چی کوساين تابع هم په هرځاي کی مشتقوړ ده، دلاندې مشتق سره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(\frac{d\cos x}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = -\sin x_0,$$ پهx لينده کچ يا راديان

ثبوت:

لرو:
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x_0)}{h} = \frac{\cos(x+h)-\cos x_0}{h}$$

په پورته ننوتنه کې د دويم فرمول له مخې لرو:

$$= \frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}.\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= \frac{-2\sin(x+\frac{h}{2}).\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= -[\sin(x+\frac{h}{2}).\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}]$$

د ليميټ او د ليميټ د ضرب قاعدې له مخې لاس ته راځي :

$$= -\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2}) \ . \ \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x\cdot 1 = -\sin x$$

له پورته مساواتو څخه په لنده توګه ليکو:

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

قضيه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

غواړو وښایو چې د تانجنت تابع f(x) = tanx مشتقوړ ده او د مشتق تابع یې $f'(x) = \frac{d\tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$ ده.

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$
$$= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos x.\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \tan^2 x \ , x \neq (2k+1).\frac{\pi}{2}$$

فعالیت: ګرا زده کوونکي دې د $f(x) = x^2 \sin x$ تابع مشتق پیدا کړي.
یادونه: $g(x) = x^2$ او $h(x) = \sin x$ دې ځا په ځای کړي.
بیلګه:
غواړو د $y = \cos\frac{\pi x}{180}$ تابع مشتق پیدا کړو.

حل:

ړدو : $f(x) = \cos x$ او $g(x) = \frac{\pi x}{180}$ ، نو y په لاندې توګه لیکلی شو:
$y = f(g(x))$. د زنځیري قاعدې په بنسټ لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{aligned}
y' &= f'(g(x))\cdot g'(x)\\
&= \cos'(g(x))\cdot(\frac{\pi}{180}\cdot x)'\\
&= -\sin(g(x))\cdot\frac{\pi}{180} = -\frac{\pi}{180}\cdot\sin\frac{\pi x}{180}
\end{aligned}
$$

د لاندې توتبعو مشتق پيدا کړئ

$\tan^4 x$	$:b$	$\cos^2 2x$	$:a$
$\sin(3x-1)$	$:d$	$\sec x\cdot\cot anx$	$:c$
$\sec(\sec(x))$	$:f$	$\sin^2 x-\cos x$	$:e$

حل a: د ځنځيري قاعدې په بنسټ او د توان يا طاقت يو فرمول په بنسټ لرو:

$$
\begin{aligned}
(\cos^2 2x)' &= 2\cos(2x)\cdot\cos'(2x)\\
&= 2\cos(2x)(-\sin(2x)).2\\
&= -4\cos 2x\cdot\sin 2x
\end{aligned}
$$

$:b$

$$
\begin{aligned}
(\tan^4 x)' &= 4\tan^3 x\cdot(\tan x)'\\
&= 4\tan^3 x\cdot\sec^2 x
\end{aligned}
$$

$:c$

$$
\begin{aligned}
(\sec x.\cot x)' &= (\sec x)'\cot x+(\cot x)'\sec x\\
&= (\sec x.\tan x)\cot x+(-\csc^2 x)\sec x\\
&= \sec x-\csc^2 x\cdot\sec x\\
&= \sec x(1-\csc^2 x)
\end{aligned}
$$

$:d$

$$
\begin{aligned}
[\sin(3x-1)]' &= \cos(3x-1).(3x-1)'\\
&= \cos(3x-1)\cdot 3 = 3\cos(3x-1)
\end{aligned}
$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[\sin^2 x - \cos x]' = (\sin^2 x)' - (\cos x)' \qquad :e$$
$$= 2\sin x(\sin x)' - (-\sin x)$$
$$= 2\sin x \cdot \cos x + \sin x$$
$$= \sin x(2\cos x + 1)$$

بیلګې:

1- د f(x) = sinx تابع لومړي څلور مشتقونه دې پيدا شي.

---

f'(x) = cosx ; f''(x) = -sinx ; f'''(x) = -cosx ; $f^{(4)}(x)$ = -(-sinx) = sinx

2- د (x) = x.sinx تابع مشتق پيداکړئ.
د ضرب قانون څخه کار واخلئ.
f'(x) = 1.sinx+xcosx=sinx+ x.cosx

3- د $f(x)= \sin\frac{1}{x}; x \neq 0$ تابع مشتق پيداکولو له پاره د ځنځير قونو ن څخه نار اخلو.

پردو $z=\frac{1}{x^2}$ ***او*** **u(z) = sinz** ***لا س ته راځي:*** $f'(x)=-\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}$

تمرينونه:

-- د لاندې توابعو لومړی مشتق و ټاکئ.

$a)\ f(x)=\sin 3x \qquad b)\ f(x)\sin x \cdot \cos x \qquad c)\ f(x)=\sin^2 x$

$d)\ f(x)=\tan x + 2\sin 2x \qquad e)\ f(x)=\sin x^2 \qquad f)\ f(x)=\sin\frac{x-1}{x+1}$

-- د $f(x)=\sin^n x (n \in IN)$ تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښاياست يا وټاکئ.

-- د تانجنت تابع لپاره د ساين او کوساين قانون په مرسته د مشتق قانون و ښاياست.

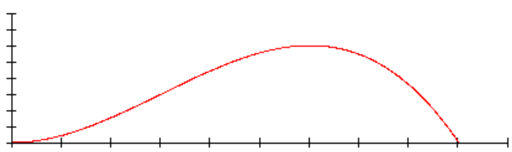
-- وښاياست چې د f(x) = tanx لپاره $f'(x)=1+\tan^2(x)$ هم باور لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- د ويش قانون له مخې د کوتانجنت قانون پيداکړئ او هم د تانجنت قانون له مخې.

--- ولې د ساين تابع او د کوساين تابع په خوښه زيات مشتقوږ دي.

د مشتق استعمال په پيداښتي يا طبيعي علومو کې

په رياضياتو کې زيات وخت توابع راوړل کيږي، چې د يوې متحولې(اووښتونې) x په واک کې وي. په طبيعي پوهنو کې زيات وخت توابع څېړو، چې د وخت په واک کې وي. لکه په شکل کې د يوه توپ د غورځولو وهلې لار (دا وروسته روښانه کيږي)	

فعاليت:
ګران زده کوونکي دې د فزيک د درسونو له مخې د چټکتيا او بيړې تعريفونه ور کړي او د لار، وخت، چټکتيا او بيړې فرمولونه دې وليکي.

بېلګه:
د يوه په برابرډوله بيړه (تعجيل) غورځول شوي شي لپاره د پيل چټکتيا (لومړنی سرعت) $v_0=4\frac{m}{s}$ او $a=1,8\frac{m}{s^2}$ بيړې(تعجيل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې ډول دی:

$$\boxed{s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t}$$

پورته ورکړشوي د v_0 ارزښت لپاره باور لري: $S(t) = 0,9t^2+4t$

(t په (ثانيه) s ، $s(t)$ په m (متر))

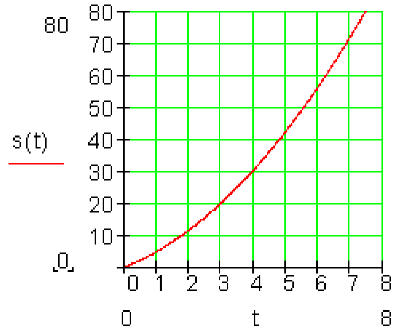
منځنی چټکتيا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ده)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لحظوی(سملاسي) چټکتیا په لاندې ډول ده:

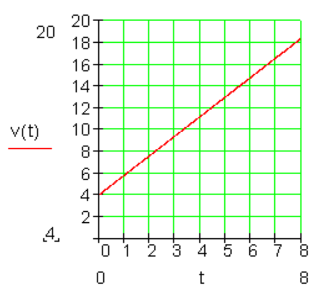
$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=v$$

$$v=s'(t)=1{,}8t+4$$



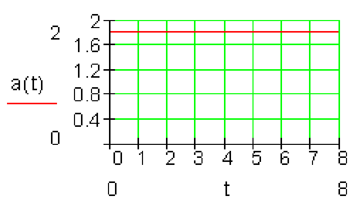
v-t - دیاګرام کې یوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتیا په برابر ډول زیاتیږي.

دا دلته ثابته چټکېدنه $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ده او $a=1.8\frac{m}{s^2}$ بیره(تعجیل) ده.



بیرې یا تعجیل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي:

$$v'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=a$$



پام : د یوه برابرډوله په بیره (تعجیلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

$$|\,s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t\,| \qquad v(t)=s'(t)=at+v_0 \qquad a(t)=v'(t)=a$$

د یوې چټکتیا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره $v(t)=s'(t)$ لرو. د $s'(t)$ لپاره داسې $v(t)=s'(t)$ هم لیکو.

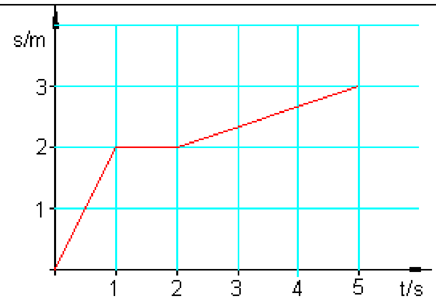
(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت:

1- د يوه خوزنده تن يا جسم د لار-وخت-ډياګرام وركړ شوى.

الف: دا خوزښت تشريح كړئ.

ب : دې پورې اړونده د چټكتيا – وخت – ديا ګرام وكاږئ.



2- يوه تيره د پيل چټكتيا $v_0 = 7\frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاړه)پورته غورځول كيږي.

د لار-وخت-قانون دى: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10\frac{m}{s^2}$ (را ټولې (؟؟كردې شوې)سره.

الف) د كوم وخت وروسته د تيرې چټكتيا (سرعت) صفر دى؟

ب) خورا جګ د ميل جګوالوشميرئ

3- تابع د يوه خوزښت د لار-وخت-ډياګرام ښايي.

الف)د ورځني ژوند څخه يوه بېلګه وركړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ښايي.

د منحني تلنه د $t > 3$ لپاره فزيكي څه مفهوم لري؟

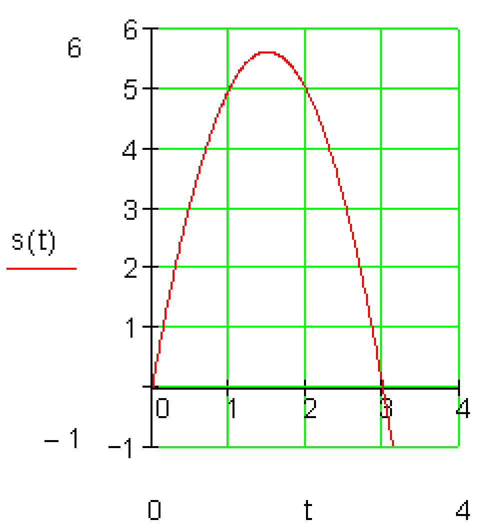
ب) د خوزښت لپاره د لار-وخت-ډياګرام په لاندې ډول دى.

$$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

a او v_0 وټاكئ.

پ) د اړونده بيړې – وخت-ډياګرم وكاږئ او دا تشريح كړئ.

يوه منفي چټكتيا (سرعت) څه معنا لري؟



4- يوتن(جسم) په پورته ازاده غورځونه كې داسې حركت كوي ،چې د t وخت كې $s(t) = 5 \cdot t^2$ لار وهي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په وختونو $t=1,2,3$ کې لحظوي چټکتیا(سرعت) وښایی.
حل: لحضوي جټکتیا د سملاسي تغیرارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

$$t=1: \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(1+\Delta x)-s(1)}{\Delta x}=10+5\Delta x$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $10+5\Delta x \to 10$

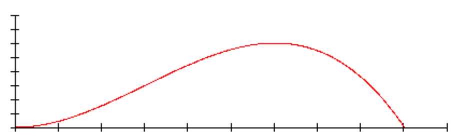
$$t=2: \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(2+\Delta x)-s(2)}{\Delta x}=20+\Delta x \Rightarrow 1$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $20+5\Delta x \to 20$

$$t=3: \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(3+\Delta x)-s(3)}{\Delta x}=30+5\Delta x \Rightarrow 1$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري $20+5\Delta x \to 30$

تمرین:
د $f(x)=-\frac{1}{288}x^3+\frac{1}{16}x^2 \quad ; \quad x>0$
لاندې تابع ګراف او په ورنزدې توګه د فوټبال میدان کې د توپ الوتنې منحني ښایي، چې لاندې ښېره لري.



لاندې پوښتنې ځواب کړئ:
الف:توپ کوم خورا جګ(ماکسیمال) جګوالی لري او د وهلټکي(شوټ شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟
ب : د توپ وهلټکي (شوټ شوي ټکي)څخه توپ څومره لرې بېرته ځمکې ته راځي؟
پ : د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهنې ځای څخه 9 متره لرې او 2 متره جګ دی. ایا توپ له دې څخه جګ الوزي؟
ت : توپ د تور(ګول) لاین(د x محور) څخه په 2 متره جګوالي الوزي. له ګول څخه په کوم لرېوالي دا ازاده شوټ وهل شوی دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جګو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چې د ورپسي مشتق له لارې لاس ته راځي. د $f'(x)$ بیا مشتق نیونې سره د $f''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چې د دویم مشتقتابع په نامه یادیږي.

بیلګه:

$$f(x)=x^3+x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)3x^2+2x+1 \Rightarrow \underline{\underline{f''(x)=6x+2}}$$

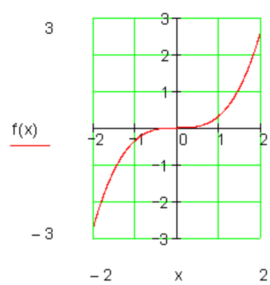
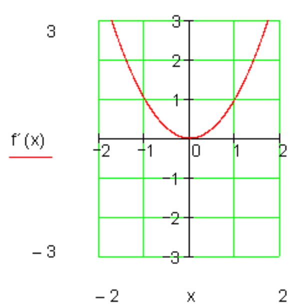
د $f''(x)$ بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور.

$$f(x)=x^3+x^2+x+1 \Rightarrow f'(x)3x^2+2x+1 \Rightarrow f''(x)=6x+2 \Rightarrow \underline{\underline{f'''(x)=6}}$$

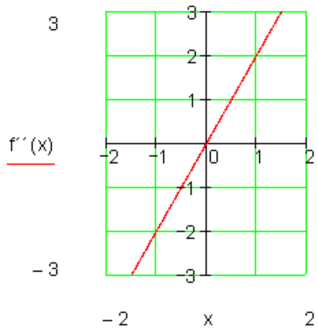
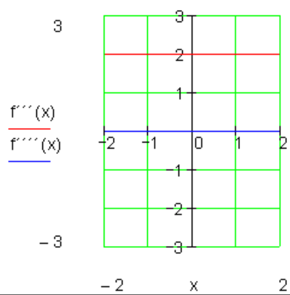
د $f(x)\frac{x^3}{3}$ تابع دې 4 واره مشتق ونیول شي:

$$f(x)=\frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2}{3}=x^2 \Rightarrow f''(x)=2x \Rightarrow f'''(x)=2 \Rightarrow f''''(x)=0$$

د تابع ګراف: د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

$f(x)=\frac{x^3}{3}$	
$f(x)=\frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x)=x^2$	

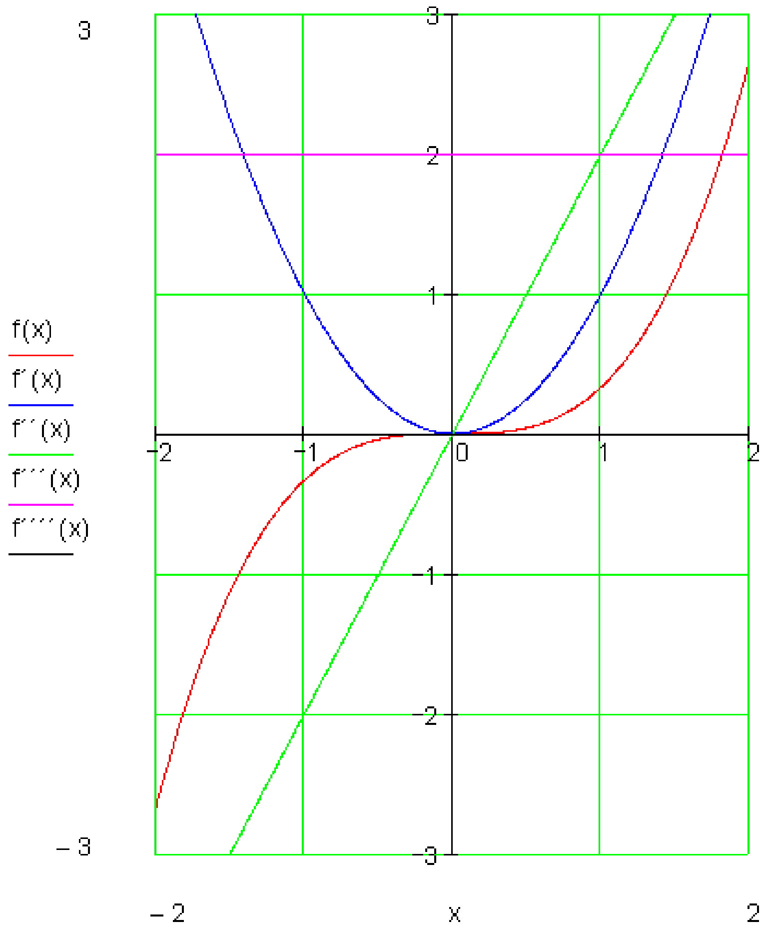
(c) ketabton.com: The Digital Library

 	$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$ $f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$

-- ------------

پورته تولو توابعو ګراف په یوه پروت ولاړ سیستم کې

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګې:

اول: د تابع $f(x)=4x^3-2x^2+x-2$ مشت درپواره پیدا کړی

$$f(x)=4x^3-2x^2+x-2$$
$$f'(x)=12x^2-4x+1$$
$$f''(x)=24x-4$$
$$f'''(x)=24$$

۳-۱ د جګو درجو مشتق

-- -

دویم: د تابع $f(x)=\frac{3}{4}x^3-12x^2+\frac{1}{4}x$ **مشتق درپواره پیدا کړی**

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{3}{4}x^3-12x^2+\frac{1}{4}x$$

$$f'(x)\frac{9}{4}x^2-24x+\frac{1}{4}$$

$$f''(x)=\frac{9}{2}x-24$$

$$f'''(x)=\frac{9}{2}$$

تولګه:

د $f(x)$ لومړی مشتق د $f(x)$ مشتق تابع $f'(x)=\dfrac{df(x)}{dx}$ ده :

د $f(x)$ دويم مشتق د $f'(x)$ مشتق تابع $f''(x)=\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د $f(x)$ دريم مشتق د $f''(x)$ مشتق تابع $f'''(x)=\dfrac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: يو په خوبنه کسریي تابع $f(x)$ په خوبنه د مشتق قابليت لري.

تمرينونه:

د لاندې توابعو دريواره مشتق ونيسئ.

-1 $f(x)=3x+4$

-2 $f(x)=2x-4+x^3-5x+4x^3$

-3 $f(x)=3x^3+2x^2+x+1$

-4 $f(x)=(2x+1)^3$

-5 $f(x)=x-x^4+3+x$

-6 $f(x)=1-2x-3x-4x+x^4$

-7 $f(x)=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$

-8 $f(x)=4x^3-2x^2+5x-2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکپوننشل توابعو مشتق

د تابع مساواتو جوړښت

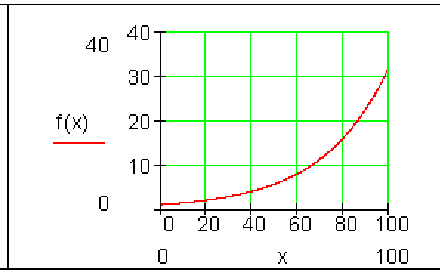
کولي باکتریا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوټې ویش (حجره ویش) له لارې زیاتیږي. و مساعدو شرایطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقیقو کې ځان تجزیه کوي. د غه عملیيي لپاره یو ارزښت جدول :اړ، او ګراف يې کاږو. دلته د x اووښتوني (متغیره) په دقیقو د وخت لپاره ده.

د y متغیره د باکتریا ګانو د تعداد لپاره ده.

x = Minuten	0	20	40	60	80	100
y = Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32

x = دقیقې

y = د باکتریا ګڼون یا تعداد



فعالیت: د دې لپراه تابع ولیکئ

قضیه : هر اکسپوننشل تابع د $y=b^x,(b>0)$ د ټولو ریلو اعدادو لپاره مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'=b^x\ln b$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{y-y_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\qquad , f(x)=b^x$$

حل:

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{b^x-b^{x_0}}{x-x_0}$$

$$=b^{x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{b^{x-x_0}-1}{x-x_0}\qquad , x-x_0=h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

له پورته لرو $\begin{cases} b^h - 1 = k \\ h = \log_b (1+k) \end{cases}$ او لا س ته تري راځي

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{k}{\log_b (1+k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{1}{\frac{1}{k} \cdot \log_b (1+k)}$$

د لوګاریتم قانون څخه لرو: $n \cdot \log x = \log x^n$ او لاس ته راځي

$$= b^{x_0} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{k}{\log_b (1+k)}$$

$$= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b [\lim_{k \to 0} (1+k)^{\frac{1}{k}}]} \quad , \lim_{k \to 0} (1+k)^{\frac{1}{k}} = e$$

له پورته لاس ته راځي

$$= b^{x_0} \cdot \frac{1}{\log_b e} \quad , \ \log_b e = \frac{1}{\ln b}$$

$$= \underline{\underline{b^{x_0} \cdot \ln b \ ; \quad x_0 \in IR \ ; b \in IR^{>0}}}$$

$$\Rightarrow f\ ' : f\ '(x) = b^x \cdot \ln b \ ; \ D\ '(f\ ) = IR \ ; b \in IR^{>0}$$

$$f\ '(x) = b^x \cdot \ln b$$

ضیه :

د $y = f\ (x) = e^x$ مشتق پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$y = f(x) = e^x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

موږ دا لرلي په پام کې نیسو: $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} . e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

موږ د تل کوچنیکیدونکي Δx ارزښت لپاره څیړو $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې په بنسټ موږ لاس ته راوړو:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

زموږ د شمېرنې په بنسټ دا دا معنا لري:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که د x_0 په ځای x ځای په ځای کړو، نو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f'(x) = e^x$ او $f(x) = e^x$

اکسپوننشل فنکشن $y = f(x) = e^x$ تیک $y' = f'(x) = e^x$ مشتق لري

یعني د e^x تابع د مشتق څخه بېرته د e^x تابع لاس ته راځي.

بیلګه:

لرو : $f(x) = b^{3x^2} - 10;\ D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}$

د پورته تابع مشتق ونیسئ.

$$D'(f) = D(f) = IR \quad \Rightarrow D(f') = IR$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= b^{3x^2-10} = g[h(x)] \\
g(z) &= b^z \ \Rightarrow f'(z) = \underline{b^z \cdot \ln b}; z \in IR \\
h(z) &= 3x^2 - 10 \ \Rightarrow h'(x) = \underline{6x}; x \in IR \\
f'(x) &= g'(x) \cdot h'(x) \\
&= b^z \cdot \ln b \cdot 6x \ \Rightarrow z = 3x^2 - 10 \\
&= b^{3x^2-10} \cdot \ln b \cdot 6x;\ x \in IR \\
&= \underline{\underline{\ln b \cdot 6x \cdot b^{3x^2}; D(f) = IR;\ b \in IR^{>0}}}
\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرينونه:

د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

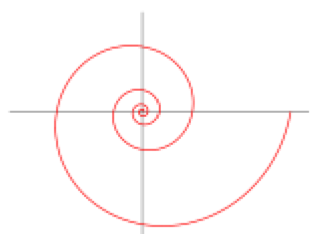
$a)\ f(x) = 3 \cdot e^{-2x+1}$ $\quad b)\ f(x) = e^{x^2+2x-1}$ $\quad c)\ f(x) = (x-1) \cdot e^{x}$

$d)\ f(x) = \sqrt{e^{x}}$ $\quad e)\ f(x) = x^{n} \cdot e^{e}$ $\quad f)\ f(x) = e^{kx}$

$g)\ f(x) = 2^{\frac{1}{2x}}$ $\quad h)\ f(x) = (\frac{1}{4})^{3x}$ $\quad i)\ f(x) = x \cdot a^{\sqrt{x}}$

$k)\ f(x) = \sqrt{e^{x}+1}$ $\quad l)\ f(x) = \frac{e^{x}}{1-e^{x}}$ $\quad m)\ f(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$

د لوګاریتم مشتق



فعاليت:
- لوګاریتم تعريف
- اکسپوننت يا توان تعريف کړئ.
- د لوګاریتم او توان ترمنځ اړيکې وښاياست.

قضيه :
د لوګاریتم تابع مشتق:

(c) ketabton.com: The Digital Library

قضیه: هر د لوگاریتم تابع $y=f(x)=\log_b x$ د $b>0, b\neq 0, x>0$ سره، مشتقوړ دی او صدق کوي: $f'(x)=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x.\ln b}$

ثبوت: دا چې تابع $y=f(x)=\log_b x$ یواځې د $x>0$ لپاره پیژند لري یا تعریف دی. په هر ځاي کی چی $x>0$ وي، نودا لاندې باوري دی :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\log_b(x_0+h)-\log_b x_0}{h}=\frac{1}{h}\log_b\frac{x_0+h}{x_0}=\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}$$

د (لومړۍ برخې) له مخی دا لاس ته راځي:

$$\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\left[\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right]^{\frac{1}{x_0}}\rightarrow e^{\frac{1}{x_0}}$$

او له دې امله

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\log_b(1+\frac{h}{x_0})^{\frac{1}{h}}=\log_b e^{\frac{1}{x_0}}=\frac{1}{x_0}\log_b e$$

د لوگاریتم تابع په ورکړشوي مشتق سره د خپل ټول پیژند سټ کی د مشتق قابلیت لري.

$f'(x)=\frac{1}{x}\log_b e$ همداسې $f'(x)=\frac{1}{x}.\frac{\ln e}{\ln b}$ داچې $\ln e=1$ نو صدق کوي:

$f'(x)=\frac{1}{x.\ln b}$. خه چې د ښوولو وو.

په ځانګړي ډول دا لاندې باور لري:

$$\left(\frac{d(\ln x)}{dx}\right)_{x=x_0}=\frac{1}{x_0}$$

بیلگه:

د $f(x)=\log\sqrt{x^3}$ مشتق وشمیرئ.

ښوونه: په لاندې توگه مخ تخ ځو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \log\sqrt{x^3} = \log_{10} x^{3/2} = \frac{3}{2}\log_{10} x$$

$$\Rightarrow \; f'(x) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 10}$$

$$= 0.6514\cdot\frac{1}{x};\; D(f') = IR^{>0}$$

بیلگه:

د $y = \ln\dfrac{x-2}{x+2}$ تابع مشتق پیداکړئ

حل:

موږ لیکلاي شو :

$$y = \ln\frac{x-2}{x+2}$$
$$= \ln(x-2) - \ln(x+2)$$

دا چې $(\ln(x-2))' = \dfrac{1}{x-2}$ او $(\ln(x+2))' = \dfrac{1}{x+2}$ دی، نو لرو:

$$y' = (\ln(x-2))' - (\ln(x+2))'$$
$$= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)}$$
$$= \frac{4}{x^2-4}$$

بیلگه:

لرو: $f(x) = \log_2(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

غواړو پیدا کړو: ۱. مشتق f '(x)
مشتق د $x_0=16$ په ځاي کې
حل: د حل لپاره د پورته فرمول څخه کار اخلو: f '(x) = 1/(x·ln2)
اوس د $x_0=16$ په ځاي کې مشتق ټاکو:
$f'(x_0)= 1/(16\cdot\ln2)= 1/(16\cdot0.69)= \underline{0.09}$

تمرینونه:

د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ یا پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\ln\sqrt{x}$ $\qquad b)\ f(x)=\ln(x^2-4)$ $\qquad c)\ f(x)=\ln\frac{2}{x^3}$

$d)\ f(x)=\ln\frac{x+1}{x}$ $\qquad e)\ f(x)=x\cdot\log_2 x^2$ $\qquad f)\ f(x)=(x^4-1)\cdot\log$

$g)\ f(x)=\frac{\ln}{x+2}$ $\qquad h)\ f(x)=\frac{x^4}{\ln x}$

د یوې تابع مشتقوړوالی یا - قابلیت

موږ ولیدل، چې یوه تابع په هر ځاي کې تعریف نه ده، په هر ځاي کې حد نه لري او همداسې په هرځاي کې متمادي نه ده. په همدې توګه یوه تابع هر چیرته د مشتق قابلیت هم نه لري.
تابع $f(x) = |x|$ په 0 ځای کې تعریف نه ده:
د ټولو $x>0$ له پاره باور لري $f(x) = x$

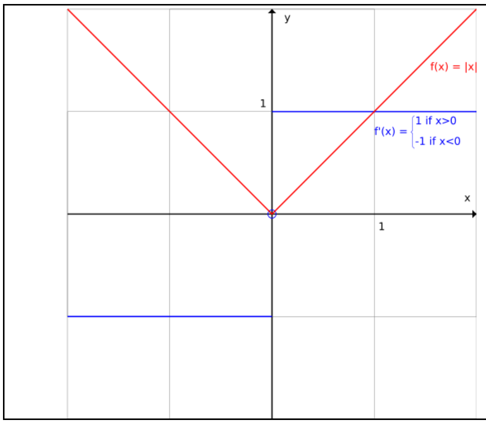
(c) ketabton.com: The Digital Library

او له دې سره $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0}{x-0}=1$

د تولو $x<0$ لپاره د پورته په برعکس $f(x)=-x$ باور لري او له دې سره:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

دا چي کیڼ- او ښی اړخیز حد یو له بل سره سر نه خوري، حد(پوله) نه شته. تابع په دې راوړل شوي ځای کې مشتقوړ نه ده.



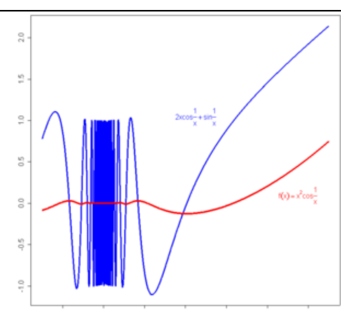
د تابع مشتق کېدنه په نورو تولو ځایونو کې تر اوسه تل ورکړ شوي.
په صفر ځای کې سره له دې یو ښي اړخیز مستق ورکړ شوی، یعني لرو:

$$f'+(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=1$$

او یو کیڼ اړخیز مشتق هم:

$$f'-(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-x-0}{x-0}=-1$$

که پورته ګراف ته وګورو، نو وبه پوهیږو، چي یوه مشتقوړ تابع باید ګوډه نه وي یا په کوم ځای کې ماته نه وي یا په بل عبارت کونج جوړ نه کړي.



د یوه نه متمادي مشتقوړ تابع لپاره بېلګه:
یو تابع متمادي مشتقوړ بلل کيږي، که د هغي مشتق متمادي وي. که یوه تابع هرچېرته مشتقوړ وي، باید نه دی چي مشتق دې یې هم متمادي وي.
د بېلګې په توګه:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

تابع په هر ټکي کې حتي د $x=0$ سره مستقوړ دی. مشتق

١١٢ د لوګاریتم مشتق

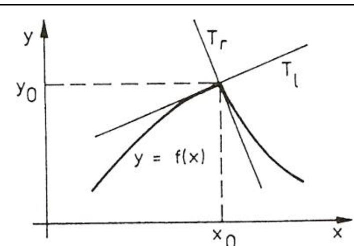
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)+\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

يي ددې په خلاف په 0 ځای کې متمادي نه دی
مشتق د ټاکلو نيونويا فرضيو لاندې ممکن او له دې امله هلته هدفمند دی، چېرته چی ليميټ (پولی) ته تګ ممکن وي يعني چيرته چی د تفاضل ويش يو ليميټ د $x\to 0$ لپاره ولري.

که کومه منحني چيرته راماته وي (ځبره 4)، ګورو چی هلته تانجنت نه شته او همدارنګه جګيدل او هم د تفاضل ويش نه شته. پس د مشتق قابليت د متماديت په څير د يوې تابع ځانګړي خوي دی.

په پورته ځيره کی انځور شوې منحني د x_0 په ځاي کی يواځنی تانجنت هم ونه لري او له دې امله مشتق هم ونه لري، خو دلته يو کيڼ تانجنت T_1 يا کيڼ جګوالی لري اوپه دې ډول کيڼ مشتق لري او په همدې ډول يو ښی تنجت T_r او ښی جګوالی او په دي ډول ښی د تابع مشتق موجو د دی.



په يوه نامتمادي تابع کی د تانجنت يا مشتق پوښتنه بی معناده.
دا دلته انځور شوی پرابلم يا مسأله اوس د شميرنې د ټيك فرمول لاندې راوړو.
وليدل شو چی په يوه ځای x_0 کی چی تابع متمادي نه وي د مشتق پوښتنه بی مانا ده. نيسو چی دا دې ښوول شوی وی. دا څرګنده ده چی هره متمادي تابع بايد ضرور مشتقوړنه وي. د بيلګي په توګه که تابع زاويه يا کونج ولري.
دې ته اړتيا ده چی وښايو، چی يواځي متمادي توابع د مشتق قابليت لري، دا بيا دا معنا لري چی هره تابع چې د مشتقوړ وي بايد لږ تر لګه متمادي وي او په دې ډول مشتق متماديت په بر کی لري يا خوندي لري، په دې معنا چی متماديت د مشتقوړوالی لپاره اړيين يا ضروري شرطونه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله:
که د $y = f(x)$ تابع د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي، نو هلته ضرور متمادي ده.
ښوونه : د دمشتق د تعریف څخه لاس ته راځي، چی حد شته دی.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

لیمیټ یواځی هلته کیدی شي چی موجود وي، چی د $x \to x_0$ لپاره د مخرج سره صورت هم صفر ته ولاړ شي یانې $f(x) - f(x_0) -> 0$ لاړ شي.
نو باور لري: $f(x) -> f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.
دا د متمادیت پیژند دی.

دا تفاضل وېش په یوه بله بڼه هم انځوریدلی شي که $x = x_0 + \Delta x$ وکاروو:
دلته مشتق $f'(x)$ په لاندې توګه ورکړ شوي دی:
د یوه تابع د مشتق قابلیت د لومړي ځل لپاره یواځی په ځای (lokal) پورې اړ خوي دی یعنی په یو ځاي x=x0 کی تعریف دیٔ. لکه څنګه چی په متمادیت کی(لومړي څېرکی دې وکتل شي) کیدی شي چی د مشتق قابلیت او مشتق یوه واز یابند اینتروال ته وغزول شي.

تعریف:
د $y = (x)$ یوه تابع په واز اینتروال (a,b) کې، د اشتقاق قابل(مشتقوړ) بلل کیږي، د لاندې مشق سره.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = f'(x) \ ; \ a < x < b$$

که داد $x = x_0 \in (a,b)$ په هر ځای کې د مشتق قابلیت ولري د مشتق $f'(x_0)$ سره. دا په بند اینتروال $[a,b]$ کې مشتق وړ بلل کیږي، که دا سربېره پر دې د a په ځاي کی ښی اړخیز اود b په ځاي کي کیڼ اړخیز مشتق وړ هم وي.

بیلګه ۲ ، ۶:
د توان تابع $y = x^n, \ n = 1 , 2 , 3, \ldots$ په هرځاي کی د مشتق قابلیت لري د لاندې مشتق سره

-- ------------------

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

د ساين تابع $y = \sin x$ او کوساين تابع $y = \cos x$ په هرځاي کی مشتقوړده، د لاندي مشتق سره

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$

په يوه واز انتروال کی $y = f(x)$ مشتقوړ تابع مشتق بيرته $y' = f'(x)$ تابع ده ، نو په دې ډول يي د مشتق قابليت او د متماديت قابليت پوښتنه کيدی شي.

تعريف (پيژند) ۲. ۴:
په يو د $x = x_0$ چاپيريال کې د مشتق قابل تابع (رابيليدوړ بلواك) $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې دوه واره د مشتق قابليت لري(رابيليدوړ دی)، که د هغي اشتقاق(رابيليدنه) $y' = f'(x)$ هلته د مشتق قابليت لري(رابيليدوړ وي). سړی د $f'(x)$ مشتق د تابع(رابيليدنه د بلواك) $y = f(x)$ دويمه رابيليدنه بولي او ليکي:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_0} = f''(x_0) = \left(\frac{df'(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

يو په يوه واز اينتروال کي مشتق کېدونکي تابع $y = f(x)$ هلته دوه واره مشتقوړ بلل کيږي، که د هغه مشتق $y' = f'(x)$ په دې اينتروال کې مشتق وړ وي. ␟
ددې لپاره ليکل کيږي:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{df'(x)}{dx}$$

تمرين:
وښايئ چي ايا دا توابع $y = \cos x$; $y = x^n$; $y = c$ هر چيرته دوه واره مشتقوړ دي؟

د معکوس تابع مشتق

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیتونه:

د یوې تابع معکوس تابع تعریف کړئ.

د $f(x) = \frac{x^2+5x}{x^3-8}$ تابع د تعریفساحه وښایاست.

د پورته تابع د مشتق مشتق وشمیرئ.

اوس دې معکوسه تابع تر څېړنې لاندې ونیول شي . دلته دې ونیول شي،چې $y = f(x)$ په $x = x_0$ کې د $f(x) = 0$ سره او په یوه د x_0 چاپیریال کې جګېدونکې دی $f'(x_0) > 0$ او یا په کلکه لوېدونکې $f'(x_0 < 0$ او له دې امله معکوس کېدونکې هم دی، یعنې $x = f^{-1}(y)$ ، نود کمښتویش لپاره معکوسه تابع لاس ته راځي:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

او دا چې $x -> x_0$ او $f(x)$ د متمادیت له امله هم $y -> y_0$ او باورلري.

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \left(\frac{df^{-1}(y)}{dy}\right)_{y=y_0=f(x_0)} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}} = \frac{1}{\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}}$$

که د لاندې ټکي ځای $x = x_0$ لپاره ساده بیرته x ولیکو نو دا لاندې لنډ فورم لیکلی شي:

د $y = f(x)$ لپاره باور لري.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

۱۱۶ د لوګاریتم مشتق

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پورته ورکړ شوو نیونوسره سرې بیرته یو د تفاضل ویش لاس ته راوړي چې د هغه سره د مروج ویش په څیر شمیرنه کیدی شي، لکه

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

جمله ۲ . ۷: د معکوس تابع مشتق : که y = f(x) د x په یوه چاپیریال کی د $x=f^{-1}(y)$ سره معکوس او همله د f’ (x) |= 0 سره مشتقوړ وي، نو معکوس تابع د y = f (x) سره مشتقوړ دی او باوري $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

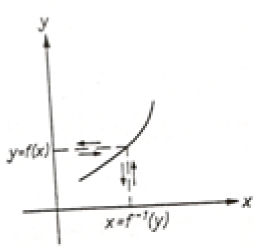
حل: کیدی چې د f تابع د مشتق څخه د f^{-1} معکوس تابع مشتق لاس ته راوړو. له دې امله له x ->0 اوهم y->0 او معکوس څخه، د y = f(x+ x)-f(x) سره، لاس ته راځي:

$$(f^{-1})`(y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f`(x)}$$

$f'(x)=\frac{dy}{dx}$ او $(f-1)'(y)=\frac{dx}{dy}$ سره.

بالاخره لرو:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$



تمرینونه: د $y=f(x)=x^n; n=1,2,3,4......$ تابع لپاره که $x\geq 0$ وټاکل شي او په دې $x=\sqrt[n]{y}=y^{\frac{1}{n}}; y\geq 0$ توګه یې معکوس تابع وي، نو د معکوس تابع مشتق یې ونیسئ.

-- د $y=x^{\frac{m}{n}}, m,n\in N$ تابع د معکوس تابع مشتق ونیسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایمپلیڅیت Implicit تابعو مشتق

د يوې تابع هغه زيات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې او د f(x) تابع د ورشو ورکولو سره په اکسپلیڅیتExplicit ډول، که تابع متحوله د برابرون په یوه اړخ ځانله شوې وي:

د بیلګې په توګه $Y = 3x^2+7x$

د يوې تابع هغه زيات د استعمال وړ انځورونه د تابع د مساوات له مخې دی، د تابع د ورشو ورکولو سره په ایمپلیځیت Implicit دول د بیلګې په توګه $Ex^2+7x+y=0$

فعالیت:

که $Ex^2+7x+y=0$ولرو، څنګه کولی شو، چې ددې تابع مشتق پیدا کړو؟

قضیه:

یوه تابع په ایمپلیڅیته بڼه $x^2+xy-y^2 = 1$ لرو، غواړو $\frac{dy}{dx}$ پیدا کړو.:

ښوونه:

$$\frac{d}{dx}(x^2+xy-y^2)=\frac{d}{dx}(1)$$

$$2x+(1\cdot y+x\frac{dy}{dx})-2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}-x\frac{dy}{dx}$$

$$2x+y=\frac{dy}{dx}(2y-x)$$

$$\frac{2x+y}{2y-x}=\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{-x+2y} \quad \vee \quad \frac{2x+y}{2y-x}$$

ایمپلیڅیټ مشتق د يوې تابع مشتقنیولو لپاره یو امکان دی، چې نه ایمپلیڅیت یعنې د یوه ترم سره ورکړ شوی وي، بلکې د ایمپلیڅیت یعنې د یوه مساوات له مخې ورکړ شوی وي.
دا قاعده د دې لپاره هم کارول کیږي، چې تابع په اکسپلیڅیت ډول ورکړ شوې وې، خو د دې مشتقنیول ستونځمن وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه :

د $f(x) = x^x$ تابع مشتق په ورسره بلدو مشتققوانینو نه شي نیول کیدی، ځکه چی په بنسټ او جګ االکسپوننت کي یې متحولې پرتې دي. د لوګاریتم له لارې د اکسپوننت متحوله له منحه وړل کیدی شي:

$$\ln f(x) = x \ln x$$

اوس ایمپلځیت دا حل کوو، داسې چې دواړو لورو ته یې د x پسې مشتق نیسو:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln f(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

د دې مساوات مشتق د ځنځیرقانون له لارې صورت نیسي:

$$\frac{\mathrm{d}(\ln y)}{\mathrm{d}y} f'(x) = \frac{\mathrm{d}(x \ln x)}{\mathrm{d}x}$$

دلته $y = f(x)$. دی. د لوګاریتم او ضرب د مشتق قانون لاس ته راځي:

$$\frac{1}{y} f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x}$$

که په $f'(x)$ پسې حل شي او د y له پاره بېرته $f(x) = x^x$ ځا په ځای کړو، نو دا حل لاس ته راځي:

$$f'(x) = y\left(\ln x + 1\right) = x^x\left(\ln x + 1\right)$$

تمرینونه:

- د r وړانګې سره د ایرې مساوات $x^2 + y^2 = r^2$ سره. دایمپلیخیټ مشتق له لارې یې مشتق ونیسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- د $E: \; x^2 + 3y^2 = 7$ سره ورکړ شوې الیپسې مشتق دې ونیول شي.

د بنسټیزو مشتقونو جدول

Nr.	$f(x)$	$f'(x)$	نیونه یا فرضیه
1	$c = konst$	0	
2	X^n	$n.x^{n-1}$	$n = 1,2,3.......$
3	X^n	$n.x^{n-1}$	x تول عدد او $x \neq 0$
4	X^r	$r\,x^{r-1}$	$r \quad rational, \quad x > 0$
5	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}.x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{nx}\sqrt[n]{x}$	$n = 1,2,3......x > 0$
6	x^a	$a.x^{a-1}$	$x > 0, \;\; a \;\; reell$
7	a^x	$a^x \ln \; a = \frac{a^x}{\log_a e}$	$x > 0, \;\; a \neq 1$
8	e^x	e^x	
9	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, \;\; a \neq 1, \;\; x > 0$
10	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
11	$\sin \; x$	$\cos x$	
12	$\cos x$	$-\sin x$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

13	$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in z$
14	$\cot x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x)$	$x \neq k\pi,\ k\ \ k \in z\ (Z)$

د پورته جدول په مرسته کیدی شي چی کم له کمه په فورمـال ډول ، په خوښه د هرې شننيزې يا سپړنيزې(تحليلي) ويينې يا افادې مشتق په شننيزه توګه لاس ته راوړی شي، سره له دې هم بايد سړی همغه نيونی په نظر کي ونيسي.

د فصل تولګه

کمبنتويش Differenzenquotient (د سيکانت جګيدنه) يا منځنی تغير ارزښت

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(fx_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

مشتق Differetialquotient (د تانجنت چګوالی يا لحضوي تغير ارزښت)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د ثابتي قانون

$$f(x) = c \cdot u(x) mit\ c = constan t$$

$$\Rightarrow f'(x) = c \cdot u'(x)$$

$$\boxed{f' = c \cdot u'}$$

د جمعي قانون

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) + v(x)$$

$$\boxed{f' = u' + v'}$$

د ضرب قانو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$
$$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$
$$\boxed{f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

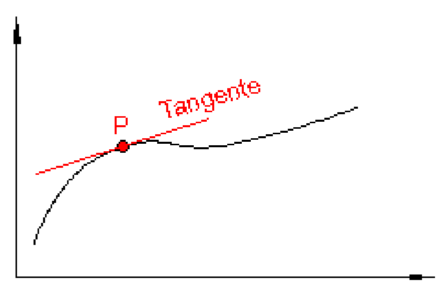
د وېش قانون

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x)}{[v(x)]^2}$$
$$\boxed{f = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$$

د ځنځير قانون

$$f(x) = f[z(x)]$$
$$\Rightarrow f'(x) = f'(z) \quad \cdot \quad z'(x)$$

(تعريف): د يوه تابع ګراف ميل (جګوالی) په يوه ټکي P کې په همغه ټکي کې د تانجنت د ميل يا جګوالي ګراف سره برابر دی



د کمبنت ويش يا د تفاضل ويش Difference quotient

د يوي کربنې جګېدنه بې له مشتق نيونې ټاکلکېدی شي:

کربنه y=f(x) = mx+a لرو

د دې کربنې د جګېدنې فرمول په لاندې ډول دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\boxed{m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_1-y_0}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$$

د ځپرکي تمرينونه:

(۱) کمښتويش (د تفاضل وېش) ارزښت د P او Q په ټکو کې وټاکئ.

a) P(3,2) , Q(5,4) b) P(2,4) , Q(3,1)

(۲) د $x = x_0$ په ځاي کې د f تابع د تانجنت جګوالی وټاکئ.

$a)\ f(x)=x^2\ ,\ x_0=2$ $b)\ f(x)=0.5x^2\ ,\ x_0=3$

(۳) د کمښتويش(د تفاضل ويش) او مشتق لاندې څه پوهيږو او د دوي ترړنځ فوپير څه دی؟

(٤) د يوه تابع د سکانت( ) لاندې څه پوهيږو او د تانجنت جګېدو لاندې څه پوهيږو؟ او دوي ترمنځ کومې اړيکې پرتې دي؟

(٥) د تابع مشتق د توان قانون له مخې پيداکړئ.

$a)\ f(x)=x^5$ $b)\ f(x)=x^6$

$c)\ f(x)=\frac{1}{x^2}$ $d)\ f(x)=\frac{1}{x^5}$

$e)\ f(x)=\sqrt{x}$ $f(x)=\sqrt[4]{x^3}$

$g)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $h)\ f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(٦) د تابع مشتق د ثابت د قانون له مخې پيداکړئ.

$a)\ f(x)=0.2x^5-3$ $\qquad b)\ f(x)2x^4+1$

$c)\ f(x)=\dfrac{4}{x^2}$ $\qquad d)\ f(x)=\dfrac{3}{x^3}+2$

$e)\ f(x)=6\sqrt{x}$ $\qquad f)\ f(x)\dfrac{8}{\sqrt{x}}-5$

(٧) د تابع د ګراف په مرسته وښايئ، چې ټول g(x) + c ترمونه همغه مشتق لري.

ياودونه: پابت عدد که هرکوم ارزښت ونيسي.

(٨) وښايئ، چې د a.g(x) د مشتق سره د a ضريب (ځله ووني) ساتلی پاتې کيږي.

(٩) د f تابع مشتق د جمعي قانون سره وښايئ

$a)\ f(x)=4x^4-3x^3+x^2-x-1$ $\qquad b)\ f(x)=x-\sqrt{x}$

$c)\ f(x)=\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{1}{x^3}$ $\qquad d)\ f(x)=3x^2+0.4x-5$

(١٠)د f تابع مشتق د ضرب قانون سره وټاکئ.

$a)\ f(x)=x^3(x^2-2x+1)$ $\qquad b)\ f(x)=(2x^2+1)(x-1)$

$c)\ f(x)=(x^2-5)(2x^3+x^2+x)$ $\qquad d)\ f(x)=(4x^2-x+4)(3x+2)$

(١١) د f تابع مشتق د ويش قانون له مخې وټاکئ.

$a)\ f(x)=\dfrac{x^3-1}{4-x^2}$ $\qquad b)\ f(x)=\dfrac{2x^2+x+3}{x+1}$

$c)\ f(x)=\dfrac{4-x-x^3}{2x^2+3}$ $\qquad d)\ f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3-2x^2+x}$

(١٢) د ويش قانون له مخې په څټ ارزښت(پرعکس ارزښت) وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۱۲ الف) د لاندې تابع مشتق وشمېرئ.

$$f(x)=\frac{1}{g(x)} \Rightarrow f'(x)=\frac{-g'(x)}{g(x)\cdot g(x)}$$

د $g(x)\neq 0$ سره

(۱۳) د f تابع ارزښت د زنځير قانون له مخې وټاکئ.

$a)\ f(x)=(4x^4-x)^2$ $\quad b)\ f(x)=(3x^2+4x-5)^2$

$c)\ f(x)=(2x-7)^3$ $\quad d)\ f(x)=(5-3x^3)^4$

(۱٤) د لاندې توابعو مشتق وټاکئ.

$a)\ f(x)=\frac{1}{(2x^2+x)^3}$ $\quad b)\ f(x)=\frac{1}{(x-5)^4}$

$c)\ f(x)=(1+\sqrt{x})^2$ $\quad d)\ f(x)=\sqrt{1-x^3}$

(۱۵) د لاندې توابعو درې واره مشتق ونيسئ.

$a)\ f(x)=x^3-2x^2+1$ $\quad b)\ f(x)2x^4+3x^3-x^2+x-5$

$c)\ f(x)\frac{3x-4}{x}$ $\quad d)\ f(x)=\frac{x^2-1}{2-x}$

(۱٦) د يو n-م درجې تابع بايد څو واره مشتق ونيول شي چې يوه ثابته ترې لاس ته راشي.

(۱۷) د لاندې توابعو لومړی مشتق و ټاکئ.

$a)\ f(x)=\sin 3x$ $\quad b)\ f(x)\sin x\cdot\cos x$ $\quad c)\ f(x)=\sin^2 x$

$d)\ f(x)=\tan x+2\sin 2x$ $\quad e)\ f(x)=\sin x^2$ $\quad f)\ f(x)=\sin\frac{x-1}{x+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۱۸) د $f(x)=\sin^n x(n\in IN)$ تابع د لومړي مشتق لپاره فرمول وښاياست يا وټاکئ.

(۱۹) د تانجنت تابع لپاره د ساين او کوساين قانون په مرسته د مشتق قانون و ښاياست.

(۲۰) وښاياست چې د f(x) = tanx لپاره $f'(x)=1+\tan^2(x)$ هم باور لري.

(۲۱) د ويش قانون له مخې د کوتانجنت قانون پيداکړئ او هم د تانجنت قانون له مخې.

(۲۲) ولې د ساين تابع او د کوساين تابع په خوښه زيات مشتقوړ دي.

(۲۳) د لاندې توابعو لومړی مشتق وټاکئ.

$a)\ f(x)=3\cdot e^{-2x+1}$ $\quad b)\ f(x)=e^{x^2+2x-1}$ $\quad c)\ f(x)=(x-1)\cdot e^x$

$d)\ f(x)=\sqrt{e^x}$ $\quad e)\ f(x)=x^n\cdot e^e$ $\quad f)\ f(x)=e^{kx}$

$g)\ f(x)=2^{\frac{1}{2x}}$ $\quad h)\ f(x)=(\frac{1}{4})^{3x}$ $\quad i)\ f(x)=x\cdot a^{\sqrt{x}}$

$k)\ f(x)=\sqrt{e^x+1}$ $\quad l)\ f(x)=\frac{e^x}{1-e^x}$ $\quad m)\ f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(۲٤)د $f(x) = (x^2+2)\cdot \lg x \quad (x>0).$ مشتق دې پيدا شي.

مشتق يې وټاکئ يا پيدا کړئ.

$a)\ f(x)=\ln\sqrt{x}$ $\quad b)\ f(x)=\ln(x^2-4)$ $\quad c)\ f(x)=\ln\frac{2}{x^3}$

$d)\ f(x)=\ln\frac{x+1}{x}$ $\quad e)\ f(x)=x\cdot\log_2 x^2$ $\quad f)\ f(x)=(x^4-1)\cdot\log$

$g)\ f(x)=\frac{\ln}{x+2}$ $\quad h)\ f(x)=\frac{x^4}{\ln x}$

(۳۵) د لاندې توابعو لپاره خورا لويه تعريف ورشو(ساحه) ورکړئ او لومړی مشتق يې وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تعریف ست(ډېرى) هغه ورشو(ساحه) ورکړئ، په کومه کې چې توابع مشتقوړ دي.

$a)\ f(x)=\sqrt{x+3}$ $\qquad b)\ f(x)=\sqrt{(x-2)(x-4)}$

$c)\ f(x)=x\sqrt{x}$ $\qquad d)\ f(x)=\sqrt{x^2+2}$

(۳٦) ولې باید د ټیک شمېرنې لپاره لوګاریتمي توابعو ته همداسې سوچ وشي، لکه رېښنه توابعو ته ؟

(۳۷) ۹۰ ــمه پوښتنه د لوګاریتمي توابعو لپاره ځواب کړئ.

$a)\ f(x)=\ln(x^4-1)$ $\qquad b)\ f(x)=\ln(2x+4)$

(۳۸) ــ د لاندې توابعو لومړی مشتق پیداکړئ.

$a)\ f(x)=\dfrac{2}{5}x^{10}-\dfrac{1}{5}x^5$ $\qquad b)\ f(x)=3x^4-4x^3+11x^2-7x+8$

$c)\ f(x)=5x^8-3x^6+\dfrac{10}{x^3}-\dfrac{8}{x^7}$ $\qquad d)\ f(x)(2x-5)(x^2+11x-3)$

$e)\ f(x)\cos x-2x\sin x$ $\qquad f)\ f(x)=\sin^3 x$

$g)\ f(x)=e^x+\dfrac{1}{e^x}$ $\qquad h)\ f(x)=(x^2-2x+2)\cdot e^x$

$i)\ f(x)=\dfrac{3e^x+1}{2e^x-1}$ $\qquad j)\ f(x)=\dfrac{2e^x(x^2-3)}{x}$

$k)\ f(x)=\dfrac{1}{x^2}\ln x^2$ $\qquad l)\ f(x)=\dfrac{x\cdot\ln x}{1-x}$

$m)\ f(x)=\dfrac{\sin x}{\ln x}$ $\qquad n)\ f(x)=3x^2\cdot\lg x$

$o)\ f(x)=\ln(\sin)\,x$ $\qquad p)\ f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}$

$q)\ f(x)=\sqrt[n]{ax+b}$ $\qquad r)\ f(x)=(x^2+3)e^{-2x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(۳۹) - لومړی مشتق وټاکئ

$a)\quad f(x)=\sin^n$ $\qquad b)\quad f(x)=(\ln x)^n$

$c)\quad f(x)=s+\dfrac{1}{x}$ $\qquad d)\quad f(x)=(1+\dfrac{1}{x})^n$

(٤٠)– د هرې تابع لومړي درې مشتقونه وټاکئ

$a)\quad f(x)=e^{x^2}$ $\qquad b)\quad f(x)=\sin x\cdot\cos x$

$c)\quad f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ $\qquad d)\quad f(x)=x^2\cdot e^x$

(٤١)– په کوم تابع کې لومړی مشتق f د f سره برابر دی.

(٤٢)–

الف: د کو fتابع لپاره $f'(x)=2f(x)$ دی؟

ب: د کو fتابع لپاره $f'(x)=-f(x)$ دی؟

(٤٣)- د f(x)=sinx څوم مشتق د f سره سر خوري یا برابر دی؟

(٤٤)– د لاندې توابعو لپاره -م مشتق ته وده ورکړئ.

$a)\quad f(x)=e^{ax}$ $\qquad b)\quad f(x)=\ln(x+1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رول قضيه (Theorem of Rolle)

که د f يوه تابع په بند اينتروال $[a,b]$ کې متمادي او k د a او b ترمنځ پروت وي، نو هلته لږ تر لږه يو عدد cد $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ شته، داسې چې $f(c)=k$ دی.

فعاليت:

_ که f تابع په يوه بند اينتروال $[1,3]$ کې ثابته وي، دا به د يوې تابع لپاره څه معنا ولري، چې تابع څنګه ځغلي. ايا دا تابع به جګ ټکي يا ټيټ ټکي ولري او که څنګه؟ دا روښانه کړئ او د انتروال په خوښه درې منځ ټکو کې ارزښتونه يو له بل سره پرتله کړئ.

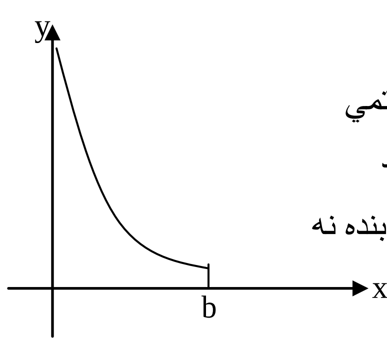
_ وښاياست، چې د $f(x)=-x$ تابع په$[-1,1]$ انترول کې جګ او ټيټ ټکي چيرته لري او د يو او منفي يو تر منځ د درې x ارزښتونو لپاره په ګراف د f ارزښتونه وښاياست او وښاياست، چې يو له بل توپير لري او که نه؟

_ د رسم له لارې وښاياست، چې x^2 کوم جګ يا ټيټ ټکی لري او که څنګه او که لري يې چيرته؟

دوايرشتراس قضيه Theorem of Weierstrass

که د f يوه تابع په بند اينتراوال$[a,b]$ کې متمادي وي، نو f په دېاينتراوال کی لږ تر لږه يو جګ ارزښت(اعظمي قيمت) او يو ټيټ ارزښت(اصغري قيمت) نيسی

دلته شننيز يا تحليلي ځواب نه ورکول کيږي، دا وينا د ليدلو له مخې معقوله برېښي.



کيدی شي چی يو همغږيز (monoton مونوتون يا جګټيټ) ارزښت د اينتروال په غاړه هم پروت وي.

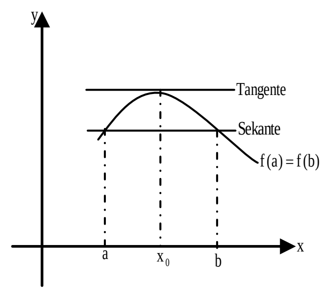
د اينتروال محدودوالی (بندوالی) بی قيد او شرطه حتمي دی. د بيلګي په توګه د $y=f(x)=\frac{1}{x}$تابع په نيم بند اينتروال $(0,b]$ کې متمادي ده، مګر پورته لور ته بنده نه ده، چی په دې توګه خورا جګ ټکی نه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق منځ ارزښت قضيي

د تانجنت او قاطع ترمنځ او په همدې ډول د مشتق – اوتفاضل ويش ترمنځ داسی نږدې اړيکي شتون لري، هغه چی د اناليوزې په منځ ارزښت قضيو کی تشريح کيږي.
د تابع او انحرافي ارزښتونوخويونو څخه لومړی پسی تړلې لاندې د رول قضيه لاس ته راځي

د رول(Rolle) قضيه:
يوه د f تابع دې په بند اينتروال $[a,b]$ کې متمادي وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز ايتروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه يوځاي $c\in(a,b)$ شته دی د $f\,'(x_0)=0$ سره.



حل:

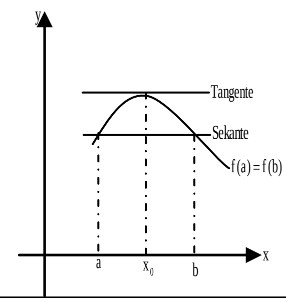
1. که f ثابت وي نو سملاسي لاس ته راځي: $f\,'(x_0)=0$
2. که f ثابت نه وي، نو د وايرشتراس د قضی له مخی لږ تر لږه د تابع يوخورا لوي او يوخورا کوچنی ارزښت موجود دی. دا ارزښتونه توپير لري، ځکه چی f ثابت نه دی. نو له دی کبله لږ تر لږه له دې ارزښتونو څخه د $f(a)=f(b)$ سره نامساوي دی . په دې اساس د اينتروال په دننه کی يو مونوتون (جګټيټ) ځای x_0 موجود دی. د مشتقوړ توابعو مونوتوني (جګټيټ ارزښت) شتون د اړيين يا ضروري شرطونوقضي له مخی لاس ته راځي: $f\,'(x_0)=0$

تر اوسه مو وښوول، چی د لازمو شرايطو لاندې يوې افقي قاطع ته يو افقي تانجنت هم شته دی.
دا هندسي پرابلم کيدی شي چی عمومي شي.
پوښتنه رامنځ ته کيږي، چی ايا يوې مايئلی قاطع ته په همغه ډول تانجنت د همغه ميل (جګوالي) سره جوړيدلی شي؟
ځواب يی لاندې قضيه راکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق منځ ارزښت (وسطي قيمت) قضيه:
که $y=(x)$ تابع په بند اينتروال $[a,b]$ کې متمادي او په واز اينتروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو هلته يوځاي $x\in(a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې لرو:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$$



حل: دا پرابلم په يوه مرستندوې تابع داسی تعريفيږي، چې د رول قضيه وکارول شي. د دې لپاره د قاطع مساوات رامنځ ته کوو: $y=g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$

د مرستندوې تابع په څير د مشتق تابع جوړيږي:

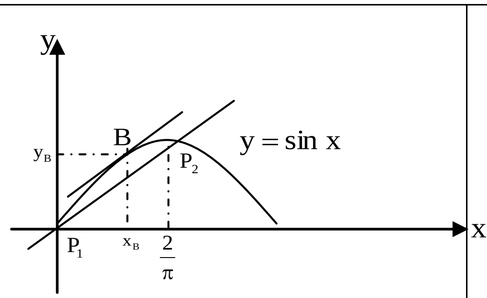
$$h:\ h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a),$$

نو باور لري: $h(a)=h(b)=0$ برسيره پر دې h په (a,b) کې د مشتق وړوالی لري او په $[a,b]$ کې متمادي دی. له دې سره د رول د قضيې وړاند نيونه(فرضيه) ورکړ شوې، دا په دې معنا چې يو ځاي $x\in(a,b)$ شته دی د $h'(x)=0$ سره، چې له هغې لرو:

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ \text{يعنې}\ h'(x_0)=f'(x_0)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

پورته لاسته راوړنه به دا لاندې بېلګې نوره هم روښانه کيږي.

بېلګه:
د $f(x)=\sin x$ يوه تابع دې داسې ورکړشوي
وي،چې په يوه ټکي $B(X_B,Y_B)$ کې تانجنت
د منحني مماس وي، هغه چه په $P_1(0,0)$
او $P_2(\frac{\pi}{2},1)$ ټکو کی همغه ميل ياجګوالی لري لکه قاطع.



(c) ketabton.com: The Digital Library

ځواب: د قاطع (غوڅي) میل یاجگوالی: $m = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0}{\frac{\pi}{2} - 0} = \dfrac{2}{\pi}$

د منحني میل د $B(x_B : y_B)$ په ټکی کې $f'(x_B) = \cos x_B = \dfrac{2}{\pi}$

له دې څخه لاس ته راځي: $x_B = \arccos\dfrac{2}{\pi} = 0{,}88\iota$ او $f(x_B) = f(0{,}88) = 0{,}77$

لمس ټکی: $B(0{,}88 : 0{,}77)$

د تانجنت مساوات: $y = \dfrac{2}{\pi}(x - 0{,}88) + 0{,}77$

د منځ قضی د عمومیت څخه لاس ته راځي:

> پراخه شوې د منځ ارزښت قضیه:
> که $u = f(x)$ او $v = g(f)$ په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اینتروال (a,b) کې مشتقوړاو $g'(x) \neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x \in (a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځای $x_0 \in (a,b)$ وجودلري چی لاس ته ترې راځي:
> $$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

حل: د $g'(x) \neq 0$ له امله g معکوس کېدونکی ده او $v = g(x)$ مساوات د x په لور معکوس کیدنه ورکوي، یعنې: $x = g^{-1}(v)$
که د f په تابع کی هم نوې متحوله ځاي پر ځاي شي، نو یوه زنځیري تابع لاس ته ترې راځي:

$$u = f(x) = f(g^{-1}(v)) = h(v)$$

د زنځیري قاعدې له مخې یی دا مشتق لاس ته راځي:
که په $u = h(x)$ تابع د $v_1 = g(a)$ او $v_2 = g(b)$
سره د وسطي قیمت قضیه استعمال شي، نو د $v_0 \in (v_1; v_2)$ ځای په لاندې ډول موجود دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{h(v_2)-h(v_1)}{v_2-v_1}=h'(v_0)$$

له دې څخه د $h(v)=f(x), v=g(x)$ او $x_0=g^{-1}(v_0)$ سره لاس ته راځي:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

تمرينونه:

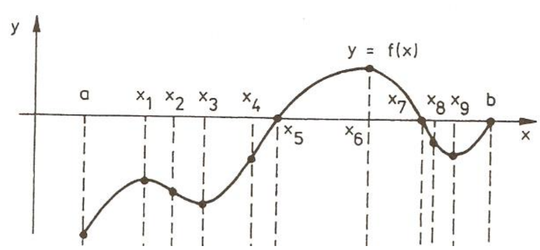
لاندې توابع دوه صفرځايونه لري. هغه بحراني ارزښتونه پيدا کړئ، چې د دواړو صفرځايونو تر منځ پراته وي.

$a)\ f(x)=x^4-5x^3+7x-5x+6$

$b)\ f(x)=x^4+x^3+2x^2+2x$

همغږېزې توابع (Monotony (يوناني: يوغږيز، برابرډوله)

جګېدونکې(متزايد)، ټيټېدونکې(متناقص) توابع(جګ-ټيټېدونکې توابع)



فعاليتونه

- په پورته ځېره کې ټول هغه ځايونه وښاياست، چې هلته تابع جګېږي.
- په پورته ځېره کې ټول ځايونه وښاياست، چې هلته تابع ټيټېږي.
- په پورته ځېره کې ټول هغه ځايونه په نخښه کړئ، چې هلته د تانجنت ميل افقي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

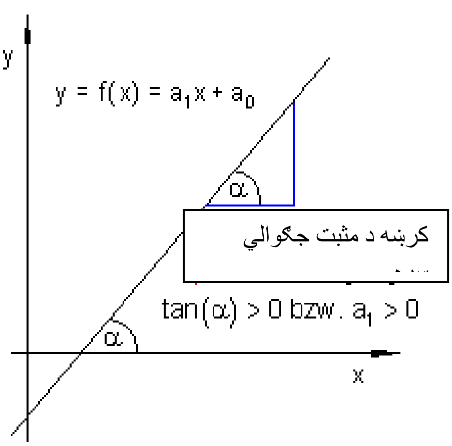
که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره د f یوه تابع په یوه اینتروال کې
$(f(x_1) \geq f(x_2))\, f(x_1) \leq f(x_2)$ وي، نوتابع په دې اینتروال کې مونوتون جګیدونکې
(- ټیټیدونکې) بلل کیږي،که $f(x_1) = f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري،نو دا
$(f(x_1) > f(x_2))\, f(x_1) < f(x_2)$ کره یا په زغرده همغږیزجګیدونکې (همغږیز
ټیټیدونکې) بلل کیږي.
لاندې قواعد، چې له همغږیزوالي څخه په لاس راځي، د همغږیزوالي حالت لپاره ګټور
دي.
د f یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو(ساحه) D کې همغږیزجګیدونکې ده، که د
خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \ \wedge \ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

د f یو تابع ټیک هلته په D کې همغږیزټیټیدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره،
چې په D کې پراته دي، باور ولري:

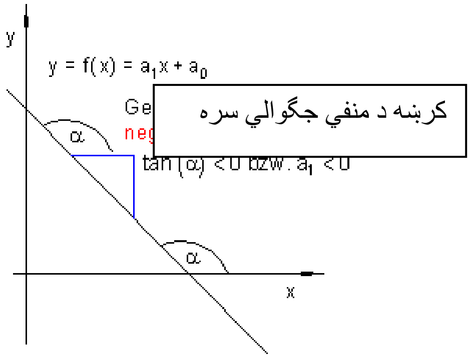
$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$$

یوغږیزوالی (یونواخت والی) Monotony جګټیټوالی، د جګټیټوالی جملې
دا $f(x) = a_1 x + a_0$ کرښیز(خطي) تابع
خورا ساده تابع ده، چې انحنا نه لري. ددې
لپاره مسئول یې ثابته جګېدنه یا ثابت میل
ی، $a_1 = \tan(\alpha)$ چېرته چې α د کرښې او
مثبت لوریز د x – محور ترمنځ
زاویه(کونج) ده.
په مخامخ شکل کې: کرښه د مثبت میل سره
$a_1 > 0 \ \Leftrightarrow \ \tan\alpha > 0$



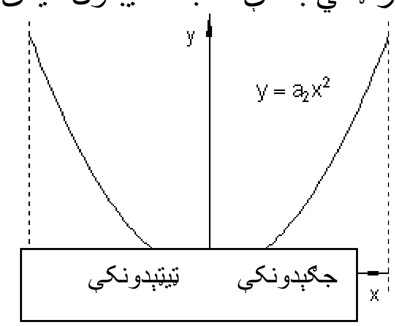
(c) ketabton.com: The Digital Library

که $0 < \alpha < 90^\circ$ یا $0 < a_1 < \infty$ وي، دا په دې مانا چې $\alpha > 0 \vee a_1 > 0$ همداسې$(\Leftrightarrow)$، نو کربنه جګېږي. دا معنی لري، چې د جګېدونکي x سره د تابع $f(x)$ ارزښت هم جګېږي.
په مخامخ شکل کې: کربنه د منفي جګېدنې سره: $\tan\alpha < 0$ همداسې $(\Leftrightarrow)$ $a_1 < 0$



داپورته داسې دی: $tan\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$

که $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ یا $-\infty < a_1 < 0$ وي، دا په دې معنی، چې $\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$، نو کربنه ټیټېږي یا لوېږي. دا په دې معنی، چې د جګېدونکي x سره د تابع ارزښت $f(x)$ کوچنی کېږي.
په پورته دواړو حالتونو کې د همغږېزې تابع (یا د جګ-ټیټېدونکې تابع) غږېږو او له یوه همغږیزجګیدونکې تابع څخه، که $a_1 > 0$ وي. له یوې مونوتون ټیټیدونکې تابع څخه، که $a_1 < 0$ وي.
دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کېږي، چې د منحنیو تلنه راکوي، که فکر وشي، چې په ټولیزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي باندې تانجنت اینول کیدی شي.



له دې امله د تابع $f(x) = a_2x^2$ لپاره باور لري:
په اننتروال $|_1 = \{x \mid -\infty < x < 0\}_R$ کې تابع $f(x)$ مونوتون ټیټېږي. او $f(x)$ په اینتروال $|_2 = \{x \mid 0 < x < \infty\}_R$ کې مونوتون جګیږي.

لکه د کربنې په ګراف کې، چې جګیدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، یعنې جګیدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحني له یوه ټکې څخه بل ټکي ته تغیر خوري.
د تانجنت جګیدنه $> 0 \leftarrow$ منحني مونوتون جګیږي. د تانجنت جګیدنه$< 0 \leftarrow$ منحني مونوتون ټیټیږي
د تانجنت جګیدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

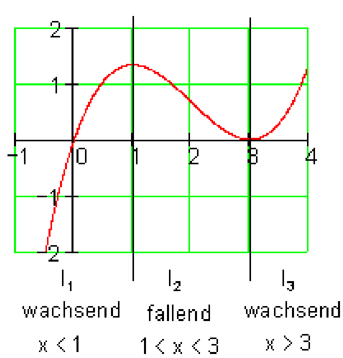
روښانه ده چي د $f(x)$ تابع لومړی مشتق $f'(x)$ د تابع ميل (جګوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتونی قضيه په لاندې ډول فرمولوو.

قضيه:
د $f(x)$ تابع دې په انتروال Iکي مشتقوړ وي.

1. که د $f(x)$ تابع په اينتروال Iکي مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in 1$ لپاره
- که $f(x)$ په اينتروال کي همغږيزټيټېدونکي وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in 1$ لپاره.
- که $f'(x) \geq 0$ وي، دټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينتروال I کي همغږيز جګېدونکي ده.
- که $f'(x) \leq 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په ايتروالIکي همغږيز ټيټېدونکي ده.
- که $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اينتروال I کې په کلکه همغږيزجګيدونکي ده.
- که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اينتروال Iکي په کلکه مونوتون ټيټېدونکي ده.

د مونوتوني پيژند ورشو (تعريفساحه) ټاکنه
بيلګه: د تابع ګراف څخه زيات وخت کيدی شي د مونوتوني ساحې لږ يا زيات ټيک و لوستل شي.

$$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$

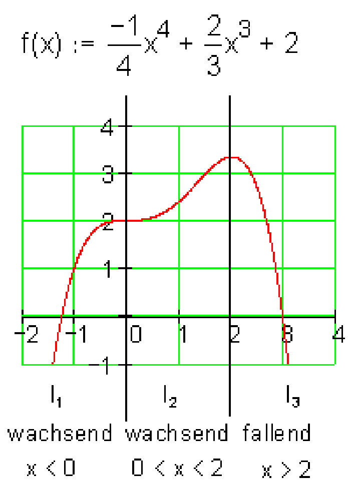


د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون جګېدونکی دی.

د $I_2 = \{1 < x < 3\}_R$ لپاره $f(x)$ يوغږيز ټيټېدونکي ده.

د $r\, I_3 < x < \infty\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه يوغږز جګېدونکي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



له ګراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کيږي.

د $I_1=\{-\infty<x<1\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتونج ګېدونکي ده.

د $I_2=\{1<x<3\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتونجګېدونکي ده.

د $r\, I_3<x<\infty\}_R$ لپاره $f(x)$ په کلکه مونوتون ټيټېدونکي ده.

تمرينونه:

--- لاندې تام راشنل توابع په همغږيزوالي خويونو وڅيړئ.

$a)\ f(x)=x^3-6x^2+9x+3$

$b)\ f(x)=2x^3+9x^2-12x$

$c)\ f(x)=x^3-6x^2+1$

$d)\ f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2+2x+2$

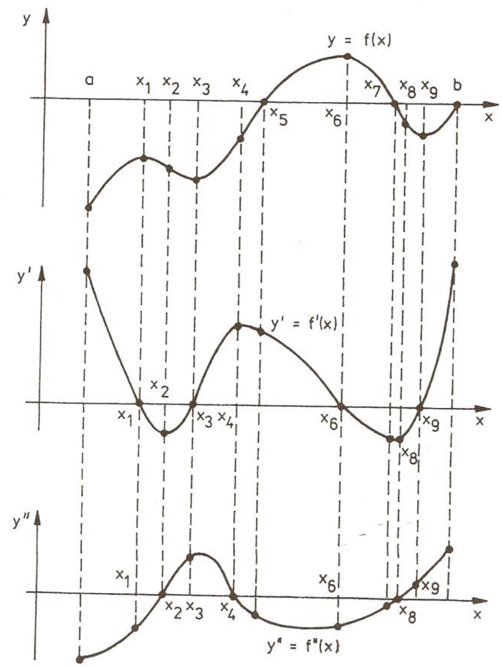
--- د لاندې ماتراشنل توابعو د مونوتوني حالت د a په واکوالي کې ورکړئ.

$a)\ f(x)=\frac{1}{ax+2}$

$b)\ f(x)=\frac{1}{ax^2+1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځای اړونده افراطي ټکي (local extrema)



یادونه: په لیکلو مې کله کله د افراطي لپاره بحراني لیکلي، پام دې ورته وي.

فعالیتونه:

د مختلفو توابعو ګرافونه او په هغې خبرې، چې چیرته افراطي ټکي پراته دي.

- په پورته څېره کې د تابع لپاره نسبي جګ ټکي اوخورا جګ ټکي و ښایاست.

- په پورته څېره کې نسبي ټیټ او خورا ټیټ ټکي وښایاست.

- په پورته څېره کې وښایاست، چې د نسبي جګو ټکو همداسې خورا جګو ټکو، نسبي ټیټو ټکو همداسې د خورا ټیټو ټکو دواړو لورو ته تابع څنګه ځغلي؟

- په پورته شکل کې هغو ټکو ته، چې بحراني ټکي دي ځیر شئ، چې تابع هلته څه خوي لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د تابع همدې ټکي کې وګورئ، چې لومړی مشتق یې کوم ارزښت لري؟

موږ ددې پورته فعالیتونوڅخه لاسته راوړو:

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x)=0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0 په ځای کې $f'(x)=0$ او $f''(x)>0$ ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: $f'(x)=0$ او $f''(x)<0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x)=0$ وي او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني ضرور دي:

1. دا اړیکي یواځې د x_0 لپاره ارزښت لري چې د تعریف سټ په دننه کی پروت وي او هلته د $y=f(x)$ تابع پوره څو ځلې مشتقوړ وي، د غاړو(څنډو) او د هغوځایونو لپاره چې هلته $f(x)$ تابع کم یا هیڅ مشتق وړ نه وي، ځانګړو څیړنو ته اړتیا ده.
2. شرایط چې $f'(x)=0$ وي(مشتقوړ تابع) یواځې د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی(ضروري یا اړین شرایط).
3. شرایط $f'(x)=0$ او $f''(x)\neq 0$ د بحراني ټکي لپاره یواځې پوره کېدونکی دی او نه ضروري).

بیلګه:

د $f(x)=x^2+2$ تابع ګراف وکاږئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د ګراف او مشتق له لارې وټاکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د بيلګې له ګراف څخه روښانه ده، چې تابع د $x=0$ په ځای کې خورا ټيټ ټکي(اصغري-) لري.

د ابحراني ټکي لپاره اړيين شرطونه:

1. د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x)=2x$ په دې مساوات کې د تابع مشتق د x_0 لپاره صفرځای لري، يعنې دلته يو بحراني ټکی پروت دی.
-د تابع دويم مشتق: $f''(x)=2$ دا چې $f''(x)>0$ دی، نو يو نسبي ټيټ ټکی مخ ته لرو.
بيلګه:

د $y=x^4$ تابع د $x=x_0=0$ لپاره نسبي ټيټ ټکي لري او باوري دي:

$$f'(x)=4x^3 \Rightarrow f'(0)=0$$
$$f''(x)=2x^2 \Rightarrow f''(0)=0$$

ګورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوي دی.

د پورته شننې څخه لاندې پيژند ته راځو

تعرف يا پيژند:
د $x=x_0$ په چاپيريال کې د $y=f(x)$ تعريف شوې تابع يونسبي جګ ټکی په همدې ډول نسبي ټيټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري: $f(x)\le f(x_0)$ ($\Leftrightarrow$) په همدې ډول $f(x)>f(x_0)$
جمله: (د يوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرايط):   که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y=f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x)=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همغږيزې توابع

دا جمله موږ ته وايي: چيرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته اکستريموم نه شته، د اکستريموم لپاره يواځې د x_0 ځای په پوښتنه کی راځي، چی د هغي لپاره لرو $f'(x) = 0$ ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې يواکستريموم و لري.

جمله ۲ ۱۳ : (د يوه بافراطي ټکي لپاره پوره کيدونکی شرايط):
که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتقوړ $y = f(x)$ تابع لپاره ولرو:
$f'(x) = 0 \ , \ f''(x) \neq 0$
نو تابع $y = f(x)$ هلته يو بحراني ټکی لري.
خورا ټيټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x) > 0$
خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x) < 0$

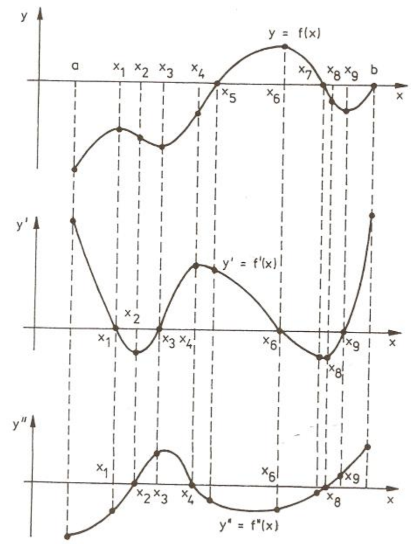
پوښتنې:

د لاندې توابعو انحرافي ټکي پيدا کړئ.

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
2) $f(x) = x^4 - 3x^3 + x + 1$
3) $f(x) = 7x^7 - 6x^6 6 + 4x^4 x^3 + 2x + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له ښیٔ لور انحنا اوله کينې لور انحنا(مقعر او محدب)



فعالیت:

- په پورته شکل کې مقعریت(ننوتوال) او محدبیت(وتنوالی) وښایاست.
- په پورته شکل کې د مشتقونو له مخې مقعریت او محدبیت په ګوته کړی.

که په یوه اینتروال کې د مشتقوړ تابع f دویم مشتق $f''>0$ وي، نو په دې اینتروال کې ګراف کينې کوږ شوی یا کينه انحنا لري او که دویم مشتق $f''<0$ وي، نو د تابع ګراف ښی کوږ یا ښی انحنا لري.

بیلګه:

ټول ګونګ تابع(راشنل تابع) د f $f(x)=x^3-2x^2+4x-1$ سره په کومه ورشو(ساحه)کې کينې کوږدی (کينه انحنا لري (ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشوکې ښی کوږ دیٔ (ښیٔ انحنا لري(محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (له لومړی مشتق څخه):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 4$$
$$f''(x) = 6x - 4$$

د $x > \frac{2}{3} \Rightarrow 6x - 4 > 0$ لپاره کيڼ گوړوال(کينه انحنا (ننوتى يامقعر)

د $x < \frac{2}{3} \Rightarrow 6x - 4 < 0$ لپاره ښى کوږوالى(ښى انحنا(وتلى يامحدب))

بيلگه:

د مات راشنل تابع $f(x) = \frac{1}{x+2}$ گراف يو های پارابول دى. د های پارابول کومه ځانگه کينه کږه ده يا کينه انحنا لري(مقعر)، او کومه يوه يې ښى کوږوالى - يا ښى انحنا لري(محدب)؟

دويم مشتق: $f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$; $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ صورت تل مثبت دى.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دى. د هایپارابول ښانگه ښى کوږوالى يا انحنا لري(وتلى يا مخدب).

د لپاره $x > -2$ مخرج او همداسې ټول کسر(مات) مثبت دى.

های بارابول کينکوږ دى يا کينه انحنا لري(ننوتى يامقعر).

بيلگه: د دواړو توابعو $f(x) = \sqrt{x}$ او $g(x) = \sqrt{x^3}$ کوږوالى(انحنا) دې له دواړو لورو يو د بل سره پرتله شي. دواړه توابع د x>0 لپاره تعريف دي.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad g'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \qquad g'' = \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مشتقونه د $x \in R^+$ لپاره تعريف دي.

په دې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف ښی کوږوالی يا انحنا لري، دا يو ښي لور ته واز پارابول ښايي.

په همدې ساحه کې $g''(x) > 0$ دی. اړونده ګراف کيڼ کوږ دی يا کيڼه انحنا لري. اړونده ګراف يو کيڼ کوږوالی يا کيڼه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

تمرينونه:

۱ -- و ښاياست، چې د لاندې توابعو مقعريت او محدبيت کوم دي؟

$a)\quad f(x) = x^3 + 4x^2 + x$

$b)\quad g(x) = 2x^3 + 3x - 2$

۲ -- په کومه ورشو کې لاندې تام راشنل توابع يو کيڼ کږوالی لري او په کوم کې ښی کږوالی لري.

$a)\ \ f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 2 \qquad b)\ \ -2x^3 + 3x^2 - x - 4$

۳ -- د لاندې مات توابعو ګرافونه هايپاربول دي. د هاپارابول ځانګې کوم کږوالی لري؟

$a)\ \ f(x) = \dfrac{1}{4x+1} \qquad b)\ \ f(x) = 3 - \dfrac{3}{x^2}$

٤ -- په کومه ساحه کې لاندې ناراشنل توابع يو کيڼ او په کوم کې يو ښئ کږوالی لري؟

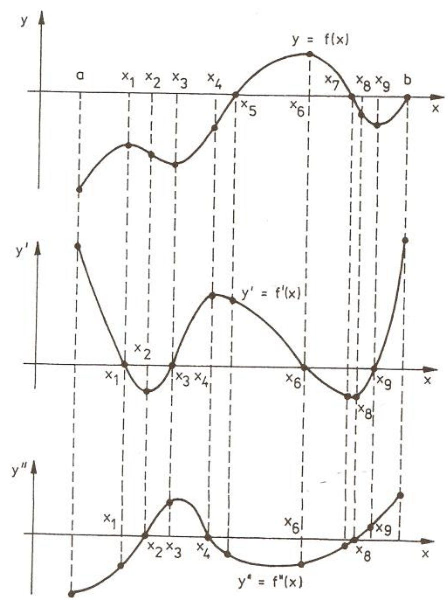
$a)\ \ f(x) = x \cdot e^{2-x} \qquad b)\ \ f(x) = \ln x^2$

٥ -- ولې د يوه دريمې درجې تام راشنل تابع ګراف په تل تلنه کې يوه ښئ انخنا(کږوالی) نه لري.

٦-- ولې يو څلورمه درجه تامراشنل تابع د $f(x) = ax^4 + dx + e$ سره يو تلتلونی کينه انخنا(کږوالی) او ښئ انحنا لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف ټکي(اوړونټکي) Inflection Points



فعالیتونه:

- پورته څیره په ځیر وګورئ او وښایاست، چې چیرته یا په کوم ټکي کې منحني(له کېڼ و ښي لور ته) خوزښت - یا خپله د حرکت لور بدلوي؟

- د انعطاف ټکو شاوخوا هم فکر وکړئ، چې کوم ټکي غوره ټکي دي او د هغو له خویونو هم د

انعطاف ټکو خویونه وټاکئ.

- په شکل کې فکر وکړئچې د انعطافټکي شاوخوا منحني څنګه ځغلي.

- د شکل په هکله په خپل فکر څه وایاست او د خپل فکر په بنسټ خپل دلایل روښانه کړئ. موږ له پورته څیرې اټکل کولی شو چې: که د x_0 ځای کې ولرو: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) > 0$ ، نو یو ښی-کیڼ- انعطاف ټکی (اوړونټکی) مو مخ ته پروت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

برعکس(په ځښ): که وي: $f''(x)=0$ او $f'''(x)<0$ نو یو کیڼ - ښی- د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

دا نعطافټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چې $f''(x)=0$ وي، دا چې دا ښی -کیڼ - او که کیڼ- ښی – انعطاف ټکی(اوړونټکي) دی، د $f'''(x)$ مخ نښه یی ټاکي.

- شرایط $f''(x)=0$ د انعطاف ټکي لپاره یواځی اړیین یاضروري دي.

د $y=x^4$ لپاره $f''(0)=0$ دی، مګر اوړونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

- شرایط $f''(x_0)=0$ او $f'''(x_0)\neq 0$ د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکي دي.

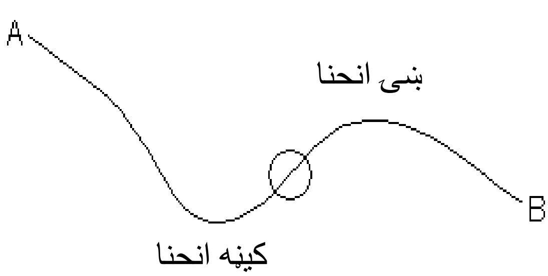
ګورو چی $y=f(x)=x^5$ تابع د $x=x_0=0$ ځاي کی یو انعطافټکی لري او باوري دي:

$$f'(x)=5x^4 \quad , \quad f'(0)=0$$
$$f''(x)=20x^3 \quad , \quad f''(0)=0$$
$$f'''(x)=60x^2 \quad , \quad f'''(x)=0$$

ګورو چې دریم مشتق $f'''(x)$ نه له صفرڅخه کوچنی او نه لوي دی.

ترمخ راوړني او د کلمې روښانه ونې:

د دې کلمې د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توګه مخ ته ځو:



د بایسکل ځغاستي چې له A څخه ځغلي د منحنی څخه تېرېږي او B ته رسیږي. د همغه وخت د بایسکل ځغاستي د انډل حالت د ځغاستې په وخت کې په پام کې ولري. د کینې منحني(د کیڼ لورې د انډل حالت) څخه وروسته د ښی لورې منحني کې ځغلي.

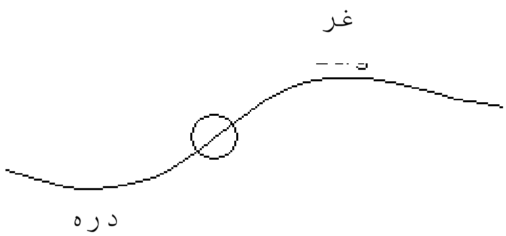
.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کینې- او ښی منحني(کږې) ترمنځ باید د باسکل انډل نېغ ولاړ وي(عمود وي)، چې دا د انډل بدلون دی له کینې لورې و ښی لورې ته. دا د کینې او ښی منحني ترمنځ اوړیدنه یاد انعطاف ټکی بلل کیږي.

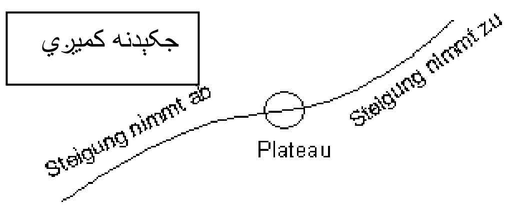
تاسو له بایسکل سره په یوه غونډۍ ځغلی.
وروسته له هغې، چې له تالې څخه تیږیږي، نو لار په جګېدو پیل کوي. په لومړي سر کې نرم او بیا په نیغه جګیږي، بیا په دې پسې جګوالی بېرته کمیږي، چې پاس د غونډۍ په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. یو چېرته په غونډۍپورته صفرارزښت ته رسیږي. یو چېرته په لار جګېدنه خورا لویه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.

دا څېره بیا



د بایکل ځغلونکي بل حالت، چې له څنګ دیاګرام څخه یې رانیسو:
په غره د بایسکل ځغاستمیل یاجګېدنه لومړی کمیږي، چې له سره بېرته جګه شي.
ددې ترمنځ یوه ساحه شته، د کم جګوالي سره (یوه نسبتاًهواره). دې نسبتاً هوار ځای کې د ټوټه کرښې جګیدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونټکی(د انعطاف ټکی) پروت دی.

دا څېره د پښتو نومونو سره بیا کښل...



له کیڼ ښي لور ته ژباړه: جګیدنه کیږي، هواره، جګیدنه زیاتیږي

پوهیږو، چې د یوې تابع لومړی مشتق د تابع د جګوالی تابع دی، چې له ګراف څخه یې جګوالی لوستل کیږي. دا چې د انعطاف ټکی خورا لوي یا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پیدا کیږي، چې د مشتق تابع انحرافي ارزښتونه پیدا کړو.
دا تلنلار همهغسې ده، لکه د پیل تابع $f(x)$ لپاره مو ټاکلې. اوس د مشتق تابع $f'(x)$ باندې دا کار یا عمل اجرا کیږي.
مخکی له دې چې یو لړ جملې د پحراني ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څیړو، غواړو چې دا کلیمې تعریف کړو.

دواړه کلمې به د نسبي افراطي ټکي په بنه کې سره را غونډې شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند:

په یوه چاپیریال $x = x_0$ کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ یو کېڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کېڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته یو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه یو نسبي ټیټ ټکی ولري.

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ اکستریموم لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي: چیرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره یوائې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره $f'(x) = 0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې یوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملې استعمال په $y' = f'(x)$ ځخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړیین شرایط):

که په $x = x_0$ کې دوه واره مشتق وړ تابع $y = f(x)$ هلته یو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: $f''(x) = 0$

دلته هم باور لري(یادونه ۴ دې پ٭تله شي) : چیرته چې $f''(x) \neq 0$ وي ، نو هلته نه شي کیدی چي د انعطاف ټکي موجود وي. مګرچیرته چې $f''(x) = 0$ وي ، د انعطاف ټکی شته کیدلی شي، خو اړیین یا ضرور نه ده چې هلته انعطاف ټکی شته وي.

له پورته ځخه لاندې جمله لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

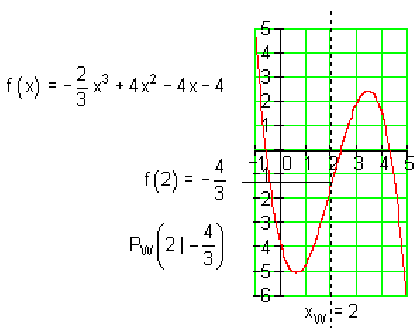
جمله: (د انعطافټکي لپاره پوره کيدونکی شرطونه)

که په $x = x_0$ کی د دریواره مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره وي: $f''(x) = 0$ او $f'''(x) \neq 0$

نو هلته یو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که $f'''(x) < 0$ وي، نو یو کيڼ- ښي – انعطاف ټکي مخ ته پروت دی او د $f'''(x) > 0$ لپاره یو ښی-کيڼ-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

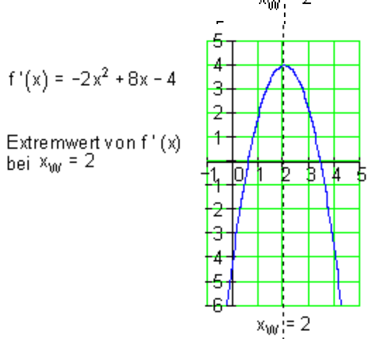
شننيزه یا تحليلي بيلګه:

يادونه: موږ د x_E سره افراطي ټکی په نښه کوو او د x_W سره د انعطاف ټکی په نښه کوو.



1- تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$
$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$
$$f''(x) = -4x + 8$$
$$f'''(x) = -4$$



2- دويم مشتق صفر کړئ.

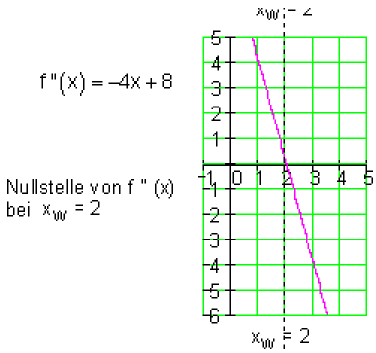
$$f''(x) = 0 \iff -4x + 8 = 0$$
$$\Rightarrow x_W = 2$$

3- د انعطاف ټکي له مخي ښوونه، چې ايا د انعطاف ټکی شته دی؟

$$f'''(x_W) = f'''(2) = -4$$

4- په $f(x)$ د انعطاف ځايونه ځای په ځای کولو له لارې د انعطاف ټکي ټاکنه

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$f(x_W) = f(2) = -\frac{2}{3}(2)^3 + 4(2)^2 - 4(2) - 4 = -\frac{4}{3}$$

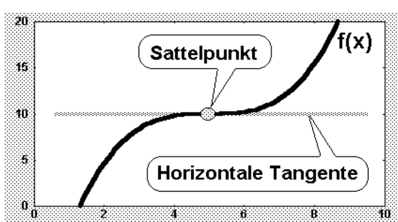
$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{W\left(2|-\frac{4}{3}\right)}}}$$

$$\underline{\underline{P_W(21-1.33)}}$$

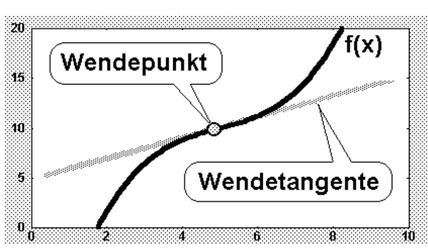
پام: په انعطاف ځای x_Wکې د $f(x)$ گراف کږېږي.
په یوه په خوښه ټکي x_0کې د کږوني(انحنا) لپاره باور لري:
$f''(x) > 0$ په دې معني دی،چې $f(x)$ کیڼ لور ته کږېږي(انحنا لري) دی.
$f''(x) < 0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ گراف ښی لور ته کږېږي(انحنا کوي)
یو زینټکی <u>Der Sattelpunkt</u> څه شی دی؟

پېژند:

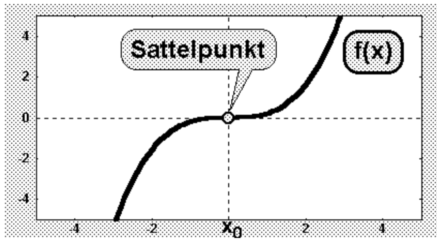
د زینټکي(کله کله برنډې ټکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافټکي ځانگړی حالت پوهیږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:



د پرتلې لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري



(c) ketabton.com: The Digital Library

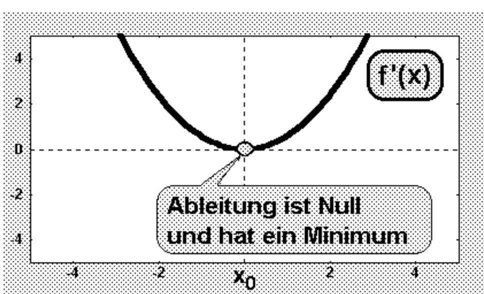


توضیح:

اوس فکر کوو، چې یو زینتکی خنګه د شمېرلو له مخې پېژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانګړي توګه دا مخ ته لرو، چې یو زینتکی له بنی – و کینه انحنا و شمېرو.

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جګوالی په پام کې نیسو، یعنې لومړی مشتق: د زینتکي د مخه د $f(x)$ جګوالي کمیږي، په زینتکي کې صفر ارزښت لري، او له زینتکي څخه وروسته ببرته جګیږي.

یو زینتکی (د بنی – کینې – بدلون سره) په دې پېژندل کیږي، چې لومړی مشتق $f'(x)$ یې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته یو نسبي ټیټکی (مینیموم) ولري.



د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسې برېښي:

لومړی شرط دی، چې مشتق یعنې $f'(x)$ په زینتکي کې د صفر سره مساوي دی.

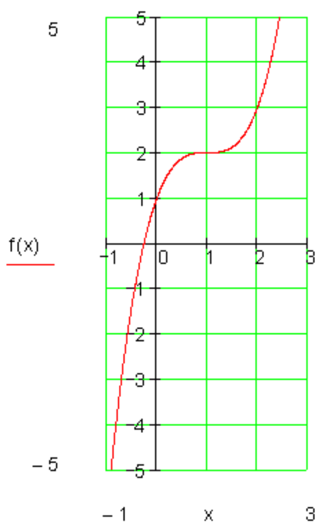
زینتکی(بنی-کینې-بدلون) $f'(x_0) = 0$ دوم شرط دی، چې مشتق $f'(x)$ هلته یو نسبي مینیموم لري.

دا په دې معنادی، چې بل جګ مشتق $f''(x)$ باید په صفر مساوي وي او مخنبنه له منفي و مثبت ته بدلیږي.
له دې سره سم د زینتکي لپاره پوره کېدونکي قضیه ومیندل شوه:
د زینتکي لپاره جمله(خوي ټاکنه)(د بني –کینې- انعطاف سره)

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف:د x_0 ځا کې لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0)=0$
ب : د x_0 په ځا ي کې لومړی مشتق $f'(x_0)$ يو مينيموم لري، دا په دې معنا، چې دوم مشتق صفر دی، يعني $f''(x)=0$ دوم مشتق مخنخښه له منفي څخه و مثبت ته بدلوي.
بل بديل(د ګرانو دوستانو وړانديز)

زينټکی **Der Sattelpunkt**



د انعطاف ټکي يو ځانګړی حالت زينټکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جګېدني سره.که د کيڼ لور ورتزدې شو فکر کېږي، چې، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی
که څوک د ښي لور ور نزدې شي فکر کوي، چې يو نسبي ټيټټکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د رياضياتو له لوري څېړو:
مشتق:

$$f(x)=x^3-3x^2+3x+1$$
$$f'(x)=3x^2-6x+3$$
$$f''(x)=6x-6$$
$$f'''(x)=6$$

$$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2-6x+3=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2}=1$$

$f''(1)=6\cdot1-6=0$ $f'''(1)=6$	1=> د $x=1$ سره د انعطاف ټکی	1=> د $x=1$ سره زينټکی

د انعطاف ټکي لپاره شرايط پوره دي.
دا چې د $f''(1)=0$ له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زينټکی دی.
د انعطاف ټکي پيداکونه:
د تابع ګراف باندې انعطاف ټکي کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کيږي. د انعطاف تانجنت هم
همداسې پيدا کيږي لکه د تابع دګراف په يوه ټکي کې تانجنت، چې تانجنت مساوات تاکل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x-2$$

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-6x+9$$

$$f''(x)\frac{3}{2}x-6 \qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

$$f''(x_W)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-6=0$$

د $x_W=4$ او $f'''(x_W)=\frac{3}{2}\neq 0$ د

تانجنت $f(x_W)=f(4)=2 \Rightarrow \underline{P_W(4|2)}$

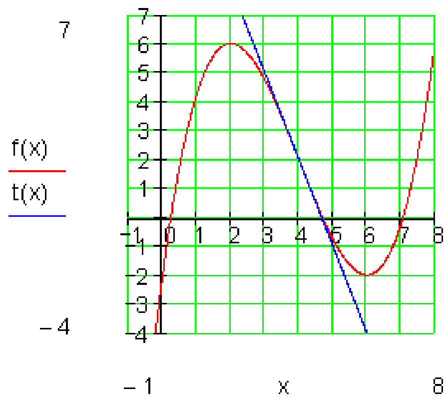
مساوات لپاره باور لري.

د x_W لپاره د تانجنت مساوات

$$t(x)=f'(x_W)(x-x_W)+f(x_W)$$

د $f'(x_W)=f'(4)=-3$ سره په لاندې ډول

دي $t(x)=-x(x+4)+2=\underline{\underline{-3x+4}}$



د انعطاف تانجنت د $f(x)$ ګراف د انعطاف په ټکي $P_W(4,2)$ کې غوځوي او دا لاندې مساوات لري:

$$t(x)=-3x+14$$

د انعطاف ټکي تانجنت پيداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دګراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کيږي.

د انعطاف تانجنت مساوات همداسې ټاکل کيږي، لکه د تانجنت مساوات د ګراف په خوښه ټکي باندې.

داسې حالتونه، لکه $f'(x)=f''(x)=f'''(x)=0$ دلته تر ځيرنې لاندې نه نيول کيږي.

پوښتنې

۱ -- د تابع f د $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}, x\neq 1$ سره د انعطاف ټکي پيداکونه

۲ -- د لاندې توابعو د انعطاف ټکي پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2}$ $b)\ f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$

$c)\ f(x)=\dfrac{x^3}{3(x-1)^2}$ $d)\ f(x)=\dfrac{x^3-8}{4x}$

۳ -- و ښايئ، چې د $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}e$ تابع د انعطاف ټکی زینتکی دئ.

۴ -- د لاندې توابعو د انعطاف ټکي (اوړونټکي) پیداکړئ.

$a)\ f(x)-=x\cdot e^{-x^2}$ $b)\ f(x)=\ln\dfrac{1}{x^2+1}$

د منحني بحث (Kurven Diskusion) :

یوه تابع $y=x^3+x^2-3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بیا په دې رسم کې د تابع انحرافي ټکي او د انعطاف ټکي په نخښه کړئ، رښانه کړئ، چې انحنا چیرته له کیڼې لور و ښې لورې ته او له ښي لورې و کیڼې لورې ته ده.

فعالیت:

- تناظر تعریف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جګ ټکي، ټیټ ټکي او د انعطاف ټکي یې پیدا اکړئ.
- x^3+x
- $3x^3+x+2$

ددې لپاره چې یوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پیژنو. موږ دې بحث ته د منحني بحث وایو. موږ په دا ډول خبرو اترو کې باید سیستماتیک مخ ته لاړ شو.

په لاندې ډول تلنه ګټوره بلل شوې.

دتعریف ساحه: د تابع ځیرنه یواځې په همدې ورشو کې موخه وره ده.

تناظر **Symetry** : باید وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.

د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x)=f(x)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکزي تناظر لپاره باور لري. $f(-x)=-f(x)$
په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط $x\geq 0$ وڅېړل شي.
په تولیزه توګه که ټول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو ګورو چې که توان(د پولینوم درجه)یې جفت(جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان(د پولینوم درجه) طاق(ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

انحرافي ټکي**Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل(جګټکی، ټيټټکی)
د جګټکی یا نسبي جګ ټکي پوره کېدونکي شرطونه:
$f'(x_1)=0 \;\wedge\; f''(x_1)<0$

انعطافټکی Inflection Point :
د انعطافټکواو همداسې زينټکي ټاکلو له پاره پوره کېدونکي شرطونه:
$f''(x_W)=0 \quad \wedge \quad f'''(x_W)\neq 0$
زينټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.
د تابع تقاطع د x او y محورونوسره(د محورونوِغوښټکی):
د $x-$ محور سره ِغوښټکی: $P_{xi}(x_i\,|\,0) \;\Rightarrow\; (x)=0$
د y محور سره غوښټکی(صفرځای) ټاکي $P_y(0\,|\,y_s) \;\Rightarrow\; f(0)$
دګراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې ګراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځوریږي. دا راته په ګوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمېرل کیږي.

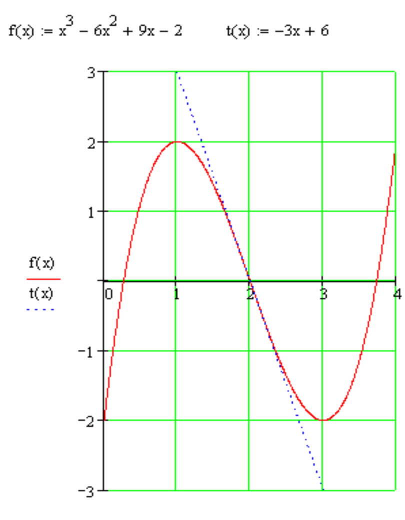
د انحنا حالت او يوغږيزوالی:
د انعطاف په ټکي X_w کې د $f(x)$ ګراف تغیر خوري.
په خوښه یوه ټکي x_0 کې د انحنا لپاره باور لري:
$f''(x_0)>0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف کینه انحنا لري (کونوکس)
$f''(x_0)<0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف ښی انحنا لري (کونکاو)
يوغږيزوالی
1- که د ټولو $x\in I$ لپاره وي $f'(x)\geq 0$ ، نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون جګیږي.
که د ټولو $x\in I$ لپاره $f'(x)\leq 0$ وي, نو $f(x)$ په انتروال I کې مونوتون ټيټېدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-2 که د ټولو $I \in x$ لپاره $f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروال I کې کره غښتلي مونوتون جګېدونکې ده.
که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروال I کې غښتلي مونوتون جګېدونکې ده.
د پېژند ورشو ژی ټکي:
د تابع ژی ټکي کتنه په پېژند ورشوکې. که پېژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیټ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ او $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ټاکو.

بیلګه :
د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.

مشتق کونه:



$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$
$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$
$$y''' = f'''(x) = 6 \qquad D = IR$$

نسبي انحرافي ټکي

$$P_{\min}(3|-2) \qquad P_{\max}(1|2)$$

انعطاف ټکی او تانجنت

$$P_W(2|0) \quad y = f_t(x) = -3x + 6$$

صفرځایونه:

$$P_{x1}(2|0) \quad P_{x2}(3.7|0) \quad P_{x3}(0.3|0)$$

د y– محور سره غِوڅېکی(دقاطع): $P_y(0|-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوغړیزوالی(مونوتوني یاجگ - تیټوالی)   د تابع حالت په $x \to -\infty$ او $x \to \infty$ کې

په $I_1 = \{x \mid -\infty < x \leq 1\}_{\mathbb{R}}$ کې یوغړیز جگیږي.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) = \infty$$

په $I_3 = \{x \mid 3 \leq x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې یوغړیز جگیږي.

سیومتري: نه لري

د انحنا حالت:

ښی انحنا(محدب) : $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کینه انحنا (مقعر) : $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

تمرینونه:

په لاندې توابعو بحث وکړئ او غوره نقطې یې پیدا کړئ:

اول) د شمېرنې له لارې وښایاست.

دویم) په شکل کې په نخښه کړئ.

$a)\quad 2x^3+x^2+1$

$b)\quad x^3+x^2+3x$

$c)\quad x^3+2x^2+x+3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناټاکلو افادو یا وبینو=ګ\پولې

$$0.\infty \ , \ \frac{0}{0} \ , \ 0^{\infty} \ . \frac{\infty}{\infty}, ...$$

که و لرو $x \neq 5$; $\frac{x^2+3x+2}{x+5}$ ، ومو لیدل، چې د داسې توابعو لیمیټ په پیداکولی شو. دا ډول تابع ته ټاکلې افادې وایې، ځکه چې مشتق یې نیول کېدی شي، یعنې د کمښتونو ویش(د تفاضلونو ویش) حد یې ټاکل کیدی شي.

که $\frac{\sin 2x}{5x}$ توابع ولرو،نود $x=0$ لپاره د دې تابع مشتق په ورسره بلده توګه نه شو نیولی، چې له دې امله ناټاکلې افادې ورته وایو.

فعالیت:

- که تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x^2+x}$ ورکړشوې وي.

اول - د تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x^2+x}$ پوله یعنې $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2+x}$ د پولې له درسه ، چې په لومړۍ بره کې لوستل شوي، پیدا کړۍ.د.

- پورته په ننوتنه کې و هڅېږۍ، چې د توابعو مشتقونه پیدا کړۍ.
- که ولرو $\frac{x^2-4x-5}{x-5}$ ، نو د تابع مشتق د چېرته نیول کیږي، که د x=5شونی وي، نو مشتق یې ونیسئ.

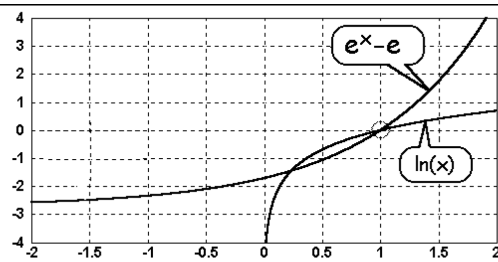
پیل ځیرنه: د $\frac{0}{0}$ حالت که پوله ارزښت جوړېدو کې یو کسر پیدا شي، چې صورت او

مخرج یې دواړه د صفر په لور لاړ شي یا صفر شي، نو دا پوله ارزښت،، ناټاکلې افاده،، بولو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

$$\lim_{x\to 1}\ \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$$



په ځېره کې برخه توابع رسم شوي دي، یعني د صورت او همداسې د مخرج ګرافونه.

ګورو: د صورت او مخرج د توابعو ارزښتونه دواړه و صفر ته ځي. (که د ۱ په لور لاړشي)

لیکندود(لیکندوول): د افادې

$$\frac{\text{Zähler} \to 0}{\text{Nenner} \to 0}$$

لپاره په حدشمېرنه کې لنډ لیکو: $\frac{0}{0}$

دا په حقیقت کې دقیق نه دی، مګر په ټولېزه توګه داسې معمول دی

روښانه ونه :

ناټاکلې افاده څه شی دی؟

دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې دا ناټاکلې افاده خپل نوم له کومه ځایه اخلي. دا ،، ناټاکلی،، بلل کیږي، ځکه چې حدیې د عادي طریقو له لارې نه شي شمېرل کېدی. دا کار د لوړې ریاضي سره دا شمېرنه شونی شوه(دبېلګې په توګه د لو پیتال قانون له مخې، چې پسبه وڅېړل شي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

روښانه ونو ته تشریح:

اوس ښایو، چې د داسې توابعو شمېرل ولې ناشوني دي.

موږ بیا دا د تېر مخ بیلګه رانیسو:

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{\to 0}{\to 0}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{\ln x} = \frac{Zähler \to 0}{Nenner \to 0}$$

1- که هڅه وشي، چې حد پیدا کړو، داسې چې د $x = 1$ په کسر کې ځای په ځای کړو، نو افاده $0{:}0$ به ترې لاس ته راشي. دا تعریف نه لري، $u = f(\frac{1}{z})$ ځکه په صفرویش اجازه نه شته.

2- ترمخه مو د ناټاکلو افادو د شمېرلو لپاره یعني د ناطق کسري توابعو پوله شمېرنه کې د چل یا د طریقې څخه کار واخسته. اوس دا چل نه شو کارلی، لکه په پورته بیلګه کې.

3- د حد اټکل هم ناشونی دی: په لومړي لید کېدی شي په فکر راشو، چې که صورت او مخرج د صفر په لور لاړ شي، نو کسر به د 1 په لور وخوزیږي:

$$\frac{0.000000001}{0.000000001} = 1$$

که صورت او مخرج و صفر ته نږدې شي، دا به فقط دا معني ولري، چې دواړه به د ارزښت له مخې نژدې برابر شي.دا دا معني نه لري، چې د صورت او مخرج نسبت سره مساوي شي:

$$\frac{0.0000000010\ 0}{0.0000000010\ 0} = 100$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه چې ګورو صورت او مخرج د ارزښت له مخې خورا نږدې برابردي(دا په دې معنی، چې دواړه صفر په لور ځي)، مګر د دوی ترمنځ نسبت خورا لوی دی یعني دی، (100)

د برنولي او د دې لو، پیتالقاعده Brnoulli and de L,Hospital

$$\frac{\sin 2x}{5x} \quad \text{او} \quad \frac{x^2+3x-10}{x-5}$$

د برونولي او د دو لو پیتال قاعدې د $\frac{f(x)}{g(x)}$ ډوله توابعو حد شمېرلو کې ځانګړی رول لوبوي. داحالت په ځانګړي ډول هلته رامنځ ته کیږي، چې مخرج او صورت همغه صفرځاي x_0 ولري. دا ناټاکلی افاده $\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{0}{0}$ هدفمنده نه ده. کیدی شي چې د ویش حد $\lim\frac{f(x)}{g(x)}$ وځیړل شي، په کومو کی چې صورت او مخرج د صفر لور ته ځي. ددې لپاره عمومي مناسب د توابعو ترمونه د غوښتلو دي. د بیلګي په توګه تابع $f: \quad y=f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+2}$ صورت او مخرج همغه صفرځاي x0=-2 لري، سره له دې هم لیمیټ شته دی.

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)^2}{x+2}=\lim_{x\to-2}(x+2)=0$$

دا ډول حدونه د مشتق په مرسته شمیرل کیدی شي، چې د صورت او مخرج توابعو له نتیجي څخه لاس ته راځي. دا ډول قاعده د پراخ شوې منځ ارزښتقضیي استعمال هم بلل کیږي.

د برنولي او د دو لو، پیتال قاعده:

Bernoulli and de l'Hospital

که توابع $u=f(x)$ او $v=g(x)$ د یوه $U(x_0)$ چاپیریال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g'(x)\neq 0$ سره او د ټولو $x\in U(x)$ لپاره او x_0 د f ا و g یوصفرځاي وي،

د $f(x_0)=g(x_0)=0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)},$

ترڅو په ښي لور حد شته وي.

په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

حل: تابع د پراخه شوې منځ ارزښت قضيي نیونی پوره کوي. د هر $x\in U(x_0)$ لپاره

یو x_m د $x_m\in(x_0,x)$ سره موجود دی، په داسی ډول چې لرو:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(x_m)}{g'(x_m)}$$

د $f(x_0)=0\ \wedge\ g(x_0)=0$ له امله لرو:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

داچې د $x->x_0$ سره $xm->x_0$ هم هڅه کوي.

د $x->oe$ په حالت کې $x=1/z$ ځای په ځای کوو. د زنځیري قضيي په مرسته لاس ته راځي:

$$\boldsymbol{u=f(1/z)}$$

د مشتق $du/dz=f(1/z)(-1-z^2)$ او مشتق $\frac{dv}{dz}=g'(\frac{1}{z})(\frac{-1}{z^2})$ سره، داسې چې لرو:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

یادونه : که په پورته حالت کې $f'(x_0)=g'(x_0)=0$ هم وي، نو په ویش بیاله سره دا قاعده استعمالیږي. که سړي د $n-$ پلونو(قدمونو) وروسته بریالی وي نو دا قاعده لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

چیرته چې $f^{(n)}$ او $g^{(n)}$ د تابع $n-$م مستق په معنی دی.

ډول یا تیپ: $0/0$

بیلګه:
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-4}{1}=\frac{0}{1}=0$$

بیلګه:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$$

بیلګه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1}=\frac{0}{1}=1$$

تیپ یا ډول: $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\infty}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0 \qquad \alpha>0.$$

د یوه مثبت حقیقي توان(جګعدد) α لپاره یو په خوښه توان x^{α} د $x->oe$ لپاره په غښتلې توګه جګیږي، نسبت لوګاریتم تابع $1n$ ته $\alpha>0$ $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}}=0$

له دې $f(x)=\frac{x^n}{e^x}$ تابع د لوپیتال د قعاعدې د دیرځله استعمال څخه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

اکسپوننشل تابع e^x د x په هرتوان تابع څخه په غښتلې جګیږي:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0 \qquad n\in N$$

نور حالتونه کیدی شی په بڼه یا تیپ $\frac{0}{0}$ او یا $\frac{\infty}{\infty}$ بیرته واړول شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

له تیپ یا بڼي $\infty-\infty$ څخه و بڼې یا تیپ $\frac{0}{0}$ ته ددې لپاره لاندې تابع بېلګه کېدی شي:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}$$

د $x \to 0$ لپاره

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x\cos x+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x}=\frac{0}{2}=0$$

داچی دلته مشتق بیرته د بڼې تیپ $\frac{0}{0}$ ده، نو د لوپیتال قاعده استعمالیدی شي.

له تیپ یا بڼي $0.(\pm\infty)$ څخه بڼې $\frac{\pm\infty}{\infty}$ ته:

د تیپ $0.(-\infty)$ حالت د بیلګي په توګه تابع $f(x)=x.\ln x$ د$x\to 0$ لپاره ښايي. په کوم کی چي ضرب د ویش په څېر انځور کړي، نو د لوپیتال د قاعدې په استعمال دا لاندي لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to +0}(x\cdot\ln x)=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to +0}(-x)=0$$

له بڼې 0^0 څخه وبڼې e^0ته:

دلته د بیلګي په توګه تابع $f(x)=x^x$ د $x->0$ لپاره تر څېړنې لاندې نیول کېږي.

د بڼې بدلون یا فورم بدلون و بنسټ e ته د یوې انځورونی په مرسته په بریالی توګه لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to +0}x^x=\lim_{x\to +0}e^{\ln(x^x)}=\lim_{x\to +0}e^{x\cdot\ln x}=e^0=1$$

له 1^∞ بڼې څخه و $e^{0.\infty}$ بڼې ته

د ښوونې، د بیلګې په توګه د تابع $f(x)=(1+\frac{\mu}{x})^x$ پوله ده د $\mu\in R^+$ لپاره او $x\to\infty$ د $x\in R^+$ سره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\mu}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}e^{x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\ln(1+\frac{\mu}{2}))}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{\eta}{2}\right)}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{\mu}{2}}\cdot\frac{-\mu}{x^{2}}}{-\frac{1}{x^{2}}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mu}{1+\frac{\mu}{x}}}=e^{\mu}$$

د $\mu=1$ لپاره لاس ته راځي:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

له بڼې ∞^{0} و بڼې $e^{0.(\pm\infty)}$ ته دا کارونه په یوې بیلګې روښانه کوو:

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=\lim_{x\to+0}e^{\sin x\cdot\ln\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}(\sin x\cdot\ln\frac{1}{x})}$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to+0}\frac{x\cdot(\frac{-1}{x^{2}}}{\frac{-\cos x}{\sin^{2}x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\sin^{2}x}{x\cdot\cos x}=\lim_{x\to+0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x-x\cdot\sin x}=0$$

د $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=1$ سره

باید لاندې جدول کې پام وشي.

لاندې جدول د پورته ښوول شوو بڼویا ډولونو د بڼې بدلون تولیزه کتنه ممکنوي

تیپ(ډول)	$f(x)\to$	$g(x)\to$	بڼه بدلون یا لنډ: بدلون
$-\infty$	0	0	$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{g(x)}=\frac{g(x)-f(x)}{f(x)\cdot g(x)}\to\frac{0}{0}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

∞	0		$f(x)\cdot g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}\to\dfrac{0}{0}$ $\wedge(Or)$ $f(x)\cdot g(x)=\dfrac{g(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}\to\dfrac{\infty}{\infty}$
∞	0 1 0	0 0	$(f(x))^{g(x)}=e^{\ln(f(x)^{g(x)})}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\to e^{0\cdot\infty}$ د f(x)>0 سره.

تمرینونه:

پورته کې ډېرې بیلګې حل شوې. له هغوباید څه تمرینونه راوړل شي.

۱) لاندې پوله ارزښتونه وشمیرئ.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2^x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[x]{x}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}\right)$

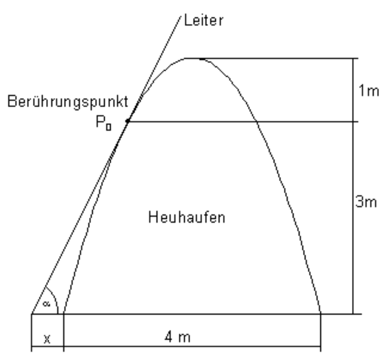
د $x\to\infty$ لپاره د لاندې راشنل توابعو لیمیټونه د دې لو پیتال قاعدې له مخې وشمېرئ.

a) $f(x)=\dfrac{2x^3-x+4}{3x^3+1}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{4x^3+3x^2-2x+5}$

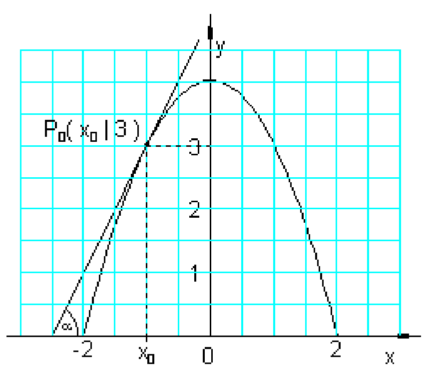
(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت لپاره د يوې تابع د استعمال بيلګې

له ځمکې څخه د وښو په ټوپۍ يوه زينه ايښول کيږي. دا زينه په درې متره جګوالي ټوپۍ لمسوي.



د وښو توپۍ دې د يوه کينکودي پارابول څېره ولري، چې بنسټ يې 4 متره سرور دی او 4 متره جګوالی لري. غواړو په دې يوه زينه کيږدو، چې د وښو ټوپۍ سره تانجنت جوړ کړي.
په کومه زاويه(کونج)بايد دا زينه کېښول شي؟
د وښو ټوپۍ له بيخ څخه دې په کوم لرېوالي په ځمکه دا زينه کېښول شي؟



موږ د y محور داسې کاږو،چې د پارابول له ککرې(څوکې) څخه تېرېږي.
پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$
$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$
$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

موږ د x_0 لپاره ارزښت ټاکو:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$
$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{0\,1/2} = \pm 1$$

شمېرنه:
د نورو شمېرنو لپاره ارزښت $x_0 = -1$ کاروو. زينه ټوپۍ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې لمسوي.موږ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1|3) \;\Rightarrow\; x_0 = -1\,;\; f(x) = 3$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f'(x) = -2x$ سره لاس ته راځي:

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$
$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x+5}}$$

جوړه زاویه: $\tan\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha \approx 62.4^\circ$

د زينې او د وښو ټوپی تر منځ واټن د $f(x)$ د صفرځای او د تانجنت $t(x)$ د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځایونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 4 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = \pm 2$$
$$t(x) = 2x + 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -2.5$$

د x ارزښتونو -2.5 او -2 ترمنځ واټن 0.5 دی.

زينه د وښو د ټوپی له پښو څخه باید نیم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه ټاکل کېږي، چې یو ګراف په تعریف شوي ځای کې لمسوي.

د سترې ګټې(غټو ګټو) مسئله یا قضیه

دا د سترې ګټې مسئله خورا ستره عملي مانا لري، چې په لاندې ډول به د یو څو بیلګو له لارې وڅیړل شي.

نزدې ټولو پروسو کی ، چې په عمل کی کارول کیږي یا صورت نیسي، له تاثیروونکو یا په همدې ډول د هغو ټاکلو لویو استعمال ته اړ دی، کومی چې موږ په ځانګړو یا مخصوصو پولو کی په اختیار کي لرودی شو.

موږ یواځې هغه پروسی تر څېړني لاندې نیسو چې د یوې واریابلی یا اووښتونې x په واك کی وي. دا د بل په واك کی د یوې تابع $y = f(x) \;, x \in D$ له لارې څرګندولی شو.

که y ټول لګښتونه یا مصارف په کوته کړي، نو x باید داسی وټاکل شي چې $f(x)$ مینیمال یا خورا کم شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په څټ یا برعکس y ګټه وي یا ګټور تاثیر وي، نو x باید داسي لاس ته راوړل شي، چې $f(x)$ ماکسیمال یا خورا لوی شي. په قاعده کې اغزمنه یا مؤثره لویه یا په بل عبارت، خپلواك وار یا بل یا اووښتونی x د$-\infty$ او ∞پولو ترمنځ ازاده ټاکونکی نه ده، بلکه د تخنیك یا تخنیك پوهنې له امله، یواځې په ټاکلو پولو کې:

$$a \le x \le b \qquad (*)$$

له دې امله عملي په زړه پورې د ګټې مسئلې، په دې پورې اړه لري، چې آیا دا ګټه ده او که لګښت.

$$y = f(x) = \max! \qquad (a \le x \le b \qquad ($$

$$y = f(x) = \min! \quad (a \le x \le b) \qquad ($$

دا د افراطي ارزښتونو برخې پرابلمونو سره خورا نزدی یا ټینګ تړلی دی. دلته زموږ علاقه په ځانګړې توګه د لاندې پرابلم د کارکولو سره ده:

1- د بلواکیزو $y = f(x)$ ګډو اړیکو راپیداکول، د دندې یا وظیفې ورکولو سره سم(موډالیټي پرابلم).

2- د تخنیك پوهنې پولو په پام کې لرل $(*)$ دادې د دوه بیلګو له لارې وښول شي

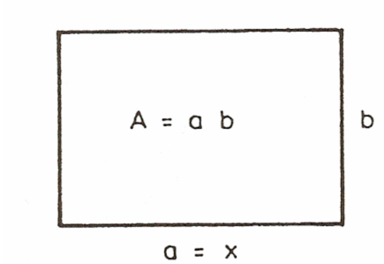
بیلګه: یو د منډو(پټې ته په کلوکې د اغزو منډو کېښول کیږي، چې مالونه ور وا نه وړ ي) سیم لرو چې ټول اوږدوالی یې L دی. له دې سیم سره باید یوه مربع سطحه(څلورګوډیزه هواره)، چې د امکان ترحده باید لویه وي، منډو شي. دا وظیفه شوه یا په بل عبارت غوښتنه.

اوس د موډالیټيArt und Weise پرابلم: غوښتنه مو د یوې ځلور ضلعي(څلورګوډیَ) پیداکول دي. لکه چې معمول دي، ددې څلورضلعي(څلور ګوډیَ) یو اړخ په a ښایو او بل اړخ یې په b ښایو، د څیرې 14.20 له مخې).

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په سر کې دوه اغيزې لرونکي يا تاثير اچونکي لويې a او b دی.

د $L = 2a + 2b \ , \ b = (L/2) - a$

له امله يوائې يوې اغيزمنې(تاثيراچوونکي) لويي ته اړيو د بيلګي په توګه $a = x$، دا ګټه (ستحه A)داسي ده $A = ab = x((L/2) - x)$ دا روښانه ده چې صدق کوي $0 \le x \le L/2$ له دې امله د سترې ګټې پرابلم داسې دی.	

$$y = f(x) = x((L/2)-x) = Max! \qquad (0 < x < L/2)$$

د $f(0) = f(L/2) = 0$ له امله بايد ماکس د 0 او L /2 ترمنځ پروت وي.

د ماکس لپاره ضرور دي

$$y' = f'(x) = L/2 - 2x = 0$$

د ماکس لپاره يوائې $x = L/4$ په پوښتنه کی راځي.

د دې لپاره $y'' = f''(x) = -2 < 0$ دی.

په ريښتيا چی يو ماکس مو مخ ته پروت دی. دلته تخنيکيو هنيزې پولی 0 او L / 2 رول نه لوبوي. نو صدق کوي. $a = b = L/4$

بيلګه: يوه بډای چی په يوه ټاکلي وخت کی ټولسټ (ټولډيرې) M توليد کړي او دا ټل اخستونکو ته ورسوي، نو له دې سره فيکس يا کره ټاکلی لګښتونه F تړلي دي.
کيدې شي چي سملاسی د دې توليد په ټولسټ (ټولډيرې) M کې توليد کړي، په يوه زخيره ځاي(زېرمتون؟) کی ځاي په ځاي کړي او اخستونکو ته يی سملاسي ورسوي. دلته

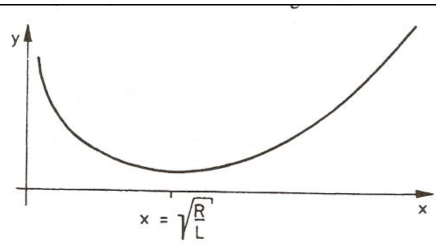
(c) ketabton.com: The Digital Library

د زېمتون(زخيره کوني) لګښتونه راپيد کيږي(ددې د زخيرې لپاره ځاي او هلته بيا اچول او وړل). يا هم کيدی شي چی توليد په لږه کچه يا اندازه توليد شي او سملاسی اخستونکو ته وروړل شي. دلته نو د زخيره کولو لګښتونه منځ ته نه راځي. مګر تل توليد په دې ډول توليد باندې درول، لګښتونه منځ ته راولي، چی د چمتووالی لګښتونه يی بولو. کومه ډيری x (ازاده لويه) بايد توليد شي، چی د امکان تر پولي کم لګښتونه پرې وشي؟ د زخيرې لګښت د چمتووالی لګښت سره متناسب دی ، د خرابيدو ارزښت د چمتووالي يا توليد ارزښت سره يعنی چي خرڅلاو ته چمتو کيږي، په څټ متناسب دی. که x لوي وي نو چمووالی ته کم اړتيا شته او که x کم وي نو چمتووالی بدلون تل بايد تغير وخوري يعني. ټول لګښتونه

$y = f(x) = F + Lx + R/x$ دي ، چيرته چی F ثابت(همغه) يا په کلکه ابينول شوي لګښتونه دي، Lد زخيرې لګښتونه او R د چمتووالی لګښتونه دي. دا ازاده لويه x د توليدډيری M څخه نه شي ستريدلی ، لوئيدلی يا غتيدلی. له دې امله صدق کوي $0 \leq x \leq M$. مخ ته پروت د ستريدلو مسئله له دې امله په لاندې ډول ده :

$$y = f(x) = F + Lx + R/x = Min! \ (0 \leq x \leq M)$$

لومړی $f(x)$ دوه واره ديفرنځيال کيږي يا يي دوه واره رابيليدنه نيول کيږي:

	$f'(x) = L - R/x^2 , f''(x) = 2R / x^3$ د مينيوم لپاره ضرور دي: $f'(x) = 0$ پس لرو $x = R / L$ د $x \geq 0$ له امله $f''(x) \geq 0$ هم صدق کوي، پس دلته تل يو نسبي مينيموم مخ ته لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرېږ(منحني) تګلار په شکل کې انځور شوې. څرګنده ده: که $x = R/L < M$ صدق ولري، نو مينيموم مو مخته پروت دی.که $x = R/L > M$ وي، نو يو منيموم په څنډه $x = M$ لرو. نامساوت $x = R/L < M$ دا مانا لري $R/L < M^2$ په همدې ډول $R^2 < M^2L$ پس مخ ته لرو: $x = R/L$ د $R < M^2L$ لپاره او $x = M$ د $R > M^2L$ لپاره؛ نو : که د چمتوالي لګښتونه R , زخيرې لګښتونو L څخه زيات لوي شي، نو سملاسی دې ټول توليد x = M صورت ونيس. که د ذخيرې لګښتونه د چمتووالی لګښت څخه کم وي، کيدی شي کوچنی ازاد x توليد شي.

ټاکلی بيلګه: د $M = 10000, R = 1000, L = 10$ لپاره صدق کوي،
$R = 1000 < M^2L = 108 \cdot 10 = 109$ ستر يا غټ ازاد لګښت دی
$x = R/L = 1000/10 = 100 = 10$ ازاد a دلته 10 يوونه بايد ورزيات شي ، چې 10000 يوونه توليد کړي د $M = 10, R = 1000, L = 1$ لپاره صدق کوي
$R = 1000 > M^2L = 100$ غټ ازاده لويه له دې امله $x = M = 10$ ده، يواځې يوه ازاده لويه دې تر توليد لاندې ونيوله شي.

په توليد کې د مشتق استعمال

فعاليت:
يوه فابريکه x توليد کوي. په دې توليد لګښت کيږي، چې دا د توليد په واک کې دی، چې موږ ورته د لګښت تابع وايو او په $K(x)$ سره يې ښايو.
څنګه کولی شو، چې د زيات توليد لپاره لګښت را ټيټ کړو؟
د لګښت تابع $K(x)$ د توليد سټ(ډېرى) او ټول لګښت تر منځ تړاو انځوروي.
که توليد د Δx شاو خوا کې زيات شي، نو لګښت هم د ΔK په شاو خوا کې زياتيږي.
کمښتويش (تقسيم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منځنې لګښت زياتوالی ښايي، د يوه Δx توليد تغير سره(منځنی تغير ارزښت)
د x_0 ځای کې لحضوي تغير ارزښت د مشتق لګښت بلل کيږي. دا د پوله ارزښت $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ سره ټاکل کيږي، داپه دې معني، چې د لګښت د تابع K مشتق.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پېژند: د لګښت تابع $K(x)$ مشتق د مشتفارزښت $K(x)$ په نامه یادوو یا یې پوله لګښت $K'(x)$ هم بولو.

بېلګه: د لګښت تابع $K(x)=x^3-9x^2+40x+94$ دې ورکړ شوې وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکۍ، یو ارزښت جدول د $K(x)$ او $K'(x)$ لپاره وکاږۍاو په پروتولاړ سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یې ګراف وکاږئ.

پوله ارزښت د $[0\ ;\ 6]$ لپاره په1پل(قدو) $1=$ پراخوالي سره.

ب: د ډېر کم لګښت زیاتوالی و ټاکئ:

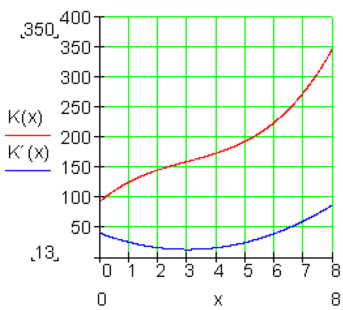
لاندې تابع

$$K(x)=x^3-9x^2+40x+94$$

لرو

مشتف ارزښت

$$K'(x)=3x^2-18x+40$$



ارزښت جدول

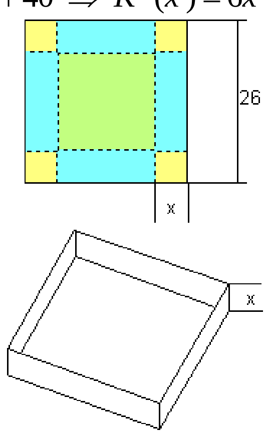
x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40

خورا کم د لګښتزیاتوالی(لګښتجګېدنه) د پارابول $K'(x)$ په ککره(څوکه) کې پروت دی، یعني هلته چې تانجنت $K'(x)$ پروت یا افقي دی

$$K'(x)=3x^2-18x+40 \Rightarrow K''(x)=6x-18$$

دد تانجنت د پروتوالي یا افقیت لپاره:

$$K''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-18=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=3}}$$



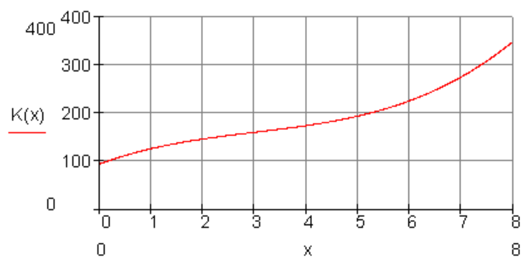
پوښتنې: دې، مربع کارتون(د کلک کاغذ څخه جوړ)څخه، چې 26 سانتیمتره د اړخ اوږدوالی لرې یو بکس جوړوو بې له سرپوښ، چې د x جګوالی لرې.

الف: د یوه تابع ترم وټاکئ، چې د بګس حجم(ډکی) v د x په واکوالي یا تابعیت کې

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښايي.

ب: ګراف وکاږئ او په نردې توګه يې
ماګسيما(خورا جګ) حجم و ټاکئ.

د يوه روغتون د نرختابع(مصرف تابع) $K(x)$ د ناروغانو ګڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړيکې انځوروي، داسې چې $x=1$ د 100 ناروغانو معنی او $y=1$ دی معنی چې $1000 \in / \tan$ د روځې زر يورو ($1000 \in / \tan$). $K(x)=x^3-9x^2+40x+94$	

الف: د مصرف تابع په خپله کتابچه کې وليکئ.

ب: د لګښت تابع مشتق د مشتق لګښت (-مصرف) يا دحدمصرف په نامه ياديږي. تاسو د لګښت زياتېدنه د ناروغانو په واکوالې يا تابعيت کې تشريح کړئ.(د $K(x)$ جګېدونه).
$K'(x)$ وټاکئ او ګراف يې په وضعيه سيستم (پروت- ولاړ-سيستم) کې انځور کړئ)

پ: د ناروغانو د کوم تعداد سره د لګښت زياتوالی خورا کم دی؟ دا قېمتونه وشمېرئ.

ټولګه:

د رول(Rolle) قضيه:
يوه د f تابع دې په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادې وي د $f(a)=f(b)$ سره او په واز اينټروال (a,b) کې مشتقوړ، نو لږ تر لږه يوځای $c\in(a,b)$ شته دی د $f'(x_0)=0$ سره.

د مشتق د منځني ارزښت (وسطي قيمت) قضيه:
که $y=(x)$ تابع په بند اينټروال $[a,b]$ کې متمادې

(c) ketabton.com: The Digital Library

او په واز اینتروال (a,b) کې د مشتق وړ وي، نو هلته یوځاي $x \in (a,b)$ شته دی، د کوم لپاره چې   ثیره په نوټ کې ده،

لرو: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_0)$

پراخه شوې منځقضیه:

که $u=f(x)$ او $v=g(f)$ په بند اینتروال $[a,b]$ کې متمادي توابع وي او په واز اینتروال (a,b) کې مشتقوړ او $g'(x)\neq 0$ باور ولري، نو د ټولو $x\in(a,b)$ لپاره، کم له کمه یوځای $x_0\in(a,b)$ وجودلري چې لاس ته ترې راځي: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

قضیه:

د $f(x)$ تابع دي په انتروال Iکې مشتقوړ وي.

2. که د $f(x)$ تابع په اینتروال Iکې مونوتون جګېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x)\geq 0$ د ټولو $x\in 1$لپاره

- که $f(x)$ په اینتروال کې همغږیزټیټېدونکې وي، نو باور لري: $f'(x)\leq 0$ د ټولو $x\in 1$ لپاره.
- که $f'(x)\geq 0$ وي، دټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال I کې همغږیز جګېدونکې ده.
- که $f'(x)\leq 0$ وي د ټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینروال Iکې همغږیز ټیټېدونکې ده.
- که $f'(x)>0$ وي ، د ټولو $x\in 1$ لپاره، نو $f(x)$ په اینتروال I کې په کلکه همغږیز جګېدونکې ده.
- که $f'(x)<0$ وي د ټولو $x\in 1$ لپاره،نو $f(x)$ په اینتروال Iکې په کلکه مونوتون ټیټېدونې ده.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x)=0$ ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د $f(x)$ لپاره د x_0په ځای کې $f'(x)=0$ او $f''(x)>0$ ولرو نو یو نسبي ټکی مو مخ ته پروت دی.

•

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دډې برعکس ولرو: $f'(x)=0$ او $f''(x)<0$ ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د بحراني ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چې $f'(x)=0$ وي، او د $f''(x)$ مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چې ایا یو اصغري ټکی او که اعظمي ټکی مو مخ ته پروت دی.

پیژند: د $x=x_0$ په چاپیریال کې د $y=f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګ ټکی په همدې ډول نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدی x لپاره باور ولري:
$f(x)>f(x_0)$ په همدې ډول $f(x)\le f(x_0)$

جمله: (د یوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرایط):
که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y=f(x)$ انحرافي ټکی لري نو لرو: $f'(x)=0$

دا جمله موږ ته وایي: چیرته چې $f'(x)\ne 0$ وي نو هلته اکستریموم نه شته، د اکستریموم لپاره یواځې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره لرو $f'(x)=0$ ، خو حتمي نه ده چې $y=f(x)$ دې یواکستریموم و لري.

جمله : (د یوه بحراني ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x=x_0$ کې دوه واره مشتقوړ $y=f(x)$ تابع لپاره ولرو: $f''(x)\ne 0$, $f'(x)=0$
نو تابع $y=f(x)$ هلته یو بحراني ټکی لري.

خورا ټیټ ټکی مخ ته لرو، که وي: $f''(x)>0$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي: $f''(x)<0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيژند: په يوه چاپيريال $x = x_0$ کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ يو کيڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کيڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته يو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه يو نسبي ټيټ ټکی ولري.

جمله: (د يوه نسبي بحراني ټکي لپاره ضروري شرايط):
که په x_0 کې مشتق وړ تابع $y = f(x)$ اکستريموم لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وايي: چيرته چې $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکو لپاره يوائې د x_0 ځای په پوښتنه کې راځي، چې د هغې لپاره $f'(x) = 0$ وي ، خو حمتي نه ده چې $y = f(x)$ دې يوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال

پيزند: د زينټکي(کله کله برندې ټکی هم بلل کيږي)لاندې د انعطافټکي ځانګړی حالت پوهيږو، داسې انعطافټکی چې تانجنت يې افقي (پروت) وي:

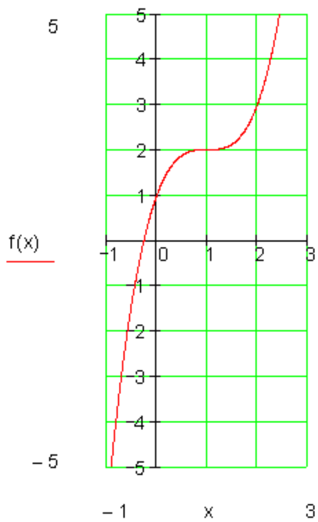
د پرتلي لپاره دې بيا يو ،،عادي،، انعطافټکی ورکړ شوی وي.دا يو مائل(نه افقي) تانجنت لري

په $y' = f'(x)$ څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړيين شرايط):
که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتق وړ تابع y = f (x) هلته يو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي: f " (x) = 0

زينټکی(د اس زين) **<u>Der Sattelpunkt</u>**

(c) ketabton.com: The Digital Library



د انعطاف ټکي يو ځانګړی حالت زينټکی دی. دا د انعطاف ټکی دی د صفر جګېدني سره.که د کيڼ لور ورتزدې شو فکر کېږي، چې، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی
که څوک د ښي لور ور نزدې شي فکر کوي، چې يو نسبي ټيټکی مخ ته لرو.
اوس دا حالت د رياضياتو له لورې څېړو:
مشتق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$$
$$f''(x) = 6x - 6$$
$$f'''(x) = 6$$
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 6x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = 1$$

د برنولي او د دې لو، پيتال قاعده:
که توابع $u = f(x)$ او $v = g(x)$ د يوه $U(x_0)$ چاپيريال د x_0 په ځاي کی مشتقوړ وي د $g'(x) \neq 0$ سره او د ټولو $x \in U(x)$ لپاره او x_0 د f ا و g يوصفرځاي وي،
د $f(x_0) = g(x_0) = 0$ سره، نو باور لري: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,
ترڅو په ښي لور حد شته وي.
په ورته توګه لاس ته راځي: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

د څېړکي تمرينونه:

۱ -- د لاندې ماتراشنل توابعو د مونوتوني حالت د د a په واکوالي کې ورکړئ.

$a)\ f(x) = \dfrac{1}{ax+2}$ $\qquad$ $b)\ f(x) = \dfrac{1}{ax^2+1}$

۲ -- و څېړئ، چې ايا لاندې توابع په خپله پېژند ورشو مونو ون او که په کلکه مونوتون دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x)=\frac{e^x}{2+e^x}$ $b)\ f(x)=2x^5-7$

۳ -- لاندې ناراشنل توابع په یوغږیزوالي خویونو وڅېړ.

$a)\ f(x)=e^{x^2}$ $b)\ f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}$

٤ -- د لاندې توابعو ټول لوکال افراطي ټکي پیداکړئ.

$a)\ f(x)=e^{-4x^2}$ $b)\ f(x)=(x^2-3)\cdot e^x$

$c)\ f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ $d)\ f(x)=\ln(x^2+1)$

٥ -- د تابع ټول لوکال افراطي ارزښتونه دې په دې په لاندې انتروال کې ولټول شي.

$-2\pi\le 2\pi.$

$a)\ f(x)=\sin^2 x$ $b)\ f(x)=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2})$

٦ -- لاندې توابعو ټول لوکال او ګلوبال افراطي ځایونه پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\sqrt{x^2+x}$ $b)\ f(x)=\sqrt{x^2+3}$

$c)\ f(x)=x-\sqrt{x}$ $d)\ f(x)=3+\sqrt[3]{x^2}$

۷ -- لومړی دمطلق ارزښت وشمېرئ او پسې ټول افراطي ارزښتونه وټاکئ.

$a)\ f(x)=|x|+x^2$ $b)\ f(x)=|x^2+2x-8|$

۸ -- د f تابع د $f(x)=\frac{x^2-x-2}{(x-1)^2}, x\neq 1$ سره د انعطاف ټکي بیداکونه

۹ -- د x1=1 او x2=2 لپاره تابع ارزښتونه وشمېرئ او هم د f تابع جګېدنه د

$f(x) = x^4 - 2x^3 - x + 1.$ سره.

---

۱۰ -- په صفرځاي کې $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ تابع کومه جګېدنه لري.

۱۱ -- د $f(x) = 0,5x^4 - x^3 + 0,5x^2 + x - 4$ ګراف په کومو ټکو کې جګېدنه لري.؟

۱۲---- د $x0=-1$ ځاي کې د $f(x) = \dfrac{x^4 - 8x^2 + 16}{x - 1}, \quad (x \neq 1)$ تابع ارزښت او د ګراف جګېدنه غواړو پیاکړو

۱۳ -- د لوپیتال قاعدې په مرسته د $x \to \infty$ لپاره د لاندې مات ریښتوني توابعو پوله ارزښتونه وشمرئ.

$$a)\ \ f(x) = \frac{2x^3 - x + 4}{3x^3 + 1} \qquad b)\ \ f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{4x^3 + 3x^2 - 2x + 5}$$

۱٤ -- د لاندې توابعو لپاره د منحنیو شننیز بحث وکړئ او ګرافونه یې و کاږئ.

$$a)\ \ f(x) = -x^3 + x^2 + 4 \qquad b)\ \ f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

$$c)\ \ f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \qquad d)\ \ f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

۱۵ -- د لاندې توابعو لپاره د پوره منحنیو مطالعه وکړئ او ګرافونه یې و کاږئ.

$$a)\ \ f(x) = \frac{x}{4} - \frac{2}{x^2} \qquad b)\ \ f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$$

$$c)\ \ f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1} \qquad d)\ \ f(x) = \frac{9}{x^2 + 3}$$

۱٦ -- د لاندې توابعو صفرځایونه وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{11}{2}x-3$ $\quad b)\ f(x)=x^4-2x^3-13x^2+14x+24$

$c)\ f(x)=x^3-6x^2+8x$ $\quad d)\ f(x)=x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{12}$

$e)\ f(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$ $\quad f)\ f(x)=x^4+6x^3-11x^2-60x+100$

۱۷ -- د دریمې درجې تام راشنل ګراف د x -محور د x1=-2 , x2 = 0 او x3=4 په ټکو کې غوڅوي.

د تابع مساوات کوم دي، که سربېره پر دې ګراف د P(2,-8) ټکي څخه هم تېر شي؟

۱۸ -- د یوه څلورمې درجې تام راشنل تابع د x - محور د x1=0,5 او x2=3 په ټکو کې غوڅوي. د تابع برابرون څنګه دی، که پرسېره پردې ګراف د y - محور د P(0,9) په ټکي کې هم لمس کړي.

۱۹ -- د څلورمې درجې د یو تام راشنل تابع ګراف د وضعیه قیمت سیستم پیل او له $P(\frac{1}{2}/-\frac{15}{8})$. ټکي تېرېږي. د تابع مساوات څنګه دي، که ګراف د x– محور هم د x1=-1 سره لمس کړي او په x2 = 2 کې غوڅ کړي.

۲۰ -- د لاندې توابعو صفرځایوه پیدا کړئ.

$a)\ f(x)=\frac{x^2+2x-15}{x+4}$ $\quad b)\ f(x)=\frac{x^3+2x^2-4x-8}{x}$

$c)\ f(x)=\frac{x^3-x^2-5x-3}{x-0.5}$ $\quad d)\ f(x)\frac{x^4-x^3+4x^2-4x}{x+5}$

۲۱ -- د یوه مات راشنل f تابع د $f(x)=\frac{x^3+ax^2+bx+c}{x+d}$, ' سره ثابتې a,b,c او d پیداکړئ، که د x1=-2,x2=-(1:2) او سره صفرځایونه پراته وي او تابع په x=0 کې یو تشځای ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

it $f(x) = \frac{(x-1)^3}{x}$, $(x \neq 0)$ ۲۳ -- مات یا کسري راشنلf تابع په x1=1 کې د سره درې ځله صفرځاي لري.

د يوې ساحې د ويش په مرسته وخېږئ چې په همدې څلورمه(ربع) کې صفرځاي کې ځغلي او كه صفرځاي څلورمه بدلوي.

۲٤ -- دا سې يو ترم وټاکئ، كوم چې د لاندې پريوديكي يا تل بېرته راګرځېدوني توابعو صفر ځايونه وركوي.

$-2\pi \leq x \leq 2\pi$

د شمېرنې له لارې صفرځايونه ونوموئ، چې په انتروال 1 کې پراته وي.

$$a)\quad f(x)=\frac{1}{2}\sin 3x \qquad\qquad b)\quad f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{4})$$

$$c)\quad f(x)=1-\sin^2 x \qquad\qquad d)\quad f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$$

۲٦ -- ولې لاندې توابع صفرځايونه نه لري؟

$$a)\quad f(x)=\ln(x^2+3) \qquad\qquad b)\quad f(x)=\frac{x^2+1}{x}$$

$$c)\quad f(x)=\frac{e^x}{x+1} \qquad\qquad d)\quad f(x)=1+\sin^2 x$$

۲۷ -- ولې کېدی شي چې يو تابع ډېر صفرځايونه ولري، مګر د y - محور سره يواځې يو صفرځاي ولري؟

۲۸-- د صفرځايونو د تعداد په هکله څه ويلاي شئ، كه د يو f تابع لپاره په تعريفسټ(- ډېرئ) کې يو f^{-1} معكوس تابع هم شته وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۹-- د y - محور سره د لاندې توابعو غوختکي وشمېرئ.

$a)\ f(x)=x^3+2x-1$ $\qquad b)\ f(x)=(x+1)\cdot\ln(x+1)$

$c)\ f(x)=\dfrac{x^4-3x^2+x}{x+2}$ $\qquad d)\ f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+9}}$

$e)\ f(x)=(x-2)\cdot e^{x-1}$ $\qquad f)\ f(x)=e^{\frac{2}{1-x}}$

۳۰-- د یوه تام راشنل تابع $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ د $a_0\neq 0$ سره کېدی شي د y-محور غوختکي د ساده لوستلو له لارې و ټاکل شي.

په دې هکله دلایل راوړئ.

۳۱-- د x1=1 او x2=2 لپاره تابع ارزښتونه وشمېرئ او هم د f تابع جگېدنه د $f(x)=x^4-2x^3-x+1.$ سره.

۳۲--په صفرځای کې $f(x)=x^3-x^2-2x$ تابع کومه جگېدنه لري.

۳۹-- په کومو ځایونو کې لاندې توابع پروت تانجنت لري؟

$a)\ f(x)=x^2e^{-x}$ $\qquad b)\ f(x)=\ln(x^2+1)$

۴۰-- د a د کومو ارزښتونو لپاره د $f(x)=(x+a)\cdot e^x$ د گراف د $x_0=0$ په ځاي کې ۲ جگوالی لري؟

۴۱د لاندې توابعو ټول ځایزې(لوکال) خوراجگ ټکي وښایاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \ f(x)=x^3-3x^2-9x+10$ $\qquad b)\ \ f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+1$

$c)\ \ f(x)=4x^3-18x^2+15x+7$ $\qquad d)\ \ f(x)=x^4-4x^2+5$

$e)\ \ f(x)=x^5-5x^3-20x$ $\qquad f)\ \ f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{10}{3}x^3+6x^2-2$

۴۳-- د n-مې درجې يو تام راشنل تابع خورا زيات څومره لوکال (ځايز) افراطي ځايونه لرودی شي؟

۴۴-- ولې د جګتکي لپاره شرايط $f''(x)<0$ و اړيين نه دي؟

۴۵-- د لاندې توابعو لوکال(ځايز) انحرافي(افراطي) ځايونه وټاکئ.

$a)\ \ f(x)=\frac{2}{3}x^3+4x^2+8x-1$ $\qquad b)\ \ f(x)=\frac{1}{3}x^4+1$

$c)\ \ f(x)=\frac{1}{3}x^4-2x^2+\frac{8}{3}x$ $\qquad d)\ \ f(x)=x^4-4$

۴۷-- د f تابع ټول لوکال افراطي ارزښتونه دې په دې په لاندې انتروال کې ولټول شي.

$$-2\pi\le 2\pi.$$

$a)\ \ f(x)=\sin^2 x$ $\qquad b)\ \ f(x)=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{2})$

۴۸-- لاندې توابعو ټول لوکال او ګلوبال افراطي ځايونه پيدا کړئ.

$a)\ \ f(x)=\sqrt{x^2+x}$ $\qquad b)\ \ f(x)=\sqrt{x^2+3}$

$c)\ \ f(x)=x-\sqrt{x}$ $\qquad d)\ \ f(x)=3+\sqrt[3]{x^2}$

--- د fتابع د $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2},\ x\neq 1$ سره د انعطاف ټکي بيداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵۳-- په انتروال $0 \le x \le 2\prod$ کې د انعطاف ځایونه پیداکړئ.

a) f(x) = x + sinx b) f(x) = 2(1-sin2x)

٥٤-- لاندې توابع په x_0 کې په مشتقوړتیا باندې وڅېړئ.

$$a)\ f(x)=\begin{cases}\cos x & x\le 0\\ x^2+1 & x>0\end{cases},\quad x_0=0$$

$$b)\ f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ x^2 & x\ge 1\end{cases},\quad x_0=1$$

$$c)\ f(x)=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ e^{x-1} & x\ge 1\end{cases},\quad x_0=1$$

$$d)\ f(x)=\begin{cases}\ln x & x\le 1\\ x-1 & x>1\end{cases},\quad x_0=1$$

٥٥-- ولې متمادیت د مشتقوړتیا لپاره اړین شرط، مگر مشتقوړوالی د متمادیت لپاره پوره کېدونکی شرط دی؟

٥٦-- په کوم دلیل تام راشنل توابع د $x \in R$ لپاره مشتقوړ دي؟

٥٩-- و څېړۍ، چې ایا لاندې توابع په خپله پېژند ورشو مونو ون او که په کلکه مونوتون دي.

$$a)\ f(x)=\frac{e^x}{2+e^x} \qquad b)\ f(x)=2x^5-7$$

٦١-- په کومه ورشو کې لاندې تام راشنل توابع یو کېنې کږوالی لري او په کون کې ښی کږوالی لري.

$$a)\ f(x)=x^3-6x^2+5x+2 \qquad b)\ f(x)=-2x^3+3x^2-x-4$$

٦٢--د لاندې مات توابعو گرافونه هایپاربول دي. د هاپارابول څانگې کوم کږوالی لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\ \ f(x)=\frac{1}{4x+1} \qquad b)\ \ f(x)=3-\frac{3}{x^2}$$

٦٤-- ولې د يوه دريمې درجې تام راشنل تابع گراف په تل تلنه کې يوه ښنئ انحنا(کږوالی) نه لري.

٦٥ ولې يو څلورمه درجه تامراشنل تابع د $f(x) = ax^4 + dx + e$ سره يو تلتلونی کينه انحنا(کږوالی) او ښئ انحنا لري؟

۱٥۸(۱۰۳): څنگه کېدی شي، چې د يوې f تابع د ۱ . درجې مشتق څخه د د گراف په انحنا قضاوت وکړو؟

۱٦۰(۱۰٥): د لاندې توابعو حالت وڅېړئ، که $|x| \to \infty$ په لور لاړ شي.

$$a)\ \ f(x)=x^3-4x^2-4x-5 \qquad b)\ \ f(x)=-3x^4+x^3-2x^2+x$$

$$c)\ \ f(x)=\frac{1}{3}x^5-x+6 \qquad d)\ \ f(x)=-\frac{2}{5}x^2-\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}$$

$$e)\ \ f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{5}{2} \qquad f)\ \ f(x)=-x^3-x^2-x-\frac{1}{3}$$

۱٦۳(۱۰۸):ولې د $x \to +\infty$ لپاره په ساده ډول د پولې په هکله وړاند وينه نه شي کېداي:

$$a)\ \ f(x)=x^3\cdot\frac{1}{\ln x} \qquad b)\ \ f(x)=x\cdot e^{-x}$$

۱٦۷(۱۱۲): د جوړه(جفت) جگعدد(اکسپوننت) سره تام رينتونی تابع کوم ډول سيومتري لري؟

۱٦۸(۱۱۳): د ناجوړه(طاق) جگعدد(اکسپوننت) سره يو تام رينتونی تابع ټيک هلته د سر چينې سره ټکی سيومتري دی، چې مطلق ارزښت صفر شي؟

۱۷۱(۱۱٦): لاندې توابع په بنسټ کې لوستل شوي سيومتري خويونه نه لري. وښايئ چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سره له دې هم سيومتريک دي.

$$a)\ f(x)=(x+2)^2 \qquad b)\ f(x)=1+\frac{1}{x}$$

$$c)\ f(x)=-(x+1)^2+3 \qquad d)\ f(x)=2+\frac{1}{x-4}$$

۱۷۲۱۷): لاندې تام ريښتوني اعداد په محدوديت وڅېړئ.

$$a)\ f(x)=x^2-2x+4 \qquad b)\ f(x)=3x^4-4x^3+12x^2-24x$$

$$c)\ f(x)=-(x+3)^2+1 \qquad d)\ f(x)=x^3-2x+1$$

۱۷٦(۱۲۱): د لوپيتال قاعدې په مرسته د $x\to\infty$ لپاره د لاندې مات ريښتوني توابعو پوله ارزښتونه وشمرئ.

$$a)\ f(x)=\frac{2x^3-x+4}{3x^3+1} \qquad b)\ f(x)=\frac{x^2+2x-3}{4x^3+3x^2-2x+5}$$

۱۷۸(۱۲۳): د لاندې توابعو لپاره د x=x0 په ځاي کې د تانجنت مساوات وټاکئ

۱۷۹(۱۲٤): په کومو ټکو کې د لاندې مساواتو لپاره د تانجنت مساوات د ورکړ شوې کربښې سره غبرگ دي؟

۱۸۸(۱۳۳):د لاندې تام ريښتوني توابعو د انعطاف ټکي(اوړونټکي) او د نورمالي مساوات وليکئ.

$$a)\ f(x)=-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3} \qquad b)\ f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+2x+10$$

۱۸۹(۱۳٤) د f_t تابع د انعطاف ټکي مساوات وليکئ.

$$f_t(x)=\frac{4}{3}t^2x^3+3tx^2+3x \quad (t\in \mathbb{R}\setminus\{0\})$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۹۲(۱۳۷): د لاندې توابعو لپاره د منحنیو شننیز بحث وکړئ او ګرافونه یې و کاږئ.

$$a)\ f(x) = -x^3 + x^2 + 4 \qquad b)\ f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$$

$$c)\ f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \qquad d)\ f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$$

په ټوټه ماتونو یا کسرونو ټوټه کونه

الف) اصلي کسرونه، چې مخرج یې مختلف لاینیز ضریبونه لري.

بنسټ: که د یوه اصلي پولینومېش $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولینوم $P_n(x)$ په مختلفو کربنیزو(لایني) ضریبونو $P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ ...\ (x - x_n)$ ټوټه کېدونکی وي، نو پولینوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ په لاندې بڼه بدلېدی شي.

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \frac{C}{x - x_3}\ ...\ \frac{N}{x - x_n}$$

داسې یوه بڼه په ټوټه کسرونو ټوټه کونه،، بلل کیږي، چې A,B,C,...,N حقیقي عددونه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت: په پورته ننوتنه کې و ښایاست، چې دا ټوټه کسرونه څېرته تعریف لري؟

-- د یوه په خوښه پولینوم کسر ټوټه ونه او د تعریف ساحې ورکړئ.

بیلګه: اصلي پولینوم کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسر ټوټه کړئ.

حل: د مساوات $x^3-4x^2-7x+10=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمایښت له لارې څېړو .

د پولینوم ویش(لنډ: پولینومویش) $(x^3-4x^2-7x+10):(x-1)=x^2-3x-10$ مو ټوټه ونې ته بیایي $x^3-4x^2-7x+10=(x^2-3x-10)(x-1)$ مساوات $x^2-3x-10$ اوس $x_2=-2$ او $x_3=5$ حلونه لري.

له دې امله $x^3-4x^2-7x+10=(x-5)(x-1)(x+2)$ دی.

د اصلي کسر $\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$ په ټوټه کسرونو ټوټه کونه:

د کسرونو شمېرنو قاعدې له مخې کیدی شي ورکړ شوی پولینوم په درې جمعی برخو ټوټه شي، چې مخرجونه یې لاینیز (کرښیز-)ضریبونه دي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

د غزېدنې سره د ټوټه کسر جمعه:

اصلي مخرج د ټوټه کسر د پولینوم مخرج دی.

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-5)(x-1)}{(x-1)(x-5)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{x^3-4x^2-7x+10}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x+(-2A-10B+5C)}{x^3-4x^2-7x+10}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

-- -------

دصورتونو ارزښت A ,B او C ټاکنه د ضریبونو د پرتلې له لارې:

د مساوي مخرجونو کسرکې بسیا کوي، چې صورتونه سره پرتله کړو. دلته باید د مساوي توانونو ضریبونه، دا په دې مانا چې د x^2, x او x_0 باید مساوي وي.

$$\begin{aligned} A+B+C &= 4 && \text{I} \\ A-3B-6C &= -1 && \text{II} \\ -2A-10B+5C &= 39 && \text{III} \end{aligned}$$

د فاکتور 2 سره د I او II مساوات ضربونه او د هر یوه جمع د III سره پورته درې مساوات سیستم و دوه مساواتسیستم ته د دوه متحولو سره را لنډوي.

$$\begin{aligned} -8B &= -72 && \text{V} \\ -16B-7C &= -41 && \text{IV} \end{aligned}$$

د مساوات IV.V څخه لرو: $-24B=-72 \Rightarrow B=3$

د $B=3$ په V کې ایښوونه: $-16.3-7C=-41 \Rightarrow C=-1$

د $B=3$ او $C=-1$ په I کې ایښوونه: $A+3-1=4 \Rightarrow A=2$

په ټوټه کوني فرمول کې ایښووني سره غوښتونکی ټوټه کسر لاسته راځي:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

ازمایښت:

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=$$

$$=\frac{(x-1)(x+2)+3(x-5)(x+2)-1(x-5)(x-1)}{(x-5)(x+2)(x+2)}=\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرينونه:

د لاندې اصلي پولينومکسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کړئ.

$$a)\ \frac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x+6}\ ,\ b)\ \frac{x^2+1}{x^3-x}\ ,\ c)\ \frac{4x+10+12}{x^2+6x+8}$$

ب) اصلي پولينوم کسرونه، چې مخرج يې مساوي لاينيز(کربنيز) فاکتورونه لري.

که د يوه اصلي پولينوم $P_n(x)$ مخرج $\frac{P(x)}{P_n(x)}$ د کربنيز فاکتور $x-x_0$ توان $\frac{A}{(x-x_0)}+\frac{B}{(x-x_0)^n}+...+\frac{N}{(x-x_0)^n}$ وي، نو ددې کربنيزو فاکتورونو له پاره پولينوم لاندې بڼه لري:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$$

د نورو ټولو ساده منځ ته راغلو کربنيزو فاکتورونو ټوټه کسرونو په بلده بڼه ورکول کيږي.

بيلګه:

د اصلي پولينوم کسر $\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}$ لپاره په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

د مخرج ټوټه ونه په کربنيزو فاکتورونو:

د پولينوم $x^3-4x^2+5x-2=0$ لومړی حل $x_1=1$ د ازمايښت له لارې پيدا کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم ویش $(x^3-4x^2+4x-2):(x-1)=x^2+3x+2$ مو لاندې ټوټه کونې ته لاربښودوي:

$$x^3-4x^2+4x-2=(x^2+5x-2)(x-1)$$

مساوات $x^2-3x+2=0$ دا $x_2=1$ او $x_3=2$ حلونه لري. نو له دې سره د مخرج لپاره دېبل حل دی:

$$x^3-4x^2+5x-2)=(x-2)(x-1)^2$$

د ټوټه کسر پیل:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

د ټوټه کسر جمع د غزونې له لارې:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{(A+B)x^2+(-2A-3B+C)x+(A+2B-2C)}{x^3-4x+5x-2}$$

د A,B او C صورتونو ارزښت د ضریبونو پرتله کونې له لارې.

$$\begin{array}{ll} A+B=3 & \text{I} \\ -2A-3B+C=-6 & \text{II} \\ A+2B-2C=2 & \text{III} \end{array}$$

د مساوات II د 2 سره ضرب او د III سره جمعه د I سره ګډ د دوه مساوات د دوه متحولو سره.

$$\begin{array}{ll} A+B=3 & \text{I} \\ -3A-4B=-10 & \text{II} \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دI ضرب له 4 سره او جمعه يې له IV سره : $A = 2$

د $A = 2$ ايښوونه په I کې: $2 + B = 3 \Rightarrow B = 1$

د $A = 2$ او $B = 1$ ايښونه په III کې: $2 + 2.2 - 2C = 2 \Rightarrow C = 1$

د ټوټه کونې فرمول له لارې ټوټه مسر ټوټه ونه لاس ته راځي:

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

تمرينونه:

د لاندې اصلي پولينوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړئ.

$$a)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8} \qquad b)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$$

$$c)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1} \qquad d)\ -\frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$$

پ) اصلي پولينوم کسرونه، چې مخرج يې پوره په کرښيزو فاکتورونو نه ټوټه کيږي.

بنسټ:

که د يوه اصلي پولينوم کسر $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ مخرجپولينوم $P_n(x)$ نور په يوه حقيقی ضريب نه ټوټه کيدونکي ضريب ax^2+bx+c مخ ته پروت وي، نو په ټوټه کيدو کې دې د يو ټوټه کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ په بڼه دې کينول شي يا راوړل شئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه:

د پولينوم کسر $\dfrac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}$ له پاره دې په ټوټه کسر ټوټه ونه ورکړ شي.

د مخرج ټوټه کونه په کرښيزو ضريبونو:

لومړی حل دې $x_1=-1$ وي مساوات $x^3+3x^2+6x+4=0$ د ازماېښت له لارې پيدا کيږي.

بولينوم وېش $(x^3+3x^2+6x+4):(x+1)=x^2+2x+4$ مو لاندې ټوټه کوني ته بيايي:

$$x^3+3x^2+6x+4=(x+1)(x^2+2x+4)$$

دا چې مساوات x^2+2x+4 حقيقي حل نه لري، نو د حقيقي اعدادو په ورشو کې نوره ټوټه کونه ناشوني ده.

نو له دې امله پولينوم کسر لاندې بڼه لري:

$$\frac{Ax}{x^2+2x+4}$$

د $\dfrac{c}{x+1}$ بڼې کسر سره يوځاې مو لاندې ټوټه کسر ټوټه کونې ته بيايي:

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

د غزونې له لارې د ټوټه کسرونو جمع

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+(B+4C)}{x^3+3x^2+6x+4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضریبونو A,B,C تاکنه د پرتله کولو له لارې:

$$A+C=5 \qquad I$$

$$A+B+2C=8 \qquad II$$

$$B+4C=9 \qquad III$$

د III کمښت (تفریق) له مساوات II څخه د I سره یې ګډولو څخه مساوات لاس ته راځي، چې دوه اووښتوني یا متحولې لري:

$$A-2C=5 \qquad IV$$

$$A+C=5 \qquad I$$

مساوات III منفي مساوات II :

د C = 2 په I ائښوولو سره :

د C = 2 په III ایښوولو سره:

که دا د ټوټه کوني فرمول کې کېږدو نو د ټوټهکسر ټوټه کونه لاس ته راځي

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{3x+1}{x^2+2x+4}+\frac{2}{x+1}$$

تمرینونه:

د لاندې اصلي کسري پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ورکړی:

$$a)\ \frac{-x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5} \qquad b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$$

$$c)\ \frac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x} \qquad d)\ \frac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ج) نا اصلي پولينوم کسرونه:

که د يوه پولينوم $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ د صورت درجه د پولينوم د مخرج له درجې څخه لويه وي، نو دا د پولينومويش له لارې په ټولناطق کسر او يوه اصلي کسر ټوټه کېدی شي.

بيلګه:

کسري پولينوم $\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}$ په ټوټه کسري پولينومونو ټوټه کړئ .

د پولينوم د صورت درجه درې ده او د مخرج دوه . نو له دې امله مو يو نا اصلي پولينومکسر مخ ته پروت دی.

پولينوم ويش:

$$(3x^3-6x^2-20x-1):\ (x^2-2x-8)=3x+\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$$

$$\frac{-(3x^3-6x^2-24x)}{4x-1}$$

د پاتې کسر $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}$ له پاره د ټوټه کسر ټوټه کونې کارونه (عمليه) مخ ته بيايو.مخرج په کرښيزو ضريبونو ټوټه کړی:

د مساوات $x^2 - 2x - 8 = 0$ له پاره حل $x_1=-2$ او $x_2=4$ لرو.

نو $x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه کسرونو ټوټه کونه

د ټوټه کسر ټوټه کوني لپاره ځای په ځاي کوو: $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+2}$

د غزوني له لارې د ټوټه کسرونو جمعه کول:

$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{A(x+2)+B(x-4)}{(x-4)(x+2)}$$
$$\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{(A+B)x+(2A-4B)}{x^2-2x-8}$$

د ضريبونو د پرتله کووني په مرسته د A او B ټاکل:

$$A+B=4 \qquad \mathrm{I}$$
$$2A-4B=4 \qquad \mathrm{II}$$

د I ضرب له 2 سره او له II څخه يې تفريق يا كول $6B=9 \Rightarrow B=\frac{3}{2}$

په II کې اېښوول: $2A-4\frac{3}{2}=-1 \Rightarrow A=\frac{5}{2}$

منځنی لاس ته راوړنه $\frac{4x-1}{x^2-2x-8}=\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{(2(x+2)}$

متحول (بښتونکی) په ټوټه کسر ټوټه کونه لاندی بڼه غوره کوي:

$$\frac{3x^3-6x^2-20x-1}{x^2-2x-8}=3x+\frac{5}{2(x-4)}+\frac{3}{2(x+2)}$$

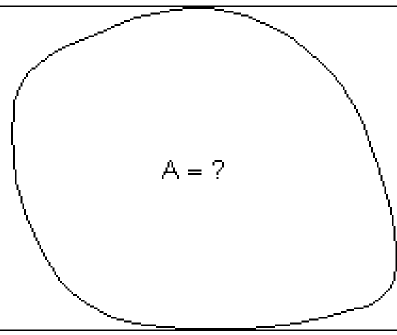
پوښتنې د لاندې پولینومکسرونو په ټوټه کسر ټوټه کونه ورکړئ.

$a)\ \frac{3x^2+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8}$ $\qquad b)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$

$c)\ \frac{2x^3+x^2}{x^3-1}$ $\qquad d)\ \frac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرالشمیرنې لپاره پیل راوړنې

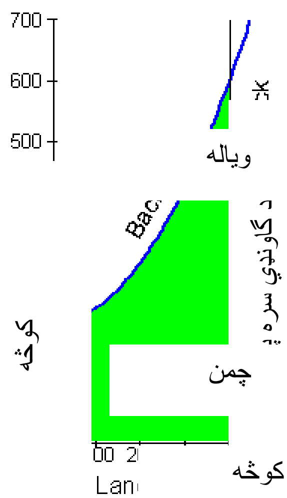


پخوانیو یونانیانو ته دا د منحني څخه رابندي سطحې شمېرلو اصول معلوم وو.
دا دمشتق شمیرنه، چې موږ ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پیړۍپاي کې) د طبیعي علومو پوهانو د لایبنیخ او نیوټون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.

فعالیت:

- د پورته رابندي څېرې د سطحې د شمېرلو له پاره وړاندیزونه وکړی.
- ایا تاسو د داسې سطحې شمېرلو سره بلد یاست ؟
- ایا تاسو دې ته ورنږدې سطحې مساحت شمېرلی دی؟ او که هو نو هغه ولیکی.
- داپورته سطحه د وضعیه قیمت سیستم له لارې په څلورو نږدې برابرو برخو وویشئ او د انتیګرالونې په هکله یې فکر وکړئ.

بیلګه



دا څیره شوی چمن خرڅیږي. له پورته لور د ویالې را بند دی او له ښي لور د ګاونډي ځمکه ده او کیڼ لور ته کوخه او له کښته لور هم د یوې کوخې را بند دی.

ددی لپاره چې چمن وپلورل شي، باید سطحه وپیژندل شي. د پلورونکی لپاره سطحه باید نږدې پوره مګر هیڅکله کمه ونه شمیرل شي.
اخستونکی هم د ځان لپاره فکر کوي، چې پیسې باید ورکړي، خو هیڅکله ځمکه د اصل څخه زیات ونه شمېیل شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وروسته له دې چې رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

ویاله $f(x)=\frac{1}{400}x^2+200$ د تابع مساوات لري.

د اخستونکي له پاره ممکنه حل.

هره ټوټه(مستطیل پټی) 50m سره ورره ده او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو، سطحه یو ځای شمیرو.

$200 \cdot 50 = 10000$

$206 \cdot 50 = 10300$

$225 \cdot 50 = 11250$

$256 \cdot 50 = 12800$

$300 \cdot 50 = 15000$

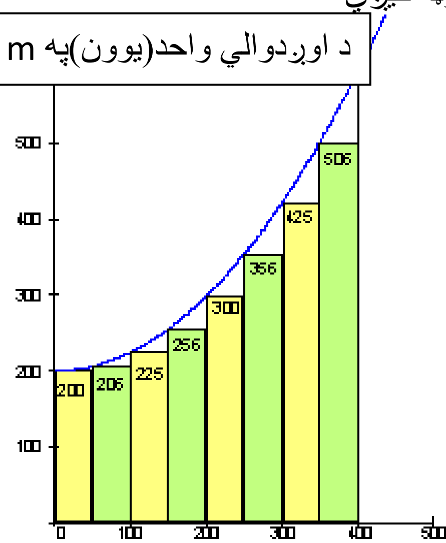
$256 \cdot 50 = 12800$

$425 \cdot 50 = 21250$

$506 \cdot 50 = 25300$

$\underline{123700}$

ځمکه په لاندې ډول په اوږدو ټوټو(پټیو) ټوټه کیږي

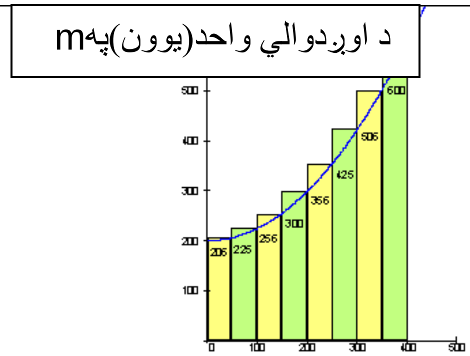


د اخستونکي لپاره ټوله سطحه نږدې ***123700 m²*** ده.

د پلورونکي له پاره ممکنه حل:

هره ټوټه(پټی) 50m سورلري او په رسم کې ورکړشوی جګوالی لري. د ټولو پټیو سطحه یوځای شمېرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$206 \cdot 50 = 10300$$
$$225 \cdot 50 = 11250$$
$$256 \cdot 50 = 12800$$
$$300 \cdot 50 = 15000$$
$$356 \cdot 50 = 12800$$
$$425 \cdot 50 = 21250$$
$$506 \cdot 50 = 25300$$
$$600 \cdot 50 = 30000$$
$$\underline{143700}$$

د د پلورونکي له پاره د تولې سطحې مساحت نزدې $143700\ m^2$ دی.
اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قیمتونو ،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قیمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعني د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700+143700}{2}=133700\ unt^2$$

دا به وروسته د تاکلي انتیګرال برخه (په مخ) کې وشمېرو، چې رینتونی ارزښت یې $133333.\bar{3}m^2$ دی.
د اخستونکي په بیلګه کې دا ډول شمیرنه **لاندنی** ،،**جمعي جوړول**،، بلل کیږي.
د پلورونکي په بېلګه دا ډول شمیرنه،، **پورتنی جمعي**،، **جوړول** بلل کیږي.
دا د سطحې رینتونی ارزښت یو چیرته په دا منځ کې پروت دی.
باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې رښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

پوښتنې

د $3x^2+1$ تابع ګراف وکاږئ.

د انتروال [1,3] ترمنځ د تابع سطحه په نخښنه کړئ.

د دې ورکړ شوې سطحې پورته جمعه جوړه کړئ

د دې ور کړ شوې سطحې کښته جمعه جوړه کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتیګرالشمیرنه Integralcalculation

د سطحي تابع له پاره تر مخ راوړنه: دا دانتیګرال هندسي مفهوم هم دئ. په کارتیزي وضعیه قیمت سیستم کې د ګراف په سرچینه کې یوه کرښه رسموو.غواړو سطحه پیداکړو، چې د تابع دګراف او x - محور ترمنځ د x په واکوالي کې پرته وي.

د ریمن (ټاکلی) انتلګرال

دلته دې یوه څېره راوړل (د یوه ډنډ او یا.....)

فعالیت:

- یوه په خوښه هندسي څیره وکاږئ، چې په ترتیب له دري، پنځو او اوو کرښو رابنده وي. د د ې څیرو سطحه په ورسره بلد ډول وشمیرئ.
- په یوه د وضعیه قیمت سیستم کې یوه کږه(منحني) وکاږئ او وهڅیږئ، چې سطحه یې په ورنزدي ډول پیدا کړئ چې د x محور او منحني ترمنځ پرته وي.

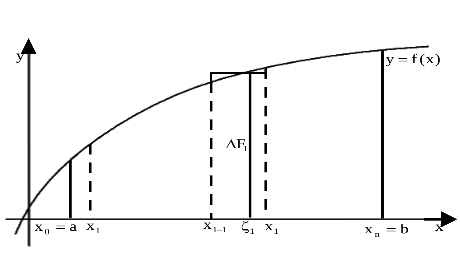
(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: انتیګرال څه شی دی؟

آنتیګرال کونه Integration د ورګډېدلو په معنی دی ، لکه چې یو څوک یوې پردۍ ټولنې ته ورګډېږي یعنې ددې پردۍ ټولنې خویونه خپلوي، یعنې دی په دې ټولنه ورزیاتیږي. دا هم په همدې موخه دلته دا موضوع څیړلو ته وړاندې کیږي، چې څنګه د یوې کوچنی درجې تابع و یوه جګ درجې تابع ته ځي.

د انتیګرال هندسي تعریف: لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف: که یوه f تابع ولرو، نو دx مخور او تابع ترمنځ سطحې شمیرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښخ لري.
تحلیلي تعریف: تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انتروال [a,b] باندې تعریف دی، نو د aڅخه تر b پورې د تابع د انتیګرال څخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

په دې برخه کې غواړو، چې د انتګرال کلیمې ته وده ورکړو. د سطحې کچونې یا اندازه کوونې څخه کړی شو د انتګرال شمېرنې ته راشو، له دې امله انتګرالنیول د مشتق په څېر یا برعکس کارونه یا عملیه ده.

	یو تابع $y = f(x)$ لرو. غواړو ددې تابع د ګراف او د x – محور باندې پرتو ټکو او ترمنځ هواره (سطحه) وشمیرو داسې چې $(f(x)>0)$ وي. (څیره ۱ . ۱)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې دندې د حل لپاره د [a,b] اینټروال په n (نه اړیین) برابرو برخو انټروالونو $[x_{i-1}, x_i]$ټوټه کوو.

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1}x_i < ... < x_n = b$$
$$x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

په اینټروال $[x_{i-1}, x_i]$ کې په خوښه$\xi_l \in [x_{i-1}, x_i]$ ټاکو.

د $x = x_{i-1}, x = x_i, y = f(x)$ تر منځ سطحه (هواره) دا لاندې د مستطیل سطحه (و لاړکونجیزه هواره) ده:

$$\Delta F_i(x) = f(\xi_l).\Delta x_i ;...........................(4,1)$$

د ټولو پورته مستطیل ډوله کوچنیو سطحو د جمعې (زیاتون) له لارې غوښتونکې، نږدې ټوله سطحه لاس ته راځي:

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = \sum f(\xi) \Delta x_i ;..............................(4,2)$$

دا نږدیوالی تر هغې ښه کیږي خومره چې د اینټروال [a , b] ویش نری شي یعنې $\max \Delta x \to 0$، هرڅومره چې د زیاتیدونکو شمیر ($n \to \infty$) شي.

که (٤ . ٢) تل همغه یوله ارزښت F ولري، په دې اړه نه چې اینټروال [a , b]څنګه ویشل شوی او $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ څنګه ټاکل شوي، نو f (x) په اینټروال [a,b] کې اینټیګرالوړ دی. دا د بیلګې په توګه د ټولو ټوټه، متمادی او محدودو توابعو y = f (x) حالت دی .

پیژند (تعریف ٤ . ١) : که لیمیټ

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx = F ; (\max \Delta x \to 0),........(4,3)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اینټروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینتیګرال بولو، یا د ریمن سطحه F- Riemann . دلته a د اینتیګرال کیدونکي لاندې(کښته)پوله او b د ایتیګرال کیدونکي پورته پوله بلل کیږي او [a,b] د ایتیګرال کیدونکي اینټروال او f (x) (Integrand) (اینتیګرالیدونکی) او xد اینتیګرال کېدونکي متحول (Integrationsvariable) بلل کیږي

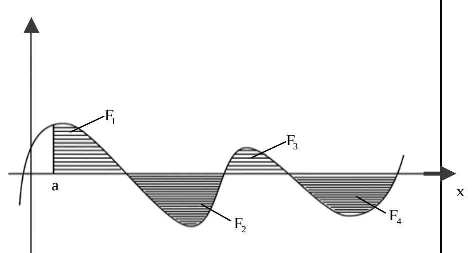
یادونه ۱ : د ایتیګریشن واریابله یا اووښتونی کیدی شي په خپله خوښه په نخښه شي(مخښه یا علامه یی په خوښه وټاکل شي).

موږ لرو: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\;dt = \int_a^b f(u)\,du$

یادونه ۲ : دا پورته تعریف ٤ . ۱ کیدی شي هغه حالت ته پراخه شي، چیرته چی f (x) 0 <باوري نه وي . که 0 > f (x) وي نو دا ټاکلی اینتیګرال بیا د x -محور تر لاندې منفي هواره لري .

که د x) y = f (x کږه - لکه په)ش ٤ . ۲) کی - داینتیګرآلوني په اینټروال کی د x-محور پرې کړي نو دا مخامخ فرمول د لاندې سطې سره باور لري :

$F = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 \ldots$



د تعریف ٤ . ۱ پسې تړلې دا لاندې جمله لرو:

جمله٤ .۱ : که f (x) په [a , b] کې اینتیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چې دا پورته مساوات د c ارزښتونو ته پراخه کړی شو، بایدc له اینتروال [a,b]د باندې نه وي پروت، یعنې ټکي a,b او c په یوه اینتروال کی باید پراته وي، په هغه کی چې تابع f (x) اینتیګرالوړ دی.

موږ دا لاندې تعریف(پیژند) لرو :

پیژند یا تعریف ٤ . ٢ : f (x) په یوه بند انتروال[a, b] کې اینتیګرالوړ دی، نو باور لري: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

د پیژند تعریف ٤ . ١ له مخی تل باور لري: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

تمرینونه:

د لاندې توابعو ګراف و کاږئ او د ګراف او x محور ترمنځ د سطحې مثبته او منفي لور په نخښه کړئ.

الف : $4x^3 + 5x^2 + x + 6$ ،

ب: $x^2-4x-+16$ ،

پ: $x^4 + 5x^2 - 2x - 7$

بنستیز- یا لومړنی تابع

$$F'(x) = f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعاليت

- په پورته مساوات کې به $F(x)$ څنګه وليکلاي شو؟

- $F(x)$ نسبت و $f(x)$ ته څه بلل کيږي او په څټ، $f(x)$ د $F(x)$ څه بلل کئږي؟

په پورته دواړو پوښتنو کې فکر وکړي، چې پايلې يې دا لاندې دي:

ددې لپاره چې د مشتقنيولو او اينتيګرال نيولو ترمنځ اړيکی لاس ته راوړو، د لومړنی تابع کلمه په لاندې توګه تعريفوو:

> پيژند (تعريف):
>
> تابع $y = f(x)$ دې په يوه واز اينتروال I کی تعريف وي. هر يوه هلته موجوده مشتقوړ $F(x)$ تابع چی $F'(x) = f(x)$ شرايط پوره کړي، د $f(x)$ بنسټيز- ، ساده – يا لومړنی تابع بلل کيږي

په ساده توګه ليدل کيږي چی د يوې $f(x)$ تابع لپاره نه يواځي يو بنسټيز تابع $F(x)$ موجود دی، د بيلګي په توګه $F_0(x) = x^2,\ F_1(x) = x^2 + 1,\ F_2(x) = x^2 + 2$ تابع، بلکي په عمومي ډول

$F(x) = x^2 + C$، چې دا ټول مساوي مشتقونه $f(x) = 2x$ لري.

د پورته ښوونو پايله، چی څنګه سړی د يوه متمادي تابع $f(x)$ لومړنیتابع پيدا کوي، په لاندې ډول ده:

جمله:

$y = f(x)$ دې په اينتروال I کی متمادي تابع وي، نو د $a \in I$ لپاره

$F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ د $f(x)$، يوه لومړنیتابع ده، دټولو $c \in I$ لپاره .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د f (x) هره بله لومړنى(بنسټيزه) تابع لاندې بڼه لري:

$$F(x) = F_a(x) + C, \quad C \in R$$

ځواب : ښايو چې Fa (x) دf (x) بنسټيز تابع ده. ددې د ښوولو لپاره ښايو چې د Fa (x)لپاره د پورته پيژند شرايط باور لري. د Fa (x) مشتق د x ∈ I او x ≠ a لپاره په لاندې ډول ده.

$$F_a'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt\right]$$

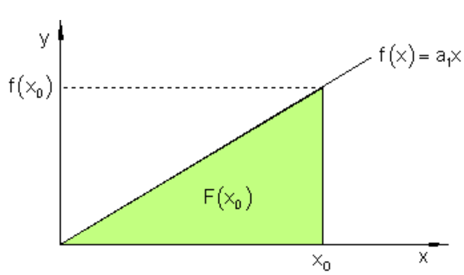
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\int_a^{x+h} f(t)dt$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot h\cdot f(\xi), \quad \xi\in[x, x+h]$$

د ليميټ منځ ارزښت جملې له مخې داسې يوه ξ شته دى)
(د متماديت له امله $(f(\xi)\to f(x)$ = f(x)

سطحه او لومړنى تابع:

سطحې تابع ته ترمخ راوړنه:

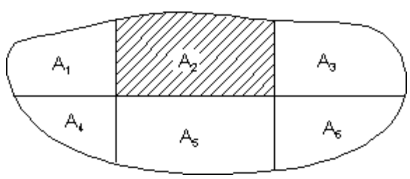
	د تابع $f(x) = a_1 x$ ګراف په کارتيزي وضعيه سيستم (پروت ولاړسيستم) په سرچينه کې يوه کرښه انځوروي. يو تابع غواړو پيدا کړو، چې د ګراف او x -محور ترمنځ، د x_0 په واکوالي يا تابعيت کې سطحه په ګوته کوي. دا چې دا جوړه شوې سطحه يو مثلث دى، نو حل يې د مثلث د سطحې فرمول په مرسته

(c) ketabton.com: The Digital Library

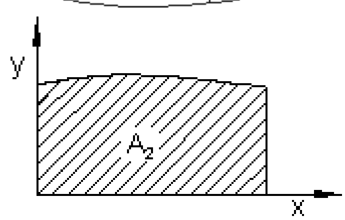
ساده پیدا کیږي: $A=\frac{g\cdot h}{2}$ زموږ د مسألي لپاره متحوله داسي تغیروو: $A\to F(x_0);\ g\to x_0;\ h\to f(x_0)=a_1x_0$	$F(x_0)=\frac{x_0\cdot f(x_0)}{2}$ د $f(x_0)=a_1x_0$ سره په لاندي ډول دی: $F(x_0)=\frac{x_0\cdot a_1x_0}{2}=\frac{a_1}{2}x_0^2$

تابع $F(x_0)$ د ګراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واکوالي(تابعیت) کي تشریح کوي یا ښايي. موږ دا تابع د **سطحې تابع** بولو.

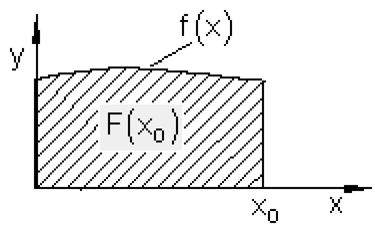
د سطحې پرابلم:



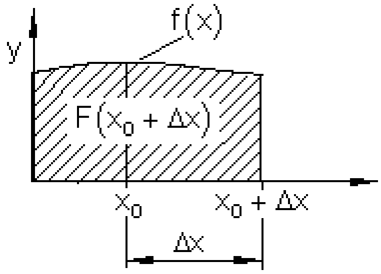
هره له کږوکرښو رابنده سطحه په پای ډېرو پلونو(قدمونو)، چي په هغې کي فقط یوه یوه کږه کرښه رامنځ ته کیږي.
نوري ټولي رابندوني سیده کرښیزې دي.
هره یوه د سطحې برخه(د بیلګې په توګه دلته **A_2**) کېدی شي د وضعیه قیمتونو سیستم کي د یوې سطحی په څېر انځور شي، چي د کږې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي.



که له کږوکرښو رابند ګراف د f(x) متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کیږي، چي ایا یو تابع شته چي د افقي(پروت) محورارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظیم کړي، لکه په پیلبیلګه کې؟

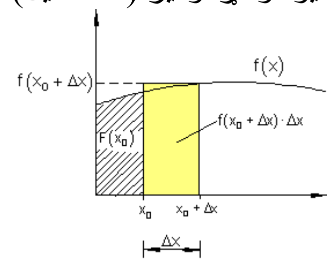


که داسي یو تابعF شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چې د x_0 افقي محورارزښت تنظیم وي، نو باید د افقي(پروت) محور ارزښت $(x_0+\Delta x)$په سطحه باندې تنظیم کړای شي.

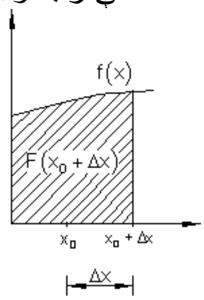


(c) ketabton.com: The Digital Library

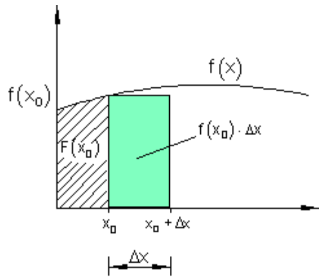
په یوه ولاړګوډیز (مستطیل) کې د سطحې رابندول:



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه د رښتوني سطحې څخه لویه ده



رینښتوني سطحه ده.



د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه له رینښتوني سطحې څه کوچنی ده.

که د سطحې پټې (یا کوچني مستطیلونه)هرڅومره کوچني شي، په همغه اندازه د اصلي سطحې د مساحت څخه یې توپیر کمیږي.
دا اړودوالی د ریاضیاتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کېدی شي:

$F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$	$F(x_0+\Delta x)$	$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x$

دا مو دې لاندې نابرابرونونویا نامساواتو ته راهڅوي

$$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x) \le F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |F(x_0)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x)-F(x_0) \le f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |:\Delta x$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) \le \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \le f(x_0+\Delta x)$$

لیمیټ یې نیسو:

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0) \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)$$

$$f(x_0) \le F'(x_0) \le f(x_0)$$

$$f(x_0) = F'(x_0) = f(x_0)$$

نو لرو: $\underline{\underline{F'(x_0)=f(x_0)}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا، چې د سطحې $F(x)$ مشتق د کړې کرښې د تابع ارزښت $f(x_0)$ سره په x_0 ځای کې برابر دی.

مونږ لیکو: $F'(x_0) = \frac{dF(x_0)}{dx} = f(x_0)$ یا $\boxed{F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)}$

که مونږ بریالي شو، داسې یو تابع $F(x)$ پیداکړو چې مشتق یې د رابندې کړې $f(x)$تابع وي، نو $F(x)$ د سطحې تابع دی.

که مونږ یو تابع د لومړني تابع څخه رابیل کړو، نو دا مشتق کول بولو. د یوې سطحې تابع پیدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی. سرې کړې شي فورمال ووایي:

د یوې سطحې مساحت تابع، چې پیداکړو، دا معنا لري چې ورګډول یا انټیګرالول یې شمېرو.

د یوه ساده توان تابع په بېلګه د احساس له مخې یوه لار پیداکېدی شي، چې دا څنګه ایتېګرالوي.

توانتابع : $f(x) = x^3 \quad \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot x^{3-1} = 3x^2$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په یو کمېږي او پوتنځتابع د زاړه پوتنځ سره ضربېږي.

انتیګرالونه (زیاتونه یاورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په یو جګېږي اوپوتنځتابع په نوي اګسپوننت وېشل کېږي.

دا همدا اوس ازمایو:

توانتابع: $f(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow F(x) = \frac{3}{2+1} x^{2+1} = \underline{\underline{x^3}}$

تابع $F(x)$ د $f(x)$ بنسټتابع (لومړنۍ تابع یا ساده تابع) بلل کېږي، ځکه چې $f(x)$ له $F(x)$ څخه لاس ته ارځي یا را پیداکېږي یا راځېږي.

تمرینونه:

– و ښایئ، چې د F او دG توابع د f تابع لومړنۍ تابع وې ده.

$$a)\ F(x) = x^3 + x + 4 \quad , \quad G(x) = x^3 + x + 1$$

$$b)\ F(x) = (x-3)^2 \quad , \quad G(x) = x^2 - 6x + 4$$

$$c)\ F(x) = \frac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x) = \frac{3x+5}{x+2}$$

$$d)\ F(x) = 1 + \sin x \quad , \quad G(x) = \sin x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناټاکلی انتیګرال

$$\int f(x)dx$$

فعالیتونه:

-- په پورته ځیره کې $\int$ په څه مفهوم دی

-- په تیر ه برخه کې مو $F(x)$ د $f(x)$څه بللی وو او اوس به $F(x)=\int f(x)dx$ د لومړنئ تابع سره څه توپیر ولري؟

و به ګورو، چې نا ټاکلی انتیګرال د لومړنی تابع لپاره بل نوم دی.

که دیوې ورکړ شوې$f(x)$ تابع $F(x)$ لومړنی تابع، یعني $F(x)$ وپېژنو، نو د یوې ثابتې c د ور جمع کولوسره د $f(x)$ د ټولو لومړنیو توابعو سټ G لاسته راوړو(c په خوښه یو حقیقي عدد دئ).

مور د $f(x)$ تابع د $F(x)$ لومړنی تابع ټاکنه یا اینتګرلونه هم بولو او ددې له پاره لیکو:

$$\frac{dF}{dx}=f(x) \quad \Leftrightarrow \quad dF(x)=f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad F(x)=\int dF(x)=\int f(x)dx$$

نو لرو : $F(x)=\int f(x)dx$

دا تراوسه فورمال لیکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.

مور لومړنی توابع پلټو

> بیلګه:
> لومړنی تابع $F(x)$ دې پیدا شي، چې مشتق یې $f(x) = 2x$ دی.
> قاعده داسې ده $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x\,dx$

مور ازمایو: $F(x)=x^2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$

$F(x)=x^2+2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$. په ټولیزه توګه باور لري:

$F(x)=x^2+C$ ځکه چې په هرحالت کې لرو: $F'(x)=2x=f(x)$

دواړه توابع په ثابت غړي کې یو له بل توپیر لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چې د مشتق سره هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله باید دې خپلې لار ته تغیر ورکړو.

قاعده(لار): باور لري: $\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$

د لومړنیو توابعو سټ(ډېرى): بیلګه ښایي، چې د تابع f(x) لپاره نه یواځې یو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې یواځې ثابت عدد کې یو له بل سره توپیر لري، چې دا د f(x) د لومړنییو توابعو سټ بولو.

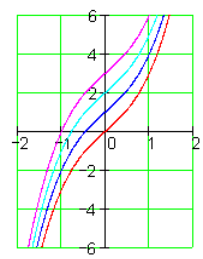
بیلګه: یو لومړنیتابع F(x) دې پیدا شي، چې د هغه مشتق $f(x) = 3x^2 + 2$ وي.

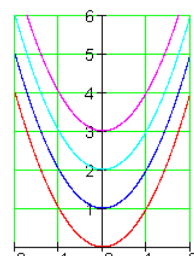
$F(x) = x^3 + 2x + C$ ، ځکه چې $F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x)$

د ټولو لومړنیو توابعو ډېرى دې د منحنیو ډلې په څېر انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې یو له بل توپیر لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بیلګې وکتل شي.

$F(x) = x^3 + 2x + C$ $\qquad$ $F(x) = x^2 + C$





تمرینونه:

د لاندې توابعو له پاره لومړني توابع پیدا کړئ او لاس ته راوړني یې د مشتق له لارې و ازمایئ.

$a)\ \ f(x) = x^2$ $\qquad b)\ \ f(x) = 2x^2$ $\qquad c)\ \ f(x) = x$

$d)\ \ f(x) = -2x$ $\qquad e)\ \ f(x) = \frac{1}{2}x^2$ $\qquad f)\ \ f(x) = -\frac{1}{4}x$

$g)\ \ f(x) = x^3$ $\qquad h)\ \ f(x) = 4x^3$ $\qquad i)\ \ f(x) = 2$

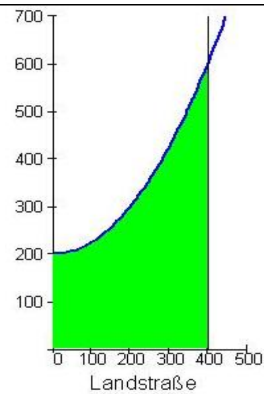
$j)\ \ f(x) = x + 1$ $\qquad k)\ \ f(x) = x^2 + x - 3$ $\qquad l)\ \ f(x) = x^n;\ n \in N$

$m)\ \ f(x) = x^2$ $\qquad n)\ \ f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټاکلي انتيګرال شميرنه

	ټاکلی انتيګرال همغه د ريمن انتيګرال دی، چې يوه د تابع د ګراف او x محور ترمنځ سطحه شميري.

ټاکلی انتيګرال:

که f يو حقيقي تابع وي، نو د ټاکل انتيګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انتيګرال د پولې(حد) a تر پولې(حد) b پا د a او b حدونو ترمنځ يا انتيګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې يوه لوريزه سطحه پوهيږو د f ګراف لاندې د a او b تر منځ.

فعاليت:

اول: ووايئ چې په پورته انتيګرال کې $f(x)$ څه نوميږي؟

G دې په بند انتروال $a \le x \le b$ کې د $g(x)$ لومړنی انتيګرال وي، د $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ سره، نو

باور لري: $\int_a^t f(t)dt = G(b)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د دوه لومړنیو توابعو F او G تر منځ یو ثابت C توپیر شته، نو $G(x) = F(x) + C$ باور لري. د $x=b$ لپاره لاسته راوړو: $G(b) = F(b) + C$

دا چې $G(x) = \int_a^a f(t)dt = 0$ دی او $G(a)=F(a)+ C$ دی، نو $C = -F(a)$ ده.

دا په دې معنا، چې $G(b) = F(b) - F(a)$ همداسې $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

د متحولې د نوم بدلون څخه وروسته لاس ته راوړو $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

له دې سره مو د مشتق او انتیګرال جمله لاس ته راوړه

یا دا وینا د مشتق - او انتیګرالشمېرنې بنسټیزه جمله بلل کیږي:

> تعریف:
>
> f په انتروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیګرال دی : $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$
>
> د $F(b) - F(a)$ لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توګه دی
>
> $$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

له دې سره مو د ټاکي انتیګرال شمېرنه په لومړني انتیګرال بېرته واړوله او د مشتق او انتیګرال تر منځ مو اړیکي رامح ته کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې:

$$a)\ \int_1^2 x^2dx=\left[\frac{x^3}{x}\right]_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

$$b)\ \int_2^4 \frac{1}{x^2}dx=\int_2^4 x^{-2}dx=\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^4=\left[-\frac{1}{x}\right]_2^4=\frac{1}{4}$$

$$c)\ \int_1^3 \sqrt{x}\,dx=\int_1^3 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]=\frac{2}{3}[\sqrt{x^3}]_1^3(\sqrt{3^3}-\sqrt{1^3}$$

$$=\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)=2(\sqrt{3}-\frac{1}{3})$$

د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لاندې جملې رښتیا دي:

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\cdot\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b[f(x)+g(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx+$$

تکمیلیدونکي بنسټونه:

د $F(b)-F(a)$ له امله د انتګرالوني ثابته c له منځه ځي. له دې امله کولي شو د انتیګرال ثابتي ټاکلو لپاره $c=0$ ولیکو.

بیلګه :

د ټاکلي انتیګرال $\int_1^3 x^2dx$ ارزښت و ټاکی. د توان قانون له مخې لومړنی تابع

یعنې $F(x)=\frac{x^3}{3}+C$ پیدا کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښوونه: موږ په دا لاندې ډول ښایو:

$$\int_1^3 x^2dx=\left[\frac{x^2}{3}+C\right]_1^3=F(3)-F(1)=\frac{3^3}{3}+C-\left(\frac{1^3}{3}+C\right)=\frac{27}{3}+C-\frac{1}{3}-C$$
$$\int_1^3 x^2dx=\frac{26}{3}$$

اساسات تکمیل کننده:

از د لیل F(b) – F(a) ثابت C انتگرال گرفتن از بین میرود. ازین بابت میتوانیم براي تعین ثابت انتیگرال بنویسیم C =0 .

مثال :

قیمت انتیگرال معین $\int_{-\pi}^{+0,5\pi}\cos x dx$ را تعیین نمایید.

ثبوت: ما قرار زیل ثبوت میکنیم:

$$\int_{-\pi}^{+0.5\pi}\cos x\,dx=[\sin x]_{-\pi}^{0.5\pi}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin(-\pi)=1-0=1$$

یادونه : دا چې په دې برخه کې یواځې د ټاکلي انتیګرال ارزښت غوښتل شوي دی او نه د یوې منحني لاندې سطحه، نو باید نه دی چې صفرځایونه په پام کې ونیول شي.

عوره یادونه: دادې په یاد وي، چې ناټاکلی انتیګرال تابع ده او ټاکلی انتیګرال یو عدد.

تمرینونه:

د لاندې ټاکلو انتیګرالونو ارزښتونه وشمیرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \int_0^3 4dx$ $b)\ \int_{-3}^{-1} xdx$ $c)\ \int_1^e \frac{1}{x}dx$

$d)\ \int_1^e (2+\frac{1}{x})dx$ $e)\ \int_{-1}^0 e^x dx$ $f)\ \int_0^\pi \sin x\, dx$

$i)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} \frac{1}{\cos^2 x}dx$ $j)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x}dx$ $k)\ \int_{-2}^{2} x^3 dx$

$l)\ \int_2^6 (1+x)dx$ $m)\ \int_1^2 (x^2-x^5)dx$ $n)\ \int_{-2}^{0}\left(\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3}\right)dx$

د ناټکلي انتیګرال څخه و ټاکلي انتیګرال ته

ترمخ راوړنه یا وړاندراوړنه

موږ ولیدل، چې څنګه یو تابع f(x) ته لومړنی تابع F(x) منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د یوې ورجمع کوونکي ثابتي کي یو له بل توپیر لري.

فعالیت :

-- د $\int f(x)dx$ او $\int_a^b f(x)dx$ تر منځ توپیر باندې فکر وکړئ؟

-- د $\int f(x)dx$ او $\int_a^b f(x)dx$ پایله څه ده ؟

- دا توپیر یې د یوې بیلګې په بنسټ روښانه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

لرو: تابع $f(x)=3x^2+2$ او د دې د لومړنیو توابعو سټ $f(x)=x^3+2x+C$

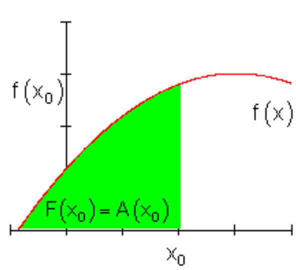
پیژند : د ټولو لومړنیو توابعو سټ و یوې تابع f(x) ته ،،ناټاکلی انتیګرال ،، بلل کیږي او ددې له پاره لیکو: $\boxed{\int f(x)dx=F(x)+C}$

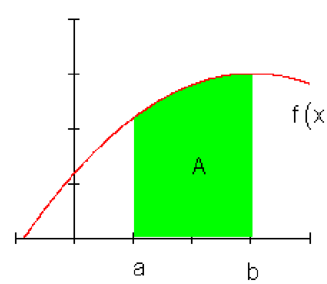
د مشتق- او انتیګرالشمیرنې ترمنځ اړیکې کېدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

جمله(قضیه) : د ناټاکلی انتیګرالشمیرنه د مشتقشمیرنې برعکس انځوروي

$$\frac{d[f(x)]+C}{dx}=[F(x)+C]'=f(x)$$

د تابع د ګراف لاندې او د انتروال [a ; b] تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.

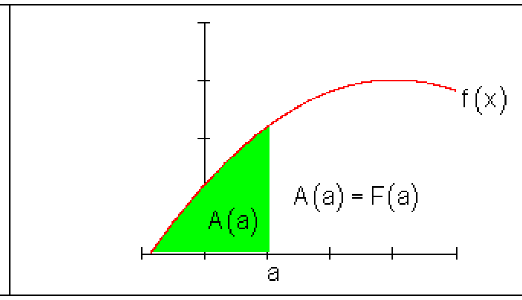


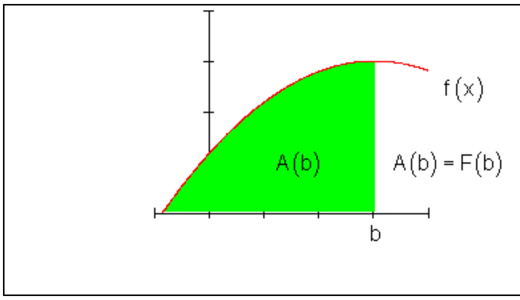


د یوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لاربنوده وي:
د یوې سطحې، چې د یوې په پام کې نیولې f(x) تابع ګراف لاندې ده تر x_0 ځای پورې

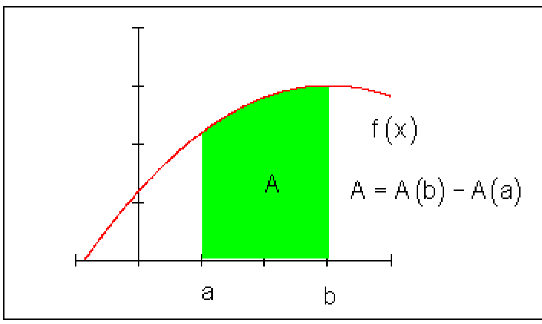
(c) ketabton.com: The Digital Library

او يوې $F'(x)$ تابع، چې د$F(x)$ تابع مشتق د x_0 ځاي د f تابع د تابع ارزښت سره د x_0 په ځاي کې برابر وي، ترمنځ اړيکې شته دی، يعنې





د انټروال $[a,b]$ حدونو ترمنځ سطحې پيداکول د تابع د ګراف سطحو د کمښت څخه په ځاي $(A(b))$ b او سطحې په $(A(a))$ a ځاي کې .، يعنې
په $A= A(b) – A(a)$ همدې توګه
$F= F(b) – F(a)$ لاس ته راځي.



په انټروال $[a,b]$ کې د تابعګراف لاندې سطحه د لومړنيو توابعو تفريق دی:

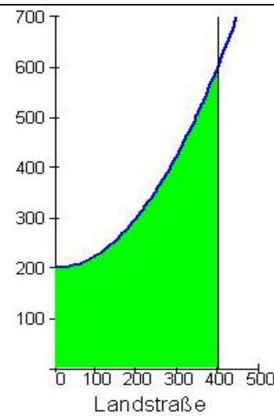
$$\boxed{A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x)dx}$$

دا انټيګرال ټاکلی انټيګرال هم بلل کيږي.

جمله :
دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پيل بېلګه کې راوړې د چمن سطحه وشمېرو.

ثابته له تفريق سره لرې کيږي. په عمل کې د دې مسآلې د حل لپاره يوه بله لار ګتوره راوستلې يا ګتوره بنوولې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A=\int_0^{400}\left(\frac{1}{400}x^2+200\right)dx=\frac{1}{1200}x^3+200\cdot x\Big|_0^{400}$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^3+200\cdot 400\underline{\left[\frac{1}{1200}0^3+200\cdot 0\right]}$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^3+200\cdot 400=\underline{\underline{133333.\bar{3}}}$$

تمرینونه: لاندې ټاکلي انتیګرالونه وشمېرئ.

$$\int_1^3 x\,dx\ ,\ \int_1^3 (x^2-1)dx\ ,\ \int_{-2}^2 4dx\ ,\ \int_3^4 dx\ ,$$

$$\int_0^4 (2x-5)dx\ ,\ \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}\left(\frac{1}{2}x^2-4\right)dx$$

د انتیګرالونې قاعدې

د ناټاکلي ایتیګرال انتیګرالونې قاعدې: په لاندې اینتیګریشن قاعدوکي د اینتیګریشن ثابته باندې صرف نظر کیږي‌دلته مساوات تر یوې ورجمع شوې ثابتې C پورې مساوات دی ، په دې معنا چې دمساواتو تر منځ یواځې یوه ثابته کیدی شي زیاته یا کمه وي. دا قاعده کیدی شي چې په ټاکلې انتیګرال کې ښوولې جملی سره سم ټاکلي ایتیګرال ته نقل شي یعني په ټاکلي ایتیګرال استعمال شي . دا قاعدې کیدی شي چې د تیرو درسونو سره سم د دوارو خواو د مشتق نیولو سره وښول شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله :

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع (f (x په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a\cdot f\,(x)\,dx = a\int f\,(x)\,dx\,, \qquad a\in R$$

جمله: د جمعي (تفریق) قاعده که $f_1(x)$ او $f_2(x)$ په یوه ایتروال کی نه پرېکېدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

بیلګې:

لاندې ایتیګرالونه کیدی شي چی د مخ ته تېرو جملو په استعمالیدو او ساده څیره بدلون بیرته په بنستیزو اینتیګرالونو بدلکړای شي

$$a)\quad \int \frac{dx}{3x^4} = \frac{1}{3}\int x^{-4}dx = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-3} + C = -\frac{1}{9x^3} + C,$$

$$b)\quad \int 3x^2 + 4x - 1)\,dx = 3\int x^2dx + 4\int xdx - \int dx = 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + 4\cdot\frac{1}{2}x^2 - x + C$$
$$= x^3 + 2x^2 - x + C,$$

$$c)\quad \int \frac{2x^3 - 3x}{\sqrt{x}}dx = 2\int \frac{x^3}{\sqrt{x}}\,dx - 3\int \frac{x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int x^{\frac{5}{2}}dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$
$$= 2\cdot\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{7}x^3\cdot\sqrt{x} - 2x\cdot\sqrt{x} + C$$

تمرینونه: د لاندې توابعو انتیګرال ونیسئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\quad \int \frac{2x^3-3x}{\sqrt{x}}dx \quad , \quad b)\ \int_1^2 \frac{\sqrt{x}-1}{x}dx$$

د اکسپوننشل توابعو انتیګرالونه

بنسټ :

د طبیعي اکسپوننشل تابع $f(x)=e^x$ لپاره لرو:

د ټولیز اکسپوننشل تابع $\int e^x dx = e^x + C$ $(a \in IR^+ , a \neq 1)$ لپاره لرو:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

بیلګه : دا ناټاکلی اکسپوننشل تابع $\int 2^{x-3} dx$ غواړو پیداکړو

بڼه بدون:د توان قانون سره سم لرو $2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{1}{8}2^x$

د فاکتوروني قانون سره سم لرو: $\int \frac{1}{8}2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx$

انتیګرال یې ونیسئ: $\frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2}+c = \frac{2^x}{8\cdot \ln 2}+c = \frac{2^{x-3}}{\ln 2}+c$

تمرینونه:

لاندې انتیګرالونه وشمیرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \int 3^{x+1}dx$ $\qquad b)\ \int 2^{-x}dx$ $\qquad c)\ \int a^{x+b}dx$

$d)\ \int \frac{1}{a^x}dx$ $\qquad e)\ \int 2^x \cdot 3^x dx$ $\qquad f)\ \int \frac{2^x}{3^x}dx$

$i)\ \int \frac{4^{x+3}}{2^x}dx$ $\qquad j)\ \int \frac{5^x+3^x}{2^x}dx$ $\qquad k)\ \int (1+2^x)dx$

د لوګاریتمي توابعو انتیګرالونه

بنسټ: د طبیعي لوګاریتم تابع $f(x)=\ln x(x\in IR^+)$ لپاره $\int \ln xdx = x\cdot\ln x - x + c$ دی .

د ټولیز لوګاریتم تابع $f(x)=\log_a x\ ,a\in IR^+ ,a\neq 1)$

لپاره $\int \log_a xdx = \frac{x\cdot\ln x - x}{\ln a}+c$ دی.

بیلګه :

ناټکلی انتیګرال $\int \ln 3xdx$ غواړو پیدا کړو:

بڼه بدلون او د فاکتور قاعدې استعمال:

$$\int \ln 3xdx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3xdx \div \int \ln xdx = x\cdot\ln 3 + x\cdot\ln x - x + c$$

$$\int \ln 3xdx = x\cdot(\ln 3 + \ln x - 1) + c$$

تمرینونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا لاندې ناټاکلي انتېګرالونه پيداکړئ

$a)\ \int \ln 2x^3 dx$ $\qquad$ $b)\ \int \ln \sqrt{x} dx$

$c)\ \int \log \frac{x}{2} dx$ $\qquad$ $d)\ \int 3 \log \frac{1}{x} dx$

بنسټيز اينټيګرالونه په يوه جدول کې

د اينټيګرالولو او مشتق نيول د اړيکو په بنسټ کيدى شي چې د بنسټيزو اينټيګرالونو يو جدول ترتيب شي. دا په مشتق جدول کی راوړل شوو بنسټيزو توابعوبرعکس څرګنديږي.

Nr.	$f(x)$	$f(x) = \int f(x)dx$	نيونه يا فرضيه
1	x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	$n \in Z \setminus \{-1\}$
2	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$x \neq 0$
3	x^a	$\frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$	$a \in R \setminus \{-1\},\ x > 0$
4	a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x + C$	$a > 0,\ a \neq 1$
5	e^x	$e^x + C$	
6	$\sin x$	$-\cos x + C$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

7	$\cos x$	$\sin x + C$	
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x + C$	$x \neq n \cdot \pi, \quad n \in Z$

بيلګې :

د جدول او تيرو جملو څخه په ګټه لاندې اينتيګرالونه په لاندې ساده ډول په بنسټيز توابعو بدليدلی شي .

$$a)\quad \int \frac{1}{x^5}dx = \int x^{-5}dx = -\frac{1}{4}x^{-4} + C \text{ ,..............................1,}$$

$$b)\quad \int \frac{\sqrt{x}}{x}dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (x > 0), \text{ ....3,}$$

$$c)\quad \int \sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x}}\,dx = \int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}dx = \int x^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \quad (x > 0), \text{ ....3,}$$

$$d)\quad \int \frac{\sin 2x}{2\sin x}dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{2\sin x}dx = \int \cos x \, dx = \sin x + C \text{ , ...(4,21) 6,}$$

$$e)\quad \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi), \qquad (4,11) \quad 9,$$

$$f)\quad \int (1 + \cot^2 x)\, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\int \cot x + C \quad (x \neq n\pi) \ (4,12) \qquad 8,$$

$$g)\quad \int \frac{(1+x)(1-x)}{x - x^3}dx = \int \frac{1 - x^2}{x(1-x^2)}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq \pm 1,\ x \neq 0), \quad Nr.2,$$

$$h)\quad \int_{-1}^{0} e^x dx = e^x \Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{2}, \text{ ....5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بدلون قانون Substitutionlaw

د ناټاکلې انتيګرال حل د بدلون له لارې(ننوتنه راځي)

$$\int f(x)dx = \int (x^2+4x-5)^n dx$$

فعالیت:

- د $\int (x^2 - x)dx$ انتيګرال ونيسى

- د $\int (x^2+5x)^3 dx$ انتيګرال نيولو کې فکر وکړئ او که وتونېدی انتيګرال يې ونيسی.

تراوسه پورې مو فقط انتيګرالونه او جملې حل کړې، چې د لومړنيو توابعو په انتيګرال اړول کېدل. له دې لاس ته راغلو لومړنيو انتېګرالونو د نورو انتېګرالولو حل جملې لاس ته راځي. د لومړنۍ انتېګرالوني سيده استعمال تل ساده نه دی، لکه چې په لاندې کې به وليدل شي.

جمله :

د ،،بدلون (قاعده)،، (Substitution لاتين :د يوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لويه ايښوول (لنډ: بدلون) د فرضيو لاندې چی u = g (x) متمادي او مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

حل : د ښي اړخ مشتق د تيرو درسونو په بنسټ په لاندې ډول دی:

$$\frac{d}{dx}\int f(u)\,du = \frac{d}{du}\int f(u)\,du \cdot \frac{du}{dx} = f(u)\cdot u' = f[g(x)]\cdot g'(x),$$

دا د کېڼ اړخ د مشتق سره سر خوري. قاعده د ضرب انتيګراليدو لپاره مساعده ده، په کوم کی چی يو فاکتور زنځيري تابع [f [g (x) وي او دا بل فاکتور (ضريب) يی د دننه تابع مشتق g ' (x) وي. سرې د دننه تابع لپاره په دې توګه متحولې بدلوي يا

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځاي په ځاي كويک: $u = g(x)$ مشتق جوړوي په

همدې ډول $du = g'(x)\,dx$

۲۲۶ د بدلون قانون

د بريالي انتيګراليدو وروسته بدلون بيرته راګرځول كيږي.

بيلګه a :

لرو : $I = \int 2\cos(2x-1)dx$. د دې اتنيګرال وشمېرئ.

بدلون يا په ځاى كونه: $2x-1=u$

مشتق $2 = du/dx$ همداسی $2dx = du$

$$I = \int \cos u\,du = \sin u + C = \sin(2x-1) + C$$

بيلګه b : لرو $I = \int 3\cos(2x+1)dx$

بدلوو : $2x = u-1$, مشتق $2 = du/dx$ همداسی $dx = (1/2)\,du$

$$I = \int 3\cos u \cdot \frac{1}{2}du = \frac{3}{2}\int \cos u\,du = \frac{3}{2}\sin(2x-1) + C$$

وموليدل چی ځنځيري تابع د لايني دننه تابع سره د بدلونو قاعدې سره تل اينتيګرال كيدی شي، ځكه چی د لايني تابع مشتق ثابت ده او ثابت فاكتور د تيرې جملی سره سم د اينتيګرال تر مخ (موخه كېن لور ده) ليكل كيږي.

بيلګه:

لرو $I = \sqrt{-3x+5}\;dx$

بدلون: $-3x+5=u$

(c) ketabton.com: The Digital Library

را بیلیدنه: $-3 = du/dx \Leftrightarrow dx = -1/3 \cdot du$

$$I = \int \sqrt{u} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) du = -\frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{9}\cdot\sqrt{(-3x+5)^3} + C.$$

$$b) \quad I = \int \frac{1}{2} e^{-2x-3} dx.$$

$$-2x-3 = u, \qquad -2 = \frac{du}{dx} \qquad dx = -\frac{1}{2} du,$$

$$I = \int \frac{1}{2} e^u \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{4}\int e^u du = -\frac{1}{4} e^u + C = -\frac{1}{4} e^{-2x-3} + C.$$

$$c) \quad I = \int \frac{2dx}{x+2}.$$

$$x+2 = u, \qquad 1 = \frac{du}{dx} \qquad dx = du$$

$$I = \int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C.$$

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کيږي لکه لاندې بلګه:

بيلګه: عوارو د $f(x) = e^x$ مشتق بيدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پيدا کولي شو، يعنې لرو:

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^x dx = e^x + C$$

ګورو، چې $F'(x) = e^x = f(x)$ دی.

که ولرو: $f(x) = e^{2x}$ او د پورته په څېر لاړ شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x) dx = \int e^{2x} dx \neq e^{2x} + C$$

وي $F(x) = e^{2x} + C$ **دی، که** $F'(x) = 2e^{2x} \neq f(x)$

په داسې حالتونو کې د بدلون قاعده مرسته کوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:
د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسی

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

بدلون : $u(x)=2x=u$

جوړ کړئ: $u'(x)=\frac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\frac{du}{2}$

$$\int f(x)dx=\int e^{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

د بدلون برعکس: $\frac{1}{2}e^{u}+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

نو لرو: $F(x)\int(x)dx=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C$

ازمایښت: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

بیلګه :
وښایی چې باور لري. $f(x)=(x+1)^2 \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int(x+1)^2dx$.

بدلون $u(x)=x+1=u$

جوړ کړی

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=1 \Rightarrow dx=\frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx=\int u^2\frac{du}{1}=\int u^2du=\frac{u^3}{3}+C$$

بیرته بدلون: $\frac{u^3}{3}+C=\frac{(x+1)^3}{3}+C$

نو: $\int(x)dx=\int(x+1)^2dx=\frac{(x+1)^2}{3}+C$

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

و ښايي چې باور لري: $f(x)=(3x+6)^3 \quad \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int (3x+6)^3 dx$
بدلون: $u(x)=3x+6=u$
جوړوو: $u'(x)=\frac{du}{dx}=3 \quad \Rightarrow dx=\frac{du}{3}$
$\int f(x)dx=\int u^3\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\int u^3 du=\frac{u^4}{12}+C$
بېرته بدلون: $\frac{u^4}{12}(3x+6)^4+C$
نو لرو: $\int (x)dx=\int (3x+6)^3 dx=\frac{1}{12}(3x+6)^4+C$

تمرينونه: د $f(x)=x\cdot\ln(x^2)$ تابع انتيگرال وشميرئ.

د ټاکلو انتيګرالونو حل د بدلون له لارې

$$\int_3^8 (x^2+4x-5)^n dx$$

فعاليت:

- د $\int_a^b (x^2-x)dx$ انتيگرال ونيسی

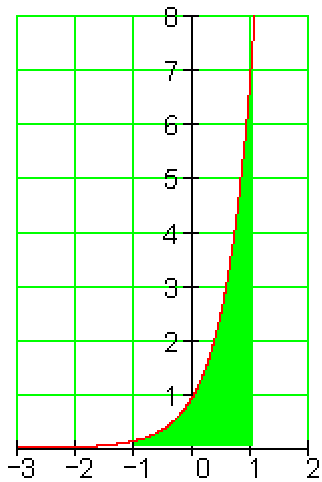
- د $\int_1^5 (x^2+5x)^3 dx$ انتيگرال نيولو کې فکر وکړئ او که وتوانېدی انتيگرال يې ونيسی.

ټاکلي انتيګرالونه هم د بدلون له لارې حل کيږي.

بيلګه : وښاياست: $f(x)=e^{2x} \quad \Rightarrow F(x)=\int_{-1}^{1} e^{2x}dx$ د انتيګرال حل د بدلون له لارې:	

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) := e^{2 \cdot x}$



۱ – بدلون $u(x) = 2x$

۲ – د dx په ځای کيږدی

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

۳ – د پولو بدلون

- لاندې پوله $u(-1) = -2$

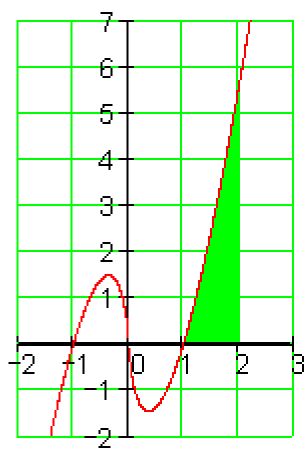
- پورته پوله

۴ - په انتيګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^u du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^2 - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3.627}}$$

بيلګه :

$f(x) := 2x \cdot \ln\left(x^2\right)$



$$f(x) = 2x \cdot \ln(x^2) \quad \Rightarrow F(x) = \int_1^2 2x \cdot \ln(x^2) dx$$

د انتيګرال حل د بدلون له لارې

۱ – بدلون $u(x) = x^2$

۲ – د ځای په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

۳ – د پولې بدلون

- لاندې پوله $u(1) = 1$

- پورته پوله $u(2) = 4$

۴ – په انتيګرال کې ځای په ځای کړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u) du = \left[u \cdot \ln(u) - u\right]_1^4$$

$$= \left[4 \cdot \ln(4) - 4\right] - \left[1 \cdot \ln(1) - 1\right] \approx \underline{\underline{2.545}}$$

تمرين: لاندې انتيګرالونه وشميرئ يا حل کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ - $\int \frac{3}{4x+1}\,dx$　　۲ - $\int_0^2 \frac{4}{4-x}\,dx$

۳ - $\int \frac{2}{(1-x)^2}\,dx$　　۴ - $\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx$

۵ - $\int_{-2}^{2} \frac{10}{(x-4)^5}\,dx$　　۶ - $\int_{-2}^{2} e^{1-x}\,dx$

۷ - $\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx$　　۸ - $\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$

۹ - $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx$　　۱۰ - $\int_0^2 \left(x-1-e^{-\frac{1}{2}x} \right) dx$

ټوټه انتيګرالونه

$$f(x).g(x) = x.\ln(x^2)$$

ټوټه انتيګرالونه، چې ضرب انتيګرالونه هم بلل کيږي، په انتيګرالشميرنه کې د لومړنيو توابعو ټاکلو يا شميرلو لپاره امکان دی. دا کيدی شي د مشتقشميرنې د برعکسکونی په څير وګڼل شي.

فعاليت:

- څه بايد وشي، چې دا پورته په ننوتنه کې تابع انتيګرال نيونه شونې شي؟

___ ايا دا پورته ننوتنه کې راغلي بوښتنه دا تر اوسه ورسره بلدې لارې يعنې د (بنې) بدلون له لارې حل دی؟

د ټوټه انتيګرالونې له پاره لاندې قانون کاروي، چې د متمادي (نه پرېکيدونکي) توابعو f او g له پاره باور لري:.

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا قانون ټيک هلته ګټور دی، که د f مشتقکونی سره يو ساده تابع منح ته راځي.

پيل

د ضرب قانون (د ضرب مشتقنيونې) څخه لرو:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتيګرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

يا همدغسې، لکه په زياتو رياضي کتابونو کې چې پيداکيږي.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

د دې مخ ته حدونو لپاره ګټور دی، چې لومړی ځان په ناټاکلي انتيګرال محدود کړو، چې دا نا اړينو حدونو څخه چې ليد مو رابندوي، ازاد يو.

بيلګه:

د بيلګې په توګه لاندی انتيګرال شميرو.

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

يو ساده انتيګرالېږ تابع $g'(x)$ او همداسی يو ساده مشتقوړ تابع $f(x)$ لټوو. نيسو چې $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د ln(x) انتيګرالونه نوې ln(x) راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نيسو او انتيګرالوو، نو لرو:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ او } g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکبنه:

اوس دی u او v په خوښه توابع وي.U او V دې د u او V لومړني توابع وي ، او همداسې دې u' او v' دu او v مشتقونه وي.

u تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړیتوب لري، v تابع ده چې د انتیګرالونې له پاره لومړیتوب لري. نو باورلري:

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

د ټوټه انتیګرالونې لار(طریقه)

د ټوټه انتیګرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلګه :

کله کله کېیدی شي ګټور وي، چې د مساوات ښۍ لور ته ټوته انتیګرال د څو واره انتیګرالونې وروسته بیرته راوګرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي یا پخواني کيڼ لور انتیګرال سره یوځای کولی شي.

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

که کیږدو f(x) = cos(x) او g'(x) = sin(x) ، **نو ترې لرو:**

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دواړو لورو ته وتون انتيګرال ورزيات کړو، نو راکوي:

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos^2(x)$$

که دواړه لورې په 2 وویشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x).\cos(x)dx = -\frac{1}{2}\cos^2(x)+C$$

بيلګه ۲ :

د ځنو انتيګرالونو سره داسې لاس ته راوړنه لرو، چې: که د g'(x) **له پاره يو ترم وټاکو چې په انتيګرالونې کې هيڅ يا کو تغير خوري، لکه د بيلګې په توګه اکسپوننشل تابع او يا مثلثاتي توابع. نو کيدی شي دا بل ترم ،،له منځه يووړل شي،،.**

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

که هر ځل g'(x) = ex کیږدو او د f(x) له پاره، **د انتيګرال لاندی ترم ، نو ترئ لاس ته راځي:**

$$\begin{aligned}\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x &= [e^x\cdot(2-x^2)] - \int e^x\cdot(-2x)\,\mathrm{d}x\\ &= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - \int 2\cdot e^x\,\mathrm{d}x\\ &= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - [2\cdot e^x]\\ &= [e^x\cdot(2-x^2+2x-2)]\\ &= [e^x\cdot(2x-x^2)] + C\end{aligned}$$

بيلګه ۳ :

که تر انتيګرال لاندې فقط يو ترم ولرو، چې د هغه لومړنی تابع بې له جدول ارزښت څخه پاي ته نه رسيږي(نه پايول کيږي)(نه ختميږي) کېدی شي کله کله د ورزياتونې له لارې(ناڅرګند شته) ضريب "1" ټوټه انتيګرال شي.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = 1$ کېږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\begin{aligned}\int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x &= x\cdot\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= x\cdot\ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x\\ &= x\cdot\ln(x) - x + C\end{aligned}$$

.

جمله :

موږ د دې لاندې انتیګرال نیسو:

$$\int x\cos(x)\,dx$$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= \int u\,dv\\ &= uv - \int v\,du\\ &= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx\\ &= x\sin(x) + \cos(x) + C.\end{aligned}$$

C د انتیګرالونې یوه په خوښه ثابته ده

د ټوټه انتیګرالونې د استعمال سره د انتیګرالونو لکه $\int x^3\sin(x)\,dx$

او $\int x^2e^x\,dx$ کیده شي په همدې لار حل شي:

یوه په زړه پورې بیلګه دا لاندې ده :

$$\int e^x\cos(x)\,dx$$

که په پوره سختوالي ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا بيلګه د دوه واره ټوټه انتيګرالونې استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\, dx$

$dv = e^x\, dx$ داسې چې $v = e^x$ نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\, dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتيګرال حل شي، نو د ټوټه انتيګرالونې قاعده بيا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x);\ du = \cos(x)\, dx$

$v = e^x;\ dv = e^x\, dx$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\, dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\, dx$$

که دا سره يوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\, dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتيګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتيګرال که کيڼ لور ته يوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2 \int e^x \cos(x)\, dx = e^x (\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\, dx = \frac{e^x (\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

C د انتيګرالونې يوه په خوښه ثابته ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرينونه: دا لاندې انتيګرالونه وشمرئ.

اول: $I = \int x \cos x \, dx$ ، دويم: $I = \int x^2 \cdot e^x \, dx$

دريم: $I = \int \ln x \, dx$, څلورم $I = \int e^x \cdot \cos x \, dx$:

د ټوټه - ، یاراشنل کسرونو انتیګرال

د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ تابع انتيګرال نيول

فعاليت:

-- د $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$ انتيګرال نيول يعنې څه ؟

- د پورته تابع تعريف ورشو به نخښنه کړئ.

د دې انتيګرال نيول تر واسه په ورسره بلده لار شونی دی، که څنګه؟

بيلګه :

$$\int \left[\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}\right] dx$$

په مخرج کې مربع تابع د خپل صفرڅايونو 2- = x1 او 4- = x2 سره د کرښيزو توابعو په ضريبونو تجزيه کيږي:

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)\,(x-4)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه ونې له پاره لاندې توګه پيل کوو:

$$\int \left[\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}\right] dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-4)}$$

د جمعې له پاره په اصلي مخرج ورغزيږي او لاس ته ترې راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{[Ax-4A + Bx-2B]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[A(x-4) + B(x-2)]}{[(x-2)(x-4)]} = \frac{[(A+B)x -4A-2B]}{[(x-2)(x-4)]}$$

د ضریبونو د پرتلې ځخه لاس ته راځي، چې د x له مخه یعني کېڼ لور ته (A+B) افاده باید پرته وي

او (-4A-2B) ، چې ۱۲ - ورکوي (وتون مساوات وګورئ) : $7x-12 = (A+B)x$ (-4A-2B)

له دې ځخه لاندې مساواتسیستم لاس ته راځي:

7= A+ B

-12=-4A-2B

بدلون یې دA او B پسې : **A= (7-B)**

-12=-4(7-B)-2B

-12=-28 +4B -2B |+28

+16= 2B

B=8

A= **(7-8)= -1**

لیکلی شو :

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \int [\frac{-1}{(x-2)}]dx + \int [\frac{8}{(x-4)}]dx$$

لومړني تابع جوړه کړئ: $f(x)=\frac{1}{x} \rightarrow F(x)=\ln x$. دا چې طبیعي لوګایتم فقط له مثبت اعدادو شمیرل کیږي، نو یوازې ارزښتونه نیسو.

$$\int [\frac{(7x-12)}{(x^2-6x+8)}]dx = \mathbf{-1 \ln |x-2| +8 \ln |x-4| +c}$$

نا اصلي ماتراشنل توابع باید لومړی په تول راشنل تابع او اصلي مات راشنل تابع ټوټه شي. دا د ټوټه کسرونو ټوټه کووني له لارې کیږي یا صورت نیسي.

بیلګه :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx$$

په مخرجکې مربع تابع په صفرځایونو **x1 = -2** او **x2 = +3** کې په کښیزو فاکتورونو تحزیه کیږي :

$$x^2+x-6 = (x-2)\ (x+3)$$

د ټوټه کسرونو ټوټه کوني له پاره اصلي مخرج غزوو او بیا یې ضربوو :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+3)}$$

د جمعي له پاره په اصلي مخرج غزیږي او بیا سره ضربیږي:

$$\frac{[A(x+3)\ +\ B(x-2)]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[Ax+3A\ +\ Bx-2B]}{[(x-2)(x+3)]} = \frac{[(A+B)x\ +3A-2B]}{[(x-2)(x+3)]}$$

د ضریبونو پرتلې کوني له امله، چې د x ترمخه یعني کیڼ لور ته له (A+B) افادې ځخه باید اوه لاس ته راشي او (+3A-2B) او یا ورته ۱۲ (وتونمساوات وګورئ) :

-5x+9 = (A+B)x (+3A-2B)

لاندې مساواتسیستم لاس ته راځي:

-5= A+ B

9= 3A-2B

د A او B پسې یې حل کړئ:

9= 3(-5-B)-2B

9=-15 -3B -2B |+15

24=-5B |:(-5)

<u>B=-4.8</u>

<u>A= (-5+4.8)= -0.2</u>

نو لیکلی شو :

$$\int [\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx = \int [\frac{-0.2}{(x-2)}]dx + \int [\frac{-4.8}{(x+6)}]dx$$

لومړی تابع جوړ کړئ :

$$F(x) = \ln x \rightarrow f(x) = \frac{1}{2}$$

دا چې طبیعي لوګاریتم فقط د طبیعي اعدادو شمیرل کیدی شي، نو فقط مطلقه ارزښتونه نیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int[\frac{(-5x+9)}{(x^2+x-6)}]dx=-0.2\ln|x-2|-4.8\ln|x+3|+C$$

تمرينونه :

لاندې انتيګرالونه د ټوټه کسرونو ټوټه کونې له طريقې وشمېرئ

$a)\ \int\frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}$ $\quad b)\ \int\frac{x-2}{x^2-6x+13}$ $\quad c)\ \int\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}$

ناپاي انتيګرال

تعريف : که په يوه ټاکلي انتيګرال کې لږ تر لږه يو حد د مثبت يا منفي ناپاي لور ته لاړشي يا د انتيګرال ساحه ناپاي ځاي ته و غزول شو، نو دلته د ناپاي انتيګرال څخه غږېږو. په يوه مناسب ډول ناپای انتيګرال د عادي انتګيګرال د حد په څير تعرفيږي.
په دې توګه په زړه پورې پوهيدنې لاس ته راځي د بيلګې په توګه، چې څنګه د منفي توان د پوتنځ د ګراف لاندې ناپاي ته رسيدونکې په زړه پورې سطحې. نو باور لري

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx=2 \text{ او } \int_1^\infty x^{-2}dx=1$$

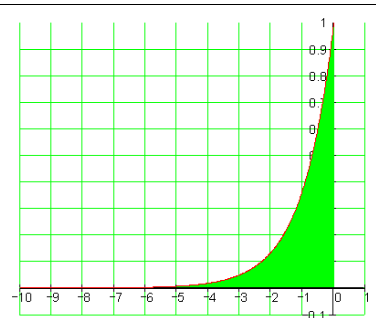
هم او د دې معکوس انتيګارلونه

$\int_1^\infty x^{-1}dx$ **او**

$\int_0^1 x^{-1}dx$ **ناپاي ته ځي يا له ټولو حدونو**

اوړي

يعنې د ناپای په لور ځي..



(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=e^x$ ، ګراف او x-محور ترمنځ دې په انتروال $(-\infty;0]$ کې ټوله سطحه و شمیرل شي، یعنې

$$A=\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$$

تراوسه د یوه ټاکلي انتیګرال د پورته همداسې کښته(لاندې) پولې عددونه وو.
د انتیګرالونې ورشو یاا ساحه محدود وه.
په دې حالت کې یا اوس د انتېګرالولو ورشو محدوده نه ده،
داسې انتیګرال یو نامحدود انتیګرال بولو، د انتیګرالونی نامحدودې ورشو سره.
انتیګرالونه د دې لاندې بڼو څخه په یوې بڼې منځ ته راځي

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \qquad \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \qquad \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$$

د دې انتیګرال شمیرنې له پاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

لومړی د یوه پای انتروال $[a;b]$ له پاره انتیګرال $\int_a^b f(x)\,dx$ شمېرو، بیا پسې د ورته افادو $a\to-\infty$ ، $a\to\infty$ یا $b\to-\infty$ ، همداسې . $b\to\infty$ یا $a\to-\infty$ له پاره پولې جوړوو.

فورمال دا په لاندې ډول بریښې:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx+\int_{c}^{\infty} f(x)\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^x f(x)\,dx+\lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)\,dx$$

زموږ د سطحې شمیرلو له پاره دا په لاندې ډول بریښي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = e^x$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[e^x\right]_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[e^0 - e^a\right] = \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^0}_{1} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^a}_{0} = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:

دا د y په محور هنداره شوې د e تابع دې د $f(x)=e^{-x}$ سره په انتروال $[0,\infty)$ کې د پورته سره برابره سطحه ولري.

$$A = \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} e^{-x}\,dx$$

بدلون:

$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0\,;\, u(b) = -b$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{-b} e^u\,\frac{du}{-1} = -\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{-b} e^u\,du = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} e^u\,du$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^u\right]_{-b}^{0} = \lim_{b\to\infty}\left[e^0 - e^{-b}\right]$$

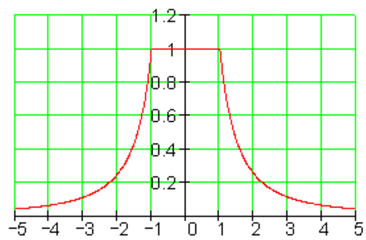
$$= \lim_{b\to\infty} e^0 - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:

د یوه یوځاي ایښول شوې یا یو ځاي شوې تابع بیلګه لرو:

د $x<-1$ لپاراه د $-1\le x\ 1$ لپاره د $x > 1$ لپاره	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \\ 1 \quad f \\ \frac{1}{x^2} \end{cases}$ $A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د انتیګرال په برخو وېشنه یا ټوټه کونه:
لاندې د انتیګرالونو تمعه دي و شمیرل شي.

$$A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

لومړنی اند یا تر مخه فکرکونه:
د تناظر دلایلو له مخې لرو :

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

داسې، چې دا انتیګرال باید فقط یوځل وشمیرل شي.

$$\int_{-1}^{1} dx = [x]_{-1}^{1} = [1]-[-1] = 1+1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_{1}^{b} = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}\right]}_{0} - \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1}\right]}_{-1} = 0-(-1) = \underline{\underline{1}}$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} dx}_{2} + \underbrace{\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} = 1+2+1 = \underline{\underline{4}}$$

تمرینونه:

١ -- د $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ تابع انتیګرال وشمیرئ، که د ناپاي په لور لاړشي.

٢ – و خېرئ چې ایا لاندې ناتاکلي انتیګرالونه پوله ارزښت لري؟

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$ b) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}$ d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x}{(x^2+2)^3}\,dx$

٣ – د کومو توانونو p لپاره دا نا ټاکلی انتیګرال $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$ پوله ارزښت لري.

٤ – لاندې انتیګرالونه د یوه انتیګرال پولې لپاره تعریف نه دي، و خېرئ، چې ایا دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکلی انتیګرال په دې انتروال کې پوله ارزښت لري.

a) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x}$, $I=[0;1]$ b) $f(x)=\ln x$, $I=[0;1]$

c) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$, $I=[1;2]$ d) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $I=[-1;1]$

e) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3-8}$, $I=[0;2]$ f) $f(x)=\dfrac{e^x}{1-e^x}$, $I=[0;1]$

ټولګه

د انتیګرال هندسي تعریف

لوریزه سطحه-د انتیګرال تعریف:که یوه f تابع ولرو، نو دx محور او تابع ترمنځ سطحې شمېرل د انتیګرال له لارې کیږي. په دې سطحه کې د x محور پورته لورې ته سطحه مثبته مخنخښه لري او د x محور کښته لورې ته سطحه منفي مخنخښ لري.

تحلیلي تعریف:

تعریف: د f یوه تابع ورکړ شوې، چې په یوه انتروال [a,b] باندې تعریف دی، نو د aځخه تر b پورې د تابع د انتیګرال ځخه د x په محور د f د ګراف او د کرښې x=aاو x=b تر منځ یوه یوه لوریزه سطحه پوهیږو.

پیژند (تعریف) ٤ . ١ : لیمیټ

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx=F;(\max\Delta x\to 0),........(4,3)$$

که په اینتروال [a , b] کی موجود وي، نو دا د f (x) ټاکلی اینتیګرال بولو، یا

F- Riemann (د ریمن سطحه). دلته a د اینتیګراله ونې لاندې(کښته)پوله او د b

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایتیګرالوني پورته پوله بلل کیږي او [a,b] د ایتیګرالوني اینټروال او(Integrand) (x) fاینټیګرالېدونکی) او xد اینټیګرالوني (Integrationsvariable) متحول بلل کیږي

جمله٤ . ۱ : که f (x) په [a , b] کې اینټیګرالوړ وي او $c \in [a,b]$ وي، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

پیژند یا تعریف ٤ . ۲ : f (x) په یوه بند انټروال[a, b] کې اینټیګرالوړ دی، نو باور لري:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

پیژند تعریف 3.2: تابع y = f (x) دې په یوه واز اینټروال I کی تعریف وي. هر یوه هلته موجوده مشتقوړ F (x) تابع چې F' (x) = f (x) شرایط پوره کړي، د f (x (بنسټیز - ، ساده – یا لومړنی تابع بلل کیږي

ټاکلی انټیګرال:

که f یو حقیقي تابع وي، نو د ټاکل انټیګرال $\int_a^b f(x)dx$ (لوستل: د $f(x)$ انټیګرال د a تر b او په پولو یا حدونو یا انټیګرال په $f(x)$ باندې له a تر b) لاندې یوه لوریزه سطحه پوهیږو د a او b تر منځ او د f ګراف لاندې.

تعریف:

(c) ketabton.com: The Digital Library

f په انتروال $a \le x \le b$ کې متمادي تابع ده او F د f لومړنی تابع ده، نو ټاکلی انتیگرال دی :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

د F(b) – F(a) لپاره زیات وخت $[F(x)]_a^b$ لیکو. په دې توگه دی

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$

جمله:

د یوې ثابتي سره ضرب : که تابع f (x) په یوه اینتروال کی متمادي وي ، نو لاندې باور لري:

$$\int a \cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx\,, \qquad a \in R$$

جمله :

د جمعي (تفریق) قاعده که f1 (x) او f 2 (x) په یوه ایتروال کی نه پریکیدونکي وي ، نو باور لري

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$$

جمله :

د ،،بدلون (قاعده) ،، (Substitution لاتین :د یوه ارزښت په ځاي د همغه ارزښت بله لویه ایښوول ، لنډ: بدلون) د نیونو لاندې چی u = g (x) متمادي اوو مشتقوړدی او y = f (u) متمادي، نو باور لري:

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f[f(u)]du$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضربونو انتیګرالونه
که د دوه توابعو د ضرب انتیګرال د ورسره بلدو متودونو یا لارو شمیرو، نو زیات وخت دا ناشوني وي.

$$f(x) = x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right) dx = ?$$

د ښېرکي تمرینونه:

۱ - لاندې ناصلي پولینومونه دې د یوه ټول ګویا عدد پولینومونو او یوه اصلي پولینوم د جمعي په ښېر ولیکل شي.

$$a)\ \frac{x^3+7x^2+9x-5}{x+5} \qquad b)\ \frac{x^4-3x^2+1}{x^2-2}$$

$$c)\ \frac{x^3-2x^2+x-5}{x^3+1} \qquad d)\ \frac{x^4-1}{x^3+x^2+x+1}$$

$$e)\ \frac{x^4+2x^3-6x^2-5x+3}{x-2} \qquad f)\ \frac{x^5-x^4+1}{x^2+2}$$

۲ - لاندر پولینومونه دد جمعي په څېر ولیکئ

$$a)\ \frac{2x^2+20x+12}{x^3+2x^2-5x-6} \qquad b)\ \frac{x^2+1}{x^3-x}$$

$$c)\ \frac{4x+10}{x^2+6x+8} \qquad d)\ \frac{-3x^2+19x-10}{x^3-2x^2-5x+6}$$

$$e)\ \frac{4x^2+6x-20}{x^3-4x} \qquad f)\ \frac{14}{x^2+20x+51}$$

۳ – د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ونه وکاروئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\ \frac{3x^2+5x+10}{x^3+2x^2-4x-8} \qquad b)\ \frac{3x^2-18x+36}{x^3-6x^2+9x}$$

$$c)\ \frac{x^2+3x+4}{x^4-2x^2+1} \qquad d)\ -\frac{x^2+13x+10}{x^3-5x^2}$$

٤ - د لاندې اصلي پولینومونو په ټوټه کسرونو ټوټه ګونه ورکړئ.

$$a)\ \frac{x^2+2x-12}{x^3+2x^2+6x+5} \qquad b)\ \frac{4x^2-3x+8}{x^3-2x+4}$$

$$c)\ \frac{8x^2-16x+10}{x^3-4x^2+5x} \qquad d)\ \frac{x}{x^3+2x^2+2x+1}$$

٥ - د لاندې پولینوم کسرونو په ټوټه کسرونو ټوټه کونه ړرکړئ.

$$a)\ \frac{x^3+7x^2+17x+17}{x^2+6x+8} \qquad b)\ \frac{2x^4-8x^3+7x^2-3x+4}{x^2-4x+3}$$

$$c)\ \frac{2x^3+x^2}{x^3-1} \qquad d)\ \frac{4x^3+16x^2-7x-49}{x^3+4x^2+x-6}$$

٦ – و ښایئ، چې د F تابع د f تابع لومړنی تابع ده.

$$a)\ f(x)=2x^2+4x-7 \quad , \quad f(x)=4x+4$$

$$b)\ F(x)=(x^2-x)^3 \quad , \quad f(x)=3\cdot(2x-1)\cdot(x^2-x)^2$$

$$c)\ F(x)=\sqrt{2x+1} \quad , \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$d)\ F(x)=1+\sin x \quad , \quad f(x)=3x\cdot\cos 3x$$

$$e)\ F(x)=\frac{1}{3}x^3\cdot\ln x-\frac{4}{9}x^3 \quad , \quad f(x)=x^2\cdot(\ln x-1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ - وښايئ، چې د F او G توابع د همغه f تابع لومړني توابع دي.

$$a)\ F(x) = x^3 + x + 4 \quad , \quad G(x) = x^3 + x + 1$$
$$b)\ F(x) = (x-3)^2 \quad , \quad G(x) = x^2 - 6x + 4$$
$$c)\ F(x) = \frac{x+1}{x+2} \quad , \quad G(x) = \frac{3x+5}{x+2}$$
$$d)\ F(x) = 1 + \sin x \quad , \quad G(x) = \sin x$$

۱۳ – لاندې ناټاکلي انتيګرالونه پيداکړئ او ټيکوالی يې و ازمايئ.

$a)\ \int x^3 dx$ $\quad b)\ \int 7dx$ $\quad c)\ \int xdx$ $\quad d)\ \int (1-x^2)dx$

$e)\ \int (x+\frac{1}{x})dx$ $\quad f)\ \int (e^x + \cos x)dx$ $\quad g)\ \int \frac{1}{\sin^2 x}dx$ $\quad h)\ \int \frac{5}{\cos^2 x}dx$

$i)\ \int udx$ $\quad k)\ \int (2+e^x)dx$ $\quad l)\ \int (1+\ln x)dx$ $\quad m)\ \int (\sqrt{x}+\sin)\,dx$

۱٤ – د لاندې ټاکلو انتيګرالونو ارزښت وشمېرئ

$a)\ \int_0^3 4dx$ $\quad b)\ \int_{-3}^{-1} xdx$ $\quad c)\ \int_1^e \frac{1}{x}dx$

$d)\ \int_1^e (2+\frac{1}{x})dx$ $\quad e)\ \int_{-1}^0 e^x dx$ $\quad f)\ \int_0^\pi \sin xdx$

$g)\ \int_{\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} 4dx$ $\quad h)\ \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{3}\pi} \frac{1}{\sin^2 x}dx$ $\quad i)\ \int_{-2}^2 x^3 dx$

$j)\ \int_2^6 (1+x)dx$ $\quad k)\ \int_1^2 (x^2 - x^5)dx$ $\quad l)\ 0\int_{-2}^2 (\frac{x^3}{4}+\frac{x^2}{3})dx$

۱٦ = د لاندې ټاکلو انتيګرالونو ارزښت وشميرئ او ارزښتونه پرتله کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\ \int_{-3}^{1} 3dx und - \int_{-3}^{1} 3dx \qquad b)\ \int_{0}^{1}(1+e^{x})dx \quad \wedge \quad -\int_{0}^{1}(1+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{-\pi}^{0} \sin x dx \quad \wedge \quad -\int_{-\pi}^{0} \sin x dx$$

---

۱۷ – هر دوه انتیګرالونه د یوه انتیګرال سره انځور کړئ.

$$a)\ \int_{0}^{0.5\pi} \cos x dx + \int_{0.5\pi}^{\pi} \cos x dx \qquad b)\ \int_{-1}^{0}(x+e^{x})dx + \int_{0}^{1}(x+e^{x})dx$$

$$c)\ \int_{2}^{3} 3x^{2}dx + \int_{5}^{3} 3x^{2}dx \qquad d)\ \int_{-2}^{1}(2+x)dx - \int_{4}^{1}(2+x)dx$$

- د لاندې ټاکلو انتیګرالونو لپاره ارزښت تخمین کړئ.

$$a)\ \int_{-4}^{-2} e^{x+3} \qquad b)\ \int_{0}^{8} \sqrt{1+x}\, dx$$

$$c)\ \int_{3}^{5} 2^{4-x} dx \qquad d)\ \int_{0}^{0.5\pi} \sin^{2} x dx$$

۱۹ – د کوموx ارزښتونو لپاره لاندې انتیګرالونه ورکړشوي ارزښتونه لري؟

$$a)\ \int_{1}^{x} 5t^{4}dt \ , \quad la(x)=31 \qquad b)\ \int_{0}^{x} e^{t}dt \ , \quad la(x)=e-1$$

۲۰ - لاندې انتیګراند توابع ته د انتیګرال توابع وټاکئ.

$$a)\ f(x)=x^{2} \ , \ a=3 \qquad b)\ f(x)=2+e^{x} \ , \ a=0$$

$$c)\ f(x)\frac{1}{\cos^{2} x} \ , \ a=0 \qquad d)\ f(x)=2 \ , \ a\in IR$$

۲۱ - د لومړني انتیګرال په استعمال سره لاندې انتیګرالونه وشمیرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$d)\ \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx, \qquad e)\ \int \sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}\,dx, \qquad f)\ \int (\sqrt[3]{x^4}+1)\ dx,$$

$$g)\ \int \sqrt[3]{x^{-3}}dx, \qquad h)\ \int \frac{ax^2+bx+cx^{-1}}{x^4}dx, \qquad i)\ \int 3\cdot 2^x dx,$$

$$j)\ \int \frac{1}{2\sin^2 x}dx, \quad k)\ \int \frac{1}{3+3x^2}dx, \qquad l)\ \int \cos\varphi\cdot s\ \ ds,$$

$$m)\ \int \frac{dt}{(2t-3)^{-2}}, \qquad n)\ \int \sqrt{t\cdot\sqrt{t\cdot\sqrt{t}}}\,dt, \qquad o)\ \int (1-u^2)^{-\frac{1}{2}}du.$$

۲۲ ـ د بیرته په بنسټیز اینتیګرال بدلون وروسته یي اینتیګرال ونیسئ:

$$a)\ \int \frac{x^3+2x^2+x}{x^2(1+x)^2}dx, \qquad b)\ \int \frac{2\sin 2x}{3\cos x}dx, \qquad c)\ \int \frac{7\cos 2x}{\cos^2 x-\sin^2 x}dx,$$

$$d)\ \int \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos^2 x}\ dx, \quad e)\ \int (-2-2\tan^2 x)dx, \quad f)\ \int \frac{2t^3-8t}{(t-2)(t+2)}dt.$$

۲۳ــ لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشمیرئ:

$$a)\ \int_0^1 \frac{1}{2}e^x dx, \qquad b)\ \int_\pi^{2\pi} \cos x\ dx, \qquad c)\ 2\int_2^3 dt,$$

$$d)\ \int_0^\pi \cos\pi\sin x\ dx, \quad e)\ \int_0^1 \frac{4du}{1+u^2}, \qquad f)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx,$$

$$g)\ \int_{x_1}^{x_2} (2x-1)\,dx, \qquad h)\ \int_0^8 \left(\sqrt[3]{x^2+2\sqrt{x}}\right)dx, \quad i)\ \int_{\ln 2}^{\ln 3} e\cdot e^t\ dt,$$

$$j)\ \int \frac{(u+1)^2}{\sqrt{u}}du, \qquad k)\ \int_0^1 \frac{x^n}{x^{1-n}}dx, \qquad l)\ \int_a^b a^x\ dx.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲٤- د بدلون یا سیتیچیوشن قاعدې استعمال له لارې يي اینتیګرال وشميري:

$$a)\ \int \sqrt[3]{2x-7}\,dx,\quad b)\ \int \frac{dx}{-x+1},\quad c)\ \int 2^{3x+6}\,dx,$$

$$d)\ \int \sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)dx,\ e)\ \int \frac{dx}{1+(x+1)^2},\quad f)\ \int \frac{4}{\cos^2(4t-5)}dt,$$

$$g)\ \int x\cdot\sqrt[3]{x^2-7}\,dx,\quad h)\ \int \frac{3xdx}{-x^2+1},\quad i)\ \int x\cdot e^{2x^2+3}\,dx,$$

$$a)\ \int \frac{dx}{1+4x^2},\quad b)\ \int \frac{dx}{2+4x^2},\quad c)\ \int \frac{dx}{3+5x^2}.$$

$$d)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}},\quad e)\ \int \frac{dx}{\sqrt{36-9x^2}},\quad f)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}},$$

$$g)\ \int \frac{dx}{x^2-10x+34},\quad h)\ \int \frac{dx}{3x^2-6x+30},\quad i)\ \int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}.$$

۲٥- د تر زیرنیوني فورمبدلون وروسته او په بنستيز اینتیګرال 10 او 11 د بدلون له لارې يي اینتیګرال وشيمرئ

۲٦- لاندې ټاکلی اینتیګرالونه وشميري:

$$a)\ \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4x-1)^3},\quad b)\ \int_{-1}^{0} e^{3x}dx,\quad c)\ \int_{0}^{2} 2^{2x+1}dx,$$

$$d)\ \int_{-1}^{1} \frac{4x^2}{(3+2x^3)^5},\quad e)\ \int_{e}^{e^x} \frac{1}{x}\ln x\,dx,\quad f)\ \int_{2}^{4} \frac{e^t}{1+e^t}dt,$$

$$g)\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\ dx,\quad h)\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{2+8x^2},\quad i)\ \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cdot\cos x\ dx.$$

۲۷-- لاندې ټوټه اینتیګرالونه اینتیګرال کړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \int 0,2x \cdot \sin x\ dx,\qquad b)\ \int 4x^{3} \cdot \ln x\ dx,\qquad c)\ \int \cos^{2} x\ dx$

$d)\ \int \cos x \cdot \sin x\ dx\qquad e)\ \int x^{2} \cdot \sin x\ dx\qquad f)\ \int x \cdot (\cos x + 1)\ dx$

$g)\ \int x^{3} \cdot e^{x}\ dx,\qquad h)\ \int x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x\ dx,$

د اینتیګرال شمیرنی استعمال

د سطحومساحت، چې د f(x) دګراف او x محور ترمنځ پرتې وي.

په ځلورم څپرکي کی وویل شو چی ټاکلی اینتیګرال $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a)$ د سطحې مساحتA ښايي ، چي له منحني$y=f(x)$، د x- محور $y=(0)$ او د کرښی$x=a$ او$x=b$ له خوا رابند وي. موږ له دې څخه مخ ته تللي يو چي $y=f(x)$ د اینتیګرال اينتروال په دننه کی دx-محور پورته لور ته ځي، خو دا کېدی شي د محور کښته لور ته هم لاړ شي..

فعاليت:

--د یوې په خوښه تابع د منحني یا کرښې او د x محور ترمنځ او یا د دوه توابعو د سطحې شمیرلو لپاره وړاندیزونه وکړئ.

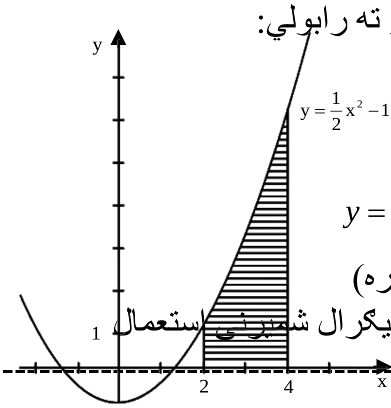
- دا هم په پام کې د شمرلو لپاره په پام کې ونیسئ، که منحني یا د تابه کرښه د x د محور لاندې لور ته پراته وي.

- یوه په خوښه تابع ورکړئ، د تابع رسم وکاږئ او د تابع انتیگرال د x محور په ټاکلو پولو کې وشمېرئ.

- یوه په خوښه تابع ولیکئ، چې د انتروال په دننه کې د x محور کښته لور ته ځي. د تابع رسم و کاږئ او دا تابع به کومه محنخښه ولري؟ دا چې سطحه تل مثبت ده، نو د تابع محنښې په ورکولو کې دا بیا وڅېړئ، چې ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: که مورږ د سطحې مساحت شمېرلو کې هغه عدد ولیکو، نو د هغې سره دې دا په پام کې ونیول شي، چې د سطحې واحد(یوون) ور سره شته دی. که دا ورسره لیکل شوی نه وي، خو باید تل په پام کې وي.
دا پورته فعالیتونه مو دې لاندې بېلګو ته رابولي:



بېلګه ۵ . ۱ :
د سطحې مساحت د

$$y=\frac{1}{2}x^2-1\ ,\ \ y=0\ ,\ \ x_1=2\ ,\ \ x_2=4$$

ترمنځ په لاندې ډول دی(مخامخ څېره)

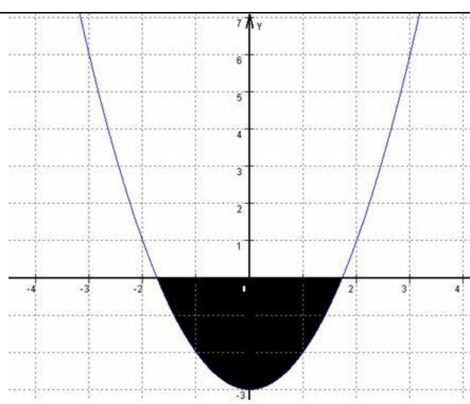
Bild 21,3

$$A=\int_2^4(\frac{1}{2}x^2-1)dx=(\frac{1}{6}x^3-x)\Big|_2^4$$

$$=\frac{1}{6}.64-4-\frac{1}{6}.8+2$$

$$=\frac{22}{3}$$

که د تابع y=f(x) سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چې د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.



بdلګه ۵ . ۲ :

د f(x)=x²-3 ګراف د x محور سره یوه

سطحه رابندوي.د ګراف او x محور ترمنځ

د ټولې سطحې مساحت وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تګلار:	

۱ - د دې لپاره چې دا مسئله راته ښه روښانه شوي وي، نو دا پورته رسم کاږو.

۲ - د دې لپاره چې د انتیګرال حدونه لاس ته اروړی شو، باید صفرځایونه وشمېرو.

$$0 = x^2 - 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

۳ – اوس د سطحي د مساحت شمېرلو لپاره اړونده انتیګرال لیکو.

د تناظر پر بنسټ لومړی له 0 څخه تر $\sqrt{3}$ پورې انتیګرال شمېرو او نتیجه یې له 2 سره ضربوو، نو لرو:

$$\int_0^{\sqrt{3}} (x^2-3)dx = \int_0^{\sqrt{3}} (x^2)dx - 3\cdot\int_0^{\sqrt{3}} 1dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^{\sqrt{3}} - 3.x \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 3\cdot\sqrt{3} = |-2\cdot\sqrt{3}|$$
$$A = 2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sqrt{3} = 4\cdot\sqrt{3}$$

بیلګه ۵ ، ۲:

د سطحي مساحت د $x_2 = 2$, $x_1 = -1$, $y = 0$, $y = \frac{1}{2}x^3 - 5$ ترمنځ دی: (لاندې ځېره)

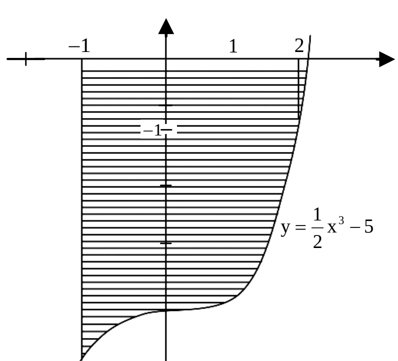
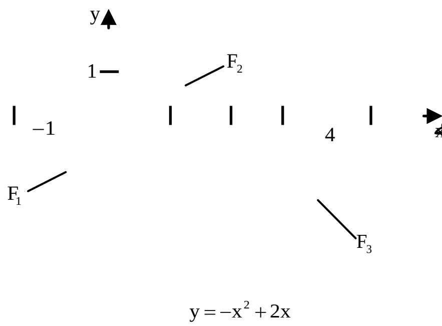


Bild 21,4

$$A = \left|\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^3 - 5)dx\right|$$
$$= -\int_{-1}^{2} \frac{1}{2}x^3 - 5)dx$$
$$= (-\frac{1}{8}x^4 + 5x)\Big|_{-1}^{2}$$
$$= (-2 + 10 + 1/8 + 5) = \frac{105}{8}$$

بیلګه ۵ . ۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لاندې پولو $x_1=-1$ تر
$x_2=4$ اودمنحني $y=-x^2+2x$ او $y=0$
ترمنځ د x- محور پورته او کښته پرته سطحه
(په مخامخ ځېره کې نښانه شوې ده) دې
وشمیرل شي

حل : د تابع $y=-x^2+2x$, د $x1=0$
صفرځایونو $x_1=0$ او $x_2=2$ تر منځ پرته

غوښتونکې سطحه د x-محور پورته، نوره
کښته پرته ده. له دې امله لرو

$$A=-F_1+F_2-F_3$$
$$=\int_{-1}^{0}(-x^2+2x)dx+\int_{0}^{2}(-x^2+2x)dx-\int_{2}^{4}(-x^2+2x)dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{0}^{2}-\left(-\frac{1}{3}x^3+x^2\right)\Bigg|_{2}^{4}=\frac{28}{3}$$

د لاندې پولو $x=-1$ تر $x=4$ او د کرښې $y=-x^2+2x$

او $y=0$ ترمنځ (د $x-$ محور پورته او کښته)

تمرینونه

: - په ورکړ شوي انتروال کې د ګراف او x محور ترمنځ سطحه وشمېرئ.

$$a)\ f(x)=x-2 \qquad , \qquad x\in[-2;3]$$
$$b)\ f(x)=x^2-x-x \qquad , \qquad x\in[1;5]$$
$$c)\ f(x)=x^2-8x+12 \qquad , \qquad x\in[0;8]$$

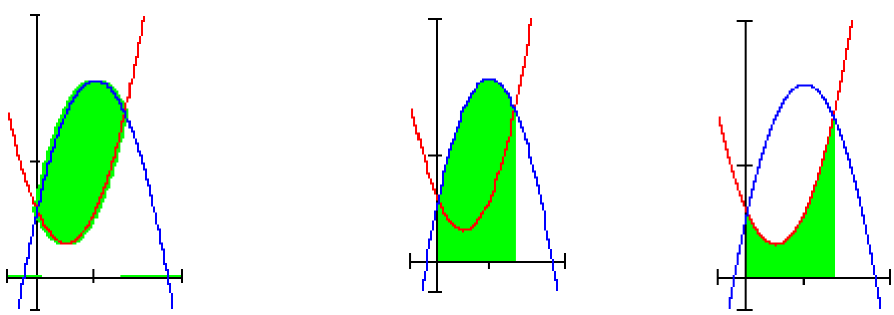
له دوه ګرافونو څخه رابندې سطحې د مساحت شمیرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت:

- که داسې یو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنګه وشمیرو؟

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمیرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما ځخه مخ ته ځو :



A A_1 A_2

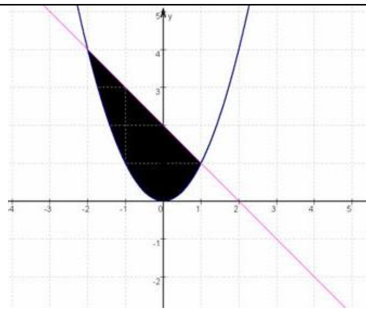
$$A = A_1 - A_2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلگه ۵ . ۵ :

د $f(x) = x^2$ او $g(x) = -x+2$ دوه توابعو ترمنځ رابند د سطحې مساحت غواړو وشمېرو:

د تګلارې لار: دلته هم یو شکل یا گراف رسموو، چې دا حالت راته روښانه شي.



۲ - د دې لپاره چې انتیگرال وشمېرو، د گرافونو دقاطع ټکي ټاکو.

$x^2 = -x+2$

$x^2+x-2= 0$

$$x_{(1,2)} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

فرمول - P;q

۳ – په ساده توگه لیدل کیږي. $\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$

پس باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_{1}^{-2} (-x+2)dx - \int_{1}^{-2} x^2 dx =$$

$$-1\cdot\left(\frac{2^2}{2}-\frac{1}{2}\right)-6-\left(\frac{(-2)^3}{3}\right)-\frac{1}{3}$$

$$=-1,5-6++=-4.5$$

$$A=4,5$$

جمله :

که د ټولو x لپاره ، د a<x<b سره f(x)>g(x) وي، دا په دې معنا چې د f گراف د a او b تر منځ دg پورته لور ته ځغلي, نو د دواړو گرافونو په انتروال کي رابندې سطحې مساحت لپاره بارور لري.

$$\boxed{A=\int_{a}^{b} (f(x)-g(x))\,dx}$$

بیلګه ۵ . ٦ :

د توابعو f(x) = x² -2x +2 او g(x) = -x²+4x +2 گرافونو ترمنځ سطحې مساحت غواړو پیداکړو.
د دواړو گرافونو د x–ارزښتونو غوښتکي(د تقاطع ټکي) د اینتیگرال حدونه جوړوي.

د غوښتکو د x - کواوردیناتو ټاکل:

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 -2x+2 = -x^2 +4x + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x =0 \quad \Leftrightarrow$$

$x_1 = 0$ او $x_2 = 3$ د اینتبکرال لیمیتونه یا پولې دي.

د اینتګرال جوړونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

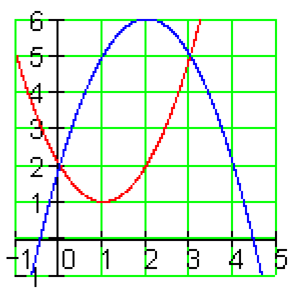
$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 2\cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

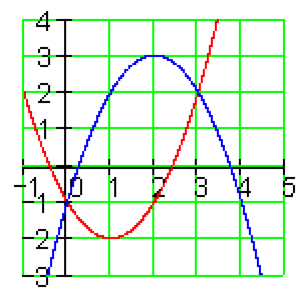
$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 =$$
$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه باید تل مثبت وي،نو له لوي ارزښت څخه کووچنی ارزښت باید کم شي.

$$A = \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

لکه چې پوهیږو، د یوې سطحې مخنخښه ددې په واک کې ده، چې ایا سطحه د **x** -محور پورته لور ته پرته ده او که کښته لور ته. موږ ځیږو، چې ایا دا تاثیرات په پورتنی بیلګه کې پراته دي او که نه. موږ سطحه د **y** -محور په درې واحدونو(یوونونو) کښته لورته بیایو او سطحې نوې شمېرو.





که د لید له مخې قضاوت وکړو،نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x–ارزښت غوښتکي هم او له دې سره د انتيګرال حدونه بې تغيره پاتيږي.

$$g(x) = -x^2 + 4x - 1 \quad \text{و} \quad f(x) = x^2 - 2x - 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځای په ځای کونه:

$$A=\int_0^3 f(x)dx-\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3 (f(x)-g(x))\,dx$$

د $f(x)-g(x)=2x^2-6x$ سره کيږي:

$$A=\int_0^3(2x^2-3x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3=\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9=18-27=\underline{\underline{-9}}$$

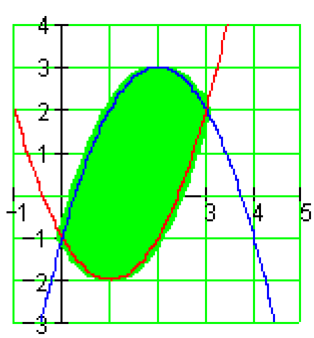
دا چې د دوه منحنيو ترمنځ سطحه فزيکي سطحه ښايي، بايد لاس ته راوړنه يو مثبت عدد وي.

دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

$$A=\left|\int_0^3(2x^2-6x)\,dx\right|=\left|\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3\right|=\left|\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9\right|=|18-27|=|-9|=\underline{\underline{9}}$$

د دې متود تولیزه ونه(عموميت) :

د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه:



که یوه سطحه د یوې پورته او یوې ښکته منحني ښخه رابنده وي، چې تابع$f(x)$ او تابع $g(x)$ پورې اړه و لري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې ډول شمېرل کيږي.

$$A=\left|\int_a^b[f(x)-g(x)]dx\right|$$

د انتيګرالوني حدونه a اوb دx – محور د

(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړو ګرافونو د وضعیه قېمتونو غوښتکي دي،

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

تر منځ پرتي سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له$x=a$ تر $x=b$ پورېاو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

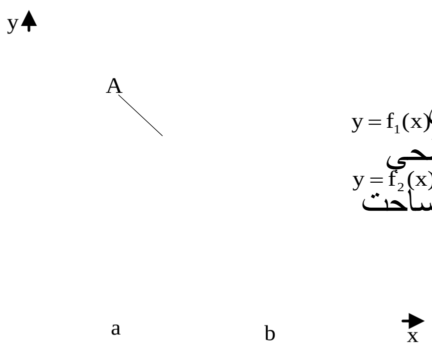


Bild 21,6

اینتیګرالوړاو $f_1(x) < f_2(x)$

په$[a,b]$ اینتروال کی (ش ۱ . ۶) داسی لاس

ته راوړل کیږي چی دتابع $y=f_2(x)$ لاندې سطحې

مساحت څخه د $y=f_1(x)$ تابع لاندې سطحې مساحت

کم کړئ.

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$$

سړی په ساده ډول خپل باور په دې راوستی شي چې ش ۲ . ۶ له دې خپلواك

چی $f_1(x)$او $f_2(x)$په اینتروال $[a,b]$ کومه یوه مخنخښه ځان ته غوره کوي باوري دی.

بیلګه ۵ . ۷: د لاندې پارابولونو ترمنځ سطحه غواړو وشمیرو $y=x^2-1$ او $y=-x^2+1)$

حل : د ایتیګرال پولې(حدونه) د افقي(پراته) محور غوښتکي(د تقاطع ټکي) دي

$x^2-1=-x^2+1$

$2x^2=2$

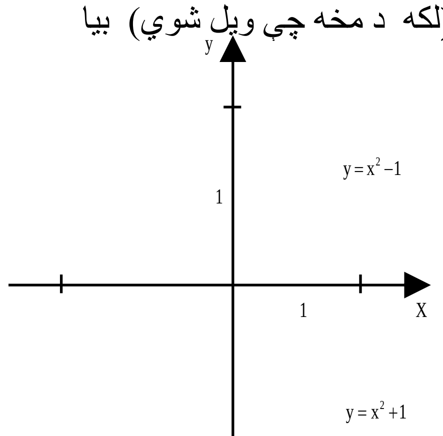
$x^2=1$ $x_1 - a = 1\ ,\ x_2 = b = -1$

د اینتیګرلولو په اینتروال $[1\ ,\ 1\ -]$ کی لرو$-x^2+1>x^2-1$

(که چیرې په اینتروال $[a,b]$ او په (۲ . ۱) کی $f2(x)>f1(x)$ په نظر کي ونه نیول

شي، نو د څرګند اینتیګرال به منفی شي او سړی(لکه د مخه چې ویل شوي) بیا

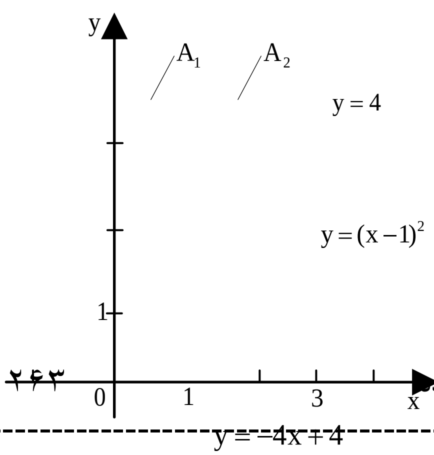
داینتیګرال مطلقه ارزښت نیسي. له دې امله لرو:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_{-1}^{1} \left[-x^2 + 1 - (x^2 - 1) \right] dx$$
$$= \int_{-1}^{1} (-2x^2 + 2)\, dx$$
$$= (-\frac{2}{3}x^3 + 2x) \Big|_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

بیلګه ۵ . ۸ :
د (ش. ۲ . ۸) سره سم د لاندې توابعو ترمنځ
سطحه شمیرل کیږي.
y=(x-1)²,y=-4x+4,y=4



حل : دا د شمیرلو سطحه، د منحنیو ترمنځ د دوه
سطحوA1 او A2 له یوځای کیدو ښخه لاس
ته راځي.
A1د منحنیو y=4 او y=-4x+4 ترمنځ
پروت دی. د اینتیګرال پولی(- حدونه) د لومړي
د دوه کرښو ښخه رابند

Bild 21.8

کواور ینات(x –محور) غوښتکی دی،
د y=4 او y=-4x+4 ترمنځ.

لرو $x_1 = 0$,$4 = -4x + 4$ په همدې ډول د

ښي غوښتکي لومړی وضعیه ارزښت (کواور دینات)

د $y = -4x + 4$ او $y = (x-1)^2$ ترمنځ

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = \frac{1^2 + 1 - 2}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{2,3} = -1 \pm 2,\ x_3 = 1.$$

ګورو چیA2د y=-4 او$y=(x-1)^2$ تر
منځ پرته ده ، د اینتیګرال حدونه(پولی)x1=1 او د لومړي
وضعیه قیمت د بنې غوڅتکي د y=4 او $y=(x-1)^2$.

غوښتوني سطحه داسې ده:

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 [4-(-4x+4)]dx + \int_0^1 [4-(x-1)^2]dx$$

$$= \int_0^1 4x\,dx + \int_0^1 (-x^2+2x+3)\,dx = 2x^2\Big|_0^1 + (1/3x^3 + x + 3x)\Big|_4^3 = 7\frac{1}{3}$$

تمرینونه:

د لاندې توابعو ترمنځ سطحې و شمېرئ

---

1) $f(x) = x^2 - x - 6$; $g(x) = 4x - 10$

2) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3$; $g(x) = 3x$

3) $f(x) = 0.75(x^2 - 5x + 4)$; $g(x) = 0.75x + 3$,

4) $f(x) = x^2 + 5x + \frac{9}{4}$; $g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{21}{4}$

5) $f(x) = (x-2)^2 - 4$; $g(x) = x - 1$

6) $f(x) = x^2 - 4x + 1$; $g(x) = -x^2 + 2x + 1$

7) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3$; $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

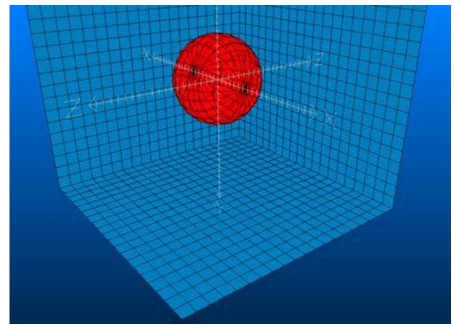
8) $f(x) = x^2 + 3x$; $g(x) = 0.5x^2$

9) $f(x) 0.5x^2 - 2x - 1$; $g(x) = 2x^2 + 2x + 1$

10) $f(x) = -0.5x^2 + 2$; $g(x) = -\frac{1}{9}(x-1)^2 + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څرخیدونکو بدنونو(جسمونو) ډکي(حجم)



فعالیت:

- په ورسره بلده توگه د مستطیل حجم ولیکئ.

- د کرې، استوانې او د مخروط حجومونه، چې تراوسه مو لوستلي و لیکئ.

یادونه: دا دې تل په پام کې ونیول شي: که د انتیگرال شمېرنې له لارې کوم عدد لاس ته راځي، نو هغه عدد د یوه جسم حجم ښايي. موږ ددې لپاره لیکو، چې د حجم مطلوبه واحد.

څرخیدونکي تنونه:

څرخېدونکي تنونه په هندسه کې هغه تنونه دي، چې په یوه څرخېدونکي محور باندې د یوې کرښې یا منحني څرخېدنې له لارې منځ ته راځي. کرښه یا منحني په یوه سطحه پرته ده او محور هم په همدې سطحه پروت دی. منحني محور نه غوڅوي، اویا زیات له زیاته یې ممکن لمس کړي. چې غوره بېلگې به یې په لاندې کې و څېړل شي.

د xپه محور څرخیدنه(څرخون)

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د مخه مو چې وویل، حجم هم یو انتیگرال دی. دا داسې منځ ته راځي، چې که یوه تابع د X په محور و څرخول شي.

د یوه څرخېدونکي جسم (بدن یا تن) حجم(ډکی)

د یوه څرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په څرخېدنه د x په محور په انتروال [a,b] کې د f تابع له گراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ ترمنځ جوړیږي، رابنده وي.

د حجم شمېرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخېدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انتروال دf تابع گراف د y محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$ بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

څرخېدونکي تنونه: ۲۶۶

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2 \ dy$$

که دلته $x = f^{-1}(y)$ بدل کړو، نو د x په محور په لاندې توگه حجم لاس ته راوړو:

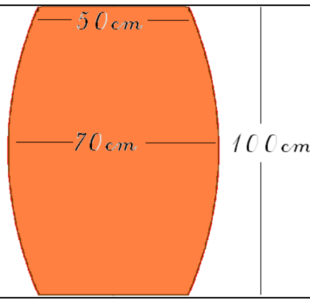
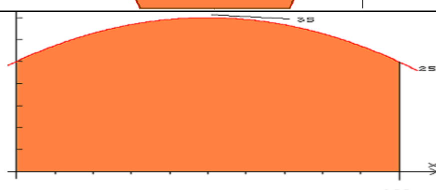
$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} x^2 dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 \cdot |f'(x)| \, dx$$

د f' مطلق ارزښت او د انتیگرال په حدونو کې خورا جگ – ټیټ(min/max) توابع یو مثبت انتیگرال تظمینوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحي په څرخولو(د y په محور)، چې د f تابع له ګراف او دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ څخه رابنده وي، لاندې فرمول باور لري.

$$V = \pi \cdot \int_a^b (x \cdot f))^2 \, dx$$

	د یوه مرتبان حجم: د یوه مرتبان حجم غواړو پیدا کړو چې جګوالی یې 1 متر، وړانګه یې 25 سنتي متره په پاي او 35 سانتیمتره په منځ کې ده.
	که مرتبان په 90° درجو و څرخول شي، نو د مربع پارابول بڼه غوره کوي. د ژی تابع باید کښته لور ته واز پارابول وي، لکه دلته په شکل کې.

حل: د پارابول د تابع لیکبنه کېدی شي ساده په ککرتکي یا راس باندې ولیکل شي.

تولیز باور لري:

$f(x) - a \cdot (x-5)^2 + 3.5$ (dm ارزښت په دیسیمتر)

په څرګند دول -5 د رآس راکښنه د +x په لور ورکوي او 3,5 د +y په لور. د غزوني ضریب a په لور اړین دی، چې کښته لور واز پارابول لاس ته راوړو. اوس فقط ضریب a نه شته. که په فرمول کې یو معلوم ټکی کیږدو، کېدی شي a وشمېرل شي. دا ټکی (0/2,5) دی.

$$f(x) = -a \cdot (x-5)^2 + 3.5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x ارزښت ځا په ځاي کوونو لرو $-a\cdot(0-5)^2+3.5$

له دې امله a دی: $\frac{2.5-3.5}{25}=-0.04$

او مساوات پوره بلل کیږي. $f(x)=-0.04\cdot(x-5)^2+3.5$

د ساده والي لپاره د رآس ټکي فرمول په نورمال یا عمودي فورم بدلوو:

$$f(x)=-0.04x^2+0.4x+2.5$$

تابع مربع کړئ $f(x)=(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2$

نو دی $f(x)=0.0016x^2-0.032x^3-0.04x^2+2x+6.25$

لومړنی تابع $f(x)=\frac{0.0016x^2}{5}\cdot x^5-\frac{0.032x^3}{4}\cdot\frac{-0.04x^2}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x$

د حجم شمیرلو لپاره ټاکلی انتیگرال دی؛

$$\pi\cdot\int_0^{10}(-0.04x^2+0.4x+2.5)^2\,dx=\pi\cdot\int_0^{10}(-0.0016x^2-0.032x^3-2x+6.25)\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{0.0016}{5}\cdot 10^5-\frac{0.032}{4}\cdot x^4-\frac{0.04}{3}\cdot x^3+x^2+6.25x\right]_0^{10}$$

$$=\pi\left[32-80-13\frac{1}{3}+100+62.5\right]_0^{10}$$

$$=\pi\cdot 101.167$$

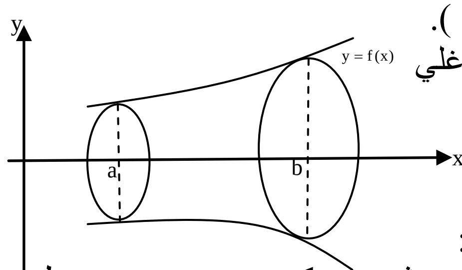
د حجم واحدونه (یوونونه یا یووالي)

دا چې موږ له پیله په دیڅیمتر شمېرنه کړې، نو طبعآ دا په لیټر شمېرل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$= 317.824\ liter$

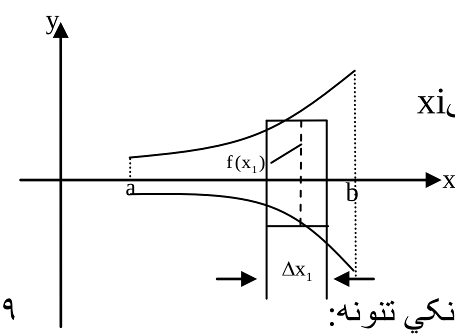
د تابع $y=f(x),y=0,x=a,x=b$ ترمنځ
سطحه چی دx-محوربانديې ځرخي(ش ۵ . ۹).
دلته غوښتنه، په دې ډول رامنځ ته شوې راغلي
دځرخيدونکي بدن ډکی(حجم) دی.
لاندېجمله باوري ده



جمله ۵ . ۸) د ځرخيدونکي بدن ډکی(حجم):
په اينتروال$[a,b]$کي دی $y=f(x)$ متمادي وي، د ځرخيدونکي بدن حجم چی د سطحو
$y=f(x),y=0,x=a,x=b$ترمنځ ، راپيداکيږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\, dx$$

ښونه: V د توتو(استوانو)د جمعې له
لارې چی وړانګه يې$f(xi)$، جګوالی يېxi
د $i=1,2,3,...n$ لپاره لری.
(ش: 5. 10) دi-مې توتې
(سليندر ډکی(حجم) دی.



ځرخېدونکي تنونه:

$$\Delta_i V = \pi \cdot [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د ټولو n سليندرونو يا توتو زياتون

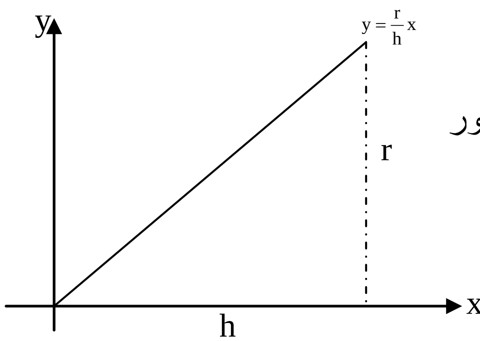
$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi [f(x_i)]^2 \cdot \Delta x_i$$

د پولی ارزښت جوړونه) $n\to oe,\ xi\to 0$ (د بنسټ اينتيګرال د تعريف سره سم

$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2\, dx$ حجم (ډکی) راکوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۵ . ۹ :) دمخروط یا کیګل ډکی (حجم) د $y = \frac{r}{h}x$ کرښي (د سرچيني تيره کرښه د $\frac{r}{h}$ جګوالي سره) او دx- محور (y =0) د حدونو x=0 تر x=h پورې(ش . ۱۱)



$$V = \pi \cdot \int_0^h \left[\frac{r}{h}x\right]^2 dx = \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

دا له بنستيزې شمېرنې(د اساساتو) څخه معلومه نتيجه ده.

بیلګه ۵ . ۱۰:

د $y = \sqrt{2x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 3$

ترمنځ د x-محور باندې ځرخېدلو جوړ(توليد) شوی جسم ځرخېدلی پارابولوييد دی (ځ ۵ ړ ۱۲)

$$V = \pi \cdot \int_0^3 \left[\sqrt{2x}\right]^2 dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^3 x dx$$

$$= 2\pi \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 = 9\pi.$$

y

$y = \sqrt{2x}$

1

0 1 3 x

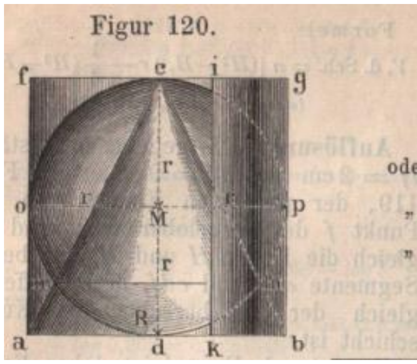
د ارښيمد س جمله Archimedischer Satz

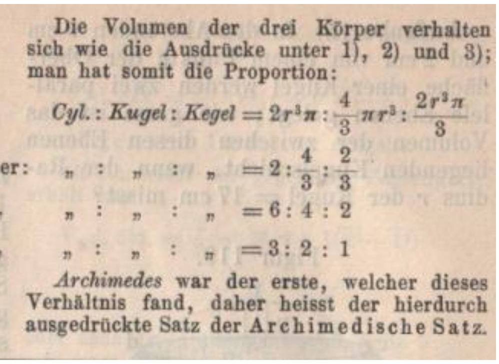
(c) ketabton.com: The Digital Library

د توتې، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$$V_{\text{توته(استوانه)}} : V_{\text{غونداری(کره)}} : V_{\text{مخروط}} = 3 : 2 : 1$$

د 1886 زکـ يوه درسي کتاب څخه





Die Volumen der drei Körper verhalten sich wie die Ausdrücke unter 1), 2) und 3); man hat somit die Proportion:

$$Cyl. : Kugel : Kegel = 2r^3\pi : \frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{2r^3\pi}{3}$$

oder: $$„ : „ : „ = 2 : \frac{4}{3} : \frac{2}{3}$$

$$„ : „ : „ = 6 : 4 : 2$$

$$„ : „ : „ = 3 : 2 : 1$$

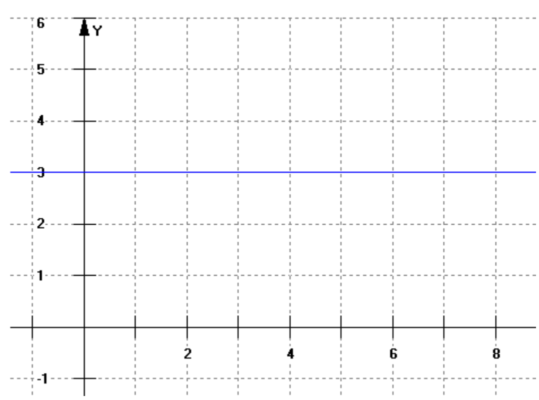
Archimedes war der erste, welcher dieses Verhältnis fand, daher heisst der hierdurch ausgedrückte Satz der Archimedische Satz.

د پورته الماني پښتو:ارښيمېدس لومړی کس وو، چې دا پورته تناسب يې ومونده، له دې امله دا دلته راغلې جمله د ارښيمېدس جلې په نامه نومول شوې.

د څرخېدونکي بدن(حسم) حجم.

بيلگه ۵ ـ ۱۱:

استوانه(توته):



(c) ketabton.com: The Digital Library

استوانه د x په محور د$f(x) = c$ یوې ثابتې تابع(په دې حالت کې $f(x) = 3$ دی) د څرخېدو څخه لاس ته راځي.

د یوې استوانې حجم (ډکی) شمېرنه:

اوس دې په $[0;5]$ انتروال کې د توټې حجم وشمېرل شي. د استوانې د حجم د شمېرلو لپاره $V = \pi r^2 \cdot h$ عمومي فرمول دی. په دې حالت کې $r=3$ او $h=5$ دی. دx هر ارزښت لپاره د تابع ارزښته هم دی.

لومړی له هرڅه غواړو $V = \pi r^2 \cdot h$ څخه فقط $r^2 \cdot h$ تر څېړنې لاندې و نیسو او غواړو یوه لار پیدا کړو ، چې د هغې لارې د انتیگرال په مرسته حجم وشمېرلای شو. د سطحې مساحت د لاندې انتیگرال په مرسته وشمېرل شو :

$$\int_0^5 rdx = \int_0^5 f(x)\,dx$$

که د دې ناپاي ډېرو مستطیلونو(د $f(x)$ د مربع مساحت ا د صفر په لور ځغېلېدونکې پنډوالي dx سره) انتیگرال جوړ کړو، نو لاس ته ترې راځي:

$$\int_0^5 rdx = \int_0^5 [f(x)]^2\,dx$$

دا په دې معنا چې دا انتیگرال بل څه نه دی پرته له څخه، چې زموږ د پورتني فرمول څخه دد یوې توټې د حجم شمېرل دي. ز که دا له سره ضرب کړو، نو راکوي:

$$\pi r^2 h = \pi \int_0^5 [f(x)]^2\,dx$$

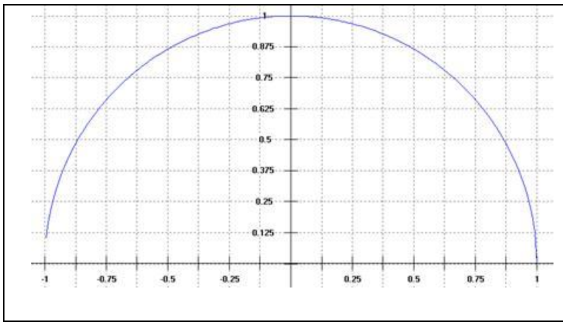
د دې ورکړ شوې استوانې د حجم شمېرنه:

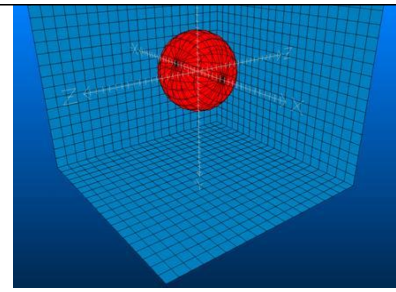
$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2\,dx = \pi \int_0^5 [9(x)]_0^5 = \pi \int_0^5 [45-0]_0^5 = 45\pi$$

د پرتلې لپاره: $\pi r^2 h = 45\pi$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کره (غونډاری یا غونډوسکه):





فعاليت:

- د کري حجم بې له انتيګراله ولیکئ.

- د توتي حجم ولیکئ

- د مخروط حجم ولیکئ.

-دا درېواړه سره پرتله کړئ.

د x په محور د $f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$ تابع ځرخېدني ځخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتني شکل.

دا تابع هم کېدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوځوونکي تابع يي $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتيګرلولو له لارې دې بيا حجم وشمېرل شي.

په دې بېلګه کې دې حجم وشمېرل شي، چې له صفر ځاي ځخه و صفر ځاي ته د x په محور باندې

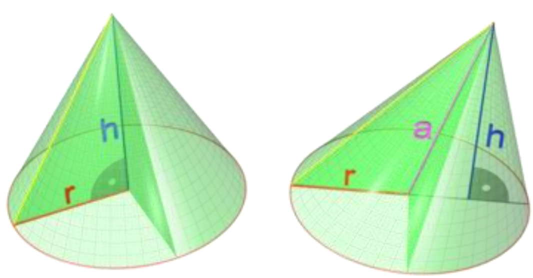
(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)=\sqrt{1^2-x^2}$ تابع څرخېدنو له لارې منځ ته راځي ، يعني په انتروال [-1;1] کې .

$$\pi\int_{-1}^{1}[f(x)]^2dx=\pi\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]=\pi\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi$$

مخروطKegel (Geometrie)

دا هم ممکن ده، چې يو مخروط د يوه منظمn زاويو (اړخيزې(کونجيز) څخه رابندې بنسټيزې سطحې(د n لپاره چې ناپا ي ته ځي) اهرام ته ور نزدې کړو.



د مخروط حجم:

د انتيګرال په مرسته د يوه مستقيم مخروط د حجم د شمېرلو يوه بله
۲۷۴
څرخېدونکې تنونه: ----------------------------

مرستندويه لار. يو د کارتيزي وضعيه ارزښت (قيمت) سيستم په کار اچول کيږي، د هغه سره چې د مخروط څوکه په سرچينه (0|0) او منځ ټکی په ټکي $(h|0)$کې پروت دی. اوس کېدی شي، چې مخروط ناپاي کوچنيو توتو(استوانو) رايوځاي شوی په پام کې ونيسو، چې جګوالی(پنډوالی) يې dx دی. داچې د داسې يوې توتې يا استوانې ګردې ټوټې(کترې) واټن د مخروط له څوکې د وضعيه قېمت سيستم په x سره ور کړ شوی دی، د وړانګې جملې له مخې(دلته په افغانستان کې دا د ... جملې په نامه بلل شوې باور لري.

د يوه ناپاي کوچنی توتې(استوانې) وړانګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r\,z\,(h) = \frac{r}{h} \cdot x$$

د يوې ناپاي کوچنی توټې(استوتنې) حجم:

$$(\frac{r}{h} \cdot x)^2 \cdot \pi \cdot dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2\, dx$$

دټول ځرخېدوني مخروط د ټولو داسې کوچنيو توټو حجم دی. د شمېرلو لپاره يې ټاکلی انتيگرال جوړوو، د انتيگرال حدونو 0 او h سره:

$$V = \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot x^2 dx = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \int_0^h x^2 dx$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]^h$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right)$$

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3}$$

له دې سره هغه مشهور فرمول ته (چې لروده مو) راځو:

$$V = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3} = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h$$

يو مخروط د x په محور د f(x) = mx يوې کربښيزې (خطي) تابع(د بېلگې په توگه (f(x) = 0,5x) ځرخېدنه(ځرخون) ده.

د يوه مخروط شمېرنه

دلته نه شو کولاي چې لومړی د کوادر حجم وشمېرو. دلته د دې گراف لاندې په ډېرو کترو کتره کول دي د dx پنډوالې سره . د دې کترو د سطحو مساحت وشمېرئ، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

وړانګه f(x) لري داسې په نامه د پروت تقاطع تابع او بيا يې انتيګرال په ورکړ شوي [0;5] انټروال کې ونيسئ.

$$\pi \int_0^5 [f(x)]^2 dx = \pi \left[\frac{1}{12} x^3 \right]_0^5 = 32.72$$

د پرتلې لپاره دی د يوه مخروط د حجم معياري (ستاندارد) بڼه وکتل شي.

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h = 32.72$$

لنډ :

که يوه منحني د x يا y په محور وڅرخول شي، يو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نريو کترو يا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرخونه: $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

بېلګه ۵ . ١٢:

د $y = x^2/4$ تابع ګراف په $[0, 2]$ انټروال کې د وضعيه قيمتونو په محورونو څرخي. دا د منځ ته راغلي څرخېدلي جسم حجم څومره دی؟

د x په محور څرخېدنه: $y^2 = x^4/16, x_1 = 0, x_2 = 2$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^2 \frac{x^4}{16} dx = 0.4\pi$$

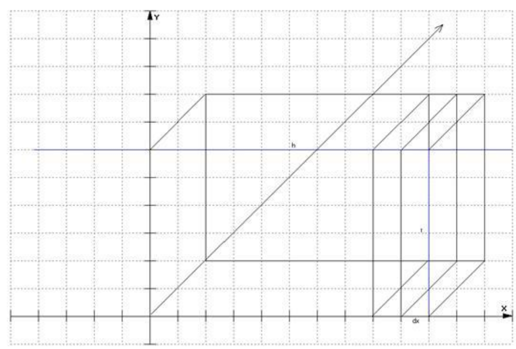
(c) ketabton.com: The Digital Library

د y په محور څرخېدنه: $x^2 = 4y, y_1 = 0, y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y\,dy = 2\pi$$

د ناڅرخيدونکي جسم ډکی يا حجم.

مستطيل يا بربع المکعب (شپږ اړخيز جسم) Quader



دا ليد شکل د استواني څخه راته معلوم دی، فقط دا ځل نه څرخي. حجم يې کېدی شي د عادي کوادر په څېر وشمېرل شي $(V = r^2h)$ او يا د صفر په لور تلونکي dx سرورۍ مربع وې ټوټه شي. د دې لپاره دې د پروت غوڅي (قاطع) سطحه وشمېرل څرخېدونکي تنونه:

شي، يعنې q(x) د پروت قاطع تابع دې جوړه شي د دې بيا بايد انتيگرال ونيول شي. په ټوليزه توگه دا معنا لري: $V = \int_a^b q(x)dx$

په دې بېلگه کې تصادفي د پروتقاطع تابع د ژۍ تابع مربع ده: $q(x) = [f(x)]^2$

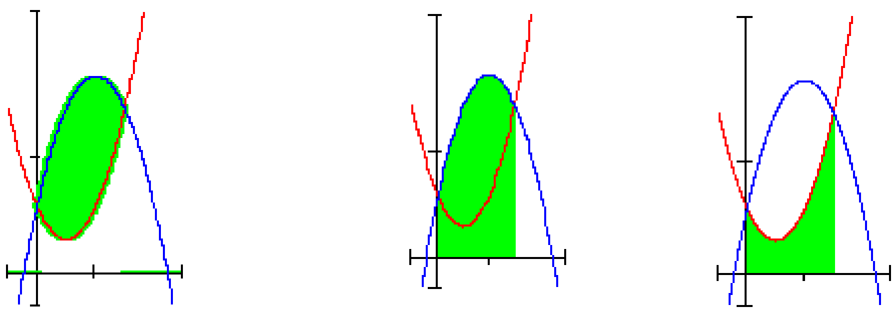
که موږ $f(x) = 3$ تابع له 0 تر 5 انتروال کې د پروتقاطع تابع سره انتيگرال کړو، نو بايد $V = r^2h = 45$ لاس ته راشي. $\int_0^5 q(x)dx = [9x]_0^5 = 45$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تېولګه

که د تابع $y=f(x)$ سطحې د منحني تلنه دx- محور لاندې لور ته وي، نودا ټاکلی اینتیګرال به منفي وي. ددې لپاره چی د سطحې تل مثبت مساحت لاس ته راوړو، نو د اینتیګرال مطلقه ارزښت نیسو یعني منفي اینتیګرال.

په ځنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د ټاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



A A₁ A₂

$$A = A_1 - A_2$$

د منحنیو $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$

تر منځ پرتې سطحې مساحت په لاندې پولو کې

له $x=a$ تر $x=b$ پورې او $y=f_1(x)$ او $y=f_2(x)$.

د یوه ځرخېدونکي جسم لپاره، چې د سطحې په ځرخېدنه د x په محور په انټروال $[a,b]$ کې د f تابع له ګراف ، د x له محور او له دواړو کرښو $x = a$ او $x = b$ ترمنځ جوړیږي، رابنده وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حجم شمیرل په لاندې ډول دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

د y په محور څرخېدنه

د یوې سطحې په څرخېدنې (د y په محور)، چې په [a,b] انتروال دf تابع ګراف د y محور او د دواړو کرښو $y = f(a)$ او $y = f(b)$ له خوا رابند وي باید د $y = f(x)$ بڼه بدله شي و $x = f^{-1}(y)$ معکوس تابع ته . دا شتون لري، که f متمادي او غښتلي یوغږیز وي. که نه(لکه په پورته شي شکل کې) نو شاید ممکن وي،چې f په ټوټو ټوټه شي، په هغو کې چې متمادي او غښتلی یوغږیز وي. دا دلته منځ ته راغلي حجمونه بیا ځانله شمېرل کیږي او سره جمعه کیږي.

$$V = \pi \cdot \int_{\min(f(a),\ f(b))}^{\max(f(a),\ f(b))} (f^{-1}(y))^2 \, dy$$

جمله ۵ . ۸) د څرخیدونکي بدن ډکی(حجم):
په اینټروال[a,b]کې دی y=f(x) متمادي وي، د څرخیدونکي بدن حجم چې د سطحو y=f(x),y=0,x=a,x=bترمنځ ، راپیداکیږي داسی دی:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

د توتې، غونډاري(کرې) او مخروط د حجمونو ترمنځ تناسب:

$V_{توته(استوانه)} : V_{غونداری(کره)} : V_{مخروط} = 3 : 2 : 1$

یو مخروط د x په محور د f(x) = mx یوې کرښیزې (خطي) تابع(د بیلګې په توګه f(x) = 0,5x) څرخیدنه(څرخون) ده.

که یوه منحني د x یا y په محور وڅرخول شي، یو جسم چې لاس ته راځي، چې موږ دا جسم په نریو کترو یا زونونو ټوټه کوو، د پنډوالي x همداسې y سره او دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته نزدې توګه په استوانو بدلوو، نو په نزدې توګه لکه د مخه د حجمونو لپاره لاندې بڼه لاس ته راځي:

د x په محور څرخونه: $V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$

د y په محور څرخونه: $V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dx$

د x په محور د $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ تابع څرخيدني څخه کره منځ ته راځي(پورته د ننوتنې شکل.

دا تابع هم کيدی شي په ګردو ټوټو ټوټه شي، پرته غوڅوونکې تابع يې $q(x) = \pi[f(x)]^2$ ده. د دې ټوټو د انتيګرلولو له لارې دې بيا حجم وشميرل شي.

تمرينونه:

۱ - د $y = f(x) = x^2$ او د دې د معکوس تابع تر منځ سطحه وشميرئ.

۲ - د ګراف او X محور ترمنځ سطحه وشمېرئ.

 څرخېدونکي تنونه:

$a)\ f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{13}{4}x + 3$ $b)\ f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x$

$c)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ $d)\ f(x) = -x^2 + 6x - 5$

۳- د هغې سطحې مساحت وشميرئ، چې د وکړ شوو مساواتو منحنيو څخه را بنده شوي وي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a)\quad y = e^{0,5x}, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2:$$

$$b)\quad y = \frac{1}{2}x^3, \quad y = 0, \quad x - 2, \quad x = 2:]$$

$$c)\quad y = \frac{1}{x^2}, \quad y = 0 \quad x = 9, \quad x = -3, \quad x = 3:$$

$$d)\quad y = \cos x, \quad y = 0$$

$$e)\quad y = \cos x, \quad y = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{5\pi}{6}:$$

$$f)\quad y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 4:$$

$$g)\quad y = \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)^2, \quad y = 0, \quad x = -2, \quad x = 2:$$

$$h)\quad y = x^3 + 7, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2:$$

$$i)\quad y = x^3 + 7, \quad y = x^3 - x^2 + 3x + 5:$$

$$j)\quad y = 3 - \frac{1}{2}x^4, \quad y = 3 - 4x:$$

$$k)\quad y = \frac{1}{x}, \quad 3y + 3x = 10:$$

$$l)\quad y = \cos x, \quad y = \sin x$$

$$m)\quad y = \sqrt{3x + 1}, \quad y = 1, \quad x = 8:$$

$$n)\quad y = \frac{x^2}{4}, \quad y = \frac{8}{4 + x^2}:$$

$$o)\quad y = x^2, \quad x = y^2:$$

$$p)\quad y = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{x^3}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 3:$$

٤-- - د ساین د منحني گراف او د کوساین د منحني گراف یو بل په انتروال $0 \le x \le 2\pi$ کې غوځوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دواړو غوڅېکو تر منځ له دواړو منحنیو را بندي سطحې مساحت وشمېرئ.

۵- د اکسپوننشل منحني g د $y = e^x$ سره او په انتروال $[0,1]$ دp پارابول د $y = -x^2 - 1$ سره را بنده سطحه وشمېرئ.

٦ - د کرښې g د $y = 2x^2 + 1$ سره او په اینتروال $[0, 2\pi]$ د ساین منحني د y=sin x سره څخه رابنده سطحه وشمېرئ.

٧ - پارابول p_1 د $y = x^2 - 3$ سره او p_2 د $y = 2x^2 + 1$ سره د $[-1,2]$ په اینتروال یوه سطحه را بنده وي.

د ا بنده سحه و شمېرئ.

٨ – د پارابول P د $y = \sqrt{x}$ سره او کرښه g یې د y = -x-1 سره په اینتروال رابنده سطحه لرو. دا را بنده سطحه وشمېرئ.

٩ - په اینتروال $[-2,1]$ د g_1 کرښې د $y = x + 3$ سره او g_2 د 2x+1 سره څخه را بنده سطحه وشمېرئ.

١٠ - – پارابول $y = x^2 - 6x + 5$ د p سره او کرښهg د y+-x+1 سره رابنده سطحه.

د دې سطحې مساحت وشمېرئ.

١١-- د g یوه کرښه یو پارابولp د $y = x^2 + 2$ سره په $x_1 = -1$ او $x_2 = 2$ کې غوڅوي.

د کرښې او پارابول څخه رابندې سطحې مساحت وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ – د g یوه کرښه یو پارابول p د $y+0,5x^2+x+4$ سره په د $x_1=-2$ او $x_2=4$ ټکو کې غوځوي.

د دې کرښې او پارابول څخه رابندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱۳ - د ساین د منحني ګراف او د کوساین د منحني ګراف یو بل په انتروال $0 \le x \le 2\pi$ کې غوځوي.

د دواړو غوڅټکو تر منځ له واړو منحنئو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۱٤ - د f تابع ګراف د $y=-\frac{1}{9}x^4+\frac{2}{3}x^2$ سره د x محور سره سطحه پوره رابندوي.

د دې مساحت وشمېرئ.

۱٤ - د f تابع ګراف د y=a.(1-sin2x), (a>0) سره او د وضعیه قیمت په I (اوله) مربع کې (قیمتونو څخه را بنده سطحه) پوره رابنده سطحه لرو.

د کومو ارزښتونو لپاره د سطحې مساحت (x-2) سطحې یوونونه (واحدونه) دی.

۱۵- د لاندې توبعو ګرافونه هر یو د x په محور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدونکو جسمونو حجم وشمېرئ.

$a)\ \ f(x)=2+\sqrt{x}\,,\quad I=[0;4]$ $\qquad b)\ \ f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2+1\,,\quad I[2;4]$

۱٦ - د لاندې توبعو ګرافونه هر یو د x په مخور څرخي. د منځ ته راغلو څرخېدوکو جسمونو حجم وشمېرئ او د ساده شمېرنو سره یې و ازمایئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ \ f(x) = -x+5, \quad |= [0;3]$ $\qquad\qquad$ $b)\ \ f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ , \quad | [1;5]$

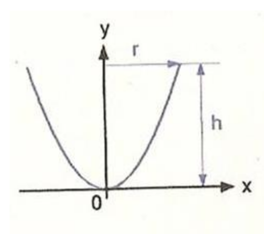
۱۷--د لاندې توابعو گرافونه هر يو د y په مخور ځرخي. د منځ ته راغلو ځرخېدوکو جسمونو حجم وشمېرئ.

$a)\ \ f(x) = \sqrt{x}\ \ ,\ 1 = [0;4]$ $\qquad\qquad$ $b)\ \ f(x) = (x-2)^2\ ,\ 1 = [1;3]$

۱۸- د لاندې توبعو گرافونه هر يو دy په محور ځرخي. د منځ ته راغلو ځرخېدونکو جسمونو حجم وشمېرئ او د ساده شمېرنو سره يې و ازمايی.

$a)\ \ f(x) = x+1\ \ \ ,\ 1 = [1;4]$ $\qquad\qquad$ $b)\ \ f(x) = -\frac{1}{2}x + 2\ \ ,\ 1 = [0;4]$

۱۹ د پارابول په سيومتري محور yد پارابول د ځرخيدو سره يو لوښی منځ ته راځي. وښايئ، چې دا $v = \frac{\pi}{2} \cdot r^2 \cdot h$ حجم لري.



$$v = \frac{\pi}{2} \cdot r^2 \cdot h$$

۲۰ - د ساين د منحني گراف او د کوساين د منحني گراف يو بل په انتروال $0 \le x \le 2\pi$ کې غوځوي.

د دواړو غوڅتکو تر منځ له واړو منحنئو را بندې سطحې مساحت وشمېرئ.

۲۱ - د f تابع گراف د $t\ \ y = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^2$ سره د x محور سره سطحه پوره رابندوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مساحت وشمېرئ.

۲۲ - د f تابع گراف د $y=a.(1-\sin 2x), (a>0)$ سره او د وضعیه قیمت په I (اوله) مربع کې (قیمتونو څخه را بنده سطحه) پوره رابنده سطحه لرو.

د کومو ارزښتونو لپاره د سطحې مساحت (x-2) سطحې یونونه (واحدونه) دی.

۲۳---- لاندې د څرخیدونکې بدنونو گراف په x محور څرخې. د داسې منځ ته راغلو څرخېدونو تتونو حجمونه(ډکې) وشمېرئ.

$$a)\ f(x)=2+\sqrt{x}\quad ,\quad I=[0;4]\qquad b)\ f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2\quad ,\quad I=[2;4]$$

۲٤---د لاندې څرخېدونکو بدنونو گرافونه د x محور باندې څرخې داسې منځ ته راغلې حجمونه(ډکې) وشمېریئ او په ساده حساب سره یې وشمېرئ.

$$a)\ f(x)=-x+5\quad ,\quad I=[0;3]\qquad b)\ f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\quad ,\quad I=[1;5]$$

۲٥--- د لاندې توابعو د څرخون له لارې منځ ته راغلو تتونو حجم وشمېرئ.

$$a)\ f(x)=\sqrt{x}\quad ,\quad |=[0;4]\qquad b)\ f(x)=(x-2)^2\quad ,\quad I\ |=[1;3]$$

۲٦---- د لاندې توابعو گراف د y په محور څرخې. داسې منځ ته راغلې تتونه و شمېرئ او په ساده شمېرنه سره یې هم و شمېرئ.

$$a)\ f(x)=x+1\quad ,\quad |=[1;4]\qquad b)\ f(x)=-\frac{1}{2}x+2\quad ,\quad |=[0;4]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۷--- د لاندې توابعو ګراف د y په محور څرخي. داسې منځ ته راغلي تنونه و شمېرئ او د ساده شمېرنې سره يې هم و شمېرئ

$a)\ f(x)=\sqrt{x} \quad , \quad I=[0;4]$ $\qquad b)\ f(x)=(x-2)^2 \quad , \quad I=[1;3]$

$a)\ f(x)=x+1 \quad , \quad I=[1;4]$ $\qquad b)\ f(x)=-\frac{1}{2}x+2 \quad , \quad I=[0;4]$

هغه ناټيکاوي، چې د نصاب په کتاب کې شته، داسې لړڅه به يې زه دلته له تاسو سره شريک کړم

د ډاکتر ماخان (ميرې) شينواري چاپ او ناچاپي ليکنې:

په ډېره مننه، چې زما کتابونه به ټول www.ketabto.com ته پورته شي.

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب   په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې   انګريزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځيال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې يو پيل   دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

(c) ketabton.com: The Digital Library

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپیني خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي ځخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

د ښوودځي کتابونه له ۷-م لګي ځخه تر ۱۲-م ټولګي پورې.

۱ – د دولسم ټولګی شمیرپ،هنه

زما لیکونه:

Dr. Makhan Shinwari ډاکتر ماخان شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د افغانستان اسلامي حمهوریت جمهور ریس جلاتمآب

ډاکتر محمد اشرف غني ته په ډېر درنښت.

له هر څه د مخه دې بخښنه وي، چې ستاسو ډېر د ارزښت ډک وخت نیسم، خو دا راته ډېر اړیین بریښي او پرته له تاسو به یې څوک دومره جدي هم ونه نیسي.

پوهیږو، چې د پوهنې وزارت د ولس د پوهنې مغذ جوړوي، پوهه له همدې ځایه پیلیږي، چې بنسټ یې باید سم وي. همداسې نصاب د یوه هیواد د پوهنې مغذ دی، نو باید همداسې ورته د هره اړخه په درنه سترګه او غور وکتل شي.

زه خبره را لنډوم او د افغانستان د نصاب ستونځو ته په لنډ ډول ګوته نیسم او په همدې ډول ستونځوبیو یا د ستونځو حل ته یې.

ما د ۱۲ –م ټولګي د پښتو او دري کتابونه ولیکل او زه ترې المان ته لاړم، قرارداد پای ته ورسید. زما د کتابونو په ځای نور کتابونه چاپ شول، چې ناسم وو. په دې هکله د پوهنې وزارت ته زما لیکنه مل ده. دا کتابونه ما بیا له سره ترتیب کړل(لیکنې مې یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

درلودلې) او چاپ ته مې چمتو کړل، خو دا مې باور نه کيده، چې دا به بيا بې زما له شتون چاپ شي.

ما د کتابونو د ليکلو لپاره پيسې اخستې او دا ليکنې هم دا دی لرم، چې چاپ ته چمتو دي

ما چې دا نور کتابونه وکتل، نو دا مې لازم وګڼله، چې دا کتابونه هم زه له سره وليکم، مواد يې لرم، ځکه چې ما ډېر د شميرپوهنې يا رياضي کتابونه ليکلي او ژباړلي(نږدې تر ۴۰ کتابونو پورې). د کتابونو منځپانګه د ښوونځي کتابونو لپاره هم پوره ده، تخنيکي کارونه يې بايد له يوه مسلکي کس سره سرته ورسول شي.

اوس مې يې په ليکلو او د ښوونځي لپاره په سمون پيل کړي دی.

زما ليکنې مسلکي ناسمون نه لري، معياري او د وخت د غوښتنو سره سمې دي، چې دا زما د اخرنيو اوولس کالو د هڅو په اساس باوري ده.

زه څه کولی شم؟

دا چې په دې هکله بل کوم هيوادوال څه نه دي ويلي يا ليکلي، نو باور لرم، چې زه يوائنی کس يم چې دې ته مې فکر را اوښتی. زه دا څه چې ليکم دا په پوره مسئوليت ليکم.

ما چې دا څومره ليکنې کړي، دا زما د ارمان د پوره کولو لپاره دي او په دې هکله ځان د ولس پوروړی بولم.

که د دې کتابونو د ليکنې دنده راته وسپارل شوه، نو د کار ميوه به مې وي او دا کار به په نړيوال معيار او ښه توګه سرته ورسوم.

دا اخر يونيم کال مې يوائې د ښوونځي له کتابونو سره سر خوږولی، چې د هر ځل لوستنې سره يې پوره زوريږم او د هر ځل لوستلو سره يې په ناسمون سر خوږوم.

زه هيله لرم، چې دا وخت راته راکړئ، چې د افغانستان رياضی معياري کولو کې مرسته وکړم او نه دا چې مرسته وکړم بلکه معياري يې کړم. دا کار مې لکه د مخه مې چې ګوته ورته ونيوله هم کړی.

زه کړی شم، چې دا کار د المان څخه هم سرته ورسوم. که ماته دا وخت راکړ شو، نو زه به له حکومت څخه د معاش غوښتنه هم ونه کړم او دا کار زما له خوا ساده کيدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښوونځي د رياضي لپاره به يو بنسټ کېښوول شي، چې په هغې د راتلونکی وخت
شمېرپوهنه يا رياضي ابادېدی شي. دا بنسټيز مسلک به په نړيواله کچه سم شي.

زما مسئوليت مې په دې ليکنه سرته ورساوه.

له هر څه د مخه ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکټر ماخان شينواری

د نصاب د کتابونو د ناسمون په څنو برخو د نموني لپاره لنډه څېړنه شوې، چې د دې ليک
سره مل ده.

د پوهنې محترم وزارت ته زما ليکنه هم مل ده.

ډاکټر ماخان شينواری

د ۲۰۱۳ زک لومړی نيمايي

Dr. Makhan Shinwari

Lansbergerstr.3

5311- Bonn

Germany

smakhan1946@gmail.com

د افغانستان اسلامي جمهوريت د پوهنې محترم وزير صاحب ته په ډېر درنښت!

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډېرو درنو!

غواړم دا لاندې دوه ټکي د تاسو محترم سره شريک کړم:

لومړی: ما له مارچ ۲۰۰۸ ز کال څخه تر دسمبر ۲۰۰۹ ز ک پورې د درسي کتابونو ليکنه کې ونډه لرله او د ۱۲ ـم ټولګي د شمير پوهنې يا رياضي کتابونه مې په پښتو او درې وليکل.

ما دا څه موده د مخه د پوهنې وزارت په ن ج پاڼه کې د ۱۲ ـم ټولګي د شميرپوهنې (رياضي)کتاب ولوسته، چې ګورم هلته په کې زما د نوم درک هم نه شته.

دويم : د کتاب خوندېوني يا متن ته چې ننوتم، ګورم، چې هغه څه چې ما ليکلي وو هغه يا نه شته او يا تخريب شوي دي.

ما په ډېر زور او د زړه خوراک سره د کتاب لومړۍ برخه يعني د ،، پولي ارزښت،، يا ليميټ برخه وکتله، چې ګورم، نو دا مې ترې لاس ته راوړه، چې دا نه ريا ضي ده او نه پښتو او هغه چا چې دا ليکلې نه دا چې په رياضي نه پوهيږي په پښتو هم نه پوهيږي.

زما په ليکنو کې نوښت:

دا بايد په ګوته کړم، چې زما ليکنه په نړيوال معيار وه، چې منځپانګه يا متن يې طبعآ زه لرم.

لومړي: دا لومړي ځل دی، چې کتاب مې لومړی په پښتو او بيا په درې وليکه.

دويم: دا لومړۍ ليکنه وه، چې په ليکنه کې له ايراني کتابونو ګټه نه وه اخستل شوې او ليکنه له الماني ادبياتو او داسې څه له انګرېزي ادبياتو رانيول شوي وه.

دريم: زما کتاب معياري ليکل شوی وو او ترې ښه ليکنې يې شونتيا نه لرله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې توګه مې غوښتنه او هيله :

اول - زه بايد پوه شم چې ولې داسې شوي، چې زما نوم له کتاب څخه وتلي؟

که يوائې يوه ليکنه هم په کې زما پاتې وي، نو بايد زما نوم په کې وی. دا ماته له ما سره او زما د دوه کاله په دې لار کې د ستونځو ګاللو له امله او نه اخر زما د علمي کار سره هم تيری برېښي؟

تاسو پوهيږی، چې د ۱۲ ــم ټولګي کتاب ليکلو لپاره ماډېرې پيسې اخستي او لپاره مې يې ښه کار کړی وو، چې لاس ته راوړنه يې بايد داسې نه وی.

دويم- د کتاب دا ليکلي لومړۍ او هم داسې سرسري دويمه برخه، چې ما لوستلې، د ښوونځيو لپاره د زغم نه دي.

زما وړانديز: دا کتابونه بايد راټول شي او بيا وليکل شي، ځکه چې په دې خو ليکونکي نه پوهيږي ، نو له دې امله نه ښوونکي پرې پوهيدی شي او نه زده کوونکي او د پوهيدلو معقول څه هم نه لري. دې ته ګوته نيسم، چې په دې نورو کتابونوکې به هم ورته ستونځې وي، خو زما يې کتنه اوس د لاسه نه کيږي، ځکه چې .....

د داسې کتابونو ليکل او ښوونځيو ته وېشل د پوهنې وزارت لپاره توهين دی.

زه له دې امله د کوچني اختر وروسته کابل ته درځم او هيله لرم، چې د هرچا لومړی له تاسو سره وګورم. زه به د اګست په ۱۷ يو ځل وزارت ته درشم.

يادونه: ما په دې اخرو څو ورځو کې د کتاب ډېر ځايونه داسې ځغلند وکتل، باور وکړۍ، چې د هرې موضوع د لوستلو سره زورېدلی يم.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زه به په دې هکله – که لوي څښتن کول- له تاسو سره په کابل کې وغږیږم.

له هر څه د مخه له تاسو ستاسو له ستونځو مننه

ستاسو ډاکتر ماخان شینواری

یوه هیله

زه د افغانستان د ټولو ن ج ، نورو پاڼو او رادیو تلویزیونو څخه هیله لرم، چې دا زما لیکنه ګرانو لوستونکو ته وړاندې او په نورو اړونده لیکنو هم همدا مرسته وکړي.

د ریاضي کتابونو د چاپ مخه ونیول شي

ولې؟

په دې نږدې څو میاشتو کې د نصاب کتابونه بیا چاپ ته وړاندې کیږي او ګومان مې دی، چې داسې د معیار سره سم سمون به په کې نه وي راغلی، نو له دې امله یې د چاپ مخنیوی اړیین او په همدې ډول یې سمون هم اړین دی، چې په لاندې کې یې ستونځو او ستونځوبیو (د ستونځو حل) ته هم ګوته نیسم.

زه د شمیرپوهنې ټول د نصاب پوهانو ته درناوی لرم او هیله ده، چې دا لیکنه شخصي وه نه نیسي.

-- ما له نږدې ۱۹۹۸ ز ک وروسته د شمیرپوهنې په کتابونو پیل وکړ، چې تراوسه مې نږدې څه کم ځلوبښت کتابونه لیکلي، چې له جملې یې له شلو ډېر چاپ او نور ناچاپ دي. د دې کتابونو ۱۴ غوره یې په www.kitabtoon.com (دې پاڼه کېاوس نه شته) کې خپاره شوي او همداسې له ما څخه شمیرپوهنې ته ځانګړې شوې پاڼه کې تر

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۵ کتابونو ن ج ته پورته شوي او دا نور به هم په خپل وار ن ج ته پورته شي. زما پاڼه smakhan.wordpress.com

دا زما ن ج پاڼه په نا ښکلي ډول يواځې زما د شميرپوهنې کتابونو ته ځانګړې شوې، چې زما زيات کتابونه په کې خپاره شوي او نور به هم په کې خواره شي. پاڼه ښکلې نه، خو خپله موخه پوره کولی شي او موږ ټولو سره مرسته کولی شي، چې شميرپوهنه په ګډه سمه او معياري کړو.

ګرانو هيوادوالو!

افغانستان دې اوږدې جګړې په هر اړخ کې بې ساری زيانمن کړی او همداسې په پوهنيز اړخ کې هم. د افغانستان نصاب هم له دې ناخوالو بې برخې نه دی پاتې شوی.

لکه څنګه چې پوهنه د هيواد مغز جوړوي، همداسې نصاب د پوهنې مغز دی، نو له دې امله زياته پامرنه هم غواړي.

ما په نصاب کې د دولسم ټولګي پښتو او درې کتابونه وليکل، د قرارداد وخت پوره شو، پيسې مې واخستلې او زه ترې لاړم، چې متآسفانه له ما ليکلي کتابونه چاپ نه شول – علت يې دا وو، چې ګران ليکونکي يا ليکونکې وښايي، چې دوي دا کار ښه کوي، نو ولې دا د هيواد دباندې افغانان دې دې کار ته راوبلل شي- او په ځای يې متآسفانه ناسم کتابونه چآپ شول. په دې هکله مې په ۲۰۱۲ ز ک کې پوهنې وزارت ته يو ليک هم ليږلی وو، چې

ما متآسفانه چې پوره ناوخته دا نور د ښوونځي چاپ کتابونه وکتل او دې نتيجې ته ورسيدم، چې د رياضي کتابونه بايد سم او معياري چاپ شي او نه دا ناسم بيا چاپ شي.

دا وړانديز ولې ما په نصاب کې نه دی کړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په خواشینۍ سره به ووایم، چې د کار په سر کې مسئولو چې په کار پوه نه وو، بل څوک هم کار ته نه پرېږدي او د چا خبره د چا غوږ ته هم نه رسیږي. ما په همغه وخت کې هم د ټولو لیکنو لپاره وړاندیزونه لروده او هلته مې ورته چاپ او په میز اېښودلي وو، خو چا نه غوښتل ګټه ترې واخلي او یا یې ترې د ګټې اخستلو توان نه لاره.

ما ته د هغو د لیکني متود ښه ونه برېښیده، ځکه چې استادان د دارنګه لیکنو سره بلد نه دي، نو له دې امله د پوهنې متن سره له هغې څو واره زیاتې څنګیزې لیکنې کوي، چې موخه ور نه دي.

ما چې پتیل، چې د کتابونو د چاپ مخه باید ونیول شي، نو دې ته مې هم چمتووالی باید ښوولی وي، چې د کتابونو معیاري او سم لیکلو امکان هم باید شته وي.

دا امکان شته. ما دا کار سرته رسولی، کتابونه مې ټول داسې خام پوره کړې، چې زیاتو برخو ته یې ، څو واره وړاندیزون هم شته.

که د کتابونو د چاپ کار باید ډېر په بیړه وشي، نو دا کار هم کیدونکی دی، خو باید څو تخنیکي کسان د مرستې لپاره چمتو وي.

د چاپ کتابونو په ناسمون مې لیکنه کړې، چې ګران لوستونکي یې په smakhan.wordpress.com کې لوستلی شي او که ن ج ته پورته نه شو، نو مینه وال او په دې هکله لیوال یې د برېښنا پتې له لارې لاس ته راوړی شي..

ما د هرکتاب څخه لږ ترلږه یوه برخه داسې د نمونې په څیر څیړلې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د شمیرپوهنې مینه وال ګران لوستونکي په ستونځو وپوهیږي، نو اړیین بولم، چې د ښوونځي کتابونه هم وګوري او اړونده موضوعګانې زما د چاپ او ناچاپه لیکنو سره پرتله کړي(کتابونه په پورته ن ج کې شته دی، چې ځنې یې راکښته کیدی شي او هم یې هلته ګران لوستونکي لوستلی شي).

زه په دولت کې او له دولت دباندې د ټولو اغیزمنو هیوادوالو څخه هیله کوم، چې په دې لار کې له ما او له دې لارې زموږ د ځوان راتلونکي سره مرسته وکړي او د شمیرپوهنې معیاري کولواو سمون امکانات راته چمتو شي.

زما د کار دوه امکانات شته:
لمړی: دا کار زه کړی شم، چې له المان څخه هم سرته ورسوم او په ښه توګه، په دې حالت کې به زه د زحمت په مقابل کې له اجورې - د ځوانانو سره د مرستې له امله - تیر شم.

دویم: په افغانستان کې که دا کار سرته ورسیږي، دا به ګټور وي، ځکه چې په افغانستان کې به په ټولو خواوو کاروشي.

داخه وروستی خبرې ما هم رامخ ته کړې.

په لاندې کې زما لیکنې د افغانستان اسلامې جمهوریت جمهورر ریس جلالتمآب اشرف غني او د پوهنې محترم وزارت ته لیک کې هم لوستلی شی او هیله مې ده، چې ویئ لولۍ.

ستاسو له ګټو مشورو به ډېر منندوی یم.

زما د برېښنا لیک پته: smakhan1946@gmail.com

ستاسو ماخان

د نصاب د دولسم ټولګي کتاب ناسمونونو ته کتنه:

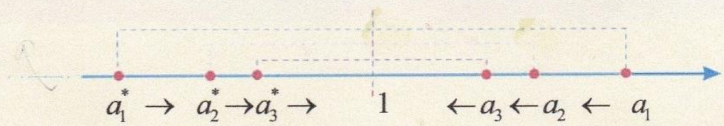
(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي: په دولسم ټولګي کې پيل له ترادفونو شوی او په سر کې يې دوه ترادوفونه راوړي او دا يې بيا په يوه ګراف يا کرښه د ښي او کينې لورې يوې پولې ته ځغلولي.

د کتاب ۳ ــم مخ

پایله:لیدل کېږي، چې د a_n ترادف له ښي لوري څخه د 1 او د a_n^* ترادف له کيڼ لوري څخه د 1 عدد ته د n په زياتېدو سره نږدې کېږي، يعنې:

ـ د a_n ترادف کله چې n بې نهايت ته تقرب وکړي، مساوي په (1) سره کېږي او همداشان د a_n^* د ترادف $n-$ ام حد که n بې نهايت ته نږدې شي هم مساوي له (1) سره کېږي.



ددې لپاره چې د لېمیټ مفهوم مو ښه څرګند کړی وي، په لومړی پړاو کې هغه په څو ترادفونو کې د ګراف په پام کې نيولو سره تر څېړنې لاندې نيسو.

زه پوهيږم، چې دا کار دې درنو ليکوالانو ولې کړی؟

له همدې پيله روښانيږي، چې محترم ليکونکي د درس سره کومه بلدتيا نه لري.

په پورته کې دا دوه پرلپسې هيڅکله له) ۱ « سره نه برابريږي، لکه ښاغلی ليکوال چې ليکي.

پسې يې بيا د پرلپسي يا رديفونو لپاره بيل بيل ګرافونه کښلي.

په پرلپسيو يا رديفونوکې چې موږ ليمټ راوړو، نو موخه ترې د پرلپسې کونورګنت او ډيورګنت دي. په پرلپسي کې اړين نه ده، چې د کونورګنت حالت کې دې پرلپسې له دواړو لورو پولې ته لاړ شي، خو داسې پرلپسې شته او هغه يو ترادف دی نه دوه.

دويم: دا لاندې څه چې راغلي، هم کوم درس پورې اړوندوالی نه لري، همداسې څه يې ليکلي. دی د ناسم د ترادف درس څخه سملاسي داسې يوې موضوع ته راغلی او بيا د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ښي او کيڼ لورې ليميټ ته راځي او که وکتل شي، نو په ليکنو کې کوم توپير نه شته. دلته د زده کړې څه نه ليدل کيږي او دا اخره کرښه يې داسې ده، چې په دې موضوع کې کومه پوهه هم نه لري.

که چيرې دا ټيک هم وي، نو ځای يې بې ځايه ځکه راوړي، چې د ښی او کيڼي لور ليمټونه، چې هلته هم ناسم دې، په اووم مخ کې څيړل(که چيرې څيړنه يې وبولو)

په لاندې کې ،، د متحول تقرب،، يعني څه؟ دا هيڅ مفهوم يا ترې پوهيدنه نه لري. که ... ترادف وي هم بايد د ترادف په ډول وليکل شي او که تابع وي هم بايد د تابع په ډول وليکل شي.

د متحول تقرب: ويل کېږي چې د x متحول د a عدد ته تقرب کوي، په داسې حال کې چې x په اختياري ډول د a عدد ته نږدی کېږي، يعنې د x او a ترمنځ تفاوت له هر کوچني عدد($\delta > 0$) څخه کوچني دی يا په لاندې ډول:

$$\forall \delta > 0 : |x-a| < \delta \quad \text{يا} \quad \lim_{x\to a} x = a \quad \text{يا} \quad x \to a \quad \text{يا} \quad |x-a| \to 0$$

له ښي لوري د متحول تقرب: ($x \to a^+$) که چيرې د x د قيمتونو يو متناقص ترادف موجود وي په داسې حال کې چې په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدی شي.

$$x:\ a+0.1,\ a+0.01\ ,\ a+0.001\ ,\ a+0.0001\ ,\ \ldots \to a^+$$

له کيڼ لوري د متحول تقرب: ($x \to a^-$) که چيرې د x د قيمتونو يو متزايد ترادف موجود وي په داسې حال کې چې x په تدريجي ډول د a اختياري عدد ته نږدی شي.

$$x:\ a-0.1,\ a-0.01\ ,\ a-0.001\ ,\ a-0.0001\ ,\ \ldots \to a^-$$

نو د x د متحول تقرب د a عدد ته معادل دی د x د متحول تقرب له ښي لوري او د x د متحول تقرب له چپ لوري؛ يعنې:

$$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad (x \to a^+\ ,\ x \to a^-)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\forall\delta>0:|x-a|<\delta$ یا $\lim\limits_{x\to a} x=a$ یا $x\to a$ یا $|x-a|\to 0$

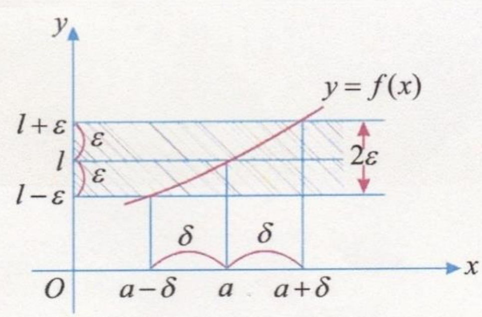
ډول لیکنو سره ګران لیکونکي بلدتیا نه لري او نه داسې څه د مخه راغلي، چې روښانه شوې وي

داسې لیکنې د ښوونځیو لپاره ستونځمنې دي. له دې امله ماهم په خپلو لیکنو کې نه وې راوړې. ګورو چې د کتاب ناسموونکي هم دا څه ناسم یا بې له تشریح کارولي.

په دې هکله زما لیکنه په لاندې کې شته.

دریم: په لاندې تعریف کې د پوهیدلو څه نه شته او په دې ریاضیکي تعریف خو نه پوهیږي، خکه چې په لاندې یې د پوښتنې د حل نتیجه راوستلې او دا بحث له دې سره په ربښتیا کې هیڅ سر او کارنه لري.

تعریف: که چیرې د $f(x)$ تابع په یوه غیر تړلي انتروال کې چې د a عدد په هغې کې ګډون لري کیدای شي چې تابع په a کې نه وي تعریف شوی. که چیرې د x متحول د a عدد ته نږدې شي نو د $f(x)$ تابع د l عدد ته نږدې کیږي، نو ویل کیږي چې د $f(x)$ تابع لیمیټ عبارت له l څخه دی، کله چې د x متحول د a عدد ته تقرب وکړي نو داسې یې لیکو: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ یا $\begin{matrix} x\to a \\ f(x)\to l \end{matrix}$



$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 : |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow (|x-a|\to 0 \Rightarrow |f(x)-l|\to 0)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا سومبولونه $\forall$ او $\exists$ نه دې ښوول شوي، چې څه شی دی او څه بلل کیږي.

ښاغلي لیکونکی په اووم مخ کې بیلګه راوړي او بیا دا ښايي، ښي او کینې لورې لیمیټ یې شمیري.

باید د $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$، لپاره $x \neq 3$ ولیکي،چې هلته فنکشن تعریف نه دی. دی بیا په ناسمه توګه په جدول کې لیکي. دا چې دا باید څنګه ولیکل شي، زماپه لیکنو کې شته.

دویمه بیلګه: و ښیئ چې $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$ سره دی.

حل: د ښي او کیڼي خوا لیمیټونه تر څیړنې لاندې نیسو:

x	3.5	3.1	3.01	3.001	...	3^+
$f(x)$	6.5	6.1	6.01	6.001	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

x	2.5	2.9	2.99	2.999	...	3^-
$f(x)$	5.5	5.9	5.99	5.999	...	6

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-9}{x-3}=6$$

لیدل کیږي چې د ښی خوا او کیڼي خوا لیمیټونه سره مساوي دي، نو $\lim\limits_{x\to 3}=\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$ دي.

په پورته کې xد 3 قیمت نه شي اخستلی، هلته فنکشن تعریف نه دی، نو له دې امله په جدول کې، نه د ښیَ لورې او نه د کیڼي لورې دا ارزښت 3 اخستلی شي، هلته 3 ته ور نږدې کیږي.

د بیلګې حل یې هم بیا سم نه دیَ کړي، په هغه ورسره بلده لار.

دا هغه د کاغي او د زړکې خبره ده.........

دویمه طریقه: د لیمیټ د تعریف په پام کې نیولو سره فرضوو چې د هر اختیاري کوچني عدد ε لپاره یو δ شتون لري داسې چې:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta>0 : \ |x-a|<\delta \ \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

$$|x-3|<\delta \ \Rightarrow \left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=\left|\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}-6\right|=|x+3-6|=|x-3|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon=\delta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې د حل نتیجه

$$\varepsilon = \delta$$

دا د دی بحث سره سر او کار نه لري یعني دا مو موخه نه ده، نو باید ووایم، چې دروند لیکونکي د موضوع څخه بوي هم نه وړي.(بخښنه دې وي، که زما لیکنې داسي لږ توندې برېښي)

او بې ځایه مخ ته ځي، چې څه ترې پوهیدل کیږي هم نه.

له پورتنی اړیکې څخه دا معلومېږي چې ε له δ سره اړیکه لري، که δ ته قیمت ورکړو ε قیمت اخلي او که ε ته قیمت ورکړو δ قیمت اخلي، بنا پر دې هغه تعریف چې د لېمیټ لپاره موجود دی سم دی او تابع لېمیټ لري، یعني: $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$

دې پورته ته په لنډه توګه زما نوره لیکنه او تیکاوی:

د کتاب په پیل کې راوړل شوې د ترادف یا پرلپسي موضوع باید د یوولسم ټولګي کتاب کې پوره څیړل شوې وی، مګر هلته یې یواځې دا نومونه راوړل شوي او نور لیکونکي – بې له دې، چې د موضوع اړیین څه راوړي - له موضوع څخه تیر شوی.

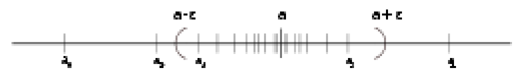
د دې موعوع څخه موخه د ترادف پولې ته تلنه یا کونورګنت او له پولې اووښتنه یا ناپای ته تلنه یا ډیورګنت او... دي، چې بې له دې په رښتیا کې د ترادف یا پرلپسي څیړنه کوم غوره والی یا اهمیت نه لري، یعني خپله موخه له لاسه ورکوي. دا د یوولسم ټوګي د ترادف درس، نو په رښتیا کې خپل غوره والی او اړیینوالی له لاسه ورکوي. نور سموالي او ناسموالي ته یې ګوته نه نسم، همدا بسیا کوي، چې څه په کې نه دي ویل شوي یا لیکل شوي.

د ۱۲ ـــم ټولګي کتاب ته:

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: دا چې ګومان کیږي د داسې لیکنو سره به بلدتیا لږ وي، نو تشریح به راڅخه لږ ډېره شي.

د ،، پوله ارزښت،، په څیره کې ښوونه



که $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ د حقیقي اعدادو (ګڼونو) ترادف یا پرلپسي وي، نو عدد $a \in \mathbb{R}$ د دې ترادف یا پرلپسي پوله ارزښت بلل کیږي او پرلپسي a ته کونورګیر کیږي یا a ته هځیږي یا نږدې کیږي، که د هر $\varepsilon > 0$ لپاره په انتروال $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ کې له یوه اندکس یا پیژند نخښې اخوا یا وروسته یا پسې د پرلپسي یا ترادف ټول غړي(دوي یې حدونه یا جملې بولي، نه پوهیږم ولې؟) د انتروال په دننه کې او فقط پای ډېر غړي له انتروال څخه دباندې پراته وي.

(دنورې اوږدې روښانه ونکي شننې څخه تیریږم)

لنډ پیژند یې:

عدد $a \in \mathbb{R}$ د ترادف $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ پوله بلل کیږي، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو طبیعي یا پیداښتي عدد N شتون ولري، داسې چې $|a_n - a| < \varepsilon$ باور ولري، که $n \geq N.$ وي.

دا پیژند راکوي، چې: د هر $\varepsilon > 0$ لپاره یو ایندکس N شته، داسې چې له دې ایندکس یا پیژندنخښې وروسته د پرلپسې(ترادف) ټول غړې د ε څخه په کم واټن له a لرې پراته دي یعنې له ε څخه چې a ته څومره نږدې دی دا نور هم a ته نږدې دي.

د $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ د پولې ارزښت لیکلو لپاره خپل ځانله سومبول لرو: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

د دې لیکدود سره سم د یوې پرلپسې پوله ارزښت تعریف داسې رالنډولی شو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \iff \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N:\ |a_n - a| < \varepsilon$$

د داسې ليکنو لپاره د ε (لوستل: اېپسيلون) توری ورځنی يا مروج شوی.

بېلګه:

په يوه بېلګه کې يې روښانه کوو:

د دې لپاره چې د$\frac{1}{n}$ پرلپسې يا رديف و 0 ته کونورګنت وښايو، يو د مخه ورکړ شوي ε ته يوه په خوښه طبيعي عدد يا ګڼN ټاکو، چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وی، نو د ټولو $n > N$ لپاره باور لري:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

موضوع اوږدولی نه شم، ځکه چې دا يو درس نه دی، دا فقط په موضوع داسې لږ رڼا اچونه ده.

د فنکشن پوله ارزښت:

يادونه: د دې ۱۲ – م ټولګي د درس دا هغه اصلي موضوع ده.

د فنکشن پوله ارزښت په لاندې توګه پېژنو يا تعريفوو:

پېژند: د فنکشن f پوله ارزښت، د x لپاره چې p ته نږدې کيږي، L دی او داسې يې ليکو: $\lim_{x\to p} f(x)=L$

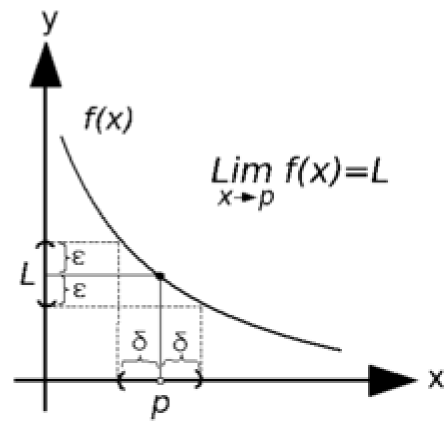
لوستل يې هم همداسې دي لکه پورته تعريف

داسې يې شميرپوهنيز ليک دود باندې تعريفوو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

فنکشن f پوله ارزښت L لري، که د هر 0 < ε لپاره یو 0 < δ شتون ولري، داسې چې د هر x لپاه د δ > |x-p|<0 سره ε > |f(x)-L| هم باور ولري.

د پورته شمیرپوهنیز یا ریاضیکي فنکشن پوله ارزښت لپاره لاندې څیره



پورته دوه تعریفونه برابر ارزښته دي یعنې له یوه څخه بل لاس ته راځي او په ځټ یا برعکس یعنې لیکو:

تعریف: د فنکشن f پوله ارزښت، چې x و p ته نږدې کیږي، L دی، ټیک هلته یا هلته او هلته یا هلته او په ځټ، یا له دې لاس ته راځي او په ځټ یا برعکس چې د هر ε < 0 لپاره یو 0 < δ شتون ولري، داسې چې د هر x لپاه د δ > |x-p|<0 سره -|f(x) ε > |L هم باور ولري.

دلته هم په همدومره بسیا کوو، که څه هم روښانه کیدل نورې شننې ته هم اړتیا لري.

دې ته دلته په اخر کې بیا ګوته نیسم، چې دا شمیرپوهنیز یا ریاضیکې ډول لیکنې ستونځمنې دي او باید ترې تیر شو، د ترادفونو او فنکشنونو لپاره.

دا نور پاتې درس هم په همدې ترتیب ګران لیکونکي لیکلی چې زه نور پرې نه غږیږم.

دا بسیا کوي، چې کتاب د ښوونځیو څخه راټول شي او له سره ولیکل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ستاسو له سرې سينې څخه – که ومو لوسته- ډېره مننه.

ستاسو ډاکتر ماخان شينوارى.

د ډاکتر ماخان شينواري ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړى:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم: د شميرپوهنې ستر كتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونكو او زده كوونكو لپاره (دا كتاب   په ۹۰۰ مخونو كې چاپ او دا نوې ليكنه به يې څنو ځايونو غزېدلې او څنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: څمككچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو كې شميرنه، د ګڼې – او كتې د كتې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه كتاب د ښوونځي ټولي اړتياوې پوره كوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې   انګرېزي – پښتو ډكشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډكشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنڅيال برابرون (دا كتاب په دې ځانګه كې يو پيل   دی، ساده ليكل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج ښخه ژباړل شوي دي.

١ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   لومړی ټوک

٢ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   دویم ټوک

٣ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره   دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه   د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک   دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو ښخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج ښخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ ــ انالیزی ۱

۷ ــ انالیزې ۲

۸ ــ کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ ــ فنکشنل انالیز

۱۲ ــ وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ ــ له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ ــ Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ ــ الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ ــ د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۰ - د يو ځو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

دا لاندې د ښوونځي کتابونه دا اوس پای ته ورسيدل:

شميرپوهنه د اوم ټولګي له پاره

شميرپوهنه د اتم ټولګې له پاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه د نهم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د لسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د یولسم ټولګي له پاره

شمیرپوهنه د دولسم ټولګي له پاره

ریاضي برای صنف دوازده

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرڼي شینواری د اروابنادي پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولې.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګي پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library