٣

شمیر پوهنه

د ښوونځي لپاره

(رياضي په دري برخو کې)

دريمه برخه

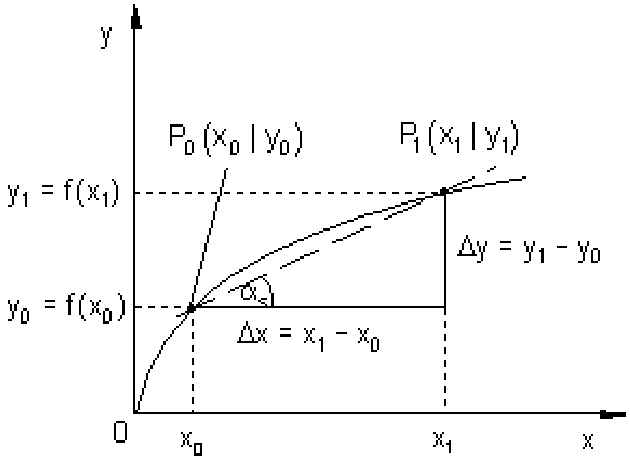
Ketabton.com

ليکونکی:
برينکمن (له برينکمن ن ج څخه)
ژباړی: ډاکټر ماخان (میږی) شينواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره

(ریاضي په درې برخو کې)



دریمه برخه

لیکونکی: پروفیسربرینکمن(له برینکمن ن ج څخه)

ژباړی: ډاکتر ماخان (میړی) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې هيله، چې په دې ليکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې لپاره د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسي لږ ونډه اخستې وي.

کتاب پیژندنه

د کتاب نوم: شميرپوهنه دښوونځي لپاره

ليکونکی: پرفيسور برينکمن

ژباړی : ډاکتر ماخان،، ميرى،، شينوارى

makhanshinwari@gmail.com

د خپريدو لړۍ

خپرندوی: د افغانستان کلتوري ودې ټولته

جرمني

چاپ کال ۲۰۱۲

چاپ چارې دانش خپرندويې ټولنې تخنيکي څانګه

WWW.danishpress.com

د چاپ حقوق خپرندوي ټولنې ليکونکي يا ژباړي سره خوندي دي.

پښتو مو ژبه او شميرپوهنه پرې ساده ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرندوی ټولنې یادښت

له هغې مودې را په دې خوا، چې د افغانستان د کلتوري ودې ټولنې د علمي، ساينسي او طبي اثرو د خپرولو لړۍ پيل کړې، تراوسه يې په دې لړ کې مهم اثار خپلو هيواولو ته وړاندې کړې دي.

موږ باور لرو، چې پښتو ژبه هغه وخت په يوه مهمه غني ژبه بدليدلای شي، چې د پوهې په ګڼه سمبال شي او په علمي او اکاډميکو اثارو غني شي.

اوس چې زموږ ملي سراسري ژبه د بيلابيلوګواښونو او چلنجونو سره مخامخ ده، پر موږ ټولو ده، چې د دغه ګواښونو په وړاندې به په نره ودريږو او د علم او قلم په ژبه به ځواب ورته ووايو.

د اتحاديې له حوا د ډاکتر ماخان شينواري تراوسه زياتو چاپ شويو اثارو په څنګ کې، د ده د پنځه وېښت شمير پوهنې نويو ژباړو او ليکنو او دوه ټولنيزو ليکنو تر منځ، دغه اثر په همدې لړ کې ځکه د ارزښت وړ دی، چې د علمي، ساينسي اثارو د خپراوي په لړ کې د يوه مهم ګام په توګه ګڼل کيدای شي او هيله ده، چې د دې برخې مينه وال لوستوال، زده کوونکي او د پوهنتو زده کړې کته ترې واخستلی شي.

په درناوي

د افغانستان کلتوري ودې ټولنه

۲۰۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ژباړي مننه

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس سره مرسته وي.

همدا ډول زموږ،، د افغانسان کلتورې ودې ټولنه،، جرمنې، د غړو، مرستندویانو او په تیره بیا د مشر تابه څخه زیاته مننه کوم، چې پرته له خپرندوې ټولنې په توګه یې د دې لیکنو زیاته اقتصادي ونډه هم په غاړه اخستې.

دې لاندې زما کلیوالو ملګرو او ملګرو د دې کتابونو په چاپ کې د توان سره سمه اقتصادي ونډه اخستې، چې زه ترې زیاته مننه کوم:

د ښاغلي دپلوم انجنیر ریحان الدین حساس، ښاغلي دپلوم انجنیر محمد اکبر نور، ښاغلی ډاکتر سردار ګانه وال، ښاغلی ډاکترمانوګل ګانه وال، ښاغلي ټولنپوه محمدعارف بیان، ښاغلي دپلوم انجنیرمحمد ایوب بیان، همداسې زما د ملګري اروابناد ډاکتر حاجي محمد سلطانزي د ځوي ښاغلي ډاکتر صالح محمد سلطانزي ، ډپلوم انجنیر او دپلوم اقتصاد پوه رحمت الله فتحي او نه اخر زما د لور ډاکتر ځانګې شینواري او زما د ځوي اقتصاد پوه او ټولنساپوه اباسین شینواري.

نه د ټولو په اخر کې زما له میرمن ښاپرۍ څخه ډېره زیاته مننه، چې زما د لیکنو- نه دا چې مخه یې نه ده نیولې- پوره ملاتړ کړي.

بیا هم له دوي څخه د زړه له کومې مننه کوم او لوي څښتن دې ورته اجرونه ورکړي، چې داسې مرستو ته دوام ورکړي.

په مننه : ستاسو ماخان شینواری

جرمني د بن ښار ۲۰۱۲ ز ک

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیولیک

دریمه برخه:

د ژباړي سریزه الف

مشتق ۱

...پیل او بنسټونه ۱

جګیدنه او تانجنت ۱

دفرنشلوېش او مشتق ۱۲

د دفرنشل لارې یا قاعدې ۶۵

د جګو درجو مشتق(ابلایتونګنه) ۸۴

تانجنت او نورمال یا ولاړه ۸۹

د یوې تابع د استعمال بیلګه... ۹۱

په ت ولید کې د مشتق استعمال ۹۴

د الجبري توابعو مشتق ۹۷

د مشتق استعمال په طبیعي علومو کې ۱۰۳

ټولګه: ۱۳۹

د سیکانت جګوالي او تا نجنت جګوالي ۱۴۱

مونوتوني – یا یوغږیزوالي ۱۴۵

د یو غږیزوالي خویونه ۱۴۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

افراطي ارزښتونه ۱۵۰

اوړونتيکی او زينتيکی ۱۵۵

د ګړو یا منخنيو خبرې اترې یا بحث ۱۶۴

نرخشميرنه د مشتق استعمال په حيث

مشقشميرنه د ټولګي کار چمتووالي لپاره ۲۹۳

اتيګرالشميرنه ۳۲۳

پيل راوړنې ۳۲۳

سطحه شميرنه او بنسټ يا لومړنی تابع ۳۲۵

ناټاکلی انتيګرال ۳۲۸

د نامعلوم اتيګرال څخه و معلوم امتيګرال ته ۳۳۳

د انتيګرېشن پوله بدلون ۳۳۷

له دوه ګرافونو څخه رابندې سطحې شميرنه ۳۴۴

انتيګزرال د منځ ا رزښت په حيث ۳۵۶

اناليز ۲ ۳۶۰

اکسپوننشل توابع او e - توابع ۳۶۰

د اکس توابعو استعمال ۳۷۸

محور غوځيکي او اکس. مساوات ۳۸۶

د توان او لوګاريتم توابع ۳۸۹

د اکسپوننشل توابعو لپار د حل لارې ۳۹۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د **e** - توابعو مشتق د ضرب او ځنزيري قانون سره ۴۰۴

د **e** – تابع انتيګرېشن يا ګډونه ۴۱۶

د بدلون سره ټاکلی انتيګرال ۴۱۸

ناټاکلی انتيګرال ۴۲۶

د مشتق او انتيګرال ششميرنې سره مخامخ کول ۵۵۴

ناپرېکيدنوالی يا متماديت، ۵۶۷

ناپرېکيدنوالی يا متماديت، ۵۶۷

مشتقوړوالی(رابيليدوړوالی) ۵۶۹

انتيګرالوړوالی: ۵۷۲

د ټاکلو انتيګرالونو حل د بدلون له لارې: ۵۷۶

ټوټه انتيګرالونه (يا دضربونوانتيګرال) ۵۷۸

.

.

.

.

.

.

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف

د ژباړي سریزه

ګرانو هیوادوالو او د شمیرپوهنې مینه والو!

د ا څو کاله د مخه د ځنو شمیرپوهنیزو کلمو په لټه کې د برینکمن د ن ج سره مخامخ شوم. دا چې دې لیکنې ښه خوندویونه یا متن درلود او زیات تمرینونه د حل سره، نو ما وبتیله، چې دا به پښتو ته اړوم. دا یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې زده کوونکي ښوونکي او داسې لړ د شمیرپوهنې سره بلد میندې او پلرونه ترې ګټه اخستلی شي. په دې لیکنه کې هر څه خورا ښه روښانه شوي دي او په مختلفو بیلګو سمبال دي د حلونو یا اوبیونو سره، چې لوستنه یې هر د شمیرپوهنې مینه وال لپاره د پیرځوینې وړ بولم.

کتتاب په درې برخو کې چاپیږي، چې هره برخه یې یوه خپلواکه او د یوې ځانګړې برخې خوندیونه لري. زه په دې باور لرم، چې د شمیرپوهنې مینه وال دا کارداسې لړ په غور وګوري، نو زر به ورسره مینه پیدا کړي.

دا کتابونه هم د هغو ۲۵ ریاضي کتابونو لړۍ ده، چې ما چاپ ته چمتو کړي دي، خو نه پوهیږم، چې څو دا نور به ترې کله چاپ شي. که څه پاتې شو، نو هغه به د دې کتابونو سره ن ج ته پورته کړم.

ګرانو لوستونکو!

دا زموږ د هیواد اړتیا لپاره په پوهنیزه اړخ کې په سره تیره اوبه تویول دي. دا کتابونو، چې کوم چې چاپیږي د زر دانو یا پنځه سوه څخه به نه اوړي، نو د یوه پنځوس میلیونه کمو زیات ولس لپاره زردا نې چې چاپیږي، دا خو اصلاً په شمیر کې نه راځي،خو دا به په خروار ګڼو.
په لومړي کتاببرخه کې ځمککچپوهنه یا هندسه ورسره مل ده او په دویمه کتاببرخه کې مې وکتور شمیرنه ورسره زیاته کړې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریمه کتاببرخه مشتق او انتیګرال ته ځانګړې شوې.

ګرانو لوستونکو!

د برینکمن د لیکنو لړۍ د شمیرپوهنې په څانګه کې د ښوونځیو لپاره نوره هم پسې غزېدلې، چې ما هغه د ګرانو لوستونکو لپاره رازباړلې.

دا احصایه یا ستاتیستک دی او د احتمالوالي شمیرنه ده. دا دواړه کتابونه، چې دلته یې تاسو ته ژباړه وړاندې کیږي، هم په زیاتو تمرینونو، اود دوی په اوبیونو یا حلونو سره سمبال ده.

زما په اند، داسې لیکنه په پښتو کې د لومړي ځل لپاره کیږي، چې نومه ونې به دلته هم څه ناڅه ګرانو لوستونوکو ته نابلدې وي، خو پرې پوهیدنه شونې ده. هر څه په روښانه توګه ورکړل شوي.

ګرانو هیوادوالو!

داچې ما یوځای یا نوره هم ښه په یوه وار ډېر کار را ونیوه، نو هرومرو به ناټیکاوي زما له خوا په کې رامنځ ته شوې وي، خو دا به داسې ناټیکاوي نه وي، چې شمیرپوهنیزې ستونځې رامنځ ته کړي. له دې امله له ستاسو څخه زما په ستونځو پوهیدلو له امله زیاته مننه.

په دې هیله ، چې زما په غوښتنو او ستونځو به و پوهیږي په دې لیکنو او ژباړه کې ما ته هیڅ مادي ګټه نه شته. دا دې په ما زموږ د بې وزلي ولس د ډېر مصرف(لګښت) په هکله د یوې کوچنۍ پیرزوینې په حیث وړاندې وي

مننه:

له هر څه د مخه د دې لکچرونو لیکنو لیکونکو شمیرپوهانو یعنې ستر پروفیسور بریکمن څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه بهیې زموږ ولس هم ګټه پورته کړي.

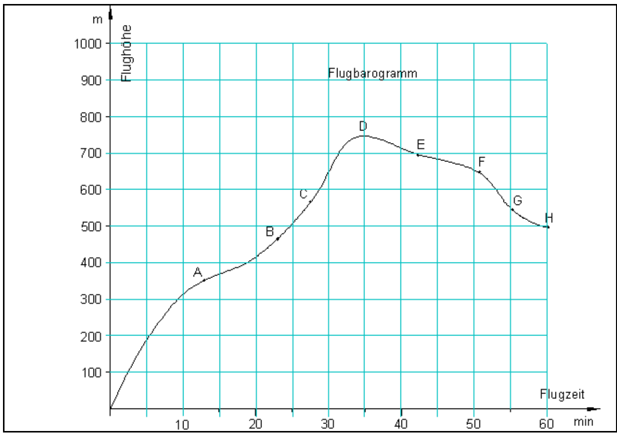
(c) ketabton.com: The Digital Library

دفرنڅيالشميرنه (مشتق يا رابيليدنه)

ننوتنه او بنسټونه

جګيدنه او تانجنت:

په يوه ټکي کې د تابع د ګراف ميل(جګيدنه)



په الوتکوکې د الوتنې دليک(الوتنليک) الې (Flight barogramm)جوړې دي، چې تل د الوتنې جګوالى د الوتنې د وخت په واک کې يا د وخت   تابعيت کې رسموي او په هر جګوالي کې د هوا فشار هم ليکي. که دا په پښتو واړوو، نو د ليک بکس به ورته ووايو.

په پورته ګراف کې د يوې الوتکې د الوتنې د بيلا بيلو وختونوجګوالى ښووول شوى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-ایا فکر کوئ، چې په ټکي B کې نسبت و ټکي A ته جګوالی زیات دی؟
-ایا فکر کوئ، چې د E او G په ټکو کې جګوالی منفي دی؟ دلته د E په ټکي کې د ارزښت له مخې جګوالی زیات دی نسبت د G ټکي ته؟

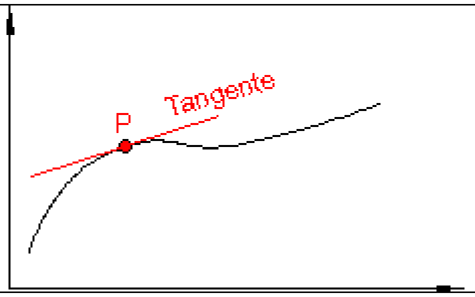
-ایا د یوې کرښې او منحني جګوالی هرچیرته توپیر لري او که نه ؟

لاس ته راوړنه :

۱ - ګورو، چې په یوه منحني کې د ګراف جګوالی هرچیرته برابر نه دی، نو له دې امله باید ټکی په ګوته کړو، چې هلته میل څیرل کیږي.

۲ - په لاندې بیلګه کې به روښانه کړو، چې تنها د یوې (سیده)کرښې میل هرچیرته برابر دی، نو له دې امله دلته د یوې کرښې د میل یا جګوالي څخه غږیږو.

بریښي چې لاندې پیژند یا تعریف هوښیارانه یا عاقلانه دی:

پیژند (تعریف): د یوې تابع ګراف میل (جګوالی) د P په یوه ټکي کې په همغه ټکي د تانجنت د میل د ګراف سره برابر دی	

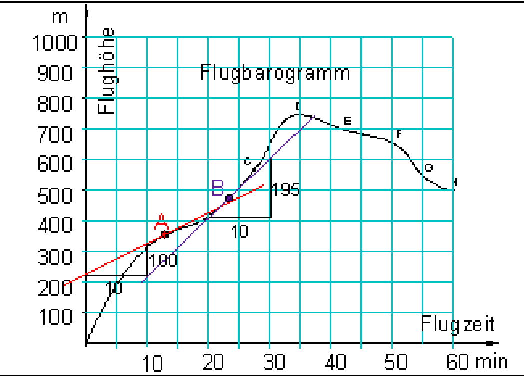
لیدل کیږي چې دلته یو تانجنت د کرښې تعریف لري، چې د لمستکي(مماس) په چاپیریال کې د امکاناتو سره سم د مماس ټکي ته ښه ور نږدې کیږي.

ددې پیژند یا تعریف له مخې په یوه ټکي کې د یوه ګراف میل(جګیدنه) د یوې کرښې میل دی.

د ګراف د جګیدنې ټاکلو لپاره د A اوB په ټکو هر یوه کې یوه کرښه (تانجنت) انځوروو، چې ګراف ته خورا زیاته نږدې کیږي.

د میل یا جګیدنې مثلث په مرسته جګیدنه په شدل یا ساده ډول شمیرل کیدی شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



د A په ټکي کي جګېدنه :

$$\frac{100\ m}{10\ min} = 10\frac{m}{min}$$

د B په ټکي کي جګېدنه :

$$\frac{195\ m}{10\ min} = 19{,}5\frac{m}{min}$$

زموږ د بیلګي لپاره میل یا جګېدنه په یوه ټاکلي ټکي کې د لحظوي (سملاسي) میل د چټکتیا (سرعت) په معنا دی.

دA په ټکی کي : د الوتني وخت نږدې 12,5 min ، د میل یاجګیدني چټکتیا(سرعت) نږدې $10\frac{m}{min}$ ده

د B په ټکی کې : د الوتني وخت نږدې 23,0 min ، د جګیدني چټکتیا(سرعت) نږدې

$19{,}5\frac{m}{min}$ ده.

تانجنت تر اوسه فقط د لیدني له مخې تعریف شوی ، چې د لمسټکي چاپیریال ته خورا ډېر نږدې کیږي. له دې امله ممکن وه، چې د ګراف میل د A اوB په ټکو کي هم یواځې په نږدې ډول وټاکل شي، دا په عمل کې د قناعت وړ نه دی یا بسیا نه کوي.

په یوه ټکي کې د تابع دګراف میل (جګیدنه):

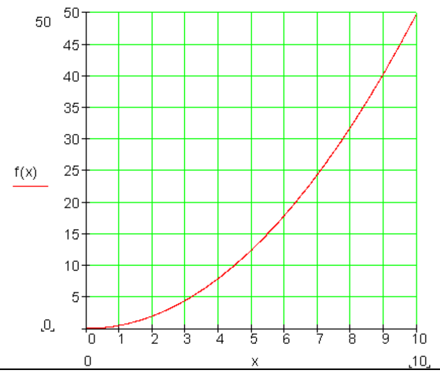
معلومه ده ، چي یو ریلګاډی د تمځای څخه له خوزېدو(حرکت)وروسته خپله چټکتیا(سرعت) په ورو ورو (کراره کراره) زیاتوي.وهلي لار(د تمځای څخه لرېوالی) تل زیاتیږي. د تمځای څخه لریوالی د چټکتیا یا سرعت په واک کې ده .

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا عمل د لاندې تابعمساوات له لارې ليکلی شو.

دلته د x وخت د ثانيې او د s لار د متر لپاره ليکو $s = f(x) = 0,5x^2$

مخامخ : د تابع ګراف



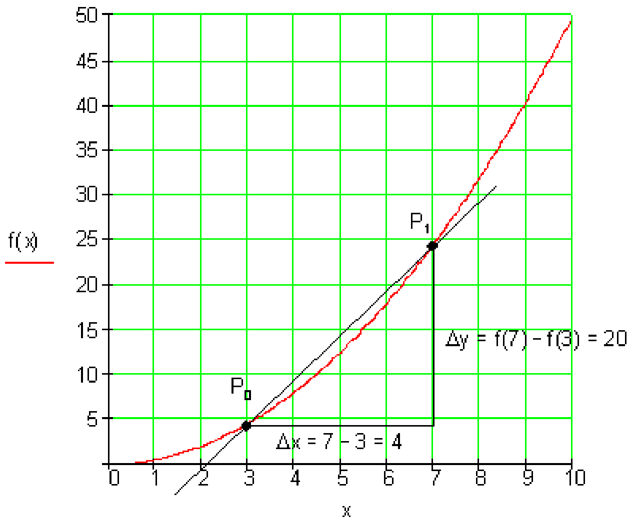
اوس بايد منځنی ارزښت(منځنی چټکوالی) Averagerat of change د ۳ ــمې او ۷ ــمې ثانيی ترمنځ وشميرل شي.

ددې لپاره اړونده سيکانت انځوروو او د هغې چټکوالی شميرو.

اوس دې د تغير ارزښت (منځنی چټکوالی) د ۳ ــمې او ۴ ــمې ثانيو ترمنځ وشميرل شي.

په دريمه ثانيه کې د ارزښت تغير يا چټکوالی څومره دی؟

د منځنی چټکوالي داسې مخ ته بوزی، چې د تکو P_0 او P_1 ترمځ واټن تل کوچنی شي، داسې چې تکی P_1 د تکي P_0 په لور وخوزيږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ۳ ـــمې او ۷-مې دقیقې ترمنځ منځنی تغیرارزښت (جګوالی)دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(7) - f(3)}{7-3} = \frac{24,5 - 4,5}{7-3} = \frac{20}{4} = 5$$

د ۳ ـــمې او ۴ ـــمې دقیقې ترمنځ منځنی تغیرارزښت(منځنی جګوالی) دی:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(3)}{4-3} = \frac{8 - 4,5}{4-3} = \frac{3,5}{1} = 3,5$$

دریمې دقیقې ته د ورنږدې کیدنې شمیرنه

Intervall $[3;x]$	$[3;4]$	$[3;3,1]$	$[3;3,01]$	$[3;3,001]$
$\Delta x = x - 3$	1	0,1	0,01	0,001
$\Delta y = f(x) - f(3)$	3,5	0,305	0,03005	0,0030005
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	3,5	3,05	3,005	3,0005

پورته شمیرنه په ګوته کوي، چې که ټکی P_1 د ټکي P_0 په لور وخوزیږي یا ورنږدې شي، نو د تغیر ارزښت(جګیدنه) تل زیاته و ارزښت ۳ ته ورنږدې کیږي.

موږ په دې توګه یو ارزښت لاس ته راوړو، چې لحظوي تغیرارزښت (لحظوي جګیدنې) ته تل ورنږدې کیږي.

که موږ فیزیکي لویي (واحدونه یا یوونونه) په خپله بیلګه کې وکاروو، نو د تغیرارزښت (جګوالي) لپاره m/s باور لري . دا د چټکتیا لپاره یوون(واحد) دی

دا په دې مانا دی،چې د لار-وخت دیاګرام چټکتیا (سرعت) په ګوته کوي.

لحضوي یاسترګو رپ تغیرارزښت شمیرلو ته شمیرنیزه تګلار

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = 0,5x^2$ لپاره په اينتروال $[3;\Delta x]$ کې منځنی تغير ارزښت(جګوالی)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \frac{0,5(3+\Delta x)^2 - 0,5\cdot 3^2}{\Delta x} = \frac{0,5\left[9+6\Delta x + (\Delta x)^2\right] - 0,5\cdot 9}{\Delta x}$$

$$= \frac{0,5\cdot 9 + 3\Delta x + 0,5(\Delta x)^2 - 0,5\cdot 9}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3+0,5\Delta x)}{\Delta x} = 3+0,5\Delta x$$

دا $3+0,5\Delta x$ د منځنی تغيرارزښت دی

که اوس Δx تل کوچنی شي، مونږ وايو که Δx د صفر په لور وهڅيږي يا لاړشي يعنې ($\Delta x \to 0$) ،نو د منځنی تغير ارزښت $3+0,5\Delta x$ د3 په لور ځي يا هڅيږي.

دا نو اوس لحظوي (د سترګو رپ) تغيرارزښت دی د x_0 په ځای کې.

د دې لپاره ليکو : د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $3+0,5\Delta x \to 3$

يا $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(3+0,5\Delta x) = 3$

پوښتنې

1 - کيمياوي تعامل د مختلفی چټکتيا سره صورت نيسي. د بيلګی به توګه که ځينک د مالګی به تيزابو کی وچول شئ، نو هايدروجن تری تری راوځي يا رامنح ته کيږيز لاندې جدول د هايدروجن سټ يا مقدار ورکوي، چې د وخت په واک کې دی يا تابع دي.

وخت پهS	2	4	6	8	10	12
د اوبو سټ يا مقدار په ملي ليترml	21	30,5	35,5	40,5	42,5	43

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- د دې لپاره يو دياګرام وکاږئ.

ب – د هايدروجن توليد په هکله څه وينا کيداي شئ؟

پ - په لاندې انټروالونو کې د تغير ارزښت وشميرئ.
[2 ; 4] ; [4 ; 8] ; [8 ; 12]

دويم - د $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$ ؛ تغير ارزښت په انټروالونو
$[1;1,5];[-4;-2,5];[2;t]$ کې

د $t\ t \neq 2;[3;3+h]$ او h>0 سره وشميرئ.

دريم - تابع $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$ ؛ ورکړ شوې

الف – د f(x) منځنی تغيرارزښت په انټروال I = [2;5] وشميري.

ب - د s(x) سيکانت مساوات په P (2 | f(2)) او Q (5 | f(5)) ټکو کې وټاکئ.

پ _ د f(x) لحضوي تغيرارزښت د x = 2 په ځاي کې وشميرئ.

ت - د f(x) او s(x)ګرافونه په وضعيه قيمتسيستم کې وکاږئ

څلورم - يو جسم په ازاده غورځولو کې داسې حرکت کوي، چې په t وخت کې S(t) = 5.t² لار وهي(S په ړتر او t دقيقه).

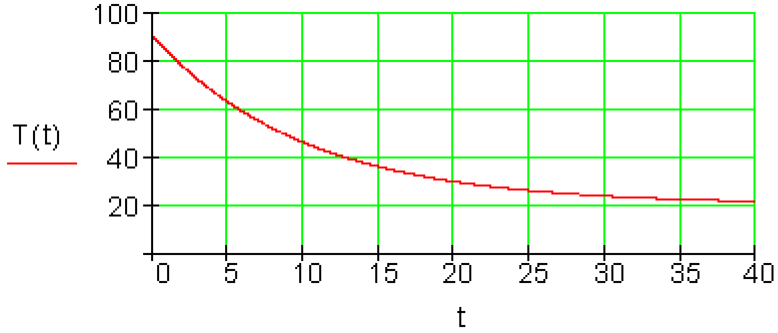
پنځم – يو توليد له خپل جمتووالي وختت څخه وروسته سړيږي.

تمپراتور(تودوخي) $T(t) = 20 + 70e^{-0,1t}\ ;\ t \geq 0$ (t په دقيقو، T(t) په څلزيوس درجې

د سړيدو مخته تګ وشميرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیره د تابع $T(t)$ ګراف ښايي.



الف – له کوم حرارت ځخه مخ ته ځو؟

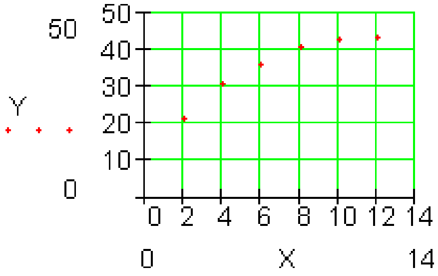
ب – فیریني کوم حرارت لري، که یخه شي؟

پ – په کوم وخت کي چټکتیا(سرعت) ، د هغي سره چي فیریني یخیږي ، خورا لویه ده.

ت _ په لومړیو لسو دقیقو کي د منځني تودوخئ تغیر وشمیرئ.

مفصل حلونه

دلومړي مفصل حل الف –



ب – د هایدروجن تولید د وخت به واحد کی تل کمیږي پ - تغیر اریښت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$[2;4]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{30,5-21}{4-2} = 4,75$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$[4\,;8]:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{40{,}5-30{,}5}{8-4}=2{,}5$$

$$[8\,;12]:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{43-40{,}5}{12-9}=0{,}625$$

I	[2 ; 4]	[4 ; 8]	[8 ; 12]
$\frac{ml}{s}$	4,75	2,5	0,625

دویم – د $f(x)=\frac{1}{4}x^2-x+1$ منځنی تغیر اریښت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$[1;1{,}5]:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1{,}5)-f(1)}{1{,}5-1}=\frac{\frac{1}{16}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=-\frac{3}{8}$$

$$[-4;-2{,}5]:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(-2{,}5)-f(-4)}{-2{,}5-(-4)}=\frac{\frac{81}{16}-9}{\frac{3}{2}}=-\frac{21}{8}$$

$$[2\,;t]:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(t)-f(2)}{t-2}=\frac{\frac{1}{4}t^2-t+1-\left(\frac{1}{4}\cdot 2^2-2+1\right)}{t-2}=\frac{\frac{1}{4}t^2-t+1}{t-2}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\left(t^2-4t+4\right)}{t-2}=\frac{\frac{1}{4}(t-2)^2}{t-2}=\frac{1}{4}(t-2)\ \text{für}\ t\neq 2$$

$$[3\,;3+h]:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3+h)-f(3)}{3+h-3}=\frac{\frac{1}{4}(3+h)^2-(3+h)+1-\left(\frac{1}{4}\cdot 3^2-3+1\right)}{h}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\left(9+6h+h^2\right)-3-h+1-\frac{9}{4}+3-1}{h}=\frac{\frac{1}{2}h+\frac{1}{4}h^2}{h}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}h$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم : الف_ $f(x)=\frac{3}{4}x^2-3x$ منځنی تغیر ارزښت به $[2;5]$ کې دی

: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}$

$$f(5)=\frac{3}{4}\cdot 25-3\cdot 5=3{,}75 \quad f(2)=\frac{3}{4}\cdot 4-3\cdot 2=-3 \quad \Delta x=5-2=3$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3{,}75-(-3)}{3}=\frac{6{,}75}{3}=\underline{\underline{2{,}25}}$$

ب – د $s(x)$ سیکانت مساوات چې لهP اوQ ټکو تیریږي، تیک همداسې شمیرل کیږي، لکه کرښه چې له دوه ټکو تیریږي.

$P(2;f())$ د a) له امله $P(2;-3)$ لاس ته راځئ

$Q(5;f(5))$ د a) له امله$Q(5;3{,}75)$ لاس ته راځئ

$s(x)=a_1\cdot x+a_0$ د $: a_1=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=2{,}25 :$ سره د a)پوښتنبرخه هم وګورئ:

$$\Rightarrow s(x)=2{,}25x+a_0$$

$$P(2|-3): s(2)=-3 \Leftrightarrow 2{,}25\cdot 2+a_0=-3 \Leftrightarrow a_0=-7{,}5$$

$$\Rightarrow s(x)=2{,}25x-7{,}5$$

د تانجنت جګوالی

پ- لحضوي تغیرارزښت د $x=2$ په ځاي کې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{\frac{3}{4}(2+\Delta x)^2-3(2+\Delta x)\underbrace{+3}_{-f(2)}}{\Delta x}$$

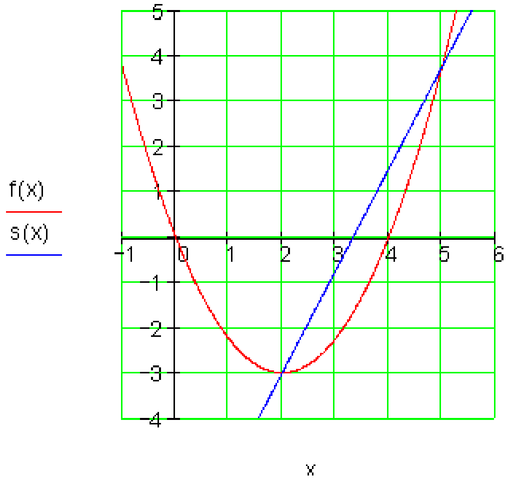
$$=\frac{\frac{3}{4}\left[4+4\Delta x+(\Delta x)^2\right]-6-3\Delta x+3}{\Delta x}=\frac{3+3\Delta x+\frac{3}{4}(\Delta x)^2-6-3\Delta x+3}{\Delta x}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}(\Delta x)^2}{\Delta x}=\frac{3}{4}\Delta x$$

منځنی تغئیرارزښت په انتروال $[2;\Delta x]$ کې.

د $\Delta x\to 0$ لپاره دی: $\frac{3}{4}\Delta x\to 0$

د$f(x)$ لحضوي تغیرارزښت د $x=2$ په ځای کې 0 دی



ت-

خلورم - لحضوي جټکتیا یا سرعت د لحضوي تغیر ارزښت سره په یوه معنا دی.

$$t=1:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{s(1+\Delta x)-s(1)}{\Delta x}=10+5\Delta x\Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\Delta x \to 0$ لپاره صدق کوي: $10 + 5\Delta x \to 10$

$$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2+\Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره صدق کوي. $20 + 5\Delta x \to 20$

$$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3+\Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره صدق کوي. $30 + 5\Delta x \to 30$

پنځم – الف- پیلتودوخي کیدی شي له $90\ ^0C$ ګراف څخه ولوستل شي.

ب- تابع ارزښت اسیپتوتیکي د ارزښت$20\ ^0C$ په لور هڅیږي یا ځي.

پ-د سړیدنې چټکتیا په پیل کې خ ورا لویه وي.

ت- $[0;10]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{T(10) - T(0)}{10 - 0}$

د $T(10) = 20 + 70 \cdot e^{-0,1\cdot 10} \approx 45,75$ und $T(0) = 20 + 70 \cdot \underbrace{e^{-0,1\cdot 0}}_{1} = 90$ سره

کیږي: $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \underline{\underline{-4,425}}$

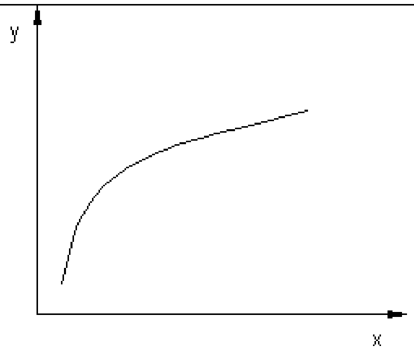
کمیزه یا منفي مخنخښه په دې معنا ده، چې تغیرقیمت منفي دی، د فیریني تودوخي کمیږي.

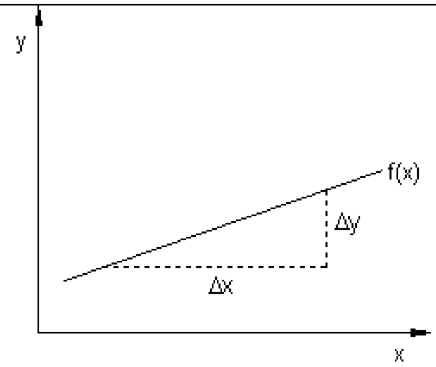
کمښت وېش(تفاضلوېش) او مشتق یا رابیلیدنه

د غوڅووني(تقاطع) جګوالي څخه د تانجنت جګوالي ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

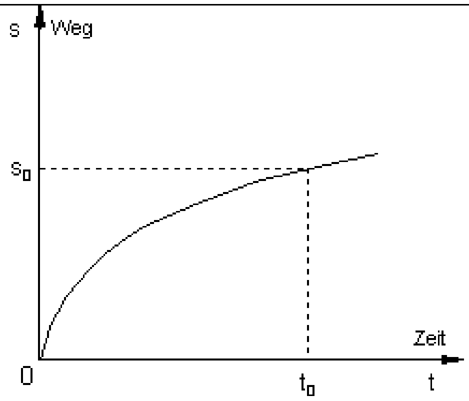
<table>
<tr>
<td>يو تابع $y = f(x)$ او اړونده ګراف دې ورکړ شوی وي.

که د تابع جګیدنې حالت په پام کې ونیسو ،نو ګورو چې د تابع جګیدنه په نږدې ټولو ټکو کې توپیر لري.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>يوه ثابته جګېدنه، لکه په کرښيز يا لاينيز تابع $f(x) = a_1x + a_0$ ا کې د

$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = konstant$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>په زياتو وختونو اړينه ده ، چې د تغيرحالت(د جګېدنې حالت) کې د تابع د تلنې حالت و څېړو.

نو له دې امله لحظوی چټکتيا(همغه وختيزه – يا سملاسي) $v(t_0)$ په لار- وخت دياګرام کې وڅېړو.

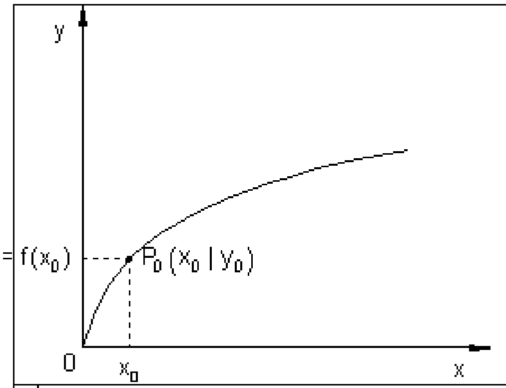
د مشتقشمېرنې په مرسته دا پرابلم حل کېدی شي.

د يوه تابع د جګيدنې ټاکنه په يوه د مخه ورکړ شوي ځای کې differenzieren د مشتق نيونه بلل کيږي.</td>
<td>

<table>
<tr><td>په پام کې نیولی سترګو رپ</td><td>$t_0 \triangleq$</td></tr>
<tr><td>تر دې سترګو رپ پورې وهلي لار</td><td>$s_0 \triangleq$</td></tr>
</table></td>
</tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو تابع $y = f(x)$ او د هغه ګراف دې ورکړ شوی. په ټکي $P_0(x_0 | y_0)$ کې ورکړ شوی وي. ددې جګوالی پیداکړی شي.

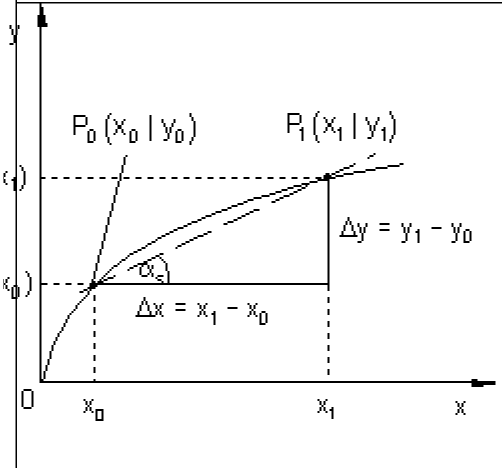


ددې پرابلم د حل لپاره داسې مخ ته ځو، چې لومړی جګوالی په نږدې توګه (تقریبي) پیدا کوو.

ددې لپاره یو بل ټکی $P_1(x_1 | y_1)$ د P_0. ټکي په نزدې کې ټاکو.

کرښه، چې دواړه ټکي سره تړي ،یعنې سیکانت، یو جګوالی ښايي، چې د تکو P_1 او P_0 ترمنځ د تابع ،،منځنی جګوالی،، په ګوته کوي.

دا د جګوالیمثلث له لارې ټاکل کیږي.



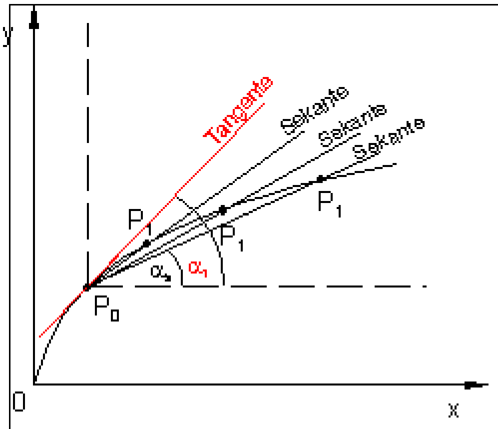
$$\tan \alpha_s = a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

جګېدو کونج	$\alpha_s \triangleq$
جګېدوضریب	$a_s \triangleq$

که ټکی P_1 د ټکي P_0 په نزدې کې وټاکو یا ځای په ځا ی کړو، نو دا په ټکي P_0 کې د تابع دنوي سیکانت جګوالی دی چې باید پیدا شي. که دا کار (تلنه) تل مخ ته بوزو، او ټکی P_1 تل و ټکي P_0 ته ورنزدې کړو، نو د پولې حالت په څېر یوه کرښه منځ ته راځي، چې د تابع ګراف په ټکي P_0 کې لمسوي.

د تانجنت جګېدنه په ټکي P_0 کې ټیک د تابع د ګراف جګېدنه په ټکي P_0 کې ښايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د تانجنت د جګوالي (میلان ـ) کونج	α_t =
د تنجنت د جګوالي ضریب	a_t =

داحالت یا تلنلار کیدی شي د ریاضي له لاري د پوله ارزښت جوړولو په څیر افاده شي.

$$\lim_{P_1 \to P_0} \alpha_s = \alpha_t \qquad \lim_{P_1 \to P_0} a_s = a_t$$

کمښتویش(تفاضلوېش Difference quotient) او مشتق

د سیکانت جګیدنه (منځنی تغیر ارزښت)

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Delta x = x_1 - x_0 \Rightarrow x_1 = x_0 + \Delta x$$

د x لپاره د مساوات ښی خوا ځای په ځای کوو

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

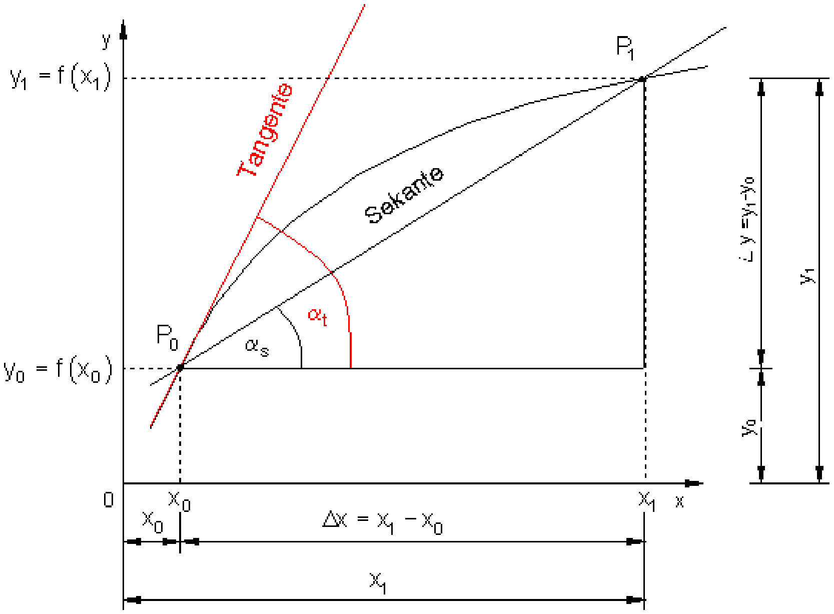
د تنجنت جګیدني سره د پوله ارزښت (حد) له لاري لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

دا مشتق یا لحظوي – د سترکو رپ تغیر ارزښت دی

یا لنډ $$a_t = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$



په ورته توګه د کمښت ویش یا د تفاضل ویش Difference quotient تر څیرنې لاندې نیسو:

د یوې کرښې میل یا جګیدنه بې له مشتق نیونې ټاکلکیدی شي.
کرښه $y = f(x) = mx + a$ لرو.
د دې کرښې د جګیدنې فرمول په لاندې ډول دی:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند (تعریف):

دفرنځیالوېش(کمښتوېش)

د x_0 په ځای کې د تابع $f(x)$ مشتق یا رابیلیدنه بلل کیږي

تعریف (پیژند):
د تابع لومړی مشتق یا رابیلیدنه دx_0 په ځای کې دتانجنت جګیدنه ورکوي، چې د تابع ګراف یې په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې لمسوي او له دې سره غبرګ د تابع د ګراف جګیدنه ده په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې. دا سړی د تابع جګیدنه هم بولي.

تانجنتجګیدنه په ټکي $P_0(x_0, y_0)$ کې

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق او د مشتق تابع

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق یعنې څه؟

ددې د روښانه ونې لپاره د لاندې بیلګې څخه کار اخلو

بیلګه:
تابع $y = f(x) = x^2$ دې ورکړ شوې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

غواړو د $x = x_0$ په ځای کې او په ځانګړي توګه د $x_0 = 2$ په ځای کې د هر څه لومړی کمبنتويش(د تفاضل ويش) پيداکوو.

$x = x_0:$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0 \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$

اوس د ليميټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضريب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $f'(x_0) = 2x_0$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

د $x_0 = 2$ په ځای کې د تابع $y = f(x) = x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0 = 2$ په ځای کې ميل ياجګوالی 4 لري.(لاندې تکرار شوې)

اوس د ليميټ د لاس ته راوړلو له لارې د مشتق ضريب ته راځو:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

نو $f'(x_0) = 2x_0$ لرو او د $x_0 = 2$ لپاره $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$ باور لري.

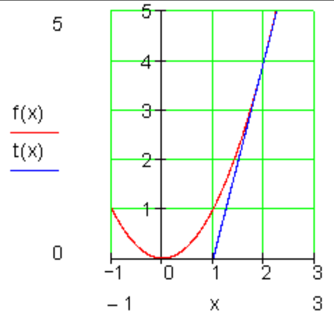
د $x_0 = 2$ په ځای کې د تابع $y = f(x) = x^2$ لومړی مشتق په 4 برابر دی، دا په دې معنی چې تابع د $x_0 = 2$ په ځای کې ميل ياجګوالی 4 لري.

لاس ته راوړنه يې:

پايله يا لاس ته راوړنه يې کيدی شي، د تابع د ګراف له لارې و ازمايل شي، په داسې ډول چې د $P_0(x_0 \mid y_0) = P_0(2 \mid 4)$ په ټکي کې تانجنت انځور کړو او د ميل د مثلث له لارې جګيدنه لاس ته راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

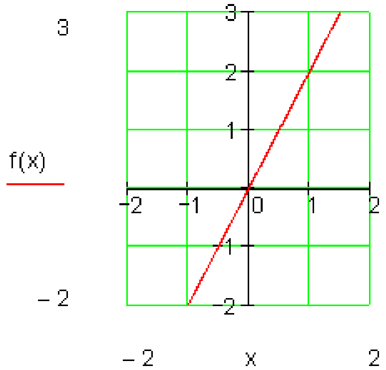
لکه پورته بېلګه کې: $y = f(x) = x^2$ په هر خوښه ځای x_0 کې تابع پیداکوو:



$$y = f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0$$

x_0	-2	-1	0	1	2
$f'(x_0)$	-4	-2	0	2	4

لاندې ګراف وګورئ: ګراف یوه کرښه $f'(x) = 2x$ انځوروي، چې د تابع مشتق بلل کیږي(مخامخ ځیره)



پام:
که د یوې تابع مشتق ونیول شي، نو بیرته یوه تابع ترې لاس ته راځي، چې دا د مشتق تابع بللکیږي.

د مشتق تابع:
د تابع ارزښتونه په هر ټکي کې بنسټ تابع انځوروي، له دې امله دا د میل تابع هم بلل کیږي.

بیلګه:
د $f(x) = x^3$ تابع دې ورکړ شوی دی.
فعالیت: ګران لوستونکي دې د $f(x) = x^3$ تابع او د تابع د مشتق ګراف وروسته له حله رسم کړي.
موږ غواړو په x_0 ټکي کې مشتق پیدا کړو او همداسې د مشتق تابع.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0{}^3+3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x_0{}^3}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x_0^2\Delta x+3x_0(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

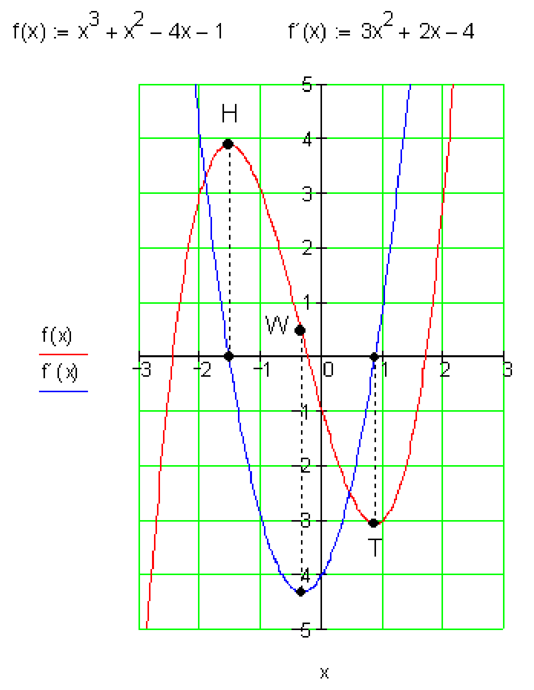
$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2))}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x^2)$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2=3x_0^2$$

نو $f'(x_0)=3x_0^2$ د $f(x)=x^3$ تابع مشتق دی په ځای یا ټکي x_0 کې.

د مشتق تابع داسې ده: $f'(x_0)=3x_0^2$



د وضعیه کمیاتو- یا پروت ولاړ سیستم کې تابع او د تابع مشتق تابع(سوررنګه):

$$f(x)=x^3+x^2-4x-1$$

د تابع مشتق(شین):

$f'(x)=3x^2+2x-4$ ، چې بیرته د مشتق یا د میل تابع ده.

بیلګه۳:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړ شوې تابع $f(x)=\frac{1}{x}$

غوښتونی: د x_0 په ځای کې د مشتق تابع

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0}{x_0(x_0+\Delta x)}-\frac{(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x_0-x_0-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\frac{1}{x_0^2+x_0\cdot\Delta x}\right)=-\frac{1}{x_0^2}$$

نو $f'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$ د x_0 په ځای کې مشتق دی

د مشتق تابع ده: $\underline{f'(x)=-\frac{1}{x^2}}$

بېلګه ۴ : یوه تابع $f(x)=\sqrt{x}$ دې ورکړ شوې وي.

د x_0 په ځای کې د تابع مشتق پيداکړئ او د مشتق تابع.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو $f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د x_0 په ځای کې د پورته تابع مشتق دی

او د مشتق تابع $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ دی.

د $\mathbf{f(x)=x^q}$ ډول توابعو مشتق د $q\in\mathbb{Q}$ سره.

د شمیرنې په بنسټ مو تر اوسه دا لاندې تر لاسه کړي:

تابع	د مشتق تابع	
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$f'(x)=1\cdot x^0$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2\cdot x$	$f'(x)=2\cdot x^1$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3\cdot x^2$	$f'(x)=3\cdot x^2$
$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f'(x)=-x^{-2}$
$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دا پورته پنځه قوانين يو د بل سره پرتله شي، نو کومان ترې لاس ته راځي، چې دا لاندې قوانين به باور ولري:

د توان قانون بې له ښووني

لومړی: زاړه ضريبونه د ضريب يا فاکتور په حيث د x کيڼ لور (په غربي ادبياتو کې ورته وايي: ترمخ) ته وليکی

دويم: نوی اکسپوننت هغه زوړ اکسپوننت دی، چې ۱ ترې کم شوی وي.

بيلګه:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

موږ اوس د څو بنسټيزو توابعو مشتق شميرنه تر څيړنې لاندې نيسو.

بيلګه ۱:

د يوې ثابتي مشتق :

موږ دالاندې تابع لرو،چې ارزښت يې يوثابت دی

ثابت $y = f(x) = c = Const$

نو د هر x_0ځای لپاره لرو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = f'(x_0) = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۲:

یوه $f(x)=x$ خطي(کرښیزه)تابع لرو.

د x_0 په ځای کې غواړو د دې تابع مشتق پیدا کړو او د مشتق تابع هم:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)-x_0}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$

$$\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=\underline{\underline{1}}$$

نو $f'(x_0)=1$ د x_0 په ځای کې د تابع مشتق دی او $f'(x_0)=1$ د مشتق تابع ده یعني یوه ثابته ده.

بیلګه ۳ :

د $y=f(x)=c.u(x)$ ډوله تابع مشتق د c=ثابتې سره.

د یوې تابع مشتق، چې له یوې ساده تابع او یوې ثابتې سره د ضرب له لارې منځ ته راغلی وي، برابر دی د ساده تابع د مشتق سره، چې د(ثابتې=c) سره ضرب شوی وي. یعنې

له $y=f(x)=c.u(x)$ څخه لرو:

$$\Rightarrow f'(x)=c\cdot u'(x)$$

ثبوت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x_0) = c\,u(x_0)$ $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c \cdot u(x_0+\Delta x) - c \cdot u(x_0)}{\Delta x}$ $\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} c \cdot \frac{u(x_0+\Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}$	$\Leftrightarrow f'(x_0) = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} c}_{c} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0+\Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}}_{u'(x_0)}$ $\Leftrightarrow f'(x_0) = \underline{\underline{c \cdot u'(x_0)}}$

بیلګه :

$$f(x) = 3x^4 \quad c = 3 \quad u(x) = x^4 \Rightarrow u'(x) = 4x^3$$
$$f'(x) = c \cdot u'(x) = 3 \cdot 4x^3 = \underline{\underline{12x^3}}$$

پیژند (تعریف): دفرنځیالوېش

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$$

په بیدیا کې ځګوالی

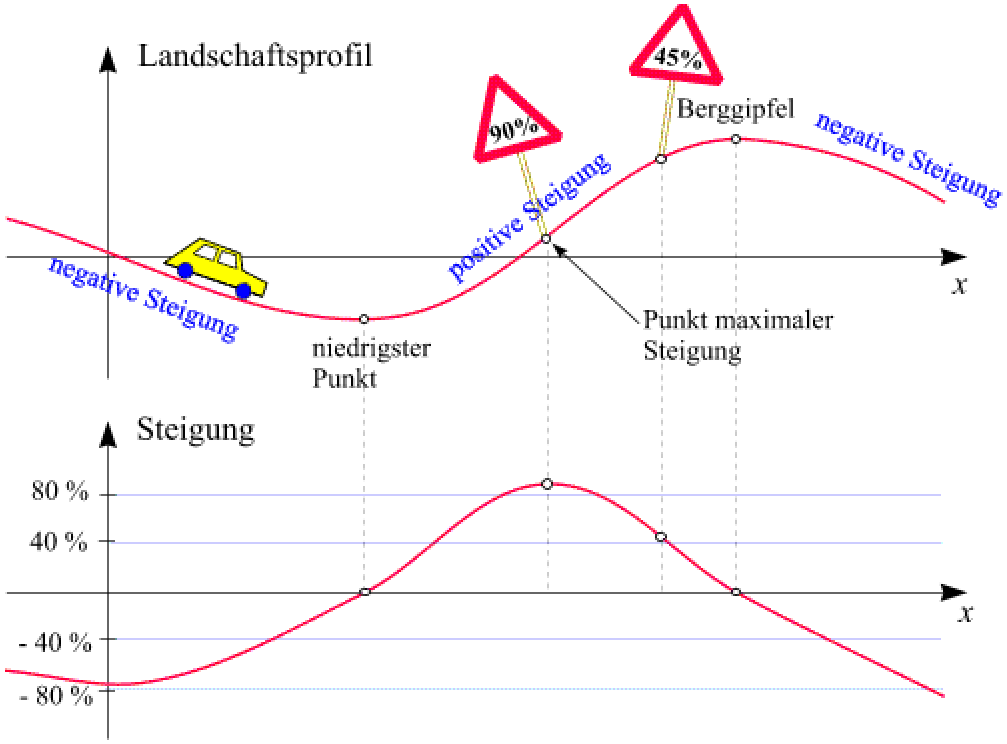
د تابع ګراف د سرک په څیر په فکر کې راولو، چې په بیدیا کې ځګ او ټیټیږي یا کښته پورته ځغلي، نو په ښه توګه یې رسمولی شو، چې د ګراف خویونه د مشتق سره په اړیکو کې راځي:

په لاندې څیره کې د لغاتونو په ترتیب ژباړه:د بیدیا جوړښت، منفي یا کمیزه ځګیدنه، خورا ټیټ ټکی،زیاتیزه یا مثبته ځګیدنه،د خورا ځګې ځګیدنې ټکی، د غره څوکه، منفي ځګیدنه.

پسې لاندې څیره کې: ځګیدنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سرک کښته یا لاندې لور ته د ځانګړي دیاګرام سره د سرک جګیدنه په هر ټکي کې انځور ده، د کومې سره چې یوه دویمه منحني ورکوي.



دیاګرامونه په کره توره وګورئ او وهڅېږئ، چې د دویمې منحني خویونه د لومړۍ منحني له خویونو را برسیره کړی.

چیرته چې سرک خورا تیټ ټکی لري، هلته د جګیدنې ارزښت 0% دی. دا په دې معنا چې که موټر له دې ځایه تیرېږي په افقي ئا پراته ډول ځغلي او په همدې توره که موټر د غره په څوکه هم و ځغلي.

دا تیک هغه ټکي دي، د کومو په چاپیریال کې چې منفي او مثبته جګیدنه یوبل سره رابندوي یا پولې لري.

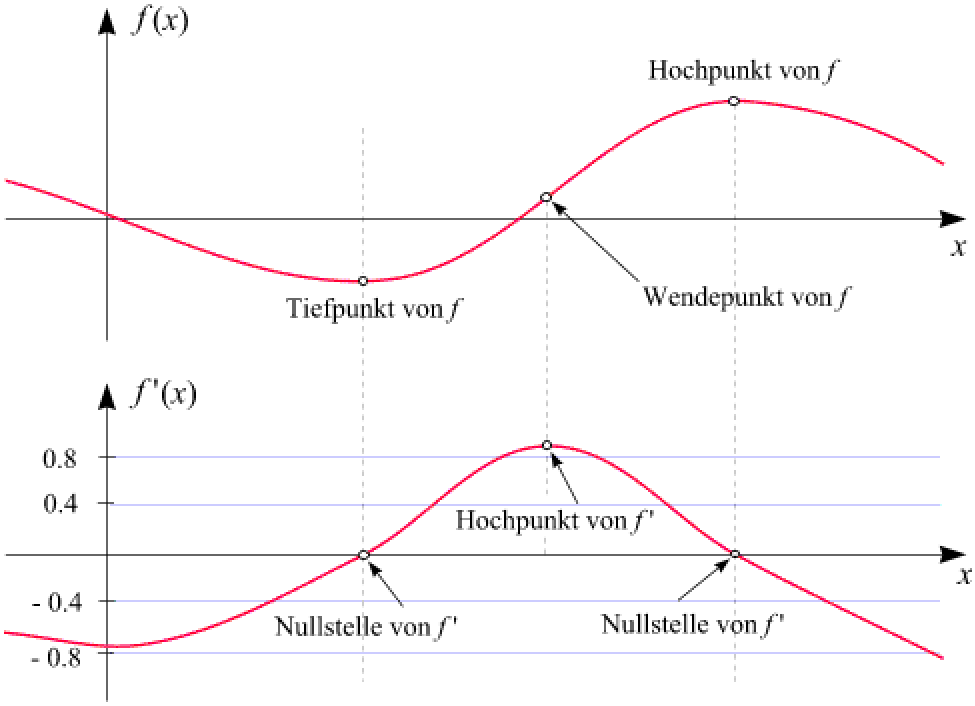
د دې په منځ کې یو چیرته یو ټکی شتون لري، چې هلته جګیدنه ماکزیمال یا خورا لویه ده (په دې بیلګه کې 90%) .

(c) ketabton.com: The Digital Library

همدي ته ورته په دويمه منحني (کږې) کې یو ه خوکه لري، مګر دا په دې بيديا کې هغه ستره ،،څوکه،، نه ده، مګر که څوک غواړي، نو يوه د ،،جګیدنې څوکه،، ده.

اوس دا دواړه کږې یا منحني په ورسره بلده یا معمول رياضيکي ډول په لاندې شکلونو کې ښايو او سره پرتله کوو:

(دالماني پښتو ژباړه له پورته کښته لور له کيڼ وښي لو رته: د fخورا جګ- یاماکسیمال ټکی، د fخوراټیټټکی، د fاوړون- یا د انعطاف ټکی،د f' خورا جګ ټکی، د f' صفرځای د f' صفرځای)



لومړی منحني د f(x) ګراف دی، دويمه منحني يا کږه د مشتق تابع f'(x) ګراف دی.

دا دواړه ګرافونه بيا هم ټيک وګوری او وهخيری، چې وپوهيږی، چې دا یو د بل سره په هره برخه کې څنګه یو د بل سره اړیکې لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x)$ ګراف دوه ځانګړي ټکي مو سترګو ته راځي: په یوه کې $f(x)$ مینیمال - یا خورا ټیټ ټکی په بل کې $f(x)$ ماکسیمال - یا خورا جګ ټکی دی. په دې ځایونو کې $f(x)$ صفرځایونه لري. هغه ټکی چې هلته د $f(x)$ ګراف خورا ستوغ دی، هغه، هغه د انعطاف ټکی یا اوړونټکی بلل کیږي. دا چې په دې ټکي کې د $f(x)$ مشتق خورا جګ دی (په دې بیلګه کې0,9)، دا د($f'(x)$ عظمي نقطه (خورا جګ ټکی) ده.

د ازادې سترګې سره د هغه ځاي له لاندې منحني څخه ښه څرکندیږي، نسبت و پورته منحني ته.

د ې بیلګې څخه همدا اوس اټکل کولی شو یا ګومان راوړی شو: که یوه تابع $f(x)$ ولرو، نو د دې $f(x)$ تابع په هکله د $f(x)$ له مشتق څخه ارزښناک معلومات په لا س روړی شو.

دا موړته د ماکسیما او مینیما (د خورا جګ او خورا ټیټ ارزښت) په هکله (چې دا دواړه د افراطي ارزښت تر نامه یادیږي) او په دې هکله چې ګراف چېرته خور یا ستوغ دی، پوره کټور معلومات راکوي.

په کواوردینات سیستم (پروت –ولاړ-) کې تابع

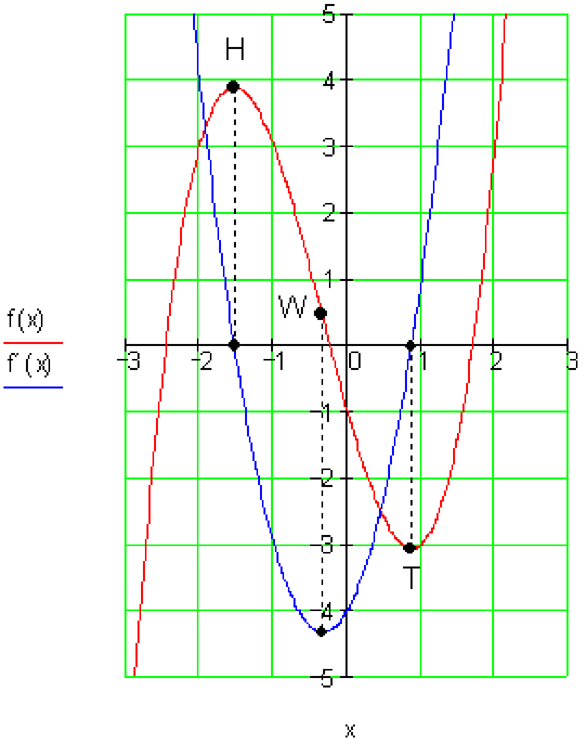
او د تابع مشتق

تابع : $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$ مشتق: $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

د یوه تابع مشتق بیرته تابع دی. موږدا د مشتق تابع یا د جګېدنې (میلان) تابع بولو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1$ $\quad$ $f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$



د دواړو توابعو گراف په يوه قميتي وضعيه (پروت ولاړ سيستم) کې و کښل شو.

هلته چي تابع f(x) يو جگ ټکی (H) همداسي ټيټ ټکی (T) لري گراف د مشتق تابع x -محور کې غوځوي،په دې مانا چې د تابع ارزښت دلته صفر دی.

دا روښانه دی، ځکه چي په H او T کې تابع f(x) پروت يا افقي تانجنت لري، دا دا معنا لري، چې په دې ټکي کې د f(x) جگيدنه صفر ده.

د مشتق تابع f'(x) هلته مينيموم لري، چيرته چي د f(x) جگيدنه د H او T ترمنځ په پام ونيول شي د مطلق قيمت له مخې خورا لويه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنېII:

لومړی - د f(x)تابع مشتق د x= 2 او x=u په ځايونو کې وشميرئ

الف - $f(x)=x^2+3$ ب - $f(x)=\frac{2}{x}$ پ - $f(x)=\frac{1}{x+1}$ ت - $f(x)=\sqrt{x}$

دويم - مشتق يې وشميرئ

الف - $f(x)=-2x^4+3x^2-4x+2$ ب - $f(x)=0,5x^4-x^3+2,5x^2-8$

پ - $f(x)=\frac{1}{32}x^3+\frac{3}{2}x-4$ ت - $s(t)=-\frac{5}{6}t^2+\frac{2}{3}t+\frac{5}{2}$

ټ - $f(x)=-(x-6)^2(x+1)$ ث- $f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-2\right)^2$

دريم - مشتق يې وشميرئ:

الف – $f(x)=\frac{1}{16}\left(x^3+x-1\right)$ ب - $f(x)=x\left(x^2-\frac{3}{2}x-4\right)$

پ - $f(x)=ax^4+bx^2+c$ ت - $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

ټ - $f(x)=6x+\frac{5}{x}$ ث - $f(x)=x^3-2x^2+\frac{1}{x}$

څلورم - مشتق يې وشميرئ:

الف – $f_t(x)=\frac{t}{2}x^4-2tx^3+t^2$ ب - $f_k(x)=\frac{1}{k}x^3+kx^2+(k+1)x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ - $f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)x - 3$ ت - $f_t(x) = \frac{1}{2t}\left(x^2 - t\right)^2$

ټ - $f(t) = 5t^3 - 2t + 5$ ث – $f(z) = -1{,}5z^3 + 2{,}5z^2 + z$

ج - $A(u) = \frac{1}{2}u^2 + 3u + 2u + 1$ ح - $A(u) = \frac{1}{2}u\left(u^2 + 1\right)$

پنځم – د f(x) جګوالی د x = -3 په ځای کې وشمیرئ او د f(x) قاطع یا غوښتکي د x - محورسره وشمیری .

الف – $f(x) = 3x^2 - 5$ ب - $f(x) = 4x - \frac{1}{x}$

شپږم - مشتق یې وشمیرئ:

الف – $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ ب - $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ پ - $f(x) = x + 1$

ت - $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 4$ ټ - $f(x) = 5b\,;\, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ث- $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$

ج - $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2$ ح - $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

خ - $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 7$ ځ - $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + 5x + 8$

مفصل حلونه

لومړی –

الف –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = x^2 + 3$$

$$x = 2:\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{(2+\Delta x)^2 + 3 - (2^2 + 3)}{\Delta x}$$

$$= \frac{4 + 4\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 + 3 - 4 - 3}{\Delta x} = \frac{4\cdot\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}\cdot(4+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 4 + \Delta x$$

$$\Rightarrow f'(2) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x) = \underline{\underline{4}}$$

$$x = u:\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta x) - f(u)}{\Delta x} = \frac{(u+\Delta x)^2 + 3 - (u^2 + 3)}{\Delta x}$$

$$= \frac{u^2 + 2u\cdot\Delta x + (\Delta x)^2 + 3 - u^2 - 3}{\Delta x} = \frac{2u\cdot\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}\cdot(2u+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 2u + \Delta x$$

$$\Rightarrow f'(u) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2u+\Delta x) = \underline{\underline{2u}}$$

ب –

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

$$x = 2:\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{2+\Delta x} - \frac{2}{2}}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{2+\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{\frac{2}{2+\Delta x} - \frac{1\cdot(2+\Delta x)}{2+\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{2 - 1\cdot(2+\Delta x)}{2+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\frac{2-2-\Delta x}{2+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{2+\Delta x}}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{2+\Delta x}}{\frac{\Delta x}{1}} = \frac{-1\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\,(2+\Delta x)} = \frac{-1}{2+\Delta x}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-1}{2+\Delta x}\right) = -\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

:

:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x=u:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{\frac{2}{u+\Delta x}-\frac{2}{u}}{\Delta x}=\frac{\frac{2\cdot u}{u\cdot(u+\Delta x)}-\frac{2\cdot(u+\Delta x)}{u\cdot(u+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\frac{2\cdot u-2\cdot(u+\Delta x)}{u\cdot(u+\Delta x)}}{\Delta x}=\frac{\frac{2\cdot u-2\cdot u-2\cdot\Delta x}{u\cdot(u+\Delta x)}}{\Delta x}=\frac{\frac{-2\cdot\Delta x}{u\cdot(u+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1}}$$

$$=\frac{-2\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot u\cdot(u+\Delta x)}=\frac{-2}{u\cdot(u+\Delta x)}=\frac{-2}{u^2+u\cdot\Delta x}$$

$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-2}{u^2+u\cdot\Delta x}\right)=-\frac{2}{u^2}$$

پ –

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

$$x=2:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{2+\Delta x+1}-\frac{1}{2+1}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\frac{1}{3+\Delta x}-\frac{1}{3}}{\Delta x}=\frac{\frac{1\cdot 3}{3\cdot(3+\Delta x)}-\frac{1\cdot(3+\Delta x)}{3\cdot(3+\Delta x)}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\frac{1\cdot 3-1\cdot(3+\Delta x)}{3\cdot(3+\Delta x)}}{\Delta x}=\frac{\frac{3-3-\Delta x}{3\cdot(3+\Delta x)}}{\Delta x}=\frac{\frac{-\Delta x}{3\cdot(3+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1}}=\frac{-1\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot 3\cdot(3+\Delta x)}=\frac{-1}{3\cdot(3+\Delta x)}$$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-1}{3(3+\Delta x)}\right)=-\frac{1}{9}$$

$$x=u:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{u+\Delta x+1}-\frac{1}{u+1}}{\Delta x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{\frac{1\cdot(u+1)}{(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)} - \frac{1\cdot(u+\Delta x+1)}{(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)}}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{1\cdot(u+1)-1\cdot(u+\Delta x+1)}{(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)}}{\Delta x} = \frac{\frac{u+1-u-\Delta x-1}{(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)}}{\Delta x} = \frac{\frac{-\Delta x}{(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)}}{\frac{\Delta x}{1}}$$

$$= \frac{-1\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot(u+1)\cdot(u+\Delta x+1)} = \frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}$$

$$f'(u) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)} = \frac{-1}{(u+1)(u+1)} = -\frac{1}{(u+1)^2}$$

ت-

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$x=2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{2+\Delta x}-\sqrt{2}}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{2+\Delta x}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{2+\Delta x-2}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}\right)} = \frac{1\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}}$$

$$f'(2) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$x=u: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u+\Delta x)-f(u)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{u+\Delta x}-\sqrt{u}}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{u+\Delta x}-\sqrt{u}\right)\cdot\left(\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}\right)}$$

$$= \frac{u+\Delta x-u}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}\right)} = \frac{1\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\cdot\left(\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}\right)} = \frac{1}{\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}}$$

$$f'(u) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{u+\Delta x}+\sqrt{u}}\right) = \frac{1}{\sqrt{u}+\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم – مفصل حلونه

الف – $f(x)=-2x^4+3x^2-4x+2 \Rightarrow f'(x)=-8x^3+6x-4$

ب – $f(x)=0,5x^4-x^3+2,5x^2-8 \Rightarrow f'(x)=2x^3-3x^2+5x$

پ – $f(x)=\frac{1}{32}x^3+\frac{3}{2}x-4 \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{32}x^2+\frac{3}{2}$

ت- $s(t)=-\frac{5}{6}t^2+\frac{2}{3}t+\frac{5}{2} \Rightarrow s'(t)=-\frac{5}{3}t+\frac{2}{3}$

ټ –

$$f(x)=-(x-6)^2(x+1)=-x^3+11x^2-24x-36 \Rightarrow f'(x)=-3x^2+22x-24$$

ث- $f(x)=\frac{1}{2}(x^2-2)^2=\frac{1}{2}x^4-2x^2+2 \Rightarrow f'(x)=2x^3-4x$

دریم – الف – $f(x)=\frac{1}{16}(x^3+x-1) \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{16}x^2+\frac{1}{16}$

ب – $f(x)=x\left(x^2-\frac{3}{2}x-4\right)=x^3-\frac{3}{2}x^2-4x \Rightarrow f'(x)=3x^2-3x-4$

پ – $f(x)=ax^4+bx^2+c \Rightarrow f'(x)=4ax^3+2bx$

ت- $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$

ث – $f(x)=6x+\frac{5}{x}=6x+5x^{-1} \Rightarrow f'(x)=6-5x^{-2}=6-\frac{5}{x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ج --

$$f(x)=x^3-2x^2+\frac{1}{x}=x^3-2x^2+x^{-1}\Rightarrow f'(x)=3x^2-4x-x^{-2}=3x^2-4x-\frac{1}{x^2}$$

خلورم – مفصل حلونه

الف -
$$f_t(x)=\frac{t}{2}x^4-2tx^3+t^2\Rightarrow f_t'(x)=2tx^3-6tx^2$$

ب -
$$f_k(x)=\frac{1}{k}x^3+kx^2+(k+1)x\Rightarrow f'_k(x)=\frac{3}{k}x^2+2kx+k+1$$

پ -
$$f_a(x)=\frac{1}{4}x^3+ax^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)x-3\Rightarrow f'_a(x)=\frac{3}{4}x^2+2ax+a-\frac{1}{2}$$

ت-
$$f_t(x)=\frac{1}{2t}\left(x^2-t\right)^2=\frac{1}{2t}x^4-x^2+\frac{1}{2}t\Rightarrow f_t'(x)=\frac{2}{t}x^3-2x$$

ټ –
$$f(t)=5t^3-2t+5\Rightarrow f'(t)=15t^2-2$$

ث –
$$f(z)=-1,5z^3+2,5z^2+z\Rightarrow f'(z)=-4,5z^2+5z+1$$

ج -
$$A(u)=\frac{1}{2}u^2+3u+2u+1\Rightarrow A'(u)=u+5$$

چ -
$$A(u)=\frac{1}{2}u\left(u^2+1\right)=\frac{1}{2}u^3+\frac{1}{2}u\Rightarrow A'(u)=\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}$$

پنځم – مفصل حلونه

الف –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=3x^2-5 \Rightarrow f'(x)=6x \Rightarrow f'(-3)=6\cdot(-3)=\underline{\underline{-18}}$$

د f(x) صفرځايونه

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-5=0 \Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow f'\left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right)=6\cdot\left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right)=\underline{\underline{\pm 6\cdot\sqrt{\frac{5}{3}}}}$$

ب –

$$f(x)=4x-\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=4+\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(-3)=4+\frac{1}{9}=\underline{\frac{37}{9}}$$

د f(x) صفرځايونه :

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 4x-\frac{1}{x}=0 \Leftrightarrow \frac{4x^2-1}{x}=0 \Leftrightarrow x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow x_{1/2}=\pm\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow f'\left(\pm\frac{1}{2}\right)=4+\frac{1}{\left(\pm\frac{1}{2}\right)^2}=4+\frac{1}{\frac{1}{4}}=4+4=\underline{\underline{8}}$$

شپږم – مفصل حلونه

الف – $f(x)=2x^2+3x+1 \Rightarrow f'(x)=4x+3$

ب – $f(x)=-x^2+2x-1 \Rightarrow f'(\ )=-2x+2$

پ – $f(x)=x+1 \Rightarrow f'(x)=1$

ت- $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x+4 \Rightarrow f'(x)=x-\frac{1}{3}$

ټ – $f(x)=5b\,;\ b\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow f'(x)=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ث _ $f(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{2}{3}x-1 \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}$

ج – $f(x)=2x^3+3x^2-4x+2 \Rightarrow f'(x)=6x^2+6x-4$

چ – $f(\ )=-\frac{1}{4}x^3+\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2} \Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{4}{3}x-\frac{3}{4}$

ح – $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x-7 \Rightarrow f'(x)=x+3$

خ – $f(x)=\frac{3}{4}x^2+5x+8 \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x+5$

پوښتنې :

مشتق شمیرنه III

اول- مشتق یې ونیسئ

الف - $f(x)=\frac{4}{5}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$ ب - $f(x)=-\frac{3}{7}x^2+\frac{4}{9}x+\frac{8}{10}$

پ - $f(x)=x^3-x^2+x+1$ ت - $f(x)=-x^3+x^2-x+7$

ټ - $f(x)=-\frac{3}{4}x^3+2x^2-x+1$ ث - $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+\pi$

ج - $f(x)=4x^3+\pi x^2+bx+c$ چ - $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

ح - $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}x^3-\frac{1}{\pi}x^2+\alpha x$ خ - $f(x)=\frac{4}{5}x^3-\frac{3}{4}x^2+4x+7$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم - مشتق يې ونیسئ

الف - $f(x)=x^4-2x^2+3x+1$ ب - $f(x)=2x^4+3x^2-2x+2$

پ - $f(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^2-x+1$ ت - $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$

ټ - $f(x)=x^5-2x^4+x^2-1$ ث - $f(x)=\frac{3}{4}x^4+\frac{5}{7}x^2+7$

ج - $f(x)=1$ چ - $f(x)=0$

ح - $f(x)=2x^6-4x^4+2x^2$ خ - $f(x)=\frac{3}{4}x^3+\frac{2}{3}x^2-x+4$

دريم – مشتق يې ونیسئ

الف - $f(x)=\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\sqrt{2}\cdot x$ ب - $f(x)=\sqrt{3}\cdot x^3-\sqrt{2}\cdot x^2+1$

پ - $f(x)=\frac{4}{3\pi}x^3+\frac{1}{3}x^2+1$ ت - $f(x)=3,5x^2-1,5x+2$

ټ - $f(x)=0,5x^2-2,5x+1$ ث - $f(x)=3,1x^2+\frac{7}{2}x-7$

ج - $f(x)=1,5x^3-2,5x^2+1$ چ - $f(x)=-2,5x^3+1,5x^2-1$

ح - $f(x)=t\cdot x^3+2x^2-4x$ خ - $f(x)=7,2x^2-8,2x+b$

څ - ځ -

څلورم – مشتق يې ونیسئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - $f(x)=x^{-1}$ ب - $f(x)=\frac{1}{x}$

پ - $f(x)=\frac{2}{3x}+2$ ت - $f(x)=2x^{-2}+3x^{-1}+2$

ټ - $f(x)=-\frac{1}{2}x^{-2}+2x^{-1}$ ث - $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$

ج - $f(x)=x^{\frac{1}{4}}$ چ - $f(x)=\sqrt{x}$ ح - $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ خ - $f(x)=\sqrt{x^3}$

ځوابونه

مشتق شمیرنه **III**

مفصل حلونه:

لومړی:

الف - $f(x)=\frac{4}{5}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{8}{5}x-\frac{3}{4}$

ب - $f(x)=-\frac{3}{7}x^2+\frac{4}{9}x+\frac{8}{10}\Rightarrow f'(x)=-\frac{6}{7}x+\frac{4}{9}$

پ - $f(x)=x^3-x^2+x+1\Rightarrow f'(x)=3x^2-2x+1$

ت - $f(x)=-x^3+x^2-x+7\Rightarrow f'(x)=-3x^2+2x-1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ - $f(x) = -\frac{3}{4}x^3 + 2x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = -\frac{9}{4}x^2 + 4x - 1$

ث - $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + \pi \Rightarrow f'(x) = -2x^2 + 3x + 2$

ج – $f(x) = 4x^3 + \pi x^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 12x^2 + 2\pi x + b$

چ - $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

ح - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x^3 - \frac{1}{\pi}x^2 + \alpha x \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{\sqrt{2}}x^2 - \frac{2}{\pi}x + \alpha$

خ - $f(x) = \frac{4}{5}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 4x + 7 \Rightarrow f'(x) = \frac{12}{5}x^2 - \frac{3}{2}x + 4$

دویم:

الف - $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 4x + 3$

ب - $f(x) = 2x^4 + 3x^2 - 2x + 2 \Rightarrow f'(x) = 8x^3 + 6x - 2$

پ - $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x^3 + x - 1$

ت - $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = -x^3 + x^2 - x$

ټ - $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 8x^3 + 2x$

ث - $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{5}{7}x^2 + 7 \Rightarrow f'(x) = 3x^3 + \frac{10}{7}x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ج ـ $f(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = 0$

چ - $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0$

ح - $f(x) = 2x^6 - 4x^4 + 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 12x^5 - 16x^3 + 4x$

خ - $f(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{4}x^2 + \frac{4}{3}x - 1$

دریم:

الف - $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \sqrt{2} \cdot x \Rightarrow f'(x) = 4x^2 + 3x + \sqrt{2}$

ب - $f(x) = \sqrt{3} \cdot x^3 - \sqrt{2} \cdot x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3\sqrt{3} \cdot x^2 - 2\sqrt{2} \cdot x$

پ - $f(x) = \frac{4}{3\pi}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{\pi}x^2 + \frac{2}{3}x$

ت - $f(x) = 3,5x^2 - 1,5x + 2 \Rightarrow f'(x) = 7x - 1,5$

ټ - $f(x) = 0,5x^2 - 2,5x + 1 \Rightarrow f'(x) = x - 2,5$

ث - $f(x) = 3,1x^2 + \frac{7}{2}x - 7 \Rightarrow f'(x) = 6,2x + 3,5$

ج ـ $f(x) = 1,5x^3 - 2,5x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4,5x^2 - 5x$

چ - $f(x) = -2,5x^3 + 1,5x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = -7,5x^2 + 3x$

ح - $f(x) = t \cdot x^3 + 2x^2 - 4x \Rightarrow f'(x) = 3tx^2 + 4x - 4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خ - $f(x) = 7,2x^2 - 8,2x + b \Rightarrow f'(x) = 14,4x - 8,2$

ځلورم:

الف - $f(x) = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

ب - $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

پ - $f(x) = \frac{2}{3x} + 2 = \frac{2}{3}x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-2} = -\frac{2}{3x^2}$

ت - $f(x) = 2x^{-2} + 3x^{-1} + 2 \Rightarrow f'(x) = -4x^{-3} - 3x^{-2}$

ټ - $f(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} + 2x^{-1} \Rightarrow f'(x) = x^{-3} - 2x^{-2}$

ث - $f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

ج – $f(x) = x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

چ - $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

ح - $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خ - $f(x)=\sqrt{x^3}=x^{\frac{3}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

پوښتنې

مشتقشمیرنه IV

لومړی: مشتق یې ونیسئ

الف- $f(x)=4x^2-3x+2$ ب - $f(x)=-2x^2+6x-4$

پ- $f(x)=2x^3-x^2+1$ ت - $f(x)=-7x^3+2x^2-x+1$

ټ - $f(x)=\left(x^2-3\right)^2$ ث - $f(x)=1-x^3$

ج = $f(x)=1-x^4$ چ - $f(x)=2x^2-x^4$

ح - $f(x)=0,5x^3+3x^2$ خ = $f(x)=-3x^7+1$

دویم: مشتق یې ونیسئ

الف- $f(x)=a+3bx^2$ ب - $f(x)=3x^7-0,5x^3$

پ- $f(x)=0,125x^8-30x^4$ ت - $f(x)=0,01ax^{12}-0,5bx^8$

ټ - $f(x)=3ax^5-0,5bx^4$ ث - $f(x)=0,25x^8+0,5x^{10}$

ج = $f(x)=0,25ax^4+0,5bx^5$ چ - $f(x)=0,5bx^6+0,2ax^5$

ح - $f(x)=-0,5x^5$ خ = $f(x)=0,5x^3+3x^2$

دریم: مشتق یې ونیسئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- $f(x) = -3x^7 + 2x$ ب - $f(x) = 0,5x^3 + 2x$

پ- $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ ت - $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$

ټ - $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4$ ث - $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2$

ج = $f(x) = \frac{1}{18}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + x^2$ چ - $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

ح - $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{4}x^2$ خ = $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$

ځلورم:مشتق يې ونيسئ

الف- $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$ ب - $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + x^2$

پ- $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 5$ ت - $f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{3}{2}x + 9$

ټ - $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + x$ ث - $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x$

ج = $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 3$ چ - $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$

ح - $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2$ خ = $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 5x$

حلونه

مشتقشميرنهIV

مفصل حلونه:

لومړی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- $f(x)=4x^2-3x+2 \Rightarrow f'(x)=8x-3$

ب - $f(x)=-2x^2+6x-4 \Rightarrow f'(x)=-4x+6$

پ- $f(x)=2x^3-x^2+1 \Rightarrow f'(x)=6x^2-2x$

ت - $f(x)=-7x^3+2x^2-x+1 \Rightarrow f'(x)=-21x^2+4x-1$

ټ - $f(x)=\left(x^2-3\right)^2=x^4-6x^2+9 \Rightarrow f'(x)=4x^3-12x$

ث - $f(x)=1-x^3 \Rightarrow f'(x)=-3x^2$

ج = $f(x)=1-x^4 \Rightarrow f'(x)=-4x^3$

چ - $f(x)=2x^2-x^4 \Rightarrow f'(x)=-4x^3+4x$

ح - $f(x)=0,5x^3+3x^2 \Rightarrow f'(x)=1,5x^2+6x$

خ = $f(x)=-3x^7+1 \Rightarrow f'(x)=-21x^6$

دویم:

الف- $f(x)=a+3bx^2 \Rightarrow f'(x)=6bx$

ب - $f(x)=3x^7-0,5x^3 \Rightarrow f'(x)=21x^6-1,5x^2$

پ- $f(x)=0,125x^8-30x^4 \Rightarrow f'(x)=x^7-120x^3$

ت - $f(x)=0,01ax^{12}-0,5bx^8 \Rightarrow f'(x)=0,12ax^{11}-4bx^7$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ - $f(x) = 3ax^5 - 0,5bx^4 \Rightarrow f'(x) = 15ax^4 - 2bx^3$

ث - $f(x) = 0,25x^8 + 0,5x^{10} \Rightarrow f'(x) = 5x^9 + 2x^7$

ج = $f(x) = 0,25ax^4 + 0,5bx^5 \Rightarrow f'(x) = 2,5bx^4 + ax^3$

چ - $f(x) = 0,5bx^6 + 0,2ax^5 \Rightarrow f'(x) = 3bx^5 + ax^4$

ح - $f(x) = -0,5x^5 \Rightarrow f'(x) = -2,5x^4$

خ = $f(x) = 0,5x^3 + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 1,5x^2 + 6x$

دریم:

الف- $f(x) = -3x^7 + 2x \Rightarrow f'(x) = -21x^6 + 2$

ب - $f(x) = 0,5x^3 + 2x \Rightarrow f'(x) = 1,5x^2 + 2$

پ- $f(x) = 2x^3 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x$

ت - $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}$

ټ - $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$

ث - $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2 \Rightarrow f'(x) = -x^3 + 2x$

ج = $f(x) = \frac{1}{18}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{9}x^3 - \frac{4}{3}x^2 + 2x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چ - $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+1 \Rightarrow f'(x)=x-2$

ح - $f(x)=\frac{3}{8}x^3-\frac{3}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{9}{8}x^2-\frac{3}{2}x$

خ = $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+3x \Rightarrow f'(x)=-x^2+3$

ځلورم: الف- $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{8}x^2-3x+\frac{9}{2}$

ب - $f(x)=-\frac{1}{16}x^4+x^2 \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{4}x^3+2x$

پ- / ت - $f(x)=-\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{2}x+9 \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}$

ټ - $f(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{4}x^2+x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x+1$

ث - $f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{9}{2}$

ج = $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x+3 \Rightarrow f'(x)=x^2-1$

چ - $f(x)=x^4-6x^3+12x^2-8x \Rightarrow f'(x)=4x^3-18x^2+24x-8$

ح - $f(x)=\frac{1}{12}x^4-2x^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$

خ = $f(x)=\frac{1}{4}x^4+2x^2+5x \Rightarrow f'(x)=x^3+4x^2+5$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

مشتقشمیرنه VI

لومړی: د لاندې توابعو مشتق ونیسئ:

الف- $f(x)=5x^4-4x^3+3x^2-2x+6$ ب - $f(x)=\left(a^2+x^2\right)\left(a^2-x^2\right)$

پ- $f(x)=-2x^4+3x^2-4x+2$ ت - $f(x)=0,5x^4-x^3+2,5x^2-8$

ټ - $f(x)=\frac{1}{32}x^3+\frac{3}{2}x-4$ ث - $f(x)=-\frac{5}{6}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{2}$

دویم: د لاندې توابعو مشفق ونیسئ:

الف- $f(x)=-(x-6)^2(x+1)$ ب - $f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-2\right)^2$

پ- $f(x)=\frac{1}{16}\left(x^3+x-1\right)$ ت - $f(x)=x\left(x^2-\frac{3}{2}x-4\right)$

ټ - $f(x)=ax^4+bx^2+c$ ث - $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

دریم: د لاندې توابعو مشفق ونیسئ:

الف- $f(x)=\frac{k}{2}x^4-2kx^3+k^2$ ب - $f(x)=\frac{1}{k}x^3+kx^2+(k+1)x$

پ- $f(x)=\frac{1}{4}x^3+ax^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)x-3$ ت - $f(x)=\frac{1}{2k}\left(x^2-k\right)^2$

ټ - $f(t)=5t^3-2t+5$ ث _ $f(z)=-1,5z^3+2,5z^2+z$

څلورم: د لاندې توابعو مشفق ونیسئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- $A(u)=\frac{1}{2}u^2+3u+2u+1$ ب - $A(u)=\frac{1}{2}u\left(u^2+1\right)$

پ- $f(x)=2\pi x^5-7x^3+\frac{3}{\pi}$ ت - $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x+1}$

ټ - $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-1}$ ث - $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$

ج = $f(x)=\frac{4x^2+12x+9}{2x+3}$ چ - $f(x)=\frac{\left(x^2+4x+4\right)^2}{x+2}$

پنځم: نلاندې تابع ورکړ شوې:

۱ $f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2\,;\,x\in\mathbb{R}$

الف- د f(x) تابع جګوالی د x_0 په ځای کې وښایی د $x_0\in[-4\,;-1;\,0;\,1,5\,;\,3]$ سره

ب - تابع f(x) په کوم ټکي کې د 3 جګوالي سره تانجنت لري؟

پ- د f(x) په $P\,(\,2\mid f(2)\,)$ ټکي باندې د تانجنت مساوات وښایی

ت - د f(x) په $P\,(\,2\mid f(2)\,)$ ټکي باندې د نورمال یا عمود مساوات وښایی

ټ - تانجنت او نورمال یا عمود په وضعیهقیمتسیستم کې رسم کړی.

ث – $g(x)=t\cdot f(x)\,;\,t\in\mathbb{R}^*$

د x محور په S_1 او S_2 کې غوڅوي(قطع کوي)

د t د کومو ارزښتونو لپاره تانجنت په S_1 او S_2 یو بل سره عمود دي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حلونه

مشتقشمیرنه VI

نتیجې:

لومړی-

الف -

$$f'(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x - 2 \qquad f''(x) = 60x^2 - 24x + 6$$
$$f'''(x) = 120x - 24$$

ب - $f'''(x) = -24x \qquad f''(x) = -12x^2 \qquad f'(x) = -4x^3$

پ- $f'''(x) = -48x \qquad f''(x) = -24x^2 + 6 \qquad f'(x) = -8x^3 + 6x - 4$

ت - $f'''(x) = 12x - 6 \qquad f''(x) = 6x^2 - 6x + 5 \qquad f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x$

ټ - $f'''(x) = \frac{3}{16} \qquad f''(x) = \frac{3}{16}x \qquad f'(x) = \frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{2}$

ث - $f'''(x) = 0 \qquad f''(x) = -\frac{5}{3} \qquad f'(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$

دویم:

الف- $f'''(x) = -6 \qquad f''(x) = -6x + 22 \qquad f'(x) = -3x^2 + 22x - 24$

ب - $f'''(x) = 12x \qquad f''(x) = 6x^2 - 4 \qquad f'(x) = 2x^3 - 4x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ- $f'(x)=\frac{3}{16}x^2+\frac{1}{16} \qquad f''(x)=\frac{3}{8}x \qquad f'''(x)=\frac{3}{8}$

ت - $f'(x)=3x^2-3x-4 \qquad f''(x)=6x-3 \qquad f'''(x)=6$

ټ - $f'(x)=4ax^3+2bx \qquad f''(x)=12ax^2+2b \qquad f'''(x)=24ax$

ث - $f'(x)=3ax^2+2bx+c \qquad f''(x)=6ax+2b \qquad f'''(x)=6a$

دریم:

الف- $f'(x)=2kx^3-6kx^2 \qquad f''(x)=6kx^2-12kx \qquad f'''(x)=12kx-12k$

ب - $f'(x)=\frac{3}{k}x^2+2kx+k+1 \qquad f''(x)=\frac{6}{k}x+2k \qquad f'''(x)=\frac{6}{k}$

پ- $f'(x)=\frac{3}{4}x^2+2ax+a-\frac{1}{2} \qquad f''(x)=\frac{3}{2}x+2a \qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$

ت - $f'(x)=\frac{2}{k}x^3-2x \qquad f''(x)=\frac{6}{k}x^2-2 \qquad f'''(x)=\frac{12}{k}x$

ټ - $f'(t)=15t^2-2 \qquad f''(t)=30t \qquad f'''(t)=30$

ث - $f'(z)=-4{,}5z^2+5z+1 \qquad f''(z)=-9z+5 \qquad f'''(z)=-9$

څلورم:

الف- $A'(u)=u+5 \qquad A''(u)=1 \qquad A'''(u)=0$

ب - $A'(u)=\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2} \qquad A''(u)=3u \qquad A'''(u)=3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ-

$f'(x) = 10\pi x^4 - 21x^2 \qquad f''(x) = 40\pi x^3 - 42x \qquad f'''(x) = 120\pi x^2 - 42$

ت - $f'(x) = 1 \qquad f''(x) = 0 \qquad f'''(x) = 0$

ټ - $f'(x) = 1 \qquad f''(x) = 0 \qquad f'''(x) = 0$

ث - $f'(x) = 1 \qquad f''(x) = 0 \qquad f'''(x) = 0$

ج = $f'(x) = 2 \qquad f''(x) = 0 \qquad f'''(x) = 0$

چ _ $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12 \qquad f''(x) = 6x + 12 \qquad f'''(x) = 6$

پنځم:

الف-

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$$

x	−4	−1	0	1,5	3
f '(x)	4	2,5	2	1,25	0,5

ب - د P(-2;-5) په ټکي کې د f(x) تانجنت جګوالی 3 لري.

پ- په f(x) باندې د تانجنت مساوات په ټکي (P (2 | f(2) کې:t(x) = x + 1

ت - په ټکي (P (2 | f(2) کې په f(x) باندې د عمود مساوات: n(x) = -x + 5

ټ - ث - د $t_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$ لپاره تانجنتونه په ټکو S_1 او S_2 کې یو په بل عموددي.

مفصل حل:

لومړی: الف-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=5x^4-4x^3+3x^2-2x+6$$

$$f'(x)=5\cdot 4x^3-4\cdot 3x^2+3\cdot 2x^1-2\cdot 1+0=\underline{\underline{20x^3-12x^2+6x-2}}$$

$$f''(x)=20\cdot 3x^2-12\cdot 2x^1+6\cdot 1-0=\underline{\underline{60x^2-24x+6}}$$

$$f'''(x)=60\cdot 2x^1-24\cdot 1+0=\underline{\underline{120x-24}}$$

ب - $f(x)=(a^2+x^2)(a^2-x^2)$

اول- حل د صرب له لاريِ(د بينوم دريمه جمله)

$$f(x)=a^4-x^4\Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{-4x^3}}\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{-12x^2}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{-24x}}$$

دويم – د ضرب د قانون له مخې حل(مفصل)

$$f(x)=\underbrace{(a^2+x^2)}_{u}\underbrace{(a^2-x^2)}_{v}\Rightarrow u'=2x \quad v'=-2x$$

$$f'(x)=u'v+uv'=2x\cdot(a^2-x^2)+(a^2+x^2)(-2x)$$

$$=2a^2x-2x^3-2a^2x-2x^3=\underline{\underline{-4x^3}}$$

$$f''(x)=\underline{\underline{-12x^2}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{-24x}}$$

پ- $f(x)=-2x^4+3x^2-4x+2$

$f'(x)=-8x^3+6x-4 \qquad f''(x)=-24x^2+6 \qquad f'''(x)=-48x$

ت - $f(x)=0,5x^4-x^3+2,5x^2-8$

$f'(x)=2x^3-3x^2+5x \qquad f''(x)=6x^2-6x+5 \qquad f'''(x)=12x-6$

ټ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{32}x^3+\frac{3}{2}x-4$$

$$f'(x)=\frac{1}{32}\cdot 3x^2+\frac{3}{2}\cdot 1-0=\underline{\underline{\frac{3}{32}x^2+\frac{3}{2}}}$$

$$f''(x)=\frac{3}{32}\cdot 2x^1+0=\underline{\underline{\frac{3}{16}x}} \qquad f'''(x)=\frac{3}{16}\cdot 1=\underline{\underline{\frac{3}{16}}}$$

ث ـ

$$f(x)=-\frac{5}{6}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{2}$$

$$f'(x)=-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3} \qquad f''(x)=-\frac{5}{3} \qquad f'''(x)=0$$

دویم: الف- $f(x)=-(x-6)^2(x+1)$

- حل د ضربولو له لارې

$$f(x)=-(x^2-12x+36)(x+1)=-[x^3+x^2-12x^2-12x+36x+36]$$

$$=-[x^3-11x^2+24x+36]=-x^3+11x^2-24x-36$$

$$f'(x)=\underline{\underline{-3x^2+22x-24}}\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{-6x+22}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{-6}}$$

دوي – حل د ځنزيري قانون له مخې.

$$f(x)=-\underbrace{(x-6)^2}_{u}\underbrace{(x+1)}_{v} \quad u'=2(x-6)\cdot 1=2x-12 \quad v'=1$$

$$f'(x)=-[u'v+uv']=-\left[(2x-12)(x+1)+(x-6)^2\cdot 1\right]=$$

$$-\left[2x^2+2x-12x-12+x^2-12x+36\right]=-\left[3x^2-22x+24\right]=-3x^2+22x-24$$

$$\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{-6x+22}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{-6}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب - $f(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-2\right)^2$

اول – حل د ضربولو له لارې

$$f(x)=\frac{1}{2}\underbrace{\left(x^2-2\right)^2}_{\text{2. bin. Formel}}=\frac{1}{2}\left(x^4-4x^2+4\right)=\frac{1}{2}x^4-2x^2+2$$

$$f'(x)=\underline{\underline{2x^3-4x}}\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{6x^2-4}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{12x}}$$

یادونه: په پورته کې 2.bin.Formel د دویم بینوم فرمول په معنا دی.

دویم-د ځنزیري قانون سره حل:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(x^2-2\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 2\left(x^2-2\right)\cdot 2x=2x\left(x^2-2\right)=\underline{\underline{2x^3-4x}}$$

$$f''(x)=\underline{\underline{6x^2-4}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{12x}}$$

پ-

$$f(x)=\frac{1}{16}\left(x^3+x-1\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{16}\left(3x^2+1\right)=\underline{\underline{\frac{3}{16}x^2+\frac{1}{16}}}\qquad f''(x)=\underline{\underline{\frac{3}{8}x}}\qquad f'''(x)=\underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$

ت –

$$f(x)=x\left(x^2-\frac{3}{2}x-4\right)=x^3-\frac{3}{2}x^2-4x$$

$$f'(x)=\underline{\underline{3x^2-3x-4}}\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{6x-3}}\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{6}}$$

د لته به د ضرب قانون استعمال لږ غزېدلی وی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ –

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx \qquad f''(x) = 12ax^2 + 2b \qquad f'''(x) = 24ax$$

ث –

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad f''(x) = 6ax + 2b \qquad f'''(x) = 6a$$

دريم: الف-

$$f(x) = \frac{k}{2}x^4 - 2kx^3 + k^2$$

$$f'(x) = 2kx^3 - 6kx^2 \qquad f''(x) = 6kx^2 - 12kx \qquad f'''(x) = 12kx - 12k$$

ب –

$$f(x) = \frac{1}{k}x^3 + kx^2 + \underbrace{(k+1)}_{\text{Konstante}}x$$

$$f'(x) = \frac{3}{k}x^2 + 2kx + (k+1)\cdot 1 = \underline{\underline{\frac{3}{k}x^2 + 2kx + \underbrace{k+1}_{\text{Konstante}}}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{\frac{6}{k}x + 2k}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{\frac{6}{k}}}$$

يادونه: دلته او په لاندې حل کې Konstante د ثابتې په معنا دی.

پ-

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + \underbrace{\left(a - \frac{1}{2}\right)}_{\text{Konstante}}x - 3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2+2ax+\left(a-\frac{1}{2}\right)\cdot 1=\underline{\underline{\frac{3}{4}x^2+2ax+a-\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{\frac{3}{2}x+2a}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

ت - $f(x)=\frac{1}{2k}\left(x^2-k\right)^2$

اول – د ضرب له لارې حل (د بینوم دویم فرمول)

$$f(x)=\frac{1}{2k}\left(x^2-k\right)^2=\frac{1}{2k}\left(x^4-2kx^2+k^2\right)=\frac{1}{2k}x^4-x^2+\frac{1}{2}k$$

$$f'(x)=\underline{\underline{\frac{2}{k}x^3-2x}}\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{\frac{6}{k}x^2-2}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{\frac{12}{k}x}}$$

دویم : د ځنزیري قانون له مخې (ساده دی)

$$f'(x)=\frac{1}{2k}\cdot 2\left(x^2-k\right)\cdot 2x=\frac{2}{k}x\left(x^2-k\right)=\underline{\underline{\frac{2}{k}x^3-2x}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{\frac{6}{k}x^2-2}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{\frac{12}{k}x}}$$

$$f(t)=5t^3-2t+5$$

ټ - $f'(t)=15t^2-2 \qquad f''(t)=30t \qquad f'''(t)=30$

$$f(z)=-1{,}5z^3+2{,}5z^2+z$$

ث _ $f'(z)=-4{,}5z^2+5z+1 \qquad f''(z)=-9z+5 \qquad f'''(z)=-9$

خلورم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف-

$$A(u)=\frac{1}{2}u^2+3u+2u+1$$

$$A'(u)=u+5 \qquad A''(u)=1 \qquad A'''(u)=0$$

ب –

$$A(u)=\frac{1}{2}u\left(u^2+1\right)=\frac{1}{2}u^3+\frac{1}{2}u$$

$$A'(u)=\underline{\underline{\frac{3}{2}u^2+\frac{1}{2}}}\Rightarrow A''(u)=\underline{\underline{3u}}\Rightarrow A'''(u)=\underline{\underline{3}}$$

د لته به د ضرب قانون لرِ غزیدلی وی.

پ-

$$f(x)=2\pi x^5-7x^3+\frac{3}{\pi}$$

$$f'(x)=10\pi x^4-21x^2 \qquad f''(x)=40\pi x^3-42x \qquad f'''(x)=120\pi x^2-42$$

ت -

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x+1}$$

اول- د تابع ترم د ترم بنه بدلون له لارې ساده کونه:

-

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x+1}=\frac{(x+1)(x+1)}{x+1}=x+1$$

$$f'(x)=\underline{\underline{1}}\Rightarrow f''(x)=\underline{\underline{0}}\Rightarrow f'''(x)=\underline{\underline{0}}$$

دویم – د وېش قانون استعمال (زیات وخت نیسي)

$$f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $t\ u = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow u' = 2x + 2$ سره

او $v = x+1 \Rightarrow y' = 1$ همداسې له $v^2 = (x+1)^2$ څخه لرو:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{(2x+2)(x+1) - (x^2+2x+1)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x+2-x^2-2x-1}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2+2x+1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} = \underline{\underline{1}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{0}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{0}}$$

د وېش قانون دې فقط په هغه حالتونو کې اسعمال شي، که تابعترم په بله لار نه شي ساده کيدی.

ت - $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

اول – تابعترم د ترم بدلون له لارې ساده کړی

$$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x-1)}{x-1} = x - 1$$

$$f'(x) = \underline{\underline{1}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{0}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{0}}$$

د وېش قانون باندې صرف دظر کيږي.

ث - $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

اول – تابعترم د ترم بدلون له لارې ساده کړی

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x - 1$$

$$f'(x) = \underline{\underline{1}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{0}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{0}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ويش قانون باندې صرف نظر کيږي.

ج = $f(x)=\dfrac{4x^2+12x+9}{2x+3}$

اول – تابعترم د ترم بدلون له لارې ساده کړی

$$f(x)=\frac{4x^2+12x+9}{2x+3}=\frac{(2x+3)(2x+3)}{2x+3}=2x+3$$

$$f'(x)=\underline{2}\Rightarrow f''(x)=\underline{0}\Rightarrow f'''(x)=\underline{0}$$

د ويش له قانون څخه تيرېږو

چ - $f(x)=\dfrac{\left(x^2+4x+4\right)^2}{x+2}$

اول – تابعترم د ترم بدلون له لارې ساده کړی

$$f(x)=\frac{\left(x^2+4x+4\right)^2}{x+2}=\frac{\left[(x+2)^2\right]^2}{x+2}=\frac{(x+2)^4}{x+2}=(x+2)^3$$

دويم – ځنزيري قانون استعمال کړی:

$$f'(x)=3(x+2)^2\cdot 1=3\left(x^2+4x+4\right)=\underline{\underline{3x^2+12x+12}}$$

$$\Rightarrow f''(x)=6x+12\Rightarrow f'''(x)=6$$

د ويش قانون باندې صرف نظر کيږي.

پنځم:

الف-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$$

$$f'(-4) = 2 - \frac{1}{2}\cdot(-4) = 2 + 2 = 4 \qquad f'(-1) = 2 - \frac{1}{2}\cdot(-1) = 2 + \frac{1}{2} = 2,5$$

$$f'(0) = 2 - \frac{1}{2}\cdot 0 = 2 \qquad f'(1,5) = 2 - \frac{1}{2}\cdot 1,5 = 2 - 0,75 = 1,25$$

$$f'(3) = 2 - \frac{1}{2}\cdot 3 = 2 - 1,5 = 0,5$$

x	−4	−1	0	1,5	3
f '(x)	4	2,5	2	1,25	0,5

ب -
$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$$

د تانجنت جګیدنه به x0 کې ارزښت 3 لري.

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x_0) = f(-2) = 2\cdot(-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د $P(-2|-5)$ په ټکي کې په f(x) باندې تانجنت ارزښت 3 لري.

پ-
$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad P(2|f(2))$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د x0 = 2 سره لرو:

$$t(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4 - 1 = 3 \qquad f'(2) = 2 - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x-2) + 3 = x - 2 + 3 = \underline{\underline{x+1}}$$

ت –

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \quad P(2|f(2))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

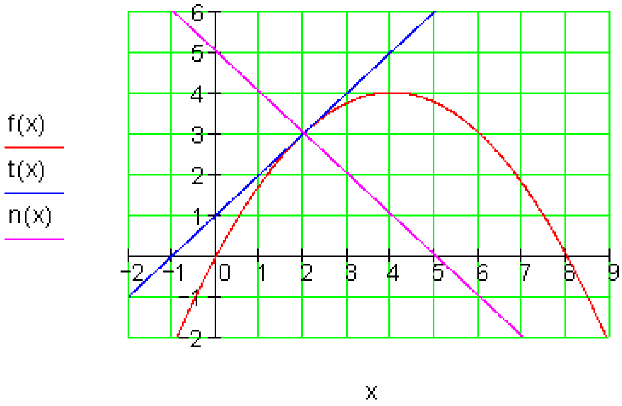
د 2 = x0 سره لرو:

$$n(x) = -\frac{1}{f'(2)}(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4 - 1 = 3 \qquad f'(2) = 2 - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{1}(x-2) + 3 = -x + 2 + 3 = \underline{\underline{-x+5}}$$

ت –



ث - $g(x) = t\cdot f(x) = 2tx - \frac{1}{4}tx^2$

د g(x) صفرځايونه:

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2tx - \frac{1}{4}tx^2 = 0 \Leftrightarrow x\left(2t - \frac{1}{4}tx\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow S_1(0\,|\,0)$$

$$2t - \frac{1}{4}tx = 0 \,|\, -2t \Leftrightarrow -\frac{1}{4}tx = -2t \,|: \left(-\frac{1}{4}t\right) \Leftrightarrow x_2 = 8 \Rightarrow S_2(8\,|\,0)$$

د S1 او S2 عمودوالی په دې معنا دی چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

g‘(0) د S1(0,0) په تکي کې د t1(x) تانجنت جګوالی دی. د تانجنت t2(x) جګوالی په ټکي S2(8,0) کې دې هغه t1(x) ته عمود وي. د دې لپاره بايد صدق وکړي:

g’(8)=-1/g’(0) د عمودوالي لپاره شرايط (1)

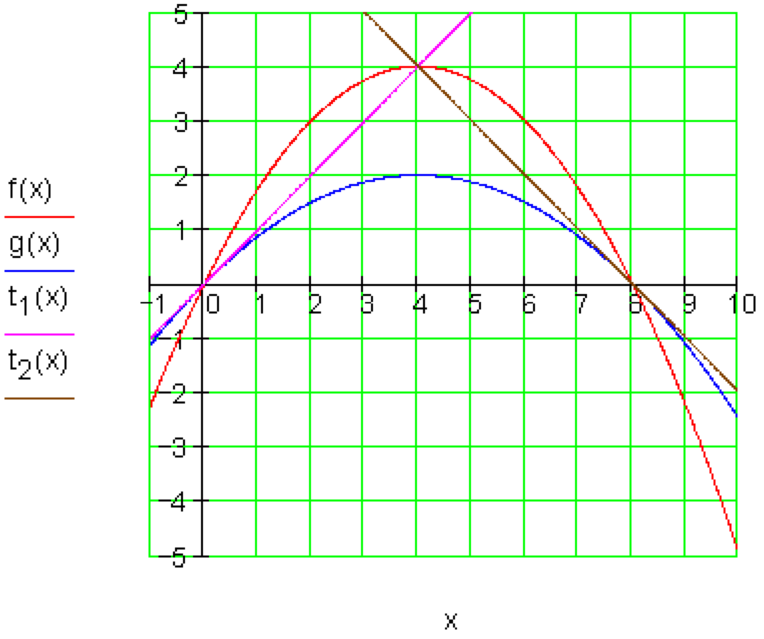
$$g'(x) = 2t - \frac{1}{2}tx \Rightarrow g'(8) = 2t - \frac{1}{2}t \cdot 8 = 2t - 4t = -2t$$

همداسې $g'(0) = 2t$

په (1) کې ځای په ځای کړی

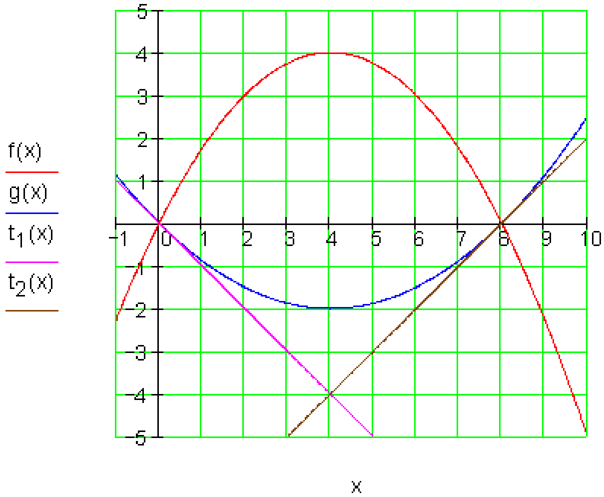
$$-2t = -\frac{1}{2t} \mid \cdot 2t \Leftrightarrow -4t^2 = -1 \mid : (-4) \Leftrightarrow t^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow t_{1/2} = \pm\frac{1}{2}$$

د t=1/2 لپاره صدق کوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د t=-1/2 لپاره صدق کوي:



III.3.1د مشتق شمیرني قوانین

قضیه (د جمعې یا زیاتون قاعده):
که یو تابع $f(x)$ د دوه توابعو $u(x)$ او $v(x)$ د جمعي څخه جوړ وي، نو مشتق یې هم د هر تابع د مشتق د جمعي څخه جوړ دی، یعني:

$$f(x)=u(x)+v(x)$$

$$\Rightarrow f'(x)=u'(x)+v'(x)$$

ښوونه:

$$f(x_0)=u(x_0)+v(x_0)$$

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]+[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x_0+\Delta x)-u(x_0)]}{\Delta x}+\frac{[v(x_0+\Delta x)]-v(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x_0+\Delta x)-u(x_0)}{\Delta x}\right]}_{u'(x_0)}+\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{v(x_0+\Delta x)-v(x_0)}{\Delta x}\right]}_{v'(x_0)}$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=\underline{\underline{u'(x_0)+v'(x_0)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه:

د دې ورکړ $f(x)=5x^2+3x$, $u(x)=5x^2$, $v(x)=3x$ توابعو شتق وشميرئ.

ښوونه:

$$f(x)=5x^2+3x \quad u(x)=5x^2 \quad v(x)=3x$$
$$\Rightarrow u'(x)=10x \qquad v'(x)=3$$
$$f'(x)=u'(x)+v'(x)=\underline{\underline{10x+3}}$$

د جمعي قاعده تولزه کونه: که چيرې f_1، f_2،...... f_n توابع او k_1، k_2،.... k_n ثابت عددونه وي نو لرو(بې له ښوونې):

$$[k_1 f_1(x)+k_2 f_2(x)+.....+k_n f_n(x)]'$$
$$=k_1 f_1'(x)+k_2 f_2'(x)+.....+k_n f_n'(x)$$

قضيه (د ضرب قاعده):

که $f(x)$ او $g(x)$ دوه توابع وي، نو ښايو:

$$(f(x)\cdot g(x))'=f(x)'\cdot g(x)\cdot g(x)'$$

ښوونه: $\dfrac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

د مناسب فورم- يا بڼه بدلون يعنې په صورت کې د $-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)$ ورزياتولو څخه دا لاندې لرو:

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\frac{(f(x)-f(x_0))g(x)+f(x_0)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}$$
$$=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g(x)+f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

له پورته څخه لاس راځي يعنې د دواړو لورو ليميټ نيسو يا پوله ټاکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)+f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$$

بیلګه:

$$f(x)=x^2\cdot x^3 \quad u(x)=x^2 \quad v(x)=x^3$$
$$\Rightarrow u'(x)=2x \quad v'(x)=3x^2$$
$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)=2x\cdot x^3+x^2\cdot 3x^2=2x^4+3x^4=\underline{\underline{5x^4}}$$

بیلګه:

که $g(x)=x^2-1$ او $h(x)=\sqrt{x}$ ولرو، نو د $f(x)=g(x)h(x)$ مشتق غواړو پیدا کړو.

ښوونه:

په لاندې توګه مخ ته ځو:

$$f(x)=(x^2-1)\sqrt{x},\ f'(x)=2x\sqrt{x}+(x^2-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

قضیه (د وېش قانون):

f او g دې دوه توابع وي. غواړو وښایو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ثبوت: کولای شو، چې دا قضیه له دوه لارو یا طریقو وښایو(ثبوت کړو).

لومړۍ لار:

لومړۍ لار یا طریقه یې په لاندې کې ښایو او دویمه لار دې ګران زده کوونکي وښايي:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h} \quad , \quad g(x)\neq 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{g(x+h)g(x)}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}\right]$$

غواړو $f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)$ صورت ته ور زيات کړو، نو لرو:

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)+f(x)g(x)-f(x)g(x+h)}{h}$$

$$=\frac{1}{g(x)g(x)}[\lim_{h\to 0}g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}\left[g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$=\frac{1}{[g(x)]^2}[g(x).f'(x)-f(x).g'(x)]=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

يعني لرو:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

دويمه لار:

د $\frac{1}{g(x)}$: مشتق غواړو پيدا کړو او ښايوچي دی:

$$(f(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\qquad(\frac{1}{g(x)})'=-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\qquad(*)$$

که $f(x)=\frac{1}{g(x)}$ کيږدو نو لرو:

$$(f(x))'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x).h}$$

$$= \frac{\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{-\lim_{h\to 0} g(x+h)g(x)} = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

که دا $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$ وبش ولرو او وغواړو چې مشتق يې پيدا کړو،نو له پورته ښوونې ، د (*) اړيکې او د ضرب قاعدې له مخې لرو:

$$[\frac{f(x)}{g(x)}]' = [f(x)\frac{1}{g(x)}]'$$

$$= f(x)(\frac{1}{g(x)})' + \frac{1}{g(x)} f'(x)$$

$$= f(x)(\frac{g'(x)}{(g(x))^2}) + \frac{1}{g(x)} f'(x)$$

$$= \frac{-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} + \frac{f'(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

يا په لنډه توګه دا لاندې:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

بېلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{x}{x+2}\quad u(x)=x\quad v(x)=x+2$$

$$\Rightarrow u'(x)=1\quad v'(x)=1\quad [v(x)]^2=(x+2)^2$$

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}=\frac{1\cdot(x+2)-x\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{x+2-x}{(x+2)^2}=\frac{2}{(x+2)^2}$$

$$f(x)=\frac{2x^2+x^3}{x^4}\quad u(x)=2x^2+x^3\quad v(x)=x^4$$

$$\Rightarrow u'(x)=4x+3x^2\quad v'(x)=4x^3\quad [v(x)]^2=x^8$$

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}=\frac{\left(4x+3x^2\right)\cdot x^4-\left(2x^2+x^3\right)\cdot 4x^3}{x^8}$$

$$=\frac{4x^5+3x^6-8x^5-4x^6}{x^8}=\frac{-x^6-4x^5}{x^8}=\frac{-x^5(x+4)}{x^8}=-\frac{x+4}{x^3}$$

بیلګه:

د $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$ تابع (د $x^2-4\neq 0$ سره) مشتق غواړو پیدا کړو.

حل: که چیرې $g(x)=x^2$ او $h(x)=x^2-4$

وضع شي نو لرو:

$$g'(x)=2x$$
$$h'(x)=2x$$

او د ویش قانون له مخې لرو:

$$f'(x)=\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]'=\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

$$=\frac{2x(x^2-4)-x^2.2x}{[x^2-4]^2}$$

$$=\frac{-8x}{[x^2-4]^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تولګه:

کمبنتوپش: (د سيکانت جګيدنه يا منځنی تغير ارزښت)	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
دفرنشلوپش (د تانجنت جګيدنه يا لحضوي تغير ارزښت)	$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
د ثابتي يا تل همغي قانون	$f(x) = c\cdot u(x)$ د c =ثاب تي سره $\Rightarrow f'(x) = c\cdot u'(x)$ يا لنډ: $f' = c\cdot u'$
د جمعي- يا زياتون قانون	$f(x) = u(x)+v(x)$ $\Rightarrow f'(x) = u'(x)+v'(x)$ يا لنډ: $f' = u'+v'$
د ضرب – يا ځل قانون	$f(x) = u(x)\cdot v(x)$ $\Rightarrow f'(x) = u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$ يا په لنډه بڼه: $f' = u'\cdot v+u\cdot v'$
د وېش قانون	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ $\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$ يا په لنډه بڼه: $f' = \frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$
زنځيري قانون:	$f(x) = f[z(x)]$ $\Rightarrow f'(x) = \underbrace{f'(z)}_{\text{äußere Ableitung}}\cdot\underbrace{z'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$ د باندنی مشتق دننی مشتق

(c) ketabton.com: The Digital Library

دنورو پسي توابعو مشتق:

مشتق تابعمساوات	تابع مساوات
$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^x$
$f'(x) = \cos(x)$	$f(x) = \sin(x)$
$f'(x) = -\sin(x)$	$f(x) = \cos(x)$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \ln(x)$

بیلکه:

$f(x) = x \cdot e^x$ د ضرب قانون: $u' \cdot v + u \cdot v'$ د $u = x\,;\, u' = 1;\, v = e^x\,;\, v' = e^x$ سره.

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \underline{\underline{(x+1)e^x}}$$

ثابتي دقانون: $f(x) = 3\ln x$ $\quad f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$

$f(x) = x^2 \cdot \ln x$ دضرب قانون: $u' \cdot v + u \cdot v'$ د

$u = x^2\,;\, u' = 2x\,;\, v = \ln x\,;\, v' = \frac{1}{x}$ سره

$$f'(x) = 2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln x + x = \underline{\underline{(2\ln x + 1)x}}$$

$f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ زنځیری قانون: $f'(x) = f'(z) \cdot z'$

$$z = \frac{1}{2}x \Rightarrow z' = \frac{1}{2} \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}e^{\frac{1}{2}x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = 3\cos(x) - 2\sin(x)$ د جمعي قانونو: $u(x) = 3\cos(x) \quad v(x) = -2\sin(x)$

$$\Rightarrow u'(x) = -3\sin(x) \quad v'(x) = -2\cos(x)$$

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) = \underline{\underline{-3\sin(x) - 2\cos(x)}}$$

3.III : د مشتقشمیرنې قوانین

پوښتنې

مشتقشمیرنه v

لومړی: مشتق يې ونیسئ:

الف- $f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x$ ب - $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2$

پ- $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2$ ت - $f(x) = 6x^2 - \frac{2}{3}x^4$

ټ - $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3$ ث - $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 3$

ج = $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{2}x$ چ - $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

ح - $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x - 5$ خ = $f(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{2}x^2$

دویم: د لاندې توابعو مشتق ونیسئ د دې لپاره تاسو ته معلوم مشتققواعد وکاروئ او قاعده چې کاروئ و لیکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- $f(x)=4x^3$ ب - $f(x)=3e^x$ پ- $f(x)=5\ln x$

ت - $f(x)=x^2+x$ ټ - $f(x)=2x^3-3x^2$ ث - $f(x)=4x^5-2\ln x+3e^x$

ج = $f(x)=x\cdot e^x$ چ - $f(x)=x^2\cdot\ln x$ ح - $f(x)=x^3\cdot(x^2-1)$

دريم: د لاندې توابعو مشتق ونيسئ د دې لپاره تاسو ته معلوم مشتققواعد وکاروئ او قاعده چې کاروئ و ليکئ

الف- $f(x)=\frac{x+1}{x}$ ب - $f(x)=\frac{x}{x+1}$ پ- $f(x)=\frac{(x+1)\cdot e^x}{x}$

ت - $f(x)=(x+1)^2$ ټ - $f(x)=(x^2+1)^2$ ث - $f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$

ج = $f(x)=2ax^3-4bx$ چ - $f(x)=e^{ax}$ ح - $f(x)=e^{-(x-2)}$

څلورم: د لاندی توابعو مشفقونه پيدا کړئ:

الف- $f(x)=3x^3-2x^2+x-7$ ب - $f(x)=x^2\cdot e^x\cdot\sqrt{x}$

پ- $f(x)=\frac{x^2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3}}{x^3}$ ت - $f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$

ټ - $f(x)=(a^2+x)^2$ ث - $f(x)=(2x^3-3)^2$

پنځم:د لاندی توابعو مشفقونه پيدا کړئ:

الف- $f(x)=\left(x+e^x\right)\cdot\ln x$ ب - $f(x)=\ln(x^2-1)$

پ- $f(x)=(x+1)\cdot e^{(x+1)}$ ت - $f(x)=a\ln x-be^x-3x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت ـ $f(x)=\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$ ث ـ $f(x)=\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}$

شپږم: د لاندې توابعو دریواره مشتق ونئسئ

الف- $f(x)=3x+4$ ب ـ $f(x)=2x-4+x^3-5x+4x^3$

پ- $f(x)=3x^3+2x^2+x+1$ ت ـ $f(x)=(2x+1)^3$

ټ ـ $f(x)=x-x^4+3+x$ ث ـ $f(x)=1-2x-3x-4x+x^4$

ج = $f(x)=a+b+c^2-x-ax-bx-cx^3-c^3x$ چ ـ $f(x)=4x^3-2x^2+5x-2$

مفصل حلونه

مشتقشمیرنه **7**

یادونه: په لاندې کې (Sr) د جمعي قانون (Pr) د ضرب قانون، Kettenregelځنزيري قانون (Kr) د ثابتي قانون (Qr) د وېش قانون په معنا دي

لورمړی:

الف- $f(x)=-\frac{1}{8}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{5}{2}x \Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

ب ـ $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+x^2 \Rightarrow f'(x)=-2x^2+2x$

پ- $f(x)=-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^3+3x^2 \Rightarrow f'(x)=-x^3-\frac{3}{2}x^2+6x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت - $f(x) = 6x^2 - \frac{2}{3}x^4 \Rightarrow f'(x) = -\frac{8}{3}x^3 + 12x$

ټ - $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 \Rightarrow f'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$

ث - $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x^2 - 2$

ج = $f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{2}x \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{8}x^2 - \frac{3}{2}$

چ - $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$

ح - $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x - 5 \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 2x - 1$

خ = $f(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{12}x^3 - x$

دويم:

الف- $f(x) = 4x^3$ د ثابتې قانون (Kr) $f'(x) = 4 \cdot (x^3)' = 4 \cdot 3x^2 = \underline{\underline{12x^2}}$

ب - $f(x) = 3 \cdot e^x$ (Kr) $f'(x) = 3 \cdot (e^x)' = \underline{\underline{3e^x}}$

پ- $f(x) = 3 \cdot \ln(x)$ (Kr) $f'(x) = 3 \cdot [\ln(x)]' = 3 \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{\frac{3}{x}}}$

ت - $f(x) = x^2 + x$ د جمعي قانون: $f'(x) = \underline{\underline{2x + 1}}$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ - $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ (Sr / Kr) $f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x = \underline{\underline{6x^2 - 6x}}$

ث - $f(x) = 4x^5 - 2 \cdot \ln(x) + 3 \cdot e^x$

(Sr / Kr) $f'(x) = 4 \cdot 5x^4 - 2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot e^x = \underline{\underline{20x^4 - \frac{2}{x} + 3e^x}}$

ج = $f(x) = x \cdot e^x$ د $u' \cdot v + u \cdot v'$ ضرب قانو د $u = x; u' = 1; v = e^x; v' = e^x$: سره

$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \underline{\underline{(x+1)e^x}}$

چ - $f(x) = x^2 . \ln x$ (Pr د ضرب قانون) $u'v + uv'$ د $u = x^2; u' = 2x; v = \ln x; v' = 1/x$ سره.

$f(x) = x^2 \cdot \ln(x)$ (Pr): $u' \cdot v + u \cdot v'$ mit $u = x^2; u' = 2x; v = \ln(x); v' = \frac{1}{x}$

$f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \cdot \ln(x) + x = \underline{\underline{(2\ln x + 1)x}}$

ح - $f(x) = x^3 \cdot (x^2 - 1)$ (Pr / Sr): $u' \cdot v + u \cdot v'$

د $u = x^3; u' = 3x^2; v = x^2 - 1; v' = 2x$ سره

$f'(x) = 3x^2 \cdot (x^2 - 1) + x^3 \cdot 2x = 3x^4 - 3x^2 + 2x^4 = \underline{\underline{5x^4 - 3x^2}}$

دريم: الف-د لاندې پېښتو:

$f(x) = \frac{x+1}{x}$ د وېش قانون: $\frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

د $u = x + 1; u' = 1; v = x; v' = 1; v^2 = x^2$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x)=\frac{1\cdot x-(x+1)\cdot 1}{x^2}=\frac{x-x-1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$$

ب –

$$f(x)=\frac{x}{x+1}\quad (Qr/Sr):\quad \frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$\text{mit } u=x;\ u'=1;\ v=x+1;\ v'=1;\ v^2=(x+1)^2$$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{x+1-1}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

پ- د... سره

$$f(x)=\frac{(x+1)e^x}{x}\quad (Qr/Pr/Sr):\quad \frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$\text{mit } u=(x+1)e^x;\ u'=e^x+(x+1)e^x;\ v=x;\ v'=1;\ v^2=x^2$$

$$f'(x)=\frac{\left[e^x+(x+1)e^x\right]\cdot x-(x+1)e^x\cdot 1}{x^2}$$

$$=\frac{xe^x+x^2e^x+xe^x-xe^x-e^x}{x^2}=\frac{(x^2+x-1)e^x}{x^2}$$

ت –

$f(x)=(x+1)^2$ ځنزيري قانو: $f'(x)=f'(z)\cdot z'$

$$z=x+1\Rightarrow z'=1\quad f(z)=z^2\Rightarrow f'(z)=2z$$

$$f'(x)=2(x+1)\cdot 1=2(x+1)$$

ټ – $f(x)=(x^2+1)^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځنزيري قانون: $f'(x) = f'(z).z'$

$$z = x^2 + 1 \Rightarrow z' = 2x \quad f(z) = z^2 \Rightarrow f'(z) = 2z$$
$$f'(x) = 2(x^2+1)\cdot 2x = 4x(x^2+1) = \underline{\underline{4x^3 + 4x}}$$

ث - $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ ځنزيري قانون $f'(x) = f'(z)\cdot z'$

$$z = \frac{1}{2}x \Rightarrow z' = \frac{1}{2} \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}}}$$

ج = $f(x) = 2ax^3 - 4bx \quad (Sr/Kr) \quad \Rightarrow f(x) = 2\cdot 3ax^2 - 4b = \underline{\underline{6ax^2 - 4b}}$

چ - $f(x) = e^{ax}$ ځنزيري قانون: $f'(x) = f'(z).z'$

$$z = ax \Rightarrow z' = a \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^{ax}\cdot a = \underline{\underline{ae^{ax}}}$$

ح –

$f(x) = e^{-(x-2)}$ ځنزيري قانون: $f'(x) = f'(z).z'$

$$z = -(x-2) = -x + 2 \Rightarrow z' = -1 \quad f(z) = e^z \Rightarrow f'(z) = e^z$$
$$\Rightarrow \quad f'(x) = e^{-(x-2)}\cdot(-1) = \underline{\underline{-e^{-(x-2)}}}$$

ځلورم:

الف- $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 7 \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{9x^2 - 4x + 1}}$

ب - $f(x) = x^2\cdot e^x\cdot\sqrt{x} = x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot e^x = \underbrace{x^{\frac{5}{2}}}_{u}\cdot\underbrace{e^x}_{v} \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $u = x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow u' = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$ او $v = e^x \Rightarrow v' = e^x$ سره لرو:

$$f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} \cdot e^x + x^{\frac{5}{2}} \cdot e^x = \left(\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}\right)e^x$$

پ- $f(x) = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3}}{x^3} = \frac{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}}}{x^3} = \frac{x^{\frac{4}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}}{x^3} = \frac{x^{\frac{8}{2}}}{x^3} = \frac{x^4}{x^3} = x \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{1}}$

ت - $f(x) = \frac{2x-1}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

د $u = 2x - 1 \Rightarrow u' = 2$ او $v = x + 2 \Rightarrow v' = 1$ او $v^2 = (x+2)^2$ سره لرو:

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2\cdot(x+2) - (2x-1)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{2x + 4 - 2x + 1}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$$

ټ - $f(x) = (a^2 + x)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(a^2 + x)\cdot 1 = \underline{\underline{2(a^2 + x)}}$

ث –

$$f(x) = (2x^3 - 3)^2 \Rightarrow f'(x) = 2(2x^3 - 3)\cdot 6x^2 = 12x^2(2x^3 - 3) = \underline{\underline{24x^5 - 36x^2}}$$

پنځم:

الف-

$$f(x) = \underbrace{(x + e^x)}_{u} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v} \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $u = x + e^x \Rightarrow u' = 1 + e^x$ او $v = \ln(x) \Rightarrow v' = \frac{1}{x}$ سره کيري يا لرو:

$$f'(x) = \left(1+e^x\right)\cdot \ln(x) + \left(x+e^x\right)\cdot \frac{1}{x} = \ln x + \ln x \cdot e^x + 1 + \frac{e^x}{x}$$

ب –

$f(x) = \ln\left(x^2-1\right)$ زنځيري قانون $f'(x) = f'(z)\cdot z'$

$$z = x^2 - 1 \Rightarrow z' = 2x \quad f(z) = \ln(z) \Rightarrow f'(z) = \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2-1}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2-1}$$

پ- $f(x) = (x+1)\cdot e^{(x+1)} \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$

د $u = (x+1) \Rightarrow u' = 1$ او $v = e^{(x+1)} \Rightarrow v' = e^{(x+1)}$ سره

$$f'(x) = 1\cdot e^{(x+1)} + (x+1)e^{(x+1)} = \left[1+(x+1)\right]e^{(x+1)} = (x+2)e^{(x+1)}$$

ت - $f(x) = a\cdot \ln(x) - b\cdot e^x - 3\cdot x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{x} - be^x - 6x$

ټ – $f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

د $u = (x+1)^2 \Rightarrow u' = 2(x+1)$ او $v = (x-1)^2 \Rightarrow v' = 2(x-1)$ او

$v^2 = (x-1)^4$ د سره لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x)=\frac{2(x+1)\cdot(x-1)^2-(x+1)^2\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{(x-1)\left[2(x+1)(x-1)-2(x+1)^2\right]}{(x-1)^4}=\frac{2(x+1)(x-1)-2(x+1)^2}{(x-1)^3}$$

$$=\frac{2\left(x^2-1\right)-2(x+1)^2}{(x-1)^3}=\frac{2x^2-2-2x^2-4x-2}{(x-1)^3}=\frac{-4x-4}{(x-1)^3}=-\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}$$

ث ـ

$$f(x)=\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}=\left(\frac{3+x}{3-x}\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{3+x}{3-x}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{3+x}{3-x}\right)'$$

د ځنزيري قانون له مخې منځشميرنه:

$$\left(\frac{3+x}{3-x}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad u=3+x\Rightarrow u'=1;\ v=3-x\Rightarrow v'=-1;\ v^2=(3-x)^2$$

$$\left(\frac{3+x}{3-x}\right)'=\frac{1\cdot(3-x)-(3+x)\cdot(-1)}{(3-x)^2}=\frac{3-x+3+x}{(3-x)^2}=\frac{6}{(3-x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{6}{(3-x)^2}=\frac{3(3-x)^{\frac{1}{2}}}{(3+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(3-x)^2}=\frac{3(3-x)^{-\frac{3}{2}}}{(3+x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{3}{(3-x)^{\frac{3}{2}}(3+x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{3}{(3-x)(3-x)^{\frac{1}{2}}(3+x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{3}{(3-x)\left[(3-x)(3+x)\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{3}{(3-x)\left(9-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم:

الف- $f(x) = 3x + 4 \Rightarrow f'(x) = 3 \qquad f''(x) = 0 \qquad f'''(x) = 0$

ب -
$$f(x) = 2x - 4 + x^3 - 5x + 4x^3 = 5x^3 - 3x - 4$$
$$\Rightarrow f'(x) = 15x^2 - 3 \qquad f''(x) = 30x \qquad f'''(x) = 30$$

پ-
$$f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$$
$$\Rightarrow f'(x) = 9x^2 + 4x + 1 \qquad f''(x) = 18x + 4 \qquad f'''(x) = 18$$

ت -
$$f(x) = (2x+1)^3$$
$$\Rightarrow f'(x) = 3(2x+1)^2 \cdot 2 = 6(4x^2 + 4x + 1) = 24x^2 + 24x + 6$$
$$f''(x) = 48x + 24 \quad f'''(x) = 48$$

ټ -
$$f(x) = x - x^4 + 3 + x = -x^4 + 2x + 3$$
$$\Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 2 \qquad f''(x) = -12x^2 \qquad f'''(x) = -24x$$

ث –

$$f(x) = 1 - 2x - 3x - 4x + x^4 = x^4 - 9x + 1$$
$$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 9 \qquad f''(x) = 12x^2 \qquad f'''(x) = 24x$$

ج- ثابت يا تل همغه=konstant

$$f(x) = \underbrace{a + b + c^2}_{\text{Konstante}} - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$$
$$f'(x) = -1 - a - b - 3cx^2 - c^3 = -3cx^2 - \underbrace{a - b - c^3 - 1}_{\text{Konstante}}$$
$$f''(x) = -6cx \qquad f'''(x) = -6c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چ -

$$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2$$
$$\Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 4x + 5 \qquad f''(x) = 24x - 4 \qquad f'''(x) = 24$$

د جګو درجو مشتق

د لومړي مشتق پرته د لوړو درجو مشتق کونه هم شته، چې د ورپسي مشتق له لارې لاسته راځي
د $f'(x)$ بیا مشتق نیونې سره د $f''(x)$ مشتق تابع لاس ته راځي، چې د دویم مشتقتابع په نامه یادیږي.

بیلګه:

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \underline{\underline{f''(x) = 6x + 2}}$$

د $f''(x)$ بیا مشتق نیونه و دریم مشتق ته اوداسې نور

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 6x + 2 \Rightarrow \underline{\underline{f'''(x) = 6}}$$

د $f(x) = \frac{x^3}{3}$ تابع دې ۴ واره مشتق ونیول شي

$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$$

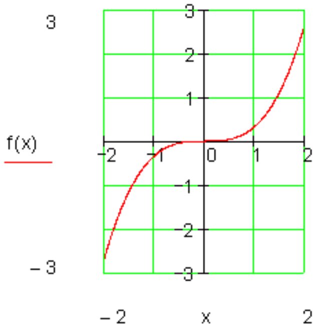
د تابع ګراف :

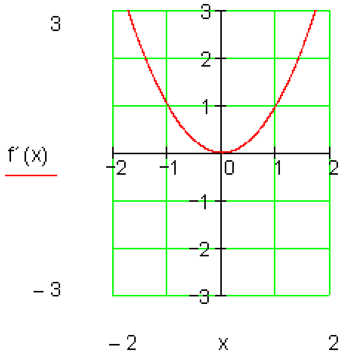
(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه تابع انځورونه د اړونده مشتق تابع سره

$$f(x) = \frac{x^3}{3}$$

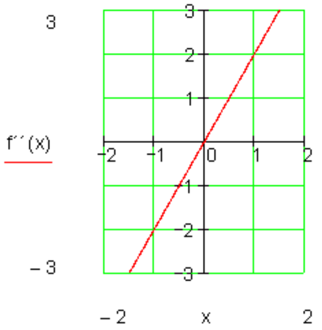
$$f(x) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow f'(x) = x^2$$

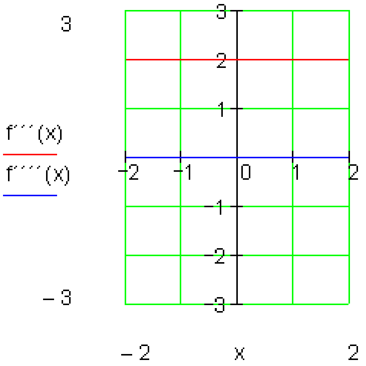




$$f'(x) = x^2 \Rightarrow f''(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2x \Rightarrow f'''(x) = 2 \Rightarrow f''''(x) = 0$$

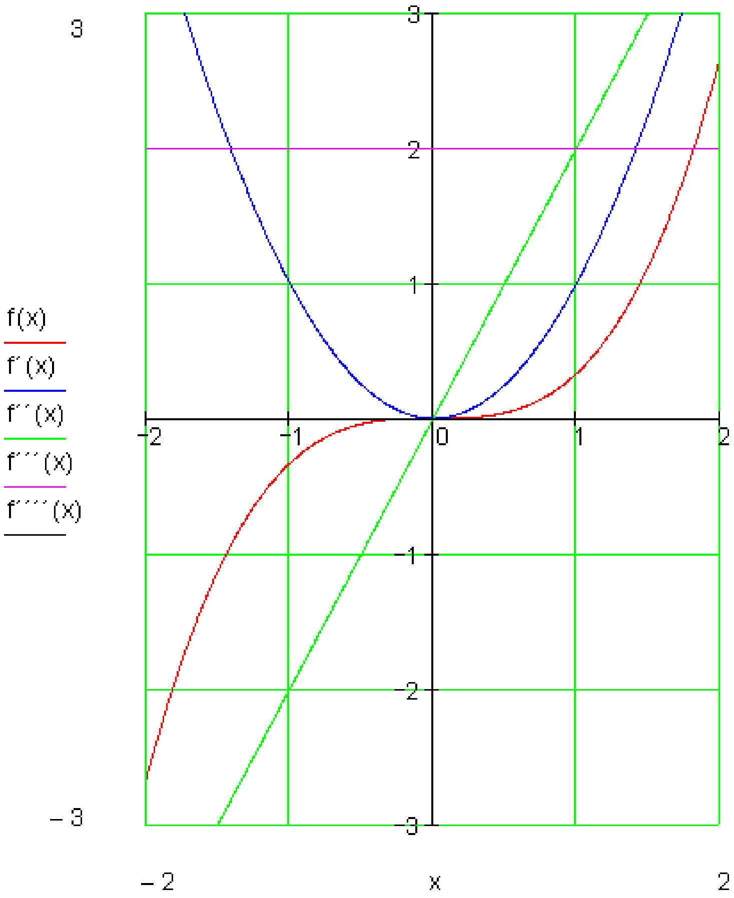




د ټولو توابعو ګراف په یوه پروت ولاړ سیستم کې(دا ګراف د لاندې بیلګې پسې دی)

$f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 2$ $f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$ $f''(x) = 24x - 4$ $f'''(x) = 24$	بیلګې: اول :

(c) ketabton.com: The Digital Library



دویم:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 - 12x^2 + \frac{1}{4}x$$

$$f'(x) = \frac{9}{4}x^2 - 24x + \frac{1}{4}$$

$$f''(x) = \frac{9}{2}x - 24$$

$$f'''(x) = \frac{9}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولګه:

د f(x) لومړی مشتق د f(x) مشتق تابع $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ ده :

د f(x) دویم مشتق د f'(x) مشتق تابع $f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}$ دی:

د f(x) دریم مشتق د f''(x) مشتق تابع $f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}$ دی:

په ځانګړي ډول: یو په خوښه ویاند – یا راشنل تابع f(x) په خوښه د مشتق قابلیت لري.

تانجنت او عمود

د تانجنت جګیدنه

بیلګه:

تابع $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ لرو.

د تانجنت میل: د یوه تابع د ګراف میل په ټکي $P(x_0 \mid f(x_0))$ کې همغه معنی لري، لکه په دې ټکي د تانجنت میل.

موږ $f(x)$ تابع او د تابع مشتق ټیک په پام کې نیسو.

موږ $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ مربع تابع لرو

د تابع مشتق $f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

ارزښتجدول:

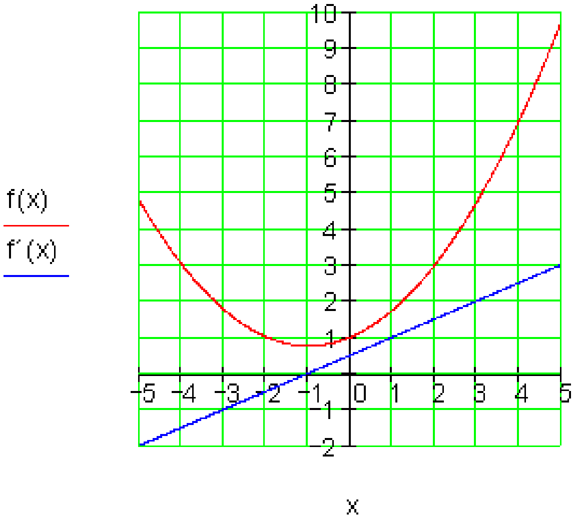
(c) ketabton.com: The Digital Library

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	4,75	3	1,75	1	0,75	1	1,75	3	4,75	7	9,75
f '(x)	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

د $f(x)$ ارزښتجدول څخه لوستلی شو چې د پورته مربع تابع ککرتکی دی: $S(-1,\ 0.75)$
د $x=-1$ ارزښت لپاره $f'(-1)=0$ د ميل تابع ارزښت دی:
دا دا معنی لري، چې په ککرتکي کې د $f'(x)$ ميل صفر دی.
تانجنت په s کې هم دا معنی لري، چې صفر دی، دا هلته پروت(افقي) ځغلي؛ يعني د $x-$ محور سره غبرګ ځغلي.

ګرافونه:

$$f(x) := \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 \qquad f'(x) := \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$



بيلګه:
تابع لرو: $f(x)=2x^3+7x^2+x-7$

تانجنت دې پيداکړی شي، چې د $f(x)$ ګراف د $P(-2,\ f(-2))$ په ټکي کې لمسوي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 7 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 14x + 1 \quad P(-2 \mid f(2)) \Rightarrow x_0 = -2$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$f'(x_0) f'(-2) = 24 - 28 + 1 = -3$$
$$f(x_0) = f(-2) = -16 + 28 - 2 - 7 = 3$$
$$\Rightarrow t(x) = -3(x+2) + 3 = -3x - 6 + 3 = \underline{\underline{-3x-3}}$$

پایله:

د $f(x)$ تابع ګراف کې تانجنت او عمود په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې لاندې بڼه لري.

د تانجنت مساوات

$$t(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګیدنه}}(x - x_0) + f(x_0)$$

د عمود مساوات

$$n(x) = -\frac{1}{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{جګیدنه}}}(x - x_0) + f(x_0) \;;\; f'(x_0) \neq 0$$

د تانجنت او عمود عمومي فرمولونه:

پیل: تانجنت دې د $f(x)$ ګراف د $P(x_0, f(x_0))$ په ټکي کې لمس کړي. عمود (نورمال) دې د $f(x)$ ګراف د په $P(x_0, f(x_0))$ ټکي کې عمود یا ولاړ غوڅ کړي.

د تانجنت مساوات: $t(x) = m_t \cdot x + b_t$:

د $m_t = f'(x_0)$ سره لیکو: $\quad t(x) = f'(x_0) \cdot x + b_t \quad (1)$

دا چې $P(x_0), f(x_0))$ تانجنت یو ټکی دی، نو لاس ته راځي:

$$t(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot x + b_t = f(x_0)$$
$$\Leftrightarrow b_t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

په (1) کې ږدو، نو لر:

$$t(x) = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)$$
$$= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

عمود (نورمال):

د منحني سره په همغه ټکي کې چې تانجنت په پروت دی، عمود څغلي.

د عمود میل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

بیلګه:

د $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$ تابع لرو.

د تابع تانجنت او عمود(نورمال) پیدا کړئ:

حل:په لاندې توګه د تابع مشتق نیسو او ګراف یې(څېره لاندې کښل شوې) کاږو:

x	-4	-1	0	1.5	3
$f'(x)$	4	2.5	2	1.25	0.5

لرو: $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \;\Rightarrow\; f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

د تانجنت میل په ټکي x_0 کې د میل ارزښت 3 لري.

$$f'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$f(x) = f(-2) = 2\cdot(-2) - \frac{1}{4}(-2)^2 = -5$$

د $P(-2,-5)$ په ټکي کې تانجنت په $f(x)$ باندې ارزښت 3 لري.

$$f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x \qquad ,P(2, f(2))$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ په ځاي کې دا لاندې لرو:

$$t(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$f(2) = 2\cdot 2 - \frac{1}{4}\cdot(2)^2 = 4 - 1 = 3 \qquad f'(2) - \frac{1}{2}\cdot 2 = 2 - 1 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = 1(x-2) + 3 = x - 2 + 3 = \underline{\underline{x+1}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نورمال یا عمود پیدا کونه:

$$f(x)=2x-\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=2-\frac{1}{2}x \ , \quad P(2|\,f(2))$$

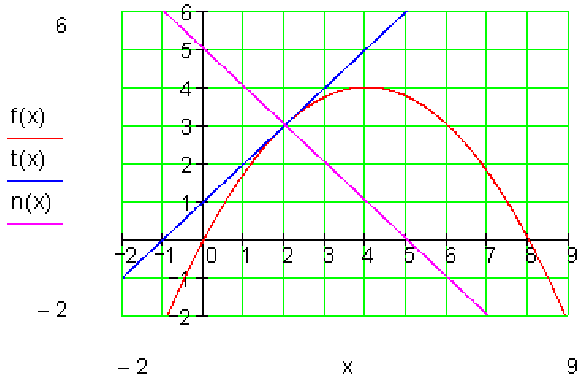
$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

د $x_0 = 2$ سره لاندې راکوي:

$$n(x)=\frac{1}{f\ '(2)}(x-2)+f\ (2)$$

$$f\ (2)=2\cdot 2-\frac{1}{4}\cdot(2)^2=4-1=3 \qquad f\ '(2)-\frac{1}{2}\cdot 2=2-1=1$$

$$\Rightarrow n(x)=-\frac{1}{1}(x-2)+3=-x+2+3=\underline{\underline{-x+5}}$$



د یوې تابع د استعمال بیلګه د تانجنت له پاره :

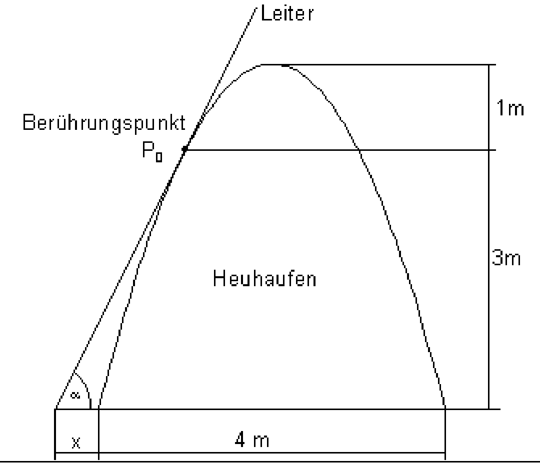
له ځمکې څخه د وښو په توپۍ یوه زینه ایښول کیږي. دا زینه په درې متره جګوالي توپۍ لمسوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وښو توپی دې د یوه کیښکودي پارابول
څیره ولري، چې بنسټ یې ۴ متره سرور
دی او ۴ متره جګوالی لري. غواړو په دې
یوه زینه کیږدو، چې د وښو توپی سره
تانجنت جوړ کړي.

په کومه زاویه(کونج)باید دا زینه کېښول
شي؟

د وښو توپی له بیخ څخه دې په کوم
لرېوالي په څمکه دا زینه کېښول شي؟



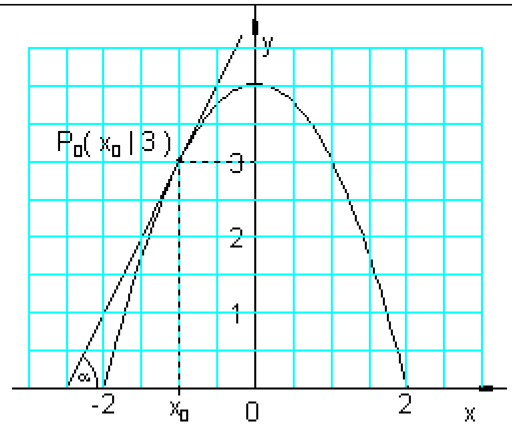
موږ د y محور داسې کاږو،چې د
پارابول له ککرې(څوکې) څخه تېرېږي.

پارابول دا لاندې د تابع مساوات لري:

$$f(x) = a_2x^2 + 4$$
$$f(2) = 0 \Leftrightarrow 4a_2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$$
$$\Rightarrow f(x) = -x^2 + 4$$

موږ د x_0 لپاره ارزښت ټاکو:

$$f(x_0) = 3 \Leftrightarrow -x_0^2 + 4 = 3$$
$$\Leftrightarrow x_0^2 = 1 \Leftrightarrow x_{01/2} = \pm 1$$



شمیرنه :

د نورو شمیرنو لپاره ارزښت-1 = x_0کاروو. زینه توپی په $P_0(-1,3)$ ټکي کې
لمسوي.موږ په $P_0(-1,3)$ ټکي کې د تانجنت مساوات ټاکو:

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = -x^2 + 4 \quad P_0(-1|3) \Rightarrow \bar{x}_0 = -1; \bar{f}(x_0) = 3$$
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

د $f'(x) = -2x$ سره لاس ته راځي

$$f'(x_0) = f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = 2[x - (-1)] + 3 = \underline{\underline{2x + 5}}$$

جوړه زاويه: $\tan\alpha = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 63{,}4^0}}$

د زينې او د وښو توپۍ تر منځ واټن د **f(x)** د صفرځای او د تانجنت**t(x)** د صفرځای ترمنځ واټن دی.

صفرځايونه:

لرو:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2$$
$$t(x) = 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -2{,}5$$

د x ارزښتونو 2,5- او 2- ترمنځ واټن 5, 0دی.

زينه د وښو د توپۍ له پښو څخه بايد نيم متر لرې کېښول شي.

ددې پوښتنې څخه مو زده کړل، چې د تانجنت مساوات څنګه تاکل کيږي، چې يو ګراف په تعريف شوي ځای کې لمسوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په تولید کې د مشتق استعمال

فعالیت : یوه فابریکه x تولید کوي. په دې تولید د لګښت کیږي، چې دا د تولید په واک کې دی، چې موږ ورته د لګښت تابع وایو او په K(x) سره ښایو.

څنګه کولی شو، چې د زیات تولید لپاره لګښت را ټیټ کړو؟

د لګښت تابع K(x) د تولید سټ(ډېرۍ) او ټول لګښت تر منځ تړاو انځوروي.

که تولید د Δx شاو خوا کې زیات شي، نو لګښت هم د ΔK په شاو خوا کې زیاتیږي.

کمښتویش (تقسیم تفاضل) $\frac{\Delta K}{\Delta x}$ د منځني لګښت زیاتوالی ښايي، د یوه Δx تولید تغیر سره(منځنی تغیر ارزښت)

د x_0 ځای کې لحضوي تغیر ارزښت د مشتق لګښت بلل کیږي. دا د پوله ارزښت $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}$ سره ټاکل کیږي، داپه دې معني، چې د لګښت د تابعK مشتق.

پیژند : د لګښتتابع **K(x)** مشتق د مشتق ارزښت **K'(x)** په نامه یادوو یا یې پوله لګشت **K'(x)** هم بولو.

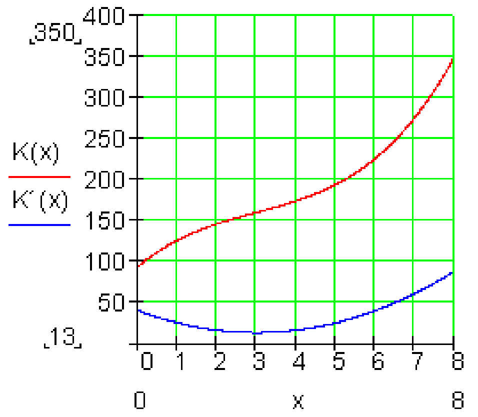
بیلګه: د لګښت تابع $K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$ دې ورکړ شوې وي.

الف: مشتق ارزښت وټاکی، یو ارزښت جدول د **K(x)** او **K'(x)** لپاره وکاږئ او په پروتولاړ سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یې ګراف وکاږئ.

پوله ارزښت د **I = [0 ; 6]** لپاره په ۱ پل(قدو) پراخوالي سره.

ب : د ډېر کم لګښتزاتوالی و ټاکئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library



لاندي تابع لرو:

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$

مشتق ارزښت

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$

ارزښت جدول

x	0	1	2	3	4	5	6
K(x)	94	126	146	160	174	194	226
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40

خورا کم د لګښتزياتوالی(لګښتجګېدنه) د پارابول **K'(x)** په ککره(څوکه) کې پروت دی ، يعني هلته چې تانجنت **K'(x)** پروت يا افقي دی

$$K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

د تانجنت د پروتوالي يا افقيت لپاره :

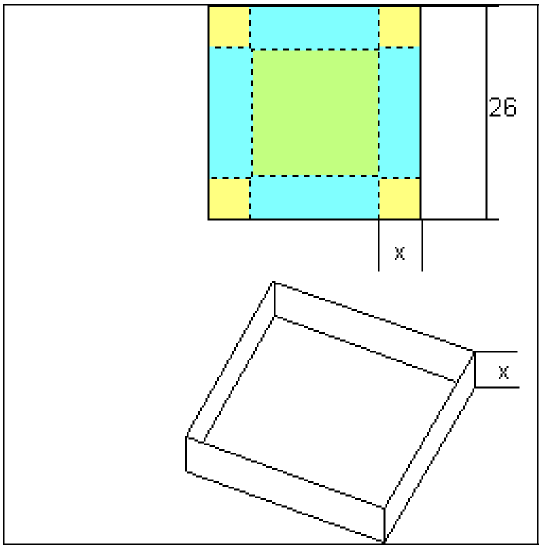
$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}$$

همدا نتيجه موږ د **K'(x)** لپاره جدول څخه هم لوستلی شوه.

نتيجه په دي معنا ده: کوچنی نرخجګوالی د يوه **x = 3** مقدار څخه لاس ته راوړو، دا هلته **13 GE / ME** دی.

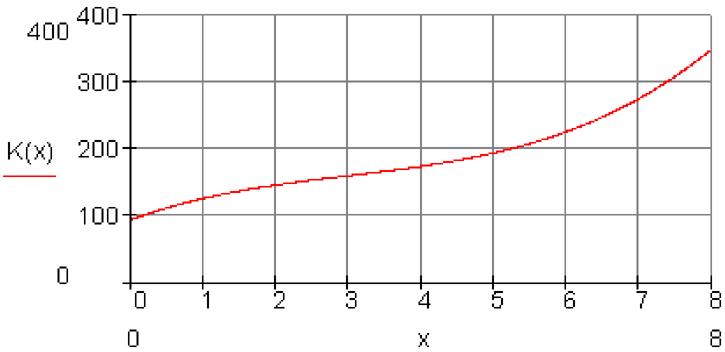
(c) ketabton.com: The Digital Library

د ي، مربع کارتون(د کلک کاغذ ځخه جوړ)ځخه ، چې ۲۶ سانتیمتره د اړخ اوږدوالی لري یو بکس جوړوو بې له سرپوښ، چې د x ځګوالی لري.
الف: د یوه تابع ترم وټاکی، چې د بکس حجم(ډکی) V د x په واکوالي یا تابعیت کې ښايي.
ب – ګراف وکاږئ او په نږدي توګه يي ماکسیما(خورا جګ) حجم و ټاکی.



- د یوه روغتون د نرختابع(مصرف تابع)K(x) د ناروغانو ګڼه (تعداد) x او د ټول مصرف ترمنځ اړیکي انځوروي، داسې چې x = 1 د 100 ناروغانو معنی او y = 1 دی معنی چې 1000 € / Tag. یوزر یورو په ورځ (1000 € / Tag.) .

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



الف : د مصرف تابع په خپله کتابچه کې ولیکی.
ب : د لګښت تابع مشتق د مشتق لګښت (-مصرف) یا دحدمصرف په نامه یادیږي. تاسو د لګښت زیاتیدنه د ناروغانو په واکوالي یا تابعیت کې تشریح کړی. (د K(x) ځګیدونه).
K'(x) وټاکی او ګراف یې په وضعیه سیستم (پروت- ولاړ-سیستم) کې انځور کړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ : د ناروغانو د کوم تعداد سره د لګښت زیاتوال خورا کم دی؟ دا قیمتونه وشمیرئ.

د الجبري توابعو مشتق

د الجبري او نورو توابعو پېژندونه: 1- یو بنسټیز تابع الجبري بلل کیږي، که د ترتیب قانون یې د مساواتو له لارې ورکړ شوی وي،په هغو کې چې په ترمونو کې د مساواتو د متحولو سره فقط الجبري عملیی(جمع،تفریق، ضرب، تقسیم(چې مخرج یې صفر نه وي)توانکونه او جذرنیونه(د توان-اوریښې اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي) کارول شوي وي. 2- ناالجبري توابع ترانسڅندنت بلل کیږي، لکه اکسپوننشل-ولوګاریمی- او د زاویو توابع. 3- یو الجبري تابع راشنل بللکیږ ي، که د ترتیب قانون یې د یو مساوات سره ورکړ شوی وي، په کوم کې چې ناپای ډیرې راشنل د شمېر عملیی ((جمع،تفریق، ضرب، تقسیم(چې مخرج یې صفر نه وي)توانکونه او جذرنیونه(د توان-اوریښې اکسپوننتونه مثبت او تام عددي دي)) کارول شوي وي.

بیلګه:

د $f(x)=\sqrt{x}$ تابع ورکړ شوې په x_0 کې د تابع مشتق پیدا کړئ او د مشتق تابع په ګوته کړئ.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0})}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0})}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

نو د x_0 په ځای کې $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$ د تابع $f(x)=\sqrt{x}$ مشتق دی.

د تیرو درسونو پر بنسټ $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ د مشتق تابع ده.

د $f(x)=x^q \;;\; q\in Q$ ډوله توابعو مشتق:

د شمیرنې له مخې لاندې لاس ته را وړنې لرو:

تابع	د مشتق تابع	
$f(x)=x$	$f'(x)=1$	$f'(x)=1\cdot x^0$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2\cdot x$	$f'(x)=2\cdot x^1$
$f(x)=x^3$	$f'(x)=3\cdot x^2$	$f'(x)=3\cdot x^2$
$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f'(x)=-1.x^{-2}$
$f(x)=\sqrt{x}=x\frac{1}{2}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f'(x)=\frac{1}{2}.x^{-\frac{1}{2}}$

که دا پورته پنځه مشتقونه یو د بل سره پرتله کړو، نو اټکل کیږي، چې لاندې جوړښتقانون باور لري:

د توان (پونتخ) قانون بې له ښوونې:	
1- مختني اکسپوننت د متحولې x تر مخ د فاکتور په څېر لیکل کیږي. 2- نوی اکسپوننت همغه پخوانی اکسپوننت دی، چې په یو کم شوی.	د $f(x)=x^q \;\Rightarrow\; f'(x)=q\cdot x^{q-1}$ سره $q\in Q$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه: د $f(x)=\frac{1}{x^2}$ مشتق پيدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2} \Rightarrow f'(x)=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$$

بيلګه:

د $f(x)=3x^4$ تابع مشتق پيدا کړئ.

ښوونه:

$$f(x)=3x^4 \qquad c=3 \qquad u(x)=x^4 \Rightarrow u'(x)=4x^3$$
$$f'(x)=c\cdot u'(x)=3\cdot 4x^3=12x^3$$

بيلګه:

غواړو د $f(x)$ تابع مشتق د $x=2$ په ځای کې ونيسو:

$$f(x)=x^2+3$$

$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=4+\Delta x$$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$$

$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=2u+\Delta x$$

$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2u+\Delta x)=2u$$

بيلګه:

د تا بع $f(x)=\frac{1}{x+1}$ مشتق د $x=2$ په ځای کې پيداکړئ.

ښوونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{x+1}$$

$$x=2:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{1}{3(3+\Delta x)}$$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{-1}{3(3+\Delta x)}\right)=-\frac{1}{9}$$

$$x=u:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(u+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}$$

$$f'(u)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}=\frac{-1}{(u+\Delta x+1)(u+1)}=-\frac{1}{(u+1)^2}$$

بیلګه 2:

(توان(Potence) مشتق، چې طبیعي جګ عدد یا اکسپوننت لري:

موږ د $1,2,3,...$, $y(f(x)=x^n$ تابع لرو او غواړو مشتق یې پیداکړو:

ښوونه: موږ په لاندې توګه مخ ته ځو.

د بینوم جملې په بنسټ په هر x_0 ځای کې دا لاندې باورلري.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{(x_0+h)^n-x_0^n}{}$$

$$=\frac{\binom{n}{0}x_0^n+\binom{n}{1}x_0^{n-1}h+\binom{n}{2}x_0^{n-2}h^2+...+\binom{n}{n}h^n-x_0^n}{h}$$

$$=\frac{1}{h}\left(x_0^n+nx_0^{n-2}h+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h^2+...+h^n-x_0^n\right)$$

$$=nx_0^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x_0^{n-2}h+...+h^{n-1}$$

د $h\to 0$ لپاره تابع $y=x^n$ د x_0 په هرځای کې، د لاندې مشتق سره، د مشتق قابلیت لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(dy/dx)_{x=x_0} = f'(x) = nx^{n-1}$$

ددې پورته بېلګې بل ډول ښوونه دې د پوښتنې په ځبر وي.

د زنځيري توابعو مشتق

د u تابع کېدی شي د v تابع سره وتړل شي، که د د باندني تابع(ځنځيروني قاعده)، پېژند ورشو (دتعريف ساحه) $D(u)$ د دنني تابع د $W(v)$ سره ګډ توکي يا عناصر ولري.

ددې لپاره ليکو: $u^\circ v(x) = u(v(x))$، که د f تابع د $y = f(x) = u(z)$ سره او $z = v(x)$ وي.

اوس د $x = x_0$ ځای کې د $y = f(g(x))$ تړلي يا ځنځيري تابع مشتقوړوالی څېرو:

$$f(x) = f[g(x)]$$
$$\Rightarrow f'(x) = f'(g) \quad . \quad g'(x)$$

دننني مشتق د باندنی مشتق(دادې ورپورته شي)

ددې لپاره نيسو چې:

1- د $g(x)$ دننني تابع د $x = x_0$ په ځای کې مشتقوړ ده. دانو بيا بايد د x_0 په يوه معلوم تعريف شوي چاپيرپال کی متمادي(نه پريکيدونکی) وي.

موږ لرو : $g(x+h) -> g(x_0)$ د $h -> 0$ لپاره.

همداسې $g(x_0+h) = g(x_0) + k$ داسې، چې $k -> 0$ د $h -> 0$ لپاره.

2- که د $y = f(z)$ دباندنی تابع په $z = z_0 g(x_0)$ کې د مشتق قابليت ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $y = f(g(x))$ کمبنتویش کیدی شي په لاندې ډول ورکړ شي او بڼه(فورم) يې هم بدله شي :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)}$$

$$= \frac{f(z_0+k) - f(z_0)}{k} \cdot \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}$$

که $h->0$ لاړه شي (همداسې $k->0$ خواته ځي) نو دا اړيکی مشتق ته ځي:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)} \cdot \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0} ;........(*)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{d(g(x))}{dx}\right)_{x=x_o} = \left(\frac{df(z)}{dz}\right)_{z=z_o=g(x_0)} \cdot \left(\frac{dg(x)}{dx}\right)_{x=x_0}$$

که چیرې د ځای په ځای(فیکس) ځای $x = x_0$ لپار بیرته x نیسو، نو کیدی شي چې $(*)$ فرمول په لاندې لنډ ډول ورکړشي او د $y = (z)\ ,\ z = g(x)$ لپاره باور ولري:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} ;......................................(**)$$

په پام کې دې وي، چې $\frac{dy}{dx}$ د $z = g(x)$ په ځای کې باید ترتیب(تنظیم) شي.

دا $(*)$ فرمول ځنځیري قاعده(لار،قانون) بلل کیږي او د پورته نیونو یا فرضیو سره باوري دی. دا په ساده ډول په یاد لرلی شو، ځکه چې ښی خوا د کینې خوا سره د فورمال dzزياتيدلو له لارې منځ ته راغلي.

د پورته ښوونې لاس ته راوړنه دا لاندې جمله ده:

جمله :
زنځيري قاعده

(c) ketabton.com: The Digital Library

لرو : $f(z)=f(g(x))$ ، نود $z=g(x)$ تابع په x او د $y=f(z)$ تابع په $z=g(x)$ کې د مشتق قابلیت لري یا مشتقوړ دی، نوترلی ورکړ شوی د $y=f(g(x))$ تابع هم په x کې د مشتق قابلیت لري او دا باوري کيږي.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}}=\frac{\frac{df}{dg}}{\frac{dx}{dg}}==f\,'(g(x)).g\,'(x)$$

لنډ: $(fog)'(x)=f(g(x))'$

بېلګه:

د $f(x)=(x^2+2)^2$ مشتق ونیسئ.

$$f(x)=\left(x^2+2\right)^2$$

Substitution بدلون $-2 \quad f(z)=z^2 \Rightarrow f'(z)=2z \quad z'(x)=2x$

$$f'(x)=f'(z)\cdot z'(x)=2z\cdot 2x=2\left(x^2+2\right)\cdot 2x=\underline{\underline{4x^3+8x}}$$

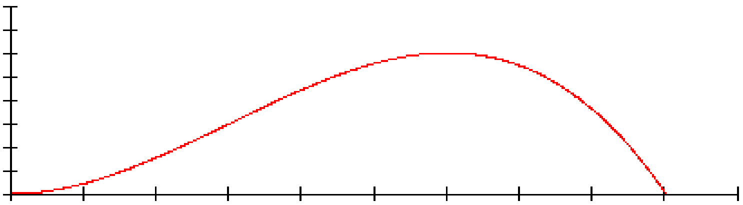
د مشتق استعمال په طبیعي علومو

په ریاضیاتو کې زیات وخت توابع راوړل کيږي، چې د یوې متحولې(اووښتونې) x په واک کې وي.

په طبیعي پوهنو کې زیات وخت توابع څېرو، چې د وخت په واک کې وي وي.

لکه په شکل کې د یوه توپ د غورځولو وهلې لار (دا وروسته روښانه کيږي)

(c) ketabton.com: The Digital Library



فعاليت:

ګران زده کوونکي دي د فزيک د درسونو له مخې د چټکتيا او بيړې تعريفونه ور کړي او د لار، وخت، چټکتيا او بيړې فرمولونه دې وليکي.

بيلګه:

د يوه په برابرډوله بيړه (تعجيل) غورځول شوي شي لپاره د پيل چټکتيا (لومړنی سرعت) $v_0=4\frac{m}{s}$ او $a=1{,}8\frac{m}{s^2}$ بيړې(تعجيل) سره د لار-وخت- قانون په لاندې ډول دی:

$$s(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t$$

حل: د پورته ورکړشوي د v_0 ارزښت لپاره باور لري: $S(t) = 0{,}9t^2+4t$

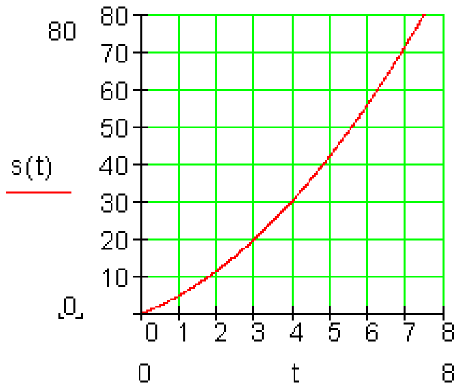
(t په (ثانيه)، s(t) په m (متر))

منځنی چټکتيا (سرعت) $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ (ده

لحظوی(سملاسي) چټکتيا په لاندې ډول

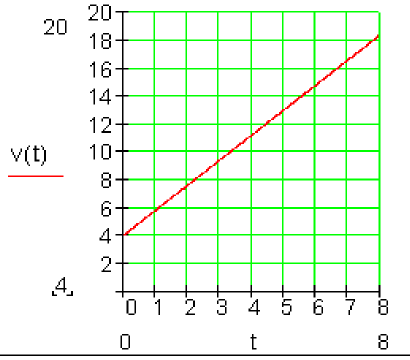
$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt}=v$$

ده: $v = s'(t) = 1{,}8t+4$



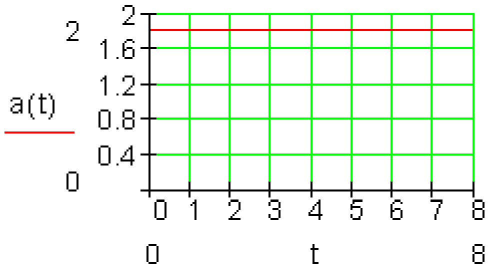
(c) ketabton.com: The Digital Library

په v-t - دیاګرام کې یوه کرښه لاس ته راځي، دا په دې معنی چې چټکتیا په برابر $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ ډول زیاتیږي. دا دلته ثابته چټکېدنه ده او $a = 1,8\,\frac{m}{s^2}$ بیړه(تعجیل) ده.



د بیړې یا تعجیل لپاره دا لاندې مساوات صدق کوي:

$$v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$



پام : د یوه برابرډوله په بیړه (تعجیلي) خوزښت لپاره لاندې باور لري:

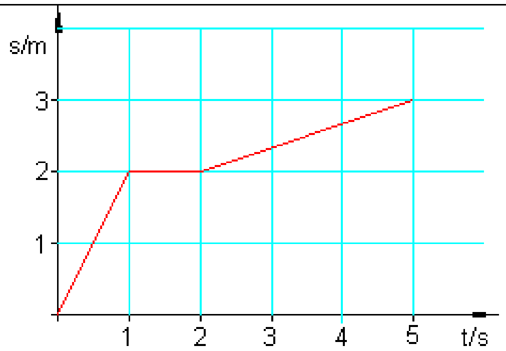
$$a(t) = v'(t) = a \qquad v(t) = s'(t) = at + v_0 \qquad s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

د یوې چټکتیا (سرعت) v لپاره د وخت پسې د لار مشتق لپاره v(t)=s’(t) لرو. د s’(t) لپاره داسې $v(t) = s'(t)$. هم لیکو.

فعالیت:۱) د یوه خوزنده تن یا جسم د لار-وخت-دیاګرام ورکړ شوی.

الف: دا خوزښت تشریح کړی.

ب : دې پورې اړونده د چټکتیا – وخت – دیا ګرام وکاږی.



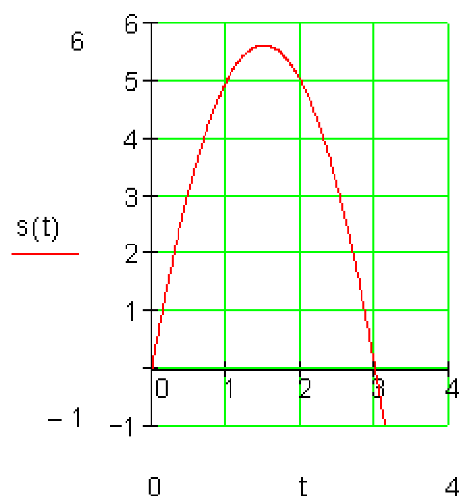
(c) ketabton.com: The Digital Library

۲) یوه تیره د پیل چټکتیا $v_0 = 7\frac{m}{s}$ سره عمودي (ولاړه)پورته غورځول کیږي.

د لار-وخت-قانون دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10\frac{m}{s^2}$ (را ټولي (ګردي شوي)سره.

الف) د کوم وخت وروسته د تیرې چټکتیا (سرعت) صفر دی؟

ب) خورا جګ د میل جګوالی وشمیرئ.



۳) تابع د یوه خوزښت د لار-وخت-دیاګرام ښایي.

الف) د ورځني ژوند څخه یوه بیلګه ورکړئ، د هغې لپاره چې دا تلنه ټیک وي.

د منحني تلنه د $t > 3$ لپاره فزیکي څه مفهوم لري؟

ب) د خوزښت لپاره د لار-وخت-دیاګرام په لاندې ډول دی.

$$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$$

a او v_0 وټاکئ

پ) د اړونده بیړې – وخت-دیاګرم وکاږئ او دا تشریح کړئ.

یوه منفي چټکتیا (سرعت) څه معنا لري؟

۴) یوتن(جسم) په پورته ازاده غورځونه کې داسي حرکت کوي ،چې د t وخت کې $S(t)= 5.t^2$ لار وهي.

په وختونو t=1;2;3 کې لحظوي چټکتیا(سرعت) وښایی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – حل:

لحضوي جټکتیا د سملاسي تغیرارزښت سره په دې لاندې معنا دی:

$$t = 1: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1+\Delta x)-s(1)}{\Delta x} = 10+5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري: $10+5\Delta x \to 10$

$$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2+\Delta x)-s(2)}{\Delta x} = 20+5\Delta x \Rightarrow$$

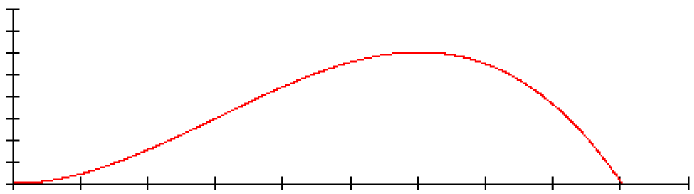
د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري:: $20+5\Delta x \to 20$

$\Delta x \to 0$

$$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3+\Delta x)-s(3)}{\Delta x} = 30+5\Delta x \Rightarrow$$

د $\Delta x \to 0$ لپاره باور لري $30+5\Delta x \to 30$

تمرین : لاندې د $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 ; x > 0$ تابع ګراف او په ورنږدي توګه د فوټبال میدان کې د توپ الوتنې منحني(کره) ښايي، چې لاندې ځیره لري.



لاندې پوښتنې ځواب کړئ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف:توپ کوم خورا جګ(ماکسیمال) جګوالی لري او د وهلټکي(شوټ شوي ټکي) څخه کوم واټن لري؟

ب : د توپ وهلټکي (شوټ شوي ټکي)څخه توپ څومره لرې بیرته ځمکې ته راځي؟

پ : د لوبې د دفاع دېوال د توپ وهنې ځای څخه ۹ متره لرې او ۲ متره جګ دی. ایا توپ له دې څخه جګ الوزي؟

ت : توپ د تور لاین(د x محور) څخه په ۲ متره جګوالي الوزي. له ګول څخه په کوم لرېوالي دا ازاده شوټ وهل شوی دی؟

تانجنت او نورمال.

تمرینونه III :

د **f(x)** ګراف تانجنت په ټکي **P(x_0 | f(x_0)).** کې:

1 - $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad x_0 = 2$

2 - $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} \qquad x_0 = 2$

3 - $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = -1$

4 - $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \qquad x_0 = 1$

5 - $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \qquad x_0 = 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

6 - $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \qquad x_0 = -\frac{3}{2}$

7 - $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 \qquad x_0 = 3$

8 - $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \qquad x_0 = 1$

9 - $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = 0$

10 - $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = 1$

حلونه

تمرينونه مشتقشمېرنه III

نتيجې او مفصل حلونه

نتيجې:

لومړی:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad x_0 = 2 \Rightarrow P_0(2|2) \qquad t(x) = -3x + 8$$

دويم:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} \qquad x_0 = 2 \Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t(x) = -\frac{9}{4}x + \frac{29}{4} \qquad \Rightarrow P_0\left(2 \,\middle|\, \frac{11}{4} = 2{,}75\right)$$

دريم:

$$t(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \qquad x_0 = -1 \Rightarrow P_0(-1|\,7) \qquad f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$

څلورم:

$$t(x) = 9x - 7 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0(1|\,2) \qquad f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$$

پنځم:

$$t(x) = -2x + \frac{5}{2} \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0\left(1 \,\middle|\, \frac{1}{2} = 0{,}5\right) \qquad f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3$$

شپږم:

$$t(x) = \frac{19}{4}x + 7 \qquad x_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow P_0\left(-\frac{3}{2} \,\middle|\, -\frac{1}{8}\right) \qquad f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2$$

اوم:

$$t(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \qquad x_0 = 3 \Rightarrow P_0(3\,|-1) \qquad f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2$$

اتم:

$$t(x) = -6x + \frac{3}{2} \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0\left(1 \,\middle|\, -\frac{9}{2}\right) \qquad f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2$$

نهم:

$$t(x) = -4x + 4 \qquad x_0 = 0 \Rightarrow P_0(0\,|\,4) \qquad f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$

لسم:

$$t(x) = -\frac{11}{3}x + \frac{11}{3} \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0(1\,|\,0) \qquad f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4$$

مفصل حلونه1

لومړی:

شميرنه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=x^3-6x^2+9x \qquad x_0=2 \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

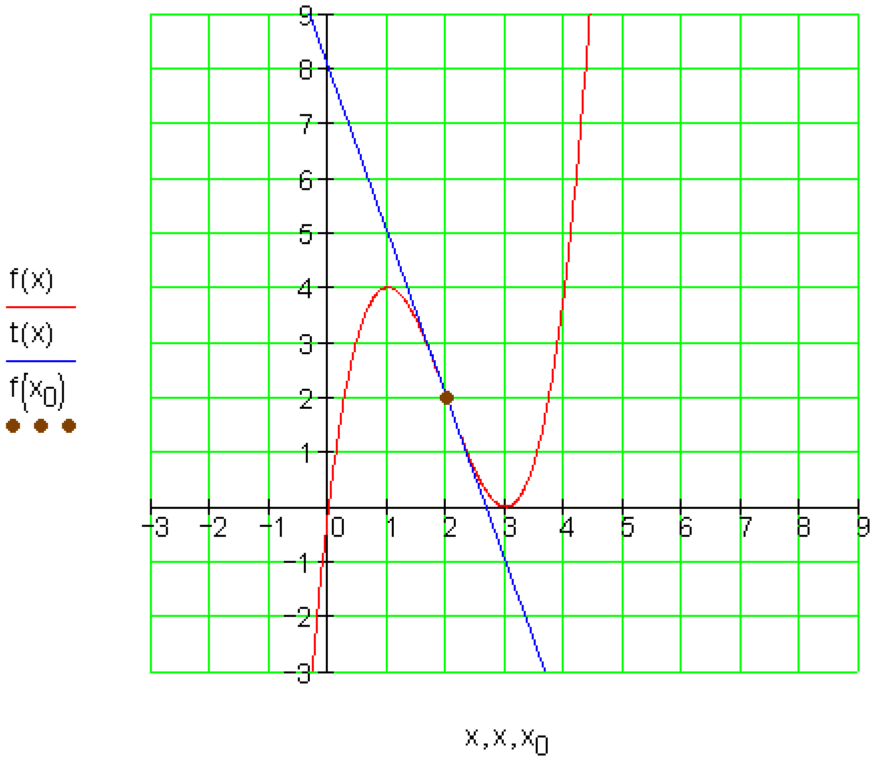
$$f'(x)=3x^2-12x+9 \Rightarrow f'(x_0)=f'(2)=12-24+9=-3$$

$$f(x_0)=f(2)=8-24+18=2 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(2|2)}}$$

$$t(x)=-3(x-2)+2=-3x+6+2=\underline{\underline{-3x+8}}$$

گرافونه

$$f(x)=x^3-6x^2+9x \qquad x_0=2 \Rightarrow P_0(2|2) \qquad t(x)=-3x+8$$



دویم: شمیرنه:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{15}{4}x+\frac{9}{4} \qquad x_0=2 \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{15}{4} \Rightarrow f'(x_0)=f'(2)=\frac{3}{4}\cdot 4-\frac{9}{2}\cdot 2+\frac{15}{4}=\frac{12}{4}-\frac{36}{4}+\frac{15}{4}=-\frac{9}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x_0)=f(2)=\frac{1}{4}\cdot 8-\frac{9}{4}\cdot 4+\frac{15}{4}\cdot 2+\frac{9}{4}=\frac{8}{4}-\frac{36}{4}+\frac{30}{4}+\frac{9}{4}=\frac{11}{4}\Rightarrow$$

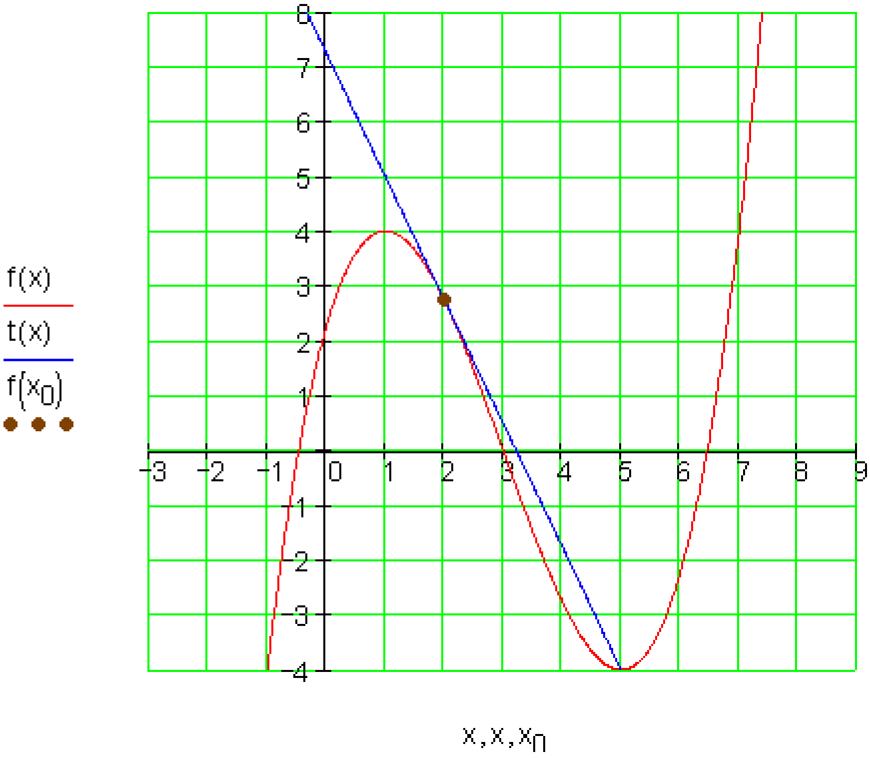
$$\Rightarrow P_0\left(2\ \middle|\ \frac{11}{4}=2{,}75\right)$$

$$t(x)=-\frac{9}{4}(x-2)+\frac{11}{4}=-\frac{9}{4}x+\frac{18}{4}+\frac{11}{4}=-\frac{9}{4}x+\frac{29}{4}$$

گرافونه

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{15}{4}x+\frac{9}{4}\qquad x_0=2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_0\left(2\ \middle|\ \frac{11}{4}=2{,}75\right)\qquad t(x)=-\frac{9}{4}x+\frac{29}{4}$$



دریم: شمیرنه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad x_0=-1 \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

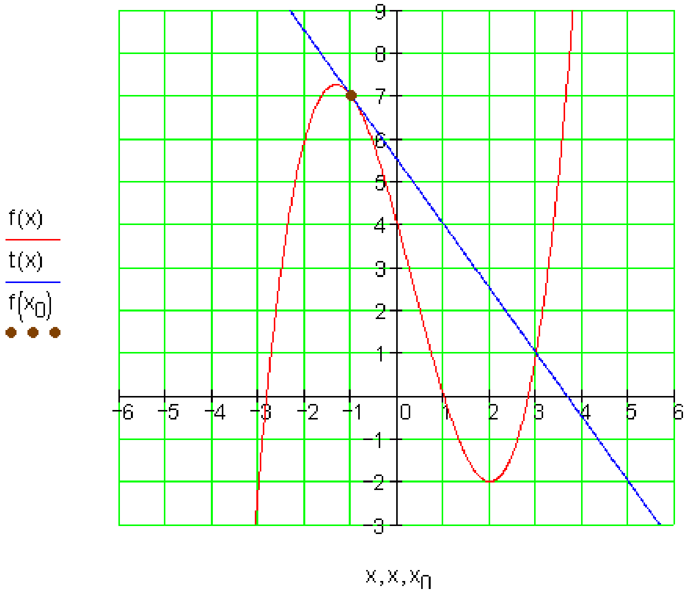
$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x-4 \Rightarrow f'(x_0)=f'(-1)=\frac{3}{2}+1-4=\frac{3}{2}+\frac{2}{2}-\frac{8}{2}=-\frac{3}{2}$

$f(x_0)=f(-1)=\frac{1}{2}\cdot(-1)-\frac{1}{2}\cdot 1-4\cdot(-1)+4=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{8}{2}+\frac{8}{2}=7 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(-1|7)}}$

$t(x)=-\frac{3}{2}(x+1)+7=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}+\frac{14}{2}=\underline{\underline{-\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}}}$

گرافونه

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad x_0=-1 \Rightarrow P_0(-1|7) \qquad t(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}$



خلورم: شميرنه:

$f(x)=x^3+3x^2-2 \qquad x_0=1 \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

$f'(x)=3x^2+6x \Rightarrow f'(x_0)=f'(1)=3+6=9$

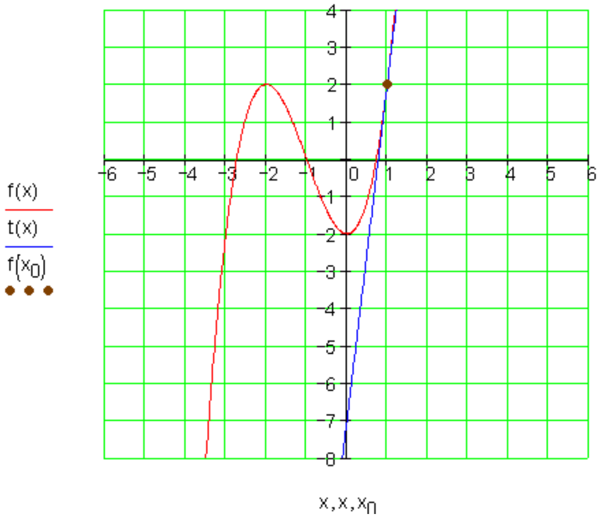
$f(x_0)=f(1)=1^3+3\cdot 1^2-2=1+3-2=2 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(1|2)}}$

$t(x)=9(x-1)+2=9x-9+2=\underline{\underline{9x-7}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

گراف

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0(1|2) \qquad t(x) = 9x - 7$$



پنځم: شمیرنه:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \qquad x_0 = 1 \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{5}{2} \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = \frac{3}{2} - 1 - \frac{5}{2} = -2$$

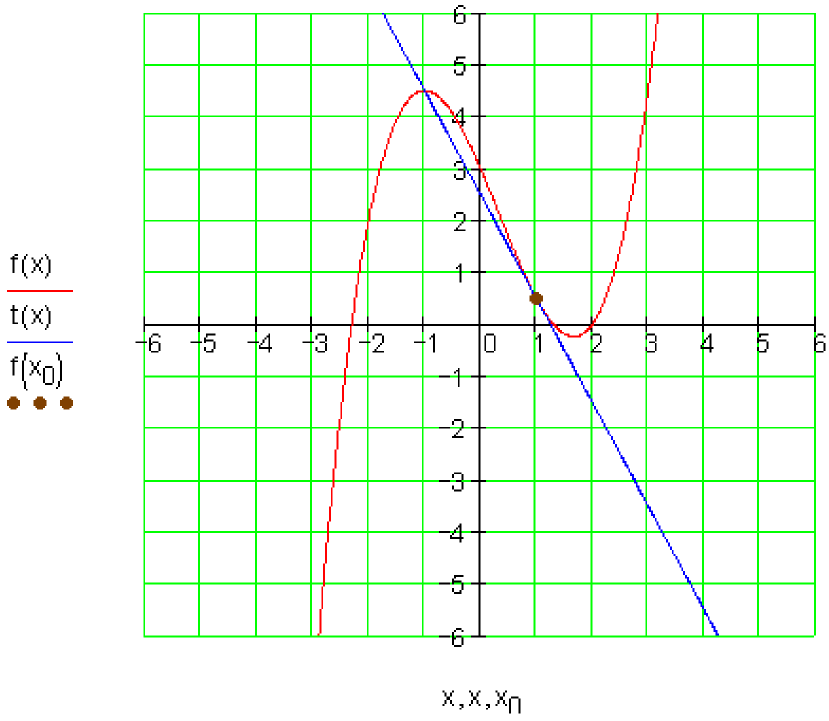
$$f(x_0) = f(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 3 = -\frac{5}{2} + \frac{6}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow P_0\left(1 \,\middle|\, \frac{1}{2}\right)$$

$$t(x) = -2(x-1) + \frac{1}{2} = -2x + 2 + \frac{1}{2} = -2x + \frac{5}{2}$$

گراف

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0\left(1 \,\middle|\, \frac{1}{2} = 0,5\right) \qquad t(x) = -2x + \frac{5}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



شپږم: شمیرنه:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \quad x_0 = -\frac{3}{2} \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 5 \Rightarrow f'(x_0) = f'\left(-\frac{3}{2}\right) = 3\cdot\frac{9}{4} - 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) - 5 = \frac{27}{4} + \frac{12}{4} - \frac{20}{4} = \frac{19}{4}$$

$$f(x_0) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} - \frac{9}{4} + \frac{15}{2} - 2 = -\frac{27}{8} - \frac{18}{8} + \frac{60}{8} - \frac{16}{8} = -\frac{1}{8} \Rightarrow \underline{\underline{P_0\left(-\frac{3}{2} \middle| -\frac{1}{8}\right)}}$$

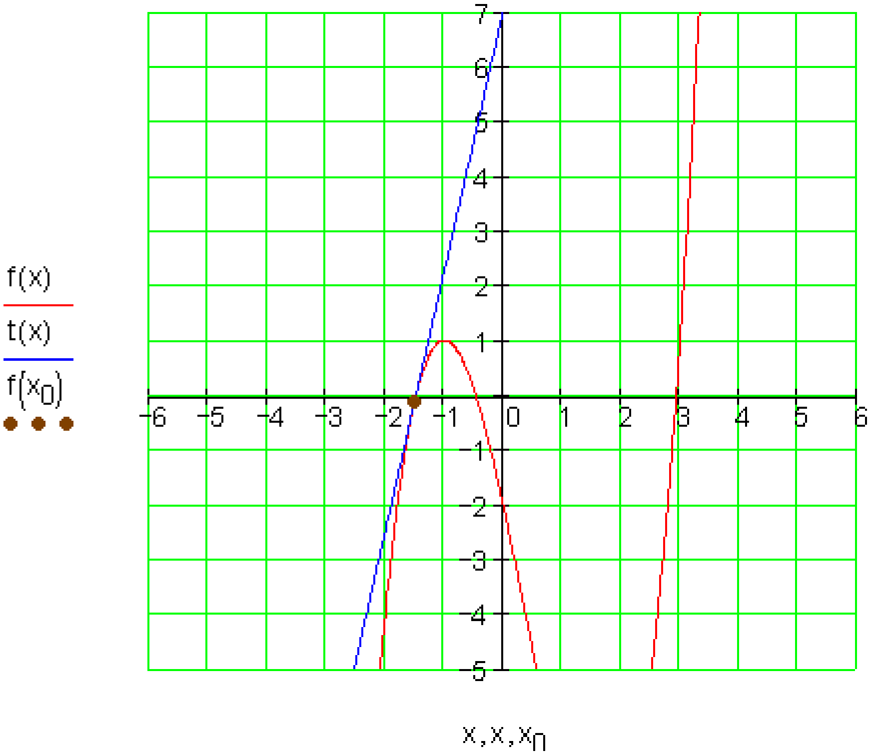
$$t(x) = \frac{19}{4}\left(x + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{8} = \frac{19}{4}x + \frac{57}{8} - \frac{1}{8} = \frac{19}{4}x + \frac{56}{8} = \underline{\underline{\frac{19}{4}x + 7}}$$

گراف

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \quad x_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow P_0\left(-\frac{3}{2} \middle| -\frac{1}{8}\right) \qquad t(x) = \frac{19}{4}x + 7$$

:

(c) ketabton.com: The Digital Library



اووم: شميرنه:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2 \qquad x_0=3 \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}\Rightarrow f'(x_0)=f'(3)=\frac{27}{4}-\frac{15}{2}+\frac{1}{2}=\frac{27}{4}-\frac{30}{4}+\frac{2}{4}=-\frac{1}{4}$$

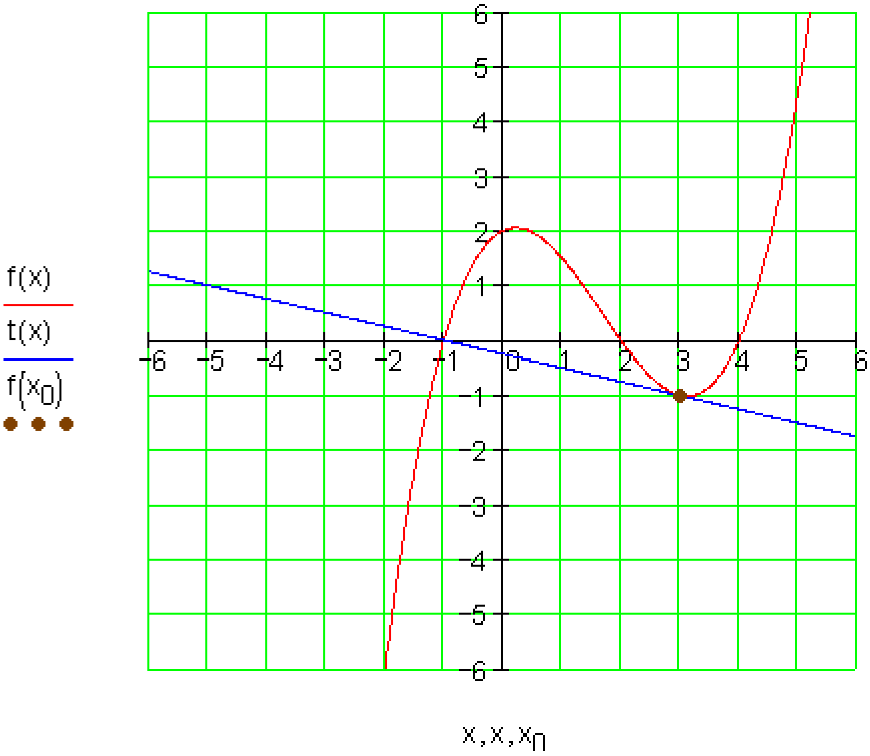
$$f(x_0)=f(3)=\frac{27}{4}-\frac{45}{4}+\frac{3}{2}+2=\frac{27}{4}-\frac{45}{4}+\frac{6}{4}+\frac{8}{4}=-\frac{4}{4}-1\Rightarrow \underline{\underline{P_0(3|-1)}}$$

$$t(x)=-\frac{1}{4}(x-3)-1=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}-1=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}-\frac{4}{4}=\underline{\underline{-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}}}$$

گراف

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2 \qquad x_0=3\Rightarrow P_0(3|-1) \qquad t(x)=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



اتم: شمیرنه:

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \qquad x_0 = 1 \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = 3 - 3 - 6 = -6$$

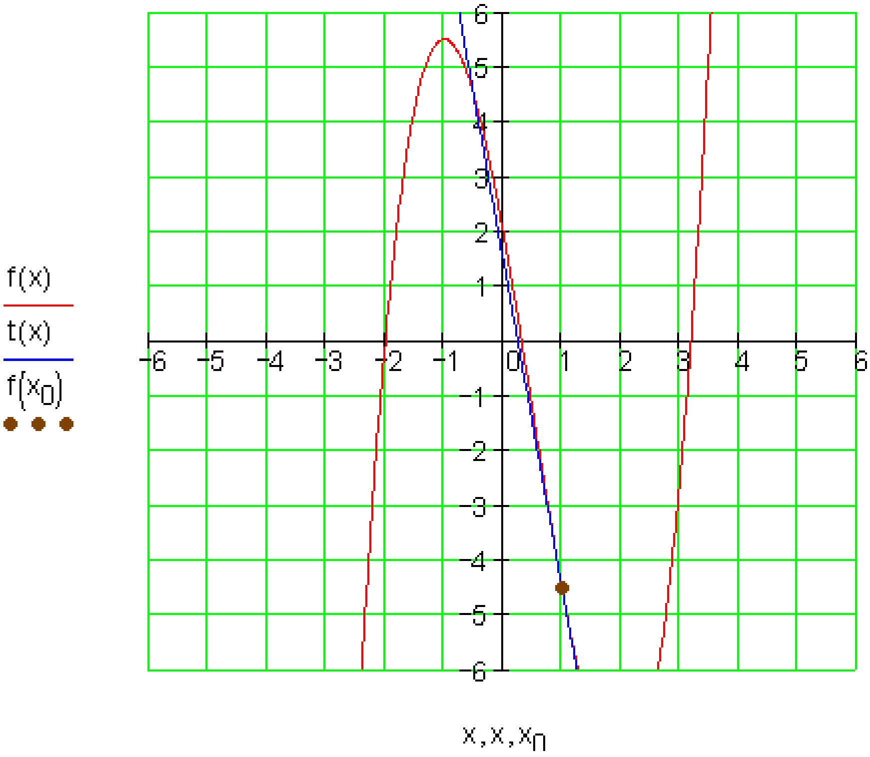
$$f(x_0) = f(1) = 1 - \frac{3}{2} - 6 + 2 = \frac{2}{2} - \frac{3}{2} - \frac{12}{2} + \frac{4}{2} = -\frac{9}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P_0\left(1 \middle| -\frac{9}{2}\right)}}$$

$$t(x) = -6(x - 1) - \frac{9}{2} = -6x + 6 - \frac{9}{2} = -6x + \frac{12}{2} - \frac{9}{2} = \underline{\underline{-6x + \frac{3}{2}}}$$

ګراف

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0\left(1 \middle| -\frac{9}{2} = -4,5\right) \qquad t(x) = -6x + \frac{3}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



نهم: شمیرنه:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad x_0=0 \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x-4 \Rightarrow f'(x_0)=f'(0)=-4$$

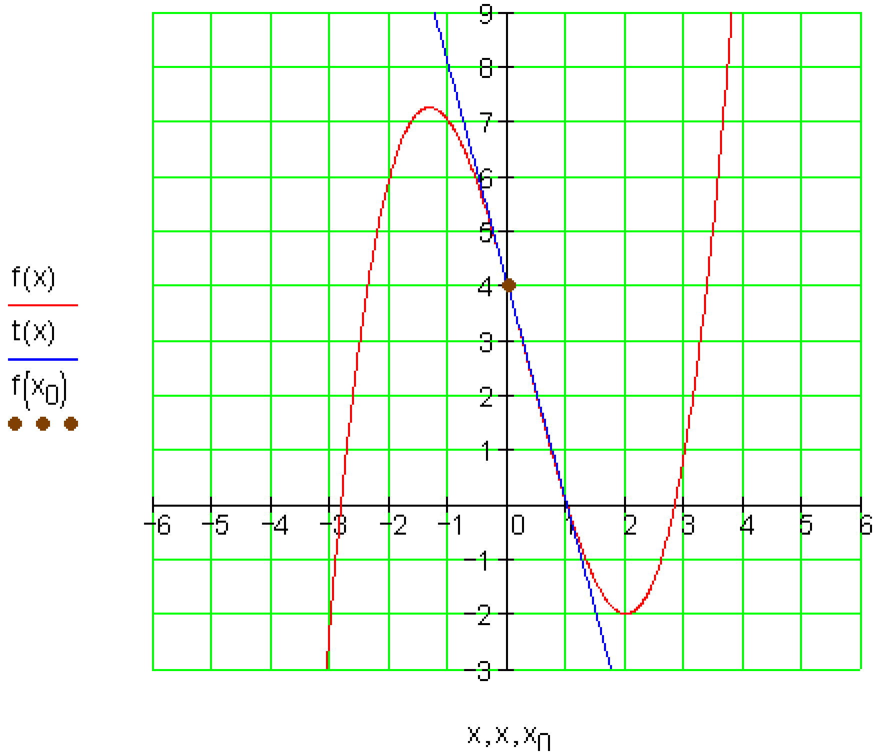
$$f(x_0)=f(0)=4 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(0|-4)}}$$

$$t(x)=-4(x-0)+4=\underline{\underline{-4x+4}}$$

گراف

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad x_0=0 \Rightarrow P_0(0|4) \qquad t(x)=-4x+4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



لسم: شمیرنه:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2-4x+4 \qquad x_0=1 \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x)=x^2-\frac{2}{3}x-4 \Rightarrow f'(x_0)=f'(1)=1-\frac{2}{3}-4=\frac{3}{3}-\frac{2}{3}-\frac{12}{3}=-\frac{11}{3}$$

$$f(x_0)=f(1)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-4+4=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{12}{3}+\frac{12}{3}=0 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(1|0)}}$$

$$t(x)=-\frac{11}{3}(x-1)+0=\underline{\underline{-\frac{11}{3}x+\frac{11}{3}}}$$

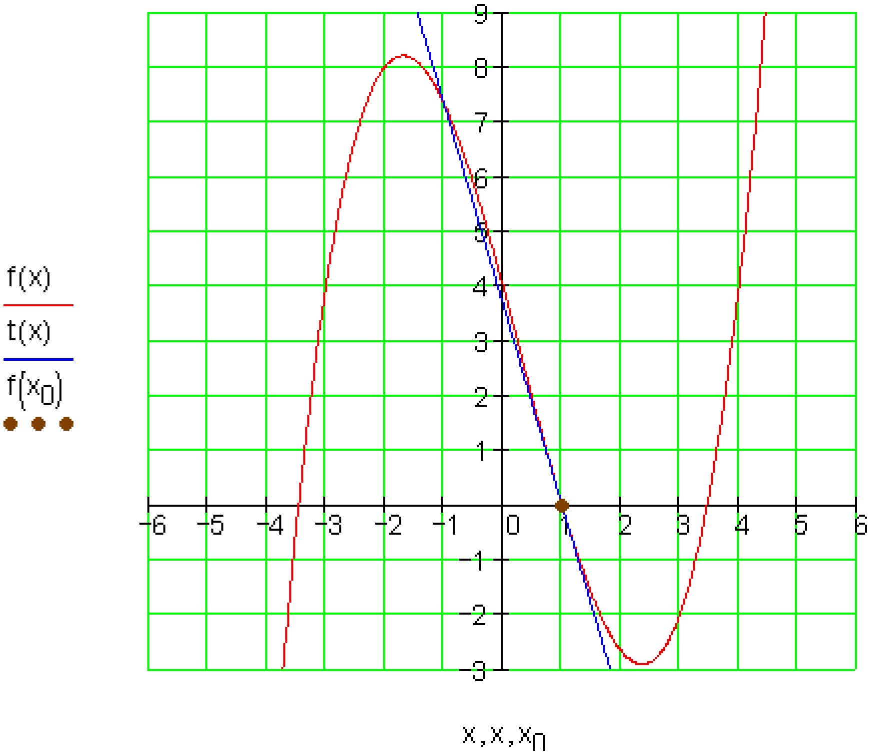
ګرافونه:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2-4x+4 \qquad x_0=1 \Rightarrow P_0(1|0) \qquad t(x)=-\frac{11}{3}x+\frac{11}{3}$$

.

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مشتقشمېرنه VII

لومړی: ورکړشوې تابع: $1\ f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x\,;\ x \in \mathbb{R}$

الف- f(x) په کوم ځای کې جګېدنه 2 لري؟

ب- د f(x) جګېدنه په x = 1,5 ځای کی 0,25- ده.

د همدې جګېدنې سره بې له شمېرنې بل ځای ورکړی.

د خپل ګومان په هکله دلیل راوړی

پ - f(x) په کومو تکو کې پروت یا افقي تانجنت لري؟ مساوات یې ورکړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت - په سرچینه کې په f(x) باندې تانجنت وټاکئ

ټ - په f(x) باندې تانجنت د P (u | f(u)). په ټکي کې وټاکئ

ث - کومه کرښه f(x) په N (3 | 0) ټکي کې عمود غوڅوي؟

دویم: — $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{4}x^2-1;\ x\in\mathbb{R}$ تابع ورکړ شوې

الف — کرکتریستیکي یا خوبیز ټکي و ټاکئ او اړونده تانجنت یې ورکړئ.

ب- په f(x) باندې تانجنت په ی x = 1 او x = -1 د y - محوذ غوڅوي یا قطع کوي د دې پوښتنې دلیل راوړئ؟

دریم _ $f(x)=-x^4+2x^3;\ x\in\mathbb{R}$ ؛ تابع ورکړ شوې

الف - f(x) د x محور سره او د ټکو په هکله چې هلته افقي تانجنت لري مطالعه کړئ.

ب- t(x) په f(x) د P (1 | f(1)) په ټکي تانجنت دی.

د تانجنت مساوات وټاکئ. د t(x) غوڅتکی د f(x) سره وټاکئ.

پ — په کومو ټکو کې f(x) د 1/8 جګیدنې سره عمود لري؟ د عمود مساوات ورکړئ.

څلور — $f(x)=x^3-6x^2+9x;\ x\in\mathbb{R}$ ؛ تابع ورکړ شوې ده.

الف- f(x) په کرښیزو ضریبونو تجزیه کړئ او ګراف یې وکاږئ.

ب — په f(x) باندې تانجنتونو مساوات په x = 2 کې وټاکئ او دا تانجنت د الف په وضعیه قیمتسیستم کې رسم کړئ..

پ — ټکی P (u | f(u)) داسې وټاکئ، چې په P د f(x) په تانجنت د f(x) په سرجینې تانجنت سره غبرګ یعنې موازي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت – په کوم ځاي کې f(x) خورا کوچنی تانجنت لرئ؟

پنځم- یوه تیګه د v0 = 7 m/s پیل جکتیا یا سرعت سره عمود پورته غورځول کیږي.

د لار-وخت دیاګرام دی: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $g = 10\,\frac{m}{s^2}$ سره.

الف- په کوم وختt کې د تیګې جګوالی صفر دی؟

ب- د جګېدني ماکسیمال جګوالی وشمېرئ.

حلونه

مشتقشمرنه VII

نتیجې او مفصل حلونه

مفصل حلونه:

لومړی:

الف – $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x\,;\; f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$

جګوالی پهx0 کې ارزښت 2 لرئ

$$\Rightarrow f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2 - 1 = 2 \Rightarrow \underline{x_{01/2} = \pm 3}$$

تابع دF(x) $x_{1/2} = \pm 3$ په ځایونو کې جګیدنه 2 لري.

ب - $f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$ یو پارابول او له دې امله محور سیومتري دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له $f'(1,5)=0,25$ څخه $f'(-0,25)=-0,25$ لاس ته راځي.

د$f(x)$ $x_{1/2}=\pm 1,5$ پر ځای کې0,25- جګیدنه لري.

پ–په $f(x)$ یو پروت یا افقي تانجنت په ټکو کې پروت دی، چې هلته جګوالی صفر وي.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2-1=0\Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{3}$$
$$f\left(\sqrt{3}\right)=-\frac{2}{3}\sqrt{3};\ f\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{3}\Rightarrow P\left(\sqrt{3}\mid-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right);\ Q\left(-\sqrt{3}\mid\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$$

تانجنتونه کرښې دي، د x - محور سره غبرګې ځغلي.

$$t_1(x)=-\frac{2}{3}\sqrt{3};\ t_2(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

ت –

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x;\ f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$$

په سرچینه کې د تانجنت مساوات: x0 = 0

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$
$$f'(x_0)=f'(0)=-1;\ f(x_0)=f(0)=0$$
$$\Rightarrow t(x)=-1(x-0)+0=\underline{\underline{-x}}$$

ټ –

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x;\ f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$$

د تانجنت مساوات د $P(u;f(u))$ په ټکي کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t(x) = f'(u)(x-u) + f(u)$$

$$f'(u) = \frac{1}{3}u^2 - 1;\ f(u) = \frac{1}{9}u^3 - u$$

$$t(x) = \left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)(x-u) + \frac{1}{9}u^3 - u = \underline{\underline{\left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)x - \frac{2}{9}u^3}}$$

ث – کربنه، چې f(x) په (0 | 3) N کې غوڅوي، په دې ټکي کې عمود ده.

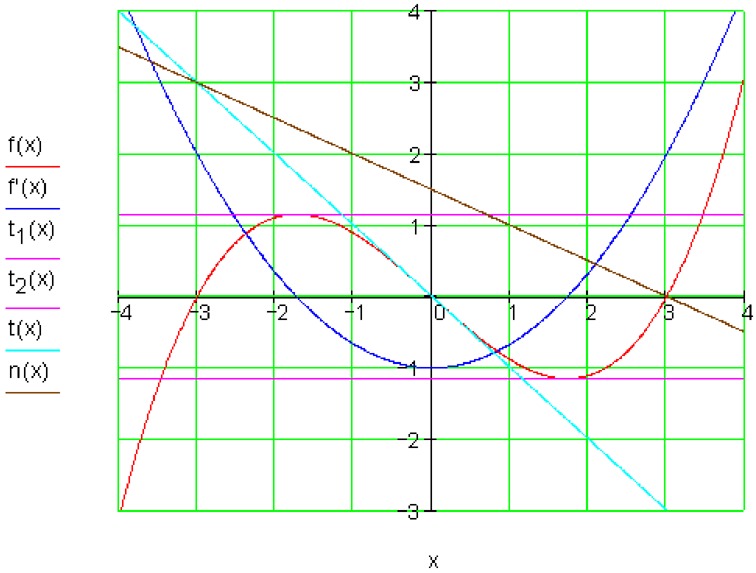
$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x;\ f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1;\ N(3|0) \Rightarrow x_0 = 3$$

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$-\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{f'(3)} = -\frac{1}{2};\ f(x_0) = f(3) = 0$$

$$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{2}(x-3) + 0 = \underline{\underline{-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}}$$

Die Graphen: گراف :



(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم: الف- کرکتريستيک يا خوي ټاکونکي ټکي صفرځايونه دي، چې په دې ټکو کې د تانجنتونو جګوالی دی ، په هغو ياکومو کې چې پروت يا افقي تانجنت شته وي.

$$f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{4}x^2-1;\ f'(x)=x^3-\frac{3}{2}x$$

صفرځايونه:

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^4}{4}-\frac{3}{4}x^2-1=0$$

بي- يا دوه مربعيز مساوات.

د په ځاي اينښوونې Substitution له لارې حل يا اوبيونه:

$$x^2=z\Rightarrow f(z)=\frac{z^2}{4}-\frac{3}{4}z-1$$

$$f(z)=0\Leftrightarrow\frac{z^2}{4}-\frac{3}{4}z-1=0\Rightarrow z_1=4;\ z_2=-1$$

د Z2 لپاره حل نه شته.

$$z_1=4\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x_{1/2}=\pm2\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(2|0);P_{x2}(-2|0)}}$$

$$f'(2)=2^3-\frac{3}{2}\cdot 2=\underline{\underline{5}};\ f'(-2)=(-2)^3-\frac{3}{2}\cdot(-2)=-8+3=\underline{\underline{-5}}$$

د پروت تانجنت سره ټکي.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^3-\frac{3}{2}x=0\Rightarrow x_1=0;\ x_{2/3}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$P_2(0|-1);\ P_2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,|-\frac{25}{16}\right);\ P_3\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\,|-\frac{25}{16}\right)$$

$$f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{4}x^2-1;\ f'(x)=x^3-\frac{3}{2}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تانجنت په x = 1 او x = -1 کي.

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$t_1(x) = f'(1)(x-1) + f(1)\,;\; t_2(x) = f'(-1)(x+1) + f(-1)$$

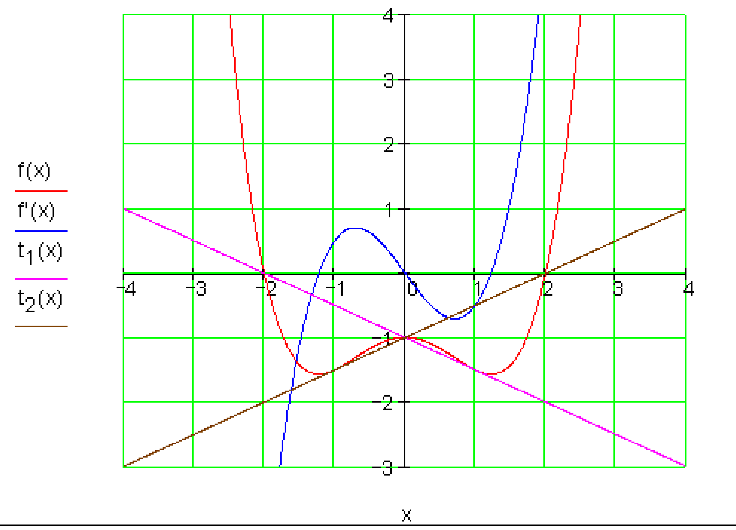
د ټکي سيومتري له امله

$$f'(1) = -\frac{1}{2}\,;\; f'(-1) = -f'(1) = \frac{1}{2}$$

د محور سيومتري له امله

$$f(1) = -\frac{3}{2}\,;\; f(-1) = f(1) = -\frac{3}{2}$$

$$t_1(x) = -\frac{1}{2}(x-1) - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}x - 1$$
$$t_2(x) = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}x - 1$$



دواړه تانجنتونه د y محور په ټکي $P_y\,(0;-1)$ کي غوڅوي.
ګرافونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: الف- $f(x) = -x^4 + 2x^3 \; ; \; f'(x) = -4x^3 + 6x^2$

صفرځایونه : $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 2x^3 = 0 \Rightarrow x_{1/2/3} = 0 \; ; \; x_4 = 2$

$P_{x1/2/3}(0|0)$ درپواره صفرځاي او $P_{x4}(2|0)$

پروت یا افقي تانجنتونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 6x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0 \; ; \; x_3 = \frac{3}{2}$$

$$f(0) = 0 \; ; \; f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{16} \Rightarrow P_{1/2}(0|0) \; ; \; P_3\left(\frac{3}{2} \middle| \frac{27}{16}\right)$$

ب –

$$f(x) = -x^4 + 2x^3 \; ; \; f'(x) = -4x^3 + 6x^2 \; ; \; P(1|f(1))$$

په f(x) تانجنت د x0 = 1 ټکي کې د f'(1) = 2 او f(1) = 1 سره.

له دې لاس ته راځي: t(x) = 2x -1

د t(x)غوځېکی د f(x) سره

$$f(x) = t(x) \Leftrightarrow -x^4 + 2x^3 = 2x - 1 \Leftrightarrow -x^4 + 2x^3 - 2x + 1 = 0$$

د P(1;1) سره ځاي په ځاي کوني یا ایښووني سره ډبل صفرځایونه

$$x_{1/2} = 1 \Rightarrow (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \; ;$$

پولینوموېش:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left(-x^4+2x^3 \qquad -2x+1\right):\left(x^2-2x+1\right)=-x^2+1$$

$$\underline{-\left(-x^4+2x^3-x^2\right)}$$

$$x^2-2x+1$$

$$\underline{-\left(x^2-2x+1\right)}$$

$$-x^2+1=0 \Rightarrow x_{3/4}=\pm 1$$

د F(-1) = -3 => Q(-1;-3) د t(x) د fx) سره یو بل غوځتکی دی.

پ-

$$f(x)=-x^4+2x^3\,;\,f'(x)=-4x^3+6x^2$$

$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

د عمود جګوالی دی:

$$\frac{1}{8}\Rightarrow-\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)=-8 \Leftrightarrow -4x^3+6x^2=-8 \Leftrightarrow -4x^3+6x^2+8=0$$

د X = 2 $-4x^3+6x^2+8=0$ یو حل دی (د ازمایینت له لارې پیدا شوی)

هورنر Horner

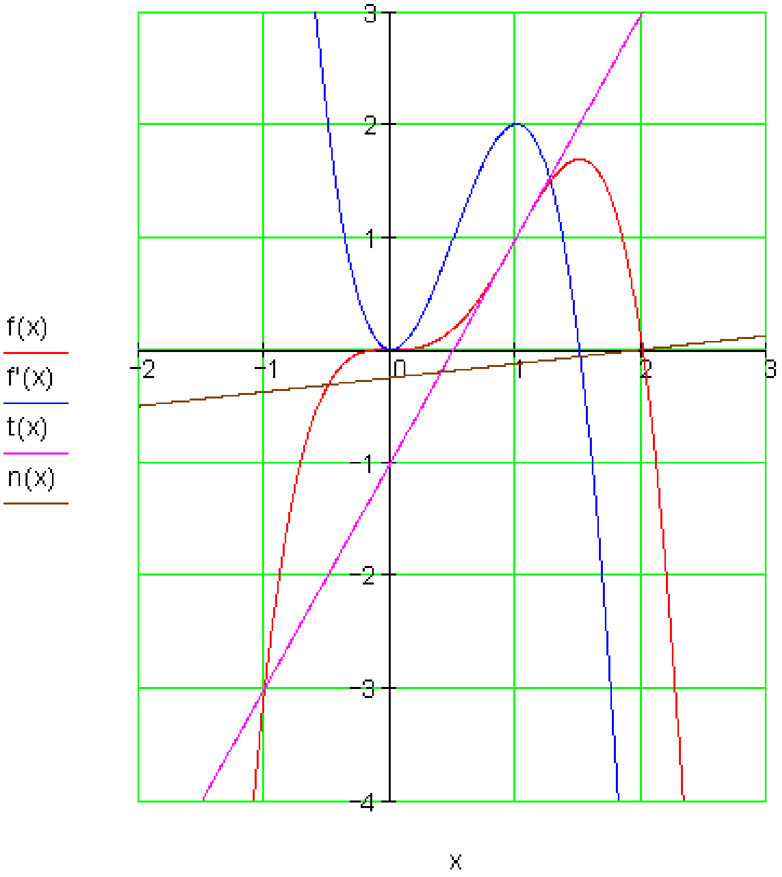
$$x=2 \quad \begin{array}{cccc} -4 & 6 & 0 & 8 \\ & \underline{-8} & \underline{-4} & \underline{-8} \\ -4 & -2 & -4 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} -4x^2-2x-4=0 \\ p=\frac{1}{2}\,;\,q=1\Rightarrow D<0 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بل حل نه شته.

$$x=2\Rightarrow x_0=2\Rightarrow n(x)=\frac{1}{8}(x-2)+\underbrace{f(2)}_{0}\Rightarrow n(x)=\underline{\underline{\frac{1}{8}x-\frac{1}{4}}}$$

گرافونه:

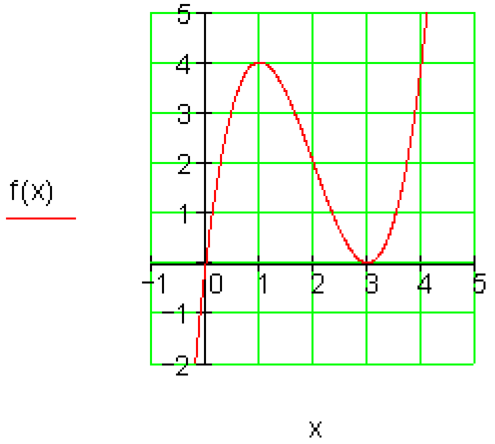


څلورم:

الف-

$$f(x)=x^3-6x^2+9x$$
$$=x\underbrace{\left(x^2-6x+9\right)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دپینوم دویم فرمول

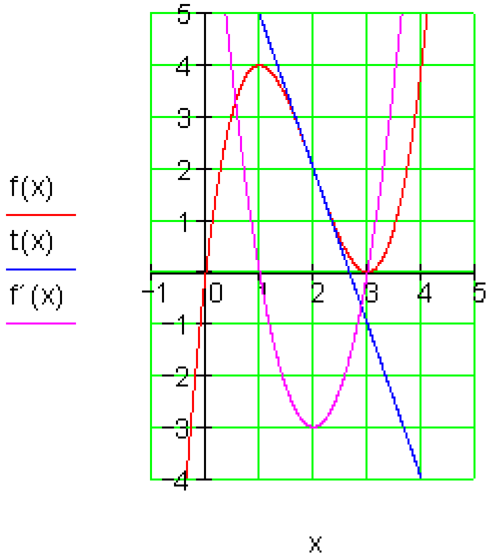
$= x(x-3)^2$

$\Rightarrow P_{x1}(0|0);$

$P_{x2/3}(3|0)$

مماس یا لمستکی

ب-



$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$x_0 = 2$

$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$f'(2) = -3$

$f(2) = 2$

$\Rightarrow t(x) = -3(x-2) + 2$

$= \underline{\underline{-3x + 8}}$

پ –

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x;\ f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

تانجنت په سرچینه کې $f'(0) = 9$ جګوالی لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دې سره غبرګ هر تانجنت همدا یا برابر جګوالی لري پس هر په P(u;f(u)) ټکي همز

$$f'(u) = 9 \Leftrightarrow 3u^2 - 12u + 9 = 9 \Rightarrow u_1 = 0\,;\ u_2 = 4$$
$$u_1 = 0 \Rightarrow f(u_1) = f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0\,|\,0)}}$$
$$u_2 = 4 \Rightarrow f(u_2) = f(4) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(4\,|\,4)}}$$

ت –

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x;\ f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

د $f'(x)$ د $f(x)$ جګېدنه ده، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د هغه مینیموم د هغه غوښتکی یا د تقاطع ټکی دی، هلته $f'(x)$ یو پروت یا افقي تانجنت لري.

شرطونه: $f''(x) = 0$

$F''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

د $x = 2$ په ځای کې $f(x)$ خورا کمه جګېدنه لري.

$f(2) = 2 \Rightarrow$

په $P(2;2)$ ځای کې $f(x)$ خورا کمه جګېدنه لري.

هغه هلته ارزښت $f(2) = -3$ لري.

پنځم:

الف - $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ د $v_0 = 7\,\frac{m}{s}$ سره $: g = 10\,\frac{m}{s^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v(t) = s'(t) = v_0 - gt$$
$$v(t) = 0 \Leftrightarrow v_0 - gt = 0 \Rightarrow t = 0,7\ s$$

وروسته له 0,7S تیګه v(t)=0 سرعت لري

ب – د میلان یا جګېدنې خورا لوي یا ماکسیمال جګوالی

ښکته لور ته وتز پارابول دی، چې ککرتکی یا رآس یې د غورځوني ماکسیمال جګوالی ورکوي.

د ککرتکي یا رآس شرطونه: $s'(t) = v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0,7\ s$ د دې لپاره پرخه الف وګورۍ.

خورا لوي جګوالی: $s(0,7) = 2,45$

خورا لوي یا ماکسیمال جګوالی 2,45 m دی.

پوښتنې

مشتقشمېرنه VIII

اول – د یوې فابریکې ټول مصرف د10 ME ماکسیمال تولید په K(x) سره ښایو. د یوه ME د خرڅلاو نرخ 28 GE دی.

$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$$

الف – د نرختابع مشتق وشمېرۍ. (مشتقارزښت تابع یا پوله نرخ تابع) او ګراف یې وکاږۍ. ګراف یې تشریح کړۍ.

ب - مینیمال یا خورا کم د مشتقلګښت وشمېرۍ.

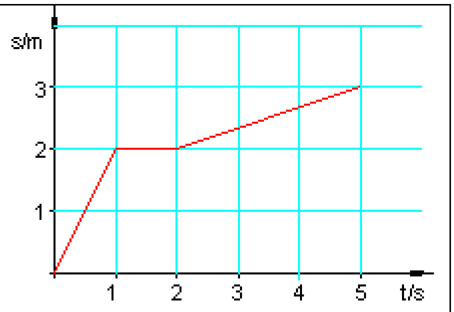
پ – وښایۍ، چې د هر تولید ډېرۍ یا سټ مشتقنرخ یا مشتقلګښت مثبت دی.

ت – په کومه ورشو کې ګټې فکر وشي؟

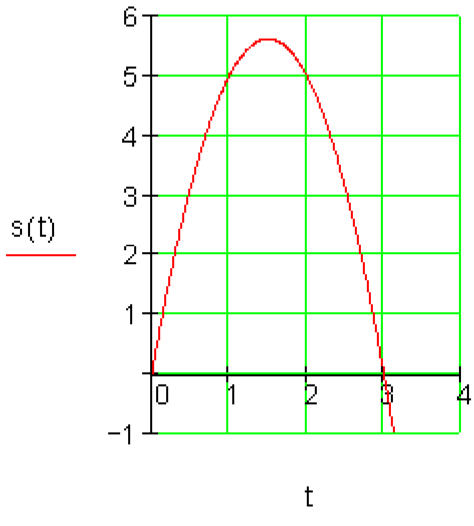
(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ - په کومه ورشو کې ګټه زياتيږي؟

دويم _ د يوه خوزنده جسم يا تن د لار - وخت- دياګرام s(t) ورکړی

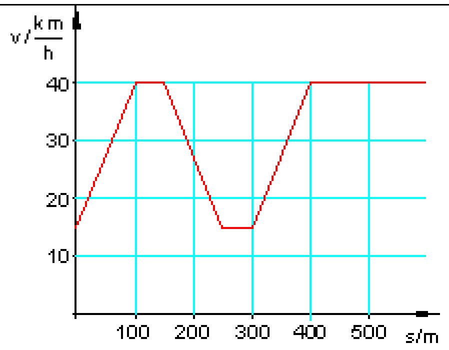
	الف – دا حرکت تشريح کړی پ - د اړونده چټکتيا – وخت – دياګرام رسم کړی، که باور ولري: $v(t) = s'(t).$

دريم – تابع د يوه خوزښت يا حرکت لار د لار – وخت دياګرام کې ښايي.

	الف – يو روځنی بېلګه ورکړی، چې دا لار په ګوته کولای شي. د کړې يا منحنې دا لار د $t > 3$ لپاره فزيکي په څه مفهوم دی؟ ب – د دې خوزښت يا حرکت لپاره د لار – وخت – قانون دی: $s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$ a او v_0 و ټاکی. پ – دې سره اړوند د چټکتيا – وخت – دياګرام رسم کړی او دا تشريح کړی. يو منفي سرعت يا جټکتيا په څه معنا دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم:

د یوه خوزښت د چټکتیا لار ورکړی. دا دیاګرام تشریح کړی. د ممکنه توته کرښو تلنلار په هکله ویناوي وکړې.	

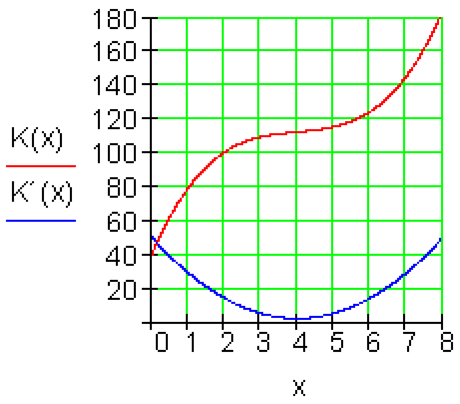
حلونه

مشتقشمیرنه VIII

مفصل ځوابونه:

لومړی:

الف-

الف - $K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$ $K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$ د پولي لګښت ګراف پورته لور ته واز پارابول دی. په ککره یا رآس کې یې پوله لګښت خورا کم دی.	

ب – د خورا کم مشتقلګښت لپاره شرطونه : $K''(x) = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$$
$$K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$$
$$K''(x) = 6x - 24$$
$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 24 = 0 \Rightarrow x = 4$$
$$K'(4) = 2$$

له دې لاس ته راځي: د یوه 4ME (څلور ډېرى یا سټ واحدونه)تولید مشتقلګښت د 2GE/ME سره خورا کم دی.

پ –

$K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$ د $K'(4) = 2$ لپاره مثبت دی.

که له نیونې یا فرضیې سره سم $K'(x)$ ، $x \in \mathbb{R}_+$ مثبت وي، د صفرځاي د لرلو اجازه نه شته.

موږ $K'(x)$ په صفرځایونو څېړو:

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 50 = 0$$
$$\Rightarrow p = -8 \,;\, q = \frac{50}{3} \,;\, D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 16 - \frac{50}{3} < 0$$

له دې لاس ته راځي جې حل یا اوبی نه شته.

مشتقلګښت د هر تولید لپاره مثبت دی.

څه چې د ښوولو وو.

ت – د لاس ته راوړنې (یعنې هر څه چې پلورل شوي وي) تابع: $E(x) = 28x$ (له پوښتنې کولو لاس ته راځي).

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګټې تابع: $G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 12x^2 - 22x - 40$

ګټه هلته کیږي، چې د ګټې تابع مثبت ارزښت لري.

ازمایو:

$G(5) = 25; G(4) = 0$ ، پس د $G(x)$ صفرځاي $x1 = 4$ دی.

هورنر:

$$x = 4 \quad \begin{array}{cccc} -1 & 12 & -22 & -40 \\ & \underline{-4} & \underline{32} & \underline{40} \\ -1 & 8 & 10 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow -x^2 + 8x + 10 = 0 \\ x_{2/3} = 4 \pm \sqrt{26} \Rightarrow \underline{\underline{x_2 \approx 9,1}} \end{array}$$

د $\underline{\underline{4 \le x \le 9,1}}$ لپاره فابریکه په ګټهکار کوي.

ټ- – د ګټې زیاتیدل څکه، چې $G(x)$ مثبته جګېدنه لري او $G(x) > 0$ دی.

یعني: $G(x) > 0 \wedge G'(x) > 0$

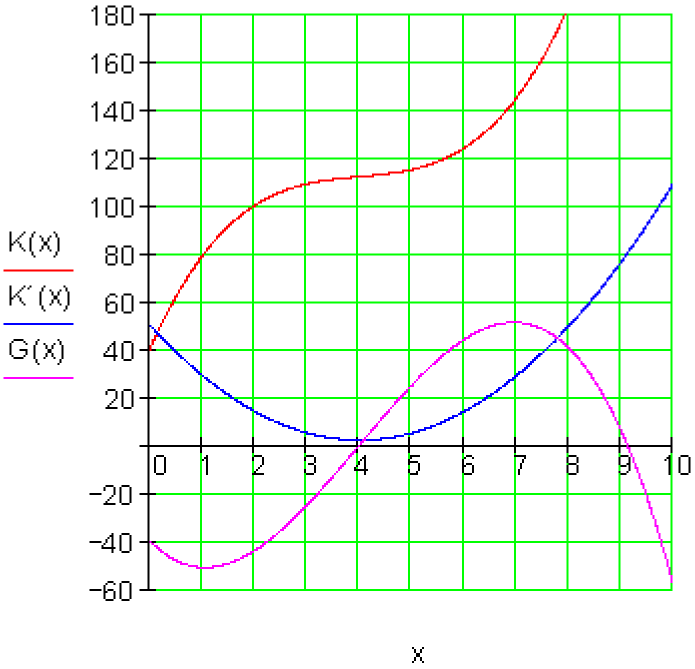
د $G'(x) = -3x^2 + 24x - 22 > 0$ $x \in \left[4 - \sqrt{\frac{26}{3}} ; 4 + \sqrt{\frac{26}{3}}\right]$ لپاره یا

$x \in [1,05 ; 6,9]$

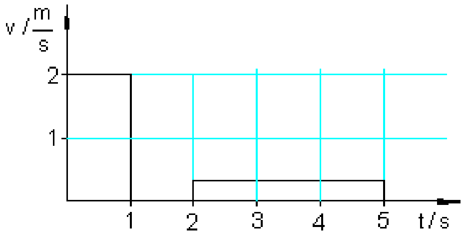
د ګټې زیاتیدنه: $[4 ; 9,1] \cap [1,05 ; 6,9] = \underline{\underline{[4 ; 6,9]}}$:

ګرافونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library



دويم:

الف – له 0 تر 1 s پورې: خوزښت د مساوي پاتې چټکتيا سره .v = 2 m/s له 1 تر 2 s پورې. ځاي په ځاي دريدنه: v = 0 m/s له 2 تر 5 s پورې. خوزښت د مساوي پاتې چټکتيا سره: v = 1/3 m/s	ب- 

دريم: الف – يو شی عمود پورته لور ته غورځول کيږي. د t > 3 s لپاره0 > s دی، دا په دي معنا چې دا شی د غورځول ځاي ځخه لاندې يا کښته دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب - $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ د خوزښت مساوات.

د a او v0 د خوزښنا لپاره د ګراف له دوه ټکو څخه کار اخلو.

$$P_1(1|5): s(1) = \frac{1}{2}a + v_0 = 5$$
$$P_2(3|0): s(3) = \frac{9}{2}a + 3v_0 = 0$$
$$a = -5;\ v_0 = 7{,}5$$

a<0 په دې معنا، چې دا یو ځنډشوی حرکت دی.

پ -

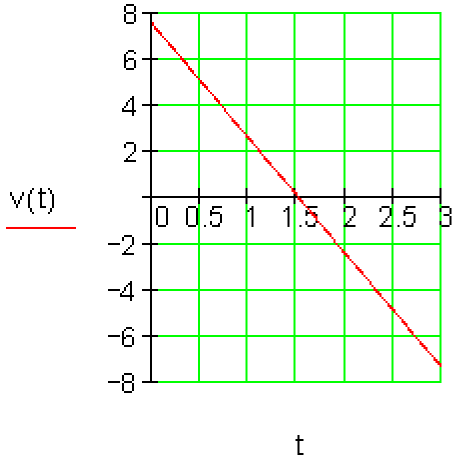
$$v(t) = s'(t) = at + v_0 = -5t + 7{,}5$$

چټکتیا په پیل کې مثبت ده، دا په دې معنا چېجسم یا بدن پورته لور ته خوزي.

مګر دا کمیږي او t = 1,5 s سره صفر دی.

بدن هغه ځیل خورا جګ جګوالي ته ورسېده.

وریسي جګوالی منفي دی، بدن لویږي، هغه بېرته کښته لور ته خوزي.



ځلورم:

0 - 100 m: چټکتیا زیاتیږي.

100 - 150 m چټکتیا براپره پتیږي 40 km/h.

150 - 200 m [ټکتیا کمیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

250 - 300 m چټکتیا برابره پاتیږي..15 km/h :

300 - 400 m چټکتیا زیاتیږي.

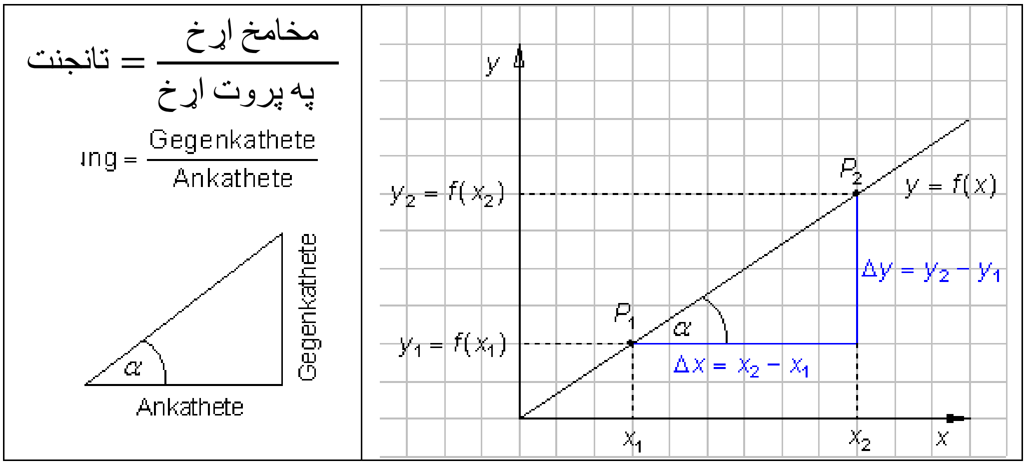
له 400 m   وروسته چټکتیا ثابته پاتیږي. 40 km/h.

روښانه ونه: په کښته لوېدلي سرک په تعجیل یا په بیړه کیږي، پسې سرک هوار دی.

ورپسې سرک مایل په غره پورته کیږي جتکتیا تر 15 km/h پورې کمیږي. پسې کښته لویږي، چې سرعت یا چټکتیا بیرته زیاتیږي. له دې وروسته هغه خورا جګه د 40 km/h چټکتیا یا سرعت   ساتلې پاتیږي په دا پسې لړ پاتې کرښه باندې.

ټولګه :

د کرښې جګیدنه:



د کرښې لپاره د جګیدنې فرمول

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{مخامخ اړخ}}{\text{په پروت اړخ}} = \text{جګیدنه} \qquad \text{یا} \qquad \frac{f(x1)-f(x0)}{x1-x0} = \text{جګیدنه}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

ټکی $P_0(2|3)$ او $P_1(5|7)$ په کربنه پراته دي

د $x_0 = 2$ او $f(x_0) = f(2) = 3$ سره

همداسې $x_1 = 5$ او $f(x_1) = f(5) = 7$ د کربښې جګیدنه ده:

جګیدنه= $\text{Steigung} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(5) - f(2)}{5-2} = \frac{7-3}{5-2} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$

د یوې کربښې جګیدنه

موږ لروده: $\Delta x = x_1 - x_0$

موږ دا مساوات په x1 پسې بنه بدلوو

$$\Delta x = x_1 - x_0 \,|+x_0 \Leftrightarrow \Delta x + x_0 = x_1 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = x_0 + \Delta x}}$$

اوس د جګیدنې فرمول کې لیکو:

د $f(x_1)$ په ځای $f(x_0 + \Delta x)$ د $x_1 - x_0$ په ځای Δx

له دې سره د جګیدنې فرمول دا بنه لري:

جګیدنه= $\text{Steigung} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

دا فرمول کمښت وېش دفرنسوېش بولو.

موږ د دې فرمول باوریوالی د پورته تمرین سره ازمایو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P_0(2|3)$ او $x_0 = 2$ $P_1(5|7)$ او $\Delta x = x_1 - x_0 = 5 - 2 = 3$

جګیدنه=

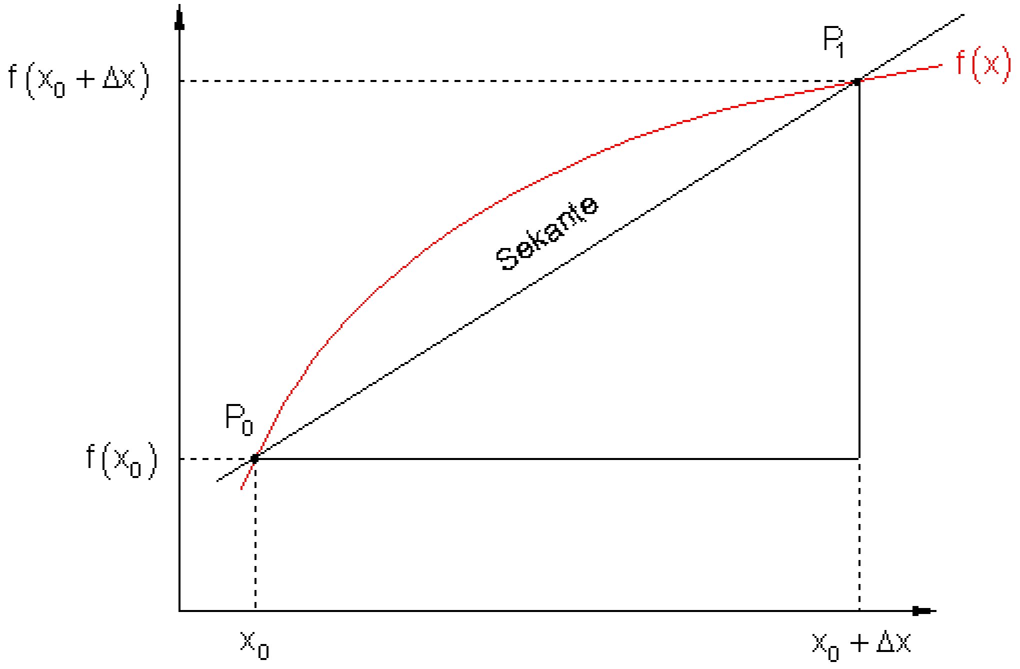
$$\text{Steigung} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(2+3)-f(2)}{3} = \frac{f(5)-f(2)}{3} = \frac{7-3}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

د یوې کربنې باوریوالی کیدی شي هم د کمپنتوپش سره وتاکل شي.

د سیکانت جګیدنه او د تانجنت جګیدنه

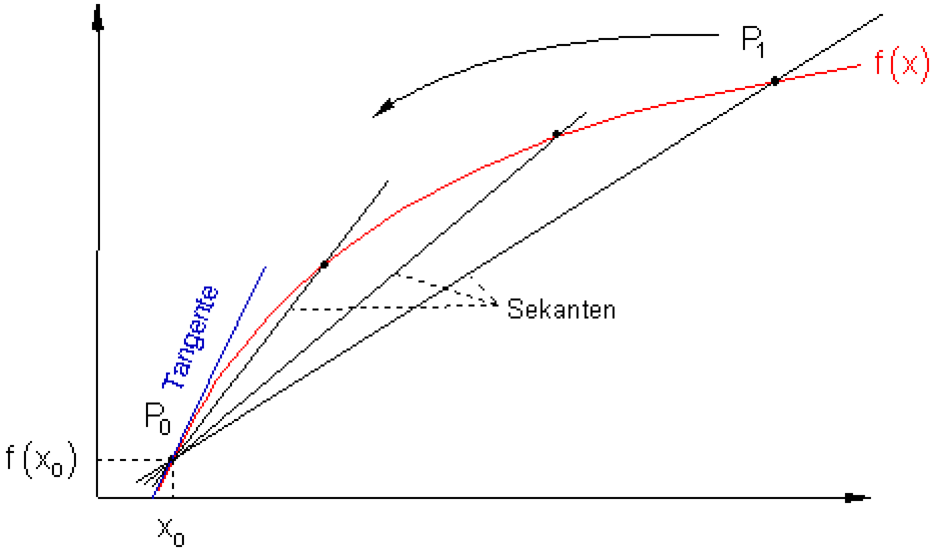
پرابلم: د یوه په خوښه تابع f(x) په ټکي P_0 کې د ګراف جګیدنه څومره لویه ده؟

د سیکانت یا ټوټهووني جګیدنه د P_0 او P_1 ترمنځ منځنۍ جګیدنه.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د سيکانت سره څه پيښيږي، که موږ ټکی P_1 تل پسې د ټکي P_0 په لور و خوزوو يا بوزو؟



سيکانت يا غوڅووني تل د f(x) ګراف ته ور نږدې کيږي.

که P_1 په P_0 ولويږي يا پريوځي، نوره نو بيا سيکانت يا غوڅووني نه شته. دا بيا تانجنت شوی دی.

تانجنت يوه کرښه ده، چې د f(x) ګراف په ټکي P_0 کې لمسوي.

د تعريف يا پيژند له مخې د يوه د ګراف جګيدنه په ټکي P_0 کې د تانجنت د جګوالي سره برابره ده.

کمبتوپش، دفرنشلوپش، مشتق او د جګيدني تابع

د دې لپاره چې د يوه ګراف f(x) د x_0 په ځای کې يعني په ټکي $P_0 (x_0 | f(x_0))$ کې وشميرو، کيدی شي دسيکانتجګيدني فرمول لپاره دا ،، دلتا،، تل کوچنی شي، کوم چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټکي P_1 راکښنه د P_0 په لور راکوي يا په ګوته کوي.

(کمښتوېش) د سيکانت جګيدنه= $$\text{Sekantensteigung} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

د ګراف $f(x)$ جګيدنه د x_0 په ځای کې د پوله جوړوني له لارې راکوي يعنې

(دفرنخيالوېش) $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

پوله ارزښت په دې معنا، چې ،، x دلتا،، د صفر په لور هڅيږي، يعني په خوښه کوچنی کيږي، بې له دې چې تيک صفر شي. ک د ،، x دلتا ،، لپاره ارزښت صفر ايښول شوی وی، نو به و يوه نه تعريف شوي افاده ا وبينه لاس ته راوړې وی.

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+0) - f(x_0)}{0} = \frac{f(x_0) - f(x_0)}{0} = \frac{0}{0}$$

تعريف نه

په ياد ولره: د دفرنشلوېش

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} := f'(x_0) := \frac{dy}{dx}$$

د x_0 په ځای کې د تابع ($f(x$ مشتق يا رابيليدنه بلل کيږي او د x_0 په ځای کې د ($f(x$ جګيدني لپاره يوه کچه ونه ده

د مشتق بيلګه:

تابع $y=f(x)=x^2$ لرو، غواړو د $x=x0$ په ځای کې مشتق پيداکړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

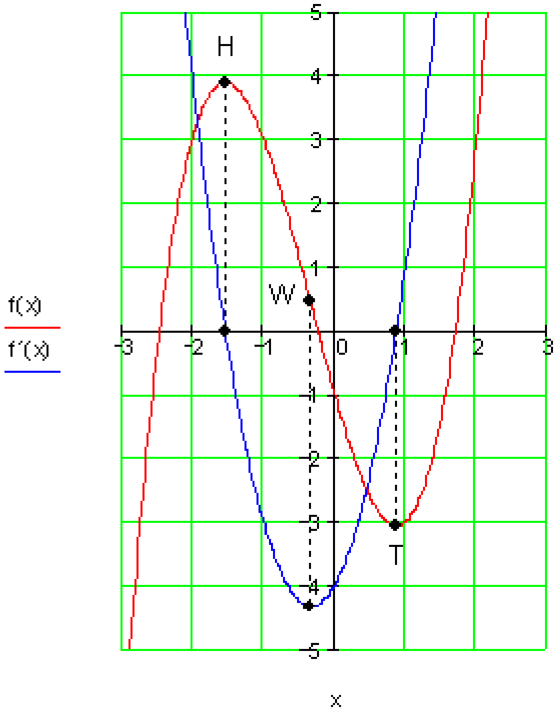
$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+(\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x_0\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=\underline{\underline{2x_0}}$$

دا چې د $f(x)=x^2$ لپاره ځای $x=x0$ په خوښه ټاکل کیدی شي، د دې تابع لپاره باور لري: (د مشتق- یا رابیلیدني تابع) $f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x$

$f(x) := x^3+x^2-4x-1$　　　$f'(x) := 3x^2+2x-4$



د مشتق – یا رابیلیدني تابع $f'(x)$ په ځای سرې د جګیدني تابع هم وایي، ځکه چې دا ابع د هر تابع ارزښت x لپاره د x په ځای کې د مشتق شوې تابع جګوالی ورکوي.

دا ترځنګ د یوه تابع ګراف دی، هم داسې د مشتق تابع په یوه کواوردینات سیستم کې انځوروي.

د مشتق – یا رابیلیدني تابع $f'(x)$ په ځای سرې د جګیدني تابع هم وایي، ځکه چې دا ابع د هر تابع ارزښت x لپاره د x په ځای کې د مشتق شوې تابع جګوالی ورکوي.

دا پورته ترځنګ د یوه تابع ګراف دی، هم داسې د مشتق تابع په یوه کواوردینات سیستم کې انځوروي

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام ولره:

په افراطي ځایونو (جګټکو، ټیټ ټکو) کې د مشتق تابع هر ځل ارزښت صفر لري.

په اوړونټکو – یا انعطاف ټکوکې (W) د مشتق تابع یو افراطي ځای لري.

یوغړیزوالي

د یوغړیزوالي خویونه:

یوغړیزې توابع(Monotony (یوناني: یوغړیز، برابرېدوله)

جګیدونکې(متزاید)، ټیټیدونکې(متناقص) توابع(جګ-ټیټیدونکې توابع)

که د ټولو $x_1 < x_2$ لپاره دf یوه تابع په یوه اینټروال کې $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$ وي، نو تابع په دې اینټروال کې مونوتون جګیدونکې(- ټیټیدونکې) بلل کیږي، که $f(x_1) = f(x_2)$ په کې اجازه ونه لري، نو دا $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ کړه یا ټینګه مونوتون جکېدونکې (همغږیز ټیټېدونکې) بلل کیږي.

لاندې قواعد، چې له همغږیزوالي په لاس راځي، د همغږیزوالي حالت لپاره ګټور دي.

دf یوه تابع ټیک هلته د تعریف په ورشو(ساحه) D کې مونوتون جګېدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

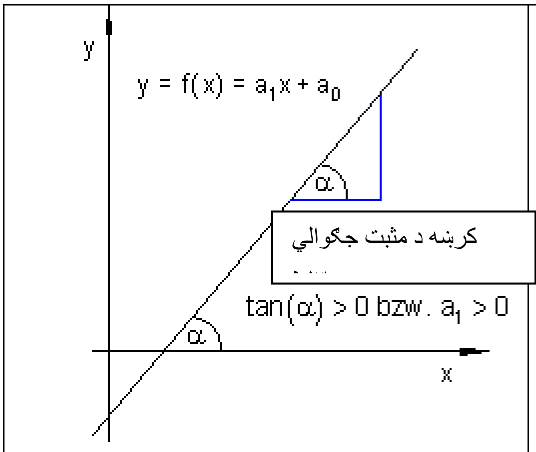
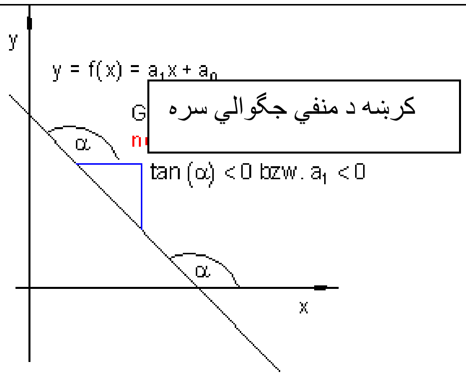
$$x_1, x_2 \in D \ \wedge \ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د f يو تابع تيک هلته په D کې مونوتون ټيټېدونکې ده، که د خوښې x_1 او x_2 لپاره، چې په D کې پراته دي، باور ولري:

$$x_1, x_2 \in D \wedge x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$$

يوغږيزوالی (يکنواخت) Monotony جګټيتوالی، د جګټيتوالی جملي

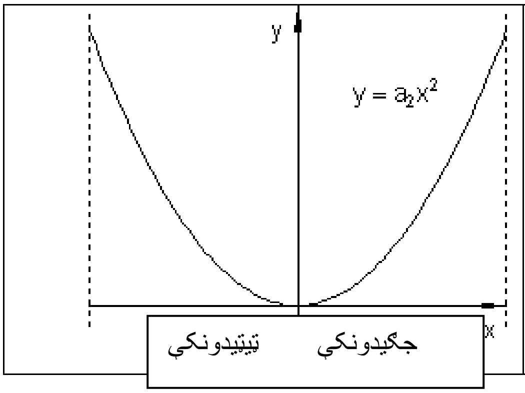
دا $f(x) = a_1x + a_0$ کرښيز (خطي) تابع خورا ساده تابع ده، چې انحنانه لري. ددې لپاره مسئول يې ثابته جګېدنه يا ثابت ميل دی، چېرته چې $a_1 = \tan(\alpha)$، د α کرښې او مثبت لوريز د x -محور ترمنځ زاويه(کونج) ده. په مخامخ شکل کې :کرښه د مثبت ميل سره $a_1 > 0 \Leftrightarrow \tan\alpha > 0$	
که $0 < \alpha < 90^0$ يا $0 < a_1 < \infty$ وي، دا په دې مانا چې $\alpha > 0 \vee a_1 > 0$ همداسې(⇔)، نو کرښه جګيږي. دا دا معنی لري، چې د جګېدونکي x سره د تابع f(x) ارزښت هم جګيږي. په مخامخ شکل کې: کرښه د منفي جګيدنې سره: $\tan\alpha < 0$ همداسې(⇔) $a_1 < 0$	 داپورته داسې دی: $\tan\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$

که $90^0 < \alpha < 180^0$ يا $-\infty < a_1 < 0$ وي، دا په دې معنی، چې $\alpha < 0$ همداسې $a_1 < 0$، نو کرښه ټيټيږي يا لويږي. دا په دې معنی، چې د جګيدونکي x سره د تابع f(x) ارزښت کوچنی کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته دواړو حالتونو کې د همغږیزې تابع (یا د جګ-ټیټیدونکې تابع) غږیږو او له یوه مونوتون جګیدونکې تابع څخه، که $a_1 > 0$ وي. له یوې همغږیز یا مونوتون ټیټیدونکې تابع څخه ، که $a_1 < 0$ وي.

دا د مونوتوني کلمه په هغو توابعو هم کارول کیږي، چې د منحنیو تلنه راکوي، که فکر وشي، چې په ټولیزه توګه د منحنی د ګراف په هر ټکي تانجنت ایښول کیدی شي.



له دې امله د تابع $f(x) = a_2x^2$ لپاره باور لري:

په اینتروال $I_1 = \{x \mid -\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ کې تابع $f(x)$ مونوتون ټیټیږي. او په اینتروال $I_2 = \{x \mid 0 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې $f(x)$ مونوتون جګیږي.

لکه د کرښې په ګراف کې، چې جګیدنه ثابته وه. اوس دا حالت مخ ته نه لرو، یعنې جګیدنه ثابته نه ده، بلکې دا د منحنې له یوه ټکي څخه بل ټکي ته تغیر خوري.

د تانجنت جګیدنه >0 ← منحنې مونوتون جګیږي

د تانجنت جګیدنه < 0 ← منخنې مونوتون ټیټیږي

د تانجنت جګیدنه، که صفر وي، ثابت پاتې کیږي.

روښانه ده چې د$f(x)$ تابع لومړی مشتق $f'(x)$ د تابع میل (جګوالی) ورکوي. ددې سره د مونوتونی قضیه په لاندې ډول فرمولوو .

قضیه: د$f(x)$ تابع دې په اینتروال Iکې مشتقوړ وي.
۱ که د $f(x)$ تابع په اینتروال Iکې همغږیز – یا مونوتون جګیدونکې وي، نو باور لري:
$f'(x) \geq 0$ د ټولو $x \in I$لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

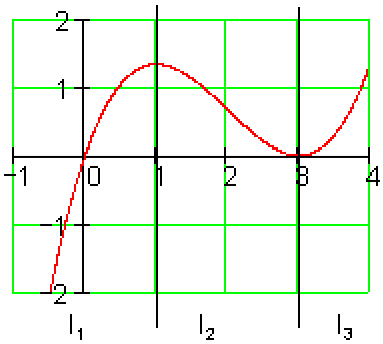
که f(x) په اينټروال I کې مونوتون ټيټيدونکې وي، نو باور لري: $f'(x) \leq 0$ د ټولو $x \in I$ له پاره.

۲ . که $f'(x) \geq 0$ وي، دټولو $x \in I$ لپاره ، نو f(x) په اينټروال I کې مونوتون جګيدونکي ده.

که $f'(x) \leq 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره ، نو f(x) په ايټروالI کې مونوتون ټيټيدونکي ده.

۳ که $f'(x) > 0$ وي ، د ټولو $x \in I$ لپاره، نوf(x) په اينټروال Iکې په کلکه مونوتون جګيدونکي ده

که $f'(x) < 0$ وي د ټولو $x \in I$ لپاره،نو f(x) په اينټروال Iکې په کلکه مونوتون ټيټيدوني ده.

د مونوتوني پيژند ورشو (تعريفساحو) ټاکنه بيلګه: د تابع ګراف څخه زيات وخت کېدی شي د مونوتوني ساحې لږ يا زيات ټيک و لوستل شي. د $I_1 = \{-\infty < x < 1\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتون جګېدونکی دی. د $I_2 = \{1 < x < 3\}_{\mathbb{R}}$ له پاره f(x) مونوتون ټيټېدونکی ده. د r $I_3 = \{3 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتون جګيدونکي ده.	$f(x) := \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$  جګيدونکی ټيټيدونکی جګيدونکی

باور لري: $f'(x) > 0$ لاس ته راځي: کره مونوتون جګيدونکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راځي: کره مونوتون ټیټیدونکی $f'(x) < 0$:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \Rightarrow f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

لومړی پل: نا مساوات $f'(x) > 0$ همداسي نامسات $f'(x) < 0$: حل کوو

دویم پل: د $f'(x)$ توټه کوته په کرښیزو ضربونو یا فاکتورونو

$$f'(x) = (x-1)(x-3)$$

دریم پل : د مخنخښي جدول.

د دوه ضريبونو ضرب تيک هلته زياتيز يا مثبت دی، که دوړه ضريبونه همغه يا برابره مخ نخشه ولري.

يو د دوه ضيبونو ضرب تيک هلته کميز يا منفي دی، که دواړه ضريبونه مختلفي مخنښپولري.

	$x=1$	$x=3$	
Bereich	$x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
$x-1$	−	+	+
$x-3$	−	−	+
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$ ist streng monoton	wachsend	fallend	wachsend

f(x) جګيدونکی ټيټيدونکی جګيدونکی کره يوغږيز

بيلګه:دا لاندې ګراف لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

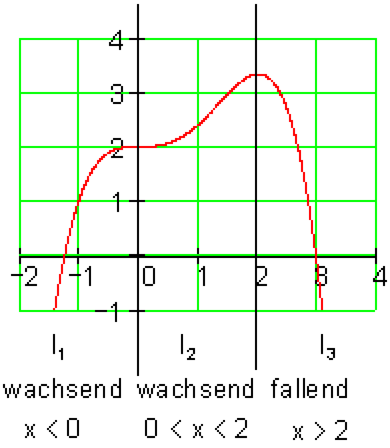
له ګراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کیږي.

د $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتونج کېدونکې ده.

د $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbb{R}}$ له پاره f(x)په کلکه مونوتونجګیدونکې ده.

د $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتون تیټیدونکې ده.

$$f(x) := \frac{-1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2$$



تیتیدونکي جګیدونکي، جګیدونکي،

له ګراف څخه لاندې مونوتوني ساحې لوستل کیږي.

د $I_1 = \{-\infty < x < 0\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتونج کېدونکې ده.

د $I_2 = \{0 < x < 2\}_{\mathbb{R}}$ له پاره f(x)په کلکه مونوتونجګېدونکې ده.

د $I_3 = \{2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ لپاره f(x) په کلکه مونوتون تیټیدونکې ده.

څای اړونده افراطي ټکي

یادونه: که په لیکنه انحرافي ټکي ګورئ،نو هغه افراطي ټکي دي.

ترمخ راوړنه او د کلمې روښنانه ونه:

د یوه تابع ګزاف زسمونه تر اوسه ناکافي وه، ځکه چې جګ او ټیټ ټکی نه پیژندل کیده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشق شمیرنې له لارې موږ هڅیږو، چې دا ستونځې حل(اوبې کړو) کړو.

که د f(x) لپاره د x_0 په ځاي کی f' (x) = 0 ولرو نو یو نسبي ټیټ ټکی مو مخ ته پروت دی.

که د(x)f لپاره د x_0 په ځاي کی f' (x)=0اوf''(x)>0 ولرو نویو نسبي ټیټ ټکمو مخ ته پروت دی.

که ددې برعکس ولرو: f ' (x) = 0 او0 > f '' (x) ، نو یو نسبي ماکسیموم مو مخ ته پروت دی.

د افراطي ټکي(ټیټ ټکي یا جګ ټکي) لپاره خوي ټاکونکی دی، چی f ' (x) = 0 وي، او د

f '' (x) مخ نښه (+ ، -)، په دې پریکړه کوي چی ایا یو ټیټ ټکی(اصغري ټکی)او که جګ ټکی(اعظمي ټکی) مو مخ ته پروت دی.

د پورته اړیکو لپاره لاندې یادوني اړیینې یا ضرور دي:

۱ – دا اړیکي یواځې د x_0 لپاره ارزښت لري چی د تعریف سټ په دننه کی پروت وي او هلته

د y = f (x) تابع پوره ښو ځلې مشتقوړ وي، د غاړو(څنډو) او د هغوځایونو له پاره چی هلته f (x) تابع کم یا هیڅ مشتقوړ نه وي، ځانګړو څیړنو ته اړتیا ده.

۲ - شرایط چی f ' (x) = 0 وي (مشتقوړ تابع) یواځی د یوه انحرافي ارزښت لپاره ضرور دی (ضروري یا اړین شرایط) .

۳– شرایط f ' (x) = 0 او f '' (x) ≠0 د بحراني ټکي لپاره یواځی پوره کیدونکی دی او نه ضروري)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه :

د $f(x) = x^2 + 2$ تابع ګراف وکاږئ او که بحراني ارزښتونه لري، هغه د ګراف او د مشتق له لارې وټاکئ.

حل:

ګراف: ګراف دې د ګرانو لوستونکو د کور کار وي؟

د بیلګي له ګراف څخه روښانه ده، چې تابع د x=0 په ځاي کې خورا ټیټ ټکی(اصغري-) لري.

د انحراف ټکي له پاره اړیین شرطونه:

۱ – د تابع لومړي مشتق دی: $f'(x) = 2x$ په دې مساوات کې د تابع مشتق د x_0 له پاره صفرځاي لري، یعني دلته یو بحراني ټکي پروت دی.

۲ – د تابع دویم مشتق: $f(x)'' = 2$. دا چې $f''(x) > 0$ دی، نو یو نسبي ټیټ ټکي مخ ته لرو.

بیلګه : د $y = x^4$ تابع د $x = x_0 = 0$ لپاره نسبي ټیټ ټکی لري او باوري دي

$$f'(x) = 4x^3 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(x) = 12x^2 \Rightarrow f''(0) = 0$$

ګورو چې دوهم مشتق د صفر څخه نه کوچنی او نه لوي دی.

د پورته شنني څخه لاندې پیژند ته راځو:

پیژند : د $x = x_0$ په چاپیریال کې د $y = f(x)$ تعریف شوې تابع یونسبي جګټکی په همدې دل نسبي ټیټ ټکی لري، که ټولو x_0 ته پوره نږدې x لپاره باور ولري: $f(x) > f(x_0)$ په همدې ډول $f(x) \leq f(x_0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله : (د یوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرایط):

که په x_0 کی مشتقوړ تابع $y = f(x)$ انحرافي لري نو لرو: $f'(x) = 0$

دا جمله موږ ته وایي (یادونه ۲دې مقایسه شي): چیرته چی $f'(x) \neq 0$ وي نو هلته اکستریموم نه شته، د اکستریموم لپاره یواځي د x_0 ځاي په پوښتنه کی راځي، چی د هغي لپاره لرو$f'(x) = 0$ ، خو حمتي نه ده چی $y = f(x)$دې یواکستریموم و لري.

جمله : (د یوه افراطي ټکي لپاره پوره کیدونکی شرایط):

که په $x = x_0$ کی دوه واره مشتقوړ تابع $y = f(x)$ لپاره ولرو:

$$f'(x) = 0 \quad , \quad f''(x) \neq 0$$

نو تابع $y = f(x)$هلته یو افراطي ټکی لري. خورا تیټ ټکی مخ ته لرو، که وي:

$$f''(x) < 0$$

خورا جګ ټکی مخ ته پروت دی ، که وي:

$$f''(x) > 0$$

له ښی لور انحنا یا کوږوالی اوله کیڼ لور انحنا یا کوږوالی (مقعر او محدب)

که په یوه اینتروال کې د مشتقوړ تابع f دویم مشتق $f''>0$ وي، نو په دې اینتروال کې ګراف کیڼ کوږ شوی یا کینه انحنا لري او که دویم مشتق $f'' < 0$ وي، نو د تابع ګراف ښی کوږ یا ښی انحنا لري.

دوه ځیرې (د لاندې بیلګې ځیره و باسی ؟-)

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

ټول ګونګتابع (راشنل تابع) f د $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ سره په کومه ورشو(ساحه)کې کینځکوږدی(کینه انحنا لري(ننوتی یا مقعر دی)) او په کومه ورشوکې ښی کوږ دی(ښی انحنا لري(محدب یا وتلی دی)؟

دویم مشتق: (لومړی مشتق(

$$f'(x) = 3x^2 - 4x+4$$

$$f''(x)= 6x-4$$

د $6x-4>0 \Rightarrow x > 2/3$ لپاره کینځ ګوږوال (کینه انحنا (ننوتی یامقعر)

د $6x-4<0 \Rightarrow x < 2/3$ لپاره ښی کوږوالی(ښی انحنا(وتلی یامحدب))

بیلګه:

د مات راشنل تابع $f(x) = \frac{1}{x+2}$ ګراف یو های پارابول دی. د های پارابول کومه څانګه کینه کږه ده یا کینه انحنا لري(مقعر)، او کومه یوه یې ښی کوږوالی - یا ښی انحنا لري(محدب)؟

دویم مشتق : $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$; $f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}$

صورت تل مثبت دی.

د $x < -2$ لپاره د مخرج او همداسې د کسر ارزښت منفي دی. د های بارابول څانګه ښی کوږوالی یا انحنا لري (وتلی یا مخدب).

د لپاره $x > -2$ مخرج او همداسې ټول کسر(مات) مثبت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

های بارابول کينکوږ دی یا کینه انحنا لري(ننوتی یامقعر).

ببلګه :

د دواړو توابعو $f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=\sqrt{x^3}$ کوږوالی(انحنا) دې یو د بل سره پرتله شي.

دواړه توابع د لپاره تعریف دي.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad g'(x)=\frac{\sqrt{x^3}}{2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \qquad g''=\frac{3}{4\sqrt{x}}$$

دویم مشتقونه د $x\in R^+$ لپاره تعریف دي.

په دې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف ښی کوږوالی یا انحنا لري، دا یو شی لور ته واز پارابول ښایي.

په همدې ساحه کې $f''(x) < 0$ دی. اړونده ګراف کیڼ کوږ دی یا کینه انحنا لري. اړونده ګراف یو کیڼ کوږوالی یا کینه انحنا لري، دا پورته لور ته واز پارابول دی.

د انعطاف ټکي(اوړونټکي)

یادونه: ولې اوړونټکی؟

وبه ګورو، چې په دې ټکي کې ګراف خپله لور اړوي، نو ......

موږ له پورته څېړې اټکل کولی شو چی : که د x_0 ځاي کی دا لاندې ولرو

$f''(x)=0$ او

$f'''(x)>0$، نو یو ښی-کیڼ- انعطاف ټکی (اوړونټکی) مو مخ ته پروت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

برعکس(په ځټ):

که وي: $f''(x)=0$ او $f'''(x)<0$ نو یو کیڼ - ښی- د انعطاف ټکی مو مخ ته پروت دی.

د ا نعطافټکي لپاره خوی ټاکونکی دی، چی $f''(x)=0$ وي ، داچی دا ښی -کیڼ - او که کیڼ- ښی – انعطاف ټکی(اوړونټکي) دی، د $f''(x)$ مخ نښه یی ټاکي.

-شرایط $f''(x)=0$ د انعطاف ټکي لپاره یواځی اړیین یاضروري دي.

د $y=x^4$ لپاره $f''(0)=0$ دی، مګر اوړونټکی مو مخ ته نه دی پروت.

–شرایط $f''(x_0)=0$ او $f'''(x_0)\neq 0$ د انعطافټکي لپاره پوره کیدونکي دي. ګورو چی $y=f(x)=x^5$ تابع د $x=x_0=0$ ځاي کی یو انعطافټکی لري او باوري دي:

$$f'(x)=5x^4 \quad , \quad f'(0)=0$$

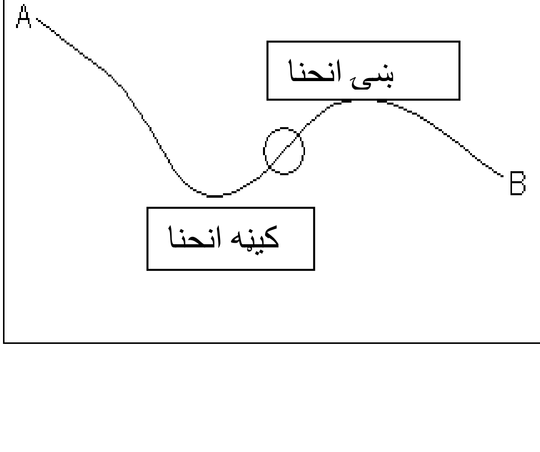
$$f''(x)=20x^3 \quad , \quad f''(0)=0$$

$$f'''(x)=60x^2 \quad , \quad f'''(x)=0$$

ګورو چي دریم مشتق $f'''(x)$ نه له صفرڅخه کوچنی او نه لوي دی.

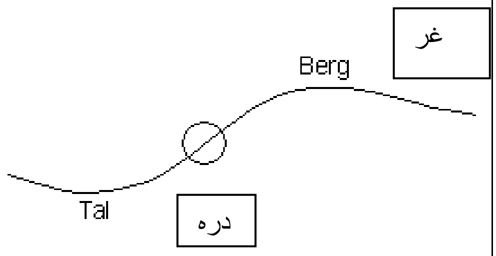
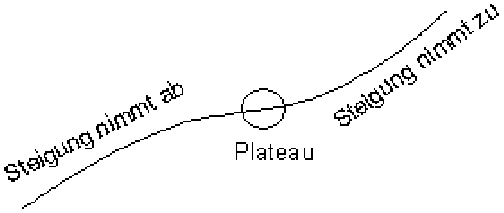
ترمخ راوړني او د کلمې روښانه وني:

د دې کلمې د لا نورې روښانه کولو لپاره په لاندې توګه مخ ته ځو:

<table>
<tr>
<td>د بایسکل ځغاستي چې له A څخه ځغلي د منحنی څخه تېرېږي او B ته رسېږي. د همغه وخت د بایسکل ځغاستي د اندل حالت د ځغاستي په وخت کې په پام کې ولرئ. د کینې منحني(د کیڼ لورې د اندل حالت) څخه وروسته د ښۍ لورې منحني کې ځغلي.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کيڼي- او ښی منحني(کږې) ترمنځ بايد د بايسکل انډل سيده ولاړ وي(عمود وي)، چې دا د انډل بدلون دی له کيڼي لورې و ښی لورې ته. دا د کيڼي او ښی منحني ترمنځ اوړيدنه ياد **انعطاف ټکی** **بلل کيږي.**

تاسو له بايسکل سره په يوه غونډۍ ځغلی. وروسته له هغې، چې له تالي څخه تيرېږي، نو لار په جګېدو پيل کوي. په لومړي سر کې نرم او بيا په نيغه جګيږي، بيا په دې پسې جګوالی ببرته کميږي، چې پاس د غونډۍ په څوکه صفر ارزښت غوره کړي. يو ځېرته په غونډۍپورته صفرارزښت ته رسيږي. يو ځېرته په لار جګېدنه خورا لويه وه. هلته د انعطاف ټکی پروت دی.	
د بايکل ځغلونکي بل حالت، چې له څنګ دياګرام څخه يې رانيسو: په غره د بايسکل ځغاستميل ياجګېدنه لومړی کميږي، چې له سره ببرته جګه شي. ددې ترمنځ يوه ساحه شته، د کم جګوالي سره (يوه نسبتآهواره)." دې نسبتآ هوار ځای کې د توته کرښې جګېدنه نسبت بل ځای ته کمه ده. هلته اوړونټکی(د انعطاف ټکی) پروت دی.	 له کيڼ و ښي لور ته: جګيدنه کميږي، هواره ، جګيدنه زياتيږي

پوهيږو، چې د يوې تابع لومړی مشتق د تابع د جګوالی تابع دی، چې له ګراف څخه يې جګوالی لوستل کيږي.دا چې د انعطاف ټکی خورا لوي يا خورا کوچنی ټکی کېدی شي، داسې پيدا کيږي، چې د مشتق تابع انحرافي ارزښتونه پيدا کړو.

دا تلنلار همهغسې ده، لکه د پيل تابع **f(x)** لپاره مو ټاکلې. اوس د مشتق تابع **f'(x)** باندې دا کار يا عمل اجرا کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مخکی له دې چی يو لړ جملی د بحراني(جګ – ټيټ -) ارزښتونو او د انعطاف ټکو په هکله څيړو، غواړو چی دا کليمی تعريف کړو .

دواړه کلمي به د نسبي بحراني ټکي په بڼه کی سره را غونډي شي.

پيژند ۲۰ . ۶ : په يوه چاپيريال x = x0 کی مشتقوړ تابع y = f (x) يو کيڼ- ښی- انعطافټکی په همدې ډول ښی- کيڼ- انعطافټکی لري، که د هغه مشتق هلته يو نسبي جګټکی(عظمي نقطه) په همدې توګه يو نسبي ټيټ ټکی ولري.

جمله ۲۰ . ۱۱ : (د يوه نسبي افراطي ټکي لپاره ضروري شرايط):

که په x0 کی مشتقوړ تابع y = f (x) اکستريموم لرې نو لرو: f ' (x) = 0

دا جمله موږ ته وايي (يادونه ۲دي پرتله شي): چيرته چی f ' (x) ≠ 0 وي نو هلته بحراني ټکی نه شته، د بحراني ټکولپاره يواځي د x0 ځاي په پوښتنه کی راځي، چی د هغي لپاره f ' (x) = 0 وي ، خو حمتي نه ده چی y = f (x)دې يوبحراني ټکی ولري.

د پورته جملی استعمال په y′ = f' (x) څخه لاندې جمله لاس ته راځي:

جمله ۲ . ۱۲ : (د اوړونټکي(انعطاف ټکي) لپاره اړيين شرايط):

که په x = x0 کی دوه واره مشتق وړ تابع y = f (x) هلته يو انعطاف ټکی ولري، نو لاس ته ترې راځي:

دلته هم باور لري (يادونه ۴ دې پرتله شي): چيرته چی $f''(x) \neq 0$ وي ، نو هلته نه شي کيدی چي اوړونټکي موجود وي. مګرچيرته چی f '' (x) = 0 وي ، اوړونټکی شته کيدلی شي، خو اړيين يا ضرور نه ده چی هلته انعطاف ټکی شته وي.

له پورته څخه لاندې جمله لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله ۲۰ ، ۱۳:

(د اوړونټکي يا انعطافټکي لپاره پوره کيدونکی شرطونه)که په x = x0 کی درپوار مشتقوړ تابع y = f (x) لپاره وي:

$f''(x) = 0$, او $f'''(x) \neq 0$

نو هلته يو انعطاف ټکی مخ ته لرو. که $f'''(x) < 0$ وي، نو يو کيڼ- ښي – انعطاف ټکي مخ ته پروت دی او د $f'''(x) > 0$ لپاره يو ښی-کيڼ-انعطاف ټکی مخ ته لرو.

شننيزه يا تحليلي بيلګه:

يادونه: موږ د x_E سره افراطي ټکی په نښه کوو او د x_W سره د انعطاف – يا اوړون ټکی په نښه کوو.

1- تابع مساوات د مشتق سره

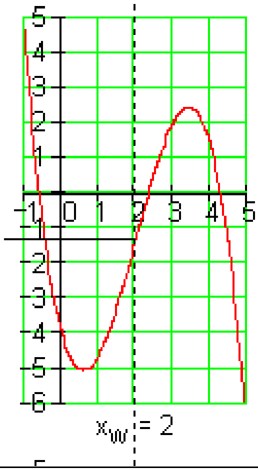
$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$

$$f'(x) = -2x^2 + 8x - 4$$

$$f''(x) = -4x + 8$$

$$f'''(x) = -4$$

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - 4x - 4$$



$$f(2) = -\frac{4}{3}$$

$$P_W\left(2 \mid -\frac{4}{3}\right)$$

2- دويم مشتق صفر کړئ.

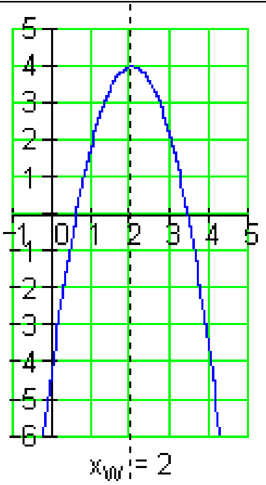
(c) ketabton.com: The Digital Library

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 8 = 0$

$\Rightarrow x_W = 2$

f '(x) = -2x² + 8x - 4

Extremwert von f '(x)
bei $x_W = 2$



د الماني پښتو: د f‘(x) صفرځای په xw=2 کې

3- د انعطاف ټکي له مخې ښوونه، چې ایا د انعطاف ټکی شته دی؟

$f'''(x_W) = f'''(2) = -4$

4- په $f(x)$ د انعطاف ځایونه ځای په ځای کولو له لارې د انعطاف ټکي ټاکنه

$f(x_W) = f(2) =$

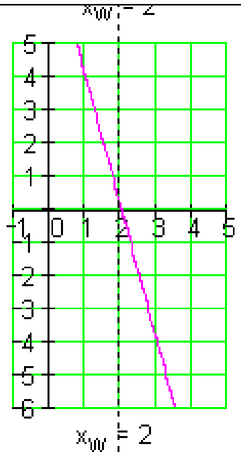
$-\frac{2}{3}(2)^3 + 4(2)^2 - 4(2) - 4 = -\frac{4}{3}$

$\Rightarrow P_{W\left(2 \mid -\frac{4}{3}\right)}$

$P_W(2 \mid -1.33)$

f "(x) = -4x + 8

Nullstelle von f " (x)
bei $x_W = 2$



د الماني پښو: د f‘‘(x) ضفرځای په x_W =2 کې

پام: په انعطاف ځای x_W کې د $f(x)$ ګراف کږیږي.

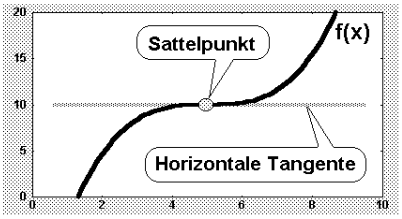
په یوه په خوښه ټکي x_0 کې د کږوني(انحنا) لپاره باور لري:

$f''(x) > 0$ په دې معني دی،چې $f(x)$ کیڼ لور ته کږیږي(انحنا لري) دی.

$f''(x) < 0$ په دې معنی، چې تابع $f(x)$ ګراف ښې لور ته کږیږي(انحنا کوي)

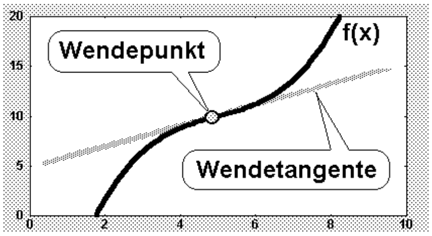
(c) ketabton.com: The Digital Library

یو زینتکی Der Sattelpunkt څه شی دی؟

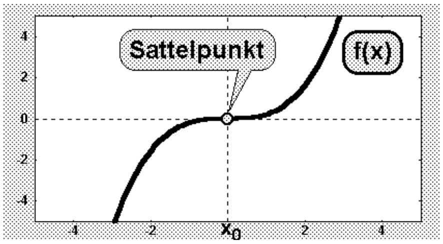


پیژند:

د زینتکي(کله کله برنډې تکی هم بلل کیږي)لاندې د انعطافتکي ځانګړی حالت پوهیږو، داسې انعطافتکی چې تانجنت یې افقي (پروت) وي:



د پرتلې لپاره دې بیا یو ،،عادي،، انعطافتکی ورکړ شوی وي.دا یو مائل(نه افقي) تانجنت لري



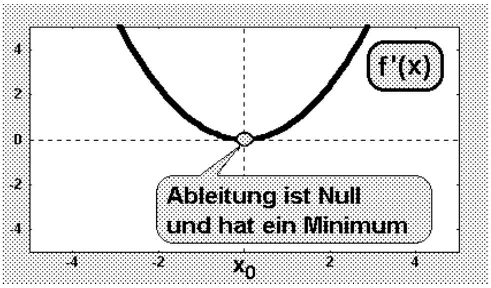
توضیح:

اوس فکر کوو، چې یو زینتکی څنګه د شمېرلو له مخې پیژندل کېدی شي. په دې برخه کې په ځانګړې توګه دا مخ ته لرو، چې یو زینتکی له ښي – و کینه انحنا و شمېرو.

د دې لپاره د $f(x)$ تابع جګوالی په پام کې نیسو، یعنې لومړی مشتق: د زینتکي د مخه د $f(x)$ جګوالي کمیږي، په زینتکي کې صفر ارزښت لري، او له زینتکي څخه وروسته بېرته جګیږي.

یو زینتکی (د ښي – کیڼ – بدلون سره) په دې پیژندل کیږي، چې لومړی مشتق $f'(x)$ یې هلته صفر شي او سربېره پر دې هلته یو نسبي ټیټتکی (مینیموم) ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لومړي مشتق $f'(x)$ شکل داسې بربېني:

لومړی شرط دی، چې مشتق يعنې $f'(x)$ په زينټکي کې د صفر سره مساوي دی.

زينټکی(ښی-کيڼ-بدلون) $f'(x_0)=0$

دوم شرط دی، چې مشتق $f'(x)$ هلته يو نسبي مينيموم لري.

دا په دې معنادی، چې بل جګ مشتق $f''(x)$ بايد په صفر مساوي وي او مخنښه له منفي و مثبت ته بدلېږي.

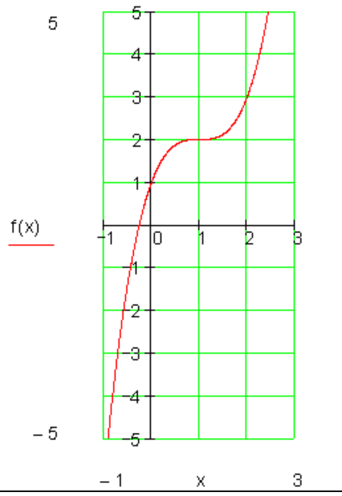
له دې سره سم د زينټکي لپاره پوره کيدونکي قضيه وميندل شوه:

د زينټکي لپاره جمله(خوي تاکنه)(د ښي –کيڼ- انعطاف سره)

الف:د x_0 ځا کې لومړی مشتق $f'(x)$ صفر دی: $f'(x_0)=0$

ب : د x_0 په ځا ي کې لومړی مشتق $f'(x_0)$ يو مينيموم لري، دا په دې معنا، چې دوم مشتق صفر دی، يعني $f''(x)=0$ دوم مشتق مخنښه له منفي ځخه و مثبت ته بدلوي.

بل بديل(د ګرانو دوستانو وړانديز)

	زينټکی: د انعطاف ټکي يو ځانګړی حالت زينټکی دی. دا د انعطاف ټکی دیَ د صفر جګيدنې سره.که د کيڼ لور ورتزدې شو فکر کيږي، چې، نسبي جګټکی مو مخ ته پروت دی که ځوک د ښي لور ور نزدې شي فکر کوي، چې يو نسبي ټيټکی مخ ته لرو. اوس دا حالت د رياضياتو له لوري ځيرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x)=x^3-3x^2+3x+1$ $f'(x)=3x^2-6x+3$ $f''(x)=6x-6$ $f'''(x)=6$	مشتق:

$$f'(x)=0 \iff 3x^2-6x+3=0 \Rightarrow x_{1/2}=1$$

$=>1$ د $x=1$ سره زینتکی	$=>1$ د $x=1$ سره د انعطاف ټکی	$f''(1)=6\cdot1-6=0$ $f'''(1)=6$

د انعطاف ټکي لپاره شرایط پوره دي.
دا چې د $f''(1)=0$ له امله د انعطاف ټکی مخ ته لرو، نو دا د انعطاف ټکی همغه زینتکی دی.
د انعطاف ټکي پیداکونه:
د تابع ګراف باندې انعطاف ټکي کې تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي. د انعطاف تانجنت هم
همداسې پیدا کیږي لکه د تابع دګراف په یوه ټکي کې تانجنت، چې تانجنت مساوات تاکل کیږي.

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x^2+9x-2$$

$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-6x+9$$

$$f''(x)\frac{3}{2}x-6 \qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

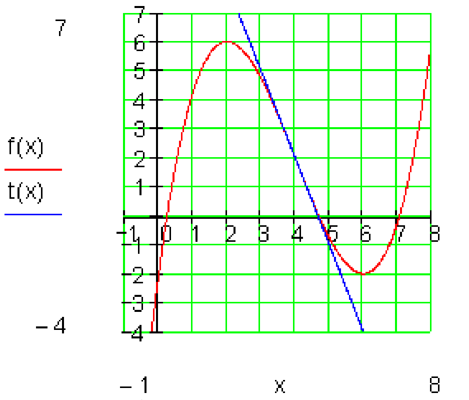
$$f''(x_W)=0 \iff \frac{3}{2}x-6=0$$

د $x_W=4$ او $f'''(x_W)=\frac{3}{2}\neq0$ د

تانجنت $f(x_W)=f(4)=2 \Rightarrow \underline{P_W(4|2)}$

مساوات لپاره باور لري.
د x_W لپاره د تانجنت مساوات

$$t(x)=f'(x_W)(x-x_W)+f(x_W)$$



د انعطاف تانجنت د $f(x)$ ګراف د انعطاف په ټکي $P_W(4,2)$ کې غوځوي او دا لاندې مساوات لري:

$$t(x)=-3x+14$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f'(x_W) = f'(4) = -3$ سره په لاندې ډول دي $t(x) = -x(x+4) + 2 = \underline{\underline{-3x+14}}$	

د انعطاف- یا وړون ټکي تانجنت پیداکونه:

په انعطاف ټکي کې د تابع دګراف تانجنت د انعطاف تانجنت بلل کیږي.
د انعطاف تانجنت مساوات همداسې ټاکل کیږي، لکه د تانجنت مساوات د ګراف په خوښه ټکي باندې.

داسي حالتونه، لکه $f'(x) = f''(x) = f'''(x) = 0$ دلته تر څیړنی لاندې نه نیول کیږي.

د کږې یا منحني بحث (Kurven Diskusion) :

تر مخ راوړنه او د کلمې روښانه ونه:

د دې لپاره چې د یوې تابع وکاړلی او تشریح کړای شو، اړین دی چې د ګراف په ځنې په راوتلو یا غوره ټمو او د ګراف په تلنه وپوهیږو.\

داسې د ګراف په غوره خوبیز یا کرکتریستیکي خویونو باندې د پوهیدنې او څیړنې ته د کږو یا منحنیو خبرې اترې یا بحث وایو.

د دې لپاره چې د تابع کوم غوره خوي مو له یاده ونه ووځي یا راڅخهپاتې نه شي، نو د داسې څیړنو لپاره سړی باید سیومتریک مخ ته ولاړ شي او هم تل د څیړنو او شمیرنو د لړۍ پرلپسې یا لړې ترتیب په پام کې ونیسي.

په لاندې ډول تلنلار ډېره ګټوره ګڼل شوې

لومړی: تعریفورشو یا ـــساحه:

سړی له هر څه د مخه د فنکشن یا تابع تعریفورشو ټاکي، ځکه چې فقط د دې ورشو په دننه کې موخه ور دی چې تابع خویونو څیړنه مخ ته بوزو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم: سیومتري:

سرې کره کوي، چې ایا تابع محوري- اوټکی سیومتری دی.

محورسیمتري سره باور لري: f(-x)=f(x) په دواړو حالتونو کې فنکشن باید وڅیړل شي.

د ټکي سیومري سره باورل ري: f(-x)=-f(x) فقط باید د $x \geq 0$ لپاره وڅیړل شي.

په ځنګړې توګه د ټول راشنل یا –خوښیار توابعو لپاره باور لري:

یو ټول راشنل تابع ټیک هلته محور سیمتریک دی، که د هغه ترمونه زاتیدوني یا د جمعي اعظاوې فقط د جوړه یا جفت جګ عدد یا اکسپوننت سره ولري.

یو ټول راشنل تابع ټیک هلته ټکی سیمتریک دی، که د هغه ترمونه نا جوړه یا طاق د زیاتیدوني یا د جمعې غړي ولري.

دریم: افراطیت:

د نسبي افراطیت ټاکنې، دا سرې جګ – همداسې ټیټ ټکي بولي.

دا د پراته یا افقي تانجنت سره ټکي هم دي.

ټیټ ټکی= نسبي مینیموم پوره کیدونکي شرطونه: $f'(x_1) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_1) > 0$	جګ ټکی = نسبي ماکسیموم پوره کیدونکي شرطونه: $f'(x_1) = 0 \quad \wedge \quad f''(x_1) < 0$

څلورم: اوړونټکی(نقطه انعطاف):

د اوړنټکي همداسې زین ټکي ټاکنه.

د اوړنټکي لپاره پوره کیدونکي شرطونه: $f''(x_w) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_w) \neq 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

زینټکی (همغه د اس زین څخه دا نوم رانیول شوی)اوړنټکی دی د پراته تانجنت سره.

پنځم: محورغوڅټکي(د محور د تقاطع نقاط):

که د x -محور ارزښت صفر (x = 0) د f(x) په فنکشن ارزښت کې کیښول شي، نو سړی د y –محور سره غوڅټکی(نقطه تقاطع) لاس ته راوړي.

د y - محور سره غوڅټکی $P_y(0 \mid y_s) \Rightarrow f(0)$ وټاکی.

د x- محور سره غوڅټکی(صفرځای) $P_{xi}(x_i \mid 0) \Rightarrow f(x) = 0$

شپږم: ګراف:

دا تراوسه د ټولو راټول شوو معلوماتو سره اوس کیدی شي په زیاتو حالتونو کې ګراف انځورکړای شو.

د دې لپاره لومړی یو ارزښت جدول چمتو کیږي.

دا په ګوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه دې وشمیرل شي.

دا کیدی شي چې د جبشمیرونو سره شومیرل شي او د یا د ټولګڼونو یا تام اعدادو x - ارزښتونو لپاره د هورنر شیماپه مرسته.

اوم: کږوالي ځاننیونه(حالت) او یوغږیزوالی.

په اوړونوټکي یا انعطافټکي x_W کې د f د ګراف کږوالی تغیر خوري.

د په خوښه ټکي x0 کې د کږوالي لپاره باور ري:

$f''(x0) > 0$ په دې معنا، چې د f(x) ګراف کیڼ کوږ(ننوتی یا مقعر؟؟) دی.

$f''(x0) < 0$ په دې معنا، چې د(x)f ګراف ښي کوږ(وتلی یا محدب) دی:

یوعږیزوالی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x0) \geq 0$ وي، نو f(x) يوغړيز جګيدونکی دی په انتروال I کې

که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x0) \leq 0$ وي، نو f(x) يوغړيز ټيټيدونکی دی په انتروال I کې.

۲ . که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x0) > 0$ وي، نو f(x) کره يا په کلکه يوغړيز

جګيدونکی دی په انتروال I کې

که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x0) < 0$ وي، نو f(x) کره يا په کلکه يوغړيز

ټيټيدونکی دی په انتروال I کې.

لنډ:په اوړونټکي کې د يوه ګراف د کږوالي حالت تغير خوري

د يوغړيزوالي حالت په افراطي ټکو کې تغير خوري

اتم: د تعريفورشو ژی ټکي:

د تعريفورشو په ژی ټکو کې د فنکشن څيړنه.

که تعريفورشو محدوه يا رابنده نه وي، نو دواړه پوله ا رزښتونه

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \quad \text{او} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

دې وټاکل شي.

په ډول وييته يا افاده: د لوی x - ارزښت لپاره سړی د فنکشن ارزښتونو تلنه په زيا تيز يا مثبت لور او هم په کميزه يا منفي لور څيړي او دا پوښتنه له ځانه کوي، چې فنکشن ارزښتونه په کومه لور څغلي.

د يوه مفصل کږو بحث خبرې اترې يا بحث:

تعريفورشو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابعبرابرون يا تابع مسوات:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي تعريف ډېرۍ يا ـست $\underline{\underline{D_f = \mathbb{R}}}$.

فنکشن د ټول حقيقي ارزښتونو لپاره تعريف دی. د ورسره بلده توګه ټول راشنل فنکشنونو دا تل باور لري، خو پرته له دې که څوک وغواړي تعريف ورشو رابنده يا محدود کړي.

سيومتري: دا چې ټول جګګېونه يا اکسپوننتونه جوړه يا جفت دي، نو يو محورسيومتري مخ ده لرو،

باور لري: $f(-x)=-f(x)$ د ټول $x€R$ لپاره.

ګټه په دې کې ده، چې فنکشن ارزښتونه بايد فقط د زياتيزو يا مثبت x -ارزښتونو لپاره وشميرل شي.

افراطييت:

د افراطي ټکو شميرلو لپاره تلنلار:

سړی لومړی د f(x) لومړي دوه مشتقونه ټاکي.

د لومړي ومشتق صفرايينوونه د پراته تانجنت ځای راکوي.

که سړی دا ارزښتونه په دويم مشتق کې کيږدي، نو سړی د مخ ته پراته افراطيت په هکله وينا ترلاسه کوي.

(نسبي مامسيموم يا نسبي مينيموم همداسي د افراطي ټکو نه والی).

د افراطي ځايونو x_i ازښتونه که فنکشن مساوات کې کيښول شي افراطي ارزښتونه راکوي او له دې سره د افراطي ټکو کواوردينااتونه يا پراته ولاړارزښتونه څرګند دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابعبرابرون یا ـمساوات: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}$

مشتقونه: $f'(x) = x^3 - 4x \quad f''(x) = 3x^2 - 4 \quad f'''(x) = 6x$

د افراطي ارزښتون لپاره پوره کيد ونکي شرطونه.

$$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0$$

xله نوکانو وباسئ

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 4) = 0 |$$

د صفرضرب جمله له دې لاس ته راځي $x1=0$ همداسې $x^2-4=0$

$$x^2 - 4 = 0 | +4$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 4 | \sqrt{}$$
$$\Leftrightarrow |x| = 2 \Rightarrow x_2 = 2 \text{ bzw. } x_3 = -2$$

د پراته تانجنت ځايونه: $\boxed{x_1 = 0}; \boxed{x_2 = 2}; \boxed{x_3 = -2}$

د نسبي ماکسيموم همداسې نسبي مينيموم ښوونه:

$$f''(x_1) = f''(0) = 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. für } x_1 = \boxed{x_{E1} = 0 \text{ (Hochpunkt)}}$$
$$f''(x_2) = f''(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. für } x_2 = \boxed{x_{E2} = 2 \text{ (Tiefpunkt)}}$$
$$f''(x_3) = f''(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 4 = 8 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. für } x_3 = \boxed{x_{E3} = -2 \text{ (Tiefpunkt)}}$$

افراطي ارزښتونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x_{E1} = 0$ لپاره جګ ټکی

$$f(0) = -\frac{9}{4} = -2,25$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(0 \middle| -\frac{9}{4}\right) \text{ bzw. } P_{Max}(0|-2,25)}$$

د $x_{E2} = 2$: لپاره ټیټټکی

$$f(2) = \frac{1}{4}\cdot 2^4 - 2\cdot 2^2 - \frac{9}{4} = -\frac{25}{4} = -6,25$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{Min1}\left(2 \middle| -\frac{25}{4}\right) \text{ bzw. } P_{Min1}(2|-6,25)}$$

د $x_{E2} = -2$: لپاره ټیټټکي

د محور سیومتري له امله $f(-2) = f(2) = -\frac{25}{4} = -6,25$

$$\Rightarrow \boxed{P_{Min2}\left(-2 \middle| -\frac{25}{4}\right) \text{ bzw. } P_{Min2}(-2|-6,25)}$$

اوړنټکي یا د ا نعطاف ټکي:

د انعطاف ټکو ټاکلو لپاره د شمیرنې تلنلار:
د لومړیو دوه مشتقونو برسیره سرړی د f(x) دریم مشتق جوړوي یا نیسي.

د دویم مشتق ضفرځایونه ممکنه اوړونټکي دي.
د افراطي ټکو مخ ته پرېوتني یا لرنې ازماېښت لپاره د دویم مشتق شمیرل شوی صفرځای په دریم مشتق کې ایښوول کیږي.

که لاس ته راوړنه د صفر سره برابره نه وي، نو اړونده x - ارزښتونه یو اوړنټکی په ګوته کوي. ځکه چې دا اړونده فنکشن ارزښتونه د x – ارزښتونو د تابع مساوات f(x) ترم کې ایښوولو له لارې لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع مساوات: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4}$

مشتقونه: $f'(x) = x^3 - 4x \quad f''(x) = 3x^2 - 4 \quad f'''(x) = 6x$

د اوړونټکو لپاره پوره کيدونکي شرطونه:

$$f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4 = 0 \,|\, +4$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = 4 \,|\, :3$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \,|\, \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{\frac{4}{3}} \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{4}{3}} \text{ bzw. } x_2 = -\sqrt{\frac{4}{3}}$$

ممکنه اوړونټکي: $\boxed{x_{W1} = \sqrt{\frac{4}{3}}}$; $\boxed{x_{W2} = -\sqrt{\frac{4}{3}}}$

په اوړونټکو ښوونه:

$$f'''(x_{W1}) = f'''\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 6 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \neq 0; f'''(x_{W2}) = f'''\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = 6 \cdot \left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \neq 0$$

د $x_{W1} = \sqrt{\frac{4}{3}}$ لپاره اوړونټکی

$$f(x_{W1}) = f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^4 - 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 - \frac{9}{4} = -\frac{161}{36}$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{W1}\left(\sqrt{\frac{4}{3}} \,\middle|\, -\frac{161}{36}\right) \text{ bzw. } P_{W1}(1{,}15 \,|\, -4{,}47)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x_{W2} = -\sqrt{\frac{4}{3}}$ لپاره اوړونتکی

$$f(x_{W2}) = f\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = f\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) = -\frac{161}{36}$$

د محور سیومتري لهامله

$$\Rightarrow \boxed{P_{W2}\left(-\sqrt{\frac{4}{3}} \mid -\frac{161}{36}\right) \text{ bzw. } P_{W1}(-1,15 \mid -4,47)}$$

پنځم: محورغوڅتکي یا نقاط تقاطع محور

الف- د y–محور سره غوڅتکي

$$f(0) = -\frac{9}{4} = -2,25 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid -2,25)}$$

ب – د x–محور سره غوڅتکي(صفرځایونه)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 - \frac{9}{4} = 0 \mid \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \mid \text{Substitution } x^2 = z$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 8z - 9 = 0$$

په z کې مربع مساوات

$$\Rightarrow p = -8\,;\, q = -9\,;\, D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{8}{2}\right)^2 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = -\left(-\frac{8}{2}\right) \pm \sqrt{25} = 4 \pm 5 \Rightarrow z_1 = 9\,;\, z_2 = -1 < 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(حل نه شته)

په ښت یا برعکس بدلون: $z_1 = x^2 = 9 \Rightarrow |x| = \sqrt{9} \Rightarrow x_1 = 3;\ x_2 = -3$

په $\boxed{P_{x2}(-3|0)}$; $\boxed{P_{x1}(3|0)}$ کي صفرځایونه

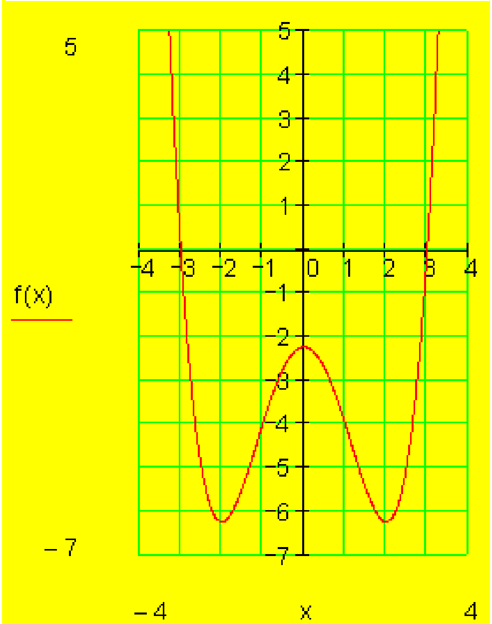
شپږم: ارزښت جدول:

ارزښت جدول د ورزیاتو ارزښتونو سره:

$$f(1) = \frac{1}{4} \cdot 1^4 - 2 \cdot 1^2 - \frac{9}{4} = -4;\ f(-1) = f(1) = -4$$

$$f(3,25) = \frac{1}{4} \cdot (3,25)^4 - 2 \cdot (3,25)^2 - \frac{9}{4} \approx 4,52;\ f(-3,25) = f(3,25) \approx 4,52$$

		P_{x2}	P_{Min2}	P_{W2}		$P_{Max} = P_y$		P_{W1}	P_{Min1}	P
x	−3,25	−3	−2	−1,15	−1	0	1	1,15	2	
f(x)	4,52	0	−6,25	−4,47	−4	−2,25	−4	−4,47	−6,25	



شپږم: تولګه:

محورغوښتکي

اکسترم ارزښتونه:

$P_{Min1}(2|-6,25);\ P_{Min2}(-2|-6,25)$

$P_{Max}(0|-2,25)$

اوړونتکي

$$P_{W1}\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\,\middle|\,-\frac{161}{36}\right);\ P_{W2}\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}\,\middle|\,-\frac{161}{36}\right)$$

مورغوښتکي

$P_y(0|-2,25);\ P_{x1}(3|0);\ P_{x2}(-3|0)$

د کږوالي یو غږیزوالی

ننوتی

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$\left]-\infty;-\sqrt{\frac{4}{3}}\right[$ und $\left]\sqrt{\frac{4}{3}};\infty\right[$ او وتلی: $\left]-\sqrt{\frac{4}{3}};\sqrt{\frac{4}{3}}\right[$ کره یوغږیز یتیدونکی $]-\infty;-2[$ und $]0;2[$ کره یوغږیز جګیدونکی $]-2;0[$ und $]2;\infty[$ ژی تکي $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$

اووم: کږوالي حالت او یوغږیزوالی:

کږوالی د $x0=-2$ لپاره (کین له P_{w2})

$$f''(-2)=3\cdot(-2)^2-4=8>0$$

د $\left]-\infty;-\sqrt{\frac{4}{3}}\right[$ لپاره کینکوږوالی(ننوتی)

د $x_0=0$ لپاره کوږوالی (د P_{w1} او P_{w2} ترمنځ)

$f''(0)=-4<0$ ښی کوږوالی(وتلی) د $\left]-\sqrt{\frac{4}{3}};\sqrt{\frac{4}{3}}\right[$ لپاره.

د $x0=2$ لپاره کږوالی (د P_{w2} ښي لور ته)

(c) ketabton.com: The Digital Library

f’’(2)=3.2²-4=x>0

کيڼ کوږوالی د $]\infty;\sqrt{\frac{4}{3}}[$ لپاره

کره يا په کلکه قوغږيز تيتيدونکی د $]-\infty;-2[$ لپاره

کره يوغږيزجګيدونکی د]0;2-[لپاره

کره يا په کلکه قوغږيز تيتيدونکی د]0;2[لپاره

کره يوغږيزجګيدونکی د $]2:\infty[$ لپاره

اتم: د تعريفورشو ژی ټکي:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}x^4-2x^2-\frac{9}{4}\right) = \lim_{x\to-\infty} x^4\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{x^2}-\frac{9}{4x^4}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{x^2}-\frac{9}{4x^4}\right)}_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to-\infty} x^4 = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to\infty} x^4 = \infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty}$$

يوه تابع $y = x^3 + x^2 - 3$ لرو. د دې تابع شکل رسم کړئ او بيا په دې رسم کې د تابع افرطي ټکي او د انعطاف ټکي په نخښه کړئ، ربنانه کړئ، چې انحنا چيرته له کيڼې لور و ښی لورې ته او له ښی لورې و کيڼې لورې ته ده.

فعاليت:

- تناظر تعريف کړئ.
- لاندې توابع رسم کړئ، جګ ټکي، ټيټ ټکي او د انعطاف ټکي يې پيدا اکړئ.
- $x^3 + x$
- $3x^3 + x + 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چې یوه تابع رسم کړای شو، ساده ده که د تابع غوره ټکی و پیژنو. موږ دې بحث ته د منحني بحث وایو. موږ په دا ډول خبرو اترو کې باید سیستماتیک مخ ته لاړ شو.
په لاندې ډول تلنه ګټوره بلل شوې.

دتعریف ساحه: د تابع ځیرنه یواځې په همدې ورشو کې موخه وره ده.
تناظر **Symetry** : باید وټاکل شي، چې تابع محوري متناظر او که مرکزي متناظر ده.
د محوري تناظر لپاره باور لري: $f(-x) = f(x)$
د مرکزي تناطر لپاره باور لري. $f(-x) = -f(x)$
په پورته دواړو حالتونو کې دې فقط $x \geq 0$ وڅېړل شي.
په ټولیزه توګه که ټول ریل تابع په پام کې ونیسو، نو ګورو چې که توان(د پولینوم درجه)یې جفت(جوړه) وي، نو پولینوم محوري متناظر دی او که توان(د پولینوم درجه) طاق(ناجوړه) وي، نو پولینوم مرکزي متناظر دی.

بحراني ټکي **Extrema** : د نسبي بحراني ټکو ټاکل(جګټکی، ټیټټکی)
د جګټکی یا نسبي جګ ټکي پوره کیدونکي شرطونه:
$f'(x_1) = 0 \ \wedge \ f''(x_1) < 0$

انعطافټکی یا اوړونټکی : Inflection Point

د انعطافټکواو همداسې زینټکي ټاکلو له پاره پوره کیدونکي شرطونه:
$f''(x_W) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_W) \neq 0$
زینټکی انعطافټکی دی د افقي تانجنت سره.
د تابع تقاطع د x او y محوررونوسره(د محوررونِوغوڅټکی):
د $x-$ محور سره ِغوڅټکی: $P_{xi}(x_i \,|\, 0) \ \Rightarrow \ (x) = 0$
د y محور سره غوڅټکی(صفرځای) ټاکي $P_y(0 \,|\, y_s) \ \Rightarrow \ f(0)$
دګراف انځورونه: د ټولو تراوسه راټولو شوو معلوماتو سره کړی شو، چې ګراف انځور کړو. ددې لپاره لومړی یو ارزښتجدول انځوریږي. دا راته په ګوته کوي، چې نور کوم ارزښتونه شمیرل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کږوالي - یا انحنا حالت او یوغږیزوالی:
د انعطاف په ټکي X_w کې د $f(x)$ ګراف تغیر خوري.
په خوښه یوه ټکي x_0 کې د انحنا لپاره باور لري:
$f''(x_0) > 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف کینه انحنا لري (کونوکس)
$f''(x_0) < 0$ په دې معنا، چې د $f(x)$ تابع ګراف ښی انحنا لري (کونکاو)
یوغږیزوالی
1- که د ټولو $x \in I$ لپاره وي $f'(x) \geq 0$ ، نو $f(x)$ په انټروال I کې مونوتون جګیږي. که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) \leq 0$ وي, نو $f(x)$ په انټروال I کې مونوتون ټیټیدونکی دی.
2- که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) > 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروال I کې کره غښتلې مونوتون جګیدونکی ده.
که د ټولو $x \in I$ لپاره $f'(x) < 0$ وي، نو $f(x)$ تابع په انټروال I کې غښتلې مونوتون جګیدونکی ده.
د پیژند ورشو ژی ټکي:
د تابع ژی ټکي کتنه په پیژند ورشوکې. که پیژند ورشو نامحدوده وي، نو لیمیټ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ او $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ټاکو.

بیلګه :
د $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ تابع رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق کونه:

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$
$$y' = f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$y'' = f''(x) = 6x - 12$$
$$y''' = f'''(x) = 6 \qquad D = IR$$

نسبي بحراني ټکي

$P_{min}(3|-2) \qquad P_{max}(1|2)$

انعطافټکی او تانجنت

$P_W(2|0) \qquad y = f_t(x) = -3x + 6$

صفرځايونه:

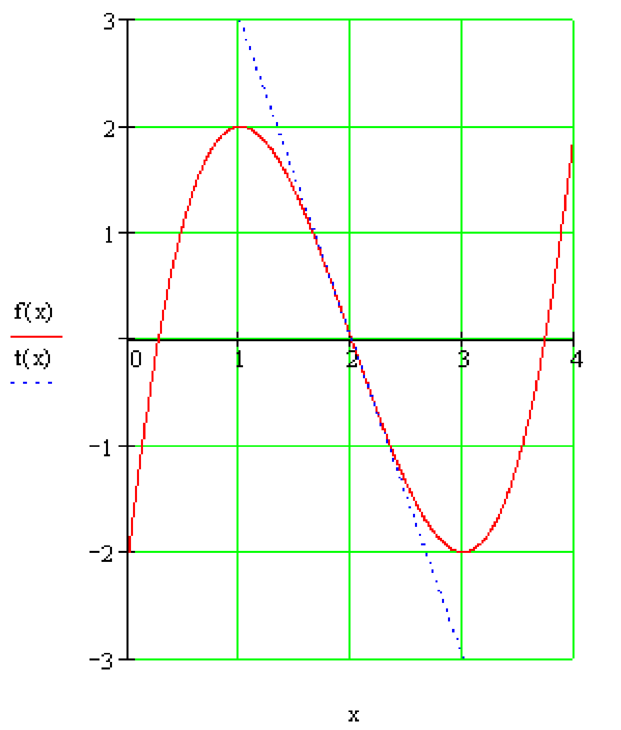
$P_{x1}(2|0) \quad P_{x2}(3.7|0)$

$P_{x3}(0.3|0)$ 　 د y−

محور سره غِوڅټکی(دقاطع):

$P_y(0|-2)$

$f(x) := x^3 - 6x^2 + 9x - 2 \qquad t(x) := -3x + 6$



يوغږيزوالی(مونوتوني ياجگ - ټيتوالی) په

$I_1 = \{x \mid -\infty < x \leq 1\}_{\mathbb{R}}$ کې

يوغږيز جگيږي. په

$I_3 = \{x \mid 3 \leq x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ کې

يوغږيز جگيږي.

د تابع حالت په $x \to -\infty$ او $x \to \infty$ کې

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right) = \infty$$

سيومتري: نه لري

د کږوالي يا انحنا حالت:

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنی کږوالی یا انحنا(وتلی یا محدب) : $I_4 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{IR}$

کیڼ کږوالی یا انحنا (مقعریت یا ننوتوالی) : $I_5 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{IR}$

بیلګه۱ : لومړی: تعریفورشو:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x \qquad \boxed{D = \mathbb{R}}$$

دویم: سیومتري:

ټکی سیومتریک؛ f(-x)=-f(x) ځکه چې فقط ناجوړه یا طاق جګعدد

دریم: افراطیت:

مشتق:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 4 \Rightarrow f''(x) = -2x \Rightarrow f'''(x) = -2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \text{ bzw. } x_2 = -2$$

$$f''(x_1) = f''(2) = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_1 = 2$$

$$f''(x_2) = f''(-2) = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_2 = -2$$

$$f(x_1) = f(2) = \frac{16}{3} \Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(2 \mid \frac{16}{3}\right)}$$

$$f(x_2) = f(-2) = -\frac{16}{3} \Rightarrow \boxed{P_{Min}\left(-2 \mid -\frac{16}{3}\right)}$$

څلورم: اوړنټکی یا نقطه انعطاف:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x = 0 \Rightarrow x_W = 0$$

$$f'''(x_W) = f'''(0) = -2 \neq 0$$

$$f(x_W) = f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_W(0 \mid 0)}$$

پنځم: مخورغوڅټکی یا نقاط تقاطع محور:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid 0)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3}x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{3}x^2 + 4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

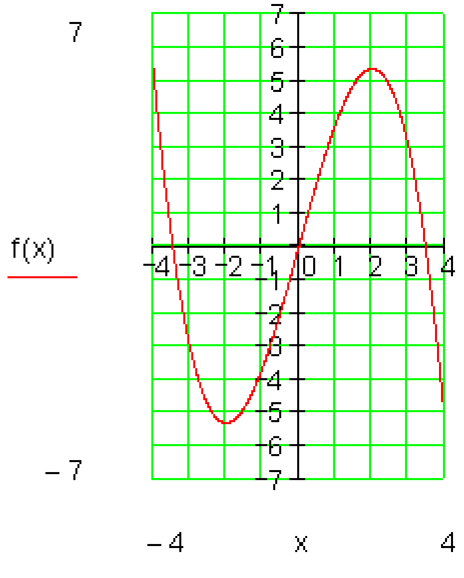
$$-\frac{1}{3}x^2+4=0 \Leftrightarrow x^2-12=0 \Rightarrow x_2=\sqrt{12} \text{ bzw. } x_3=-\sqrt{12}$$

ضفرځایونه: $\boxed{P_{x1}(0|0)}$; $\boxed{P_{x2}(\sqrt{12}|0)}$; $\boxed{P_{x3}(-\sqrt{12}|0)}$

شپږم: ارزښتجدول او ګراف:

$$f(-4)=5,3;\ f(4)=-5,3;\ f(-3)=-3;\ f(3)=3;\ f(-1)=-3,7;\ f(1)=3,7$$

		P_{x3}		P_{Min}		P_y P_W P_{x1}		P_{Max}		P_{x2}	
x	−4	$-\sqrt{12}$	−3	−2	−1	0	1	2	3	$\sqrt{12}$	4
f(x)	5,3	0	−3	$-5,\bar{3}$	−3,7	0	3,7	$5,\bar{3}$	3	0	−5,3



اووم: کږوالي حالت او يوغږيزوالی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x0=-2 لپاره (کيڼ له P_w) $f''(-2) > 0$ له دې لاس ته راځي کيڼ کوږوال(ننوتی يا کونوکس)$]-\infty;0[$

د x0=2 لپاره (ښي له P_w) $f''(2) < 2$ له دې لاس ته راځي ښي کوږوالی(کونکاو يا وتلی) $]0;-\infty[$

يوغويزوالی:

د $]-\infty;0[$ لپاره کرهيوغږيز ټيټيدونکی يا لويدونکی

د $]0;-\infty[$ لپاره کره يوغږيز جګيدونکی

د $]2;\infty[$ لپاره کره يوغږيز ټيټيدونکی يا لويدونکی

اتم: د تعريفورشو ژۍ شرايط:

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{3}x^3+4x\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(-\frac{1}{3}+\frac{4}{x^2}\right)\\
&= \lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{3}+\frac{4}{x^2}\right)}_{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}\cdot \lim_{x\to-\infty} x^3 = \infty\\
&\lim_{x\to\infty} f(x) = -\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to\infty} x^3 = -\infty
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty\\ &\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty\end{aligned}}$$

بيلګه ۲ :

لومړی:

$$f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 \qquad \boxed{D = \mathbb{R}}$$

دويم: سيمتري:

سيومتري نه شته.

دريم: افراطيت:

مشتق:

$$f(x) = f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{8}x - \frac{3}{4} \Rightarrow f$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{8}x - \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'''(x) =$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{3}{16}x - \frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{3}{16}x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_2 = 4$$

$$f''(x_1) = f''(0) = -\frac{3}{4} < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''(4) = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_2 = 4$$

$$f(x_1) = f(0) = 2 \Rightarrow \boxed{P_{Max}(0|2)}$$

$$f(x_2) = f(4) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{Min}(4|0)}$$

څلورم:اوړنټکی یا نقطه انعطاف:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_W = 2$$

$$f'''(x_W) = f'''(2) = \frac{3}{8} \neq 0$$

$$f(x_W) = f(2) = 1 \Rightarrow \boxed{P_W(2|1)}$$

پنځم: محور غوڅتکي:

$$f(0) = 2 \Rightarrow \boxed{P_y(0|2)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2 = 0$$

د P_{min} شمیرنه په دې معنا وګورۍ لوړی صفرځای x1=4.
هورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{l|cccc} & \frac{1}{16} & -\frac{3}{8} & 0 & 2 \\ x=4 & & \frac{4}{16} & -\frac{1}{2} & -2 \\ \hline & \frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array} \Rightarrow \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_2 = 4 ; x_3 = -2$$

صفرځایونه: $\boxed{P_{x1/2}(4|0)}$; $\boxed{P_{x3}(-2|0)}$

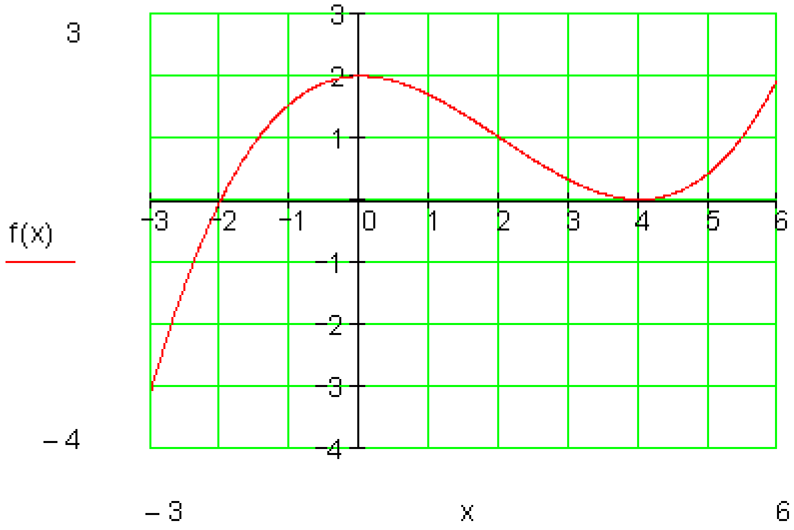
شپږم: ارزښتجدول او ګراف:

ارزښتجدوال:

$$f(-3) \approx -3{,}06 ; f(-1) \approx 1{,}56 ; f(1) \approx 1{,}67 ; f(3) \approx 0{,}31 ; f(5) \approx 0{,}44 ; f(6) = 2$$

		P_{x3}		P_{Max}		P_W		P_{Min} $P_{x1/2}$		
x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
f(x)	−3,06	0	1,56	2	1,67	1	0,31	0	0,44	2

ګراف:



(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم: ګږوالی(ننوتوالی یا مقعربیت) او یوغږیزوالی:
اووم: کږوالي حالت او یوغږیزوالی:
د x0=-2 لپاره (کينږ له P_W) f''(0)=- ¾<0 له دې لاس ته راځي ښې کوږوال(ننوتی یا کونوکس)$]-\infty;2[$

د x0=2 لپاره (ښي له P_W) f''(4) = ¾ > 0 له دې لاس ته راځي کيڼ کوږوالی(کونکاو یا وتلی) $]2;\infty[$
یوغویزوالی:
د $]-\infty;0[$ لپاره کره یوغږیز جګیدونکی
د $]0;4[$ لپاره کره یوغږیز ټیټیدونکی
د $]4;\infty[$ لپاره کره یوغږیز جګیدونکی

اتم: د تعریفورشو ژی شرایط؛

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{16}x^3-\frac{3}{8}x^2+2\right) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(\frac{1}{16}-\frac{3}{8x}+\frac{2}{x^3}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x^3\cdot\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{16}-\frac{3}{8x}+\frac{2}{x^3}\right)}_{\frac{1}{16}} = \frac{1}{16}\cdot\lim_{x\to-\infty}x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{16}\cdot\lim_{x\to\infty}x^3 = \infty \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty\end{array}}$$

بیلګه ۳ :
لومړی: تعریفورشو:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x(x+3)^3 = -\frac{1}{2}x^4-\frac{9}{2}x^3-\frac{27}{2}x^2-\frac{27}{2}x \qquad \boxed{D=\mathbb{R}}$$

دویم: سیمتري: سیوتتري نه شته.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: افراطیت: مشتق د صرب له لارې(قانون)

$$f(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}x}_{u}\underbrace{(x+3)^3}_{v} \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$u = -\frac{1}{2}x\ ;\ v = (x+3)^3\ ;\ u' = -\frac{1}{2}\ ;\ v' = 3(x+3)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x)} = -\frac{1}{2}(x+3)^3 - \frac{3}{2}x(x+3)^2 = \boxed{-\frac{1}{2}(x+3)^2(4x+3)}$$

$$f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{2}(x+3)^2}_{u}\underbrace{(4x+3)}_{v} \Rightarrow f''(x) = u'v + uv'$$

$$u = -\frac{1}{2}(x+3)^2\ ;\ v = 4x+3\ ;\ u' = -(x+3)\ ;\ v' = 4$$

$$\Rightarrow \boxed{f''(x)} = -(x+3)(4x+3) - \frac{1}{2}(x+3)^2 \cdot 4 = \boxed{-3(x+3)(2x+3)}$$

$$f''(x) = \underbrace{-3(x+3)}_{u}\underbrace{(2x+3)}_{v} \Rightarrow f'''(x) = u'v + uv'$$

$$u = -3(x+3)\ ;\ v = 2x+3\ ;\ u' = -3\ ;\ v' = 2$$

$$\Rightarrow \boxed{f'''(x)} = -3(2x+3) - 3(x+3)\cdot 2 = \boxed{-(12x+27)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x+3)^2(4x+3) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -3\ ;\ x_3 = -\frac{3}{4}$$

$$f''(x_{1/2}) = f''(-3) = 0 \Rightarrow$$

د افراطیت په هکله وینا نه شته

$$f''(x_3) = f''\left(-\frac{3}{4}\right) = -3\left(-\frac{3}{4}+3\right)\left(2\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+3\right) = -\frac{81}{8} = -10,125 < 0$$

لاس ته راځي: د $x_3 = -\frac{3}{4}$ لپاره نسبي افراطیت

$x_{1/2} = -3$ د f'(x) دبل صفرځای دی، دا په دې معنا چې د f'(x) مخنخښې بدلون د

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

x=-3 په ځا کي نه شته. دا په دې معنا چې $x_{1/2} = -3$ دافراطي ځای نه دي.

$$f(x_3) = f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}+3\right)^3 = \frac{2187}{512} \approx 4,27$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(-\frac{3}{4} \middle| \frac{2187}{512}\right) \text{ bzw. } P_{Max}(-0,75 \mid 4,27)}$$

څلورم: اوړونټکي يا نقاط انعطاف: د لاندې الماني پښتو: اوړونټکی.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3(x+3)(2x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = -3;\ x_2 = -\frac{3}{2}$$

$$f'''(x_1) = f'''(-3) = -(12\cdot(-3)+27) \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W1} = -3$$

$$f'''(x_2) = f'''\left(-\frac{3}{2}\right) = -\left(12\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+27\right) \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W2} = -\frac{3}{2}$$

$$f(x_{W1}) = f(-3) = -\frac{1}{2}\cdot(-3)(-3+3)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{W1}(-3 \mid 0)}$$

$$f(x_{W2}) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}+3\right)^3 = \frac{81}{32} \approx 2,53$$

$$\Rightarrow \boxed{P_{W2}\left(-\frac{3}{2} \middle| \frac{81}{32}\right) \text{ bzw. } P_{W2}(-1,5 \mid 2,53)}$$

پنځم: محورغوڅتکي:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid 0)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x(x+3)^3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_{2/3/4} = -3$$

صفرځايونه: $\boxed{P_{x1}(0 \mid 0)};\ \boxed{P_{x2/3/4}(-3 \mid 0)}$

شپږم: ارزښتجدول او ګراف:

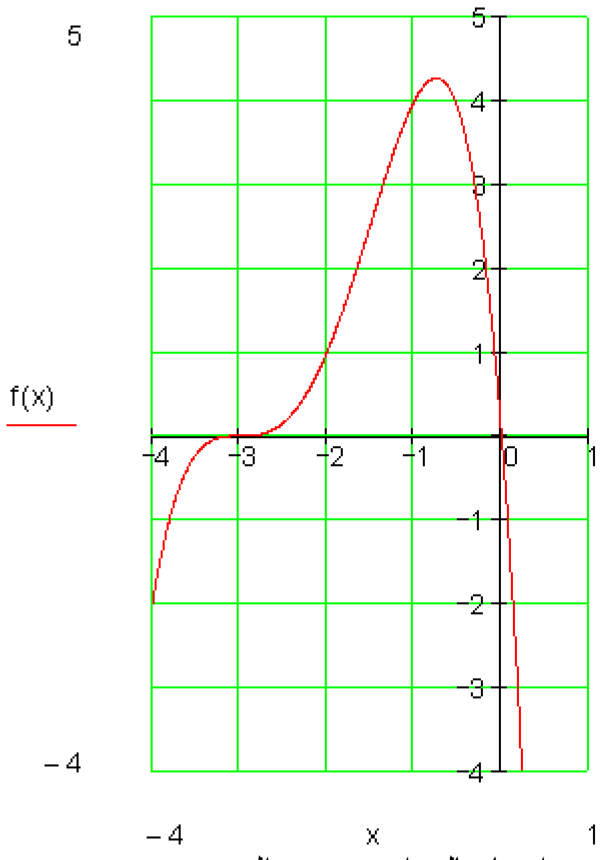
ارزښتجدول:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(-4) = -2;\ f(-2) = 1;\ f(-1) = 4;\ f(0,5) \approx -10,72$

		P_{W1} $P_{x2/3/4}$		P_{W2}		P_{Max}	P_{x1}	
x	−4	−3	−2	−1,5	−1	−0,75	0	0,5
f (x)	−2	0	1	2,53	4	4,27	0	−10,72

ګراف:



اووم: د انحنا حالت او یوغږیزوالی:
اووم: کږوالي حالت او یوغږیزوالی:
د $x0=-2$ لپاره (کېن له P_W) $f''(-2) > 0$ له دې لاس ته راځي کېن کوږوال(ننوتی یا کونوکس) $]-\infty; 0[$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x0=2$ لپاره (ښي له P_W) $f''(2) < 2$ له دې لاس ته راځي ښي کوږوالی(کونکاو یا وتلی) $]0; -\infty[$

یوغویزوالی:

د $]-\infty; 0[$ لپاره کرهیوغږیز ټیټیدونکی یا لویدونکی

د $]-\infty; 0[$ لپاره کره یوغږیز جګیدونکی

د $]2; \infty[$ لپاره کره یوغږیز ټیټیدونکی یا لویدونکی

کږوالی:

د $x_0 = -4$ لپاره (کیڼ له P_{W1}) $f''(-4) = -5 < 0$

لاس ته راځي ښی کوږوالی (کونوکس)$]-\infty; -3[$

د$x_0 = -2$ لپاره (ښي له P_{W1}) $f''(-2) = 1 > 0$

لاس ته راځي کیڼ کوږالی (کونوکس) $]-3; -1,5[$

د $x_0 = -1$ لپاره (ښی له P_{W2}) $f''(-1) = -2 < 0$

لاس ته راځي ښی کوږوالی(کونکاو) $]-1,5; -\infty[$

یوغږیزوالی:

د مخامخ انتروال لپاره کره یوغږیز جګیدوکی	$\left]-\infty; -3\right[$
د مخامخ انتروال لپاره کره یوغږیز جګیدونکی	$\left]-3; -\frac{3}{4}\right[$
د مخامخ انتروال لپاره کره یوغږیز ټیټیدونکی	$\left]-\frac{3}{4}; \infty\right[$

اتم: د تعریفورشو ژۍ ټکي:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x^4 - \frac{9}{2}x^3 - \frac{27}{2}x^2 - \frac{27}{2}x\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^4\left(-\frac{1}{2} - \frac{9}{2x} - \frac{27}{2x^2} - \frac{27}{2x^3}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2} - \frac{9}{2x} - \frac{27}{2x^2} - \frac{27}{2x^3}\right)}_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to-\infty} x^4 = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to\infty} x^4 = -\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه۴ :

لومړی:تعریفورشو:

$$f(x) = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \qquad \boxed{D = \mathbb{R}}$$

دویم: محورسیومتري: $f(-x) = f(x)$ ځکه چې فقط جوړه(جغت) اکسپوننتونه

دریم: افراطیت:

مشتقونه یا رابیلیدني:

$$f(x) = -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} \Rightarrow f'(x) = -4x^3 + 9x \Rightarrow f''(x) = -12x^2 + 9 \Rightarrow f'''(x) = -24x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 9x = 0 \Leftrightarrow x\left(-4x^2 + 9\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-4x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\frac{3}{2}$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 9 > 0 \Rightarrow \text{rel Min für } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{3}{2}\right) = -18 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_2 = \frac{3}{2}$$

$$f''(x_3) = f''\left(-\frac{3}{2}\right) = -18 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_3 = -\frac{3}{2}$$

$$f(x_1) = f(0) = -\frac{81}{16} \approx -5{,}06 \Rightarrow \boxed{P_{Min}\left(0 \mid -\frac{81}{16}\right) \text{ bzw. } P_{Min}(0 \mid -5{,}06)}$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{Max1}\left(\frac{3}{2} \mid 0\right) \text{ bzw. } P_{Max1}(1{,}5 \mid 0)}$$

$$f(x_3) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{Max2}\left(-\frac{3}{2} \mid 0\right) \text{ bzw. } P_{Max2}(-1{,}5 \mid 0)}$$

څلورم: اوړنټکی یا د انعطاف ټکی:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -12x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$f'''(x_1) = f'''\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -24 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \neq 0 \Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $x_{W1} = \sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,87$ کې اوړونټکی(انعطاف-)

$f'''(x_2) = f'''\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -24 \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right) \neq 0$ لاس ته راځي: په $x_{W2} = -\sqrt{\frac{3}{4}} \approx -0,87$

کې اوړونټکی(انعطاف-)

$$f(x_{W1}) = f\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -\frac{9}{4} = -2,25 \Rightarrow \boxed{P_{W1}\left(\sqrt{\frac{3}{4}} \mid -\frac{9}{4}\right) \text{ bzw. } P_{W1}(0,87 \mid -2,25)}$$

$$f(x_{W2}) = f\left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -\frac{9}{4} = -2,25 \Rightarrow \boxed{P_{W2}\left(-\sqrt{\frac{3}{4}} \mid -\frac{9}{4}\right) \text{ bzw. } P_{W1}(-0,87 \mid -2,25)}$$

پنځم: محورغوځتکي:

$$f(0) = -\frac{81}{16} \approx -5,06 \Rightarrow \boxed{P_y\left(0 \mid -\frac{81}{16}\right) \text{ bzw. } P_y(0 \mid -5,06)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16} = 0$$

تراوسه معلوم صفرځایونه $x_1 = \frac{3}{2};\ x_2 = -\frac{3}{2}$ (افراطي ټکي وکوری)

پولینوموېش:

$$\left(-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}\right) : \underbrace{\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right)}_{x^2 - \frac{9}{4}}$$

$$\left(-x^4 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{16}\right) : \left(x^2 - \frac{9}{4}\right) = -x^2 + \frac{9}{4}$$

$$\underline{-\left(-x^4 + \frac{9}{4}x^2\right)}$$

$$\frac{9}{4}x^2 - \frac{81}{16}$$

$$-\left(\frac{9}{4}x^2 - \frac{81}{16}\right)$$

$$-x^2 + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow x_{3/4} = \pm\frac{3}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

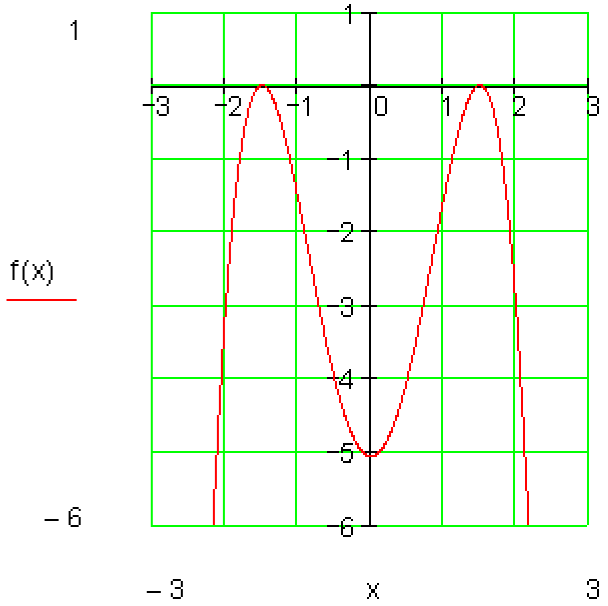
صفرځايونه: $\boxed{P_{x1/2}\left(\frac{3}{2}\,|\,0\right)}; \boxed{P_{x3/4}\left(-\frac{3}{2}\,|\,0\right)}$

شپږم: ارزښت جدول او ګراف:

ارزښتجدول:

$f(-2) \approx -3{,}06 = f(2);\ f(-1) \approx -1{,}56 = f(1)$

		P_{Max2} $P_{x3/4}$		P_{W2}	P_{Min} P_y	P_{W1}		P_{Max1} $P_{x1/2}$	
x	−2	−1,5	−1	−0,87	0	0,87	1	1,5	2
f (x)	−3,06	0	−1,56	−2,25	−5,06	−2,25	−1,56	0	−3,06



اووم: کږوالی يا انحنا:

اووم: کږوالي حالت او يوغږيزوالی:

د x0=-2 لپاره (کين له P_W) f''(-2) > 0 له دې لاس ته راځي کين کوږوال(ننوتی يا کونوکس)]0; ∞ −]

د x0=2 لپاره (ښي له P_W) f''(2) < 2 له دې لاس ته راځي ښي کوږوالی(کونکاو يا وتلی)]0; −∞[

يوغويزوالی:

د]0; ∞ −] لپاره کرهيوغږيز تيتيدونکی يا لويدونکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $]-\infty;0[$ لپاره کره یوغړیز جګیدونکی

د $]2;\infty[$ لپاره کره یوغړیز ټیټیدونکی یا لویدونکی

کږوالی:

د x_0 =-1 لپاره (د P_{W1} او P_{W2}ترمنځ) $f''(-1) = -3 < 0$

له دې لای ته راځي ښي کږوالی (وتلی یا محدب؟) $\left]-\infty;-\sqrt{\frac{3}{4}}\right[$

د $x_0 = 0$ لپاره (د P_{W1} او P_{W2}ترمنځ) $f''(0) = 9 > 0$

له دې لای ته راځي ښي کږوالی کیڼ کږوالی: (ننوتی؟) $\left]-\sqrt{\frac{3}{4}};\sqrt{\frac{3}{4}}\right[$

د $x_0 = 1$ لپاره (له P_{W1}څخه ښی) $f''(1) = -3 < 0$

له دې لای ته راځي ښي کږوالی (وتلی یا محدب؟) $\left]\sqrt{\frac{3}{4}};\infty\right[$

یوغړیزوالی: د مخامخ لپاره کره یوغړیز جګیدونکی د مخامخ لپاره کره یوغړیز ټیټیدونکی د مخامخ لپاره کره یوغړیز جګیدونکی د مخامخ لپاره کره یوغړیز ټیټیدونکی	$]-\infty;-1,5[$ $]-1,5;0[$ $]0;1,5[$ $]1,5;\infty[$

اتم: د تعریفورشو ژی ټکي:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-x^4+\frac{9}{2}x^2-\frac{81}{16}\right) = \lim_{x\to-\infty} x^4\left(-1+\frac{9}{2x^2}-\frac{81}{16x^4}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{9}{2x^2}-\frac{81}{16x^4}\right)}_{-1} = -1\cdot \lim_{x\to-\infty} x^4 = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -1\cdot \lim_{x\to\infty} x^4 = -\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلگه:

۱ – تعريف – يا پيژندورشو:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 \qquad \boxed{D = \mathbb{R}}$$

۲ – سيومتري: سيومتري نه شته

۳ – افراطيت-

مشتق

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 \Rightarrow f'(x) = -x^3 + 3x^2 \Rightarrow f''(x) = -3x^2 + 6x \Rightarrow f'''(x) = -6x + 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(-x + 3) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0;\ x_3 = 3$$

$$f''(x_1) = f''(0) = 0 \Rightarrow$$

په $x_1 = 0$ كي په افراطي ځاى كومه ويينه يا افاده نه شته

مگر دا چې $x_{1/2} = 0$ د f‘(x) دبل صفرځاى دى د f‘(x) لپاره په $x_{1/2} = 0$ ځاى

كي د مخنخبي بدلون نه شته له دي لاس ته راځى، چې په $x_1 = 0$ كي افراطي ځايونه

نه شته

$$f''(x_3) = f''(3) = -9 < 0 \Rightarrow \text{rel Max für } x_3 = 3$$

$$f(x_3) = f(3) = \frac{27}{4} = 6{,}75 \Rightarrow \boxed{P_{Max}\left(3 \mid \frac{27}{4}\right) \text{ bzw. } P_{Max}(3 \mid 6{,}75)}$$

۴ - اوړونټكى يا انعطافټكى: (لاندې الماني: په ... كي اوړونټكى)

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(-3x + 6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 = 2$$

$$f'''(x_1) = f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W1} = 0$$

$$f'''(x_2) = f'''(2) = -6 \neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt bei } x_{W2} = 2$$

$$f(x_{W1}) = f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_{W1}(0 \mid 0)}$$

$$f(x_{W2}) = f(2) = 4 \Rightarrow \boxed{P_{W2}(2 \mid 4)}$$

۵ – محورغوځتكي:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid 0)}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^4 + x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3\left(-\frac{1}{4}x + 1\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2/3} = 0;\ x_4 = 4$$

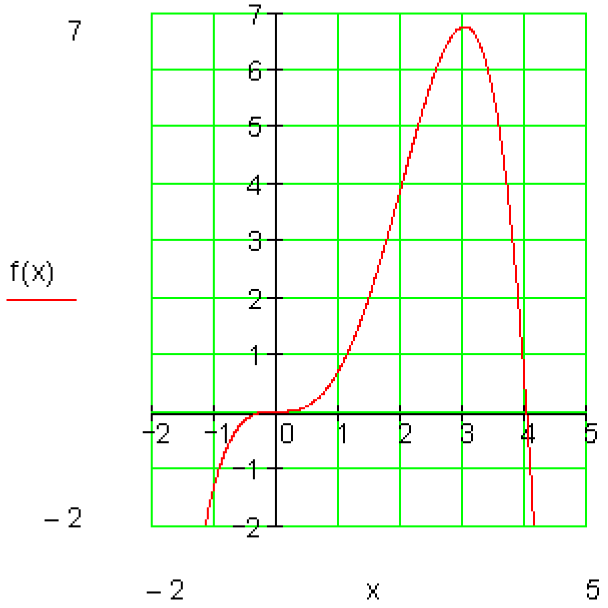
صفرځايونه: $\boxed{P_{x1/2/3}(0 \mid 0)};\ \boxed{P_{x4}(4 \mid 0)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارزښتجدول او ګراف :ارزښتجدول

$f(-1) = -1,25;\ f(1) = 0,75;\ f(4,2) = -3,7$

		P_{W1} $P_{x1/2/3}$ P_y		P_{W2}	P_{Max}	P_{x4}	
x	−1	0	1	2	3	4	4,2
f(x)	−1,25	0	0,75	4	6,75	0	−3,7



کږوالي حالت او یوغږیزوالی:

کږوالی:

د $x_0 = -1$ لپاره (د P_{W1} کیڼ لور ته) $f''(-1)=-9<0$ له دې لاس ته راځي: ښی کږوالی(وتلی) $]-\infty;-0[$

د $x_0 = 1$ لپاره (دP_{W1}او P_{W2} ترمنځ) $f''(1)=3>0$لاس ته راځي: کیڼ کوږوالی (ننوتی) $]0;2[$

د $x_0 = 3$ لپاره (ښی له P_{W2}) $f''(3)=-9<0$ لاس ته راځي: ښي کږوالی(وتلی)

یوغږیزوالی: $]2;\infty[$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مخامخ لپاره کره یوغریز جګیدونکی	$]-\infty ; 0[$
د مخامخ لپاره کره یوغریز جګیدونکی	$]0 ; 3[$
د مخامخ لپاره کره یوغریز ټیټیدونکی	$]3 ; \infty[$

اتم: د تعریفورشو ژی ټکي:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{4}x^4 + x^3\right) = \lim_{x\to-\infty} x^4\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^4 \cdot \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{x}\right)}_{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4}\cdot \lim_{x\to-\infty} x^4 = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\frac{1}{4}\cdot \lim_{x\to\infty} x^4 = -\infty$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty}$$

افراطي ارزښتونه

تمرینونه د کور کار**I** :

د دریمې درجې ټول یا تام راشنل توابعو افراطي ټکي

د لاندې ټول راشنل(هوښیار) توابعو افراطي ارزښتونه مطالعه کړی او په ممکنه حالت کې یې انحرافي ټکي پیدا کړی.

اول - $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$ دویم - $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2$

دریم - $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$ څلورم - $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم - $f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{26}{9}$ شپږم - $f(x)=\frac{2}{5}x^3-\frac{22}{5}x^2+14x-10$

اوم - $f(x)=\frac{1}{9}x^3-x^2+3x$ اتم- $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+4$

نهم - $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-4$ لسم - $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-3$

حلونه

تمرينونه: مشتقشميرنه **I**

نتيجې او مفصل حلونه

نتيجې

اول - $P_{Max}(-2|4)$ $P_{Min}(2|-4)$

دويم - $P_{Max}\left(\frac{8}{3}\approx 2,67 \;\middle|\; \frac{128}{27}\approx 4,74\right)$ $P_{Min}(0|0)$

دريم - $P_{Max}\left(\frac{4}{3}\approx 1,33 \;\middle|\; \frac{128}{27}\approx 4,74\right)$ $P_{Min}(4|0)$

څلورم - $P_{Max}\left(\frac{5}{3}\approx 1,67 \;\middle|\; \frac{128}{27}\approx 4,74\right)$ $P_{Min}(-1|0)$

پنځم - $P_{Max}(-2|6)$ $P_{Min}(4|-6)$

شپږم - $P_{Max}\left(\frac{7}{3}\approx 2,33 \;\middle|\; \frac{512}{135}\approx 3,79\right)$ $P_{Min}(5|0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوم - انحرافي ټکي نه شته اتم - $P_{Max}(0|4)$ $P_{Min}(4|-4)$

نهم - انحرافي ټکي شتون نه لري.

لسم - $P_{Max}\left(-1-\sqrt{3} \mid 3{,}131\right)$ $P_{Min}\left(-1+\sqrt{3} \approx 0{,}732 \mid -3{,}797\right)$

پام: د انحرافي ټکو کې رینه وه، نو د جبشمېري سره دې شمېرنه وشي، ځکه چې پرته له دې به شمېرنه ډېر وخت ونیسي.

مفصل حلونه

اول – مفصل حل

شمیرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x \qquad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3 \qquad f''(x) = \frac{3}{2}x$$

- د افقي یا پروت محور سره تانجنتونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{4}x^2 - 3}_{\text{مربع مساوات}} = 0 \Big| \cdot \frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Big| + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4 \Big| \sqrt{\ } \Leftrightarrow |x| = 2 \Rightarrow x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$$

_ ازماینت چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(2) = \frac{3}{2} \cdot 2 = 3 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 2$$

$$f''(x_2) = f''(-2) = \frac{3}{2} \cdot (-2) = -3 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -2$$

- د انحرافي ارزښتونو شمېرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x_1) = f(2) = \frac{1}{4}2^3 - 3\cdot 2 = \frac{8}{4} - 6 = 2 - 6 = -4$$

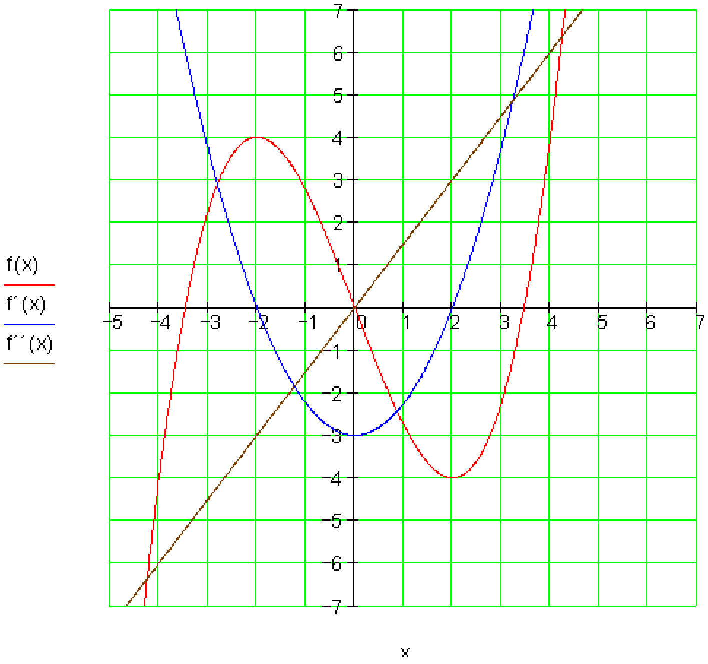
$$f(x_2) = f(-2) = \frac{1}{4}(-2)^3 - 3\cdot(-2) = -\frac{8}{4} + 6 = -2 + 6 = 4$$

- انحرافي ټکي:

$$P_{Min}(2| -4) \qquad P_{Max}(-2| 4)$$

ګرافونه:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x \qquad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3 \qquad f''(x) = \frac{3}{2}x$$



دویم – مفصل حل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شمیرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 \qquad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x \qquad f''(x) = -3x + 4$$

2 - د پروت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{3}{2}x^2 + 4x}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \Leftrightarrow x\left(-\frac{3}{2}x + 4\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-\frac{3}{2}x + 4 = 0 | \cdot (-1) \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 4 = 0 | + 4 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = 4 | \cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3} \Rightarrow \quad x_2 = \frac{8}{3}$$

3 - ازمايښت، چې ايا يو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(0) = -3 \cdot 0 + 4 = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{8}{3}\right) = -3 \cdot \frac{8}{3} + 4 = -8 + 4 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = \frac{8}{3}$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمېرنه

$$f(x_1) = f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^3 + 2 \cdot 0^2 = 0$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{512}{27} + 2 \cdot \frac{64}{9} = -\frac{256}{27} + \frac{384}{27} = \frac{128}{27}$$

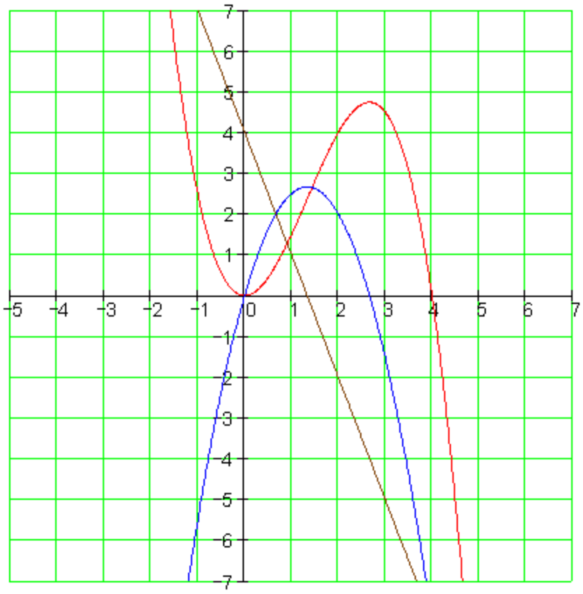
5 – انحرافي ټکي

$$\underline{\underline{P_{Min}(0|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{Max}\left(\frac{8}{3} \approx 2,67 \;\middle|\; \frac{128}{27} \approx 4,74\right)}}$$

: گرافونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 \qquad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x \qquad f''(x) = -3x + 4$$



دریم - مفصل حل:شمیرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \qquad f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 \qquad f''(x) = 3x - 8$$

2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{2}x^2 - 8x + 8}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \,|\cdot \frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{16}{3} = 0$$

$$p = -\frac{16}{3} \quad q = \frac{16}{3} \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{64}{9} - \frac{16}{3} = \frac{64}{9} - \frac{48}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \begin{vmatrix} x_1 = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} = 4 \\ x_2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \end{vmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3 - ازمایبنت، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(4) = 3\cdot 4 - 8 = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 4$$

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{4}{3}\right) = 3\cdot\frac{4}{3} - 8 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = \frac{4}{3}$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$f(x_1) = f(4) = \frac{1}{2}\cdot 4^3 - 4\cdot 4^2 + 8\cdot 4 = \frac{1}{2}\cdot 64 - 64 + 32 = 32 - 64 + 32 = 0$$

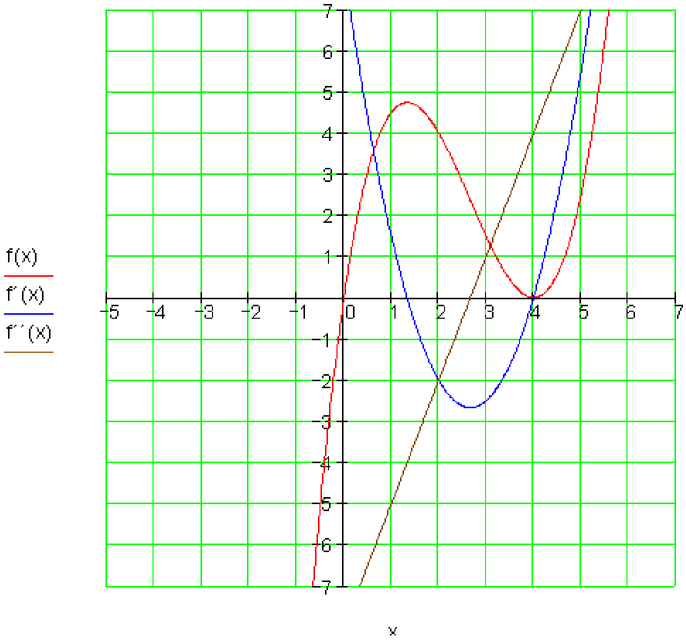
$$f(x_2) = f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 8\cdot\frac{4}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{64}{27} - 4\cdot\frac{16}{9} + \frac{32}{3}$$

$$= \frac{32}{27} - \frac{192}{27} + \frac{288}{27} = \frac{128}{27}$$

$$\underline{\underline{P_{Min}(4|\,0)}} \qquad \underline{\underline{P_{Max}\left(\frac{4}{3}\approx 1{,}33 \,\middle|\, \frac{128}{27}\approx 4{,}74\right)}}$$

5 - انحرافي ټکي:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \qquad f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 \qquad f''(x) = 3x - 8$$



ګرافونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

مفصل حل -

شميرنه: خلورم:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} \qquad f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{2} \qquad f''(x) = -3x + 1$$

2 - د پورت يا افقي تانجنت ځايونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{3}{2}x^2 + x + \frac{5}{2}}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \,\Big|\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 0$$

$$p = -\frac{2}{3} \quad q = -\frac{5}{3} \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{9} + \frac{5}{3} = \frac{1}{9} + \frac{15}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \Bigg| \quad x_1 = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \qquad x_2 = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = -1$$

3 - ازمايينت، چې ايا يو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''\left(\frac{5}{3}\right) = -3 \cdot \frac{5}{3} + 1 = -4 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = \frac{5}{3}$$

$$f''(x_2) = f''(-1) = -3 \cdot (-1) + 1 = 4 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = -1$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شميرنه

$$f(x_1) = f\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 + \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5}{3}\right) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{125}{27} + \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{9} + \frac{25}{6} + \frac{3}{2}$$

$$= -\frac{125}{54} + \frac{75}{54} + \frac{225}{54} + \frac{81}{54} = \frac{256}{54} = \frac{128}{27}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

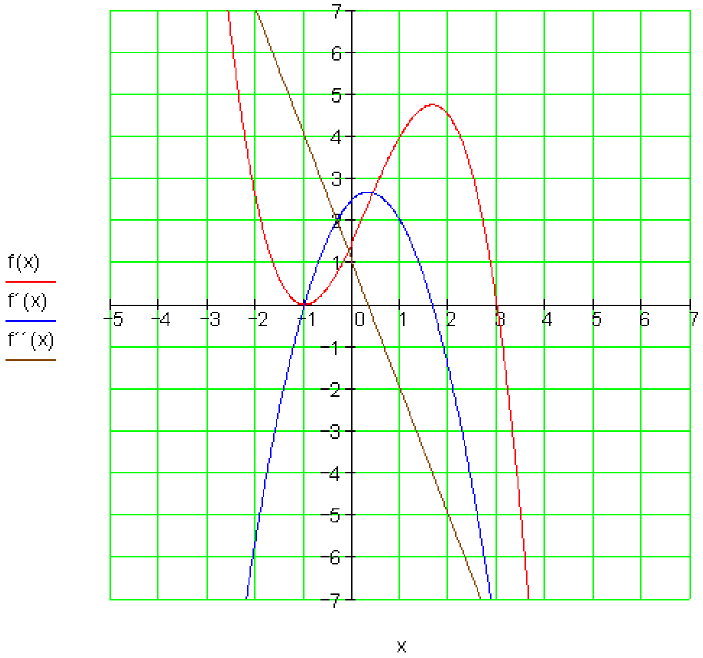
$$f(x_2)=f(-1)=-\frac{1}{2}\cdot(-1)^3+\frac{1}{2}\cdot(-1)^2+\frac{5}{2}\cdot(-1)+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=0$$

5 – انحرافي ټکي

$$\underline{\underline{P_{Min}(-1|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{Max}\left(\frac{5}{3}\approx 1,67 \,\middle|\, \frac{128}{27}\approx 4,74\right)}}$$

ګرافونه

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{3}{2} \qquad f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+x+\frac{5}{2} \qquad f''(x)=-3x+1$$



پنځم:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{26}{9} \qquad f'(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3} \qquad f''(x)=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$$

2 - د پروت يا افقي تانجنت ځايونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}}_{\text{quadratische Gleichung}}=0|\cdot 3 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0$$

$$p=-2 \quad q=-8 \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+8=9$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{9}=3 \Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left|\begin{array}{l} x_1=1+3=4 \\ x_2=1-3=-2 \end{array}\right.$$

3 - ازمایښت، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1)=f''(4)=\frac{2}{3}\cdot 4-\frac{2}{3}=\frac{6}{3}=2>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=4$$

$$f''(x_2)=f''(-2)=\frac{2}{3}\cdot(-2)-\frac{2}{3}=-\frac{6}{3}=-2<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=-2$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$f(x_1)=f(4)=\frac{1}{9}\cdot 4^3-\frac{1}{3}\cdot 4^2-\frac{8}{3}\cdot 4+\frac{26}{9}=\frac{1}{9}\cdot 64-\frac{1}{3}\cdot 16-\frac{32}{3}+\frac{26}{9}$$

$$=\frac{64}{9}-\frac{48}{9}-\frac{96}{9}+\frac{26}{9}=-\frac{54}{9}=-6$$

$$f(x_2)=f(-2)=\frac{1}{9}\cdot(-2)^3-\frac{1}{3}\cdot(-2)^2-\frac{8}{3}\cdot(-2)+\frac{26}{9}=\frac{1}{9}\cdot(-8)-\frac{1}{3}\cdot 4+\frac{16}{3}+\frac{26}{9}$$

$$=-\frac{8}{9}-\frac{12}{9}+\frac{48}{9}+\frac{26}{9}=\frac{54}{9}=6$$

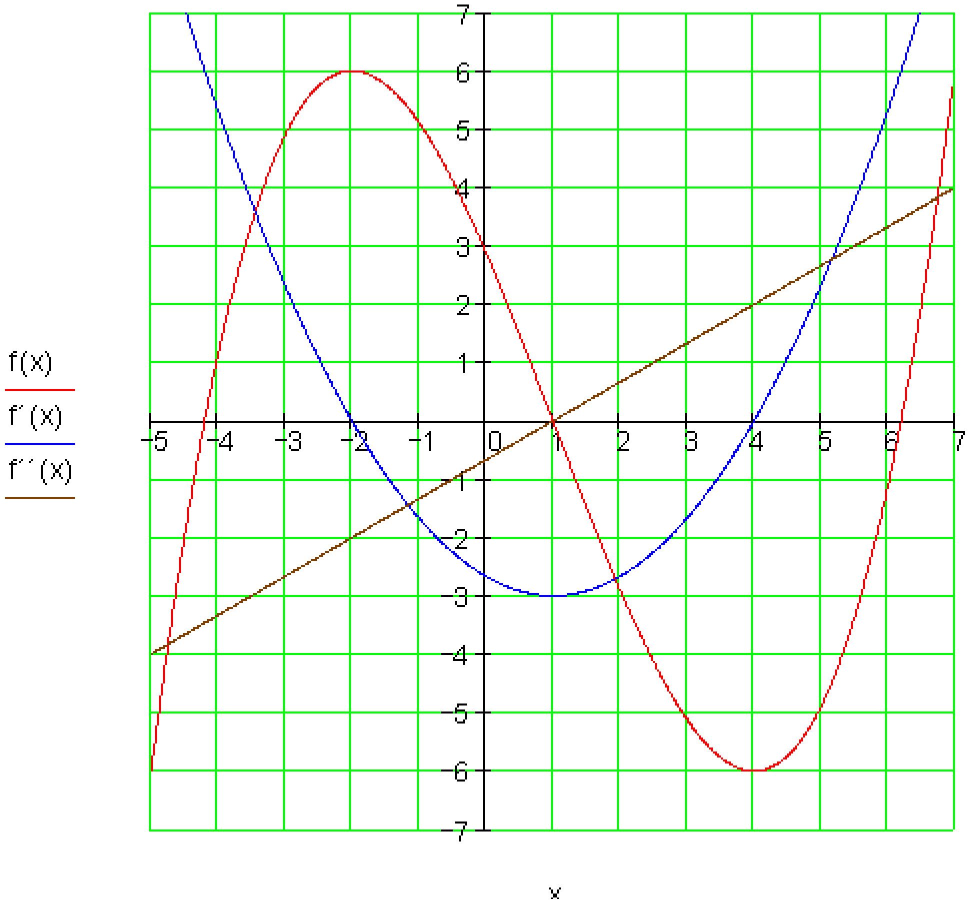
5 - افراطي ټکي

$$\underline{\underline{P_{Min}(4|-6)}} \qquad \underline{\underline{P_{Max}(-2|6)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

گرافونه

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{3}x^2-\frac{8}{3}x+\frac{26}{9} \qquad f'(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3} \qquad f''(x)=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$$



شپږم:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x)=\frac{2}{5}x^3-\frac{22}{5}x^2+14x-10 \qquad f'(x)=\frac{6}{5}x^2-\frac{44}{5}x+14 \qquad f''(x)=\frac{12}{5}x-\frac{44}{5}$$

2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{6}{5}x^2 - \frac{44}{5}x + 14 = 0}_{\text{quadratische Gleichung}} \Big| \cdot \frac{5}{6} \Leftrightarrow x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{35}{3} = 0$$

$$p = -\frac{22}{3} \quad q = \frac{35}{3} \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{121}{9} - \frac{35}{3} = \frac{121}{9} - \frac{105}{9} = \frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{11}{3} + \frac{4}{3} = \frac{15}{3} = 5 \\ x_2 = \frac{11}{3} - \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \end{array} \right.$$

3 - ازمایینت، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(5) = \frac{12}{5} \cdot 5 - \frac{44}{5} = \frac{16}{5} > 0 \Rightarrow$$

د $x_1 = 5$ په ځای کې نسپئ مینیموم

$$f''(x_2) = f''\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{12}{5} \cdot \frac{7}{3} - \frac{44}{5} = \frac{28}{5} - \frac{44}{5} = -\frac{16}{5} < 0 \Rightarrow$$

د $x_2 = \frac{7}{3}$ په ځای کې نسبئ مینیموم

4 - د انحرافي ارزښتونو شمیرنه

$$f(x_1) = f(5) = \frac{2}{5} \cdot 5^3 - \frac{22}{5} \cdot 5^2 + 14 \cdot 5 - 10 = 50 - 110 + 70 - 10 = 0$$

$$f(x_2) = f\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^3 - \frac{22}{5} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^2 + 14 \cdot \frac{7}{3} - 10 = \frac{2}{5} \cdot \frac{343}{27} - \frac{22}{5} \cdot \frac{49}{9} + \frac{98}{3} - 10$$

$$= \frac{686}{135} - \frac{3234}{135} + \frac{4410}{135} - \frac{1350}{135} = \frac{512}{135}$$

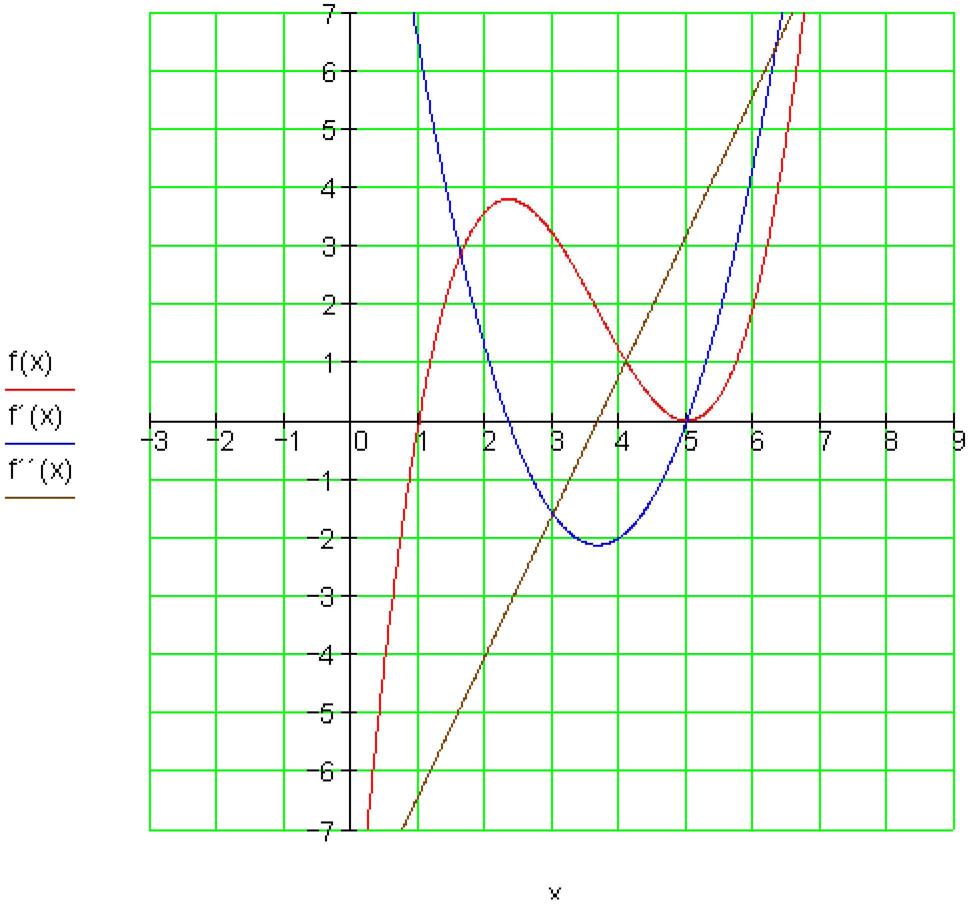
5 - انحرافي ټکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P_{Min}(5|0) \qquad P_{Max}\left(\frac{7}{3} \approx 2{,}33 \;\middle|\; \frac{512}{135} \approx 3{,}79\right)$$

ګرافونه:

$$f(x) = \frac{2}{5}x^3 - \frac{22}{5}x^2 + 14x - 10 \qquad f'(x) = \frac{6}{5}x^2 - \frac{44}{5}x + 14 \qquad f''(x) = \frac{12}{5}x - \frac{44}{5}$$

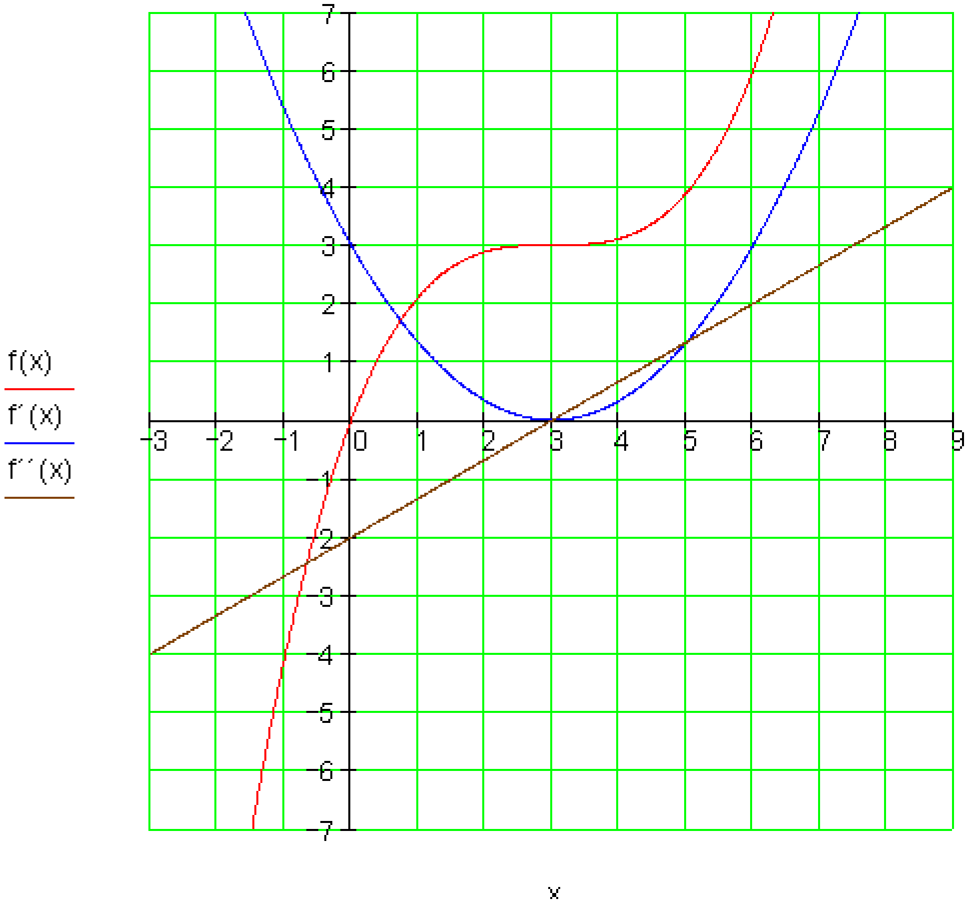


اووم: شمیرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + 3x \qquad f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 \qquad f''(x) = \frac{2}{3}x - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



2 - د پروت يا افقي تانجنت ځايونه:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{3}x^2-2x+3}_{\text{quadratische Gleichung}}=0|\cdot 3 \Leftrightarrow x^2-6x+9=0$$

$$p=-6 \quad q=9 \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=9-9=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{0}=0 \Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \;\Bigg|\; \begin{matrix} x_1=3 \\ x_2=3 \end{matrix}$$

د لومړي مشتق ډبل صفرځايونه په دې معنا دي، چي په دې ځايونو کې انحرافي ارزښتونه نه شته. ازمايښت به هم دا وښايي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

3 - ازمايښت، چې ايا يو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_{1/2}) = f''(3) = \frac{2}{3}\cdot 3 - 2 = 0 \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي، چې افراطي ټکي نه شته

ګرافونه: ګراف د تير مخ په سر کې راوړل شوياو فرمول يې دا لاندې دی.

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x^2 + 3x \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 \quad f''(x) = \frac{2}{3}x - 2$$

اتم: شميرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$$

2 - د پورت يا افقي تانجنت ځايونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{4}x^2 - 3x}_{} = 0 | \Leftrightarrow x\left(\frac{3}{4}x - 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

مربع مساوات

$$\frac{3}{4}x - 3 = 0 | + 3 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x = 3 | \cdot \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow x_2 = 4$$

3 - ازمايښت، چې ايا يو انحرافي اروښتونه مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(0) = \frac{3}{2}\cdot 0 - 3 = -3 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = 0$$

$$f''(x_2) = f''(4) = \frac{3}{2}\cdot 4 - 3 = 3 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = 4$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شميرنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

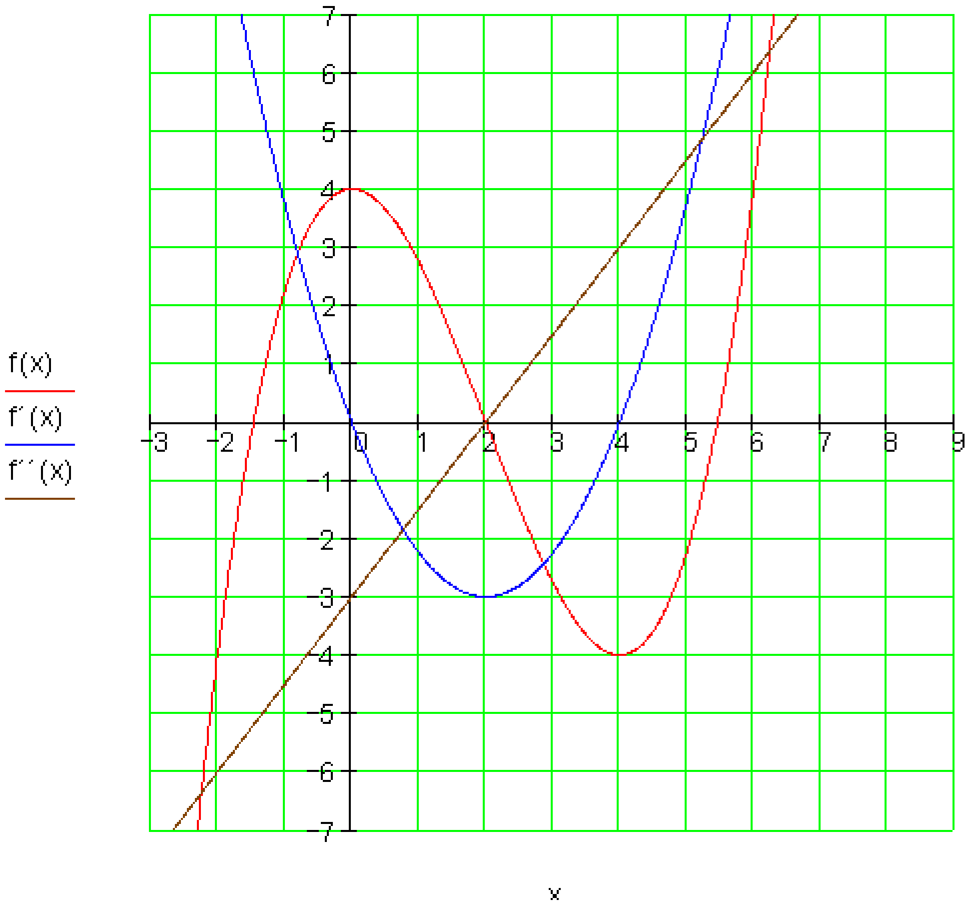
$$f(x_1) = f(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^3 - \frac{3}{2} \cdot 0^2 + 4 = 4$$

$$f(x_2) = f(4) = \frac{1}{4} \cdot 4^3 - \frac{3}{2} \cdot 4^2 + 4 = 16 - 24 + 4 = -4$$

5 - انحرافي ټکي

$\underline{\underline{P_{Min}(4|-4)}}$ $\underline{\underline{P_{Max}(0|4)}}$

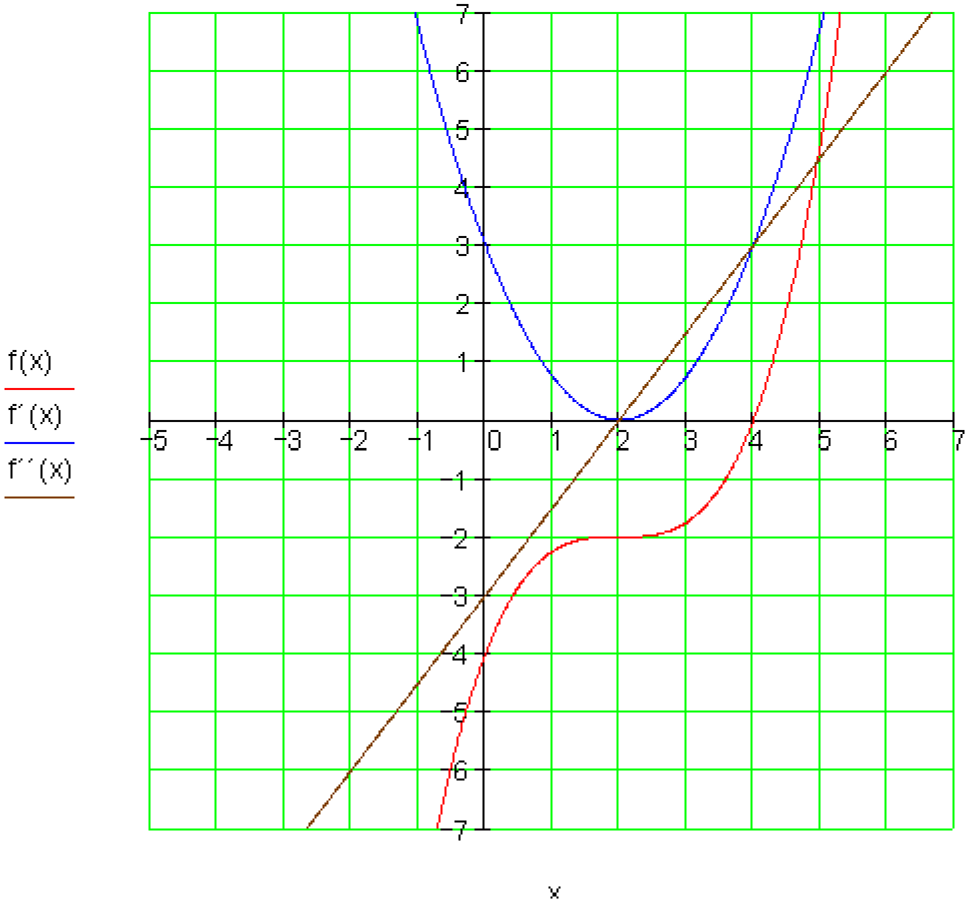
گرافونه: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4$ $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$ $f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$



نهم: شمیرنه: 1 – تابع مساوات د مشتق سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 4 \qquad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 \qquad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$$



2 - د پورت يا افقي تانجنت ځايونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{3}{4}x^2 - 3x + 3}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0 \,|\cdot \frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$p = -4 \quad q = 4 \quad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{0} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \end{array} \right.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړي مشتق ډېل صفرځايونه په دې معنا دي، چې په دې ځايونو کې انحرافي ارزښتونه نه شته. ازماينت به هم دا وښايي.

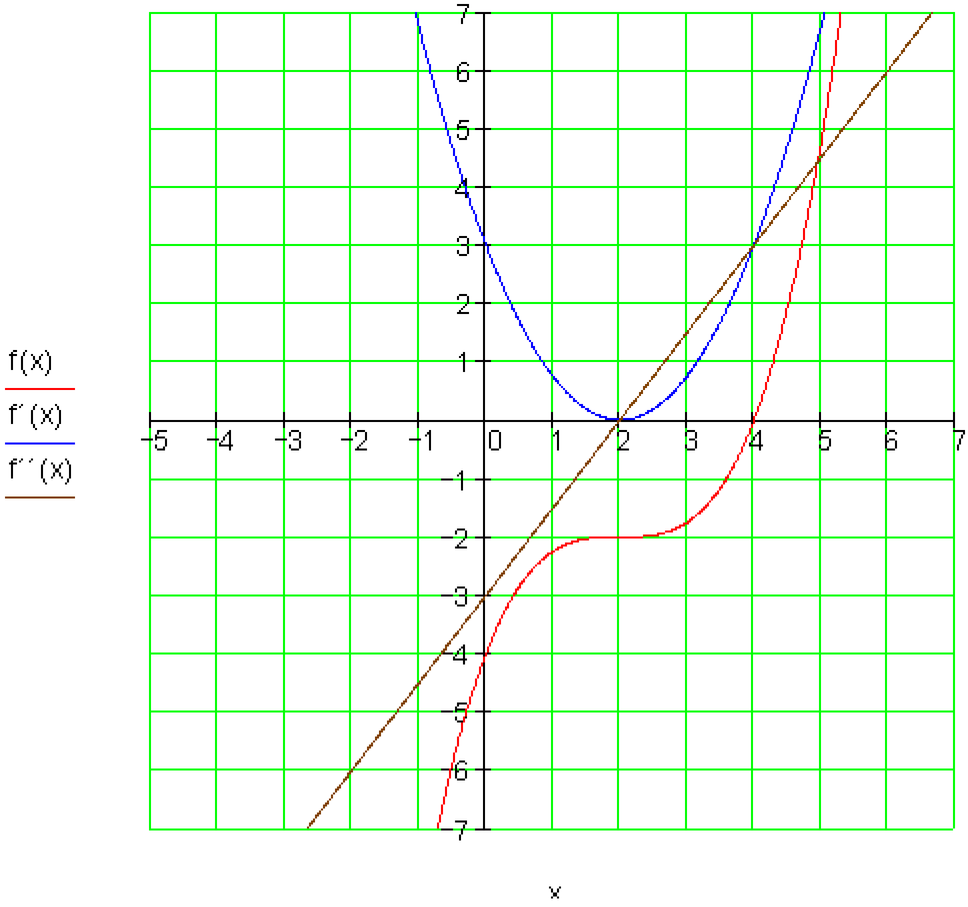
3 - ازماينت، چې ايا انحرافي ارزښتونه مخ ته لرو:

$$f''(x_{1/2}) = f''(2) = \frac{3}{2}\cdot 2 - 3 = 0 \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي، چې انحرافي ارزښتونه په $x_{1/2} = 2$ کې نه شته.

ګرافونه: ګراف په ير مخ کې او فمول يې بيا هم دل لاندې:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 4 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم: شمیرنه:

1 – تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-3 \quad f'(x)=x^2+2x-2 \quad f''(x)=2x+2$$

2 - د پورت یا افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2+2x-2}_{\text{quadratische Gleichung}}=0$$

$$p=2 \quad q=-2 \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+2=3$$

$$\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{3} \Rightarrow x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \; \left| \begin{array}{l} x_1=-1+\sqrt{3} \\ x_2=-1-\sqrt{3} \end{array} \right.$$

3 - ازماینت، چې ایا یو انحرافي ټکی مخ ته لرو:

$$f''(x_1)=f''\left(-1+\sqrt{3}\right)=2\cdot\left(-1+\sqrt{3}\right)+2=-2+2\sqrt{3}+2=2\sqrt{3}>0$$

$$\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=-1+\sqrt{3}$$

$$f''(x_2)=f''\left(-1-\sqrt{3}\right)=2\cdot\left(-1-\sqrt{3}\right)+2=-2-2\sqrt{3}+2=-2\sqrt{3}<0$$

$$\Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=-1-\sqrt{3}$$

4 - د انحرافي ارزښتونو شمېرنه

$$f(x_1)=f\left(-1+\sqrt{3}\right)=\frac{1}{3}\left(-1+\sqrt{3}\right)^3+\left(-1+\sqrt{3}\right)^2-2\left(-1+\sqrt{3}\right)-3\approx-3{,}797$$

$$f(x_2)=f\left(-1-\sqrt{3}\right)=\frac{1}{3}\left(-1-\sqrt{3}\right)^3+\left(-1-\sqrt{3}\right)^2-2\left(-1-\sqrt{3}\right)-3\approx 3{,}131$$

شمیرنه د جبشمیري سره سر ته رسیږي

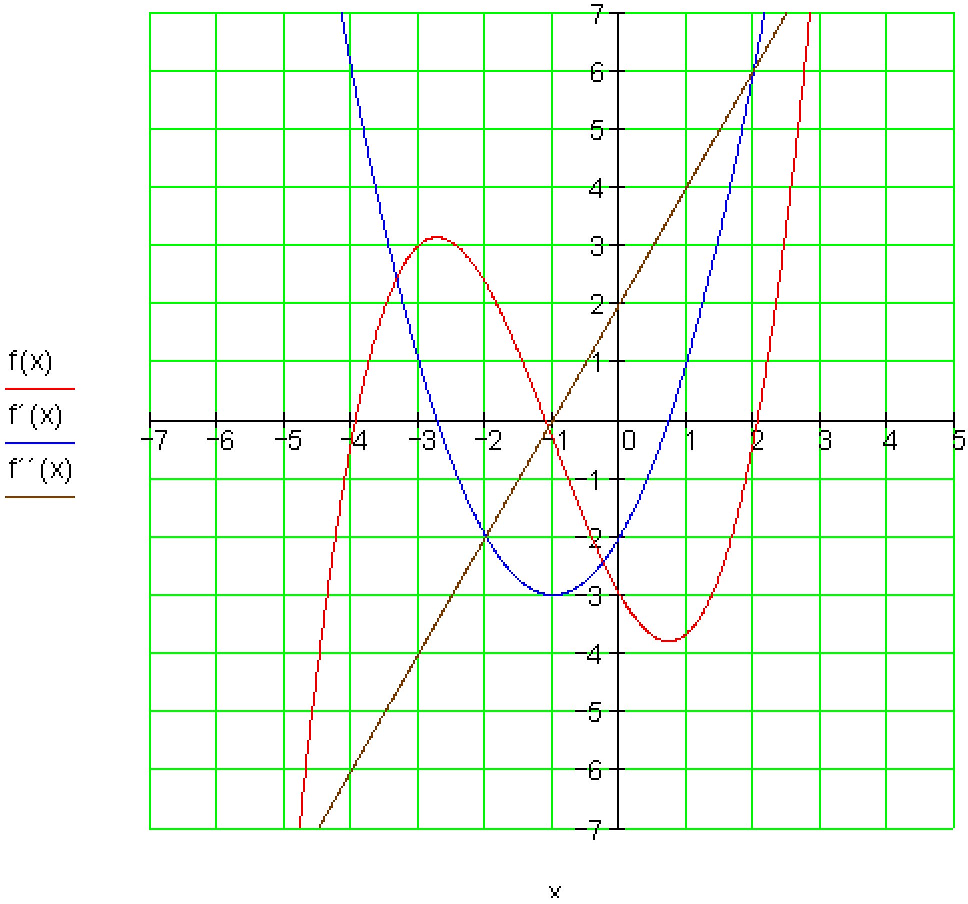
(c) ketabton.com: The Digital Library

5 - انحرافي ټکي

$P_{Min}\left(-1+\sqrt{3} \approx 0,732 \mid -3,797\right)$ $P_{Max}\left(-1-\sqrt{3} \mid 3,131\right)$

ګرافونه:

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 3$ $f'(x) = x^2 + 2x - 2$ $f''(x) = 2x + 2$



پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتقشمیرنه IX

لومړی:

د منحني ټکي د پراته تانجنت سره وشمېرئ. ایا دا د منحني ټکي انحرافي ارزښتونه دئ؟ ستا پریکړه په دلایلو روښانه کړه.

الف – $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x$ ب – $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4$ پ – $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3-2$

دویم: د تابع f(x) د ګراف انحرافي ټکي زشمېرئ. په یوه مناسب وضعیه قیمت سیستم کې یې ګراف وباسئ.	$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x$
دریم: a داسي وټاکئ، چې تابع f(x) په x = 2 کې یو انحرافي ځاي ولرئ. دا کوم ډول انحرافي ځاي دئ؟	$f(x)=-\frac{1}{12}x^3+ax^2+4$ د $x\in\mathbb{R}$ سره
څلورم: یو تابع f(x) ورکړشوی دی. a داسي وټاکئ، چې د f(x) د ګراف افراطي ټکی د x -محور باندط پروت وي. ایا دا افراطي ټکی جګ - یا ټیټ ټکی دی؟	$f(x)=\frac{1}{8}x^4-x^3+a$

پنځم:

تابع f(x) دې انحرافي ارزښت ونه لري. د دې حالت لپاره دي ضریبونه کوم شرایطپورهکړي او f(x) څو صفرځایونه لري؟ ستاسو ځواب په دلایلو روښانه کړئ؟	$f(x)=x^3+bx^2+cx+d$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم:

تابع $f_a(x) = ax(x+3)^2$ ورکړشوي د $x \in \mathbb{R}$ او $a > 0$. سره.

د خورا جګ اوخورا ټیټکي ترنکرښه د وضعیه قیمت سیسم محور سره مثلث جوړوي.
د مثلث سطحه د a په تابعیت سره پیداکړی. د دې د مخه یو شکل وباسی.

اووم: لاندې په انحرافي ارزښتزنو مطالعه کړی:

الف-

x	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$
$f(x)$	$1,6666$	$1,8333$	$1,75$	$1,6666$	$1,8333$
$f'(x)$	$0,75$	0	$-0,25$	0	$0,75$

ب-

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	$-0,149$	$-0,135$	$0,3678$	3	$13,591$
$f'(x)$	$-0,049$	$0,1353$	$1,1036$	5	$19,027$

اتم: اتم - د دلاندې توابعو انحراف او انعطاف ټکو ارزښتونه وشمېرى.

سربېره پردې د پوښتنو 6 ,5 ,4 ,1 او7 د محور غوځټکي (د تضاطع ټکي) وشمېرى
او ګرافونه يې وکاږى.

الف - $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$ ب - $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4$

پ - $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$ ت - $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3}$

ټ - $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$ ث - $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ج - $f(x)=\frac{1}{27}x^5-\frac{2}{3}x^3+3x$

حلونه

مشتقشمیرنه IX

مفصل حلونه:

اول - مفصل حلونه:

الف – مشتق:

الف- $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x$ مشتق $f'(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}$

پروت یا افقي تانجنت

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}=0\Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{2}$$

مشتق $f'(x)$ د $x_{1/2}$ په ځای کې ساده صفرځایونه لري او مخنخښه بدلوي. پس $f(x)$ دوه انحرافي ټکي لري.

ب - $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4$ مشتق $: f'(x)=\frac{1}{2}x^2-x$

پروت یا افقي تانجنت: $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^2-x=0\Rightarrow x_1=0;\ x_2=2$

مشتق $f'(x)$ د $x_{1/2}$ په ځای کې ساده صفرځایونه لري او مخنخښه بدلوي. پس $f(x)$ دوه انحرافي ټکي لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x$ $f'(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}$

پروت (افقي) تانجنت:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}=0 \Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{2}$$

مشتق $f'(x)$د $x_{1/2}$ سره ساده صفرځايونه لري او مخنخبنه بدلوي. پس $f(x)$ دوه انحرافي ارزښتوه لري.

ب -

مشتق: $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^2-x$$

پروت (افقي) تانجنت

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2-x=0 \Rightarrow x_1=0;\, x_2=2$$

مشتق $f'(x)$د $x_{1/2}$ سره ساده صفرځايونه لري او مخنخبنه بدلوي. پس $f(x)$ دوه افراطي ارزښتوه لري.

پ – $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3-2$ مشتق: $f'(x)=-x^3+3x^2$

پروت (افقي) تانجنت: $f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^3+3x^2 \Rightarrow x_{1/2}=0;\, x_3=3$

مشتق $f'(x)$د $x_{1/2}=0$ په ځای کې يو دبل صفرځای لري، دا په دې معنا چې د مخنخښې بدلېدنه شتون نه لري. پس $f(x)$ په دې ځای کې انحرافي ټکی نه لري. $x_3=3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د f'(x) ساده صفرځای دی، هلته د مخنخښي بدلېدنه منځ ته راځي. نو f(x) په دې ځاي کې افراطي ټکی لري.

دويم - مفصل حلونه:

$$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x$$
$$f'(x)=\frac{3}{8}x^2-3x+\frac{9}{2}$$
$$f''(x)=\frac{3}{4}x-3$$

د لوکال افراطي ټکو لپاره اړیین شرتونه:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{3}{8}x^2-3x+\frac{9}{2}=0\,|\cdot\frac{8}{3}$$
$$\Leftrightarrow x^2-8x+12=0\Rightarrow p=-8\,;\,q=12\,;\,D=4\Rightarrow\boxed{x_1=6}\,;\,\boxed{x_2=2}$$
$$f''(x_1)=f''(6)=\frac{3}{2}\Rightarrow\text{rel Min}\quad f''(x_2)=f''(2)=-\frac{3}{2}\Rightarrow\text{rel Max}$$
$$\text{rel Min: } f(x_1)=f(6)=0\Rightarrow\boxed{P_{min}(6|0)}$$
$$\text{rel Max: } f(x_2)=f(2)=4\Rightarrow\boxed{P_{max}(2|4)}$$

یادونه: په پورته کې rel د relative لنډونه ده او د نسبي په معنا دی.

د ګراف د رسمولو لپاره نور ټکي هم اړیین دي

د y محور سره د تقاطع ټکی $\boxed{P_y(0|0)}$

صفرځایونه:

$$: f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

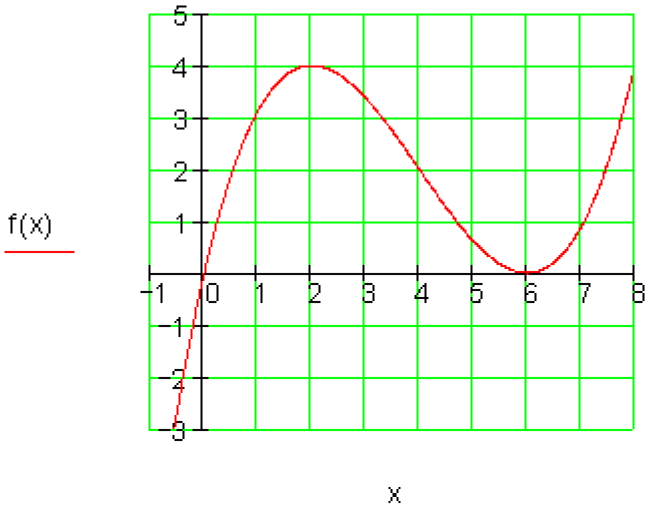
$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}\right)=0 \Rightarrow x_1=0$$

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}=0 \Rightarrow x_{2/3}=0$$

ډبل صفرځای

ارزښت جدول:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	$-6,125$	0	$3,125$	4	$3,375$	2	$0,615$	0	$0,875$



دريم:

$$f(x)=-\frac{1}{12}x^3+ax^2+4; \qquad f'(x)=-\frac{1}{4}x^2+2a$$

پیل : په $x = 2$ کې افراطي ټکی په دې معنا دی چې:

$$f'(2)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}\cdot 2^2+2a\cdot 2=0 \Leftrightarrow \boxed{a=\frac{1}{4}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او له $f(x) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 4$ سره همداسي $f'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$

انحرافي ټکی: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ همداسي x2 = 2

په x1 = 0 کې نسبي مین په x2=2 کې نسبي ماکس	$\Rightarrow f''(x_1) = f''(0) = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow$ re $\Rightarrow f''(x_1) = f''(2) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ | $f''(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

ځلورم:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + a$$

د انحراف ټکی دې د x محور باندې پروت وي

دا په دې معنا چې : $f(x_E) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 \qquad f''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

د پراته یا افقي تانجنت ځایونه

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{2}x - 3\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0 \text{ und } x_3 = 6$$

د افراطي ځاي شتون په هکله ازمايينت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f''(x_{1/2}) = f''(0) = 0$ لاس ته راځي، چې په $x_{1/2} = 0$ کې افراطي ځای نه شته

$$f''(x_3) = f''(6) = \frac{2}{3}\cdot 6^2 - 6\cdot 6 = 18 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_3 = 6$$

د a متحولې ټاکنه

$$f(6) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}\cdot 6^4 - 6^3 + a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 54}$$

د $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + 54$ د $x_E = 6$ په ځای کې یو نسبي مینیموم لري

دا د x محور باندې پراته دي: $P_{Min}(6\,|\,0)$:

ځلورم:

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

افراطي ټکي بآید د x په محور پرآته وي،دآ په دې معنآ چې: $f(x_E) = 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 \qquad f''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x$$

د پرآته محور سره د تآنجنت ځآیونه

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{2}x - 3\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0 \text{ und } x_3 = 6$$

د یوه آکسرېموم شتون آزمایښت : $f''(x_{1/2}) = f''(0) = 0$:

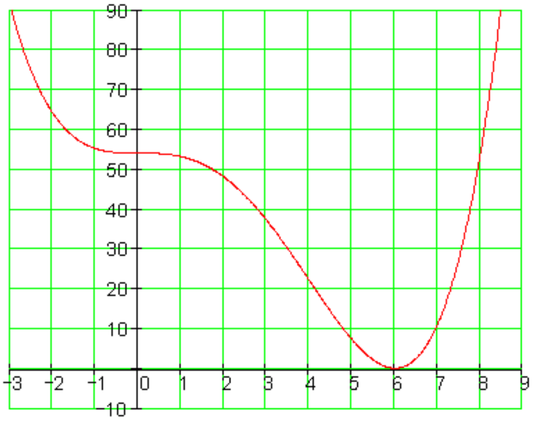
له دې لاس ته راځي، چې په $x_{1/2} = 0$ کې افراطي ځایونه نه شته

د متحولېa ټآکنه:

$$f(6) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}\cdot 6^4 - 6^3 + a = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = 54}$$

$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + 54$ د $x_E = 6$ ځآی کې یو نسبي مینیموم لري.

دآ په x محور پروت دی: $P_{Min}(6 \mid 0)$:



(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم:

$$f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$$

که د آنحرآف ټکي شتون ونه لري، بآید $f'(x) \neq 0$ بآور ولري:

یآ $f'(x) = 0$ د ډبل صفرځآي سره (لومړي مشتق بي له مخنخښې تغیر ځخه)

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2bx + c = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + \frac{2}{3}bx + \frac{1}{3}c = 0}_{\text{quadratische Gleichung}}$$

$$p = \frac{2}{3}b\, ;\, q = \frac{1}{3}c \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{9}b^2 - \frac{1}{3}c$$

$D<0$: مربع مسآوآت حل نه لرئ، که $\frac{1}{9}b^2 - \frac{1}{3}c < 0$ وي.

دآ په دې معنآ، چې $f(x)$ په دې حآلت کې پروت یآ آفقي تآنجنت نه لري. د$f(x)$ تابع ګراف له دریمې څلورمې یا ربعې څخه و لومړۍ څلورمې ته ځغلي.

تابع په کلکه همغږیز جګېدونکې د

$D=0$: مربع مساوات ډبل صفرځای لري،که $(1/9)b^2 - (1/3)c = 0$ وي.

دا په دې معنا $f(x)$چې یو پروت تانجنت لري. مګر دا چې د $f'(x)$ لپاره په دې ځاي کې د مخنخښې تغیر نه شته (ډبل صفرځای)، نو $f(x)$ افراطي ځایونه نه لري.

داا چې د مخه پوهیږ چې $f(x)$افراطي ټکی نه لري، نو $f(x)$ ټیک یو صفرځاي لري.

پنځم:

که د آنحرآف ټکي شتون ونه لري، بآید$f'(x)|=0$ بآور ولري:

یآ د ډبل صفرځآي سره (لومړي مشتق بي له مخنخښې تغیر ځخه)

: مربع مسآوآت حل نه لرئ، که وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دآ په دې معنآ، چې په دې حآلت کې پروت یآ آفقي تآنجنت نه لري. د تابع ګراف له دریمې څلورمې یا ربعې څخه و لومړۍ څلورمې ته ځغلي.

تابع په کلکه همغږیز چګیدونکې ده

: مربع مساوات ډبل صفرځای لري،ګه وي.

دا په دې معنا چې یو پروت تانجنت لري. مګر دا چې د لپاره په دې ځاي کې د مخنخښې تغیر نه شته (ډبل صفرځای) انحرافي ځایونه نه لري.

داا چې د مخه پوهیږ چې انحرافي ټکی نه شته، ټیک یو صفرځاي لري.
شپږم:

$$f(x) = ax(x+3)^2 = ax^3 + 6ax^2 + 9ax$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 12ax + 9a \qquad f''(x) = 6ax + 12a$$

افراطي ټکي:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3ax^2 + 12ax + 9a = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -1 \text{ bzw. } x_2 = -3$$

$$f''(x_1) = f''(-1) = 6a \cdot (-1) + 12a = a(-6+12) > 0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_1 = -1$$

$$f''(x_2) = f''(-3) = 6a \cdot (-3) + 12a = (-18+12) < 0 \Rightarrow \text{rel. Max bei } x_2 = -3$$

$$P_{Max} : f(-3) = a \cdot (-3)(-3+3)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{Max}(-3 \mid 0)}$$

$$P_{Min} : f(-1) = a \cdot (-1)(-1+3)^2 = -4a \Rightarrow \boxed{P_{Min}(-1 \mid -4a)}$$

کربښیز مساوات د $P_{Max}(-3 \mid 0)$ او $P_{Min}(-1 \mid -4a)$ سره.

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4a - 0}{-1-(-3)} = \frac{-4a}{2} = -2a \Rightarrow g(x) = -2ax + a_0$$

د $P_{Max}(-3 \mid 0)$ سره ټکي ازماینښت

$$g(-3) = 0 \Leftrightarrow -2a \cdot (-3) + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_0 = -6a \Rightarrow \boxed{g(x) = -2ax - 6a}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د محور سره غوڅتکي g(x) او $P_y(0|-6a)$ und $P_x(-3|0)$ دي.

د درېکودي یا مثلث سطحه: $A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot 6a}{2} = \boxed{9a}$

(د مطلقه ارزښتونو سره کیدی شي وشمیرل شي):

د1=a لپاره ګرافیکي انځورونه.

کربنه د x محور د $P_x(-3|0)$ په ټکي کې غوڅوي او د y محور د $P_y(0|-6)$ په ټکي کې.

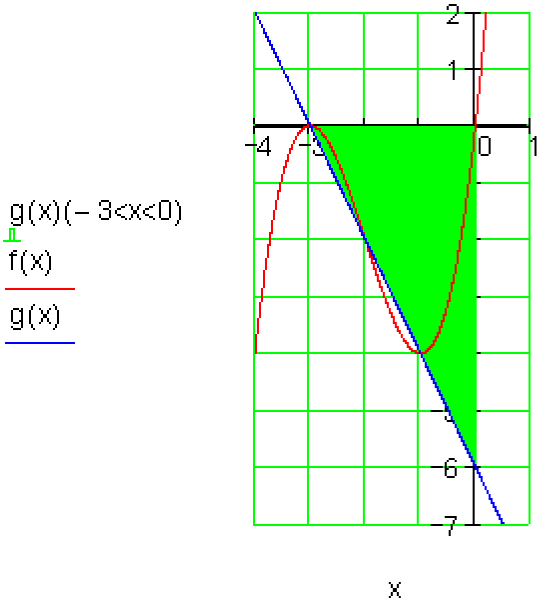
د سطحې شمیرنه د مطلقه ارزښتونو سره کیږي، ځکه چې سطحه تل مثبت ده.

A=g.h/2

د g=3 او h=6 لرو

$$A = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9\ FE$$

په پورته کې FE د سطحې یوون یا واحد په معنا دی.



اووم: الف –

x	0,5	1	1,5	2	2,5
f(x)	1,6666	1,8333	1,75	1,6666	1,8333
f'(x)	0,75	0	−0,25	0	0,75

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه انحرافي ټکي شتون لري:

په $x = 1$ کې د مخنخښي بدلون لرو د $f'(x)$ لپاره د $\boxed{+} \to \boxed{-} \Rightarrow rel.\ Max.$ د دې لاس ته راځي نسبي ماکسيموم

په $x=2$ کې د $f'(x)$ لپاره د مخنخښي بدلون مخ ته لرو له $\boxed{-} \to \boxed{+} \Rightarrow rel.\ Min.$ ز له دې لاس ته راځي نسبي مينيموم

ب –

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	$-0{,}149$	$-0{,}135$	$0{,}3678$	3	$13{,}591$
$f'(x)$	$-0{,}049$	$0{,}1353$	$1{,}1036$	5	$19{,}027$

په انتروال $[-3;-2]$ کې يو نسبي مينيموم پروت دی

$f'(x)$ يو د مخنخښي تغير لري له منفي و مثبت ته يعني $\boxed{-} \to \boxed{+}$

اتم:

الف – انحرافي ټکي

تابع : $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$

لومړی مشتق: $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}$

دويم مشتق :: $f''(x) = \frac{3}{4}x$

دريم مشتق:ـ $f'''(x) = \frac{3}{4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پراته تانجنت سره ځایونه

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4}=0 \Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{2}$$

ازماینښت چې ایا یو انحرافي ځای مخ ته لرو.

$$f''(x_1)=f''\left(\sqrt{2}\right)=\frac{3}{4}\cdot\sqrt{2}\approx 1{,}016>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=\sqrt{2}$$

$$f''(x_2)=f''\left(-\sqrt{2}\right)=-\frac{3}{4}\cdot\sqrt{2}\approx -1{,}016<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=-\sqrt{2}$$

د افراطي ارزښتون شمیرنه:

$$f(x_1)=f\left(\sqrt{2}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\approx -0{,}707\,;\; f(x_2)=f\left(-\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\approx 0{,}707$$

فراطي ټکي:

$$P_{Min}\left(\sqrt{2}\approx 1{,}414 \,\middle|\, -\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\approx -0{,}707\right)\qquad P_{Max}\left(-\sqrt{2}\approx -1{,}414 \,\middle|\, \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\approx 0{,}707\right)$$

د انعطاف ټکی یا اوړونټکی

$$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{4}x \qquad f'(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{4} \qquad f''(x)=\frac{3}{4}x \qquad f'''(x)=\frac{3}{4}$$

د انعطافټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x=0 \Rightarrow x_w=0$$

د انعطاف ټکي ازماینښت

$$f'''(x_w)=\frac{3}{4}\neq 0 \Rightarrow$$

یا له دې لاس ته راځ: په $x = x_w = 0$ کې د انعطاف ځای

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف ټکي وضعیه قیمتونه (کواوردیناتونه یا پروت ولاړ محورونه)

$$y_w = f(x_w) = f(0) = 0 \Rightarrow P_w(0|0)$$

د $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x$ تابع محورغوڅټکي (د محور تقاطع نقاط)

د y محور سره غوڅټکي: $P_y(0|0)$

صفرځایونه:

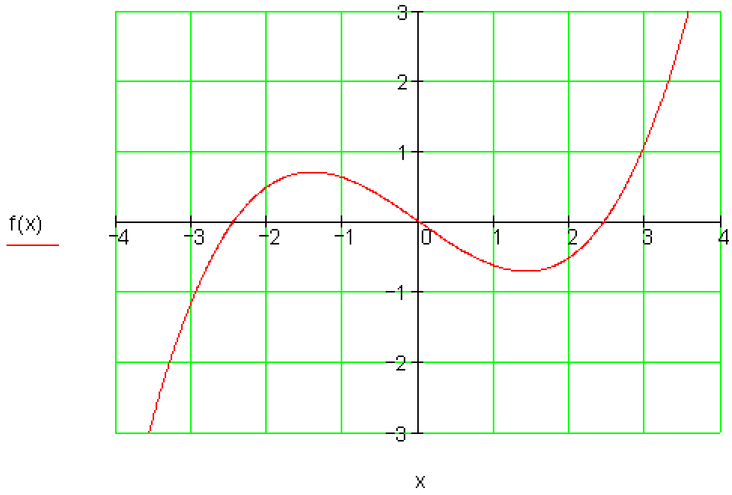
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{4}x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4} = 0 | + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8}x^2 = \frac{3}{4} | \cdot 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x_2 = -\sqrt{6} \qquad x_3 = \sqrt{6}$$



د x محور سره غوڅټکي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P_{x1}(0|0) \qquad P_{x2}(-\sqrt{6} \approx -2,449|0) \qquad P_{x2}(\sqrt{6} \approx 2,449|0)$$

ب –
انحراف ټکي

تابع : $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4$

لومړی مشتق: $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$

دویم مشتق: $f''(x) = x - 1$

د پروت افقي تانجنت ځایونه:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 2$$

ازمایښت، چې ایا انحراف ارزښتونه مخ ته لرو:

$$f''(x_1) = f''(0) = -1 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = 0$$
$$f''(x_2) = f''(2) = 1 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = 2$$

د انحرافي ټکو شمیرنه

$$f(x_1) = f(0) = 4 \qquad f(x_2) = f(2) = \frac{10}{3}$$

انحرافي ټکي

$$P_{Max}(0|4) \qquad P_{Min}\left(2|\frac{10}{3} \approx 3,333\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف – یا اوړونټکی

$$f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4 \qquad f'(x)=\frac{1}{2}x^2-x \qquad f''(x)=x-1 \qquad f'''(x)=1$$

د اوړنټكي يا انعطآفټكي لپاره اړيين شرايط:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Rightarrow x_w=1$$

د انعطافټكي ازمايښت

$$f'''(x_w)=f'''(1)=1\neq 0 \Rightarrow$$

يا له دې لاس ته راځي: په $x=x_w=1$ د انعطاف ټكي

د انعطاف- يا اوړون ټكي وضعيه قيمتونه(پراته لاړ ارزښتونه) يا كواوديناتونه

$$y_w=f(x_w)=f(1)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+4=\frac{22}{6}=3,\bar{6} \Rightarrow \underline{\underline{P_w\left(1\left|\,\frac{22}{6}=3,\bar{6}\right.\right)}}$$

د $f(x)=\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+4$ محور غوڅټكي:

د y - محور سره غوڅټكی: $P_y(0|4)$

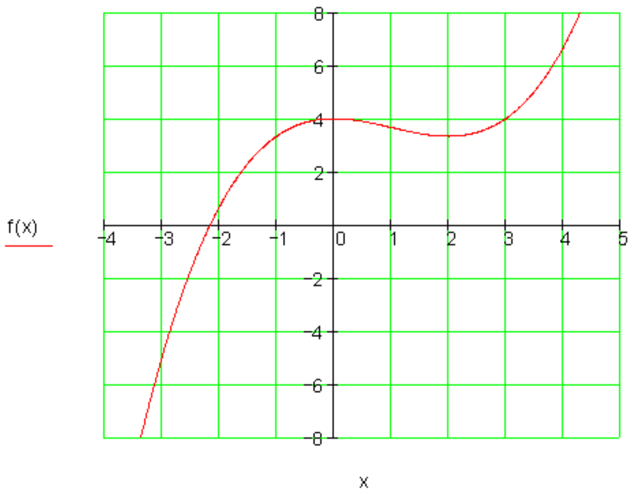
صفرځايونه

$x_1\approx -2,175$ نومريكي پيدا شوی

د x - محور سره غوڅټكی.

$$\underline{\underline{P_{x1}(x_1\approx -2,175\,|\,0)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پ – افراطي تکي

تابع: $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$

لومړی مشتق: $f'(x) = -x^3 + 3x^2$

دويم مشتق: $f''(x) = -3x^2 + 6x$

د پروت محور سره ځايونه.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0; x_3 = 3$$

ازمايښت چې ايا يو افراطي ارزښت مو مخ ته پروت دی:

په$x1=0$ کې افراطي ارزښت نه شته په $x2=0$کې نسبي مکسيموم په$x3=3$د افراطي تکو شميرنه	$f''(x_1) = f''(0) = 0 \Rightarrow$ $f''(x_2) = f''(0) = 0 \Rightarrow$ $f''(x_3) = f''(3) = -9 < 0 \Rightarrow$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x_1) = f(0) = -2 \qquad f(x_2) = f(0) = -2 \qquad f(x_3) = f(3) = \frac{19}{4}$$

افراطي ټکي :

$$\underline{\underline{P_{Max}\left(3 \middle| \frac{19}{4} = 4,75\right)}}$$

اوړونټکی یا د انعطاف ټکی

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$$

$$f'(x) = -x^3 + 3x^2 \qquad f''(x) = -3x^2 + 6x \qquad f'''(x) = -6x + 6$$

د انعطافټکو لپاره اړیین شرایط

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0$$
$$\Leftrightarrow x(-3x + 6) = 0 \Rightarrow x_{w1} = 0$$
$$-3x + 6 = 0 \Rightarrow x_{w2} = 2$$

د انعطافټکو ازمایښت

$$f'''(x_{w1}) = f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي چې په $x = x_{w1} = 0$ کې د انعطاف ټکي

$$f'''(x_{w2}) = f'''(2) = -6 \neq 0 \Rightarrow$$

له دې لاس ته راځي چې په $x = x_{w2} = 2$ کې انعطاف ټکي:

د انعطافټکو وضعیه قیمتونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_{w1} = f(x_{w1}) = f(0) = -2$$

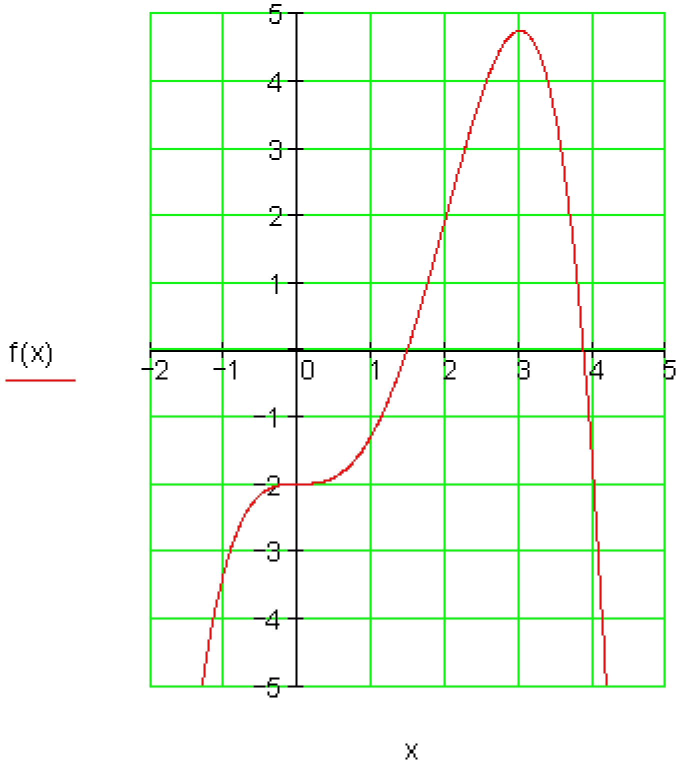
$$y_{w2} = f(x_{w2}) = f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 2^4 + 2^3 - 2 = -4 + 8 - 2 = 2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}(0|-2)}} \qquad \underline{\underline{P_{w2}(2|2)}}$$

د $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2$ تابع محور غوڅتکي

دy محور سره غوڅتکی: $P_y(0|-2)$

صفرځایونه: $x_2 \approx 3,861 \qquad x_1 \approx 1,467$



نومریکي پیداشوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د x محور سره غوڅټکي: $P_{x2}(x_2 \approx 3,861|0)$ $P_{x1}(x_1 \approx 1,467|0)$

ت – افراطي ټکي

تابع: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3}$

لومړی مشتق : $f'(x) = x^2 - 2x - 8$

دویم مشتق: $f''(x) = 2x - 2$

د پروت یا افقي محور سره غوځټکي

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 4$$

ازمایښت چې ایا یو امحرافي ټکی م مخ تخ پروت دی

$$f''(x_1) = f''(-2) = -6 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1 = -2$$
$$f''(x_2) = f''(4) = 6 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2 = 4$$

د افراطي ا رزښتون شمېرنه

$$f(x_1) = f(-2) = 18 \qquad f(x_2) = f(4) = -18$$

اافراطي ټکي: $P_{Max}(-2|18)$ $P_{Min}(4|-18)$

ت - انعطافټکی

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + \frac{26}{3}$$
$$f'(x) = x^2 - 2x - 8 \qquad f''(x) = 2x - 2 \qquad f'''(x) = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انغطافټکو لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \Rightarrow x_w=1$$

د اوړونټکو یا انعطاف ټکو په هکله ازمایښت

$$f'''(x_w)=f'''(1)=2\neq 0 \Rightarrow$$

په $x=x_w=1$ کې د انعطاف ځایونه

د اعطافټکي وضعیه قیمتونه:

$$y_w=f(x_w)=f(1)=\frac{1}{3}-1-8+\frac{26}{3}=0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_w(1|0)}}$$

د $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-8x+\frac{26}{3}$ محور غوځټکي

د y - محور سره غوځټکی: $\underline{P_y\left(0\left|\frac{26}{3}=8,\bar{6}\right.\right)}$

صفرځایونه: $f(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3-x^2-8x+\frac{26}{3}=0$

هورنر :

$$\begin{array}{cccccc} & \frac{1}{3} & -1 & -8 & \frac{26}{3} & \\ x=1 & \downarrow & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{26}{3} & \\ & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{26}{3} & 0 & f(1)=0\Rightarrow\ x_1=1 \end{array}$$

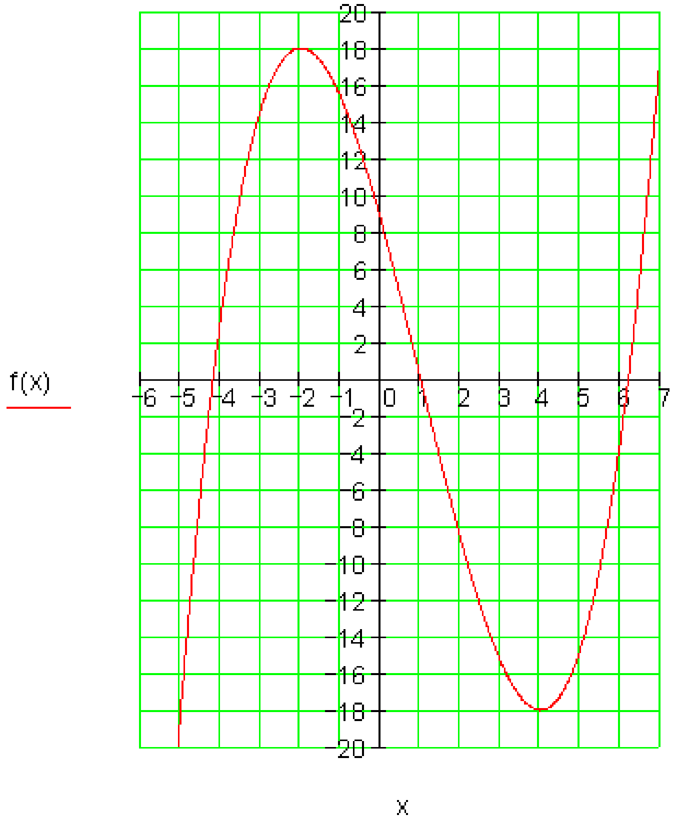
(c) ketabton.com: The Digital Library

پاتې یا باقي پولینوم:

$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{26}{3} = 0 | \cdot 3$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 26 = 0$$

$$p = -2 \qquad q = -26 \qquad \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 26 = 27$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \qquad \begin{aligned} x_2 &= 1 + \sqrt{27} \approx 6,196 \\ x_3 &= 1 - \sqrt{27} \approx -4,196 \end{aligned}$$



د x - محور سره غوځتکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P_{x1}(1|0)$ $P_{x2}(1+\sqrt{27}\approx 6,196|0)$ $P_{x3}(1-\sqrt{27}\approx -4,196|0)$

افراطي ټکي

تابع : $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$

لومړی مشتق : $f'(x)=x^3-2x$

دويم مشتق: $f''(x)=3x^2-2$

ځایونه د پراته محور سره:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-2x=0 \Rightarrow x_1=0; x_{2/3}=\pm\sqrt{2}$$

ازمایښت چې ایا یو انحرافي ټکی مو مخ ته پروت دی.

$$f''(x_1)=f''(0)=-2<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1=0$$
$$f''(x_2)=f''(\sqrt{2})=4>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2=\sqrt{2}$$
$$f''(x_3)=f''(-\sqrt{2})=4>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_3=-\sqrt{2}$$

د افراطي ارزښتونو شمېرنه :

$$f(x_1)=f(0)=0 \qquad f(x_2)=f(\sqrt{2})=-1 \qquad f(x_3)=f(-\sqrt{2})=-1$$

انحرافي ټکي:

$P_{Max}(0|0)$ $P_{Min1}(\sqrt{2}\approx 1,414|-1)$ $P_{Min2}(-\sqrt{2}\approx -1,414|-1)$

د انعطاف- یا اوړونټکي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2 \qquad f'(x)=x^3-2x \qquad f''(x)=3x^2-2 \qquad f'''(x)=6x$$

د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-2=0|+2$$
$$\Leftrightarrow 3x^2=2|:3$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{2}{3}|\sqrt{}$$
$$\Leftrightarrow |x|=\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_{w1}=\sqrt{\frac{2}{3}} \qquad x_{w2}=-\sqrt{\frac{2}{3}}$$

د انعطاع ټکو ازمايښت

$$f'''(x_{w1})=f'''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=6\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_{w1}=\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}816$$

$$f'''(x_{w1})=f'''\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=-6\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_{w2}=-\sqrt{\frac{2}{3}}\approx -0{,}816$$

د انعطآف ټکو وضعیه قیمتونه:

$$y_{w1}=f(x_{w1})=f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^4-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9}-\frac{2}{3}=\frac{1}{9}-\frac{6}{9}=-\frac{5}{9}\approx -0{,}555$$

$$y_{w2}=f(x_{w2})=f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=-\frac{5}{9}\approx -0{,}555 \text{ weil } f(-x)=f(x)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}816 \,|\, -\frac{5}{9}\approx -0{,}555\right)}} \qquad \underline{\underline{P_{w2}\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\approx -0{,}816 \,|\, -\frac{5}{9}\approx -0{,}555\right)}}$$

د $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$ ا محورغوڅټکي یا د تقاطع ټکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د y محور غوڅتکي: $P_y(0|0)$

صفرځایونه:

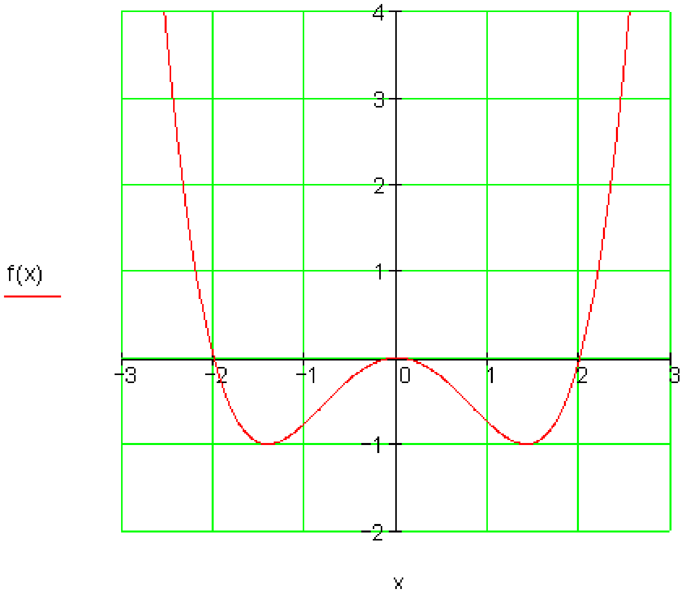
$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{1}{4}x^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$\frac{1}{4}x^2 - 1 = 0 | +1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{3/4} = \pm 2$$

د x - محور سره غوڅتکي:

$P_{x1/2}(0|0)$ $P_{x3/4}(\pm 2|0)$



ث –

افراطي تکي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع: $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2+x-3$

لومړی مشتق: $f'(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x+1$

دویم مشتق: $f''(x)=3x^2-9x+\frac{9}{2}$

ځایونه د پراته یا افقي تانجنت سره.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x+1=0$$

لومړی صفرځاي له ګومان سره x1 = 2 ونیسی پاتې یا باقي پولینوم: $x^2-\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}$

نور حلونه ترې لاس ته راځي: $x_2=\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{33}{16}};x_3=\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{33}{16}}$

ازمایښت چې ایا یو انحرافي ټکی لرو:

$$f''(x_1)=f''(2)=-1{,}5<0\Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1=2$$

$$f''(x_2)=f''\left(\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{33}{16}}\right)\approx 1{,}971>0\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_2=\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{33}{16}}$$

$$f''(x_3)=f''\left(\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{33}{16}}\right)\approx 6{,}279>0\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_3=\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{33}{16}}$$

د انحرافي ټکو شمېرنه

$$f(x_1)=f(2)=0 \quad f(x_2)=f\left(\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{33}{16}}\right)\approx -0{,}136 \quad f(x_3)=f\left(\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{33}{16}}\right)\approx -3{,}098$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

انحرافي ټکي:

$$P_{Max}(2|0) \quad P_{Min1}\left(\frac{5}{4}+\sqrt{\frac{33}{16}} \approx 2,686|-0,136\right) \quad P_{Min2}\left(\frac{5}{4}-\sqrt{\frac{33}{16}} \approx -0,186|-3,098\right)$$

د انعطافټکي يا اوړونټکي:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2+x-3 \qquad f'(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{9}{2}x+1$$

$$f''(x)=3x^2-9x+\frac{9}{2} \qquad f'''(x)=6x-9$$

د انعطافټکي لپاره اړيين شرطونه:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-9x+\frac{9}{2}=0|:3$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+\frac{3}{2}=0$$

$$p=-3 \qquad q=\frac{3}{2} \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{9}{4}-\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

$$x_{w1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \qquad x_{w1}=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}} \approx 2,366 \qquad x_{w2}=\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,634$$

د انعطافټکي – يا اوړونټکي ازماينت(لاندې الما ني د اوړونټکی يا انع

$$f'''(x_{w1})=f'''(2,366)=6\cdot 2,366-9\neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_{w1}=\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}} \approx 2,366$$

$$f'''(x_{w1})=f'''(0,634)=6\cdot 0,634-9\neq 0 \Rightarrow \text{Wendestelle bei } x=x_{w2}=\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,634$$

د انعطافټکي وضعيه قيمتونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_{\omega 1} = f(x_{\omega 1}) = f(2,366) = \frac{1}{4}\cdot 2,366^4 - \frac{3}{2}\cdot 2,366^3 + \frac{9}{4}\cdot 2,366^2 + 2,366 - 3 \approx -0,07$$

$$y_{\omega 2} = f(x_{\omega 2}) = f(0,634) = \frac{1}{4}\cdot 0,634^4 - \frac{3}{2}\cdot 0,634^3 + \frac{9}{4}\cdot 0,634^2 + 0,634 - 3 \approx -1,80$$

$$\Rightarrow P_{\omega 1}\left(\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{3}{4}} \approx 2,366 \mid y_{\omega 1} \approx -0,07\right) \qquad P_{\omega 2}\left(\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{3}{4}} \approx 0,634 \mid y_{\omega 2} \approx -1,80\right)$$

د $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3$ ا تابع محور غوڅتکي:

د y - محور سره غوڅکی: $P_y(0 \mid -3)$

صفرځایونه:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x - 3 = 0$$

هورنر:

$$\begin{array}{rrrrrr} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} & 1 & -3 \\ x=-1 & \downarrow & -\frac{1}{4} & \frac{7}{4} & -4 & 3 \\ \hline & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & 4 & -3 & 0 \end{array} \quad f(-1) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = -1$$

باقي یا پاتې پولینوم:

$$\frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{4}x^2 + 4x - 3 = 0$$

هورنر:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{cccccc} & & \frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & 4 & -3 \\ x=2 & \downarrow & & \frac{2}{4} & -\frac{5}{2} & 3 \\ & & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{2} & 0 \end{array} \quad f(2)=0 \quad \Rightarrow x_2 = 2$$

لاندې الماني= باقي –یا پاتې پولینوم:

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2} = 0 | \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$p = -5 \qquad q = 6 \qquad \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{25}{4} - \frac{24}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

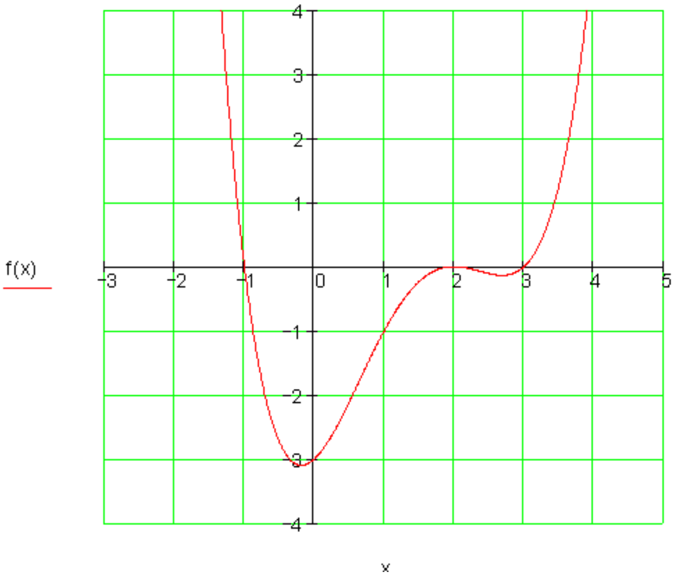
$$x_{3/4} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \qquad x_3 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \qquad x_4 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$$

-ارزښتونه د لویې پسې ترتب کړی: $x_1 = -1 \quad x_{2/3} = 2 \quad x_4 = 3$:

د x -محور سره غوځټکی:

$$\underline{\underline{P_{x1}(-1|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2/3}(2|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x4}(3|0)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ج –

افراطي ټکي

تابع: $f(x) = \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x$

لومړی مشتق: $f'(x) = \frac{5}{27}x^4 - 2x^2 + 3$

دویم مشتق: $f''(x) = \frac{20}{27}x^3 - 4x$

ځایونه د پراته یا افقي تانجنت سره.

(بي (دوه) مربع مساوات) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{27}x^4 - 2x^2 + 3 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 = 3; x_2 = -3; x_3 = \sqrt{\frac{9}{5}}; x_4 = -\sqrt{\frac{9}{5}}$$

ازمايښت چې ايا يو افراطي ټکی مخ ته لرو

$$f''(x_1) = f''(3) = 8 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 3$$
$$f''(x_2) = f''(-3) = -8 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -3$$
$$f''(x_3) = f''\left(\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx -3{,}578 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_3 = \sqrt{\frac{9}{5}}$$
$$f''(x_4) = f''\left(-\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx 3{,}578 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_4 = -\sqrt{\frac{9}{5}}$$

د افراطي ارزښتون شميرنه :

$$f(x_1) = f(3) = 0 \qquad f(x_2) = f(-3) = 0$$
$$f(x_3) = f\left(\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx 2{,}576 \qquad f(x_4) = f\left(-\sqrt{\frac{9}{5}}\right) \approx -2{,}576$$

افراطي ټکي:

$$P_{Min1}(3|0) \quad P_{Max1}(-3|0) \quad P_{Max2}\left(\sqrt{\frac{9}{5}} \approx 1{,}342 | 2{,}576\right)$$
$$P_{Min2}\left(-\sqrt{\frac{9}{5}} \approx -1{,}342 | -2{,}576\right)$$

اوړونټکي يا د انعطاف ټکي:

$$f(x) = \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x \qquad f'(x) = \frac{5}{27}x^4 - 2x^2 + 3$$
$$f''(x) = \frac{20}{27}x^3 - 4x \qquad f'''(x) = \frac{60}{27}x^2 - 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انعطاف ټکي لپاره اړيين شرايط:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow \frac{20}{27}x^3-4x=0$$

$$\Leftrightarrow x\cdot\left(\frac{20}{27}x^2-4\right)=0\Rightarrow x_{w1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{27}x^2-4|+4$$

$$\Leftrightarrow \frac{20}{27}x^2=4|:\frac{20}{27}$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{27}{5}|\sqrt{}\Rightarrow x_{w2/3}=\pm\sqrt{\frac{27}{5}}\approx\pm 2{,}324$$

په انعطاف ټکي ازمايښت:

$f'''(x_{w1})=f'''(0)=-4\neq 0$ لاس ته راځي، په $x=x_{w1}=0$ کې اوړنټکی.

$$f'''(x_{w2})=f'''\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right)=\frac{60}{27}\cdot\frac{27}{5}-4=8\neq 0\Rightarrow$$

لاس ته راځي، په $x=x_{w2}=\sqrt{\frac{27}{5}}$ کې اوړنټکی.

$$f'''(x_{w3})=f'''\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right)=\frac{60}{27}\cdot\frac{27}{5}-4=8\neq 0\Rightarrow$$

لاس ته راځي، په $x=x_{w2}=-\sqrt{\frac{27}{5}}$ کې اوړنټکی.

د اوړونټکي کواوردیناتونه یا پروتولاړارزښتونه(قمتهای وضعیه؟؟):

$$y_{w1}=f(x_{w1})=f(0)=0$$

$$y_{w2}=f(x_{w2})=f\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right)=\frac{1}{27}\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^5-\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^3+3\left(\sqrt{\frac{27}{5}}\right)\approx 1{,}115$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y_{w3} = f(x_{w3}) = f\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right) = \frac{1}{27}\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^5 - \frac{2}{3}\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right)^3 + 3\left(-\sqrt{\frac{27}{5}}\right) \approx -1,115$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{w1}(0|0)}} \qquad \underline{\underline{P_{w2}\left(\sqrt{\frac{27}{5}} \approx 2,324 \mid y_{w2} \approx 1,115\right)}}$$

$$\underline{\underline{P_{w3}\left(-\sqrt{\frac{27}{5}} \approx -2,324 \mid y_{w3} \approx -1,115\right)}}$$

د $f(x) = \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x$ ، محورغوځېتکي یا د محور سره د تقاطع ټکي.

د y محور سره غوځېټکی: $P_y(0|0)$

صفرځایونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{27}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{27}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{1}{27}x^4 - \frac{2}{3}x^2 + 3 = 0$$

بدلون: $x^2=z$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{27}z^2 - \frac{2}{3}z + 3 = 0 \mid \cdot 27$$

په z کې مربع(څلورئ) مساوات

$$\Leftrightarrow z^2 - 18z + 81 = 0$$

$$p = -18 \qquad q = 81 \qquad \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 - 81 = 0 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{0} = 0$$

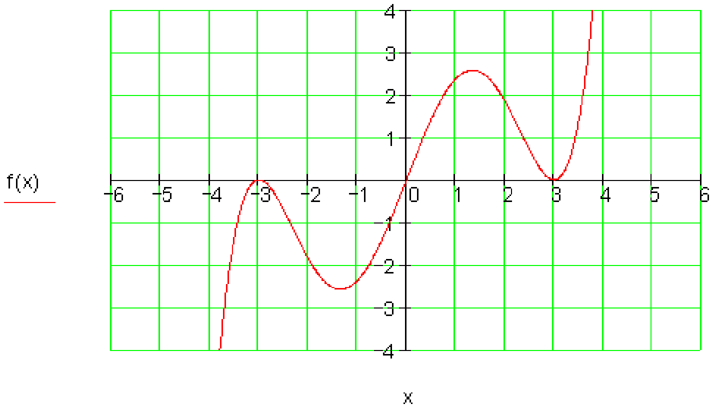
$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \qquad z_1 = 9 \qquad z_2 = 9$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$z_1 = 9 = x^2 \Rightarrow x_{2/3} = \pm 3 \quad z_2 = 9 = x^2 \Rightarrow x_{4/5} = \pm 3$$

د x -محور سره غوڅټکی.

$$\underline{\underline{P_{x1}(0|0)}} \quad \underline{\underline{P_{x2/3}(-3|0)}} \quad \underline{\underline{P_{x4/5}(3|0)}}$$



یادونه: دا برخه دلته پای شوه.

3.IX:اوړونټکی یا د انعطاف ټکی او زینټکی

تمرینونه مشتقشمیرنه **II**

لاندې ټول راشنل یا هوښیار توابع د اوړونټکي په هکله وڅیړی او په ورکړ شوي حالت کې اوړون- یا د انعطافټکي وټاکی.

لومړی : $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5$ دویم : $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x$

دریم: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1$ څلورم: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-1$ شپږم: $f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}$

اووم: $f(x)=-\frac{1}{2}x^4+3x^2-1$ اتم: $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$

نهم: $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3+1$ لسم: $f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{3}{2}x^2-1$

تمرينونه

مشتقشميرنه II

نتيجې او مفصل حلونه

نتيجې:

اول – $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+5 \Rightarrow P_w(2|1)$

دويم – $f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x \Rightarrow P_w\left(\frac{8}{3}\middle|\frac{64}{27}\right)$

دريم – $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-1 \Rightarrow P_w(2|1)$

څلورم – $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+1 \Rightarrow P_w(2|5)$

پنځم – $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-1 \Rightarrow P_w\left(-1\middle|\frac{5}{3}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم - $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} \Rightarrow P_{w\,1/2}(\pm 1 | -1)$

اوم - $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1 \Rightarrow P_{w\,1/2}\left(\pm 1 \,\middle|\, \frac{3}{2} = 1{,}5\right)$

اتم – $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \Rightarrow$

اوړونټکی نه شته

نهم - $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 1 \Rightarrow P_{w\,1}(0|1) \quad P_{w\,2}(2|5)$

لسم - $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 1 \Rightarrow P_{w\,1/2}\left(\pm\sqrt{3} \approx 1{,}73 \,\middle|\, -\frac{19}{4} = -4{,}75\right)$

مفصل حلونه:

لومړی – مفصل حل:

شمیرنه:

اول- د تابع مساوات د مشتق سره

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5 \qquad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - 3 \qquad f'''(x) = \frac{3}{2}$$

دویم – د انعطافټکي لپاره اړیین شرطونه:

ممکنه انعطافځای یا اوړونځای دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

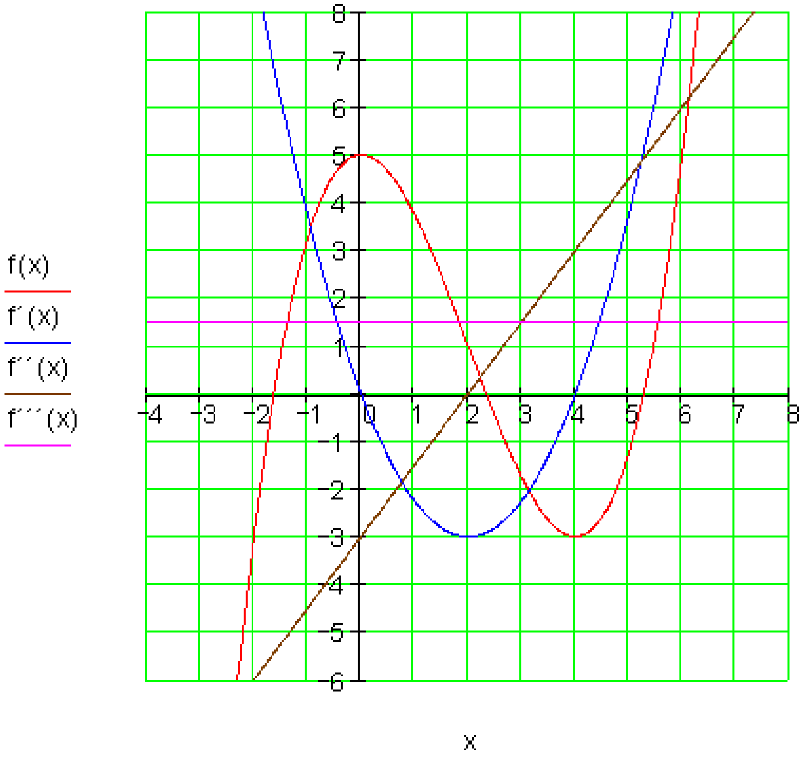
دریم – د دریم مشتق له لارې ښوونه، چې ایا یو انعطاف- یا اوړونټکی لرو:

$$f'''(x) = f'''(2) = \frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow x = x_W = 2$$

یو ممکنه انعطافځای یا اوړونځایدی.

څلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای اینوونې له لارې په f(x) کې

$$f(x_W) = f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 5 = \frac{8}{4} - \frac{12}{2} + 5 = 2 - 6 + 5 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_W(2|-1)}}$$



ګرافونه :

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5 \qquad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x \qquad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3 \qquad f'''(x) = \frac{3}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم – مفصل حل:

شمېرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x \qquad f'(x)=\frac{3}{2}x^2-8x+8$$

$$f''(x)=3x-8 \qquad f'''(x)=3$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x-8=0 \Leftrightarrow x=\frac{8}{3}$$
مکنه اوړنټکی یا د انعطاف ټکی

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا ئو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x)=f'''\left(\frac{8}{3}\right)=3\neq 0 \Rightarrow x=x_W=\frac{8}{3}$$

اوړنټکی یا د انعطافټکی دی

څلورم – د انعطافټکي ټاکنه په f(x) کې د انعطافځای اینسوونې له لارې

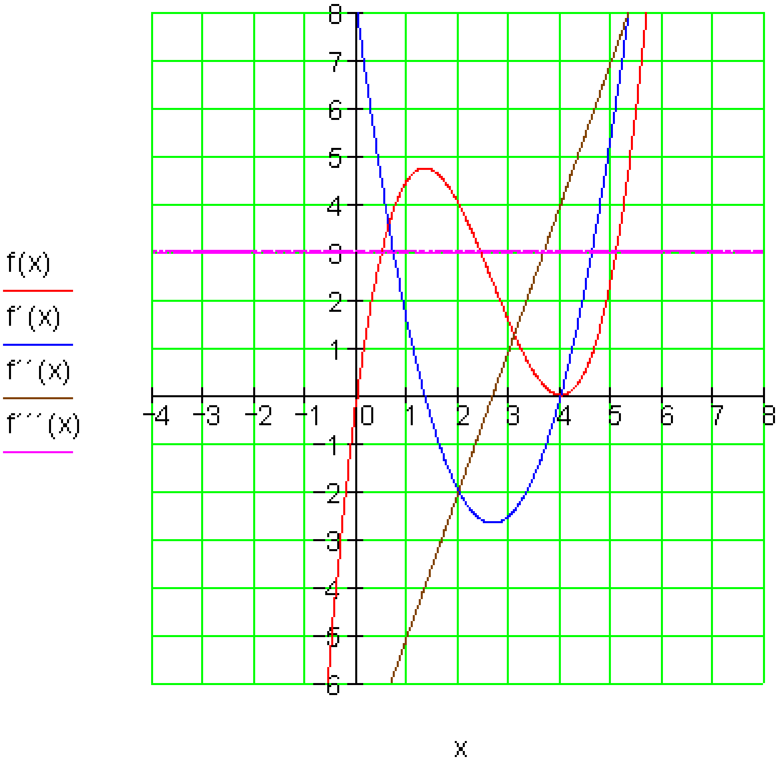
$$f(x_W)=f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^3-4\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2+8\cdot\frac{8}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{512}{27}-4\cdot\frac{64}{9}+8\cdot\frac{8}{3}$$
$$=\frac{256}{27}-\frac{768}{27}+\frac{576}{27}=\frac{64}{27}\Rightarrow R_W\left(\frac{8}{3}\approx 2,67 \;\middle|\; \frac{64}{27}\approx 2,37\right)$$

ګرافونه :

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x \qquad f'(x)=\frac{3}{2}x^2-8x+8$$

$$f''(x)=3x-8 \qquad f'''(x)=3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دریم – مفصل حل

شمېرنه:

لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-1 \quad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x+3$$

$$f''(x)=\frac{3}{2}x-3 \quad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-3=0 \Leftrightarrow x=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ممکنه اوړونټکی یا د انعطاف ټکی دی

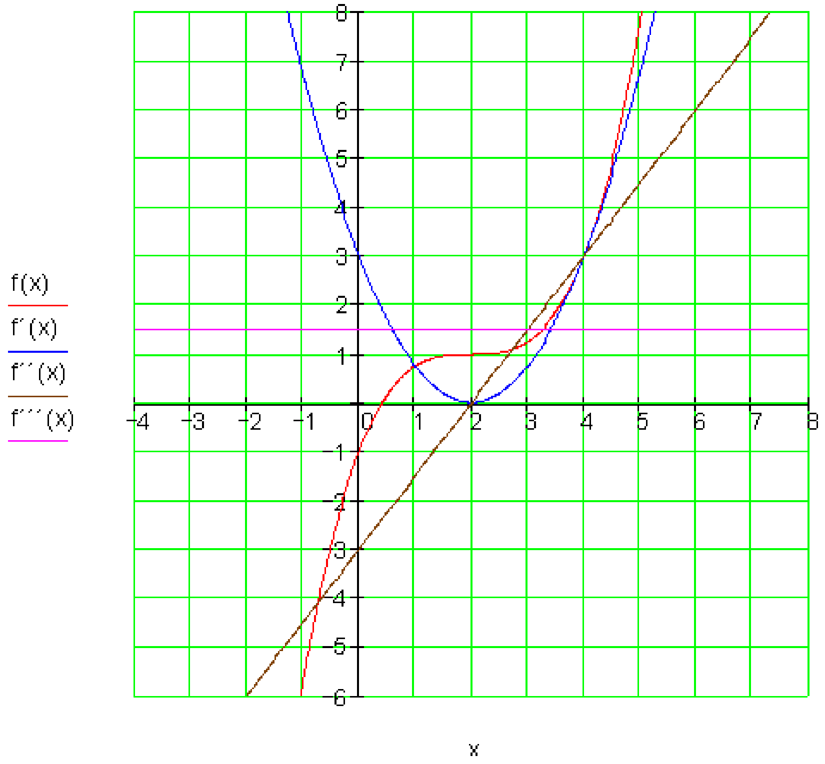
دریم -   د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا ئو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x) = f'''(2) = \frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow x = x_W = 2$$

ممکنه اوړونټکی دی

څلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای اېښوونې له لارې په f(x) کې

$$f(x_W) = f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = \frac{8}{4} - \frac{12}{2} + 6 - 1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{R_W(2|1)}}$$



ګرافونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x - 3 \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$$

ځلورم – مفصل حل:

شمیرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1 \quad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$$

$$f''(x) = -\frac{3}{2}x + 3 \quad f'''(x) = -\frac{3}{2}$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

ممکنه اوړونټکي(انعطافټکي) دي.

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا یو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x) = f'''(2) = -\frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow x = x_W = 2$$

یو انعطافټکی یا اوړونټکی ړی.

ځلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای ایښوونې له لارې په f(x) کې

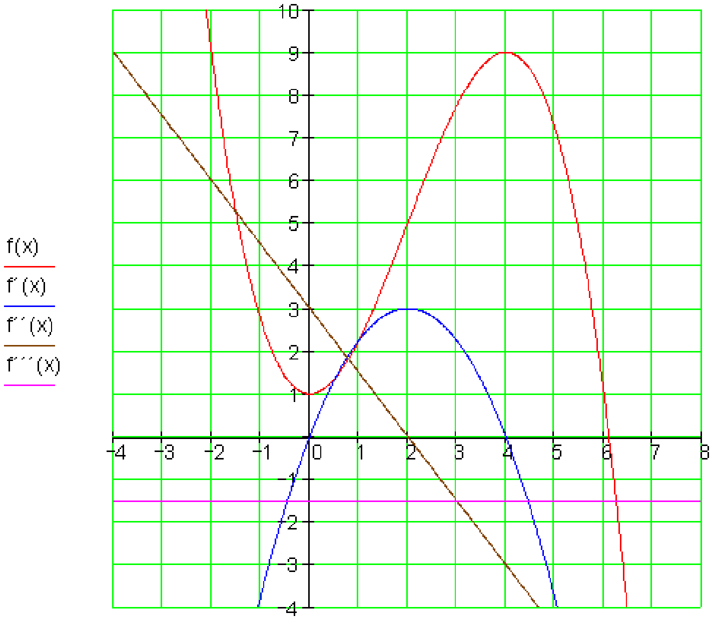
$$f(x_W) = f(2) = -\frac{1}{4}\cdot 8 + \frac{3}{2}\cdot 4 + 1 = -2 + 6 + 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_W(2|5)}}$$

گرافونه:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1 \quad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f''(x) = -\frac{3}{2}x + 3 \quad f'''(x) = -\frac{3}{2}$$



پنځم – مفصل حل:

شمیرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 1 \quad f'(x) = x^2 + 2x - 2$$

$$f''(x) = 2x + 2 \quad f'''(x) = 2$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ i

ممکنه انعطاف- یا اوړونټکی دی

دریم - د دریم مشتق په مرسته بنوونه، چې ایا ئو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

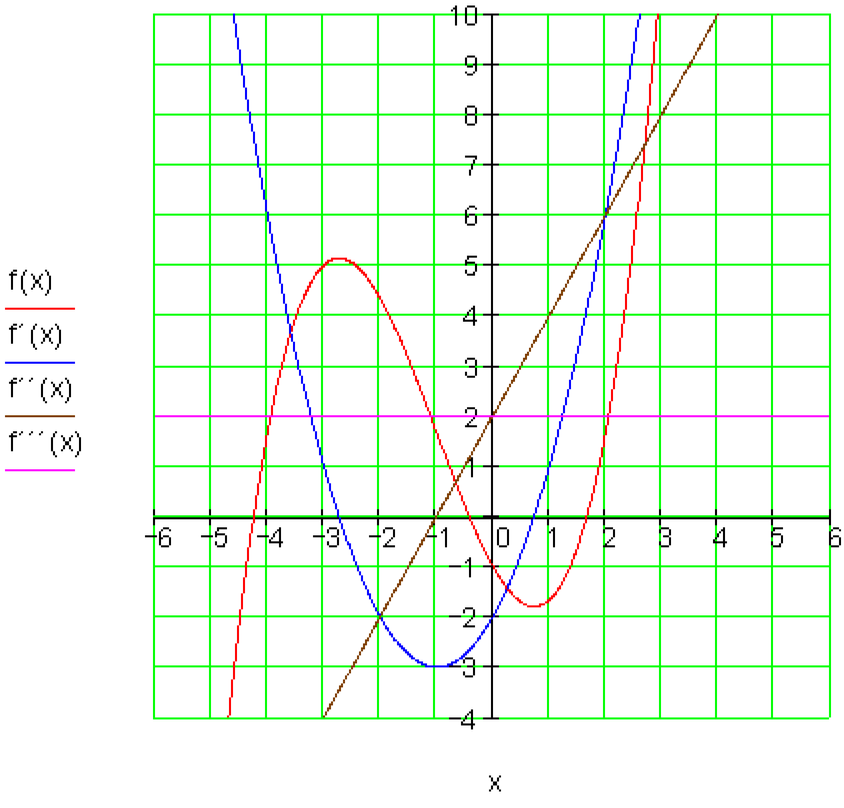
$$f'''(x) = f'''(-1) = 2 \neq 0 \Rightarrow x = x_W = -1$$

یو انعطافټکی دی.

ځلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای اینوونې له لارې په f(x) کې

$$f(x_W) = f(-1) = \frac{1}{3}\cdot(-1)^3 + (-1)^2 - 2\cdot(-1) - 1 = -\frac{1}{3} + 1 + 2 - 1 = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow P_W\left(-1 \,\middle|\, \frac{5}{3} \approx 1{,}67\right)$$



ګرافونه

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 1 \quad f'(x) = x^2 + 2x - 2 \quad f''(x) = 2x + 2 \quad f'''(x) = 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم – مفصل حل:

شمېرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}\quad f'(x)=2x^3-6x\quad f''(x)=6x^2-6\quad f'''(x)=12x$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 6x^2-6=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm1$$

یو ممکنه انعطاف-یا ا وړونټکی دی.

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا یو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

یو اوړون-یا انعطافټکی دی

$$f'''(x_1)=f'''(1)=12\cdot1=12\neq0\Rightarrow x_1=x_{W1}=1$$

یو د انعطاف ټکی دی.

$$f'''(x_2)=f'''(-1)=12\cdot(-1)=-12\neq0\Rightarrow x_2=x_{W2}=-1$$

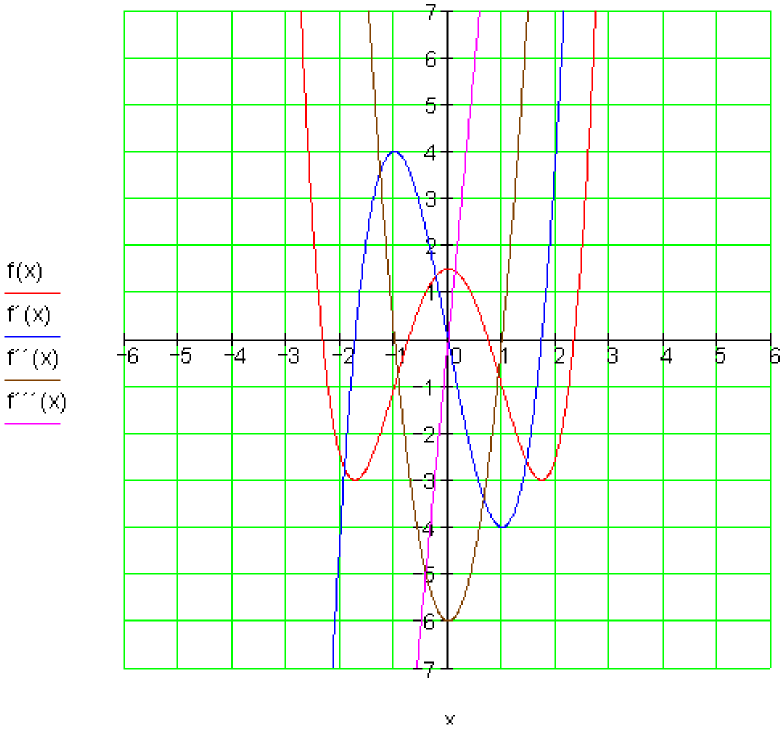
څلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای ایښوونې له لارې په f(x) کې

$$f(x_{W1/2})=f(\pm1)=\frac{1}{2}(\pm1)^4-3\cdot(\pm1)^2+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}-3+\frac{3}{2}=-1\Rightarrow \underline{\underline{P_{W1/2}(\pm1|-1)}}$$

گرافونه:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}\quad f'(x)=2x^3-6x\quad f''(x)=6x^2-6\quad f'''(x)=12x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



اوم – مفصل حل:

شمېرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1 \quad f'(x) = -2x^3 + 6x \quad f''(x) = -6x^2 + 6 \quad f'''(x) = -12x$$

دویم - د انعطاف تکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1$$

ممکنه اوړون – د انعطاف ځایونه دي

دریم - د دریم مشتق په مرسته بنوونه، چې ایا ئو انعطاف تکی مخ ته لرو.

$$f'''(x_1) = f'''(1) = -12 \cdot 1 = -12 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{W1} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو اوړونځای یا انعطاف ځای دی

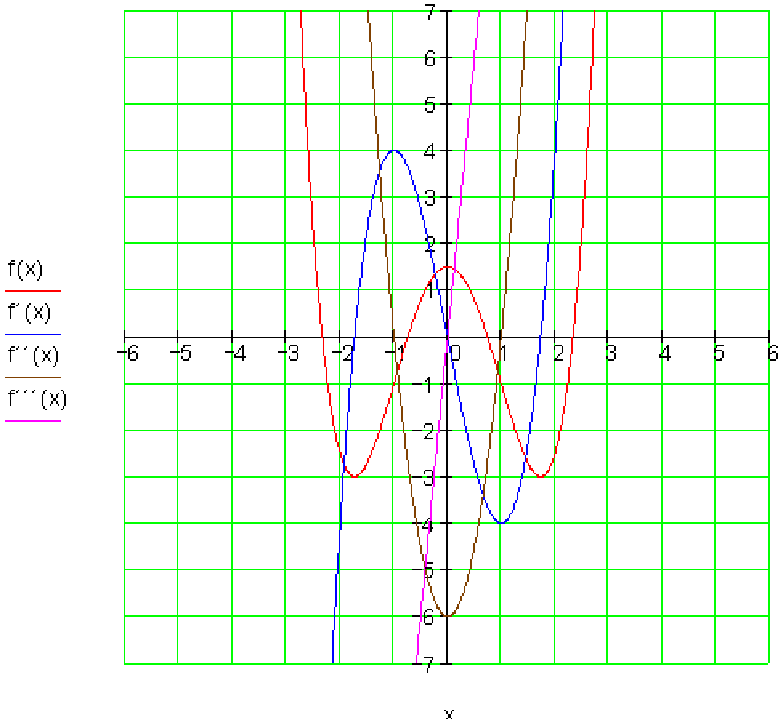
$$f'''(x_2) = f'''(-1) = -12\cdot(-1) = 12 \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{W2} = -1 \text{ is}$$

یو اوړونځای یا انعطاف ځای دی

ځلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای اینووني له لارې په f(x) کي

$$f(x_{W1/2}) = f(\pm 1) = -\frac{1}{2}(\pm 1)^4 + 3\cdot(\pm 1)^2 - 1 = -\frac{1}{2} + 3 - 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{W1/2}\left(\pm 1 \,\middle|\, \frac{3}{2} = 1{,}5\right)$$



ګرافونه :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1 \quad f'(x) = -2x^3 + 6x \quad f''(x) = -6x^2 + 6$$

$$f'''(x) = -12x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم – مفصل حل:

شمېرنه:
لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2} \quad f'(x)=x^3-3x^2+3x-1$$
$$f''(x)=3x^2-6x+3 \quad f'''(x)=6x-6$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x+3=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1=(x-1)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2}=1s$$

ممکنه اوړنټکي یاد انعطاف ټکي دي

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا یو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x_{1/2})=f'''(1)=6\cdot 1-6=0 \Rightarrow x_{1/2}=1i$$

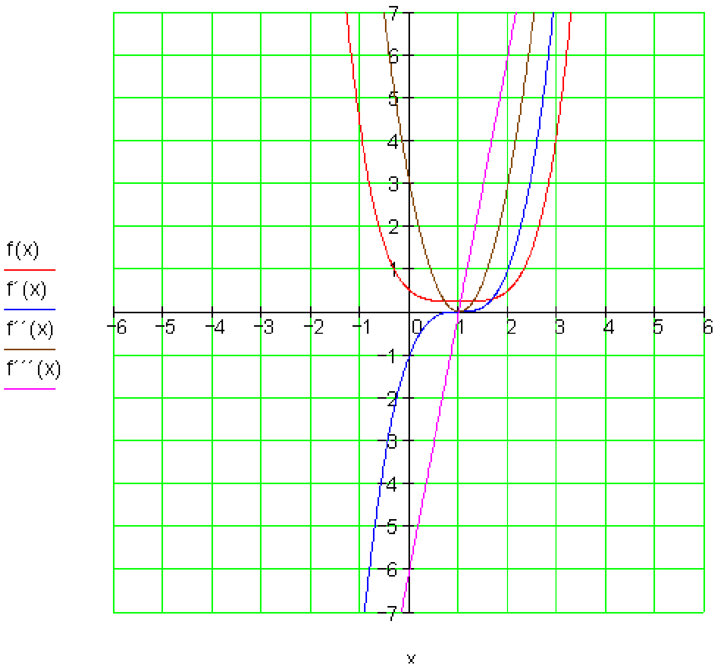
دا د انعطاف ټکی نه دی.

د f(x) ګراف اوړونټکی یا د انعطاف ټکی نه لري.

ګرافونه :

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2} \quad f'(x)=x^3-3x^2+3x-1$$
$$f''(x)=3x^2-6x+3 \quad f'''(x)=6x-6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



نهم – مفصل حل:

شمیرنه:

لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 1 \quad f'(x) = -x^3 + 3x^2$$

$$f''(x) = -3x^2 + 6x \quad f'''(x) = -6x + 6$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(-3x + 6) = 0$$

$\Leftrightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 2$ ممکنه اوړنټکي یا د انعطاف ټکي د ي

د پورته ښتو: ممکنه اوړنځای یا د انهطاف ځای دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا ئو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x_1) = f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{W1} = 0$$

یو اوړنځای یا د انعطاف ځای دی

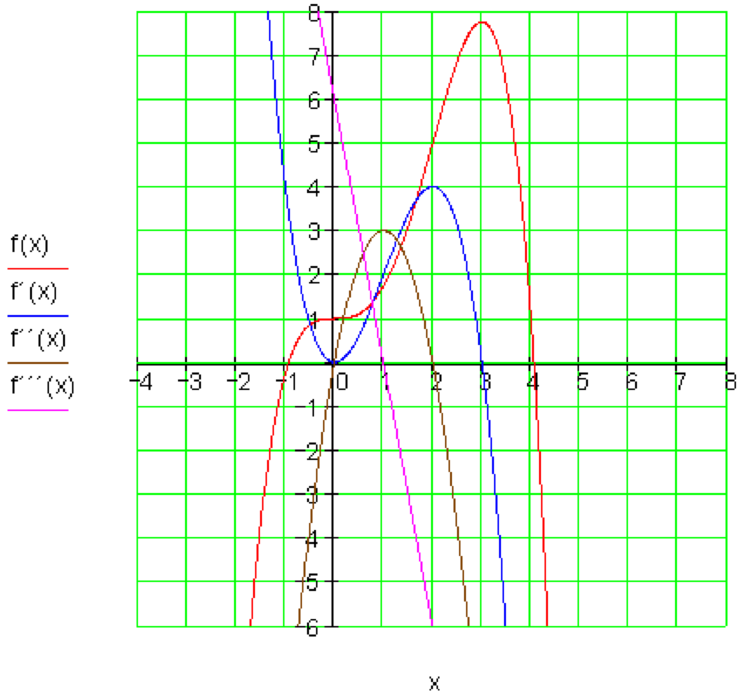
$$f'''(x_2) = f'''(2) = -6 \cdot 2 + 6 = -6 \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{W2} = 2$$

یو د انعطاف ځای دی

څلورم – د انعطافيکي ټاکنه د انعطافځای ایښوونې له لارې په f(x) کې

$$f(x_{W1}) = f(0) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_{W1}(0|1)}}$$

$$f(x_{W2}) = f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 16 + 8 + 1 = 5 \Rightarrow \underline{\underline{P_{W2}(2|5)}}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

گرافونه (پورته٠:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 1 \quad f'(x) = -x^3 + 3x^2 \quad f''(x) = -3x^2 + 6x$$

$$f'''(x) = -6x + 6$$

لسم – مفصل حل:

شمیرنه: لومړی- د تابع مساوات د مشتقونو سره:

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 1 \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x \quad f''(x) = x^2 - 3 \quad f'''(x) = 2x$$

دویم - د انعطاف ټکي لپاره اړیین شرطونه:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$$

ممکنه انعطاف- یا اوړونځایونه دي

دریم - د دریم مشتق په مرسته ښوونه، چې ایا ئو انعطاف ټکی مخ ته لرو.

$$f'''(x_1) = f'''\left(\sqrt{3}\right) = 2\cdot\sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{W1} = \sqrt{3}$$

یو اعطافځای دی

$$f'''(x_2) = f'''\left(-\sqrt{3}\right) = -2\cdot\sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{W2} = -\sqrt{3}$$

یوانعطافځای یا اوړونځای دی

څلورم – د انعطافټکي ټاکنه د انعطافځای ایښوونې له لارې په f(x) کې

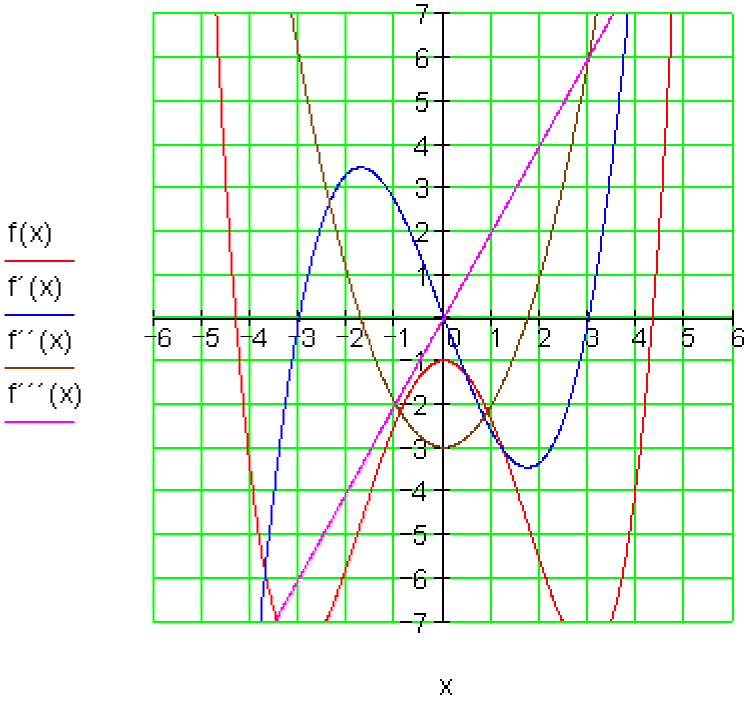
$$f(x_{W1/2}) = f\left(\pm\sqrt{3}\right) = \frac{1}{12}\left(\pm\sqrt{3}\right)^4 - \frac{3}{2}\left(\pm\sqrt{3}\right)^2 - 1 = \frac{1}{12}\cdot 9 - \frac{3}{2}\cdot 3 - 1$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{9}{2} - 1 = \frac{3}{4} - \frac{18}{4} - \frac{4}{4} = -\frac{19}{4} \Rightarrow \underline{\underline{R_{W1/2}\left(\pm\sqrt{3}\ \middle|\ -\frac{19}{4} = -4{,}75\right)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

گرافونه:

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 1 \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x \quad f''(x) = x^2 - 3 \quad f'''(x) = 2x$$



حلونه

نتیجې او مفصل حلونه

مشتق د ټولګي کار چمتووالي لپاره

لومړی: الف – $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$

ب - نسبي مینیموم = ککرتکی یا د رآس ټکي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

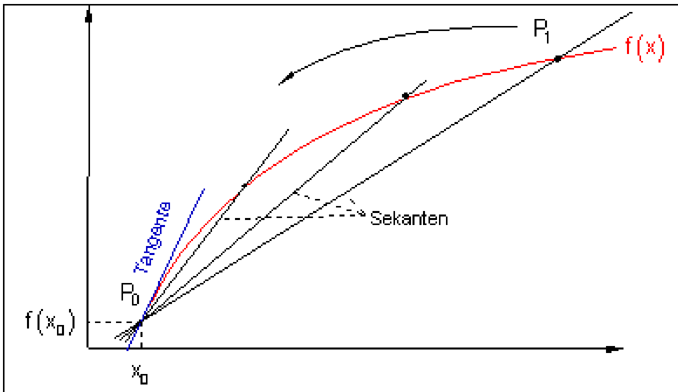
$P_{Min}(-2|-4) = P_{Sp}(-2|-4)$

پ - $P_{x2}\left(-2-2\cdot\sqrt{2}\approx -4{,}83\,|\,0\right)$ $\quad P_{x1}\left(-2+2\cdot\sqrt{2}\approx 0{,}83\,|\,0\right)$

ت - ګرافونه د مفضل حل سره دي.

دويم: د يوه تابع د ګراف جګېدنه په يوه ټکي کې په همغه ټکي کې د تابع د تانجنت د جګوالي سره برابره ده.

دريم:

که ټکی P_1 تل پسې د P_0 په لور وخوزيږي، نو د سيکانت جګوالی تغير خوري. که هرڅومره زيات د P_0 ټکي ته نژدې کيږو، په همغه اندازه د سيکانت جګوالی د تانجنت جګوالي ته نږدې کيږي.	

څلورم: د x_0 په ځاي کې د تابع لومړی مشتق په ټکي $P(x_0 \mid f(x_0))$ کې د تانجنت جګوالی دی او له دې سره په دې ټکي کې د $f(x)$ د ګراف جګوالی هم دی.

پنځم: د مشتق تابع $f'(x)$ له دې امله د جګېدنې تابع بلل کيږي، ځکه چې دا په هر ټکي کې د $f(x)$ د جګوالي نمايندګي موي.

شپږم:

الف - $f'''(x) = 0 \qquad f''(x) = 0 \qquad f'(x) = 3$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب - $f'(x)=15x^2-3 \quad f''(x)=30x \quad f'''(x)=30$

پ - $f'(x)=24x^2+24x+6 \quad f''(x)=48x+24 \quad f'''(x)=48$

ت - $f'(x)=9x^2+4x+1 \quad f''(x)=18x+4 \quad f'''(x)=18$

ټ - $f'(x)=-4x^3+2 \quad f''(x)=-12x^2 \quad f'''(x)=-24x$

ث - $f'(x)=4x^3-9 \quad f''(x)=12x^2 \quad f'''(x)=24x$

ج - $f'(x)=-3cx^2-a-b-c^3-1 \quad f''(x)=-6cx \quad f'''(x)=-6c$

چ - $f'(x)=12x^2-4x+5 \quad f''(x)=24x-4 \quad f'''(x)=24$

ح -
$f'(x)=20x^3-12x^2+6x-2 \quad f''(x)=60x^2-24x+6 \quad f'''(x)=120x-24$

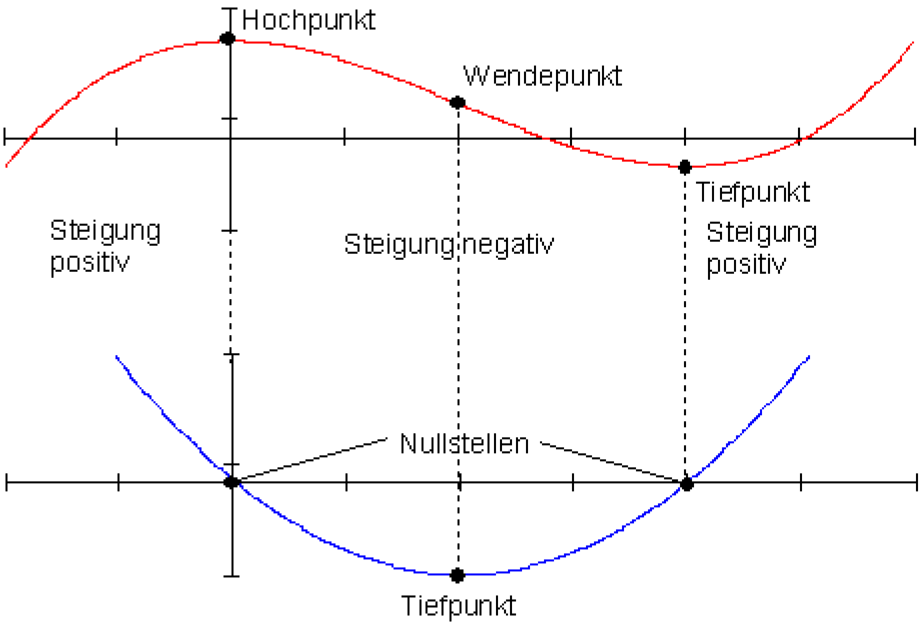
خ - $f'(x)=-4x^3 \quad f''(x)=-12x^2 \quad f'''(x)=-24x$

اووم: $t(x)=-5x+6 \quad n(x)=\frac{1}{5}x-\frac{22}{5}$

اتم: پښتو:په ګراف کې له کیڼ و ښي لور او له پورته کښته لورپه په ترتیب.

ټیټ ټکی، اوړونټکی-یا انعطافټکی،جګیدنه مثبت، جګیدنه منفي یا کمیزه، ټیټټکی جګیدنه مثبت، صفرځای، ټیټټکی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



پوښتنې

مشتقشمیرنه د تولګي کار د چمتوالي لپاره

لومړی - پارابول په درې ټکو کې:

الف –

د پارابول د تابعمساوات f(x) و ټاکی چې له لاندې ټکو تېرېږي:

$P_1(-4|-2)\quad P_2(-2|-4)\quad P_3(2|4)$

ب – د غوختکو یا د تقاطع ټکو وضعیه قیمتونه پیدا کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ – د $f(x)$ محورغوڅتکي پیداکړئ

ت – د $f(x)$ او $f'(x)$ ګرافونه په پروتولاړ سیستم یه د وضعیه قیمتونو سیستم کې وکاږئ.

دویم – په یوه ټکي کې د تابع د ګراف د جګېدنې لاندې څه پوهیږو؟

دریم – یو د لیدلو لپاره رسم وکاږئ او د حملو سره یې تشریح کړئ، چې په یوه ګراف ځنګه له سیکانت جګوالي څخه د تانجنت جګوالي ته راځو؟

څلورم – د x_0 په ځا کې د یوې تابع لومړئ مشتق څه معنا لري؟

پنځم – ولې د مشتق تابع د جګوالي تبع هم بلل کیږي؟

شپږم – د لاندې توابعو دربواره مشتق ونیسئ:

آلف - $f(x) = 3x + 4$ ب - $f(x) = 2x - 4 + x^3 - 5x + 4x^3$

پ - $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ ت - $f(x) = (2x+1)^3$

ټ - $f(x) = x - x^4 + 3 + x$ ث- $f(x) = 1 - 2x - 3x - 4x + x^4$

ج - $f(x) = a + b + c^2 - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$ چ - $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 2$

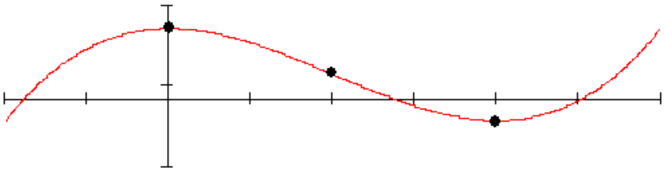
ح - $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 6$ خ - $f(x) = (a^2 + x^2)(a^2 - x^2)$

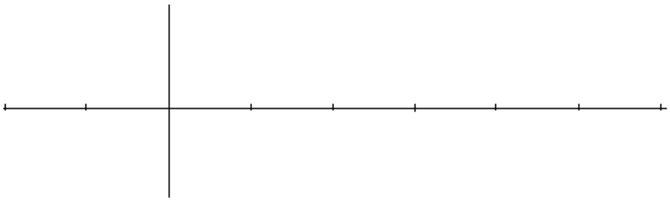
اوم – یوه $f(x) = -x^2 - x + 2$ تابع ورکړ شوې ده.

د $P(2;f(2))$ ټکي لپاره دې د تنجنت او عمود مساوات و ټاکل شي.

اتم – د تابع د ګراف لاندې د تابع د مشتق ګراف وکاږئ او په دواړو ګرافونو کې کرکتریستیکي یا خوي ټاکونکي ټکي په نخښنه کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library





ځوابونه:

لومړی: الف -

$P_1(-4|-2): f(-4) = 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = -2$

$P_2(-2|-4): f(-2) = 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = -4$

$P_2(2|4): f(2) = 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 4$

a_0	a_1	a_2	
1	−4	16	−2
1	−2	4	$-4 \mid II - I$
1	2	4	$4 \mid III - I$
1	−4	16	−2
0	2	−12	$-2 \mid : 2$
0	6	−12	$6 \mid : (-6)$
1	−4	16	−2
0	1	−6	−1
0	−1	2	$-1 \mid III + II$
1	−4	16	−2
0	1	−6	−1
0	0	−4	−2

$-4a_2 = -2 \mid : (-4)$

$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{1}{2}}$

$a_1 - 6a_2 = -1 \Leftrightarrow a_1 - 6 \cdot \frac{1}{2} = -1$

$\Leftrightarrow a_1 - 3 = -1 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$

$a_0 - 4a_1 + 16a_2 = -2 \Leftrightarrow a_0 - 4 \cdot 2 + 16 \cdot \frac{1}{2} = -2$

$\Leftrightarrow a_0 - 8 + 8 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P_1(-4|-2): f(-4) = \frac{1}{2}\cdot(-4)^2 + 2\cdot(-4) - 2 = 8 - 8 - 2 = -2$$

$$P_2(-2|-4): f(-2) = \frac{1}{2}\cdot(-2)^2 + 2\cdot(-2) - 2 = 2 - 4 - 2 = -4$$

$$P_3(2|4): f(2) = \frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2\cdot 2 - 2 = 2 + 4 - 2 = 4$$

ب - د پارابول ککرټکی يو انحرافي ټکی دی.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \quad \Rightarrow f'(x) = x + 2 \quad \Rightarrow f''(x) = 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ i}$$

ممکنه افراطي ځاي دی

$$f''(x) = f''(-2) = 1 > 0 \Rightarrow \text{rel.}$$

په x = -2 کې نسبي مینیموم

$$f(-2) = \frac{1}{2}\cdot 4 - 4 - 2 = 2 - 4 - 2 = -4$$

نسبي مینیموم = ککرټکی: $P_{Min}(-2|-4) = P_{Sp}(-2|-4)$

پ –

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \qquad f(0) = -2 \Rightarrow P_y(0|-2)$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 = 0$$

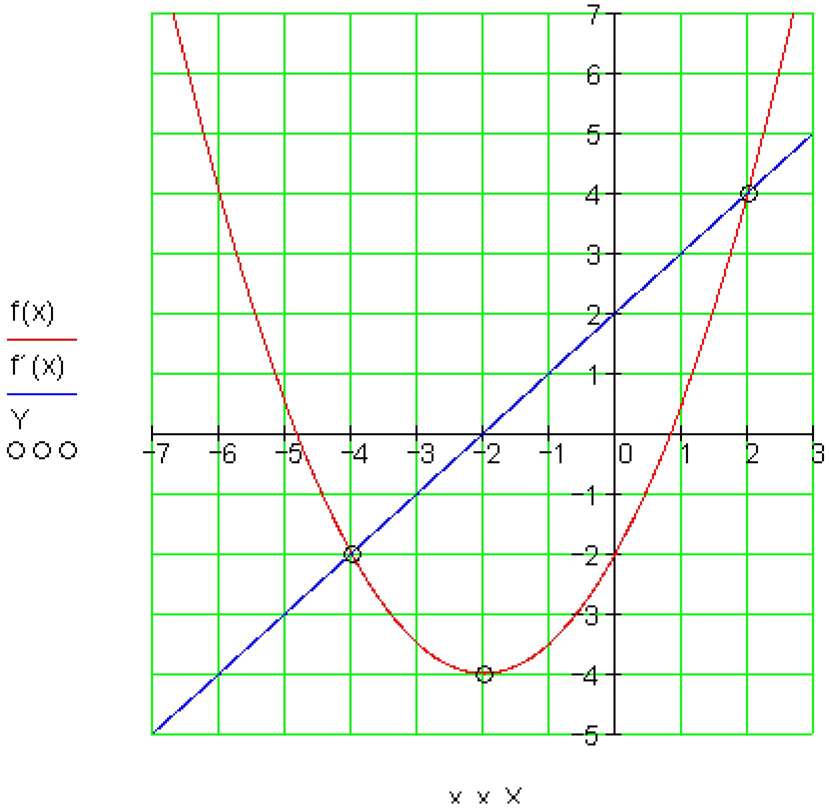
(c) ketabton.com: The Digital Library

د مربع مساوات نورمال بنه

$$p = 4; q = -4 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 + 4 = 8 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = -2 + 2 \cdot \sqrt{2} \approx 0,83 \\ x_2 = -2 - 2 \cdot \sqrt{2} \approx -4,83 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \Rightarrow P_{x1}\left(-2 + 2 \cdot \sqrt{2} \approx 0,83 \mid 0\right) \\ \Rightarrow P_{x2}\left(-2 - 2 \cdot \sqrt{2} \approx -4,83 \mid 0\right) \end{array}$$

ت -



شپږم:

ت-

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت – $f(x) = (2 + x)^3$

لومړی - حل د ضربولو له لارې

$$f(x) = (2x+1)^3 = (2x+1)\underbrace{(2x+1)^2}_{1.\ \text{bin. Formel}} = (2x+1)\left(4x^2+4x+1\right)$$

$$= 8x^3 + 8x^2 + 2x + 4x^2 + 4x + 1 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

$$f'(x) = 24x^2 + 24x + 6 \qquad f''(x) = 48x + 24 \qquad f'''(x) = 48$$

دویم د ځنزیري قانون سره حل

$$f'(x) = 3(2x+1)^2 \cdot 2 = 6(2x+1)^2 = 6\left(4x^2+4x+1\right) = \underline{\underline{24x^2+24x+6}}$$

$$f''(x) = 2 \cdot 6(2x+1) \cdot 2 = 24(2x+1) = \underline{\underline{48x+24}}$$

$$f'''(x) = \underline{\underline{48}}$$

$f(x)=(2x+1)^3$

لومړی حل د ضربوني قانون له لارې

$$f(x) = (2x+1)^3 = (2x+1)\underbrace{(2x+1)^2}_{1.\ \text{bin. Formel}} = (2x+1)\left(4x^2+4x+1\right)$$

$$= 8x^3 + 8x^2 + 2x + 4x^2 + 4x + 1 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

$$f'(x) = \underline{\underline{24x^2 + 24x + 6}} \qquad f''(x) = \underline{\underline{48x + 24}} \qquad f'''(x) = \underline{\underline{48}}$$

دویم حل د ځنزیري قانون له لارې

$$f'(x) = 3(2x+1)^2 \cdot 2 = 6(2x+1)^2 = 6\left(4x^2+4x+1\right) = \underline{\underline{24x^2+24x+6}}$$

$$f''(x) = 2 \cdot 6(2x+1) \cdot 2 = 24(2x+1) = \underline{\underline{48x+24}}$$

$$f'''(x) = \underline{\underline{48}}$$

ج-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \underbrace{a+b+c^2}_{Konstante} - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$$

$$f'(x) = -1 - a - b - 3cx^2 - c^3 = -3cx^2 - \underbrace{a - b - c^3 - 1}_{Konstante}$$

$$f''(x) = \underline{\underline{-6cx}} \qquad f'''(x) = \underline{\underline{-6c}}$$

خ- $f(x) = (a^2 + x^2)(a^2 - x^2)$

لومړی – د ضربولو له لارې) د بینوم دریم قانون)

$$f(x) = a^4 - x^4 \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{-4x^3}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{-12x^2}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{-24x}}$$

دویم: د ضرب قانون سره ضربول

$$= \underbrace{(a^2 + x^2)}_{u}\underbrace{(a^2 - x^2)}_{v} \Rightarrow u' = 2x \quad v' = -2x$$

$$) = u'v + uv' = 2x \cdot (a^2 - x^2) + (a^2 + x^2)(-2x) = 2a^2x - 2x^3 - 2a^2x - 2x^3 = \underline{\underline{-4x^3}}$$

$$) = -12x^2 \Rightarrow f'''(x) = -24x$$

اووم:

f(x) = -x² -x +2 => f'(x) = -2x - 1

د تکي (P(2;f(2 وضعیه قیمتونه(کواوردیناتونه)

f(2) = -2² - 2 + 2 = -4 -2 +2 = -4 => P(2;-4)

جګېدنه په (P(2|-4 کې.

(د تانجنت جګیدنه)f’(2)=-2.2-1=-5=> mt= -5

د تانجنت مساوات:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t(x) = m_t x + b_t = -5x + b_t$$

تانجنت له ټکي P(2|-4) تیریږي له دې لاس ته راځي او په ځپ یا برعکس

$$\Rightarrow t(2) = -4 \Leftrightarrow -5 \cdot 2 + b_t = -4 \Leftrightarrow b_t = 6$$

لاس ته راځي $t(x)=-5x+6$ د تانجنت مساوات دی له P(2|-4) لاري.

عمود مساوات:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-5} = \frac{1}{5} \Rightarrow n(x) = \frac{1}{5}x + b_n$$

نورمال له ټکي P(2|-4) تیریږي. لرو:

$$P(2|-4) \Rightarrow n(2) = -4 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \cdot 2 + b_n = -4 \Leftrightarrow b_n = -\frac{22}{5}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{n(x) = \frac{1}{5}x - \frac{22}{5}}}$$

د نورمال مساوات دی له P(2|-4) څخه تیریږي.

د فرمول له مخې الترناتیو یا بدیل حل

د f(x) په گراف په ټکي P(x0;f(x0)) کې تانجنت او عمود.

د تانجنت مساوات

t(x) = f ' (x0)(x – x0) + f(x0)

f'(x0) جګېدنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د عمود مساوات

$$n(x) = -\underbrace{\frac{1}{f'(x_0)}}_{\text{Steigung}}(x - x_0) + f(x_0);\; f'(x_0) \neq 0$$

$$f(x) = -x^2 - x + 2 \Rightarrow f'(x) = -2x - 1 \qquad x_0 = 2$$

$$f'(x_0) = f'(2) = -4 - 1 = -5$$

$$f(x_0) = f(2) = -4 - 2 + 2 = -4$$

$$t(x) = -5(x-2) - 4 = -5x + 10 - 4 = \underline{\underline{-5x + 6}}$$

$$n(x) = \frac{1}{5}(x-2) - 4 = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5} - \frac{20}{5} = \underline{\underline{\frac{1}{5}x - \frac{22}{5}}}$$

پوښتنې

مشتق د تولګې کار لپاره II

اول - تانجنت او عمود:

الف – تابع $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 7$ دې ورکړ شوې وي.

د تانجنت او عمود لپاره دې د $x_0 = 2$ لپاره وشمېرل شي.

ب – تانجنت او عمود د محور سره یو درېګودی(مثلث) جوړوي.

د دې سطحه وشمېرئ

دویم – $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x\,;\; x \in \mathbb{R}$ تابع ورکړ شوې

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - په کومو ځایونو کې f(x) جګېدنه 2 لري؟

ب - د جګېدنه د په ځای کې ده.

بې له شمېرنې یو بل ځای د برابرې جګېدنې سره ورکړی.

ستاسې ګومان مدلل کړی.

پ - f(x) په کومو ځایونو کې پروت یا افقي محور لري؟

مساوات یې ورکړئ.

ت – په f(x) پاندې تانجنت په سرچینه کې وټاکی..

ټ – د تانجنت مساوات په f(x) باندې په ټکي P (u | f(u) کې معلوم کړی

ث – کومه کرښه f(x) په P_x (3 | 0) کې عمود غوځوي؟

دریم : د څلورمې درجې ټول رېښتونی یا تام راشنل تابع ورکړ شوې :

$$f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}$$

الف – ایا د تابع ګراف سیومتریک دی؟ که هو، نو سیومتري کوم ډول ده؟

خپله پرېکړه باوري کړه(یا په دې هکله دلیل راوړه).

ب - نسبي انحراف (خورا جګټکی، خورا ټیټ ټکی) وشمېرئ.

پ - انعطاف ټکي وشمیرئ او په اوړونټکو یا انعطاف ټکو کې تابع مساوات هم وشمیرئ.

ت – محور غوځټکي وشمیرئ.

ټ - تراوسه ټولو معلومو ټکو سره ارزښتجدول وکاږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ث – په یوه وضعیه قیمت سیستم کې ګراف نسبتاً ټیک وکاږئ. او غوره یا د نخښنه کیدو ځایونه په نخښنه کړئ.

(که اړیین وي، له دې سره خپل ارزښت جدول په څو ټکو وغزوئ.

په انتروال [5 ; 5-] = I کې د اندازې شمیروني یا وکچ یوونونوشمیرونئ(د کرښې یا خطکش په څیر اله) : کچ واحد یا یوون 1 cm دئ)

ج – د ګراف په یوغبرګوالي وینا وکړئ، دا په دې معنا چې د همغږیز جګیدنې همداسې همغږیز ټیټېدنې لپاره انتروالونه ورکړئ.

ح – د ګراف په انحنا یوه وینا وکړئ، دا په دې معنا چې د ښي همداسې د کیڼې انحنا لپاره انتروالونه ورکړئ.

خ – د تعریفورشو ژئ ټکي ورکړئ.

څلورم – د تام راشنل تابع ګراف له لاندې ټکو تېرېږي:

$P_1(-1|7) \quad P_2(-2|6) \quad P_3(3|1) \quad P_4(-3|-2)$

د تابع مساوات وشمېرئ، همداسې د انعطاف ټکی او محورغوڅټکي.

ارزښت جدول ورکړئ او ګراف دامکان تر حده په یوه مناسب پروت ولاړ سیستم کې ټیک وکاږئ.

که د رسمولو لپاره کوم ټکي کم وو، نو هغه وشمیرئ.

حلونه:

نتیجې او مفصل حلونه مشتق د تولګي کار ته چمتووالی II

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی:

الف - $n(x)=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$　　$t(x)=-4x+10$

پ – دا مثلث یوه د 8,5 د سطحې واحدونو سطحه لري.

دویم:

الف – f(x)تابع د $x_{1/2}=\pm 3$ په ځای کې جګوالی 2 لري.

ب - f'(x) د $x_{1/2}=\pm 1,5$ په ځای کې جګېدنه 0,25- لري.

ت- $t(x)=-x$

ټ- $t(x)=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-\frac{2}{9}u^3$　　ث- $g(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

دریم:

لف – د(f(x ګراف د y محور سره سیومتریک دی، ځکه چې اکسپوننت جوړه (جفت) دی

ب - $P_{max}(0|4,5)$　　$P_{min2}\left(\sqrt{12}\approx 3,46|0\right)$　　$P_{min1}\left(-\sqrt{12}\approx -3,46|0\right)$

پ - $P_{w2}(-2|2)\Rightarrow t_2(x)=2x+6$　　$P_{w1}(2|2)\Rightarrow t_1(x)=-2x+6$

ت - $P_{x3/4}\left(\sqrt{12}\approx 3,46|0\right)$　　$P_{x1/2}\left(-\sqrt{12}\approx -3,46|0\right)$　　$P_y(0|4,5)$

ټ – ګراف وګورئ.　ث – ارزښت جدول وګورئ.

ج - په $\left]-\infty;-\sqrt{12}\right[$ کې کره یوغږیز ټیټیدونکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $\left]-\sqrt{12};0\right[$ کې کره مونوتو جګیدونکي

په $\left]0;\sqrt{12}\right[$ کې کره مونوتون ټیټیدونکي

په $\left]\sqrt{12};\infty\right[$ کې کره مونوتون چګیدونکي.

چ-په $\left]-\infty;-2\right[$ کې ککینه انحنا یا کوږوالی په $\left]-2;2\right[$ کې ښی کوږوالی

په $\left]2;\infty\right[$ کې کینکوږوال یا انحنا

ح- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

ځلورم:

تابع مساوات	$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4$
انحرافي ټکي	$P_{min}(2\mid-2) \qquad P_{max}\left(-\frac{4}{3}=-1,\bar{3}\mid\frac{196}{27}\approx 7,26\right)$
د انعطاف ټکي	$P_w\left(\frac{1}{3}=0,\bar{3}\mid\frac{71}{27}\approx 2,63\right)$
محورغوځټکي	$P_y(0\mid 4) \quad P_{x1}(1\mid 0) \quad P_{x2}\left(-\sqrt{8}\approx-2,83\mid 0\right) \quad P_{x3}\left(\sqrt{8}\approx 2,83\mid 0\right)$

مفصل حلونه:

لومړی:

الف-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{2}x^2+7 \qquad x_0=2 \qquad f'(x)=\frac{1}{4}x^3-3x$$

$$f(x_0)=f(2)=\frac{1}{16}\cdot 16-\frac{3}{2}\cdot 4+7=1-6+7=2$$

$$f'(x_0)=f'(2)=\frac{1}{4}\cdot 8-3\cdot 2=2-6=-4$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=-4(x-2)+2=-4x+8+2=\underline{\underline{-4x+10}}$$

$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)=\frac{1}{4}(x-2)+2=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}+2=\underline{\underline{\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}}}$$

ب – د ملث سطحه = $A=\frac{g.h}{2}$

تانجنت او عمود په $:S(x_0|f(x_0))=S(2|2)$ ټکي کې غوڅوي. له دې سره لر: = h

2 LE د اوږدوالي دوه واحده. g د t(x) او n(x) د صفرځایونو تر منځ واټندی.

$$t(x)=0\Leftrightarrow -4x+10=0\Leftrightarrow 4x=10\Leftrightarrow x_1=\frac{10}{4}=2,5$$

$$n(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{4}x+\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow \frac{1}{4}x=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow x_2=-\frac{12}{2}=-6$$

$$g=6+2,5=8,5\Rightarrow A=\frac{8,5\cdot 2}{2}=\underline{\underline{8,5FE}}$$

یادونه: په پورته LE داوږدوالي واحد او FE د سطحې واحد دی.

دویم: الف - $f(x)=\frac{1}{9}x^3-x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$

په x0 کې جګوالی ارزښت 2 لري.

$$\Rightarrow f'(x_0)=2\Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2-1=2\Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2=3\Leftrightarrow x_0^2=9\Rightarrow \underline{\underline{x_{01/2}=\pm 3}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع f(x) له دې سره د $x_{1/2} = \pm 3$ په ځای کې چګوالی ۲ لري.

ب - $f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$ یو پارابول او له دې امله محورسیمتریک دی.

د f'(1,25) =-0,25 پسې لاس ته راځي: f'(-1,25x) = -0,25

f'(x) د $\underline{\underline{x_{1/2} = \pm 1{,}5}}$ په ځای کې 0,25- جګېدنه لري.

پ –

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3}$$

$$f\left(\sqrt{3}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\,;\, f\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{3} \Rightarrow \underline{P\left(\sqrt{3}\,|\,-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right);\, Q\left(-\sqrt{3}\,|\,\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)}$$

تانجنتونه کربښې دي، چې دx محور سره غبرګې ځغلي:

$$\underline{\underline{t_1(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}\,;\, t_2(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3}}}$$

ت _

$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$$

د تانجنت مساوات په سرچینه کې: x0 = 0

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x_0) = f'(0) = -1 \qquad f(x_0) = f(0) = 0$$

$$\Rightarrow t(x) = -1(x - 0) + 0 = \underline{\underline{-x}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټ –

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$$

د تانجنت مساوات په P(u;f(u)) ټکي کې.

$$t(x)=f'(u)(x-u)+f(u)$$

$$f'(u)=\frac{1}{3}u^2-1 \qquad f(u)=\frac{1}{9}u^3-u$$

$$t(x)=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)(x-u)+\frac{1}{9}u^3-u=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-u\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)+\frac{1}{9}u^3-u$$

$$=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-\frac{1}{3}u^3+u+\frac{1}{9}u^3-u=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-\frac{3}{9}u^3+\frac{1}{9}u^3=$$

$$=\underline{\underline{\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-\frac{2}{9}u^3}}$$

ث - کرښه، چې f(x) په $P_x(3\mid 0)$ کې غوڅوي، په دې ټکي کې عمود ده.

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1 \qquad P_x(3\mid 0)\Rightarrow x_0=3$$

$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

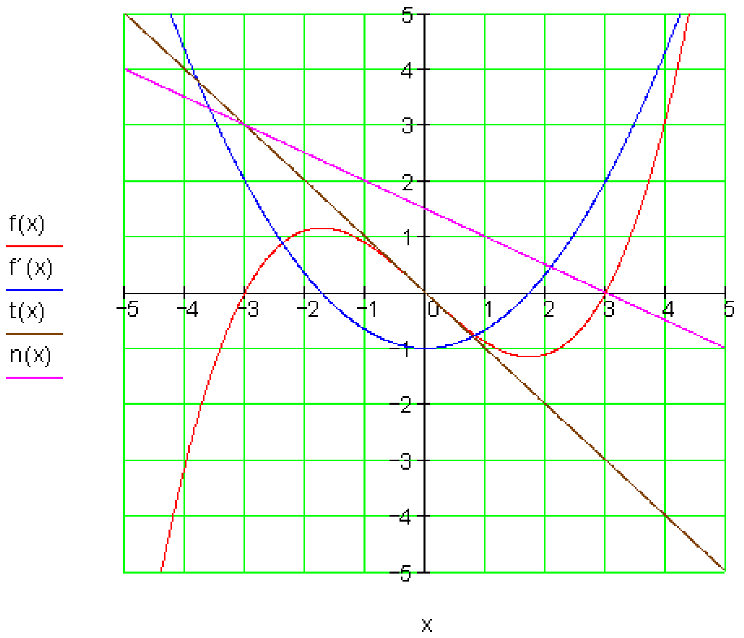
$$f'(x_0)=f'(3)=\frac{1}{3}\cdot 9-1=3-1=2$$

$$f(x_0)=f(3)=\frac{1}{9}\cdot 27-3=3-3=0$$

$$n(x)=-\frac{1}{2}(x-3)+0=\underline{\underline{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}}$$

ث - ګرافونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library



دریم: لف- د f(x) ګراف د y محور سره سیومتري دی، ځکه چې فقط جوړه یا جفت اکسپوننت رامنځ ته کیږي.

ب -

$$f(x)=\frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x=0\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}\right)=0\Rightarrow x_1=0$$

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^2=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x^2=12\Leftrightarrow x_{2/3}=\pm\sqrt{12}$$

$x1=0$ او $x_{2,3}=\pm\sqrt{12}$ ځایونه دي، د پروت یا افقي محور سره.

$$f''(x_1)=f''(0)=-\frac{3}{2}<0\Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1=0$$

$$f''(x_{2/3})=f''\left(\pm\sqrt{12}\right)=\frac{3}{8}\cdot 12-\frac{3}{2}=\frac{36}{8}-\frac{3}{2}=2>0\Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_{2/3} = \pm\sqrt{12}$$

$$f(x_1) = f(0) = \frac{9}{2} \qquad f(x_{2/3}) = \frac{1}{32}\cdot 144 - \frac{3}{4}\cdot 12 + \frac{9}{2} = 0$$

$$P_{max}(0\,|\,4{,}5) \qquad P_{min1}\left(-\sqrt{12} \approx -3{,}46\,|\,0\right) \qquad P_{min2}\left(\sqrt{12} \approx 3{,}46\,|\,0\right)$$

پ –

$$f(x) = \frac{1}{32}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x \Rightarrow f''(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2} \Rightarrow f'''(x) = \frac{3}{4}x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{8}x^2 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 2$$

$f_{1,2} = \pm 2$ ممکنه اوړونټکي یا د انعطاف ټکي دي.

$$f'''(x_{1/2}) = f'''(\pm 2) = \frac{3}{4}\cdot(\pm 2) \neq 0 \Rightarrow$$

له دې لاسته راځي، چې د انعطاف ټکي په $x_{1/2} = \pm 2$ کې.

$$f(x_{1/2}) = f(\pm 2) = \frac{1}{32}\cdot 16 - \frac{3}{4}\cdot 4 + \frac{9}{2} = \frac{1}{2} - 3 + \frac{9}{2} = 2$$

د انعطاف ټکي دي $P_{w1}(-2\,|\,2) \qquad P_{w2}(2\,|\,2)$

د انعطاف تانجنت

$$x_0 = -2 \Rightarrow f(x_0) = f(-2) = 2 \qquad f'(x_0) = f'(-2) = -\frac{1}{8}\cdot 8 + \frac{3}{2}\cdot 2 = 2$$

$$t_1(x) = 2(x+2) + 2 = \underline{\underline{2x+6}}$$

$$x_0 = 2 \Rightarrow f(x_0) = f(2) = 2 \qquad f'(x_0) = f'(2) = \frac{1}{8}\cdot 8 - \frac{3}{2}\cdot 2 = -2$$

$$t_2(x) = -2(x-2) + 2 = \underline{\underline{-2x+6}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت –

$$f(0)=\frac{9}{2}\Rightarrow P_y\left(0\,|\,\frac{9}{2}\right)$$

$$f(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}=0$$
(بي يا دوه مربع مساوات)

$$x^2=z\Rightarrow \frac{1}{32}z^2-\frac{3}{4}z+\frac{9}{2}=0|\cdot 32\Leftrightarrow z^2-24z+144=0$$

$$p=-24 \qquad q=144 \qquad \Rightarrow D=144-144=0\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{0}=0$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}=12\pm 0=12$$

$$z_1=x^2\Leftrightarrow 12=x^2\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{12} \qquad z_2=x^2\Leftrightarrow 12=x^2\Leftrightarrow x_{3/4}=\pm\sqrt{12}$$

$$P_{x1/3}\left(\sqrt{12}\approx 3,46\,|\,0\right) \qquad P_{x1/3}\left(-\sqrt{12}\approx -3,46\,|\,0\right)$$

ټ – تابع ارزښتونه د جبشميري سره شميرل شوي.

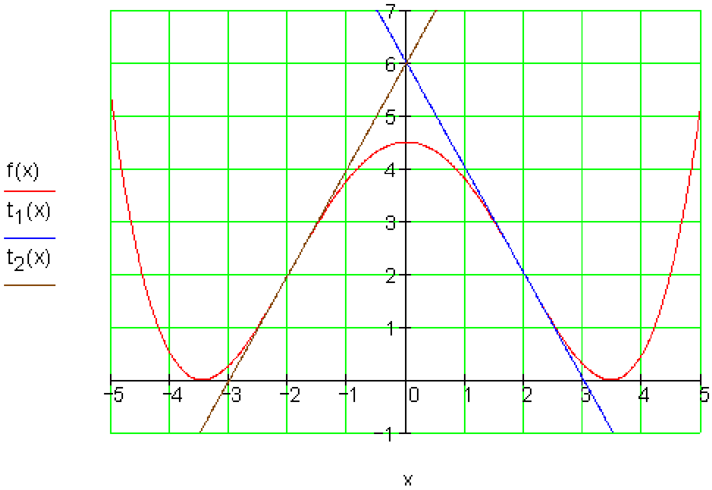
د سيومتري دلايلو په بنسټ بسيا کوي، چې فقط دx مثبت ارزښت لپاره د تابع ارزښتونه وشميرل شي.

x	-5	-4	$-\sqrt{12}\approx -3,46$	-3	-2	-1	0
$f(x)$	5,28	0,5	0	0,28	2	3,78	4,5

x	1	2	3	$\sqrt{12}\approx 3,46$	4	5
$f(x)$	3,78	2	0,28	0	0,5	5,28

ث-ګرافونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library



ج - په $\left]-\sqrt{12};0\right[$ کې کله یوغږیز جګېدونکی په $\left]-\infty;-\sqrt{12}\right[$ کې کره یوغږیز ټیټېدونکی

په $\left]\sqrt{12};\infty\right[$ کې کله یوغږیز جګیدونکی په $\left]0;\sqrt{12}\right[$ کې کره یوغږیز ټیټیدونکی

د یوغږیزوالي حالت له ګراف څخه لوستل شوی.

تغیرات په افراطي ټکو کې رامنځ ته کیږي.

ح - په $\left]-\infty;-2\right[$ کې کینه انحنا یا کږوالی په $\left]-2;2\right[$ کې ښی انحنا

په $\left]2;\infty\right[$ کې کینه انحنا یا کږوالی

د انحنا یا کږوالي حالت له ګراف څخه ولوستل شو.

تغیر په اوړون ټکو یا د انعطاف ټکو کې صورت نیسي

خ-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x^4\left[\frac{1}{32} - \underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x^4}}_{\to 0}\right] = \infty$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} x^4\left[\frac{1}{32} - \underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x^4}}_{0}\right] = \infty$$

خلورم: د تابع مساوات شمېرنه :

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(-1|7) \Rightarrow f(-1) = 7 \Leftrightarrow -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = 7$$
$$P_2(-2|6) \Rightarrow f(-2) = 6 \Leftrightarrow -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 6$$
$$P_3(3|1) \Rightarrow f(3) = 1 \Leftrightarrow 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 1$$
$$P_4(-3|2) \Rightarrow f(-3) = 2 \Leftrightarrow -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = 2$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	7	
1	−2	4	−8	6	II − I
1	3	9	27	1	III − I
1	−3	9	−27	2	IV − I
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	4	8	28	−6	III + 4·II
0	−2	8	−26	−9	IV − 2·II
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	0	20	0	−10	
0	0	2	−12	−7	

له اخرنئ دوه لیکو لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$20a_2 = -10 \mid 20 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$2a_2 - 12a_3 = -7 \Rightarrow 2\cdot\frac{1}{2} - 12a_3 = -7 \mid +1$$

$$\Leftrightarrow -12a_3 = -6 \mid (-12) \Leftrightarrow a_3 = \frac{1}{2}$$

$$-a_1 + 3a_2 - 7a_3 = -1 \Leftrightarrow -a_1 + 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 7\cdot\frac{1}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow -a_1 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -1 \Leftrightarrow -a_1 - 5 = -1 \mid +5$$

$$\Leftrightarrow -a_1 = 4 \mid \cdot(-1) \Leftrightarrow a_1 = -4$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7 \Leftrightarrow a_0 + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 3 = 7 \mid -3 \Leftrightarrow a_0 = 4$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4}}$$

افراطي ټکی:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - 4 \Rightarrow f''(x) = 3x - 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 - x - 4 = 0 \mid \cdot\frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow p = -\frac{2}{3};\ q = -\frac{8}{3}$$

$$D = -\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{9} + \frac{8}{3} = \frac{25}{9} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left|\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = 2 \\ x_2 = \frac{1}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{4}{3} \end{array}\right.$$

$$f''(x_1) = f''(2) = 3\cdot 2 - 1 = 6 - 1 = 5 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1 = 2$$

$$f''(x_2) = f''\left(-\frac{4}{3}\right) = 3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) - 1 = -4 - 1 = -5 < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2 = -\frac{4}{3}$$

$$f(x_1) = f(2) = \frac{1}{2}\cdot 8 - \frac{1}{2}\cdot 4 - 4\cdot 2 + 4 = 4 - 2 - 8 + 4 = -2 \Rightarrow \underline{\underline{P_{Min}(2 \mid -2)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x_2)=f\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{64}{27}-\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{9}+4\cdot\frac{4}{3}+4=-\frac{64}{54}-\frac{16}{18}+\frac{16}{3}+4$$

$$=-\frac{64}{54}-\frac{48}{54}+\frac{288}{54}+\frac{216}{54}=\frac{392}{54}=\frac{196}{27}\Rightarrow \underline{\underline{P_{Max}\left(-\frac{4}{3}\approx 1{,}33\,\middle|\,\frac{196}{27}\approx 7{,}26\right)}}$$

اوړونتکي یا د انعطاف ټکي

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x-4\Rightarrow f''(x)=3x-1\Rightarrow f'''(x)=3$$

ممکنه انعطافځایونه $f''(x)=0\Leftrightarrow 3x-1=0\,|+1\Leftrightarrow 3x=1|:3\Leftrightarrow x_w=\frac{1}{3}$

یو انعطاف – یا اوړونتکی دی. $f'''(x_w)=f'''\left(\frac{1}{3}\right)=3\neq 0\Rightarrow x_w=\frac{1}{3}$

$$f(x_w)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{27}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}-4\cdot\frac{1}{3}+4=\frac{1}{54}-\frac{1}{18}-\frac{4}{3}+4$$

$$=\frac{1}{54}-\frac{3}{54}-\frac{72}{54}+\frac{216}{54}=\frac{142}{54}=\frac{71}{27}\Rightarrow \underline{\underline{P_w\left(\frac{1}{3}\approx 0{,}33\,\middle|\,\frac{71}{27}\approx 2{,}63\right)}}$$

محورغوختکي: $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad f(0)=4\Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|4)}}$

لومړی صفرځای د ازمایښت له لارې. د $f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4=0$

هورنر-شیما:

	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-4	4	
$x=1$	$\downarrow$	$\frac{1}{2}$	$\underline{0}$	$\underline{-4}$	$f(1)=0\Rightarrow x_1=1$
	$\frac{1}{2}$	0	-4	0	

(c) ketabton.com: The Digital Library

پاتې يا باقي پولينومونه:

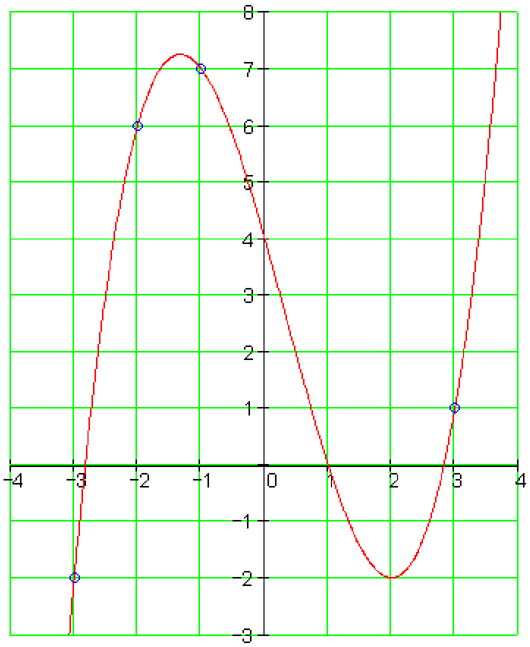
$$\frac{1}{2}x^2 - 4 = 0 \mid +4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 4 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{8}$$

$$\underline{\underline{P_{x1}(1 \mid 0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2/3}\left(\pm\sqrt{8} \approx 2{,}83 \mid 0\right)}}$$

ارزښتجدول:

x	−3	−2,83	−2	−1,33	−1	0	0,33	1	2	2,83	3
f (x)	−2	0	6	7,26	7	4	2,63	0	−2	0	1

ګراف:



پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتقشمیرنه د تولګي کار ته چمتووالی III

اول –

د دریمي درجې یو تام یا ټول ریښتونی یا راشنل عدد ورکړ شوی:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$$

الف - مشتقتابع f'(x) معلومه کړی یا وټاکی

ب - د f'(x) تابع بیا مشتق ونیسی، چې له هغې f''(x) تابع منځ ته راشي

پ – د ارزښتجدول لاندې ارزښتونه وشمېری.

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
f (x)	−7	−0,38		3,88	3	1,13		−2,63	−3	−1,38	3
f '(x)	17	9,75	4	−0,25		−4,25	−4	−2,25		5,75	12
f ''(x)	−16	−13	−10	−7		−1	2		8	11	14

ت - د مخه ورکړشوي وضعیه قیمتسیستم کې د f(x), f'(x) او f''(x) ګرافونه رسم کړی.

دویم – لاندې ریښتوني توابع ورکړشوي دي:

دوه الف- $f(x) = 2x^3 - 6x$ دوه ب - $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$

دوه پ - $f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10}$ دوه ت $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3$

الف - الف – د سیمتري حالت په هکله ویناوې وکړی

ب- پ – ټکي د پراته تانجنت سره وشمېری

پ- پ – د محومر غوښتکي وټاکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت - یو څو تابع ارزښتونه وشمیرئ او ګراف یې وباسئ

دریم – یو تام ریښتونی تابع له لاندې څلور ټکو تیریږي:

درې الف - $P_1(-1|7); P_2(-2|6); P_3(3|1); P_4(-3|-2)$

درې ب $P_1(1|6); P_2(3|-4); P_3\left(-\frac{1}{2}|\frac{45}{8}\right); P_4\left(-\frac{3}{2}|-\frac{77}{8}\right)$

الف – د تابعمساوات وشمېرئ ب – د سیمتري حالت باندې یوه وینا وکړئ

پ – د پراته یا افقي تانجنت سره ټکي وشمېرئ

ت – محورغوڅټکي وټاکئ یا معلوم کړئ.

یو څو تابع ارزښتونه وشمیرئ او ګراف یې رسم کړئ.

څلورم – د فوټبال لوبه کې د ازاده توپ وهلو د f(x) تابع په نږدې توګه د توپ د الوتنې منحني یا ګرږه ده.

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 ; x > 0$$

الف – توپ کوم ماکسیمال جګوالی غوره کوي او د شوټټکي څخه څومره لرې دئ؟

ب – توپ د شوټټکي څخه څومره لرې ببرته په ځمکه لویږي؟

پ - نه متره لرې د لوبډلې مقاومتدیوال دئ، هغه دوه متره جګ دئ. ایا توپ له دې اوړي؟

ت - توپ د ګلکرښې څخه په متره جګوالي الوزي. ازاده شوټ له کوم واټن څخه وهل شوی دئ؟

پنځم – د لاندې توابعو لپاره کمښتویش وشمېرئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

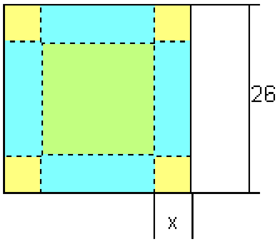
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

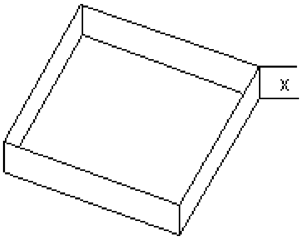
او د یوه رسم په کتنه یې تولیزه معنا روښانه کړئ.

الف - $f(x) = x^3$ ب - $f(x) = \frac{1}{3}x^2$

شپږم – د یوه مربع کارتون څخه یو کوتی یا مکعب بې له پوښ جوړیږي، چې د اړخونو یا ضلعو اوږدوالی یې 26 دئ او جګوالی یې x دئ ، جوړیږي.

الف – د تابع ترم یې وټاکئ، چې حجم V د x په واکوالي یا تابعیت کې ښایي.





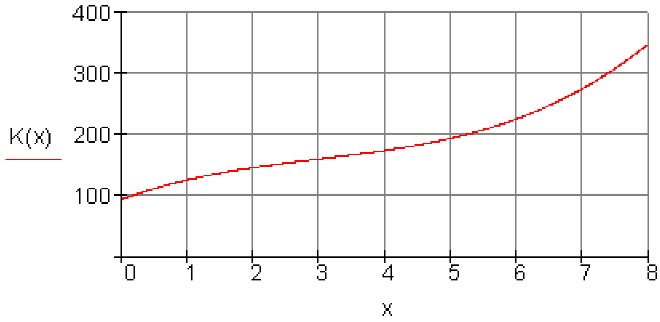
ب – ګراف یې وکاږئ او تقریبي ماکسیمال حجم یې معلوم کړئ

اوم – د یوه رغتون د د لګښتتابع K(x) د ناروغانو ګڼون یا تعداد x او ټولو لګښتونو ترمنځ انځوروي.

x = 1 دې د 100 ناروغانو په معنا، y = 1 د د روځې د زرو یورو 1000 € / Tag په معنا وي.

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



الف - لګښتتابع په خپله کتابچه کې ولیکی

ب – د لګښت تابع مشتق د مشتقلګښت یا هم پوله لګښت بولو. دا لګښت زیاتېده ښايي، چې ناروغانو تعداد په واک کې ده. (د K(x) چګېدنه).   K'(x) وټاکی او په کواوردیناتسیستم کې یې ګراف رسمکړی.

پ – د ناروغانو کوم تعداد سره د لګښت زیاتېدل خورا کم دي؟

دا ارزښت وشمېرئ.

حلونه

مفصل حلونه

د ټولګي کار لپاره مشتقشمیرنه III

لومړی:

الف - $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

ب - $f''(x) = 6x + 2$

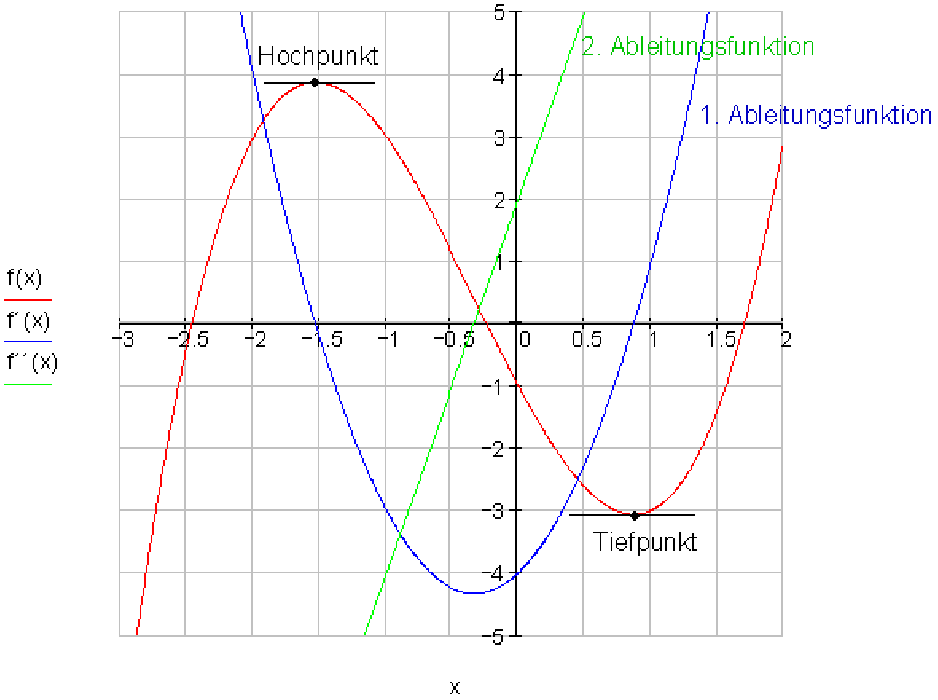
پ – ارزښتچدول

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2
f (x)	−7	−0,38	3	3,88	3	1,13	−1	−2,63	−3	−1,38	3
f '(x)	17	9,75	4	−0,25	−3	−4,25	−4	−2,25	1	5,75	12
f "(x)	−16	−13	−10	−7	−4	−1	2	5	8	11	14

ت ګراف:

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1 \qquad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4 \qquad f''(x) := 6x + 2$



د پورته پښتو له کيڼ: جګټکی، دويم مشتق، لومړی مشتق، ټيټکی

ت-

(c) ketabton.com: The Digital Library

جګتکی(نسبي ماکس) پروت تانجنت دويم مشتق له صفر کوچنی	$f'(x)=0$ $f''(x)<0$
ټيټتکی(نسبي مين) پروت تانجنت دويم مشتق له صفر لوي.	$f'(x)=0$ $f''(x)<0$

دويم. يو: الف-

$$f(x)=2x^3-6x\Rightarrow$$

تکی سيمتري، ځکه چې فقط ناجوړه(طاق) اکسپوننت لرو.

صدق کوي: $f(-x)=-f(x)$

ب – $f(x)=2x^3-6x\Rightarrow f'(x)=6x^2-6$

د پروت محور سره ټکي.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2-6=0|+6$$
$$\Leftrightarrow 6x^2=6|:6$$
$$\Leftrightarrow x^2=1\Rightarrow x_1=1;x_2=-1$$

د 1 = x1 او 1- = x2 په ځايونو کې افقي تانجنتونه شتون لري.

د y وضعيه قيمت شميرنه

$$f(x_1)=f(1)=2\cdot1^2-6\cdot1=-4 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(1|-4)}}$$
$$f(x_2)=f(-1)=2\cdot(-1)^2-6\cdot(-1)=4\Rightarrow \underline{\underline{P_2(-1|4)}}$$

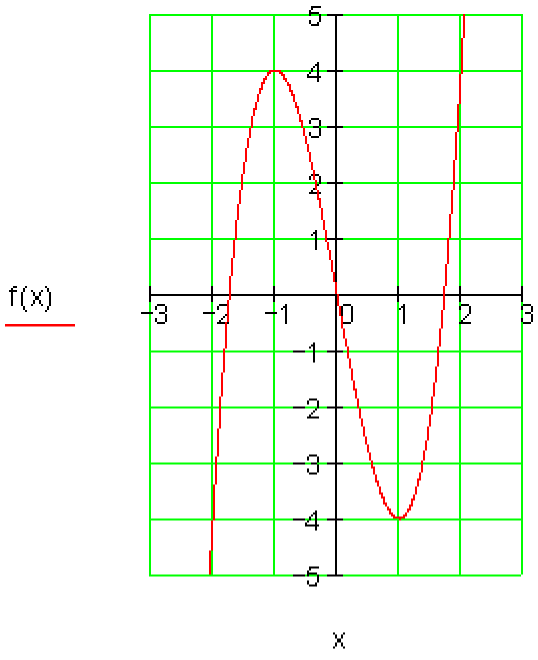
(c) ketabton.com: The Digital Library

پ ــ د $f(x) = 2x^3 - 6x$ محورغوځتکي

$$P_y : f(0) = 0 \Rightarrow P_y(0|0)$$

صفرځایونه:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x = 0$$
$$\Leftrightarrow x\left(2x^2 - 6\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$2x^2 - 6 = 0 | +6$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 = 6 | : 2$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{3}$$
$$P_{x1}(0|0);\ P_{x2}\left(\sqrt{3}|0\right);\ P_{x3}\left(-\sqrt{3}|0\right)$$



ت-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 2x^3 - 6x$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = 2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 = 4$$

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = -f(2) = -4$$

د سیومتري ټکي له امله

x	−2	−1,73	−1	0	1	1,73	2
f(x)	−4	0	4	0	−4	0	4

دویم. دوه:

الف –

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4 \Rightarrow$$

سیومتري مخ ته نه لرو، ځکه چې نه فقط جوړه(جفت) یا فقط ناجوړه (طاق) اکسپوننتونه لرو.

ب –

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 12x$$

ټکي له پراته تانجنت سره.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 12x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(6x + 12) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$6x + 12 = 0 | -12$$

$$\Leftrightarrow 6x = -12 | :6$$

$$\Leftrightarrow x_2 = -2$$

د $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$ او په ځایونو کې پراته تانجنتونه شتون لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دy وضعیه قیمتونو شمیرنه

$$f(x_1) = f(0) = -4 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0|-4)}}$$

$$f(x_2) = f(-2) = 2(-2)^3 + 6(-2)^2 - 4 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(-2|4)}}$$

پ –

د $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$ ا محورغوځتکي یا د تقاطع تکي.

$$P_y : f(0) = -4 \Rightarrow P_y(0|-4)$$

صفرځایونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 6x^2 - 4 = 0$$

یو صفرځاس د ازمایښت له لارې پیداکوو.

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 2\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 - 4 = 4$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2\cdot(-1)^3 + 6\cdot(-1)^2 - 4 = 0 \,|$$

د x1 = -1 سره صفرځاي.

د هورنر شیما له لارې پولینوم راکښته یا کمه ونه

$$\begin{array}{lcccc} & 2 & 6 & 0 & -4 \\ x = -1 & \downarrow & \underline{-2} & \underline{-4} & \underline{4} \\ & 2 & 4 & -4 & 0 \end{array}$$

یا کم شوی پولینوم:

$$2x^2 + 4x - 4 = 0 | : 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$p = 2\,;\; q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{3}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left|\begin{array}{l} x_2 = -1 + \sqrt{3} \\ x_3 = -1 - \sqrt{3} \end{array}\right.$$

$$P_{x1}(-1|0)\,;\; P_{x2}\left(-1+\sqrt{3}\,|\,0\right);\; P_{x3}\left(-1-\sqrt{3}\,|\,0\right)$$

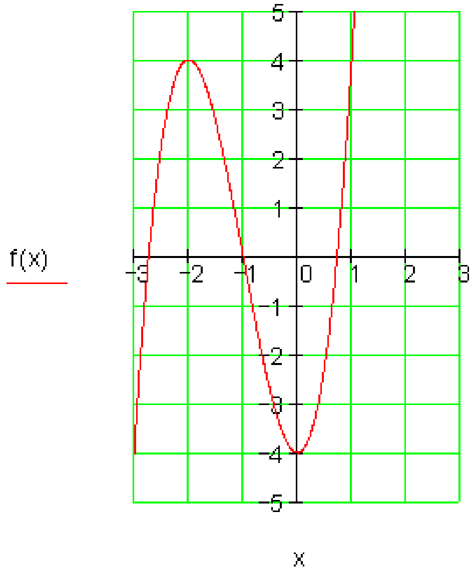
$$\text{bzw. } P_{x1}(-1|0)\,;\; P_{x2}(0{,}73\,|\,0)\,;\; P_{x3}(-2{,}73\,|\,0)$$

ت –

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$$

$$x = -3 \Rightarrow f(-3) = 2\cdot(-3)^3 + 6\cdot(-3)^2 - 4 = -4$$

x	−3	−2,73	−2	−1	0	0,73	1
f(x)	−4	0	4	0	−4	0	4



(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم. درې:

الف -

$$f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} \Rightarrow$$

محورسیومتري، حکه چې حوړه یا جفت اکسپوننت مخ ته لرو.

صدق کوي: $f(-x) = f(x)$

ب –

$$f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{10}x^3 - \frac{18}{5}x$$

د پراته یا افقي تانجنت سره غوښتکي.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{10}x^3 - \frac{18}{5}x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{4}{10}x^2 - \frac{18}{5}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$\frac{4}{10}x^2 - \frac{18}{5} = 0 \mid + \frac{18}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{10}x^2 = \frac{18}{5} \mid : \frac{4}{10}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{2/3} = \pm 3$$

په $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$ und $x_3 = -3$ ځایونو کې پراته تانجنتونه شتون لري

د y وضعیه قیمتونو کواوردیناتونه شمیرل.

$$f(x_1) = f(0) = \frac{81}{10} \qquad \Rightarrow \underline{P_1\left(0 \mid \frac{81}{10}\right)} \text{ bzw. } P_1(0 \mid 8{,}1)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x_2) = f(3) = \frac{1}{10}\cdot 3^4 - \frac{9}{5}\cdot 3^2 + \frac{81}{10} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(3|0)}}$$

$f(x_2) = f(-3) = f(3) = 0$ د محورسیومتري له امله لاس ته راځي $\underline{\underline{P_3(-3|0)}}$

پ –

د $f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10}$ محورغوڅتکي یا د محور د تقاطع ټکي

$$P_y: f(0) = \frac{81}{10} \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0|\frac{81}{10}\right)}}$$

همداسې $P_y(0|8,1)$.

صفرځایونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10} = 0 \text{ Substitution: } x^2 = z$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10}z^2 - \frac{9}{5}z + \frac{81}{10} = 0|\cdot 10$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 18z + 81 = 0$$

$$p = -18\ ;\ q = 81 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 - 81 = 0$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} z_1 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3 \\ z_2 = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x_{3/4} = \pm 3 \end{array} \right.$$

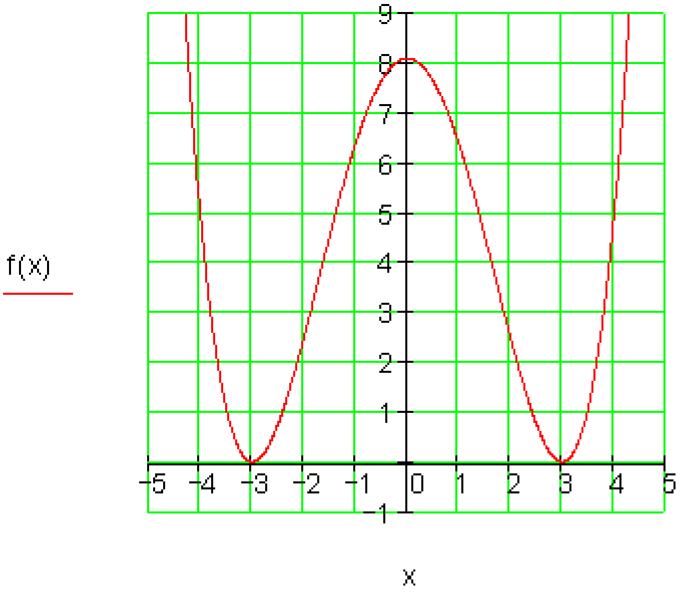
$\underline{\underline{P_{x1/3}(3|0)\ ;\ P_{x2/4}(-3|0)}}$ دواړه ډبل صفرځایونه دي

دا په دې معنا، چې ګراف په دې ځای کې د x محور لمسوي.

داسې لمس ټکي یا مماسونه تل هم ټکي دي د پراته تانجنت سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت – ښيره چې وروسته وی ښه به وی، خو څه وکړو. مخ بايد برابر شي.



$$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}$$

$$x=1\Rightarrow f(1)=\frac{1}{10}\cdot 1^4-\frac{9}{5}\cdot 1^2+\frac{81}{10}=6{,}4$$

د محور سيمتري له امله $x=-1\Rightarrow f(-1)=f(1)=6{,}4$

$$x=2\Rightarrow f(2)=\frac{1}{10}\cdot 2^4-\frac{9}{5}\cdot 2^2+\frac{81}{10}=2{,}5$$

د محور سيومتري له امله $x=-2\Rightarrow f(-2)=f(2)=2{,}5$

$$x=4\Rightarrow f(4)=\frac{1}{10}\cdot 4^4-\frac{9}{5}\cdot 4^2+\frac{81}{10}=4{,}9$$

د محور سيومتري له امله $x=-4\Rightarrow f(-4)=f(4)=4{,}9$

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
f (x)	4,9	0	2,5	6,4	8,1	6,4	2,5	0	4,9

دویم. څلور:

الف –

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3 \Rightarrow$$

یعنې له دې لرو چې: سیومتري مو مخ ته نه ده پرته،

ځکه چې نه فقط جفت(جوړه) او نه فقط طاق(ناجوړه) اکسپوننتونه مخ ته لرو.

ب –

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3 \Rightarrow f'(x) = \frac{4}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2$$

ټکي د پراته تانجنت سره

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{4}{5}x - \frac{12}{5}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$

$$\frac{4}{5}x - \frac{12}{5} = 0 \,\Big|\, + \frac{12}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5}x = \frac{12}{5} \,\Big|\, : \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow x_3 = 3$$

د $x_{1/2} = 0$ او $x_3 = 3$ ځایونو کې پروت تانجنت شته.

د y کواوردیناتو شمېرل.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x_1) = f(x_2) = f(0) = 0 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_{1/2}(0|0)}}$$

$$f(x_3) = f(3) = \frac{1}{5}\cdot 3^4 - \frac{4}{5}\cdot 3^3 = -5{,}4 \Rightarrow \underline{\underline{P_3(3|-5{,}4)}}$$

پ –

د $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3$ محورغوڅتکي

$$P_y : f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|0)}}$$

صفرځايونه

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3\left(\frac{1}{5}x - \frac{4}{5}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2/3} = 0$$

$$\frac{1}{5}x - \frac{4}{5} = 0 \,|+\frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}x = \frac{4}{5} \,|\cdot 5$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \Rightarrow x_4 = 4$$

$$\underline{\underline{P_{x1/2/3}(0|0)\,;\, P_{x4}(4|0)}}$$

ت –

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{5}\cdot 1^4 - \frac{4}{5}\cdot 1^3 = -0{,}6$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

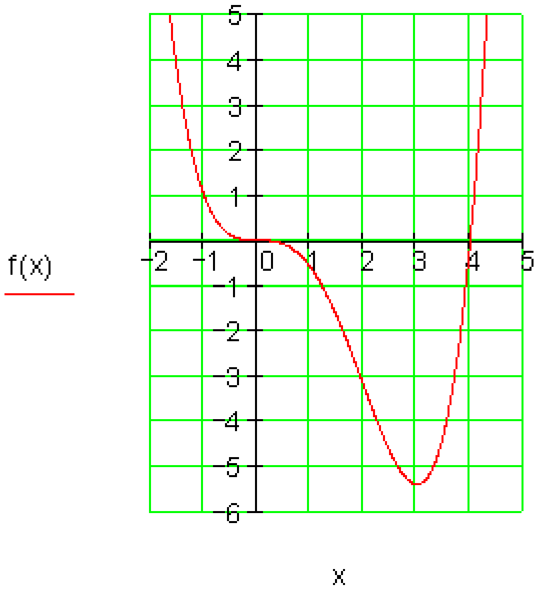
$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{5}\cdot(-1)^4 - \frac{4}{5}\cdot(-1)^3 = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{5}\cdot 2^4 - \frac{4}{5}\cdot 2^3 = -3,2$$

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = \frac{1}{5}\cdot(-2)^4 - \frac{4}{5}\cdot(-2)^3 = 9,6$$

$$x = 5 \Rightarrow f(5) = \frac{1}{5}\cdot 5^4 - \frac{4}{5}\cdot 5^3 = 25$$

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	9,6	1	0	−0,6	−3,2	−5,4	0	25



یادونه : د $x = 0$ په ځای کې د $f(x)$ ګراف پروت تانجنت لري، مګر هلته نه چګښکی پروت دی او نه ټیټ ټکی.

دا په دې معنا، چې د پراته تانجنت سره ځایونه حتمي نه ده چي افراطي ځایونه وي. مګر افراطي ټکي پروت تانجنت لري.

دریم. یو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف-

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
$$P_1(-1|7) \Rightarrow f(-1) = -1\cdot a_3 + 1\cdot a_2 - 1\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = 7$$
$$P_2(-2|6) \Rightarrow f(-2) = -8\cdot a_3 + 4\cdot a_2 - 2\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = 6$$
$$P_3(3|1) \Rightarrow f(3) = 27\cdot a_3 + 9\cdot a_2 + 3\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = 1$$
$$P_4(-3|-2) \Rightarrow f(-3) = -27\cdot a_3 + 9\cdot a_2 - 3\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = -2$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	7	
1	−2	4	−8	6	II − I
1	3	9	27	1	III − I
1	3	9	−27	−2	IV − I
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	$\|\cdot(-1)$
0	4	8	28	−6	$\|:4$
0	−2	8	−26	−9	$\|:(-2)$
1	−1	1	−1	7	
0	1	−3	7	1	
0	1	2	7	−1,5	III − II
0	1	−4	13	4,5	IV − II
1	−1	1	−1	7	
0	1	−3	7	1	
0	0	5	0	−2,5	
0	0	−1	6	3,5	

$$5a_2 = -2{,}5 \mid :5$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -0{,}5 = -\frac{1}{2}}$$
$$-a_2 + 6a_3 = 3{,}5$$
$$\Leftrightarrow 0{,}5 + 6a_3 = 3{,}5 \mid -0{,}5$$
$$\Leftrightarrow 6a_3 = 3 \mid :6$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = 0{,}5 = \frac{1}{2}}$$
$$a_1 - 3a_2 + 7a_3 = 1$$
$$\Leftrightarrow a_1 + 1{,}5 + 3{,}5 = 1$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = 1 - 1{,}5 - 3{,}5 = -4}$$
$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7$$
$$\Leftrightarrow a_0 + 4 - 0{,}5 - 0{,}5 = 7$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = 7 - 4 + 0{,}5 + 0{,}5 = 4}$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4}}$$

ب -

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4\Rightarrow$$

سیومتري مخ ته نه لرو

ځکه چې نه فقط جوړه او نه فقط ناجوړه یعنې طاق آکسپوننت شتون لري

پ –

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x-4$$

ټکي د پرآته تآنجنت سره

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}x^2-x-4=0|:\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}=0$$

$$p=-\frac{2}{3};\ q=-\frac{8}{3}\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{9}+\frac{24}{9}=\frac{25}{9}\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l}x_1=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}=\frac{6}{3}=2\\ x_2=\frac{1}{3}-\frac{5}{3}=-\frac{4}{3}\end{array}\right.$$

د $x_1=2$ او $x_2=-4/3$ په ځای کې پرآته تآنجنتونه شتون لري

د Yکوآوردیناتتونه و شمیری

$$x_1)=f(2)=\frac{1}{2}\cdot2^3-\frac{1}{2}\cdot2^2-4\cdot2+4=-2\qquad\Rightarrow\underline{\underline{P_1(2|-2)}}$$

$$x_2)=f\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^3-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)+4=\frac{196}{27}\Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$P_2\left(-\frac{4}{3}\approx -1{,}33 \mid \frac{196}{27}\approx 7{,}26\right)$$

ت-

د $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4$ محور غوځتکی یا نقطه تقاطع

$$P_y: f(0)=4 \Rightarrow P_y(0\mid 4)$$

صفرځای وه

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4=0$$

	1/2	−1/2	−4	4	
$x=1$	↓	1/2	0	−4	$\Rightarrow x_1=1$ ist Nullstelle
	1/2	0	−4	0	

پاتې یا باقي پولینوم:

$$\frac{1}{2}x^2-4=0\mid +4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2=4\mid \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow x^2=8 \Rightarrow x_{2/3}=\pm\sqrt{8}$$

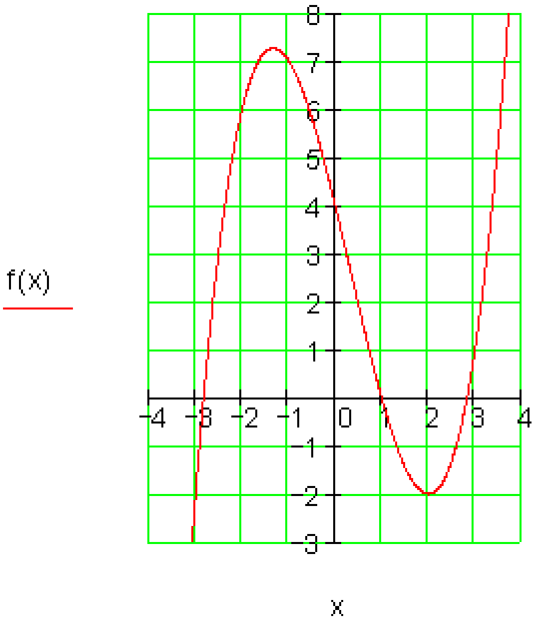
$$P_{x1}(1\mid 0);\ P_{x2}\left(\sqrt{8}\approx 2{,}83\mid 0\right);\ P_{x3}\left(-\sqrt{8}\approx -2{,}83\mid 0\right)$$

ټ-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$

x	−3	−2,83	−2	−1,33	−1	0	1	2	2,83	3
f(x)	−2	0	6	7,26	7	4	0	−2	0	1



دریم. دوه:

الف-

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$P_1(1|6) \quad \Rightarrow f(1) = 1\cdot a_3 + 1\cdot a_2 + 1\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = 6$$

$$P_2(3|-4) \quad \Rightarrow f(3) = 27\cdot a_3 + 9\cdot a_2 + 3\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = -4$$

$$P_3\left(-\frac{1}{2}\middle|\frac{45}{8}\right) \quad \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}\cdot a_3 + \frac{1}{4}\cdot a_2 - \frac{1}{2}\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = \frac{45}{8}$$

$$P_3\left(-\frac{3}{2}\middle|-\frac{77}{8}\right) \quad \Rightarrow f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}\cdot a_3 + \frac{9}{4}\cdot a_2 - \frac{3}{2}\cdot a_1 + 1\cdot a_0 = -\frac{77}{8}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	6	$\|\cdot 8$
1	3	9	27	−4	$\|\cdot 8$
1	−1/2	1/4	−1/8	45/8	$\|\cdot 8$
1	−3/2	9/4	−27/8	−77/8	$\|\cdot 8$
8	8	8	8	48	
8	24	72	216	−32	II − I
8	−4	2	−1	45	III − I
8	−12	18	−27	−77	IV − I
8	8	8	8	48	$\|:8$
0	16	64	208	−80	$\|:4$
0	−12	−6	−9	−3	$\|:3$
0	−20	10	−35	−125	$\|:5$
1	1	1	1	6	
0	4	16	52	−20	$\|:4$
0	−4	−2	−3	−1	III + II
0	−4	2	−7	−25	IV + II
1	1	1	1	6	
0	1	4	13	−5	
0	0	14	49	−21	$\|:7$
0	0	18	45	−45	$\|:9$
1	1	1	1	6	
0	1	4	13	−5	
0	0	2	7	−3	
0	0	2	5	−5	IV − III
1	1	1	1	6	
0	1	4	13	−5	
0	0	2	7	−3	
0	0	0	−2	−2	

$-2a_3 = -2 \,|:(-2)$

$\Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$

$2a_2 + 7a_3 = -3$

$\Leftrightarrow 2a_2 + 7 = -3 \,|-7$

$\Leftrightarrow 2a_2 = -10 \,|:2$

$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -5}$

$a_1 + 4a_2 + 13a_3 = -5$

$\Leftrightarrow a_1 - 20 + 13 = -5 \,|+7$

$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 6$

$\Leftrightarrow a_0 + 2 - 5 + 1 = 6 \,|+2$

$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = 8}$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب –

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \Rightarrow$$

سیومتري مخ ته نه لرو، ځکه چې نه فقط جفت او نه فقط طاق اکسپوننتونه مخ ته لرو.

پ –

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 10x + 2$$

ټکي د افقي تانجنت سره

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 2 = 0 |: 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{10}{3}x + \frac{2}{3} = 0$$

$$p = -\frac{10}{3}\ ;\ q = \frac{2}{3} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{25}{9} - \frac{6}{9} = \frac{19}{9} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{19}{9}}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{19}{3}} \approx 3{,}12 \\ x_2 = \frac{5}{3} - \sqrt{\frac{19}{3}} \approx 0{,}214 \end{array} \right.$$

په $x_1 = \frac{5}{3} + \sqrt{\frac{19}{3}}$ او $x_2 = \frac{5}{3} - \sqrt{\frac{19}{3}}$ ځایونو کې پراته تانجنتونه شته.

د y کواوردیناتو شمیرنه

$$f(x_1) = f\left(\frac{5}{3} + \sqrt{\frac{19}{3}}\right) \approx f(3{,}12) \approx -4{,}06 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(3{,}12 \mid -4{,}06)}}$$

$$f(x_1) = f\left(\frac{5}{3} - \sqrt{\frac{19}{3}}\right) \approx f(0{,}214) \approx 8{,}21 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_2(0{,}214 \mid 8{,}21)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت –

د $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ محورغوڅتکي

$$P_y : f(0) = 8 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|8)}}$$

صفرځایونه

لاني الماني: لومړی صفرځای

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$$

	1	−5	2	8	
x = 1	↓	1	−4	−2	
	1	−4	−2	6	$\Rightarrow x_1 = -1$ ist Nullstelle
	1	−5	2	8	
x = −1	↓	−1	6	−8	
	1	−6	8	0	

پاقي یا پاتې پولینومونه: $x^2 - 6x + 8 = 0$

$$p = -6\ ;\ q = 8 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 9 - 8 = 1 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = 3 + 1 = 4 \\ x_3 = 3 - 1 = 2 \end{array} \right.$$

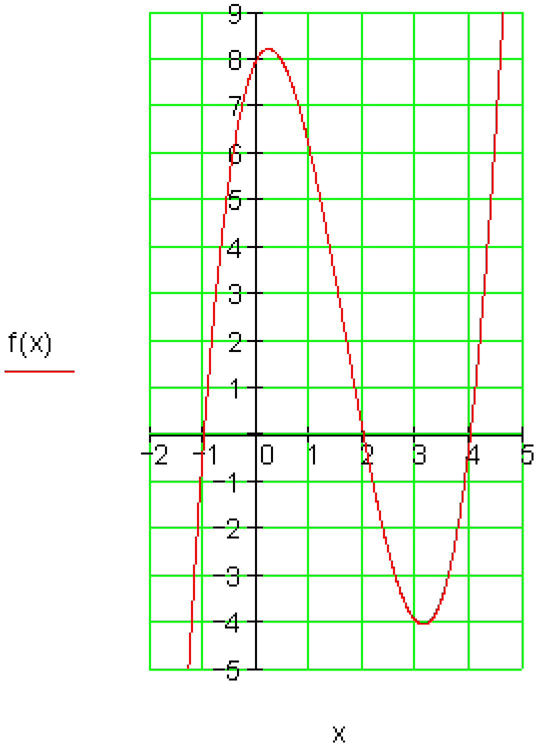
$$\underline{\underline{P_{x1}(-1|0)\ ;\ P_{x2}(4|0)\ ;\ P_{x3}(2|0)}}$$

ټ-

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

x	−1,5	−1	−0,5	0	0,21	1	2	3	3,12	4
f(x)	−9,6	0	5,6	8	8,21	6	0	−4	−4,06	0

(c) ketabton.com: The Digital Library



حلورم: الف –

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{96}x^2 + \frac{1}{8}x$$

د توپ ماکسیمال ځګوالی د الوتني لار ځګښکی دی، له دې امله یو ټکی دی، د پراته تانجنت سره.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{96}x^2 + \frac{1}{8}x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{96}x + \frac{1}{8}\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-\frac{1}{96}x + \frac{1}{8} = 0 | + \frac{1}{96}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8} = \frac{1}{96}x \,|\cdot 96$$
$$\Leftrightarrow 12 = x \Rightarrow x_2 = 12$$
$$f(12) = -\frac{1}{288}\cdot 12^3 + \frac{1}{16}\cdot 12^2 = 3 \Rightarrow P(12\,|\,3)$$

جګټکی دی.

توپ یو د درې متره ماکسیمال جګوالي ته رسیږي. او له دې امله د شوټټکي یا وهلټکي څخه 12 متره لرې دی.

ب–

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$

د صفرځایونه غواړو پیدا کړو.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2\left(-\frac{1}{288}x + \frac{1}{16}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$$
$$-\frac{1}{288}x + \frac{1}{16} = 0 \,|+\frac{1}{288}x$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{16} = \frac{1}{288}x \,|\cdot 288$$
$$\Leftrightarrow \frac{288}{16} = x \Rightarrow x_3 = 18$$

توپ د وهلټکي څخه په 18 متره لرېوالي بیرته ځمکې ته رالویږي

پ – $f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شوټټکي ځخه په نهه متره لري د توپ جګوالی دې پیدا شي.

$$f(9) = -\frac{1}{288}\cdot 9^3 + \frac{1}{16}\cdot 9^2 \approx 2,53$$

توپ د مقاومت دیوال ځخه چې دوه متره لرې دی په 2,53 m جګوالي پورته الوزي.

ت –

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$

غواړو ځاي پیدا کړو چې هلته توپ الوتنه دوه متره جګوالی لري.

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 = 2$$

د ازمائښت له لارې حل:

$$f(15) \approx 2,344$$
$$f(15,5) \approx 2,086$$
$$f(15,6) \approx 2,028$$
$$\boxed{f(15,65) \approx 1,998}$$

ازاد شوټ یا ازاد وهل له۱،۹۹۸

پنځم: الف –

$$f(x) = x^3 \qquad \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^3 = x_0^3 + 3x_0^2\cdot\Delta x + 3x_0\cdot(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$f(x_0) = x_0^3$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^3+3x_0^2\cdot\Delta x+3x_0\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x_0^3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x_0^2\cdot\Delta x+3x_0\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\left(3x_0^2+3x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}3x_0^2+\underbrace{3x_0\cdot\Delta x}_{\to 0}+\underbrace{(\Delta x)^2}_{\to 0}=3x_0^2$$

ب –

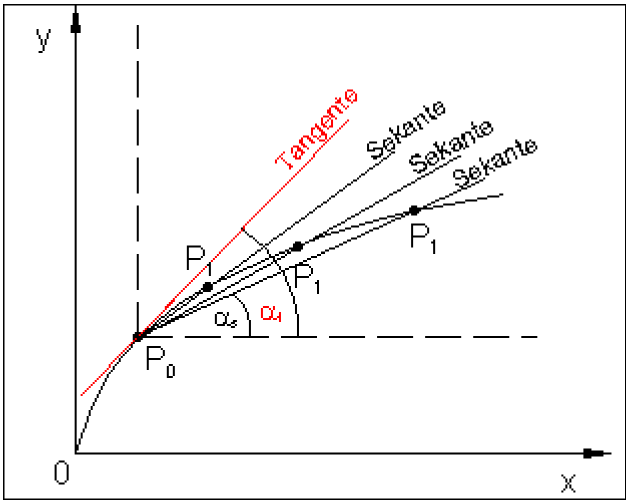
$$f(x)=\frac{1}{3}x^2 \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f(x_0+\Delta x)=\frac{1}{3}(x_0+\Delta x)^2=\frac{1}{3}\left(x_0^2+2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right)$$

$$f(x_0)=\frac{1}{3}x_0^2$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\left(x_0^2+2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right)-\frac{1}{3}x_0^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\left(2x_0\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\Delta x(2x_0+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{3}\left(2x_0+\underbrace{\Delta x}_{\to 0}\right)=\frac{2}{3}x_0$$



که P_1 و P_0 ته ورنږدي کيبنول شي، نو د نوي سيکانت جګوالي به په دې ځاي کې د تابع جګوالی د P_0 په ټکي کې وي، چې بايد پيدا شي. که دا کار په کلکه مخ ته يووړل شي او ټکی P_1 تل زيات و P_0ټکي ته نږدې شي، نو د پولې ځاي په ځبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه کربنه لاس ته راځي، دا د تابعګراف فقط په ټکي P_0 کې لمسوي. په ټکي P_0 کې د تابعګراف تانجنت. د تانجنت جګوالی په دې ټکيP_0 کې ټیک د تابع جګوالی پهP_0 کې.

شیړم:

الف – حجم یا ډکی : $V = l.b.h$

$$\left.\begin{array}{l} l = 26 - 2x \\ b = 26 - 2x \\ h = x \end{array}\right| \Rightarrow V(x) = (26-2x)(26-2x)x = 4x^3 - 104x^2 + 676x$$

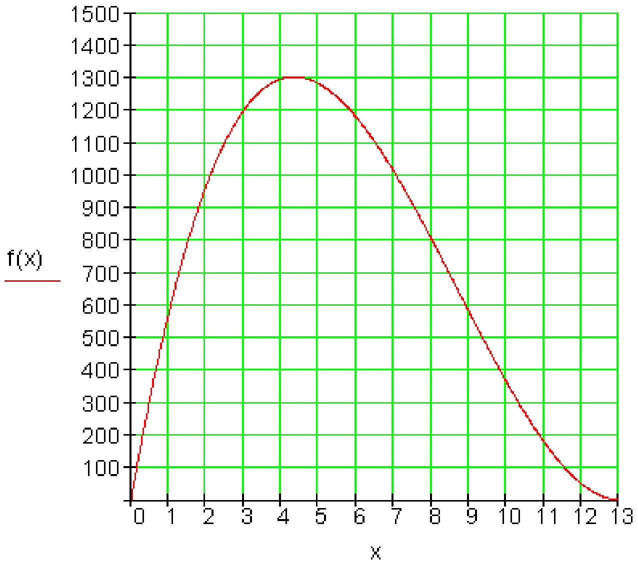
د کوټی حجم یا ډکی د یوه دریمې درجې ترم له لارې ټاکل کیږي:

$$V(x) = 4x^3 - 104x^2 + 676x$$

ب – $V(x) = 4x^3 - 104x^2 + 676x$

ارزښت جدول:

x	0	2	4	6	8	10	12
f(x)	0	968	1296	1176	800	360	48



(c) ketabton.com: The Digital Library

ماکسيمال حجم يا ډکی په جګټکي کې، له دې لاس ته راځي: پروت يا افقي تانجنت.

$$V(x) = 4x^3 - 104x^2 + 676x \Rightarrow V'(x) = 12x^2 - 208x + 676$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 208x + 676 = 0$$

د دې مربع مساوات حل څخه لرو: $x_1 = 13; x_2 = 13/3 \approx 4,33$

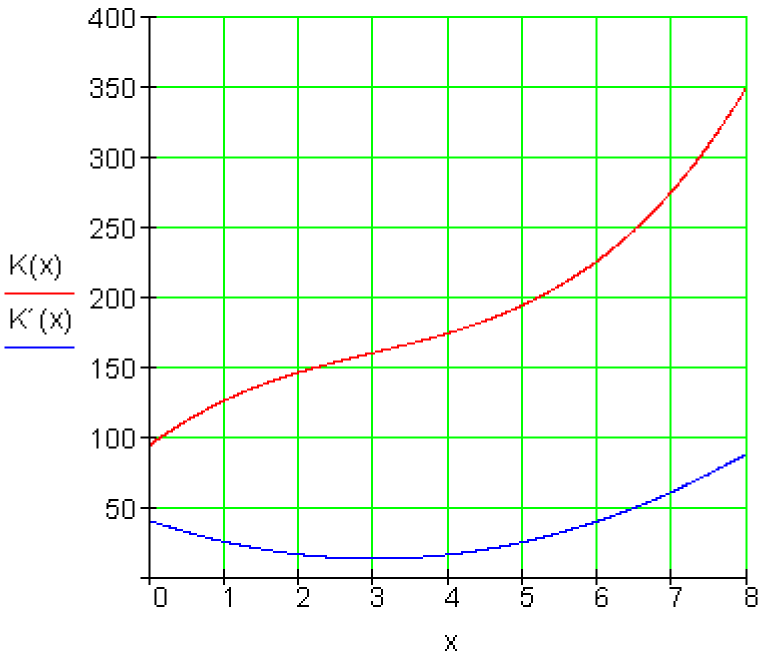
$$V\left(\frac{13}{3}\right) \approx 1302$$

د x=13/3 cm له ټاکلو د کوتې حجم يا ډکی $v \sim 1302m^3$ ماکسيمال دی.

حجم يا ډکی دی:

اووم:

الف \ ب



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94 \Rightarrow K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$$

ارزښتجدول

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40	61	88

پ –

د K'(x) ګراف یو پارابول دی، هغه چې د لګښت زیاتوالی ښايي. د لګښت خورا کم زیاتوالی د پارابول له ککرټکي یا رآس ټکي سره لاس ته راځي.

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94 \Rightarrow K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$$

د پارابول په ککرټکي کې پروت تانجنت.

$$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3$$
$$K'(3) = 13$$

د x = 3 ناروغانو ګڼون یا تعداد (300 ناروغان) د لګښت زیاتوالی له نورو خورا کم دی. K'(3) = 13 په دې معنا چې 130 € / Tag په روځ . یا په بل ډول ویل شوي: که په دې ناروغانو ته یو بل راشي، دا په دې معنا چې x = 3,01 . د یوه ورزیات ناروغ لپاره لګښت دی: K(3,01) - K(3) = 160,13 - 160 = 0,13

که دا ارزښتونه له 1000 سره ضرب شي، نو د روځې لاس ته ترې 130 €/Tag یورو راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتیګرالشمیرنه

انتیګرالشمیرنې لپاره پیل راوړنې

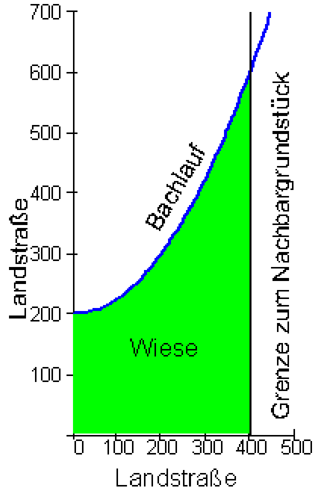
مورږ د ځمککچپوهنې یا هندسې له لارې بلد یو چې د کربښو رابند تنونو یا جسمونوسطحه او ډکی یا حجم څنګه وشمیرو.
که یوه سطحه له ګرږې (-کربښې) رابنده وي، نو څه باید وشي؟
دا مو انتیګرال شمیرنې ته رابولې.

پیلبیلګه

دا څیره شوی چمن خرڅیږي. له پورته لور د ويالې را بند دی او له ښې لور د ګاونډي ځمکه ده او کیڼ لور ته کوڅه او له کښته لور هم د یوې کوڅې را بند دی.

ددی لپاره چې چمن وپلورل شي، باید سطحه وپيژندل شي.

د پلورونکی لپاره سطحه باید نزدې پوره مګر هیڅکله کمه ونه شمیرل شي. اخستونکی هم د ځان لپاره فکر کوي، چې پیسې باید ورکړي، خو هیڅکله ځمکه د اصل څخه زیات ونه شمیرل شي.



وروسته له دې چې رانیوونکي او پلورونکي د چمن سطحه معلومه کړه، دواړه د پیسو په تادیه سره یوځای کیږي او په دې هکله موافقه کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x)=\frac{1}{400}x^2+200$ د تابع مساوات لري.

د اخستونكي له پاره ممكنه حل.

هره توټه(مستطيل پټى) 50m سره وره ده او په رسم كې وركړشوى جګوالى لري. د ټولو پټيو، سطحه يو ځاى شميرو.

$200\cdot 50=10000$

$206\cdot 50=10300$

$225\cdot 50=11250$

$256\cdot 50=12800$

$300\cdot 50=15000$

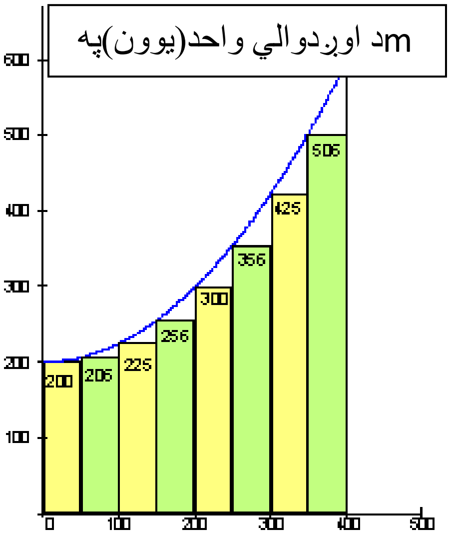
$256\cdot 50=12800$

$425\cdot 50=21250$

$506\cdot 50=25300$

$\underline{123700}$

ځمكه په لاندې ډول په اوږدو توټو(پټيو) توټه كيږي



د اخستونكي لپاره ټوله سطحه نږدې ***123700 m²*** ده.

د پلورونكي له پاره ممكنه حل:

هره توټه(پټى) 50m سورلري او په رسم كې وركړشوى جګوالى لري. د ټولو پټيو سطحه يوځاى شميرو.

$206\cdot 50=10300$

$225\cdot 50=11250$

$256\cdot 50=12800$

$300\cdot 50=15000$

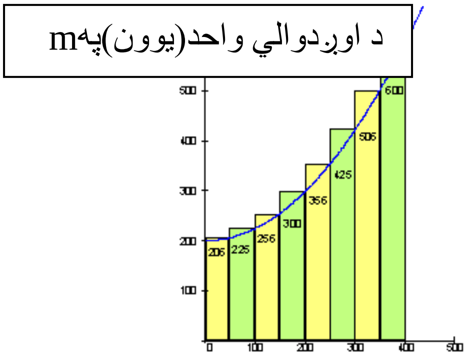
$356\cdot 50=12800$

$425\cdot 50=21250$

$506\cdot 50=25300$

$600\cdot 50=30000$

$\underline{143700}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

....

دا د پلورونکي له پاره د ټولي سطحي مساحت نږدې ***$143700\ m^2$*** دی.
اخستونکی او پلورونکی باید د دواړو قیمتونو ،،منځ،، ته راشي، دا په دې معنا چې دواړه د قیمتونو منځ ارزښت یو بل سره ومني. یعني د سطحې منځ ارزښت، چې دی:

$$\frac{123700 + 143700}{2} = 133700\ unt^2$$

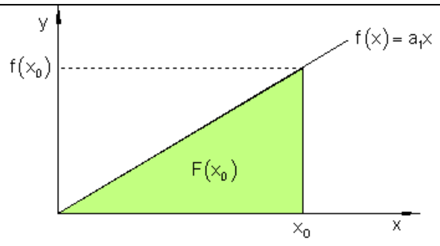
دا به وروسته د ټاکلي انتیګرال برخه (په مخ) کې وشمیرو، چې ریښتونی ارزښت یې $133333\bar{3}\,m^2$ دی.

د اخستونکي په بیلګه کې دا ډول شمیرنه ،،**لاندنی جمعي جوړول**،، بلل کیږي.
د پلورونکي په بیلګه دا ډول شمیرنه،، **پورتنی جمعي جوړول**،، بلل کیږي.
دا د سطحې ریښتونی ارزښت یو چیرته په دا منځ کې پروت دی.
باید ددې له پاره یوه لار پیدا کړو، چې ربښتونی ارزښت ترې لاس ته راشي. ددې کار لپاره لږ نوره د چمتووالي لار شته.

سطحه او لومړنی تابع:

سطحې تابع ته ترمخ راوړنه:

د تابع $f(x) = a_1 x$ ګراف په کارتیزي وضعیه سیستم (پروت ولاړسیستم) په سرچینه کې یوه کرښه انځوروي.
یو تابع غواړو پیدا کړو، چې د ګراف او x -محور ترمنځ، د x_0 په واکوالي یا تابعیت کې سطحه په ګوته کوي.
دا چې دا جوړه شوې سطحه یو مثلث دی، نو حل یې د مثلث د سطحې فرمول په مرسته $A = \frac{g \cdot h}{2}$ ساده پیدا کیږي:
زموږ د مسألې لپاره متحوله داسې تغیروو:
$A \to F(x_0);\ g \to x_0;\ h \to f(x_0) = a_1 x_0$



$$F(x_0) = \frac{x_0 \cdot f(x_0)}{2}$$

د $f(x_0) = a_1 x_0$ سره په لاندې ډول دی:

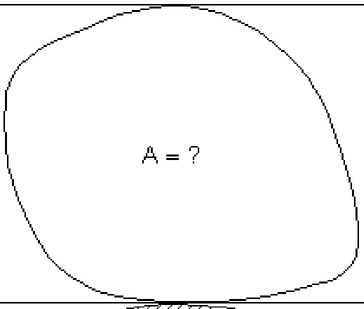
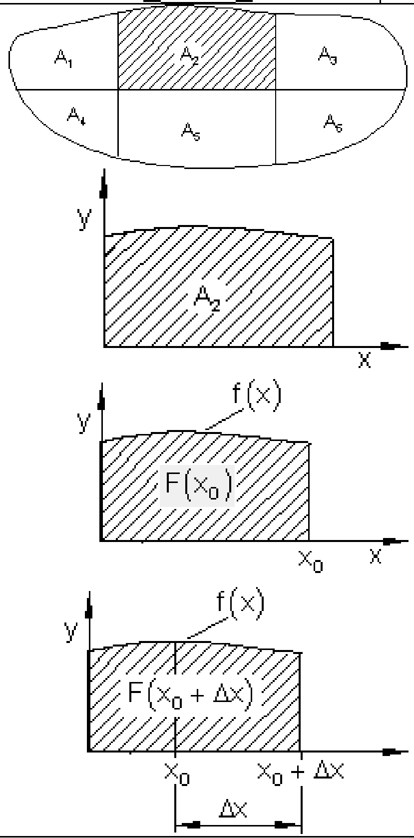
$$F(x_0) = \frac{x_0 \cdot a_1 x_0}{2} = \frac{a_1}{2} x_0^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

تابع $F(x_0)$ د ګراف او د x - محور ترمنځ سطحه د x_0 په واکوالي(تابعيت) کې تشريح کوي يا ښايي. موږ دا تابع د **سطحې تابع** بولو.

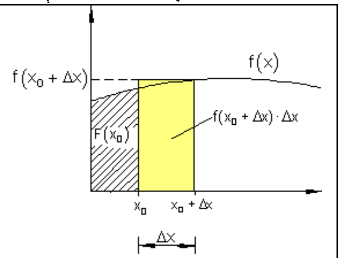
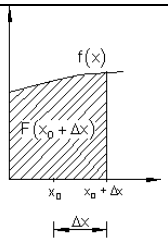
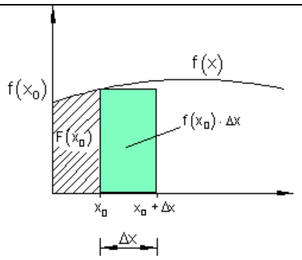
د سطحې پرابلم:

پخوانيو يونانيانو ته دا د منحني څخه رابندې سطحې شميرلو اصول معلوم وو. دا دمشتق شميرنه، چې موږ ورسره اوس سر او کار لرو، ډېر وروسته (د اوه لسمې پيړۍ‌پاي کې) د طبيعي علومو پوهانو لايبنيځ او نيوټون له خوا رامنځ ته (اختراع) شو.	
هره لـه کږوکرښـو رابنـده سطحه پـه پـای ډېـرو پلونو(قدمونو)، چې په هغې کې فقط يوه يوه کږه کرښه رامنځ ته کيږي. نوري ټولې رابندوني سيده کرښيزې دي. هره يوه د سطحې برخه(د بيلګې په توګه دلته $\mathbf{A_2}$) کېدی شي د وضعيه قيمتونو سيستم کې د يوې سطحی په څېر انځور شي، چې د کږې کرښې او پروت محور ترمنځ پرته وي. که له کږوکرښو رابند ګراف د$f(x)$ متمادي تابع وي، نو پوښتنه رامنځ ته کيږي، چې ايا يو تابع شته چې د افقي(پروت) محورارزښت x_0 په سطحه $F(x_0)$ تنظيم کړي، لکه په پيلبېلګه کې؟ که داسې يو تابعF شتون ولري، او سطحه $F(x_0)$ چې د x_0 افقي محورارزښت تنظيم وي، نو بايد د افقي(پروت) محور ارزښت $(x_0+\Delta x)$ په سطحه $F(x_0+\Delta x)$ باندې تنظيم کړای شي.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

په يوه څلورضلعي(مستطيل) کې د سطحې رابندول:
يا د سطحۍ په کوتيو کې بندول:

		
د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه د رښتونې سطحې څخه لويه ده	$F(x_0+\Delta x)$ رينتونې سطحه ده.	د منحني لاندې په نخښه شوې سطحه له رينتونې سطحې څه کوچنۍ ده.

که د سطحې پټې (يا کوچنې مستطيلونه)هرڅومره کوچني شي، په همغه اندازه د اصلي سطحې د مساحت څخه يې توپير کميږي.
دا اړودوالی د رياضياتو له مخې په لاندې توګه فرمول بندي کيدی شي:

$F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x$	$F(x_0+\Delta x)$	$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x$

دا مو دې لاندې نابرابرونونويا نامساواتو ته راهڅوي

$$F(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x) \le F(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |\,F(x_0)$$

$$\Leftrightarrow f(x_0)\cdot\Delta x \le F(x_0+\Delta x)-F(x_0) \le f(x_0+\Delta x)\cdot\Delta x \quad |:\Delta x$$

$$\Leftrightarrow f(x_0) \le \frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x} \le f(x_0+\Delta x)$$

ليميټ يې نيسو(پوله يې پيدا کوو):

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0) \le \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \le \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x)$$

$$f(x_0) \le F'(x_0) \le f(x_0)$$

$$f(x_0) \le F'(x_0) = f(x_0)$$

نو لرو: $F'(x_0)=f(x_0)$

دا په دې معنا، چې د سطحې F(x) مشتق د کږې کرښې د تابع ارزښت $f(x_0)$ سره په x_0 ځای کې برابر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

موږ ليکو:

$$F'(x_0)=\frac{dF(x_0)}{dx}=f(x_0) \quad \text{يا} \quad \boxed{F'(x)=\frac{dF(x)}{dx}=f(x)}$$

که موږ برياللي شو، داسي يو تـابع F(x) پيداکړو چې مشتق يې د رابندې کړې f(x)تـابع وي، نو F(x) د سطحي تابع دی.
که موږ يو تابع د لومړني تابع څخه رابيل کړويعني مشتق يـې ونيسو، نـو دا مشتق کول بولو. د يوې سطحې تابع پيدا کول په روښانه توګه ددې کړنلارې برعکس دی.

سرې کړی شي فورمال ووايي:
د يوې سطحې مساحت تابع، چې پيداکړو، دا معنا لري چې انتيګرالول يې شميرو.
د يوه ساده توان تـابع پـه بيلګه د احساس لـه مخـې يـوه لار پيداکيدی شي، چې دا څنګه ايتيګرالوي.

توانتابع :

$$f(x)=x^3 \quad \Rightarrow f'(x)=3\cdot x^{3-1}=3x^2$$

مشتق په دې معنا چې: اکسپوننت په يو کميږي او پوتنځتابع د زاړه پوتنځ سره ضربيږي.
انتيګرالونه (زياتونه ياورګډونه) په دې معنا چې: اکسپوننت په يو جګيږي اوپوتنځتابع په نوي اکسپوننت ويشل کيږي.

دا همدا اوس ازمايو:

پوتنځتابع:

$$f(x)=3x^2 \quad \Rightarrow F(x)=\frac{3}{2+1}x^{2+1}=\underline{\underline{x^3}}$$

تابع F(x) د f(x) بنسټتابع (لومړنی تابع يا ساده تابع) بلل کيږي، ځکه چې f(x) له F(x) څخه لاس ته ارځي يا را پيداکيږي يا راځيږي.

ناټاکلی انتيګرال

(c) ketabton.com: The Digital Library

و به ګورو، چې نا ټاکلی انتیګرال د لومړنی تابع لپاره بل نوم دی.

که دیوې ورکړ شوې f(x) تابع F(x) لومړنی تابع، یعنې F(x) وپیژنو، نو د یوې ثابتې c د ور جمع کولوسره د f(x) د ټولو لومړنیو توابعو سټ G لاسته راوړو(c په خوښه یو حقیقي عدد دی).
موږ د f(x) تابع د F(x) لومړنی تابع ټاکنه یا اینتګرلونه هم بولو او ددې له پاره لیکو:

$$\frac{dF}{dx}=f(x) \quad \Leftrightarrow \quad dF(x)=f(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad F(x)=\int dF(x)=\int f(x)dx$$

نو لرو : $F(x)=\int f(x)\,dx$

دا تراوسه فورمال لیکندود وو. اوس دا ژوند ته رابولو.
موږ لومړنی توابع پلټو

بیلګه:
لومړنی تابع F(x) دې پیدا شي، چې مشتق یې f(x) = 2x دی.
قاعده داسې ده $F(x)=\int f(x)dx=\int 2x\,dx$

موږ ازمایو:
$F(x)=x^2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$
$F(x)=x^2+2$ ځکه چې $F'(x)=2x=f(x)$. په ټولیزه توګه باور لري:
$F(x)=x^2+C$ ځکه چې په هرحالت کې لرو: $F'(x)=2x=f(x)$
دواړه توابع په ثابت غړي کې یو له بل توپیر لري. دوی همغه مشتق لري، ځکه چي د مشتق سره
هغه ثابت عدد له منځه ځي. له دې امله باید دې خپلې لار ته تغیر ورکړو.
قاعده(لار): باور لري: $\boxed{\int f(x)\,dx=F(x)+C}$
د لومړنیو توابعو سټ(ډېری)

د بنسټ توابعو لومړني توابع

بیلګه ښایي، چې د تابع f(x) لپاره نه یواځې یو لومړنی تابع بلکې ناپای ډېر توابع شته، چې یواځې ثابت عدد کې یو له بل سره توپیر لري، چې دا د f(x) د لومړنییو توابعو سټ بولو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه

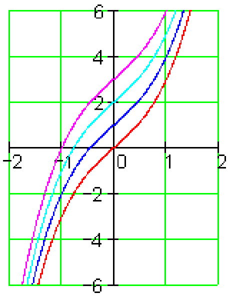
يو لومړنیتابع $F(x)$ دې پيدا شي، چې د هغه مشتق $f(x) = 3x^2 + 2$ وي.

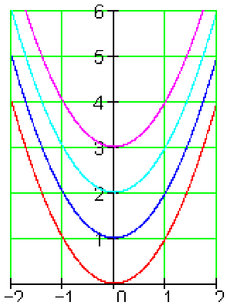
$F(x) = x^3 + 2x + C$ ، ځکه چې $F'(x) = 3x^2 + 2 = f(x)$

د ټولو لومړنيو توابعو ډېرۍ دې د منحنيو ډلې په څېر انځور شي، چې فقط ثابتو عددونو کې يو له بل توپير لري.

ددې لپاره دې د ګرافونو لاندې دوه بېلګې وکتل شي.

$F(x) = x^3 + 2x + C$ $\qquad$ $F(x) = x^2 + C$





تمرينونه

لومړنی تابع پيداکړی

لاندی $f(x)$ توابعو ته لومړنی توابع $F(x)$ پيداکړی

اول - $f(x) = x^2$ دويم - $f(x) = 2x^2$ دريم - $f(x) = x$

څلورم - $f(x) = -2x$ پمځم - $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ شپږم - $f(x) = -\frac{1}{4}x$

اوم - $f(x) = x^3$ اتم - $f(x) = 4x^3$ نهم - $f(x) = 2$

لسم - $f(x) = x + 1$ يولسم - $f(x) = x^2 + x - 3$ دولسم - $f(x) = x^n ; n \in \mathbb{N}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حلونه

تمرينونه انتيګرال ششميرنه

مفصل حلونه

اول - $f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ ازماييبنت

$$F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + 0 = x^2 = f(x)$$

دوري $f(x) = 2x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}x^3 + C$ ازمايينت

$$: F'(x) = \frac{2}{3} \cdot 3x^2 + 0 = 2x^2 = f(x)$$

دريم - $f(x) = x \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$ ازمايينت

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x^1 + 0 = x = f(x)$$

څلورم - $f(x) = -2x \Rightarrow F(x) = -x^2 + C$ ازمايينت

$$: F'(x) = -2x^1 + 0 = -2x = f(x)$$

پنځم - $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{6}x^3 + C$ ازمايينت

$$F'(x) = \frac{1}{6} \cdot 3x^2 + 0 = \frac{1}{2}x^2 = f(x)$$

شپږم - $f(x) = -\frac{1}{4}x \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{8}x^2 + C$ ازمايينت

$$F'(x) = -\frac{1}{8} \cdot 2x^1 + 0 = -\frac{1}{4}x = f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

اوم - $f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$ ازمایښت

$$F'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 + 0 = x^3 = f(x)$$

اتم - $f(x) = 4x^3 \Rightarrow F(x) = x^4 + C$ ازمایښت

$$F'(x) = 4x^3 + 0 = 4x^3 = f(x)$$

نهم - $f(x) = 2 \Rightarrow F(x) = 2x + C$ ازمایښت $: F'(x) = 2 \cdot 1x^0 + 0 = 2 = f(x)$

لسم - $f(x) = x + 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C$ ازمایښت

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x^1 + 1x^0 + 0 = x + 1 = f(x)$$

یولسم - $f(x) = x^2 + x - 3 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$ ازمایښت

$$: F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2x^1 - 3 \cdot 1x^0 + 0 = x^2 + x - 3 \Rightarrow f(x)$$

دولسم - $f(x) = x^n ; n \in \mathbb{N} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ ازمایښت

$$F'(x) = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1)x^n + 0 = x^n = f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناټاکلي انتيګرال څخه و ټاکلي انتيګرال ته

ترمخ راوړنه يا وړاندراوړنه

موږ وليدل، چې څنګه يو تابع f(x) ته لومړنۍ تابع F(x) منځ ته راوړی شو، نو ناپای ډېر لومړني توابع شته دی، چې فقط د يوې ورجمع کوونکې ثابتې له امله يو له بل توپير لري.

لرو: تابع $f(x)=3x^2+2$ او د دې د لومړنيو توابعو سټ $f(x)=x^3+2x+C$

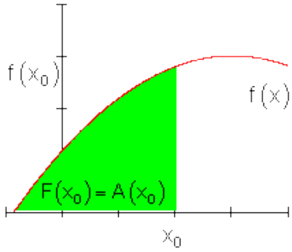
پيژند : د ټولو لومړنيو توابعو سټ و يوې تابع f(x) ته ،،ناټاکلی انتيګرال ،، بلل کيږي او ددې له پاره ليکو: $\int f(x)dx = F(x)+C$

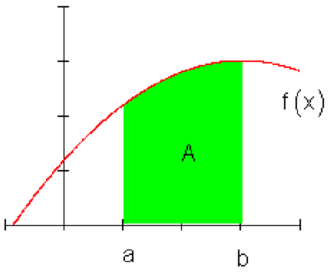
د مشتق- او انتيګرالشميرنې ترمنځ اړيکې کيدی شي د لاندې جملې له لارې لاس ته راشي.

جمله(قضيه) : د ناټاکلی انتيګرالشمېرنه د مشتقشمېرنې برعکس انځوروي

$$\frac{d[f(x)]+C}{dx}=[F(x)+C]'=f(x)$$

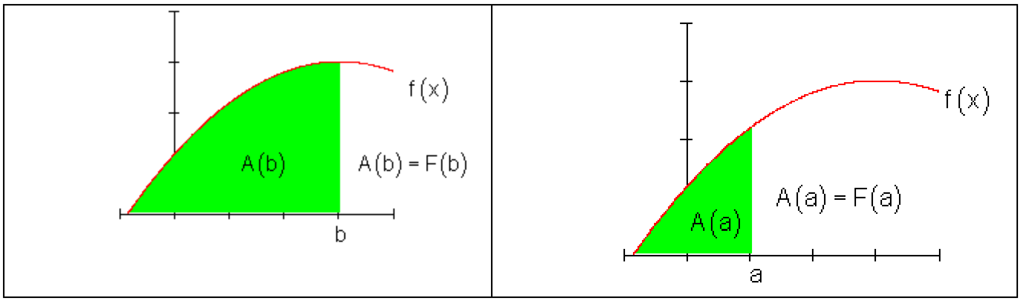
د تابع د ګراف لاندې او د انتروال [a ; b] تر منځ سطحه دې و ټاکل شي. زموږ په دې پرابلم موږ تر اوسه لاس ته راوړې زده کړې کاروو.



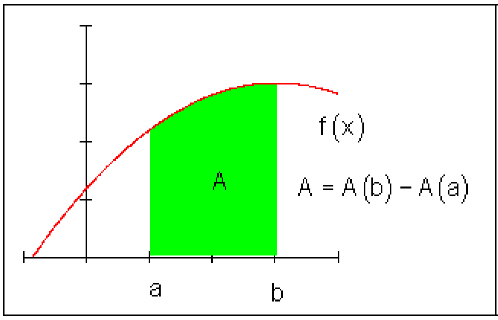


(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې سطحې تابع شتون مو فکر دې لاندې پوهنې (زده کړې) ته لاربشوده وي:
د يوې سطحې، چې د يوې په پام کې نيولې $f(x)$ تابع ګراف لاندې ده تر x_0 ځاې پورې او يوې $F'(x)$ تابع، چې د$F(x)$ د x_0 تابع مشتق ځاې د f تابع د تابع ارزښت سره د x_0 په ځاې کې برابر وي، ترمنځ اړيکې شته دی، يعني $F'(x) = f(x)$



د انتروال [a,b] حدونو ترمنځ سطحې پيداکول د تابع د ګراف سطحو د کمښت ځخه په ځاې (A(b)) b او سطحې په (A(a)) a ځاې کې ،. يعني
په همدې توګهA= A(b) – A(a)
F= F(b) – F(a) لاس ته راځي.

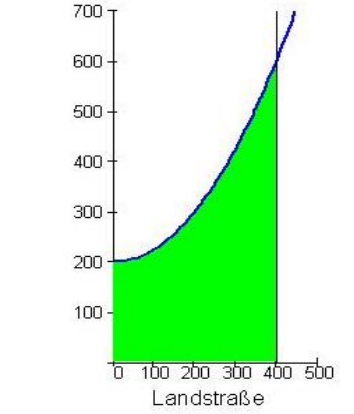


په انتروال [a,b] کې د تابعګراف لاندې سطحه د لومړنيو توابعو تفريق دی:

$$A = F(b) - F(a) := \int_a^b F(x)dx$$

دا انتيګرال ټاکلی انتيګرال هم بلل کيږي.
جمله :
دا تر اوسه لاس ته راوړو معلوماتو په بنسټ کړی شو، چې په پيل بيلګه کې راوړې د چمن سطحه وشميرو.
ثابته له تفريق سره لرې کيږي. په عمل کې د دې مسآلې د حل لپاره يوه بله لار ګتوره راوستلې يا ګټوره بنوولې:

(c) ketabton.com: The Digital Library



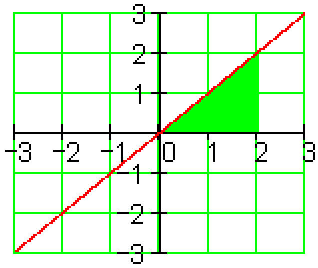
$$A=\int_0^{400}\left(\frac{1}{400}x^2+200\right)dx=\frac{1}{1200}x^3+200\cdot x\Big|_0^{400}$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^3+200\cdot 400\left[\frac{1}{1200}0^3+200\cdot 0\right]$$

$$=\frac{1}{1200}\cdot 400^3+200\cdot 400=\underline{\underline{133333.\bar{3}}}$$

دريم: د ساده سطحو شميرنه

بيلګه ۱ :



په انتروال $0 \le x \le 2$ کې د $f(x)$ او د x-محورترمنځ سطحه غواړو پيداکړو

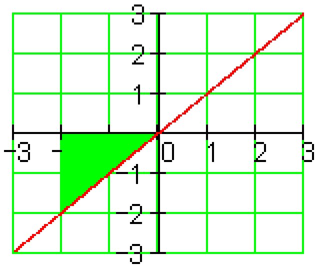
$$f(x)=x$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^2$$

$$=\frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2}=\frac{4}{2}-0=\underline{\underline{2\,FE}}$$

FE د سطحې يوون يا واحد دی.

بيلګه ۲ :



په انترو $-2 \le x \le 0$ کې د x-محور ترمنځ سطحه غواړو پيداکړو

$$f(x)=x$$

$$\int_{-2}^0 f(x)\,dx=\int_{-2}^0 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^0$$

$$=\frac{0^2}{2}-\frac{(-2)^2}{2}=0-\frac{4}{2}=\underline{\underline{-2\,FE}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

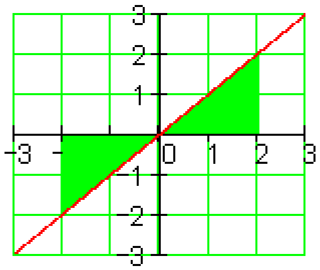
بيلګه ۳ :

په انتروال : ≤ 2- کې د x-محور ترمنځ سطحه غواړو پيدا کړو

$f(x) = x$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{2}$$

$$= \frac{2^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = \frac{4}{2} - \frac{4}{2} = 0\ FE$$



شميرنه ښايي، چې د x -محور پورته لور ته سطحه زياتيزه يا مثبت ده او د x – محور کښته لور ته سطحه کميزه يا منفي ګڼل ګيږي.

په بيلګه ۳ کې سطحې يو بل مخامخ سره له منځه وړي يا پورته کوي.

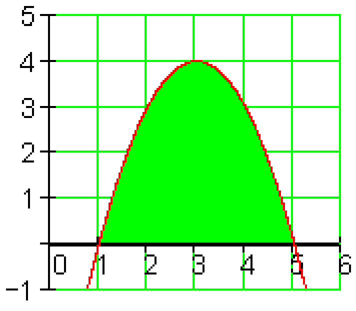
که فزيکي سطحه څېړو، نو انتيګرال بايد ووېشل شي او ارزښتونه وشميرل شي.

$$\int_{-2}^{2} x\,dx = \left|\int_{-2}^{0} x\,dx\right| + \left|\int_{0}^{2} x\,dx\right| = \left|\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{0}\right| + \left|\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{2}\right| = \left|\frac{0^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right| + \left|\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right| = 2 + 2 = 4\ FE$$

بيلګه ۴ :

په انتروال $1 \le x \le 5$ کې د $f(x)$ او د x -محور ترمنځ سطحه غواړو پيدا کړو

$f(x) = -x^2 + 6x - 5$



$$A = \int_{1}^{5} f(x)\,dx = \int_{1}^{5} \left(-x^2 + 6x - 5\right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 5x\right]_{1}^{5}$$

$$= \left(-\frac{5^3}{3} + \frac{6\cdot 5^2}{2} - 5\cdot 5\right) - \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{6\cdot 1^2}{2} - 5\cdot 1\right)$$

$$= \left(-\frac{125}{3} + 75 - 25\right) - \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5\right)$$

$$= -\frac{125}{3} + \frac{225}{3} - \frac{75}{3} + \frac{1}{3} - \frac{9}{3} + \frac{15}{3} = \frac{32}{3}$$

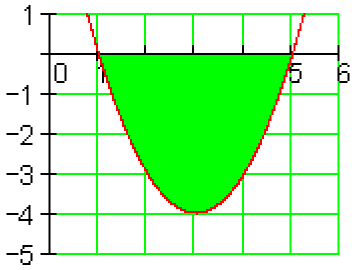
$$\Rightarrow A \approx 10{,}67\ FE$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه ۵:

په انتروال $1 \le x \le 5$ کې د $f(x)$ اود x -محور ترمنځ سطحه غواړو پیدا کړو

$$f(x) = x^2 - 6x + 5$$



$$A = \int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^5 \left(x^2 - 6x + 5\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 5x\right]_1^5$$

$$= \left(\frac{5^3}{3} - \frac{6\cdot 5^2}{2} + 5\cdot 5\right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{6\cdot 1^2}{2} + 5\cdot 1\right)$$

$$= \left(\frac{125}{3} - 75 + 25\right) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 5\right)$$

$$= \frac{125}{3} - \frac{225}{3} + \frac{75}{3} - \frac{1}{3} + \frac{9}{3} - \frac{15}{3} = -\frac{32}{3}$$

$$\Rightarrow A \approx \underline{\underline{-10{,}67\ FE}}$$

جمله: سطحه پروتځای او مخنخښه

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx > 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

او سطحه د x -محور پورته لور ته پرته ده

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx < 0 \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

او سطحه د x -محور کښته لور ته پرته ده.

د انتیګریشن پولو بدلول:

څه پیښیږي، که د انتیګریشن پولې سره بدلې شي؟

بیلګه ۶ :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = x$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2$$

$$= \frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{4}{2} - 0 = 2\,FE$$

FE د سطحې یوون یا واحد دی.

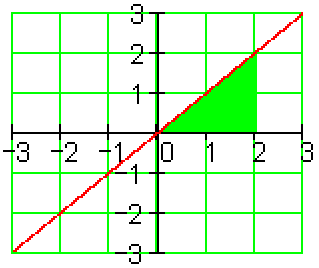
د انتیګرېشن پولې سره بدلوو:

$$\int_2 \qquad \int_2 \qquad {}^{2}\Big|_2$$

$$= \frac{0^2}{2} - \frac{2^2}{2} = 0 - \frac{4}{2} = -2\,FE$$

د دې لپاره چې سطحه مثبت یا زیاتیزه شي باید له (-1) سره ضرب شي.

په انټروال $0 \le x \le 2$ کې د f(x) او د x - محورترمنځ سطحه غواړو پیداکړو



بیلګه ۷ :

د انتیګرېشن پولې سره بدلیږي

$$A = \int_5^1 f(x)\,dx = \int_5^1 \left(-x^2 + 6x - 5\right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} - 5x\right]_5^1$$

$$= \left(-\frac{1^3}{3} + \frac{6\cdot 1^2}{2} - 5\cdot 1\right) - \left(-\frac{5^3}{3} + \frac{6\cdot 5^2}{2} - 5\cdot 5\right)$$

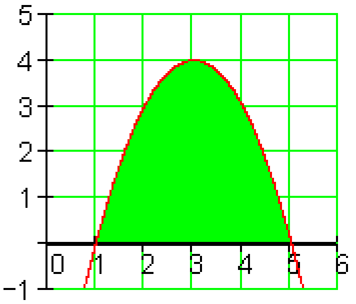
$$= \left(-\frac{1}{3} + 3 - 5\right) - \left(-\frac{125}{3} + 75 - 25\right)$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{9}{3} - \frac{15}{3} + \frac{125}{3} - \frac{225}{3} + \frac{75}{3} = -\frac{32}{3}$$

$$\Rightarrow A \approx -10{,}67\,FE$$

په انټروال $1 \le x \le 5$ کې د f(x) اود x -محور ترمنځ سطحه غواړو پیدا کړو

$f(x) = -x^2 + 6x - 5$



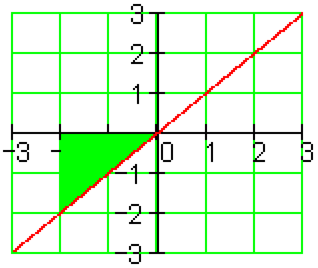
$$A = \int_1^5 f(x)\,dx = \int_1^5 \left(-x^2 + 6x - 5\right) dx$$

$\approx 10{,}67\,FE$

جمله: د پولې بدلولو سره د انتیګرېشن مخنخبنه بدلیږي.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{oder} \quad -\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

<table>
<tr>
<td>
بېلګه ۸ :
په انترو $-2 \le x \le 0$ کې د x-محور ترمنځ سطحه غواړو پيداکړو
$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} -x\,dx = -\int_{-2}^{0} x\,dx$$
پولې بدلوو
$$= \int_{0}^{-2} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{-2}$$
$$= \frac{(-2)^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{4}{2} - 0 = 2\text{ FE}$$
</td>
<td>
بېلګه ۲ :
په انترو $-2 \le x \le 0$ کې د x-محور ترمنځ سطحه غواړو پيداکړو
$f(x) = -x$

</td>
</tr>
</table>

تمرينونه:

انتيګرال شميرنه II:

لاندې ټاکلي انتيګرالونه وشميرئ.

يو - $\int_{1}^{3} x\,dx$ دوه - $\int_{0}^{3} (x^2 - 1)\,dx$ درې - $\int_{-2}^{2} 4\,dx$ څلور - $\int_{3}^{4} dx$

پنځه - $\int_{0}^{4} (2x - 5)\,dx$ شپږ - $\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{2}x^2 - 4\right) dx$

اوه- $\int_{-3}^{3} (x^3 + 2x)\,dx$ اته - $\int_{-1}^{2} \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\right) dx$

نهه - $\int_{-4}^{4} \left(2x^2 - \frac{1}{8}x^4\right) dx$ لس - $\int_{2}^{3} (3x - 6)^3\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

حلونه

انتیګرال شمیرنه II

نتیجې

لومړی- $\int_{1}^{3} x\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{3} = \underline{\underline{4}}$

دویم:- $\int_{0}^{3} \left(x^2 - 1\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{0}^{3} = \underline{\underline{6}}$

دریم- $\int_{-2}^{2} 4\, dx = \left[4x\right]_{-2}^{2} = \underline{\underline{16}}$

څلورم- $\int_{3}^{4} dx = \left[x\right]_{3}^{4} = \underline{\underline{1}}$

پنځم- $\int_{0}^{4} (2x - 5)\, dx = \left[x^2 - 5x\right]_{0}^{4} = \underline{\underline{-4}}$

شپږم: $\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(\frac{1}{2}x^2 - 4\right) dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - 4x\right]_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \approx \underline{\underline{-15,085}}$

اووم- $\int_{-3}^{3} \left(x^3 + 2x\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + x^2\right]_{-3}^{3} = \underline{\underline{0}}$

اتم- $\int_{-1}^{2} \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x\right]_{-1}^{2} = \underline{\underline{-\frac{21}{4}}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم-
$$\int_{-4}^{4}\left(2x^2-\frac{1}{8}x^4\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{40}x^5\right]_{-4}^{4}=\frac{512}{15}$$

لسم-
$$\int_{2}^{3}(3x-6)^3\,dx=\left[\frac{27}{4}x^4-\frac{162}{3}x^3+\frac{324}{2}x^2-216x\right]_{2}^{3}=\frac{27}{4}$$

مفصل حلونه:

لومړی-
$$\int_{1}^{3}x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{3}=\frac{1}{2}\cdot 3^2-\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}\cdot 9-\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=\frac{8}{2}=4$$

د ویم-
$$\int_{0}^{3}\left(x^2-1\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_{0}^{3}=\frac{1}{3}\cdot 3^3-3-\left(\frac{1}{3}\cdot 0^3-0\right)=3^2-3-(0)=9-3=6$$

دریم-
$$\int_{-2}^{2}4\,dx=[4x]_{-2}^{2}=4\cdot 2-4\cdot(-2)=8+8=16$$

څلورم-
$$\int_{3}^{4}dx=[x]_{3}^{4}=4-3=1$$

پنځم-
$$\int_{0}^{4}(2x-5)\,dx=\left[x^2-5x\right]_{0}^{4}=4^2-5\cdot 4-\left(0^2-5\cdot 0\right)=16-20-0=-4$$

شپږم-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}\left(\frac{1}{2}x^2-4\right)dx=\left[\frac{1}{6}x^3-4x\right]_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}=\frac{1}{6}\cdot\left(\sqrt{8}\right)^3-4\cdot\sqrt{8}-\left(\frac{1}{6}\cdot\left(-\sqrt{8}\right)^3-4\cdot\left(-\sqrt{8}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 8\cdot\sqrt{8}-4\cdot\sqrt{8}-\left(-\frac{1}{6}\cdot 8\cdot\sqrt{8}+4\cdot\sqrt{8}\right)=\frac{8}{6}\cdot\sqrt{8}-\frac{24}{6}\cdot\sqrt{8}+\frac{8}{6}\cdot\sqrt{8}-\frac{24}{6}\cdot\sqrt{8}$$

$$=-\frac{32}{6}\cdot\sqrt{8}=-\frac{16}{3}\cdot\sqrt{8}\approx -15{,}085$$

اووم –

$$\int_{-3}^{3}\left(x^3+2x\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x^2\right]_{-3}^{3}=\frac{1}{4}\cdot 3^4+3^2-\left(\frac{1}{4}\cdot(-3)^4+(-3)^2\right)$$

$$=\frac{81}{4}+9-\left(\frac{81}{4}+9\right)=0$$

اتم -

$$\int_{-1}^{2}\left(x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-4\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 2^4-\frac{1}{6}\cdot 2^3+\frac{3}{2}\cdot 2^2-4\cdot 2-\left[\frac{1}{4}\cdot(-1)^4-\frac{1}{6}\cdot(-1)^3+\frac{3}{2}\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)\right]$$

$$=\frac{16}{4}-\frac{8}{6}+\frac{12}{2}-8-\left[\frac{1}{4}\cdot 1-\frac{1}{6}\cdot(-1)+\frac{3}{2}\cdot 1+4\right]$$

$$=4-\frac{4}{3}+6-8-\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{3}{2}+4\right]$$

$$=2-\frac{4}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{3}{2}-4=-\frac{24}{12}-\frac{16}{12}-\frac{3}{12}-\frac{2}{12}-\frac{18}{12}=-\frac{63}{12}=-\frac{21}{4}$$

نهم: مفصل حل(اوبیونه):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-4}^{4}\left(2x^2-\frac{1}{8}x^4\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{40}x^5\right]_{-4}^{4}=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 4^3-\frac{1}{40}\cdot 4^5-\left[\frac{2}{3}\cdot(-4)^3-\frac{1}{40}\cdot(-4)^5\right]$$

$$=\frac{128}{3}-\frac{1024}{40}-\left[\frac{2}{3}\cdot(-64)-\frac{1}{40}\cdot(-1024)\right]$$

$$=\frac{128}{3}-\frac{1024}{40}-\left[-\frac{128}{3}+\frac{1024}{40}\right]=\frac{128}{3}-\frac{1024}{40}+\frac{128}{3}-\frac{1024}{40}$$

$$=\frac{256}{3}-\frac{2048}{40}=\frac{256}{3}-\frac{256}{5}=\frac{1280}{15}-\frac{768}{15}=\frac{512}{15}$$

لسم:

$$\int_{2}^{3}(3x-6)^3\,dx=\int_{2}^{3}(3x-6)^2\cdot(3x-6)\,dx=\int_{2}^{3}\left(9x^2-36x+36\right)\cdot(3x-6)\,dx$$

$$=\int_{2}^{3}\left(27x^3-162x^2+324x-216\right)dx$$

$$=\left[\frac{27}{4}x^4-\frac{162}{3}x^3+\frac{324}{2}x^2-216x\right]_{2}^{3}$$

$$=\frac{27}{4}\cdot 3^4-\frac{162}{3}\cdot 3^3+\frac{324}{2}\cdot 3^2-216\cdot 3-\left[\frac{27}{4}\cdot 2^4-\frac{162}{3}\cdot 2^3+\frac{324}{2}\cdot 2^2-216\cdot 2\right]$$

$$=\frac{2187}{4}-1458+\frac{2916}{2}-648-108+\frac{1296}{3}-648+432$$

$$=\frac{2187}{4}-1458+1458-648-108+432-648+432$$

$$=\frac{2187}{4}-540=\frac{2187}{4}-\frac{2160}{4}=\frac{27}{4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توابعو ترمنځ سطحه

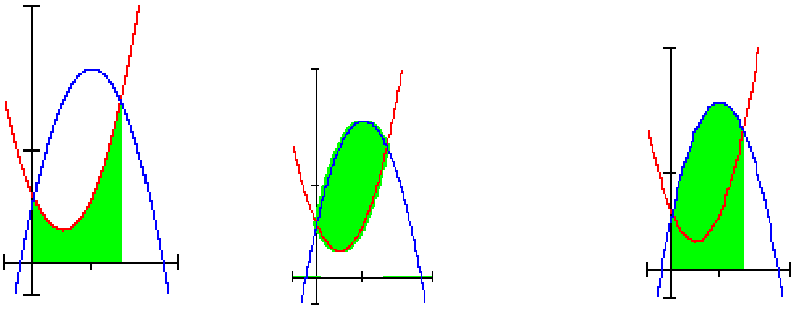
له دوه ګرافونو څخه رابندې سطحې د مساحت شمیرنه:

ننوتنه: د یوه ډنډ یا یوه بند څېره دې دلته راوړل شي یا دیوه پټي چې له ګړو پولو را بند وي.

فعالیت:

- که داسې یو ډنډ ولرو، نو فکر وکړئ، چې د دې ډنډ مساحت څنګه وشمېرو؟

په څنو پوښتنو کې د سطحې مساحت شمېرل کیږي، چې د دوه توابعو ګرافونو ترمنځ پرته ده. دا ډول د سطحې مساحت کېدی شي د تاکلو اینتګرالونو د کمښت له لارې و شمېرل شي. که دواړه ګرافونه د x-محور پورته لور ته پراته وي،نو د لاندې شیما څخه مخ ته ځو :



$$A = A_1 - A_2$$

د اینتګرال جوړونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

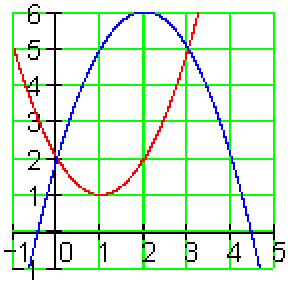
$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x\right]_0^3 = \frac{1}{3}\cdot 27 - 9 + 2\cdot 3 = 9 - 9 + 6 = \underline{\underline{6}}$$

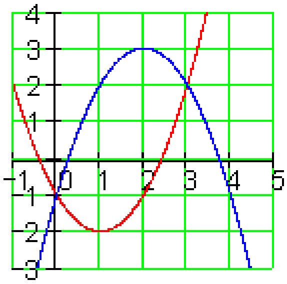
$$\int_0^3 g(x)dx = \int_0^3 (-x^2 + 4x + 2)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 2x\right]_0^3 = -\frac{1}{3}\cdot 27 + 2\cdot 9 + 2\cdot 3 =$$
$$= -9 + 18 + 6 = \underline{\underline{15}}$$

دا چې د دوه گرافونو ترمنځ سطحه بايد تل مثبت وي،نو له لوي ارزښت څخه كووچنى ارزښت بايد كم شي.

$$A = \int_0^3 g(x)dx - \int_0^3 f(x)dx = 15 - 6 = \underline{\underline{9}}$$

لكه چې پوهيږو، د يوې سطحې مخنخښه ددې په واك كې ده، چې ايا سطحه د **x** - محور پورته لور ته پرته ده او كه كښته لور ته. موږ ځيږو، چې ايا دا تاثيرات په پورتنى بيلگه كې پراته دي او كه نه. موږ سطحه د **y** -محور په درې واحدونو(يوونونو) كښته لورته بيايو او سطحې نوې شميرو.





كه د ليد له مخې قضاوت وكړو،نو د ټولو لاس ته راوړنه به برابره وي.

د x–ارزښت غوځتكي هم او له دې سره د انتيگرال حدونه بې تغيره پاتيږي.

$$g(x) = -x^2 + 4x - 1 \text{ و } f(x) = x^2 - 2x - 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځاى په ځاى کونه:

$$A=\int_0^3 f(x)dx-\int_0^3 g(x)dx=\int_0^3 (f(x)-g(x))\,dx$$

د $f(x)-g(x)=2x^2-6x$ سره کيږي:

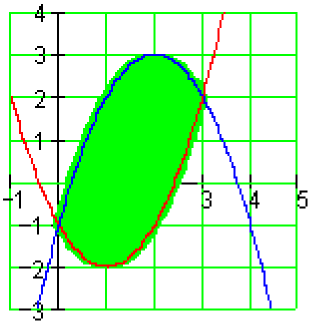
$$A=\int_0^3 (2x^2-3x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3=\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9=18-27=\underline{\underline{-9}}$$

دا چې د دوه منحنيو ترمنځ سطحه فزيکي سطحه ښايي، بايد لاس ته راوړنه يو مثبت عدد وي.

دا د مطلق ارزښت له لارې ترلاسه کوو.

$$A=\left|\int_0^3 (2x^2-6x)\,dx\right|=\left|\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3\right|=\left|\frac{2}{3}\cdot 27-3\cdot 9\right|=|18-27|=|-9|=\underline{\underline{9}}$$

د دې متود توليزه ونه(عموميت) :

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>د دوه ګرافونو ترمنځ سطحه:

که يوه سطحه د يوې پورته او يوې کښته منحني څخه رابنده وي، چې تابع f(x) او تابع g(x) پورې اړه و لري، نو دا له دې رابنده سطحه په لاندې دول شمېرل کيږي.

$A=\left|\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right|$</td>
</tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

د انتيګرالونې حدونه a او b د x – محور د دواړو ګرافونو د وضعيه قېيمتونو غوڅټکي دي.

تمرينونه:

د توابعو ګرافونو تر منځ سطحه.

د لاندې فنکشنونو(توابعو) ترمنځ سطحه وټاکئ او دواړه ګرافونه په يوه پروتولاړ سيستم کې وکاږئ. شميرل شوې سطحې کرښه کرښه کړئ.

لومړی- $f(x) = x^2 - x - 6 \,;\, g(x) = 4x - 10$

دويم- $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3 \,;\, g(x) = 3x$

دريم - $f(x) = 0{,}75\left(x^2 - 5x + 4\right) ; g(x) = 0{,}75x + 3$

څلورم- $f(x) = x^2 + 5x + \frac{9}{4} \,;\, g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{21}{4}$

پنځم - $f(x) = (x-2)^2 - 4 \,;\, g(x) = x - 1$

شپږم- $f(x) = x^2 - 4x + 1;\, g(x) = -x^2 + 2x + 1$

اووم- $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3 \,;\, g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

اتم - $f(x) = x^2 + 3x \,;\, g(x) = 0{,}5x^2$

نهم- $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 1;\, g(x) = 2x^2 + 2x + 1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

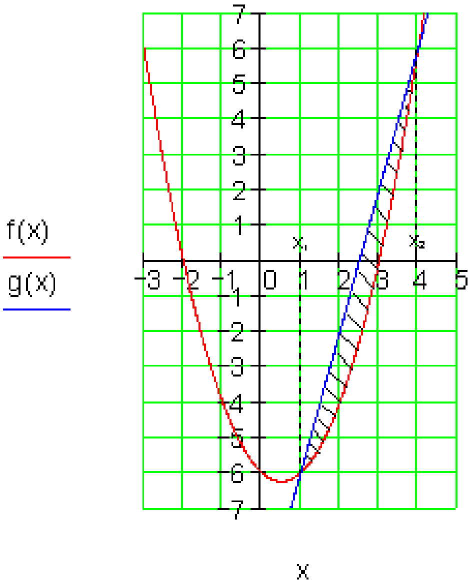
لسم- $f(x) = -0,5x^2 + 2 \,;\, g(x) = -\frac{1}{9}(x-1)^2 + 1$

مفصل جلونه يا اوبيوني

$$f(x) = x^2 - x - 6 \,;\, g(x) = 4x - 10$$
$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ und } x_2 = 4$$

لومړی –
$$A = \left|\int_1^4 [f(x) - g(x)]\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x\right]_1^4\right|$$
$$= \left|\frac{1}{3}\cdot 4^3 - \frac{5}{2}\cdot 4^2 + 4\cdot 4 - \left[\frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{5}{2}\cdot 1^2 + 4\cdot 1\right]\right| = \underline{\underline{4,5}}$$

د دواړ ګرافونو ترمنځ سطحه 4,5 FE (FE به له دې وروسته او د مخه د سطحي واحد يا يوون وي)ده.



دويم -

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 3;\ g(x) = 3x$$

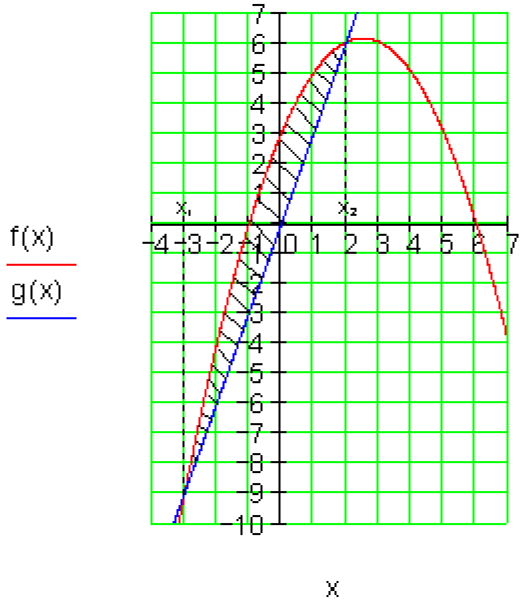
$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3 \text{ und } x_2 = 2$$

$$\int_{-3}^{2} [f(x) - g(x)]\,dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 3x\right]_{-3}^{2}$$

$$= -\frac{1}{6}\cdot 2^3 - \frac{1}{4}\cdot 2^2 + 3\cdot 2 - \left[-\frac{1}{6}\cdot(-3)^3 - \frac{1}{4}\cdot(-3)^2 + 3\cdot(-3)\right] = \frac{125}{12} \approx 10{,}417$$

د دواړو ګرافونو ترمنځ سطحه 10,417 FE ده.

یادونه: سړی کړی شي چې شمیرنه بې له مطلق ارزښت مخ ته بوزي، که سړی له نتایجو یا لاس ته راوړنو، که منفي ارزښت ولري، مطلق ارزښت جوړ کړي.



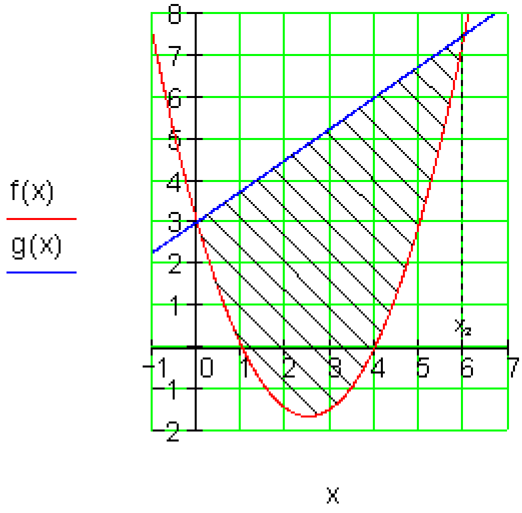
درېم –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = 0{,}75\left(x^2 - 5x + 4\right) = 0{,}75x^2 - 3{,}75x + 3 \,;\; g(x) = 0{,}75x + 3$$
$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}75x^2 - 4{,}5x = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 6$$

$$\int_0^6 [f(x) - g(x)]\,dx = \left[\frac{0{,}75}{3}x^3 - \frac{4{,}5}{2}x^2\right]_0^6 = \frac{0{,}75}{3}\cdot 6^3 - \frac{4{,}5}{2}\cdot 6^2 = -27$$
$$A = \left|\int_0^6 [f(x) - g(x)]\,dx\right| = |-27| = \underline{\underline{27}}$$

د دواړو ګرافونو ترمنځ سطحه FE 27 ده.



ځلورم –

$$f(x) = x^2 + 5x + \frac{9}{4} \,;\; g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{21}{4}$$
$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{13}{2}x + \frac{15}{2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = -5 \text{ und } x_2 = -\frac{3}{2}$$

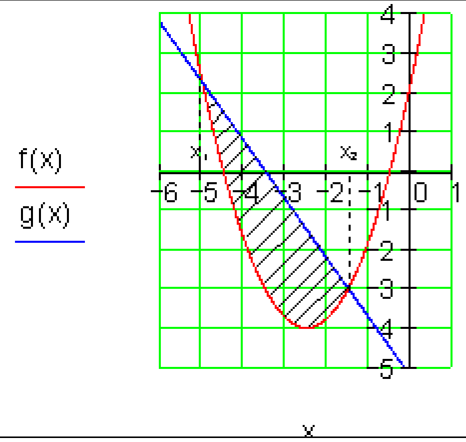
او $x_2 = -\frac{3}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-5}^{-\frac{3}{2}}\left[f(x)-g(x)\right]dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{13}{4}x^2+\frac{15}{2}x\right]_{-5}^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^3+\frac{13}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-\left[\frac{1}{3}\cdot(-5)^3+\frac{13}{4}\cdot(-5)^2+\frac{15}{2}\cdot(-5)\right]=-\frac{343}{48}$$

$$A=\left|\int_{-5}^{-\frac{3}{2}}\left[f(x)-g(x)\right]dx\right|=\left|-\frac{343}{48}\right|\approx\underline{\underline{7,146}}$$



د دواړو ګرافون ترمنځ سطحه نږدې 7,146 FE ده.

پنځم -

$$f(x)=(x-2)^2-4=x^2-4x\;;\;g(x)=x-1$$

$$f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow x^2-5x+1=0\Leftrightarrow x_1=\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}\text{ und }x_2=\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}$$

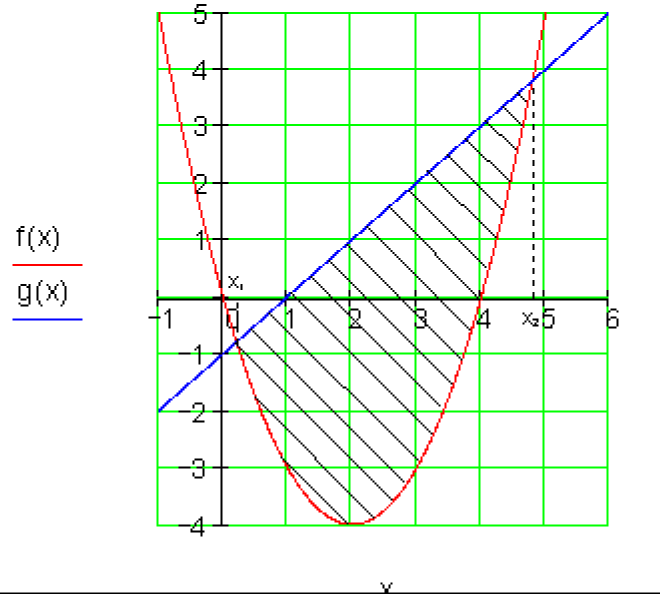
$$\int_{\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}}^{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}}\left[f(x)-g(x)\right]dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+x\right]_{\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}}^{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}\right)^3-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}\right)^2+\left(\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\left[\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}\right)^3-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}\right)^2+\left(\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}\right)\right]=-\frac{7}{2}\cdot\sqrt{21}\approx-16{,}039$$

$$A=\left|\int_{\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{21}{4}}}^{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{21}{4}}}\left[f(x)-g(x)\right]dx\right|=\left|-\frac{7}{2}\cdot\sqrt{21}\right|\approx\underline{\underline{16{,}039}}$$



د دواړو ګرافونو ترمنځ سطحه نږدې يا څه ناڅه 16,039 FE ده.

شپږم –

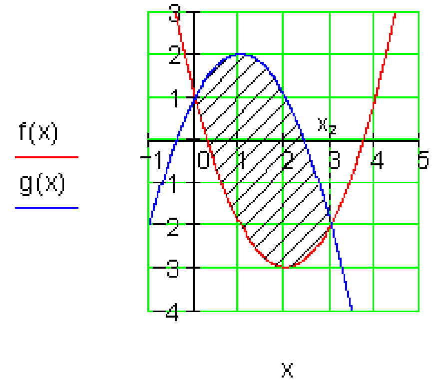
$$f(x)=x^2-4x+1;\ g(x)=-x^2+2x+1$$

$$f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow 2x^2-6x=0\Leftrightarrow x_1=0 \text{ und } x_2=3$$

$$\int_0^3\left[f(x)-g(x)\right]dx=\left[\frac{2}{3}x^3-3x^2\right]_0^3=\frac{2}{3}\cdot3^3-3\cdot3^2=-9$$

$$A=\left|\int_0^3\left[f(x)-g(x)\right]dx\right|=\left|-9\right|=\underline{\underline{9}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د دواړو ګرافونو ترمنځ سطحه 9 FE ده.

اووم –

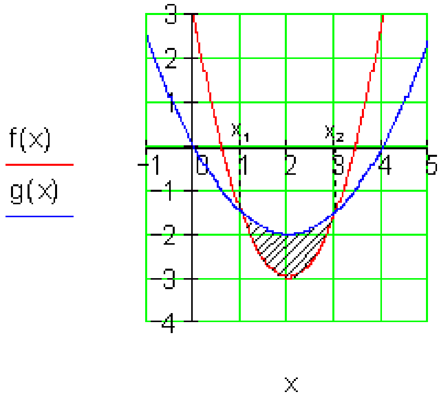
$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 3\,;\; g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1 \text{ und } x_2 = 3$$

$$\int_1^3 [f(x) - g(x)]\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_1^3$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 3^3 - 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3 - \left[\frac{1}{3}\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1\right] = -\frac{4}{3}$$

$$A = \left|\int_1^3 [f(x) - g(x)]\,dx\right| = \left|-\frac{4}{3}\right| = \underline{\underline{\frac{4}{3}}} \approx 1,333$$

	د دواړو ګرافونو ترمنځسطحه څه ناڅه یا نږدې 1,333 FE ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

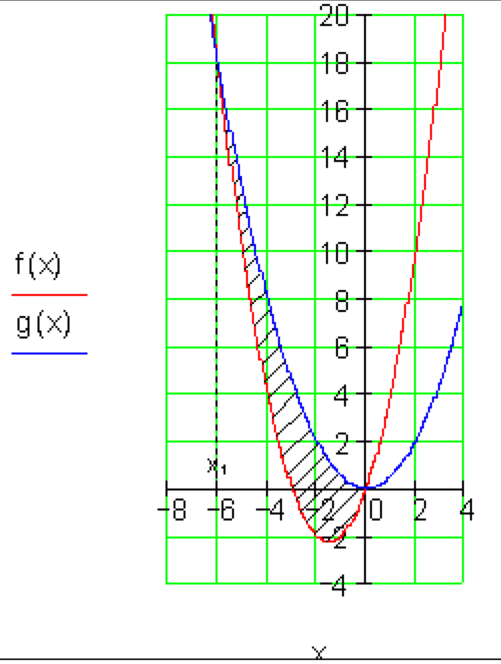
اتم -

$$f(x) = x^2 + 3x\ ;\ g(x) = 0{,}5x^2$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}5x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x_1 = -6 \text{ und } x_2 = 0$$

$$\int_{-6}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx = \left[\frac{0{,}5}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2\right]_{-6}^{0} = -\left[\frac{0{,}5}{3}\cdot(-6)^3 + \frac{3}{2}\cdot(-6)^2\right] = -18$$

$$A = \left|\int_{-6}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx\right| = |-18| = \underline{\underline{18}}$$



د دواړو ګرافونو ترمنځ سطحه 18 FE ده.

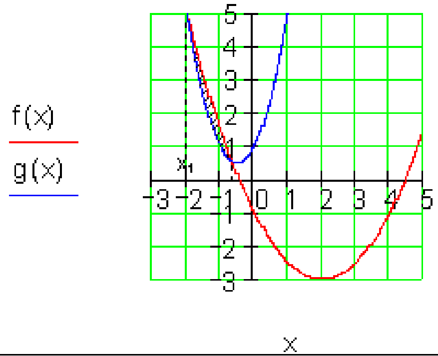
نهم -

$$f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 1;\ g(x) = 2x^2 + 2x + 1$$

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -1{,}5x^2 - 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \text{ und } x_2 = -\frac{2}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-2}^{-\frac{2}{3}}[f(x)-g(x)]\,dx=\left[-\frac{1,5}{3}x^3-2x^2-2x\right]_{-2}^{-\frac{2}{3}}$$
$$=-\frac{1,5}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^3-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-\left[-\frac{1,5}{3}\cdot(-2)^3-2\cdot(-2)^2-2\cdot(-2)\right]$$
$$=\frac{16}{27}\approx 0,593$$



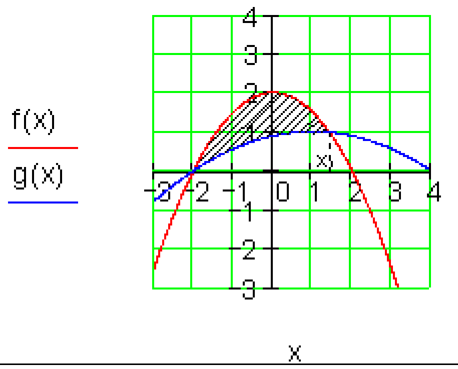
ددواړو ګرافاون ترمنځ سطحه نږدې 0,593 FE ده.

لسم-

$$f(x)=-0,5x^2+2;\ g(x)=-\frac{1}{9}(x-1)^2+1=-\frac{1}{9}x^2+\frac{2}{9}x+\frac{8}{9}$$
$$f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow-\frac{7}{18}x^2-\frac{2}{9}x+\frac{10}{9}=0\Leftrightarrow x_1=-2\text{ und }x_2=\frac{10}{7}$$

$$\int_{-2}^{\frac{10}{7}}[f(x)-g(x)]\,dx=\left[-\frac{7}{54}x^3-\frac{1}{9}x^2+\frac{10}{9}x\right]_{-2}^{\frac{10}{7}}$$
$$=-\frac{7}{54}\cdot\left(\frac{10}{7}\right)^3-\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{10}{7}\right)^2+\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{7}-\left[-\frac{7}{54}\cdot(-2)^3-\frac{1}{9}\cdot(-2)^2+\frac{10}{9}\cdot(-2)\right]$$
$$=\frac{128}{49}\approx 2,612$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

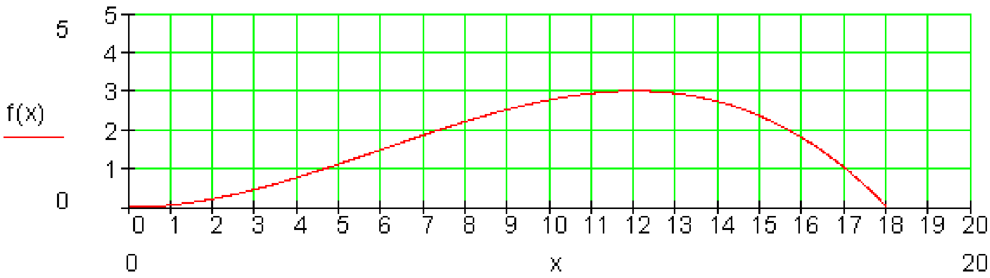
	ددواړو ګرافونو ترمنځ سطحه نږدې 2,612 FE ده.

انتيګرال د منځ- ارزښت په حيث يا توګه

_f(x)د [a ; b] په انټروا کې انتيګرال د منځ ارزښت په تګه(حيث)

د يوه ازاد غونډوسکي وهلو فکشن f(x)ګراف په فوټبال لوبه کې په نږدې توګه د غونډوسکي (کرې) الوتنو کرښه یا منحني ده.

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$



د غونډوسکي(کرې) وهلو یا شوټ ځخه وروسته د7 m او ترمنځ 16 m دغونډوسکي کرښه کوم د الوتني منخنی جګوالی لري؟

لومړی د دې ورشو لپاره ا رزښت جدول جوړوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

x_i	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$f(x_i)$	1,872	2,222	2,531	2,778	2,941	3	2,934	2,722	2,344	1,778

د شمیرل شووفنکشن ارزښتونو f(x) منځ- ارزښت فرمول $\overline{f(x)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ جوړیږي.
زموږ د بیلګې لپاره $n = 10$ دی،، نو باور لري:

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} f(x_i)$$
$$= \frac{1}{10}\cdot(1{,}872 + 2{,}222 + 2{,}531 + 2{,}778 + 2{,}941 + 3 + 2{,}934 + 2{,}722 + 2{,}344 + 1{,}778)$$
$$= \frac{25{,}122}{10} = 2{,}512$$

له دې سره غونډوسکه په انتروال [7 ; 16]کې منځنې د 2,512 m الوتنجګوالی لري. که سړی دا تلنه په شډلو یا نریو پلونو(قمونو) واخلي، نو د منځې ارزښت بله لاس ته راوړنه به ترې را ووځي یا لاس ته راشي.

د x -ارزښتونو 7; 10; 13; 16 سره د منځني ارزښت لپاره به 2,34 m لاس ته راغلي وای.

د x -ارزښتونو ..... ;7; 7,5; 8; 8,5 سره د منځنی ارزښت لپاره به 2,555 m لاس ته راغلي وای.

په روښانه توګه لیدل کیږي، چې هرڅومره x -پلونه نري واخستل شي په همغه اندازه منځنی ارزښت ټیک لاس ته راوړل کیږي.

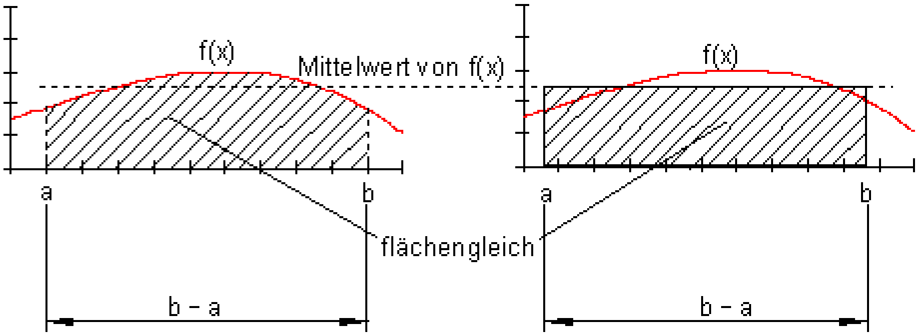
دا تلنلار د ټاکلي انتیګرال له لارې غواړو غوره کړو:
للومړی نیسو، چې فنکشن f(x) په انتروال [a;b] کې تعریف دی یا پیژند لري او زیاتیز یا مثبت. فنکشن د انتروال[a;b] په منځکې کوم ارزښت غوره کوي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټاکلی اتیګرال $\int_a^b f(x)dx$

په انټروال [a;b] کې د فنکشن د ګراف لاندې سطحه انځوروي.

مونږ اوس د دې په مخ د ولاړکوډیز یا مستطیل ډوله، له دې سطحې سره برابره کرښیزه سطحه ، په لاندې ډول ږدو:



د ولاړکوډیز یا مستطیل پرت ولاړډوله(-عمودي) اړخ د انټروال[a;b] د اوږدوالي سره یعنې b-a د سره برابر دی.

داروښانه کیږي، که چیرې د فنکشن f(x) منځ- ارزښت په انټروال [a;b] کې په پورته کرښونه کې د ولاړ کوډیز د جګوالي په څیر تعریف شي.

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

د فنکشن f(x) منځ- ارزښت

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

د یوه دا تا لړۍ سره په پرتله کونه

دا زمونږ په بیلګه باندې په دې معنا دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$$

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \text{ mit } a = 7 \text{ und } b = 16 \text{ folgt:}$$

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{16-7}\int_7^{16}\left(-\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2\right)dx = \frac{1}{9}\left[-\frac{1}{4\cdot 288}x^4 + \frac{1}{3\cdot 16}x^3\right]_7^{16}$$

$$= \frac{1}{9}\left(\left[-\frac{1}{1152}\cdot 16^4 + \frac{1}{48}\cdot 16^3\right] - \left[-\frac{1}{1152}\cdot 7^4 + \frac{1}{48}\cdot 7^3\right]\right) = \underline{\underline{2,598}}$$

بال به له دې سره په انتروال [16 ; 7] کې د 2,598 m منځنی جګوالی لرودي.

ټاکلي انتیګرال له دې سره د جمعې یا زیاتون د کلمې تل پاتې ټولنیزوالی کیږي. دا پهدې معنا، چې سږی هرڅومره کوچني x - پلونه واخلي، همغومره سږی د فنکشن منځ ارزښت ته نږدې راځي. د زاتونو یا د جمعې د اجزاوو کا اعضاوو ګڼون یا تعداد زیاتیږي یا لوییږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

انالیزی

--اکسپوننشل توابع او e - توابع

پیل

تراوسه راته معلومو توابعو کې توابع رامنځ ته کیده، چې اکسپوننتونه یا جګعددونه یې عددونه وو:

توانتوابع: $f(x) = a \cdot x^q$ د $q \in \mathbb{R}$ سره .

بیلګه: $f(x) = 2x^3$

توابع د مثبت بنسټ سره، د هغه سره چې خپلواکه متحوله x د اکسپوننت یا جګعدد سره رامنځ ته کیږي، اکسپوننشل تابع بلل کیږي.

د اکپوننشل تابع لپاره بیلګه:

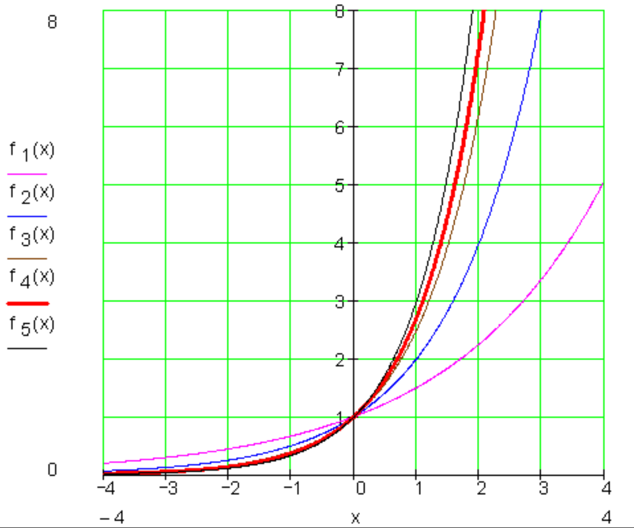
$f_1(x) = 1{,}5^x \quad f_2(x) = 2^x \quad f_3(x) = 2{,}5^x \quad f_4(x) = e^x \quad f_5(x) = 3^x$

اعداد **e ; 2,5 ; 2 ; 1,5** او **3** بنسټ جوړوي او x اکسپو ننت یا جګعدد(جګګې).

بنسټ **e** د اویلر عدد باندې مشهور دی او فقریبي ارزښت یې 2,71828 دی.

دا به وروسته هم به نورو راوړونو کې غوره رول ولوبوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د اکپوننشل تابع ګراف د مختلفو بنسټونو سره.

دا سور رنګه انځور د اړونده اکسپوننشل تابع دe بنسټ پورې اړه لري، چې e تابع هم بلل کیږي.

پام ته راتلنه یا برېښیدنه:

- ټول په وضعیه قیمتسیستم کې ګرافونه د y - محور د Py (0 | 1) په ټکي کې غوڅوي (قطع کوي)

- د منفي x - ارزښت لپاره ټول ګرافونه د x - محور ته نږدې کیږي. د منفي x - محور په داسې حالتونو کې اسیمپتوت بلل کیږي. داسې هم ویلای شو، چې په داسې حالاتو کې د منفي x - رازښت ځان اسیمپتوتیکي د x - محور ته ورنږدې کوي.

په ریاضیکي یا شمېرپوهنیز ډول داسې لیکو : $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

د مثبت - ارزښت لپاره د تابع ارزښت له ټول پولو اوړي یعنې د ناپای په لور ځي.

شمیرپوهنیز لیکدود یې داسې دی: $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- په وضعیه قیمتسیستم کې انځورشویو ګرافونو ټول تابع ارزښتونه مثبت دي، ځکه چې د اکسپوننشل توابعو لپاره مثبت اجازه لري.

دا په دې معنا چې په داسې حالت کې صفرځایونه نه شته.

پېژند(هعریف)

د $f(x) = a^x$ r تابع د $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ او $x \in \mathbb{R}$ سره اکسپوننشل تابع د a په بنسټ بلل کیږي.

دا د **e** عدد له کومه منځ ته راځي؟

د ربحې شمېرنې څخه دې عدد e منځ ته راشي یا وده وکړي.

دلته په هر د فرمولونو ټولګه کې خوندي د ربحې فرمول استعمالیږي.

n: د ربحې د برخې ګڼون یا تعداد K0 : پیلپانګهKn د n : کاله ورسته د ربحې برخه p : د ربحې بنسټ یا بېنه په %	n: K_0 K_n p: $\qquad K_n = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$

په کلنۍ ګټۀ دې ګټه ونه دوه برابره شي. پس د ګټې بېنه له p = 100% ټاکل کیږي داسې چې p/100 = 1 وي.

په یو کال د ډېرو د ګټې برخو سره، پانګه د ګټې-ګټې سره ډېر ځله په ګټه اچول کیږي..
دلته د ګټې پېنه یا بېخ د ګټېبرخو باندې و وېشل شي.

د انګې په ګټه اچول د کال روسته د $p = 100\% \Rightarrow \frac{p}{100} = 1$ سره

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot \frac{p}{100} = K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^1 = K_0(1+1)^1 = \underline{\underline{K_0 \cdot 2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پانګې ګټونه د یو کال وروسته په نیمکلنه ګټونه د $t\frac{p}{2\cdot 100}=\frac{1}{2}$ سره.

$$K_2=K_0\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\underline{\underline{K_0\cdot 2,25}}$$

د پانګې ګټونه یا په ګټې اچونه له یو کال ورسته په میاشتنۍ ګټونه د $t\frac{p}{12\cdot 100}=\frac{1}{12}$ سره

$$K_{12}=K_0\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}=\underline{\underline{K_0\cdot 2,61\ldots}}$$

د پانګې په ګټې اچونه له یو کال ورسته په روځنۍ ګټونه د $\frac{p}{360\cdot 100}=\frac{1}{360}$ سره

$$K_{360}=K_0\left(1+\frac{1}{360}\right)^{360}=\underline{\underline{K_0\cdot 2,7145\ldots}}$$

د پانګې ګټونه یا په ګټې اچونه له یو کال ورسته په ساعته ګټونه د $\frac{p}{8640\cdot 100}=\frac{1}{8640}$ سره.

$$K_{8640}=K_0\left(1+\frac{1}{8640}\right)^{8640}=\underline{\underline{K_0\cdot\underbrace{2,7181\ldots}_{\approx e}}}$$

د پانګې ګټونه یا په ګټې اچونه له یو کال ورسته په n ګټونه د $\frac{p}{n\cdot 100}=\frac{1}{n}$ سره.

$$K_n=K_0\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

که په هره لحظه میاشتکې په کټه واچول شي (یعنې په ناپای ډېرو ګټونو ناپای $n \to$) نو د یو کال وروسته لاندې پانګه لاس ته راوړي:

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} K_0 \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot e$$

دا په دې معنا چې پانګه د e ضریب سره ډېرځله شوه،

د e- تابع $f(x) = e^x$ بنستسز خویونه

تابع ارزښت

$$f(0) = 1$$
$$f(1) = e \approx 2{,}72$$
$$f(2) = e^2 \approx 7{,}39$$
$$f(-1) = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$$
$$f(-2) = \frac{1}{e^2} \approx 0{,}14$$

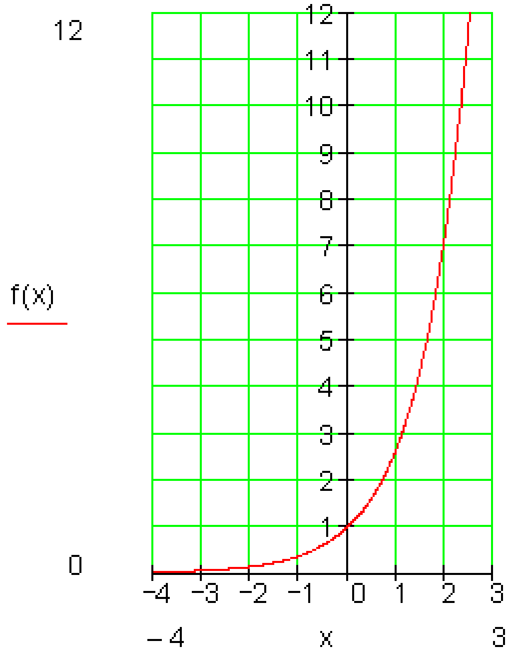
پوله ارزښت

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

$f(x) = e^x > 0$ f د $\ni x \in \mathbb{R}$

لپاره

د e - تابع صفرځای نه لري، د انحراف ټکي نه لري او هم د انعطاف ټکي نه لري

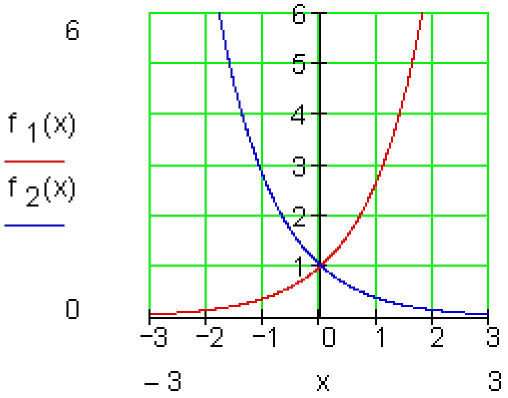


(c) ketabton.com: The Digital Library

د e - تابع هندارونه یا معکوسونه، راکښنه او غزونه

په ورته توګه، لکه نورمال پارابولونه د مطلوبه عملیو سره نور پارابولونه منځ ته راځي، کیدی شي د e - توابعو د ګراف د راکښني، غزوني او هنداروني سره نور اکسپوننشل توابع وګټل یا لاس ته راوړل شي.

هندارونه یا معکوسونه:



د y -محور باندې منعکس شوې

$f_2(x) = e^{-x}$

دy - محور سره غوڅتکی

$f_2(0) = e^{-0} = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0|1)$

ژی پوله ارزښت

$\lim_{x\to -\infty} e^{-x} = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$

کوم صفرځایونه، انحرافي ټکي او ادعطافټکي نه شته

د x په محور هندارونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f_2(x) = -e^x$

د **y**– محور سره غوڅتکی

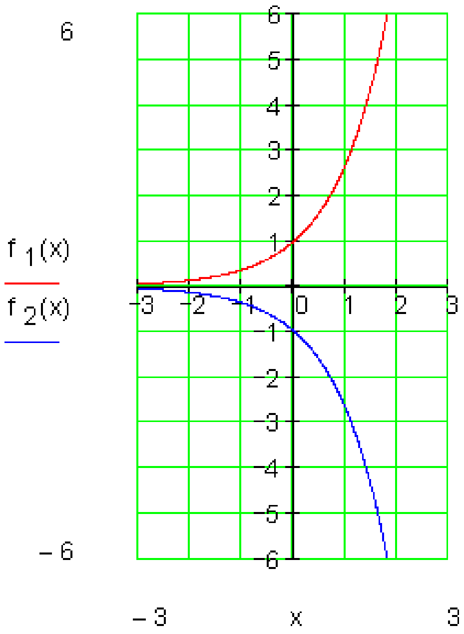
$f_2(0) = -e^0 = -1 \Rightarrow P_y(0|-1)$

ژی یا د غاړي پوله ارزښت

$\lim_{x\to-\infty}(-e^x) = 0$

، $\lim_{x\to\infty}(-e^x) = -\infty$

کوم صفرځايونه، انحرافي ټکي او
د انعطافټکي نه شته



د **y** په لور راکښنه

په يوه واحد پورته لور ته راکښنه

$f_2(x) = e^x + 1$

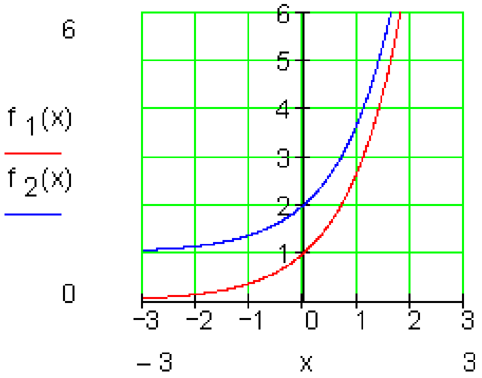
د y - محور سره غوڅتکی

$f_2(0) = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow P_y(0|2)$

د ژی پوله ارزښت

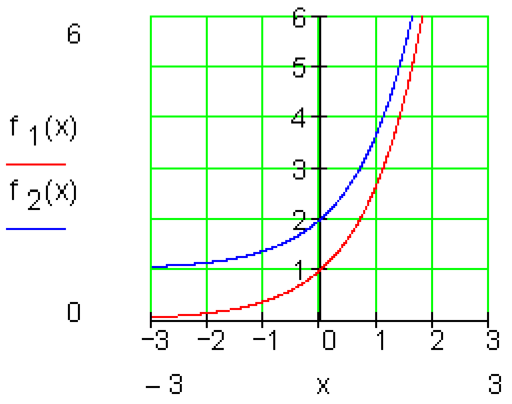
$\lim_{x\to-\infty}(e^x + 1) = 1$ $\lim_{x\to\infty}(e^x + 1) = \infty$

کوم صفرځايونه، انحرافي ټکي او
ادعطافټکي نه شته



(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه واحد پورته لور ته راکښنه



$f_2(x) = e^x + 1$

د y - محور سره غوڅتکی

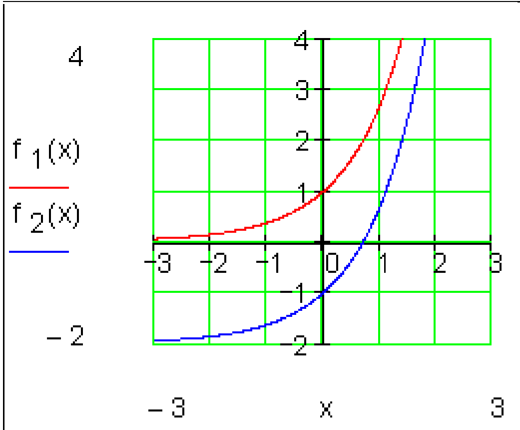
$f_2(0) = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow P_y(0|2)$

د ژی پوله ارزښت

$\lim_{x \to -\infty} (e^x + 1) = 1$ $\lim_{x \to \infty} (e^x + 1) = \infty$

کوم صفرځایونه، انحرافي ټکي او
ادعطافتکي نه شته

په دوه واحده کښته لور ته راکښنه



$f_2(x) = e^x - 2$

د y – محور سره غوڅتکی

$f_2(0) = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1 \Rightarrow P_y(0|-1)$

ژی یا د غاړي ارزښت

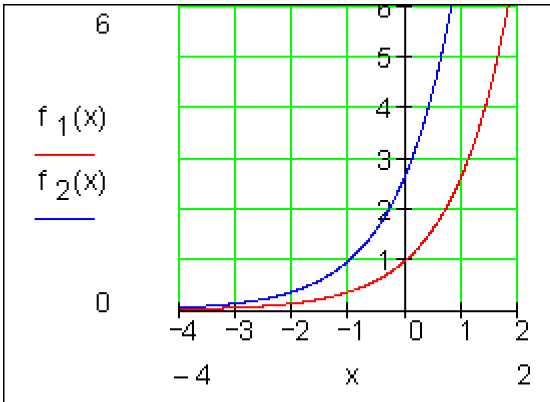
$\lim_{x \to -\infty} (e^x - 2) = -2$ $\lim_{x \to \infty} (e^x - 2) = \infty$

انحرافي او د انعطاف ټکي نه شته

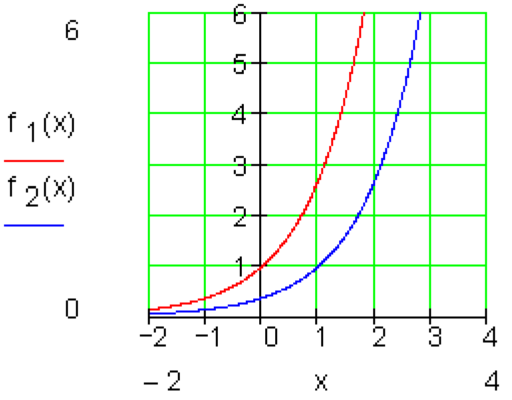
صفرځا په انتروال [0 ; 1] کې.

د **x** محور باندې راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یوه واحد کیڼ لور ته راکښنه $f_2(x) = e^{x+1}$ د - محور سره غوښتکی $f_2(0) = e^1 \approx 2,72 \Rightarrow P_y(0 \mid e \approx 2,72)$ ژی یا غاړې پوله ارزښت $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x+1}) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to\infty}(e^{x+1}) = \infty$ صفرځایونه، انحرافي -او د انعطاف ټیش نه شته	

په یوه واحد ښي لور ته راکښنه

$f_2(x) = e^{x-1}$ د y - محور سره غوښتکی $f_2(0) = e^{-1} \approx 0,37 \Rightarrow P_y\left(0 \mid e^{-1} \approx 0,37\right)$ ژی پوله ارزښت $\lim\limits_{x\to-\infty}(e^{x-1}) = 0 \qquad \lim\limits_{x\to\infty}(e^{x-1}) = \infty$ صفرځایونه، د انحراف ټکي او انعطافټکي نه شته	

غزونه (کیښکودنه) د **y** په لور

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضریب $k = 2$ سره غزونه

$$f_2(x) = 2 \cdot e^x$$

د **y** - محور سره غوڅونه

$$f_2(0) = 2 \cdot e^0 = 2 \Rightarrow P_y(0|2)$$

ژی پوله ارزښت

$$\lim_{x \to -\infty} \left(2 \cdot e^x\right) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \left(2 \cdot e^x\right) = \infty$$

د ضریب $k = \frac{1}{2}$ سره کیښکودنه

$$f_3(x) = \frac{1}{2} e^x$$

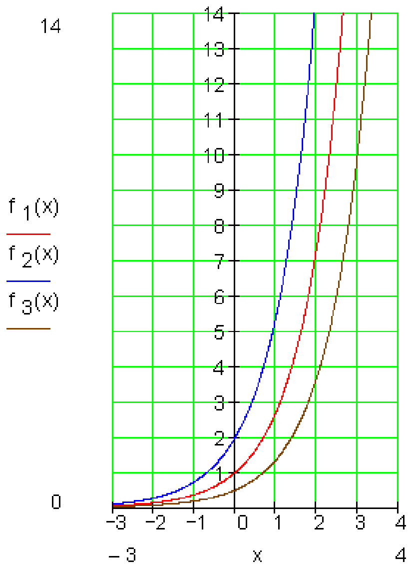
د **y** - محور سره غوڅتکی

$$f_3(0) = \frac{1}{2} \cdot e^0 = \frac{1}{2} \Rightarrow P_y\left(0 \middle| \frac{1}{2}\right)$$

ژی پوله ارزښت

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^x\right) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot e^x\right) = \infty$$

صفرځایونه، انحرافتکي او انعطافتکي نه شته.



(c) ketabton.com: The Digital Library

غزونه (کیښکودنه) د **x** په لور

د ضریب $k = \frac{1}{2}$ سره غزونه

$f_2(x) = e^{2\cdot x}$

د **y** - محور سره غوڅونه

$f_2(0) = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0|1)$

ژی پوله ارزښت

$\lim_{x\to-\infty}(e^{2\cdot x}) = 0 \quad \lim_{x\to\infty}(e^{2\cdot x}) = \infty$

د ضریب 2 سره راکښنه

$f_3(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

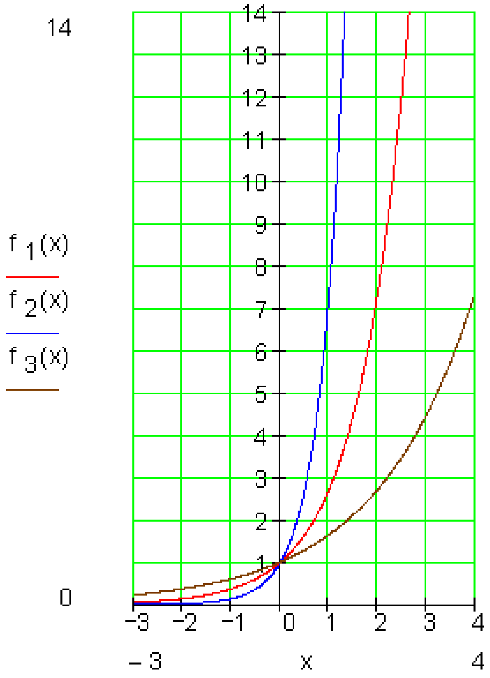
د **y** - محور سره غوڅتکی

$f_3(0) = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0|1)$

ژی پوله ارزښت

$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{2}x}\right) = 0 \quad \lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{2}x}\right) = \infty$

صفرځایونه، انحراف ارزښتونه او انعطافتکي نه شته.

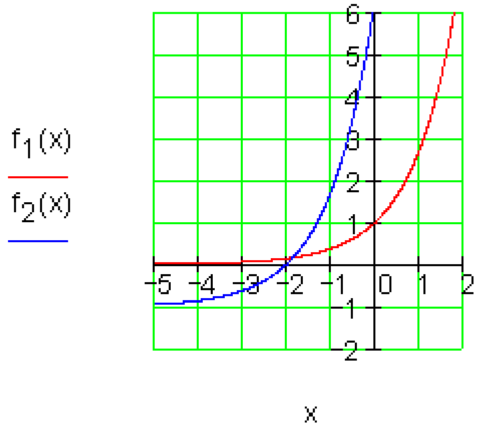


(c) ketabton.com: The Digital Library

د e تابعو هندارونه، راکښنه او غزونه په خوښه یو له بل سره کمبینیر یا نښلول کېدي یعني شمېرنئزې عملیې په اجرا کېدی شي .

د **x** - او **y** – محورونو راکښنه:

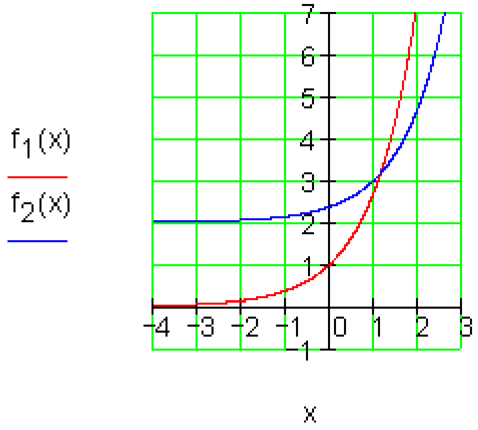
$f_1(x) := e^x \qquad f_2(x) := e^{x+2} - 1$



له $f_2(x)$ منځ ته راغلی د $f_1(x)$ x په محور د راکښني له لارې په دوه واحدونو کین لور ته.

د y -محور باندې په یوه واحد د کښته لور ته .

$f_1(x) := e^x \qquad f_2(x) := e^{x-1} + 2$



تمرینونه:

د e - تابع گرآف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بنستیزې تابع e^x راکښنه، هندارونه یاانعکاس ، او بڼه بدلون وښایاست.

هر تابع ګراف او د بنستیز تابع ګراف په یوه مناسب وضعیه قیمتسیستمکي و کاږی او د محور سره یي غوڅیکی(د تقاطع نقطه) .

د ګراف په مرسته ولولی:

پوله ارزښت یا حد (لیمیت) ، صفرځایونه که شته وي او د انعطاف ټکي.

یادونه: فقط په آنتروآل [10 ; 10-] کې تآبع آرزښتونه په پآم کې ونیسی.

Für= د لپاره

اول - $f(x) = e^x ; g(x) = e^{-x}$ für $[-4;4]$ دویم - $f(x) = -e^x$ für $[-5;3]$

دریم - $f(x) = e^{\frac{1}{3}x}$ für $[-4;4]$ څلورم - $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x}$ für $[-4;4]$

پنځم - $f(x) = \frac{1}{2}e^{x+3}$ für $[-5;3]$ شپږم - $f(x) = e^{x-2} - 3$ für $[-4;4]$

اوم - $f(x) = e^{-(x+2)} - 1$ für $[-5;3]$

اتم - $f(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)} - 2$ für $[-2;6]$

نهم - $f(x) = -10e^{-\frac{1}{2}(x+4)} + 3$ für $[-4;4]$

لسم - $f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{4}x}$ für $[-10;5]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نتیجې:

د اکسپوننشل تابع تمرینونه

مفصل حل

لومړی - مفصل حل

$f(x) = e^x$ بنستیزه تابع

$f(0) = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0|1)$

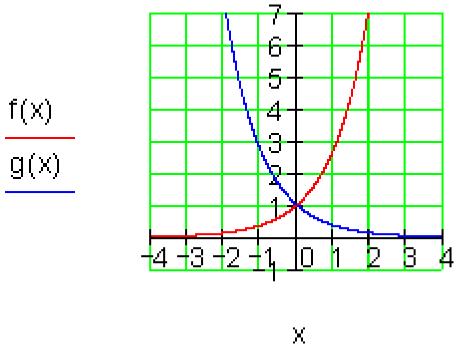
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0;\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

$f(x) = e^{-x}$ په y په هنداره شوې

$f(0) = e^{-0} = 1 \Rightarrow P_y(0|1)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty;\ \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

$f(x) := e^x \qquad g(x) := e^{-x}$



دویم - مفصل حل

$f(x) = -e^x$ له د -محور سره غوځتکي لاس ته راځي که په x - محور هنداره شي.

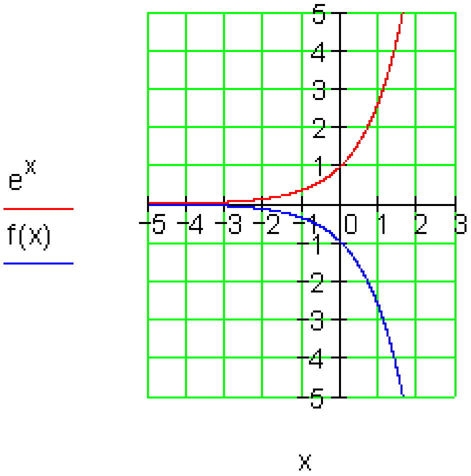
$f(0) = -e^0 = -1 \Rightarrow P_y(0|-1)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0;\ \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

صفرځایونه: نه شته

انحرافي ارزښتونه: نه شته

انعطافتکي : نه شته



(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم – مفصل حل

$f(x)=e^{\frac{1}{3}x}$ له e^x دغزوني له لارې د x په لور د ضريب 3 سره لاس ته راځي

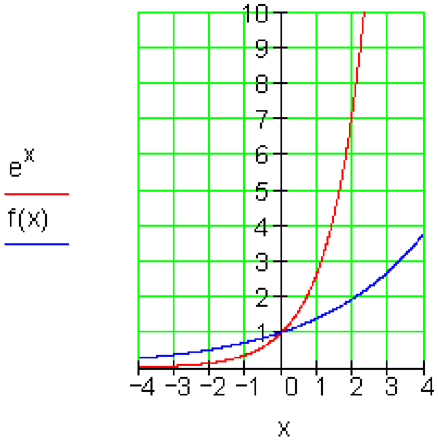
$$f(0)=e^0=1 \Rightarrow P_y(0|1)$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

صفرځايونه نه شته

د انحرافي ارزښتونه: شته

انعطافتکي : نه شته

$$f(x) := e^{\frac{1}{3}\cdot x}$$



ځلورم – مفصل حل

$f(x)=2\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ له e^x منځ ته راځي د x په لور د ضريب 2 سره د غزوني له لارې د y په محور د غزونې له لارې د ضريب 2 سره.

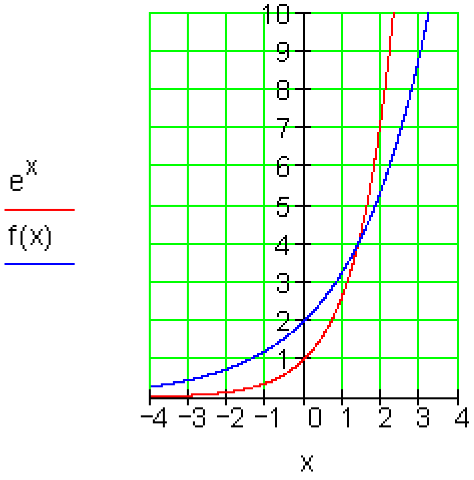
$$f(0)=2\cdot e^0=2 \Rightarrow P_y(0|2)$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

صفرځايونه نه شته ه

انحرافي ارزښتونه: نه شته

انعطافتکي: شته

$$f(x) := 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم – $f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{x+3}$ له e^x لاس ته راځي د x په منفي لور د راکښني له لارې په 3 کچواحده، د کینسکودلو له لارې د y په لور ر باندې د ضریب 1/2 سره

$$f(0)=\frac{1}{2}\cdot e^3\approx 10$$

$$\Rightarrow P_y\left(0\,|\,\frac{1}{2}\cdot e^3\approx 10\right)$$

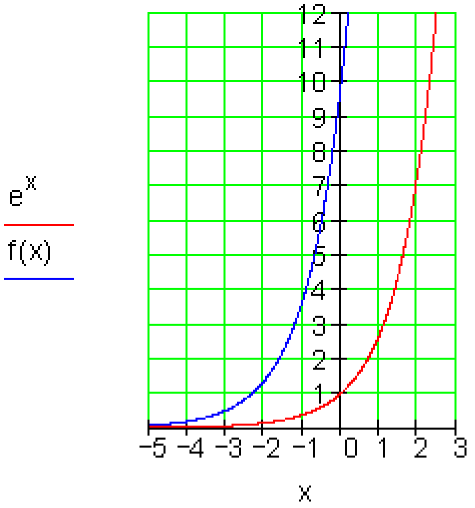
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

صفرځایونه: نه شته

افراطي ارزښتونه: شته

انعطافتکي: شته

$$f(x):=\frac{1}{2}\cdot e^{x+3}$$



شپږم – $f(x)=e^{x-2}-3$ له e^x منځ ته راځي د منفي y لور باندې په 3 دسطحي واحده، د x په مثبته لور د راکښني له لارې په 2 سطحي واحده.

$$f(0)=e^{-2}-3\approx -2{,}86$$

$$\Rightarrow P_y\left(0\,|\,e^{-2}-3\approx -2{,}86\right)$$

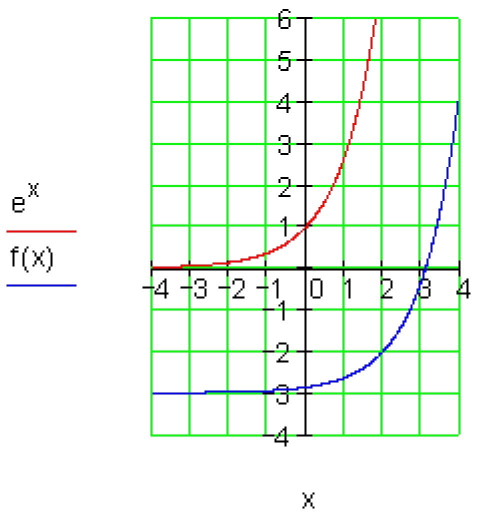
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-3;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

صفرځایونه: په x~3,2

انحرافي ارزښتونه : نه شته

انعطافتکي: نه شته

$$f(x):=e^{x-2}-3$$



اوم – مفصل حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = e^{-(x+2)} - 1$ له e^x منځ ته راځي د y په محور د هندارونې له لارې، د y په منفي لور په يو سطحي واخد. دx په منفي لور په 2 سطحي واحده غزول.

$$f(0) = e^{-2} - 1 \approx -0,86$$

$$\Rightarrow P_y\left(0 \mid e^{-2} - 1 \approx -0,86\right)$$

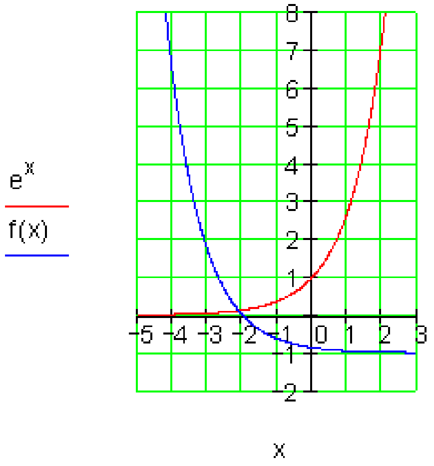
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty ; \lim_{x \to \infty} f(x) = -1$$

صفرځايونه : په x ~-1,8 کې

انحرافي ارزښتونه: نه شته

انعطافټکي: نه شته

$f(x) := e^{-(x+2)} - 1$



اتم – $f(x) = 2 \cdot e^{-\frac{1}{2}(x-1)} - 2$

له e^x منځ ته راځي د y په محور د هندارونې له لارې د y په منفي لور راکښل په 2 واحده. دx په مثبت لور په 1 سطحي واحد راکښل. د y په مثبته لور په 2 واحده غزوني. د x په لور د2 واحده سره

$$f(0) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}} - 2 \approx 1,3$$

$$\Rightarrow P_y\left(0 \mid 2 \cdot e^{\frac{1}{2}} - 2 \approx 1,3\right)$$

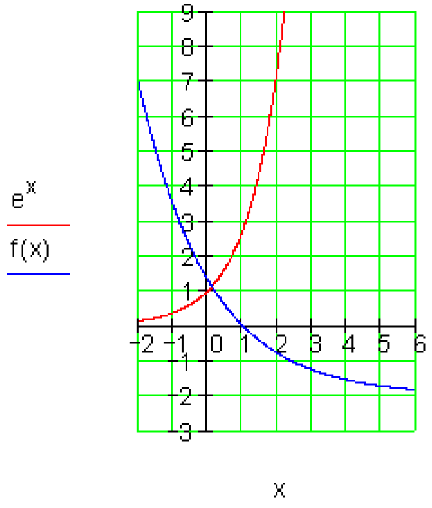
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty ; \lim_{x \to \infty} f(x) = -2$$

صفرځايونه : په x~1,2 کې

انحرافي ارزښتونه : شته

انعطافټکي: نه شته

$f(x) := 2 \cdot e^{\frac{-1}{2} \cdot (x-1)} - 2$



(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم – $f(x)=-10e^{-\frac{1}{2}(x+4)}+3$ له e^x منځ ته راځي دy په محور هنداروني له اري د x په محور هنداروني ، د y په مثبته لور په 3 سطحي واحده را کښنه د x په منفي لور په 4 سطحي واحده راکښنه د y په لور غزونه د 10 ضریب سره. د x په لور غزوني د 2 ضریب سره.

$$f(0)=-10e^{-2}+3\approx 1{,}65$$

$$\Rightarrow P_y\left(0\,|\,-10e^{-2}+3\approx 1{,}65\right)$$

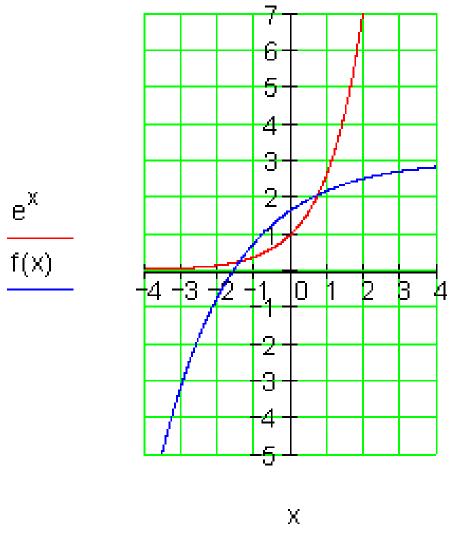
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty;\ \lim_{x\to\infty} f(x)=3$$

صفرځایونه: په x~-1,6 کې.

انحرافي ارزښتونه: نه شته

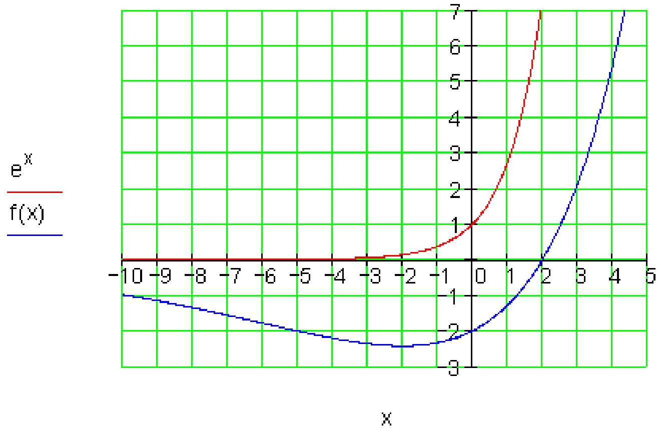
انعطافټکي: نه شته

$$f(x) := -10\cdot e^{\frac{-1}{2}\cdot(x+4)}+$$



لسم – مفصل حل

$$f(x) := (x-2)\cdot e^{\frac{1}{4}\cdot x}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

کربنیز مساوات $u(x) = x - 2$ د e- تابع $v(x) = e^{\frac{1}{4}x}$ سره نښلول کیږي. له دې دا تابع لاس ته راځي: $f(x) = u(x) \cdot v(x) = (x-2)\, e^{\frac{1}{4}x}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

په x = 2 کې صفرځای په x~-2 کې د انحراف ارزښت په x ~ -6 کې د انعطاف ټکی.

د اکسپوننشل توابعو کارونه یا استعمال

د تابع مساوآتو جوړونه

په طبیعت کې یې ځیرنه:

د اکپوننشل توابعو مشتق

د تابع مساواتو جوړښت

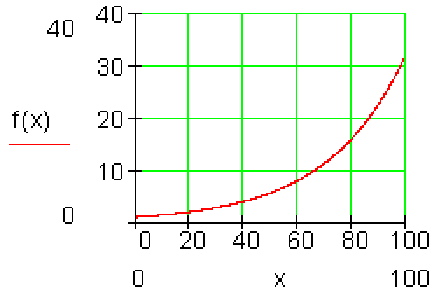
کولي باکتریا Coli - Bakterien د انسان په کلمو کې کاره سرته رسوي. دوي د کوټې ویش (حجره وېش) له لارې زیاتیږي. و مساعدو شرایطو لاندې دوي په هرو ۲۰ دقیقو کې ځان تجزیه کوي. د غه عملییې لپاره یو ارزښت جدول : او ګراف یې کاږو. دلته د x اووښتوني (متغیره) په دقیقو د وخت لپاره ده.

د y متحوله د باکتریا ګانو د تعداد لپاره ده.

x = Minuten	0	20	40	60	80	100
y = Bakterienzahl	1	2	4	8	16	32

(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته جدول کې : x = دقیقې y = د بکترياو تعداد



اوس مو دنده داده تابعيزې (د تابعو-) اړيکې د f(x) د يوه مساوات په بڼه وټاکو.

هرې ۲۰ دقيقې د بکترياو تعداد يا ګڼون دوه برابره کيږي، دا په دې معنا چې دا د ۲۰ دقيقو وروسته نتيجه د دوه سره ضرب شي

لاندې ړدو يا ليکو: $f(x) = 2^{x}$

دلته f(x) د بکترياو تعداد دی او x د دقيقو تعداد.

د دې تابع مساوات سره د بکترياو تعداد هره دقيقه دوه برابره کوي.

د بام اوفکر وروسته موږ د تابع مساوات لاندې نتيجې ته رسيږو، چې دا شي حالت ټيک روښانه کوي يا تشريح کوي:

$$f(x) = 2^{\frac{1}{20}x}$$

Probe: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 2^{0} = 1$; $x = 20 \Rightarrow f(20) = 2^{1} = 2$; $x = 40 \Rightarrow f(40) = 2^{2} = 4$

ډيروالی، لکه چې دلته مو راووړ ، د اکسپوننشل ودې يا - زياتوالي په نامه نوموو. يوه تابع چې داسې يوه تلنه تشريح کوي، اکسپوننشل تابع بولو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینیزې پوښتنې

د اکسپوننشل تابع د تابع مساوات د لاندې شرایطو سره باید څنګه وبرېښي:

الف – د باکتریو تعداد (ګڼون) هر پځلس دقیقې دوه براپره کیږي.

ب – هر دېرش دقیقې د پاکتریو تعداد درې برابره کېږي.

پ - مورږ په مطالعه یا کتلو پیل کوو، چې $n_0 = 1000\,000\,000$ د باکتریو تعداد شته یا موجود وي او تعداد یې هر پنځه څلوېښت دقیقې پنځه برابره کیږي.

ت - د کتلو پیل سره $n_0 = 1000\,000\,000$ باکتریې شته دي او او هرې 45 min دقیقې د باکتریو تعداد د $e = 2{,}718$ په ضریب یا ځلووني زیاتیږي.

هر لس دقیقې د n_0 تعداد نیمیږي.

حل :

الف $f(x) = 2^{\frac{1}{15}x}$ ب - $f(x) = 3^{\frac{1}{30}x}$

پ_ $f(x) = 1000\,000\,000 \cdot 5^{\frac{1}{45}x} = 1 \cdot 10^9 \cdot 5^{\frac{1}{45}x}$ ت -

$$f(x) = 100\,000 \cdot e^{\frac{1}{45}x} = 1 \cdot 10^5 \cdot e^{\frac{1}{45}x} \text{ mit } e = 2{,}718$$

ټ – تعداد یې = منفي دېرېدنه $n\, f(x) = n_0 \cdot 2^{-\frac{1}{10}x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام : توابع چې د زیاتیدو پروسې څېړي، اکسپوننشل توابع بلل کیږي. تولیز تابع مساوات یې دي:

$f(x) = n_0 \cdot a^{k \cdot x}$ د

$n_0 = \text{Anzahl zur Zeit } t = 0 ; a \in \mathbb{R}^+ ; k , x \in \mathbb{R}$ ، n0= تعداد د t په وخت = 0

سره د وخت

اکسپوننشل ډېرېدنه یا اکسپوننشل کیدنه د ژوند په زیاتو ورشو ګانو کې کتل کیدای شي:

په بیالوژي کې (د باکتریو ډېرېدنه او کمیدنه)

په اوکولوګي کې (د حیواناتو ډېرېدنه یا زېږنده)

په اقتصاد کې (د ربح له لارې د پانګې زیاتیدنه)

په فزیکي او تخنیکي مسائلو کې (د رادیو اکتیو موادو تجزیه)

په روغتیا کې (د دوا اغیزه)

د **e** - تابع ته ځانګړې بیلګې

اکسپوننشل وده کونه

د باکتریا شتون د یوه **e** -تابع وروسته زیاتیږي.

د $n_0 = 2000$ باکتریاګانې شتون په ۴ ساعتونو کې په کوم ارزښت زیاتیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

له څومره ساعته وروسته دا باکرتیاوې $f(x) = n_0 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} \cdot t}$ د پیل ارزښت= n_0 ،
وخت په ساعت= t سره 10 000 ته جګیږي؟

د تابع ګراف څنګه بریښي؟

د باکتریاو تعداد له څلور ساعته وروسته:

$$f(x) = n_0 \cdot e^{k \cdot x} \Rightarrow f(4) = 2000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} \cdot 4} = \underline{\underline{2600}}$$

له څو ساعته وروسته دا باکتریا وې 10 000 دي؟

ا یېنونه: $f(x) = 2\,000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} t} = 10\,000$

د دې لپاره چې جګ عدد یا ګڼt وټاکلی شو، نو باید اکسپوننشل مساوات
$2\,000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} t} = 10\,000$ حل کړو.

دا د لوګاریتم سره کیدی شي. د دې لپاره باید لاندې د لوګاریتم قوانین وکارول شي:
$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$ او $\ln e^x = x$.

د اکسپوننشل مساوات حل:

$$\ln\left(2\,000 \cdot e^{\frac{17\,221}{262\,551} t}\right) = \ln 10\,000$$

$$\Leftrightarrow \ln 2\,000 + \frac{17\,221}{262\,551} \cdot t = \ln 10\,000 \mid -\ln 2\,000$$

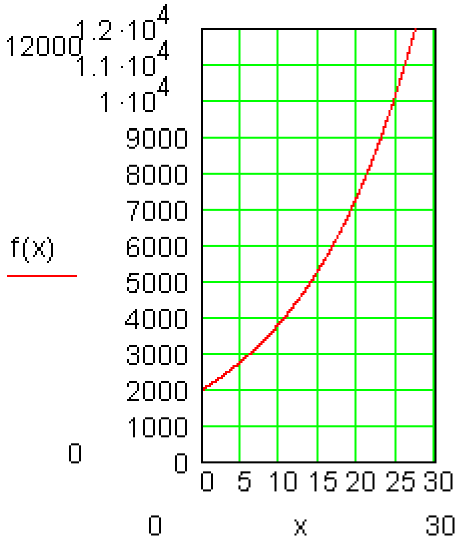
$$\Leftrightarrow \frac{17\,221}{262\,551} \cdot t = (\ln 10\,000 - \ln 2\,000) \mid \cdot \frac{262\,551}{17\,221}$$

$$\Leftrightarrow t \approx 24{,}54$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نړدې 24,5 ساعته وروسته

10000 باکترياوې دي



اکسپوننشل کميدنه يا کمښت

راديو اکتيو مواد په برابر وخت کې تل به همغه ضريب تجزيه کيږي.

د هغو نيم ارزښت وخت ځخه لرو، چي له نيم وخت وروسته ځومره فعاليت شتون لري.
فعاليت A(x) په مګاپيککورل (تجزيه په ثانيه کي Megabecquerel (1 MBq = 10^6 Zerfälle pro Sekunde) کچ يا اندازه کيږي.

د طبي معاينو لپاره يود Jod 131 د 1 نيم ارزښت وخت (t_h) 8 روځي کارول کيږي.

ناروغ ته A_0 = 4000 MBq ورکول کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ....
ځومره نیم ارزښتوخت یا همداسې روځو وروسته په بدن کې د پاتې فعالیت ماکسیمال
تردې وخته 400 MBq دی؟

ګراف رسم کړی ، تقریبي وخت ولولی او ټیک ارزښت یې وشمېری.

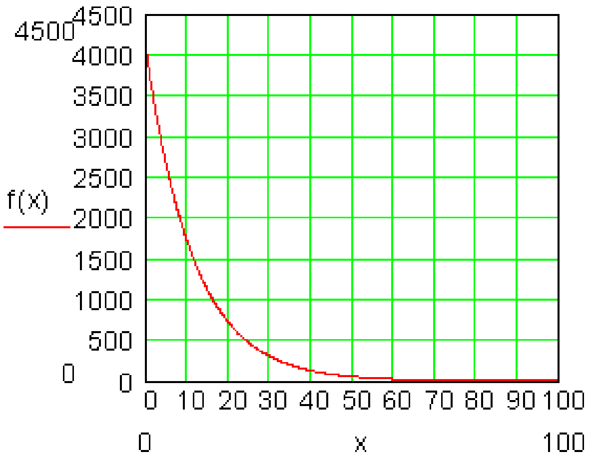
د رادیو اکتیو تجزیې قانون: $A(x) = A_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{t_h} \cdot t}$ دلته په معنا دی: پیلفعالیت په
MBq نیمارزښت وخت = t_h په روځو، t =وخت په روځو.

د تابع مساوات:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{t_h} \cdot t}$$
$$= 4000 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{8} \cdot t}$$

حل

$$A(t) = 4000 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{8} \cdot t} = 400$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(4000 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{8} \cdot t}\right) = \ln 400$$
$$\Leftrightarrow \ln 4000 - \frac{\ln 2}{8} \cdot t = \ln 400$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{8}{\ln 2}(\ln 4000 - \ln 400)$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{8}{\ln 2} \cdot \ln 10 \approx \underline{\underline{26{,}575}}$$



د 27 روځو وروسته، نژدې له 3 نیمارزښت وخت وروسته کمښت په بدن کې
نژدې400 MBq دی.

د عدد e ، طبیعي لوګاریتم او د e - تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^x = b \Leftrightarrow x = \ln b \qquad e = 2{,}718\,281\,828\ldots$$

$$\text{z.B. } e^{\ln(x-1)} = x - 1 \qquad e^{\ln b} = b$$

$$\text{z.B. } \ln e^{-\frac{1}{k}\cdot x} = -\frac{1}{k}\cdot x \qquad \ln e^x = x$$

$$\ln e = 1 \qquad \ln 1 = 0$$

ګراف له II د I په لور ځغلي.

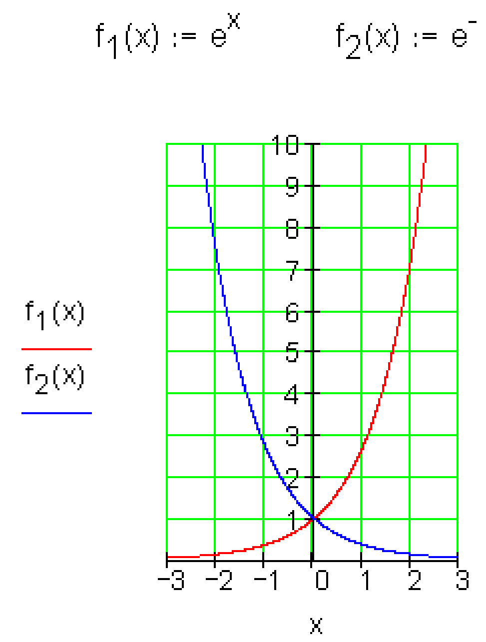
که اکسپوننت زاتیز یامثرت وي، نو ګراف همغږیز جګیدونکی دی.

که اکسپوننت کیمز یا منفي وي، ن و ګراف همریز لږیږی یا ټیټیږي.

صفرځای نه شته.

د لوی x - ارزښت لپاره ګراف تل د x - محور ته نږدې کیږي.

ټول ګرافونه له ټکي P (0 | 1) تیریږي.



هر اکسپوننشل تابع یا بلواک د e -تابع له لارې کښل کیدی شي.

$$\text{Mit } f(x) = a^x \text{ und } a = e^{\ln a} \text{ gilt:}$$

$$f(x) = a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{(\ln a)\cdot x} = e^{x\cdot \ln a}$$

له دې بنسته به په لاندې برخه کې داکسپوننشل تابع فقط د e –تابع تر څیرنې لاندې ونیل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم: محور غوڅېدنکي او اکسپوننشل مساوات

پیلبیلګې

بیلګه ۱

د لاندې تابع غوڅېدنکي یا نقاط تقاطع باید وټاکل شي:

$$f(x) = -\frac{3}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x+4)}$$

د y-محور سره غوڅېدنکی د لاندې اینوونې له لارې پیدا کیدی شي:

$$y_s = f(0)$$

$$f(0) = -\frac{3}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}(0+4)} = -\frac{3}{4} \cdot e^{-2} \approx -0{,}102 \Rightarrow \underline{P_y\left(0 \mid -\frac{3}{4} \cdot e^{-2} \approx -0{,}102\right)}$$

د x- محور سره غوڅېدنکی دلاندې اینوونې څخه لاس ته راځي:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x+4)} = 0$$

له دې لاس ته راځي چې غوڅېدنکي نه شته، ځکه چې $e^{-\frac{1}{2}(x+4)} \neq 0$ دی د ټول $x \in \mathbb{R}$ لپاره.

د x -محور سره غوڅېدنکي د f (x) د صفرځایونو له لارې پیدا کیږي. تابع f (x) صفرځای نه لري، ځکه چې دا د x په لور غزېدل او د x په لور راکښلي e – تابع دی. دا برسیره پرته له دې د y -محور او x -محور باندې هنداره یا منعکس شوی دی،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشل تابع بڼه $f(x)=a\cdot e^{u(x)}$ د $a\in\mathbb{R}$ سره د y -محور سره فقط یو غوځتکی لري مګر کوم صفرځای نه لري. ځکه $e^{u(x)}\neq 0$ د ټول $x\in\mathbb{R}$ لپاره.

بیلګه ۲ :

د لاندې تابع غوځتکي غواړو پیدا کړو

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{2x+1}-2\cdot e^{x+1}$$

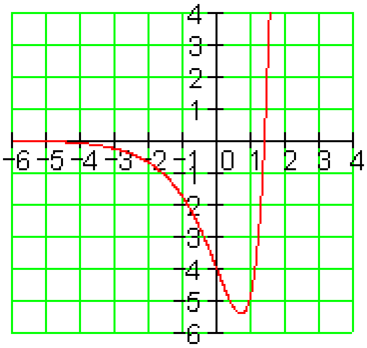
د y -محور سره غوځتکی: $y_s=f(0)$

$$y_s=f(0)=\frac{1}{2}\cdot e^{1}-2\cdot e^{1}=-\frac{3}{2}\cdot e\approx -4{,}08\Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0\,\middle|\,-\frac{3}{2}\cdot e\approx -4{,}08\right)}}$$

د دې لپاره چې د x –محور سره غوځتکي وټاکلی شو، دا کار ستر دی. د دې لپاره د f (x) صفرځایونه باید وټاکل شي.

د د ی لپاره چې د x -محور سره غوځتکی، یعنې د اکسپوننشل تابع صفرځای وټاکو، دا په ډیرو حالتونو کې غوښتونی دی، چې اکسپوننشل تابع حل کړو.	$f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{2x+1}-2\cdot e^{x+1}$
	د x محور سره غوځتکی:
د دې معلومو عملیو د پاسه یا پرته، کوم چې د مساوات د حل لپاره کارول کیږي، د اکسپوننشل مساوات د حل لپاره اړین دی، چې د توان- او لوګاریتم قونین راته جوت وي.	$f(x)=0\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\cdot e^{2x+1}-2\cdot e^{x+1}=0}_{\text{Exponentialgleichung}}$
	اکسپوننشل مساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\frac{1}{2}\cdot e^{2x+1}-2\cdot e^{x+1}=0 \,|+2\cdot e^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot e^{2x+1}=2\cdot e^{x+1}\,|\cdot 2$$

$$\Leftrightarrow e^{2x+1}=4\cdot e^{x+1}\,|: e^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{2x+1}}{e^{x+1}}=4\,|$$ توانقانون

اکسپوننت ساده کونه

$$\Leftrightarrow e^{2x+1-(x+1)}=4\,|$$

$\ln(\;)$ $\Leftrightarrow e^{x}=4\,|$ لوګاریتمونه

$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x}\right)=\ln(4)\,|$ د لوګاریتم قانون

$$\Leftrightarrow x\cdot \underbrace{\ln(e)}_{1}=\ln(4)$$

$$\Leftrightarrow x=\ln(4)\approx 1,39 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_x\left(\ln(4)\approx 1,39\,|\,0\right)$$

د توان – او لوګاریتم قوانین

د توان – او لوګاریتم غوره قوانین سره رايوځای کړي.

توانقوانین:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

د لوګاريتم تعريف:

$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a(b)$	$e^x = b \Leftrightarrow x = \ln(b)$	$10^x = b \Leftrightarrow x = \lg(b)$

د لوګاريتم قوانين د e په بنسټ

$\ln(b \cdot c) = \ln(b) + \ln(c)$	$\ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln(b) - \ln(c)$	$a = e^{\ln(a)}$	$e^0 = 1$
$\ln(b^c) = c \cdot \ln(b)$	$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{\ln b}{\ln a}$	$\ln(1) = 0$	$\ln(e) = 1$

تمرينونه:

د توان او لوګاريتم قوانينو استعمال.

د لاندې توان او لوګاريتمي ترمونو د توان او لوکاريتمي قوانينو په استعمال سره بنه بدله کړی.

اول – $(e^x + e^{-x})^2$ دويم - $(e^x - e^{-x} + 5) \cdot e^x$

دريم - $\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}}$ څلورم - $e^{-x} \cdot e^{-x+2} \cdot e^{2x-3}$

پنځم - $\frac{1}{e^{2x}} + 3(e^{-x})^2 - \left(\frac{2}{e^x}\right)^2$ شپږم - $e^{\ln(2k)} - 2k \cdot e^{\ln(2)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوم - $\ln\left(e^2\right) - 3\ln\left(\frac{e}{2}\right)$ اتم - $\ln\left(2e^2\right) + \ln\left(\frac{e}{2}\right)$

نهم - $e^{\ln(k)+1}$ لسم - $\frac{2}{3}e^{-\ln\left(\frac{3}{4}k\right)}$

د اکسپوننشل مساوات لپاره د حل لارې

د اکسپوننشل مساوات له لارې حل

يو اکسپوننشل مساوات دی، د لاندې بڼه بدلون له مخې

چې د اکسپوننشل مقايسې سره حل کيدی شي.

يو حل د اکسپوننشل مقايسې له مخې فقط هلته ممکن دی، که وکړای شو، د مساوات دواړه خواو ته ترمونه په داسې بڼه وليکلای شو، چې د برابر بنسټ سره توانونه لاس ته راوړو. متآسفانه چې دا تل شوونې نه دي لکه لاندې بيلګه به چې وښايي:

د اکسپوننشلمساوات لپاره د حل لارې

د اکسپوننشل پرتله کونې له لارې حل

$$e^{2x+4} - e^{x-1} = 0$$

اکسپوننشل مساوات دی، چې له لاندې بڼه بدلون

$$e^{2x+4} = e^{x-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له لارې د اکسپوننش پرتله کونې سره حل کیدی شي.

$$e^{2x+4} = e^{x-1} \Leftrightarrow 2x+4 = x-1 \Leftrightarrow 2x+4 = x-1 \Rightarrow \underline{x=-5}$$

ازماېښت:

$$e^{-10+4} - e^{-5-1} = e^{-6} - e^{-6} = 0$$

د اکسپوننشل له لارې حل فقط هلته شونی دی، چې که وکړای شو، چې پهدواړولورو ترم داسې بڼه بدل کړو، چې د برابر بنسټ سره توانونه لاس ته راوړو. دا متآسفانه تل شوني نه دي، لکه چې لاندې بیلګه یې په ګوته کوي:

د لوګاریتموس سره حل

$$\frac{1}{2e^x} - 3 = 0 \mid +3 \Leftrightarrow \frac{1}{2e^x} = 3 \mid \cdot 2e^x \Leftrightarrow 1 = 6 \cdot e^x \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{6}$$

دلته اکپوننشله مقایسه شووني نه ده.

دا د لوګاریتم نیولو له لارې کېدی شي:

$$\ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{1}{6}\right) \Leftrightarrow x \cdot \underbrace{\ln(e)}_{1} = \underbrace{\ln(1)}_{0} - \ln(6) \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -\ln(6)}}$$

دا په لوګاریتم نیولو سره پیل په زیاتو حالتونو کې بریاو ته بیایې. مګر یا اګر چې اکسپوننشلمساوات، په کومو کې چې جمعه یا تفریق منځ ته راشي، نه شي کېدی لوګاریت یې ونیول شي. دلته هڅه کېدی شي، دا د بدلون (د ځاي نیوونکي واریابلې اینوونه) له لارې حل کړو.

د بدلون(په ځای د بلې متحولې اینول) له لآر حل

$$e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$$ بدلون: $e^x = u \text{ und } e^{2x} = u^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow u^2 - 5u + 4 = 0$$

مربع مساوات دی د $u_1 = 1; u_2 = 4$ حل سره

په ځتې بدلون او د لوګاریتم نیولو له لارې حل.

$$u_1 = e^{x_1} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = \ln(1) = 0}}$$
$$u_2 = e^{x_2} = 4 \Rightarrow \underline{\underline{x_2 = \ln(4)}}$$

اکسپوننشل مساوات ته مفصلې بېلګې

بیلګه ۱:

$2e^{3x} - 6e^{x} = 0 \mid +6e^{x}$ $\Leftrightarrow 2e^{3x} = 6e^{x} \mid :2$ د لوګاریتم نیولو له لار حل $\Leftrightarrow e^{3x} = 3e^{x} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^{3x}\right) = \ln\left(3 \cdot e^{x}\right)$ $\Leftrightarrow 3x \cdot \ln(e) = \ln(3) + \ln\left(e^{x}\right)$ $\Leftrightarrow 3x \cdot \ln(e) = \ln(3) + x \cdot \ln(e)$ $\Leftrightarrow 3x = \ln(3) + x \mid -x$ $\Leftrightarrow 2x = \ln(3) \mid :2$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \frac{1}{2}\ln(3)}}$	ازماییښت $2e^{3\cdot\frac{1}{2}\ln(3)} - 6e^{\frac{1}{2}\ln(3)} = 0$ $\Leftrightarrow 2e^{\frac{3}{2}\ln(3)} - 6e^{\frac{1}{2}\ln(3)} = 0$ $\Leftrightarrow 2\left(e^{\ln(3)}\right)^{\frac{3}{2}} - 6\left(e^{\ln(3)}\right)^{\frac{1}{2}} = 0$ $\Leftrightarrow 2\cdot 3^{\frac{3}{2}} - 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0$ $\Leftrightarrow 2\cdot 3\cdot 3^{\frac{1}{2}} - 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0$ $\Leftrightarrow 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} - 6\cdot 3^{\frac{1}{2}} = 0\ (w)$

بیلګه ۲:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ازمايينت	
$x_1 = 0$ $0 \cdot e^0 - 3 \cdot 0 = 0$ $\Leftrightarrow 0 \cdot 1 = 3 \cdot 0 = 0$ $\Leftrightarrow 0 = 0\ (w)$ $x_2 = \ln(3)$ $\ln(3) \cdot e^{\ln(3)} - 3 \cdot \ln(3) = 0$ $\Leftrightarrow \ln(3) \cdot 3 - 3 \cdot \ln(3) = 0$ $\Leftrightarrow 3 \cdot \ln(3) - 3 \cdot \ln(3) = 0\ (w)$	$x \cdot e^x - 3x = 0$ $\Leftrightarrow x(e^x - 3) = 0$ $\Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}$ und $e^x - 3 = 0 \mid +3$ د لوګاريم له لارې حل $\Leftrightarrow e^x = 3 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(3)$ $\Leftrightarrow x \cdot \ln(e) = \ln(3)$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = \ln(3)}}$

بیلګه ۳:

؟ $e^{2x} - \frac{17}{2}e^x + 4 = 0$ بدلون $: u = e^x \Rightarrow u^2 - \frac{17}{2}u + 4 = 0$

په خټ بدلون — د مربع مساوات حل

$$p = -\frac{17}{2};\ q = 4;$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{289}{16} - \frac{64}{16} = \frac{225}{16} \Rightarrow \sqrt{D} = \frac{15}{4}$$

$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$u_1 = \frac{17}{4} + \frac{15}{4} = \frac{32}{4} = 8$$

$$u_2 = \frac{17}{4} - \frac{15}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$u_1 = 8 \Leftrightarrow e^x = 8 \mid \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(8)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = \ln(8)}}$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \mid \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \ln(e) = \ln(1) - \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = -\ln(2)}}$$

بیلګه ۴:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{2}{1+e^x} = -2\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2} \,|:2 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{1+e^x} = -\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1\cdot\left(1+e^x\right)}{\left(1+e^x\right)\left(1+e^x\right)} = -\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2} \;\Leftrightarrow\; \frac{\left(1+e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^2} = -\frac{e^x-4}{\left(1+e^x\right)^2} \,|\cdot\left(1+e^x\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 1+e^x = -\left(e^x-4\right) \;\Leftrightarrow\; 1+e^x = -e^x+4 \,|+e^x-1$$

$$\Leftrightarrow 2e^x = 3 \,|\ln(\;) \;\Leftrightarrow\; \ln\left(2\cdot e^x\right) = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow \ln(2)+\ln\left(e^x\right) = \ln(3) \;\Leftrightarrow\; \ln(2)+x\cdot\ln(e) = \ln(3)$$

$$\Leftrightarrow \ln(2)+x = \ln(3) \,|-\ln(2) \;\Leftrightarrow\; x = \ln(3)-\ln(2)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)}}$$

بیلگه ۵:

$$e^{2x+4}-3e^{x+2}+2=0 \;\Leftrightarrow\; e^{2\cdot(x+2)}-3e^{x+2}+2=0$$

Substitution: $u = e^{x+2} \Rightarrow u^2-3u+2=0$

د مربع مساوات حل په ښت بدلون

$u_1 = 2 \Leftrightarrow e^{x+2} = 2 \,|\ln(\;)$	$p=-3\,;\,q=2\,;$
$\Leftrightarrow (x+2)\ln(e) = \ln(2)$	$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{9}{4}-\frac{8}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow x+2 = \ln(2) \,|-2$	
$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -2+\ln(2)}}$	$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$
$u_2 = 1 \Leftrightarrow e^{x+2} = 1 \,|\ln(\;)$	
$\Leftrightarrow (x+2)\ln(e) = \ln(1)$	$u_1 = \frac{3}{2}+\frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$
$\Leftrightarrow x+2 = 0 \,|-2$	$u_2 = \frac{3}{2}-\frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$
$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = -2}}$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه: اکسپوننشلمساوات.

لاندې اکسپوننشل مساوات تاسو ته له معلومې لارې وشمیرئ.

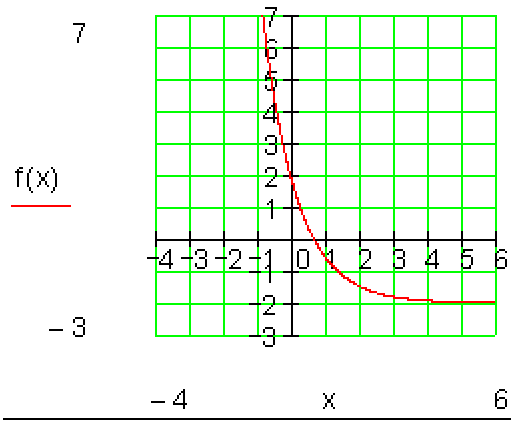
اول - $6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0$ دویم – $\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1$ دریم – $\frac{1}{2}e^{x}-e^{x+1}=0$

څلورم – $(3+2x)\,e^{x-1}=0$ پنځم – $-2x^2e^{-x+2}=0$

شپږم – $-\frac{1}{5}e^{x}-1+10e^{-x}=0$ اوم – $4-3e^{-\frac{1}{2}x}=e^{\frac{1}{2}x}$ اتم - $-\frac{3}{4}e^{-2x}+5=e^{-x}$

نهم - $\frac{2x}{e^{x}+1}=0$ لسم - $(2-e^{x})^2=(e^{x}-3)^2$

<u>د محور ونو غوځتکي وشمیرئ</u>



$f(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{2-x}-2$

$y_s=f(0)=\frac{1}{2}\cdot e^{2}-2\approx 1{,}7$

$\Rightarrow P_y\left(0\,\middle|\,\frac{1}{2}\cdot e^{2}-2\approx 1{,}7\right)$

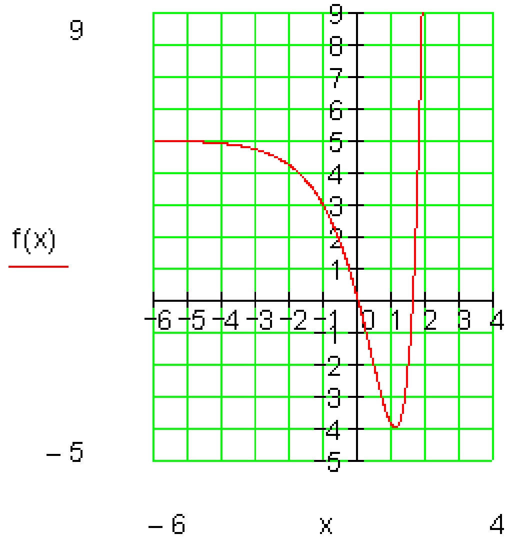
$f(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot e^{2-x}-2=0\,|+2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot e^{2-x}=2\,|\cdot 2\Leftrightarrow e^{2-x}=4\,|\ln(\ )$

$\Leftrightarrow 2-x=\ln(4)\Leftrightarrow x=2-\ln(4)$

$\Rightarrow P_x(x=2-\ln(4)\approx 0{,}614\,|\,0)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$f(x) = e^{2x} - 6 \cdot e^{x} + 5$

$y_s = f(0) = 1 - 6 + 5 = 0 \Rightarrow P_y(0|0)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 6 \cdot e^{x} + 5 = 0$

بدلون: $e^{x} = u \Rightarrow e^{2x} = u^2$

$u^2 - 6u + 5 = 0$

د مربع مساوات حل

$u_1 = 5; u_2 = 1$

$u_1 = 5 \Rightarrow e^{x_1} = 5 \Rightarrow x_1 = \ln(5) \approx 1{,}61$

$u_2 = 1 \Rightarrow e^{x_1} = 1 \Rightarrow x_2 = \ln(1) = 0$

$P_{x1}(\ln(5) \approx 1{,}61 | 0); P_{x2}(\ln(1) = 0 | 0)$

حلونه

تمرینونه توان او د لوګاریتم قوانین

نتیجي

اول - $\left(e^{x} + e^{-x}\right)^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2$

دویم – $\left(e^{x} - e^{-x} + 5\right) \cdot e^{x} = e^{2x} + 5 \cdot e^{x} - 1$

دریم - $\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}} = e^{4x-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

- څلورم - $e^{-x}\cdot e^{-x+2}\cdot e^{2x-3}=\frac{1}{e}$

- پنځم - $\frac{1}{e^{2x}}+3\left(e^{-x}\right)^2-\left(\frac{2}{e^x}\right)^2=0$

- شپږم - $e^{\ln(2k)}-2k\cdot e^{\ln(2)}=-2k$

- اوم - $\ln\left(e^2\right)-3\ln\left(\frac{e}{2}\right)=3\cdot\ln(2)-1$

- اتم - $\ln\left(2e^2\right)+\ln\left(\frac{e}{2}\right)=3$

- نهم - $e^{\ln(k)+1}=k\cdot e$

لسم – $\frac{2}{3}e^{-\ln\left(\frac{3}{4}k\right)}=\frac{8}{9k}$

مفصل حلونه

اول –

$$\left(e^x+e^{-x}\right)^2=e^x\cdot e^x+2\cdot e^x\cdot e^{-x}+e^{-x}\cdot e^{-x}$$
$$=e^{x+x}+2\cdot e^{x-x}+e^{-x-x}$$

$$=e^{2x}+2\cdot e^0+e^{-2x}$$

د $e^0=1$ سره کیږي

$$=e^{2x}+2\cdot 1+e^{-2x}=\underline{\underline{e^{2x}+e^{-2x}+2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم –

$$\left(e^{x}-e^{-x}+5\right)\cdot e^{x}=e^{x}\cdot e^{x}-e^{-x}\cdot e^{x}+5\cdot e^{x}$$
$$=e^{x+x}-e^{-x+x}+5\cdot e^{x}$$
$$=e^{2x}-e^{0}+5\cdot e^{x}=e^{2x}-1+5\cdot e^{x}=\underline{\underline{e^{2x}+5\cdot e^{x}-1}}$$

دریم –

$$\frac{e^{3x+1}}{e^{-x+2}}=e^{3x+1}\cdot e^{-(-x+2)}=e^{3x+1-(-x+2)}=e^{3x+1+x-2}=\underline{\underline{e^{4x-1}}}$$

څلورم –

$$e^{-x}\cdot e^{-x+2}\cdot e^{2x-3}=e^{-x+(-x+2)+2x-3}=e^{-x-x+2+2x-3}=e^{-1}=\underline{\underline{\frac{1}{e}}}$$

پنځم –

$$\frac{1}{e^{2x}}+3\left(e^{-x}\right)^{2}-\left(\frac{2}{e^{x}}\right)^{2}=e^{-2x}+3\cdot e^{-2x}-\left(\frac{4}{e^{2x}}\right)=4\cdot e^{-2x}-4\cdot e^{-2x}=\underline{\underline{0}}$$

شپږم –

$$e^{\ln(2k)}-2k\cdot e^{\ln(2)}$$

د $e^{\ln(x)}=x$ سره کیږي

$$e^{\ln(2k)}-2k\cdot e^{\ln(2)}=2k-2k\cdot 2=2k-4k=\underline{\underline{-2k}}$$

اوم –

$$\ln\left(e^{2}\right)-3\ln\left(\frac{e}{2}\right)=2\cdot\ln(e)-3\left[\ln(e)-\ln(2)\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\ln(e)=1$ سره کیري

$$= 2\cdot 1 - 3\left[1-\ln(2)\right] = 2-3+3\cdot\ln(2) = \underline{\underline{3\cdot\ln(2)-1}}$$

اتم ــ

$$\ln\left(2e^2\right)+\ln\left(\frac{e}{2}\right) = \ln(2)+\ln\left(e^2\right)+\ln(e)-\ln(2)$$
$$= \ln(2)+2\cdot\ln(e)+\ln(e)-\ln(2) = 3\cdot\ln(e) = \underline{\underline{3}}$$

نهم ــ

$$e^{\ln(k)+1} = e^{\ln(k)}\cdot e^1 = \underline{\underline{k\cdot e}}$$

لسم ــ

$$\frac{2}{3}e^{-\ln\left(\frac{3}{4}k\right)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{e^{\ln\left(\frac{3}{4}k\right)}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\frac{3}{4}k} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{1}{1}}{\frac{3k}{4}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3k} = \underline{\underline{\frac{8}{9k}}}$$

حلونه

تمرینونه د اکسپوننشل مساوات حلونه

نتیجې او مفصل حلونه

نتیجې

اول ــ $6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0 \Rightarrow x = 1-\ln(2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم – $\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1\Rightarrow x=\frac{1}{4}\ln(4+2e)$

دريم – $\frac{1}{2}e^{x}-e^{x+1}=0\Rightarrow$

له دې لاس ته راځي چې حل نه شته

څلورم – $(3+2x)e^{x-1}=0\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

پنځم – $-2x^{2}e^{-x+2}=0\Rightarrow x=0$

شپږم – $-\frac{1}{5}e^{x}-1+10e^{-x}=0\Rightarrow x_1=\ln(5)$

اوم – $4-3e^{-\frac{1}{2}x}=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow x_1=2\ln(3)\ \text{und}\ x_2=0$

اتم – $-\frac{3}{4}e^{-2x}+5=e^{-x}\Rightarrow x_1=-\ln(2)$

نهم – $\frac{2x}{e^{x}+1}=0\Rightarrow x=0$

لسم – $\left(2-e^{x}\right)^{2}=\left(e^{x}-3\right)^{2}\Rightarrow x=\ln\left(\frac{5}{2}\right)$

مفصل حلونه

اول –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3}{2}e^{2-2x}=6\,|:\frac{3}{2} \quad\Leftrightarrow\quad e^{2-2x}=4\,|\ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow 2-2x=\ln(4)\,|-2 \quad\Leftrightarrow\quad -2x=\ln(4)-2\,|:(-2) \quad\Leftrightarrow\quad x=1-\frac{1}{2}\ln(4)$$

$$\Leftrightarrow x=1-\ln\left(4^{\frac{1}{2}}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=1-\ln(2)}}$$

دويم –

$$\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{1}{2}e=1\,|+\frac{1}{2}e \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{4}e^{4x}=1+\frac{1}{2}e\,|\cdot 4 \quad\Leftrightarrow\quad e^{4x}=4+2e\,|\ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow\quad 4x=\ln(4+2e)\,|:4 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=\frac{1}{4}\ln(4+2e)}}$$

دريم –

$$\frac{1}{2}e^{x}-e^{x+1}=0\,|\cdot 2 \quad\Leftrightarrow\quad e^{x}-2e^{x+1}=0\,|+2e^{x+1}$$

$$\Leftrightarrow\quad e^{x}=2e^{x+1}\,|\ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow\quad \ln\left(e^{x}\right)=\ln\left(2e^{x+1}\right) \quad\Leftrightarrow\quad x=\ln(2)+\ln\left(e^{x+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad x=\ln(2)+x+1\,|-x$$

$$\Leftrightarrow\quad 0=\ln(2)+1\,|-1 \quad\Leftrightarrow\quad \ln(2)=-1$$

تضاد $\Leftrightarrow$ حل نه شته

څلورم –

$$(3+2x)e^{x-1}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 3+2x=0\,|-3$$

$$\Leftrightarrow\quad 2x=-3\,|:2 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{\underline{x=-\frac{3}{2}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

e^{x-1} تابعا e^{x} ا ده، چې په یو واحد د x محور ښي لور ته راکښل شوې ده.

تابع ا e^{x} ا صفرځای نه لري.

پنځم –

$$-2x^2e^{-x+2} = 0$$

$$-2x^2e^{-x+2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 0}}$$

e^{-x+2} i تابع e^{-x} ده چې په 2EH (په ۲ یوونه یا واحده) د x محور کینې لور ته راکښل شوې ده..

تابع e^{-x} صفرځتی نه لري.

شپږم – لاندې الماني : بدلون

$$-\frac{1}{5}e^x - 1 + 10e^{-x} = 0 \text{ Substitution } u = e^x \Leftrightarrow -\frac{1}{5}u - 1 + \frac{10}{u} = 0 \,|\cdot u$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{5}u - 1 + \frac{10}{u} = 0 \,|\cdot(-5) \quad \Leftrightarrow \quad u^2 + 5u - 50 = 0$$

$$p = 5\,;\, q = -50 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{25}{4} + \frac{200}{4} = \frac{225}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2}$$

$$u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} u_1 = -\frac{5}{2} + \frac{15}{2} = 5 \\ u_2 = -\frac{5}{2} - \frac{15}{2} = -10 \end{array} \right.$$

$$u_1 = 5 \Leftrightarrow e^x = 5 \Leftrightarrow x_1 = \ln(5)$$

$$u_2 = -10 \Leftrightarrow e^x = -10 \Rightarrow$$

حل نه دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوم – الماني: بدلون

$$4-3e^{-\frac{1}{2}x}=e^{\frac{1}{2}x} \text{ Substitution } u=e^{\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow 4-\frac{3}{u}=u \mid \cdot u$$

$$\Leftrightarrow 4u-3=u^2 \mid -u^2 \quad \Leftrightarrow \quad -u^2+4u-3=0 \mid \cdot(-1) \quad \Leftrightarrow \quad u^2-4u+3=0$$

$$p=-4\,;\, q=3 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=4-3=1 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{1}=1$$

$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \left| \begin{array}{l} u_1=2+1=3 \\ u_2=2-1=1 \end{array} \right.$$

$$u_1=3 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x}=3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x=\ln(3) \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=2\ln(3)}}$$

$$u_2=1 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x=\ln(1) \Leftrightarrow x_2=2\underbrace{\ln(1)}_{0} \Leftrightarrow \underline{\underline{x_2=0}}$$

اتم – الماني: بدلون ،

$$-\frac{3}{4}e^{-2x}+5=e^{-x} \text{ Substitution } u=e^{-x} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}u^2+5=u \mid -u$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}u^2-u+5=0 \mid :\left(-\frac{3}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad u^2+\frac{4}{3}u-\frac{20}{3}=0$$

$$p=\frac{4}{3}\,;\, q=-\frac{20}{3} \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{4}{9}+\frac{60}{9}=\frac{64}{9} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{64}{9}}=\frac{8}{3}$$

$$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \left| \begin{array}{l} u_1=-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}=2 \\ u_2=-\frac{2}{3}-\frac{8}{3}=-\frac{11}{3} \end{array} \right.$$

$$u_1=2 \Leftrightarrow e^{-x}=2 \Leftrightarrow -x=\ln(2) \Leftrightarrow \underline{x_1=-\ln(2)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u_2 = -\frac{11}{3} \Leftrightarrow e^{-x} = -\frac{11}{3} \Leftrightarrow -x = \underbrace{\ln\left(-\frac{11}{3}\right)}_{\text{nicht definiert}} \Rightarrow$$

تعريف نه دی

له دې لاس ته راځي چې حل نه دی.

نهم –

$$\frac{2x}{e^x+1} = 0 \,|\cdot\left(e^x+1\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 0}}$$

لسم –

$$\left(2-e^x\right)^2 = \left(e^x-3\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4-4e^x+e^{2x} = e^{2x}-6e^x+9 \,|-e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 4-4e^x = -6e^x+9 \,|+6e^x \quad \Leftrightarrow \quad 4+2e^x = 9 \,|-4 \quad \Leftrightarrow \quad 2e^x = 5 \,|:2$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{5}{2} \,|\ln(\;) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \ln\left(\frac{5}{2}\right)}}$$

خلورم: د **e** -تا بع مشتق یا رابیلیدنه

د ضرب- او زنځیري قانون سره

د **e** -تا بع مشتق یا رابیلیدنه

د **e** -تا بع مشتق یا رابیلیدنه د ساده لارو له لارې نه شي پیداکیدلای، د دې لپاره یوې ،،جګې شمیرپوهنې یا ریاضي،، ته ا ړتیا ده. دلته به یو لیدوړ متود انځور شي، له دې خطر سره هم، چې شمیرپوهنیز متخصصین یا شمیرپوهان به بغاوت وکړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = f(x) = e^x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x}$$

په پام کې نیسو چې باور لري: $e^{x_0 + \Delta x} = e^{x_0} \cdot e^{\Delta x}$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0} \cdot e^{\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

مونږ د تل کوچني کیدونکي Δx –ارزښت لپاره د $\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ خاننیونه څیړو

Δx	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$	1,718...	1,051...	1,00501...	1,0005...	1,00005...

د دې ځاننیوني یا حالت په بنسټ لاس ته راوړو چې باور لري: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$

دا ځمونږ د شمیرنې لپاره په دې معنا دی:

$$f'(x_0) = e^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_{1} = e^{x_0} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{x_0}}}$$

که د x_0 په ځای x ولیکو، نو باور لري: $f(x) = e^x$ او $f'(x) = e^x$

اکسپوننشل تابع $f(x) = e^x$ مشتق $f'(x) = e^x$ لري

د e په بنسټ اکسپوننشل تابع یو تابع دی، په کوم کې چې تابع او مشتق سره برابر دي.

د $f'(x) = e^x$ –تابع دمشتق سره ځان بیرته تولیدوي یا جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د e -تابع د مشتق یا بیلیدني لپاره بنستقوانین:

د e -تابع هندارونه، غزونه او راکښنه مو دې ته بیایي، =ې اکسپوننت یا جګعدد(-ګڼ) نه تنها فقط د x اووښتونې یا متحوله خوندي لري.

د نورو توابعو سره د نښلونو له لارې نوې توابع منځ ته راځي، په کومو کې چې د e– تابع د فاکتور یا ضریب په څیر خوندي ده. په داسې حالتونو کې د مشتق لپاره نور قوانین د غوښتلو دي.

د زیاتیز یا مثبت x په لور په 3 یوونونو یا واحدونو د e - تابع راکښنه او د په لور په 2 ضریبونو غزونه د دوه ضریبونو یوه زنځرونه ورکوي.

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}(x-2)} = e^{u(x)} \text{ mit } u(x) = \frac{1}{2}(x-2)$$

یو زنځیري تابع انځوروي.

د دې مشتق داسې دی

زنځیري لار یا قاعده:

$$\boxed{f(x) = e^{u(x)} \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}}$$

$$u(x) = \frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow u' = \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}(x-2)}$$

یو د e - تابع ترنه د یو کرښیز تابع سره تر څیرنې لاندې نیسو:

$f(x) = (2x-1) \cdot e^x$ نو دا د ضرب د قانون سره مشتق کوو یا رابیلوو.

د ضرب قانون یا -لار:

$$\boxed{f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u(x) = (2x-1) \Rightarrow u'(x) = 2 \text{ und } v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2\cdot e^x + (2x-1)\cdot e^x = \left[2+(2x-1)\right]\cdot e^x = \underline{\underline{(2x+1)\cdot e^x}}$$

دې قوانينو ته بيلګې

اول - $f(x) = e^{2-x} \Rightarrow f'(x) = (-1)\cdot e^{2-x} = \underline{\underline{-e^{2-x}}}$

دويم –

$$f(x) = e^{\frac{1}{4}x+4} \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{4}x+4}}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{\frac{1}{16}\cdot e^{\frac{1}{4}x+4}}}$$

دريم –

$$f(x) = (x-2)\cdot e^{-x}$$

$$\text{mit } u = (x-2) \Rightarrow u' = 1 \text{ und } v = e^{-x} \Rightarrow v' = -e^{-x} \text{ wird}$$

$$f'(x) = u'v + uv' = 1\cdot e^{-x} + (x-2)\cdot\left(-e^{-x}\right) = e^{-x} - (x-2)\cdot e^{-x}$$

$$= \left[1-(x-2)\right]\cdot e^{-x} = \underline{\underline{(3-x)\cdot e^{-x}}}$$

څلورم –

$$f(x) = ax\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$\text{mit } u = ax \Rightarrow u' = a \text{ und } v = e^{-\frac{1}{2}x^2} \Rightarrow v' = -x\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \text{ wird}$$

$$f'(x) = u'v + uv' = a\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + ax\cdot\left(-x\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)$$

$$= a\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} - ax^2\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = \underline{\underline{a\cdot\left(1-x^2\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دپرواره مشتق یا رابیلیدنه:

د کړو یا منحنیو خبرو اترو یا بحث سره زیات وخت درې مشتقونه د توابعو د څېړنو لپاره غوښتونکي یا اړین دي.

$f(x)=(2x+4)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ (د یوه کړښیز او e–تابع ضرب)

د $u=(2x+4)\Rightarrow u'=2$ او $v=e^{-\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ سره کیږی

$$f'(x)=u'v+uv'=2\cdot e^{-\frac{1}{2}x}+(2x+4)\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right)=\left[2+(2x+4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{-x\cdot e^{-\frac{1}{2}x}}}$$

د $u=-x\Rightarrow u'=-1$ او $v=e^{-\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ سره کیږي

$$f''(x)=u'v+uv'=-1\cdot e^{-\frac{1}{2}x}+(-x)\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right)=\left(\frac{1}{2}x-1\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

د $u=\frac{1}{2}x-1\Rightarrow u'=\frac{1}{2}$ او $v=e^{-\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$ سره کیږي

$$f'''(x)=u'v+uv'=\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}+\left(\frac{1}{2}x-1\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right)=\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}x-1\right)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x}=$$

$$=\underline{\underline{\left(1-\frac{1}{4}x\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}}}$$

د هر مشتق یا رابیلیدني سره د e -تابعضریب بي تغیره پاتیږي. که دا له نوکانو راووځي، نو نور مشتقونه یا رابیلیدني ساده په لاس راوړی شو یا شمیرلی شو.

د مشتقتابع صفرځایونه کیدی شي زیات وخت ساده ولوستل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرينونه

د e تابع مشتقا

د لاندې توابعو درې ځله مشتق وشمېرى

اول - $f(x)=4\cdot e^{2x}$ دويم - $f(x)=e^{x+4}$ دريم - $f(x)=2\cdot e^{2-4x}$ څلور م-

$f(x)=4x-2\cdot e^{-2x}$ پنځه - $f(x)=x\cdot e^{-2x}$ شپږم - $f(x)=2x\cdot e^{2-x}$ اوم -

$f(x)=(x+2)\cdot e^{x}$ اتم - $f(x)=(1-x)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ نهم - $f(x)=(1+x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$ لسم -

$f(x)=t\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

حلونه

د e تابع مشتقا

نتيجې او مفصل حلونه

نتيجې

اول – $f(x)=4\cdot e^{2x}\Rightarrow f'(x)=8\cdot e^{2x}\,;\,f''(x)=16\cdot e^{2x}\,;\,f'''(x)=32\cdot e^{2x}$

دويم – $f(x)=e^{x+4}\Rightarrow f'(x)=e^{x+4}\,;\,f''(x)=e^{x+4}\,;\,f'''(x)=e^{x+4}$

دريم -

$$f(x)=4x-2\cdot e^{-2x}\Rightarrow f'(x)=4+4\cdot e^{-2x}\,;\,f''(x)=-8\cdot e^{-2x}\,;\,f'''(x)=16\cdot e^{-2x}$$

څلورم -

$$f(x)=2\cdot e^{2-4x}\Rightarrow f'(x)=-8\cdot e^{2-4x}\,;\,f''(x)=32\cdot e^{2-4x}\,;\,f'''(x)=-128\cdot e^{2-4x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم -

$$f(x) = x \cdot e^{-2x} \Rightarrow f'(x) = (1-2x) \cdot e^{-2x}\ ;\ f''(x) = (4x-4) \cdot e^{-2x}\ ;\ f'''(x) = (12-8x) \cdot e^{-2x}$$

شپږم -

$$f(x) = 2x \cdot e^{2-x} \Rightarrow f'(x) = (2-2x) \cdot e^{2-x}\ ;\ f''(x) = (2x-4) \cdot e^{2-x}\ ;\ f'''(x) = (6-2x) \cdot e^{2-x}$$

اوم -

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{x} \Rightarrow f'(x) = (x+3) \cdot e^{x}\ ;\ f''(x) = (x+4) \cdot e^{x}\ ;\ f'''(x) = (x+5) \cdot e^{x}$$

اتم –

$$f(x) = (1-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}\ ;\ f''(x) = \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}x\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}\ ;\ f'''(x) = \left(-\frac{5}{8} - \frac{1}{8}x\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

نهم -

$$f(x) = (1+x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1-x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\ ;\ f''(x) = \frac{1}{4} \cdot (x-3) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\ ;\ f'''(x) = \frac{1}{8} \cdot (5-x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

لسم –

$$f(x) = t \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = t \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot x\right) \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\ ;\ f''(x) = \frac{1}{16} \cdot t \cdot (x-8) \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\ ;\ f''' = \frac{1}{64} \cdot t \cdot (12-x) \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

مفصل حلونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

اول –

$$f(x) = 4 \cdot e^{2x}$$
$$f'(x) = 2 \cdot 4 \cdot e^{2x} = \underline{\underline{8 \cdot e^{2x}}}$$
$$f''(x) = 2 \cdot 8 \cdot e^{2x} = \underline{\underline{16 \cdot e^{2x}}}$$
$$f'''(x) = 2 \cdot 16 \cdot e^{2x} = \underline{\underline{32 \cdot e^{2x}}}$$

دویم –

$$f(x) = e^{x+4}$$
$$f'(x) = 1 \cdot e^{x+4} = \underline{\underline{e^{x+4}}}$$
$$f''(x) = 1 \cdot e^{x+4} = \underline{\underline{e^{x+4}}}$$
$$f'''(x) = 1 \cdot e^{x+4} = \underline{\underline{e^{x+4}}}$$

دریم –

$$f(x) = 2 \cdot e^{2-4x}$$
$$f'(x) = -4 \cdot 2 \cdot e^{2-4x} = \underline{\underline{-8 \cdot e^{2-4x}}}$$
$$f''(x) = -4 \cdot (-8) \cdot e^{2-4x} = \underline{\underline{32 \cdot e^{2-4x}}}$$
$$f'''(x) = -4 \cdot 32 \cdot e^{2-4x} = \underline{\underline{-128 \cdot e^{2-4x}}}$$

څلورم –

$$f(x) = 4x - 2 \cdot e^{-2x}$$
$$f'(x) = 4 - 2 \cdot (-2) \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{4 + 4 \cdot e^{-2x}}}$$
$$f''(x) = -2 \cdot 4 \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{-8 \cdot e^{-2x}}}$$
$$f'''(x) = -2 \cdot (-8) \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{16 \cdot e^{-2x}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم – $f(x) = x \cdot e^{-2x}$

د $u = x \Rightarrow u' = 1$ او $v = e^{-2x} \Rightarrow v' = -2 \cdot e^{-2x}$ سره

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 1 \cdot e^{-2x} + x \cdot \left(-2 \cdot e^{-2x}\right) = 1 \cdot e^{-2x} - 2x \cdot e^{-2x} = (1-2x) \cdot e^{-2x}$$

$f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ د $u = 1-2x \Rightarrow u' = -2$ او $v = e^{-2x} \Rightarrow v' = -2 \cdot e^{-2x}$ سره

$$f''(x) = -2 \cdot e^{-2x} + (1-2x) \cdot \left(-2 \cdot e^{-2x}\right) = \left[-2 - 2 \cdot (1-2x)\right] \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{(4x-4) \cdot e^{-2x}}}$$

$f'''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ د $u = 4x-4 \Rightarrow u' = 4$ او $v = e^{-2x} \Rightarrow v' = -2 \cdot e^{-2x}$ سره

$$f'''(x) = 4 \cdot e^{-2x} + (4x-4) \cdot \left(-2 \cdot e^{-2x}\right) = \left[4 - 2 \cdot (4x-4)\right] \cdot e^{-2x} = \underline{\underline{(12-8x) \cdot e^{-2x}}}$$

شپږم –

$f(x) = 2x \cdot e^{2-x}$ د $u = 2x \Rightarrow u' = 2$ او $v = e^{2-x} \Rightarrow v' = -1 \cdot e^{2-x}$ سره

$$f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v' = 2 \cdot e^{2-x} + 2x \cdot \left(-1 \cdot e^{2-x}\right) = (2-2x) \cdot e^{2-x}$$

$f''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ د $u = 2-2x \Rightarrow u' = -2$ او $v = e^{2-x} \Rightarrow v' = -1 \cdot e^{2-x}$ سره

$$f''(x) = -2 \cdot e^{2-x} + (2-2x) \cdot \left(-1 \cdot e^{2-x}\right) = \left[-2 - (2-2x)\right] \cdot e^{2-x} = (2x-4) \cdot e^{2-x}$$

$f'''(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ د $u = 2x-4 \Rightarrow u' = 2$: او $v = e^{2-x} \Rightarrow v' = -1 \cdot e^{2-x}$ سره

$$f'''(x) = 2 \cdot e^{2-x} + (2x-4) \cdot \left(-1 \cdot e^{2-x}\right) = \left[2 - (2x-4)\right] \cdot e^{2-x} = \underline{\underline{(6-2x) \cdot e^{2-x}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوم –

$f(x)=(x+2)\cdot e^{x}$ د $u=x+2\Rightarrow u'=1$ او $v=e^{x}\Rightarrow v'=e^{x}$ سره

$$f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'=1\cdot e^{x}+(x+2)\cdot e^{x}=\left[1+(x+2)\right]\cdot e^{x}=\underline{\underline{(x+3)\cdot e^{x}}}$$

$f''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=x+3\Rightarrow u'=1$ او $v=e^{x}\Rightarrow v'=e^{x}$ سره

$$f''(x)=1\cdot e^{x}+(x+3)\cdot e^{x}=\left[1+(x+3)\right]\cdot e^{x}=\underline{\underline{(x+4)\cdot e^{x}}}$$

$f'''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=x+4\Rightarrow u'=1$ او $v=e^{x}\Rightarrow v'=e^{x}$ سره

$$f'''(x)=1\cdot e^{x}+(x+4)\cdot e^{x}=\left[1+(x+4)\right]\cdot e^{x}=\underline{\underline{(x+5)\cdot e^{x}}}$$

اتم –

$f(x)=(1-x)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ د $u=1-x\Rightarrow u'=-1$ او $v=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'=-1\cdot e^{\frac{1}{2}x}+(1-x)\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\left[-1+\frac{1}{2}(1-x)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$f''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\Rightarrow u'=-\frac{1}{2}$ او $v=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$f'''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x\Rightarrow u'=-\frac{1}{4}$ او $v=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$

سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'''(x)=-\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x}+\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x\right)\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x\right)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{\left(-\frac{5}{8}-\frac{1}{8}x\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

نهم – $f(x)=(1+x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$

د $u=1+x\Rightarrow u'=1$ او $v=e^{-\frac{1}{2}x+2}\Rightarrow v'=-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$ سره

$$f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'=1\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}+(1+x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\right)=\left[1-\frac{1}{2}(1+x)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}=\frac{1}{2}\cdot(1-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

$f''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=\frac{1}{2}\cdot(1-x)\Rightarrow u'=-\frac{1}{2}$ او $v=e^{-\frac{1}{2}x+2}\Rightarrow v'=-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$ سره

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}+\frac{1}{2}\cdot(1-x)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\right)=\left[-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(1-x)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

$$=\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}x\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}=\frac{1}{4}\cdot(x-3)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

$f'''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=\frac{1}{4}\cdot(x-3)\Rightarrow u'=\frac{1}{4}$ او $v=e^{-\frac{1}{2}x+2}\Rightarrow v'=-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'''(x)=\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}+\frac{1}{4}\cdot(x-3)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}\right)=\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{8}(x-3)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}$$

$$=\left(\frac{5}{8}-\frac{1}{8}x\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}=\underline{\underline{\frac{1}{8}\cdot(5-x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x+2}}}$$

لسم –

$f(x)=t\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ د $u=t\cdot x\Rightarrow u'=t$ او $v=e^{-\frac{1}{4}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ سره

$$f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'=t\cdot e^{-\frac{1}{4}x}+t\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right)=\left[t-\frac{1}{4}\cdot t\cdot x\right]\cdot e^{-\frac{1}{4}x}=\underline{\underline{t\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}}}$$

$f''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=t\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot x\right)\Rightarrow u'=-\frac{1}{4}\cdot t$ او $v=e^{-\frac{1}{4}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ سره

$$f''(x)=-\frac{1}{4}t\cdot e^{-\frac{1}{4}x}+t\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot x\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right)=\left[-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}\cdot t\cdot\left(1-\frac{1}{4}\cdot x\right)\right]\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\cdot t+\frac{1}{16}\cdot t\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}=\frac{1}{16}\cdot t\cdot(x-8)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

$f'''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$ د $u=\frac{1}{16}\cdot t\cdot(x-8)\Rightarrow u'=\frac{1}{16}\cdot t$ او $v=e^{-\frac{1}{4}x}\Rightarrow v'=-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'''(x)=\frac{1}{16}\cdot t\cdot e^{-\frac{1}{4}x}+\frac{1}{16}\cdot t\cdot(x-8)\cdot\left(-\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right)=\left[\frac{1}{16}t-\frac{1}{64}\cdot t\cdot(x-8)\right]\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$=\left(\frac{3}{16}\cdot t-\frac{1}{64}\cdot t\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}=\underline{\underline{\frac{1}{64}\cdot t\cdot(12-x)\cdot e^{-\frac{1}{4}x}}}$$

پنځم: د e -تابع انتیګرېشن یا ګډونه

پیل:په ښت کتنې را تولوني سره د انتیګرالشمیرنې ځخه لاندې ځرګند دي:

که د یو په خوښه انتیګرالوړ تابع $f(x)$انتیګرال ونیول شي، نو سړی یو بنسټ تابع لاس ته راوړي: $F(x)=\int f(x)\,dx$

تابع $f(x)$ د انتیګرالوني تابع هم بلل کیږي.

باور لري: $F(x)=\int f(x)\,dx \Leftrightarrow F'(x)=f(x)$

دا په دې معنا، چې که بنسټ تابع مشتق شي یا یې مشتق ونیول شي، نو سړی بیرته د انتیګرالیدنې تابع لاس ته راوړي. دا ډ یکه مهم ته ممکنوي چې د مشتقولو له لارې د انتیګرال نتیجه و ازمایو.

بیلګه:

$f(x)=x^2 \Rightarrow F(x)=\int x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3+C$ مشتق شوی: $F'(x)=x^2=f(x)$

که په e -تابع استعمال شي، له کوم چې موږ پوهیږو، چې د مشتق سره پخپله بیرته تولیدیږي یا منځ ته راځي په دې معنا دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي دي $F(x)=\int f(x)\,dx = e^x + C$ د ټولو توابعو f(x) بنسټ دېرئ یا سټ، نو دی $F'(x)=f(x)=\left[e^x+C\right]'=e^x$

(۱) د -تابع ا نتیګرال: $\int e^x\,dx = e^x + C$

د e –تابع د مشتق سره دې په دې حالت کې، په کوم کې چې د e –تابع جګعدد یا اکسپوننت نه ځانله د اووبنتوني یا متحولې x ځخه جوړ وو، زنځیرقانون استعمال شي. په انتیګرېشن کې د ا نتیګرالیدونکې تابع دې داسې وټاکل شي، چې د (۱) انتیګرال کیدی شي

ټولیز انتیګرال د بدلون قاعدې سره

$$f(x)=e^{-x}\Rightarrow F(x)=\int e^{-x}\,dx$$

$$\text{Substitution}: u(x)=-x\Rightarrow u'(x)=\frac{du(x)}{dx}=-1\Rightarrow dx=-du$$

$$\Rightarrow \int e^{-x}\,dx=-\int e^{u}\,du=-e^{u}+C$$

په خټ بلون: $\Rightarrow F(x)=\int e^{-x}\,dx=\underline{\underline{-e^{-x}}}$

ازماېښت: $F(x)=-e^{-x}+C\Rightarrow F'(x)=(-1)\cdot\left(-e^{-x}\right)=e^{-x}=f(x)$

بیلګه:

$$f(x)=e^{2x-1}\Rightarrow F(x)=\int e^{2x-1}\,dx$$

$$\text{Substitution}: u(x)=2x-1\Rightarrow u'(x)=\frac{du(x)}{dx}=2\Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\Rightarrow \int e^{2x-1}\,dx=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

$$\Rightarrow F(x)=\int e^{2x-1}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x-1}+C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ازماېښت:
$$F(x)=\frac{1}{2}e^{2x-1}+C\Rightarrow F'(x)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x-1}=e^{2x-1}=f(x)$$

بیلګه:

$$f(x)=e^{2x-1}\Rightarrow F(x)=\int e^{2x-1}\,dx$$

$$\text{Substitution}: u(x)=2x-1\Rightarrow u'(x)=\frac{du(x)}{dx}=2\Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\Rightarrow \int e^{2x-1}\,dx=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

$$\Rightarrow F(x)=\int e^{2x-1}\,dx=\underline{\frac{1}{2}e^{2x-1}+C}$$

ازماېښت:
$$F(x)=2\cdot e^{-\frac{1}{2}(1-x)}+C\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot e^{-\frac{1}{2}(1-x)}=e^{-\frac{1}{2}(1-x)}=f(x)$$

د بدلون سره ټاکلی انتیګرال

د دې لپاره چې د ګراف او x محور ترمنځ سطحه وشمیرو، زیات وخت باید یو ټاکلی انتیګرال حل شي. دلته مو هم د بدلون لار حل ته لاربښودوي. د بدلون له لارې حل لپاره دوه متودونه یا واریانت شتون لري.

لومړئ لار یا واریانت :

$$f(x)=e^{\frac{1}{2}x-1}\Rightarrow A=\int_{-1}^{1}e^{\frac{1}{2}x-1}\,dx$$

بدلون:

$$u(x)=\frac{1}{2}x-1\Rightarrow u'(x)=\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}\Rightarrow dx=2\cdot du$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګرال عمومي حل:

$$\int e^{\frac{1}{2}x-1}\,dx = 2\cdot\int e^{u}\,du = 2\cdot e^{u} + C \Rightarrow 2\cdot e^{\frac{1}{2}x-1} + C$$

د ټاکلي انتیګرال په حیث یې وشمیرئ(بې له ثا بتي یا همغې C سره)

$$A = \int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{2}x-1}\,dx = 2\cdot\left[e^{\frac{1}{2}x-1}\right]_{-1}^{1} = 2\cdot\left[e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}}\right] \approx 2\cdot 0{,}3834 = \underline{\underline{0{,}7668}}$$

دویمه لار یا واریانت:

$$\text{Variante 2: } f(x) = e^{\frac{1}{2}x-1} \Rightarrow A = \int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{2}x-1}\,dx$$

بدلون:
$$u(x) = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2\cdot du$$

پولې هم بدلیږي:

لاندې یا کښته پوله:
$$ug = u(-1) = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

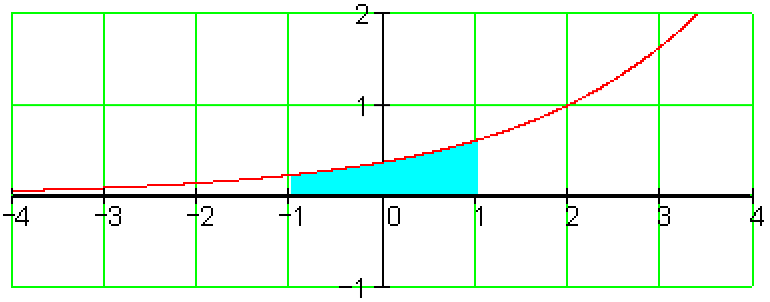
پورته پوله:
$$og = u(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$A = \int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{2}x-1}\,dx = 2\cdot\int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} e^{u}\,du = 2\cdot\left[e^{u}\right]_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} = 2\cdot\left[e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}}\right] \approx 2\cdot 0{,}3834 = \underline{\underline{0{,}7668}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دویمه واریابلې کې د انیګرال لاندې او پورته پولې هم بدلې یا سبستیتویرت شوې. له دې لارې په زیاتو حالتونو کې شمیرن زیاتوالی راکمیږي.

$$f(x) := e^{\frac{1}{2}\cdot x-1} \qquad \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0.7668$$



تمرینونه

د ساده توابعو انتیګرالونه

د لاندې تابعو انتیګرال وشمیرئ. د اول تر څلورم تمرینونو پورې د ازمایښت له لارې کنترول کړئ.

اول - $\int -e^{-x}\,dx$ دویم - $\int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx$ دریم - $\int 2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$ څلورم - $\int \frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}\,dx$

پنځم - $\int_0^2 e^{1-x}\,dx$ شپږم- $\int_{-1}^{2} e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ اوم - $\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$ اتم - $\int_0^{\ln(2)} -\frac{1}{2}e^{-x}\,dx$ نهم -

لسم - $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx$ $\int_0^4 -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حلونه

تمرینونه د توابعو انتیګرالونه

نتیجې او مفصل حلونه

اول – $F(x)=\int -e^{-x}\,dx = e^{-x}+C \quad Probe: F(x)=e^{-x}+C \Rightarrow F'(x)=-e^{-x}$

دویم –

$$F(x)=\int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx=\frac{1}{4}e^{2x}+C \quad Probe: F(x)=\frac{1}{4}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$$

دریم -

$$F(x)=\int 2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx=-8\cdot e^{-\frac{1}{4}x}+C$$

ازمایینت:

$$: F(x)=-8\cdot e^{-\frac{1}{4}x}+C \Rightarrow F'(x)=2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

څلورم - $F(x)=\int \frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}\,dx=\frac{1}{4}\cdot e^{3x-4}+C$

ازمایینت: $F(x)=\frac{1}{4}\cdot e^{3x-4}+C \Rightarrow F'(x)=\frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}$

پنځم - $\int_0^2 e^{1-x}\,dx=e^1-e^{-1}=e-\frac{1}{e}\approx 2{,}350$

شپږم –

$$\int_{-1}^{2} e^{\frac{1}{2}x}\,dx=2\cdot\left[e^1-e^{-\frac{1}{2}}\right]\approx 4{,}224$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوم -
$$\int_1^2 e^{4-2x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\left[e^2 - e^0\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[e^2 - 1\right] \approx 3{,}195$$

اتم –
$$\int_0^{\ln(2)} -\frac{1}{2}e^{-x}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\left[e^0 - e^{-\ln(2)}\right] = -\frac{1}{2}\cdot\left[1 - \frac{1}{e^{\ln(2)}}\right] = -\frac{1}{2}\cdot\left[1 - \frac{1}{2}\right] = -\frac{1}{4}$$

نهم -
$$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx = 2\cdot\left[e^2 - e^0\right] = 2\cdot\left[e^2 - 1\right] \approx 12{,}778$$

لسم -
$$\int_0^4 -\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = -2\left[e^0 - e^{-1}\right] \approx -1{,}264$$

اول – مفصل حل:

$$F(x) = \int F'(x)\,dx = \int -e^{-x}\,dx = -\int e^{-x}\,dx$$

بدلون
$$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

$$-\int e^{-x}\,dx = -\int (-1)\cdot e^u\,du = \int e^u\,du = e^u + C$$
$$\Rightarrow F(x) = \int -e^{-x}\,dx = \underline{e^{-x} + C}$$

ازمایښت:
$$F(x) = e^{-x} + C \Rightarrow F'(x) = -e^{-x}$$

دويم – مفصل حل

$$F(x) = \int F'(x)\,dx = \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون: $u(x) = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2}du$

$$\int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}e^{u}\,du = \frac{1}{4}\int e^{u}\,du = \frac{1}{4}e^{u} + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \underline{\frac{1}{4}e^{2x} + C}$$

ازمايينت: $Probe: F(x) = \frac{1}{4}e^{2x} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

دريم – مفصل حل

$$F(x) = \int F'(x)\,dx = \int 2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = 2\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$$

بدلون: $u(x) = -\frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow dx = -4\cdot du$

$$\int 2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = 2\int(-4)\cdot e^{u}\,du = -8\int e^{u}\,du = -8\cdot e^{u} + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int 2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = \underline{-8\cdot e^{-\frac{1}{4}x} + C}$$

ازمايينت: $Probe: F(x) = -8\cdot e^{-\frac{1}{4}x} + C \Rightarrow F'(x) = 2\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$

خلورم – $F(x) = \int F'(x)\,dx = \int \frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}\,dx = \frac{3}{4}\int e^{3x-4}\,dx$

بدلون : $u(x) = 3x - 4 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{3}\cdot du$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{3}\cdot e^{u}\,du = \frac{1}{4}\int e^{u}\,du = \frac{1}{4}\cdot e^{u} + C$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}\,dx = \underline{\frac{1}{4}\cdot e^{3x-4} + C}$$

ازمايښت: $F(x) = \frac{1}{4}\cdot e^{3x-4} + C \Rightarrow F'(x) = \frac{3}{4}\cdot e^{3x-4}$

پنځم – $\int_0^2 e^{1-x}\,dx$ بدلون: $u(x) = 1-x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې پولې: $u(0) = 1-0 = 1$ پورته پولې: $u(2) = 1-2 = -1$

$$\int_0^2 e^{1-x}\,dx = \int_1^{-1}(-1)\cdot e^{u}\,du = -\int_1^{-1} e^{u}\,du = \int_{-1}^{1} e^{u}\,du = \left[e^{u}\right]_{-1}^{1} = e^{1} - e^{-1} = e - \frac{1}{e} \approx \underline{\underline{2,350}}$$

شپږم - مفصل حل

$\int_{-1}^{2} e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ بدلون: $u(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow dx = 2\cdot du$

لاندې پولې: $u(-1) = \frac{1}{2}\cdot(-1) = -\frac{1}{2}$ پورته پولې: $u(2) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$

$$\int_{-1}^{2} e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2\int_{-\frac{1}{2}}^{1} e^{u}\,du = 2\cdot\left[e^{u}\right]_{-\frac{1}{2}}^{1} = 2\cdot\left[e^{1} - e^{-\frac{1}{2}}\right] \approx \underline{\underline{4,224}}$$

اوم – مفصل حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

$\int_{1}^{2} e^{4-2x}\,dx$ بدلون: $u(x) = 4-2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2 \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{2}\cdot du$:

لاندې پولې: $u(2) = 4-4 = 0$ پورته پولې: $u(1) = 4-2 = 2$

$$\int_{1}^{2} e^{4-2x}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{2}^{0} e^{u}\,du = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} e^{u}\,du = \frac{1}{2}\cdot\left[e^{u}\right]_{0}^{2} = \frac{1}{2}\cdot\left[e^{2}-e^{0}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[e^{2}-1\right] \approx \underline{\underline{3,195}}$$

اتم – مفصل حل

$\int_{0}^{\ln(2)} -\frac{1}{2}e^{-x}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{0}^{\ln(2)} e^{-x}\,dx$ بدلون: $u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې پولې: $u(0) = 0$ پورته پولې: $u(\ln(2)) = -\ln(2)$

$$-\frac{1}{2}\int_{0}^{\ln(2)} e^{-x}\,dx = -\frac{1}{2}\int_{0}^{-\ln(2)} (-1)\cdot e^{u}\,du = \frac{1}{2}\int_{0}^{-\ln(2)} e^{u}\,du = -\frac{1}{2}\int_{-\ln(2)}^{0} e^{u}\,du$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left[e^{u}\right]_{-\ln(2)}^{0} = -\frac{1}{2}\cdot\left[e^{0}-e^{-\ln(2)}\right] = -\frac{1}{2}\cdot\left[1-\frac{1}{e^{\ln(2)}}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left[1-\frac{1}{2}\right] = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

یادونه: $e^{\ln(a)} = a \Rightarrow e^{\ln(2)} = 2$

نهم – مفصل حل

بدلون: $\int_{1}^{2} \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx = 4\int_{1}^{2} e^{4-2x}\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون:

$$u(x) = 4 - 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2 \Leftrightarrow dx = -\frac{1}{2}du$$

لاندې پولې: $u(1) = 4 - 2 = 2$: پورته پولې: $u(2) = 4 - 4 = 0$

$$4\int_1^2 e^{4-2x}\,dx = 4\int_2^0 \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot e^u\,du = -2\int_2^0 e^u\,du = 2\int_0^2 e^u\,du$$

$$= 2\cdot\left[e^u\right]_0^2 = 2\cdot\left[e^2 - e^0\right] = 2\cdot\left[e^2 - 1\right] \approx \underline{\underline{12,778}}$$

لسم – مفصل حل

$$\int_0^4 -\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^4 e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$$

بدلون: $u(x) = -\frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow dx = -4\cdot du$:

لاندې پولې: $u(0) = 0$ پورته پولې: $u(4) = -\frac{1}{4}\cdot 4 = -1$

4

$$-\frac{1}{2}\int_0^4 e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{-1}(-4)\cdot e^u\,du = 2\int_0^{-1} e^u\,du = -2\int_{-1}^0 e^u\,du$$

$$= -2\cdot\left[e^u\right]_{-1}^0 = -2\left[e^0 - e^{-1}\right] \approx \underline{\underline{-1,264}}$$

شپږم: ناټاکلی انتیګرال:

د طبیعي عدد وده د ګټې ګټې شمیرنې په مرسته د یو کال وروسته د پانګې ګټه د $1 = 100\% = p$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$K_1 = K_0 + K_0 \cdot p = K_0 (1+p) = K_0 \cdot 2$$

د یو کال وروسته د نیم کال د پانګې په ګټوني د p = 1 / 2 سره

$$K_2 = K_0 \left(1+\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,25}}$$

د یو کال وروسته د میاشتې د پانګې په ګټوني د p = 1 / 12 سره

$$K_{12} = K_0 \left(1+\frac{1}{12}\right)^{12} = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,61\ldots}}$$

د یو کال وروسته په روځنۍ په بانګې ګټوني د p = 1 / 360 سره

$$K_{360} = K_0 \left(1+\frac{1}{360}\right)^{360} = \underline{\underline{K_0 \cdot 2,7145\ldots}}$$

د یو کال وروسته په ساعتي د پانګې په ګټوني د p = 1 / 8640 سره

$$K_{8640} = K_0 \left(1+\frac{1}{8640}\right)^{8640} = \underline{K_0 \cdot \underbrace{2,7181\ldots}_{\approx e}}$$

د پانګې ګټونه د یوه کال وروسته د n ګټوني سره

$$K_n = K_0 \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

که په هره لحظه کې پیسې په ګټه واچول شي (یعني ناپاي ډېرې ګټوني ناپای$\to n$)،
نو نو له یو کال وروسته یوه پانګه لاس ته راوړي د :

$$\lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} K_0 \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = K_0 \cdot e$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا پانګه په e ضریب ډېرځلې شوه.

په ډېرو جبشمېریوکي یوه د e –تابعتکمه لري د Pi دکمیو ته ورته.

د اویلر د عدد ارزښت یو ناپای نه پریودیکي یعنې نه بېرته راګرځېدونکی لسمیز کسر(مات).

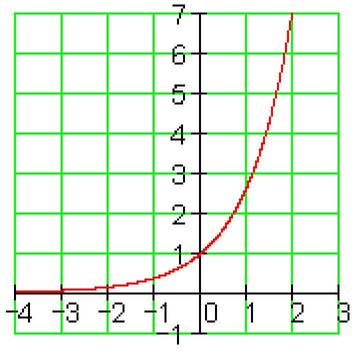
عدد e د اکسپوننشل تابع بنسټ جوړوي.

باور لري $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ د e تابع دابنه لري: $f(x) = a\cdot e^{b\cdot x}$

د e ارزښت په 3ځایونو راګرد شوی: $e = 2{,}718$

د e ارزښت په 9 ځایونو راګرد شوی: $e = 2{,}718\ 281\ 828$

د **e** -تابع ته خیرنه

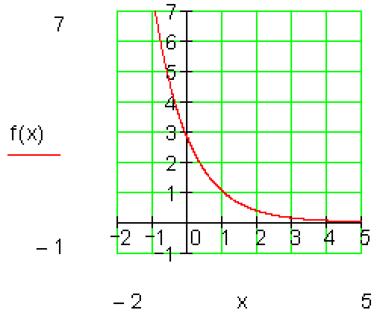
د e–تابع نورماله $f(x) = e^x$ د y-محور سره غوڅتکی $f(0) = e^0 = 1 \Rightarrow P_y(0\mid 1)$ ژئ پوله ارزښت $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$	
د y – محور باندې هنداره شوی $f(x) = e^{-x}$ د y –محور سره غوڅتکی	

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(0)=e^{-0}=e^{0}=1\Rightarrow P_y(0|1)$$

ژئ پوله ارزښت

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=\infty \qquad \lim_{x\to\infty} e^{-x}=0$$



په یوه واحد(یوون) کښته لور ته راکښلی

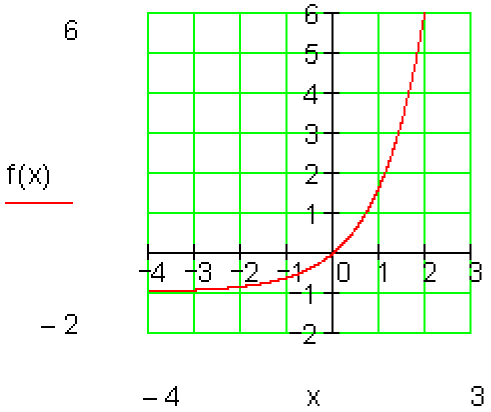
$$f(x)=e^{x}-1$$

د y ـمحور سره غوڅتکی

$$f(0)=e^{0}-1=1-1=0\Rightarrow P_y(0|0)$$

ژئ پوله ارزښت

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^{x}-1\right)=-1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(e^{x}-1\right)=\infty$$



په یوه واحد(یوون) کښته لور ته راکښلی

$$f(x)=e^{-(x-1)}$$

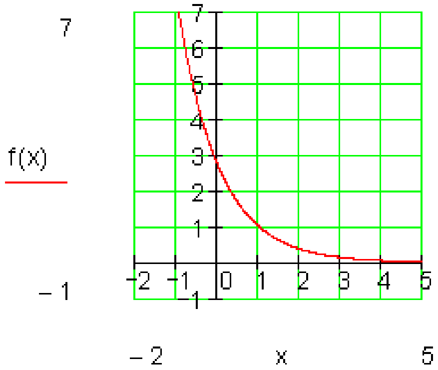
د y ـمحور سره غوڅتکی

$$f(0)=e^{-(0-1)}=e^{1}=e\Rightarrow P_y(0|e)$$

$$f(1)=e^{-(1-1)}=e^{0}=1\Rightarrow P(1|1)$$

ژئ پوله ارزښت

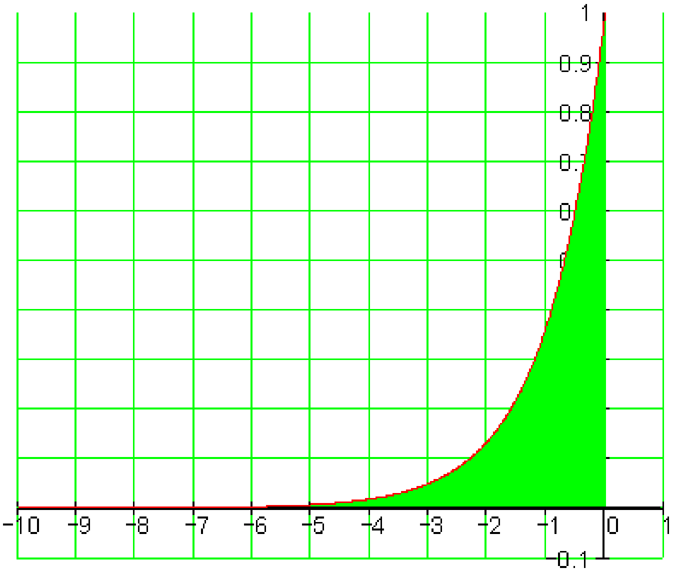
$$\lim_{x\to-\infty} e^{-(x-1)}=\infty \qquad \lim_{x\to\infty} e^{-(x-1)}=0$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

ناټاكلی انتيګرال

بيلګه:



د $f(x) = e^x$ د ګراف او د x-محور ترمنځ ټوله سطحه دې په $(-\infty ; 0]$ كې وشميرل شي، يعني

$$A = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$$

تراوسه د ټاكلي انتيګرال كښته او پورته پولي اعداد وو.

يعني د انتيګريشنورشو محدوده يا رابنده وه.

اوس د انتيګرسشن ورشو نوره رابنده نه ده.

دا ډول انتيګرال نا څرګند يا نا معلوم يا نا اصلي انتيګرال بلل كيږي د نابند انتيګريشن ورشو سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا انتیګرال له ي درې بڼو څخه په یوه بڼه راتلی شي.

$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

د داسې ا نتیګرالونو شمیرلو لپاره سړی داسې مخ ته ځي:

لومړی سړی انتیګرال $\int_a^b f(x)dx$ د پای انتروال [a,b] لپاره شمیري، پسې د اړونده وېناو یا افادو څخه د $a \to -\infty$ یا $a \to \infty$ همداسې $b \to -\infty$ یا $b \to \infty$ لپاره پوله ارزښتونه جوړوي.

فورمال دا داسې لیدل کیږي:

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{x} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

زموږ د سطحې شیمرلو لپاره دا په داسې توګه معلومیږي.

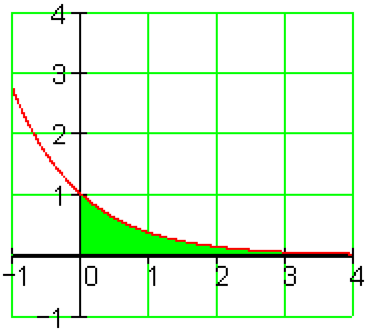
$$f(x) = e^x$$

$$A = \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left[e^x\right]_a^0$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[e^0 - e^a\right] = \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^0}_{1} - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^a}_{0} = \underline{\underline{1}}$$

بیلګه:

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا د y-محور باندې هنداره شوی د e-تابع د $f(x) = e^{-x}$ سره باید په انتروال $[0;\infty)$ کي برابره سطحه ولري.

$$A = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx$$

بدلون:

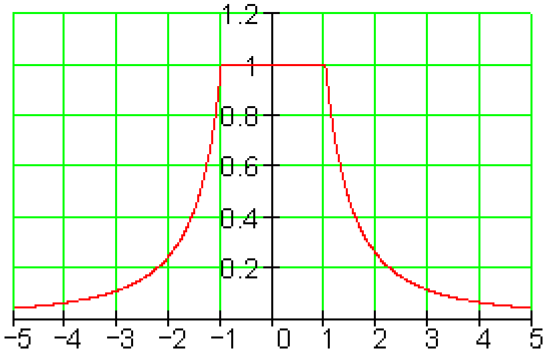
$$: u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = \frac{du}{-1}$$

$$u(0) = 0\,;\, u(b) = -b$$

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b} e^u \frac{du}{-1} = -\lim_{b\to\infty}\int_0^{-b} e^u\,du = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{0} e^u\,du$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[e^u\right]_{-b}^{0} = \lim_{b\to\infty}\left[e^0 - e^{-b}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty} e^0 - \lim_{b\to\infty} e^{-b} = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$



د یوه ترکیبي یا ګډوله تابع لپاره بیلګه:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{für } x < -1 \\ 1 & \text{für } -1 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

د انتیګرال (په برخو) توته کونه

$$A = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{-1}^{1} dx + \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترمخ راوړنه:

د سیومتري دلایلو له امله باور لري: $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ ا

داسې چې دا نتیګرال فقط یو ځل باید وشمیرل شي

$$\int_{-1}^{1} dx = [x]_{-1}^{1} = [1]-[-1] = 1+1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}\right]}_{0} - \underbrace{\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{1}\right]}_{-1} = 0-(-1) = \underline{\underline{1}}$$

$$A = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} + \underbrace{\int_{-1}^{1} dx}_{2} + \underbrace{\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{1} = 1+2+1 = \underline{\underline{4}}$$

پوښتنې

د e- تابع سره انتیګرالونه

د سطحې مساحت شمېرنه

اول – لاندې انتیګرالونه وشمېرئ او اړونده سطحه یې کرښې ژکرښې کړئ.

الف - $\int_{0}^{1} e^x\,dx$ ب - $\int_{-1}^{0} e^x\,dx$ پ – $\int_{-3}^{0} e^x\,dx$

دویم – لاندې انتیګرالونه وشمېرئ او اړونده سطحه یې کرښې ژکرښې کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - $\int_0^1 (e^x - 1)\,dx$ ب - $\int_0^3 (e^x - 1)\,dx$ پ - $\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$

دریم – لاندې انتیګرالونه وشمېرئ او اړونده سطحه يې کرښې ژکرښې کړئ.

الف - $\int_0^1 e^{-x}\,dx$ ب - $\int_{-1}^2 e^{-x}\,dx$ پ - $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$

څلورم – لاندې انتیګرالونه وشمېرئ او اړونده سطحه يې کرښې ژکرښې کړئ.

الف - $\int_0^3 e^{-(x-3)}\,dx$ ب - $\int_1^3 e^{-(x-2)}\,dx$ پ - $\int_3^\infty e^{-(x-3)}\,dx$

پنځم – لاندې انتیګرالونه وشمېرئ.

الف - $\int_0^3 (e^x - x + 1)\,dx$ ب - $\int_0^4 3 \cdot e^{x+2}\,dx$ پ - $\int_0^5 (e^x + e^{-x})\,dx$

شپږم – د k د کوم ارزښت لپاره دا انتیګرال ورکړشوي ارزښتونه لري؟

الف - $\int_0^2 k \cdot e^x\,dx = \frac{1}{2}e$ ب - $\int_0^4 (e^x - k \cdot x)\,dx = 4$ پ - $\int_0^k e^x\,dx = 2 \cdot e$

اوم – لاندې انتیګرالونه وشمېرئ.

الف - $\int_0^{\ln(2)} (e^{2x} - 2e^x)\,dx$ ب - $\int_0^{\ln(k)} (e^{2x} - k \cdot e^x)\,dx$ پ - $\int_0^4 \left(\frac{1}{4}e^x - 2e^{\frac{1}{2}x}\right)dx$

اتم – لاندې انتیګرالونه وشمېرئ او اړونده سطحه يې کرښې - کرښې کړئ.

الف –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = e^x - 1 \quad \text{für} \quad 0 \le x \le 2$$
$$g(x) = f(2) \cdot e^{-(x-2)} \quad \text{für} \quad 2 \le x < \infty$$
$$A = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^\infty g(x)\,dx$$

ب –

$$f(x) = e^x - 1 \quad \text{für} \quad 0 \le x \le 3$$
$$g(x) = f(3) \cdot e^{-(x-3)} \quad \text{für} \quad 3 \le x < \infty$$
$$A = \int_0^3 f(x)\,dx + \int_3^\infty g(x)\,dx$$

نهم – لاندې انتیګرالونه وشمېرى او اړونده سطحه يې کربنې - کربنې کړى.

الف -

$$f(x) = e^x - 1 \quad \text{für} \quad 0 \le x \le 4$$
$$g(x) = f(4) \cdot e^{-(x-4)} \quad \text{für} \quad 4 \le x < \infty$$
$$A = \int_0^4 f(x)\,dx + \int_4^\infty g(x)\,dx$$

ب -

$$f(x) = e^x - 1 \quad \text{für} \quad 0 \le x \le k$$
$$g(x) = f(k) \cdot e^{-(x-k)} \quad \text{für} \quad k \le x < \infty$$
$$A = \int_0^k f(x)\,dx + \int_k^\infty g(x)\,dx$$

حلونه

د e تابع انتیګرالونه I

(c) ketabton.com: The Digital Library

د سطحي شمېرنه

نیجې او مفصل حلونه

نتیجې

اول -

الف - $\int_{0}^{1} e^{x}\,dx \approx 1,718$ ب - $\int_{-1}^{0} e^{x}\,dx \approx 0,632$ پ - $\int_{-3}^{0} e^{x}\,dx \approx 0,905$

دویم -

الف - $\int_{0}^{1} \left(e^{x}-1\right)dx \approx 0,718$ ب - $\int_{0}^{3} \left(e^{x}-1\right)dx \approx 16,086$ پ – $\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx = 1$

دریم -

الف - $\int_{0}^{1} e^{-x}\,dx \approx 0,632$ ب - $\int_{-1}^{2} e^{-x}\,dx \approx 2,583$ پ - $\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = 1$

ځلورم -

الف - $\int_{0}^{3} e^{-(x-3)}\,dx \approx 19,086$ ب - $\int_{1}^{3} e^{-(x-2)}\,dx \approx 2,350$ پ - $\int_{0}^{\infty} e^{-(x-3)}\,dx = 1$

پنځم -

الف - $\int_{0}^{3} \left(e^{x}-x+1\right)dx \approx 17,586$ ب - $\int_{0}^{4} 3\cdot e^{x+2}\,dx \approx 1188,119$

پ - $\int_{0}^{5} \left(e^{x}+e^{-x}\right)dx \approx 148,406$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم -

الف - $\int_0^2 k\cdot e^x\,dx = \frac{1}{2}\cdot e \Leftrightarrow k \approx 0,213$

ب - $\int_0^4 \left(e^x - k\cdot x\right)dx = 4 \Leftrightarrow k \approx 6,2$

پ - $\int_0^k e^x\,dx = 2e \Leftrightarrow k \approx 1,862$

اوم -

الف - $$\int_0^{\ln(2)} \left(e^{2x} - 2e^x\right)dx = \int_0^{\ln(2)} e^{2x}\,dx - 2\cdot\int_0^{\ln(2)} e^x\,dx = -\frac{1}{2}$$

ب - $$\int_0^{\ln(k)} \left(e^{2x} - ke^x\right)dx = \int_0^{\ln(k)} e^{2x}\,dx - k\cdot\int_0^{\ln(k)} e^x\,dx = -\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2}$$

پ -

$$\int_0^4 \left(\frac{1}{4}e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}\right)dx = \frac{1}{4}\cdot\int_0^4 e^x\,dx - 2\cdot\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx = \frac{1}{4}e^4 - 4e^2 + \frac{15}{4} \approx -12,175$$

اتم - الف - $$\int_0^2 \left(e^x - 1\right)dx + \int_2^\infty f(2)\cdot e^{-(x-2)}\,dx = 2e^2 - 4 \approx 10,778$$

ب - $$\int_0^3 \left(e^x - 1\right)dx + \int_3^\infty f(3)\cdot e^{-(x-3)}\,dx = 2e^3 - 5 \approx 35,171$$

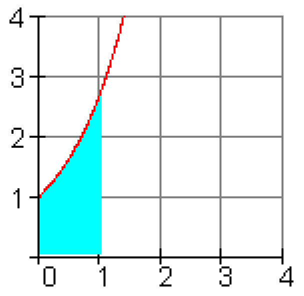
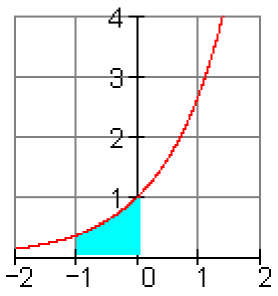
نهم - الف - $$\int_0^4 \left(e^x - 1\right)dx + \int_4^\infty f(4)\cdot e^{-(x-4)}\,dx = 2e^4 - 6 \approx 103,196$$

ب – $$\int_0^k \left(e^x - 1\right)dx + \int_k^\infty f(k)\cdot e^{-(x-k)}\,dx = 2e^k - k - 2$$

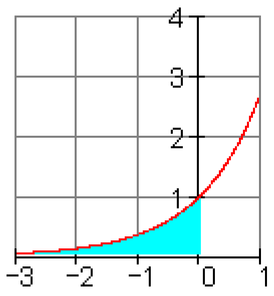
(c) ketabton.com: The Digital Library

مفصل حلونه:

لومړی –

$$\int_0^1 e^x\,dx$$ $$= e^x \Big\vert_0^1$$ $$= e^1 - e^0$$ $$= e - 1 \approx 1{,}718$$	الف – 
$$\int_{-1}^0 e^x\,dx$$ $$= e^x \Big\vert_{-1}^0$$ $$= e^0 - e^{-1}$$ $$= 1 - e^{-1} \approx 0{,}632$$	ب – 

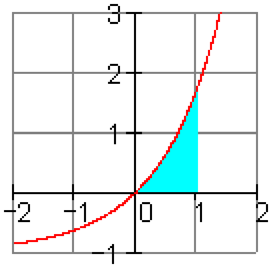
پ –

$$\int_{-3}^0 e^x\,dx$$ $$= e^x \Big\vert_{-3}^0$$ $$= e^0 - e^{-3}$$ $$= 1 - e^{-3} \approx 0{,}950$$	

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم:

الف-



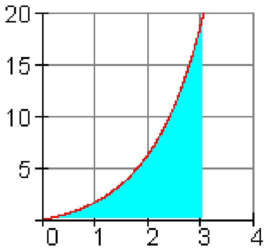
$$\int_0^1 (e^x - 1)\,dx$$

$$= e^x - x \Big|_0^1$$

$$= e^1 - 1 - (e^0 - 0)$$

$$= e - 1 - 1 \approx 0{,}718$$

ب –



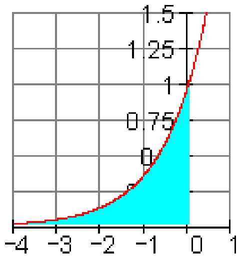
$$\int_0^3 (e^x - 1)\,dx$$

$$= e^x - x \Big|_0^3$$

$$= e^3 - 3 - (e^0 - 0)$$

$$= e^3 - 3 - 1 \approx 16{,}086$$

پ –



$$\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 e^x\,dx$$

لومړی بې له پوله ارزښت جوړولو شمېرنه

$$\int_a^0 e^x\,dx = e^x \Big|_a^0 = e^0 - e^a = 1 - e^a$$

د پوله ارزښت جوړول

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^0 e^x\,dx = \lim_{a\to-\infty} (1 - e^a)$$

$$= 1 - \underbrace{\lim_{a\to-\infty} e^a}_{0} = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} e^x\,dx = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

دریم:

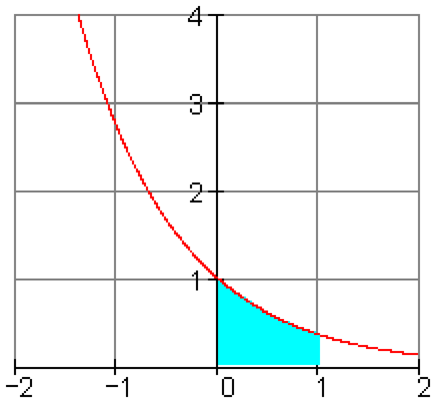
الف-

د بدلون له لارې حل $\int_0^1 e^{-x}\,dx$ I

بدلون $: u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې یا کښته پوله: $u(0) = 0$ پورته بوله : $u(1) = -1$

$$\Rightarrow -\int_0^{-1} e^u\,du = \int_{-1}^{0} e^u\,du = e^u \Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - e^{-1} \approx 0{,}632$$



ب –

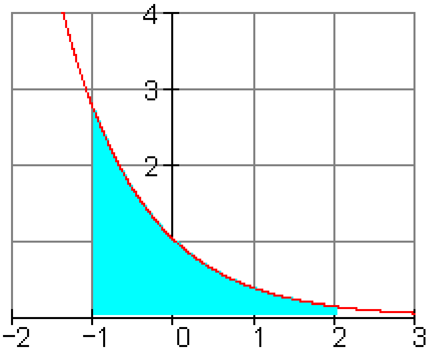
د بدلون له لارې حل $\int_{-1}^{2} e^{-x}\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون: $u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې بوله : $u(-1) = -(-1) = 1$: پورته پوله: $u(2) = -2$

$$\Rightarrow -\int_{1}^{-2} e^u \, du = \int_{-2}^{1} e^u \, du = e^u \Big|_{-2}^{1} = e^1 - e^{-2} = e - e^{-2} \approx 2,583$$



پ –

$\int_{0}^{\infty} e^{-x} \, dx = \lim_{a \to \infty} \int_{0}^{a} e^{-x} \, dx$ حلو لومړی بې لهه پولېچوړولو.

د بدلون له لارې حل $\int_{0}^{a} e^{-x} \, dx$

بدلون $u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

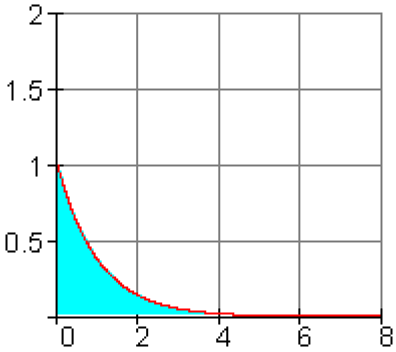
(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې يا کښته پوله: $u(0) = -0 = 0$ پورته پوله: $u(a) = -a$:

$$\Rightarrow -\int_0^{-a} e^u\,du = \int_{-a}^{0} e^u\,du = e^u \Big|_{-a}^{0} = e^0 - e^{-a} = 1 - e^{-a}$$

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-x}\,dx = 1 - \underbrace{\lim_{a\to\infty} e^{-a}}_{0} = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 1$$

پوله تاکنه:



ځلورم: الف-

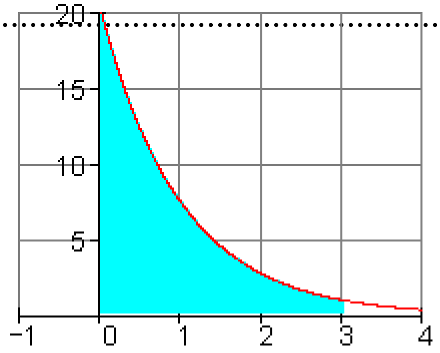
د بدلون له لارې حل $\int_0^3 e^{-(x-3)}\,dx$ I

بدلون $: u(x) = -(x-3) = -x+3 \Rightarrow u'(x) = \dfrac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې بوله : $u(0) = -(0-3) = 3$: پورته پوله: $u(3) = -(3-3) = 0$:

$$\Rightarrow -\int_3^0 e^u\,du = \int_0^3 e^u\,du = e^u \Big|_0^3 = e^3 - e^0 = e^3 - 1 \approx 19{,}086$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

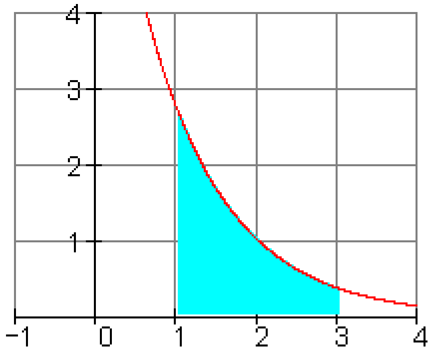


ب – $\int_1^3 e^{-(x-2)}\,dx$ I د بدلون له لارې حل

بدلون $: u(x) = -(x-2) = -x+2 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې پوله : $u(1) = -(1-2) = 1$: پورته پوله: $u(3) = -(3-2) = -1$

$$\Rightarrow -\int_1^{-1} e^u\,du = \int_{-1}^{1} e^u\,du = e^u \Big|_{-1}^{1} = e^1 - e^{-1} = e - e^{-1} \approx 2{,}350$$



پ-

$$\int_3^{\infty} e^{-(x-3)}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_3^{a} e^{-(x-3)}\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

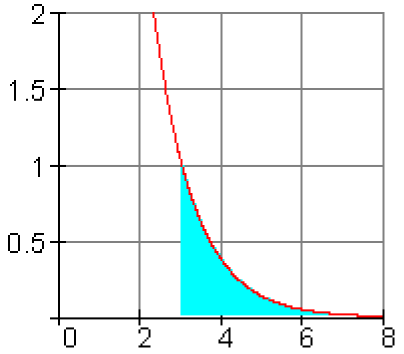
حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

$\int_3^a e^{-(x-3)}\,dx$ د بدلون له لارې حل

بدلون: $u(x) = -(x-3) = -x+3 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې پوله : $u(3) = -(3-3) = 0$ پورته پوله: $u(a) = -a+3$

پوله جوړونه: $\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-(x-3)}\,dx = 1 - \underbrace{\lim_{a\to\infty} e^{-a+3}}_{0} = 1 \Rightarrow \int_0^\infty e^{-(x-3)}\,dx = 1$



پنځم: الف -

$$\int_0^3 \left(e^x - x + 1\right) dx = e^x - \frac{1}{2}x^2 + x \Big|_0^3$$

$$= e^3 - \frac{1}{2}\cdot 9 + 3 - \left(e^0 - \frac{1}{2}\cdot 0 + 0\right)$$

$$= e^3 - \frac{9}{2} + 3 - 1 = e^3 - \frac{5}{2} \approx 17{,}586$$

ب –

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^4 3\cdot e^{x+2}\,dx = 3\cdot\int_0^4 e^{x+2}\,dx$$

د بدلون له لارې حل

بدلون: $u(x) = x+2 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = 1 \Leftrightarrow dx = du$

لاندې پوله : $u(0) = 0+2 = 2$ پورته پوله: $u(4) = 4+2 = 6$:

$$\Rightarrow 3\cdot\int_2^6 e^u\,du = 3\cdot\int_2^6 e^u\,du = 3\cdot e^u\,\Big|_2^6 = 3\cdot\left(e^6 - e^2\right) \approx 1188{,}119$$

حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

پ –

$$\int_0^5\left(e^x + e^{-x}\right)dx = \underbrace{\int_0^5 e^x\,dx}_{I} + \underbrace{\int_0^5 e^{-x}\,dx}_{II} = I + II$$

$$I : \int_0^5 e^x\,dx = e^x\,\Big|_0^5 = e^5 - e^0 = e^5 - 1$$

$$II : \int_0^5 e^{-x}\,dx =$$

= د بدلون له لارې حل

بدلون $: u(x) = -x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې پوله : $u(0) = 0$ ، پورته پوله: $u(5) = -5$

$$\Rightarrow -\int_0^{-5} e^u\,du = \int_{-5}^0 e^u\,du = e^u\,\Big|_{-5}^0 = e^0 - e^{-5} = 1 - e^{-5}$$

$$\int_0^5\left(e^x + e^{-x}\right)dx = I + II = e^5 - 1 + 1 - e^{-5} = e^5 - e^{-5} \approx 148{,}406$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم:
الف:

$$\int_0^2 k\cdot e^x\,dx = \frac{1}{2}\cdot e$$

$$\int_0^2 k\cdot e^x\,dx = k\cdot\int_0^2 e^x\,dx = k\cdot e^x\Big|_0^2 = k\cdot\left(e^2-e^0\right) = k\cdot\left(e^2-1\right)$$

برابر کیږدی: $k\cdot\left(e^2-1\right) = \frac{1}{2}\cdot e \,|: \left(e^2-1\right)$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\frac{1}{2}\cdot e}{\left(e^2-1\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{e}{e^2-1} \approx 0{,}213$$

ب –

$$\int_0^4 \left(e^x-k\cdot x\right)dx = 4$$

$$\int_0^4 \left(e^x-k\cdot x\right)dx = e^x-\frac{1}{2}kx^2\Big|_0^4 = e^4-\frac{1}{2}k\cdot 16-\left(e^0-0\right) = e^4-8k-1$$

برابر کیږدی: $e^4-8k-1 = 4 \,|-e^4+1$

$$\Leftrightarrow -8k = -e^4+5 \,|: (-8)$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{-e^4+5}{-8} = \frac{1}{8}e^4-\frac{5}{8} \approx 6{,}2$$

پ - لاند الماني: برابر کیږدی

$$\int_0^k e^x\,dx = 2e$$

$$\int_0^k e^x\,dx = e^x\Big|_0^k = e^k-e^0 = e^k-1$$

gleichsetzen : $e^k-1 = 2e \,|+1$

$$\Leftrightarrow e^k = 2e+1 \,|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^k\right) = \ln(2e+1)$$

$$\Leftrightarrow k\cdot\underbrace{\ln(e)}_{1} = \ln(2e+1)$$

$$\Leftrightarrow k = \ln(2e+1) \approx 1{,}862$$

اووم: حل : الف-

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{\ln(2)} \left(e^{2x} - 2e^{x}\right) dx = \underbrace{\int_0^{\ln(2)} e^{2x}\, dx}_{I} - 2\cdot \underbrace{\int_0^{\ln(2)} e^{x}\, dx}_{II} = I - 2\cdot II$$

$$I:\ \int_0^{\ln(2)} e^{2x}\, dx =$$

= د بدلون له لارې حل

بدلون: $: u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2} du$

لاندې پوله : $u(0)=2.0=0$ پورته پوله: $u(\ln(2))=2.\ln(2)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{2\cdot\ln(2)} e^{u}\, du = \frac{1}{2} e^{u}\Big|_0^{2\cdot\ln(2)} = \frac{1}{2}\left(e^{2\cdot\ln(2)} - e^{0}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\underbrace{e^{\ln(2)}}_{2}\right)^2 - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2^2 - 1\right) = \frac{3}{2}$$

$$II:\ \int_0^{\ln(2)} e^{x}\, dx = e^{u}\Big|_0^{2\cdot\ln(2)} = \underbrace{e^{\ln(2)}}_{2} - e^{0} = 2 - 1 = 1$$

$$\int_0^{\ln(2)} \left(e^{2x} - 2e^{x}\right) dx = I - 2\cdot II = \frac{3}{2} - 2\cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

ب-

$$\int_0^{\ln(k)} \left(e^{2x} - ke^{x}\right) dx = \underbrace{\int_0^{\ln(k)} e^{2x}\, dx}_{I} - k\cdot \underbrace{\int_0^{\ln(2)} e^{x}\, dx}_{II} = I - k\cdot II$$

$$I:\ \int_0^{\ln(k)} e^{2x}\, dx =$$

د = بدلون له لارې حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

بدلون:
$$u(x) = 2x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

لاندې پوله : u(0)=2.0=0 پورته پوله: u(ln(k)= 2.ln(k)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_0^{2\cdot\ln(k)} e^u\,du = \frac{1}{2}e^u\Big|_0^{2\cdot\ln(k)} = \frac{1}{2}\left(e^{2\cdot\ln(k)} - e^0\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\underbrace{e^{\ln(k)}}_{k}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{2}\left(k^2 - 1\right)$$

$$II: \int_0^{\ln(k)} e^x\,dx = e^u\Big|_0^{2\cdot\ln(k)} = \underbrace{e^{\ln(k)}}_{k} - e^0 = k - 1$$

$$\int_0^{\ln(k)} \left(e^{2x} - ke^x\right)dx = I - k\cdot II = \frac{1}{2}\left(k^2 - 1\right) - k\cdot(k-1) = -\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2}$$

پ-

$$\int_0^4 \left(\frac{1}{4}e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}\right)dx = \frac{1}{4}\cdot\underbrace{\int_0^4 e^x\,dx}_{I} - 2\cdot\underbrace{\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx}_{II} = \frac{1}{4}\cdot I - 2\cdot II$$

$$I: \int_0^4 e^x\,dx = e^x\Big|_0^4 = e^4 - e^0 = e^4 - 1$$

$$II: \int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx =$$

د بدلون له لارې حل

بدلون:
$$u(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow dx = 2du$$

لاندې پوله : $u(0) = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0$ پورته پوله: $u(4) = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow 2\cdot\int_0^2 e^u\,du = 2\cdot e^u\Big|_0^2 = 2\left(e^2-e^0\right) = 2e^2-2$$

$$\int_0^4\left(\frac{1}{4}e^x-2\cdot e^{\frac{1}{2}x}\right)dx = \frac{1}{4}\cdot I-2\cdot II = \frac{1}{4}\cdot\left(e^4-1\right)-2\cdot\left(2e^2-2\right)$$

$$=\frac{1}{4}e^4-\frac{1}{4}-4e^2+4=\frac{1}{4}e^4-4e^2+\frac{15}{4}\approx -12{,}157$$

اتم: الف-

$$f(x)=e^x-1 \qquad g(x)=f(2)\cdot e^{-(x-2)} \text{ mit } f(2)=e^2-1$$

$$A=\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^\infty g(x)\,dx=\underbrace{\int_0^2\left(e^x-1\right)dx}_{I}+\left(e^2-1\right)\underbrace{\int_2^\infty e^{-(x-2)}\,dx}_{II}=I+\left(e^2-1\right)\cdot II$$

$$I:\int_0^2\left(e^x-1\right)dx=e^x-x\Big|_0^2=e^2-2-\left(e^0-0\right)=e^2-3$$

$$II:\int_2^\infty e^{-(x-2)}\,dx=\lim_{a\to\infty}\int_2^a e^{-(x-2)}\,dx$$

حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

د بدلون له لارې حل $\int_2^a e^{-(x-2)}\,dx$

بدلون:

$$u(x)=-(x-2)=-x+2\Rightarrow u'(x)=\frac{du}{dx}=-1\Leftrightarrow dx=-du$$

لاندې پوله : $u(2)=-(2-2)=0$ پورته پوله: $u(a)=-a+2$

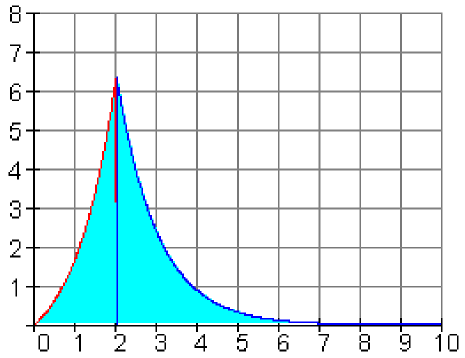
$$\Rightarrow-\int_0^{-a+2}e^u\,du=\int_{-a+2}^0 e^u\,du=e^u\Big|_{-a+2}^0=e^0-e^{-a+2}=1-e^{-a+2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوله ارزښت جوړونه

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-(x-2)}\,dx = 1-\underbrace{\lim_{a\to\infty} e^{-a+2}}_{0} = 1 \Rightarrow \int_2^\infty e^{-(x-2)}\,dx = 1$$

$$A = I+\left(e^2-1\right)\cdot II = e^2-3+\left(e^2-1\right)\cdot 1 = e^2-3+e^2-1 = 2e^2-4 \approx 10{,}778$$



ب- $g(x)=f(3)\cdot e^{-(x-3)}$ د $f(x)=e^x-1$ $f(3)=e^3-1$ سره

$$A=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^\infty g(x)\,dx=\underbrace{\int_0^3\left(e^x-1\right)dx}_{I}+\left(e^3-1\right)\underbrace{\int_3^\infty e^{-(x-3)}\,dx}_{II}=I+\left(e^3-1\right)\cdot II$$

$$I:\int_0^3\left(e^x-1\right)dx = e^x-x\,\Big|_0^3 = e^3-3-\left(e^0-0\right)=e^3-4$$

$$II:\int_3^\infty e^{-(x-3)}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_3^a e^{-(x-3)}\,dx\ \text{L}$$

حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

$\int_3^a e^{-(x-3)}\,dx$ د بدلون له لارې حل

لاندې پوله : $u(3)=-(3-3)=0$ پورته پوله: $u(a)=-a+3$

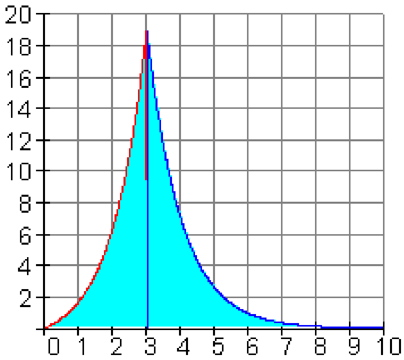
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow -\int_{0}^{-a+3} e^{u}\,du = \int_{-a+3}^{0} e^{u}\,du = e^{u}\Big|_{-a+3}^{0} = e^{0} - e^{-a+3} = 1 - e^{-a+3}$$

پوله جوړونه

$$\lim_{a\to\infty}\int_{0}^{a} e^{-(x-3)}\,dx = 1 - \underbrace{\lim_{a\to\infty} e^{-a+3}}_{0} = 1 \Rightarrow \int_{3}^{\infty} e^{-(x-3)}\,dx = 1$$

$$A = I + \left(e^{3}-1\right)\cdot II = e^{3} - 4 + \left(e^{3}-1\right)\cdot 1 = e^{3} - 4 + e^{3} - 1 = 2e^{3} - 5 \approx 35{,}171$$



نهم:

الف-

$$f(x) = e^{x} - 1 \qquad g(x) = f(4)\cdot e^{-(x-4)} \text{ mit } f(4) = e^{4} - 1$$

$$A = \int_{0}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{\infty} g(x)\,dx = \underbrace{\int_{0}^{4}\left(e^{x}-1\right)dx}_{I} + \left(e^{4}-1\right)\underbrace{\int_{4}^{\infty} e^{-(x-4)}\,dx}_{II} = I + \left(e^{4}-1\right)\cdot II$$

$$I : \int_{0}^{4}\left(e^{x}-1\right)dx = e^{x} - x\Big|_{0}^{4} = e^{4} - 4 - \left(e^{0} - 0\right) = e^{4} - 5$$

$$II : \int_{4}^{\infty} e^{-(x-4)}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{4}^{a} e^{-(x-4)}\,dx\ L$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

$$\int_4^a e^{-(x-4)}\,dx\ L$$

د بدلون له لارې حل

بدلون:

$$u(x) = -(x-4) = -x+4 \Rightarrow u'(x) = \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$$

لاندې پوله : $u(4) = -(4-4) = 0$ پورته پوله: $u(a) = -a+4$

$$\Rightarrow -\int_0^{-a+4} e^u\,du = \int_{-a+4}^{0} e^u\,du = e^u \Big|_{-a+4}^{0} = e^0 - e^{-a+4} = 1 - e^{-a+4}$$

پوله ارزښت جوړونه

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-(x-4)}\,dx = 1 - \underbrace{\lim_{a\to\infty} e^{-a+4}}_{0} = 1 \Rightarrow \int_4^\infty e^{-(x-4)}\,dx = 1$$

$$A = I + (e^4-1)\cdot II = e^4 - 5 + (e^4-1)\cdot 1 = e^4 - 5 + e^4 - 1 = 2e^4 - 6 \approx 103{,}196$$

ب-

$$f(x) = e^x - 1 \qquad g(x) = f(k)\cdot e^{-(x-k)} \text{ mit } f(k) = e^k - 1$$

$$A = \int_0^k f(x)\,dx + \int_k^\infty g(x)\,dx = \underbrace{\int_0^k (e^x-1)\,dx}_{I} + (e^k-1)\underbrace{\int_k^\infty e^{-(x-k)}\,dx}_{II} = I + (e^k-1)\cdot II$$

$$I: \int_0^k (e^x-1)\,dx = e^x - x \Big|_0^k = e^k - k - (e^0 - 0) = e^k - k - 1$$

$$II: \int_k^\infty e^{-(x-k)}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_k^a e^{-(x-k)}\,dx\ L$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل ، لومړی بې له پولې جوړولو

$$\int_k^a e^{-(x-k)}\,dx$$

د بدلون له لارې حل

بدلون: $u(x) = -(x-k) = -x+k \Rightarrow u'(x) = \dfrac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

لاندې پوله : $u(k) = -(k-k) = 0$ ؛ پورته پوله: $u(a) = -a+k$

$$\Rightarrow -\int_0^{-a+k} e^u\,du = \int_{-a+k}^0 e^u\,du = e^u\Big|_{-a+k}^0 = e^0 - e^{-a+k} = 1 - e^{-a+k}$$

پوله ارزښت جوړونه

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-(x-k)}\,dx = 1 - \underbrace{\lim_{a\to\infty} e^{-a+k}}_{0} = 1 \Rightarrow \int_k^\infty e^{-(x-k)}\,dx = 1$$

$$A = I + \left(e^k - 1\right)\cdot II = e^k - k - 1 + \left(e^k - 1\right)\cdot 1 = e^k - k - 1 + e^k - 1 = 2e^k - k - 2$$

پوښتنې

مشتق – او انتیګرالشمیرنه

ګډې وډې پوښتنې

لومړی - د لاندې پوتنخ – او لوګاریتم ترمونو بڼه بدله کړی د توان – او لوګاریتم قوانینو د استعمال له لارې .

الف - $\left(e^x + e^{-x}\right)^2$ ب – $\left(e^x - e^{-x} + 5\right)\cdot e^x$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم – د اکسپوننشل مساوات تاسو ته معلومې لارې حل کړئ.

الف - $6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0$ ب - $\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1$

دریم – د لاندې توابعو مشتق وشمېرئ.

الف - $f(x)=e^{-4x}-e^{4x}$ ب - $f(x)=\frac{3}{2}e^{-5x^2-3x}$

څلورم – د لاندې توابعو انتیګرال وشمېرئ او د مشتق سره یې نتیجې کنترول کړئ.

الف - $f(x)=\frac{1}{16}\left(x^2-3e^x\right)$ ب - $f(x)=x^3-2x^2+4x+\frac{3}{x}$

پنځم – تاسو ته د معلوم قانون له مخې د لاندې توابعو مشتق وشمېرئ.

الف - $f(x)=(x+a)^2-e^{2x-3}$ ب - $f(x)=\left(1-e^{ax}\right)^2$

شپږم - لاندې انتیګرالونه وشمېرئ.

الف - $\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ ب - $\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$

اوم – $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ ı تابع ورکړ شوې.

الف – د [5 ; 4-] لپاره ارزښت جدول وکاږئ او ګراف یې ګرښیز کړئ. د y - محور، له تیتتکي او x –محور څخه تېرېدوکی y - محور سره غبرګي کرښي ترمنځ سطحه په نخښه کړئ.

ب – نسپي مینیموم $T\,(x_e \mid f(x_e))$ وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پ - د الف لاندې په نخښه شوې سطحه وشمېرئ.

اتم - د 3 –مې درجې تام راشنل تابع د x -محور په (0 | 4-) P کې غوڅوي او په (0 | 2) T کې یو ټیټکی لري. په P تانجنت د د y - محور په (48 | 0) P_y کې غوڅوي. د f(x) تابع مساوات او د t(x) تانجنت مساوات وشمېرئ او ګراف یې کرښې-کرښې کړئ.

غوښتنه:

ټول هوښیا-یا راشنل توابع یابلواک، ټیټ ټکي، محورغوڅټکي، مشتق، تانجنتمساوات، ګاوس-الګوریتم.

نهم – د $f(x)=\frac{5}{4}x^4-3x^2-8$ تابع مساوات ورکړشوي دي. انحرافي ارزښتونه وشمېرئ او د ګراف او x –محور منځ سطحه وشمېرئ، چېرته چې صفرځایونه د انتیګرال پولې جوړوي. ګراف یې وکاږئ او شمېرلې سطحه یې په نخښه کړئ.

غښتني:

افراطي ارزښتونه، صفرځایونه، بیمربع مساوات، ټاکلی انتیګرال.

حلونه (اوبیونې)

مشتق – او انتیګرالشمیرنه

نتیجې او مفصل حلونه.

نتیجې:

اول – نتیجې

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف - $\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}=e^{2x}+e^{-2x}+2$

ب - $\left(e^{x}-e^{-x}+5\right)\cdot e^{x}=e^{2x}+5\cdot e^{x}-1$

دویم – نتیجې

الف - $6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0\Rightarrow x=1-\ln(2)$

ب- $\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1\Rightarrow x=\frac{1}{4}\ln(4+2e)$

دریم – نتیجې

الف - $f(x)=e^{-4x}-e^{4x}\Rightarrow f'(x)=-4\left(e^{-4x}+e^{4x}\right)$

ب - $f(x)=\frac{3}{2}e^{-5x^{2}-3x}\Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}(-10x-3)\,e^{-5x^{2}-3x}$

$$f(x)=\frac{1}{16}\left(x^{2}-3e^{x}\right)\Rightarrow\int f(x)\,dx=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{3}x^{3}-3e^{x}\right]+C$$

$$f(x)=x^{3}-2x^{2}+4x+\frac{3}{x}\Rightarrow\int f(x)\,dx=\frac{1}{4}x^{4}-\frac{2}{3}x^{3}+2x^{2}+3\cdot\ln|x|+C$$

پنځم - الف - $f(x)=(x+a)^{2}-e^{2x-3}\Rightarrow f'(x)=2\left(x+a-e^{2x-3}\right)$

ب - $f(x)=\left(1-e^{ax}\right)^{2}\Rightarrow f'(x)=-2a\cdot e^{ax}\left(1-e^{ax}\right)$

شپږم – نتیجې:

الف - $\int_{0}^{4}e^{\frac{1}{2}x}\,dx=2\cdot e^{2}-2\approx 12,778$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب - $\int_1^2 e^{4-2x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot e^2 - \frac{1}{2} \approx 3{,}195$

اوم – نتیجې:

د $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ لپاره ارزښت جدول.

الف -

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
f (x)	7,46	4,59	2,9	1,95	1,5	1,43	1,73	2,46	3,83	6,17

ب –تیتتکی: $T\left(\ln(2) \mid \sqrt{2}\right)$

پ – په نخښه شوې سطحه 1FE (FE د سطحې واحد) ده

اتم – نتیجې:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + \frac{16}{3}\,;\ t(x) = 12x + 48$$

نهم – نتیجې:

$$P_{Max}(0 \mid -8)\,;\ P_{Min_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}} \mid -\frac{49}{5}\right);\ P_{Min_2}\left(\sqrt{\frac{6}{5}} \mid -\frac{49}{5}\right)$$

سطحه: $A = |-32| = 32\,FE$ (FE د سحې یوونونه یا واحدونه)

مفصل ځوابونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی:

$$\underbrace{\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}}_{\text{1. bin. Formel}} = e^{2x}+2\cdot e^{x}\cdot e^{-x}+e^{-2x}$$

الف- $$= \underline{\underline{e^{2x}+e^{-2x}+2}}$$

$$\left(e^{x}-e^{-x}+5\right)\cdot e^{x} = e^{2x}-\underbrace{e^{-x}\cdot e^{x}}_{1}+5\cdot e^{x}$$

$$= e^{2x}-1+5\cdot e^{x}$$

ب – $$= \underline{\underline{e^{2x}+5\cdot e^{x}-1}}$$

دویم:

الف –

$$6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0\,|-6$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}e^{2-2x}=-6\,|\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow e^{2-2x}=4\,|\ln(\ \ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2-2x}\right)=\ln(4)$$

$$\Leftrightarrow 2-2x=\ln(4)$$

د $\ln(4)=\ln\left(2^{2}\right)=2\cdot\ln(2)$ له امله باور لري:

$$\Leftrightarrow 2-2x=2\cdot\ln(2)\,|-2$$

$$\Leftrightarrow -2x=2\cdot\ln(2)-2\,|:(-2)$$

$$\Leftrightarrow x=-\ln(2)+1=\underline{\underline{1-\ln(2)\approx 0{,}307}}$$

ب -

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{e}{2} = 1 \,|\, + \frac{e}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{4x} = 1 + \frac{e}{2} \,|\, \cdot 4$$
$$\Leftrightarrow e^{4x} = 4 + 2e \,|\, \ln(\ )$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{4x}\right) = \ln(4 + 2e)$$
$$\Leftrightarrow 4x = \ln(4 + 2e) \,|: 4$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln(4 + 2e)}{4}$$
$$\Leftrightarrow x = \underline{\underline{\frac{1}{4}\ln(4 + 2e) \approx 0{,}561}}$$

دریم:

الف -

$$f(x) = e^{-4x} - e^{4x}$$
$$\Rightarrow f'(x) = -4 \cdot e^{-4x} - 4 \cdot e^{4x}$$
$$= \underline{\underline{-4\left(e^{-4x} + e^{4x}\right)}}$$

ب -

$$f(x) = \frac{3}{2}e^{-5x^2 - 3x}$$
$$\Rightarrow f'(x) = (-10x - 3) \cdot \frac{3}{2}e^{-5x^2 - 3x}$$
$$= \underline{\underline{-\frac{3}{2}(10x + 3)e^{-5x^2 - 3x}}}$$

$$f(x) = \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^x\right)$$
$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^x\right)dx$$
$$= \frac{1}{16}\int\left(x^2 - 3e^x\right)dx$$
$$= \underline{\underline{\frac{1}{16}\left[\frac{1}{3}x^3 - 3e^x\right] + C}}$$

څلورم: الف –

$$F'(x) = \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^x\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب ـــ

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow F(x) = \int\left(x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}\right)dx$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3\cdot\ln|x| + C}}$$

يادونه: $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$F'(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 3\cdot\frac{1}{x}$$

پنځم:

الف ـــ $f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3}$ $\Rightarrow f'(x) = 2\cdot(x+a)\cdot 1 - 2\cdot e^{2x-3}$ $= 2x + 2a - 2\cdot e^{2x-3}$ $= \underline{\underline{2\left(x + a - e^{2x-3}\right)}}$	ب ـــ $f(x) = \left(1 - e^{ax}\right)^2$ د زنځيري قانون سره $\Rightarrow f'(x) = \underbrace{2\cdot\left(1 - e^{ax}\right)}_{\text{äußere Abl.}}\cdot\underbrace{a\cdot\left(-e^{ax}\right)}_{\text{innere Abl.}}$ دننی مشتق دباندنی مشتق $= \underline{\underline{-2a\cdot e^{ax}\left(1 - e^{ax}\right)}}$

شپږم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف –

$$\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx \quad \text{Substitution: } u(x) = \frac{1}{2}x$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2du$$

$$ug: u(0) = 0\,;\ og: u(4) = 2$$

$$2\cdot\int_0^2 e^u\,du = 2\cdot e^u \Big|_0^2 = 2\cdot e^2 - 2\cdot e^0$$

$$= 2\cdot e^2 - 2 \approx 12{,}778$$

ب – بدلون

$$\int_1^2 e^{4-2x}\,dx \quad \text{Substitution: } u(x) = 4 - 2x$$

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = -2 \Rightarrow dx = -\frac{1}{2}du$$

$$ug: u(1) = 2\,;\ og: u(2) = 0$$

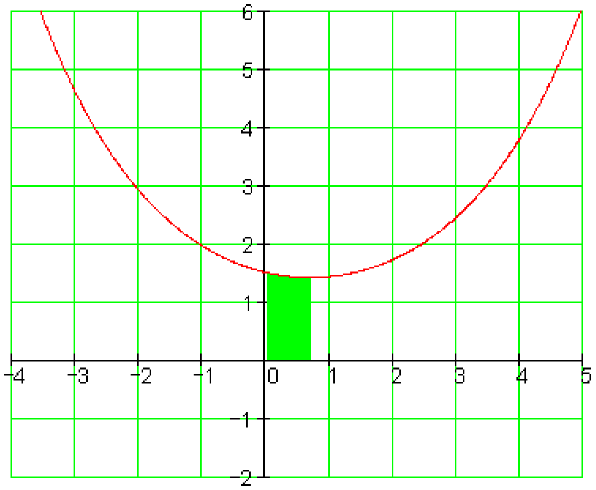
$$-\frac{1}{2}\cdot\int_2^0 e^u\,du = \frac{1}{2}\cdot\int_0^2 e^u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot e^u \Big|_0^2 = \frac{1}{2}\cdot e^2 - \frac{1}{2}\cdot e^0$$

$$= \frac{1}{2}\cdot e^2 - \frac{1}{2} \approx 3{,}95$$

اوړم: الف – د $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ لپاره ارزښت جدول

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f (x)	7,46	4,59	2,9	1,95	1,5	1,43	1,73	2,46	3,83	6,17



(c) ketabton.com: The Digital Library

ب – د نسبي مینیموم یا خورا کوچني ارزښت شمیرنه:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} = 0 \mid +\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \mid \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = 2e^{-\frac{1}{2}x} \mid \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Leftrightarrow e^{x} = 2 \mid \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(2)$$

افراطي ځای. افراطي ارزښت:

$$f(x_e) = f(\ln(2)) = e^{-\frac{1}{2}\ln(2)} + \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\ln(2)}$$

$$= 2^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

تیت ټکی: $\underline{\underline{T\left(\ln(2) \mid \sqrt{2}\right)}}$

پ – د سطحې شمیرنه:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\ln(2)} f(x)\,dx = \int_0^{\ln(2)} \left(e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}\right)dx = \underbrace{\int_0^{\ln(2)} \left(e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx}_{I} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{\ln(2)} \left(e^{\frac{1}{2}x}\right)dx}_{II}$$

$$I: \quad \int_0^{\ln(2)} \left(e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx \quad u(x) = -\frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} \Rightarrow dx = -2du$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u(0)=0 \quad u(\ln(2))=-\frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\Rightarrow -2\int_{0}^{-\frac{1}{2}\ln(2)} e^{u}\,du = 2\int_{-\frac{1}{2}\ln(2)}^{0} e^{u}\,du = 2\left[e^{u}\right]_{-\frac{1}{2}\ln(2)}^{0} = 2\left[e^{0}-e^{-\frac{1}{2}\ln(2)}\right]$$

$$II: \quad \frac{1}{2}\int_{0}^{\ln(2)}\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)dx \quad u(x)=\frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{2} \Rightarrow dx=2du$$

$$u(0)=0 \quad u(\ln(2))=\frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 2\int_{0}^{\frac{1}{2}\ln(2)}\left(e^{u}\right)du = \int_{0}^{\frac{1}{2}\ln(2)}\left(e^{u}\right)du = \left[e^{u}\right]_{0}^{\frac{1}{2}\ln(2)} = e^{\frac{1}{2}\ln(2)}-e^{0}$$

$$I+II: \quad 2e^{0}-2e^{-\frac{1}{2}\ln(2)}+e^{\frac{1}{2}\ln(2)}-e^{0} = 1-2\cdot 2^{-\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=1-\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1-\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\underline{\underline{1}}$$

په نخښه شوې سطحه ارزښت 1FE (د سطحې يوون يا واحد) لري

اتم:

د پرابلم تحليل:

د دريمې درجې ام راشنل (ريښتيني) تابع لپاره: $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$

I. په T(2|0) کې ټيټ ټکی په دې معنا دی:

$1.\ x_1=2$ د f(x) صفرځای دی، يعني $f(x_1)=f(2)=0$.

$2.\ x_T=2$ د f(x) افراطي ځای دی، يعني $f'(x_T)=f'(2)=0$.

II. P(-4|0)د f(x) صفرځای دی، يعني f(-4)=0.

III. په P(-4|0) کې تانجنت د y -محور په $a_{0T}=48$ کې غوڅوي، يعني $t(0)=48$

او $t(0)=48$.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضربیونوو مساواتو لیکل:

$$\text{I1.}\quad \Rightarrow f(2)=0 \Leftrightarrow a_3\cdot 2^3+a_2\cdot 2^2+a_1\cdot 2+a_0=0$$
$$\Leftrightarrow 8a_3+4a_2+2a_1+1a_0=0$$

مساوات ۱ .

$$\text{I2.}\quad \Rightarrow f'(2)=0 \text{ mit } f'(x)=3a_3x^2+2a_2x+a_0=0$$
$$f'(2)=0 \Leftrightarrow 3a_3\cdot 2^2+2a_2\cdot 2+a_0=0$$
$$\Leftrightarrow 12a_3+4a_2+a_1=0$$

مساوات ۲ .

$$\text{II}\quad \Rightarrow f(-4)=0 \Leftrightarrow a_3\cdot(-4)^3+a_2\cdot(-4)^2+a_1\cdot(-4)+a_0=0$$
$$\Leftrightarrow -64a_3+16a_2-4a_1+1a_0=0 \qquad \text{Gleichung III}$$

مسوات ۳ .

III. د تانجنت مساوات: $t(x)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$

د $x_0=-4$ سره $f(x_0)=f(-4)=0$ باور لري، ځکه چې $x_0=-4$ د f(x) صفرځایونه دي.

$$f'(x_0)=f'(-4)=3a_3\cdot(-4)^2+2a_2\cdot(-4)+a_0$$
$$=48a_3-8a_2+a_1$$
$$\text{also } t(x)=f'(x)\cdot(x-x_0)=(48a_3-8a_2+a_1)(x+4)$$
$$t(0)=48 \Leftrightarrow (48a_3-8a_2+a_1)\cdot 4=48$$
$$\Leftrightarrow 192a_3-32a_2+4a_1=48 \qquad \text{Gleichung IV}$$

پورته:مساوات IV .

له دې سره اوس ټول د ضربیونو مساوات معلوم دي:

$$\text{I}\quad 8a_3+4a_2+2a_1+1a_0=0$$
$$\text{II}\quad 12a_3+4a_2+a_1=0$$
$$\text{III}\quad -64a_3+16a_2-4a_1+1a_0=0$$
$$\text{IV}\quad 192a_3-32a_2+4a_1=48$$

د مساواتسیستم ځواب د ګاس-الګوریتم له لارې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	2	4	8	0	
0	1	4	12	0	
1	−4	16	−64	0	III − I
0	4	−32	192	48	I : 4
1	2	4	8	0	
0	1	4	12	0	
0	−6	12	−72	0	III + 6 · II
0	1	−8	48	12	IV − II
1	2	4	8	0	
0	1	4	12	0	
0	0	36	0	0	
0	0	−12	36	12	

$$3a_2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = 0}$$

$$-12a_2 + 36a_3 = 12$$

$$\Leftrightarrow 36a_3 = 12 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = \frac{1}{3}}$$

$$a_1 + 4a_2 + 12a_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 + 12 \cdot \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = -4}$$

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0 - 8 + 8 \cdot \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = \frac{16}{3}}$$

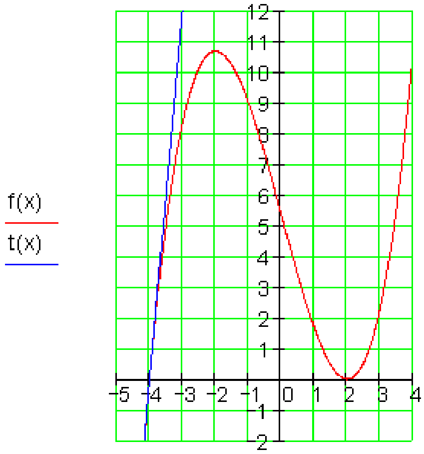
Funktionsgleichung:

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + \frac{16}{3}}}$$

د پورته الماني پينتو: تابع مساوات.

د تانجنت مساوات:

$$t(x) = (48a_3 - 8a_2 + a_1)(x+4) = \left(\frac{48}{3} - 4\right)(x+4) = \underline{\underline{12x + 48}}$$



نهم:

اول: افراطي ارزښتونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{5}{4}x^4-3x^2-8$$

و y محور ته سیمتریک ده.

$$\Rightarrow f(-x)=f(x)$$

په کې نسبي ماکسیموم

$$f'(x)=5x^3-6x\,;\,f''(x)=15x^2-6$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 5x^3-6x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(5x^2-6\right)=0\Leftrightarrow x_1=0\,;\,x_{2/3}=\pm\sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$f''(x_1)=f''(0)=15\cdot 0^2-6=-6<0\Rightarrow \text{rel Max bei } x_1=0$$

$$f''(x_2)=f''\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=15\cdot\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2-6=15\cdot\frac{6}{5}-6=12>0\Rightarrow \text{rel Min bei } x_2=\sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$f''(x_3)=f''\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=15\cdot\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2-6=15\cdot\frac{6}{5}-6=12>0\Rightarrow \text{rel Min bei } x_3=-\sqrt{\frac{6}{5}}$$

$$f(x_1)=f(0)=-8\Rightarrow \underline{\underline{P_{Max}(0\,|\,-8)}}$$

$$f(x_2)=f(x_3)=f\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=\frac{5}{4}\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^4-3\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\right)^2-8=-\frac{49}{5}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{Min_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\,\Big|\,-\frac{49}{5}\right);P_{Min_2}\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\,\Big|\,-\frac{49}{5}\right)}}$$

دوه:

د سطحې شمیرنه صفرځایونه:

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{5}{4}x^4-3x^2-8=0$$

بدلون: $x^2=z$

$$\Rightarrow\frac{5}{4}z^2-3z-8=0\Leftrightarrow z^2-\frac{12}{5}z-\frac{32}{5}=0\Rightarrow z_1=4\,\text{l}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

همداسي $z_2 = -\frac{8}{5}$. (حل نه شته)

$z_1 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2$ همداسي؛ $x_2 = 2$. د انتیګریشن پولې دي.

د سطحې انتیګرال:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{3}\left(\frac{5}{4}x^4 - 3x^2 - 8\right)dx = \left[\frac{x^5}{4} - x^3 - 8x\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left[\frac{2^5}{4} - 2^3 - 8\cdot 2\right] - \left[\frac{(-2)^5}{4} - (-2)^3 - 8\cdot(-2)\right] = -32$$

سطحه: A=|-32| =32FE (FE د سطحې واحد یا یوون)

$P_{Max}(0\,|\,-8)$

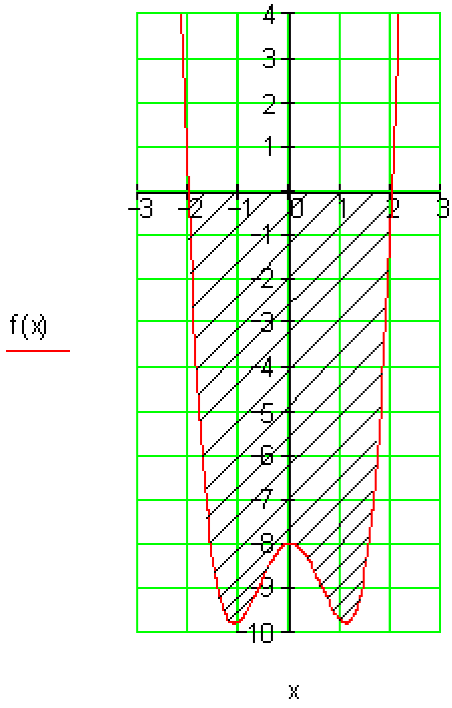
$P_{Min_1}\left(-\sqrt{\frac{6}{5}}\,\middle|\,-\frac{49}{5}\right)$

bzw. $P_{Min_1}(-1{,}09\,|\,-9{,}8)$

$P_{Min_1}\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\,\middle|\,-\frac{49}{5}\right)$

bzw. $P_{Min_1}(1{,}09\,|\,-9{,}8)$

x	−2,2	−2	−1,5	−1
f(x)	6,76	0	−8,42	−9,75
x	−0,5	0	0,5	1
f(x)	−8,67	−8	−8,67	−9,75
x	1,5	2	2,2	
f(x)	−8,42	0	6,76	



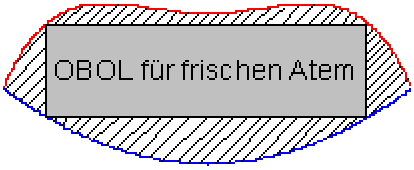
پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق – او انتیگرالشمېرنې ته د استعمال پوښتنې

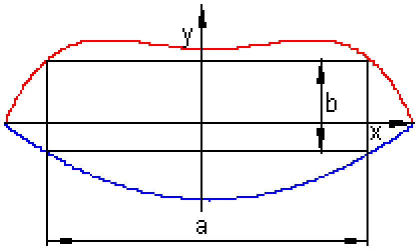
د اعلاناتو تختې او ګډوله پوښتنې.

لومړی:

 $f(x) = -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 + 2;\ g(x) = \frac{1}{18}x^2 - 2$	دا تر ځنګ د اعلاناتو تخته(خوله د یوه په کې خوندي ولاړکوډیز یا مستطیل سره، چې خوزنده اعلانات په کې انځور شوي دي) باید داسې جوړه شي، چې په کې خوندي مستطیل ممکنه خورا لویه سطحه ولري. د خولې د غاړې کرښې یا منحنې د په ځنګ کې توابعو د تابع مساواتو له لارې انځورېږي:

الف- د خولې پورته برخه کوم تابع ښايي او کوم دا کښته برخه؟ خپل ځواب مدلل کړی.

ب –

	د دې مودول جوړونکی د ځغلند لیک لپاره د مستطیل یا ولاړکوډیز تیکې کچې ته اړتیا لري. د مستطیل اړخ a او b اړخ داسې وټاکی، چې سطحه ماکسیمال شي. سطحه څومره لویه ده؟ د اوږدوالي یوون یا واحد متر دی.

پ-

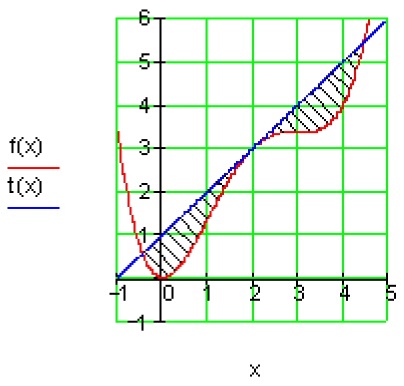
دا ټوله خوله دې په یوه دکور په یوه دیوال کې ورګډه یعنې وکښل شي، د دې لپاره د جوړولو انجنر اړینې سطحې ته اړتیا لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت- دا کرښه شوې سطحه دې د خورا ارزښتناک برطبنا رانه رنګ سره جوړه شي. د یوه مربع متر په پوښ ورکونه یا رنګونه 120 € قیمت لري. ټوله پوښونه به څومره قیمت ولري؟

غوښتنه: مشتق، افراطي ارزښتونه، د ګرافونو ترمنځ سطحه.

دویم:

د f(x) او t(x) ګرافونو ترمنځ سطحه وټاکئ، که t(x) د f(x) تانجنت په P(2 | f(2)) ټکي کې انځور کړي. $f(x)=\frac{1}{8}x^4-x^3+\frac{9}{4}x^2$	

غوښتنه: تانجنت، صفرځایونه، هورنر، ټاکلی انتیګرال

دریم:

تابع ورکړ شوی: $f_a(x)=a\cdot x^2\cdot e^{3-2x}$ $x\in\mathbb{R}\,;\,a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

الف-د f(x) صفرځایونه وټاکئ او خپلې نتیجې په کومنتار روښانه کړئ.

ب – د پراته تانجنت سره ټکي پیداکړئ او د دې ټکو پروتځای په هکله یوه وینا وکړئ.

غږښتنه: مشتق، -تابع، د ضرب قانون، زنځیري قانون.صفرضرب. تانجنتونه، پراته.

ځوابونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

مشتق او انتیګرالشمیرنې ته د استعمال پوښتنې

نتیجې

الف- $g(x) = \frac{1}{18}x^2 - 2$ د خوله لاندط برخه ښايي.

$f(x) = -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 + 2$ د خوله پورته برخه ښايي.

ب – د ولاړګوډیز یا مستطیل خورا لویه سطحه$23{,}095\ m^2$ ده.

پ – د خولې لپاره د کور په دیواله په ټولییزه توګه$36{,}267\ m^2$ سطحې ته اړتیا شته.

ت – کرښیزه سطحه د ټولې سطحې او د ولاړګوډیز یا مستطیل کمښت یا تفریق دی. دا نږدې $13{,}172\ m^2$ دی. د پوښونې قیمت € 1580,65 دی. دویم: غږښتونکې سطحه 2,939 FE (د سطحې واحد یا یوون) ده.
دریم:
الف- $x_{1/2} = 0$ یواځن صفرځای دی، ځکه چې دبل منځ ته راځي، د f(x) ګراف دx - محور په همدې ځای کې لمسوي.
ب- ټکي د پراته تانجنت سره په $x_1 = 0$ او $x_2 = 1$ کې پراته دي. ټول ټکيP_{1a} د کواوردینات یا پروت ولاړسیستم په سرچینه کې په $P_{1a}(0 \mid 0)$ کې پراته دي. ټول P_{2a} ټکي د محور y ته غبرګې باندې په واټن کې پراته دي او کواوردینات $P_{2a}(1 \mid ae)$ لري.

مفصل ځوابونه:

الف- د خولې لاندې برخه د مربع تابع له لارې روښانه یا تشیح کیږي. پورته برخه د ۴.درجې یوه ټول هوښیار یا راشنل تابع له لارې.

$g(x) = \frac{1}{18}x^2 - 2$ د خولې لاندې-یا کښته برخه ښايي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x) = -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 + 2$ د خولې پورته بخه ښايي.

ب-دا چې د f(x) او g(x) ګرافونه د y محور سره سيمتريک ځغلي، نو دا خوندي ولاړګوديز يا مستطيل هم د y محور ته سيمتريک دی.

د y محور a په دوه برابرو برخو وېشي.
د دې لپاره چې اړخ يا خواb د a په واکوالي کې وټاکو، نو ولاړګوديز يا مستطيل د ولاړو ګډونو يا قيموزاويو پورته او ښکته کواورديناتونو ته اړتيا لرو.

پورته ولاړ يا قايم ګوډ يا کونج: $\left(\frac{a}{2} \middle| f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$ ښکته ولاړګوډ: $\left(\frac{a}{2} \middle| g\left(\frac{a}{2}\right)\right)$.

د y محور مطلق کمښت اړخ b راکوي. د دې لپاره د ولاړګوديز يا مستطيل همغه اړونده د y کواورديناتونه شميرو.

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{486}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^4 + \frac{1}{54}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2 = -\frac{1}{486}\cdot\frac{a^4}{16} + \frac{1}{54}\cdot\frac{a^2}{4} + 2$$
$$= -\frac{1}{7776}a^4 + \frac{1}{216}a^2 + 2 > 0$$
$$g\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{18}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{18}\cdot\frac{a^2}{4} - 2$$
$$= \frac{1}{72}a^2 - 2 < 0$$

د b د اوږدوالي لپاره نو باور لري:

$b(a) = f\left(\frac{a}{2}\right) + \left|g\left(\frac{a}{2}\right)\right|$ داچې $g\left(\frac{a}{2}\right) < 0$ ist, دی، نو $\left|g\left(\frac{a}{2}\right)\right| = -g\left(\frac{a}{2}\right)$ باور لري او له دې سره دا لاندې

$$b(a) = f\left(\frac{a}{2}\right) - g\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{1}{7776}a^4 + \frac{1}{216}a^2 + 2 - \left(\frac{1}{72}a^2 - 2\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= -\frac{1}{7776}a^4 + \frac{1}{216}a^2 + 2 - \frac{3}{216}a^2 + 2$$

$$= -\frac{1}{7776}a^4 - \frac{2}{216}a^2 + 4 = -\frac{1}{7776}a^4 - \frac{1}{108}a^2 + 4$$

دا چې د b اړخ د a په واک کې دی، نو سړی دا هم وایي چې b د a فنکشن دی یعنې b(a).

د ولاړګوډیزA مساحت د هغه د ا ړخونو ضرب دی.

$$A(a) = a \cdot b(a) = a \cdot \left(-\frac{1}{7776}a^4 - \frac{1}{108}a^2 + 4\right)$$

$$= -\frac{1}{7776}a^5 - \frac{1}{108}a^3 + 4a$$

د A(a) د افراطي ارزښت ټاکل د a ارزښت راکوي، چې د هغه لپاره د ولاړګوډیز سطحه خورا ــیا ماکسیمال لوییږي.

(په لاندې کې د الماني پښو: بدلون، حل نه شته،

$$A'(a) = -\frac{5}{7776}a^4 - \frac{3}{108}a^2 + 4 \,;\, A''(a) = -\frac{20}{7776}a^3 - \frac{6}{108}a$$

$$A'(a) = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{7776}a^4 - \frac{3}{108}a^2 + 4 = 0 \,|\cdot\left(-\frac{7776}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow a^4 + \frac{3\cdot 7776}{108\cdot 5}a^2 - \frac{4\cdot 7776}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 + \frac{216}{5}a^2 - \frac{31104}{5} = 0 \text{ Substitution: } a^2 = z$$

$$\Leftrightarrow z^2 + \frac{216}{5}z - \frac{31104}{5} = 0 \Rightarrow p = \frac{216}{5}\,;\, q = -\frac{31104}{5}$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{108}{5}\right)^2 + \frac{31104}{5} = \frac{11664}{25} + \frac{155520}{25} = \frac{167184}{25}$$

$$= \frac{1296}{25}\cdot 129 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1296}{25}\cdot 129} = \frac{36}{5}\sqrt{129}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} z_1 = -\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129} = a^2 \\ z_2 = -\frac{108}{5} - \frac{36}{5}\sqrt{129} < 0 \Rightarrow \end{array} \right.$$

حل نه شته

$$a^2 = -\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129} \Rightarrow |a| = \sqrt{-\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129}}$$

$$a_1 = \sqrt{-\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129}}\ ;\ a_2 = -\sqrt{-\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129}}$$

$a_1 = \frac{6}{5}\sqrt{-15 + 5\sqrt{129}} \approx 7,757$
د یو ځو بڼه بدلونونو سره.

داچې د z_2 ریښه یا جذر نه شي نیول کیدی او د a لپاره ارزښت باید زیاتیز یا مثبت وي، باید د a د(A(a یو افراطي ځای وي. دا د A(a) د دویم مشتق سره ازمایلی شو.

د $A''(a_1) < 0$ ،

$$A''(a_1) = -\frac{20}{7776}a_1^3 - \frac{6}{108}a_1$$

او $a_1 > 0$!

له امله.

د ارزښت $a_1 = \frac{6}{5}\sqrt{-15 + 5\sqrt{129}}$ لپاره

د ولاړکوډیز یا مستطیل سطحه ماکسیمال یا خورا لویه ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې ګراف، چې د خولي پورته برخه جوړوي، د x = 0 په ځای کې یو مینیموم یا خوراکوچنی ارزښت په ګوته کوي ((P_Min (0 | 2)، باید وازمایل شي، چې د ولاړګوډیز یا مستطیل پورته اړخ له دې څخه کښته پروت دی.

$$\text{Also ob } f\left(\frac{a_1}{2}\right) < 2 \text{ ist.}$$

$$f\left(\frac{a_1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{5}\sqrt{5\sqrt{129}-15}\right) \approx 1{,}813 < 2$$

شمیرنه د جبشمیري سره صورت نیسي. نتیجه تصدیقوي، چې د مستطیل پورته ا ړخ د f(x) د خورا کوچني ارزښت کښته لور ته پروت دی

اوس کیدی شي د مستطیل مساحت د جبشمیري سره و شمیرل شي.
د الماني پښتو: ولاړکوډیز یا مستطیل.

$$A_{\text{Rechteck}} = A(a_1) = -\frac{1}{7776}a_1^5 - \frac{1}{108}a_1^3 + 4a_1$$

$$A_{\text{Rechteck}} = A(a_1) = A\left(\frac{6}{5}\sqrt{5\sqrt{129}-15}\right) \approx 23{,}095$$

د ولاړګوډیز خورا لوی ارزښت یا ماکسیماله لویه نږدې $23{,}095\ m^2$ مساحت لري.

پ- د خولې ټول مساحت د f(x) او g(x) توابعو ګرافونو ترمنځ پروت دی. دا د انتګرال په مرسته میندل کیدی شي. د دې لپاره باید لومړی د انتیګریشن پولې وټاکل شي.

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 + 2 - \left(\frac{1}{18}x^2 - 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{486}x^4 + \frac{1}{54}x^2 - \frac{3}{54}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{486}x^4 - \frac{1}{27}x^2 + 4 = 0 \,|\cdot(-486)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 18x^2 - 1944 = 0 \text{ Substitution: } z = x^2$$

$$\Leftrightarrow z^2 + 18z - 1944 = 0 \Rightarrow p = 18;\ q = -1944$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 81 + 1944 = 2025 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{2025} = 45$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د انتیګریشن پولې د x لپاره حل نه شته	$\vert\, z_1 = -9+45 = 36 = x^2 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 6$ $\vert\, z_2 = -9-45 = -54 < 0 \Rightarrow$	$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$

د $f(x) - g(x) = -\frac{1}{486}x^4 - \frac{1}{27}x^2 + 4$: سره د ګرافونو ترمنځ سطحې لپاره باور لري:

لاندې الماني: خوله

$$A_{Mund} = A = \int_{x_1}^{x_2} \left[f(x) - g(x)\right] dx = \int_{-6}^{6} \left(-\frac{1}{486}x^4 - \frac{1}{27}x^2 + 4\right) dx$$

$$= -\frac{1}{5\cdot 486}x^5 - \frac{1}{3\cdot 27}x^3 + 4x \Big|_{-6}^{6}$$

$$= -\frac{7776}{2430} - \frac{216}{81} + 24 - \left(\frac{7776}{2430} + \frac{216}{81} - 24\right)$$

$$= -\frac{15552}{2430} - \frac{432}{81} + 48 = \frac{544}{15} \approx 36,267$$

دپه دیوال د خولې لپاره ټولټال $36,267\ m^2$ سطحې ته اړتیا شته.

ت- کربښیزه سطحه د ټولې سطحې او د ولاړګوډیز د سطحې د کمون یا تفریق سره برابره ده.

په لاندط کې د الماني پښتو له کین څخه ښي لورته: کربښیز، خوله، مستطیل یا ولاړ کوډیز

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_{schraffiert} = A_{Mund} - A_{Rechteck} = \frac{544}{15} - A\left(\frac{6}{5}\sqrt{5\sqrt{129}-15}\right) \approx 13{,}172$$

د $1m^2$ پوښونې قيمت 120€ دی.

$$\text{ټول قيمت} = 120\,€ \cdot A_{schraffiert} = 1580{,}65\,€$$

يادونه:

د دې لپاره چې د ګردونې ناټيکاوي مخه ونيول شي، بايد د جبشميري شميرنې سره منځارزښتونه ذخيره شي.

$$\text{ټول قيمت} = 120\,€ \cdot 13{,}172 = 1580{,}64\,€$$

د ګردوونې ناټيکاوي ته يادونه.
تر شوونتيا پورې چې د ګردونې ناټيکاوي مخه ونيولی شو، بايد د جبشميري شميرنې سره منځارزښتونه ذخيره شي. مګر په ډېرو حالتونو کې د لسميز يا اعشاريې(کوما) وروسته درې ځايونه بسيا کوي. په لاندې کې دې د لسميز وروسته د ۳ ځايونو ټيکاوي سره سرته ورسول شي. د الماني : ولاړګوډيز، خوله، کرښيزه سطحه، خوله، مستطيل

$$a_1 \approx 7{,}757$$

$$A_{Rechteck} \approx -\frac{1}{7776}\cdot(7{,}757)^5 - \frac{1}{108}\cdot(7{,}757)^3 + 4\cdot 7{,}757 \approx 23{,}095$$

$$A_{Mund} \approx 36{,}267$$

$$A_{schraffiert} = A_{Mund} - A_{Rechteck} \approx 36{,}267 - 23{,}095 \approx 13{,}172$$

$$\text{ټول ارزښت} \approx 120\,€ \cdot 13{,}172 \approx 1580{,}64\,€$$

دويم: حل

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^3 + \frac{9}{4}x^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

تانجنت په f(x)باندې په [P(2|f(2)] کې

f(2)=3 له دې لاس ته راځي ، چې t(x) د f(x) ګراف په تکي P(2|f(2)) کې لمسوي

تانجنتمساوات $t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$: د $x_0=2$ t سره

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x \Rightarrow f'(x_0)=f'(2)=1$$

او د $t\, f(x_0)=f(2)=3$ سره باور لري: $t(x)=1\cdot(x-2)+3$ يعني $\boxed{t(x)=x+1}$

د تانجنت غوځېتکي همداسې لمستکي د f(x) د ګراف سره

$$t(x)-f(x)=x+1-\left(\frac{1}{8}x^4-x^3+\frac{9}{4}x^2\right)=-\frac{1}{8}x^4+x^3-\frac{9}{4}x^2+x+1$$

$$t(x)-f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{8}x^4+x^3-\frac{9}{4}x^2+x+1=0$$

بربښي چې تانجنت د f(x) ګراف په ټکي P(2|3) کې لمسوي، کيدى شي $x_{1/2}=2$ حلونه وي.

هورنر:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & -\frac{1}{8} & 1 & -\frac{9}{4} & 1 & 1 \\
x=2 & & -\frac{1}{4} & \frac{6}{4} & -\frac{6}{4} & -\frac{4}{4} \\
\hline
 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{2}{4} & 0 \\
x=2 & & -\frac{1}{4} & \frac{4}{4} & \frac{2}{4} & \\
\hline
 & -\frac{1}{8} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & 0 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=0 \Rightarrow x_{3/4}=2\pm\sqrt{6}$$

داچې تانجنت د f(x) ګراف په ټکي P(2|3) کې لمسوي (دبل صفرځاى)، کيدى شي غوښتونې سطحه د لاندې انتيګرال سره وشميرل شي.

$$A=\int_{2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}}\left[t(x)-f(x)\right]dx=\int_{2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}}\left[-\frac{1}{8}x^4+x^3-\frac{9}{4}x^2+x+1\right]dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \left[-\frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right]_{2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}} \approx 2{,}939$$

غوښتونې سطحه 2,939 FE (د سطحې واحد يا يوون) ده.

دريم:

الف-

$$f_a(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x}$$

د صفرځايونو لپاره اېښونه: $f_a(x) = 0 \Leftrightarrow a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x} = 0$

ترڅېړنې لاندې نيول کېږي، چې د کوم x ارزښت لپاره ضرب ضريبونه (د ځل ځلووني) صفر کېږي.

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ يو ثابتلی ضريب دی، چې هيڅ صفرکيدای نه شي.

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 0$ يو دوبل صفرځای دی.

د e^{3-2x} ; $e^{3-2x} = e^{-(2x-3)}$ څېړنه

$e^{-(2x-3)}$ له e^{-2x} څخه د xمحور ښی لور ته په ۳ واحده يا يوون د راکښنې له لارې منځ ته راځي ه.

دا چې e^{-2x} صفرځای نه لري، نو $e^{-(2x-3)}$ هم صفرځای نه لري.

له دې سره $x_{1/2} = 0$ يواځنی صفرځای دی، ځکه چې دوبل منځ ته راځي، د f(x) ګراف د x محور په دې ځای کې لمسوي.(پروت تانجنت)

ب-

$f_a(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x}$ په پاته تانجنت باندې څېړنه

د پراته تانجنت لپاره شرطونه: $f'_a(x) = 0$

د ضرب قاونو له لارې مشتق: $f'_a = u' \cdot v + u \cdot v'$

$$u = a \cdot x^2 ; v = e^{3-2x} \Rightarrow u' = 2a \cdot x ; v' = -2e^{3-2x}$$

$$\Rightarrow f'_a(x) = 2ax \cdot e^{3-2x} + ax^2 \cdot \left(-2e^{3-2x}\right)$$

$$= 2ax \cdot e^{3-2x} - 2ax^2 \cdot e^{3-2x} = 2a \cdot e^{3-2x}\left(x - x^2\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'_a(x)=0 \Leftrightarrow 2a\cdot e^{3-2x}\left(x-x^2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x(1-x)=0 \Rightarrow x_1=0\,;\,x_2=1$$

ا e^{3-2x} صفرکیدی نه شي(برخه الف وګورئ)

د پراته محور سره غوڅټکي

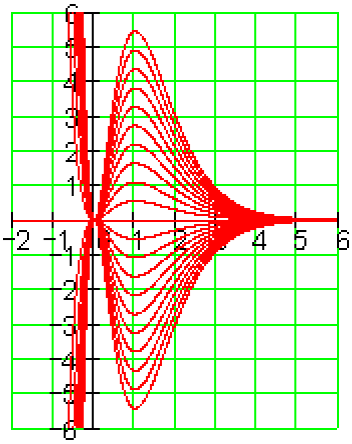
$$f_a(x_1)=f_a(0)=a\cdot 0^2\cdot e^3=0 \Rightarrow P_{1a}(0|0)$$

$$f_a(x_2)=f_a(1)=a\cdot 1^2\cdot e^{3-2}=a\cdot e \Rightarrow P_{2a}(1|a\cdot e)$$

ټول ټکي P_{1a} د کواوردینات په سرچینه پراته دي، له پارامتر a څخه خپلواک دي.

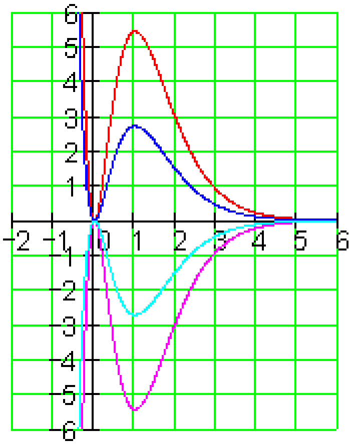
ټول ټکی P_{2a} د y محور ته غبرګه باندې پراته دي: x=1

$f_a(x)=a\cdot x^2\cdot e^{3-2x}\quad x\in\mathbb{R}\,;\,a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$



$f_a(x)=a\cdot x^2\cdot e^{3-2x}\quad x\in\mathbb{R}$

د $a\in\{-2;-1;1;2\}$ لپاره

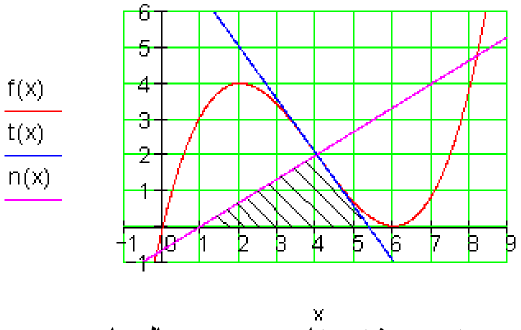


پوښتني: مشتق او انتیګرالشمیرنه II

ګډوله پوښتني

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی:



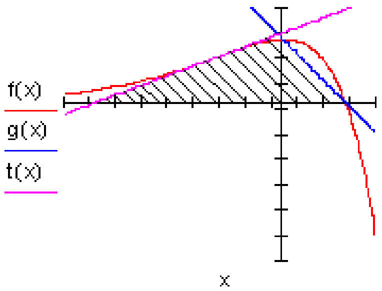
غوښتني: مشتق،تانجنت، نورمال يا عمود، صفرځايونه، د درې ګوډي سطحه.

د درېګوډي مساحا، چې د تانجنت t(x) او نورمالي يا عمود n(x) له لارې د x محور سره جوړيږي، وشميرئ:

t(x) په ټکي P(4|2) کې په f(x) تانجنت دی

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$$

دويم:



د په نخښه شوي درېګوډي يا مثلث سطحه وشميرئ، که

$$f(x) = (2-x)\,e^{\frac{1}{2}x}$$

وي.

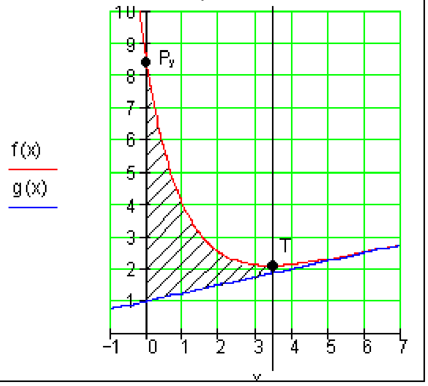
g(x) د f(x) محور-غوښتکي له لارې کرښه ده.

t(x) د f(x) اوړنتانجنت يا د انعطاف تانجنت دی

غوښتنه: محورغوښتکي، اوړون – يا د انعطاف ټکي، اوړنتانجنت يا د انعطاف تانجنت، د کرښو غوښتکي.

دريم: تابع ورکړ شوې ده:

$$f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1 \qquad x \in \mathbb{R}$$



الف- د f(x) غوښتکی د y محور سره وشميرئ.

ب- د کرښې g(x) مساوات وټاکئ. دا کرښه څه غوره والی يا معنا لري؟

پ- ټيټټکی T (x_e | f(x_e)) وشميرئ.

ت- دا په نخښه شوې سطحه وشميرئ.

ټ- سطحه په کوم ارزښت تغير خوري، که ښی پوله د ناپای په لور لاړه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوښتنه: e - تابع ، محورغوڅټکي، مشتق، سطحه، انتيګريشن، ناپای انتيګرال.

ځوابونه

مشتق او انتيګرال ته ګډوله پوښتنېII

نتيجي او مفصل ځوابونه

نتيجې

لومړی:

د درېګوډی مساحت نږدې FE ...4,333 د سطحې يوون يا واحد دی.

دويم: د درېګوډي سطحه نږدې 8,606 FE د سطحې واحد دی.

دريم:

الف- $P_y\left(0 \mid e^2+1\right)$ bzw. $P_y(0 \mid 8{,}389)$ همداسي

ب- کرښه د ګراف اسينمپتوتي جوړوي.

د اسيمپتوتي د تابع مساوات دی: $g(x)=\frac{1}{4}x+1$

ټيټټکی: $T\left(2+\ln(4) \mid \frac{7}{4}+\frac{1}{4}\ln(4)\right) \approx (3{,}386 \mid 2{,}097)$

ت-په نخښه شوې سطحه ده:

$$A = e^2 - e^{-\ln(4)} = e^2 - \frac{1}{4} \approx 7{,}139$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت- $A = e^2 \approx 7,389$

په دې ارزښت سطحه تغير خوري، که ښۍ پوله د ناپای په لور لاړه شي.

مفصل ځوابونه:

لومړی:

د $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{2}x$ او $P(4|2) \Rightarrow x_0 = 4$ له لارې تانجنت

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \qquad n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f(x_0) = f(4) = 2;\ f'(x_0) = f'(4) = -\frac{3}{2}$$

$$t(x) = -\frac{3}{2}(x-4) + 2 = -\frac{3}{2}x + 8$$

$$n(x) = \frac{2}{3}(x-4) + 2 = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

د تانجنت غوڅټکی د x محور سره:

$$t(x) = 0 \Leftrightarrow x_t = \frac{16}{3}$$

د نورمالي غوڅټکی د x محور سره.

$$n(x) = 0 \Leftrightarrow x_n = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د درېګوډي سطحه: $A = \frac{g \cdot h}{2}$ د $g = x_t - x_n = \frac{16}{3} - 1 = \frac{13}{3}$

او $h = 2 \Rightarrow A = \frac{\frac{13}{3} \cdot 2}{2} = \frac{13}{3} FE$ (دسطحې یوون یا واحد) سره.

دویم: $f(x) = (2-x)e^{\frac{1}{2}x}$

اول: د محورغوڅټکو شمیرنه.

د y محور سره غوڅټکی:

$$f(0) = (2-0)e^{\frac{1}{2}\cdot 0} = 2e^0 = 2 \Rightarrow P_y(0|2)$$

د x محور سره غوڅټکی

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (2-x)e^{\frac{1}{2}x} = 0 \Leftrightarrow (2-x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$$

ضریب $e^{\frac{1}{2}x}$ نه صفر کیږي، نو $P_{x1}(2|0)$.

دوه: کرښه د د محور غوڅتکو $P_y(0|2)$ او $P_{x1}(2|0)$ له لارې.

$$g(x) = a_1x + a_0 \quad a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-2}{2-0} = -1 \Rightarrow g(x) = -x + a_0$$

ازماېښت: $P_y(0|2)$ $g(0) = 2 \Leftrightarrow -0 + a_0 = 2 \Rightarrow a_0 = 2$

$$\Rightarrow g(x) = -x + 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

درې: اوړون – یا انعطافټکی

$$f(x)=(2-x)e^{\frac{1}{2}x}=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$$

$$u=(2-x)\,;\,u'=-1;\,v=e^{\frac{1}{2}x}\,;\,v'=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x)=-1\cdot e^{\frac{1}{2}x}+(2-x)\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\left[-1+\frac{1}{2}(2-x)\right]e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}x\cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}x\cdot e^{\frac{1}{2}x}=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f''(x)=u'v+uv'$$

$$u=-\frac{1}{2}x\,;\,u'=-\frac{1}{2};\,v=e^{\frac{1}{2}x}\,;\,v'=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$$

$$u=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right);\,u'=-\frac{1}{4};\,v=e^{\frac{1}{2}x}\,;\,v'=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'''(x)=-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}x\right)e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}=0\Leftrightarrow 1+\frac{1}{2}x=0\Leftrightarrow\underline{\underline{x_w=-2}}$$

$$f'''(x_w)=f'''(-2)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}(-2)\right)e^{\frac{1}{2}(-2)}=\frac{1}{4e}\neq 0$$

$$\Rightarrow x_w=-2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا اړونټکی یا انعطافټکی دی.

$$y_w = f(x_w) = f(-2) = (2-(-2))e^{\frac{1}{2}(-2)} = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$$

$$\Rightarrow W\left(-2 \mid \frac{4}{e}\right)$$

څلور: د اوړونټکي یا انعطاف ټکي تانجنت

$$f(x) = (2-x)e^{\frac{1}{2}x} \qquad f'(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{\frac{1}{2}x} \qquad W\left(-2 \mid \frac{4}{e}\right)$$

$$f'(x_w) = f'(-2) = -\frac{1}{2}(-2)\cdot e^{\frac{1}{2}(-2)} = \frac{1}{e}$$

$$f(x_w) = f(-2) = (2-(-2))e^{\frac{1}{2}(-2)} = \frac{4}{e}$$

$$\Rightarrow t(x) = \frac{1}{e}(x+2) + \frac{4}{e} = \frac{1}{e}x + \frac{6}{e}$$

$t(x) = f'(x_w)(x - x_w) + f(x_w)$ د $x_w = -2$: سره لرو

پنځه: د x محوراو g(x)=-x+2 سره د اوړونټانجنت یا انعطافتانجنت غوڅټکي

$$t(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e}x + \frac{6}{e} = 0 \Leftrightarrow x = -6$$

د انعطافټکي یا اونټکي صفرځایونه.

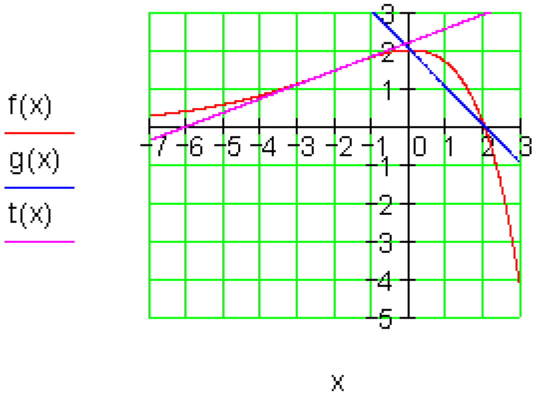
$$t(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{e}x + \frac{6}{e} = -x + 2 \Leftrightarrow x_s = \frac{2e-6}{1+e}$$

$$y_s = g(x_s) = -\frac{2e-6}{1+e} + 2 = \frac{6-2e}{1+e} + 2 = \frac{8}{1+e}$$

د درېګوډي یامثلث جګوالی دی.

شپږ:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د درېګودي د مساحت شميرنه د درېګودي يا مثلث جګوالی: $h = y_s = \frac{8}{1+e}$ سطحه: A=g.h/ 2 g له x=-6 څخه د واټن په حيث تر x=2 => g=8 پورې. $A = \frac{8\cdot\frac{8}{1+e}}{2} = 4\cdot\frac{8}{1+e}$ $= \frac{32}{1+e} \approx 8,606\,FE$ (د سطحي يوون يا واحد)

دريم:

الف- $f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1$

د y محور سره د غوڅي لپاره شرطونه:

$$y_s = f(0) \Leftrightarrow y_s = e^{2-0} + \frac{1}{4}\cdot 0 + 1 = e^2 + 1 \approx 8,389$$

$$\Rightarrow P_y\left(0 \mid e^2+1\right) \text{ bzw. } P_y\left(0 \mid 8,389\right)$$

پورته: bzw = همداسي.

ب- $f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1$

g(x) د f(x) اسيمپتوت يا ګاونډ(مجانب) دی داپه دې معنا، چې د f(x) ګراف د لوی x ارزښتونو لپاره د g(x) په لور ځغلي.

د $e^{2-x} = e^{-(x-2)}$ لوی x ارزښت لپاره د صفر په لور ځغلي، داسې چې f(x) د لوی x ارزښت لپاره فقط نور د برخترم $\frac{1}{4}x+1$ له لارې ټاکل کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو له دې د ګاونډ یا مجانب د تابعمساوات $: g(x)=\frac{1}{4}x+1$ دی.

پ-

$$f(x)=e^{2-x}+\frac{1}{4}x+1 \Rightarrow f'(x)=-e^{2-x}+\frac{1}{4} \Rightarrow f''(x)=e^{2-x}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -e^{2-x}+\frac{1}{4}=0 \mid +e^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}=e^{2-x} \mid \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{4}\right)=\ln\left(e^{2-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln(1)-\ln(4)=2-x$$

$$\Leftrightarrow -\ln(4)=2-x$$

<=> x=2+ln(4)=>

افراطي ارزښت په $x_e=2+\ln(4)\approx 3{,}386$ کې

$$f''(x_e)=f''(2+\ln(4))=e^{2-(2+\ln(4))}=e^{2-2-\ln(4)}$$

$$=e^{-\ln(4)}=e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{4}>0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_e=2+\ln(4)\approx 3{,}386$$

$$f(x_e)=f(2+\ln(4))=e^{2-(2+\ln(4))}+\frac{1}{4}(2+\ln(4))+1$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ln(4)+1=\frac{7}{4}+\frac{1}{4}\ln(4)\approx 2{,}097$$

ټیټټکی:

$$\underline{\underline{T\left(2+\ln(4) \mid \frac{7}{4}+\frac{1}{4}\ln(4)\right)}}\approx(3{,}386 \mid 2{,}097)$$

ت- په نخښه شوې سطحه د f(x) او g(x) ګرافونو ترمنځ په انټروال $[0; x_e]$ کې پرته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

r $A=\int_0^{x_e}\left[f(x)-g(x)\right]dx$ د ݪ $f(x)=e^{2-x}+\frac{1}{4}x+1$ او ŧ $g(x)=\frac{1}{4}x+1$ سره

کیږي $f(x)-g(x)=e^{2-x}$ او له دې سره $A=\int_0^{x_e}e^{2-x}\,dx$

بدلون:

$$x_e=2+\ln(4)\quad u=2-x\Rightarrow\frac{du}{dx}=-1\Leftrightarrow dx=-du$$

لاندې پوله u(0)=2 پورته پوله: $u(x_e)=2-(2+\ln(4))=-\ln(4)$:

$$A=-\int_2^{-\ln(4)}e^u\,du=\int_{-\ln(4)}^{2}e^u\,du=\left[e^u\right]_{-\ln(4)}^{2}=e^2-e^{-\ln(4)}=\underline{\underline{e^2-\frac{1}{4}\approx 7{,}139}}$$

ټ- په نخښه شوې سطحه د f(x) او g(x)ګرافونو ترمنځ په انتروال $[0;\infty]$ کې پرته ده

$A=\int_0^{\infty}\left[f(x)-g(x)\right]dx$ د $f(x)=e^{2-x}+\frac{1}{4}x+1$ او $g(x)=\frac{1}{4}x+1$ سره

کیږي $f(x)-g(x)=e^{2-x}$

او له دې سره

$A=\int_0^{\infty}e^{2-x}\,dx$ یو نا معلوم؟؟؟ انتیګرال دی له دې لاس ته راځي $A=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b}e^{2-x}\,dx$ ·

بدلون: u=2 => du/dx =-1 => dx=-du

لاند پوله u(0)=2 پورته پوله: u(b)02-b

$$A=\lim_{b\to\infty}\left(-\int_2^{2-b}e^u\,du\right)=\lim_{b\to\infty}\int_{2-b}^{2}e^u\,du=\lim_{b\to\infty}\left[e^u\right]_{2-b}^{2}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left[e^2-e^{2-b}\right]=\underline{\underline{e^2\approx 7{,}389}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځکه چې $\lim_{b\to\infty} e^{2-b} = \lim_{b\to\infty} e^{-(b-2)} = 0$

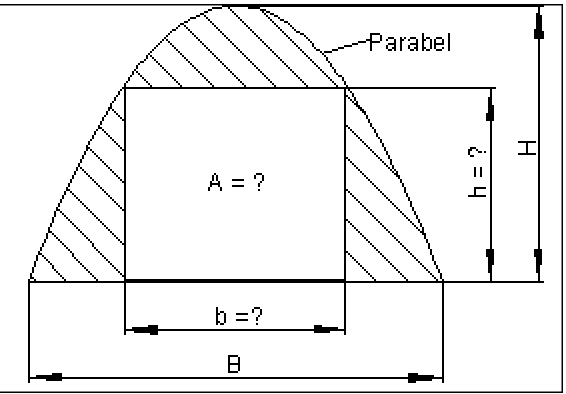
پوښتنې

مشتق او انتیګرال شمیرنه III

ګډوله پوښتنې

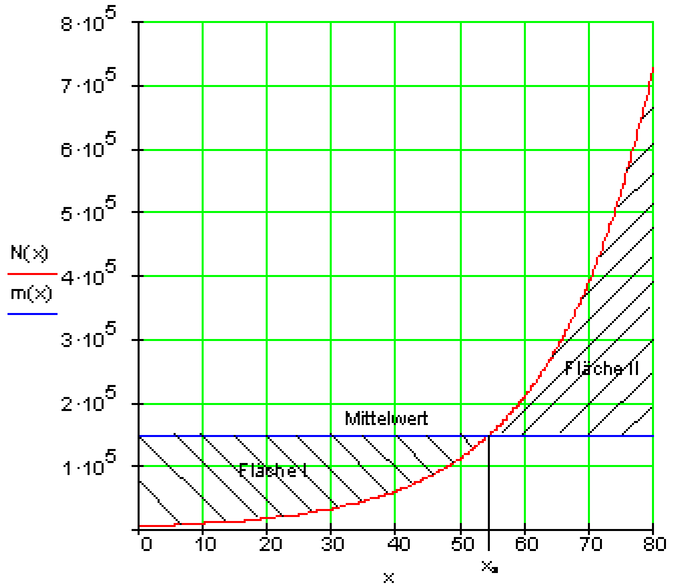
لومړی:

په یوه پارابول ډوله دیوال دې یوه ولاړګوډیزه کړکۍ کېښول شي، تر څمکې رسیږي. د دیوال کچه $B = 4$ m, (سور) $H = 4$ m (جګوالی) ده.

الف- کړکۍ باید کومه کچه (سور او جګوالی) ولري، له کومې سره چې د کړکۍ سطحه خورا لویه یا ماکسیمال شي؟ د کړکۍ سطحه څومره ده؟ ب- دا د دیوال پاتې سطحه دې رنګ شي. دا سطحه څومره لویه ده.	

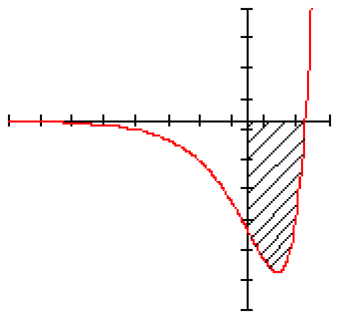
غوښتنې: د ککرۍ ټکي مساوات، افراطي ارزښت شمیرنه، ټاکلی انتیګرال، ریښه قانونونه.دویم: د یوې باکتریا کلتور(وده) اکسپوننشل جګیږي. د 48 ساعته په دننه کې دبکتریاو ګنون یا تعداد له 5000 و 100000 ته زیات کړ.(100000همداسې x ، وخت په ساعت)

(c) ketabton.com: The Digital Library

	الف- د ودې تابع وټاکئ. ب- د باکتریاو تعداد د کوم وختپه دننه کې دوه برابره کیږي؟ پ- د لومړیو 80 ساعتونو د بکتریاو د تعداد منځارزښت جوړ کړئ. ت- په څنګ ګراف کې د ودې تابع N(x) او منځ ارزښت m(x) کښل یا خیره شوي. وښايئ چې دواړه په نخښه شوې سطحې برابرې لویې دي. دا روښانه کړئ، چې دا ولې داسې باید وي.

غوښتنې: تابع ، توانقوانین، لوګاریتم قوانین، اکسپوننشلمساوات، منځ ارزښت، ټاکلی انتیګرال.

دریم:

	ورکړشوې تابع $f(x) = e^{2x} - 4 \cdot e^{x}$ وټاکئ: محورغوڅتکي، ټیټتکي، اوړون-انعطافتکي په نخښه شوې سطحه وټاکئ:

پوښتنې: اکسپوننشلمساوات، افراطي ارزښتونه، د بدلون له لارې انتیګرال.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځوابونه

مشتق او انتیګرال شمیرنه III

ګډوله پوښتنې
نتیجې او مفصل ځوابونه

نتیجې:
لومړی:
الف-

د کړکۍ سو: $b = \sqrt{\frac{16}{3}} \approx \underline{\underline{2{,}309\,m}}$

د کړکۍ جګوالی: $h = f\left(\frac{b}{2}\right)$ mit $\frac{b}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}$ und $f(x) = -x^2 + 4$

$$h = -\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\right)^2 + 4 = -\frac{4}{9}\cdot 3 + 4 = -\frac{4}{3} + 4 = \underline{\underline{\frac{8}{3} \approx 2{,}\bar{6}\,m}}$$

د کړکۍ سطحه: $\underline{\underline{A = h\cdot b = \frac{8}{3}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}} \approx 6{,}158\,m^2}}$

ب- پاتې سطحه: د پارابول منځ کې سطحه ترې کم د کړکۍ سطحه.

پاتې – یا باقي سطحه: $\frac{32}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{16}{3}} \approx \underline{\underline{4{,}508\,m^2}}$

دویم:
الف- د ودې تابع دی:

$$N(t) = 5000\cdot e^{\frac{1}{48}\ln(20)t}$$

ب- د باکتریا تعداد هر تول 11,106 ساعتونه دوه برابره کیږي
پ- په منځنی توګه په لومړیو 80 ساعتونو کې146570 باکتریاوې شتون لري
ت-تابع$m(x) = m$ دودې تابع $N(x)$ منځ ارزښت جوړوي. د سطحی برخه(سطحهI)
، چې د $m(x) = m$ لاندې یا کښته لور ته پرته ده باید تیک همدومره لویه وي لکه د

(c) ketabton.com: The Digital Library

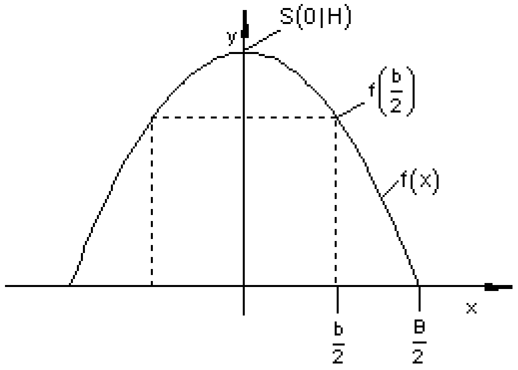
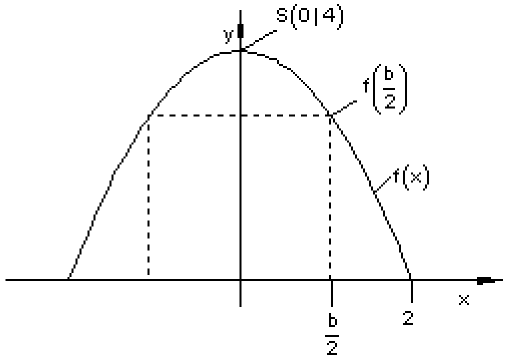
....

سطحې برخه(سطحه II)، چې د m پورته لور ته پرته ده. دا د منځ ارزښت $m(x) = m$ څخه لاس ته راځي. دا چې اوس د $N(x)$ سطحېI په ورشو یا ساحه کې کښته لورته پروت دی، هلته د امتیګرال ارزښت کمیز یا منفي دی. داچې $N(x)$ د سطحی II په ورشو یا ساحه کې پورته لور پروت دی، هلته د انتیګرال ارزښت زیاتیز یا مثبت دی. نو د دې پسې یا تعقیب باید په ټوله سطحه د انتیګرال منځ ارزښت صفر وي.

دریم:

د y محور سره غوڅټکی:	: $P_y(0 \mid -3)$
د x محور سره غوڅټکی:	: $P_x(\ln(4) \mid 0)$ bzw. $P_x(1{,}39 \mid 0)$
تتیټکی:	$P_{Min}(\ln(2) \mid -4)$ bzw $P_{Min}(0{,}69 \mid -4)$
اوړن-یا د انعطاف ټکی:	$P_w(0 \mid -3)$
په نخښه شوې سطحه: bzw=همداسې	$A = \left\| -\frac{9}{2} \right\| = \frac{9}{2} FE = 4{,}5 FE$

مفصل حلونه

لومړی: د پرابلم یا مسئلې ریاضي کونه عمومي :	
د $B = 4$ m, $H = 4$ m لپاره خانګړی	

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

الف –

ږدو: $f(x) = a_2x^2 + 4$ د S(0|4) له امله ککرې ټکی

$$P(2|0) \Rightarrow f(2) = 0 \Leftrightarrow a_2 \cdot 2^2 + 4 = 0 \mid -4$$
$$\Leftrightarrow 4a_2 = -4 \mid :4$$
$$\Leftrightarrow a_2 = -1$$

د پارابول مساوات: f(x)=-x²+4

د مستطیل یا ولاړګوډیز سطحه A=b.h د $h = f\left(\frac{b}{2}\right) = -\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 4 = -\frac{b^2}{4} + 4$ سره

$$\Rightarrow A(b) = b \cdot \left(-\frac{b^2}{4} + 4\right) = -\frac{1}{4}b^3 + 4b$$

د A(b) خورا جګ ارزښت غواړو پیدا کړو(افراطي ارزښت)

$$A(b) = -\frac{1}{4}b^3 + 4b \Rightarrow A'(b) = -\frac{3}{4}b^2 + 4 \Rightarrow A''(b) = -\frac{3}{2}b$$

د افراطي ارزښت لپاره اړیین شرطونه:

$$A'(b) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}b^2 + 4 = 0 \mid : -4$$
$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}b^2 = -4 \mid : \left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow b^2 = \frac{16}{3} \mid \sqrt{\ }$$
$$\Leftrightarrow |b| = \frac{16}{3} \Rightarrow b_1 = \sqrt{\frac{16}{3}} \text{ bzw. } b_2 = -\sqrt{\frac{16}{3}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b1 ارزښتوو یا رانیسو، ځکه چې کمیزه یا منفي سطحه نه لرو یا نه شته.

په افراطیت ازمایښت:

$$A''(b_1) = A''\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right) = -\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } b_1 = \sqrt{\frac{16}{3}}$$

د کړکۍ سور: $b = \sqrt{\frac{16}{3}} \approx \underline{\underline{2,309\ m}}$

د کړکۍ جګوالی: $h = f\left(\frac{b}{2}\right)$ د $\frac{b}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}} = 2\cdot\sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}$:

او $f(x)=-x^2+4$ سره کیږي

$$h = -\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\right)^2 + 4 = -\frac{4}{9}\cdot 3 + 4 = -\frac{4}{3} + 4 = \frac{8}{3} \approx 2,\bar{6}\ m$$

د کړکۍ سطحه: $A = h\cdot b = \underline{\underline{\frac{8}{3}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}} \approx 6,158\ m^2}}$

ب – پاتې سطحه: د پارابول لاندط یا ګښته سطحه ترې کم یا منفي د کړکۍ سطحه.

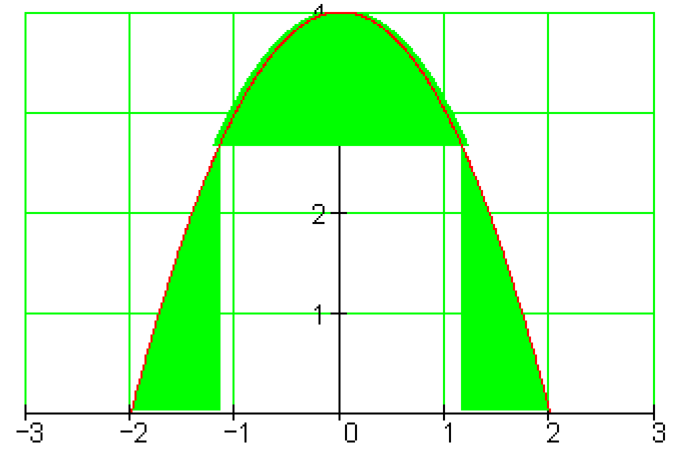
د پارابول لاندې سطحه:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} \left(-x^2 + 4\right) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_{-2}^{2}$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot 2^2 + 4\cdot 2 - \left[-\frac{1}{3}\cdot(-2)^3 + 4\cdot(-3)\right]$$

$$= -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \approx 10,\bar{6}\ m^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پاتې یا باقي سطحه:

$$\frac{32}{3}-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{16}{3}} \approx \underline{\underline{4,508\ m^2}}$$

دويم –

الف - د ودې تابع لپاره اینوونه: $N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}$ د $N_0 = 5000$ سره.

د ۴۸ ساعته وروسته باور لري: $N_{48} = N_0 \cdot e^{48 \cdot k}$ د $N_{48} = 100000$ سره.

د ودې فامتور یا ضیب یا ځلوونی دې وټاکل شي.

$$N_{48} = N_0 \cdot e^{48 \cdot k} \quad | : N_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{N_{48}}{N_0} = e^{48 \cdot k} \quad | \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{N_{48}}{N_0}\right) = \ln\left(e^{48 \cdot k}\right) = 48k \quad | : 48$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{48} \cdot \ln\left(\frac{N_{48}}{N_0}\right) = k$$

د عددونو سره $k = \frac{1}{48} \cdot \ln\left(\frac{100000}{5000}\right) = \frac{1}{48} \cdot \ln(20)$ کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ودې ضریب: $k = \frac{1}{48} \cdot \ln(20) \approx 0,0624$:

له دې سره د ودې تابع ده: $N(t) = 5000 \cdot e^{\frac{1}{48} \cdot \ln(20) \cdot t}$:

ب – د باکتریانو تعدا یا ګنون دبل یا دوه برابره کیږي

اینوونه: $2 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{\frac{1}{48}\ln(20) \cdot t} \quad | : N_0$

$$\Leftrightarrow 2 = e^{\frac{1}{48}\ln(20) \cdot t} \quad | \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln(2) = \ln\left(e^{\frac{1}{48}\ln(20) \cdot t}\right) = \frac{1}{48}\ln(20) \cdot t \ | : \frac{1}{48}\ln(20)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{\frac{1}{48}\ln(20)} = t \Leftrightarrow t = \frac{48 \cdot \ln(2)}{\ln(20)} \approx 11,106$$

هر 11,106 ساعته د باکتریاو تعداد دوه برابره کیږي.

پ – د ۸۰ ساعته وروسته منځ ارزښت

$$m = \frac{1}{80}\int_0^{80} N(t)\,dt = \frac{1}{80}\int_0^{80} N_0 \cdot e^{k \cdot t}\,dt = \frac{N_0}{80}\int_0^{80} e^{k \cdot t}\,dt$$

بدلون: $u(t) = k \cdot t \Rightarrow \frac{du}{dt} = k \Rightarrow dt = \frac{1}{k}du$:

لاندې پوله : $u(0)=k.0=0$ پورته پوله: $u(80)=80k$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$m=\frac{N_0}{80}\left(\frac{1}{k}\int_0^{80k} e^u\,du\right)=\frac{N_0}{80k}\left[e^u\right]_0^{80k}=\frac{N_0}{80k}\left(e^{80k}-1\right)$$

د $N_0=5000$ او $k=\frac{1}{48}\ln(20)$ سره کیږي

$$m=\frac{5000}{\frac{80}{48}\ln(20)}\left(e^{\frac{80}{48}\ln(20)}-1\right)=\frac{5000}{\frac{5}{3}\ln(20)}\left(e^{\frac{5}{3}\ln(20)}-1\right)$$

$$=\frac{15000}{5\cdot\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right)=\frac{3000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right)\approx 146569{,}767$$

په منځنی توګه په لومړنیو 80 ساعتو کې 146570, اکتیاو ي شتون لري.

ت ــ $m(x)=m$ $N(x)=N_0\cdot e^{k\cdot x}$ ثابت یا همغه دی(د پوښتنې پ برخه وګورئ)

موږ انتیګرال جوړوو، کوم چې د دواړو پولو ترمنځ سطحه انځوروي.

$$\int_0^{80}(N(x)-m)\,dx=\int_0^{80}\left(N_0\cdot e^{k\cdot x}-m\right)dx=N_0\int_0^{80}e^{k\cdot x}\,dx-m\int_0^{80}dx$$

انتیګرال: $\int_0^{80}e^{k\cdot x}\,dx$ د بدلون له لارې حل u(x)=k.x

$$\frac{du}{dx}=k\Rightarrow dx=\frac{1}{k}du$$

لاندې پوله : u(0)=k.0=0 پورته پوله:u(80)=80k

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{80} e^{k\cdot x}\,dx = \frac{1}{k}\int_0^{80k} e^{u}\,du = \frac{1}{k}\left[e^{u}\right]_0^{80k} = \frac{1}{k}\left(e^{80k}-1\right)$$

انتیګرال II :

$$\int_0^{80} dx = \left[x\right]_0^{80} = 80$$

$$N_0\int_0^{80} e^{k\cdot x}\,dx - m\int_0^{80} dx = \frac{N_0}{k}\left(e^{80k}-1\right) - 80m$$

ارزښتونه کیږدئ یا وضعه کړئ

$$N_0 = 5000\,;\; k = \frac{1}{48}\ln(20)\,;\; m = \frac{3000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right)$$

$$\frac{N_0}{k}\left(e^{80k}-1\right) - 80m = \frac{5000}{\frac{1}{48}\ln(20)}\left(e^{80\cdot\frac{1}{48}\ln(20)}-1\right) - \frac{80\cdot 3000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right)$$

$$= \frac{240000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right) - \frac{240000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}}-1\right) = 0$$

تابع m = m(x) د ودې تابع N(x) منځ ارزښت جوړوي. د سطحې (برخه I) د m(x) کښته لور ته باید ټیک همدومره لویه وي، لکه د سطحې برخه (برخهII) ، چې د m(x) پورته لور ته پرته ده. دا له منځ ارزښت څخه راځي یا لرو. دا چې د N(x) د سطحې I په ورشو کې د m(x) کښته لور ته پروت دی ، هلته د انتیګرال ارزښت کمیز یا منفي دی. دا چې N(x) د سطحې I I په ورشو کې د m(x) پورته لور ته پروت دی، نو هلته د انیتګرال ارزښت زیاتیز یا مثبت دی. د دې په تعقیب یا په دې پسې د انتیګرال په ټوله سطحه کې چې منځ ارزښت یې جوړ شو، نو منځ ارزښت باید په صفر برابر وي. پورته شمیرنه په ګوته کوي، چې دا حالت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

دريم -

لومړی: محور غوځېدکي:

$$f(x) = e^{2x} - 4 \cdot e^{x}$$

د y محور سره غوځېدکي

$$y_s = f(0) = e^{0} - 4 \cdot e^{0} = 1 - 4 = -3 \Rightarrow \underline{P_y(0 \mid -3)}$$

دx محور سره غوځېدکي

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4 \cdot e^{x} = 0$$ (اکسپوننشل مساوات)

د حل اينووونه د لوګاريتم له لارې:

$$e^{2x} - 4 \cdot e^{x} = 0 \mid +4 \cdot e^{x}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = 4 \cdot e^{x} \mid \ln(\ )$$

( )lnپه دې معنا چې د دواړو اړخونو لوګاريتم ونيسئ

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}\right) = \ln\left(4 \cdot e^{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \ln(e) = \ln(4) + x\ln(e)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \ln(4) + x \mid -x$$

$$\Leftrightarrow x = \ln(4) \approx 1{,}39 \Rightarrow$$

صفرځايونه: $\underline{\underline{P_x(\ln(4) \mid 0)}}$ همداسې $\underline{\underline{P_x(1{,}39 \mid 0)}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم:

$$f(x) = e^{2\cdot x} - 4\cdot e^{x}\ ;\ f'(x) = 2e^{2\cdot x} - 4e^{x}\ ;\ f''(x) = 4e^{2\cdot x} - 4e^{x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2\cdot x} - 4e^{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2e^{2\cdot x} = 4\cdot e^{y}\ |:2$$

$$\Leftrightarrow e^{2\cdot x} = 2\cdot e^{x}\ |\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2\cdot x}\right) = \ln\left(2\cdot e^{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x\cdot\ln(e) = \ln(2) + x\cdot\ln(e)$$

$\Leftrightarrow 2x = \ln(2) + x \Rightarrow x_e = \ln(2)$ د پراته تانجنت سره ځای دی)

$$f''(x_e) = f''(\ln(2)) = 4\cdot e^{2\cdot\ln(2)} - 4\cdot e^{\ln(2)} = 4\cdot\left(e^{\ln(2)}\right)^2 - 4\cdot e^{\ln(2)}$$

له $e^{\ln(2)} = 2$ سره کیږي

$$f''(\ln(2)) = 4\cdot 2^2 - 4\cdot 2 = 8 > 0 \Rightarrow \text{ rel Min für } x_e = \ln(2)$$

$$y_e = f(\ln(2)) = e^{2\cdot\ln(2)} - 4\cdot e^{\ln(2)} = \left(e^{\ln(2)}\right)^2 - 4\cdot e^{\ln(2)} = 2^2 - 4\cdot 2 = -4$$

$$\Rightarrow P_{Min}(\ln(2)\,|\,-4)\ \text{ bzw } P_{Min}(0{,}69\,|\,-4)$$

دریم: اوړنتکی یا د انعطاف ټکی f’’(x)00 او $f'''(x) \neq 0$

$$f(x) = e^{2\cdot x} - 4\cdot e^{x}\ ;\ f'(x) = 2\cdot e^{2\cdot x} - 4\cdot e^{x}\ ;\ f''(x) = 4\cdot e^{2\cdot x} - 4\cdot e^{x}\ ;$$

$$;\ f'''(x) = 8\cdot e^{2x} - 4\cdot e^{x}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4\cdot e^{2\cdot x} - 4\cdot e^{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot e^{2\cdot x} = 4\cdot e^{x}\ |:4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\Leftrightarrow e^{2\cdot x} = e^{x} \Rightarrow x_w = 0$ ځکه چې 2x=x فقط د x=0 لپاره کیدونکی دی.

$f'''(x_w) = f'''(0) = 8\cdot e^{0} - 4\cdot e^{0} = 8\cdot 1 - 4\cdot 1 = 4 \neq 0 \Rightarrow x_w = 0$ صفرځای دی

$$f(x_w) = f(0) = e^{0} - 4\cdot e^{0} = 1 - 4\cdot 1 = -3 \Rightarrow \underline{\underline{P_w(0|-3)}}$$

ځلورم:

$$\int_0^{\ln(4)} f(x)\,dx = \int_0^{\ln(4)} \left(e^{2\cdot x} - 4\cdot e^{x}\right) dx = \int_0^{\ln(4)} e^{2\cdot x}\,dx - 4\int_0^{\ln(4)} e^{x}\,dx$$

برخه انتیګرال د بدلون له لارې حلونه. الماني= او له دې سره

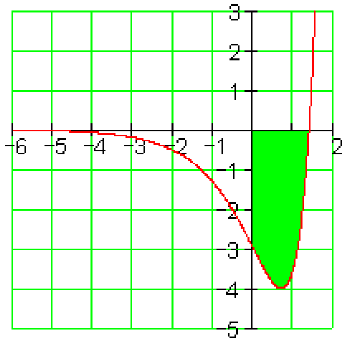
$$\int e^{2\cdot x}\,dx \text{ Substitution: } u(x) = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

$$\frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{u} \Rightarrow \int e^{2\cdot x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2\cdot x} \text{ und mit } \int e^{x}\,dx = e^{x}$$

$$\int_0^{\ln(4)} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2\cdot x} - 4e^{x}\right]_0^{\ln(4)} = \left[\frac{1}{2}e^{2\cdot\ln(4)} - 4e^{\ln(4)}\right] - \left[\frac{1}{2}e^{0} - 4e^{0}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cdot 16 - 4\cdot 4\right] - \left[\frac{1}{2}\cdot 1 - 4\cdot 1\right] = -\frac{9}{2}$$

$$A = \left|-\frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2}\,FE = \underline{\underline{4,5\,FE}}$$



په پورته کې FE (د سطحې یوون یا واحد)

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

پوښتنې

مشتق- او انتیګرالشمیرنې ته د استعمال پوښتنې II

Infusion او ګډې وډېپوښتنې

لومړی:

د عملیات وروسته ناروغ ته اینفوزیون Infusion (اینفوزیون Infusion لاتین کلمه ده، چې له *infundere* اخست شوی او دلته د ،،څاڅکي څاڅکي،، په مانا ده، چې بدن ته ننوځي) اخلي یا اینفوزیون ورکوي. څیره دوزې Dosierung ښایي چې ناروغ ته یوه 24 ساعته وخت په انتروال کې ورکول کیږي. دوزې په دې معنا دی: په وخت کې mg/h. پیل کیږي د1 mg/h دوزې سره.

الف- د دوزې ورکونو تلنه وښایی.

ب- د دوزې تلنه د یوه لاندې اکسپوننشل تابع سره مودل کیږي.

$$f(x) = n_0 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$$

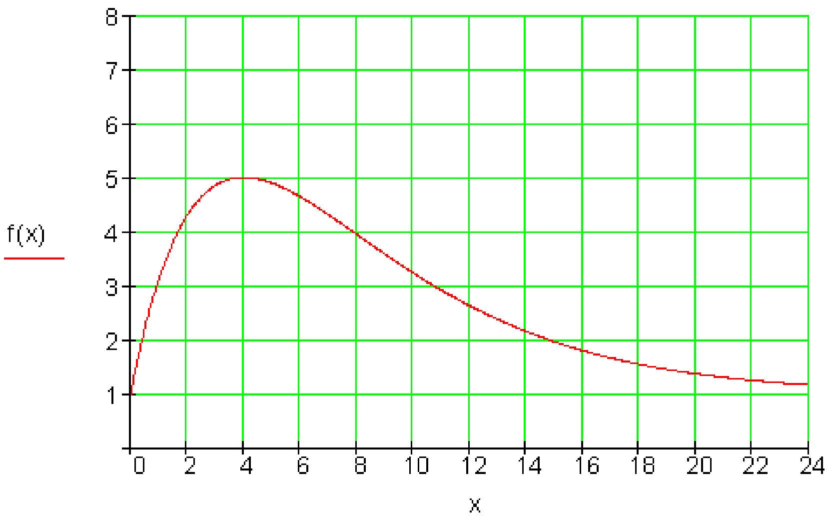
د او لپاره مناسب ارزښتونه وسمیری، که له ساعته وروسته یو خورا لجګه دوزې ورکونه د دا نوره بس شي.

تابع مساوات څنګه دي؟

پ- په کوم وخت کې د دوزې کمیدنه په زور سره صورت نیسي؟

ت- د ورکړ شوې دوا ډېری یا ستن وشمیری، که اینفوزیون 24 صورت ونیي.

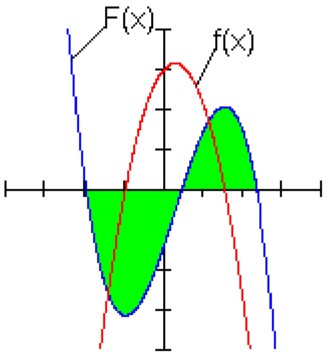
(c) ketabton.com: The Digital Library



غوښتنه: e - تابع ، مشتق، افراطي ارزښتونه، اوړنټکی یا د انعطاف ټکی، ټاکلی انتیګرال.

دویم: لاندې تابع ورمړ شوی دی:

$$f(x) = -2x^2 + x + 3$$

الف-د بنسټ تابع F(x) ګراف د ټکي (0 | 2-) له لارې ځغلي. د F(x) تابع مساوات وټاکی. ب- دا په څنګ کې د ګراف په نخښه شوې سطحه وشمیرئ. د شمیرنې تیکوالی: د لسمیز یا عشاریه څخه درځایه وروسته.	

غوښتنه: ټول راشنل یا هوښیار. بنسټ تابع، c وټاکی، صفرځایونه،ټاکلی انتیګرال.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حلونه(اوبیونې)

مشتق- او انتیګرالشمېرنې ته داستعمال پوښتنې II

نتیجې او مفصل حلونه

اول – نتیجې:

الف – د تلنو تشریح:

دوزې ورکونه له 1 mg/h څخه پیل کیږي. بیا یوغړیزه جګیږي، چې ۴ ساعته وروسته د5 mg/h یو خورا حګ ارزښت ته ورسیږي. له دې وذوسته ټیټیږي، لوړمی په زور یا قوي، بیا لږ په زور، یو غړیزکمیږي.

ب – د دوزې ورکونې تابع مساوات دي:

$$f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

پ – د دوزې ورکونې کموالی د x = 8 ساعته وروسته په زور یا قوي دی. دا ا وړنځای یا انعطافځای دی.

ت -

$$M = \int_0^{24} \left(1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right) dx = 24 - 112e^{-5} + 16e \approx 66{,}738$$

په 24 ساعته کې د ورکړ شوو د دارو ډېرى یا سټ نږدې 67 mg دی.

دویم – نتیجه.

الف- د بنسټتابع F(x) تابعمساوات داسي دي:

$$F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب – د په نخښه شوې سطحې منځپانګه یا مساحت نږدې دی:

$$A \approx 4,955 + 2,522 \approx 7,477\ FE$$

FE د سطحې واحد یا یوون

اول- مفصل حل :   دلته ټ نه شته؟؟؟

الف – د تلنې تشریح یا روښانونه:

دوزې ورکونه له 1 mg/h څخه پیل کیږي. بیا یوغړیزه جګیږي، چې ۴ ساعته وروسته د5 mg/h یو خورا حګ ارزښت ته ورسیږي. له دې وذوسته ټیټیږي، لوړمی په زور یا قوي، بیا لږ په زور، یو غړیزکمیږي.

ب – د دوزې ورکونې تابع مساوات دي:

$$A \approx 4,955 + 2,522 \approx 7,477\ FE$$

FE د سطحې واحد یا یوون

پ -

اینوونه: $f(x) = n_0 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$

پیلدوزېورکونه: $n_0 = 1\,mg/h \Rightarrow f(x) = 1 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$

دx=4 ساعته وروسته خورا لویه یاماکسیمال دوزې ورکونه په دې معنا:

f(x) په x=4 کې پروت یا افقي تانجنت لري، یعني   f'(x) = 0

f'(x)=u'v+uv' دu=a.x او $v = e^{k \cdot x}$ همداسېu'=a او $v' = k \cdot e^{k \cdot x}$ د سره:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f'(x) = a\cdot e^{k\cdot x} + a\cdot x\cdot e^{k\cdot x} = a\cdot e^{k\cdot x}(1+k\cdot x)$$
$$f'(4) = 0 \Leftrightarrow a\cdot e^{4k}(1+4\cdot k) = 0$$
$$\Leftrightarrow 1+4\cdot k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow f(x) = 1+a\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

له x=4 ساعته وروسته: f(4)=5

$$f(4) = 5 \Leftrightarrow 1+4a\cdot e^{-\frac{1}{4}\cdot 4} = 5$$
$$\Leftrightarrow 1+4a\cdot e^{-1} = 5 \Leftrightarrow a = e$$

د دوزې ورکوني تابع مساوات: $\underline{\underline{f(x) = 1+e\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}}}$

ث – د دوزې ورکوني تغیر ارزښت(د وخت په واکوالي کې) د لومړي مشتق سره ټاکل کیږي. د دې ماکسیموم په اوړونټکي یا انعطافټکي کې پروت دی.

$$f(x) = 1+e\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

لومړی مشتق

$$f'(x) = u'v+uv' \text{ mit } u = e\cdot x \text{ und } v = e^{-\frac{1}{4}x}$$

همداسي u’=e او $v' = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$

$$f'(x) = e\cdot e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{e}{4}x\cdot e^{-\frac{1}{4}x} = e\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\left(1-\frac{1}{4}x\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مشتق

$$f''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \text{ und } v = 1 - \frac{1}{4}x$$

همداسې $u' = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ او $v' = -\frac{1}{4}$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (1 - \frac{1}{4}x) - \frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (2 - \frac{1}{4}x)$$

د اوښتون ځای (د انعطاف ځای) لپاره شرایط $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{4}x = 0 \Rightarrow x_w = 8$

دریم مشتق

$$f'''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \text{ und } v = 2 - \frac{1}{4}x$$

همداسې $u' = \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ او $v' = -\frac{1}{4}$

$$f'''(x) = u' = \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (2 - \frac{1}{4}x) + \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (3 - \frac{1}{4}x)$$

$$f'''(x_w) = f'''(8) = \frac{1}{16}e \cdot e^{-2} \cdot (3 - \frac{1}{4}8) = \frac{1}{16}e^{-1} \neq 0$$

له دې لاس ته راځي، چې $\Rightarrow x_w = 8$ د f(x) اوښتونځای(د انعیاف ځای)

د ګولۍ ورکولو Dosierungوخت له8 = x ساعته وروسته خورا قوي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت – د ورکړشوو ګولیو یا دارو ډېریو یا ستونو سطحه د ګراف او د x محور ترترمنځ ده، ځکه چې mg/h.h=mg .

د دې سره د یوې پیچکارۍ وخت ۲۴ ساعتونه بنسټ دی.

Menge = ډېرۍ

$$f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow Menge = M = \int_0^{24} f(x)\,dx = \int_0^{24} \left(1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right) dx$$

د په I کې او په II کې یعني $I = \int_0^{24} 1dx$ او $II = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx$ د انتیګرال د وېشني په حیث

داسې چې باور لري: K=I+e.II

$$I = \int_0^{24} 1dx = [x]_0^{24} = 24$$

$II = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} dx$ د توته انتیګرال له لارې حل د $\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\, dx$: سره.

$$u(x) = x; v'(x) = e^{-\frac{1}{4}x}; u'(x) = 1; v(x) = \int e^{-\frac{1}{4}x} dx$$

ترمنځ شمیرنه

$\int e^{-\frac{1}{4}x} dx$ د بدلون له لارې حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$: u(x) = -\frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{4} \Rightarrow dx = -4\,du$$

$$\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = -4\int e^{u}\,du = -4e^{u} = -4e^{-\frac{1}{4}x} = v$$

$$\int x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = x \cdot (-4e^{-\frac{1}{4}x}) - \int 1 \cdot (-4e^{-\frac{1}{4}x})\,dx = -4x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + 4\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$$

$$= -4x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} - 16e^{-\frac{1}{4}x} = -4e^{-\frac{1}{4}x}(x+4)$$

$$\Rightarrow II = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = \left[-4e^{-\frac{1}{4}x}(x+4)\right]_0^{24} = -4e^{-6}(24+4) - [-4 \cdot 4] =$$

$$= -112e^{-6} + 16$$

$$\Rightarrow M = I + e \cdot II = 24 + e\left(-112e^{-6} + 16\right) = 24 - 112e^{-5} + 16e \approx 66{,}738$$

په 24 ساعته کې به نږدې د 67 mg د دواډېرى يا سټ ورکړ شي.

دويم – مفصل حل

الف –

$$f(x) = -2x^2 + x + 3$$

$$I(x) = \int f(x)\,dx = \int \left(-2x^2 + x + 3\right)dx = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$$

$$P(-2\,|\,0) \Rightarrow I(-2) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 + 3 \cdot (-2) + C = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{3} + 2 - 6 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3}$$

$$F(x) = I(x) + C \Rightarrow \underline{\underline{F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب – د انتیګریشن پولې لپاره د F(x) صفرځایونه وټاکی.

$$F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3}$$

معلوم دی.

$$\begin{array}{lcccc} & -2/3 & 1/2 & 3 & -4/3 \\ x_1 = -2 & \downarrow & \underline{4/3} & \underline{-22/6} & \underline{4/3} \\ & -2/3 & 11/6 & -2/3 & 0 \end{array}$$

$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{11}{6}x - \frac{2}{3} = 0 \,|: \left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x^2 - \frac{11}{4}x + 1 = 0$$

$$p = -\frac{11}{4};\; q = 1 \Rightarrow D = \frac{57}{64}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{11}{8} + \sqrt{\frac{57}{64}} \approx 2{,}319 \\ x_3 = \frac{11}{8} - \sqrt{\frac{57}{64}} \approx 0{,}431 \end{array} \right.$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left| \int_{x_1}^{x^2} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx \right|$$

$$\text{mit } x_1 = -2;\; x_2 = \frac{11}{8} - \sqrt{\frac{57}{64}};\; x_3 = \frac{11}{8} + \sqrt{\frac{57}{64}}$$

$$A_1 = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x \Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$= -\frac{1}{6}x_2^4 + \frac{1}{6}x_2^3 + \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_1^4 - \frac{1}{6}x_1^3 - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{4}{3}x_1 \approx -4{,}995$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_2 = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x \Big|_{x_2}^{x_3}$$

$$= -\frac{1}{6}x_3^4 + \frac{1}{6}x_3^3 + \frac{3}{2}x_3^2 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_2^4 - \frac{1}{6}x_2^3 - \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{4}{3}x_2 \approx 2,522$$

$$A \approx 4,955 + 2,522 \approx \underline{\underline{7,477}}$$

پوښتنې

مشتق او انتیګرال شمیرنې ته پارامتریک پوښتنېI

پوښتنې د e تابع سره

لومړی: تابع $f_k(x) = e^{2x} - k \cdot e^x$ ورکړشوی د k>0او $x \in \mathbb{R}$ لپاره

الف-محور غوځټکي، که شتون ولري، وشمیرئ .

ب- افراطي ټکي، که شتون ولري، وشمیرئ.

پ- اوړنټکي، که شتون ولري، وشمیرئ.

ت ـــد تعریف ورشو د پولو یا حدونو لپاره تابع ارزښتونه وټاکئ

ټ- د محورغوځټکو او x -محور ترمنځ سطحهA_k وټاکئ.

ث- د $x \in \{-3; -2,5; ...; 1; 1,5\}$ لپاره ارزښتجدول جوړ کړئ او د $k \in \{2; 3; 4; 5\}$ لپاره ګراف په پروتولاړ- یا کواوردینات سیستم کې وکاږئ.

ج-د f_k (x) د ټیټ ټکو ځایکرښه(ځای منحني) f_{ok} (x) وشمیرئ او دا په پروت ولاړسیستم کې وکاږئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k = 5$ لپاره سطحه A_k وشمیرئ.

دویم: د $k>0$ او $x \in \mathbb{R}$ لپاره تابع $f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ ورکړ شوی.

الف- په محورغوښتکو f_k وڅیرئ ا و دا وشمیرئ.

ب- د $f_k(x)$ لومړي درې مشتقونه جوړ کړئ یا وشمیرئ.

پ- f_k په افراطي ټکو باندې وڅیرئ او دا وشمیرئ.

ت – f_k په اوړونټکو یا انعطافټکو باندې وڅیرئ او دا وشمیرئ.

ټ- د تعریفورشو د پولې لپاره تابع ارزښت وټاکئ.

ث – د افراطي ټکو لپاره ځایکړه یا –منحني $f_{ok}(x)$ وټاکئ.

ج- د محورونو غوښټکو اوx –محور ترمنځ سطحه A_k وټاکئ

ح- لاندې ارزښت جدول وکاروئ او په یوه پروتولاړ-یا کواوردینات سیستم کې د $f_1(x); f_2(x); f_3(x); f_4(x)$ او ځایوکړې $f_{ok}(x)$ لپاره ګراف وکاږئ. د غوره ټکو (محوغوښتکي، افراطي- ا و اوړونټکو) ارزښتونه د جبشمیري سره وشمیرئ.

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	−0,16	−0,27	−0,43	−0,7	−1,12	−1,75	−2,62	−3,59	−3,94	−1,13	12,7
$f_2(x)$	−0,16	−0,26	−0,42	−0,67	−1,03	−1,5	−1,94	−1,74	1,08	12,5	49,8
$f_3(x)$	−0,16	−0,26	−0,41	−0,63	−0,94	−1,25	−1,26	0,11	6,1	26,2	86,9
$f_4(x)$	−0,16	−0,25	−0,4	−0,6	−0,85	−1	−0,58	1,95	11,1	39,8	124

خ= د $k = 1$ لپاره سطحه A_k وشمیرئ او دا په یوه پروتولاړسیستم کې په نخښه کړئ.

حلونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق او انتیګرال ته پارامتریک پوښتنې

نتیجې او مفصل حلونه

اول - نتیجې

الف -

$P_{k_x}\left(\ln(k)\,|\,0\right)$ $P_{k_y}\left(0\,|\,1-k\right)$

ب –

تیټتکی: $P_{k_{Min}}\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right)\Big|-\frac{1}{4}k^2\right)$

پ - اوړونټکی: $P_{k_w}\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\Big|-\frac{3}{16}k^2\right)$

ت -

$\lim\limits_{x\to\infty} f_k(x)=\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x)=0$

ټ - مفصل حل وګورئ

ث - سطحه: $A_k=\left|-\frac{1}{2}k^2+k-\frac{1}{2}\right|$

ج – دټولوټیټکو لپاره د دځایمنحني د تابع مساوات: $f_{ok}(x)=-e^{2x}$

چ – د $k = 5$ لپاره سطحه 8 FE (۸ یوونه یا واحده)ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم - نتیجې

الف –

د ټولو $k \in \mathbb{R}$ لپاره د y–محور سره یو غوځېټکی شتون لري $P_{k_y}\left(0 \mid \frac{k}{4}-2\right)$

د ټولو $k > 0$ لپاره د x–محور سره یو غوځېټکی شتون لري $P_{k_x}\left(2 \cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid 0\right)$

ب –

$$f_k\,'(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - e^{\frac{1}{2} \cdot x} \qquad f_k\,''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$f_k\,'''(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - \frac{1}{4} \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

پ – د ټول $k > 0$ لپاره یو نسبي خورا ټیټټکی شتون لري

$$P_{k_{Min}}\left(2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \mid -\frac{4}{k}\right)$$

ت – د ټول $k > 0$ لپاره یو اوړونټکی یا د انعطافټکی شتون لري

$$P_{k_w}\left(2 \cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right) \mid -\frac{3}{k}\right)$$

ټ - $\lim_{x \to \infty} f_k(x) = \infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f_k(x) = 0$

ث –

$f_{ok}(x) = -e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ د $f_k(x)$ د ټیټټکي ځایګړه یا منحني ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ج - سطحه : $A_k = \left|-\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4\right|$

چ – مفصل حل وګورئ.

ح - سطحه $A_1 = 12,25$ FE

اول – مفصل حلونه:

الف – د y - محور سره غوځېدنې

$$f_k(x) = e^{2x} - k \cdot e^x$$
$$y_s = f_k(0) = e^{2 \cdot 0} - k \cdot e^0 = 1 - k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}(0 \mid 1-k)}}$$

د x – محور سره غوځېدنې (صفرځایونه)

له نوکانو باسل $f_k(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - k \cdot e^x = 0 \mid e^x$

د صفرضرب جمله وکاروئ $\Leftrightarrow \underbrace{(e^x - k)}_{=0} \cdot \underbrace{e^x}_{\neq 0} = 0 \mid$

$$e^x - k = 0 \mid +k \Leftrightarrow e^x = k \mid \ln(\ ) \Leftrightarrow x = \ln(k)$$
$$\underline{\underline{P_{k_x}(\ln(k) \mid 0)}}$$

ب – د انحراف ټکي:

$$f_k(x) = e^{2x} - k \cdot e^x$$
$$f_k'(x) = 2 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = (2 \cdot e^x - k) \cdot e^x$$
$$f_k''(x) = 4 \cdot e^{2x} - k \cdot e^x = (4 \cdot e^x - k) \cdot e^x$$

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow (2 \cdot e^x - k) \cdot e^x = 0 \mid :$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د صفرضرب جمله وکاروئ

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{k}{2}\right)$$

یو ممکنه افراطي ځای دی

د دویم مشتق له لارې یې شمیرنه: $f_k''(x) \neq 0$

$$f_k''(x) = f_k''\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right)\right) = 4 \cdot e^{2\cdot\ln\left(\frac{k}{2}\right)} - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} = 4 \cdot \left(e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}\right)^2 - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}$$

د $e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} = \frac{k}{2}$ سره کیږي:

$$f_k''(x) = 4 \cdot \left(\frac{k}{2}\right)^2 - k \cdot \frac{k}{2} = 4 \cdot \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} = k^2 - \frac{k^2}{2} = \frac{k^2}{2} > 0$$

په $x = x_E = \ln\left(\frac{k}{2}\right)$ کې یو نسبي خورا ټیټټکي(مینیموم) شتون لري.

افراطي ارزښت:

$$y_{k_E} = f_k(x_E) = f_k\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right)\right) = e^{2\cdot\ln\left(\frac{k}{2}\right)} - k \cdot e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} = \left(\frac{k}{2}\right)^2 - k \cdot \frac{k}{2} = \frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}k^2 - \frac{2}{4}k^2 = -\frac{1}{4}k^2$$

له دې لاس ته راځي خورا ټیټټکی(مینیموم): $\underline{\underline{P_{k_{Min}}\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right) \mid -\frac{1}{4}k^2\right)}}$

پ ــ د انعطاف ټکي یا اوړونټکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_k''(x) = 4\cdot e^{2x} - k\cdot e^{x} = \left(4\cdot e^{x} - k\right)\cdot e^{x}$$

$$f_k'''(x) = 8\cdot e^{2x} - k\cdot e^{x} = \left(8\cdot e^{x} - k\right)\cdot e^{x}$$

د او ړونتکي یا د ا نعطاف ټکي لپاره اړیین او پوره کیدونکي شرطونه:

$$f_k''(x) = 0 \wedge f_k'''(x) \neq 0$$

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \left(4\cdot e^{x} - k\right)\cdot e^{x} = 0|$$

د صفرضرب جمله وکاروئ

$$4\cdot e^{x} - k = 0 + k \Leftrightarrow 4\cdot e^{x} = k|:4 \Leftrightarrow e^{x} = \frac{k}{4}|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{k}{4}\right)$$

یو ممکنه اوړنوتکی دی

د دریم مشتق له لارې یې ازماېښت: $f_k'''(x) \neq 0$

$$f_k'''(x) = f_k'''\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\right) = 8\cdot e^{2\cdot\ln\left(\frac{k}{4}\right)} - k\cdot e^{\ln\left(\frac{k}{4}\right)} = 8\cdot\left(\frac{k}{4}\right)^2 - k\cdot\frac{k}{4} =$$

$$= \frac{8}{16}k^2 - \frac{1}{4}k^2 = \frac{1}{4}k^2 \neq 0$$

په $x = x_w = \ln\left(\frac{k}{4}\right)$ کې یو اوړونتکی یا انعطافتکی پورت دی.

$$y_{k_w} = f_k(x_w) = f_k\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\right) = e^{2\cdot\ln\left(\frac{k}{4}\right)} - k\cdot e^{\ln\left(\frac{k}{4}\right)}$$

$$= \left(\frac{k}{4}\right)^2 - k\cdot\frac{k}{4} = \frac{k^2}{16} - \frac{k^2}{4} = \frac{1}{16}k^2 - \frac{4}{16}k^2 = -\frac{3}{16}k^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې لاس ته راځي، چې اوړونټکی دی:

$$\underline{\underline{P_{k_w}\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\mid -\frac{3}{16}k^2\right)}}$$

ت - د تعریفورشو د پولو لپاره د تابع ارزښتونه:

ټا کل کیږي: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_k(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{2x} - k\cdot e^{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} e^{2x} - k\cdot \lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0 - k\cdot 0 = 0$$

د $x \to -\infty$ لپاره د x محور د $f_k(x)$ اسیمپتوت دی.

$$\lim_{x\to\infty} f_k(x) = \lim_{x\to\infty}\left(e^{2x} - k\cdot e^{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left[\left(e^{x} - k\right)\cdot e^{x}\right] = \infty$$

د $x \to \infty$ لپاره د $f_k(x)$ تابع ارښتونه أه تولو پولو اوړي یا وده کوي.

ټ – د سطحه د د محورغوځټکو ترمنځ:

صفرځایونه :

$$x_1 = \ln(k) \Rightarrow$$

د سطحې انتیګرال دی: $A_k = \left|\int_0^{\ln(k)} f_k(x)\,dx\right|$

$$\int_0^{\ln(k)} f_k(x)\,dx = \int_0^{\ln(k)}\left(e^{2x} - k\cdot e^{x}\right)dx = \underbrace{\int_0^{\ln(k)} e^{2x}\,dx}_{I} - k\cdot \underbrace{\int_0^{\ln(k)} e^{x}\,dx}_{II} = I - k\cdot II$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I: \int_0^{\ln(k)} e^{2x}\,dx \text{ Substitution: } u(x)=2x \Rightarrow \frac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\text{ug: } u(0)=2\cdot 0=0 \quad \text{og: } u(\ln(k))=2\cdot\ln(k)$$

$$\int_0^{\ln(k)} e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\cdot\ln(k)} e^{u}\,du=\left[\frac{1}{2}e^{u}\right]_0^{2\cdot\ln(k)}=\frac{1}{2}e^{2\cdot\ln(k)}-\frac{1}{2}e^{0}=\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}$$

$$II: \int_0^{\ln(k)} e^{x}\,dx=\left[e^{x}\right]_0^{\ln(k)}=e^{\ln(k)}-e^{0}=k-1$$

$$\int_0^{\ln(k)} f_k(x)\,dx=I-k\cdot II=\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}-k\cdot(k-1)=\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}-k^2+k=-\frac{1}{2}k^2+k-\frac{1}{2}$$

له دې سره سطحه کيږي: $\underline{\underline{A_k=\left|-\frac{1}{2}k^2+k-\frac{1}{2}\right|}}$

ث – ارزښت جدول او د منحنيو ګرافونه (د منحنيو ډله) .

سربېره پردې دې محورغوڅټکي، تيټټکي او د انعطاف ټکي و ارزښت جدول وروشمېرل شي.

$$P_{k_y}(0\,|\,1-k);P_{k_x}(\ln(k)\,|\,0);P_{k_{Min}}\left(\ln\left(\frac{k}{2}\right)\,|\,-\frac{1}{4}k^2\right);P_{k_w}\left(\ln\left(\frac{k}{4}\right)\,|\,-\frac{3}{16}k^2\right)$$

K=2

$$P_{2_y}(0\,|\,-1);P_{2_x}(\ln(2)\approx 0{,}69\,|\,0);P_{2_{Min}}\left(\ln\left(\frac{2}{2}\right)=0\,|\,-1\right);P_{2_w}\left(\ln\left(\frac{2}{4}\right)\approx -0{,}69\,|\,-0{,}75\right)$$

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_2(x)$	−0,1	−0,16	−0,25	−0,37	−0,6	−0,85	−1	−0,58	1,95	11,1	21,6

K=3

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P_{3_y}(0|-2); P_{3_x}(\ln(3) \approx 1,1|0); P_{3_{Min}}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) = 0,41|-2,25\right); P_{3_w}\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right) \approx -0,29|-1,69\right)$

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_3(x)$	−0,15	−0,24	−0,39	−0,62	−0,97	−1,45	−2	−2,23	−0,77	6,64	15,85

$k = 4$:

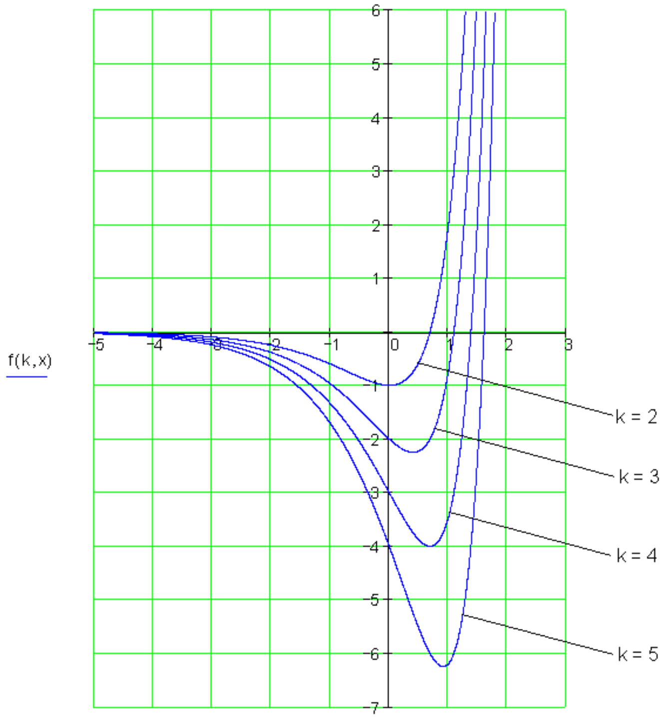
$P_{4_y}(0|-3); P_{4_x}(\ln(4) \approx 1,39|0); P_{4_{Min}}\left(\ln\left(\frac{4}{2}\right) = 0,69|-4\right); P_{4_w}\left(\ln\left(\frac{4}{4}\right) = 0|-3\right)$

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_4(x)$	−0,2	−0,32	−0,52	−0,84	−1,34	−2,06	−3	−3,88	−3,48	2,16	10,1

$k = 5$:

$P_{5_y}(0|-4); P_{5_x}(\ln(5) \approx 1,61|0); P_{5_{Min}}\left(\ln\left(\frac{5}{2}\right) = 0,92|-6,25\right); P_{5_w}\left(\ln\left(\frac{5}{4}\right) \approx 0,22|-4,69\right)$

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	1,75
$f_5(x)$	−0,25	−0,4	−0,66	−1,07	−1,7	−2,67	−4	−5,53	−6,2	−2,32	4,34



(c) ketabton.com: The Digital Library

ج - د محلیمنحني لپاره ټیټتکو شمیرنه:

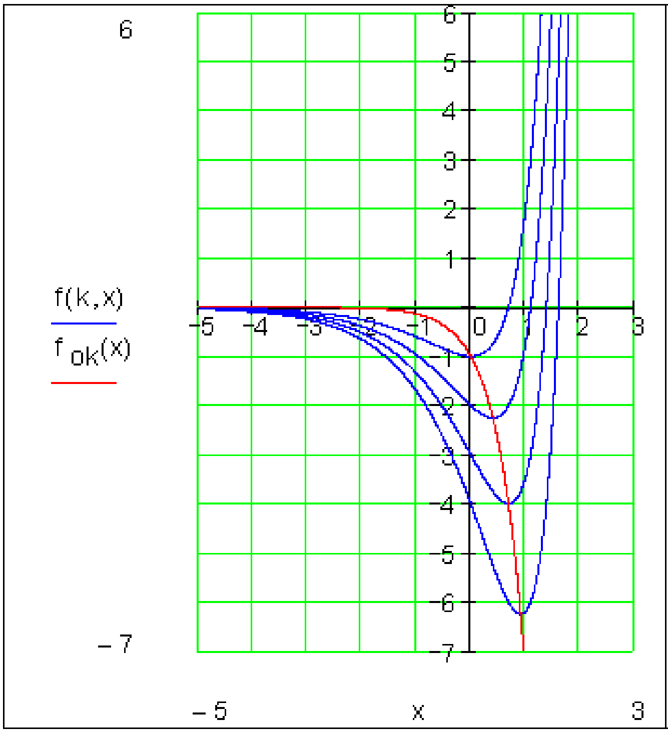
$$P_{k_{Min}}\left(\underbrace{\ln\left(\frac{k}{2}\right)}_{x} \Big| \underbrace{-\frac{1}{4}k^2}_{y}\right) \Rightarrow x=\ln\left(\frac{k}{2}\right) \quad (1) \quad y=-\frac{1}{4}k^2 \quad (2)$$

(۱) له k پسې حل کړئ:

$$x=\ln\left(\frac{k}{2}\right)\Big| e \quad \Leftrightarrow \quad e^x=e^{\ln\left(\frac{k}{2}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad e^x=\frac{k}{2} \quad \Leftrightarrow \quad k=2\cdot e^x$$

نتیجه په (۲) کې کیږدئ:

$$y=-\frac{1}{4}k^2=-\frac{1}{4}\cdot\left(2\cdot e^x\right)^2=-\frac{1}{4}\cdot 4\cdot e^{2x}=-e^{2x}$$



له دې سره د ټولو ټیټتکو لپارهد تابع مساوات شي:

$$f_{ok}(x)=-e^{2x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

چ – د $k = 5$ لپاره:

له $A_k = \left|-\frac{1}{2}k^2 + k - \frac{1}{2}\right|$ (e څخه لاس ته راوړنه

$$A_5 = \left|-\frac{1}{2}\cdot 5^2 + 5 - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{25}{2} + 5 - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{25}{2} + \frac{10}{2} - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{16}{2}\right| = |-8| = 8$$

د $k = 5$ لپاره سطحه 8 یونه یا واحده ده.

دویم – مفصل حلونه الف – د y - محور سره غوښتکي:

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y_s = f_k(0) = \frac{1}{4}k\cdot e^0 - 2\cdot e^{\frac{1}{2}0} = \frac{k}{4} - 2 \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}\left(0 \,|\, \frac{k}{4} - 2\right)}}$$

د ټولو $k \in \mathbb{R}$ ؛ لپاره د y - محور سره غوښتکي شتون لري.

د x - محور سره غوښتکي(صفرځایونه):

$$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} = 0 \,|+2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^x = 2\cdot e^{\frac{1}{2}x} \,|\cdot \frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{8}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}x} \,|\ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{8}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right) = \ln\left(\frac{8}{k}\right) + \ln\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{8}{k}\right) + \frac{1}{2}\cdot\ln\left(e^x\right) = \ln\left(\frac{8}{k}\right) + \frac{1}{2}x \,|-\frac{1}{2}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{8}{k}\right) | \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right) \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right) | 0\right)}}$$

د ټولو k>0 لپاره دx - محور سره غوڅټکي شتون لري (صفرځايونه).

پ – مشتقونه

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}k\cdot e^x - e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k''(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}k\cdot e^x - \frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

ث – انحراف ټکي

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad f_k'(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - e^{\frac{1}{2}x} \quad f_k''(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

د افراطي ټکو لپاره پوره کيدونکي شرطونه: $f_k'(x) = 0 \quad \wedge \quad f_k''(x) \neq 0$

$$f_k'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^x - e^{\frac{1}{2}\cdot x} = 0 | + e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^x = e^{\frac{1}{2}\cdot x} | \cdot \frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{4}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}x} | \ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln\left(\frac{4}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right) = \ln\left(\frac{4}{k}\right) + \frac{1}{2}\cdot\ln(e^x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{4}{k}\right) + \frac{1}{2}x | - \frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{4}{k}\right) | \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)$$

ممکنه افراطي ځایونه

$$f_k''(x) = f_k''\left(2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)\right) = \frac{1}{4}k\cdot e^{2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)} - \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)} = \frac{1}{4}k\cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)^2} - \frac{1}{2}\cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}k\cdot\left(\frac{4}{k}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{k} = \frac{1}{4}k\cdot\frac{16}{k^2} - \frac{2}{k} = \frac{4}{k} - \frac{2}{k} = \frac{2}{k} > 0$$

د ټولو $k>0$ لپاره .

له دې لاس ته راځي، چې نسبي اکسترېموم(ټیټتکی) په $x = x_{k_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)$ کې

$$y_{k_{Min}} = f_k\left(x_{k_{Min}}\right) = \frac{1}{4}k\cdot e^{2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)} - 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right)} = \frac{1}{4}k\cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)^2} - 2\cdot e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}k\cdot\left(\frac{4}{k}\right)^2 - 2\cdot\frac{4}{k} = \frac{1}{4}k\cdot\frac{16}{k^2} - \frac{8}{k} = \frac{4}{k} - \frac{8}{k} = -\frac{4}{k}$$

$$\Rightarrow \underline{P_{k_{Min}}\left(2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right) | -\frac{4}{k}\right)}$$

د ټولو $k > 0$ لپاره یو نسبي اکسترېمومو) ټیټتکی) شتون لري.

ت ــ $f_k(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} \quad f_k''(x) = \frac{1}{4}k\cdot e^x - \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_k'''(x)=\frac{1}{4}k\cdot e^{x}-\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

د انعطاف ټکی یا اوړونټکی: $f_k''(x)=0 \quad \wedge \quad f_k'''(x)\neq 0$

$$f_k''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^{x}-\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}=0 \,|+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^{x}=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,|\cdot\frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^{x}=\frac{2}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}x}\,|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x}\right)=\ln\left(\frac{2}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right)=\ln\left(\frac{2}{k}\right)+\frac{1}{2}\cdot\ln\left(e^{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow x=\ln\left(\frac{2}{k}\right)+\frac{1}{2}x\,|-\frac{1}{2}x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x=\ln\left(\frac{2}{k}\right)|\cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad x=2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)$$

ممکنه اوړونټکی یا انعطافټکي

$$f_k''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^{x}-\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}=0 \,|+\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}k\cdot e^{x}=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,|\cdot\frac{4}{k}$$

$$\Leftrightarrow e^{x}=\frac{2}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}x}\,|\ln(\ )$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{x}\right)=\ln\left(\frac{2}{k}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right)=\ln\left(\frac{2}{k}\right)+\frac{1}{2}\cdot\ln\left(e^{x}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{2}{k}\right) | \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right) \text{ mög}$$

ممکنه اوړونتېکي یا د انغطاف ټکي

د لاندې پېښتو: د... لپاره.

$$f_k'''(x) = f_k'''\left(2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)\right) = \frac{1}{4}k\cdot e^{2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)} - \frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)} = \frac{1}{4}k\cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)^2} - \frac{1}{4}\cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}k\cdot\left(\frac{2}{k}\right)^2 - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{k}\right) = \frac{1}{4}k\cdot\frac{4}{k^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k} = \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k} \neq 0$$

د $k>0$ لپاره.

$$\Rightarrow x = x_{k_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)$$

یو اوړونتېکی یا د انعطاف ټکی دی.

$$y_{k_w} = f_k\left(x_{k_w}\right) = \frac{1}{4}k\cdot e^{2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)} - 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right)} = \frac{1}{4}k\cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)^2} - 2\cdot e^{\ln\left(\frac{2}{k}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}k\cdot\left(\frac{2}{k}\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{2}{k}\right) = \frac{1}{4}k\cdot\frac{4}{k^2} - 2\cdot\frac{2}{k} = \frac{1}{k} - \frac{4}{k} = \frac{1}{k}(1-4) = -\frac{3}{k}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{k_w}\left(2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right) | -\frac{3}{k}\right)}}$$

د$k>0$ لپاره یو اوړنوکی شتون لري

ټ – د تعریف ورشو د پولو لپاره د تابع ارزښتونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot \underbrace{\lim_{x \to -\infty} e^x}_{\to 0} - 2 \cdot \underbrace{\lim_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{2} \cdot x}}_{\to 0} = \frac{1}{4}k \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$$

د $x \to -\infty$ لپاره ټول تابع ارزښتونه د 0 په لور ځغلي. له دې سره د x–محور اسمپتوت یت ګاونډ(مجانب) دی.

$$\lim_{x \to \infty} f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot \underbrace{\lim_{x \to \infty} e^x}_{\to \infty} - 2 \cdot \underbrace{\lim_{x \to \infty} e^{\frac{1}{2} \cdot x}}_{\to \infty} = \frac{1}{4}k \cdot \infty - 2 \cdot \infty$$

حلوړ نه دی.
مګر دا چې e^x د $x \to \infty$ لپاره نسبت $e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ ته ګړندی له ټولو پولو اوړي، کیدی د کمون یا تفریق د پام کې لرنې له امله له دې څخه مخ ته لاړ شو، چې $\lim_{x \to \infty} f_k(x) = \infty$ ؛ باور لري

ث - د ټیټتکو ځایزه یا محلي منحني

$$P_{k_{Min}}\left(\underbrace{2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right)}_{x} \Big| \underbrace{-\frac{4}{k}}_{y}\right) \Rightarrow x = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \quad (1) \quad y = -\frac{4}{k} \quad (2)$$

(1) د k په لور یا پسې حل کړئ او (2) کې ځاي په ځاي کړئ د ځای کرږې(-منحني) تابع مساوات ورکوي.

$$x = 2 \cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) | : 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot x = \ln\left(\frac{4}{k}\right) | e^{(\ )} \quad \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2} \cdot x} = e^{\ln\left(\frac{4}{k}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\frac{1}{2} \cdot x} = \frac{4}{k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ځتړ ارزښت يې جوړ کړئ

$$\Leftrightarrow \quad e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{k}{4} | \cdot 4 \quad \Leftrightarrow \quad k = 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x}$$

په(2) کي ځای په ځای کړې

$$y = -\frac{4}{k} = -\frac{4}{4 \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x}} = -\frac{4}{4} \cdot \frac{1}{e^{-\frac{1}{2}\cdot x}}$$

$$= -\frac{1}{e^{-\frac{1}{2}x}} = -e^{\frac{1}{2}\cdot x} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f_{ok}(x) = -e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$f_{ok}(x)$ د $f_k(x)$ د تيتيکي ځای کره(-منحني) ده

ج - د سطحي د مساحت شمېرنه

$f_k(x) = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ دا انتيګرال بايد حل شي $A_k = \left| \int_0^{x_k} f_k(x)\,dx \right|$

$$\int f_k(x)\,dx = \frac{1}{4}k \cdot \int e^x\,dx - 2 \cdot \int e^{\frac{1}{2}x}\,dx$$

د $\int e^x\,dx = e^x + C$ او $\int e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$ سره باور لري:

$$\int f_k(x)\,dx = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 2 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C = \frac{1}{4}k \cdot e^x - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + C$$

د پوله اينووني وروسته لرو: $ug = 0; \quad og = x_k = 2 \cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) = \ln\left(\frac{8}{k}\right)^2$ کيږي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{x_k} f_k(x)\,dx = \frac{1}{4}k\cdot e^{\ln\left(\frac{8}{k}\right)^2} - 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right)} - \left(\frac{1}{4}k\cdot e^0 - 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0}\right)$$

$$= \frac{1}{4}k\cdot\left(\frac{8}{k}\right)^2 - 4\cdot\frac{8}{k} - \frac{1}{4}k + 4 = \frac{1}{4}k\cdot\frac{64}{k^2} - \frac{32}{k} - \frac{1}{4}k + 4$$

$$= \frac{16}{k} - \frac{32}{k} - \frac{1}{4}k + 4 = \frac{1}{k}(16-32) - \frac{1}{4}k + 4 = -\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4 \Rightarrow \underline{\underline{A_k = \left|-\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4\right|}}$$

چ - رارتلی یا په گته شوی تکی تکي

$k = 1$

$$P_{k_y}\left(0\,\middle|\,\frac{1}{4}k-2\right) \Rightarrow P_{1_y}\left(0\,\middle|\,\frac{1}{4}\cdot 1-2\right) \Rightarrow P_{1_y}(0\,|\,-1{,}75)$$

$$P_{k_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right)\middle|\,0\right) \Rightarrow P_{1_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{1}\right)\middle|\,0\right) \Rightarrow P_{1_x}(4{,}16\,|\,0)$$

$$x_{k_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right) \Rightarrow x_{1_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{1}\right) \approx 2{,}77 \Rightarrow f_1\left(x_{1_{Min}}\right) = -4 \Rightarrow P_{1_{Min}}(2{,}77\,|\,-4)$$

$$x_{k_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right) \Rightarrow x_{1_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{1}\right) \approx 1{,}39 \Rightarrow f_1\left(x_{1_w}\right) = -3 \Rightarrow P_{1_w}(1{,}39\,|\,-3)$$

$k = 2$

$$P_{k_y}\left(0\,\middle|\,\frac{1}{4}k-2\right) \Rightarrow P_{2_y}\left(0\,\middle|\,\frac{1}{4}\cdot 2-2\right) \Rightarrow P_{2_y}(0\,|\,-1{,}5)$$

$$P_{k_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right)\middle|\,0\right) \Rightarrow P_{2_x}\left(2\cdot\ln\left(\frac{8}{2}\right)\middle|\,0\right) \Rightarrow P_{2_x}(2{,}77\,|\,0)$$

$$x_{k_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{k}\right) \Rightarrow x_{2_{Min}} = 2\cdot\ln\left(\frac{4}{2}\right) \approx 1{,}39 \Rightarrow f_2\left(x_{2_{Min}}\right) = -2 \Rightarrow P_{2_{Min}}(1{,}39\,|\,-2)$$

$$x_{k_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{k}\right) \Rightarrow x_{2_w} = 2\cdot\ln\left(\frac{2}{2}\right) = 0 \Rightarrow f_2\left(x_{2_w}\right) = -1{,}5 \Rightarrow P_{2_w}(0\,|\,-1{,}5)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$k = 3$

$$P_{k_y}\left(0 \mid \frac{1}{4}k - 2\right) \Rightarrow P_{3_y}\left(0 \mid \frac{1}{4}\cdot 3 - 2\right) \Rightarrow P_{3_y}(0 \mid -1,25)$$

$$P_{k_x}\left(2\cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid 0\right) \Rightarrow P_{3_x}\left(2\cdot \ln\left(\frac{8}{3}\right) \mid 0\right) \Rightarrow P_{3_x}(1,96 \mid 0)$$

$$x_{k_{Min}} = 2\cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \Rightarrow x_{3_{Min}} = 2\cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0,58 \Rightarrow f_3\left(x_{3_{Min}}\right) \approx$$

$$\approx -1,33 \Rightarrow P_{3_{Min}}(0,58 \mid -1,33)$$

$$x_{k_w} = 2\cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right) \Rightarrow x_{3_w} = 2\cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) \approx -0,81 \Rightarrow f_3\left(x_{3_w}\right) = -1 \Rightarrow P_{3_w}(-0,81 \mid -1)$$

$k = 4$

$$P_{k_y}\left(0 \mid \frac{1}{4}k - 2\right) \Rightarrow P_{4_y}\left(0 \mid \frac{1}{4}\cdot 4 - 2\right) \Rightarrow P_{4_y}(0 \mid -1)$$

$$P_{k_x}\left(2\cdot \ln\left(\frac{8}{k}\right) \mid 0\right) \Rightarrow P_{4_x}\left(2\cdot \ln\left(\frac{8}{4}\right) \mid 0\right) \Rightarrow P_{4_x}(1,39 \mid 0)$$

$$x_{k_{Min}} = 2\cdot \ln\left(\frac{4}{k}\right) \Rightarrow x_{4_{Min}} = 2\cdot \ln\left(\frac{4}{4}\right) = 0 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{Min}}\right) = -1 \Rightarrow P_{4_{Min}}(0 \mid -1)$$

$$x_{k_w} = 2\cdot \ln\left(\frac{2}{k}\right) \Rightarrow x_{4_w} = 2\cdot \ln\left(\frac{2}{4}\right) \approx -1,39 \Rightarrow f_4\left(x_{4_w}\right) = -0,75 \Rightarrow$$

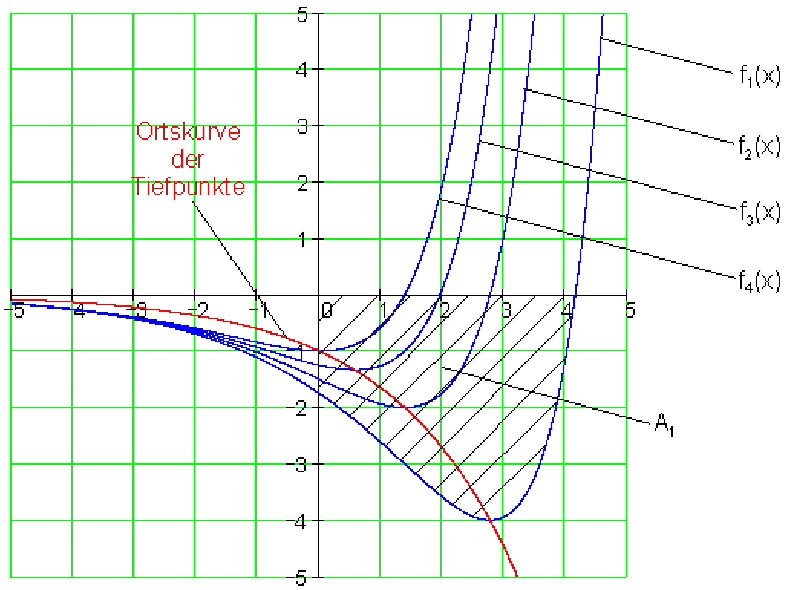
$$\Rightarrow P_{4_w}(-1,39 \mid -0,75)$$

د تابع ګراف

$$f(k,x) := \frac{1}{4}\cdot k\cdot e^{x} - 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} \qquad f_{ok}(x) := -e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

د ټيټتکي لپاره ځای کړّ

(c) ketabton.com: The Digital Library



ح – معلومه سطحه :

$$A_k = \left| -\frac{16}{k} - \frac{1}{4}k + 4 \right| \text{ für } k = 1 \text{ gilt:}$$

$$A_1 = \left| -\frac{16}{1} - \frac{1}{4} \cdot 1 + 4 \right| = \left| -16 + 4 - \frac{1}{4} \right| = \left| -12 - \frac{1}{4} \right| = |-12{,}25| = \underline{\underline{12{,}25FE}}$$

پوښتنې

مشتق – او انتيګرال شميرنو ته پوښتنې

د e -تابع سره پوښتنې.

لومړی: د k>0 او $x \in \mathbb{R}$ لپاره تابع $f_k(x) = (k-x)e^{\frac{1}{2}x}$ ورکړې

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف- محورغوڅېکي، که شتون ولري، وشمیرئ.

ب- افراېی ټکي، ه شتون ولري، وشمیرئ.

پ-اوړونټکی یا د انعطاف ټکي، که شتون ولري، وشمیرئ.

ت- د تعریفورشو پوله ارزښت لپاره تابعارزښتونه وټاکئ.

ټ- د محورغوڅېکو او x – محور ترمنځ سطحه A_k وټاکئ.

ث- په یو پروتولاړ یا کواورد ینانسیستم کې د $x \in \{-5;-4;\ldots;4;5\}$ او $k \in \{1;2;3;4\}$ لپاره ارزښت جدول وکاږئ.

ج- د لاندې ځایګړو یا ـمنحنیو مساواتابع وشمیرئ:

د $f_k(x)$ د جګېکي ځایکړه یا ـمنحني $f_{okh}(x)$ او

د $f_k(x)$ د جګېکي اوړونټکي یا د انعطافټکي $f_{okw}(x)$ او دا په یوه پروتولاړسیستم (قیمتوضعیه؟؟) کې وکاږئ.

چ- د $k = 4$ لپاره سطحه A_4 وشمیرئ او دا په پروتولاړسیستم(یا قیمت وضعیه) کې وکاږئ.

دویم: د $k \in \mathbb{R}$ او $x \in \mathbb{R}$ لپاره دې تابع $f_k(x) = (x^2 - k) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$ ورکړ شوې وي.

الف- محور غوڅېکي، که شتون ولري، وشمیرئ. د کوم k ارزښت لپاره صفرځای شتون لري؟

ب- د $f_k(x)$ لومړي درې مشتقونه وشمیرئ.

پ- $f_k(x)$ د افراطي ځایونو په هکله وڅېړی او د افراطیت او د k په واکولي یا تابعیت باندې یې یوه وینا (دا چې وینا څه شی دی ، د سم ا ند یا منطق برخ کې یې کتلی شئ) وکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت - $f_k(x)$ په اوړونځاییونو بندې دk په واکلوالي کې وڅیړئ.

ټ- د په واکوالي کې دې د A_k سطحه د صفرځایونو او د x –محور ترمنځ وشمیرل شي.

مرستموقف: $\int x^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}\,dx = \left(2x^2 - 8x + 16\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + C$

ث- په یوه پروتولاړسیستم یا د وضعیهقیمت سیستم کې د $k \in (-4; -2; 0; 2; 4)$ لپاره ګراف وکاږئ.

د لاندې ارزښت جدول ځخه داتا وکاروئ.

x	−10	−8	−6	−4	−2	0	2
$f_{-4}(x)$	0,7	1,25	1,99	2,71	2,94	4	21,75
$f_{-2}(x)$	0,69	1,21	1,89	2,44	2,21	2	16,31
$f_0(x)$	0,67	1,17	1,79	2,17	1,47	0	10,97
$f_2(x)$	0,66	1,14	1,69	1,89	0,74	−2	5,44
$f_4(x)$	0,65	1,1	1,59	1,62	0	−4	0

برسیره پردې، که غوښتوني ووو،صفرځایونه، افراطي ځایونه او اوړونټکي یا د انعطاف ټکي.

ج- د سطحه وشمیرئ او سطحه په پروته- ولاړسیستم یا وضعیه قیمت سیسم کې په نخښه کړئ.

حلونه

مشتق او انتیګرالشمیرنې ته پارامتریکي پوښتنې II

نتیجې او مفصل حلونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

اول – نتیجې

الف - $P_{k_x}(k|0)$ $P_{k_y}(0|k)$

ب –

جګتیکی : $P_{k_{Max}}\left(k-2 \,|\, 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right)$

ث –

$\lim_{x\to\infty} f_k(x) = -\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = 0$

ټ -

سطحه: $A_k = \left|4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - 2k - 4\right|$

د ځایکړې یا ځایمنحني د جګتیکو لپاره تابع مساوات:	$f_{okh}(x) = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$
د ځایکړې یا ځایمنحني د د تولو انعطافتیکو لپاره تابع مساوات:	$f_{okw}(x) = 4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$

k = 4 17,556 FE

دویم – نتیجې :

الف -

$P_{k_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{k} \,|\, 0\right)$ $P_{k_y}(0|-k)$

ب –

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

$$f_k'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k\right) \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$f_k''(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2\right) \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$f_k'''(x) = \left(\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}k + 3\right) \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

پ - د$k>-4$ لپاره د $x_1 = -2+\sqrt{4+k}$ په ځای کې یو نسبي خورا ټیټ ټکی پروت دی.

د $k>-4$ لپاره د $x_2 = -2-\sqrt{4+k}$ په ځای کې یو نسبي خورا جګ ټکی پروت دی.

ت - $x_1 = -4+\sqrt{8+k}$ یو اوړنټکی یا انعطا فټکی، که $k>-8$ وي.

$x_2 = -4-\sqrt{8+k}$ یو اوړنټکی یا انعطا فټکی، که $k>-8$ وي.

ټ -

ث – مفصل حل وګوری

ج – سطحه $A_4 = 11{,}772$ FE

اول – مفصل حلونه

الف د y –محور سره غوښتکی:

$$f_k(x) = (k-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$y_s = f_k(0) = (k-0) \cdot e^{\frac{1}{2}0} = k \cdot 1 = k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}(0 \mid k)}}$$

د x –محور سره غوښتکی(صفرځایونه):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_k(x)=0 \Leftrightarrow \left(\underbrace{k-x}_{0}\right)\cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0}=0$$

د پیتاګوراس(فیثاغرث) جمله وکاروئ

$$k-x=0|+x \Leftrightarrow k=x \Leftrightarrow x=k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_x}(k|0)}}$$

ب – د انحراف ټکي

$$f_k(x)=(k-x)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x)=u'v+uv'\ r$$

د $u=k-x \Rightarrow u'=-1$ او $v=e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$\Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x)=-1\cdot e^{\frac{1}{2}x}+(k-x)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k-1\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k''(x)=u'v+uv'$$

د $u=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k-1 \Rightarrow u'=-\frac{1}{2}$ او $v=e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$f_k''(x)=-\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k-1\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x)=u'v+uv'$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $u=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1 \Rightarrow u'=-\frac{1}{4}$ او $\text{l}\,v=e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$f_k'''(x)=u'v+uv' \text{ mit } u=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1 \Rightarrow u'=-\frac{1}{4} \text{ und } v=e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'''(x)=u'v+uv'$$

د $u=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1 \Rightarrow u'=-\frac{1}{4}$ او $v=e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v'=\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

$$f_k'''(x)=-\frac{1}{4}\cdot e^{\frac{1}{2}x}+\left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\left(-\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}k-\frac{3}{4}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x)=0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k-1\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}=0$$

د پیتاگوراس جمله وکاروئ

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}k-1=0 \Leftrightarrow x=k-2$$

$$\Leftrightarrow x=k-2\ \text{i}$$

یو ممکنه افراطي ځای دی.

د دویم مشتق(رابیلیدني) سره یي ازماېښت: $f_k''(x)\neq 0$

$$f_k''(x)=f_k''(k-2)=\left[-\frac{1}{4}(k-2)+\frac{1}{4}k-1\right]\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-2)}=-\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}<0$$

په $x=x_E=k-2$ کې یو نسبي خرا تیتټکی (خورا جګ ټکی) شتون لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

افراطي ارزښتونه:

$$y_{k_E} = f_k(x_E) = f_k(k-2) = \left[k-(k-2)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}(k-2)} = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}$$

له دې لاس ته رځی، چی ټټکی: $\underline{\underline{P_{k_{Max}}\left(k-2\,|\,2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right)}}$

پ – د انعطاف ټکي]

$$f_k''(x) = \left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x} \qquad f_k'''(x) = \left(-\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}k-\frac{3}{4}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

د اوړونټکي یا انعطافټکي لپاره اړین- یا ضروري شرایط:

$$f_k''(x) = 0 \wedge f_k'''(x) \neq 0$$

$$f_k''(x) = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0|$$

د پیتاګوراس جمله وکاروئ یا استعمال کړئ

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}k-1=0 \Leftrightarrow x=k-4$$

په $x = x_w = k-4$ کې یو اوړونټکی یا د انعطافټکی شته.

$$y_{k_w} = f_k(x_w) = f_k(k-4) = \left[k-(k-4)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(k-4)} = 4\cdot e^{\frac{1}{2}k-2}$$

له دې لاس ته را ځي، چې اوړونټکی دی:

$$\underline{\underline{P_{k_w}\left(k-4\,|\,4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}\right)}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت – د تعریف ورشو پولې لپاره د تابع ارزښتونه.

تاکو: $\lim_{x\to\pm\infty} f_k(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f_k(x)=\lim_{x\to-\infty}(k-x)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}=0$$

د $x\to\infty$ لپاره د x-محور د $f_k(x)$ ګاونډ(مجاورت یا ا سیمپتوت) دی.

ټ – صفرځای: $x_1=k$ له دې لاس ته راځي د سطحې انتیګرال $A_k=\left|\int_0^k f_k(x)\,dx\right|$

$$\int_0^k f_k(x)\,dx=\int_0^k(k-x)\cdot e^{\frac{1}{2}x}\,dx$$

د توټه – یا پارشل انتیګرال له لارې حل لومړی تولیز یا عمومي

$$\int\underbrace{(k-x)}_{u(x)}\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{v'(x)}dx=u(x)\cdot v(x)-\int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

$$u(x)=k-x\Rightarrow u'(x)=-1$$

$$v'(x)=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow v(x)=\int e^{\frac{1}{2}x}\,dx=2\cdot e^{\frac{1}{2}x}+C$$

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,dx=\int(-1)\cdot2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx=-2\cdot\int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx=-4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$\int f_k(x)\,dx=(k-x)\cdot2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}-\left(-4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right)+C=2k\cdot e^{\frac{1}{2}x}-2x\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}+4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}+C$$

$$\int_0^k f_k(x)\,dx=\left[2k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}-2x\cdot e^{\frac{1}{2}x}+4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right]_0^k$$

$$=2k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k}-2k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k}+4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k}-\left(2k\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot0}-2\cdot0\cdot e^{\frac{1}{2}0}+4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot0}\right)=4\cdot e^{\frac{1}{2}k}-2k-4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره سطحه کيږي يا ده:

$$\underline{\underline{A_k = \left|4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k} - 2k - 4\right|}}$$

ث – ارزښاجدول او د ګرو يا منحنی کودې (ګزافونه).

محور غوڅتکي، ټيټتکي او اوړونتکي يا د ا نعطاف تکي دې برسيره ارزښت جدول ته ورو‌شميرل شي.

$$P_{k_y}(0|k);\quad P_{k_x}(k|0);\quad P_{k_{Max}}\left(k-2\,|\,2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}\right);\quad P_{k_w}\left(k-4\,|\,4\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}\right)$$

$k=1:$

$$P_{1_y}(0|1);\quad P_{1_x}(1|0);\quad P_{1_{Min}}\left(-1\,|\,2\cdot e^{-\frac{1}{2}}\approx 1{,}21\right);\quad P_{1_w}\left(-3\,|\,4\cdot e^{-\frac{3}{2}}\approx 0{,}89\right)$$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0,49	0,68	0,89	1,1	1,21	1	0	−2,72	−8,96	−22,17	−48,73

$k=2:$

$$P_{2_y}(0|2);\quad P_{2_x}(2|0);\quad P_{2_{Min}}\left(0\,|\,2\cdot e^{0}=2\right);\quad P_{2_w}\left(-2\,|\,4\cdot e^{-1}\approx 1{,}47\right)$$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_2(x)$	0,57	0,81	1,12	1,47	1,82	2	1,65	0	−4,48	−14,78	−36,55

$k=3:$

$$P_{3_y}(0|3);\quad P_{3_x}(3|0);\quad P_{3_{Min}}\left(1\,|\,2\cdot e^{\frac{1}{2}}\approx 3{,}3\right);\quad P_{3_w}\left(-1\,|\,4\cdot e^{-\frac{1}{2}}\approx 2{,}43\right)$$

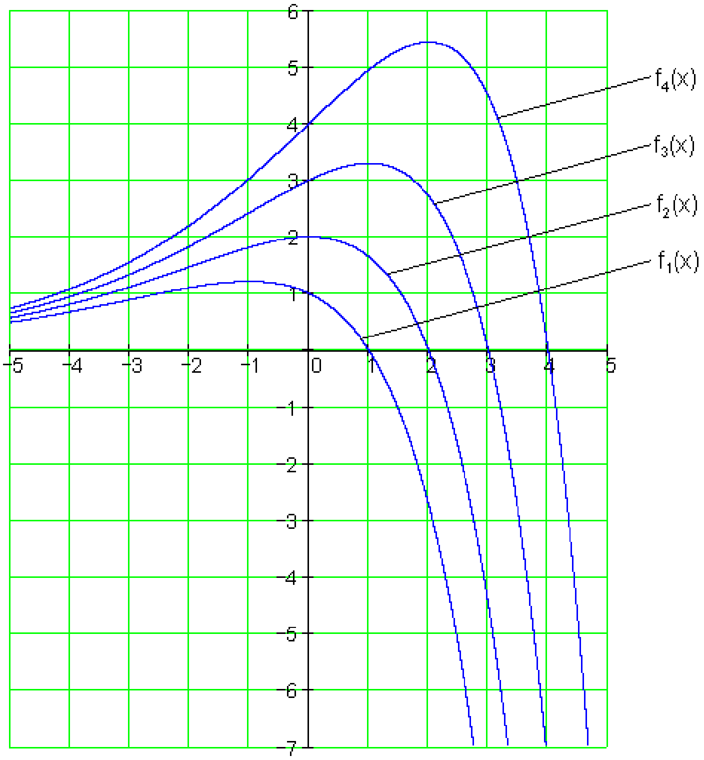
x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_3(x)$	0,66	0,95	1,34	1,84	2,43	3	3,3	2,72	0	−7,39	−24,36

K=4 :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P_{4_y}(0|4);\quad P_{4_x}(4|0);\quad P_{4_{Min}}(2|2\cdot e^1 \approx 5{,}44);\quad P_{4_w}(0|4\cdot e^0 = 4)$

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
$f_4(x)$	0,74	1,08	1,56	2,21	3,03	4	4,95	5,44	4,48	0	−12,18



ج ـ د ځای یا محلي منحني شمیرنه :

$$P_{k_{Max}}\left(\underbrace{k-2}_{x}\,|\,\underbrace{2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1}}_{y}\right) \Rightarrow x = k-2 \quad (1) \quad y = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-1} \quad (2)$$

(۱) په k پسې حل کړئ: $x = k-2 \quad \Leftrightarrow \quad k = x+2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نتخجه په (۲) کې کیږدئ:

$$y = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(x+2)-1} = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x+1-1} = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

له دې سره دټولو جګټکو لپاره د ځای کږې یا ځای-منحني تابعمساوا ت کیږي:

$$\underline{\underline{f_{okh}(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}}}$$

$$P_{k_w}\left(\underbrace{k-4}_{x} \mid \underbrace{4 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2}}_{y}\right) \Rightarrow x = k-4 \quad (1) \quad y = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot k-2} \quad (2)$$

(۱) په k پسې حل کړئ:

$$x = k-4 \quad \Leftrightarrow \quad k = x+4$$

نتیجه په (۲) کې کیږدئ

$$y = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot(x+4)-2} = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x+2-2} = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

له دې سره د ټولو اوړنټکو یا انعطافټکو لپاره د تابعمساوات دي:

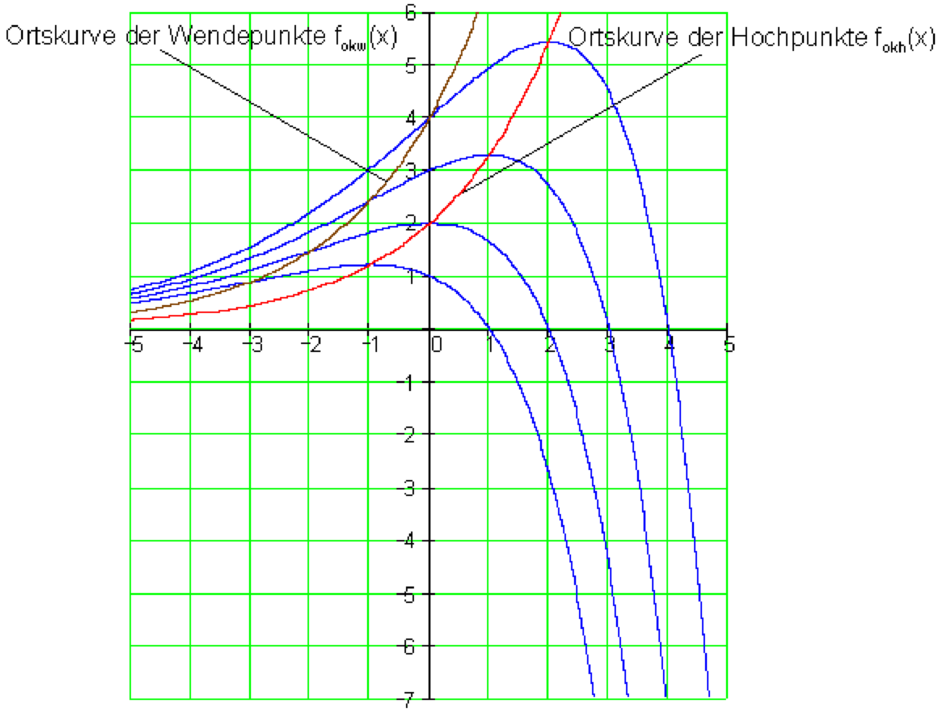
$$\underline{\underline{f_{okw}(x) = 4 \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}}}$$

لاندې له کیڼ و ښي لور ته:

د جګټکي... ځایمنحني   د اوړونټکی یا انعطافټکي منحنۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د الماني پښتو: له کيڼ څخه ښي لور ته: د اوړونټکي يا انعطافټکي ځای کرښه د جګټکي ځای کرښه.



ح – د $k = 4$ لپاره سطحه:

$$A_k = \left|4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot k} - 2k - 4\right|$$

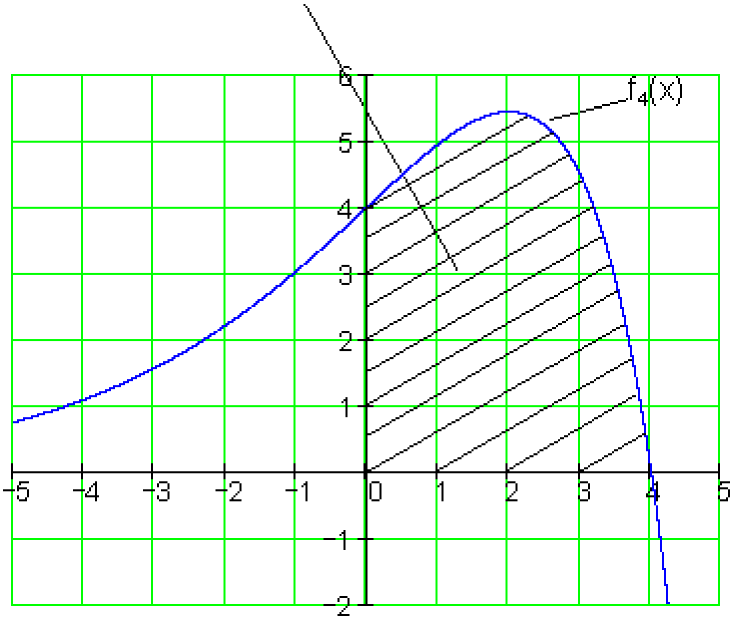
نيجه له ټ څخه

$$A_4 = \left|4 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 4} - 2 \cdot 4 - 4\right| = \left|4 \cdot e^2 - 8 - 4\right| = \left|4 \cdot e^2 - 12\right| \approx 17{,}556$$

د $k = 4$ لپاره سطحه $\underline{\underline{17{,}556\ FE}}$ (يونه يا وحدونه)ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

A_4 د محورغوڅتکو او x -محور ترمنځ سطحه.



دویم – مفصل حل

الف –

د y –محور سره غوڅتکی:

$$f_k(x) = \left(x^2 - k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$y_s = f_k(0) = \left(0^2 - k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot 0} = -k\cdot 1 = -k \Rightarrow \underline{\underline{P_{k_y}(0|-k)}}$$

د x - محور سره غوڅتکی(صفرځایونه):

د پیتاګوراس جمله وکاروئ

$$f_k(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\underbrace{x^2 - k}_{=0}\right)\cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{\neq 0} = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^2 - k = 0 | +k \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = k | \sqrt{\ } \quad \Leftrightarrow \quad |x| = \sqrt{k}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{k_{x1/2}} = \pm\sqrt{k} \text{ für } k \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{P_{k_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{k} \mid 0\right)}$$

صفرځایونه فقط د $k \geq 0$ لپاره شتون لري.

ب - مشتقونه

$$f_k(x) = \left(x^2 - k\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f_k'(x) = u'v + uv'$$

د $u = x^2 - k \Rightarrow u' = 2x$ او $v = e^{\frac{1}{2}\cdot x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$ سره

$$f_k'(x) = 2x \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + \left(x^2 - k\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} = \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k\right) \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$f_k''(x) = u'v + uv'$$

د $u = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k \Rightarrow u' = x + 2$ او $v = e^{\frac{1}{2}\cdot x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$ سره

$$f_k''(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} + \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2}k\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} = \left(\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2\right) \cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$$

$$f_k'''(x) = u'v + uv'$$

د $u = \frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{4}k + 2 \Rightarrow u' = \frac{1}{2}x + 2$ او $v = e^{\frac{1}{2}\cdot x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_k'''(x)=\left(\frac{1}{2}x+2\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}+\left(\frac{1}{4}x^2+2x-\frac{1}{4}k+2\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}=\left(\frac{1}{8}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{8}k+3\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

پ - د افراط ټکي:

$$f_k'(x)=0\Leftrightarrow\left(\underbrace{\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}k}_{0}\right)\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{\neq 0}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}k=0|\cdot 2\quad\Leftrightarrow\quad x^2+4x-k=0$$

$$p=4;\quad q=-k\quad\Rightarrow\quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=4+k\quad\Rightarrow\quad\sqrt{D}=\sqrt{4+k}$$

د$k\geq 0$ لپاره شتون لري

د$k\geq 0$ لپاره	$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ $\quad x_1=-2+\sqrt{4+k}$, $x_2=-2-\sqrt{4+k}$

د$-4\geq k$ لپاره x_1 او x_2 ځایونه دي د پراته-ولاړ تانجنت سره

د $0>k$لپاره پروت-ولاړ تانجنت نه شته

د افراطیت ډول: $f_k''(x_{1/2})\neq 0$

$$f_k''(x_{1/2})=\left(\frac{1}{4}x_{1/2}^2+2\cdot x_{1/2}-\frac{1}{4}k+2\right)\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x_{1/2}}}_{>0}$$

که $0<(...)$ وي، نو لاس ته راځي، چې په $x_{1/2}$ کې مینیموم یا خوراتیټ ټکی لرو.

که $0>(...)$ وي، نو لاس ته راځي، چې په $x_{1/2}$ کې ماکسیموم یا خورا جګ ټکی لرو

منځشمیرنه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$: x_1^2 = \left(-2+\sqrt{4+k}\right)^2 = 8-4\cdot\sqrt{4+k}+k$$

$$x_2^2 = \left(-2-\sqrt{4+k}\right)^2 = 8+4\cdot\sqrt{4+k}+k$$

$$\left(\frac{1}{4}x_1^2+2\cdot x_1-\frac{1}{4}k+2\right)=\left[\frac{1}{4}\cdot\left(8-4\cdot\sqrt{4+k}+k\right)+2\cdot\left(-2+\sqrt{4+k}\right)-\frac{1}{4}k+2\right]=$$

$$=\sqrt{4+k}>0$$

د $x_1=-2+\sqrt{4+k}$ په ځای کې یو نسبي مینیموم پروت دی، که $k > -4$ وي.

$$\left(\frac{1}{4}x_2^2+2\cdot x_2-\frac{1}{4}k+2\right)=\left[\frac{1}{4}\cdot\left(8+4\cdot\sqrt{4+k}+k\right)+2\cdot\left(-2-\sqrt{4+k}\right)-\frac{1}{4}k+2\right]=$$

$$=-\sqrt{4+k}<0$$

د $x_2=-2-\sqrt{4+k}$ په ځای کې یو نسبي خورا ټيټټکی پروت دی، که $k > 0$ وي.

د $k=-4$ لپاره $\sqrt{4+k}=0$ دی، یعنې $f_k''(x_{1/2})=0$ په دې حالت کې د $x_{1/2}$ په ځای کې په حقیقت کې یو پروت-ولاړ تانجنت شتون لري مګر نه افراطي ارزښت.

ت – د انعطاف ټکی یا اوړونټکی

$$f_k''(x)=0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(\frac{1}{4}x^2+2x-\frac{1}{4}k+2\right)}_{=0}\cdot\underbrace{e^{\frac{1}{2}\cdot x}}_{\neq 0}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2+2x-\frac{1}{4}k+2=0|\cdot 4 \quad\Leftrightarrow\quad x^2+8x-k+8=0$$

$$p=8;\quad q=-k+8 \quad\Rightarrow\quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=16-(-k+8)=16+k-8=8+k$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\quad\left|\begin{array}{l}x_1=-4+\sqrt{8+k}\\ x_1=-4-\sqrt{8+k}\end{array}\right.\quad \text{für } k\geq -8$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k \geq 0$ لپاره x_1 او x_2 ممکنه اوړونټکي یا د انعطاف ټکي دي.

د $k < 0$ لپاره اوړونټکي نه شته

د اوړونځایونو ازمایښت: $f_k'''(x_{1/2}) \neq 0$

$$f_k'''(x_{1/2}) = \left(\frac{1}{8}x_{1/2}^2 + \frac{3}{2}x_{1/2} - \frac{1}{8}k + 3\right) \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2} \cdot x_{1/2}}}_{\neq 0}$$

که $(\ldots) \neq 0$ وي نو لاس ته راځي، چې اوړونټکی په $x_{1/2}$ کې.

منځشمیرنه:

$$: x_1^2 = \left(-4 + \sqrt{8+k}\right)^2 = 24 - 8 \cdot \sqrt{4+k} + k$$

$$x_2^2 = \left(-4 - \sqrt{8+k}\right)^2 = 24 + 8 \cdot \sqrt{4+k} + k$$

$$\frac{1}{8}x_1^2 + \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{8}k + 3 = \left[\frac{1}{8}\left(24 - 8 \cdot \sqrt{4+k} + k\right) + \frac{3}{2}\left(-4 + \sqrt{8+k}\right) - \frac{1}{8}k + 3\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{8+k} \neq 0$$

د $k > -8$ لپاره یو اوړنځای یا د انعطاف ځای دی. $x_1 = -4 + \sqrt{8+k}$

$$\frac{1}{8}x_2^2 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{8}k + 3 = \left[\frac{1}{8}\left(24 + 8 \cdot \sqrt{4+k} + k\right) + \frac{3}{2}\left(-4 - \sqrt{8+k}\right) - \frac{1}{8}k + 3\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{8+k} \neq 0$$

د $k > -8$ لپاره یو اوړونټکی یا د انعطافټکی دی. $x_2 = -4 - \sqrt{8+k}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ت- د سطحې د مساحت ټولیزه شمیرنه

$P_{k\times 1/2}\left(\pm\sqrt{k}\,|\,0\right)$ صفرځایونه فقط د $k\geq 0$ لپاره شتون لري

دا انتیګرال غواړو وشمیرو:

$$\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x)\,dx = \int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} \left(x^2-k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = \underbrace{\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} x^2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx}_{I} - k\cdot \underbrace{\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx}_{II} = I - k\cdot II$$

ټولیز حل I مخ له مخه ورکول کیږي

$$\int x^2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = \left(2x^2-8x+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}+C$$

حل II:

$$\int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx \quad \text{Substitution: } u(x)=\frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2\cdot du$$

$$\Rightarrow \int e^{\frac{1}{2}\cdot x}\,dx = 2\cdot\int e^u\,du = 2\cdot e^u = 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}+C$$

سره راټولول یا یوځای کول:

$$\int f_k(x)\,dx = I - k\cdot II = \left(2x^2-8x+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x} - k\cdot 2\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}+C =$$

$$= \left(2x^2-8x+16-2k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}+C$$

د پولو ځای په ځای کونه یا ایښونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x)\,dx = \left[\left(2x^2-8x+16-2k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}\right]_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}$$

$$= \left(2k-8\sqrt{k}+16-2k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}} - \left(2k+8\sqrt{k}+16-2k\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}}$$

$$= \left(-8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}} - \left(8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}}$$

د فزیکي سطحې پاره باور لري:

$$A_k = \left|\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x)\,dx\right| = \left|\left(-8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}} - \left(8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{k}}\right|$$

الف-

K=-4

$k < 0$ صفرځای نه شته، ځکه چې $P_{k_y}(0|-k) \Rightarrow P_{-4_y}(0|4)$

افراطي ځای نه شته، ځکه د $k=-4$ لپاره شرط $k > -4$ پوره نه دی

$$x_{k_{w1}} = -4+\sqrt{8+k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{-4_{w1}} = -4+\sqrt{8-4} = -4+\sqrt{4} = -2 \Rightarrow f_{-4}\left(x_{-2_{w1}}\right) \approx 2{,}94$$

$$x_{-4_{w2}} = -4-\sqrt{8-4} = -4-\sqrt{4} = -6 \Rightarrow f_{-4}\left(x_{-4_{w2}}\right) \approx 1{,}99$$

K=-2

$k < 0$ صفرځای نه شته، ځکه چې $P_{k_y}(0|-k) \Rightarrow P_{-2_y}(0|2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{k_{Min}} = -2+\sqrt{4+k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{-2_{Min}} = -2+\sqrt{4-2} = -2+\sqrt{2} \approx -0{,}59 \Rightarrow f_{-2}\left(x_{-2_{Min}}\right) \approx 1{,}75$$

$$x_{-2_{Max}} = -2-\sqrt{4-2} = -2-\sqrt{2} \approx -3{,}41 \Rightarrow f_{-2}\left(x_{-2_{Max}}\right) \approx 2{,}48$$

$$x_{k_{w1}} =$$

$$= -4+\sqrt{8+k} \Rightarrow x_{-2_{w1}} = -4+\sqrt{8-2} = -4+\sqrt{6} \approx -1{,}55 \Rightarrow f_{-2}\left(x_{-2_{w1}}\right) \approx 2{,}03$$

$$x_{-4_{w2}} = -4-\sqrt{8-2} = -4-\sqrt{6} \approx -6{,}45 \Rightarrow f_{-2}\left(x_{-2_{w2}}\right) \approx 1{,}73$$

$$k = 0$$

$$P_{k_y}(0|-k) \Rightarrow P_{0_y}(0|0)$$

$$P_{k_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{k}\,|\,0\right) \Rightarrow P_{0_{x1/2}}(0|0)$$ دبل صفرځايونه

$$x_{k_{Min}} = -2+\sqrt{4+k} \Rightarrow x_{0_{Min}} = -2+\sqrt{4+0} = -2+\sqrt{4} = 0 \Rightarrow f_0\left(x_{0_{Min}}\right) = 0$$

$$x_{0_{Max}} = -2-\sqrt{4+0} = -2-\sqrt{4} = -4 \Rightarrow f_0\left(x_{0_{Max}}\right) \approx 2{,}17$$

$$x_{k_{w1}} = -4+\sqrt{8+k} \Rightarrow x_{0_{w1}} = -4+\sqrt{8+0} = -4+\sqrt{8} \approx -1{,}17 \Rightarrow f_0\left(x_{0_{w1}}\right) \approx 0{,}76$$

$$x_{0_{w2}} = -4-\sqrt{8+0} = -4-\sqrt{8} \approx -6{,}83 \Rightarrow f_0\left(x_{0_{w2}}\right) \approx 1{,}53$$

$$k = 2$$

$$P_{k_y}(0|-k) \Rightarrow P_{2_y}(0|-2)$$

$$P_{k_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{k}\,|\,0\right) \Rightarrow P_{2_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}41\,|\,0\right)$$

$$x_{k_{Min}} = -2+\sqrt{4+k} \Rightarrow x_{2_{Min}} = -2+\sqrt{4+2} = -2+\sqrt{6} \approx 0{,}45 \Rightarrow f_2\left(x_{2_{Min}}\right) \approx -2{,}25$$

$$x_{2_{Max}} = -2-\sqrt{4+2} = -2-\sqrt{6} \approx -4{,}45 \Rightarrow f_2\left(x_{2_{Max}}\right) \approx 1{,}92$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{k_{w1}} = -4+\sqrt{8+k} \Rightarrow x_{2_{w1}} = -4+\sqrt{8+2} = -4+\sqrt{10} \approx -0,84 \Rightarrow f_2\left(x_{2_{w1}}\right) \approx -0,85$$

$$x_{2_{w2}} = -4-\sqrt{8+2} = -4-\sqrt{10} \approx -7,16 \Rightarrow f_2\left(x_{2_{w2}}\right) \approx 1,37$$

$k = 4$

$P_{k_y}(0|-k) \Rightarrow P_{4_y}(0|-4)$

$P_{k_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{k}\,|\,0\right) \Rightarrow P_{4_{x1/2}}\left(\pm\sqrt{4} = \pm 2\,|\,0\right)$

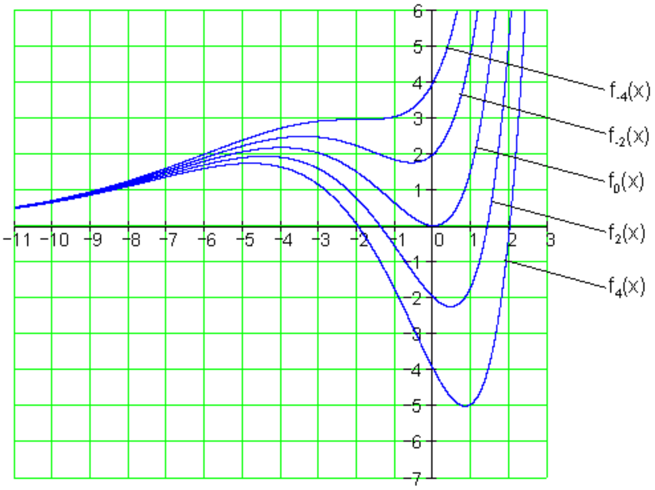
$$x_{k_{Min}} = -2+\sqrt{4+k} \Rightarrow x_{4_{Min}} = -2+\sqrt{4+4} = -2+\sqrt{8} \approx 0,83 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{Min}}\right) \approx -5,01$$

$$x_{4_{Max}} = -2-\sqrt{4+4} = -2-\sqrt{8} \approx -4,83 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{Max}}\right) \approx 1,73$$

$$x_{k_{w1}} = -4+\sqrt{8+k} \Rightarrow x_{4_{w1}} = -4+\sqrt{8+4} = -4+\sqrt{12} \approx -0,54 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{w1}}\right) \approx -2,84$$

$$x_{4_{w2}} = -4-\sqrt{8+4} = -4-\sqrt{12} \approx -7,46 \Rightarrow f_4\left(x_{4_{w2}}\right) \approx 1,24$$

د $f_k(x) = \left(x^2-k\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\cdot x}$ $k \in \mathbb{R}$ او $x \in \mathbb{R}$ لپاره



د فزیکي سطحې لپاره باور لري:

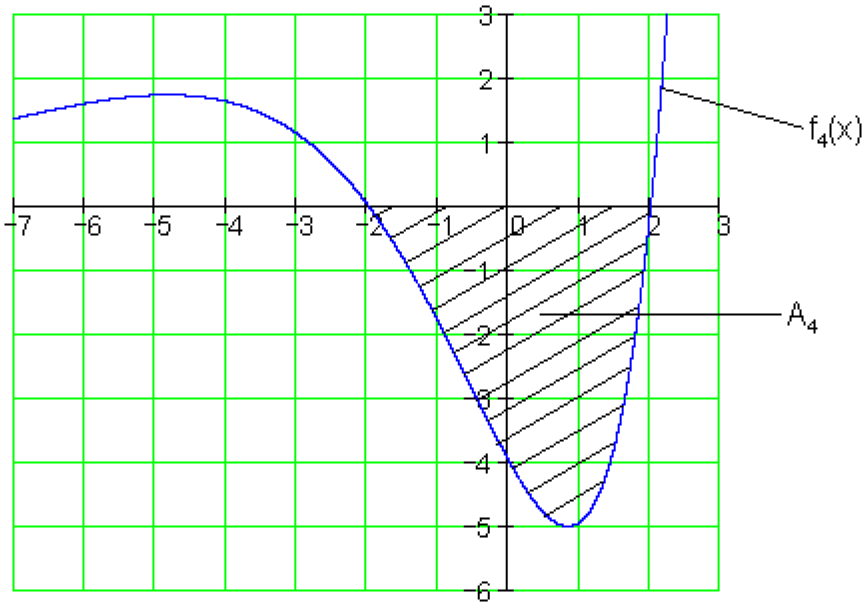
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A_k = \left|\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} f_k(x)\,dx\right| = \left|\left(-8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\sqrt{k}} - \left(8\sqrt{k}+16\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{k}}\right|$$

په ځانګړې توګه د k=4 لپاره باور لري:

$$A_4 = \left|\int_{-\sqrt{4}}^{\sqrt{4}} f_4(x)\,dx\right| = \left|\left(-8\sqrt{4}+16\right)\cdot e^{\frac{1}{2}\sqrt{4}} - \left(8\sqrt{4}+16\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\sqrt{4}}\right|$$

$$= \left|(-8\cdot 2+16)\cdot e-(8\cdot 2+16)\cdot e^{-1}\right| = \left|-32\cdot e^{-1}\right| \approx \left|-11{,}772\right| = \underline{\underline{11{,}772 FE}}$$



ساده مشتق- او انتیګرالشمیرنه (د یوه ساده تابع رابیلونه او ورګډونه)

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع	مشتق	بنستیزه تابع
$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$
$f(x)=k$	$f'(x)=0$	$F(x)=k\cdot x+C$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \quad (n\neq -1)$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$	$F(x)=e^x+C$
$f(x)=a^x$	$f'(x)=a^x\cdot\ln(a)$	$F(x)=\frac{1}{\ln(a)}a^x+C \quad (a>0, a\neq 1)$
$f(x)=\ln(x)$	$f'(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=x\cdot\ln(x)-x+C \quad (x>0)$
$f(x)=\sin(x)$	$f'(x)=\cos(x)$	$F(x)=-\cos(x)+C$
$f(x)=\cos(x)$	$f'(x)=-\sin(x)$	$F(x)=-\cos(x)+C$
$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}=-x^{-2}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert+C \quad (x\neq 0)$

د مشتق ـ او انتیګرالشمیرنو سره مخامخ کول

د ثابتي قانون

$f(x)=k\cdot u(x)$ mit $k=\text{konstant}$ $\Rightarrow f'(x)=k\cdot u'(x)$ = ثابته یا همغه	$f(x)=k\cdot u(x)$ mit $k=\text{konstant}$ $\int f(x)\,dx=\int k\cdot u(x)\,dx=k\cdot\int u(x)\,dx$ = ثابته یا همغه

(c) ketabton.com: The Digital Library

بيلګه:	بيلګه:
$f(x) = 3x^4 \quad k = 3 \quad u(x) = x^4$ $\Rightarrow u'(x) = 4x^3$ $f'(x) = k \cdot u'(x) = 3 \cdot 4x^3 = \underline{\underline{12x^3}}$	$f(x) = 3x^2 \Rightarrow k = 3 \quad u(x) = x^2$ $\int f(x)\,dx = 3 \cdot \int u(x)\,dx = 3 \cdot \int x^2\,dx$ $= 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C = \underline{\underline{x^3 + C}}$
د جمعي قانون Summenregel $f(x) = u(x) \pm v(x)$ $\Rightarrow f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$	$f(x) = u(x) \pm v(x)$ $\int f(x)\,dx = \int u(x)\,dx \pm \int v(x)\,dx$
بيلګه: $f(x) = 5x^2 + 3x$ $u(x) = 5x^2 \quad v(x) = 3x$ $\Rightarrow u'(x) = 10x \quad v'(x) = 3$ $f'(x) = u'(x) + v'(x) = \underline{\underline{10x + 3}}$	بيلګه: $f(x) = x^2 + x + 1$ $\int f(x)\,dx = \int x^2\,dx + \int x\,dx + \int 1\,dx$ $\underline{\underline{= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C}}$

د مشتقشميرنې لپاره نور قوانين

د ضرب قانون: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow$ in Kurzform: $\boxed{f' = u' \cdot v + u \cdot v'}$

بيلګه: دالماني پښتو: د... او... سره

$f(x) = x \cdot e^x$ mit $u(x) = x$ und $v(x) = e^x$

$f' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$u'(x) = 1;\ v'(x) = e^x$

$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \underline{\underline{(x+1)e^x}}$

د وېش قانون:دالماني پښتو : په لنډه بڼه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ لاس ته اوړنه په لنده بڼه $f'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$

بیلګه: $f(x)=\frac{e^x}{x}$ د $u(x)=e^x$ او $v(x)=x$ سره

$$f'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$u'(x)=e^x;\ v'(x)=1;\ v^2=x^2$$

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot x-e^x\cdot 1}{x^2}=\underline{\underline{\frac{(x-1)e^x}{x^2}}}$$

ځنځیزي قانون: د الماني پښتو: کیږ: د باندنی مشتق ښی: دننی مشتق

$$f(x)=f[z(x)]\Rightarrow f'(x)=\underbrace{f'(z)}_{\text{äußere Ableitung}}\cdot\underbrace{z'(x)}_{\text{innere Ableitung}}$$

دننی مشتق دباندنی مشتق

بیلګه: $f(x)=e^{2x}$

د $z=2x$ سره $f(z)=e^z$ لاس ته راځي

$$f'(x)=f'(z)\cdot z'(x)$$

$$f'(z)=e^z;\ z'(x)=2\Rightarrow f'(x)=e^z\cdot 2=\underline{\underline{2\cdot e^{2x}}}$$

تمرینونه : د مشتق تمرینونه د ضربقانون، وېش قانون، او زنځیري قاونو سره

د لاندې توابعو مشتق تاسو ته د معلومو قوانینو له مخې وشمېرئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اول – $f(x)=(x+a)^2-e^{2x-3}$ دویم- $f(x)=\left(1-e^{ax}\right)^2$

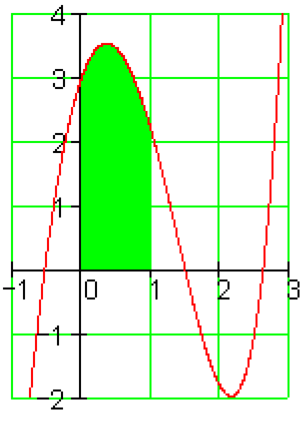
دریم - $f(x)=\left(e^{2x}+e^{-x}\right)^2$ خلورم - $f(x)=(x+1)e^x$

پنځم - $f(x)=(3-2x)e^{-\frac{1}{2}x}$ شپږم - $f(x)=a(x-3)e^{4x-3}$

اوم - $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$ اتم - $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ نهم - $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ لسم - $f(x)=\dfrac{1}{x}\left(x^2-4\right)$

د انتیګرالشمیرنې لپاره نورې لارې یا قوانین

د انتیګرالونو پوله بدلونه:

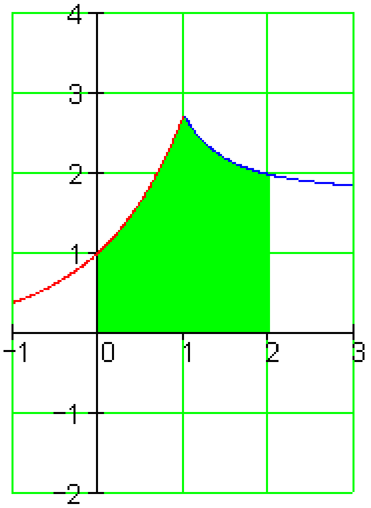
<table>
<tr><td>د انتیګرېشن پولو بدلون له لارې د انتیګرال مختخنبه تغیر خوري</td><td>$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ oder $-\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx$</td></tr>
<tr><td>دا په نخبنه شوې سطحه دې وشمیرل ش
$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(3e^x - 6x^2\right) dx$
$= 3\int_0^1 e^x\,dx - 6\int_0^1 x^2\,dx =$
$3\int_0^1 e^x\,dx + 6\int_1^0 x^2\,dx$
$= \left[3e^x\right]_0^1 + \left[2x^3\right]_1^0$
$= 3e^1 - 3e^0 + 2\cdot 0 - 2\cdot 1$
$= 3e^1 - 5 \approx \underline{\underline{3{,}155}}$</td><td>$f(x) := 3e^x - 6x^2$
</td></tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library

صفرانتیګرال

$\int_a^a f(x)\,dx = 0$	که په تاکلي اتیګرال کې کښته اوپورته پولې سره برابرې یامساوي وي، نود تاکلي انتیګرال ارزښت صفر دی.

د انتګروال جمعه

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$	د ټول انتیګرال ارزښت په برخه ساحو انتیګرالونو د جمعه کوني یا یو پر بل زیاتوني له لارې منځ ته راځي.
$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x < 1 \\ \frac{1}{x^2} + (e-1) & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$ په نخښه شوې سطحه دې وشمیل $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 e^x\,dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + e - 1\right) dx$ $= \left[e^x\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{x} + e\cdot x - x\right]_1^2$ $= e^1 - e^0 + \left[-\frac{1}{2} + 2e - 2\right] - [-1 + e - 1]$ $\approx \underline{\underline{3,937}}$	

تمرینونه: مشتق – او انتیګرالشمېرنه د **e** تابع سره.

د لاندې توابعو مشتق وشمېری.

اول - $f(x) = e^{-4x} - e^{4x}$ دویم - $f(x) = \frac{3}{2} e^{-5x^2 - 3x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم - $f(x) = -4e^{x}\left(e^{-x}+3\right)$ څلورم - $f(x) = -e^{t-x} - 2t\cdot e^{-tx}$

پنځم - $f(x) = t\cdot e^{2-3x} - 6e^{x^2+3}$ شپږم - $f(x) = t\left(e^{-x} - 3x^2\right)$

د لاندې توابعو انتیګرال ونیسۍ ا و د مشتق له لاې يې تيکوالى و ازمايۍ

اوم - $f(x) = \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^{x}\right)$ اتم - $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}$

نهم - $f(x) = t\cdot x - \frac{3}{2}e^{x} + t^2 + 2e$ لسم - $f(x) = t^2x\left(x^2 - 8x\right)$

ځوابونه:

د مشتق تمرينونه د ضربقانون، وېش قانون، او زنځيري قاونو سره

نتيجې او مفصل ځوابونه. نتيجې:

لومړی - $f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3} \Rightarrow f'(x) = 2\left(x+a-e^{2x-3}\right)$

دويم: $f(x) = \left(1-e^{ax}\right)^2 \Rightarrow f'(x) = -2a\cdot e^{ax}\left(1-e^{ax}\right)$

دريم: $f(x) = \left(e^{2x}+e^{-x}\right)^2 \Rightarrow f'(x) = 2\left(e^{2x}+e^{-x}\right)\cdot\left(2e^{2x}-e^{-x}\right)$

څلورم:- $f(x) = (x+1)e^{x} \Rightarrow f'(x) = (x+2)e^{x}$

پنځم: $f(x) = (3-2x)e^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow f'(x) = \left(x-\frac{7}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم: $f(x) = a(x-3)e^{4x-3} \Rightarrow f'(x) = a \cdot e^{4x-3}(4x-11)$

اووم: $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x^2+2x-1}{e^x}$

اتم: $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

نهم: $f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$

لسم: $f(x) = \frac{1}{x}(x^2-4) = x - \frac{4}{x} = x - 4x^{-1} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$

مفصل ځوابونه

لومړی:

د لاندې الماني پښتو: زنځيري لار يا قانو

$$f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3} = u(x) - v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) - v'(x)$$

$$\text{Kettenregel: } \quad u(x) = (x+a)^2 \Rightarrow u'(x) = 1 \cdot 2(x+a)$$

$$v(x) = e^{2x-3} \Rightarrow v'(x) = 2 \cdot e^{2x-3}$$

$$f'(x) = 2(x+a) - 2 \cdot e^{2x-3} = \underline{\underline{2\left(x+a-e^{2x-3}\right)}}$$

دویم:

$$f(x) = \left(1-e^{ax}\right)^2 = f[z(x)] \Rightarrow f'(x) = f'(z) \cdot z'(x)$$

دننني مشتق: $z(x) = \left(1-e^{ax}\right) \Rightarrow z'(x) = -a \cdot e^{ax}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دننني مشتق: $z(x)=\left(1-e^{ax}\right)\Rightarrow z'(x)=-a\cdot e^{ax}$

دباندنی مشتق: $f(z)=z^2\Rightarrow f'(z)=2z=2\left(1-e^{ax}\right)$

$$f'(x)=2\left(1-e^{ax}\right)\cdot\left(-a\cdot e^{ax}\right)=\underline{\underline{-2a\cdot e^{ax}\left(1-e^{ax}\right)}}$$

دریم: $f(x)=\left(e^{2x}+e^{-x}\right)^2=f\left[z(x)\right]\Rightarrow f'(x)=f'(z)\cdot z'(x)$

دننني مشتق: $z(x)=\left(e^{2x}+e^{-x}\right)\Rightarrow z'(x)=2e^{2x}-e^{-x}$

دباندنی مشتق: $f(z)=z^2\Rightarrow f'(z)=2z=2\left(e^{2x}+e^{-x}\right)$

$$f'(x)=\underline{\underline{2\left(e^{2x}+e^{-x}\right)\cdot\left(2e^{2x}-e^{-x}\right)}}$$

څلورم:

$$f(x)=(x+1)\,e^x=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$$

$$u=(x+1)\,;\,u'=1;\,v=e^x\,;\,v'=e^x$$

$$f'(x)=1\cdot e^x+(x+1)\,e^x=\left[1+(x+1)\right]e^x=\underline{\underline{(x+2)\,e^x}}$$

پنځم:

$$f(x)=(3-2x)\,e^{-\frac{1}{2}x}=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$$

$$u=(3-2x)\,;\,u'=-2\,;\,v=e^{-\frac{1}{2}x}\,;\,v'=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x)=-2\cdot e^{-\frac{1}{2}x}+(3-2x)\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right)=-2\cdot e^{-\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}(3-2x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}=$$

$$=\underline{\underline{\left(x-\frac{7}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم:

$$f(x) = a(x-3)e^{4x-3} = u(x)\cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'v + uv'$$

$$u = a(x-3);\ u' = a;\ v = e^{4x-3};\ v' = 4e^{4x-3}$$

$$f'(x) = a\cdot e^{4x-3} + a(x-3)\cdot 4e^{4x-3} = \underline{\underline{a\cdot e^{4x-3}(4x-11)}}$$

اووم:

$$f(x) = \frac{x^2+1}{e^x} = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$u = x^2+1;\ u' = 2x;\ v = e^x;\ v' = e^x;\ v^2 = e^x\cdot e^x$$

$$f'(x) = \frac{2x\cdot e^x - (x^2+1)e^x}{e^x\cdot e^x} = \underline{\underline{\frac{-x^2+2x-1}{e^x}}}$$

اتم:

$$f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$u = e^x - 1;\ u' = e^x;\ v = e^x+1;\ v' = e^x;\ v^2 = (e^x+1)^2$$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x+1) - (e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x\left[(e^x+1)-(e^x-1)\right]}{(e^x+1)^2} = \underline{\underline{\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}}}$$

نهم:

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$u = x;\ u' = 1;\ v = x-1;\ v' = 1;\ v^2 = (x-1)^2$$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x-1) - x\cdot 1}{(x-1)^2} = \underline{\underline{-\frac{1}{(x-1)^2}}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لسم:

$$f(x)=\frac{1}{x}\left(x^2-4\right)=x-\frac{4}{x}=x-4x^{-1}$$

$$f'(x)=1-\left(-1\cdot 4x^{-2}\right)=\underline{\underline{1+\frac{4}{x^2}}}$$

ځوابونه

د کور د e - تابعو مشتق او انتيګرالونه I

نتيجې او مفصل ځوابونه . نتيجې:

لومړی:
$$f(x)=e^{-4x}-e^{4x}\Rightarrow f'(x)=-4e^{-4x}-4e^{4x}=\underline{\underline{-4\left(e^{-4x}+e^{4x}\right)}}$$

دويم:
$$f(x)=\frac{3}{2}e^{-5x^2-3x}\Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{\frac{3}{2}(-10x-3)\,e^{-5x^2-3x}}}$$

دريم :
$$f(x)=-4e^{x}\left(e^{-x}+3\right)=-4\underbrace{e^{x}\cdot e^{-x}}_{1}-12e^{x}=-4-12e^{x}\Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{-12e^{x}}}$$

څلورم:
$$f(x)=-e^{t-x}-2t\cdot e^{-tx}\Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{e^{t-x}+2t^2\cdot e^{-tx}}}$$

پنځم:
$$f(x)=t\cdot e^{2-3x}-6e^{x^2+3}\Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{-3t\cdot e^{2-3x}-12x\cdot e^{x^2+3}}}$$

شپږم:
$$f(x)=t\left(e^{-x}-3x^2\right)=t\cdot e^{-x}-3t\cdot x^2\Rightarrow f'(x)=-t\cdot e^{-x}-6t\cdot x=\underline{\underline{-t\left(e^{-x}+6x\right)}}$$

اووم:
$$f(x)=\frac{1}{16}\left(x^2-3e^{x}\right)\Rightarrow F(x)=\frac{1}{16}\int\left(x^2-3e^{x}\right)dx=\underline{\underline{\frac{1}{16}\left[\frac{1}{3}x^3-3e^{x}\right]+C}}$$

$$F'(x)=\frac{1}{16}\left(x^2-3e^{x}\right)=f(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x} \Rightarrow F(x) = \int \left(x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x} \right) dx$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3 \cdot \ln|x| + C}}$$

$$F'(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 3 \cdot \frac{1}{x} = f(x)$$

نهم:

$$f(x) = t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e \Rightarrow F(x) = \int \left(t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e \right) dx$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}t \cdot x^2 - \frac{3}{2}e^x + t^2 \cdot x + 2e \cdot x + C}}$$

$$F'(x) = t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e = f(x)$$

لسم:

$$f(x) = t^2 x\left(x^2 - 8x\right) = t^2\left(x^3 - 8x^2\right) \Rightarrow F(x) = t^2 \int \left(x^3 - 8x^2\right) dx =$$

$$\underline{t^2\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3\right) + C}$$

$$F'(x) = t^2\left(x^3 - 8x^2\right) = t^2 x\left(x^2 - 8x\right) = f(x)$$

مفصل ځوابونه:

لومړی:

$$f(x) = e^{-4x} - e^{4x} \Rightarrow f'(x) = -4e^{-4x} - 4e^{4x} = \underline{\underline{-4\left(e^{-4x} + e^{4x}\right)}}$$

مشتق د ضرب قانون له مخې مخ ته بیول کیږي

دويم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{3}{2}e^{-5x^2-3x}\Rightarrow f'(x)=(-10x-3)\cdot\frac{3}{2}\cdot e^{-5x^2-3x}$$
$$=\frac{3}{2}(-10x-3)e^{-5x^2-3x}=\underline{\underline{-\frac{3}{2}(10x+3)e^{-5x^2-3x}}}$$

دریم:

$$f(x)=-4e^{x}\left(e^{-x}+3\right)=-4\cdot e^{x}\cdot e^{-x}-4\cdot 3\cdot e^{x}$$
$$=-4\cdot e^{x-x}-12\cdot e^{x}=-4\cdot e^{0}-12\cdot e^{x}$$
$$=-4-12\cdot e^{x}\Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{-12e^{x}}}$$

څلورم:

$$f(x)=-e^{t-x}-2t\cdot e^{-tx}\Rightarrow f'(x)=(-1)\left(-e^{t-x}\right)-\left(-t\cdot 2t\cdot e^{-tx}\right)$$
$$=\underline{\underline{e^{t-x}+2t^{2}\cdot e^{-tx}}}$$

پنځم:

$$f(x)=t\cdot e^{2-3x}-6e^{x^2+3}\Rightarrow f'(x)=-3t\cdot e^{2-3x}-2x\cdot 6e^{x^2+3}$$
$$=\underline{\underline{-3t\cdot e^{2-3x}-12x\cdot e^{x^2+3}}}$$

شپږم:

$$f(x)=t\left(e^{-x}-3x^{2}\right)=t\cdot e^{-x}-3t\cdot x^{2}$$
$$\Rightarrow f'(x)=-t\cdot e^{-x}-2\cdot 3t\cdot x=-t\cdot e^{-x}-6t\cdot x=\underline{\underline{-t\left(e^{-x}+6x\right)}}$$

اووم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^x\right)$$

$$\Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^x\right) dx = \frac{1}{16}\int\left(x^2 - 3e^x\right) dx = \underline{\underline{\frac{1}{16}\left[\frac{1}{3}x^3 - 3e^x\right] + C}}$$

$$F'(x) = \frac{1}{16}\left(3 \cdot \frac{1}{3}x^2 - 3e^x\right) = \frac{1}{16}\left(x^2 - 3e^x\right) = F(x)$$

اتم:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}$$

$$\Rightarrow F(x) = \int\left(x^3 - 2x^2 + 4x + \frac{3}{x}\right) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{2}x^2 + 3 \cdot \ln|x| + C$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 3 \cdot \ln|x| + C}}$$

$$F'(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 3 \cdot \frac{1}{x} = f(x)$$

یادونه: $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \text{ und } f(x) = \ln|x| \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

نهم:

$$f(x) = t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e$$

$$\Rightarrow F(x) = \int\left(t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e\right) dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}t \cdot x^2 - \frac{3}{2}e^x + t^2 \cdot x + 2e \cdot x + C}}$$

$$F'(x) = \frac{2}{2}t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e = t \cdot x - \frac{3}{2}e^x + t^2 + 2e = f(x)$$

لسم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = t^2x\left(x^2 - 8x\right) = t^2\left(x^3 - 8x^2\right)$$

$$\Rightarrow F(x) = t^2\int\left(x^3 - 8x^2\right)dx = \underline{\underline{t^2\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3\right) + C}}$$

$$F'(x) = t^2\left(\frac{4}{4}x^3 - 3\cdot\frac{8}{3}x^2\right) = t^2\left(x^3 - 8x^2\right) = t^2x\left(x^2 - 8x\right) = f(x)$$

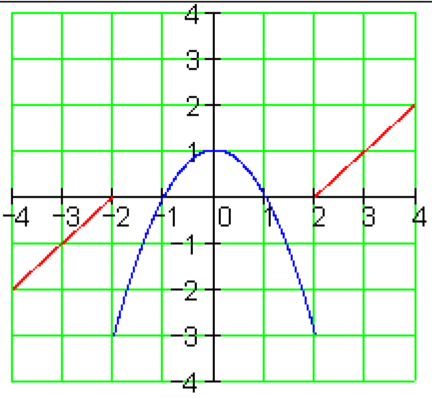
اتم: ناپرېکيدنوالی يا متماديت، مشتق وړوالی او انتيګرالوړوالی

د ناپرېکيدنوالي يا متمادين کلمه دې ليدوړ روښانه يا تشريح شي.

يو تابع **f(x)** هلته په يوه انتروال [a ; b] کې متمادي يا ناپرېکيدونکی دی، که چيرې ځوک وکړای شي، چې د تابع ګراف د انتروال له يوه سر څخه تر بله سره پورې داسې وکښلای شي، چې د پنسل ځوکه له ځايه پورته کيدو ته اړ نه شي.

يا که چيرې تابع **f(x)** د ګراف ټکي د يوه انتروال [a ; b] په دننه کې بې له کنډلو يا نښلولو يو بل سره نښتي وي، بې له دې چې کوم ټوپونه ترې رامنځ ته شي، نو بيا تابع f(x) په انتروال [a ; b] کې ناپرېکيدونکې يا متمادي دی.

بېلګه:

	موږ سره يوځای اينول شوېې تابع څيړو $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{für } -\infty < x < -2 \\ -x^2+1 & \text{für } -2 \le x \le 2 \\ x-2 & \text{für } 2 < x < \infty \end{cases}$ په ځايونو $x_1 = -2$ او $x_2 = 2$ کې د f(x) ګراف ټوپونه کوي ياښايي. په دې ځايونو کې f(x) پرېکيدونک يا نامتمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-----...

د متمادي يا ناپرېکيدونکو توابعو لپاره بيلګې:

هر تولراشنل تابع په خپل تعريفورشو ناپرېکيدونکی دی.

هر مات-يا کسري تابع په خپل تعريفورشو ناپرېکيدونکی دی.(يعني فقط هلته پرېکيدونکی دی، چيرته چې ماتلاندي يا مخرج صفرځيونه لري، ځکه چې هلته تابع تعريف نه ده).

د طبيعي پوهنو تولګيزې يا کلاسيکي څېړنو لپاره باورلري: طبيعت ټوپونه نه وهي.

د وخت سره د نباتاتو او نورو ژونديو وده.

له دې امله تولې طبيعي پيښې ناپريکيدونکې يا متمادي ځغلي.په يوه بخار ديګ کې د تودوخې جګوالی.

پرېکيدونکې يا نامتمادي(ټوپدوله) تغيرات هم شته لکه د پوست قيمت جګيدل يا د شيانو په نرخ کې ارزاني.

د ناپرېکيدنوالي يا متماديت شميرپوهنيز تعريف ياپيژند:

د f(x) تعريفدپرئ يا ـــسټ دې D_f وي او ارزښتدپرئ يئ W_f .

تابع f(x) د $x = x_0$ په ځای کې د $x_0 \in D_f$ سره ټيک هلته ناپرېکيدونکې يا متمادي ده، که

← تابع ارزښت $f(x_0)$ شتون لري، دا په دې معنا چې $f(x_0) \in W_f$ ،

← د $x = x_0$ لپاره د f(x) پوله ارزښت شتون لري

او د يوه ټاکلي عدد g سره برابر دی او که

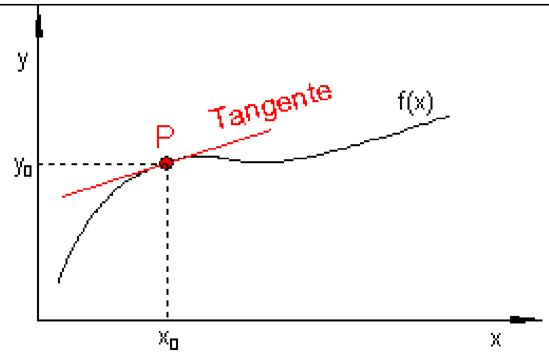
← $f(x_0) = g$ باور ولري.

که له دې شرايطو فقط يو هم پوره نه وي، نو بيا تابع f(x) د $x = x_0$ په ځای کې پرېکيدونکې يا نامتمادي دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

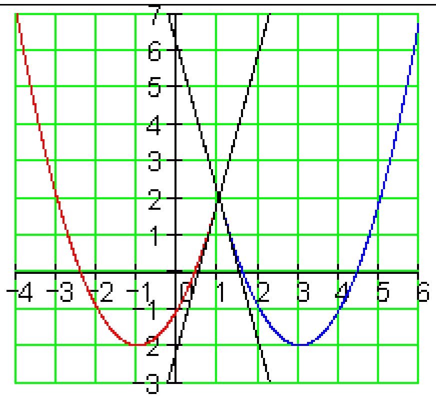
مشتقوړوالی(رابیلیدوړوالی)

موږ لومړی د یوه فنکشن مشتقوړوالی فقط لیدنیز راوړو

	بیلګه: د لومړی مشتق د x_0 په ځای کي د فنکشن جګوالی راکوي، چي د فنکشن ګراف په ټکي $P_0 (x_0 \mid y_0)$ کي لمسوي ا و له دي سره په همدي وخت کي په ټکي $P_0 (x_0 \mid y_0)$ کي د فنکشنګراف جګوالی دی. سړی د فنکشن جګیدنه هم وایي. له دي لاس ته راوړنو سره تابع د x_0 په ځای کي تیک هلته مشتقوړده، که یو یواځنی جګوال شتون ولري

د x_0 په ځای کي د یوه فنکشن مشتقوړوالي شرطونه:
فنکشن باید دx_0 په ځای کي ناپرېکیدونکي وي.

دا شرط اړین دی مګر نه پوره کیدونکی، لکه چي لاندي بیلګه بنایي.

	بیلګه: دا ترڅنګ څیرونه(فنکشن) د د فنکشن $f(x)$ګراف د $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{د } x<1 \text{ لپاره} \\ x^2 - 6x + 7 & \text{د } x\geq 1 \text{ لپاره} \end{cases}$ سره بنایي. په ټکي (1,2) کي یواځنی تانجنت شتون نه لري $t_1(x) = 4x - 2$ $t_2(x) = -4x + 6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: فنکشن $f(x)$ په $x = 1$ کې متمادي یا ناپرېکیدونکی دی، هلته ټوپ نه شته.

مګر موږ په ټکي $P(1 | 2)$ کې دوه مختلف تانجنتونه لرو. دا په دې معنا چې د $x = 1$ لپاره هم دوه مختلف د تانجنتونو جګوالی لرو، یعني دوه مشتقونه یا رابیلیدنې.

دا په دې معنا مشتقفنکشن په $x = 1$ ځای کې یواځنی نه دی.

دا په ځان پسې لري، چې فنکشن $f(x)$ په $x = 1$ ځای کې مشتقوړ نه دی.

لیدنیز یا د لیدلو له مخې دا په دې معنادی چې:

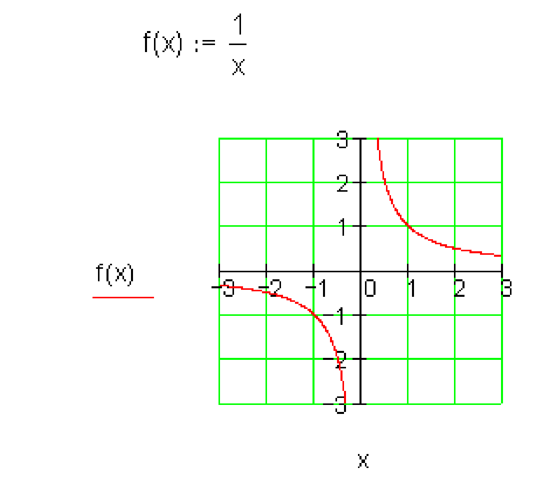
یو فنکشن $f(x)$ د x_0 په ځای کې مشتقوړ یا رابیلیدوړدی، که په دې ځای کې یې مشتق یا رابیلیدنه یواځنی وي، یعني ټیک یو تانجنت شتون ولري.

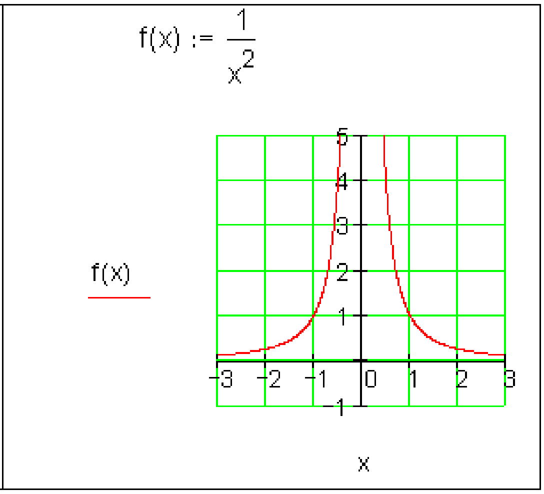
سرې دا هم ویلی شي، هغه ځای کې چې ګراف څوکه ولري یا را مات شوی یعني ګوډ ولري(را مات وي) ، فنکشن وشتقوړ نه دی.

په څټ (برعکس) دا د ناپرېکیدنې یا متمادیت لپاره په دې معنادی:

که فکشن د x_0 په ځای کې مشتقوړ وي، نو دا هلته ناپرېکیونکی یا متمادي هم دی.

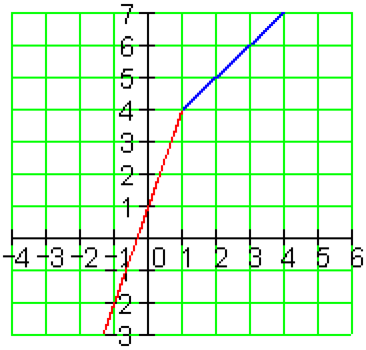
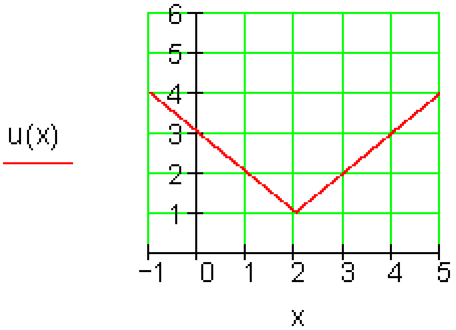
نورې





(c) ketabton.com: The Digital Library

دواړه فنکشنونه، که غوټړی توابع، د پهځای کې مشتقوړ نه دي، ځکه چي دا هلته تعریف نه دي یا پیژند نه لري.

 د x_0 په ځای کې فنکشن په حقیقت کې ناپرېکیدونکی دی، مګر مشتقوړ نه دی(ګود لري یا مات دی)	$u(x) := \lvert x-2 \rvert + 1$  دx_0 په ځای کې په حقیقت کې یا په رینتیني ناپرېکیدونکی یا متمادي دی، مګر مشتق نه شته (څوکه)

د مشتقوړوالي شمیرپوهنیز پیژند یا تعریف:

بنی ناپرېکیدونکي پوله	کینه ناپرېکیدونکي پوله
د کمبنتوپش فنکشن	د کمبنتوپش فنکشن
$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für $x > x_0$	$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für $x < x_0$

که د کین اړخ او د بني اړخ کمبنتوپش فنکشنونه سره برابر وي، نو $f(x)$ د x_0 په ځای کې مشتقوړ دی.

بیا نو یو مشتق$f'(x_0)$ شتون لري ، د تانجنت جګوالی د ګراف په ټکي($x_0;\ f(x_0)$) کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

انتیګرالوړوالی:

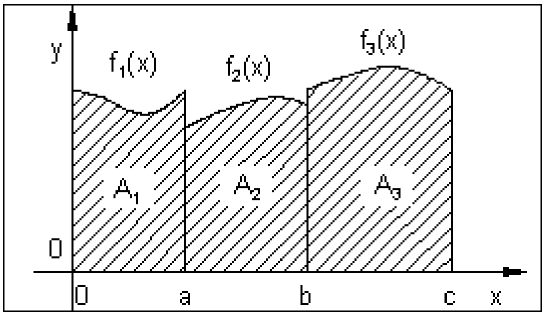
تابع انتیګرالوړ دی، که دا لږ تر لږه ټوټه ډېرله یا ټوټه په ټوټه متمادي یا ناپرېکیدونکی وي.

یلګه:

کرښه شوې سطحه دې پیدا شي

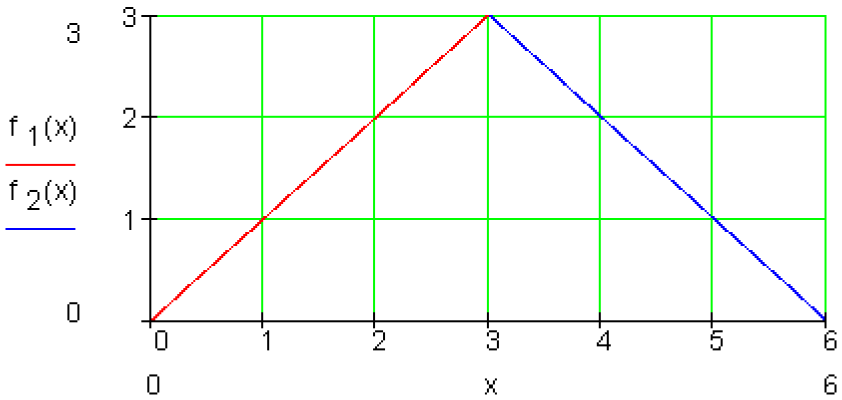
$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

$$= \int_0^a f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx + \int_b^c f_3(x)\,dx$$



د درې ګوډي یا مثلث سطحه غواړو پیدا کړو.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) = x \text{ für } (0 \le x < 3) \\ f_2(x) = -x + 6 \text{ für } (3 \le x \le 6) \end{cases}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \int_0^6 f(x)\,dx = \int_0^3 f_1(x)\,dx + \int_3^6 f_2(x)\,dx$$

$$= \int_0^3 x\,dx + \int_3^6 (-x+6)\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 + \left[-\frac{x^2}{2} + 6x\right]_3^6$$

$$= \frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2} + \left[\left(-\frac{6^2}{2} + 6\cdot 6\right) - \left(-\frac{3^2}{2} + 6\cdot 3\right)\right] = \underline{\underline{9\,FE}}$$

(پورته FE د سطحې یوون یا واحد)

سره له دې ي تابع د P (3 | 3) په ځای کې مشتقوړ یا رابیلیدوړ نه دی، کیدی شي سطحه له دوه برخ –انتیګرالونو پیدا شي.

توابع، چې بې د بدلون له لارې حل کیږي لکه لاندې بلګه:

بیلګه:
عواړو د $f(x) = e^x$ مشتق پیدا کړو. دا مشتق په ساده ډول پیدا کولي شو، یعنې لرو:

$$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int e^x dx = e^x + C$$

ګورو، چې $F'(x) = e^x = f(x)$ دی.

که ولرو: $f(x) = e^{2x}$ او د پورته په څیر لاړ شو، نو لاس ته به ترې راشي:

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int e^{2x}dx \neq e^{2x} + C$$

وي $F(x) = e^{2x} + C$ **دی، که** $F'(x) = 2e^{2x} \neq f(x)$
له دې امله د بدلون قانون ته اړیو:

د ناټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې

تراوسه مو فقط د هغو انتیګرالونو پوښتنې ځواب کړې، چې د اده توابعو مشتق باندې بیرته اړول کیده. دا سې له دې لارې لاسته رغلي بنسټ انتیګرالونو د نورو ټول حلونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

....

بنسټ کیښود. د بنسټ انتیګرالونو کارونه یا استعمال تل شونی نه دی، لکه لاندې بیلګه چې ښایي.

بیلګه: د $f(x)=e^{2x}$ تابع انتیګرال ونیسئ

$$f(x)=e^{2x} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int e^{2x}dx=?$$

بدلون: $u(x)=2x=u$

جوړ کړئ: $u'(x)=\dfrac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\dfrac{du}{2}$

$$\int f(x)dx=\int e^{u}\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int e^{u}du=\frac{1}{2}e^{u}+C$$

د بدلون برعکس: $\dfrac{1}{2}e^{u}+C=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$

نو لرو: $F(x)=\int (x)dx=\int e^{2x}dx=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C$

ازمايښت: $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}+C \Rightarrow F'(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}\cdot 2=e^{2x}=f(x)$

بیلګه: وښايئ چې باور لري.

$$.f(x)=(x+1)^{2} \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int (x+1)^{2}dx$$

بدلون $u(x)=x+1=u$ جوړ کړئ

$$u'(x)=\frac{du}{dx}=1 \Rightarrow dx=\frac{du}{1}$$

$$\int f(x)dx=\int u^{2}\frac{du}{1}=\int u^{2}du=\frac{u^{3}}{3}+C$$

بیرته- یا په څټ بدلون: $\dfrac{u^{3}}{3}+C=\dfrac{(x+1)^{3}}{3}+C$

نو: $\int (x)dx=\int (x+1)^{2}dx=\dfrac{(x+1)^{2}}{3}+C$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه :

و بنايي چې باور لري:

$$f(x)=(3x+6)^3 \Rightarrow F(x)=\int f(x)dx=\int(3x+6)^3dx$$

بدلون: $u(x)=3x+6=u$

جوړوو: $u'(x)=\dfrac{du}{dx}=3 \Rightarrow dx=\dfrac{du}{3}$

$$\int f(x)dx=\int u^3\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\int u^3du=\frac{u^4}{12}+C$$

بېرته بدلون: $\dfrac{u^4}{12}(3x+6)^4+C$

نو لرو: $\int(x)dx=\int(3x+6)^3dx=\dfrac{1}{12}(3x+6)^4+C$

بیلګه :

$$f(x)=x\cdot\ln\left(x^2\right)\Rightarrow F(x)=\int f(x)\,dx=\int\left(x\cdot\ln\left(x^2\right)\right)dx=?$$

بدلون : $u(x)=x^2=u$

جوړوو: $u'(x)=\dfrac{du}{dx}=2x\Rightarrow dx=\dfrac{1}{2x}du$

$$\int f(x)\,dx=\int x\cdot\ln(u)\cdot\frac{1}{2x}du=\frac{1}{2}\int\ln(u)\,du=\frac{1}{2}\left[u\cdot\ln(u)-u+C\right]=\frac{1}{2}u\cdot\ln(u)-\frac{1}{2}u+C$$

بېرته بدلون: $\dfrac{1}{2}u\cdot\ln(u)-\dfrac{1}{2}u+C=\dfrac{1}{2}x^2\cdot\ln\left(x^2\right)-\dfrac{1}{2}x^2+C$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو لرو: $\int(x)\,dx = \int\left(x\cdot\ln\left(x^2\right)\right)dx = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$

د ټاکلو انتیګرالونو حل د بدلون له لارې:

ټاکلي انتیګرالونه هم د بدلون له لارې حل کیږي.

بیلګه :

وښایاست:

$$f(x) = e^{2x} \quad \Rightarrow F(x) = \int_{-1}^{1} e^{2x}dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې:

۱ – بدلون $u(x) = 2x$

۲ – د dx په ځای کیږدی

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2 \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

۳ – د پولو بدلون

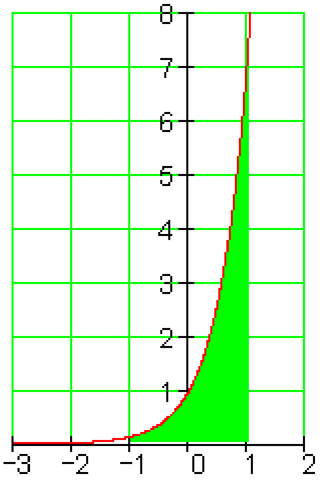
- لاندې پوله $u(-1) = -2$

- پورته پوله $u(1) = 2$

۴ - په انتیګرال کې ځا په ځای کړی

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^u du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[e^2 - e^{-2}\right] = \underline{\underline{3.627}}$$

$f(x) := e^{2\cdot x}$



بیلګه :

$$f(x) = 2x\cdot\ln(x^2) \quad \Rightarrow F(x) = \int_{1}^{2} 2x\cdot\ln(x^2)dx$$

د انتیګرال حل د بدلون له لارې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ – بدلون $u(x) = x^2$
۲ – د ځای په په ځای کونه

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$$

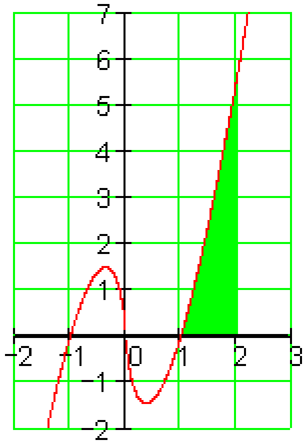
۳ – د پولي بدلون
- لاندې پوله $u(1) = 1$
- پورته پوله $u(2) = 4$

۴ – په انتيګرال کې ځای په ځای کړی

$$\int_1^4 2x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^4 \ln(u) du = [u \cdot \ln(u) - u]_1^4$$

$$= [4 \cdot \ln(4) - 4] - [1 \cdot \ln(1) - 1] \approx \underline{\underline{2.545}}$$

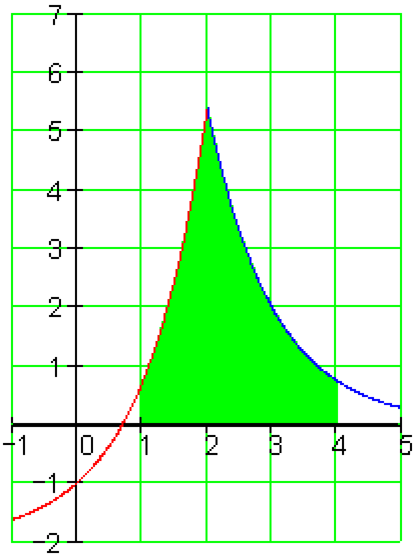
$$f(x) := 2x \cdot \ln(x^2)$$



بيلګه :

$f(x) = \begin{cases} e^x - 2 \\ (e^2 - 2)e^{-(x-2)} \end{cases}$	د $x < 2$ له پاره د $x \geq 2$ له پاره

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A = \underbrace{\int_1^2 \left(e^x - 2\right) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_2^4 \left(e^2 - 2\right) e^{-(x-2)} dx}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_1^2 \left(e^x - 2\right) dx = \left[e^x - 2x\right]_1^2 = e^2 - e - 2$$

$$I_2 = \left(e^2 - 2\right) \int_2^4 e^{-(x-2)} dx$$

$$u(x) = -(x-2) = -x + 2$$

$$\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du\,;\ u(2) = 0\,;\ u(4) = -2$$

$$I_2 = -\left(e^2 - 2\right) \int_0^{-2} e^u du = \left(e^2 - 2\right) \int_{-2}^{0} e^u du$$

$$= \left(e^2 - 2\right) \cdot \left[e^u\right]_{-2}^{0} = e^2 + 2e^{-2} - 3$$

$$I = I_1 + I_2 = e^2 - e - 2 + e^2 + 2e^{-2} - 3 = \underline{\underline{7{,}331}}$$

توته انتیګرالونه Partialy Integration

توته انتیګرالونه، چې ضرب انتیګرالونه هم بلل کيږي، په انتیګرالشمیرنه کې د لومړنیو توابعو ټاکلو یا شمیرلو لپاره امکان دی. دا کیدی شي د مشتقشمیرني د برعکسکونی په څیر وکټل شي.

د توته انتیګرالوني له پاره لاندې قانون کارول کيږي، چې د متمادي (نه پرېکیدونکي) توابعو f او g له پاره باور لري.:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\, dx = \left[f(x) \cdot g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\, dx.$$

دا قانون ټیک هلته ګټور دی، که د f مشتقنیولو سره یو ساده تابع منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ضرب قانون (د ضرب مشتقنیونې) څخه لرو:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v'$$

له دې څخه لاس ته راځي:

$$\int u' \cdot v = \int (u \cdot v)' - \int u \cdot v'$$

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

په دې پسې د ټاکلي انتیګرال لپاره باور لري:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x$$

یا همدغسې، لکه په زیاتو ریاضي کتابونو کې چې پیداکیږي.

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x.$$

د دې مخ ته حدونو یا ترمونو لپاره ګتور دی، چې لومړی ځان په ناټاکلي انتیګرال محدود کړو، چې دا نا اړینو حدونو څخه چې لید مو رابندوي، ازاد یو.

بیلګه:

د بیلګې په توګه لاندی انتیګرال شمیرو.

$$\int x \cdot \ln(x) \, \mathrm{d}x$$

یو ساده انتیګرالیدونکې تابع $g'(x)$ او همداسی یو ساده مستقکیدونکي تابع $f(x)$ لټوو. نیسو چې $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = x$ ، ځکه چې د $\ln(x)$ انتیګرالونه نوې راکوي. اوس د $f(x)$ مشتق نیسو)مشتق کوو) او انتیګرالوو، نو لرو: $\ln(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \text{ او } g(x) = \frac{x^2}{2}.$$

له دې څخه اوس دالاندې فرمول لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int x \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \cdot \ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

بدیل لیکبنه:

اوس دئ u اوv په خوښه توابع وي.U او V دې د u اوV لومړني توابع وي ، او همداسې دې u’ او v’ دu او v مشتقونه وي.

u تابع ده، چې د مشتق نیولو له پاره لومړیتوب لري، v تابع ده چې د انتیګرالونې له پاره لومړیتوب لري. نو باورلري:

$$\int_a^b u(x) \cdot v(x)\,\mathrm{d}x = u(b) \cdot V(b) - u(a) \cdot V(a) - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= [u(x) \cdot V(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot V(x)\,\mathrm{d}x$$

تو‌ته انتیګرالونې لار(طریقې)

د توته انتیګرالونې ګټور استعمال له پاره مختلف معیاري چلول شته.

بیلګه :

کله کله کیدی شي ګټور وي، چې د مساوات ښئ لور ته توته انتیګرال د څو واره انتیګرالونې وروسته بیرته راوګرځي، چې د په ورته بڼه د اصلي یا پخواني کیڼ لور انتیګرال سره یوځای کولی شو.

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

که کیږدو f(x) = cos(x) او g'(x) = sin(x) ، نو ترې لرو:

$$f'(x) = -\sin(x) \text{ او } g(x) = -\cos(x)$$

او لاس ته ترې راځي

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos^2(x)] - \int \sin(x) \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دواړو لورو ته وتون انتیګرال ورزیات کړو، نو راکوي:

$$2\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos^2(x)$$

که واړه لورې په 2 وویشل شي، نو بالاخره لاس ته ترې راځي:

$$\int \sin(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cdot\cos^2(x) + C$$

بیلګه ۲ :

د ځنو انتیګرالونو سره داسي لاس ته راوړنه لرو، چې: که د g'(x) له پاره یو ترم وټاکو چي په انتیګرالوني کی هیڅ یا کو تغیر خوري، لکه د بېلګې په توګه اکسپوننشل تابع او یا مثلثاتي توابع. نو کیدی شي دا بل ترم ،،له منځه یووړل شي،،.

$$\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

که هر ځل g'(x) = ex کیږدو او د f(x) له پاره، د انتیګرال لاندی ترم ، نو تری لاس ته راځي:

$$\begin{aligned}\int e^x\cdot(2-x^2)\,\mathrm{d}x &= [e^x\cdot(2-x^2)] - \int e^x\cdot(-2x)\,\mathrm{d}x\\ &= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - \int 2\cdot e^x\,\mathrm{d}x\\ &= [e^x\cdot(2-x^2)] + [e^x\cdot 2x] - [2\cdot e^x]\\ &= [e^x\cdot(2-x^2+2x-2)]\\ &= [e^x\cdot(2x-x^2)] + C\end{aligned}$$

بیلګه ۳ :

که له انتیګرال لاندي فقط یو ترم ولرو، چي د هغه لومړنی تابع بی له جدول ارزښت ځخه پاي ته نه رسیږي(نه پایول کیږي)(نه ختمیږي) کیدی شي کله کله د ورزیاتوني له لارې(ناځرګند شته) ضریب "1" توته انتیګرال شي.

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x = \int g'(x)\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $f(x) = \ln(x)$ او $g'(x) = 1$ کيږدو، نو لاس ته ترې راوړی شو

$$\begin{aligned}\int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x &= x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \ln(x) - x + C\end{aligned}$$

.

جمله :

مورږ د دې لاندې انتيگرال نيسو:

$$\int x\cos(x)\,dx$$

ږدو $u = x$ ، نو لرو : $du = dx$

ږدو $dv = \cos(x)\,dx$ ، نو $v = \sin(x)$ لرو

په لاندې توگه مخ ته ځو:

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= \int u\,dv \\ &= uv - \int v\,du \\ &= x\sin(x) - \int \sin(x)\,dx \\ &= x\sin(x) + \cos(x) + C.\end{aligned}$$

C د انتيگرالونې يوه په خوښه ثابته ده

د تړوته انتيگرالونې د استعمال سره د انتيگرالونو لکه

$$\int x^2 e^x\,dx \quad \text{او} \quad \int x^3 \sin(x)\,dx$$

کيده شي په همدې لار حل شي:

يوه په زړه پورې بيلگه دا لاندې ده :

$$\int e^x \cos(x)\,dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که په پوره کره والي ونیسو، نو په ورسره بلده لار اړین نه دی، چې دا دې حل ولري.

دا بېلګه د دوه واره ټوټه انتیګرالوني استعمال له لارې حل کولی شو.

لومړی : $u = \cos(x)$ داسې چې $du = -\sin(x)\, dx$

$dv = e^x\, dx$ داسې چې $v = e^x$

نو لرو :

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\, dx.$$

اوس ، ددې له پاره چې پاتې انتیګرال حل شي، نو د ټوټه انتیګرالوني قاعده بیا استعمالوو ، د دې لاندې سره :

$u = \sin(x);\ du = \cos(x)\, dx$

$v = e^x;\ dv = e^x\, dx$

نو لرو :

$$\int e^x \sin(x)\, dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\, dx$$

که دا سره یوځای کړو، نو لاس ته راځي:

$$\int e^x \cos(x)\, dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)\, dx.$$

که فکر وکړو، نو پورته مساوات دواړو لورو ته همغه انتیګرال لرو(بې له مخ نخښې)، نو د ښي لور انتیګرال که کیڼ لور ته یوسو ، لاس ته ترې راځي:

$$2 \int e^x \cos(x)\, dx = e^x(\sin(x) + \cos(x)) + C$$

$$\int e^x \cos(x)\, dx = \frac{e^x(\sin(x) + \cos(x))}{2} + C'$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

C د انتیګرالونې یوه په خوښه ثابته ده

د کور کار:

انتیګرال د بدلون له لارې د لاندې انتیګرالونو ځوابونه، همداسې شمیرنه

لومړی: $\int \frac{3}{4x+1}\,dx$ دویم: $\int_0^2 \frac{4}{4-x}\,dx$

دریم: $\int \frac{2}{(1-x)^2}\,dx$ څلورم: $\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx$

پنځم: $\int_{-2}^{2} \frac{10}{(x-4)^5}\,dx$ شپږم: $\int_{-2}^{2} e^{1-x}\,dx$

اووم: $\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx$ اتم: $\int_1^2 e^{4-2x}\,dx$

نهم: $\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx$ لسم: $\int_0^2 \left(x-1-e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx$

ځوابونه

انتیګرال د ساده بدلون له لارې

نتیجې: لومړی:

$$\int \frac{3}{4x+1}\,dx = \frac{3}{4}\cdot \ln(4x+1) + C$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم:

$$\int_0^2 \frac{4}{4-x}\,dx = 4\cdot\ln(4) - 4\cdot\ln(2) = 4\cdot\ln(2) \approx 2{,}773$$

دریم:

$$\int \frac{2}{(1-x)^2}\,dx = \frac{2}{1-x} + C$$

څلورم:

$$\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(2x-1)^2} + C$$

پنځم:

$$\int_{-2}^{2} \frac{10}{(x-4)^5}\,dx = -\frac{5}{2}\left[\frac{1}{16} - \frac{1}{1296}\right] = -\frac{25}{162} \approx -0{,}154$$

شپږم:

$$\int_{-2}^{2} e^{1-x}\,dx = e^3 - e^{-1} \approx 19{,}718$$

اووم:

$$\int_0^4 e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2\cdot e^2 - 2\cdot e^0 = 2\cdot e^2 - 2 \approx 12{,}778$$

اتم:

$$\int_1^2 e^{4-2x}\,dx = \frac{1}{2}\cdot e^2 - \frac{1}{2}\cdot e^0 = \frac{1}{2}\cdot e^2 - \frac{1}{2} \approx 3{,}195$$

نهم:

$$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx = 2\cdot e^2 - 2\cdot e^0 = 2\cdot e^2 - 2 \approx 12{,}788$$

لسم:

$$\int_0^2 \left(x - 1 - e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx = -2\cdot e^0 - \left(-2\cdot e^{-1}\right) = -2 + 2\cdot e^{-1} \approx -1{,}264$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځوابونه

انتیګرال د ساده بدلون له لارې

مفصل ځوابونه

لومړی:

$$\int \frac{3}{4x+1}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 4x+1 \qquad \frac{du}{dx} = 4 \Rightarrow dx = \frac{1}{4}du$$

$$\frac{3}{4}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{3}{4}\cdot \ln(u) + C$$ د $u = 4x+1$ سره

$$\int \frac{3}{4x+1}\,dx = \underline{\underline{\frac{3}{4}\cdot \ln(4x+1) + C}}$$

دویم:

$$\int_0^2 \frac{4}{4-x}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 4-x$$

$\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$ لاندې پوله $u(0) = 4$ پورته پوله $u(2) = 4-2 = 2$

$$-4\int_4^2 \frac{1}{u}\,du = 4\int_2^4 \frac{1}{u}\,du = \left[4\cdot \ln(u)\right]_2^4 = 4\cdot \ln(4) - 4\cdot \ln(2)$$

$$= 4\left[\ln(4) - \ln(2)\right] = 4\cdot \ln\left(\frac{4}{2}\right) = 4\cdot \ln(2) \approx \underline{\underline{2{,}773}}$$

درېیم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{2}{(1-x)^2}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 1-x \qquad \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$$

د u=1-x سره $-2\int \frac{1}{u^2}\,du = -2\int u^{-2}\,du = -2\cdot\frac{1}{-1}\cdot u^{-1} = \frac{2}{u}$

$$\int \frac{2}{(1-x)^2}\,dx = \frac{2}{1-x} + C$$

خلورم:

$$\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 2x-1 \qquad \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow dx = \frac{1}{2}du$$

د U=2x-1 سره $\frac{6}{2}\int \frac{1}{u^3}\,du = 3\int u^{-3}\,du = 3\cdot\frac{1}{-2}\cdot u^{-2} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{u^2}$

$$\int \frac{6}{(2x-1)^3}\,dx = -\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(2x-1)^2} + C$$

پنځم:

$$\int_{-2}^{2} \frac{10}{(x-4)^5}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = x-4 \qquad \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow dx = du$$

لاندې پوله $u(-2) = -2-4 = -6$ پورته پوله $u(2) = 2-4 = -2$

$$10\int_{-6}^{-2} \frac{1}{u^5}\,du = 10\int_{-6}^{-2} u^{-5}\,du = \left[10\cdot\frac{1}{-4}\cdot u^{-4}\right]_{-6}^{-2} = -\frac{5}{2}\cdot\left[\frac{1}{u^4}\right]_{-6}^{-2}$$

$$= -\frac{5}{2}\left[\frac{1}{16} - \frac{1}{1296}\right] = -\frac{25}{162} \approx -0{,}154$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم:

$$\int_{-2}^{2} e^{1-x}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 1-x \qquad \frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow dx = -du$$

لاندې پوله $u(-2) = 1-(-2) = 3$ پورته پوله $u(2) = 1-2 = -1$

$$-\int_{3}^{-1} e^{u}\,du = \int_{-1}^{3} e^{u}\,du = \left[e^{u}\right]_{-1}^{3} = \underline{\underline{e^{3} - e^{-1} \approx 19{,}718}}$$

اووم:

$$\int_{0}^{4} e^{\frac{1}{2}x}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = \frac{1}{2}x \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2du$$

لاندې پوله u(0)=0 پورته پوله u(4)=2

$$2\int_{0}^{2} e^{u}\,du = 2\left[e^{u}\right]_{0}^{2} = 2\cdot e^{2} - 2\cdot e^{0} = \underline{\underline{2\cdot e^{2} - 2 \approx 12{,}778}}$$

اتم:

$$\int_{1}^{2} e^{4-2x}\,dx \qquad \text{Substitution: } u = 4-2x \qquad \frac{du}{dx} = -2 \Rightarrow dx = -\frac{1}{2}du$$

لاندې پوله u(1)=4-2=2 پورته پوله u(2)=4-4=0

$$-\frac{1}{2}\int_{2}^{0} e^{u}\,du = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} e^{u}\,du = \left[\frac{1}{2}e^{u}\right]_{0}^{2} = \frac{1}{2}\cdot e^{2} - \frac{1}{2}\cdot e^{0} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot e^{2} - \frac{1}{2} \approx 3{,}195}}$$

نهم:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_1^2 \frac{4}{e^{2x-4}}\,dx = 4\int_1^2 e^{4-2x}\,dx \quad \text{Substitution: } u = 4-2x \quad \frac{du}{dx} = -2 \Rightarrow dx = -\frac{1}{2}du$$

$u(2) = 4-4 = 0$ پورته پوله $u(1) = 4-2 = 2$ لاندې پوله

$$-4\cdot\frac{1}{2}\int_2^0 e^u\,du = 2\int_0^2 e^u\,du = \left[2e^u\right]_0^2 = 2\cdot e^2 - 2\cdot e^0 = \underline{\underline{2\cdot e^2 - 2 \approx 12,788}}$$

لسم:

$$\int_0^2 \left(x-1-e^{-\frac{1}{2}x}\right)dx = \int_0^2 (x-1)\,dx - \int_0^2 e^{-\frac{1}{2}x}\,dx$$

$$1.\ \text{Integral: } \int_0^2 (x-1)\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 4 - 2 - (0) = 0$$

$$2.\ \text{Integral: } -\int_0^2 e^{-\frac{1}{2}x}\,dx \quad \text{Substitution: } u = -\frac{1}{2}x \quad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} \Rightarrow dx = -2du$$

$u(2) = -\frac{1}{2}\cdot 2 = -1$ پورته پوله $u(0) = 0$ لاندې پوله

$$= (-1)(-2)\int_0^{-1} e^u\,du = 2\int_0^{-1} e^u\,du = -2\int_{-1}^0 e^u\,du = \left[-2e^u\right]_{-1}^0$$

$$= -2\cdot e^0 - \left(-2\cdot e^{-1}\right) = \underline{\underline{-2+2\cdot e^{-1} \approx -1,264}}$$

د ټوټه انتیګرالونه لپاره څو نوریط بیلګې

(c) ketabton.com: The Digital Library

که چیرته د دوه توابعو انتیګرال غواړو وشمیرو، نو په زیاتو حالتونو کې دا تراوسه روښانه یا معلومه د انتیګرال لار مو بریا ته نه بیایي.

$$f(x) = x \cdot \ln\left(x^2\right) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right) dx = ?$$

Substitution: $u(x) = x^2 = u$

جوړوو: $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$

$$\int f(x)\,dx = \int x \cdot \ln(u) \cdot \frac{1}{2x}\,du = \frac{1}{2}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{2}\left[u \cdot \ln(u) - u + C\right] = \frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C$$

د بدلون په بیرته په څټ: $\frac{1}{2}u \cdot \ln(u) - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C$

نو: $$\int (x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln\left(x^2\right)\right) dx = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + C}}$$

دا انتیګرال د بدلون قانون سره حل کیدی شي، دا چې د بدلون له لارې ضریب له منځه ځي. په عادي ډول دا حالت نه دی.

$$f(x) = x \cdot \ln(x) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(x \cdot \ln(x)\right) dx = ?$$

دا انتیګرال د بدلون له لارې نه شي حل کیدی. موږ د صرب قانون لپاره د مشتقشمیرنې څخه یوه اینښوونې یا په ځای کونې ته وده ورکوو.

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

د ثابتې په پام کې نه نیولو له امله د دفرنځیال او انتیګرال بنسټ حملې له لارې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f'(x)\,dx = f(x) = u(x)\cdot v(x)$$

د $f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$ سره په دې پسې باید هم باور ولري

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,dx + \int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)$$

د $\int u(x)\cdot v'(x)\,dx$ پسې د بنه بدلون له امله راکوي:

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

د $\int u'(x)\cdot v(x)\,dx$ پسې د بنه بدلون له امله راکوي:

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)\,dx$$

د دې بنه بدلون په رینتوني یا حقیقت کې دا د دوه ضریبونو انتیګرال حل نه شو، مګر د u او ' v او په همدې توګه د ' u او v هوښیاره ټاکنه کیدی شي دا وبینه یا افاده داسې بنه بدل شي، چې ا نتیګرال یې کیدی شي حل شي

بیلګه ۱

$$\int \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{e^x}_{v'}\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx$$

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = e^x \Rightarrow v = \int e^x\,dx = e^x$

$$\int x\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - e^x + C = \underline{\underline{(x-1)e^x + C}}$$

بیلګه ۲

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{k\cdot x}}_{v'}\, dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\, dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

د بدلون له لاې حل $v' = e^{k\cdot x} \Rightarrow v = \int e^{k\cdot x}\, dx$

$$v = \int e^{k\cdot x}\, dx$$

بدلون $u = k\cdot x \Rightarrow \frac{du}{dx} = k \Rightarrow dx = \frac{1}{k}du$

په ځت یا بیرته بدلون: $v = \int e^{k\cdot x}\, dx = \frac{1}{k}e^{k\cdot x}$

$$\int x\cdot e^{k\cdot x}\, dx = u\cdot v - \int u' v\, dx = x\cdot \frac{1}{k}e^{k\cdot x} - \int 1\cdot \frac{1}{k}e^{k\cdot x}\, dx = \frac{x}{k}e^{k\cdot x} - \frac{1}{k}\underbrace{\int e^{k\cdot x}\, dx}_{\frac{1}{k}e^{k\cdot x}}$$

$$= \frac{x}{k}e^{k\cdot x} - \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}e^{k\cdot x} = \frac{x}{k}e^{k\cdot x} - \frac{1}{k^2}e^{k\cdot x} = \left(\frac{x}{k} - \frac{1}{k^2}\right)e^{k\cdot x} + C$$

بیلګه ۳ :

$$\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v'}\, dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\, dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = \ln(x) \Rightarrow v = x\cdot \ln(x) - x$$

$$\int x\cdot \ln(x)\, dx = x\cdot(x\cdot\ln(x) - x) - \int 1\cdot(x\cdot\ln(x) - x)\, dx$$

$$\Leftrightarrow \int x\cdot\ln(x)\, dx = x^2\cdot\ln(x) - x^2 - \int x\cdot\ln(x)\, dx + \int x\, dx \;\Big|\; + \int x\cdot\ln(x)\, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Leftrightarrow 2\cdot\int x\cdot\ln(x)\,dx = x^2\cdot\ln(x) - x^2 + \frac{1}{2}x^2 \;|:2$$

$$\Leftrightarrow \int x\cdot\ln(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln(x) - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2\cdot\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C}} \quad (x>0)$$

بیلګه ۴

$$\int \underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{e^{2x}}_{v'}\,dx = u\cdot v - \int u'v\,dx \qquad u = x^2 \Rightarrow u' = 2x \qquad v' = e^{2x} \Rightarrow v = \int e^{2x}\,dx$$

منځ شمیرنه

$$\int e^{2x}\,dx \quad \text{Substitution: } u = 2x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \Rightarrow \underline{dx = \frac{1}{2}du}$$

$$\boxed{\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}}$$ په څټ بدلون $$\Rightarrow \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u$$

$$\int x^2\cdot e^{2x}\,dx = \underbrace{x^2\cdot\frac{1}{2}e^{2x}}_{u\cdot v} - \int \underbrace{2x}_{u'}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{v}\,dx = \frac{1}{2}x^2\cdot e^{2x} - \int x\cdot e^{2x}\,dx$$

$$\int \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{e^{2x}}_{v'}\,dx = u\cdot v - \int u'v\,dx \qquad u = x \Rightarrow u' = 1 \qquad v' = e^{2x} \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

(پورته وګورئ)

$$\int x\cdot e^{2x}\,dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x\cdot e^{2x} - \frac{1}{2}\underbrace{\int e^{2x}\,dx}_{\frac{1}{2}e^{2x}} = \frac{1}{2}x\cdot e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int x^2 \cdot e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{2x} - \underbrace{\int x \cdot e^{2x}\,dx}_{\frac{1}{2}x\cdot e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}} = \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{2x} - \left(\frac{1}{2}x \cdot e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \cdot e^{2x} - \frac{1}{2}x \cdot e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} = \underline{\underline{\frac{1}{4}\left(2x^2 - 2x + 1\right)e^{2x} + C}}$$

دا بیلګه ښايي، چې په انتیګرال کې زیات وخت ډېرې تلنلارې یو په بل پسې کارول کیږي. دا چې د ټوټه انتیګرال منځنۍ پایله (لاس ته راوړنّ) زیات وخت څرګند یا معلوم دي، سړی دې دا د یوه انتګرئشن جدول په ښه په یاد کې وساتي.

د انتیګرېشن نورې تلنلارې او تخنیکونه هم شته، چې په دې ځای کې دې ترڅیړنې لاندې دې نه نیول کیږي. د بیلګې په توګه دې ماتنسبي انتیګرېشن د ټوټه مات یا کسر ټوټه ونې په ګوته شي.

یوڅو ناټاکلي انتیګرالونه:

لومړی: $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad n \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

دویم: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C \quad x \neq 0$

دریم : $\int e^x\,dx = e^x + C$

څلورم: $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C \quad a > 0;\ a \neq 1$

پنځة $\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \quad n \neq -1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم: $\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b|$

اووم: $\int x\,(ax+b)^n\,dx = \frac{a(n+1)x-b}{a^2(n+1)(n+2)}(ax+b)^{n+1} + C \quad n \neq -1;\, -2$

ا تم: $\int \frac{1}{x(ax+b)}\,dx = -\frac{1}{b}\ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + C$

نهم: $\int \frac{x}{ax+b}\,dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C$

لسم : $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}\,dx = 0$

یولسم: $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$

دولسم: $\int x\cdot e^{ax}\,dx = \frac{1}{a^2}(ax-1)e^{ax} + C$

دیارلسم: $\int_{-1}^{1} a^x\,dx = \frac{a^2-1}{a\cdot\ln(a)} \quad a>0$

څوارلسم: $\int \ln(x)\,dx = x\cdot\ln(x) - x + C \quad x>0$

پنځلسم: $\int [\ln(x)]^2\,dx = x\cdot[\ln(x)]^2 - 2x\cdot\ln(x) + 2x + C \quad x>0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپاړسم: $$\int x^n \ln(x)\,dx = x^{n+1}\left(\frac{\ln(x)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) + C \quad x > 0;\ m \neq -1$$

اولسم: $$\int \frac{[\ln(x)]^n}{x}\,dx = \frac{[\ln(x)]^{n+1}}{n+1} + C \quad x > 0;\ n \neq -1$$

اتلسم: $$\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)} = \ln\left|\ln(x)\right| + C \quad x > 1$$

نولسم: $$\int \frac{1}{x \cdot [\ln(x)]^n} = -\frac{1}{(n-1)\left([\ln(x)]^{n-1}\right)} + C \quad x > 1;\ n \neq 1$$

یوڅو ټاکلي انتیګرالونه:

لمړی: $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}$$ دویم: $$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx = \pi$$

دریم: $$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx = \pi$$ څلورم: $$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

پنځم: $$\int_0^\infty \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}$$ شپږم: $$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

اووم: $$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 1$$ اتم: $$\int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{ax-x^2}}\,dx = \frac{3}{8}a^2\pi$$

نهم: $$\int_0^\infty \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}\,dx = 0$$ لسم: $$\int_0^{2b} \sqrt{2bx-x^2}\,dx = -\frac{b^2\pi}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يوولسم: $\int_{-1}^{1} a^x \, dx = \frac{a^2 - 1}{a \cdot \ln(a)} \quad a > 0$

دولسم: $\int_{0}^{\infty} e^{-x} x^n \, dx = n! \quad n \in \mathbb{N}$

ديارلسم: $\int_{0}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

څوارلسم: $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{e^x + 1} \, dx = \frac{\pi^2}{12}$

پنځلسم: $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{e^x - 1} \, dx = \frac{\pi^2}{6}$

شپاړلسم: $\int_{0}^{1} \frac{\ln(x)}{x + 1} \, dx = -\frac{\pi^2}{12}$

اوولسم: $\int_{0}^{1} \frac{\ln(x)}{x - 1} \, dx = \frac{\pi^2}{6}$

اتلسم: $\int_{0}^{1} \frac{\ln(x + 1)}{x^2 + 1} \, dx = \frac{\pi}{8} \cdot \ln(2)$

نولسم: $\int_{0}^{1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} \, dx = \frac{\pi^2}{8}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوي ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دويم:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Diss . Uni. Wien

لاندې د شميرپوهني پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو زرو کې شميرنه، د ګڼې – او کتې د کتې شميرنه ، د احتمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انګريزي – پښتو ډکشنري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):
اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):
اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003
نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):
لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

بن- المان، کابل – افغانستان ۲۰۱۲ ز ک

ژباړې:

لاندې د برینککن لیکنې چې له پرینمن ن ج ځخه ژباړل شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه

۵ – احصایه یا ستاتیستیک

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنستونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما ليکني

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

-۲۲   داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته

تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

(c) ketabton.com: The Digital Library

---

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیوال جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اومم ټولګې پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میرزي شینواری د ارواښادې پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړنې ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه وو) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپمتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

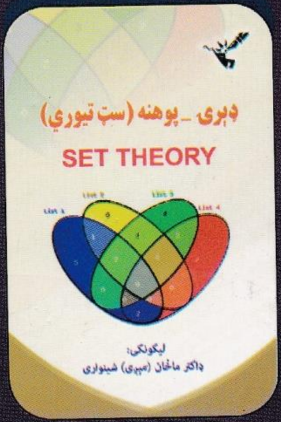
د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور. د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو). له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

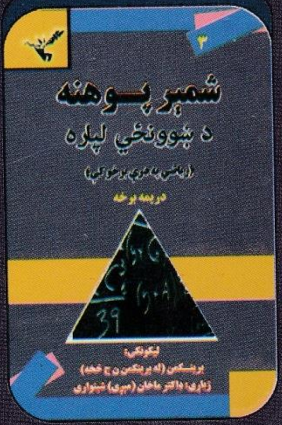
ماخان میرزي په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی. ده له میرمن ښاپیری سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلي.

ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۱۹ ۹۷ څخه همدا د کتابونو لیکلو اوو د ژباړې دنده یې په غاړه اخستې، چې خپل فکر د شونې پولې تازه ساتي.

ډاکتر ماخان (مېرې) شینواری





د افغانستان د کلتوري ودې ټولنه _ جرمني
VEREIN ZUR FORDERUNG DER AFGHANISCHEN KULTUR E.V
د خپرونو لړ (۱۲۹)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library