ئەندازە (هندسه)

Geometry

لیکوڵینکی:

ڈاکتر ماخان (میرزی) شینواری

2012

Ketabton.com

جرمني د بن ښار

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمککچپوهنه (هندسه)

لیکونکی:
ډاکتر ماخان (میرزي) شینواری

ناچاپ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

ځمککچپوهنه(بنسټیزه هندسه)

هندسي بنسټيزې کليمی

ټکی ، کرښه ، هواره(سطحه) ۱
نیمه – یا نیمهواره ۷

کونجکلیمه ۱۱

څرخونپروسه: څرخونکنج : ۱۴

ګراد ۱۵

کونج کلمه ۱۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمککچپوهنه(بنسټيزه هندسه)

هندسي بنسټيزې کليمې

ټکی ، کرښه ، هواره(سطحه)

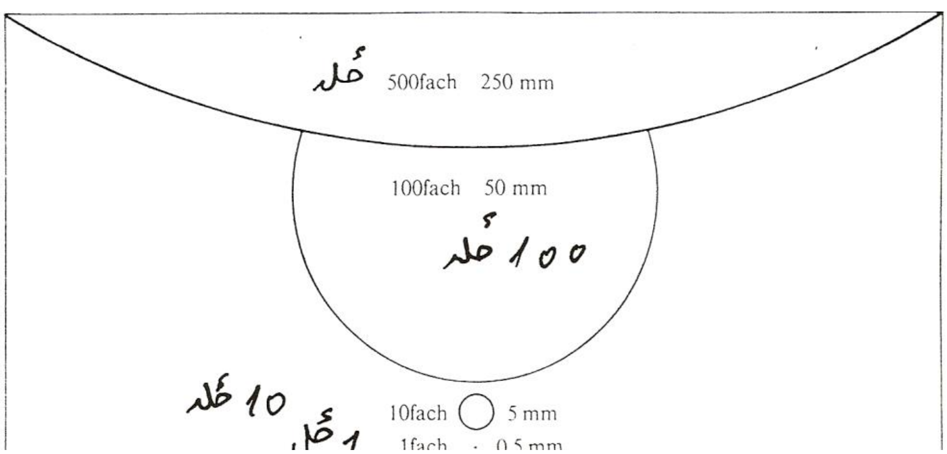
پيژند(تعريف): اويکليد(Euklid) اويکليد وايي، چي ټکی هغه دی چی نور نه شي کوچنی کيدی. ددې پيژند ستونځی په دې کې دي، چی بيا نو د داسی واړه شي ځخه ځنګه کرښه، او هواره جوړيدلی شي. يعنی که ټکی د هندسی اتم (لاتين Atom نه ويشونکی) وي بيا نو ځنګه کيدی شي چی پراخه شي يا وغزيږي؟ يا يی که مايکروسکوپ له لارې لوي کړو، نو پوره ستره هواره نيوی شي په عمل کی د کښلو (رسم ويستلو) له لارې ګورو چی ټکی څرګند غزيدلی يا پراخيدلی شي، لکه څنګه چی لوييدل يعنی غټيدلی شي:

په لاندې کې ګورو، چې ټکی د همدې شميروني له لارې څومره غټيدلی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : هندسه ځمککچ ته وایي، نو که هندسه ځمککچ پوهنه وبلل شي، د لمړنیو پوهیدلو لپاره به هم سملاسي اسانه وي .همدا اوس هم، له دې امله چې په هندسه کی ډیرڅه لیدلکیدی شي او د رانیولو وړ دي).
لنډ: شیان یا لیدیدونکي»رانیولوړ «(یا شي ډوله ځرګندیږي، همدومره ستونځی لیدل کیږي، چې نومونه اړوند (تړلی) کره وټاکلی شو، اوهمداسی یي دا اړونده کره ټاکنه روښانه یا فکروړ کړی شو، که څه هم په لومړي وار سره، چې ګوندې دا شکلونه لیدوړ او نیولوړ دي، ساده ښکاري، مګر په خپل دننه کی (خپله ختّه کی) خورا پیچلي دي چې یواځی ور نږدې پیژند(تعریف) یی کیدلی شي او په لاندې کی به راته روښانه شي:

-موږ په لاندې ځیره کی د ټکی غټیدل یا لوییدل ښایو



ګورو چی ټکی هوارې او کرښی ته پراخیدلی شي یعني عملي ځیره ښوونه یا شکل نخښوونه یی د ستونځو سره مل ده، خو سره ددې هم ځنی تیوریکي کره (ټیك) ښوونه يي ضرور ده ، یا نه پریښودونکی ده. دا پرابلم په مقایسوي- یا د پرتلي په توګه- ساده له منځه وړل کیدی شي: په لاندې کی د تشریح شوو شیانو یا لیدیدونکی لاندې د هغو تیوریتیکی ادیاله(خیالي)ځیره پوهیږو او نه د هغه عملي ریښتینوالی یا ریالیزه کوونه٠ د دې لپاره، چی ځانونه دې له دې ستونځو راوباسلی شو، دا مو د هندسی د ډیرۍ کنځپت ته لارښودوي. د پورته شکلونوسره سره، د هندسي جوړختونو (ځیرو) لاندې ، د ټکو ډیری پوهیږو. یعنی هندسي جوړښتونه بل څه نه دي، بی د ټکو له ډیرۍ٠ داسی تعریفوو:
لنډ: ټکی او کرښه

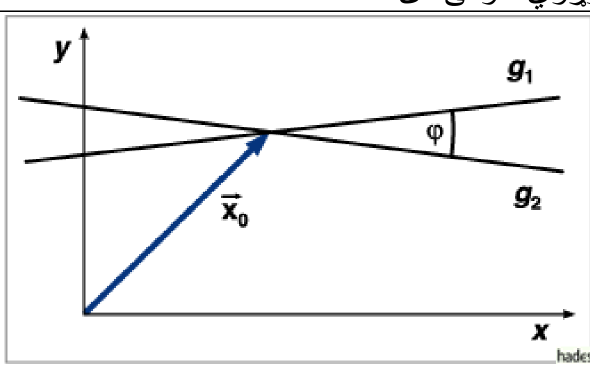
(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند(تعریف) :
یوه هواره یا سطحه د یوې ډیرۍ په څیر کلکه نیسو، چې توکی یې ټکی بللکیږي. او په غټو لاتین تورو یې ښایو لکه .....,A,B,C,P,Q ، په هواره کی یوه برخډیرۍ په نخښنه شوې ده، چې توکي يي کرښی بلل کيږي او په کوچنیو لاتيني تورو..... , a , b , c سره ښوول کيږي
یا په بل ډول :یوه هواره E د ناپای ټکو ډیرۍ ده. د هوارې هره برخه (چې پخپله پای یا ناپای کیدی شي) د هوارې یا سطحې څیره (فیګور یا شکل) بلل کيږي.

د کښلو(رسمولو، انځورولو هوارې غزول)لکه د بیلګي په توګه د کاغذ دمخ (تخنیکي بندیزونه لري (محدود دي). د هندسي هدفمندۍ لپاره باید بیا دا کاغذ هرې لور ته ناپای غزیدل شوی وي او پنډوالی یی صفر ته را کښته شوی وي، ځکه چې یوه هواره دوه دیمینزیونال ده) دوه اړخیز یا دلته ښه دی چې د اړخ په ځاي خوا ووایو، ځکه چې اړخ مو د-n-ګوډېو لپاره کارولی دی. د لته یی د خواوو څخه سور او اوږدوالی عبارت دی . (په دي کتاب کی او بیا دې موضوع کی له ورو څرګندونو تیریږو او هغه څه چې خورا مهم دي هغه دلته راوړو)۰

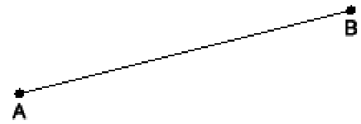
لنډ : ټکی هغه کوچنی څه دی، چې هواره او کرښه ترې جوړیدی شي او له دې امله ټکی دهوارې یا سطحې، چې د ټکوډیرۍ جوړوي، توکی دی۰

ټکی د دوه کرخو غوڅې له لارې انځوریدی شي ۰ که دوه کرښې g او h په P کې غوڅې کړي، نو د دې لپاره داسې لیکو:
h = { P □ g}
یا لاندې انځورونه
په لاندې څیره کې g_1 او g_2
په یوه ټکي کې سره غوڅوي



پیژند :
ټوټه کرښه (پای کرښه یا بنده کرښه) AB د ټولو ټکو هغه ډیرۍ ده، چې له ټکيA و B ته د هوارې یا سطحې په دننه کی لنډ واټن یا - فاصله وهي، یعني که دا دواړه ټکي یو بل په لنډ واټن کی د هوارۍ په دننه کی سره وتړي، چې د غاړې ټکي A او B هم په دې پورې اړه لري. یعني ټکی A او B هم په دې کرښه پراته دي۰داسې لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

A € AB; B € AB یا هغه کرښه، چې دوه ټکی په لنډ واټن کې سره وتړي بندکرښه بلل کیږي، ټکي د کرښې توکي دي	

که بند کرښه د «ځیرکرښې» په څیر ونیسو او یا د کاغذ پرمخ کرښی (ختکش) کیږدو نو دا کرښه دواړو لورو ته غزیدلی شي، چې موږ دا کرښه بولو٠

کرښه د ځمککچپوهنې بنسټیزه کلیمه ده٠ لیدوږ د اویکلید جیومتري کې دا یوه ناپای غزیدلی کرښی ته وایې، چې ناپای نرۍ وي، د لاندې خویونو سره:
که په یوه کرښه دوه یو له بل بیل ټکي پراته وي، نو د دوي ترمنځ ټوټه کرښه یو لنډ واټن په نخښه کوي، چې موږ ورته ټوټه کرښه یا بند کرښه وایو٠

دا کلیمه ټیک زموږ پیژند نه راکوي٠ اوس هندسه په اکسیومونو ودانه ده، چې کرښه او ټکی داسې ورکړ شوي، چې مخ د مخه یې پیژند څرګند ورکړ شوی او نیول شوی یانې موږ یې پیژنو ٠

پیژند یا تعریف :

د بندکرښی (پای AB)- دواړو لورو ناپای غزولوته کرښه (ناپائکرښه) AB یا g ویل کیږي. بندکرښه نو بیا د (ناپاي -) کرښي اصلي برخډیری ده٠

په نخښونه یې g (برخډېری)□ AB

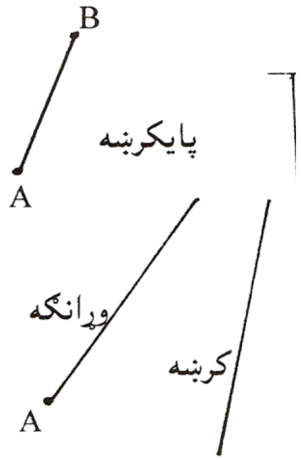
طبعآ کیدی شي، چی کرښه په یوه لور وغزول شي

پیژند :

که بندکرښه یوائې په یوه لور ناپای وغزول شي،(نا پای) نیمکرښهشي (ناپاي) نیمکرښه یا وړانګه(شعاع) بلل کیږي. نیمکرښه یا وړانګه یوې لورته بنده او بلی لور ته ناپای غزول کیدی شي، یعني پیل لري مګر پای نه لري .

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنډ: د بندکرښی دواړه لورې بندې ، د نیم
کرښې یوه لور بنده او بله وازه او دکرښې
دواړه لورې وازې دي.
په پورته ځیرو کې د بند کرښی، وړانګې
او کرښی توپیر څرګند دی٠ نیمکرښه د
کرښی برخډیری دی



که په یوه هواره کی په یوه کرښه g ټکیPکیښوول شي، نو وایو چیPدgاینځیدیر (inzidiert) کیږي یاټکیPپه کرښهgپروت دی یاgلهPتیریږي اوgد هواریEسره اینځیدیرت کیږي، په دې حالت کی د اینځیدینځ اړیکو(inzidenzrelationen) یا »پروتوالی اړیکو«څخه غږیږو٠
که په همغه کرښه له دوه ټکو (په همغه هواره له درې ټکو زیات) زیات ټکي پراته وي، نو دې ته سړی کولینیار(kollinear) کومپلانار(چې په همغه هواره یا ستڅه کې شته ويkomplanar) وایي .که یو ټکی P په دوه (زیاتو) کرښوg اوhپروت وي نو دا د gاوh غوڅټکی بلل کیږي اوداسی یې لیکو:

$$h= \{ P \cap g\}$$

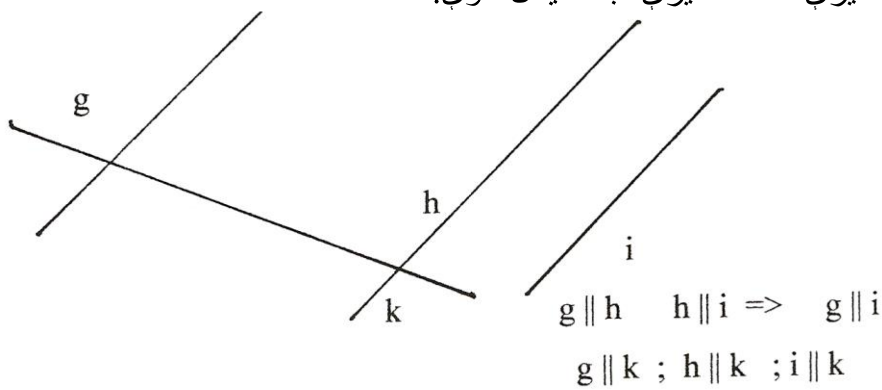
د پام وړ : ټکی د ډیری نوك کی{ } لیکل کیږي(یا د ډیری غیړ کی نیول کیږي)، ځکه چی ناپاکرښي g او hد ټکو ډیری دي او ټکی P د غوڅډیری توکی دی .
که چیرې ډیرې ناپایکرښی په یوه ټکي کی سره غوڅی کړي نوکوپونکتال (kopunktal) بلل کیږي، کوپونکتالی ناپای کرښی د ناپاکرښو غونچه (Büschel)یا بهتره ستوری جوړوي٠

د کرښو کوده(ځیرې ټولې لاندې کښل شوي دي)

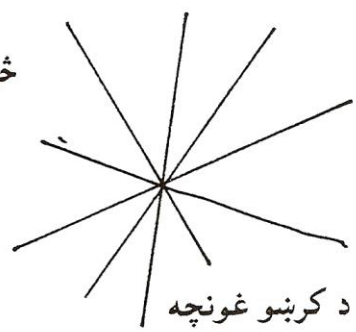
پیژند(تعریف) : کرښي g او h بي له ګډو ټکو یابهتره : بی له غوڅټکو غبرګکرښی (موازیکرښی) بللکیږي، لیکدود(مطلب د شمیرپوهنی لیکدود) یې د ی g||h

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښی د ناپای ډیرو غوڅټکو سره کټمټ یا (ایدنتیك identisch) بلل کیږي یا مساوي کیږي. دا په دې مانا چی یو په بل پرتی دي. یو بل ته کټمټ کرښی سره غبرګی دی٠
ددې لپاره لیکو: $g = h$
ناغبرګی کرښی g او h په نخښونه کی داسی په نخښه کیږي: g|/|h (دا دې منل شي، چې دا د ناغبرګ کرښو لیکډول دی یا لیکدود)٠
د لاندې څیرې شننه د څیرې کښته لیکل شوې:

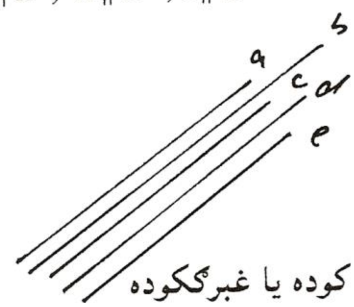


څیره ۳ الف



د کرښو غونچه

څیره ۳ ب



کوده یا غبرګکوده

هندسی څیره : یوه هندسي څیره یوه ناتش ټکیډیری ده.
هغه لاین (یوخوایز یا یو دیمنزیونال (لاتین: په ټولیزه توګه مانا یی: هرې لور ته پراخیدنه، یوې لورته پراخېدونی(1Dimensional) بلل کیږي، که هغه په یوه کرښه پروت وي او ټکی نه وي .
پیژند(تعریف):هغه هندسي څیره »هواره (Fläche) بلل کیږي، که هغه په یوه هواره هوره (Ebene) پرته وي، مګر نه په یوه ټکي پرته وي ٠ هواره یا سطحه دوه پراخیدونې یا –دیمنزیونال(2 Dimensional)ده٠

په پورته کې د کرښو کوده یا د کرښو ډله سره غبرګې هم دي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته A < B په دې مانا ده چې « A په يوه کرښه g د B تر مخ يعني ځمونږ په بلد دود ، کينږ لور ته پرته ده» دا په دې مانا چې په کرښه g ځغاسته باندې لمړی د A ټکی او بيا په ترتيب د B او C ټکو ته راځو. په دې توګه د منځ اړيکی له لارې لوريزې کرښی ته راځو. دا په دې مانا چې داسی کرښی لوريزې کرښی دي. يعني په هغه پخوانی ډول سمت يا لور يی څرګند دی.

منځ اړيکی Wz(ABC) دا مانا لري چې يا A<B<C او يا A>B>C . دا په دې مانا ، چې هره کرښه په دوه ډوله لوريزه کيدی شي يعنی سمت يی ټاکل کيدی شي.

تعريف : g دې يوه لوريزه کرښه وي او A دې د g يو ټکی وي، نو د A بدل يا توپيري ټکی کرښه g په دوه برخېيريو ويشي: (دلته کرښه ناپای کرښه ده)

$$\{X : X \in g \text{ او } X < A\}, \qquad \{Y : Y \in g \text{ او } Y > A\}$$

که دواړو برخېيريو ته ټکی A ورزيات شي، نو له A څخه په g پيداشوې وړانګي منځ ته راځي . A منځ ټکی او g د دواړو، نسبت و A ته يو بل ته مخامخ يا يو د بل په څټ وړانګو وړونکرښه بلل کيږي.

يوه وړانګه د پيلټکی A او له دې توپير ټکی P(P |= A) له امله يواځنی (يواځنی شمير پوهنيزه کليمه ده او تل دې ورته پام وي، دا په څيرونه کی زياته کاروول کيږي. دا په دې مانا ، چی بل نه شته) ټاکلی دی. يعنی په دې ټکو بله له دې وړانګي توپيري يا بدله وړانګه نه شته. دا په AP ښوول کيږي. دې AP ته مخامخ يا په څټ وړانګه په AP ښوول کيږي.

تل باور لري:

$$AP^{+} \cap AP^{-} = \{A\} \quad \text{او} \quad AP^{+} \cup AP^{-} = Zw(AP)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که وکتلی شو چی د پای کرښی یو سر له بل څخه د مخه پروت وي، نو پایکرښه لوریزه ده. که A له B مخ ته یا کیڼ لور ته پرته وي نو کرښه په AB ښایو د کرښي لوریزوالی د یوه غشي په مرسته ښوولی شو یعنی: پایکرښه AB او BA یو بل ته مخامخ یا په بل ډول یو بل ته په څټ پرتی دي.

نیمه هواره یا لنډ: نیمهواره

تعریف : هره کرښه g په هغي کرښه پورې اړه نه لرلو ټکو باندې په دوه وازو نیمهوارو باندې ویشي. دوه ټکی د نیمهوارې یوه لور ته ، ټیک او ټیک هلته پراته دي، چی ددې ټکو ترمنځ د کرښي g کوم ټکی نه وي پروت. g د دواړو هرې یوې هوارې ژیکرښه یا لنډه: ژی یا غاړه ده.
د یوې وازې هوارې او ژی کرښی ټولنه نیمهواره جوړوي. یوې ژیکرښي پورې اړونده دواړه نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په څټ نیمهوارې بلل کیږي.

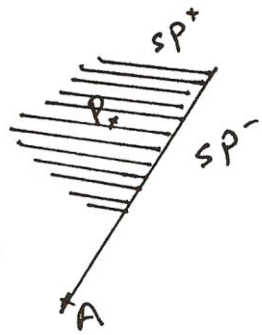
که ټکی A او B له g پیداشوې یا منځ ته راغلی نیمهوارې په یوه لور پراته وي، نو وایو چی A او B د کرښی g په همغه لور پراته دي.

یوه نیمهواره د پیداکرښي او یوه ټکی P له لارې (چي په ژیکرښه g نه وي پروت) یواځنی ټاکلی ده، یعني له دې نیمهوارې بدله بله داسی نیمهواره نه شته.

یو ټکیډیری ، چی له یوې وازې نیمهوارې او یوې وړانګي، داسی په نامه هوارجوړوونکی وړانکی ، جوړ وي، جنډه یا بیرغ بلل کیږي. دلته د وازې هوارې ژیکرښه د وړانګي وړونکی کرښه بلل کیږي.

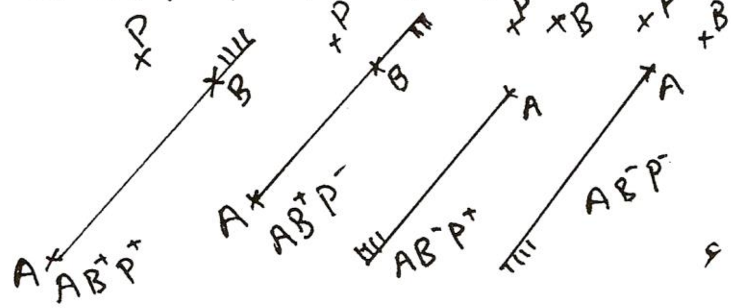
(c) ketabton.com: The Digital Library

وړانګه د جنډې ژیوړانګه ، ددې پیل ټکی د جنډې پیلټکی بلل کیږي. یوه جنډه f د ژیوړانګي s سره او په دې وازه هواره پراته ټکي P سره په sP^+ ښوول کیږي. جنډه د همغې وړونکې وړانګي یا ژیوړانګي s سره ، چې د sP^+ سره مخامخ یا په شټ ده ، د sP^- سره ښایو. (خیره: ۵)



خیره ۵

که په sP^+ همداسی sP^- سومبول، په پورته د وړانګي s لپاره اینښوول شوی سومبول، چې له A و B ته ځي او AB^+ همداسی AB^- بدل کړو یا کیږدو، نو د لاندې سومبولونو AB^-P^-; AB^-P^+; AB^+P^-;AB^+P^+ سره کرکترستیك یا ښوول شوې یا ټاکل شوي جنډې ښایي. لاندې خیرې ددې لپاره کاږو:

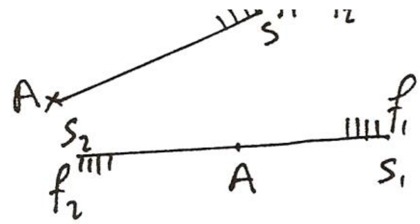


خیره ۶

دلوړ خیرو بیرغونه AB^+P^+ او AB^-P^- یو بل سره مخامخ دې، ځکه چې وړونکی وړانګه او نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په شټ دی(پام دې وي چې مخامخ او په شټ همغه مانا لري یعني همغه یو ډول شمیرنیزې کلیمې دي)،

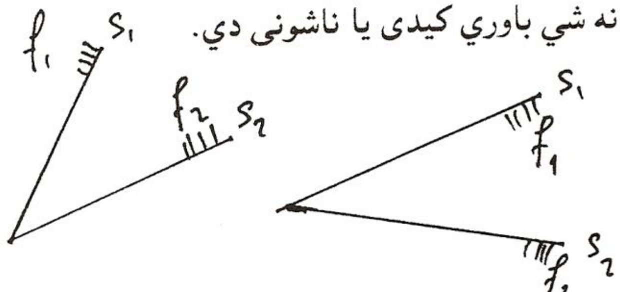
دوه بیرغونه (f_2 , f_1 د همغه پیل ټکي A سره) وپیل ټکي A ته همغه لوریز یا مساویلوریز بلل کیږي، د کولینیارې ژیوړانګو سره، که $f_1 = f_2$ یا f_1 و f_2 ته مخامخ یا په شټ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۷

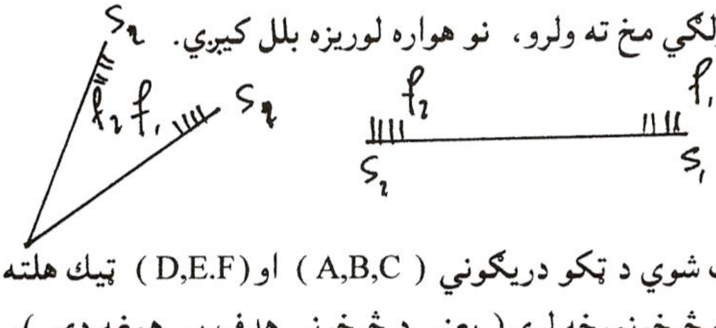
دا دوه بیرغونه یو بل ته مخامخ بلل کیږي د همغه پیلټکي، د ناکولینیارې ژیوړانګو سره، که د f_1 ژیوړانګه په f_2 یا f_2 ژیوړانګه د f_1 په ژیوړانګه پرته وي ، مګر دواړه امکانات نه شي باوري کیدی یا ناشونی دي.



خیره ۸

د ټولو جنډو ډیریو کی همغه لوریز اړیکی ایکویوالنت یا ورته اړیکی دي. همغه په دوه ټولګیو د ډیریو ویشنه ممکنوي.
هغه جنډې چی مساوي لوریز نه دي یو بل ته مخامخلوریز یا یو بل ته په ښتلوریز بلل کیږي. دې ته خو پام شته چی مخامخ یا په ښتې لوریز همغه مانا لري

که دا ډول لوریزټولګي مخ ته ولرو، نو هواره لوریزه بلل کیږي.



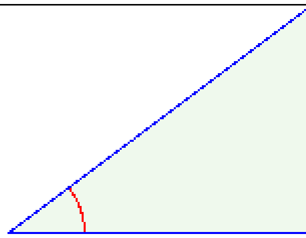
خیره ۹

دوه منظم یا ترتیب شوي د ټکو دریګوني (A,B,C) او (D,E.F) ټیک هلته یا هلته او هلته همغه څرخونموخه لري(یعنی د څرخونی هدف یی همغه دی)، که

(c) ketabton.com: The Digital Library

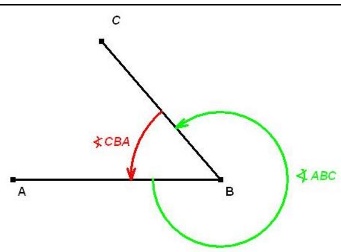
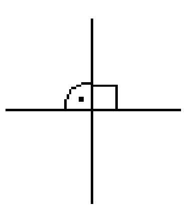
جنډې AB C او DE F همغه لوريزې وي. د يوه منظم نه کولينيار يا کولايني دريګونټېکو (A,B,C) ځرخونموخى لاندې د جنډې AB C لوريزټولګى پوهيږو.

کونجکليمه

پيژند (تعريف): په يوه هواره کي، چي دوه وړانګى S 1 او S2 ياني S1/\ S2 د پيل غوښتکى S ولري په هواره يا سطحه E کى کونج β جوړوي .وړانګي د کونج پينى بلل کيږي او پيلټکي S دکونج > ككره (لنډ : کونجككره)بلل کيږي.	

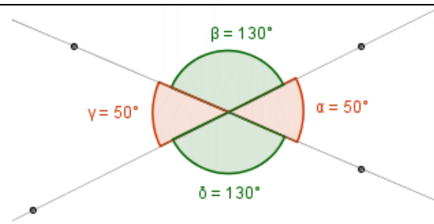
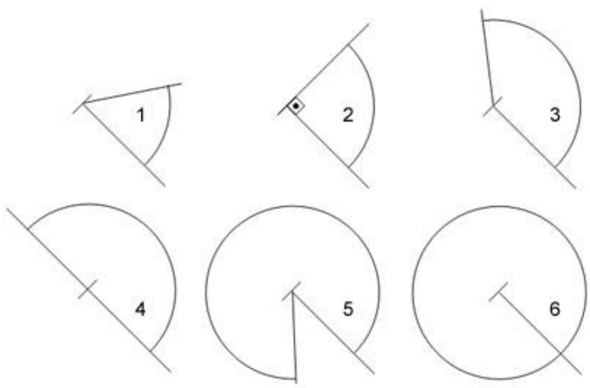
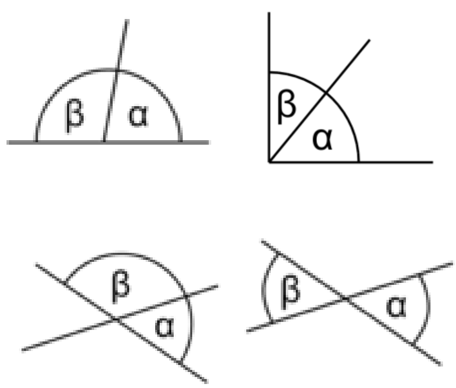
لنډ: دوه کرښي، چي په يوه ټکي کي سره غوښي کړي، کونج جوړوي، چي کرښي د کونج پينې او غوښتکى يي د کونج ككره يا (رآس الزاويه) بلل کړي ۰ پورته ځيره دې وكتل شي۰کونجونه په ګراد (لاتين پل يا لاقدم)كچيږي

د کونجونو رسمونه او نومه وني

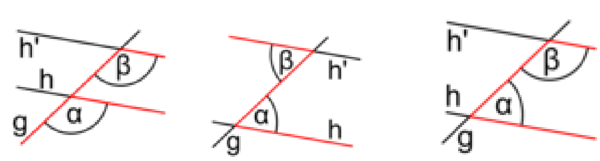
هغه کونج ، چي له ۱۸۰ درجو کوچنى وي هغي ته ننوتى کونج واي او هغه کونج، چي له ۱۸۰ درجو لوي وي هغه ته وتلى کونج واي ننوتى کونج Konvexes Winkel وتلى کونج konkaves Winkel تيره کونج، چي له ۹۰ درجو کوچنى دى، ولاړکونج، چي پوره ۹۰ درجي دى، پڅکونج، چي له ۹۰ درجو لوي او له ۱۸۰ درجو کوچنى دى، غزيدلى کونج، چي ۱۸۰ درجي دى ، له پڅ زيات- يا د پڅ په څټ- يا له پڅ اخوا کونج ، چي له ۱۸۰ درجو لوي او له ۳٦۰ درجو کوچنى دى، پوره کونج، چي ۳٦۰ درجى دى۰ دا دې په ګوته وي، چۀ صفرکونج صفر دى۰	 

يادونه: دا مي ډير تکرار راوړى، هيله ده، ګران لوستونکي به ورسره ستړي نه شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

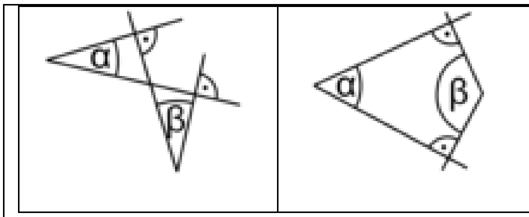
مخامخ څیره : ککر په ککر کونجونه یورنګیزدي، بدلرنګیز کونجونه ګاونډي بلل کیږي۰	
لاندې کونجونه پخپله ونوموی‌کړی ۰	
کمپلیمنت یا ۹۰ درجو ته پوره کیدونکي کونجونه(مخامخ څیره دي وکتل شي)۰ په څنګ کې يي سوپلیمنت یا ۱۸۰ درجو ته پوره کیدونکی کونجونه۰مخامخ څیره ۰ مخامخ کونجونه ښی لور ته : ککر په ککره کونجونه۰ کين لور ته : ګاونډي کونجونه	

له کين څخه و ښی لور : پوړیز کونجونه ، ردبدلکونجونه



(c) ketabton.com: The Digital Library

مخامخ کونجونه، چې پښې یې یو په بل ولاړې وي, ۱۸۰ درجو ته یو بل پوره کوي٠ په دې بل حالت کې کونجونه یو بل سره برابر دي٠

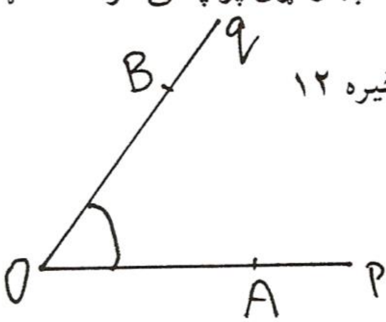


یادونه : ګران لوستونکې په راته بخښنه وکړي، چې د زیاتو کونجونو هغه ورسره بلد نامه سره ښه نه یم بلد، څکه چۀ په محدب ، مقعر او داسې نورو باندې نه پوهیږم، یواځې له قایم الزاویه څخه پرته٠

یو ګراد Grad لاتین: پل یا قدم

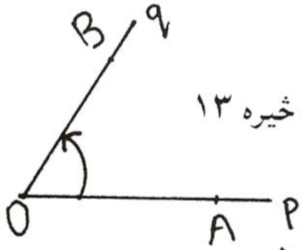
لاندې کونجونه سره توپیر کیږي، چې ایا د پښو لړی پرلپسی کره ټاکلي او ایا د کونج دننه په نخښنه شوی دی او که نه.

د کونج دننه په نخښنه شوی نه دی: د پښو لړی پرلپسی کره نه ده ټاکلی



خیره ۱۲

بنسټیز کونج:
د وړانګو p , q (نامنظمی) جوړې،
د ګډ پیلټکي O سره، د (p,q) ∢
یا (ABC) ∢ په نخښنوني
د A ∈ p , B ∈ q سره.
دلته O ککرټکی دی، p او q د کونج پښی دي.



خیره ۱۳

د پښو لړی پرلپسی کره ټاکلی ده:
لوریز بنسټیزکونج: د وړانګو p او q
منظمه جوړه د ګډ ټکی O سره د (p,q)∢
یا AOB ∢ په نخښنونی د A ∈ p او B ∈ q سره.

دلته هم لکه د مخه o ککرټکی، p لومړی پښه او q دویمه پښه ده. دا کونج په

(c) ketabton.com: The Digital Library

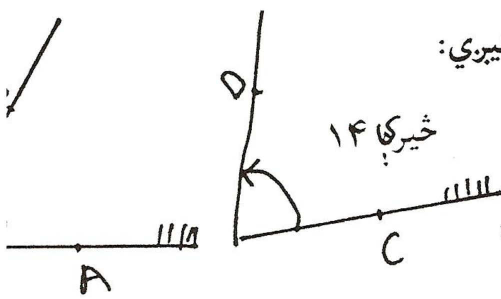
شميرپوهنيزه موخه مثبت لوريز دی

يادونه : هغه د څرخون لور چی د ساعت څرخيو مخامخ يا په بل ډول په څټ ځغلی

مثبتلوريز او هغه چې د ساعتڅرخيو په لور ځغلي مفي لوريز څرخون بلل کيږي.

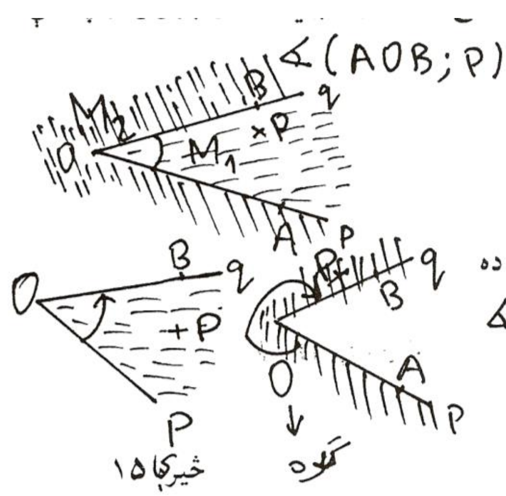
دوه کو نجونه تيك هلته او يا هلته او هلته مساويلوريز دي، که د هغو جنډې همغه لوريز يا مساوي لوريزې وي.

لکه په دې څيره کی چی ليدل کيږي:



د کونج دننه په نخښنه شوی دی:

د کونجونو لړی پرلپسی يی کره نه ده ټاکل شوې. (بلد يا عادي) کو
بنسټيز کونج هواره په دوه برخهږيريو M_1 او M_2 ويشي. په نخښنه برخ
بيلګي په توګه په ټکی P کی) د کونج دننه بلل کيږي(د کونجهوار



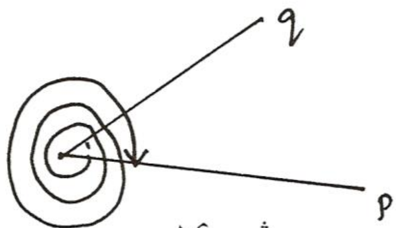
نخښنونه کي: ∡(P,q;P) ، ∡(AOB;P)
که دننه يی تش ډيری وي نو
دا کونج صفر کونج دی .

د پينو لړی پرلپسی کره ټاکلی شوې ده
لوريز کونج: په ګښنونه ∡(P,q;P)
لوريز بنسټيز کونج او دننه يی په
نخښنونهP≠q، که وي، نو (p,q;p)
او (q,p;p) بدللوريز دي. (P≠q)

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دلته هم که د کونجونو دننه تش وي،
نو کونج صفر کونج دی: $\measuredangle(p,q;p)=0°$

څرخونپروسه: څرخونکونج:



څیره ۱۶

لوریز کونج، که د کونج په همغه لور د یوه طبیعی ګڼ یا پیدایښتي ګڼ په اندازه چی یوه پښه یی ځاي په ځاي ده وڅرخول شي، نو د کونج لور کی تغیر نه راځي.

ګراد (لاتاین Grad پل یا قدم)

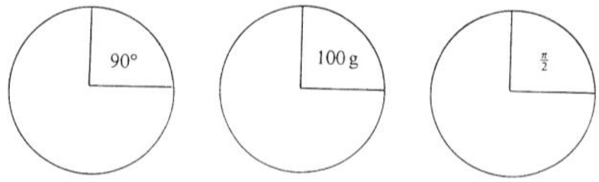
د کونج لویوالی په مختلفو ډولونو ورکول کیدی شي. د اندازې یووني (یو یې : یوون) یا واحدونه(یو یې : واحد) لاس ته راځي، چی یو کونج - په یوه ګردۍ کی کښل شوې- په مساوي برخو یا سکتورونو وویشل شي.) سکتور او ګردۍ لپاره دې، د ګردۍ لوست ځاي وکتل شي (و رسره بلد یا مروج یی په360° مساوي برخو ویشنه ده)
پیژند : °1/360 د یوه پوره کونج 1° (په تورو :یوه درجه. ، لاتین یي gradus = پل قدم) بلل کیږي.
ګراد نور هم په °60 کونجدقیقو ویشل کیږي) ’60 =°1 او کونجدقیقه په "60 کونجثانیو(.(1’= 60’’

د» ګراد یا درجی« لاندې »زړه درجه«(زوړ ګراد) پوهیدل کیږي. دا د زاړه بابیلوني زاړه شپیتیز سیستم څخه دی. په تریګونومیتري یا کونجکچ کي کونج برسیره پردې په لینده کچ یا - اندازه پاندې هم اندازه کیږي او په ګیودازي (Geodäsie د اندازه کولو تخنیك، - پوهنه یا- علم (په نوي ګراد یا ګون (gon (اندازه کیږي چی دلته ګردۍ په ۴۰۰ برخو ویشل کیږي .دا په جبشمیري کی مودوس"GRAD" « دی .څیرې :

د ګردۍ څلورمی انځورونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

شیرګیا ۱۷



زوړ ګراد DEG نوی ګراد GRAD لینده کچRAD

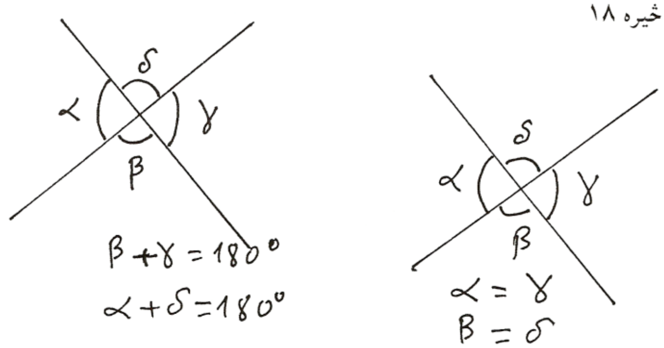
د کونج مثبت- او منفی – یا زیاتون - او کموننخښي د کونججوړونکی یاکونج تولیدیدونکي څرخونلورۍ څخه لاس ته راځي. کیڼ څرخون (د ساعت د څرخی په څټ څرخیدنه) مثبت- زیاتونمخنخښه مخ ته یعنی کیڼ لور ته لري او ښی څرخون (د ساعت د ځرخولو په لور) منفی – یا کمونمخنخښه مخ ته لري یعني کیڼ لور ته لري. د دوه کونجونو مقایسی یا انډول یا پرتلی لپاره بیا یواځی مطلقه ارزښت مهم دی. مطلقه ارزښت سوچه یا خالص د ځاي ارزښت یا څیفرارزښت دی، بي له مخنخښي. د مطلقه ارزښت همداسی ځاي ارزښت لپاره دي ځما د شمیرپوهنی بنسټیزکتاب وکتل شي۰(په نړیوال جال کې به هم راشي)

بیلګه : 5 = |5-| , 3 =|3|دوه کرښی یو د بل سره څلور غوڅکونجونه جوړوي، چی په تولیزه یا عمومي ډول یی جوړه سره مختلفی لوي وي. د بیلګې په توګه که له غوڅکونج غړیړو نو موخه یه مو وړوکی کونج وي۰

پیژند :که دوه ناپانکرښی یو بل سره په یو ټکی کي پرېکړي، نو څنګ په څنګ کونجونو ته ګاونډي کونجونه واي، چی دوي یوه پښه ګډه لري او دواړه کونجونه 180° لري (د درجي نخښه کله کله کیڼ لور ته لیکل شوې، خو دا په پوهېدنه کي کومې ستونځې نه رامخ ته کوي) ۰

کونجونه چی ککرې یي سره نښتی یا په بل ډول ککره په ککره وي، هغو ته ککرنکونجونه ویل کیږي. ککریکونجونه مساوي لوي دي، دوي یو ګډککریټکی لري او پښی یی یوه یوه په ګډو کرښو پرتی دي .

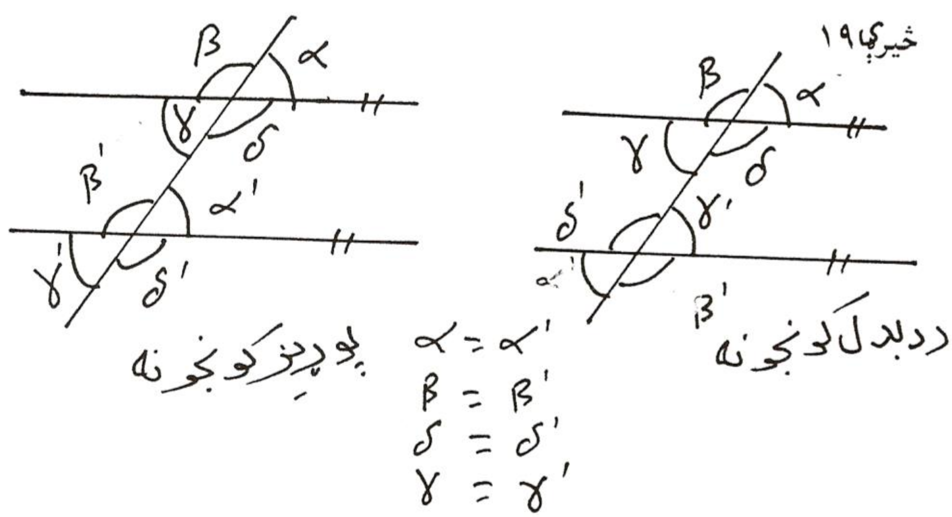
څیره ۱۸



(c) ketabton.com: The Digital Library

خیره‌کونجونه چی ځانونه 180° ته پوره کوي سوپلیمینت) Supplementwinkel)
بلل کیږي او کونجونه چی ځانونه 90° درجو ته پوره کوي کومپلیمینتکونجونه
(Komplementwinkel)بلل کیږي. دې دواړو کونجونو ته تر یوه نامه لاندې چې
راشي پوره کوونکی کونجونه وایي .که دوه غبرگی کرښی g اوh د یوې بلی ناپایکرښي k
له خوا غوڅی شي، نو څلور دننه پریکونجونه منځ ته راځي ۰ دوي د g او h تر منځ،
,او د k په مختلفو خواوو(او څلور دباندې پریکونجونه)نه د غبرگکرښو g او hترمنځ،
بلکه له دوي دباندې(د k په یوه لور یو دباندنی او یو دننه غوڅ- یا پریکونجونه
پوړیزکونجونه بلل کیږي، دوه دننني یا دوه دباندنی غوڅ- یا پریکونجونه چی د k په بیلو
لورو پراته وي ردبدلکونجونه بلل کیږي(څېرې پورته ورکړ شوي دي) ۰

جمله: پوړیز- او رد بدل کونجونه په غوڅغبرگکرښو(غبرگي کرښي، چې له دې کرښي
غوڅي شوي دي) کې سره برابر دي



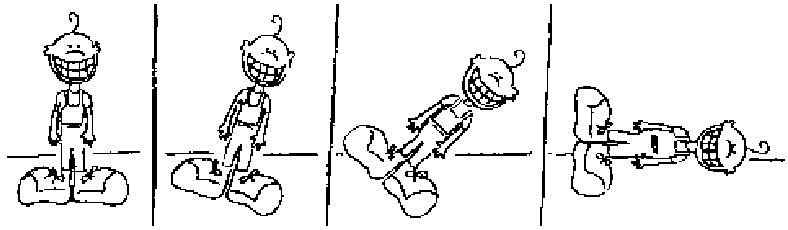
کونج کلمه

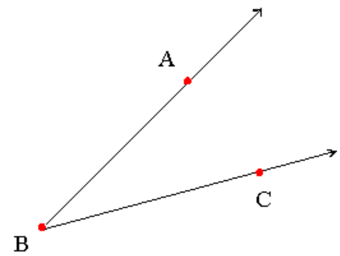
کونج څه شی دی What is an Angle ?

یادونه: لاندې برخه څه تکرار لري، خو بیا بیا راوړنه ښه زده کړه ځان پسې لري۰

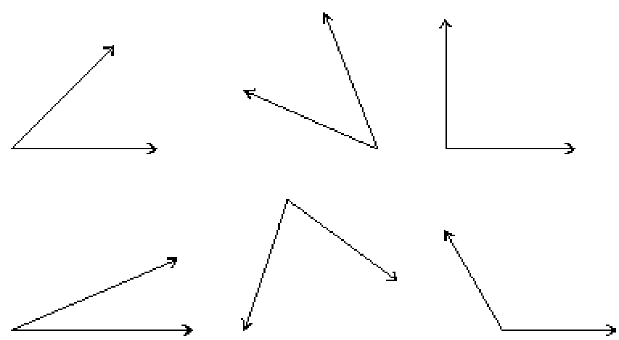
دوه وړانگی، چې یو پای لري او سره غوڅي کړي کونج جوړوي۰ وړانگی د کونج پښی
یا اړخونه بلل کېږي او هغه ټکی، چې هلته کرښی غوڅوي ککرټکی یې بولو۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

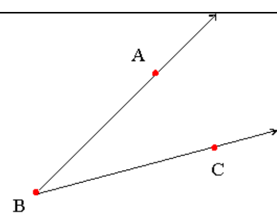




Example: دلته د کونجونو ځنې بیلګی راوړو .

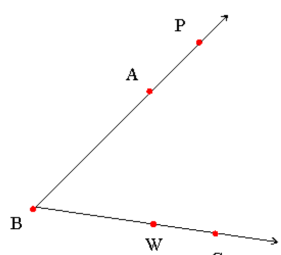


که توري د کونج په خوله کې راشي ښه به وي، خودا هم د لیکني ستونځې دي، چې زه ورسره لاس پهکريوان یم٠ ∠ABC کونجونه داسي بنایو



Example: د همغه کونجلپاره بیل بیل نومونه لرودی شو لکه

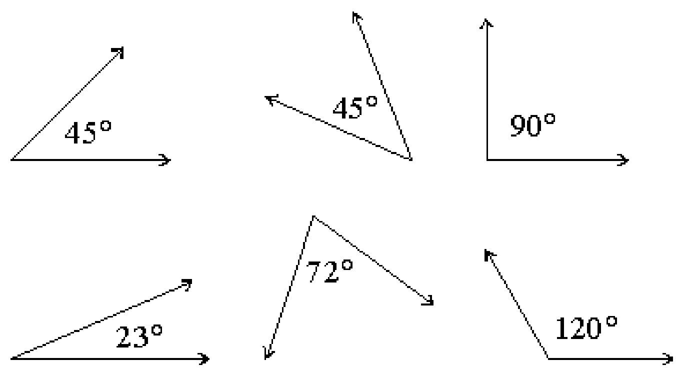
WBA ∠ CBPd∠ ,PBW∠ ,PBC∠ ,



(c) ketabton.com: The Digital Library

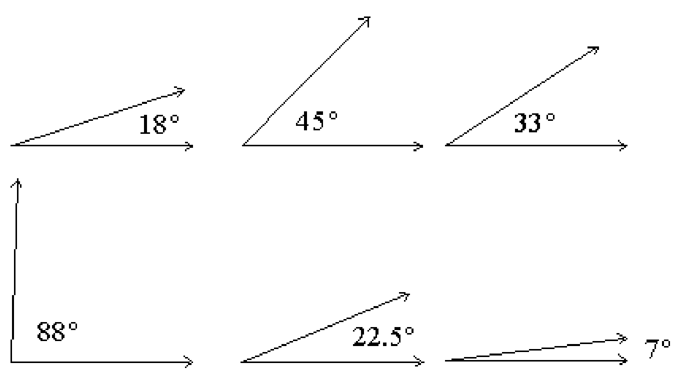
Degrees: د کونج کچوني یوون یا واحد یا یووالی: کونج په درجه کچیږي

Example په لاندي کي ځني بيلګي :



تيره کونج ، چي د صفر او ۹۰ درجو ترمنځ وي Angles Acute

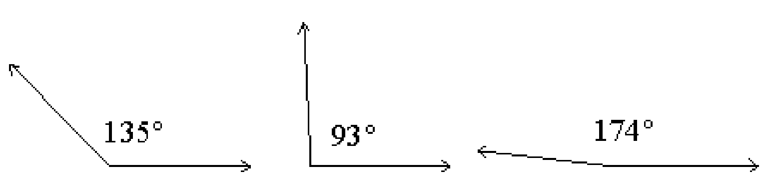
Example لاندې کونجونه تيره دي .



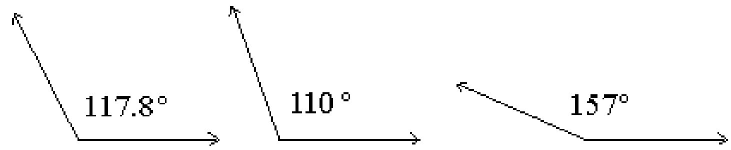
پخ کونجونه Obtuse Angles

پخ کونجونه ، حي د ۹۰ درجو او ۱۸۰ درجو ترمنځ وي پخ کونجونه بلل کيږي.

Example لاندې کونجونه ټولپخ کونجونه دي:

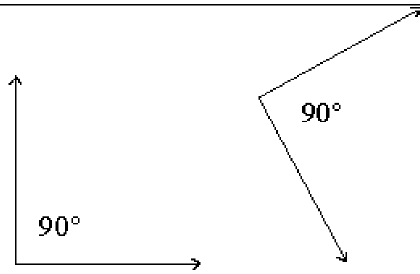


(c) ketabton.com: The Digital Library

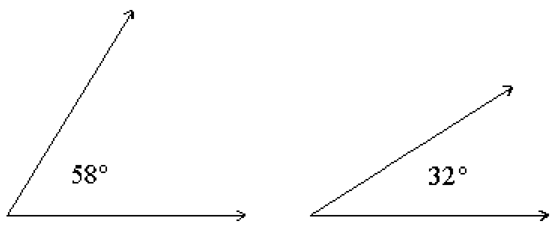


Right Anglesولاړکونج: هغه کونج، چي ۹۰ درجي وي

لاندې دواړه کونجونه ولاړ کونجونه دي Example:

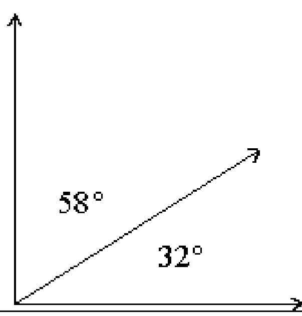


Complementary Anglesکمپلیمنت کونجونه: هغه کونجونه، چي یو بل و ۹۰ درجو ته پوره کوي٠کمپلیمنټکونجونه بلل کیږي٠ یو کونج د بل کونج کمپلیمنت بلل کیږي



بیلګه Example: دا مخامخ دوه کونجونه کمپلیمنت کونجونه دي

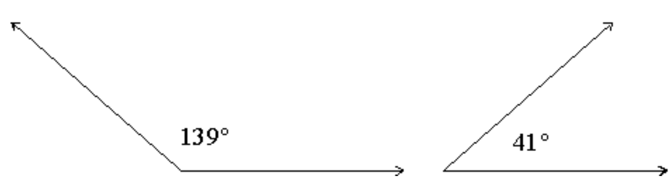
دوه کونجونه، چي داسي سره یوځاي شي،چي یو ولاړ کونج جوړ کړي،نو دا کونجونه یو له بل سره کمپلیمنت دي!



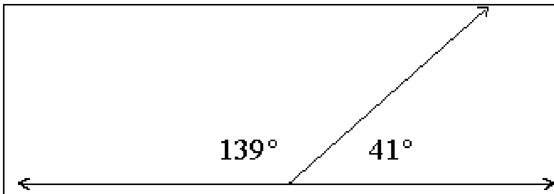
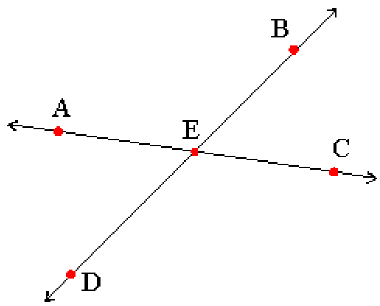
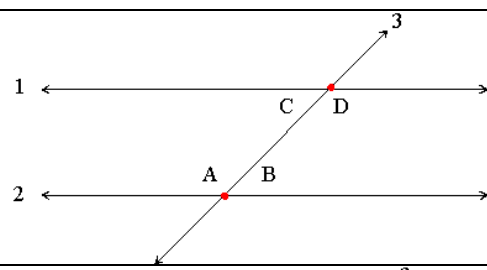
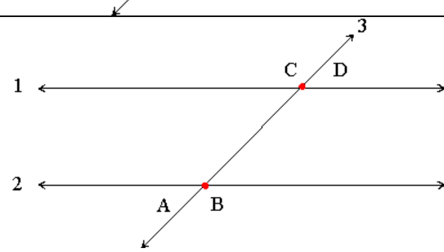
Supplementary Anglesسوپلیمنت کونجونه :

هغه کونجونه، چي ۱۸۰ درجکو ته سره پوره کوي سوپلیمنت کونجونه بلل کیږي

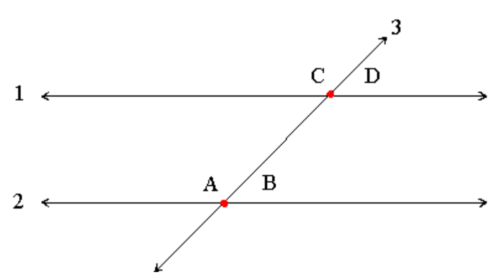
بیلګه Example: لاندې دوه کونجونه سوپلیمنت دي



(c) ketabton.com: The Digital Library

	داسي دوه سره ترلي کونجونه، چې ځانونه ۱۸۰ درجو ته پوره کړي سوپليمنت کونجونه جوړوي
	Vertical Anglesککر په ککر کوجونه: چې دوه کرښي داسي سره غوڅي کړي، لکۀ په لاندي ځيره او کونجونه، همغه ککره ولري ککر په ککره کونجونه بلل کيږي او سره برابر ده , AEB او DEC کونجونه او همداسي BEC او AEDککر په ککره کونجونه دي.
	Alternate Interior Anglesردبدل دننه کونجونه : په لاندي کي کونجونه Aاو Dهمداسي B او C ردبدل دننني کونجونه او سره برابر دي . A اوB ، C او D ګاونډي کونجوه دي.
	Alternate Exterior Angles ردبدل دباندي کونجونه : په لاندي کي کونجونه B او C ردبدل همداسي A او D بدل - يا ردبدل دباندني کونجونه او سره برابر دي

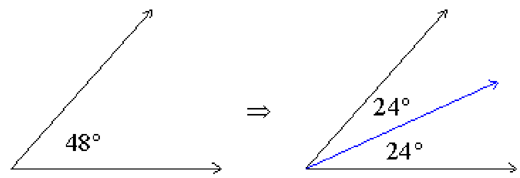
پوريز کونجونه Corresponding Angles دا کونجونه A او C همداسي D او Bپوريز کونجونه دي او يو له بل سره برابر دي



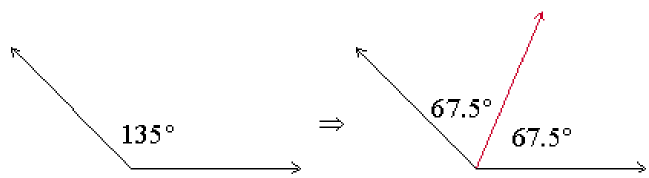
(c) ketabton.com: The Digital Library

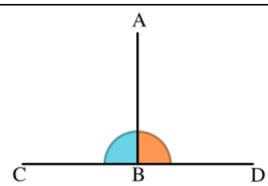
Angle Bisectorکونجنيمی : هغه کرښه، چې کونجونه نيموي کونجنيمی يې بولو

بيلګه Example: د بنې کونج شنه کرښه ، د کيڼ کونج نيمی ده



په بنې کونج کې سره کرښه د کيڼ کونج نيمی ده .



Orthogonal or Perpendicular Lines ولاړې کرښې: هغه کرښې، چې يو په بل نيغې ولاړې وي پرپينډکيولار نوميږي٠(زما وړانديز: نيغې ولاړې کرښې)	

نښلونه:

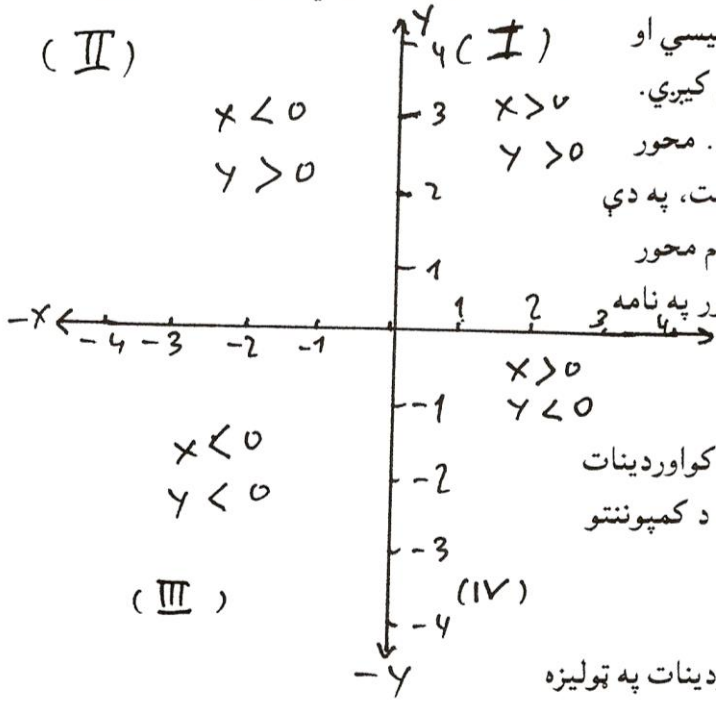
کواوردينات سيستم

يادونه: کواوردينات سيستم څخه ځموږ موخه پروتولاړسيستم دی. دا په ادبياتو کې په همدسې ياديږي. ما دا دواړه ترمينولوژي کارولې، هيله ده چې ستونځې به پيښې نه کړي.

د شميرپوهنې او همدا ډول د تخنيک په ډيرو څانګو کې د کواوردينات سيستم ډير مهم رول لوبوي. په کارتيزي کواوردينات سيستم کې د هوارې هر ټکی P د خپلو دواړو کواورديناتو(x,y) ورکولوسره کره يا ټيک ورکړ شوی دی. لمړی کمپوننت يا ابسخيز(Abszisse) د x –ارزښت يا پروت ارزښت او دوهم کمپوننت يا اوردينات

(c) ketabton.com: The Digital Library

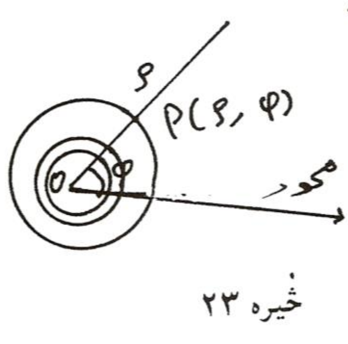
(Ordinate) د y–ارزښت بلل کیږي یا ولاړارزښت. کارتیزي کواوردینات سیستم هواره د دوه یو په بل نیغ ولاړ محورونو (لنډ: ولاړ محورونو) له لارې په څلورو برخوویشي (څلورمی Quadranten) د کوادرانتو نومره بندي یا نمره کول د ساعت څرخیدلو په څټ صورت نیسي او د ښي پورته لور څخه پیل کیږي. پروتنیغ پروت محور د ۱ . محور یا x–محور یا پروت ارزښت، په دې لوتنیغ ولاړ محور د ۲ –ام محور یا y– محوراو یا ولاړمحور په نامه یادیږي.



څیره ۲۰ : د کارتیزي کواوردینات سیستم څلور کوادرانتونه د کمپوننتو له مخنخښي سره.

د یوه ټکي P(x,y) کواوردینات په ټولیزه توګه اجازه نه لري چې بدل شي، ځکه چې دا کپمونتتونه تنظیم شوې یا منظمه جوړه ده. د ځل یا ضرب لمړنی کپمونتت د y– محور څخه فاصله ټاکي دوم کپمونتت د x– محور څخه. که لمړی کمپونتت منفي وي، نو ټکی د y–محور کینې لور ته

د دریګوډیز ناخپلواکو (تریګونومتریکي مثلاثاتي فنکشنونو) (چي وروسته راغلی) او همدارنګه دپیتاګوراس له بنسټیزی جملی شمیرارونی (څیره ۲۳) کولی شو چی د کارتیزي کواوردینات څخه و پولار کواوردینات ته راشو او سرچپه هم.



څیره ۲۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله : د پولارکواوردینات بدلون یا ترانسفورمیشن (Transformation) لاتین : **شکل** اړول یا بدلول) و کارتیزي کواوردینات ته

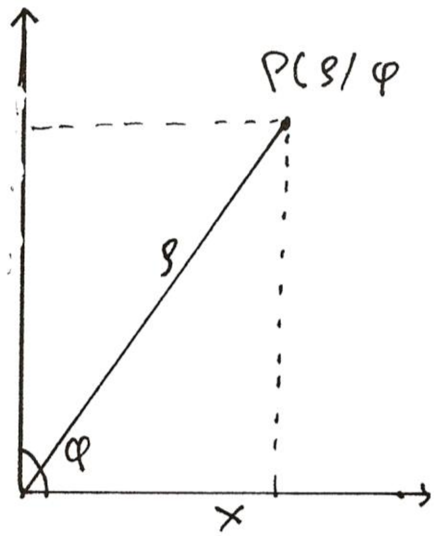
$$x = \rho . \cos \varphi$$
$$y = \rho . \sin \varphi$$

د کارتیزي کواوردینات بدلون یا ترانسفورمیشن و پولارکواوردینات ته

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

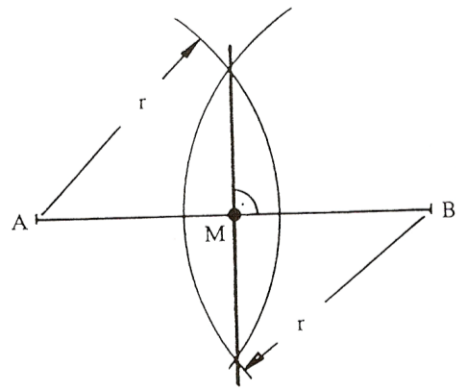


خیره ۲۴

هندسی بنسټیز جوړښتونه:

زه دلته داموضوع اوږده نه څیړم، خو دومره غواړم چي په ګوته کړم، چي تراوسه مو یو څه د هندسی ځنی بنسټیزې کلیمي تشریح کړې او دلته دا غواړم وښایم، چی څنګه ځنی بسټیز شکلونه کښل کیږي، په هغه صورت کی چی له موږ سره ګردونی یا څرخی (څیرکل یا پرکال او که پرکار مو ورته وایه) او کرښی یا خټکش وي یا همداسی کونجکچ د مناسبو ویشنو سره موجود وي. ددې لپاره چی ځنی ستونځی مو له منځه لرې کړې وي باید له دې څیرو یوه لیدید ونکی څیره ولروچی دا د دې څیرو په کښلو یا رسم کولو ممکن کیدی شي. دا د عملي اندازې پرابلومونو حل یا ستنځوبي کي هم مرسته کوي، که د اندازي یوونونه (واحدونه) ونه لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۵

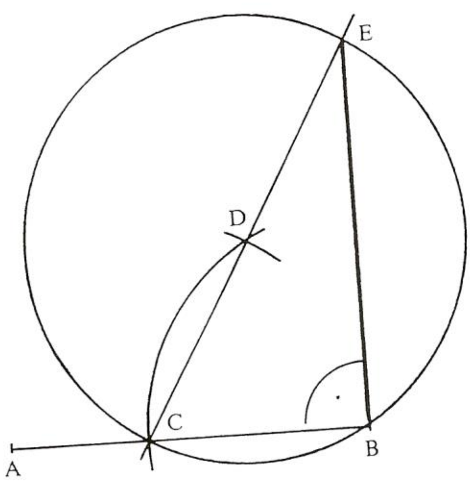
۱ – د AB کرښې نیمول او

۲ – د منځ ولاړکرښې کښل

د A او B په هر ټکي یوه ګردۍ د وړانګې $r > (1/2).|AB|$ سره ووهئ (سیومتري دوه ګردۍ خیرئ)

د دواړو ټکو تړلکرښه په غوځټکې M کې په کرښه AB منځولاړکرښه ده او دا کرښه په M کې نیموي.

۳ – د یوې کرښې په سرټکي کې د ولاړکرښې جوړول (یا کښل). په B یوه ګردیلینده ووهئ د وړانګې $r < |AB|$ سره، چې AB په C کې پرې کړي، وروسي بیا په C یوه ګردیلینده په همغه وړانګه ووهئ چې د مخه وهل شوې ګردیلینده په D کې پرې کړي. D د دریمې ګردۍ منځ ټکی دی د وړانګې $r = CD$



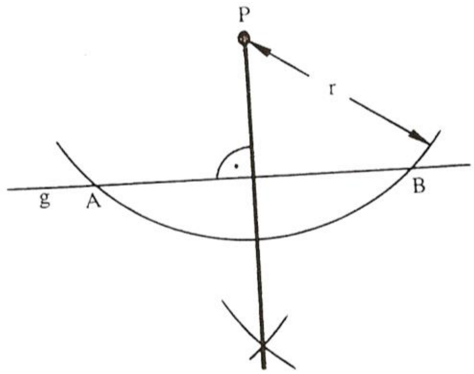
خیره ۲۶

(۳ – یو دې اړوند)

سره. چې CD غزولشوې تر ګردۍ په E کې پرې کوي. E نو په B نیغه ولاړه ده. (تالس ګردۍ دې وکتل شي)

۴ – د ټکي P څخه په کرښه g باندې یوه نیغه ولاړکرښه واچوئ ($P \notin g$). په P کې په وړانګه r یوه ګردۍ ووهئ، چې هغه د g له فاصلې (واټن) لوي وي او کرښه g په A او B کې پرې کړي. اوس نو لکه په (۲) کې الترناتیو: لکه د (۳) لاندې په کرښې او هندسي دریکوډي.

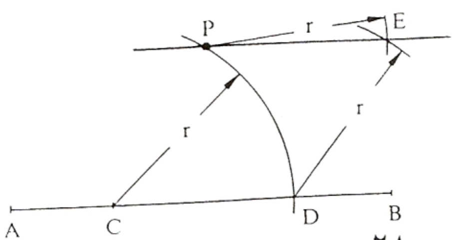
(c) ketabton.com: The Digital Library



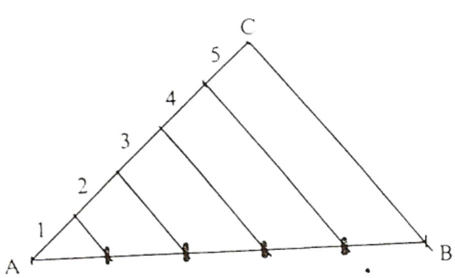
خیره ۲۷

۵ – د AB کرښې سره دټکي P ∉ AB یوه غبرګکرښه جوړول (کښل): د خوښي په یوه ټکي C ∈ AB د وړانګې r = |CP| یوه ګردۍ ووهې چې کرښه AB په D کې پرې کړي، بیا نو په D او P همغه لینده ووهې چې یو بل سره د E په ټکي کې غو ځوي. دا د PE کرښه د AB کرښې سره غبرګه ده. (دا د روتی نومي څلورګوټي جوړول دي).

الترناتیو : لکه په(۴) کې په ټکي P کې ولاړه کرښه s و AB باندې او بیا همداسې نیغ – یا ولاړکرښه په s د P ټکي کې.



خیره ۲۸



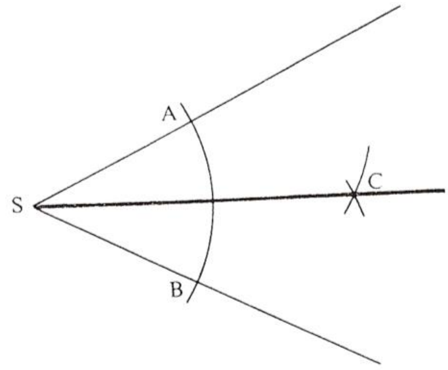
خیره ۲۹

۶ – د یوې کرښې AB ویشل په n مساوي برخو (د بیلګي په توګه ۵) د A ټکي څخه یوه د خوښې وړانګه وغزوی. په دې کرښه بیا n – ځله (دلته ۵ ځله) د خوښي اوږدې کرښې ووهې. اخرنی ټکی C له B سره وتړی او بیا له هر ټکي د BC مرستکرښې سره غبرګې کرښې وکاږي، دا غبرګې کرښې د AB کرښه په (۵) مساوي برخو ویشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – د یوه کونج نیمول

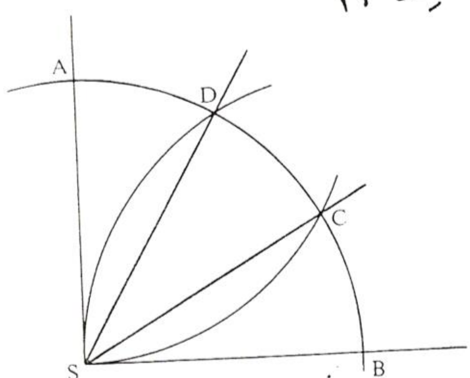
په ککره S یوه د خوښی لینده ووهه چی د کونج پښی په A او B کی پرې کړي، بیا په A او B په همغه وړانګه یو د خوښی ګردیلینده ووهی چی یو بل سره په C کي پرې کړي، پریتړکی د S سره وتړی.



ضِحره ۳۲

۸ – یو ولاړګوډی په درې مساوي برخو هره 30° وویشی

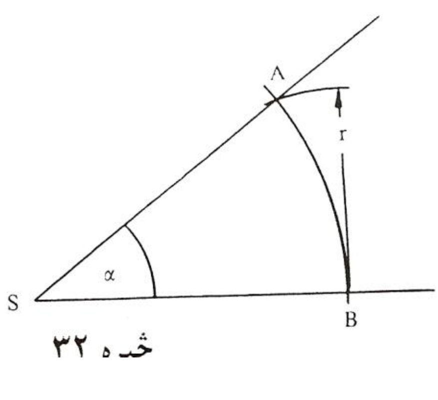
په ککره S باندې یوه د خوښی ګردیلینده وباسی چی دواړه پښی په A او B کي پری یا غوڅی کړي او له .



څیره ۳۱

دې وروسته د څرښوونکي په همدې بیرته والي یا وازون د A او B ټکو څخه ګردیلیندی وکاږی، اوس د S څخه د C او D په لور وړانګی وکاږی، دا دوه وړانګی دا ولاړ– یا نیغکونج درې مساوي ټوټی کوي یا په درې برابو برخو ویشي.

یادونه : هر د خوښی کونج په څرخی او کرښي باندې په درې مساوي برخو نه



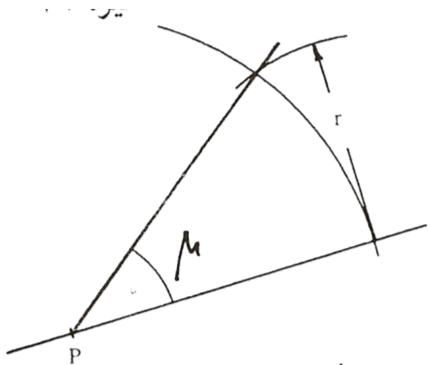
څـه ۳۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

ويشل کيږي، ددې لپاره بيا الجبري
مواد په کار دي.

۹ – د µ کونج په يوه ټکي P

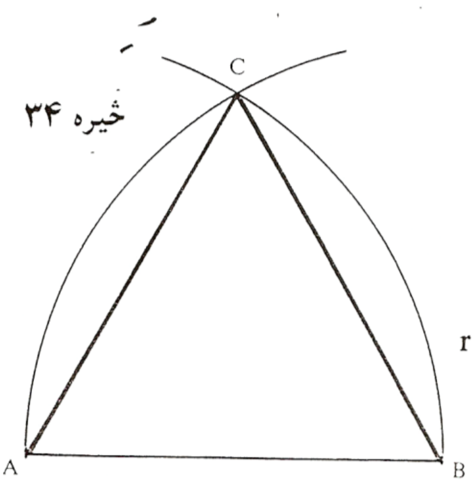
وغزوئ، د ورکړشوي کونج په
ککره S باندې يو ګرديلينده
ووهي چې پښې يې په A او B
کي پرې کړي، بيا نو په همغه
ګردۍ ووهۍ چې څرخې د |AB|
په اندازه وي. اوس نو دا پريټکی
د P سره وتړۍ.



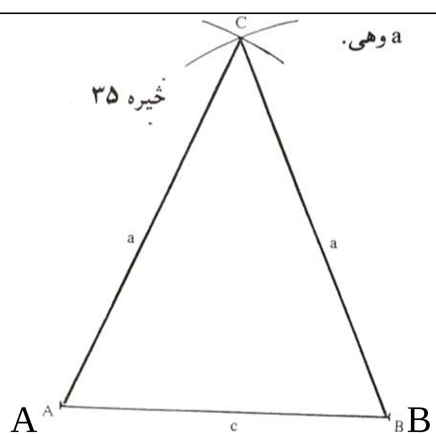
خیره ۳۳

۱۰ – د مساوي اړخيز درېګوډي

کښل: په A او B باندې يوه
ګرديلينده ووهۍ چې وړانګه يې r = |AB|
وي ، چې يو بل په ټکي C کی پرې کړي.



څیره ۳۴

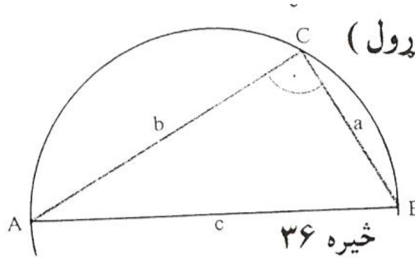
بيانوC دA او B سره ونښلوو، دا لاس ته راغلی درېګوډی مساوي اړخونه لري. په همدې ډول مساوي پښيز درېګوډی انځورېږي، د ورکړشوي بسټ AB=c سره. په A او B يوه يوه پښه وه،	 څیره ۳۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

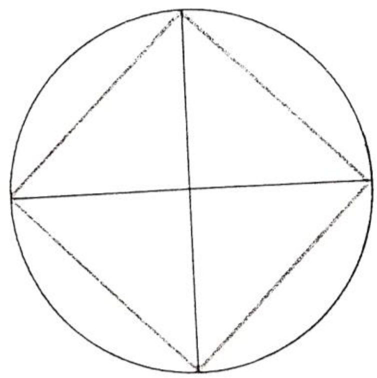
١١ – د ولاړکونجیز دریکوړي کښل (جوړول)

هر دریګوړی چي اوږد اړخ یې د یوه ګردي قطر وي، ولاړکونجیز دریګوړی دی.

(د تالس (Thales) جمله وروسته راځي



څیره ۳۶



څیره ۳۷

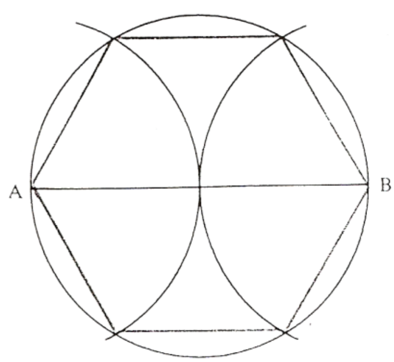
١٢ – په ګردی کی د یوې مربع کښل

د ګردی په منځټکي باندې لکه په (۲) کی دوه یو په بل ولاړ نیمي (قطرونه) وکاږی او هغه ټکي چی ګردی پرې کړی سره ونښلوی.

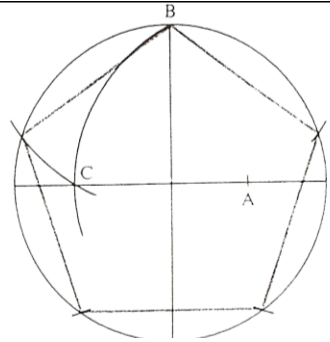
١٣ – په یوې ورکړ شوې ګردی کی د منظم پنځه ګوړی کښل:

د ګردی وړانګه په A کی نیمه کړی ، له A څخه کرښه AB تر C وکاږی، |BC| د پنځه ګوړي د اړخ اوږدوالی دی.

(څیره ۳۹)

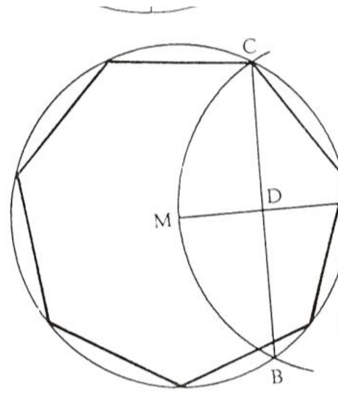


څیره ۳۸

	۱۴ – په ګری کې د منظم دریګوړي کښل: د نیمي یا قطر اخرني ټکو څخه د ګردی وړا نګې په اندازه ګردی لینده ووهی. د دې ټکو چې ګردی پرې کوییوځای کول منظم شپږګوډی جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ – د مساوي اوه ګوټي

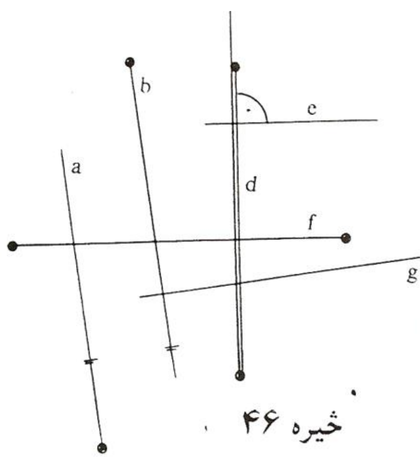


شیره ۴۰

جوړول یا کښل:

د ورکړ شوې ګردې دنیمې اخر ټکی A څخه دAM وړانګه په اندازه ګردیلینده ووهی چی ګردی په B او C کي پرې کوي. د BC کرښه د AM وړانګه په D کي په ولاړکونجي غوڅوي، پس |BD| د مساوي اوه ګوټیز د اړخ اوږدوالی دی.

تمرینونه



خیره ۴۶

۱ – په ډیري ژبه باندې یی افاده کړی:

الف – ټکی A په کرښه g پروت دی.

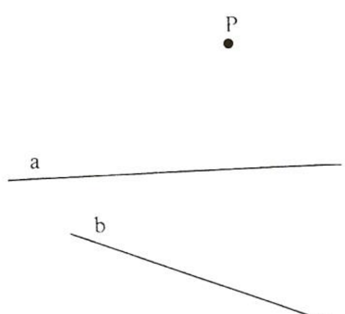
ب – کرښه g د ټکو A او B ترمنځ ځغلي

پ – کرښه AB په ناپای کرښه g پرته ده

ت – ټکی C په کرښه . چی له A وبه B ته ځغلي، پروت دی،

۲ – په خیره ۴۶ کی څومره ناپاي کرښی، کرښی او وړانګي پرتی دي؟

۳ – کومی کرښی غبرګي، او کومی یو په بل ولاړې پرتی دي؟ دا په سمبولو وکاروی (خیره ۴۷)



خیره ۴۷

۴ – هرې کرښي ته جوړ کړی :

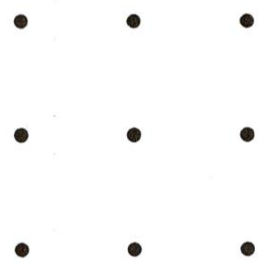
الف – یوه ولاړه

ب – په ورکړشوي ټکي کی یوه غبرګه (خیره ۴۸)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – د اسمان کومی لورې یو په بل ولاړې دي؟

۶ – داسې کرښه لار (چې یو بل سره تړلي وي) وباسې، چې له ټولو په څیره ۴۹ کې ورکړ شوو ۹ ټکو تیرېږي. دا کرښو تلنه یا کرښو



څیره ۴۸

خوزیدنه یا تلنه (حرکت)

د یوې هوارې په خپل ځان یویواځنی څیرونه تلنه یا خوزیدنه (حرکت) بلل کیږي او په φ ښوول کیږي، که چیرې دا لاندې خویونه ولري:

۱ – د یوې هندسي څیرې (کرښی، هوارې ، وړانګی ناپایکرښی، نیمهوارې) څیره ډیري لاندې، یوه هغه هندسي څیره پوهیږو، د کومی چې په غوښتونکی څیره ډیري ژیکرښی پیلټکي ، پایټکي په ژیکرښی ، پیلټکي ، پایټکي باندې څیره شي.

۲ – که f_1 او f_2 دوه جنډې وي ، نو ټیك یوه تلنه شته نو ټیك یوه تلنه φ شته، د $\varphi(f_1) = f_2$ سره.

۳ – که A او B دوه په خوښه ټکي وي، نو یوه تلنه φ شته د $\varphi(A)=B$ او $\varphi(B)=A$ سره

۴ – که p او q دوه وړانګي وي ، د ګډ پیلټکي سره ، نو یوه تلنه φ شته د $\varphi(p)=q$ او $\varphi(q)=p$ سره.

۵ – د تلنو یا خوزیدنو ډیری، د یو په بل پسی څیرونو ته یو ګروپ جوړوي (د الجبر برخه یا د لیکوال الجبر کتاب دې وکتل شي)

د تلنویا خوزیدنو (حرکت) ځانګړي ډولونه دي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

- راکښنه ، چی د τ سره یی ښایو
- ایینونه یا هندارونه، چی د σ سره ښایو
- څرخون چی د ρ سره یی ښایو

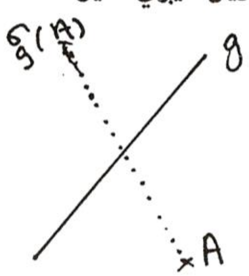
که یو ټکی همداسی یوه کرښه ، چی په خپل ځان څیره شي ، نودا ودې څیرونی ته

یا نسبت ودې څیرونی ته فیکسټکی ځای په ځای ټکی او همداسی فیکس کرښه یا ځای په ځای کرښه بلل کیږي.
راکښنه τ یوه تلنه یا خوزیدنه ده د لاندې ځانګړو خویونو سره

تلنه ۱ (V) : د یوې په خوښه کرښی څیره و هغي کرښی ته غبرګه کرښه ده.
تلنه ۲ (V) : که څیرونه کټمټ څیرونه نه وي، نو هر څیره ټکی د خپل اصل ټکي څخه توپیر لري .

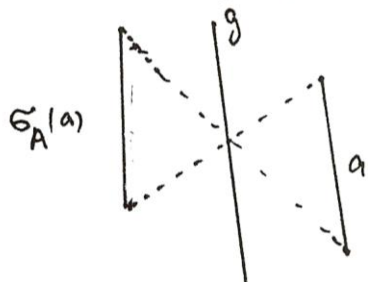
ایینونه یا هندارونه . د ایینونی دوه ډولونه موجود دي:

لمړی : ایینونه σ_g په یوه کرښه g ، چی کرښ ایینونه ورته ویل کیږي، یوه تلنه ده، د لاندې خویونو سره



س ۱ : دکرښی g هر ټکی فیکسټکی یا په خپلځان څیره ټکی دی ، له دې سره کرښه یوه فکسکرښه ده.
س ۲ : دواړه د کرښی g وازې هوارې یو له بل سره بدلیدلی شي.
څیره ۵۲

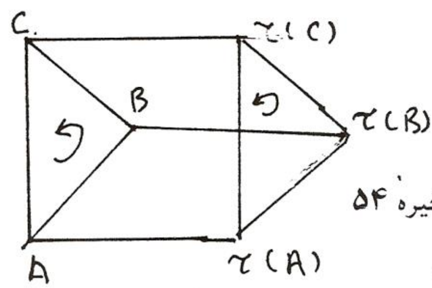
دوم: ایینونه σ_A په په یوه ټکی ، چی ټکی ایینونه بلل کیږي، یوه تلنه ده ، د لاندې خویونو سره : (څیره ۵۲)



پ ۱ : هره کرښه چی له A تیریږي په خپل ځان داسی څیره کیږي، چی دواړه له A پیداشوې وړانګي یو له بل سره بدلی شي.

ا خیره ۵۳

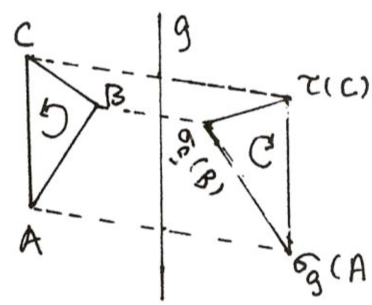
پ ۲ : هره کرښه و دې کرښې ته غبرګې کرښې باندې خیره کیږي. (خیره ۵۴)



لوریزه تلنه یا خوزیدنه:

یوه تلنه φ همغه لوریزه ده ، ټیك هلته یا هلته او هلته، کله چې هره خیره F د $\varphi(F)$ سره همغه لور ولري یا مساوي لوریز وي.

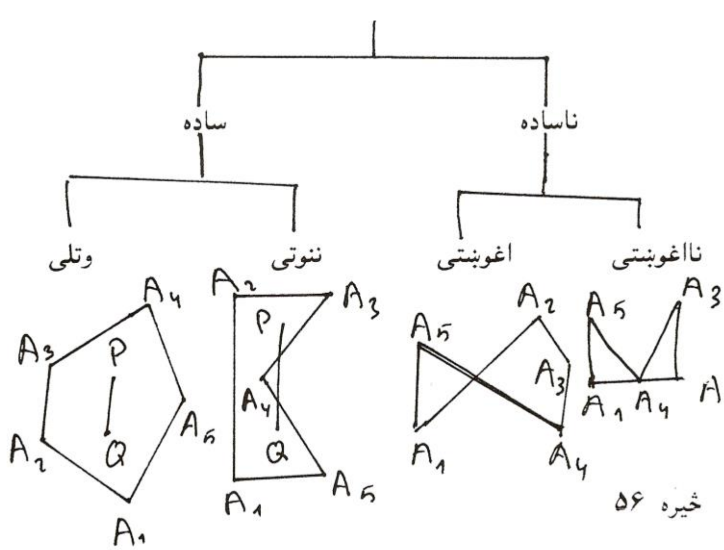
خیره ۵۴



یوه تلنه φ همغه لوریز نه یا نامساویلوریز ده، ټیك هلته یا هلته او هلته، کله چې هره خیره F و $\varphi(F)$ ته مخامخ یا په ځپ لوریز وي.

خیره ۵۵

ډېرګوټیز (د بیلګې په توګه پنځه ګوټیز)

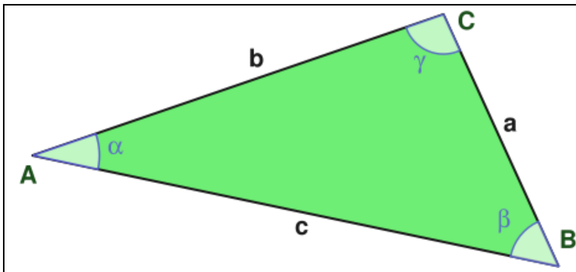


خیره ۵۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو وتلی n− ګوډی منظم بلل کیږي، که د اړخونو اوږدوالی یی برابر وي او دننه کونجنونه یی مساوي یا برابر لوي وي.

درېګوډی (درېګوټی، مثلث)

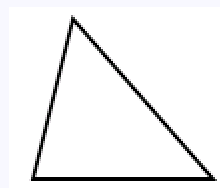
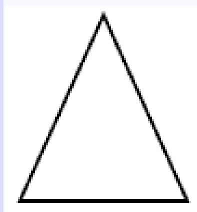
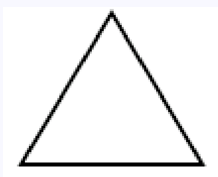
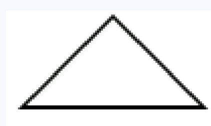
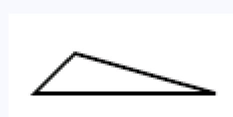
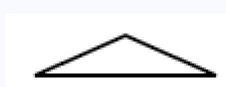
دا چي د دوه ټکو ترمنځ تل یواځی یوه کرښه انځوریدلی شي، نو د یوه شکل لپاره کم له کمه درې ټکی په کار دي، په داسی ډول چی دا ټکي په یوه کرښه نه وي پراته. دا اوس هم په همغه هواره پراته دي. که دا ټکی د ځیرې د ګوډټکو په ځیر ونیول شي، نو دریګوډی لا سته راځي. کرښې، چې درېګوډی په کې راګیر دی یا درېګوډی جوړوي د درېګوډي اړخونه یا هغه عربي یې ضلع بولو.	 ګورو، چې کوجونه الفا ، بیتا او ګاما دي او اړخونه a,b او c دي. په ځیره کې ګوډونه په لویو تورو سره په نخښه کیږي یانی A,B او C ګوډونه دي.

ولې درېګوډی ؟

موږ وایو، چې سپین مې د برګ د کور د ګوډ سره ولید، یا د برګ د پټي یو ګوډ اوبو وړی، په یوه ځیره کې یا یوه جوړښت کې دننه د دوه کرښو غوځی کونج بولو او دباندنی ګوډ. کندهاریان وایی ګوټ. دا پروا نه لري، که څوک یې ګوډ ، ګوټ او که کونج بولی یانی درېګوډی، درېګوټی او که درېکونجی بولي ، خو ماته یې درېګوډی نوم ښه بریښي. پام دې وي، چې له ما څخه دا نوم درېګوډی نومول شوی، دا ځیره ده نارینه نه ده، نو له دې امله به ښه وي، که درېګوډی وبللشي، نوره یې د ګرانو هیوادوالو او د ځککچپوهنې مینه والو خوښه.

د درېګوډیو مختلف ډولونه یا تیوپونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	نامنظم کونجونه او اړخونه يې برابر نه دي.	برابرپښيز دوه اړخونه او دوه کونجونه يې برابردي .	برابراړخيز ټول اړخونه او کونجونه يې برابردي .
تيره کونجيز- درېګوډي **ټول کونجونه يې تيره دي ياني له ۹۰ درجو کوچني دي** **<90°.**			
ولاړکونجيز درېګوډی، يو کونج يې ولاړکونج دی			
پڅکونجيز درېګوډی **يو کونج يې پڅ دی ياني له ۹۰ درجې لوي دی.(>90°)**			

د کونجونو الفا ، بيتا او ګاما (α, β, γ) او اړخونو a,b,cله مخې د درېګوډيو مختلف تيوپونه سره بيليدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته ځیرو کې پورته ښی لور ته درېګوډي همغه رسم شوي، خو دا یو دې د بل سره برابر پام کې ونه نیول شي، یانی د یوه درېګوډي پښی دی نابرابرې وي٠ تیره کونجیز درېګوډۍ، چې دریواړه کونجونه توپیر لري، درې برابرکونجونه لري ، دوه کوجونه یې سره برابر وي، ولاړکونیز، پڅکونجیز، دا هم د برابرو او نا برابرو کونجونو سره ٠ هغه درېګوډۍ، چې دوه کوجونه یې سره برابر دي، اړخونه یې هم برابر دي او د برابرو کونجونو په مخامخ برابر اړخونه پراته دي٠ دا لاندي ښه ځیړل شوي دي، د ځیرو سرهږ.

د درېګوډي یو له بل بیل ډولونه

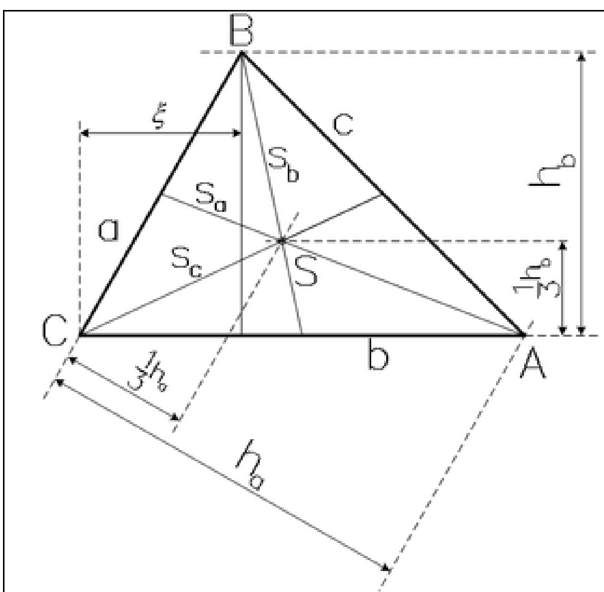
د دریګوډي د پام وړ ټکی

- د دریګوډي هر درې یوډوله کرښی ، یو بل په یوه ټکی کی پرې کوي

- اړخنیمی په S کی

- د کونجنیمی یا نیموونکی په W کی-

- اړخنیمی د منځ ولاړې (کرښی) په M کی: دا هغه کرښه ده، چې د دېګوډی د اړخ په منځ ولاړه ده، چې موږ یې منځولاړه بولو



-. جګکرښی یا جګي په H کی

دا ټکی د یوه دریګوډي د پام وړ ټکی دي - :

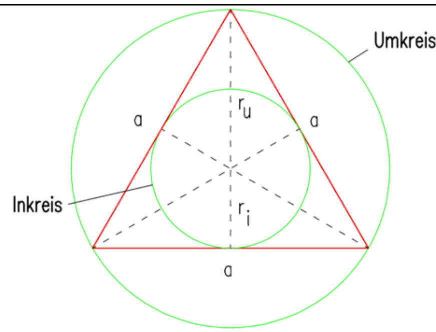
له دوي ځخه S دروندټکی(د ثقلمرکز)

له دوي ځخه W د دننه ګردۍ منځ ټکوړانګه او M د دباندې یا راګردې ګردۍ یا نوره هم ښه خورا ښه او مناسبه نوم یې چاپیریالګردۍ منځ ټکی دی (وړانګه) r، د چاپیریالګردۍ منځټکی

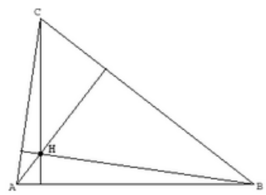
(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته هځيرو، چې ځيرې راوړو، د ځيرنې سره يې :

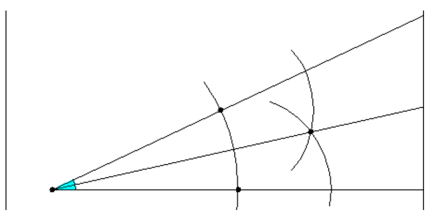
اي ىدرګـيدنوخ Inkrei Umkreis
دەراتاو-يا په راتاوګردى



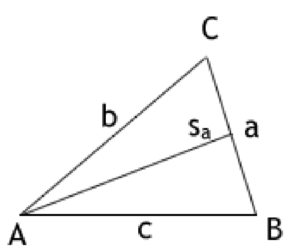
په لاندې ځيره کې جګي کرښي وينو. دا هغه کرښې دج، چې را په ګوته کوي، چې اړخ د کونې سره کوم جګی لري او دا کر په يوه ټکی کې غوځوي.



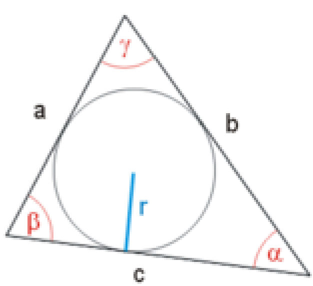
په مخامخ ځيره کې کونجنيمی ګورو او وينو، چې څنګه کښل يا رسم کيږي.



په مخامخ ځيره اړخنيمی کټل کيږي. دا هغه کرښه ده، چې له کونج څخه اړخ نيمی.

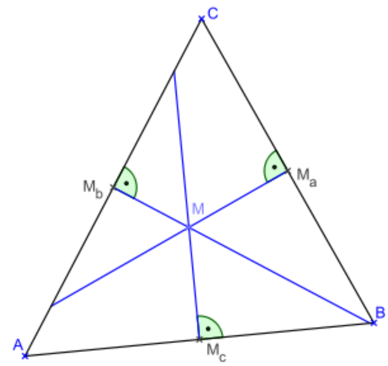


په مخامخ په درېکوډی کې د خوندي ګردی منځټکی د وړانګی سره کټل کيږي.

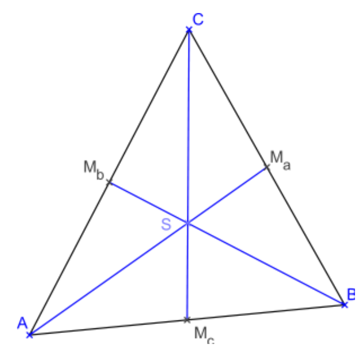


(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ښيره په درېګوډي کې په منځولاړې ګرښې په ګوته کويو چې پّ لړونده ټکي کې سره غوڅوي

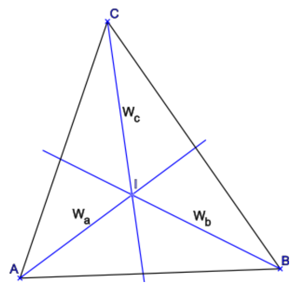


په لاندې مخامخ دريګوډي کې درې اړخنيمى ورکړ شوي،چې ټه يوه ټکي کې سره غوڅوي

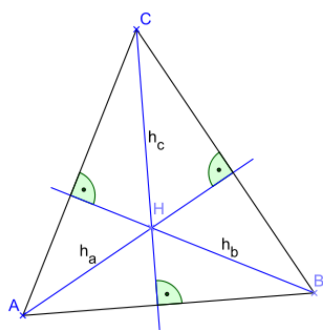


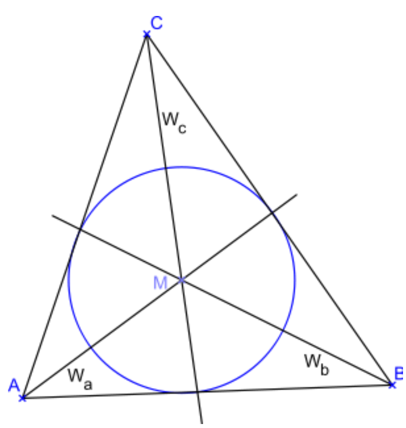
په مخامخ ښيره کې ګوروړ چې کونجنيمى ی خوندیګردی منځټتي کې سره غوڅوي

په لاندې درېګوډي کې دې کونخنيمى ديو جې په يوه ټکي سه پرې کوي

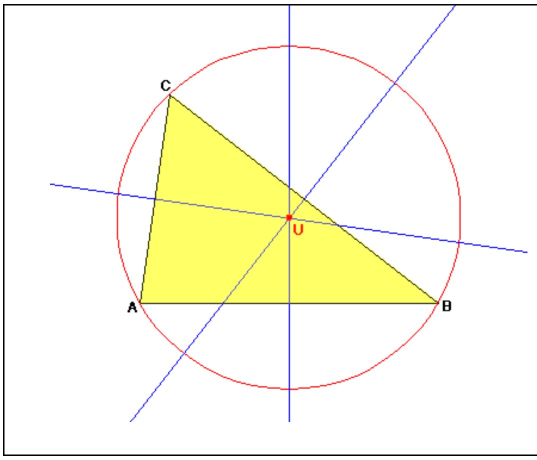


په لاندې ښيره کې د درېګوډي درې جګې ورکړ شويو چې په يوه ټکي کې سره غوڅوي

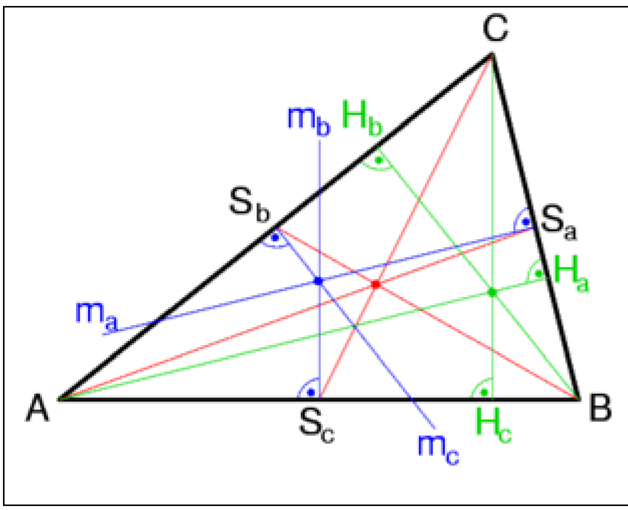




(c) ketabton.com: The Digital Library



په مخامخ ځيره کې د درېګوډی منځولاړې
ګوروو چې غوڅتککی یې ی راتاوکردی
منځتکي دی



په مخامخ ځيره کې هغه اړخنیمی،
چې په اړخ ولاړې دي کتل کیږي،
په اړخنیمی ولاړې، جګی او
اړخنیمی کتل کیږي، چې دریواړه
په یوه کرښه پرتې دي •

د جګو غوڅتکی (شین)، راتاوکردی منځتکی(اسماني یا زرغون)، درونددتکی(سور) په یوه کرښه پراته دي.

د درېګوډیو جوړید امکانات یا شونتوب: درېګوډي یواځنی جوړیږي (همدا یو درېګوډی او بل، چې له دې درېګوډي توپیر ولري نه شي جوړیدی) ،

-که د دریګوډیو دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي،

-یا دوه اړخونه او له دې اړخونو بند کونج یا

- یو اړخ او ددې اړخ په دواړو سرونو یا اخرونو کونجونه وپیژنو

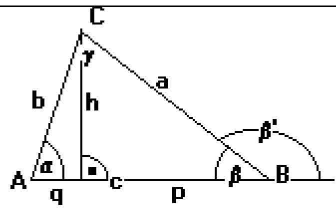
(c) ketabton.com: The Digital Library

یا په همدې ډول هغه دریګوډی، چی دوه اړخونه او د لوي اړخ مخامخ کونج یی پیژندل شوی وي. د کونګروانیځ جملو کی یی بیلګي راځي .

د دریګوډي پیژندنه لنډ: یو n - ګوډی، چی n=3 وي، دری ګوډی بلل کیږي .

په درېګوډي کی جملی:

په عمومي ډول لاندې جملی باوري یا معتبرې دي چی بي له ثبوته دلته راوړل کیږي.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>١ - د کونجزیاتون جمله : په درېګوډي کی ټول کونجونه 180° لري

°180 = □ + □ + □

په مخامخ ځیره ګې β' د β ګاونډی کونج دئ</td>
</tr>
</table>

٢ - د دباندني کو نج جمله: دباندی کونج د ناګاونډیو کونجونو زیاتون یا مجموعی سره مساوي دی،له دې امله د درېګوډي د دباندنیو کونجونو زیاتون 360° لري:

یادونه : ګران د ځمککچ مینه وال دې دا ځیره له پ ورته ه ځ برې ځخه پوره کړي ۰:

٣ – درېګوډي نامساوات یا دریګوډي نابرابرونو نه:

په هر درېګوډي کی د دوه اړخونو اوږدوالی زیاتون د دریم اړخ اوږدوالی ځخه لوي دئ

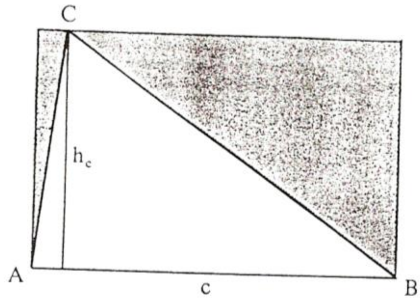
$$a + b > c \; ; \quad a + c > b \; ; b + c > a$$

٣ الف-د هر دریګوډي دوه اړخونو اوږدوالي مطلقه ارزښت کمون، توپیر یا فرق د دریم اړخ اوږدوالی همغه- یامطلقه ارښت ځخه کوچنی دئ

$$| a - b | < c ; \quad | a - c | < b \; ; \quad | b - c | < a$$

۴ - د درېګوډي چاپیرېال د دریواړو اړخونو زیاتون دئ $U = a + b + c$

(c) ketabton.com: The Digital Library

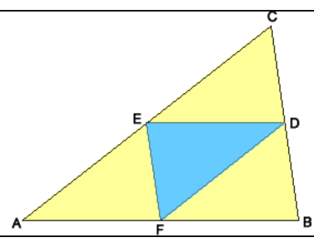


۵ ـ د درېکوډی منځهواره (د هواري دننه) لنډ : هواره (، د یوه اړخ اوږدوالی او په هغی کښلی (نیغ) ولاړ جګوالی(لنډ: جګوالي) د ځل نیمایي دی

$F = a.ha/2 = b.hb/2 = c.hc/2$

د ښووني لپاره يي د یوه لنډ چل ځخه کار اخلو: موږ درېکوډی د جګکرښي په اوږدو باندې په دوه ولاړکونجیو غوځوو او د درېکوډي په اړخ یی ځیره باسو، په دې ډول دوه ولاړکونجیز دریکوډي منځ ته راځی، چی د هغی ټوله هواره، د غوښتونکي درېکوډي هواري دوه برابره ده.

دا له پورته ځیرې ځخه هم ځرګندیږي.



۶ ـ د درېکوډي اړخونو نیمایي هغه منځنی درېکوډی جوړوي، د کوم اړخونه چی نیمايي دومره اوږده وي لکه د پیل شوي درېکوډي(د و ړانګي جمله دي وکتل شي

ګورو چی د یوه دریکوډي جګی تل ځرګند نه دی. مګر دا چی د یوه جګي له لارې یو دریکوډی په دوه برخو ویشل کیږي، چی په دې ډل دوه ولاړکونجیز دریکوډي ترې منځ ته راځي، چی دا جګی بیا د پیتاګوراس له لارې -جملی چی وروسته راځي - او یا د تریګونومتري یا کونجکچ متودو یا لارو له لارې ، چی هغه وروسته ځیرل کیږي، لاس ته راوړی شو .

د تالس جملهSatz des Thales:

که AB د یوې ګردی(دایرې) یوه نیمی (قطر) وي او C په دې ګردی پروت وي، نو درېکوډي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ABC په C کې ولاړکونجیز دی۰

د دې جملې په څټ یا برعکس دی:

که چیرې درېکوډي ABC په C کې ولاړکونجیز وي، نو C په ګردی پرته ده د نیمې AB سره

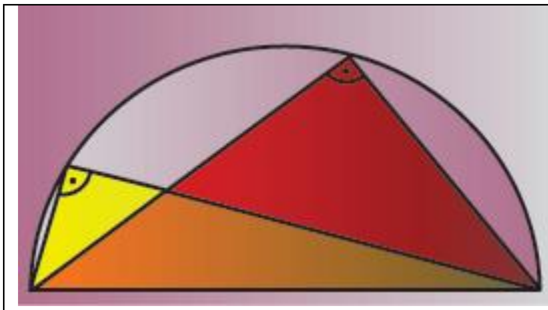
د جملې د ښووني لپاره: دا برخه دې دا دلته د ښوونځي شاګردانو لپاره نه وي۰

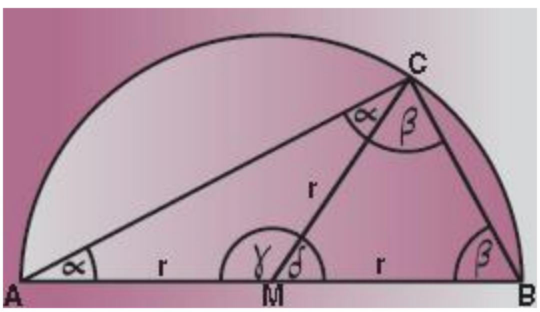
$$\alpha+\beta+(\alpha+\beta) = 180^\circ$$

$$2\alpha+2\beta = 180^\circ$$

له دې لاس ته راځي

$$\alpha+\beta = 90^\circ$$





د پیتاګوراس (فیثاغورث Satz des Pythagoras)

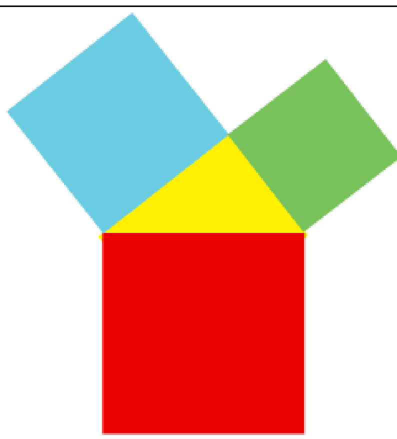
په یوه ولاړکونیجز درېکوډي کې ، چې کاتیتونه یا ولاړ اړخونه يې a او b وي، د هیپوتینوزی یا اوږد اړخ یې c سره پخ نخښنه ګوو , باور لري

$$a^2+b^2=c^2$$

د دې جملې په څټ یا برعکس

که د یوه درېکوډي ABC د اړخونو a, b, cلپاره باور ولري

$$a^2+b^2=c^2.\ F=\frac{b}{2}\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}=b.\frac{h_b}{2}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دا درېګوډي په C کې ولاړکونجيز دی یا د پیتاګوارس جمله وايي، چې په یوه ولاړکونجيز درېګوډي کې د هیپوتینیوز(لوي اړخ) څلورۍ یا مربع د کاتیتونو(ولاړ اړخونو) د څلوریو یا مربعګانو د زیاتون سره برابره ده.

ولاړکونجيز درېګوډی یو ولاړ کونج لري یانې ۹۰ درجې کونج

د درېګوډی اوږد اړخ د لوی کونج مخامخ پروت دی ، چې هیپوتینوز *Hypotenuse* یا لوی اړخ بلل کیږي

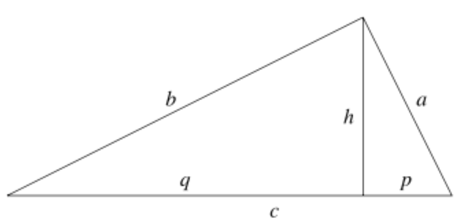
نور دوه اړخونه کاتیتونه *Katheten* یا ولاړ اړخونه بلل کیږي.

لاندې جملې ښايو:

دا جملې ټولې یوځاي راوړل شوي

جمله : ولاړ کونجيز درېګوډی $a + b + c = U$

$a.b / 2 = c . hc / 2 = F$

<table>
<tr><td>د پیتاګوراس جمله</td><td>$c^2 = a^2 + b^2$</td><td rowspan="6">
</td></tr>
<tr><td rowspan="3">د اویکلید

د کاتیتونویا ولاړ اړخونو جمله</td><td>$a^2 = c \cdot p$</td></tr>
<tr><td>$b^2 = c \cdot q$</td></tr>
<tr><td>$c = p + q$</td></tr>
<tr><td>د اویکلید د جګیو جمله</td><td>$h^2 = p \cdot q$</td></tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله : برابر- یا مساوي پښيز درېګوړی جګی

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$U = 2a + b$$

$$F = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = b.\frac{h_b}{2}$$

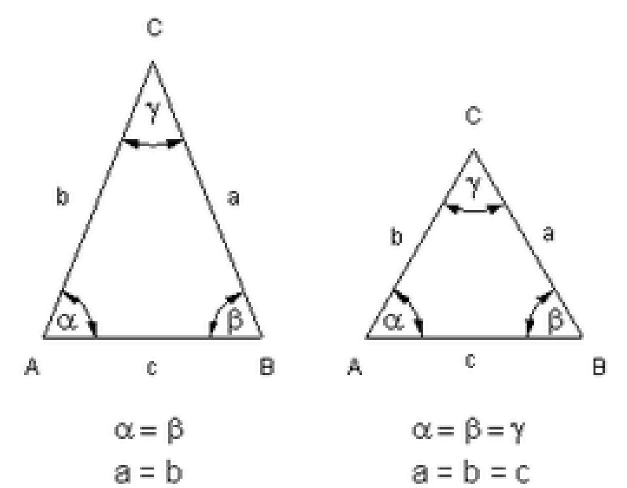
ځکه چی $h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$ (د پیتاګوراس جملی له مخی(پیتاګوراس جمله وګورئ)

جمله : برابر اړخیز درېګوړی :

د یوه برابر اړخیز درېګوړي ټول درې آړخونه برابر دي، دنني کونج ونه برابر لوي دي، له دې امله برابر اړخيز درېګوړي منظمو پولیګونونو پورې اړه لري٠) پولیګون لاتین ډیرکوډیز(<u>Polygonen</u>).

د برابر اړخیز درېګوړي هر کونج ٦٠ درجې دی٠ برابر اړخیز درېګوړي تره کونجیزو ډریوګوډیو په ډله کې دی، ځکه، چې ټول درېکونجونه له ٩٠ درجو کم دي
په دې برسیره یوه برابراړخیزه درېګوډیوه برابرپښیزه درېګوړی هم ده٠
ټول برابراړخیزدرېګوډي یو بل ته ورته دی (وروسته راځی)

په یوه برابراړخیز درېګوډي کی، د یوه اړخ کونجنیمی-، اړخنیمی-، په منځولاړې-اوجګی –یو په بل پریوځي٠ په ورته توګه دا د ضوندي ګردی دباندې ګردئ او دروندټکی اړخ جګیو غوځټکی لپاره هم په یوه برابراړخیز درېکوډي کې باور لري٠



(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته څیره کې کيڼ لور ته برابر پېنېز - او ښي لور ته برابراړخيز درېګوړی دی٠ هر برابر څه يې کښل شوي٠

د يوه برابراړخيز درېګوډی، چې د اړخ اوږدوالی يې a دی، لپاره باور لري

Fläche *A* *هواره يا سطحه*	$A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$
*جګوالی*Höhe *h*	$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$
د چاپيريالګردی وړانګهUmkreisradius *r*	$r = \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{a}{\sqrt{3}}$
د خوندي ګردی وړانګهInkreisradius ρ	$\rho = \frac{\sqrt{3}}{6} a$
*چاپيريال*Umfang *u*	$u = 3 \cdot a$

د برابراړخيز درېګوډي خوېونه دې ګران لوستونکي وښايي

د اويکليد د کاتيتونو يا ولاړ اړخونو جمله

دواړه سرې هوارې يو له بل سره او همداسې دوآړه شنې هوارې همغه منځهواره لري٠ يا په بل ډول : د سرو او شنو ولاړګوډيو هوارې يو له بل سره برابرې دي٠

$a^2=pc$ او $b^2=qc$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که a,b,c د ولاړکونجیز درېګوډي اړخونه وي، د هیپوتینوز c سره٠ که دا درېګوډی په جګي h په دوه برخو وویشل شي او p یي هیپوتیوز ټوټه په a ده او qهمداسي ټوټه ده په b، نو باور لري:

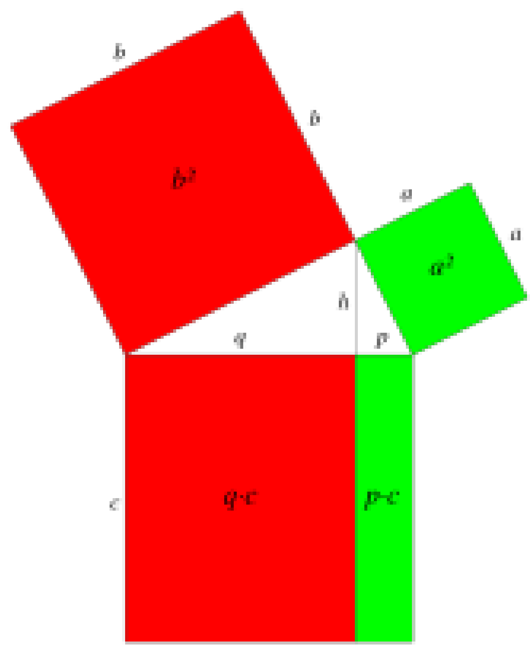
په aخلورى د p او cولاړکونجیز خلورکوډي او په bخلورى د ولاړکونجیز خلورګوډي، د اړخونو q او cسره هوار برابره ده یاني هواري یا سطحی یې برابرې دي٠

لاندي خیره دې وکتل شي٠ پام دې وي ، چې دا پورته ښونه او دا لاندی سره برابرې دي، خو یواځی خیرې یې بدې دي، دوه ځله ښوونه پروا نه لري٠

فرمول یې :

$$a^2 = p.c$$

$$b^2 = q.c$$



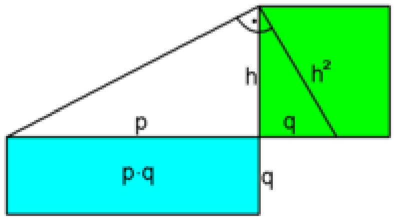
Kathetensatzد کاتیتیونو جمله:دواړه سرې هوارې همغه منځهواره لري او همداسې دواړه شني هواري هم *د اړخ او خلورى د فرمول په خیر په لاندې ډول دي*

$$a^2 = p \cdot c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^2 = q \cdot c$$

د اويکليد جګجمله Höhensatz des Euklid

	$h^2 = p \cdot q$ د جګجملی د بياتيونې ښوونه(دا لږ ستونځمنه ده، خو زما يې دا څيره بدلون ښه راځی ګرانو لوستونکو ته په مينه وړاندې کيږي) :

د جګجملی ښوونه : د پيتاګوراس له جملې $a^2 + b^2 = c^2$

او د بينوم له فرمول

$$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

څخه ښوونه لاس ته راځي

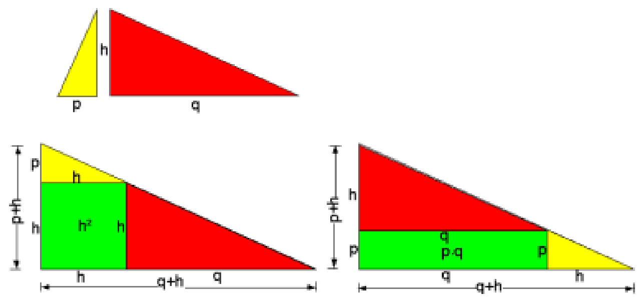
په دياګرام کې درې درېګوډي ليدل کيږي، يو له اړخونو a,b,c, ، بل له اړخونو h,p,a او h,q,b. سره، د دې هريوه درېګوډي لپاره د پيتاګوراس جمله باور لري٠:

$$h^2 = p.q \iff q^2 = pq+q^2 + h^2$$

د پورته بياتيونې له لارې ښوول کيږي٠

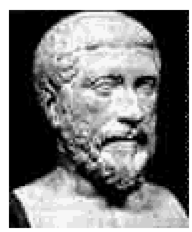
جيومتريکي ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا خیره دې ګران لوستونکی پام ته را وبولي، چې څنګه د ښوونې کار مخ ته ځي

(تمرین)



د ساموس پیتاګوراس Pythagoras von Samos

تکرار: په ولاړکونجیز درېکوډي کې د کاتیتونو(ولاړ اړخونو) د څلوریو یا مربعګانو زیاتون د هیپوتینوز(اوږده اړخ) د څلورۍ سره برابر دی۰

دا جمله د پیتاګواراس جملې ترنامه شهرت لري او د ساموس پیتاګوراس د ژوند سره برابر ځای نیسي۰ لکه لاندې په ګوته کوي،چې دا انسان له دې خورا زیات وو۰

دا یو له مانا ډک انسان دی »برتراند راسل « Bertrand Russell - ",,

دی د جلبازو مشر دی « هیراکلیت»Heraklit - ",,
Ludwig Börneلودویګ بورنې د هغهٔ په هکله وایې« کله، چې هغه دا جمله پیداکړه، هغه د خدای په نامه سل سوخندر خیرات کړل۰ له هغې وروسته ټول سوخندر لړزیږي، ترهغې، چې نوي څه کشف شي «

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيتاکوراس په570دزکال پخواپه جزيره ساموس کې پيداشوی .
پلالر يې سامي زرګر منيسارښوس **Mnesarchos** دی

چې شل کلن وو د تالس **Thales** په ميلت Milet او او انيکشيماندر کې يې زده کړې کولې

د پيتاګوراس ښوونه يا پوهنه Die Lehre Pythagoras

روح نه مري او ځاي بدلوي، داسې، چې له يوه ژوندي څخه وبل ته ځي

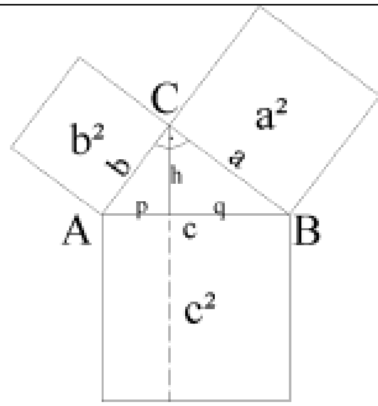
د پيتاګوراس جمله

په يوه ولاړ کونجيز درېګودي کې د کاتيتونو(ولاړو اړخونو) څلورى زياتون د هيپوتينوز (اوږده اړخ)له څلورى سره برابر دى

c^2	=	$a^2 + b^2$
$p \cdot c$ (د کاتيتونو جمله)	=	b^2
$q \cdot c$	=	a^2
Kathetensatz کاتيت جمله د		
$p \cdot c + q \cdot c$	=	$a^2 + b^2$
$(c \cdot (p + q)$	=	$a^2 + b^2$

دپورته لپاره لاندې څېره وګورى

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د دې جملې د ښوونې لپاره له ۲۰۰ څخه زیاتې اوبیونې یا ښوونې (ثبوتونه) شته

پیلونې او ښوونې

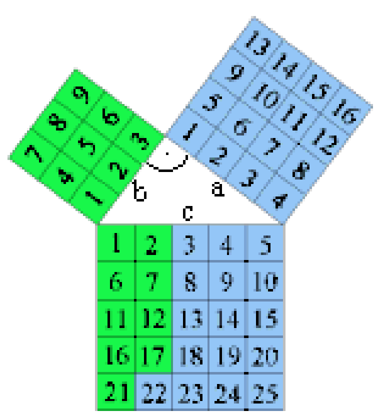
د یوونځلورۍ یا یوون مربع څېره

یو ولاړ کونجیز درېګوډی لرو، چې اړخونه یې په لاندې ډول دي

(z.B. a= 3cm; b= 4cm; c= 5cm)

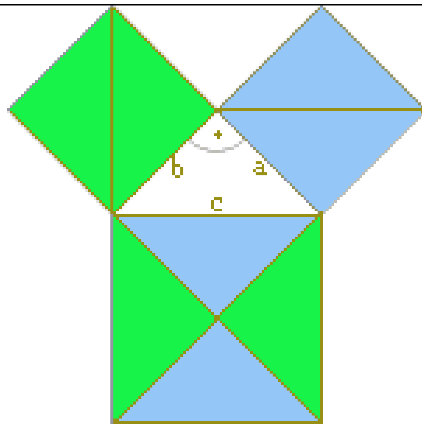
په هر اړخ ځلورۍ جوړوو، لکه لاندې څېره

$25cm^2$	=	$9cm^2$	+	$16cm^2$
c^2	=	b^2	+	a^2

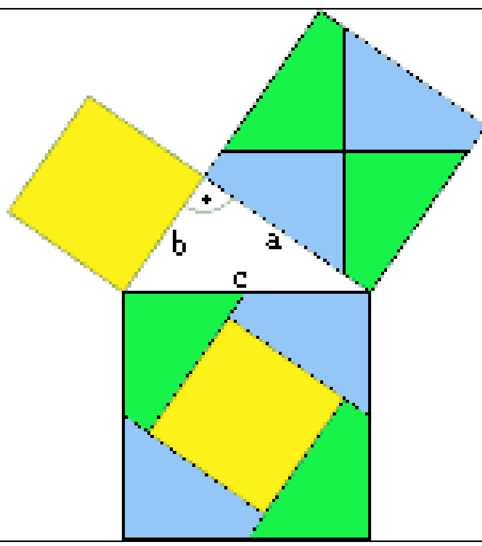


(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې یو برابرپېنیز ولاړکونجیز درېګوډی لرو:

	ولاړکونجیز برابربرپېنیز درجګوډی، چې اوږد اړخ یې دی (z.B. c=5cm). اړخونه a^2 او b^2 ګورو، نو کره به ورته وګورو، چې څه شوي یاني ځنې څلورې نیمې شوي او ځنې بیا په څلور برخو ویشل شوي۰ که څیر Jته وګورو، څه کره کولی شو؟

2.2 په خوښه ولاړګوډیز لرو

	دا په خوښه ولاړکونجیز درېګوډی دی (z.B. c= 4,5cm) تالس ګردی د لویې کتیت څلری له منځ څخه لوي اړخ ته یوه غبرګهکرښه وکاږی او هیپوتینوز ته یوه ولاړه a^2 غوڅه کړي۰ ګران لوستونکي دې له څیرې څخه پخپلهپه ګوته کړي، چې د لوي اړخ څلورې د نورو اړونو د څلوریو سره برابره ده

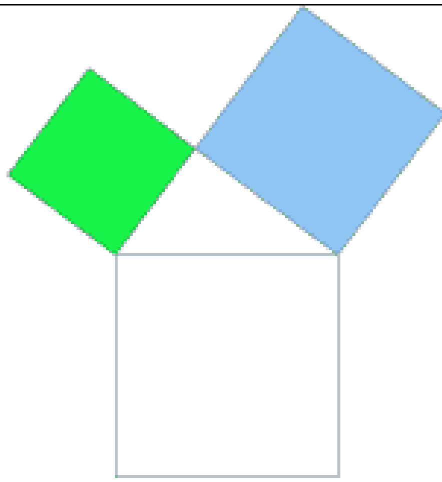
3. د څیرې ځمککچیزه لارښودنه

د لوړو ګوډونو یا کاتیتونو څلورې په درېګوډي ABC کې دننه د غبرګ اړخیز په څېر غوڅ کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

غبرګ اړخیز د لوی اړخ څلوری(مربع)
کډېکي باندې د هغې تر یوه اړخ پوری و
څرخوی .

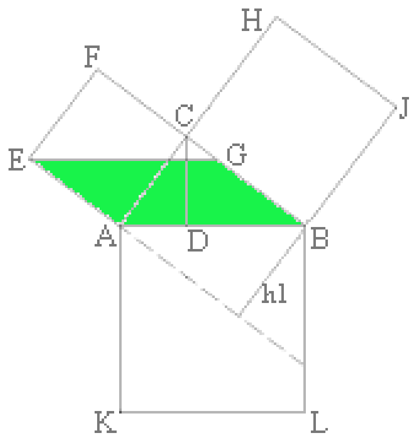
غبرګ اړخیز(مایلګوډیز) یوه ولاړګوډیز
په ډول د لوی اړخ مبع یا څلوری هوارې
کې دننه بیاتي کړی

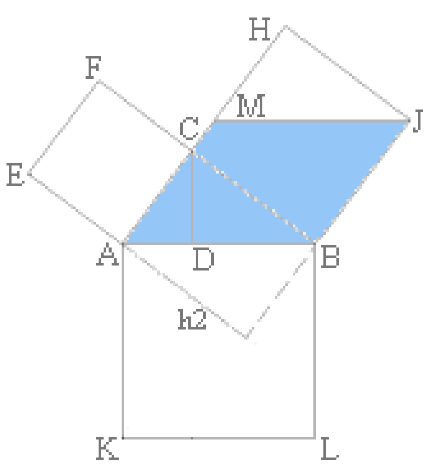


ښوونه :الف : بیاتیونه:

EACF = EABG . 1
ځکه, جي برابر بنسټلاین EA او برابر
حګی

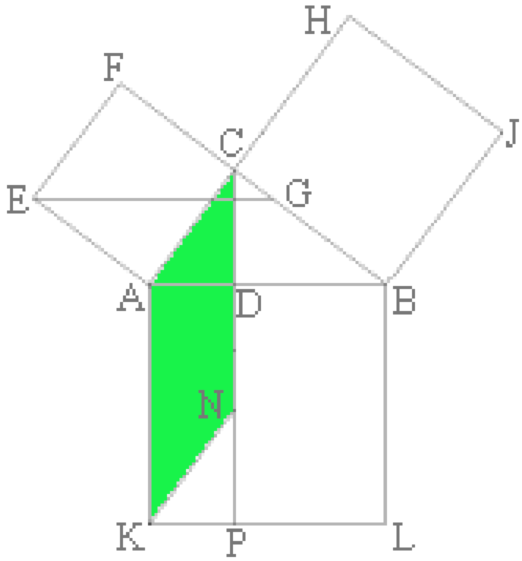
BJHC = BJMA . 2
ځکه،برابر بنسټلاین BJ او برابر
جګی(h) JHلري



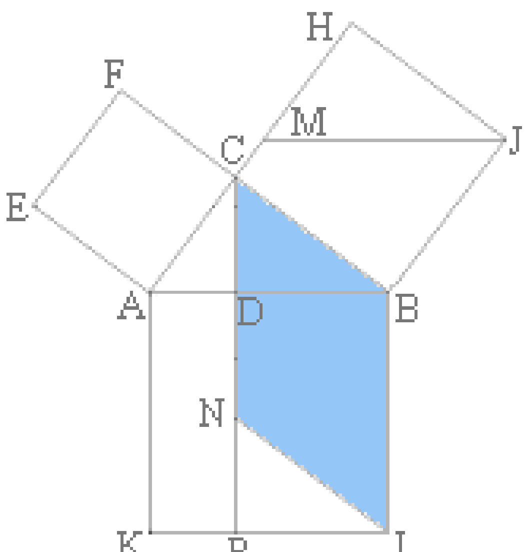


(c) ketabton.com: The Digital Library

ب . څرخون : ۳ . EABG = AKNC
څکه په A باندې EA = AC (د
يوې ځلورۍ اړخونه) AB = AK
(دیوې ځلورۍ اړخونه)



۴ . BJMA = BCNL
څکه، چې په B باندې BJ = BC (
د يوې ځلورۍاړخ اوږوالی) BA = BL
(د يوې ځلورۍ اړخونه)



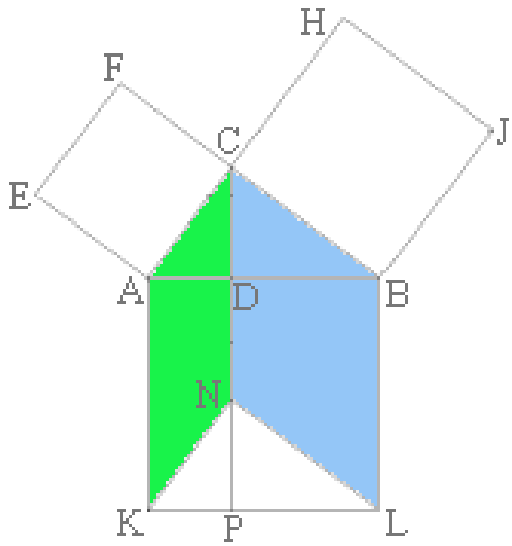
پ . بیاتیونه:

۵ . AKNC = AKPD څکه، چې همغه بنستلاید AK شر ه نغه جګي KP لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ . NLBC = DPLB ځکه،چې همغه بنسټلاین BL او همغه جګی PL لري

د پورته دواړو لپاره لاندې ښېره وګورئ



له مخامخ خیرې

لاس ته اځي

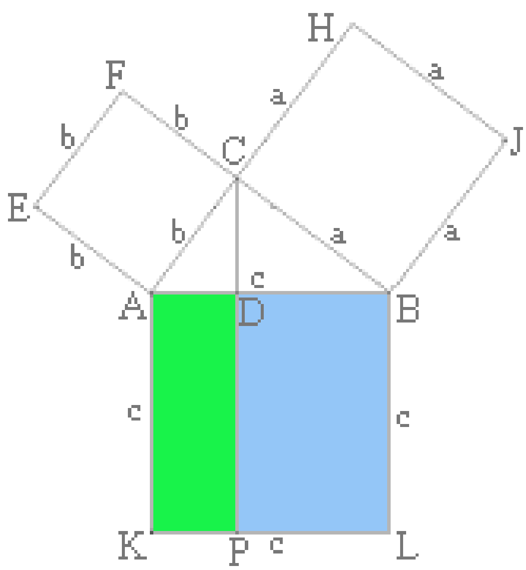
$a^2 = c \cdot DB$

$b^2 = c \cdot AD$

له دې لاس ته راځي :

$c.AD+c.DB=C^2$

$b^2+a^2 = C^2$



بیاتیونه پیل(لاندې خیره)

۱ - په هر دې اته درېګوډیو ځلورئ داسې کیږدئ،چې برابر اوږده اړخونه یو په بل پریوزي، لکه چې ګور د یوې ځلورئ اړخونه د یوه درېکوډي داړخونو سره برابر دي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

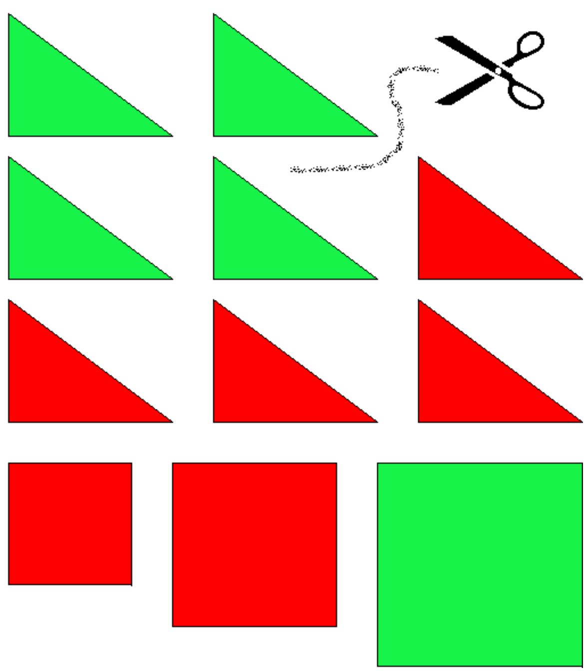
۲ - ټولې سرې څيرې (دوه ځلورى اوڅلور درېګوډي) داسې يوځاى کيږدى، چې يوه لويه ځلورى منځ ته راشي .

۳ - ټولې شنې څېرې (يوه ځلورى او څلور درېګوډي) داسې يوځاى کيږدى، جې يوه لويه ځلورى منځ ته راشي.

۴ - ځان ته باور پيدا کړه،چې دواړه داسې منځ ته راغلې ځلورى يو بل پټه وي.

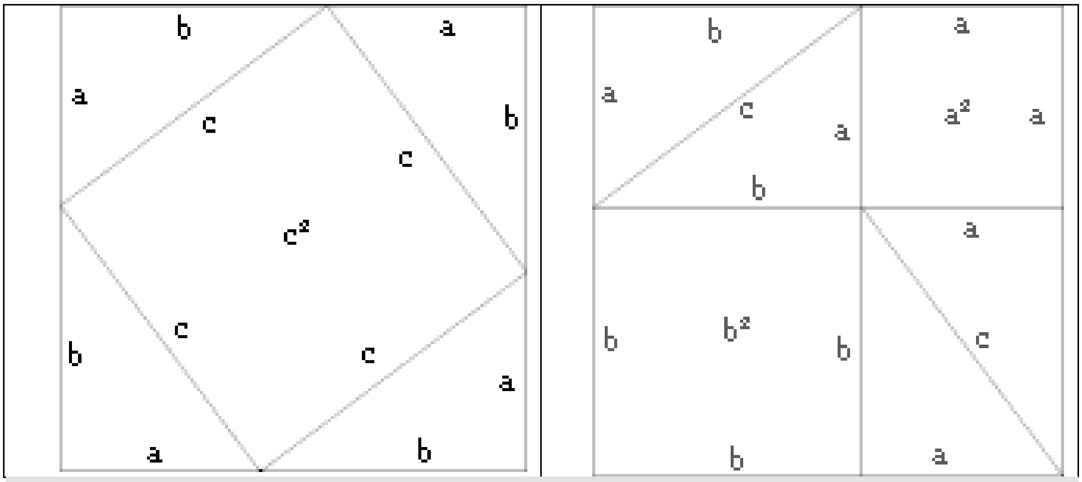
۵ - ټول درېکوډي لرې کړه، نو دا پاتې شنه ځلورى، د هوارې يا سحې له مخې کوچنى يا برابره ده دې نورو دواړو سرو ځلويو سره.

د ځواب لپاره دلايل راوړه!



۵. Berechnungsbeweisد شميرلو ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



$4\cdot \frac{1}{2} \cdot a\cdot b + c^2$	=	$(a+b)^2$
$2ab + c^2$	=	$a^2 + 2ab + b^2$
c^2	=	$a^2 + b^2$

دا ځيرې دې د ځمككچپوهنې مينه والو ته وړاندې وي، که وخت پيدا شو دا څه په منځ کې پاتې به هم وژباړل شي او ګرانو لوستونکو ته به وړاندې شي

لاندې ځيره کې د،پيتاګوراس ونه، ليدل کيږي

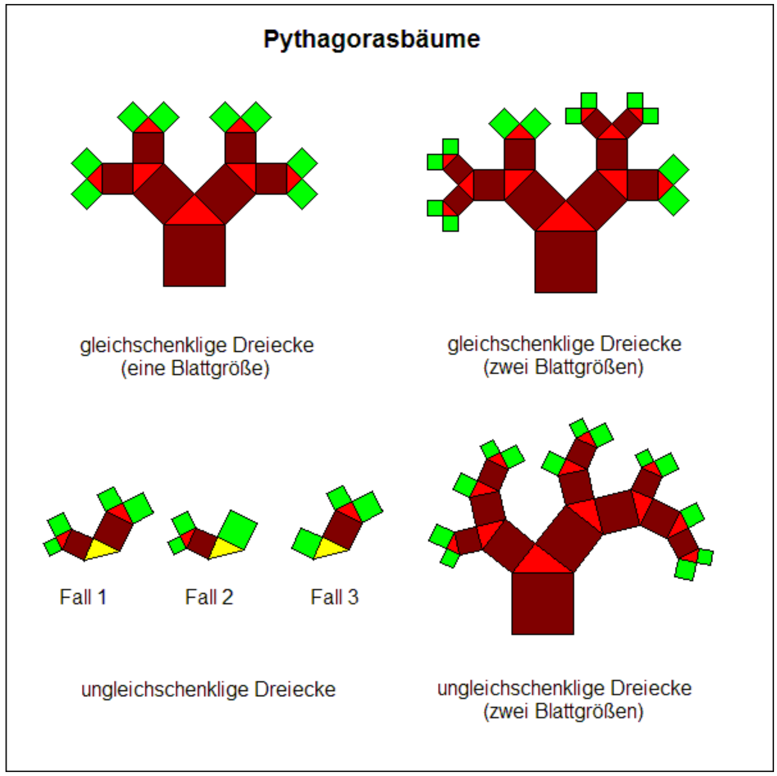
له کيڼ و ښي-، له پورته و کښته لور ته

برابرپښيز درېګوډی (يوه پاڼه لويوالی)

- برابرپښيزدرېګوډی(دوه پاڼي لويې)

حالت ١ تر٣نابرابرپښيز درېګوډي- نابرابرپښيز دېګوډی(دوه پاڼي لويی)

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرینونه:

۱ – لاندې درېګوټي وکاږی :

a) $a = 4$ cm ; $b = 8$ cm ; $c = 9$ cm

b) $a = 8$ cm; $b = 8$ cm ; $\beta = 50°$

c) $a = 8$ cm ; $\beta = 40°$; $\gamma = 50°$

۲ – د هوارې فرمول په مرسته

وښايې: چې د يوه درېګوټي خواوې يا اړخونه او جګې ، يو له بل سره په څټ اړيکو يا ځاننيونو يا تناسب پرتې وي.

۳ – درېګوټی د لاندې ورکړو سره کومه هواره لري

a) $a = 7$ cm ; $h_a = m6$ cm

b) $c = 3$ cm ; $h_c = 5$ cm

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $a = b = c = 6$ cm

d) $a = 10$ cm ; $\beta = 45°$; $\gamma = 90°$

۴ – د هوارې اندازولو بل امکانات داسی په نامه د هیرون لیما ورکوي(د سکندريي هیرون Hronsche Dreiecksformel). که دري اړخونه معلوم وي ، نو هواره له لاندې فرمول څخه ټاکل کیږي

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

د $s = U/2 = (a + b + + c)/2$ سره

د هوارې شمیرنی لپاره د په باندې گردی همداسی دننه گردیو وړانگو څخه هم کار اخستل کیدی شي.

$$F = a.b.c / 4r = s.\rho = \rho.U/2 = \frac{\rho . U}{2}$$

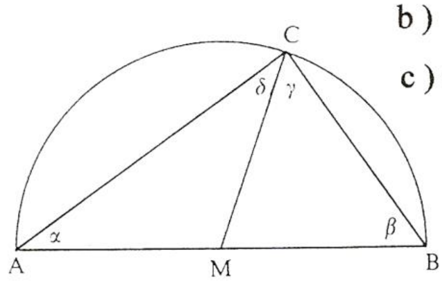
دلته د دننه گردی او r د دباندې گردی وړانگی دي. لاندې ټولی پاتی یا نامعلومی لویي د ټولو دریگوډیو لپاره وټاکی :

a) $a = 3$ cm ; $b = 4$ cm ; $c = 5$ cm

b) $a = 5$ cm ; $b = 7$ cm ; $U = 20$ cm

c) $s = 17$ cm ; $= 5$ cm ;

$h_a = 13$ cm $= h_b$

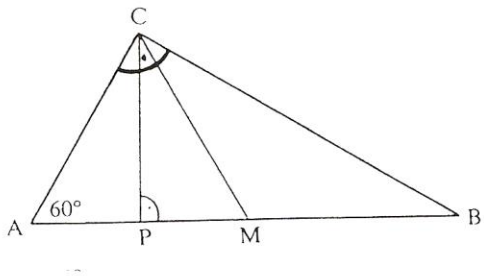


څیره ۸۲

۵ – د هندسی له لارې د لاندې څیرونو په مرسته د تالس جمله وښایی. (څیره۸۲)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ – ثيره ۸۳ يو ولاړکونجيز دريګوړی
ښايي د کونج = 90° سره، وښايي
چی کرښي $\overline{CP}$ او $\overline{CM}$ کونج په
دري مساوي برخو ويشي.



ثيره ۸۳

۷ – وي دې a,b,c د پيتاګوراس
(فيثاغورس) ګڼون دريګوني.
وښايي : (n>m)

a) $a = 2n + 1$; $b = 2n^2 + 2n$;

$c = 2n^2+2n+1$

b) $a = 2nm$; $b = n^2 - m^2$:

$c = n^2 + m^2$

۸ – د ولاړکونجيز دريګوړي پاتی برخی وښايی(ښوونه لکه په ليکنه کی):

a) $h = 4$ cm : $q = 5$ cm ;

b) h) 7 cm; $b = 10$ cm

c) $p = 4$ cm: $q = 12$ cm

۹ – د کانتی يا اړخ يا ژۍ a اوږدولای څخه د يوه مساوي اړخيز دريګوړي جګوالی وښايی.

۱۰ – وښايي : په يوه مساوي اړخيز دريګوړي کی د دباندې ګردی
وړانکه $r = (a/3)\sqrt{3} = 2\varrho$ ده او له دې سره سم د دننه ګردۍ وړانګه په
لاندې توګه ده: $\varrho = (a/6)\sqrt{3} = r/2$.

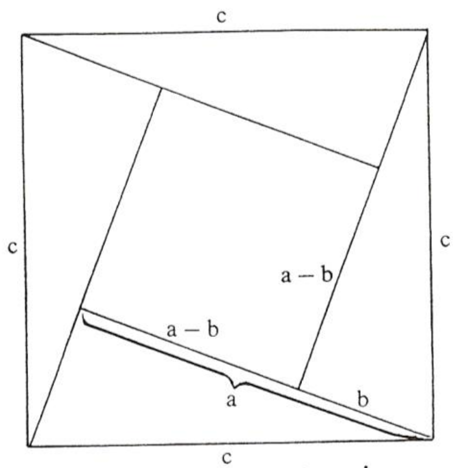
۱۱ – د ورکړشوي هوپوتينوزې سره د يوه ولاړکونجيز دريګوړي هواره کله خورا لويه ده؟ دا په دې مانا چی بله له دې لويه هواره نه وي.

۱۲ – په يوه ولاړکونجيز دريګوړي کی يوه کانتی يا ژۍ ۳ سانتي متره اوږده ده، بله نيمه دومره اوږده ده (x) ، لکه هيپتوينوزې (2x) نو x وشميری.

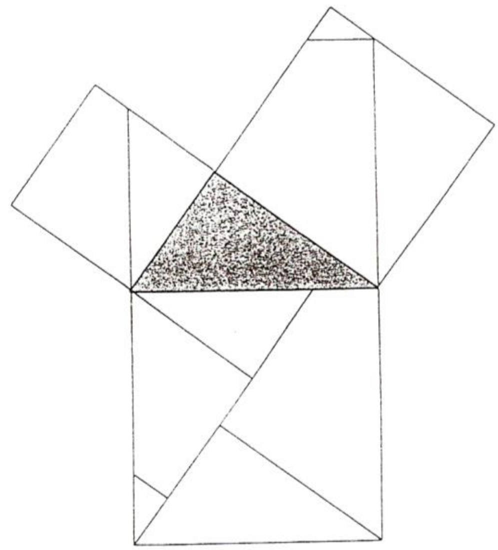
(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ – د یوه ولاړکونجیز مساویپښیز دریکونجي هیپوتینوزې c = 10 cm ده،
کیدی شي له دې څخه د یوې پښې اودوالی وشمیرل شي؟

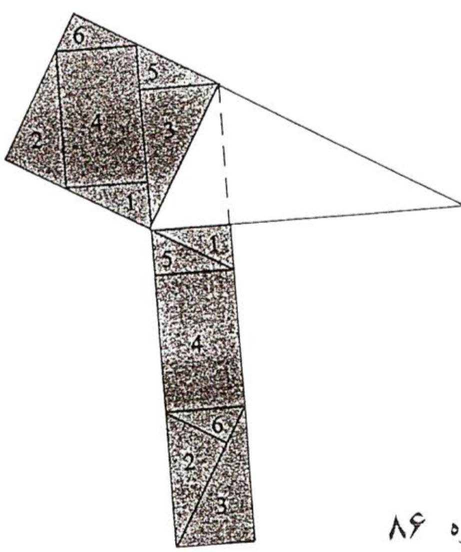
۱۴ – د لاندې څیرو په مرسته دې د پیتاګوراس درسي جمله وښوول شي:



څیره ۸۴



څیره ۸۵



څیره ۸۶

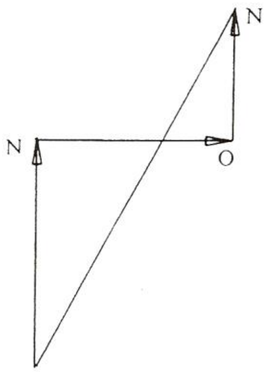
۱۵ – د یوې مربع څخه چې د یوې کانتې یا ژۍ اوږدوالی یې ۵ سانتي متره وي، یو مساوي هواریز ولاړ–کونجی جوړ کړی، چې د یوې ژۍ یا اړخ اوږدوالی یي ۴ سانتي متره وي:

الف) د کاتیت له جملی سره

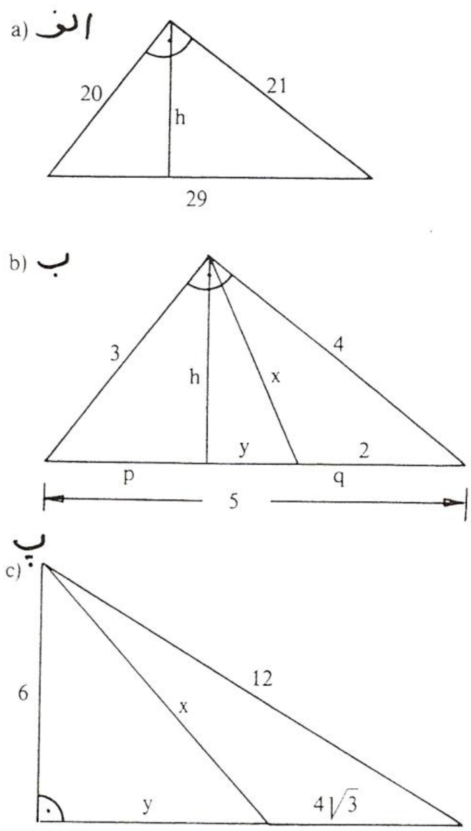
ب) د جګجملی سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ – د کاتیت جملی صدق د
خیرونی په مرسته، د برخه
هوارو د مساویوالی ښوونی
له لارې وښایي« (خیره ۸۶)
۱۷ – په برخه دریګوډیو MPC
(خیره ۸۳/) د پیتاګوراس جمله
استعمال کړی، او په دې بنسټ
د پیوتاګوراس جمله وښایي .
۱۸ – د مساویپښیز ولاړکونجیز
دریګوډیوپښی داسی راکړ شوې
الف) ۶ سانتي متره»
ب) ۸ سانتي متره ،
پ) x سانتي متره، هره اړونده
هیپوتینوزې څومره اوږده ده؟
۱۹ – یو موټر ۷ کیلو متره د سهیل لور
ته او ۶ کیلومتره ختیز لور ته او بیا
۴ کیلومتره د سهیل لور ته ځغلي.
دا موټر د خپل وتلځای څخه څومره لرې
دی؟ (خیره ۸۷)
۲۰ – د خپل وتلځای څخه به څومره لرې وي،
که نور هم ۴ کیلو متره د ختیز لور ته
وځغلي؟
۲۱ – دا نامعلومی کربښی په خیره ۸۸کی
وښایي.



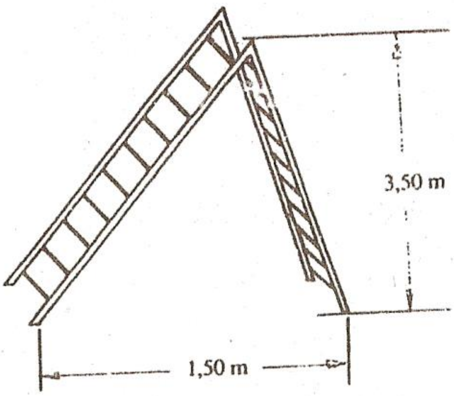
خیره ۸۷



خیره ۸۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – یوه دیوال ته ۵ متره اوږده زینه
اینښول شوې د زینې بیخ له دیوال
۴ ، ۱ متره واټن لري زینه څومره
جگه رسیږي؟



خیره ۸۹

۲۳ – د یوې نقشې، چې د ۱۰۰۰۰۰ : ۱
اندازه ده یو د پلو لار غزیدلي ، چې
د نقشې اوږدوالی ۷ ، ۰ سانتي متره
دی د جنگلاینونو ۲۵۰ متره او ۴۵۰
متره سره . دا د پلو لار په ریښتونی
څومره اوږده ده ؟

۲۴ – د یوه کور بنسټ فورم یو مساوي‌پښیز
دریگوډی دی
الف) د ۹ سانتي متر په سور یا بر او
جگوالی ۶ ، ۰ سانتي متره د چت له
پورته ژی تر ناوی پورې .
ب) د یوه ۹ متره په سور او۵،۳
متره Sparenlänge د بنسټفورم ۶،۵ متره
جگوالي سره د بنسټفورم سور وشمیرۍ

۲۵ – په یوه رامارته زینه کی ټولی پوړی مساوي
اوږدوالی لریهغه په ځیورونه ۶۴ کی کښل
شوې د پوړیو واټن وشمیرۍ

۲۶ – پو یوه مساوي پښیز دریگوډي کي چی
چاپیری یی ۲۵ سانتي متره دی او جگوالی
یی ۲ سانتي متره له بنسټ اړخ څخه کوچنی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

اېرخونه ثومره اوږده دي او جګوالی يی ثومره اوږد دی ؟

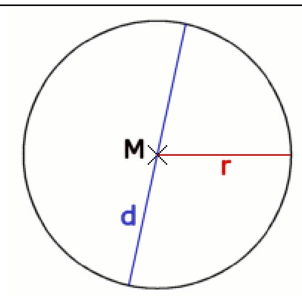
۲۷ – هر يو ټال په زوړند ځغلول شوي رسی ترلی، چی د ترلو ټکی يي
د يوه مساوييپښيز دريګوډي
کونجټکي دي. که وزنوړونکی ۶ متره
اوږد او ۱ متر يو له بل لرې په کښتی
ترلي وي، نو کښتی ټال ثومره لرې ټال
وهلی شي، که دريګوډيبنسټ منځټکی د
لار جګ ټکي کی ۲،۵ متره د
خپل ژورځای څخه جګه وي ؟

۲۸ – کوم يو د لاندې دريګوډيو څخه نه شي کښل کيدی؟

a) a = 3 cm; b = 4 cm ; c = 6 cm b) a = 5 cm ; b = 9 cm ;
c = 7 cm c) a = 7 cm ; b = 4 cm ; c = 2 cm
d) a = 12 cm ; b = 13 cm ; c = 1 cm

۲۹ – ولی درې اېرخيز دريګوډی هيڅوخت ولاړکونجيز دريګوډی نه شي کيدی؟

ګردی (دايره)



پيژند ياتعريف

د يوې هوارې ټول هغه ټکی، کوم چی له يوه ټکی داسی په نامه منځټکي M څخه همغه- يا برابر واټن r (په نامه وړانګه) ولري، ګردی لاين يا لنډ: ګردی بلل کيږي (مخامخ ځيره)

$$k = \left\{ X \in E \middle| \, |\overline{MX}| = r \right\}$$

ګردی سطحه يا - هواره او ګردی چاپيريال يا - محيط

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پام کی دی وي، چی د ټولو هغو ټکو ډیری، چی واټن یی له M څخه د r کوچنی یا د rسره برابر وي ګردۍ (موخه ترې ګردۍ منځهواره ده یا ټیك : ګردیټوټه ځما په پام به بهتره وي که دا ګردۍچیترو یا لنډ : چیترو، چې موخه ترې یواځې منځهواره ده، وبولو) بلل کیږي

پيژند: لکه د مخه مو، چې په ګوته کړه، هغه کرښه چی د ګردۍ ژی یو ټکی د منځ ټکی سره ترې، هغه د ګردۍ وړانګه یا لنډ: وړانګه بلل کیږي، چې په r سره یې ښایو٠
پيژند: او هغه کرښه، چې ګردۍ نیموي د ګردۍ نیمونکې کرښه یا لنډ: نیمی (قطر) بلل کیږي او په d سره یې په نخښه کوو٠

پيژند
دګردۍ دننه کونج پوره کونج ۳۸۰ درجي لري.
ګردیچاپیریال د وړانګې r سره په لاندې ډول ورکړ شوی دی

$$u = d \cdot \pi = 2r \cdot \pi$$

او همداسی ګردۍمنځهواره د وړانګي r سره په لاندې توګه ورکول کیږي

$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

$$d = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2r$$

دا لاندې ورکړشوی ګڼ ګردۍ ګڼ بلل کیږي
: $\pi = 3,14159265$

یادونه: دا چې ما کله هواره یا سطحه په A یا F او π مې په Pi نخښه کړې، دا به هیله ده کرانو لوستونکو ته ستونځې پېښې نه کړېږ
په پورته کې ورکړ شوی ګردۍ ګڼ « پي » ګورو، چې بیرته راګرځیدونی دی٠ له دې امله یو ایرشنل ګڼ دی او د مات په څیر نه لیکل کیږي، بلکه له لسمیز (عشاریه) وروستی پریودي کیدونکی ځیفر پرلپسی دی. په کارونه کې یی موږ نزدې شمرني ته مجبور یو، ځکه چه د جبشمیري د ګنځایونو له امله، چې پای دي یا پوله لري یا رابند(محدود) دي.

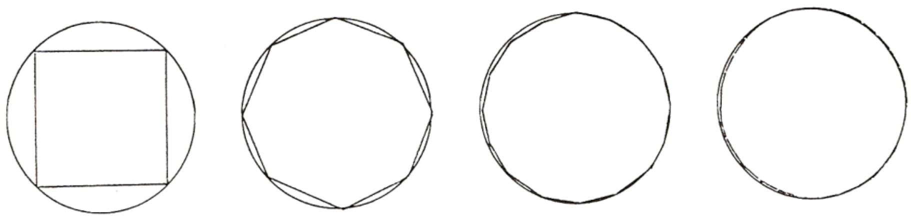
څنګه سړی په دې بریالی شو چی دا ګڼ پیدا کړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا لار دې په لاندې کې لنډه ورکړ شي:

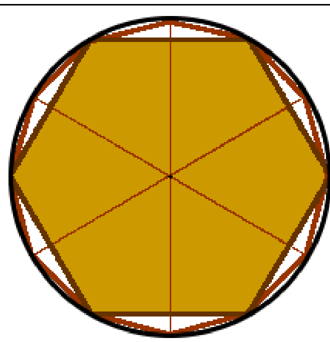
دا له ارښیمدس څخه پیل کارونه (عملیه) یا تګلار   داسې پیل کیږي، چې په ګردۍ کې یو ه څلوری یا مربع راګیروي یا رابنده وي او بالاخره یې په منځنیو ولاړو سوکڅیسیف یا یو په بل پسې ۸ ، ۱۶، ۳۲ او داسې نورو، لوړ یا جګ کړي یعني په همغه وخت کې دوه برابره کړی .

خیره ۱۱۹



یوې ګردۍ ته د یوه n –ګوډي له لارې نږدیونه (نږدې کیدنه)

خیرې ۱۱۹ جناځ چې

	په مخامخ خیرو کې نهه ګوډۍ ورپسې شپږګوډۍ کښل شوي، دي ته ګورو، چې څنګه ګردۍ ته نږدې کیږي

په پورته خیره څو څوګوډیز بریښي او ستره تری راتاو ګردی

پورته خیرو کې یوې ګردۍ ته د یوه   n -ګوډي له لارې نږدیونه (نږدې کیدنه)

کتل کیږي، هغه ٦٥٥٣٧ ګوډۍ، چې ګورو نږدې یا تیک ګردۍ ده)

د زیاتیدونکي n سره کانتی یا ژۍ یا اړخونه تل کوچني کیږي، چې پخپله له ۱۰۰ یا ۱۵۰ ور رسونو ته په یوه پانه کې د کښلو یا رسمولو څخه وځي یا نه کښل کیږي، په همدې وخت کې د منځنکی څخه د په همغه واټن د تکو ګنون یا تعداد زیاتیږي (یعنی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګوډټکوتعداد يا ګڼون) د مربع پيلګردۍ سره دا څيره تل نژدې کيږي. په ورته توګه د دې چاپيرېال او منځهواره هم همغه چاپيريالګردي ته نژدې کيږي. د ګوډټکو زياتيدو سره د ګردۍ وړانګه هم لوييږي. د هغو چاپيريال او منځهواره تل همغه ډير کونجې او په همدې توګه د چاپيريالګردي څخه. په روښانه توګه ليدل کيږي چې د چاپير يالګردۍ او د منځ هوارې د ناپاى ډير n ګوډونو سره د n - ګوډي سره يوځاي پريوځي يا يوځاى کيږي.

په لاندې جدول کې د چاپيريال ارزښت او په همدې توګه د منځهوارې ارزښت د زياتيدونکي n ګڼ سره ستابيل (په خپل حالت، چې ډير تغير په کې نه راځي) پيژندوړ دي:

Fnمنځهواره	Unچاپريال	nپيداښتي ګڼ
2	5,656854	4
2, 828427	6,122934	8
3,061467	6,242890	16
3,121445	6,273096	32
3,136548	6,280662	64
3,140331	6,282554	128
3,141277	6,283027	256
3,141572	6,283145	512
3,141572	6,283175	1024
3,141587	6,283182	2048
3,141591	6,283184	4096

وروسته به وکتل شي چې څنګه د ګردۍ چاپيرى او ګردۍ منځهواره د تريکونومتري يا دريګوډيکچ له لارې ټاکل کيدى شي

پيلبيلګه:

د بانك مدير ښاغلى کړاو غواړي د کنفرانسونو لپاره يو د ښيښې ميز جوړ کړي چې په هره لور يې ٨ کسان ځاي نيولى شي. ايا ددې لپاره يو ميز چې ٢ متره نيمى(قطر) ولري

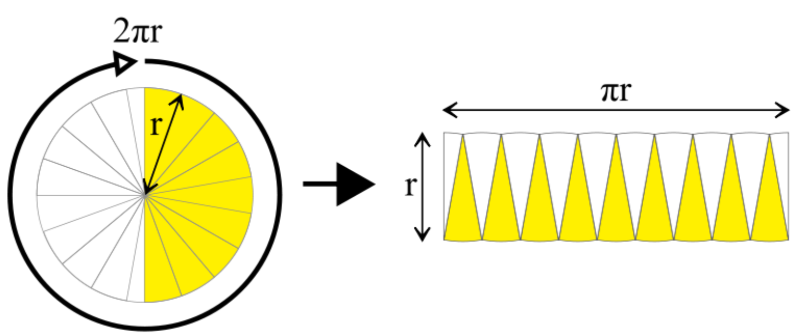
(c) ketabton.com: The Digital Library

بسيا کوي، که د يوه نفر لپاره له ۷۵ څخه تر ۸۰ سانيمتره د ميز په سور، ځاي په پام کی نيول شوی وي؟ دا ميز به څومره ګران وي، که يو څلوری متر يا مترمربع د کار د معاش سره ۲۵۰ مارکه ګران وي يا ۲۵۰ مارکه ارزښت ولري؟

دميز چاپيريال دی $U = pi.1m = 6,248m^2$ په د هرکنفرانس برخوالو لپاره ۷۵ سانتي متره سرورځاي په پام کی وي، نو د ميز چاپيريال دی : $8.75 = 600cm$

د ۸۰سانتيمتره ځاي د نفر په سر $80.8 = 640cm$. منځ ازښت يې $6,2m$ دی. پس د نېکو هيلو سره ټول خاي نيولی شي
مېز دا هواره لري: $F = \pi.1m = 3142m^2$ او له دې امله $3,142.250 = 785,40$ ياني الماني مارکونه ازښت لري..

په لاندې څيره کې کتل کيږي، چې د ګردی منځهواره نزدې

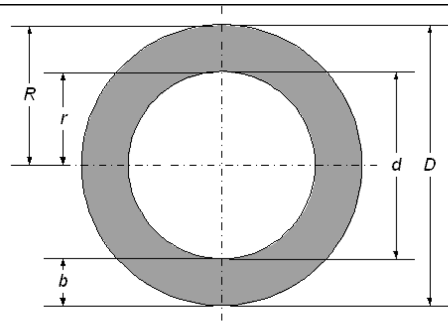


$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

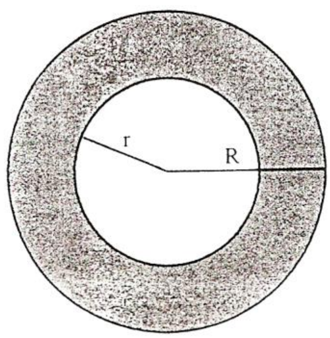
ده (په پورته څيره کې د څيرې کوچنيوالي له امله د ګردی څيره لړ تخريب شوه، خو دا ستونځې پوهوړ دي٠

ګردنېوتېه او ګرديبرخه، ګرديکړی

(c) ketabton.com: The Digital Library



ډیر وخت دننه- یا خوندیګردی له چاپیریالګردی کوچنی وي. نو له دې امله د دوي ترمنځ یوه کړی منځ ته راځي، چی د هغي منځهواره د دواړو ګردیو د کمون یا توپیر څخه شمیرل کیږي٠



خيره ١٢٠

جمله : مونږ دوه ګردی لرو، چې د چاپیریالګردی یا دباندې ګردی وړانګه R او د دننه ګردی یا خوندې ګردی وړانګه r

$$F_K = \pi R^2 - \pi r^2$$

ده، نو د

$$F_K = \pi (R^2 - r^2)$$

$$F_K = \pi (R - r)(R + r)$$

بل ډول یې: یوې ګردیکړی منځهواره ده

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

همداسې کیدی شي، چې د ګردیکړی منځهواره د ګردیبرخي د سور او دننه او دباندې ګردی د نیمیو څخه هم وشمیرل شي، چې په لاندې کې یې ګورو:

$$A = (D - b) \cdot b\pi$$

پیلبیلګه:

د کړاو میز درز پیداکړ. چی له غاړې یا ژی پنځه سانتي متره دننه لور ته ځغلي. ښاغلی کړاو فکر کوي ، چې که دامیز په پنځه سانتیمتره کوچنی کړی . کوم میز هواره پاتي کیږي او ګردیکړی چی له منځه ځي څومره لویه ده؟

او د همغه پیل نیونی سره لکه د مخه څومره نفر اوس په میز ځاي نیولی شي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

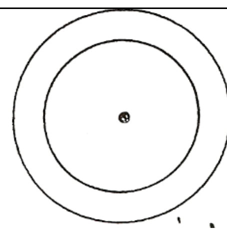
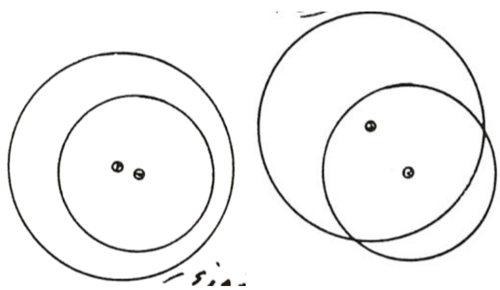
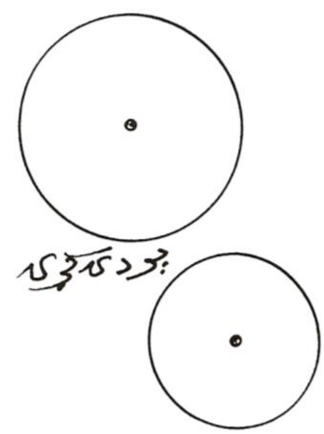
$F = (0{,}9m)^2.Pi = 2{,}835m^2$

د ګرديکړی منځهواره او چاپيريا په لاندې ډول دي

$F = 1{,}95m.0{,}05m.Pi = 0{,}30m^2$

$U' = 2{,}095m.Pi = 5{,}969m$; $U' :8 = 74{,}6$ cm

د داسې لړ ستونځو سره بيا هم ټول کسان پر ميز ځاي نيولی شي٠

	هغه ګردۍ، چې منځټکي يې يو پ بل پريوځي کونڅنتري يا راټول يا يومنځي بلل کيږي او پرته له دې دکسڅنتري يا نه يومنځي بللکيږي.
	تر هغې چې يوه ګردۍ ټوله په بله کې پرته وي، يدی شي چې د راکښلو له لارې په يومنځي يا کونڅنتري ګرديو بدله شي
دا يو نايومنځي ګردۍ دي	

هغه دوه يا زياتې ګردۍ چې منځ ټکي يې يو په بل پريوځي کونڅنتري Konzentrie يا راټول او په غير له دې اکسڅينتري Exzentrieيا ناراټول بلل کيږي .تر څو يوه ګردۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټوله په بله کی پرته وي کیدی شي چی د راکښلو له لارې په کونخینتري ګرديو يا راټولګرديو بدلی شي.

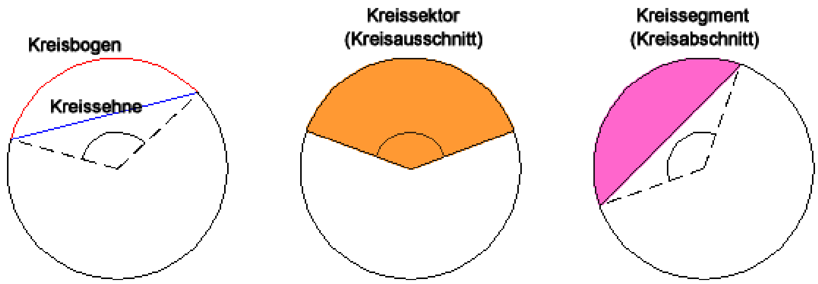
که ګردی یوبل پوره پټي نه کړي، نو د ګډو هوارو يا سطحو(= غوڅډيريو) يا ګډو پاتي يا باقي شميرنه له ستونځو سره مخامخ کيږي .که ګردی يو له بل سره ګډ ټکي ونه لري نو دا ګردی يو دبل سره پردی بلل کيږي٠

ځو پيژندونه يا تعريفونه:

د ګردی هغه برخه ګرديټوټه (سګمنت) Segment/ Abschnitt بلل کيږي، که چيرې يوه ګردی د يوې کرښی له لارې يا کرښه باندې غوڅه شي . داسی يوه کرښه غوځکرښه ياغوڅوونی يا ټوټه وونې (سيکانت) Sekante بلل کيږي. غوځکرښه ګردی په دوه ټوټو ويش. که دا کرښه د ګردی له منځ څخه تيره شي، نو ګردی په دوه برابرو برخو ويشي، چی دا بيا ګردی نيموونې بلل کيږ. هغه غوڅوني چی له منځ ټکي تيره شي، د ګردی نيمی يا لنډ: نيمی بلل کيږي. که ګردی په يوه ټکي کی لمس کړی نو دا کرښه تانجنت بلل کيږي او که له ګردی څخه دا کرښه دباندې تيره شي نو تيريدونی کرښه بلل کيږي .په ګردی د غوځکرښی دننه پرته برخه د ګردی ټوټوني (Sehne) يا وتر بلل کيږي .ټوټونی يا Sehne بندکرښه ده په داسی حال کی چی غوڅی ، تنجنت او تيريدونکی ناپاي کرښي يا -لکه، چې ورسره بلد يو - کرښې دي .د يوه ګردی څخه د دوه وړانګو په مرسته کيدی شی يوه برخه راغوڅه شي دا برخه ګرديبرخه يا سکتور Sektor بلل کيږي. د منځټکيکونج يامنځني کونج او ليندې (Bogen) b سره. مخامخ ځيره ده

په لاندې ځيرو کې د نومونو له الماني څخه په پښتو کوونه له کيڼ وښی لورته:
ګرديلينده Kreisbogen د ګردی ټوټه وونې(ټوټوونې) Kreissehne ،
ګردی برخه Kreissektor ،

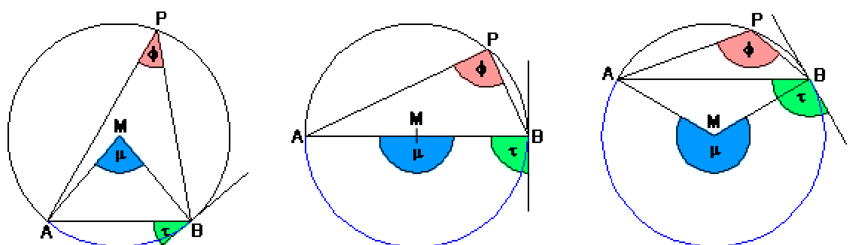
(c) ketabton.com: The Digital Library



د

پورته ژباړه له کيڼ څخه و ښي لور ته: ګردی- لينده ټوټه ووني، ګردي برخه، ګردی ټوټه
.

په ګردی کې د کونجونو ډولونه:

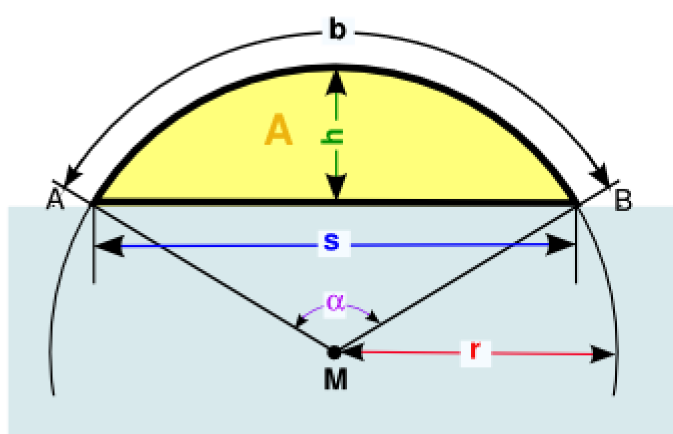


1. Fall: µ < 180°

2. Fall: µ = 180°

3. Fall: µ > 180°

د ګردی ټوټه



(c) ketabton.com: The Digital Library

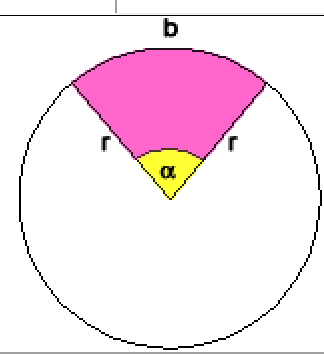
گردۍ ټوټه Kreissegment ,
د گردۍ ټوټې لويې:

- α = منځټکيکونج Mittelpunktswinkel
- b = گردۍليندهKreisbogen
- h = ټوټې جګې Segmenthöhe
- r =وړانگه Radius
- s = گردۍ ټوټه ووني يا - وتر Kreissehne
- A = ټوټې هواره Segmentfläche
- M = گردۍ - منځټکی Kreismittelpunkt
- Verbindungترنه A-M-B = برابرپينيز درېگوډی
-

د گرديټوټې فرمولونه	
!Error $$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\alpha,$$ $$A = \frac{r \cdot b}{2} - \frac{s \cdot (r-h)}{2},$$	سطحه مخامخ فرمول Flächeninhalt
$$r = \frac{4h^2 + s^2}{8h}$$	وړانگهRadius
$$s = 2r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$$ $$s = \frac{2h}{\tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)} = 2h \cdot \cot\left(\frac{\alpha}{4}\right)$$	Kreissehne گردۍ ټوټه ووني (د وروسته لپاره دي په پام کې وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

	$h = r - \left(r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right),$ $h = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2},$ $h = \frac{s}{2} \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)$	Segmenthöhe د توټي جګوالی
	$b = 2r \cdot \frac{\alpha \cdot \pi}{360°},$ $b = r \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{180°},$ $b = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot (4h^2 + s^2)}{1440h},$	دلینديې اوږدوالی Bogenlänge
	α , $\alpha = 4 \cdot \arctan\left(\frac{2h}{s}\right)$	Mittelpunktswinkel منځټکیکونج په درجه کچ (Gradmaß)

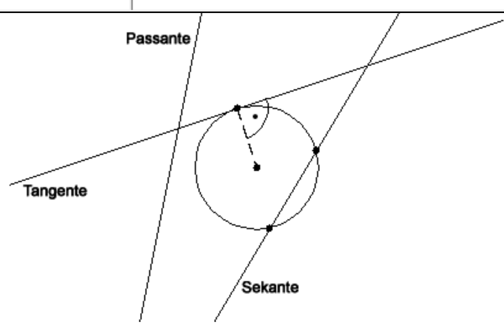
	Kreissektor ګردی برخه یا قطاع

د ګردی برخې یا قطاع فرمولونه

!Error $A = \frac{\alpha}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi$	سطحه یا منځهواره Flächeninhalt

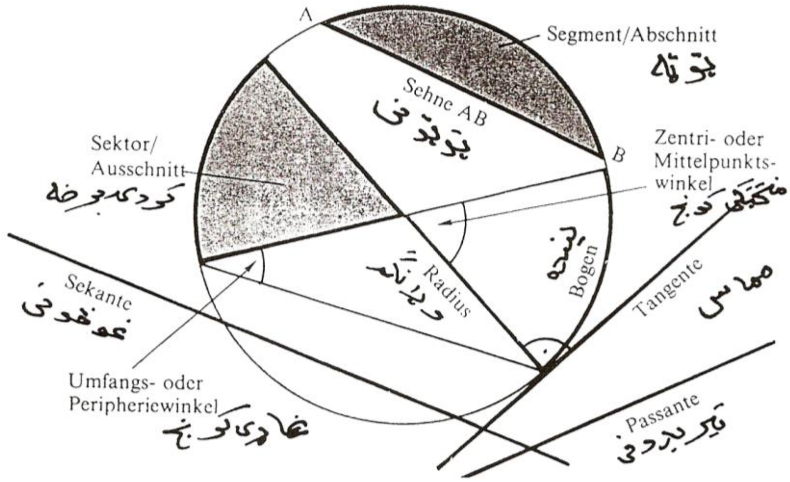
(c) ketabton.com: The Digital Library

$b = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot r \cdot \pi$	د ګردی لیندۍ اوږدوالی
r	Radiusوړانګه
α	Mittelpunktswinkel (Gradmaß)منځټکیکونج(په درجه کچ
!Error $\pi \approx 3{,}1415926536$	Kreiszahlګردیګڼ یا - عدد

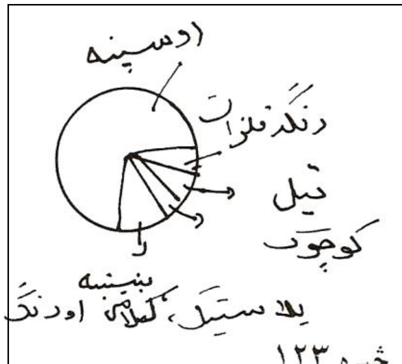
	په لاندې ځيره کې نومونه: تيريدونې Passante ، تانجنت يا مماس Tangente، غوځوونې Sekante، لاندې ځيره کې خو هرڅه روښانه دې.

د پورته ځيرې کې راوړې څه په لاندې ځيره کې ټول په لاندې ځيره کې ورکړل شوې دې

(c) ketabton.com: The Digital Library



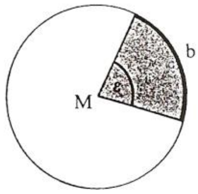
پیلبیلګه: د یوه بنس موټر جوړولو لپاره ۱۷۵۰ کیلوګرامه اومه(خام) مواد په خرڅ رسیږي یامصرفیږي. په دې کی اوسپنه او فولاد ۷۵ په سلو کي ، په پالستي، ښیښي او رنګ ټول ۹ په سلو کی رسیږي، په رنګه فلزونو او ربړ ۶ په سلو کی رسیږي، او تیل ۴ په سلو کی . یو ګردیدیاګرام وکاږئ چی هره برخه په کې ورکړ شوي وي .د ګردي ټوله هواره د ټولو موادو سره مساوي دهٔ) ۱۰۰ په سلو کی (د جوړموادو برخه د ګردبرخی څخه عبارت دئ. یوه د یو په سلو کی برخه به یوه ګردیبرخه وي د منځکونج سره 360°:100=3,6° وی .

يعني 4%~14,4°;6%~21,6°;9%32,4°;75%=270° څیره دی، چې د هرڅه برخه کې ورنزدې ښوول شوې وي په یوې ګردئ کې وکښل شي یا لاندې	

د ګردئ برخې څیره څرګندوي» د منځکونج چې د ، ε سره يې په نخښنه کوو لویوالي

په تناسب برخهواره Fsk او هم لینده b تغیر خوري او لاندې باوري دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\frac{F_{SK}}{F} = \frac{b}{U} = \frac{\varepsilon}{360°}$	ε لويوالي b ده ټکی دیوه یاګردی راغوځي 

د ډبل برابرون د دويمې برخې څخه باوري دي:

جمله : د ګردی برخې د ليندې اوږدوالی داسی دی:

$$b = \frac{n.\varepsilon}{360°} = \frac{2\pi r.\varepsilon}{360°} = \frac{\pi r\varepsilon}{180°}$$

د لومړی برخی څخه د سيکتور يا ګرديبرخی لپاره باوري کيږي

جمله: د سيکتور يا د ګرديبرخی منځهواره په لاندې ډول ده:

$$F_{Sk} = \frac{F.\varepsilon}{360°} = \frac{\pi r^2.\varepsilon}{360°} = \frac{rb}{2}$$

اړيکي $F_{Sk} = \frac{rb}{2}$ د مات $F_{Sk} = \frac{F.b}{n} = \frac{\pi r^2 b}{2\pi r}$ د لندونې څخه منځ ته راغلي

بيلګه: د خام موادو برخی (بيلګه مخ) هواره څومره لويه ده، که د ګردی دياګرام ۵ سانتي متره وي ؟

F اوسپنه او فولاد = (25 π : 360°).270 = 0,218.270 = 58,905 cm^3

F پلاستيك = 0,216.32,4 = 7,069 cm^3

F رنګه فلزات = F ربړ = 0,218.21,6 = 4712 cm^3

F تيل = 0,218.14,4 = 3,142 cm^3

د ټولو ټوله يا د ټول زياتون بايد د ګردی سطحه يا هواره ورکړي:

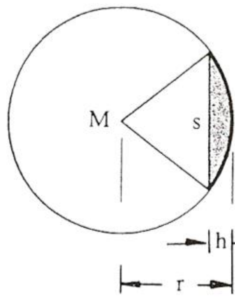
(c) ketabton.com: The Digital Library

$F = \pi r^2 = 78{,}54\ cm^3$

د برخهوارې ددې فرمول سره نور د برخهوارې شميرلو لپاره هم کوم جنجال يا پرابلم نه شته. د اخرني هواره دلته بيا د برخهوارې او د دوه وړانگو او ټوټوني څخه جوړ مساوي پښيز دريگوډي کمون دی.

څيره ۱۲۵

گردکه ټوټه



د دريگوډي هواری لپاره باور لري:

$F = s(r - h) / 2 = 0,5\ r^2 . \sin \varepsilon$

(تريگونومتري دی وکتل شي ....) او

او د دې سره ټوټه سطحه يا هواره

جمله: د گرديټوټې يا سگمنت هوارې په لاندې ډول دي:

$$F_{Sg} = F_{Sh} - F$$
$$F_{Sg} = (br/2) - s(r - h) / 2$$
$$F_{Sg} = (\pi r^2 \varepsilon / 360°) - (r^2 \sin \varepsilon)/2$$
$$F_{Sk} = (r^2/2) [\pi \varepsilon / 180° - \sin \varepsilon]$$

په کارونه يا عمل کی د ټوټه هوارې لپاره گټور نزدې ارزښت $F_{Sg} = (2/3)sh$ ښوول شوی دی.

پيلبيلگه: مدير کړاو له ځان څخه پوښتي چی ايا د گرديميز په ځاي به يو منظم اته کو نجی هدفمند بهتر نه وای؟ نو په اختيار کي هواره او چاپيری به څومره لوي وي؟

لمړی گرديټوټی شميرو. په ورته ډول لکه د گردي نزدې شميرلو لپاره، د مربع څخه و ډيرکونجي ته، مخ ته ځو او دې د اړخونو اوږدوالی s شميرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځولاړه m، د اته کو نجيز كانتي يا ژي k او بالاخره د ګرديتوبي
جګولي h د پيتاګوراس د جملي په مرسته شميرو.
لاندې لاس ته راځي:

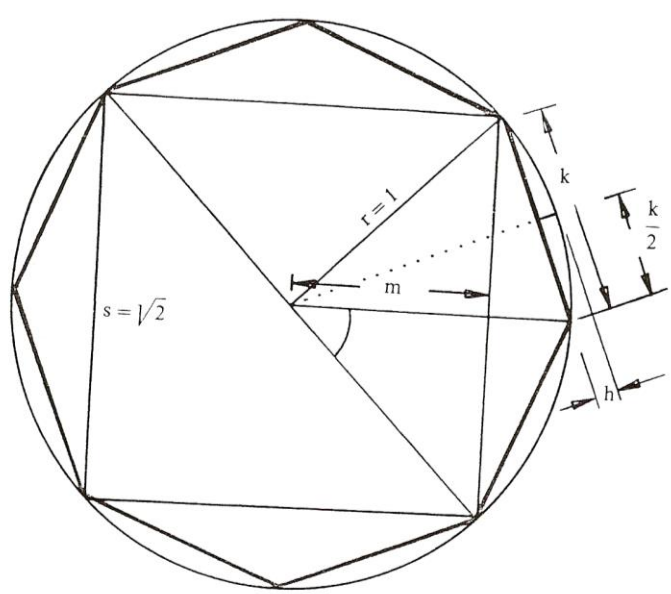
$s = \sqrt{2} . 1 = 1,414 \text{ m} ; \ m = \sqrt{a-(1,414 : 2)^2} = s / 2 = 0,707 \text{ m}$

$k = \sqrt{(1 - 0,707)^2 + 0,707^2} = 0 , 756 \text{ m}$

$h = 1 - \sqrt{1 - (0,765 : 2)^2} = 0,076 \text{ m}$

د $\varepsilon = 45°$ له امله $b = 0,393$ m دی.// له دې سره

$F_{\text{توټه}} = 0,5.[0,393.1 - 1,414(1-0,076)] = 0,039 \text{ m}^2$



(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې څخه په هرصورت د ښيښې ميز جوړيږي. ټوله غورزول شوې له دې امله په لاندې توګه ده: $8.0.039 = 0,312\ m^2$.ميز اوس لاندې هواره لري

$$F_0 - F_{\text{غورزولشوې}} = 2,828\ m^2$$

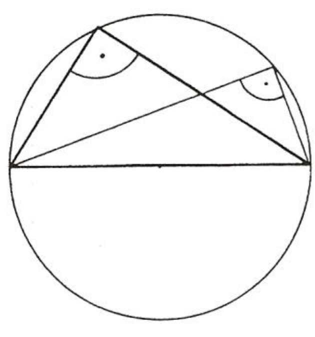
او په همدې توګه لکه د کوچني شوي ګرديهواره د وړانګي $r = 95\ cm$ سره. د کيناستلوځاي سور (k) حتي زيات شوی ، چاپيرى اوس $U = 8.0,765 = 6,123\ m$

دی. نژديونه هم همدا ارزښت ورکوي: $F = 0,765.0,076 = 0,039\ m^2$ او داسې نور.

تريګونومتريکي حل مو زر هدف ته رسوي:

$$F_{\text{ټوټه}} = \pi.1.45:360 - 0,5.\sin 45° = 0,039 m^2$$

او داسې نور . ځيره

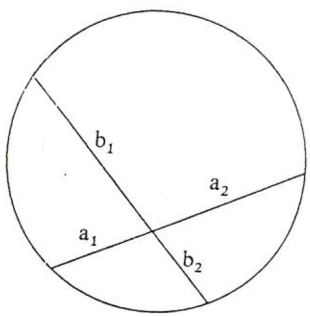


ځيره ۱۲۷

ګرديجملې او ګرديخو يونه

د تالس جمله

په نيمه ګردۍ کې هر پريفري– يا ژی کونج ولاړکونج دی(ځيره)



$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$

د ټوټونې جمله

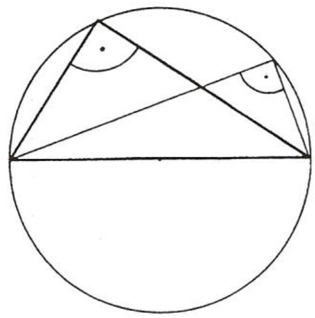
که دوه ګردۍ ټوټونې په ګردۍ کې دننه يو بل غوځې کړي نو د غوځبرخو

(c) ketabton.com: The Digital Library

تریګونومتریکي حل مو زر هدف ته رسوي:

$F_{ټوټه} = \pi.1.45:360 - 0,5.\sin45° = 0,039m^2$

او داسې نور . څیره

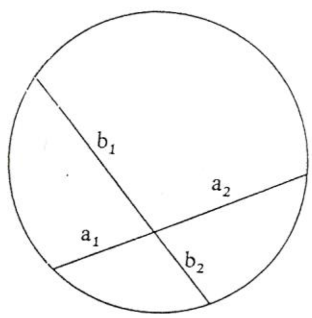


څیره ۱۲۷

ګردیجملې او ګردیخو یونه

د تالس جمله

په نیمه ګردۍ کې هر پریفري- یا ژی کونج ولاړکونج دی(څیره)



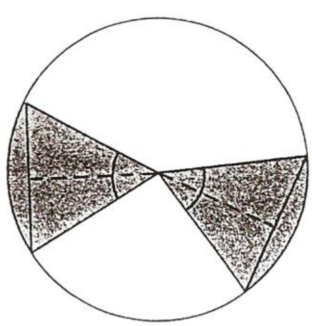
$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$

څیره ۱۲۸

د ټوټونې جمله

که دوه ګردۍ ټوټونې په ګردۍ کې دننه یو بل غوځې کړي نو د غوځبرخو ځل (ضرب) یې یو ثابت دی

د مساوي ټوټوونو جمله

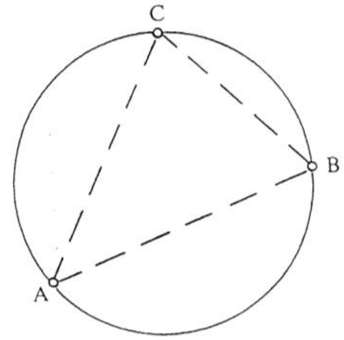


څیره ۱۳۱

مساي اوږدې ګردیټوټې د ګردي له منځټکي مساوي فاصلې لري، مساوي منځټکي کونجونه، مساوي ګردیلینده، او مساوي ګردیټوټې او مساوي ګردیبرخې لري .

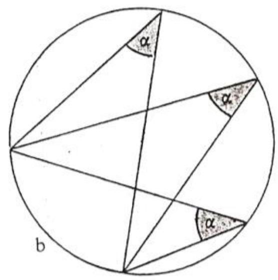
(c) ketabton.com: The Digital Library

د چاپیرګردی جمله



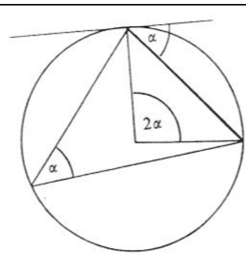
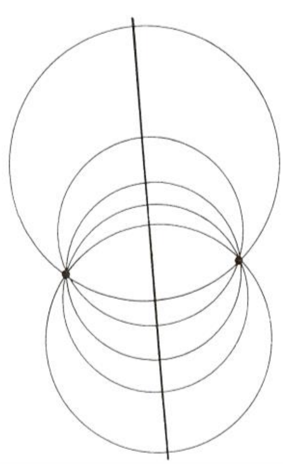
د درې ټکو A, B, C لپاره یوه ګردی موجود ده چې د دریواړو ټکو څخه تیریږي:
دا د دریکونجي ABC چاپیرګردی بلل کیږي ځیره

د پریفري – یا ژیکونج جمله



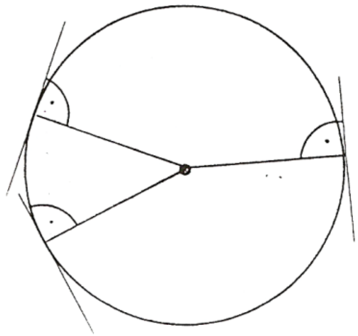
ځیره ۱۳۳

په همغه لینده باندې ټول
پریفري – ژی کونجونه مساوي دي

 	**د منځټکي کونج او پریفري – یا ژی کونج جمله:** یو منځټکي کونجدوه برابره دومره لوي دی لکه په دې تړلی پریفري – یا ژی کونج(چاپیریالکونج) مخامخ ځیره. د منځټکي کونج او د تانجنت کونج – او ټوټونکونج جمله: د منځټکي کونج دوه برابره دومره لوی دی لکه په دې اړوند تانجنت – یا ټوټه وونې کونج. **د ګردیو جمله چې په دوه ټکو کې سره غوځوي:** د ټولو ګردیو یا دایرو منځټکي کونج چې یو بل دوه ټکو او کې غوځوییو ناپای کرښه باندې، چې ځایلاین (ځایکرښه) وایي پراته دي. مخامخ ځیره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګې او تنجنت جمله



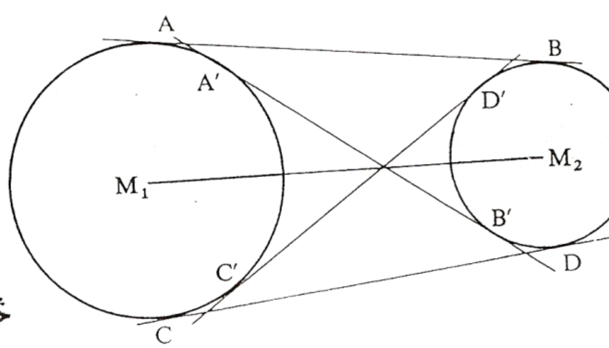
په لمسټکي پرته وړانګه او اړوند تانجنت سره یو په بل ولاړ یا نیغ پراته دي.

خیره ۱۳۶

د تانجنت جمله:

د دوه ګردیو د منځ ټکو M_1 او M_2 سره تانجنتونه دنننی (دباندني) تانجنتونه نومیږي که د دوه ګردیو د منځټکوکرښه M_1M_2 غوڅه (غوڅه نه) کړي.که چیرې دوه ګردي ګډ دنننی او دباندني تانجنتونه ولري، پس د داوړو تانجنتونو غوڅټوټې همغه اوږدوالی لري.

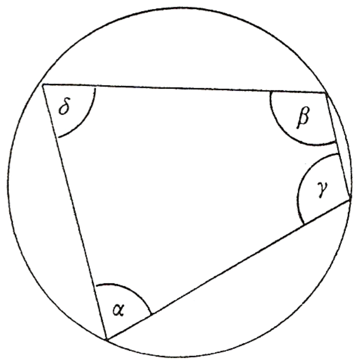
|AB| = |CD| په همدې ډول (<=>) |A'B'| = |C'D'|



خیره ۱۳۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

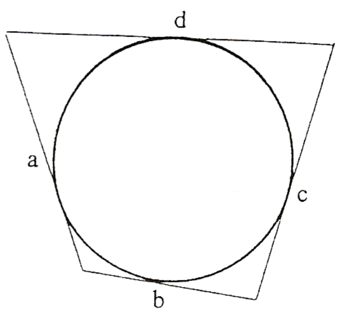
د ټوټوونو څلورګوټي جمله



خیره ۱۳۸

د ټوټونوکونجونه چې مخامخ پراته دي یو بل سره 180° باندې پوره کوي.

$\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180°$



خیره ۱۳۹

د تانجنتونو څلورګوټي جمله

د تانجنتونو په څلوکونجي کی د مخامخ کونجونولویوالی د نورو مخامخ کونجونو سره مساوي دی.

$a + c = b + d$

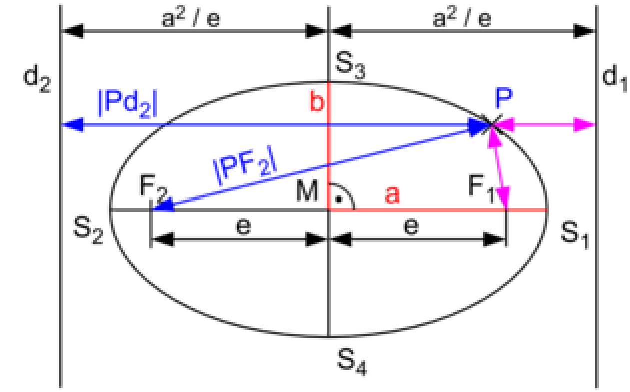
ایلیپسی(بیضوي یا هګی) (دلته موخه هواره ده) Ellipse

پیلبیلګه:

د کړاو میز جوړښت باندې موږ په اته کونجي اوبی یا حل کی تم کړی وو. دا چی په دې ډول یو میز سره تل د زخمي کیدو خطر موجود دی

پوښتنه رامنځ ته کیږي چی : داسی یو را ګردشوی ښکلی شکل ، چی ګردی نه وي او منظم غوڅ وي، شته، چی د کړاو اړتیا پوره کړي؟ په ریښتونی ، داسی یو اوبی یا حل موجود دی، لکه چی لاندې خیره ښایي .چی هر د غاړې تکی دوه تکو واټنونو ته یو ثابت واټن لري

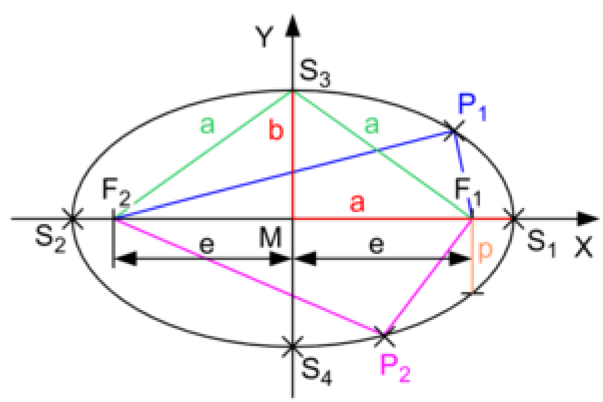
(c) ketabton.com: The Digital Library



پیژند یا تعریف:

د ټولو هغوټکو Pډیري ته چی له دوه ځاي په ځاي ټکو F1 او (F2 سوزېدټکی یا بهتره سوزونټکو(څخه ثابته یا همغه واټن یا فاصله لري، ایلیپسی نومیږي

لاندې واټنونو یا فاصلو ته سوزونوړانګی وايي. $|PF_2| = r_2 \wedge |PF_1| = r_1$



$$E = \{P \mid |\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}| = 2a\}$$

منځ ټکي) واړوی M په (Oته د ایلیپسی منځ ټکی وای، e ته د سوزونواټن یا فاصله یا لاینی ایکسځنتریځیتایت (lineare Exzentrizität) یا لاینی ناراټوله وايي .ددې لویو لپاره لاندې اړیکي باوري دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I........r+r=2a \wedge II........a^2-b^2=e^2$$

په دې کی a او b د ایلیپسی لوي او ووړ نیممحورونه دي. اړیکه I روښانوي، که چیرې د ایلیپسی ټکی P د نیممحور a په اخر کی وټاکل شي، IIد پیوتاګوراس له جملی لاس ته راځي که د P ټکی د b نیممحور په اخر پروت وي .دواړه ناپاکرښی چی د سوزونټکي تیریږي او په دې په O کی ولاړه ناپای کرښه د ایلیپسی سیومیتري محورونه جوړوي .د خوښي په ټکی P کي هره په تانجنت ولاړه کرښه د سوزونوړانګو ترمنځ کونج نیموي .

د ایلیپسی جوړول د باغوان لخوا یا د ایلیپسي باغواني جوړښت:

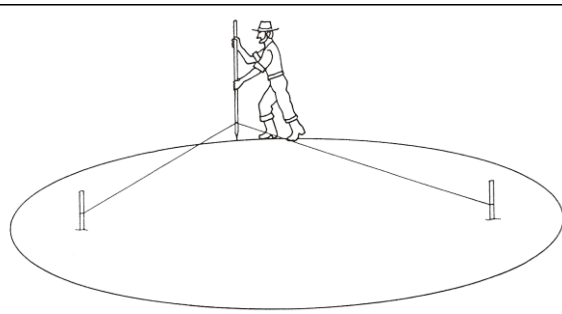
دا ځیره دې ګران لوستونکي د تمرین په توګه وباسې٠ د یوې رسی، چی په 2 aاوږده وي، په داوړو سرونو کي موړي وتړئ او دا بیا په ځمکه ټکوهي، د یو بل)خوزیدونکی (موږي یا لرګي په مرسته دا پړی راکښ کړئ یا راکاږی او وګرځوی ، دلته کوم شکل چي پیداکیږي ایلیپسی ده او دواړه د پړي د سرونو ټکي چی موږي پرې وهل شوي سوزونټکي دي. ځیره په هر کواوردینات سیسم او یا په یوه میلي متر کاغذد کونځینتري یا راټولو ګردیو په مرسته بل جوړښت امکان پیداکیږي، چی سړی د یوه ټکي دوه ګردئ د a او b وړانګي ووهي او هره د خوښي وړانګه د ننني ګردئ په Pb او دباندنی ګردئ په Pa کی غوځوي. که د Pb ځخه یوه پرته کرښه وویستل شي او د همغه تر Pa دوام، نو هرچیرته یو د ایلیپسی یا هګی یا بیضوي ټکی لاس ته راځي. د ایلیپسی هر ټکی داسی پیدا کیدی شي .پیژندل کیږي چی هر 2 bته غبرګ ټوټونی

د k= a / b فاکتور سره لنډ شوی دئ. له دې سره د هوارې دننه هم تغیر خورې ددې فاکتور k په اندازه

$$\cdot r \Rightarrow \pi r.(k.r)=F(hagai, baizawy)$$

او له دې چی r = a او (k.r =b د لته r د ګردئ » لویه نیمه اکسی(محور) ده

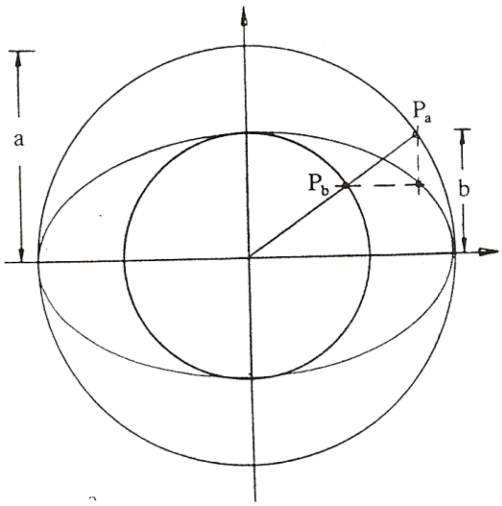
جمله : دایلیپسی هواره ده $F=\pi ab$:



خیره ۱۴۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ايليپسي چاپيروني په ساده ډول نه شي شميرل کيدی، په عمل کی په زيات وخت کی نزديونه يا نزدې شميرنه بسيا کوي.



خيره ۱۴۲

جمله : د ايليپسي چاپيری:

$$U \sim \pi(1{,}5 \, . \, [a+b] - \sqrt{ab})$$

او يا ګردي ته ورته ايليپسي. دا په دې مانا چی $a \sim b$:

$$U \sim \pi \, . \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

دا فرمولونه، که $a = b$ وي د ګردي چاپيري ته ځي:

$$U = \pi(1{,}5 \, . \, [a+a] - \sqrt{a^2}) = \pi(3a-a) = 2\pi a = 2\pi \Leftrightarrow$$

اويا په په همدې توګه يا $\Leftrightarrow$

$$U = \pi \, . \sqrt{2(a^2 + a^2)} = \pi \, . \sqrt{4a^2} = \pi 2a = 2\pi r$$

بيلګه:

کوم خورا لويوالی د بڼاغلی کړاو ميز په ايليپسي يانيضوي يا هګي خيره لرودی شي ؟

لوي محور $a = 1m$ پاتي کيږي، کوچنی محور دی: $b = 95cm$، داچی ميز بايد د درځ ژوروالي پورې غوځ شي. نو له دې امله هواره ده:

$$F = \pi \, .1.0{,}95 = 2{,}985m^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چاپیرى کیږي:

$$U \sim \quad 1(1,5.1.95 - \sqrt{0,95}\,)\ 6,127\ m \quad \Leftrightarrow$$

یا په همدې توګه د بیضوي یا هګۍ و د ګردۍ فورم ته یا ګردیځیرې ته نزدې فورم نیسي U ~ 6,128 m. له دې امله هګیځیره د میز لپاره مساعد اوبی یا حل دی.

تمرینونه

۱ – په کالیفورنیا کی د یوزیمیت ملي پارك Yosimite National Park ، خپل ماموت ونو (Mammutbaumbestände) له امله خورا مشهور دی. کوم چاپیرى یی هغه ونه لري چی وړانګه یي ۷ ، ۴ متره وي؟

۲ – د لاس ساعت دقیقه ښونکی ۱،۵ سانتي متره اوږد دی(څرخونمحور– څوکه)، څوکه یی په یوه سانیه، یوه ساعت، یوه ورځ، یوه اونی، یوه کال کی څومره لار وهي؟

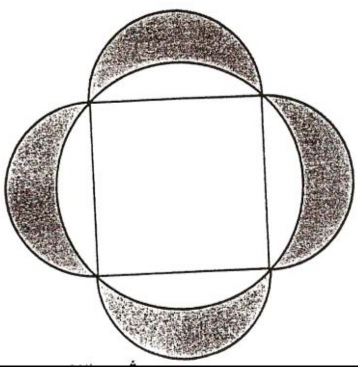
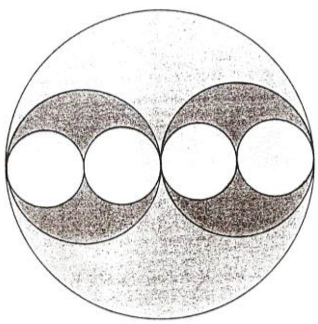
۳ – ځمکه نزدې ۶۳۷۸ کیلومتره یوه قطبي(اکواتور) وړانګه لري. قطبچاپیرى یی څومره دی ؟

۴ – په خیال کی دې ولرو، چی له اکواتور یا قطب څخه یو پیرى غزوو (۴۰۰۰۰ کیلو متره)، کوم چی د اکواتور یا قطب له چاپیرې څخه یومتر اوږد دی. د یوه ځانګړي تخنیکی چمتووالی له لارې په هرځاي کی د ځمکی څخه په همغه واټن راوړل کیږي. ایا دا واټن پوره لوي دی چی سړی ددې ترمنځ یوه د (ګیرکلی) پاکي وځایوولی شي یا ځاي کړاي شي؟

۵ – د غوځهواره به یی د ځمګي سره څومره وي که د اکواتور یا قطب په اندازه جګ وي؟

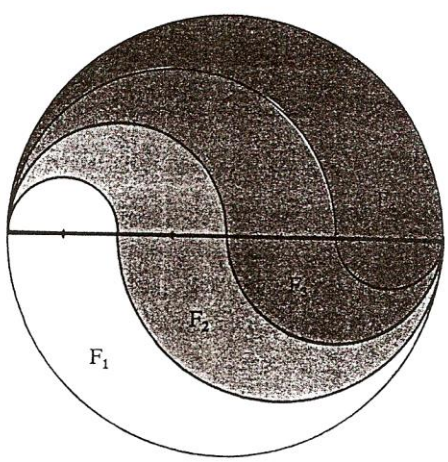
۶ – په اکواتور یا قطب دوه ځایونه څومره لري دی، که یو له بل یوه اوږددرجی په

انداه لرې وي؟

۷ – د گردۍ [اپریا ل څنګه تغیرخوري، که د هغه وړانګه دوه رابره شي یا په همدې ډولنیمه شي؟ ۸ – وښایۍ: د مربع هواره د څلورمې میاشتو(سپوږمیو) د هوارې سره مساوي ده؟	
د ځیرې سره سم د گردیو هوارمتن یا د هوارو دننه د مساوي وړانګو سره وټاکۍ. د ۱ هره یوه د لویې گردۍ په سلو کې څومره جوړوي؟ وښایۍ، چط څلورو واړو گردیو چاپرۍ د همغې وړانګې سره دومره لوي دی لکه د راچاپیره یا دباندې گردۍ چاپري. ۱۰ – د یوبې مربع د باندې او دننه یوه گردۍ راګرځیدلې. د دواړو گردیو هوارې یو بل ته څنګه متناسب دي یا ځانونه نیسي؟	

۱۱ – د دوه گرديو منځ ټکی د مساوي وړانګي $r = 7,2\ cm$ سره، يو له بل دومره لري دي لکه دا وړانګه . د دواړو گرديو ګډ هواره اندازه کړی، چی څومره ده؟

۱۲ – په يوه گردۍ ، چی وړانکه یی $r = 10\ cm$ ده، که يوه گرديکړۍ کيښنول شي، چی هواره يی دومره لويه ده لکه د دننه گردۍ هواره. د دباندې گردۍ وړانګه به څومره وي؟

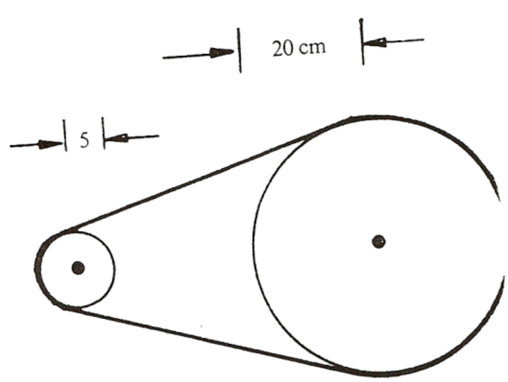


ځیره ۱۴۵

۱۳ – د يوې گردۍ برخهوارې، F_1 او F_2 ، لکه په ځيره ۱۴۵ کي چی ورکړ شوي، وښايی، چی وړانګه يي $r = 4\ cm$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي. وښايي چې هواره په څلورو مساوي
هوارو ټوټه شوې ده (څیره ۱۴۸)
۱۴ – د هغه ګردې وړانګه وښايي ، کوم چې همغه هوارخوندي لري لکه :
الف) یوه مربع، چې داړخ اوږدوالی یې ۵ سانتي متره وي.
ب) یوه روتی چې نیمي یې ۴ سانتي متره او ۶ سانتي متره وي .
پ) یو مساوي اړخیز دریکونجی چې د اړخ اوږدوالی ۷ سانتي متره وي.
۱۵ – د یوه پنډ پینسیل سره یوه ګردۍ وهل کیږي، چې دننی وړانګه یې ۵ سانتي متره وي. داچې پنسل یو سانتي متره پنډ دی ، نو دا په ریښتینی یوه ګردیکړی ده. د دې ګردیکړې هواره وشمیرې.
۱۶ – یوه ساتلیت یا جوړه، یعنی مصنوعي سپوږمۍ، له ځمکې په یوه ګردۍ راڅرخي، چې سرعت یې په سانیه کې ۸ کیلو متره دی . د ځمکڅرخون لپاره دا ۱ ساعت او ۲۸ دقیقو ته ضرورت لري. وښايي چې دا ساتلیت یا جوړه سپوږمۍ یا مصنوعي سپوږمۍ له ځمکې څخه په کوم جګوالي الوزي؟



څیره ۱۴۶

۱۷ – د یوه څرخونکړې یا بهتره څرخونپټې په مرسته کیدی شي څرخونحرکت یا څرخونخوزون د یوې څپې په بلې څپې راوړل یا واړول شي. په یوه ورکشاپ کې یوه دقیقه یعنی ډیره ټیك اره په بریښنا ماشین چلول کیږي یا په حرکت راوړل کیږي. د اره خوزون یا حرکت څومره زر یا تیزدی یا چټك دی، که د ماشینڅرخونڅرخی یا ګاډیل (r = 20 cm) په ثانیه کې ۸۰۰ ځله وګرځي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ – کوم چاپیری او هواره الیپسی یا بیضوي یا هګیځیره لري که ولر:

a) $a = 40$ cm, $b = =12$ cm, b) $a = 6$ cm, $e = 1$ cm

c) $r_1 = 4$ cm , $r_2 = 3$ cm , $w(r_1, r_2) = 90°$

۱۹ – وښايي: په یو په بل پرتو الیپسو کی دی $a_1 = a_2$ او $b_2 = b_1 /2$ ، نو دننی ایلپس بیضوي همدومره لویه ده، لکه په دې دپاسه ایلیپسي یا هګیځیرې غاړه.

۲۰ – ځمکه په یوه کال د لمر څخه نزدې د یوې ګردې په څیر راڅرخي. ددې چاپیري وړانګه نزدې ۱۵۰ میلیونه کیلومتره ده.

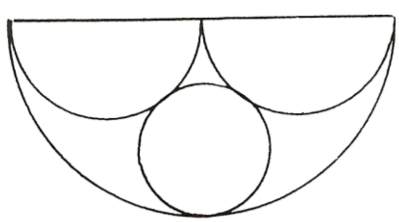
الف) د څرخونلار اوږدوالی څومره دی؟

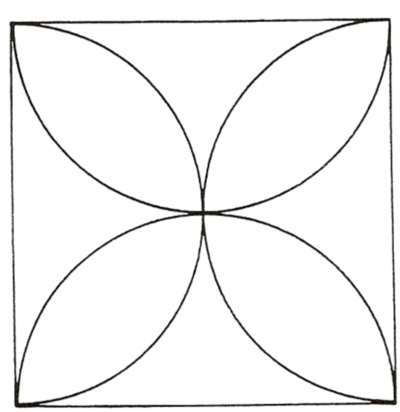
ب) په کوم منځنی سرعت (کیلو متره په سانیه کی) ځمکه په خپل چاپیري راڅرخي؟

پ) په ورځ کی ځمکه نزدې څومره واټن تی کوي ؟

ت) په ریښتونی ځمکه د لمر څخه په یوه ایلیپسی لار راڅرخي، چی په یوه سوزون ټکي کی پخپله لمر قرار لري. د لته هغه لنډ واټن ځمکه لمر ۱۴۷ میلیونه کیلو متره دی، او لرې واټن یی ۱۵۳ میلیونه کیلو متره دی. په دې ورزیات ورکړو سره کوچنی نیممحور وښايي، او همدا ډول د ایلیپسي یا بیضوي هواره او (نزدې) چاپیری هم.

۲۱ – د ټولی هوارې کومه ټوټه برخه رنګ ده؟





څیره ۱۴۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – د دوه ګرديو وړانګی ځان داسی نيسي يا په تنساب کی سره پرتی دي،
لکه 5 : 8 په لويه ګردۍ کی يو ګرديبرخه موجود ده ، چی د هغی لينده
دومره لويه ده لکه د کوچنی ګردۍ وړانګه r = 10 cm. وشميری

الف– منځتېکي کونج
ب – د ګرديبرخی هواره.

۲۳ – کوم منځتېکي کونج په لينديْ پوريْ اړه لري، چي
الف) ټيك همدومره لوي وی لکه وړانګه ؟
ب) دوه واره دومره لوي وی لکه وړانګه ؟
پ) نيم دومره لوي وی لکه وړانګه ؟

۲۴ – د يويْ ګرديټوټونی منځ ټکي کونج وشميری ، چی هواره يی همدومره لويه
وي، که په وړانګه يی چی مربع .

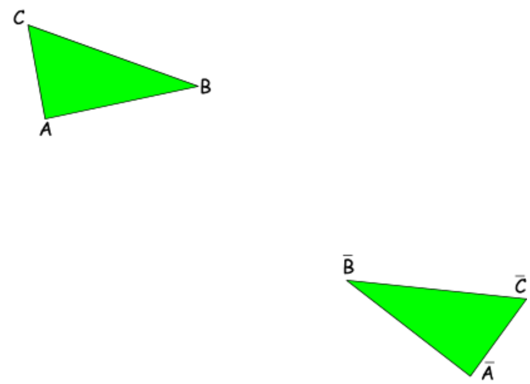
۲۵ – يو مصنوعي ساتليت يا جوړه سپوږمی ځمکه په ۲۰۰ کيلو متره جګوالي
راګردوي يعني له ځمکي راګرځي يا بهتره له ځمکی راڅرخي. د راڅرخونوخت
يی ۱ ساعت، ۲۸ دقيق او ۲۶ ثانيي دي.
الف – سرعت يی څومره لوي دی؟
ب – په يوه دقيقه کی څومره لار وهي؟

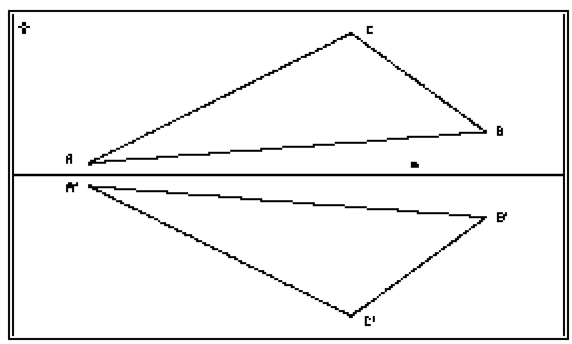
(c) ketabton.com: The Digital Library

کونګرواینخ ځیرونی(برابرې ځیرونې)

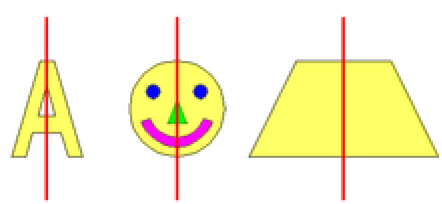
Kongruenzabbildungen

Congruence mapping





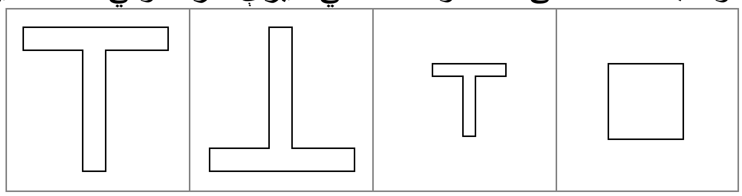
Symmetrische Figuren سیومتري ځیرې یا شکلونه



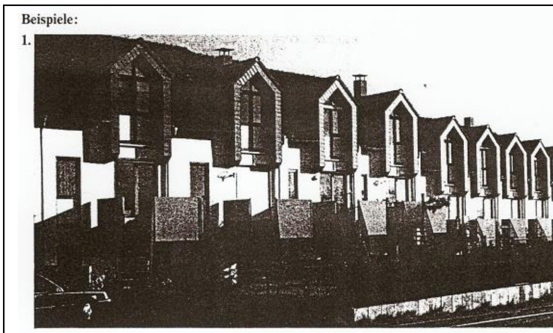
د هوارو ځخه مو ولیدل، چی د هغو ترمنځ سیومتري ځیرې یا شکلونه، یعنی داسي په نامه برابرې یا مساوي او نیمايي ځیرې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

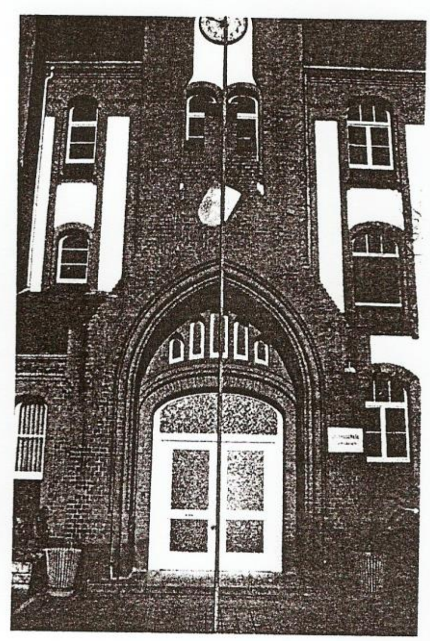
د شمیرپوهنی له مخی د ساده شمیرورټوب له امله تخنیکي، د هغو د ساده بدله ونی له امله،
او د بڼکلا له مخی، د هغو د همغسي څیرې څرګندوني له امله یو ځانګړی ځاي نیسی)



په پورته څیره کې کینې لور ته دوه د ټي څیرې یو بل پټوي، کینې لور دې د کښلی ټي سره برابرپټوونی ټي وکښل شي٠ دا محور سیومتري څیرې دي٠
په ځانګړي ډول د اخرني شکلونو څخه کتل کیږي چې سیومتري تل دا مانا نه لري چې شکلونه دې په دوه نیمو وویشل شي، کیدی شي دوه یا زیات شیان وي ، چي د هغو د ترتیب له امله یو له بل سره خیالي سیومتري اړیکي ولري. دوه یا زیات شکلونه لکه چې څنګه ضربالمثل وایي چي داسي یو بل ته ورته دي لکه » دوه هګۍ .» له دې ځایه تر کونګروانیڅ یو پل دی



څیره ۱۴۹



څیره ۱۴۸

پیژند : هندسي شکلونه کونګروینڅ (برابر) بلل کیږي، که په فورم ، بڼه (څیره) او لویوالي کی یو بل سره یو شي وي او یواځي ځاي یی یو له بل بیل وي٠

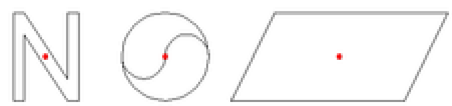
(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : زه به وړاندیز وکړم، چې کونګروااینځ ځیروني » ورته برابرې ځیروني » وبولو، ځکه، چې یو بل ته ورته دي او برابرې هم دې یاني که یو پر بل واچول شي یا یو پر بل پریوزي، نو یو بل پټوي٠

د دوه شیانو A او B د کونګروااینځ د لیکلو سومبول په لاندې ډول دی:

$$A \sim B \iff A \sim B$$

د کونګروااینځ خویونه :
١ - کونګروینځ ځیرې یا - شکلونه یو په بل پریوځي یا یو بل پټوي .
٢ - کونګروینځ ځیرې یا شکلونه د کاغذ په هنري غبرګولو یا غوڅولو په بنسټ، کیدی شي یو په بل پریوځی٠



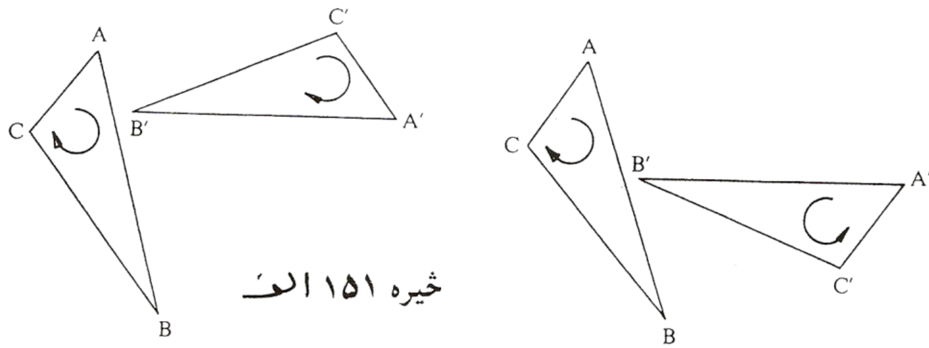
پورته ځیره ټکی سیومتري ده ٠
غوڅول د شمیر پوهنی کار نه دی، مګر غبرګول کیدی شي وي.

لنډ : محورهنداروني او کربنهنداروني ، ځرخون، ټکیځیره ونې او راکبنني ګونګروااینځ ځیره ونې دي٠

پوښتنه کیږي چې :
په شمیرپوهنه کی عملیي شته چې د هغي په مرسته یا د هغي له لارې یا د هغی په وسیله ځیرې یو په بل پریوتی - او پټیدی شي ، داسي کارونی یا عملیي په کړنه یا عمل کی شته او دا کونګروااینځ ځیره ونې یا ځیره کوني بلل کیږي.
هر کونګروااینځ ځیره یا شکل او لویوالی (منځهواره) ساتي. په دې ډول باید کونجونه او اوږدوالي ریښتونی وي، چی په دې ډول د برخو تناسب، کربنوتناسب، برخو تناسب غبرګ کرخو تناسب (ځاننیونه) ریښتونی دی. لاندې به وښوول شي چی زیات تر زیات د کونج ځرخونلور یا سمت تغیر خوړونکي دی، که ځرخونلور تغیر ونه خوری نو یولوریز کونګروینځ بلل کیږی او که ځرخونلور تغیر وخوري نو شکلونه مخامخ لوریز یا په ځټ یا برعکس کونګروانیځ بلل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

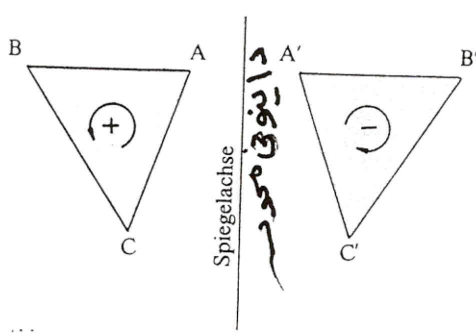
ثیره ۱۵۰



ثیره ۱۵۱ الف

ثیره ۱۵۱ ب

کرښهندارونه(په کرښه منعکسونه) Geradenspiegelung

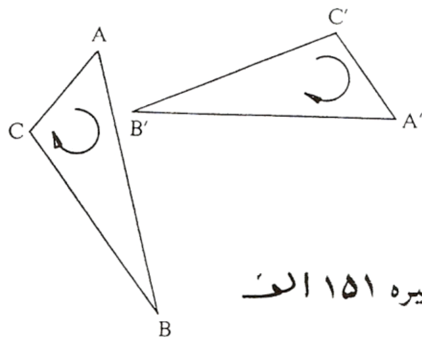


ثیره ۱۵۲

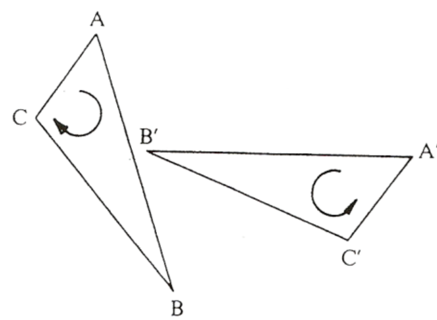
یو کونګرواینخ خیره ونه مو په پیل خیرونو کی وښوده. کرښ اینونه یا کرښهندارونه یواځنی مخامخ کونګروینخ خیره ونهی ده ، ځکه چی د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثیره ۱۵۰



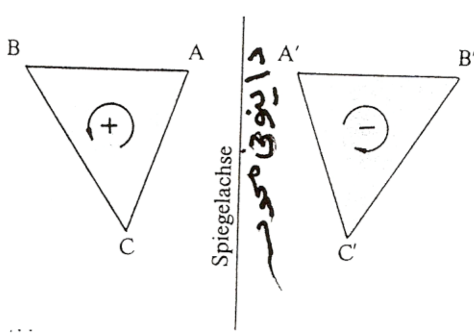
ثیره ۱۵۱ الف



ثیره ۱۵۱ ب

کرښهندارونه(په کرښه منعکسونه) Geradenspiegelung

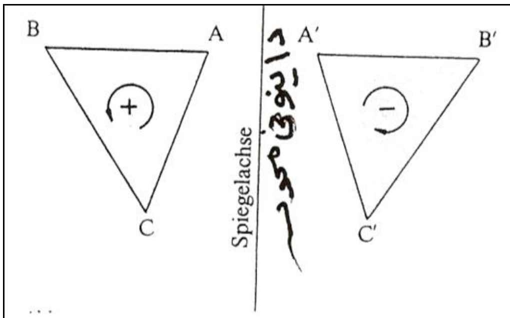
یو کونګرواینځ ثیره ونه مو په پیل ثیرونو کی وښوده. کرښ اینونه یا کرښهندارونه یواځنی مخامخ کونګروینځ ثیره ونهی ده ، ځکه چی د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.



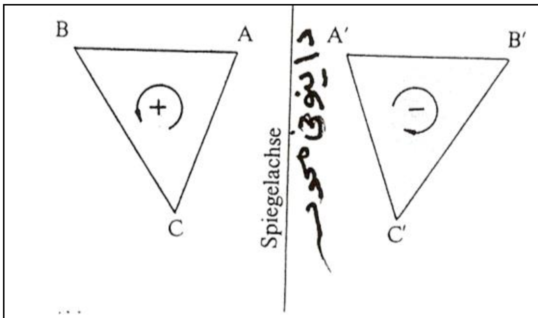
ثیره ۱۵۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

په کرښه هندارونه(پ کرښه منعکسونه):
په پیل انعکاس کې مو یوه کونګروانخ تشکیل وښوده. په کرښه انعکاس ورکول یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکه چې د زویې د لور منځ ته په کې راځي.

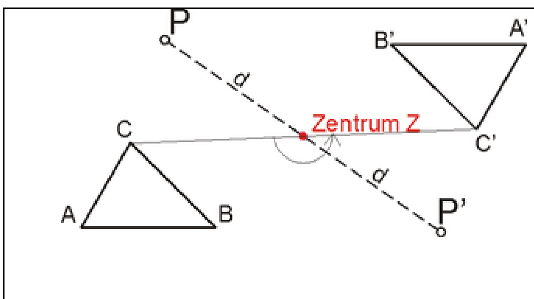


په کرښه هندارونه(پ کرښه منعکسونه):
په پیل انعکاس کې مو یوه کونګروانخ تشکیل وښوده. په کرښه انعکاس ورکول یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکه چې د زویې د لور منځ ته په کې راځي. لاندې ځیره دې وکتل شي



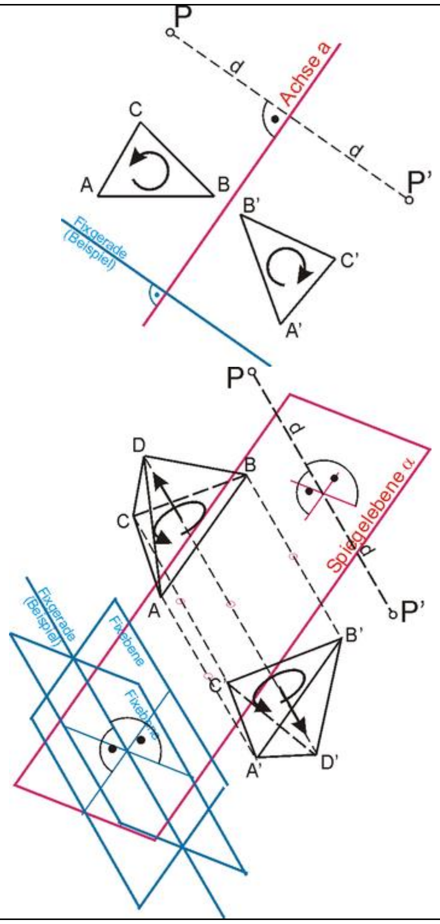
د دری ګوډي ABC مثبت- یا زیاتونلوریز ځخه یو منفي لوریز یا کمونلوریز دری ګوډی A'B'C'جوړیږي. یخپله کرښه g په اینونکی کرښه یا په اینونکرښه یا په هنداروونکرښه بلل کیږي او یا د اینه ونې محور. په دې ټول پراته ټکی تغیر نه خوري) ځاي په ځاي ټکی (فیکسټکی (Fixpunkte دی، له دې امله کرښی g ته د ځاي په ځاي ټکوکرښه هم وایي. ټولی په g نغولاړې(لنډ: ولاړې) کرښي د اینه کولو په بنسټ په خپل ځان ځیره کیږي، مګر ټول ټکي د g سره د غوڅټکي په استثني یا بی له غوڅټکي کرښي ټکي د خپلي فاصلی په ساتلو ځاي بدلوي. له دې امله دا کرښي ځاي په ځاي کرښی بلل کیږي ۰
په لاندې ځیره کې کیڼ لور ته درې ګوډی په ټکی ، چې د کښلي کرښی منځ ټکی دی ، ښي لور ته ځیره کیږي او دا په همدې ټکي۰ کتک کیږي، چې د هر ځیره ټکی واتن د همدې ټکي څخه همغ دی لکه د ځیره کووني ټکی واټن له دې منځټکی څخه .

په پورته محور اینه ونه کی لیدل کیږي، چې د محور څخه د ځیرې او ځیره کونکي ټکي سره برابر دي، خو ګورو، چې ځرخون لور یې همغه ځرخونلور نه ده۰۰



(c) ketabton.com: The Digital Library

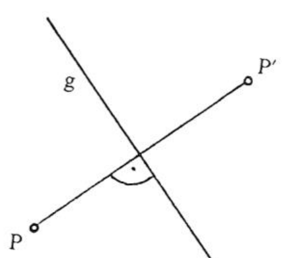
په مخامخ شيره کې ايېنه ونې کښل شوي دي



د کرښ اينوونو(هنداروني يا انعکاس) جوړښتخيرنه

١ - دا ټکي له هر په نخه ټکي (ډيرګوډي کی د کونجټکی او په ګردي کی د منځ ټکی) په g ولاړ يا زوړند پريوځي او دا له g اخوا په فاصله د |Pg|غزوي. (دا د مخه راغلي .)

٢ – ټول ټکی د اصل په ترتيب سره وتړی(په ګردی کی : په M'يو ګر دی د r'=r په وړانګه   ووهی). د شيرې او پخواخيرې(اصل) د ټولشکل لپاره بيا g سيومتريمحور دی، دا په دې مانا، چی ټوله شيره د اينوني سره په خپل ځان شيره کيږي .

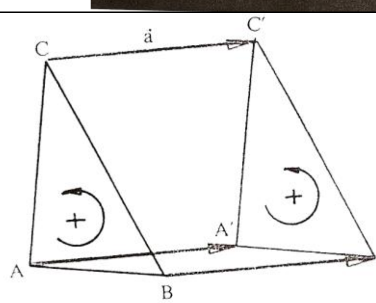


شيره ١٥٣

(c) ketabton.com: The Digital Library

هره کرښ اینوونه Sg کیدی شي چی په g بیا کرښ اینونو باندې په همغه محور بیرته راوکرځول شي.دSg په یا په ښت ښیره ونه یا مخامخ ښیره ونه بیرته Sg دئ. دا دښیرو زیاتواره ښیره ونو ځانګړی حالت د٠
دلته بیا سړی د ښیره ونو د ځنځیرونو ښخه خبرې کوي او د دې لپاره تړلنخښه »°« په کار اچول کېږي. کرښ اینوونه د ګونګراینښو لاندې یو مرکزي ځای یا منځځای لري، ځکه چی تولی نورې اینونی د کرښ اینوني ځنځیرونو باندې بیرته راګرځول کیږي، لکه چی په لاندې کی به وګورو.

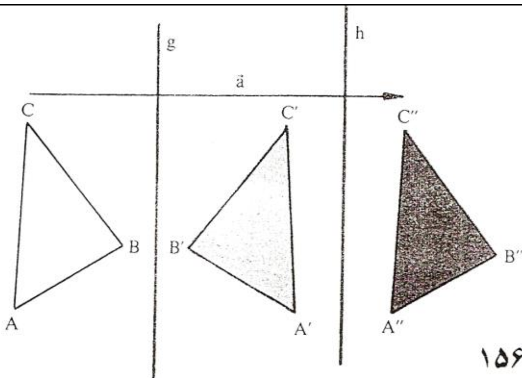
راکښنه یا کښونی Verschiebungen

	پیژند : غبرګکښول ،لنډ کښول یا وړل Va د خپل وړلوکتور یا وړونوکتور یا کښونوکتور له لارې یواځنی ټاکلی دئ (ددې لپاره د وکتور لوست وګوری٠
ښیره ۱۵۵	د وکتورونو لاندې مساوي اوږده او په یوه لور غشي پوهیږو، کوم چی د ښیرې وتلتکي په ښیرټکو لوریز وي . (لنډ : د وکتور لاندې یوه لوریزه کرښه پوهیږو، د ځانګړو شرایطو لاندې) د کښنولو لپاره پریکړی د وکتور اوږدوالی | a | دئ او د وکتور لور. کښنول په همغه لور کونګرواینښیروني دي، دا په دې مانا چی د ښرخونلور ساتلی پاتي کیږي٠

د کښولو جوړښتښیرنه
۱ - په هر نخښه شوي ټکي (په ډیرګوډي کی ګوډونه او په ګردئ کی منځټکی)د ګښولو وکتور a وکاږئ (برابر یا مساوي اوږده، همغه لوراو غبرګ غشی.)
۲ - د وکتورونو اخرټکي سره د اصل په پرلپسي ترتیب ونخلوی. (په ګردیکښونو کی : په اخر ټکي د r وړانګي په اندازه ګردئ ووهی)کښونه ځاي په ځاټکي نه لري(که د صفر وکتور دي په نامه identität ایدنتیتي یا کښمټ ښیرونی ښخه تیر یا صرف نظر شو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

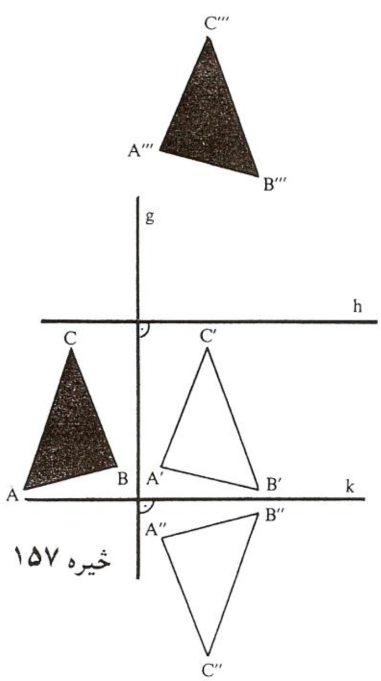
ددې لپاره ټولی له a سره غبرګی کرښي ځاي په ځاي کرښی دي، دا په دې مانا چی دوي په خپل ځان څیره کیږي .هر کښنول یا نوه هم ښنه هره کښنه ونه Va د V-a کښنولو له لارې بیرته راوګرځول کیدی شي.



۱۵۶

دلته -a وکتور د a سره غبرګ او همغومره اوږد دی، مګر په مخامخ یا په څټ لور .هره کښنونه په دوه کرښو g او hله دوه واره اینولو یا هندارونو له لارې بیرته لاس ته راوړونکی ده، چی واټن d یی همدا د کښنولو وکتور نیم اوږدوالی ورکوي. دا بدلون یواځنی نه دی: پس په عمومي ډول باور لري: $V_a = S_g \circ S_h$ د g||h سره او |a| = 2d ، چیرته چی d د g اوh ترمنځ واټن ورکوي.

په یوه ځانګړي ډول یو په بل پسي صورت نیونکی زیات کرښ اینونه دې په دې ځاي کی ذکر شوي وي، څکه چي دا – لکه څنګه ټول نور واریانت یا



۱۵۷ څیره

اووښتونی – یو ساده بنستیز فورم نه ورکوي : خویوونکي یا کښنوونی اینونه. ټرنه $G_{a;g} = S_g \circ V_a$ یو کښنوونی اینونه ده،

که g || a وي.

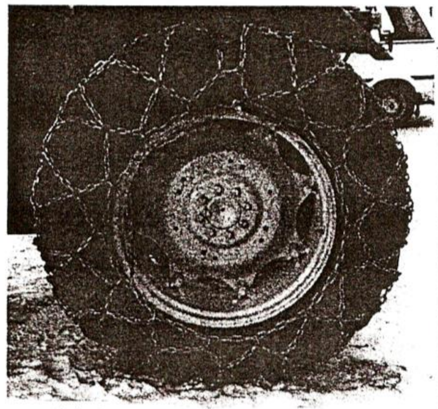
هره کښنووني اینونه یا هندارونه د درې کرښ اینونو $S_h \circ S_k \circ S_g$ ټړل دي، چیرته چی کرښي h او k ، کوم چی دکښنوونی ځاي نیسي، په g نیغی ولاړې دي:

$h \parallel k ; h \perp g$.

یوه کښنوني اینونه ځاي په ځاي ټکي نه لري، مګر g د څیروونی ځاي په ځاي کرښه ده. هره کښنوونی اینونه $G_{a;g}$ په $G_{-a;g}$ سره بیرته راګرځول کیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

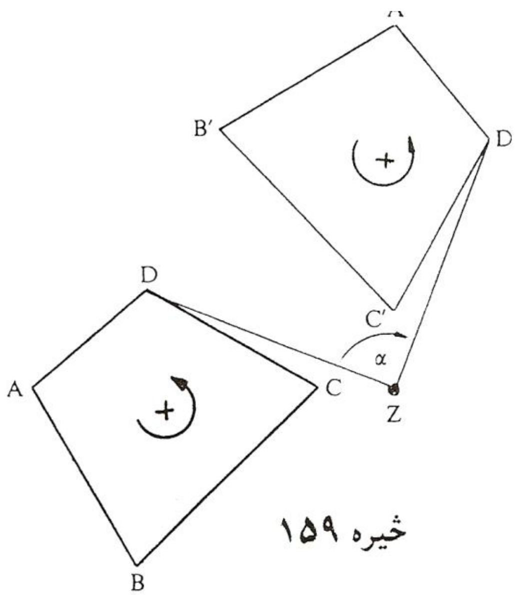
Drehungen



خیره ۱۵۸

ځرخونونه (ځرڅون)

تعریف : ځرخون $D_{Z;\mu}$ هغه ځیرونه ده، چی په ورکړ شوي ټکي Z (ځرخونټکی یا ځرخونمنځ) هر اصلی ټکی P په یو ځیره ټکي 'P داسی تنظیم کړي، چی $|PZ| = |P'Z|$ او $w(PZP')=\mu$ چی μ یو د مخه ځاي په ځاي ورکړ شوی کونج دی، د ځرخونکونج.



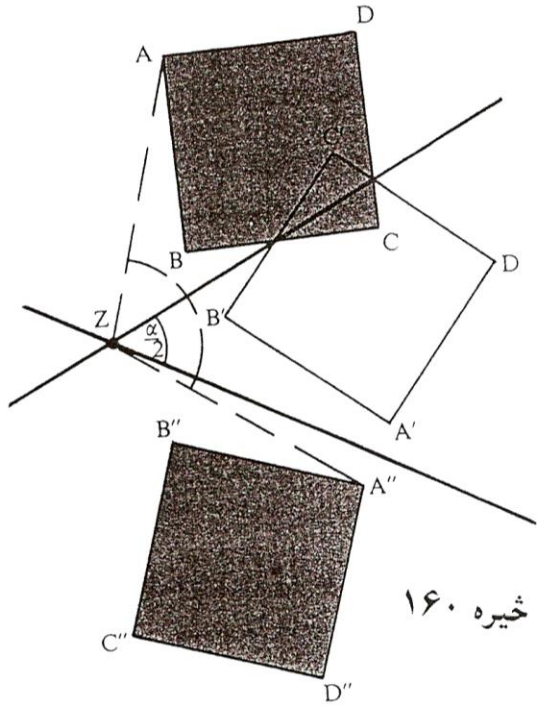
خیره ۱۵۹

پس یو ځرخون د ځرخونټکي Z او ځرخونکونج ځخه یواځنی ټاکلی دی. د ځرخونلور په مخ نخه له مخه ورکړ شوی. (ددې لپاره دې د مخه تري لوستونه پام کی وي).

دځرخون جوړښت ځیرنه

۱ – په ټولو په نخښه ټکو (د ډیرکونجیز کونجټکي، په ګردی کی منځټکی) او

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۱۶۰

حرخونمنځ Z یوه وړانګه کیږدی . د هرټکي P واټن PZ په یوه مرستندوي وړانګه وکاږی، کوم چې له PZ سره کونج جوړوي.

۲ –لاس ته راغلی ټکی P' په اصل پرلپسي ترتیبیو د بل سره ونښلوی (یا په همدې ډول په P' یو ګردی د r' = r په وړانګه ووهی).

څرخون D_z یوه همغه لوریز کونګروانیځ څیرونه ده.

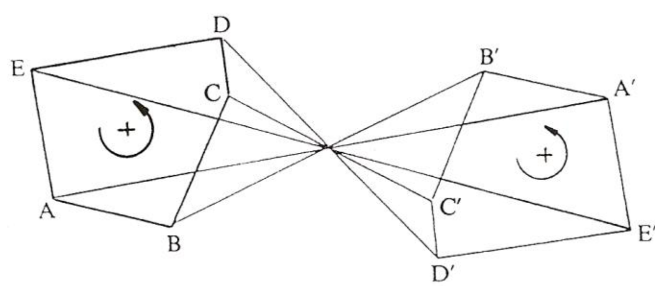
که څرخون D_z له څرخون په$0°$: ایدنتیتي یا کټمټ، توپیر ولري، نو دا یواځي یو ځای په ځای ټکی لري: پخپله Z .

(c) ketabton.com: The Digital Library

هر څرخون D_z د پـه کونج کيدی شي چی پـه څرخون D_z پـه کونج - بيرته راوګرځول شي. د جوړښت څيړنی څخه پيژندل کيږي، چی هر څرخون D_z د دوه کرښي اينوني چی پـه ټکی Z کی پـه کونج /2 يو بل غوڅوونکو کرښو g اوh ځاي نيونکی کيدی شي: څرخون : $D_{Z;\mu} = S_g \circ S_h$
د $h = \{Z\}, \mu = 2.w(g;h)$ g سره. (څيره)

تعريف : يو څرخون د څرخونکونج $\mu = \pm 180°$ سره ټکی اينونه بلل کيږي. دا پـه دې مانا چی پـه ټکي اينه کيږي.

پـه دې توګه ټکی اينونه هم يو همغه لوريز کونګروانيڅ څيرونه ده. (څيره ۱۲۸)



څيره ۱۶۱

پـه ټکي اينوني جوړښت څيړنه

۱ – د اصلي څيرې هر پـه نخښه ټکي څخه يوه کرښه وکاږي، چي لـه اينونکي ټکي Z تيره شي، او |PZ| واټن د Z پـه بله لور وباسی.
۲ – داسی لاس تـه راغلي ټکي پـه پرلپسی ترتيب سره ونښلوی. (همداسی پـه 'M يو د r' = r وړانګي ګردی ووهی).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولګه

هره کونګروانیڅ څیرونه د کربښي اینوني د ترلو څخه لاس ته راځي. دلته بیا هر کربښ اینونه څرخون لور بدلوي. له دې امله لرو:

د کربښ اینونو (څرخونو یا کښنونو) جوړه تعداد یا ګڼون یو همغه لوریز کونګروانیڅ څیرونه ده. د نا جوړه تعداد یا ګڼون کربښ اینونو (کربښ اینونی یا کښنونو اینونی) یو نا همغه لوریز کونګروانیڅ څیرونه ده.

دیو په بل پسی د کونګروانیڅ څیرونو کارونه بیرته کونګروانیڅ څیرونه لاس ته راکوي. دا چی هرکونګروانیڅ کربښ اینونه ده نو د پای کونګروانیڅ یو په بل پسی اینونه ده. برسیره پر دې هر کونګروانیڅ بیرته راګرځیدلی یا په څټ کیدلی شي. که له دوه وو زیات کونګروانیڅ څیرونی یو په بل پسی منځ ته راشي ، نو په خوښه اسوځیاتیو را یوځای کیدی شي. الجبري ټول کونګروانیڅ څیرونی یو ګروپ جوړوي د ناپیلي کتمټ څیرونی سره، دا په دې مانا چی ناپیلی څیرونه ، چی په کارونه کی تغیر نه راولی کتمټ څیرونه ده. (د ګروپ لپاره دې نښلونی برخه وکتل شي)

په عمل کی د دریګوټ ی کونګروانیڅ جملی له پوره اهمیت ډکی دی

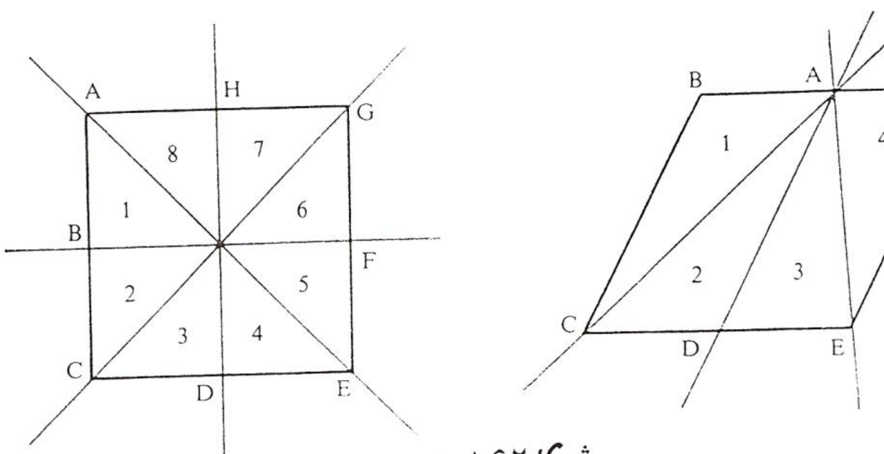
کونګروانیڅجملی: الف) په خپلو دري اړخونو کي (SSS) یا ب) په دوه اړخونو او لهدې اړخونو رابند کونج کی(SWS) یا پ) په دوه اړخونو کی او د اوړداړخ مخامخ کونج کی (SSW) یا ت) په یوه اړخ او دواړو راګیر کونجونو کي (WSW) یو بل سره وخوري یا سره مساوي شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – په یوه غبرګ اړخیز ABCD هندارونی $S_{BC} \circ S_{AB}$ وکاږۍ.

۲ – د کونګروائنځ جملو په مرسته وښایي، چې غوڅکرښی پیلخیرې په کونګروائنځ برخو ټوټه کوي.



خیرۍ ۱۶۲

۳ – په یوه بیلګه وښایي :

الف) $S_g \circ S_h \neq S_h \circ S_g$

ب) $S_g \circ (S_h \circ V_g) = (S_g \circ S_h) \circ V_g$

۴ – د «هیلګولند» کیشتی او د «کوین ماری» لوي کیښتی ترمنځ واټن ۵ کیلو متره دی . هیلګولند کیشتی په شمال لودیځ ۶۰ درجي(N60°W) دلته N د شمال او W د لودیز لپاره دی، کرښلایني حرکت کوي او «کوین ماري» په ۸۲ درجو جنوب لویدیز لور حرکت کوي (S82°W) دلته S د جنوب لپاره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې وخت کی د «هیلگولند» څخه « کوین ماری » په ۷۰ درجو شمالشرق(N70°O)
دلته O د ختیز لپاره ده، لیدل کیږي.Nord,, Süd, West, Ost
الف) په کوم کونج دواړه لارې یو بل غوځوي ؟
ب) د دې وخت له ځاي څخه به هغه غوڅټکی څومره لرې وي؟

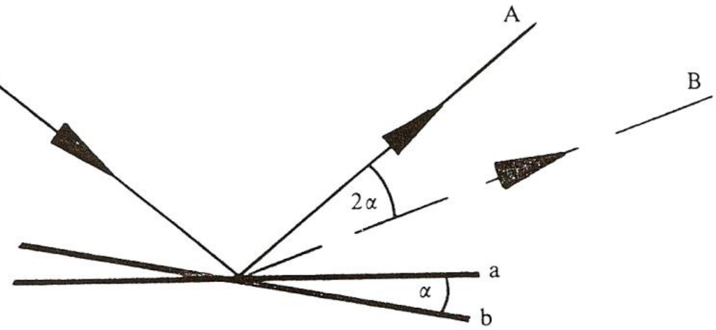
۵ – وي دې ABC یو مساوي پښیز دریگوډی، له بنسټ AB سره، g او h د کونجونو ∝ او ß کونجنیمي دي. وښایي چی دریگوډي ABP اوABQ کونگروراینت دي. (P او Q د مخامخ اړخ سره د کرښو غوڅټکي دي).

۶ – څومره کورونتځیرونی موجود دی چی لاندې ځیرې یی په خپل ځان ځیره کوي: کرښی ، گردی، غبرگ اړخي، مساوي پښیز دریگوډي ، ولاړ گوډی، راوتی، مربع، مساوي اړخیز دریگوډي ؟ کتمتځیرونه دې نه په کی شمیرل کیږي.

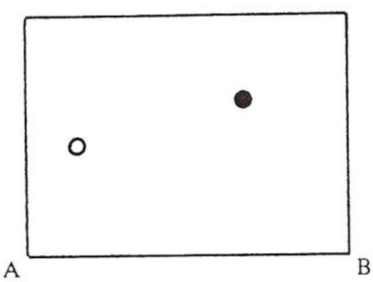
۷ – یو څرخیدونکی هنداره ، یوه هنداره ده ، چی په یوه خپله ایښوول شوي هواره پروت محور باندې څرخوړ ایښوول شوي. ترتیب په ځیره کی له پورته لور انځوریږي.
د نور له چینی L څخه یوه وړانگه په هنداره د (a) په ځاي یا ځاینیوون کی پریوزي او د هندارونی یا انعکاس قانون سره سم(پریووتکونج = وتلکونج) د$\overline{OA}$ لور باندې بیرته غورځول– یا اینه کیږي یا منعکس کیږي. اوس نو هنداره د ∝ په کونج د (b) ځاي یا ځاینوون ته راوړل کیږي یا راڅرخیږي. دلته نو د نوروړانگه د $\overline{OB}$ په لور هحینداره کیږي یا غورځول کیږي یامنعکس کیږي. وښایی :

$$w(\overline{OA}; \overline{OB}) = 2\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

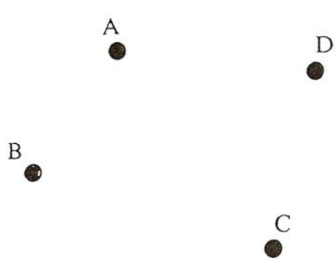


خیره ۱۶۳



خیره ۱۶۴

۸ – د کوټې منځ کې دوه توپونه ایښول شوي یو سپین او بل تور. د کوټې له دیوالونو څخه توپ بلې لور ته نه شي تللی سپین توپ دې داسې ووهل شي چې تور توپ ووهي.دا د اینه وني یا انعکاس د قانون سره سم په دیوال AB لګیږي. (حیره) د کرښو لار وکاږئ « تورتوپ – اینه ټکی یاانعکاسټکی – سپین توپ»

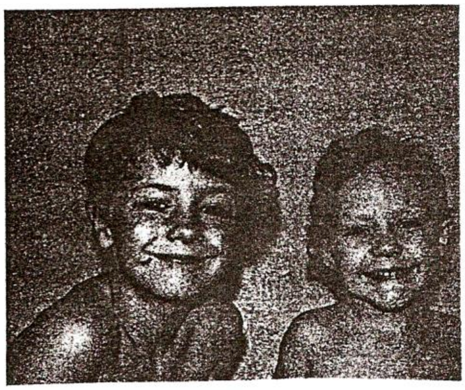


خیره ۱۶۵

۹ – دا د یوه کور څلور برجونه دي، چې په A,B,C,D سره یې ښایو (خیره) داسې یو ځای S شته ، له کوم چې برج A د برج C څخه یا سره پټ شي او برسیره پر دې له دې ځای څخه A د B او D د منځتې په خیر ښکاره شي یا ځان وښايي .؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

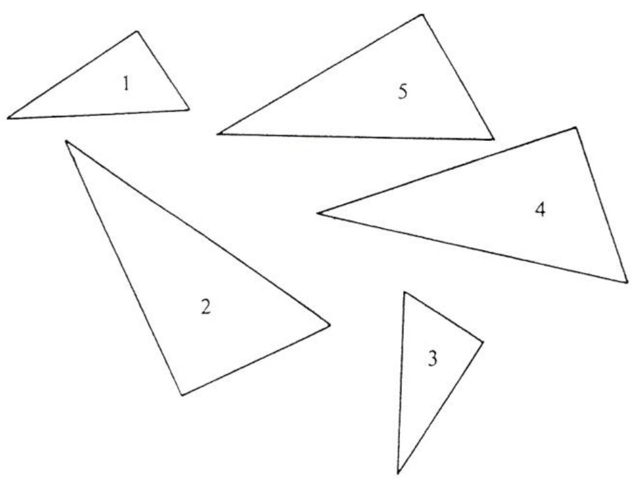
ورته والیخیرونه Ähnlichkeisabbildung



خیره ۱۶۶

که چیرې دوه غبرګوني کوچنیان وکتل شي ،نو سم د لاسه ویل کیږي، چی دا دوه یو بل ته ورته دي. شیان یا لیدیدونکي هم یو بل ته ورته بلل کیږي، که ګډ خویونه یا ګډې نخښې ولري، یعني څرګند یو بل ته ورته وي، مګر سره له دې هم یو له بل توپیر کیدونکی وي. په شمیرپوهنه کی داسی نه شو ویلی چی دا شیان یا لیدیدونکي یو بل ته زیات یا کم ورته دی، دا خیالي قضاوت دی چی په شمیرپوهنه کی داسی قضاوت ځاي نه لري.

پیلبیلګه:



خیره ۱۶۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې درېګوټې د کونجونو $60° = ß$ ، $30° = \alpha$ او $90° = \gamma$ سره وکاږي.
ددې کونجونو سره له یوه زیات درېګوټي موجود دي، چې په ځانګړي توګه د ولاړ کونج ورکړه یواځیوالی یا یواځیتوب نیول کیدی یا فرض کیدی شي.
درېګوټي ۱ او ۲ کونګروانیځ دي، درېګوټي ۲ او ۴ هم، مګر درېګوټي ۱ او یا ۱ او ۴ کونګروانیځ نه دي. سره ددې هم دوي زیاتی ګډې نخښې لري (کونج، «بڼه»یا «شکل» یا څیره) دوي یو بل ته ورته دي.

ددوي ترمنځ نور څه ګډ دي یا دوي نور څه ګډ لري؟
له کونګروانیځجملی څخه مخ ته ځو، د اړخونو اوږدوالی اندازه کوو او راته ښایو چه د اړخونو ځاننیونه یا د اړخونو تناثب :

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$$

او

$$\frac{|AB|}{|A'''B'''|} = \frac{|BC|}{|B'''C'''|} = \frac{|CA|}{|C'''A'''|}$$

ثابت دی.

پس تعریفوو

تعریف : هوارې څیرې یا شکلونه هلته یو بل ته ورته دي، کله چې د مناسبو پاي کرښو اوږدوالی په همغه ځاننیونه یا تناسب پروت وي او (له دې امله هم) یو د بل سره مناسب کونجونه مساوي لوي وي.

بیلګه : کونګروانیځ څیرې د ورته شکلونو یو ځانګړی حالت دی، په هغوي کی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړشوو اړخونو تناسب یا ځاننیونه تل ۱ دی.
له دې امله باید –د کونګروراینځ د ټولیزیدلو یا عمومیت – د دریګوډیو لپاره هم ورته جملي موجود وي.
ددوه یا زیاتو دریګوډیو ترمنځ یو بل ته ورته والی هلته پروت دی یا شته ، موجود دی، کله یی چی مناسب کونجونه سره یو شی وي او دې کونجونو سره مناسب اړخونه یو د بل سره په همداسی تناسب یا ځاننیونه کی پراته وي یا اړیکو کی).
دا هم د دریګوډیو لپاره باور یااعتبار لري، په داسی ډول– د کونګروراینځ ځخه پر مخ ځو– چی سړی داسی نومولی د ورته والي جملی لیکلی شي.

د ورته والي جملی: دریګوډی یو بل ته هلته ورته دي، که په لاندې کی سره برابر وي

۱ – د دریګوډیو دریواړو اړخونوپه مناسبه توګه د اړخونو تناسب یا ځاننیونه.

$$a : a' = b : b' = c : c'\ .$$

او یا

۲ – د دوه یو بل سره مناسبو اړخونوتناسب یا ځاننیونه او له دې بندشوې کونج. دا په دې مانا چي

$$a : a' = b \mathbin{.:} b' \quad \text{او} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

او یا

۳ – د دوه مناسبو اړخونو تناسب او د لوي اړخونو مخامخ کونجونومساویوالی. په دې مانا چی: $a : a' = b : b'$ او $\beta = \beta'$ د $a < b$ لپاره او یا $b > a$

۴ – ددوه کونجونواندازې مساویوالی ، چی په دې ډول ټول کونجونه مساوي دي. دا په دې مانا چی :

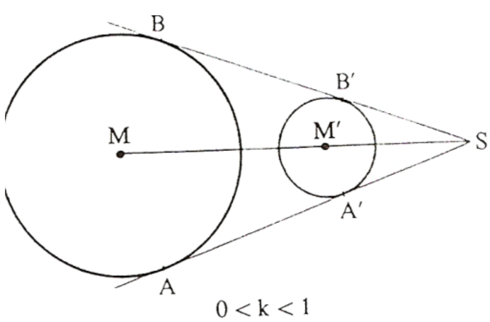
(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول کیدی شي د نورو شیرو لپاره هم د ورته والی جملی تر فرمول لاندې راوړل شي. شیرې یو بل ته ورته دي، که دوي د ځانګړو ورتوني شیروني له لارې یو په بل پریوتی شي.

مهم ورته والي شیرونی منځني راکښنه ده

تعریف: منځني راکښنه $Z_{S,k}$ د ټکي S (د راګښلو منځ) او یوه ګڼ k د راکښلو فاکتور یا ځلونکي په بنسټ یواځنی ټاکلی وي. هر اصلي اوږدوالي ته د منځني راکښنو له لارې په k–ځلی تغیر ورکو ل کیږي.

د k لپاره له صفر تر یو ګڼونه پریښوول کیدی شي. په دې کی بیاپخپله له دې پوهیدی شو چی شیرونه له اصلي کوچنی ده. په دې حالت کی له زبیخلو (کیښکلو) غږیږو. شیرونه نوره هم د راکښلو باور لري. که k = -1 وي نو اړوند منځني راکښل په راکښل منځ S باندې ټکي اینونه ده. د هر بل منفی ګڼ k |=-1 لپاره کیدی شي k په k =(-1).|k| باندې تجزیه شي. له دې وروسته پورته یادونی په همغه هدف استعمالیږي یا کارول کیږي.

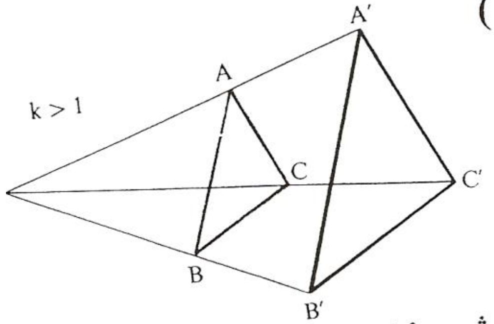


شیره ۱۶۸

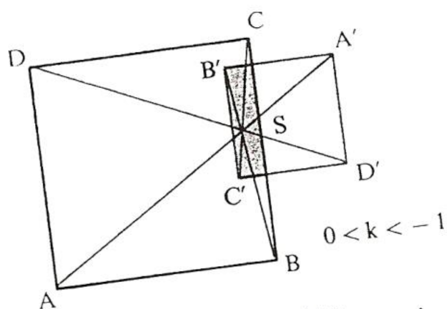
یادونه : پام دې وشي چی راکښنه به ښه وي او که غزیدنه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منځراکښنی جوړښتڅېړنه(توضیح)



خیره ۱۶۹



خیره ۱۷۰

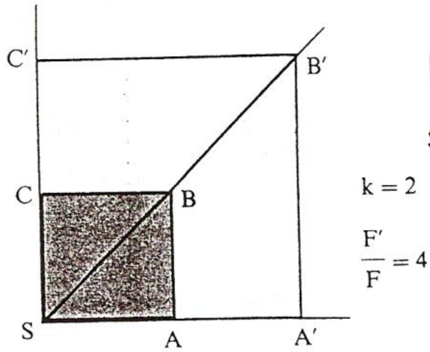
۱ – د اصلي هر په نخښنه ټکي د راکښلو منځ S سره و نخلوی.

۲ – د هر ټکي P لپاره د|PS| پای کرښي په k ځل کیږي(جوړښت ته د 0> k لپاره هم، مقایسه خیره) او نوې پای کرښه

|'SP|.k = |SP|

په کرښه چی دټکي S څخه پیل له P, S او 'P تیریږي وکاږی.

۳ – د اصل په ترتیب یا اصل ته ورته ټول خیره ټکي سره ونښلوی.



خیره ۱۷۱

دا چی ورته خیرې (بی له 1 = |k|) کونګروانځ نه دي، نو د هواري دننه یا منځ هم تغیر خوري، مګر که ټولی خواو یا اړخونه په فاکتور k(د بیلګي په توګه 3 = k , 2 = k) تغیر کړو، نو خیروونکی هواره باید په فاکتورk^2

(یعني 4 = k^2 ,همداسی 9 = k^2)

تغیر وخوري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعري: په يو منځراکښنو، چې فاکتور k ولري د څيرې هواره 'F او له څيرې دمخه (اصلي) هوارې F ترمنځ لاندنى تناسب يا ځاننيونه موجود دى.

$$F' : F = k^2 \quad \Rightarrow \quad F' = F.k^2$$

د لته د k مخنخښه کوم رول نه لري ځکه چې منفي ځل منفي بيرته مثبت دى.

پيلبيلګ:

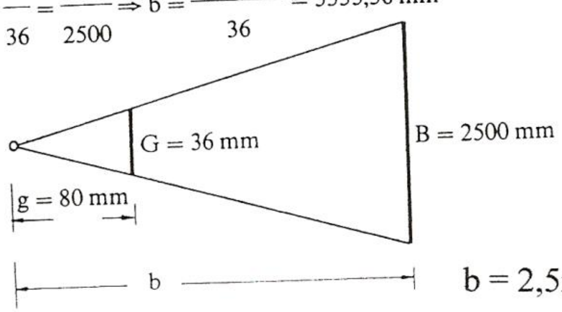
دياس(دفيلم دياس) (فورمات يا لويوالى 24mm.36mm)
په يوه ديوال چې لويوالى يې 2,5 m . 2,5 m دى. د ممکن حده پورې څيره کيږي. د ښه ټيك جوړولوسره يې له عدسي واټن 8cm دى. پريوستونى يا پرويکتور د څيرې ديوال څخه بايد څومره لرې وي؟ د دياس هوراه په څو واره لويه شوې ؟

د دياس دڅيرونى لپاره لاندې اړيکى باور لري:

$$\frac{\text{د څيرې جګوالى } B}{\text{د دياسجګوالى } G} = \frac{\text{د څيرې پراخوالي } b}{\text{د دياس –عدسى لريوالى} g}$$

څيره ۱۷۲

$$\frac{80}{36} = \frac{b}{2500} \Rightarrow b = \frac{2500 \cdot 80}{36} = 5555{,}56\ \text{mm}$$



ممکن ډك په دې مانا، چې 36 mm په 2,5 m بايد لوي شي. په دې توګه د پريوستون ديوال –عدسي واټن په لاندې ډول دى :

$$b = 2{,}5\text{m}.0{,}08\text{m} : 0{,}036\text{m}$$
$$\sim 5{,}56\text{m}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لویوالی فاکتور یا ځلی دی

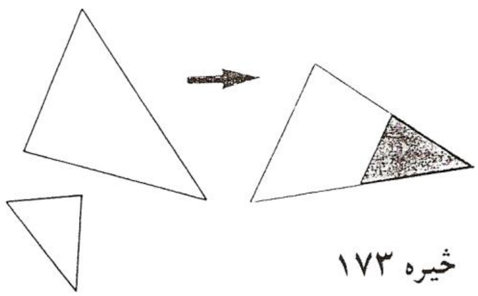
$k = 2,5: 0,036 \sim 69,44$

له دې امله د څیرې هواره ده:

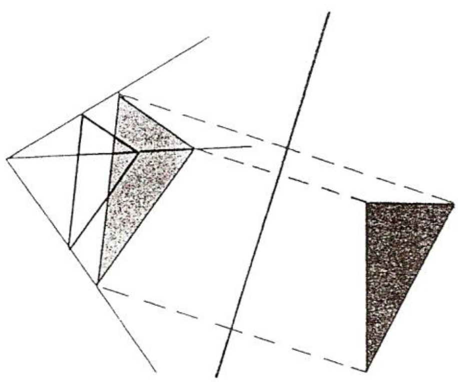
$F' = 69,44^2 . 0,036 . 0,024 = 4,17 m^2$

دا د دیاس هوارې 4822,53 واره یا ځله ده.

دا روښانه ده، چی ورته څیرې، د څرخوني، راکښلو له لارې او اینوني له لارې یوه پوزیشن ته راوړل کیږي، په کوم چی سم د لاسه د شکلونو د کونجونو د برابرتوب ورته والی پیژندل کیدی شي.



څیره ۱۷۳



څیره ۱۷۴

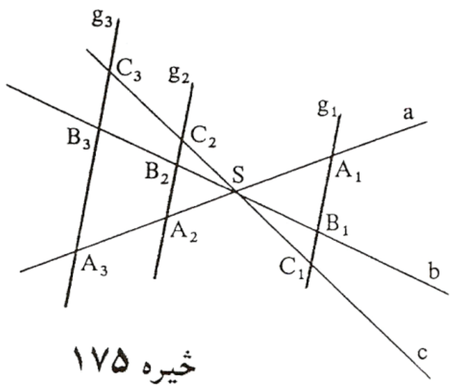
تعریف : هره کونګروګاینځ څیرونه، هر منځراکښونکی او له دوې هر ترلی یا ځنځیري اینښولشوې یا ځای په ځای شوې څیرونی ورته څیروني بلل کیږي.

دا چی هره ورته څیرونه بیرته یوه داسي څیرونه باندې راګرځي، نو بیخي باور لري : د ورته

(c) ketabton.com: The Digital Library

والي خيروني ډيرى چى پرلپسى سره وتړل شي يا ځنځيري شي ګروپ جوړوى (د ګروپ لپاره دې، چى شميرپوهنيزه کليمه ده، د کتاب پاى وکتل شي)
او خيرې او همداسي پيل بيلګه (ډياسپرويکتور) څخه د وړانګي جمله تولیزه يا عمومي کيدى شي.

۱ . **وړانګي جمله:** که له يوه ټکي S وتلى وړانګي $a,b,c,\ldots$ له غبرګو کرښو ..... g_2,g_2,g_3 غوڅي شي، نو د يوې وړانګى ټوټى همداسى تناسب کى دى يا همداسى ځان نيسى لکه
د بلى وړانګي ټوټى: دا په
دې مانا چى:



خيره ۱۷۵

$$\frac{|SA_1|}{|SA_2|} = \frac{|SB_1|}{|SB_2|} = \frac{|SC_1|}{|SC_2|}$$

او

$$\frac{|SA_1|}{|A_1\,A_3|} = \frac{|SB_1|}{|B_1\,B_3|} = \frac{|SC_1|}{|C_1\,C_3|}$$

په خيره کى د اړيکو ښوونه سم د لاسه په غبرګو کرښو له پوړيزکونجونو او د دريګوډيو ورته والي چى SA_1B_1 او SA_2B_2, SA_1C_1 او SA_2C_2 اوپه همدې ډول د SB_1C_1 او SB_2C_2 سره يى لري.
برسيره پر دې باور لري:

۱ . وړانګي جملى په څټ: که له ناپاى کرښو.... g_1 , g_2 , g_3 څخه د خورې

(c) ketabton.com: The Digital Library

غونچې یا بهتره ستورې کربښو له لارې ټوټې پرېکړې شي، چې یو بل ته ثابتې یا همغه ځای په ځای ځاننیونی یا تناسبات څرګندوي، نو دا کربښې یو بل سره غبرګې دي.

۲ . وړانګي جمله:

که له یوه ټکي وتلی وړانګي د غبرګو ناپاکربښو څخه غوځی شي، نو د دوی ټوټې چې له غبرګو دې ځان داسی نیسی یا په داسی تناسب کی دیلکه هغه د ککرټکی څخه وتلی کچ شوې د وړانګو ټوټې.

$$\frac{|S\ A_1|}{|S\ A_2|} = \frac{|A_1 B_1|}{|A_2 B_2|} = \frac{|S\ B_1|}{|S\ B_2|} = \frac{|B_1 C_1|}{|B_2 C_2|} = \frac{|S\ C_1|}{|S\ C_2|} = \frac{|A_1 C_1|}{|A_2 C_2|}$$

۳ . وړانګي جمله:

په یوه غبرګی ټوټو ځاننیونه داسی ده لکه پهډې بلی غبرګی ټوټو ځاننیونه یا تناسب:

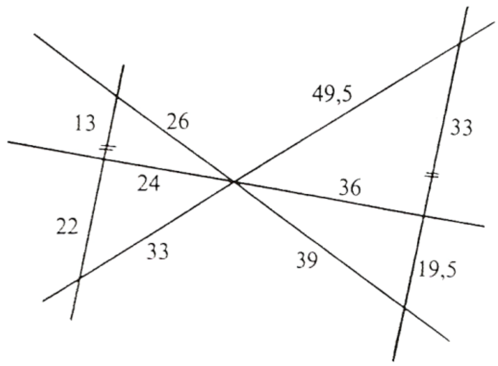
$$\frac{|A_1 B_1|}{|B_1 C_1|} = \frac{|A_2 B_2|}{|B_2 C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1 C_1|}{|B_1 C_1|} = \frac{|A_2 C_2|}{|B_2 C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1 B_1|}{|A_1 C_1|} = \frac{|A_3 B_3|}{|A_3 C_3|}$$

بیلګه :

۱ . د لمړی وړانګي جملی پسی لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . د وړانګو جملو پسې يا له امله باور لري:



خيره ۱۷۶

1. Strahlensatz: $\frac{26}{39} = \frac{24}{36} = \frac{33}{49{,}5} = \frac{2}{3}$

لمړۍ وړانګې جمله

2. Strahlensatz: $\frac{24}{22} = \frac{36}{33}$ oder

۲. وړانګې جمله

$\frac{33}{22} = \frac{49{,}5}{33}$ oder

$\frac{26}{35} = \frac{39}{52{,}5}$

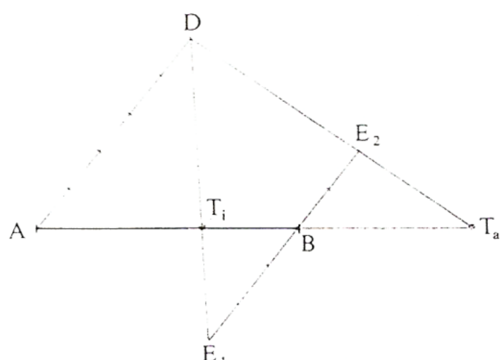
3. Strahlensatz: $\frac{13}{22} = \frac{19{,}5}{33}$ oder

۳. وړانګې جمله

$\frac{35}{22} = \frac{52{,}5}{33}$

۲ . د يوې کرښې AB ويشنه يا ټوټونه:

کرښه AB دننه(T_i) په ځانېونه يا تناسب 5:3 او دباندې (T_a) په تناسب يا ځانېونه 2 : 5 ويشل کيږي. د دې لپاره د ۲ . وړانګې جمله کارول کيږي يا استعماليږي:



خيره ۱۷۷

– دننه ټوټوونټکی T_i :

$$\frac{|AD|}{|BE_1|} = \frac{|AT_i|}{|T_i B|} = \frac{5}{3}$$

– د باندې ټوټوونټکی T_a:

$$\frac{|AD|}{|BE_2|} = \frac{|AT_a|}{|T_a B|} = \frac{5}{2}$$

دا جوړښت د ويشنې برسيره

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرښو د ځل لپاره هم کارول کیدی شي. نو $|AT_a|$ د $|T_aB|$ دوه نیم واره دی.

۳ . طلايي غوڅی يا –غوڅونه:

په طلای غوڅي يوه د a اوږدوالی کرښه داسی ټوټه کيږي، چی برخه ټوټو د x اوږدوالی همداسی د a - x اوږدوالی لپاره اړيکی $a : x = x : (a-x)$ باور لري. دلته x د دواړو برخه کرښو لويه برخه ده دا ويشنه په هنر او ارښيتکتور کی له مانا ډکه ده يا مهم رول لوبوي. له پورته اړيکو څخه لاس ته راځي: $x^2 = a(a-x)$ او له دې بيا $x = \sqrt{a(a-x)}$ لاس ته راځي. دا په دې مانا چی اوږده کرښه د دوو لنډو کرښو او د ټولی کرښی هندسي منځ دی. که دا فرمول نور هم ښه بدلون غوره کړي او د x په لور اوبی يا حل شي، نو ترې لاس ته راځي :

$x = \sqrt{a^2 - ax}$

$x^2\ a^2 - ax$

$0 = x^2 + 1x - a^2$

$x_{1,2} = -(a/2) \pm \sqrt{(a/2)^2 + a^2}$

$= -(a/2) \pm \sqrt{(5/4)a^2}$

$x_1 = 0{,}5a(\ 5 - 1)$ په کار نه راځي

نو لرو: $x \sim 0{,}618a$

خيره ۱۷۸

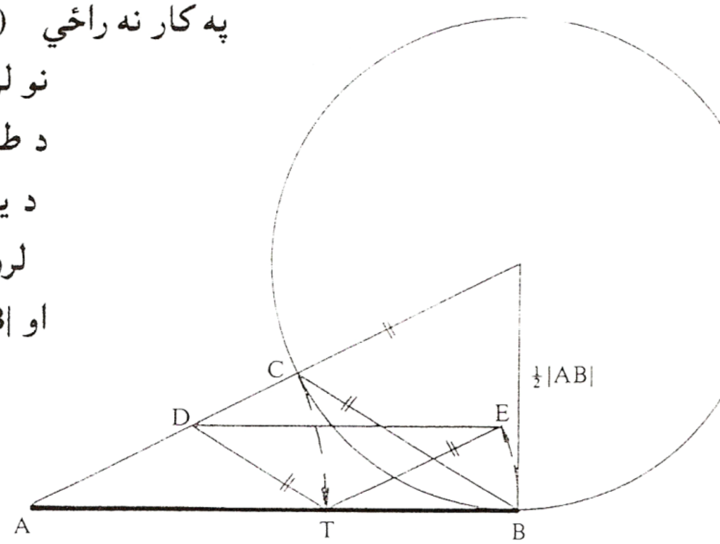
د طلايي قاعدې لګه لارې

د يوې کرښی $|AB|$ ويشنه

لرو $|AC| = |AT|$

او $|AD| = |TE| = |TB|$

$$\frac{|AB|}{|AT|} = \frac{|AT|}{|TB|}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

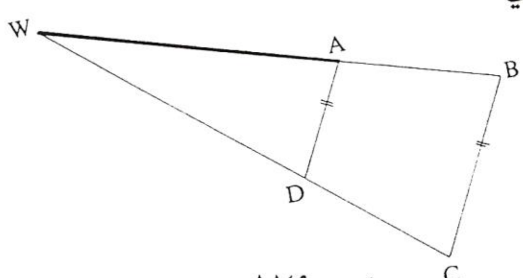
تمرینونه

۱ – په کواوردیناتسیستم کی دریګوډی A(2|3), B(6|1), C(3|6) ورکړ شوی دی.
الف) دا دریګوډی د k = 2 په اندازه وغزوی . د غزولو مرکزدې Z(0|0) وي.
ب) دا دریګوډی په S(-2 | -3) وڅرخوی د 140° = ∝ سره. دا څیره دریګوډی په S باندې د k = -1,5 سره وغزوی.
پ) دا دریګوډی په ۴ یوونو سره لمړی کیڼ لورته او بیا په ۵ یوونونو پورته لورته وکښوی، بالاخره یي په x– محور هنداره کړی او بیا یي بالاخره په ټکي (0|-6) د k = -1 سره وغزوی.

۲ – ایا ټول الف) مساوي پښیز ، ب) مساوي اړخیز، پ) ولاړکونجیز دریګوډی یو بل ته ورته دي ؟

۳ – د یوه مکعب پورته هواره د مرکزی غزونی د غزونفکتور یا غزونځل k سره او د هوانیمي غوڅټکي سره د غزولومرکز په څیر، څنګه تغیریږي؟

۴ – کرښه |AB| =10 cm دننه او دباندې داسی ټوټه کړی، چی په ځانینیونی یا تناسب د 5:2 کی سره پراته وي،

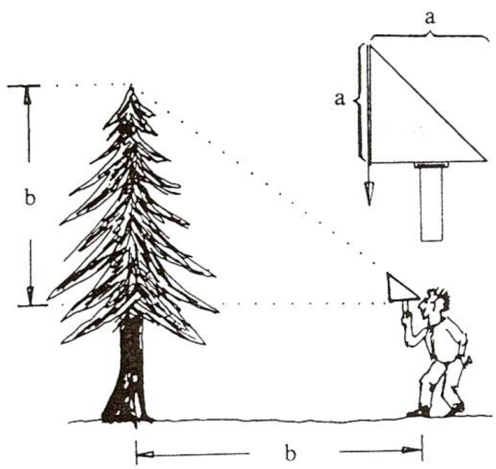


څیره ۱۷۹

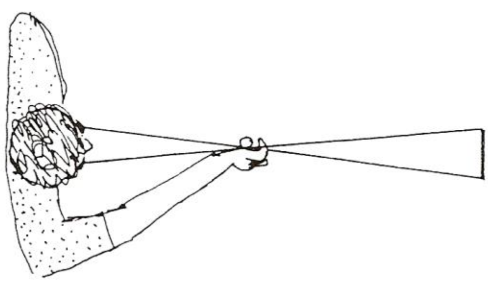
۵ – کرښه |CD| =6,5 cm د «طلای غوڅي قاعدې» له لارې ټوټه کړی.

۶ – د یوه کتونبرج A (څیره ۱۷۹) څخه دې واټن |AW| یوه ځنګل برخی W ته وټاکل شي.
دري ټکی B, C او D په نخښه کیږي په داسی ډول چی AD||BC وي. اندازه کیږي: |AB|=75 m ; |BC| = 125 m او |AD|= 100 m , نو |AW| څومره اوږد دی ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



ثیره ۱۸۰

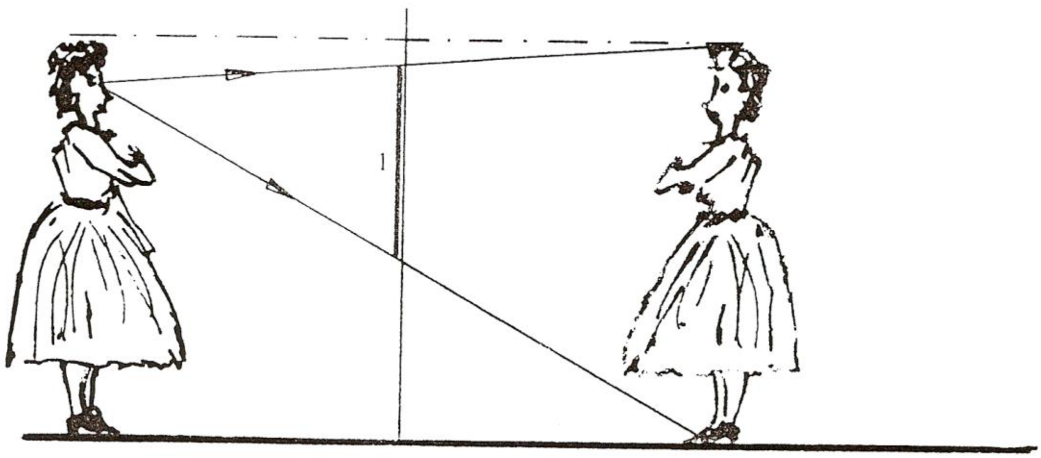


ثیره ۱۸۱

۷ – الف) د یوه «ځنګلوالدریګوډي»
سره (ثیره) د یوې ونی
جګوالی اندازه کیدی شي. – ونه
څومره لویه ده ، که د ځنګلوال
سترګه له ځمکی څخه ۱،۷۰
متره جګه وي، او دی له ونی
۱۰ متره لرې ولاړ وي؟
ب) څنګه (د یوه څرګنده واټن)
د یوه شي د جګوالی د خپل
متې په مرسته نږدې یا تقریبي
اندازه کولی شي؟
لارښود: ۷ الف وګوری)
پ) په عسکری کي د دوه شیانو
د واټن د اندازه کولو لپاره
« د غټې کوتي ګام » تخنیك
کارول کیږي یا استعمالیږي.
دا داسی صورت نیسی چی
لمړی سړی خپله کینه سترګه
پټوي او غټه ګوته راوباسی،
لمړی یو انډول وړ شی، چی ښي
لور ته پروت دی، اندازه کوي او بیا د ښی سترګي په پټولو سره ټیك هغۀ لټوونکی
موخه د زیر لاندې نیسي. دلته د واټن اندازې ورکونی ته سړی څنګه راځي؟
۸ – میرمن ځانګه غواړي چی په خپله پوره لویوالی ځان د دالیز په هنداره کی
وګوري. په عادې توګه د دالیز د کوچنوالی له امله ۸۰ سانتي متره له هنداري

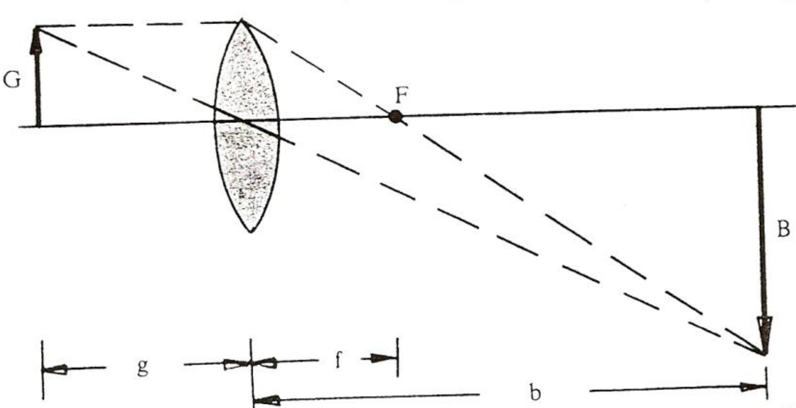
(c) ketabton.com: The Digital Library

لرې، هنداري ته مخامخ ودریږي.دا هنداره باید څومره کم له کمه جگه وي چې میرمن ځانگه د سترگو جگوالی چې ۶۵، ۱ متره دی ټول لویوالی چې ۷۳ ،۱ متره دی وگوري؟



څیره ۱۸۲

۹ – د یوې لینزې یا عدسی یا سترگی له لارې په څیره کی د نور څیرونی



څیره ۱۸۳

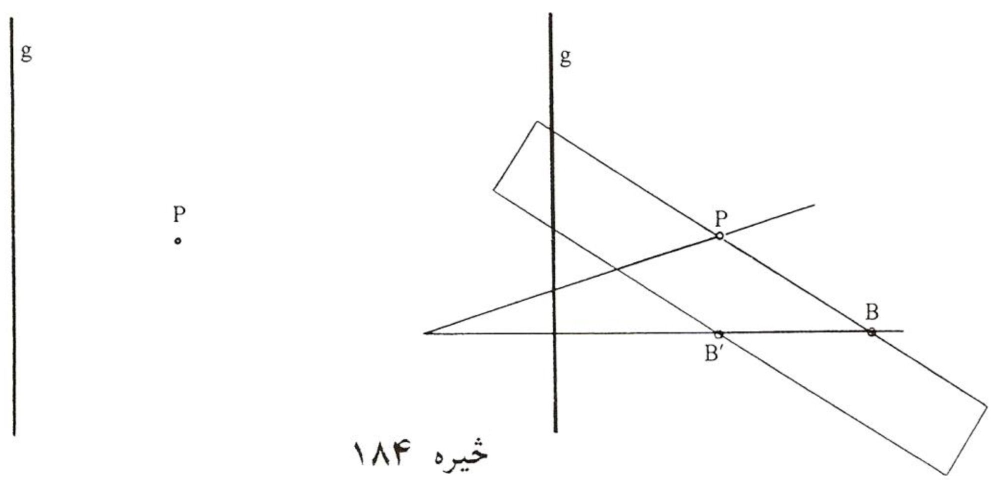
(c) ketabton.com: The Digital Library

جوړښت کنټل کیږي. د لینزې یا عدسی لپاره د لینزې یا عدسی
مساوات $(1/f) = (1/b)+(1/g)$ باور لري، پخپله د څیرونی لپاره
مساوات $B / G = b / g$ باور لري(په لغاتو: د څیرې جګوالی د شي جګوالی
سره ځان داسی نیسی لکه د څیرې لریوالی د شي لریوالی ته). دا دواړه
اړیکی د وړانګي له جملی راوباسی !

۱۰ – یو ولاړکونجیز دیاپوزیتیویا مثبت دیاس داړخ اوږدوالی ۶ ،۳ سانتي متره
سره او ۴ ،۲ سانتي متره سره یو و هغه ته غبرګ دیوال باندې پریوزې .
څیوروني لینزې یا عدسی، دا شی ۱۲ سانتي متره له دیاس او ۸۰ ،۴ متره
له دیوال لرې دي. د پریوستون دیوال کم له کمه باید څومره وي ؟

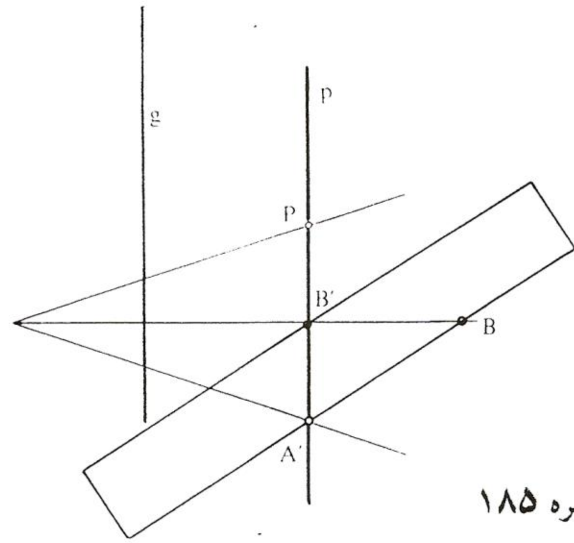
۱۱ – یو د دیوال مربع شکله کړکی، چې اړخ یی ۲۰ سانتي متره اوږد دی له یوه
هغه ته غبرګ دیوال څخه ۱۲ متره لرې ده. د هغی کړکۍ څخه څومره
لرې باید یوه د پرینښنا سرچینه ، چی د ټکي بڼه لري، لرې وي چی له کړکی
تیره رڼا یوه د ۱۶ مترمربع هواره روښانه کړي؟

۱۲ – د کوم مرکزې غزوني سره کیدی شي چی یو ګردي دننه دریګوډی په ګردي
راګیر یا ګردي دباندې دریګوډي باندې څیره شي؟ ګردۍ هوارې یو بل سره



څیره ۱۸۴

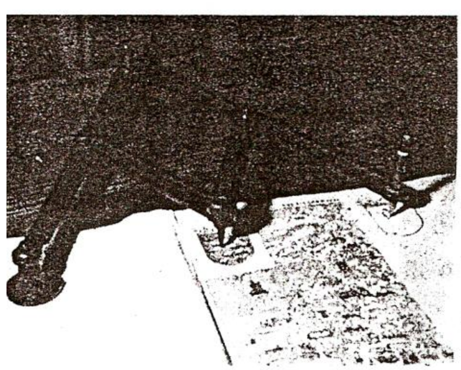
(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیره ۱۸۵

په کومه ځانتیونه یا تناسب ځای نیسی یا پرتی دي؟

۱۳ – د دیسارګ (Desarues) د جملې له مخې کیدی شي چې کرښه g په ټکی P جوړه شي ، که ټول رسم الات یواځي یوه لرګي مته وي (د بیلګي په توګه کرښی یا ختکش) د دوه غبرګو کانتو سره یا اړخونو سره ځموږ په اختیار کي وي. په دلایلو روښانه کړی، چې ولی په پرلپسی ځیرو جوړښت کی د جوړښت لار کار ورکوي.



ځیره ۱۸۶

۱۴ – وښایی چی د هر غبرګ اړخیزABCD لپاره باور لري: که د یوه نیمی د په خوښه ټکي P ځخه یوه اړخ ته غبرګه کرښه رسم شي، نوغبرګاړخي منځ ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

راځي، چې ABCD ته منځنی یامرکزې ورته دی. د همغه غزولومرکز چیرته پروت دی؟

په دې خویونو د پانتوګراف(Pantograph) یا په ورځنی ژبه د ځانی ټونګی دا یوه د رسموولو اله ده قانون هم بینا دی. O په رسمتخته تر زیر لاندې راځي . په پینسل P سره د مخه کښل شوي څیرې باندی حرکت ورکول کیږي، نو په دې توګه دا رسمپینسل یو مرکزې یامنځنی ورته څیره رسم کوي (څیره.) په تي مخ کی کښل شوې ده

۱۵ – په یوه ګردی کی دوه ټوټونی یا زیني یوبل غوځوي. ټوټی ۱۸ سانتیمتره او ۳۵ سانتي متره دی، د دومی هغه اوږده ټوټه ۳۰ سانتیمتره ده. نا معلومه ټوټه یی وښایی.

۱۶ – څومره لرې سړی کتلی شي

الف) د بحرهوارې څخه ۴۰ متره جګ اندازه ټوکری

ب) د یوه له ځمکی ۲ کیلو متره جګ هوا پوڼکی یاهوا بالون،

پ) د یوه الوتونکی کوټکی چی د سپوږمی هوارې څخه۲ کیلومتره جګه وي(r = 1735 km)؟

څیره۱۸۷

۱۷ – د شکل ۱ (څیره

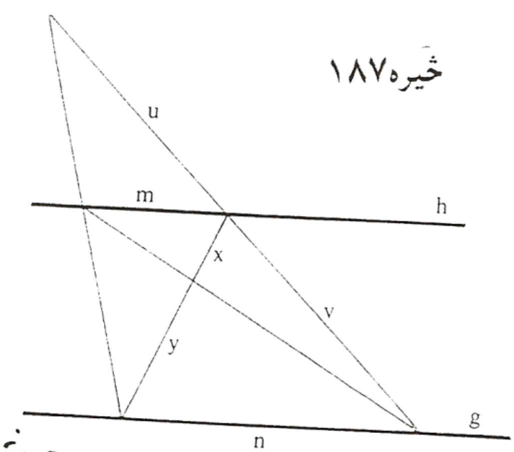
الف) لپاره صدق کوي h || g او

a) $\frac{u}{v} = 1$

b) $\frac{u}{v} = 0{,}5$

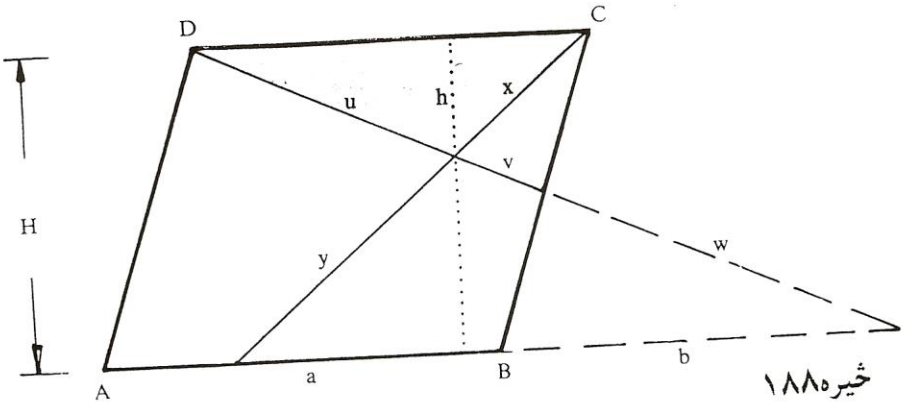
c) $\frac{u}{v} = \frac{2}{3}$

Berechnen Sie $\frac{x}{y}$. وشمېرئ



(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ – وشمیری u / v او x / y (څیره ب)
د غبرګاړخیز څومه برخه رنګه ده؟



څیره۱۸۸

افینی څیرونی (Affine Abbildungen)

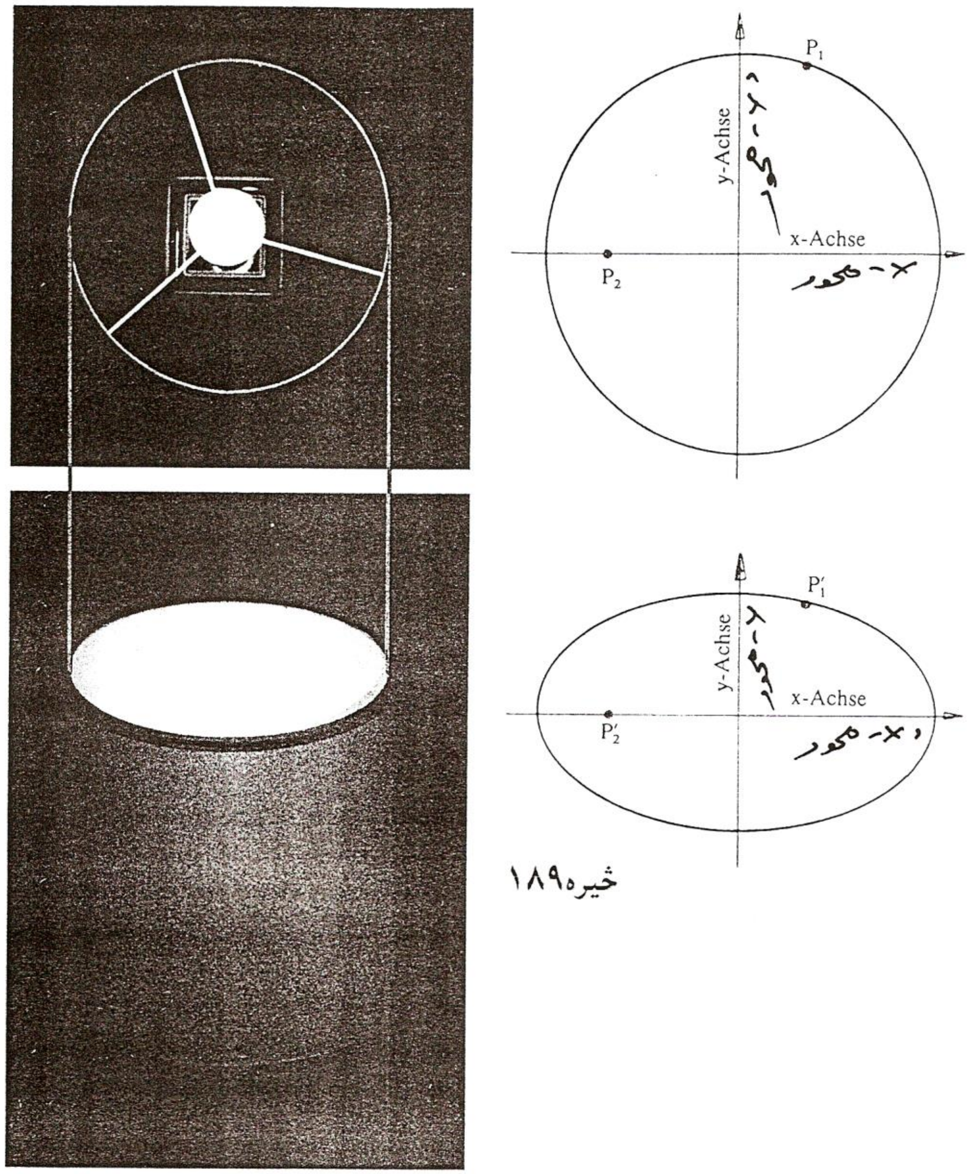
محوري افینيتي Die axiale Affinität

دبیلګي په توګه مو د مخه تیرو درسونو کی وپوښتل، چی ایا موږ له یوې ګردې
ښیښي ټوټي چي لږ څنډه يي ماته ده یوه بله ګرډی ټوټه چی وړانګه یی له پخوا

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوچنی وي او یا یو ډیرګوډی جوړولی شو، چی سیومتري او په دې توګه ښکلی

.



خیره۱۸۹

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي. دلته موږ اليپسي سره مخامخ شو.
پوښتنه دا ده چې ايا يوه څيرونه شته چې له ګردۍ څخه اليپسي لاس ته راشي؟
د څيرې ۱۸۹ دليدلو له مخې داسې خيال راپيدا کيږي، چې ګوندې د ګردۍ او ايليپسي ترمنځ څه خپلوي شته. دا نو بيا دې لاندې پريکړې ته اجازه ورکوي، چې يوه څيرونه بايد موجود وي چې د ګردۍ څيرونه ايليپسي شي.
دا څيرونه بايد کوم خويونه ولري؟
موږ بيا د جوړونې نيونې چې د مخه مو کړې رامنځ ته کوو.
ټولې په پراته (افقي) x– محور باندې پراته ټکې ځاى په ځاى پاتيږي: پس د x– محور د ځاى په ځاى ټکو کرښې څيرونه ده. د دې په څټ د y – محور ټول ارزښتونه تغير خوري. پس هره y–محور سره غبرګه کرښه ځاى په ځاى کرښه ده.
له دې سره موږ د نوې څيرونې لپاره ټول ضروري خويونه راټول کړل: د افينيتي محورa سره يوه محوري افينيتي $A_{a;g;k}$ ، د لورکرښې (کرښه چې لورى يې څرګندوي لنډ يې: لورکرښه) g او د افينيتي فاکتور $|k| = 0$ مخ ته پراته دي، که لاندې شرايط پوره وي :
۱ – هره کرښه 'PP چې له ټکو P او 'P تيره وي د g سره غبرګه ځغلي.
۲ – که *P د'PP او a غوڅټکي وي ، نو لرو : $|P^*P'| = |k|.|PP^*|$.
په دې توګه نو يوه محوري افينيتي، دکرښې –،غبرګ – او ټوټه تناسب يا ځانښيونه ريښتونې ده. اخرنۍ دا وايي چې په اصلي پايکرښې درې ټکي دا پايکرښه په همغه تناسب يا ځانښيونه پرې کوي، لکه د څيره ټکې په څيره کرښه باندې.

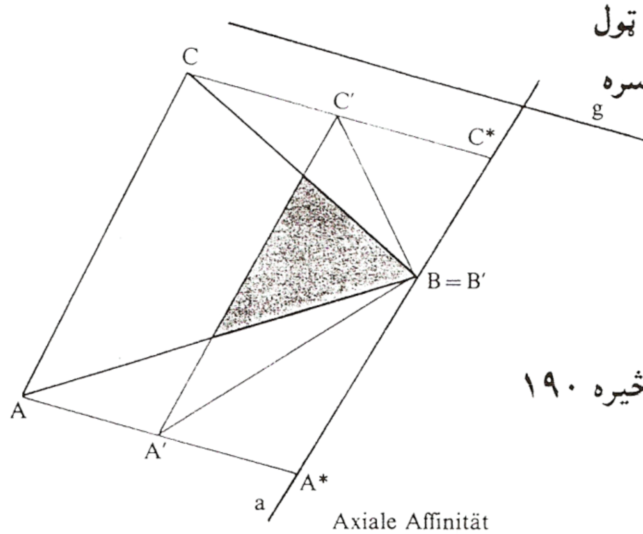
له دې لاندې د محور افينيتي جوړښت څيړنه لاس ته راځي
۱ – له اصلي کرښې په نخه شوي ټکي (د بيلګي په توګه P) څخه وg سره يوه غبرګه کرښه وباسي او ددې غوڅټکى د افينيتي محور سره د بيلګي په توګه *P وبولي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – له *P څخه |*PP|. k = |*P'P|

و g ته غبرګي مناسبي کرښی وکاږی.

۳ – په دې توګه رامنځ ته شوي ټول ټکي اصل ته په ورته توګه سره ونښلوی.

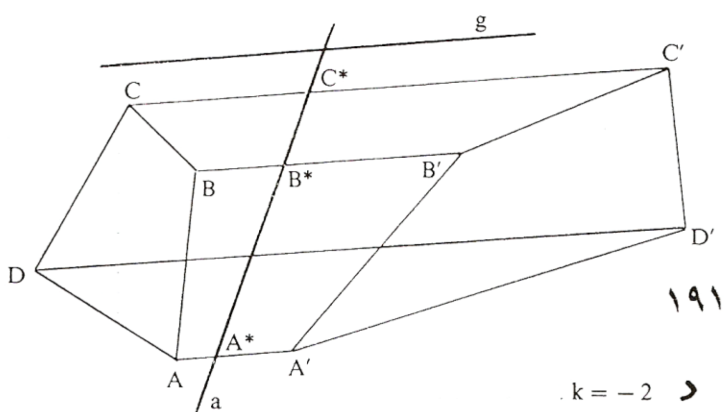


شیره ۱۹۰

Axiale Affinität

د $k = \frac{1}{2}$ سره

آکسیال افینیتی



شیره ۱۹۱

د $k = -2$

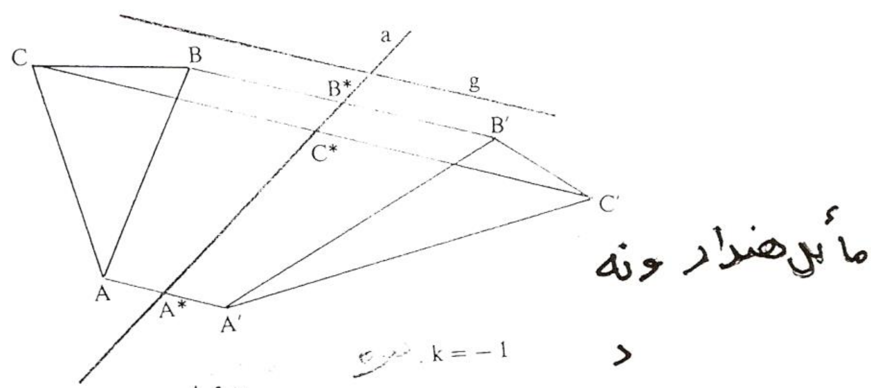
آکسیال افینیتی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k = 1$ لپاره د هوارې هر ټکی ځای په ځای ټکی دی، ځکه چی ټولی پایکرښی تغیر نه خوري. له دې لرو چی $A_{a;g;1}$ کتمټ یا identisch ایدنتیك دي.
د $k > 0$ لپاره P او *P د a په یوه (همغه) خوا پراته دي(ځیره) ، د $k < 0$ لپاره د a په بدلوخواوو (ش. ۱۵۷)
یو ځیرونه $A_{a;g;k}$ کیدی شي په ځیروونې $A_{a;g\ 1/k}$ بیرته راوکرځي .

مائیل هندارونه

مائیل هندارونه یوه ځانګړې محوري افینیتي ده : د $k = -1$ لپاره لریوالی یا فاصله |*PP| همدومره ده لکه لریوالی یا واټن یا فاصله |*P'P| . پس مائیل اینونه محوري افینیتي $A_{a;g;-1}$ ده.



ځیره ۱۹۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

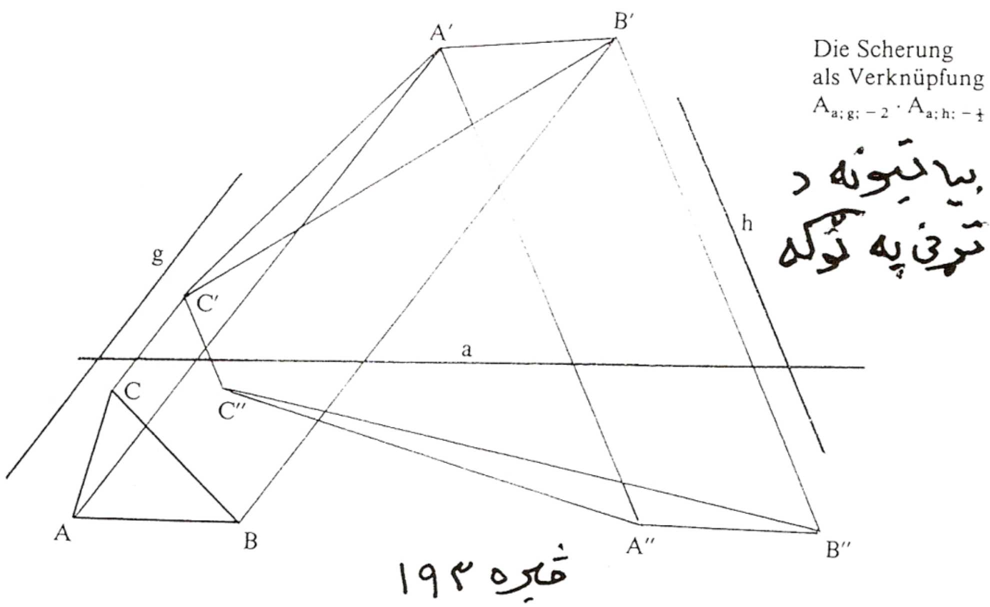
: محوري افينيتي(يو بل سره) تړلو ځانګړي حالتونه:

ياتي کوونه يا بياتيونه Scherung

: دوه محوري افينيتى(يوبل سره) تړل، چې همغه افنيتي محور a ولري، g او h
ختلفلوري محورونه او يو بل ته مخامخ افينيتي فاکتورونه k او 1 / k ولري، نو
ياتيونه(بياتي کونه) ورته وايو.

ياتيونه(يوبل سره)
: تړلو په څير:

$A_{a;g;-2} \cdot A_{a;g;-½}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

په بیاتیونی کی، لکه ځنګه په مائیلی اینوني کی د هواری دننه بی تغیره پاتی کیږي، سره ددې چی د یواځنیو یا ټولو شکلونو تغیر خوړلی شي. (تمرین وګوری) په عمومي توګه د ځیرې – او اصلي هوارې لپاره په یوه محوري افینیتي کي باور لري : $F'=|k|.F$, او یو په بل پسی کارونو یا عملیو اجرا کولو کی هم په همدې ډول
$F' = |k._.k|.F$:
دا په دې مانا، چی محوري افینیتي په عمومي توګه هوارې ریښتونی نه ده.

محوراینونه

محوراینونه یوه محوري افیتي ده له $k = -1$ سره. (ځیره ۱۹۲ وګوئ)

کونګروا ینخ ځیرونه
هره کونګروا ینخځیرونه کیدی شي له محوراینونی یوځای راټوله شي.

منځنی راکښنه(راکښل)
هر منځراکښنه یو افڤینه ځیرونه ده.

په عمومي ډول لاندې لاس ته راځي

د ټولو کونګروا ینخ ځیرونو، ورته ځیرونو او محوري ځیرونو ډیري، د ټولو افڤین ځیرونو ډیری ورکوي. که افینځیرونی یو په پسي اجراشي یو ګروپ جوړوي، داسی په نامه افینګروپ. (ګروپ دې د کتاب په پای کی وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – یو دریګوړی ABC دې په یوه افین هوارمساوي باندې داسې واړول شي، چېرته چې $|AB| = |AB'|$ او .

۲ – په دریګوړي $A(3|5)$.; $B(5|4)$; $C(3|1)$ باندې یو محوري افینیتي داسې وکاروي یا استعمال کړی، چې $A'(-3|1)$ او y– محور د افینیتي محور وي.

۳ – د ګردی څیره د $M(2|3)$ او $r = 3$ cm سره وټاکی ، که د x–محور د افینیتي محور وي، په ۱ او ۳ کوادرانت یا څلورمه کې لورکرښه او $k = 2$ د افیننتي فاکتور یا –ځل وي.

۴ – یو دریګوړی په هوار مساوي پنځه ګوډي واړوی.

۵ – یوه ګردی دې د نیمي $d = 12$ cm او د افینیتي فاکتور $k = ½$ سره افینځیره شي. د راپیدا ایلیپسی د هوارې دننه وشمیری. (دوه یو په بل ولاړ محورونه افینیتي محورونه دي چې له منځټکي او لوریزکرښې څخه تیریږي)

۶ – یو تریخ ABCD جوړکړی له $a = 8$ cm ; $c = 3$ cm ; $d = 5$ cm او $\sphericalangle = 40°$. په دې محورې افینیتي لارښوده کړی، چې د افینیتي محور یې د تریخ منځلاین وي، چې د لورکرښه یې د هغې سره ۵۵ درجې کونج جوړوي او د افینیتي ځل ا –فکتور یې $k = 3/2$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریګوډیکچ یا تریګونومتري Trigonometrie

تعریفونه

د دریګوډیکچ یا تریګونومتري دنده ده چې په هواره یا په هوا کې دریګوډي کچ کړي ، د څانګړوبلواکو له لارې، دې په نامه تریګونومتریبلواکو. برسیره پر دې د دې په مرسته پریودیکې یعنې په منظمه فاصله پرلپسې تکراریدونکې پیښې(مو.ر. یې تل راګرځیدوني بللی شو) څیړل کیږي.

تریګونمتري تر هیپارچ (Hipparch ۱۶۰ – ۱۲۵ له م پخوا) پوري تعقیبیدی شي، وروسته له مصري پتولیمویس Patolemäus چې په ۱۶۸ م کال کې مړ شوی او بیا له هندې او عربو شمیرپوهانو له خوا پرمختګ ورکړ شو. له پیل دا د کارونې یا عملي کیدو د ستونځو سره مخامخ وه. دریګوډیکچ خپل کارونه په استرنومي او فزیك، د ځمککچ یا اندازه کولو، د ځمك اندازونې، نقشو علم، او ابادې او نوتیك Nautik (د کیشتیو د لارو نقشه ویستلو پوهنه) کې مومي.

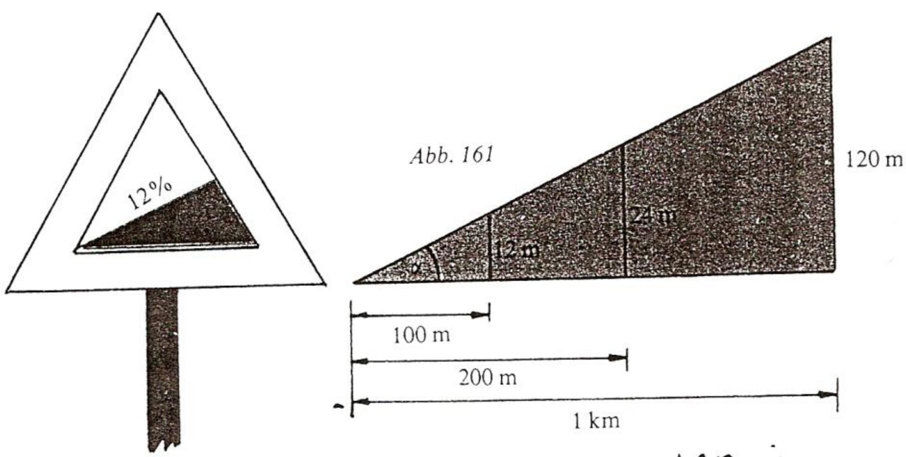
د تریګونومتري مانا یا مهموالی په ځانګړي ډول په دې رینښتینوالی یا وٲقعیت کې نغښتې، چې د دې په مرسته د پایکرښبلواکوالی ، د کونجبلواکوالی سره تړلی شي(پام دې وي، چې دا تړاو شمیرپوهینیز مفهوم لري).

پیلبیلګه: د په مانایا مهم جګوالي یا لویدکرښو نخښنه لوحې یا په بله عبارت د زوړي او پیچومې لیکتختې(دې ته دې پام وي چې ما دا کلیمې هر چیرې د زوړي او پیچومې په نامه نه دې بللی، خو دا به ښه وي ، چې په هغه مناسب ځای

(c) ketabton.com: The Digital Library

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي) وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟
پیچومی یا جګوال 12 % په دې مانا چې په راتلونکو سلو مترو کی یو جګوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیك ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جګوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توګه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جګوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جګوالي لیدیدونکي ۱۲۰ متره ته جګیږي. کتل کیري یا لیدل کیږي، چې په ورکړشوي پیچومي یا جګوالي کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځاننیونه و هوارې فاصلي ته تغیر خوري . د پایکرښو تناسب یا ځاننیونه تابث یا ځاي په ځاي پاتیږي او د په سلو کی ګڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جګوالي اوږدوالي معلومات نه

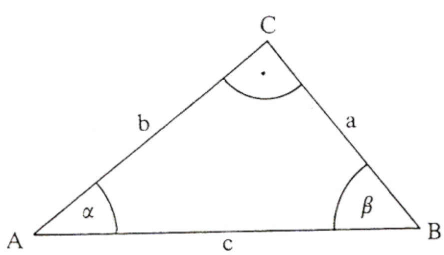


خیره ۱۹۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکوي همداسي زوړی یا لویدون. په داسي حالت کی هم بیا نورې لوحي هم زوړندې وي.
په همدې ډول پیچومی کیدی شي، لکه په سلو جمله کی، د کونج له لارې هم ورکړشي، چی د سرك ټوټه یی د پرتون سره جوړوي.
تریګونومتري یا د په سلوکی (د پیچومي یا جګوالي تناسب) د پیچومي یا جګوالي ویناوي دي او یا په څرګندو پیچومي کونج یا جګکونج چی سلییز پیچومی یا جګوالی ټاکي. په دې ډول په سلو کی ۱۲ جګوالي سره د پیچومي کونج په لاندې ډول دی $\alpha = 6,48°$.

په پیلبیلګه کي څرګندیږي چی دا پایکرښي د یوه ولاړ دریګوډي اړخونه انځوروي، چی د دوه دریګوډیو تناسب یا ځانیونه د کونج په بلواکسی یا اړتوب ښایي. زیات وخت هیوپوتینوزې (اوږداړخ) په c ښوول کیږي او هغه ته مخامخ کونج په γ . نورې دواړه کتیتی a او b دي او د دوي مخامخ کونجونه α او β.

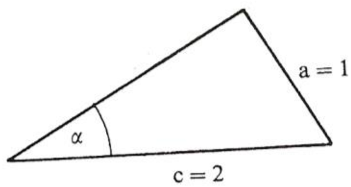


څیره ۱۹۵

اوس نو لاندې جملی باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساینبلواک sinusfunktion: بلیګه:

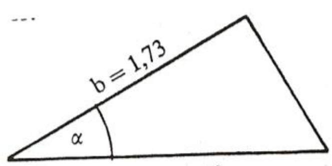


$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

خیره ۱۹۶

کوساینبلوک Cosinusfunktion بیلګه:

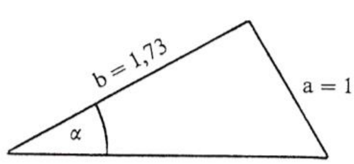


$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرته کتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$$

$\cos 30° = \frac{1{,}73}{2} = 0{,}8660$

خیره ۱۹۷

تنجنتبلواک Tangensfunktion بیلګه:



$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروتکاتیت}}$$

خیره ۱۹۸

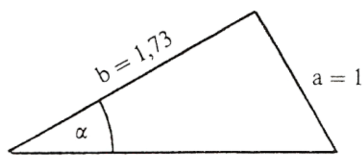
$\tan 30° = \frac{1}{1{,}73} = 0{,}577$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : پام دې وي چې د مخامخ کاتیت لاندې د دریګوټي هغه اړخ پوهیږو، چې په هیپوتینوزې پراته کونج ته، چې څمورږ موخه وي، مخامخ پروت وي او هغه اړخ چې په همدې کونج پروت وي ، هغه ته په کونج پروت اړخ چې مورږ یې لنډ پروت کاتیت بولو.

دا لاندې نور کونجبلواک دي، چې کم کارول کیږي

کوتنجنتبلواک Kotangensfunktion بیلګه



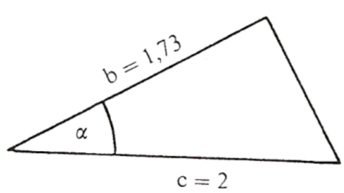
$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{مخاخ کاتیت}}$$

څیره ۱۹۹

$$\cot 30° = \frac{1,73}{1} = 1,73$$

ډیر کم ، د بیلګې په توګه استرونومي کی، لاندې کونجبلواک کارول کیږي

سیکانسبلواک sekansfunktion بیلګه



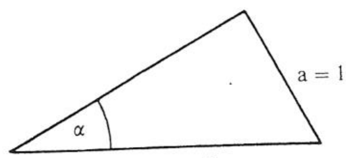
$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{هیپوتینوزې}}{\text{پرته کاتیت}}$$

څیره ۲۰۰

$$\sec 30° = \frac{2}{1,73} = 1,156$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوسیکانسبلواك Kosekansfunktion بیلګه:



$$Cosec\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هیپوتینوزې}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

ځیره ۲۰۱

$$\text{cosec } 30° = \frac{2}{1} = 2$$

مور به زیات وخت لمړنی درې یا په همدې توګه لمړنی څلور بلواکه د کارونی لپاره راونیسو یا وکاروو.

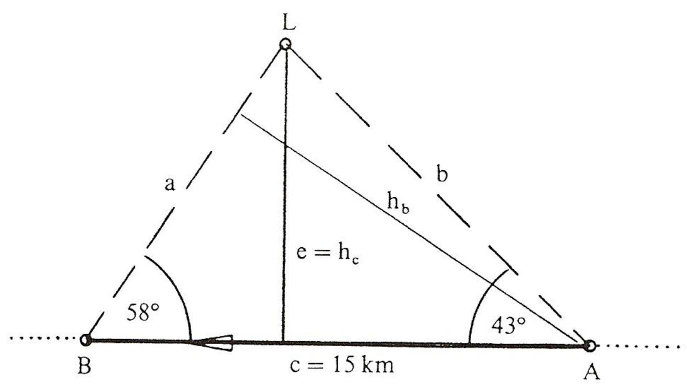
په خونبه دریګوډیو کی شمیرنه

سره له دې چی کونجبلواکي یواځی په ولاړکونجیز دریګوډي کی باید تعریف کیږي، خو بیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جګوالی په جوړولو کی هر دریګوډی په ولاړو برخه دریګوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اخرني هنري، د مخکني مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکرښي وینا وي د پیل دریګوډي باندې لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشوو کونجونو.

پیلبیلګه
یوه کیښتی د رڼاډزکړي(کله چی کښتی له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کښتی یا یو بل څه ته که یوه کښتی وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کیږي چی له لرې څرګندیږي او نورې خبر ورته لیږونکی په دې پوهیږي، چی څه پیښ شوي دي). دلته $\measuredangle = 43°$ د تګ په لور اندازه کیږي او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه تګ پایکربښي $c = 15\ km$ او کونج $\beta = 58°$ وروسته.
په دوم ډز کی کیښتی له ډز رڼااور څخه څومره لرې ده؟
د A څخه و B ته د کیښتی نزدې واټن e د ډزرڼااور څخه څومره لرې دی؟
په A کی له اور څخه څومره لرې وه ؟



شیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 79°$; $\sin\beta = h_b / c$ او $\sin\gamma = h_b / b$

د h_b په لور اوبیول یا حلول او په همدې وخت کی لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin\beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin\gamma$$
$$\Rightarrow c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$
$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58°}{\sin 79°} = 12{,}959\ km$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin\alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin\alpha = 12{,}959 \cdot \sin 43^\circ = 8{,}838 \text{ km}$$

$$\sin\beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin\beta} = \frac{8{,}838}{\sin 58^\circ} = 10{,}421 \text{ km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دریګوډي اړخونوa او b په شمیرنه کی مرستندوي لویی له منځه ځي او باور لري:

د ساین جمله :

په خوښه دریګوډي کی د اړخونو ځانیونه یاتناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځانیونه یا تناسب دی.

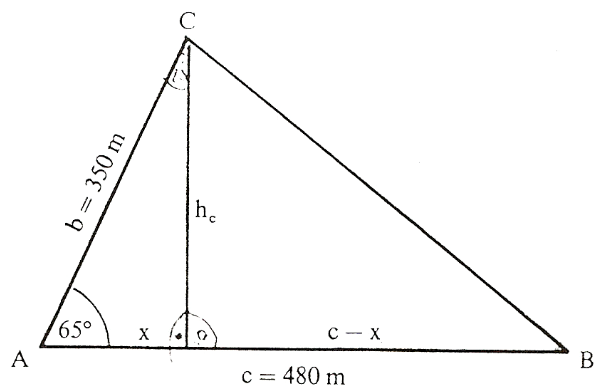
$\sin\alpha / \sin\beta = a / b$ $\sin\beta / \sin\gamma = b / c$

$\sin\gamma / \sin\alpha = c / a$

د ساین جمله په پڅ دریګوډي کي هم باورلري(تمرین دې وکتل شي). ددې سره په یوه دریګوډي کی نه موجودې ټوټې هلته شمیرل کیږي، چیرته چی دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي.
سړی بیا څه کوي که دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغوتر منځ راګیر کونج؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیلبیلګه : په یوه د ډبروسکرو کان کی دوه ستنی b = 350 m
او c = 480 m دي او یو کونج ∢ = 65° ښندوي.
د B ځخه و C ته به د نبنلولو ستن یا تیر څومره لوي وي ؟



شیره ۲۰۳

اوبی یا حل :
جګوالی یا جګی h_c کرښه AB = c په دوه ټوټو x او c-x ویشي.
دلته دی x = b.cos ∢ ،
ځکه چی cos ∢ = x / b دی. د پیتاګوراس د جلی له مخی
لرو : $h_c^2 = b^2 - x^2$
او

$$a^2 = h_c^{\,2} + (c-x)^2 .$$
$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb \cos ∢$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos ∢$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړخونو اوږدوالی نومونی او کونج کیدی شي چي منظم بیرته راګرځیدونکی (ځیکلیکي یوناني کلیمه ده ګردی ډوله یا منظم بیرته راګرځیدونکی zyklisch یو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

کوساین جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$$

په هر یوه دریګوټي کی د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زیاتون سره ترې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساین سره ځل.

د کوساین جمله د پیوتاګوراس د جملی عمومیت یا ټولیز ته هم وایي. (تمرین ۶ مخ دې وکتل شي)

د کونجبلواك له لارې یو بل متود، د ډیرګوټي شمیرلو لپاره ، تر څو دا په دریګوټیو ویشل کیدی شي چي پوره اړخونه او کونجونه یی څرګند وي، پیدا شو.

د دې ټولو سره د څلورګوټي یو وربرسیره بل د شمیر فرمول پیداشو:

$$A = 0,5.d_1.d_2.\sin\alpha$$

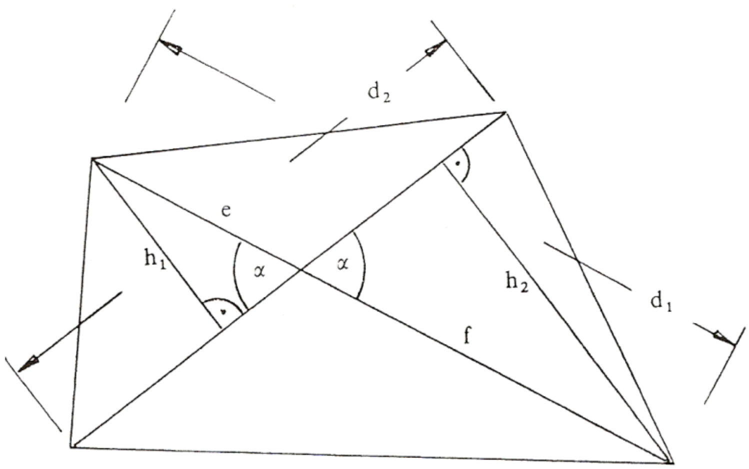
چیرته چي $\alpha = w(d_1; d_2)$ وي.

اوبی یا حل : $A=0,5(d_2h_1 + d_2h_2)$

که d_1 په e او f ټوټه یا تجزیه شي ، نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1 = e \cdot \sin\alpha$$
$$h_2 = f \cdot \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2 (e + f) \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2\, d_1 \sin\alpha$$



ځیره۲۰۴

د په خوښه کونجونو تریګونومتریکي بلواکي

په اخره برخه کی مو وویل، چی کونجبلواک، نه یواځی د دننه لورته تیرو درېګوډیو لپاره ، بلکه د هغو کونجونو لپاره چی له ۹۰ درجو لوي وي ، هم هدفمند (موخور) تشریحوړ دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کړ.

دا پراختیا څنګه تصور یا د خیالوړ کیدی شي ؟

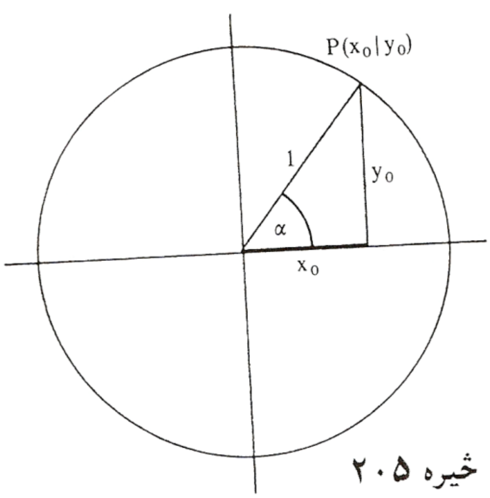
(c) ketabton.com: The Digital Library

په ښه توګه داسې کیدی شي چې په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یوه ګردۍ ووهي چې وړانګه یې ۱ یعنې یو یوون یا واحد دی (دې ته یوونګردۍ ویل کیږي، ځکه چې وړانګه یې یو یوون دی) او د ګردۍ منځټکی او د پروت ولاړ سیستم کواوردېنات سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریګوډی، چې د هغې یو کونج د ګردۍ څنتریکونج دی، یعنې کونج یې د ګردې په منځ یا څنتر پروت دی، (څیره ۲۰۴) کم له کمه یې یو اړخ ۱ یعنې یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریګوډی په دننه کې شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړکونجیز دریګوډي څخه پیل کوو، چې په لمړي لمړي څلورمه یا کوادرانت (Quadrant) کې پروت د ی . نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په ګردۍ ،د کونجټکی $P(x|_0y_0)$ په پام کې نیولو سره، باور لري:

$$\sin\alpha = y_0 / 1 = y_0 , \quad \cos\alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرښې د پریوستون او یا د سیورېدرځونو په څیر لاس ته راځي، که موږ وړانګه د یوه ټالوهونکی مروند په څیر ونیسو یعنې فرض کړو، کوم چې د محورغبرګې رڼا لاندې راشي.



څیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریګوډي کې کیدی شي چې د پیتاګوراس جمله وکارول شي:

تریګونومتریکي پیتاګوراس:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

چیرته چې $\sin^2\alpha = \sin\alpha . \sin\alpha$ په مانا دی.

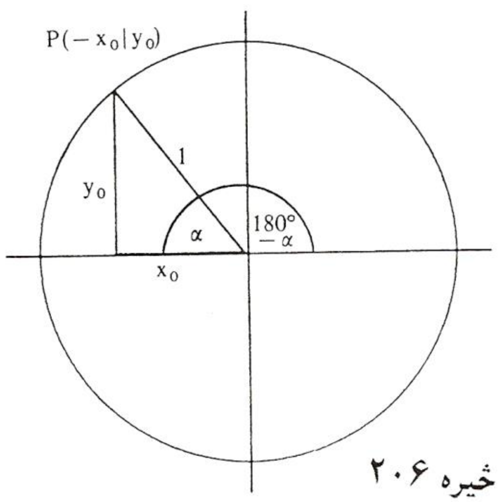
(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي ، چی پوښتنه وشي چی همدا « سیوری » بیا کله لاس ته راتلی شي.
دا حالت بیاهیك هلته لاس ته راځي، چی وړانګه د منفي x –محور سره یو کونج α جوړ کړي، یعني ځنتریکونج یی $180° - \alpha$ وي.
د « سیوروځیرو » څخه لاس ته راځي:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

ځکه چی دا سیوری همغومره اوږد دی لکه د مخه، مګر اوس له صفر پیل مخامخ (منفی) لور ښایي.



خیره ۲۰۶

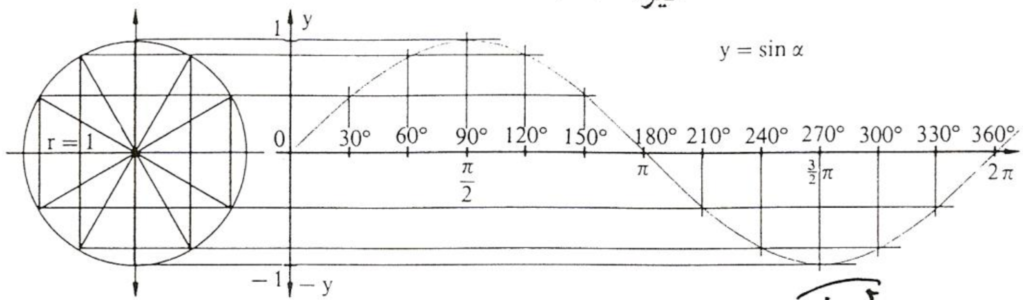
په ورته توګه لاس ته راځی :

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(360° - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

د کونج $360° + \alpha$ لپاره بیرته د سرچیني کونج اړیکی لاس ته راځي: همدا ډول د $720 + \alpha$ لپاره اوهمداسی نور. په دې توګه د په خوښه کونجفنکشنونو یا کونجبلواکو لپاره د ساین او کوساین بلواك تعریف دي.
د $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ له امله (مقایسه مخ ۱۵۱) دا د تنجنت بلواك لپاره هم صدق کوي. له دې امله لاندې د بلواکګرافونه لاس ته راځی

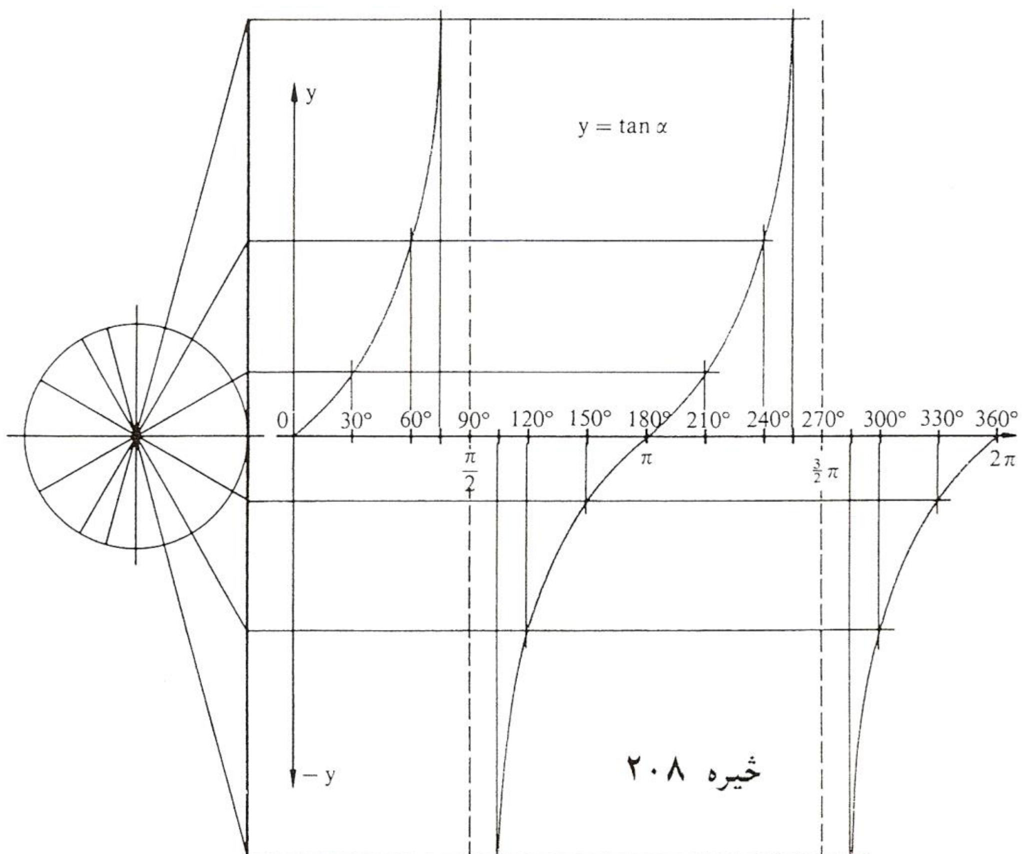
(c) ketabton.com: The Digital Library

شیره ۲۰۷



Die **Sinuskurve**: $y = \sin x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$

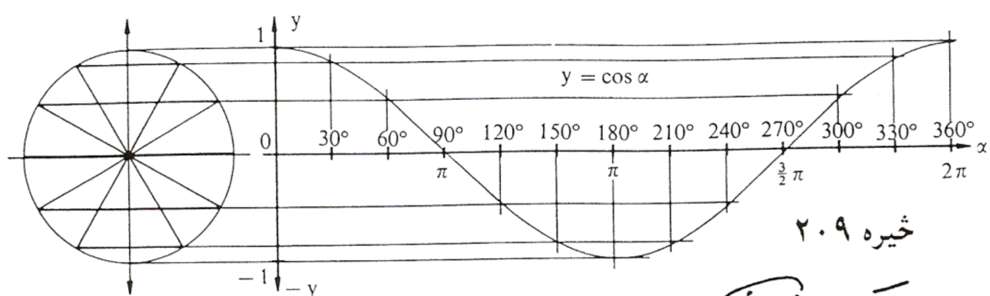
د ساین کږه



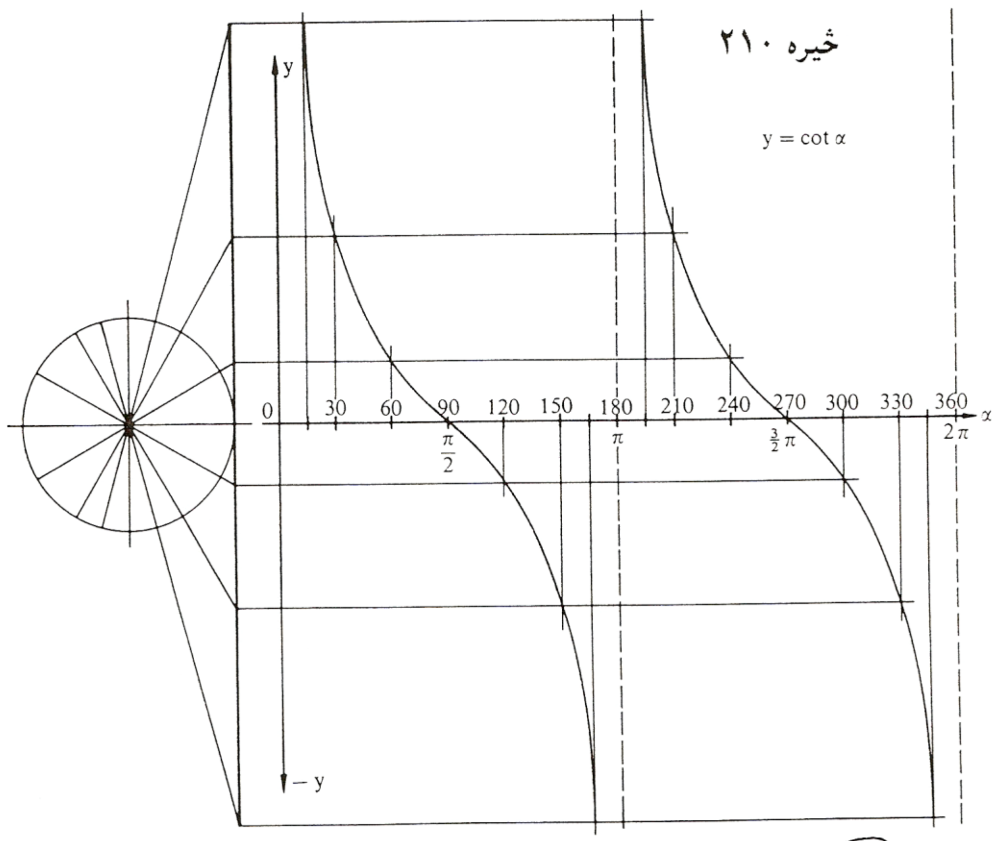
Die **Tangenskurve**: $y = \tan x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

د تنجنت کږه

(c) ketabton.com: The Digital Library



Die **Kosinuskurve**: y = cos x; x ∈ ℝ; y ∈ [−1; 1]



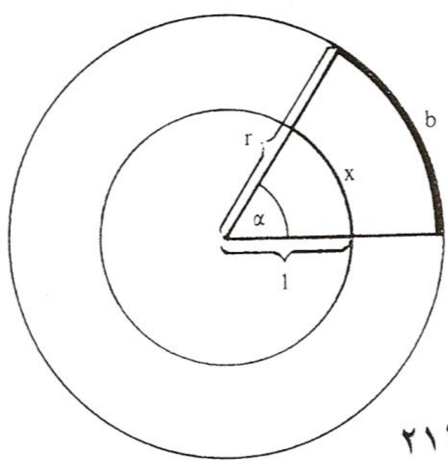
Die **Kotangenskurve**: y = cot x; x ∈ ℝ \ {x | x = z · π ∧ z ∈ ℤ}; y ∈ ℝ

(c) ketabton.com: The Digital Library

لینده اندازه (لینده کچ) Das Bogenmaß

په زړه درجه د کونجکچ یا – اندازې سره بلد یو (دمخه ولیدل، چی ۳۶۰ درجی پوره ګردی ښايي. هغه، چی لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده ، چی ګردۍ په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دواړو کچیوونونو یا کچواحدونو کی ګډ دي، چی په ګڼونو اندازه کیږي، بی له کچ یوون ارزښتڼیری رییلګڼونه دي، په داسی حال کي چی وتل ګڼونه (= د تعریف ډیري ګڼونه) یو یوون یا واحد (درجه یا ګون) لري. دا په کارونه یا عمل کی موږ زیات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندې کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.

کونج لویي په واقعیت کی یوون «راد (rad) » لري، مګر دا په کارونه یا عمل کی کیدی ونه لیکل شي یا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته مو نه راهځوي. دا کونجکچونه چی د کونج لپاره په تریګونومتریکی بلواکو کی اینښودل کیږی (د بیلګي په توګه sin)



خیره ۲۱۱

ارګومنت (Argument تعریفډیری) بلل کیږي. په تعریفډیري کی کیدی شي چی نوې درجه ، زړه درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چي په جبشمیري کی همغه مودوس په کار اچول شوي دی(راتلونکی دې وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په برخه گردیبرخوکی وښوول شو (گردیبرخی د مخه څیړل شوي دي) چی هر کونج پوري یوه گردبرخه یا گردی لینده اړه لري، نو ټولی گردی پوري ۳۶۰ درجی کونج یا $2\pi r$ اړه لري، یوه کونج ∝ پوري بیا یوه لینده b اړه لري، کومه چی په چاپیري کی ځانله همداسی نیسي لکه په پیل کی ∝ و ۳۶۰ درجو ته . دلته گردیگڼ دی : $\pi = 3,14....$ (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

پیلبیلگه:

کونج $\alpha = 60°$ له گردی د ۱۰ سانتیمتره وړانگي سره یوه په لاندې ډول گردی لینده $b = 20\pi . 60° : 360° = 10,47$ cm غوځوي یا بیلوي. د گردی چاپیری دی : $U = 20\pi = 62,83$ cm
همغه کونج ∝ د ۵ سانتي متره وړانگی سره گردیلینده
$b = 10\pi . 60° : 360° = 5,236$ cm
غوڅوي. دا گردی لاندې چاپیری لري: $U = 10 = 31,416$ cm .
له گردی د وړانگي $r = 1$ cm سره ددې په څېر یا برعکس کونج گردیلینده
$b = 2\pi . 60°: 360° = 1,047$ cm
غوڅوي» د دې گردي چاپیری فقط $U = 2\pi = 6,283$ دی .

له بیلگي څرگندیږي، چی لینده اندازه په همغه اندازه زیاتیږي لکه وړانگه. له دې امله کیدی شي خپله شمیرنه په یوونگردي د وړانگي ۱ سره رابنده یا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعریف: په یوونگردي د گردیلیندی اوږدوالي کچگڼ، چی په څنتریکونج

(c) ketabton.com: The Digital Library

باندې ځيره شوي، لينده کچ بلل کيږي. لاندې شميراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180^\circ) . \pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x / \pi)\, 180^\circ = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$$

دا چې د وړانګي څرخون په پوره کونج هم وراوړيدی شي، نو له دې امله د لينده کچ لپاره په ښه رييلګڼونه پرېښوول شوي.

بيلګی :

$$\alpha = 1^\circ \Leftrightarrow x = \frac{1^\circ}{180^\circ}\pi = 0{,}0175 \text{ (rad)}$$

$$\alpha = 30^\circ \Leftrightarrow x = \frac{30^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236$$

$$\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow x = \frac{45^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854$$

$$\alpha = 60^\circ \Leftrightarrow x = \frac{60^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{3} = 1{,}0472$$

$$\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow x = \frac{90^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708$$

$$\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{180^\circ}\pi = \pi = 3{,}1416$$

$$\alpha = 360^\circ \Leftrightarrow x = \frac{360^\circ}{180^\circ}\pi = 2\pi = 6{,}2832$$

$$\alpha = 720^\circ \Leftrightarrow x = \frac{720^\circ}{360^\circ}\pi = 4\pi = 12{,}5664 \quad \text{usw.;}$$

$$\alpha = -75^\circ \Leftrightarrow x = \frac{-75^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{-5}{12}\pi = -1{,}309$$

ارکوسبلواکي Arcusfunkrionen

زيات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کيږي ، چې لکه په ورکړشوو کرښځانيونو راپيداشوې کونجونه څنګه معلوميږي يا څنګه راځرګنديږی يا بهتره څنګه ځانونه نيسی. ددې لپاره چې دا پوښتنه ځواب شي، بايد امکانات ولټول شي، چې د کونجبلواک ارزښتونو څخه څنګه بيرته کونج يا په همدې توګه د هغه تعريفېدیري ته، په لينده کچ راتلی شو. دا کونجبلواک پريوديکی يا تل بيرته راګرځيدونکي بلواک دی، دا په دې مانا، چې د بلواک ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونولپاره يا .

(c) ketabton.com: The Digital Library

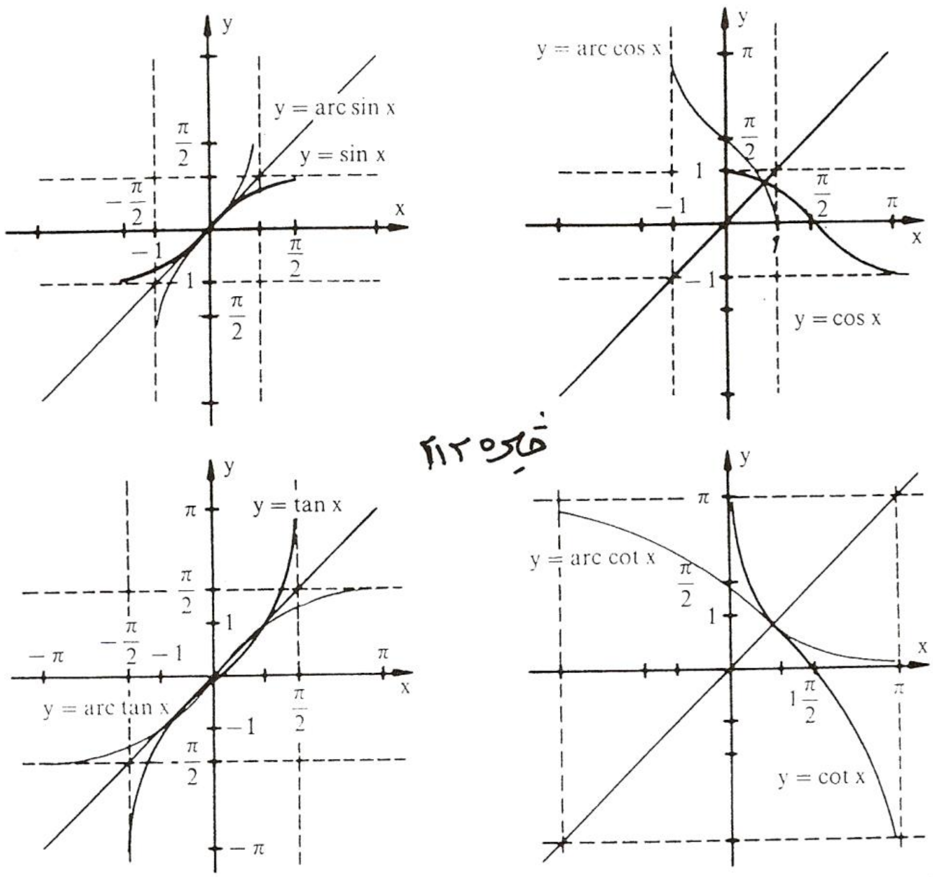
مختلفو واټنونو وروسته، بلواك ارزښتونه تکراريږي. د دې لپاره چې په څرګنېدنه ممکن شي، نو بايد د خپل تعريف ډيرى په يوه برخه ډيري رابند يا محدود شي.

تعريف : د يوه (رابند يا محدود) تريګونومتريکي بلواك په څټ بلواکونه ارکوس بلواك Arcusfunktion بلل کيږي يا څيکلومتريکي بلواك (لاتين :ارکوس Arcus = Bogen = لينده)

دلته (arc sin(x لوستل کيږي «د x ارکوس ساين. د کونجبلواك تعريفډيرى دلته اړونده ارکوسبلواك ارزښتډيرى دی او په څټ ارګومنت يا تعريفډيرى دلته تل يو رييلګڼ دی.

Trigonometrische Funktion تريګونومتريکي بلواك	Arcusfunktion ارکوسبلواك
$f\colon x \mapsto \sin(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$f^{-1}\colon x \mapsto \arcsin(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$
$f\colon x \mapsto \cos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 \le x \le \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$	$f^{-1}\colon x \mapsto \arccos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 \le y \le \pi\}$
$f\colon x \mapsto \tan(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$	$f^{-1}\colon x \mapsto \arctan(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
$f\colon x \to \cot(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid 0 < x < \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < x < \infty\}$	$f^{-1}\colon x \to \operatorname{arccot}(x)$ $\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \{y \mid 0 < y < \pi\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



شکله ۲۱۲

Beispiele: بېلګې:

1. $\arcsin(0{,}8) = 0{,}9273\,(\text{rad}) = 53{,}13°$

2. $\arccos(1) = 0\,(\text{rad}) = 0°$

3. $\arctan(-100) = -1{,}5608\,(\text{rad}) = -89{,}43°$

4. $\text{arccot}(-70) = -0{,}0143\,(\text{rad}) = -0{,}82°$

۵ – دا چې کونجبلواك و ارکوسبلاك يو د بل په ځې بلواك دي نو باور لري:

$\sin(\arcsin(y)) = y; \quad \arcsin(\sin(x)) = x$

$\cos(\arccos(y)) = y; \quad \arccos(\cos(x)) = x$

$\tan(\arctan(y)) = y; \quad \arctan(\tan(x)) = x$

$\cot(\text{arccot}(y)) = y; \quad \text{arccot}(\cot(x)) = x$

یعنې یو بل نږدې توګه هم

$\sin(\arcsin(0{,}4)) = \sin(23{,}58°) = 0{,}4$

$\arccos(\cos(\pi/3)) = \arccos(0{,}5) = 1{,}0472$

$\tan(\arctan(-40)) = \tan(-88{,}5679°) = -39{,}9999$

$\text{arccot}(\cot(60°)) = \text{arccot}(0{,}5774) = 1{,}0472$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جبشمیري کارونی یا استعمال لپاره

داچې پخوا معمول جدولونه د بلواك تعریفېدیري او ارزښتېدیري شمیرلو لپاره له کاره غورځول شوي دی او دنده یی ایلکترونیکي ماشینونو نیولی ده، غواړو چي د جبشمیري استعمال په هکله هم څه ووایو

کورکمپیوتر زیات وخت داسی فنکشنونه یا بلواکي لري یا وظیفی په کلك اختیار کی لري، چی د درجي اوړون په لینده کڅ او په څپ کوي، مګر شمیردرځ په توګه باید د شمیرونکی په پروګرام کی ځای په ځاي شوی وي.

پوره اسانتیاوې او زیاته کارونه د جبشمیرې په غاړه پرته ده، دلته دې توکمی د < .... > سره په نخښه شي:

په قاعده کی دریی بلواك ورکړشوي دي : < sin > ; < cos > ; < cot > کوتنجنت بیا داسی شمیرلکیدی شي، د < tan><1/x> . د < INV > – توکمي سره سړی ارکوسبلواك ته راځي: نو < INV><sin > ارکوس ساین دی. په عمومی توګه کونج – بي پروا که په لینده کڅ او یا درجه کڅ ورکړ شوي وي – باید د فنکشن له مخه ورکړ.

بیلګي

۱ لاندې جدول همغه د کارونی یا اتعمال لپاره د جبشمیري چمتووالی ښای :

Winkelmaß کونجګی	TR-Modus په نخښونه	Beispiel بیلګه
Altgrad زړه درجه	DEG	$\sin 45° = 0{,}7071$
Neugrad نوې درجه	GRAD	$\sin 50^{g} = 0{,}7071$
Bogenmaß لینده کڅ	RAD	$\sin \frac{\pi}{4} = 0{,}7071$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2.

Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
sin 45°	45⟨sin⟩	0.707106781	DEG
$\sin \frac{\pi}{6}$	⟨π⟩⟨:⟩6⟨sin⟩	0,5	RAD
cot 30°	30⟨tan⟩⟨1/x⟩	1.732050808	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	60(°)	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	$1.047 = \frac{\pi}{3}$	RAD
arccot 2	2⟨1/x⟩⟨INV⟩⟨tan⟩	26.56505118°	DEG
$\sin 220^g$	220⟨sin⟩	−0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چی جبشمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه ») د زاړه – یا نوي درجی همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جبشمیریو مودلونو سره د تکمی <DRG> څخه لاس ته راځی یا د بیلګي په توګه < MODE >.

د ورکړشوي درجه ګڼ اوړون په لینده کچ د < <– DRG > سره سورت نیسي.

بیرته یا په خټ سړی داسی راځي– لکه چی لرل مو– د <INV> – تکمی سره.

بیلګی

60°	⟨DRG⟩	60(rad)
60	⟨DRG⟩	60(grad)
60°	⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨DRG →⟩	60°
60°	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	60°

دلته ګراد نښونه (gard) نوی درجه ده یعنی ګون(gon).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځنې جشميري په دې برسيره نور زيات امکانات هم لري ، نتيجې يې په ګراد دقيقې، ثانيې اويا لسيز سيستم ورکړ شوي دي. بدلون بيا د تکمۍ <DMS-Dd> سره صورت نيسي:

26.75° 30°15′	⟨inv⟩⟨DMS − Dd⟩ ⟨DMS − Dd⟩	26°45′ 30.25°

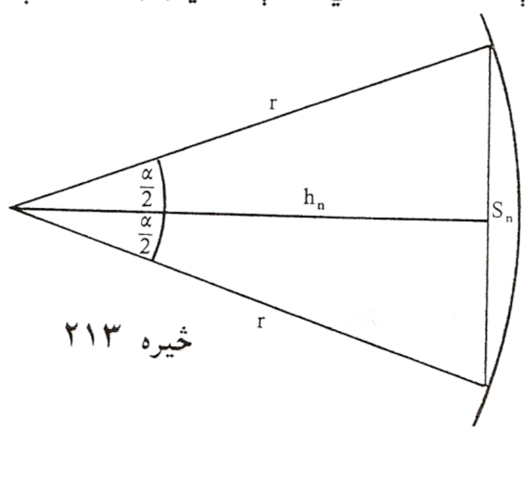
د " 30° 15" " ورکړه کيدی شي د جبشميري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جبشميری د لاس کتاب څخه ګټه واخستل شي (يادونه: زه پوهيږم چې داسی شيان موږ متآسفانه په خپل هيواد کې نه لرو ، خو په هر صورت يې ليکل ضرور دي، دا پرمختګ موږ هم خپل شاته نه شي پريښوولی)

پيلبيلګه: دلته دې S_n د يوه منظم n− ګوډي د اړخ اوږدوالی وي، چې په يوه ګردی کی چې وړانګه يې $r = 5$ cm ده، راګير دی.

الف) وښايي چې

$$S_n = 2r \cdot \sin(180° : n)$$

ب) د يوه داسی n− ګوډي چاپيری U_n وشميری ، چې $n = 8;16;32;128$ وي، او په نزدې توګه يا تقريبي د دې ګردي چاپيری د دې وړانګې r سره وښايی .



خیره ۲۱۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په همدې ډول n– ګوډي له هوارو A_n څخه په نزدې توګه يا تقريبي د ګردی ـــ هواره A ونبايي .

اوبی (حل : هر n– ګوډی کيدی شي په n مساوي دريګوډيو ټوټه کړی شي.

د هغو د ځينتريکونج ∝ لپاره باور لري $\propto = 360° / n$. د جګی يا جګوالی h_c

د کنبلو سره په هر مساوي پښيز دريګوډي کي ولاړکونجيزې نيايی د ځنتريکونج يا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\propto}{2} = 360° / 2n = 180° / n$$

بر سيره پر دې صدق کوي

$$(S_n /2) / r = \sin\frac{\propto}{2} \Rightarrow S_n = 2r . \sin\frac{\propto}{2} = 2r . \sin(180° / n)$$

b) $U = n.S_n = 2r.n.\sin(180°/n) = 10n.\sin(180° / n)$

د ارزښتشميرنو د غلطۍ مخنيوی لپاره همدفمند يا موخه ور دی، که په دغه همغه لړپيرلپسی تکمی وکارول شي يا استعمال شي .

```
180° ⟨STO⟩ ⟨:⟩   8⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩   8⟨·⟩10⟨=⟩ 30.614675
     ⟨RCL⟩⟨:⟩  16⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩  16⟨·⟩10⟨=⟩ 31.214452
     ⟨RCL⟩⟨:⟩  32⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩  32⟨·⟩10⟨=⟩ 31.365485
     ⟨RCL⟩⟨:⟩  64⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩  64⟨·⟩10⟨=⟩ 31.403312
     ⟨RCL⟩⟨:⟩ 128⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 128⟨·⟩10⟨=⟩ 31.412773
```

پ) د ډيرګوډي هواره د دريګوډيو هوارو د يوځايوالی څخه لاس ته راځی

د هر دريګوډي هواره ده: $0,5 .S_n . h_n$. د

$$h_n = r.\cos(180° / n)$$

او

$$S_n = 2r . \sin(180°/ n)$$

له امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = n \cdot 0{,}5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0{,}5 \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$$

له دې سره د ندې [illegible]

```
360° ⟨STO⟩ ⟨ : ⟩   8 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩   8 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 70.710678
     ⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩  16 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩  16 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 76.536686
     ⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩  32 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩  32 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 78.036129
     ⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩  64 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩  64 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 78.413712
     ⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 128 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨ · ⟩ 128 ⟨ · ⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 78.508279
```

د يوه جشميرې سره ، چي له يوې زخيرې زياتی ولري ، لکه چی پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسيره نورې ثابتي هم زخيره کيدی شي» په يوه منظم پروګرامور ماشين سره کيدي شي چي د دا ډول شميرنو لپاره د ګوډونو ګڼ ځخه ت شو يا د ګوډونو ګڼ باند ې صرفنظر وشي .

د تريګونومتريکي بلواکو خويونه

دا چی کونجکچ په درجه کچ او هم په لينده کچ ورکول کيدی شي، کيدی شي چی يوه کونج بلواك تعريفېدېری يا α او يا x وي. ددې لپاره چی د يوه بلواك خوي باندې ټينګار وکړو، بايد په لاندې په لينده کچ تکيه وکړو.
د لاندې خويونو لمړی ډله يواځي له تعريفمساوات (د مخه راغلی) او د پيتاګوراس له جملی لاس ته راځي (د مخه لوستل شوې) لاندې صدق کوي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پرته کاتیت}} = \frac{\frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}}{\frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دي لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \iff \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسیره پر دي لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دي سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x \;;\quad 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تریګونومتریکي بلواکو کی هیله ده ، چی د پوتنځ لیکدود په پام کی ونیسی.
په لاندي پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

په لاندي کی gegeben ورکړی او gesucht غوښتونی یا پلټونی په مانا دي

gegeben ورکړی / gesucht غوښتونی	sin x	cos x	tan x	cot x
sin x	sin x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

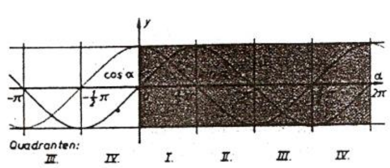
$\cos x$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\frac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
$\tan x$	$\pm\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cot x}$
$\cot x$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$	$\cot x$

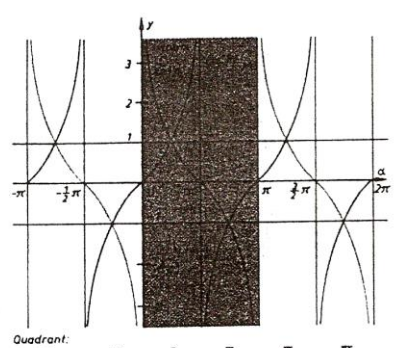
لکه چی د مخه مو په ګوته کړل، کیدی شي چی تریګونومتریکي بلواك د مختلفو ګونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواك ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توګه یا په کلکه توګه لاس ته راوړی شو

تعریف : تریګونومتریکي بلواك ټول پریودیکي یعني بیرته راګرځیدونکی دی، دا په دې مانا، چی د بلواك ارزښتونه په منظمو واټنونو کی تکراریږي. په دې د ساین بلواك او د کوساین بلواك راګرځیدنه (یا ۳۶۰ درجی) لري، کوتنجنتبلواك راګرځیدنه (یا ۱۸۰ درجی ($180°$)) لري.

$$\left.\begin{array}{l}\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x \\ \tan(x \pm k\pi) = \tan x\end{array}\right\} \quad k \in N$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x \\ \cot(x \pm k\pi) = \cot x\end{array}\right\} \quad k \in N$$





خیره ۲۱۴

د ساین - او کوساین فنکشن پیریودیکي راګرځیدنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت او کوتانجنت فنکشنونو پریود یا تل بیرته راګرځیدنه:

بیلګې:

بیلګې :

$$
\begin{array}{lllll}
\sin 50^\circ & = \sin(50^\circ + 360^\circ) & = \sin(50^\circ - 720^\circ) & = 0{,}76604 & \\
\cos -30^\circ & = \cos(-30^\circ - 360^\circ) & = \cos(-30^\circ + 1080^\circ) & = 0{,}86603 & \\
\tan 2{,}5 & = \tan(2{,}5 - \pi) & = \tan(2{,}5 + 5\pi) & = -0{,}74702 & \\
\cot 10 & = \cot(10 + \pi) & = \cot(10 - \pi) & = 1{,}54235 & \\
\sin 35^\circ & = \sin(180^\circ - 35^\circ) & = -\sin(180^\circ + 35^\circ) & = -\sin(360^\circ - 35^\circ) & = 0{,}573576 \\
\cos 35^\circ & = -\cos 145^\circ & = -\cos 215^\circ & = \cos 325^\circ & = 0{,}81952 \\
\tan 0{,}6109 & = -\tan 2{,}5307 & = \tan 3{,}7525 & = -\tan 5{,}6723 & = 0{,}700208 \\
\cot 0{,}6109 & = -\cot 2{,}5307 & = \cot 3{,}7525 & = -\cot 5{,}6723 & = 1{,}428042
\end{array}
$$

که د فنکشن ګراف ته په ځیر شو، نو برسیره پر دې روښانیږي:

x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	
$\sin x =$	$\sin(\pi - x) =$	$-\sin(\pi + x) =$	$-\sin(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\cos x =$	$-\cos(\pi - x) =$	$-\cos(\pi + x) =$	$\cos(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\tan x =$	$-\tan(\pi - x) =$	$\tan(\pi + x) =$	$-\tan(2\pi - x)$	(Abb. 180)
$\cot x =$	$-\cot(\pi - x) =$	$\cot(\pi + x) =$	$-\cot(2\pi - x)$	(Abb. 180)

بیلګې:

	α	$180^\circ - \alpha$	$180^\circ + \alpha$	$360^\circ - \alpha$
	35°	145°	215°	325°
sin	0,573576	0,573576	– 0,573576	– 0,573576
cos	0,819152	– 0,819152	– 0,819152	0,819152
tan	0,700208	– 0,700208	0,700208	– 0,700208
cot	1,428148	– 1,428148	1,428148	– 1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځې د جبشمیرې یا کمپیوټر څخه کار اخستل کیږي ، هدفمند بولو، چې یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin x bzw. sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos x bzw. cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
tan x bzw. tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	–	0
cot x bzw. cot α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

دلته د همداډول یا همداسي په معنا دی

له دې جدول څخه کیدی شي په خیال کی یا ګوماني لاس ته راوړی شو

sinx = cos (/2 -x) cos x = sin (/2 -x)

tan x = cot (/2 - x) cot x = tan (/2 -x)

دا ګومان کیدی شي په ولاړکونجیز دریګوډي کي د تعریف په مرسته په ساده توګه وښوول شي. :

sin = a / c او cos ß = a / c

د – ß = 90° له امله لاس ته راځي :

sin = cos (90° -)

په ورته توګه نور ې غوښتني هم لاس

ته راتلی شي.

دا له څیرو څخه هم لاس ته راوړل کیدی شي، څکه د ساین او کوساین بلواکو یا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنت بلواکو ګرافونه د 2/ = x کرښی ته یو بل سره محورسیومتري څغلي :

له څیرو او بیلګو څخه په دې برسیره لاس ته راځي:

تعریف: د کوساین بلواك جفت دی ، لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

ساین – ، تنجنت – او کوتنجنت بلواك ناجفت دي» د دوي لپاره باور لري:

$$\sin(x) = -\sin(-x),\ \tan(x) = -\tan(-x)\ ;\ \cot(x) = -\cot(-x)$$

یادونه : په دې نلواکو کې کیدی شي چی x له نوکانو دباندې هم وي:

بیلگی:

$$\sin 60° = -\sin(-60°) = 0{,}86603$$
$$\cos 0{,}75 = \cos(-0{,}75) = -0{,}70711$$
$$\tan 150° = -\tan(-150°) = -0{,}57735$$
$$\cot 1{,}3 = -\cot(-1{,}3) = o{,}27762$$

د زیاتون قضیي یا تیورمونه

دا چي کونجبلواك لاینی نه دي(د فنکشنگراف کرښه نه ده،بلکه کږه ده) ، نو ډېل تعریفهیري پورې ساده ډېل بلواك ارزښت اړه نه لري.
لکه

$$\sin 30° = 0{,}5 \quad \sin 90° = 1 \quad \sin 180° = 0$$

د داسی په نامه زیاتونمسئلی په مرسته ممکن کیږي، چی د بلواك ارزښت د کونج په دوه برابرولو یا په همدې ډول د دوه کونجونو پو په بل زیاتولو د یوگونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابي کړی شو.

بیلگی :

1. $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

1'. $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2 . $\cos(x + y) \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

2 '. $\text{cis}(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

3 . $\sin 2x = 2.\sin x \cdot \cos x$

4 . $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

6. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

7. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 - \cos x)}$

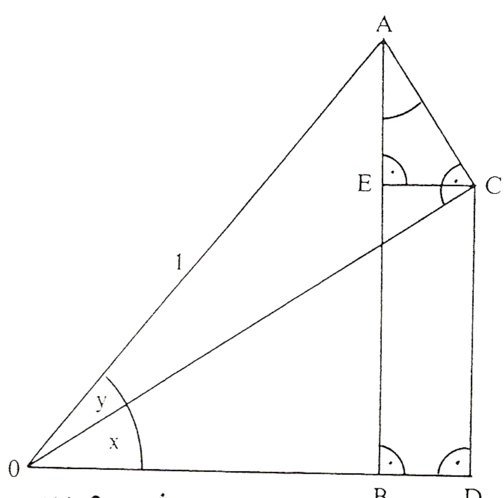
8. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 + \cos x)}$

9. $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

9′. $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

10. $\cot(x + y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$ mit $\cot x \neq -\cot y$

10′. $\cot(x - y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y}$ mit $\cot x \neq \cot y$



خیره ۲۱۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. und **2.**:

$|OA| = 1$

$|AC| = \sin y; \quad |OC| = \cos y$

$|AB| = \sin(x+y); \quad |OB| = \cos(x+y)$

$$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

$$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

برسیره پر دې لرو:

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$
$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

د کای په ځای کولو څخه ښوونه په لاس راځي

$$\sin(x+y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1'. **2'.**:

3. **4.**: $x = y$. ځای پر ځای کړه

5.: Setze $z + t = x$; $z - t = y \Rightarrow z = \frac{x+y}{2}$; $t = \frac{x-y}{2}$ کېږده

پس نو

$$\sin x = \sin(z+t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$$
$$= \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin y = \sin(z-t) = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$ همداسې

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

6. ښوونه پر ورته توګه بشپړه کړئ

7.: $x = y = z/2$ کېږده

$$\Rightarrow \cos(x+y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2\frac{z}{2} - \cos z \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریښنه نیونې له لارې ښوونه لرو

په (*) $\sin^2 z/2$ کې $1-\cos^2 z/2$ کیږده:

۹ – ۱: دا اړیکې له ۱ او اوم او تانجنت پیژند څخه لاس ته راځي

بلواك يا فنكشن $y = a . \sin(bx+c) +d$

لكه چې په پيل كې مو وويل په طبيعت او تخنيك كي ډيرې پيښې شته دي چي تل بيرته راكرځي يا لنډ: راګرځي، يعني پريوديكي دي. د دې د تشريح لپاره په خپل سوچه يا خالصه بڼه تل د ساين بلواك بسيا نه كوي.
دا زيات علتونه لري : لمړی د ساينبلواك د ۱- او ۱ ترمنځ ارزښت نيسي، له بلې لور داواقعي د كونج په واك كی نه دي بلكه د وخت په واك كي دي د يوې راګرځيدنی سره، چی دا په ساده توګه د 2 په ډول نه شي رانيولكيدی. له دې امله د ساين بلواك د دې كارونو د روښانوولو لپاره بايد موډيفيځير شي يا يی بڼه واوړي. دا بڼه اوړون او د هغی تاثير په لاندې ليدنه كی راڅول شويدي، ګراف يی ورزياتی څيرونی لپاره دی. په ورته ډول د نورو كونجبلواكو لپاره باور لري په عمل كي مګر يواځي د ساينبلواك (په همدې توګه د هغي مخامخ د كوساين بلواك چي په $\pi/2$ سره راكښل شوی وي) د مانا ډك دي. (لوستل: له ښي لور څخه)

بیلګی	دکارونی ساحه	تاثیر	بلواك
څېره ۲۱۷	ټولی تلبيرته راګرځيدونی تعامولونه		$y = \sin(x)$
څېره ۲۱۸	د یوه مساوي او بدل شپیلونډ یو به بل پرلوتل	د y - لور ربانږي راکښنه	$y = \sin(x) + d$

y = sin(x+c)	د فاز تغیر یا ځای بدلون	په بدل برېښنا جریان کې د برېښنا او ښیالونک تغیر دوبښالونه	شېره ۲۱۹
y = a . sin(x)	د امپلیټود د ځای بدلون فاکتور -1 د 180° فاز ځای بدلون دی	دیوه پندول خوځېدنه	شېره ۲۲۰
y = sin(bx)	د پریود تغیر یا بدلون b>1 سرعت 0<b<1 په کرار کېدل b <0 په شا ګرځېدنه کم محور دی	دیوه بنسټیزې ځړېدې خپړونه په یوه وخت دا چې نه زه رهڅې بوټه لیمزه له تکه په د نوزېږ الو په اوازولوکی	د شېره ۲۲۱
y = a . sin(bx+c)+d	عمومي حالت	کمپلکس پریودیک جریان یا عمل	شېره ۲۲۲

تمرینونه

۱ – د لاندې ورکړې سره ښېره بله کړی

4°6' = 4,1° ; 10° , 5' = 10°30

a) 6,75° = b = 120,48° = c) -75,65° =

d) 52°16' = e) 97°13' = f) 44°44' 44" =

۲ – په درجه کچ ي وليکی

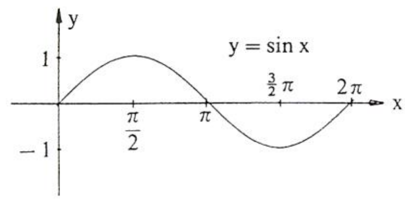
a) x = π/3 , b) x = -π/4 , c) x (2 /3)π

d) x = 4 e) x = -3 f) x = 4,7

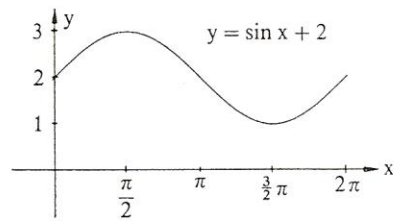
۳ – په لینده کچ يی وليکي

a) 15° b) -60° c) 540° d) 20°15' e) 15,75°

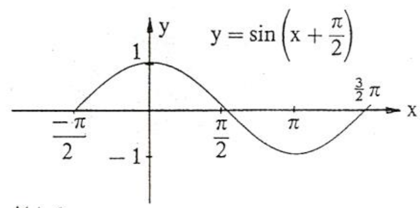
(c) ketabton.com: The Digital Library



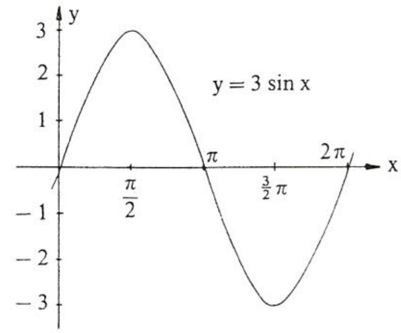
شیره ۲۱۷



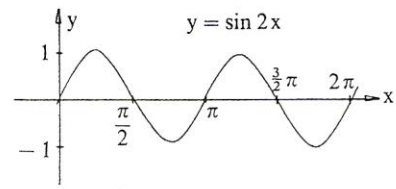
شیره ۲۱۸



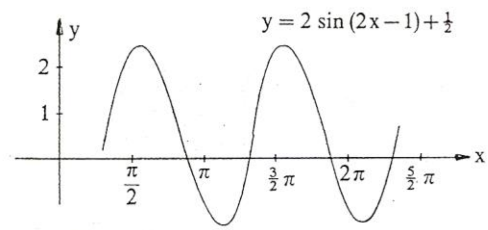
شیره ۲۱۹



شیره ۲۲۰



شیره ۲۲۱



شیره ۲۲۲

د دې بلواك ګراف د ساين كږې $y = \sin x$ څخه لكه چې ګورو لاس ته راځي:

۱ – د ارزښت دوه ځله کيدل

۲ – د نيمی راګرځيد اوږدوالی باندې پرسيدنه

۳ – په يوه يوون د ښي لور ته راکښنه

۴ – په 1 / 2 پورته لورته 100% راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – وټاکی

a) sin20°   b) sin(-30°)   c) sin 172°   d) din1°4'

e) cos 35°   f) cos 380°   g) cos(-27°)   h) cos47,9°

i) tan 11°   k) tan (-15°)   l) tan 33,33°   m) tan 13°13'

n) cot 870°   o) cot (-11°)   p) cot 14°14'

q) cot (-2°2')

r) sin α =0,8   s) cos α = 0,9   t) tan α = 2,5

u) cot α =-1   v) sin φ = 0,3   w) cos φ = -0,13

x) tan φ = -4   y) cot φ = 0,3   z) arcsin(x) = π /2

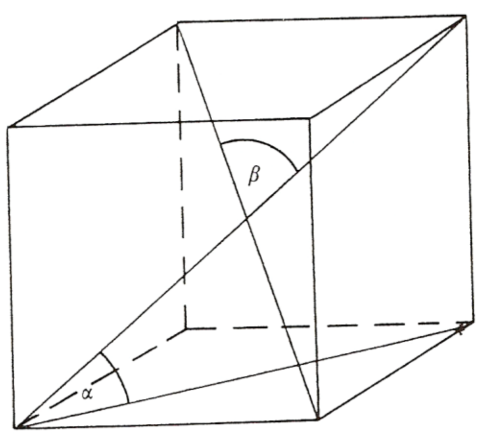
۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی لرو $\gamma = 90°$ او په دې برسیره :

a) a = 7 cm; b = 6cm

b) a = 16cm; = 66°45'

c) c = 5cm; a = 3cm

پاتی ټوټی وشمیری



خیره ۲۲۳

۶ – په مساوي پښیز دریګوډي کي (a = پښه ده) دی

a) a= 10cm ; α =80°40'

b) a= 12 cm ; h = 8cm

c) ß = 40°; a = 7cm

پاتی ټوټي وشمیري

۷ – د یوه پڅکونجیز (α > 90°) دریګوډي لپاره ساین وشمیری

۸ الف) کوساین د یوه پڅ کونجیز دریګوډي لپاره وشمیری (α > 90°)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟

۹ – په یوه مکعب کی د یوه هوا نیمي او بنستهواري ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

څیره .د دواړو هوا یا فضا یا بدن نیمیو ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

۱۰ – د دوه ګردیو وړانګی

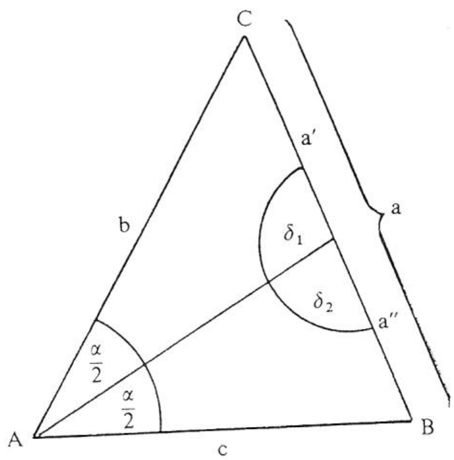
$r_1 = 5\ cm \quad , r_2 = 4\ cm$

دي او همداسی د منځټکو واټن $|M_1M_2| = 8cm$ ورکړ شوی دی.

دد دواړو ګردیو د تماس

مماسونو غوڅکونجی وټاکی

او د کړې غوڅونی اوږدوالی .



څیره ۲۲۴

۱۱ – په یوه دریګوډي کی د یوه

کونجنیمی مخامخ اړخ په داسی

ځان نیونه یا تناسب غوڅوي لکه

په دې پرتي خواوې. دا غوښتنه د

ساین جملی په مرسته حل

(اوبی) کړی(څیره۲۲۴).

۱۲ – که یوه بار ځاي ته،

چي ۱،۵۰ متره جګ دی،

یوه زینه ورجګه شي

میلانکونج ∝ دې زیات ترزیات 33° وي، زینه دې څومره لویه وي؟

۱۳ – الف)د یوې پورته ختلی کوڅي جګوالي توپیردې څومره وي، که دا کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او 12% جګه وي؟

ب) د ۱۵۴۰ پرتی لارې وهلو وروسته د جګوالي توپیر څومره دی ؟

پ) د یوه زوړندې پټیلار، چی ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کی څومره لوي دی ، که دا د جګوالی توپیر ۵۰۰ متره ولري؟

یو د اوبنی یا د اوبو بیلر (کله= ۱۰۰ کیلوګرامه) په یوه پورته خیزول کیږي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

میلانکونج $\measuredangle$ = 25° لري. د وزنزور په زوړندزور تختی سره غبرګ او نورمال یعني ولاړ زور(د فشارزور) ولاړ تجزیه یا توټه کیږي، دواړه زوره څومره لوي دی ؟ (۱ کیلوګرام = ۹ ، ۸۱ نیوټن 1 kg = 9,81N).

۱۵ – یو تلفونستن په څلور رسیو، چی هره یوه یی **۵۳** متره اوږده ده، درول کیږي. درسیو میلانکونج 60° دی په ښه باندي په کوم جګوالي باید رسی وړلی شي ؟

۱۶ – د یوې **۵۳** متره جګي ونی سیوری **۵** ، ۱۲ متره اوږد دی. په ځمکه لمروړانګي په کوم جګوالی یوبل سره مخمامخ کیږي.؟

۱۷ – د یوه **۵** متره جګ کتونټکي (لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کیږي چی جګیدونکوج یی $\measuredangle$ = 18,5° او ښیتکی یی ß=8° لوید کونج ، برج څومره جګ دی ؟ د لیدټکي څخه یی پروت لریوالی څومره دی ؟

۱۸ – الف) د پیزا (Pisa) کوږ برج ۴۷ متره جګ دی، او څوکه یی د ښی ټکي څخه ۵۰ ،۴ متره ور اوړي. دا برج څومره مایل دی ؟

ب) د یوه جومات برج چی ۱۵۰ متره جګ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په ځمکي ټکي (یعنی د سترګي جګوالی د برج بنستټکي سره برابر وي)، څخه وکتل شي، چی د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟

پ) د ۵، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کیږي

– که جګوالی یی ۱۶۰ متره وي؟

– که جګوالی یي ۱۳۷ متره وي ؟

ت) د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې

– د بل برج څوکه ښکاریږي چی جګوالی یي ۱۴۳ متره وي ؟

–د پاریس د ایفل برج ښکاریږي چی جګوالی یي ۳۰۰ متره دی ؟

۱۹ – د ښیپپس اهرام(CHeopspyramide) ۱۳۷ متره جګوالی لري او د بنسټ

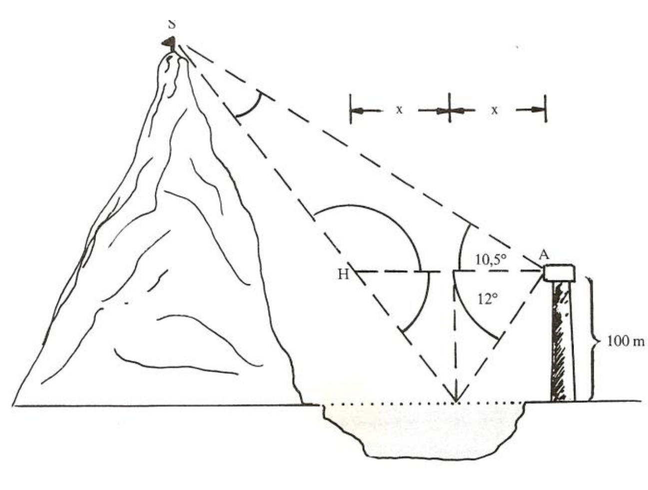
(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري
الف) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟
ب) د څنگهوارې دریواړه دنننی کونجونه څومره لوي دي؟

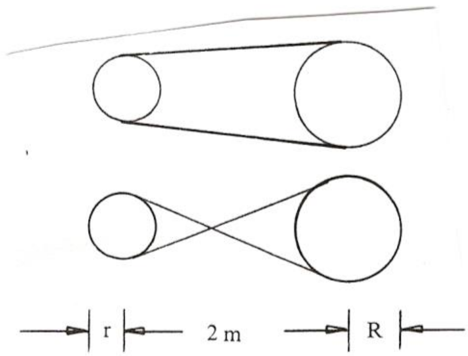
۲۰ – یو ژوری یا قبر –۸ ، ۱ متره ژور دی، بنسټسور یی ۵ ، ۲ متره دی، د پورته لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی
الف) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی څومره پراخ دی؟
ب) که ۱۰ متره اوږد وي، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جگوالی یی ۵۰ ، ۱ متره وي؟

۲۱ – یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جگوالی لري د بحیرې لور ته $14°$ میلان لري، د دننه لور ته $28°$ میلان لري. د ډنډ بنسټ څومره سور لري؟ د هغی د نیمی هواره څومره ده؟

۲۲ – د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو ښه لید د ماترهورن (ماترنښکر یا د ماترن د غره څوکه Matterhorn) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی دی) اچول کیږي که دا د یوه لیدتکي څخه چی ۱۰۰ متره جگ دی د ډنډ په لور ښکته وکتل شي، نو د غره د څوکي هندارونه د $12°$ پریوتکونج لاندې لیدل کیږي. د غره څوکه د یوپورته کونج $11°$ لاندې لیدل کیږي. د ریفلډنډ باندې د ماترنښکر څوکه څومره جگه پروته ده؟
څیره



(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۲۶

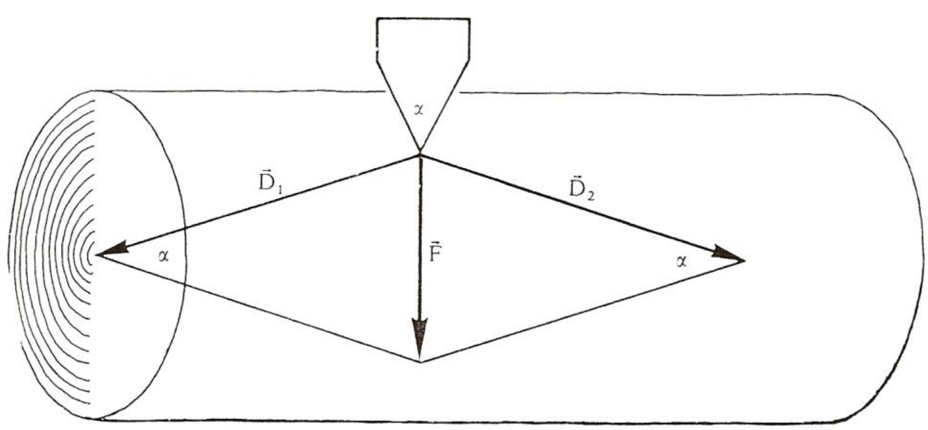
۲۳ – الف) یوه د کشولو کړی، چي په دوه دکښولو چیترو باندې راتاو ده، څومره اوږده ده، که لاندې اندازې ولري $r = 22\text{ cm}$, $R = 35\text{ cm}$, $|M_1M_2| = 2m$?

ب) دا کړی به څومره اوږدې وي که د اهیران په څیر له چیتروګانو یا تیکلیو ډاکې څیدلی وي ؟

---

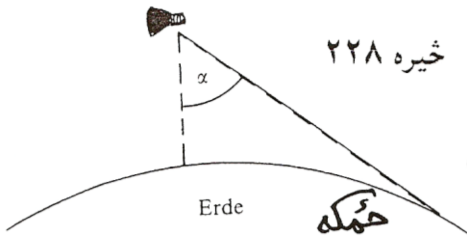
۲۴ الف) د ونی په ستنه یو کایل)موږی) په ختك د D زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه D څومره لوي دي، کوم چی د ستنی درځونه ، که د کایل یا تبرګي کونج $\alpha = 6°$ وي. (حیره ۱۹۴)؟

ب) په کومکایلکونج یا تبرګیکونج لرو: $|D| = |F|$ ؟



خیره ۲۲۷

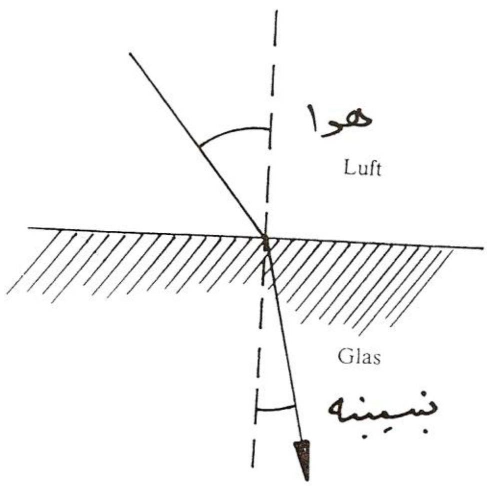
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۲۸

۲۵ – د یوه الوتماشین څخه ځمکه د یوه ∝ کونج لاندې لیدل کیږي (خیره) دا الوتماشین څومره جګ الوزي ؟ (د ځمکی وړانګه : ۶۳۷۰ کیلومتره)

۲۶ – یو ګادی د $v_\propto = 120km/h$ سرعت سره روان دی، نو د باران څاڅکی په پټلی د تلنلور باندې په $115° =$ کونج



خیره ۲۲۹

د چیترو (مطلب د ګاډې د اوسپنی تیر یا ګاډیل دی) مخامخ ځغلي. له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو د لویدلو سرعت v_g وټاکی ؟

۲۷ – که د لمرووړانګه په دوه مختلفو طبقو ولویږي، نو خپلی لور ته تغیر یا بدلون ورکوي. د سنیلیوس Snellius د ماتقاعدې له مخی کیدی شي چی د ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون وايي، چی پروتوړانګه ، ماتوړانګه او ولاړکربښه یا عمود په بیلیدونکی هوارې په یوه هواره پراته دي او برسیره پر دې لاندې اړیکي باور لري یا صدق کوي:

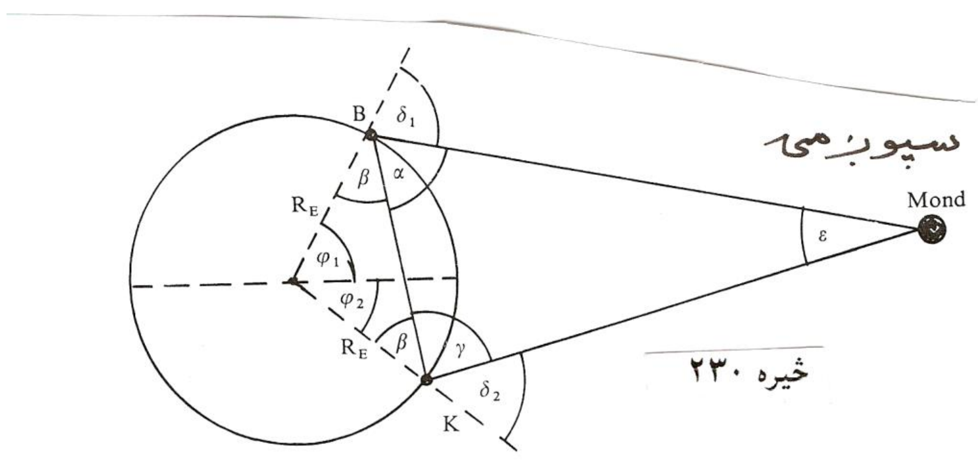
$$\sin \propto \ / \ \sin \beta = n$$

که د رڼاوړانګه په یوه ښیښه (اوبو) پریوزي، نو $n = 1,5 \ (1,33)$ دی وښايي، چی ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چی په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

$10,5°, 15,8°, 27,3° , 41,2°,67,6°,, 72,4°, 81,9°$ ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۸ – په ۱۸ ا–مه میلادي پیړی کی د سپوږمی لریوالی تریګومتریکي وټاکل شو. په برلین کی (جغرافیوي اوږدوالی $\varphi_1 = 52,52°$) او لکه د ښو هیلو په کونج کی ($\varphi_2 = -33,93°$)، کوم چی په همغه اوږدګراد پراته دي، د سپوږمی سره په همغه وخت کی تړل کیږي. له دې لاس ته راغلل:
$\delta_1 = 32,08°$ او $\delta_2 = 55,72°$.
وشمیری $|KM|$, ß , $|BK|$ او له دې څخه d_{EM} .



خیره ۲۳۰

۲۹ – لړځیدنیSchwingungen تل د وخت په اړه شمیرل کیږي یعني د وخت t تړواك لاندې دي. دا د بلواك $y = a . (\sin(2\pi/T)) .t + k)$ له لارې ورکړ شوي. دلته $(2\pi/T)\, t = x$ هغه کونج دی ، کوم چي په T وخت کی وهلکیږي. $1 / T = f$ د یوه څرخون پریود یا راګرځیدنی وخت په ګوته کوي او د لړځیدنی دوام بلل کیږي» f فرکونځ frequenz بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولو راګرځیدونکو هوارو زیاتون، دباندې هوارې، او ډکي یا حجومونه، د هوارو متن ټولګی سره ده.
ډکي یا حجمونه په مکعبمتر m^3 په همدې توګه د مکعب متر برخه یا څو واره باندې ورکول کیږي، چې یو په بل اړول یی، لکه چی لاندې ګورو، ساده دي

$$1\ m^3 = 1m.1m.1m = 100cm^3.100cm.100cm = 1\ 000\ 000\ cm^3$$

یعنی :

$$1km^3 = 10^9\ m^3$$

$$1m^3 = 10^6\ cm^3$$

$$1cm^3 = 10^3\ mm^3$$

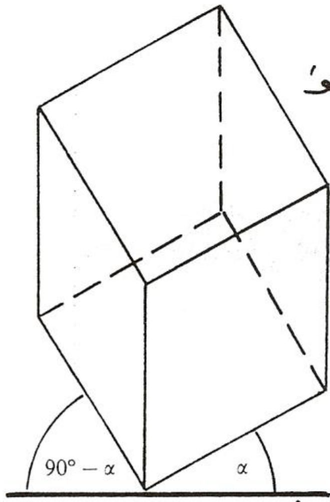
$$1mm^3 = 10^9\ \mu m^3$$

برسیره پردې په پیچلو شکلونو باندې باید یو لیدونکی یا اوپتیکي نظرلاس ته راوړی شو.

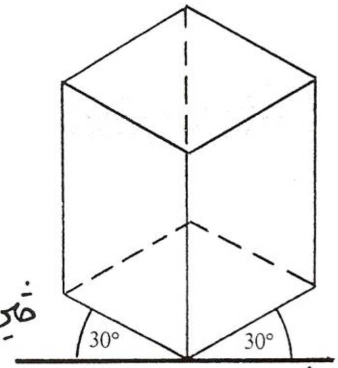
د هندسي بدنونو یا تنونو رسمول

په پرینځیپ کی د بدن درې ډوله ګرافیکي انځورونه موجود ده. دام کی ګیرونه ، مایل انځورونه، او درېتخته ئیز پرویکشن Projektion (دریتیخته ئیز پریوستون).
دا هروي یی مختلفې دندې سر ته رسوي.
د دام ګیرونه اصلاً ددې لپاره په کار راځي، چی د بدن ټوله دباندې هوارې وښولی شي. دا که چیرې راګردي پریکړی شي او سره ونښلول شي، نو د هغه بدن څیره جوړولی شي.

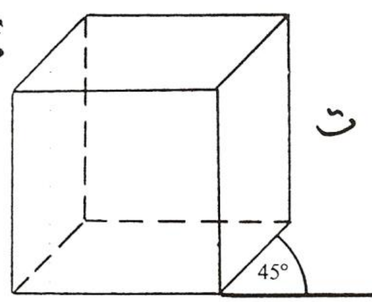
(c) ketabton.com: The Digital Library



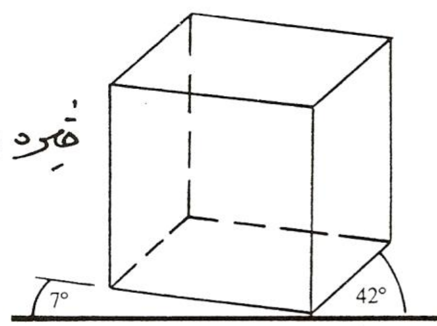
Parallelperspektive:
Militärperspektive



Parallelperspektive:
Isometrie



Parallelperspektive:
Kavaliersperspektive

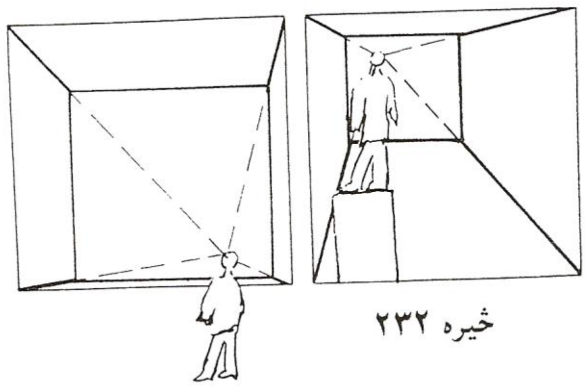


Parallelperspektive:
Dimetrie

د استعمال وړ د نظراچولو (د نظر لاندې راوړلو) کښل، مايلځيره کښل دي. دا هوايي پراخيدنه واضح کوي. دلته د کاوالير پرسپکتيو (مائيل له پورته) او يوه (چينهښی پرسپکتيو (مائيل له ښکته) ترمنځ توپير کيږي، مګر د دواړو ترمنځ لاندې ګډه قاعده موجود ده: ليدونکي ته جبهيي (فرونتال) ځغليدونکی لاينونه په

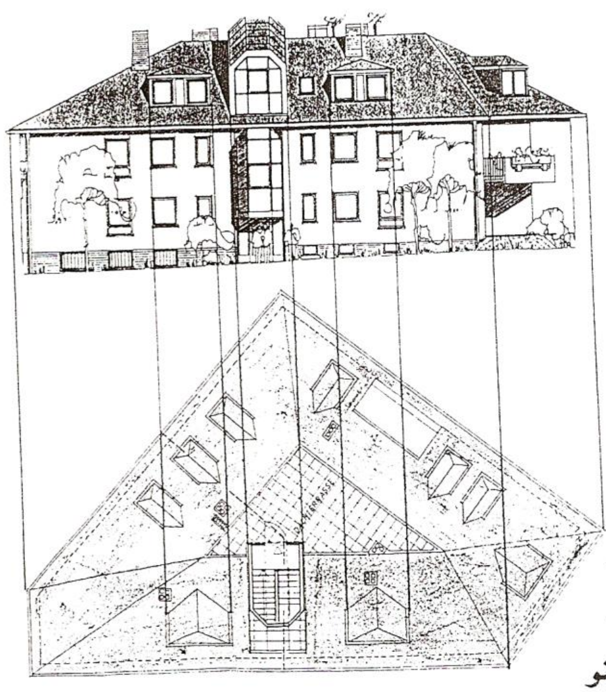
(c) ketabton.com: The Digital Library

نورمال اوږدوالي، له ليدونكي لرې ځغليدونكي لاينونه مائيل او په لنډ ډول كښل كيږي. لنډونه يې د كونج تر واك ده:



خيره ۲۳۲

پروت كونج	30°	45°	60°
لنډوونكى فاكتور	2/3	½	1/3



خيره ۲۳۳

په يوه پرسپكتيو مائيل جوړښت كى طبعاً ځني برخى او نه ځيره شوې د شا خواوي وركيږي، دا په دې مانا چې په كښلو كى نه راځي. له دې امله او په ځانګړي ډول كونجلرونكو بدنونو لپاره درې تختئيزپرويكشن (پريوستون) ګټور دى. دا يو درې ځلي ولاړ پريوستني له لارې منځ ته راځي (الف) بنستيز ضرز يا غوځي هواره، (ب) اړخيزغوځي يا درز هواره (پ) پورته درز يا غوځي هواره او دا زيات وخت په جوړښترسمونو كى استعماك مومي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

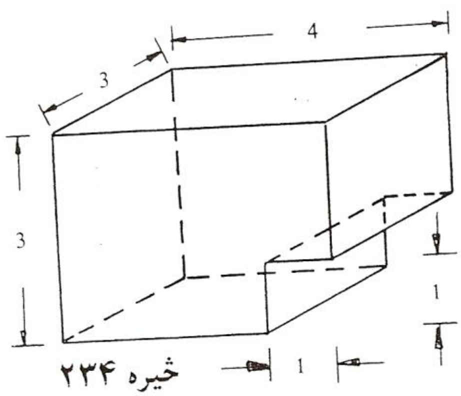
تمرینونه

۱ – د دې ثیره بدن څخه دریتختهییز پریوستون وکاږی

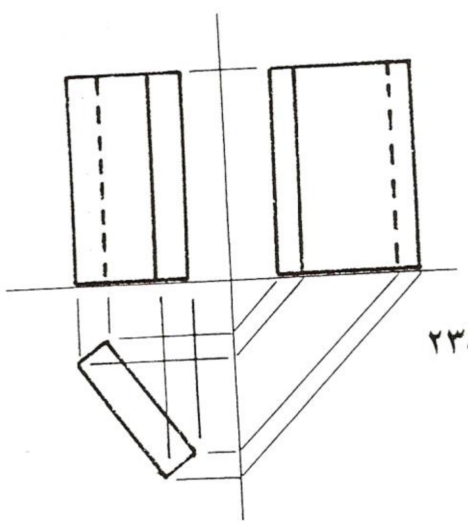
۲ ۰ ددې بدن مائئله ثیره وکاږی، کوم چی دریتخه ئیزه ثیره پورې اړه لري.

۳ – د یوې ولاړې ګردي توتی یا استوانی مایيلی ثیرې غوښتل کیږي، چی د بنسټ او ولاړ درځ له لاري ورکړ شوي وي.

۴ – یو شپږاړخي نل یا شپږڅنډیز نل وباسی په غبرګ پرسپتکیو انځورونی سره.



ثیره ۲۳۴



ثیره ۲۳۵

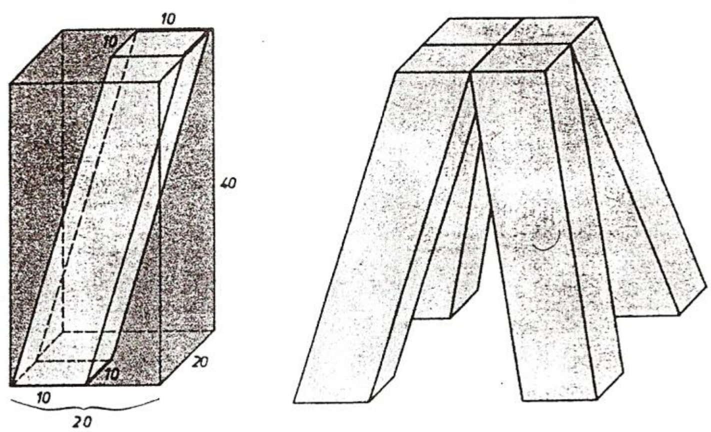
(c) ketabton.com: The Digital Library

پریزماوې Prismen

پیلبیلګه :

۱ = د یوه ستنویا تیرپښو جوړ میز یا Podestپودست(لکه په څیره کې کښل شوی میز) د لاندې جوړښت لپاره یو پښ باید څلور پښې د څلوراړخیز لرګیو په څیره شوي شکل اره کړي. یوه پښه څومره ډکې (حجم) لري ؟

. $V = 10^2 . 40 = 4000cm^3$



څیره ۲۳۶

۲ – د یوګاولاړې یا مستقیمې پریزما چې جګوالی یې 12 cm دی دباندې هواره او ډکې (حجم)، چې ځمکه او سر یا سرپوښ یې یو سیومتري تراپیځ وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

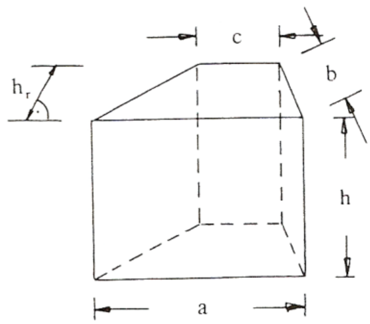
د اړخونو د اوږدوالي $a = 10$ cm , $c = 6$ او $h_r = 4$ cm سره څومره دی؟

د تریخ هواره

$$h_r.(a+c) / 2 = 4.(10+6)/2 = 32 cm^2$$

ده، نو ډکی یی په لاندي ډول دی:

$$V = G.h = 32.12 = 384 cm^3$$



څیره ۲۳۷

د دباندي هواري لپاره د تریخ اړخ اوږدوالي b ته اړه شته .

دا د پیتاګوراس د جملی په مرسته لاس ته راوړو

$$b = \sqrt{16+4} = 4,47 cm$$

له دي امله دباندي هواره ده :

$$O = 2.G+ (2.b +a c),h$$

$$O = 64 +(8,84 + 10 +6).12$$

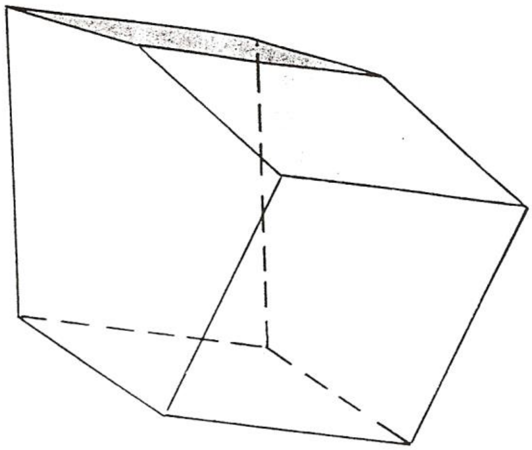
$$O = 363,28 cm^3$$

ساده بدنونه هغه دي، چی یواځي په ډیرګوډیو (پولیګونو) بند شوي وي یا یواځي له ډیرګوډیو راګیر وي، او ددې ترمنځ د بیلګي په توګه بیا پریزما ده.

تعریف Prisma : داسی یو هندسي بدن، کوم چی له دوه یو بل سره غبرګو او ګونګروالنځو پولیګونویاډیرګوډیو بند یا راګیروي پریزما بلل کیږي.

د بنسټ او پورته هوارې د کونګروالنځ له امله د اړخونو هوارې غبرګاړخیز دي. د پورته هوارې(چت) ولاړ اوږدوالی د پریزما جګوالی بلل کیږي. کیدی شي چی د

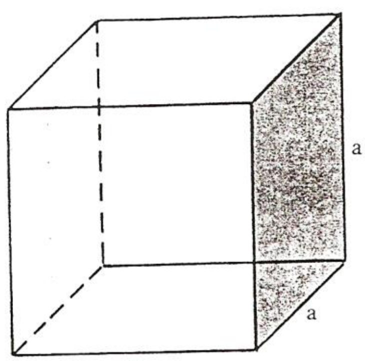
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۳۸

یوه اړخ اوږدوالی د جګوالي باور ولري، نو بیا له ولاړې پریزما غږېږو.

د ټولوخورامنظم او په دې ډول خورا ځانګړي پریزما شپږاړخیز یا مکعب دی (وورفل Würfel) . دا د دباندنی هوراو ۶ کونګروراینځ مربع خواوې لري، او ژۍ یا اړخونه(کانتی) یی یو په بل نیغي ولاړې دي.



خیره ۲۳۹

جمله : د یوه شپږ اړخیز یا شپږخوایز (مکعب) د دباندې هوارې O او ډکي (حجم) V لپاره باور لري:

$$O = 6a^2$$

$$V = a^3 = a^2 . a = G . h$$

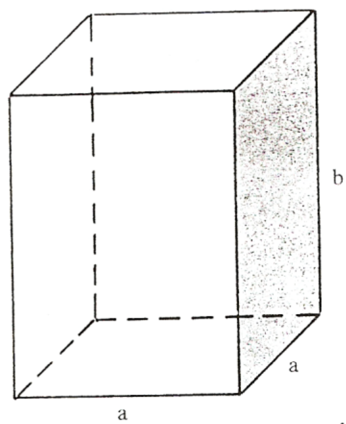
بیلګه : څه شی درونددی یو کورك(Quark یو شکل لرګي ډوله بدن دی، چی د بوتلونو خولی په پټېږي) مکعب چی د یوه اړخ اوردوالی یی 0,3 m وي او که یو د اوسپنی مکعب چی د اړخ اوږدوالی یي 8 cm (د کورك ۷ سختوالی g/cm³ ۰,۲ د اوسپنی 7,86 g/cm³)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چی د یوه بدن کتله m لاس ته راوړی شو، نو کلکوالی یا دینسټی یی د ډکي سره ځلوو.

د کورك مکعب ډکی : $V = (30cm)^2 = 27000\ cm^3$

$m = 27000cm^3\ .0,2g/cm^3 = 5400\ g$



ځیره ۲۴۰

د اوسپنی مکعب ډکی :

$V = (8cm)^3 = 512\ cm^3$

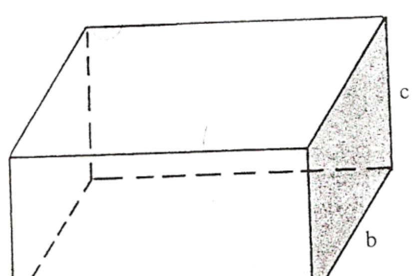
$m = 512cm^3\ .7,86\ g/cm^3$
$= 4024\ 32\ g$

د کورکمکعب له دې امله د اوسپنی د مکعب ته نزدې

34% [(5400-4024):4024 ~0,34]

دی. یا په بل عبارت، د کورك مکعب نزدې ۳۴ په سلو کی د اوسپنی د مکعب څخه دروند دی.

که د مکعب ستږه(ځمکه) یا بستې او چټ یا سر مربع پاتی شي او نورې خواوې یی تغیر کړي نو یوه مربع ستن(پېنبه) لاس ته راځي.



ځیره ۲۴۱

که ځمکه او سر هم یوه ولاړکوډېز ته «ټولیز» شي یا « عمومیت » پیدا کړي، نویو کوادر Quader منځ ته راځي. هغه درې مختلفی اړخنیمي، مګر مساوي هوا نیمي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ا هواقطرونه لري. دا د پيتاگوراس د جملی په مرسته شميرل کيدی شي.

جمله: د مربع ستن د دباندې هوارې او ډکې (حجم) لپاره صدق کوي:

$$O = 4ab + 2a2$$

$$V = a^2 b$$

د اړخونو نيميو اوږدولای په لاندې ډول دی

$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}$$

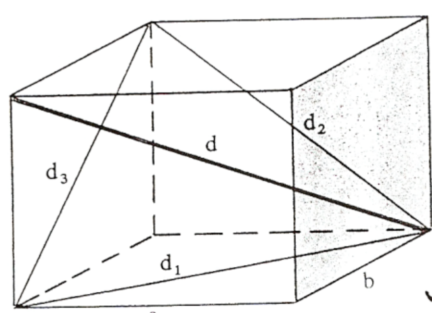
$$d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

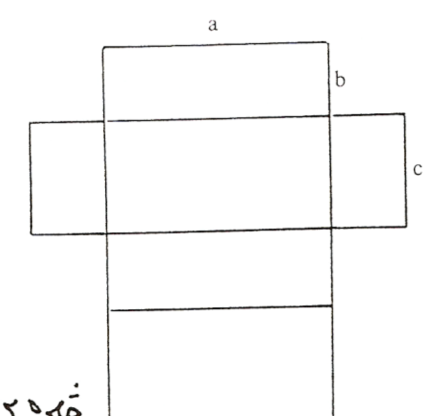
د هوانيميو لپاره صدق کوي:

$$d = \sqrt{d_1^2 + c^2} = \sqrt{d_2^2 + b^2} = \sqrt{d_3^2 + a^2}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

خيره ۲۴۲ الف





خيره ۲۴۲ ب

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: یو کوادر د کانتو اوږدوالی $a = 5cm$, $b = 4cm$ (بنسټیز هواره $a.b$) او $c = 12cm$ لري:

د پوښهواره: $M = 2.(5.12 + 4.12) = 216\ cm^2$

دباندې هوار. $O = 2.(5.12 + 4,12 + 5.4) = 256\ cm^2$

ډکی (حجم) : $V = 5.4.12 = 240cm^3$

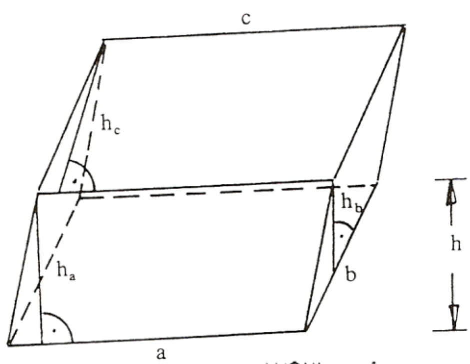
نیمي: $d_1 = \sqrt{25 + 16} = 6,40\ cm,\quad d_2 = \sqrt{25 + 144} = 13\ cm$

$d_3 = \sqrt{16 + 144} = 12,65\ cm$

$\Rightarrow d = \sqrt{25 + 16 + 144} = 13,60\ cm$

یوه مائیل څلوراړخیزه پریزما د جوړه یو بل سره غبرګو کونګروایڼځ څلورکونجیو سره غبرګ اپیپت یا شپات یا په بل عبارت غبرګهواریز بلل کیږي ، چې موږ به یې له دې ورسته همداسی وبولو. د هغو دباندې هواره د هغه د بنسټ- پورته - او اړخهوارې دوه ځله ده.

دا د غبرګ اړخیز په څیر شمیرل کیږي او په عمومي ډول باور لري:



څیره ۲۴۳

جمله: د غبرګهواریز دباندې هواره او ډکی دي:

$O = 2.(a.h_a + b.h_b + c.h_c)$

$V = G.h$

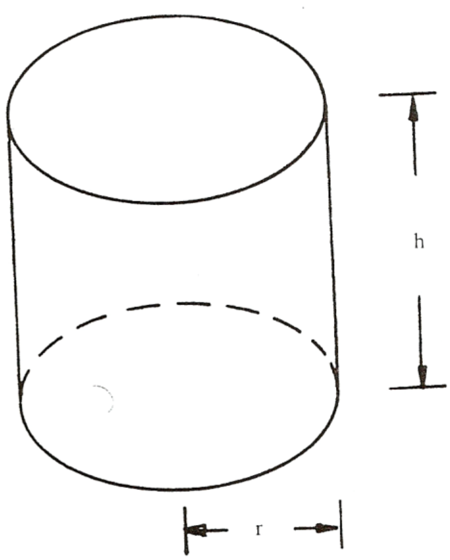
دلته د ډکي شمیرنه د غبرګ اړخیزهوارې په

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیر اجرا کیږي: د بدن جوداشوي توکي یو د بل مخامخ لور تکمیلوي:
یو بل عمومیت یا ټولیزه به د غیر منظم ، مګر په بنسټ یا ځمکه او پورته
کونګروانیځ ډیرګوډیز پریښول وی، د هوارې د خواو هوارې بیا غبرګ اړخیز دي.

جمله: د په خوښه پریزما د دباندې هوارې او حجم لپاره باور لري:
د ټولو خواو هوارو زیاتون + بنسټیزه هواره . 2 = O
بنسټهواره . جګوالی = V

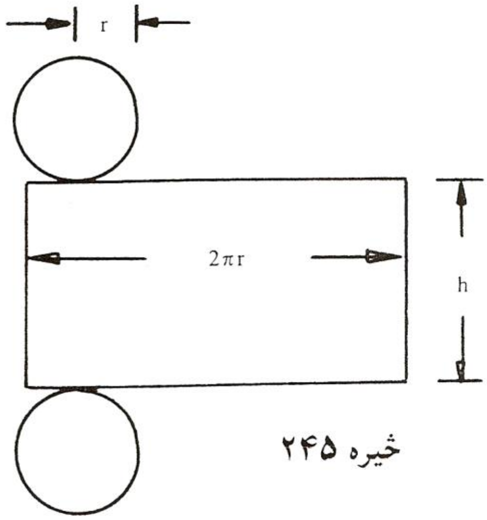
سیلیندر(توته یا استوانه یا ستن)



ځیره ۲۴۴

د هغی نیغي(سیخ ولاړې) پریزما
سره ، چی لاندې او باندې یي
سیومتري – ګوډیز وي – څه پیښیږی،
که د کونجونو شمیر نور هم زیات شي؟
اوس نو لاندې هواره (او په همدې ډول
پورته هواره هم) په ګردي بدلیږي او
دا ډیر سره ګوډیز شوي د خواو هوارې
په یوې کږې یا راتاو هوارې بدلیږي.
یو بدن یو بل سره کونګروانیځ او
غبرګ لاندې پورته ګردیهوارو سره
ګردیتوته یا ګردیسیلیندر بلل کیږي.
د دی روښانونی یا توضیح لاندې درې
شیان ځرګندیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



څېره ۲۴۵

۱ – د توتی یا استوانه یا ګردیسیلیندر د پریزما سره خپلوان دی.

۲ – ګردي استوانه یا توته پخپله د په خوښه فورم شوې پورته – او لاندې هوارو لپاره یو ځانګړی حالت دی.

۳ – لمړنی څرګندونه د ولاړ ګردي سلیندر یا توتی یو ځانګړی مهم حالت وو، ډکی یا حجم د همغه پرینځیپ له لارې کیږي لکه د پریزما. د جال ښوونه یی د پوښ د خلاصولو له لارې کیږي، له دې سره دوه ګردی تړلي راځي چي لاندې او پورته(دځمکی– او سرپټی هوارې) هوارې دي.

جمله: د یوه ولاړې ګردی استوانی یا توتی پوښ، دباندې هوارې او ډکي لپاره باور لري:

$$M = 2\pi rh$$

$$O = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(r+h)$$

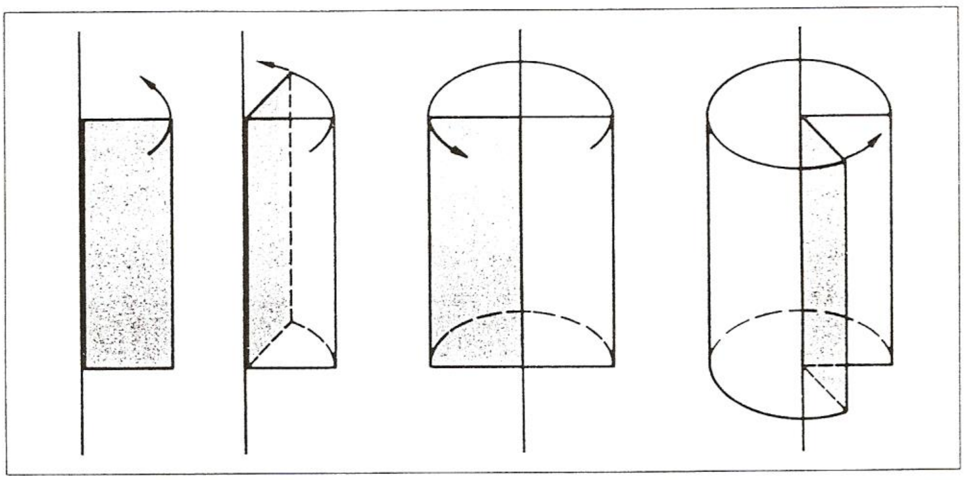
$$V = \pi r^2h$$

که د یوې استوانی یا توتی څخه منځټکي سیومترې استوانه چی وړانګه یي له مخکی استوانی یا توتی کوچني وي راوباسل شي، نو دې پاتي ته یی سوری استوانه

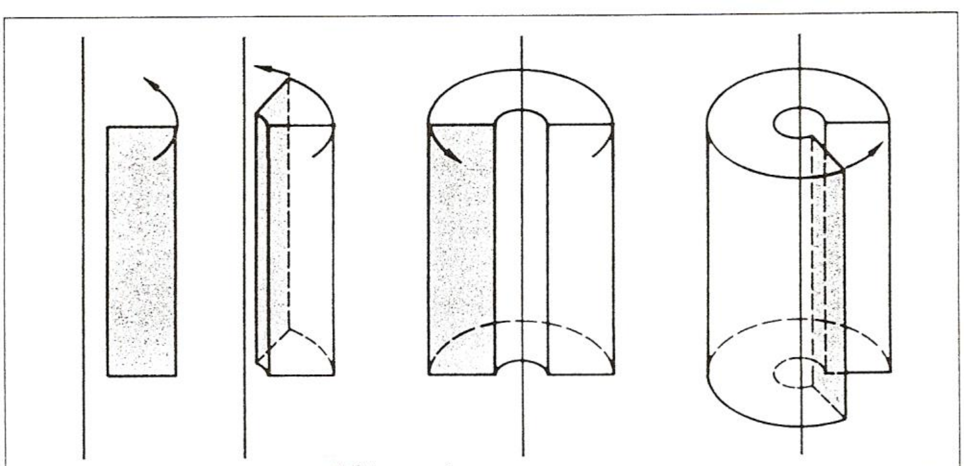
(c) ketabton.com: The Digital Library

که د مخه ونیول شي یا فرض شي، چی دا سلیخ شوي کاغذ 0,1 mm پنډ دی، نو دلته باید ټول $0,491 . 10000 = 4910,m^2$ کاغذ سلیخ شوی وي.

د ګردي – او سوری استوانی یا توتې یا ستن لاندې د یوه ولاړکونجیز څرخون(Rotation) هم په خیال کی راوړلی شو:



څیره ۲۴۷



څیره ۲۴۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – یوه سمه پریزما د شپږکونږیز بنسټ– په همدې ډول سرهوارې سره لرو، چی ۵ سانتي متره جګه ده. هربنستهوارې اړخ یی ۴ سانتي متره اوږددی. ددې ډکی پوښ او پورته یا ټوله راګرده هواره وشمیری.

۲ – یو غبرګهواری ۸۱ مکعب متره ډکی لري او پورته هواره یا ټوله هواره یی ۱۳۲ مربع سانتي متره ده. جګوالی او د اړخ اړخیز c اوږدوالي یی وښایي، که بنسټ هواره یی د اړخونو اوږدوالی ۵ ،۴ سانتي متره او ۳ سانتي متره ولري او دا دواړه اړخونه وي بل سره د ۶۰ درجو کونج جوړ کړي.

۳ – پورته واره او ډکي څنګه تغیر خوري، که د یوه کوادر اړخونه دوه برابره شي؟

۴ – د یوه کوادر دري اړخونه یو بل سره په ۱:۲:۳ څانښیونه یا تناسب کی پراته دي، دا څومره اوږد دی، که د دې کوادر ډکي ۱ مکعب متر وي؟

۵ – یو مکعب د هوانیمی $d = 6\sqrt{3}$ لري. نو ټولهواره، ډکی او اړخ (a , V , O) یی وشمیری.

۶ – د شګو موټر کي چی د بارهواندازه یا بارډکي اندازه یي 2,82m×1,68m÷0,55 وي، څومره مترمکعب شګه ځایږي، که دا د پورته اړخ یا کانتي پورې ډك شي؟
د باروړونکي د بار وزن ۱۵ ، ۱ ټنه دی په بارولو به څومره ورزیات شوی وي ، که شګه یوه ډیښتی، ټیګوالی یا غلظت $\rho = 2\ g/cm^2$ ولري؟

۷ – په یوه هواره کرښه یو د پټلیو بند باید ډك شي. دا کرښتوټه ۲۵۰ متره اوږده ده، دا پټلیبند ۸ متره جګ دی او په بنستهواره کی ۳۹ متره ، په سر کی ۲۷ متره سرور دی، د ډکولو لپاره به څومره خاوره بسیا وکړي؟

۸ – د سرك جوړولو ماشین څرخونی (د اوسپنی غټ ه استوانه چی سرك پرې پخوې او په سرك یي څرخوې) ۱۵ ، ۱ متره نیمی لري او د۲۵ ،۲ متره سرور دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه هواره څومره لویه ده، چې خرخی یې په یوه څرخون وهی؟

۹ – یو بایسکل پمپ د ۵ ، ۲ سانتیمتره اوږد رڼا نیمی لري او د پمپ اوږدوالی ۲۸ سانتیمتره دی، د پمپ تشیاډکی څومره دی ؟

۱۰ – د دې لپاره، چې د ګیلاس توته په پروتغوخې باندې خېړو یا معاینه کړو، ۲۰۰ ګرامه پارې نه یې ډکوو(ρ = 13,6 g/cm³) . پوهیږو، چې توته هر ځای کی همغه دننني نیمی لري. دا نیمی څومره دی، که پاره 82 cm جګه وي؟

۱۱ – یوه کچتوته دې، د یوه 5 cm دننه نیمی سره داسی په کچکربښو په نښه شي، چې د هرو دوه پرلپسی کربښو وي د 5 cm³ ډکی وښایي. د دوه څنګ په څنګ کربښو ترمنځ دې واټن څومره وټاکل شي؟

۱۲ – د یوه ولاړګوډیزې وسپنی ټوټی (25 cm × 20 cm) څخه دې یوه کوتی ، بې له سرپوښ او بیښ څخه جوړه شي. ډکی یې وشمیری که الف) چاپیری یې د اوږده اړخ سره برابر وي او ب) که چاپیری یې د لنډ اړخ سره برابر وي؟

۱۳ – د لاندې توتو پاتی کڅونه وښایي:

a) r = 5 cm ; h = 12 cm b) r = 9cm ; V = 120 cm³

c) h = 6,5 cm ; O = 300 cm³ d) M = 282 cm² ; V = 424 cm³

۱۴ – توته څومره ډکی لري، که یو د a اړخ اوږدوالي مکعب په کې خوندي وي؟ پوښ او دباندې یا پاسهواره یې څومره دي؟

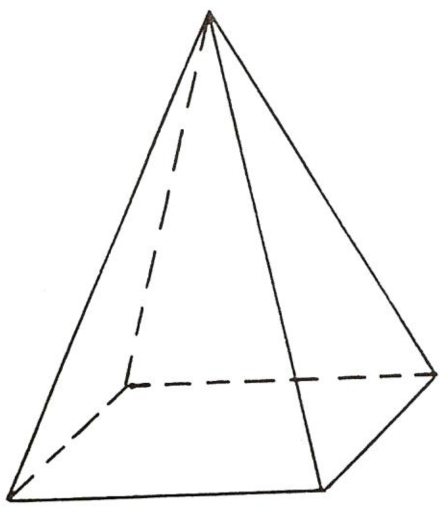
۱۵ – د یوې توتی جګی h او ورانګه r ځانونه (h : r =) 2 : 3 نیسی. ډکی یې 2000 cm³ دی. h , r او M یې وټاکی.

۱۸ – یو ولاړډوله توته یزه ګل کوتی د h = 17 cm جګي سره د سره د سرپوښ او بیښ ایلیپسی د دواړو نیممهرونو a = 30 cm او b = 20 cm سره لري. د دې ډکی څومره دی؟

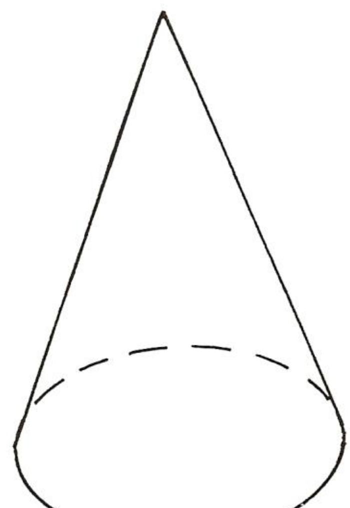
(c) ketabton.com: The Digital Library

اهرامونه او مخروطونه Pyramiden und Kegel

که څه هم دواړه بدنونه بدلو ګروپونو پورې اړه لري– اهرام یواځي هواره راګرځیدهواره لري، مخروط مګر راتاو یا کږه هواره.– بیاهم زیات ګډونوالی لري، نو له دې امله یې په ګډه غواړو وپیژنو یا معرفي کړو.



خیره ۲۴۹

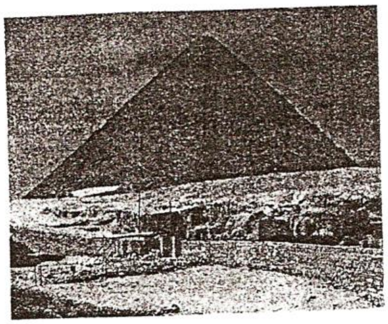


خیره ۲۵۰

پیلبیلګه :

د ۲۵۹۰ او ۲۴۷۰ (م. کال پخوا) ترمنځ په غزه مصر کی په یوه ډیر مصرف د فرعون خیوبس د قبر اهرام خیوبساهرام (Cheopspyramide) جوړ شو. د دې د جوړولو لپاره څه سل زره انسانان په کار واچول شو، چی هغوي نزدې دوه نیم میلیونه

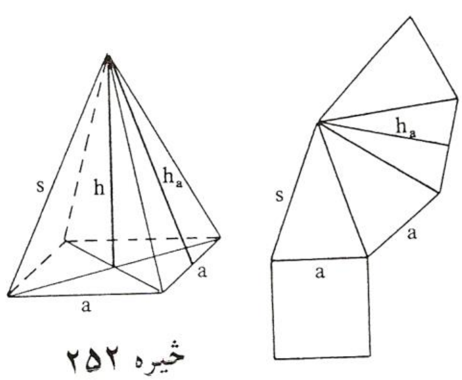
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۵۱

د تیگو بلاکونه پري کېږل ، رایي وړل او یو په بل یې طبقه په طبقه یا پوړی په پوړی باید اینښوولي وی. دا د خیوبس اهرام څومره ډکی (حجم) لري، که هغه یوه لاندې هواره ۲۳۰ متره مربع ولري او جګوالی یی ۱۴۷ متره وي. د هغه لیدوړ دباندې هواره څومره ده ؟

د خیوبس اهرام د ولاړو اهرامونو ځانګړی حالت جوړوي، ځکه چې د هغې تیره ککره د لاندې هوارې په منځ ټکي نیغه ولاړه ده. هغه اهرامونه چې په هغو کی دا حالت نه وي کاږه یا بهتره مائل اهرامونه بلل کیږي. په عمومي ډول یو اهرام راپورته کیږي، که د ډیرګوډي ګوډونه له ډیرګوډي دباندې ټکي سره ونخلول شي. د کونجونو او سرتیرې نخلونلاین ته اړخکانتی (لنډ : اړخ) وایي . لکه چې د جالښوونه یی ښایي، نو دباندې هواره یې له لاندې اړخ او د اړخیزو دریګوډي د یوځایوالي څخه لاس ته راځي، چې وروستی یي پوښ هم بللي شو یا بولو.



خیره ۲۵۲

که د ډکي یا حجم ټاکلو لپاره د خیوبس اهرام په مربع شکلي پوړیزتجزه شوی وي، په فکر کی راولو چې د پوړی جګوالی یی h / n وي. د وړانګي جملی د خورا پورته پوړی د هوارې لپاره لاس ته راځي:

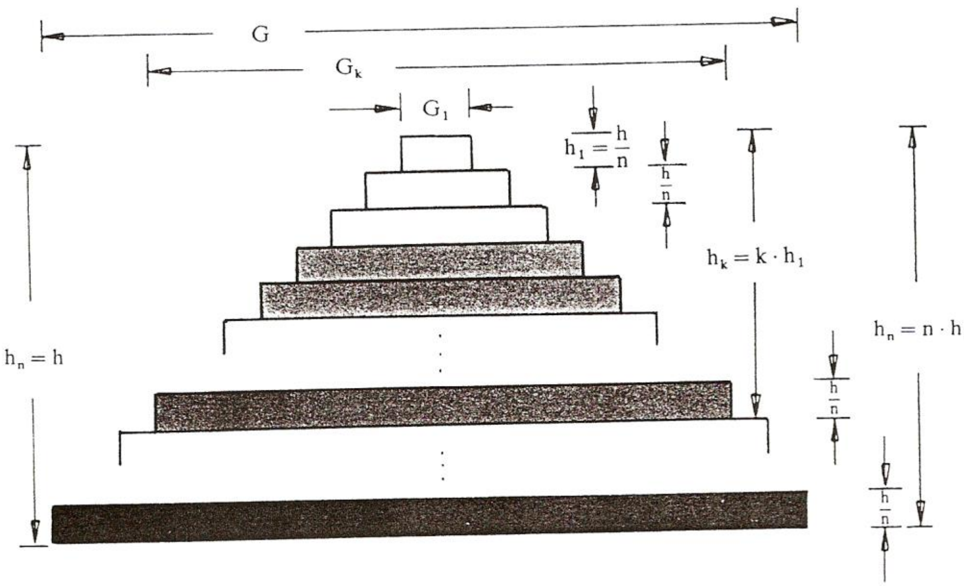
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1^2 : h^2 = G_1 : G \Rightarrow G_1 = G :(h^2 / h_1^2) = G / n^2$$

په ټولیزه توګه(عمومي ډول) :

$$h_k^2 : h^2 = G_k : G$$

$$\Rightarrow G_k = G.(k/n)^2 \quad , G_n = G$$



شیره ۲۵۳

په دې ډول د k –ام زینې پوړي ډکی (حجم) دی

$$V_k = G_k.h / n = Gh.k^2 / n^3$$

د ټولو پوړیو له زیاتون څخه لرو

$$V_{پوړی} = Gh.(1^2+2^2+...+n^2): n^3$$

$$= Gh\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) : n^3$$

$$= Gh\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوره ایندوکڅیون له لارې لرو (د ا په دې کتاب کی نه څیړل کیږي. ددې موضو لپاره دې ځما دشمیرپوهنی بنستیز کتاب وکتل شي)

$1^2+2^2+3^3+...+n^2 = n(n+1)(2n+1) :6 = (2n^3+3n^2+n) / 6$

که د پوړیو شمیر n نور هم لوي شي، نو بیا یی سړی له میلان څخه نه شي توپیرولی. دې ګڼونپوهی اکویوالنت دا دی چی n هرڅومره لوي شي او n په ماتلاندې کی موجودوي نو هغه په هغو غړو صرفنظر کیدی شي یا هغه غړي له پامه ایستل (لرې) کیدی شي.

په دې پوله حالت کي د اهرام ډکی له لاندې اړیکو شمیرل کیږي.

$V = G.h / 3$

دا د خیوبس اهرام باندې استعمالوو :

د اړخونو هواروجګوالی له نیمی لاندې اړخ او جګوالي د پیوتاګوراس د جملی له

لاری شمیرل کیږي: $h_a = 115^2 + 147^2 = 186 , 64m$

په دې ډول یی پوښ دی $M = 4.0,5.186,64.230 = 85853,80m^2$

د دباندې هواری څخه نور څه نه لیدل کیږي.

ډکی یی دی : $V = 230^2 .147 = 7776300m^3$

جمله : د یو اهرام د پوښ، دباندې هوارې او ډکي لپاره باور لري:

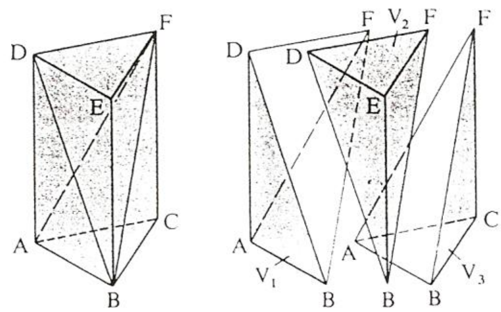
د اړخونو د ټولو دریګوډیو زیاتون = M

بنستهواره + O = M

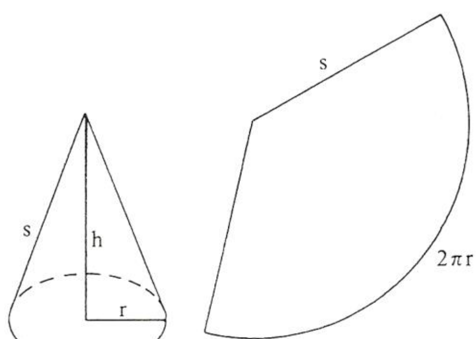
3 / بنستهواره . جګوالی = V

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا فرمولونه طبعاً د مائیل اهرام لپاره هم باور لري د پوړیو شمیرنه بیا طبعاً یو څه اندازه ستونځي لري‌که چیرې د یوه اهرام بنسټ یوه ګردۍ ونیسو نو مخروط لاس ته راځي، مخروط سم ولاړ بلل کیږي ، که د هغه تیره ککره یا لنډه: ککره په منځټکي (نیغه) ولاړه وي، نور ټول مخروطونه مائیل بلل کیږي. دا په لاس کی لرلو له لارې ګورو، چی د اهرام ډکي یا حجم شمیرډول په مخروط باندې هم استعمالیدی شي، که د پوړیو په ځاي دلته وړې ستنی په پام کی ونیول شي. لکه په څیره ۷ کي د پوښ خورونه یا پوښ جال ښایي چی پوښ د ګردي ټوټه ده، چی وړانګه یی د بنسټګردي وړانګه ده او لینده یی د ګردۍ چاپیرونکی کی ورکړ شوی دي:



څیره ۲۵۴



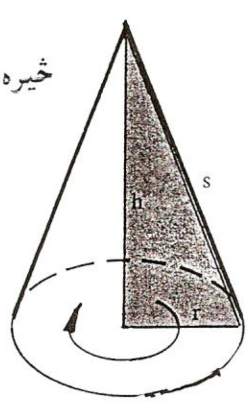
څیره ۲۵۵

$$F_S = b.r / 2 ,$$

پس لرو

$$M = 2 \pi r.s / 2 = s.\pi .r$$

څیره ۲۵۶



(c) ketabton.com: The Digital Library

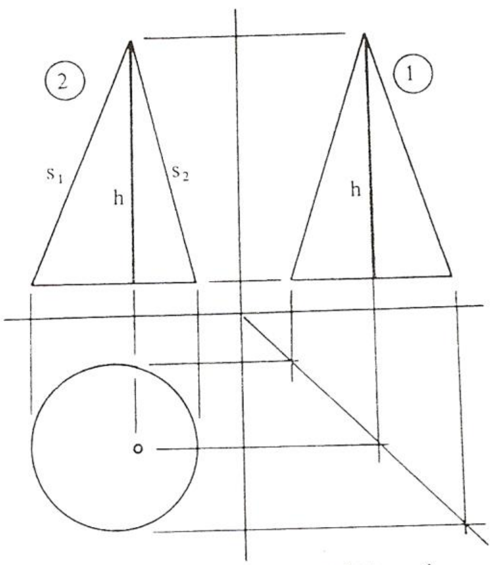
جمله : د ګردي مخروط پوښ، دباندې هواره او حجم لپاره باور لري:

$$M = s.\pi r = \pi . r^2 . 360° / \alpha$$

د $\alpha = 360° . r / s$ سره

$$O = M + \pi r^2 = \pi r (r + s)$$

$$V = \pi r^2 . h / 3$$



خیره ۲۵۷

په پام کی دې وي چی ولاړ مخروط د څرخون په څیر هم په خیال کی راوړل کیدی شي: چی په کانتی یا یوه اړخ د یوه ولاړ دریګوټي څرخون څخه لاس ته راځي.

بیلګه : د ولاړ ګردیمخروط ډکی وشمیری چی د بنستهواري وړانګه یی ۶ سانتیمتره وي د پوښ یو خورا زیات یا عظمي اوږدوالی یی ۱۵ سانتي، او مینیمال پوښ اوږدوالی یی ۱۱ سانتي متره دی؟ د هیرون دریګوټي فرمول سره سمی د غوځهوارې په متن یی اخر ته رسوي. (۲)«

$$F = \sqrt{19(19-12)\ (19-15)(19-11)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

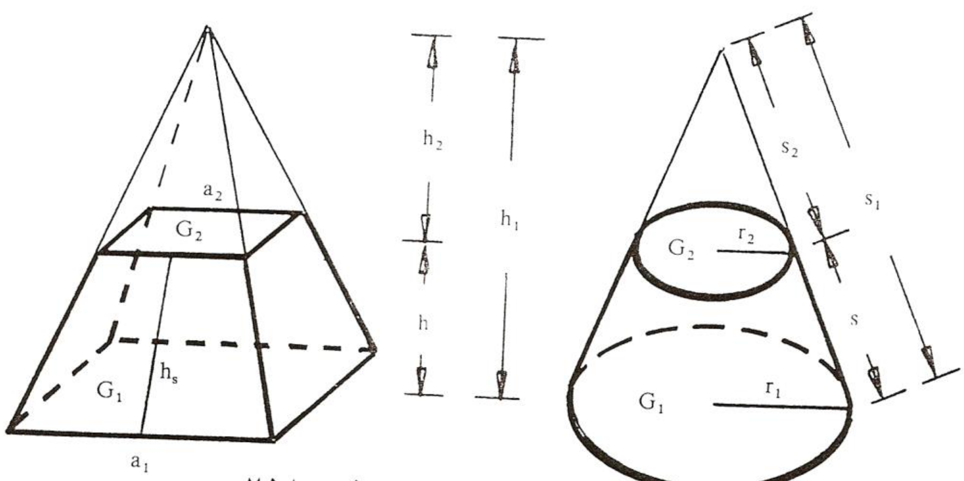
.	$F = 65{,}238\ cm^2$

,	$F = d.h / 2 \Rightarrow h = 2F / d = F / r = 10{,}87\ cm$

.	$\Rightarrow V = \pi r^2 h / 3 = 409{,}79 cm^3$

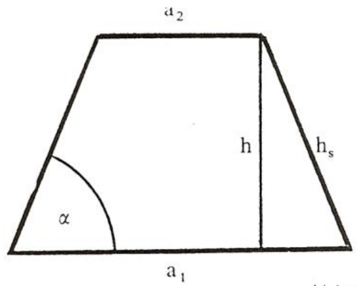
پخ اهرامونه او پخ مخروطونه

که يو اهرام او يا مخروط په يوه اوږدوالي h بنستهواري ته غبرګ پرې کړى شي، نو پخ اهرام او پخ مخروط ترې راجوړيږي) راپيداکيږي يا منځ ته راځي.
د پخ اهرام پوښهواره د يوه تريخ ځخه عبارت دى چې د دوه دريګوڼيو له کمون ځخه لاس ته راځي.



شيره ۲۵۸

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۵۹

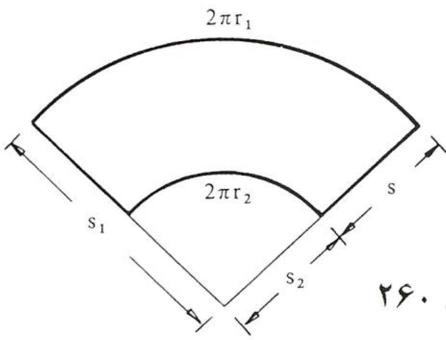
د دوي اوږدوالی د پیوتاګوراس له جملی او یا د میلانکونج ∝ څخه ټاکل وړ دي.

$h_s = h / \sin\alpha$

د اهرام د بنسټهوارې زیات امکاناتو له امله د پوښهوارې لپاره یو ټولیز فرمول هدفمند نه دی.که بنسټهواره یو منظم n–ګوډی وي، نو لرو :

$M = (U + u).\ h / 2$

د U بنسټهواری چاپیرونکی ، u د سرپټهوارې یا سرپوښهوارې چاپیری.



خیره ۲۶۰

په همدې ډول د سم مخروط د دوه ګردیبرخهوارو کمون دی:

$$M = (s_1\, 2\pi\, r_1 / 2) - (s_2\, .2\pi\, r_2\,) / 2)$$
$$= \pi\ (s_1\, r_1 - s_2\, r_2\,)$$

د وړانګي جملی په مرسته لاندې اړیکی پیداکیږي:

$$s_2 : s_1 = r_2 : r_1 <=> s_2\, r_1 = s_1\, r_2$$
$$=> M = \pi (s_1r_1 - s_2r_1 + s_2r_2 - s_2r_2)$$
$$= \pi\ [(s_1 - s_2)r_1 + (s_1 - s_2)r_2]$$
$$= \pi\ s(r+r)$$

د $s = s_1 - s_2$ له امله

ددې لپاره چی دباندې هواره لاس ته راوړو، باید بنسټ – او سرپټهواره یا سرپوښهواره ور زیات کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دپخډکي د اولني اهرام او یا مخروط او د پریشوې څوکی کمون څخه لاس ته راځي، چی دا هم بیرته اهرام او یا مخروط شکلونه لري. (څیره   وګوری)

$$V = G_1.h_1 / 3 \; - G_2.h_2 / 3 = [G_1(h+h_2) - G_2h_2]/ 3$$

دا چي په n–ګوډي کی د اړخ اوږدوالی همداسی د ګردیشمیرنه کی وړانګه مربعي ډوله کارول کیږي، د وړانګي له جملی د بنسټهوارې او سرپوښهوارې یوبل ته ځانونه داسی نیسي لکه د هغو د واټنونو مربع د سرچینیزې څوکی څخه.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{h + h_2}{h_2} = \frac{\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (h + h_2) \cdot \sqrt{G_2} = h_2 \cdot \sqrt{G_1}$$

$$\Leftrightarrow h\sqrt{G_2} + h_2\sqrt{G_2} = h_2\sqrt{G_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad h\sqrt{G_2} = h_2(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})$$

$$\Leftrightarrow \quad h_2 = -\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}$$

که د h_2 لپاره پیدا ارزښتونه د ډکیفرمول کی کیښنول شي، نو د ترڅنګ بیا یواځي هوارې G_1 , G_2 او G_3 راپیداکیږي.

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\left[G_1\left(h - \frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right) + G_2\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \left[G_1 \cdot h - \frac{G_1 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} + \frac{G_2 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\left[\frac{G_1 h\sqrt{G_2} - G_1 h\sqrt{G_1} - G_1 h\sqrt{G_2} + G_2 h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3}\left[\frac{G_2\sqrt{G_2} - G_1\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که اخري اړيکی د $\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1}$ سره پراخه شي(د بينوم دريم فرمول)، نو په دې پسې لاس ته راځي:

$$V = \frac{h}{3}\left[\frac{(G_2\sqrt{G_2} - G_1\sqrt{G_1})(\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1})}{G_2 - G_1}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3}\left[\frac{G_2^2 - G_1\sqrt{G_1 G_2} + G_2\sqrt{G_1 G_2} - G_1^2}{G_2 - G_1}\right]$$

د ماتباندې ترم څخه د $G_2 - G_1$

$$G_2^2 - G_1\sqrt{G_1G_2} + G_2\sqrt{G_1G_2} - G_1^2 = (G_2 - G_1)(G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)$$

له امله نوکبند شي او بالاخره د لنډوني څخه لاس ته راځي:

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)\, h / 3$$

د اهرام ، په همدې ډول د مخروط ډکي.

په پڅمخروط کيدی شي د ګرديهوارې فرمول $G_1 = \pi r_1^2$ او $G_2 = \pi r_2^2$ وکارول شي

جمله: د پڅ اهرام پوښ ټوله هواره او ډکی :

$M =$ د ټول تراپڅ هوارو زياتون

$$O = G_1 + G_2 + M$$

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)\, h / 3$$

د پڅمخروط پوښ پاس يا ټوله يا پورته هواره او ډکی :

$$M = \pi s(r_1 + r_2) = \pi(s_1r_1 - s_2r_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$O = \pi s(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi (r_1 s + r_2 s + r_1^2 + r_2^2)$$

$$V = (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\pi h / 3$$

پیلبیلګه

د برنس مجسمی لپاره دې یوه متېه د همغه موادو جوړه شي. دا دې ۱،۵ متره جګ وي، او یوه کتله دې ولري چي ۱۰ ټنه وي(د برنس دیښتي یا کلکوالی $\rho = 8{,}7\ g/cm^3$)
په پوښتنه کی یو ګرد (پخمخروط) یا یو مربعشکلی (پخ اهرام) راځي. سرپوښهواره دې ، په اندازه ، ۱ مترمربع لوي وي. نورې اندازې وښايي ؟
د دواړو متېو لپاره شمیرنه ورته ځغلي

$$V = m / \rho = 10t / (8{,}7t/m) = 1{,}149\ m^3$$

دا چی جګوالی او سرپوښ معلوم دي، بنسټ د یومربع مساوات له لارې لاس ته راځي:

$$V = 1{,}149 \qquad = 0{,}5(G_1 + (\sqrt{G_1 .1} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1{,}299 - G_1 \qquad = \sqrt{G_1}$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}687 + G^2 - 2598G_1 = G_1$$

$$\Leftrightarrow \quad G_1^2 - 3{,}598\ G + 1{,}687 \quad = 0$$

$$G_1 = (3{,}598 / 2) \pm \sqrt{(3{,}598 /2)^2 - 1{,}687}$$

$$G_1 = 1.799 \pm 1{,}245$$

$$\Rightarrow \quad G_1 = 3{,}044m^2 \quad \text{یا} \quad G_1 = 0{,}549m^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(دوم اوبی یا حل 0,549، په کار نه راځي ، ځکه چې لاندې هواره به له پورته څخه کوچنۍ وی)

له دې څخه پورته او لاندې ورانګه لاس ته راځي او نیمی په پخمخروط او په همدې توګه د کانتو یا اړخ اوږدوالی په پخ اهرام کی:

$$a_2 = \sqrt{G_2} = 1m ;\quad r_2 = \sqrt{G_2/\pi} = 56,42 \text{ cm}$$
$$=> d_2 = 112,84 \text{ cm}$$

$$a_1 = \sqrt{G_1} = 1,745 \text{ m} ;\quad r_1 = \sqrt{G_1/\pi} = 98,42 \text{ cm}$$
$$=> d_1 = 196,85 \text{ cm}$$

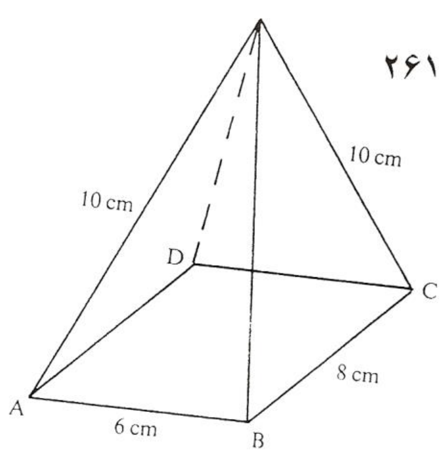
د پیتاګوراس له جملې څخه د اړخونو اوږدوالی لاس ته راځي:

$$h_s = \sqrt{h^2 + (a_1 - a_2)^2/4} = 1,546 => M = 8,488 \text{ m}^2$$

$$s = \sqrt{h^2 + (r_2 - r_2)^2} => M = 7,575 \text{ m}^2$$

تمرینونه

شیره ۲۶۱



۱ – د یوه مربع اهرام پاسهواره او ډکی وشمیری ، که وي :

الف) $a = 7$ cm ; $h = 14$ cm

ب) $s = 15$ cm ; $a = 10$ cm

پ) $V = 80$ cm³ ; $h = 10$ cm

ت) $h_a = 13$ cm: $h = 10$ cm

(c) ketabton.com: The Digital Library

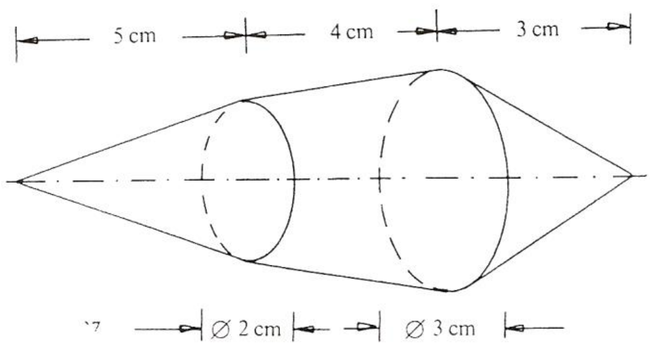
ت) $h = 12\ cm\ ;\ s = 18\ cm$

ث) $h_a = 12\ cm;\ \ M = 400cm^2$

۲ – د ثیره شوي اهرام پاسهواره او ډکی وشمیری. (لمړی تړونکرښنه له ټګي A څخه د جګوالی پښیپګي ته وشمیری)

۳ – په کوم جګوالي دې مربع اهرام بنستهواريږ ته غبرګ غوځ شي چې ډکی یی نیم شي؟

۴ – یو ولاړ اهرام د بنستېز منظم شپږکونجي سره بنسټ لاندې هوارې اړخ یا کانتی $a = 4\ cm$ لري او خوا اړخ اوږدوالی یی $s = 12\ cm$ دی. V او O وشمیری ؟



۵ – د ثیره شوي بدن ډکي وشمیری.

ثیره ۲۶۲

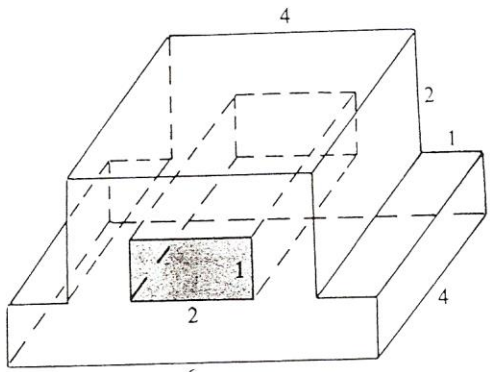
یادونه: $\varnothing$ د نیمي یا قطر په مانا دی چې د دوراني [illegible]

۶ – د یوه ګردیګرد برج سر یا سر دې نوي پټ شي. د سرپوښ د هوارې د اندازې لپاره سرپوښوونکی د برج ترمخ داسی ولاړ دی یا داسی ځای نیسي، چې پوښ اوږدوالی s د ۷۵ درجو په یوه کونج ګوري، کوم چې ټیك د سر میلان په ګوته کوي، د سرپوښ هواره څومره لویه ده، که برج ۵۰ متره جګ وي او د برج نیمي ۱۲ متره وي؟ سرپوښوونکی د برج څخه ۱۰ متره لرې ولاړ دی او د سترګو جګوالی یی ۸۰ ، ۱ متره دی.

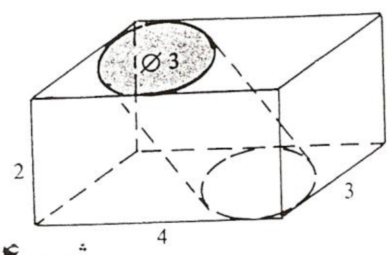
(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – د یوه برج اهرامډوله سرپوښ چې بنسټ یې مربع او اړخ اوږدوالی یې دی په وسپنه دې پټ شي اړخکانتې یې ۱۴خ متره ده د سرپوښ هواه یې څومره ده؟ دا چت به څومره ارزښت ولري، که یو مترمربع سرپوښول د هرځه سره ۹۵ المان مارکه ارزښت ولري؟

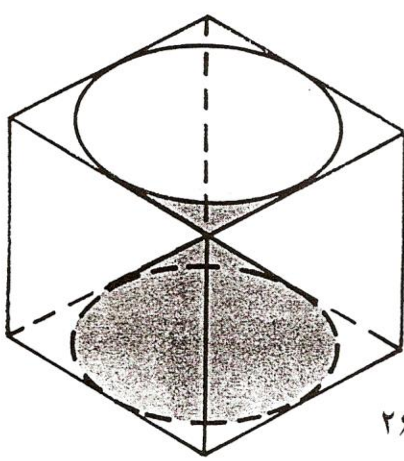
۸ – د څیره شوو بدنونو پاسهواره وشمیرئ(ورکړه په سانتي متر)



څیره ۲۶۳



څیره ۲۶۴



څیره ۲۶۵

۹ – د پورته څیره شوي بدن ډکی وشمیرئ.

۱۰ –په مختلف کارټوټو کی مخروط ډوله خالیګاوې برمه کیږي:

الف) په یوه مکعب چې اړخ اوږدوالی یا کانتی اوږدوالی یی a = 60 cm دی، یو مخروط د جګوالی h = d = a سره

ب) په یوه مکعب کی د a = 60 cm یو سیومتري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیابولو (لاتین:Diavolo = شیطان)

پ) په دوه سمو ګردیاستوانو د h = 2r = 60 cm هم یو مخروط او یو دیابولو، دا موږ د شګو ساعت په څیر پیژنو . د تشځاي ډکي او په همدې ډول

د نور پاتی بدن ډکی هم وشمیری.

۱۱ – یو مربع اهرام (h = 2a = 10 cm) بنسټهوارې ته غبرګ په دوه برخو ویشل کیږي. د غوڅهوارې واټن دې بنسټهوارې ته 0,25h ; 0,5h ; 0,75h وي. د هر برخه بدن ډکي وشمیری.

۱۲ – ددې لپاره چی یو ګردیډوله فیلترکاغذ د فیلتر لپاره استعمال کړی شی، دا سړی یو څلورمه برخه ګردی باندې را غبرګوي ، وازی باید څومره وازکونجی ولري، ددې لپاره چی فیلتر جوړ شي.

۱۳ – یو مخروط ډوله کچګیلاس دې ټیك ۱ لیتر ځاي کړي. هغه ۱۵ سانتي متره جګ دی. د هغه نیمی (یا نیمی ګردی) دې څومره لوي وي.

۱۴ – ۵ مکعب متره شګه یوې ټوپی باندې اچول کیږي. دا ستوریکونج ۴۵ درجی دی . جګی او نیمی یې څومره لوي دي؟

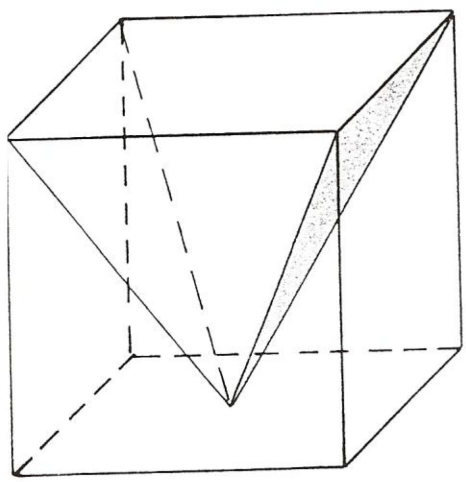
۱۵ – یو مخروط ډوله د اوبو ګیلاس دې د نیمایي پورې له اوبو ډك شي. دا اوبه په ګیلاس کی څومره جګی ولاړې دي؟

۱۶ – یو کافیواله یوه مخروط ډوله د شربت ګیلاس د شربت څخه ډکوي چی اندازه ۱۵ سانتي متره جګه ده. دی دا ګیلاس د یو سانتي متره پورې کم له شربت ډکوي. دا په دې توګه په سلو کی څومره شربت سپما کوي

۱۷ – په څیره ۲۸۲ کی ورکړ شوی اهرام ډکی وشمیری

۱۸ – په یوه چت باندې یو د وښو چتپټووني، چي ۵ ، ۴ متره جګ دی ایښوول کیږي، چی اړخ اوږدوالی یی a = 12,5 m متره او b = 9 m متره .دي. د

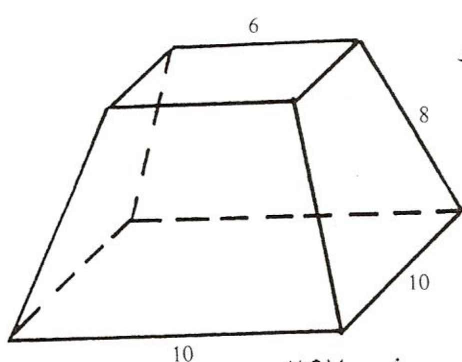
(c) ketabton.com: The Digital Library



څیره ۲۶۶

چت پورته کانتې یا پورته اړخ ۷ متره اوږد دی . د چتېتهوونې ډکې وشمیرۍ او همداسې د چتېتې سرهواره هم وشمیرۍ.

۱۹ – د یو دوه متره ژور بنسټ لپاره څومره خاوره باید راوویستل شي، که پوره ژی یا غاړه یې ۱۰ متره د غاړې اوږدوالی ولري او ستورېکونج -یعنې هغه کونج چې د غاړې یا اړخ سره د کنلو په لور جوړوي- یې ۶۰ درجې وي؟



څیره ۲۶۷

۲۰ – د یوه هواډکې څومره مائیلوالی لري، که د یوه ونې ستېی هوا ډکې شمیرلو لپاره چې مخروط ډوله دی د موټې قاعده وکارول شي، د لاندې سره

$V^* = \pi h \, [(r_1 + r_2)/2]^2$

د $r_1 = 10$ cm سره

او $r_2 = 5$ cm

۲۱ – څومره مسو ټوټه په کار ده، چې څیره شوې مسخولی جوړه کړای شو (وکړنی په ضیس متر؟ (څیره ۲۶۷ .

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – جوړ شوي کارپوټې حومره درنې دي (اندازه په سانتي متره)

۲۳-د لاندې پخمخروطونو M ,O او V وشمیرئ

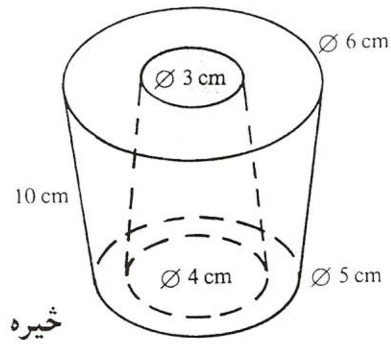
پخ کیګل مخروط

Kegelstümpfe:

a) $r_1 = 12$ cm; $r_2 = 10$ cm; $h = 8$ cm

b) $r_1 = 9$ cm; $r_2 = 7$ cm; $s = 6$ cm

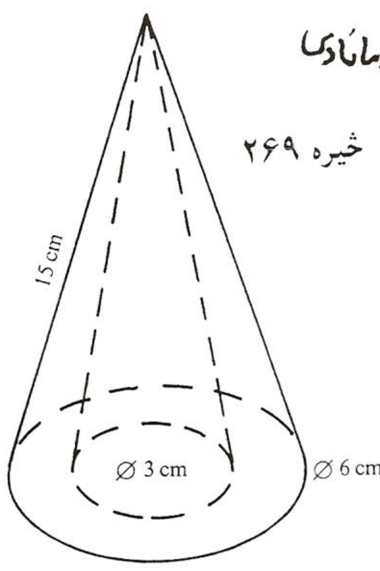
c) $r_1 = 5$ cm; $h = 7$ cm; $s = 8$ cm



شیره ۲۶۸

Eisenwerkstück $\varrho = 6{,}5$ g/cm^3

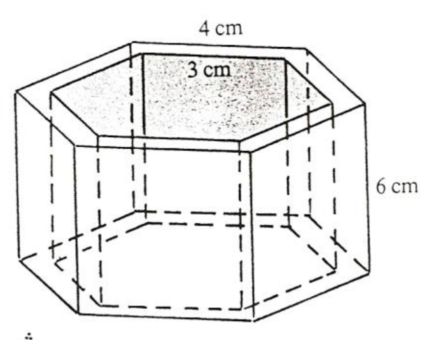
د اوسپنې کار ټوټه



شیره ۲۶۹

Kunststoffmodell $\varrho = 2{,}5$ g/cm^3

پلاستیک مودل



شیره ۲۷۰

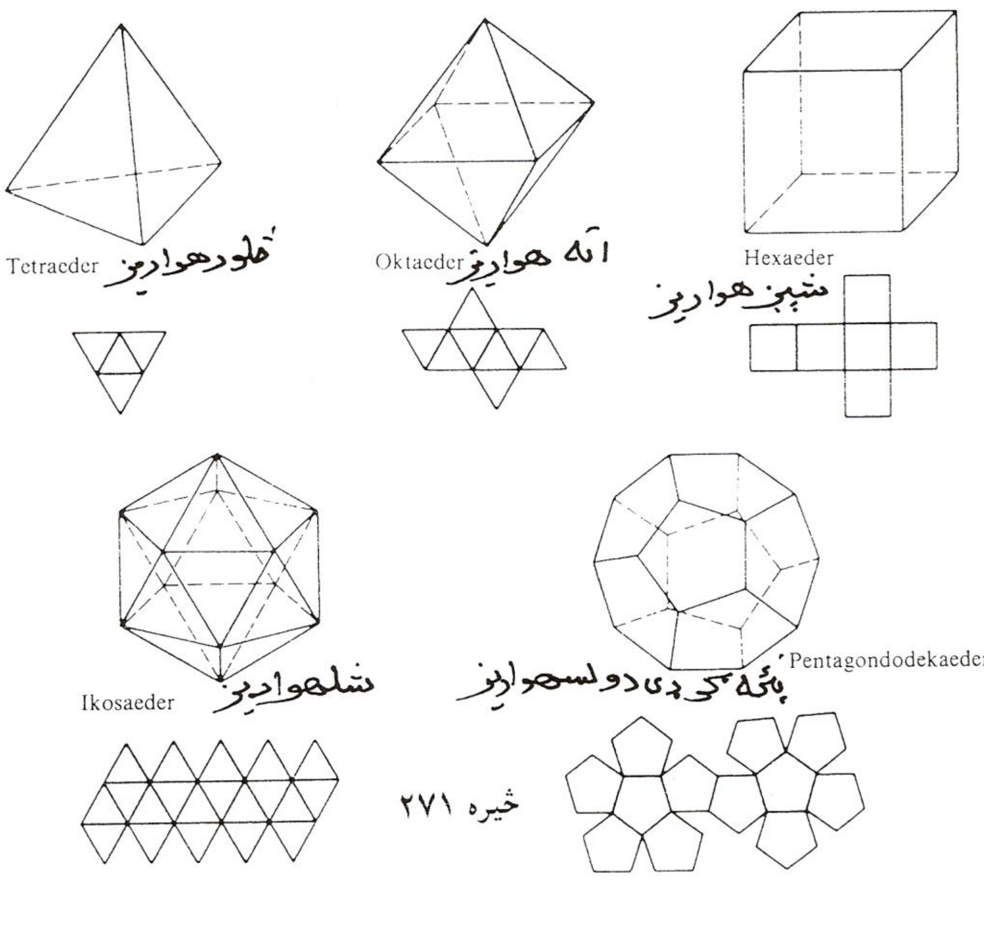
Messingsechskantrohr $\varrho = 8{,}3$ g/cm^3

د مسنګ شپږ اړخیزه لوله

(c) ketabton.com: The Digital Library

منظم ډیرهواریز

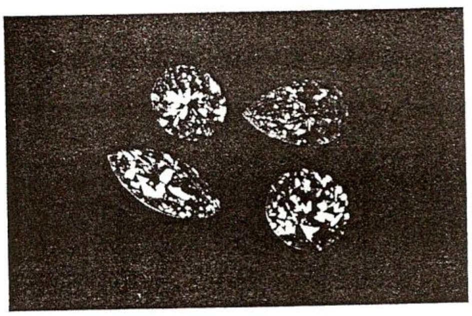
ټول بدنونه ، کوم چی یواځي بندهواري لري یا لههوارو رابند وي، پولوئیدر (یونانی : ډیر هواریز) نومیږي. موږ به دا له دې وروسته دا ډیرهواریز وبولو.
د دوي ترمنځ ټیك پنځه منظم یو بل ته ناورته بدنونه. دا د شمیرپوهنی له اړخه په ځانګړې توکه په زړه پورې دي، ځکه چی پاس هوارې او ډکي یي بند دي، دا په دې مانا چي د فرمولونو له لاې انځوریدلی شي، او په دې برسیره ، ځکه چی طبعي کریستال دا شکلونه یا فورمونه یا خیرې لري.



خیره ۲۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پنځه منظم بدنونهد هواروبندهواریز ابو کهګ هواربندیزدي : تیترائیدر (څلورهواریز Tetraeder) ، هیکسائیدرHexaeder (شپږهواریز ، مکعب) اوکتائیدرOktaeder (اته هواریز) دودیکائیدر (دولس هواریز ، د خپل اړخهوارو له امله پنتاګون دودیکائیدرPentagondodekaeder پنځه ګوډي دولسهواریزه بلل کیږي)، او په همدې توګه ایکوزائیدر Ikosaeder(شلهواریز) څیرې په تیر مخ کی.

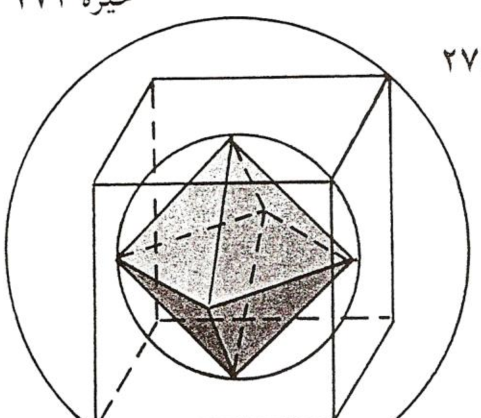


څیره ۲۷۲

بیلګی

د مالګي تیګي مکعب جوړوي، کوپفرسولفید مینرال Fahlerz تیترائیدر، د ګوګړو کریستال دودیکائیدر او الون (کالیوم الومینیوم سولفات) اوکتائیدر جوړوي.

څیره ۲۷۳



Würfel und Oktaeder mit In- bzw. Umkugeln

مکعب او اته هواریز د یو بل کې ننیل او یو راګیر غونډیو

منظمډیرهواریز پلاتوني (افلاطونی) (خیالی platonische) بدنونه هم یادیږي، څکه چې یوناني فیلوسوف او شمیرنپوه (۴۲۷ تر ۳۴۷ د م. پخوا) په دې نظر وو، چې څلور پخواني عناصر اور، خاوره، اوبه، او هوا په خپل واړه فورم تیترائیدر، ایکوزائیدر، اوکتائیدر او هیکسائیدر په ګوته کوي. د هغه په فکر جهان پخپله یو دودیکائیدر فورم لروده. په دې پنځو هر یوه بدن کي کیدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي يوه ګردۍ دننه او دباندې وکښل شي. که دا يو په بل کی دننه شي يا په بل عبارت دننه راګير شي، نو په دې توګه شپږ دننه – او شپږ دباندې هوارې لاس ته راځي ، کومو چی کيپلر Kepler دې عقيدې ته راوستی شو ، کوم (چی هغه وخت معلوم) شپږ پلانيت به په داسی لاره ګرځي، چی د هغوي نيممحورونه د داسی دننه – او دباندېغونډي وړانګو سره برابر شي.
لاندې جدول د دې منظم پولوئيدر ډېرهواريزومعلومو لويو پوره معلومات ورکوي.

Polyeder	e	f	k	l	m	α	r	ϱ	O	V
Tetraeder	4	4	6	3	3	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{12}\sqrt{6}$	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Hexaeder	8	6	12	4	3	90°	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{2}$	$6a^2$	a^3
Oktaeder	6	8	12	3	4	60°	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{6}\sqrt{6}$	$2a^3\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Dodekaeder	20	12	30	5	3	108°	$\frac{a\sqrt{3}+a\sqrt{15}}{4}$	$\frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}$	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{15a^3+7a\sqrt{5}}{4}$
Ikosaeder	12	20	30	3	5	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{a\sqrt{27}+a\sqrt{15}}{12}$	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{15a^3+5a^3\sqrt{5}}{12}$

د لته حروف لاندې ماناوې لرې . a = د کانتې يا اړخ اوږدوالی ، e = د ګوډونو ګڼ(تعداد) f = د هواروګڼ. k = بدن اړخونوګڼ، l = د هوارو اړخونو ګڼ، m = په هرکونج کی د کانتو يااړخونو ګڼ، α = د ګاونډيو هوارو ترمنځ کونج، r = د چاپيرګردي وړانګه ، ϱ = د دننۀګردي وړانګه ، O = پاس هواره يا پورته يا ټوله هواره ، V = ډکي.
پنځه يوون ډيرهواريز (Einheitspolyeder) لاندې (a = 1) ارزښتونه لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

Polyeder	r	ϱ	O	V
Tetraeder	0,6124	0,2041	1,7321	0,1179
Hexaeder	0,8660	0,5	6	1
Oktaeder	0,7071	0,4082	3,4641	0,4714
Dodekaeder	1,4013	1,1135	20,6457	7,6631
Ikosaeder	0,9511	0,7558	8,6603	2,1817

د اویلر د ډیرهواریز جمله، د په خوبنه ډیرهواریز لپاره یو ټاکنمساوات راکوي، د ګوډګښون e ، اړخګښون k او هوارګښون f لپاره:

د اویلر ډیرګوډي یا پولوئید جمله : $e + f - k = 2$

په هرصورت داجمله یواځي د کونوکس یا ننوتو پولوئید یا ډیرهواریز لپاره باور لري، یعنی هغه ، چی په کومو کی ټول نیمي د بدن په دننه کی ځغلي، یعنی منظمو ډیرهواریز لپاره.

بیلګي:

کوادر : $8 + 6 - 12 = 2$

اوکتائید : $6 + 8 - 12 = 2$

دودیکائید $20 + 12 - 30 = 2$

غونډاری یا غونډوسکه(کره) او غونډاري برخې

ولي غونډاری یا غوندوسکه؟

که تاسو د انګرېزي فوټبال په عربي ژباړه په عربي وګورئ، نو کرةّ قدم به ترې واخلی.

(په لاندې کې ما د غونډاري یا غونډوسکې په ځای غونډی لکلی، چې ښه او ټیک نومونه نه ده.)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هندسې یا ځمککچپوهنې له مخې غونډاری یا غونډوسکه د ټولو هغو ټکو ټولګه ده یا د هغو ټکو ځای دی، چې له یوه په

کلکه یاکره ټاکلي ټکي M څخه چې د غونډۍ منځټکی بلل کیږي همغه واټن r ولري.

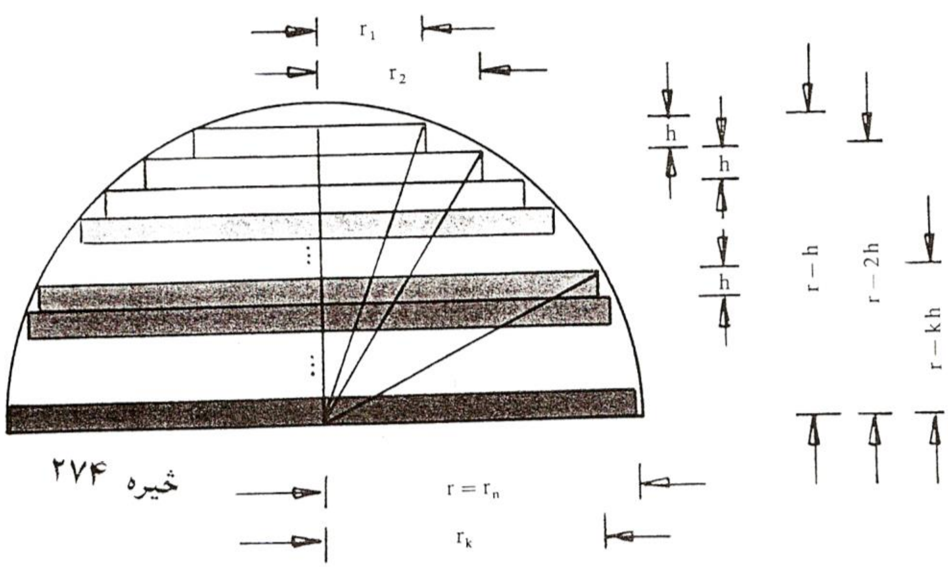
غونډۍ نه یواځې د جګدرجئیز یا لوړ سیومتري(هره نیمی په همغه وخت کې سیومتري محور دی) له امله د بدنونو ترمنځ یو ځانګړي رول لري، بلکه هغه موږ انسانانو لپاره هم د مانا ډکه ده، ځکه چې ځمکه (نژدې) یو غونډۍ شکل لري . د بیلګي په توګه په کارتوګرافي کې ځمکه اوږدګردیو (میریدیانی Meridiane) باندې ویشل کیږي. په مریدیانی باندې هر واټن د ځمکې وړانکی R ته بیا یوه لینده په ګوته کوي. د ډکي ټاکلو لپاره بیا غونډۍ) ګردي استوانی ته ورته) په کوچنیو ستن ډوله چیتروګانو (کردې ټوټې، چې موږ ورته په هسکه مینه کې چیټرو وایو . د مات منګی څخه ګردې څیرې جوړیږي، ټوټه ده) ټوټه کیږي، چې جګوالی یې h = r / n دی. د یوګونو چیتروګانو وړانګو لپاره باور لري یا صدق کوي(د پیتاګوراس جمله) :

$$r_1^2 = r^2 - (r-h)^2 \Rightarrow V_1 = \pi r_1^2 h$$

$$r_2^2 = r^2 - (r-2h)^2 \Rightarrow V_2 = \pi r_2^2 h$$

.

.



څیره ۲۷۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

لږ لېږ

$$r_k^2 = r^2 - (r - kh)^2 \Rightarrow V_k = \pi r_k^2 h$$
$$r_k^2 = r^2 - (r^2 + k^2h^2 - 2rkh)$$
$$r_k^2 = 2rkh - k^2h^2$$
$$r_k^2 = \frac{2r^2 \cdot k}{n} - \left(\frac{rk}{n}\right)^2$$
$$r_k^2 = r^2\left(\frac{2k}{n} - \frac{k^2}{n^2}\right) \Rightarrow V_k = \pi r^3\left(\frac{2k}{n^2} - \frac{k^2}{n^3}\right)$$

$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n) - \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{n^2}\left(\frac{n}{2}(n+1)\right) - \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{3} + \frac{3}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right]$$

که د «ستنګیو» ګڼون تلم پورته لاړ شي، نو په نوکانو کی لمړی ترم د مانا دی او لاس ته راځي

نیمغونډۍ

V نیمغونډۍ $= (2/3)\pi r^3 \Rightarrow V$ غونډۍ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

د غونډۍ د پاس هوارۍ د شمیرلو لپاره دا په خورا زیاتو برخه هوارو ویشي. که دا د ګوډ یا کونج ټکي د منځټکي سره ونښلول شي نو دا یو د اهرامشکل بدن ځان ته غوره کوي د r جګوالي سره.
د دې ټولو اهرامونو ډکیو زیاتون د غونډۍ ډکی ورکوي. دا د خورا زیاتو هوارو لپاره په نزدې توګه بسیا کوي، که چیرې څوك په پام کی ونه نیسی، چې دا سره د کمو استنثاوو کتل کیږي چی پوره هوار نه دي. برسیره پر دې باید د دې بنسټ هوارو زیاتون د غونډۍ پاس هوارۍ سره برابر وي. له دې امله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

غونډي V = د اهرامونوډکیو زیاتون = $r. (1/3)$.

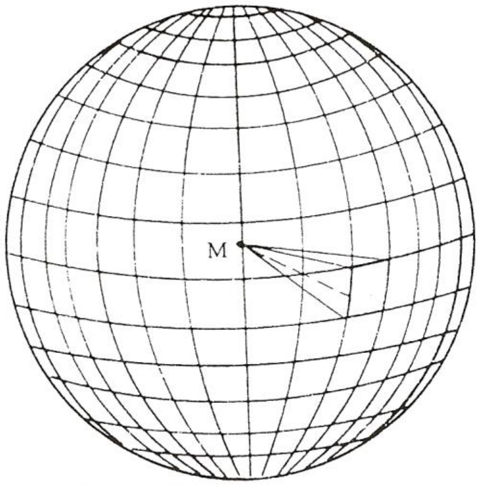
د غونډي پاس یا ټوله هواره

$(1/3). r. O$ د غونډۍ = $(4/3)\pi r^3$

O د غونډي = $4\pi r^2$

په ټولیزه یا عمومي توګه باور لري

$$O = 4\pi r^2 \quad , V = (4/3) \quad r^3$$



ثیره ۲۷۵

پیلبیلګه:

منځنی ځمکوړانګه ۶۳۷۰ کیلو متره ده . د ځمګی پاسهواره او ډکی ثومره دي؟ ځمکه ثومره کتله لري،که د ځمګي منځنی سختوالی $5,514\ g/cm^3$ د مخه ونیول شي یا فرض شي؟

$O = 5,10.10^8\ km^2$,

$V = 1,08\ .\ 10^{12}\ km^3$;

$m = 5,97.10^{24}\ kg$

د خالیغونډي ډکی همداسی لاس ته راځي لکه د یوې خالي استواني ډکی (د مخه لوستل شوی دی) د دوه یو په بل کی پرتو کونځینتري غونډیو توپیر یا کمون:

$$V_{\text{خالیغونډی}} = (4/3)\pi (r_1^3 - r_2^3) \quad .$$

پیلبیلګه:

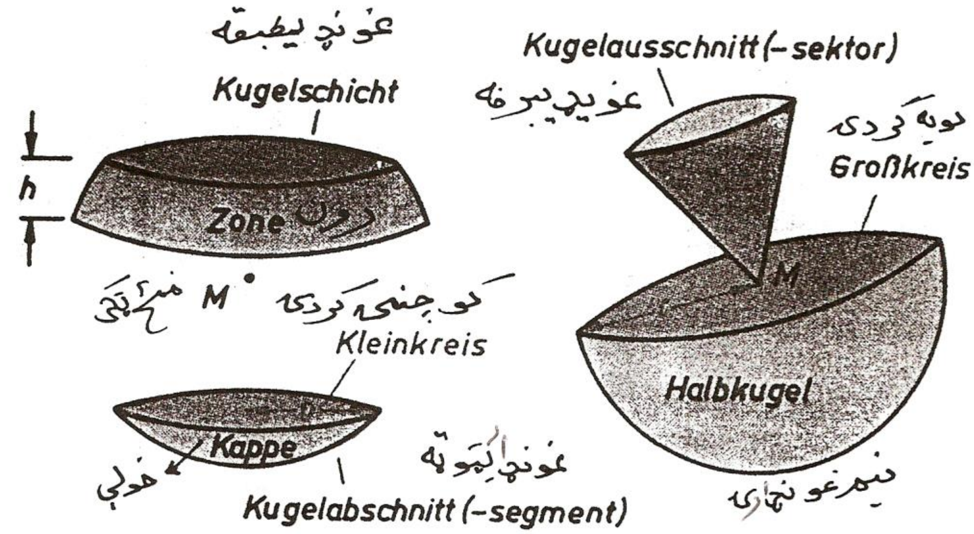
د اوسپنی خالیغونډی کومه کتله لري ، که د باندنینیمی یي ۱۲ سانتیمتره او

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دیوال پنډوالی یی ۸ ملیمتره (دیښتی یا سختوالی یا ټینګوالی) وي؟

$V = (4/3)\pi(6^3 - 5,2^3) = 315,8\ cm^3; \quad m = V \cdot \rho = 2463,25\ g$

اوس غونډیبرخی په پام کی نیسو. په ټولیزه توګه لاندې بنسټیز فورمونه مخ ته له: کرو:



خیره ۲۷۶

ددې یوه ټوټه یا زیاتې ټوټې داسی منځ ته راځي ، چی غونډی د یوې یا یا زیاتو ګردیو له خوا غوڅه شي. که داغوڅی د غونډې له منځټکي تیر شي، نو دوه نیمغونډې او یوه لویه ګردی د غوڅهوارې په څیر منځ ته راځي. که غوڅی له منځټکي تیر نه شي، نو دوه غونډیټوټی منځ ته راځي. د دوه داسی غوڅیو ترمنځ یوه غونډیطبقه منځ ته راځي. که له غونډې یو مخروت ډوله ټوټه رابیله شي، نو غونډیبرخه منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرتله کړی) د دواړو خولیو د یو بل سره مساوي کیښوولو له لارې لرو:

$$\varrho_1^2 h_2 - \varrho_2^2 h_1 + h h_1 h_2 = 0$$

دا بالاخره مور لاندې ته لاربښودوي:

$$V = \frac{\pi h (3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)}{6}$$

د غونډیبرخي ډکي یا غونډیبرخي حجم داسی لاس ته راځي، چی د یوه مخروط او او د ګردیټوټی ډکي سره زیات کړو:

$$V = \frac{\pi h^2 (3r - h)}{3} + \frac{\pi \varrho^2 (r - h)}{3}$$

دلته بیرته اړیکی (*) کارول کیږي، چی په لاندې ډول څیره بدولون ترې لاس ته راځي $\varrho^2 = h(2r - h)$. په دې توګه د ϱ^2 لپاره ځاي په ځاي کوي او له دې لاس ته راځي :

$$V = \frac{\pi h^2 (3r - h)}{3} + \frac{\pi h (2r - h)(r - h)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3} + \frac{2\pi r^2 h}{3} - \pi r h^2 + \frac{\pi h^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \frac{2\pi r^2 h}{3}$$

له r د (*) په مرسته ځ کا په ځای نسي لو لاس ته راځي

$$V = \frac{2}{3}\pi h \left(\frac{\varrho^2 + h^2}{2h}\right)^2 = \frac{\pi}{6h}(\varrho^2 + h^2)^2$$

د غونډیټوټی پوښهواره M ، چی د غونډیخولی نومیږي او یا کاردینالخولی بلل کیږي، په همغه فکر شمیرل کیږي لکه د غونډي پاس یا ټوله هواره . که د غونډیبرخی د ډیرو اهرامونو د زیاتون په څیر په پام کی ولرو، نو د هغی بنسټهواره همغه غونډیخولی ده. (کړی شو چی غونډیخولی په ځاي کېږه ولیکو) نو لرو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Mr / 3 = 2\pi r^2h / 3 \quad \Leftrightarrow \quad M = 2\pi rh$$

که د (*) له لارې بدل شي، نو د غونډېکپرې لپاره لاس ته راځي :

$$M = \pi . (\varrho^2 + h^2)$$

د ټولهوارې د لاس ته راوړلو لپاره دې بیا یواځې د بنسټګردی هواره ور زیاته شي. د غونډیطبقی پوښهوارې ته د غونډېزون Kugelzone وایي. دا د دوه کپرو له کمون څخه لاس ته راځي. ټوله هواره یا پاسهواره یې داسی لاس ته راځي، چی بنسټهواره او سرپوښګردي هوارې وززیات شي. د غونډېټوټې پاس هواره داسی لاس ته رځي، چی د غونډیکپرې هوارېته د مخروطپوښ ورزیات شي.

د غونډارې برخو لپاره لاندې فرمولونه باور لري.

د غونډارې ټوټه غونډارې خولی	$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h) = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho^2 + h^2)$ $M = 2\pi rh = \pi(\varrho^2 + h^2)$ (Kugelkappe) $O = 2\pi rh + \pi\varrho^2 = \pi(2\varrho^2 + h^2)$
غونډارې ټیکلی غونډارې زون	$V = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)$ $M = 2\pi rh$ (Kugelzone) $O = \pi(2rh + \varrho_1^2 + \varrho_2^2)$
غونډارې برخه	$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{6h}(\varrho^2 + h^2)^2$ $O = \pi r(2h + \varrho)$

بیلګه:

۱ – د پنیرخرخ د یوه غونډیطبقي فورم یا بڼه لري. د هغه پاس هواره او ډکی وشمیرئ، که وي : $\varrho_1 = \varrho_2 = 25$ cm او $h = 20$ cm.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V = (20\pi / 6)(3.25^2 + 3.25^2 + 20^2) = 43458,70\ cm^2$$
$$= 34,458\ dm^2$$

وړانګه r د پیتاګوراس د جملې په مرسته لاس ته راځي :

$$r^2 = \rho_1^2 + (h / 2)^2 \Rightarrow r^2 = 25^2 + 10^2 \Rightarrow r = 26,93\ cm$$

نو لرو

$$O = \pi (2.26,93.20 + 2.25^2) = 7310,59cm2 = 73,11\ dm^2$$

۲ – یو دلوبی لاټو یا لوبی څرخی د غونډیټوټی بڼه لري د ټولجګوالی $r = 16$ cm او سور $b = 2\rho = 10$ cm سره. د هغه ډکی او پاسهواره څومره لوی دي؟

د خولی جګوالی د پیتاګوراس د جملی په مرسته لاس ته راځي :

$$(r - h)^2 + \rho^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = - 2rh + h^2 + \rho^2 = r^2$$
$$\Leftrightarrow h^2 - 2rh + \rho^2 = 0 \Leftrightarrow h^2 - 32h + 25 = 0$$

د دواړو اوبیو یا حلونو $h_1 = 31,2$ cm او $h_2 = 0,8$ cm سره.

داچی $h < r$ ، نو باید یواځي دوم اوبی یا حل د کارونی یا ګټور وي. له دې امله لاس ته رځي

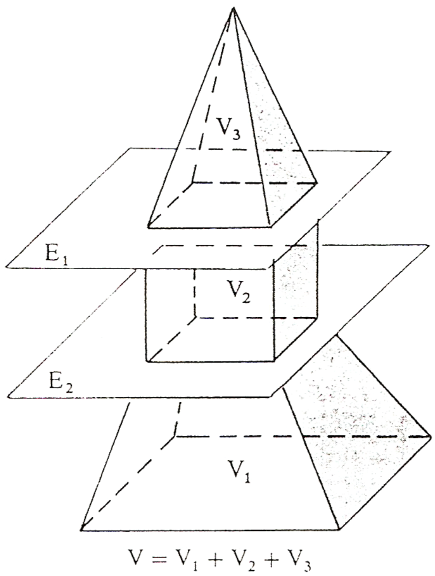
$$V = 2\pi .16^2 . 0,8 : 3 = 428,93\ cm^3$$
$$O = 16\pi(2 . 0,8 + 5) = 331,75\ cm^2$$

په خوښه جوړشوي یا فورم شوي بدنونه

لکه څنګه مو چی زیات تر پام تیر شو، ګټوور دی چی د یوه پیچلي بدن د ډکي یا پاسهوارې د شمیرلو لپاره دا بدن په ګټوره توګه یا هدفمند ډول ټوټی ټوټي کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

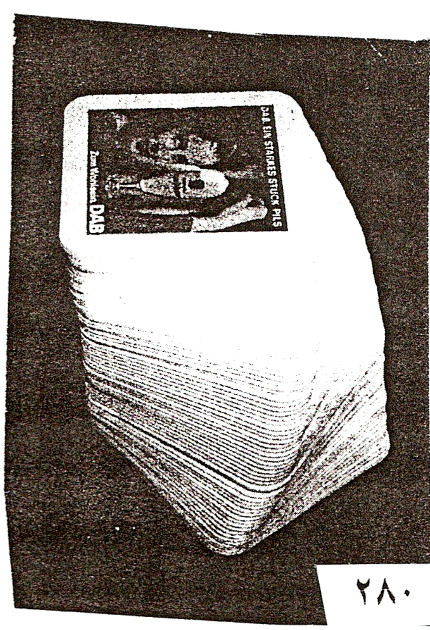
په دې ډول ساده برخه بدنونه منځ ته راځي، کوم چې ض معلومو فرمولونو له لارې شمیرل کیدی شي.



خیره ۲۷۹

بیلګي :
ددې څیره شوي بدن ډکی له یوه پڅ اهرام، کوادر یا غبرګاړخیز یا مکعب او یوه اهرام څخه لاس ته راځي.دا جوتیږي، که بدن په دوه غوڅیو په هوارو E_1 او E_2 ټوټه شي .

د بیاتیونی له لارې کیدی شي چې زیات بدنونه یوبل سره پرتله یا مقایسه شي(مخروط، اهرامونه) د ګیلاس اینبولو ټوټې(داسی ډبل کاغذونه دي چې د پیالیلاندې یا ریمکابي یا پشکاب په څیر وي او ګیلاسونه پرې اینبوول کیږي) چې یو په بل اینبول شوي په پام کی نیسو. د دې ټوټو د څرخولو ، یا ځاي بدلولو له لارې جګوالی او ډکی نه بدلیږي. له دې منځ ته راغلی پوړی په پام کی نه نیول کیږي، ځکه چې په تیوري کی



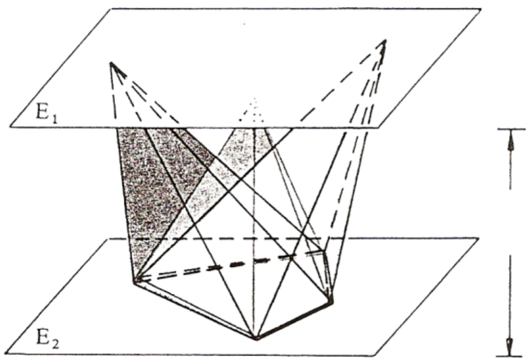
څیره ۲۸۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا بدن د ناپای زیاتو طبقو څخه جوړ دی، چی پنډوالي یی په پام کي نه نیول کیږي د دې نور ورزیات استعمال د کاوالیری Cavalieri پرنځیپ دی

جمله :
دوه بدنونه همغه ډکی یا برابر ډکي لري، که د هغو ټول پراته غوڅي په همغه واټن بنستهواري ته پراته وي.

په دې کی ضرور نه دی چي غوڅهواري دی کونګروا ینځ وي!



ځیره ۲۸۱ : دا بیاتي شوي اهرامونه ډکي برابر دي، ځکه چی همغه جګي او برابر بنستهواري لري: $V = (1/2)G.h$
د کوچنیو واټنونوسره هره غوځهواره چی د بنستهوارې سره غبرګه وي، په اهرامونوکی هواربرابر غوځهواري خوړوي

دا د غونډیډکي شمیرلو لپاره یو ښکلی میتود رامنځ ته کوي.
د یوې ګردي استوانی یا ګردیتوټی څخه چی وړانګه r لري او 2r جګ دی دوه د ځوکو یا ککرې له لارې یو بل ته مخامخ مخروطونه غوڅوي (یو دیابولو) د r = h سره.
داپاتی خالیفورم یوه د شګو ساعت پوښ راپه ګوته کوي. د یوې دومی همغی سره برابر ې ګردي استوانی یا ګردیتوتی د وړانګي r په اندازه یو غونډی راغوڅوو. د سیومتري له امله بسیا کوي که لاندې نیمغونډی او د «شګو» ساعتنیمی تر ځیړنی لاندی ونیسو. هره غوڅهواره یوه بستهوارې سره غبرګه هواره راکوي، په غونډي کی ګردی په شګوساعتپوښ کی

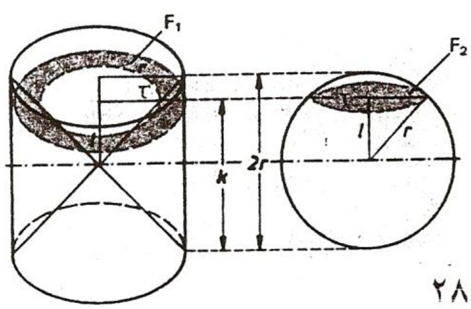
(c) ketabton.com: The Digital Library

ګرديګوته يا ګرديکړی. دلته دې 'r د ديابولو څخه منځ ته راغلي ګردۍ وړانګه وي. r د غونډيغوڅيګردي وړانګه .

د هوارو لپاره چې واټن 1 له همغه بدن منځټکي ولري، باور لري:

$$F_S = \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi (r^2 - r'^2)$$

$$F_K = \pi r^2 = \pi (r^2 - 1^1)$$



شېره ۲۸۲

د وړانګي جملی څخه، برسيره په دې لاس ته راځي: (د نتګوساعت)

$$r' / r = 1 / r \Rightarrow r' = 1$$

$$\Rightarrow F_S = \pi (r^2 - 1^2) F_K$$

دواړه بدنونه ګورو چي ډکيمساوی يا ډکيبرابر دي.

اوس د استوانی ډکی $V_Z = \pi r^2 h = 2\pi r^3$ دی، ځکه چی $h = 2r$ دی .

د ديابولو ډکی دی :

$$V_D = (2\pi r^2 / 3).(h /2) = \pi r^2 .h / 3 = (2 /3) \pi r^2$$

او له دې سره د شګوساعت – او نيمغونډي ډکی :

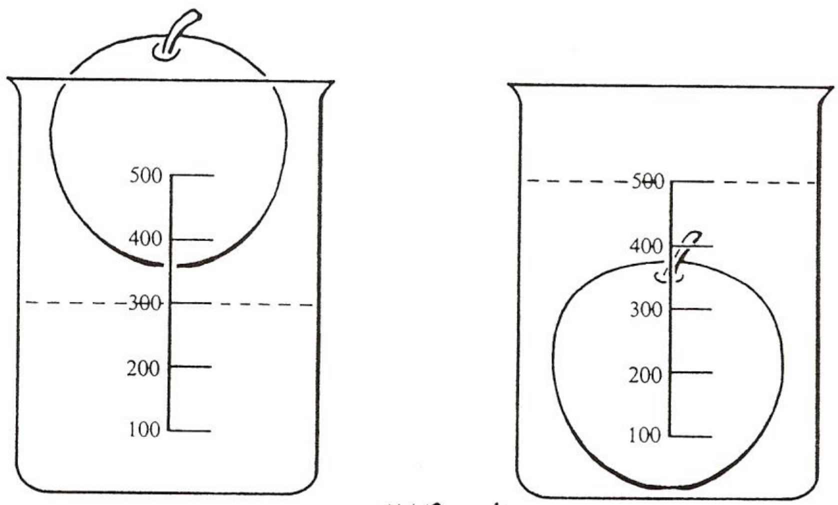
$$V_K = V_Z - V_D = 2\pi r^3 - (2 / 3)\pi r^3$$

$$V_K = (6 / 3)\pi r^3 - (2 /3)\pi r^3 = (4 / 3)\pi r^3$$

د پوره نامنظم شکلونو ډکی د شميرپوهنی له لارې يا هيڅ نه شميرل کيږي او يا پوره ټيك د پيچلو شميرنپوهنو متوضو سره هم نه شميرل کيږي. لکه د يوې منې يا د يوه

(c) ketabton.com: The Digital Library

الو ډکی یواځي فزیکی متودونه یا طریقی مرسته کوي چی ډکي یی وشمیرل شي. لکه په لاندې ځیرو کي ، ځي روښانه شوی دی.



ځیره ۲۸۳

ځیره ۲۸۴

تمرینونه

۱ – د هغه بدن ډکی څومره لوي دی ، چمنځ ته راځي، که د مکعب په هره هواره یو ولاړ اهرام کیښول شي د s = a سره؟

۲ – یو تیترائیدر څلورهوایز بدن او یو غونډی برابر پاسهوارې لري. د هغوي ډکی په کوم تناسب یو بل سره پراته دي یا کومه ځاننیونه یو بل سره لري؟

۳ – هر منظم پولوئید لپاره یوه دننه غونډی شته . چی د هغه هره هواره په منځئېکي کی لمس کوي. ددې وړانګه دی r وي. د پولوئید ډ ګی اوV او O پاسهوارې V = O.r / 3 لپاره دلایل راوړی.

پام وکړی چی پولوئیدر پـه اهرامونو ټوټه شي چی وړانګه r ولري، پـه
ډول چې د پولوئید هر اړخهواره د داسی یوه اهرام بنسټهواره وي.

۴ – د المان د پارلمان په سر منه او اتیران چی له طیلا جوړ دي د پارلمان د
ډانګ سره غبرګ د قدرت نخښنه جوړوي. دا د پارلمان منه به څومره
وي، که دا د پاکی طپلا ښخه جوړ وي($\rho \sim 19,3\ g / cm^3$; $\sim 10\ cm$ ~
اتیران وزن ثابت یا ځای په ځای پاتیږي)؟

۵ – یوه غونډی، توته، اهرام (د هغو بنسټهواره) برابر وړانګی لري، د اه
غونډی جګوالی یا جګی داسی وټاکی ، چی الف) همغه ډکي لري» د
برابره پاسهواري لري.

۶ – د یوه غونډی ډوله تیلو څاڅکي ښخه، چی ۵ میلي متره نیمی لري، له
توئیږي د یوې ګردی ډوله تیلو پرده جوړوي، چی نیمی ئی ۱ متر . دا
څومره پنډه ده؟

۷ – د یوې سابونپوښکی دیوال به څومره لوي وي، چی دباندنی نیمی یی
سانتي متره وي، کوم چی له څاڅکی جوړ دی، چی نیمی یی ۵ میلي م

۸ – یوه د ښیښی غونډی د دابضنی نیمی سره، چی ۱۲ سانتي متره دی ۲
وزن لري یا درند دی. د هغی دیوال څومره لوي دی ($2,6 g / cm3 \sim$ ~

۹ – یو هوا بالون یو ۲۵ متره نیمی لري.
الف) دا دننه سمخ یا غار یی څومره درووند دی، که د یو مربع متر و
وزن ۴۵ ګرامه وي؟ ب) ډکی څومره وزن لري که
هایدروجن ($\rho = 9.10^{-5}\ g / cm^3$) د ډکي مادې په څیر وکارول شي؟

۱۰ – یو مکعب کی یو غونډاری یا غونډی د خورا لوي ډکی سره خوندي ک
په یوه غونډاري چی خورا کم ډکی ولری راګیر یا خوندي کیږي.د م
اړخ اوږدوالی 5 cm دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف د ټول تن غوڅې څیره وباسئ .

ب) د دواړو غونډارو ډکې او پاسهواره وشمیرئ .

۱۱ – د لاندې هوایي بدنونو ډکې او پاس هوارې څومره لویې دي:

الف) سپوږمۍ (r = 1735 km)

ب) مارس (r = 3430 km)

پ) وینوس (r = 6305 km)

ت) جوپیتر (ر (r = 71800 km)

۱۲ – د کورکغونډۍ(ρ = 0, 25 g / cm³) د ۳۶ سانتي متره نیمي سره یوه غونډیډوله د پارې زرۍ(ρ = 11,4 g / cm³) لري. دا د پاربزرۍ څومره لوې دۍ، که غونډۍ تر نیمایي په ابو کې ډوبه شي؟

۱۳ – د یوه لوې سرې سرې ۴۰۰ میلیونه غونډیډوله د سرووپوڼکې لري، هر یوه د نیمي 0,3 mm سره. د ټولو پوڼکیو ګډه پاسهواره څومره ده؟

۱۴ – یو غونډۍ ، چې وړانګه یې r = 10 cm ده، د یوې هوارې څخه په ۳ سانتي متره ، له منځ یا کوکز څخه، واټن غوڅیږي. د دواړو برخو غوڅهوارې او ډکې وشمیرئ.

۱۵ – د پاتې یاد نایادو برخو M,V,h او r د لاندې غونډیبرخو لویوالې وشمیرئ

a) $r = 6$ cm ; $h = 5$ cm b) $M = 50$ cm² ; $h = 3$ cm

c) $h = r = 7$ cm d) $M = 700$cm² ; $r = 10$ cm

۱۶ – د ځمکې پاسهوارې کومه برخه د ۱۰۰۰۰ متره جګوالې څخه لیدل کیدی شي(د ځمکې وړانګه ۶۳۷۰ کیلومتره ده)

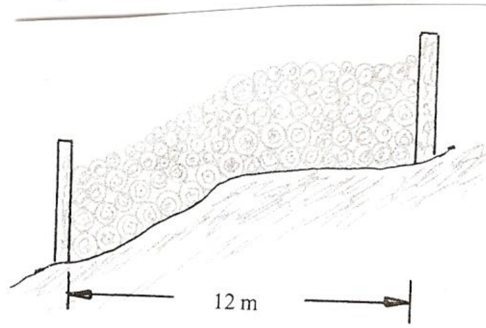
۱۷ – د یوه غونډې نیمې په څلورو برابرو برخو ویشل کیږي ۰ په ټوټهټکو کې په نیمې ولاړې درې هوارې اچول کیږي. په کوم څانښیونه یا تناسب کې

الف) د پوښهوارې ، ب) د راپیدا شوو یا منځ ته راغلو غونډې برخو

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره پراته دي؟

۱۸ – په یوه غونډي کی، له منځ څخه لیدلو یا کتلو سره ، هوایی(دلته مطلب د غونډي ترمنځ هوا یا د هواډکی دی) پړسیدنه، د دریواړو کواوردیناتو څخه برابردي. که دا یو له بل توپیر ولري، نو د الیپسوئید څخه غږیږو، چی اصلی محورونه یی a,b او c دي. د ایلیپسوئید ډکی د فرمول $V = (4/3)\ a.b.c$ له مخی شمیرل کیږي. ځکه په ریښتونی غونډی نه دی، بلکه یو الیپسوئید، چی اصلي محورونه یي $a = c = 6378$ km (د اکواتور وړانګه) او $b = 6357$ km (قطبي وړانګه) لوي دي. (که په کلکه ونیول شي نو د اکواتوروړانګو ترمنځ یو کوچنی توپیر شته) د ځمکي ډکی وشمیرئ او د مخ ته تیر غونډي او غونډي برخي کی لوستلو سره یی پرتله کړی)



خیره ۲۸۵

۱۹ –په یوه زوړندي یا پیچومی باندي ۱ متر اوږد لرګی ډیری شوی، لکه په خیره ۲۸۵کی چی لیدل کیږي. څومره د هوامتر لرګی دا 1,20 m جګه د لرګوډیری لري.

وکتورشمیرنه

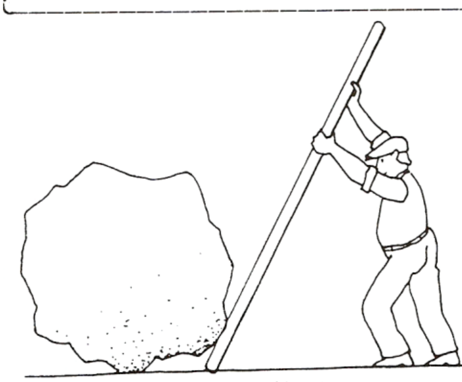
نځورونه

پیلبیلګه

یوه درنديږ تيکی ته څنګه سړی حرکت ورکولی شي؟ طبعاً کیدی شي چي وړل یی وازمائل شي، مګر دا پوره ستونځی لري او دا لانديږ طريقه یی ساده ده: د تيکی لانديږ سړی یوه تخته یا اړم ننبلوي او یا ورلانديږ کوي، د بل سر نه یی لانديږ لور ته زور کوي یا لانديږ لور ته زور په واردوي. تيکه یو څرخونحرکت بانديږ راځي.

ددي حالت لپاره د اړم قانون صدق کوي« زور د زوراړم = بار د بار اړم» .

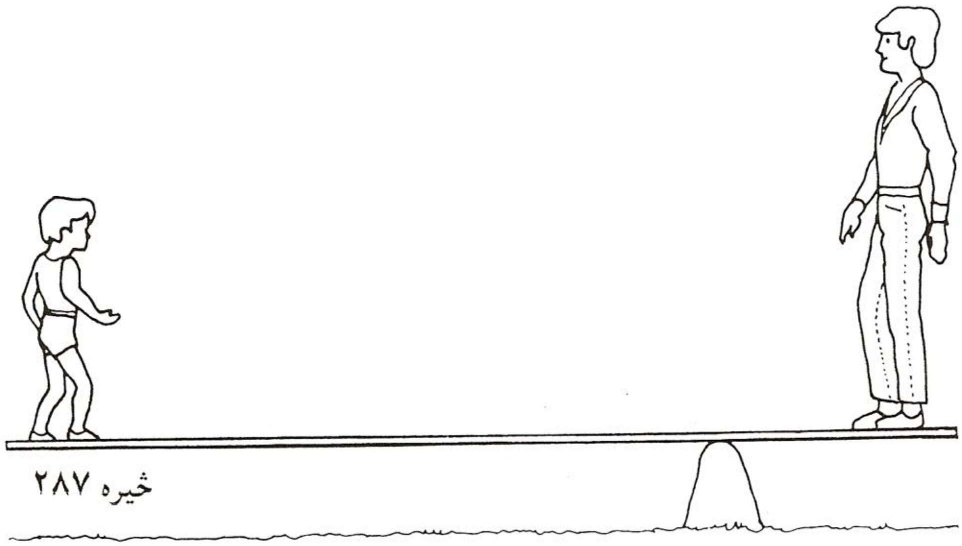
که تيکه په پوره اندازه اوږده (او ستابيل) وي، کیدی چي یو ډیر نازورور سړی هم کړی شي، چی خورا درانده بارونه پورته کړي.



خیره ۲۸۶

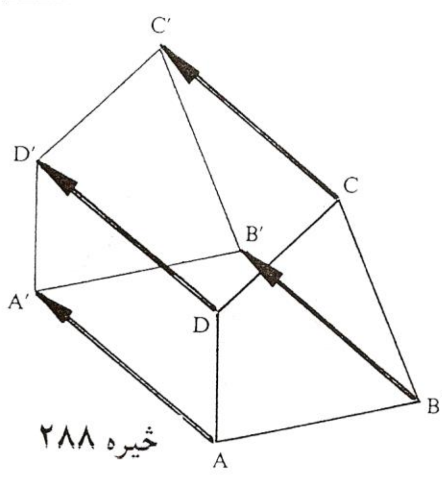
یا دا حالت د پورته پیلبیلګي سره ټیک ...وښانه څرګند شوی ؟ هیڅ نه پیښیږي، ...که څوك په اړم ښکته یا پورته زور ونه ...کړي بلکه یا راکښ یا ورپوري وهي. ...ور باید دا پوښتنه نوره هم روښانه کړو ...و د زوارزښت سره دزورتاثیر لور هم په ...ټپله لوبه کی ورداخل کړو. ددي هدف لپاره وکتور سره شمیرنه کږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



څیره ۲۸۷

تعریف : وکتور د یوه ارزښت او یوه لور سره تعریف دی. **تل د یوه غشي په** څیر انځوریږي. اوږدوالی د وکتور ارزښت (کڼ ارزښت) ، په هواکی یی ځاي لور او د غشي څوکه د وکتورلور موخه یا هدف ښايي.



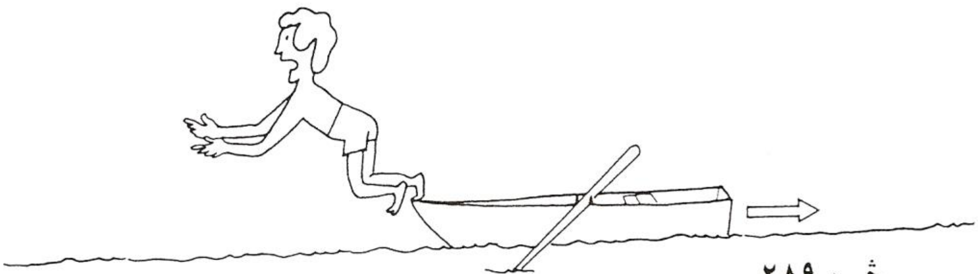
څیره ۲۸۸

دوکتورونو لپاره د کارونی ساحی

ګڼونه د مخنښبی سره کیدی شي د وکتور په حیث واضح شي. په فزیک کی کښول، لکه زورونه، سرعتتونه، لارې کیدی شي د وکتورونو په څیر انځور شي. (د جلالکوټ څخه و څیره کښول په وکتور سره په ښنه کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

و هسکی مینی ته رابنایی، چی دا لار دا دوه ځایونه سره ونخلوي او دا هم رابنايي چی څومره اږده ده. وکتور دا را په ګوته کوي، چی ایا څوك له جلاکوټ څخه هسکی مینی ته ځي او که له هسکی مینی څخه جلالکوټ ته)



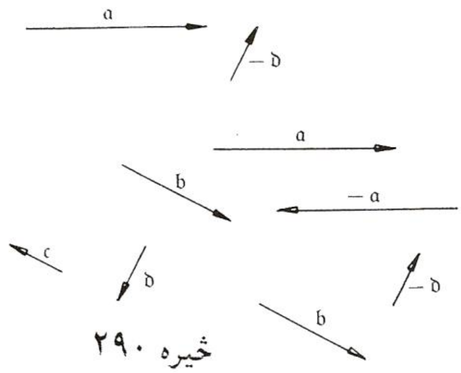
څیره ۲۸۹

داچی یو وکتور د خپل پیلټکي او پایټکي سره ورکړ شوی دی، کیدی شي چی دا ټکي هم د هغه په انځورونه کی استعمال شي.

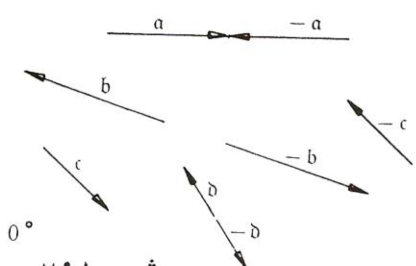
تعریف: هغه وکتور چي له ټکي P و ټکي Q ته لاربنودوي، د $\overrightarrow{PQ}$ سره په نخښه کیږي.
بل ډول لیکدودونه یی دي: $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} = \vec{a}$.

په راکښلو سره که ټکی 'P د P څیره او ټکي 'Q د ټکي Q څیره وي، نو د $\overrightarrow{PQ}$ اوږدوالی او لورد $\overrightarrow{P'Q'}$ یو بل سره برابر دي. له دې امله دا باید برابر ولیدل شي یا وګڼل شي. یو وکتور له دې امله یو غشی نه دی بلکه ډیر یوبل سره غبرګ او کوګروراینخ غشي دي. له دې امله د ورته ټولګي څخه هم غبږیدی شو. (دا دې ځما په لمړي د شمیتپوهنی کتاب کي وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۹۰



خیره ۲۹۱

ځیره وکتورو نه د ایکویوالنځېږولګی

په ځیر: دوه وکتورونه ټیك هلته سره برابر دي، که هغه همغه ارزښت(اوږدوالی) او همغه لور ولري.

تعریف

د **a** مطلقه ارزښت a = |**a**| دی. a تل یو نامنفي ګڼ دی.

وکتورونه د ارزښت ۱ سره موږ یوونوکتورونه یا واحدوکتورونه بولو.

وکتورونه د همغه ارزښت سره مګر د مخامخ لور سره مخامخ یا په ځټ وکتورونه بلل کیږي:

$$|\mathbf{a}| = |-\mathbf{a}| = a$$

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} = -\overrightarrow{QP} = -(-\mathbf{a})$$

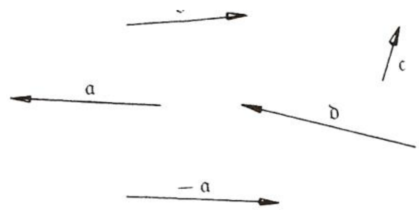
یواځنی وکتور د 0 (صفر) ارزښت سره صفروکتور **0** دی:

$$\overrightarrow{AA} = \mathbf{a} \Rightarrow |\overrightarrow{AA}| = |\mathbf{a}| = 0$$

دا چی وکتورونه له ټکي وټکي ته لاري روښانه کوي، کیدې شي چی د وکتورونو د توضیح لپاره کواوردینات یا پروت ولاړ سیستمونه (محورونه) هم وکارول شي:

تعریف: وکتورکواردینات د پیل او پای ټکو توپیر یا کمون څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



خيره ۲۹۲

په هواره کي : $a = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix}$

په هوا کی : $a = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix}$

خيره وکتورونه او د هغوي ارزښتونه(اوږدوالی):

$|\mathbf{a}| = |\mathbf{-a}| = 2,5\ ;\ |\mathbf{b}| = 2\ ;\ |\mathbf{c}| = 1\ ;\ |\mathbf{v}| = 3$

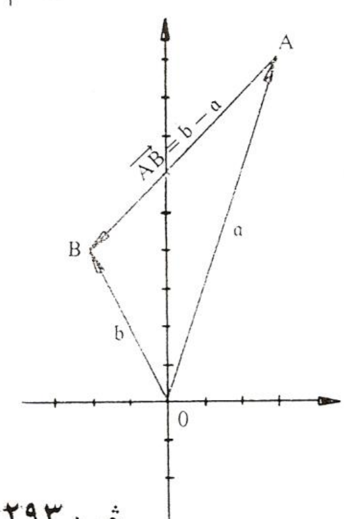
بيلګي:

وي دې A(3| 9) او B(-2 | 4) پيل-او پايټکي . نو د A او B څخه ټاکلی وکتور کواوردينات په لاندې ډول لاس ته راځي :

$$a = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix};\quad b = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$-c = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 9-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

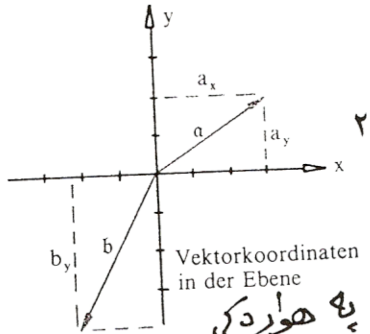


خيره ۲۹۳

جمله: د وکتور ارزښت د پيتاګوراس له جملی څخه لاس ته راځي او دا د يوګونو کواوديناتو له لارې :

په هواره کی: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

په هوا کې: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$



Vektorkoordinaten in der Ebene

په هوارډکې وکتورکواوردینات

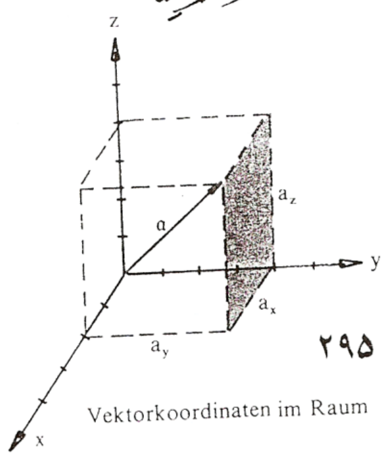
شیره ۲۹۴

بیلګې :

$$a = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |b| = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11{,}31$$

$$c = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |c| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{77} \approx 8{,}77$$



Vektorkoordinaten im Raum

په هواکې وکتورکواوردینات

شیره ۲۹۵

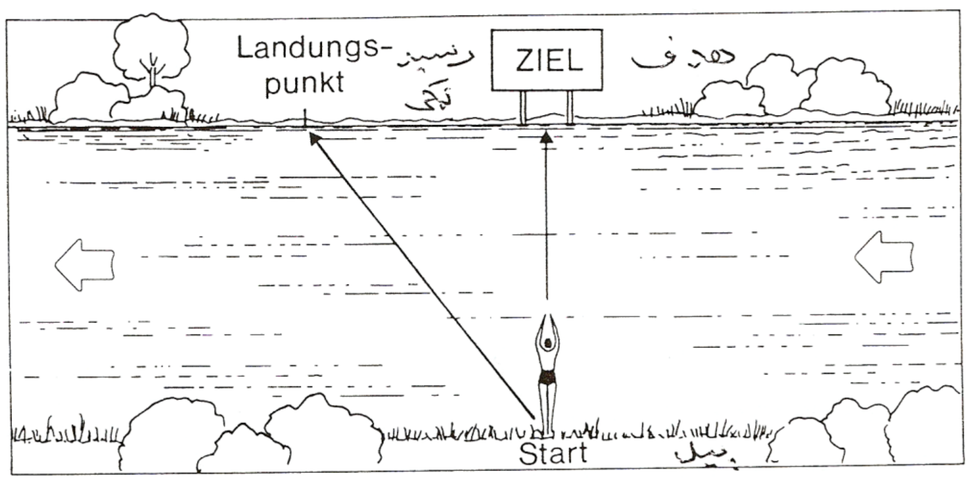
وکتورزیاتون او s–ځلوون یا ضربول

پیلبیلګه: یو لامبووهونکی د سین بلی لور ته د سین په سور یا پلنو لامبی، دا په دې مانا چې اوبه روانی دي. سره له دې چې دا تل سیده لامبي ، دا نه شي کولی چې هغه د لمبا ځاي ته مخامخ ځاي ته ولمبیدی شي.د روانو اوبو څخه د ځان سره وړ کیږي. په ټولیزه –

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا عمومي توګه ده یو مائل حرکت وکړ یا مایل یي ولمبل، کوم کې چې د ده د لمبا سرعت او د سین سرعت یو په بل زیات شوي دي.

ګرافیکي د وکتورزیاتون داسې صورت نیسي، چې د دواړو سرعتونو وکتورغشي په خپلو پیل ټکو یو په بل ږدي او دا هر یو د یوه غبرګ اړخیز سره یوځایې وصل کوي. د غبرګ اړخیز نیمی د دواړو سرعت وکتورونو زیاتون ، چې له پیل ټکی پیل کیږي انځوروي. یعنی د لامبووهونکي او د اوبو د سرعت زیاتون ، ځمور په ځیره کی »



ځیره ۲۹۶

تعریف: وکتورونو ګرافیکی سره زیاتیږي، که د دوهم وکتور پیلټکی د لمړي وکتور په پاګي کیښول شي یعنی د غشی په سر کیښول شي او داسی وریسی . دا زیاتون وکتور نو بیا د لمړي وکتور د پیل ټکی د دوهم وکتور یا د ځنځیر اخرني وکتور د څوکی یا غشي سر پورې غزول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خیرونو څخه دا لاندې هم لاس ته راتلی شي

جمله : د زیاتونوکتور کواودینات همداسی کمونوکتور د پیلوکتور د زیاتوز همداسی کوم څخه لاس ته راځي.

په هوارۍ

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

په فضاکې

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

بیلګه

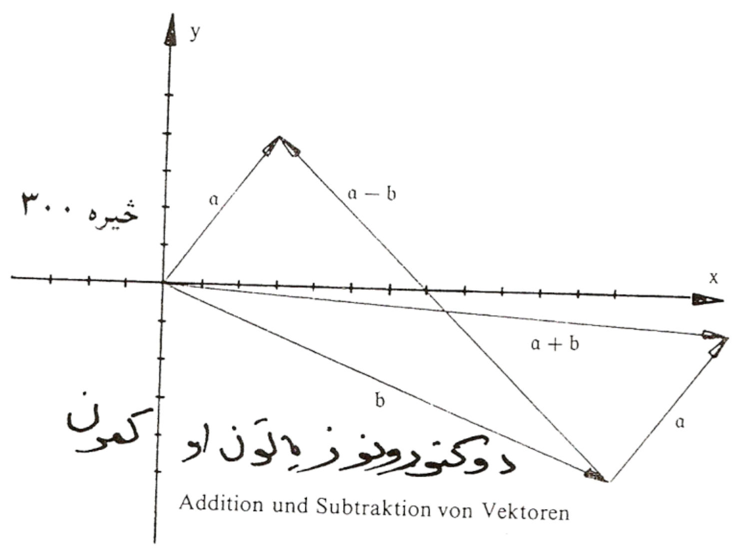
1. $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad |a| = 5 \quad |b| = 13$

$$\Rightarrow a + b = \begin{pmatrix} 3 + 12 \\ 4 \ - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a - b = \begin{pmatrix} 3 - 12 \\ 4 \ + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$b - a = \begin{pmatrix} 12 - 3 \\ -5 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$|a - b| = |b - a| \approx 12{,}73; \quad |a + b| \approx 15{,}03$$



Addition und Subtraktion von Vektoren

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\textbf{2.}\quad a = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a + b = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 3+0 \\ 2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$a - c = \begin{pmatrix} 4-7 \\ 3-8 \\ 2+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ \ 3 \\ -\ \ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$a - b + c = \begin{pmatrix} 4+2+7 \\ 3-0+8 \\ 2-5-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$a + a = \begin{pmatrix} 4+4 \\ 3+3 \\ 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot a$$

دا وروستنی بیلګه د وکتورونو د ځلولو لپاره ده چې له ګڼونو سره ځل شوي (s– ځلون یا · ضربونه) یعنی د سکالار سره ځلونه :

تعریف : وي دې s یو ریل ګڼ (سکالار هم نومیږي) **a** یو وکتور. نو s. **a** = **a** . s هغه وکتور لاس ته راکوي ، چې همغه لور ولري لکه **a** او s –واره اوږدوالی ولري. وکتور **a** له s سره ځلیږي، که د وکتور هر کومپوننت د s سره ځل شي:

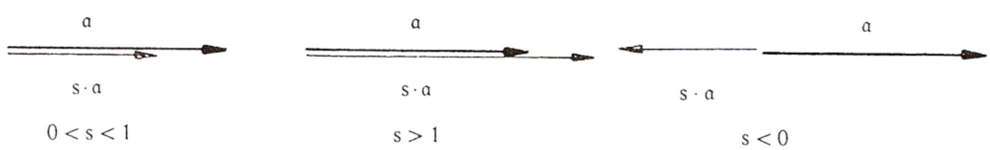
په هوا کې $s \cdot a = \begin{pmatrix} s \cdot a_x \\ s \cdot a_y \\ s \cdot a_z \end{pmatrix}$ ، په هوار کې $s \cdot a = \begin{pmatrix} s \cdot a_x \\ s \cdot a_y \end{pmatrix}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad s_1 = 4; \quad s_2 = -0{,}5$$

$$\Rightarrow s_1 \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 \\ 4 \cdot 7 \\ 4 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 28 \\ 36 \end{pmatrix}; \quad s_2 \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \cdot 5 \\ -0{,}5 \cdot 7 \\ -0{,}5 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ -3{,}5 \\ -4{,}5 \end{pmatrix}$$

هندسي د یوه وکتور ځلونه د یوه ریيلګڼ سره د هغه وکتور منځنی غزونه ده د ځلوونی یا فاکتور s په اندازه. د وکتور پیلتګی د کرښمنځ یا غزونمنځ دی. دلته د $|s| > 1$ سره وکتور اوږدیږي یا غزیږي» او د $|s| < 1$ سره وکتور لنډیږي. د $|s| = 1$ لپاره د وکتور ارزښت تغیر نه خوري. که $s < 0$ وي، نو د وکتور لور راپه څټ کیږي یا راګرځي یا برعکس کیږي.



څیره ۳۰۱: د وکتوره a ځلونه د یوه رئیل ګڼ s سره.

که $s = 0$ وي ، نو $s.\mathbf{a}$ صفر وکتور **0** دی .

جمله :په ټوله توګه یا مجموعه کی د سکالار سره د وکتور ځلونو لپاره ل اندي شمیر قاعدي باور لري:

$$|s.\mathbf{a}| = |s|.|\mathbf{a}|$$
$$(s_1 + s_2).\mathbf{a} = s_1.\mathbf{a} + s_2.\mathbf{a}$$
$$s.(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s.\mathbf{a} + s.\mathbf{b}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګې:

$$1.\quad \left|-3\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{matrix}-9\\-12\\-15\end{matrix}\right|\approx 21{,}21$$

$$\left|-3\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right|=|-3|\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right|=3\cdot\sqrt{50}\approx 21{,}21$$

$$2.\quad (4-6)\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}=(-2)\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$$

$$(4-6)\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}-6\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\28\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-18\\42\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$$

$$3.\quad 3\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}\right]=3\begin{pmatrix}7\\-9\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\-27\\9\end{pmatrix}$$

$$3\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}\right]=3\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-9\\33\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6\\18\\24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\-27\\9\end{pmatrix}$$

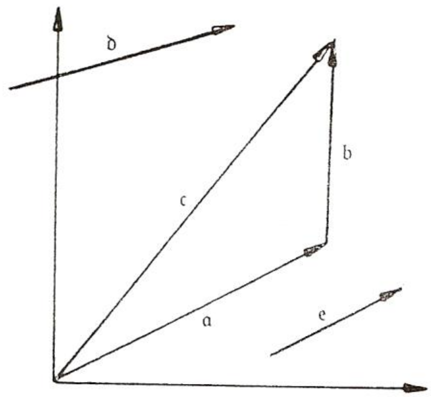
که یو وکتور د بل وکتور زیاتواره په څیر انځور کړی شي، نو دواړه وکتورونه لاینې بلواك بلل کیږي، په غیر له دې لاین خپلواك بلل کیږي.
ټیك په لاندې توګه افده کیږي:

تعریف: دوه وکتورونه **a** او **b** لاینې بلواك دي، که چیرې (یواځنی ټاکلی) رییلګڼ s (سکالار) موجود وي د کوم لپاره چې **s.a = b** باور ولري.
دا وکتورونه لاینخپلواك دی، که انځورونه **s.a = b** د هیڅکوم رییل ګڼ s لپاره ممکنه نه وي.

په هواره (R^2) کی تل دري وکتورونه لائني بلواك دي. په هوا (R^3) کی تل ۴ وکتورونه لاینبلواك دي. په هواره زیات تر زیاته ۲ او په هوا کی زیات تر زیات

(c) ketabton.com: The Digital Library

دري وکتورونه لاینیخپلواک کیدی شي.



شیره ۳۰۲

لاینی بلواک وکتورونه	لاینی خپلواک وکتورونه د بیلګی پو توګه
$\{a, e\}$	$\{a, b\}$
$\{a, b, c\}$	$\{b, c\}$
$\{a, c, d\}$	$\{e, d\}$

بیلګي:

۱ – وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix}$ لاینی بلواک دې ، ځکه چی

$$s.\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -3.s = 6 \\ 6.s = -12 \\ 11.s = -22 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = -2 \\ s = -2 \\ s = -2 \end{matrix}$$

۲ – په څټ یا برعکس، وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$ لاینیخپلواک دی، ځکه چی :

$$s.\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -4.s = 10 \\ 6.s = 15 \\ 8.s = 20 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = -2,5 \\ s = 2,5 \\ s = 2,5 \end{matrix}$$

ګورو، چی دلته سره ګډ یا مساوي s نه شي پیداکیدی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وکتورونو لاینې خپلواکوالې او لاینې بلواکوالې په هواره او هوا کې د وکتورونو انځورونو لپاره په کارول کیدې شې:
لکه څنګه چې ټکې په کواوردیناتو کې تعریفیږې چې خپل واټن له محور څخه بیانوې، نو همداسې کیدی شې چې وکتورونه ، ځانونه، په خوښه داسې وکتورونو روښانه یا بیان کړې، چې ځغاستلور یې یو ددې کواوردیناتو محور وې..

تعریف:

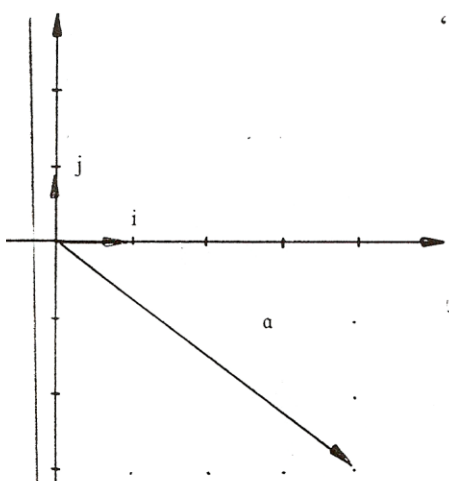
وکتورونه : $i=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $j=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په هواره کې، همداسې

وکتورونه $i=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ او $j=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ په هوا کې او $k=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

بنسټ وکتورونه بلل کیږې. دا مثبتمحور لو په ګوته کوې او ددې لپاره باور لرې:

$$|\mathbf{i}|=|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=1$$

هر وکتور کیدې چې په هواره کې له i او j او په هوا کې د i , j او k وکتورونو په نامه لاینې کمبیناشن په څیر د بنسټ وکتورونو څخه انځور کړې شې.



څیره ۳۰۳

بیلګې:

$$a=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=4\cdot i-3\cdot j=4\cdot i+(-3)\cdot j$$

$$b=\begin{pmatrix}-3\\11\\6\end{pmatrix}=-3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+11\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=-3i+11j+6k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پای کی یو نظر په الجبري جوړښت، چی وکتورونه یی د زیاتون او کمون په بنسټ او د رییلګڼونو سره څلونی له لاري لري:

د ټولو وکتورونو ډیری V په هواره ، کی (همدا ډول په هوا کی) د زیاتون په نسبت یو زیاتون کموتاتیو ګروپ جوړوي (د ګروپ تعریف وروسته)، ځکه چی لرو :

اول – $a + b \in V$ د ټولو b, a لپاره ، چی له V وي رابندیدنه

دوم – $(a+b)+c = a+(b+c)$ د ټولو c , b , a لپاره، چی له V وي اسوشیاتیو قانون

دریم – $0 + a = a + 0$ صفر وکتور 0 ناپییلی توکی دی

څلورم – $a + (-a) = (-a) + a = 0$ هر وکتور ته یو په څټ وکتور یعني مخامخ وکتور موجود دی

پنځم – $a + b = b + a$ د ټولو a , b لپاره، چی له V وي. کموتاتیو قانون

برسیره پر دې د څلوونی لپاره د یوه ریل ګڼ سره باور لري:

شپږم – $s. a \in V$ د ټولو a لپاره ، چی له V وي

اووم – $1 . a = a$ د ټولو a لپاره، چی له V وي

اتم – $(m+n) . a = m.a + na$ د ټولو رییلګڼون m او n لپاره او هر وکتور a لپاره ، چی له V وي.

نهم – $m.(a + b) = m. a + n.b$ د ټولو وکتورونو a او b لپاره چي له V وي او هر رییل ګڼ m لپاره.

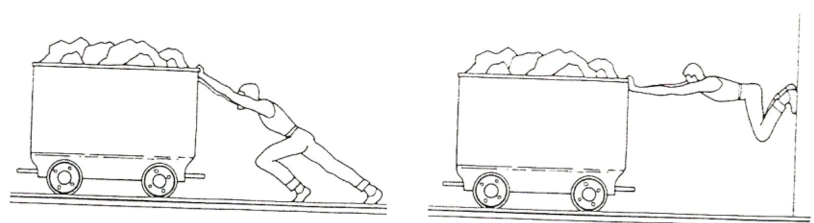
په ټولګیزه توګه یو داسی جوړښتخویونه د وکتورهوایا ۰ فضا تر نامه یادیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سکالار ځل

وکتورونهٔ لکه چې ومو لیدل،کیدی شي چې سره زیات شي او یا د یوه ریپلگڼ سره ځل شي . کیدی شي، چې وکتورونه یو له بل سره هم ځل کړی شي؟
دا حتی په دوه توپیریدونکو ډولونو ممکن دی . یو واریانت یو د یوې لوي په توګه، بیرته یو وکتورهوا جوړوي (د مخه لوستل شوی دی)، بل یی د یوې لوي په توګه سکالار لاس ته راکوي، چې دا یواځي ارزښت لرې او لور نه لري.

پیلبیلګه :
په پخوا وختونو کی د سکرو د کانو واګونونه په لاس راکښل کیده. دلته دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې ولی کارګر واګون مخته راکښوده او په همدې توګه ټیلواهه، ددې لپاره چې موټر سم پورته کړي؟



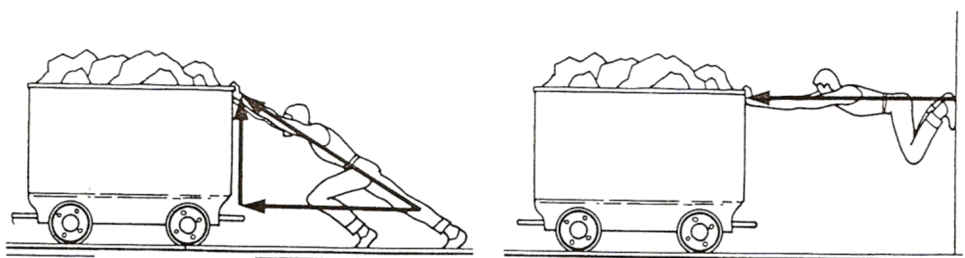
خیره ۳۰۴

ددې پوښتنی سره موږ د دوه وکتوري لویو سره سر او کا رلرو: زور او لار، چې د هغو ځل په فزيك کی «کار» بلل کیږي. هغه زور چې واګون په حرکت کی راولی، باید د واګون په لور واچول شي یا د واګون په لور تاثیر وکړي. یو په پورته لور اچولی زور کړی شي چې واګون پورته کړي. هر مایل تاثیر کوونکی زور کیدی شي د وکتور زیاتون قانون له لارې په یوه واګون سره غبرګ او بل په دې ولاړ زور ټوټه کړي یا تجزیه کړي. یواځي پروت زور واګون د مخ لور ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

په حرکت راولي. په دې توګه واردونکی زور او مؤثر زور په ټولیزه توګه همغه یو زور نه دی. دا د دې پوښتنې ځواب هم دی، چې ولې کارګر د مخ لور ته تکیه وهي.: هغه رسی چې د هغې له لارې زور اچول کیږي، نږدې ځمکې سره غبرګه ځغلي (= لار) ، (نږدې د ټول زور کیدی شي مؤثر واقع شي. هر څومره چې کونج د ځمکې او رسی ترمنځ مایل وي، همغومره زیات زور بی تاثیره پاتې کیږي.

دا په کار اچولی زور ، په دوه یو په بل ولاړو کمپوننتو (زورونو) ټوټه کیدل یو ولاړکونجیز دریګوډی جوړوي، دا لار سره غبرګ زور د F.cos∝ په څیر لاس ته راځي . کار W = F.s.cos∝ پخپله په برخلاف د جوړښتلوی زور او لار – لور نه لري، بلکه یوازې ارزښت لري:
دا یو سکالار دی.



څیره ۳۰۵

تعریف:

د دوه وکتورونو **a** او **b** یو **a . b** سکالار څل لاندي (ویل کیږي **a** څل **b**) یو یوازېنی ریل ګڼ پوهیدل کیږي ،

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| .\cos \alpha = a.b. \cos \alpha$$

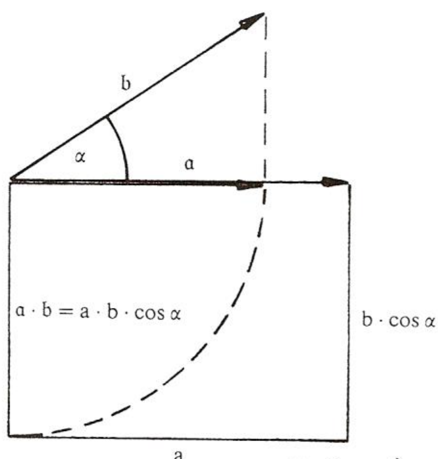
(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته کونج α د **a** او **b** وکتورونو ترمنځ کونج دی .

هندسي سکالار ځل د یوه ولاړکونجیز هوارمتن دی یا هواره ده د اړخونو او $b.\cos\alpha$ سره (د **b** پریوستون په **a**). داسی یوه هواره هلته موجود ده، که له دې وکتورونو هیڅ یو هم د صفر اوږدوالی ونه لري او یا $\cos\alpha \neq 0$ ، یعني $\alpha \neq 90°$ ده.

د **b** ولاړ پریوستون په **a** کله کله په α سره ښول کیږي: $b_a = b.\cos\alpha$

$$\mathbf{a.b} = a.b_a$$



خیره ۳۰۶

جمله: د دوه وکتورونو $\mathbf{a} \neq 0$ او $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ سکالار ځل هلته او هلته صفر دی، کله چی دواړه یو په بل ولاړ وي:

$$\mathbf{a \,.\, b = 0} \iff \mathbf{a \perp b}$$

بیلګه:

د یوه ولاړکونجیز کواوردینات سیستم (Orthono.-rmalbasis اورتونورمالبنسټ) یو په بل نیغ ولاړ دي. له دې امله له دوه مختلفو وکتورونو ځل صفر دی او د یوه بنسټوکتور سکالار ځل د ځان سره تل ۱ دی :

$$\mathbf{i.i = j.j = k.k = 1} \quad , \quad \mathbf{i.j = j.k = k.i = 0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د د زیاتون څخه په بل ډول، د وکتورډیری نسبت و سکالار ځل ته ترلې یا رابند نه دی . د سکالار ځل د په خوښه وکتورونو ځل د هغه ډیري څخه راوباسی، چی عملیه په کی اجرا کیږي، دا په دې مان چی دا نتیجه بیرته وکتور نه دی یعنی د وکتو په ډیري کی هم نه دی پروت. دلته اسوشیاتیو قانون هم باور نه لري:

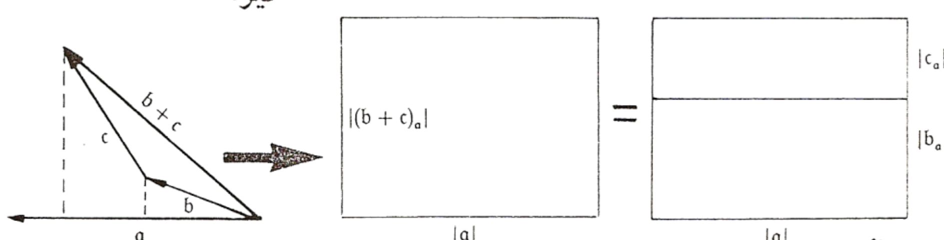
$$\mathbf{a}.(\mathbf{b}.\mathbf{c}) = \mathbf{a}.|\mathbf{b}|.|\mathbf{c}| \cos(\mathbf{b}.\mathbf{c})$$

د **a** یو زیتځله دی او په څپ : $(\mathbf{a}.\mathbf{b}).\mathbf{c} = |\mathbf{a}|.|\mathbf{b}|.\cos(\mathbf{a}.\mathbf{b}).\mathbf{c}$ د **c** یو زیاتځل دی.

سره له دې هم باورلري:

سکالار ځل کموتاتیو دی :	$\mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{b}.\mathbf{a}$
او وکتور زیاتون ته دیستریبوتیو دی.	$\mathbf{a}.(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{a}.\mathbf{c}$

خیره ۳۰۷



Das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ دستربیوتیو قانون :

کموتاتیو قانون په کمپوننتوانځورونو له لارې او بنسټ وکتورونو له لارې ساده ښوول یا ثابت کیدی شي. د بیلګي په توګه په هواره کی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a \cdot b = (a_x \cdot i + a_y \cdot j) \cdot (b_x \cdot i + b_y \cdot j)$$
$$a \cdot b = a_x i \cdot b_x i + a_y j \cdot b_x i + a_x i \cdot b_y j + a_y j \cdot b_y j$$
$$a \cdot b = a_x b_x i \cdot i + a_y b_x j \cdot i + a_x b_y i \cdot j + a_y b_y j \cdot j$$
$$a \cdot b = a_x b_x \cdot 1 + a_y b_x \cdot 0 + a_x b_y \cdot 0 + a_y b_y \cdot 1$$
$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y$$
$$a \cdot b = b_x a_x + b_y a_y = b \cdot a$$

په ورته ډول دا د دري او زيات کمپوننتوکتورنو لپاره هم ښوول کيدي شي:

تعریف : د سکالار ځل د کمپوننت انځورونی لپاره باور لري:

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_y \\ b_y \end{pmatrix} = a_x a_y + b_x b_y \quad \text{bzw.} \quad a \cdot b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

همداسې

د **a** او **b** ترمځ کونج په لاندې ډول تاکل کیږي:

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}.$$

د

دوه وکتورونو ترمنځ رابند کونج α شمیرنه د تیر مخ مساواتو څخه لاس ته راځي

بیلګي:

1. $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow a \cdot b = (-3) \cdot 10 + 5 \cdot 6 = 0$

also auch $\cos \alpha = \dfrac{0}{\sqrt{(9 + 25)} \cdot \sqrt{(100 + 36)}} = 0 \ \Rightarrow \ \alpha = 90°$

2. $a = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = a = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90}; \quad |b| = b = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

$a \cdot b = 9 \cdot 2 + 3 \cdot (-5) = 18 - 15 = 3 \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{3}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{29}} \approx 0{,}05872 \Rightarrow \alpha \approx 86{,}63°$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورځل

پیبیلګه:
که چیرې په یوه سوري جام کي اوبه واچوی او بیا سوری خلاس کړی او یا که چیرې تاسو یو لاسمینځي یا لمباډنډ ډك کړی وي، نو که چیرې اوبه بندی راوباسی اوبه په ښیلوریز څرخون ډوله حرکت له سوري وځي .
دا داوبو تویدل د دروند ورن په ذریعه منځ ته راځي ، په ښي لور څرخیدنه اوبه د کوریولیسزور Corioliskraft له لارې منځ ته راځي. دا د کشولو زور په حرکت کوونکي سیستم کی باید وکتل شي یا تر نظر لاندې وي، او دا د ځمکی په ځانڅرخون له لارې کتل کیدیشي.

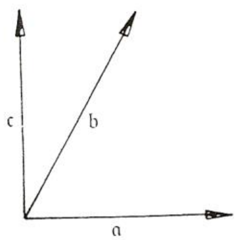
د دوه وکتوري لویو یو بل باندې تاثیر له امله (حرکت یا خوزیدنه د دروندزور په بنسټ او د ځمکی څرخون له امله خوزیدنه یا حرکت) یوه بله لویه ، چیدا هم وکتوري لویه ده منځ ته راځي. د دریواړه، د لور له امله ، په یوائنی ګډاړیکو کی سره پرتی دي، او او د دریمی ارزښت کیدی شي د نورو دوهو ارزښتونو لاس ته راوړو. په ټولیزه توګه باور لري:

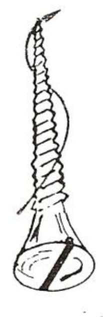
تعریف :
د وکتورځل **a** × **b** لاندې (**a** اټیران **b**) یو وکتور پوهیږو، چی لاندې خویونه ولري
اول . دا وکتوردریګوني **a,b,c** په لړپیرلپسی یو ښی سیستم جوړوي
دوم. وکتور **c** په وکتورونو **a** او **b** نیغ ولاړدی، یعنی په هغی هواره هم چی د دوه وکتورونه په کی پراته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

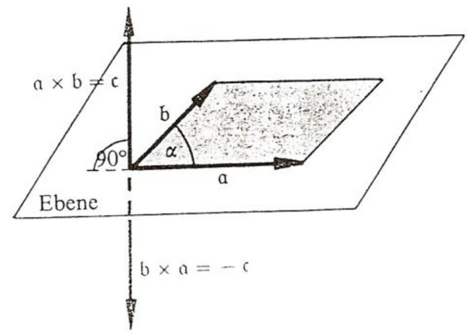
دريم. د وکتور **c** ارزښت د **a** او **b** څخه جوړ غبرګ اړخيز سره مساوي دی

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|.|\mathbf{b}| . \sin(\mathbf{a};\mathbf{b}) = a.b.\sin \alpha$$





خيره ۳۰۸ : يو ښي سيستم کيدی شي، چی د پيچيميخ له لارې وښوول شي: که پيچيميخ له **a** و **b** ته وګرځول شي، نو ميخ د **c** په لور خوزي يا حرکت کوي



خيره ۳۰۹

خيره ۳۰۹ : وکتور ځل او هندسي اهميت يی

پس که د وکتور وکتور ځل صفر وکتور وي ، نو يا يو له دې دواړو وکتورونو صفروکتور دی او يا دواړه سره غبرګ پراته دي(دا په دې مانا، چی $\alpha = 0$ او يا $\alpha = 180°$)

جمله: وکتور **c** د ديترمينانت په مرسته د وکتورونو **a** او **b** د کمپوننتو له لارې لاس ته راوړ کيدي شي

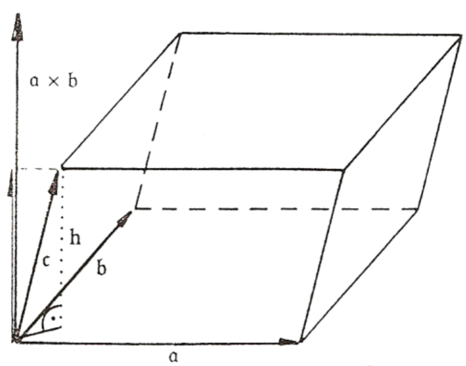
$$c = a \times b = \begin{vmatrix} i & a_x & b_x \\ j & a_y & b_y \\ k & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$c = a \times b = (a_y b_z - b_y a_z)\, i + (a_z b_x - b_z a_x)\, j + (a_x b_y - b_x a_y)\, k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپاتځل Spatprodukt یا غبرګهواریزي ځل

د وکتورځلونه ارزښت هغه غبرګهواریزې هواره ده، کومه چې له دواړو وکتورونو غزیږي. یو دریخوایز یا دریدمینزیونال وینه و غبرهواریز ته شپات یا بیرته همغه شپږهواریز وایي (دا د مخه لوستل شوی) دا کیدی شي، چې له درې وکتورونو څخه غزیدلی فکر ته راوړل شي. د دې ډکی داسی شمیرل کیږي، چې بنسټهواره د جګې سره ځل کړای شي. دا جګې د c ولاړ پریوستون دی، په $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. یو هندسي بدنیز Stereometrische اوبی یا حل له دې امله د c او $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ د سکالارځل له لارې لاس ته راوړ لکیږي.



څیره ۳۱۰

تعریف :

د وکتورونو **a , b** او **c** څخه غزیدلی شپات یا غبرګهواریز (Parallelepiped) ډکی دلاندې ځل څخه شمیرل کیږي:

$$V_{Spat} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

دا غبرګهواریزځل مثبت دی، که وکتورونه **a ,b , c** په دې ترتیب یو لړیپرلسی ښی سیستم جوړ کړي، په غیر له دې بیا منفی دی.

تر هغی ، چې بنسټهواره د یوه وکتور له لارې ځان ښای یا ښوول کیږي یا ځان ځرګندوي، نو دا ډکي یو سکالار دی .

په ادبیاتو کی دا د ځل اهیران نخښه ، چې په نوکانو کی نیول شوې، زیات وخت نه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ییکل کیږي، یعنی لیکو: $(a\times b)\cdot c = a.b.c$، غبرکهواریزخل شمیرنه د
دیترمینانت شمیرنی له لور صورت نیسي:

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} i & j & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

داچی دا اتیرانخل لکه د مخه مو چی وویل د بنستیوکتوررونو د لاینی کومبینیشن په څیر انځوریدلی شي، دا بیرته په یوه له دې کمپوننتو، کومی چی له صفر توپیر لري.

بیلګه:

د هغه غبرګهواریز ډکی څومره لوي دی، چی دد لاندې وکتوررونو څخه غزیدلی وي؟

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{او} \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{aufgespannt wird?}$$ له دی چی غزیږی

$$abc = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$abc = 2\cdot(-2)\cdot 6 + 0\cdot(-3)\cdot 4 + 3\cdot(-1)\cdot 5 - 3\cdot(-2)\cdot 4 - 2\cdot(-3)\cdot 5 - 0\cdot(-1)\cdot 6$$

$$abc = -24 + 0 - 15 + 24 + 30 - 0 = 15$$

غبرګهواریز نو ډکی 15 V.E لري (یعنی ۱۵ (V,E) ډکیبوونونه یا –واحدنه)

تمرینونه

۱ – دواړه وکتوررونه $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ورکړشوي دي. په یوه کواوردیناتسیستم کی دا لاندې رسم کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

. رسم کړی

a) $a + 3b$, b) $0.5a - 3b$, c) $2(a + b)$

او په هروار یې نتیجه د کمپوننت په ډول ورکړی؟

۱ – په هوا یا فضا کې ټکی $O(0|0|0)$, $A(1|2|3)$. $B(2|-1|4)$ او $C(-5|7|9)$ ورکړ شوي دي، لاندې وکتورونه په کمپوننت لیکدود څه نومیږي یا څه ډول دي؟

a) $\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BC}$ f) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

د دې وکتورونو ارزښتونه څومره لوي دي؟

۲ – که په یوه هواره کې دوه وکتورونه a او b لایني خپلواک وي، نو هر بل د دې هوارې وکتور د دې دوه وکتورونو a او b د لایني کمبینیشن په څیر انځوریدلی شي. a او b بنسټ جوړوي.

وکتور c د مساوات $c = k_1a + k_2b$ له لارې د لایني کمبینیشن په څیر د ریيلو ګنونو k_1 او k_2 سره انځور کړی. له دې دوه مساوات د k_1 او k_2 ناپیژندونکو سره جوړ کړی. (د دې لپاره دې زما د شیمرپوهنی کتاب وکتل شي)

$$a = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix};\quad b = \begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$$

$$a)\ c = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \qquad b)\ c = \begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix} \qquad c)\ c = \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$$

۴ – وي دي : $a = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix}-5\\12\end{pmatrix}$ ، وشمیری:

a) $a.b$ b) $-a.b$ c) $a.a$ d) $b.b$

e) $a.(b.a)$ f) $a.(b.a).a$

او د دواړو وکتورونو ترمنځ کونج.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – کونجونه $\alpha = w(a,b)$, $\beta = w(b,c)$, $\gamma = w(a,c)$ د وکتورونو

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} ,b= \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

لپاره وټاکی!؟.

۶ – د تریګونومتري یا کونجکچ د کوساین جمله، لکه د مخه مو چی لوستلی د سکالارځل په مرسته وشمیری.

۷ – د تالس جمله، چی د مخه مو لوستلی د سکالارځل په مرسته وشمیری:

۸ – په خوبنه دریګوډي ABC لپاره د پیتاګوراس جمله او د هغی په څټ وشمیری:

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \iff |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$$

۹ – د مخته لوستل شوو کاتیت جمله او جګجمله وکتوري وښایی.

۱۰ – د یوه په خوبنه غبرګهواریز ABCD لپاره وشمیری:

۱۱ – الف) د غبرګ اپیپت یا غبرګهواریز ډکي وشمیرۍ چی له

وکتورونو $b = 3$, $a = 1$ او $c = -2$ څخه غزیدلی وي.

ب) دا څه مانا لري ، که وي : $(a\times b) . c = 0$ ؟

پ) د یوې بیلګي په مرسته وښایي، چی اتیرانځل اسوځیاتیو نه دی.

ت) د وکتورونو $b = 0$, $a = 2$ او $c = k. 4$ له لارې یو غبرګ

اپیپت ورکړ شوی دی، چې ډکی یی ۸ یوونونه دی. k به څومره لویه وي؟

۱۲ – یوه سپورتي الوتکه د 250 km/h په سرعت د N60°O په لور الوځي. سملاسی له جنوب څخه باد لږیږي. دا باد یو د 75 km /h سرعت لري او دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

الوتکه له پیللاري اړوي. دا نوي الوتللور وټاکی او د الوتکی نوی سرعت!

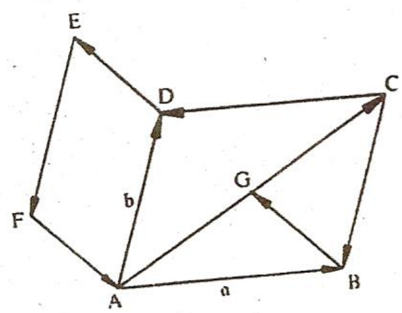
۱۳ – د وکتوررونو a اوb لپاره کله لاندې اړیکی باورلري ؟

$$a)\ |a+b| < |a| + |b| \quad , \qquad b)\ |a+b| = |a| + |b|$$

۱۴ – لاندیوکتوررونه ورکړشوي دي:

$$a=\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix};\ b=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix};\ c=\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix};\ d=\begin{pmatrix}-45\\30\end{pmatrix};\ e=\begin{pmatrix}20\\4\end{pmatrix};\ f=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix};\ g=\begin{pmatrix}-2,5\\-0,5\end{pmatrix}$$

وکتوررونه c تر g (که ممکن وي) د وکتوررونو a یاb د ډیرواره په څیر انځور کړی.



۱۵ – ناټاکلی وکتوررونه د a او b د وکتوررونو لاینې کمبینیشن په څیر انځور کړی. (څیره)

۱۶ – یو دریګوډی ABC په

$$a=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}.$$

سره ورکړ شوی دی. داړخ اوږدوالی او دننني کوجونه وشمیری.

۱۷ – په یوه څلورګوډي کی دی $a=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}.$

$$c=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix} \text{ und } d=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

او

د نیمی اوږدوالی وشمیری او د هغی غوڅکونج ($\leq 90°$)

۱۸ – یوه کیښتی د ټکی O څخه د $r=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ په لور خوزیږي یا حرکت کوي، دا کیښتی تګلور دی، باد د $m=\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ په لور لګیږي.

الف) د بادزور $F_\perp$ برخه څومره لویه ده، چی په زیګل باندې ولاړ پریوزي. یا تاثیر کوي؟ دا زور کومه لور لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د F برخزور له F_|_ څخه څومره لوي دی، ك ومه چې كيښتی د مخ په لور بيايي؟

۱۹ – يو بار، چې ۱۰۰۰۰ نيوټونه دی د دوه مايلو ستنو سره نيول شوی. جوړښت يې يو مساوي پښيز دريګوډی جوړوي ، د بنسټ ۶ متره سره او د پښی اوږدوالی (د ستنی اوږدوالی) ۵ متره دی.

الف د وشن زور په ضوابږو ستنو څنګه تاثير اچوي؟

ب) د دې برخه زور ولاړ او پراته كمپوننتونه څومره لوي دي؟

۲۰ –د وكتور v كواوردينات و اورتوګونالبنستونو $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ او $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ ته وشميری، كه $|v| = 5$ وي او v د وكتور $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ سره يو د 55° كونج جوړ كړي.

۲۱ – وي دې $a + b + c = v$. وشميری : $a.d + b.v + c.d$

۲۲ – د څلور ټكو A، B, C, D او همداسی E, F, G, H سره يو غبرګ اړخيز وركړشوی دی. د لاندې وركړنو يا شرطونو سره د هغو هوارې وشميری

a) A = (0 | 6 | 0) , B =(8|4|0), C = (6|16|0)

b) E = 1,5|2,5|3,5) , F = (0.5|0|2,5) , G = (1 | 0,5| 4,5

هغه تراوسه ورك يا نامعلوم ټكی (D همداسی H) چيرته پروت دی؟

۲۳ –اهرام د بنسټ هوارې د كونجونو

A = (1|0|2) , B = (3|3|7) = , C = (4|2|12) , D =(2| - 1| 7)

سره كوم ډكی لري، چې څوكه يې S =(2 |4 |15) وي؟

لاربنودنه: لمړی خپل ځان وپوهوي، چې آيا كونجونه ريښتيا په يوه هواره كې پراته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تجار تي شميرنه

ځاننيونيز يا متناسب او په ښځ ياچپه ځاننيونيز يامتناسب بلواك (فنكشنونه)، دربقضيه

په ورځني ژوند کی دې ته اړتيا پيښيږي چی ورکړ شوې لويی (يا ډيروالي) يو د بل سره انډول (مقايسه) کړای شي. د بيلګي په توګه د ځپليو لويوالی د ځمکی ارزښت، د مياشتني معاش يو د بل سره انډول. د دوه داسی ګڼونوa او b د انډول لپاره په زيات وخت کي کمون a - b کفايت کوي. دلته نو بيا د دې دوه ګڼونو a اوb له توپير ځخه غبريږو. په ډيرو وختونو کی دا بسيا (کفايت) نه کوي چي د دوه ګڼونو کمون د هغوله توپير ځخه لاس ته راوړو.

پيلبيلګه:

دوه پټې يو $1800\ m^2$ اوبل $2000\ m^2$ يو له بل $200\ m^2$ توپير لري. دا د پټيو لويووالی كه $400\ m^2$ او $600\ m^2$ وي، نو ترمنځ کمون هم همدا دی. څه به ووايو كه د دواړو ځمکو ويش د يوه ميراث ويش وي؟

هر ځل به دا يو $200\ m^2$ ډيره لاس ته راولي نسبت و دې بل ته . ګورو چی په دوم ويش کی $400m^2/600m^2$ د لمړي ميراثخور لپاره تاوان نسبت و لمړي ويش $1800m^2/2000m^2$ ته زيات دی .

دا په دې مانا، چی كه هرڅومره ځمکه لويه وي نو په همغه اندازه د دواړو ميراثخورو ترمنځ توپير کميږي.

دا مخته پرته بيلګه ښايی، چي په داسی حالتونو کي دانډول لويي يو بل سره په تناسب يا ځاننيونه کی راوستل کيدي شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف: که a او b دوه له صفر مختلفی لويي یا ګڼونه وي، نو a / b ویش یا a: b د a تناسب یا څانیونه وb ته **بلل** کیږي.

بیلګه: ۱ – د ځمکو $400m^2$ او $600m^2$ لویوالی یو بل سره $400/600 = 0,6 = 2/3$ تناسب جوړوي یا یو بل سره څانیسي. دا کوچنی ځمکه (پټی) د لوي پټي 66,6% جوړوي.

۲ – د پټیو $1800m^2$ او $2000m^2$ لویوالی یو بل سره په

$$1800/2000=0,9=9/10$$

تناسب یا څانیونه کی پراته دي. دا کوچنی پټی د لوي پټي 90% جوړوي.

۳ – د مودل ګاډي TT لاین(لیکو یا پټلیو) او الماني ګاډو د لیکو یا پټلیو سور یو بل سره په لاندې تنساب کی پراته دي

$$12mm/1435mm = 0,00836 \sim 1/120 .$$

۴ – که یو کړندی په 30 دقیقو کي 70km ځغلي، نو د وهل شوې فاصلي سرعت تناسب ووخت ته په لاندې ډول دی.

$$s/t = 70km / ½ h =140[km/h] = 140km/h .$$

۵ – د یوه هوموژین بدن(د مساویډوله مواد جوړ) سختوالی ρ د هغه د کتلی(g) څانیونه یا تناسب دی ، د هغه بدن ډکي(cm3) ته

$$\rho = m / V [g / cm^3]$$

د یوه لرګي بلاك سختوالی(کثافت)، چی درې کیلو ګرامه دروند او څلور زره مکعب سانتیمتره ډکی(حجم) لري، $0,75 g / cm^3$ دی

$$3000g / 4000 cmw = 0,75 g/cm^3 = \rho \text{ سختوالی}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ غواړو، چی اوس ځانونه د بلواك دوه ځانګړو تیپونو یا ډولونو ته متوجه کړو، دا څنګه، چی موږ په ورځني ژوند کی ډیر واره ورسره مخامخ کیږو، چی له دې امله یي پیژندنه څموږ لپاره خورا مهمه ده.

پیلبیلګه:

۱ – د یوه نل څخه په 3 دقیقو کی ۱۲ لیتره اوبه راوځي. څو لیتره اوبه به په یوه ورځ کي له دې نل څخه راووځي، څومره په یوه کال کی؟

که په درې دقیقو کي ۱۲ لیتره اوبه له نل څخه راوځي، نو په یوه دقیقه کی باید ۴ لیتره اوبه او په ۲۴ ساعتونو یا ۱۴۴۰ دقیقو کی طبعآ 5760 = 4 . 1440 لیتره اوبه راوځي. او په دې تعقیب په یوه کال کی 2102400 = 360 . 5760 لیتره او یا ۲۱۰۲۴ هیکتولیتر اوبه بهیږي.

۲ – څلور کارګر یو ه بنستې کنده په ۹ ساعتونو کی راپورته اوکانکریټوي. څومره وخت درې کارګره ضرورت لري او څومره وخت به ۱۰ کارګر ضرورت ولري چی دا ځمکه راپورته کړي اوهم کانکریټ کړي؟

که څلور کارګره ددې لپاره ۹ ساعته ضرورت لري، نو یو کارګر ددې لپاره حتمآ زیات وخت په کار لري، یعني څلور ځله زیات وخت، پس ۳۶ ساعته، نو درې کارګر په تعقیب 12 = 3 : 36 ساعته او لس کارګر 3,6 = 10 : 36 ساعته = درې ساعتونه او ۳۶ دقیقي ضرورت لري چی دا ځمکه وکني او کانکریټ کړي.

په دواړو حالتونو کی یو نظم منځ کی پروت دی، دقیق په لمړی بیلګه کی فنکشن وخت —> د اوبو مقدار او په دومه بیلګه کی فنکشن کارګر —> د کارساعتونه.

مګر داوړه فنکشنونه پوره په خپل راوړون ډول کی یو له بل توپیریږي:

۱ – څومره ډیر وخت چی تیریږي په همغه اندازه زیاتی اوبه له نل بهیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – څومره چې کارګر زياتيږي همغومره د کار وخت کميږي

دې ته ورته د ورکړشوو فنکشنونويا بلواکو شميرپوهنيزيا ماتيماتيکي ليکدود د فنکشن ورکړدود مختلف ليدل کيږي.

۱– فنکشن f : وخت (دقيقه) ⟵ د اوبو ډيرى(ل)

د فنکشن ليکدود (فنکشن ليکلوقانون) لري $x \to 4x$

په دې ډول د فنکشن مساوات داسې بريښي $y = 4x \;;\; x \in Q^+_0$

۲ – فنکشن g : کارګر (څو دانې) ⟵ د کاروخت (ساعت h)

د فنکشن ليکدود لري $x \to 36/x$

په دې ډول د اړوند يا مربوط فنکشن مساوات داسې بريښي $y = 36/x \;;\; x \in N$

تعريف:

يوه لويه x و هغې ته تنظيم شوې لوي y ته سيده متناسب سيده ځانييونه (په نخښه کې$y \sim x$) بللکيري که د هغوي تناسب ياځا ننيونه (ويش) y / x تل يو ثابت ارزښت وساتي : يعنى $y / x = k$ وي.

بلواك(تابع) يا فنکشن $y = kx$ (ثابت –k) د تناسب يا ځانييونى څلوونى يا فاکتور بلل کيږي.

يوه لويه هغې بلې تنظيم شوى لويي ته ناسيده متناسب ده يا ناسيده ځانيونه کى ده، که د هغو ځل تل يوثابت ارزښت وساتي: يعني

$$y.x = k \iff y = k/x$$

بلواك يا فنکشن $y = k/x$ چپه يا په څټ متناسب (antiproportional) يا په څټ ځانيونکى بلواك يا فنکشن بلل کيږي.

متناسب فنکشن $y = kx$ د يوې لوي دوه برابره، نيم برابر، n –برابره پورې د بلى لويي هم دوه برابره، نيم برابره يا n–برابره پورې اړه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په چپه یا په ثتې متناسب فنکشن y = k / x کی دوه برابره، نیم برابر ... n − برابره پورې د بلي لوي نیم برابر، دوه برابر ... 1/n−برابره تعلق لري(اړه لري) .
په چپه یا په ثتې متناسب فنکشن y = k/x کی د چپه یا ناسیده متناسبوالي څخه خبرې کیږي. که متناسب او چپه یا په ثتې متناسب فنکشنونه په یوه کواوردینات کی انځور شي، نو لیدل کیږي چی متناسب بلواك یا فنکشنونه مونوتون پورته کیدونکی او چپه یا په ثتې متناسب بلواك یا فنکشنونه مونوتون لویدونکي دي (د مونوتون کلیمو لپاره دې ځما د شمیرپوهنی کتاب وکتل شي)

بیلګي :

۱ − سیده تناسب یا سیده ځانثیونه:

الف : په شي اخستلو کی د ډیري ارزښت سیده متناسب دی.

ارزښت(افغانی) ډیری (کلیوګرام)

ب : په تیزوالی یاسرعت کی وهل شوې لار د وخت سره سیده متناسب ده

s(km) −> t(s)

۲ − ناسیده تناسب یا ناسیده ځانثیونه

الف : یوې معلومی لار وهلو لپاره تعجیل هغه په بر کی نیولي وخت سره ناسیده متناسب دی: که هرڅومره تعجیل زیات وي په همغه اندازه وخت کمیږي.

ب : د وچو شودو د یوه څرګند ټاکلي ټول وزن د وړونکوتیو ګڼه ناسیده متناسب ده د هرې کوتۍ یویزوزن سره: که هرڅومره زیاتی کوتۍ په کار واچول شي په همغه ګڼون د کوتیو وزن کمیږي.

تعریف: د لاندې ډول a/b = c/d یا a:b = c:d مساوات د تناسب مساوات یا ځانثیونیز برابرون بلل کیږي (ویل کیږي چی a و b ته ځان داسی نیسي (یا داسی انډول کی ده) لکه c و d ته) دلته a او d د تناسب یا انډول

(c) ketabton.com: The Digital Library

دباندني غړي دي او b او c د انډول دننی غړي. په هر تنساب کی د دباندنیو غړوځل د دننیو غړو د ځل سره برابر دی:

$$a / b = c / d \iff a . d = c . b$$

اوس ځان باوري کولی شو چی د دننیو غړو بدلول او یا د دباندینو غړو بدلول یو د بل سره په تناسب یا انډول کی تغیر نه راولي. کیدی شي چی ټول دنني غړي د دباندینیو غړو سره بدل شي:

$$a/b = c/d \iff a/c = b/d \iff c/a = d/b \iff b/a = d/c$$

له دې امله کیدی شي چی یو دبل سره برابر زیات تناسبونه یا انډولونه د یو په بل پسی راتلونکو تناسوبونو په څیر ولیکل شي:

$$a/b=c/d = e/f \iff a:c:e = b:d:f$$

دلته باید په پام کی وي چی ویش ځانله صورت نیسي یعني تل د دوه کښونو،

بیلګي :

۱ – له $7 / 21 = 5 / 15$ څخه لاس ته راځي $7.15 = 5.21$ یا $15/5 = 21 / 7$ یا $15/21=5/7$ یا $21/15 = 7/5$.

۲ – د $8/12 = 4/6 = 2/3$ لپاره لیکو $8:4:2 = 12:6:3$

۳ – یو تناسب چی دننه او دباندې غړي یي یو له بل سره برابر وي ناپریکیدونکی تناسب بولو. په ناپریکیدنکی تنساب یا انډول $a:m=m:b$ یا $m:a = b:m$ کی m منځنی متناسب انډولی بلل کیږي. منځنی متناسب د نورو دوو غړو a او b جیومتریکي منځ دی.:

$$a / m = m / b \iff m^2 = a.b \implies m = \sqrt{a.b}$$

د $a = 16$ او $b = 9$ لپاره $m = 12$ منځنی متناسب داسی دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$16/12 = 12/9$

۴ څلور انډولونه متناسب یا ځانښیونیزڅنګه لیکل کیږي؟

$$18/x=8/5 \quad \Leftrightarrow \quad 18 . 5 = 8x \quad \Rightarrow \quad x = (18 . 5) / 8 = 11{,}25$$

په ترتیب تنساسب یا ځانښیونه یا انډول کې باور لري: $18 / 11{,}25 = 8 / 5$

زیات وخت مود تکست وظیفې د تناسبمساواتو (انډول برابرون) ته لارښودوي، نو بیا درې ورکړشوو لویو ته څلورم تنساب یا انډول غوښتل کیږي. د داسې وظیفو لپاره سیده یا ناسیده تناسب یوه غوره رول لوبوي. داسې پوښتنې د دریقضې شمیرنې یا پاي(ختم) شمیرنې لاندې شهرت لري.
د دریقضې شمیرنې اصلي پرابلم په دې کې دی، چې د وظیفې ورکول باید څرګند یا روښانه شي، چې ایا دا یوسیده متناسب او که چپه یا په ځټ متنساب بلواك (تابع) یا فنکشن دی.

د درې قضې پوښتنې کولو څخه لاندې تکامل منځ ته راځي :

۱ – یوه د شرایطو قضیه، کومه چې ټولې ضروري ورکونې په ګوته کوي.

۲ – یوه د پوښتنې قضیه چې غوښتونکې لو یه x متن کې یا خوندي لري او له هغې سیده یا ناسیده د ځواب تناسب ته تکامل ورکوي.

۳ – یوه پایقضیه، په کوم کې چې له یوه یوون(واحد) په ورته یامناسب ډیرون پاي ورکول کیږي.

پیلبیلګه:
یوه الوتکه له الف ځاي تر ب ځاي پورې چې ۸۰۰ کیلومتره واټن دی په ۶ ساعتو او ۴۰ دقیقوکې تې کوي، دا الوتکه به ۲۲۰۰ کیلومتره لار په څو ساعتوکې ووهي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دريې جملې له لارې يې ځواب:

الف – د شرايطو قضيه........... 800km - 6h 40 min

يا............... 800km - 400 min

ب – د پوښتنې قضيه .. .. 2200 km - x min

پ – پايقضيه.......... 200km - 400/4min = 100min

2200km - 11.100 min = 1100 min

دا الوتکه به په دې ترتيب د 2200km اوږده واټن لپاره

1100min = 18h20min

ضرورت ولري.

د دې وظيفه د ټيك ځواب لپاره ضروري نيوني دا وي چې سيده تناسب وپيژندل شي: هرڅومره چې د الوتلو واټن لرې کيږي په همغه اندازه الوتکه زيات وخت په بر کې نيسي.

يعنې 2200km اوږد واټن په داسې انډول يا تناسب کې دې لکه 400min و 800 km ته:

$$x / 2200 = 400/800$$

د اکويوالنځ فورم(ځيرې–) اوړون له لارې څخه ځواب x لاس ته راځي:

$$x = (400 . 2200) / 800 = 1100$$

۲ – ۴ کارګر د يوه ديوال وهلو لپاره پنځه ورځې ضرورت لري. د ناروغي له امله يو کارګر د کارلري پاتيږي. دا راکمه يا راکوچنۍ ډله اوس څنګه مشغول ده؟ دلته يو ناسيده تناسب يا ځانيونه لرو:

هرڅومره چې کارګر کم وي په همغه اندازه وخت زياتيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تناسب سره شمیرنه	ددریجملی سره شمیرنه
غوښتونکی کاروخت x د ۵ ورځو سره داسی تناسب کی دی لکه ۴ کارګر و درې کارګرو ته	۴ کارګر – ۵ ورځي ۱ کارګر – ۵ . ۴ ورځي ۳ کارګر – ۳ / ۲۰ ورځي پس
$x/5 = 4/3 <=> x = (4.5)/3 = 20 / 3$ ورځی	۳ کاګر – $6\frac{2}{3}$ ورځې

یوځاي شوې درې قضیه:

د ۳۰ جوړه کالیو ګنډلو لپاره ۱۲ درزیان ۲۰ د کار ورځي ضرورت لري. څومره ورځی به ۱۰ درزیان د ۷۰ جوړه کالیو لپاره ضرورت ولري؟

لمړی دریقضیه	دومه درې قضیه
(سیده متناسب)	(ناسیده متناسب)
۳۰ جوړه کالي	۱۲ درزیان – ۲۰ ورځي
۷۰ جوړه کالي	۱۰ درزیان – x ورځي

هرڅومره چی کالی زیات وي همغومره زیاتی ورځي، هرڅومره چی درزیان زیات وي همغومره لږې ورځي

۱۰ جوړه کالی –	۱۲ درزیان –	ورځی
۷۰ جوړه کالی	۱۲ درزیان	ورځی
۷۰ جوړه کالي	۲ درزیان –	ورځي
۷۰ جوړه کالي	۱۰ درزیان	ورځي

پس لرو

$x = (20.7.6)/(3.5) = 56$ ورځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – لاندې ځانښیونې یا تناسبونه ساده افاده کړئ

a) 200t : 2 kg b) 6 m : 6 km

c) 4km / 30min d) 3,2 t : 400dm³

۲ – یوه موټر د ۵۵۰۰ کیلو متره اوږدې لار لپاره ۳۸۵ لیتره ډیزل وسزول

الف) په دې تګلاره ۵۰ لیتره ډیزل د څومره لار لپاره بسیا کوي؟

ب) د یوې ۴۳۰ کیلو متره لار لپاره به دا موټر څومره ډیزل مصرف کړي؟

۳ – که غواړو چې د یوه موټر سره د الف ټکی څخه و ب ته ورسیږو ، نو د ۶۰ کیلومتره په ساعت ته درینیم اعته ضرورت لرو. د الف څخه ب ته سړی په څومره وخت کي رسیدلي شي، که د موټر سرعت په لاندې ډول وي:

a) 50km / h b) 110 km / h?

۴ – یو ښار پلان د ۱ : ۱۰۰۰۰ تناسب یا ځانښیونه ورکړ شوی دی. لاندې واټنونه په ریښتونی څومره دی ؟

a) 5 cm b) 33 mm c) 1 dm

۵ – یو ۸۱ ګڼ څنګه په داسی په ۲ زیاتونونو ټوټه کیدی شي، چی ځانښیونه یا تناسب یی داسی وي لکه : 5 : 4 ؟

۶ – د یوه ګڼ او ۵ کمون ځان نیونه یا تناسب و ۷ ته داسی دی ، لکه چی د ۵ کمون ودې ګڼ سره، چی ۴ ته ځا نیسی یا و ۴ ته تناسب یا ځانښیونه؟ دا ګڼ کوم دی؟

۷ – یو فاو وې موټر ۸۰ کیلو متره په ساعت کي ځغلي او په دې پسی په ۱۲۰ متره کی وروسته یو بی ایم وې موټر ۱۲۰ کیلو په ساعت کی ځغلي.

الف) بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چی د فاو وې څخه مخ ته شي؟

ب) بي ایم وې په دې وخت کی څومره واټن وهلی دی؟

پ) دا بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چي له فاو وې موټر څخه ۴۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

متره مخ ته شي ؟

۸ – د سونګ سکرو سوزلو له امله د کولنډیاوکسید غاز پیداکیږي. د سونګ سکرو او د راپیدا کولنډیاوکسید Kohlendioxid (CO_2) ترمنځ تناسب یا ځاننیونه 3 : 11 ده.

څو ګرامه سونګسکاره به ۱۰۰ ګرامه کولینډیاکسید رامنځ ته کیږي؟

۹ – له دریو یو په بل اغیزهمند غابنورڅرخي د ۴۸ ، ۳۶ همداسی ۱۶ ښاغونو سره دا کوچنی څرخی ۴۰۰ واري په یوه دقیقه کی ګرځي یا څرخی.
نور دواړه غابنورڅرخی څو واره څرخی یا ګرځی؟

۱۰ – ۹۰۰ تیږي، چی ۳۶ سانتي متره سور لري ۴۰۵۰ کیلو ګرامه وزن لري.
۱۱۰۰ تیږې به څومره وزن ولري، که د همغو موادو جوړې وي او سور یی ۲۴ سانتي متره وي؟

۱۱ – یو د زدکوونکو ورځپاڼه « هیلی »د رحمان بابا د لیسی څخه راوځی د دې لپاره چی د ورځپاڼو ۱۲۰۰ توکه وتړل شي ، څلور زدکوونکی ۳ ساعته کار پرې کوي.
څومره زدکوونکی په کار دې، چی ۲۱۰۰ توکه ورځپاڼی په ټیك دوه ساعته کی وتړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په سلو کی – -Prozent ، په زرو کی – - Primille

ګټه– -Zins او د ګټې د ګټې شمیرنه Zinseszinsrechnung

مور د a / b یا c / d ډولونو انډولونه او یا په همدې ډول ویشنه په مساواتو و ازمایل. د ماتشمیرنې په چوکاټ کې (څما د شمیرپوهنې کتاب دې وکتل شي) به وښوول شي چې څنګه بنسټیز نظم په داسې ماتو کې ټاکل کیدی شي. د انډول یا مقایسې لپاره دا هم وړاندېکوولی شو چې دواړه مات لاندې په ګډ ماتلاندې چې 100 وي پراخ شي. دا کم له کمه په نزدې ډول په هر مات کې کیدی شي.

پیلبیلګه:

یو جوړ جامې، چې په ۲۳۰ افغانۍ پلورل کیدې، په ۴۰ افغانۍ ګرانې شي د ګرانښت تناسب یا څاننیونه یې و اولنۍ ارزښت ته څومره دی؟

دا تناسب ۴۰/۲۳۰ کیدی شي نزدې په یوه مات چې مات لاندې یې «۱۰۰» وي انځور شي، دا کیدی شي چې د ویشنې له لارې داسې صورته ونیسي:

40 / 230 = 0,1739 پس 40 / 230 ~ 17,39 / 100

قیمتیدل د لمړنۍ قیمت 0 ,1739 ځله راکوي. داسې هم وایو چې قیمتیدل په سلو کې نزدې ۱۷ دي.

تعریف: د یوه بنسټیزارزښت G سلمه برخه ددې ګڼ 1 په سلو کې بلل کیږي، او ددې لپاره لیکو 1% د G دی G/100 , په همدې ډول % P له G

(c) ketabton.com: The Digital Library

ا۔ لہ

د ګڼې ارزښت W = P.G/100 له لارې ټاکل کیږي، P په سلو کې جمله او W په سلو کې ارزښت بلل کیږي.

بنسټ ارزښت G ځان و 100 ته داسې نیسي لکه د په سلو کې ارزښت W د په سلو کې جملې P ته، پس

$$\frac{G}{100} = G / 100 = W / P = \frac{W}{P}$$

$$\Longleftrightarrow \quad G . P = 100 . W$$

د اخرني مساوات څخه د فورم اړولو له لارې لاس ته راځي

جمله:

د په سلو کې ټاکنه	بنسټ ارزښت	په سلو کې ارزښت
P = 100 . W / G	G = 100.W/ P	W = G.P / 100

بېلګې:

۱ – د په سلو کې ارزښت	بنسټ ارزښت	په سلو کې ټاکنه
= 16,80 DM	د 120 DM	14 %

۲ – یو نفر باید د یوه نوي بایسکل لپاره 40 , 60 DM یعنی المانی مارکونه د مالیا لپاره (14%) ادا کړي

دا بایسکل څو ارزښت لري، بې له مالیا، او دا د مالیا سره څو ارزښت لري؟

که د 40,60DM په سلو کې ارزښت د په سلو کې ټاکنې 14% وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو باید 40,60 / 14DM د 1% د بنسټارزښت برابر وي. په دې پسې
بنسټ ارزښت (= 100%) د G = (40,60 / 14)100DM = 290 DM
لاس ته راځي.
له دې سره بایسکل **۲۹۰** مارکونه بې مالیا ارزښت لري او **۶۰** ، **۳۳۰**
ماروکونه د مالیا سره.
کید ی شي، چې سملاسی هم د مالیا سره ارزښت ته راشو، که د دې لپاره یو
بنسټ ارزښت د **۱۱۴** په سلو کې کیښول شي یا وضعه شي:

G = (40,60 / 14). 114DM = 330,60 DM

۳ – یو جوړ کالي چې **۱۵۰** مارکونه ارزښت لري په **۱۰** په سلو کې ګرانیږي، دا کالي تر ډیر ځنډ نه پلورل کیږي، نو له دې امله یې بیا دوکانواله په **۱۰** په سلو کې ارزانوي. پوښتنه داده، چې ایا داکالي به اوس هم **۱۵۰** مارکونه ارزښت ولري، که څنګه؟

طبعاً نه ، ځکه چې ګرانوالی په ۱۰ ٪ مارکونو زیاتوالی یې په سرچینیز ارزښت دی ، مګر دا ارزښت یې په دې اوسني ارزښت، چې 150 + 150.10% = 165DM په بنسټ منځ ته راځي. له دې امله دا کالي د ارزښت وروسته اوس

165 - 165.10% = 165 - 16,50 = 145,50DM

مارکونه دی. که یوه وړې شتوې بنسټ ارزښت بیا ردې په سلو کې ارزښت شمیرل کیږي، کیدی شي چې دا دیوه ساده ځل لپاره ونه شي.

بیلګي:

اول) د **۳۵۰** ماروکونو **۱۴** ٪ کې داسې شمیرل کیږي: 350.0,14 = 49 DM

دوم) که د **۴۵۶۸** کیلو ګرامه بنسټ ارزښت په **۲۲** ٪ کم شي، نو لاس ته راځي:

4568(1 - 0,22) = 4568.0,78 = 3563,04 DM

دریم) که د $2303\ m^2$ بنسټ ارزښت په 24% جګ شي، نو لاس ته ترې راځي«

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2303.(1+0,24) = 2303\ .1,24 = 2855,72\ m^2$$

لاندې بنسټپاکنی یا بنسټ مقدارونه دی په مات بڼه ورکړ شي :

$1\% = \frac{1}{100}$	$1\frac{1}{4}\% = \frac{1}{80}$	$1\frac{1}{3}\% = \frac{1}{75}$	$1\frac{2}{3}\% = \frac{1}{60}$
$2\frac{1}{2}\% = \frac{1}{40}$	$3\frac{1}{3}\% = \frac{1}{30}$	$4\frac{1}{6}\% = \frac{1}{24}$	$5\% = \frac{1}{20}$
$6\frac{1}{4}\% = \frac{1}{16}$	$6\frac{2}{3}\% = \frac{1}{15}$	$8\frac{1}{3}\% = \frac{1}{12}$	$11\frac{1}{9}\% = \frac{1}{9}$
$12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$	$16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$	$20\% = \frac{1}{5}$	$25\% = \frac{1}{4}$
$33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$	$50\% = \frac{1}{2}$	$66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$	$75\% = \frac{3}{4}$

د یوه بنسټ– یا سته ارزښت G یو په زرمه برخه ۱ پرومیلی (لاتین) واي، چی مونږ یی دلته هم د زرو څخه ۱ بولو:

۱ په زرو کی 1 ‰ له G دی G / 1000

د پرومیلی یا په زرو کی شمیرنی لپاره له دې وروسته انډولګڼ ۱۰۰۰ (په ماتلاندې کی) ، 1000‰ له دې سره یو سته ارزښت دی.

بیلګه :

4,7 ‰ له 3690DM دې: 17,34DM

مونږ غواړو، چی دا اوس د په سلو کی شمیرنی یو ځانګړي بڼی سره مشغول کړو. په ورځني ژوند کی خلك د کور جوړولو لپاره یا د یوې مغازې جوړولو لپاره پیسی (بډایي یا سرماي) پوروي او دا زیات وخت په نوې نړۍ کی له بانکونو څخه، د پور ورکولو له لارې پورورکوونکی څه پیسی باید لاس ته راولی، د ارزښت بايللو تر نامه، چی دې ته د سرمايي ګټه وایي. په بانکی معاملو کی د فعالی ا و غیر فعالی ګټی ترمنځ توپیر باید وشي. فعاله ګټه بانك د پوروړی څخه د ورکړشوې پور په مقابل کي لاس ته راوړي، د دې په خټ یا برعکس څوك چی په بانك کی شمیرکتابچه خلاصوي او په بانك کی پیسی سپما کوي ، نو دمرکزې یا ملي بانك په هدایت د

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیسو د سپما لپاره سپماکونکي هم څه پیسي لاس ته راوړي، چی دې ته به موږ د سپما ګټه ووایو ، په هر صورت په ځنی هیوادونو کي د پورګټی او سپما ګټی ترمنځ توپیر باید له ۲ په سلو کی تر دري په سلو کی څخه زیات نه وي.

په پرینځیپ کی باید د ساده ګټی او داسی په نامه د ګټی ګټی ترمنځ شمیرنو کی توپیر وشي . په داسی حال کی، چی په ساده ګټه کی پوروړی د پورشوي مقدار په بدل کی یوه ټاکلی ګټه ورکوي، چی هغه زیات وخت د یوه کال په منځ کي یعنی د یوه کال تیریدلو سره ټاکل شوې وي او دا ګټه د کال په اخر کی په منظمه توګه ورکول کیږي یا ادا کیږي.

د ګټی ګټی په شمیرلو کی د هغه غونډ وخت ګټه شمیرل کیږی ، چی په هغی کی د ګټی ګټه هم خوندې یا شامل ده، دلته هغه د هرکال ګټه د هغی لمړنی بډایي ته ورزیاتیږي او بیا د ټولو ګټه د بل کال لپاره شمیرل کیږی او په همدې ډول وریسی د دوه او یا زیاتو کالو.

لمړی غواړو، چی یوائی ساده ګټی شمیرلو سره ځان په کار واچوو:

پیلبیلګه

یوه د ۳۵۰۰ مارکونو بډایي یا سرمایه په بانکی شمیرنه کي په بانك کی اینښولکیږي، چي کلنی ګټه یی 4,5% ده. له 3,5 کالو وروسته دا سرمایه اینښونکي په بانکی شمیرنه کي څومره پیسی لري؟

دلته په پوره هدایت ساده ګټونه مخ ته پرته وي، که څه هم په معمولی توګه داسی شمیرنو کی د ګټی ګټه هم شمیرل کیږي. د په سلو کی شمیرنو بنسټ ارزښت دلته هغه ګټوونکی بډایي یا سرمایه K (بنسټسرمایه) ده، او د په سلو کی ارزښت ګټه Z ده (په المانی مارکونو) ، د په سلوکی مقدار ، چی ما کله په سلو کي ټاکنه(یعنی په سلو کي څومره اندازه) بللی په %).

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چی په دنده یا شمیرنه کي ګټه غوښتل شوې(دمخه برخه دې، یعني د په سلو کي ارزښت دې وکتل شي) ددې لپاره لاس ته راځي

$$Z = K.p / 100 = 3500.4,5 / 100 = 157,50DM$$

دا د یوه کال لپاره ګټه ده ، په بنسټیزه بڼهایي ، چی ۳۵۰۰ مارکونه دي. په درینیمو کالو کی په ساده ګټونه بڼهایي، چی بانکی شمیر یی واز کړی 3,5 .157,50 = 551,25DM لاس ته راوړي. په دې توګه به په سپما کتابچه کي 3500 + 551,25 = 4051,25DM (مارکونه) وي.

د ګټې وخت t لکه، چی ومو لیدل یو کال ، زیات یا کم کیدی شي. ، بیا نو په بانکي شمیرنه کي د یوه کال لپاره ۱۲ میاشتي نیسی، چی د هرې میاشتي لپاره ۳۰ ورځي ټاکي، یعنی په ټولیزه توګه ۳۶۰ ورځو په بنسټ بیا بانکی شمیرنی صورت نیسی. د ورځو په بنسټ بانکي شمیرنو کي هغه د سپما ورځ ورسره شمیرل کیږي(د سپماورځ Wertstellung یا Valutierung)، هغه ورځ، چی پیسی بیرته له بانګ اخستلي کیږي یا له بانك بیرته پورته کیږي، نه ورسره شمیرل کیږي.

د ګټې فرمول: $Z = K.p / 100$. د ورځنی ګټې فرمول: $Z = K.p.t / 100.360$

بیلګی

لمړی : ۴۵۰۰ مارکونه له ۳ . ۷ . ۱۹۸۷ څخه تر ۱۵ . ۹ ۱۹۹۰ پورې څومره ګټه کوي، که ګټه 4 , 75% وي.

د ګټې وخت د ورځو په بنسټ شمیرو: $t = 12 +60+3.360 = 1152$ ورځي.

د ورځنی فرمول له مخی لاس ته راځي:

$$Z = K.p.t / 100.360 = 4500.4,75.1152 / 100.360 = 684DM$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوم : یوې ښځې په ۱۵ . ۳ . ۱۹۸۷ باندې ۷۹۰ مارکه په بانکي سپما کتابچه کیښوول، او دا پیسې یې بیرته په ۲۰ . ۲ . ۱۹۸۸ له بانك څخه راواخستلې. دې بهايي یا سرمایې څومره ګټه وکړه:

- $p = Z.100.360 / K.t = 30.100.360 / 790.335 = 4{,}0809 \Rightarrow p \sim 4{,}08\%$

دریم : په څومره وخت کې کیدی شي، چې ۱۰۰۰ مارکونه د ساده ګټې په بنسټ ۲۰۰۰ مارکونو ته جګه شي، که بهايي په 4 , 5% ګټه سپما شوې وي؟

- $t = Z.100.360 / K.p = 1000.100.360 / 1000.4{,}5 = 8000$

ورځې ۸۰۰۰ = ۲۲ کاله او ۸۰ ورځې

څلورم : یو بهايي ، چې لاټري یې ختلې په ساده ګټونه ، چې ۷ ،۶ په سلو کې ده له بانك څخه د میاشتې ۲۰۰۰ مارکونه ګټه اخلي.

دا د لاټرۍ ختنه به څومره جګه وي؟

موږ دا د ګټې فرمول د بهايي په لور اړوو یابدلوو:

- $K = Z.100.360 / p.t = 2000.100.360 / 6{,}7\ .30 = 358208{,}95DM$

لکه چې پوهیږو، بانکونوپرکسیس یا کار کې د ګټې ګټونه معمول ده، او له دې زیات نه. د ګټې ګټه کلنی شمیرل کیږي او بهايي ته ورزیاتیږي.

یو پیلبهايي K_0 ، د یوه کال په اوږدوالی کې د یوې ګټې ټاکه یامقدار $p\%$ سره په ګټه اچول کیږي، د کال په اخر کې د یوې ګټې

- $K_1 = K_0 + K_0\ (p / 100) = K_0\ (1 + p / 100)$

سره په سپماکتابچه کې لیکل شوې ده.

دلته $K_0.p / 100$ د یوه کال را اچولې ګټه ده، د یو کال په پیلبهايي K_0 سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټول دوه کاله وروسته دا پیلبډایي د همغې پښیګټې یا ګټې پیل سره داسې لویه شوې

$$K_2 = (K_0 + K_0 . P / 100) + (K_0 + K_0 . P/100).(P/100)$$
$$= K_0 + K_0.P/100 + (K_0.P/100)(P/100)$$

که K_0 له نوکانو یا غیږ دباندې ونیول شي نو لاس ته راځي:

$$K_2=K_0(1+2.P/ 100 + P^2 / 100) = K_0(1+ P/100)^2 = K_1(1+ P/100)$$

له درې کاله وروسته دا بډایي یا سرمایه ده:

$$K_3=K_0(1 + P/100)^3 \qquad K_3=K_2(1 + P/100)$$

که دا شمیرنه په ورته توګه دوام پیداکړي، نو د t کالو وروسته په ټولیزه توګه لاندې بډایي لاس ته ترې راځي

$$K_t = K_0 . (1 + P/100)^t = K_{t-1} . (1 + P/100)$$

د (1 + p/100) لپاره غواړود لنډونې له امله q ولیکو، q ګټې فاکتوریا ګټې ځلونې بلل کیږي:

$$q = 1 + p / 100$$

ددې ساده ونې سره لاس ته راځي: د ګټې ګټې فرمول: یوه بډایي K_0 د t کالو وروسته د p% کلنې ګټې باندې(د ګټې جګیدنه) په $K_t = K_0 (1 + p / 100) = K_0.q^t$ لویه شوې

بیلګه : له درېنیمو کلو وروسته په ۴،۵ ٪ ګټه ۳۵۰۰ مارکونه په کوم ارزښت لوییږي؟

$K_{3,5} = K_0,. q^t = 3500.1,045^{3,5} = 4082,96$ DM مارکونه

د ګټیګټې شمیرنې سره بډایي $K_0 , K_1 , K_2 , K_3 , ..., K_t$ یوه هندسي پرلپسې جوړوي(ددې لپاره دې ځما د شمیرپوهنې کتاب وکتل شي) دا د پیلبډایي K او ځلوونې $q = 1 + p / 100$ سره ، ګرافیکي که وکتل شي، نو د ګټې لوییدنې فنکشن $K_t = K_0 . q^t$ یو اکسپوننشل بلواک انځوروي. د تعریفډیري $D = Q$ سره. ساده ګټه اچونې بیا یو لاینې فنکشن $K_t = = K_0 (1 + p.t / 100) ; t C Q$ په نخښه کوي.له دې امله بډایي په ساده ګټه اچونه دومره چټکه نه لوییږي، لکه چې په یوه دګټې ګټې اچونې باندې.

بیلګې: ۱ – یو د ۴۷۰۰ افغانیو مقدار یا ارزښت دې د پنځه کلونو لپاره په ساده ګټه اچونه او ب) په د ګټې ګټې اچونې چې ۵۷، ۴ ٪ دې ایښول کیږي. دا هر پایبډایي څومره لویه ده؟

a) $K_5=K_0(1 + P.t/100) = 4700(1+ 4,75 . 5/ 100) = 5816,25$ Af

$K_5= K_0 + 1116,25 = 5816,25$ Af

b) $K_5 = k_0. q^t = 4700 . 1,0475^5 = 5927,45$ Af

۲ – یوه بډایي د ۵۰۰۰۰ افغانیو په ۳.۵.۹۷ واچول شوه او باید په ۳۱.۱۲.۲۰۰۱ راوو‌ستل شي. څومره په ۴.۵ ٪ ګټه باندې لوې شوې دې، که پوره کلونه (له۱۲.۳۱-۱.۱) په ګټه واچول شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$K = [K_0 + K_0.p.t / 100.360].(1 + p/100)^n$$
$$= [\ 50000 + 50000.4{,}5.237 / 36000].1{,}045^4$$
$$K = 61392.35\ Af$$

د لویو K_0, q, t او K_t په ګټه فاکتور کی افاده کیدو لپاره رامنځ ته کیږي. د ګټي اخستنی وروسته کیدی شي د سرچینیزې بډایي K_0 پوښتنه رامنځ ته شي، چی د t کلونو په p % ګټونه یا ګټه و بډایي K_t ته بیایي. K_0 د K_t د بډایي د اوس وخت یا حال یا نغد ارزښت بلل کیږي. د K_0 شمیرنه په ورکړشوې بډایي K_t ته چی بیاي دیسکونتونه Diskuntierung یا ګټوني بلل کیږي:

تعریف: د نغدارزښت فرمول $K_0 = \frac{K_t}{(1+\frac{p}{100})^t} = \frac{K_t}{q^t} = K_t.(\frac{1}{q})^t$

دلته $(1/q)$ د ګټوني فاکتور بلل کیږي. د نغدارزښت فرمول له $K_t = K_0 .q^t$ اړیکو څخه لاس ته راغلی ، چی د K_0 په لور اوبی یا حل شوي.

بیلګي:

١ – یو نیکه غواړي د خپل لمسی د پنځمی زیږیدنی له امله یو څه ئیسی بانك کی سپما کړي، د ٥٪ په ګټه . دا پیصي بهه څومره یا دا مقدار به څومره لوي، چی دا لمسی په خپله ٢٥ کالیزه ٢٠٠٠٠ مارکونهلاس ته راوړي؟ باید په بانك یکی ٢٣ ، ٩٦١٢ مارکونه کینښوول شي یا سپما شي..

٢ –د یوه کور خرڅلاو کی دوه اخستونکی مختلف اوفرت یا وړاندیزونه کوي « علاقمند الف ١٥٠٠٠٠ مارکونه نغد ، ١٢٠٠٠٠ مارکونه له دوه کاله وروسته او نور ١٥٠٠٠٠ مارکونه د ټولیزه توګه له شپږ کاله وروسته ادا کړي یعني د کور مالك ته ورکړي.

علاقمند ب غواړي، چی ١٣٠٠٠٠ مارکونه نغد ، ١٥٠٠٠٠ مارکونه له درې کالو وروسته او ١٤٠٠٠٠ مارکونه له نورو دوه کالو وروسته ورکړي.

کوم یو علاقمند ګټور دی، که موږ ٨٪ ګټهٔ ونیولي شو یا فرض کړای شو؟ دا چی دواړه ارزښتونه یا وړاندیزونه یو له بل سره پرتله کړاي شو، نو باید دواړه نغد ارزښت ته راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

یوه د ۸۰۰۰ مارکونو بډايي ، کومه چې د ګټې په ګټونه ولاړه ده، باید ۶٪ کلنی ګټې د څلورو کالو لپاره په بانګ کی پاتي شي یا کیښوول شي. بډایي به څومره لویه وي په الف) کلني ، ب) نیمکلنی، خ) میاشتنی، او ت) په ورځنی ګټونه؟

تمرینونه:

۱ – یو جوړ کالي په ارزښت یا نیه کی ۵ ،۴ ٪ کمشو» د دې کالیو لومړنیی نیه ۲۵۰ ماکرونه وه . اوس دا کالي کومه نیه لري؟

۲ – یو پطلون په ۵ ، ۴ ٪ ارزان شو، دا پطلون او س ۲۵۰ مارکونه ارزښت لري. دې پطلون پخوا کومه بیه درلوده؟

۳ – د یوه جاکټ بیه په ۷۰ مارکونوه راکمیږي، دې پخوا ۲۵۰ مارکونه بیه لروده، اوس دا څومره بیه لري یا حومره قمته ده؟

۴ – یو جوړ دریشی په ۹۸ مارکونوګرانیږي او اوس ۴۵۰ مارکونه بیه لري. د ا ګرانښت په سلو کی څومره دی؟

۵ – رابات یو د بیي راکومن دی، چی اخستونکی ته د ځانګړو شرایطو لاندې ورکول کیږي. سکونتو یو بیه کمون دی، چی اخستونکی ته د نغدو پیسو ورکولو له امله ورکول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) یو د ۵۷ ، ۸۵۰ مارکونو شمیر، یعنی په کاغذ لیکل شوې بیه په ګوته شوې: د لسو ورځو ترمنځ نغد اداکولو په حالت کی ۳٪ سکونتو.
دلته څومره پیسی ورکول کیږي؟
ب) یو اخستونکی د خپل نوي لاس ته راوړي بایسکل کی ۲۰ ٪ رابات لاس ته راوړي، او دا چی هغه پیسی ندې ورکوي، بر سیرهٔ پردې ۲ ٪ سکونتو هم ورکول کیږي. دا باسکل او س دی د دې لپاره بایسکل لپاره ۱۵۶ مارکونه ادا کوي.
دې بایسکل د سکونتو او ربات د مخه څومره بیه لروده؟

۶ – په یوه نغدپیسوبیه ۱۴ ٪ کی د مالیي ورزیاتیږي او ۳ ٪ ربات ورکول کېږي.
که پخپله ځان ته شمیر لیلی لیکی شی ، ته به مالیه لومړی ورزیاته کړې او که لمړی به ربات له شمیر کم کړې؟
دا نغده ارزښت به څومره جګ شي، که لومړی مالیه ورزیاته شي او بیا ربات ترې کم شي؟

۷ – اباسین خپ کور دننه په ۱۱۰۰۰۰ ماروکونو بیمه کړی. دی ددې بیمی پوره کوونو لپاره کلنی ۵ ،۱ په زرو ګټه باید نیمی ته ادا کړي. دا څومره ده؟

۸ – یوه ګازره په منځنی توګه 0,5‰ ویټامین A لري. څو ګرامه ګازرې به ۱۵ ملي ګرامه ویټامین A ولري؟

۹ – په یوه موټربیولو کنترول کی د یوه موټرځغلونکی څخه د ازماینی لپاره وینه اخستل کیږي. معاینه دا نتیجه ورکوي، چی موټرځغلوونکی 1,7‰ الکول په وینه کی لري. دابه څو مترمکعبه الکول وي، که ونیسو، چی د وینی ډکی ۷ لیتره وي؟

۱۰ – د ارزښتکاغذ (دا په بانك کی څه کاغذونه دې، چي خلك یی اخلی، په کلنی ټاکلی ګټې سره) یو پیسی اینښوونکی ددضیویدند Dividende (کلنی ګټهٔ ده) ۲۷۰ مارکونه اخلي. څموره پیسیبه هغه اینښودلي وي، که یوه بډایي

په ۵ ، ۷ ٪ ګټهٔ اینښوول شوې وي ؟

۱۱ – اباسین په یوه بانکی حساب کی ۷۰۰۰ مارکونه اچوي. له کوم وخت وروسته په ساده ۴ ٪ کی ګټونه، دی ۸۰۰ مارکونه لاس ته راوړي؟

۱۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولي اړتیاوې پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې   انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنشیال برابرون (دا کتاب په دې ښانګه کې یو پیل   دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

(c) ketabton.com: The Digital Library

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپېدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کربښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنستونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو وييونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپيني خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پوري ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان په اولني نوم میرې شینواری د ارواښادې پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړني ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکترې په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبرورې تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمې همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library