ئەندازە(هندسه)

Geometry

لیکۆڵینەوە:

داکتر ماخان (میری) شینواری

2012

Ketabton.com

جرمني د بن ښار

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمککچپوهنه (هندسه)

لیکونکی:
ډاکتر ماخان (میرزي) شینواری

ناچاپ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

ځمککچپوهنه(بنسټيزه هندسه)

هندسي بنسټيزې کليمې

ټکی ، کرښه ، هواره(سطحه) ۱
نيمه – يا نيمهواره ۷

کونجکليمه ۱۱

څرخونپروسه: څرخونکنج : ۱۴

ګراد ۱۵

کونج کلمه ۱۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمککچپوهنه(بنسټيزه هندسه)

هندسي بنسټيزې کليمې

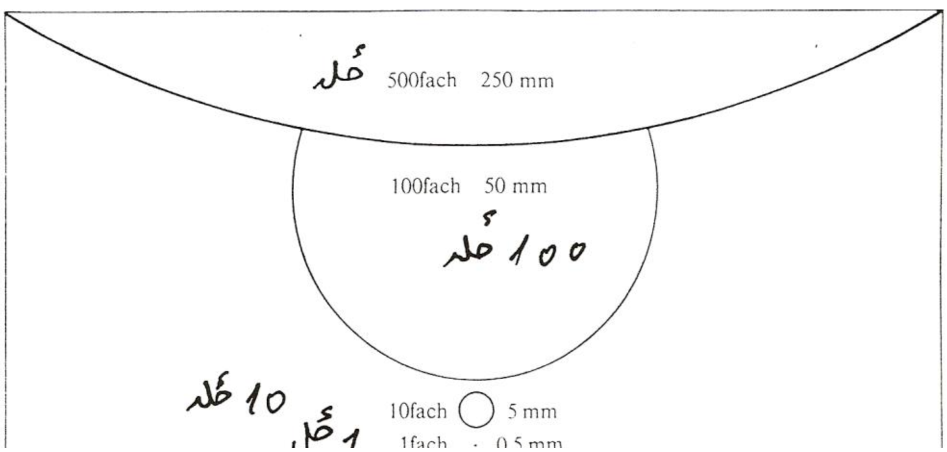
ټکی ، کرښه ، هواره(سطحه)

پيژند(تعريف): اويکليد(Euklid) اويکليد وايي، چي ټکی هغه دی چی نور نه شي کوچنی کيدی. ددې پيژند ستونځی په دې کې دي، چی بيا نو د داسی واړه شي څخه ځنګه
کرښه، او هواره جوړيدلی شي. يعنی که ټکی د هندسی اتم (لاتين Atom نه ويشونکی)
وي بيا نو ځنګه کيدی شي چی پراخه شي يا وغزيږي؟ يا يی که مايکروسکوپ له لارې
لوي کړو، نو پوره ستره هواره نيوی شي په عمل کی د کښلو (رسم ويستلو) له
لارې ګورو چی ټکی څرګند غزيدلی يا پراخيدلی شي، لکه څنګه چی لوييدل يعنی غټيدلی
شي:
په لاندې کې ګورو، چې ټکی د همدې شميروني له لارې څومره غټيدلی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : هندسه ځمککچ ته وايي، نو که هندسه ځمککچ پوهنه وبلل شي، د لمړنيو پوهيدلو لپاره به هم سملاسي اسانه وي .همدا اوس هم، له دې امله چې په هندسه کی ډیرځه ليدلکيدی شي او د رانيولو وړ دي).
لنډ: شيان يا ليديدونکي»رانيولوړ «(يا شي ډوله ځرګنديږي، همدومره ستونځی ليدل کيږي، چې نومونه اړوند (تړلی) کره وټاکلی شو، اوهمداسی يي دا اړونده کره ټاکنه روښانه يا فکروړ کړی شو، که ځه هم په لومړي وار سره، چی ګوندې دا شکلونه ليدوړ او نيولوړ دي، ساده ښکاري، مګر په خپل دننه کی (خپله ختّه کی) خورا پيچلي دي چی يواځی ور نږدې پيژند(تعريف) يی کيدلی شي او په لاندې کی به راته روښانه شي:

-موږ په لاندې ځيره کی د ټکی غټيدل يا لوييدل ښايو



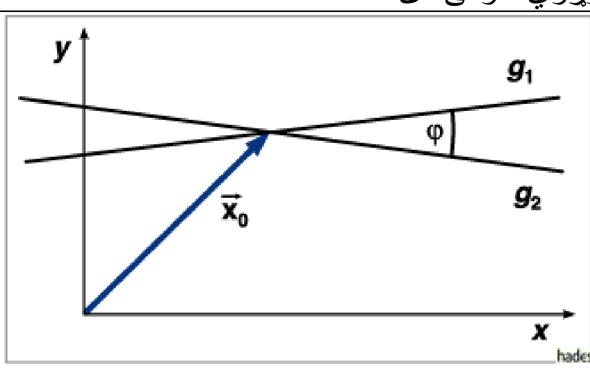
ګورو چی ټکی هوارې او کرښی ته پراخيدلی شي يعني عملي ځيره ښوونه يا شکل نخښوونه يی د ستونځو سره مل ده، خو سره ددې هم ځنی تيوريکي کره (ټيك) ښوونه يي ضرور ده ، يا نه پريښودونکی ده. دا پرابلم په مقايسوي- يا د پرتلي په توګه- ساده له منځه وړل کيدی شي: په لاندې کی د تشريح شوو شيانو يا ليديدونکی لاندې د هغو تيوريتيکی اديالہ(خيالي)ځيره پوهيږو او نه د هغه عملي ريښتينوالی يا رياليزه کوونه٠ د دې لپاره، چی ځانونه دې له دې ستونځو راوباسلی شو، دا مو د هندسی د ډيرئ کنځپټ ته لارښودوي. د پورته شکلونوسره سره، د هندسي جوړختونو (ځيرو) لاندې ، د ټکو ډيری پوهيږو. يعنی هندسي جوړښتونه بل ځه نه دي، بی د ټکو له ډيرئ٠ داسی تعريفوو:
لنډ: ټکی او کرښه

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیژند(تعریف) :
یوه هواره یا سطحه د یوې ډیرې په څیر کلکه نیسو، چې توکی یې ټکی بللکیږي. او په غټو لاتین تورو یې ښایو لکه .....A,B,C,P,Q ، په هواره کی یوه برخډیری په نخښه شوې ده، چې توکي يي کرښی بلل کيږي او په کوچنیو لاتيني تورو..... , a , b , c سره ښوول کيږي
یا په بل ډول :یوه هواره E د ناپای ټکو ډیری ده. د هوارې هره برخه (چی پخپله پای یا ناپای کیدی شي) د هوارې یا سطحې څیره (فیګور یا شکل) بلل کيږي.

د کښلو(رسمولو، انځورولو هوارې غزول)لکه د بیلګي په توګه د کاغذ دمخ (تخنیکي بندیزونه لري (محدود دي). د هندسي هدفمندی لپاره باید بیا دا کاغذ هرې لور ته ناپای غزیدل شوی وي او پنډوالی یی صفر ته را کښته شوی وي، ځکه چې یوه هواره دوه دیمینزیونال ده) دوه اړخیز یا دلته ښه دی چی د اړخ په ځاي خوا ووايو، ځکه چې اړخ مو د-nګوډيو لپاره کارولی دی. د لته یی د خواوو څخه سور او اوږدوالی عبارت دی . (په دي کتاب کی او بیا دې موضوع کی له وړو څرګندونو تیریږو او هغه څه چی خورا مهم دي هغه دلته راوړو)۰

لنډ : ټکی هغه کوچنی څه دی، چې هواره او کرښه ترې جوړیدی شي او له دې امله ټکی دهوارې یا سطحې، چې د ټکوډیری جوړوي، توکی دی۰



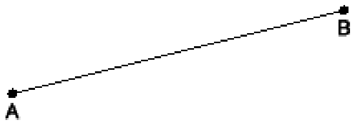
ټکی د دوه کرخو غوڅي له لارې انځوریدی شي ۰ که دوه کرښې g او h په P کي غوڅي کړي، نو د دې لپاره داسي لیکو:

$h = \{ P \;\square\; g\}$

یا لاندې انځورونه
په لاندې ځیره کې g_1 او g_2
په یوه ټکي کې سره غوڅوي

پیژند :
ټوټه کرښه (پای کرښه یا بنده کرښه) ABد ټولو ټکو هغه ډیری ده، چی له ټکيAو B ته د هوارې یا سطحي په دننه کی لنډ واټن یا - فاصله وهي، یعني که دا دواړه ټکي یو بل په لنډ واټن کی د هوارې په دننه کی سره وتړي، چی د غاړې ټکي A او B هم په دې پورې اړه لري. یعني ټکی A او B هم په دې کرښه پراته دي۰داسي لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

A € AB; B € AB یا هغه کرښه، چې دوه ټکی په لنډ واټن کې سره وتړي بندکرښه بلل کیږي، ټکي د کرښې توکي دي	

که بند کرښه د «ځیرکرښې» په څیر ونیسو او یا د کاغذ پرمخ کرښی (خټکش) کیږدو نو دا کرښه دواړو لورو ته غزیدلی شي، چې موږ دا کرښه بولو٠

کرښه د ځمککچپوهنې بنسټیزه کلیمه ده٠ لیدوږ د اویکلید جیومتري کې دا یوه ناپای غزیدلی کرښی ته وایې، چې ناپای نرۍ وي، د لاندې خویونو سره:
که په یوه کرښه دوه یو له بل بیل ټکي پراته وي، نو د دوي ترمنځ ټوټه کرښه یو لنډ واټن په نخښه کوي، چې موږ ورته ټوټه کرښه یا بند کرښه وایو٠

دا کلیمه ټیک زموږ پیژند نه راکوي٠ اوس هندسه په اکسیومونو ودانه ده، چې کرښه او ټکی داسې ورکړ شوي، چې مخ د مخه یې پیژند څرګند ورکړ شوی او نیول شوی یانې موږ یې پیژنو ٠

پیژند یا تعریف :

د بندکرښی (پای AB)- دواړو لورو ناپای غزولوته کرښه (ناپانکرښه) AB یا g ویل کیږي. بندکرښه نو بیا د (ناپاي -) کرښي اصلي برخډیری ده٠

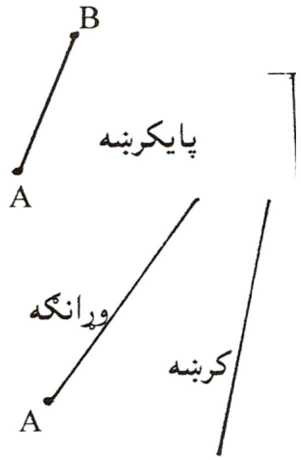
په نخښونه یې g (برخډېرۍ)□ AB

طبعآ کیدی شي، چی کرښه په یوه لور وغزول شي

پیژند :

که بندکرښه یواځي په یوه لور ناپای وغزول شي،(نا پای) نیمکرښهشي (ناپاي) نیمکرښه یا وړانګه(شعاع) بلل کیږي. نیمکرښه یا وړانګه یوې لورته بنده او بلی لور ته ناپای غزول کیدی شي، یعني پیل لري مګر پای نه لري .

(c) ketabton.com: The Digital Library

لنډ: د بندکرښی دواړه لوري بندي ، د نیم کرښي یوه لور بنده او بله وازه او دکرښي دواړه لورې وازي دي. په پورته ځیرو کي د بند کرښی، وړانګي او کرښی توپیر څرګند دی. نیمکرښه د کرښی برخدیری دی	

که په یوه هواره کی په یوه کرښه g ټکیPکیښوول شي، نو وایو چیPدgاینځیدیر (inzidiert) کیږي یاټکیPپه کرښهgپروت دی یاgلهPتیریږي اوgد هواريEسره اینځیدیرت کیږي، په دې حالت کی د اینځیدینځ اړیکو(inzidenzrelationen) یا »پروتوالی اړیکو«څخه غږیږو.
که په همغه کرښه له دوه ټکو (په همغه هواره له درې ټکو زیات) زیات ټکي پراته وي، نو دې ته سرې کولینیار(kollinear() کومپلانار(چي په همغه هواره یا ستځه کي شته ويkomplanar) وایي .که یو ټکی P په دوه (زیاتو) کرښوg اوhپروت وي نو دا د gاوh غوځټکی بلل کیږي اوداسی یې لیکو:

$$h= \{ P \cap g\}$$

د پام وړ : ټکی د ډیری نوك کی{ } لیکل کیږي(یا د ډیری غیږ کی نیول کیږي)، ځکه چی ناپاںکرښي g او hد ټکو ډیری دي او ټکی P د غوځډیری توکی دی .
که چیرې ډیرې ناپایکرښی په یوه ټکي کی سره غوځی کړي نوکوپونکتال (kopunktal) بلل کیږي، کوپونکتالی ناپای کرښی د ناپاںکرښو غونچه (Büschel)یا بهتره ستوری جوړوي.

د کرښو کوده(ځیرې ټولي لاندې کښل شوي دي)

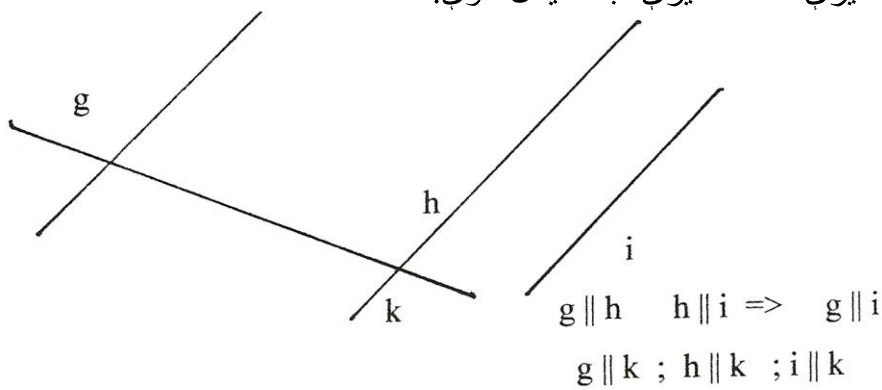
پيژند(تعريف) : کرښي g او h بي له ګډو ټکو یابهتره : بی له غوځټکو غبرګکرښی (موازیکرښی) بللکیږي، لیکدود(مطلب د شمیرپوهنی لیکدود) یې د ی g||h

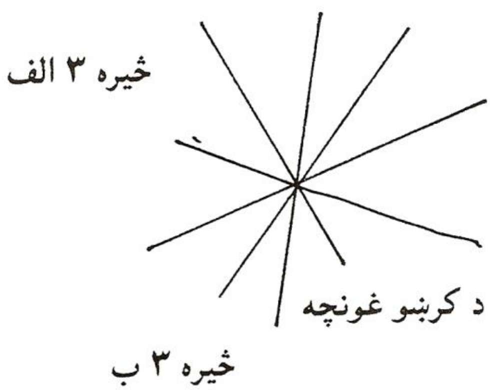
(c) ketabton.com: The Digital Library

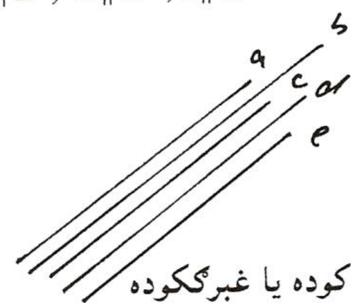
کرښی د ناپای ډیرو غوڅټکو سره کټمټ یا (ایدنتیك identisch) بلل کیږي یا مساوي کیږي. دا په دې مانا چی یو په بل پرتی دي. یو بل ته کټمټ کرښی سره غبرګی دی۰ ددې لپاره لیکو: g = h

ناغبرګی کرښی g او h په نخښونه کی داسی په نخښه کیږي: g|/|h (دا دې منل شي، چې دا د ناغبرګ کرښو لیکډول دی یا لیکدود)۰

د لاندې څیرې شننه د څیرې کښته لیکل شوې:







هندسی څیره : یوه هندسي څیره یوه ناتش ټکیډیرۍ ده.

هغه لاین (یوخوایز یا یو دیمنزیونال (لاتین: په ټولیزه توګه مانا یی: هرې لور ته پراخیدنه، یوې لورته پراخېدونی(1Dimensional) بلل کیږي، که هغه په یوه کرښه پروت وي او ټکی نه وي .

پیژند(تعریف):هغه هندسي څیره »هواره (Fläche) بلل کیږي، که هغه په یوه هواره هوره (Ebene) پرته وي، مګر نه په یوه ټکي پرته وي ۰ هواره یا سطحه دوه پراخیدونې یا –دیمنزیونال(2 Dimensional)ده۰

په پورته کې د کرښو کوده یا د کرښو ډله سره غبرګې هم دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته $A < B$ په دې مانا ده چې «A په یوه کرښه g د B تر مخ یعني ځموږ په بلد دود، کیڼ لور ته پرته ده» دا په دې مانا چې په کرښه g ځغاسته باندې لمړی د A ټکی او بیا په ترتیب د B او C ټکو ته راځو. په دې توګه د منځ اړیکی له لارې لوریزې کرښې ته راځو. دا په دې مانا چې داسې کرښې لوریزې کرښې دي.
یعني په هغه پخوانی ډول سمت یا لور یې ځرګند دی.
منځ اړیکی Wz(ABC) دا مانا لري چې یا A<B<C او یا A>B>C . دا په دې مانا، چې هره کرښه په دوه ډوله لوریزه کیدی شي یعني سمت یې ټاکل کیدی شي.

تعریف : g دې یوه لوریزه کرښه وي او A دې د g یو ټکی وي، نو د A بدل یا توپیري ټکی کرښه g په دوه برخېډیریو ویشي: (دلته کرښه ناپای کرښه ده)

$$\{X : X \in g \text{ او } X < A\}, \quad \{Y : Y \in g \text{ او } Y > A\}$$

که دواړو برخېډیریو ته ټکی A ورزیات شي، نو له A څخه په g پیداشوې وړانګې منځ ته راځي . A منځ ټکی او g د دواړو، نسبت و A ته یو بل ته مخامخ یا یو د بل په څټ وړانګو وړونکرښه بلل کیږي.

یوه وړانګه د پیلټکی A او له دې توپیر ټکی P(P |= A) له امله یواځنی (یواځنی شمیر پوهنیزه کلیمه ده او تل دې ورته پام وي، دا په ځیرونه کی زیاته کاروول کیږي. دا په دې مانا ، چی بل نه شته) ټاکلی دی. یعنی په دې ټکو بله له دې وړانګي توپیري یا بدله وړانګه نه شته. دا په AP ښوول کیږي. دې AP ته مخامخ یا په څټ وړانګه په AP ښوول کیږي.
تل باور لري:

$$AP^{+} \cap AP^{-} = \{A\} \quad \text{او} \quad AP^{+} \cup AP^{-} = Zw(AP)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که وکتلی شو چی د پای کرښی یو سر له بل څخه د مخه پروت وي، نو پایکرښه لوریزه ده. که A له B مخ ته یا کیڼ لور ته پرته وي نو کرښه په AB ښایو د کرښي لوریزوالی د یوه غشي په مرسته ښوولی شو یعنی: پایکرښه AB او BA یو بل ته مخامخ یا په بل ډول یو بل ته په څټ پرتی دي.

نیمه هواره یا لنډ: نیمهواره

تعریف : هره کرښه g په هغي کرښه پورې اړه نه لرلو ټکو باندې په دوه وازو نیمهوارو باندې ویشي. دوه ټکی د نیمهوارې یوه لور ته ، ټیك او ټیك هلته پراته دي، چی ددې ټکو ترمنځ د کرښي g کوم ټکی نه وي پروت. g د دواړو هرې یوې هوارې ژیکرښه یا لنډه: ژی یا غاړه ده.
د یوې وازې هوارې او ژی کرښی ټولنه نیمهواره جوړوي. یوې ژیکرښي پورې اړونده دواړه نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په څټ نیمهوارې بلل کیږي.

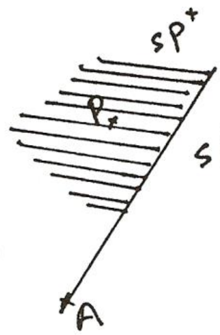
که ټکی A او B له g پیداشوې یا منځ ته راغلی نیمهوارې په یوه لور پراته وي، نو وایو چی A او B د کرښی g په همغه لور پراته دي.

یوه نیمهواره د پیداکرښي او یوه ټکی P له لارې (چي په ژیکرښه g نه وي پروت) یوائځنی ټاکلی ده، یعني له دې نیمهوارې بدله بله داسی نیمهواره نه شته.

یو ټکیډیری ، چی له یوې وازې نیمهوارې او یوې وړانګي، داسی په نامه هوارجوړوونکی وړانکی ، جوړ وي، جنډه یا بیرغ بلل کیږي. دلته د وازې هوارې ژیکرښه د وړانګي وړونکی کرښه بلل کیږي.

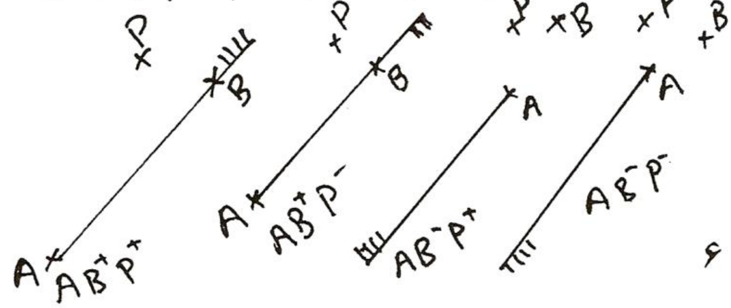
(c) ketabton.com: The Digital Library

وړانگه د جنډې ژیوړانگه ، ددې پیل ټکی د جنډې پیلټکی بلل کیږي. یوه جنډه f د ژیوړانگي s سره او په دې وازه هواره پراته ټکي P سره په sP^+ ښوول کیږي. جنډه د همغې وړونکې وړانگې یا ژیوړانگي s سره ، چې د sP^+ سره مخامخ یا په څټ ده ، د sP^- سره ښایو. (خیره: ۵)



خیره ۵

که په sP^+ همداسی sP^- سومبول، په پورته د وړانگي s لپاره اینبوول شوی سومبول، چې له A و B ته ځي او AB^+ همداسی AB^- بدل کړو یا کیږدو، نو د لاندې سومبولونو AB^-P^-; AB^-P^+; AB^+P^-; AB^+P^+ سره کرکترستیك یا ښوول شوې یا ټاکل شوي جنډې ښایي. لاندې خیرې ددې لپاره کارږو:

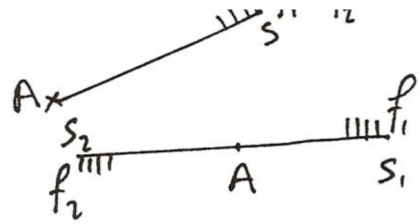


خیره ۶

دپورتۍ خیرو بیرغونه AB^+P^+ او AB^-P^- یو بل سره مخامخ دي، ځکه چې وړونکی وړانگه او نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په څټ دی(پام دې وي چې مخامخ او په څټ همغه مانا لري یعني همغه یو ډول شمیرنیزې کلیمې دي)،

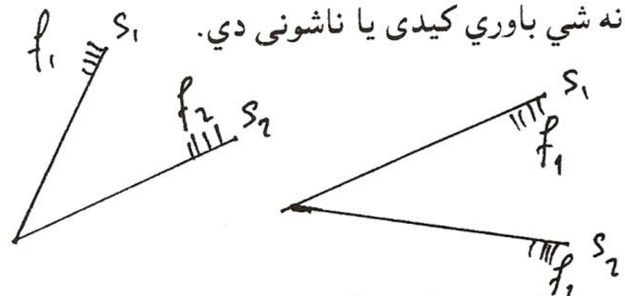
دوه بیرغونه (f_2 , f_1 د همغه پیل ټکي A سره) وپیل ټکي A ته همغه لوریز یا مساویلوریز بلل کیږي، د کولینیارې ژیوړانگو سره، که $f_1 = f_2$ یا f_1 و f_2 ته مخامخ یا په څټ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۷

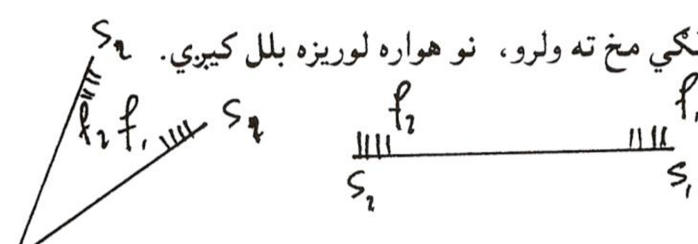
دا دوه بیرغونه یو بل ته مخامخ بلل کیږي د همغه پیلټکي، د ناکولینیارې ژیوړانګو سره، که د f_1 ژیوړانګه په f_2 یا f_2 ژیوړانګه د f_1 په ژیوړانګه پرته وي ، مګر دواړه امکانات نه شي باوري کیدی یا ناشونی دي.



خیره ۸

د ټولو جنډو ډیریو کی همغه لوریز اړیکی ایکویوالنت یا ورته اړیکی دي. همغه په دوه ټولګیو د ډیریو ویشنه ممکنوي.
هغه جنډې چی مساوي لوریز نه دي یو بل ته مخامخلوریز یا یو بل ته په ښټلوریز بلل کیږي. دې ته خو پام شته چی مخامخ یا په ښټ لوریز همغه مانا لري

که دا ډول لوریزټولګي مخ ته ولرو، نو هواره لوریزه بلل کیږي.



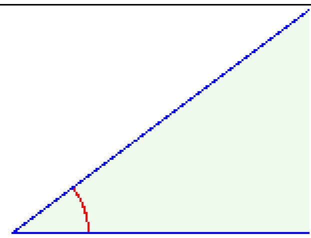
خیره ۹

دوه منظم یا ترتیب شوي د ټکو دریګوني (A,B,C) او (D,E.F) ټیک هلته یا هلته او هلته همغه څرخونموخه لري(یعنی د څرخونی هدف یی همغه دی)، که

(c) ketabton.com: The Digital Library

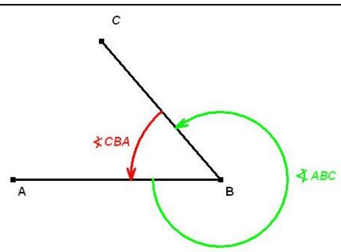
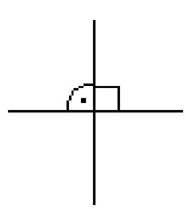
جنډې ABC او DE F همغه لوريزې وي. د يوه منظم نه کولينيار يا کولايني دريګونټېکو (A,B,C) څرخونموخې لاندې د جنډې ABC لوريزېولګې پوهيږو.

کونجکليمه

پيژند (تعريف): په يوه هواره کي، چې دوه وړانګې S 1 او S2 ياني S1/\ S2 د پيل غوښتکې S ولري په هواره يا سطحه E کې کونج β جوړوي .وړانګې د کونج پينې بلل کيږي او پيلټکې S دکونج > ککره (لنډ : کونجککره)بلل کيږي.	

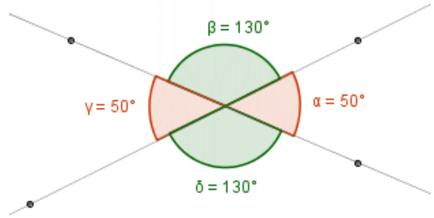
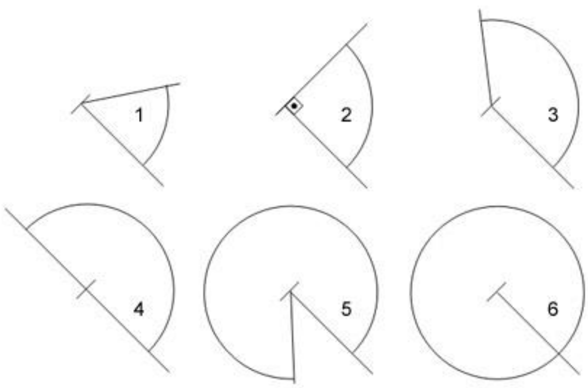
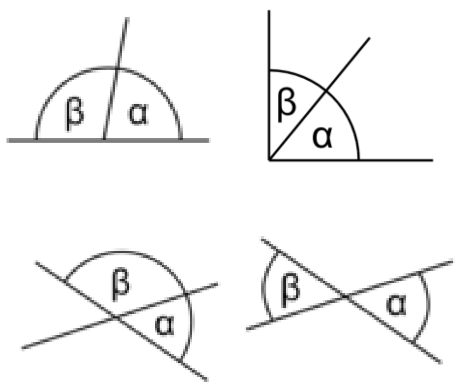
لنډ: دوه کرښې، چې په يوه ټکي کې سره غوښې کړي، کونج جوړوي، چې کرښې د کونج پينې او غوښتکې يې د کونج ککره يا (رآس الزاويه) بلل کړي ۰ پورته څيره دې وکتل شي۰ګونجونه په ګراد (لاتين پل يا لاقدم)کچيږي

د کونجونو رسمونه او نومه ونې

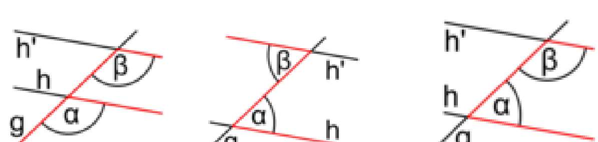
هغه کونج ، چې له ۱۸۰ درجو کوچنی وي هغې ته ننوتی کونج واي او هغه کونج، چې له ۱۸۰ درجو لوي وي هغه ته وتلی کونج واي ننوتی کونج Konvexes Winkel وتلی کونج konkaves Winkel تيره کونج، چې له ۹۰ درجو کوچنی دی، ولاړکونج، چې پوره ۹۰ درجې دی، پڅکونج، چې له ۹۰ درجو لوي او له ۱۸۰ درجو کوچنی دی، غزيدلی کونج، چې ۱۸۰ درجې دی ، له پڅ زيات- يا د پڅ په څټ- يا له پڅ اخوا کونج ، چې له ۱۸۰ درجو لوي او له ۳٦۰ درجو کوچنی دی، پوره کونج، چې ۳٦۰ درجی دی۰ دا دې په ګوته وي، چهٔ صفرکونج صفر دی۰	 

يادونه: دا مې ډير تکرار راوړی، هيله ده، ګران لوستونکي به ورسره ستړي نه شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

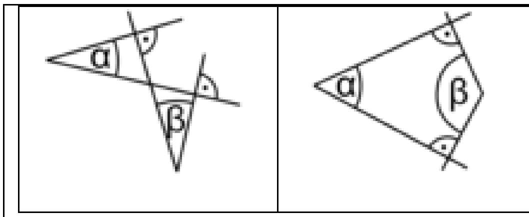
مخامخ څيره : ککر په ککر کونجونه يورنګيزدي، بدلرنګيز کونجونه ګاونډي بلل کيږي٠	
لاندې کونجونه پخپله ونوموی‌کړی ٠	
کمپليمنت يا ٩٠ درجو ته پوره کيدونکي کونجونه(مخامخ څيره دي وکتل شي)٠ په څنګ کې يي سوپليمنت يا ١٨٠ درجو ته پوره کيدونکی کونجونه٠ مخامخ څيره ٠ مخامخ کونجونه ښی لور ته : ککر په ککره کونجونه٠ کين لور ته : ګاونډي کونجونه	

له کين څخه و ښی لور : پوړيز کونجونه ، ردبدلکونجونه



(c) ketabton.com: The Digital Library

مخامخ کونجونه، چې پښې یې یو په بل ولاړې وي, ۱۸۰ درجو ته یو بل پوره کوي. په دې بل حالت کې کونجونه یو بل سره برابر دي.

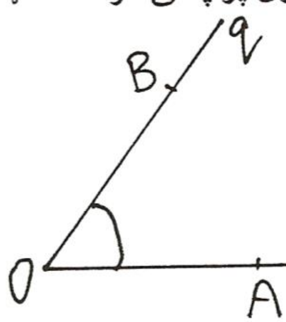


یادونه : ګران لوستونکي به راته بخښنه وکړي، چې د زیاتو کونجونو هغه ورسره بلد نامه سره ښه نه یم بلد، ځکه چۀ په محدب ، مقعر او داسي نورو باندې نه پوهیږم، یوائې له قایم الزاویه ښخه پرته.

یو ګراد Grad لاتین: پل یا قدم

لاندې کونجونه سره توپیر کیږي، چې ایا د پښو لړۍ پرلپسی کره ټاکلي او ایا د کونج دننه په نخښنه شوی دی او که نه.

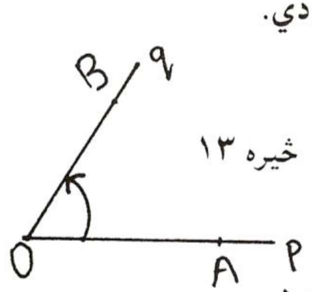
د کونج دننه په نخښنه شوی نه دی: د پښو لړۍ پرلپسی کره نه ده ټاکلی



خیره ۱۲

بنسټیز کونج:
د وړانګو p , q (نامنظمی) جوړې،
د ګډ پیلټکي O سره، د (p,q) ∢
یا (ABC) ∢ په نخښبوني

د A ∈ p , B ∈ q سره.
دلته O ککرټکی دی، p او q د کونج پښې دي.



خیره ۱۳

د پښو لړۍ پرلپسی کره ټاکلی ده:
لوریز بنسټیزکونج: د وړانګو p او q
منظمه جوړه د ګډ ټکی O سره د (p,q)∢
یا AOB ∢ په نخښبونی د A ∈ p او B ∈ q سره.

دلته هم لکه د مخه o ککرټکی، p لومړۍ پښه او q دویمه پښه ده. دا کونج په

شمیرپوهنیزه موخه مثبت لوریز دی

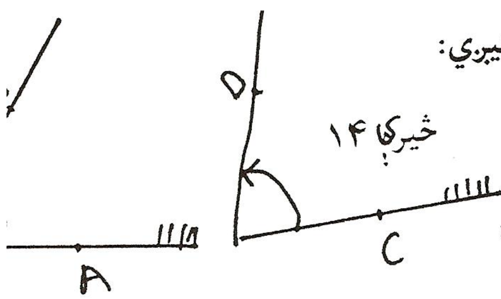
یادونه : هغه د ځرخون لور چی د ساعت ځرخیو مخامخ یا په بل ډول په څټ ځغلی

مثبتلوریز او هغه چې د ساعتځرخیو په لور ځغلي مفي لوریز ځرخون بلل کیږي.

دوه کو نجونه ټیك هلته او یا هلته او هلته مساویلوریز دي، که د هغو جنډې همغه لوریز یا مساوي لوریزې وي.

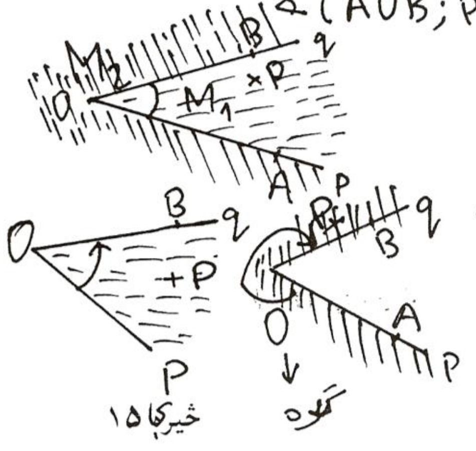
لکه په دې ځیره کی چی لیدل کیږي:

د کونج دننه په نخبنه شوی دی:



د کونجونو لړی پرلپسی یی کره نه ده ټاکل شوې. (بلد یا عادي) کو
بنستیز کونج هواره په دوه برخهډیریو M_1 او M_2 ویشي. په نخبنه برخ
بیلګي په توګه په ټکی P کی) د کونج دننه بلل کیږي(د کونجهوار

نخبنونه کي: ∡(p,q; p) ، ∡(AOB; P)
که دننه یی تش ډیری وي نو
دا کونج صفر کونج دی .



د پبنو لړی پرلپسی کره ټاکلی شوې ده
لوریز کونج: په ګنبونه ∡(p,q;p)
لوریز بنستیز کونج او دننه یی په
نخبنونه $p \neq q$، که وي، نو (p,q;p)
او (q,p;p) بدللوریز دي. $(p \neq q)$

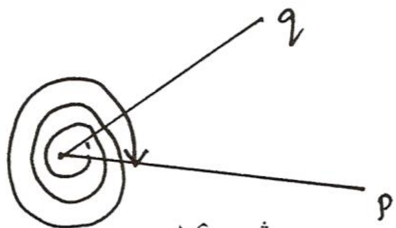
(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

که دلته هم که د کونجونو دننه تش وي،
نو کونج صفر کونج دی: $\measuredangle(p,q;p)=0°$

څرخونپروسه: څرخونکونج:

لوریز کونج، که د کونج په همغه لور د یوه طبیعی ګڼ یا پیدایښتي ګڼ په اندازه چی یوه ښنه یی ځاي په ځاي ده وڅرخول شي، نو د کونج لور کی تغیر نه راځي.



څیره ۱۶

ګراد (لاتاین Grad پل یا قدم)

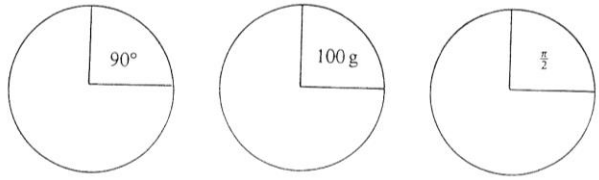
د کونج لویوالی په مختلفو ډولونو ورکول کیدی شي. د اندازې یوونې (یو یې : یوون) یا واحدونه(یو یې : واحد) لاس ته راځي، چی یو کونج - په یوه ګردۍ کی کښل شوې- په مساوي برخو یا سکتورونو وویشل شي.) سکتور او ګردۍ لپاره دې، د ګردۍ لوست ځاي وکتل شي (و رسره بلد یا مروج یی په ٍ360° مساوي برخو ویشنه ده)
پیژند : 1/360° د یوه پوره کونج 1° (په تورو :یوه درجه. ، لاتین یي gradus = پل قدم) بلل کیږي.
ګراد نور هم په 60° کونجدقیقو ویشل کیږي) 1°= 60’ او کونجدقیقه په 60" کونجثانیو(.(1’= 60’’

د» ګراد یا درجی« لاندې »زړه درجه«(زوړ ګراد) پوهیدل کیږي. دا د زاړه بابیلوني زاړه شپیتیز سیستم څخه دی. په تریګونومیتري یا کونجکچ کي کونج برسیره پردې په لینده کچ یا - اندازه پاندې هم اندازه کیږي او په ګیودازي (Geodäsie د اندازه کولو تخنیك، - پوهنه یا- علم (په نوي ګراد یا ګون (gon (اندازه کیږي چی دلته ګردۍ په ۴۰۰ برخو ویشل کیږي .دا په جبشمیري کی مودوس"GRAD" « دی .څیرې :

د ګردۍ څلورمی انځورونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیرې ۱۷



لینده کچRAD نوی ګراد GRAD زوړ ګراد DEG

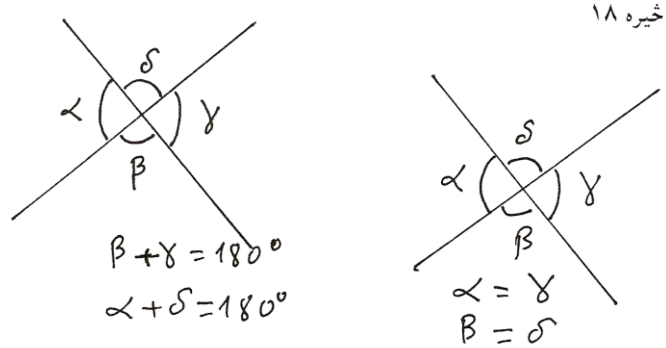
د کونج مثبت- او منفی – یا زیاتون - او کمونخښي د کونجوړونکی یاکونج تولیدیدونکي ځرخونلورې څخه لاس ته راځي. کیڼ ځرخون (د ساعت د ځرخی په څټ ځرخیدنه) مثبت- زیاتونمخنخښه مخ ته یعنی کیڼ لور ته لري او ښی ځرخون (د ساعت د ځرخولو په لور) منفی – یا کمونمخنخښه مخ ته لري یعني کیڼ لور ته لري. د دوه کونجونو مقایسی یا انډول یا پرتلی لپاره بیا یواځی مطلقه ارزښت مهم دی. مطلقه ارزښت سوچه یا خالص د ځاي ارزښت یا ځیفرارزښت دی، بي له مخنخښي. د مطلقه ارزښت همداسی ځاي ارزښت لپاره دې ځما د شمیرپوهنی بنسټیزکتاب وکتل شي٠(په نړیوال جال کې به هم راشي)

بیلګه : $5 = |-5|$, $3 = |3|$دوه کرښی یو د بل سره څلور غوڅکونجونه جوړوي، چی په تولیزه یا عمومي ډول یی جوړه سره مختلفی لوي وي. د بیلګې په توګه که له غوڅکونج غړیړو نو موخه به مو وړوکی کونج وي٠

پیژند :که دوه ناپانکرښی یو بل سره په یو ټکی کي پرېکړي، نو څنګ په څنګ کونجونو ته ګاونډي کونجونه واي، چی دوي یوه پښه ګډه لري او دواړه کونجونه 180° لري (د درجې نخښه کله کله کیڼ لور ته لیکل شوې، خو دا په پوهېدنه کې کومې ستونځې نه رامخ ته کوي) ٠

کونجونه چی ککرې یي سره نښتی یا په بل ډول ککره په ککره وي، هغو ته ککرېکونجونه ویل کیږي. ککریکونجونه مساوي لوي دي، دوي یو ګډککریټکی لري او پښی یی یوه یوه په ګډو کرښو پرتی دي .

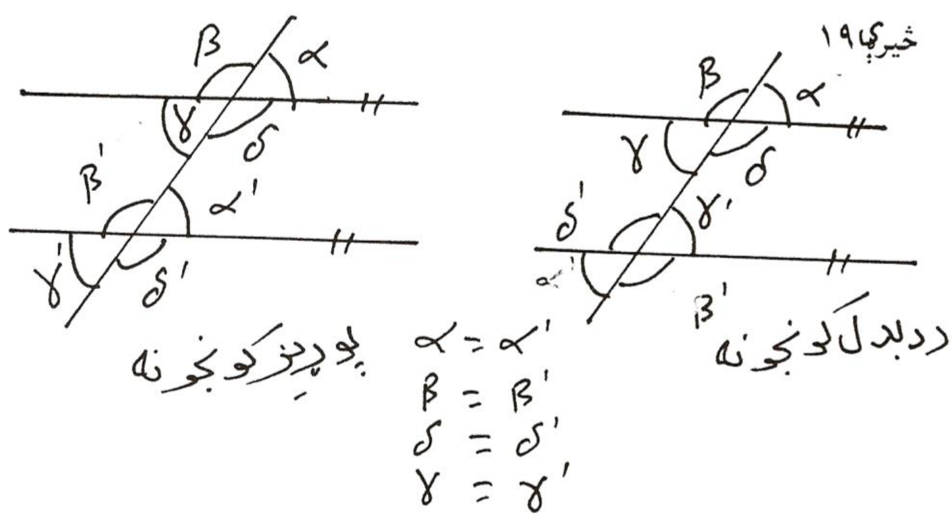
ځیره ۱۸



(c) ketabton.com: The Digital Library

خيره‌کونجونه چی ځانونه 180° ته پوره کوي سوپليمينت (Supplementwinkel)
بلل کيږي او کونجونه چی ځانونه 90° درجو ته پوره کوي کومپليمينتکونجونه
(Komplementwinkel)بلل کيږي. دې دواړو کونجونو ته تر يوه نامه لاندې چې
راشي پوره کوونکی کونجونه وايي .که دوه غبرگی کرښی g اوh د يوې بلی ناپايکرښي k
له خوا غوڅی شي، نو څلور دننه پريکونجونه منځ ته راځي ۰ دوي د g او h تر منځ،
,او د k په مختلفو خواوو(او څلور دباندې پريکونجونه)نه د غبرگکرښو g او hترمنځ،
بلکه له دوي دباندې(د k په يوه لور يو دباندنی او يو دننه غوڅ- يا پريکونجونه
پوړيزکونجونه بلل کيږي، دوه دننني يا دوه دباندنی غوڅ- يا پريکونجونه چی د k په بيلو
لورو پراته وي ردبدلکونجونه بلل کيږي(څېرې پورته ورکړ شوي دي) ۰

جمله: پوړيز- او رد بدل کونجونه په غوڅغبرگکرښو(غبرگي کرښي، چې له دې کرښي
غوڅي شوي دي) کې سره برابر دي



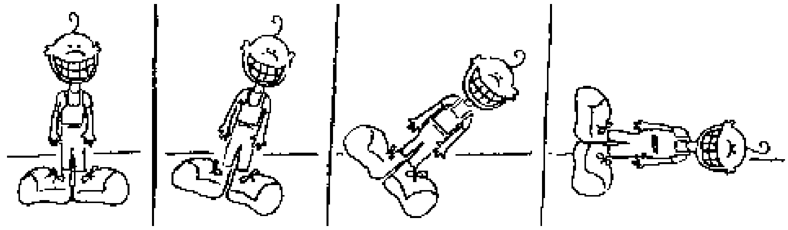
کونج کلمه

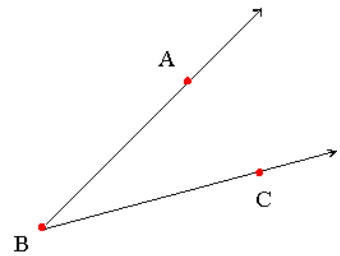
What is an Angleکونج څه شی دی ?

يادونه: لاندې برخه څه تکرار لري، خو بيا بيا راوړنه ښه زده کړه ځان پسي لري۰

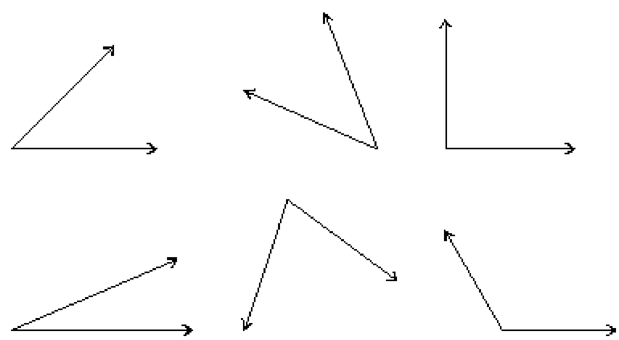
دوه وړانګی، چې يو پای لري او سره غوڅي کړي کونج جوړوي۰ وړانګی د کونج پښي
يا اړخونه بلل کړي او هغه ټکی، چې هلته کرښی غوڅوي ککرټکی يې بولو۰

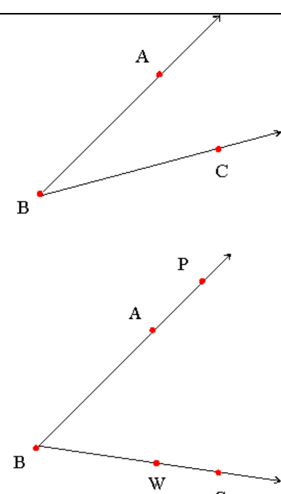
(c) ketabton.com: The Digital Library





Example: دلته د کونجونو ځنې بیلګی راوړو .





که توري د کونج په خوله کې راشي بنه به وي، خودا هم د لیکنې ستونځې دي، چې زه ورسره لاس پهکریوان یم٠ ∠ABC کونجونه داسې بنایو

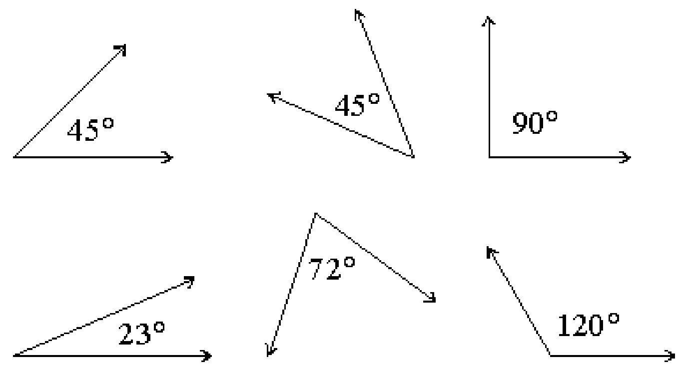
Example: د همغه کونجلپاره بیل بیل نومونه لرودی شو لکه

WBA ∠ CBPd∠ ,PBW∠ ,PBC∠ ,

(c) ketabton.com: The Digital Library

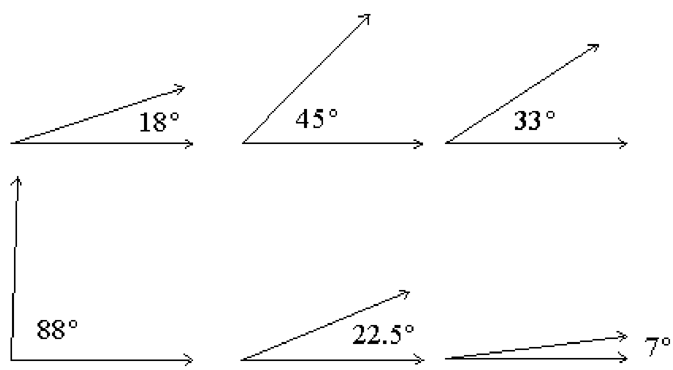
Degrees: د کونج کچونی یوون یا واحد یا یووالی: کونج په درجه کچیږي

Example په لاندې کې ځني بیلګې :



تیره کونج ، چې د صفر او ۹۰ درجو ترمنځ وي Angles Acute

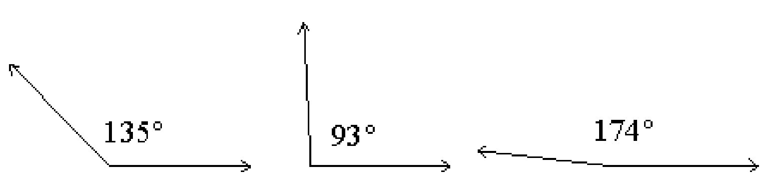
Example لاندې کونجونه تیره دي .



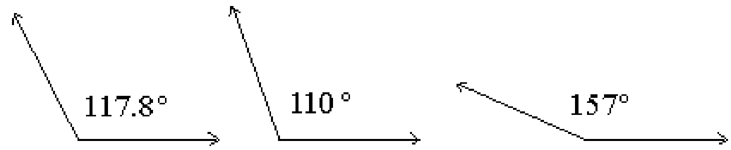
پخ کونجونه Obtuse Angles

پخ کونجونه ، حې د ۹۰ درجو او ۱۸۰ درجو ترمنځ وي پخ کونجونه بلل کیږي.

Example لاندې کونجونه ټولپخ کونجونه دي:

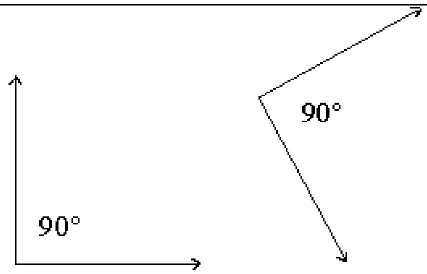


(c) ketabton.com: The Digital Library

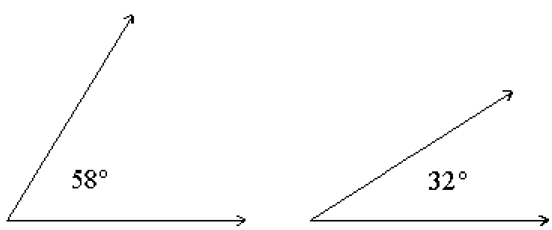


Right Anglesولاړکونج: هغه کونج، چي ۹۰ درجي وي

لاندې دواړه کونجونه ولاړ کونجونه دي:Example

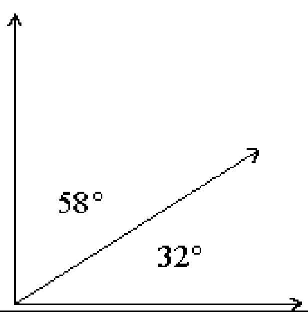


Complementary Anglesکمپلیمنت کونجونه: هغه کونجونه، چي یو بل و ۹۰ درجو ته پوره کوي٠کمپلیمنچکونجونه بلل کیږي٠ یو کونج د بل کونج کمپلیمنت بلل کیږي



بیلګهExample: دا مخامخ دوه کونجونه کمپلیمنت کونجونه دي

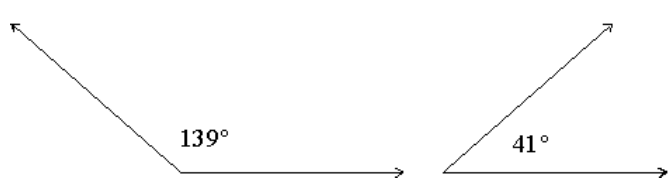
دوه کونجونه، چي داسي سره یوځای شي،چي یو ولاړ کونج جوړ کړي،نو دا کونجونه یو له بل سره کمپلیمنت دي!



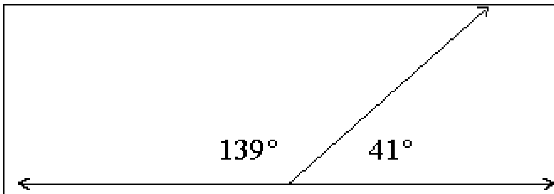
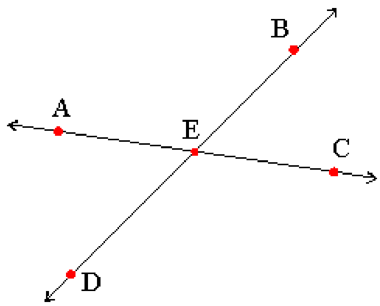
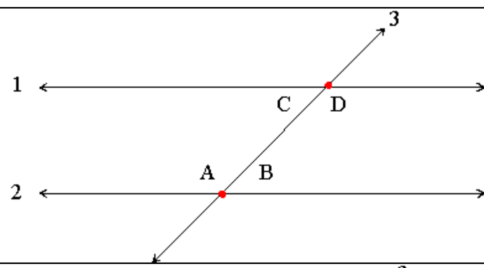
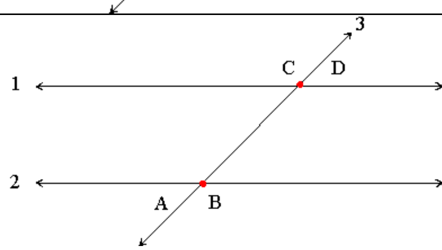
Supplementary Anglesسوپلیمنت کونجونه :

هغه کونجونه، چي ۱۸۰ درجکو ته سره پوره کوي سوپلیمنت کونجونه بلل کیږي

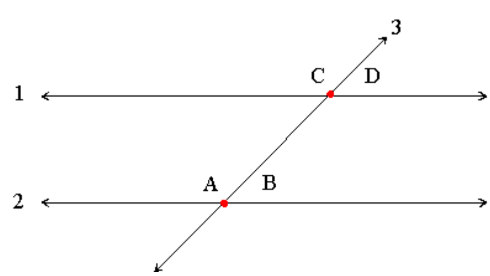
بیلګه Example: لاندې دوه کونجونه سوپلیمنت دي



(c) ketabton.com: The Digital Library

  	داسي دوه سره ترلي کونجونه، چي ځانونه ۱۸۰ درجو ته پوره کړي سوپليمنت کونجونه جوړوي Vertical Anglesکړک په کړ کوجونه: چي دوه کرښي داسي سره غوڅي کړي، لکۀ په لاندي ځيره او کونجونه، همغه ککره ولري ککر په ککره کونجونه بلل کيږي او سره برابر ده , AEB او DEC کونجونه او همداسي BEC او AEDککر په ککره کونجونه دي.
 	Alternate Interior Anglesرد بدل دننه کونجونه : په لاندي کي کونجونه Aاو Dهمداسي B او C ردبدل دننني کونجونه او سره برابر دي . A اوB ، C او D ګاونډي کونجوه دي.
 	Alternate Exterior Angles ردبدل دباندي کونجونه : په لاندي کي کونجونه B او C ردبدل همداسي A او D بدل - يا ردبدل دباندني کونجونه او سره برابر دي

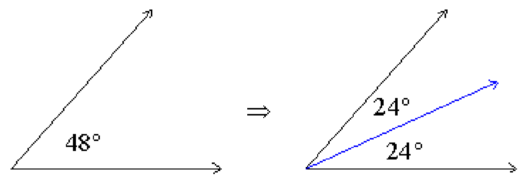
پوړيز کونجونه Corresponding Angles دا کونجونه A او C همداسي D او Bپوړيز کونجونه دي او يو له بل سره برابر دي



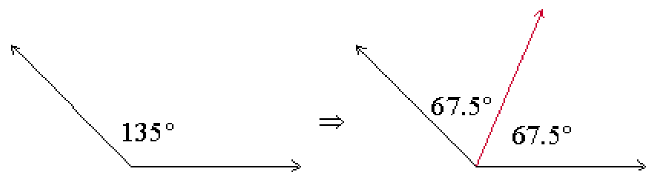
(c) ketabton.com: The Digital Library

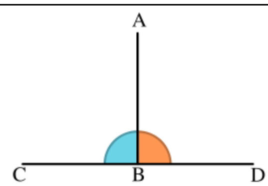
Angle Bisectorکونجنیمی : هغه کرښه، چې کونجونه نیموي کونجنیمی یې بولو

بیلګه Example: د بنی کونج شنه کرښه ، د کین کونج نیمی ده



په ښي کونج کې سره کرښه د کیڼ کونج نیمی ده .



	Orthogonal or Perpendicular Lines ولاړې کرښې: هغه کرښې، چې یو په بل نیغې ولاړې وي پرپینډکیولار نومیږي٠(زما وړاندیز: نیغې ولاړې کرښې)

نښلونه:

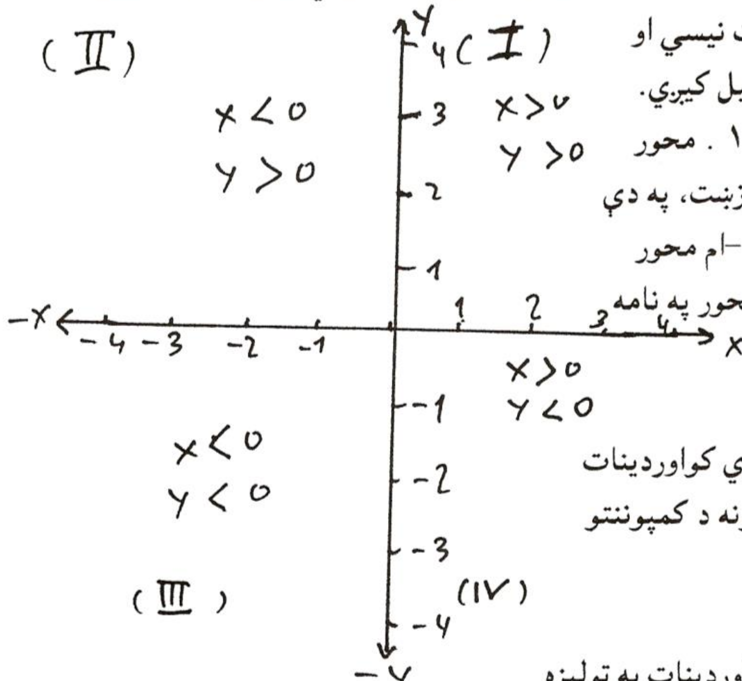
کواوردینات سیستم

یادونه: کواوردینات سیستم څخه څموږ موخه پروتولاړسیستم دی. دا په ادبیاتو کې په همدسې یادیږي. ما دا دواړه ترمینولوژي کارولې، هیله ده چې ستونځې به پیښې نه کړي.

د شمیرپوهنې او همدا ډول د تخنیك په ډیرو څانګو کې د کواوردینات سیستم ډیر مهم رول لوبوي. په کارتیزي کواوردینات سیستم کې د هواري هر ټکي P د خپلو دواړو کواوردیناتو(x,y) ورکولوسره کره یا ټیك ورکړ شوی دی. لمړی کمپوننت یا ابسخیز (Abszisse) د x –ارزښت یا پروت ارزښت او دوهم کمپوننت یا اوردینات

(c) ketabton.com: The Digital Library

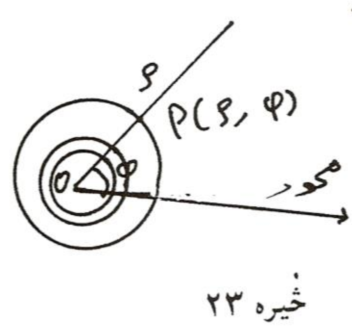
(Ordinate) د y–ارزښت بلل کیږي یا ولاړارزښت. کارتیزي کواوردینات سیستم هواره د دوه یو په بل نیغ ولاړ محورونو(لنډ: ولاړ محورونو) له لارې په څلورو برخوویشي (څلورمی Quadranten) د کوادرانتو نومره بندي یا نمره کول د ساعت څرخیدلو په څټ صورت نیسي او د ښي پورته لور څخه پیل کیږي. پروتنیغ پروت محور د ۱ . محور یا x–محور یا پروت ارزښت، په دې لوتنیغ ولاړ محور د ۲ –ام محور یا y– محوراو یا ولاړمحور په نامه یادیږي.



څیره ۲۰ : د کارتیزي کواوردینات سیستم څلور کوادرانتونه د کمپوننتو له مخنخښي سره.

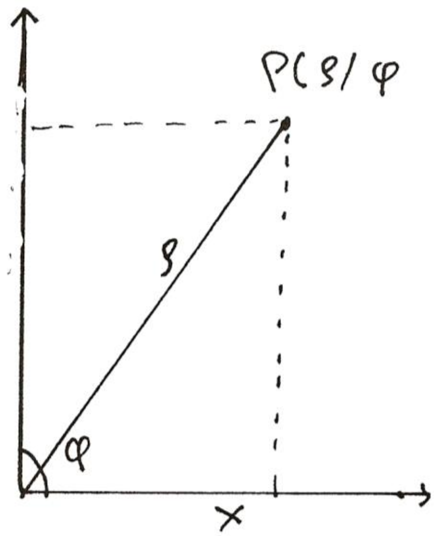
د یوه ټکي P(x,y) کواوردینات په ټولیزه توګه اجازه نه لري چې بدل شي، ځکه چې دا کپموننتونه تنظیم شوې یا منظمه جوړه ده. د ځل یا ضرب لمړنی کپموننت د y– محور څخه فاصله ټاکي دوم کپموننت د x– محور څخه. که لمړی کمپوننت منفي وي، نو ټکی د y–محور کینې لور ته

د دریګوډیز ناخپلواکو (تریګونومتریکي مثلاثاتي فنکشنونو) (چې وروسته راغلی) او همدارنګه دپیتاګوراس له بنسټیزی جملی شمیراړونی (څیره ۲۳) کولی شو چې د کارتیزي کواوردینات څخه و پولار کواوردینات ته راشو او سرچپه هم.



څیره ۲۳

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۴

جمله : د پولارکواوردینات بدلون یا
ترانسفورمیشن (Transformation
لاتین : **شکل** اړول یا بدلول) و
کارتیزي کواوردینات ته

$$x = \rho . \cos \varphi$$
$$y = \rho . \sin \varphi$$

د کارتیزي کواوردینات بدلون یا
ترانسفورمیشن و پولارکواوردینات ته

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

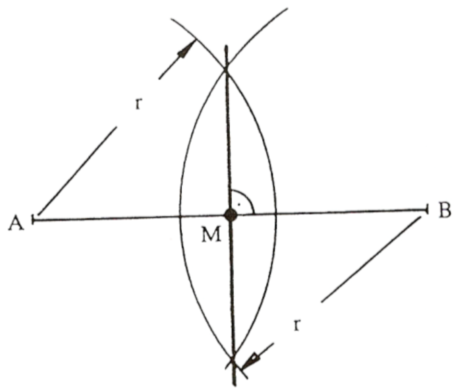
$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

هندسی بنسټیز جوړښتونه:

زه دلته داموضوع اوږده نه څیړم، خو دومره غواړم چي په ګوته کړم، چي تراوسه مو یو څه د هندسی ځنی بنسټیزې کلیمي تشریح کړې او دلته دا غواړم وښایم، چی څنګه ځنی بسټیز شکلونه کښل کیږي، په هغه صورت کی چی له موږ سره ګردونی یا څرخی(څیرکل یا پرکال او که پرکار مو ورته وایه) او کرښی یا ختکش وي یا همداسی کونجکچ د مناسبو ویشنو سره موجود وي. ددې لپاره چی ځني ستونځی مو له منځه لرې کړې وي باید له دې څیرو یوه لیدید ونکی څیره ولروچی دا د دې څیرو په کښلو یا رسم کولو ممکن کیدی شي. دا د عملي اندازې پرابلومونو حل یا ستنځوبي کي هم مرسته کوي، که د اندازي یوونونه (واحدونه) ونه لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



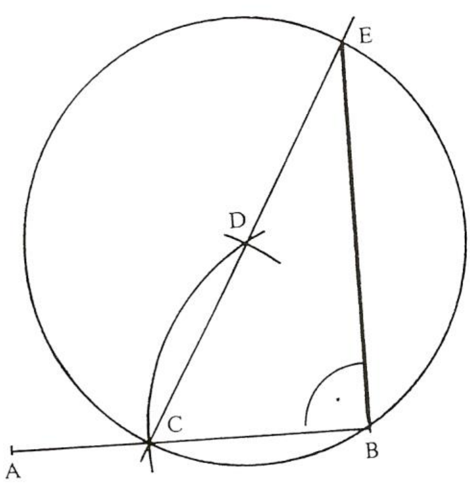
خیره ۲۵

۱ – د AB کرښی نیمول او

۲ – د منځ ولاړکرښي کښل

د A او B په هر ټکي یوه ګردی د وړانګی $r > (1/2).|AB|$ سره ووهی (سیومتري دوه ګردی ځیرې) د دواړو ټکو تړلکرښه په غوڅټکی M کی په کرښه AB منځولاړکرښه ده او دا کرښه په M کی نیموي.

۳ – د یوې کرښی په سرټکي کی د ولاړکرښی جوړول (یا کښل). په B یوه ګردیلینده ووهی د وړانګی $r < |AB|$ سره، چی AB په C کی پرې کړي، وریسي بیا په C یوه ګردیلینده په همغه وړانګه ووهی چی د مخه وهل شوې ګردیلینده په D کی پرې کړي. D د دریمی ګردی منځ ټکی دی د وړانګی $r = CD$

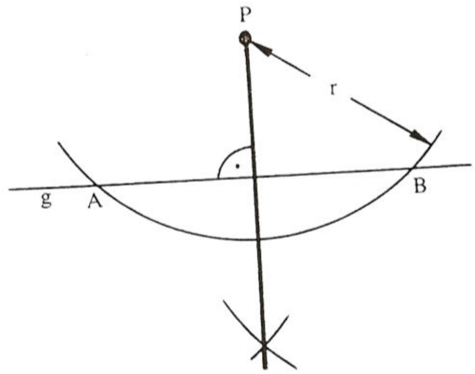


ثیره ۲۶ (۳ - یو دې اړ منډ)

سره. چی CD غزولشوې تر ګردی په E کی پرې کوي. E نو په B نیغه ولاړه ده. (تالس ګردی دې وکتل شي)

۴ – د ټکي P څخه په کرښه g باندې یوه نیغه ولاړکرښه واچوی ($P \notin g$). په P کی په وړانګه r یوه ګردی ووهی، چی هغه د g له فاصلی(واټن) لوي وي او کرښه g په A او B کی پرې کړي. اوس نو لکه په (۲) کی الترناتیو: لکه د (۳) لاندې په کرښي او هندسي دریګوډي.

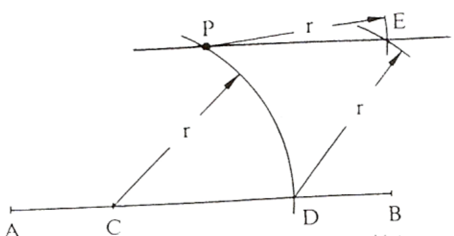
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۷

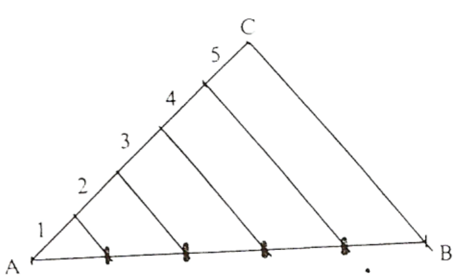
۵ – د AB کرښی سره دېکي $P \notin AB$ یوه غبرګکرښه جوړول(کښل): د خوښي په یوه ټکي $C \in AB$ د وړانګی $r = |CP|$ یوه ګردی ووهی چی کرښه AB په D کی پرې کړي، بیا نو په D او P همغه لینده ووهی چی یو بل سره د E په ټکی کی غو ښوي. دا د PE کرښه د AB کرښی سره غبرګه ده. (دا د روتی نومي څلورګوټي جوړول دې).

الترناتیو : لکه په(۴) کی په ټکي P کی ولاړه کرښه s و AB باندې او بیا همداسی نیغ – یا ولاړکرښه په s د P ټکی کی.



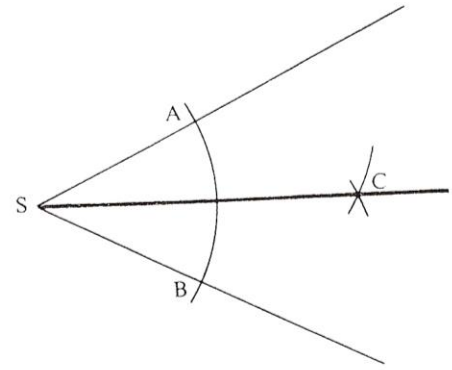
خیره ۲۸

۶ – د یوې کرښی AB ویشل په n مساوي برخو(د بیلګي په توګه ۵) د A ټکی څخه یوه د خوښی وړانګه وغزوی. په دې کرښه بیا n – ځله (دلته ۵ ځله) د خوښي اوږدې کرښی ووهی. اخرنی ټکی C له B سره وتړی او بیا له هر ټکي د BC مرستکرښی سره غبرګی کرښی وکاږی، دا غبرګی کرښی د AB کرښه په (۵) مساوي برخو ویشي.



خیره ۲۹

(c) ketabton.com: The Digital Library



ضیره ۳۲

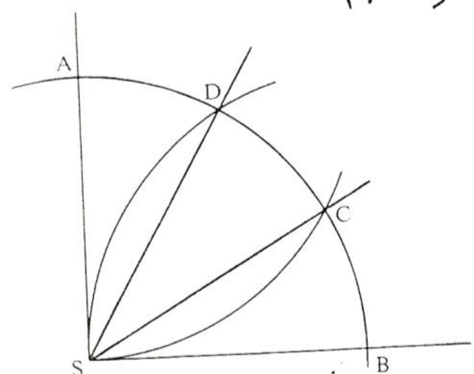
۷ – د یوه کونج نیمول

په ککره S یوه د خوښی لینده ووهه چی د کونج پښی په A او B کی پرې کړي، بیا په A او B په همغه وړانګه یو د خوښی ګردیلینده ووهی چی یو بل سره په C کي پرې کړي، پریتړکی د S سره وتړی.

۸ – یو ولاړګوټ‌ی په درې مساوي برخو هره °30 وویشی

په ککره S باندې یوه د خوښی ګردیلینده وباسی چی دواړه پښی په او B کي پری یا غوڅی کړي او له

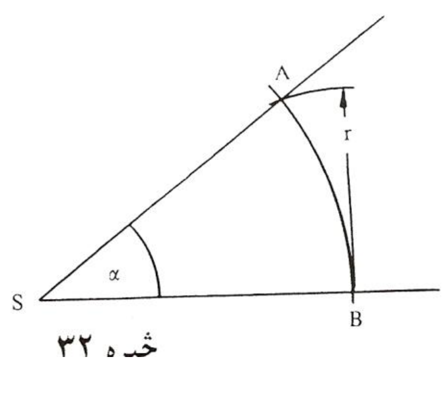
.



خیره ۳۱

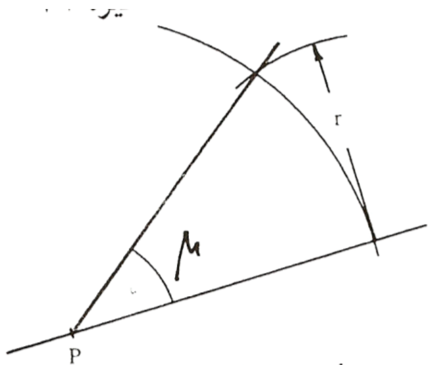
دې وروسته د څرښوونکي په همدې بیرته والي یا وازون د A او B ټکو څخه ګردیلیندی وکاږی، اوس د S څخه د C او D په لور وړانګی وکاږی، دا دوه وړانګی دا ولاړ– یا نیغکونج درې مساوي ټوټی کوي یا په درې برابو برخو ویشي.

یادونه : هر د خوښی کونج په څرخی او کرښي باندې په درې مساوي برخو نه

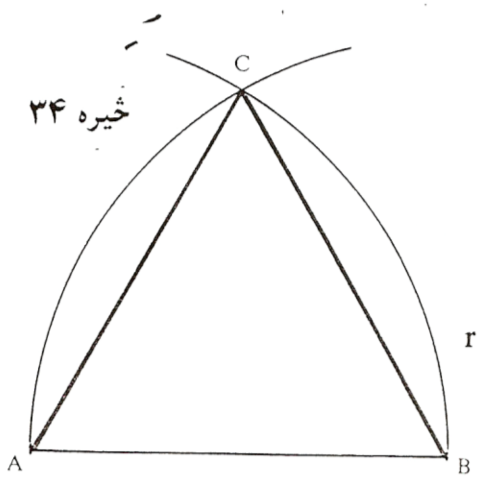


څـ ه ۳۲

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۳۳



ثیره ۳۴

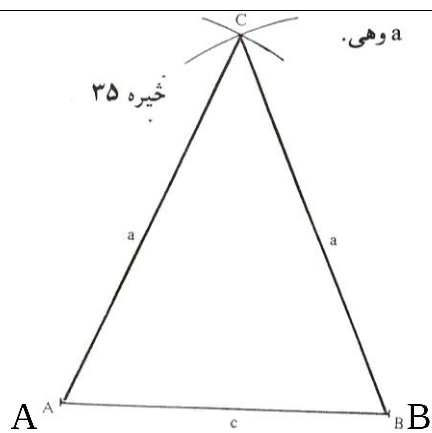
ویشل کیږي، ددې لپاره بیا الجبري
مواد په کار دي.

۹ – د μ کونج په یوه ټکي P

وغزوی، د ورکړشوي کو نج په
ککره S باندې یو ګردیلینده
ووهي چی پښی یی په A او B
کي پرې کړي، بیا نو په همغه
ګردی ووهی چی څرخی د |AB|
په اندازه وي. اوس نو دا پریټکی
د P سره وتړی.

۱۰ – د مساوي اړخیز درېګوډي

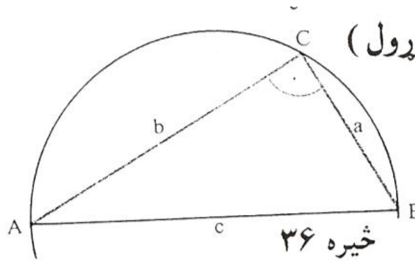
کښل: په A او B باندې یوه
ګردیلینده ووهی چی وړانګه یی $r = |AB|$
وي ، چی یو بل په ټکي C کی پرې کړي.



بیانو C د A او B سره ونښلوو، دا لاس ته
راغلی درېګوډی مساوي اړخونه لري. په
همدې ډول مساوي پښیز درېګوډی
انځوریږي، د ورکړشوي بسټ AB=c
سره. په A او B یوه یوه پښه وه,

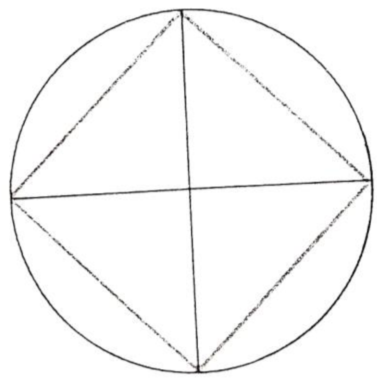
(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – د ولاړکونجيز درېګوډي کښل(جوړول)



هر درېګوډی چې اوږد اړخ يې د يوه ګردي قطر وي، ولاړکونجيز درېګوډی دی.
(د تالس (Thales) جمله ورودسته راځي

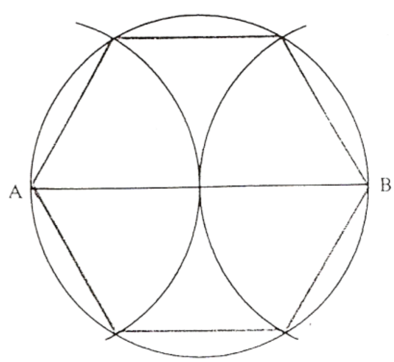
ښيره ۳۶



ښيره ۳۷

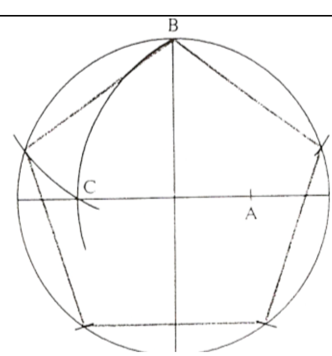
۱۲ – په ګردی کې د يوې مربع کښل

د ګردی په منځټکي باندې لکه په (۲) کې دوه يو په بل ولاړ نيمي (قطرونه) وکاږی او هغه ټکي چې ګردی پرې کړی سره ونښلوی.



۱۳ – په يوې ورکړ شوې ګردی کې دمنظم پنځه ګوډی کښل: د ګردی وړانګه په A کې نيمه کړی ، له A څخه کرښه AB تر C وکاږی، |BC| د پنځه ګوډي د اړخ اوږدوالی دی.
(ښيره ۳۹)

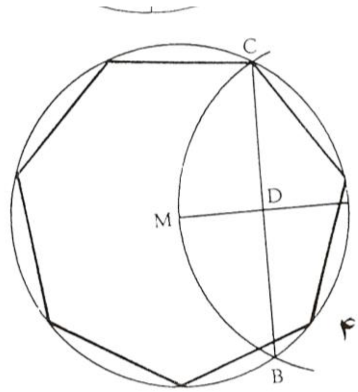
ښيره ۳۸

	۱۴ – په ګرۍ کې د منظمم درېګوډي کښل: د نيمي يا قطر اخرني ټکو څخه د ګردۍ وړا نګې په اندازه ګردۍ لينده ووهۍ. د دې ټکو چې ګردۍ پرې کوييوځای کول منظم شپږګوډۍ جوړوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۵ – د مساوي اوه ګوټي

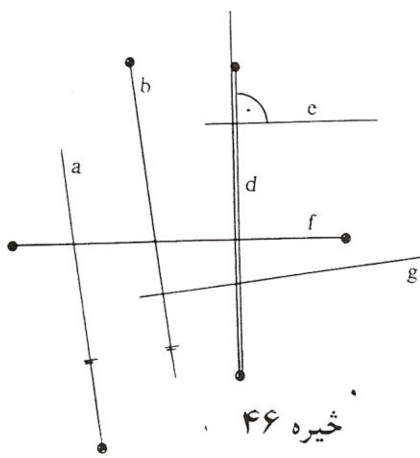
جوړول یا کښل:



خیره ۴۰

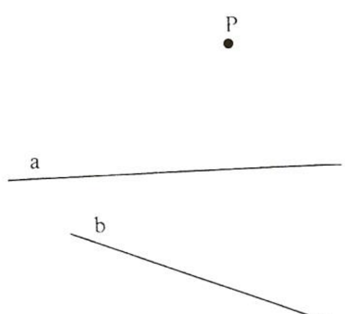
د ورکړ شوې ګردي دنیمي اخر ټکی A څخه دAM وړانګه په اندازه ګردیلینده ووهی چی ګردی په B او C کي پرې کوي. د BC کرښه د AM وړانګه په D کي په ولاړکونجي غوڅوي، پس |BD| د مساوي اوه ګوټیز د اړخ اوږدوالی دی.

تمرینونه



خیره ۴۶

۱ – په ډیري ژبه باندې یی افاده کړی:
الف – ټکی A په کرښه g پروت دی.
ب – کرښه g د ټکو A او B ترمنځ څغلي
پ – کرښه AB په ناپای کرښه g پرته ده
ت – ټکی C په کرښه . چی له A وبه B ته څغلي، پروت دی.
۲ – په خیره ۴۶ کی څومره ناپاي کرښی، کرښی او وړانګي پرتی دي؟
۳ – کومی کرښی غبرګي، او کومی یو په بل ولاړې پرتی دي؟ دا په سمبولو وکاروی (خیره ۴۶)



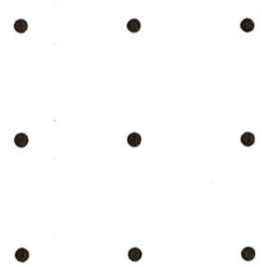
خیره ۴۷

۴ – هرې کرښي ته جوړ کړی :
الف – یوه ولاړه
ب – په ورکړشوي ټکي کی یوه غبرګه (خیره ۴۸)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – د اسمان کومی لوري یو په بل ولاړې دي؟

۶ – داسی کرښه لار (چی یو بل سره تړلي وي) وباسی، چی له ټولو په څیره ۴۹ کی ورکړ شوو ۹ ټکو تیریږي. دا کرښو تلنه یا کرښو



څیره ۴۸

خوزیدنه یا تلنه (حرکت)

د یوې هوارې په خپل ځان یویواځنی څیرونه تلنه یا خوزیدنه (حرکت) بلل کیږي او په φ ښوول کیږي، که چیرې دا لاندې خویونه ولري:

ا – د یوې هندسي څیرې (کرښی، هوارې ، وړانګی ناپایکرښی، نیمهوارې) څیره ډیري لاندې، یوه هغه هندسي څیره پوهیږو، د کومی چی په غوښتونکی څیره ډیري ژیکرښی پیلټکي ، پایټکي په ژیکرښی ، پیلټکي ، پایټکي باندې څیره شي.

۲ – که f_1 او f_2 دوه جنډې وي ، ~~نو ټیك یوه تلنه شته~~ نو ټیك یوه تلنهφ شته، د $\varphi(f_1) = f_2$ سره.

۳ – که A او B دوه په خوښه ټکي وي، نو یوه تلنهφ شته د $\varphi(A)=B$ او $\varphi(B)=A$ سره

۴ – که p او q دوه وړانګي وي ، د ګډ پیلټکي سره ، نو یوه تلنه φ شته د $\varphi(p)=q$ او $\varphi(q)=p$ سره.

۵ – د تلنو یا خوزیدنو ډیری، د یو په بل پسی څیرونو ته یو ګروپ جوړوي (د الجبر برخه یا د لیکو[illegible] الجر کتاب دې وکتل شي)

د تلنویا خوزیدنو (حرکت) ځانګړي ډولونه دي :

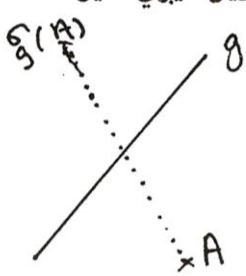
– راکښنه ، چی د τ سره یی ښایو
– ایینونه یا هندارونه، چی د σ سره ښایو
– څرخون چی د δ سره یی ښایو
که یو ټکی همداسی یوه کرښه ، چی په خپل ځان څیره شي ، نودا ودې څیرونی ته

یا نسبت ودې څیرونی ته فیکسټکی ځای په ځای ټکی او همداسی فیکس کرښه یا ځای په ځای کرښه بلل کیږي.
راکښنه τ یوه تلنه یا خوزیدنه ده د لاندې ځانګړو خویونو سره

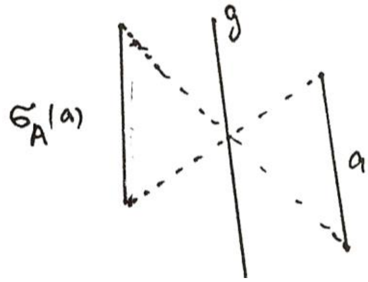
تلنه ۱ (V) : د یوې په خوښه کرښی څیره و هغې کرښی ته غبرګه کرښه ده.
تلنه ۲ (V) : که څیرونه کټمټ څیرونه نه وي، نو هر څیره ټکی د خپل اصل ټکي څخه توپیر لري .

ایینونه یا هندارونه . د ایینونی دوه ډولونه موجود دي:

لمړی : ایینونه σ_g په یوه کرښه g ، چی کرښ ایینونه ورته ویل کیږي، یوه تلنه ده، د لاندې خویونو سره



س ۱ : دکرښی g هر ټکی فیکسټکی یا په خپلځان څیره ټکی دی ، له دې سره کرښه یوه فکسکرښه ده.
س ۲ : دواړه د کرښی g وازې هوارې یو له بل سره بدلیدلی شي.
څیره ۵۲
دوم: ایینونه σ_A په په یوه ټکی ، چی ټکی ایینونه بلل کیږي، یوه تلنه ده ، د لاندې خویونو سره : (څیره ۵۲)

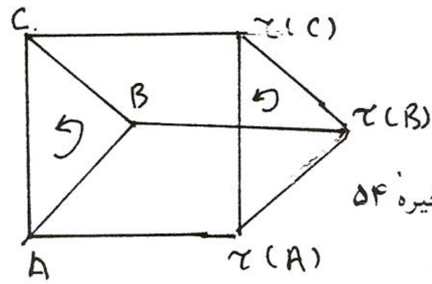


پ ۱ : هره کرښه چی له A تیریږي په خپل ځان داسی څیره کیږي، چی دواړه له A پیداشوې وړانګي یو له بل سره بدلی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ا خیره ۵۳

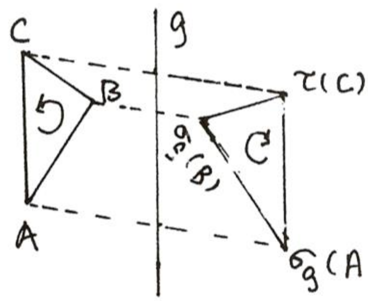
پ ۲ : هره کرښه و دې کرښی ته غبرگی کرښی باندې خیره کیږي. (خیره ۵۴)



خیره ۵۴

لوریزه تلنه یا خوزیدنه:

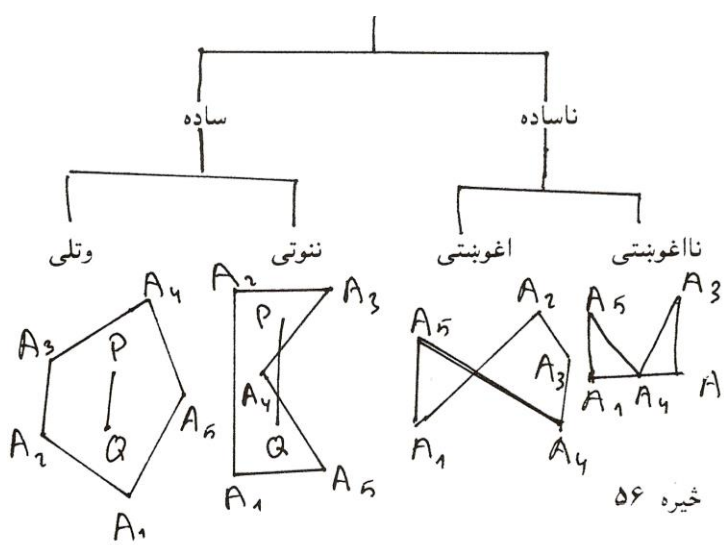
یوه تلنه φ همغه لوریزه ده ، تیک هلته یا هلته او هلته، کله چی هره خیره F د φ(F) سره همغه لور ولري یا مساوي لوریز وي.



یوه تلنه φ همغه لوریز نه یا نامساویلوریز ده، تیک هلته یا هلته او هلته، کله چی هره خیره F و φ(F) ته مخامخ یا په څټ لوریز وي.

خیره ۵۵

ډېرگوډیز (د بیلگې په توگه پنځه گوډیز)

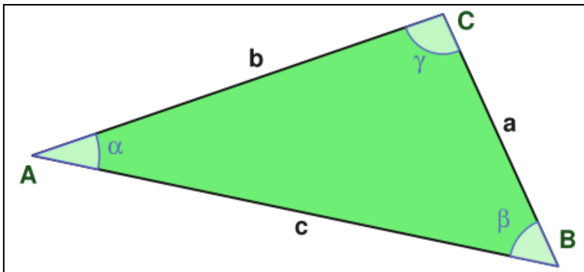


خیره ۵۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو وتلی n– ګوډی منظم بلل کیږي، که د اړخونو اوږدوالی یی برابر وي او دننه کونجنونه یی مساوي یا براُبر لوي وي.

درېګوډی (درېګوټی، مثلث)

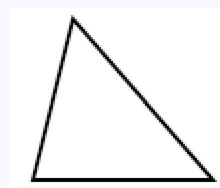
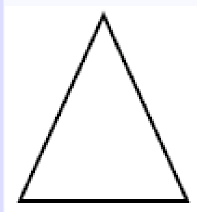
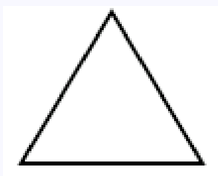
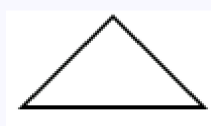
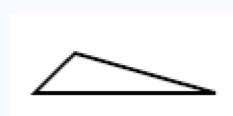
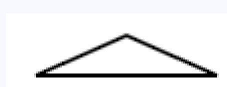
دا چي د دوه ټکو ترمنځ تل یواځی یوه کرښه انځوریدلی شي، نو د یوه شکل لپاره کم له کمه درې ټکی په کار دي، په داسی ډول چی دا ټکي په یوه کرښه نه وي پراته. دا اوس هم په همغه هواره پراته دي. که دا ټکی د ځیرې د ګوډټکو په ځیر ونیول شي، نو دریګوډی لا سته راځي٠ کرښې، چې درېګوډی په کې راګیر دی یا درېګوډی جوړوي د درېکوډي اړخونه یا هغه عربي یې ضلع بولو٠	 ګورو، چې کوجونه الفا ، بیتا او ګاما دي او اړخونه a,b او c دي. په ځیره کې ګوډونه په لویو تورو سره په نخښنه کیږي یانی A,B او C ګوډونه دي٠

ولې درېګوډی ؟

موږ وایو، چې سپین مې د برګ د کور د ګوډ سره ولید، یا د برګ د پټي یو ګوډ اوبو وړی، په یوه ځیره کې یا یوه جوړښت کې دننه د دوه کرښو غوځی کونج بولو او دباندنی ګوډ ٠ کندهاریان وایی ګوټ٠ دا پروا نه لري، که ځوک یې ګوډ ، ګوټ او که کونج بولی یانی درېګوډی، درېګوټی او که درېکونجی بولي ، خو ماته یې درېګوډی نوم ښه برېښي٠ پام دې وي، چې له ما ځخه دا نوم درېګوډی نومول شوی، دا ځیره ده نارینه نه ده، نو له دې امله به ښه وي، که درېګوډی وبللشي، نوره یې د ګرانو هیوادوالو او د ځککچپوهنې مینه والو خوښه٠

د درېګوډیو مختلف ډولونه یا تیوپونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	نامنظم کونجونه او اړخونه يې برابر نه دي.	برابرپښیز دوه اړخونه او دوه کونجونه يې برابردي .	برابراړخیز ټول اړخونه او کونجونه يې برابردي .
تیره کونجیز- درېګوډي **ټول کونجونه يې تيره دي ياني له ۹۰ درجو کوچني دي <90°.**			
ولاړکونجیز درېګوډی، یو کونج يې ولاړکونج دی			
پڅکونجیز درېګوډی **یو کونج يې پڅ دی یاني له ۹۰ درجې لوي دی.(>90°)**			

د کونجونو الفا ، بیتا او ګاما (α,β,γ) او اړخونو a,b,cله مخې د درېګوډیو مختلف تیوپونه سره بیلیدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پورته څیرو کې پورته ښی لور ته درېګوډي همغه رسم شوي، خو دا يو دې د بل سره برابر پام کې ونه نیول شي، یانی د یوه درېګوډي پښی دی نابرابرې وي٠ تیره کونجیز درېګوډی، چې دریواړه کونجونه توپیر لري، درې برابرکونجونه لري ، دوه کوجونه يې سره برابر وي، ولاړکونیز، پڅکونجیز، دا هم د برابرو او نا برابرو کونجونو سره ٠ هغه درېګوډی، چې دوه کوجونه يې سره برابر دي، اړخونه يې هم برابر دي او د برابرو کونجونو په مخامخ برابر اړخونه پراته دي٠ دا لاندي ښه څیړل شوي دي، د څیرو سرهړ.

د درېګوډي يو له بل بيل ډولونه

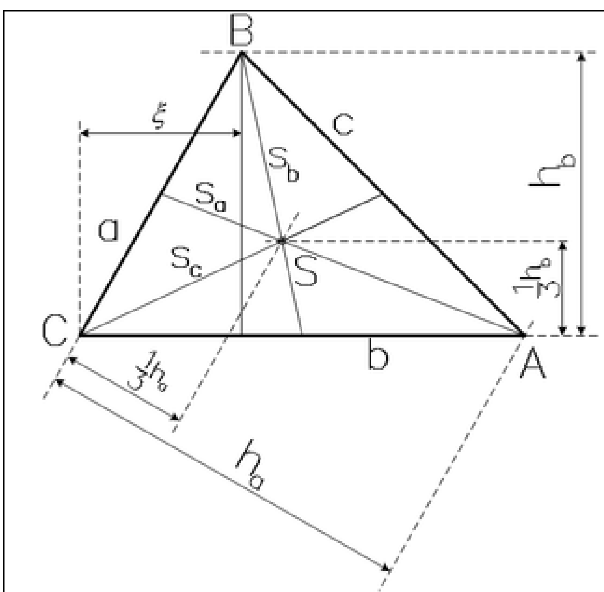
د دريګوډي د پام وړ ټکی

- د دريګوډي هر درې يوډوله کرښی ، يو بل په يوه ټکی کی پرې کوي

- اړخنيمی په S کی

- د کونجنيمی يا نيموونکی په W کی-

- اړخنيمی د منځ ولاړې (کرښی) په M کی: دا هغه کرښه ده، چې د دېګوډی د اړخ په منځ ولاړه ده، چې موږ يې منځولاړه بولو

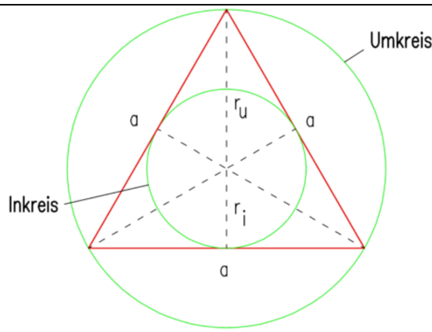
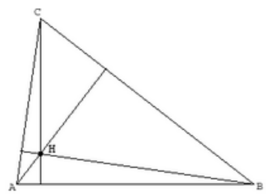
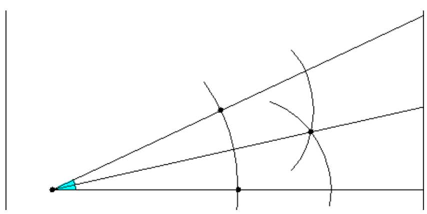
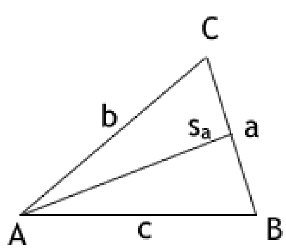
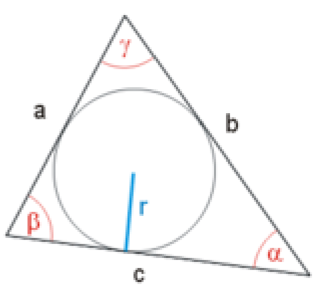
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>-. جګکرښی یا جګي په H کی

دا ټکی د يوه دريګوډي د پام وړ ټکی دي - :

له دوي څخه S دروندټکی(د ثقلمرکز)

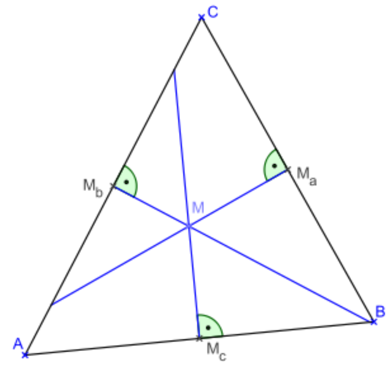
له دوي څخه W د دننه ګردئ منځ ټکوړانګه او M د دباندې یا راګردې ګردئ یا نوره هم ښه خورا ښه او مناسبه نوم يې چاپيريالګردئ منځ ټکی دئ (وړانګه) r ، د چاپيريالګردئ منځټکی</td>
</tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library

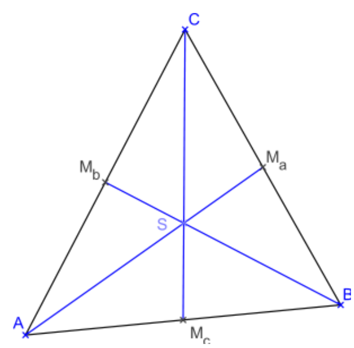
دلته هځيرو، چې ځيرې راوړو، د ځيرني سره يي : اي ىدرکيدنوخ Inkrei Umkreis دهراتاو-يا په راتاوکردی	
په لاندې ځيره کې جګې کرښې وينو. دا هغه کرښې دج، چې را په ګوته کوي، چې اړخ د کونې سره کوم جګى لري او دا کر په يوه ټکى کې غوځوي.	
په مخامخ ځيره کې کونجنيمى ګورو او وينو، چې څنګه کښل يا رسم کيږي.	
په مخامخ ځيره اړخنيمى کتل کيږي. دا هغه کرښه ده، چې له کونج څخه اړخ نيمى.	
په مخامخ په درېکوډى کې د خوندي ګردى منځټکى د وړانګى سره کتل کيږي.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ځيره په درېګوډي کې په منځولاړې ګرښې په ګوته کويو چې پّ لړونده ټکي کې سره غوځوي

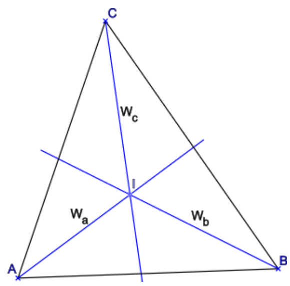


په لاندې مخامخ دريګوډي کې درې اړخنيمی ورکړ شوي،چې ته يوه ټکي کې سره غوځوي

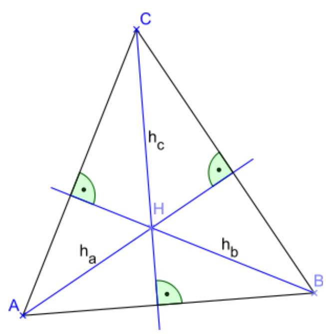


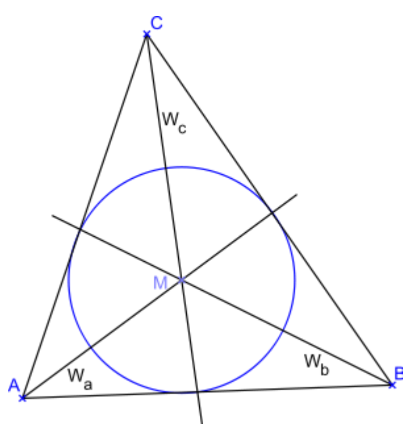
په مخامخ ځيره کې ګوروړ چې کونجنيمی ی خونديګردی منځټني کې سره غوځوي

په لاندې درېګوډي کې دې کونخنيمی ديو جې په يوه ټکي سه پرې کوي



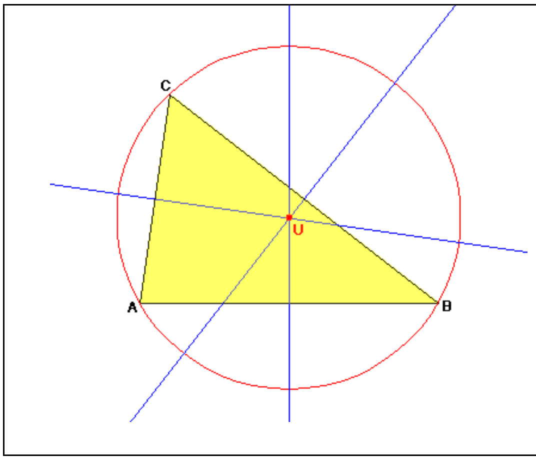
په لاندې ځيره کې د درېګوډي درې جګې ورکړ شويو چې په يوه ټکي کې سره غوځوي



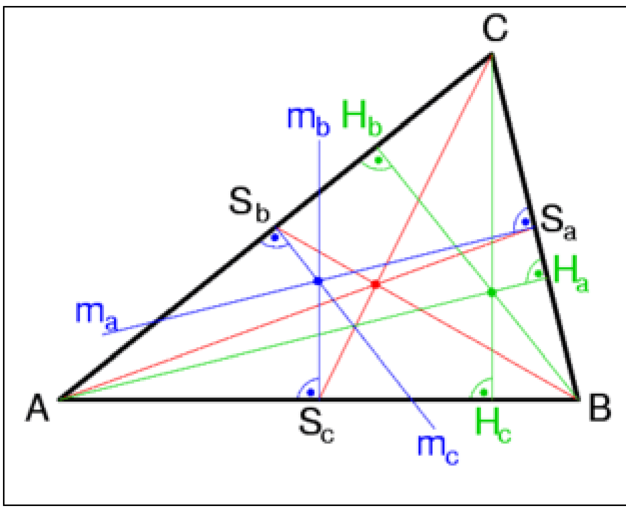


(c) ketabton.com: The Digital Library

په مخامخ ځيره کې د درېکوډی منځولاړې ګوروو چې غوڅټککی یې ی راتاوکردی منځټکي دی



په مخامخ ځيره کې هغه اړخنيمی، چې په اړخ ولاړې دي کټل کيږي، په اړخنيمی ولاړې، جګی او اړخنیمی کټل کيږي، چې دریواړه په يوه کربنه پرتي دي ٠



د جګو غوڅټکی (شين)، راتاوکردی منځټکی(اسماني يا زرغون)، دروندټکی(سور) په يوه کربنه پراته دي.

د درېکوډيو جوړيد امکانات يا شونتوب: درېکوډي يواځنی جوړيږي (همدا يو درېکوډی او بل، چې له دې درېکوډي توپير ولري نه شي جوړيدی) ،

-که د دريګوډيو دريواړه اړخونه ورکړ شوي وي،

-يا دوه اړخونه او له دې اړخونو بند کونج يا

- يو اړخ او ددې اړخ په دواړو سرونو يا اخرونو کونجونه وپيژنو

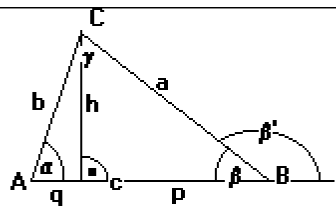
(c) ketabton.com: The Digital Library

یا په همدې ډول هغه دریګوډی، چی دوه اړخونه او د لوي اړخ مخامخ کونج یی پیژندل شوی وي. د کونګروانیڅ جملو کی یی بیلګي راځي .

د دریګوډي پیژندنه لنډ: یو n - ګوډی، چی n=3 وي، دری ګوډی بلل کیږي .

په درېګوډي کی جملی:

په عمومي ډول لاندې جملی باوري یا معتبرې دي چی بي له ثبوته دلته راوړل کیږي.

۱ - د کونجزیاتون جمله : په درېګوډي کی ټول کونجونه 180° لري °180 = □ + □ + □ په مخامخ څیره ګي β' د β ګاونډی کونج دی	

۲ - د دباندني کو نج جمله: دباندی کونج د ناګاونډیو کونجونو زیاتون یا مجموعی سره مساوي دی،له دې امله د درېګوډي د دباندنیو کونجونو زیاتون 360° لري:

یادونه : ګران د ځمککچ مینه وال دې دا څیره له پ ورته ه ځ برې څخه پوره کړي ..

۳ – درېګوډي نامساوات یا دریګوډي نابرابرونو نه:

په هر درېګوډي کی د دوه اړخونو اوږدوالی زیاتون د دریم اړخ اوږدوالی څخه لوي دی

$$a + b > c \;;\quad a + c > b \;;\; b + c > a$$

۳ الف-د هر دریګوډي دوه اړخونو اوږدوالي مطلقه ارزښت کمون، توپیر یا فرق د دریم اړخ اوږدوالی همغه- یامطلقه ارښت څخه کوچنی دی

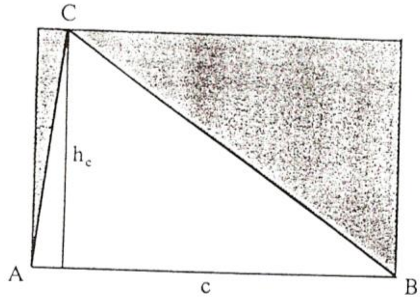
$$|a - b| < c \;;\quad |a - c| < b \;;\quad |b - c| < a$$

۴ - د درېګوډي چاپیریال د دریواړو اړخونو زیاتون دی $U = a + b + c$

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ ـ د درېکوډی منځهواره (د هواري دننه) لنډ : هواره (، د يوه اړخ اوږدوالی او په هغی کښلی (نيغ) ولاړ جګوالی(لنډ: جګوالي) د ځل نيمايي دی

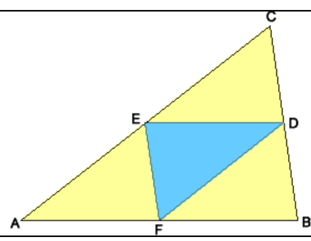
F =a.ha/2 = b.hb/2=c.hc/2



د ښووني لپاره يي د يوه لنډ چل ځخه کار اخلو: موږ درېکوډی د جګکرښي په اوږدو باندې په دوه ولاړکونجيو غوځوو او د درېکوډي په اړخ يی ځيره باسو، په دې ډول دوه ولاړکونجيز دريکوډي منځ ته راځی، چی د هغی ټوله هواره، د غوښتونکي درېکوډي هوارې دوه برابره ده.

دا له پورته ځيرې ځخه هم ځرګنديږي.

۶ ـ د درېکوډي اړخونو نيمايي هغه منځنی درېکوډی جوړوي، د کوم اړخونه چی نيمايي دومره اوږده وي لکه د پيل شوې درېکوډي(د و ړانګي جمله دې وکتل شي

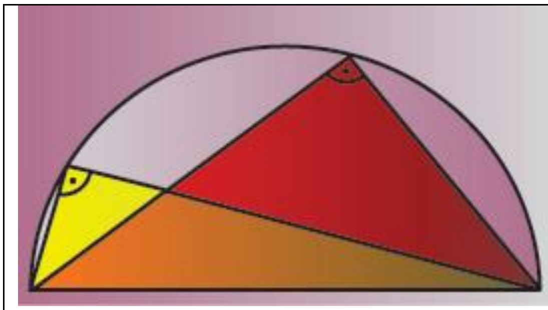


ګورو چی د يوه دريکوډي جګی تل ځرګند نه دی. مګر دا چی د يوه جګي له لارې يو دريکوډی په دوه برخو ويشل کيږي، چی په دې ډل دوه ولاړکونجيز دريکوډي ترې منځ ته راځي، چی دا جګی بيا د پيتاګوراس له لارې -جملی چی وروسته راځي - او يا د تريګونومتري يا کونجکچ متودو يا لارو له لارې ، چی هغه وروسته ځيړل کيږي، لاس ته راوړی شو .

د تالس جملهSatz des Thales:

که AB د يوې ګردی(دايرې) يوه نيمی (قطر) وي او C په دې ګردی پروت وي، نو درېکوډي

(c) ketabton.com: The Digital Library

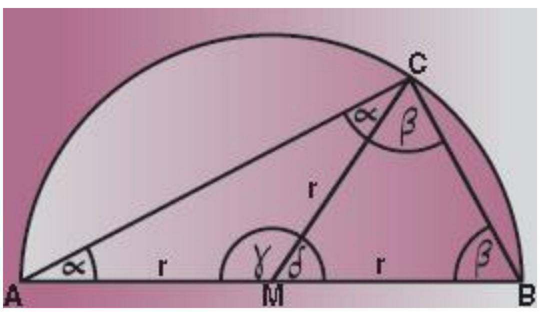


ABC په C کې ولاړکونجيز دی٠

د دې جملې په څټ يا برعکس دی:

که چيرې درېګوډي ABC په C کې ولاړکونجيز وي، نو C په ګردی پرته ده د نيمې AB سره

د جملې د ښوونې لپاره: دا برخه دې دا دلته د ښوونځي شاګردانو لپاره نه وي٠



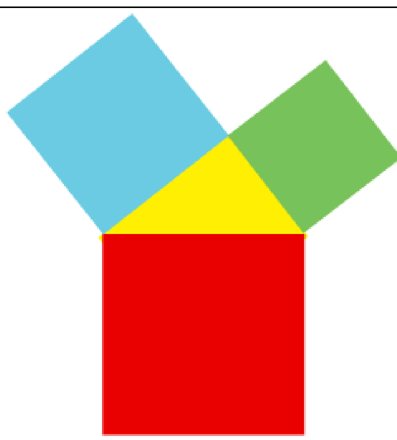
$$\alpha+\beta+(\alpha+\beta) = 180°$$

$$2\alpha+2\beta = 180°$$

له دې لاس ته راځي

$$\alpha+\beta = 90°$$

د پيتاګوراس (فيثاغورث Satz des Pythagoras)



په يوه ولاړکونيجز درېګوډي کې ، چې کاتيتونه يا ولاړ اړخونه يې a او b وي، د هيپوتينوزی يا اوږد اړخ يې c سره پخ نخښنه ګوو , باور لري

$$a^2+b^2=c^2$$

د دې جملې په څټ يا برعکس

که د يوه درېګوډي ABC د اړخونو a, b, cلپاره باور ولري

$$a^2+b^2=c^2. F=\frac{b}{2}\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}=b.\frac{h_b}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو دا درېګوډي په C کې ولاړکونجیز دی یا د پیتاګوارس جمله وایي، چې په یوه ولاړکونجیز درېګوډي کې د هیپوتینیوز(لوي اړخ) ځلوری یا مربع د کاتیتونو(ولاړ اړخونو) د څلوریو یا مربعګانو د زیاتون سره برابره ده.

ولاړکونجیز درېګوډی یو ولاړ کونج لري یانې ۹۰ درجې کونج

د درېګوډی اوږد اړخ د لوی کونج مخامخ پروت دی ، چې هیپوتینوز *Hypotenuse* یا لوی اړخ بلل کیږي

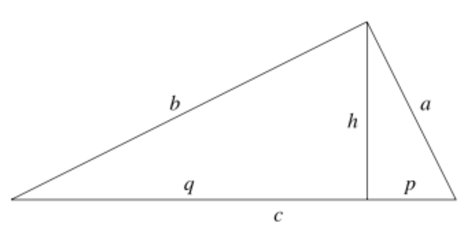
نور دوه اړخونه کاتیتونه *Katheten* یا ولاړ اړخونه بلل کیږي.

لاندې جملې ښایو:

دا جملې ټولې یوځای راوړل شوي

جمله : ولاړ کونجیز درېګوډی $a + b + c = U$

$a.b / 2 = c . hc / 2 = F$

	$c^2 = a^2 + b^2$	د پیتاګوراس جمله
	$a^2 = c \cdot p$	د اویکلید د کاتیتونویا ولاړ اړخونو جمله
	$b^2 = c \cdot q$	
	$c = p + q$	
	$h^2 = p \cdot q$	د اویکلید د جګیو جمله

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمله : برابر- یا مساوي پښیز دریګوډی جګی

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$U = 2a + b$$

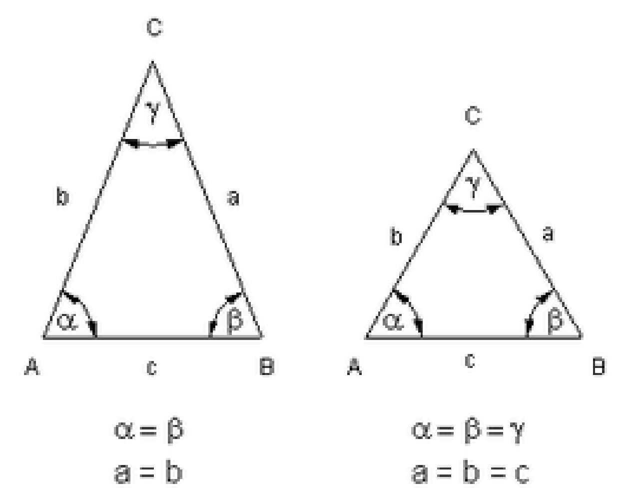
$$F = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = b.\frac{h_b}{2}$$

ځکه چی $h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$ (د پیتاګوراس جملی له مخی(پیتاګوراس جمله وګوری)

جمله : برابر اړخیز دریګوډی :
د یوه برابر اړخیز دریګوډي ټول دری آړخونه برابر دي، دنني کونج ونه برابر لوي دي، له دې امله برابر اړخیز دریګوډي منظمو پولیګونونو پورې اړه لري۰) پولیګون لاتین ډیرکوډیز(Polygonen).

د برابر اړخیز دریګوډي هر کونج ٦۰ درجې دی۰ برابر اړخیز دریګوډي تره کونجیزو ډریوګوډیو په ډله کې دی، ځکه، چې ټول دریکونجونه له ۹۰ درجو کم دي
په دې برسیره یوه برابرااړخیزه دریګوډیيوه برابرپښیزه دریګوډی هم ده۰
ټول برابراړخیزدریګوډي یو بل ته ورته دی (وروسته راځی)

په یوه برابراړخیز دریګوډي کی، د یوه اړخ کونجنیمی-، اړخنیمی-، په منځولاړې-اوجګی –یو په بل پریوځي۰ په ورته توګه دا د ضوندي ګردی دباندې ګردی او دروندټکی اړخ جګیو غوڅټکی لپاره هم په یوه برابراړخیز دریګوډي کې باور لري۰



(c) ketabton.com: The Digital Library

پورته خیره کې کیڼ لور ته برابر پښیز - او ښي لور ته برابراړخیز درېګوړی دی. هر برابر څه یې کښل شوي.

د یوه برابراړخیز درېګوړی، چې د اړخ اوږدوالی یې a دی، لپاره باور لري

$A = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$	Fläche *A* *هواره یا سطحه*
$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$	*جګوالی*Höhe *h*
$r = \frac{\sqrt{3}}{3} a = \frac{a}{\sqrt{3}}$	د چاپیریالګردی وړانګهUmkreisradius *r*
$\rho = \frac{\sqrt{3}}{6} a$	د خوندي ګردی وړانګهInkreisradius ρ
$u = 3 \cdot a$	*چاپیریال*Umfang *u*

د برابراړخیز درېګوډي خویونه دې ګران لوستونکي وښايي

د اویکلید د کاتیتونو یا ولاړ اړخونو جمله

دواړه سرې هوارې یو له بل سره او همداسې دوآړه شنې هوارې همغه منځهواره لري. یا په بل ډول : د سرو او شنو ولاړکوډیو هوارې یو له بل سره برابرې دي.

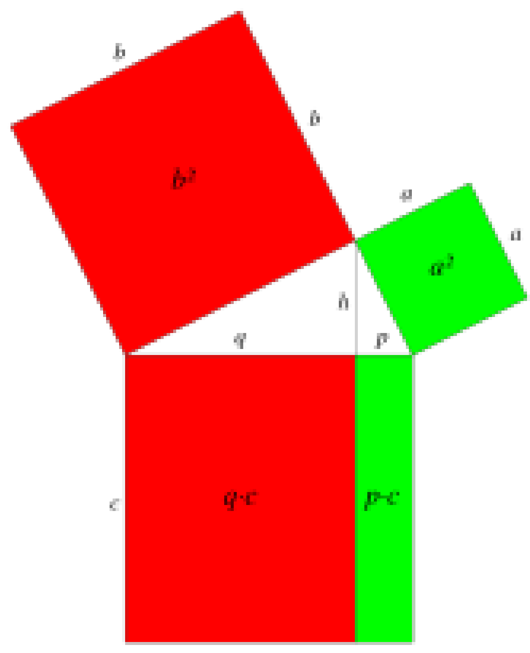
$a^2=pc$ او $b^2=qc$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که a,b,c د ولاړکونجيز درېګوډي اړخونه وي، د هيپوتينوز c سره. که دا درېګوډې په جګي h په دوه برخو وويشل شي او p يې هيپوتيوز ټوټه په a ده او qهمداسي ټوټه ده په b، نو باور لري:

په aخلورى د p او cولاړکونجيز خلورکوډي او په bخلورى د ولاړکونجيز خلورګوډي، د اړخونو q او cسره هوار برابره ده ياني هواري يا سطحى يې برابرې دي.

لاندې ځيره دې وکتل شي. پام دې وي ، چې دا پورته ښونه او دا لاندى سره برابرې دي، خو يواځې ځيرې يې بدې دي، دوه ځله ښوونه پروا نه لري.



فرمول يې :

$$a^2 = p.c$$

$$b^2 = q.c$$

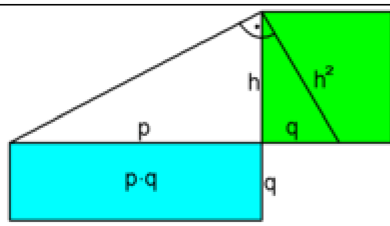
Kathetensatzد کاتيتيونو جمله:دواړه سرې هوارې همغه منځهواره لري او همداسې دواړه شنې هواري هم *د اړخ او خلورى د فرمول په ځير په لاندې ډول دي*

$$a^2 = p \cdot c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$b^2 = q \cdot c$$

د اویکلید جګجمله Höhensatz des Euklid

 	$h^2 = p \cdot q$ د جګجملی د بیاتیونې ښوونه(دا لږ ستونځمنه ده، خو زما یې دا ځیره بدلون ښه راځې ګرانو لوستونکو ته په مینه وړاندې کیږي) :

د جګجملی ښوونه : د پیتاګوراس له جملې $a^2 + b^2 = c^2$

او د بینوم له فرمول

$$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

ځخه ښوونه لاس ته راځي

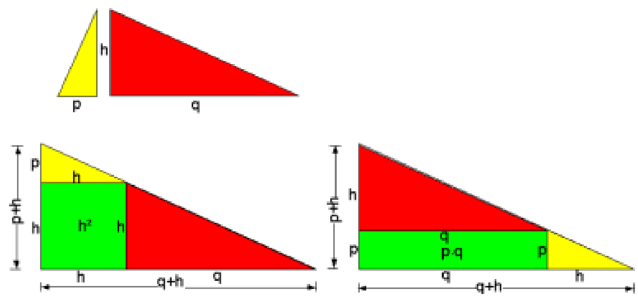
په دیاګرام کې درې درېګوډي لیدل کیږي، یو له اړخونو a,b,c, ، بل له اړخونو h,p,a او h,q,b. سره، د دې هریوه درېګوډي لپاره د پیتاګوراس جمله باور لري٠:

$h^2 = p.q \Leftrightarrow q^2 = pq+q^2 + h^2$

د پورته بیاتیونې له لارې ښوول کیږي٠

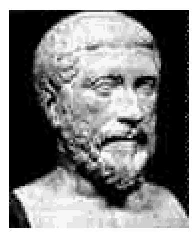
جیومتریکي ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا خیره دې ګران لوستونکی پام ته را وبولي، چې څنګه د ښوونې کار مخ ته ځي

(تمرین)



د ساموس پیتاګوراس Pythagoras von Samos

تکرار: په ولاړکونجیز درېکوډي کې د کاتیتونو(ولاړ اړخونو) د څلوریو یا مربعګانو زیاتون د هیپوتینوز(اوږده اړخ) د څلورۍ سره برابر دی٠

دا جمله د پیتاګواراس جملې ترنامه شهرت لري او د ساموس پیتاګوراس د ژوند سره برابر ځاې نیسي٠ لکه لاندې په ګوته کوي،چې دا انسان له دې خورا زیات وو٠

دا یو له مانا ډک انسان دی »برتراند راسل « Bertrand Russell - ",,

دی د جلبازو مشر دی « هیراکلیت»Heraklit - ",,
لودویګ بورنې د هغۀ په هکله وایې« Ludwig Börne کله، چې هغه دا جمله پیداکړه، هغه د خدای په نامه سل سوخندر خیرات کړل٠ له هغې وروسته ټول سوخندر لړزیږي، ترهغې، چې نوې څه کشف شي «

(c) ketabton.com: The Digital Library

پيتاکوراس په570دزکال پخواپه جزيره ساموس کې پيداشوی .
پلالر يې سامي زرګر منيسارښوس **Mnesarchos** دی

چې شل کلن وو د تالس **Thales** په ميلت Milet او انيکشيماندر کې يې زده کړې کولې

د پيتاګوراس ښوونه يا پوهنه Die Lehre Pythagoras

روح نه مري او ځاي بدلوي، داسې، چې له يوه ژوندي څخه وبل ته ځي

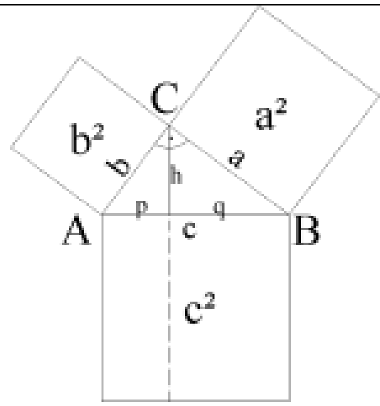
د پيتاګوراس جمله

په يوه ولاړ کونجيز درېګودي کې د کاتيتونو(ولاړو اړخونو) څلورى زياتون د هيپوتينوز (اوږده اړخ)له څلورى سره برابر دى

c^2	=	$a^2 + b^2$
(د کاتيتونو جمله) $p \cdot c$	=	b^2
$q \cdot c$	=	a^2
Kathetensatz کاتيت جمله د		
$p \cdot c + q \cdot c$	=	$a^2 + b^2$
$(c \cdot (p + q)$	=	$a^2 + b^2$

دپورته لپاره لاندې څېره وګورى

(c) ketabton.com: The Digital Library

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>د دې جملې د ښوونې لپاره له ۲۰۰ څخه زياتې اوبيونې يا ښوونې (ثبوتونه) شته</td>
</tr>
</table>

پيلونې او ښوونې

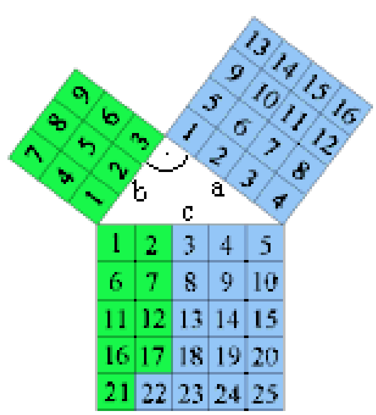
د يوونځلورى يا يوون مربع خيره

يو ولاړ کونجيز درېګوډى لرو، چې اړخونه يې په لاندې ډول دي

(z.B. a= 3cm; b= 4cm; c= 5cm)

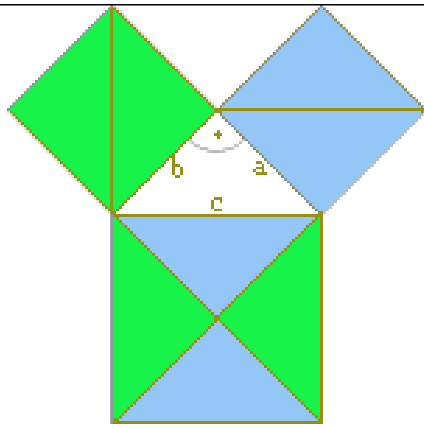
په هر اړخ ځلورى جوړوو، لکه لاندې خېره

$25cm^2$	=	$9cm^2$	+	$16cm^2$
c^2	=	b^2	+	a^2

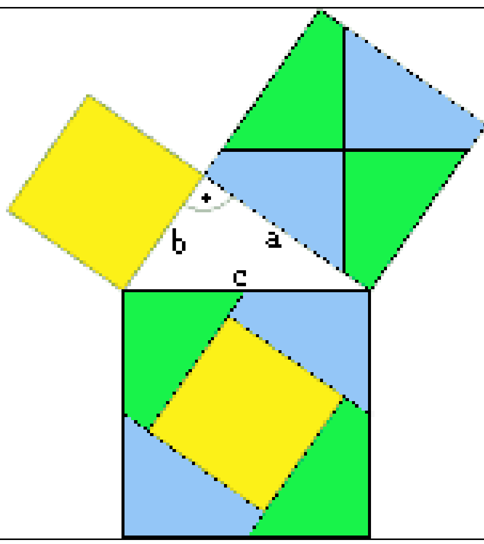


(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې يو برابرپينيز ولاړکونجيز دريګوډی لرو:

	ولاړکونجيز برابربرپينيز درجګوډی، چې اوږد اړخ يې دی (z.B. c=5cm). اړخونه a^2 او b^2 ګورو، نو کره به ورته وګورو، چې څه شوي ياني ځنې ځلورى نيمې شوي او ځنى بيا په څلور برخو ويشل شوي. که څير Jته وګورو، څه کره کولی شو؟

2.2 په خوښه ولاړګوډيز لرو

	دا په خوښه ولاړکونجيز دريګوډی دی (z.B. c= 4,5cm) تالس ګردی د لويې کتيت ځلرى له منځ څخه لوي اړخ ته يوه غبرګهکرښه وکاږى او هيپوتينوز ته يوه ولآړه a^2 غوځه کړي. ګران لوستونکي دې له څيرې څخه پخپلهپه ګوته کړي، چې د لوي اړخ ځلورى د نورو اړونو د ځلوريو سره برابره ده

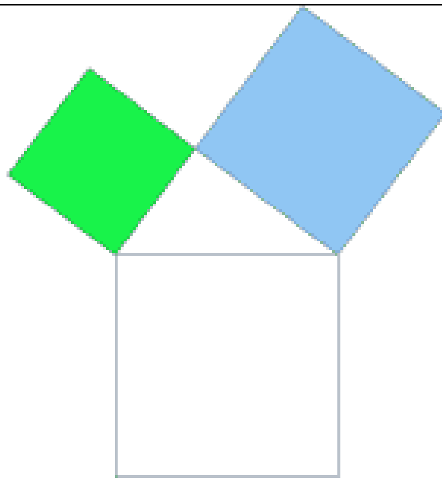
.3 د څيرې ځمککچيزه لاربنودنه

د لوړو ګوډونو يا کاتيتونو ځلورى په دريګوډي ABC کې دننه د غبرګ اړخيز په څېر غوځ کړى

(c) ketabton.com: The Digital Library

غبرګ اړخيز د لوی اړخ څلوری(مربع)
کدېتکي باندې د هغې تر يوه اړخ پوری و
ځرخوی .

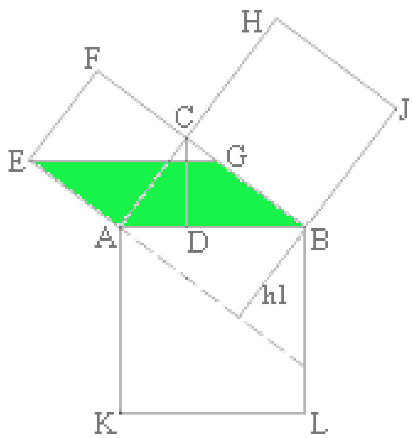
غبرګ اړخيز(مايلګوديز) يوه ولاړګوديز
په ډول د لوی اړخ مبع يا څلوری هوارې
کې دننه بياتي کړی

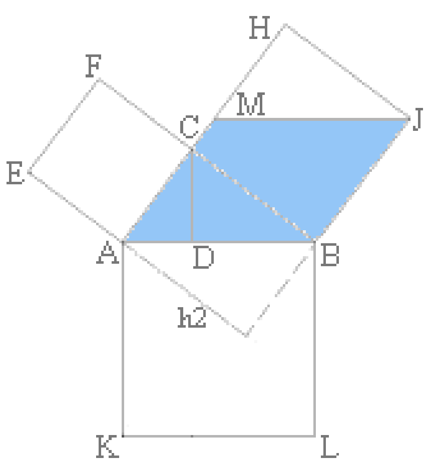


ښوونه :الف : بياتيونه:

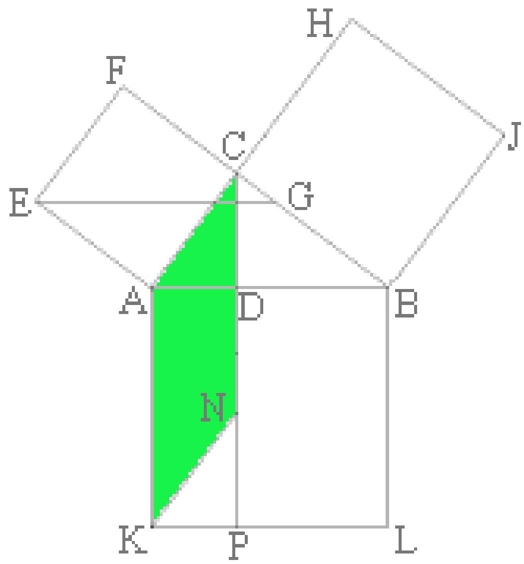
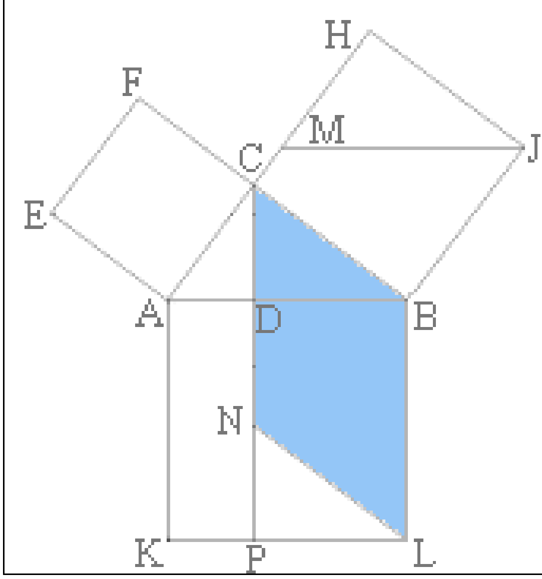
EACF = EABG . 1
ځکه, جې برابر بنسټلاين EA او برابر
حګی

BJHC = BJMA . 2
ځکه،برابر بنسټلاين BJ او برابر
جګی(h) JHلري





(c) ketabton.com: The Digital Library

	ب . ځرخون : ۳ . EABG = AKNC ځکه په A باندې EA = AC (د یوې ځلورې اړخونه) AB = AK (دیوې ځلورې اړخونه)
	۴ . BJMA = BCNL ځکه، چې په B باندې BJ = BC (د یوې ځلورې‌اړخ اوړوالی) BA = BL (د یوې ځلورې اړخونه)

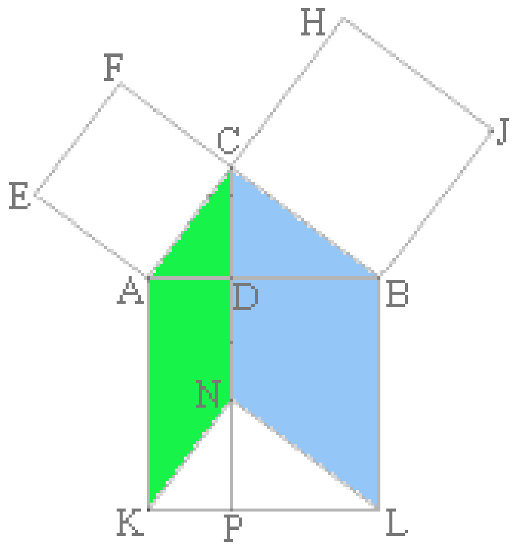
پ . بیاتیونه:

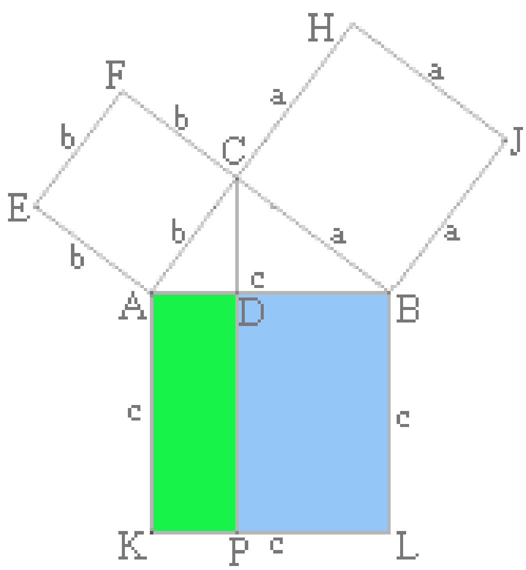
۵ . AKNC = AKPD ځکه، چې همغه بنستلاید AK شر ه نغه جګي KP لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ . NLBC = DPLB ځکه،چې
همغه بنسټلاین BL اوهمغه جګی PL
لري

د پورته دواړو لپاره لاندې ښېره وګورئ





له مخامخ ښېرې

لاس ته اځي

$a^2 = c \cdot DB$

$b^2 = c \cdot AD$

له دې لاس ته راځي :

$c.AD+c.DB=C^2$

$b^2+a^2 = C^2$

بیاتیونه پیل(لاندې ښېره)

۱ - په هر دې اته درېګوډیو ښلورئ داسي کیږدئ،جې برابر اوږده اړخونه یو په بل پریوزي، لکه چې ګور د یوې ښلورئ اړخونه د یوه درېکوډي داړخونو سره برابر دي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

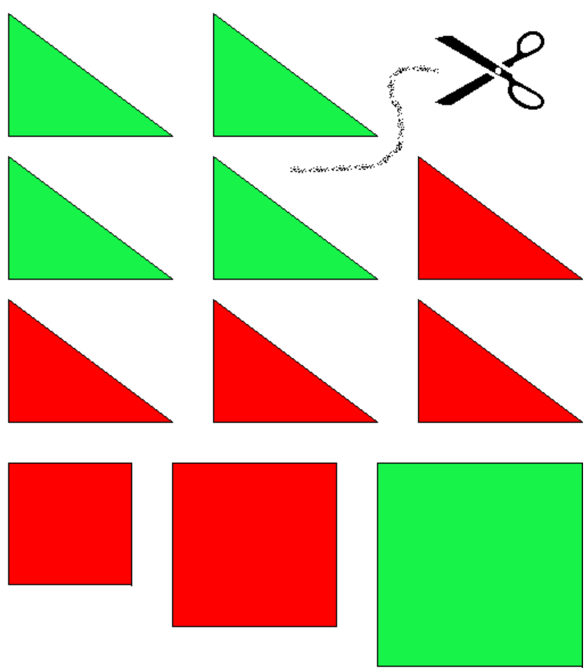
۲ - ټولې سرې ځيرې (دوه ځلورۍ اوځلور درېګوډي) داسې يوځای کيږدی، چې يوه لويه ځلورۍ منځ ته راشي .

۳ - ټولې شنې ځېرې (يوه ځلورۍ او ځلور درېګوډي) داسې يوځای کيږدی، جې يوه لويه ځلورۍ منځ ته راشي.

۴ - ځان ته باور پيدا کړه،چې دواړه داسې منځ ته راغلې ځلورۍ يو بل پټه وي.

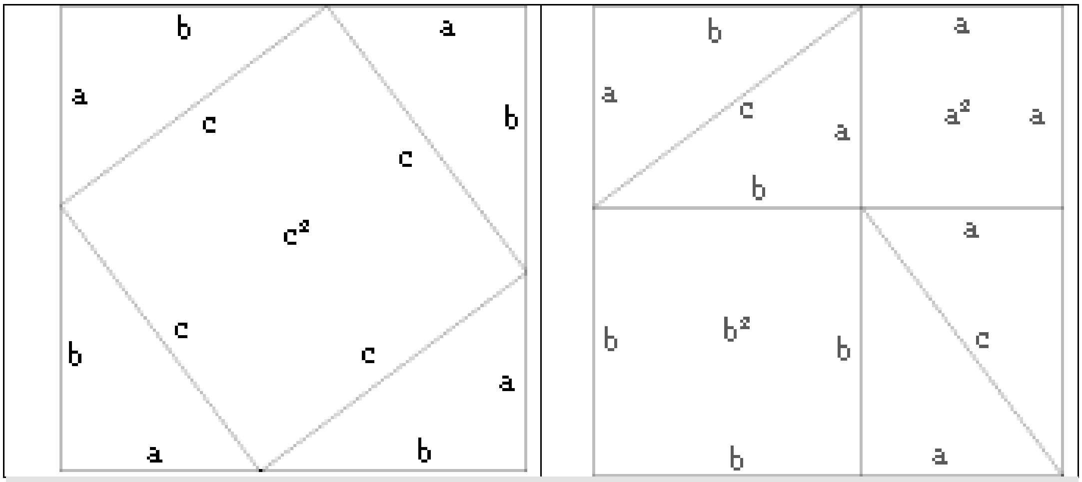
۵ - ټول درېکوډي لرې کړه، نو دا پاتې شنه ځلورۍ، د هوارې يا سحې له مخې کوچنۍ يا برابره ده دې نورو دواړو سرو ځلويو سره.

د ځواب لپاره دلايل راوړه!



۵. Berechnungsbeweisد شميرلو ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + c^2$	=	$(a+b)^2$
$2ab + c^2$	=	$a^2 + 2ab + b^2$
c^2	=	$a^2 + b^2$

دا ځیرې دې د ځمککچپوهنې مینه والو ته وړاندې وي، که وخت پیدا شو دا څه په منځ کې پاتې به هم وژباړل شي او ګرانو لوستونکو ته به وړاندې شي

لاندې ځیره کې د،پیتاګوراس ونه، لیدل کیږي

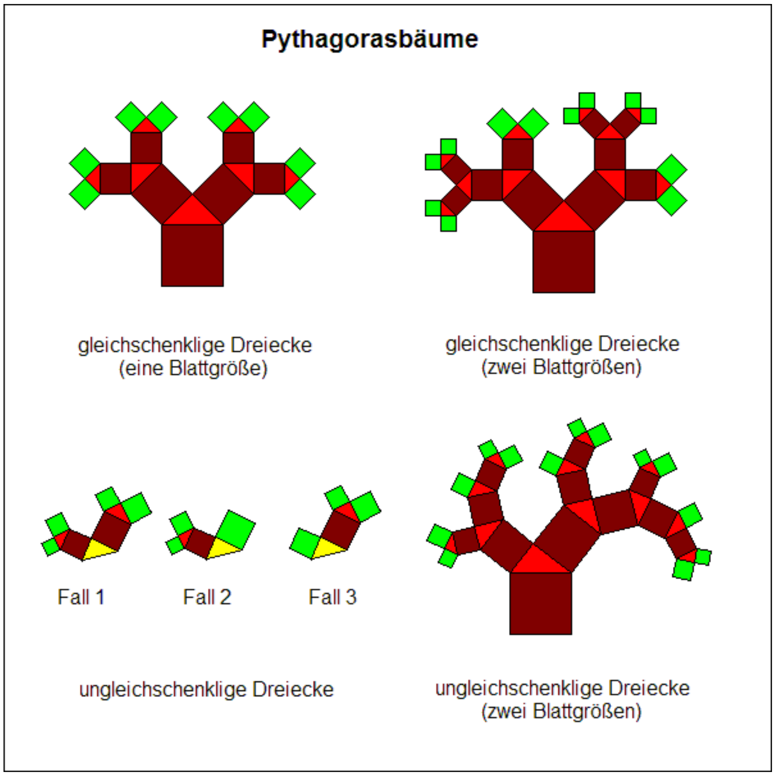
له کینې و ښي-، له پورته و کښته لور ته

برابرپښیز درېګودی (یوه پاڼه لویوالی)

- برابرپښیزدرېګودی(دوه پاڼې لویې)

حالت ۱ تر۳نابرابرپښیز درېګودي- نابرابرپښیز دېګودی(دوه پاڼې لویی)

(c) ketabton.com: The Digital Library



تمرینونه:

۱ – لاندې دریګوټي وکاږئ :

a) a = 4 cm ;   b = 8 cm ;   c = 9 cm

b) a = 8 cm;   b = 8 cm ;   ß = 50°

c) a = 8 cm ;   ß = 40° ; γ = 50°

۲ – د هوارې فرمول په مرسته

وښایئ: چې د یوه دریګوټي خواوې یا اړخونه او جګې ، یو له بل سره په څټ اړیکو یا ځانښونو یا تناسب پرتې وي.

۳ – دریګوټی د لاندې ورکړو سره کومه هواره لري

a) a = 7 cm ; h_a = m6 cm

b) c = 3 cm ; h_c = 5 cm

(c) ketabton.com: The Digital Library

c) $a = b = c = 6$ cm

d) $a = 10$ cm ; $\beta = 45°$; $\gamma = 90°$

۴ – د هوارې اندازولو بل امکانات داسی په نامه د هیرون لیما ورکوي(د سکندريي هیرون Hronsche Dreiecksformel). که دري اړخونه معلوم وي ، نو هواره له لاندې فرمول څخه ټاکل کیږي

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

د $s = U/2 = (a + b + + c)/2$ سره

د هوارې شمیرنی لپاره د په باندې ګردی همداسی دننه ګردیو وړانګو څخه هم کار اخستل کیدی شي.

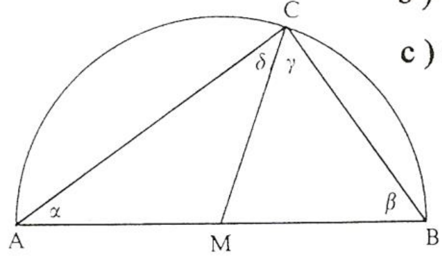
$$F = a.b.c / 4r = s.\rho = \rho.U/2 = \frac{\rho.U}{2}$$

دلته د دننه ګردی او r د دباندې ګردی وړانګی دي. لاندې ټولی پاتی یا نامعلومی لویي د ټولو دریګوډیو لپاره وټاکی :

a) $a = 3$ cm ; $b = 4$ cm ; $c = 5$ cm

b) $a = 5$ cm ; $b = 7$ cm ; $U = 20$ cm

c) $s = 17$ cm ; $= 5$ cm ;
$h_a = 13$ cm $= h_b$

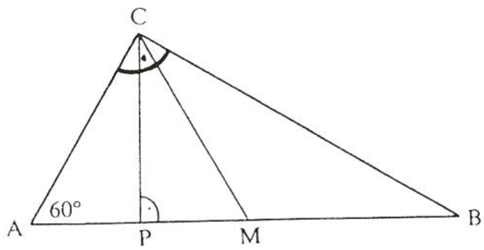


څیره ۸۲

۵ – د هندسی له لارې د لاندې څیرونو په مرسته د تالس جمله وښایی. (څیره۸۲)

(c) ketabton.com: The Digital Library

۶ – ثیره ۸۳ یو ولاړکونجیز دریګوډی ښایي د کونج = 90° سره، وښایي چی کرښي $\overline{CP}$ او $\overline{CM}$ کونج په دري مساوي برخو ویشي.



ثیره ۸۳

۷ – وي دي a,b,c د پیتاګوراس (فیثاغورس) ګڼون دریګونی. وښایي : (n>m)

a) $a = 2n + 1$; $b = 2n^2 + 2n$;

$c = 2n^2+2n+1$

b) $a = 2nm$; $b = n^2 - m^2$:

$c = n^2 + m^2$

۸ – د ولاړکونجیز دریګوډي پاتی برخی وښایی(نښوونه لکه په لیکنه کی):

a) $h = 4$ cm : $q = 5$ cm ;

b) h) 7 cm; $b = 10$ cm

c) $p = 4$ cm: $q = 12$ cm

۹ – د کانتی یا اړخ یا ژی a اوږدولای څخه د یوه مساوي اړخیز دریګوډي ځګوالی وښایی.

۱۰ – وښایي : په یوه مساوي اړخیز دریګوډي کی د دباندې ګردی وړانکه $r = (a/3)\sqrt{3} = 2\varrho$ ده او له دې سره سم د دننه ګردی وړانکه په لاندې توګه ده: $\varrho = (a/6)\sqrt{3} = r/2$.

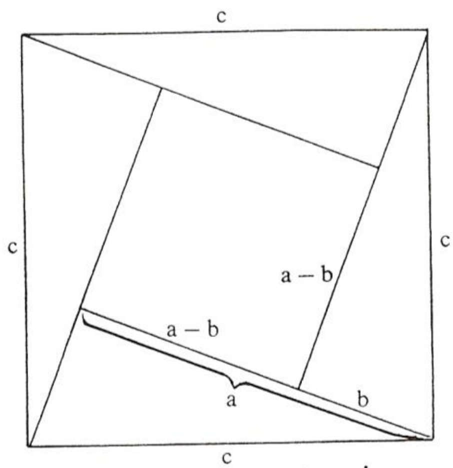
۱۱ – د ورکړشوي هوپوتینوزې سره د یوه ولاړکونجیز دریګوډي هواره کله خورا لویه ده؟ دا په دې مانا چی بله له دې لویه هواره نه وي.

۱۲ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی یوه کانتی یا ژی ۳ سانتي متره اوږده ده، بله نیمه دومره اوږده ده (x) ، لکه هیپتوینوزې (2x) نو x وشمیری.

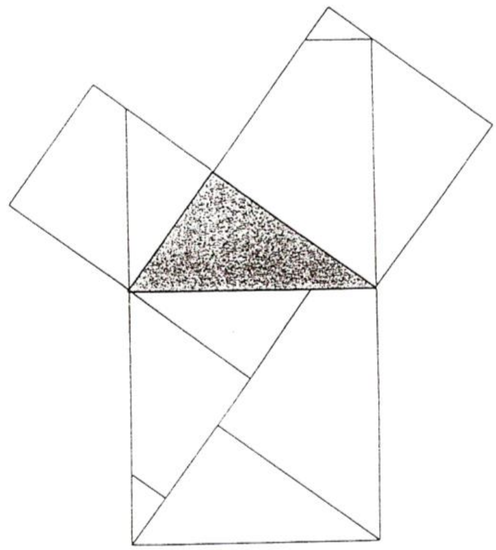
(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ – د یوه ولاړکونجیز مساویپښیز دریکونجي هیپوتینوزې c = 10 cm ده، کیدی شي له دې څخه د یوې پښی اودوالی وشمیرل شي؟

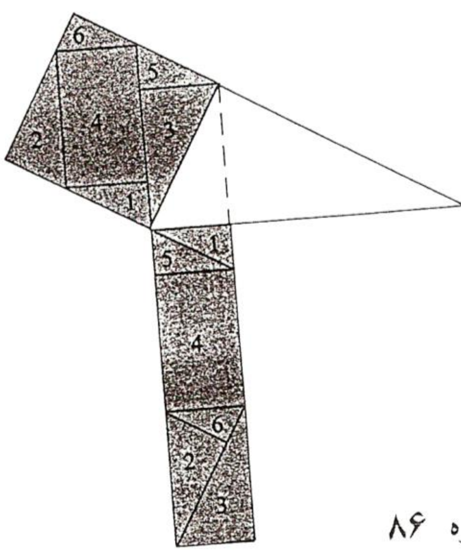
۱۴ – د لاندې څیرو په مرسته دې د پیتاګوراس درسي جمله وښوول شي:



څیره ۸۴



څیره ۸۵



څیره ۸۶

۱۵ – د یوې مربع څخه چې د یوې کانتی یا ژی اوږدوالی یی ۵ سانتي متره وي، یو مساوي هواریز ولاړ– کونجی جوړ کړی، چې د یوې ژی یا اړخ اوږدوالی یي ۴ سانتي متره وي:

الف) د کاتیت له جملی سره

ب) د جګجملی سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۶ – د کاتیت جملی صدق د
خیرونی په مرسته، د برخه
هوارو د مساویوالی ښوونی
له لارې وښايي« (خیره ۸۶)

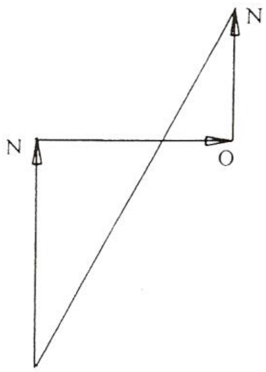
۱۷ – په برخه دریکوډیو MPC
(خیره ۸۳/) د پیتاګوراس جمله
استعمال کړی، او په دې بنسټ
د پیوتاګوراس جمله وښايي .

۱۸ – د مساويپښيز ولاړکونجيز
دریګوډیوپښی داسی راکړ شوې
الف) ۶ سانتي متره»
ب) ۸ سانتي متره ،
پ) x سانتي متره، هره اړونده
هیپوتینوزې څومره اوږده ده؟

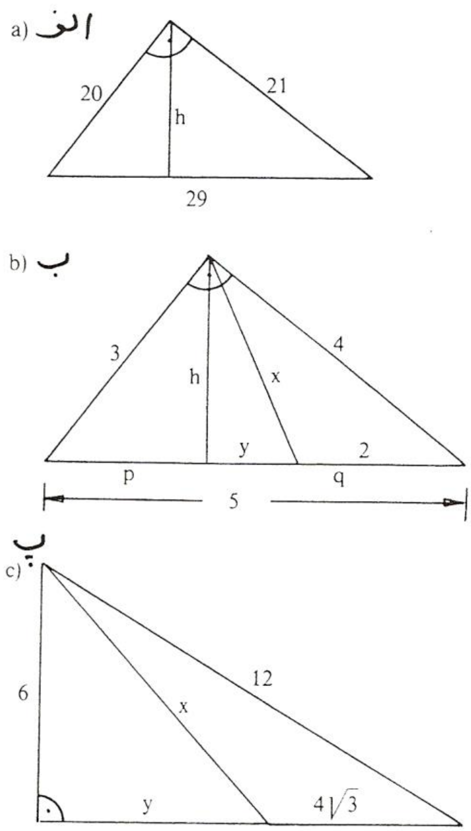
۱۹ – یو موټر ۷ کیلو متره د سهیل لور
ته او ۶ کیلومتره ختیز لور ته او بیا
۴ کیلومتره د سهیل لور ته ځغلي.
دا موټر د خپل وتلځاي څخه څومره لرې
دی؟ (خیره ۸۷)

۲۰ – د خپل وتلځاي څخه به څومره لرې وي،
که نور هم ۴ کیلو متره د ختیز لور ته
وځغلي؟

۲۱ – دا نامعلومی کرښی په خیره ۸۸کی
وښايي.



خیره ۸۷

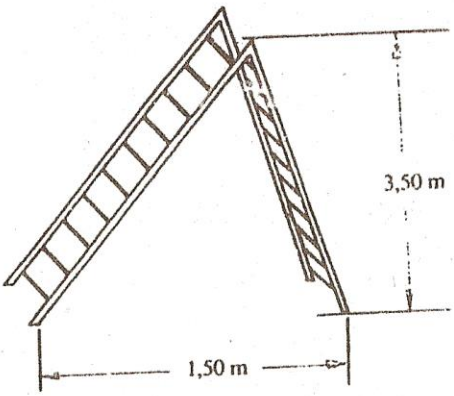


خیره ۸۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – یوه دیوال ته ۵ متره اوږده زینه
ایښول شوې د زینې بیخ له دیوال
۱، ۴ متره واټن لري زینه څومره
جګه رسیږي؟

۲۳ – د یوې نقشې، چې د ۱۰۰۰۰۰ : ۱
اندازه ده یو د پلو لار غزیدلي ، چې
د نقشې اوږدوالی ۷ ، ۰ سانتي متره
دی د جنګلاینونو ۲۵۰ متره او ۴۵۰
متره سره . دا د پلو لار په ریښتونې
څومره اوږده ده ؟



خیره ۸۹

۲۴ – د یوه کور بنسټ فورم یو مساویپښیز
دریګوټی دی
الف) د ۹ سانتي متر په سور یا بر او
جګوالی ۶ ، ۰ سانتي متره د چت له
پورته ژی تر ناوی پورې .
ب) د یوه ۹ متره په سور او۵،۳
متره Sparenlänge د بنسټفورم ۶،۵ متره
جګوالي سره د بنسټفورم سور وشمیرئ

۲۵ – په یوه رامارته زینه کې ټولې پوړۍ مساوي
اوږدوالی لریهغه په څیوړونه ۶۴ کې کښل
شوې د پوړیو واټن وشمیرئ

۲۶ – پو یوه مساوي پښیز دریګوټي کي چې
چاپیرې یی ۲۵ سانتي متره دی او جګوالی
یی ۲ سانتي متره له بنسټ اړخ څخه کوچنی دئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

اړخونه څومره اوږده دي او جګوالي يې څومره اوږد دی ؟

۲۷ – هر يو ټال په زوړند څغلول شوي رسی تړلی، چې د تړلو ټکی يي د يوه مساويپښيز دريګوړي کونجټکي دي. که وزنوړونکی ۶ متره اوږد او ۱ متر يو له بل لرې په کښتنی تړلي وي، نو کښتنی ټال څومره لرې ټال وهلی شي، که دريګوډيپنسټ منځټکی د لار جګ ټکي کی ۲،۵ متره د خپل ژورځای څخه جګه وي ؟

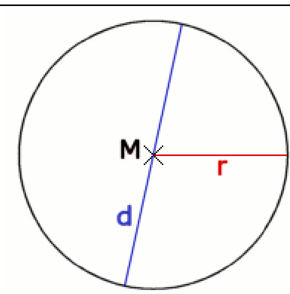
۲۸ – کوم يو د لاندې دريګوړيو څخه نه شي کښل کيدی؟

a) a = 3 cm; b = 4 cm ; c = 6 cm b) a = 5 cm ; b = 9 cm ; c = 7 cm c) a = 7 cm ; b = 4 cm ; c = 2 cm

d) a = 12 cm ; b = 13 cm ; c = 1 cm

۲۹ – ولی درې اړخيز دريګوړی هيڅوخت ولاړکونجيز دريګوړی نه شي کيدی؟

ګردی (دايره)

	پيژند ياتعريف د يوې هوارې ټول هغه ټکی، کوم چې له يوه ټکی داسی په نامه منځټکي M څخه همغه- يا برابر واټن r (په نامه وړانګه) ولري، ګردی لاين يا لنډ: ګردی بلل کيږي (مخامخ څيره) $k = \{X \in E \mid \lvert\overline{MX}\rvert = r\}$ ګردی سطحه يا - هواره او ګردی چاپيريال يا - محيط

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پام کی دی وي، چی د ټولو هغو ټکو ډيری، چی واټن يی له M څخه د r کوچنی يا د rسره برابر وي ګردی (موخه ترې ګردی منځهواره ده يا ټيك : ګرديټوټه ځما په پام به بهتره وي که دا ګردیچيترو يا لنډ : چيترو، چې موخه ترې يواځې منځهواره ده، وبولو) بلل کيږي

پيژند: لکه د مخه مو، چې په ګوته کړه، هغه کرښه چی د ګردی ژی يو ټکی د منځ ټکی سره ترې، هغه د ګردی وړانګه يا لنډ: وړانګه بلل کيږي، چې په r سره يې ښايو٠
پيژند: او هغه کرښه، چې ګردی نيموي د ګردی نيمونکې کرښه يا لنډ: نيمی (قطر) بلل کيږي او په d سره يې په نخښنه کوو٠

پيژند
دګردی دننه کونج پوره کونج ۳۸۰ درجي لري.
ګرديچاپيريال د وړانګې r سره په لاندې ډول ورکړ شوی دی

$$u = d \cdot \pi = 2r \cdot \pi$$

او همداسی ګردیمنځهواره د وړانګې r سره په لاندې توګه ورکول کيږي

$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

$$d = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2r$$

دا لاندې ورکړشوی ګڼ ګردی ګڼ بلل کيږي
: $\pi = 3{,}14159265$

يادونه: دا چې ما کله هواره يا سطحه په A يا F او π مې په Pi نخښنه کړې، دا به هيله ده کرانو لوستونکو ته ستونځې پېښې نه کړي.
په پورته کې ورکړ شوی ګردی ګڼ « پي » ګورو، چې بيرته راګرځيدونی دی٠ له دې امله يو ايرشنل ګڼ دی او د مات په څير نه ليکل کيږي، بلکه له لسميز (عشاريه) وروستی پريودي کيدونکی ځيفر پرلپسی دی. په کارونه کې يی موږ نزدې شمرني ته مجبور يو، ځکه چه د جبشميري د ګنځايونو له امله، چې پای دي يا پوله لري يا رابند(محدود) دي.

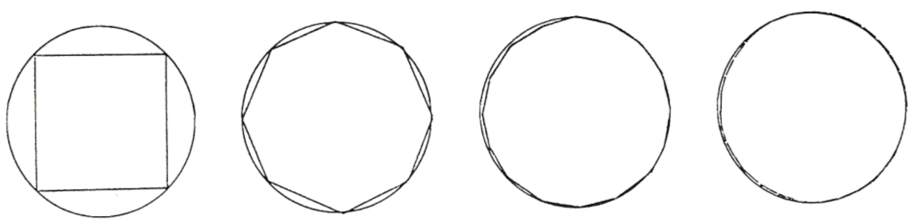
څنګه سری په دې بريالی شو چی دا ګڼ پيدا کړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا لار دې په لاندې کې لنډه ورکړ شي:

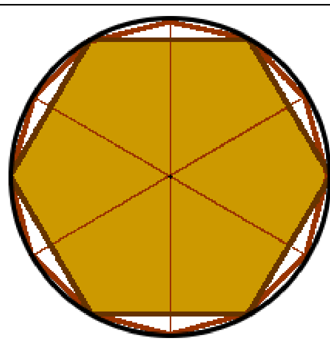
دا له ارښیمدس څخه پیل کارونه (عملیه) یا تګلار   داسې پیل کیږي، چې په ګردۍ کې یو ه څلورۍ یا مربع راګیروي یا رابنده وي او بالاخره یې په منځنیو ولاړو سوکڅیسیف یا یو په بل پسې ۸ ، ۱۶، ۳۲ او داسې نورو، لوړ یا جګ کړي یعني په همغه وخت کې دوه برابره کړی .

خیره ۱۱۹



یوې ګردۍ ته د یوه n-ګوډي له لارې نږدیونه (نږدې کیدنه)

خیرې ۱۱۹ جناځی

<table>
<tr>
<td></td>
<td>په مخامخ خیرو کې نهه ګوډۍ ورپسې شپږګوډۍ کښل شوي، دي ته ګورو، چې څنګه ګردۍ ته نږدې کیږي</td>
</tr>
</table>

په پورته خیره څو څوګوډیز بریښي او ستره تری راتاو ګردی

پورته خیرو کې یوې ګردۍ ته د یوه n -ګوډي له لارې نږدیونه (نږدې کیدنه)

کتل کیږي، هغه ٦٥٥٣٧ ګوډۍ، چې ګورو نږدې یا تیک ګردۍ ده)

د زیاتیدونکي n سره کانتی یا ژۍ یا اړخونه تل کوچني کیږي، چې پخپله له ۱۰۰ یا ۱۵۰ ور رسونو ته په یوه پانه کې د کښلو یا رسمولو څخه وځي یا نه کښل کیږي، په همدې وخت کې د منځنکی څخه د په همغه واټن د ټکو ګڼون یا تعداد زیاتیږي (یعنی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ګوډتکوتعداد يا ګڼون) د مربع پيلګردۍ سره دا ځيره تل نزدې کيږي. په ورته توګه د دې چاپيرىال او منځهواره هم همغه چاپيرىالګردي ته نزدې کيږي. د ګوډتکو زياتيدو سره د ګردۍ وړانګه هم لوييږي. د هغو چاپيرىال او منځهواره تل همغه ډير کونجي او په همدې توګه د چاپيرىالګردي څخه. په روښانه توګه ليدل کيږي چې د چاپير ىالګردۍ او د منځ هوارې د ناپاى ډير n ګوډونو سره د n - ګوډي سره يوځاي پريوځي يا يوځاى کيږي.

په لاندې جدول کې د چاپيرىال ارزښت او په همدې توګه د منځهوارې ارزښت د زياتيدونکي n ګڼ سره ستابيل (په خپل حالت، چې ډير تغير په کی نه راځي) پيژندوړ دی:

منځهواره Fn	چاپرىال Un	پيدايښتي ګڼ n
2	5,656854	4
2, 828427	6,122934	8
3,061467	6,242890	16
3,121445	6,273096	32
3,136548	6,280662	64
3,140331	6,282554	128
3,141277	6,283027	256
3,141572	6,283145	512
3,141572	6,283175	1024
3,141587	6,283182	2048
3,141591	6,283184	4096

وروسته به وکتل شي چې څنګه د ګردۍ چاپيرى او ګردۍ منځهواره د تريکونومتري يا دريګوډيکچ له لارې ټاکل کيدى شي

پيلبيلګه:

د بانك مدير ښاغلى کړاو غواړي د کنفرانسونو لپاره يو د ښيښې ميز جوړ کړي چې په هره لور يى ٨ کسان ځاي نيولی شي. ايا ددې لپاره يو ميز چې ٢ متره نيمى(قطر) ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

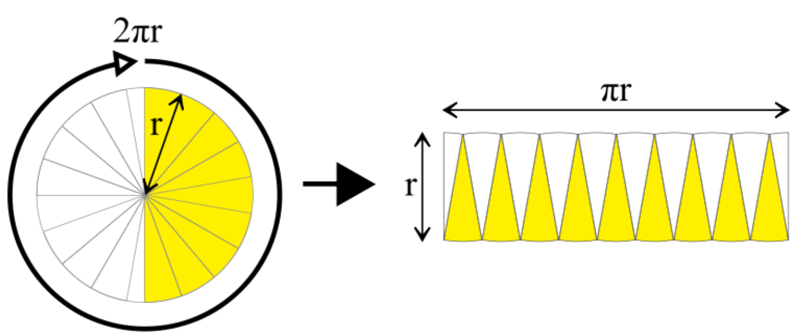
بسیا کوي، که د یوه نفر لپاره له ۷۵ څخه تر ۸۰ سانیمتره د میز په سور، ځاي په پام کی نیول شوی وي؟ دا میز به څومره ګران وي، که یو څلوری متر یا مترمربع د کار د معاش سره ۲۵۰ مارکه ګران وي یا ۲۵۰ مارکه ارزښت ولري؟

دمیز چاپیریال دی $U = pi.1m=6,248m^2$ په د هرکنفرانس برخوالو لپاره ۷۵ سانتي متره سرورځاي په پام کی وي، نو د میز چاپیریال دی : $8.75= 600cm$

د ۸۰سانتیمتره ځاي د نفر په سر $80.8 = 640cm$. منځ ارزښت يې $6,2m$ دی. پس د نېکو هیلو سره ټول خاي نیولی شي

مېز دا هواره لري: $F = \pi.1m = 3142m^2$ او له دي امله $3,142.250=785,40$ یاني الماني مارکونه ارزښت لري..

په لاندې څیره کې کتل کیږي، چې د ګردی منځهواره نزدې



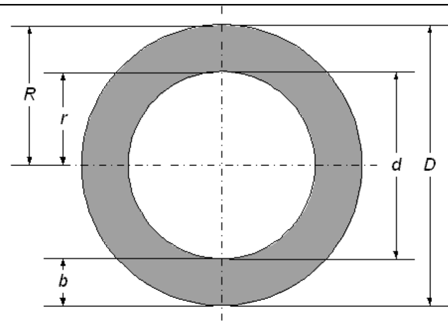
$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

ده (په پورته څیره کې د څیرې کوچنیوالي له امله د ګردی څیره لږ تخریب شوه، خو دا ستونځې پوهوړ دي۰

ګردنېوټه او ګردیبرخه، ګردیکړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

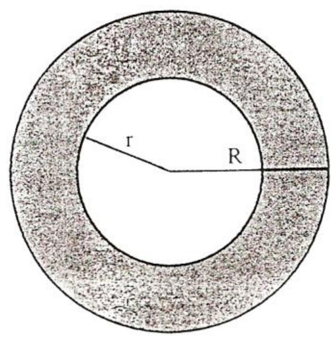
ډېر وخت دننه- يا خونديګردئ له چاپېريالګردئ کوچنۍ وي. نو له دې امله د دوي ترمنځ يوه کړئ منځ ته راځي، چی د هغي منځهواره د دواړو ګرديو د کمون يا توپير څخه شميرل کيږي٠



جمله : موږ دوه ګردئ لرو، چې د چاپېريالګردئ يا دباندې ګردئ وړانګه R او د دننه ګردئ يا خوندې ګردئ وړانګه r

ده، نو د

$$F_K = \pi R^2 - \pi r^2$$
$$F_K = \pi (R^2 - r^2)$$
$$F_K = \pi (R - r)(R + r)$$



خيره ۱۲۰

بل ډول يې: يوې ګرديکړئ منځهواره ده

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

همداسې کيدئ شي، چې د ګرديکړئ منځهواره د ګرديبرخې د سور او دننه او دباندې ګردئ د نيميو څخه هم وشميرل شي، چې په لاندې کې يې ګورو:

$$A = (D - b) \cdot b\pi$$

پيلبيلګه:

د کړاو ميز درز پيداکړ. چی له غاړې يا ژئ پنځه سانتي متره دننه لور ته ځغلي. ښاغلی کړاو فکر کوي ، چې که داميز په پنځه سانتيمتره کوچنی کړی . کوم ميز هواره پاتي کيږي او ګرديکړئ چی له منځه ځي ځومره لويه ده؟

او د همغه پيل نيونی سره لکه د مخه ځومره نفر اوس په ميز ځاي نيولی شي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

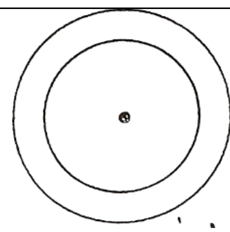
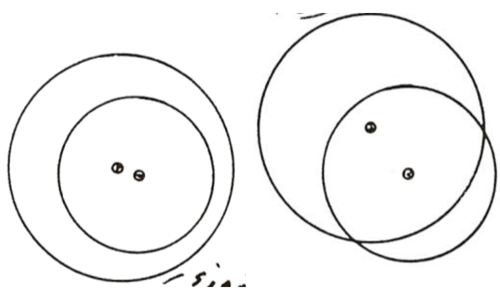
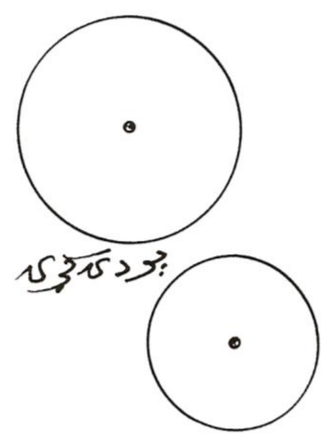
$F = (0,9m)^2.Pi = 2,835m^2$

د ګرديکړی منځهواره او چاپيريا په لاندې ډول دي

$F \quad = 1,95m.0,05m.Pi = 0,30m^2$

$U' = 2,095m.Pi = 5,969m ; U' :8 = 74,6 \text{ cm}$

د داسې لړ ستونځو سره بيا هم ټول کسان پر ميز ځاي نيولی شي۰

هغه ګردی، چې منځټکي يې يو پ بل پريوځي کونځنتري يا راټول يا يومنځي بلل کيږي او پرته له دې دکسځنتري يا نه يومنځي بللکيږي.	
تر هغې چې يوه ګردی ټوله په بله کې پرته وي، يدی شي چې د راکښلو له لارې په يومنځي يا کونځنتري ګرديو بدله شي	
	دا يو نايومنځي ګردی دي

هغه دوه يا زياتې ګردی چې منځ ټکي يې يو په بل پريوځي کونځنتري Konzentrie يا راټول او په غير له دې اکسځينتري Exzentrieيا ناراټول بلل کيږي .تر څو يوه ګردی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټوله په بله کی پرته   وي کیدی شي چی د راکښلو له لارې   په کونځینتري ګردیو یا راټولګردیو بدلی شي.

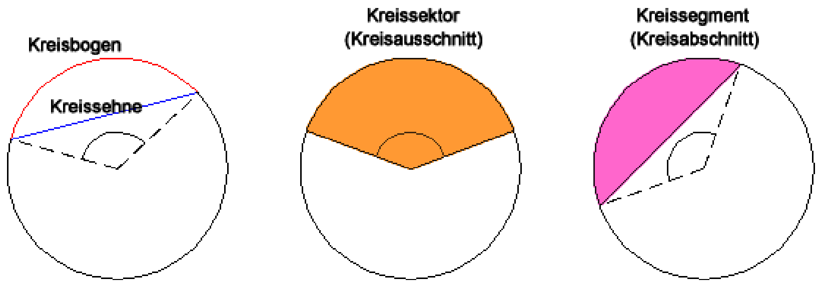
که ګردی یوبل پوره پټې نه کړي، نو د ګډو هوارو یا سطحو(= غوځډیریو) یا ګډو پاتي یا باقي شمیرنه له ستونځو   سره مخامخ کیږي .که ګردۍ یو له بل سره ګډ ټکي ونه لري نو دا ګردۍ یو دبل سره پردۍ بلل کیږي٠

ځو پیژندونه یا تعریفونه:

د ګردۍ هغه برخه ګردیټوټه (سګمنت) Segment/ Abschnitt بلل کیږي، که چیرې یوه ګردۍ د یوې کرښی له لارې یا کرښه باندې غوځه شي . داسی یوه کرښه غوځکرښه یاغوځونی یا ټوټه وونې (سیکانت) Sekante بلل کیږي. غوځکرښه ګردی په دوه ټوټو ویش. که دا کرښه د ګردۍ له منځ ځخه تیره شي، نو ګردۍ په دوه برابرو برخو ویشي، چی دا بیا ګردۍ نیموونې بلل کیږ. هغه غوځونې چی له منځ ټکي تیره شي، د ګردۍ نیمی یا لنډ: نیمی بلل کیږي. که ګردی په یوه ټکي کی لمس کړی نو دا کرښه تانجنت بلل کیږي او که له ګردی ځخه دا کرښه دباندې تیره شي نو تیریدونی کرښه بلل کیږي .په ګردۍ د غوځکرښی دننه پرته برخه د ګردۍ ټوټونې   (Sehne) یا وتر بلل کیږي .ټوټونی یا Sehne بندکرښه ده په داسی حال کی چی غوځې ، تنجنت او تیریدونکی ناپاې کرښي یا ـلکه، چې ورسره بلد یو - کرښې دي .د یوه ګردۍ ځخه د دوه وړانګو په مرسته کیدی شی یوه برخه راغوځه شي دا برخه ګردیبرخه یا سکتور Sektor بلل کیږي. د منځټکیکونج یامنځني کونج   او لیندې   (Bogen)   b سره. مخامخ ځیره ده

په لاندې ځیرو کې د نومونو له الماني ځخه په پښتو کوونه له کیڼ وښی لورته:
ګردیلینده Kreisbogen   د ګردۍ ټوټه وونې(ټوټوونې)   Kreissehne ،
ګردی برخه   Kreissektor ،

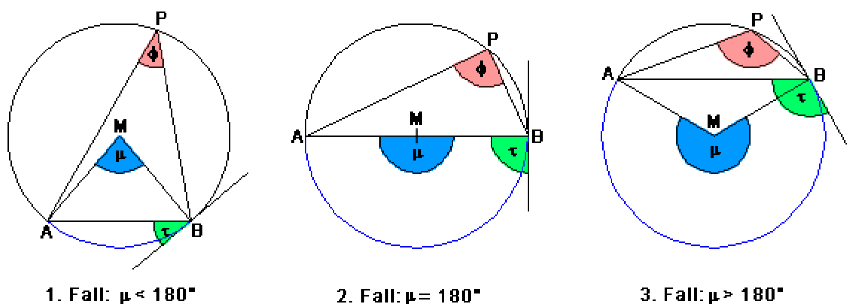
(c) ketabton.com: The Digital Library



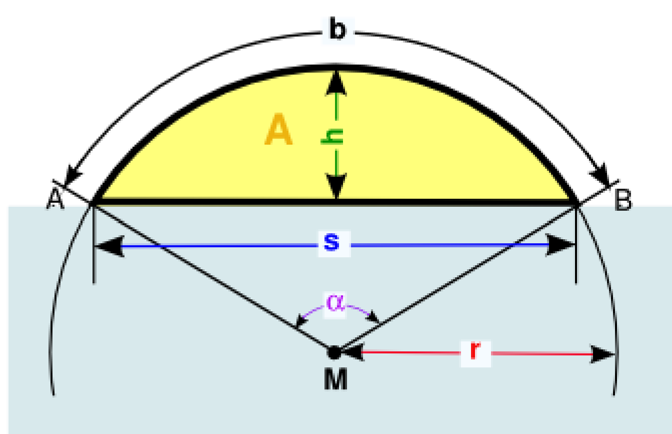
د

پورته ژباړه له کيڼ څخه و ښي لور ته: ګردی- لينده توټه ووني، ګردي برخه، ګردی توټه
.

په ګردی کې د کونجونو ډولونه:



د ګردی توټه



(c) ketabton.com: The Digital Library

گردی ټوټه Kreissegment ,

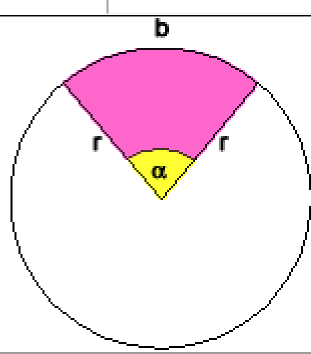
د گردی ټوټی لویې:

- منځټکیکونج Mittelpunktswinkel = α
- گردیلیندهKreisbogen = b
- ټوټې جگی Segmenthöhe = h
- وړانگه Radius = r
- گردی ټوټه وونې یا - وتر Kreissehne = s
- ټوټې هواره Segmentfläche = A
- گردی - منځټکی Kreismittelpunkt = M
- ترنهVerbindung A-M-B = برابرپینیز درېگوډی
-

	د گردیټوټي فرمولونه
سطحه مخامخ فرمول Flächeninhalt	!Error $A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\alpha,$ $A = \frac{r \cdot b}{2} - \frac{s \cdot (r-h)}{2},$
وړانگهRadius	$r = \frac{4h^2 + s^2}{8h}$
Kreissehne گردی ټوټه وونې (د ورروسته لپاره دې په پام کې وي	$s = 2r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$ $s = \frac{2h}{\tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)} = 2h \cdot \cot\left(\frac{\alpha}{4}\right)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

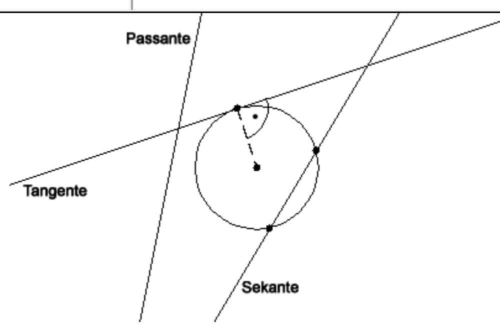
	$h = r - \left(r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$, $h = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$, $h = \frac{s}{2} \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)$	Segmenthöhe د توتي جګوالی
	$b = 2r \cdot \frac{\alpha \cdot \pi}{360°}$, $b = r \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{180°}$, $b = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot (4h^2 + s^2)}{1440h}$,	دلينديږ اوږدوالی Bogenlänge
	α , $\alpha = 4 \cdot \arctan\left(\frac{2h}{s}\right)$	Mittelpunktswinkel منځټکيکونج په درجه کچ (Gradmaß)

	Kreissektor ګردی برخه يا قطاع

د ګردی برخي يا قطاع فرمولونه	
!Error $A = \frac{\alpha}{360°} \cdot r^2 \cdot \pi$	سطحه يا منځهوارهFlächeninhalt

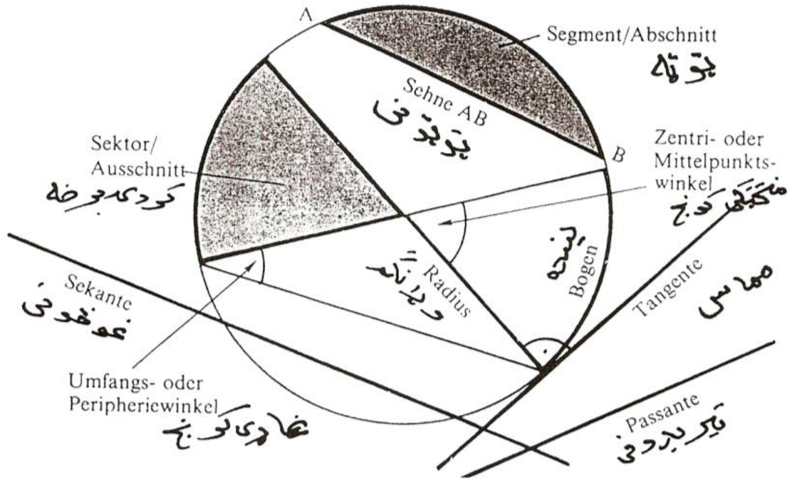
(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګردی لیندي اوږدوالی	$b = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot r \cdot \pi$
Radiusوړانګه	r
Mittelpunktswinkel (Gradmaß)منځټکیکونج(په درجه کچ)	α
Kreiszahlګردیګڼ یا ـ عدد	!Error $\pi \approx 3{,}1415926536$

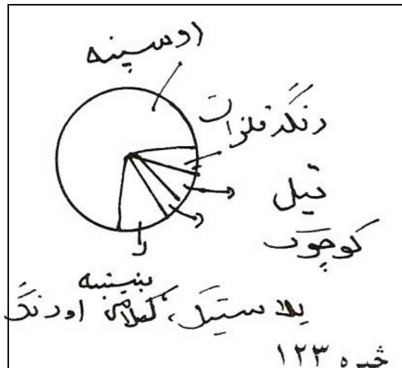
په لاندې خیره کې نومونه: تیریدونی Passante ، تانجنت یا مماس Tangente، غوڅوونی Sekante، لاندې خیره کې خو هرڅه روښانه دي.	

د پورته خیرې کې راوړي څه په لاندې خیره کې تول په لاندې خیره کې ورکړل شوي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



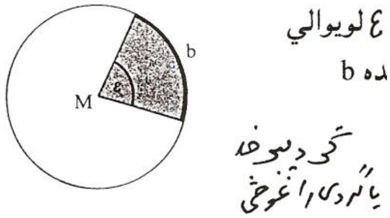
پیلبیلګه: د یوه بنس موټر جوړولو لپاره ۱۷۵۰ کیلوګرامه اومه(خام) مواد په خرڅ رسیږي یامصرفیږي. په دې کی اوسپنه او فولاد ۷۵ په سلو کي ، په پالستي، ښیښي او رنګ ټول ۹ په سلو کی رسیږي، په رنګه فلزونو او ربړ ۶ په سلو کی رسیږي، او تیل ۴ په سلو کی . یو ګردیدیاګرام وکاږئ چی هره برخه په کې ورکړ شوي وي .د ګردي ټوله هواره د ټولو موادو سره مساوي دۀ) ۱۰۰ په سلو کی (د جوړموادو برخه د ګردبرخی څخه عبارت دئ. یوه د یو په سلو کی برخه به یوه ګردئ‌برخه وي د منځکونج سره 360°:100=3,6° وی .

	یعني 4%~14,4°;6%~21,6°;9%32,4°;75%=270° څیره دی، چې د هرڅه برخه کې ورنزدې ښوول شوې وي په یوې ګردئ کې وکښل شي یا لاندې

د ګردئ برخې څیره څرګندوي» د منځکونج چې د ، ε سره یې په نخښنه کوو لویوالي

په تناسب برخهواره Fsk او هم لینده b تغیر خوري او لاندې باوري دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\frac{F_{SK}}{F}=\frac{b}{U}=\frac{\varepsilon}{360°}$	

د ډبل برابرون د دویمې برخې څخه باوري دي:

جمله : د ګردۍ برخې د لیندۍ اوږدوالی داسی دی:

$$b=\frac{n.\varepsilon}{360°}=\frac{2\pi r.\varepsilon}{360°}=\frac{\pi r\varepsilon}{180°}$$

د لومړی برخی څخه د سیکتور یا ګردیبرخی لپاره باوري کیږي

جمله: د سیکتور یا د ګردیبرخی منځهواره په لاندې ډول ده:

$$F_{Sk}=\frac{F.\varepsilon}{360°}=\frac{\pi r^2.\varepsilon}{360°}=\frac{rb}{2}$$

اړیکي $F_{Sk}=\frac{rb}{2}$ د مات $F_{Sk}=\frac{F.b}{n}=\frac{\pi r^2 b}{2\pi r}$ د لندوني څخه منځ ته راغلي

بیلګه: د خام موادو برخي (بیلګه مخ   ) هواره څومره لویه ده، که د ګردی دیاګرام ۵ سانتي متره وي ؟

F اوسپنه او فولاد = (25 π : 360°).270 = 0,218.270 = 58,905 cm³
F پلاستیك = 0,216.32,4 = 7,069 cm³
F رنګه فلزات = F ربړ = 0,218.21,6 = 4712 cm³
F تیل = 0,218.14,4 = 3,142 cm³

د ټولو ټوله یا د ټول زیاتون باید د ګردی سطحه یا هواره ورکړي:

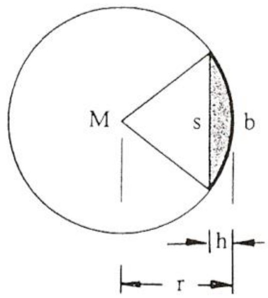
(c) ketabton.com: The Digital Library

$F = \pi r^2 = 78,54\ cm^3$

د برخهوارې ددې فرمول سره نور د برخهوارې شمیرلو لپاره هم کوم جنجال یا پرابلم نه شته. د اخرنی هواره دلته بیا د برخهوارې او د دوه وړانگو او ټوټونی څخه جوړ مساوي پښیز دریگوډي کمون دی.

څیره ۱۲۵

گردکه ټوټه



د دریگوډي هواری لپاره باور لري:

$F = s(r - h) / 2 = 0,5\ r^2 . \sin \varepsilon$

(تریگونومتري دی وکتل شي ....) او

او د دې سره ټوټه سطحه یا هواره

جمله: د گردیټوټی یا سگمنت هوارې په لاندې ډول دي:

$$F_{Sg} = F_{Sh} - F$$
$$F_{Sg} = (br/2) - s(r - h) / 2$$
$$F_{Sg} = (\pi r^2 \varepsilon / 360°) - (r^2 \sin \varepsilon)/2$$
$$F_{Sk} = (r^2/2) [\pi \varepsilon / 180° - \sin \varepsilon]$$

په کارونه یا عمل کی د ټوټه هوارې لپاره گټور نزدې ارزښت $F_{sg} = (2/3)sh$ ښوول شوی دی.

پیلبیلگه: مدیر کړاو له ځان څخه پوښتي چی ایا د گردیمیز په ځاي به یو منظم اته کو نجی هدفمند بهتر نه وای؟ نو په اختیار کي هواره او چاپیرې به څومره لوي وي؟

لمړی گردیټوټی شمیرو. په ورته ډول لکه د گردي نزدې شمیرلو لپاره، د مربع څخه و ډیرکونجي ته، مخ ته ځو او دې د اړخونو اوږدوالی s شمیرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځولاړه m، د اته کو نجيز کانتي يا ژی k او بالاخره د ګرديتوبي
جګولی h د پيتاګوراس د جملی په مرسته شميرو.
لاندي لاس ته راځي:

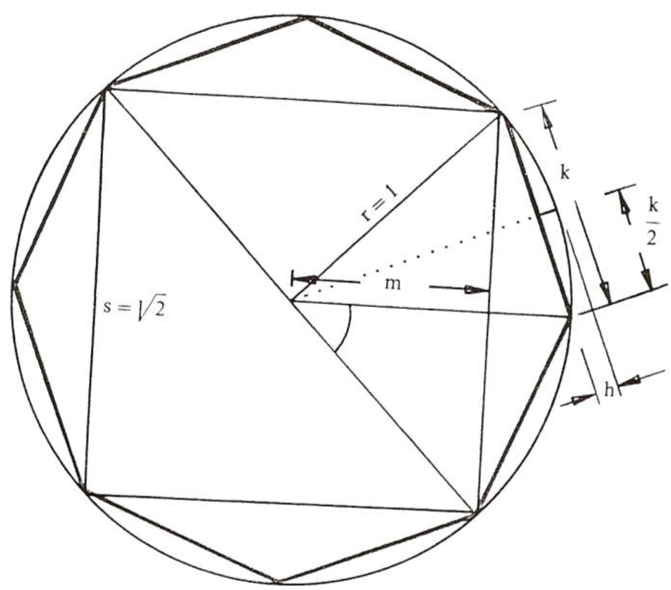
$s = \sqrt{2} \cdot 1 = 1,414$ m ; $m = \sqrt{a-(1,414 : 2)^2} = s / 2 = 0,707$ m

$k = \sqrt{(1 - 0,707)^2 + 0,707^2} = 0,756$ m

$h = 1 - \sqrt{1 - (0,765 : 2)^2} = 0,076$ m

د $\varepsilon = 45°$ له امله $b = 0,393$ m دی./و له دې سره

$F_{\text{توټه}} = 0,5.[0,393.1 - 1,414(1-0,076)] = 0,039$ m²



(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې څخه په هرصورت د ښيښې ميز جوړيږي. ټوله غورزول شوې له دې امله په لاندې توګه ده: 8.0.039 = 0,312 m² .ميز اوس لاندې هواره لري

$$F_0 - F_{\text{غورزولشوې}} = 2{,}828\ m^2$$

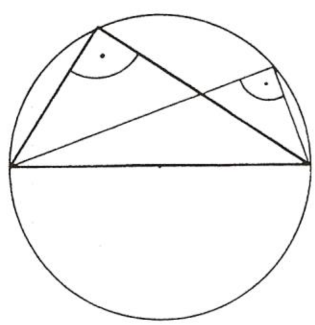
او په همدې توګه لکه د کوچني شوي ګرديهواره د وړانګې r = 95 cm سره. د کيناستلوځاي سور (k) حتې زيات شوی ، چاپيرى اوس U = 8.0,765 = 6,123 m

دی. نزديونه هم همدا ارزښت ورکوي: F = 0,765.0,076 = 0,039 m² او داسې نور.

تريګونومتريکې حل مو زر هدف ته رسوي:

$$F_{\text{ټوټه}} = \pi.1.45:360 - 0{,}5.\sin 45° = 0{,}039 m^2$$

او داسې نور . څيره

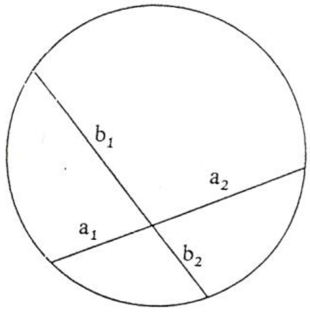


څيره ۱۲۷

ګرديجملې او ګرديخو يونه

د تالس جمله

په نيمه ګردۍ کې هر پريفري– يا ژی کونج ولاړکونج دی(څيره)



$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$

د ټوټونې جمله

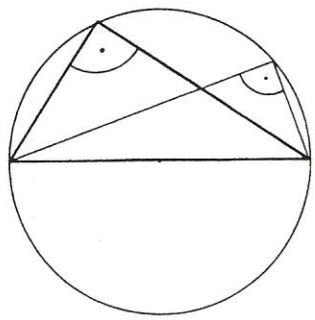
که دوه ګردۍ ټوټونې په ګردۍ کې دننه يو بل غوڅې کړي نو د غوڅبرخو

(c) ketabton.com: The Digital Library

تریګونومتریکي حل مو زر هدف ته رسوي:

$F_{ټوټه} = \pi .1.45:360 - 0,5.\sin45° = 0,039m^2$

او داسې نور . ځیره

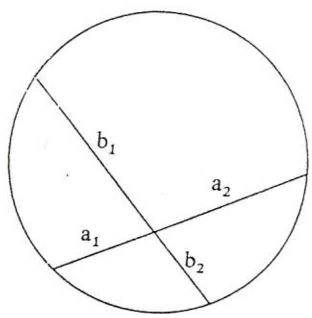


ځیره ۱۲۷

ګردیجملې او ګردیخو یونه

د تالس جمله

په نیمه ګردۍ کې هر پریفري- یا ژی کونج ولاړکونج دی(ځیره)

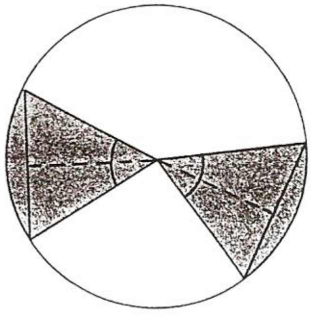


$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$

ځیره ۱۲۸

د ټوټونی جمله

که دوه ګردۍ ټوټونې په ګردۍ کې دننه یو بل غوڅې کړي نو د غوڅبرخو ځل (ضرب) یې یو ثابت دی



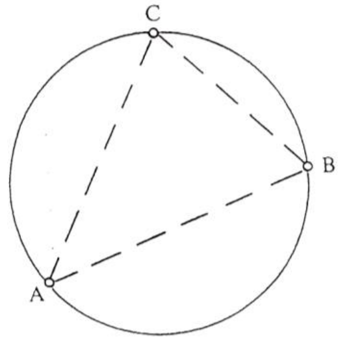
ځیره ۱۳۱

د مساوي ټوټوونو جمله

مساي اوږدې ګردیټوټې د ګردي له منځټکي مساوي فاصلې لري، مساوي منځټکي کونجونه، مساوي ګردیلینده، او مساوي ګردیټوټې او مساوي ګردیبرخې لري .

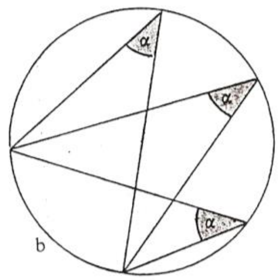
(c) ketabton.com: The Digital Library

د چاپيرګردی جمله



د درې ټکو A, B, C لپاره يوه ګردی موجود ده چې د دريواړو ټکو څخه تيريږي:
دا د دريکونجي ABC چاپيرګردی بلل کيږي
ځيره

د پريفري – يا ژيکونج جمله

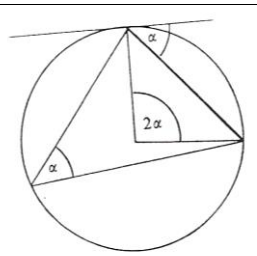


ځيره ۱۳۳

په همغه لينده باندې ټول
پريفري – ژی کونجونه مساوي دي

د منځېټکي کونج او پريفري – يا ژی کونج جمله:

يو منځېټکي کونجدوه برابره دومره لوي دی لکه په دې تړلی پريفري – يا ژی کونج(چاپيريالکونج) مخامخ ځيره.

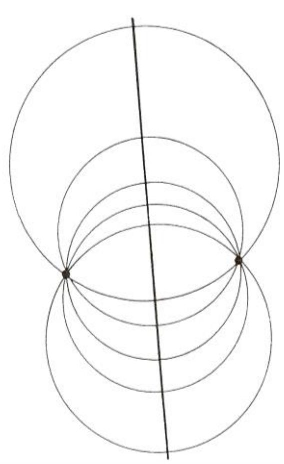


د منځېټکي کونج او د تانجنت کونج – او ټوټونکونج جمله:

د منځېټکي کونج دوه برابره دومره لوی دی لکه په دې اړوند تانجنت – يا ټوټه وونې کونج.

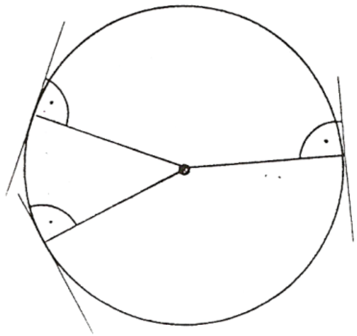
د ګرديو جمله چې په دوه ټکو کې سره غوځوي:

د ټولو ګرديو يا دايرو منځېټکي کونج چې يو بل دوه ټکو او کې غوځوييو ناپای کرښه باندې، چې ځايلاين (ځايکرښه) وايي پراته دي. مخامخ ځيره.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګې او تنجنت جمله



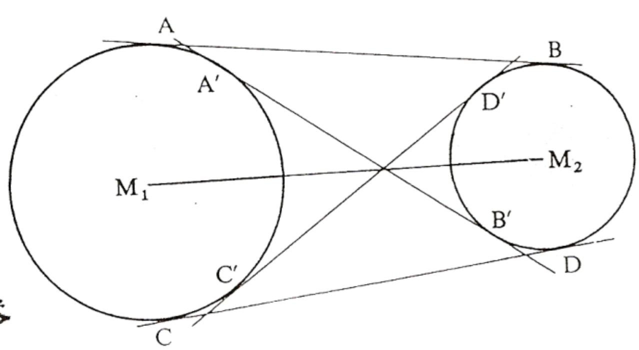
څیره ۱۳۶

په لمسټکي پرته وړانګه او اړوند تانجنت سره یو په بل ولاړ یا نیغ پراته دي.

د تانجنت جمله:

د دوه ګردیو د منځ ټکو M_1 او M_2 سره تانجنتونه دننني (دباندني) تانجنتونه نومیږي که د دوه ګردیو د منځټکوکرښه $M_1 M_2$ غوڅه (غوڅه نه) کړي. که چیرې دوه ګردي ګډ دننني او دباندني تانجنتونه ولري، پس د داوړو تانجنتونو غوڅټوټې همغه اوږدوالی لري.

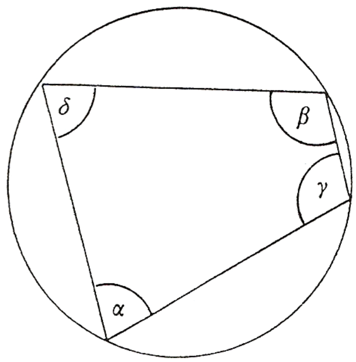
$|A'B'| = |C'D'|$ (<=>) په همدې ډول $|AB| = |CD|$



څیره ۱۳۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

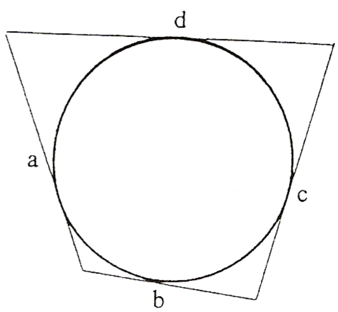
د ټوټوونو څلورګوډي جمله



څیره ۱۳۸

د ټوټونوکونجونه چی مخامخ
پراته دي یو بل سره 180° باندې
پوره کوي.

$\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180^\circ$



څیره ۱۳۹

د تانجنتونو څلورګوډي جمله

د تانجنتونو په څلوکونجي کی د مخامخ
کونجونولویوالی د نورو مخامخ کونجونو
سره مساوي دی.

$a + c = b + d$

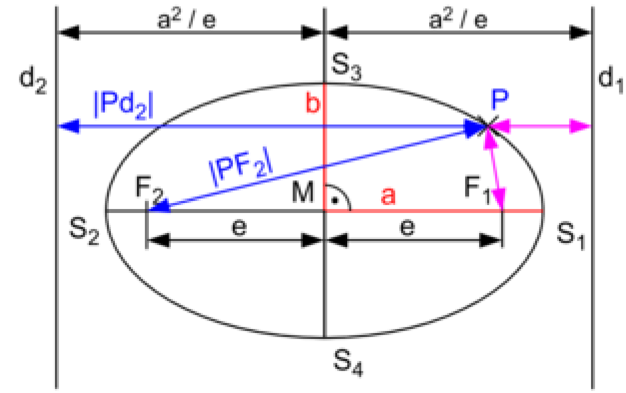
ایلیپسی(بیضوي یا هګی) (دلته موخه هواره ده) Ellipse

پیلبیلګه:

د کړاو میز جوړښت باندې موږ په اته کونجي اوبی یا حل کی تم کړی وو. دا چی په دې ډول یو میز سره تل د زخمي کیدو خطر موجود دی

پوښتنه رامنځ ته کیږي چی : داسی یو را ګردشوی ښکلی شکل ، چی ګردی نه وي او منظم غوځ وي، شته، چی د کړاو اړتیا پوره کړي؟ په ریښتونی ، داسی یو اوبی یا حل موجود دی، لکه چی لاندې څیره ښایي .چی هر د غاړې تکی دوه تکو واټنونو ته یو ثابت واټن لري

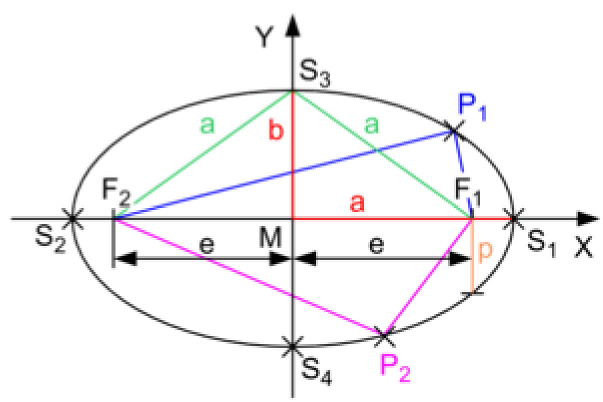
(c) ketabton.com: The Digital Library



پیژند یا تعریف:

د ټولو هغوټکو Pډیري ته چی له دوه ځاي په ځاي ټکو F1 او (F2 سوزېدټکی یا بهتره سوزونټکو(څخه ثابته یا همغه واټن یا فاصله لري، ایلیپسی نومیږي

لاندې واټنونو یا فاصلو ته سوزونوړانګی وایي. $|PF_2| = r_2 \wedge |PF_1| = r_1$



$$E = \{P \mid |\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}| = 2a\}$$

منځ ټکي) واړوی M په (Oته د ایلیپسی منځ ټکی وای، e ته د سوزونواټن یا فاصله یا لاینې ایکسڅنتریڅیتایت (lineare Exzentrizität) یا لاینې ناراټوله وایي .ددې لویو لپاره لاندې اړیکي باوري دي:

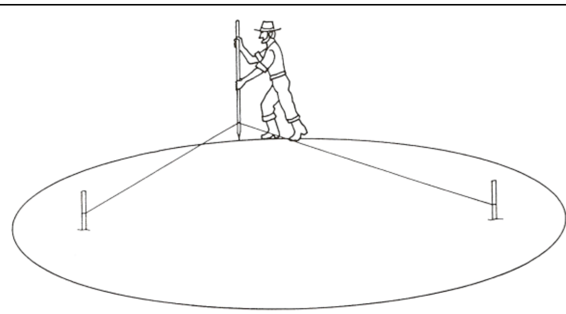
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$I........r+r=2a\wedge II........a^2-b^2=e^2$$

په دې کی a او b د ایلیپسی لوي او ووړ نیممحورونه دي. اړیکه I روښانوي، که چیرې د ایلیپسی ټکی P د نیممحور a په اخر کی وټاکل شي، IIد پیوتاګوراس له جملی لاس ته راځي که د P ټکی د b نیممحور په اخر پروت وي .دواړه ناپاکرښی چی د سوزونټکي تیریږي او په دې په O کی ولاړه ناپای کرښه د ایلیپسی سیومیتري محورونه جوړوي .د خوښي په ټکی P کي هره په تانجنت ولاړه کرښه د سوزونوړانګو ترمنځ کونج نیموي .

د ایلیپسی جوړول د باغوان لخوا یا د ایلیپسي باغواني جوړښت:

دا ځیره دې ګران لوستونکي د تمرین په توګه وباسې٠ د یوې رسی، چی په a 2 اوږده وي، په داوړو سرونو کي موږي وتړئ او دا بیا په ځمکه ټکوهي، د یو بل)خوزیدونکی (موږي یا لرګي په مرسته دا پړی راکښ کړئ یا راکاږی او وګرځوی ، دلته کوم شکل چي پیداکیږي ایلیپسی ده او دواړه د پړي د سرونو ټکي چی موږي پړې وهل شوي سوزونټکي دي. ځیره په هر کواوردینات سیسم او یا په یوه میلي متر کاغذ کونځینتري یا راټولو ګردیو په مرسته بل جوړښت امکان پیداکیږي، چی سړی د یوه ټکي دوه ګردۍ د a او b وړانګي ووهي او هره د خوښي وړانګه د ننني ګردۍ په Pb او دباندنی ګردۍ په Pa کی غوڅوي. که د Pb څخه یوه پرته کرښه وویستل شي او د همغه تر Pa دوام، نو هرچیرته یو د ایلیپسی یا هګی یا بیضوي ټکی لاس ته راځي. د ایلیپسی هر ټکی داسی پیدا کیدی شي .پیژندل کیږي چی هر 2 bته غبرګ ټوټونی



خیره ۱۴۱

د k= a / b فاکتور سره لنډ شوی دئ. له دې سره د هوارې دننه هم تغیر خورې ددې فاکتور k په اندازه

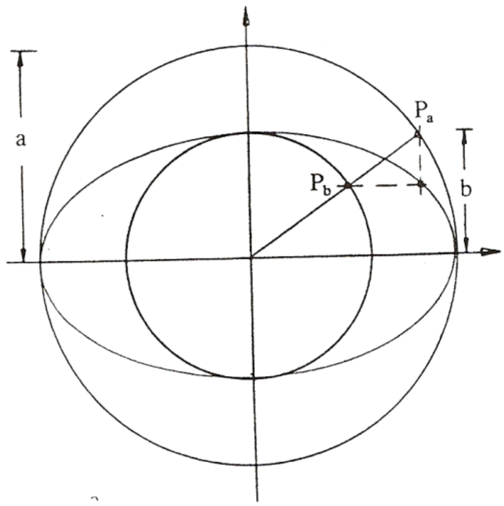
$$r\Rightarrow \pi r.(k.r)=F(hagai,baizawy)$$

او له دې چی r = a او k.r =b) د لته r د ګردۍ » لویه نیمه اکسی(محور) ده

جمله : دایلیپسی هواره ده$F=\pi ab$:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایلیپسی چاپیرونی په ساده ډول نه شي شمیرل کیدی، په عمل کی په زیات وخت کی نزدیونه یا نزدې شمیرنه بسیا کوي.



خیره ۱۴۲

جمله : د ایلیپسی چاپیری:

$$U \sim \pi(1,5 . [a+b] - \sqrt{ab})$$

او یا ګردي ته ورته ایلیپسی. دا په دې مانا چی $a \sim b$:

$$U \sim \pi . \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

دا فرمولونه، که $a = b$ وي د ګردي چاپیري ته ځي:

$$U = \pi(1,5 . [a+a] - \sqrt{a^2}) = \pi(3a-a) = 2\pi a = 2\pi \Leftrightarrow$$

اویا په په همدې توګه یا $\Leftrightarrow$

$$U = \pi . \sqrt{2(a^2 + a^2)} = \pi . \sqrt{4a^2} = \pi 2a = 2\pi r$$

بیلګه:

کوم خورا لویوالی د بناغلی ګړاو میز په ایلیپسي یانیضوي یا هګي خیره لرودی شي ؟

لوي محور $a = 1m$ پاتي کیږي، کوچنی محور دی: $b = 95cm$، داچی میز باید د درځ ژوروالي پورې غوځ شي. نو له دې امله هواره ده:

$$F = \pi .1.0,95 = 2,985m^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چاپیری کیږي:

$$U \sim 1(1,5.1.95 - \sqrt{0,95}\,)\ 6,127\ m \quad <=>$$

یا په همدې توګه د بیضوي یا هګۍ و د ګردۍ فورم ته یا ګردیځیرې ته نږدې فورم نیسي U ~ 6,128 m. له دې امله هګیځیره د میز لپاره مساعد اوبې یا حل دی.

تمرینونه

۱ – په کالیفورنیا کې د یوزیمیت ملي پارک Yosimite National Park ، خپل ماموت ونو (Mammutbaumbestände) له امله خورا مشهور دی. کوم چاپیری یې هغه ونه لري چې وړانګه یې ۷ ، ۴ متره وي؟

۲ – د لاس ساعت دقیقه ښونکی ۱،۵ سانتي متره اوږد دی(څرخونمحور– څوکه)، څوکه یې په یوه سانیه، یوه ساعت، یوه ورځ، یوه اونۍ، یوه کال کې څومره لار وهي؟

۳ – ځمکه نږدې ۶۳۷۸ کیلومتره یوه قطبي(اکواتور) وړانګه لري. قطبچاپیری یې څومره دی ؟

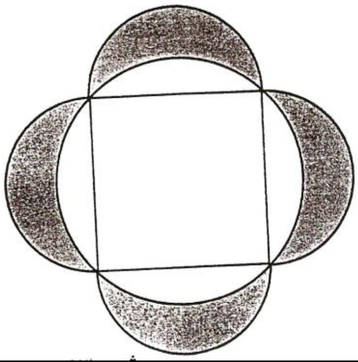
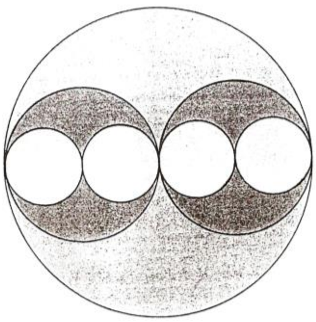
۴ – په خیال کې دې ولړو، چې له اکواتور یا قطب څخه یو پړی غزوو (۴۰۰۰۰ کیلو متره)، کوم چې د اکواتور یا قطب له چاپیري څخه یومتر اوږد دی. د یوه ځانګړي تخنیکی چمتووالی له لارې په هرځاي کې د ځمکې څخه په همغه واټن راوړل کیږي. ایا دا واټن پوره لوي دی چې سړی ددې ترمنځ یوه د (ګیرکلی) پاکي وځایوولی شي یا ځاي کړای شي؟

۵ – د غوځهواره به یې د ځمکې سره څومره وي که د اکواتور یا قطب په اندازه جګ وي؟

۶ – په اکواتور یا قطب دوه ځایونه څومره لري دی، که یو له بل یوه اوږددرجې په

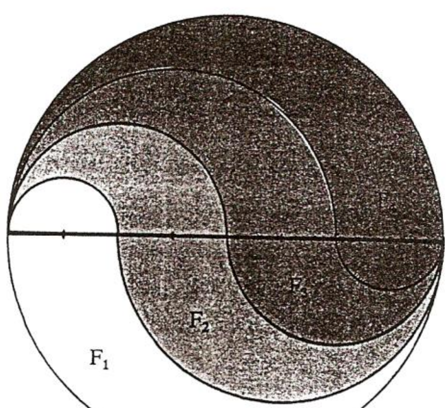
انداه لرې وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – د ګردۍ [اپریا ل ځنګه تغیرخوري، که د هغه وړانګه دوه رابره شي یا په همدې ډولنیمه شي؟ ۸ – وښایې: د مربع هواره د ځلورمې میاشتو(سپوږمیو) د هوارې سره مساوي ده؟	
د ځیرې سره سم د ګردیو هوارمتن یا د هوارو دننه د مساوي وړانګو سره وټاکۍ. د ا هره یوه د لویې ګردۍ په سلو کې څومره جوړوي؟ وښایې، چط ځلورو واړو ګردیو چاپرۍ د همغې وړانګې سره دومره لوي دی لکه د راچاپیره یا دباندې ګردۍ چاپرې. ۱۰ – د یوې مربع د باندې او دننه یوه ګردۍ راګرځیدلې. د دواړو ګردیو هوارې یو بل ته ځنګه متناسب دي یا ځانونه نیسي؟	

۱۱ – د دوه ګردیو منځ ټکی د مساوي وړانګې $r = 7{,}2$ cm سره، یو له بل دومره لرې دي لکه دا وړانګه . د دواړو ګردیو ګډ هواره اندازه کړی، چې څومره ده؟

۱۲ – په یوه ګردۍ ، چې وړانګه یې $r = 10$ cm ده، که یوه ګردیکړی کیښول شي، چې هواره یې دومره لویه ده لکه د دننه ګردۍ هواره. د دباندې ګردۍ وړانګه به څومره وي؟

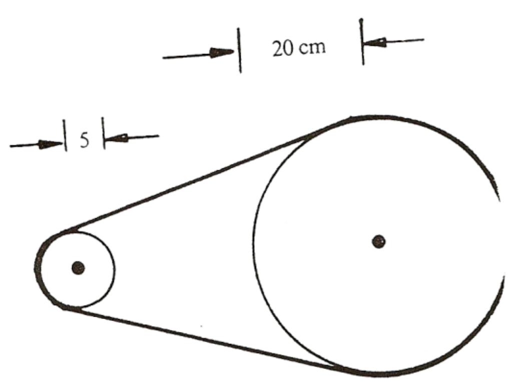


ځیره ۱۴۵

۱۳ – د یوې ګردۍ برخهوارې، F_1 او F_2 ، لکه په ځیره ۱۴۵ کې چې ورکړ شوي، وښایی، چې وړانګه یې $r = 4$ cm

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي. وښايي چې هواره په څلورو مساوي
هوارو ټوټه شوې ده (څيره ن [illegible]۸)
۱۴ – د هغه ګردې وړانګه وښايي ، کوم چې همغه هوارخوندي لري لکه :
الف) يوه مربع، چې داړخ اوږدوالی يې ۵ سانتي متره وي.
ب) يوه روتی چې نيمي يې ۴ سانتي متره او ۶ سانتي متره وي .
پ) يو مساوي اړخيز دريکونجی چې د اړخ اوږدوالی ۷ سانتي متره وي.
۱۵ – د يوه پنډ پينسيل سره يوه ګردی وهل کيږي، چې دننی وړانګه يې ۵ سانتي متره وي. داچې پنسل يو سانتي متره پنډ دی ، نو دا په ريښتينی يوه ګرديکړی ده. د دې ګرديکړی هواره وشميرئ.
۱۶ – يوه ساتليت يا جوړه، يعنی مصنوعي سپوږمی، له ځمکی په يوه ګردی راڅرخي، چې سرعت يې په سانيه کی ۸ کيلو متره دی . د ځمکڅرخون لپاره دا ۱ ساعت او ۲۸ دقيقو ته ضرورت لري. وښايي چې دا ساتليت يا جوړه سپوږمی يا مصنوعي سپوږمی له ځمکی څخه په کوم جګوالي الوزي؟



څيره ۱۴۶

۱۷ – د يوه څرخونکړی يا بهتره څرخونپټی په مرسته کيدی شي څرخونحرکت يا څرخونخوزون د يوې څپی په بلی څپي راوړل يا واړول شي. په يوه ورکشاپ کی يوه دقيقه يعنی ډيره ټيك اره په بريښنا ماشين چلول کيږي يا په حرکت راوړل کيږي. د ارې خوزون يا حرکت څومره زر يا تيزدی يا چټك دی، که د ماشينڅرخونڅرخی يا ګاډيل (r = 20 cm) په ثانيه کی ۸۰۰ ځله وګرځي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ – کوم چاپیری او هواره الیپسی یا بیضوي یا هګیخیره لري که ولر:

a) $a = 40$ cm, $b = =12$ cm, b) $a = 6$ cm, $e = 1$ cm

c) $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 3$ cm, $w(r_1,r_2) = 90°$

۱۹ – وښايي: په يو په بل پرتو اليپسو کی دی $a_1 = a_2$ او $b_2 = b_1 /2$ ، نو دننی ايلپس بيضوي همدومره لويه ده، لکه په دې دپاسه ايليپسي يا هګيخيرې غاړه.

۲۰ – ځمکه په يوه کال د لمر څخه نزدې د يوې ګردی په څير راڅرخي. ددې چاپيري وړانګه نزدې ۱۵۰ ميليونه کيلومتره ده.

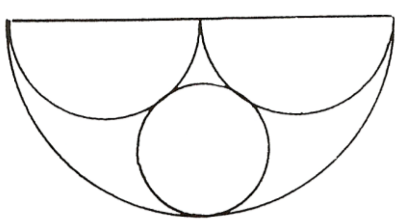
الف) د څرخونلار اوږدوالی څومره دی؟

ب) په کوم منځنی سرعت (کيلو متره په سانيه کی) ځمکه په خپل چاپيري راڅرخي؟

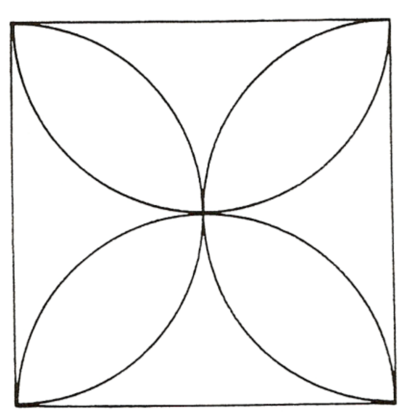
پ) په ورځ کی ځمکه نزدې څومره واټن تی کوي ؟

ت) په ريښتونی ځمکه د لمر څخه په يوه ايليپسی لار راڅرخي، چی په يوه سوزون ټکي کی پخپله لمر قرار لري. د لته هغه لنډ واټن ځمکه لمر ۱۴۷ ميليونه کيلو متره دی، او لرې واټن يی ۱۵۳ ميليونه کيلو متره دی. په دې ورزيات ورکړو سره کوچنی نيممحور وښايي، او همدا ډول د ايليپسي يا بيضوي هواره او (نزدې) چاپيری هم.

۲۱ – د ټولی هوارې کومه ټوټه برخه رنګ ده؟



خيره ۱۴۷



(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – د دوه ګرديو وړانګی ځان داسی نيسي يا په تنساب کی سره پرتی دي،
لکه 5 : 8 په لويه ګردۍ کی يو ګرديبرخه موجود ده ، چی د هغی لينده
دومره لويه ده لکه د کوچنی ګردۍ وړانګه r = 10 cm. وشميری

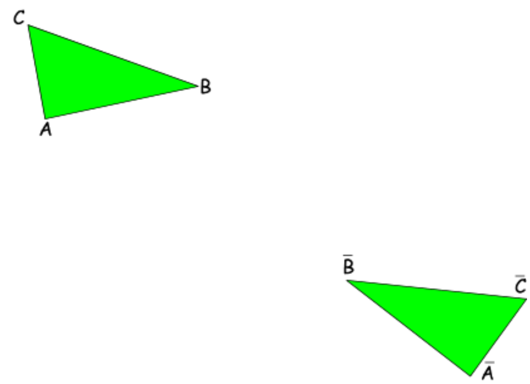
الف– منځتېکي کونج
ب – د ګرديبرخی هواره.
۲۳ – کوم منځتېکي کونج په لينديې پورې اړه لري، چي
الف) تيك همدومره لوي وی لکه وړانګه ؟
ب) دوه واره دومره لوي وی لکه وړانګه ؟
پ) نيم دومره لوي وی لکه وړانګه ؟
۲۴ – د يوې ګرديتهوتونی منځ تکي کونج وشميری ، چی هواره يی همدومره لويه وي، که په وړانګه يی چی مربع .
۲۵ – يو مصنوعي ساتليت يا جوړه سپوږمۍ ځمکه په ۲۰۰ کيلو متره جګوالي راګردوي يعني له ځمکي راګرځي يا بهتره له ځمکی راڅرخي. د راڅرخونوخت يی ۱ ساعت، ۲۸ دقيق او ۲۶ ثانيي دي.
الف – سرعت يی څومره لوي دی؟
ب – په يوه دقيقه کی څومره لار وهي؟

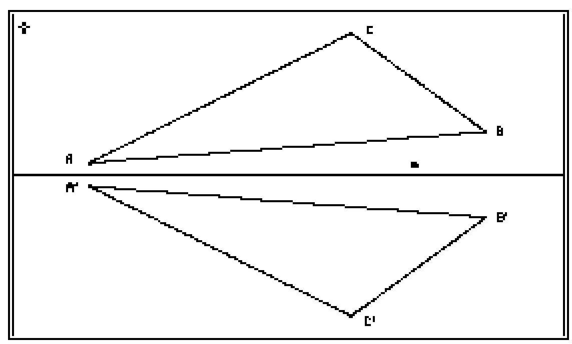
(c) ketabton.com: The Digital Library

کونګرواینخ ځیرونی(برابرې ځیرونې)

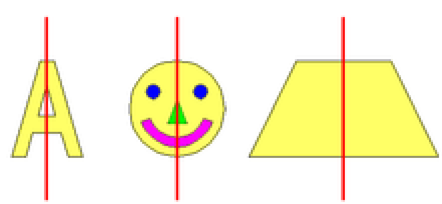
Kongruenzabbildungen

Congruence mapping





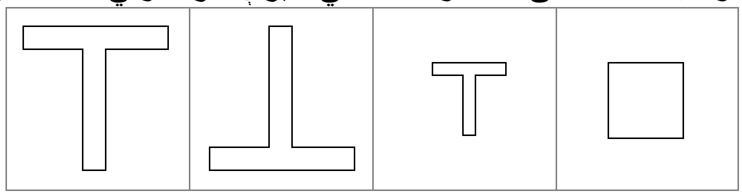
سیومتري ځیرې یا شکلونه   Symmetrische Figuren



د هوارو څخه مو ولیدل، چی د هغو ترمنځ سیومتري ځیرې یا شکلونه، یعنی داسي په نامه برابرې یا مساوي او نیمايي ځیرې:

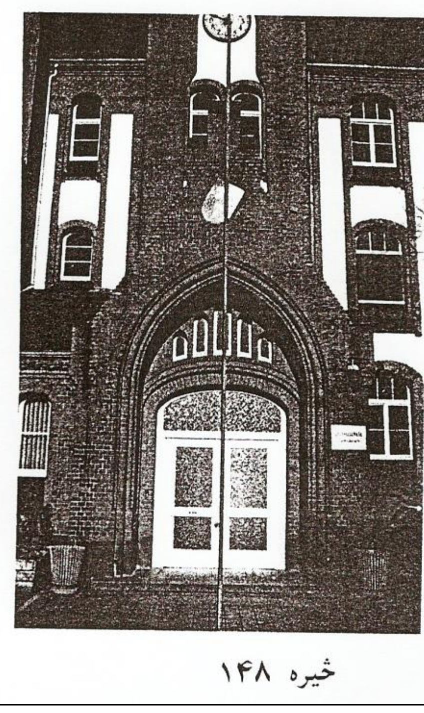
(c) ketabton.com: The Digital Library

د شمیرپوهنی له مخی د ساده شمیرورټوب له امله تخنیکي، د هغو د ساده بدله ونی له امله، او د ښکلا له مخی، د هغو د همغسي ځیرې ځرګندوني له امله یو ځانګړی ځاي نیسی)

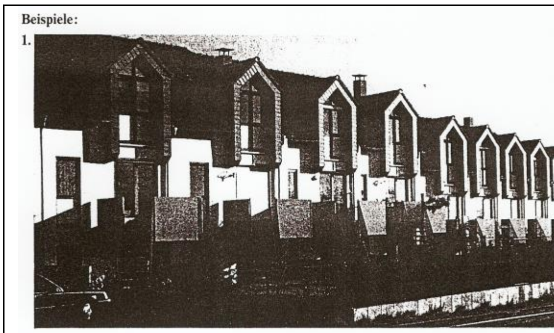


په پورته ځیره کې کیڼ لور ته دوه د ټي ځیرې یو بل پټوي، کیڼ لور دې د کښلی ټي سره برابرپټوونی ټي وکښل شي٠ دا محور سیومتري ځیرې دي٠

په ځانګړي ډول د اخرني شکلونو ځخه کتل کیږي چی سیومتري تل دا مانا نه لري چی شکلونه دې په دوه نیمو وویشل شي، کیدی شي دوه یا زیات شیان وي ، چي د هغو د ترتیب له امله یو له بل سره خیالي سیومتري اړیکي ولري. دوه یا زیات شکلونه لکه چی ځنګه ضربالمثل وایي چي داسي یو بل ته ورته دي لکه » دوه هګی .» له دې ځایه تر کونګروانیځ یو پل دی



ځیره ۱۴۸



ځیره ۱۴۹

پیژند : هندسي شکلونه کونګروینځ (برابر) بلل کیږي، که په فورم ، بڼه (ځیره) او لویوالي کی یو بل سره یو شي وي او یواځي ځاي یی یو له بل بیل وي٠

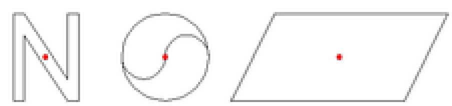
(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : زه به وړاندیز وکړم، چې کونګروانیخ ښیروني » ورته برابرې ښیروني » وبولو، ځکه، چې یو بل ته ورته دي او برابرې هم دې یاني که یو پر بل واچول شي یا یو پر بل پریوزي، نو یو بل پټوي٠

د دوه شیانو A او B د کونګروانیخ د لیکلو سومبول په لاندې ډول دی:

$$A \sim B \quad <=> \quad A \sim B$$

د کونګروانیخ خویونه :
۱ - کونګروینخ ښیرې یا - شکلونه یو په بل پریوځي یا یو بل پټوي .
۲ - کونګروینخ ښیرې یا شکلونه د کاغذ په هنري غبرګولو یا غوڅولو په بنسټ، کیدی شي یو په بل پریوځی٠



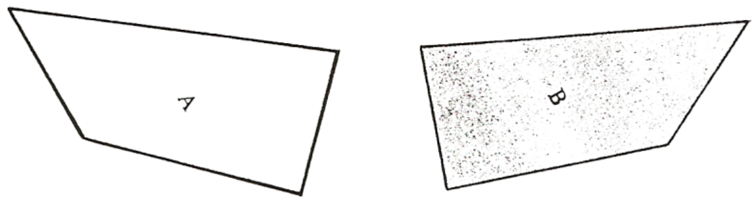
پورته ښیره ټکی سیومتري ده ٠
غوڅول د شمیر پوهنی کار نه دی، مګر غبرګول کیدی شي وي.

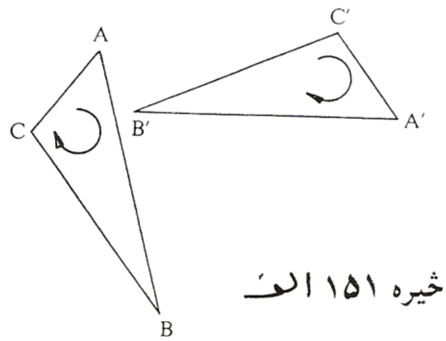
لنډ : محورهنداروني او کربنهنداروني ، څرخون، ټکیښیره ونې او راکبنني ګونګروانیخ ښیره ونې دي٠

پوښتنه کیږي چې :
په شمیرپوهنه کی عملیي شته چې د هغي په مرسته یا د هغي له لارې یا د هغی په وسیله ښیرې یو په بل پریوتی - او پټیدی شي ، داسي کارونی یا عملیي په کړنه یا عمل کی شته او دا کونګروانیخ ښیره ونې یا ښیره کوني بلل کیږي.
هر کونګروانیخ ښیره یا شکل او لویوالی (منځهواره) ساتي. په دې ډول باید کونجونه او اوږدوالي ریښتونی وي، چی په دې ډول د برخو تناسب، کربنوتناسب، برخو تناسب غبرګ کرخو تناسب (ځاننیونه) ریښتونی دی. لاندې به وښوول شي چی زیات تر زیات د کونج څرخونلور یا سمت تغیر خوړونکي دی، که څرخونلور تغیر ونه خوری نو یولوریز کونګروینخ بلل کیږی او که څرخونلور تغیر وخوري نو شکلونه مخامخ لوریز یا په څټ یا برعکس کونګروانیخ بلل کیږي

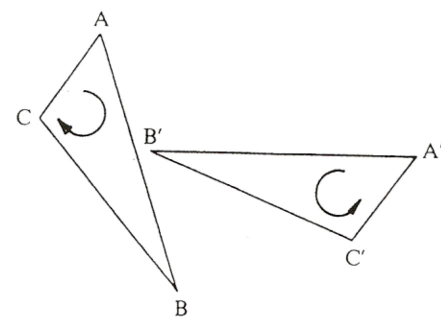
(c) ketabton.com: The Digital Library

شیره ۱۵۰

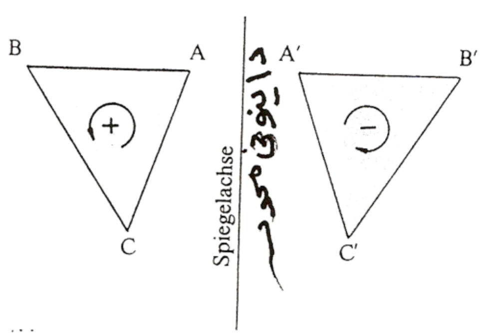




شیره ۱۵۱ الف



شیره ۱۵۱ ب



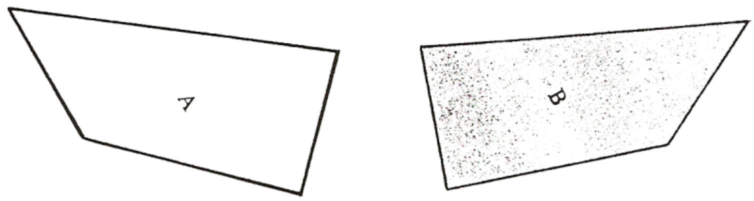
شیره ۱۵۲

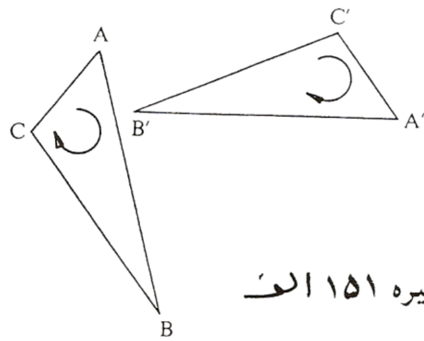
کرښهنداروونه(په کرښه منعکسونه) Geradenspiegelung

یو کونګروانیخ شیره ونه مو په پیل شیرونو کی وښوده. کرښ اینونه یا کرښهنداروونه یواځنی مخامخ کونګروینځ شیره ونهی ده ، ځکه چی د کونځ د لور تغیر په کی منځ ته راځي.

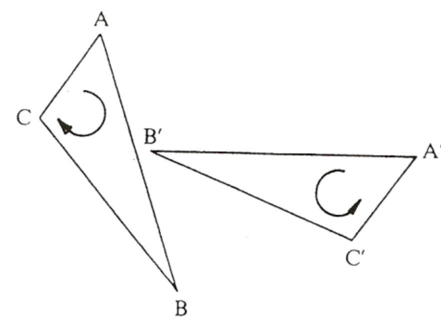
(c) ketabton.com: The Digital Library

خیره ۱۵۰





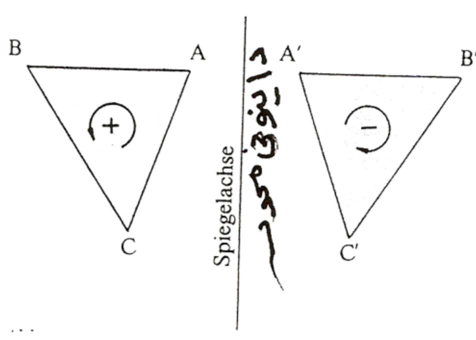
خیره ۱۵۱ الف



خیره ۱۵۱ ب

کرښهندارونه(په کرښه منعکسونه) Geradenspiegelung

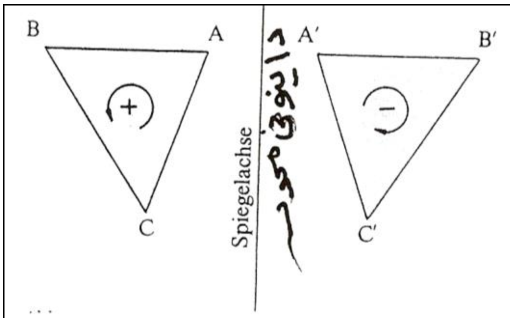
یو کونګروانیخ خیره ونه مو په پیل خیرونو کی وښوده. کرښ اینونه یا کرښهندارونه یواځنی مخامخ کونګروینخ خیره ونهی ده ، څکه چی د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.



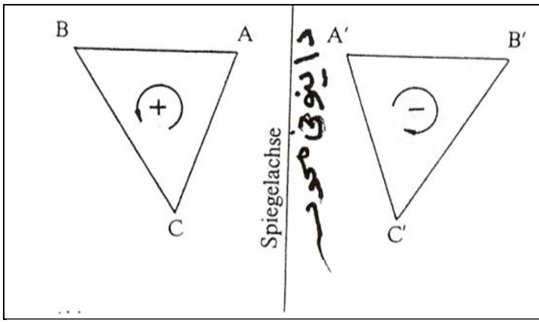
خیره ۱۵۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

په کرښه هنداورنه(پ کرښه منعکسونه):
په پیل انعکاس کې مو یوه کونګروانځ تشکیل وښوده. په کرښه انعکاس ورکول یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکه چې د زویې د لور منځ ته په کې راځي.

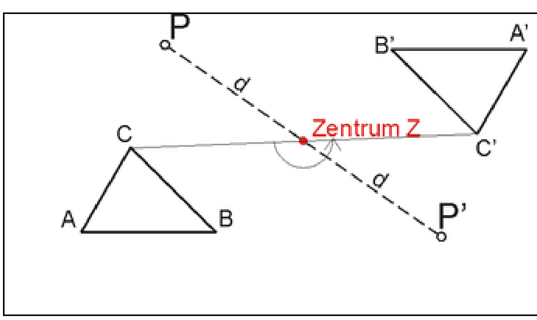


په کرښه هنداورنه(پ کرښه منعکسونه):
په پیل انعکاس کې مو یوه کونګروانځ تشکیل وښوده. په کرښه انعکاس ورکول یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکه چې د زویې د لور منځ ته په کې راځي. لاندې ځېره دې وکتل شي

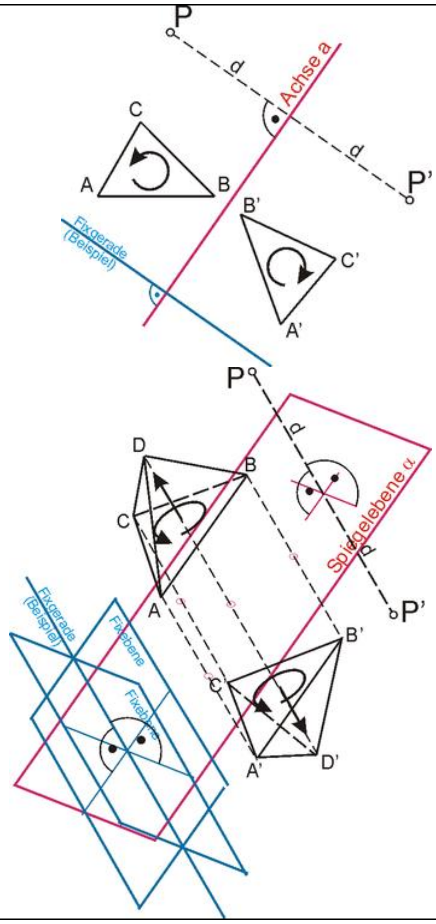


د درې ګوډي ABC مثبت- یا زیاتونلوریز ځخه یو منفي لوریز یا کمونلوریز درې ګوډی A'B'C'جوړیږي. پخپله کرښه g په اینونکی کرښه یا په اینونکرښه یا په هنداروونکرښه بلل کیږي او یا د اینه ونې محور. په دې تول پراته ټکی تغیر نه خوري) ځاي په ځاي ټکی (فیکسټکی (Fixpunkte دی، له دې امله کرښی g ته د ځاي په ځاي ټکوکرښه هم وایي. تولی په g نغولاړې(لنډ: ولاړې) کرښي د اینه کولو په بنسټ په خپل ځان ځېره کیږي، مګر تول ټکي د g سره د غوڅټکي په استثني یا بی له غوڅټکي کرښي ټکي د خپلي فاصلی په ساتلو ځاي بدلوي. له دې امله دا کرښي ځاي په ځاي کرښی بلل کیږي ۰
په لاندې ځیره کې کیڼ لور ته درې ګوډی په ټکی ، چې د کښلي کرښی منځ ټکی دی ، ښي لور ته ځیره کیږي او دا په همدې ټکي ۰ کتک کیږي، چې د هر ځیره ټکی واتن د همدې ټکي ځخه همغ دی لکه د ځیره کووني ټکی واټن له دې منځټکی ځخه .

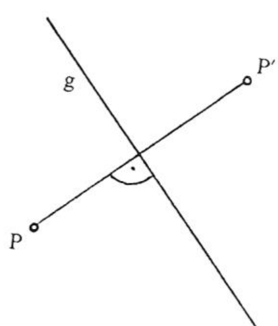
په پورته محور اینه ونه کی لیدل کیږي، چې د محور ځخه د ځیرې او ځیره کونکي ټکي سره برابر دي، خو ګورو، چې ځرخون لور یې همغه ځرخونلور نه ده۰۰



(c) ketabton.com: The Digital Library

	په مخامخ ځیره کې اینه ونې کښل شوي دي

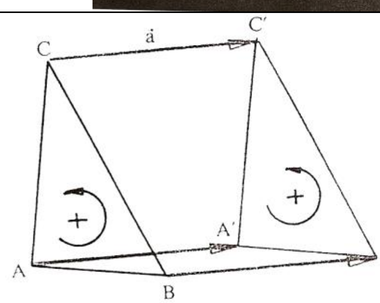
د کرښ اینوونو(هنداروني یا انعکاس) جوړښتځیرنه

 ځیره ۱۵۳	۱ - دا ټکي له هر په نخه ټکي (ډیرګوډي کی د کونجټکی او په ګردي کی د منځ ټکی) په g ولاړ یا زوړند پریوځي او دا له g اخوا په فاصله د |Pg|غزوي. (دا د مخه راغلي .) ۲ – ټول ټکی د اصل په ترتیب سره وتړی(په ګردی کی : په M'یو ګر دی د r'=r په وړانګه ووهئ). د ځیرې او پخواځیرې(اصل) د ټولشکل لپاره بیا g سیومتریمحور دی، دا په دې مانا، چی ټوله ځیره د اینونې سره په خپل ځان ځیره کیږي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

هره کرښ اینوونه Sg کیدی شي چې په g بیا کرښ اینونو باندې په همغه محور بیرته راوکرځول شي.دSg په یا په ښت ځیره ونه یا مخامخ ځیره ونه بیرته Sg دی. دا دځیرو زیاتواره ځیره ونو ځانګړی حالت د٠
دلته بیا سړی د ځیره ونو د ځنځیرونو څخه خبرې کوي او د دې لپاره تړلنخښه »°« په کار اچول کږي. کرښ اینوونه د ګونګراینځو لاندې یو مرکزي ځای یا منځځای لري، ځکه چې ټولی نورې اینونی د کرښ اینوني ځنځیرونو باندې بیرته راګرځول کیږي، لکه چې په لاندې کی به وګورو.

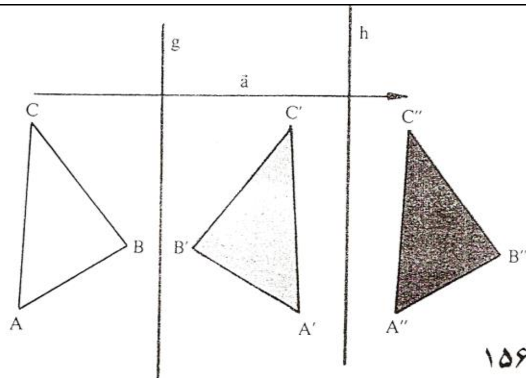
راکښنه یا کښونی Verschiebungen

	پیژند : غبرګکښول ،لنډ کښول یا وړل Va د خپل وړلوکتور یا وړونوکتور یا کښونوکتور له لارې یواځنی ټاکلی دی (ددې لپاره د وکتور لوست وګوری٠
 ځیره ۱۵۵	د وکتورونو لاندې مساوي اوږده او په یوه لور غشي پوهیږو، کوم چې د ځیرې وتلتکي په ځیرنټکو لوریز وي . (لنډ : د وکتور لاندې یوه لوریزه کرښه پوهیږو، د ځانګړو شرایطو لاندې) د کښولو لپاره پریکړی د وکتور اوږدوالی | a | دی او د وکتور لور. کښول په همغه لور کونګرواینځیروني دي، دا په دې مانا چې د ځرخونلور ساتلی پاتي کیږي٠

د کښولو جوړښتځیرنه
۱ - په هر نخښه شوي ټکي (په ډیرګوډي کی ګوډونه او په ګردۍ کی منځټکی)د ګښولو وکتور a وکاږئ (برابر یا مساوي اوږده، همغه لوراو غبرګ غشی.)
۲ - د وکتورونو اخرټکي سره د اصل په پرلپسي ترتیب ونخلوی. (په ګردیکښونو کی : په اخر ټکي د r وړانګي په اندازه ګردۍ ووهی)کښونه ځاي په ځاټکي نه لري(که د صفر وکتور دي په نامه identität ایدنتیتي یا کټمټ ځیرونی څخه تیر یا صرف نظر شو)

(c) ketabton.com: The Digital Library

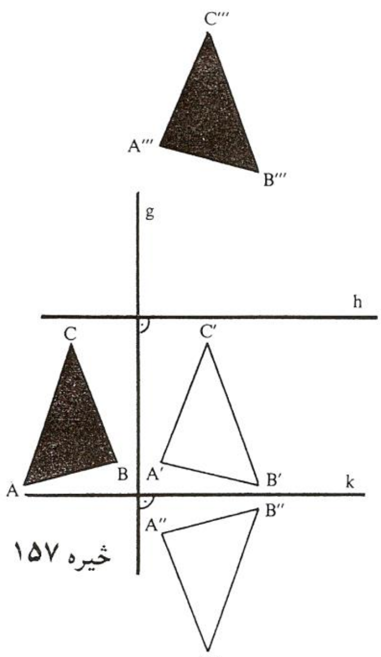
ددې لپاره ټولی له a سره غبرګی کرښي ځاي په ځاي کرښی دي، دا په دې مانا چی دوي په خپل ځان ځیره کیږي .هر کښنول یا نوه هم ښه هره کښه ونه Va د V-a کښنولو له لارې بیرته راوګرځول کیدی شي.



۱۵۶

دلته a- وکتور د a سره غبرګ او همغومره اوږد دی، مګر په مخامخ یا په ځټ لور .هره کښنونه په دوه کرښو g او hله دوه واره اینولو یا هندارونو له لارې بیرته لاس ته راوړونکی ده، چی واټن d یی همدا د کښنولو وکتور نیم اوږدوالی ورکوي. دا بدلون یواځنی نه دی: پس په عمومي ډول باور لري: $V_a = S_g \circ S_h$ د g||h سره او |a| = 2d ، چیرته چی d د g اوh ترمنځ واټن ورکوي.

په یوه ځانګړي ډول یو په بل پسي صورت نیونکی زیات کرښ اینونه دې په دې ځاي کی ذکر شوي وي، ځکه چي دا – لکه ځنګه ټول نور واریانت یا



خیره ۱۵۷

اووښتونی – یو ساده بنستیز فورم نه ورکوي : خويوونکي یا کښووني اینونه. ټرنه $G_{a;g} = S_g \circ V_a$ یو کښووني اینونه ده،

که g || a وي.

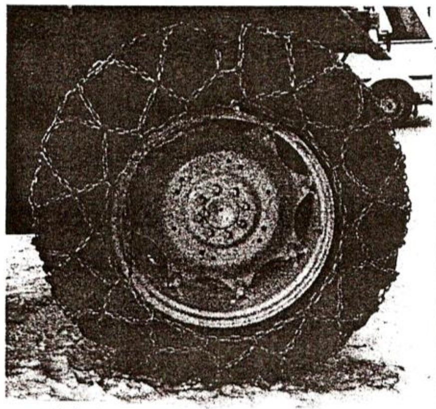
هره کښووني اینونه یا هندارونه د درې کرښ اینونو $S_h \circ S_k \circ S_g$ ټړل دي، چیرته چی کرښي h او k ، کوم چی دکښووني ځاي نیسي، په g نیغی ولاړې دي:

$h \parallel k ; h \perp g$.

یوه کښنوني اینونه ځاي په ځاي ټکي نه لري، مګر g د ځیرووني ځاي په ځاي کرښه ده. هره کښووني اینونه $G_{a;g}$ په $G_{-a;g}$ سره بیرته راکرځول کیدی شي.

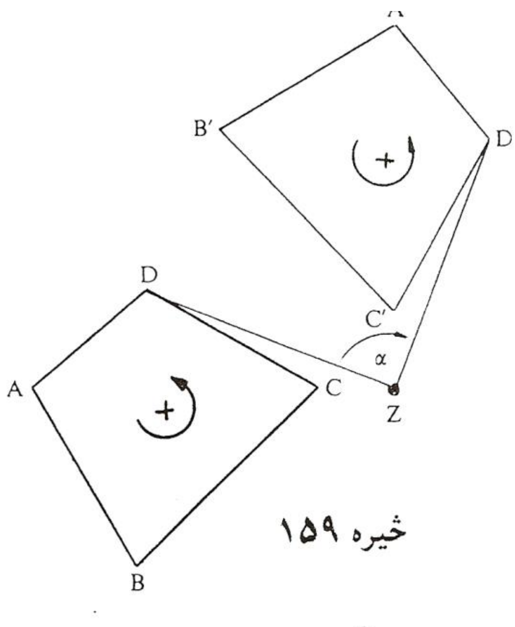
(c) ketabton.com: The Digital Library

څرخونونه (څرخونونه)



خیره ۱۵۸

تعریف : څرخون $D_{Z;\mu}$ هغه ځیرونه ده، چی په ورکړ شوي ټکي Z (څرخونټکی یا څرخونمنځ) هر اصلی ټکی P په یو ځیره ټکي 'P داسی تنظیم کړي، چی $|PZ| = |P'Z|$ او $w(PZP')=\mu$ چی μ یو د مخه ځاي په ځاي ورکړ شوی کونج دی، د څرخونکونج.



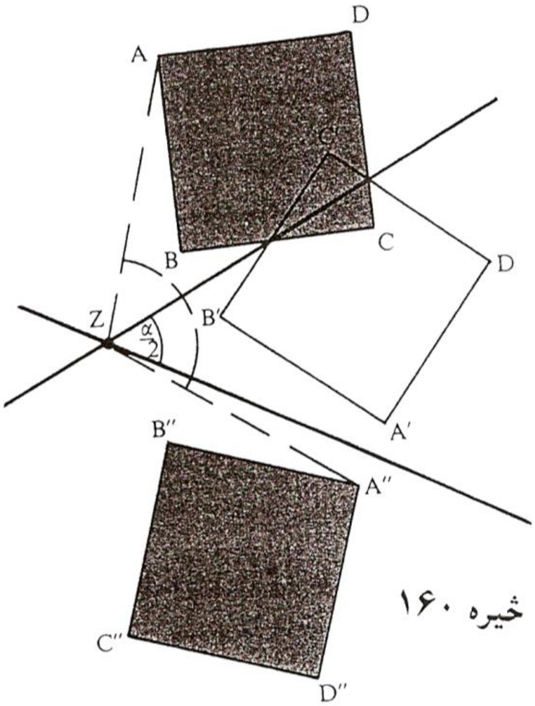
خیره ۱۵۹

پس یو څرخون د څرخونټکي Z او څرخونکونج ځخه یواځنی ټاکلی دی. د څرخونلور په مخ نخه له مخه ورکړ شوی. (ددې لپاره دې د مخه تري لوستونه پام کی وي).

دڅرخون جوړښت ځیرنه

۱ – په ټولو په نخښه ټکو (د ډیرکونجیز کونجټکي، په ګردی کی منځټکی) او

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۱۶۰

حرخونمنځ Z یوه وړانګه کیږدی . د هرټکي P واټن PZ په یوه مرستندوي وړانګه وکاږی، کوم چې له PZ سره کونج جوړوي.

۲ –لاس ته راغلی ټکی 'P په اصل پرلپسي ترتیبیو د بل سره ونښلوی (یا په همدې ډول په 'P یو ګردی د r = r' په وړانګه ووهی).

څرخون D_z یوه همغه لوریز کونګروانیځ څیرونه ده.

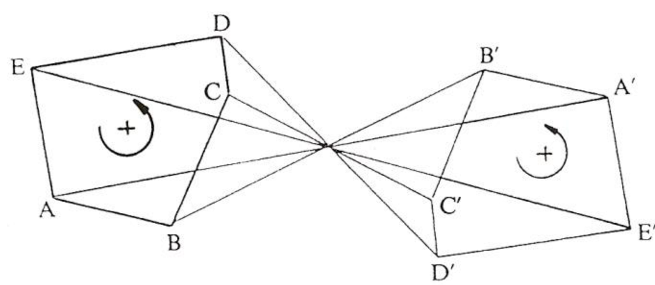
که څرخون D_z له څرخون په0° : ایدنتیتي یا کتمټ، توپیر ولري، نو دا یواځي یو ځاي په ځاي ټکی لري: پخپله Z .

(c) ketabton.com: The Digital Library

هر څرخون D_z د پـه کونج کیدی شي چی په څرخون D_z په کونج - بیرته راوګرځول شي. د جوړښت ځیرنی ځخه پیژندل کیږي، چی هر څرخون D_z د دوه کرښي اینوني چی په ټکی Z کی په کونج $2/$ یو بل غوځوونکو کرښو g او h ځاي نیونکی کیدی شي: څرخون : $D_{Z;\mu} = S_g \circ S_h$ د $h = \{Z\}, \mu = 2.w(g;h)$ g سره. (ځیره)

تعریف : یو څرخون د څرخونکونج $\mu = \pm 180°$ سره ټکی اینونه بلل کیږي. دا په دې مانا چی په ټکي اینه کیږي.

په دې توګه ټکی اینونه هم یو همغه لوریز کونګروانیڅ ځیرونه ده. (ځیره ۱۲۸)



ځیره ۱۶۱

په ټکي اینوني جوړښت ځیړنه

۱ – د اصلي ځیرې هر په نخښه ټکي ځخه یوه کرښه وکاږي، چي له اینونکي ټکي Z تیره شي، او $|PZ|$ واټن د Z په بله لور وباسی.

۲ – داسی لاس ته راغلي ټکي په پرلپسی ترتیب سره ونښلوی. (همداسی په M' یو د $r' = r$ وړانګي ګردی ووهی).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولګه

هره کونګروانیخ څیرونه د کرښي اینوني د ترلو څخه لاس ته راځي. دلته بیا هر کرښ اینونه څرخون لور بدلوي. له دې امله لرو:

> د کرښ اینونو (څرخونو یا کښنونو) جوړه تعداد یا ګڼون یو همغه لوریز کونګروانیخ څیرونه ده. د نا جوړه تعداد یا ګڼون کرښ اینونو (کرښ اینونی یا کښنونو اینونی) یو نا همغه لوریز کونګروانیخ څیرونه ده.

دیو په بل پسی د کونګروانیخ څیرونو کارونه بیرته کونګروانیخ څیرونه لاس ته راکوي. دا چی هرکونګروانیخ کرښ اینونه ده نو د پای کونګروانیخ یو په بل پسی اینونه ده. برسیره پر دې هر کونګروانیخ بیرته راګرځیدلی یا په ځټ کیدلی شي. که له دوه وو زیات کونګروانیخ څیرونی یو په بل پسی منځ ته راشي ، نو په خوښه اسوځیاتیو را یوځای کیدی شي. الجبري ټول کونګروانیخ څیرونی یو ګروپ جوړوي د ناپیلي کتمټ څیرونی سره، دا په دې مانا چی ناپیلی څیرونه ، چی په کارونه کی تغیر نه راولی کتمټ څیرونه ده. (د ګروپ لپاره دې نښلونی برخه وکتل شي)

په عمل کی د دریګوټ ی کونګروانیځ جملی له پوره اهمیت ډکی دی

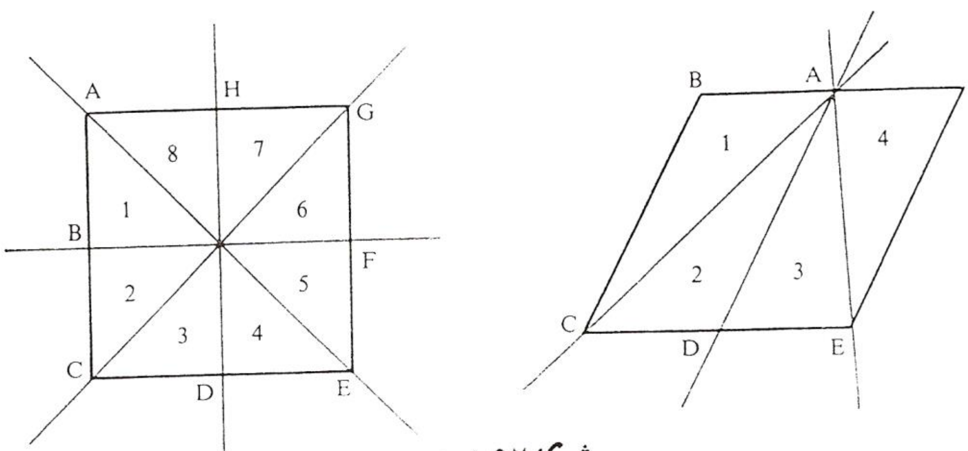
> **کونګروانیخجملی:**
>
> الف) په خپلو دري اړخونو کي (SSS) یا
>
> ب) په دوه اړخونو او لهدې اړخونو رابند کونج کی(SWS) یا
>
> پ) په دوه اړخونو کی او د اوړداړخ مخامخ کونج کی (SSW) یا
>
> ت) په یوه اړخ او دواړو راګیر کونجونو کي (WSW) یو بل سره وخوري یا سره مساوي شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – په یوه غبرګ اړخیز ABCD هندارونی $S_{BC} \circ S_{AB}$ وکاږۍ.

۲ – د کونګروانیخ جملو په مرسته وښایي، چی غوڅکرښی پیلڅیرۍ په کونګروانیخ برخو توټه کوي.



خیرۍ ۱۶۲

۳ – په یوه بیلګه وښایي :

الف) $S_g \circ S_h \models S_h \circ S_g$

ب) $S_g \circ (S_h \circ V_g) = (S_g \circ S_h) \circ V_g$

۴ – د «هیلګولند» کیشتی او د «کوین ماری» لوي کیښتی ترمنځ واټن ۵ کیلو متره دی . هیلګولند کیشتی په شمال لودیځ ۶۰ درجي(N60°W) دلته N د شمال او W د لودیز لپاره دی، کرښلاینی حرکت کوي او «کوین ماري» په ۸۲ درجو جنوب لویدیز لور حرکت کوي (S82°W) دلته S د جنوب لپاره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې وخت کی د «هیلگولند» څخه « کوین ماری » په ۷۰ درجو شمالشرق(N70°O)
دلته O د ختیز لپاره ده، لیدل کیږي.Nord,, Süd, West, Ost
الف) په کوم کونج دواړه لارې یو بل غوڅوي ؟
ب) د دې وخت له ځاي څخه به هغه غوڅټکی څومره لرې وي؟

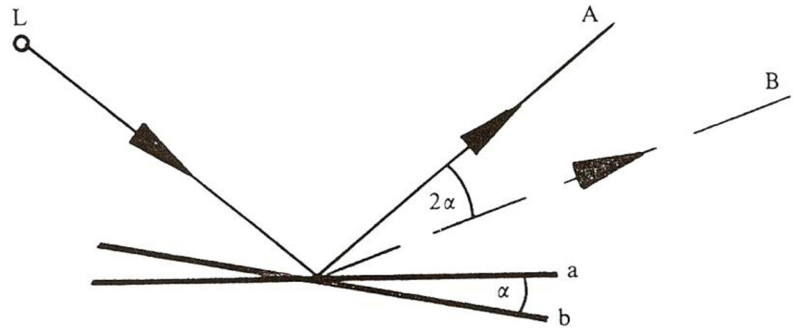
۵ – وي دې ABC یو مساوي پښيز دریگوډی، له بنسټ AB سره، g او h د کونجونو ∝ او ß کونجنیمي دي. وښايي چی دریگوډي ABP اوABQ کونګرواینت دي. (P او Q د مخامخ اړخ سره د کرښو غوڅټکي دي).

۶ – څومره کورونتخیروني موجود دی چی لاندې څیرې یی په خپل ځان ځیره کوي: کرښی ، گردی، غبرگ اړخي، مساوي پښيز دریگوډي ، ولاړ گوډی، راوتی، مربع، مساوي اړخیز دریگوډي ؟ کتمتخیرونه دې نه په کی شمیرل کیږي.

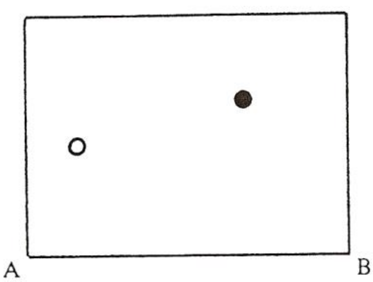
۷ – یو څرخیدونکی هنداره ، یوه هنداره ده ، چی په یوه خپله اینښوول شوي هواره پروت محور باندې څرخوړ اینښوول شوي. ترتیب په څیره کی له پورته لور انځوریږي.
د نور له چینی L څخه یوه وړانگه په هنداره د (a) په ځاي یا ځاینیوون کی پریوزي او د هنداروني یا انعکاس قانون سره سم(پریووتکونج = وتلکونج) د$\overline{OA}$ لور باندې بیرته غورځول- یا اینه کیږي یا منعکس کیږي. اوس نو هنداره د ∝ په کونج د (b) ځاي یا ځاینوون ته راوړل کیږي یا راڅرخیږي. دلته نو د نوروړانگه د $\overline{OB}$ په لور هحینداره کیږي یا غورځول کیږي یامنعکس کیږي. وښايی :

$$w(\overline{OA}; \overline{OB}) = 2\alpha$$

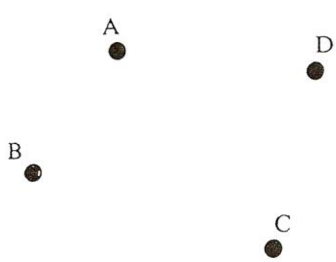
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۱۶۳



خیره ۱۶۴



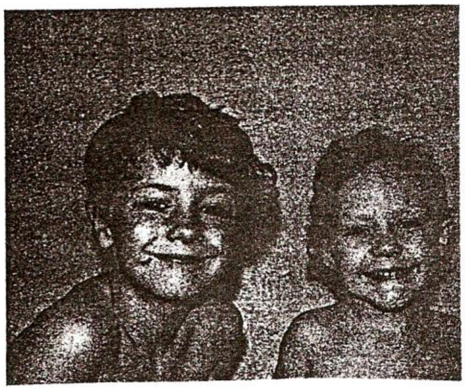
خیره ۱۶۵

۸ – د کوټې منځ کې دوه توپونه ایښول شوي یو سپین او بل تور. د کوټې له دیوالونو څخه توپ بلی لور ته نه شي تللی سپین توپ دې داسې ووهل شي چې تور توپ ووهي.دا د اینه ونی یا انعکاس د قانون سره سم په دیوال AB لګیږي. (حیره) د کرښو لار وکاږئ « تورتوپ – اینه ټکی یاانعکاسټکی – سپین توپ»

۹ – دا د یوه کور څلور برجونه دي، چې په A,B,C,D سره یې ښایو (خیره) داسې یو ځاي S شته ، له کوم چې برج A د برج C څخه یا سره پټ شي او برسیره پر دې له دې ځاي څخه A د B او D د منځتې په خیر ښکاره شي یا ځان وښایي .؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

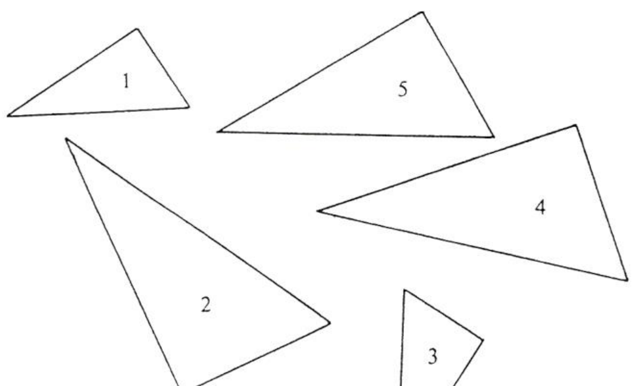
ورته والیخیرونه Ähnlichkeisabbildung



خیره ۱۶۶

که چیرې دوه غبرګوني کوچنیان وکتل شي ،نو سم د لاسه ویل کیږي، چې دا دوه یو بل ته ورته دي. شیان یا لیدیدونکي هم یو بل ته ورته بلل کیږي، که ګډ خویونه یا ګډې نخښې ولري، یعني څرګند یو بل ته ورته وي، مګر سره له دې هم یو له بل توپیر کیدونکی وي. په شمیرپوهنه کی داسی نه شو ویلی چی دا شیان یا لیدیدونکي یو بل ته زیات یا کم ورته دی، دا خیالي قضاوت دی چی په شمیرپوهنه کی داسی قضاوت ځای نه لري.

پیلبیلګه:



خیره ۱۶۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې دريګوډی د کونجونو $\gamma = 90°$ او $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$ سره وکاږي. ددې کونجونو سره له يوه زيات دريګوډي موجود دي، چې په ځانګړي توګه د ولاړ کونج ورکړه يواځيوالی يا يواځيتوب نيول کيدی يا فرض کيدی شي. دريګوډي ۱ او ۲ کونګروانيخ دي، دريګوډي ۲ او ۴ هم، مګر دريګوډي ۱ او يا ۱ او ۴ کونګروانيخ نه دي. سره ددې هم دوي زياتی ګډې نخښې لري (کونج، «بڼه»يا «شکل» يا څيره) دوي يو بل ته ورته دي.

ددوي ترمنځ نور څه ګډ دي يا دوي نور څه ګډ لري؟
له کونګروانيخجملی څخه مخ ته ځو، د اړخونو اوږدوالی اندازه کوو او راته ښايو چه د اړخونو ځاننيونه يا د اړخونو تناثب :

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$$

او

$$\frac{|AB|}{|A'''B'''|} = \frac{|BC|}{|B'''C'''|} = \frac{|CA|}{|C'''A'''|}$$

ثابت دی.

پس تعريفوو

تعريف : هوارې څيرې يا شکلونه هلته يو بل ته ورته دي، کله چې د مناسبو پاي کرښو اوږدوالی په همغه ځاننيونه يا تناسب پروت وي او (له دې امله هم) يو د بل سره مناسب کونجونه مساوي لوي وي.

بيلګه : کونګروانيخ څيرې د ورته شکلونو يو ځانګړی حالت دی، په هغوي کی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکړشوو اړخونو تناسب یا ځاننیونه تل ۱ دی.
له دې امله باید –د کونګروایتنځ د ټولیزیدلو یا عمومیت – د دریګوډیو لپاره هم ورته جملي موجود وي.
ددوه یا زیاتو دریګوډیو ترمنځ یو بل ته ورته والی هلته پروت دی یا شته ، موجود دی، کله یی چی مناسب کونجونه سره یو شی وي او دې کونجونو سره مناسب اړخونه یو د بل سره په همداسی تناسب یا ځاننیونه کی پراته وي یا اړیکو کی).
دا هم د دریګوډیو لپاره باور یااعتبار لري، په داسی ډول- د کونګروایتنځ ځخه پر مخ ځو- چی سړی داسی نومولی د ورته والي جملی لیکلی شي.

د ورته والي جملی: دریګوډی یو بل ته هلته ورته دي، که په لاندې کی سره برابر وي

۱ – د دریګوډیو دریواړو اړخونوپه مناسبه توګه د اړخونو تناسب یا ځاننیونه.

$$a : a' = b : b' = c : c' .$$

او یا

۲ – د دوه یو بل سره مناسبو اړخونوتناسب یا ځاننیونه او له دې بندشوې کونج. دا په دې مانا چي

$$a : a' = b : b' \quad \text{او} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

او یا

۳ – د دوه مناسبو اړخونو تناسب او د لوي اړخونو مخامخ کونجونومساویوالی. په دې مانا چی: $a : a' = b : b'$ او $\beta = \beta'$ د $a < b$ لپاره او یا $b > a$

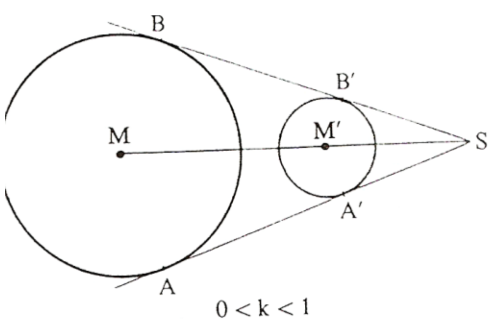
۴ – ددوه کونجونواندازې مساویوالی ، چی په دې ډول ټول کونجونه مساوي دي.
دا په دې مانا چی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول کیدی شي د نورو شیرو لپاره هم د ورته والی جملی تر فرمول لاندې راوړل شي. شیرې یو بل ته ورته دي، که دوي د ځانګړو ورتوني شیروني له لارې یو په بل پریوتی شي.

مهم ورته والي شیرونی منځني راکښنه ده

تعریف: منځني راکښنه $Z_{S,k}$ د ټکي S (د راګښلو منځ) او یوه ګڼ k د راکښلو فاکتور یا ځلونکي په بنسټ یواځنی ټاکلی وي. هر اصلي اوږدوالي ته د منځني راکښنو له لارې په k–ځلی تغیر ورکو ل کیږي.



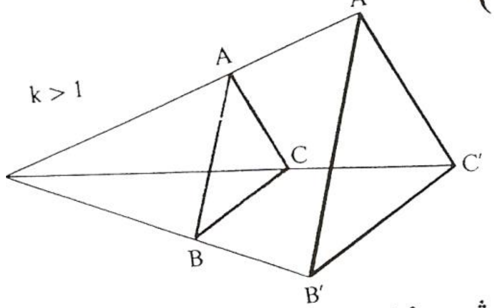
شیره ۱۶۸

د k لپاره له صفر تر یو ګڼونه پریښوول کیدی شي. په دې کی بیاپخپله له دې پوهیدی شو چی شیرونه له اصلي کوچنی ده. په دې حالت کی له زبیخلو (کیښکلو) غږیږو. شیرونه نوره هم د راکښلو باور لري. که k = -1 وي نو اړوند منځني راکښل په راکښل منځ S باندې ټکي اینونه ده. د هر بل منفی ګڼ k |=-1 لپاره کیدی شي k په k =(-1).|k| باندې تجزیه شي. له دې وروسته پورته یادونی په همغه هدف استعمالیږي یا کارول کیږي.

یادونه : پام دې وشي چی راکښنه به ښه وي او که غزیدنه.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د منځراکښنی جوړښتځیړنه(توضیځ)



ځیره ۱۶۹

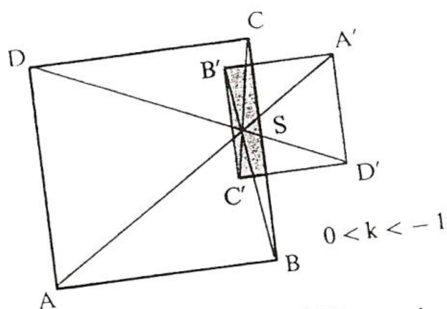
۱ – د اصلي هر په نخښنه ټکي د راکښلو منځ S سره و نخلوی.

۲ – د هر ټکي P لپاره د|PS| پای کرښي په k ځل کیږي(جوړښت ته د 0> k لپاره هم، مقایسه ځیره) او نوې پای کرښه

|'SP|.k = |SP|

په کرښه چی دټکي S ځخه پیل له P, S او 'P تیریږي وکاږی.

۳ – د اصل په ترتیب یا اصل ته ورته ټول ځیره ټکي سره ونښلوی.

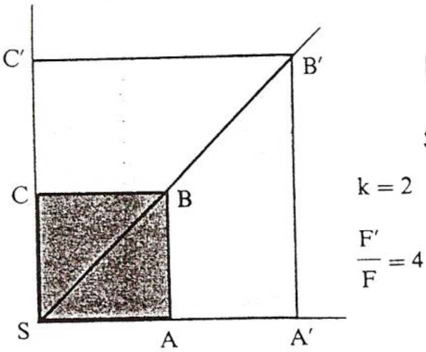


ځیره ۱۷۰

دا چی ورته ځیرې (بی له |k| = 1) کونګروا ینځ نه دي، نو د هواري دننه یا منځ هم تغیر خوري، مګر که ټولی خواو یا اړخونه په فاکتور k(د بیلګي په توګه k = 3 , k = 2) تغیر کړو، نو ځیروونکی هواره باید په فاکتور k^2

(یعني $k^2 = 4$,همداسی $k^2 = 9$)

تغیر وخوري.



ځیره ۱۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعري: په يو منځراکښنو، چې فاکتور k ولري د څيرې هواره 'F او له څيرې دمخه (اصلي) هوارې F ترمنځ لاندنی تناسب يا ځانښيونه موجود دی.

$$F' : F = k^2 \quad \Rightarrow \quad F' = F.k^2$$

د لته د k مخنخښه کوم رول نه لري ځکه چې منفی ځل منفی بيرته مثبت دی.

پیلبیلګ:

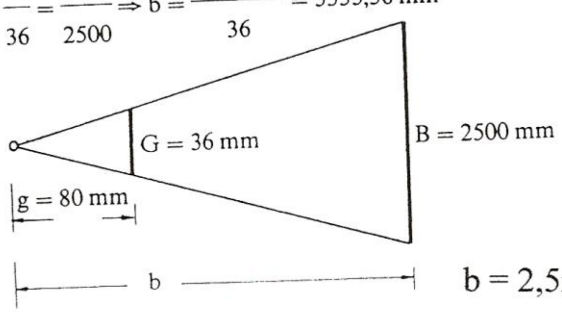
دياس(دفيلم دياس) (فورمات يا لويوالی 24mm.36mm)
په يوه ديوال چې لويوالی يې 2,5 m . 2,5 m دی. د ممکن حده پورې څيره کيږي. د ښه ټيك جوړولوسره يې له عدسي واټن 8cm دی. پريوستونی يا پرويکتور د څيرې ديوال څخه بايد څومره لرې وي؟ د دياس هوراه په څو واره لويه شوې ؟

د دياس دڅيرونی لپاره لاندې اړيکی باور لري:

$$\frac{\text{د څيرې جګوالی } B}{\text{د دياسجګوالی } G} = \frac{\text{د څيرې پراخوالي } b}{\text{د دياس –عدسی لريوالی} g}$$

څيره ۱۷۲

$$\frac{80}{36} = \frac{b}{2500} \Rightarrow b = \frac{2500 \cdot 80}{36} = 5555{,}56\ \text{mm}$$



ممکن ډك په دې مانا، چې 36 mm په 2,5 m بايد لوي شي. په دې توګه د پريوستون ديوال –عدسي واټن په لاندې ډول دی :

$$b = 2{,}5m.0{,}08m : 0{,}036m$$
$$\sim 5{,}56m$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

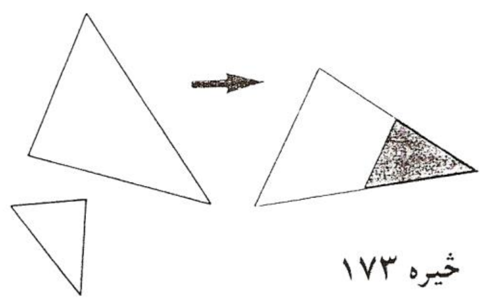
د لويوالی فاکتور يا ځلی دی

k = 2,5: 0,036~69,44

له دې امله د شيرې هواره ده:

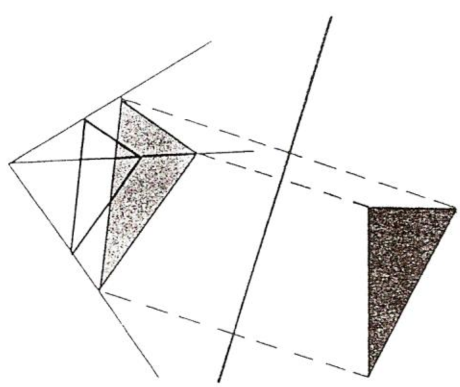
$F' = 69,44^2.0,036.0,024=4,17m^2$

دا د دياس هوارې 4822,53 واره يا ځله ده.



شيره ۱۷۳

دا روښانه ده، چی ورته شيرې، د څرخوني، راکښلو له لارې او اينونی له لارې يوه پوزيشن ته راوړل کيږي، په کوم چی سم د لاسه د شکلونو د کونجونو د برابرتوب ورته والی پيژندل کيدی شي.



شيره ۱۷۴

تعريف : هره کونګروا اينځ شيرونه، هر منځراکښونکی او له دوې هر تړلی يا ځنځيري اينښولشوې يا ځای په ځای شوې شيرونی ورته شيرونی بلل کيږي.

دا چی هره ورته شيرونه بيرته يوه داسی شيرونه باندې راګرځي، نو بيخي باور لري : د ورته

(c) ketabton.com: The Digital Library

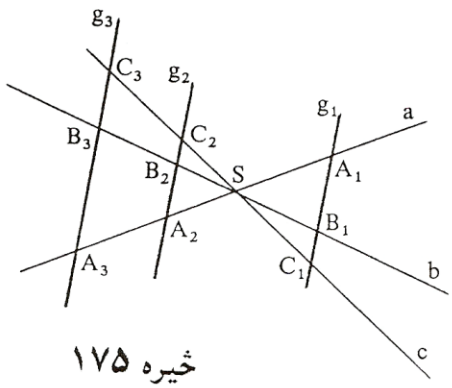
والي خيروني ډيرى چې پرلپسى سره وتړل شي يا ځنځيري شي ګروپ جوړوى (د ګروپ لپاره دې، چې شميرپوهنيزه کليمه ده، د کتاب پاى وکتل شي)

او خيرې او همداسي پيل بيلګه (ډياسپرويکتور) څخه د وړانګي جمله ټوليزه يا عمومي کيدى شي.

۱ . وړانګي جمله: که له يوه ټکي S وتلى وړانګي $a,b,c,\ldots$ له غبرګو کرښو..... g_2,g_2,g_3 غوڅي شي، نو د يوې وړانګى ټوټى همداسى تناسب کى دى يا همداسى ځان نيسى لکه

د بلى وړانګي ټوټى: دا په

دې مانا چې:



خيره ۱۷۵

$$\frac{|SA_1|}{|SA_2|}=\frac{|SB_1|}{|SB_2|}=\frac{|SC_1|}{|SC_2|}$$

او

$$\frac{|SA_1|}{|A_1\,A_3|}=\frac{|SB_1|}{|B_1\,B_3|}=\frac{|SC_1|}{|C_1\,C_3|}$$

په خيره کى د اړيکو ښوونه سم د لاسه په غبرګو کرښو له پوړيزکونجونو او د دريګوډيو ورته والي چې SA_1B_1 او SA_2B_2, SA_1C_1 او SA_2C_2 اوپه همدې ډول د SB_1C_1 او SB_2C_2 سره يى لري.

برسيره پر دې باور لري:

۱ . وړانګي جملى په څټ: که له ناپاى کرښو.... g_1 , g_2 , g_3 څخه د خورې

(c) ketabton.com: The Digital Library

غونچې یا بهتره ستورې کرښو له لارې ټوټې پرېکړې شي، چې یو بل ته ثابتې یا همغه ځای په ځای ځاننیونې یا تناسبات څرګندوي، نو دا کرښې یو بل سره غبرګې دي.

۲ . وړانګې جمله:

که له یوه ټکې وتلې وړانګې د غبرګو ناپاکرښو څخه غوڅې شي، نو د دوي ټوټې چې له غبرګو دې ځان داسې نیسې یا په داسې تناسب کې دیلکه هغه د ککرټکې څخه وتلې کچ شوې د وړانګو ټوټې.

$$\frac{|S\ A_1|}{|S\ A_2|} = \frac{|A_1 B_1|}{|A_2 B_2|} = \frac{|S\ B_1|}{|S\ B_2|} = \frac{|B_1 C_1|}{|B_2 C_2|} = \frac{|S\ C_1|}{|S\ C_2|} = \frac{|A_1 C_1|}{|A_2 C_2|}$$

۳ . وړانګې جمله:

په یوه غبرګې ټوټو ځاننیونه داسې ده لکه پهدې بلې غبرګې ټوټو ځاننیونه یا تناسب:

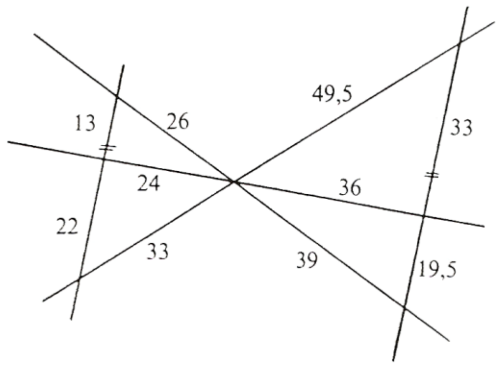
$$\frac{|A_1 B_1|}{|B_1 C_1|} = \frac{|A_2 B_2|}{|B_2 C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1 C_1|}{|B_1 C_1|} = \frac{|A_2 C_2|}{|B_2 C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1 B_1|}{|A_1 C_1|} = \frac{|A_3 B_3|}{|A_3 C_3|}$$

بیلګه :

۱ . د لمړی وړانګې جملې پسې لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱ . د وړانګو جملو پسې یا له امله باور لري:



خیره ۱۷۶

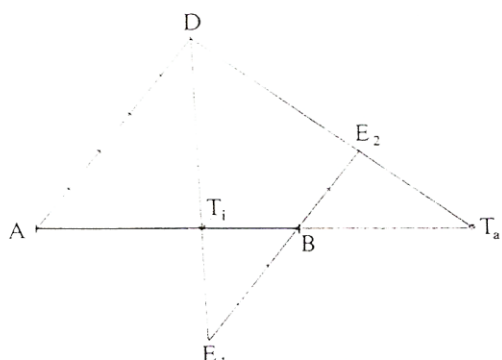
1. Strahlensatz: $\frac{26}{39} = \frac{24}{36} = \frac{33}{49,5} = \frac{2}{3}$
لمړی وړانګی جمله

2. Strahlensatz: $\frac{24}{22} = \frac{36}{33}$ oder
۲. وړانګی جمله
$\frac{33}{22} = \frac{49,5}{33}$ oder
$\frac{26}{35} = \frac{39}{52,5}$

3. Strahlensatz: $\frac{13}{22} = \frac{19,5}{33}$ oder
۳. وړانګی جمله
$\frac{35}{22} = \frac{52,5}{33}$

۲ . د یوې کرښې AB ویشنه یا ټوټونه:

کرښه AB دننه(T_i) په ځانینونه یا تناسب 5:3 او دباندې (T_a) په تناسب یا ځانینونه 2 : 5 ویشل کیږي. د دې لپاره د ۲ . وړانګي جمله کارول کیږي یا استعمالیږي:



خیره ۱۷۷

– دننه ټوټوونټکی T_i :

$$\frac{|AD|}{|BE_1|} = \frac{|AT_i|}{|T_i B|} = \frac{5}{3}$$

– د باندې ټوټوونټکی T_a:

$$\frac{|AD|}{|BE_2|} = \frac{|AT_a|}{|T_a B|} = \frac{5}{2}$$

دا جوړښت د ویشنی برسیره

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کرښو د ځل لپاره هم کارول کیدی شي. نو $|AT_a|$ د $|T_aB|$ دوه نیم واره دی.

۳ . طلایي غوڅی یا –غوڅونه:

په طلای غوڅي یوه د a اوږدوالی کرښه داسی ټوټه کیږي، چې برخه ټوټو د x اوږدوالی همداسی د a - x اوږدوالی لپاره اړیکی $a : x = x : (a-x)$ باور لري. دلته x د دواړو برخه کرښو لویه برخه ده دا ویشنه په هنر او ارښیتکتور کی له مانا ډکه ده یا مهم رول لوبوي. له پورته اړیکو څخه لاس ته راځي: $x^2 = a(a-x)$ او له دې بیا $x = \sqrt{a(a-x)}$ لاس ته راځي. دا په دې مانا چې اوږده کرښه د دوو لنډو کرښو او د ټولی کرښی هندسي منځ دی. که دا فرمول نور هم ښه بدلون غوره کړي او د x په لور اوبی یا حل شي، نو ترې لاس ته راځي :

$x = \sqrt{a^2 - ax}$

$x^2\ a^2 - ax$

$0 = x^2 + 1x - a^2$

$x_{1,2} = -(a/2) \pm \sqrt{(a/2)^2 + a^2}$

$= -(a/2) \pm \sqrt{(5/4)a^2}$

$x_1 = 0{,}5a(\ 5 - 1)$ په کار نه راځي

نو لرو: $x \sim 0{,}618a$

خیره ۱۷۸

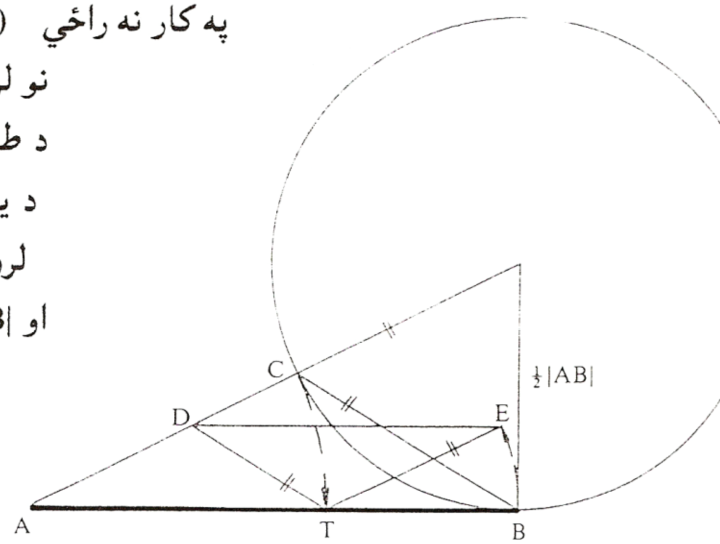
د طلایي قاعدې لګه لارې

د یوې کرښی $|AB|$ ویشنه

لرو $|AC| = |AT|$

او $|AD| = |TE| = |TB|$

$$\frac{|AB|}{|AT|} = \frac{|AT|}{|TB|}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

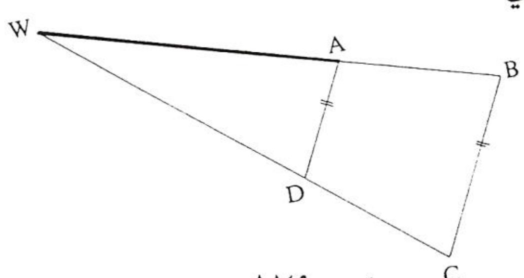
تمرینونه

۱ – په کواوردیناتسیستم کی دریګوډی A(2|3), B(6|1), C(3|6) ورکړ شوی دی.
الف) دا دریګوډی د k = 2 په اندازه وغزوی . د غزولو مرکزدې Z(0|0) وي.
ب) دا دریګوډی په S(-2 | -3) وڅرخوی د 140° = ∢ سره. دا څیره دریګوډی په S باندې د k = -1,5 سره وغزوی.
پ) دا دریګوډی په ۴ یوونو سره لمړی کینې لورته او بیا په ۵ یوونونو پورته لورته وکښوی، بالاخره یي په x– محور هنداره کړی او بیا یي بالاخره په ټکي (0|-6) د k = -1 سره وغزوی.

۲ – ایا ټول الف) مساوي پښیز ، ب) مساوي اړخیز، پ) ولاړکونجیز دریګوډی یو بل ته ورته دي ؟

۳ – د یوه مکعب پورته هواره د مرکزی غزوني د غزونفکتور یا غزونځل k سره او د هوانیمي غوڅټکي سره د غزولومرکز په څیر، څنګه تغیریږي؟

۴ – کرښه | AB | =10 cm دننه او دباندې داسی ټوټه کړی، چی په ځاننیونی یا تناسب د 5:2 کی سره پراته وي.

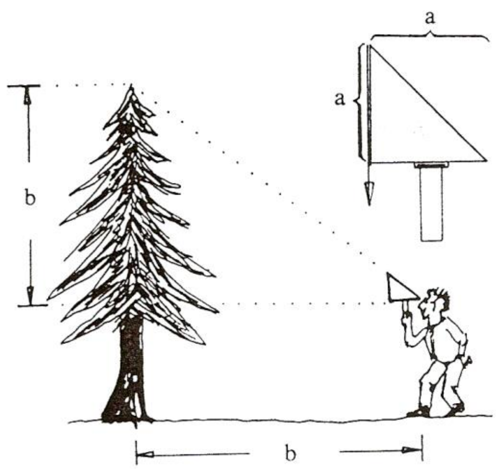


څیره ۱۷۹

۵ – کرښه | CD| =6,5 cm د «طلای غوځي قاعدې» له لارې ټوټه کړی.

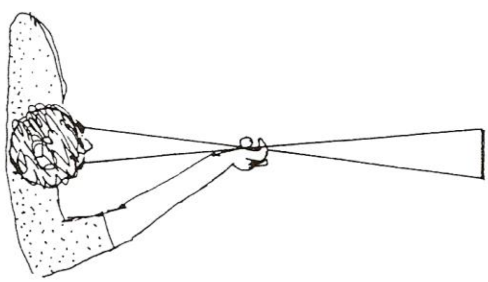
۶ – د یوه کتونبرج A (څیره ۱۷۹) څخه دې واټن |AW | یوه ځنګل برخی W ته وټاکل شي.
دري ټکی B, C او D په نخښه کیږي په داسی ډول چی AD||BC وي. اندازه کیږي: |AB|=75 m : |BC| = 125 m او |AD|= 100 m , نو |AW | څومره اوږد دی ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیره ۱۸۰

۷ – الف) د یوه «ځنګلوالدریګوډي»
سره (ځیره) د یوې ونی
جګوالی اندازه کیدی شي. – ونه
څومره لویه ده ، که د ځنګلوال
سترګه له ځمکی څخه ۱،۷۰
متره جګه وي، او دی له ونی
۱۰ متره لرې ولاړ وي؟
ب) څنګه (د یوه ځرګندږه واټن)
د یوه شي د جګوالی د خپل
متې په مرسته نږدې یا تقریبي
اندازه کولی شي؟
لارښود: ۷ الف وګوری)

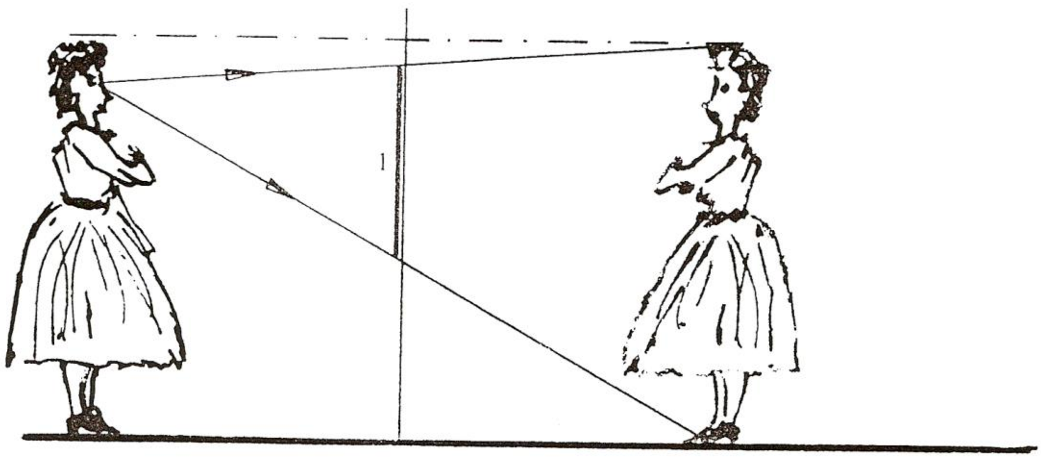


ځیره ۱۸۱

پ) په عسکری کي د دوه شیانو
د واټن د اندازه کولو لپاره
« د غټی کوتي ګام » تخنیك
کارول کیږي یا استعمالیږي.
دا داسی صورت نیسی چی
لمړی سړی خپله کینه سترګه
پټوي او غټه ګوته راوباسی،
لمړی یو انډول وړ شی، چی ښي
لور ته پروت دی، اندازه کوي او بیا د ښی سترګي په پټولو سره ټیك هغهٔ لټوونکی
موخه د زیر لاندې نیسي. دلته د واټن اندازې ورکونی ته سړی څنګه راځي؟
۸ – میرمن ځانګه غواړي چی په خپله پوره لویوالی ځان د دالیز په هنداره کی
وګوري. په عادې توګه د دالیز د کوچنوالی له امله ۸۰ سانتي متره له هنداري

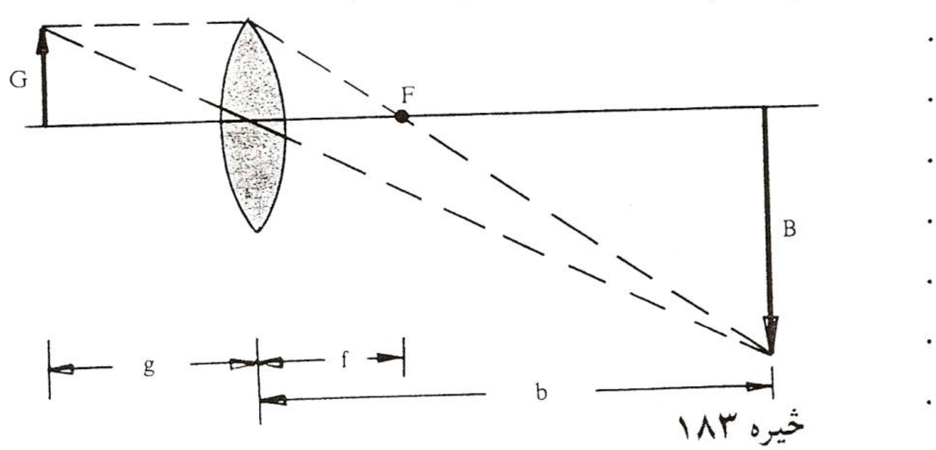
(c) ketabton.com: The Digital Library

لرې، هنداري ته مخامخ ودریږي.دا هنداره باید څومره کم له کمه جګه وي
چې میرمن ځانګه د سترګو جګوالی چې ۶۵، ۱ متره دی ټول لویوالی
چې ۷۳ ،۱ متره دی وګوري؟



څیره ۱۸۲

۹ – د یوې لینزې یا عدسی یا سترګی له لارې په څیره کی د نور څیرونی



څیره ۱۸۳

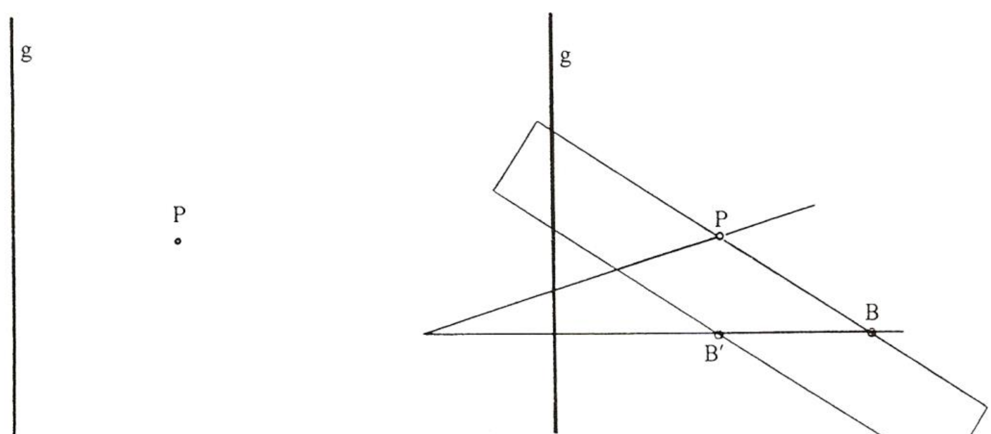
(c) ketabton.com: The Digital Library

جوړښت کتل کیږي. د لینزې یا عدسی لپاره د لینزې یا عدسی مساوات $(1/g)+(1/b) = (1/f)$ باور لري، پخپله د څیرونی لپاره مساوات $B / G = b / g$ باور لري(په لغاتو: د څیرې جګوالی د شي جګوالی سره ځان داسی نیسی لکه د څیرې لریوالی د شي لریوالی ته). دا دواړه اړیکی د وړانګي له جملی راوباسی !

۱۰ – یو ولاړکونجیز دیاپوزیتیویا مثبت دیاس داړخ اوږدوالی ۶ ،۳ سانتي متره سره او ۴ ،۲ سانتي متره سره یو و هغه ته غبرګ دیوال باندې پریوزې . څیورونی لینزې یا عدسی، دا شی ۱۲ سانتي متره له دیاس او ۸۰ ،۴ متره له دیوال لرې دي. د پریوستون دیوال کم له کمه باید څومره وي ؟

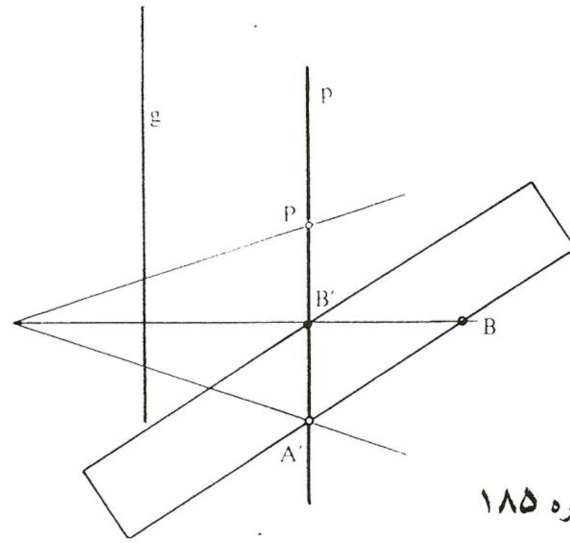
۱۱ – یو د دیوال مربع شکله کړکی، چي اړخ یی ۲۰ سانتي متره اوږد دی له یوه هغه ته غبرګ دیوال څخه ۱۲ متره لرې ده. د هغی کړکۍ څخه څومره لرې باید یوه د پرېښنا سرچینه ، چی د ټکي بڼه لري، لرې وي چی له کړکی تیره رڼا یوه د ۱۶ مترمربع هواره روښانه کړي؟

۱۲ – د کوم مرکزې غزوني سره کیدی شي چی یو ګردي دننه دریګوډی په ګردي راګیر یا ګردي دباندې دریګوډي باندې څیره شي؟ ګردی هوارې یو بل سره



څیره ۱۸۴

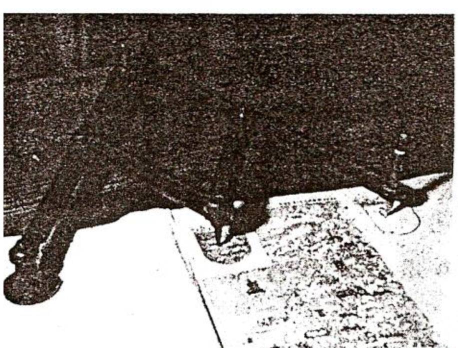
(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیره ۱۸۵

په کومه ځانیونه یا تناسب ځای نیسی یا پرتی دي؟

۱۳ – د دیسارګ (Desarues) د جملی له مخی کیدی شي چی کرښه g په ټکی P جوړه شي ، که ټول رسم الات یواځي یوه لرګي مته وي (د بیلګي په توګه کرښی یا ختکش) د دوه غبرګو کانتو سره یا اړخونو سره ځموږ په اختیار کي وي. په دلایلو روښانه کړی، چی ولی په پرلپسی ځیرو جوړښت کی د جوړښت لار کار ورکوي.



ځیره ۱۸۶

۱۴ – وښایی چی د هر غبرګ اړخیزABCD لپاره باور لري: که د یوه نیمی د په خوښه ټکي P ځخه یوه اړخ ته غبرګه کرښه رسم شي، نوغبرګاړخي منځ ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

راځي، چې ABCD ته منځنی یامرکزې ورته دی. د همغه غزولومرکز چیرته پروت دی؟

په دې خویونو د پانتوګراف(Pantograph) یا په ورځنی ژبه د ځانی ټونګی دا یوه د رسموولو اله ده قانون هم بینا دی. O په رسمتخته تر زیر لاندې راځي . په پینسل P سره د مخه کښل شوي ځیرې باندی حرکت ورکول کیږي، نو په دې توګه دا رسمپینسل یو مرکزي یامنځنی ورته ځیره رسم کوي (ځیره.) په تي مخ کی کښل شوې ده

١۵ – په یوه ګردی کی دوه ټوټونی یا زیني یوبل غوځوي. ټوټی ١٨ سانتیمتره او ٣۵ سانتي متره دی، د دومی هغه اوږده ټوټه ٣٠ سانتیمتره ده. نا معلومه ټوټه یی وښایی.

١۶ – څومره لرې سرې کتلی شي

الف) د بحرهوارې څخه ۴٠ متره جګ اندازه ټوکرې

ب) د یوه له ځمکی ٢ کیلو متره جګ هوا پوڼکی یاهوا بالون،

پ) د یوه الوتونکی کوټکی چی د سپوږمی هوارې څخه٢ کیلومتره جګه وي(r = 1735 km)؟

١٧ – د شکل ١ (ځیره ځیره١٨٧

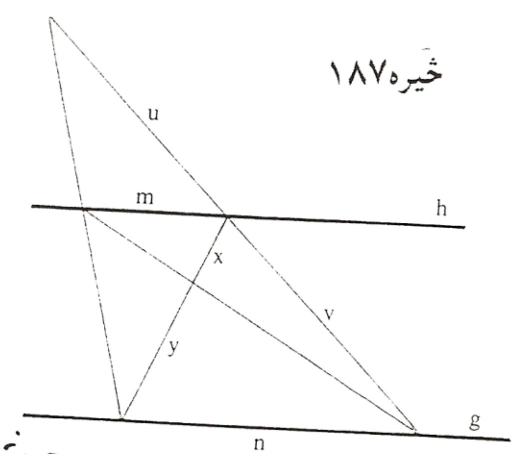
الف) لپاره صدق کوي h || g او

a) $\frac{u}{v} = 1$

b) $\frac{u}{v} = 0,5$

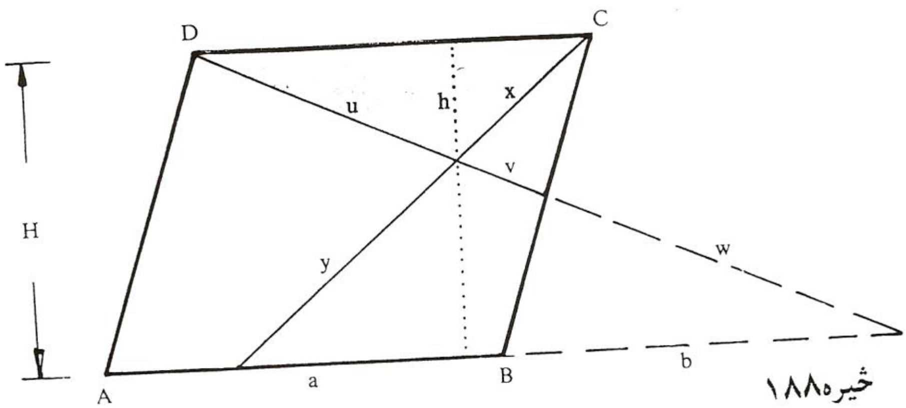
c) $\frac{u}{v} = \frac{2}{3}$

Berechnen Sie $\frac{x}{y}$. وشمیرې



(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۸ – وشمیری u / v او x / y (ځیره ب)
د غبرګاړخیز څومه برخه رنګه ده؟



ځیره۱۸۸

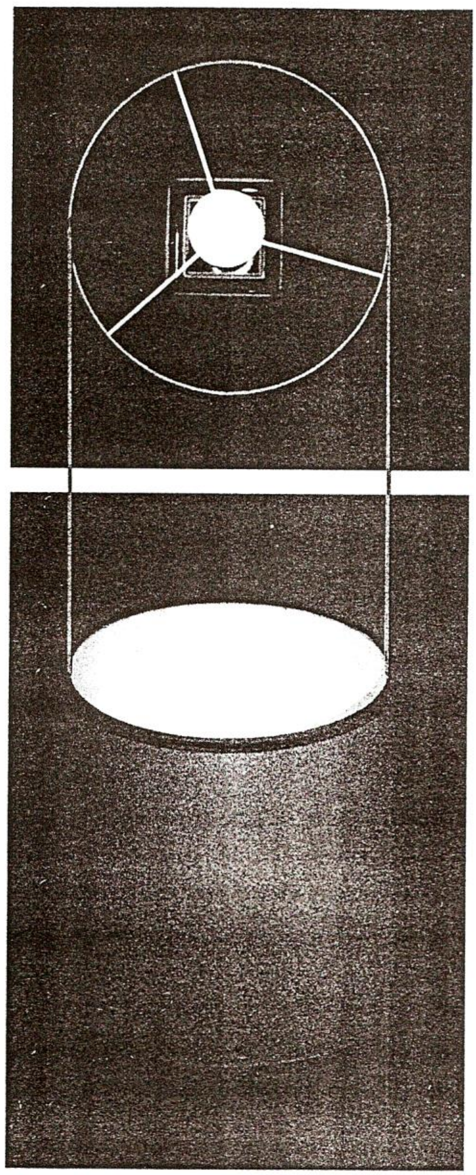
افینی ځیرونی (Affine Abbildungen)

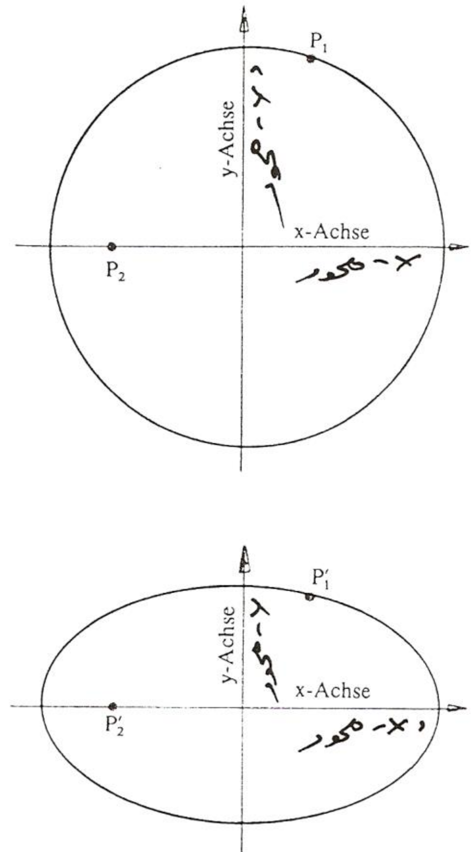
محوري افینیتي Die axiale Affinität

دبیلګي په توګه مو د مخه تیرو درسونو کی وپوښتل، چی ایا موږ له یوې ګردې ښیښې ټوټې چې لږ څنډه یې ماته ده یوه بله ګرډی ټوټه چی وړانګه یی له پخوا

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوچنی وي او یا یو ډیرګوډی جوړولی شو، چی سیومتري او په دې توګه ښکلی





خیره۱۸۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي. دلته موږ الیپسي سره مخامخ شو.

پوښتنه دا ده چې ایا یوه ځیرونه شته چې له ګردۍ څخه الیپسي لاس ته راشي؟
د ځیرې ۱۸۹/ دلیدلو له مخې داسې خیال راپیدا کیږي، چې ګوندې د ګردۍ او ایلیپسي ترمنځ څه خپلوي شته. دا نو بیا دې لاندې پریکړې ته اجازه ورکوي، چې یوه ځیرونه باید موجود وي چې د ګردۍ ځیرونه ایلیپسې شي.

دا ځیرونه باید کوم خویونه ولري؟

موږ بیا د جوړونې نیونې چې د مخه مو کړې رامنځ ته کوو.

ټولې په پراته(افقي) x– محور باندې پراته ټکې ځاي په ځاي پاتېږي: پس د x– محور د ځاي په ځاي ټکو کرښې ځیرونه ده. د دې په څټ د y – محور ټول ارزښتونه تغیر خوري. پس هره y–محور سره غبرګه کرښه ځای په ځاي کرښه ده.

له دې سره موږ د نوې ځیرونې لپاره ټول ضروري خویونه راټول کړل: د افینیتي محورa سره یوه محوري افینیتي $A_{a;g;k}$ ، د لورکرښی(کرښه چې لوری یې څرګندوي لنډ یې: لورکرښه) g او د افینیتي فاکتور k |= 0 مخ ته پراته دي، که لاندې شرایط پوره وي :

۱ – هره کرښه PP' چې له ټکو P او P' تیره وي د g سره غبرګه څغلي.

۲ – که *P د'PP او a غوځټکی وي ، نو لرو : |P*P'| = |k|.|PP*|.

په دې توګه نو یوه محوري افینیتي، دکرښې –،غبرګ – او ټوټه تناسب یا ځانںیونه ریښتونې ده. اخرنی دا وایي چې په اصلي پایکرښی درې ټکي دا پایکرښه په همغه تناسب یا ځانںیونه پرې کوي، لکه د ځیره ټکی په ځیره کرښه باندې.

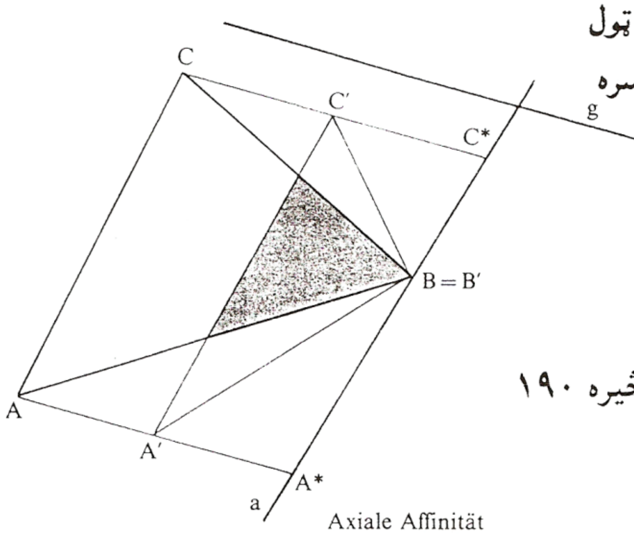
له دې لاندې د محور افینیتي جوړښت ځیړنه لاس ته راځي

۱ – له اصلي کرښي په نخه شوي ټکي (د بیلګي په توګه P) څخه وg سره یوه غبرګه کرښه وباسی او ددې غوځټکی د افینیتي محور سره د بیلګي په توګه *P وبولی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – له *P څخه |PP*|. k = |P'P*|
و g ته غبرګي مناسبې کربنې
وکاږئ.

۳ – په دې توګه رامنځ ته شوي ټول
ټکي اصل ته په ورته توګه سره
ونښلوئ.

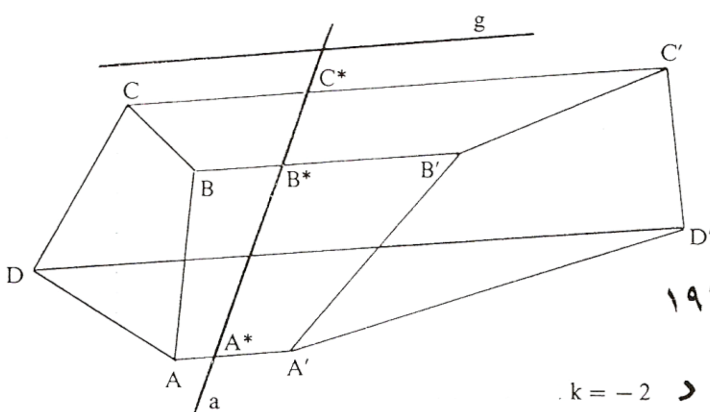


شیره ۱۹۰

Axiale Affinität

د $k = \frac{1}{2}$

آکسیال افینیتي



شیره ۱۹۱

د $k = -2$

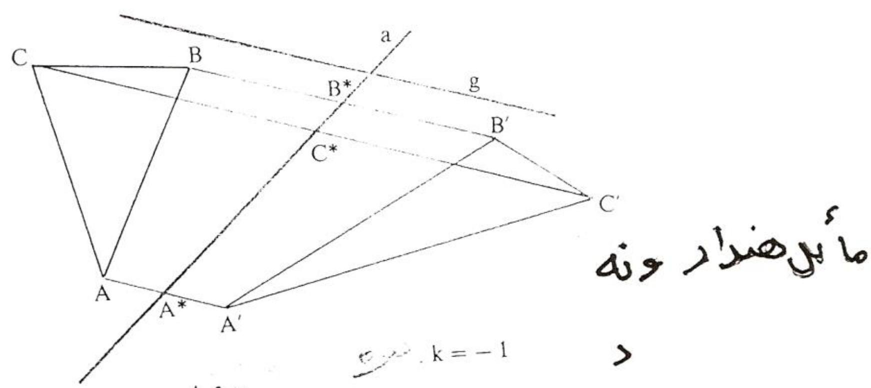
اکسیال افینیتي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k = 1$ لپاره د هوارې هر ټکی ځای په ځای ټکی دی، ځکه چی ټولی پایکرښی تغیر نه خوري. له دې لرو چی $A_{a;g;1}$ کټمټ یا identisch ایدنتیك دي.
د $k > 0$ لپاره P او *P د a په یوه (همغه) خوا پراته دي(ځیره) ، د $k < 0$ لپاره د a په بدلوخواوو (ش. ۱۵۷)
یو ځیرونه $A_{a;g;k}$ کیدی شي په ځیرووني $A_{a;g\ 1/k}$ بیرته راوکرځي .

مائیل هندارونه

مائیل هندارونه یوه ځانګړې محوري افینیتي ده : د $k = -1$ لپاره لریوالی یا فاصله |*PP| همدومره ده لکه لریوالی یا واټن یا فاصله |*P'P| . پس مائیل اینونه محوري افینیتي $A_{a;g;-1}$ ده.



ځیره ۱۹۲

(c) ketabton.com: The Digital Library

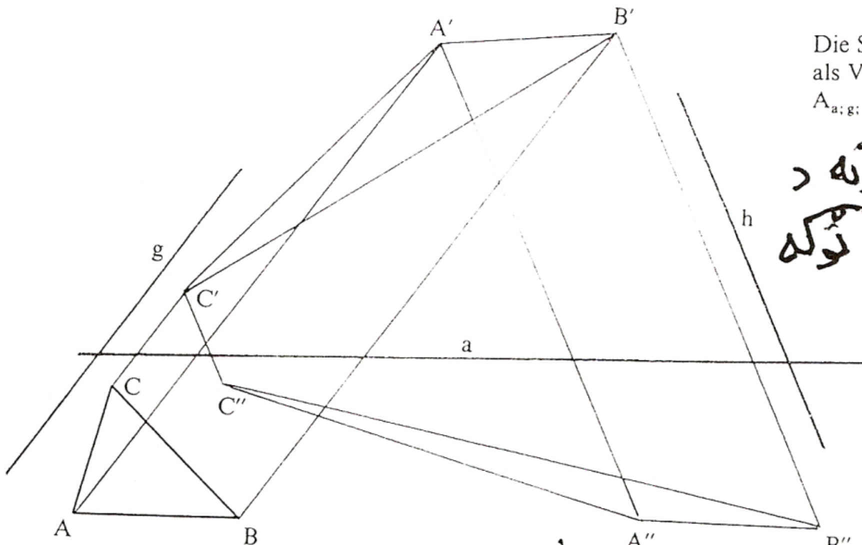
: محوري افينيتي(يو بل سره) تړلو ځانګړي حالتونه:

بياتي کوونه يا بياتيونه Scherung

: دوه محوري افينيتی(يوبل سره) تړل، چې همغه افنيتي محور a ولري،g او h
مختلفلوري محورونه او يو بل ته مخامخ افينيتي فاکتورونه k او 1 / k ولري، نو
بياتيونه(بياتي کونه) ورته وايو.

بياتيونه(يوبل سره)
: تړلو په څير:

$A_{a;g;-2} \cdot A_{a;g;-½}$



Die Scherung
als Verknüpfung
$A_{a;g;-2} \cdot A_{a;h;-\frac{1}{2}}$

بياتيونه د
تړنې په توګه

شمیره ۱۹۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

په بیاتیونی کی، لکه څنګه په مائیلی اینوني کی د هواری دننه بی تغیره پاتی کیږي، سره ددې چی د یواځنیو یا ټولو شکلونو تغیر خوړلی شي. (تمرین وګوری) په عمومي توګه د څیرې – او اصلي هوارې لپاره په یوه محوري افینیتي کي باور لري : $F'=|k|.F$, او یو په بل پسی کارونو یا عملیو اجرا کولو کی هم په همدې ډول
$F' = |k.\ldots.k|.F$:
دا په دې مانا، چی محوري افینیتي په عمومي توګه هوارې ریښتونی نه ده.

محوراینونه

محوراینونه یوه محوري افیتي ده له $k=-1$ سره. (څیره ۱۹۲ وګوری)

کونګروایڼخ څیرونه
هره کونګروایڼخڅیرونه کیدی شي له محوراینونی یوځاي راټوله شي.

منځنی راکښنه(راکښل)
هر منځراکښنه یو افڤینه څیرونه ده.

په عمومي ډول لاندې لاس ته راځي

د ټولو کونګروایڼخ څیرونو، ورته څیرونو او محوري څیرونو ډیري، د ټولو افڤین څیرونو ډیری ورکوي. که افینڅیرونی یو په پسي اجراشي یو ګروپ جوړوي، داسې په نامه افینګروپ. (ګروپ دې د کتاب په پای کی وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – یو دریګوډی ABC دې په یوه افین هوارمساوي باندې داسی واړول شي، چیرته چی | AB | = | AB' | او .

۲ – په دریګوډي A(3|5) ,: B(5|4) ; C(3|1) باندې یو محوري افنیتي داسی وکاروي یا استعمال کړی، چی A'(-3|1) او y– محور د افینیتي محور وي.

۳ – د ګردی ځیره د M(2|3) او r = 3 cm سره وټاکی ، که د x–محور د افینیتي محور وي، په ۱ او ۳ کوادرانت یا څلورمه کي لورکرښه او k = 2 د افنینتي فاکتور یا –ځل وي.

۴ – یو دریګوډی په هوار مساوي پنځه ګوډي واړوی.

۵ – یوه ګردی دې د نیمي d = 12 cm او د افنینیتي فاکتور k= ½ سره افینځیره شي. د راپیدا ایلیپسی د هوارې دننه وشمیری. (دوه یو په بل ولاړ محورونه افینیتي محورونه دي چی له منځټکي او لوریزکرښی څخه تیریږي)

۶ – یو تریخ ABCD جوړکړی له a = 8 cm ; c = 3 cm ; d = 5 cm او ∢ = 40° . په دې محورې افینیتي لاربنوده کړی، چی د افنیتي محور یی د تریخ منځلاین وي، چی د لورکرښه یي د هغي سره ۵۵ درجي کونج جوړوي او د افنیتي ځل ا –فکتور یی k = 3 /2 دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريګوډيکچ يا تريګونومتري Trigonometrie

تعريفونه

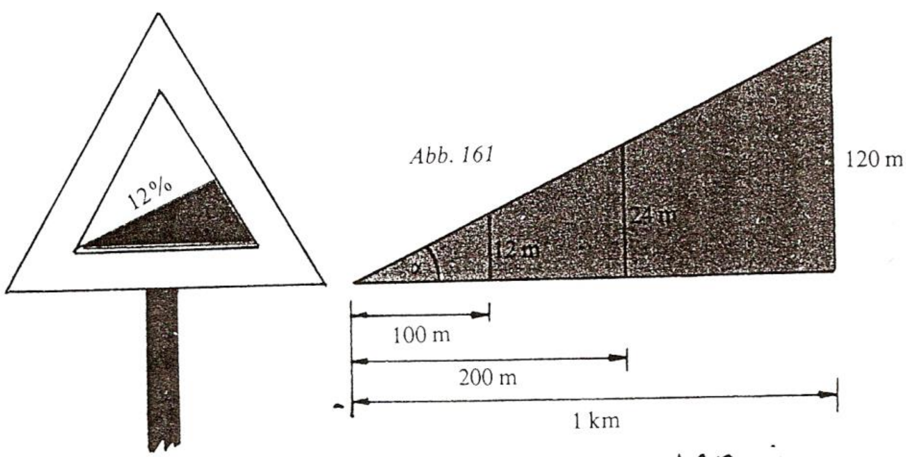
د دريګوډيکچ يا تريګونومتري دنده ده چې په هواره يا په هوا کې دريګوډي کچ کړي ، د څانګړوبلواکو له لارې، دې په نامه تريګونومتريبلواکو. برسيره پر دې د دې په مرسته پريوديکې يعنې په منظمه فاصله پرلپسې تکراريدونکې پيښې(مور. يې تل راګرځيدوني بللې شو) څيړل کيږي.
تريګونمتري تر هيپارچ (Hipparch ۱۶۰ – ۱۲۵ له م پخوا) پوري تعقيبيدې شي، وروسته له مصري پتوليموس Patolemäus چې په ۱۶۸ م کال کې مړ شوی او بيا له هندي او عربو شميرپوهانو له خوا پرمختګ ورکړ شو. له پيل دا د کارونې يا عملي کيدو د ستونځو سره مخامخ وه. دريګوډيکچ خپل کارونه په استرنومي او فزيك، د ځمککچ يا اندازه کولو، د ځمك اندازونې، نقشو علم، او ابادی او نوتيك Nautik (د کيشتيو د لارو نقشه ويستلو پوهنه) کې مومي.
د تريګونومتري مانا يا مهموالی په ځانګړي ډول په دې رينبتينوالی يا واقعيت کې نغښتې، چې د دې په مرسته د پايکربنبلواکوالی ، د کونجبلواکوالی سره تړلې شي(پام دې وي، چې دا تړاو شميرپوهينيز مفهوم لري).

پيلبيلګه: د په مانايا مهم جګوالي يا لويدکربنو نخښنه لوحې يا په بله عبارت د زوړي او پيچومې ليکتختې(دې ته دې پام وي چې ما دا کليمې هر چيرې د زوړي او پيچومې په نامه نه دې بللې، خو دا به ښه وي ، چې په هغه مناسب ځای

(c) ketabton.com: The Digital Library

کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي) وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟
پیچومی یا جګوال 12 % په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی یو جګوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیك ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جګوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توګه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جګوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جګوالي لیدیدونکي ۱۲۰ متره ته جګیږي. کتل کیري یا لیدل کیږي، چی په ورکړشوي پیچومي یا جګوالي کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځاننیونه و هوارې فاصلي ته تغیر خوري . د پایکرښو تناسب یا ځاننیونه تابث یا ځاي په ځاي پاتیږي او د په سلو کی ګڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جګوالي اوږدوالي معلومات نه



ځیره ۱۹۴

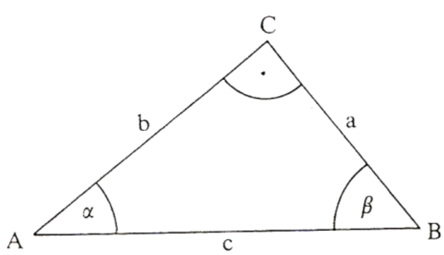
(c) ketabton.com: The Digital Library

ورکوي همداسي زوړی یا لویدون. په داسي حالت کی هم بیا نورې لوحي هم زوړندې وي.

په همدې ډول پیچومی کیدی شي، لکه په سلو جمله کی، د کونج له لارې هم ورکړشي، چی د سرك ټوټه یی د پرتون سره جوړوي.

تریګونومتري یا د په سلوکی (د پیچومي یا جګوالي تناسب) د پیچومي یا جګوالي ویناوي دي او یا په څرګندو پیچومي کونج یا جګکونج چی سلییز پیچومی یا جګوالی ټاکي. په دې ډول په سلو کی ۱۲ جګوالي سره د پیچومي کونج په لاندې ډول دی $\alpha = 6,48°$.

په پیلبیلګه کي څرګندیږي چی دا پایکربښي د یوه ولاړ دریګوډي اړخونه انځوروي، چی د دوه دریګوډیو تناسب یا ځانئیونه د کونج په بلواکښی یا اړتوب ښایي. زیات وخت هیوپوتینوزې (اوږداړخ) په c ښوول کیږي او هغه ته مخامخ کونج په γ . نورې دواړه کتیتی a او b دي او د دوي مخامخ کونجونه α او β.

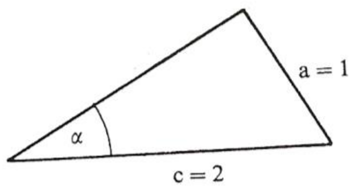


څیره ۱۹۵

اوس نو لاندې جملی باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساینبلواك :sinusfunktion   بلیګه:

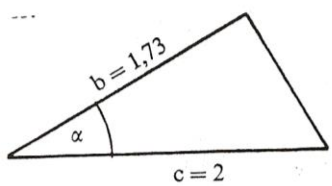


$\sin\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

خیره ۱۹۶

کوساینبلوك Cosinusfunktion   بیلګه:

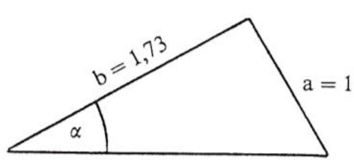


$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرته کتیت}}{\text{هیپوتینوزې}}$

$\cos 30° = \frac{1{,}73}{2} = 0{,}8660$

خیره ۱۹۷

تنجنتبلواك Tangensfunktion   بیلګه:



$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروتکاتیت}}$

خیره ۱۹۸

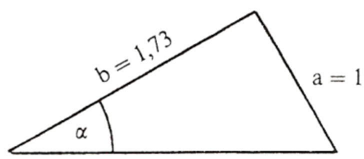
$\tan 30° = \frac{1}{1{,}73} = 0{,}577$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه : **پام دې وي چې د مخامخ کاتیت لاندې د دریګوډې هغه اړخ پوهیږو، چې په هیپوتینوزې پراته کونج ته، چې څموږ موخه وي، مخامخ پروت وي او هغه اړخ چې په همدې کونج پروت وي ، هغه ته په کونج پروت اړخ چې موږ یې لنډ پروت کاتیت بولو.**

دا لاندې نور کونجبلواک دي، چې کم کارول کیږي

کوتنجنتبلواک Kotangensfunktion بیلګه



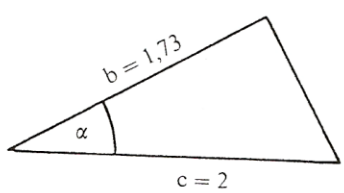
$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{مخاخ کاتیت}}$$

خیره ۱۹۹

$$\cot 30° = \frac{1,73}{1} = 1,73$$

ډیر کم ، د بیلګې په توګه استرونومي کې، لاندې کونجبلواک کارول کیږي

سیکانسبلواک sekansfunktion بیلګه



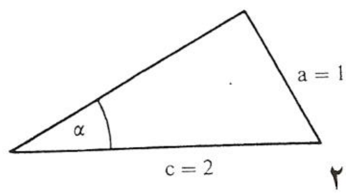
$$\sec \alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{هیپوتینوزې}}{\text{پرته کاتیت}}$$

خیره ۲۰۰

$$\sec 30° = \frac{2}{1,73} = 1,156$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کوسیکانسبلواك Kosekansfunktion بیلګه:



$$\text{Cosec}\,\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هیپوتینوزې}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

خیره ۲۰۱

$\text{cosec } 30° = \frac{2}{1} = 2$

موږ به زيات وخت لمړنی درې يا په همدې توګه لمړنی څلور بلواکه د کارونی لپاره راونیسو يا وکاروو.

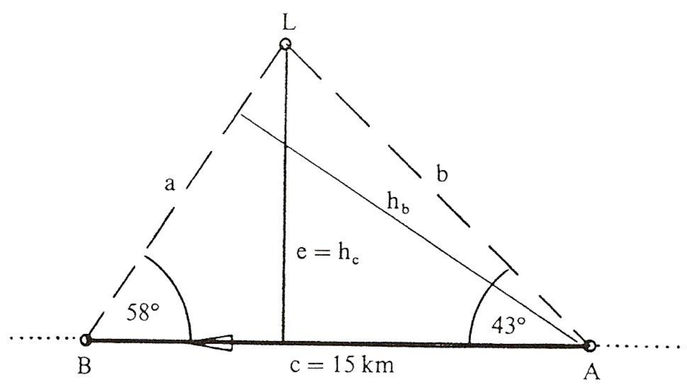
په خوښه دريګوډيو کی شمیرنه

سره له دې چی کونجبلواکي يواځی په ولاړکونجيز دريګوډي کی بايد تعريف کيږي، خو بيا هم برسيره پر دې استعمال يا کارونه مومي. د پيچومي يا جګوالی په جوړولو کی هر دريګوډی په ولاړو برخه دريګوډيو تجزيه يا ټوټه کيدی شي. په اخرني هنري، د مخکني مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پايکرښي وينا وي د پيل دريګوډي باندې لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشوو کونجونو.

پيلبيلګه
يوه کيښتی د رڼاډزکړي(کله چی کښتی له ستونځو مخامخ شي او يا يوې بلی کښتی يا يو بل څه ته که يوه کښتی وغواړي خبر ورکړي، نو يوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کيږي چی له لرې څرګنديږي او نورې خبر ورته ليږونکی په دې پوهيږي، چی څه پيښ شوي دي). دلته 43° = α د تګ په لور اندازه کيږي او له

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه تګ پایکربښي $c = 15\ km$ او کونج $\beta = 58°$ وروسته.
په دوم ډز کی کیښتی له ډز رڼااور څخه څومره لرې ده؟
د A څخه و B ته د کیښتی نزدې واټن e د ډزرڼااور څخه څومره لرې دی؟
په A کی له اور څخه څومره لرې وه ؟



شیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 79°$; $\sin\beta = h_b / c$ او $\sin\gamma = h_b / b$

د h_b په لور اوبېول یا حلول او په همدې وخت کی لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin\beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin\gamma$$
$$\Rightarrow c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$
$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58°}{\sin 79°} = 12{,}959\ km$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin\alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin\alpha = 12{,}959 \cdot \sin 43° = 8{,}838 \text{ km}$$

$$\sin\beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin\beta} = \frac{8{,}838}{\sin 58°} = 10{,}421 \text{ km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دریګوډي اړخونوa او b په شمیرنه کی مرستندوي لویی له منځه ځي او باور لري:

د ساین جمله :

په خوښه دریګوډي کی د اړخونو ځاننیونه یاتناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځاننیونه یا تناسب دی.

$\sin\alpha / \sin\beta = a / b$ $\sin\beta / \sin\gamma = b / c$

$\sin\gamma / \sin\alpha = c / a$

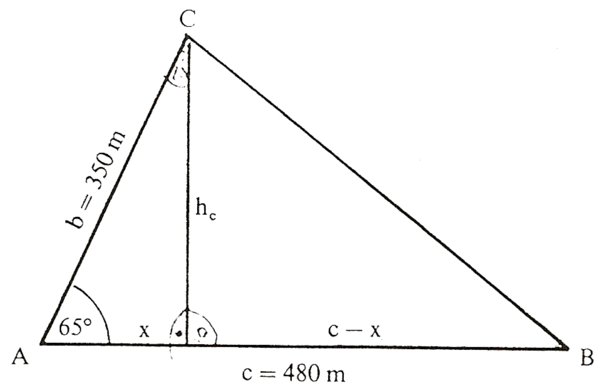
د ساین جمله په پڅ دریګوډي کي هم باورلري(تمرین دې وکتل شي). ددې سره په یوه دریګوډي کی نه موجودې ټوټې هلته شمیرل کیږي، چیرته چی دوه اړخونه او یو مخامخ کونج یا دوه کونجونه او یو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي.

سړی بیا څه کوي که دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي او یا دوه اړخونه او د هغوتر منځ راګیر کونج؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیلبیلګه : په یوه د ډبروسکرو کان کې دوه ستنې $b = 350\ m$ او $c = 480\ m$ دي او یو کونج $\alpha = 65°$ بندوي.

د B څخه و C ته به د نښلولو ستن یا تیر څومره لوي وي ؟



شیره ۲۰۳

اوبې یا حل :

جګوالي یا جګې h_c کرښه $AB = c$ په دوه ټوټو x او $c-x$ ویشي.

دلته دی $x = b.\cos\alpha$ ،

ځکه چې $\cos\alpha = x / b$ دی. د پیتاګوراس د جلې له مخې

لرو : $h_c^2 = b^2 - x^2$

او

$$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2 .$$
$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb \cos\alpha$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړخونو اوږدوالی نومونی او کونج کیدی شي چي منظم بیرته راګرځیدونکی (ځیکلیکي یوناني کلیمه ده ګردی ډوله یا منظم بیرته راګرځیدونکی zyklisch یو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

کوساین جمله

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$

په هر یوه دریګوډي کی د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زیاتون سره ترې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساین سره ځل.

د کوساین جمله د پیوتاګوراس د جملی عمومیت یا ټولیز ته هم وایي. (تمرین ۶ مخ دې وکتل شي)

د کونجبلواك له لارې یو بل متود، د ډیرګوډي شمیرلو لپاره ، تر څو دا په دریګوډیو ویشل کیدی شي چی پوره اړخونه او کونجونه یی څرګند وي، پیدا شو. د دې ټولو سره د څلورګوډي یو وربرسیره بل د شمیر فرمول پیداشو:

$$A = 0,5.d_1.d_2.\sin\alpha$$

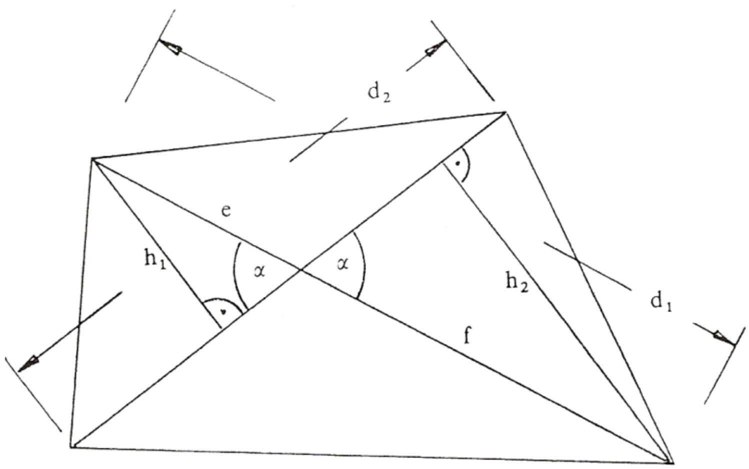
چیرته چي $\alpha = w(d_1; d_2)$ وي .

اوبی یا حل : $A=0,5(d_2h_1 + d_2h_2)$

که d_1 په e او f ټوټه یا تجزیه شي ، نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1 = e \cdot \sin\alpha$$
$$h_2 = f \cdot \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0,5 \cdot d_2 (e + f) \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0,5 \cdot d_2\, d_1 \sin\alpha$$



شیره۲۰۴

د په خوښه کونجونو تریګونومتریکي بلواکي

په اخره برخه کی مو وویل، چی کونجبلواك، نه یواځی د دننه لورته تیرو دریګوډیو لپاره ، بلکه د هغو کونجونو لپاره چی له ۹۰ درجو لوي وي ، هم هدفمند (موخور) تشریحوړ دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کړ.

دا پراختیا څنګه تصور یا د خیالوړ کیدی شي ؟

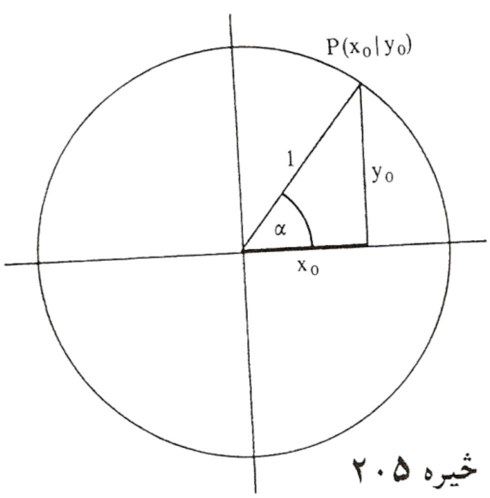
(c) ketabton.com: The Digital Library

په ښه توګه داسې کیدی شي چې په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم کې یوه ګردۍ ووهي چې وړانګه یې ۱ یعنې یو یوون یا واحد دی (دې ته یوونګردۍ ویل کیږي، ځکه چې وړانګه یې یو یوون دۍ) او د ګردۍ منځټکی او د پروت ولاړ سیستم کواوردېنات سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریګوڼۍ، چې د هغې یو کونج د ګردۍ ځنتریکونج دۍ، یعنې کونج یې د ګردۍ په منځ یا ځنتر پروت دۍ، (خیره ۴۳ |) کم له کمه یې یو اړخ ۱ یعنې یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریګوڼۍ په دننه کې شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړکونجیز دریګوڼي ځخه پیل کوو، چې په لمړي لمړي ځلورمه یا کوادرانت (Quadrant) کې پروت د ی . نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په ګردۍ ،د کونجټکی $P(x|_0y_0)$ په پام کې نیولو سره، باور لري:

$$\sin\alpha = y_0 / 1 = y_0 , \quad \cos\alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرښې د پریوستون او یا د سیورېدرځونو په ځیر لاس ته راځي، که موږ وړانګه د یوه ټالوهونکی مړوند په ځیر ونیسو یعنې فرض کړو، کوم چې د محورغبرګي رڼا لاندې راشي.



خیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریګوڼي کې کیدی شي چې د پیتاګوراس جمله وکارول شي:

تریګونومتریکي پیتاګوراس:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

چیرته چې $\sin^2\alpha = \sin\alpha . \sin\alpha$ په مانا دۍ.

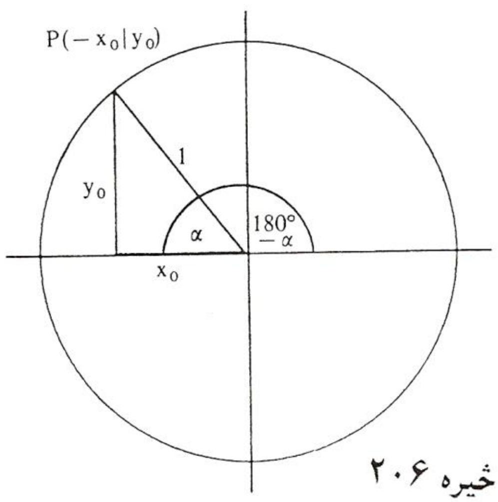
(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي ، چی پوښتنه وشي چی همدا « سیوری » بیا کله لاس ته راتلی شي.
دا حالت بیاټیك هلته لاس ته راځي، چی وړانګه د منفي x –محور سره یو
کونج α جوړ کړي، یعني څنتریکونج یی $180° - \alpha$ وي.
د « سیوروڅیرو » څخه لاس ته راځي:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

ځکه چی دا سیوری همغومره اوږد
دی لکه د مخه، مګر اوس له صفر
پیل مخامخ (منفی) لور ښايي.



خیره ۲۰۶

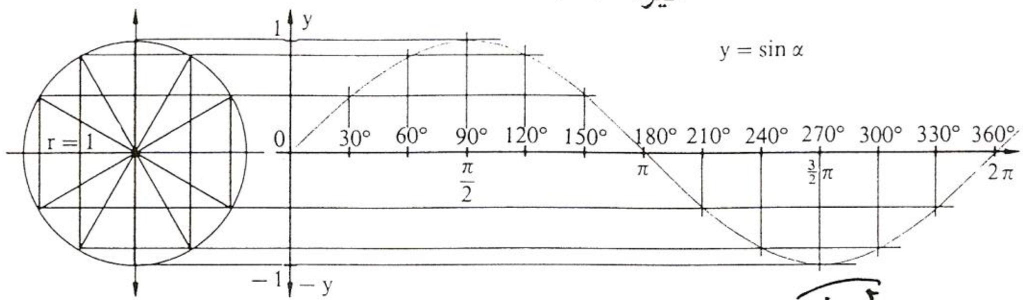
په ورته توګه لاس ته راځی :

$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(360° - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

د کونج α+360° لپاره بیرته د سرچیني کونج اړیکی لاس ته راځي: همدا ډول
د α+720 لپاره اوهمداسی نور. په دې توګه د په خوښه کونجفنکشنونو یا
کونجبلواکو لپاره د ساین او کوساین بلواك تعریف دي.
د $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ له امله (مقایسه مخ ۱۵۱) دا د تنجنت بلواك لپاره
هم صدق کوي. له دې امله لاندې د بلواکګرافونه لاس ته راځی

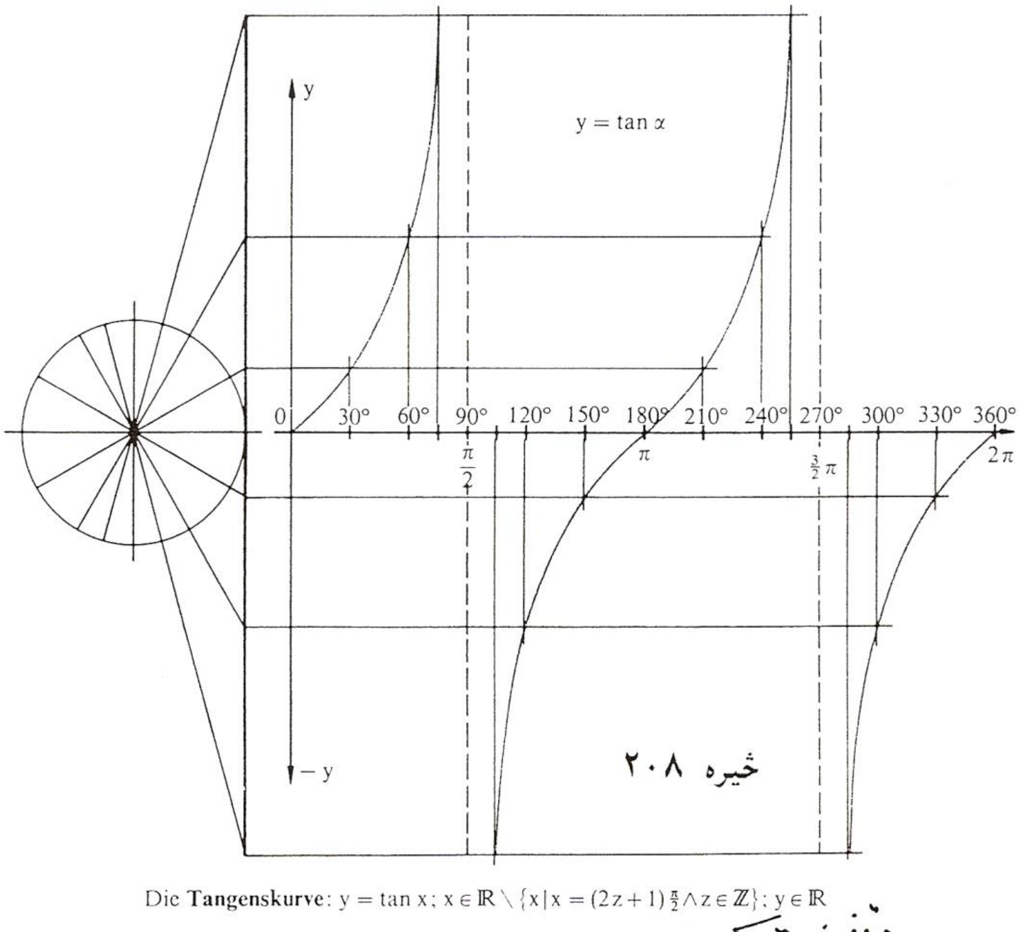
(c) ketabton.com: The Digital Library

ثیره ۲۰۷



Die **Sinuskurve**: $y = \sin x$; $x \in \mathbb{R}$; $y \in [-1; 1]$

د ساین کږه

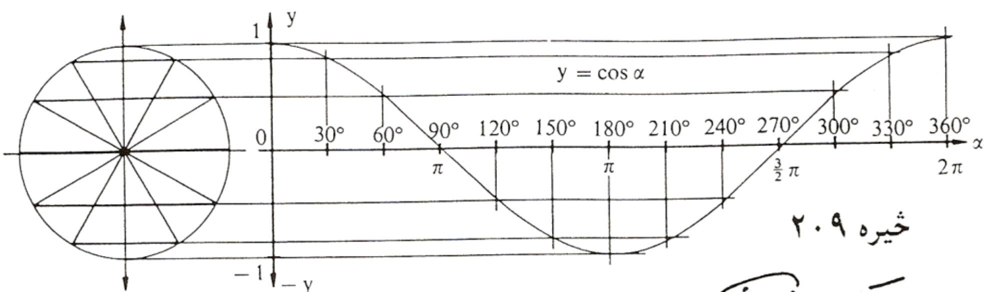


ثیره ۲۰۸

Die **Tangenskurve**: $y = \tan x$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\}$; $y \in \mathbb{R}$

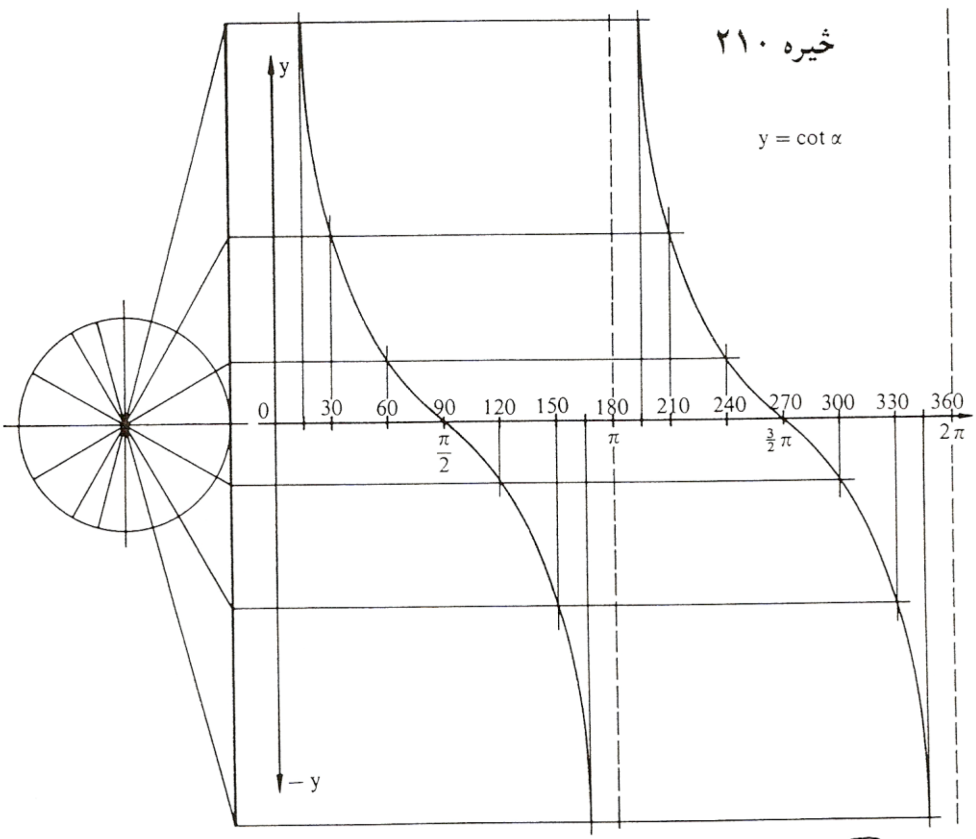
د تنجنت کږه

(c) ketabton.com: The Digital Library



Die **Kosinuskurve**: $y = \cos x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$

دکوساین کج ۰



Die **Kotangenskurve**: $y = \cot x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

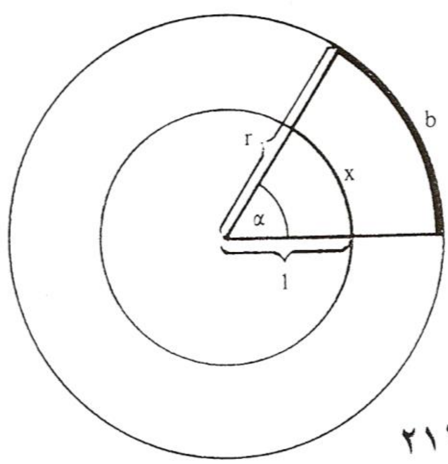
دکوتنجنت کج ۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

لينده اندازه (لينده کچ) Das Bogenmaß

په زره درجه د کونجکچ يا – اندازې سره بلد يو (دمخه وليدل، چې ۳۶۰ درجې پوره ګردی ښايي. هغه، چې لږ ورسره بلد يو يا زيات ورسره بلد نه يو، هغه نوې درجه ده ، چې ګردی په ۴۰۰ مساوي برخو ويشل کيږي. دا په دواړو کچيوونونو يا کچواحدونو کی ګډ دي، چې په ګڼونو اندازه کيږي، بی له کچ يوون ارزښتډيری ريبلګڼونه دي، په داسی حال کي چې وتل ګڼونه (= د تعريف ډيري ګڼونه) يو يوون يا واحد (درجه يا ګون) لري. دا په کارونه يا عمل کی موږ زيات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د ليندې کچ سره د کونجکچ لپاره يو ور زيات امکان پيدا شو.

کونج لويي په واقعيت کی يوون «راد (rad) » لري، مګر دا په کارونه يا عمل کی کيدی ونه ليکل شي يا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته مو نه راهځوي. دا کونجکچونه چې د کونج لپاره په تريګونومتريکی بلواکو کی اينښودل کيږی (د بيلګي په توګه sin)



خيره ۲۱۱

ارګومنت (Argument تعريفډيری) بلل کيږي. په تعريفډيري کی کيدی شي چې نوې درجه ، زره درجه او يا لينده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چې په جبشميري کی همغه مودوس په کار اچول شوي دی(راتلونکی دې وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

په برخه گردیبرخوکی وښوول شو (گردیبرخی د مخه څیړل شوي دي) چی هر کونج پورې یوه گردبېرخه یا گردۍ لینده اړه لري، نو ټولی گردۍ پورې ۳۶۰ درجی کونج یا $2\pi r$ اړه لري، یوه کونج α پورې بیا یوه لینده b اړه لري، کومه چی په چاپېرۍ ځانګړی همداسی نیسي لکه په پیل کی α و ۳۶۰ درجو ته . دلته گردیګڼ دی : $\pi = 3,14....$ (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

پیلبیلګه:

کونج $\alpha = 60°$ له گردۍ د ۱۰ سانتیمتره وړانګي سره یوه په لاندې ډول گردۍ لینده $b = 20\pi . 60° : 360° = 10,47$ cm غوځوي یا بیلوي. د گردۍ چاپیرۍ دی : $U = 20\pi = 62,83$ cm

همغه کونج α د ۵ سانتي متره وړانګی سره گردیلینده
$$b = 10\pi .60° : 360° = 5,236 \text{ cm}$$
غوځوي. دا گردۍ لاندې چاپیرۍ لري: $U = 10 = 31,416$ cm .

له گردۍ د وړانګي $r = 1$ cm سره ددې په څټ یا برعکس کونج گردیلینده
$$b = 2\pi . 60°: 360° = 1,047 \text{ cm}$$
غوځوي» د دې گردي چاپیرۍ فقط $U = 2\pi = 6,283$ دی .

له بیلګي څرګندیږي، چی لینده اندازه په همغه اندازه زیاتیږي لکه وړانګه. له دې امله کیدی شي خپله شمیرنه په یوونګردي د وړانګي ۱ سره رابنده یا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعریف: په یوونګردي د گردیلیندی اوږدوالي کچګڼ، چی په څنتریکونج

(c) ketabton.com: The Digital Library

باندې څېره شوي، لینده کچ بلل کیږي. لاندې شمیراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180°) . \pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = (x / \pi)\, 180° = \frac{x}{\pi} \cdot 180°$$

دا چې د وړانګي څرخون په پوره کونج هم وراوړیدی شي، نو له دې امله د لینده کچ لپاره په خوښه ریيلګڼونه پرېښوول شوي.
بیلګی :

$$\alpha = 1° \Leftrightarrow x = \frac{1°}{180°}\pi = 0{,}0175 \text{ (rad)} \qquad \alpha = 180° \Leftrightarrow x = \frac{180°}{180°}\pi = \pi = 3{,}1416$$

$$\alpha = 30° \Leftrightarrow x = \frac{30°}{180°}\pi = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236 \qquad \alpha = 360° \Leftrightarrow x = \frac{360°}{180°}\pi = 2\pi = 6{,}2832$$

$$\alpha = 45° \Leftrightarrow x = \frac{45°}{180°}\pi = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854 \qquad \alpha = 720° \Leftrightarrow x = \frac{720°}{360°}\pi = 4\pi = 12{,}5664 \quad \text{usw.;}$$

$$\alpha = 60° \Leftrightarrow x = \frac{60°}{180°}\pi = \frac{\pi}{3} = 1{,}0472$$

$$\alpha = 90° \Leftrightarrow x = \frac{90°}{180°}\pi = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \qquad \alpha = -75° \Leftrightarrow x = \frac{-75°}{180°}\pi = \frac{-5}{12}\pi = -1{,}309$$

ارکوسبلواکي Arcusfunkrionen

زیات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کیږي ، چې لکه په ورکړشوو کرښځانیونو راپیداشوې کونجونه څنګه معلومیږي یا څنګه راڅرګندیږی یا بهتره څنګه ځانونه نیسی. ددې لپاره چی دا پوښتنه ځواب شي، باید امکانات ولټول شي، چی د کونجبلواك ارزښتونو څخه څنګه بیرته کونج یا په همدې توګه د هغه تعریفهډیري ته، په لینده کچ راتلی شو. دا کونجبلواك پریودیکی یا تل بیرته راګرځیدونکي بلواك دی، دا په دې مانا، چې د بلواك ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونولپاره یا .

(c) ketabton.com: The Digital Library

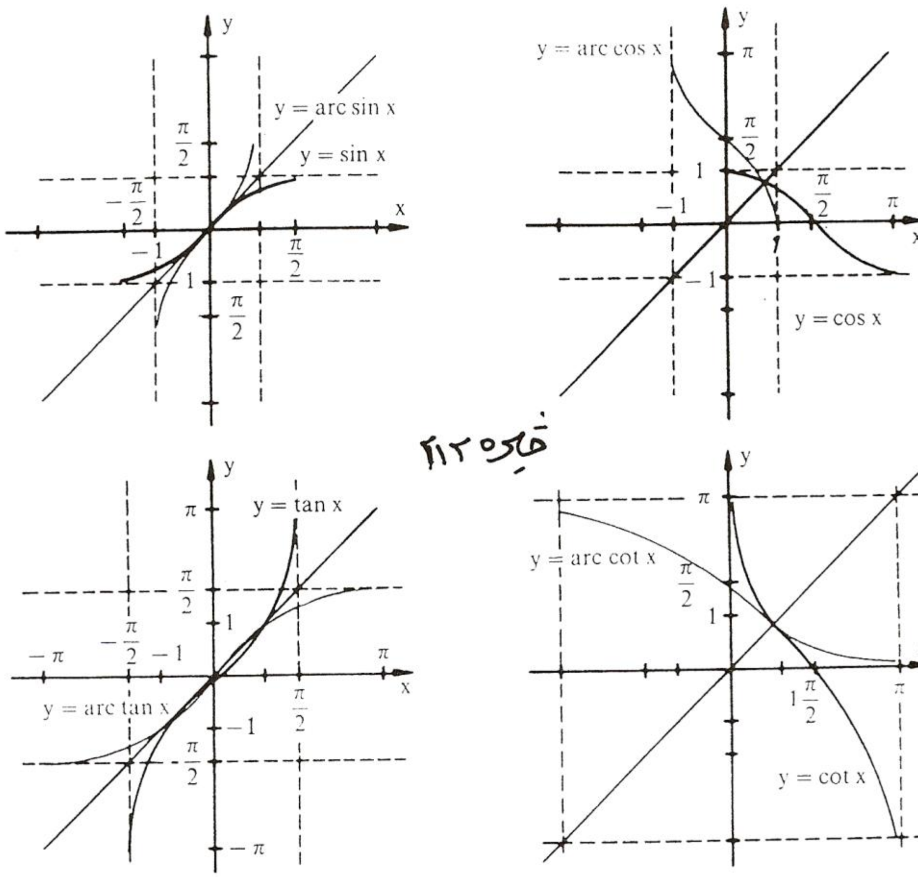
مختلفو واټنونو وروسته، بلواك ارزښتونه تکراريږي. د دې لپاره چې په څرګندنه ممکن شي، نو بايد د خپل تعريف ډيرى په يوه برخه ډيري رابند يا محدود شي.

تعريف : د يوه (رابند يا محدود) تريګونومتريکي بلواك په څټ بلواکونه ارکوس بلواك Arcusfunktion بلل کيږي يا څيکلومتريکي بلواك (لاتين :ارکوس Arcus = Bogen = لينده)

دلته (arc sin(x لوستل کيږي »د x ارکوس ساين. د کونجبلواك تعريفډيرى دلته اړونده ارکوسبلواك ارزښتډيرى دى او په څټ ارګومنت يا تعريفډيرى دلته تل يو رييلګڼ دى.

Trigonometrische Funktion تريګونومتريکي بلواك	Arcusfunktion ارکوسبلواك
f: $x \mapsto \sin(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle\| -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -1 \leq y \leq 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arcsin(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -1 \leq x \leq 1\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle\| -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \mapsto \cos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| 0 \leq x \leq \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -1 \leq y \leq 1\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arccos(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -1 \leq x \leq 1\}$ $\mathbb{W} = \{y \| 0 \leq y \leq \pi\}$
f: $x \mapsto \tan(x)$ $\mathbb{D} = \left\{x \middle\| -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -\infty < y < \infty\}$	f^{-1}: $x \mapsto \arctan(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \left\{y \middle\| -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$
f: $x \to \cot(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| 0 < x < \pi\}$ $\mathbb{W} = \{y \| -\infty < x < \infty\}$	f^{-1}: $x \to \operatorname{arccot}(x)$ $\mathbb{D} = \{x \| -\infty < x < \infty\}$ $\mathbb{W} = \{y \| 0 < y < \pi\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



څېره ۲۱۲

Beispiele: بېلګې:

1. arcsin (0,8) $= 0{,}9273\,(\mathrm{rad}) = 53{,}13°$
2. arccos (1) $= 0\,(\mathrm{rad}) = 0°$
3. arctan (−100) $= -1{,}5608\,(\mathrm{rad}) = -89{,}43°$
4. arccot (−70) $= -0{,}0143\,(\mathrm{rad}) = -0{,}82°$

۵ – دا چې کونجبلواك و ارکوسبلاك يو د بل په څټ بلواك دي نو باور لري.

$$\sin(\arcsin(y)) = y; \quad \arcsin(\sin(x)) = x$$
$$\cos(\arccos(y)) = y; \quad \arccos(\cos(x)) = x$$
$$\tan(\arctan(y)) = y; \quad \arctan(\tan(x)) = x$$
$$\cot(\mathrm{arccot}(y)) = y; \quad \mathrm{arccot}(\cot(x)) = x$$

یعني په لاندې توګه هم

$$\sin(\arcsin(0{,}4)) = \sin(23{,}58°) = 0{,}4$$
$$\arccos(\cos(\pi/3)) = \arccos(0{,}5) = 1{,}0472$$
$$\tan(\arctan(-40)) = \tan(-88{,}5679°) = -39{,}9999$$
$$\mathrm{arccot}(\cot(60°)) = \mathrm{arccot}(0{,}5774) = 1{,}0472$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د جبشميري كاروني يا استعمال لپاره

داچې پخوا معمول جدولونه د بلواك تعريفېدېري او ارزښتېدېري شميرلو لپاره له كاره غورځول شوي دي او دنده يې ايلكترونيكي ماشينونو نيولې ده، غواړو چې د جبشميري استعمال په هكله هم څه ووايو
كوركمپيوتر زيات وخت داسې فنكشنونه يا بلواكي لري يا وظيفې په كلك اختيار كې لري، چې د درجې اوړون په لينده كچ او په څپ كوي، مګر شميردرځ په توګه بايد د شميرونكې په پروګرام كې ځاى په ځاي شوى وي.
پوره اسانتياوې او زياته كارونه د جبشميرې په غاړه پرته ده، دلته دې توكمې د < .... > سره په نخښه شي:
په قاعده كې دريې بلواك وركړشوي دي : < cot > ; < cos > ; < sin > كوتنجنت بيا داسې شميرلكيدى شي، د <tan><1/x > . د < INV > – توكمي سره سړى اركوسبلواك ته راځي: نو < INV><sin > اركوس ساين دى. په عمومې توګه كونج – بې پروا كه په لينده كچ او يا درجه كچ وركړ شوي وي – بايد د فنكشن له مخه وركړ.

بيلګي

س
١ لاندې جدول همغه د كاروني يا اتعمال لپاره د جبشميري چمتووالى ښاى :

Winkelmaß کونج کچ	TR-Modus په تخنیونه	Beispiel بېلګه
Altgrad زړه درجه Neugrad نوې درجه Bogenmaß لینده کچ	DEG GRAD RAD	$\sin 45° = 0,7071$ $\sin 50^{g} = 0,7071$ $\sin \frac{\pi}{4} = 0,7071$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. Zu ermitteln	Tastenfolge	Anzeige im Display	Modus
sin 45°	45⟨sin⟩	0.707106781	DEG
$\sin\frac{\pi}{6}$	⟨π⟩⟨:⟩6⟨sin⟩	0,5	RAD
cot 30°	30⟨tan⟩⟨1/x⟩	1.732050808	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	60(°)	DEG
arccos 0,5	0.5⟨INV⟩⟨cos⟩	$1.047=\frac{\pi}{3}$	RAD
arccot 2	2⟨1/x⟩⟨INV⟩⟨tan⟩	26.56505118°	DEG
sin 220^g	220⟨sin⟩	−0,3090	GRAD

دلته مهم دی، چی جبشمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه ») د زاړه – یا نوي درجی همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جبشمیریو مودلونو سره د تکمی <DRG> څخه لاس ته راځی یا د بیلګي په توګه < MODE >.

د ورکړشوي درجه ګڼ اوړون په لینده کچ د <<- DRG > سره سورت نیسي.
بیرته یا په ځټ سړی داسی راځي- لکه چی لرل مو- د <INV> – تکمی سره.

بیلګی

60°	⟨DRG⟩	60(rad)
60	⟨DRG⟩	60(grad)
60°	⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨DRG →⟩	60°
60°	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	66.66666667(grad)
66.66666667	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	1.047197551(rad)
1.047197551	⟨INV⟩⟨DRG →⟩	60°

دلته ګراد نښونه (gard) نوی درجه ده یعنی ګون(gon).

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځنې جشميري په دې برسيره نور زيات امکانات هم لري ، نتيجې يې په ګراد دقيقې، ثانيې اويا لسيز سيستم ورکړ شوي دي. بدلون بيا د تکمې <DMS-Dd > سره صورت نيسي:

26°45′ 30.25°	⟨inv⟩⟨DMS – Dd⟩ ⟨DMS – Dd⟩	26.75° 30°15′

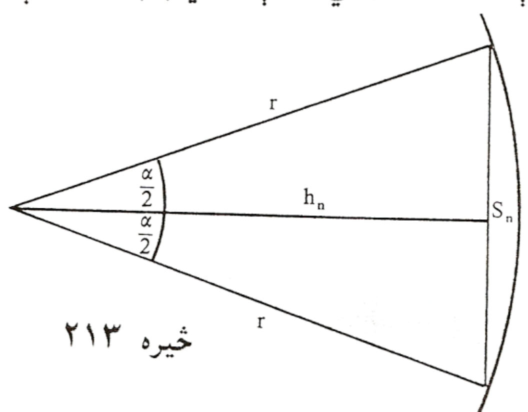
د " 30° 15" " ورکړه کيدی شي د جبشميري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جبشميری د لاس کتاب څخه ګټه واخستل شي (يادونه: زه پوهيږم چې داسې شيان موږ متآسفانه په خپل هيواد کې نه لرو ، خو په هر صورت يې ليکل ضرور دي، دا پرمختګ موږ هم خپل شاته نه شي پريښوولی)

پيلبيلګه: دلته دې S_n د يوه منظم n– ګوډي د اړخ اوږدوالی وي، چې په يوه ګردی کې چې وړانګه يې $r = 5$ cm ده، راګير دی.

الف) وښايې چې

$$S_n = 2r \cdot \sin(180° : n)$$

ب) د يوه داسې n– ګوډي چاپيرې U_n وشميرې ، چې $n = 8;16;32;128$ وي، او په نزدې توګه يا تقريبي د دې ګردي چاپيرې د دې وړانګې r سره وښايې .



څيره ۲۱۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په همدې ډول n– ګوډی له هوارو A_n څخه په نږدې توګه یا تقریبي د ګردی ـــ هواره A وښایي .

اوبی (حل : هر n– ګوډی کیدی شي په n مساوي دریګوډیو ټوټه کړی شي.
د هغو د څینتریکونج ∝ لپاره باور لري n / $360° = ∝$. د جګی یا جګوالی h_c
د کښلو سره په هر مساوي پښیز دریګوډي کي ولاړکونجیزې نیایی د څنتریکونج یا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\alpha}{2} = 360° / 2n = 180° / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n /2) / r = \sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow S_n = 2r . \sin\frac{\alpha}{2} = 2r . \sin(180° / n)$$

b) $U = n.S_n = 2r.n.\sin(180°/n) = 10n.\sin(180° / n)$

د ارزښتشمیرنو د غلطۍ مخنیوی لپاره همدفمند یا موخه ور دی، که په دغه همغه لړپیرلپسی تکمی وکارول شي یا استعمال شي .

```
180°⟨STO⟩⟨:⟩   8⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩   8⟨·⟩10⟨=⟩30.614675
    ⟨RCL⟩⟨:⟩  16⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩  16⟨·⟩10⟨=⟩31.214452
    ⟨RCL⟩⟨:⟩  32⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩  32⟨·⟩10⟨=⟩31.365485
    ⟨RCL⟩⟨:⟩  64⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩  64⟨·⟩10⟨=⟩31.403312
    ⟨RCL⟩⟨:⟩ 128⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 128⟨·⟩10⟨=⟩31.412773
```

پ) د ډیرګوډي هواره د دریګوډیو هوارو د یوځایوالی څخه لاس ته راځی
د هر دریګوډي هواره ده: $0,5 .S_n . h_n$. د

$$h_n = r.\cos(180° / n)$$

او

$$S_n = 2r . \sin(180°/ n)$$

له امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = n \cdot 0{,}5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0{,}5 \sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$$

له دې سره د نرې [illegible]

```
360° ⟨STO⟩ ⟨ : ⟩   8 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩   8 ⟨·⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 70.710678
     ⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩  16 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩  16 ⟨·⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 76.536686
     ⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩  32 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩  32 ⟨·⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 78.036129
     ⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩  64 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩  64 ⟨·⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 78.413712
     ⟨RCL⟩ ⟨ : ⟩ 128 ⟨ = ⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 128 ⟨·⟩ 12.5 ⟨ = ⟩ 78.508279
```

د يوه جشميرې سره ، چې له يوې زخيرې زياتی ولري ، لکه چې پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسيره نورې ثابتې هم زخيره کيدی شي» په يوه منظم پروګرامونړ ماشين سره کيدي شي چې د دا ډول شميرنو لپاره د ګوډونو ګڼ څخه ت شو يا د ګوډونو ګڼ باند ې صرفنظر وشي .

د تريګونومتريکي بلواکو خويونه

دا چې کونجکچ په درجه کچ او هم په لينده کچ ورکول کيدی شي، کيدی شي چې يوه کونج بلواك تعريفېدری يا ∝ او يا x وي. ددې لپاره چې د يوه بلواك خوي باندې ټينګار وکړو، بايد په لاندې په لينده کچ تکيه وکړو.
د لاندې خويونو لمړۍ ډله يواځې له تعريفمساوات (د مخه راغلی) او د پيتاګوراس له جملی لاس ته راځي (د مخه لوستل شوې) لاندې صدق کوي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف :

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پرته کاتیت}} = \frac{\frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}}{\frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دي لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \iff \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسیره پر دي لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دي سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x \;; \quad 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تریګونومتریکي بلواکو کی هیله ده ، چی د پوتنځ لیکدود په پام کی ونیسی.
په لاندي پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

په لاندي کی gegeben ورکړی او gesucht غوښتونی یا پلټونی په مانا دي

gegeben ورکړی / gesucht غوښتونی	sin x	cos x	tan x	cot x
sin x	sin x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

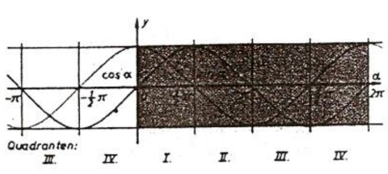
$\cos x$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\cos x$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$	$\pm\frac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$
$\tan x$	$\pm\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cot x}$
$\cot x$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\pm\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{\tan x}$	$\cot x$

لکه چې د مخه مو په ګوته کړل، کیدی شي چې تریګونومتریکي بلواك د مختلفو ګونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواك ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توګه یا په کلکه توګه لاس ته راوړی شو

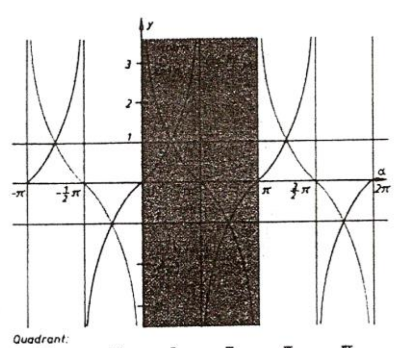
تعریف : تریګونومتریکي بلواك ټول پریودیکي یعني بیرته راګرځیدونکی دی، دا په دې مانا، چې د بلواك ارزښتونه په منظمو واټنونو کی تکراریږي. په دې د ساین بلواك او د کوساین بلواك راګرځیدنه (یا ۳۶۰ درجې) لري، کوتنجنتبلواك راګرځیدنه (یا ۱۸۰ درجې ($180°$)) لري.

$$\left.\begin{aligned}\sin(x \pm 2k\pi) &= \sin x\\ \tan(x \pm k\pi) &= \tan x\end{aligned}\right\}\quad k \in N$$

$$\left.\begin{aligned}\cos(x \pm 2k\pi) &= \cos x\\ \cot(x \pm k\pi) &= \cot x\end{aligned}\right\}\quad k \in N$$



خیره ۲۱۴
د ساین - او کوساین فنکشن پیریود یا ئې راګرځېدنه



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجنت او کوتانجنت فنکشنونو پریود یا تل بیرته راگرځیدنه:

بیلگې:

بیلگې:

$\sin 50°$	$= \sin(50° + 360°)$	$= \sin(50° - 720°)$	$= 0{,}76604$	
$\cos -30°$	$= \cos(-30° - 360°)$	$= \cos(-30° + 1080°)$	$= 0{,}86603$	
$\tan 2{,}5$	$= \tan(2{,}5 - \pi)$	$= \tan(2{,}5 + 5\pi)$	$= -0{,}74702$	
$\cot 10$	$= \cot(10 + \pi)$	$= \cot(10 - \pi)$	$= 1{,}54235$	
$\sin 35°$	$= \sin(180° - 35°)$	$= -\sin(180° + 35°)$	$= -\sin(360° - 35°)$	$= 0{,}573576$
$\cos 35°$	$= -\cos 145°$	$= -\cos 215°$	$= \cos 325°$	$= 0{,}81952$
$\tan 0{,}6109$	$= -\tan 2{,}5307$	$= \tan 3{,}7525$	$= -\tan 5{,}6723$	$= 0{,}700208$
$\cot 0{,}6109$	$= -\cot 2{,}5307$	$= \cot 3{,}7525$	$= -\cot 5{,}6723$	$= 1{,}428042$

که د فنکشن گراف ته په ځیر شو، نو برسیره پر دې روښانیږي:

x	$\pi - x$	$\pi + x$	$2\pi - x$	
$\sin x =$	$\sin(\pi - x) =$	$-\sin(\pi + x) =$	$-\sin(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\cos x =$	$-\cos(\pi - x) =$	$-\cos(\pi + x) =$	$\cos(2\pi - x)$	(Abb. 179)
$\tan x =$	$-\tan(\pi - x) =$	$\tan(\pi + x) =$	$-\tan(2\pi - x)$	(Abb. 180)
$\cot x =$	$-\cot(\pi - x) =$	$\cot(\pi + x) =$	$-\cot(2\pi - x)$	(Abb. 180)

بیلگی:

	α	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$360° - \alpha$
	35°	145°	215°	325°
sin	0,573576	0,573576	– 0,573576	– 0,573576
cos	0,819152	– 0,819152	– 0,819152	0,819152
tan	0,700208	– 0,700208	0,700208	– 0,700208
cot	1,428148	– 1,428148	1,428148	– 1,428148

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځې د جبشمیرې یا کمپیوتر څخه کار اخستل کیږي ، هدفمند بولو، چې یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
sin x bzw. sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
cos x bzw. cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1	0	1
tan x bzw. tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	–	0
cot x bzw. cot α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0	–

دلته د همداډول یا همداسي په معنا دی

له دې جدول څخه کیدی شي په خیال کی یا ګوماني لاس ته راوړی شو

sinx = cos (/2 -x)   cos x = sin (/2 -x)

tan x = cot (/2 - x)   cot x = tan (/2 -x)

دا ګومان کیدی شي په ولاړکونجیز دریګوډي کي د تعریف په مرسته په ساده توګه وښوول شي. :

sin   = a / c او cos ß = a / c

د   – 90° = ß له امله لاس ته راځي :

sin   = cos (90° -   )

په ورته توګه نور ې غوښتني هم لاس ته راتلی شي.

دا له ځیرو   څخه هم لاس ته راوړل کیدی شي، ځکه د ساین او کوساین بلواکو یا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنت بلواکو ګرافونه د 2/   = x کرښی ته یو بل سره محورسیومتري څغلي :

له ځیرو او بیلګو څخه په دې برسیره لاس ته راځي:

تعریف: د کوساین بلواك جفت دی ، لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

ساین – ، تنجنت – او کوتنجنت بلواك ناجفت دي» د دوي لپاره باور لري:

$$\sin(x) = -\sin(-x),\ \tan(x) = -\tan(-x)\ ;\ \cot(x) = -\cot(-x)$$

یادونه : په دې نلواکو کي کیدی شي چی x له نوکانو دباندې هم وي:

بیلګی:

$$\sin 60° = -\sin(-60°) = 0{,}86603$$
$$\cos 0{,}75 = \cos(-0{,}75) = -0{,}70711$$
$$\tan 150° = -\tan(-150°) = -0{,}57735$$
$$\cot 1{,}3 = -\cot(-1{,}3) = o{,}27762$$

د زیاتون قضیې یا تیورمونه

دا چي کونجبلواك لاینې نه دي(د فنکشنګراف کرښه نه ده،بلکه کږه ده) ، نو ډېل تعریفېدونکي پورې ساده ډبل بلواك ارزښت اړه نه لري.
لکه

$$\sin 30° = 0{,}5 \quad \sin 90° = 1 \quad \sin 180° = 0$$

د داسی په نامه زیاتونمسئلی په مرسته ممکن کیږي، چی د بلواك ارزښت د کونج په دوه برابرولو یا په همدې ډول د دوه کونجونو پو په بل زیاتولو د یوګونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابي کړی شو.

بیلګی :

1 . $\sin(x + y) = \sin x . \cos y + \cos x . \sin y$

1' . $\sin(x - y) = \sin x . \cos y - \cos x . \sin y$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2 . $\cos(x + y) \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$

2 '. $cis(x - y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y$

3 . $\sin 2x = 2.\sin x . \cos x$

4 . $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

6. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

7. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0,5(1 - \cos x)}$

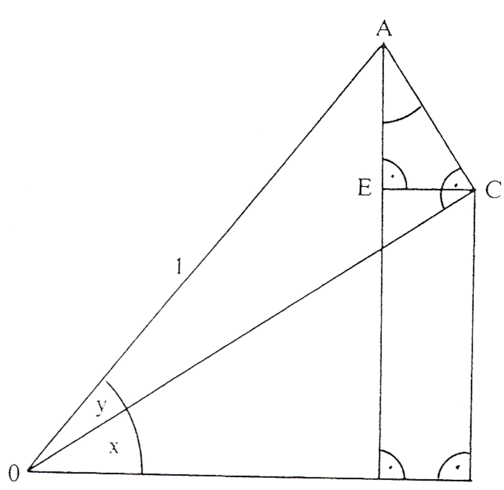
8. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0,5(1 + \cos x)}$

9. $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

9′. $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

10. $\cot(x + y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$ mit $\cot x \neq -\cot y$

10′. $\cot(x - y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y}$ mit $\cot x \neq \cot y$



خیره ۲۱۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

1. und **2.**:

$|OA| = 1$

$|AC| = \sin y; \quad |OC| = \cos y$

$|AB| = \sin(x+y); \quad |OB| = \cos(x+y)$

$$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

$$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

برسېره پر دې لرو:

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$
$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

د ځای په ځای کولو څخه ښوونه په لاس راځي

$$\sin(x+y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

1′. **2′.**:

3. **4.**: $x = y$. ځای پر ځای کړه

5.: Setze $z + t = x;\ z - t = y \Rightarrow z = \frac{x+y}{2};\ t = \frac{x-y}{2}$ کېږده

پس لرو

$$\sin x = \sin(z+t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$$
$$= \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

همداسې

$$\sin y = \sin(z-t) = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

6. ښوونه په ورته توګه مخ ته ځي

7.: $x = y = z/2$ کېږده

$$\Rightarrow \cos(x+y) = \cos z = \cos 2 \cdot \frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2\frac{z}{2} - \cos z \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ریښه نیوني له لارې ښوونه لرو

په (*) کې $\sin^2 z/2$ $1-\cos^2 z/2$ کیږده:

۹ – ۱: دا اړیکې له ۱ او اوم او تانجنت پیژند څخه لاس ته راځي

بلواك يا فنکشن $y = a . \sin(bx+c) +d$

لکه چی په پیل کی مو وویل په طبیعت او تخنیك کي ډیرې پیښي شته دی چي تل بیرته راکرځي یا لنډ: راګرځي، يعني پریودیکي دي. د دې د تشریح لپاره په خپل سوچه یا خالصه بڼه تل د ساین بلواك بسیا نه کوي.
دا زيات علتونه لري : لمړی د ساینبلواك د ۱– او ۱ ترمنځ ارزښت نیسي، له بلي لور داواقعي د کونج په واك کی نه دي بلکه د وخت په واك کي دي د یوې راګرځیدنی سره، چی دا په ساده توګه د 2 په ډول نه شي رانیولکیدی. له دې امله د ساین بلواك د دې کارونو د روښانوولو لپاره باید موډیفیځیر شي یا یی بڼه واوړي. دا بڼه اوړون او د هغی تاثیر په لاندې لیدنه کی راټول شویدي، ګراف یی ورزیاتی ځیرونی لپاره دی. په ورته ډول د نورو کونجبلواکو لپاره باور لري په عمل کي مګر یواځي د ساینبلواك (په همدې توګه د هغي مخامخ د کوساین بلواك چي په $\pi/2$ سره راکښل شوی وي) د مانا ډك دي. (لوستل: له ښي لور څخه)

بیلګی	دکارونی ساحه	تاثیر	بلواك
ځیره ۲۱۷	ټولی تلبیرته راګرځیدونی تعامولونه		$y = \sin (x)$
ځیره ۲۱۸	د یوه مساوي او بدل شپیلونګ یو په بل پسې لوټل	د y-لور ته باندې راکښنه	$y = \sin(x) +d$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیره ۲۱۹	په بدل بریښنا جریان کې د بریښنا او شیانو تګ تخنیکي دوښانو ته	د فاز تغییر یا ځای بدلون	y = sin(x+c)
ځیره ۲۲۰	دیوه پندل خوځیدنه	د امپلیټیود د ځای بدلون فاکتور -1 د 180° فاز ځای بدلون دی	y = a . sin(x)
د ځیره ۲۲۱	دیو بنسټیزې کمزورې خپې نه په یوه وخت داسې چې نه دوه غږونه لږ سره له یو بل په منځ کې الوتکه او وزرونو کې	دیولید تغییر یا بدلون b>1 سرعت 0<b<1 په کراره کیدل b <0 په شا ګرځیدنه کم مخور دی	y = sin(bx)
ځیره ۲۲۲	کمپلکس پروډوي جریان یا عمل	عمومي حالت	y = a . sin(bx+c)+d

تمرینونه

۱ – د لاندې ورکړې سره ځیره بله کړی

4°6' = 4,1° ; 10° , 5' = 10°30

a) 6,75° = b = 120,48° = c) -75,65° =

d) 52°16' = e) 97°13' = f) 44°44' 44" =

۲ – په درجه کچ ي ولیکی

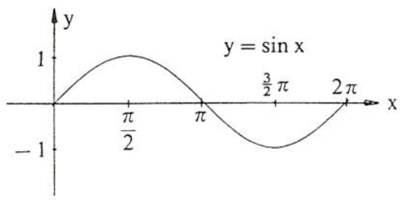
a) $x = \pi/3$, b) $x = -\pi/4$, c) $x\ (2/3)\pi$

d) x = 4 e) x = -3 f) x = 4,7

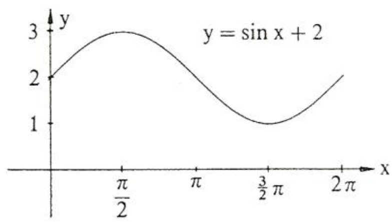
۳ – په لینده کچ یی ولیکي

a) 15° b) -60° c) 540° d) 20°15' e) 15,75°

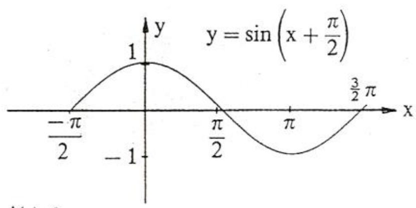
(c) ketabton.com: The Digital Library



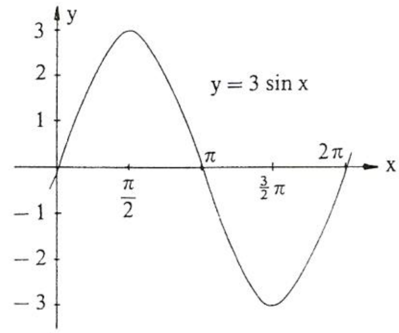
شیره ۲۱۷



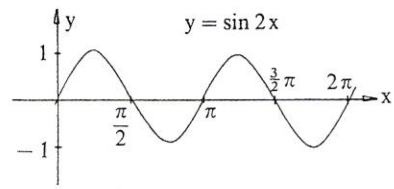
شیره ۲۱۸



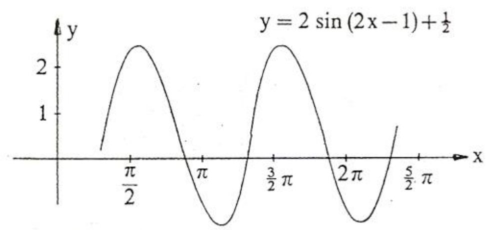
شیره ۲۱۹



شیره ۲۲۰



شیره ۲۲۱



شیره ۲۲۲

د دې بلواك ګراف د ساين كږې $y = \sin x$ څخه لكه چې ګورو لاس ته راځي:

۱ – د ارزښت دوه ځله کیدل

۲ – د نیمی راګرځید اوږدوالی باندې پرسیدنه

۳ – په یوه یوون د ښي لور ته راکښنه

۴ – په 1 / 2 پورته لورته 100% راکښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۴ – وټاکی

a) sin20° b) sin(-30°) c) sin 172° d) din1°4'

e) cos 35° f) cos 380° g) cos(-27°) h) cos47,9°

i) tan 11° k) tan (-15°) l) tan 33,33° m) tan 13°13'

n) cot 870° o) cot (-11°) p) cot 14°14'

q) cot (-2°2')

r) sin α =0,8 s) cos α = 0,9 t) tan α = 2,5

u) cot α =-1 v) sin φ = 0,3 w) cos φ = -0,13

x) tan φ = -4 y) cot φ = 0,3 z) arcsin(x) = π /2

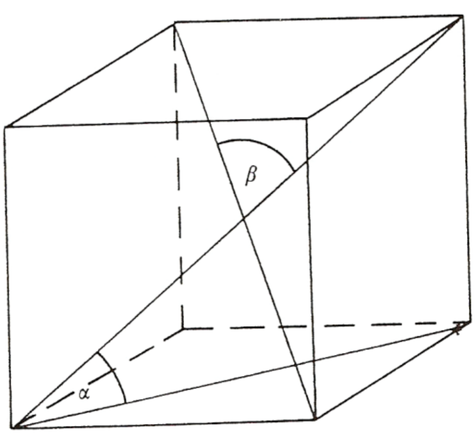
۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوټي کی لرو $\gamma = 90°$ او په دې برسیره :

a) a = 7 cm; b = 6cm

b) a = 16cm; = 66°45'

c) c = 5cm; a = 3cm

پاتی ټوټې وشمیرى



خیره ۲۲۳

۶ – په مساوي پښيز دريګوټي

کي (a = پښه ده) دى

a) a= 10cm ; α =80°40'

b) a= 12 cm ; h = 8cm

c) ß = 40°; a = 7cm

پاتی ټوټي وشميري

۷ – د یوه پڅکونجیز (α > 90°)

دریګوټي لپاره ساین وشمیرى

۸ الف) کوساین د یوه پڅ کونجیز

دریګوټي لپاره وشمیرى (α> 90°)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟

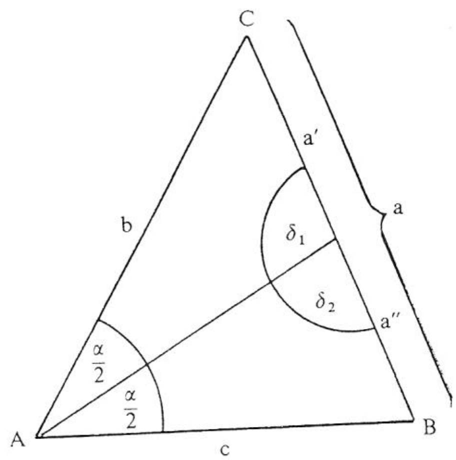
۹ – په یوه مکعب کی د یوه هوا نیمي او بنستهواري ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟
څیره .د دواړو هوا یا فضا یا بدن نیمیو ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

۱۰ – د دوه ګردیو وړانګی

$r_1 = 5 \text{ cm} \quad , r_2 = 4 \text{ cm}$

دي او همداسی د منځټکو واټن $|M_1M_2| = 8\text{cm}$ ورکړ شوی دی.
دد دواړو ګردیو د تماس
مماسونو غوڅکونجی وټاکی
او د کړي غوڅونی اوږدوالی .

۱۱ – په یوه دریګوډي کی د یوه
کونجنیمی مخامخ اړخ په داسی
ځان نیونه یا تناسب غوڅوي لکه
په دي پرتي خواوي. دا غوښتنه د
ساین جملی په مرسته حل
(اوبی) کړی(څیره۲۲۴).



څیره ۲۲۴

۱۲ – که یوه بار ځاي ته،
چي ۱،۵۰ متره جګ دی،
یوه زینه ورجګه شي
میلانکونج ↘ دي زیات ترزیات 33° وي، زینه دي څومره لویه وي؟

۱۳ – الف)د یوي پورته ختلی کوځي جګوالي توپیردي څومره وي، که دا
کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او 12% جګه وي؟
ب) د ۱۵۴۰ پرتی لاري وهلو وروسته د جګوالي توپیر څومره دی ؟
پ) د یوه زوړندي پټیلار، چی ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کی څومره
لوي دی ، که دا د جګوالی توپیر ۵۰۰ متره ولري؟

یو د اوبنی یا د اوبو بیلر (کله= ۱۰۰ کیلوګرامه) په یوه پورته خیزول کیږي، چي

(c) ketabton.com: The Digital Library

میلانکونج $\measuredangle = 25°$ لري. د وزنزور په زوړندزور تختی سره غبرګ او نورمال یعني ولاړ زور(د فشارزور) ولاړ تجزیه یا ټوټه کیږي، دواړه زوره څومره لوي دی ؟ (۱ کیلو ګرام = ۹ ، ۸۱ نیوټن $1\,kg = 9{,}81N$).

۱۵ – یو تلفونستن په څلور رسیو، چی هره یوه یی **۵۳** متره اوږده ده، درول کیږي. درسیو میلانکونج $60°$ دی په ښه باندې په کوم جګوالي باید رسی ورلی شي ؟

۱۶ – د یوې **۵۳** متره جګي ونی سیوری **۵** ، ۱۲ متره اوږد دی. په ځمکه لمروړانګي په کوم جګوالی یوبل سره مخمامخ کیږي.؟

۱۷ – د یوه **۵** متره جګ کتونټکي (لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کیږي چی جګیدونکوج یی $\measuredangle = 18{,}5°$ او ښنیټکی یی $ß=8°$ لوید کونج ، برج څومره جګ دی ؟ د لیدټکي څخه یی پروت لریوالی څومره دی ؟

۱۸ – الف) د پیزا (Pisa) کوږ برج ۴۷ متره جګ دی، او څوکه یی د ښنی ټکي څخه ۵۰ ،۴ متره ور اوړي. دا برج څومره مایل دی ؟

ب) د یوه جومات برج چی ۱۵۰ متره جګ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په ځمکي ټکي (یعنی د سترګي جګوالی د برج بنستټکي سره برابر وي)، څخه وکتل شي، چی د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟

پ) د **۵**، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کیږي

– که جګوالی یی ۱۶۰ متره وي؟

– که جګوالی یي ۱۳۷ متره وي ؟

ت) د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې

– د بل برج څوکه ښکاریږي چی جګوالی یي ۱۴۳ متره وي ؟

–د پاریس د ایفل برج ښکاریږي چی جګوالی یي ۳۰۰ متره دی ؟

۱۹ – د ښیپپس اهرام(CHeopspyramide) ۱۳۷ متره جګوالی لري او د بنسټ

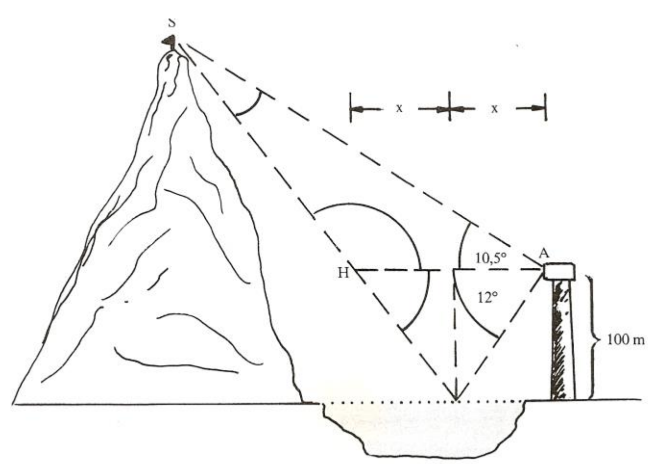
(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري
الف) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟
ب) د څنګهوارې دریواړه دننی کونجونه څومره لوي دي؟

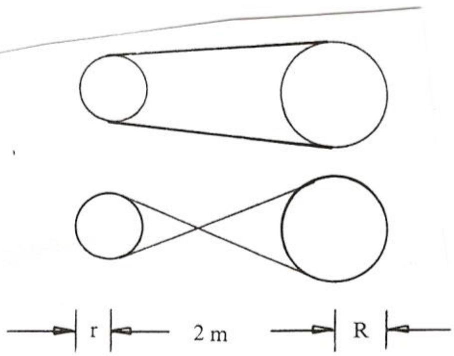
۲۰ – یو ژوری یا قبر –۸ ، ۱ متره ژور دی، بنسټسور یی ۵ ، ۲ متره دی، د پورته لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی
الف) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی څومره پراخ دی؟
ب) که ۱۰ متره اوږد وي، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جګوالی یی ۵۰ ، ۱ متره وي؟

۲۱ – یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جګوالی لري د بحیرې لور ته 14° میلان لري، د دننه لور ته 28° میلان لري. د ډنډ بنسټ څومره سور لري؟ د هغی د نیمی هواره څومره ده؟

۲۲ – د ریفلډنډ Riffelsee ښخه یو ښه لید د ماترهورن (ماترنښکر یا د ماترن د غره څوکه Matterhorn) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی دی) اچول کیږي که دا د یوه لیدټکي ښخه چی ۱۰۰ متره جګ دی د ډنډ په لور ښکته وکتل شي، نو د غره د څوکي هندارونه د 12° پریوتکونج لاندې لیدل کیږي. د غره څوکه د یوپورته کونج 11° لاندې لیدل کیږي. د ریفلډنډ باندې د ماترنښکر څوکه څومره جګه پروته ده؟
څیره



(c) ketabton.com: The Digital Library



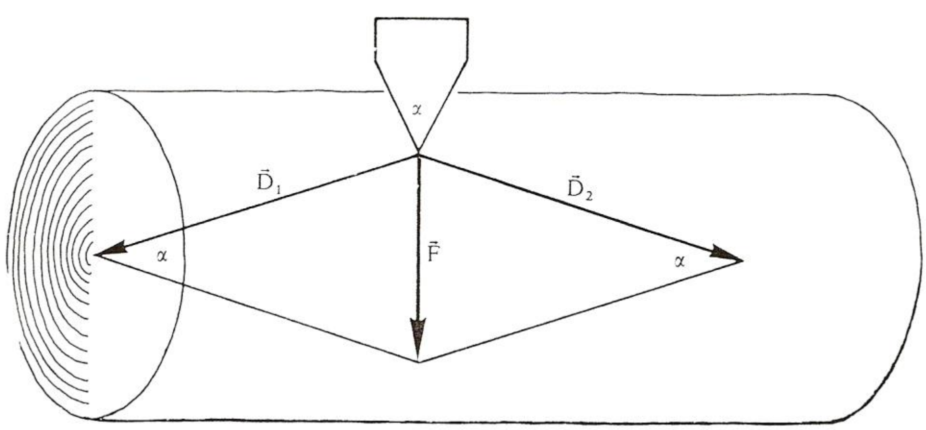
خیره ۲۲۶

۲۳ – الف) یوه د کشولو کړی، چي په دوه دکښولو چیترو باندي راتاو ده، څومره اوږده ده، که لاندي اندازې ولري
$r = 22\ cm$, $R = 35\ cm$,
$|M_1M_2| = 2m$?

ب) دا کړی به څومره اوږدې وي که د اهیران په څیر له چیتروگانو یا تیکلیو واکی څیدلی وي ؟

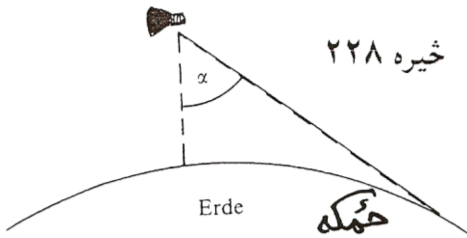
۲۴ الف) د ونی په ستپه یو کایل)موږی) په څټك د D زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه D څومره لوي دي، کوم چی د ستپی درځونه ، که د کایل یا تبرگي کونج $\alpha = 6°$ وي. (حیره ۱۹۴)؟

ب) په کومکایلکونج یا تبرگیکونج لرو: $|D|=|F|$ ؟



خیره ۲۲۷

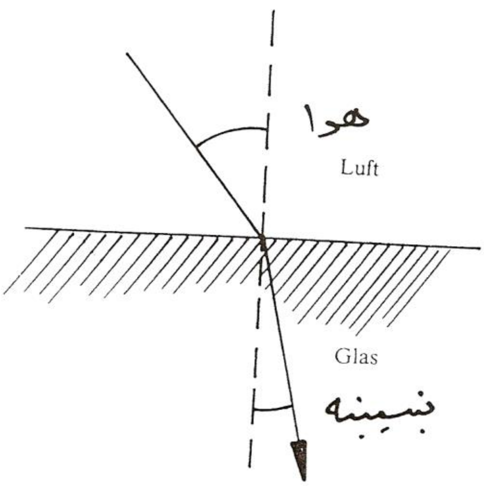
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۲۸

۲۵ – د یوه الوتماشین څخه ځمکه د یوه ∝ کونج لاندې لیدل کیږي (خیره) دا الوتماشین څومره جګ الوزي ؟ (د ځمکې وړانګه : ۶۳۷۰ کیلومتره)

۲۶ – یو ګادی د $v_{\propto} = 120km/h$ سرعت سره روان دی، نو د باران څاڅکی په پټلی د تلنلور باندې په $115° =$ کونج د چیترو (مطلب د ګاډې د اوسپنی تیر یا ګاډیل دی) مخامخ ځغلي. له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو د لویدلو سرعت v_g وټاکی ؟



خیره ۲۲۹

۲۷ – که د لمروړانګه په دوه مختلفو طبقو ولویږي، نو خپلی لور ته تغیر یا بدلون ورکوي. د سنیلیوس Snellius د ماتقاعدې له مخې کیدی شي چې د ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون وایي، چې پروتوړانګه ، ماتوړانګه او ولاړکرښه یا عمود په بیلیدونکی هوارې په یوه هواره پراته دي او برسیره پر دې لاندې اړیکي باور لري یا صدق کوي:

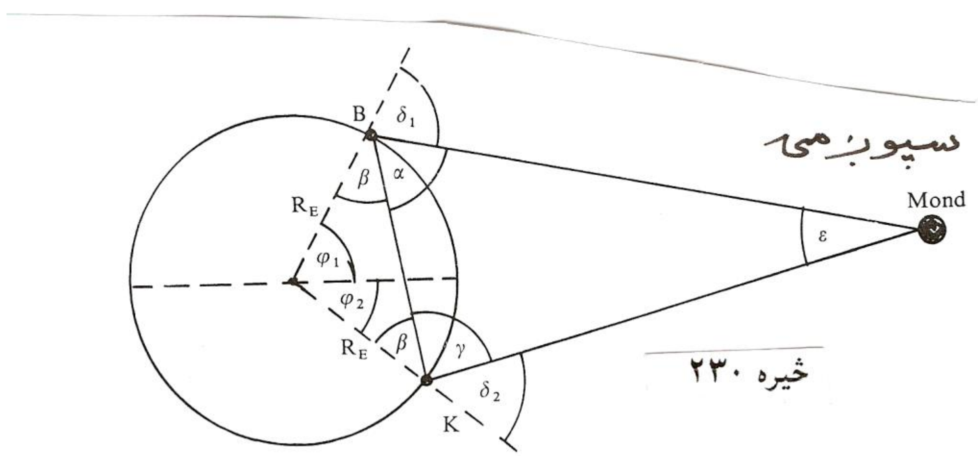
$$\sin \propto \ / \ \sin \beta = n$$

که د رڼاوړانګه په یوه ښیښه (اوبو) پریوزي، نو $n = 1,5\ (1,33)$ دی وښایي، چې ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چې په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

؟ 10,5°, 15,8°, 27,3° , 41,2°,67,6°,, 72,4°, 81,9°

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۸ – په ۱۸ ا–مه میلادي پیړی کی د سپوږمی لریوالی تریګومتریکي وټاکل شو. په برلین کی (جغرافیوي اوږدوالی $\varphi_1 = 52,52°$) او لکه د ښو هیلو په کونج کی ($\varphi_2 = -33,93°$)، کوم چی په همغه اوږدګراد پراته دي، د سپوږمی سره په همغه وخت کی تړل کیږي. له دې لاس ته راغلل:
$\delta_2 = 55,72°$ او $\delta_1 = 32,08°$.
وشمیری $|KM|$, ß , $|BK|$ او له دې څخه d_{EM} .



خیره ۲۳۰

۲۹ – لړځیدنیSchwingungen تل د وخت په اړه شمیرل کیږي یعني د وخت t تړواك لاندې دي. دا د بلواك $y = a . (\sin (2\pi/T)) .t + k)$ له لارې ورکړ شوي. دلته $(2\pi / T)\, t = x$ هغه کونج دی ، کوم چي په T وخت کی وهلکیږي. $1 / T = f$ د یوه څرخون پریود یا راګرځیدنی وخت په ګوته کوي او د لړځیدنی دوام بلل کیږي» f فرکونځ frequenz بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولو راګرځیدونکو هوارو زیاتون، دباندې هوارې، او ډکې یا حجومونه، د هوارو متن ټولګی سره ده.
ډکي یا حجمونه په مکعبمتر m^3 په همدې توګه د مکعب متر برخه یا څو واره باندې ورکول کیږي، چې یو په بل اړول یی، لکه چی لاندې ګورو، ساده دي

$$1\ m^3 = 1m.1m.1m = 100cm^3.100cm.100cm = 1\ 000\ 000\ cm^3$$

یعنی :

$$1km^3 = 10^9\ m^3$$

$$1m^3 = 10^6\ cm^3$$

$$1cm^3 = 10^3\ mm^3$$

$$1mm^3 = 10^9\ \mu m^3$$

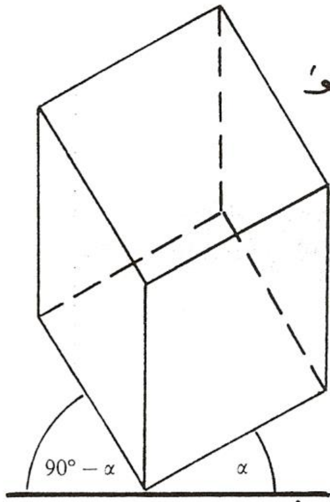
برسیره پردې په پیچلو شکلونو باندې باید یو لیدونکی یا اوپتیکي نظرلاس ته راوړی شو.

د هندسي بدنونو یا تنونو رسمول

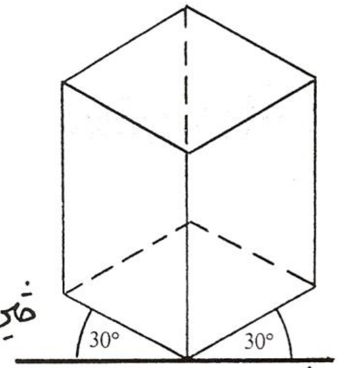
په پرینځیپ کی د بدن درې ډوله ګرافیکي انځورونه موجود ده. دام کی ګیرونه ، مایل انځورونه، او درېتخته ئیز پرویکشن Projektion (دریتیخته ئیز پریوستون).
دا هروې یی مختلفې دندې سر ته رسوي.
د دام ګیرونه اصلآ ددې لپاره په کار راځي، چې د بدن ټوله دباندې هوارې وښولی شي. دا که چیرې راګردي پریکړی شي او سره ونښلول شي، نو د هغه بدن څیره جوړولی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

څېره ۲۳۱ الف



څېره ۲۳۱ ب



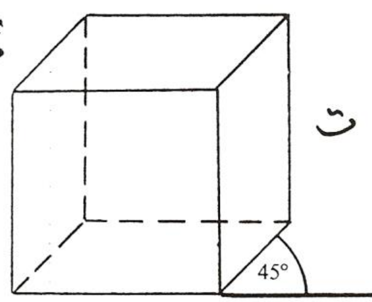
Parallelperspektive:
Militärperspektive

څېره
د ځمکې پرسپکتیو
د نظامي لیدنې

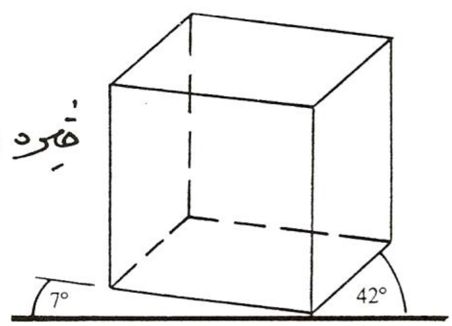
Parallelperspektive:
Isometrie

څېره
ځمکې لیدنه
ایزومتري

څېره ۲۳۱ پ



څېره ۲۳۱ ت



Parallelperspektive:
Kavaliersperspektive

ځمکې لید
کاوالیر پرسپکتیو

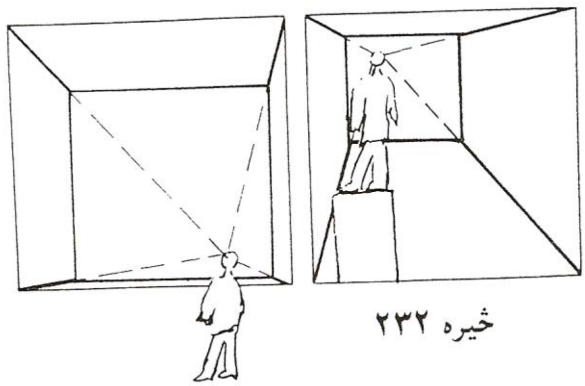
Parallelperspektive:
Dimetrie

ځمکې پرسپکتیو
د یمتري

د استعمال وړ د نظراچولو (د نظر لاندې راوړلو) کښل، مایلڅېره کښل دي. دا هوايي پراخیدنه واضح کوي. دلته د کاوالیر پرسپکتیو (مائیل له پورته) او یوه (چینډښې پرسپکتیو (مائیل له ښکته) ترمنځ توپیر کیږي، مګر د دواړو ترمنځ لاندې ګډه قاعده موجود ده: لیدونکي ته جبهيي (فرونتال) ځغلیدونکی لاینونه په

(c) ketabton.com: The Digital Library

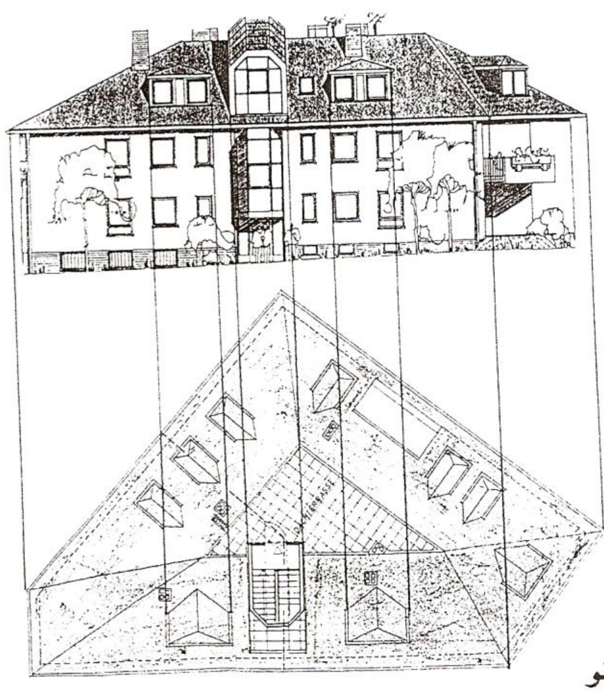
نورمال اوږدوالي، له ليدونكي لرې ځغليدونكي لاينونه مائيل او په لنډ ډول كښل كيږي. لنډونه يې د كونج تر واك ده:



خيره ۲۳۲

پروت كونج	30°	45°	60°
لنډوونكى فاكتور	2/3	½	1/3

په يوه پرسپكتيو مائيل جوړښت كى طبعاً ځني برخى او نه ځيره شوې د شا خواوي وركيږي، دا په دې مانا چي په كښلو كى نه راځي. له دې امله او په ځانګړي ډول كونجلرونكو بدنونو لپاره درې تختئيزپرويكشن (پريوستون) ګټور دي.
دا يو درې ځلي ولاړ پريوستني له لارې منځ ته راځي (الف) بنستيز ضرز يا غوڅي هواره، (ب) اړخيزغوڅي يا درز هواره (پ) پورته درز يا غوڅي هواره او دا زيات وخت په جوړښترسمونو كى استعماك مومي.



خيره ۲۳۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

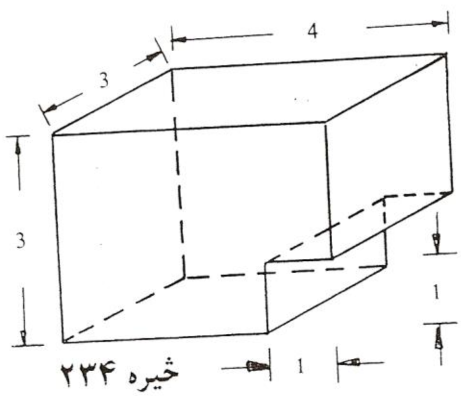
تمرینونه

۱ – د دې څیره بدن څخه دریتختهییز پریوستون وکاږی

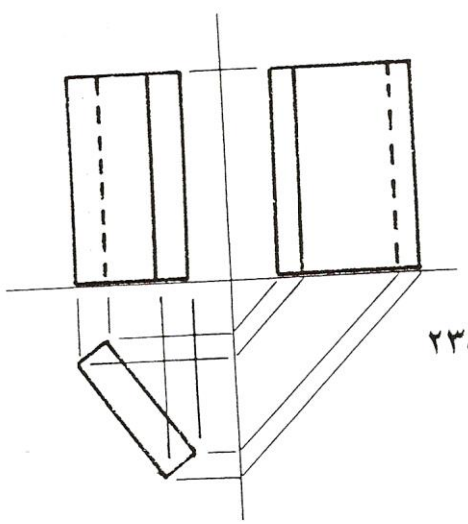
۲ • ددې بدن مائئله څیره وکاږی، کوم چې دریتخه ئیزه څیره پورې اړه لري.

۳ – د یوې ولاړې ګردي توتی یا استوانی ماییلی څیرې غوښتل کیږي، چې د بنسټ او ولاړ درځ له لارې ورکړ شوي وي.

۴ – یو شپږاړخي نل یا شپږڅنډیز نل وباسی په غبرګ پرسپتکیو انځورونی سره.



څیره ۲۳۴



څیره ۲۳۵

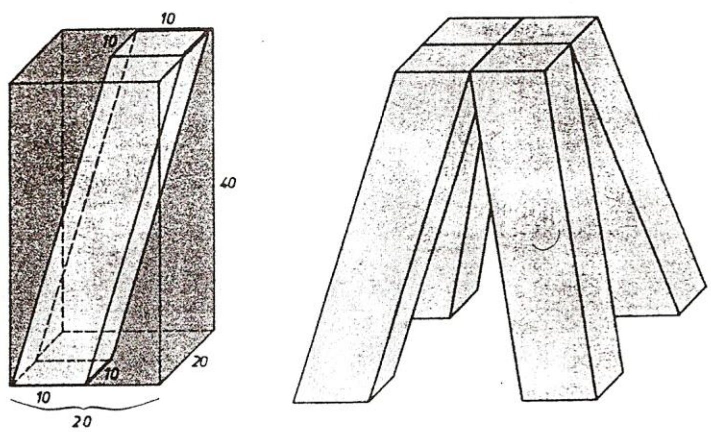
(c) ketabton.com: The Digital Library

پریزماوې Prismen

پیلبیلګه :

۱ = د یوه ستنویا تیرپښو جوړ میز یا Podestپودست(لکه په څیره کی کښل شوی میز) د لاندې جوربښت لپاره یو پښ باید څلور پښی د څلوراړخیز لرګیو په څیره شوي شکل اره کړي. یوه پښه څومره ډکی (حجم) لري ؟

. $V = 10^2 . 40 = 4000cm^3$



څیره ۲۳۶

۲ – د یوکږولاړې یا مستقیمی پریزما چی جګوالی یي 12 cm دی دباندې هواره او ډکی (حجم)، چی ځمکه او سر یا سرپوښ یی یو سیومتري تراپیځ وي

(c) ketabton.com: The Digital Library

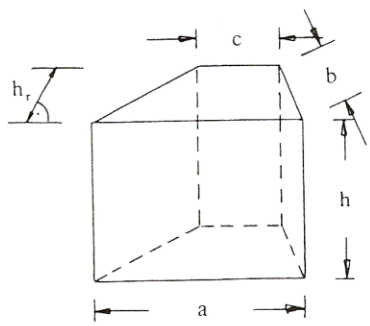
د اړخونو د اوږدوالي $a = 10$ cm , $c = 6$ او $h_r = 4$ cm سره څومره دی؟

د تريخ هواره

$$h_r.(a+c) / 2 = 4.(10+6)/2 = 32cm^2$$

ده، نو ډکی یی په لاندي ډول دی:

$$V = G.h = 32.12 = 384\ cm^3$$



څیره ۲۳۷

د دباندې هوارې لپاره د تريخ اړخ اوږدوالي b ته اړه شته .

دا د پیتاګوراس د جملی په مرسته لاس ته راوړو

$$b = \sqrt{16+4} = 4,47\ cm$$

له دې امله دباندې هواره ده :

$$O = 2.G+ (2.b +a\ c),h$$

$$O = 64 + (8,84 + 10 + 6).12$$

$$O = 363,28\ cm^3$$

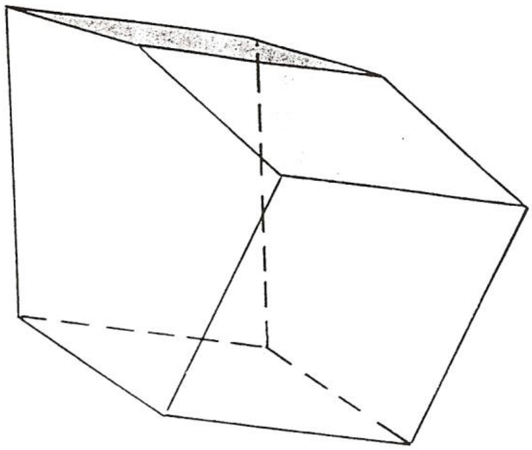
ساده بدنونه هغه دي، چی یواځي په ډیرګوډیو (پولیګونو) بند شوي وي یا یواځي له ډیرګوډیو راګیر وي، او ددې ترمنځ د بیلګي په توګه بیا پریزما ده.

تعریف Prisma : داسی یو هندسي بدن، کوم چی له دوه یو بل سره غبرګو او ګونګراوینځو پولیګونویاډیرګوډیو بند یا راګیروي پریزما بلل کیږي.

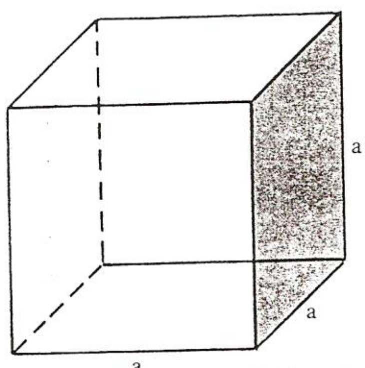
د بنسټ او پورته هوارې د کونګراوینځ له امله د اړخونو هوارې غبرګاړخیز دي.
د پورته هوارې (چت) ولاړ اوږدوالی د پریزما جګوالی بلل کیږي. کیدی شي چی د

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه اړخ اوږدوالی د جګوالي باور ولري، نو بیا له ولاړې پریزما غبرګېږو.


خیره ۲۳۸

د ټولوخورامنظم او په دې ډول خورا ځانګړي پریزما شپږاړخیز یا مکعب دی
(وورفل Würfel) . دا د دباندنی هوراو ۶ کونګروااینځ مربع خواوې لري، او ژۍ یا اړخونه(کانتی) یی یو په بل نیغي ولاړې دي.



خیره ۲۳۹

جمله : د یوه شپږ اړخیز یا شپږخوایز (مکعب) د دباندې هوارې O او ډکي (حجم) V لپاره باور لري:

$$O = 6a^2$$

$$V = a^3 = a^2 . a = G . h$$

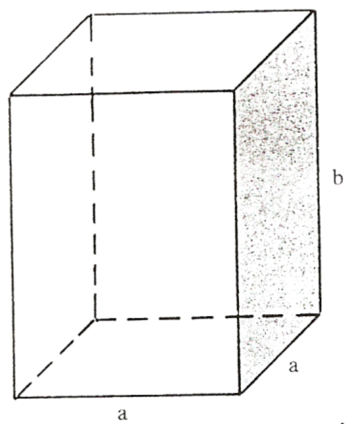
بیلګه : څه شی دروند دی یو کورک(Quark یو شکل لرګي ډوله بدن دی، چی د بوتلونو خولی په پټېږي) مکعب چی د یوه اړخ اوردوالی یی 0,3 m وي او که یو د اوسپنی مکعب چی د اړخ اوږدوالی یي 8 cm (د کورک ٧ سختوالی g/cm³ ٥,٦ د اوسپنی 7,86 g/cm³)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددې لپاره چې د یوه بدن کتله m لاس ته راوړی شو، نو کلکوالی یا دینسټی یې د ډکي سره ځلوو.

د کورك مکعب ډکی : $V = (30cm)^2 = 27000\ cm^3$

$m = 27000cm^3 \cdot 0{,}2g/cm^3 = 5400\ g$



شیره ۲۴۰

د اوسپنی مکعب ډکی :

$V = (8cm)^3 = 512\ cm^3$

$m = 512cm^3 \cdot 7{,}86\ g/cm^3$

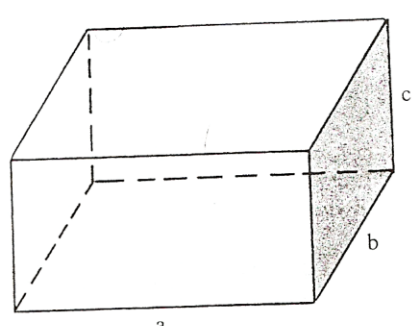
$= 4024\ 32\ g$

د کورکمکعب له دې امله د اوسپنی د مکعب ته نزدې

34% [(5400-4024):4024 ~0,34]

دی. یا په بل عبارت، د کورك مکعب نزدې ۳۴ په سلو کی د اوسپنی د مکعب څخه درونددی.

که د مکعب سټه(ځمکه) یا بسټ او چټ یا سر مربع پاتی شي او نورې خواوې یی تغیر کړي نو یوه مربع ستن(پښه) لاس ته راځي.



شیره ۲۴۱

که ځمکه او سر هم یوه ولاړکوډیز ته «ټولیز» شي یا « عمومیت » پیدا کړي، نویو کوادر Quader منځ ته راځي. هغه درې مختلفی اړخنیمي، مگر مساوي هوا نیمي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ا هواقطرونه لري. دا د پیتاګوراس د جملې په مرسته شمیرل کیدی شي.

جمله: د مربع ستن د دباندې هوارې او ډکې (حجم) لپاره صدق کوي:

$$O = 4ab + 2a2$$

$$V = a^2 b$$

د اړخونو نیمیو اوږدوالی په لاندې ډول دی

$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}$$

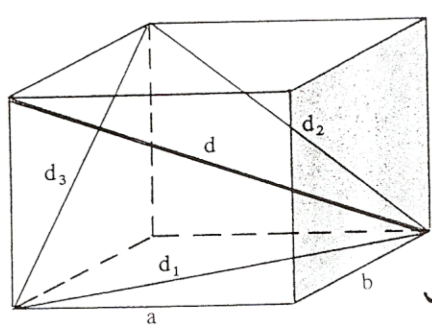
$$d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

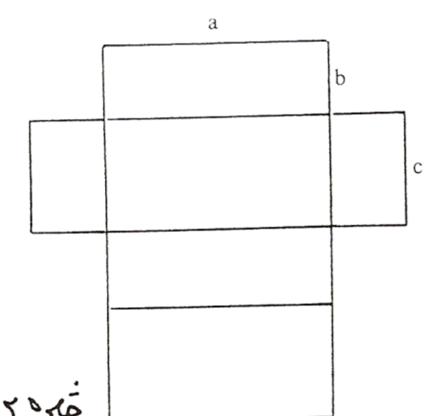
د هوانیمیو لپاره صدق کوي:

$$d = \sqrt{d_1^2 + c^2} = \sqrt{d_2^2 + b^2} = \sqrt{d_3^2 + a^2}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

خیره ۲۴۲ الف





خیره ۲۴۲ ب

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه: یو کوادر د کانتو اوږدوالی $a = 5cm$, $b = 4cm$ (بنسټیز هواره a.b)
او $c = 12cm$ لري:

د پوښهواره: $M = 2.(5.12+ 4.12) = 216\ cm^2$

دباندې هوار. $O = 2.(5.12 + 4,12 + 5.4) = 256\ cm^2$

ډکی (حجم) : $V = 5.4.12 = 240cm^3$

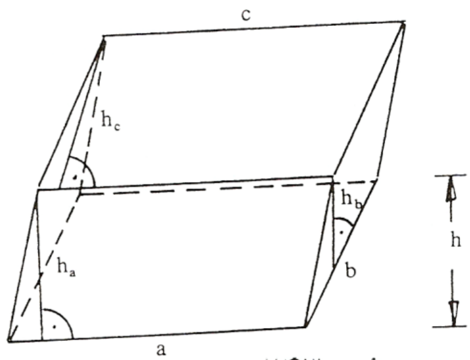
نیمي: $d_1 = \sqrt{25 + 16} = 6,40\ cm,\quad d_2 = \sqrt{25 + 144} = 13\ cm$

$d_3 = \sqrt{16 + 144} = 12,65\ cm$

$\Rightarrow d = \sqrt{25 + 16 + 144} = 13,60\ cm$

یوه مائیل څلوراړخیزه پریزما د جوړه یو بل سره غبرګو کونګروایڼخ څلورکونجیو سره غبرګ اپیپت یا شپات یا په بل عبارت غبرګهواریز بلل کیږي ، چې موږ به یی له دې ورسته همداسی وبولو. د هغو دباندې هواره د هغه د بنسټ- پورته – او اړخهوارې دوه ځله ده.

دا د غبرګ اړخیز په څیر شمیرل کیږي او په عمومي ډول باور لري:



څیره ۲۴۳

جمله: د غبرګهواریز دباندې هواره او ډکی دي:

$O = 2.(a.h_a + b.h_b + c.h_c)$

$V = G.h$

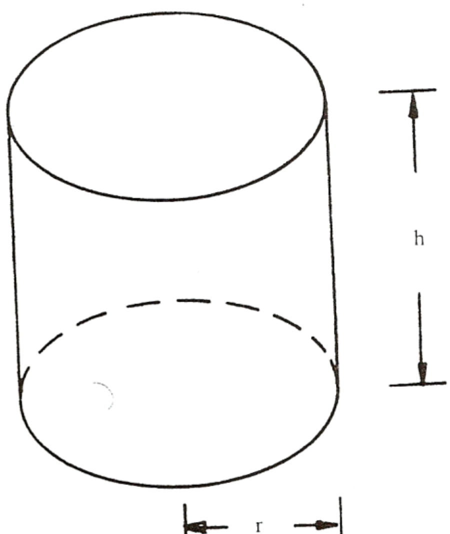
دلته د ډکي شمیرنه د غبرګ اړخیزهوارې په

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیر اجرا کیږي: د بدن جوداشوي توکي یو د بل مخامخ لور تکمیلوي:
یو بل عمومیت یا ټولیزه به د غیر منظم ، مگر په بنسټ یا ځمکه او پورته
کونګروانیځ ډیرګوډیز پریښول وی، د هوارې د خواو هوارې بیا غبرګ اړخیز دي.

جمله: د په خوښه پریزما د دباندې هوارې او حجم لپاره باور لري:
د ټولو خواو هوارو زیاتون + بنسټیزه هواره . 2 = O
بنسټهواره . جګوالی = V

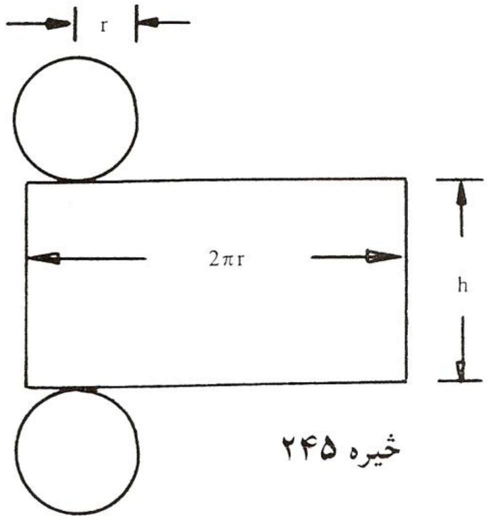
سیلیندر (توته یا استوانه یا ستن)



ځیره ۲۴۴

د هغی نیغي (سیخ ولاړې) پریزما
سره ، چی لاندې او باندې یې
سیومتري - ګوډیز وي - څه پیښیږی،
که د کونجونو شمیر نور هم زیات شي؟
اوس نو لاندې هواره (او په همدې ډول
پورته هواره هم) په ګردي بدلیږي او
دا ډیر سره ګوډیز شوي د خواو هوارې
په یوې کږې یا راتاو هوارې بدلیږي.
یو بدن یو بل سره کونګروانیځ او
غبرګ لاندې پورته ګردیهوارو سره
ګردیتوته یا ګردیسیلیندر بلل کیږي.
د دی روښانونی یا توضیح لاندې درې
شیان څرګندیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۴۵

۱ - د توتی یا استوانه یا
گردیسیلیندر د پریزما سره
خپلوان دی.
۲ - گردي استوانه یا توته پخپله
د په خوښه فورم شوې پورته -
او لاندې هوارو لپاره یو
ځانگړی حالت دی
۳ - لمړنی ځرگندونه د ولاړ
گردي سلیندر یا توتی یو
ځانگړی مهم حالت وو،
ډکی یا حجم د همغه پرینځیپ
له لارې کیږي لکه د پریزما .
د جال ښوونه یی د
پوښ د خلاصولو له لارې کیږي، له دې سره دوه گردی تړلي راځي چې لاندې
او پورته(دځمکی- او سرپټی هوارې) هوارې دي.

جمله: د یوه ولاړې گردی استوانی یا توتی پوښ، دباندې هوارې او ډکي لپاره باور لري:

$$M = 2\pi rh$$

$$O = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(r+h)$$

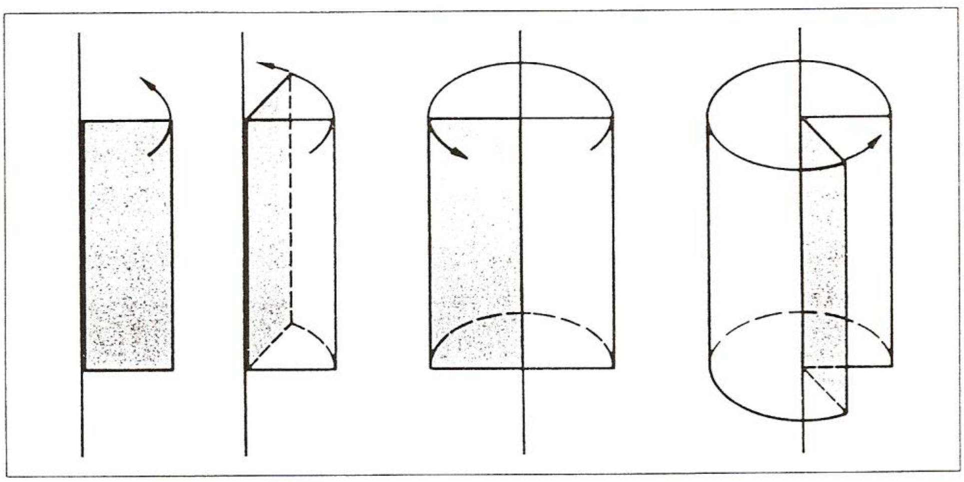
$$V = \pi r^2 h$$

که د یوې استوانی یا توتی ځخه منځټکي سیومترې استوانه چی وړانگه یي له مځکی استوانی یا توتی کوچني وي راوباسل شي، نو دې پاتي ته یی سوری استوانه

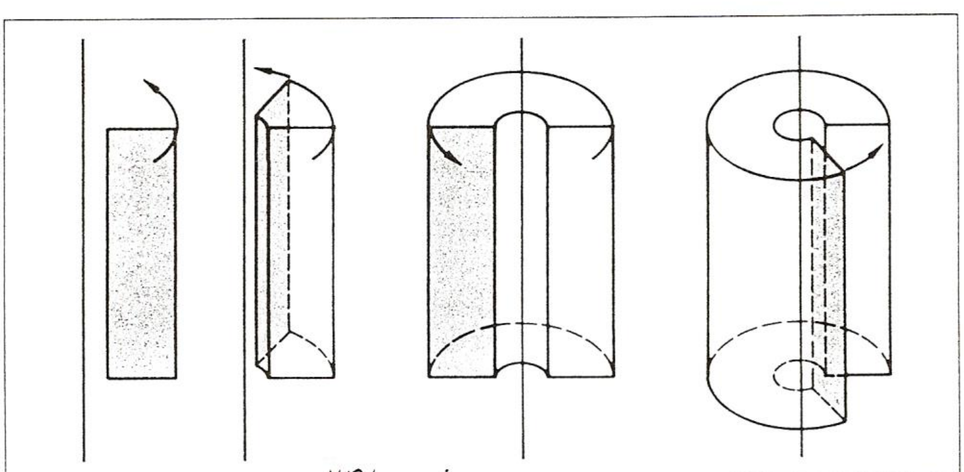
(c) ketabton.com: The Digital Library

که د مخه ونیول شي یا فرض شي، چی دا سلیخ شوي کاغذ 0,1 mm پنډ دی، نو دلته باید ټول $0{,}491 \cdot 10000 = 4910{,}m^2$ کاغذ سلیخ شوی وي.

د ګردي – او سوری استوانی یا توټې یا ستن لاندې د یوه ولاړکونجیز څرخون(Rotation) هم په خیال کی راوړلی شو:



څیره ۲۴۷



څیره ۲۴۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – یوه سمه پریزما د شپږکونډیز بنسټ– په همدې ډول سرهوارې سره لرو، چې ۵ سانتي متره جګه ده. هربنسټهوارې اړخ یې ۴ سانتي متره اوږددی. ددې ډکی پوښ او پورته یا ټوله راګرده هواره وشمیری.

۲ – یو غبرګهواری ۸۱ مکعب متره ډکی لري او پورته هواره یا ټوله هواره یی ۱۳۲ مربع سانتي متره ده. جګوالی او د اړخ اړخیز c اوږدوالي یی وښایي، که بنسټ هواره یی د اړخونو اوږدوالی ۵ ،۴ سانتي متره او ۳ سانتي متره ولري او دا دواړه اړخونه وي بل سره د ۶۰ درجو کونج جوړ کړي.

۳ – پورته واره او ډکي څنګه تغیر خوري، که د یوه کوادر اړخونه دوه برابره شي؟

۴ – د یوه کوادر دري اړخونه یو بل سره په ۱:۲:۳ څاننیونه یا تناسب کی پراته دي، دا څومره اوږد دی، که د دې کوادر ډکي ۱ مکعب متر وي؟

۵ – یو مکعب د هوانیمی $d = 6\sqrt{3}$ لري. نو ټولهواره، ډکی او اړخ(a , V , O) یی وشمیری.

۶ – د شګو موټر کي چی د بارهوااندازه یا بارډکي اندازه یي 2,82m×1,68m÷0,55 وي، څومره مترمکعب شګه ځایږي، که دا د پورته اړخ یا کانتي پورې ډك شي؟ د بارووړونکي د بار وزن ۱۵ ، ۱ ټنه دی په بارولو به څومره ورزیات شوی وي ، که شګه یوه ډیښتی، ټیګوالی یا غلظت $\rho = 2\ g/cm^2$ ولري؟

۷ – په یوه هواره کرښه یو د پټلیو بند باید ډك شي. دا کرښتوټه ۲۵۰ متره اوږده ده، دا پټلیبند ۸ متره جګ دی او په بنسټهواره کی ۳۹ متره ، په سر کی ۲۷ متره سرور دی، د ډکولو لپاره به څومره خاوره بسیا وکړي؟

۸ – د سرك جوړولو ماشین څرخونی (د اوسپنی غټ ه استوانه چی سرك پرې پخوې او په سرك یي څرخوې) ۱۵ ، ۱ متره نیمی لري او د۲۵ ،۲ متره سرور دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

هغه هواره ځومره لويه ده، چې ځرخې يې په يوه ځرخون وهې؟

۹ – يو بايسکل پمپ د ۵ ، ۲ سانتيمتره اوږد رڼا نيمی لري او د پمپ اوږدوالی ۲۸ سانتيمتره دی، د پمپ تشياړکی ځومره دی ؟

۱۰ – د دې لپاره، چې د ګيلاس توته په پروتغوځي باندې ځيرو يا معاينه کړو، ۲۰۰ ګرامه پارې نه يې ډکوو(ρ = 13,6 g/cm³) . پوهيږو، چې توته هر ځاي کی همغه دننني نيمی لري. دا نيمی ځومره دی، که پاره 82 cm جګه وي؟

۱۱ – يوه کچتوته دې، د يوه 5 cm دننه نيمی سره داسی په کچکرښو په نښه شي، چې د هرو دوه پرلپسی کرښو وي د 5 cm³ ډکی وښايي. د دوه ځنګ په ځنګ کرښو ترمنځ دې واټن ځومره وټاکل شي؟

۱۲ – د يوه ولاړګوډيزې وسپنی ټوټی (25 cm × 20 cm) ځخه دې يوه کوتی ، بی له سرپوښ او بيښ ځخه جوړه شي. ډکی يې وشميری که الف) چاپيری يې د اوږده اړخ سره برابر وي او ب) که چاپيری يې د لنډ اړخ سره برابر وي؟

۱۳ – د لاندې توتو پاتی کځونه وښايي:

a) r = 5 cm ; h = 12 cm b) r = 9cm ; V = 120 cm³

c) h = 6,5 cm ; O = 300 cm³ d) M = 282 cm² ; V = 424 cm³

۱۴ – توته ځومره ډکی لري، که يو د a اړخ اوږدوالي مکعب په کې خوندي وي؟ پوښ او دباندې يا پاسهواره يې ځومره دي؟

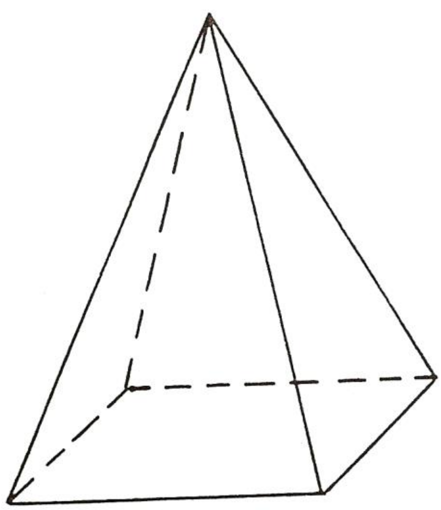
۱۵ – د يوې توتی جګی h او وړانګه r ځانونه (h : r =) 2 : 3 نيسی. ډکی يې 2000 cm³ دی. h , r او M يې وټاکی.

۱۸ – يو ولاړډوله توته يزه ګل کوتی د h = 17 cm جګي سره د سره د سرپوښ او بيښ ايليپسی د دواړو نيممهرونو a = 30 cm او b = 20 cm سره لري. د دې ډکی ځومره دی؟

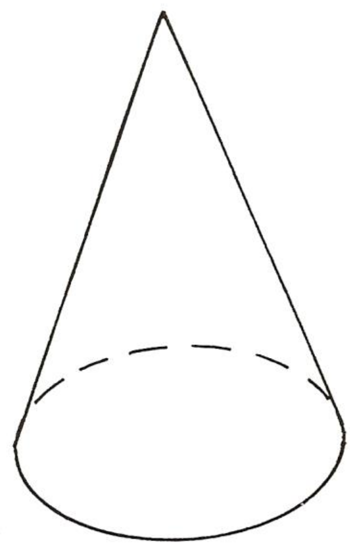
(c) ketabton.com: The Digital Library

اهرامونه او مخروطونه Pyramiden und Kegel

که څه هم دواړه بدنونه بدلو ګروپونو پورې اړه لري– اهرام یواځې هواره راګرځیدهواره لري، مخروط مګر راتاو یا کږه هواره.– بیاهم زیات ګډونوالی لري، نو له دې امله یې یه ګډه غواړو وپیژنو یا معرفي کړو.



خیره ۲۴۹



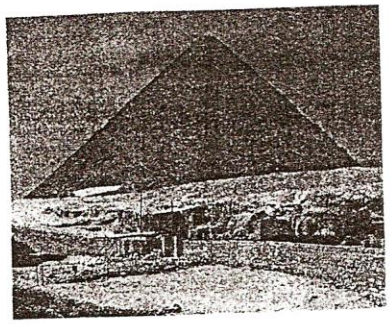
خیره ۲۵۰

پیلبیلګه :

د ۲۵۹۰ او ۲۴۷۰ (م. کال پخوا) ترمنځ په غزه مصر کی په یوه ډیر مصرف د فرعون خیوبس د قبر اهرام خیوبساهرام (Cheopspyramide) جوړ شو. د دې د جوړولو لپاره څه سل زره انسانان په کار واچول شو، چی هغوي نزدې دوه نیم میلیونه

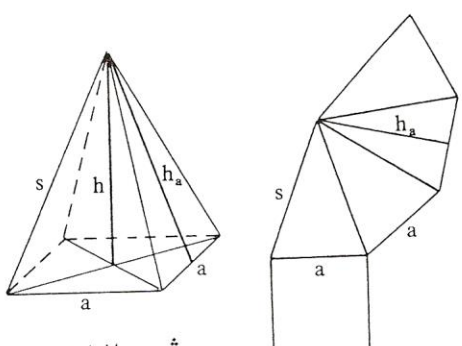
(c) ketabton.com: The Digital Library

د تیګو بلاکونه پرې کړل ، رایې وړل او یو په بل یې طبقه په طبقه یا پوړۍ په پوړۍ باید اینښوولي وي. دا د خیوپس اهرام ځومره ډکی (حجم) لري، که هغه یوه لاندې هواره ۲۳۰ متره مربع ولري او جګوالی یې ۱۴۷ متره وي. د هغه لیدوړ دباندې هواره ځومره ده ؟



ځیره ۲۵۱

د خیوپس اهرام د ولاړو اهرامونو ځانګړی حالت جوړوي، ځکه چې د هغې تیره ککره د لاندې هوارې په منځ ټکي نیغه ولاړه ده. هغه اهرامونه چې په هغو کی دا حالت نه وي کاږه یا بهتره مائل اهرامونه بلل کیږي. په عمومي ډول یو اهرام راپورته کیږي، که د ډیرګوډي ګوډونه له ډیرګوډي دباندې ټکي سره ونخلول شي. د کونجونو او سرتیرې نخلونلاین ته اړخکانتی (لنډ : اړخ) وایي . لکه چې د جالښوونه یې ښایي، نو دباندې هواره یې له لاندې اړخ او د اړخیزو دریګوډي د یوځایوالي ښخه لاس ته راځي، چې وروستی یې پوښ هم بللي شو یا بولو.



ځیره ۲۵۲

که د ډکي یا حجم ټاکلو لپاره د خیوپس اهرام په مربع شکلي پوړیزتجزه شوی وي، په فکر کی راولو چې د پوړۍ جګوالی یې h / n وي. د وړانګي جملی د خورا پورته پوړۍ د هوارې لپاره لاس ته راځي:

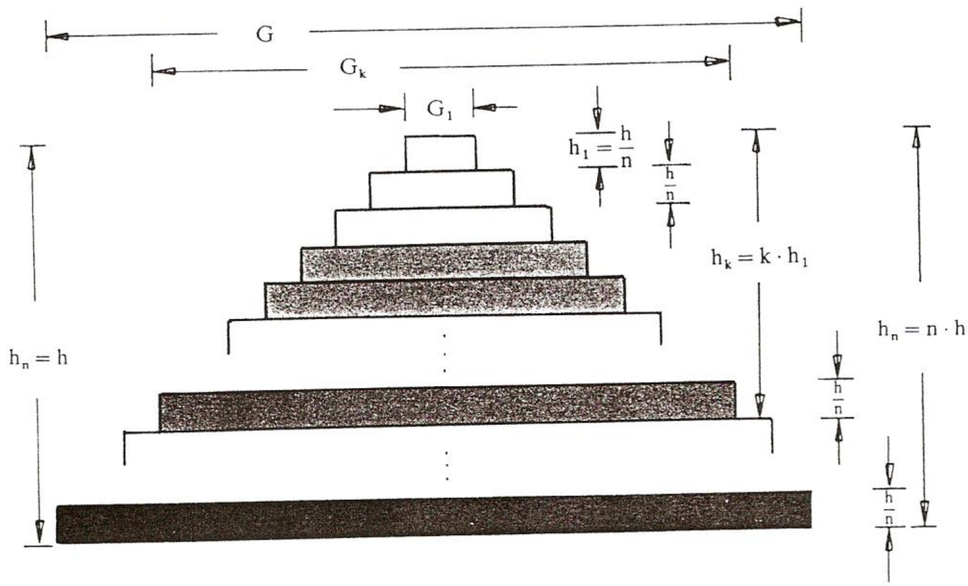
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$h_1^2 : h^2 = G_1 : G \Rightarrow G_1 = G :(h^2 / h_1^2) = G / n^2$$

په ټولیزه توګه (عمومي ډول) :

$$h_k^2 : h^2 = G_k : G$$

$$\Rightarrow G_k = G.(k/n)^2 \quad , G_n = G$$



شیره ۲۵۳

په دې ډول د k –ام زینې پوړې ډکی (حجم) دی

$$V_k = G_k.h / n = Gh.k^2 / n^3$$

د ټولو پوړیو له زیاتون څخه لرو

$$V_{پوړی} = Gh.(1^2+2^2+...+n^2): n^3$$

$$= Gh\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) : n^3$$

$$= Gh\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوره ایندوکڅیون له لارې لرو (د ا په دې کتاب کی نه څیړل کیږي. ددې موضو لپاره دې څما دشمیرپوهنی بنستیز کتاب وکتل شي)

$1^2+2^2+3^3+...+n^2 = n(n+1)(2n+1) :6 = (2n^3+3n^2 +n) / 6$

که د پوړیو شمیر n نور هم لوي شي، نو بیا یی سړی له میلان څخه نه شي توپیرولی. دې ګڼونپوهی اکویوالنت دا دی چی n هرڅومره لوي شي او n په ماتلاندې کی موجودوي نو هغه په هغو غړو صرفنظر کیدی شي یا هغه غړي له پامه ایستل (لرې) کیدی شي.

په دې پوله حالت کي د اهرام ډکی له لاندې اړیکو شمیرل کیږي.

$V = G.h / 3$

دا د خیوبس اهرام باندې استعمالوو :

د اړخونو هواروجګوالی له نیمی لاندې اړخ او جګوالي د پیوتاګوراس د جملی له

لاری شمیرل کیږي: $h_a = 115^2 + 147^2 = 186 , 64m$

په دې ډول یی پوښ دی $M = 4.0,5.186,64.230 = 85853,80m^2$

د دباندې هواری څخه نور څه نه لیدل کیږي.

ډکی یی دی : $V = 230^2 .147 = 7776300m^3$

جمله : د یو اهرام د پوښ، دباندې هوارې او ډکي لپاره باور لري:

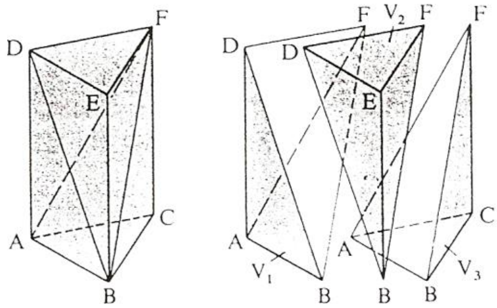
د اړخونو د ټولو دریګوډیو زیاتون = M

بنسټهواره + O = M

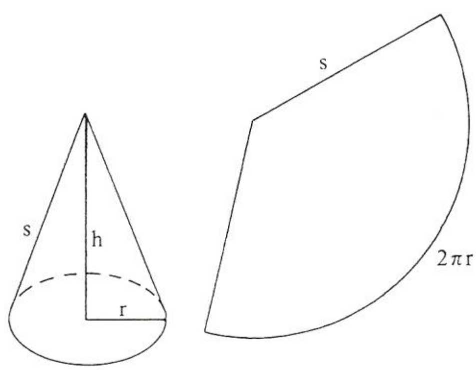
3 / بنسټهواره . جګوالی = V

(c) ketabton.com: The Digital Library

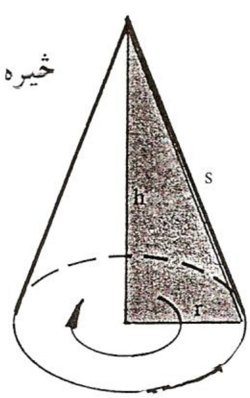
دا فرمولونه طبعاً د مائيل اهرام لپاره هم باور لري د پوړيو شميرنه بيا طبعاً يو څه اندازه ستونځي لريکه چيرې د يوه اهرام بنسټ يوه ګردى ونيسو نو مخروط لاس ته راځي، مخروط سم ولاړ بلل کيږي ، که د هغه تيره ککره يا لنډه: ککره په منځښکي (نيغه) ولاړه وي، نور ټول مخروطونه مائيل بلل کيږي. دا په لاس کی لرلو له لارې ګورو، چی د اهرام ډکي يا حجم شميرډول په مخروط باندې هم استعماليدی شي، که د پوړيو په ځاي دلته وړې ستنی په پام کی ونيول شي. لکه په ځيره کي د پوښ خورونه يا پوښ جال ښايي چی پوښ د ګردي ټوټه ده، چی وړانګه يی د بنسټګردي وړانګه ده او لينده يی د ګردی چاپيرونکی کی ورکړ شوی دي:



ځيره ۲۵۴



ځيره ۲۵۵



ځيره ۲۵۶

$F_S = b.r/2$,

پس لرو

$M = 2\pi r.s/2 = s.\pi.r$

(c) ketabton.com: The Digital Library

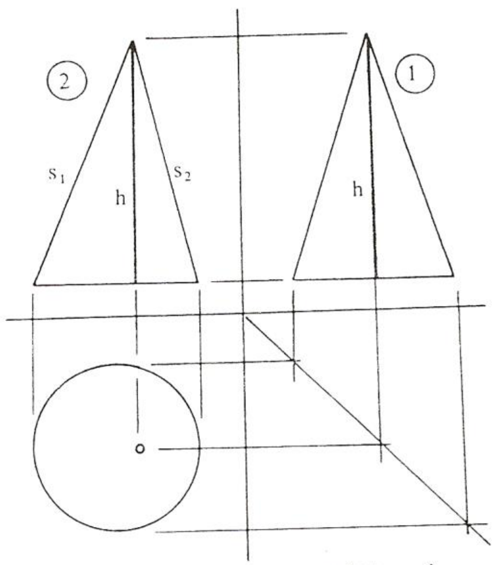
جمله : د ګردي مخروط پوښ، دباندې هواره او حجم لپاره باور لري:

$$M = s.\pi r = \pi . r^2 . 360° / \alpha$$

د $\alpha = 360° . r / s$ سره

$$O = M + \pi r^2 = \pi r (r + s)$$

$$V = \pi r^2 . h / 3$$



څيره ۲۵۷

په پام کی دې وي چی ولاړ مخروط د څرخون په څير هم په خيال کی راوړل کيدی شي: چی په کانتی يا يوه اړخ د يوه ولاړ دريګوډي څرخون څخه لاس ته راځي.

بيلګه : د ولاړ ګرديمخروط ډکی وشميری چی د بنستهواري وړانګه يی ۶ سانتيمتره وي د پوښ يو خورا زيات يا عظمي اوږدوالی يی ۱۵ سانتي، او مينيمال پوښ اوږدوالی يی ۱۱ سانتي متره دی؟ د هيرون دريګوډي فرمول سره سړی د غوڅهوارې په متن يی اخر ته رسوي. (۲)«

$$F = \sqrt{19(19-12)\ (19-15)(19-11)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

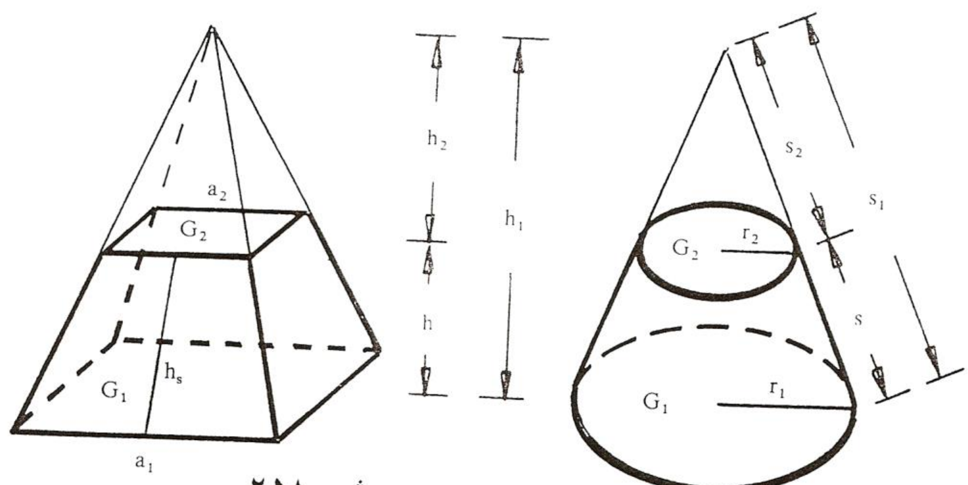
$F = 65{,}238\ cm^2$.

$F = d.h / 2 \Rightarrow h = 2F / d = F / r = 10{,}87\ cm$,

$\Rightarrow V = \pi r^2 h / 3 = 409{,}79 cm^3$.

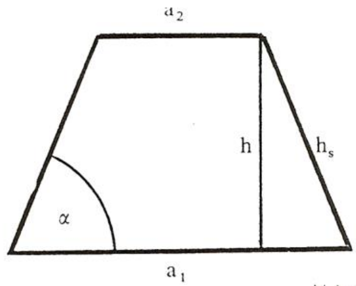
پخ اهرامونه او پخ مخروطونه

که یو اهرام او یا مخروط په یوه اوږدوالي h بنسټهواري ته غبرګ پرې کړی شي، نو پخ اهرام او پخ مخروط ترې راجوړیږي) راپیداکیږي یا منځ ته راځي.
د پخ اهرام پوښهواره د یوه ترپخ ښخه عبارت دی چې د دوه دریګوډیو له کمون ښخه لاس ته راځي.



خیره ۲۵۸

(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۲۵۹

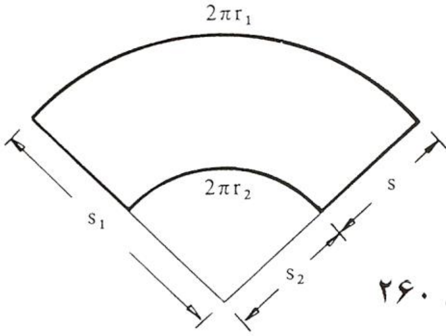
د دوي اوږدوالی د پیوتاګوراس له جملی او یا د میلانکونج ∝ څخه ټاکل وړ دي.

$h_s = h / \sin\alpha$

د اهرام د بنسټهوارې زیات امکاناتو له امله د پوښهوارې لپاره یو ټولیز فرمول هدفمند نه دی. که بنسټهواره یو منظم n–ګوډی وي، نو لرو :

$M = (U + u).\ h / 2$

د U بنسټهواری چاپیرونکی ، u د سرپټهوارې یا سرپوښهوارې چاپیری.



خیره ۲۶۰

په همدې ډول د سم مخروط د دوه ګردیبرخهوارو کمون دی:

$$M = (s_1\, 2\pi\, r_1 / 2) - (s_2\, .2\pi\, r_2\,) / 2)$$
$$= \pi\, (s_1\, r_1 - s_2\, r_2\,)$$

د وړانګي جملی په مرسته لاندې اړیکی پیداکیږي:

$$s_2 : s_1 = r_2 : r_1 \iff s_2\, r_1 = s_1\, r_2$$
$$\Rightarrow M = \pi\, (s_1 r_1 - s_2 r_1 + s_2 r_2 - s_2 r_2)$$
$$= \pi\, [(s_1 - s_2) r_1 + (s_1 - s_2) r_2]$$
$$= \pi\, s(r+r)$$

د $s = s_1 - s_2$ له امله

ددې لپاره چی دباندې هواره لاس ته راوړو، باید بنسټ – او سرپټهواره یا سرپوښهواره ور زیات کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دپخڼکي د اولني اهرام او یا مخروط او د پریشوې څوکی کمون څخه لاس ته راځي، چی دا هم بیرته اهرام او یا مخروط شکلونه لري. (څیره √ وګوری)

$$V = G_1.h_1 / 3 \ - G_2.h_2 / 3 = [G_1(h+h_2) - G_2h_2]/ 3$$

دا چي په n–ګوډي کی د اړخ اوږدوالی همداسی د ګردیشمیرنه کی وړانګه مربعي ډوله کارول کیږي، د وړانګي له جملی د بنستهواري او سرپوښهواري یوبل ته ځانونه داسی نیسي لکه د هغو د واټنونو مربع د سرچینیزې څوکی څخه.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{h + h_2}{h_2} = \frac{\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (h + h_2) \cdot \sqrt{G_2} = h_2 \cdot \sqrt{G_1}$$

$$\Leftrightarrow h\sqrt{G_2} + h_2\sqrt{G_2} = h_2\sqrt{G_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad h\sqrt{G_2} = h_2(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})$$

$$\Leftrightarrow \quad h_2 = -\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}$$

که د h_2 لپاره پیدا ارزښتونه د ډکیفرمول کی کیښول شي، نو د ترڅنګ بیا یواځي هوارې G_1 , G_2 او G_3 راپیداکیږي.

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\left[G_1\left(h - \frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right) + G_2\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \left[G_1 \cdot h - \frac{G_1 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} + \frac{G_2 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\left[\frac{G_1 h\sqrt{G_2} - G_1 h\sqrt{G_1} - G_1 h\sqrt{G_2} + G_2 h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3}\left[\frac{G_2\sqrt{G_2} - G_1\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که اخري اړیکی د $\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1}$ سره پراخه شي(د بینوم دریم فرمول)، نو په دې پسی لاس ته راځي:

$$V = \frac{h}{3}\left[\frac{(G_2\sqrt{G_2} - G_1\sqrt{G_1})(\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1})}{G_2 - G_1}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3}\left[\frac{G_2^2 - G_1\sqrt{G_1 G_2} + G_2\sqrt{G_1 G_2} - G_1^2}{G_2 - G_1}\right]$$

د ماتباندې ترم ځخه $G_2 - G_1$ د

$$G_2^2 - G_1\sqrt{G_1G_2} + G_2\sqrt{G_1G_2} - G_1^2 = (G_2 - G_1)(G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)$$

له امله نوکبند شي او بالاخره د لنډوني ځخه لاس ته راځي:

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)\, h / 3$$

د اهرام ، په همدې ډول د مخروط ډکي.
په پڅمخروط کیدی شي د ګردیهوارې فرمول $G_1 = \pi r_1^2$ او $G_2 = \pi r_2^2$ وکارول شي

جمله: د پڅ اهرام پوښ ټوله هواره او ډکی :

د ټول ترایخ هوارو زیاتون $= M$

$$O = G_1 + G_2 + M$$

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)\, h / 3$$

د پڅمخروط پوښ پاس یا ټوله یا پورته هواره او ډکی :

$$M = \pi s(r_1 + r_2) = \pi(s_1r_1 - s_2r_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$O = \pi s(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi (r_1 s + r_2 s + r_1^2 + r_2^2)$$

$$V = (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\pi h / 3$$

پیلبیلګه

د برنس مجسمی لپاره دې یوه متهه د همغه موادو جوړه شي. دا دې ۱،۵ متره جګ وي، او یوه کتله دې ولري چي ۱۰ ټنه وي(د برنس دیښتي یا کلکوالی $\rho = 8,7\ g/cm^3$) په پوښتنه کی یو ګرد (پخمخروط) یا یو مربعشکلی (پخ اهرام) راځي. سرپوښهواره دې ، په اندازه ، ۱ مترمربع لوي وي. نورې اندازې ونبایي ؟ د دواړو متهو لپاره شمیرنه ورته ځغلي

$$V = m / \rho = 10t / (8,7t/m) = 1,149\ m^3$$

دا چي جګوالی او سرپوښ معلوم دي، بنسټ د یومربع مساوات له لارې لاس ته راځي:

$$V = 1,149 \qquad = 0,5(G_1 + (\sqrt{G_1 .1} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1,299 - G_1 \qquad = \sqrt{G_1}$$

$$\Rightarrow \quad 1,687 + G^2 - 2598 G_1 = G_1$$

$$\Leftrightarrow \quad G_1^2 - 3,598\ G + 1,687 \quad = 0$$

$$G_1 = (3,598 / 2) \pm \sqrt{(3,598 / 2)^2 - 1,687}$$

$$G_1 = 1.799 \pm 1,245$$

$$\Rightarrow \quad G_1 = 3,044 m^2 \quad \text{یا} \quad G_1 = 0,549 m^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(دوم اوبی یا حل 0,549، په کار نه راځي ، ځکه چی لاندې هواره به له پورته څخه کوچنی وی)
له دې څخه پورته او لاندې وړانګه لاس ته راځي او نیمی په پخمخروط او په همدې توګه د کانتو یا اړخ اوږدوالی په پخ اهرام کی:

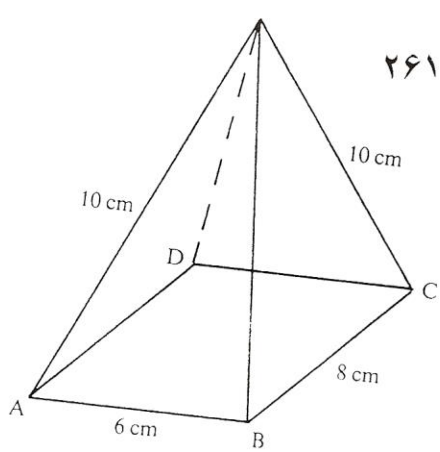
$a_2 = \sqrt{G_2} = 1m$; $r_2 = \sqrt{G_2/\pi} = 56,42$ cm
$=> d_2 = 112,84$ cm

$a_1 = \sqrt{G_1} = 1,745$ m ; $r_1 = \sqrt{G_1/\pi} = 98,42$ cm
$=> d_1 = 196,85$ cm

د پیتاګوراس له جملی څخه د اړخونو اوږدوالی لاس ته راځي:

$h_s = \sqrt{h^2 + (a_1 - a_2)^2/4} = 1,546 => M = 8,488\ m^2$

$s = \sqrt{h^2 + (r_2 - r_2)^2} => M = 7,575\ m^2$



شیره ۲۶۱

تمرینونه

۱ – د یوه مربع اهرام پاسهواره او ډکی وشمیری ، که وي :

الف) $a = 7$ cm ; $h = 14$ cm

ب) $s = 15$ cm ; $a = 10$ cm

پ) $V = 80\ cm^3$; $h = 10$ cm

ت) $h_a = 13$ cm: $h = 10$ cm

(c) ketabton.com: The Digital Library

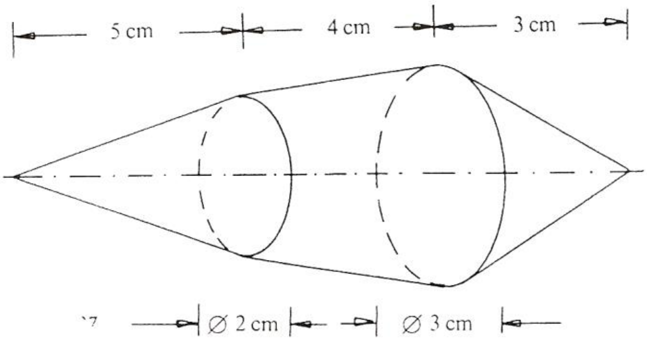
ټ) $h = 12\ cm\ ;\ s = 18\ cm$

ث) $h_a = 12\ cm;\ \ M = 400cm^2$

۲ – د ښیره شوي اهرام پاسهواره او ډکی وشمیری. (لمړی ترونکرښنه له ټکي A ښخه د جګوالی پښیکګي ته وشمیری)

۳ – په کوم جګوالي دې مربع اهرام بنستهوارې ته غبرګ غوښ شي چې ډکی یی نیم شي؟

۴ – یو ولاړ اهرام د بنستیز منظم شپړکونجي سره بنستې لاندې هوارې اړخ یا کانتی $a = 4\ cm$ لري او خوا اړخ اوږدوالی یی $s = 12\ cm$ دی. V او O وشمیری ؟



۵ – د ښیره شوي بدن ډکي وشمیری.

ښیره ۲۶۲

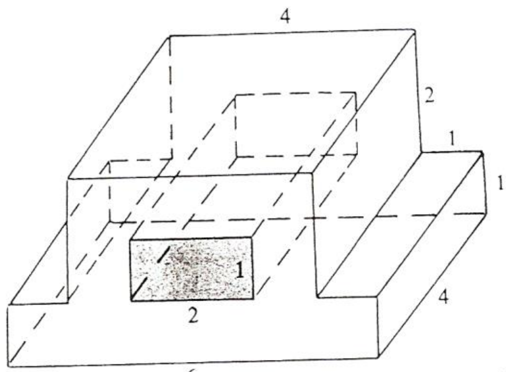
یادونه: ∅ د نیمي یا قطر په مانا دی، چې د دوراني ګرد لوښي ښکاري

۶ – د یوه ګردیګرد برج سر یا سر دې نوي پټ شي. د سرپوښ د هوارې د اندازې لپاره سرپوښوونکی د برج ترمخ داسی ولاړ دی یا داسی ځای نیسي، چې پوښ اوږدوالی s د ۷۵ درجو په یوه کونج ګوري، کوم چې ټیك د سر میلان په ګوته کوي، د سرپوښ هواره ښومره لویه ده، که برج ۵۰ متره جګ وي او د برج نیمي ۱۲ متره وي؟ سرپوښوونکی د برج ښخه ۱۰ متره لرې ولاړ دی او د سترګو جګوالی یی ۱،۸۰ متره دی.

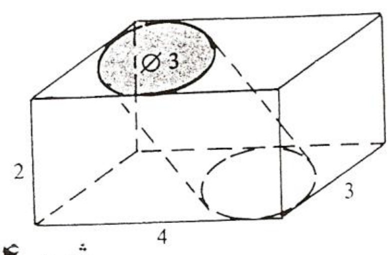
(c) ketabton.com: The Digital Library

۷ – د یوه برج اهرامډوله سرپوښ چې بنسټ یې مربع او اړخ اوږدوالی یې $a = 12cm$ دی په وسپنه دې پټ شي اړخکانتې یې ۱۴خ متره ده د سرپوښ هواه یې څومره ده؟
دا چت به څومره ارزښت ولري، که یو مترمربع سرپوښول د هرځه سره ۹۵ المان مارکه ارزښت ولري؟

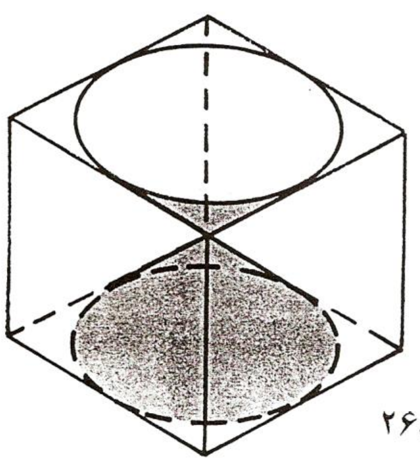
۸ – د څیره شوو بدنونو پاسهواره وشمیرئ(ورکړه په سانتي متر)



څیره ۲۶۳



څیره ۲۶۴



څیره ۲۶۵

۹ – د پورته څیره شوي بدن ډکی وشمیرئ.
۱. –په مختلف کارېوېو کی مخروط ډوله خالیګاوې برمه کیږي:
الف) په یوه مکعب چې اړخ اوږدوالی یا کانتی اوږدوالی یی $a = 60$ cm دی، یو مخروط د جګوالی $h = d = a$ سره
ب) په یوه مکعب کی د $a = 60$ cm یو سیومتري

(c) ketabton.com: The Digital Library

دیابولو (لاتین:Diavolo = شیطان)

پ) په دوه سمو ګردیاستوانو د h = 2r = 60 cm هم یو مخروط او یو دیابولو، دا موږ د شګو ساعت په څیر پیژنو . د تشځای ډکي او په همدې ډول

د نور پاتی بدن ډکی هم وشمیری.

۱۱ – یو مربع اهرام (h = 2a = 10 cm) بنسټهوارې ته غبرګ په دوه برخو ویشل کیږي. د غوځهوارې واټن دې بنسټهوارې ته 0,75h ; 0,5h ; 0,25h وي.

د هر برخه بدن ډکي وشمیری.

۱۲ – ددې لپاره چی یو ګردیډوله فیلترکاغذ د فیلتر لپاره استعمال کړی شی، دا سړی یو څلورمه برخه ګردی باندې را غبرګوي ، وازی باید څومره وازکونجی ولري، ددې لپاره چی فیلتر جوړ شي.

۱۳ – یو مخروط ډوله کچګیلاس دې ټیك ۱ لیتر ځاي کړي. هغه ۱۵ سانتي متره جګ دی. د هغه نیمی (یا نیمی ګردی) دې څومره لوي وي.

۱۴ – ۵ مکعب متره شګه یوې ټوپی باندې اچول کیږي. دا ستوریکونج ۴۵ درجی دی . جګی او نیمی یي څومره لوي دي؟

۱۵ – یو مخروط ډوله د اوبو ګیلاس دې د نیمایي پورې له اوبو ډك شي. دا اوبه په ګیلاس کی څومره جګی ولاړې دي؟

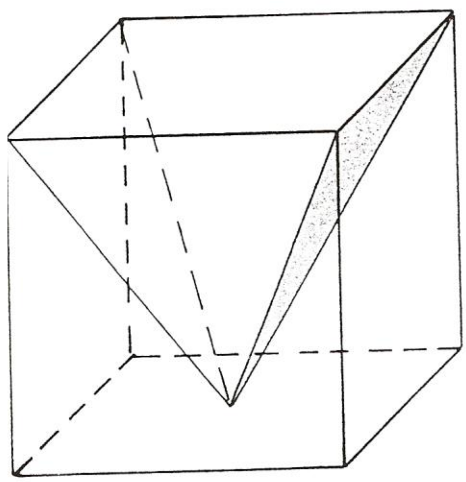
۱۶ – یو کافیواله یوه مخروط ډوله د شربت ګیلاس د شربت څخه ډکوي چی اندازه ۱۵ سانتي متره جګه ده. دی دا ګیلاس د یو سانتي متره پورې کم له شربت ډکوي. دا په دې توګه په سلو کی څومره شربت سپما کوي

۱۷ – په څیره ۲۶۶ کی ورکړ شوی اهرام ډکی وشمیری

۱۸ – په یوه چت باندې یو د وښو چتپټوونی، چي ۵ ، ۴ متره جګ دی اینښوول کیږي، چی اړخ اوږدوالی یی a = 12,5 m متره او b = 9 m متره .دي. د

(c) ketabton.com: The Digital Library

چت پورته کانتی یا پورته اړخ ۷ متره اوږد دی . د چتپټووني ډکی وشمیری او همداسی د چتپټي سرهواره هم وشمیری.



خیره ۲۶۶

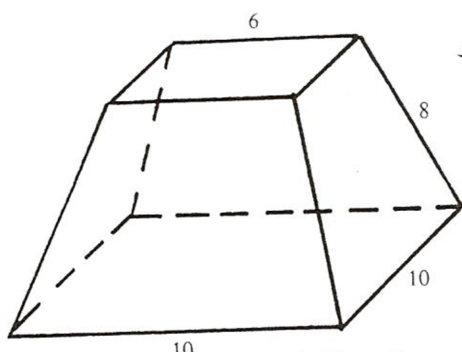
۱۹ – د یو دوه متره ژور بنسټ لپاره ځومره خاوره باید راوویستل شي، که پوره ژی یا غاړه یی ۱۰ متره د غاړې اوږدوالی ولري او ستورپکونج –یعنی هغه کونج چی د غاړې یا اړخ سره د کنلو په لور جوړوي– یی ۶۰ درجی وي؟

۲۰ – د یوه هواډکیځومره مائیلوالی لري، که د یوه ونی سټی هوا ډکی شمیرلو لپاره چی مخروط ډوله دی د موټي قاعده وکارول شي، د لاندې سره

$V^* = \pi h\,[(r_1 + r_2)/2]^2$

د $r_1 = 10$ cm سره

او $r_2 = 5$ cm سره؟



خیره ۲۶۷

۲۱ – ځومره مسو ټوټه په کار ده، چی خیره شوې مسخولی جوړه کړای شو(وکړنی په ځیس متر؟ (خیره ۲۶۷ .

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۲ – جوړ شوي کارپوټې حومره درنې دي (اندازه په سانتي متره)

۲۳-د لاندې پخمخروطونو M ,O او V وشمیری

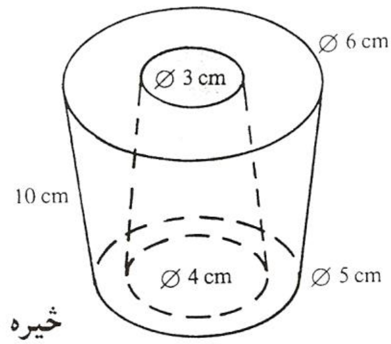
پخ کیګل مخروط

Kegelstümpfe:

a) $r_1 = 12$ cm; $r_2 = 10$ cm; $h = 8$ cm

b) $r_1 = 9$ cm; $r_2 = 7$ cm; $s = 6$ cm

c) $r_1 = 5$ cm; $h = 7$ cm; $s = 8$ cm



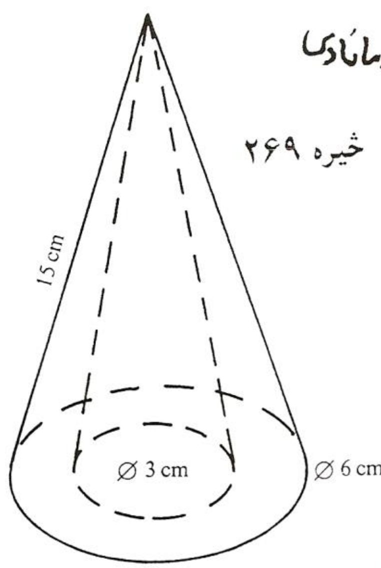
څیره ۲۶۸

Eisenwerkstück $\varrho = 6{,}5$ g/cm^3

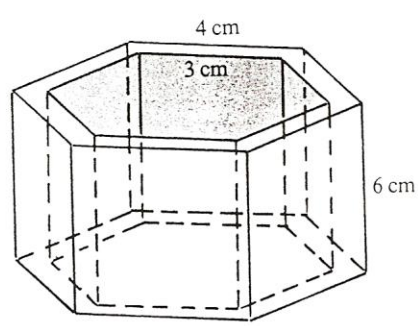
د اوسپنې کار ټوټه

چه په دې کالبوټو کې هم د کلمې پر سر نادی

با غلطت



څیره ۲۶۹



څیره ۲۷۰

Kunststoffmodell $\varrho = 2{,}5$ g/cm^3

پلاستیک مودل

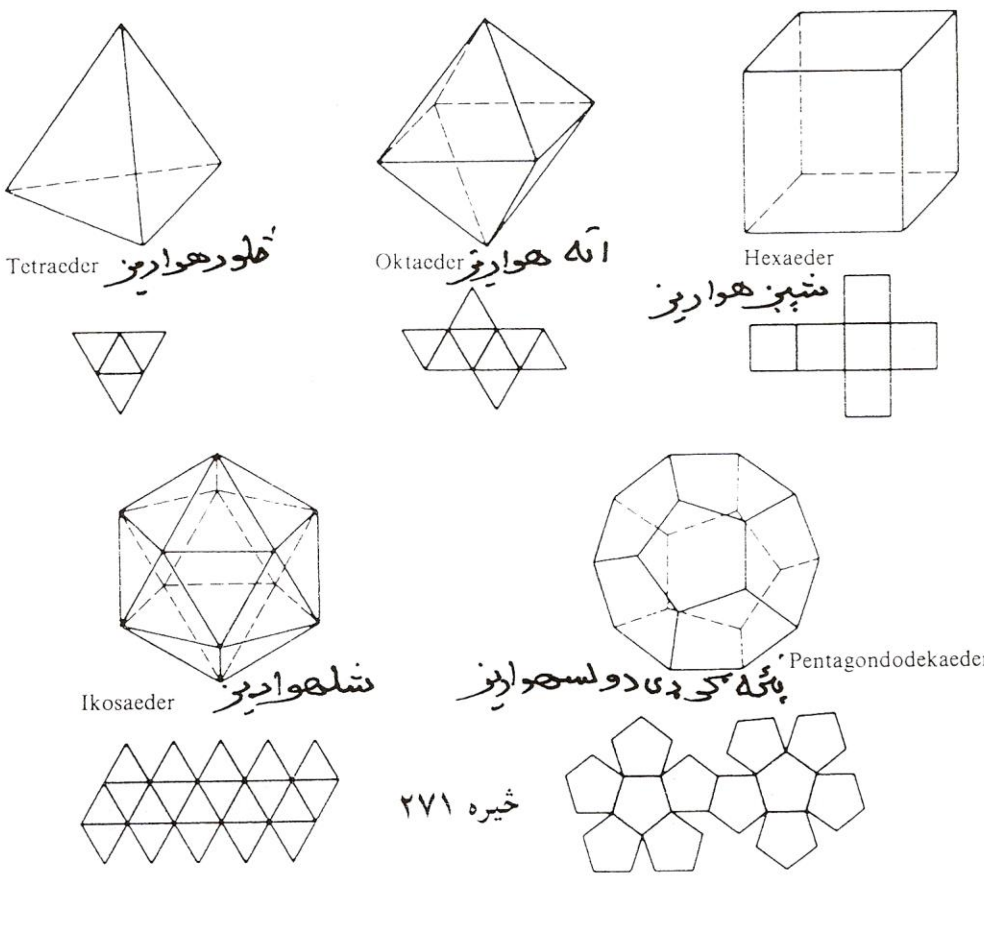
Messingsechskantrohr $\varrho = 8{,}3$ g/cm^3

د مسنګ شپږ اړخیزه ټوټه

(c) ketabton.com: The Digital Library

منظم ډيرهواريز

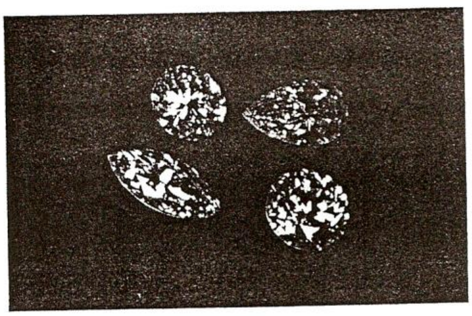
ټول بدنونه ، کوم چې يواځي بندهواري لري يا له‌وارو رابند وي، پولوئيدر (يوناني : ډير هواريز) نوميږي. موږ به دا له دې وروسته دا ډيرهواريز وبولو. د دوي ترمنځ ټيك پنځه منظم يو بل ته ناورته بدنونه. دا د شميرپوهنی له اړخه په ځانګړې توکه په زړه پورې دي، ځکه چې پاس هوارې او ډکې يې بند دي، دا په دې مانا چې د فرمولونو له لاې انځوريدلی شي، او په دې برسيره ، ځکه چې طبعي کريستال دا شکلونه يا فورمونه يا ځيرې لري.



خيره ۲۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا پنځه منظم بدنونهد هواروبندهواریز ابو کهګ هواربندیزدي : تیترائیدر (ځلورهواریز Tetraeder) ، هیکسائیدرHexaeder (شپږهواریز ، مکعب) اوکتائیدرOktaeder (اته هواریز) دودیکائیدر (دولس هواریز ، د خپل اړخهوارو له امله پنتاګون دودیکائیدرPentagondodekaeder پنځه ګوډي دولسهواریزه بلل کیږي)، او په همدې توګه ایکوزائیدر Ikosaeder(شلهواریز) ځیرې په تیر مخ کې.

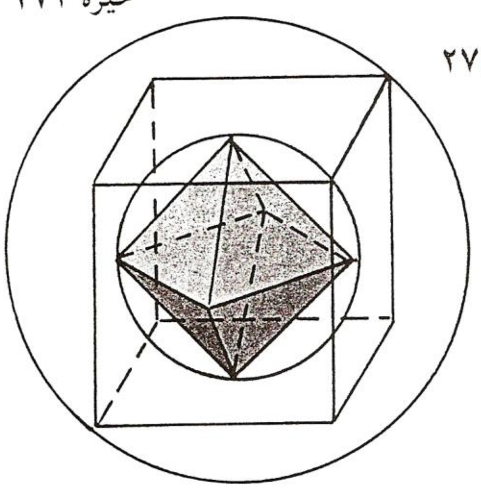


ځیره ۲۷۲

بیلګې

د مالګي تیګي مکعب جوړوي، کوپفرسولفید مینرال Fahlerz تیترائیدر، د ګوګړو کریستال دودیکائیدر او الون (کالیوم الومینیوم سولفات) اوکتائیدر جوړوي.

ځیره ۲۷۳



Würfel und Oktaeder mit In- bzw. Umkugeln

مکعب او اته هواریز د یوه کړه کې ... او په راکړ غونډیو ...

منظمډیرهواریز پلاتوني (افلاطوني) (خیالي platonische) بدنونه هم یادیږي، ځکه چې یوناني فیلوسوف او شمیرنپوه (۴۲۷ تر ۳۴۷ د م. پخوا) په دې نظر وو، چې ځلور پخواني عناصر اور، خاوره، اوبه، او هوا په خپل واړه فورم تیترائیدر، ایکوزائیدر، اوکتائیدر او هیکسائیدر په ګوته کوي. د هغه په فکر جهان پخپله یو دودیکائیدر فورم لروده. په دې پنځو هر یوه بدن کي کیدی

(c) ketabton.com: The Digital Library

شي يوه ګردۍ دننه او دباندې وکښل شي. که دا يو په بل کی دننه شي يا په بل عبارت دننه راګير شي، نو په دې توګه شپږ دننه – او شپږ دباندې هوارې لاس ته راځي ، کومو چی کيپلر Kepler دې عقيدې ته راوستی شو ، کوم (چی هغه وخت معلوم) شپږ پلانيت به په داسی لاره ګرځي، چی د هغوي نيممحورونه د داسی دننه – او دباندېغونډې وړانګو سره برابر شي.

لاندې جدول د دې منظم پولوئيدر ډيرهواريزومعلومو لويو پوره معلومات ورکوي.

Polyeder	e	f	k	l	m	α	r	ϱ	O	V
Tetraeder	4	4	6	3	3	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{12}\sqrt{6}$	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Hexaeder	8	6	12	4	3	90°	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{2}$	$6a^2$	a^3
Oktaeder	6	8	12	3	4	60°	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{6}\sqrt{6}$	$2a^3\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Dodekaeder	20	12	30	5	3	108°	$\frac{a\sqrt{3}+a\sqrt{15}}{4}$	$\frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}$	$3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$	$\frac{15a^3+7a\sqrt{5}}{4}$
Ikosaeder	12	20	30	3	5	60°	$\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\frac{a\sqrt{27}+a\sqrt{15}}{12}$	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{15a^3+5a^3\sqrt{5}}{12}$

د لته حروف لاندې ماناوې لرې . a = د کانتې يا اړخ اوږدوالی ، e = د ګوډونو ګڼ(تعداد) f = د هواروګڼ. k = بدن اړخونوګڼ، l = د هوارو اړخونو ګڼ، m = په هرکونج کی د کانتو يااړخونو ګڼ، α = د ګاونډيو هوارو ترمنځ کونج، r = د چاپيرګردي وړانګه ، ϱ = د دننۀ ګردي وړانګه ، O = پاس هواره يا پورته يا ټوله هواره ، V = ډکي.

پنځه يوون ډيرهواريز (Einheitspolyeder) لاندې (a = 1) ارزښتونه لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

Polyeder	r	ϱ	O	V
Tetraeder	0,6124	0,2041	1,7321	0,1179
Hexaeder	0,8660	0,5	6	1
Oktaeder	0,7071	0,4082	3,4641	0,4714
Dodekaeder	1,4013	1,1135	20,6457	7,6631
Ikosaeder	0,9511	0,7558	8,6603	2,1817

د اویلر د ډیرهواریز جمله، د په خوبنه ډیرهواریز لپاره یو ټاکنمساوات راکوي، د ګوډګنیون e ، اړخګنیون k او هوارګنیون f لپاره:

د اویلر ډیرګوډي یا پولوئید جمله : $e + f - k = 2$

په هرصورت داجمله یواځي د کونوکس یا ننوتو پولوئید یا ډیرهواریز لپاره باور لري، یعنی هغه ، چی په کومو کی ټول نیمي د بدن په دننه کی ځغلي، یعنی منظمو ډیرهواریز لپاره.

بیلګي:

کوادر : $8 + 6 - 12 = 2$

اوکتائید : $6 + 8 - 12 = 2$

دودیکائید $20 + 12 - 30 = 2$

غونډاری یا غونډوسکه(کره) او غونډاري برخې

ولې غونډاری یا غوندوسکه؟

که تاسو د انګرېزي فوټبال په عربي ژباړه په عربي وګورئ، نو کرة قدم به ترې واخلی.

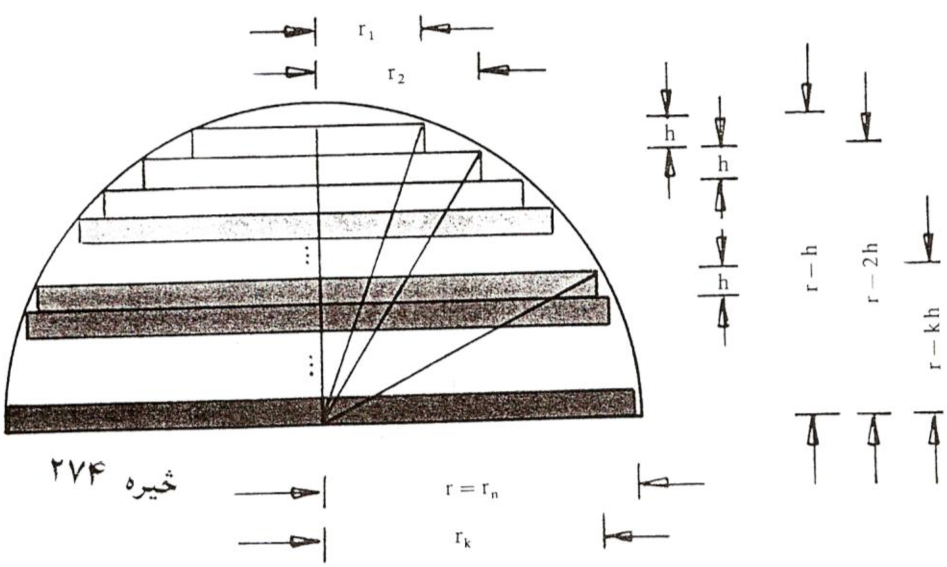
(په لاندې کې ما د غونډاري یا غونډوسکې په ځای غونډی لکلی، چې ښه او ټیک نومونه نه ده.)

د هندسې یا ځمککچپوهنې له مخې غونډاری یا غونډوسکه د ټولو هغو ټکو ټولګه ده یا د هغو ټکو ځای دی، چې له یوه په

کلکه یاکره ټاکلی ټکی M څخه چی د غونډۍ منځټکی بلل کیږی همغه واټن r ولري.

غونډی نه یواځی د جګدرجئیز یا لوړ سیومتري (هره نیمی په همغه وخت کی سیومتري محور دی) له امله د بدنونو ترمنځ یو ځانګړي رول لري، بلکه هغه موږ انسانانو لپاره هم د مانا ډکه ده، ځکه چی ځمکه (نزدې) یو غونډی شکل لري . د بیلګي په توګه په کارتوګرافي کی ځمکه اوږدګردیو (میریدیانی Meridiane) باندې ویشل کیږي. په مریدیانی باندې هر واټن د ځمکی وړانګی R ته بیا یوه لینده په ګوته کوي. د ډکي ټاکلو لپاره بیا غونډی) ګردی استوانی ته ورته) په کوچنیو ستن ډوله چیتروګانو (کردې ټوټی، چی موږ ورته په هسکه مینه کی چیټرو وایو . د مات منګی څخه ګردې ځیرې جوړیږي، ټوټه ده) ټوټه کیږي، چی جګوالی یی h = r / n دی. د یوګونو چیتروګانو وړانګو لپاره باور لري یا صدق کوي (د پیتاګوراس جمله) :

$$r_1^2 = r^2 - (r-h)^2 \Rightarrow V_1 = \pi r_1^2 h$$
$$r_2^2 = r^2 - (r-2h)^2 \Rightarrow V_2 = \pi r_2^2 h$$



خیره ۲۷۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاریتم

$$r_k^2 = r^2 - (r - kh)^2 \Rightarrow V_k = \pi r_k^2 h$$
$$r_k^2 = r^2 - (r^2 + k^2h^2 - 2rkh)$$
$$r_k^2 = 2rkh - k^2h^2$$
$$r_k^2 = \frac{2r^2 \cdot k}{n} - \left(\frac{rk}{n}\right)^2$$
$$r_k^2 = r^2\left(\frac{2k}{n} - \frac{k^2}{n^2}\right) \Rightarrow V_k = \pi r^3\left(\frac{2k}{n^2} - \frac{k^2}{n^3}\right)$$

$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n) - \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{n^2}\left(\frac{n}{2}(n+1)\right) - \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{3} + \frac{3}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right]$$

که د «ستنګيو» ګڼون تلم پورته لاړ شي، نو په نوکانو کی لمړی ترم د مانا دی او لاس ته راځي

نیمغونډۍ

V نیمغونډۍ $= (2/3)\pi r^3 \Rightarrow V_{غونډۍ} = \frac{4}{3}\pi r^3$

د غونډي د پاس هواري د شميرلو لپاره دا په خورا زياتو برخه هوارو ويشي. که دا د ګوډ يا کونج ټکي د منځټکي سره ونښلول شي نو دا يو د اهرامشکل بدن ځان ته غوره کوي د r جګوالي سره.

د دې ټولو اهرامونو ډکيو زياتون د غونډۍ ډکی ورکوي. دا د خورا زياتو هوارو لپاره په نزدې توګه بسيا کوي، که چيرې څوك په پام کی ونه نيسی، چې دا سره د کمو استنثاوو کتل کيږي چی پوره هوار نه دي. برسيره پر دې بايد د دې بنسټ هوارو زياتون د غونډي پاس هوارې سره برابر وي. له دې امله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

غونډي V = د اهرامونوډکیو زیاتون = r. (3 / 1) . (1 / 3) .

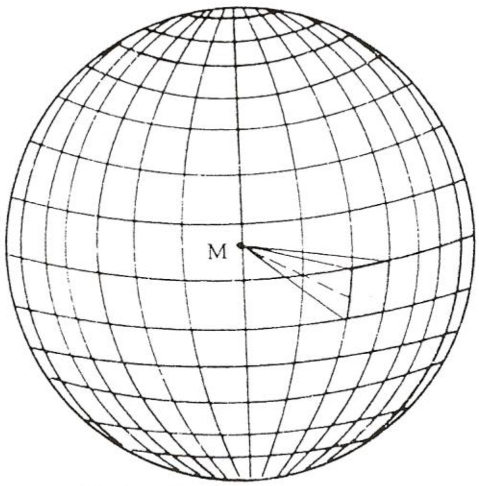
د غونډي پاس یا ټوله هواره

$(1/3). r. O$ د غونډ$= (4 / 3) \pi r^3$

O د غونډي $= 4 \pi r^2$

په ټولیزه یا عمومي توګه باور لري

$$O = 4 \pi r^2 \quad , V = (4/3) \quad r^3$$



ځیره ۲۷۵

پیلبیلګه:

منځنی ځمکوړانګه ۶۳۷۰ کیلو متره ده . د ځمکی پاسهواره او ډکی ځومره دي؟ ځمکه ځومره کتله لري،که د ځمکي منځنی سختوالی $5,514\ g/cm^3$ د مخه ونیول شي یا فرض شي؟

$O = 5,10.10^8\ km^2$,

$V = 1,08 . 10^{12}\ km^3$;

$m = 5,97.10^{24}\ kg$

د خالیغونډي ډکی همداسی لاس ته راځي لکه د یوې خالي استواني ډکی (د مخه لوستل شوی دی) د دوه یو په بل کی پرتو کونځینتري غونډیو توپیر یا کمون:

$$V_{\text{خالیغونډی}} = (4/3)\ \pi\ (r_1^3 - r_2^3) \quad .$$

پیلبیلګه:

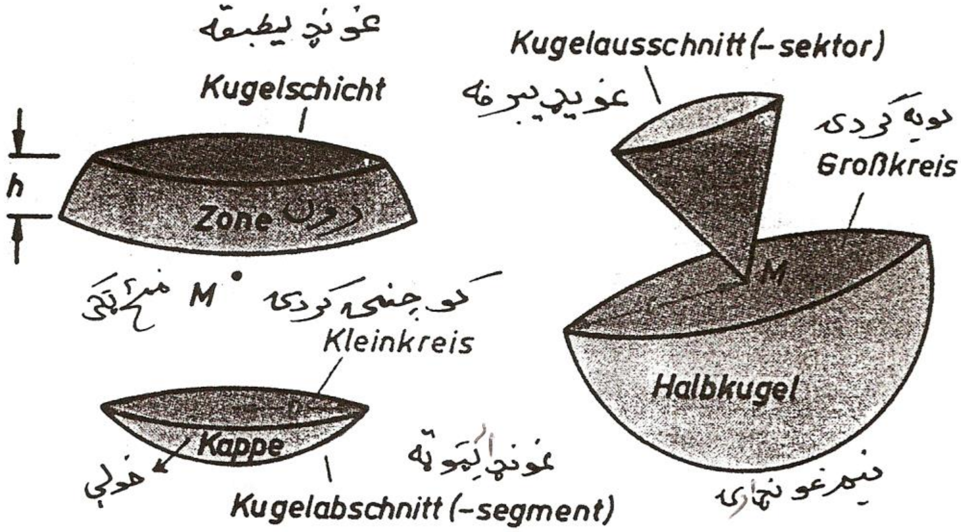
د اوسپنی خالیغونډی کومه کتله لري ، که د باندنینیمی یي ۱۲ سانتیمتره او

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دیوال پنډوالی یی ۸ ملیمتره (دیښتی یا سختوالی یا ټینګوالی) وي؟

$$V = (4/3)\pi(6^3 - 5{,}2^3) = 315{,}8\ cm^3; \quad m = V \cdot \rho = 2463{,}25\ g$$

اوس غونډيبرخی په پام کی نیسو. په ټولیزه توګه لاندې بنسټیز فورمونه مخ ته له:



خیره ۲۷۶

ددې یوه ټوټه یا زیاتې ټوټې داسی منځ ته راځي ، چی غونډی د یوې یا یا زیاتو ګردیو له خوا غوڅه شي. که داغوڅی د غونډي له منځټکي تیر شي، نو دوه نیمغونډي او یوه لویه ګردی د غوڅهوارې په څیر منځ ته راځي. که غوڅی له منځټکي تیر نه شي، نو دوه غونډيټوټی منځ ته راځي. د دوه داسی غوڅیو ترمنځ یوه غونډيطبقه منځ ته راځي. که له غونډي یو مخروط ډوله ټوټه رابیله شي، نو غونډيبرخه منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرتله کړی) د دواړو خولیو د یو بل سره مساوي کیښوولو له لارې لرو:

$$\varrho_1^2 h_2 - \varrho_2^2 h_1 + h h_1 h_2 = 0$$

دا بالاخره مور لاندې ته لاربښودوي:

$$V = \frac{\pi h (3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2}{6}$$

د غونډیبرخي ډکي یا غونډیبرخي حجم داسی لاس ته راځي، چی د یوه مخروط او او د ګردیتهوټی ډکي سره زیات کړو:

$$V = \frac{\pi h^2 (3r - h)}{3} + \frac{\pi \varrho^2 (r - h)}{3}$$

دلته بیرته اړیکی (*) کارول کیږي، چی په لاندې ډول ځیره بدولون ترې لاس ته راځي $\varrho^2 = h(2r - h)$. په دې توګه د ϱ^2 لپاره ځاي په ځاي کوي او له دې لاس ته راځي :

$$V = \frac{\pi h^2 (3r - h)}{3} + \frac{\pi h (2r - h)(r - h)}{3}$$

$$\Longleftrightarrow \quad V = \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3} + \frac{2\pi r^2 h}{3} - \pi r h^2 + \frac{\pi h^3}{3}$$

$$\Longleftrightarrow \quad V = \frac{2\pi r^2 h}{3}$$

له r د (*) په مرسته ځ کا په ځای نیسی نو لاس ته راځی

$$V = \frac{2}{3}\pi h \left(\frac{\varrho^2 + h^2}{2h} \right)^2 = \frac{\pi}{6h} (\varrho^2 + h^2)^2$$

د غونډیتهوټی پوښهواره M ، چی د غونډیخولی نومیږي او یا کاردینالخولی بلل کیږي، په همغه فکر شمیرل کیږي لکه د غونډي پاس یا ټوله هواره . که د غونډیبرخی د ډیرو اهرامونو د زیاتون په ځیر په پام کی ولرو، نو د هغی بنسټهواره همغه غونډیخولی ده. (کړی شو چی غونډیخولی په ځاي کېږه ولیکو) نو لرو :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Mr / 3 = 2\pi r^2h / 3 \quad \Leftrightarrow \quad M = 2\pi rh$$

که د (*) له لارې بدل شي، نو د غونډېکپرې لپاره لاس ته راځي :

$$M = \pi .(\varrho^2 + h^2)$$

د ټولهوارې د لاس ته راوړلو لپاره دې بیا یواځي د بنسټګردی هواره ور زیاته شي. د غونډیطبقي پوښهوارې ته د غونډیزون Kugelzone وايي. دا د دوه کپرو له کمون څخه لاس ته راځي. ټوله هواره یا پاسهواره یې داسې لاس ته راځي، چې بنسټهواره او سرپوښګردي هوارې وززیات شي. د غونډیټوټې پاس هواره داسې لاس ته رځي، چې د غونډېکپرې هوارېته د مخروطپوښ ورزیات شي.

د غونډارې برخو لپاره لاندې فرمولونه باور لري.

د غونډارې ټوټه غونډارې خولی	$V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h) = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho^2 + h^2)$ $M = 2\pi rh = \pi(\varrho^2 + h^2)$ (Kugelkappe) $O = 2\pi rh + \pi\varrho^2 = \pi(2\varrho^2 + h^2)$
غونډارې ټیکلی غونډارې زون	$V = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)$ $M = 2\pi rh$ (Kugelzone) $O = \pi(2rh + \varrho_1^2 + \varrho_2^2)$
غونډارې برخه	$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{6h}(\varrho^2 + h^2)^2$ $O = \pi r(2h + \varrho)$

بیلګه:

۱ – د پنیرخرخ د یوه غونډیطبقي فورم یا بڼه لري. د هغه پاس هواره او ډکې وشمیرئ، که وي : $\varrho_1 = \varrho_2 = 25$ cm او $h = 20$ cm.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V = (20\pi / 6)(3.25^2 + 3.25^2 + 20^2) = 43458,70\ cm^2$$
$$= 34,458\ dm^2$$

وړانګه r د پیتاګوراس د جملي په مرسته لاس ته راځي :

$$r^2 = \rho_1^2 + (h / 2)^2 \Rightarrow r^2 = 25^2 + 10^2 \Rightarrow r = 26,93\ cm$$

نو لرو

$$O = \pi (2.26,93.20 + 2.25^2) = 7310,59cm2 = 73,11\ dm^2$$

۲ – یو دلوبی لاټو یا لوبی څرخی د غونډیټوټی بڼه لري د ټولجګوالی $r = 16$ cm او سور $b = 2\rho = 10$ cm سره. د هغه ډکی او پاسهواره څومره لوي دي؟

د خولی جګوالی د پیتاګوراس د جملی په مرسته لاس ته راځي :

$$(r - h)^2 + \rho^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = - 2rh + h^2 + \rho^2 = r^2$$
$$\Leftrightarrow h^2 - 2rh + \rho^2 = 0 \Leftrightarrow h^2 - 32h + 25 = 0$$

د دواړو اوبیو یا حلونو $h_1 = 31,2$ cm او $h_2 = 0,8$ cm سره.

داچی $h < r$ ، نو باید یواځي دوم اوبی یا حل د کارونی یا ګټور وي. له دې امله لاس ته رځي

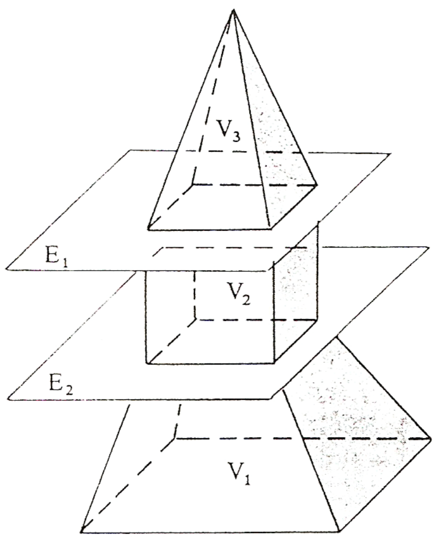
$$V = 2\pi .16^2 . 0,8 : 3 = 428,93\ cm^3$$
$$O = 16\pi(2 . 0,8 + 5) = 331,75\ cm^2$$

په خوښه جوړشوي یا فورم شوي بدنونه

لکه څنګه مو چی زیات تر پام تیر شو، ګټوور دی چی د یوه پیچلي بدن د ډکي یا پاسهوارې د شمیرلو لپاره دا بدن په ګټوره توګه یا هدفمند ډول ټوټی ټوټي کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په دې ډول ساده برخه بدنونه منځ ته راځي، کوم چې ض معلومو فرمولونو له لارې شمیرل کیدی شي.



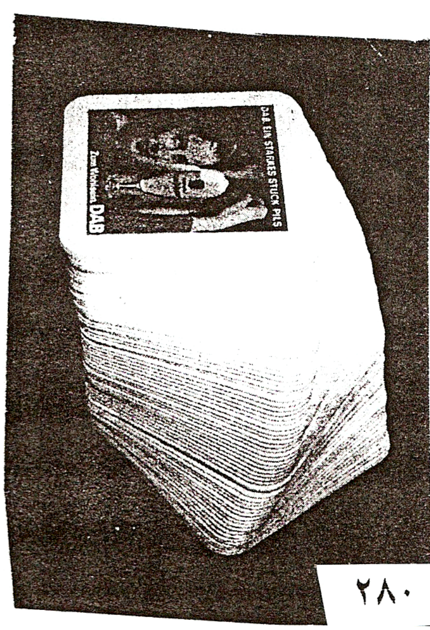
$V = V_1 + V_2 + V_3$

خیره ۲۷۹

بیلګې :

ددې خیره شوي بدن ډکی له یوه پخ اهرام، کوادر یا غبرګاړخیز یا مکعب او یوه اهرام څخه لاس ته راځي.دا جوتیږي، که بدن په دوه غوڅیو په هوارو E_1 او E_2 ټوټه شي .

د بیاتیونی له لارې کیدی شي چې زیات بدنونه یوبل سره پرتله یا مقایسه شي(مخروط، اهرامونه) د ګیلاس ایښولو ټوټې(داسی ډبل کاغذونه دي چې د پیالیلاندې یا ریمکابي یا پشکاب په څیر وي او ګیلاسونه پرې ایښوول کیږي) چې یو په بل ایښول شوي په پام کی نیسو. د دې ټوټو د څرخولو ، یا ځاي بدلولو له لارې جګوالی او ډکی نه بدلیږي. له دې منځ ته راغلی پوړی په پام کی نه نیول کیږي، ځکه چې په تیوري کی

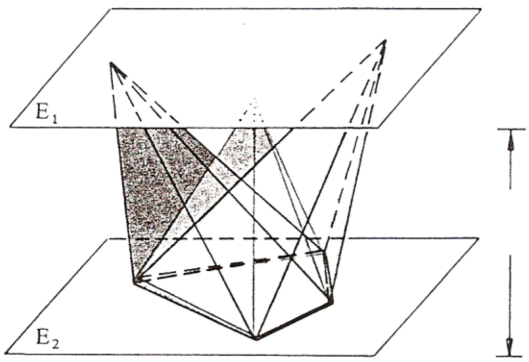


خیره ۲۸۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا بدن د ناپای زیاتو طبقو څخه جوړ دی، چی پنډوالي یی په پام کي نه نیول کیږي د دې نور ورزیات استعمال د کاوالیری Cavalieri پرنځیپ دی

جمله :
دوه بدنونه همغه ډکی یا برابر ډکي لري، که د هغو ټول پراته غوڅي په همغه واټن بنسټهوارې ته پراته وي.



په دې کی ضرور نه دی چي غوڅهوارې دی کونګروانیځ وي!

څیره ۲۸۱ : دا بیاتي شوي اهرامونه ډکي برابر دي، ځکه چی همغه جګي او برابر بنسټهوارې لري: $V = (1/2)G.h$
د کوچنیو واټنونوسره هره غوڅهواره چی د بنسټهوارې سره غبرګه وي، په اهرامونوکی هواربرابر غوڅهوارې خوړوي

دا د غونډیډکي شمیرلو لپاره یو ښکلی میتود رامنځ ته کوي.
د یوې ګردي استوانی یا ګردیټوټی څخه چی وړانګه r لري او 2r جګ دی دوه د څوکو یا ککرې له لارې یو بل ته مخامخ مخروطونه غوڅوي (یو دیابولو) د r = h سره.
داپاتی خالیفورم یوه د شګو ساعت پوښ راپه ګوته کوي. د یوې دومی همغی سره برابر ې ګردي استوانی یا ګردیتوتی د وړانګي r په اندازه یو غونډی راغوڅوو. د سیومتري له امله بسیا کوي که لاندې نیمغونډی او د «شګو» ساعتنیمی تر څیړنی لاندی ونیسو. هره غوڅهواره یوه بسټهوارې سره غبرګه هواره راکوي، په غونډي کی ګردی په شګوساعتپوښ کی

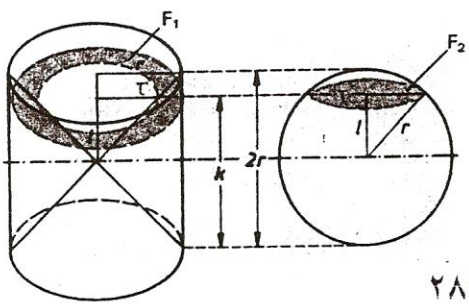
(c) ketabton.com: The Digital Library

ګردیګوته یا ګردیکړی. دلته دې 'r د دیابولو څخه منځ ته راغلي ګردۍ وړانګه وي. r د غونډیغوڅیګردي وړانګه .

د هوارو لپاره چې واټن 1 له همغه بدن منځټکي ولري، باور لري:

$$F_S = \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi (r^2 - r'^2)$$

$$F_K = \pi r^2 = \pi (r^2 - 1^1)$$



خیره ۲۸۲

د وړانګي جملې څخه، برسیره په دې لاس ته راځي: (د نښګوساعت)

$$r' / r = 1 / r \Rightarrow r' = 1$$

$$\Rightarrow F_S = \pi (r^2 - 1^2) F_K$$

دواړه بدنونه ګورو چې ډکیمساوی یا ډکیبرابر دي.

اوس د استوانی ډکی $V_Z = \pi r^2 h = 2\pi r^3$ دی، ځکه چې $h = 2r$ دی .

د دیابولو ډکی دی :

$$V_D = (2\pi r^2 / 3).(h/2) = \pi r^2 .h / 3 = (2/3) \pi r^2$$

او له دې سره د شګوساعت – او نیمغونډي ډکی :

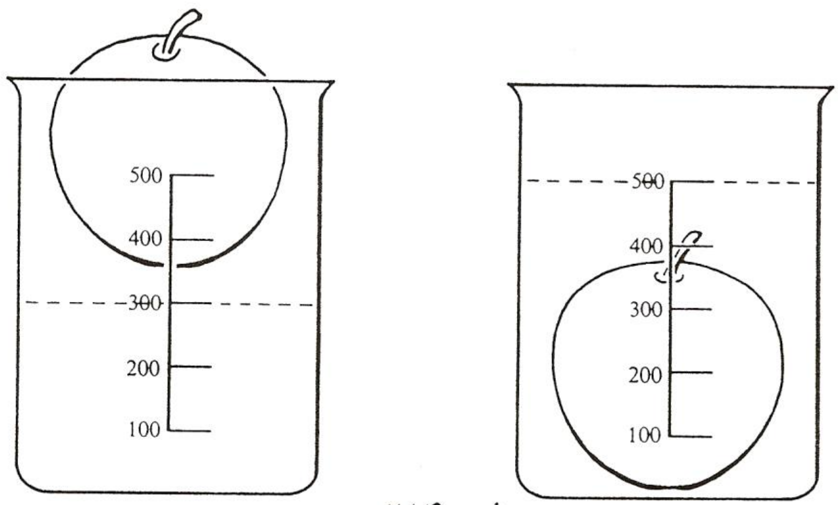
$$V_K = V_Z - V_D = 2\pi r^3 - (2/3)\pi r^3$$

$$V_K = (6/3)\pi r^3 - (2/3)\pi r^3 = (4/3)\pi r^3$$

د پوره نامنظم شکلونو ډکی د شمیرپوهنی له لارې یا هیڅ نه شمیرل کیږي او یا پوره ټیك د پیچلو شمیرنپوهنو متوضو سره هم نه شمیرل کیږي. لکه د یوې منې یا د یوه

(c) ketabton.com: The Digital Library

الو ډکی یواځي فزیکی متودونه یا طریقی مرسته کوي چی ډکي یی وشمیرل شي.
لکه په لاندې ښیرو کي ، ځي روښانه شوی دی.



ښیره ۲۸۳ ښیره ۲۸۴

تمرینونه

۱ – د هغه بدن ډکی ښومره لوي دی ، چمنځ ته راځي، که د مکعب په هره هواره یو ولاړ اهرام کیښنول شي د $s = a$ سره؟

۲ – یو تیترائیدر څلورهوایز بدن او یو غونډی برابر پاسهواري لري. د هغوي ډکی په کوم تناسب یو بل سره پراته دي یا کومه ځانښیونه یو بل سره لري؟

۳ – هر منظم پولوئید لپاره یوه دننه غونډی شته . چی د هغه هره هواره په منځټکي کی لمس کوي. ددې وړانګه دی r وي. د پولوئید ډ ګی او V او O پاسهواري $V = O.r / 3$ لپاره دلایل راوړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پام وکړی چی پولوئیدر په اهرامونو ټوټه شي چی وړانګه r ولري، په
ډول چي د پولوئید هر اړخهواره د داسی یوه اهرام بنسټهواره وي.

۴ – د المان د پارلمان په سر منه او اټیران چی له طیلا جوړ دي د پارلمان د
ډانګ سره غبرګ د قدرت نخښنه جوړوي. دا د پارلمان منه به څومر
وي، که دا د پاکی طیلا څخه جوړ وي($\rho \sim 19,3\ g/cm^3$; $\sim 10\ cm$
اټیران وزن ثابت یا ځای په ځای پاتیږي)؟

۵ – یوه غونډۍ، توته، اهرام (د هغو بنسټهواره) برابر وړانګی لري، د اه
غونډۍ جګوالی یا جګی داسی وټاکی ، چی الف) همغه ډکي لري» د
برابره پاسهواري لري.

۶ – د یوه غونډۍ ډوله تیلو څاڅکي څخه، چی ۵ میلي متره نیمی لري، له
توئیږي د یوې ګردی ډوله تیلو پرده جوړوي، چی نیمی ئی ۱ متر . دا
څومره پنډه ده؟

۷ – د یوې سابونپوړکی دیوال به څومره لوي وي، چی دباندنی نیمی یی
سانتي متره وي، کوم چی له څاڅکی جوړ دی، چی نیمی یی ۵ میلي م

۸ – یوه د بیبنی غونډۍ د دابضنی نیمی سره، چی ۱۲ سانتي متره دی ۲
وزن لري یا درند دی. د هغی دیوال څومره لوي دی ($2,6g / cm3 \sim$

۹ – یو هوا بالون یو ۲۵ متره نیمی لري.
الف) دا دننه سمڅ یا غار یی څومره دروند دی، که د یو مربع متر و
وزن ۴۵ ګرامه وي؟ ب) ډکی څومره وزن لري که
هایدروجن ($\rho = 9.10^{-5}\ g/cm^3$) د ډکي مادې په څیر وکارول شي؟

۱۰ – یو مکعب کی یو غونډاری یا غونډۍ د خورا لوي ډکی سره خوندي
په یوه غونډاري چی خورا کم ډکی ولری راګیر یا خوندي کیږي.د م
اړخ اوږدوالی 5 cm دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف د ټول تن غوڅې څيره وباسی .

ب) د دواړو غونډارو ډکی او پاسهواره وشميری .

۱۱ – د لاندې هوايي بدنونو ډکي او پاس هوارې څومره لويي دي:

الف) سپوږمی ($r = 1735\ km$)

ب) مارس ($r = 3430\ km$)

پ) وينوس ($r = 6305\ km$)

ت) جوپيتر (ر ($r = 71800\ km$)

۱۲ – د کورکغونډي($\rho = 0, 25\ g / cm^3$) د ۳۶ سانتي متره نيمي سره يوه غونډيډوله د پارې زرى($\rho = 11,4\ g / cm^3$) لري. دا د پاربزرى څومره لوي دی، که غونډی تر نيمايي په ابو کی ډوبه شي؟

۱۳ – د يوه لوي سړي سږي ۴۰۰ ميليونه غونډيډوله د سږوپوښکی لري، هر يوه د نيمي 0 ,3 mm سره. د ټولو پوښکيو ګډه پاسهواره څومره ده؟

۱۴ – يو غونډی ، چی وړانګه يی $r = 10\ cm$ ده، د يوې هوارې څخه په ۳ سانتي متره ، له منځ يا کوکز څخه، واټن غوڅيږي. د دواړو برخو غوڅهوارې او ډکي وشميری.

۱۵ – د پاتی ياد نايادو برخو M,V,h او r د لاندې غونډيبرخو لويوالی وشميری

a) $r = 6\ cm$; $h = 5\ cm$ b) $M = 50\ cm^2$; $h = 3\ cm$

c) $h = r = 7\ cm$ d) $M = 700 cm^2$; $r = 10\ cm$

۱۶ – د ځمکی پاسهوارې کومه برخه د ۱۰۰۰۰ متره جګوالی څخه ليدل کيدی شي(د ځمکی وړانګه ۶۳۷۰ کيلومتره ده)

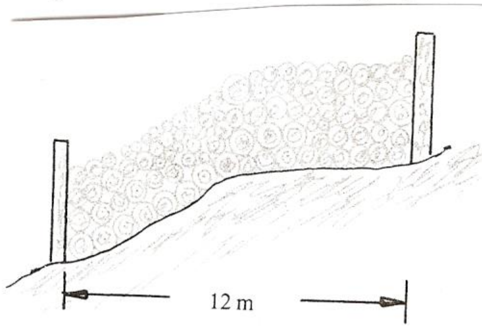
۱۷ – د يوه غونډي نيمی په څلورو برابرو برخو ويشل کيږي۰ په ټوټهټکو کی په نيمی ولاړې درې هوارې اچول کيږي. په کوم څاننيونه يا تناسب کی

الف) د پوښهوارې ، ب) د راپيدا شوو يا منځ ته راغلو غونډي برخو

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره پراته دي؟

۱۸ – په يوه غونډي کی، له منځ څخه ليدلو يا کتلو سره ، هوايی(دلته مطلب د غونډي ترمنځ هوا يا د هواډکی دی) پرسيدنه، د دريواړو کواورديناتو څخه برابردي. که دا يو له بل توپير ولري، نو د اليپسوئيد څخه غږيږو، چی اصلی محورونه يی a,b او c دي. د ايليپسوئيد ډکی د فرمول $V = (4/3) \ a.b.c$ له مخی شميرل کيږي. ځکه په رينبتونی غونډی نه دی، بلکه يو اليپسوئيد ، چی اصلي محورونه يي $a = c = 6378$ km (د اکواتور وړانګه) او $b = 6357$ km (قطبي وړانګه) لوي دي. (که په کلکه ونيول شي نو د اکواتوروړانګو ترمنځ يو کوچنی توپير شته) د ځمکي ډکی وشميری او د مخ ته تير غونډي او غونډي برخي کی لوستلو سره يی پرتله کړی)



خيره ۲۸۵

۱۹ –په يوه زوړندي يا پيچومی باندي ۱ متر اوږد لرګی ډيری شوی، لکه په خيره ۲۸۵کی چی ليدل کيږي. څومره د هوامتر لرګی دا 1,20 m جګه د لرګوډيری لري.

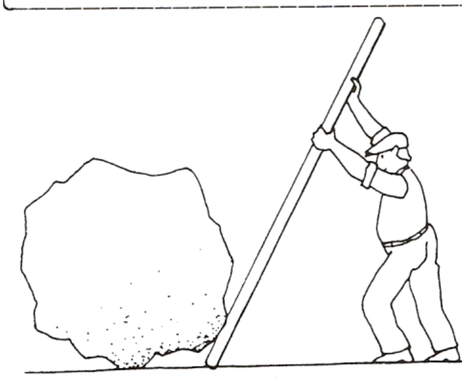
(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورشمیرنه

نځورونه

پیلبیلګه

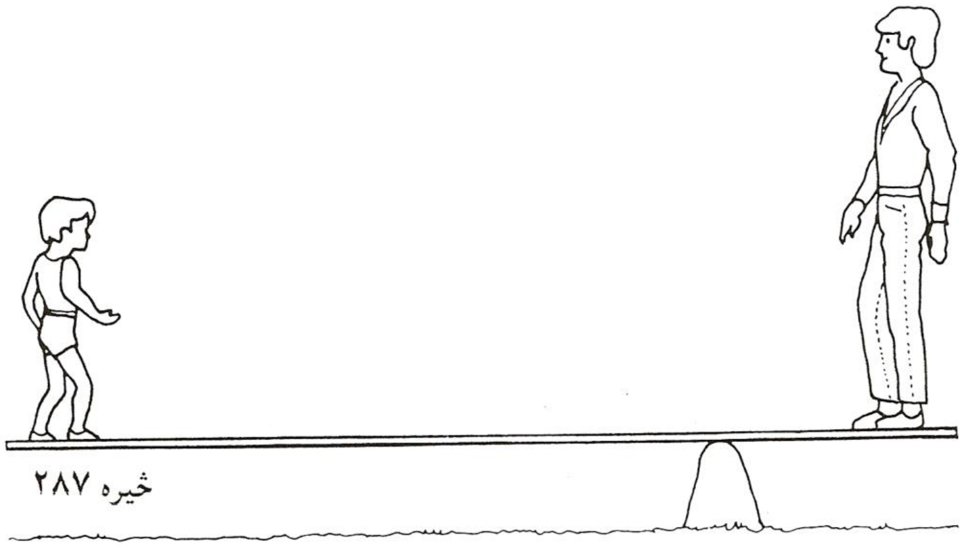
یوه درنديږ تیګی ته څنګه سږی حرکت ورکولی شي؟ طبعآ کیدی شي چي وړل
یی وازمائل شي، مګر دا پوره ستونځی لري او دا لانديږ طریقه یی ساده ده: د
تیګی لانديږ سږی یوه تخته یا اړم نښلوي او یا ورلانديږ کوي، د بل سر نه یی
لانديږ لور ته زور کوي یا لانديږ لور ته زور په واردوي. تیګه یو څرخونحرکت
بانديږ راځي.
ددي حالت لپاره د اړم قانون صدق کوي« زور د زوراړم = بار د بار اړم» .
که تیکه په پوره اندازه اوږده (او ستابیل) وي، کیدی چي یو ډیر نازورور
سږی هم کږی شي، چي خورا درانده بارونه پورته کږي.



یا دا حالت د پورته پیلبیلګي سره ټیك
روښانه څرګند شوی ؟ هیڅ نه پیښیږي،
که څوك په اړم ښکته یا پورته زور ونه
کړي بلکه یا راکښ یا ورپوري وهي.
موږ باید دا پوښتنه نوره هم روښانه کړو
او د زورارزښت سره دزورتاثیر لور هم په
شپله لوبه کی ورداخل کړو. ددي هدف لپاره
وکتور سره شمیرنه کړي.

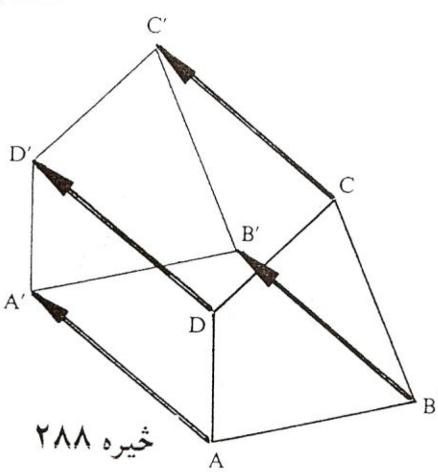
خیره ۲۸۶

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځيره ۲۸۷

تعريف : وکتور د يوه ارزښت او يوه لور سره تعريف دی. **تل د يوه غشي په ځير انځورېږي.** اوږدوالی د وکتور ارزښت (ګڼ ارزښت) ، په هواکی يی ځاي لور او د غشي څوکه د وکتورلور موخه يا هدف ښايي.



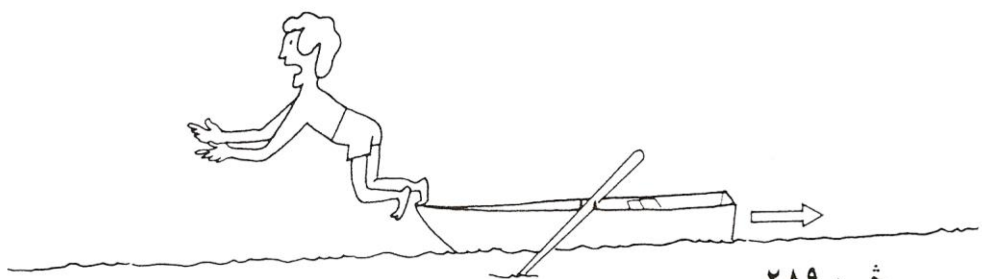
ځيره ۲۸۸

دوکتورونو لپاره د کارونی ساحی

ګڼونه د مخنخښی سره کيدی شي د وکتور په حيث واضح شي. په فزيک کی کښول، لکه زورونه، سرعتتونه، لارې کيدی شي د وکتورونو په ځير انځور شي. (د جلالکوټ څخه و ځيره ✓ کښول په وکتور سره په ښنه کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

و هسکی مینی ته رابنایی، چی دا لار دا دوه ځایونه سره ونخلوي او دا هم رابنايي چی څومره اږده ده. وکتور دا را په ګوته کوي، چی ایا څوك له جلاکوټ څخه هسکی مینی ته ځي او که له هسکی مینی څخه جلالکوټ ته)



ځیره ۲۸۹

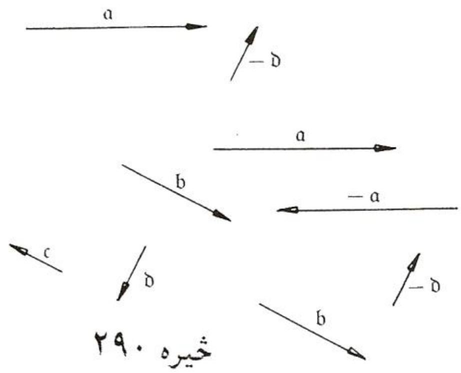
داچی یو وکتور د خپل پیلټکي او پایټکي سره ورکړ شوی دی، کیدی شي چی دا ټکي هم د هغه په انځورونه کی استعمال شي.

تعریف: هغه وکتور چي له ټکي P و ټکي Q ته لاربنودوي، د $\overrightarrow{PQ}$ سره په نخښه کیږي.
بل ډول لیګدودونه یی دي: $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} = \vec{a}$.

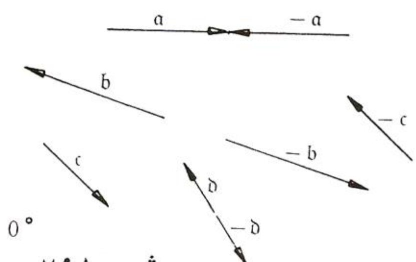
په راکښلو سره که ټکی 'P د P ځیره او ټکي 'Q د ټکي Q ځیره وي، نو د $\overrightarrow{PQ}$ اوږدوالی او لورد $\overrightarrow{P'Q'}$ یو بل سره برابر دي. له دې امله دا باید برابر ولیدل شي یا وګڼل شي. یو وکتور له دې امله یو غشی نه دی بلکه ډیر یوبل سره غبرګ او کوګروا ینخ غشي دي. له دې امله د ورته ټولګي ځخه هم غږیدی شو. (دا دې ځما په لمړي د شمیتپوهنی کتاب کي وکتل شي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثیره   وکتورو نه د ایکویوالنځېولګی
په ثیر: دوه وکتورونه ټیك هلته سره برابر دي، که هغه همغه ارزښت(اوږدوالی) او همغه لور ولري.



ثیره ۲۹۰



ثیره ۲۹۱

تعریف

د **a** مطلقه ارزښت a = |**a**| دی. a تل یو نامنفي ګڼ دی.

وکتورونه د ارزښت ۱ سره موږ یوونوکتورونه یا واحدوکتورونه بولو.

وکتورونه د همغه ارزښت سره مګر د مخامخ لور سره مخامخ یا په څټ وکتورونه بلل کیږي:

$$|\mathbf{a}| = |-\mathbf{a}| = a$$

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} = -\overrightarrow{QP} = -(-\mathbf{a})$$

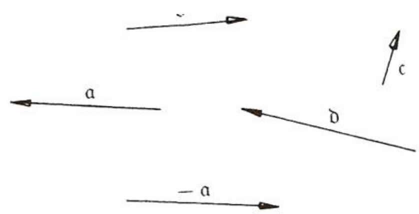
یواځنی وکتور د 0 (صفر) ارزښت سره صفروکتور **0** دی:

$$\overrightarrow{AA} = \mathbf{a} \Rightarrow |\overrightarrow{AA}| = |\mathbf{a}| = 0$$

دا چی وکتورونه له ټکي وټکي ته لارې روښانه کوي، کیدې شي چی د وکتورونو د توضیح لپاره کواوردینات یا پروت ولاړ سیستمونه (محورونه) هم وکارول شي:

تعریف: وکتورکواردینات د پیل او پای ټکو توپیر یا کمون څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



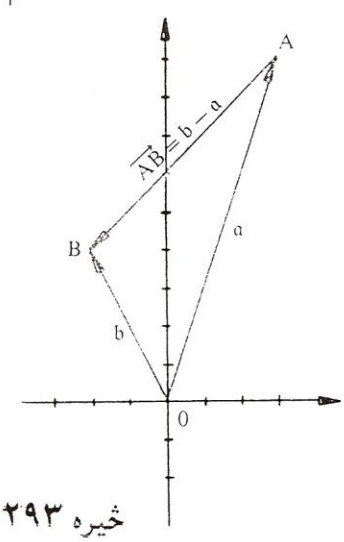
خیره ۲۹۲

په هواره کي : $a = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix}$

په هوا کی : $a = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix}$

خیره وکتورونه او د هغوي ارزښتونه(اوږدوالی):

$| \mathbf{a} | = |\mathbf{-a}| = 2,5 \; ; \; | \mathbf{b} | = 2 \; ; \; | \mathbf{c} | = 1 \; ; \; | \mathbf{v} | = 3$



خیره ۲۹۳

بیلګې:

وي دې A(3| 9) او B(-2 | 4) پیل- او پایټکي . نو د A او B څخه ټاکلی وکتور کواوردینات په لاندې ډول لاس ته راځي :

$$a = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad b = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

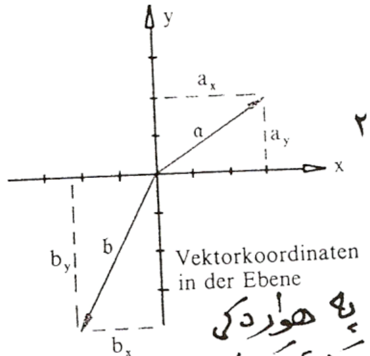
$$-c = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 9-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

جمله:د وکتور ارزښت د پیتاګوراس له جملی څخه لاس ته راځي او دا د یوګونو کواودیناتو له لارې :

په هواره کی: $| \mathbf{a} | = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په هوا کې: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$



شیره ۲۹۴

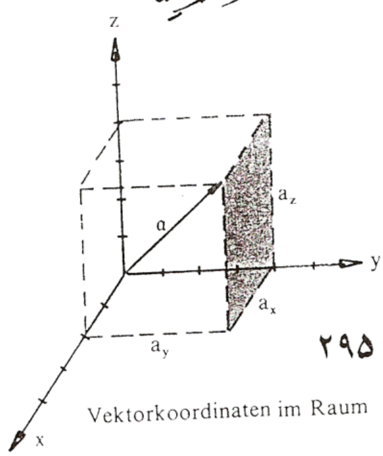
په هوارکې وکتورکواوردینات

بیلګي :

$$a = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |b| = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11{,}31$$

$$c = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |c| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{77} \approx 8{,}77$$



شیره ۲۹۵

په هوائی وکتورکواوردینات

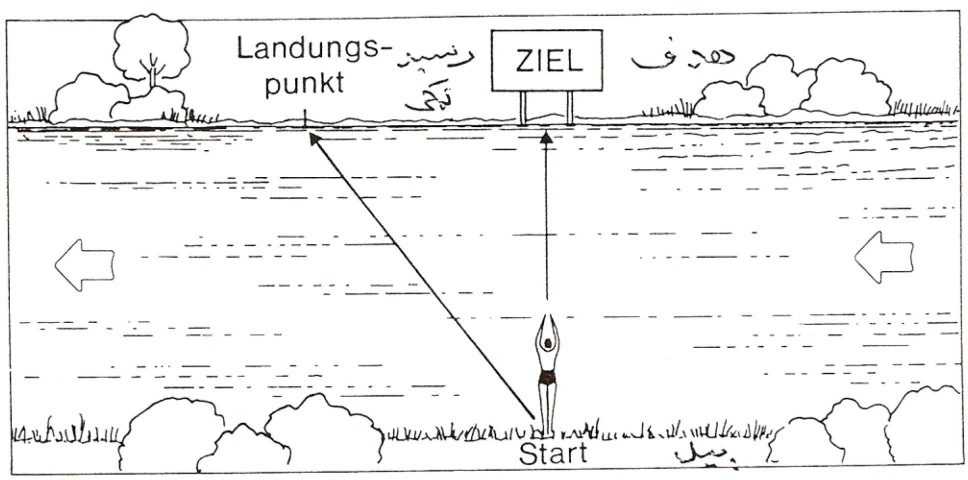
وکتورزیاتون او s–ځلوون یا ضربول

پیلبیلګه: یو لامبووهونکی د سین بلی لور ته د سین په سور یا پلنو لامبی، دا په دې مانا چې اوبه روانی دي. سره له دې چې دا تل سیده لامبي ، دا نه شي کولی چی هغه د لمبا ځاي ته مخامخ ځاي ته ولمبیدی شي.د روانو اوبو څخه د ځان سره وور کیږي. په ټولیزه –

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا عمومي توګه ده یو مائل حرکت وکړ یا مایل یي ولمبل، کوم کې چې د ده د لمبا سرعت او د سین سرعت یو په بل زیات شوي دي.

ګرافیکي د وکتورزیاتون داسې صورت نیسي، چې د دواړو سرعتونو وکتورغشي په خپلو پیل ټکو یو په بل ږدي او دا هر یو د یوه غبرګ اړخیز سره یوځایي وصل کوي. د غبرګ اړخیز نیمې د دواړو سرعت وکتورونو زیاتون ، چې له پیل ټکي پیل کیږي انځوروي. یعنې د لامبووهونکي او د اوبو د سرعت زیاتون ، ځموږ په ځیره کې »



ځیره ۲۹۶

تعریف: وکتورونو ګرافیکي سره زیاتیږي، که د دوهم وکتور پیلټکي د لمړي وکتور په پاکي کېښول شي یعنې د غشي په سر کېښول شي او داسې وریسی . دا زیاتون وکتور نو بیا د لمړي وکتور د پیل ټکي د دوهم وکتور یا د ځنځیر اخرني وکتور د څوکې یا غشي سر پورې غزول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خیرونو څخه دا لاندې هم لاس ته راتلی شي

جمله : د زیاتونوکتور کواودینات همداسی کمونوکتور د پیلوکتور د زیاتوز همداسی کوم څخه لاس ته راځي.

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

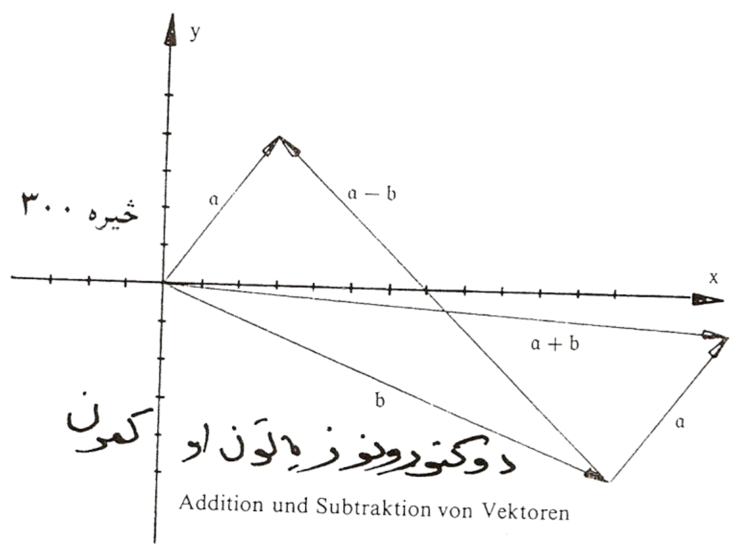
1. $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad |a| = 5 \quad |b| = 13$

$$\Rightarrow a + b = \begin{pmatrix} 3 + 12 \\ 4 \ \ - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a - b = \begin{pmatrix} 3 - 12 \\ 4 \ \ + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$b - a = \begin{pmatrix} 12 - 3 \\ -5 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$|a - b| = |b - a| \approx 12{,}73; \quad |a + b| \approx 15{,}03$$



Addition und Subtraktion von Vektoren

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\mathbf{2.}\ a=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix};\quad c=\begin{pmatrix}7\\8\\-9\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a+b=\begin{pmatrix}4-2\\3+0\\2+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$$

$$a-c=\begin{pmatrix}4-7\\3-8\\2+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-5\\11\end{pmatrix}$$

$$a-b+c=\begin{pmatrix}4+2+7\\3-0+8\\2-5-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\11\\-12\end{pmatrix}$$

$$a+a=\begin{pmatrix}4+4\\3+3\\2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\6\\4\end{pmatrix}=2\cdot a$$

دا وروستنی بیلګه د وکتورونو د ځلولو لپاره ده چی له ګڼونو سره ځل شوي (s– ځلون یا · ضربونه) یعنی د سکالار سره ځلونه :

تعریف : وي دې s یو ریل ګڼ (سکالار هم نومیږي) **a** یو وکتور. نو s.**a** = **a**.s هغه وکتور لاس ته راکوي ، چی همغه لور ولري لکه **a** او s –واره اوږدوالی ولري. وکتور **a** له s سره ځلیږي، که د وکتور هر کومپونت د s سره ځل شي:

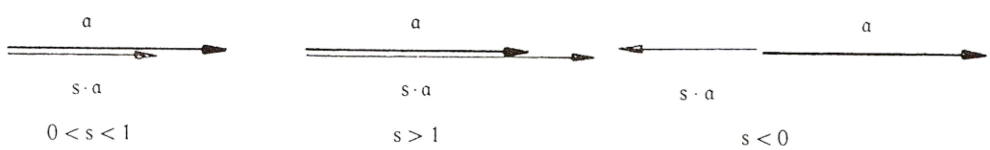
$$s\cdot a=\begin{pmatrix}s\cdot a_x\\s\cdot a_y\end{pmatrix}$$ په هواره، $$s\cdot a=\begin{pmatrix}s\cdot a_x\\s\cdot a_y\\s\cdot a_z\end{pmatrix}$$ په هواکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a = \begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix};\quad s_1 = 4;\quad s_2 = -0,5$$

$$\Rightarrow s_1 \cdot a = \begin{pmatrix}4\cdot 5\\4\cdot 7\\4\cdot 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20\\28\\36\end{pmatrix};\quad s_2 \cdot a = \begin{pmatrix}-0,5\cdot 5\\-0,5\cdot 7\\-0,5\cdot 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2,5\\-3,5\\-4,5\end{pmatrix}$$

هندسي د یوه وکتور ځلونه د یوه رییلګڼ سره د هغه وکتور منځنی غزونه ده د ځلوونی یا فاکتور s په اندازه. د وکتور پیلتګی د کرښمنځ یا غزونمنځ دی. دلته د $|s| > 1$ سره وکتور اوږدیږي یا غزیږي» او د $|s| < 1$ سره وکتور لنډیږي. د $|s| = 1$ لپاره د وکتور ارزښت تغیر نه خوري. که $s < 0$ وي، نو د وکتور لور راپه ځتې کیږي یا راګرځي یا برعکس کیږي.



خیره ۳۰۱: د وکتورهa ځلونه د یوه رئیل ګڼ s سره.

که $s = 0$ وي ، نو **s.a** صفر وکتور **0** دی .

جمله :په ټوله توګه یا مجموعه کی د سکالار سره د وکتور ځلونو لپاره ل اندې شمیر قاعدې باور لري:

$$|s.\mathbf{a}| = |s|.|\mathbf{a}|$$
$$(s_1 + s_2).\mathbf{a} = s_1.\mathbf{a} + s_2.\mathbf{a}$$
$$s.(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s.\mathbf{a} + s.\mathbf{b}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګې:

$$1.\quad \left|-3\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix}-9\\-12\\-15\end{vmatrix} \approx 21{,}21$$

$$\left|-3\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right| = |-3|\cdot\left|\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right| = 3\cdot\sqrt{50}\approx 21{,}21$$

$$2.\quad (4-6)\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$$

$$(4-6)\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} - 6\cdot\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\28\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-18\\42\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-14\end{pmatrix}$$

$$3.\quad 3\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}\right] = 3\begin{pmatrix}7\\-9\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\-27\\9\end{pmatrix}$$

$$3\cdot\left[\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix}\right] = 3\cdot\begin{pmatrix}5\\-3\\11\end{pmatrix} - 3\cdot\begin{pmatrix}-2\\6\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\-9\\33\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\18\\24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\-27\\9\end{pmatrix}$$

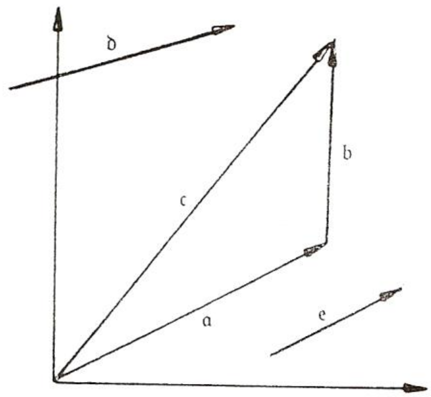
که یو وکتور د بل وکتور زیاتواره په څیر انځور کړی شي، نو دواړه وکتورونه لاینې بلواك بلل کیږي، په غیر له دې لاین خپلواك بلل کیږي.
ټیك په لاندې توګه افده کیږي:

> **تعریف:** دوه وکتورونه **a** او **b** لاینې بلواك دي، که چیرې (یواځنی ټاکلی) ریيلګڼ s (سکالار) موجود وي د کوم لپاره چی **s.a = b** باور ولري.
> دا وکتورونه لاینخپلواك دی، که انځورونه **s.a = b** د هیڅکوم ریيل ګڼ s لپاره ممکنه نه وي.

په هواره (R^2) کی تل دري وکتورونه لائني بلواك دي. په هوا (R^3) کی تل ۴ وکتورونه لاینبلواك دي. په هواره زیات تر زیاته ۲ او په هوا کی زیات تر زیات

(c) ketabton.com: The Digital Library

دري وکتورونه لاینیخپلواك کیدی شي.



ځیره ۳۰۲

لاینې بلواك وکتورونه	لاینې خپلواك وکتورونه د بیلګی پو توګه
{a , e}	{a , b}
{a , b , c}	{b , c}
{a , c , d}	{e , d}

بیلګي:

۱ – وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix}$ لاینې بلواك دې ، ځکه چی

$$s.\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} -3.s = 6 \\ 6.s = -12 \\ 11.s = -22 \end{matrix} \iff \begin{matrix} s = -2 \\ s = -2 \\ s = -2 \end{matrix}$$

۲ – په څټ یا برعکس، وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$ لاینیخپلواك دی، ځکه چی :

$$s.\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} -4.s = 10 \\ 6.s = 15 \\ 8.s = 20 \end{matrix} \iff \begin{matrix} s = -2,5 \\ s = 2,5 \\ s = 2,5 \end{matrix}$$

ګورو، چی دلته سره ګډ یا مساوي s نه شي پیداکیدی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وکتورونو لاینی خپلواکوالي او لاینی بلواکوالی په هواره او هوا کي د وکتورونو انځورونو لپاره په کارول کیدي شي:
لکه څنګه چی ټکی په کواوردیناتو کی تعریفیږي چی خپل واټن له محور څخه بیانوي، نو همداسی کیدی شي چی وکتورونه ، ځانونه، په خوښه داسی وکتورونو روښانه یا بیان کړي، چی ځغاستلور یی یو ددې کواوردیناتو محور وي..

تعریف:

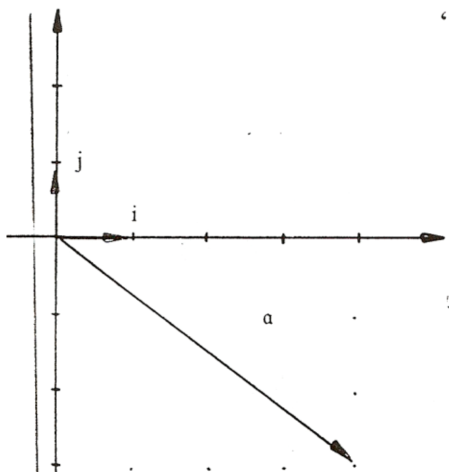
وکتورونه : $i=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $j=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په هواره کي، همداسی

وکتورونه $i=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ او $j=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ په هوا کي او $k=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

بنسټ وکتورونه بلل کیږي. دا مثبتمحور لو په ګوته کوي او ددې لپاره باور لري:

$$|\mathbf{i}|=|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=1$$

هر وکتور کیدی چی په هواره کی له i او j او په هوا کي د i , j او k وکتورونو په نامه لاینی کمبیناشن په څیر د بنسټ وکتورونو څخه انځور کړی شي.



څیره ۳۰۳

بیلګي:

$$a=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=4\cdot i-3\cdot j=4\cdot i+(-3)\cdot j$$

$$b=\begin{pmatrix}-3\\11\\6\end{pmatrix}=-3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+11\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=-3i+11j+6k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په پای کی یو نظر په الجبري جوړښت، چی وکتورونه یی د زیاتون او کمون په بنسټ او د رییلګڼونو سره څلونی له لاري لري:

د ټولو وکتورونو ډیری V په هواره کی (همدا ډول په هوا کی) د زیاتون په نسبت یو زیاتون کموتاتیو ګروپ جوړوي (د ګروپ تعریف وروسته)، ځکه چی لرو :

اول – $a + b \in V$ د ټولو b, a لپاره ، چی له V وي رابندیدنه

دوم – $(a + b) + c = a + (b + c)$ د ټولو c, b, a لپاره، چی له V وي اسوشیاتیو قانون

دریم – $0 + a = a + 0$ صفر وکتور 0 ناپییلی توکی دی

څلورم – $a + (-a) = (-a) + a = 0$ هر وکتور ته یو په څټ وکتور یعني مخامخ وکتور موجود دی

پنځم – $a + b = b + a$ د ټولو a, b لپاره، چی له V وي. کموتاتیو قانون

برسیره پر دې د څلوونی لپاره د یوه ریل ګڼ سره باور لري:

شپږم – $s.a \in V$ د ټولو a لپاره ، چی له V وي

اووم – $1 . a = a$ د ټولو a لپاره، چی له V وي

اتم – $(m+n) . a = m.a + na$ د ټولو رییلګڼون m او n لپاره او هر وکتور a لپاره ، چی له V وي.

نهم – $m.(a + b) = m. a + n.b$ د ټولو ږکتورونو a او b لپاره چي له V وي او هر رییل ګڼ m لپاره.

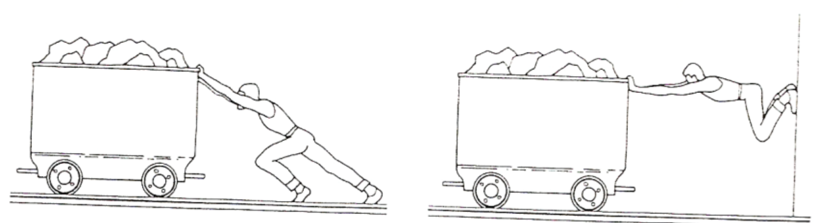
په ټولګیزه توګه یو داسی جوړښتخویونه د وکتورهوایا ۰ فضا تر نامه یادیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سکالار ځل

وکتورونهٔ لکه چې ومو لیدل،کیدی شي چې سره زیات شي او یا د یوه رییلګڼ سره ځل شي . کیدی شي، چې وکتورونه یو له بل سره هم ځل کړی شي؟
دا حتی په دوه توپیریدونکو ډولونو ممکن دی . یو واریانت یو د یوې لوي په توګه، بیرته یو وکتورهوا جوړوي(د مخه لوستل شوی دی)، بل یی د یوې لوي په توګه سکالار لاس ته راکوي، چې دا یواځې ارزښت لرې او لور نه لري.

پیلبیلګه :
په پخوا وختونو کی د سکرو د کانو واګونونه په لاس راکښل کیده. دلته دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چې ولی کارګر واګون مخته راکښوده او په همدې توګه ټیلواهه، ددې لپاره چې موټر سم پورته کړي؟



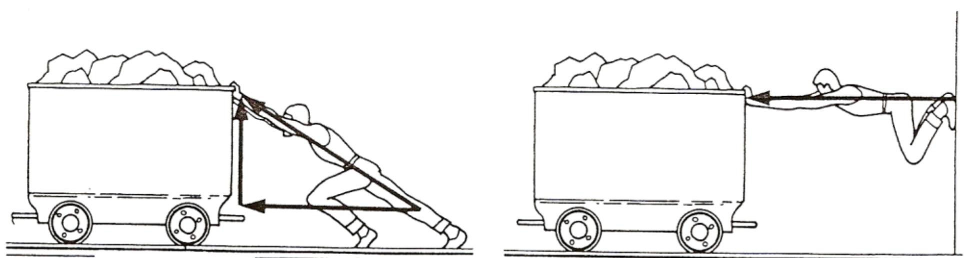
خیره ۳۰۴

ددې پوښتنی سره موږ د دوه وکتوري لویو سره سر او کا رلرو: زور او لار، چې د هغو ځل په فزیك کی «کار» بلل کیږي. هغه زور چې واګون په حرکت کی راولی، باید د واګون په لور واچول شي یا د واګون په لور تاثیر وکړي. یو په پورته لور اچولی زور کړی شي چې واګون پورته کړي. هر مایل تاثیر کوونکی زور کیدی شي د وکتور زیاتون قانون له لارې په یوه واګون سره غبرګ او بل په دې ولاړ زور ټوټه کړي یا تجزیه کړي. یواځې پروت زور واګون د مخ لور ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

په حرکت راولي. په دې توګه واردونکې زور او مؤثر زور په ټولیزه توګه همغه یو زور نه دی. دا د دې پوښتنې ځواب هم دې، چې ولي کارګر د مخ لور ته تکیه وهي.: هغه رسي چې د هغې له لارې زور اچول کیږي، نږدې ځمکي سره غبرګه ځغلي (= لار) ، (نږدې د ټول زور کیدی شي مؤثر واقع شي. هر څومره چې کونج د ځمکې او رسي ترمنځ مایل وي، همغومره زیات زور بې تاثیره پاتې کیږي.

دا په کار اچولی زور ، په دوه یو په بل ولاړو کمپوننتو (زورونو) ټوټه کیدل یو ولاړکونجیز دریګوډي جوړوي، دا لار سره غبرګ زور د $F.\cos\alpha$ په څیر لاس ته راځي . کار $W = F.s.\cos\alpha$ پخپله په برخلاف د جوړښتلوی زور او لار – لور نه لري، بلکه یواځې ارزښت لري:
دا یو سکالار دی.



څیره ۳۰۵

تعریف:

د دوه وکتورونو **a** او **b** یو **a . b** سکالار ځل لاندي(ویل کیږي **a** ځل **b**) یو یواځنی ریل ګڼ پوهیدل کیږی ،

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|.\cos\alpha = a.b.\cos\alpha$$

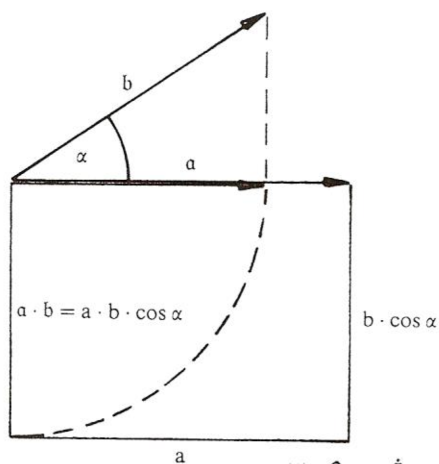
(c) ketabton.com: The Digital Library

دلته کونج ∝ د a او b وکتورونو ترمنځ کونج دی .

هندسي سکالار ځل د یوه ولاړکونجیز هوارمتن دی یا هواره ده د اړخونو a او b.cos∝ سره (د b پریوستون په a). داسی یوه هواره هلته موجود ده، که له دې وکتورونو هیڅ یو هم د صفر اوږدوالی ونه لري او یا 0 =| cos∝ ، یعني 90° ≠ ∝ ده.

د b ولاړ پریوستون په a کله کله په ∝ سره ښول کیږي: $b_a = b.\cos\alpha$

$$\mathbf{a.b} = a.b_a$$



ځیره ۳۰۶

جمله: د دوه وکتورونو a |= 0 او b |= 0 سکالار ځل هلته او هلته صفر دی، کله چی دواړه یو په بل ولاړ وي:

$$\mathbf{a . b = 0} \iff \mathbf{a \perp b}$$

بیلګه:

د یوه ولاړکونجیز کواوردینات سیستم (Orthono.-rmalbasis اورتونورمالبنسټ) یو په بل نیغ ولاړ دي. له دې امله له دوه مختلفو وکتورونو ځل صفر دی او د یوه بنسټوکتور سکالار ځل د ځان سره تل ۱ دی :

$$\mathbf{i.i = j.j = k.k = 1 \quad , \quad i.j = j.k = k.i = 0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د د زیاتون څخه په بل ډول، د وکتورډیری نسبت و سکالار ځل ته ترلی یا رابند نه دی . د سکالار ځل د په خوښه وکتورونو ځل د هغه ډیري څخه راوباسی، چی عملیه په کی اجرا کیږي، دا په دې مان چی دا نتیجه بیرته وکتور نه دی یعنی د وکتو په ډیري کی هم نه دی پروت. دلته اسوشیاتیو قانون هم باور نه لري:

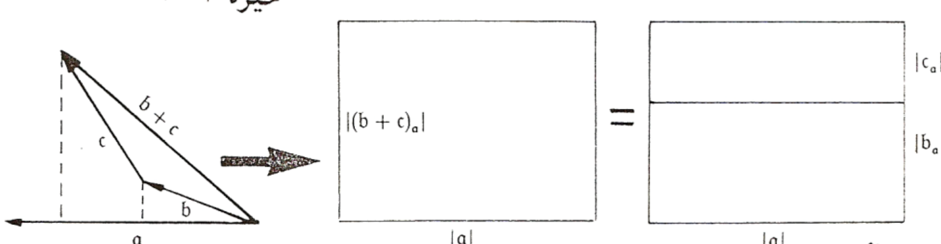
$$\mathbf{a}.(\mathbf{b}.\mathbf{c}) = \mathbf{a}.|\mathbf{b}|.|\mathbf{c}| \cos(\mathbf{b}.\mathbf{c})$$

د **a** یو زیتځله دی او په ښي: $(\mathbf{a}.\mathbf{b}).\mathbf{c} = |\mathbf{a}|.|\mathbf{b}|.\cos(\mathbf{a}.\mathbf{b}).\mathbf{c}$ د **c** یو زیاتځل دی.

سره له دې هم باورلري:

سکالار ځل کموتاتیو دی :	$\mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{b}.\mathbf{a}$
او وکتور زیاتون ته دیستریبوتیو دی.	$\mathbf{a}.(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{a}.\mathbf{c}$

خیره ۳۰۷



Das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ دستریبیوتیو قانون :

کموتاتیو قانون په کمپوننتوانځورونو له لارې او بنسټ وکتورونو له لارې ساده ښوول یا ثابت کیدی شي. د بیلګي په توګه په هواره کی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a \cdot b = (a_x \cdot i + a_y \cdot j) \cdot (b_x \cdot i + b_y \cdot j)$$
$$a \cdot b = a_x i \cdot b_x i + a_y j \cdot b_x i + a_x i \cdot b_y j + a_y j \cdot b_y j$$
$$a \cdot b = a_x b_x i \cdot i + a_y b_x j \cdot i + a_x b_y i \cdot j + a_y b_y j \cdot j$$
$$a \cdot b = a_x b_x \cdot 1 + a_y b_x \cdot 0 + a_x b_y \cdot 0 + a_y b_y \cdot 1$$
$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y$$
$$a \cdot b = b_x a_x + b_y a_y = b \cdot a$$

په ورته ډول دا د دري او زيات کمپوننتوکتورنو لپاره هم ښوول کيدي شي:

تعریف : د سکالار ځل د کمپوننت انځورونی لپاره باور لري:

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_y \\ b_y \end{pmatrix} = a_x a_y + b_x b_y \quad \text{bzw.} \quad a \cdot b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

همداسی

د **a** او **b** ترمنځ کونج په لاندې ډول ټاکل کيږي:

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}.$$

ددوه وکتورونو ترمنځ رابند کونج α شمیرنه د تیر مخ مساواتو څخه لاس ته راځي بیلګي:

1. $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow a \cdot b = (-3) \cdot 10 + 5 \cdot 6 = 0$

also auch $\cos \alpha = \dfrac{0}{\sqrt{(9 + 25)} \cdot \sqrt{(100 + 36)}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$

2. $a = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = a = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90}; \quad |b| = b = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

$a \cdot b = 9 \cdot 2 + 3 \cdot (-5) = 18 - 15 = 3 \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{3}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{29}} \approx 0,05872 \Rightarrow \alpha \approx 86,63°$

(c) ketabton.com: The Digital Library

وکتورځل

پیبیلګه:
که چیرې په یوه سوري جام کي اوبه واچوی او بیا سوری خلاس کړی او یا که چیرې تاسو یو لاسمینځي یا لمباډنډ ډك کړی وي، نو که چیرې اوبه بندی راوباسی اوبه په ښیلوریز څرخون ډوله حرکت له سوري وځي .
دا داوبو تویدل د دروند ورن په ذریعه منځ ته راځي ، په ښي لور څرخیدنه اوبه د کوریولیسزور Corioliskraft له لارې منځ ته راځي. دا د کشولو زور په حرکت کوونکي سیستم کی باید وکتل شي یا تر نظر لاندې وي، او دا د ځمکی په ځانڅرخون له لارې کتل کیدیشي.

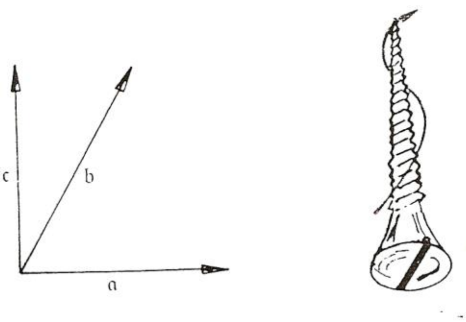
د دوه وکتوري لویو یو بل باندې تاثیر له امله (حرکت یا خوزیدنه د دروندزور په بنسټ او د ځمکی څرخون له امله خوزیدنه یا حرکت) یوه بله لویه ، چیدا هم وکتوري لویه ده منځ ته راځي. د دریواړه، د لور له امله ، په یواځنی ګډاړیکو کی سره پرتی دي، او او د دریمی ارزښت کیدی شي د نورو دوهو ارزښتونو لاس ته راوړو. په ټولیزه توګه باور لري:

تعریف :
د وکتورځل $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ لاندې (**a** اټیران **b**) یو وکتور پوهیږو، چی لاندې خویونه ولري
اول . دا وکتوردریګوني **a,b,c** په لړیپرلپسی یو ښی سیستم جوړوي
دوم. وکتور **c** په وکتورونو **a** او **b** نیغ ولاړدی، یعنی په هغی هواره هم چی د دوه وکتورونه په کی پراته دي.

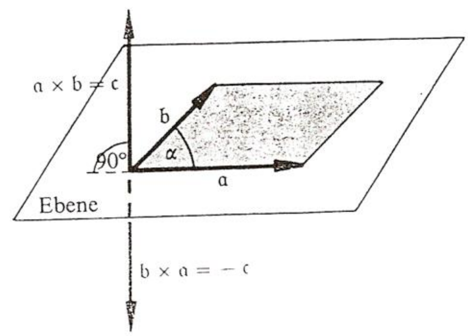
(c) ketabton.com: The Digital Library

دریم. د وکتور **c** ارزښت د **a** او **b** څخه جوړ غبرګ اړخیز سره مساوي دی.

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|.|\mathbf{b}| . \sin(\mathbf{a};\mathbf{b}) = a.b.\sin\alpha$$



خیره ۳۰۸ : یو ښي سیستم کیدی شي، چی د پیچیمیخ له لارې وښوول شي:
که پیچیمیخ له **a** و **b** ته وڅرخول شي، نو میخ د **c** په لور خوزي یا حرکت کوي



خیره ۳۰۹

خیره ۳۰۹ : وکتور ځل او هندسي اهمیت یې

پس که د وکتور وکتور ځل صفر وکتور وي ، نو یا یو له دې دواړو وکتورونو صفروکتور دی او یا دواړه سره غبرګ پراته دي(دا په دې مانا ، چی $\alpha = 0$ او یا $\alpha = 180°$)

جمله: وکتور **c** د دیترمینانت په مرسته د وکتورونو **a** او **b** د کمپوننتو له لارې لاس ته راوړ کیدي شي

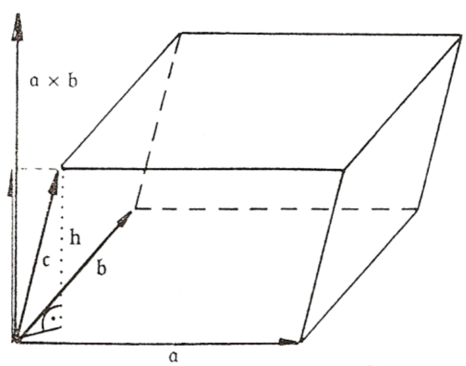
$$c = a \times b = \begin{vmatrix} i & a_x & b_x \\ j & a_y & b_y \\ k & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$c = a \times b = (a_y\, b_z - b_y\, a_z)\, i + (a_z\, b_x - b_z\, a_x)\, j + (a_x\, b_y - b_x\, a_y)\, k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپاتځل Spatprodukt یا غبرګهواریزي ځل

د وکتورځلونه ارزښت هغه غبرګهواریزې هواره ده، کومه چې له دواړو وکتورونو غزیږي. یو دریخوایز یا دریدمینزیونال وینه و غبرهواریز ته شپات یا بیرته همغه شپږهواریز وایي (دا د مخه لوستل شوی) دا کیدی شي، چې له درې وکتورونو څخه غزیدلی فکر ته راوړل شي. د دې ډکی داسی شمیرل کیږي، چې بنستهواره د جګې سره ځل کړای شي. دا جګي د c ولاړ پریوستون دی، په $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. یو هندسي بدنیز Stereometrische اوبی یا حل له دې امله د c او $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ د سکالارځل له لارې لاس ته راوړ لکیږي.



څیره ۳۱۰

تعریف :

د وکتورونو **a , b** او **c** څخه غزیدلی شپات یا غبرګهواریز (Parallelepiped) ډکی دلاندې ځل څخه شمیرل کیږي:

$$V_{Spat} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

دا غبرګهواریزځل مثبت دی، که وکتورونه **a ,b , c** په دې ترتیب یو لړپیرلسی ښی سیستم جوړ کړي، په غیر له دې بیا منفی دی.

تر هغی ، چې بنستهواره د یوه وکتور له لارې ځان ښای یا ښوول کیږي یا ځان ځرګندوي، نو دا ډکي یو سکالار دی .

په ادبیاتو کی دا د ځل اتیران نخښه ، چې په نوکانو کی نیول شوې، زیات وخت نه

(c) ketabton.com: The Digital Library

یکل کیږي، یعنی لیکو: $(a\times b)\cdot c = a.b.c$ ، غبرکهواریزځل شمیرنه د
:یترمینانت شمیرنی له لور صورت نیسي:

$$(a\times b)\cdot c=\begin{vmatrix} i & j & \hat{t} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

$$(a\times b)\cdot c=\begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

داچی دا اتیرانځل لکه د مخه مو چی وویل د بنستیوکتورونو د لاینې کومبینیشن په ځیر انځوریدلی شي، دا بیرته په یوه له دې کمپوننتو، کومی چی له صفر توپیر لري.

بیلګه:

د هغه غبرګهواریز ډکی ځومره لوي دی، چې دد لاندې وکتورونو ځخه غزیدلی وي؟

$$a=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$ او $$c=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$ aufgespannt wird? له دې چې غزیږي

$$abc=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$abc=2\cdot(-2)\cdot 6+0\cdot(-3)\cdot 4+3\cdot(-1)\cdot 5-3\cdot(-2)\cdot 4-2\cdot(-3)\cdot 5-0\cdot(-1)\cdot 6$$

$$abc=-24+0-15+24+30-0=15$$

غبرګهواریز نو ډکی 15 V.E لري (یعنی ۱۵ (V,E) ډکیبوونونه یا –واحدنه)

تمرینونه

۱ – دواړه وکتورونه $a=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ او $b=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ورکړشوي دي. په یوه کواوردیناتسیستم کی دا لاندې رسم کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

. رسم کړی

a) $a + 3b$, b) $0.5a - 3b$, c) $2(a + b)$

او په هروار یی نتیجه د کمپوننت په ډول ورکړی؟

۱ – په هوا یا فضا کی ټکی $O(0|0|0)$, $A(1|2|3)$. $B(2|-1|4)$ او $C(-5|7|9)$ ورکړ شوي دي، لاندې وکتورونه په کمپوننت لیکدود څه نومیږي یا څه ډول دي؟

a) $\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BC}$ f) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

د دې وکتورونو ارزښتونه څومره لوي دي؟

۲ – که په یوه هواره کی دوه وکتورونه a او b لایني خپلواك وي، نو هر بل د دې هوارې وکتور د دې دوه وکتورونو a او b د لایني کمبینیشن په څیر انځوریدلی شي. a او b بنسټ جوړوي.

وکتور c د مساوات $c = k_1a + k_2b$ له لارې د لایني کمبینیشن په څیر د ریبلو ګڼونو k_1 او k_2 سره انځور کړی. له دې دوه مساوات د k_1 او k_2 ناپیژندونکو سره جوړ کړی. (د دې لپاره دې زما د شیمرپوهنی کتاب وکتل شي)

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix};\quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$a)\ c = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad b)\ c = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad c)\ c = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

۴ – وي دې : $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$ ، وشمیری:

a) $a.b$ b) $-a.b$ c) $a.a$ d) $b.b$

e) $a.(b.a)$ f) $a.(b.a).a$

او د دواړو وکتورنو ترمنځ کونج.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۵ – کونجونه $\alpha = w(a,b)$, $\beta = w(b,c)$, $\gamma = w(a,c)$ د وکتورونو

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

لپاره وټاکی/ ·

۶ – د تریګونومتري یا کونجکچ د کوساین جمله، لکه د مخه مو چی لوستلی د سکالارځل په مرسته وشمیری.

۷ – د تالس جمله، چی د مخه مو لوستلی د سکالارځل په مرسته وشمیری:

۸ – په خوښه دریګوډي ABC لپاره د پیتاګوراس جمله او د هغی په څېر وشمیری:

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \iff |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$$

۹ – د مخته لوستل شوو کاتیت جمله او جګجمله وکتوري وښایی.

۱۰ – د یوه په خوښه غبرګهواریز ABCD لپاره وشمیری:

۱۱ – الف) د غبرګ اپیپت یا غبرګهواریز ډکي وشمیری، چی له

وکتورونو $b = 3$, $a = 1$ او $c = -2$ څخه غزیدلی وي.

ب) دا څه مانا لري ، که وي : $(a \times b) . c = 0$ ؟

پ) د یوې بیلګي په مرسته وښایي، چی اتپرانځل اسوڅیاتیو نه دی.

ت) د وکتورونو $b = 0$, $a = 2$ او $c = k. 4$ له لاري یو غبرګ

اپیپت ورکړ شوی دی، چي ډکی یی ۸ یوونونه دی. k به څومره لویه وي؟

۱۲ – یوه سپورتي الوتکه د 250 km/h په سرعت د N60°O په لور الوځي. سملاسی له جنوب څخه باد لږیږي. دا باد یو د 75 km /h سرعت لري او دا

(c) ketabton.com: The Digital Library

الوتکه له پیللاري اړوي. دا نوي الوتللور وټاکی او د الوتکی نوی سرعت!

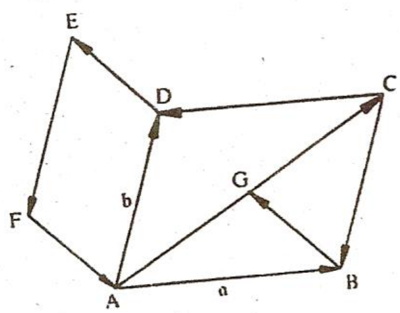
۱۳ – د وکتورونو a اوb لپاره کله لاندې اړیکی باورلري ؟

$a)\ |a+b|<|a|+|b|\quad ,\qquad b)\ |a+b|=|a|+|b|$

۱۴ – لاندېوکتورونه ورکړشوي دي:

$$a=\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix};\ b=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix};\ c=\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix};\ d=\begin{pmatrix}-45\\30\end{pmatrix};\ e=\begin{pmatrix}20\\4\end{pmatrix};\ f=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix};\ g=\begin{pmatrix}-2{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix}$$

وکتورونه c تر g (که ممکن وي) د وکتورونو a یاb د ډیرواره په څیر انځور کړی.



۱۵ – ناټاکلی وکتورونه د a او b د وکتورونو لاینی کمبینیشن په څیر انځور کړی. (څیره)

۱۶ – یو دریګوډی ABC په

$$a=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}.$$

سره ورکړ شوی دی. داړخ اوږدوالی او دننني کوجونه وشمیری.

۱۷ – په یوه څلورګوډي کی دی $a=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}.$

$$c=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}\text{ und }d=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$
او

د نیمی اوردوالی وشمیری او د هغی غوڅکونج ($\leq 90°$)

۱۸ – یوه کیبنتی د ټکی O څخه د $r=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ په لور خوزیږي یا حرکت کوي، دا کیبنتی تګلور دی، باد د $w=\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ په لور لګیږي.

الف) د بادزور F⊥ برخه څومره لویه ده، چی په زیګل باندې ولاړ پریوزي. یا تاثیر کوي؟ دا زور کومه لور لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب) د F برخزور له F_|_ څخه څومره لوي دی، ك ومه چی کیښتی د مخ په لور بیایي؟

۱۹ – یو بار، چی ۱۰۰۰۰ نیوټونه دی د دوه مایلو ستنو سره نیول شوی. جوړښت یی یو مساوي پښیز دریګوډی جوړوي ، د بنسټ ۶ متره سره او د پښی اوږدوالی (د ستنی اوږدوالی) ۵ متره دی.

الف د وشن زور په ضواړو ستنو څنګه تاثیر اچوي؟

ب) د دې برخه زور ولاړ او پراته کمپونټونه څومره لوي دي؟

۲۰ –د وکتورv کواوردینات و اورتوګونالبنستونو($\binom{a}{b}$) او($\binom{b}{a}$) ته وشمیری، که $|v| = 5$ وي او v د وکتور($\binom{1}{0}$) سره یو د 55° کونج جوړ کړي.

۲۱ – وي دې $a + b + c = v$. وشمیری : $a.d + b.v + c.d$

۲۲ – د څلور ټکوD , C , B , A، او همداسی E , F , G , H سره یو غبرګ اړخیز ورکړشوی دی. د لاندې ورکړنو یا شرطونو سره د هغو هوارې وشمیری

a) $A = (0 | 6 | 0)$, $B = (8|4|0)$, $C = (6|16|0)$

b) $E = 1,5|2,5|3,5)$, $F = (0.5|0|2,5)$, $G = (1 | 0,5| 4,5$

هغه تراوسه ورك یا نامعلوم ټکی (D همداسی H) چیرته پروت دی؟

۲۳ –اهرام د بنسټ هوارې د کونجونو

$A = (1|0|2)$, $B = (3|3|7) =$, $C = (4|2|12)$, $D = (2| - 1| 7)$

سره کوم ډکی لري، چی څوکه یی $S = (2 |4 |15)$ وي؟

لارښودنه: لمړی خپل ځان وپوهوي، چی ایا کونجونه ریښتیا په یوه هواره کی پراته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تجار تي شميرنه

ځانني‌ونيز يا متناسب او په ښځ ياچپه ځانني‌ونيز يامتناسب بلواك (فنكشنونه)، دربقضيه

په ورځني ژوند کې دې ته اړتيا پيښېږي چې ورکړ شوې لويې (يا ډېروالي) يو د بل سره انډول (مقايسه) کړاى شي. د بيلګي په توګه د ځپليو لويوالى د ځمکى ارزښت، د مياشتني معاش يو د بل سره انډول. د دوه داسى ګڼونوa او b د انډول لپاره په زيات وخت کي کمون b - a کفايت کوي. دلته نو بيا د دې دوه ګڼونو a اوb له توپير څخه غږېږو. په ډېرو وختونو کى دا بسيا (کفايت) نه کوي چي د دوه ګڼونو کمون د هغوله توپير څخه لاس ته راوړو.

پيلبيلګه:

دوه پټي يو $1800\ m^2$ اوبل $2000\ m^2$ يو له بل $200\ m^2$ توپير لري. دا د پټيو لويووالى که $400\ m^2$ او $600\ m^2$ وي، نو ترمنځ کمون هم همدا دى. څه به ووايو که د دواړو ځمکو ويش د يوه ميراث ويش وي؟

هر ځل به دا يو $200\ m^2$ ډېره لاس ته راولي نسبت و دې بل ته. ګورو چي په دوم ويش کى $400m^2/600m^2$ د لمړي ميراثخور لپاره تاوان نسبت و لمړي ويش $1800m^2/2000m^2$ ته زيات دى.

دا په دې مانا، چي که هرڅومره ځمکه لويه وي نو په همغه اندازه د دواړو ميراثخورو ترمنځ توپير کميږي.

دا مختته پرته بيلګه ښايي، چي په داسى حالتونو کي دانډول لويي يو بل سره په تناسب يا ځانني‌ونه کى راوستل کيدي شي

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف: که a او b دوه له صفر مختلفې لويې يا کمیتونه وي، نو a / b ويش يا a: b د a تناسب يا څانيونه وb ته **بلل** کيږي.

بیلګه: ۱ – د ځمکو $400m^2$ او $600m^2$ لويوالی يو بل سره $400/600 = 0,6 = 2/3$ تناسب جوړوي يا يو بل سره څانيسي. دا کوچنی ځمکه (پټی) د لوي پټي 66,6% جوړوي.

۲ – د پټيو $1800m^2$ او $2000m^2$ لويوالی يو بل سره په

$$1800/2000=0,9=9/10$$

تناسب يا څانيونه کی پراته دي. دا کوچنی پټی د لوي پټي 90% جوړوي.

۳ – د مودل ګاډي TT لاين (ليکو يا پټليو) او الماني ګاډو د ليکو يا پټليو سور يو بل سره په لاندې تنساب کی پراته دي

$$12mm/1435mm = 0,00836 \sim 1/120 .$$

۴ – که يو کړندی په 30 دقيقو کي 70km ځغلي، نو د وهل شوې فاصلې سرعت تناسب ووخت ته په لاندې ډول دی.

$$s/t = 70km / ½ h =140[km/h] = 140km/h .$$

۵ – د يوه هوموژين بدن (د مساويډوله موادو جوړ) سختوالی ρ د هغه د کتلی (g) څانيونه يا تناسب دی ، د هغه بدن ډکي (cm3) ته

$$\rho = m / V [g / cm^3]$$

د يوه لرګي بلاك سختوالی (کثافت)، چی درې کيلو ګرامه دروند او څلور زره مکعب سانتيمتره ډکی (حجم) لري، $0,75 g / cm^3$ دی

$$3000g / 4000 cmw = 0,75 g/cm^3 = \text{سختوالی}\ \rho .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

موږ غواړو، چې اوس ځانونه د بلواك دوه ځانګړو تيپونو يا ډولونو ته متوجه کړو، دا څنګه، چې موږ په ورځني ژوند کې ډير واره ورسره مخامخ کيږو، چې له دې امله يي پيژندنه ځموږ لپاره خورا مهمه ده.

پيلبيلګه:

۱ – د يوه نل څخه په 3 دقيقو کې ۱۲ ليتره اوبه راوځي. څو ليتره اوبه به په يوه ورځ کي له دې نل څخه راووځي، څومره په يوه کال کې؟

که په درې دقيقو کي ۱۲ ليتره اوبه له نل څخه راوځي، نو په يوه دقيقه کې بايد ۴ ليتره اوبه او په ۲۴ ساعتونو يا ۱۴۴۰ دقيقو کې طبعاً 5760 = 4 . 1440 ليتره اوبه راوځي. او په دې تعقيب په يوه کال کې 2102400 = 360 . 5760 ليتره او يا ۲۱۰۲۴ هيکتوليتر اوبه بهيږي.

۲ – څلور کارګر يو ه بنسټ کنده په ۹ ساعتونو کې راپورته اوکانکريټوي. څومره وخت درې کارګره ضرورت لري او څومره وخت به ۱۰ کارګر ضرورت ولري چې دا ځمکه راپورته کړي اوهم کانکريټ کړي؟

که څلور کارګره ددې لپاره ۹ ساعته ضرورت لري، نو يو کارګر ددې لپاره حتماً زيات وخت په کار لري، يعني څلور ځله زيات وخت، پس ۳۶ ساعته، نو درې کارګر په تعقيب 12 = 3 : 36 ساعته او لس کارګر 3,6 = 10 : 36 ساعته = درې ساعتونه او ۳۶ دقيقي ضرورت لري چې دا ځمکه وکني او کانکريټ کړي.

په دواړو حالتونو کې يو نظم منځ کې پروت دی، دقيق په لمړی بيلګه کې فنکشن وخت —> د اوبو مقدار او په دومه بيلګه کې فنکشن کارګر —> د کارساعتونه.

مګر داوړه فنکشنونه پوره په خپل راوړون ډول کې يو له بل توپيريږي:

۱ – څومره ډير وخت چې تيريږي په همغه اندازه زياتی اوبه له نل بهيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲ – څومره چې کارګر زياتيږي همغومره د کار وخت کميږي

دې ته ورته د ورکړشوو فنکشنونويا بلواکو شميرپوهنيزيا ماتيماتيکي ليکدود د فنکشن ورکړدود مختلف ليدل کيږي.

۱– فنکشن f : وخت (دقيقه) ⟵ د اوبو ډيرى(ل)

د فنکشن ليکدود (فنکشن ليکلوقانون) لري $x \rightarrow 4x$

په دې ډول د فنکشن مساوات داسې بريښي $y = 4x \quad ; \quad x \in Q^{+}_{0}$

۲ – فنکشن g : کارګر(څو دانې) ⟵ د کاروخت (ساعت h)

د فنکشن ليکدود لري $x \rightarrow 36/x$

په دې ډول د اړوند يا مربوط فنکشن مساوات داسې بريښي $y = 36/x \; ; \; x \in N$

تعريف:

يوه لويه x و هغې ته تنظيم شوې لوي y ته سيده متناسب سيده ځانيونه (په نخښه کې$y \sim x$) بللکيږي که د هغوي تناسب ياځا نښونه (ويش) y / x تل يو ثابت ارزښت وساتي : يعنى $y / x = k$ وي.

بلواك(تابع) يا فنکشن $y = kx$ (ثابت –k) د تناسب يا ځانيونې ځلوونې يا فاکتور بلل کيږي.

يوه لويه هغې بلې تنظيم شوې لويې ته ناسيده متناسب ده يا ناسيده ځانيونه کې ده، که د هغو ځل تل يوثابت ارزښت وساتي: يعني

$$y.x = k \quad \Leftrightarrow \quad y = k/x$$

بلواك يا فنکشن $y = k/x$ چپه يا په څټ متناسب (antiproportional) يا په څټ ځانيونکی بلواك يا فنکشن بلل کيږي.

متناسب فنکشن $y = kx$ د يوې لوې دوه برابره، نيم برابر، n –برابره پورې د بلې لويې هم دوه برابره، نيم برابره يا n–برابره پورې اړه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په چپه یا په ځتې متناسب فنکشن $y = k / x$ کی دوه برابره، نیم برابر ... n – برابره پورې د بلې لوي نیم برابر، دوه برابر ... $1/n$–برابره تعلق لري(اړه لري) .
په چپه یا په ځتې متناسب فنکشن $y = k/x$ کی د چپه یا ناسیده متناسبوالي څخه خبرې کیږي. که متناسب او چپه یا په ځتې متناسب فنکشنونه په یوه کواوردینات کی انځور شي، نو لیدل کیږي چی متناسب بلواك یا فنکشنونه مونوتون پورته کیدونکی او چپه یا په ځتې متناسب بلواك یا فنکشنونه مونوتون لویدونکي دي (د مونوتون کلیمو لپاره دې ځما د شمیرپوهنی کتاب وکتل شي)

بیلګي :

۱ – سیده تناسب یا سیده ځاننیونه:

الف : په شي اخستلو کی د ډیري ارزښت سیده متناسب دی

ارزښت(افغانی) ډیری(کلیوګرام)

ب : په تیزوالی یاسرعت کی وهل شوې لار د وخت سره سیده متناسب ده

$s(km) \to t(s)$

۲ – ناسیده تناسب یا ناسیده ځاننیونه

الف : یوې معلومی لار وهلو لپاره تعجیل هغه په بر کی نیولي وخت سره ناسیده متناسب دی: که هرڅومره تعجیل زیات وي په همغه اندازه وخت کمیږي.

ب : د وچو شودو د یوه څرګند ټاکلي ټول وزن د وړونکوتیو ګڼنه ناسیده متناسب ده د هرې کوتۍ یویزوزن سره: که هرڅومره زیاتی کوتۍ په کار واچول شي په همغه ګڼون د کوتیو وزن کمیږي.

تعریف: د لاندې ډول $a/b = c/d$ یا $a:b = c:d$ مساوات د تناسب مساوات یا ځاننیونیز برابرون بلل کیږي (ویل کیږي چی a و b ته ځان داسی نیسي (یا داسی انډول کی ده) لکه c و d ته) دلته a او d د تناسب یا انډول

(c) ketabton.com: The Digital Library

دباندني غړي دي او b او c د انډول دننی غړي. په هر تنساب کی د دباندنیو غړوځل د دننیو غړو د ځل سره برابر دی:

$$a / b = c / d \iff a \cdot d = c \cdot b$$

اوس ځان باوري کولی شو چی د دننیو غړو بدلول او یا د دباندینو غړو بدلول یو د بل سره په تناسب یا انډول کی تغير نه راولي. کیدی شي چی ټول دنني غړي د دباندینیو غړو سره بدل شي:

$$a/b = c/d \iff a/c = b/d \iff c/a = d/b \iff b/a = d/c$$

له دې امله کیدی شي چی یو دبل سره برابر زیات تناسبونه یا انډولونه د یو په بل پسی راتلونکو تناسوبونو په څير وليکل شي:

$$a/b=c/d = e/f \iff a:c:e = b:d:f$$

دلته باید په پام کی وي چی ویش ځانله صورت نیسي یعني تل د دوه ګنونو،

بیلګي :

١ – له $7 / 21 = 5 / 15$ څخه لاس ته راځي $7.15 = 5.21$ یا $7 / 21 = 15/5$ یا $5/7=15/21$ یا $7/5 = 21/15$.

٢ – د $2/3 = 4/6 = 8/12$ لپاره لیکو $8:4:2 = 12:6:3$

٣ – یو تناسب چی دننه او دباندې غړي يي یو له بل سره برابر وي ناپریکیدونکی تناسب بولو. په ناپریکیدنکی تنساب یا انډول $a:m=m:b$ یا $m:a = b:m$ کی m منځنی متناسب انډولی بلل کیږي. منځنی متناسب د نورو دوو غړو a او b جیومتریکي منځ دی.:

$$a / m = m / b \iff m^2 = a.b \implies m = \sqrt{a.b}$$

د $a = 16$ او $b = 9$ لپاره $m = 12$ منځنی متناسب داسی دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$16/12 = 12/9$

۴ څلور انډولونه متناسب یا ځاننیونیزڅنګه لیکل کیږي؟

$18/x=8/5 \quad <=> \quad 18 . 5 = 8x \quad => \quad x = (18 . 5) / 8 = 11,25$

په ترتیب تنساسب یا ځاننیونه یا انډول کی باور لري: $18 / 11,25 = 8 / 5$

زیات وخت مود تکست وظیفی د تناسبمساواتو (انډول برابرون) ته لاربنودوي، نو بیا دري ورکړشوو لویو ته څلورم تنساب یا انډول غوښتل کیږي. د داسی وظیفو لپاره سیده یا ناسیده تناسب یوه غوره رول لوبوي. داسی پوښتنی د دریقضی شمیرني یا پاي (ختم) شمیرنی لاندې شهرت لري.

د دریقضي شمیرني اصلي پرابلم په دې کی دی، چی د وظیفي ورکول باید څرګند یا روښانه شي، چی ایا دا یوسیده متناسب او که چپه یا په ځتې متنساب بلواك (تابع) یا فنکشن دی.

د دري قضي پوښتنی کولو څخه لاندې تکامل منځ ته راځي :

۱ – یوه د شرایطو قضیه، کومه چی ټولی ضروري ورکوني په ګوته کوي.

۲ – یوه د پوښتنی قضیه چی غوښتونکی لو یه x متن کي یا خوندي لري او له هغي سیده یا ناسیده د ځواب تناسب ته تکامل ورکوي.

۳ – یوه پایقضیه، په کوم کی چی له یوه یوون (واحد) په ورته یامناسب ډیرون پاي ورکول کیږي.

پیلبیلګه:

یوه الوتکه له الف ځاي تر ب ځاي پورې چی ۸۰۰ کیلومتره واټن دی په ۶ ساعتو او ۴۰ دقیقوکی تی کوي، دا الوتکه به ۲۲۰۰ کیلومتره لار په څو ساعتوکی ووهي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د درې جملې له لارې يې ځواب:

الف – د شرايطو قضيه........... 800km - 6h 40 min

يا............... 800km - 400 min

ب – د پوښتنې قضيه .. .. 2200 km - x min

پ – پايقضيه.......... 200km - 400/4min = 100min

2200km - 11.100 min = 1100 min

دا الوتکه به په دې ترتيب د 2200km اوږده واټن لپاره

1100min = 18h20min

ضرورت ولري.

د دې وظيفه د ټيك ځواب لپاره ضروري نيوني دا وي چې سيده تناسب وپيژندل شي: هرڅومره چې د الوتلو واټن لږ کيږي په همغه اندازه الوتکه زيات وخت په بر کې نيسي.

يعنې 2200km اوږد واټن په داسې انډول يا تناسب کې دی لکه 400min و 800 km ته:

$$x / 2200 = 400/800$$

د اکويوالنځ فورم(ځيرې–) اوړون له لارې څخه ځواب x لاس ته راځي:

$$x = (400 . 2200) / 800 = 1100$$

۲ – ۴ کارګر د يوه ديوال وهلو لپاره پنځه ورځې ضرورت لري. د ناروغۍ له امله يو کارګر د کارلرې پاتيږي. دا راکمه يا راکوچنۍ ډله اوس څنګه مشغول ده؟ دلته يو ناسيده تناسب يا ځانځيونه لرو:

هرڅومره چې کارګر کم وي په همغه اندازه وخت زياتيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ددریجملی سره شمیرنه	د تناسب سره شمیرنه
۴ کارگر - ۵ ورځي ۱ کارگر - ۵ . ۴ ورځي ۳ کارگر - ۳ / ۲۰ ورځي پس ۳ کاګر - 6 2/3 ورځې	غوښتونکی کاروخت x د ۵ ورځو سره داسی تناسب کی دی لکه ۴ کارگر و درې کارگرو ته ورځی $x/5 = 4/3 \Leftrightarrow x = (4.5)/3 = 20 / 3$

یوځاي شوې درې قضیه:

د ۳۰ جوړه کاليو ګنډلو لپاره ۱۲ درزیان ۲۰ د کار ورځي ضرورت لري. څومره ورځی به ۱۰ درزیان د ۷۰ جوړه کاليو لپاره ضرورت ولري؟

لمړی دریقضیه	دومه درې قضیه
(سیده متناسب)	(ناسیده متناسب)
۳۰ جوړه کالي	۱۲ درزیان - ۲۰ ورځي
۷۰ جوړه کالي	۱۰ درزیان - x ورځي

هرڅومره چی کالی زیات وي همغومره زیاتی ورځي، هرڅومره چی درزیان زیات وي همغومره لږې ورځي

۱۰ جوړه کالی -	۱۲ درزیان -	ورځی
۷۰ جوړه کالی	۱۲ درزیان	ورځی
۷۰ جوړه کالي	۲ درزیان -	ورځي
۷۰ جوړه کالي	۱۰ درزیان	ورځي

پس لرو

ورځي $x = (20.7.6)/(3.5) = 56$

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمرینونه

۱ – لاندې ځانئیونی یا تناسبونه ساده افاده کړی

a) 200t : 2 kg b) 6 m : 6 km

c) 4km / 30min d) 3,2 t : 400dm³

۲ – یوه موټر د ۵۵۰۰ کیلو متره اوږدې لار لپاره ۳۸۵ لیتره ډیزل وسزول

الف) په دې تګلوړ ۵۰ لیتره ډیزل د څومره لار لپاره بسیا کوي؟

ب) د یوې ۴۳۰ کیلو متره لار لپاره به دا موټر څومره ډیزل مصرف کړي؟

۳ – که غواړو چی د یوه موټر سره د الف ټکی څخه و ب ته ورسیږو ، نو د ۶۰ کیلومتره په ساعت ته درینیم اعته ضرورت لرو. د الف څخه ب ته سړی په څومره وخت کي رسیدلي شي، که د موټر سرعت په لاندې ډول وي:

a) 50km / h b) 110 km / h?

۴ – یو ښار پلان د ۱ : ۱۰۰۰۰ تناسب یا ځانئیونه ورکړ شوی دی. لاندې واټنونه په ریښتونی څومره دی ؟

a) 5 cm b) 33 mm c) 1 dm

۵ – یو ۸۱ ګڼ څنګه په داسی په ۲ زیاتونونو ټوټه کیدی شي، چی ځانئیونه یا تناسب یی داسی وي لکه : 5 : 4 ؟

۶ – د یوه ګڼ او ۵ کمون ځان نیونه یا تناسب و ۷ ته داسی دی ، لکه چی د ۵ کمون ودې ګڼ سره، چی ۴ ته ځا نیسی یا و ۴ ته تناسب یا ځانئیونه؟ دا ګڼ کوم دی؟

۷ – یو فاو وې موټر ۸۰ کیلو متره په ساعت کي ځغلي او په دې پسی په ۱۲۰ متره کی وروسته یو بی ایم وې موټر ۱۲۰ کیلو په ساعت کی ځغلي.

الف) بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چی د فاو وې څخه مخ ته شي؟

ب) بي ایم وې په دې وخت کی څومره واټن وهلی دی؟

پ) دا بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چي له فاو وې موټر څخه ۴۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

متره مخ ته شي ؟

۸ – د سونګ سکرو سوزلو له امله د کولنډیاوکسید غاز پیداکیږي. د سونګ سکرو او د راپیدا کولنډیاوکسید Kohlendioxid (Co_2) ترمنځ تناسب یا ځاننیونه 3 : 11 ده.
څو ګرامه سونګسکاره به ۱۰۰ ګرامه کولینډیاکسید رامنځ ته کیږي؟

۹ – له دریو یو په بل اغیزهمند غابښورڅرخي د ۴۸ ، ۳۶ همداسی ۱۶ ښاغونو سره دا کوچنی څرخی ۴۰۰ واري په یوه دقیقه کی ګرځي یا څرخی.
نور دواړه غابښورڅرخی څو واره څرخی یا ګرځی؟

۱۰ – ۹۰۰ تیري، چی ۳۶ سانتي متره سور لري ۴۰۵۰ کیلو ګرامه وزن لري.
۱۱۰۰ تیرې به څومره وزن ولري، که د همغو موادو جوړې وي او سور یی ۲۴ سانتي متره وي؟

۱۱ – یو د زدکوونکو ورځپاڼه « هیلی »د رحمان بابا د لیسی څخه راوځی د دې لپاره چی د ورځپاڼو ۱۲۰۰ توکه وتړل شي ، څلور زدکوونکی ۳ ساعته کار پرې کوي.
څومره زدکوونکی په کار دې، چی ۲۱۰۰ توکه ورځپاڼی په ټیك دوه ساعته کی وتړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

په سلو کې – -Prozent ، په زرو کې – - Primille

ګټه– -Zins او د ګټې د ګټې شمیرنه Zinseszinsrechnung

موږ د a / b یا c / d ډولونو انډولونه او یا په همدې ډول ویشنه په مساواتو و ازمایل. د ماتشمیرنې په چوکاټ کې (ځما د شمیرپوهنې کتاب دې وکتل شي) به وښوول شي چې څنګه بنسټیز نظم په داسې ماتو کې ټاکل کیدی شي. د انډول یا مقایسې لپاره دا هم وړاندېکوولی شو چې دواړه مات لاندې په ګډ ماتلاندې چې 100 وي پراخ شي. دا کم له کمه په نزدې ډول په هر مات کې کیدی شي.

پیلبیلګه:

یو جوړ جامې، چې په ۲۳۰ افغانۍ پلورل کیدې، په ۴۰ افغانی ګرانی شي د ګرانښت تناسب یا ځانښونه یې و اولنۍ ارزښت ته څومره دی؟

دا تناسب ۴۰ / ۲۳۰ کیدی شي نزدې په یوه مات چې مات لاندې یې «۱۰۰» وي انځور شي، دا کیدی شي چې د ویشنی له لارې داسې صورته ونیسي:

40 / 230 = 0,1739 پس 40 / 230 ~ 17,39 / 100

قیمتیدل د لمړني قیمت 0 ,1739 ځله راکوي. داسي هم وایو چې قیمتیدل په سلو کې نزدې ۱۷ دي.

تعریف: د یوه بنسټیزارزښت G سلمه برخه ددې ګڼ 1 په سلو کې بلل کیږي، او ددې لپاره لیکو %1 د G دی G/100 , په همدې ډول % P له G

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارږ

د ګڼې ارزښت $W = P.G/100$ له لارې ټاکل کیږي، P په سلو کی جمله او W په سلو کی ارزښت بلل کیږي.

بنسټ ارزښت G ځان و 100 ته داسی نیسي لکه د په سلو کی ارزښت W د په سلو کی جملی P ته، پس

$$\frac{G}{100} = G / 100 = W / P = \frac{W}{P}$$

$$\Longleftrightarrow G . P = 100 . W$$

د اخرني مساوات څخه د فورم اړولو له لارې لاس ته راځي

جمله:

د په سلو کی ټاکنه	بنسټ ارزښت	په سلو کی ارزښت
$P = 100 . W / G$	$G = 100.W / P$	$W = G.P / 100$

بیلګی:

١ – د په سلو کی ارزښت | بنسټ ارزښت | په سلو کی ټاکنه

= 16,80 DM | د 120 DM | 14 %

٢ – یو نفر باید د یوه نوي بایسکل لپاره 40 , 60 DM یعنی المانی مارکونه د مالیا لپاره (14%) ادا کړي

دا بایسکل څو ارزښت لري، بی له مالیا، او دا د مالیا سره څو ارزښت لري؟

که د 40,60DM په سلو کی ارزښت د په سلو کی ټاکنی 14% وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو باید 40,60 / 14DM د 1% د بنسټارزښت برابر وي. په دې پسې
بنسټ ارزښت (100% =) د G = (40,60 / 14)100DM = 290 DM
لاس ته راځي.
له دې سره بایسکل ۲۹۰ مارکونه بې مالیا ارزښت لري او ۶۰ ، ۳۳۰
ماروکونه د مالیا سره.
کید ی شي، چې سملاسی هم د مالیا سره ارزښت ته راشو، که د دې لپاره یو
بنسټ ارزښت د ۱۱۴ په سلو کی کینبول شي یا وضعه شي:

$$G = (40,60 / 14). 114DM = 330,60 DM$$

۳ – یو جوړ کالي چې ۱۵۰ مارکونه ارزښت لري په ۱۰ په سلو کی گرانیږي، دا کالي تر ډیر ځنډ نه پلورل کیږي، نو له دې امله یی بیا دوکانواله په ۱۰ په سلو کی ارزانوي. پوښتنه داده، چې ایا داکالي به اوس هم ۱۵۰ مارکونه ارزښت ولري، که څنگه؟
طبعاً نه ، ځکه چې گرانوالی په ۱۰ ٪ مارکونو زیاتوالی یی په سرچینیز ارزښت دی ، مگر دا ارزنښت یی په دې اوسني ارزښت، چې 150 + 150.10% = 165DM په بنسټ منځ ته راځي. له دې امله دا کالي د ارزنښت وروسته اوس

$$165 - 165.10\% = 165 - 16,50 = 145,50DM$$

مارکونه دی. که یوه ورکړې شوې بنسټ ارزښت لپاره د په سلو کې ارزښت شمیرل کیږي، کیدی شي چې دا دیوه ساده فارمول له لارې وشي.

بیلگي:

اول) د ۳۵۰ ماروکونو ۱۴ ٪ کی داسی شمیرل کیږي: 350.0,14 = 49 DM
دوم) که د ۴۵۶۸ کیلو گرامه بنسټ ارزښت په ۲۲ ٪ کم شي، نو لاس ته راځي:

$$4568(1 - 0,22) = 4568.0,78 = 3563,04 DM$$

دریم) که د 2303 m² بنسټ ارزښت په 24% جگ شي، نو لاس ته ترې راځي«

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2303.(1+0,24) = 2303\ .1,24 = 2855,72\ m^2$$

لاندې بنسټپاکنی یا بنسټ مقدارونه دی په مات بڼه ورکړ شي :

$1\% = \frac{1}{100}$	$1\frac{1}{4}\% = \frac{1}{80}$	$1\frac{1}{3}\% = \frac{1}{75}$	$1\frac{2}{3}\% = \frac{1}{60}$
$2\frac{1}{2}\% = \frac{1}{40}$	$3\frac{1}{3}\% = \frac{1}{30}$	$4\frac{1}{6}\% = \frac{1}{24}$	$5\% = \frac{1}{20}$
$6\frac{1}{4}\% = \frac{1}{16}$	$6\frac{2}{3}\% = \frac{1}{15}$	$8\frac{1}{3}\% = \frac{1}{12}$	$11\frac{1}{9}\% = \frac{1}{9}$
$12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$	$16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$	$20\% = \frac{1}{5}$	$25\% = \frac{1}{4}$
$33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$	$50\% = \frac{1}{2}$	$66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$	$75\% = \frac{3}{4}$

د یوه بنسټ– یا سټه ارزښت G یو په زرمه برخه ۱ پرومیلی (لاتین) وای، چې
موږ یی دلته هم د زرو څخه ۱ بولو:

۱ په زرو کی 1 ‰ له G دی G / 1000

د پرومیلی یا په زرو کی شمیرنی لپاره له دې وروسته انډولګڼ ۱۰۰۰ (په ماتلاندې کی) ، 1000‰ له دې سره یو سټه ارزښت دی.

بیلګه :

4,7 ‰ له 3690DM دې: 17,34DM

موږ غواړو، چی دا اوس د په سلو کی شمیرنی یو ځانګړي بڼی سره مشغول کړو. په ورځني ژوند کی خلك د کور جوړولو لپاره یا د یوې مغازې جوړولو لپاره پیسی (بډایي یا سرمای) پوروي او دا زیات وخت په نوې نړی کی له بانکونو څخه، د پور ورکولو له لارې پورورکوونکی څه پیسی باید لاس ته راولی، د ارزښت بایللو تر نامه، چی دې ته د سرمایي ګټه وایي. په بانکی معاملو کی د فعالی ا و غیر فعالی ګټی ترمنځ توپیر باید وشي. فعاله ګټه بانك د پوروړی څخه د ورکړشوې پور په مقابل کي لاس ته راوړي، د دې په څېر یا برعکس څوك چی په بانك کی شمیرکتابچه خلاصوي او په بانك کی پیسی سپما کوي ، نو دمرکزې یا ملي بانك په هدایت د

(c) ketabton.com: The Digital Library

پیسو د سپما لپاره سپماکونکي هم څه پیسي لاس ته راوړي، چې دې ته به موږ د سپما ګټه ووایو ، په هر صورت په ځنی هیوادونو کي د پورګټی او سپما ګټی ترمنځ توپیر باید له ۲ په سلو کی تر درې په سلو کی څخه زیات نه وي.

په پرینځیپ کی باید د ساده ګټی او داسی په نامه د ګټی ګټی ترمنځ شمیرنو کی توپیر وشي . په داسی حال کی، چی په ساده ګټه کی پوروړی د پورشوي مقدار په بدل کی یوه ټاکلی ګټه ورکوي، چی هغه زیات وخت د یوه کال په منځ کي یعنی د یوه کال تیریدلو سره ټاکل شوې وي او دا ګټه د کال په اخر کی په منظمه توګه ورکول کیږي یا ادا کیږي.

د ګټی ګټی په شمیرلو کی د هغه غونډ وخت ګټه شمیرل کیږی ، چی په هغی کی د ګټی ګټه هم خوندې یا شامل ده، دلته هغه د هرکال ګټه د هغی لمړنی بډایي ته ورزیاتیږي او بیا د ټولو ګټه د بل کال لپاره شمیرل کیږی او په همدې ډول ورپسی د دوه او یا زیاتو کالو.

لمړی غواړو، چی یوائی ساده ګټی شمیرلو سره ځان په کار واچوو:

پیلبیلګه

یوه د ۳۵۰۰ مارکونو بډایي یا سرمایه په بانکی شمیرنه کي په بانك کی اینښولکیږي، چي کلنی ګټه یی %4,5 ده. له 3,5 کالو وروسته دا سرمایه اینښونکي په بانکی شمیرنه کي څومره پیسی لري؟

دلته په پوره هدایت ساده ګټونه مخ ته پرته وي، که څه هم په معمولی توګه داسی شمیرنو کی د ګټی ګټه هم شمیرل کیږي. د په سلو کی شمیرنو بنسټ ارزښت دلته هغه ګټوونکی بډایي یا سرمایه K (بنسټسرمایه) ده، او د په سلو کی ارزښت ګټه Z ده (په المانی مارکونو) ، د په سلوکی مقدار ، چی ما کله په سلو کي ټاکنه(یعنی په سلو کي څومره اندازه) بللی په %).

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چی په دنده یا شمیرنه کي ګټه غوښتل شوې(دمخه برخه دې، یعني د په سلو کي ارزښت دې وکتل شي) ددې لپاره لاس ته راځي

$$Z = K.p / 100 = 3500.4,5 / 100 = 157,50DM$$

دا د یوه کال لپاره ګټه ده ، په بنسټیزه بڼایي ، چی ۳۵۰۰ مارکونه دي. په درینیمو کالو کی په ساده ګټونه بڼایي، چی بانکی شمیر یی واز کړی 3,5 .157,50 = 551,25DM لاس ته راوړي. په دې توګه به په سپما کتابچه کي 3500 + 551,25 = 4051,25DM (مارکونه) وي.

د ګټې وخت t لکه، چی ومو لیدل یو کال ، زیات یا کم کیدی شي. ، بیا نو په بانکي شمیرنه کي د یوه کال لپاره ۱۲ میاشتي نیسی، چی د هرې میاشتي لپاره ۳۰ ورځي ټاکي، یعنی په ټولیزه توګه ۳۶۰ ورځو په بنسټ بیا بانکی شمیرنی صورت نیسی. د ورځو په بنسټ بانکي شمیرنو کي هغه د سپما ورځ ورسره شمیرل کیږي(د سپماورځ Wertstellung یا Valutierung)، هغه ورځ، چی پیسی بیرته له بانګ اخستلي کیږي یا له بانك بیرته پورته کیږي، نه ورسره شمیرل کیږي.

د ګټې فرمول: $Z = K.p / 100$. د ورځنی ګټې فرمول: $Z = K.p.t / 100.360$

بیلګی

لمړی : ۴۵۰۰ مارکونه له ۳ . ۷ . ۱۹۸۷ څخه تر ۱۵ . ۹ ۱۹۹۰ پورې څومره ګټه کوي، که ګټه 4 , 75% وي.

د ګټې وخت د ورځو په بنسټ شمیرو: t = 12 +60+3.360 = 1152 ورځي.

د ورځنی فرمول له مخی لاس ته راځي:

$$Z = K.p.t / 100.360 = 4500.4,75.1152 / 100.360 = 684DM$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوم : یوې ښځې په ۱۵ . ۳ . ۱۹۸۷ باندې ۷۹۰ مارکه په بانکي سپما کتابچه کیښوول، او دا پیسې یې بیرته په ۲۰ . ۲ . ۱۹۸۸ له بانك څخه راواخستلې. دې بهایي یا سرمایي څومره ګټه وکړه:

- $p = Z.100.360 / K.t = 30.100.360 / 790.335 = 4{,}0809 \Rightarrow p \sim 4{,}08\%$

دریم : په څومره وخت کې کیدی شي، چې ۱۰۰۰ مارکونه د ساده ګټې په بنسټ ۲۰۰۰ مارکونو ته جګه شي، که بهایي په 4 , 5% ګټه سپما شوې وي؟

- $t = Z.100.360 / K.p = 1000.100.360 / 1000.4{,}5 = 8000$

ورځي ۸۰۰۰ = ۲۲ کاله او ۸۰ ورځي

څلورم : یو بهایي ، چې لاټرې یې ختلې په ساده ګټونه ، چې ۷ ،۶ په سلو کې ده له بانك څخه د میاشتې ۲۰۰۰ مارکونه ګټه اخلي.
دا د لاټرې ختنه به څومره جګه وي؟
موږ دا د ګټې فرمول د بهایي په لور اړوو یابدلوو:

- $K = Z.100.360 / p.t = 2000.100.360 / 6{,}7\ .30 = 358208{,}95DM$

لکه چې پوهیږو، بانکونوپرکسیس یا کار کې د ګټې ګټونه معمول ده، او له دې زیات نه. د ګټې ګټه کلنی شمیرل کیږي او بهایي ته ورزیاتیږي.
یو پیلبهایي K_0 ، د یوه کال په اوږدوالی کې د یوې ګټې ټاکه یامقدار $p\%$ سره په ګټه اچول کیږي، د کال په اخر کې د یوې ګټې

- $K_1 = K_0 + K_0\ (p / 100) = K_0\ (1 + p / 100)$

سره په سپماکتابچه کې لیکل شوې ده.
دلته $K_0.p / 100$ د یوه کال را اچولی ګټه ده، د یو کال په پیلبهایي K_0 سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټول دوه کاله وروسته دا پیلبډایي د همغی پنبسیګټی یا ګټی پیل سره داسی لویه شوې

$$K_2 = (K_0 + K_0 . P / 100) + (K_0 + K_0 . P/100).(P/100)$$
$$= K_0 + K_0.P/100 + (K_0.P/100)(P/100)$$

که K_0 له نوکانو یا غیږ دباندې ونیول شي نو لاس ته راځي:

$$K_2=K_0(1+2.P/ 100 + P^2 / 100) = K_0(1+ P/100)^2 = K_1(1+ P/100)$$

له درې کاله وروسته دا بډایي یا سرمایه ده:

$$K_3=K_0(1 + P/100)^3 \qquad K_3=K_2(1 + P/100)$$

که دا شمیرنه په ورته توګه دوام پیداکړي، نو د t کالو وروسته په ټولیزه توګه لاندې بډایي لاس ته تري راځی

$$K_t = K_0 . (1 + P/100)^t = K_{t-1} . (1 + P/100)$$

د (1 + p/100) لپاره غواړود لنډونی له امله q ولیکو، q ګټی فاکتوریا ګټی ځلونی بلل کیږي:

$$q = 1 + p / 100$$

ددې ساده ونی سره لاس ته راځي: د ګټی ګټی فرمول: یوه بډایي K_0 د t کالو وروسته د p% کلنی ګټي باندې(د ګټی جګیدنه) په $K_t = K_0 (1 + p / 100) = K_0.q^t$ لویه شوې

بیلګه : له درینیمو کلو وروسته په ۴،۵ ٪ ګټه ۳۵۰۰ مارکونه په کوم ارزښت لوییږي؟

$$K_{3,5} = K_0 . q^t = 3500.1,045^{3,5} = 4082,96 \text{ DM}$$ مارکونه

د ګټیګټی شمیرنی سره بډایي $K_0 , K_1 , K_2 , K_3 , ..., K_t$ یوه هندسی پرلپسی جوړوي(ددې لپاره دې ځما د شمیرپوهنی کتاب وکتل شي) دا د پیلبډایي K او ځلوونې $q = 1 + p / 100$ سره ، ګرافیکی که وکتل شي، نو د ګټی لوییدنی فنکشن $K_t = K_0 . q^t$ یو اکسپوننشل بلواک انځوروي. د تعریفډیري $D = Q$ سره.

ساده ګټه اچونی بیا یو لاینې فنکشن $K_t = = K_0 (1 + p.t / 100) ; t \subset Q$ په نخښه کوي.له دې امله بډایي په ساده ګټه اچونه دومره چټکه نه لوییږي، لکه چې په یوه دګټی ګټی اچونی باندې.

بیلګی: ۱ – یو د ۴۷۰۰ افغانیو مقدار یا ارزښت دې د پنځه کلونو لپاره په ساده ګټه اچونه او ب) په د ګټی ګټی اچونی چې ۵۷، ۴ ٪ دی اینښوول کیږي. دا هر پایبډایي څومره لویه ده؟

a) $K_5=K_0(1 + P.t/100) = 4700(1+ 4,75 . 5/ 100) = 5816,25$ Af

$K_5= K_0 + 1116,25 = 5816,25$ Af

b) $K_5 = k_0. q^t = 4700 . 1,0475^5 = 5927,45$ Af

۲ – یوه بډایي د ۵۰۰۰۰ افغانیو په ۳.۵.۹۷ واچول شوه او باید په ۳۱.۱۲.۲۰۰۱ راووستل شي. څومره په ۴.۵ ٪ ګټه باندې لوي شوی دی، که پوره کلونه (له۱۲.۳۱-۱.۱) په ګټه واچول شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$K = [K_0 + K_0.p.t / 100.360].(1 + p/100)^n$$
$$= [\,50000 + 50000.4,5.237 / 36000].1,045^4$$
$$K = 61392.35 \text{ Af}$$

د لویو K_0, q, t او K_t په ګټه فاکتور کی افاده کیدو لپاره رامنځ ته کیږي. د ګټې اخستنی وروسته کیدی شي د سرچینیزې بهایي K_0 پوښتنه رامنځ ته شي، چی د t کلونو په p % ګټونه یا ګټه و بهایي K_t ته بیایي. K_0 د K_t د بهایي د اوس وخت یا حال یا نغد ارزښت بلل کیږي. د K_0 شمیرنه په ورکړشوې بهایي K_t ته چی بیاي دیسکونتونه Diskuntierung یا ګټوني بلل کیږي:

تعریف: د نغدارزښت فرمول $$K_0 = \frac{K_t}{(1+\frac{p}{100})^t} = \frac{K_t}{q^t} = K_t.(\frac{1}{q})^t$$

دلته $(1/q)$ د ګټوني فاکتور بلل کیږي. د نغدارزښت فرمول له $K_t = K_0.q^t$ اړیکو څخه لاس ته راغلی ، چی د K_0 په لور اوبی یا حل شوي.

بیلګې:

۱ – یو نیکه غواړي د خپل لمسی د پنځمی زیږیدنی له امله یو څه ئیسی بانك کی سپما کړي، د ٪۵ په ګټه . دا پیصي بهه خومره یا دا مقدار به څومره لوي، چی دا لمسی په خپله ۲۵ کالیزه ۲۰۰۰۰ مارکونهلاس ته راوړي؟ باید په بانك یکی ۲۳ ، ۹۶۱۲ مارکونه کینښوول شي یا سپما شي..

۲ –د یوه کور خرڅلاو کی دوه اخستونکی مختلف اوفرت یا وړاندیزونه کوي « علاقمند الف ۱۵۰۰۰۰ مارکونه نغد ، ۱۲۰۰۰۰ مارکونه له دوه کاله وروسته او نور ۱۵۰۰۰۰ مارکونه د ټولیزه توګه له شپږ کاله وروسته ادا کړي یعني د کور مالك ته ورکړي.

علاقمند ب غواړي، چی ۱۳۰۰۰۰ مارکونه نغد ، ۱۵۰۰۰۰ مارکونه له درې کالو وروسته او ۱۴۰۰۰۰ مارکونه له نورو دوه کالو وروسته ورکړي.
کوم یو علاقمند ګټور دی، که موږ ٪۸ ګټۀ ونیولي شو یا فرض کړای شو؟
دا چی دواړه ارزښتونه یا وړاندیزونه یو له بل سره پرتله کړاي شو، نو باید دواړه نغد ارزښت ته راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیلګه:

یوه د ۸۰۰۰ مارکونو بډایي ، کومه چې د ګټې په ګټونه ولاړه ده، باید ۶٪ کلنی ګټې د څلورو کالو لپاره په بانګ کی پاتې شي یا کیښوول شي. بډایي به څومره لویه وي په الف) کلني ، ب) نیمکلنی، خ) میاشتنی، او ت) په ورځنی ګټونه؟

تمرینونه:

۱ – یو جوړ کالي په ارزښت یا نیه کی ۵ ،۴ ٪ کمشو» د دې کالیو لومړنیی نیه ۲۵۰ ماکرونه وه . اوس دا کالي کومه نیه لري؟
۲ – یو پطلون په ۵ ، ۴ ٪ ارزان شو، دا پطلون او س ۲۵۰ مارکونه ارزښت لري. دې پطلون پخوا کومه بیه درلوده؟
۳ – د یوه جاکټ بیه په ۷۰ مارکونوه راکمیږي، دې پخوا ۲۵۰ مارکونه بیه لروده، اوس دا څومره بیه لري یا حومره قمته ده؟
۴ – یو جوړ دریشی په ۹۸ مارکونوګرانیږي او اوس ۴۵۰ مارکونه بیه لري. د ا ګرانښت په سلو کی څومره دی؟
۵ – رابات یو د بیي راکومن دی، چی اخستونکی ته د ځانګړو شرایطو لاندې ورکول کیږي. سکونتو یو بیه کمون دی، چی اخستونکی ته د نغدو پیسو ورکولو له امله ورکول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) یو د ۵۷ ، ۸۵۰ مارکونو شمیر، یعنی په کاغذ لیکل شوې بیه په ګوته شوې: د لسو ورځو ترمنځ نغد اداکولو په حالت کی ۳٪ سکونتو.
دلته څومره پیسی ورکول کیږي؟

ب) یو اخستونکی د خپل نوي لاس ته راوړي بایسکل کی ۲۰ ٪ رابات لاس ته راوړي، او دا چی هغه پیسی ندې ورکوي، بر سیرهٔ پردې ۲ ٪ سکونتو هم ورکول کیږي. دا باسکل او س دی د دې لپاره بایسکل لپاره ۱۵۶ مارکونه ادا کوي.
دې بایسکل د سکونتو او ربات د مخه څومره بیه لروده؟

۶ – په یوه نغدپیسوبیه ۱۴ ٪ کی د مالیي ورزیاتیږي او ۳ ٪ ربات ورکول کېږي.
که پخپله ځان ته شمیر لیلی لیکی شی ، ته به مالیه لومړی ورزیاته کړې او که لمړی به ربات له شمیر کم کړې؟
دا نغده ارزښت به څومره جګ شي، که لومړی مالیه ورزیاته شي او بیا ربات ترې کم شي؟

۷ – اباسین خپ کور دننه په ۱۱۰۰۰۰ ماروکونو بیمه کړی. دی ددې بیمی پوره کوونو لپاره کلنی ۵ ،۱ په زرو ګټه باید نیمی ته ادا کړي. دا څومره ده؟

۸ – یوه ګازره په منځنی توګه 0,5‰ ویټامین A لري. څو ګرامه ګازرې به ۱۵ ملي ګرامه ویټامین A ولري؟

۹ – په یوه موټربیولو کنترول کی د یوه موټرځغلونکی څخه د ازماینی لپاره وینه اخستل کیږي. معاینه دا نتیجه ورکوي، چی موټرځغلوونکی 1,7‰ الکول په وینه کی لري. دابه څو مترمکعبه الکول وي، که ونیسو، چی د وینی ډکی ۷ لیتره وي؟

۱۰ – د ارزښتکاغذ (دا په بانك کی څه کاغذونه دې، چي خلك یی اخلی، په کلنی ټاکلی ګټی سره) یو پیسی اینښوونکی ددضیویدند Dividende (کلنی ګټهٔ ده) ۲۷۰ مارکونه اخلي. څموره پیسیبه هغه اینښودلي وي، که یوه بډایي

په ۵ ، ۷ ٪ ګټهٔ اینښوول شوې وي ؟

۱۱ – اباسین په یوه بانکی حساب کی ۷۰۰۰ مارکونه اچوي. له کوم وخت وروسته په ساده ۴ ٪ کی ګټهونه، دی ۸۰۰ مارکونه لاس ته راوړي؟

۱۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

ځلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنشيال برابرون (دا کتاب په دې ښانګه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپينې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

(c) ketabton.com: The Digital Library

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج ځخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو ځخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج ځخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنستونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان په اولني نوم میرې شینواری د ارواښادې پستو او ارواښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړني ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمې همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library