# ئەندازە(هندسه)

# Geometry

لێکۆڵینەوەی:

دکتۆر ماهان (میرێی) شینواری

2012

Ketabton.com

جرمني د بن ښار

(c) ketabton.com: The Digital Library



# ځمککچپوهنه ( هندسه)

لیکونکی:
ډاکتر ماخان (میرزي) شینواری

ناچاپ

(c) ketabton.com: The Digital Library



سرلیک

ځمککچپوهنه(بنسټیزه هندسه)

هندسي بنسټیزې کلیمی

تکی ، کرښه ، هواره(سطحه ) ١
نیمه – یا نیمهواره ٧

کونجکلیمه ١١

څرخونپروسه: څرخونکنج : ١۴

ګراد ١۵

**کونج کلمه ١٧**

(c) ketabton.com: The Digital Library



# ځمککچپوهنه(بنسټیزه هندسه)

## هندسي بنسټیزې کلیمې

### ټکی ، کرښه ، هواره(سطحه )

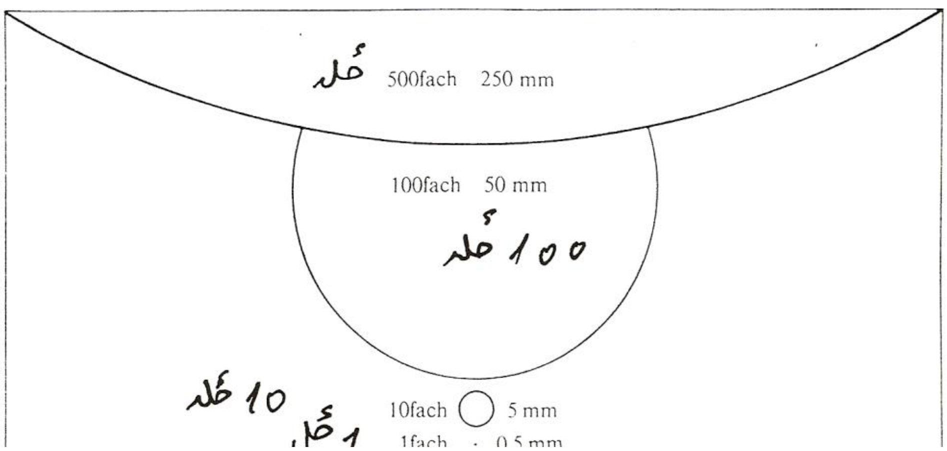
پيژند(تعريف): اويکليد(Euklid) اويکليد وايي، چي ټکی هغه دی چی نور نه شي کوچنی کيدی. ددې پيژند ستونځی په دې کې دي، چی بيا نو د داسی واړه شي ځخه ځنګه کرښه، او هواره جوړيدلی شي. يعنی که ټکی د هندسی اتم (لاتين Atom نه ويشونکی) وي بيا نو ځنګه کيدی شي چی پراخه شي يا وغزيږي؟ يا يی که مايکروسکوپ له لارې لوي کړو، نو پوره ستره هواره نيوی شي په عمل کی د کښلو (رسم ويستلو) له لارې ګورو چی ټکی څرګند غزيدلی يا پراخيدلی شي، لکه څنګه چی لوييدل يعنی غټيدلی شي:
په لاندې کې ګورو، چې ټکی د همدې شميروني له لارې څومره غټيدلی شي

(c) ketabton.com: The Digital Library



یادونه : هندسه ځمککچ ته وايي، نو که هندسه ځمککچ پوهنه وبلل شي، د لمړنیو پوهیدلو لپاره به هم سملاسي اسانه وي .همدا اوس هم، له دې امله چي په هندسه کی ډیرځه لیدلکیدی شي او د رانیولو وړ دي ).
لنډ: شیان یا لیدیدونکي»رانیولوړ «( یا شي ډوله ځرګندیږي، همدومره ستونځی لیدل کیږي، چي نومونه اړوند (تړلی) کره وټاکلی شو، اوهمداسی یي دا اړونده کره ټاکنه روښانه یا فکروړ کړی شو، که څه هم په لومړي وار سره، چی ګوندې دا شکلونه لیدوړ او نیولوړ دي، ساده ښکاري، مګر په خپل دننه کی ( خپله ختّه کی) خورا پیچلي دي چي یواځی ور نږدې پیژند(تعریف) یی کیدلی شي او په لاندې کی به راته روښانه شي:

-موږ په لاندې ځیره کی د ټکی غټیدل یا لوییدل ښایو




ګورو چی ټکی هوارې او کرښی ته پراخیدلی شي یعني عملي ځیره ښوونه یا شکل نخښوونه یی د ستونځو سره مل ده، خو سره ددې هم ځنی تیوریکي کره ( ټیك) ښوونه یي ضرور ده ، یا نه پرېښودونکی ده. دا پرابلم په مقایسوي- یا د پرتلي په توګه- ساده له منځه وړل کیدی شي: په لاندې کی د تشریح شوو شیانو یا لیدیدونکی لاندې د هغو تیوریتیکی ادیاله(خیالي )ځیره پوهیږو او نه د هغه عملي ریښتینوالی یا ریالیزه کوونه٠ د دې لپاره، چی ځانونه دې له دې ستونځو راوباسلی شو، دا مو د هندسی د ډیرۍ کنځپت ته لارښودوي. د پورته شکلونوسره سره، د هندسي جوړختونو ( ځیرو) لاندې ، د ټکو ډیری پوهیږو. یعنی هندسي جوړښتونه بل څه نه دي، بی د ټکو له ډیرۍ٠ داسی تعریفوو:
لنډ: ټکی او کرښه

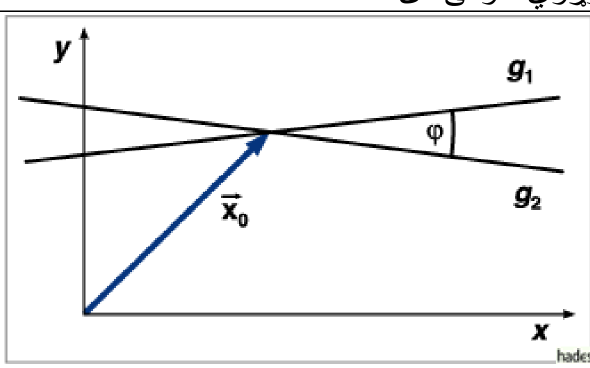
(c) ketabton.com: The Digital Library



پیژند(تعریف) :
یوه هواره یا سطحه د یوې ډیرې په څیر کلکه نیسو، چې توکی یې ټکی بللکیږي. او په غټو لاتین تورو یې ښایو لکه .....,A,B,C,P,Q ، په هواره کی یوه برخډیری په نخښه شوې ده، چې توکي يي کرښی بلل کیږي او په کوچنیو لاتیني تورو..... , a , b , c سره ښوول کیږي
یا په بل ډول :یوه هواره E د ناپای ټکو ډیرۍ ده. د هوارې هره برخه (چې پخپله پای یا ناپای کیدی شي) د هوارې یا سطحې څیره (فیګور یا شکل ) بلل کیږي.

د کښلو(رسمولو، انځورولو هوارې غزول )لکه د بیلګي په توګه د کاغذ دمخ ( تخنیکي بندیزونه لري (محدود دي). د هندسي هدفمندۍ لپاره باید بیا دا کاغذ هرې لور ته ناپای غزیدل شوی وي او پنډوالی یی صفر ته را کښته شوی وي، ځکه چې یوه هواره دوه دیمینزیونال ده ) دوه اړخیز یا دلته ښه دی چې د اړخ په ځاي خوا ووایو، ځکه چې اړخ مو د-n-ګوډیو لپاره کارولی دی. د لته يې د خواوو څخه سور او اوږدوالی عبارت دی . ( په دې کتاب کې او بیا دې موضوع کی له وړو څرګندونو تیریږو او هغه څه چې خورا مهم دي هغه دلته راوړو)٠

لنډ : ټکی هغه کوچنی څه دی، چې هواره او کرښه تري جوړیدی شي او له دې امله ټکی دهوارې یا سطحې، چې د ټکوډیرۍ جوړوي، توکی دی٠

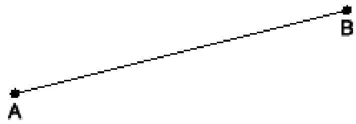



ټکی د دوه کرخو غوڅې له لارې
انځوریدی شي ٠ که دوه کرښې g
او h په P کې غوڅې کړي، نو د
دې لپاره داسې لیکو:
$h = \{P \square g\}$
یا لاندې انځورونه
په لاندې ځیره کې $g_1$ او $g_2$
په یوه ټکي کې سره غوڅوي

پیژند :
ټوټه کرښه (پای کرښه یا بنده کرښه) AB د ټولو ټکو هغه ډیرۍ ده، چې له ټکيA و B ته د هوارې یا سطحې په دننه کی لنډ واټن یا - فاصله وهي، یعني که دا دواړه ټکي یو بل په لنډ واټن کی د هوارۍ په دننه کی سره وتړي، چې د غاړې ټکي A او B هم په دې پورې اړه لري. یعني ټکی A او B هم په دې کرښه پراته دي٠داسې لیکو:

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| A € AB; B € AB<br>یا هغه کرښه، چې دوه ټکی په لنډ واټن کې سره وتړي بندکرښه بلل کیږي، ټکي د کرښې توکي دي |  |

که بند کرښه د «ځیرکرښې» په څیر ونیسو او یا د کاغذ پرمخ کرښې (ختکش) کیږدو نو دا کرښه دواړو لورو ته غزیدلی شي، چې موږ دا کرښه بولو٠

کرښه د ځمککچپوهنې بنسټیزه کلیمه ده٠ لیدوږ د اویکلید جیومتري کې دا یوه ناپای غزیدلی کرښی ته وایې، چې ناپای نریٔ وي، د لاندې خویونو سره:
که په یوه کرښه دوه یو له بل بیل ټکي پراته وي، نو د دوي ترمنځ ټوټه کرښه یو لنډ واټن په نخښه کوي، چې موږ ورته ټوټه کرښه یا بند کرښه وایو٠

دا کلیمه ټیک زموږ پیژند نه راکوي٠ اوس هندسه په اکسیومونو ودانه ده، چې کرښه او ټکی داسې ورکړ شوي، چې مخ د مخه یې پیژند څرګند ورکړ شوی او نیول شوی یانې موږ یې پیژنو ٠

## پیژند یا تعریف :

د بندکرښی (پای AB )- دواړو لورو ناپای غزولوته کرښه (ناپایکرښه) AB یا g ویل کیږي. بندکرښه نو بیا د (ناپاي -) کرښي اصلي برخدیری ده٠

په نخښونه یې g (برخدېرئ)□ AB

طبعآ کیدی شي، چی کرښه په یوه لور وغزول شي

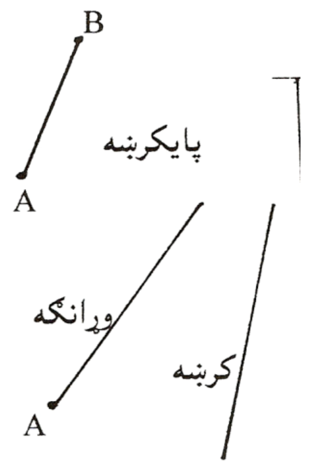
پیژند :

که بندکرښه یواځې په یوه لور ناپای وغزول شي،(نا پای) نیمکرښهشي (ناپاي) نیمکرښه یا وړانګه( شعاع) بلل کیږي. نیمکرښه یا وړانګه یوې لورته بنده او بلی لور ته ناپای غزول کیدی شي، یعني پیل لري مګر پای نه لري .

(c) ketabton.com: The Digital Library



لنډ: د بندکربښی دواړه لورې بندې ، د نیم
کربښې یوه لور بنده او بله وازه او دکربښې
دواړه لورې وازې دې.
په پورته ځیرو کې د بند کربښی، وړانګې
او کربښی توپیر څرګند دی. نیمکربښه د
کربښی برخډیری دی




که په یوه هواره کی په یوه کربښه g ټکیPکیښوول شې، نو وایو چیPدgاینځیدیر (inzidiert) کیږي یاټکیPپه کربښهgپروت دیٔ یاgلهPتیریږي اوgد هوارېEسره اینځیدیرت کیږي، په دې حالت کی د اینځیدینځ اړیکو(inzidenzrelationen ) یا »پروتوالی اړیکو«څخه غږیږو.
که په همغه کربښه له دوه ټکو ( په همغه هواره له درې ټکو زیات) زیات ټکي پراته وي، نو دې ته سرې کولینیار(kollinear() کومپلانار( چې په همغه هواره یا ستڅه کې شته ويkomplanar) وایي .که یو ټکی P په دوه ( زیاتو) کربښوg اوhپروت وي نو دا د gاوh غوځټکی بلل کیږي اوداسی یې لیکو:

$$h= \{ P \cap g\}$$

د پام وړ : ټکی د ډیری نوك کی{ } لیکل کیږي( یا د ډیریٔ غیږ کی نیول کیږي)، ځکه چی ناپاںکربښي g او hد ټکو ډیریٔ دي او ټکی P د غوځډیریٔ توکی دیٔ .
که چیرې ډیرې ناپایکربښی په یوه ټکي کی سره غوځی کړي نوکوپونکتال ( kopunktal) بلل کیږي، کوپونکتالی ناپای کربښی د ناپاںکربښو غونچه ( Büschel)یا بهتره ستوری جوړوي.

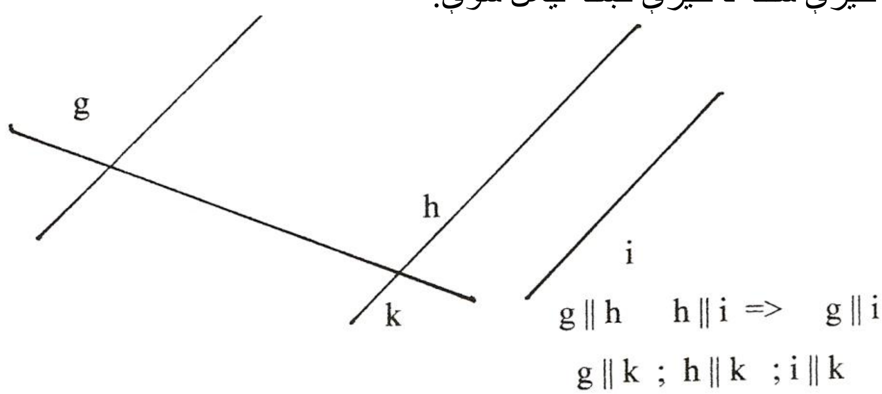
د کربښو کوده(ځېرې ټولې لاندې کښل شوي دي)

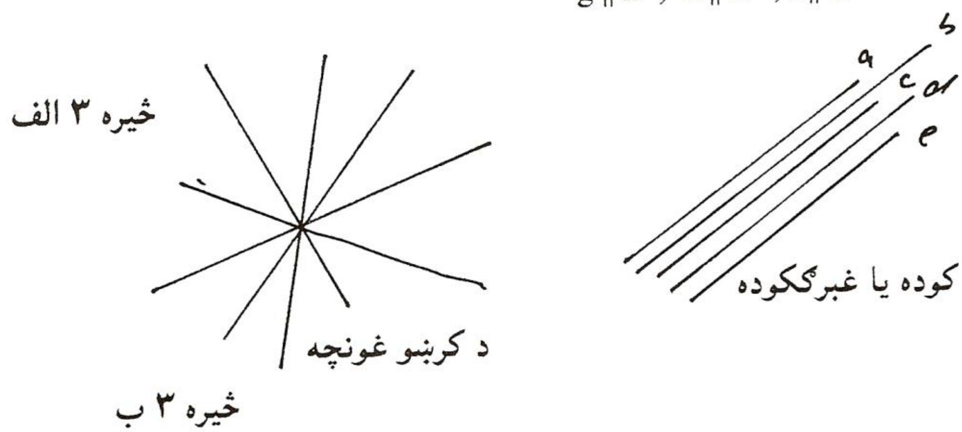
پیژند(تعریف) : کربښي g او h بي له ګډو ټکو یابهتره : بی له غوځټکو غبرګکربښی (موازیکربښی) بللکیږي، لیکدود( مطلب د شمیرپوهنی لیکدود) یې د ی g||h

(c) ketabton.com: The Digital Library



کرښی د ناپای ډیرو غوڅټکو سره کټمټ یا ( ایدنتیك identisch) بلل کیږي یا مساوي کیږي. دا په دې مانا چی یو په بل پرتی دي. یو بل ته کټمټ کرښی سره غبرګی دی۰
ددې لپاره لیکو: g = h
ناغبرګی کرښی g او h په نخښونه کی داسی په نخښه کیږي: g|/|h ( دا دې منل شي، چې دا د ناغبرګ کرښو لیکډول دی یا لیکدود)۰
د لاندې ځیرې شننه د ځیرې کښته لیکل شوې:




هندسي ځیره : یوه هندسي ځیره یوه ناتش تکیدیزی ده.
هغه لاین ( یوخوایز یا یو دیمنزیونال (لاتین: په ټولیزه توګه مانا یی: هرې لور ته پراخیدنه، یوې لورته پراخېدونی( 1Dimensional) بلل کیږي، که هغه په یوه کرښه پروت وي او ټکی نه وي .
پیژند(تعریف):هغه هندسي ځیره »هواره ( Fläche) بلل کیږي، که هغه په یوه هواره هوره (Ebene) پرته وي، مګر نه په یوه ټکي پرته وي ۰ هواره یا سطحه دوه پراخیدونې یا –دیمنزیونال(2 Dimensional)ده۰

په پورته کې د کرښو کوده یا د کرښو ډله سره غبرګې هم دي۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



دلته A < B په دې مانا ده چي « A په يوه کرښه g د B تر مخ يعني ځموږ په بلد دود، کيڼ لور ته پرته ده» دا په دې مانا چي په کرښه g ځغاسته باندې لمړی د A ټکی او بیا په ترتیب د B او C ټکو ته راځو. په دې توګه د منځ اړیکی له لارې لوريزې کرښی ته راځو. دا په دې مانا چي داسی کرښی لوريزې کرښی دي. يعني په هغه پخوانی ډول سمت يا لور يی څرګند دی.
منځ اړیکی Wz(ABC) دا مانا لري چی يا A<B<C او يا A>B>C . دا په دې مانا، چي هره کرښه په دوه ډوله لوريزه کیدی شي يعنی سمت يی ټاکل کیدی شي.

**تعريف :** g دې يوه لوريزه کرښه وي او A دې د g يو ټکی وي، نو د A بدل يا توپيري ټکی کرښه g په دوه برخېيريو ويشي: ( دلته کرښه ناپاى کرښه ده )

$$\{X : X \in g \text{ او } X < A\}, \quad \{Y : Y \in g \text{ او } Y > A\}$$

که دواړو برخېيريو ته ټکی A ورزيات شي، نو له A څخه په g پيداشوې وړانګي منځ ته راځي . A منځ ټکی او g د دواړو، نسبت و A ته يو بل ته مخامخ يا يو د بل په څټ وړانګو وړونکرښه بلل کيږي.

يوه وړانګه د پيلټکی A او له دې توپير ټکی P(P |= A) له امله يواځنی ( يواځنی شمير پوهنيزه کليمه ده او تل دې ورته پام وي، دا په څيرونه کی زياته کاروول کيږي. دا په دې مانا ، چی بل نه شته ) ټاکلی دی. يعنی په دې ټکو بله له دې وړانګي توپيري يا بدله وړانګه نه شته. دا په AP ښوول کيږي. دې AP ته مخامخ يا په څټ وړانګه په AP ښوول کيږي.
تل باور لري:

$$AP^{+} \cap AP^{-} = \{A\} \quad \text{او} \quad AP^{+} \cup AP^{-} = Zw(AP)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



که وکتلی شو چې د پای کرښې یو سر له بل څخه د مخه پروت وي، نو پایکرښه لوریزه ده. که A له B مخ ته یا کیڼ لور ته پرته وي نو کرښه په AB ښایو د کرښې لوریزوالی د یوه غشي په مرسته ښوولی شو یعنی: پایکرښه AB او BA یو بل ته مخامخ یا په بل ډول یو بل ته په څټ پرتې دي.

## نیمه هواره یا لنډ: نیمهواره

تعریف : هره کرښه g په هغې کرښه پورې اړه نه لرلو ټکو باندې په دوه وازو نیمهوارو باندې ویشي. دوه ټکي د نیمهوارې یوه لور ته ، ټیك او ټیك هلته پراته دي، چې ددې ټکو ترمنځ د کرښې g کوم ټکی نه وي پروت. g د دواړو هرې یوې هوارې ژیکرښه یا لنډه: ژی یا غاړه ده.
د یوې وازې هوارې او ژی کرښې ټولنه نیمهواره جوړوي. یوې ژیکرښې پورې اړونده دواړه نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په څټ نیمهوارې بلل کیږي.

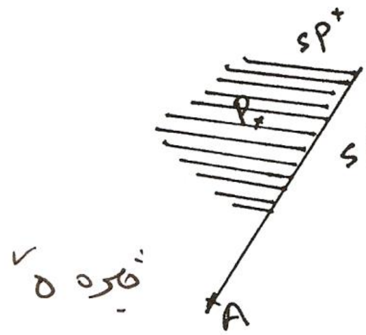
که ټکی A او B له g پیداشوې یا منځ ته راغلی نیمهوارې په یوه لور پراته وي، نو وایو چې A او B د کرښې g په همغه لور پراته دي.

یوه نیمهواره د پیداکرښې او یوه ټکي P له لارې ( چې په ژیکرښه g نه وي پروت ) یواځنی ټاکلی ده، یعني له دې نیمهوارې بدله بله داسې نیمهواره نه شته.

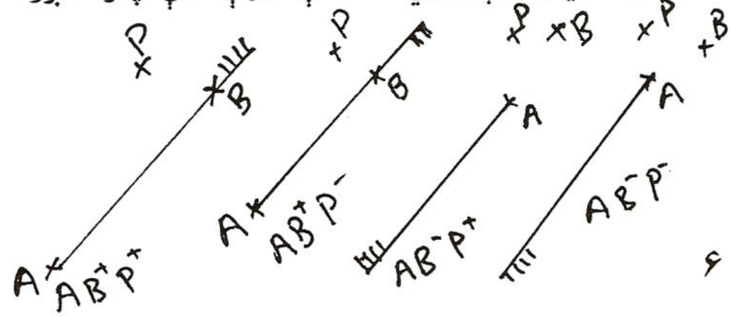
یو ټکیدیری ، چې له یوې وازې نیمهوارې او یوې وړانګې، داسې په نامه هوارجوړوونکی وړانګی ، جوړ وي، جنډه یا بیرغ بلل کیږي. دلته د وازې هوارې ژیکرښه د وړانګې وړونکی کرښه بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library






وړانګه د جنډې ژیوړانګه ، ددې پیل ټکی د جنډې پیلټکی بلل کیږي. یوه جنډه f د ژیوړانګي s سره او په دې وازه هواره پراته ټکي P سره په $sP^{+}$ ښوول کیږي. جنډه د همغې وړونکې وړانګي یا ژیوړانګي s سره ، چې د $sP^{+}$ سره مخامخ یا په څټ ده ، د $sP^{-}$ سره ښایو. (خیره: ۵ )
که په $sP^{+}$ همداسې $sP^{-}$ سومبول، په پورته د وړانګي s لپاره ایښوول شوی سومبول، چې له A و B ته ځي او $AB^{+}$ همداسې $AB^{-}$ بدل کړو یا کیږدو، نو د لاندې سومبولونو $AB^{-}P^{-}; AB^{-}P^{+}; AB^{+}P^{-}; AB^{+}P^{+}$ سره کرکترستیك یا ښوول شوې یا ټاکل شوي جنډې ښایي. لاندې خیرې ددې لپاره کاږو:



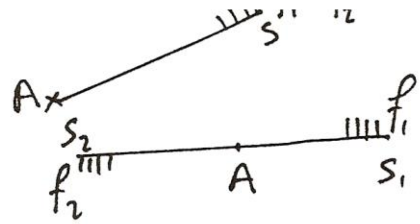

خیره ۶

دلوړ خیرو بیرغونه $AB^{+}P^{+}$ او $AB^{-}P^{-}$ یو بل سره مخامخ دې، ځکه چې وړونکې وړانګه او نیمهوارې یو بل ته مخامخ یا یو بل ته په څټ دی( پام دې وي چې مخامخ او په څټ همغه مانا لري یعني همغه یو ډول شمیرنیزې کلیمې دي)،

دوه بیرغونه ( $f_2$ , $f_1$ د همغه پیل ټکي A سره ) وپیل ټکي A ته همغه لوریز یا مساویلوریز بلل کیږي، د کولینیارې ژیوړانګو سره، که $f_1 = f_2$ یا $f_1$ و $f_2$ ته مخامخ یا په څټ وي.

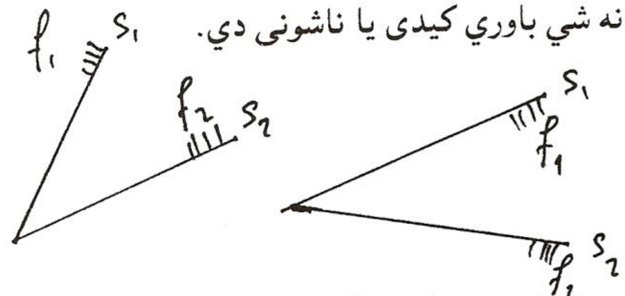
(c) ketabton.com: The Digital Library





خیره ۷

دا دوه بیرغونه یو بل ته مخامخ بلل کیږي د همغه پیلټکي، د ناکولینیارې ژیوړانګو سره، که د $f_1$ ژیوړانګه په $f_2$ یا $f_2$ ژیوړانګه د $f_1$ په ژیوړانګه پرته وي ، مګر دواړه امکانات نه شي باوري کیدی یا ناشونی دي.

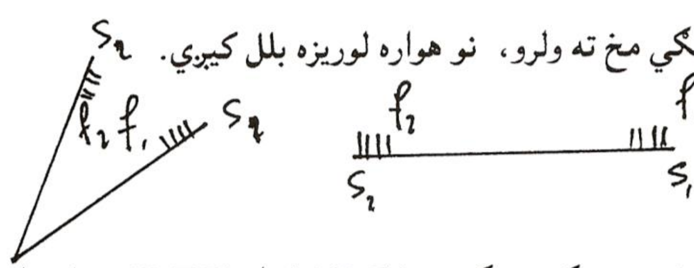


خیره ۸

د ټولو جنډو ډیریو کی همغه لوریز اړیکی ایکویوالنت یا ورته اړیکی دي. همغه په دوه ټولګیو د ډیریو ویشنه ممکنوي.

هغه جنډې چی مساوي لوریز نه دي یو بل ته مخامخلوریز یا یو بل ته په ښتلوریز بلل کیږي. دې ته خو پام شته چی مخامخ یا په ښټ لوریز همغه مانا لري

که دا ډول لوریزټولګي مخ ته ولرو، نو هواره لوریزه بلل کیږي.



خیره ۹

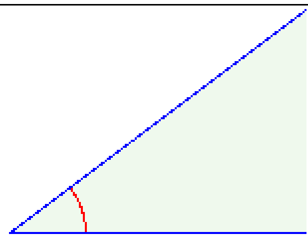
دوه منظم یا ترتیب شوي د ټکو دریګوني ( A,B,C ) او (D,E.F ) ټیك هلته یا هلته او هلته همغه ښرخونموخه لري( یعنی د ښرخونی هدف یی همغه دی )، که

(c) ketabton.com: The Digital Library



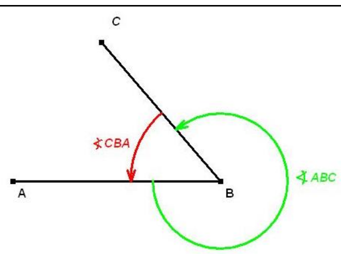
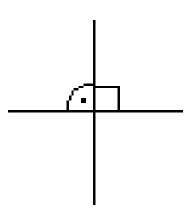
جنډې ABC او DEF همغه لوريزې وي. د يوه منظم نه کولينيار يا کولايني دريګونټېکو ( A,B,C ) ځرخونموخې لاندې د جنډې ABC لوريزېولګې پوهيږو.

## کونجکليمه

| | |
|---|---|
| پيژند (تعريف): په يوه هواره کي، چي دوه وړانګی S 1 او S2 ياني S1∧S2 د پيل غوښتکی S ولري په هواره يا سطحه E کی کونج $\beta$ جوړوي .وړانګي د کونج پينی بلل کيږي او پيلټکي S دکونج > ککره (لنډ : کونجککره )بلل کيږي. |  |

لنډ: دوه کرښې، چې په يوه ټکي کې سره غوښې کړي، کونج جوړوي، چې کرښې د کونج پينې او غوښتکی يې د کونج ککره يا (رآس الزاويه ) بلل کړي ۰ پورته ځيره دې وکتل شي۰ګونجونه په ګراد (لاتين پل يا لاقدم )کچيږي

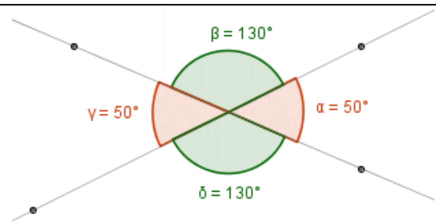
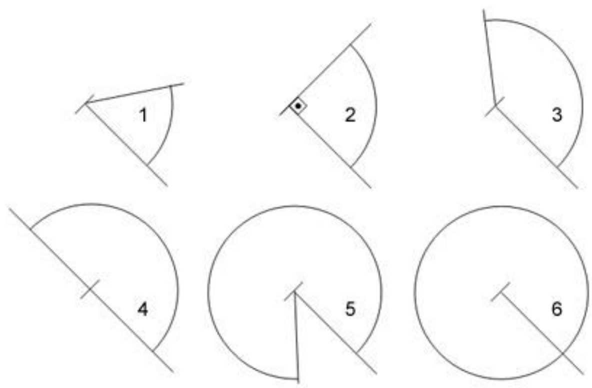
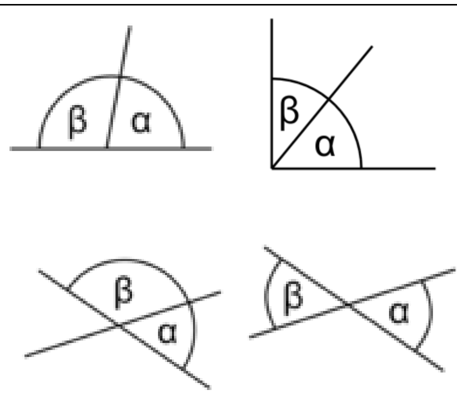
د کونجونو رسمونه او نومه ونې

| | |
|---|---|
| هغه کونج ، چې له ۱۸۰ درجو کوچنی وي هغې ته ننوتی کونج واي او هغه کونج، چې له ۱۸۰ درجو لوي وي هغه ته وتلی کونج واي<br>ننوتی کونج Konvexes Winkel وتلی کونج konkaves Winkel<br>تيره کونج، چې له ۹۰ درجو کوچنی دی، ولاړکونج، چې پوره ۹۰ درجي دی، پخکونج، چې له ۹۰ درجو لوي او له ۱۸۰ درجو کوچنی دی، غزيدلی کونج، چې ۱۸۰ درجي دی ، له پخ زيات- يا د پخ په ځټ- يا له پخ اخوا کونج ، چې له ۱۸۰ درجو لوي او له ۳٦۰ درجو کوچنی دی، پوره کونج، چې ۳٦۰ درجی دی۰ دا دې په ګوته وي، چۀ صفرکونج صفر دی۰ | <br> |

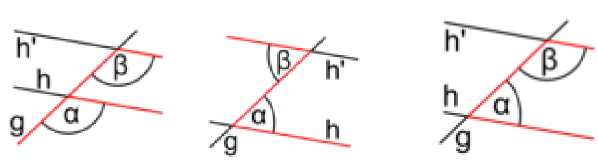
يادونه: دا مي ډير تکرار راوړی، هيله ده، ګران لوستونکي به ورسره ستړي نه شي

(c) ketabton.com: The Digital Library



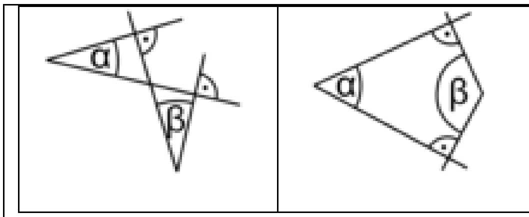
| | |
|---|---|
| مخامخ ځيره : ککر په ککر<br>کونجونه يورنګيزدي، بدلرنګيز<br>کونجونه ګاونډي بلل کيږي۰ |  |
| لاندې کونجونه پخپله<br>ونوموی‌کړی ۰ |  |
| کمپليمنت يا ۹۰ درجو ته پوره کيدونکي<br>کونجونه( مخامخ ځيره دي وکتل شي)۰ په<br>څنګ کې يي سوپليمنت يا ۱۸۰ درجو ته<br>پوره کيدونکی کونجونه ۰مخامخ ځيره ۰<br><br>مخامخ کونجونه  ښی لور ته : ککر په<br>ککره کونجونه۰<br><br>کيڼ لور ته : ګاونډي کونجونه |  |

له کيڼ څخه و ښی لور  : پوړيز کونجونه ، ردبدلکونجونه



(c) ketabton.com: The Digital Library





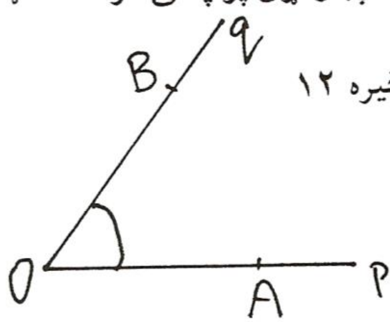
مخامخ کونجونه، چې پښې یې یو په بل ولاړې وي, ۱۸۰ درجو ته یو بل پوره کوي٠ په دې بل حالت کې کونجونه یو بل سره برابر دي٠

یادونه : ګران لوستونکې به راته بخښنه وکړي، چې د زیاتو کونجونو هغه ورسره بلد نامه سره ښه نه یم بلد، ځکه چۀ په محدب ، مقعر او داسې نورو باندې نه پوهیږم، یوائې له قایم الزاویه ښخه پرته٠

## یو ګراد Grad لاتین: پل یا قدم

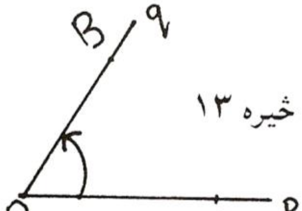
لاندې کونجونه سره توپیر کیږي، چې ایا د پښو لړی پرلپسی کره ټاکلي او ایا د کونج دننه په نخښنه شوی دی او که نه.

د کونج دننه په نخښنه شوی نه دی: د پښو لړی پرلپسی کره نه ده ټاکلی



خیره ۱۲

بنسټیز کونج:
د وړانګو p , q ( نامنظمی ) جوړې،
د ګډ پیلټکي O سره، د ( p,q ) ∢
یا ( ABC) ∢ په نخښنوني
د A ∈ p, B ∈ q سره.
دلته O ککرټکی دی، p او q د کونج پښی دي.



خیره ۱۳

د پښو لړی پرلپسی کره ټاکلی ده:
لوریز بنسټیزکونج: د وړانګو p او q
منظمه جوړه د ګډ ټکی O سره د ∢(p,q)
یا AOB ∢ په نخښنونی د A ∈ p او B ∈ q سره.

دلته هم لکه د مخه o ککرټکی، p لومړی پښه او q دویمه پښه ده. دا کونج په

(c) ketabton.com: The Digital Library



شمیرپوهنیزه موخه مثبت لوریز دی

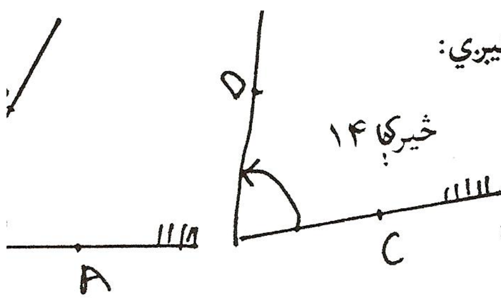
یادونه : هغه د څرخون لور چی د ساعت څرخیو مخامخ یا په بل ډول په څټ ځغلی

مثبتلوریز او هغه چې د ساعتڅرخیو په لور ځغلي مفي لوریز څرخون بلل کیږي.

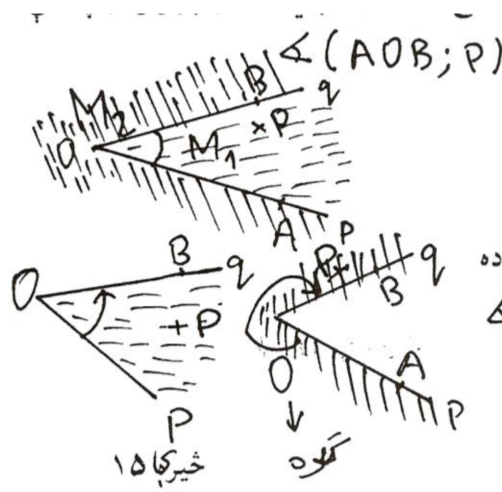
دوه کو نجونه ټیك هلته او یا هلته او هلته مساویلوریز دي، که د هغو جنډې همغه لوریز یا مساوي لوریزې وي.

لکه په دې څیره کی چی لیدل کیږي:

د کونج دننه په نخښنه شوی دی:




د کونجونو لړی پرلپسی یی کره نه ده ټاکل شوې. ( بلد یا عادي ) کو
بنسټیز کونج هواره په دوه برخهیریو $M_1$ او $M_2$ ویشي. په نخښنه برخ
بیلګي په توګه په ټکی P کی ) د کونج دننه بلل کیږي( د کونجهوار




نخښنونه کي :∡(p,q; p) ، ∡(AOB ; P)
که دننه یی تش ډیری وي نو
دا کونج صفر کونج دی .

د پینو لړی پرلپسی کره ټاکلی شوې ده
لوریز کونج: په ګښنونه ∡(P,q;P)
لوریز بنسټیز کونج او دننه یی په
نخښنونهP≠q، که وي، نو (p,q;p)
او (q,p;p) بدللوریز دي. (P≠q)

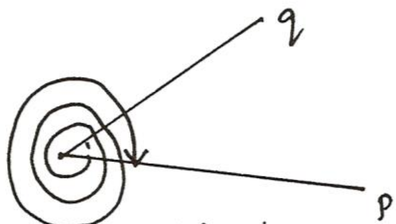
(c) ketabton.com: The Digital Library



که دلته هم که د کونجونو دننه تش وي،
نو کونج صفر کونج دی: $\measuredangle(p,q;p)=0°$

څرخونپروسه: څرخونکونج:

لوریز کونج، که د کونج په همغه لور د یوه طبیعی ګنې یا پیدایښتي ګنې په اندازه چی یوه پښه یی ځاي په ځاي ده وڅرخول شي، نو د کونج لور کی تغیر نه راځي.




ځیره ۱۶

## ګراد ( لاتاین Grad پل یا قدم )

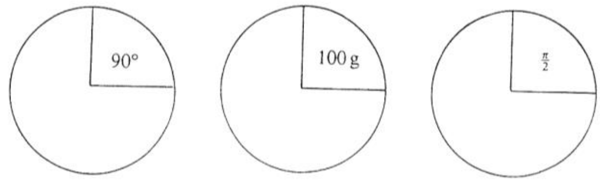
د کونج لویوالی په مختلفو ډولونو ورکول کیدی شي. د اندازې یووني ( یو یې : یوون) یا واحدونه( یو یې : واحد) لاس ته راځي، چی یو کونج - په یوه ګردۍ کی کښل شوې- په مساوي برخو یا سکتورونو وویشل شي. ) سکتور او ګردۍ لپاره دې، د ګردۍ لوست ځاي وکتل شي (و رسره بلد یا مروج یی په 360° مساوي برخو ویشنه ده)
پیژند : 1/360° د یوه پوره کونج 1° ( په تورو :یوه درجه. ، لاتین یي = gradus پل قدم) بلل کیږي.
ګراد نور هم په 60° کونجدقیقو ویشل کیږي) 60’ =1° او کونجدقیقه په 60" کونجثانیو( .(1’= 60’’

د» ګراد یا درجی« لاندې »زړه درجه«(زوړ ګراد) پوهیدل کیږي. دا د زاړه بابیلوني زاړه شپیتیز سیستم څخه دی. په تریګونومیتري یا کونجکچ کي کونج برسیره پردې په لینده کچ یا - اندازه پاندې هم اندازه کیږي او په ګیودازي ( Geodäsie د اندازه کولو تخنیك، - پوهنه یا- علم ( په نوي ګراد یا ګون ( gon ( اندازه کیږي چی دلته ګردۍ په ۴۰۰ برخو ویشل کیږي .دا په جبشمیري کی مودوس"GRAD" « دی .ځیرې :

د ګردۍ څلورمی انځورونه

(c) ketabton.com: The Digital Library






ځیرکیا ۱۷

لینده کچRAD نوی ګراد GRAD زوړ ګراد DEG

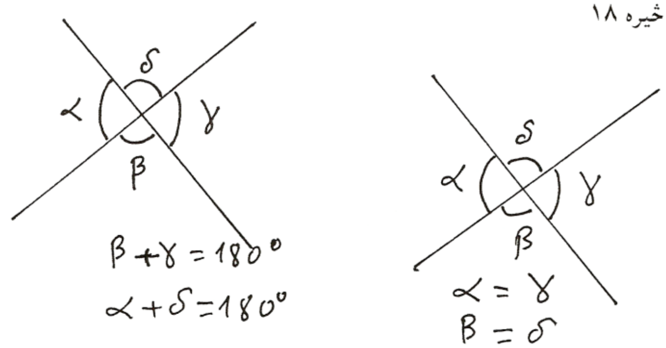
د کونج مثبت- او منفی – یا زیاتون - او کمونننخښي د کونججوړونکی یاکونج تولیدیدونکي ځرخونلورې ځخه لاس ته راځي. کیڼ ځرخون ( د ساعت د ځرخی په ځټ ځرخیدنه) مثبت- زیاتونمخنخښه مخ ته یعنی کیڼ لور ته لري او ښی ځرخون ( د ساعت د ځرخولو په لور ) منفی – یا کمونمخنخښه مخ ته لري یعني کیڼ لور ته لري. د دوه کونجونو مقایسی یا انډول یا پرتلی لپاره بیا یواځی مطلقه ارزښت مهم دی. مطلقه ارزښت سوچه یا خالص د ځاي ارزښت یا ځیفرارزښت دی، بي له مخنخښي. د مطلقه ارزښت همداسی ځاي ارزښت لپاره دې ځما د شمیرپوهنی بنسټیزکتاب وکتل شي٠(په نړیوال جال کې به هم راشي)

بیلګه : $5 = |-5|$ , $3 = |3|$دوه کرښی یو د بل سره ځلور غوځکونجونه جوړوي، چی په تولیزه یا عمومي ډول یی جوړه سره مختلفی لوي وي. د بیلګې په توګه که له غوځکونج غبرګیږو نو موخه به مو وړوکی کونج وي٠

پیژند :که دوه ناپانکرښی یو بل سره په یو ټکی کي پربکړي، نو ځنګ په ځنګ کونجونو ته ګاونډي کونجونه واي، چی دوي یوه پښه ګډه لري او دواړه کونجونه 180° لري ( د درجي نخښه کله کله کیڼ لور ته لیکل شوې، خو دا په پوهېدنه کې کومې ستونځې نه رامخ ته کوي) ٠

کونجونه چی ککرې یي سره نښتی یا په بل ډول ککره په ککره وي، هغو ته ککرکونجونه ویل کیږي. ککریکونجونه مساوي لوي دي، دوي یو ګډککریټکی لري او پښی یی یوه یوه په ګډو کرښو پرتی دي .

ځیره ۱۸

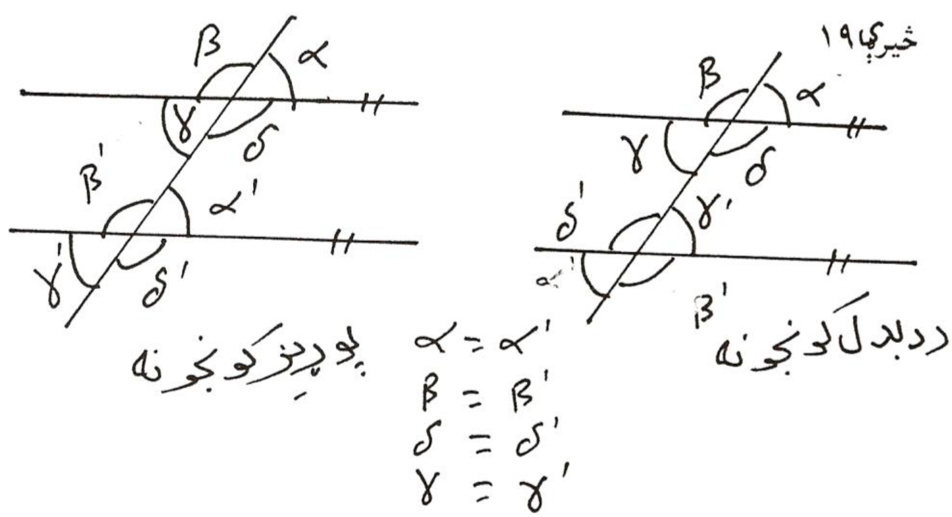


(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره‌کونجونه چی ځانونه 180° ته پوره کوي سوپلیمینت ( Supplementwinkel ) بلل کیږي او کونجونه چی ځانونه 90° درجو ته پوره کوي کومپلیمینتکونجونه ( Komplementwinkel)بلل کیږي. دې دواړو کونجونو ته تر یوه نامه لاندې چې راشي پوره کوونکی کونجونه وایي .که دوه غبرگی کرښې g اوh د یوې بلی ناپایکرښي k له خوا غوڅی شي، نو څلور دننه پریکونجونه منځ ته راځي ۰ دوي د g او h تر منځ، او د k په مختلفو خواوو( او څلور دباندې پریکونجونه)نه د غبرگکرښو g او hترمنځ، بلکه له دوي دباندې( د k په یوه لور یو دباندنی او یو دننه غوڅ- یا پریکونجونه پوړیزکونجونه بلل کیږي، دوه دننني یا دوه دباندني غوڅ- یا پریکونجونه چی د k په بیلو لورو پراته وي ردبدلکونجونه بلل کیږي( څېرې پورته ورکړ شوي دي) ۰

جمله: پوړیز- او رد بدل کونجونه په غوڅغبرگکرښو(غبرگي کرښي، چې له دې کرښي غوڅي شوي دي) کې سره برابر دي




**کونج کلمه**

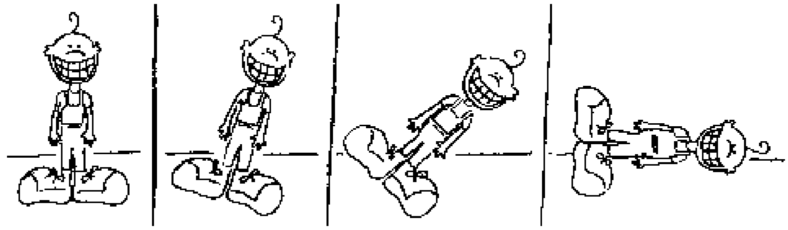
## کونج څه شی دی What is an Angle ?

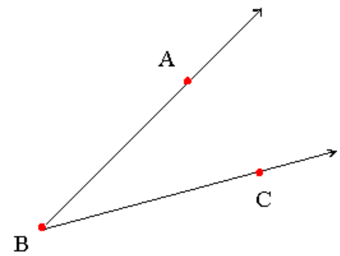
یادونه: لاندې برخه څه تکرار لري، خو بیا بیا راوړنه ښه زده کړه ځان پسې لري۰

دوه وړانگی، چې یو پای لري او سره غوڅي کړي کونج جوړوي۰ وړانگی د کونج پښي یا اړخونه بلل کېږي او هغه ټکی، چی هلته کرښی غوڅوي ککرټکی یې بولو۰

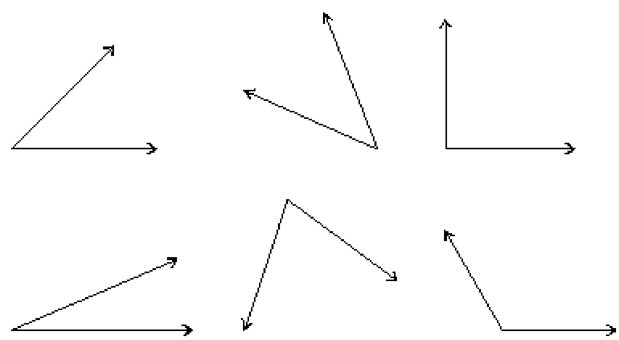
(c) ketabton.com: The Digital Library

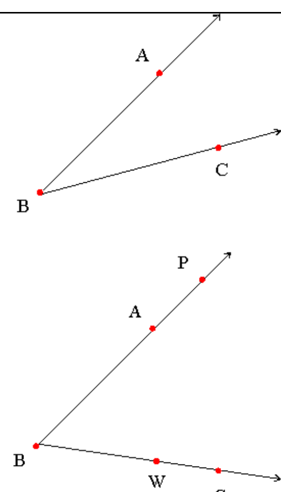







Example: دلته د کونجونو ځنې بیلګی راوړو .






که توري د کونج په خوله کي راشي بنه به وي، خودا هم د ليکني ستونځي دي، چي زه ورسره لاس پهکريوان يم٠ ABC∠ کونجونه داسي بنايو

Example: د همغه کونجلپاره بیل بیل نومونه لرودی شو لکه

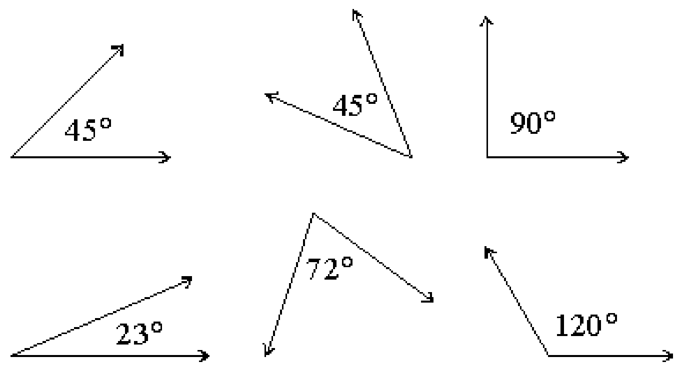
WBA ∠ CBPd∠ ,PBW∠ ,PBC∠ ,

(c) ketabton.com: The Digital Library



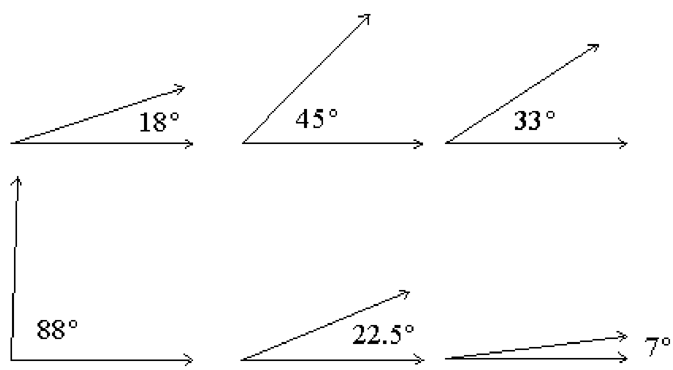
Degrees: د کونج  کچوني یوون یا واحد یا یووالی: کونج  په درجه کچیږي

Example په لاندې کې  ځني بیلګې :




تیره کونج ، چې د صفر او ۹۰ درجو ترمنځ وي Angles Acute

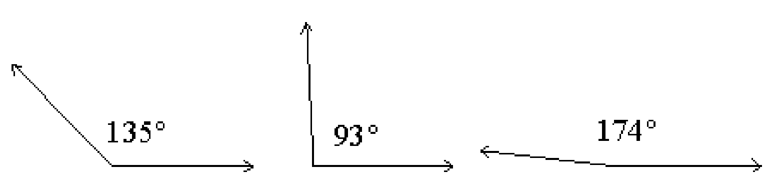
Example لاندې کونجونه تیره دي .




پڅ کونجونه Obtuse Angles

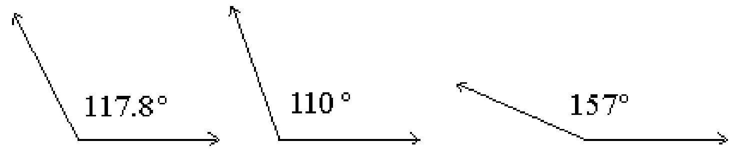
پڅ کونجونه ، حې د ۹۰ درجو او ۱۸۰ درجو ترمنځ وي پڅ کونجونه بلل کیږي.

Example لاندې کونجونه ټولپڅ کونجونه دي:



(c) ketabton.com: The Digital Library





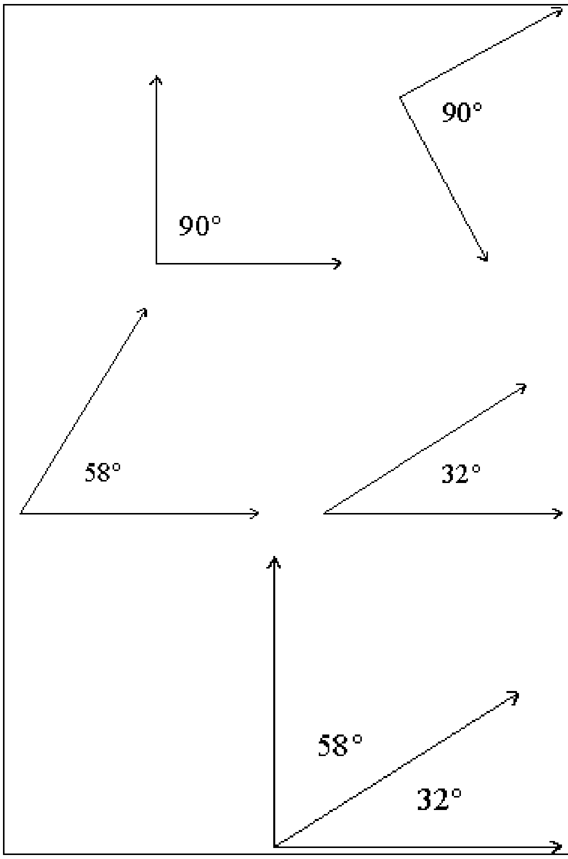

Right Anglesولاړکونج: هغه کونج، چې ۹۰ درجې وي

لاندې دواړه کونجونه ولاړ کونجونه دي:Example

Complementary Anglesکمپليمنت کونجونه: هغه کونجونه، چې يو بل و ۹۰ درجو ته پوره کوي۰کمپليمنچکونجونه بلل کيږي۰ يو کونج د بل کونج کمپليمنت بلل کيږي

بيلگه:Example: دا مخامخ دوه کونجونه کمپليمنت کونجونه دي

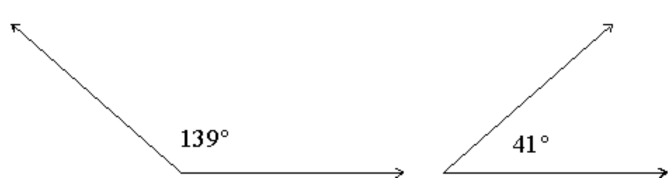
دوه کونجونه، چې داسې سره يوځاى شي،چې يو ولاړ کونج جوړ کړي،نو دا کونجونه يو له بل سره کمپليمنت دي!




**Supplementary Anglesسوپليمنت کونجونه :**

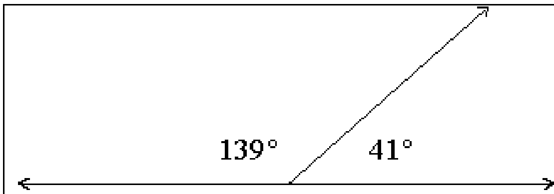
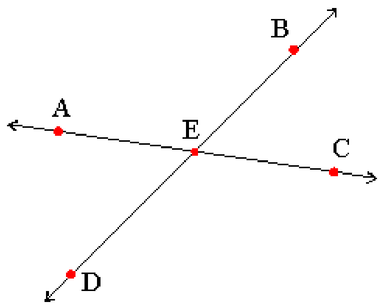
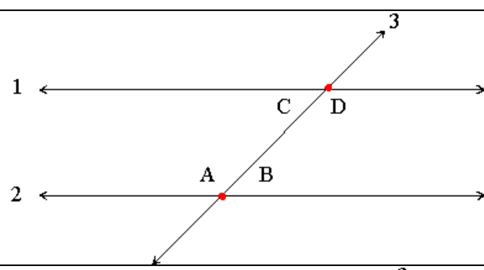
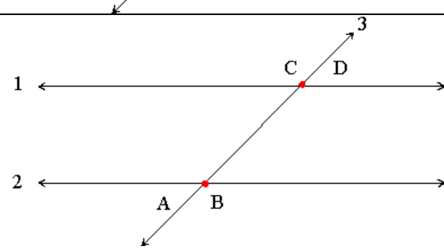
**هغه کونجونه، چې ۱۸۰ درجکو ته سره پوره کوي سوپليمنت کونجونه بلل کيږي**

بيلگه Example: لاندې دوه کونجونه سوپليمنت دي

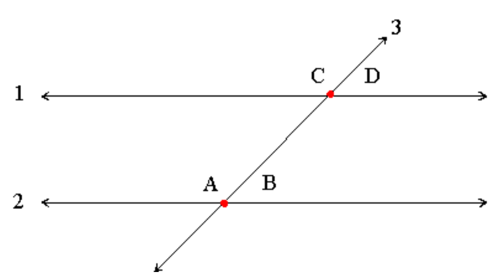


(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
|     | داسي دوه سره ترلي کونجونه، چي ځانونه ۱۸۰ درجو ته پوره کړي سوپليمنت کونجونه جوړوي<br><br>Vertical Anglesکړ په کړ کوجونه: چي دوه کرښي داسي سره غوڅي کړي، لکۀ په لاندي ځيره او کونجونه، همغه ککره ولري کړ په ککره کونجونه بلل کيږي او سره برابر ده<br><br>, AEB او DEC کونجونه او همداسي BEC او AEDکړ په ککره کونجونه دي. |
|   | Alternate Interior Anglesرد بدل دننه کونجونه : په لاندي کي کونجونه Aاو Dهمداسي B او C ردبدل دننني کونجونه او سره برابر دي . A اوB ، C او D ګاونډي کونجوه دي. |
|   | Alternate Exterior Angles<br><br>ردبدل دباندي کونجونه : په لاندي کي کونجونه B او C ردبدل همداسي A او D بدل - يا ردبدل دباندني کونجونه او سره برابر دي |

**پوړيز کونجونه Corresponding Angles دا کونجونه A او C همداسي D او Bپوړيز کونجونه دي او يو له بل سره برابر دي**

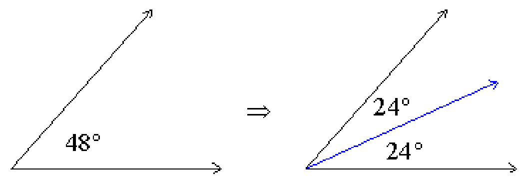


(c) ketabton.com: The Digital Library

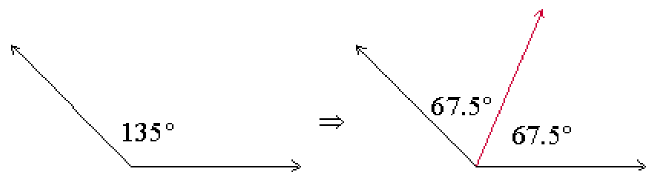


## کونجنیمیAngle Bisector : هغه کرښه، چې کونجونه نیموي کونجنیمی یې بولو

بیلګه Example: د بنی کونج شنه کرښه ، د کین کونج نیمی ده

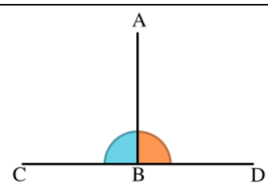



په بني کونج کې سره کرښه د کیڼ کونج نیمی ده .




Orthogonal or Perpendicular Lines

ولاړې کرښې: هغه کرښې، چې یو په بل نیغې ولاړې وي پرپینډکیولار نومیږي٠( زما وړاندیز: نیغې ولاړې کرښې)




نښلونه:

کواوردینات سیستم

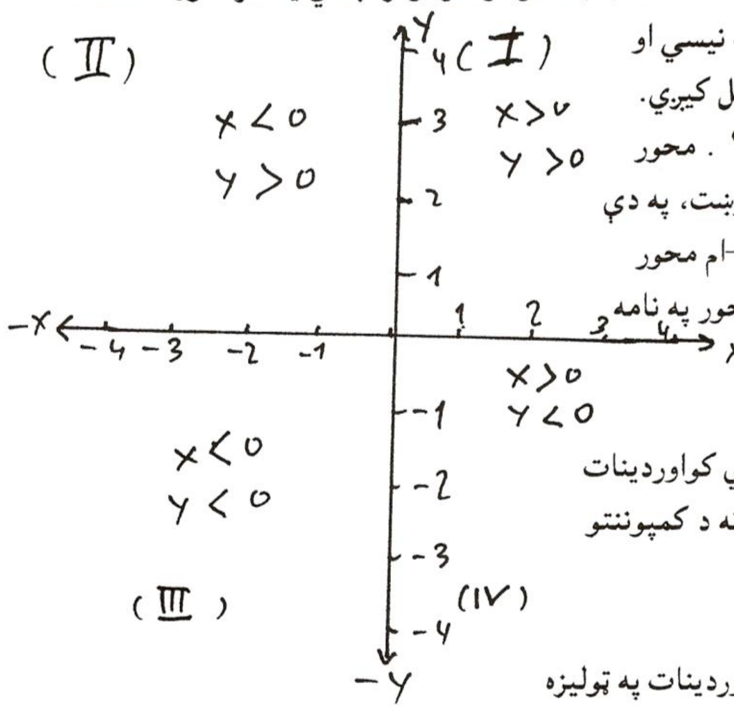
یادونه: کواوردینات سیستم څخه څموږ موخه پروتولاړسیستم دی. دا په ادبیاتو کې په همدسي یادیږي. ما دا دواړه ترمینولوژي کارولې، هیله ده چې ستونځې به پیښې نه کړي.

د شمیرپوهنی او همدا ډول د تخنیك په ډیرو څانګو کی د کواوردینات سیستم ډیر مهم رول لوبوي. په کارتیزي کواوردینات سیستم کی د هواري هر ټکی P د خپلو دواړو کواوردیناتو(x,y ) ورکولوسره کره یا ټیك ورکړ شوی دی. لمړی کمپوننت یا ابسخیز ( Abszisse) د x –ارزښت یا پروت ارزښت او دوهم کمپوننت یا اوردینات

(c) ketabton.com: The Digital Library



( Ordinate ) د y–ارزښت بلل کیږي یا ولاړارزښت. کارتیزي کواوردینات سیستم هواره د دوه یو په بل نیغ ولاړ محورونو ( لنډ: ولاړ محورونو ) له لارې په څلورو برخوویشي ( څلورمی Quadranten ) د کوادرانتو نومره بندي یا نمره کول د ساعت څرخیدلو په څټ صورت نیسي او د ښي پورته لور څخه پیل کیږي. پروتنیغ پروت محور د ۱ . محور یا x–محور یا پروت ارزښت، په دې لوتنیغ ولاړ محور د ۲ –ام محور یا y– محوراو یا ولاړمحور په نامه یادیږي.

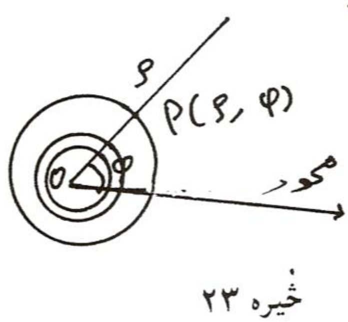



خیره ۲۰ : د کارتیزي کواوردینات سیستم څلور کوادرانتونه د کمپوننتو له مخنخښي سره.

د یوه ټکي P(x,y) کواوردینات په ټولیزه توګه اجازه نه لري چې بدل شي، څکه چې دا کپمونتتونه تنظیم شوې یا منظمه جوړه ده. د څل یا ضرب لمړنی کپمونتت د y– محور څخه فاصله ټاکي دوم کپمونتت د x– محور څخه. که لمړی کمپوننت منفي وي، نو ټکی د y–محور کینې لور ته

---

د دریګوډیز ناخپلواکو (تریګونومتریکي مثلاثاتي فنکشنونو ) ( چې وروسته راغلی ) او همدارنګه دپیتاګوراس له بنستیزی جملی شمیراړونی ( خیره ۲۳ ) کولی شو چې د کارتیزي کواوردینات څخه و پولار کواوردینات ته راشو او سرچپه هم.




خیره ۲۳

(c) ketabton.com: The Digital Library



**جمله** : د پولارکواوردینات بدلون یا ترانسفورمیشن (Transformation) لاتین : **شکل** اړول یا بدلول ) و کارتیزي کواوردینات ته

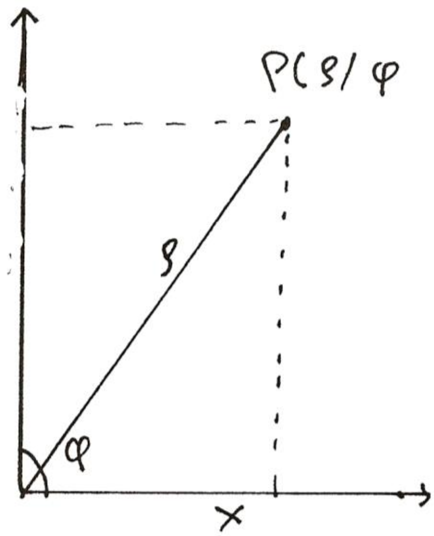
$$x = \rho \cdot \cos \varphi$$
$$y = \rho \cdot \sin \varphi$$

د کارتیزي کواوردینات بدلون یا ترانسفورمیشن و پولارکواوردینات ته

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$




خیره ۲۴

## هندسی بنستیز جوړښتونه:

زه دلته داموضوع اوږده نه څیړم، خو دومره غواړم چي په ګوته کړم، چي تراوسه مو یو څه د هندسی ځنی بنسټیزې کلیمي تشریح کړې او دلته دا غواړم وښایم، چی ځنګه ځنی بسټیز شکلونه کښل کیږي، په هغه صورت کی چی له موږ سره ګردونی یا څرخی (څیرکل یا پرکال او که پرکار مو ورته وایه ) او کرښی یا ختکش وي یا همداسی کونجکچ د مناسبو ویشنو سره موجود وي. ددې لپاره چی ځنی ستونځی مو له منځه لرې کړې وي باید له دې څیرو یوه لیدید ونکی څیره ولروچی دا د دې څیرو په کښلو یا رسم کولو ممکن کیدی شي. دا د عملي اندازې پرابلومونو حل یا ستنځوبي کي هم مرسته کوي، که د اندازي یوونونه (واحدونه ) ونه لرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

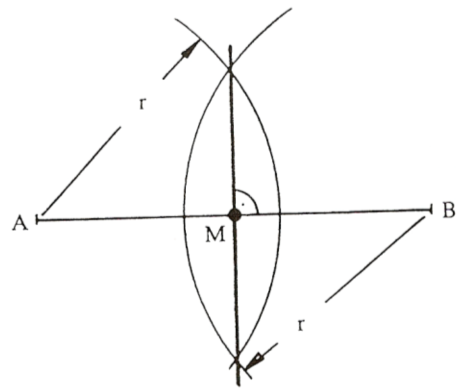


١ – د AB کرښې نیمول او

٢ – د منځ ولاړکرښي کښل

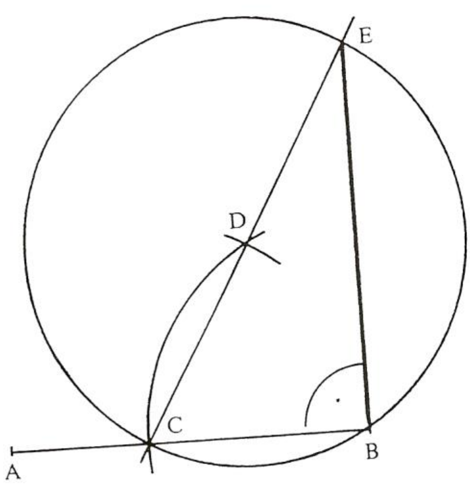
د A او B په هر ټکي یوه ګردۍ د وړانګی $r > (1/2).|AB|$ سره ووهی ( سیومتري دوه ګردۍ ځیرې )

د دواړو ټکو تړلکرښه په غوځټکی M کی په کرښه AB منځولاړکرښه ده او دا کرښه په M کی نیموي.




خیره ۲۵

٣ – د یوې کرښی په سرټکي کی د ولاړکرښی جوړول (یا کښل). په B یوه ګردیلینده ووهی د وړانګی $r < |AB|$ سره، چی AB په C کی پرې کړي، وروسي بیا په C یوه ګردیلینده په همغه وړانګه ووهی چی د مخه وهل شوې ګردیلینده په D کی پرې کړي. D د دریمی ګردۍ منځ ټکی دی د وړانګی $r = CD$ سره. چی CD غزولشوې تر ګردۍ په E کی پرې کوي. E نو په B نیغه ولاړه ده. (تالس ګردۍ دې وکتل شي)




ثیره ۲۶ ( ۳ - [illegible] )

۴ – د ټکي P څخه په کرښه g باندې یوه نیغه ولاړکرښه واچوی ($P \notin g$).

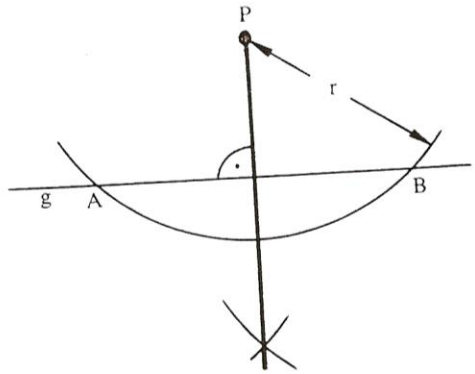
په P کی په وړانګه r یوه ګردۍ ووهی، چی هغه د g له فاصلی( واټن ) لوي وي او کرښه g په A او B کی پرې کړي.

اوس نو لکه په ( ٢ ) کی الترناتیو:

لکه د ( ٣ ) لاندې په کرښې او هندسي دریکوډي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

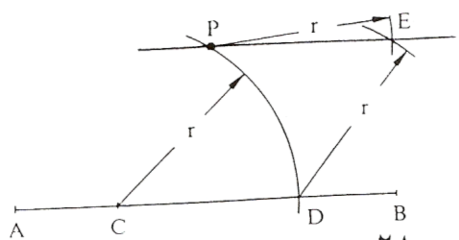




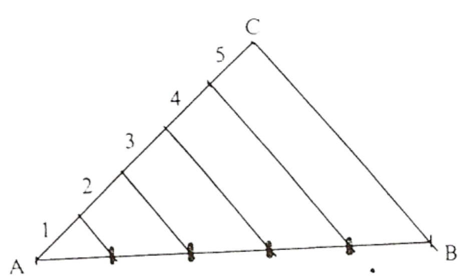

ځیره ۲۷

۵ – د AB کرښې سره دېکي P ∉ AB
یوه غبرګکرښه جوړول (کښل): د خوښې
په یوه ټکي C ∈ AB د وړانګې r = |CP|
یوه ګردی ووهی چی کرښه AB په D کی
پرې کړي، بیا نو په D او P همغه لینده
ووهی چی یو بل سره د E په ټکی کی غو
ځوي. دا د PE کرښه د AB کرښې سره
غبرګه ده. ( دا د روتی نومي څلورګوټي
جوړول دي ).
الترناتیو : لکه په (۴) کی په ټکي P
کی ولاړه کرښه s و AB باندي او بیا
همداسې نیغ – یا ولاړکرښه په s د P ټکی کی.

---




ځیره ۲۸

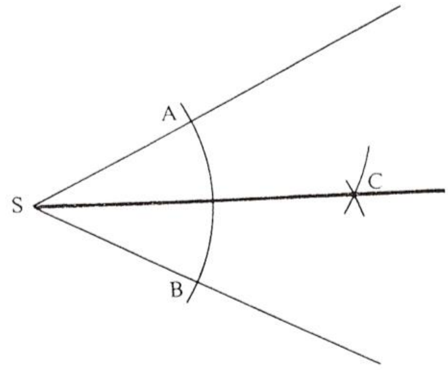



ځیره ۲۹

۶ – د یوې کرښې AB ویشل په n
مساوي برخو (د بیلګي په توګه ۵ )
د A ټکی څخه یوه د خوښې
وړانګه وغزوی. په دې کرښه
بیا n – ځله (دلته ۵ ځله )
د خوښې اوږدې کرښې ووهی.
اخرنی ټکی C له B سره وتړی
او بیا له هر ټکي د BC
مرستکرښې سره غبرګی کرښې
وکاږی، دا غبرګی کرښې د AB
کرښه په ( ۵ ) مساوي برخو ویشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

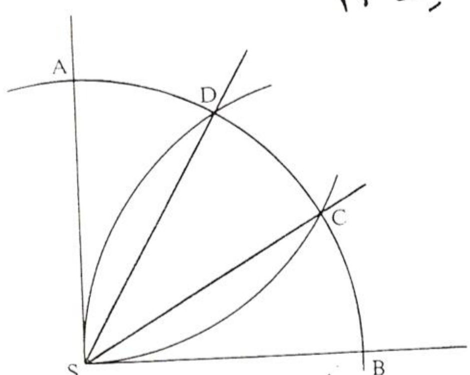





ځیره ۳۲

۷ – د یوه کونج نیمول

په ککره S یوه د خوښې لینده ووهه چې د کونج پښې په A او B کې پرې کړي، بیا په A او B په همغه وړانګه یو د خوښې ګردیلینده ووهې چې یو بل سره په C کې پرې کړي، پریتړکی د S سره وتړی.




ځیره ۳۱

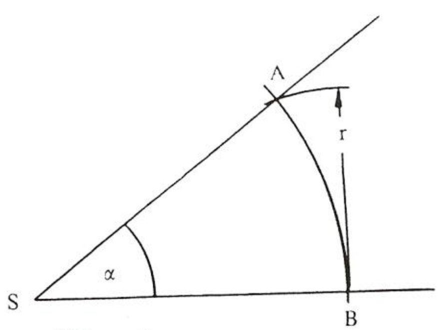
۸ – یو ولاړګوډی په درې مساوي برخو هره °30 وویشی

په ککره S باندې یوه د خوښې ګردیلینده وباسی چې دواړه پښې په او B کې پرې یا غوڅې کړي او له

.

---

دې وروسته د څرښوونکي په همدې بیرته والي یا وازون د A او B ټکو څخه ګردیلیندی وکاږی، اوس د S څخه د C او D په لور وړانګې وکاږی، دا دوه وړانګې دا ولاړ– یا نیغکونج درې مساوي ټوټې کوي یا په درې برابو برخو ویشي.




ځـ ه ۳۲

یادونه : هر د خوښې کونج په څرخې او کرښې باندې په درې مساوي برخو نه

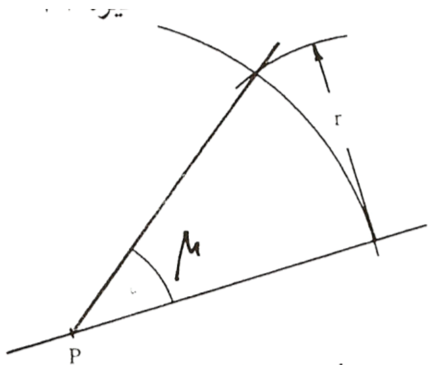
(c) ketabton.com: The Digital Library



ویشل کیږي، ددې لپاره بیا الجبري
مواد په کار دي.

**۹ – د µ کونج په یوه ټکي P**

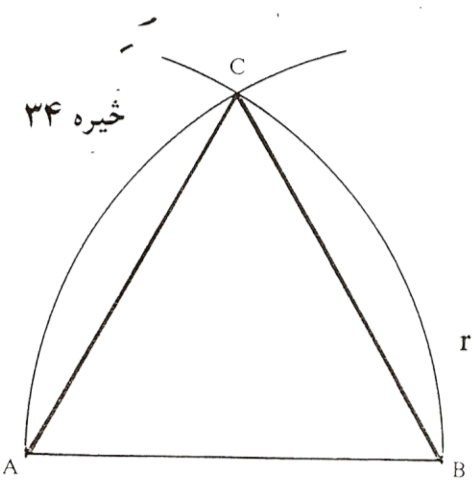
وغزوئ، د ورکړشوي کونج په
ککره S باندې یو ګردیلینده
ووهي چې پښې یې په A او B
کې پرې کړي، بیا نو په همغه
ګردۍ ووهئ چې څرخی د |AB|
په اندازه وي. اوس نو دا پرېټکی
د P سره وتړئ.



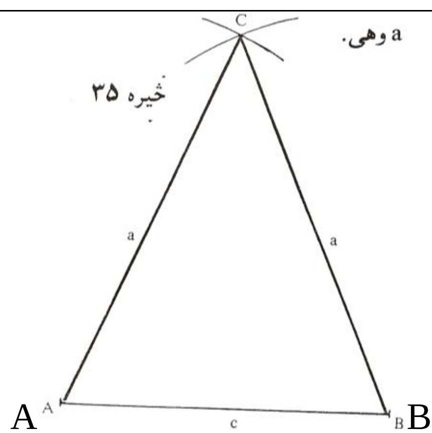

خیره ۳۳

**۱۰ – د مساوي اړخیز درېګوډي**

**کښل:** په A او B باندې یوه
ګردیلینده ووهئ چې وړانګه یې r = |AB|
وي ، چې یو بل په ټکي C کی پرې کړي.




خیره ۳۴

| | |
|---|---|
|  a ووهئ. خیره ۳۵ | بیانو C د A او B سره ونښلوو، دا لاس ته راغلی درېګوډی مساوي اړخونه لري. په همدې ډول مساوي پښیز درېګوډی انځوریږي، د ورکړشوي بسټ AB=c سره. په A او B یوه یوه پښه وه, |

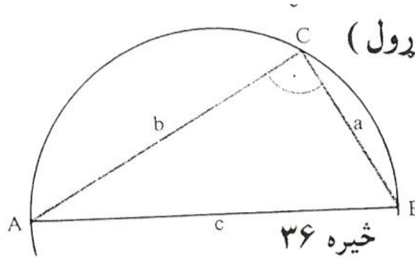
(c) ketabton.com: The Digital Library



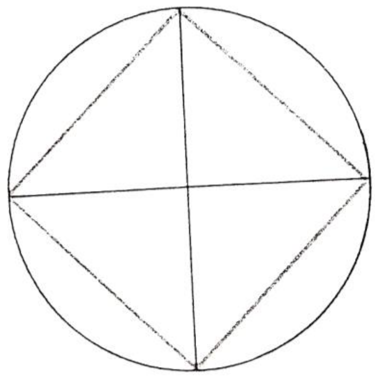
١١ – د ولاړکونجیز درېګوډي کښل ( جوړول )

هر درېګوډی چي اوږد اړخ يې د يوه ګردي قطر وي، ولاړکونجیز درېګوډی دی.

( د تالس ( Thales ) جمله ورودسته راځي



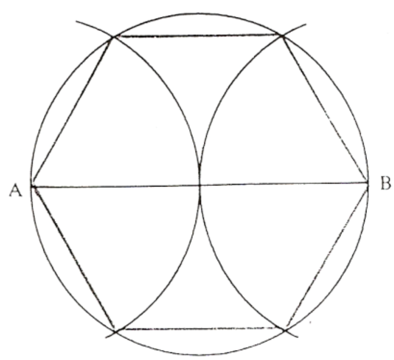

ځيره ۳۶



ځيره ۳۷

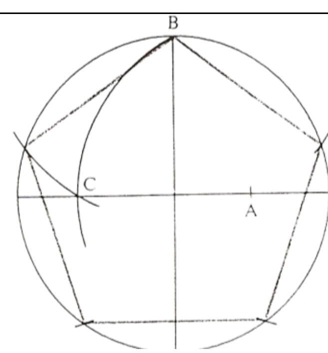
١٢ – په ګردۍ کې د يوې مربع کښل

د ګردۍ په منځټکي باندې لکه په ( ۲ ) کې دوه يو په بل ولاړ نيمي (قطرونه) وکاږی او هغه ټکي چې ګردۍ پرې کړی سره ونښلوی.



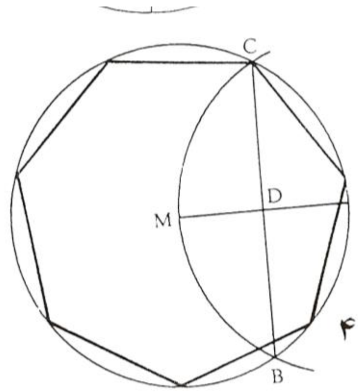

١٣ – په يوې ورکړ شوې ګردۍ کې دمنظم پنځه ګوډی کښل: د ګردۍ وړانګه په A کې نيمه کړی ، له A څخه کرښه AB تر C وکاږی، |BC| د پنځه ګوډي د اړخ اوږدوالی دی. ( ځيره ۳۹ )

ځيره ۳۸

| | |
|---|---|
|  | ١۴ – په ګرۍ کې د منظمم درېګوډي کښل:<br><br>د نیمي یا قطر اخرني ټکو څخه د ګردۍ وړا نګې په اندازه ګردۍ لینده ووهی. د دې ټکو چې ګردۍ پرې کوییوځای کول منظم شپږګوډۍ چوړوي. |

(c) ketabton.com: The Digital Library



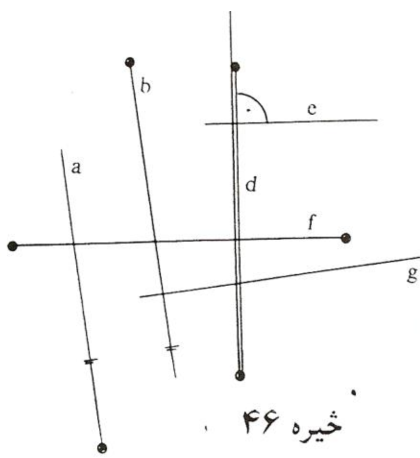



شیره ۴۰

## ۱۵ – د مساوي اوه ګوټیزي

جوړول یا کښل:

د ورکړ شوې ګردي دنیمي اخر ټکی A خخه دAM وړانګه په اندازه ګردیلینده ووهی چې ګردی په B او C کې پرې کوي. د BC کرښه د AM وړانګه په D کې په ولاړکونجي غوڅوي، پس |BD| د مساوي اوه ګوټیز د اړخ اوږدوالی دی.




شیره ۴۶

## تمرینونه

۱ – په ډیري ژبه باندې یې افاده کړی:

الف – ټکی A په کرښه g پروت دی.

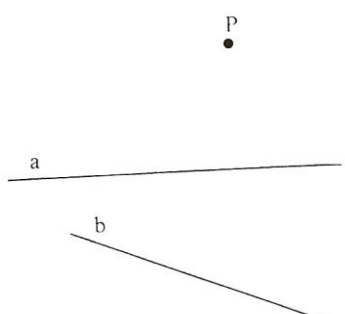
ب – کرښه g د ټکو A او B ترمنځ ځغلي

پ – کرښه AB په ناپای کرښه g پرته ده

ت – ټکی C په کرښه . چې له A وبه B ته ځغلي، پروت دی،

۲ – په شیره ۴۶ کی څومره ناپاي کرښی، کرښی او وړانګي پرتی دي؟

۳ – کومی کرښی غبرګي، او کومی یو په بل ولاړې پرتی دي؟ دا په سمبولو وکاروی (شیره ۴۷)




شیره ۴۷

۴ – هرې کرښي ته جوړ کړی :

الف – یوه ولاړه

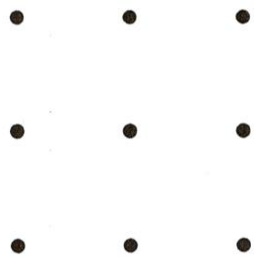
ب – په ورکړشوي ټکي کی یوه غبرګه (شیره ۴۸)

(c) ketabton.com: The Digital Library



۵ – د اسمان کومی لورې یو په بل
ولاړې دي؟

۶ – داسی کرښه لار (چی یو بل سره
تړلي وي) وباسی، چی له ټولو
په خیره ۴۹ کی ورکړ شوو ۹
ټکو تیریږي. دا کرښو تلنه یا کرښو



خیره ۴۸

## خوزیدنه یا تلنه ( حرکت )

د یوې هوارې په خپل ځان یویواځنی خیرونه تلنه یا خوزیدنه ( حرکت ) بلل کیږي او په $\varphi$ ښوول کیږي، که چیرې دا لاندې خویونه ولري:

۱ – د یوې هندسي خیرې ( کرښی، هوارې ، وړانګی ناپایکرښی، نیمهوارې ) خیره ډیري لاندې، یوه هغه هندسي خیره پوهیږو، د کومی چی په غوښتونکی خیره ډیري ژیکرښی پیلټکي ، پایټکي په ژیکرښی ، پیلټکي ، پایټکي باندې خیره شي.

۲ – که $f_1$ او $f_2$ دوه جنډې وي ، ~~نو ټیك یوه تلنه شته~~ نو ټیك یوه تلنه $\varphi$ شته، د $\varphi(f_1)=f_2$ سره.

۳ – که A او B دوه په خوښه ټکي وي، نو یوه تلنه $\varphi$ شته د $\varphi(A)=B$ او $\varphi(B)=A$ سره

۴ – که p او q دوه وړانګي وي ، د ګډ پیلټکي سره ، نو یوه تلنه $\varphi$ شته د $\varphi(p)=q$ او $\varphi(q)=p$ سره.

۵ – د تلنو یا خوزیدنو ډیری، د یو په بل پسی خیرونو ته یو ګروپ جوړوي ( د الجبر برخه یا د لیکوال الجبر کتاب دې وکتل شي )

د تلنویا خوزیدنو ( حرکت ) ځانګړي ډولونه دي :

(c) ketabton.com: The Digital Library



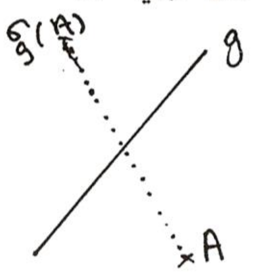
– راکښنه ، چی د τ سره یی ښایو
– ایینونه یا هندارونه، چی د σ سره ښایو
– څرخون چی د ρ سره یی ښایو
که یو ټکی همداسی یوه کرښه ، چی په خپل ځان څیره شي ، نودا وديږ څیرونی ته

یا نسبت وديږ څیرونی ته فیکسټکی ځای په ځای ټکی او همداسی فیکس کرښه یا ځای په ځای کرښه بلل کیږي.
راکښنه τ یوه تلنه یا خوزیدنه ده د لاندې ځانګړو خویونو سره

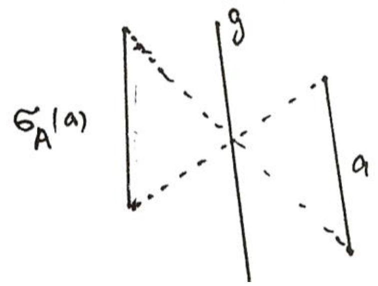
تلنه ۱ ( V ) : د یوې په خوښنه کرښی څیره و هغي کرښی ته غبرګه کرښه ده.
تلنه ۲ ( V ) : که څیرونه کتمټ څیرونه نه وي، نو هر څیره ټکی د خپل اصل ټکي څخه توپیر لري .

ایینونه یا هندارونه . د ایینونی دوه ډولونه موجود دي:

لمړی : ایینونه $\sigma_g$ په یوه کرښه g ، چی کرښ ایینونه ورته ویل کیږي، یوه تلنه ده، د لاندې خویونو سره




س ۱ : دکرښی g هر ټکی فیکسټکی یا په خپلځان څیره ټکی دی ، له دې سره کرښه یوه فکسکرښه ده.
س ۲ : دواړه د کرښی g وازې هوارې یو له بل سره بدلیدلی شي.
څیره ۵۲
دوم: ایینونه $\sigma_A$ په په یوه ټکی ، چی ټکی ایینونه بلل کیږي، یوه تلنه ده ، د لاندې خویونو سره : ( څیره ۵۲ )



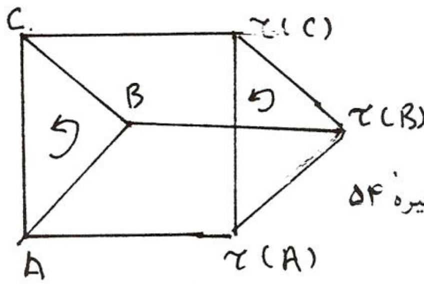

پ ۱ : هره کرښه چی له A تیریږي په خپل ځان داسی څیره کیږي، چی دواړه له A پیداشوې وړانګي یو له بل سره بدلی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



پ ۲ : هره کرښه و دې کرښې ته غبرګې کرښې باندې څیره کیږي. ( څیره ۵۴ )

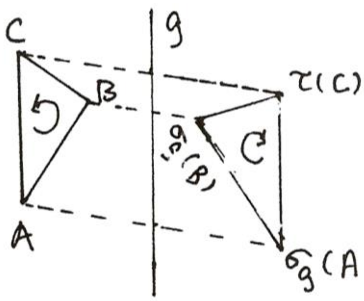
ا څیره ۵۳




**لوریزه تلنه یا خوزیدنه:**

یوه تلنه φ همغه لوریزه ده ، ټیك هلته یا هلته او هلته، کله چې هره څیره F د φ(F) سره همغه لور ولري یا مساوي لوریز وي.

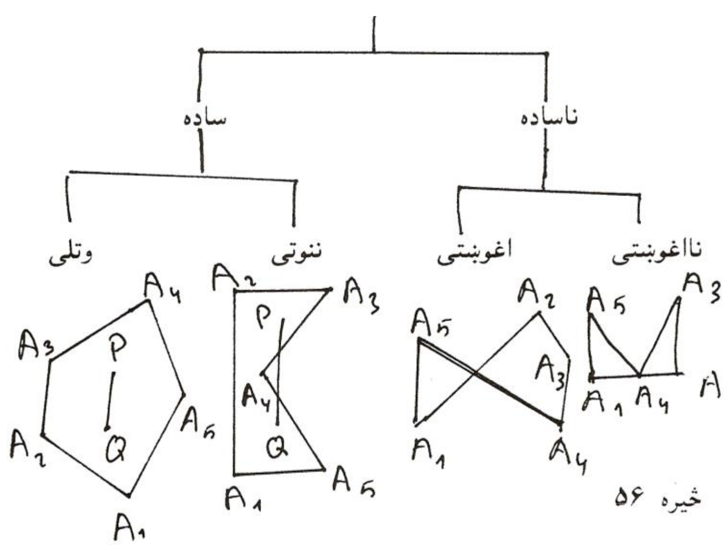
څیره ۵۴




یوه تلنه φ همغه لوریز نه یا نامساویلوریز ده، ټیك هلته یا هلته او هلته، کله چې هره څیره F و φ(F) ته مخامخ یا په څټ لوریز وي.

څیره ۵۵

## ډېرګوډېز ( د بیلګې په توګه پنځه ګوډېز)



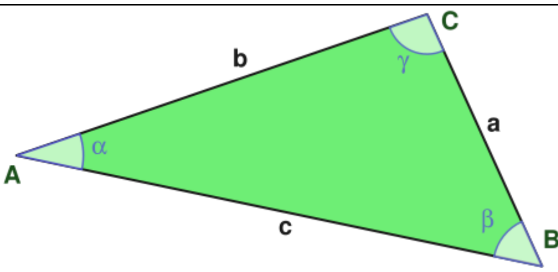

څیره ۵۶

(c) ketabton.com: The Digital Library



یو وتلی n– ګوډی منظم بلل کیږي، که د اړخونو اوږدوالی یی برابر وي او دننه کونجنونه یی مساوي یا برابر لوي وي.

## درېګوډی ( درېګوټی، مثلث)

| | |
|---|---|
| دا چي د دوه ټکو ترمنځ تل یواځی یوه کرښه انځوریدلی شي، نو د یوه شکل لپاره کم له کمه درې ټکی په کار دي، په داسی ډول چی دا ټکي په یوه کرښه نه وي پراته. دا اوس هم په همغه هواره پراته دي. که دا ټکی د څیرې د ګوډټکو په څیر ونیول شي، نو دریګوډی لا سته راځي٠ کرښي، چي درېګوډی په کي راګیر دی یا درېګوډی جوړوي د درېګوډي اړخونه یا هغه عربي یي ضلع بولو٠ | <br>ګورو، چې کوجونه الفا ، بیتا او ګاما دي<br><br>او اړخونه a,b او c دي. په څیره کي ګوډونه په لویو تورو سره په نخښه کیږي یانی A,B او C ګوډونه دي٠ |

## ولې درېګوډی ؟

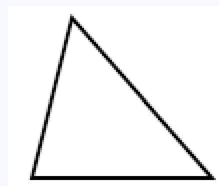
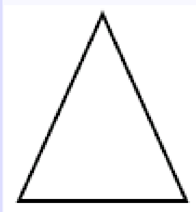
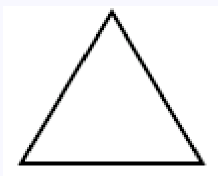
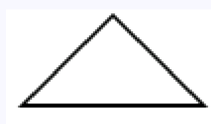
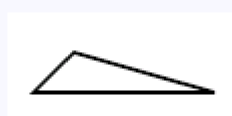
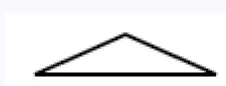
موږ وایو، چې سپین مي د برګ د کور د ګوډ سره ولید، یا د برګ د پټي یو ګوډ اوبو وړی، په یوه څیره کي یا یوه جوړښت کي دننه د دوه کرښو غوڅی کونج بولو او دباندنی ګوډ ٠ کندهاریان وایی ګوټ٠ دا پروا نه لري، که څوک یي ګوډ ، ګوټ او که کونج بولی یانی درېګوډی، درېګوټی او که درېکونجی بولي ، خو ماته یي درېګوډی نوم ښه برېښي٠ پام دې وي، چې له ما څخه دا نوم درېګوډی نومول شوی، دا څیره ده نارینه نه ده، نو له دې امله به ښه وي، که درېګوډی وبللشي، نوره یي د ګرانو هیوادوالو او د ځکګچپو هني مینه والو خوښه٠

## د درېګوډیو مختلف ډولونه یا تیوپونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library



سرليک

| | نامنظم<br>کونجونه او اړخونه يې برابر نه دي. | برابرپښيز<br>دوه اړخونه او دوه کونجونه يې برابردي<br>. | برابراړخيز<br>ټول اړخونه او کونجونه يې برابردي<br>. |
|---|---|---|---|
| **تيره کونجيز- درېګوټي**<br><br>**ټول کونجونه يې تيره دي ياني له ۹۰ درجو کوچني دي**<br>**<90°.** |  |  |  |
| **ولاړکونجيز درېګوډی، يو کونج يې ولاړکونج دی** | |  | |
| **پڅکونجيز درېګوډی**<br><br>**يو کونج يې پڅ دی ياني له ۹۰ درجې لوي دی.(>90°)** |  |  | |

د کونجونو الفا ، بيتا او ګاما ( $\alpha,\beta,\gamma$ ) او اړخونو a,b,cله مخې د درېګوډيو مختلف تيوپونه سره بيليدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په پورته ځیرو کې پورته ښی لور ته درېګوډي همغه رسم شوي، خو دا یو دې د بل سره برابر پام کې ونه نیول شي، یانی د یوه درېګوډي پښی دی نابرابرې وي۰ تیره کونجیز درېګوډی، چې دریواړه کونجونه توپیر لري، درې برابرکونجونه لري ، دوه کوجونه یې سره برابر وي، ولاړکونیز، پڅکونجیز، دا هم د برابرو او نا برابرو کونجونو سره ۰ هغه درېګوډی، چې دوه کوجونه یې سره برابر دي، اړخونه یې هم برابر دي او د برابرو کونجونو په مخامخ برابر اړخونه پراته دي۰ دا لاندي ښه ځیړل شوي دي، د ځیرو سرهړ.

د درېګوډي یو له بل بیل ډولونه

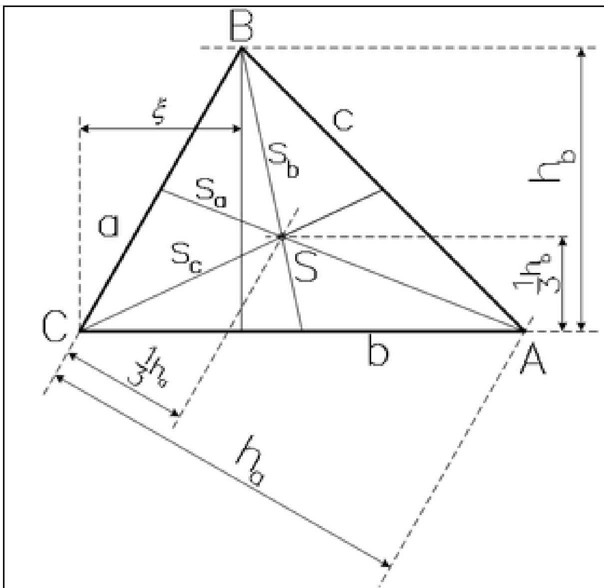
د دریګوډي د پام وړ ټکی

- د دریګوډي هر درې یوډوله کرښی ، یو بل په یوه ټکی کی پرې کوي

- اړخنیمی په S کی

- د کونجنیمی یا نیموونکی په W کی-

- اړخنیمی د منځ ولاړې (کرښی) په M کی: دا هغه کرښه ده، چې د دېګوډی د اړخ په منځ ولاړه ده، چې موږ یې منځولاړه بولو




-. جګکرښی یا جګي په H کی

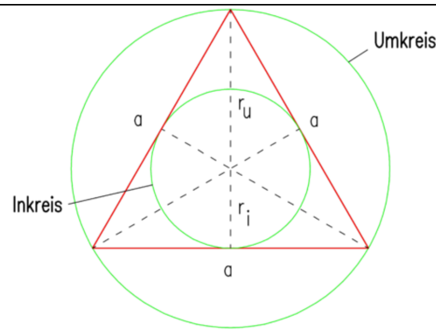
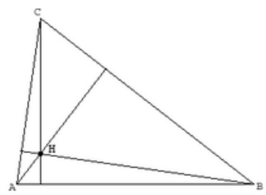
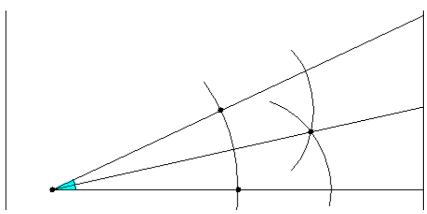
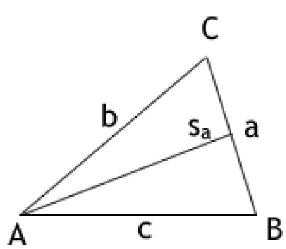
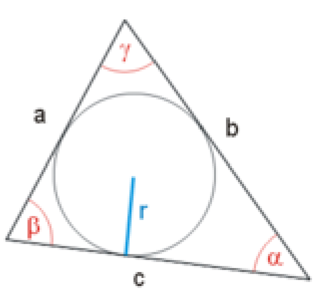
دا ټکی د یوه دریګوډي د پام وړ ټکی دي - :

له دوي ځخه S دروندټکی(د ثقلمرکز)

له دوي ځخه W د دننه ګردی منځ ټکوړانګه او M د دباندې یا راګردې ګردی یا نوره هم ښه خورا ښه او مناسبه نوم یې چاپیریالګردی منځ ټکی دی ( وړانګه) r، د چاپیریالګردی منځټکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

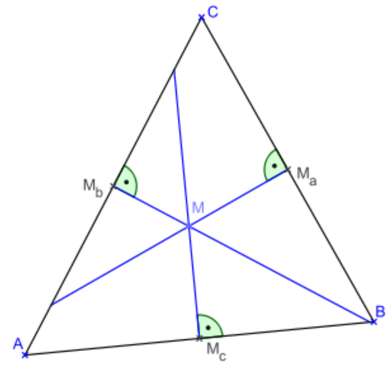


| | |
|---|---|
|  | دلته هځيږو، چې ځيرې راوړو، د ځيږنې سره يې :<br><br>اي ىدرکـيدنوخ Inkrei Umkreis<br>دهراتاو-يا په راتاوکردی |
|  | په لاندې ځيره کې جګې کرښې وينو٠ دا هغه کرښې دې، چې را په ګوته کوي، چې اړخ د کونې سره کوم جګی لري او دا کر په يوه ټکی کې غوځوي٠ |
|  | په مخامخ ځيره کې کونجنيمی ګورو او وينو، چې څنګه کښل يا رسم کيږي٠ |
|  | په مخامخ ځيره اړخنيمی کتل کيږي٠ دا هغه کرښه ده، چې له کونج څخه اړخ نيمی٠ |
|  | په مخامخ په درېکوډی کې د خوندي ګردی منځټکی د وړانګی سره کتل کيږي٠ |

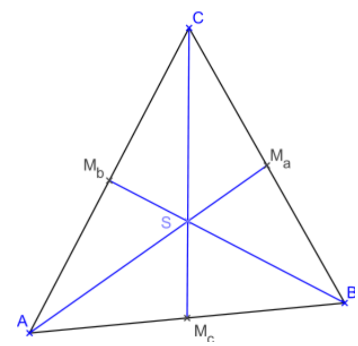
(c) ketabton.com: The Digital Library



لاندې څېره په درېګوډي کې په منځولاړې
ګرښې په ګوته کويو چې پّ لړونده ټکي
کې سره غوڅوي

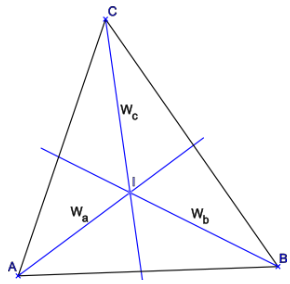



په لاندې مخامخ دريګوډي کې درې
اړخنيمۍ ورکړ شوي،چې ته يوه ټکي کې
سره غوڅوي

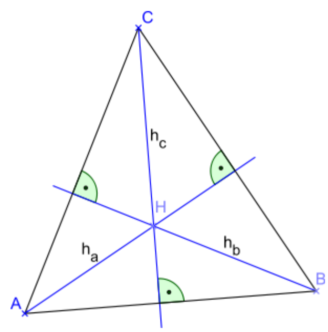


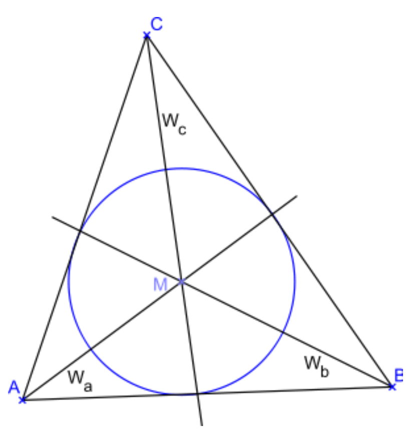

په مخامخ څېره کې ګورو، چې کونجنيمې
ی خونديګردی منځټتي کې سره غوڅوي

په لاندې درېګوډي کې دې کونخنيمۍ ديو
جې په يوه ټکي سه پرې کوي



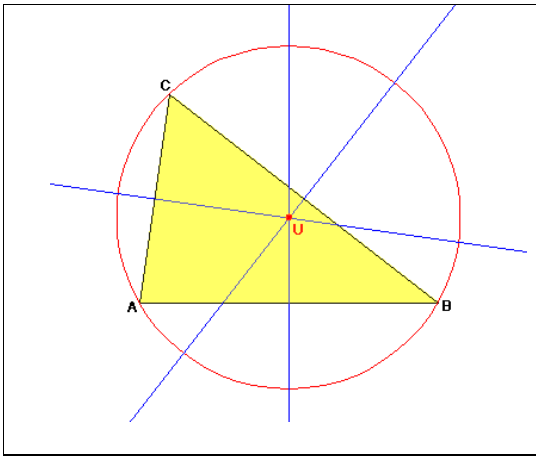
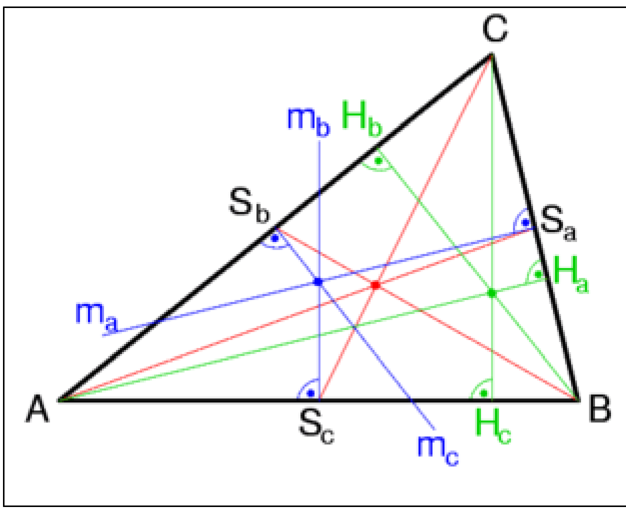

په لاندې څېره کې د درېګوډي درې جګې
ورکړ شويو چې په يوه ټکي کې سره
غوڅوي



(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| په مخامخ ځیره کې د درېکوډی منځولاړې ګوروو چې غوښتککی يې ی راتاوګردی منځټکي دی |   |
| په مخامخ ځیره کې هغه اړخنیمی، چې په اړخ ولاړې دي کتل کیږي، په اړخنیمی ولاړې، جګی او اړخنیمی کتل کیږي، چې دریواړه په یوه کربنه پرتې دي • |   |

د جګو غوښتکی (شین)، راتاوګردی منځټکی(اسماني یا زرغون)، دروندټکی(سور) په یوه کربنه پراته دي.

د درېکوډیو جوړید امکانات یا شونتوب: درېکوډي یواځنی جوړیږي (همدا یو درېکوډی او بل، چې له دې درېکوډي توپیر ولري نه شي جوړیدی ) ،

-که د دریګوډیو دریواړه اړخونه ورکړ شوي وي،

-یا دوه اړخونه او له دې اړخونو بند کونج یا

- یو اړخ او ددې اړخ په دواړو سرونو یا اخرونو کونجونه ویپژنو

(c) ketabton.com: The Digital Library

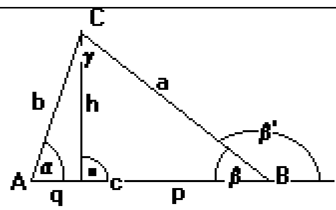


یا په همدې ډول هغه دریګوډی، چې دوه اړخونه او د لوي اړخ مخامخ کونج یی پیژندل شوی وي. د کونګروانیڅ جملو کی یی بیلګي راځي .

د دریګوډي پیژندنه لنډ: یو n - ګوډی، چې n=3 وي، دری ګوډی بلل کیږي .

په دریګوډي کی جملی:

په عمومي ډول لاندې جملی باوري یا معتبرې دي چې بي له ثبوته دلته راوړل کیږي.

| | |
|---|---|
| ۱ - د کونجزیاتون جمله : په درېګوډي کی ټول کونجونه °180 لري<br><br>°180 = □ + □ + □<br><br>په مخامخ ځیره ګي $\beta'$ د $\beta$ ګاونډی کونج دی |  |

۲ - د دباندني کو نج جمله: دباندی کونج د ناګاونډیو کونجونو زیاتون یا مجموعی سره مساوي دی،له دې امله د درېګوډي د دباندنیو کونجونو زیاتون °360 لري:

یادونه : ګران د ځمککچ مینه وال دې دا ځیره له پ ورتہ ه ځ برې ځخه پوره کړي ۰:

۳ – درېګوډي نامساوات یا دریګوډي نابرابرونو نه:

په هر درېګوډي کی د دوه اړخونو اوږدوالی زیاتون د دریم اړخ اوږدوالی ځخه لوي دی

$$a + b > c \; ; \quad a + c > b \; ; b + c > a$$

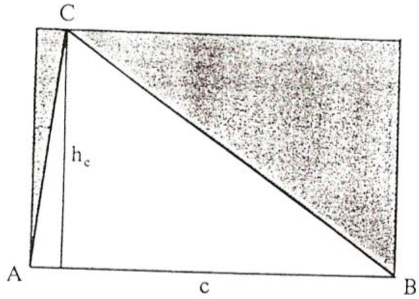
۳ الف-د هر دریګوډي دوه اړخونو اوږدوالي مطلقه ارزښت کمون، توپیر یا فرق د دریم اړخ اوږدوالی همغه- یامطلقه ارښت ځخه کوچنی دی

$$| a - b | < c ; \quad | a - c | < b \; ; \quad | b - c | < a$$

۴ - د درېګوډي چاپیریال د دریواړو اړخونو زیاتون دی $U = a + b + c$

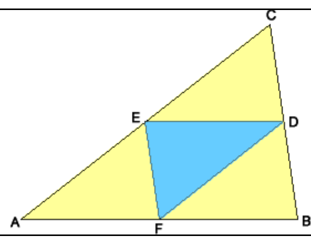
(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| ۵ - د درېکوړی منځهواره (د هوارې دننه ) لنډ : هواره (، د يوه اړخ اوږدوالی او په هغی کښلی (نيغ) ولاړ جګوالی(لنډ: جګوالي) د ځل نيمايي دی<br><br>$F = a.ha/2 = b.hb/2 = c.hc/2$ |  |

د ښووني لپاره يي د يوه لنډ چل ځخه کار اخلو: موږ درېکوړی د جګکرښي په اوږدو باندې په دوه ولاړکونجيو غوځوو او د درېکوړي په اړخ يی ځيره باسو، په دې ډول دوه ولاړکونجيز دريکوړي منځ ته راځی، چی د هغی ټوله هواره، د غوښتونکي درېکوړي هوارې دوه برابره ده.

دا له پورته ځيرې ځخه هم ځرګنديږي.

| | |
|---|---|
| ۶ - د درېکوړي اړخونو نيمايي هغه منځنی درېکوړی جوړوي، د کوم اړخونه چی نيمايي دومره اوږده وي لکه د پيل شوي درېکوړي( د و ړانګي جمله دي وکتل شي |  |

ګورو چی د يوه دريکوړي جګی تل ځرګند نه دی. مګر دا چی د يوه جګي له لارې يو دريکوړی په دوه برخو ويشل کيږي، چی په دې ډل دوه ولاړکونجيز دريکوړي ترې منځ ته راځي، چی دا جګی بيا د پيتاګوراس له لارې -جملی چی وروسته راځي - او يا د تريګونومتري يا کونجکچ متودو يا لارو له لارې ، چی هغه وروسته ځيرل کيږي، لاس ته راوړی شو .

| | |
|---|---|
| Satz des Thales: د تالس جمله<br><br>که AB د يوي ګردی(دايرې) يوه نيمی (قطر) وي او C په دې ګردی پروت وي، نو درېکوړي | |

(c) ketabton.com: The Digital Library



ABC په C کې ولاړکونجيز دی٠

د دې جملې په څټ یا برعکس دی:

که چیرې درېکوډي ABC په C کې ولاړکونجيز وي، نو C په ګردی پرته ده د نیمي AB سره

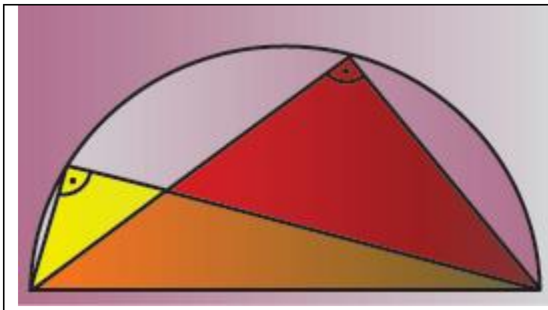
د جملې د ښووني لپاره: دا برخه دې دا دلته د ښوونځي شاګردانو لپاره نه وي٠

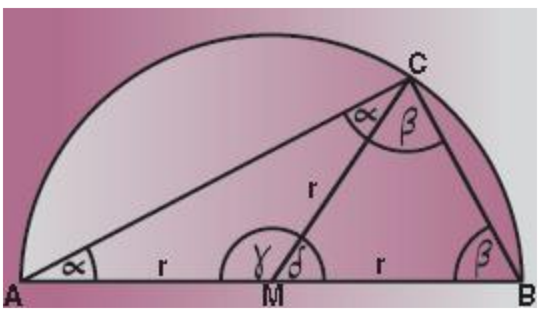
$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 180^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

له دې لاس ته راځي

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$






د پیتاګوراس (فیثاغورث Satz des Pythagoras)

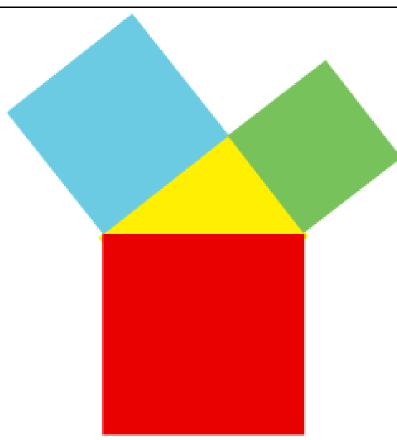
په یوه ولاړکونیجز درېکوډي کې ، چې کاتیتونه یا ولاړ اړخونه يې a او b وي، د هیپوتینوزی یا اوږد اړخ يې c سره پخ نخښنه ګوو , باور لري

$a^2+b^2=c^2$

د دې جملې په څټ یا برعکس

که د یوه درېکوډي ABC د اړخونو a, b, cلپاره باور ولري

$$a^2+b^2=c^2. F = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = b.\frac{h_b}{2}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library



نو دا درېګوډي په C کې ولاړکونجيز دی يا د پيتاګوارس جمله وايي، چې په يوه ولاړکونجيز درېګوډي کې د هيپوتينيوز(لوي اړخ) ځلوری يا مربع د کاتيتونو(ولاړ اړخونو) د ځلوريو  يا مربعګانو د زياتون سره برابره ده.

ولاړکونجيز درېګوډی يو ولاړ کونج لري يانې ۹۰ درجې کونج

د درېګوډی اوږد اړخ د لوی کونج مخامخ پروت دی ، چې هيپوتينوز *Hypotenuse* يا لوی اړخ بلل کيږي

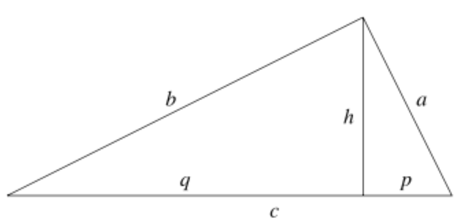
نور دوه اړخونه کاتيتونه *Katheten* يا ولاړ اړخونه بلل کيږي۰

## لاندې جملې ښايو:

دا جملې ټولې يوځاي راوړل شوي

جمله : ولاړ کونجيز درېګوډی      a + b + c = U

a.b / 2 = c . hc / 2 = F

| | | |
|---|---|---|
| د پيتاګوراس جمله | $c^2 = a^2 + b^2$ |  |
| د اويکليد<br>د کاتيتونويا ولاړ اړخونو جمله | $a^2 = c \cdot p$ | |
| | $b^2 = c \cdot q$ | |
| | $c = p + q$ | |
| د اويکليد د جګيو جمله | $h^2 = p \cdot q$ | |

(c) ketabton.com: The Digital Library



جمله : برابر- یا مساوي پښيز درېګوډی جګی

$$h=\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}$$

$$U = 2a + b$$

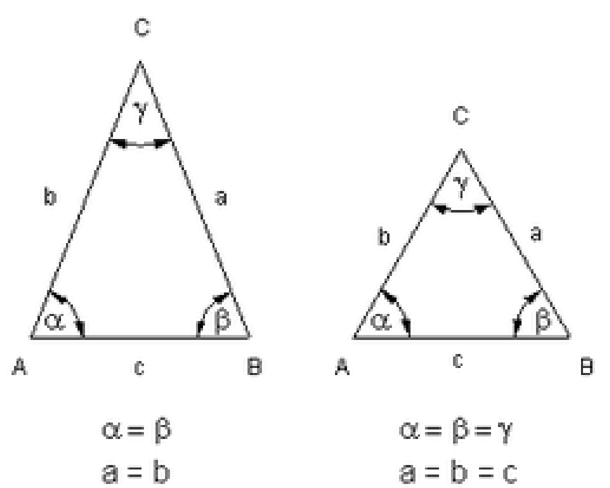
$$F=\frac{b}{2}\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}=b.\frac{h_b}{2}$$

ځکه چی $h=\sqrt{a^2-\frac{b^2}{4}}$ (د پيتاګوراس جملی له مخی(پيتاګوراس جمله وګوری)

**جمله : برابر اړخيز درېګوډی :**

**د يوه برابر اړخيز درېګوډي ټول درې آړخونه برابر دي، دنني کونج ونه برابر لوي دي، له دې امله برابر اړخيز درېګوډي منظمو پوليګونونو پورې اړه لري۰) پوليګون لاتين ډيرکوډيز( <u>Polygonen</u>).**

د برابر اړخيز درېګوډي هر کونج ٦٠ درجې دی۰ برابر اړخيز درېګوډي تره کونجيزو ډريوګوډيو په ډله کې دی، ځکه، چې ټول درېکونجونه له ٩٠ درجو کم دي
په دې برسيره يوه برابرااړخيزه درېګوډیيوه برابرپښيزه درېګوډی هم ده۰
ټول برابراړخيزدرېګوډي يو بل ته ورته دی ( وروسته راځی)

| | |
|---|---|
| په يوه برابراړخيز درېګوډي کی، د يوه اړخ کونجنيمی-، اړخنيمی-، په منځولاړې-اوجګی –يو په بل پريوځي۰ په ورته توګه دا د ضوندي ګردی دباندي ګردی او دروندټکی اړخ جګيو غوڅټکی لپاره هم په يوه برابراړخيز درېګوډي کې باور لري۰ |  |

(c) ketabton.com: The Digital Library



پورته څیره کې کیڼ لور ته برابر پېښیز - او ښي لور ته برابراړخیز درېګوټی دی٠ هر برابر څه یې کښل شوي٠

د یوه برابراړخیز درېګوټی، چې د اړخ اوږدوالی یې a دی، لپاره باور لري

| | |
|---|---|
| $A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ | Fläche *A*<br>*هواره یا سطحه* |
| $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ | *جګوالی*Höhe *h* |
| $r = \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{a}{\sqrt{3}}$ | د چاپیریالګردی وړانګهUmkreisradius *r* |
| $\rho = \frac{\sqrt{3}}{6}a$ | د خوندي ګردی وړانګهInkreisradius ρ |
| $u = 3 \cdot a$ | *چاپیریال*Umfang *u* |

د برابراړخیز درېګوټي خویونه دې ګران لوستونکي وښایي

**د اویکلید د کاتیتونو یا ولاړ اړخونو جمله**

دواړه سرې هوارې یو له بل سره او همداسې دوآړه شنې هوارې همغه منځهواره لري٠ یا په بل ډول : د سرو او شنو ولاړګوډیو هوارې یو له بل سره برابرې دي٠

$a^2=pc$ او $b^2=qc$

(c) ketabton.com: The Digital Library



که a,b,c د ولاړکونجيز درېګوډي اړخونه وي، د هيپوتينوز c سره٠ که دا درېګوډی په جګي h په دوه برخو وويشل شي او p يې هيپوتيوز ټوټه په a ده او qهمداسې ټوټه ده په b، نو باور لري:

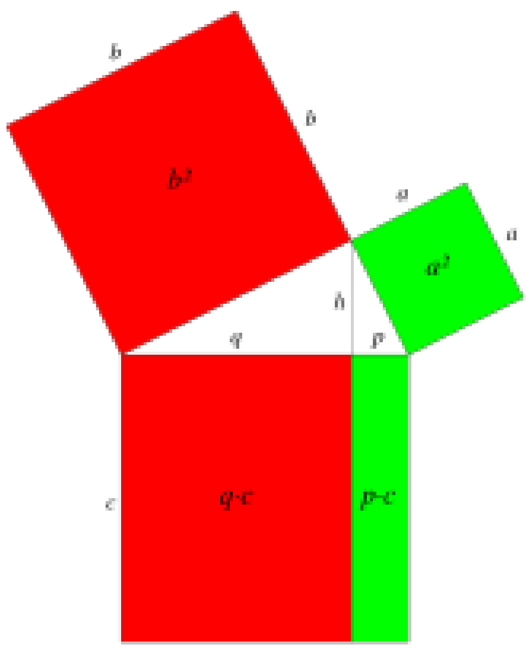
په aخلورى د p او cولاړکونجيز خلورکوډي او په bخلورى د ولاړکونجيز خلورګوډي، د اړخونو q او cسره هوار برابره ده ياني هواري يا سطحی يې برابرې دي٠

لاندي څيره دې وکتل شي٠ پام دې وي ، چې دا پورته ښونه او دا لاندی سره برابرې دي، خو يواځی څيرې يې بدې دي، دوه څله ښوونه پروا نه لري٠

*فرمول يې :*

$$a^2 = p.c$$

$$b^2 = q.c$$




Kathetensatzد کاتيتيونو جمله:دواړه سرې هوارې همغه منځهواره لري او همداسې دواړه شنې هواري هم *د اړخ او خلورى د فرمول په څير په لاندې ډول دي*

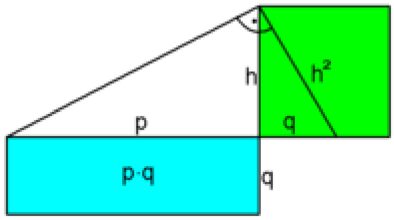
$$a^2 = p \cdot c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$b^2 = q \cdot c$$

## د اويکليد جګجمله Höhensatz des Euklid

| | |
|---|---|
| <br> | $h^2 = p \cdot q$<br>د جګجملی د بیاتیونې ښوونه( دا لږ ستونځمنه ده، خو زما يې دا ځيره بدلون ښه راځی ګرانو لوستونکو ته په مينه وړاندې کيږي) : |

د جګجملی ښوونه : د پيتاګوراس له جملې $a^2 + b^2 = c^2$

او د بينوم له فرمول

$$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

ځخه ښوونه لاس ته راځي

په دياګرام کې درې درېګوډي ليدل کيږي، يو له اړخونو a,b,c, ، بل له اړخونو h,p,a او h,q,b. سره، د دې هريوه درېګوډي لپاره د پيتاګوراس جمله باور لري٠:

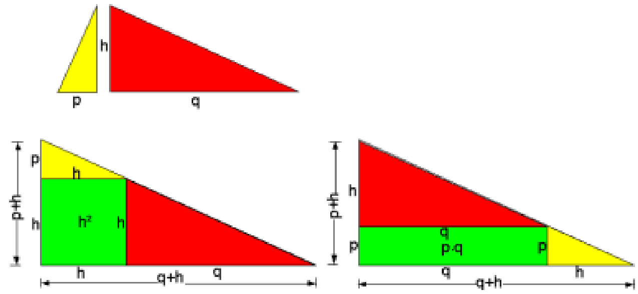
$h^2 = p.q \iff q^2 = pq+q^2 + h^2$

د پورته بياتيونې له لارې ښوول کيږي٠

جيومتريکي ښوونه

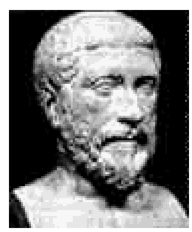
(c) ketabton.com: The Digital Library






دا ځیره دې ګران لوستونکی پام ته را وبولي، چې څنګه د ښووني کار مخ ته ځي

( تمرین)



**Pythagoras von Samos د ساموس پیتاګوراس**

تکرار: په ولاړکونجیز دریکوډي کي د کاتیتونو(ولاړ اړخونو) د څلوریو یا مربعګانو زیاتون د هیپوتینوز(اوږده اړخ) د څلوری سره برابر دی۰

دا جمله د پیتاګواراس جملې ترنامه شهرت لري او د ساموس پیتاګوراس د ژوند سره برابر ځای نیسي۰ لکه لاندې په ګوته کوي،چې دا انسان له دې خورا زیات وو۰

دا یو له مانا ډک انسان دی »برتراند راسل « Bertrand Russell - ",,

دی د جلبازو مشر دی « هیراکلیت»Heraklit - ",,
Ludwig Börneلودویک بورنې د هغهٔ په هکله وایي« کله، چې هغه دا جمله پیداکړه، هغه د خدای په نامه سل سوخندر خیرات کړل۰ له هغې وروسته ټول سوخندر لړزیږي، ترهغې، چې نوي څه کشف شي «

(c) ketabton.com: The Digital Library



پيتاکوراس په570دزکال پخواپه جزيره ساموس کې پيداشوی .
پلالر يې سامي زرګر منيسارښوس **Mnesarchos** دی

چې شل کلن وو د تالس **Thales** په ميلت Milet او انيکشيماندر کې يې زده کړې کولې

د پيتاګوراس ښوونه يا پوهنه Die Lehre Pythagoras

روح نه مري او ځاي بدلوي، داسې، چې له يوه ژوندي څخه وبل ته ځي

**د پيتاګوراس جمله**

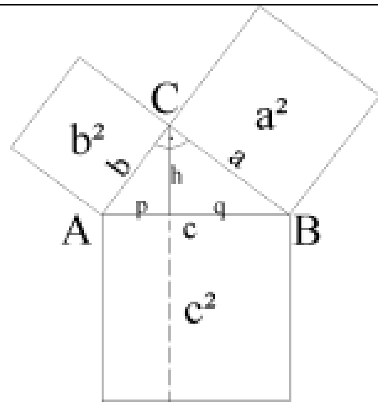
په يوه ولاړ کونجيز درېګوډي کې د کاتيټونو(ولاړو اړخونو) څلورى زياتون د هيپوتيډنوز (اوږده اړخ)له څلورى سره برابر دى

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbf{c^2}$ | **=** | $\mathbf{a^2 + b^2}$ |
| $p \cdot c$ (د کاتيتونو جمله) | = | $b^2$ |
| $q \cdot c$ | = | $a^2$ |
| Kathetensatz کاتيت جمله د | | |
| $p \cdot c + q \cdot c$ | = | $a^2 + b^2$ |
| $(c \cdot (p + q)$ | = | $a^2 + b^2$ |

دپورته لپاره لاندې څېره وګورى

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
|  | د دې جملې د ښوونې لپاره له ۲۰۰ څخه زیاتې اوبیونې یا ښوونې (ثبوتونه ) شته |

پیلونې او ښوونې

**د یوونځلورۍ یا یوون مربع څیره**

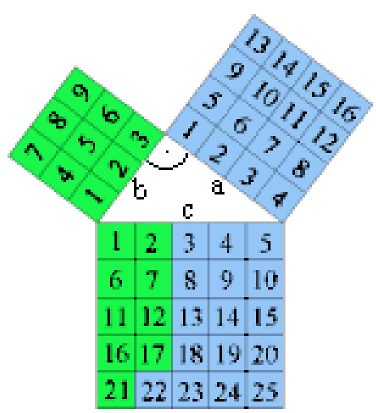
یو ولاړ کونجیز درېګوډی لرو، چې اړخونه یې په لاندې ډول دي

(z.B. a= 3cm; b= 4cm; c= 5cm)

په هر اړخ ځلورۍ جوړوو، لکه لاندې څېره

$$25cm^2 = 9cm^2 + 16cm^2$$

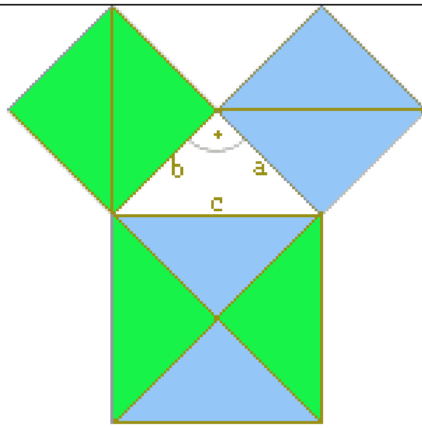
$$c^2 = b^2 + a^2$$



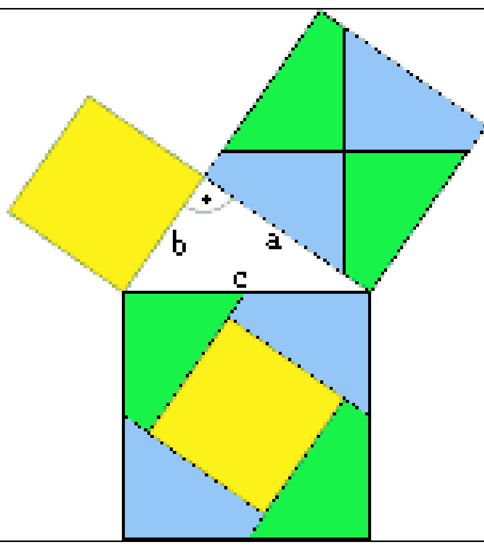
(c) ketabton.com: The Digital Library



په لاندې کې يو برابرپښيز ولاړکونجيز درېګوډی لرو:

| | |
|---|---|
| ولاړکونجيز برابربرپښيز درجګوډی، چې اوږد اړخ يې دی (z.B. c=5cm).<br><br>اړخونه $a^2$ او $b^2$ ګورو، نو کره به ورته وګورو، چې څه شوي ياني ځنې څلوری نيمې شوي او ځنی بيا په څلور برخو ويشل شوي.<br><br>که ځير Jته وګورو، څه کره کولی شو؟ |  |

## 2.2 په خوښه ولاړګوډيز لرو

| | |
|---|---|
| دا په خوښه ولاړکونجيز درېګوډی دی (z.B. c= 4,5cm)) تالس ګردی د لويې کتيت څلری له منځ څخه لوي اړخ ته يوه غبرګهکرښه وکاږی او هيپوتينوز ته يوه ولاړه $a^2$ غوڅه کړي. ګران لوستونکي دې له ځيرې څخه پخپلهپه ګوته کړي، چې د لوي اړخ څلوری د نورو اړونو د څلوريو سره برابره ده |  |

## 3. د ځيرې ځمککچيزه لارښودنه

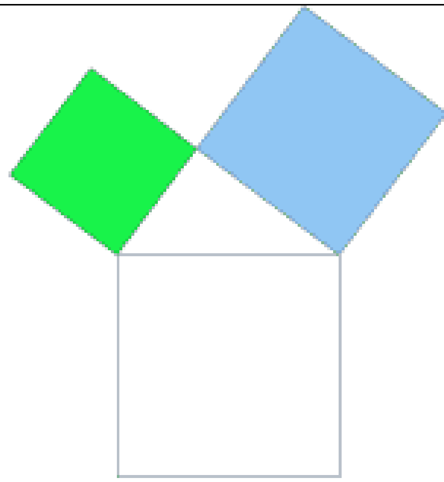
د لوړو ګوډونو يا کاتيتونو څلوری په درېګوډي ABC کې دننه د غبرګ اړخيز په څېر غوڅ کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library



غبرګ اړخيز د لوی اړخ ځلوری(مربع) کډېکي باندې د هغې تر يوه اړخ پوری و څرخوی .

غبرګ اړخيز(مايلګوډيز) يوه ولاړګوډيز په ډول د لوی اړخ مبع يا ځلوری هوارې کې دننه بياتي کړی



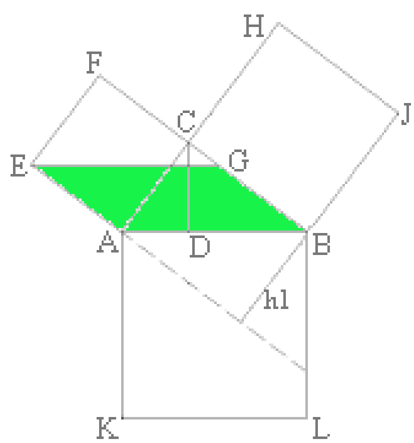
ښوونه :الف : بياتيونه:

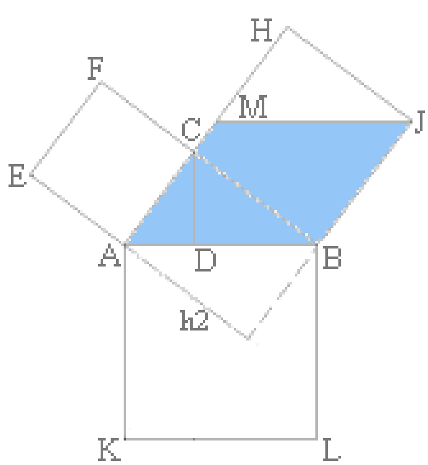
EACF = EABG . 1

ځکه, جي برابر بنسټلاين EA او برابر حګی

BJHC = BJMA . 2

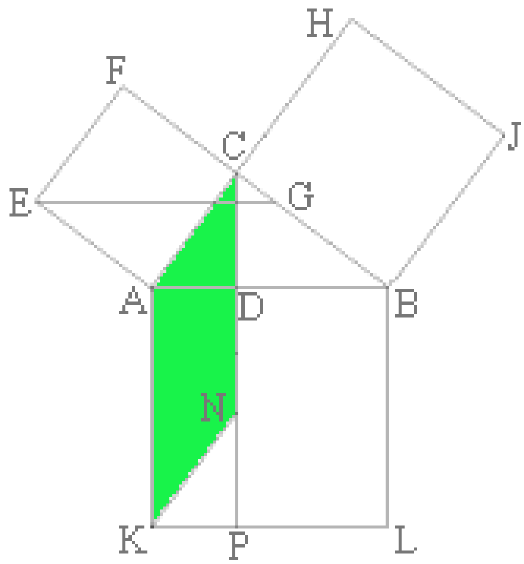
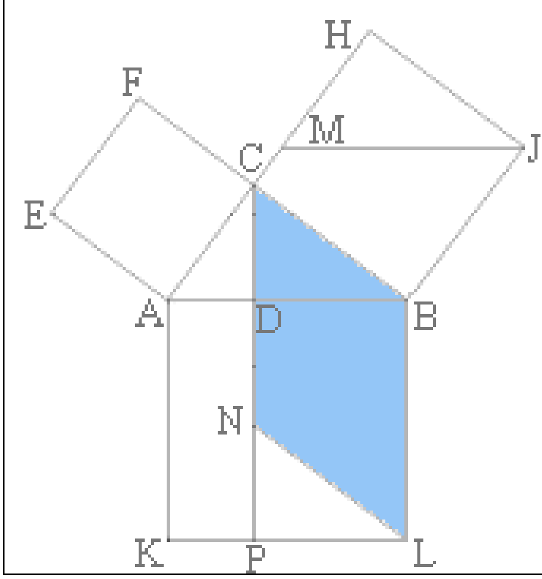
ځکه،برابر بنسټلاين BJ او برابر جګی( h) JHلري



(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
|  | ب . ځرخون : ۳ . EABG = AKNC<br>د) EA = AC پهA ځکه باندې<br>AB = AK (یوې ځلورۍ اړخونه<br>(دیوې ځلورۍ اړخونه) |
|  | ۴ . BJMA = BCNL<br>ځکه، چې پهB باندې BJ = BC )<br>د یوې ځلورۍاړخ اوړوالی) BA = BL<br>(د یوې ځلورۍ اړخونه) |

پ . بیاتیونه:

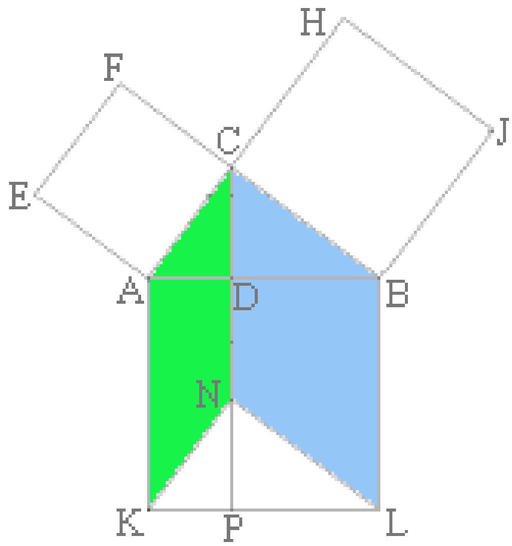
۵ . AKNC = AKPD ځکه، چې همغه بنسټلاید AK شر ه نغه جګي KP لري

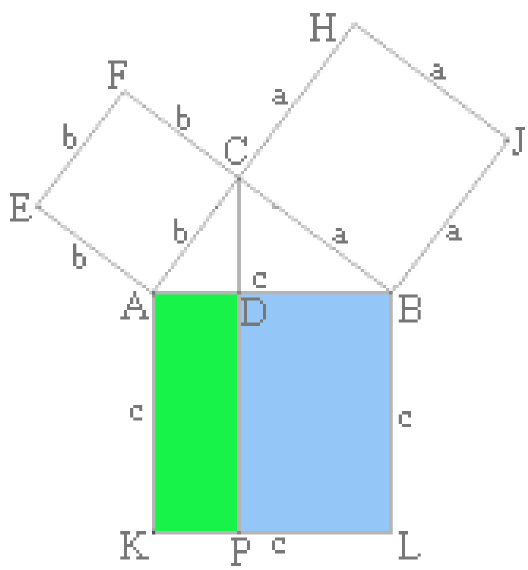
(c) ketabton.com: The Digital Library



۶ . NLBC = DPLB ځکه،چې همغه بنسټلاین BL او همغه جګی PL لري

د پورته دواړو لپاره لاندې ځېره وګورئ




له مخامخ ځیرې

لاس ته اځي

$a^2 = c \cdot DB$

$b^2 = c \cdot AD$

له دې لاس ته راځي :

$c.AD+c.DB=C^2$

$b^2+a^2 = C^2$

بیاتیونه پیل(لاندې ځیره)

۱ - په هر دې اته درېګوډیو ځلورئ داسې کیږدئ،جې برابر اوږده اړخونه یو په بل پریوزي، لکه چې ګور د یوې ځلورئ اړخونه د یوه درېکوډي داړخونو سره برابر دي .

(c) ketabton.com: The Digital Library



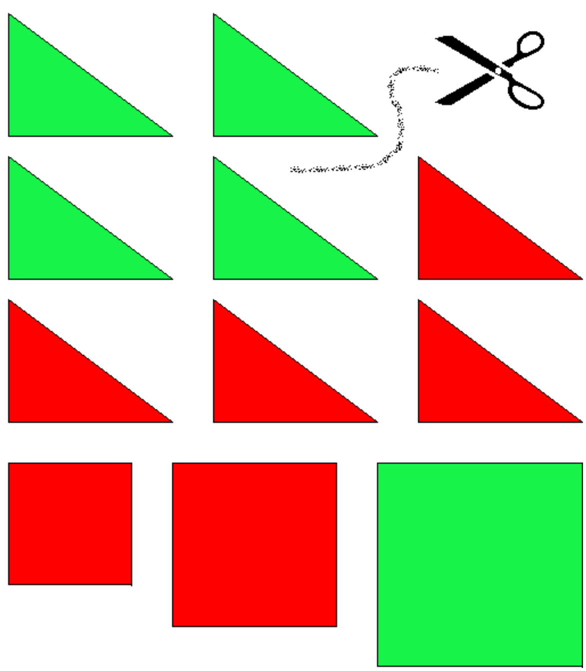
۲ - ټولې سرې ځيرې (دوه ځلورۍ اوځلور درېګوټي ) داسې يوځای کيږدی، چې يوه لويه ځلورۍ منځ ته راشي .

۳ - ټولې شنې ځېرې ( يوه ځلورۍ او ځلور درېګوټي) داسې يوځای کيږدی، جې يوه لويه ځلورۍ منځ ته راشي.

۴ - ځان ته باور پيدا کړه،چې دواړه داسې منځ ته راغلې ځلورۍ يو بل پټه وي.

۵ - ټول درېکوټي لرې کړه، نو دا پاتې شنه ځلورۍ، د هوارې يا سحې له مخې کوچنۍ يا برابره ده دې نورو دواړو سرو ځلويو سره.

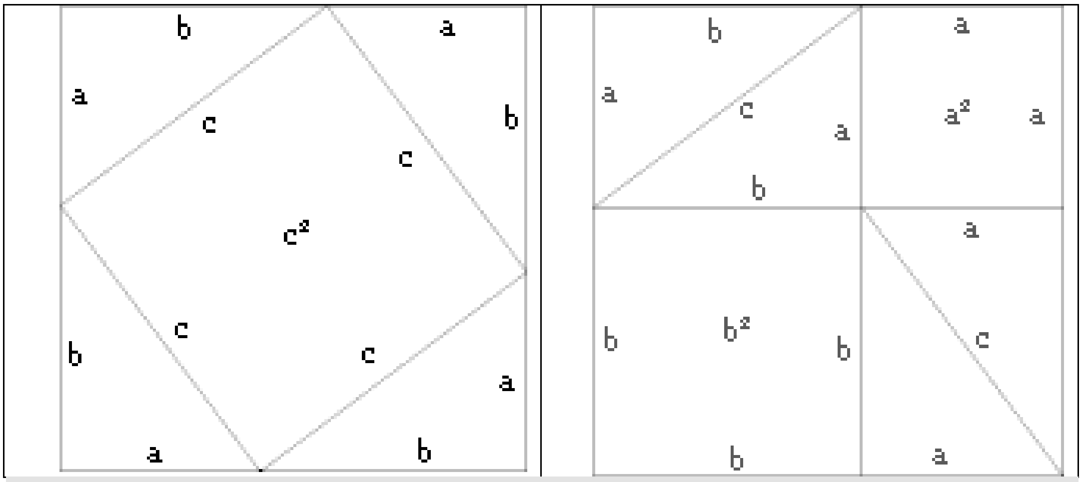
د ځواب لپاره دلايل راوړه!



**۵. Berechnungsbeweisد شميرلو ښوونه**

(c) ketabton.com: The Digital Library






| | | |
|---|---|---|
| $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b + c^2$ | = | $(a+b)^2$ |
| $2ab + c^2$ | = | $a^2 + 2ab + b^2$ |
| $c^2$ | = | $a^2 + b^2$ |

دا ځيرې دې د ځمککچپوهنې مينه والو ته وړاندې وي، که وخت پيدا شو دا څه په منځ کې پاتې به هم وژباړل شي او ګرانو لوستونکو ته به وړاندې شي

لاندې ځيره کې د،پيتاګوراس ونه، ليدل کيږي

له کيڼ و ښي-، له پورته و کښته لور ته

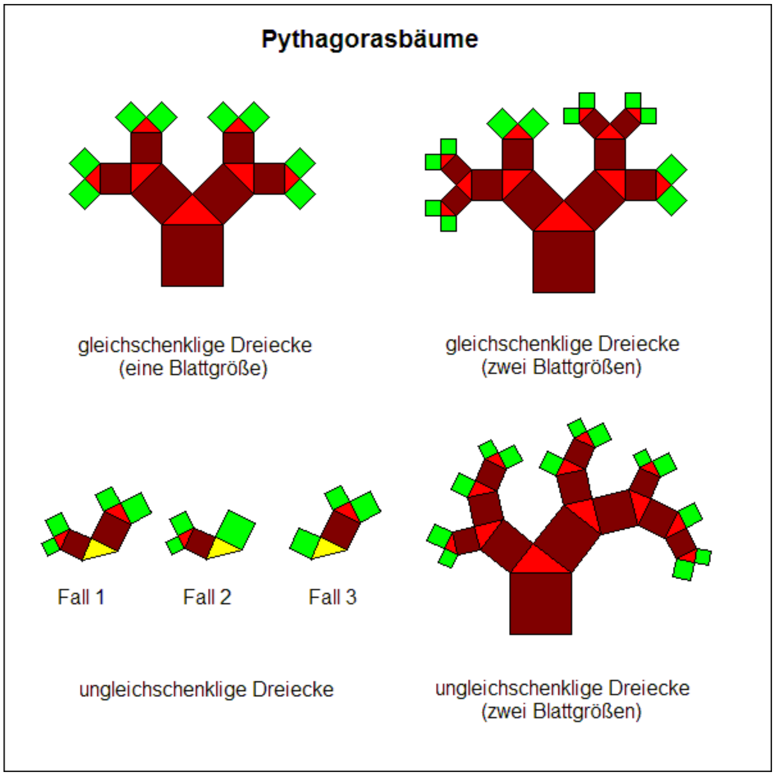
برابرپښيز درېګوډی ( يوه پانډه لويوالی)

- برابرپښيزدرېګوډی(دوه پانډې لويې)

حالت ۱ تر۳نابرابرپښيز درېګوډي- نابرابرپښيز دېګوډی( دوه پانډې لويی)

(c) ketabton.com: The Digital Library






تمرينونه:

۱ – لاندې درېګوټي وکاږی :

a ) $a = 4$ cm ; $b = 8$ cm ; $c = 9$ cm

b) $a = 8$ cm; $b = 8$ cm ; $ß = 50°$

c ) $a = 8$ cm ; $ß = 40°$ ; $\gamma = 50°$

۲ – د هوارې فرمول په مرسته

وښايي: چې د يوه درېګوټي خواوې يا اړخونه او جګې ، يو له بل سره په څټ
اړيکو يا ځاننيونو يا تناسب پرتې وي.

۳ – درېګوټي د لاندې ورکړو سره کومه هواره لري

a ) $a = 7$ cm ; $h_a = $ m6 cm

b ) $c = 3$ cm ; $h_c = 5$ cm

(c) ketabton.com: The Digital Library



c ) $a = b = c = 6$ cm

d ) $a = 10$ cm ; $\beta = 45°$ ; $\gamma = 90°$

۴ – د هوارې اندازولو بل امکانات داسې په نامه د هیرون لیما ورکوي( د سکندريي هيرون Hronsche Dreiecksformel ). که دري اړخونه معلوم وي ، نو هواره له لاندې فرمول څخه ټاکل کیږي

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

د $s = U/2 = (a+b++c)/2$ سره

د هوارې شمیرنې لپاره د په باندې ګردی همداسې دننه ګردیو وړانګو څخه هم کار اخستل کیدی شي.

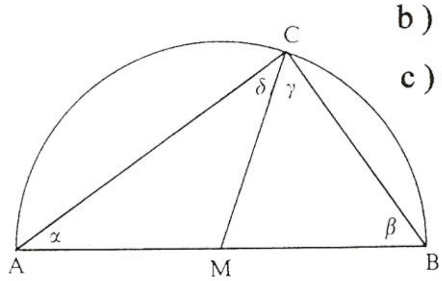
$$F = a.b.c / 4r = s.\rho = \rho .U/2 = \frac{\rho . U}{2}$$

دلته د دننه ګردی او r د دباندې ګردی وړانګی دي. لاندې ټولې پاتې یا نامعلومې لویي د ټولو دریګوڼیو لپاره وټاکی :

a ) $a = 3$ cm ; $b = 4$ cm ; $c = 5$ cm

b ) $a = 5$ cm ; $b = 7$ cm ; $U = 20$ cm

c ) $s = 17$ cm ; $= 5$ cm ;
$h_a = 13$ cm $= h_b$



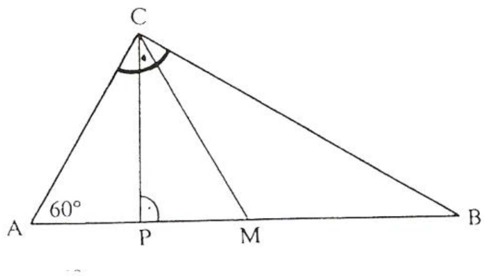

خیره ۸۲

۵ – د هندسې له لارې د لاندې څیرونو په مرسته د تالس جمله وښایی .
( څیره۸۲)

(c) ketabton.com: The Digital Library



۶ – څیره ۸۳ یو ولاړکونجیز دریګوډی وښایي د کونج $= 90°$ سره، وښایي چی کرښي $\overline{CP}$ او $\overline{CM}$ کونج په دري مساوي برخو ویشي.




څیره ۸۳

۷ – وي دې a,b,c د پیتاګوراس ( فیثاغورس ) ګڼون دریګونی. وښایي : ( n>m )

a ) $a = 2n + 1$ ; $b = 2n^2 + 2n$ ;

$c = 2n^2+2n+1$

b ) $a = 2nm$ ; $b = n^2 - m^2$ :

$c = n^2 + m^2$

۸ – د ولاړکونجیز دریګوډي پاتی برخی وښایی( نښوونه لکه په لیکنه کی ):

a ) $h = 4$ cm : $q = 5$ cm ;

b ) h ) 7 cm; $b = 10$ cm

c ) $p = 4$ cm: $q = 12$ cm

۹ – د کانتی یا اړخ یا ژی a اوږدولای څخه د یوه مساوي اړخیز دریګوډي جګوالی وښایی.

۱۰ – وښایي : په یوه مساوي اړخیز دریګوډي کی د دباندې ګردی وړانګه $r = (a/3)\sqrt{3} = 2\rho$ ده او له دې سره سم د دننه ګردی وړانګه په لاندې توګه ده: $\rho = (a/6)\sqrt{3} = r/2$ .

۱۱ – د ورکړشوي هوپوتینوزې سره د یوه ولاړکونجیز دریګوډي هواره کله خورا لویه ده؟ دا په دې مانا چی بله له دې لویه هواره نه وي.

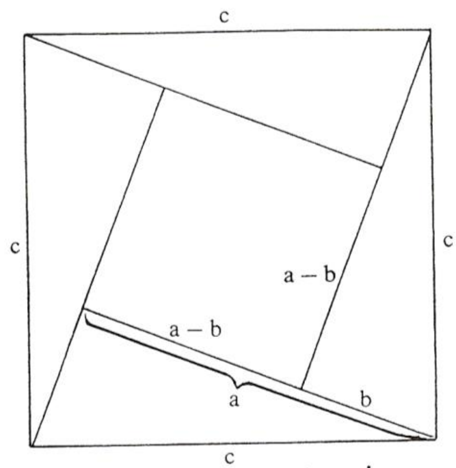
۱۲ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کی یوه کانتی یا ژی ۳ سانتي متره اوږده ده، بله نیمه دومره اوږده ده ( x ) ، لکه هیپتوینوزې ( 2x ) نو x وشمیری.

(c) ketabton.com: The Digital Library

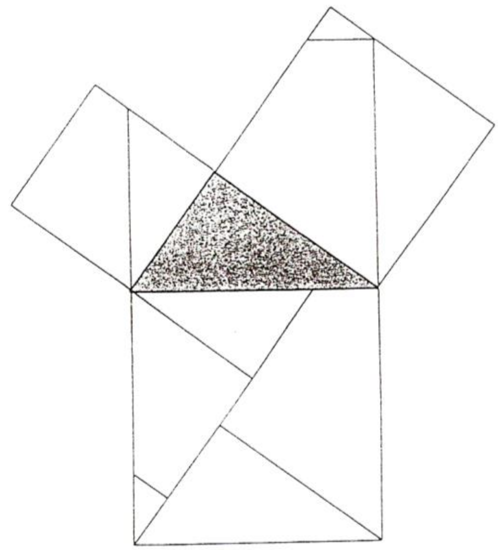


۱۳ – د یوه ولاړکونجیز مساویپښیز دریکونجي هیپوتینوزې c = 10 cm ده، کیدی شي له دې څخه د یوې پښې اودوالی وشمیرل شي؟

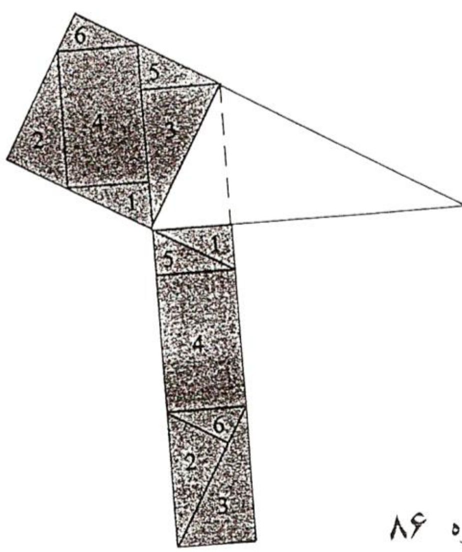
۱۴ – د لاندې څیرو په مرسته دې د پیتاګوراس درسي جمله وښوول شي:




څیره ۸۴



څیره ۸۵




څیره ۸۶

۱۵ – د یوې مربع څخه چی د یوې کانتی یا ژی اوږدوالی یی ۵ سانتي متره وي، یو مساوي هواریز ولاړ– کونجی جوړ کړی، چی د یوې ژی یا اړخ اوږدوالی یي ۴ سانتي متره وي:

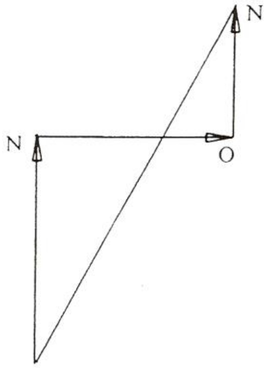
الف ) د کاتیت له جملی سره

ب ) د جګجملی سره.

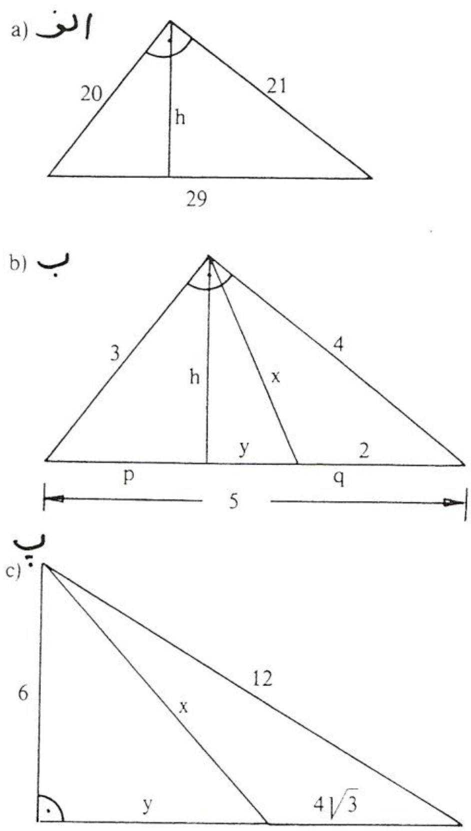
(c) ketabton.com: The Digital Library



۱۶ – د کاتيت جملې صدق د
خيرونې په مرسته، د برخه
هوارو د مساويوالې ښوونې
له لارې وښايي« ( خيره ۸۶)
۱۷ – په برخه دريګوډيو MPC
(خيره ۸۳) د پيتاګوراس جمله
استعمال کړی، او په دې بنسټ
د پيوتاګوراس جمله وښايي .
۱۸ – د مساويپښيز ولاړکونجيز
دريګوډيوپښې داسې راکړ شوې
الف ) ۶ سانتي متره»
ب ) ۸ سانتي متره ،
پ ) x سانتي متره، هره اړونده
هيپوتينوزې څومره اوږده ده؟
۱۹ – يو موټر ۷ کيلو متره د سهيل لور
ته او ۶ کيلومتره ختيز لور ته او بيا
۴ کيلومتره د سهيل لور ته ځغلي.
دا موټر د خپل وتلځاي څخه څومره لرې
دی؟ (خيره ۸۷)
۲۰ – د خپل وتلځاي څخه به څومره لرې وي،
که نور هم ۴ کيلو متره د ختيز لور ته
وځغلي؟
۲۱ – دا نامعلومې کرښې په خيره ۸۸کې
وښايي.




خيره ۸۷

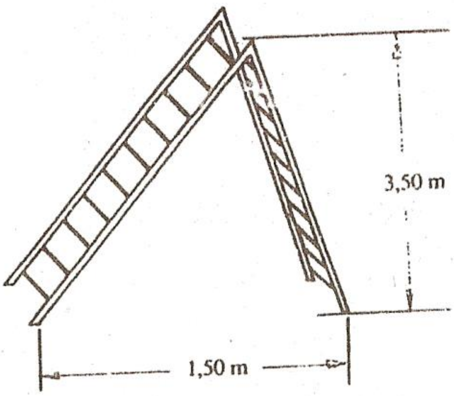



خيره ۸۸

(c) ketabton.com: The Digital Library



۲۲ – یوه دیوال ته ۵ متره اوږده زینه
ایښول شوې د زینې بیخ له دیوال
۴ ، ۱ متره واټن لري زینه څومره
جګه رسیږي؟




۲۳ – د یوې نقشې، چې د ۱۰۰۰۰۰ : ۱
اندازه ده یو د پلو لار غزېدلي ، چې
د نقشې اوږدوالی ۷ ، ۰ سانتي متره
دي د ځنګلاینونو ۲۵۰ متره او ۴۵۰
متره سره . دا د پلو لار په ریښتوني
څومره اوږده ده ؟

۲۴ – د یوه کور بنسټ فورم یو مساوي‌پښیز
دریکوڼی دی

خیره ۸۹

الف ) د ۹ سانتي متر په سور یا بر او
جګوالی ۶ ، ۰ سانتي متره د چت له
پورته ژی تر ناوی پورې .

ب ) د یوه ۹ متره په سور او۵،۳
متره Sparenlänge د بنسټفورم ۶،۵ متره
جګوالي سره د بنسټفورم سور وشمیرئ.

۲۵ – په یوه رامارته زینه کی ټولی پوړی مساوي
اوږدوالی لریږغه په ځیوررونه ۶۴ کی کښېل
شوې د پوړیو واټن وشمیرئ.

۲۶ – پو یوه مساوي پښیز دریکوڼي کي چې
چاپیری یی ۲۵ سانتي متره دی او جګوالی
یی ۲ سانتي متره له بنسټ اړخ څخه کوچنی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



اړخونه خومره اوږده دي او جګوالی یې خومره اوږد دی ؟

۲۷ – هر یو ټال په زوړند ځغلول شوي رسی تړلی، چې د تړلو ټکی یې د یوه مساوي‌پښیز درېګوټي کونجټکي دي. که وزنوړونکی ۶ متره اوږد او ۱ متر یو له بل لرې په کښتنی تړلي وي، نو کښتنی ټال خومره لرې ټال وهلی شي، که درېګوټبنسټ منځټکی د لار جګ ټکي کی ۲،۵ متره د خپل ژورځای څخه جګه وي ؟

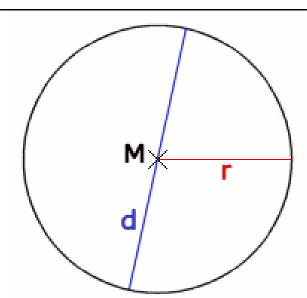
۲۸ – کوم یو د لاندې درېګوټیو څخه نه شي کښل کیدی؟

a ) a = 3 cm; b = 4 cm ; c = 6 cm b ) a = 5 cm ; b = 9 cm ; c = 7 cm c ) a = 7 cm ; b = 4 cm ; c = 2 cm

d ) a = 12 cm ; b = 13 cm ; c = 1 cm

۲۹ – ولی درې اړخیز درېګوټی هیڅوخت ولاړکونجیز درېګوټی نه شي کیدی؟

# ګردی (دایره)

| | |
|---|---|
| پیژند یاتعریف<br>د یوې هوارې ټول هغه ټکی، کوم چی له یوه ټکی داسی په نامه منځټکي M څخه همغه- یا برابر واټن r (په نامه وړانګه) ولري، ګردی لاین یا لنډ: ګردی بلل کیږي ( مخامخ څیره )<br>$k = \{X \in E \mid \lvert\overline{MX}\rvert = r\}$<br>ګردی سطحه یا - هواره او ګردی چاپیریال یا - محیط |  |

(c) ketabton.com: The Digital Library



په پام کی دی وي، چی د ټولو هغو ټکو ډیری، چی واټن یی له M څخه د r کوچنی یا د rسره برابر وي ګردۍ (موخه ترې ګردۍ منځهواره ده یا ټیك : ګردیټوټه ځما په پام به بهتره وي که دا ګردۍچیترو یا لنډ : چیترو، چې موخه ترې یواځې منځهواره ده، وبولو) بلل کيږي

پیژند: لکه د مخه مو، چې په ګوته کړه، هغه کرښه چی د ګردۍ ژی یو ټکی د منځ ټکی سره ټړي، هغه د ګردۍ وړانګه یا لنډ: وړانګه بلل کيږي، چې په r سره یې ښایو.
پیژند: او هغه کرښه، چې ګردۍ نیموي د ګردۍ نیمونکې کرښه یا لنډ: نیمی ( قطر) بلل کيږي او په d سره یې په نخښنه کوو.

پیژند
دګردۍ دننه کونج پوره کونج ۳۸۰ درجي لري.
ګردیچاپیریال د وړانګې r سره په لاندې ډول ورکړ شوی دی

$$u = d \cdot \pi = 2r \cdot \pi$$

او همداسی ګردۍمنځهواره د وړانګې r سره په لاندې توګه ورکول کيږي

$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

$$d = 2 \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 2r$$

دا لاندې ورکړشوی ګڼ ګردۍ ګڼ بلل کيږي
: $\pi = 3{,}14159265$

یادونه: دا چې ما کله هواره یا سطحه په A یا F او $\pi$ مې په Pi نخښنه کړې، دا به هیله ده کرانو لوستونکو ته ستونځې پیښنې نه کړيږ.
په پورته کې ورکړ شوی ګردۍ ګڼ « پي » ګورو، چې بیرته راګرځیدونی دی. له دې امله یو ایرشنل ګڼ دی او د مات په څیر نه لیکل کيږي، بلکه له لسمیز (عشاریه ) وروستی پریودي کیدونکی څیفر پرلپسی دی. په کارونه کې یی موږ نزدې شمرني ته مجبور یو، ځکه چه د جبشمیري د ګنځایونو له امله، چې پای دي یا پوله لري یا رابند(محدود) دي.

څنګه سړی په دې بریالی شو چی دا ګڼ پیدا کړي؟

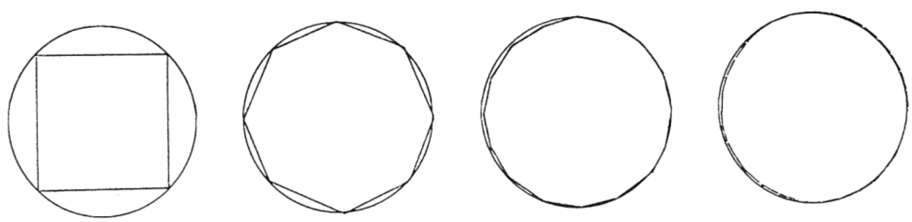
(c) ketabton.com: The Digital Library



دا لار دې په لاندې کی لنډه ورکړ شي:

دا له ارښیمدس څخه پیل کارونه (عملیه ) یا تګلار  داسی پیل کیږي، چې په ګردی کی یو ه څلوری یا مربع راګیروي یا رابنده وي او بالاخره یی په منځنیو ولاړو  سوکڅیسیف یا یو په بل پسی ۸ ، ۱۶، ۳۲ او داسی نورو،  لوړ یا جګ کړي یعني په همغه وخت کی دوه برابره کړی .

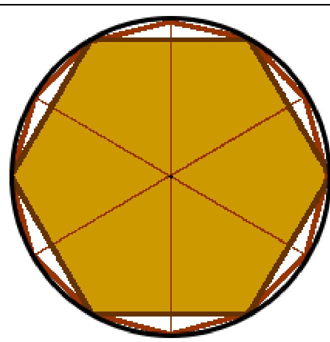
خیره ۱۱۹



یوې ګردی ته د یوه n –ګوډي له لارې نږدېونه (نږدې کیدنه)

خیرې ۱۱۹ جنباڅي

په مخامخ خیرو کې نهه ګوډی ورپسې شپږګوډی کښل شوي، دي ته ګورو، چې څنګه ګردی ته نږدې کیږي



په پورته خیره څو څوګوډیز بریښي او ستره تری راتاو ګردی

پورته خیرو کې یوې ګردی ته د یوه n -ګوډي له لارې نږدیونه (نږدې کیدنه)

کتل کیږي، هغه ٦٥٥٣٧ ګوډی، چې ګورو نږدې یا تیک ګردی ده)

د زیاتیدونکي n سره کانتی یا ژی یا اړخونه تل کوچني کیږي، چې پخپله له ۱۰۰ یا ۱۵۰ ور رسونو ته په یوه پانه کی د کښلو یا رسمولو څخه وځي یا نه کښل کیږي، په همدې وخت کی د منځنکی څخه د په همغه واټن د تکو ګښون یا تعداد زیاتیږي (یعنی د

(c) ketabton.com: The Digital Library



ګوډټکوتعداد یا ګڼون ) د مربع پیلګردۍ سره دا څیره تل نزدې کيږي. په ورته توګه د دې چاپیریال او منځهواره هم همغه چاپیریالګردي ته نزدي کيږي. د ګوډټکو زیاتیدو سره د ګردۍ وړانګه هم لویيږي. د هغو چاپیریال او منځهواره تل همغه ډیر کونجی او په همدې توګه د چاپیریالګردي څخه. په روښانه توګه لیدل کیږي چی د چاپیر یالګردۍ او د منځ هوارې د ناپای ډیر n ګوډونو سره د n - ګوډي سره یوځای پریوځي یا یوځای کیږي.

په لاندې جدول کی د چاپیریال ارزښت او په همدې توګه د منځهوارې ارزښت د زیاتیدونکي n ګڼ سره ستابیل ( په خپل حالت، چی ډیر تغیر په کی نه راځي ) پیژندوړ دي:

| منځهواره Fn | چاپریال Un | پیدایښتي ګڼn |
|---|---|---|
| 2 | 5,656854 | 4 |
| 2, 828427 | 6,122934 | 8 |
| 3,061467 | 6,242890 | 16 |
| 3,121445 | 6,273096 | 32 |
| 3,136548 | 6,280662 | 64 |
| 3,140331 | 6,282554 | 128 |
| 3,141277 | 6,283027 | 256 |
| 3,141572 | 6,283145 | 512 |
| 3,141572 | 6,283175 | 1024 |
| 3,141587 | 6,283182 | 2048 |
| 3,141591 | 6,283184 | 4096 |

وروسته به وکتل شي چی څنګه د ګردۍ چاپیری او ګردۍ منځهواره د تریکونومتري یا دریکوډیکچ له لارې ټاکل کیدی شي

پیلبیلګه:

د بانك مدیر ښاغلی کړاو غوارې د کنفرانسونو لپاره یو د ښیښي میز جوړ کړي چی په هره لور یی ۸ کسان ځاي نیولی شي. ایا ددې لپاره یو میز چی ۲ متره نیمی(قطر) ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library

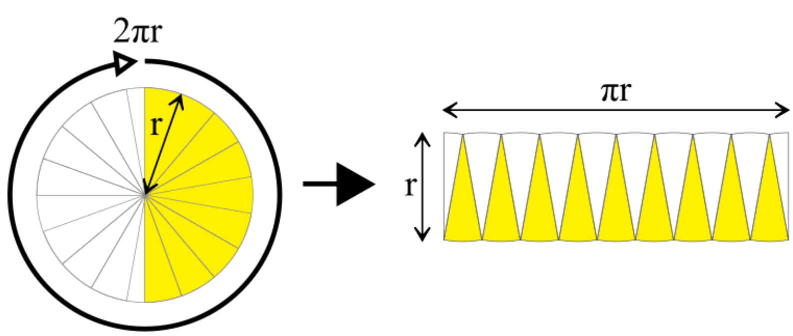


بسيا کوي، که د يوه نفر لپاره له ۷۵ څخه تر ۸۰ سانيمتره د ميز په سور، ځاي په پام کی نيول شوی وي؟ دا ميز به څومره گران وي، که يو څلوری متر يا مترمربع د کار د معاش سره ۲۵۰ مارکه گران وي يا ۲۵۰ مارکه ارزښت ولري؟

دميز چاپيريال دی pi.1m=6,248m² = U په د هرکنفرانس برخوالو لپاره ۷۵ سانتي متره سرورځاي په پام کی وي، نو د ميز چاپيريال دی : 8.75= 600cm

د ۸۰سانتيمتره ځاي د نفر په سر 80.8 = 640cm . منځ ازښت يې 6,2m دی. پس د نېکو هيلو سره ټول خاي نيولی شي
مېز دا هواره لري: $F = \pi.1m = 3142m^2$ او له دي امله 3,142.250=785,40 ياني الماني مارکونه ازښت لري..

په لاندې څيره کې کتل کيږي، چې د گردی منځهواره نزدې




$$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$$

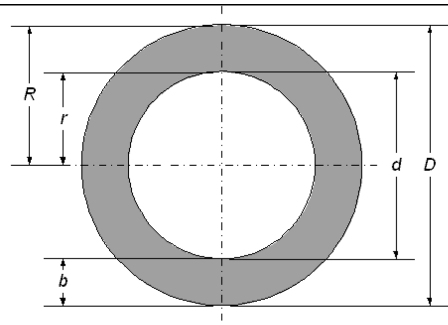
ده ( په پورته څيره کې د څيرې کوچنيوالي له امله د گردی څيره لږ تخريب شوه، خو دا ستونځې پوهوړ دي۰

گردنېوته او گرديبرخه، گرديکړی

(c) ketabton.com: The Digital Library



ډیر وخت دننه- یا خوندیګردۍ له چاپیریالګردۍ کوچنۍ وي. نو له دې امله د دوي ترمنځ یوه کړۍ منځ ته راځي، چې د هغې منځهواره د دواړو ګردیو د کمون یا توپیر څخه شمیرل کیږي۰

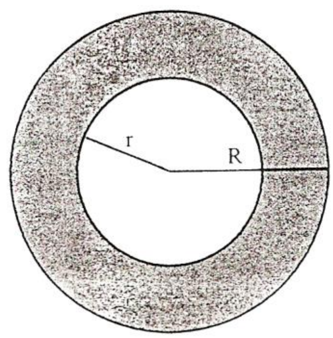



جمله : موږ دوه ګردۍ لرو، چې د چاپیریالګردۍ یا دباندې ګردۍ وړانګه R او د دننه ګردۍ یا خوندې ګردۍ وړانګه r ده، نو د

$$F_K = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$F_K = \pi (R^2 - r^2)$$

$$F_K = \pi (R - r)(R + r)$$




خیره ۱۲۰

بل ډول یې: یوې ګردیکړۍ منځهواره ده

$$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

همداسې کیدی شي، چې د ګردیکړۍ منځهواره د ګردیبرخې د سور او دننه او دباندې ګردۍ د نیمیو څخه هم وشمیرل شي، چې په لاندې کې یې ګورو:

$$A = (D - b) \cdot b\pi$$

پیلبیلګه:

د کړاو میز درز پیداکړ. چی له غاړې یا ژۍ پنځه سانتي متره دننه لور ته ځغلي. ښاغلی کړاو فکر کوي ، چې که دامیز په پنځه سانتیمتره کوچنی کړی . کوم میز هواره پاتي کیږي او ګردیکړۍ چی له منځه ځي ځومره لویه ده؟

او د همغه پیل نیونی سره لکه د مخه څومره نفر اوس په میز ځاي نیولی شي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



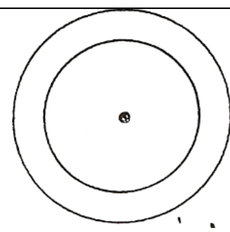
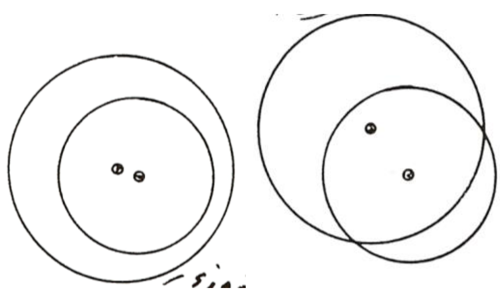
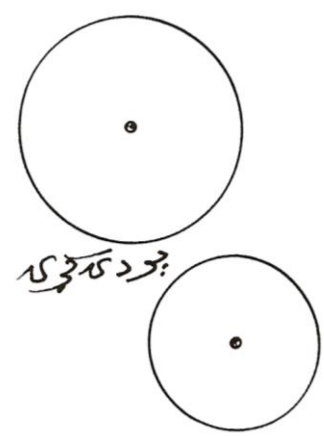
$$F = (0,9m)^2.Pi = 2,835m^2$$

د گرديکړۍ منځهواره او چاپيريا په لاندې ډول دي

$$F = 1,95m.0,05m.Pi = 0,30m^2$$

$$U' = 2,095m.Pi = 5,969m \; ; \; U' :8 = 74,6 \, cm$$

د داسې لړ ستونځو سره بيا هم ټول کسان پر ميز ځاي نيولی شي۰

| | |
|---|---|
|  | هغه گردۍ، چې منځټکي يې يو پ بل پريوځي کونځنتري يا راټول يا يومنځي بلل کيږي او پرته له دې دکسځنتري يا نه يومنځي بللکيږي. |
|  | تر هغې چې يوه گردۍ ټوله په بله کې پرته وي، يدی شي چې د راکښلو له لارې په يومنځي يا کونځنتري گرديو بدله شي |
| دا يو نايومنځي گردۍ دي |  |

هغه دوه يا زياتې گردۍ چې منځ ټکي يې يو په بل پريوځي کونځنتري Konzentrie يا راټول او په غير له دې اکسځينتري Exzentrieيا ناراټول بلل کيږي .تر څو يوه گردۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library



ټوله په بله کی پرته وي کیدی شي چی د راکښلو له لارې په کونخیښتري ګردیو یا راټولګردیو بدلی شي.

که ګردی یوبل پوره پټې نه کړي، نو د ګډو هوارو یا سطحو( = غوڅډیریو) یا ګډو پاتي یا باقي شمیرنه له ستونځو سره مخامخ کیږي .که ګردی یو له بل سره ګډ ټکي ونه لري نو دا ګردی یو دبل سره پردی بلل کیږي٠

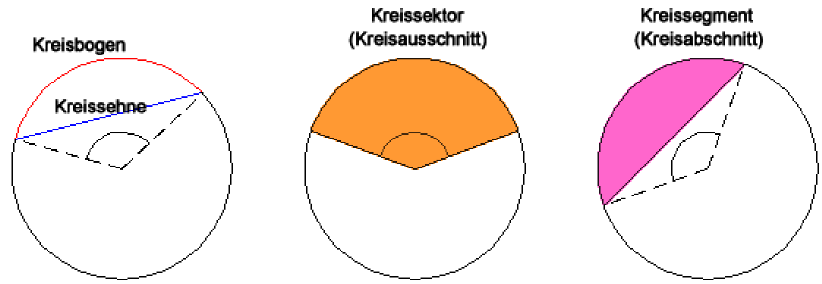
خو پیژندونه یا تعریفونه:

د ګردی هغه برخه ګردیټوټه ( سګمنت ) Segment/ Abschnitt بلل کیږي، که چیرې یوه ګردی د یوې کرښی له لارې یا کرښه باندې غوڅه شي . داسی یوه کرښه غوځکرښه یاغوڅوونی یا ټوټه وونې ( سیکانت ) Sekante بلل کیږي. غوڅکرښه ګردی په دوه ټوټو ویش. که دا کرښه د ګردی له منځ څخه تیره شي، نو ګردی په دوه برابرو برخو ویشي، چی دا بیا ګردی نیموونې بلل کیږ. هغه غوڅوني چی له منځ ټکي تیره شي، د ګردی نیمی یا لنډ: نیمی بلل کیږي. که ګردی په یوه ټکي کی لمس کړی نو دا کرښه تانجنت بلل کیږي او که له ګردی څخه دا کرښه دباندې تیره شي نو تیریدونی کرښه بلل کیږي .په ګردی د غوڅکرښی دننه پرته برخه د ګردی ټوټوني ( Sehne ) یا وتر بلل کیږي .ټوټونی یا Sehne بندکرښه ده په داسی حال کی چی غوڅی ، تنجنت او تیریدونکی ناپاي کرښي یا ـلکه، چې ورسره بلد یو - کرښې دي .د یوه ګردی څخه د دوه وړانګو په مرسته کیدی شی یوه برخه راغوڅه شي دا برخه ګردیبرخه یا سکتور Sektor بلل کیږي. د منځټکیکونج یامنځنې کونج او لیندې (Bogen) b سره. مخامخ ښیره ده

په لاندې ښیرو کې د نومونو له المانې څخه په پښتو کوونه له کیڼ وښی لورته:
ګردیلینده Kreisbogen د ګردی ټوټه وونې(ټوټوونې) Kreissehne ،
ګردی برخه Kreissektor ،

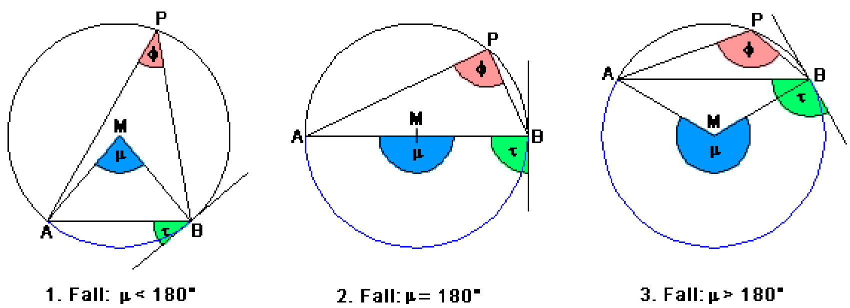
(c) ketabton.com: The Digital Library



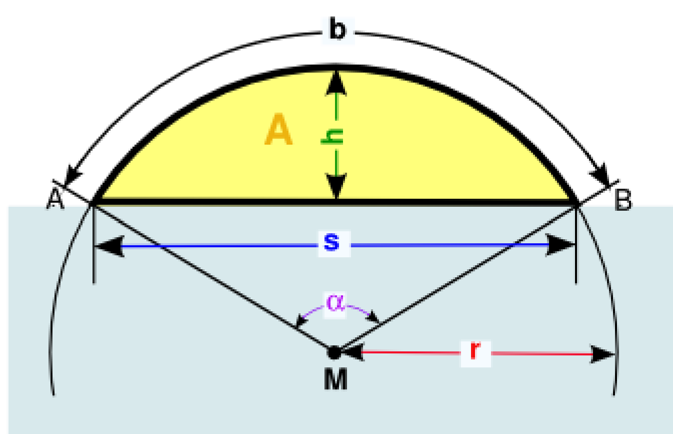



د
پورته ژباړه له کيڼ خخه و ښي لور ته: ګردی- لينده ټوټه ووني، ګردي برخه، ګردی ټوټه
.

په ګردی کې د کونجونو ډولونه:




**د ګردی ټوټه**



(c) ketabton.com: The Digital Library



گردی ټوټه Kreissegment ,
د گردی ټوټی لویې:

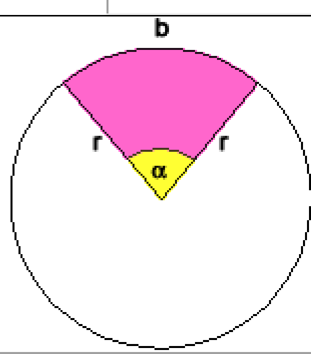
- α = منځټکیکونج Mittelpunktswinkel
- b = گردیلیندهKreisbogen
- h = ټوټې جگې Segmenthöhe
- r =وړانگه Radius
- s = گردی ټوټه وونې یا - وتر Kreissehne
- A = ټوټې هواره Segmentfläche
- M = گردی - منځټکی Kreismittelpunkt
- Verbindungترنه A-M-B = برابرپښیز درېگوډی
-

| د گردیټوټې فرمولونه | |
|---|---|
| !Error $A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi - \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \sin\alpha,$ $A = \frac{r \cdot b}{2} - \frac{s \cdot (r-h)}{2},$ | سطحه مخامخ فرمول Flächeninhalt |
| $r = \frac{4h^2 + s^2}{8h}$ | وړانگهRadius |
| $s = 2r \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right),$ $s = \frac{2h}{\tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)} = 2h \cdot \cot\left(\frac{\alpha}{4}\right)$ | Kreissehne گردی ټوټه وونې (د وروسته لپاره دې په پام کې وي |

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | | |
|---|---|---|
| | $h = r - \left(r \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right),$<br>$h = r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2},$<br>$h = \frac{s}{2} \cdot \tan\left(\frac{\alpha}{4}\right)$ | Segmenthöhe<br>د توټې جګوالی |
| | $b = 2r \cdot \frac{\alpha \cdot \pi}{360^\circ},$<br>$b = r \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{180^\circ},$<br>$b = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot (4h^2 + s^2)}{1440h},$ | دلينديِ اوږدوالی<br>Bogenlänge |
| | $\alpha\ ,$<br>$\alpha\ = 4 \cdot \arctan\left(\frac{2h}{s}\right)$ | Mittelpunktswinkel منځټکيکونج په درجه کچ<br>(Gradmaß) |

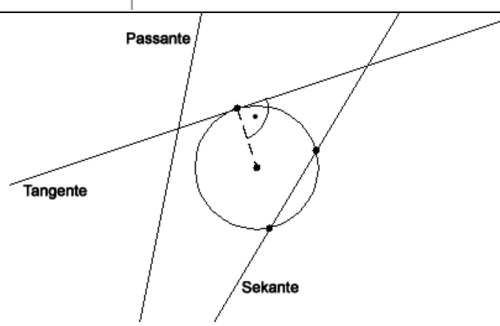
| | |
|---|---|
| <br> | Kreissektor  ګردی برخه يا قطاع |

| | |
|---|---|
| د ګردی برخي  يا قطاع فرمولونه | |
| !Error<br>$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r^2 \cdot \pi$ | Flächeninhaltسطحه يا منځهواره |

(c) ketabton.com: The Digital Library



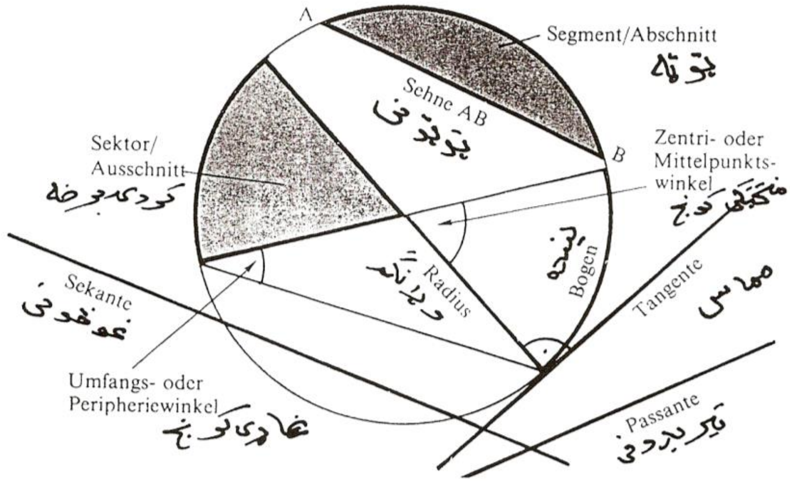
| | |
|---|---|
| | |
| د گردی لیندې اوږدوالی | $b = \frac{\alpha}{180°} \cdot r \cdot \pi$ |
| Radiusوړانګه | $r$ |
| Mittelpunktswinkel<br>(Gradmaß)منځټکیکونج(په درجه کچ) | $\alpha$ |
| Kreiszahlګردیګڼ یا - عدد | !Error<br>$\pi \approx 3{,}1415926536$ |

| | |
|---|---|
| په لاندې ښيره کې نومونه: تيريدونې Passante ، تانجنت يا مماس Tangente، غوڅوونې Sekante، لاندې ښيره کې خو هرڅه روښانه دي. |  |

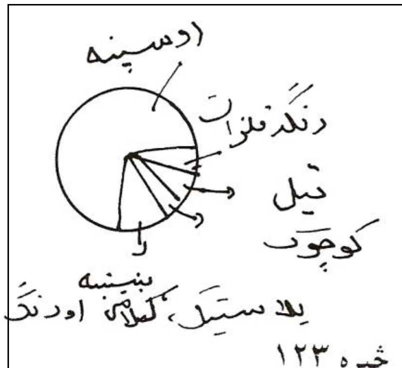
د پورته ښيرې کې  راوړي څه په لاندې ښيره کې ټول په لاندې ښيره کې ورکړل شوي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library






پیلبیلګه:  د یوه بنس موټر جوړولو   لپاره ۱۷۵۰ کیلوګرامه  اومه(خام ) مواد په خرڅ رسیږي  یامصرفیږي. په  دې کی اوسپنه او    فولاد ۷۵ په سلو کي ، په پالستي، ښیښي او رنګ ټول ۹ په سلو کی   رسیږي، په رنګه فلزونو او ربړ  ۶   په سلو کی رسیږي، او تیل ۴ په سلو کی . یو ګردیدیاګرام وکاړئ چی هره برخه په  کې ورکړ شوي وي   .د ګردي ټوله هواره د ټولو موادو سره مساوي دهٔ ) ۱۰۰ په سلو کی ( د جوړموادو برخه د ګردبرخی څخه عبارت دئ. یوه  د یو په سلو کی برخه به  یوه ګردئبرخه وي د منځکونج سره 360°:100=3,6°    وی  .

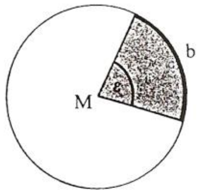
| | |
|---|---|
| یعني<br>4%~14,4°;6%~21,6°;9%32,4°;75%=270°<br><br>څیره دی، چې د هرڅه برخه کې ورنزدې ښوول شوې وي په یوې ګردئ کې وکښل شي  یا لاندې |  |

د ګردئ برخې څیره څرګندوي» د منځکونج  چې  د  ، $\varepsilon$  سره يې په نخښه کوو لویوالي

په تناسب  برخهواره   Fsk     او  هم  لینده  b تغیر خوري او لاندې باوري دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | |
|---|---|
| $\frac{F_{SK}}{F} = \frac{b}{U} = \frac{\varepsilon}{360°}$ | ε لویوالي<br>b ده<br>ټکی دیوه<br>یاګردی راغوځي<br><br> |

د ډبل برابرون د دویمې برخې څخه باوري دي:

جمله : د ګردۍ برخې د لیندۍ اوږدوالی داسی دئ:

$$b = \frac{n.\varepsilon}{360°} = \frac{2\pi r.\varepsilon}{360°} = \frac{\pi r \varepsilon}{180°}$$

د لومړی برخی څخه د سیکتور یا ګردیبرخی لپاره باوري کیږي

جمله: د سیکتور یا د ګردیبرخی منځهواره په لاندې ډول ده:

$$F_{Sk} = \frac{F.\varepsilon}{360°} = \frac{\pi r^2.\varepsilon}{360°} = \frac{rb}{2}$$

اړیکي $F_{Sk} = \frac{rb}{2}$ د مات $F_{Sk} = \frac{F.b}{n} = \frac{\pi r^2 b}{2\pi r}$ د لندوني څخه منځ ته راغلي

**بیلګه:** د خام موادو برخی ( بیلګه مخ ) هواره څومره لویه ده، که د ګردی دیاګرام **۵** سانتي متره وي ؟

F اوسپنه او فولاد = (25 $\pi$ : 360°).270 = 0,218.270 = 58,905 cm³

F پلاستیك = 0,216.32,4 = 7,069 cm³

F رنګه فلزات = F ربړ = 0,218.21,6 = 4712 cm³

F تیل = 0,218.14,4 = 3,142 cm³

د ټولو ټوله یا د ټول زیاتون باید د ګردی سطحه یا هواره ورکړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

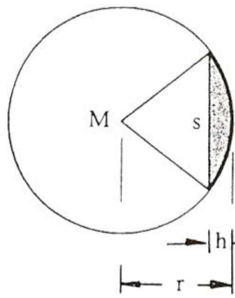


$F = \pi r^2 = 78,54\ cm^3$

د برخهوارې ددې فرمول سره نور د برخهوارې شميرلو لپاره هم کوم جنجال يا پرابلم نه شته. د اخرنی هواره دلته بيا د برخهوارې او د دوه وړانگو او ټوټونی څخه جوړ مساوي پښيز دريگوډي کمون دی.

څيره ۱۲۵

گردکه ټوټه




د دريگوډي هوارى لپاره باور لري:

$F = s(r - h) / 2 = 0,5\ r^2 . \sin \varepsilon$

(تريگونومتري دی وکتل شي ....) او

او د دې سره ټوټه سطحه يا هواره

**جمله:** د گرديټوټی يا سگمنت هوارې په لاندې ډول دي:

$$F_{Sg} = F_{Sh} - F$$
$$F_{Sg} = (br/2) - s(r - h) / 2$$
$$F_{Sg} = (\pi r^2 \varepsilon / 360°) - (r^2 \sin \varepsilon)/2$$
$$F_{Sk} = (r^2/2) [\pi \varepsilon / 180° - \sin \varepsilon]$$

په کارونه يا عمل کی د ټوټه هوارې لپاره گټور نزدې ارزښت $F_{Sg} = (2/3)sh$ ښوول شوی دی.

پيلبيلگه: مدير کړاو له ځان څخه پوښتي چی ايا د گرديميز په ځاي به يو منظم اته کو نجی هدفمند بهتر نه واي؟ نو په اختيار کي هواره او چاپيری به څومره لوي وي؟

لمړی گرديټوټی شميرو. په ورته ډول لکه د گردي نزدې شميرلو لپاره، د مربع

څخه و ډيرکونجي ته، مخ ته ځو او دې د اړخونو اوږدوالی s شميرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



منځولاړه m، د اته کو نجیز کانتی یا ژی k او بالاخره د دګردیتوبي
جګولی h د پیتاګوراس د جملی په مرسته شمیرو.
لاندې لاس ته راځي:

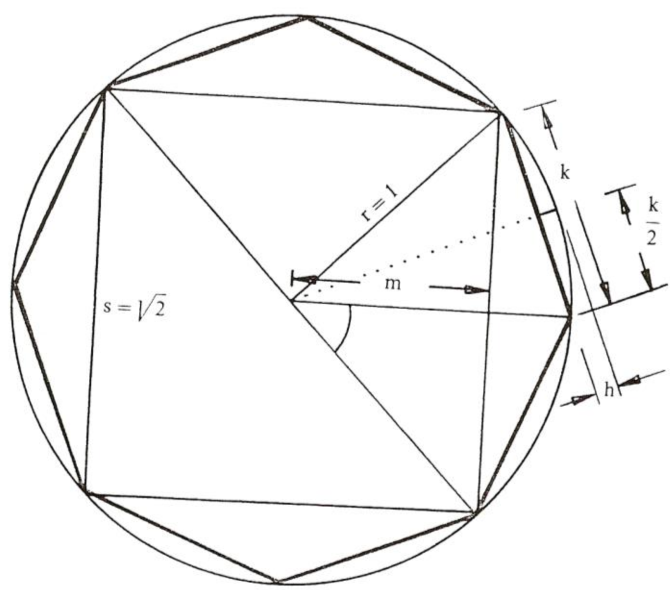
$s = \sqrt{2} \,.\, 1 = 1{,}414 \text{ m} ; \quad m = \sqrt{a-(1{,}414 : 2)^2} = s / 2 = 0{,}707 \text{ m}$

$k = \sqrt{(1 - 0{,}707)^2 + 0{,}707^2} = 0{,}756 \text{ m}$

$h = 1 - \sqrt{1 - (0{,}765 : 2)^2} = 0{,}076 \text{ m}$

د $\varepsilon = 45°$ له امله $b = 0{,}393$ m دی./و له دې سره

$F_{\text{توټه}} = 0{,}5.[0{,}393.1 - 1{,}414(1-0{,}076)] = 0{,}039 \text{ m}^2$



(c) ketabton.com: The Digital Library



له دې څخه په هرصورت د ښیښې میز جوړیږي. ټوله غورزول شوې له دې امله په لاندې توګه ده: $8.0.039 = 0,312\ m^2$ .میز اوس لاندې هواره لري

$$F_0 - F_{\text{غورزولشوې}} = 2,828\ m^2$$

او په همدې توګه لکه د کوچنې شوې ګردیهواره د وړانګې $r = 95\ cm$ سره. د کیناستلوځای سور (k) حتې زیات شوی ، چاپیرې اوس $U = 8.0,765 = 6,123\ m$

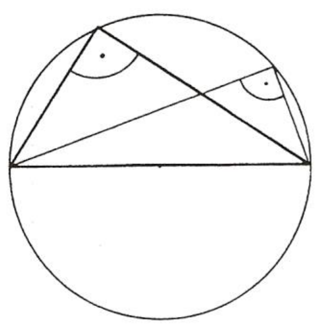
دی. نزدیونه هم همدا ارزښت ورکوي: $F = 0,765.0,076 = 0,039\ m^2$ او داسې نور.

تریګونومتریکې حل مو زر هدف ته رسوي:

$$F_{\text{ټوټه}} = \pi.1.45:360 - 0,5.\sin 45° = 0,039 m^2$$

او داسې نور . ځیره

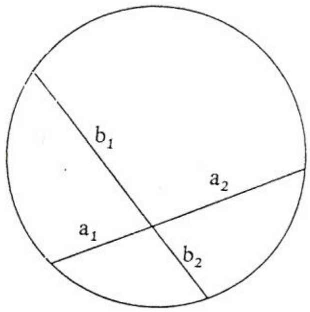
## ګردیجملې او ګردیخو یونه



ځیره ۱۲۷

## د تالس جمله

په نیمه ګردۍ کې هر پریفرې– یا ژی کونج ولاړکونج دی( ځیره )




$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$

## د ټوټونې جمله

که دوه ګردۍ ټوټونې په ګردۍ کې دننه یو بل غوځې کړې نو د غوځبرخو

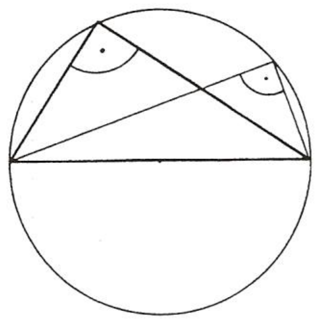
(c) ketabton.com: The Digital Library



تريګونومتريکي حل مو زر هدف ته رسوي:

$F_{ټوټه} = \pi.1.45:360 - 0,5.\sin45° = 0,039m^2$

او داسې نور . ښيره

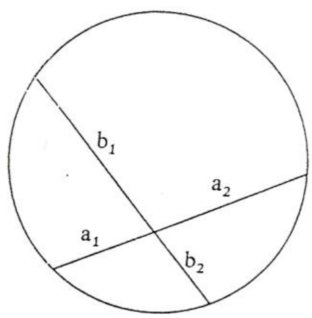


ښيره ۱۲۷

## ګرديجملې او ګرديخو يونه

### د تالس جمله

په نيمه ګردۍ کې هر پريفري– يا ژی کونج ولاړکونج دی( ښيره )

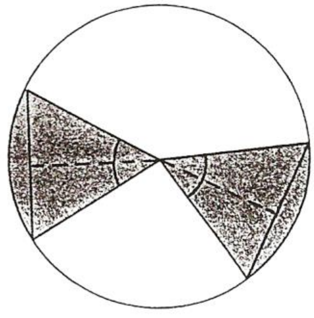



$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2$

ښيره ۱۲۸

### د ټوټونې جمله

که دوه ګردۍ ټوټونې په ګردۍ کې دننه يو بل غوڅې کړي نو د غوڅبرخو ځل ( ضرب ) يې يو ثابت دی.



ښيره ۱۳۱

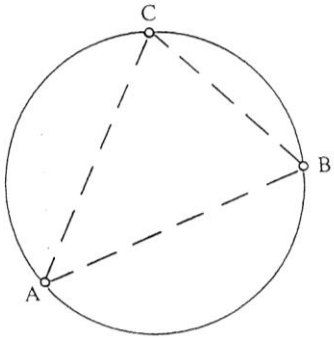
### د مساوي ټوټوونو جمله

مساي اوږدې ګرديټوټې د ګردي له منځټکي مساوي فاصلې لري، مساوي منځټکي کونجونه، مساوي ګرديلينده، او مساوي ګرديټوټې او مساوي ګرديبرخې لري .

(c) ketabton.com: The Digital Library

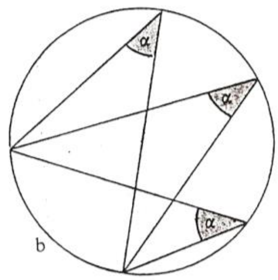


## د چاپیرګردی جمله




د درې ټکو A, B, C لپاره یوه ګردی موجود ده چې د دریواړو ټکو څخه تیریږي:
دا د دریکونجي ABC چاپیرګردی بلل کیږي
ځیره

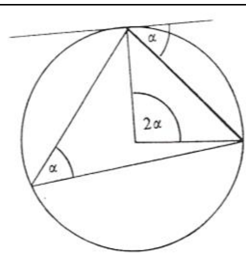
## د پریفري – یا ژیکونج جمله




ځیره ۱۳۳

په همغه لینده باندې ټول
پریفري – ژی کونجونه مساوي دي

**د منځېټکي کونج او پریفري – یا ژی کونج جمله:**

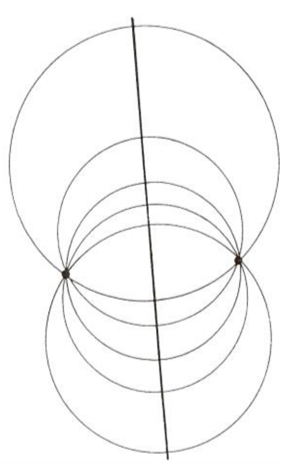



یو منځېټکي کونجدوه برابره دومره لوي دی لکه په دې تړلی پریفري – یا ژی کونج( چاپیریالکونج) مخامخ ځیره.

د منځېټکي کونج او د تانجنت کونج – او ټوټونکونج جمله:

د منځېټکي کونج دوه برابره دومره لوی دی لکه په دې اړوند تانجنت – یا ټوټه ووني کونج.

**د ګردیو جمله چې په دوه ټکو کې سره غوځوي:**



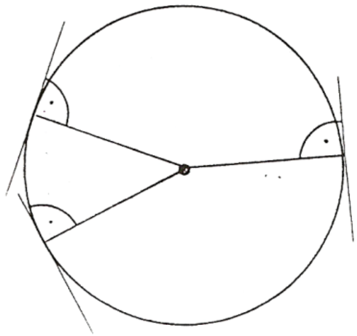
د ټولو ګردیو یا دایرو منځېټکي کونج چې یو بل دوه ټکو او کې غوځوییو ناپای کرښه باندې، چې ځایلاین (ځایکرښه) وایي پراته دي. مخامخ ځیره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



## د وړانګې او تنجنت جمله

پــه لمستـــکي پرتـه وړانګه او اړوند تانجنت سره یو په بل ولاړ یا نیغ پراته دي.

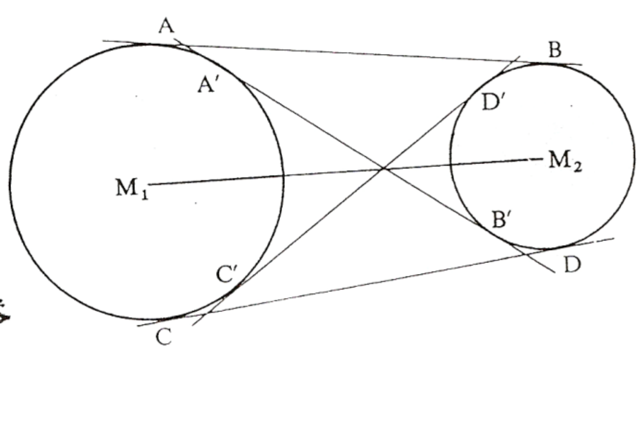


څیره ۱۳۶

## د تانجنت جمله:

د دوه ګردیو د منځ ټکو $M_1$ او $M_2$ سره تانجنتونه دننني ( دباندني ) تانجنتونه نومیږي که د دوه ګردیو د منځټکوکرښه $M_1 M_2$ غوڅه (غوڅه نه ) کړي.که چیرې دوه ګردي ګډ دننني او دباندني تانجنتونه ولري، پس د داوړو تانجنتونو غوڅټوټې همغه اوږدوالی لري.

$|AB| = |CD|$ په همدې ډول (<=>) $|A'B'| = |C'D'|$

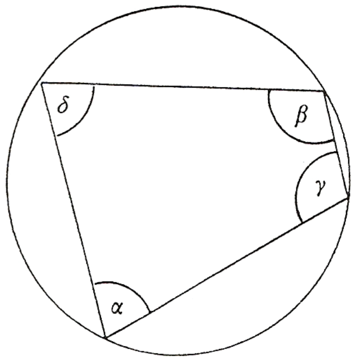



څیره ۱۳۷

(c) ketabton.com: The Digital Library



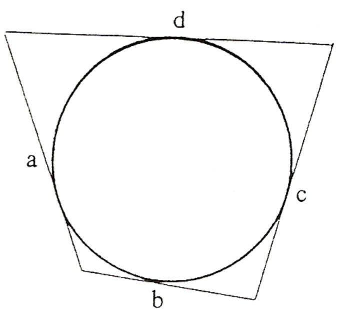
## د ټوټوونو څلورګوټي جمله




خیره ۱۳۸

د ټوټونوکونجونه چی مخامخ پراته دي یو بل سره 180° باندې پوره کوي.

$\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180°$




خیره ۱۳۹

## د تانجنتونو څلورګوټي جمله

د تانجنتونو په څلوکونجي کی د مخامخ کونجونولویوالی د نورو مخامخ کونجونو سره مساوي دی.

$a + c = b + d$

ایلیپسی( بیضوي یا هګی) (دلته موخه هواره ده) Ellipse

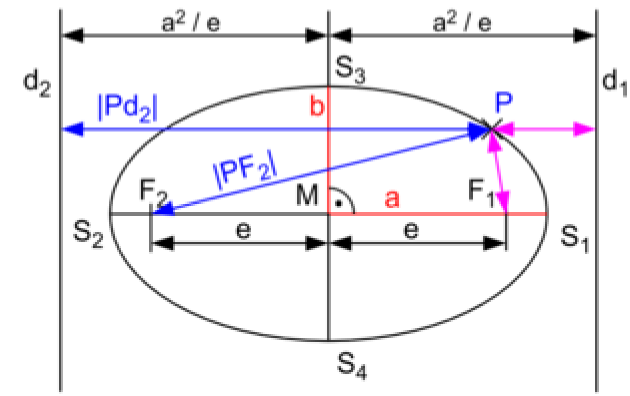
پیلبیلګه:

د کړاو میز جوړښت باندې موږ په اته کونجي اوبی یا حل کی تم کړی وو. دا چی په دې ډول یو میز سره تل د زخمي کیدو خطر موجود دی

پوښتنه رامنځ ته کیږي چی : داسی یو را ګردشوی ښکلی شکل ، چی ګردئ نه وي او منظم غوځ وي، شته، چی د کړاو اړتیا پوره کړي؟ په ریښتونی ، داسی یو اوبی یا حل موجود دی، لکه چی لاندې خیره ښایي .چی هر د غاړې تکی دوه تکو واټنونو ته یو ثابت واټن لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

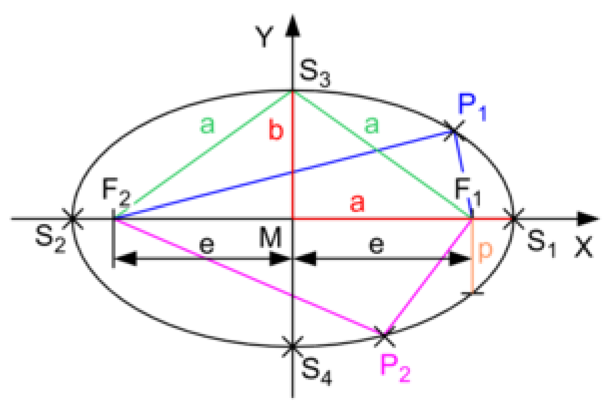





پیژند یا تعریف:

د ټولو هغوټکو Pډیري ته چی له دوه ځاي په ځاي ټکو F1 او ( F2 سوزېدټکی یا بهتره سوزونټکو( څخه ثابته یا همغه واټن یا فاصله لري، ایلیپسی نومیږي

لاندې واټونو یا فاصلو ته سوزونوړانګی وايي. $| PF_2 |= r_2 \wedge | PF_1 |= r_1$




$$E = \{P \mid \left|\overline{F_1P}\right| + \left|\overline{F_2P}\right| = 2a\}$$

منځ ټکي ) واړوی M په (Oته د ایلیپسی منځ ټکی وای، e ته د سوزونواټن یا فاصله یا لایني ایکسڅنتریځیتایت (lineare Exzentrizität) یا لایني ناراټوله وايي .ددې لویو لپاره لاندې اړیکي باوري دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

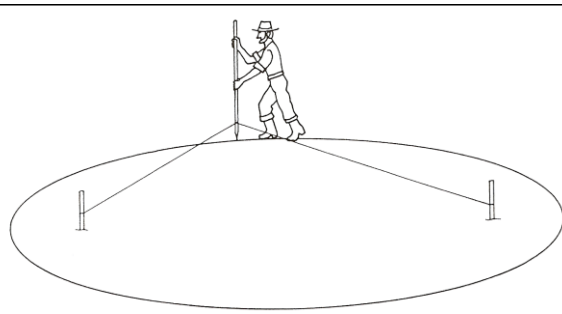


$$I........r+r=2a \wedge II........a^2-b^2=e^2$$

په دې کی a او b د ایلیپسی لوي او ووړ نیممحورونه دي. اړیکه I روښانوي، که چیرې د ایلیپسی ټکی P د نیممحور a په اخر کی وټاکل شي، IIد پیوتاګوراس له جملی لاس ته راځي که د P ټکی د b نیممحور په اخر پروت وي .دواړه ناپاکرښی چی د سوزونټکي تیریږي او په دې په O کی ولاړه ناپای کرښه د ایلیپسی سیومیټري محوررونه جوړوي .د خوښي په ټکی P کي هره په تانجنت ولاړه کرښه د سوزونوړانګو ترمنځ کونج نیموي .

د ایلیپسی جوړول د باغوان لخوا یا د ایلیپسي باغواني جوړښت:

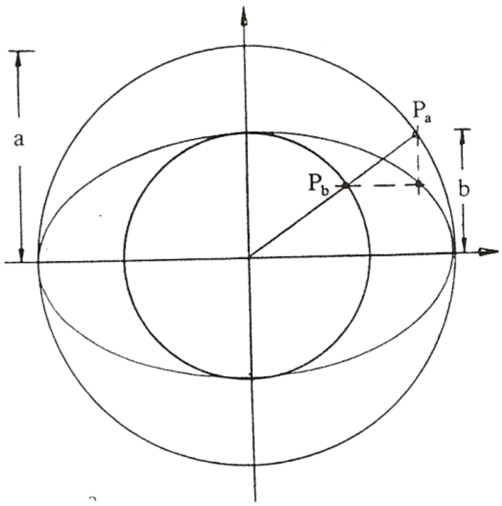
دا ځیره دې ګران لوستونکي د تمرین په توګه وباسې٠ د یوې رسی، چی په 2 aاوږده وي، په داوړو سرونو کي موږي وتړئ او دا بیا په ځمکه ټکوهي، د یو بل )خوزیدونکی ( موږي یا لرګي په مرسته دا پړی راکښ کړئ یا راکاږی او وګرځوی ، دلته کوم شکل چي پیداکیږي ایلیپسی ده او دواړه د پړي د سرونو ټکي چی موږي پرې وهل شوي سوزونټکي دي. ځیره په هر کواوردینات سیسم او یا په یوه میلي متر کاغذ کونځینټري یا راټولو ګردیو په مرسته بل جوړښت امکان پیداکیږي، چی سړی د یوه ټکي دوه ګردئ د a او b وړانګي ووهي او هره د خوښي وړانګه د ننني ګردئ په Pb او دباندنی ګردئ په Pa کی غوځوي. که د Pb ځخه یوه پرته کرښه وویستل شي او د همغه تر Pa دوام، نو هرچیرته یو د ایلیپسی یا هګی یا بیضوي ټکی لاس ته راځي. د ایلیپسی هر ټکی داسی پیدا کیدی شي .پیژندل کیږي چی هر 2 bته غبرګ ټوټونی

| | |
|---|---|
| <br>ځیره ۱۴۱ | د $k= a / b$ فاکتور سره لنډ شوی دئ. له دې سره د هوارې دننه هم تغیر خورې ددې فاکتور k په اندازه<br><br>$...r \Rightarrow \pi r.(k.r)=F(hagai, baizawy)$<br>او له دې چی $r = a$ او ( $k.r =b$ )<br>د لته r د ګردئ » لویه نیمه اکسی(محور) ده<br><br>جمله : دایلیپسی هواره ده $F=\pi ab$ : |

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ایلیپسی چاپیرونی په ساده ډول نه شي شمیرل کیدی، په عمل کی په زیات وخت کی نزدیونه یا نزدې شمیرنه بسیا کوي.




خیره ۱۴۲

**جمله** : د ایلیپسی چاپیری:

$$U \sim \pi(1{,}5\,.\,[a+b] - \sqrt{ab})$$

او یا ګردي ته ورته ایلیپسی. دا په دې مانا چی $a \sim b$ :

$$U \sim \pi\,.\,\sqrt{2(a^2+b^2)}$$

دا فرمولونه، که $a = b$ وي د ګردي چاپیري ته ځي:

$$U = \pi(1{,}5\,.\,[a+a] - \sqrt{a^2}\,) = \pi(3a-a) = 2\pi a = 2\pi \Leftrightarrow$$

اویا په په همدې توګه یا $\Leftrightarrow$

$$U = \pi\,.\,\sqrt{2(a^2+a^2)} = \pi\,.\sqrt{4a^2} = \pi 2a = 2\pi r$$

بیلګه:

کوم خورا لویوالی د بڼاغلی ګراو میز په ایلیپسي یانیضوي یا هګي خیره لرودی شي ؟

لوي محور $a = 1m$ پاتي کیږي، کوچنی محور دی: $b = 95cm$، داچی میز باید د درځ ژوروالي پورې غوخ شي. نو له دې امله هواره ده:

$$F = \pi\,.1.0{,}95 = 2{,}985m^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



چاپیری کیږي:

$$U \sim \quad 1(1,5.1.95 - \sqrt{0,95}\,)\ 6,127\ m \quad \Leftrightarrow$$

یا په همدې توګه د بیضوي یا هګۍ و د ګردې فورم ته یا ګردیځیرې ته نزدې فورم نیسي U ~ 6,128 m. له دې امله هګیځیره د میز لپاره مساعد اوبی یا حل دی.

## تمرینونه

۱ – په کالیفورنیا کی د یوزیمیت ملي پارك Yosimite National Park ، خپل ماموت ونو (Mammutbaumbestände) له امله خورا مشهور دی. کوم چاپیری یی هغه ونه لري چی وړانګه یي ۷ ، ۴ متره وي؟

۲ – د لاس ساعت دقیقه ښونکی ۱،۵ سانتي متره اوږد دی(څرخونمحور– څوکه )، څوکه یی په یوه سانیه، یوه ساعت، یوه ورځ، یوه اونی، یوه کال کی څومره لار وهي؟

۳ – ځمکه نزدې ۶۳۷۸ کیلومتره یوه قطبي( اکواتور ) وړانګه لري. قطبچاپیری یی څومره دی ؟

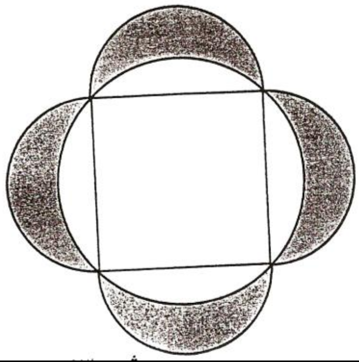
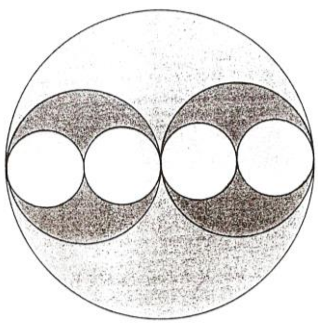
۴ – په خیال کی دې ولرو، چی له اکواتور یا قطب څخه یو پری غزوو ( ۴۰۰۰۰ کیلو متره )، کوم چی د اکواتور یا قطب له چاپیري څخه یومتر اوږد دی. د یوه ځانګړي تخنیکی چمتووالی له لارې په هرځاي کی د ځمکی څخه په همغه واټن راوړل کیږي. ایا دا واټن پوره لوي دی چی سړی ددې ترمنځ یوه د (ګیرکلی ) پاکي وځایوولی شي یا ځاي کړای شي؟

۵ – د غوځهواره به یی د ځمکي سره څومره وي که د اکواتور یا قطب په اندازه جګ وي؟

۶ – په اکواتور یا قطب دوه ځایونه څومره لري دی، که یو له بل یوه اوږددرجی په

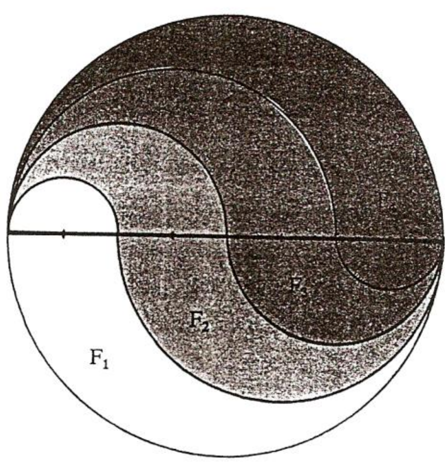
**انداه لرې وي؟**

(c) ketabton.com: The Digital Library

| | |
|---|---|
| ۷ – د کردۍ [اپریا ل څنګه تغیرخوري، که د هغه وړانګه دوه رابره شي یا په همدې ډولنیمه شي؟<br><br>۸ – وښایۍ: د مربع هواره د څلورمې میاشتو(سپوږمیو) د هوارې سره مساوي ده؟ |  |
| د څیرې سره سم د کردیو هوارمتن یا د هوارو دننه د مساوي وړانګو سره وټاکۍ. د ا هره یوه د لویې کردۍ په سلو کې څومره جوړوي؟ وښایۍ، چط څلورو واړو کردیو چاپرۍ د همغې وړانګې سره دومره لوي دی لکه د راچاپیره یا دباندې کردۍ چاپري.<br><br>۱۰ – د یوې مربع د باندې او دننه یوه کردۍ راګرځیدلې. د دواړو کردیو هوارې یو بل ته څنګه متناسب دي یا ځانونه نیسي؟ |  |

۱۱ – د دوه کردیو منځ ټکی د مساوي وړانګي $r = 7,2\ cm$ سره، یو له بل دومره لري دي لکه دا وړانګه . د دواړو کردیو ګډ هواره اندازه کړی، چی څومره ده؟

۱۲ – په یوه کردۍ ، چی وړانکه یی $r = 10\ cm$ ده، که یوه کردیکړی کیښول شي، چی هواره یی دومره لویه ده لکه د دننه کردۍ هواره. د دباندې کردۍ وړانګه به څومره وي؟



خیره ۱۴۵

۱۳ – د یوې کردۍ برخهوارې، $F_1$ او $F_2$ ، لکه په خیره ۱۴۵ کي چی ورکړ شوي، وښایی، چی وړانګه یي $r = 4\ cm$

(c) ketabton.com: The Digital Library



وي. وښايي چې هواره په څلورو مساوي هوارو ټوټه شوې ده ( ځيره ۱۴۸ )

۱۴ – د هغه ګردې وړانګه وښايي ، کوم چې همغه هوارخوندي لري لکه :

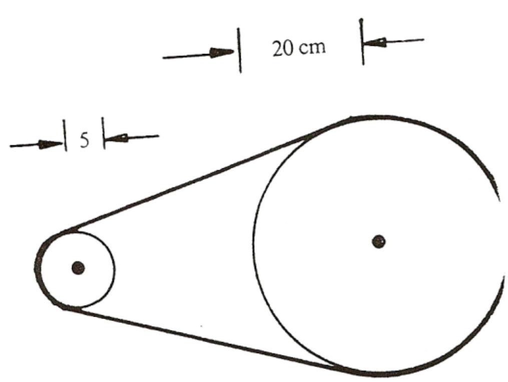
الف ) يوه مربع، چې داړخ اوږدوالی يې ۵ سانتي متره وي.

ب ) يوه روتی چې نيمي يې ۴ سانتي متره او ۶ سانتي متره وي .

پ ) يو مساوي اړخيز دريکونجی چې د اړخ اوږدوالی ۷ سانتي متره وي.

۱۵ – د يوه پنډ پينسيل سره يوه ګردۍ وهل کيږي، چې دننی وړانګه يې ۵ سانتي متره وي. داچې پنسل يو سانتي متره پنډ دی ، نو دا په ريښتينی يوه ګرديکړۍ ده. د دې ګرديکړۍ هواره وشميرۍ.

۱۶ – يوه ساتليت يا جوړه، يعنی مصنوعي سپوږمۍ، له ځمکی په يوه ګردۍ راڅرخي، چې سرعت يې په سانيه کی ۸ کيلو متره دی . د ځمکڅرخون لپاره دا ۱ ساعت او ۲۸ دقيقو ته ضرورت لري. وښايي چې دا ساتليت يا جوړه سپوږمۍ يا مصنوعي سپوږمۍ له ځمکی څخه په کوم جګوالي الوزي؟




ځيره ۱۴۶

۱۷ – د يوه څرخونکړې يا بهتره څرخونپټۍ په مرسته کيدی شي څرخونحرکت يا څرخونخوزون د يوې څپی په بلی څپي راوړل يا واړول شي. په يوه ورکشاپ کی يوه دقيقه يعنی ډيره ټيك اره په بريښنا ماشين چلول کيږي يا په حرکت راوړل کيږي. د ارې خوزون يا حرکت څومره زر يا تيزدی يا چټك دی، که د ماشينڅرخونڅرخی يا ګاډيل ( r = 20 cm ) په ثانيه کی ۸۰۰ ځله وګرځي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



۱۸ – کوم چاپيرى او هواره اليپسى يا بيضوي يا هګيخيره لري که ولر:

a ) $a = 40$ cm, $b = =12$ cm, b) $a = 6$ cm, $e = 1$ cm

c ) $r_1 = 4$ cm , $r_2 = 3$ cm , $w(r_1, r_2) = 90°$

۱۹ – وښايي: په يو په بل پرتو اليپسو کى دى $a_1 = a_2$ او $b_2 = b_1/2$ ، نو دننى ايليپس بيضوي همدومره لويه ده، لکه په دې دپاسه ايليپسي يا هګيخيرې غاړه.

۲۰ – ځمکه په يوه کال د لمر څخه نږدې د يوې ګردې په څير راڅرخي. ددې چاپيري وړانګه نږدې ۱۵۰ ميليونه کيلومتره ده.

الف ) د څرخونلار اوږدوالى څومره دى؟

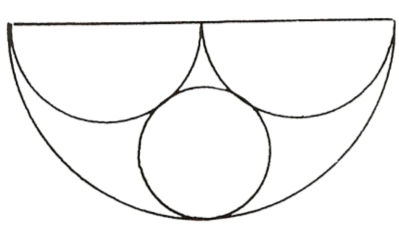
---

ب ) په کوم منځنى سرعت ( کيلو متره په سانيه کى ) ځمکه په خپل چاپيري راڅرخي؟

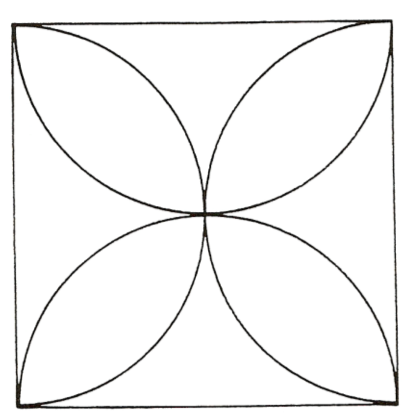
پ ) په ورځ کى ځمکه نږدې څومره واټن تى کوي ؟

ت ) په ريښتونى ځمکه د لمر څخه په يوه ايليپسى لار راڅرخي، چى په يوه سوزون ټکي کى پخپله لمر قرار لري. د لته هغه لنډ واټن ځمکه لمر ۱۴۷ ميليونه کيلو متره دى، او لرې واټن يى ۱۵۳ ميليونه کيلو متره دى. په دې ورزيات ورکړو سره کوچنى نيممحور وښايي، او همدا ډول د ايليپسي يا بيضوي هواره او (نږدې) چاپيرى هم.

۲۱ – د ټولى هوارې کومه ټوټه برخه رنګ ده؟



څيره ۱۴۷



(c) ketabton.com: The Digital Library



۲۲ – د دوه ګردیو وړانګی ځان داسی نیسي یا په تنساب کی سره پرتی دي، لکه 5 : 8 په لویه ګردۍ کی یو ګردیبرخه موجود ده ، چی د هغی لینده دومره لویه ده لکه د کوچنی ګردۍ وړانګه r = 10 cm. وشمیرئ

الف– منځتښکي کونج

ب – د ګردیبرخی هواره.

۲۳ – کوم منځتښکي کونج په لیندې پورې اړه لري، چي

الف ) ټیك همدومره لوي وی لکه وړانګه ؟

ب ) دوه واره دومره لوي وی لکه وړانګه ؟

پ ) نیم دومره لوي وی لکه وړانګه ؟

۲۴ – د یوې ګردیټوټونی منځ ټکي کونج وشمیرئ ، چی هواره یی همدومره لویه وي، که په وړانګه یی چی مربع .

۲۵ – یو مصنوعي ساتلیت یا جوړه سپوږمۍ ځمکه په ۲۰۰ کیلو متره جګوالي راګردوي یعني له ځمکي راګرځي یا بهتره له ځمکی راځرخي. د راځرخونوخت یی ۱ ساعت، ۲۸ دقیق او ۲۶ ثانیي دي.

الف – سرعت یی څومره لوي دئ؟

ب – په یوه دقیقه کی څومره لار وهي؟

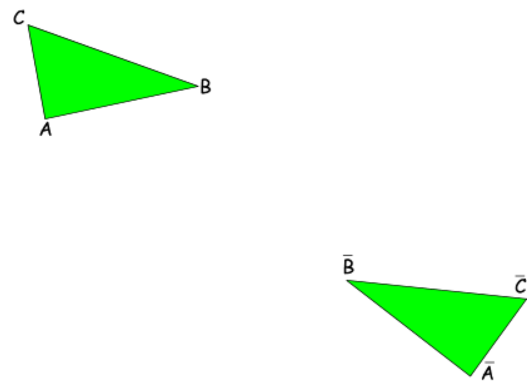
(c) ketabton.com: The Digital Library

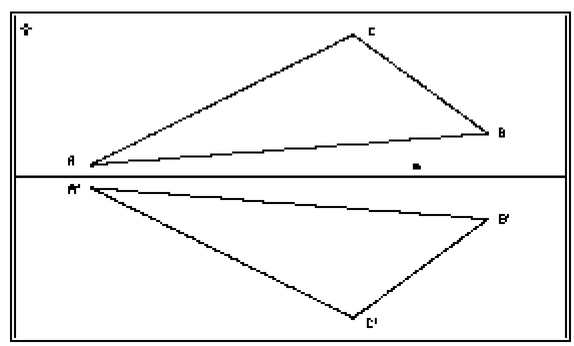


# کونګروواینځ ځیرونی(برابرې ځيرونې)

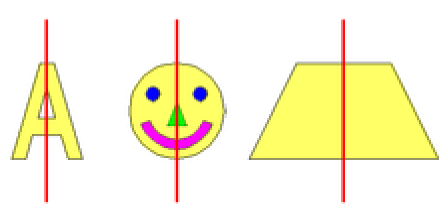
Kongruenzabbildungen

Congruence mapping




## سيومتري ځيرې يا شکلونه Symmetrische Figuren

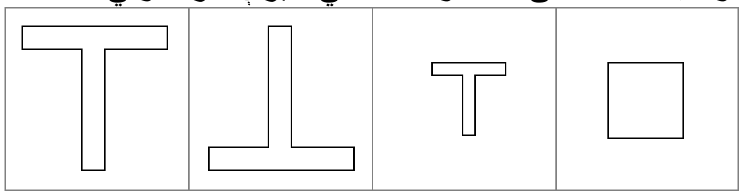


د هوارو ځخه مو وليدل، چې د هغو ترمنځ سيومتري ځيرې يا شکلونه، يعنی داسي په نامه برابرې يا مساوي او نيمايي ځيرې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

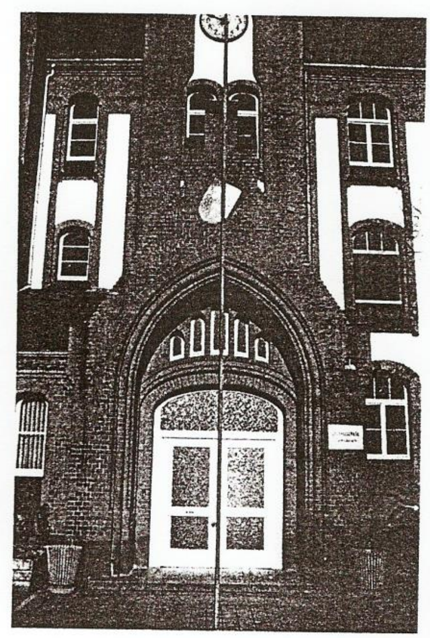


د شمیرپوهنی له مخی د ساده شمیروړتوب له امله تخنیکي، د هغو د ساده بدله ونی له امله، او د بڼکلا له مخی، د هغو د همغسي ځیرې ځرګندوني له امله یو ځانګړی ځاي نیسی)

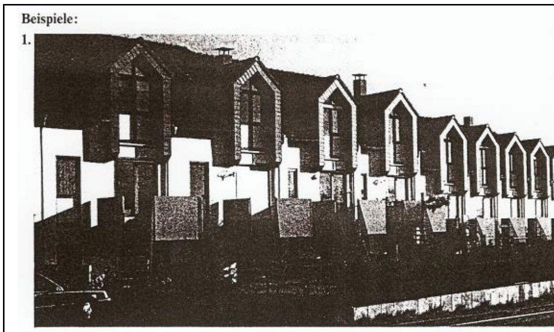


په پورته ځیره کې کیڼ لور ته دوه د ټي ځیرې یو بل پټوي، کیڼ لور دې د کښلی ټي سره برابرپټوونی ټي وکښل شي٠ دا محور سیومتري ځیرې دي٠

په ځانګړي ډول د اخرني شکلونو ځخه کتل کیږي چې سیومتري تل دا مانا نه لري چې شکلونه دې په دوه نیمو وویشل شي، کیدی شي دوه یا زیات شیان وي ، چې د هغو د ترتیب له امله یو له بل سره خیالي سیومتري اړیکي ولري. دوه یا زیات شکلونه لکه چې ځنګه ضربالمثل وایي چې داسي یو بل ته ورته دي لکه » دوه هګی .» له دې ځایه تر کونګروانیڅ یو پل دی



ځیره ۱۴۸




ځیره ۱۴۹

پیژند : هندسي شکلونه کونګروینځ ( برابر ) بلل کیږي، که په فورم ، بڼه ( ځیره) او لویوالي کی یو بل سره یو شي وي او یواځي ځاي یی یو له بل بیل وي٠

(c) ketabton.com: The Digital Library



يادونه : زه به وړانديز وکړم، چې کونګروانيڅ څيروني » ورته برابرې څيروني » وبولو، ځکه، چې يو بل ته ورته دي او برابرې هم دې ياني که يو پر بل واچول شي يا يو پر بل پريوزي، نو يو بل پټوي٠

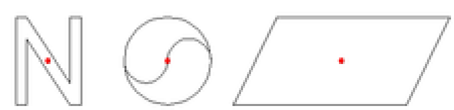
د دوه شيانو A او B د کونګروانيڅ د ليکلو سومبول په لاندې ډول دی:

A ~ B <=> A ~ B

د کونګروانيڅ خويونه :

١ - کونګروينڅ څيرې يا - شکلونه يو په بل پريوځي يا يو بل پټوي .

٢ - کونګروينڅ څيرې يا شکلونه د کاغذ په هنري غبرګولو يا غوڅولو په بنسټ، کيدی شي يو په بل پريوځی٠



پورته څيره ټکی سيومتري ده ٠

غوڅول د شمير پوهنی کار نه دی، مګر غبرګول کيدی شي وي.

لنډ : محورهنداروني او کربنهنداروني ، څرخون، ټکيڅيره ونې او راکښنې کونګروانيڅ څيره ونې دي٠

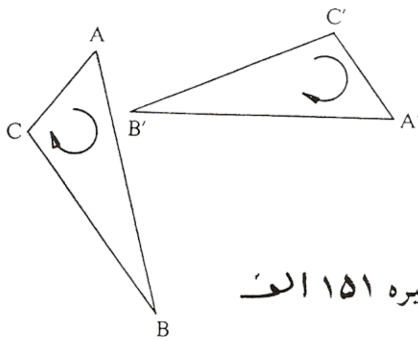
پوښتنه کيږي چې :

په شميرپوهنه کی عمليي شته چې د هغي په مرسته يا د هغي له لارې يا د هغی په وسيله څيرې يو په بل پريوتی - او پټيدی شي ، داسي کارونی يا عمليي په کړنه يا عمل کی شته او دا کونګروانيڅ څيره ونې يا څيره کوني بلل کيږي.

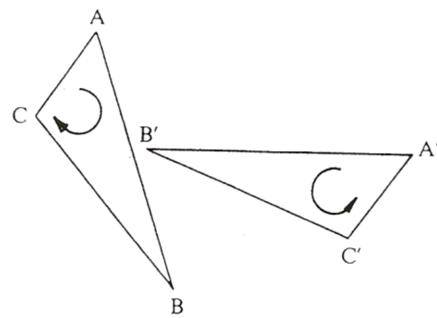
هر کونګروانيڅ څيره يا شکل او لويوالی ( منځهواره) ساتي. په دې ډول بايد کونجونه او اوږدوالي ريښتونی وي، چی په دې ډول د برخو تناسب، کربښوتناسب، برخو تناسب غبرګ کرخو تناسب ( ځاننيونه) ريښتونی دی. لاندې به وښوول شي چی زيات تر زيات د کونج څرخونلور يا سمت تغير خوړونکي دی، که څرخونلور تغير ونه خوری نو يولوريز کونګروينڅ بلل کيږی او که څرخونلور تغير وخوري نو شکلونه مخامخ لوريز يا په څټ يا برعکس کونګروانيڅ بلل کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

شیره ۱۵۰

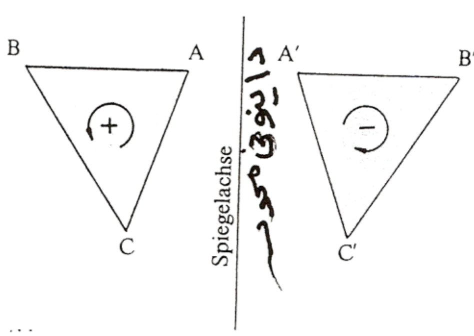



شیره ۱۵۱ الف




شیره ۱۵۱ ب

## کرښهندارونه( په کرښه منعکسونه ) Geradenspiegelung



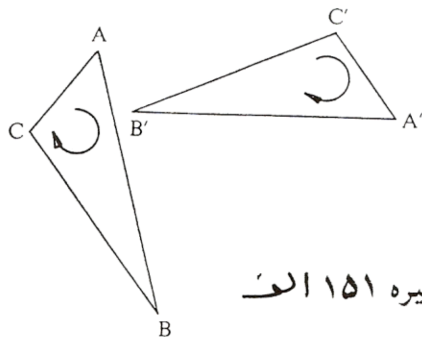

شیره ۱۵۲

یو کونګروانیخ شیره ونه مو په پیل شیرونو کی وښوده. کرښ اینونه یا کرښهنداروونه یواځنی مخامخ کونګروینخ شیره ونهی ده ، ځکه چی د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.

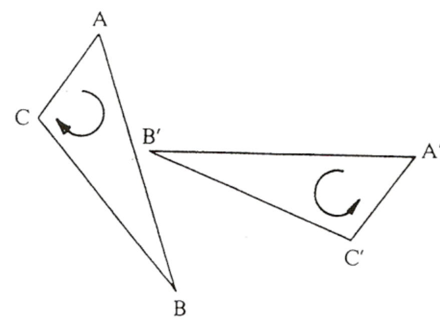
(c) ketabton.com: The Digital Library



خیره ۱۵۰

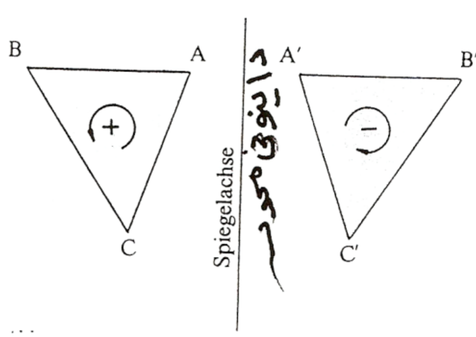



خیره ۱۵۱ الف




خیره ۱۵۱ ب

## کربنهندارونه( په کربنه منعکسونه ) Geradenspiegelung



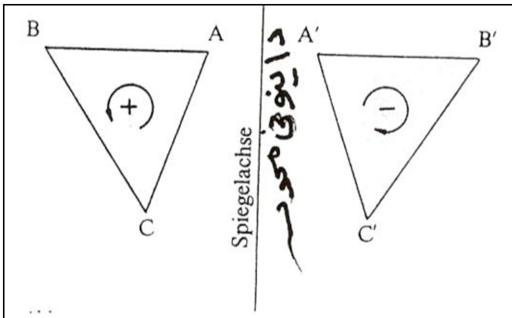

خیره ۱۵۲

یو کونگروابنخ خیره ونه مو په پیل خیرونو کی وښوده. کربنی اینونه یا کربنهندارونه یواځنی مخامخ کونگروینخ خیره ونهی ده ، ځکه چی د کونج د لور تغیر په کی منځ ته راځي.

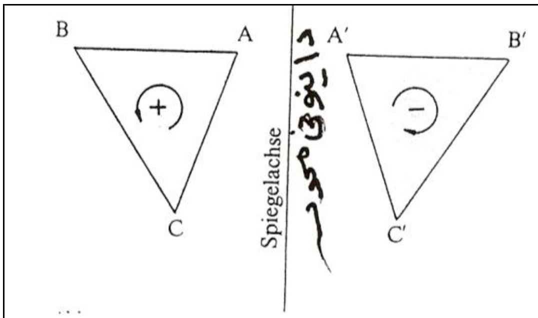
(c) ketabton.com: The Digital Library



په کربنه هندارونه(پ کربنه منعکسونه):
په پیل انعکاس کې مو یوه کونګروانخ تشکیل وښووه. په کربنه انعکاس ورکول یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکه چې د زویې د لور منځ ته په کې راځي.

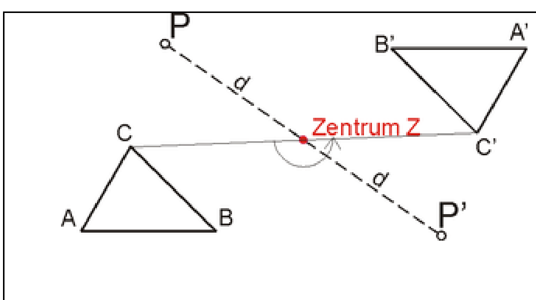



په کربنه هندارونه(پ کربنه منعکسونه):
په پیل انعکاس کې مو یوه کونګروانخ تشکیل وښووه. په کربنه انعکاس ورکول یواځنی مخامخ انعکاس دی، ځکه چې د زویې د لور منځ ته په کې راځي. لاندې ځیره دې وکتل شي




د درې ګوډي ABC مثبت- یا زیاتونلوریز ځخه یو منفي لوریز یا کمونلوریز درې ګوډی A'B'C'جوړیږي .پخپله کربنه g په اینونکی کربنه یا په اینونکربنه یا په هنداروونکربنه بلل کیږي او یا د اینه ونې محور. په دې تول پراته ټکی تغیر نه خوري) ځاي په ځاي ټکی (فیکسټکی ( Fixpunkte دی، له دې امله کربنی g ته د ځاي په ځاي ټکوکربنه هم وايي. تولی په g نغولاړې( لنډ: ولاړې) کربنې د اینه کولو په بنسټ په خپل ځان ځیره کیږي، مګر ټول ټکي د g سره د غوڅټکي په استثني یا بی له غوڅټکي کربنې ټکي د خپلې فاصلی په ساتلو ځاي بدلوي. له دې امله دا کربنې ځاي په ځاي کربنی بلل کیږي ٠
په لاندې ځیره کې کیڼ لور ته درې ګوډی په ټکی ، چې د کښلې کربنی منځ ټکی دی ، ښي لور ته ځیره کیږي او دا په همدې ټکي٠ کتک کیږي، چې د هر ځیره ټکی واټن د همدې ټکي ځخه همغ دی لکه د ځیره کووني ټکی واټن له دې منځټکی ځخه .

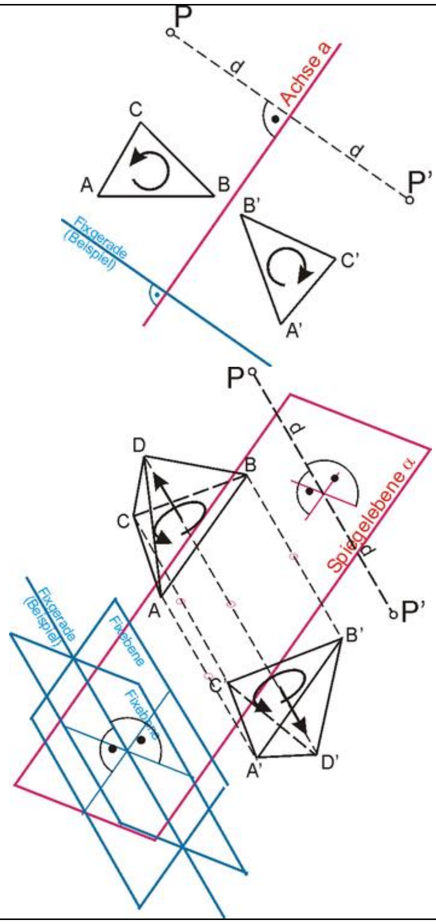
په پورته محور اینه ونه کی لیدل کیږي، چې د محور ځخه د ځیرې او ځیره کونکي ټکي سره برابر دي، خو ګورو، چې ځرخون لور یې همغه ځرخونلور نه ده٠



(c) ketabton.com: The Digital Library



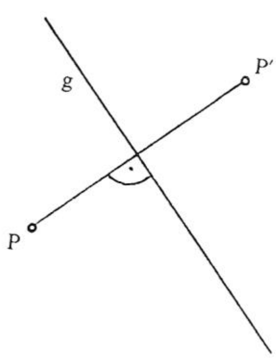
په مخامخ ځیره کې اینه ونې کښل شوي دي




## د کرښې اینوونو( هنداروني يا انعكاس) جوړښتځیرنه

١ - دا ټکې له هر په نخه ټکي ( ډیرګوډي کی د کونجټکی او په ګردي کی د منځ ټکی) په g ولاړ یا زوړند پریوځي او دا له g اخوا په فاصله د |Pg|غزوي. (دا د مخه راغلي .)

٢ – ټول ټکی د اصل په ترتیب سره وتړی( په ګردی کی : په M'یو ګر دی د r'=r په وړانګه ووهی). د ځیرې او پخواځیرې(اصل) د ټولشکل لپاره بیا g سیومتریمحور دی، دا په دې مانا، چی ټوله ځیره د اینوني سره په خپل ځان ځیره کیږي .



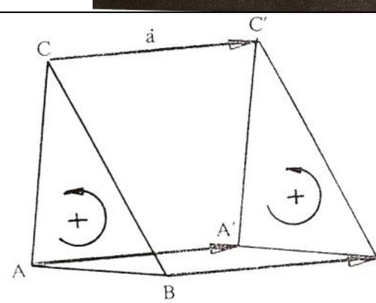

ځیره ۱۵۳

(c) ketabton.com: The Digital Library



هره کرښ اینوونه Sg کیدی شي چې په g بیا کرښ اینونو باندې په همغه محور بیرته راوکرځول شي.دSg په یا په ښت شیره ونه یا مخامخ شیره ونه بیرته Sg دی. دا دشیرو زیاتواره شیره ونو ځانګړی حالت د٠
دلته بیا سړی د شیره ونو د ځنځیرونو ښخه خبرې کوي او د دې لپاره تړلنخبنه »°« په کار اچول کېږي. کرښ اینوونه د ګونګراینښو لاندې یو مرکزي ځای یا منځځای لري، ځکه چې ټولی نورې اینونی د کرښ اینوني ځنځیرونو باندې بیرته راګرځول کیږي، لکه چې په لاندې کی به وګورو.

## راکښنه یا کښونی Verschiebungen

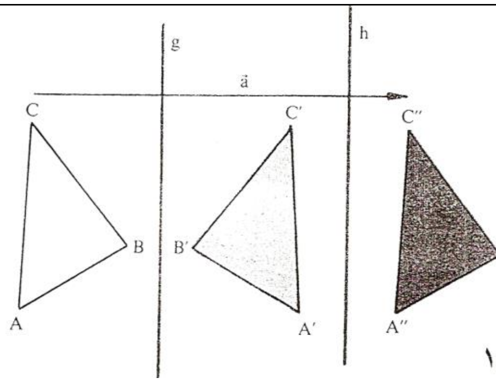
| | |
|---|---|
| پیژند :<br>غبرګکښول ،لنډ کښول یا وړل Va د خپل وړلوکتور یا وړونوکتور یا کښونوکتور له لارې یواځنی ټاکلی دی (ددې لپاره د وکتور لوست وګوری٠ | Verschiebungen راکښنه یا کښونه<br> |
| د وکتورونو لاندې مساوي اوږده او په یوه لور غشي پوهیږو، کوم چې د شیرې وتلتکي په شیرنټکو لوریز وي .<br>(لنډ : د وکتور لاندې یوه لوریزه کرښه پوهیږو، د ځانګړو شرایطو لاندې) د کښولو لپاره پریکړی د وکتور اوږدوالی \| a \| دی او د وکتور لور. کښول په همغه لور کونګرواینښیروني دي، دا په دې مانا چې د شرخونلور ساتلی پاتي کیږي٠ | <br><br>شیره ۱۵۵ |

د کښولو جوړښتښیرنه
۱ - په هر نخښه شوي ټکي (په ډیرګوډي کی ګوډونه او په ګردۍ کی منځټکی)د ګښولو وکتور a وکاږۍ ( برابر یا مساوي اوږده، همغه لوراو غبرګ غشی.)
۲ - د وکتورونو اخرټکي سره د اصل په پرلپسي ترتیب ونخلوی. ( په ګردیکښونو کی : په اخر ټکي د r وړانګي په اندازه ګردۍ ووهی)کښونه ځاي په ځاټکي نه لري( که د صفر وکتور دې په نامه identität ایدنتیتي یا کټمټ شیرونی ښخه تیر یا صرف نظر شو)

(c) ketabton.com: The Digital Library



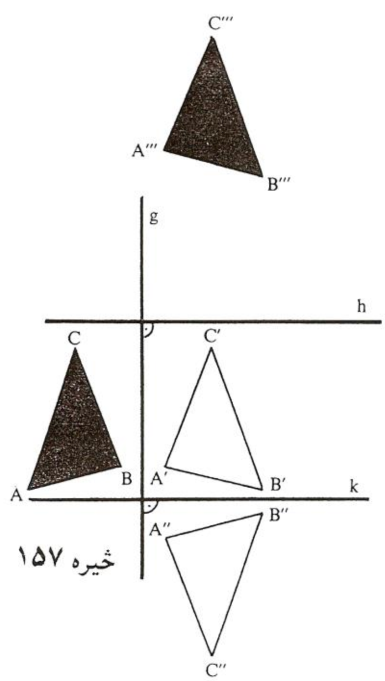
ددې لپاره ټولی له a سره غبرګی کربښي ځاي په ځاي کربښی دي، دا په دې مانا چی دوي په خپل ځان ځيره کيږي .هر کښنول يا نوه هم ښنه هره کښنه ونه Va د V-a کښنولو له لارې بيرته راوګرځول کيدی شي.




۱۵۶

دلته a- وکتور د a سره غبرګ او همغومره اوږد دی، مګر په مخامخ يا په څټ لور .هره کښنونه په دوه کربښو g او hله دوه واره اينولو يا هنداروننو له لاری بيرته لاس ته راوړونکی ده، چی واټن d يی همدا د کښنولو وکتور نيم اوږدوالی ورکوي. دا بدلون يواځنی نه دی: پس په عمومي ډول باور لري: $V_a = S_g \circ S_h$ د g||h سره او |a| = 2d ، چيرته چی d د g اوh ترمنځ واټن ورکوي.

په يوه ځانګړي ډول يو په بل پسي صورت نيونکی زيات کربښ اينونه دې په دې ځاي کی ذکر شوي وي، څکه چي دا – لکه څنګه ټول نور واريانت يا




خيره ۱۵۷

اووښتونی – يو ساده بنسټيز فورم نه ورکوي : خويوونکي يا کښنووني اينونه.
ټرنه $G_{a;g} = S_g \circ V_a$ يو کښنووني اينونه ده،
که a || g وي.
هره کښنووني اينونه يا هنداړونه د درې کربښ اينونو $S_h \circ S_k \circ S_g$ تړل دي، چيرته چی کربښي h او k ، کوم چی دکښنووني ځاي نيسي، په g نيغی ولاړې دي:
h || k ; h ⊥ g .
يوه کښنوني اينونه ځاي په ځاي ټکي نه لري، مګر g د ځيرووني ځاي په ځاي کربښه ده. هره کښنووني اينونه $G_{a;g}$ په $G_{-a;g}$ سره بيرته راګرځول کيدی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

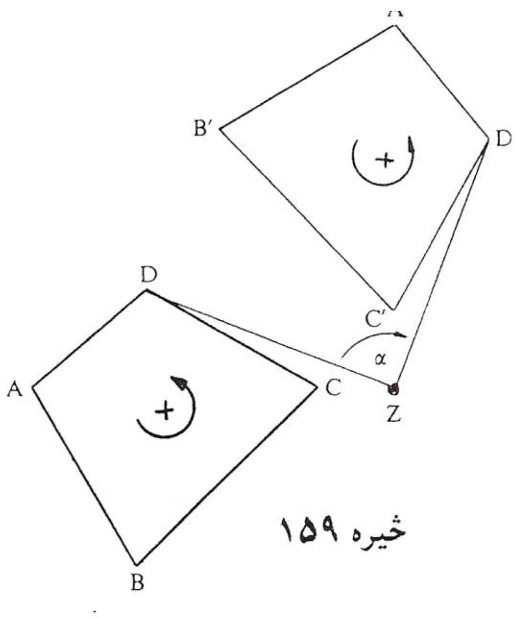


## څرخونونه(څرخونونه)

خیره ۱۵۸

تعریف : څرخون $D_{Z;\mu}$ هغه څیرونه ده، چې په ورکړ شوي ټکي Z ( څرخونټکی یا څرخونمنځ ) هر اصلی ټکی P په یو څیره ټکي 'P داسې تنظیم کړي، چې $|PZ| = |P'Z|$ او $w(PZP')=\mu$ چې μ یو د مخه ځاي په ځاي ورکړ شوی کونج دی، د څرخونکونج.

پس یو څرخون د څرخونټکي Z او څرخونکونج ثخه یواځنی ټاکلی دی. د څرخونلور په مخ نخه له مخه ورکړ شوی.
( ددې لپاره دې د مخه تري لوستونه پام کی وي ).



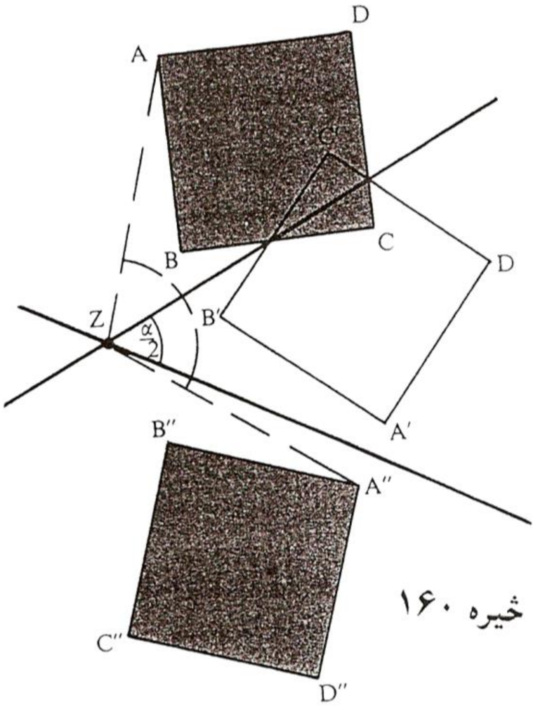
څیره ۱۵۹

## دڅرخون جوړښت څیرنه

۱ – په ټولو په نخښه ټکو ( د ډیرکونجیز کونجټکي، په ګردی کی منځټکی ) او

(c) ketabton.com: The Digital Library






خیره ۱۶۰

حرخونمنځ Z یوه وړانګه کیږدی . د هرټکي P واټن PZ په یوه مرستندوي وړانګه وکاږی، کوم چی له PZ سره کونج جوړوي.

۲ –لاس ته راغلی ټکی 'P په اصل پرلپسي ترتیبیو د بل سره ونښلوی ( یا په همدې ډول په 'P یو ګردی د r' = r په وړانګه ووهی).

څرخون $D_z$ یوه همغه لوریز کونګروائنځ څیرونه ده.

که څرخون $D_z$ له څرخون په0° : ایدنتیتي یا کتمټ، توپیر ولري، نو دا یوائې یو ځای په ځای ټکی لري: پخپله .Z .

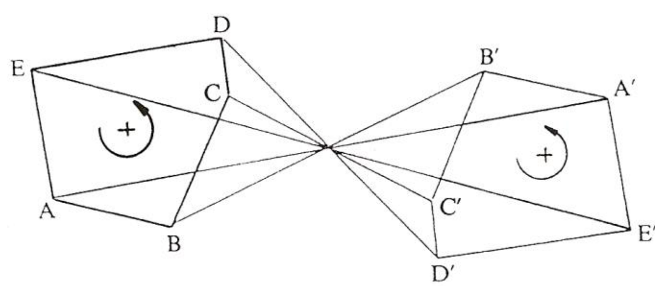
(c) ketabton.com: The Digital Library



هر څرخون $D_z$ د پـه کونج کیدی شي چی پـه څرخون $D_z$ پـه کونج - بیرته راوګرځول شي. د جوړښت څیړنی څخه پیژندل کیږي، چی هر څرخون $D_z$ د دوه کرښي اینوني چی پـه ټکی Z کی پـه کونج /2 یو بل غوڅوونکو کرښو g اوh ځاي نیونکی کیدی شي: څرخون : $D_{Z;\mu} = S_g \circ S_h$
د $h = \{Z\}, \mu = 2.w(g;h)$ g سره. ( څیره )

**تعریف** : یو څرخون د څرخونکونج $\mu = \pm 180°$ سره ټکی اینونه بلل کیږي. دا پـه دې مانا چی پـه ټکي اینه کیږي.

پـه دې توګه ټکی اینونه هم یو همغه لوریز کونګروانیځ څیرونه ده. ( څیره ۱۲۸ )




څیره ۱۶۱

## پـه ټکي اینوني جوړښت څیړنه

۱ – د اصلي څیرې هر پـه نخښه ټکي څخه یوه کرښه وکاږي، چي لـه اینونکي ټکي Z تیره شي، او |PZ| واټن د Z پـه بله لور وباسی.
۲ – داسی لاس تـه راغلي ټکي پـه پرلپسی ترتیب سره ونښلوی. ( همداسی پـه 'M یو د r' = r وړانګي ګردی ووهی ).

(c) ketabton.com: The Digital Library



## ټولګه

هره کونګروائنځ څیرونه د کرښې اینوني د ترلو څخه لاس ته راځي. دلته بیا هر کرښ اینونه څرخون لور بدلوي. له دې امله لرو:

> د کرښ اینونو ( څرخونو یا کښنونو ) جوړه تعداد یا ګڼون یو همغه لوریز کونګروائنځ څیرونه ده. د نا جوړه تعداد یا ګڼون کرښ اینونو ( کرښ اینوني یا کښنونو اینوني ) یو نا همغه لوریز کونګروائنځ څیرونه ده.

دیو په بل پسې د کونګروائنځ څیرونو کارونه بیرته کونګروائنځ څیرونه لاس ته راکوي. دا چې هرکونګروائنځ کرښ اینونه ده نو د پای کونګروائنځ یو په بل پسې اینونه ده. برسیره پر دې هر کونګروائنځ بیرته راګرځیدلی یا په څټ کیدلی شي. که له دوه وو زیات کونګروائنځ څیروني یو په بل پسې منځ ته راشي ، نو په خوښه اسوځیاتیو را یوځای کیدی شي. الجبري ټول کونګروائنځ څیروني یو ګروپ جوړوي د ناپیلي کتمټ څیروني سره، دا په دې مانا چې ناپیلی څیرونه ، چې په کارونه کې تغیر نه راولی کتمټ څیرونه ده. ( د ګروپ لپاره دې نښلوني برخه وکتل شي )

په عمل کې د دریګوڼ ي کونګروائنځ جملې له پوره اهمیت ډکې دي

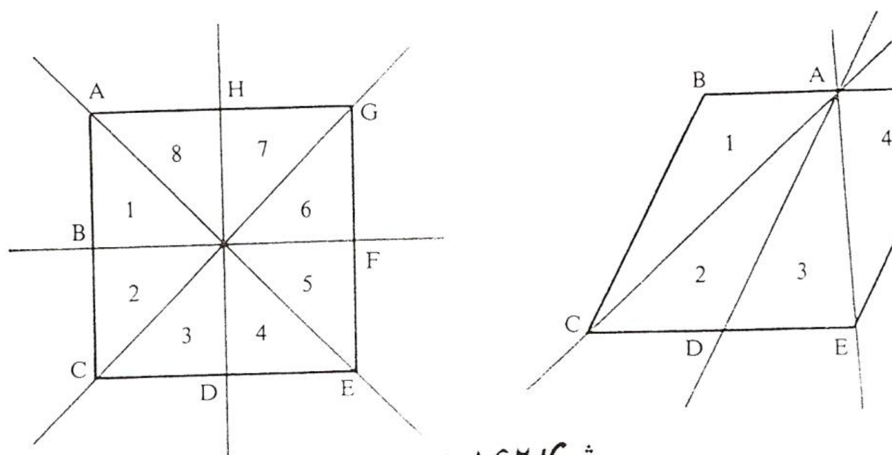
> **کونګروائنځجملې:**
> الف ) په خپلو دري اړخونو کي ( SSS ) یا
> ب ) په دوه اړخونو او لهدې اړخونو رابند کونج کې( SWS ) یا
> پ ) په دوه اړخونو کې او د اوړداړخ مخامخ کونج کې (SSW ) یا
> ت ) په یوه اړخ او دواړو راګیر کونجونو کي ( WSW ) یو بل سره وخوري یا سره مساوي شي

(c) ketabton.com: The Digital Library



# تمرینونه

۱ – په یوه غبرګ اړخیز ABCD هندارونی $S_{BC} \circ S_{AB}$ وکاږی.
۲ – د کونګروانیخ جملو په مرسته وښایي، چی غوڅکرښی پیلځیري په کونګروانیخ برخو ټوټه کوي.




خیري ۱۶۲

۳ – په یوه بیلګه وښایي :

الف ) $S_g \circ S_h \models S_h \circ S_g$

ب ) $S_g \circ (S_h \circ V_g) = (S_g \circ S_h) \circ V_g$

۴ – د «هیلګولند» کیشتی او د «کوین ماری» لوي کیښتی ترمنځ واټن ۵ کیلو متره دی . هیلګولند کیشتی په شمال لودیځ ۶۰ درجي(N60°W) دلته N د شمال او W د لودیز لپاره دی، کرښلاینی حرکت کوي او «کوین ماري» په ۸۲ درجو جنوب لویدیز لور حرکت کوي ( S82°W ) دلته S د جنوب لپاره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په دې وخت کی د «هیلگولند» څخه « کوین ماری » په ۷۰ درجو شمالشرق( N70°O )

دلته O د ختیز لپاره ده، لیدل کیږي.Nord,, Süd, West, Ost

الف ) په کوم کونج دواړه لارې یو بل غوځوي ؟

ب ) د دې وخت له ځاي څخه به هغه غوڅټکی څومره لرې وي؟

۵ – وي دې ABC یو مساوي پښیز دریګوډی، له بنسټ AB سره، g او h د کونجونو∝ او ß کونجنیمي دي. وښايي چی دریګوډي ABP اوABQ کونګروایینت دي. ( P او Q د مخامخ اړخ سره د کرښو غوڅټکي دي ).

۶ – څومره کورونتخیرونی موجود دی چی لاندې څیرې یی په خپل ځان ځیره کوي: کرښی ، ګردی، غبرګ اړخي، مساوي پښیز دریګوډي ، ولاړ ګوډی، راوتی، مربع، مساوي اړخیز دریګوډي ؟ کتمتخیرونه دې نه په کی شمیرل کیږي.

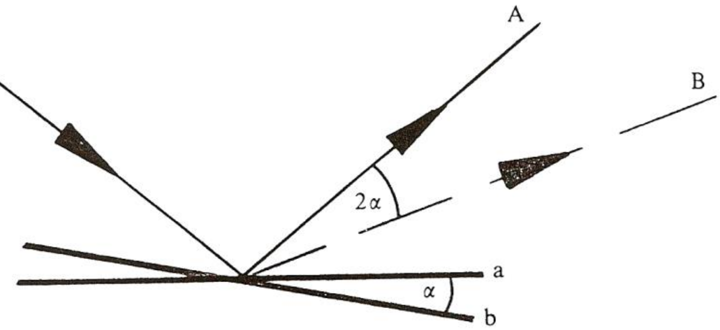
۷ – یو څرخیدونکی هنداره ، یوه هنداره ده ، چی په یوه خپله اېښوول شوي هواره پروت محور باندې څرخوړ اېښوول شوي. ترتیب په څیره کی له پورته لور انځوریږي.

د نور له چینی L څخه یوه وړانګه په هنداره د (a) په ځاي یا ځاینیوون کی پریوزي او د هندارونی یا انعکاس قانون سره سم( پریووتکونج = وتلکونج ) د $\overline{OA}$ لور باندې بیرته غورځول– یا اینه کیږي یا منعکس کیږي. اوس نو هنداره د ∝ په کونج د (b) ځاي یا ځاینوون ته راوړل کیږي یا راڅرخیږي. دلته نو د نوروړانګه د $\overline{OB}$ په لور هحینداره کیږي یا غورځول کیږي یامنعکس کیږي. وښایی :

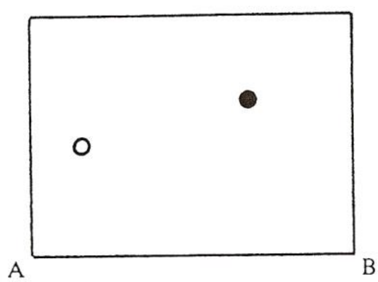
$$w(\overline{OA};\overline{OB}) = 2\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



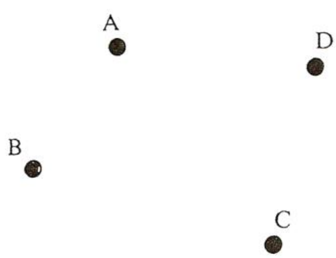



خیره ۱۶۳




خیره ۱۶۴

۸ – د کوټې منځ کې دوه توپونه ایښنول شوي یو سپین او بل تور. د کوټې له دیوالونو څخه توپ بلې لور ته نه شي تللی سپین توپ دې داسې ووهل شي چې تور توپ ووهي.دا د اینه ونې یا انعکاس د قانون سره سم په دیوال AB لګیږي. ( حیره ) د کرښو لار وکاږئ « تورتوپ – اینه ټکی یاانعکاسټکی – سپین توپ»



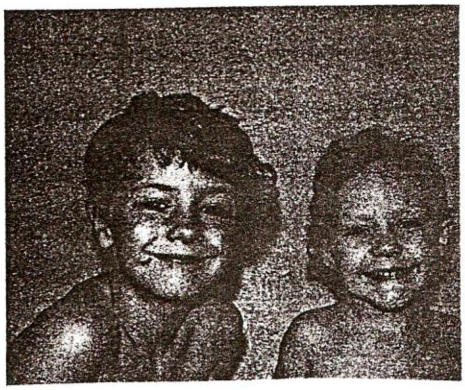

خیره ۱۶۵

۹ – دا د یوه کور څلور برجونه دي، چې په A,B,C,D سره یې ښایو ( خیره ) داسې یو ځاي S شته ، له کوم چې برج A د برج C څخه یا سره پټ شي او برسیره پر دې له دې ځاي څخه A د B او D د منځتې په خیر ښکاره شي یا ځان وښایي .؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



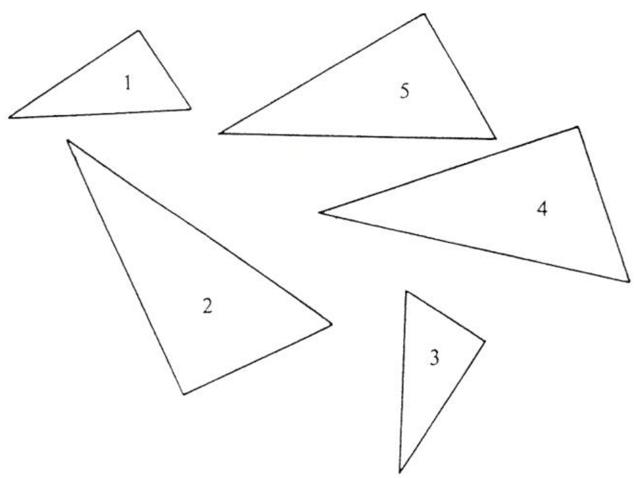
## ورته والیخیرونه Ähnlichkeisabbildung



خیره ۱۶۶

که چیرې دوه غبرګوني کوچنیان وکتل شي ،نو سم د لاسه ویل کیږي، چی دا دوه یو بل ته ورته دي. شیان یا لیدیدونکي هم یو بل ته ورته بلل کیږي، که ګڼ خویونه یا ګډې نخښې ولري، یعني څرګند یو بل ته ورته وي، مګر سره له دې هم یو له بل توپیر کیدونکی وي. په شمیرپوهنه کی داسی نه شو ویلی چی دا شیان یا لیدیدونکي یو بل ته زیات یا کم ورته دی، دا خیالي قضاوت دی چی په شمیرپوهنه کی داسی قضاوت ځاي نه لري.

پیلبیلګه:




خیره ۱۶۷

(c) ketabton.com: The Digital Library



لاندې درېګوټي د کونجونو $\gamma = 90°$ او $\alpha = 30°$ , $\beta = 60°$ سره وکاږي.
ددې کونجونو سره له یوه زیات درېګوټي موجود دي، چې په ځانګړي توګه د ولاړ کونج ورکړه یواځیوالی یا یواځیتوب نیول کیدی یا فرض کیدی شي.
درېګوټي ۱ او ۲ کونګروانېنځ دي، درېګوټي ۲ او ۴ هم، مګر درېګوټي ۱ او یا ۱ او ۴ کونګروانېنځ نه دي. سره ددې هم دوي زیاتی ګډې نخښې لري (کونج، «بڼه»یا «شکل» یا څیره ) دوي یو بل ته ورته دي.

ددوي ترمنځ نور څه ګډ دي یا دوي نور څه ګډ لري؟
له کونګروانېنځجملی څخه مخ ته ځو، د اړخونو اوږدوالی اندازه کوو او راته ښایو چه د اړخونو ځاننیونه یا د اړخونو تناثب :

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$$

او

$$\frac{|AB|}{|A'''B'''|} = \frac{|BC|}{|B'''C'''|} = \frac{|CA|}{|C'''A'''|}$$

ثابت دی.

پس تعریفوو

**تعریف** : هوارې څیرې یا شکلونه هلته یو بل ته ورته دي، کله چې د مناسبو پاي کرښو اوږدوالی په همغه ځاننیونه یا تناسب پروت وي او ( له دې امله هم ) یو د بل سره مناسب کونجونه مساوي لوي وي.

**بیلګه** : کونګروانېنځ څیرې د ورته شکلونو یو ځانګړی حالت دی، په هغوي کی د

(c) ketabton.com: The Digital Library



ورکړشوو اړخونو تناسب یا ځاننیونه تل ۱ دی.
له دې امله باید –د کونګروا ینځ د ټولیزیدلو یا عمومیت – د دریګوډیو لپاره هم ورته جملې موجود وي.
ددوه یا زیاتو درېګوډیو ترمنځ یو بل ته ورته والی هلته پروت دی یا شته ، موجود دی، کله یی چی مناسب کونجونه سره یو شی وي او دې کونجونو سره مناسب اړخونه یو د بل سره په همداسی تناسب یا ځاننیونه کی پراته وي یا اړیکو کی ).
دا هم د درېګوډیو لپاره باور یااعتبار لري، په داسی ډول– د کونګروا ینځ ځخه پر مخ ځو– چی سرِی داسی نومولی د ورته والي جملی لیکلی شي.

**د ورته والي جملی:** درېګوډی یو بل ته هلته ورته دي، که په لاندې کی سره برابر وي

۱ – د درېګوډیو دریواړو اړخونوپه مناسبه توګه د اړخونو تناسب یا ځاننیونه.

$$a : a' = b : b' = c : c' .$$

او یا

۲ – د دوه یو بل سره مناسبو اړخونوتناسب یا ځاننیونه او له دې بندشوې کونج. دا په دې مانا چي

$$a : a' = b .: b' \quad \text{او} \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

او یا

۳ – د دوه مناسبو اړخونو تناسب او د لوي اړخونو مخامخ کونجونومساویوالی. په دې مانا چی: $a : a' = b : b'$ او $\beta = \beta'$ د $a < b$ لپاره او یا $b > a$

۴ – ددوه کونجونواندازې مساویوالی ، چی په دې ډول ټول کونجونه مساوي دي. دا په دې مانا چی :

(c) ketabton.com: The Digital Library

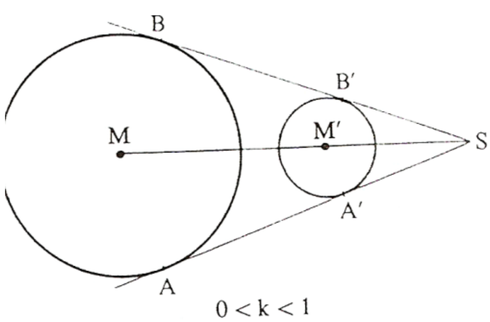


په همدې ډول کیدی شي د نورو څیرو لپاره هم د ورته والی جملی تر فرمول لاندې راوړل شي. څیرې یو بل ته ورته دي، که دوي د ځانګړو ورتوني څیروني له لاری یو په بل پریوتی شي.

مهم ورته والي څیرونی منځني راکښنه ده

| |
|---|
| **تعریف:** منځني راکښنه $Z_{S,k}$ د ټکي S ( د راګښلو منځ ) او یوه ګڼ k د راکښلو فاکتور یا ځلونکي په بنسټ یواځنی ټاکلی وي. هر اصلي اوږدوالي ته د منځني راکښنو له لارې په k-ځلی تغیر ورکو ل کیږي. |

د k لپاره له صفر تر یو ګڼونه پریښوول کیدی شي. په دې کی بیاپخپله له دې پوهیدی شو چی څیرونه له اصلي کوچنۍ ده. په دې حالت کی له زبیخلو ( کیښکلو ) غږیږو. څیرونه نوره هم د راکښلو باور لري. که k = -1 وي نو اړوند منځني راکښل په راکښل منځ S باندې ټکي اینونه ده. د هر بل منفی ګڼ k |=-1 لپاره کیدی شي k په k =(-1).|k| باندې تجزیه شي. له دې وروسته پورته یادونی په همغه هدف استعمالیږي یا کارول کیږي.



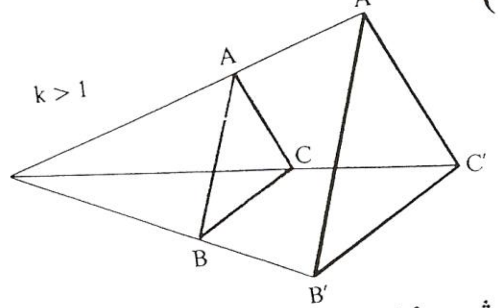
څیره ۱۶۸

یادونه : پام دې وشي چی راکښنه به ښه وي او که غزیدنه.

(c) ketabton.com: The Digital Library



## د منځراکښنی جوړښتځیړنه( توضیځ )




ځیره ۱۶۹

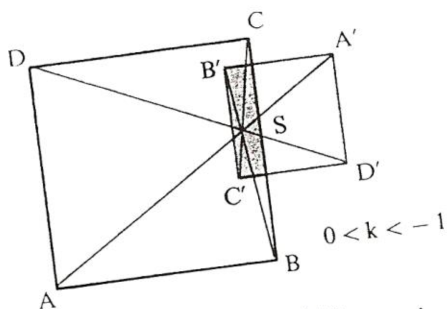
۱ – د اصلي هر په نخښنه ټکي د راکښلو منځ S سره و نخلوی.

۲ – د هر ټکي P لپاره د|PS| پای کرښي په k ځل کیږي( جوړښت ته د 0> k لپاره هم، مقایسه ځیره ) او نوي پای کرښه

|'SP|.k = |SP|

په کرښه چی دټکي S ځخه پیل له P, S او 'P تیریږي وکاږی.

۳ – د اصل په ترتیب یا اصل ته ورته ټول ځیره ټکي سره ونښلوی.

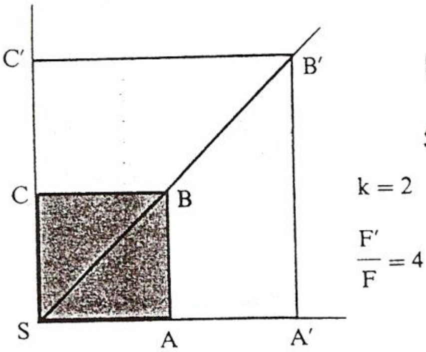



ځیره ۱۷۰

دا چی ورته ځیرې ( بی له (|k| = 1 کونګروانیځ نه دي، نو د هوارې دننه یا منځ هم تغیر خوري، مګر که ټولی خواو یا اړخونه په فاکتور k( د بیلګي په توګه k = 3 , k = 2 ) تغیر کړو، نو ځیروونکی هواره باید په فاکتور $k^2$

(یعني $k^2 = 4$ همداسی, $k^2 = 9$)

تغیر وخوري.




ځیره ۱۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library



**تعري: په يو منځراکښنو، چی فاکتور k ولري د ځيرې هواره 'F او له ځيرې دمخه (اصلي ) هوارې F ترمنځ لاندنی تناسب يا ځاننيونه موجود دی.**

$$F' : F = k^2 \quad \Rightarrow \quad F' = F.k^2$$

---

**د لته د k مخنخښه کوم رول نه لري ځکه چی منفی ځل منفی بيرته مثبت دی.**

---

## پيلبيلګ:

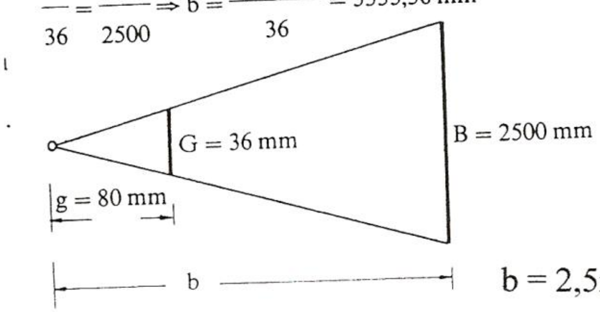
دياس( دفيلم دياس ) ( فورمات يا لويوالی 24mm.36mm )
په يوه ديوال چی لويوالی يی 2,5 m . 2,5 m دی. د ممکن حده پورې ځيره کيږي. د ښه ټيك جوړولوسره يی له عدسي واټن 8cm دی. پريوستونی يا پرويکتور د ځيرې ديوال څخه بايد څومره لرې وي؟ د دياس هوراه په څو واره لويه شوې ؟

د دياس دځيرونی لپاره لاندې اړيکی باور لري:

$$\frac{\text{د ځيرې جګوالی } B}{\text{د دياسجګوالی } G} = \frac{\text{د ځيرې پراخوالي } b}{\text{د دياس –عدسی لريوالی} g}$$

خيره ۱۷۲

$$\frac{80}{36} = \frac{b}{2500} \Rightarrow b = \frac{2500 \cdot 80}{36} = 5555{,}56 \text{ mm}$$




ممکن ډك په دې مانا ، چی 36 mm په 2,5 m بايد لوي شي. په دې توګه د پريوستون ديوال –عدسي واټن په لاندې ډول دی :

$$b = 2{,}5\text{m}.0{,}08\text{m} : 0{,}036\text{m}$$
$$\sim 5{,}56\text{m}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لویوالی فاکتور یا ځلی دی

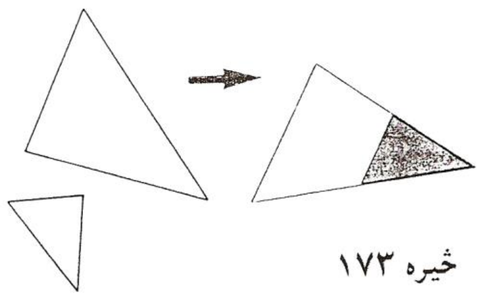
k = 2,5: 0,036~69,44

له دې امله د څيرې هواره ده:

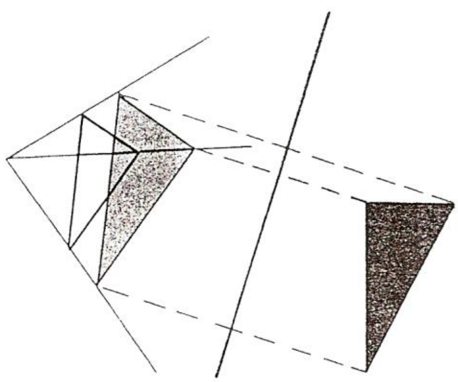
$F' = 69{,}44^2 . 0{,}036 . 0{,}024 = 4{,}17 m^2$

دا د دیاس هوارې 4822,53 واره یا ځله ده.

دا روښانه ده، چې ورته څيرې، د څرخوني، راکښلو له لارې او اینونی له لارې یوه پوزیشن ته راوړل کیږ، په کوم چې سم د لاسه د شکلونو د کونجونو د برابرتوب ورته والی پیژندل کیدی شي.



څيره ۱۷۳



څيره ۱۷۴

**تعريف** : هره کونګروانیخ څیرونه، هر منځراکښونکی او له دوې هر تړلی یا ځنځیري اینښولشوې یا ځای په ځای شوې څیرونی ورته څیرونی بلل کیري.

دا چې هره ورته څیرونه بیرته یوه داسې څیرونه باندې راګرځي، نو بيخي باور لري : د ورته

(c) ketabton.com: The Digital Library

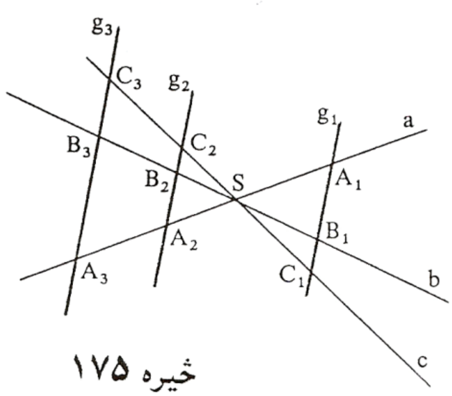


والي خیروني ډیری چی پرلپسی سره وتړل شي یا ځنځیري شي ګروپ جوړوی ( د ګروپ لپاره دې، چی شمیرپوهنیزه کلیمه ده، د کتاب پای وکتل شي )

او خیرې او همداسي پیل بیلګه ( ډیاسپرویکتور ) څخه د وړانګي جمله ټولیزه یا عمومي کیدی شي.

۱ . **وړانګي جمله:** که له یوه ټکي S وتلی وړانګي ...،a,b,c له غبرګو کرښو ....، $g_2,g_2,g_3$ غوڅي شي، نو د یوې وړانګی ټوټی همداسی تناسب کی دی یا همداسی ځان نیسی لکه

د بلی وړانګي ټوټی: دا په دې مانا چی:




خیره ۱۷۵

$$\frac{|SA_1|}{|SA_2|} = \frac{|SB_1|}{|SB_2|} = \frac{|SC_1|}{|SC_2|}$$

او

$$\frac{|SA_1|}{|A_1\,A_3|} = \frac{|SB_1|}{|B_1\,B_3|} = \frac{|SC_1|}{|C_1\,C_3|}$$

په خیره کی د اړیکو ښوونه سم د لاسه په غبرګو کرښو له پوړیزکونجونو او د دریګوډیو ورته والي چی $SA_1B_1$ او $SA_2B_2, SA_1C_1$ او $SA_2C_2$ اوپه همدې ډول د $SB_1C_1$ او $SB_2C_2$ سره یی لري.

برسیره پر دې باور لري:

۱ . وړانګي جملی په څټ: که له ناپای کرښو....$g_1$ , $g_2$ , $g_3$ څخه د خورې

(c) ketabton.com: The Digital Library



غونچې یا بهتره ستورې کربښو له لارې ټوټې پرېکړې شي، چې یو بل ته ثابتې یا همغه ځای په ځای ځاننیونې یا تناسبات څرګندوي، نو دا کربښې یو بل سره غبرګې دي.

## ۲ . وړانګې جمله:

که له یوه ټکي وتلې وړانګې د غبرګو ناپاکربښو څخه غوڅې شي، نو د دوي ټوټې چې له غبرګو دې ځان داسې نیسي یا په داسې تناسب کې دیلکه هغه د ککرټکې څخه وتلې کچ شوې د وړانګو ټوټې.

$$\frac{|S\ A_1|}{|S\ A_2|} = \frac{|A_1 B_1|}{|A_2 B_2|} = \frac{|S\ B_1|}{|S\ B_2|} = \frac{|B_1 C_1|}{|B_2 C_2|} = \frac{|S\ C_1|}{|S\ C_2|} = \frac{|A_1 C_1|}{|A_2 C_2|}$$

## ۳ . وړانګې جمله:

په یوه غبرګې ټوټو ځاننیونه داسې ده لکه پهدې بلې غبرګې ټوټو ځاننیونه یا تناسب:

$$\frac{|A_1\,B_1|}{|B_1\,C_1|} = \frac{|A_2\,B_2|}{|B_2\,C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1\,C_1|}{|B_1\,C_1|} = \frac{|A_2\,C_2|}{|B_2\,C_2|} \quad \text{oder} \quad \frac{|A_1\,B_1|}{|A_1\,C_1|} = \frac{|A_3\,B_3|}{|A_3\,C_3|}$$

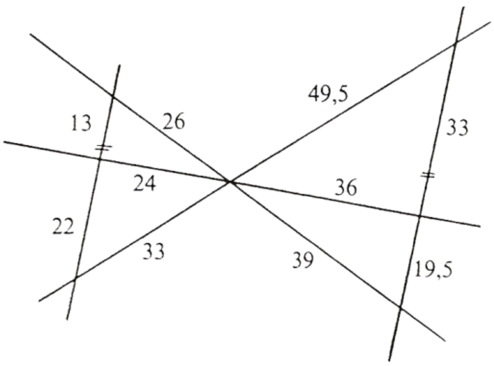
بیلګه :

۱ . د لمړی وړانګې جملې پسې لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library



۱ . د وړانګو جملو پسی یا له امله باور لري:




خیره ۱۷۶

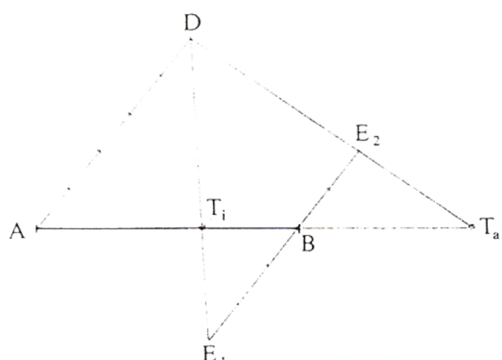
1. Strahlensatz: $\frac{26}{39} = \frac{24}{36} = \frac{33}{49{,}5} = \frac{2}{3}$
لمړی وړانګی جمله

2. Strahlensatz: $\frac{24}{22} = \frac{36}{33}$ oder
۲. وړانګی جمله
$\frac{33}{22} = \frac{49{,}5}{33}$ oder
$\frac{26}{35} = \frac{39}{52{,}5}$

3. Strahlensatz: $\frac{13}{22} = \frac{19{,}5}{33}$ oder
۳. وړانګی جمله
$\frac{35}{22} = \frac{52{,}5}{33}$

۲ . د یوې کرښې AB ویشنه یا ټوټونه:

کرښه AB دننه($T_i$) په ځانښونه یا تنساب 5:3 او دباندې ( $T_a$ ) په تناسب یا ځانښونه 2 : 5 ویشل کیږي. د دې لپاره د ۲ . وړانګي جمله کارول کیږي یا استعمالیږي:




خیره ۱۷۷

– دننه ټوټوونټکی $T_i$ :

$$\frac{|AD|}{|BE_1|} = \frac{|AT_i|}{|T_i B|} = \frac{5}{3}$$

– د باندې ټوټوونټکی $T_a$:

$$\frac{|AD|}{|BE_2|} = \frac{|AT_a|}{|T_a B|} = \frac{5}{2}$$

دا جوړښت د ویشنی برسیره

(c) ketabton.com: The Digital Library



د کرښو د ځل لپاره هم کارول کیدی شي. نو $|AT_a|$ د $|T_aB|$ دوه نیم واره دی.

## ۳ . طلایي غوڅی یا –غوڅونه:

په طلای غوڅي یوه د a اوږدوالی کرښه داسی ټوټه کیږي، چی برخه ټوټو د x اوږدوالی همداسی د a - x اوږدوالی لپاره اړیکی $a : x = x : (a-x)$ باور لري. دلته x د دواړو برخه کرښو لویه برخه ده دا ویشنه په هنر او ارښیتکتور کی له مانا ډکه ده یا مهم رول لوبوي. له پورته اړیکو څخه لاس ته راځي: $x^2 = a(a-x)$ او له دې بیا $x = \sqrt{a(a-x)}$ لاس ته راځي. دا په دې مانا چی اوږده کرښه د دوو لنډو کرښو او د ټولی کرښی هندسي منځ دی. که دا فرمول نور هم ښه بدلون غوره کړي او د x په لور اوبی یا حل شي، نو ترې لاس ته راځي :

$x = \sqrt{a^2 - ax}$

$x^2\ a^2 - ax$

$0 = x^2 + 1x - a^2$

$x_{1,2} = -(a/2) \pm \sqrt{(a/2)^2 + a^2}$

$= -(a/2) \pm \sqrt{(5/4)a^2}$

$x_1 = 0,5a(\ 5 - 1)$ په کار نه راځي

نو لرو: $x \sim 0,618a$

د طلایي قاعدې لګه لارې

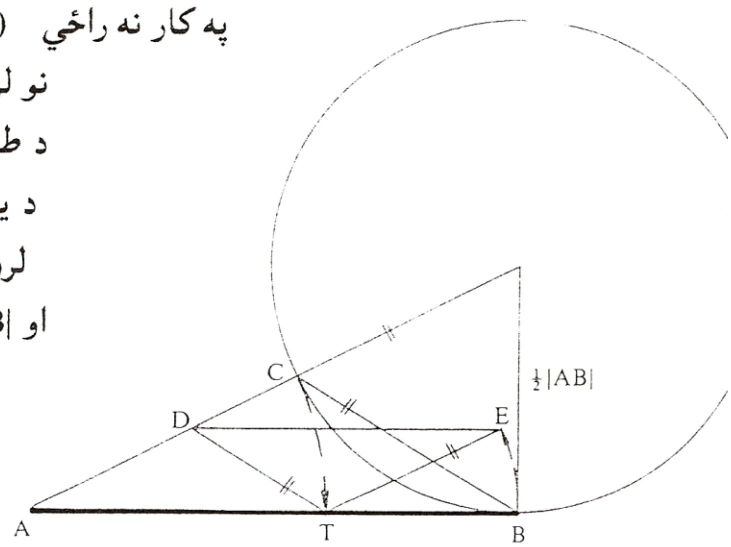
د یوې کرښی $|AB|$ ویشنه

لرو $|AC| = |AT|$

او $|AD| = |TE| = |TB|$

$$\frac{|AB|}{|AT|} = \frac{|AT|}{|TB|}$$

خیره ۱۷۸



(c) ketabton.com: The Digital Library



## تمرینونه

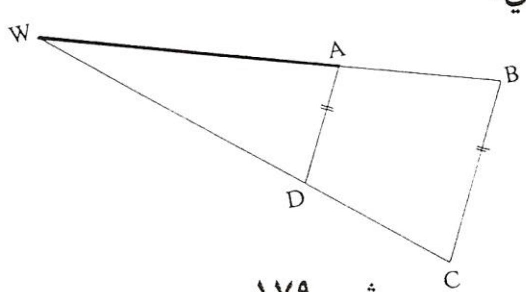
۱ – په کواوردیناتسیستم کی دریګوډی $A(2|3), B(6|1), C(3|6)$ ورکړ شوی دی.
الف ) دا دریګوډی د $k = 2$ په اندازه وغزوی . د غزولو مرکزدې $Z(0|0)$ وي.
ب ) دا دریګوډی په $S(-2|-3)$ وڅرخوی د $140° =$ ؎ سره. دا څیره دریګوډی په S باندې د $k = -1,5$ سره وغزوی.
پ ) دا دریګوډی په ۴ یوونو سره لمړی کیڼ لورته او بیا په ۵ یوونونو پورته لورته وکښوی، بالاخره یي په x– محور هنداره کړی او بیا یي بالاخره په ټکي $(0|-6)$ د $k = -1$ سره وغزوی.

۲ – ایا ټول الف ) مساوي پښیز ، ب ) مساوي اړخیز، پ ) ولاړکونجیز دریګوډی یو بل ته ورته دي ؟

۳ – د یوه مکعب پورته هواره د مرکزی غزونی د غزونفکتور یا غزونځل k سره او د هوانیمي غوښټکي سره د غزولومرکز په څیر، څنګه تغیریږي؟

۴ – کرښه $|AB| = 10$ cm دننه او دباندې داسی ټوټه کړی، چی په ځاننیونی یا تناسب د 5:2 کی سره پراته وي،

۵ – کرښه $|CD| = 6,5$ cm د «طلای غوڅي قاعدې» له لارې ټوټه کړی.

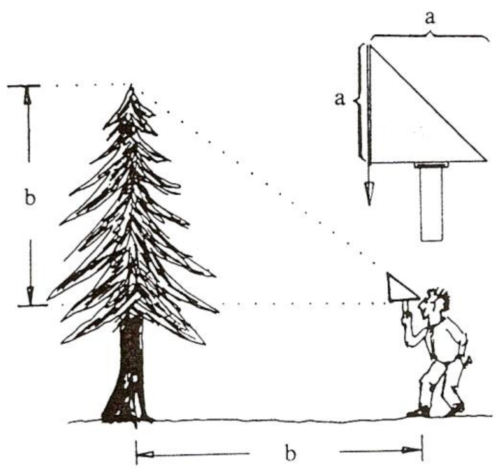


څیره ۱۷۹

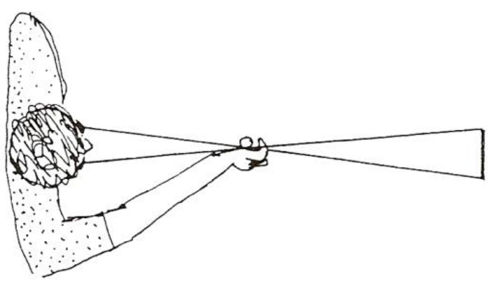
۶ – د یوه کتونبرج A (څیره ۱۷۹) څخه دې واټن $|AW|$ یوه ځنګل برخی W ته وټاکل شي.
دري ټکی B, C او D په نخښه کیږي په داسی ډول چی AD||BC وي. اندازه کیږي: $|AB| = 75$ m : $|BC| = 125$ m
او $|AD| = 100$ m , نو $|AW|$ څومره اوږد دی ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library






ثیره ۱۸۰



ثیره ۱۸۱

۷ – الف ) د یوه «ځنګلوالدریګوډي» سره ( ثیره ) د یوې ونی جګوالی اندازه کیدی شي. – ونه څومره لویه ده ، که د ځنګلوال سترګه له ځمکی څخه ۱،۷۰ متره جګه وي، او دی له ونی ۱۰ متره لرې ولاړ وي؟

ب ) څنګه (د یوه څرګندډه واټن ) د یوه شي د جګوالی د خپل مټ په مرسته نږدې یا تقریبي اندازه کولی شي؟

لارښود: ۷ الف وګوری )

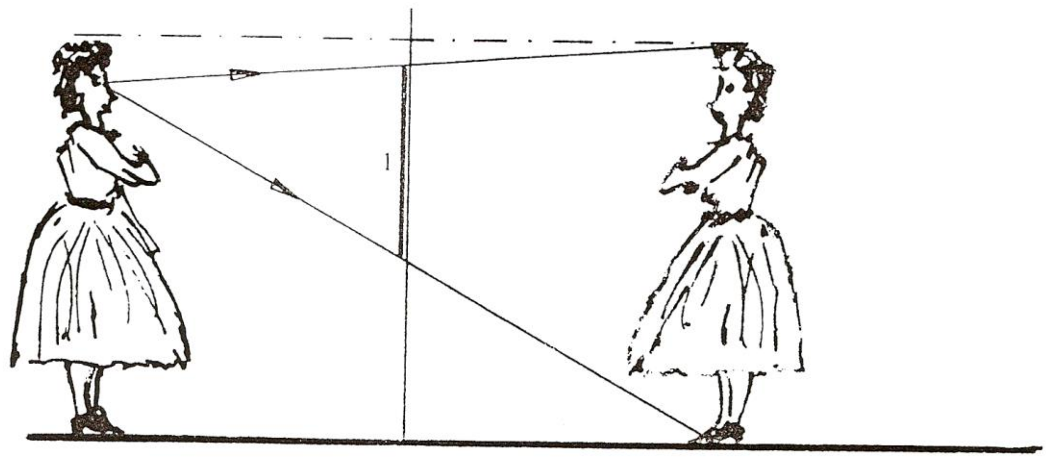
پ ) په عسکری کي د دوه شیانو د واټن د اندازه کولو لپاره « د غټی کوتي ګام » تخنیك کارول کیږي یا استعمالیږي. دا داسی صورت نیسی چی لمړی سړی خپله کینه سترګه پټوي او غټه ګوته راوباسی، لمړی یو انډول وړ شی، چی ښي لور ته پروت دی، اندازه کوي او بیا د ښی سترګي په پټولو سره ټیك هغهٔ لټوونکی موخه د زیر لاندې نیسي. دلته د واټن اندازې ورکونی ته سړی څنګه راځي؟

۸ – میرمن ځانګه غواړي چی په خپله پوره لویوالی ځان د دالیز په هنداره کی وګوري. په عادې توګه د دالیز د کوچنوالی له امله ۸۰ سانتي متره له هندارې

(c) ketabton.com: The Digital Library

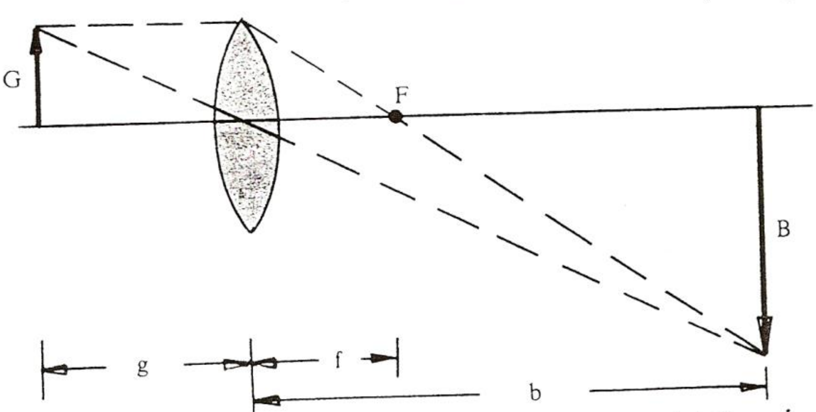


لرې، هنداري ته مخامخ ودرېږي.دا هنداره باید څومره کم له کمه جګه وي چې میرمن ځانګه د سترګو جګوالی چې ۶۵، ۱ متره دی ټول لویوالی چې ۷۳ ،۱ متره دی وګوري؟




څیره ۱۸۲

۹ – د یوې لینزې یا عدسی یا سترګی له لارې په څیره کی د نور څیرونی




څیره ۱۸۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

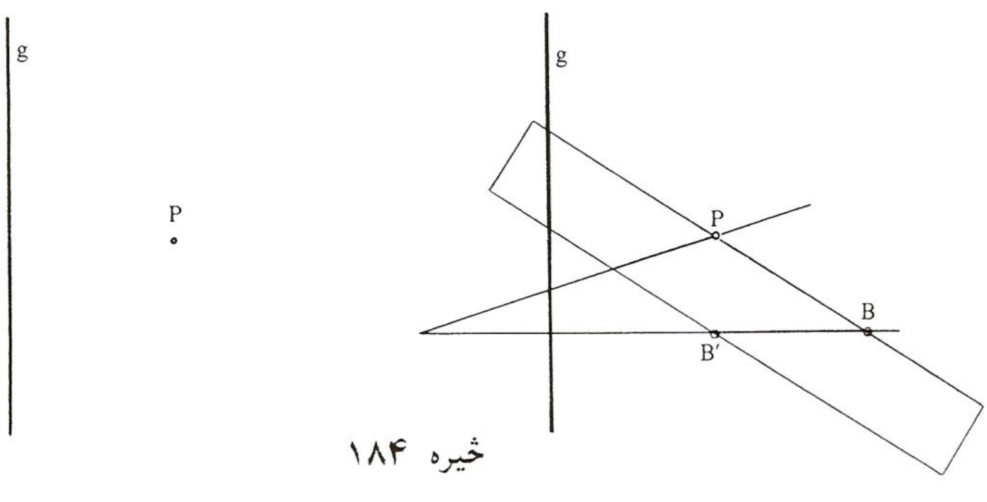


جوړښت کتل کیږي. د لینزې یا عدسی لپاره د لینزې یا عدسی
مساوات $(1/f) = (1/b)+(1/g)$ باور لري، پخپله د څیرونی لپاره
مساوات $B / G = b / g$ باور لري( په لغاتو: د څیرې جګوالی د شي جګوالی
سره ځان داسی نیسی لکه د څیرې لریوالی د شي لریوالی ته ). دا دواړه
اړیکی د وړانګي له جملی راوباسی !

۱۰ – یو ولاړکونجیز دیاپوزیتیویا مثبت دیاس داړخ اوږدوالی ۶ ،۳ سانتي متره
سره او ۴ ،۲ سانتي متره سره یو و هغه ته غبرګ دیوال باندې پریوزې .
څیورونی لینزې یا عدسی، دا شی ۱۲ سانتي متره له دیاس او ۸۰ ،۴ متره
له دیوال لرې دي. د پریوستون دیوال کم له کمه باید څومره وي ؟

۱۱ – یو د دیوال مربع شکله کړکی، چي اړخ یی ۲۰ سانتي متره اوږد دی له یوه
هغه ته غبرګ دیوال څخه ۱۲ متره لرې ده. د هغی کړکۍ څخه څومره
لرې باید یوه د پریښنا سرچینه ، چی د ټکي بڼه لري، لرې وي چی له کړکی
تیره رڼا یوه د ۱۶ مترمربع هواره روښانه کړي؟

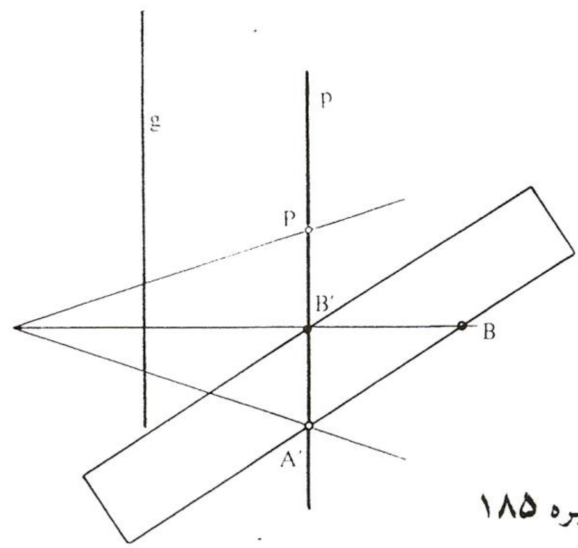
۱۲ – د کوم مرکزې غزوني سره کیدی شي چی یو ګردي دننه دریګوډی په ګردي
راګیر یا ګردي دباندې دریګوډي باندې څیره شي؟ ګردۍ هوارې یو بل سره




څیره ۱۸۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

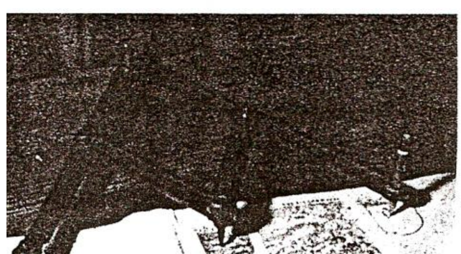





خیره ۱۸۵

په کومه ځانتیونه یا تناسب ځای نیسی یا پرتی دي؟

۱۳ – د دیسارګ ( Desarues ) د جملی له مخی کیدی شي چی کرښه g په ټکی P جوړه شي ، که ټول رسم الات یواځي یوه لرګي مته وي ( د بیلګي په توګه کرښی یا ختکش ) د دوه غبرګو کانتو سره یا اړخونو سره ځموږ په اختیار کي وي. په دلایلو روښانه کړی، چی ولی په پرلپسی څیرو جوړښت کی د جوړښت لار کار ورکوي.



څیره ۱۸۶

۱۴ – وښایی چی د هر غبرګ اړخیزABCD لپاره باور لري: که د یوه نیمی د په خوښه ټکي P څخه یوه اړخ ته غبرګه کرښه رسم شي، نوغبرګاړخي منځ ته

(c) ketabton.com: The Digital Library



راځي، چې ABCD ته منځنی یامرکزې ورته دی. د همغه غزولومرکز چیرته
پروت دی؟

په دې خویونو د پانتوګراف( Pantograph ) یا په ورځنی ژبه د ځانی ټونګی
دا یوه د رسموولو اله ده قانون هم بینا دی. O په رسمتخته تر زیر لاندې
راځي . په پینسل P سره د مخه کښل شوي شیرې باندی حرکت ورکول کیږي،
نو په دې توګه دا رسمپینسل یو مرکزي یامنځنی ورته شیره رسم کوي
( شیره. ) په تي مخ کی کښل شوې ده

۱۵ – په یوه ګردی کی دوه ټوټونی یا زیني یوبل غوځوي. ټوټی ۱۸ سانتیمتره او
۳۵ سانتي متره دی، د دومی هغه اوږده ټوټه ۳۰ سانتیمتره ده. نا معلومه
ټوټه یی وښایی.

۱۶ – څومره لرې سرې کتلی شي

الف ) د بحرهوارې څخه ۴۰ متره جګ اندازه ټوکری

ب ) د یوه له ځمکی ۲ کیلو متره جګ هوا پوښکی یاهوا بالون،

پ ) د یوه الوتونکی کوټکی چی د سپوږمی هوارې څخه۲ کیلومتره
جګه وي( r = 1735 km)؟

۱۷ – د شکل ۱ ( شیره۱۸۷

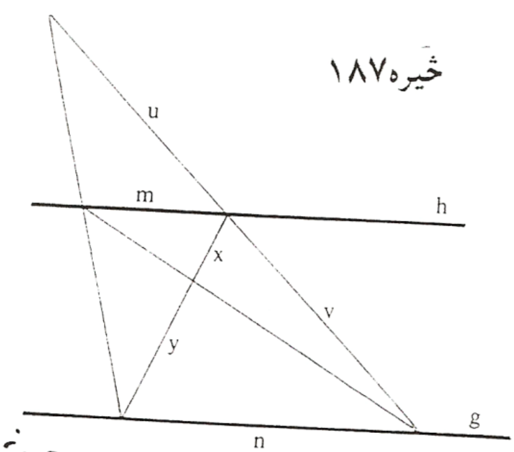
الف ) لپاره صدق کوي g || h او

a) $\frac{u}{v} = 1$

b) $\frac{u}{v} = 0{,}5$

c) $\frac{u}{v} = \frac{2}{3}$

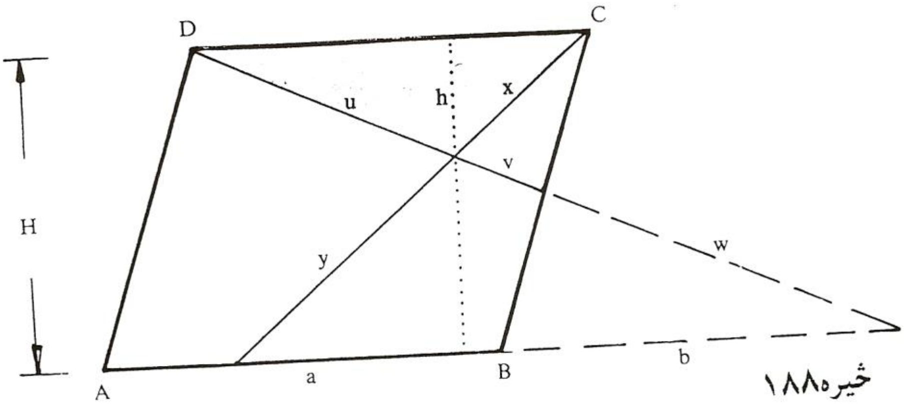
Berechnen Sie $\frac{x}{y}$. د شمېرې



(c) ketabton.com: The Digital Library



۱۸ – وشمیری u / v او x / y (ځیره ب )
د غبرګاړخیز څومه برخه رنګه ده؟




ځیره۱۸۸

# افینی ځیرونی ( Affine Abbildungen )

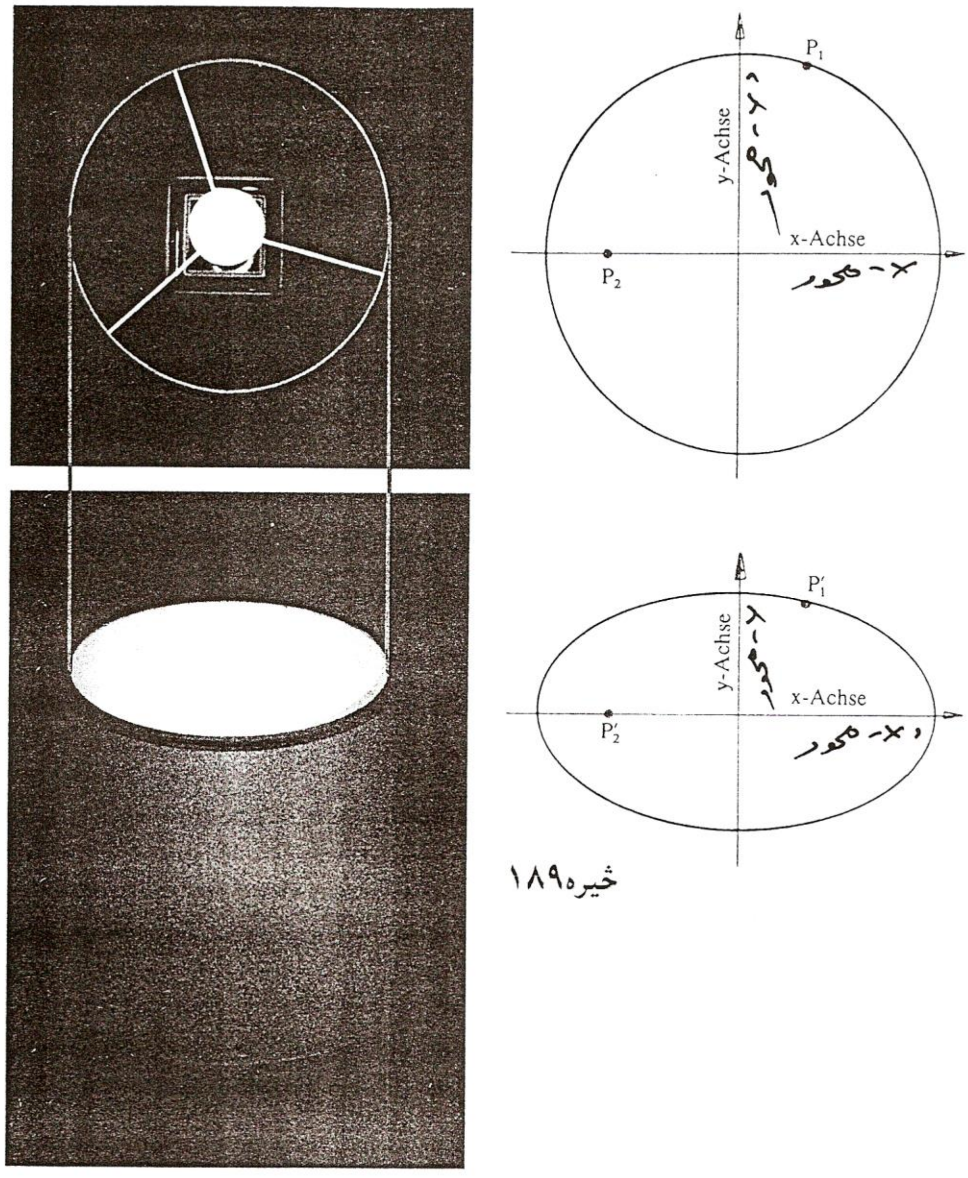
## محوري افینیتي Die axiale Affinität

دبیلګي په توګه مو د مخه تیرو درسونو کی وپوښتل، چی ایا موږ له یوې ګردې ښیښې ټوټې چې لږ څنډه یې ماته ده یوه بله ګرډې ټوټه چی وړانګه یی له پخوا

(c) ketabton.com: The Digital Library



کوچنی وي او یا یو ډیرګوډی جوړولی شو، چی سیومتري او په دې توګه ښکلی




خیره ۱۸۹

(c) ketabton.com: The Digital Library



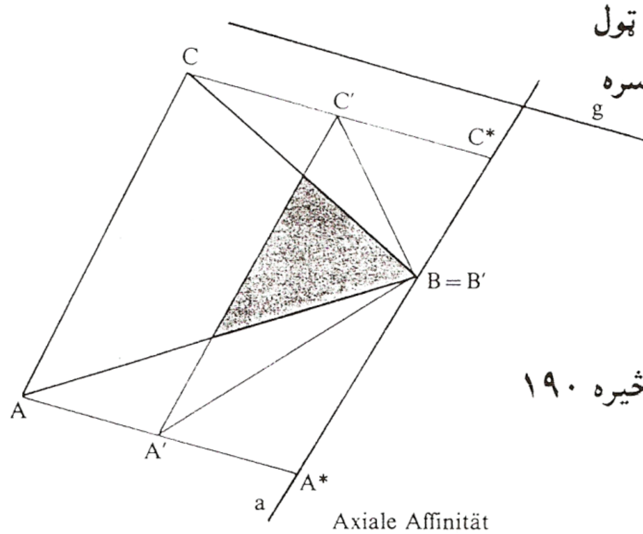
وي. دلته موږ الیپسي سره مخامخ شو.
پوښتنه دا ده چې ایا یوه ځیرونه شته چې له ګردۍ څخه الیپسي لاس ته راشي؟
د ځیرې ۱۸۹ دلیدلو له مخې داسې خیال راپیدا کیږي، چې ګوندې د ګردۍ او ایلیپسي ترمنځ څه خپلوي شته. دا نو بیا دې لاندې پریکړې ته اجازه ورکوي، چې یوه ځیرونه باید موجود وي چې د ګردۍ ځیرونه ایلیپسي شي.
دا ځیرونه باید کوم خوبونه ولري؟
موږ بیا د جوړونې نیونې چې د مخه مو کړې رامنځ ته کوو.
ټولې په پراته (افقي) x– محور باندې پراته ټکې ځاي په ځاي پاتیږي: پس د x– محور د ځاي په ځاي ټکو کرښې ځیرونه ده. د دې په څټ د y – محور ټول ارزښتونه تغیر خوري. پس هره y–محور سره غبرګه کرښه ځای په ځاي کرښه ده.
له دې سره موږ د نوې ځیرونې لپاره ټول ضروري خویونه راټول کړل: د افینیتي محورa سره یوه محوري افینیتي $A_{a;g;k}$ ، د لورکرښې ( کرښه چې لورې یې ځرګندوي لنډ یې: لورکرښه ) g او د افینیتي فاکتور $|k| = 0$ مخ ته پراته دي، که لاندې شرایط پوره وي :
۱ – هره کرښه PP' چې له ټکو P او P' تیره وي د g سره غبرګه ځغلي.
۲ – که *P د PP' او a غوځټکی وي ، نو لرو : $|P^*P'| = |k|.|PP^*|$.
په دې توګه نو یوه محوري افینیتي، دکرښې –،غبرګ – او ټوټه تناسب یا ځاننیونه ریښتونې ده. اخرنی دا وایي چې په اصلي پایکرښې درې ټکي دا پایکرښه په همغه تناسب یا ځاننیونه پرې کوي، لکه د ځیره ټکې په ځیره کرښه باندې.

له دې لاندې د محور افینیتي جوړښت ځیړنه لاس ته راځي
۱ – له اصلي کرښي په نخه شوي ټکي ( د بیلګي په توګه P ) څخه وg سره یوه غبرګه کرښه وباسی او ددې غوځټکی د افینیتي محور سره د بیلګي په توګه *P وبولی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



۲ – له P* څخه $|P'P^*| = k \cdot |PP^*|$
و g ته غبرګي مناسبې کربښې
وکاږئ.
۳ – په دې توګه رامنځ ته شوي ټول
ټکي اصل ته په ورته توګه سره
ونښلوی.

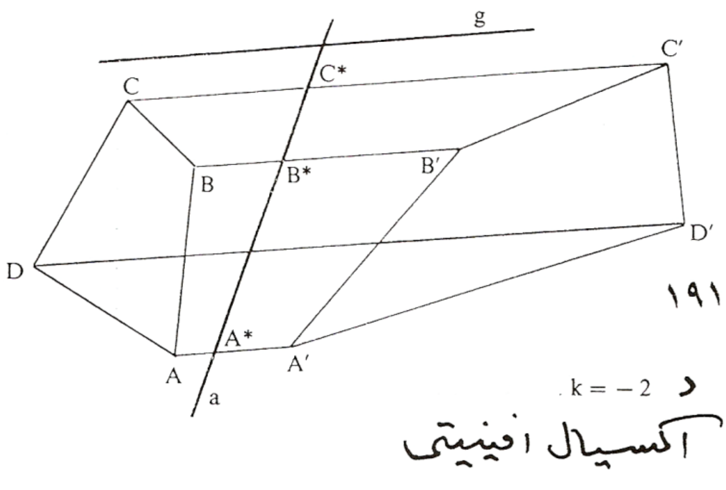



شيره ۱۹۰

Axiale Affinität

د $k = \frac{1}{2}$ سره

آکسیال افینیتي




شيره ۱۹۱

د $k = -2$

آکسیال افینیتي

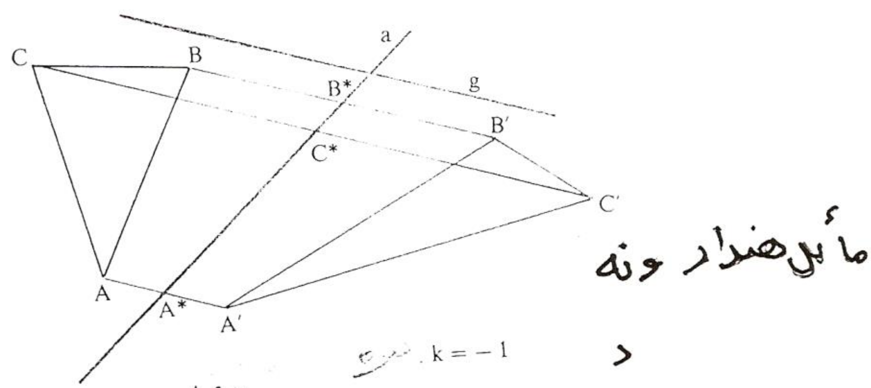
(c) ketabton.com: The Digital Library



د $k = 1$ لپاره د هوارې هر ټکی ځای په ځای ټکی دی، ځکه چې ټولې پایکرښې تغیر نه خوري. له دې لرو چې $A_{a;g;1}$ کټمټ یا identisch ایدنتیك دي.
د $k > 0$ لپاره P او P* د a په یوه (همغه) خوا پراته دي( ځیره ) ، د $k < 0$ لپاره د a په بدلوخواوو ( ش. ۱۵۷ )
یو ځیرونه $A_{a;g;k}$ کیدی شي په ځیروونې $A_{a;g\,1/k}$ بیرته راوکرځي .

## مائیل هندارونه

مائیل هندارونه یوه ځانګړې محوري افینیتي ده : د $k = -1$ لپاره لریوالی یا فاصله |PP*| همدومره ده لکه لریوالی یا واټن یا فاصله |P'P*| . پس مائیل اینونه محوري افینیتي $A_{a;g;-1}$ ده.




ځیره ۱۹۲

(c) ketabton.com: The Digital Library



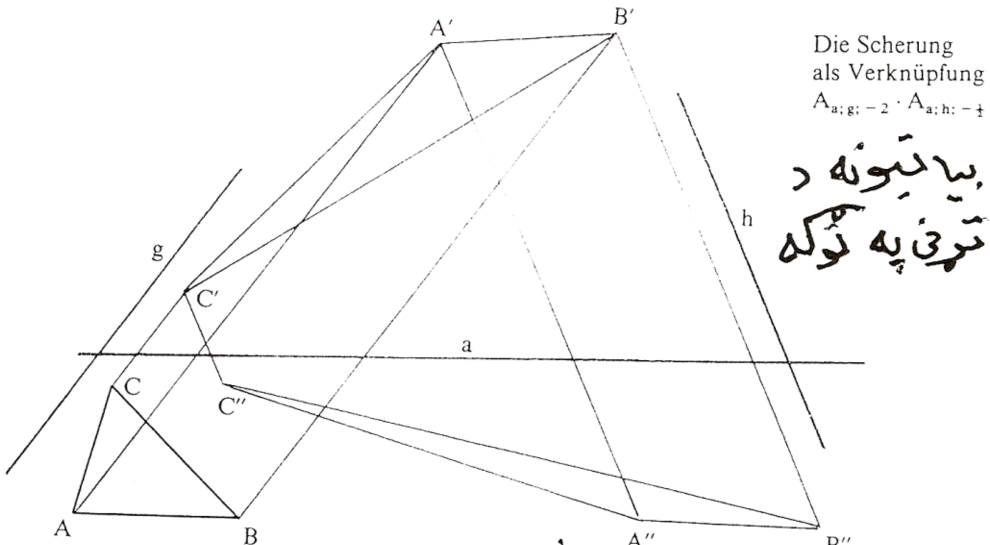
# : محوري افینیتي ( یو بل سره ) تړلو ځانګړي حالتونه:

## ىیاتي کوونه یا بیاتیونه Scherung

: دوه محوري افینیتی ( یوبل سره ) تړل، چې همغه افنیتي محور a ولري، g او h
ىختلفلوري محورونه او یو بل ته مخامخ افینیتي فاکتورونه k او 1 / k ولري، نو
ىیاتیونه ( بیاتي کونه ) ورته وایو.

ىیاتیونه ( یوبل سره )
: تړلو په څیر:

$A_{a;g;-2} \cdot A_{a;g;-½}$




شکل ۱۹۳

(c) ketabton.com: The Digital Library



په بیاتیونی کی، لکه ځنګه په مائیلی اینوني کی د هواری دننه بی تغیره پاتی کیږي، سره ددې چی د یواځنیو یا ټولو شکلونو تغیر خوړلی شي. ( تمرین وګوری) په عمومي توګه د ځیرې – او اصلي هوارې لپاره په یوه محوري افینیتي کي باور لري : $F'=|k|.F$ , او یو په بل پسی کارونو یا عملیو اجرا کولو کی هم په همدې ډول $F' = |k_{...}.k|.F$:

دا په دې مانا، چی محوري افینیتي په عمومي توګه هوارې ریښتونی نه ده.

## محوراینونه

محوراینونه یوه محوري افیتي ده له $k = -1$ سره. ( ځیره ۱۹۲ وګوئ)

کونګروااینځ ځیرونه
هره کونګروااینځځیرونه کیدی شي له محوراینونی یوځاي راټوله شي.

منځنی راکښنه( راکښل )
هر منځراکښنه یو افڤینه ځیرونه ده.

په عمومي ډول لاندې لاس ته راځي

| |
|---|
| د ټولو کونګروااینځ ځیرونو، ورته ځیرونو او محوري ځیرونو ډیري، د ټولو افڤین ځیرونو ډیری ورکوي. که افینځیرونی یو په پسي اجراشي یو ګروپ جوړوي، داسی په نامه افینګروپ. ( ګروپ دې د کتاب په پای کی وکتل شي ) |

(c) ketabton.com: The Digital Library



## تمرینونه

۱ – یو دریگوډی ABC دې په یوه افین هوارمساوي باندې داسې واړول شي، چیرته چې $|AB| = |AB'|$ او .

۲ – په دریگوډي A(3|5) ,: B( 5|4 ) ; C(3|1) باندې یو محوري افنیتي داسې وکاروي یا استعمال کړی، چې A'(-3|1) او y– محور د افنیتي محور وي.

۳ – د گردۍ ځیره د M(2|3) او r = 3 cm سره وټاکی ، که د x–محور د افینیتي محور وي، په ۱ او ۳ کوادرانت یا څلورمه کي لورکرښه او k = 2 د افنینتي فاکتور یا –ځل وي.

۴ – یو دریگوډی په هوار مساوي پنځه گوډي واړوی.

۵ – یوه گردۍ دې د نیمي d = 12 cm او د افنینیتي فاکتور k= ½ سره افینځیره شي. د راپیدا ایلیپسی د هوارې دننه وشمیرۍ. ( دوه یو په بل ولاړ محورونه افینیتي محورونه دي چی له منځتکي او لوریزکرښی څخه تیریږي )

۶ – یو تریخ ABCD جوړکړی له a = 8 cm ; c = 3 cm ; d = 5 cm او 40° = ∢ . په دې محورې افینیتي لارښوده کړی، چی د افنیتي محور یی د تریخ منځلاین وي، چی د لورکرښه یي د هغي سره ۵۵ درجي کونج جوړوي او د افنیتي ځل ا –فکتور یی k = 3 /2 دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



# دریګوډیکچ یا تریګونومتري Trigonometrie

## تعریفونه

د دریګوډیکچ یا تریګونومتري دنده ده چې په هواره یا په هوا کې دریګوډي کچ کړي ، د څانګړوبلواکو له لارې، دې په نامه تریګونومتریبلواکو. برسیره پر دې د دې په مرسته پریودیکې یعنې په منظمه فاصله پرلپسې تکراریدونکې پیښې( مونږ یې تل راګرځیدوني بللې شو ) څیړل کیږي.
تریګونمتري تر هیپارچ ( Hipparch ۱۶۰ – ۱۲۵ له م پخوا ) پوري تعقیبیدی شي، وروسته له مصري پتولیمویس Patolemäus چې په ۱۶۸ م کال کې مړ شوی او بیا له هندې او عربو شمیرپوهانو له خوا پرمختګ ورکړ شو. له پیل دا د کارونې یا عملي کیدو د ستونځو سره مخامخ وه. دریګوډیکچ خپل کارونه په استرنومي او فزیك، د څمککچ یا اندازه کولو، د څمك اندازونې، نقشو علم، او ابادې او نوتیك Nautik ( د کیشتیو د لارو نقشه ویستلو پوهنه ) کې مومي.
د تریګونومتري مانا یا مهموالې په څانګړې ډول په دې ریښتینوالې یا واقعیت کې نغښتې، چې د دې په مرسته د پایکرښبلواکوالې ، د کونجبلواکوالې سره تړلې شي( پام دې وي، چې دا تړاو شمیرپوهینیز مفهوم لري ).

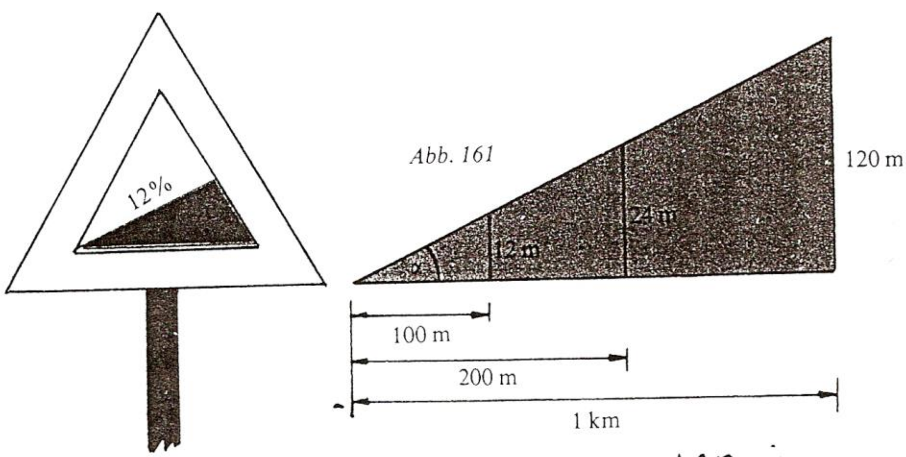
پیلبیلګه: د په مانایا مهم جګوالي یا لویدکرښو نخښنه لوحې یا په بله عبارت د زوړې او پیچومې لیکتختې( دې ته دې پام وي چې ما دا کلیمې هر چیرې د زوړې او پیچومې په نامه نه دې بللې، خو دا به ښه وي ، چې په هغه مناسب ځای

(c) ketabton.com: The Digital Library



کی ، که ما بیرته اصلاح نه کړې، نو په دې نومونو دې ونومول شي ) وهل شوي

د دې له لارې کوم معلومات ورکول کیدی شي؟
پیچومی یا جګوال 12 % په دې مانا چی په راتلونکو سلو مترو کی یو جګوالی د ۱۲ مترو وهل کیږي، دا ۱۲ متره ټیك ۱۲ له سلو دي. په نورو سلو مترو کی نور ۱۲ متره پیچومی یا جګوالی تی کیږي، نو په عمومي ډول یا ټولیزه توګه له ۲۰۰ متره پراته اوږدوالي وروسته ۲۴ متره پیچومی یا جګوالی. له یو کیلومتر وروسته دا پیچومی یا جګوالي لیدیدونکي ۱۲۰ متره ته جګیږي. کتل کیري یا لیدل کیږي، چی په ورکړشوي پیچومي یا جګوالي کی د پیچومي توپیر متناسب یا په ځانیونه و هوارې فاصلي ته تغیر خوري . د پایکرښو تناسب یا ځاننیونه تابث یا ځاي په ځاي پاتیږي او د په سلو کی ګڼ په لوحه ورکوي. د واقعي جګوالي اوږدوالي معلومات نه




ځیره ۱۹۴

(c) ketabton.com: The Digital Library

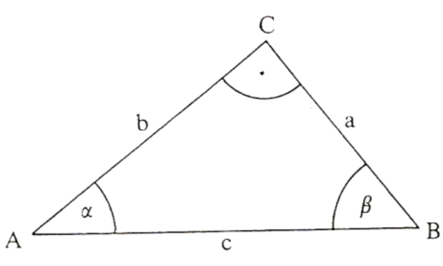


ورکوي همداسي زوړی یا لویدون. په داسي حالت کی هم بیا نورې لوحي هم زوړندې وي.

په همدې ډول پیچومی کیدی شي، لکه په سلو جمله کی، د کونج له لارې هم ورکړشي، چی د سرك ټوټه یی د پرتون سره جوړوي.

تریګونومتري یا د په سلوکی ( د پیچومي یا جګوالي تناسب ) د پیچومي یا جګوالي ویناوي دي او یا په څرګندو پیچومي کونج یا جګکونج چی سلییز پیچومی یا جګوالی ټاکي. په دې ډول په سلو کی ۱۲ جګوالي سره د پیچومي کونج په لاندې ډول دی $\alpha = 6,48°$ .

په پیلبیلګه کي څرګندیږي چی دا پایکرښي د یوه ولاړ دریګوډي اړخونه انځوروي، چی د دوه دریګوډیو تناسب یا ځانیونه د کونج په بلواکی یا اړتوب ښایی. زیات وخت هیوپوتینوزې ( اوږداړخ ) په c ښوول کیږي او هغه ته مخامخ کونج په $\gamma$ . نورې دواړه کتیتی a او b دي او د دوي مخامخ کونجونه $\alpha$ او $\beta$.



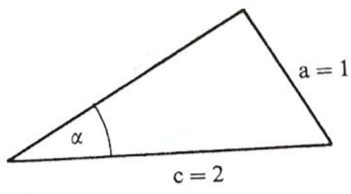
څیره ۱۹۵

اوس نو لاندې جملی باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library



سایْنبلواك :sinusfunktion بلیگه:

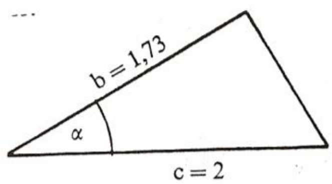



$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}$

$\sin 30° = \frac{1}{2}$

خیره ۱۹۶

کوسایبلوك Cosinusfunktion بیلگه:

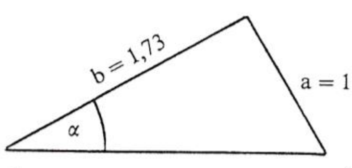



$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{پرته کتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}$

$\cos 30° = \frac{1,73}{2} = 0,8660$

خیره ۱۹۷

تنجنتبلواك Tangensfunktion بیلگه:




$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پروتکاتیت}}$

خیره ۱۹۸

$\tan 30° = \frac{1}{1,73} = 0,577$

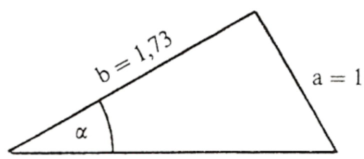
(c) ketabton.com: The Digital Library



یادونه : پام دې وي چې د مخامخ کاتیت لاندې د دریګوډي هغه اړخ پوهیږو، چې په هیپوتینوزې پراته کونج ته، چې څمور موخه وي، مخامخ پروت وي او هغه اړخ چې په همدې کونج پروت وي ، هغه ته په کونج پروت اړخ چې مور یې لنډ پروت کاتیت بولو.

دا لاندې نور کونجبلواک دي، چې کم کارول کیږي

کوتنجنتبلواک Kotangensfunktion بیلګه



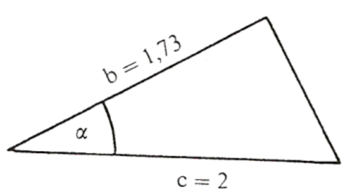

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{مخاخ کاتیت}}$$

خیره ۱۹۹

$$\cot 30° = \frac{1,73}{1} = 1,73$$

ډیر کم ، د بیلګي په توګه استرونومي کی، لاندې کونجبلواک کارول کیږي

سیکانسبلواک sekansfunktion بیلګه

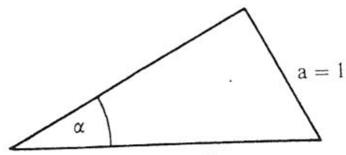



$$\sec\alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{هیپوتینوزې}}{\text{پرته کاتیت}}$$

ځیره ۲۰۰

$$\sec 30° = \frac{2}{1,73} = 1,156$$

کوسیکانسبلواك Kosekansfunktion بیلگه:




$$\text{Cosec}\,\alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{هیپوتینوزې}}{\text{مخامخ کاتیت}}$$

خیره ۲۰۱

$$\text{cosec}\ 30° = \frac{2}{1} = 2$$

موږ به زيات وخت لمړنی درې یا په همدې توګه لمړنی څلور بلواکه د کارونی لپاره راونیسو یا وکاروو.

## په خوښه دریګوډیو کی شمیرنه

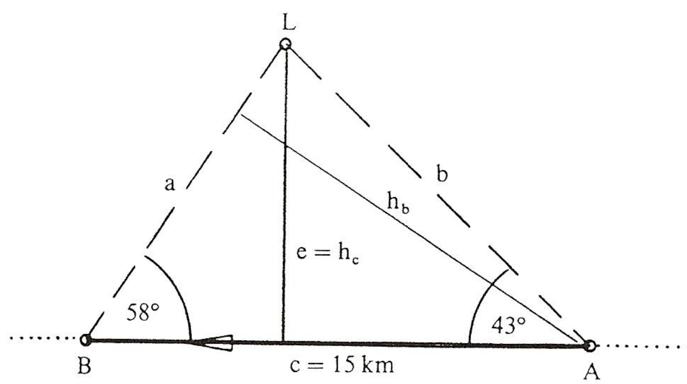
سره له دې چی کونجبلواکي یواځی په ولاړکونجیز دریګوډي کی باید تعریف کیږي، خو بیا هم برسیره پر دې استعمال یا کارونه مومي. د پیچومي یا جګوالی په جوړولو کی هر دریګوډی په ولاړو برخه دریګوډیو تجزیه یا ټوټه کیدی شي. په اخرني هنري، د مخکني مرستندوي، همدې منځ ته راوړو پایکرښي وینا وي د پیل دریګوډي باندې لاس ته راځي او په هغه کی د ورکړشوو کونجونو.

پیلبیلګه
یوه کیښتی د رڼاډزکړي( کله چی کښتی له ستونځو مخامخ شي او یا یوې بلی کښتی یا یو بل څه ته که یوه کښتی وغواړي خبر ورکړي، نو یوه توپانچه شته چی له هغی داسی ډز کیږي چی له لرې څرګندیږي او نورې خبر ورته لیږونکی په دې پوهیږي، چی څه پیښ شوي دي ). دلته $\alpha = 43°$ د تګ په لور اندازه کیږي او له

(c) ketabton.com: The Digital Library



یوه تګ پایکرښي $c = 15$ km او کونج $\beta = 58°$ وروسته.
په دوم ډز کې کیښتی له ډز رڼااور څخه څومره لرې ده؟
د A څخه و B ته د کیښتی نزدې واټن e د ډزرڼااور څخه څومره لرې دی؟
په A کې له اور څخه څومره لرې وه ؟




څیره ۲۰۲

اوبی یا حل:

$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 79°$ ;  $\sin\beta = h_b / c$ او $\sin\gamma = h_b / b$

د $h_b$ په لور اوبیول یا حلول او په همدې وخت کې لاس ته راځي:

$$h_b = c \cdot \sin\beta \quad \text{und} \quad h_b = b \cdot \sin\gamma$$
$$\Rightarrow c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$
$$\Rightarrow b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{15 \cdot \sin 58°}{\sin 79°} = 12{,}959 \text{ km}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لنډ واټن e لپاره باور لري:

$$\sin\alpha = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cdot \sin\alpha = 12{,}959 \cdot \sin 43° = 8{,}838 \text{ km}$$

$$\sin\beta = \frac{e}{a} \Rightarrow a = \frac{e}{\sin\beta} = \frac{8{,}838}{\sin 58°} = 10{,}421 \text{ km}$$

لکه چې په یاد راوړل شو، د همغه دريګوډي اړخونوa او b په شميرنه کی مرستندوي لويی له منځه ځي او باور لري:

## د ساين جمله :

په خوښه دريګوډي کی د اړخونو ځانیونه یاتناسب د اړخونو مخامخ کونجونو د ساین ځانیونه یا تناسب دی.

$$\sin\alpha / \sin\beta = a / b \qquad \sin\beta / \sin\gamma = b / c$$

$$\sin\gamma / \sin\alpha = c / a$$

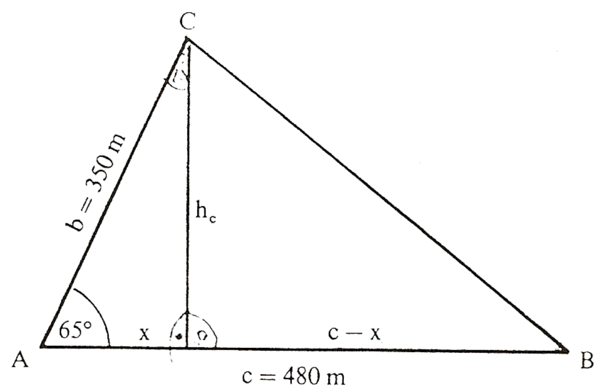
د ساين جمله په پڅ دريګوډي کي هم باورلري( تمرين دې وکتل شي ). ددې سره په يوه دريګوډي کی نه موجودې ټوټې هلته شميرل کيږي، چيرته چی دوه اړخونه او يو مخامخ کونج يا دوه کونجونه او يو مخامخ اړخ ورکړ شوی وي.

سړی بيا څه کوي که دريواړه اړخونه ورکړ شوي وي او يا دوه اړخونه او د هغوتر منځ راګير کونج؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



**پیلبیلګه** : په یوه د ډبروسکرو کان کی دوه ستنی $b = 350\ m$
او $c = 480\ m$ دي او یو کونج $\alpha = 65°$ ښندوي.
د B څخه و C ته به د نښلولو ستن یا تیر څومره لوي وي ؟




څیره ۲۰۳

اوبی یا حل :
جګوالی یا جګی $h_c$ کرښه $AB = c$ په دوه ټوټو $x$ او $c-x$ ویشي.
دلته دی $x = b.\cos\alpha$ ،
ځکه چی $\cos\alpha = x / b$ دی . د پیتاګوراس د جلی له مخی
لرو : $h_c^2 = b^2 - x^2$
او

$$a^2 = h_c^2 + (c-x)^2 .$$
$$a^2 = h_c^2 + c^2 + x^2 - 2cx$$
$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2cb\cos\alpha$$
$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د اړخونو اوږدوالی نوموني او کونج کيدی شي چي منظم بيرته راګرځيدونکی (ځيکليکي يوناني کليمه ده ګردی ډوله يا منظم بيرته راګرځيدونکی zyklisch يو بل سره بدل شي» له دې امله باور لري

## کوساين جمله

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos \gamma$$

په هر يوه دريګوټي کی د هر اړخ مربع مساوي ده، د نورو دواړو اړخونو د مربع زياتون سره ترې کم دوه ځله د دې دوه اړخونو ځل او ددې دوه اړخونو رابند شوي کونج کوساين سره ځل.

د کوساين جمله د پيوتاګوراس د جملی عموميت يا ټوليز ته هم وايي. ( تمرين ۶ مخ دې وکتل شي )
د کونجبلواك له لارې يو بل متود، د ډيرګوټي شميرلو لپاره ، تر څو دا په دريګوټيو ويشل کيدی شي چی پوره اړخونه او کونجونه يی څرګند وي، پيدا شو.
د دې ټولو سره د څلورګوټي يو وربرسيره بل د شمير فرمول پيداشو:

$$A = 0,5.d_1.d_2.\sin \alpha$$

چيرته چي $\alpha = w(d_1; d_2)$ وي.

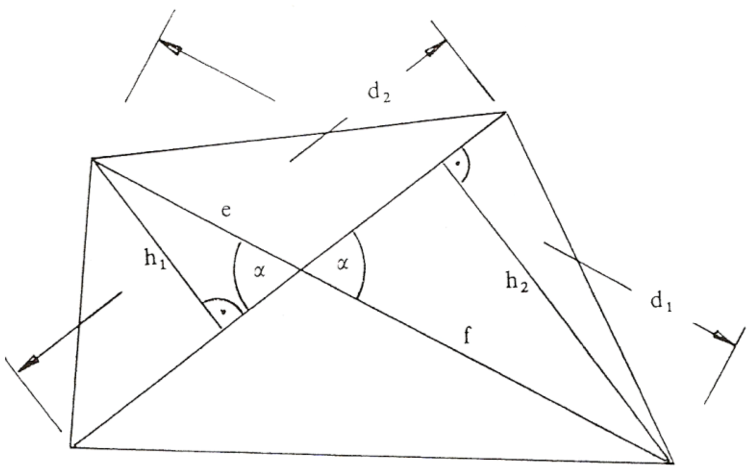
اوبی يا حل : $A=0,5(d_2h_1 + d_2h_2)$

که $d_1$ په e او f ټوټه يا تجزيه شي ، نو لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$h_1 = e \cdot \sin\alpha$$
$$h_2 = f \cdot \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2 (e + f) \sin\alpha$$
$$\Rightarrow A = 0{,}5 \cdot d_2\, d_1 \sin\alpha$$




ځیره۲۰۴

## د په خوښه کونجونو تریګونومتریکي بلواکي

په اخره برخه کی مو وویل، چی کونجبلواك، نه یواځی د دننه لورته تیرو دریګوډیو لپاره ، بلکه د هغو کونجونو لپاره چی له ۹۰ درجو لوي وي ، هم هدفمند (موخور ) تشریحوړ دي. له دې وروسته کونجبلواکو خپله پوره موخه یا هدف تر لاس کړ.

دا پراختیا څنګه تصور یا د خیالوړ کیدی شي ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

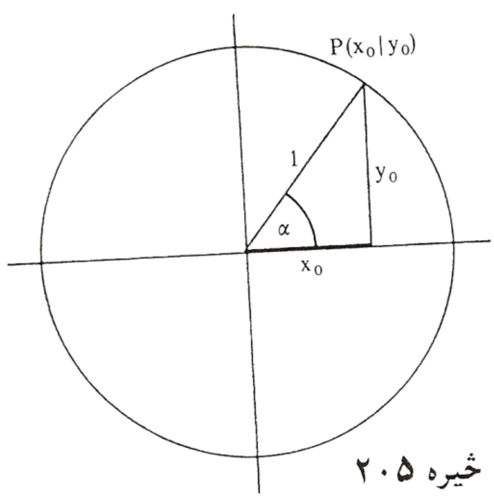


په ښه توګه داسی کیدی شي چی په یوه ولاړ پروت سیستم یا کواوردیناتسیستم کی یوه ګردی ووهي چی وړانګه یي ۱ یعنی یو یوون یا واحد دی ( دې ته یوونګردی ویل کیږي، ځکه چی وړانګه یی یو یوون دی) او د ګردی منځټکی او د پروت ولاړ سیستم کواوردېنات سرچینه یو په بل پریوځي . نو بیا هر دریګوډی، چی د هغی یو کونج د ګردی ځنتریکونج دی، یعنی کونج یی د ګردې په منځ یا ځنتر پروت دی، (ځیره ۲۰۴) کم له کمه یی یو اړخ ۱ یعنی یو یوون اوږدوالی لري. دا د دریګوډی په دننه کی شمیرنه او اړیکي اسانه کوي.

لمړی د یوه ولاړکونجیز دریګوډي ځخه پیل کوو، چی په لمړي لمړي ځلورمه یا کوادرانت (Quadrant) کی پروت د ی . نو هیپوتینوزې ۱ اوږدوالی لري، او په ګردی ،د کونجټکی $P(x|_0y_0)$ په پام کی نیولو سره، باور لري:

$$\sin\alpha = y_0 / 1 = y_0 , \quad \cos\alpha = x_0 / 1 = x_0$$

دا کرښی د پریوستون او یا د سیورېدرځونو په ځیر لاس ته راځي، که موږ وړانګه د یوه ټالوهونکی مږوند په ځیر ونیسو یعنی فرض کړو، کوم چی د محورغبرګي رڼا لاندې راشی.



ځیره ۲۰۵

په دې ولاړ کونجیز دریګوډي کی کیدی شي چی د پیتاګوراس جمله وکارول شي:

تریګونومتریکي پیتاګوراس:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

چیرته چی $\sin^2\alpha = \sin\alpha . \sin\alpha$ په مانا دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

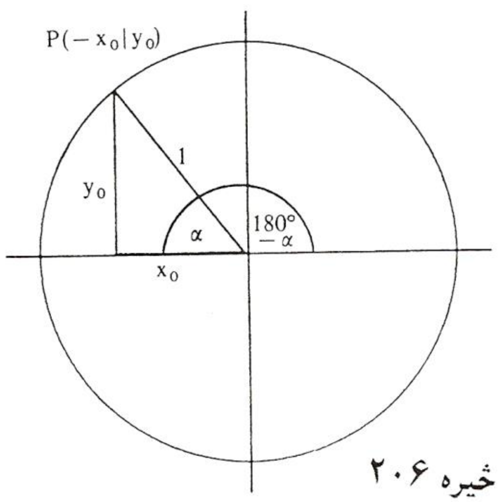


کیدی شي ، چی پوښتنه وشي چی همدا « سیوری » بیا کله لاس ته راتلی شي.
دا حالت بیاټیك هلته لاس ته راځي، چی وړانګه د منفي x –محور سره یو
کونج $\alpha$ جوړ کړي، یعني ځنتریکونج یی $180^\circ - \alpha$ وي.
د « سیوروځیرو » څخه لاس ته راځي:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

ځکه چی دا سیوری همغومره اوږد
دی لکه د مخه، مګر اوس له صفر
پیل مخامخ (منفی) لور ښایي.



ځیره ۲۰۶

په ورته توګه لاس ته راځی :

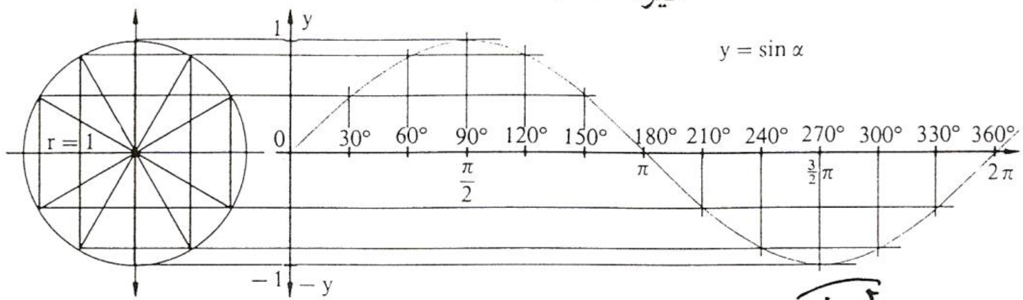
$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(360^\circ - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

د کونج $\alpha + 360^\circ$ لپاره بیرته د سرچیني کونج اړیکی لاس ته راځي: همدا ډول
د $\alpha + 720$ لپاره اوهمداسی نور. په دې توګه د په خوښه کونجفنکشنونو یا
کونجبلواکو لپاره د ساین او کوساین بلواك تعریف دي.
د $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$ له امله ( مقایسه مخ ۱۵۱ ) دا د تنجنت بلواك لپاره
هم صدق کوي. له دې امله لاندې د بلواکګرافونه لاس ته راځی

(c) ketabton.com: The Digital Library

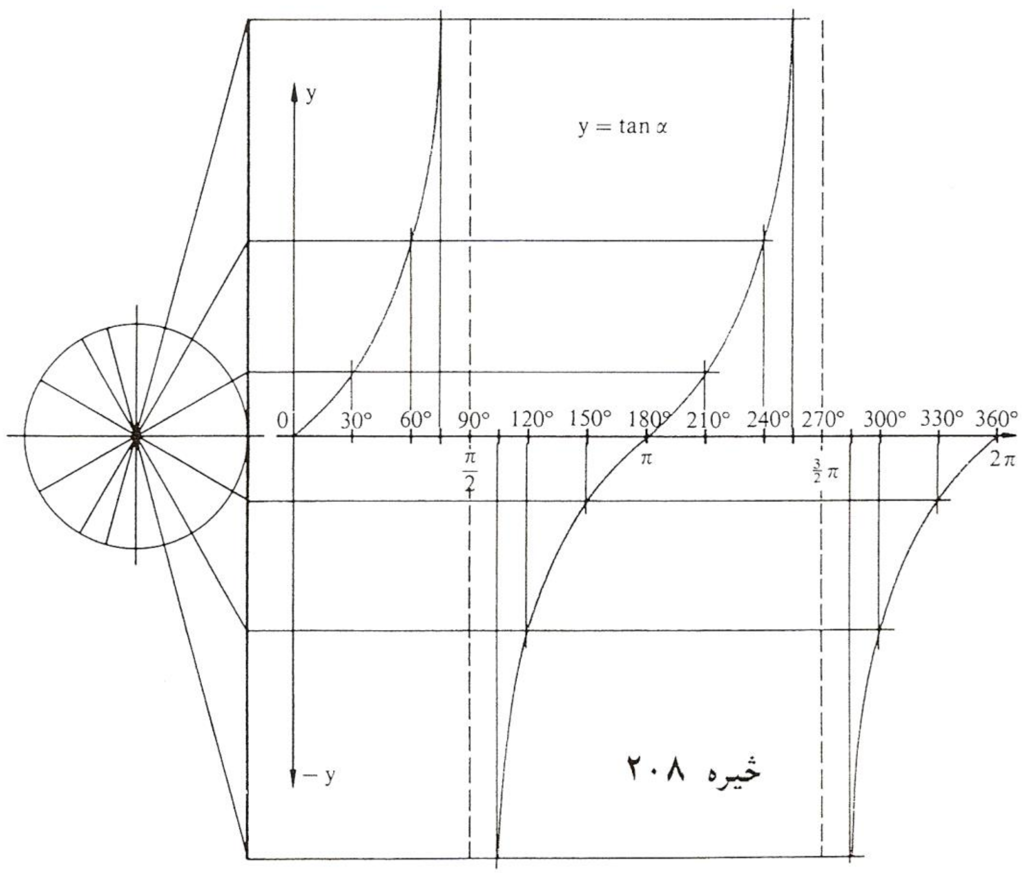


ثیره ۲۰۷




Die **Sinuskurve**: $y = \sin x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$

د ساین کږه



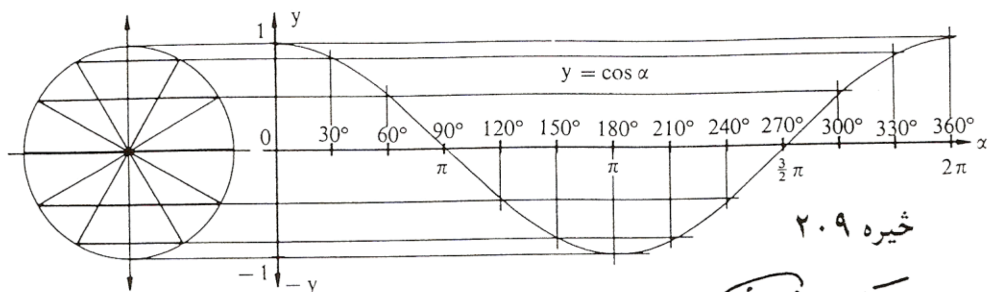

ثیره ۲۰۸

Die **Tangenskurve**: $y = \tan x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = (2z+1)\frac{\pi}{2} \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

د تنجنت کږه

(c) ketabton.com: The Digital Library

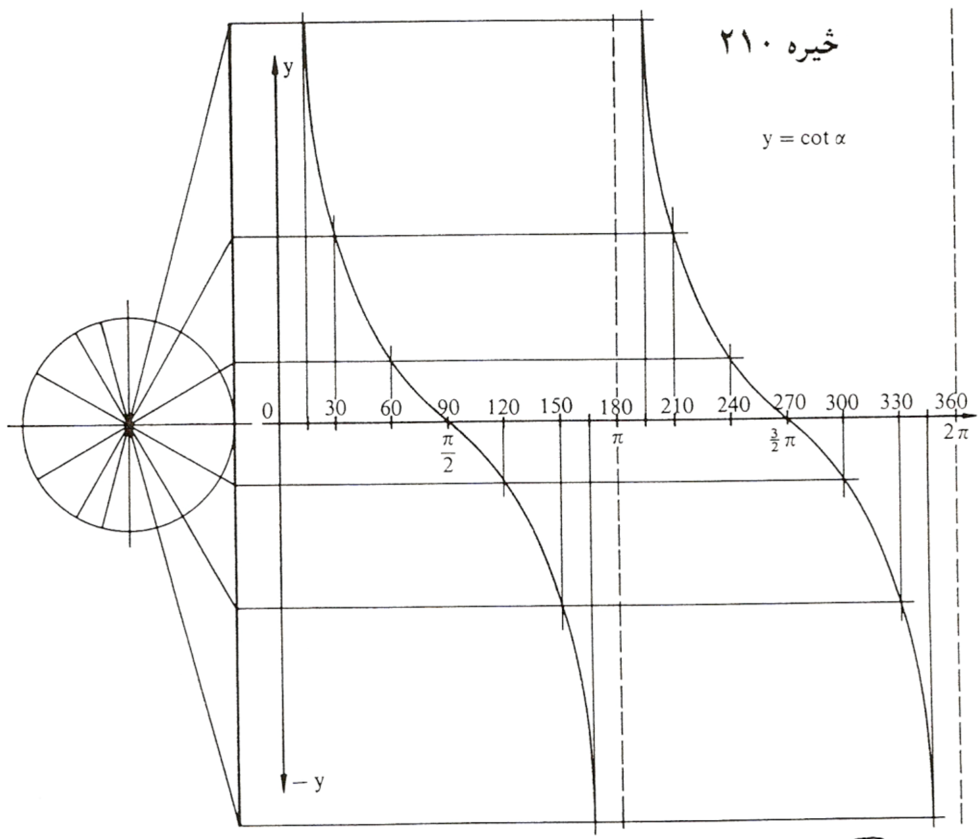





ذخیره ۲۰۹

دکوساین گراف

Die **Kosinuskurve**: $y = \cos x;\ x \in \mathbb{R};\ y \in [-1; 1]$




ذخیره ۲۱۰

Die **Kotangenskurve**: $y = \cot x;\ x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = z \cdot \pi \wedge z \in \mathbb{Z}\};\ y \in \mathbb{R}$

دکوتنجنت گراف

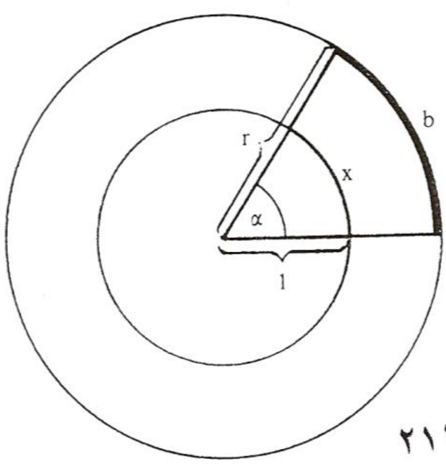
(c) ketabton.com: The Digital Library



# لینده اندازه (لینده کچ ) Das Bogenmaß

په زړه درجه د کونجکچ یا – اندازې سره بلد یو ( دمخه ولیدل، چې ۳۶۰ درجې پوره ګردی ښايي. هغه، چې لږ ورسره بلد یو یا زیات ورسره بلد نه یو، هغه نوې درجه ده ، چې ګردی په ۴۰۰ مساوي برخو ویشل کیږي. دا په دواړو کچیوونونو یا کچواحدونو کی ګډ دي، چې په ګڼونو اندازه کیږي، بی له کچ یوون؛ ارزښتډیری رییلګڼونه دي، په داسی حال کي چې وتل ګڼونه ( = د تعریف ډیري ګڼونه ) یو یوون یا واحد ( درجه یا ګون ) لري. دا په کارونه یا عمل کی موږ زیات وښت د خنډ سره مخامخ کوي. له دې امله د لیندې کچ سره د کونجکچ لپاره یو ور زیات امکان پیدا شو.

کونج لویي په واقعیت کی یوون «راد ( rad ) » لري، مګر دا په کارونه یا عمل کی کیدی ونه لیکل شي یا صرف نظر پرې وشي، که بدلون ته مو نه راهڅوي. دا کونجکچونه چې د کونج لپاره په تریګونومتریکی بلواکو کی اینښودل کیږی ( د بیلګي په توګه sin )




خیره ۲۱۱

ارګومنت ( Argument تعریفډیری ) بلل کیږي. په تعریفډیري کی کیدی شي چې نوې درجه ، زړه درجه او یا لینده کچ وکارول شي. کاروونکی دې پام ولري چې په جبشمیري کی همغه مودوس په کار اچول شوي دی( راتلونکی دې وکتل شي )

(c) ketabton.com: The Digital Library



په برخه ګردیبرخوکی وښوول شو ( ګردیبرخی د مخه څیړل شوي دي ) چی هر کونج پورې یوه ګردبرخه یا ګردی لینده اړه لري، نو ټولی ګردی پورې ۳۶۰ درجی کونج یا $2\pi r$ اړه لري، یوه کونج $\alpha$ پورې بیا یوه لینده b اړه لري، کومه چی په چاپېرۍ ځانګړی همداسی نیسي لکه په پیل کی $\alpha$ و ۳۶۰ درجو ته . دلته ګردیګڼ دی : $\pi = 3,14....$ (دا مو له دې پخوا لاس ته راوړی دی)

پیلبیلګه:

کونج $\alpha = 60°$ له ګردی د ۱۰ سانتیمتره وړانګي سره یوه په لاندې ډول ګردی لینده $b = 20\pi . 60° : 360° = 10,47$ cm غوځوي یا بیلوي. د ګردی چاپیری دی : $U = 20\pi = 62,83$ cm

همغه کونج $\alpha$ د ۵ سانتي متره وړانګی سره ګردیلینده

$$b = 10\pi . 60° : 360° = 5,236 \text{ cm}$$

غوځوي. دا ګردی لاندې چاپیری لري: $U = 10 = 31,416$ cm .

له ګردی د وړانګي $r = 1$ cm سره ددې په څېر یا برعکس کونج ګردیلینده

$$b = 2\pi . 60°: 360° = 1,047 \text{ cm}$$

غوځوي» د دې ګردي چاپیری فقط $U = 2\pi = 6,283$ دی .

له بیلګي څرګندیږي، چی لینده اندازه په همغه اندازه زیاتیږي لکه وړانګه. له دې امله کیدی شي خپله شمیرنه په یوونګردي د وړانګي ۱ سره رابنده یا محدوده کړي او روښانه کړي:

تعریف: په یوونګردي د ګردیلیندی اوږدوالي کچګڼ، چی په څنتریکونج

(c) ketabton.com: The Digital Library



باندې څېره شوي، لینده کچ بلل کیږي. لاندې شمیراوړون باوري کوي:

$$x = (\alpha / 180^\circ) \cdot \pi \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = (x / \pi)\, 180^\circ = \frac{x}{\pi} \cdot 180^\circ$$

دا چی د وړانګي څرخون په پوره کونج هم وراوړیدی شي، نو له دې امله د لینده کچ لپاره په خوښه رییلګڼونه پرېښوول شوي.
بیلګی :

$$\alpha = 1^\circ \Leftrightarrow x = \frac{1^\circ}{180^\circ}\pi = 0{,}0175 \text{ (rad)}$$

$$\alpha = 30^\circ \Leftrightarrow x = \frac{30^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{6} = 0{,}5236$$

$$\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow x = \frac{45^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{4} = 0{,}7854$$

$$\alpha = 60^\circ \Leftrightarrow x = \frac{60^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{3} = 1{,}0472$$

$$\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow x = \frac{90^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{\pi}{2} = 1{,}5708$$

$$\alpha = 180^\circ \Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{180^\circ}\pi = \pi = 3{,}1416$$

$$\alpha = 360^\circ \Leftrightarrow x = \frac{360^\circ}{180^\circ}\pi = 2\pi = 6{,}2832$$

$$\alpha = 720^\circ \Leftrightarrow x = \frac{720^\circ}{360^\circ}\pi = 4\pi = 12{,}5664 \quad \text{usw.;}$$

$$\alpha = -75^\circ \Leftrightarrow x = \frac{-75^\circ}{180^\circ}\pi = \frac{-5}{12}\pi = -1{,}309$$

## ارکوسبلواکي Arcusfunkrionen

زیات وخت دا پوښتنه هم رامنځ ته کیږي ، چي لکه په ورکړشوو کرښځانیونو راپیداشوې کونجونه څنګه معلومیږي یا څنګه راڅرګندیږی یا بهتره څنګه ځانونه نیسی. ددې لپاره چی دا پوښتنه ځواب شي، باید امکانات ولټول شي، چی د کونجبلواك ارزښتونو څخه څنګه بیرته کونج یا په همدې توګه د هغه تعریفېدیري ته، په لینده کچ راتلی شو. دا کونجبلواك پریودیکی یا تل بیرته راګرځیدونکي بلواك دی، دا په دې مانا، چي د بلواك ارزښت په منظمه توګه د مختلفو کونجونولپاره یا .

(c) ketabton.com: The Digital Library



مختلفو واټنونو وروسته، بلواك ارزښتونه تكراريږي. د دې لپاره چې په څرګنده ممكن شي، نو بايد د خپل تعريف ډيرى په يوه برخه ډيري رابند يا محدود شي.

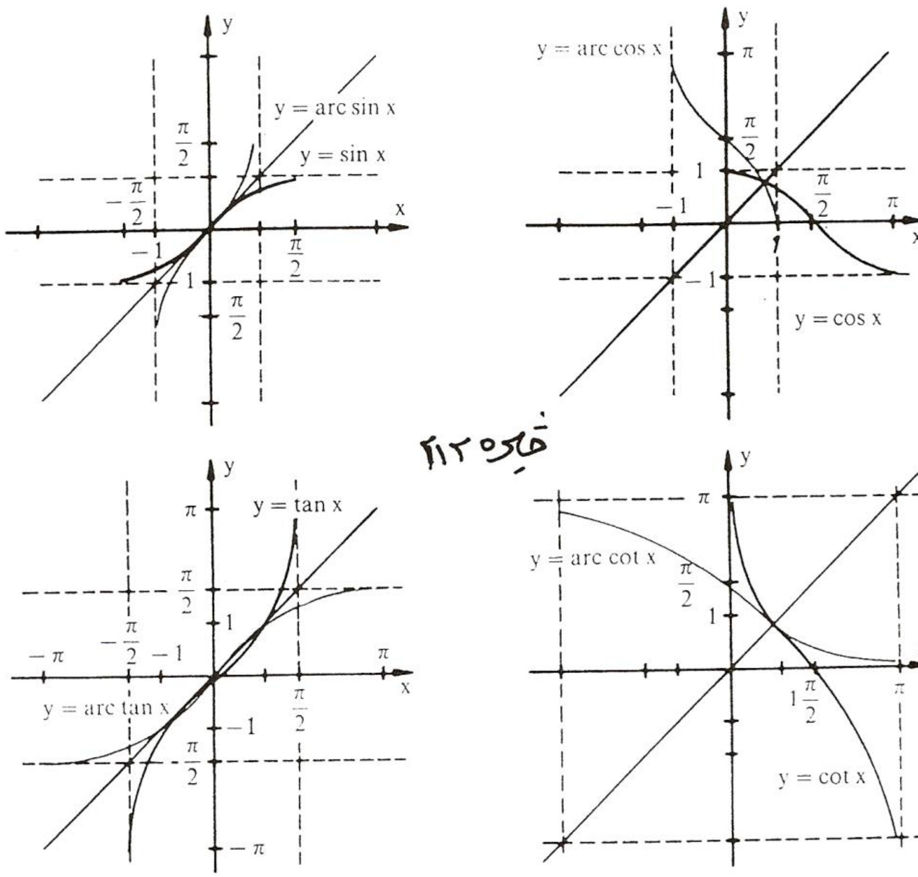
**تعريف :** د يوه ( رابند يا محدود ) تريګونومتريكي بلواك په څټ بلواكونه اركوس بلواك Arcusfunktion بلل كيږي يا څيكلومتريكي بلواك ( لاتين :اركوس Arcus = Bogen = لينده )

دلته ( arc sin(x لوستل كيږي »د x اركوس ساين. د كونجبلواك تعريفډيرى دلته اړونده اركوسبلواك ارزښتډيرى دى او په څټ اركومنت يا تعريفډيرى دلته تل يو رييلګڼ دى.

| Trigonometrische Funktion تریګونومتریکي بلواک | Arcusfunktion ارکوسبلواک |
|---|---|
| f: $x \mapsto \sin(x)$<br>$\mathbb{D} = \left\{x \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$<br>$\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$ | $f^{-1}$: $x \mapsto \arcsin(x)$<br>$\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$<br>$\mathbb{W} = \left\{y \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$ |
| f: $x \mapsto \cos(x)$<br>$\mathbb{D} = \{x \mid 0 \le x \le \pi\}$<br>$\mathbb{W} = \{y \mid -1 \le y \le 1\}$ | $f^{-1}$: $x \mapsto \arccos(x)$<br>$\mathbb{D} = \{x \mid -1 \le x \le 1\}$<br>$\mathbb{W} = \{y \mid 0 \le y \le \pi\}$ |
| f: $x \mapsto \tan(x)$<br>$\mathbb{D} = \left\{x \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$<br>$\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < y < \infty\}$ | $f^{-1}$: $x \mapsto \arctan(x)$<br>$\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$<br>$\mathbb{W} = \left\{y \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$ |
| f: $x \to \cot(x)$<br>$\mathbb{D} = \{x \mid 0 < x < \pi\}$<br>$\mathbb{W} = \{y \mid -\infty < x < \infty\}$ | $f^{-1}$: $x \to \operatorname{arccot}(x)$<br>$\mathbb{D} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$<br>$\mathbb{W} = \{y \mid 0 < y < \pi\}$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library






شمیره ۲۱۲

**Beispiele:** بېلګې :

**1.** arcsin (0,8) = 0,9273 (rad) = 53,13°

**2.** arccos (1) = 0 (rad) = 0°

**3.** arctan (−100) = −1,5608 (rad) = −89,43°

**4.** arccot (−70) = −0,0143 (rad) = −0,82°

۵ – دا چې کونجبلواك و ارکوسبلاك یو د بل په څټ بلواك دي نو باور لري.

$$\sin(\arcsin(y)) = y; \quad \arcsin(\sin(x)) = x$$
$$\cos(\arccos(y)) = y; \quad \arccos(\cos(x)) = x$$
$$\tan(\arctan(y)) = y; \quad \arctan(\tan(x)) = x$$
$$\cot(\text{arccot}(y)) = y; \quad \text{arccot}(\cot(x)) = x$$

يعنې په لاندې توګه هم

$$\sin(\arcsin(0{,}4)) = \sin(23{,}58°) = 0{,}4$$
$$\arccos(\cos(\pi/3)) = \arccos(0{,}5) = 1{,}0472$$
$$\tan(\arctan(-40)) = \tan(-88{,}5679°) = -39{,}9999$$
$$\text{arccot}(\cot(60°)) = \text{arccot}(0{,}5774) = 1{,}0472$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



# د جبشميري كاروني يا استعمال لپاره

داچې پخوا معمول جدولونه د بلواك تعريفېدېري او ارزښتېدېري شميرلو لپاره له كاره غورځول شوي دي او دنده يې ايلكترونيكي ماشينونو نيولې ده، غواړو چې د جبشميري استعمال په هكله هم څه ووايو

كوركمپيوتر زيات وخت داسې فنكشنونه يا بلواكي لري يا وظيفې په كلك اختيار كې لري، چې د درجي اوړون په لينده كچ او په څپ كوي، مګر شميردرځ په توګه بايد د شميرونكې په پروګرام كې ځاى په ځاي شوى وي.

پوره اسانتياوې او زياته كارونه د جبشميرې په غاړه پرته ده، دلته دې توكمې د < .... > سره په نخښه شي:

په قاعده كې دريې بلواك وركړشوي دي : < cot > ; < cos > ; < sin > كوتنجنت بيا داسې شميرلكيدى شي، د < tan><1/x > . د < INV > – توكمي سره سړى اركوسبلواك ته راځي: نو < INV><sin > اركوس ساين دى. په عمومي توګه كونج – بي پروا كه په لينده كچ او يا درجه كچ وركړ شوي وي – بايد د فنكشن له مخه وركړ.

## بيلګي

١ لاندې جدول همغه د كاروني يا اتعمال لپاره د جبشميري چمتووالى بناى :

| Winkelmaß کونجکچ | TR-Modus په تخنبونه | Beispiel بېلګه |
|---|---|---|
| Altgrad زړه درجه | DEG | $\sin 45° = 0{,}7071$ |
| Neugrad نوې درجه | GRAD | $\sin 50^{g} = 0{,}7071$ |
| Bogenmaß لینده کچ | RAD | $\sin \frac{\pi}{4} = 0{,}7071$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library



2.

| Zu ermitteln | Tastenfolge | Anzeige im Display | Modus |
|---|---|---|---|
| sin 45° | 45⟨sin⟩ | 0.707106781 | DEG |
| $\sin \frac{\pi}{6}$ | ⟨π⟩⟨:⟩6⟨sin⟩ | 0,5 | RAD |
| cot 30° | 30⟨tan⟩⟨1/x⟩ | 1.732050808 | DEG |
| arccos 0,5 | 0.5⟨INV⟩⟨cos⟩ | 60(°) | DEG |
| arccos 0,5 | 0.5⟨INV⟩⟨cos⟩ | $1.047 = \frac{\pi}{3}$ | RAD |
| arccot 2 | 2⟨1/x⟩⟨INV⟩⟨tan⟩ | 26.56505118° | DEG |
| sin $220^g$ | 220⟨sin⟩ | −0,3090 | GRAD |

دلته مهم دی، چی جبشمیری په همغه ټاکلي یوون ترتیب شوی وي. یو «د مخه ټاکنه» (د «مودوس ټاکنه ») د زاړه – یا نوي درجی همدا ډول لینده کچ، د ډیرو جبشمیریو مودلونو سره د تکمی <DRG> څخه لاس ته راځی یا د بیلګي په توګه . < MODE >

د ورکړشوي درجه ګڼ اوړون په لینده کچ د <<- DRG > سره سورت نیسي.
بیرته یا په څټ سړی داسی راځي- لکه چی لرل مو- د <INV> – تکمی سره.

## بیلګی

| | | |
|---|---|---|
| 60° | ⟨DRG⟩ | 60(rad) |
| 60 | ⟨DRG⟩ | 60(grad) |
| 60° | ⟨DRG →⟩ | 1.047197551(rad) |
| 1.047197551 | ⟨DRG →⟩ | 66.66666667(grad) |
| 66.66666667 | ⟨DRG →⟩ | 60° |
| 60° | ⟨INV⟩⟨DRG →⟩ | 66.66666667(grad) |
| 66.66666667 | ⟨INV⟩⟨DRG →⟩ | 1.047197551(rad) |
| 1.047197551 | ⟨INV⟩⟨DRG →⟩ | 60° |

دلته ګراد نښونه ( gard ) نوی درجه ده یعنی ګون( gon ).

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځنې جشميري په دې برسيره نور زيات امکانات هم لري ، نتيجې يې په ګراد دقيقې، ثانيي اويا لسيز سيستم ورکړ شوي دي. بدلون بيا د تکمې <DMS-Dd> سره صورت نيسي:

| | | |
|---|---|---|
| 26.75°<br>30°15′ | ⟨inv⟩⟨DMS – Dd⟩<br>⟨DMS – Dd⟩ | 26°45′<br>30.25° |

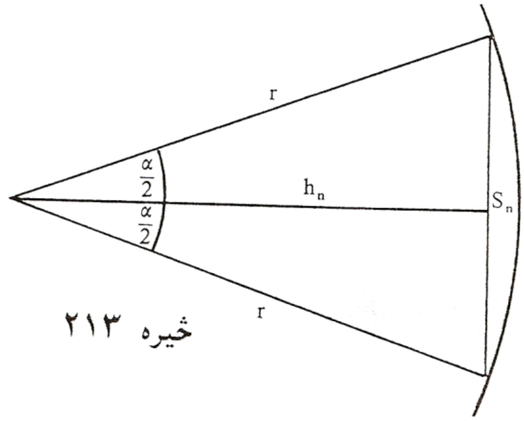
د " 30° 15" " ورکړه کيدی شي د جبشميري سره مختلف بدلون ولري دلته دې د جبشميرى د لاس کتاب څخه ګټه واخستل شي ( يادونه: زه پوهيږم چې داسې شيان موږ متآسفانه په خپل هيواد کې نه لرو ، خو په هر صورت يې ليکل ضرور دي، دا پرمختګ موږ هم خپل شاته نه شي پريښوولی )

پيلبيلګه: دلته دې $S_n$ د يوه منظم n– ګوډي د اړخ اوږدوالی وي، چې په يوه ګردی کې چې وړانګه يې r = 5 cm ده، راګير دی.

الف ) وښايي چې

$$S_n = 2r \cdot \sin(180° : n)$$

ب ) د يوه داسې n– ګوډي چاپيرې $U_n$ وشميرى ، چې n = 8;16;32;128 وي، او په نږدې توګه يا تقريبي د دې ګردي چاپيرى د دې وړانګې r سره وښايی .




خيره ۲۱۳

(c) ketabton.com: The Digital Library



ب ) په همدې ډول n– ګوډی له هوارو $A_n$ څخه په نزدې توګه یا تقریبي د ګردی ـــ هواره A وښایی .

اوبی (حل : هر n– ګوډی کیدی شي په n مساوي دریګوډیو ټوټه کړی شي.
د هغو د څینتریکونج ∝ لپاره باور لري $360° / n = \propto$ . د جګی یا جګوالی $h_c$
د کښلو سره په هر مساوي پښیز دریګوډي کي ولاړکونجیزې نیایی د څنتریکونج یا منځکونج سره لاس ته راځي :

$$\frac{\propto}{2} = 360° / 2n = 180° / n$$

بر سیره پر دې صدق کوي

$$(S_n /2) / r = \sin\frac{\propto}{2} \Rightarrow S_n = 2r . \sin\frac{\propto}{2} = 2r . \sin(180° / n)$$

b ) $U = n.S_n = 2r.n.\sin\ (180°/n) = 10n.\sin\ (180° / n)$

د ارزښتشمیرنو د غلطی مخنیوی لپاره همدفمند یا موخه ور دی، که په دغه همغه لړپیرلپسی تکمی وکارول شي یا استعمال شي .

180° ⟨STO⟩ ⟨:⟩ 8⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 8⟨·⟩10⟨=⟩ 30.614675
⟨RCL⟩⟨:⟩ 16⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 16⟨·⟩10⟨=⟩ 31.214452
⟨RCL⟩⟨:⟩ 32⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 32⟨·⟩10⟨=⟩ 31.365485
⟨RCL⟩⟨:⟩ 64⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 64⟨·⟩10⟨=⟩ 31.403312
⟨RCL⟩⟨:⟩ 128⟨=⟩⟨SIN⟩⟨·⟩ 128⟨·⟩10⟨=⟩ 31.412773

پ ) د ډیرګوډي هواره د دریګوډیو هوارو د یوځایوالی څخه لاس ته راځی
د هر دریګوډي هواره ده: $0,5 .S_n . h_n$ . د

$$h_n = r.\cos(180° / n)$$

او

$$S_n = 2r . \sin(180°/ n)$$

له امله داسی دی

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$A = n \cdot 0{,}5 \cdot s_n \cdot h_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cdot r \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right).$$

$$A = r^2 \cdot n \cdot \sin\left(\frac{180°}{n}\right) \cos\left(\frac{180°}{n}\right) = r^2 \cdot n \cdot 0{,}5 \sin\left(\frac{360°}{n}\right)$$

له دې سره د نړې [illegible]

360° ⟨STO⟩ ⟨:⟩ 8 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 8 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 70.710678
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 16 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 16 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 76.536686
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 32 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 32 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.036129
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 64 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 64 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.413712
⟨RCL⟩ ⟨:⟩ 128 ⟨=⟩ ⟨SIN⟩ ⟨·⟩ 128 ⟨·⟩ 12.5 ⟨=⟩ 78.508279

د يوه جشميرې سره ، چي له يوې زخيرې زياتی ولري ، لکه چی پام به مو ورته کړی وي ، د کونجونو برسيره نورې ثابتي هم زخيره کيدی شي» په يوه منظم پروګراموړ ماشين سره کيدي شي چي د دا ډول شميرنو لپاره د ګوډونو ګڼ څخه ت شو يا د ګوډونو ګڼ باند ې صرفنظر وشي .

## د تريګونومتريکي بلواکو خويونه

دا چی کونجکچ په درجه کچ او هم په لينده کچ ورکول کيدی شي، کيدی شي چی يوه کونج بلواك تعريفډيری يا ∝ او يا x وي. ددې لپاره چی د يوه بلواك خوي باندې ټينګار وکړو، بايد په لاندې په لينده کچ تکيه وکړو.

د لاندې خويونو لمړی ډله يواځي له تعريفمساوات ( د مخه راغلی ) او د پيتاګوراس له جملی لاس ته راځي ( د مخه لوستل شوې ) لاندې صدق کوي :

(c) ketabton.com: The Digital Library



**تعریف :**

$$\tan(x) = \frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{پرته کاتیت}} = \frac{\frac{\text{مخامخ کاتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}}{\frac{\text{پرته کاتیت}}{\text{هیپوتینوزي}}} = \sin(x) / \cos(x)$$

ورته:

$$\cot(x) = \cos(x) / \sin(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

له دي لاس ته راځي

$$\cot(x) = 1 / \tan(x) \iff \tan(x) = 1 / \cot(x)$$

برسیره پر دي لرو:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

د دي سره لاس ته راځي:

$$1 / \cos^2 x = 1 + \tan^2 x \;;\quad 1 / \sin^2 x = 1 + \cot^2 x$$

په تریګونومتریکي بلواکو کی هیله ده ، چی د پوتنځ لیکدود په پام کی ونیسی.
په لاندي پاملرنی سره :

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \neq \sin(x^2) = \sin x^2$$

په لاندي کی gegeben ورکړی او gesucht غوښتونی یا پلټونی په مانا دي

| gegeben ورکړي / gesucht غوښتونې | sin x | cos x | tan x | cot x |
|---|---|---|---|---|
| sin x | sin x | $\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$ | $\pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ | $\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$ |

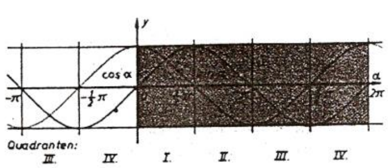
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | $\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$ | $\cos x$ | $\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ | $\pm\frac{\cot x}{\sqrt{1+\cot^2 x}}$ |
| $\tan x$ | $\pm\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$ | $\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$ | $\tan x$ | $\frac{1}{\cot x}$ |
| $\cot x$ | $\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$ | $\pm\frac{\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$ | $\frac{1}{\tan x}$ | $\cot x$ |

لکه چې د مخه مو په ګوته کړل، کیدی شي چې تریګونومتریکي بلواك د مختلفو ګونجونو لپاره روښانه شي. که لمړي ورکړ شوي بلواك ارزښتونه مقایسه شي، نو په کره توګه یا په کلکه توګه لاس ته راوړی شو

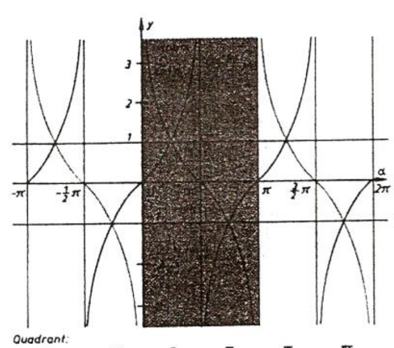
**تعریف :** تریګونومتریکي بلواك ټول پریودیکي یعني بیرته راګرځیدونکی دی، دا په دې مانا، چې د بلواك ارزښتونه په منظمو واټنونو کی تکراریږي. په دې د ساین بلواك او د کوساین بلواك راګرځیدنه ( یا ۳۶۰ درجی ) لري، کوتنجنتبلواك راګرځیدنه ( یا ۱۸۰ درجی ( 180° )) لري.

$$\left.\begin{array}{l}\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x \\ \tan(x \pm k\pi) = \tan x\end{array}\right\} \quad k \in N$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x \\ \cot(x \pm k\pi) = \cot x\end{array}\right\} \quad k \in N$$




شیره ۲۱۴
د ساین - او کوساین فنکشن پیریودیائی راګرځیدنه



(c) ketabton.com: The Digital Library



د تانجنت او کوتانجنت فنکشنونو پریود یا تل بیرته راګرځیدنه:

بیلګي:

بیلګې :

$$\sin 50° = \sin(50° + 360°) = \sin(50° - 720°) = 0{,}76604$$
$$\cos -30° = \cos(-30° - 360°) = \cos(-30° + 1080°) = 0{,}86603$$
$$\tan 2{,}5 = \tan(2{,}5 - \pi) = \tan(2{,}5 + 5\pi) = -0{,}74702$$
$$\cot 10 = \cot(10 + \pi) = \cot(10 - \pi) = 1{,}54235$$
$$\sin 35° = \sin(180° - 35°) = -\sin(180° + 35°) = -\sin(360° - 35°) = 0{,}573576$$
$$\cos 35° = -\cos 145° = -\cos 215° = \cos 325° = 0{,}81952$$
$$\tan 0{,}6109 = -\tan 2{,}5307 = \tan 3{,}7525 = -\tan 5{,}6723 = 0{,}700208$$
$$\cot 0{,}6109 = -\cot 2{,}5307 = \cot 3{,}7525 = -\cot 5{,}6723 = 1{,}428042$$

که د فنکشن ګراف ته په ځیر شو، نو برسیره پر دې روښانیږي:

| x | $\pi - x$ | $\pi + x$ | $2\pi - x$ | |
|---|---|---|---|---|
| $\sin x =$ | $\sin(\pi - x) =$ | $-\sin(\pi + x) =$ | $-\sin(2\pi - x)$ | (Abb. 179) |
| $\cos x =$ | $-\cos(\pi - x) =$ | $-\cos(\pi + x) =$ | $\cos(2\pi - x)$ | (Abb. 179) |
| $\tan x =$ | $-\tan(\pi - x) =$ | $\tan(\pi + x) =$ | $-\tan(2\pi - x)$ | (Abb. 180) |
| $\cot x =$ | $-\cot(\pi - x) =$ | $\cot(\pi + x) =$ | $-\cot(2\pi - x)$ | (Abb. 180) |

بیلګی:

| | $\alpha$ | $180° - \alpha$ | $180° + \alpha$ | $360° - \alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| | 35° | 145° | 215° | 325° |
| sin | 0,573576 | 0,573576 | −0,573576 | −0,573576 |
| cos | 0,819152 | −0,819152 | −0,819152 | 0,819152 |
| tan | 0,700208 | −0,700208 | 0,700208 | −0,700208 |
| cot | 1,428148 | −1,428148 | 1,428148 | −1,428148 |

که څه هم نن د کونجبلواکو شمیرلو لپاره، یواځې د جبشمیرې یا کمپیوتر څخه کار اخستل کیږي ، هدفمند بولو، چې یو څو زیات د استعمال وړ ارزښتونه په لاندې ورکړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\frac{5}{6}\pi$ | $\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° | 270° | 360° |
| sin x bzw. sin $\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-1$ | 0 |
| cos x bzw. cos $\alpha$ | 1 | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $-1$ | 0 | 1 |
| tan x bzw. tan $\alpha$ | 0 | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | – | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | 0 | – | 0 |
| cot x bzw. cot $\alpha$ | – | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | 0 | $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | – | 0 | – |

دلته د همدادول یا همداسي په معنا دی

له دې جدول څخه کیدی شي په خیال کی یا ګوماني لاس ته راوړی شو

$$\sin x = \cos(\ \ /2 - x) \qquad \cos x = \sin(\ \ /2 - x)$$
$$\tan x = \cot(\ \ /2 - x) \qquad \cot x = \tan(\ \ /2 - x)$$

دا ګومان کیدی شي په ولاړکونجیز دریګوډي کي د تعریف په مرسته په ساده توګه وښوول شي. :

$\sin\ \ = a / c$ او $\cos ß = a / c$

د $ß = 90° -$ له امله لاس ته راځي :

$\sin\ \ = \cos(90° -\ \ )$

په ورته توګه نور ې غوښتني هم لاس ته راتلی شي.

دا له څیرو څخه هم لاس ته راوړل کیدی شي، ځکه د ساین او کوساین بلواکو یا په همدې ډول د تانجنت او کوتنجنت بلواکو ګرافونه د $/2$ $x =$ کرښی ته یو بل سره محورسیومتري څغلي :

له څیرو او بیلګو څخه په دې برسیره لاس ته راځي:

---

**تعریف:** د کوساین بلواك جفت دی ، لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$\cos(x) = \cos(-x)$$

ساین – ، تنجنت – او کوتنجنت بلواك ناجفت دي» د دوي لپاره باور لري:

$$\sin(x) = -\sin(-x), \quad \tan(x) = -\tan(-x)\ ; \cot(x) = -\cot(-x)$$

---

یادونه : په دې نلواکو کي کیدی شي چی x له نوکانو دباندې هم وي:

بیلگی:

$$\sin 60° = -\sin(-60°) = 0{,}86603$$
$$\cos 0{,}75 = \cos(-0{,}75) = -0{,}70711$$
$$\tan 150° = -\tan(-150°) = -0{,}57735$$
$$\cot 1{,}3 = -\cot(-1{,}3) = o{,}27762$$

## د زیاتون قضیي یا تیورمونه

دا چي کونجبلواك لاینې نه دي( د فنکشنگراف کرښه نه ده،بلکه کږه ده ) ، نو ډېل تعریفېدېري پورې ساده ډېل بلواك ارزښت اړه نه لري.

لکه

$$\sin 30° = 0{,}5 \quad \sin 90° = 1 \quad \sin 180° = 0$$

د داسی په نامه زیاتونمسئلی په مرسته ممکن کیږي، چی د بلواك ارزښت د کونج په دوه برابرولو یا په همدې ډول د دوه کونجونو پو په بل زیاتولو د یوگونو کونجونو لپاره ارزښتونه رابي کړی شو.

بیلگی :

1 . $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$

1' . $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$

(c) ketabton.com: The Digital Library



2 . $\cos(x + y) \cos x . \cos y - \sin x . \sin y$

2 '. $\text{cis}(x - y) = \cos x . \cos y + \sin x . \sin y$

3 . $\sin 2x = 2.\sin x . \cos x$

4 . $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

5. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$

6. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$

7. $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 - \cos x)}$

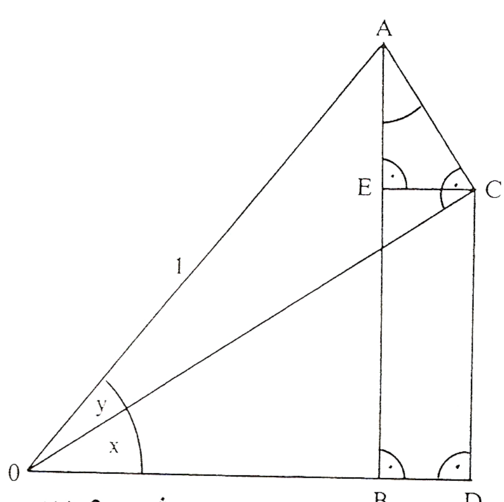
8. $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{0{,}5(1 + \cos x)}$

9. $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

9′. $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ mit $\tan x \cdot \tan y \neq 1$

10. $\cot(x + y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$ mit $\cot x \neq -\cot y$

10′. $\cot(x - y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y}$ mit $\cot x \neq \cot y$




خیره ۲۱۶

(c) ketabton.com: The Digital Library



**1.** und **2.**:

$|OA| = 1$

$|AC| = \sin y; \quad |OC| = \cos y$

$|AB| = \sin(x+y); \quad |OB| = \cos(x+y)$

$$\frac{|EC|}{|AC|} = \sin x \Rightarrow |EC| = |AC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

$$\frac{|OD|}{|OC|} = \cos x \Rightarrow |OD| = |OC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|EA|}{|AC|} = \cos x \Rightarrow |EA| = |AC| \cdot \cos x = \cos x \cdot \cos y$$

$$\frac{|DC|}{|OC|} = \sin x \Rightarrow |DC| = |OC| \cdot \sin x = \sin x \cdot \sin y$$

بر سېره پر دې لرو :

$$|AB| = |AE| + |EB| = |AE| + |CD|$$
$$|OB| = |OD| - |BD| = |OD| - |EC|$$

د ځای په ځای کولو څخه ثبوت نه په لاس راځي

$$\sin(x+y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

**1'.** **2'.**:

**3.** **4.**: $x = y$. ځای پر ځای کړه

**5.**: Setze $z + t = x;\ z - t = y \Rightarrow z = \frac{x+y}{2};\ t = \frac{x-y}{2}$ کېږده

$$\sin x = \sin(z+t) = \sin z \cdot \cos t + \cos z \cdot \sin t$$ پس له هغه

$$= \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin y = \sin(z-t) = \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$ همدارنګه

$$\Rightarrow \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

6. ثبوت ته په ورته توګه رسېدلای شو

**7.**: $x = y = z/2$ کېږده

$$\Rightarrow \cos(x+y) = \cos z = \cos 2\cdot\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \cos^2\frac{z}{2} - \cos z = 1 - \sin^2\frac{z}{2} - \cos z \qquad (*)$$

$$\Rightarrow 2\sin^2\frac{z}{2} = 1 - \cos z \Rightarrow \sin^2\frac{z}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ریښه نیوني له لارې ښوونه لرو

په (*) $\sin^2 z/2$ کې $1-\cos^2 z/2$ کیږده:

۹ – ۱: دا اړیکې له ۱ او اوم او تانجنت پیژند څخه لاس ته راځي

## بلواك يا فنكشن $y = a . \sin(bx+c) + d$

لکه چی په پيل کی مو وويل په طبيعت او تخنيك کي ډيرې پيښي شته دی چي تل بيرته راکرځي يا لنډ: راګرځي، يعني پريوديکي دي. د دې د تشريح لپاره په خپل سوچه يا خالصه بڼه تل د ساين بلواك بسيا نه کوي.
دا زيات علتونه لري : لمړی د ساينبلواك د ۱– او ۱ ترمنځ ارزښت نيسي، له بلي لور داواقعي د کونج په واك کی نه دي بلکه د وخت په واك کي دي د يوې راګرځيدنی سره، چی دا په ساده توګه د 2 په ډول نه شي رانيولکيدی. له دې امله د ساين بلواك د دې کارونو د روښانوولو لپاره بايد موډيفيځير شي يا يی بڼه واوړي. دا بڼه اوړون او د هغی تاثير په لاندې ليدنه کی راټول شويدي، ګراف يی ورزياتی ځيرونی لپاره دی. په ورته ډول د نورو کونجبلواکو لپاره باور لري په عمل کي مګر يواځي د ساينبلواك ( په همدې توګه د هغي مخامخ د کوسين بلواك چي په $\pi/2$ سره راکښل شوی وي ) د مانا ډك دي. ( لوستل: له ښي لور څخه )

| بيلګی | دکارونی ساحه | تاثير | بلواك |
|---|---|---|---|
| څېره ۲۱۷ | ټولی تلبيرته راګرځيدونی تعامولونه | | $y = \sin(x)$ |
| څېره ۲۱۸ | د يوه مساوي او برابر شپېلونګ يو په بل پرلوټل | د y-لور باندې راکښنه | $y = \sin(x) + d$ |

(c) ketabton.com: The Digital Library



| | | | |
|---|---|---|---|
| شکله ۲۱۹ | په بدل بریښنا جریان کې د بریښنا او شیبانو تنګ تغییر دونبنالونه | د فاز تغییر ځای بدلون | $y = \sin(x+c)$ |
| شکله ۲۲۰ | دیوه پنډل خوځېدنه | د امپلیټود د ځای بدلون فاکتور -1 د 180° فاز ځای بدلون دی | $y = a \cdot \sin(x)$ |
| د شکله ۲۲۱ | دیوه بنسټیزې څرخې څېړنه په یوه وخت کې داد پڼه زه رهغې بوزې لیږدول کیږي په دغوزېنګ الو یه او ازولوکی | دیوه دوره تغییر یا بدلون<br>$b>1$ سرعت<br>$0<b<1$ په کرار کېدل<br>$b<0$ په شاته ګرځېدنه کله منفي وي دی | $y = \sin(bx)$ |
| شکله ۲۲۲ | کمپلکس پریودیک جریان یا عمل | عمومي حالت | $y = a \cdot \sin(bx+c)+d$ |

## تمرینونه

۱ – د لاندې ورکړې سره ښیره بله کړی

$4°6' = 4,1°$ ; $10°, 5' = 10°30$

a) $6,75° =$ b = $120,48° =$ c) $-75,65° =$

d) $52°16' =$ e ) $97°13' =$ f) $44°44'\ 44'' =$

۲ – په درجه کچ ي ولیکی

a ) $x = \pi/3$ , b ) $x = -\pi/4$ , c ) $x\ (2/3)\pi$

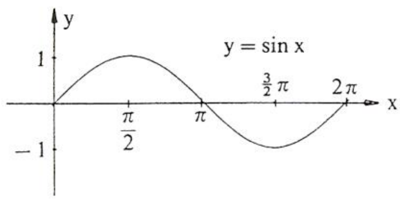
d ) $x = 4$ e) $x = -3$ f ) $x = 4,7$

۳ – په لینده کچ یی ولیکي

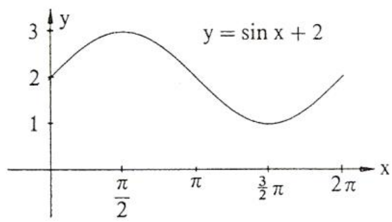
a ) 15° b) -60° c ) 540° d ) 20°15' e ) 15,75°

(c) ketabton.com: The Digital Library

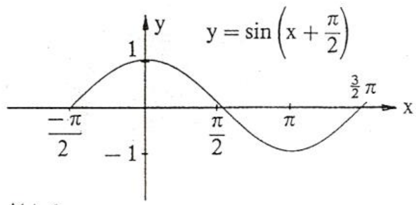




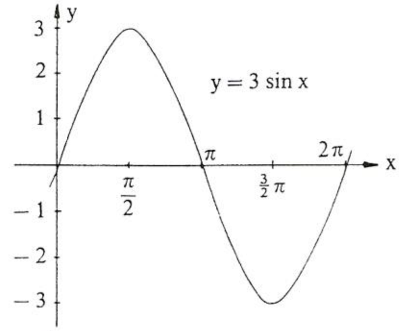

شیره ۲۱۷



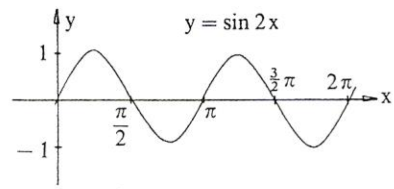

شیره ۲۱۸



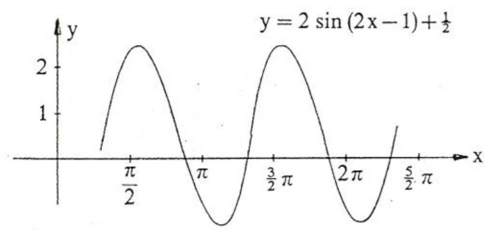

شیره ۲۱۹




شیره ۲۲۰




شیره ۲۲۱




شیره ۲۲۲

د دې بلواك ګراف د ساين كږې $y = \sin x$ څخه لكه چې ګورو لاس ته راځي:

۱ – د ارزښت دوه ځله كيدل

۲ – د نيمى راګرځيد اوږدوالى باندې پرسيدنه

۳ – په يوه يوون د ښي لور ته راكښنه

۴ – په $1/2$ پورته لورته 100% راكښنه

(c) ketabton.com: The Digital Library



۴ – وټاکئ

a) $\sin 20°$ b) $\sin(-30°)$ c) $\sin 172°$ d) din1°4'

e) $\cos 35°$ f) $\cos 380°$ g) $\cos(-27°)$ h) $\cos 47{,}9°$

i) $\tan 11°$ k) $\tan(-15°)$ l) $\tan 33{,}33°$ m) $\tan 13°13'$

n) $\cot 870°$ o) $\cot(-11°)$ p) $\cot 14°14'$

q) $\cot(-2°2')$

r) $\sin\alpha = 0{,}8$ s) $\cos\alpha = 0{,}9$ t) $\tan\alpha = 2{,}5$

u) $\cot\alpha = -1$ v) $\sin\varphi = 0{,}3$ w) $\cos\varphi = -0{,}13$

x) $\tan\varphi = -4$ y) $\cot\varphi = 0{,}3$ z) $\arcsin(x) = \pi/2$

۵ – په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کې لرو $\gamma = 90°$ او په دې برسیره :

a) a = 7 cm; b = 6cm

b) a = 16cm; = 66°45'

c) c = 5cm; a = 3cm

پاتې ټوټې وشمیرئ

۶ – په مساوي پښیز دریګوډي

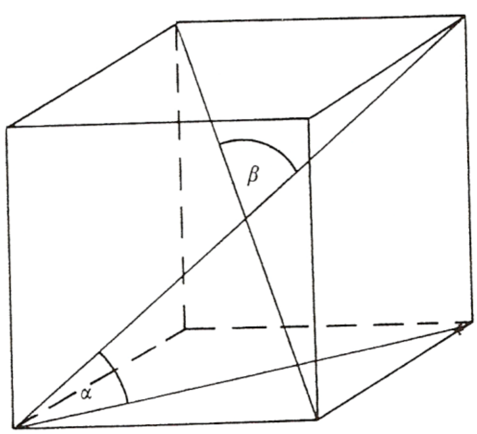
کې ( a = پښه ده ) دی

a) a= 10cm ; $\alpha$ =80°40'

b) a= 12 cm ; h = 8cm

c) ß = 40°; a = 7cm

پاتې ټوټې وشمیرئ




شیره ۲۲۳

۷ – د یوه پڅکونجیز ( $\alpha > 90°$ ) دریګوډي لپاره ساین وشمیرئ

۸ الف ) کوساین د یوه پڅ کونجیز دریګوډي لپاره وشمیرئ ( $\alpha > 90°$ )

(c) ketabton.com: The Digital Library



ب ) په یوه ولاړکونجیز دریګوډي کوم فرمول لاس ته راځي؟

۹ – په یوه مکعب کی د یوه هوا نیمي او بنستهواري ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

څیره .د دواړو هوا یا فضا یا بدن نیمیو ترمنځ کونج څومره لوي دی ؟

۱۰ – د دوه ګردیو وړانګی

$r_1 = 5\text{ cm} \quad , r_2 = 4\text{ cm}$

دي او همداسی د منځټکو واټن $|M_1M_2| = 8\text{cm}$ ورکړ شوی دی.

دد دواړو ګردیو د تماس

مماسونو غوڅکونجی وټاکی

او د کړې غوڅونی اوږدوالی .

۱۱ – په یوه دریګوډي کی د یوه

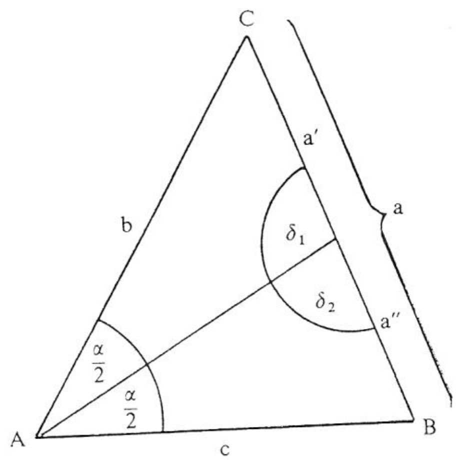
کونجنیمی مخامخ اړخ په داسی

ځان نیونه یا تناسب غوڅوي لکه

په دې پرتي خواوې. دا غوښتنه د

ساین جملی په مرسته حل

( اوبی ) کړی( څیره۲۲۴ ).




څیره ۲۲۴

۱۲ – که یوه بار ځاي ته،

چي ۵۰ ،۱ متره جګ دی،

یوه زینه ورجګه شي

میلانکونج ∠ دې زیات ترزیات 33° وي، زینه دې څومره لویه وي؟

۱۳ – الف )د یوې پورته ختلی کوڅي جګوالي توپیردې څومره وي، که دا کوڅه ۱۶۰۰ متره اوږده او 12% جګه وي؟

ب ) د ۱۵۴۰ پرتی لارې وهلو وروسته د جګوالي توپیر څومره دی ؟

پ ) د یوه زوړندي پټیلار، چی ۱۷۰۰ متره اوږده ده، په سلو کی څومره لوي دی ، که دا د جګوالی توپیر ۵۰۰ متره ولري؟

یو د اوبنی یا د اوبو بیلر ( کله= ۱۰۰ کیلوګرامه) په یوه پورته خیزول کیږي، چې

(c) ketabton.com: The Digital Library



میلانکونج $\measuredangle = 25°$ لري. د وزنزور په زوړندزور تختی سره غبرګ او نورمال یعنی ولاړ زور( د فشارزور ) ولاړ تجزیه یا ټوټه کیږي، دواړه زوره څومره لوي دی ؟ ( ۱ کیلو ګرام = ۹ ، ۸۱ نیوټن $1\ kg = 9{,}81N$ ).

۱۵ – یو تلفونستن په څلور رسیو، چی هره یوه یی **۵۳** متره اوږده ده، درول کیږي. درسیو میلانکونج $60°$ دی په پښه باندې په کوم جګوالي باید رسی وړلی شي ؟

۱۶ – د یوې **۵۳** متره جګي ونی سیوری **۵** ، ۱۲ متره اوږد دی. په ځمکه لمروړانګي په کوم جګوالی یوبل سره مخمامخ کیږي.؟

۱۷ – د یوه **۵** متره جګ کتونټکي ( لکه د یوه کور، په دوم منځل کی کړکی ) ، څخه د یوه برج څوکه لیدل کیږي چی جګیدونکوج یی $\measuredangle = 18{,}5°$ او پښیتېکی یی $ß=8°$ لوید کونج ، برج څومره جګ دی ؟ د لیدټکي څخه یی پروت لریوالی څومره دی ؟

۱۸ – الف ) د پیزا (Pisa ) کوږ برج ۴۷ متره جګ دی، او څوکه یی د پښی ټکي څخه ۵۰ ،۴ متره ور اوړي. دا برج څومره مایل دی ؟

ب ) د یوه جومات برج چی ۱۵۰ متره جګ وي، لیدونکی د کوم کونج لاندې دا برج کتلی شي، که دا برج په ځمکي ټکي (یعنی د سترګي جګوالی د برج بنستټکي سره برابر وي )، څخه وکتل شي، چی د برج له بنسټ څخه ۵۰۰ متره واټن ولري؟

پ ) د ۵، ۱ کیلو متره لریوالی څخه یو بل برج د کوم کونج لاندې لیدل کیږي

– که جګوالی یی ۱۶۰ متره وي؟

– که جګوالی یي ۱۳۷ متره وي ؟

ت ) د پراته کوم اوږدوالی لاندې د بنسټ څخه د ۱۲ درجی کونج لاندې

– د بل برج څوکه ښکاریږي چی جګوالی یي ۱۴۳ متره وي ؟

---

–د پاریس د ایفل برج ښکاریږي چی جګوالی یي ۳۰۰ متره دی ؟

۱۹ – د ښیپپس اهرام( CHeopspyramide ) ۱۳۷ متره جګوالی لري او د بنسټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

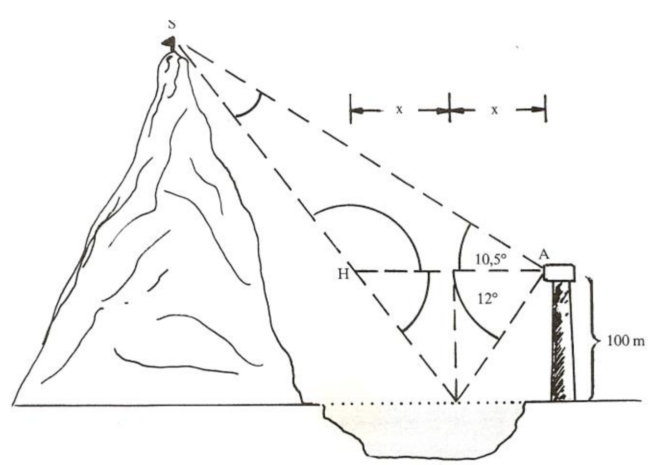


د یوه اړخ اوږدوالی یی ۲۳۰ متره دی چی بنسټ یی مربع شکل لري
الف ) د اړخهوارې میلانکونج څومره دی ؟
ب ) د څنګهوارې دریواړه دننني کونجونه څومره لوي دي؟

۲۰ – یو ژوری یا قبر –۸ ، ۱ متره ژور دی، بنسټسور یی ۵ ، ۲ متره دی، د پورته لور ته وازکونج ی دواړو لورو ته ۶۰ درجی دی
الف ) دا کبر پخپل وازوالی یا سر کی څومره پراخ دی؟
ب ) که ۱۰ متره اوږد وي، نو بیا دا څومره اوبه ځایکوي ، که جګوالی یی ۵۰ ، ۱ متره وي؟

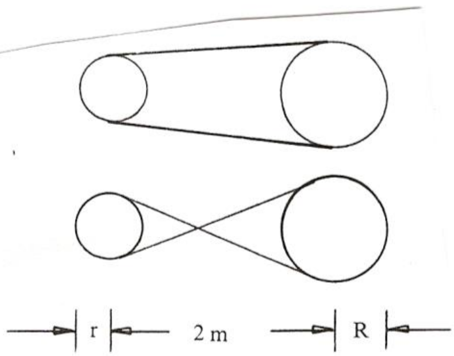
۲۱ – یو ډنډ په سر کی ۶ متره سرور دی او ۵ ، ۴ متره جګوالی لري د بحیرې لور ته 14° میلان لري، د دننه لور ته 28° میلان لري. د ډنډ بنسټ څومره سور لري؟ د هغی د نیمی هواره څومره ده؟

۲۲ – د ریفلډنډ Riffelsee څخه یو ښه لید د ماترهورن (ماترنښکر یا د ماترن د غره څوکه Matterhorn ) دواړه په زیرمات ، سویس Zermatt / Schweiz کی دی ) اچول کیږي که دا د یوه لیدټکي څخه چی ۱۰۰ متره جګ دی د ډنډ په لور ښکته وکتل شي، نو د غره د څوکي هندارونه د 12° پریوتکونج لاندې لیدل کیږي. د غره څوکه د یوپورته کونج 11° لاندې لیدل کیږي. د ریفلډنډ باندې د ماترنښکر څوکه څومره جګه پروته ده؟
څیره



(c) ketabton.com: The Digital Library






خیره ۲۲۶

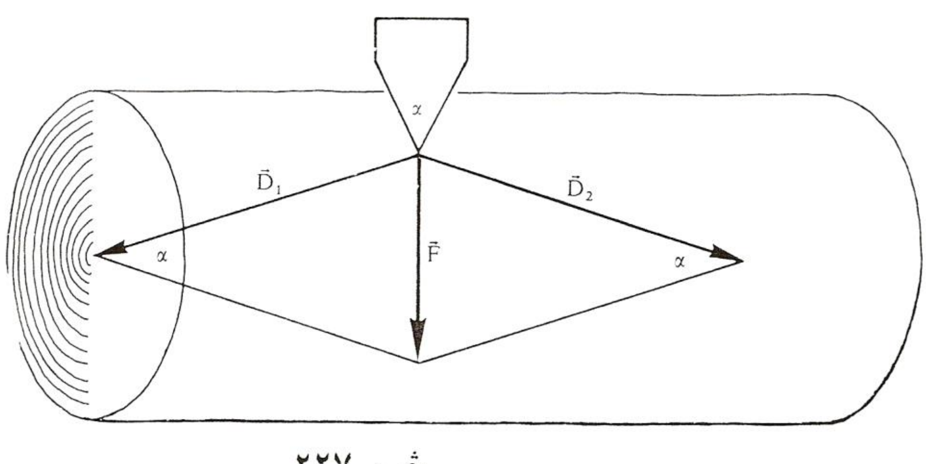
۲۳ - الف ) یوه د کشولو کړی، چي په دوه دکښولو چیترو باندې راتاو ده، څومره اوږده ده، که لاندې اندازې ولري $r = 22\ cm$ , $R = 35\ cm$ , $|M_1M_2| = 2m$?

ب ) دا کړی به څومره اوږدې وي که د اهیران په څیر له چیتروګانو یا تیکلیو داکې څیدلی وي ؟

---

۲۴ الف ) د ونی په ستړه یو کایل )موږی ) په څټك د D زور سره وهل کیږي. د فشار هغه زورونه D څومره لوي دي، کوم چی د ستړی درځونه ، که د کایل یا تبرګي کونج $\alpha = 6°$ وي. ( حیره ۱۹۴ )؟

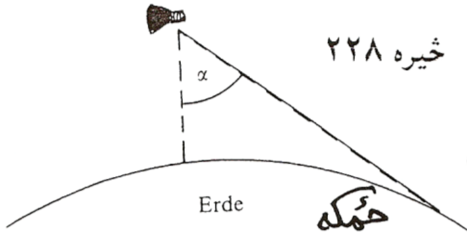
ب ) په کومکایلکونج یا تبرګیکونج لرو: $|D|=|F|$ ؟




خیره ۲۲۷

(c) ketabton.com: The Digital Library

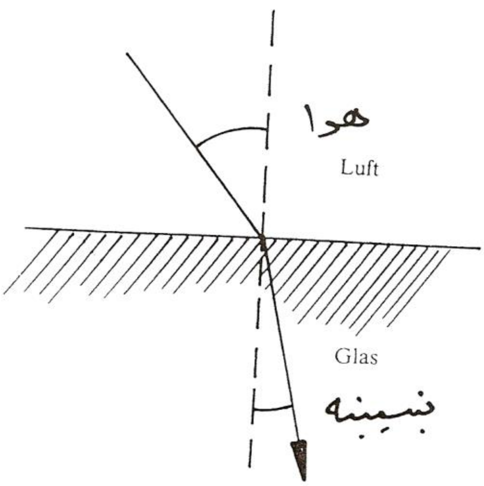





خیره ۲۲۸

۲۵ – د یوه الوتماشین څخه ځمکه د یوه $\alpha$ کونج لاندې لیدل کیږي ( خیره ) دا الوتماشین څومره جګ الوزي ؟ ( د ځمکی وړانګه : ۶۳۷۰ کیلومتره )

۲۶ – یو ګادی د $v_\alpha = 120km/h$ سرعت سره روان دی، نو د باران څاڅکی په پټلی د تلنلور باندې په $= 115°$ کونج




خیره ۲۲۹

د چیترو (مطلب د ګاډې د اوسپنی تیر یا ګاډیل دی) مخامخ ځغلي. له دې ورکړو څخه د باران د څاڅکو د لویدلو سرعت $v_g$ وټاکی ؟

۲۷ – که د لمروړانګه په دوه مختلفو طبقو ولویږي، نو خپلی لور ته تغیر یا بدلون ورکوي. د سنیلیوس Snellius د ماتقاعدې له مخی کیدی شي چی د ماتیدو قانون وشمیرل شي. دا قانون وایي، چی پروتوړانګه ، ماتوړانګه او ولاړکرښه یا عمود په بیلیدونکی هوارې په یوه هواره پراته دي او برسیره پر دې لاندې اړیکي باور لري یا صدق کوي:

$$\sin \alpha \ / \ \sin \beta = n$$

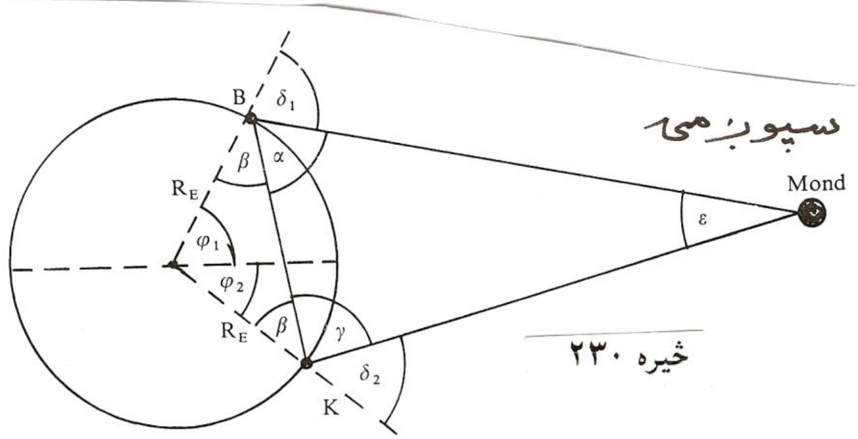
که د رڼاوړانګه په یوه ښیښه ( اوبو ) پریوزي، نو $n = 1,5 \ (1,33)$ دی وښایي، چی ماتکونجونه څومره لوي دي، کوم چی په لاندې پروتکونجونو اړه لري:

؟ 10,5°, 15,8°, 27,3° , 41,2°,67,6°,, 72,4°, 81,9°

(c) ketabton.com: The Digital Library



۲۸ – په ۱۸ ا–مه میلادي پیړۍ کې د سپوږمۍ لریوالی تریګومتریکي وټاکل شو. په برلین کې ( جغرافیوي اوږدوالی $\varphi_1 = 52,52°$) او لکه د ښو هیلو په کونج کې ( $\varphi_2 = -33,93°$ )، کوم چې په همغه اوږدګراد پراته دي، د سپوږمۍ سره په همغه وخت کې تړل کیږي. له دې لاس ته راغلل:
$\delta_1 = 32,08°$ او $\delta_2 = 55,72°$ .
وشمیرۍ |KM| , ß , |BK| او له دې څخه $d_{EM}$ .




شیره ۲۳۰

۲۹ – لړځیدنی Schwingungen تل د وخت په اړه شمیرل کیږي یعني د وخت t تړواك لاندې دي. دا د بلواك $y = a . (\sin ( 2\pi /T)) .t + k)$ له لارې ورکړ شوي. دلته $(2\pi / T) t = x$ هغه کونج دی ، کوم چي په T وخت کی وهلکیږي. $1 / T = f$ د یوه څرخون پریود یا راګرځیدنی وخت په ګوته کوي او د لړځیدنی دوام بلل کیږي» f فرکونځ frequenz بلل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ټولو راګرځیدونکو هوارو زیاتون، دباندې هوارې، او ډکې یا حجومونه، د هوارو متن ټولګی سره ده.
ډکې یا حجمونه په مکعبمتر $m^3$ په همدې توګه د مکعب متر برخه یا څو واره باندې ورکول کیږي، چې یو په بل اړول یې، لکه چې لاندې ګورو، ساده دي

$$1\ m^3 = 1m.1m.1m = 100cm^3.100cm.100cm = 1\ 000\ 000\ cm^3$$

یعنی :

$$1km^3 = 10^9\ m^3$$

$$1m^3 = 10^6\ cm^3$$

$$1cm^3 = 10^3\ mm^3$$

$$1mm^3 = 10^9\ \mu m^3$$

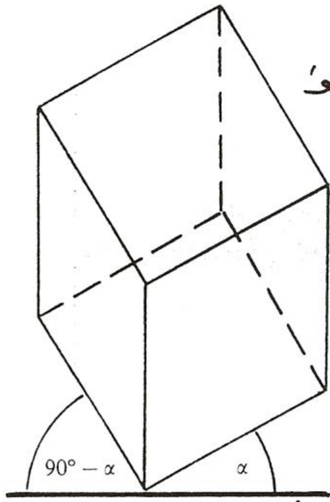
برسیره پردې په پیچلو شکلونو باندې باید یو لیدونکی یا اوپتیکي نظرلاس ته راوړی شو.

## د هندسي بدنونو یا تنونو رسمول

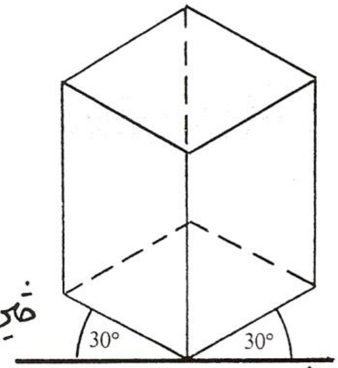
په پرینځیپ کی د بدن درې ډوله ګرافیکي انځورونه موجود ده. دام کی ګیرونه ، مایل انځورونه، او درېتخته ئیز پرویکشن Projektion( دریتیخته ئیز پریوستون ).
دا هروې یی مختلفې دندې سر ته رسوي.
د دام ګیرونه اصلاً ددې لپاره په کار راځي، چی د بدن ټوله دباندې هوارې وښولی شي. دا که چیرې راګردې پریکړی شي او سره ونښلول شي، نو د هغه بدن څیره جوړولی شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

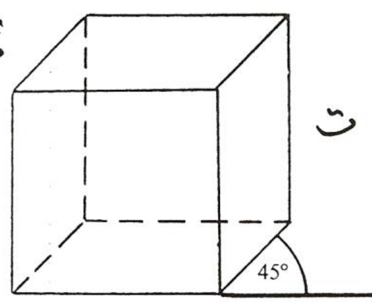




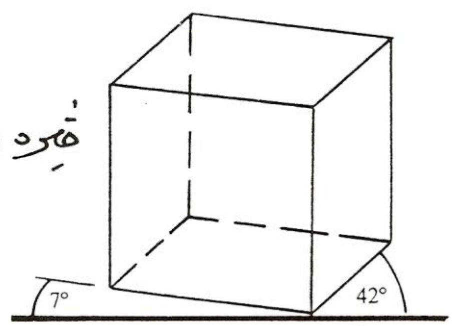

Parallelperspektive:
Militärperspektive




Parallelperspektive:
Isometrie




Parallelperspektive:
Kavaliersperspektive



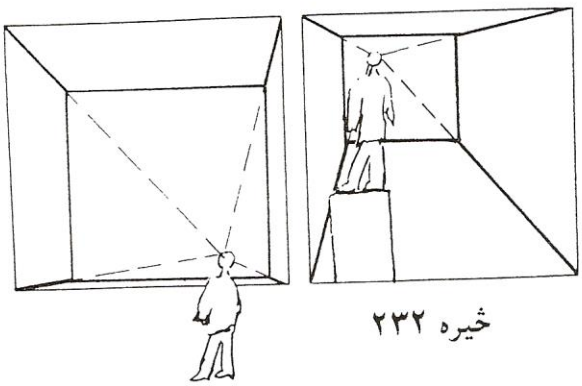

Parallelperspektive:
Dimetrie

د استعمال وړ د نظراچولو ( د نظر لاندې راوړلو ) کښل، مایلځیره کښل دي. دا هوایي پراخیدنه واضح کوي. دلته د کاوالیر پرسپکتیو ( مائیل له پورته ) او یوه ( چینډښی پرسپکتیو ( مائیل له ښکته ) ترمنځ توپیر کیږي، مګر د دواړو ترمنځ لاندې ګډه قاعده موجود ده: لیدونکي ته جبهیي ( فرونتال ) ځغلیدونکی لاینونه په

(c) ketabton.com: The Digital Library

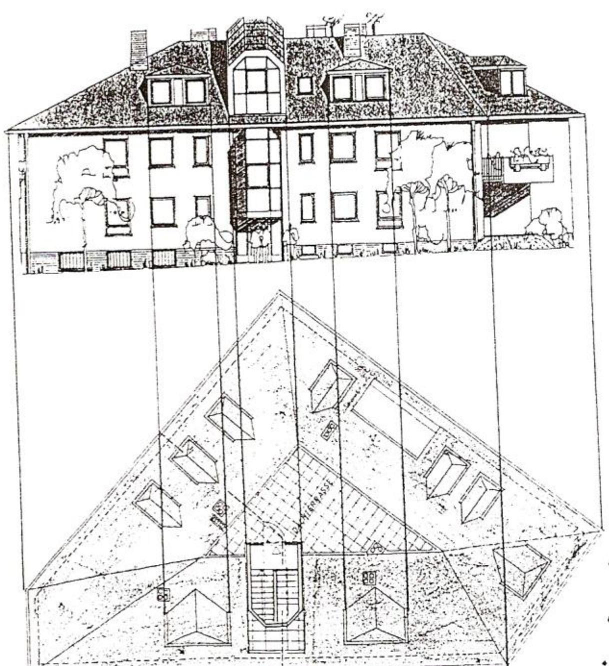


نورمال اوږدوالي، له ليدونكي لرې ځغليدونكي لاينونه مائيل او په لنډ ډول كښل كيږي. لنډونه يې د كونج تر واك ده:



خيره ۲۳۲

| | | | |
|---|---|---|---|
| پروت كونج | 30° | 45° | 60° |
| لنډوونكى فاكتور | 2/3 | ½ | 1/3 |



خيره ۲۳۳

په يوه پرسپكتيو مائيل جوړښت كى طبعاً ځني برخي او نه څيره شوې د شا خواوي وركيږي، دا په دې مانا چي په كښلو كى نه راځي. له دې امله او په ځانګړي ډول كونجلرونكو بدنونو لپاره درې تختئيزپرويكشن ( پريوستون ) كټور دي. دا يو درې ځلي ولاړ پريوستني له لارې منځ ته راځي (الف ) بنستيز ضرز يا غوڅي هواره، ( ب ) اړخيزغوڅي يا درز هواره (پ ) پورته درز يا غوڅي هواره او دا زيات وخت په جوړښترسمونو كى استعماك مومي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



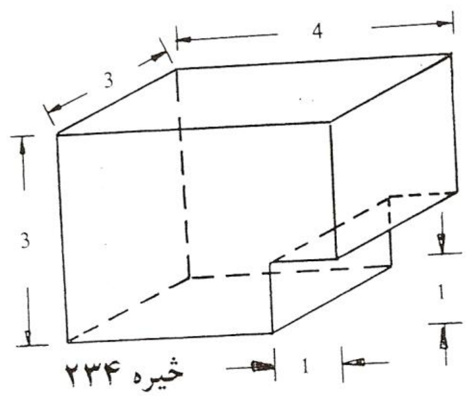
## تمرینونه

۱ – د دې ځیره بدن څخه دریتختهییز پریوستون وکاږی

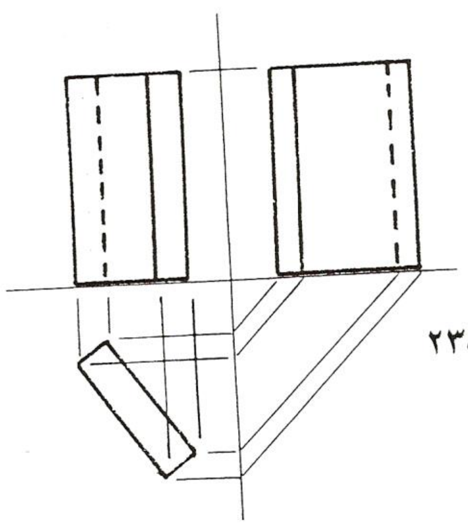
۲ ٠ ددې بدن مائئله ځیره وکاږی، کوم چې دریتخته ئیزه ځیره پورې اړه لري.

۳ – د یوې ولاړې ګردي توتی یا استوانی ماییلی ځیرې غوښتل کیږي، چې د بنسټ او ولاړ درځ له لارې ورکړ شوي وي.

۴ – یو شپږاړخي نل یا شپږڅنډیز نل وباسی په غبرګ پرسپتکیو انځورونی سره.




ځیره ۲۳۴



ځیره ۲۳۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

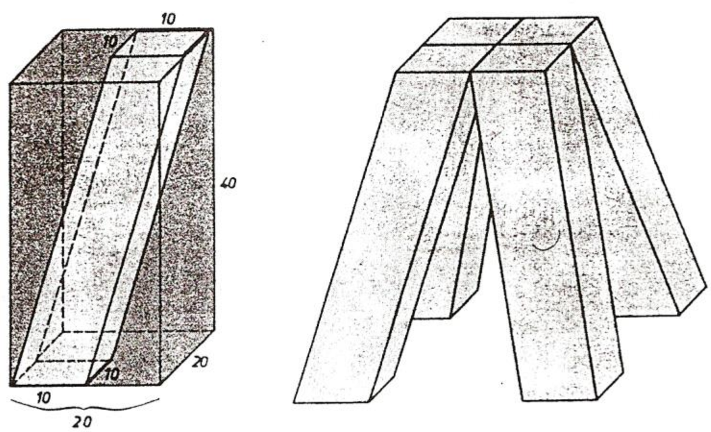


# پریزماوې Prismen

پیلبیلګه :

۱ = د یوه ستنویا تیرپښو جوړ میز یا Podestپودست( لکه په څیره کې کښل شوی میز ) د لاندې جوړښت لپاره یو پښ باید څلور پښې د څلوراړخیز لرګیو په څیره شوي شکل اره کړي. یوه پښه څومره ډکی (حجم ) لري ؟

. $V = 10^2 . 40 = 4000cm^3$




څیره ۲۳۶

۲ – د یوګاولاړې یا مستقیمی پریزما چې جګوالی یې 12 cm دی دباندې هواره او ډکی (حجم )، چې ځمکه او سر یا سرپوښ یې یو سیومتري تراپیځ وي

(c) ketabton.com: The Digital Library



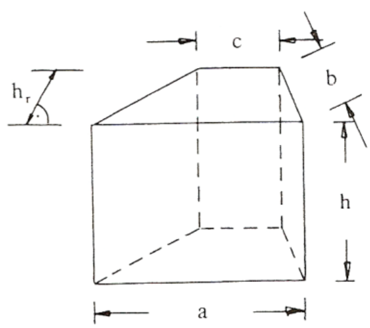
د اړخونو د اوږدوالي $a = 10$ cm , $c = 6$ او $h_r = 4$ cm سره څومره دی؟

د تریځ هواره

$$h_r.(a+c) / 2 = 4.(10+6)/2 = 32cm^2$$

ده، نو ډکی یی په لاندې ډول دی:

$$V = G.h = 32.12 = 384\ cm^3$$




څیره ۲۳۷

د دباندې هوارې لپاره د تریځ اړخ اوږدوالي b ته اړه شته .

دا د پیتاګوراس د جملې په مرسته لاس ته راوړو

$$b = \sqrt{16+4} = 4,47\ cm$$

له دې امله دباندې هواره ده :

$$O = 2.G + (2.b + a\ c),h$$

$$O = 64 + (8,84 + 10 + 6).12$$

$$O = 363,28\ cm^3$$

ساده بدنونه هغه دي، چې یواځې په ډیرګوډیو ( پولیګونو ) بند شوي وي یا یواځې له ډیرګوډیو راګیر وي، او ددې ترمنځ د بیلګې په توګه بیا پریزما ده.

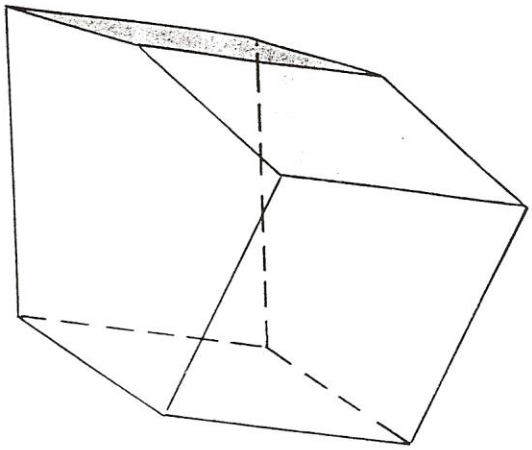
**تعریف** Prisma : داسې یو هندسي بدن، کوم چې له دوه یو بل سره غبرګو او ګونګروانځو پولیګونویاډیرګوډیو بند یا راګیروي پریزما بلل کیږي.

د بنسټ او پورته هوارې د کونګروانځ له امله د اړخونو هوارې غبرګاړخیز دي.

د پورته هوارې ( چت ) ولاړ اوږدوالی د پریزما جګوالی بلل کیږي. کیدی شي چې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

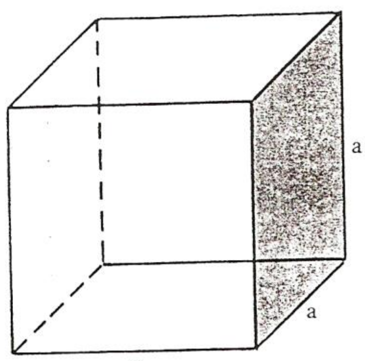




خیره ۲۳۸

یوه اړخ اوږدوالی د جګوالي باور ولري، نو بیا له ولاړې پریزما غبرېږو.

د ټولوخورامنظم او په دې ډول خورا ځانګړي پریزما شپږاړخیز یا مکعب دی ( وورفل Würfel ). دا د دباندنی هوراو ۶ کونګروواینځ مربع خواوې لري، او ژی یا اړخونه( کانتی ) یی یو په بل نیغي ولاړې دي.




خیره ۲۳۹

**جمله** : د یوه شپږ اړخیز یا شپږخوایز (مکعب) د دباندې هوارې O او ډکي (حجم) V لپاره باور لري:

$O = 6a^2$

$V = a^3 = a^2 . a = G . h$

**بیلګه** : څه شي دروند دی یو کورک( Quark یو شکل لرګي ډوله بدن دی، چي د بوتلونو خولی په پټېږي ) مکعب چی د یوه اړخ اوردوالی یی 0,3 m وي او که یو د اوسپنی مکعب چی د اړخ اوږدوالی یي 8 cm ( د کورک ۷ سختوالی g/cm³ ۰٫۲ د اوسپنی 7,86 g/cm³ )

(c) ketabton.com: The Digital Library



ددې لپاره چې د یوه بدن کتله m لاس ته راوړی شو، نو کلکوالی یا دینسټی یې د ډکي سره څلوو.

د کورك مکعب ډکی : $V = (30cm)^2 = 27000\ cm^3$

$m = 27000cm^3\ .0,2g/cm^3 = 5400\ g$

د اوسپنی مکعب ډکی :

$V = (8cm)^3 = 512\ cm^3$

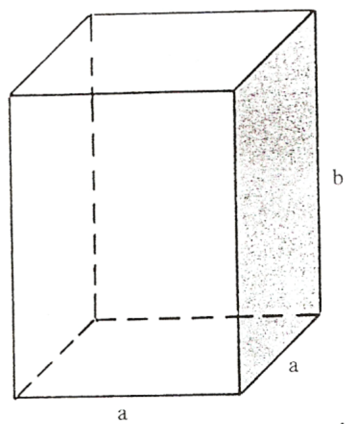
$m = 512cm^3\ .7,86\ g/cm^3$

$= 4024\ 32\ g$

د کورکمکعب له دې امله د اوسپنی د مکعب ته نزدې

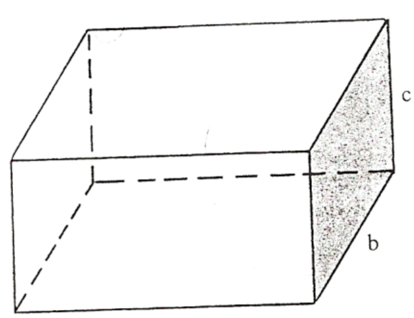
34% [(5400-4024):4024 ~0,34]

دی. یا په بل عبارت، د کورك مکعب نزدې ۳۴ په سلو کی د اوسپنی د مکعب څخه دروند دی.




څیره ۲۴۰

که د مکعب ستېه(ځمکه ) یا بستې او چتې یا سر مربع پاتی شي او نورې خواوې یی تغیر کړي نو یوه مربع ستن( پېنبه ) لاس ته راځي.




څیره ۲۴۱

که ځمکه او سر هم یوه ولاړکوډیز ته «ټولیز» شي یا « عمومیت » پیدا کړي، نویو کوادر Quader منځ ته راځي. هغه درې مختلفی اړخنیمي، مګر مساوې هوا نیمي

(c) ketabton.com: The Digital Library



ا هواقطرونه لري. دا د پيتاګوراس د جملې په مرسته شميرل کيدی شي.

**جمله:** د مربع ستن د دباندي هوارې او ډکي (حجم) لپاره صدق کوي:

$$O = 4ab + 2a2$$

$$V = a^2 b$$

د اړخونو نيميو اوردولای په لاندې ډول دی

$$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}\,; \quad d_2 = \sqrt{a^2 + c^2}$$

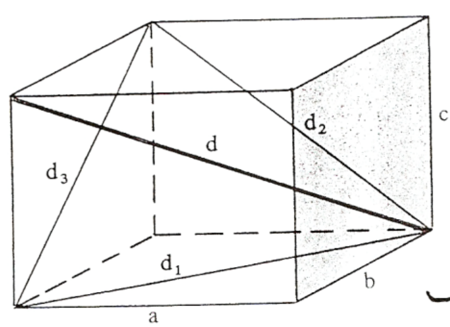
$$d_3 = \sqrt{b^2 + c^2}$$

د هوانيميو لپاره صدق کوي:

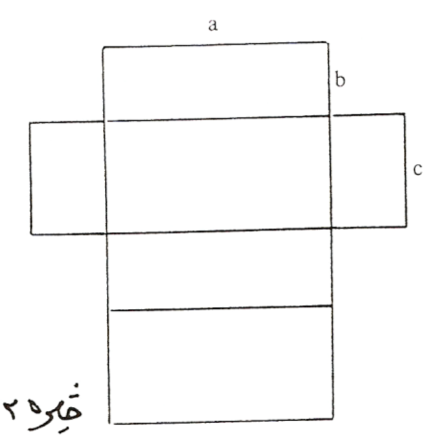
$$d = \sqrt{d_1^2 + c^2} = \sqrt{d_2^2 + b^2} = \sqrt{d_3^2 + a^2}$$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

خيره ۲۴۲ الف




خيره ۲۴۲ ب



(c) ketabton.com: The Digital Library



**بیلګه:** یو کوادر د کانتو اوږدوالی $a = 5cm$ , $b = 4cm$ ( بنسټیز هواره a.b ) او $c = 12cm$ لري:

د پوښهواره: $M = 2.(5.12 + 4.12) = 216\ cm^2$

دباندې هوار. $O = 2.(5.12 + 4{,}12 + 5.4) = 256\ cm^2$

ډکی (حجم) : $V = 5.4.12 = 240cm^3$

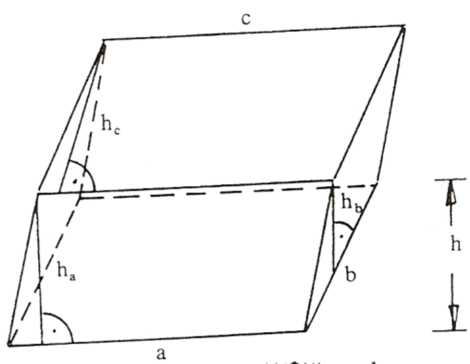
نیمي: $d_1 = \sqrt{25 + 16} = 6{,}40\ cm,\quad d_2 = \sqrt{25 + 144} = 13\ cm$

$d_3 = \sqrt{16 + 144} = 12{,}65\ cm$

$=> d = \sqrt{25 + 16 + 144} = 13{,}60\ cm$

یوه مائیل څلوراړخیزه پریزما د جوړه یو بل سره غبرګو کونګروانیڅ څلورکونجیو سره غبرګ اپیپت یا شپات یا په بل عبارت غبرګهواریز بلل کیږي ، چې موږ به یې له دې ورسته همداسې وبولو. د هغو دباندې هواره د هغه د بنسټ– پورته – او اړخهوارې دوه څله ده.

دا د غبرګ اړخیز په څیر شمیرل کیږي او په عمومي ډول باور لري:




څیره ۲۴۳

**جمله:** د غبرګهواریز دباندې هواره او ډکی دي:

$O = 2.(a.h_a + b.h_b + c.h_c)$

$V = G.h$

دلته د ډکي شمیرنه د غبرګ اړخیزهوارې په

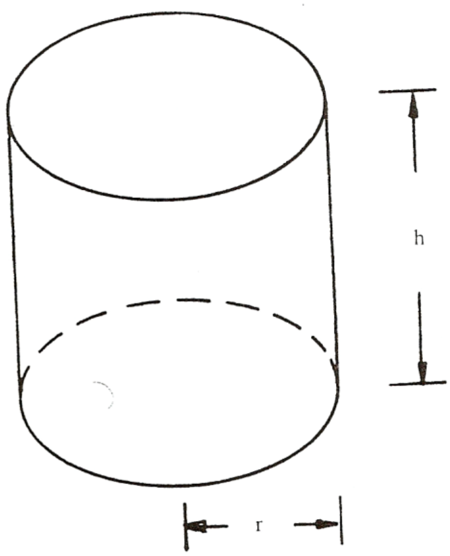
(c) ketabton.com: The Digital Library



ځیر اجرا کیږي: د بدن جوداشوي توکي یو د بل مخامخ لور تکمیلوي:
یو بل عمومیت یا تولیزه به د غیر منظم ، مګر په بنسټ یا ځمکه او پورته
کونګروانیخ ډیرګوډیز پریښول وی، د هوارې د خواو هوارې بیا غبرګ اړخیز دي.

**جمله:** د په خوښه پریزما د دباندې هوارې او حجم لپاره باور لري:
د ټولو خواو هوارو زیاتون + بنسټیزه هواره . 2 = O
بنسټهواره . جګوالی = V

## سیلیندر( توته یا استوانه یا ستن )

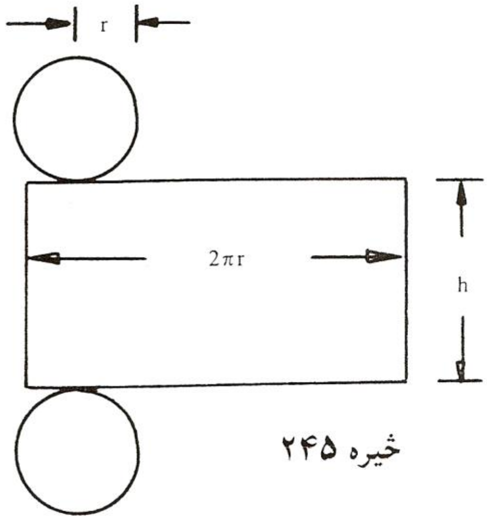



ځیره ۲۴۴

د هغی نیغي( سیخ ولاړې ) پریزما
سره ، چی لاندې او باندې یې
سیومتري – ګوډیز وي – څه پیښیږی،
که د کونجونو شمیر نور هم زیات شي؟
اوس نو لاندې هواره (او په همدې ډول
پورته هواره هم ) په ګردې بدلیږي او
دا ډیر سره ګوډیز شوي د خواو هوارې
په یوې کږې یا راتاو هوارې بدلیږي.
یو بدن یو بل سره کونګروانیخ او
غبرګ لاندې پورته ګردیهوارو سره
ګردیتوته یا ګردیسیلیندر بلل کیږي.
د دی روښانونی یا توضیح لاندې درې
شیان څرګندیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library






خیره ۲۴۵

۱ – د توتی یا استوانه یا
گردیسیلیندر د پریزما سره
خپلوان دی.
۲ – گردي استوانه یا توته پخپله
د په خوښه فورم شوې پورته –
او لاندې هوارو لپاره یو
ځانګړی حالت دی
۳ – لمړنی څرګندونه د ولاړ
گردي سلیندر یا توتی یو
ځانګړی مهم حالت وو،
ډکی یا حجم د همغه پرینځیپ
له لارې کیږي لکه د پریزما .
د جال ښوونه یی د
پوښ د خلاصولو له لارې کیږي، له دې سره دوه گردی تړلي راځي چي لاندې
او پورته( دځمکی– او سرپټی هوارې ) هوارې دي.

**جمله:** د یوه ولاړې گردی استوانی یا توتی پوښ، دباندې هوارې او ډکي لپاره باور لري:

$$M = 2\pi rh$$

$$O = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(r+h)$$

$$V = \pi r^2h$$

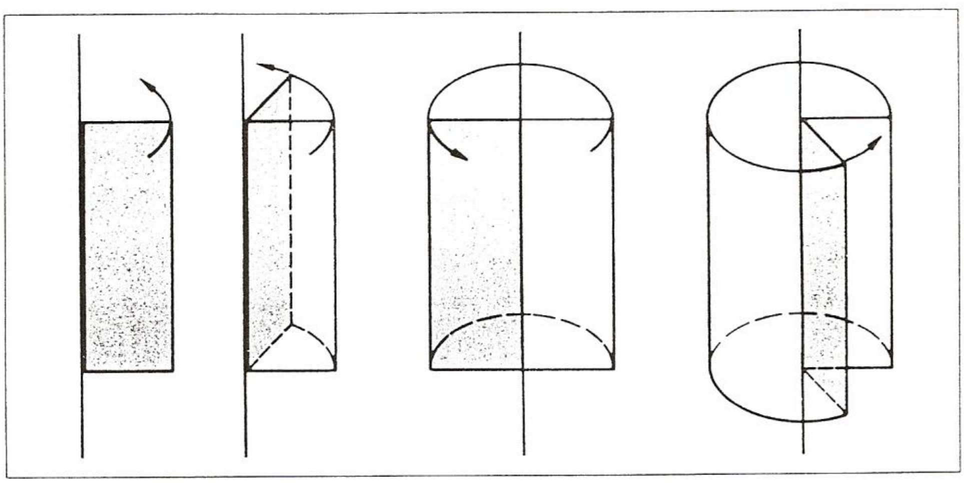
که د یوې استوانی یا توتی څخه منځنکي سیومترې استوانه چی وړانګه یي له مخکی استوانی یا توتی کوچني وي راوباسل شي، نو دې پاتي ته یی سوری استوانه

(c) ketabton.com: The Digital Library

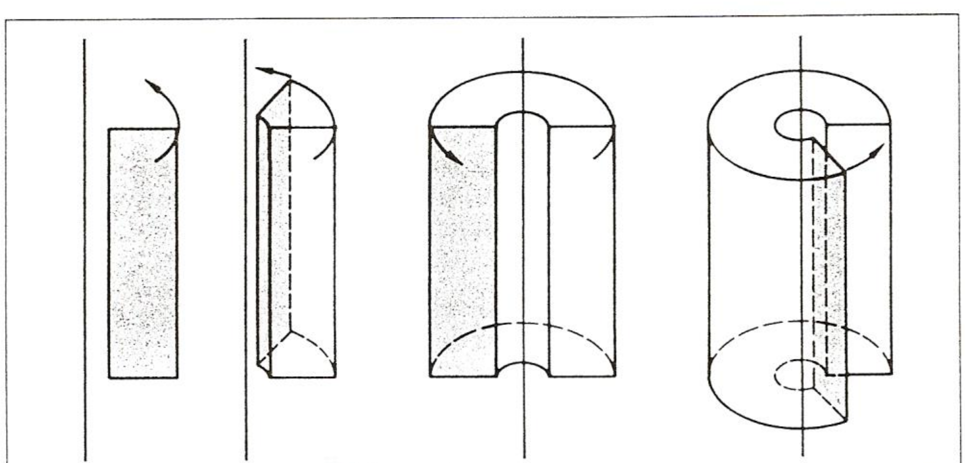


که د مخه ونیول شي یا فرض شي، چی دا سلیخ شوي کاغذ 0,1 mm پنډ دی،
نو دلته باید ټول $0,491 . 10000 = 4910,m^2$ کاغذ سلیخ شوی وي.

د ګردي – او سوری استوانی یا توتي یا ستن لاندي د یوه ولاړکونجیز
څرخون(Rotation ) هم په خیال کی راوړلی شو:



خیره ۲۴۷



خیره ۲۴۸

(c) ketabton.com: The Digital Library



## تمرینونه

۱ – یوه سمه پریزما د شپږکونجیز بنسټ – په همدې ډول سرهوارې سره لرو، چې ۵ سانتي متره جګه ده. هربنسټهوارې اړخ یې ۴ سانتي متره اوږددی. ددې ډکی پوښ او پورته یا ټوله راګرده هواره وشمیری.

۲ – یو غبرګهواری ۸۱ مکعب متره ډکی لري او پورته هواره یا ټوله هواره یې ۱۳۲ مربع سانتي متره ده. جګوالی او د اړخ اړخیز c اوږدوالي یې وښایي، که بنسټ هواره یې د اړخونو اوږدوالی ۵ ،۴ سانتي متره او ۳ سانتي متره ولري او دا دواړه اړخونه وي بل سره د ۶۰ درجو کونج جوړ کړي.

۳ – پورته واره او ډکي څنګه تغیر خوري، که د یوه کوادر اړخونه دوه برابره شي؟

۴ – د یوه کوادر دري اړخونه یو بل سره په ۱:۲:۳ څاننیونه یا تناسب کی پراته دي، دا څومره اوږد دی، که د دې کوادر ډکي ا مکعب متر وي؟

۵ – یو مکعب د هوانیمی $d = 6\sqrt{3}$ لري. نو ټولهواره، ډکی او اړخ( a , V , O ) یی وشمیری.

۶ – د شګو موټر کي چی د بارهواندازه یا بارډکي اندازه یي 2,82m×1,68m÷0,55 وي، څومره مترمکعب شګه ځایږي، که دا د پورته اړخ یا کانتي پوري ډك شي؟
د باروړونکي د بار وزن ۱۵ ، ۱ ټنه دی په بارولو به څومره ورزیات شوی وي ، که شګه یوه ډیبنتی، ټیګوالی یا غلظت $\rho = 2\ g/cm^2$ ولري؟

۷ – په یوه هواره کربڼه یو د پټلیو بند باید ډك شي. دا کربښتوټه ۲۵۰ متره اوږده ده، دا پټلیبند ۸ متره جګ دی او په بنسټهواره کی ۳۹ متره ، په سر کی ۲۷ متره سرور دی، د ډکولو لپاره به څومره خاوره بسیا وکړي؟

۸ – د سرك جوړولو ماشین څرخونی (د اوسپنی غټ ه استوانه چی سرك پرې پخوي او په سرك یي څرخوي ) ۱,۵ ، ۱ متره نیمی لري او د۲۵ ،۲ متره سرور دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



هغه هواره ځومره لویه ده، چې خرخی یې په یوه څرخون وهي؟

۹ – یو بایسکل پمپ د ۵ ، ۲ سانتیمتره اوږد رڼا نیمی لري او د پمپ اوږدوالی ۲۸ سانتیمتره دی، د پمپ تشیاډکی ځومره دی ؟

۱۰ – د دې لپاره، چې د ګیلاس توته په پروتغوځي باندې ځیرو یا معاینه کړو، ۲۰۰ ګرامه پارې نه یې ډکوو($\rho$ = 13,6 g/cm³ ) . پوهیږو، چې توته هر ځای کې همغه دننني نیمی لري. دا نیمی ځومره دی، که پاره 82 cm جګه وي؟

۱۱ – یوه کچتوته دې، د یوه 5 cm دننه نیمی سره داسی په کچکربښو په نښه شي، چې د هرو دوه پرلپسی کربښو وي د 5 cm³ ډکی وښايي. د دوه څنګ په څنګ کربښو ترمنځ دې واټن ځومره وټاکل شي؟

۱۲ – د یوه ولاړګوډیزې وسپنی ټوټی (25 cm × 20 cm ) څخه دې یوه کوټی ، بی له سرپوښ او بیښ څخه جوړه شي. ډکی یې وشمیری که الف ) چاپیری یې د اوږده اړخ سره برابر وي او ب ) که چاپیری یې د لنډ اړخ سره برابر وي؟

۱۳ – د لاندې توتو پاتی کځونه وښايي:

a ) r = 5 cm ;  h = 12 cm  b ) r = 9cm ;  V = 120 cm³
c ) h = 6,5 cm ; O = 300 cm³  d )  M = 282 cm² ;  V = 424 cm³

۱۴ – توته ځومره ډکی لري، که یو د a اړخ اوږدوالي مکعب په کې خوندي وي؟ پوښ او دباندې یا پاسهواره یې ځومره دي؟

۱۵ – د یوې توتی جګی h او وړانګه r ځانونه (h : r = ) 2 : 3 نیسی. ډکی یې 2000 cm³ دی. h , r او M یې وټاکی.

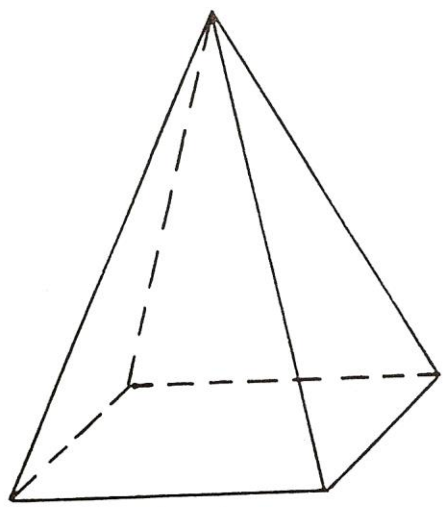
۱۸ – یو ولاړډوله توته یزه ګل کوټی د h = 17 cm جګې سره د سره د سرپوښ او بیښ ایلیپسی د دواړو نیممهرونو a = 30 cm او b = 20 cm سره لري. د دې ډکی ځومره دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

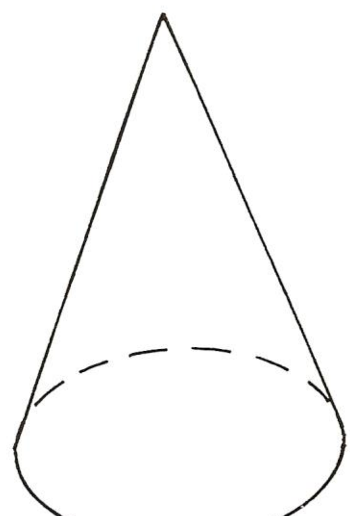


## اهرامونه او مخروطونه Pyramiden und Kegel

که څه هم دواړه بدنونه بدلو ګروپونو پورې اړه لري – اهرام یواځې هواره راګرځیدهواره لري، مخروط مګر راتاو یا کږه هواره.– بیاهم زیات ګډونوالی لري، نو له دې امله یې یه ګډه غواړو وپیژنو یا معرفي کړو.



خیره ۲۴۹



خیره ۲۵۰

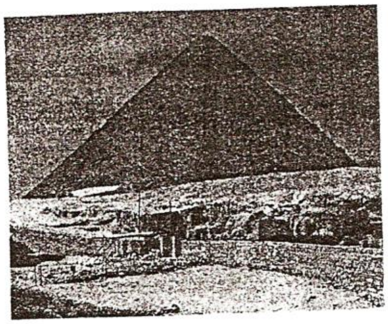
---

پیلبیلګه :

د ۲۵۹۰ او ۲۴۷۰ (م. کال پخوا ) ترمنځ په غزه مصر کی په یوه ډیر مصرف د فرعون خیوبس د قبر اهرام خیوبساهرام ( Cheopspyramide ) جوړ شو. د دې د جوړولو لپاره څه سل زره انسانان په کار واچول شو، چی هغوي نزدې دوه نیم میلیونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



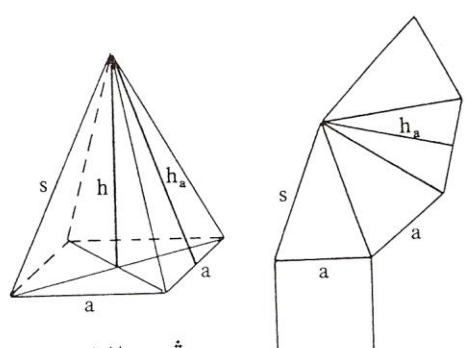


ځیره ۲۵۱

د تیګو بلاکونه پري کړل ، رایي وړل او یو په بل یی طبقه په طبقه یا پوړی په پوړی باید اینښوولي وی. دا د خیوپس اهرام ځومره ډکی (حجم) لري، که هغه یوه لاندې هواره ۲۳۰ متره مربع ولري او جګوالی یی ۱۴۷ متره وي. د هغه لیدوړ دباندې هواره ځومره ده ؟

---

د خیوپس اهرام د ولاړو اهرامونو ځانګړی حالت جوړوي، ځکه چې د هغې تیره ککره د لاندې هوارې په منځ ټکي نیغه ولاړه ده. هغه اهرامونه چې په هغو کی دا حالت نه وي کاږه یا بهتره مائل اهرامونه بلل کیږي. په عمومي ډول یو اهرام راپورته کیږي، که د ډیرګوډي ګوډونه له ډیرګوډي دباندې ټکي سره ونخلول شي. د کونجونو او سرتیرې نخلونلاین ته اړخکانتی ( لنډ : اړخ ) وایي . لکه چې د جالښوونه یی ښایي، نو دباندې هواره یي له لاندې اړخ او د اړخیزو دریګوډي د یوځایوالي ځخه لاس ته راځي، چې وروستی یي پوښ هم بللي شو یا بولو.




ځیره ۲۵۲

که د ډکي یا حجم ټاکلو لپاره د خیوپس اهرام په مربع شکلي پوړیزتجزه شوی وي، په فکر کی راولو چې د پوړی جګوالی یی h / n وي. د وړانګي جملی د خورا پورته پوړی د هوارې لپاره لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

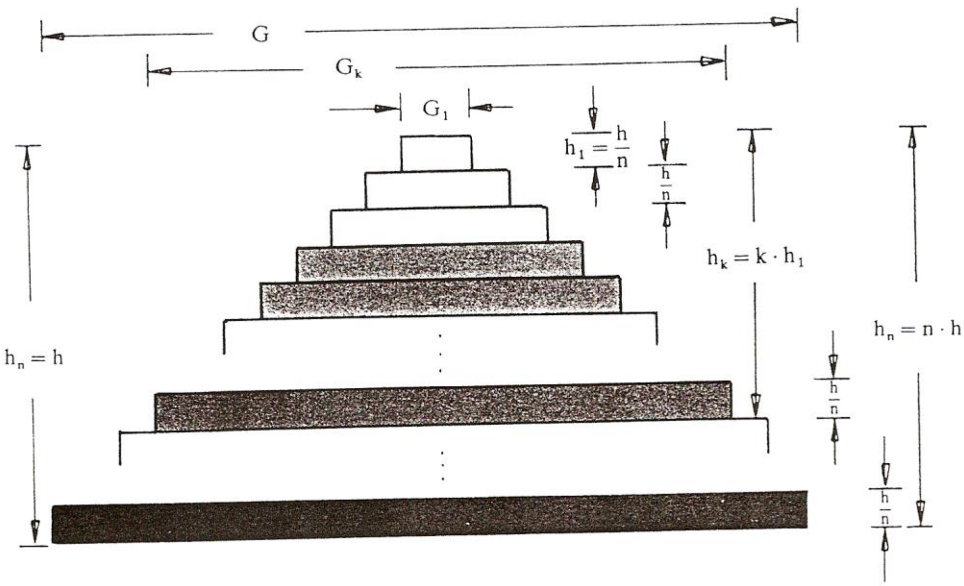


$$h_1^2 : h^2 = G_1 : G \Rightarrow G_1 = G :(h^2 / h_1^2) = G / n^2$$

په ټولیزه توګه(عمومي ډول) :

$$h_k^2 : h^2 = G_k : G$$

$$\Rightarrow G_k = G.(k/n)^2 \quad , G_n = G$$




شیره ۲۵۳

په دې ډول د k –ام زینی پوړي ډکی (حجم) دی

$$V_k = G_k.h / n = Gh.k^2 / n^3$$

د ټولو پوړیو له زیاتون څخه لرو

$$V_{پوړی} = Gh.(1^2+2^2+...+n^2): n^3$$

$$= Gh\left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) : n^3$$

$$= Gh\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پوره ایندوکشیون له لارې لرو ( دا په دې کتاب کی نه څېړل کیږي. ددې موضو لپاره دې ځما دشمیرپوهنی بنسټیز کتاب وکتل شي )

$$1^2+2^2+3^3+...+n^2 = n(n+1)(2n+1) :6 = (2n^3+3n^2 +n) / 6$$

که د پوړیو شمیر n نور هم لوي شي، نو بیا یی سړی له میلان څخه نه شي توپیرولی. دې ګڼونپوهی اکویوالنت دا دی چی n هرڅومره لوي شي او n په ماتلاندې کی موجودوي نو هغه په هغو غړو صرفنظر کیدی شي یا هغه غړي له پامه ایستل ( لرې ) کیدی شي.

په دې پوله حالت کي د اهرام ډکی له لاندې اړیکو شمیرل کیږي.

$$V = G.h / 3$$

دا د خیوبس اهرام باندې استعمالوو :

د اړخونو هواروجګوالی له نیمی لاندې اړخ او جګوالي د پیوتاګوراس د جملی له

لاری شمیرل کیږي: $h_a = \ 115^2 + 147^2 = \ 186 , 64m$

په دې ډول یی پوښ دی $M = 4.0,5.186,64.230 = 85853,80m^2$

د دباندې هواری څخه نور څه نه لیدل کیږي.

ډکی یی دی : $V = 230^2 .147 = 7776300m^3$

**جمله** : د یو اهرام د پوښ، دباندې هوارې او ډکي لپاره باور لري:

د اړخونو د ټولو دریګوډیو زیاتون = M

O = M + بنسټهواره

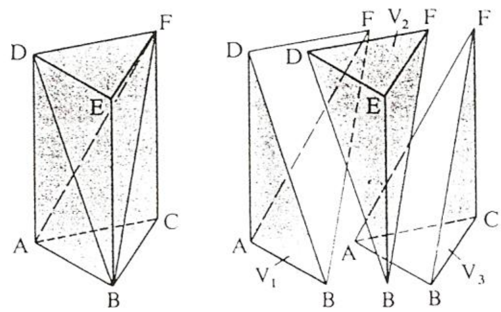
V = بنسټهواره . جګوالی / 3

(c) ketabton.com: The Digital Library

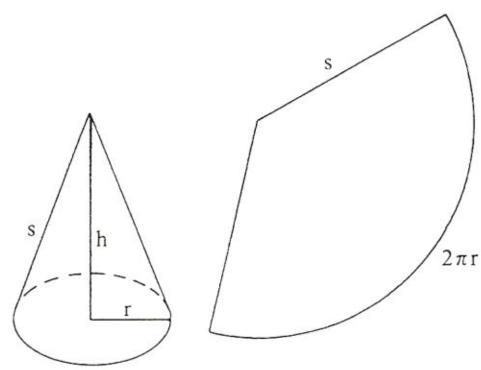




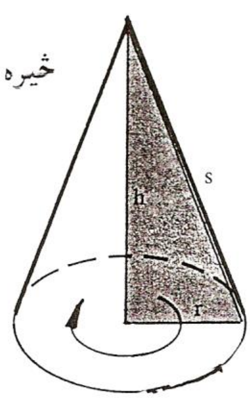
دا فرمولونه طبعاً د مائیل اهرام لپاره هم باور لري د پوړيو شميرنه بيا طبعاً یو څه اندازه ستونځي لري‌که چيرې د یوه اهرام بنسټ یوه ګردي ونيسو نو مخروط لاس ته راځي، مخروط سم ولاړ بلل کيږي ، که د هغه تيره ککره یا لنډه: ککره په منځنکي (نیغه) ولاړه وي، نور ټول مخروطونه مائيل بلل کيږي. دا په لاس کی لرلو له لارې ګورو، چی د اهرام ډکي یا حجم شميرډول په مخروط باندې هم استعماليدی شي، که د پوړيو په ځاي دلته وړې ستنی په پام کی ونيول شي. لکه په څيره ۷ کي د پوښ خورونه یا پوښ جال ښايي چی پوښ د ګردي ټوټه ده، چی وړانګه یی د بنسټګردي وړانګه ده او لينده یی د ګردي چاپيرونکی کی ورکړ شوی دي:



څيره ۲۵۴



څيره ۲۵۵



څيره ۲۵۶

$$F_S = b.r / 2 ,$$

پس لرو

$$M = 2\pi r.s / 2 = s.\pi .r$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



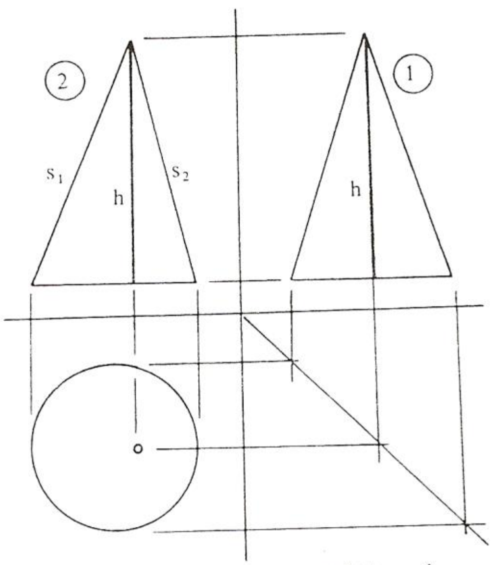
**جمله** : د ګردي مخروط پوښ، دباندې هواره او حجم لپاره باور لري:

$M = s.\pi r = \pi.r^2 . 360° / \alpha$

د $\alpha = 360° . r / s$ سره

$O = M + \pi r^2 = \pi r ( r + s )$

$V = \pi r^2 . h / 3$




ځېره ۲۵۷

په پام کې دې وي چې ولاړ مخروط د ځرخون په ځير هم په خيال کې راوړل کيدی شي: چې په کانتی یا یوه اړخ د یوه ولاړ دريګوټي ځرخون څخه لاس ته راځي.

**بيلګه** : د ولاړ ګرديمخروط ډکی وشميری چې د بنستهواري وړانګه یی ۶ سانتيمتره وي د پوښ يو خورا زيات یا عظمي اوږدوالی یی ۱۵ سانتي، او مينيمال پوښ اوږدوالی یی ۱۱ سانتي متره دی؟ د هيرون دريګوټي فرمول سره سړی د غوځهوارې په متن یی اخر ته رسوي. ( ۲ )»

$F = \sqrt{19(19-12)\ (19-15)(19-11)}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



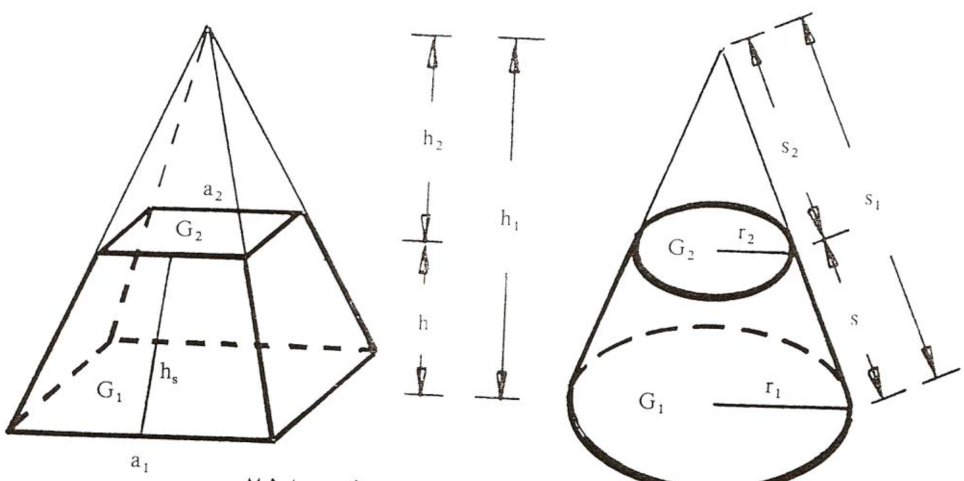
. $F = 65,238\ cm^2$

, $F = d.h / 2 \Rightarrow h = 2F / d = F / r = 10,87\ cm$

. $\Rightarrow V = \pi r^2 h / 3 = 409,79 cm^3$

## پڅ اهرامونه او پڅ مخروطونه

که یو اهرام او یا مخروط په یوه اوږدوالي h بنسټهواري ته غبرګ پرې کړی شي، نو پڅ اهرام او پڅ مخروط ترې راجوړیږي) راپیداکیږي یا منځ ته راځي.
د پڅ اهرام پوښهواره د یوه ترپڅ څخه عبارت دی چې د دوه دریګوډیو له کمون څخه لاس ته راځي.

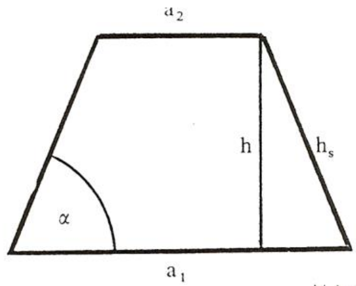



څیره ۲۵۸

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دوي اوږدوالی د پیوتاګوراس له جملی او یا د میلانکونج $\alpha$ څخه ټاکل ور دي.



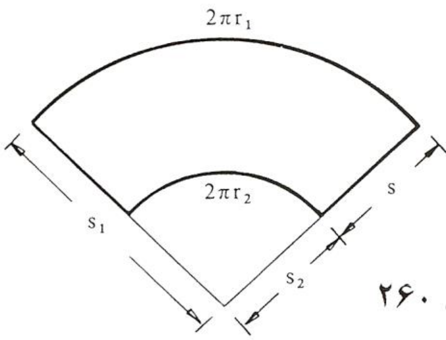

څیره ۲۵۹

$$h_s = h / \sin\alpha$$

د اهرام د بنسټهوارې زیات امکاناتو له امله د پوښهوارې لپاره یو ټولیز فرمول هدفمند نه دی. که بنسټهواره یو منظم n–ګوډی وي، نو لرو :

$$M = (U + u) . h / 2$$

د U بنسټهواری چاپیرونکی ، u د سرپټهوارې یا سرپوښهوارې چاپیری.




څیره ۲۶۰

د پرېکړ مخروط چاپ
څیره د ژ۵

په همدې ډول د سم مخروط د دوه ګردیبرخهوارو کمون دی:

$$M = (s_1\, 2\pi\, r_1 / 2) - (s_2 . 2\pi\, r_2) / 2)$$
$$= \pi\, (s_1\, r_1 - s_2 r_2)$$

د وړانګي جملی په مرسته لاندې اړیکی پیداکیږي:

$$s_2 : s_1 = r_2 : r_1 \Leftrightarrow s_2 r_1 = s_1 r_2$$
$$\Rightarrow M = \pi\,(s_1r_1 - s_2r_1 + s_2r_2 - s_2r_2)$$
$$= \pi\,[(s_1 - s_2)r_1 + (s_1 - s_2)r_2]$$
$$= \pi\, s(r+r)$$

د $s = s_1 - s_2$ له امله

ددې لپاره چی دباندې هواره لاس ته راوړو، باید بنسټ – او سرپټهواره یا سرپوښهواره ور زیات کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دپخښکي د اولني اهرام او یا مخروط او د پریشوې څوکی کمون څخه لاس ته راځي، چې دا هم بیرته اهرام او یا مخروط شکلونه لري. ( څیره √ وګوری )

$$V = G_1.h_1 / 3 \quad - G_2.h_2 / 3 = [G_1(h+h_2) - G_2h_2]/ 3$$

دا چي په n–ګوټي کی د اړخ اوږدوالی همداسی د ګردیشمیرنه کی وړانګه مربعي ډوله کارول کیږي، د وړانګي له جملی د بنستهواري او سرپوښهواري یوبل ته څانونه داسی نیسي لکه د هغو د واټنونو مربع د سرچینیزې څوکی څخه.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{h + h_2}{h_2} = \frac{\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad (h + h_2) \cdot \sqrt{G_2} = h_2 \cdot \sqrt{G_1}$$

$$\Leftrightarrow h\sqrt{G_2} + h_2\sqrt{G_2} = h_2\sqrt{G_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad h\sqrt{G_2} = h_2(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2})$$

$$\Leftrightarrow \quad h_2 = -\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}$$

که د $h_2$ لپاره پیدا ارزښتونه د ډکیفرمول کی کیښول شي، نو د ترڅنګ بیا یواځي هوارې $G_1$ ، $G_2$ او $G_3$ راپیداکیږي.

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\left[G_1\left(h - \frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right) + G_2\frac{h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \left[G_1 \cdot h - \frac{G_1 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}} + \frac{G_2 \cdot h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{1}{3}\left[\frac{G_1\, h\sqrt{G_2} - G_1\, h\sqrt{G_1} - G_1\, h\sqrt{G_2} + G_2\, h\sqrt{G_2}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3}\left[\frac{G_2\sqrt{G_2} - G_1\sqrt{G_1}}{\sqrt{G_2} - \sqrt{G_1}}\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



که اخري اړیکی د $\sqrt{G_2}$ + $\sqrt{G_1}$ سره پراخه شي( د بینوم دریم فرمول )، نو په دې پسې لاس ته راځي:

$$V = \frac{h}{3}\left[\frac{(G_2\sqrt{G_2} - G_1\sqrt{G_1})(\sqrt{G_2} + \sqrt{G_1})}{G_2 - G_1}\right]$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{h}{3}\left[\frac{G_2^2 - G_1\sqrt{G_1 G_2} + G_2\sqrt{G_1 G_2} - G_1^2}{G_2 - G_1}\right]$$

د ماتباندې ترم څخه $G_2 - G_1$ د

$$G_2^2 - G_1\sqrt{G_1G_2} + G_2\sqrt{G_1G_2} - G_1^2 = (G_2 - G_1)(G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)$$

له امله نوکبند شي او بالاخره د لنډوني څخه لاس ته راځي:

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)\, h / 3$$

د اهرام ، په همدې ډول د مخروط ډکي.
په پځمخروط کیدی شي د ګردیهوارې فرمول $G_1 = \pi r_1^2$ او $G_2 = \pi r_2^2$ وکارول شي

---

جمله: د پځ اهرام پوښ ټوله هواره او ډکی :

$M =$ د ټول ترایخ هوارو زیاتون

$$O = G_1 + G_2 + M$$

$$V = (G_1 + \sqrt{G_1G_2} + G_2)\, h / 3$$

د پځمخروط پوښ پاس یا ټوله یا پورته هواره او ډکی :

$$M = \pi s(r_1 + r_2) = \pi(s_1r_1 - s_2r_2)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$O = \pi s(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi (r_1 s + r_2 s + r_1^2 + r_2^2)$$

$$V = (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\pi h / 3$$

## پیلبیلکه

د برنس مجسمی لپاره دې یوه مټه د همغه موادو جوړه شي. دا دې ۱،۵ متره جګ وي، او یوه کتله دې ولري چي ۱۰ ټنه وي( د برنس دیښتی یا کلکوالی $\rho = 8{,}7\ g/cm^3$ ) په پوښتنه کی یو ګرد ( پخمخروط ) یا یو مربعشکلی ( پخ اهرام ) راځي. سرپوښهواره دې ، په اندازه ، ۱ مترمربع لوي وي. نورې اندازې وښايي ؟ د دواړو مټو لپاره شمیرنه ورته ځغلي

$$V = m / \rho = 10t / (8{,}7t/m) = 1{,}149\ m^3$$

دا چی جګوالی او سرپوښ معلوم دي، بنسټ د یومربع مساوات له لارې لاس ته راځي:

$$V = 1{,}149 \qquad = 0{,}5(G_1 + (\sqrt{G_1 . 1} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1{,}299 - G_1 \qquad = \sqrt{G_1}$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}687 + G^2 - 2598 G_1 = G_1$$

$$\Leftrightarrow \quad G_1^2 - 3{,}598\, G + 1{,}687 \quad = 0$$

$$G_1 = (3{,}598 / 2) \pm \sqrt{(3{,}598 / 2)^2 - 1{,}687}$$

$$G_1 = 1.799 \pm 1{,}245$$

$$\Rightarrow \quad G_1 = 3{,}044 m^2 \quad \text{یا} \quad G_1 = 0{,}549 m^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



( دوم اوبی یا حل 0,549، په کار نه راځي ، ځکه چې لاندې هواره به له پورته څخه کوچنی وی )
له دې څخه پورته او لاندې وړانګه لاس ته راځي او نیمی په پخمخروط او په همدې توګه د کانتو یا اړخ اوږدوالی په پڅ اهرام کی:

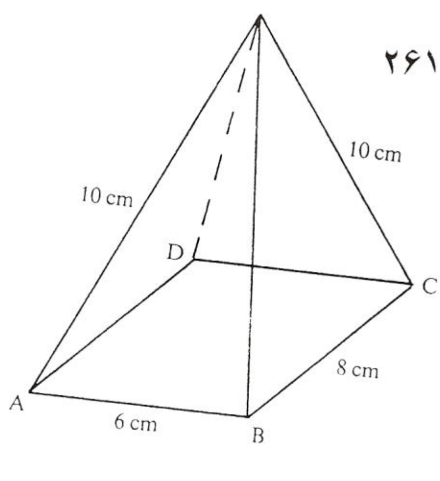
$$a_2 = \sqrt{G_2} = 1m ; \quad r_2 = \sqrt{G_2 / \pi} = 56,42 \text{ cm}$$
$$=> d_2 = 112,84 \text{ cm}$$

$$a_1 = \sqrt{G_1} = 1,745 \text{ m} ; \quad r_1 = \sqrt{G_1 / \pi} = 98,42 \text{ cm}$$
$$= > d_1 = 196,85 \text{ cm}$$

د پیتاګوراس له جملی څخه د اړخونو اوږدوالی لاس ته راځي:

$$h_s = \sqrt{h^2 + (a_1 - a_2)^2 / 4} = 1,546 => M = 8,488 \text{ m}^2$$

$$s = \sqrt{h^2 + (r_2 - r_2)^2} => M = 7,575 \text{ m}^2$$




شیره ۲۶۱

## تمرینونه

۱ – د یوه مربع اهرام پاسهواره او ډکی وشمیری ، که وي :

الف ) $a = 7 \text{ cm} ; \quad h = 14 \text{ cm}$

ب ) $s = 15 \text{ cm} ; a = 10 \text{ cm}$

پ ) $V = 80 \text{ cm}^3 ; h = 10 \text{ cm}$

ت ) $h_a = 13 \text{ cm}: h = 10 \text{ cm}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



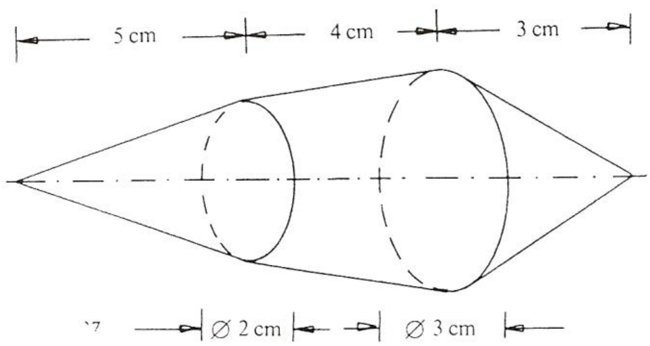
ت ) $h = 12\ cm ;\ s = 18\ cm$

ث ) $h_a = 12\ cm;\ M = 400 cm^2$

۲ – د ځیره شوي اهرام پاسهواره او ډکی وشمیری. ( لمړی ترونکربښه له ټکي A ځخه د جګوالی پښیږګي ته وشمیری )

۳ – په کوم جګوالي دې مربع اهرام بنستهواري ته غبرګ غوځ شي چې ډکی یی نیم شي؟

۴ – یو ولاړ اهرام د بنستیز منظم شپږکونجي سره بنستې لاندي هواري اړخ یا کانتی $a = 4\ cm$ لري او خوا اړخ اوږدوالی یی $s = 12\ cm$ دی. V او O وشمیری ؟




۵ – د ځیره شوي بدن ډکي وشمیری.

ځیره ۲۶۲

یادونه: ∅ د نیمي یا قطر په مانا دی چې د دوران یا ګردوالي ښکارندوی

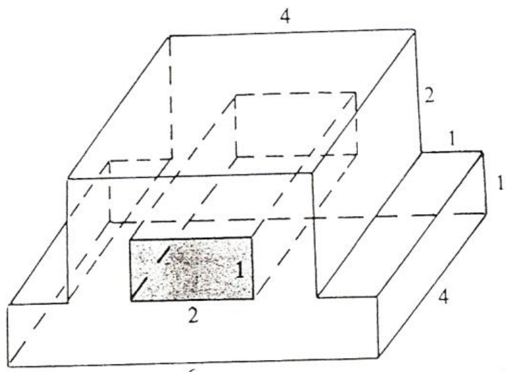
۶ – د یوه ګردیګرد برج سر یا سر دي نوي پټ شي. د سرپوښ د هواري د اندازې لپاره سرپوښوونکی د برج ترمخ داسی ولاړ دی یا داسی ځای نیسي، چي پوښ اوږدوالی s د ۷۵ درجو په یوه کونج ګوري، کوم چی ټیك د سر میلان په ګوته کوي، د سرپوښ هواره ځومره لویه ده، که برج ۵۰ متره جګ وي او د برج نیمي ۱۲ متره وي؟ سرپوښوونکی د برج ځخه ۱۰ متره لرې ولاړ دی او د سترګو جګوالی یی ۸۰ ، ۱ متره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

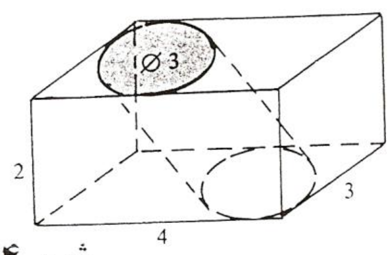


۷ – د یوه برج اهرامډوله سرپوښ چې بنسټ یې مربع او اړخ اوږدوالی یې   دی په
وسپنه دې پټ شي اړخکانتې یې ۱۴خ متره ده د سرپوښ هواره یې څومره ده؟
دا  چت  به څومره ارزښت ولري، که یو مترمربع سرپوښول د هرڅه  سره ۹۵
المان  مارکه ارزښت ولري؟

۸ – د څیره  شوو  بدنونو  پاسهواره وشمیری( ورکړه په سانتي متر )

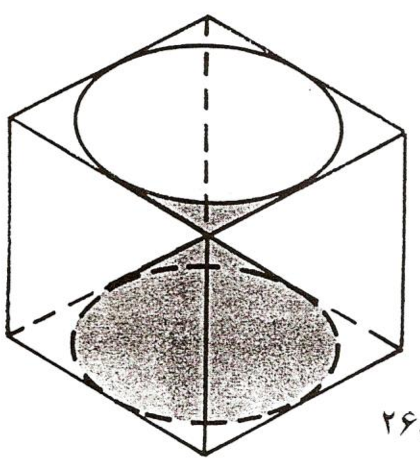



څیره ۲۶۳




څیره ۲۶۴

۹ – د پورته څیره شوي بدن ډکی وشمیری.
۱. –په مختلف کارتونو کی مخروط
ډوله خالیګاوې  برمه کیږي:
الف  ) په یوه مکعب چی اړخ
اوږدوالی یا  کانتی اوږدوالی
یی $a = 60$ cm دی، یو مخروط
د جګوالی $h = d = a$      سره
ب  ) په یوه مکعب کی
د $a = 60$ cm  یو سیومتري



څیره ۲۶۵

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

دیابولو ( لاتین:Diavolo = شیطان )

پ ) په دوه سمو ګردیاستوانو د h = 2r = 60 cm هم یو مخروط او یو دیابولو، دا مور د شګو ساعت په څیر پیژنو . د تشځاي ډکي او په همدي ډول

د نور پاتی بدن ډکی هم وشمیری.

۱۱ – یو مربع اهرام ( h = 2a = 10 cm ) بنسټهواري ته غبرګ په دوه برخو ویشل کیږي. د غوڅهواري واټن دي بنسټهواري ته 0,75h ; 0,5h ; 0,25h وي.

د هر برخه بدن ډکي وشمیری.

۱۲ – ددي لپاره چي یو ګردیډوله فیلترکاغذ د فیلتر لپاره استعمال کړی شی، دا سړی یو څلورمه برخه ګردی باندي را غبرګوي ، وازی باید څومره وازکونجی ولري، ددي لپاره چی فیلتر جوړ شي.

۱۳ – یو مخروط ډوله کچګیلاس دي ټیك ۱ لیتر ځاي کړي. هغه ۱۵ سانتي متره جګ دی. د هغه نیمی ( یا نیمی ګردی ) دي څومره لوي وي.

۱۴ – ۵ مکعب متره شګه یوي ټوپی باندي اچول کیږي. دا ستوریکونج ۴۵ درجی دی . جګی او نیمی یي څومره لوي دي؟

۱۵ – یو مخروط ډوله د اوبو ګیلاس دي د نیمایي پوري له اوبو ډك شي. دا اوبه په ګیلاس کی څومره جګی ولاړي دي؟

۱۶ – یو کافیواله یوه مخروط ډوله د شربت ګیلاس د شربت څخه ډکوي چی اندازه ۱۵ سانتي متره جګه ده. دی دا ګیلاس د یو سانتي متره پوري کم له شربت ډکوي. دا په دي توګه په سلو کی څومره شربت سپما کوي

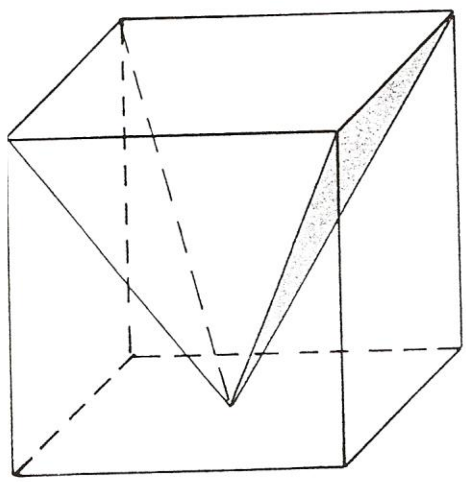
۱۷ – په څیره ۲۶۶ کی ورکړ شوی اهرام ډکی وشمیری

۱۸ – په یوه چت باندي یو د وښو چتپټووني، چي ۵ ، ۴ متره جګ دی اینښوول کیږي، چی اړخ اوږدوالی یی a = 12,5 m متره او b = 9 m متره .دي. د

(c) ketabton.com: The Digital Library



چت پورته کانتی یا پورته اړخ ۷ متره اوږد دی. د چتپټوونې ډکی وشمیرئ او همداسی د چتپټې سرهواره هم وشمیرئ.



خیره ۲۶۶

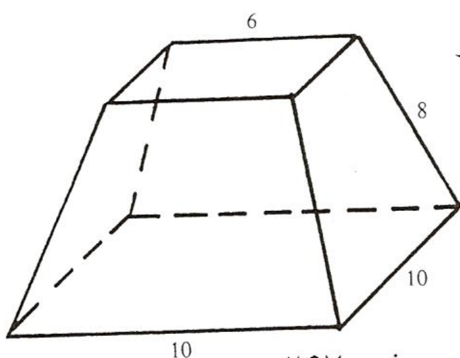
۱۹ – د یو دوه متره ژور بنسټ لپاره ځومره خاوره باید راوویستل شي، که پوره ژی یا غاړه یی ۱۰ متره د غاړې اوږدوالی ولري او ستورېکونج –یعنی هغه کونج چی د غاړې یا اړخ سره د کنلو په لور جوړوي– یی ۶۰ درجی وي؟

۲۰ – د یوه هواډکی ځومره مائیلوالی لري، که د یوه ونی ستنې هوا ډکی شمیرلو لپاره چی مخروط ډوله دی د موټې قاعده وکارول شي، د لاندې سره

$V^* = \pi h [(r_1 + r_2)/2]^2$

د $r_1 = 10$ cm سره

او $r_2 = 5$ cm سره؟




خیره ۲۶۷

۲۱ – ځومره مسو ټوټه په کار ده، چی ځیره شوې مسخولی جوړه کړای شو (وکړنی په ضیس متر؟ دیسی متر) (خیره ۲۶۷).

(c) ketabton.com: The Digital Library



۲۲ – جوړ شوي کارپوټې حومره درنی دي ( اندازه په سانتي متره )

۲۳-د لاندې پخمخروطونو M ,O او V وشمیرئ

.

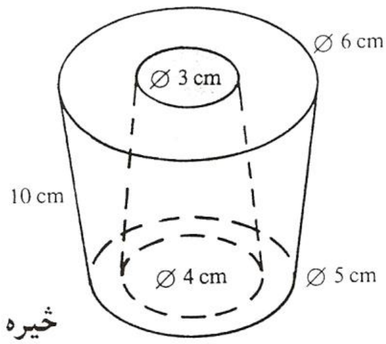
پخ کیګل مخروط

Kegelstümpfe:

a) $r_1 = 12$ cm; $r_2 = 10$ cm; $h = 8$ cm

b) $r_1 = 9$ cm; $r_2 = 7$ cm; $s = 6$ cm

c) $r_1 = 5$ cm; $h = 7$ cm; $s = 8$ cm




شیره ۲۶۸

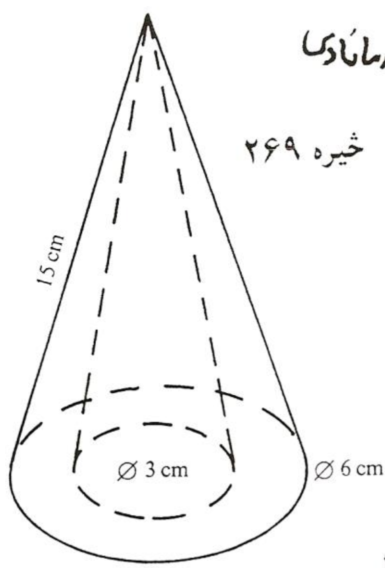
Eisenwerkstück $\varrho = 6{,}5$ g/cm$^3$

د اوسپنې کار ټوټه

څه په دې کتالوګ کې هم د کلمې په مانا دي

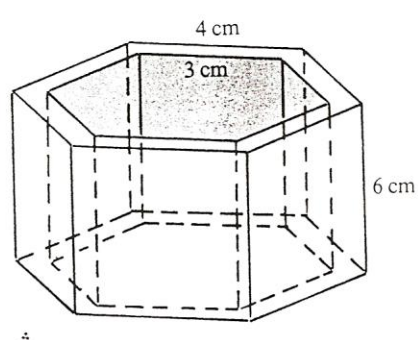
با غلطت

شیره ۲۶۹




Kunststoffmodell $\varrho = 2{,}5$ g/cm$^3$

پلاستیک مودل




شیره ۲۷۰

Messingsechskantrohr $\varrho = 8{,}3$ g/cm$^3$

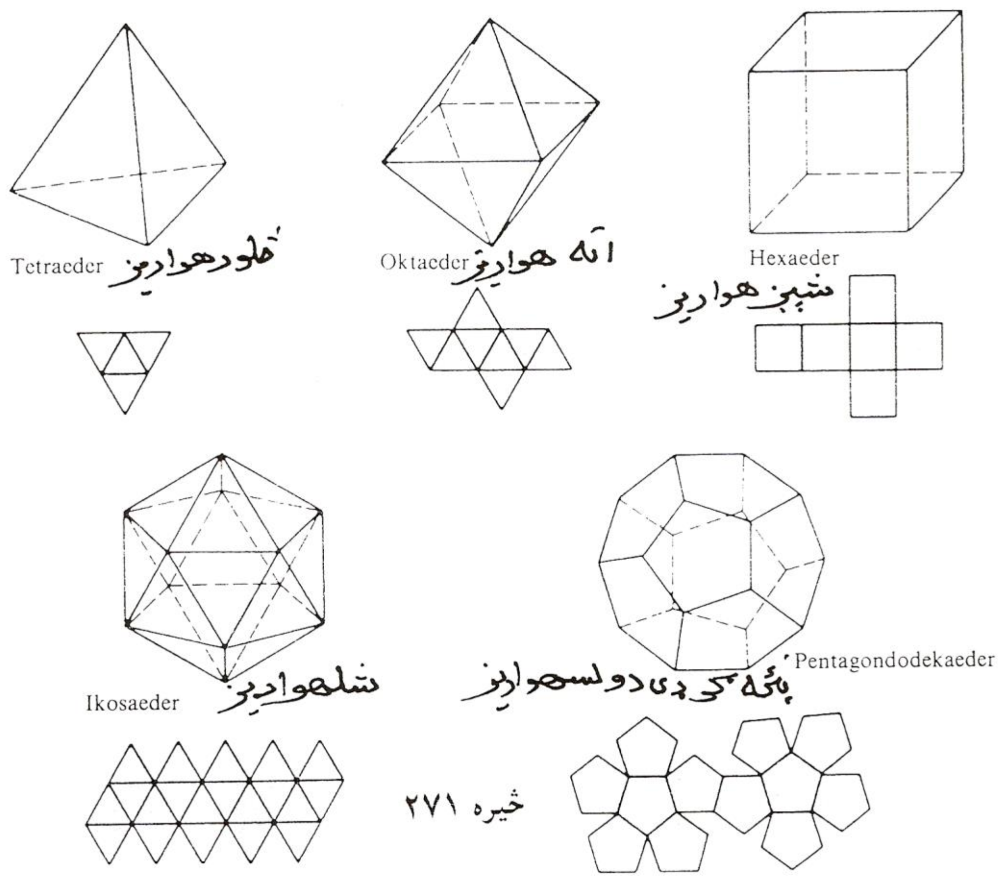
د مسنګ شپږ اړخیزه لوله

(c) ketabton.com: The Digital Library



## منظم ډیرهواریز

ټول بدنونه ، کوم چی یواځي بندهواري لري یا له‌هوارو رابند وي، پولوئیدر ( یونانی : ډیر هواریز ) نومیږي. موږ به دا له دې وروسته دا ډیرهواریز وبولو. د دوي ترمنځ ټیك پنځه منظم یو بل ته ناورته بدنونه. دا د شمیرپوهنی له اړخه په ځانګړې توکه په زړه پورې دي، ځکه چی پاس هوارې او ډکي یي بند دي، دا په دې مانا چي د فرمولونو له لاې انځوریدلی شي، او په دې برسیره ، ځکه چی طبعي کریستال دا شکلونه یا فورمونه یا ځیرې لري.

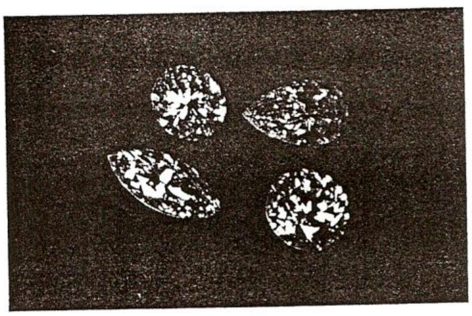



خیره ۲۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library



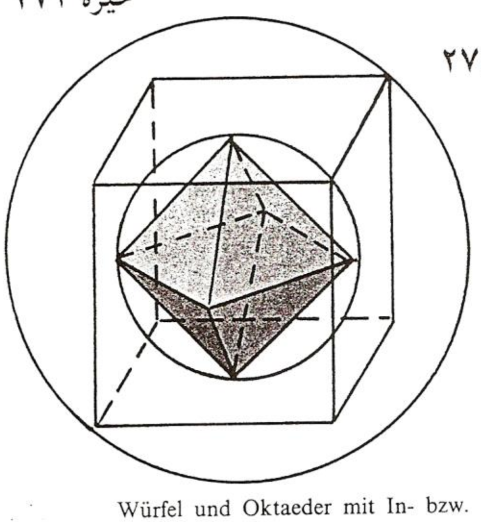
دا پنځه منظم بدنونهد هواروبندهواریز ابو کهګ هواربندیزدي : تیترائیدر ( څلورهواریز Tetraeder ) ، هیکسائیدرHexaeder ( شپږهواریز ، مکعب ) اوکتائیدرOktaeder ( اته هواریز ) دودیکائیدر ( دولس هواریز ، د خپل اړخهوارو له امله پنتاګون دودیکائیدرPentagondodekaeder پنځه ګوډي دولسهواریزه بلل کیږي )، او په همدې توګه ایکوزائیدر Ikosaeder ( شلهواریز ) څیرې په تیر مخ کی.



څیره ۲۷۲

## بیلګی

د مالګي تیګي مکعب جوړوي، کوپفرسولفید مینرال Fahlerz تیترائیدر، د ګوګړو کریستال دودیکائیدر او الون ( کالیوم الومینیوم سولفات ) اوکتائیدر جوړوي.



څیره ۲۷۳

Würfel und Oktaeder mit In- bzw. Umkugeln

مکعب او اته هواریز د یو بل په کی تلی او په راکیږ غونډیو دی

منظمډیرهواریز پلاتوني (افلاطوني) ( خیالی platonische ) بدنونه هم یادیږي، ځکه چی یوناني فیلوسوف او شمیرنپوه ( ۴۲۷ تر ۳۴۷ د م. پخوا ) په دې نظر وو، چی څلور پخواني عناصر اور، خاوره، اوبه، او هوا په خپل واړه فورم تیترائیدر، ایکوزائیدر، اوکتائیدر او هیکسائیدر په ګوته کوي. د هغه په فکر جهان پخپله یو دودیکائیدر فورم لروده. په دې پنځو هر یوه بدن کي کیدی

(c) ketabton.com: The Digital Library



شي يوه ګردۍ دننه او دباندې وكښل شي. كه دا يو په بل كې دننه شي يا په بل عبارت دننه راګير شي، نو په دې توګه شپږ دننه – او شپږ دباندې هوارې لاس ته راځي ، كومو چې كيپلر Kepler دې عقيدې ته راوستى شو ، كوم ( چې هغه وخت معلوم ) شپږ پلانيت به په داسې لاره ګرځي، چې د هغوي نيممحوورونه د داسې دننه – او دباندېغونډې ورانګو سره برابر شي.
لاندې جدول د دې منظم پولوئيدر ډيرهواريزومعلومو لويو پوره معلومات وركوي.

| Polyeder | e | f | k | l | m | α | r | ϱ | O | V |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tetraeder | 4 | 4 | 6 | 3 | 3 | 60° | $\frac{a}{4}\sqrt{6}$ | $\frac{a}{12}\sqrt{6}$ | $a^2\sqrt{3}$ | $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ |
| Hexaeder | 8 | 6 | 12 | 4 | 3 | 90° | $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{a}{2}$ | $6a^2$ | $a^3$ |
| Oktaeder | 6 | 8 | 12 | 3 | 4 | 60° | $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{a}{6}\sqrt{6}$ | $2a^3\sqrt{3}$ | $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ |
| Dodekaeder | 20 | 12 | 30 | 5 | 3 | 108° | $\frac{a\sqrt{3}+a\sqrt{15}}{4}$ | $\frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}}$ | $3a^2\sqrt{25+10\sqrt{5}}$ | $\frac{15a^3+7a\sqrt{5}}{4}$ |
| Ikosaeder | 12 | 20 | 30 | 3 | 5 | 60° | $\frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ | $\frac{a\sqrt{27}+a\sqrt{15}}{12}$ | $5a^2\sqrt{3}$ | $\frac{15a^3+5a^3\sqrt{5}}{12}$ |

د لته حروف لاندې ماناوې لري . a = د كانتې يا اړخ اوږدوالى ، e = د ګوډونو ګڼ ( تعداد ) f = د هواروګڼ. k = بدن اړخونوګڼ، l = د هوارو اړخونو ګڼ، m = په هركونج كې د كانتو يااړخونو ګڼ، α = د ګاونډيو هوارو ترمنځ كونج، r = د چاپيرګردې ورانګه ، ϱ = د دننۀ ګردې ورانګه ، O = پاس هواره يا پورته يا ټوله هواره ، V = ډكې.
پنځه يوون ډيرهواريز ( Einheitspolyeder ) لاندې ( a = 1 ) ارزښتونه لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library



| Polyeder | r | ϱ | O | V |
|---|---|---|---|---|
| Tetraeder | 0,6124 | 0,2041 | 1,7321 | 0,1179 |
| Hexaeder | 0,8660 | 0,5 | 6 | 1 |
| Oktaeder | 0,7071 | 0,4082 | 3,4641 | 0,4714 |
| Dodekaeder | 1,4013 | 1,1135 | 20,6457 | 7,6631 |
| Ikosaeder | 0,9511 | 0,7558 | 8,6603 | 2,1817 |

د اویلر د ډیرهواریز جمله، د په خوبنه ډیرهواریز لپاره یو ټاکنمساوات راکوي، د ګوډګنیون e ، اړخګنیون k او هوارګنیون f لپاره:

د اویلر ډیرګوډي یا پولوئید جمله : $e + f - k = 2$

په هرصورت داجمله یواځي د کونوکس یا ننوتو پولوئید یا ډیرهواریز لپاره باور لري، یعنی هغه ، چی په کومو کی ټول نیمي د بدن په دننه کی ځغلي، یعنی منظمو ډیرهواریز لپاره.

بیلګي:

کوادر : $8 + 6 - 12 = 2$

اوکتائید : $6 + 8 - 12 = 2$

دودیکائید $20 + 12 - 30 = 2$

## غونډاری یا غونډوسکه(کره) او غونډاري برخې

ولې غونډاری یا غوندوسکه؟

که تاسو د انګرېزي فوټبال په عربي ژباړه په عربي وګورئ، نو کرهٔ قدم به ترې واخلئ.

(په لاندې کې ما د غونډاري یا غونډوسکې په ځای غونډی لکلی، چې ښه او ټیک نومونه نه ده.)

د هندسې یا ځمکګچپوهنې له مخې غونډاری یا غونډوسکه د ټولو هغو ټکو ټولګه ده یا د هغو ټکو ځای دی، چې له یوه په

کلکه یاکره ټاکلی ټکی M څخه چی د غونډۍ منځټکی بلل کیږی همغه واټن r ولري.

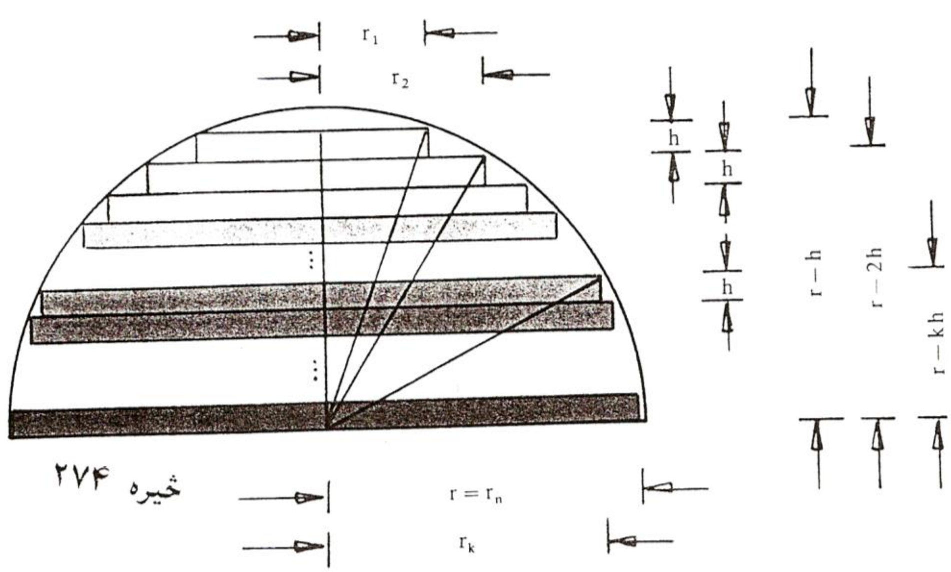
غونډی نه یوازی د جګدرجئیز یا لوړ سیومتري( هره نیمی په همغه وخت کی سیومتري محور دی ) له امله د بدنونو ترمنځ یو ځانګړي رول لري، بلکه هغه موږ انسانانو لپاره هم د مانا ډکه ده، ځکه چی ځمکه ( نزدې ) یو غونډی شکل لري . د بیلګي په توګه په کارتوګرافي کی ځمکه اوږدګردیو ( میریدیانی Meridiane ) باندې ویشل کیږي. په مریدیانی باندې هر واټن د ځمکی وړانګی R ته بیا یوه لینده په ګوته کوي. د ډکي ټاکلو لپاره بیا غونډی ) ګردی استوانی ته ورته ) په کوچنیو ستن ډوله چیتروګانو ( کردې ټوټی، چی موږ ورته په هسکه مینه کی چیترو وایو . د مات منګی څخه ګردې ځیرې جوړیږي، ټوټه ده ) ټوټه کیږي، چی جګوالی یی $h = r / n$ دی. د یوګونو چیتروګانو وړانګو لپاره باور لري یا صدق کوي( د پیتاګوراس جمله ) :

$$r_1^2 = r^2 - (r - h)^2 \Rightarrow V_1 = \pi r_1^2 h$$

$$r_2^2 = r^2 - (r - 2h)^2 \Rightarrow V_2 = \pi r_2^2 h$$

.

.




خیره ۲۷۴

(c) ketabton.com: The Digital Library



لوړ لیز

$$r_k^2 = r^2 - (r - kh)^2 \Rightarrow V_k = \pi r_k^2 h$$
$$r_k^2 = r^2 - (r^2 + k^2h^2 - 2rkh)$$
$$r_k^2 = 2rkh - k^2h^2$$
$$r_k^2 = \frac{2r^2 \cdot k}{n} - \left(\frac{rk}{n}\right)^2$$
$$r_k^2 = r^2\left(\frac{2k}{n} - \frac{k^2}{n^2}\right) \Rightarrow V_k = \pi r^3\left(\frac{2k}{n^2} - \frac{k^2}{n^3}\right)$$

$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n) - \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{n^2}\left(\frac{n}{2}(n+1)\right) - \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)\right]$$
$$V_{ges.} = \pi r^3\left[\frac{2}{3} + \frac{3}{2n} - \frac{1}{6n^2}\right]$$

که د «ستنګیو» ګڼون تلم پورته لاړ شي، نو په نوکانو کی لمړی ترم د مانا دی او لاس ته راځي

نیمغونډۍ

V نیمغونډۍ $= (2/3)\pi r^3 \Rightarrow V_{\text{غونډۍ}} = \frac{4}{3}\pi r^3$

د غونډي د پاس هوارې د شمیرلو لپاره دا په خورا زیاتو برخه هوارو ویشي. که دا د ګوډ یا کونج ټکي د منځټکي سره ونښلول شي نو دا یو د اهرامشکل بدن ځان ته غوره کوي د r جګوالي سره.

د دې ټولو اهرامونو ډکیو زیاتون د غونډې ډکی ورکوي. دا د خورا زیاتو هوارو لپاره په نږدې توګه بسیا کوي، که چیرې څوك په پام کی ونه نیسی، چې دا سره د کمو استنثاوو کتل کیږي چی پوره هوار نه دي. برسیره پر دې باید د دې بنسټ هوارو زیاتون د غونډي پاس هوارې سره برابر وي. له دې امله باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



غونډي $V$ = د اهرامونوډکیو زیاتون $= r.(3/1).$

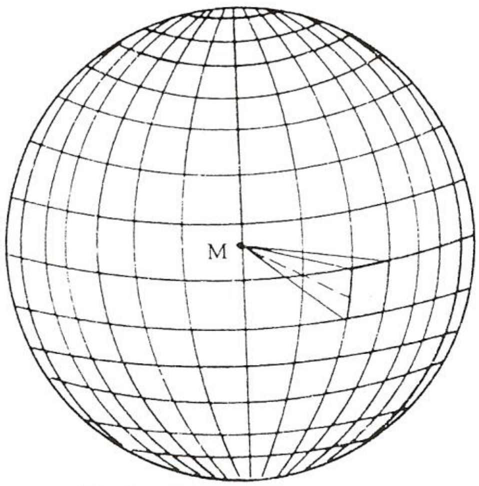
د غونډي پاس یا ټوله هواره

$(1/3).r.O$ د غونډۍ $= (4/3)\pi r^3$

$O$ د غونډي $= 4\pi r^2$

په ټولیزه یا عمومي توګه باور لري

$O = 4\pi r^2 \quad , V = (4/3) \quad r^3$




ځیره ۲۷۵

**پیلبیلګه:**

منځنی ځمکورانګه ۶۳۷۰ کیلو متره ده . د ځمکې پاسهواره او ډکی څومره دي؟ ځمکه څومره کتله لري،که د ځمګي منځنی سختوالی $5,514\ g/cm^3$ د مخه ونیول شي یا فرض شي؟

$O = 5,10.10^8\ km^2$ ,

$V = 1,08\ .\ 10^{12}\ km^3$ ;

$m = 5,97.10^{24}\ kg$

د خالیغونډي ډکی همداسی لاس ته راځي لکه د یوې خالي استواني ډکی ( د مخه لوستل شوی دی) د دوه یو په بل کی پرتو کونځینتري غونډیو توپیر یا کمون:

$$V_{\text{خالیغونډی}} = (4/3)\pi(r_1^3 - r_2^3) \quad .$$

**پیلبیلګه:**

د اوسپنی خالیغونډی کومه کتله لري ، که د باندنینیمی یي ۱۲ سانتیمتره او

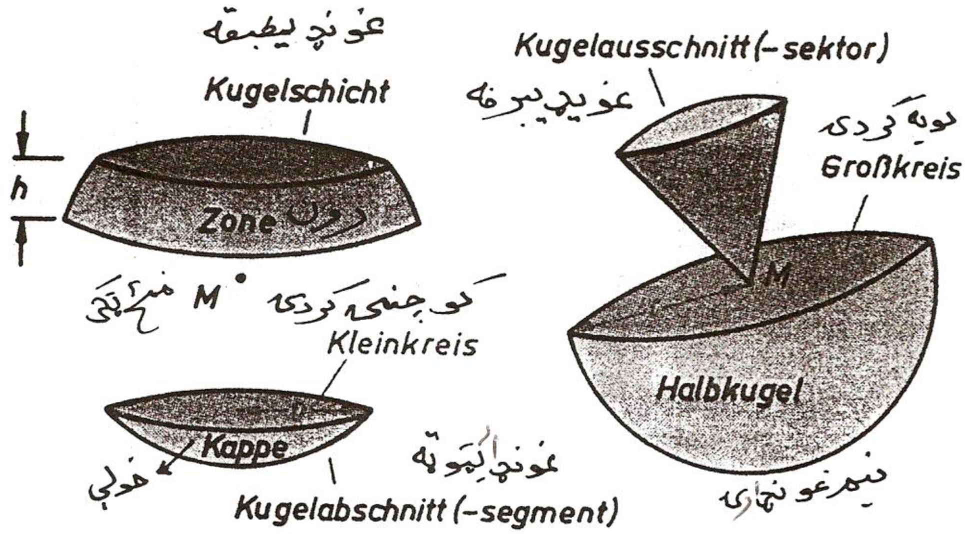
(c) ketabton.com: The Digital Library



د دیوال پنډوالی یی ۸ ملیمتره ( دیښتی یا سختوالی یا ټینګوالی ) وي؟

$V = (4/3)\pi(6^3 - 5,2^3) = 315,8\ cm^3; \quad m = V \cdot \rho = 2463,25\ g$

اوس غونډیبرخی په پام کی نیسو. په ټولیزه توګه لاندې بنسټیز فورمونه مخ ته لـه: (رو:




خیره ۲۷۶

ددې یوه ټوټه یا زیاتې ټوټې داسی منځ ته راځي ، چی غونډی د یوې یا یا زیاتو ګردیو له خوا غوڅه شي. که داغوڅی د غونډې له منځټکي تیر شي، نو دوه نیمغونډې او یوه لویه ګردی د غوڅهوارې په څیر منځ ته راځي. که غوڅی له منځټکي تیر نه شي، نو دوه غونډیټوټی منځ ته راځي. د دوه داسی غوڅیو ترمنځ یوه غونډیطبقه منځ ته راځي. که له غونډې یو مخروت ډوله ټوټه رابیله شي، نو غونډیبرخه منځ ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



---

پرتله کړی) د دواړو خوليو د يو بل سره مساوي کيښوولو له لارې لرو:

$$\rho_1^2 h_2 - \rho_2^2 h_1 + hh_1h_2 = 0$$

دا بالاخره مور لاندې ته لاربښودوي:

$$V = \frac{\pi h (3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + h^2}{6}$$

د غونډيبرخي ډکي يا غونډيبرخي حجم داسی لاس ته راځي، چی د يوه مخروط او او د ګرديتوبی ډکي سره زيات کړو:

$$V = \frac{\pi h^2 (3r - h)}{3} + \frac{\pi \rho^2 (r - h)}{3}$$

دلته بيرته اړيکی (*) کارول کيږي، چی په لاندې ډول ځيره بدولون ترې لاس ته راځي $\rho^2 = h(2r - h)$. په دې توګه د $\rho^2$ لپاره ځای په ځای کوي او له دې لاس ته راځي :

$$V = \frac{\pi h^2 (3r - h)}{3} + \frac{\pi h (2r - h)(r - h)}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \pi r h^2 - \frac{\pi h^3}{3} + \frac{2\pi r^2 h}{3} - \pi r h^2 + \frac{\pi h^3}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad V = \frac{2\pi r^2 h}{3}$$

له ۲ د (*) په مرسته ځ کا په ځای نسی لو لاس ته راځی

$$V = \frac{2}{3}\pi h \left( \frac{\rho^2 + h^2}{2h} \right)^2 = \frac{\pi}{6h} (\rho^2 + h^2)^2$$

د غونډيتوبی پوښهواره M ، چی د غونډيخولی نوميږي او يا کاردينالخولی بلل کيږي، په همغه فکر شميرل کيږي لکه د غونډې پاس يا ټوله هواره . که د غونډيبرخی د ډيرو اهرامونو د زياتون په ځير په پام کی ولرو، نو د هغی بنسټهواره همغه غونډيخولی ده. ( کړی شو چی غونډيخولی په ځای کپره وليکو ) نو لرو :

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$Mr / 3 = 2\pi r^2h / 3 \quad \Leftrightarrow \quad M = 2\pi rh$$

که د (*) له لارې بدل شي، نو د غونډېکپرې لپاره لاس ته راځي :

$$M = \pi .(\varrho^2 + h^2)$$

د ټولهوارې د لاس ته راوړلو لپاره دې بيا يواځي د بنسټګردی هواره ور زياته شي. د غونډيطبقی پوښهوارې ته د غونډيزون Kugelzone وايي. دا د دوه کپرو له کمون څخه لاس ته راځي. ټوله هواره يا پاسهواره يې داسی لاس ته راځي، چی بنسټهواره او سرپوښګردي هوارې وززيات شي. د غونډيټوټې پاس هواره داسی لاس ته رځي، چی د غونډيکپرې هوارېته د مخروطپوښ ورزيات شي.

د غونډارې برخو لپاره لاندې فرمولونه باور لري.

| | |
|---|---|
| د غونډارې ټوټه<br>غونډارې خولی | $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h) = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho^2 + h^2)$<br>$M = 2\pi rh = \pi(\varrho^2 + h^2)$ (Kugelkappe)<br>$O = 2\pi rh + \pi\varrho^2 = \pi(2\varrho^2 + h^2)$ |
| غونډارې ټيکلی<br>غونډارې زون | $V = \frac{1}{6}\pi h(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)$<br>$M = 2\pi rh$ (Kugelzone)<br>$O = \pi(2rh + \varrho_1^2 + \varrho_2^2)$ |
| غونډارې برخه | $V = \frac{2}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{6h}(\varrho^2 + h^2)^2$<br>$O = \pi r(2h + \varrho)$ |

## بيلګه:

۱ – د پنيرخرخ د يوه غونډيطبقي فورم يا بڼه لري. د هغه پاس هواره او ډکی وشميرئ، که وي : $\varrho_1 = \varrho_2 = 25$ cm او $h = 20$ cm.

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$V = (20\pi / 6)(3.25^2 + 3.25^2 + 20^2) = 43458,70\ cm^2$$
$$= 34,458\ dm^2$$

وړانګه r د پیتاګوراس د جملې په مرسته لاس ته راځي :

$$r^2 = \rho_1^2 + (h/2)^2 \Rightarrow r^2 = 25^2 + 10^2 \Rightarrow r = 26,93\ cm$$

نو لرو

$$O = \pi(2.26,93.20 + 2.25^2) = 7310,59cm2 = 73,11\ dm^2$$

۲ – یو دلوبې لاټو یا لوبې څرخې د غونډیټوټې بڼه لري د ټولجګوالی $r = 16$ cm او سور $b = 2\rho = 10$ cm سره. د هغه ډکې او پاسهواره څومره لوی دي؟

د خولې جګوالی د پیتاګوراس د جملې په مرسته لاس ته راځي :

$$(r - h)^2 + \rho^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = -2rh + h^2 + \rho^2 = r^2$$
$$\Leftrightarrow h^2 - 2rh + \rho^2 = 0 \Leftrightarrow h^2 - 32h + 25 = 0$$

د دواړو اوبیو یا حلونو $h_1 = 31,2$ cm او $h_2 = 0,8$ cm سره.

داچې $h < r$ ، نو باید یواځې دوم اوبی یا حل د کارونې یا ګټور وي. له دې امله لاس ته رځي

$$V = 2\pi . 16^2 . 0,8 : 3 = 428,93\ cm^3$$
$$O = 16\pi(2 . 0,8 + 5) = 331,75\ cm^2$$

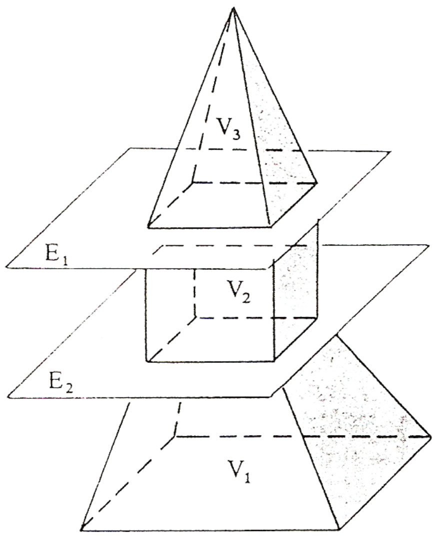
## په خوښه جوړشوي یا فورم شوي بدنونه

لکه څنګه مو چې زیات تر پام تیر شو، ګټوور دی چې د یوه پیچلي بدن د ډکي یا پاسهوارې د شمیرلو لپاره دا بدن په ګټوره توګه یا هدفمند ډول ټوټې ټوټې کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په دې ډول ساده برخه بدنونه منځ ته راځي، کوم چې ض معلومو فرمولونو له لارې شمیرل کیدی شي.

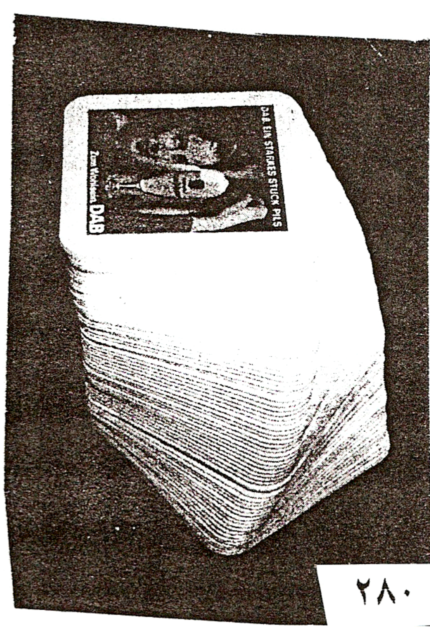



خیره ۲۷۹

بیلګې :

ددې ځیره شوي بدن ډکی له یوه پڅ اهرام، کوادر یا غبرګاړخیز یا مکعب او یوه اهرام څخه لاس ته راځي.دا جوتیږي، که بدن په دوه غوڅیو په هوارو $E_1$ او $E_2$ ټوټه شي .

د بیاتیونی له لارې کیدی شي چې زیات بدنونه یوبل سره پرتله یا مقایسه شي( مخروط، اهرامونه ) د ګیلاس اینبولو ټوټې( داسی ډبل کاغذونه دي چې د پیالیلاندې یا ریمکابي یا پشکاب په ځیر وي او ګیلاسونه پرې اینبوول کیږي ) چې یو په بل اینبول شوي په پام کی نیسو. د دې ټوټو د څرخولو ، یا ځاي بدلولو له لارې جګوالی او ډکی نه بدلیږي. له دې منځ ته راغلی پوړی په پام کی نه نیول کیږي، ځکه چې په تیوري کی




ځیره ۲۸۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

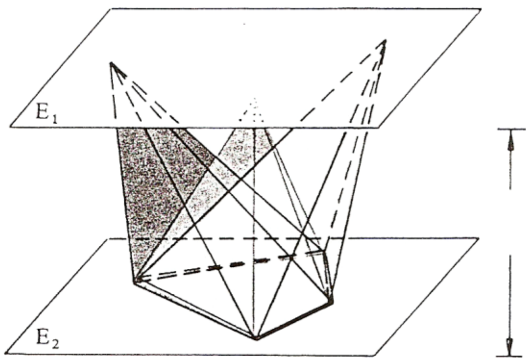


دا بدن د ناپای زیاتو طبقو څخه جوړ دی، چی پنډوالي یی په پام کي نه نیول کیږي د دې نور ورزیات استعمال د کاوالیری Cavalieri پرنځیپ دی

**جمله :**

دوه بدنونه همغه ډکی یا برابر ډکي لري، که د هغو ټول پراته غوڅي په همغه واټن بنسټهوارې ته پراته وي.

په دې کی ضرور نه دی چي غوڅهوارې دی کونګرواینځ وي!




څیره ۲۸۱ : دا بیاتي شوي اهرامونه ډکي برابر دي، څکه چی همغه جګي او برابر بنسټهوارې لري: $V = (1 /2)G.h$
د کوچنیو واټنونوسره هره غوڅهواره چی د بنسټهوارې سره غبرګه وي، په اهرامونوکی هواربرابر غوڅهوارې خوړوي

دا د غونډیډکي شمیرلو لپاره یو ښکلی میتود رامنځ ته کوي.
د یوې ګردي استوانی یا ګردیټوټی څخه چی وړانګه r لري او 2r جګ دی دوه د څوکو یا ککرې له لارې یو بل ته مخامخ مخروطونه غوڅوي ( یو دیابولو ) د $r = h$ سره.
داپاتی خالیفورم یوه د شګو ساعت پوښ راپه ګوته کوي. د یوې دومی همغی سره برابر ې ګردي استوانی یا ګردیټوتی د وړانګي r په اندازه یو غونډی راغوڅوو. د سیومتري له امله بسیا کوي که لاندې نیمغونډی او د «شګو» ساعتنیمی تر څیرنی لاندی ونیسو. هره غوڅهواره یوه بسټهوارې سره غبرګه هواره راکوي، په غونډي کی ګردی په شګوساعتپوښ کی

(c) ketabton.com: The Digital Library

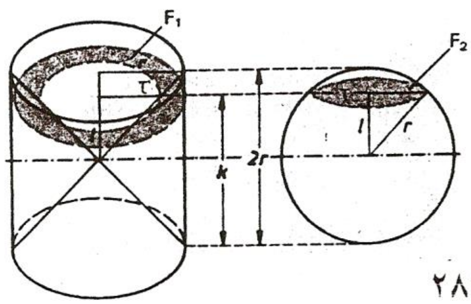


ګردیګوته یا ګردیکړی. دلته دې 'r د دیابولو څخه منځ ته راغلي ګردی ورانګه وي. r د غونډیغوځیګردي ورانګه .

د هوارو لپاره چی واټن 1 له همغه بدن منځټکي ولري، باور لري:

$$F_S = \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi (r^2 - r'^2)$$

$$F_K = \pi r^2 = \pi (r^2 - 1^1)$$




خیره ۲۸۲

د ورانګي جملی څخه، برسیره په دې لاس ته راځي: ← (د ښکوساعت)

$$r' / r = 1 / r \Rightarrow r' = 1$$

$$\Rightarrow F_S = \pi (r^2 - 1^2) F_K$$

دواړه بدنونه ګورو چي ډکیمساوی یا ډکیبرابر دي.

اوس د استوانی ډکی $V_Z = \pi r^2 h = 2\pi r^3$ دی، ځکه چی $h = 2r$ دی .

د دیابولو ډکی دی :

$$V_D = (2\pi r^2 / 3).(h/2) = \pi r^2 .h / 3 = (2/3)\pi r^2$$

او له دې سره د شګوساعت – او نیمغونډي ډکی :

$$V_K = V_Z - V_D = 2\pi r^3 - (2/3)\pi r^3$$

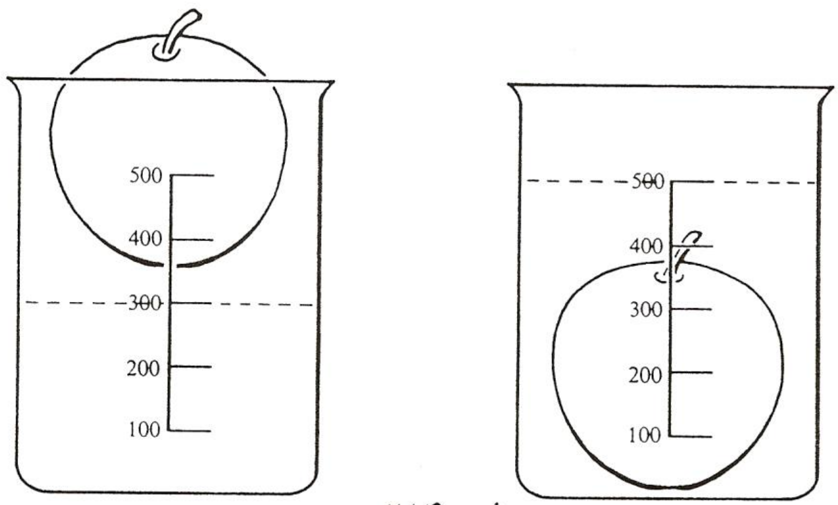
$$V_K = (6/3)\pi r^3 - (2/3)\pi r^3 = (4/3)\pi r^3$$

د پوره نامنظم شکلونو ډکی د شمیرپوهنی له لارې یا هیڅ نه شمیرل کیږي او یا پوره ټیك د پیچلو شمیرنپوهنو متوضو سره هم نه شمیرل کیږي. لکه د یوې منې یا د یوه

(c) ketabton.com: The Digital Library



الو ډکی یواځي فزیکی متودونه یا طریقی مرسته کوي چی ډکي یی وشمیرل شي. لکه په لاندې ځیرو کي ، ځي روښانه شوی دی.




ځیره ۲۸۳ ځیره ۲۸۴

## تمرینونه

۱ – د هغه بدن ډکی څومره لوي دی ، چمنځ ته راځي، که د مکعب په هره هواره یو ولاړ اهرام کیښول شي د $s = a$ سره؟

۲ – یو تیترائیدر څلورهوایز بدن او یو غونډی برابر پاسهواري لري. د هغوي ډکی په کوم تناسب یو بل سره پراته دي یا کومه ځاننیونه یو بل سره لري؟

۳ – هر منظم پولوئید لپاره یوه دننه غونډی شته . چی د هغه هره هواره په منځئتکي کی لمس کوي. ددې وړانګه دی r وي. د پولوئید ډ ګی او$V$ او$O$ پاسهوارې $V = O.r / 3$ لپاره دلایل راوړی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



پام وکړی چی پولوئیدر په اهرامونو ټوټه شي چی وړانګه r ولري، په
ډول چي د پولوئید هر اړخهواره د داسی یوه اهرام بنسټهواره وي.

۴ – د المان د پارلمان په سر منه او اټیران چی له طیلا جوړ دي د پارلمان د
ډانګ سره غبرګ د قدرت نخښنه جوړوي. دا د پارلمان منه به څومره
وي، که دا د پاکی طپلا څخه جوړ وي( $\rho \sim 19,3\ g/cm^3$ ; $\sim 10\ cm$
اټیران وزن ثابت یا ځای په ځای پاتیږي )؟

۵ – یوه غونډی، توته، اهرام ( د هغو بنسټهواره ) برابر وړانګی لري، د اه
غونډی جګوالی یا جګی داسی وټاکی ، چی الف ) همغه ډکي لري» د
برابره پاسهواري لري.

۶ – د یوه غونډی ډوله تیلو څاڅکي څخه، چی ۵ میلي متره نیمی لري، له
توئیږي د یوې ګردی ډوله تیلو پرده جوړوي، چی نیمی ئی ۱ متر . دا
څومره پنډه ده؟

۷ – د یوې سابونپوښکی دیوال به څومره لوي وي، چی دباندنی نیمی یی
سانتي متره وي، کوم چی له څاڅکی جوړ دی، چی نیمی یی ۵ میلي م

۸ – یوه د بنیښنی غونډی د دابضنی نیمی سره، چی ۱۲ سانتي متره دی ۲
وزن لري یا درند دی. د هغی دیوال څومره لوي دی ( $\sim 2,6g/cm3$

۹ – یو هوا بالون یو ۲۵ متره نیمی لري.
الف ) دا دننه سمڅ یا غار یی څومره درووند دی، که د یو مربع متر و
وزن ۴۵ ګرامه وي؟ ب ) ډکی څومره وزن لري که
هایدروجن ( $\rho = 9.10^{-5}\ g/cm^3$ ) د ډکي مادې په څیر وکارول شي؟

۱۰ – یو مکعب کی یو غونډاری یا غونډی د خورا لوي ډکی سره خوندي ک
په یوه غونډاري چی خورا کم ډکی ولری راګیر یا خوندي کیږي.د م
اړخ اوږدوالی 5 cm دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



الف د ټول تن غوڅی څیره وباسی .

ب ) د دواړو غونډارو ډکی او پاسهواره وشمیری .

۱۱ – د لاندې هوایي بدنونو ډکي او پاس هوارې څومره لویي دي:

الف ) سپوږمی ( $r = 1735\ km$ )

ب ) مارس ( $r = 3430\ km$ )

پ ) وینوس ( $r = 6305\ km$ )

ت ) جوپیتر ( ر ( $r = 71800\ km$ )

۱۲ – د کورکغونډي( $\rho = 0,25\ g/cm^3$ ) د ۳۶ سانتي متره نیمي سره یوه غونډیږوله د پارې زړی( $\rho = 11,4\ g/cm^3$ ) لري. دا د پاربزړی څومره لوي دی، که غونډی تر نیمایي په ابو کی ډوبه شي؟

۱۳ – د یوه لوي سړي سږي ۴۰۰ میلیونه غونډیږوله د سږوپوښکی لري، هر یوه د نیمي $0,3\ mm$ سره. د ټولو پوښکیو ګډه پاسهواره څومره ده؟

۱۴ – یو غونډی ، چی وړانګه یی $r = 10\ cm$ ده، د یوې هوارې څخه په ۳ سانتي متره ، له منځ یا کوکز څخه، واټن غوڅیږي. د دواړو برخو غوڅهوارې او ډکي وشمیری.

۱۵ – د پاتی یاد نایادو برخو $M, V, h$ او $r$ د لاندې غونډیبرخو لویوالی وشمیری

a ) $r = 6\ cm$ ; $h = 5\ cm$ b ) $M = 50\ cm^2$ ; $h = 3\ cm$

c ) $h = r = 7\ cm$ d ) $M = 700 cm^2$ ; $r = 10\ cm$

۱۶ – د ځمکی پاسهوارې کومه برخه د ۱۰۰۰۰ متره جګوالی څخه لیدل کیدی شي( د ځمکی وړانګه ۶۳۷۰ کیلومتره ده )

۱۷ – د یوه غونډي نیمی په څلورو برابرو برخو ویشل کیږي٠ په ټوټهټکو کی په نیمی ولاړې درې هوارې اچول کیږي. په کوم څاننیونه یا تناسب کی

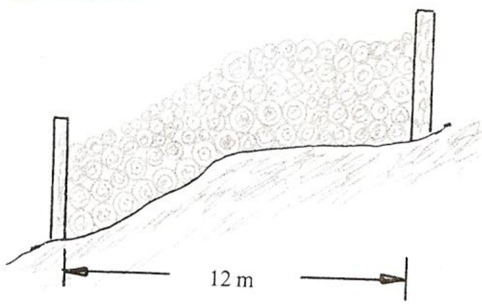
الف ) د پوښهوارې ، ب ) د راپیدا شوو یا منځ ته راغلو غونډي برخو

(c) ketabton.com: The Digital Library



سره پراته دي؟

۱۸ – په یوه غونډي کی، له منځ څخه لیدلو یا کتلو سره ، هوایی( دلته مطلب د غونډي ترمنځ هوا یا د هواډکی دی) پرسیدنه، د دریواړو کواوردیناتو څخه برابردي. که دا یو له بل توپیر ولري، نو د الیپسوئید څخه غبرېږو، چی اصلی محورونه یی a,b او c دي. د ایلیپسوئید ډکی د فرمول V = (4 /3) a.b.c له مخی شمیرل کیږي. ځکه په رینبتونی غونډی نه دی، بلکه یو الیپسوئید، چی اصلي محورونه يي a = c = 6378 km ( د اکواتور وړانګه ) او b = 6357 km ( قطبي وړانګه ) لوي دي. ( که په کلکه ونیول شي نو د اکواتوروړانګو ترمنځ یو کوچنی توپیر شته ) د ځمکي ډکی وشمیری او د مخ ته تیر غونډي او غونډي برخي کی لوستلو سره یی پرتله کړی )




خیره ۲۸۵

۱۹ –په یوه زوړندي یا پیچومی باندي ۱ متر اوږد لرګی ډیری شوی، لکه په خیره ۲۸۵ کی چی لیدل کیږي. څومره د هوامتر لرګی دا 1,20 m جګه د لرګوډیری لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

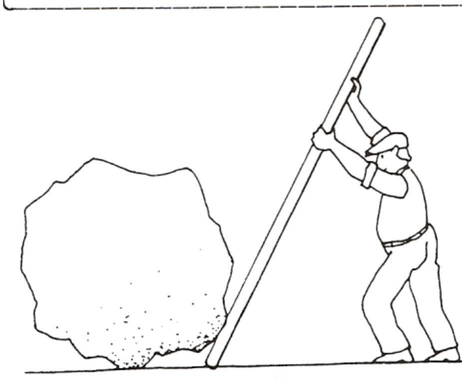


# وکتورشمیرنه

## نځورونه

### پیلبیلګه

یوه درنديږ تيګی ته څنګه سږی حرکت ورکولی شي؟ طبعاً کيدی شي چې وړل
يی وازمائل شي، مګر دا پوره ستونځی لري او دا لاندې طريقه يی ساده ده: د
تيګی لاندې سږی يوه تخته يا اړم ننبلوي او يا ورلاندې کوي، د بل سر نه يی
لاندې لور ته زور کوي يا لاندې لور ته زور په واردوي. تيګه يو څرخونحرکت
باندې راځي.
ددې حالت لپاره د اړم قانون صدق کوي« زور د زوراړم = بار د بار اړم» .
که تيکه په پوره اندازه اوږده (او ستابيل ) وي، کيدی چې يو ډير نازورور
سږی هم کړی شي، چې خورا درانده بارونه پورته کړي.

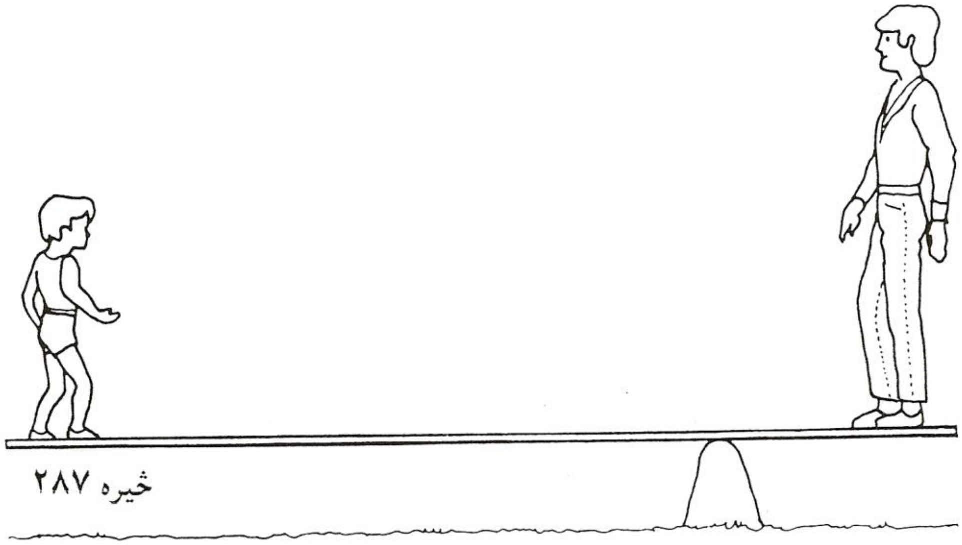


خیره ۲۸۶

يا دا حالت د پورته پيلبيلګي سره تيك
روښانه څرګند شوی ؟ هيڅ نه پيښيږي،
كه څوك په اړم ښکته يا پورته زور ونه
کړي بلکه يا راکښ يا وريوري وهي.
موږ بايد دا پوښتنه نوره هم روښانه کړو
او د زوراړښت سره دزورتاشي لور هم په
شپله لوبه کی ورداخل کړو. ددې هدف لپاره
وکتور سره شميرنه کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

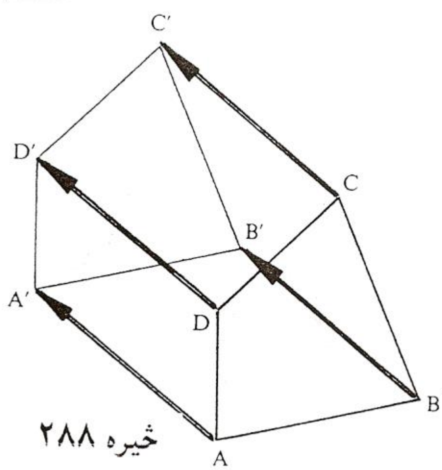




ځيره ۲۸۷

**تعريف** : وکتور د يوه ارزښت او يوه لور سره تعريف دی. **تل د يوه غشي په** ځير انځورېږي. اوږدوالی د وکتور ارزښت (ګڼ ارزښت) ، په هواکی يی ځای لور او د غشي ځوکه د وکتورلور موخه يا هدف ښايي.

## دوکتورونو لپاره د کارونی ساحی




ځيره ۲۸۸

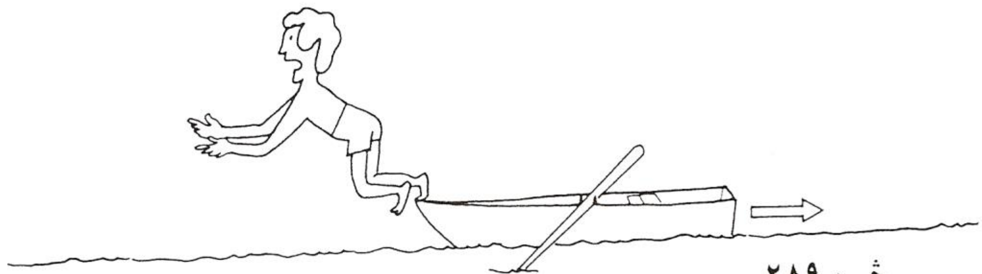
ګڼونه د مخنخښی سره کيدی شي د وکتور په حيث واضح شي. په فزيک کی کښول، لکه زورونه، سرعتتونه، لارې کيدی شي د وکتورونو په ځير انځور شي. ( د جلالکوټ ځخه و

ځيره ✓ کښول په وکتور سره په ښنه کيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



و هسکی مینی ته رابنایی، چی دا لار دا دوه ځایونه سره ونخلوي او دا هم رابنايي چی څومره اږده ده. وکتور دا را په ګوته کوي، چی ایا څوك له جلاکوټ څخه هسکی مینی ته ځي او که له هسکی مینی څخه جلالکوټ ته )



څیره ۲۸۹

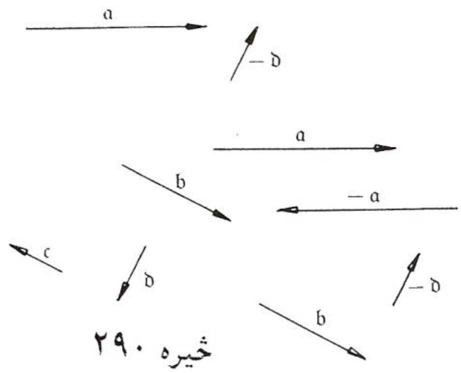
داچی یو وکتور د خپل پیلټکي او پایټکي سره ورکړ شوی دی، کیدی شي چی دا ټکي هم د هغه په انځورونه کی استعمال شي.

**تعریف**: هغه وکتور چي له ټکي P و ټکي Q ته لاربنودوي، د $\overrightarrow{PQ}$ سره په نخښه کیږي.
بل ډول لیکدودونه یی دي: $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} = \vec{a}$ .

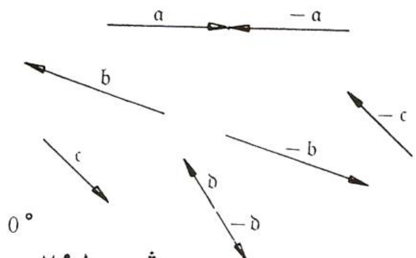
په راکبنلو سره که ټکی 'P د P څیره او ټکي 'Q د ټکي Q څیره وي، نو د $\overrightarrow{PQ}$ اوږدوالی او لورد $\overrightarrow{P'Q'}$ یو بل سره برابر دي. له دې امله دا باید برابر ولیدل شي یا وګڼل شي. یو وکتور له دې امله یو غشی نه دی بلکه ډیر یوبل سره غبرګ او کوګروایننخ غشي دي. له دې امله د ورته ټولګي څخه هم غږیدی شو. ( دا دې ځما په لمړي د شمیتپوهنی کتاب کي وکتل شي )

(c) ketabton.com: The Digital Library





ځیره ۲۹۰



ځیره ۲۹۱

ځیره       وکتورو نه د ایکویوالنځېولګی

په ځیر: دوه وکتورونه ټیك هلته سره برابر دي، که هغه همغه ارزښت(اوږدوالی) او همغه لور ولري.

**تعریف**

د **a** مطلقه ارزښت $a = |\mathbf{a}|$ دی. $a$ تل یو نامنفي ګڼ دی .

وکتورونه د ارزښت ۱ سره موږ یوونوکتورونه یا واحدوکتورونه بولو.

وکتورونه د همغه ارزښت سره مګر د مخامخ لور سره مخامخ یا په ځټ وکتورونه بلل کیږي:

$$|\mathbf{a}| = |-\mathbf{a}| = a$$

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{a} = -\overrightarrow{QP} = -(-\mathbf{a})$$

یواځنی وکتور د 0 (صفر) ارزښت سره صفروکتور **0** دی :

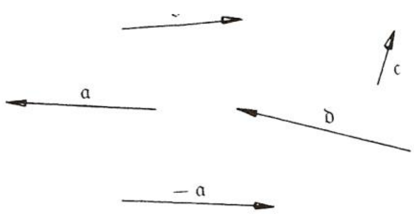
$$\overrightarrow{AA} = \mathbf{a} \Rightarrow |\overrightarrow{AA}| = |\mathbf{a}| = 0$$

دا چی وکتورونه له ټکي وټکي ته لاري روښانه کوي، کیدي شي چی د وکتورونو د توضیح لپاره کواوردینات یا پروت ولاړ سیستمونه (محورونه) هم وکارول شي:

**تعریف:** وکتورکواردینات د پیل او پای ټکو توپیر یا کمون څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library






خيره ۲۹۲

په هواره کي : $a = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix}$

په هوا کی : $a = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix}$

خيره وکتورونه او د هغوي ارزښتونه( اوږدوالی ):

$|\mathbf{a}| = |\mathbf{-a}| = 2{,}5$ ; $|\mathbf{b}| = 2$ ; $|\mathbf{c}| = 1$ ; $|\mathbf{v}| = 3$

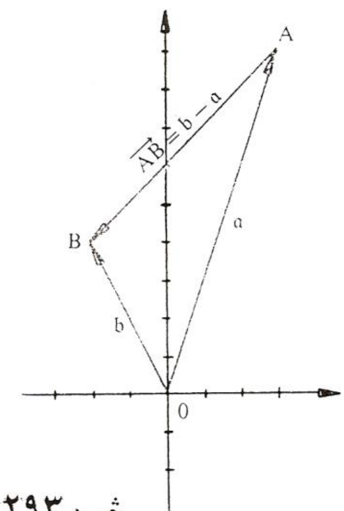
## بيلګي:

وي دې $A(3|9)$ او $B(-2|4)$ پيل– او پايتکي . نو د A او B څخه ټاکلی وکتور کواوردينات په لاندې ډول لاس ته راځي :

$$a = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad b = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$c = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$-c = \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 3+2 \\ 9-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$




خيره ۲۹۳

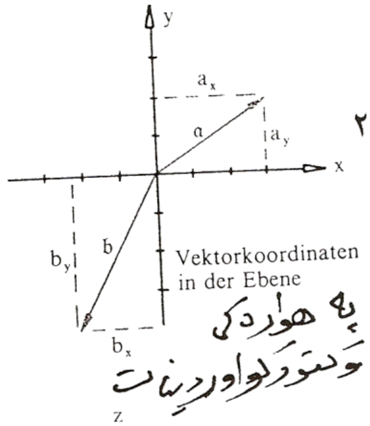
**جمله:** د وکتور ارزښت د پيتاګوراس له جملی څخه لاس ته راځي او دا د يوګونو کواودیناتو له لارې :

په هواره کی: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په هوا کې: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$



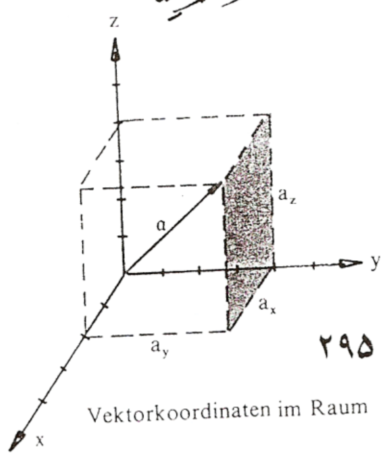

شيره ۲۹۴

بیلګې :

$$a = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow |b| = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} \approx 11{,}31$$

$$c = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |c| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{77} \approx 8{,}77$$




شيره ۲۹۵

په هواکې
وکتورکواوردینات

## وکتورزیاتون او s–ځلوون یا ضربول

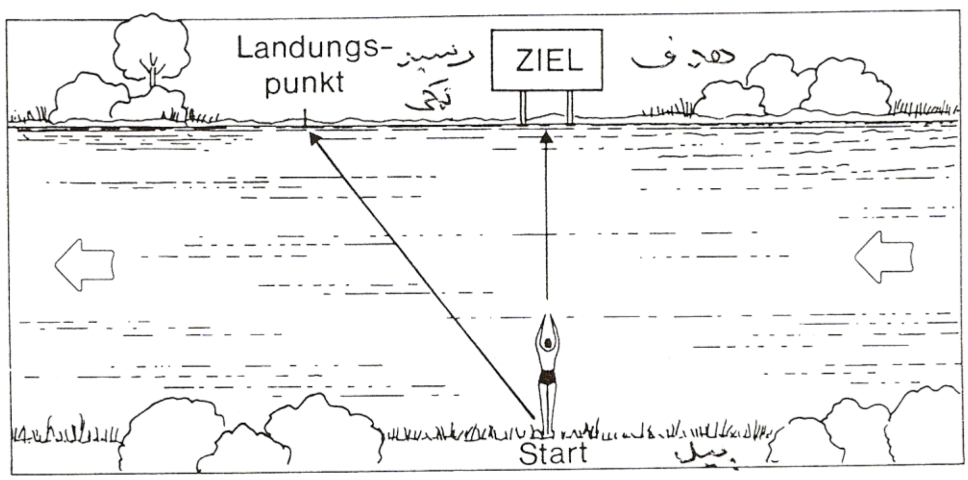
**پیلبیلګه:** یو لامبووهونکی د سین بلی لور ته د سین په سور یا پلنو لامبی، دا په دې مانا چې اوبه روانی دي. سره له دې چې دا تل سیده لامبي ، دا نه شي کولی چې هغه د لمبا ځاي ته مخامخ ځاي ته ولمبیدی شي.د روانو اوبو څخه د ځان سره وړ کیږي. په ټولیزه –

(c) ketabton.com: The Digital Library



یا عمومي توګه ده يو مائل حرکت وکړ يا مايل يي ولمبل، کوم چی د ده د لمبا سرعت او د سين سرعت يو په بل زيات شوي دي.

ګرافيکی د وکتورزياتون داسی صورت نيسي، چی د دواړو سرعتونو وکتورغشي په خپلو پيل ټکو يو په بل ږدي او دا هر يو د يوه غبرګ اړخيز سره يوځايی وصل کوي. د غبرګ اړخيز نيمی د دواړو سرعت وکتورونو زياتون ، چی له پيل ټکی پيل کيږي انځوروي. يعنی د لامبووهونکي او د اوبو د سرعت زياتون ، څمور په څيره کی »




څيره ۲۹۶

**تعريف:** وکتورونو ګرافيکی سره زياتيږي، که د دوهم وکتور پيلټکی د لمړي وکتور په پاګي کيښول شي يعنی د غشی په سر کيښول شي او داسی وريسی . دا زياتون وکتور نو بيا د لمړي وکتور د پيل ټکی د دوهم وکتور يا د څنځير اخرني وکتور د څوکی يا غشي سر پوري غزول کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د خیرونو څخه دا لاندې هم لاس ته راتلی شي

جمله : د زیاتونوکتور کواودینات همداسی کمونوکتور د پیلوکتور د زیاتوز همداسی کوم څخه لاس ته راځي.

په هوار کې

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \end{pmatrix}$$

په فضا کې

$$a + b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

بېلګه

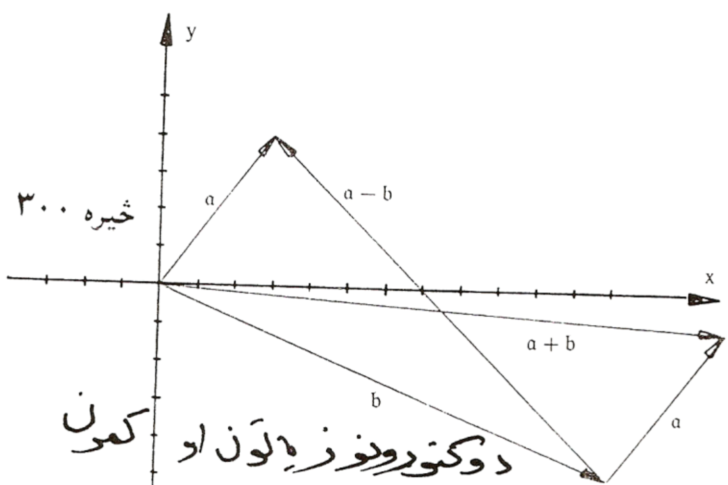
**1.** $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad |a| = 5 \quad |b| = 13$

$$\Rightarrow a + b = \begin{pmatrix} 3 + 12 \\ 4 \ - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$a - b = \begin{pmatrix} 3 - 12 \\ 4 \ + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$b - a = \begin{pmatrix} 12 - 3 \\ -5 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$|a - b| = |b - a| \approx 12{,}73; \quad |a + b| \approx 15{,}03$$




Addition und Subtraktion von Vektoren

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$2.\ a=\begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix};\quad b=\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix};\quad c=\begin{pmatrix}7\\8\\-9\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a+b=\begin{pmatrix}4-2\\3+0\\2+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\7\end{pmatrix}$$

$$a-c=\begin{pmatrix}4-7\\3-8\\2+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\ 3\\-\ 5\\11\end{pmatrix}$$

$$a-b+c=\begin{pmatrix}4+2+7\\3-0+8\\2-5-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\11\\-12\end{pmatrix}$$

$$a+a=\begin{pmatrix}4+4\\3+3\\2+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\6\\4\end{pmatrix}=2\cdot a$$

دا وروستنی بیلګه د وکتورونو د ځلولو لپاره ده چي له ګڼونو سره ځل شوي ( s– ځلون یا · ضربونه ) یعنی د سکالار سره ځلونه :

**تعریف :** وي دې s یو ریل ګڼ ( سکالار هم نومیږي ) **a** یو وکتور. نو s.**a** = **a** . s هغه وکتور لاس ته راکوي ، چې همغه لور ولري لکه **a** او s –واره اوږدوالی ولري. وکتور **a** له s سره ځلیږي، که د وکتور هر کومپوننت د s سره ځل شي:

په هوار کې $s\cdot a=\begin{pmatrix}s\cdot a_x\\s\cdot a_y\end{pmatrix}$ ، په هوا کې $s\cdot a=\begin{pmatrix}s\cdot a_x\\s\cdot a_y\\s\cdot a_z\end{pmatrix}$

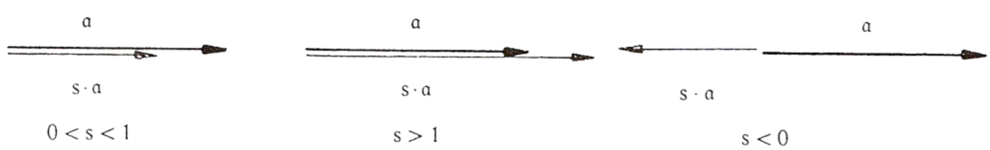
(c) ketabton.com: The Digital Library



$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}; \quad s_1 = 4; \quad s_2 = -0,5$$

$$\Rightarrow s_1 \cdot a = \begin{pmatrix} 4 \cdot 5 \\ 4 \cdot 7 \\ 4 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 28 \\ 36 \end{pmatrix}; \quad s_2 \cdot a = \begin{pmatrix} -0,5 \cdot 5 \\ -0,5 \cdot 7 \\ -0,5 \cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ -3,5 \\ -4,5 \end{pmatrix}$$

هندسي د يوه وکتور ځلونه د يوه رييلګڼ سره د هغه وکتور منځنى غزونه ده د ځلوونى يا فاکتور s په اندازه. د وکتور پيلتيګى د کږښمنځ يا غزونمنځ دى.
دلته د $|s| > 1$ سره وکتور اوږديږي يا غزيږي» او د $|s| < 1$ سره وکتور لنډيږي.
د $|s| = 1$ لپاره د وکتور ارزښت تغير نه خوري. که $s < 0$ وي، نو د وکتور لور راپه څټ کيږي يا راګرځي يا برعکس کيږي.




خيره ۳۰۱: د وکتورa ځلونه د يوه رئيل ګڼ s سره.

که $s = 0$ وي ، نو s.**a** صفر وکتور **0** دى .

**جمله** :په ټوله توګه يا مجموعه کى د سکالار سره د وکتور ځلونو لپاره ل اندې شمير قاعدې باور لري:

$$|s.\mathbf{a}| = |s|.|\mathbf{a}|$$
$$(s_1 + s_2).\mathbf{a} = s_1.\mathbf{a} + s_2.\mathbf{a}$$
$$s.(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s.\mathbf{a} + s.\mathbf{b}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګې:

1. $\left| -3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -9 \\ -12 \\ -15 \end{vmatrix} \approx 21,21$

$\left| -3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = |-3| \cdot \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = 3 \cdot \sqrt{50} \approx 21,21$

2. $(4-6)\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = (-2)\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -14 \end{pmatrix}$

$(4-6) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 28 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 \\ 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -14 \end{pmatrix}$

3. $3 \cdot \left[ \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right] = 3 \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -27 \\ 9 \end{pmatrix}$

$3 \cdot \left[ \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} \right] = 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -9 \\ 33 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ -27 \\ 9 \end{pmatrix}$

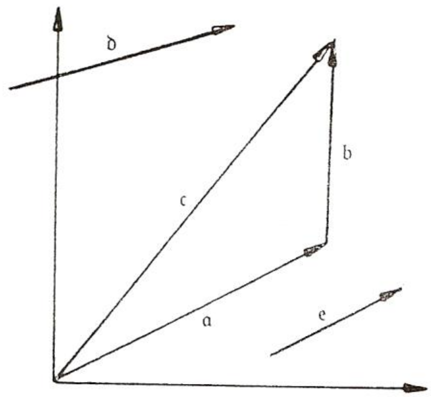
که یو وکتور د بل وکتور زیاتواره په څیر انځور کړی شي، نو دواړه وکتورونه لاینې بلواك بلل کیږي، په غیر له دې لاین خپلواك بلل کیږي.
ټیك په لاندې توګه افده کیږي:

> **تعریف:** دوه وکتورونه **a** او **b** لاینې بلواك دي، که چیرې (یواځنی ټاکلی) ریيلګڼ s (سکالار) موجود وي د کوم لپاره چې **s.a = b** باور ولري.
> دا وکتورونه لاینخپلواك دی، که انځورونه **s.a = b** د هیڅکوم ریيل ګڼ s لپاره ممکنه نه وي.

په هواره ( $R^2$ ) کی تل دري وکتورونه لائنې بلواك دي. په هوا ( $R^3$ ) کی تل ۴ وکتورونه لاینبلواك دي. په هواره زیات تر زیاته ۲ او په هوا کی زیات تر زیات

(c) ketabton.com: The Digital Library






خيره ۳۰۲

دري وکتورونه لاينيخپلواك کيدی شي.

| لايني بلواك وکتورونه | لايني خپلواك وکتورونه د بيلګی پو توګه |
|---|---|
| {a, e} | {a, b} |
| {a, b, c} | {b, c} |
| {a, c, d} | {e, d} |

---

بيلګي:

۱ – وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix}$ لايني بلواك دي ، ځکه چی

$$s.\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -22 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -3.s = 6 \\ 6.s = -12 \\ 11.s = -22 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = -2 \\ s = -2 \\ s = -2 \end{matrix}$$

۲ – په څټ يا برعکس، وکتورونه $a = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$ لاينيخپلواك دی، ځکه چی :

$$s.\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} -4.s = 10 \\ 6.s = 15 \\ 8.s = 20 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} s = -2,5 \\ s = 2,5 \\ s = 2,5 \end{matrix}$$

ګورو، چی دلته سره ګډ يا مساوي s نه شي پيداکيدی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د وکتورونو لايني خپلواکوالي او لايني بلواکوالي په هواره او هوا کي د وکتورونو انځورونو لپاره په کارول کيدي شي:
لکه څنګه چي ټکي په کواوردیناتو کی تعریفیږي چي خپل واټن له محور څخه بيانوي، نو همداسی کيدی شي چي وکتورونه ، ځانونه، په خوښه داسی وکتورونو روښانه يا بيان کړي، چي ځغاستلور یی یو ددې کواوردیناتو محور وي..

**تعریف:**

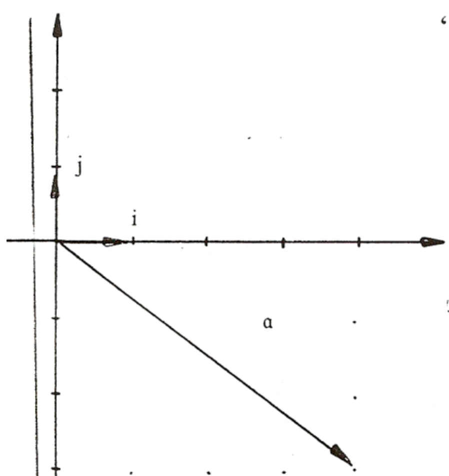
وکتورونه : $i=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او $j=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ په هواره کي، همداسی

وکتورونه $i=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ او $j=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ په هوا کي او $k=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

بنسټ وکتورونه بلل کيږي. دا مثبتمحور لو په ګوته کوي او ددې لپاره باور لري:

$$|\mathbf{i}|=|\mathbf{j}|=|\mathbf{k}|=1$$

هر وکتور کيدی چي په هواره کی له i او j او په هوا کي د i , j او k وکتورونو په نامه لايني کمبيناشن په څير د بنسټ وکتورونو څخه انځور کړی شي.




شيره ۳۰۳

**بيلګي:**

$$a=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=4\cdot i-3\cdot j=4\cdot i+(-3)\cdot j$$

$$b=\begin{pmatrix}-3\\11\\6\end{pmatrix}=-3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+11\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+6\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=-3i+11j+6k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



په پای کی یو نظر په الجبري جوړښت، چی وکتورونه یی د زیاتون او کمون په بنسټ او د ریيلګڼونو سره څلونی له لاري لري:

---

د ټولو وکتورونو ډیری V په هواره کی ( همدا ډول په هوا کی ) د زیاتون په نسبت یو زیاتون کموتاتیو ګروپ جوړوي ( د ګروپ تعریف وروسته )، ځکه چی لرو :

اول – $a + b \in V$ د ټولو $b, a$ لپاره ، چی له V وي. رابندیدنه

دوم – $(a + b) + c = a + (b + c)$ د ټولو $c, b, a$ لپاره، چی له V وي اسوشیاتیو قانون

دریم – $0 + a = a + 0$ صفر وکتور 0 ناپییلی توکی دی

څلورم – $a + (-a) = (-a) + a = 0$ هر وکتور ته یو په څټ وکتور یعني مخامخ وکتور موجود دی

پنځم – $a + b = b + a$ د ټولو $a, b$ لپاره، چی له V وي. کموتاتیو قانون

برسیره پر دې د څلوونی لپاره د یوه ریل ګڼ سره باور لري:

شپږم – $s.\, a \in V$ د ټولو $a$ لپاره ، چی له V وي

اووم – $1 .\, a = a$ د ټولو $a$ لپاره، چی له V وي

اتم – $(m+n) .\, a = m.a + na$ د ټولو ریيلګڼون m او n لپاره او هر وکتور $a$ لپاره ، چی له V وي.

نهم – $m.(a + b) = m.\, a + n.b$ د ټولو وکتورونو $a$ او $b$ لپاره چي له V وي او هر ریيل ګڼ m لپاره.

په ټولګیزه توګه یو داسی جوړښتخویونه د وکتورهوایا ۰ فضا تر نامه یادیږي.

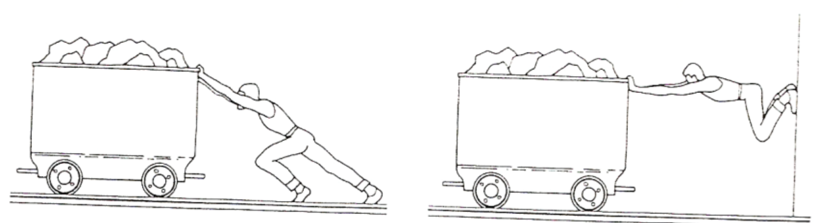
(c) ketabton.com: The Digital Library



# سکالار ځل

وکتورونهٔ لکه چی ومو لیدل،کیدی شي چی سره زیات شي او یا د یوه ریبلګڼ سره ځل شي . کیدی شي، چی وکتورونه یو له بل سره هم ځل کړی شي؟
دا حتی په دوه توپیریدونکو ډولونو ممکن دی . یو واریانت یو د یوې لوي په توګه، بیرته یو وکتورهوا جوړوي( د مخه لوستل شوی دی)، بل یې د یوې لوي په توګه سکالار لاس ته راکوي، چی دا یواځي ارزښت لري او لور نه لري.

پیلبیلګه :
په پخوا وختونو کی د سکرو د کانو واګونونه په لاس راکښل کیده. دلته دا پوښتنه رامنځ ته کیږي، چی ولی کارګر واګون مخته راکښوده او په همدې توګه ټیلواهه، ددې لپاره چی موټر سم پورته کړي؟



خیره ۳۰۴

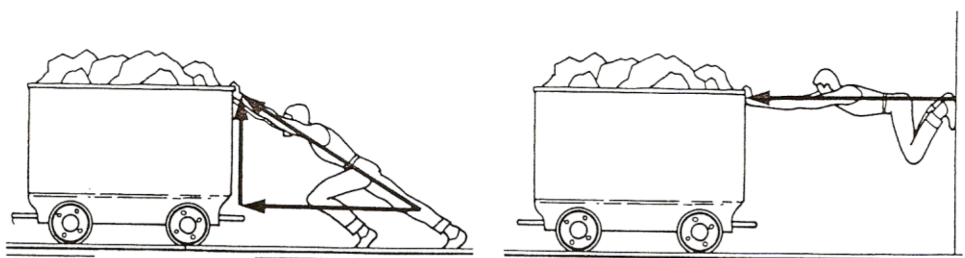
ددې پوښتنی سره موږ د دوه وکتوري لویو سره سر او کا رلرو: زور او لار، چی د هغو ځل په فزیك کی «کار» بلل کیږي. هغه زور چی واګون په حرکت کی راولی، باید د واګون په لور واچول شي یا د واګون په لور تاثیر وکړي. یو په پورته لور اچولی زور کړی شي چی واګون پورته کړي. هر مایل تاثیر کوونکی زور کیدی شي د وکتور زیاتون قانون له لارې په یوه واګون سره غبرګ او بل په دې ولاړ زور ټوټه کړي یا تجزیه کړي. یواځي پروت زور واګون د مخ لور ته

(c) ketabton.com: The Digital Library



په حرکت راولي. په دې توګه واردونکی زور او مؤثر زور په ټولیزه توګه همغه یو زور نه دی. دا د دې پوښتنې ځواب هم دې، چې ولې کارګر د مخ لور ته تکیه وهي.: هغه رسی چې د هغی له لارې زور اچول کیږي، نزدې ځمکې سره غبرګه ځغلي ( = لار ) ، ( نزدې د متهو ټول زور کیدی شي مؤثر واقع شي. هر څومره چې کونج د ځمکې او رسی ترمنځ مایل وي، همغومره زیات زور بی تاثیره پاتي کیږي.

دا په کار اچولی زور ، په دوه یو په بل ولاړو کمپوننتو (زورونو) ټوټه کیدل یو ولاړکونجیز دریګوډی جوړوي، دا لار سره غبرګ زور د $F.\cos\alpha$ په څیر لاس ته راځي . کار $W = F.s.\cos\alpha$ پخپله په برخلاف د جوړښتلوی زور او لار – لور نه لري، بلکه یواځی ارزښت لري:
دا یو سکالار دی.



خیره ۳۰۵

**تعریف:**

د دوه وکتورونو **a** او **b** یو **a . b** سکالار ځل لاندي( ویل کیږي **a** ځل **b** ) یو یواځنی ریل ګڼ پوهیدل کیږی ،

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|.\cos\alpha = a.b.\cos\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

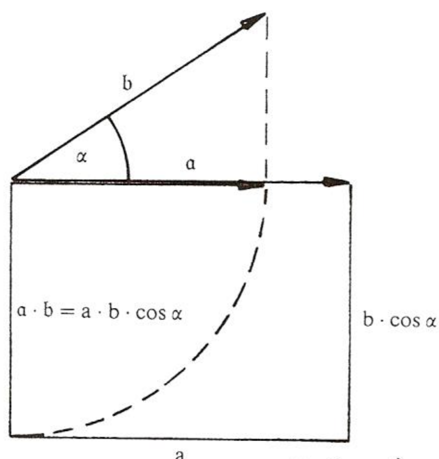


دلته کونج ∝ د a او b وکتورونو ترمنځ کونج دی .

هندسي سکالار ځل د یوه ولاړکونجیز هوارمتن دی یا هواره ده د اړخونو a او b.cos∝ سره ( د b پریوستون په a ). داسی یوه هواره هلته موجود ده، که له دې وکتورونو هیڅ یو هم د صفر اوږدوالی ونه لري او یا cos∝ |= 0 ، یعني ∝ ≠ 90° ده.

د b ولاړ پریوستون په a کله کله په ∝ سره ښول کیږي: $b_a = b.\cos\alpha$

$$\mathbf{a.b} = a.b_a$$



څیره ۳۰۶

جمله: د دوه وکتورونو a |= 0 او b |= 0 سکالار ځل هلته او هلته صفر دی، کله چې دواړه یو په بل ولاړ وي:

**a . b = 0 <=> a _|_ b**

بیلګه:

د یوه ولاړکونجیز کواوردینات سیستم (Orthono.-rmalbasis اورتونورمالبنسټ ) یو په بل نیغ ولا ړ دي. له دې امله له دوه مختلفو وکتورونو ځل صفر دی او د یوه بنسټوکتور سکالار ځل د ځان سره تل ۱ دی :

$$\mathbf{i.i = j.j = k.k = 1 \quad , \quad i.j = j.k = k.i = 0}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د د زیاتون څخه په بل ډول، د وکتورډیری نسبت و سکالار ځل ته ترلی یا رابند نه دی . د سکالار ځل د په خوښه وکتورونو ځل د هغه ډیري څخه راوباسی، چی عملیه په کی اجرا کیږي، دا په دې مان چی دا نتیجه بیرته وکتور نه دی یعنی د وکتو په ډیري کی هم نه دی پروت. دلته اسوشیاتیو قانون هم باور نه لري:

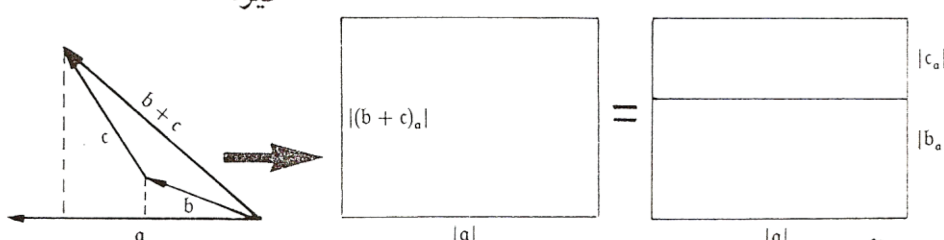
$$\mathbf{a}.(\mathbf{b}.\mathbf{c}) = \mathbf{a}.|\mathbf{b}|.|\mathbf{c}| \cos(\mathbf{b}.\mathbf{c})$$

د $\mathbf{a}$ یو زیتخله دی او په ښې : $(\mathbf{a}.\mathbf{b}).\mathbf{c}= |\mathbf{a}|.|\mathbf{b}|.\cos(\mathbf{a}.\mathbf{b}).\mathbf{c}$ د $\mathbf{c}$ یو زیاتځل دی.

سره له دې هم باورلري:

| | |
|---|---|
| سکالار ځل کموتاتیو دی : | $\mathbf{a}.\mathbf{b}= \mathbf{b}.\mathbf{a}$ |
| او وکتور زیاتو ته دیستریبوتیو دی. | $\mathbf{a}.(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}.\mathbf{b}+\mathbf{a}.\mathbf{c}$ |

خیره ۳۰۷




Das Distributivgesetz $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

کموتاتیو قانون په کمپوننتوانځورونو له لارې او بنسټ وکتورونو له لارې ساده ښوول یا ثابت کیدی شي. د بیلګي په توګه په هواره کی :

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$a \cdot b = (a_x \cdot i + a_y \cdot j) \cdot (b_x \cdot i + b_y \cdot j)$$
$$a \cdot b = a_x i \cdot b_x i + a_y j \cdot b_x i + a_x i \cdot b_y j + a_y j \cdot b_y j$$
$$a \cdot b = a_x b_x i \cdot i + a_y b_x j \cdot i + a_x b_y i \cdot j + a_y b_y j \cdot j$$
$$a \cdot b = a_x b_x \cdot 1 + a_y b_x \cdot 0 + a_x b_y \cdot 0 + a_y b_y \cdot 1$$
$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y$$
$$a \cdot b = b_x a_x + b_y a_y = b \cdot a$$

په ورته ډول دا د دري او زيات کمپوننتوکتورنو لپاره هم ښوول کيدي شي:

---

**تعريف** : د سکالار ځل د کمپوننت انځورونی لپاره باور لري:

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_y \\ b_y \end{pmatrix} = a_x a_y + b_x b_y \quad \text{bzw.} \quad a \cdot b = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

همدا سی

د **a** او **b** ترمځ کونج په لان دې ډول تاکل کيږي:

$$\cos \alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}.$$

---

ددوه وکتورونو ترمنځ رابند کونج $\alpha$ شميرنه د تير مخ مساواتو څخه لاس ته راځي بيلګي:

**1.** $a = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow a \cdot b = (-3) \cdot 10 + 5 \cdot 6 = 0$

also auch $\cos \alpha = \dfrac{0}{\sqrt{(9 + 25)} \cdot \sqrt{(100 + 36)}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$

**2.** $a = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow |a| = a = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90}; \quad |b| = b = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$

$a \cdot b = 9 \cdot 2 + 3 \cdot (-5) = 18 - 15 = 3 \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{3}{\sqrt{90} \cdot \sqrt{29}} \approx 0{,}05872 \Rightarrow \alpha \approx 86{,}63°$

(c) ketabton.com: The Digital Library



## وکتورځل

**پیبیلګه:**
که چیرې په یوه سوري جام کي اوبه واچوی او بیا سوری خلاس کړی او یا که چیرې تاسو یو لاسمینځي یا لمباڼه ډك کړی وي، نو که چیرې اوبه بندی راوباسی اوبه په ښیلوریز څرخون ډوله حرکت له سوري وځي .
دا داوبو تویدل د دروند ورن په ذریعه منځ ته راځي ، په ښي لور څرخیدنه اوبه د کوریولیسزور Corioliskraft له لارې منځ ته راځي. دا د کشولو زور په حرکت کوونکي سیستم کی باید وکتل شي یا تر نظر لاندې وي، او دا د ځمکی په ځانڅرخون له لارې کتل کیدیشي.

د دوه وکتوري لویو یو بل باندې تاثیر له امله ( حرکت یا خوزیدنه د دروندزور په بنسټ او د ځمکی څرخون له امله خوزیدنه یا حرکت ) یوه بله لویه ، چیدا هم وکتوري لویه ده منځ ته راځي. د دریواړه، د لور له امله ، په یوائنی ګډاړیکو کی سره پرتی دي، او او د دریمی ارزښت کیدی شي د نورو دوهو ارزښتونو لاس ته راوړو. په ټولیزه توګه باور لري:

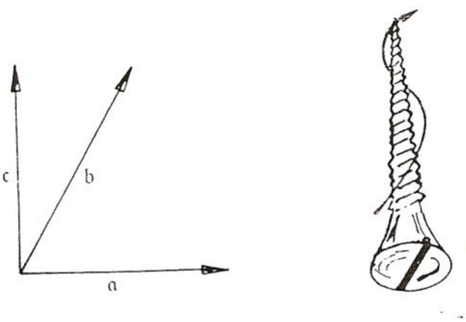
**تعریف :**
د وکتورځل $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ لاندې ( **a** اټیران **b** ) یو وکتور پوهیږو، چی لاندې خویونه ولري
اول . دا وکتوردریګوني **a,b,c** په لړیپرلپسی یو ښی سیستم جوړوي
دوم. وکتور **c** په وکتورونو **a** او **b** نیغ ولاړدی، یعنی په هغی هواره هم چی د دوه وکتورونه په کی پراته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

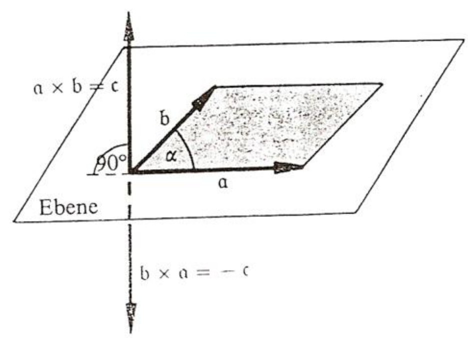


دریم. د وکتور **c** ارزښت د **a** او **b** څخه جوړ غبرګ اړخیز سره مساوي دی

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|.|\mathbf{b}| . \sin(\mathbf{a};\mathbf{b}) = a.b.\sin \alpha$$




خیره ۳۰۸ : یو ښی سیستم کیدی شي، چی د پیچیمیخ له لاري وښوول شي: که پیچیمیخ له **a** و **b** ته وځرخول شي، نو میخ د **c** په لور خوزي یا حرکت کوي




خیره ۳۰۹

خیره ۳۰۹ : وکتور ځل او هندسي اهمیت یی

پس که د وکتور وکتور ځل صفر وکتور وي ، نو یا یو له دې دواړو وکتورونو صفروکتور دی او یا دواړه سره غبرګ پراته دي( دا په دې مانا، چی $\alpha = 0$ او یا $\alpha = 180°$)

**جمله:** وکتور **c** د دیترمینانت په مرسته د وکتورونو **a** او **b** د کمپوننتو له لارې لاس ته راوړ کیدي شي

$$c = a \times b = \begin{vmatrix} i & a_x & b_x \\ j & a_y & b_y \\ k & a_z & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

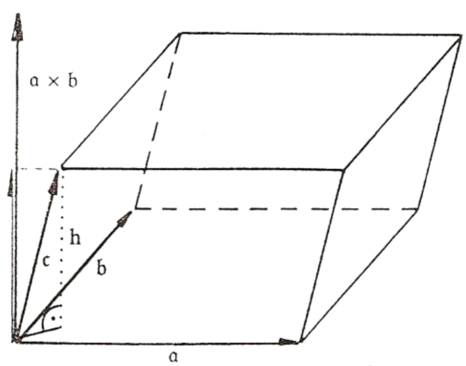
$$c = a \times b = (a_y b_z - b_y a_z)\, i + (a_z b_x - b_z a_x)\, j + (a_x b_y - b_x a_y)\, k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



## شپاتځل Spatprodukt یا غبرګهواریزي ځل

د وکتورځلونه ارزښت هغه غبرګهواریزې هواره ده، کومه چې له دواړو وکتورونو غزیږي. یو دریخوایز یا دریدمینزیونال وینه و غبرهواریز ته شپات یا بیرته همغه شپږهواریز وایي ( دا د مخه لوستل شوی ) دا کیدی شي، چې له درې وکتورونو څخه غزیدلی فکر ته راوړل شي. د دې ډکی داسی شمیرل کیږي، چې بنسټهواره د جګي سره ځل کړای شي. دا جګي د **c** ولاړ پریوستون دی، په **a** × **b** . یو هندسي بدنیز Stereometrische اوبی یا حل له دې امله د **c** او **a** × **b** د سکالارځل له لارې لاس ته راوړ لکیږي.




څیره ۳۱۰

**تعریف :**

د وکتورونو **a , b** او **c** څخه غزیدلی شپات یا غبرګهواریز ( Parallelepiped ) ډکی دلاندې ځل څخه شمیرل کیږي:

$$V_{Spat} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

دا غبرګهواریزځل مثبت دی، که وکتورونه **a ,b , c** په دې ترتیب یو لړیپرلسی ښی سیستم جوړ کړي، په غیر له دې بیا منفی دی.

تر هغی ، چې بنسټهواره د یوه وکتور له لارې ځان ښای یا ښوول کیږي یا ځان څرګندوي، نو دا ډکي یو سکالار دی .
په ادبیاتو کی دا د ځل اټیران نخښه ، چې په نوکانو کی نیول شوې، زیات وخت نه

(c) ketabton.com: The Digital Library



یکل کیږي، یعنی لیکو: $(a\times b)\cdot c = a.b.c$، غبرکهواریزخل شمیرنه د
:یترمینانت شمیرنی له لور صورت نیسي:

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

$$(a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

داچی دا اتیرانخل لکه د مخه مو چی وویل د بنستهوکتورونو د لاینې کومبینیشن په
څیر انځوریدلی شي، دا بیرته په یوه له دې کمپوننتو، کومی چی له صفر توپیر لري.

## بیلګه:

د هغه غبرګهواریز ډکی څومره لوي دی، چی دد لاندې وکتورونو څخه غزیدلی وي؟

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};\quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{او} \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$ aufgespannt wird? له دې چې غزېږي

$$abc = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$abc = 2\cdot(-2)\cdot 6 + 0\cdot(-3)\cdot 4 + 3\cdot(-1)\cdot 5 - 3\cdot(-2)\cdot 4 - 2\cdot(-3)\cdot 5 - 0\cdot(-1)\cdot 6$$

$$abc = -24 + 0 - 15 + 24 + 30 - 0 = 15$$

غبرګهواریز نو ډکی 15 V.E لري ( یعنی ۱۵ ( V,E) ډکیبوونونه یا –واحدنه )

## تمرینونه

۱ – دواړه وکتورونه $a = \binom{3}{4}$ او $b = \binom{-2}{5}$ ورکړشوي دي. په یوه کواوردیناتسیستم
کی دا لاندې رسم کړی

(c) ketabton.com: The Digital Library



رسم کړی.

a ) $a + 3b$ , b ) $0.5a - 3b$ , c ) $2(a + b)$

او په هروار یی نتیجه د کمپوننت په ډول ورکړی؟

۱ – په هوا یا فضا کی ټکی $B(2|-1|4)$ . $A(1|2|3)$ , $O(0|0|0)$ او $C(-5|7|9)$ ورکړ شوي دي، لاندې وکتورونه په کمپوننت لیکدود څه نومیږي یا څه ډول دي؟

a ) $\overrightarrow{OA}$ b ) $\overrightarrow{BC}$ c ) $\overrightarrow{AC}$

d ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e ) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BC}$ f ) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

د دې وکتورونو ارزښتونه څومره لوي دي؟

۲ – که په یوه هواره کی دوه وکتورونه a او b لاینې خپلواک وي، نو هر بل د دې هوارې وکتور د دې دوه وکتورونو a او b د لاینې کمبینیشن په څیر انځوریدلی شي. a او b بنسټ جوړوي.

وکتور c د مساوات $c = k_1a + k_2b$ له لارې د لاینې کمبینیشن په څیر د ریبلو ګڼونو $k_1$ او $k_2$ سره انځور کړی. له دې دوه مساوات د $k_1$ او $k_2$ ناپیژندونکو سره جوړ کړی. ( د دې لپاره دې زما د شیمرپوهنی کتاب وکتل شي )

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $c = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ c) $c = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

۴ – وي دي : $a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ او $b = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$ ، وشمیری:

a ) a.b b ) -a.b c ) a.a d ) b.b

e ) a.(b.a) f ) a.(b.a).a

او د دواړو وکتورونو ترمنځ کونج.

(c) ketabton.com: The Digital Library



۵ – کونجونه $\alpha = w(a,b)$ , $\beta = w(b,c)$ , $\gamma = w(a,c)$ د وکتورونو

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

لپاره وټاکئ.

۶ – د تریګونومتري یا کونجکچ د کوساین جمله، لکه د مخه مو چې لوستلی د سکالارځل په مرسته وشمیرئ.

۷ – د تالس جمله، چې د مخه مو لوستلی د سکالارځل په مرسته وشمیرئ:

۸ – په خوښه دریګوډي ABC لپاره د پیتاګوراس جمله او د هغې په څټ وشمیرئ:

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \iff |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$$

۹ – د مخته لوستل شوو کاتیت جمله او جګجمله وکتوري وښایئ.

۱۰ – د یوه په خوښه غبرګهواریز ABCD لپاره وشمیرئ:

۱۱ – الف ) د غبرګ اپیپت یا غبرګهواریز ډکي وشمیرئ، چې له

وکتورونو $b = 3$ , $a = 1$ او $c = -2$ څخه غزیدلی وي.

ب) دا څه مانا لري ، که وي : $(a \times b) . c = 0$ ؟

پ ) د یوې بیلګې په مرسته وښایې، چې اتپرانځل اسوځیاتیو نه دی.

ت) د وکتورونو $b = 0$ , $a = 2$ او $c = k. 4$ له لارې یو غبرګ

اپیپت ورکړ شوی دی، چې ډکی یې ۸ یوونونه دی. k به څومره لویه وي؟

۱۲ – یوه سپورتي الوتکه د 250 km/h په سرعت د N60°O په لور الوځي. سملاسی له جنوب څخه باد لیږیږي. دا باد یو د 75 km /h سرعت لري او دا

(c) ketabton.com: The Digital Library



الوتکه له پیللاړي اړوي. دا نوې الوتللور وټاکی او د الوتکی نوی سرعت!

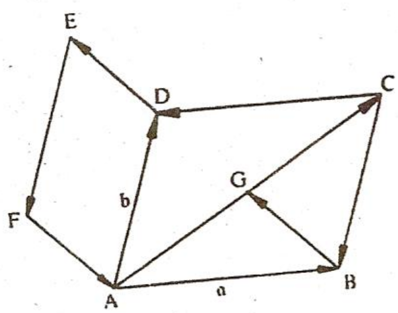
۱۳ – د وکتورونو a اوb لپاره کله لاندې اړیکی باورلري ؟

a ) | a + b| < | a | + | b | ,      b ) | a + b | = | a | + | b |

۱۴ – لاندېوکتورونه ورکړشوي دي:

$$a=\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix};\ b=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix};\ c=\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix};\ d=\begin{pmatrix}-45\\30\end{pmatrix};\ e=\begin{pmatrix}20\\4\end{pmatrix};\ f=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix};\ g=\begin{pmatrix}-2{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix}$$

وکتورونه c تر g ( که ممکن وي ) د وکتورونو a یاb د ډیرواره په څیر انځور کړی.




۱۵ – ناټاکلی وکتورونه د a او b د وکتورونو لاینی کمبینیشن په څیر انځور کړی. ( څیره )

۱۶ – یو دریګوډی ABC په

$$a=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}, c=\begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}.$$

سره ورکړ شوی دی. داړخ اوږدوالی او دننني کوجونه وشمیری.

۱۷ – په یوه څلورګوډي کی دی $a=\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}.$

$$c=\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix} \text{ und } d=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

او

د نیمی اوږدوالی وشمیری او د هغی غوڅکونج ( $\leq 90°$ )

۱۸ – یوه کیبنتی د ټکی O څخه د $r=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ په لور خوزیږي یا حرکت کوي، دا کیبنتی تګلور دی، باد د $w=\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$ په لور لېږیږي.

الف ) د بادزور F_|_ برخه څومره لویه ده، چی په زیګل باندې ولاړ پرېوزي. یا تاثیر کوي؟ دا زور کومه لور لري؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



ب ) د F برخزور له F ⊥ څخه څومره لوي دی، ك ومه چی کیښتی د مخ په لور بیایي؟

۱۹ – یو بار، چی ۱۰۰۰۰ نیوټونه دی د دوه مایلو ستنو سره نیول شوی. جوړښت یی یو مساوي پښیز دریګوډی جوړوي ، د بنسټ ۶ متره سره او د پښی اوږدوالی ( د ستنی اوږدوالی ) ۵ متره دی.

الف د وشن زور په ضواړو ستنو څنګه تاثیر اچوي؟

ب ) د دې برخه زور ولاړ او پراته کمپونټونه څومره لوي دي؟

۲۰ –د وکتورv کواوردینات و اورتوګونالبنستهونو$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ او$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ته وشمیری، که $|v| = 5$ وي او v د وکتور$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ سره یو د 55° کونج جوړ کړي.

۲۱ – وي دې $a + b + c = v$ . وشمیری : $a.d + b.v + c.d$

۲۲ – د څلور ټکو A, B, C, D او همداسی E, F, G, H سره یو غبرګ اړخیز ورکړشوی دی. د لاندې ورکړنو یا شرطونو سره د هغو هواري وشمیری

a) A = ( 0 | 6 | 0 ) , B =(8|4|0), C = (6|16|0)

b) E = 1,5|2,5|3,5) , F = ( 0.5|0|2,5) , G = ( 1 | 0,5| 4,5

هغه تراوسه ورك یا نامعلوم ټکی ( D همداسی H ) چیرته پروت دی؟

۲۳ –اهرام د بنسټ هواري د کونجونو

A = ( 1|0|2) , B = (3|3|7) = , C = (4|2|12) , D =( 2| - 1| 7)

سره کوم ډکی لري، چی څوکه یی S =( 2 |4 |15 ) وي؟

لارښودنه: لمړی خپل ځان وپوهوي، چی آیا کونجونه ریښتیا په یوه هواره کی پراته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



# تجار تي شميرنه

## ځانيونيز يا متناسب او په څټ ياچپه ځانيونيز يامتناسب بلواك(فنکشنونه)، دربقضيه

په ورځني ژوند کی دې ته اړتيا پيښيږي چی ورکړ شوې لويی (يا ډيروالي) يو د بل سره انډول (مقايسه) کړاى شي. د بيلګي په توګه د څپليو لويوالی د ځمکی ارزښت، د مياشتني معاش يو د بل سره انډول. د دوه داسی ګڼونوa او b د انډول لپاره په زيات وخت کي کمون a - b کفايت کوي. دلته نو بيا د دې دوه ګڼونو a اوb له توپير څخه غږيږو. په ډيرو وختونو کی دا بسيا (کفايت) نه کوي چي د دوه ګڼونو کمون د هغوله توپير څخه لاس ته راوړو.

پيلبيلګه:

دوه پټي يو $1800\ m^2$ اوبل $2000\ m^2$ يو له بل $200\ m^2$ توپير لري. دا د پټيو لويووالی که $400\ m^2$ او $600\ m^2$ وي، نو ترمنځ کمون هم همدا دی. څه به ووايو که د دواړو ځمکو ويش د يوه ميراث ويش وي؟

هر ځل به دا يو $200\ m^2$ ډيره لاس ته راولي نسبت و دې بل ته. ګورو چی په دوم ويش کی $400m^2/600m^2$ د لمړي ميراثخور لپاره تاوان نسبت و لمړي ويش $1800m^2/2000m^2$ ته زيات دی.

دا په دې مانا، چی که هرڅومره ځمکه لويه وي نو په همغه اندازه د دواړو ميراثخورو ترمنځ توپير کميږي.

دا مخته پرته بيلګه ښايی، چي په داسی حالتونو کي دانډول لويي يو بل سره په تناسب يا ځانيونه کی راوستل کيدي شي

(c) ketabton.com: The Digital Library



**تعریف:** که a او b دوه له صفر مختلفی لویي یا کمیتونه وي، نو a / b
ویش یا a: b د a تناسب یا ځانیونه وb ته **بلل** کیږي.

بیلګه: ۱ – د ځمکو $400m^2$ او $600m^2$ لویوالی یو بل
سره 2/3 = 0,6 = 400/600 تناسب جوړوي یا یو بل سره ځانیسي. دا
کوچنی ځمکه(پټی ) د لوي پټي %66,6 جوړوي.

۲ – د پټیو $1800m^2$ او $2000m^2$ لویوالی یو بل سره په
1800/2000=0,9=9/10

تناسب یا ځاننیونه کی پراته دي. دا کوچنی پټی، د لوي پټي %90
جوړوي.

۳ – د مودل ګاډي TT لاین( لیکو یا پټلیو ) او الماني ګاډو د لیکو یا پټلیو
سور یو بل سره په لاندې تنساب کی پراته دي

12mm/1435mm = 0,00836 ~ 1/120 .

۴ – که یو کړندی په 30 دقیقو کي 70km ځغلي، نو د وهل شوې فاصلې
سرعت تناسب ووخت ته په لاندې ډول دی.

s/t = 70km / ½ h =140[km/h] = 140km/h .

۵ – د یوه هوموژین بدن( د مساویډوله مواد جوړ ) سختوالی $\rho$ د هغه د
کتلی( g ) ځانیونه یا تناسب دی ، د هغه بدن ډکي( cm3 ) ته

$$\rho = m / V \, [g / cm^3]$$

د یوه لرګي بلاك سختوالی( کثافت )، چی درې کیلو ګرامه دروند او څلور
زره مکعب سانتیمتره ډکی(حجم ) لري، $0,75\ g / cm^3$ دی

3000g / 4000 cmw = 0,75 g/cm³ = $\rho$ سختوالی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



موږ غواړو، چې اوس ځانونه د بلواك دوه ځانګړو تیپونو یا ډولونو ته متوجه کړو، دا څنګه، چې موږ په ورځني ژوند کی ډیر واره ورسره مخامخ کیږو، چې له دې امله یي پیژندنه ځموږ لپاره خورا مهمه ده.

پیلبیلګه:

۱ – د یوه نل څخه په 3 دقیقو کی ۱۲ لیتره اوبه راوځي. څو لیتره اوبه به په یوه ورځ کي له دې نل څخه راووځي، څومره په یوه کال کی؟

که په درې دقیقو کي ۱۲ لیتره اوبه له نل څخه راوځي، نو په یوه دقیقه کی باید ۴ لیتره اوبه او په ۲۴ ساعتونو یا ۱۴۴۰ دقیقو کی

طبعاً 5760 = 4 . 1440 لیتره اوبه راوځي. او په دې تعقیب په یوه کال کی 2102400 = 360 . 5760 لیتره او یا ۲۱۰۲۴ هیکتولیتر اوبه بهیږي.

۲ – څلور کارګر یو ه بنسټ کنده په ۹ ساعتونو کی راپورته اوکانکریټوي. څومره وخت درې کارګره ضرورت لري او څومره وخت به ۱۰ کارګر ضرورت ولري چی دا ځمکه راپورته کړي اوهم کانکریټ کړي؟

که څلور کارګره ددې لپاره ۹ ساعته ضرورت لري، نو یو کارګر ددې لپاره حتماً زیات وخت په کار لري، یعني څلور ځله زیات وخت، پس ۳۶ ساعته، نو درې کارګر په تعقیب 12 = 3 : 36 ساعته او لس کارګر 3,6 = 10 : 36 ساعته = درې ساعتونه او ۳۶ دقیقي ضرورت لري چی دا ځمکه وکني او کانکریټ کړي.

په دواړو حالتونو کی یو نظم منځ کی پروت دی، دقیق په لمړی بیلګه کی فنکشن وخت —> د اوبو مقدار او په دومه بیلګه کی فنکشن کارګر —> د کارساعتونه.

مګر داوړه فنکشنونه پوره په خپل راوړون ډول کی یو له بل توپیریږي:

۱ – څومره ډیر وخت چی تیریږي په همغه اندازه زیاتی اوبه له نل بهیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



۲ – څومره چی کارګر زیاتیږي همغومره د کار وخت کمیږي
دې ته ورته د ورکړشوو فنکشنونویا بلواکو شمیرپوهنیزیا ماتیماتیکي لیکدود
د فنکشن ورکړدود مختلف لیدل کیږي.

۱– فنکشن f : وخت ( دقیقه ) ⟵ د اوبو ډیری( ل )

د فنکشن لیکدود ( فنکشن لیکلوقانون ) لري x -> 4x

په دې ډول د فنکشن مساوات داسې بریښي $y = 4x \quad ; \quad x \in Q^{+}_{0}$

۲ – فنکشن g : کارګر ( څو دانی ) ⟵ د کاروخت ( ساعت h )

د فنکشن لیکدود لري x -> 36/x

په دې ډول د اړوند یا مربوط فنکشن مساوات داسې بریښي $y = 36/x \; ; \; x \in N$

---

**تعریف:**

یوه لویه x و هغې ته تنظیم شوې لوي y ته سیده متناسب سیده ځاننیونه ( په نخښه کی $y \sim x$ ) بللکیري که د هغوي تناسب یاځا ننیونه ( ویش ) $y / x$ تل یو ثابت ارزښت وساتي : یعنی $y / x = k$ وي.

بلواك(تابع ) یا فنکشن $y = kx$ ( ثابت –k ) د تناسب یا ځاننیونی څلوونی یا فاکتور بلل کیږي.

یوه لویه هغې بلی تنظیم شوی لویې ته ناسیده متناسب ده یا ناسیده ځاننیونه کی ده، که د هغو ځل تل یوثابت ارزښت وساتي: یعني

$$y.x = k \quad \Leftrightarrow \quad y = k/x$$

بلواك یا فنکشن $y = k/x$ چپه یا په څټ متناسب ( antiproportional ) یا په څټ ځاننیونکی بلواك یا فنکشن بلل کیږي.

---

متناسب فنکشن $y = kx$ د یوې لوي دوه برابره، نیم برابر، n –برابره پورې د بلی لویې هم دوه برابره، نیم برابره یا n–برابره پورې اړه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په چپه یا په څټ متناسب فنکشن $y = k / x$ کی دوه برابره، نیم برابر ... n − برابره پورې د بلې لوي نیم برابر، دوه برابر ... 1/n−برابره تعلق لري( اړه لري ) .
په چپه یا په څټ متناسب فنکشن $y = k/x$ کی د چپه یا ناسیده متناسبوالي څخه خبرې کیږي. که متناسب او چپه یا په څټ متناسب فنکشنونه په یوه کواوردینات کی انځور شي، نو لیدل کیږي چی متناسب بلواك یا فنکشنونه مونوتون پورته کیدونکی او چپه یا په څټ متناسب بلواك یا فنکشنونه مونوتون لویدونکي دي ( د مونوتون کلیمو لپاره دې ځما د شمیرپوهنی کتاب وکتل شي )

## بیلګي :

۱ – سیده تناسب یا سیده ځاننیونه:

الف : په شي اخستلو کی د ډیري ارزښت سیده متناسب دی

ارزښت( افغانی ) ډیری (کلیوګرام )

ب : په تیزوالی یاسرعت کی وهل شوې لار د وخت سره سیده متناسب ده

$s(km) \rightarrow t(s)$

۲ – ناسیده تناسب یا ناسیده ځاننیونه

الف : یوې معلومی لار وهلو لپاره تعجیل هغه په بر کی نیولي وخت سره ناسیده متناسب دی: که هرڅومره تعجیل زیات وي په همغه اندازه وخت کمیږي.

ب : د وچو شودو د یوه څرګند ټاکلي ټول وزن د وړونکوتیو ګڼه ناسیده متناسب ده د هرې کوتی یویزوزن سره: که هرڅومره زیاتی کوتی په کار واچول شي په همغه ګڼون د کوتیو وزن کمیږي.

---

**تعریف:** د لاندې ډول $a/b = c/d$ یا $a:b = c:d$ مساوات د تناسب مساوات یا ځاننیونیز برابرون بلل کیږي ( ویل کیږي چی a و b ته ځان داسی نیسي ( یا داسی انډول کی ده ) لکه c و d ته ) دلته a او d د تناسب یا انډول

(c) ketabton.com: The Digital Library



دباندني غړي دي او b او c د انډول دننی غړي. په هر تنساب کی د دباندنیو غړوځل د دننیو غړو د ځل سره برابر دی:

$$a / b = c / d \iff a . d = c . b$$

اوس ځان باوري کولی شو چی د دننیو غړو بدلول او یا د دباندینو غړو بدلول یو د بل سره په تناسب یا انډول کی تغیر نه راولي. کیدی شی چی ټول دنني غړي د دباندینیو غړو سره بدل شي:

$$a/b = c/d \iff a/c = b/d \iff c/a = d/b \iff b/a = d/c$$

له دې امله کیدی شي چی یو دبل سره برابر زیات تناسبونه یا انډولونه د یو په بل پسی راتلونکو تناسوبونو په څیر ولیکل شي:

$$a/b=c/d = e/f \iff a:c:e = b:d:f$$

دلته باید په پام کی وي چی ویش ځانله صورت نیسي یعني تل د دوه کښونو،

## بیلګي :

۱ – له 21 / 7 = 15 / 5 څخه لاس ته راځي 5.21 = 7.15 یا 7 / 21 = 15/5
یا 15/21=5/7 یا 7/5 = 21/15 .

۲ – د 8/12 = 4/6 = 2/3 لپاره لیکو 8:4:2 = 12:6:3

۳ – یو تناسب چی دننه او دباندې غړي يي یو له بل سره برابر وي ناپریکیدونکی تناسب بولو. په ناپریکیدنکی تنساب یا انډول a:m=m:b یا m:a = b:m کی m منځنی متناسب انډولی بلل کیږي. منځنی متناسب د نورو دوو غړو a او b جیومتریکي منځ دی.:

$$a / m = m / b \iff m^2 = a.b \implies m = \sqrt{a.b}$$

د a = 16 او b = 9 لپاره m = 12 منځنی متناسب داسی دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library



$16/12 = 12/9$

۴ څلور انډولونه متناسب یا ځانبیونیزڅنګه لیکل کیږي؟

$18/x=8/5 \quad \Leftrightarrow \quad 18 . 5 = 8x \quad \Rightarrow \quad x = (18 . 5) / 8 = 11,25$

په ترتیب تنساسب یا ځاننیونه یا انډول کی باور لري: $18 / 11,25 = 8 / 5$

زیات وخت مود تکست وظیفی د تناسبمساواتو (انډول برابرون ) ته لاربښودوي، نو بیا دري ورکړشوو لویو ته څلورم تنساب یا انډول غوښتل کیږي. د داسی وظیفو لپاره سیده یا ناسیده تناسب یوه غوره رول لوبوي. داسی پوښتنی د دریقضی شمیرني یا پاي(ختم) شمیرنی لاندې شهرت لري.
د دریقضي شمیرني اصلي پرابلم په دې کی دی، چی د وظیفي ورکول باید څرګند یا روښانه شي، چی ایا دا یوسیده متناسب او که چپه یا په ځټ متنساب بلواك (تابع) یا فنکشن دی.

د دري قضي پوښتنی کولو څخه لاندې تکامل منځ ته راځي :
۱ – یوه د شرایطو قضیه، کومه چی ټولی ضروري ورکوني په ګوته کوي.
۲ – یوه د پوښتنی قضیه چی غوښتونکی لو یه x متن کي یا خوندي لري او له هغي سیده یا ناسیده د ځواب تناسب ته تکامل ورکوي.
۳ – یوه پایقضیه، په کوم کی چی له یوه یوون(واحد ) په ورته یامناسب ډیرون پاي ورکول کیږي.

پیلبیلګه:
یوه الوتکه له الف ځاي تر ب ځاي پورې چی ۸۰۰ کیلومتره واټن دی په ۶ ساعتو او ۴۰ دقیقوکی تی کوي، دا الوتکه به ۲۲۰۰ کیلومتره لار په څو ساعتوکی ووهي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



د درې جملې له لارې يې ځواب:

الف – د شرايطو قضيه........... 800km - 6h 40 min

يا............... 800km - 400 min

ب – د پوښتنې قضيه .. ...... 2200 km - x min

پ – پايقضيه.......... 200km - 400/4min = 100min

2200km - 11.100 min = 1100 min

دا الوتکه به په دې ترتيب د 2200km اوږده واټن لپاره

1100min = 18h20min

ضرورت ولري.

د دې وظيفه د ټيك ځواب لپاره ضروري نيوني دا وي چې سيده تناسب وپيژندل شي: هرڅومره چې د الوتلو واټن لرې کيږي په همغه اندازه الوتکه زيات وخت په بر کې نيسي.

يعنې 2200km اوږد واټن په داسې انډول يا تناسب کې دې لکه 400min و 800 km ته:

$$x / 2200 = 400/800$$

د اکويوالنځ فورم(ځيرې – ) اوړون له لارې څخه ځواب x لاس ته راځي:

$$x = ( 400 . 2200 ) / 800 = 1100$$

۲ – ۴ کارګر د يوه ديوال وهلو لپاره پنځه ورځې ضرورت لري. د ناروغي له امله يو کارګر د کارلري پاتيږي. دا راکمه يا راکوچنی ډله اوس څنګه مشغول ده؟ دلته يو ناسيده تناسب يا ځانڼيونه لرو:

هرڅومره چې کارګر کم وي په همغه اندازه وخت زياتيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library



| ددریجملی سره شمیرنه | د تناسب سره شمیرنه |
| --- | --- |
| ۴ کارگر – ۵ ورځي<br>۱ کارگر – ۵ . ۴ ورځي<br>۳ کارگر – ۲۰ / ۳ ورځي<br>پس<br>۳ کاگر – $6\frac{2}{3}$ ورځ | غوښتونکی کاروخت x د ۵ ورځو سره داسی تناسب کی دی لکه ۴ کارگر و درې کارگرو ته<br><br>x/5 = 4/3 <=> x = (4.5)/3 = 20 / 3 ورځی |

**یوځاي شوې درې قضیه:**

د ۳۰ جوړه کالیو گنډلو لپاره ۱۲ درزیان ۲۰ د کار ورځي ضرورت لري. څومره ورځي به ۱۰ درزیان د ۷۰ جوړه کالیو لپاره ضرورت ولري؟

| لمړی دریقضیه | دومه درې قضیه |
| --- | --- |
| ( سیده متناسب ) | ( ناسیده متناسب ) |
| ۳۰ جوړه کالي | ۱۲ درزیان – ۲۰ ورځي |
| ۷۰ جوړه کالي | ۱۰ درزیان – x ورځي |

هرڅومره چی کالی زیات وي همغومره زیاتی ورځي، هرڅومره چی درزیان زیات وي همغومره لږې ورځي

| | | |
| --- | --- | --- |
| ۱۰ جوړه کالی – | ۱۲ درزیان – | ورځی |
| ۷۰ جوړه کالی | ۱۲ درزیان | ورځی |
| ۷۰ جوړه کالي | ۲ درزیان – | ورځي |
| ۷۰ جوړه کالي | ۱۰ درزیان | ورځي |

پس لرو

x = ( 20.7.6)/(3.5) = 56 ورځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



## تمرینونه

۱ – لاندې ځانښونې یا تناسبونه ساده افاده کړی

a ) 200t : 2 kg    b ) 6 m : 6 km

c ) 4km / 30min    d ) 3,2 t : 400dm³

۲ – یوه موټر د ۵۵۰۰ کیلو متره اوږدې لار لپاره ۳۸۵ لیتره ډیزل وسزول

الف ) په دې تګلوړ ۵۰ لیتره ډیزل د څومره لار لپاره بسیا کوي؟

ب ) د یوې ۴۳۰ کیلو متره لار لپاره به دا موټر څومره ډیزل مصرف کړي؟

۳ – که غواړو چې د یوه موټر سره د الف ټکی څخه و ب ته ورسیږو ، نو د

۶۰ کیلومتره په ساعت ته درینیم اعته ضرورت لرو. د الف څخه ب ته سړی

په څومره وخت کي رسیدلي شي، که د موټر سرعت په لاندې ډول وي:

a ) 50km / h    b ) 110 km / h?

۴ – یو ښار پلان د ۱ : ۱۰۰۰۰ تناسب یا ځانښونه ورکړ شوی دی. لاندې

واټنونه په رینښتونی څومره دی ؟

a ) 5 cm    b ) 33 mm    c ) 1 dm

۵ – یو ۸۱ ګڼ څنګه په داسی په ۲ زیاتونونو ټوټه کیدی شي، چی ځانښیونه

یا تناسب یی داسی وي لکه : 5 : 4 ؟

۶ – د یوه ګڼ او ۵ کمون ځان نیونه یا تناسب و ۷ ته داسی دی ، لکه چی د

۵ کمون ودې ګڼ سره، چی ۴ ته ځا نیسی یا و ۴ ته تناسب یا ځانښیونه؟

دا ګڼ کوم دی؟

۷ – یو فاو وې موټر ۸۰ کیلو متره په ساعت کي ځغلي او په دې پسی په ۱۲۰

متره کی وروسته یو بی ایم وې موټر ۱۲۰ کیلو په ساعت کی ځغلي.

الف ) بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چی د فاو وې څخه مخ ته شي؟

ب ) بي ایم وې په دې وخت کی څومره واټن وهلی دی؟

پ ) دا بی ایم وې څومره وخت ته ضرورت لري، چي له فاو وې موټر څخه ۴۰

(c) ketabton.com: The Digital Library



متره مخ ته شي ؟
۸ – د سونګ سکرو سوزلو له امله د کولنډیاوکسید غاز پیداکیږي. د سونګ
سکرو او د راپیدا کولنډیاوکسید Kohlendioxid ($CO_2$) ترمنځ تناسب یا
ځاننیونه 3 : 11 ده.
څو ګرامه سونګسکاره به ۱۰۰ ګرامه کولینډیاکسید رامنځ ته کیږي؟
۹ – له دریو یو په بل اغیزهمند غابښورڅرخي د ۴۸ ، ۳۶ همداسی ۱۶ ښاغونو
سره دا کوچنی څرخی ۴۰۰ واري په یوه دقیقه کی ګرځي یا څرخی.
نور دواړه غابښورڅرخی څو واره څرخی یا ګرځی؟
۱۰ – ۹۰۰ تیږي، چی ۳۶ سانتي متره سور لري ۴۰۵۰ کیلو ګرامه وزن لري.
۱۱۰۰ تیږې به څومره وزن ولري، که د همغو موادو جوړې وي او سور
یی ۲۴ سانتي متره وي؟
۱۱ – یو د زدکوونکو ورځپاڼه « هیلی »د رحمان بابا د لیسی څخه راوځی د
دې لپاره چی د ورځپاڼو ۱۲۰۰ توکه وتړل شي ، څلور زدکوونکی ۳
ساعته کار پرې کوي.
څومره زدکوونکی په کار دې، چی ۲۱۰۰ توکه ورځپاڼی په ټیك دوه
ساعته کی وتړي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



## په سلو کی – -Prozent ، په زرو کی – - Primille

## گټه– -Zins او د گټې د گټې شمیرنه Zinseszinsrechnung

مورږ د a / b يا c / d ډولونو انډولونه او يا په همدې ډول ويشنه په مساواتو و ازمايل. د ماتشميرنى په چوکاټ کی( ځما د شميرپوهنى کتاب دې وکتل شي ) به وښوول شي چی ځنگه بنسټيز نظم په داسی ماتو کی ټاکل کيدی شي. د انډول يا مقايسي لپاره دا هم وړاندېکوولی شو چی دواړه مات لاندې په ګډ ماتلاندې چی 100 وي پراخ شي. دا کم له کمه په نزدې ډول په هر مات کی کيدی شي.

**پیلبیلگه:**

يو جوړ جامي، چي په ۲۳۰ افغانۍ پلورل کيدي، په ۴۰ افغانی گرانی شي د گرانښت تناسب يا ځانښونه يی و اولنۍ ارزښت ته څومره دی؟

دا تناسب ۴۰/۲۳۰ کيدی شي نزدې په يوه مات چی مات لاندې يي «۱۰۰» وي انځور شي، دا کيدی شي چی د ويشنی له لارې داسی صورته ونيسي:

$40 / 230 = 0,1739$ پس $40 / 230 \sim 17,39 / 100$

قيمتيدل د لمړني قيمت 0 ,1739 ځله راکوي. داسي هم وايو چی قيمتيدل په سلو کی نزدې ۱۷ دي.

**تعریف:** د يوه بنسټيزارزښت G سلمه برخه ددې ګڼ 1 په سلو کی بلل کيږي، او ددې لپاره ليکو 1% د G دی G/100 , په همدې ډول % P له G

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ګڼې ارزښت W = P.G/100 له لارې ټاکل کيږي، P په سلو کی جمله او W په سلو کی ارزښت بلل کيږي.

بنسټ ارزښت G ځان و 100 ته داسې نيسي لکه د په سلو کی ارزښت W د په سلو کی جملی P ته، پس

$$\frac{G}{100} = G / 100 = W / P = \frac{W}{P}$$

$$\Leftrightarrow G . P = 100 . W$$

د اخرني مساوات څخه د فورم اړولو له لارې لاس ته راځي

**جمله:**

| د په سلو کی ټاکنه | بنسټ ارزښت | په سلو کی ارزښت |
|---|---|---|
| P = 100 . W / G | G = 100.W/ P | W = G.P / 100 |

## بيلګی:

١ – د په سلو کی ارزښت بنسټ ارزښت په سلو کی ټاکنه

= 16,80 DM د 120 DM 14 %

٢ – يو نفر بايد د يوه نوي بايسکل لپاره 40 , 60 DM يعنی المانی مارکونه د ماليا لپاره ( 14% ) ادا کړي

دا بايسکل څو ارزښت لري، بی له ماليا ، او دا د ماليا سره څو ارزښت لري؟

که د 40,60DM په سلو کی ارزښت د په سلو کی ټاکنی 14% وي،

(c) ketabton.com: The Digital Library



نو باید 40,60 / 14DM د 1% د بنسټارزښت برابر وي. په دې پسې بنسټ ارزښت ( = 100% ) د G = (40,60 / 14)100DM = 290 DM لاس ته راځي.

له دې سره بایسکل ۲۹۰ مارکونه بی مالیا ارزښت لري او ۶۰ ، ۳۳۰ ماروکونه د مالیا سره.

کید ی شي، چی سملاسی هم د مالیا سره ارزښت ته راشو، که د دې لپاره یو بنسټ ارزښت د ۱۱۴ په سلو کی کېښول شي یا وضعه شي:

$$G = (40,60 / 14).\ 114DM = 330,60\ DM$$

۳ – یو جوړ کالي چی ۱۵۰ مارکونه ارزښت لري په ۱۰ په سلو کی ګرانیږي، دا کالي تر ډیر ځنډ نه پلورل کیږي، نو له دې امله یی بیا دوکانواله په ۱۰ په سلو کی ارزانوي. پوښتنه داده، چی ایا داکالي به اوس هم ۱۵۰ مارکونه ارزښت ولري، که څنګه؟

طبعآ نه ، ځکه چی ګرانوالی په ۱۰ ٪ مارکونو زیاتوالی یی په سرچینیز ارزښت دی ، مګر دا ارزښت یی په دې اوسني ارزښت، چی $150 + 150.10\% = 165DM$ په بنسټ منځ ته راځي. له دې امله دا کالي د ارزښت وروسته اوس

$$165 - 165.10\% = 165 - 16,50 = 145,50DM$$

مارکونه دی. که یوه ورکړ شوی بنسټ ارزښت بیا د په سلو کی ارزښت سمیرل کیږی، کیدی شی چی دا دیوه سان څخه لالری وشی.

بیلګي:

اول ) د ۳۵۰ ماروکونو ۱۴ ٪ کی داسی شمیرل کیږي: $350.0,14 = 49\ DM$

دوم ) که د ۴۵۶۸ کیلو ګرامه بنسټ ارزښت په ۲۲ ٪ کم شي، نو لاس ته راځي:

$$4568(1 - 0,22) = 4568.0,78 = 3563,04\ DM$$

دریم ) که د $2303\ m^2$ بنسټ ارزښت په 24% جګ شي، نو لاس ته ترې راځي«

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$2303.(1+0,24) = 2303\ .1,24 = 2855,72\ m^2$$

لاندې بنسټپاکنی یا بنسټ مقدارونه دی په مات بڼه ورکړ شي :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1\% = \frac{1}{100}$ | $1\frac{1}{4}\% = \frac{1}{80}$ | $1\frac{1}{3}\% = \frac{1}{75}$ | $1\frac{2}{3}\% = \frac{1}{60}$ |
| $2\frac{1}{2}\% = \frac{1}{40}$ | $3\frac{1}{3}\% = \frac{1}{30}$ | $4\frac{1}{6}\% = \frac{1}{24}$ | $5\% = \frac{1}{20}$ |
| $6\frac{1}{4}\% = \frac{1}{16}$ | $6\frac{2}{3}\% = \frac{1}{15}$ | $8\frac{1}{3}\% = \frac{1}{12}$ | $11\frac{1}{9}\% = \frac{1}{9}$ |
| $12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$ | $16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$ | $20\% = \frac{1}{5}$ | $25\% = \frac{1}{4}$ |
| $33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$ | $50\% = \frac{1}{2}$ | $66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$ | $75\% = \frac{3}{4}$ |

د یوه بنسټ– یا ستپه ارزښت G یو په زرمه برخه ۱ پرومیلی ( لاتین ) واي، چې موږ یی دلته هم د زرو څخه ۱ بولو:

۱ په زرو کی 1 ‰ له G دی G / 1000

د پرومیلی یا په زرو کی شمیرنی لپاره له دې وروسته انډولګڼ ۱۰۰۰ (په ماتلاندې کی ) ، 1000‰ له دې سره یو ستپه ارزښت دی.

بیلګه :

4,7 ‰ له 3690DM دې: 17,34DM

موږ غواړو، چې دا اوس د په سلو کی شمیرنی یو ځانګړي بڼی سره مشغول کړو. په ورځني ژوند کی خلك د کور جوړولو لپاره یا د یوې مغازې جوړولو لپاره پیسی (بډایي یا سرمای ) پوروي او دا زیات وخت په نوې نړی کی له بانکونو څخه، د پور ورکولو له لارې پورورکوونکی څه پیسی باید لاس ته راولی، د ارزښت بایللو تر نامه، چی دې ته د سرمایي ګټه وایي. په بانکی معاملو کی د فعالی ا و غیر فعالی ګټی ترمنځ توپیر باید وشي. فعاله ګټه بانك د پوروړی څخه د ورکړشوې پور په مقابل کي لاس ته راوړي، د دې په څټ یا برعکس څوك چی په بانك کی شمیرکتابچه خلاصوي او په بانك کی پیسی سپما کوي ، نو دمرکزې یا ملي بانك په هدایت د

(c) ketabton.com: The Digital Library



پیسو د سپما لپاره سپماکونکي هم څه پیسي لاس ته راوړي، چی دې ته به موږ د سپما ګټه ووایو ، په هر صورت په ځنی هیوادونو کي د پورګټی او سپما ګټی ترمنځ توپیر باید له ۲ په سلو کی تر درې په سلو کی څخه زیات نه وي.

په پرینځیپ کی باید د ساده ګټی او داسی په نامه د ګټی ګټی ترمنځ شمیرنو کی توپیر وشي . په داسی حال کی، چی په ساده ګټه کی پوروړی د پورشوي مقدار په بدل کی یوه ټاکلی ګټه ورکوي، چی هغه زیات وخت د یوه کال په منځ کي یعنی د یوه کال تیریدلو سره ټاکل شوې وي او دا ګټه د کال په اخر کی په منظمه توګه ورکول کیږي یا ادا کیږي.

د ګټی ګټی په شمیرلو کی د هغه غونډ وخت ګټه شمیرل کیږی ، چی په هغی کی د ګټی ګټه هم خوندې یا شامل ده، دلته هغه د هرکال ګټه د هغی لمړنی بډایي ته ورزیاتیږي او بیا د ټولو ګټه د بل کال لپاره شمیرل کیږی او په همدې ډول ورپسی د دوه او یا زیاتو کالو.

لمړی غواړو، چی یواځی ساده ګټی شمیرلو سره ځان په کار واچوو:

پیلبیلګه

یوه د ۳۵۰۰ مارکونو بډایي یا سرمایه په بانکی شمیرنه کي په بانك کی اینښولکیږي، چي کلنی ګټه یی 4,5% ده. له 3,5 کالو وروسته دا سرمایه اینښونکي په بانکی شمیرنه کي څومره پیسی لري؟

دلته په پوره هدایت ساده ګټونه مخ ته پرته وي، که څه هم په معمولی توګه داسی شمیرنو کی د ګټی ګټه هم شمیرل کیږي. د په سلو کی شمیرنو بنسټ ارزښت دلته هغه ګټوونکی بډایي یا سرمایه K ( بنسټسرمایه ) ده، او د په سلو کی ارزښت ګټه Z ده ( په المانی مارکونو ) ، د په سلوکی مقدار ، چی ما کله په سلو کي ټاکنه( یعنی په سلو کي څومره اندازه ) بللی په % ).

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا چی په دنده یا شمیرنه کي ګټه غوښتل شوې( دمخه برخه دې، یعني د په سلو کي ارزښت دې وکتل شي ) ددې لپاره لاس ته راځي

$$Z = K.p / 100 = 3500.4{,}5 / 100 = 157{,}50DM$$

دا د یوه کال لپاره ګټه ده ، په بنسټیزه بڼه‌ایي ، چی ۳۵۰۰ مارکونه دي. په درینیمو کالو کی په ساده ګټونه بڼه‌ایي، چی بانکی شمیر یی واز کړی 3,5 .157,50 = 551,25DM لاس ته راوړي. په دې توګه به په سپما کتابچه کي 3500 + 551,25 = 4051,25DM (مارکونه ) وي.

د ګټې وخت t لکه، چی ومو لیدل یو کال ، زیات یا کم کیدی شي. ، بیا نو په بانکي شمیرنه کي د یوه کال لپاره ۱۲ میاشتي نیسی، چی د هرې میاشتي لپاره ۳۰ ورځي ټاکي، یعنی په ټولیزه توګه ۳۶۰ ورځو په بنسټ بیا بانکی شمیرنی صورت نیسی. د ورځو په بنسټ بانکي شمیرنو کي هغه د سپما ورځ ورسره شمیرل کیږي( د سپماورځ Wertstellung یا Valutierung )، هغه ورځ، چی پیسی بیرته له بانک اخستلي کیږي یا له بانك بیرته پورته کیږي، نه ورسره شمیرل کیږي.

د ګټې فرمول: $Z = K.p / 100$ . د ورځنی ګټې فرمول: $Z = K.p.t / 100.360$

## بیلګی

لمړی : ۴۵۰۰ مارکونه له ۳ . ۷ . ۱۹۸۷ څخه تر ۱۵ . ۹ ۱۹۹۰ پورې څومره ګټه کوي، که ګټه 4 , 75% وي.

د ګټې وخت د ورځو په بنسټ شمیرو: $t = 12 + 60 + 3.360 = 1152$ ورځي.

د ورځنی فرمول له مخی لاس ته راځي:

$$Z = K.p.t / 100.360 = 4500.4{,}75.1152 / 100.360 = 684DM$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دوم : یوې ښځې په ۱۵ . ۳ . ۱۹۸۷ باندې ۷۹۰ مارکه په بانکي سپما کتابچه کېښوول، او دا پیسې یې بیرته په ۲۰ . ۲ . ۱۹۸۸ له بانك څخه راواخستلې. دې بهایي یا سرمایي څومره ګټه وکړه:

- $p = Z.100.360 / K.t = 30.100.360 / 790.335 = 4,0809 \Rightarrow p \sim 4,08\%$

دریم : په څومره وخت کې کیدی شي، چې ۱۰۰۰ مارکونه د ساده ګټې په بنسټ ۲۰۰۰ مارکونو ته جګه شي، که بهایي په 4 , 5% ګټه سپما شوې وي؟

- $t = Z.100.360 / K.p = 1000.100.360 / 1000.4,5 = 8000$

ورځې ۸۰۰۰ = ۲۲ کاله او ۸۰ ورځې

څلورم : یو بهایي ، چې لاټري یې ختلې په ساده ګټونه ، چې ۷ ،۶ په سلو کې ده له بانك څخه د میاشتې ۲۰۰۰ مارکونه ګټه اخلي.

دا د لاټرې ختنه به څومره جګه وي؟

موږ دا د ګټې فرمول د بهایي په لور اړوو یابدلوو:

- $K = Z.100.360 / p.t = 2000.100.360 / 6,7 .30 = 358208,95DM$

لکه چې پوهیږو، بانکونوپرکسیس یا کار کې د ګټې ګټونه معمول ده، او له دې زیات نه. د ګټې ګټه کلنی شمیرل کیږي او بهایي ته ورزیاتیږي.

یو پیلبهایي $K_0$ ، د یوه کال په اوږدوالی کې د یوې ګټې ټاکه یامقدار $p\%$ سره په ګټه اچول کیږي، د کال په اخر کې د یوې ګټې

- ... $K_1 = K_0 + K_0 ( p / 100) = K_0 ( 1 + p /100)$

سره په سپماکتابچه کې لیکل شوې ده.

دلته $K_0.p / 100$ د یوه کال را اچولی ګټه ده، د یو کال په پیلبهایي $K_0$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ټول دوه کاله وروسته دا پیلبډایي د همغی پنبسیګټی یا ګټی پیل سره داسی لویه شوې

$$K_2 = (K_0 + K_0 . P / 100) + (K_0 + K_0 . P/100).(P/100)$$
$$= K_0 + K_0.P/100 + (K_0.P/100)(P/100)$$

که $K_0$ له نوکانو یا غیږ دباندې ونیول شي نو لاس ته راځي:

$$K_2=K_0(1+2.P/ 100 + P^2 / 100) = K_0(1+ P/100)^2 = K_1(1+ P/100)$$

له درې کاله وروسته دا بډایي یا سرمایه ده:

$$K_3=K_0(1 + P/100)^3 \qquad K_3=K_2(1 + P/100)$$

که دا شمیرنه په ورته توګه دوام پیداکړي، نو د t کالو وروسته په ټولیزه توګه لاندې بډایي لاس ته تري راځی

$$K_t = K_0 . ( 1 + P/100)^t = K_{t-1} . (1 + P/100)$$

د ( 1 + p/100 ) لپاره غواړود لنډونی له امله q ولیکو، q ګټی فاکتوریا ګټی ځلونی بلل کیږي:

$$q = 1 + p / 100$$

ددې ساده ونی سره لاس ته راځي: د ګټی ګټی فرمول: یوه بډایي $K_0$ د t کالو وروسته د p% کلنی ګټي باندې( د ګټی جګیدنه ) په $K_t = K_0 ( 1 + p / 100) = K_0.q^t$ لویه شوې

بیلګه : له درینیمو کلو وروسته په ۴،۵ ٪ ګټه ۳۵۰۰ مارکونه په کوم ارزښت لوییږي؟

$$K_{3,5} = K_0. q^t = 3500.1,045^{3,5} = 4082,96 \text{ DM}$$ مارکونه

د ګټیګټی شمیرنی سره بډایي $K_0 , K_1 , K_2 , K_3 , ..., K_t$ یوه هندسی پرلپسی جوړوي( ددې لپاره دې ځما د شمیرپوهنی کتاب وکتل شي ) دا د پیلبډایي K او ځلوني $q = 1 + p / 100$ سره ، ګرافیکی که وکتل شي، نو د ګټی لوییدنی فنکشن $K_t = K_0 . q^t$ یو اکسپوننشل بلواك انځوروي. د تعریفډیري $D = Q$ سره.

ساده ګټه اچونی بیا یو لاینې فنکشن $K_t = K_0 (1 + p.t / 100) ; t \subset Q$ په نخښنه کوي.له دې امله بډایي په ساده ګټه اچونه دومره چټکه نه لوییږي، لکه چی په یوه دګټی ګټی اچونی باندې.

بیلګی: ۱ – یو د ۴۷۰۰ افغانیو مقدار یا ارزښت دې د پنځه کلونو لپاره په ساده ګټه اچونه او ب ) په د ګټی ګټی اچونی چی ۵۷، ۴ ٪ دی اینښول کیږي. دا هر پایبډایي څومره لویه ده؟

a ) $K_5=K_0(1 + P.t/100) = 4700(1+ 4,75 . 5/ 100) = 5816,25$ Af

$K_5= K_0 + 1116,25 = 5816,25$ Af

b ) $K_5 = k_0. q^t = 4700 . 1,0475^5 = 5927,45$ Af

۲ – یوه بډایي د ۵۰۰۰۰ افغانیو په ۳.۵.۹۷ واچول شوه او باید په ۳۱.۱۲.۲۰۰۱ راووستل شي. څومره په ۴.۵ ٪ ګټه باندې لوي شوی دی، که پوره کلونه (له۳۱.۱۲–۱.۱ ) په ګټه واچول شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$K = [K_0 + K_0.p.t / 100.360].(1 + p/100)^n$$
$$= [50000 + 50000.4,5.237 / 36000].1,045^4$$
$$K = 61392.35 \text{ Af}$$

د لویو $K_0, q, t$ او $K_t$ په گټه فاکتور کی افاده کیدو لپاره رامنځ ته کیږي. د گټې اخستنی وروسته کیدی شي د سرچینیزې بډایي $K_0$ پوښتنه رامنځ ته شي، چی د t کلونو په p % گټونه یا گټه و بډایي $K_t$ ته بیایي. $K_0$ د $K_t$ د بډایي د اوس وخت یا حال یا نغد ارزښت بلل کیږي. د $K_0$ شمیرنه په ورکړشوې بډایي $K_t$ ته چی بیاي دیسکونتونه Diskuntierung یا گټوني بلل کیږي:

تعریف: د نغدارزښت فرمول
$$K_0 = \frac{K_t}{(1+\frac{p}{100})^t} = \frac{K_t}{q^t} = K_t.(\frac{1}{q})^t$$

دلته $(1/q)$ د گټوني فاکتور بلل کیږي. د نغدارزښت فرمول له $K_t = K_0 .q^t$ اړیکو څخه لاس ته راغلی ، چی د $K_0$ په لور اوبی یا حل شوي.

بیلگي:

١ – یو نیکه غواړي د خپل لمسی د پنځمی زیږیدنی له امله یو څه ئیسی بانک کی سپما کړي، د ٪۵ په گټه . دا پیصي بهه خومره یا دا مقدار به څومره لوي، چی دا لمسی په خپله ۲۵ کالیزه ۲۰۰۰۰ مارکونهلاس ته راوړي؟ باید په بانك یکی ۲۳ ، ۹۶۱۲ مارکونه کینښوول شي یا سپما شي..

۲ –د یوه کور خرڅلاو کی دوه اخستونکی مختلف اوفرت یا وړاندیزونه کوي « علاقمند الف ۱۵۰۰۰۰ مارکونه نغد ، ۱۲۰۰۰۰ مارکونه له دوه کاله وروسته او نور ۱۵۰۰۰۰ مارکونه د ټولیزه توگه له شپږ کاله وروسته ادا کړي یعني د کور مالك ته ورکړي.

علاقمند ب غواړي، چی ۱۳۰۰۰۰ مارکونه نغد ، ۱۵۰۰۰۰ مارکونه له دري کالو وروسته او ۱۴۰۰۰۰ مارکونه له نورو دوه کالو وروسته ورکړي.

کوم یو علاقمند گټور دی، که موږ ٪۸ گټهٔ ونیولي شو یا فرض کړای شو؟ دا چی دواړه ارزښتونه یا وړاندیزونه یو له بل سره پرتله کړاي شو، نو باید دواړه نغد ارزښت ته راوړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



بیلګه:

یوه د ۸۰۰۰ مارکونو بډايي ، کومه چې د ګټې په ګټونه ولاړه ده، باید ۶٪ کلنی ګټې د څلورو کالو لپاره په بانګ کی پاتي شي یا کینښوول شي. بډايي به څومره لویه وي په الف ) کلني ، ب ) نیمکلنی، خ ) میاشتنی، او ت ) په ورځنی ګټونه؟

تمرینونه:

۱ – یو جوړ کالي په ارزښت یا نیه کی ۵ ،۴ ٪ کمشو» د دې کالیو لومړنیی نیه ۲۵۰ ماکرونه وه . اوس دا کالي کومه نیه لري؟

۲ – یو پطلون په ۵ ، ۴ ٪ ارزان شو، دا پطلون او س ۲۵۰ مارکونه ارزښت لري. دې پطلون پخوا کومه بیه درلوده؟

۳ – د یوه جاکټ بیه په ۷۰ مارکونوه راکمیږي، دې پخوا ۲۵۰ مارکونه بیه لروده، اوس دا څومره بیه لري یا حومره قمته ده؟

۴ – یو جوړ دریشی په ۹۸ مارکونوګرانیږي او اوس ۴۵۰ مارکونه بیه لري. د ا ګرانښت په سلو کی څومره دی؟

۵ – رابات یو د بیي راکومن دی، چی اخستونکی ته د ځانګړو شرایطو لاندې ورکول کیږي. سکونتو یو بیه کمون دی، چی اخستونکی ته د نغدو پیسو ورکولو له امله ورکول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



الف ) یو د ۵۷ ، ۸۵۰ مارکونو شمیر، یعنی په کاغذ لیکل شوې بیه په ګوته شوې: د لسو ورځو ترمنځ نغد اداکولو په حالت کی ۳٪ سکونتو.
دلته څومره پیسی ورکول کیږي؟

ب ) یو اخستونکی د خپل نوي لاس ته راوړي بایسکل کی ۲۰ ٪ رابات لاس ته راوړي، او دا چی هغه پیسی ندې ورکوي، بر سیرهٔ پردې ۲ ٪ سکونتو هم ورکول کیږي. دا باسکل او س دی د دې لپاره بایسکل لپاره ۱۵۶ مارکونه ادا کوي.
دې بایسکل د سکونتو او ربات د مخه څومره بیه لروده؟

۶ – په یوه نغدپیسوبیه ۱۴ ٪ کی د مالیي ورزیاتیږي او ۳ ٪ ربات ورکول کېږي.
که پخپله ځان ته شمیر لیلی لیکی شی ، ته به مالیه لومړی ورزیاته کړې او که لمړی به ربات له شمیر کم کړې؟
دا نغده ارزښت به څومره جګ شي، که لومړی مالیه ورزیاته شي او بیا ربات ترې کم شي؟

۷ – اباسین خپ کور دننه په ۱۱۰۰۰۰ ماروکونو بیمه کړی. دی ددې بیمی پوره کوونو لپاره کلنی ۵ ،۱ په زرو ګټه باید نیمی ته ادا کړي. دا څومره ده؟

۸ – یوه ګازره په منځنی توګه 0,5‰ ویټامین A لري. څو ګرامه ګازرې به ۱۵ ملي ګرامه ویټامین A ولري؟

۹ – په یوه موټربیولو کنترول کی د یوه موټرځغلونکی څخه د ازماینی لپاره وینه اخستل کیږي. معاینه دا نتیجه ورکوي، چی موټرځغلوونکی 1,7‰ الکول په وینه کی لري. دابه څو مترمکعبه الکول وي، که ونیسو، چی د وینی ډکی ۷ لیتره وي؟

۱۰ – د ارزښتکاغذ ( دا په بانك کی څه کاغذونه دې، چي خلك یی اخلی، په کلنی ټاکلی ګټی سره ) یو پیسی اینبوونکی ددضیویدند Dividende ( کلنی ګټهٔ ده ) ۲۷۰ مارکونه اخلي. څموره پیسیبه هغه اینبودلي وي، که یوه بډایي

په ۵ ، ۷ ٪ ګټهٔ اینبوول شوې وي ؟

۱۱ – اباسین په یوه بانکی حساب کی ۷۰۰۰ مارکونه اچوي. له کوم وخت وروسته په ساده ۴ ٪ کی ګټونه، دی ۸۰۰ مارکونه لاس ته راوړي؟

۱۲ –

(c) ketabton.com: The Digital Library



# د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

ځلورم: ځمککچپوهنه( هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library



2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو ـ او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنښیال برابرون ( دا کتاب په دې ښانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

(c) ketabton.com: The Digital Library



.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج ځخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو ځخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج ځخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنستونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

(c) ketabton.com: The Digital Library



۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه ( هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډیرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند ( منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲ داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

(c) ketabton.com: The Digital Library



۲۵ ـــ د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې( دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ ـــ د افغانستان په هکله سپیني خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

ـــ د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګې پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ماخان په اولني نوم میرې شینواری د اروابښادې پستو او اروابښاد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مینې د لومړني ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه ) څخه وروسته د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې( ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګې څخه ګام او پای).

د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر( صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمنې کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

ماخان میرې په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمې همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلې.

**Get more e-books from www.ketabton.com**
**Ketabton.com: The Digital Library**