د شمیرپوهنې بنسټونه

ډاکتر ماخان میرې شینواری

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

وینا

د وینا لاندې یوه ژبنیزه افاده یا وییڼه پوهیږو، چې د دې لاندې دوه رښتیا ارزښتونو ،، رښتیآ،،(``wahr,,) w همداسې ،، نارښتیا،، یا ناټیک (``falsch,,) f څخه د یوه سره تنظیم کیدی شي.

ویناوې په لویو تورو A سره په نخښه کیږي : ، او کېدی شي د منطقي یا سم اندیزو عملیو سره وتړل شي. بنسټیزې شمېرپوهنیزې ویېنې یا افادې ، چې له نورو افادو څخه منځ ته نه شي راتلی اکسیومونه بلل کیږي

لاندې بیلګه د دې شمیرپوهنې وینا روښانه کوي.

وینا

A : هر طبیعی عدد د لومړنیو عددونو ضرب دی. دا یوه رښتیا وینا ده.

وینا

B : هر لومړنی ګڼ یا عدد ناجوړه یا طاق دی. دا چې 2 جوړه یا جفت عدد او پریم دی، نو وینا نارښتیا ده.

دا تروسه ښوول شوي اټکلونه

C : ناپای ډیر د پریم اعدادو غبرګوني شته. دا یوه شمیرپوهنیزه وینا ده، ځکه چې دا یا رښتیا ده او یا نا رښتیا. دلته موخه د لومړني عدد د غبرګوني څخه هغه لومړني ګاونډي ناجوړه عددونه دي ، چې دواړه لومړني عددونه دي ، د بیلګې په توګه.

$$(3,5),\ (5,7),\ (11,13),\ldots\ .$$

دا تراوسه حورا لویه د لومړنیو عددونو جوړه (د 19.4.2006 پورې) ده:

$$16869987339975 \cdot 2^{171960} \pm 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کره کونې سره

D : د جمعې ۱۳ ـمه یوه د بدبختۍ روځ ده.

دا یوه وینا نه ده، ځکه چې دا په یوه رښتیا ارزښت نه شي تنظیودی.

لیکونکې: هولیګ،هورنر

منطقي(سم اندیزې) تړنې(که غواړې: عملیی یا نښلونې)

منطقی یا سم اندیزې ویناوې کېدی شي په لاندې جدول کې ورکړ شوو عملیو سره و تړل شي.

یادونه : له کیڼ و ښي لور ته.

تیک هلته رښتیا، که	وییندود	لیکندود	نومونه	
A نارښتیا ده.	نه A	$\neg A$	نه والی	
	A او B رښتیا دي	(A او B)	$A \wedge B$	Konjunktion یا د او تړنه
	A یا B رښتیا ده.	(A یا B)	$A \vee B$	Disjunktion د یا تړنه
	A او B بیل رښتیا	(یا A یا B)	$A \not\equiv B$	Antivalenz نابرابر ارزښته

(c) ketabton.com: The Digital Library

			ارزښتونه ري
Implikation ترې لاس ته راوړنه	$A \Rightarrow B$ $B \Leftarrow A$	له A څخه B له B څخه A	A نارښتي یا B رښتیا ده
Äquivalenz برابر ارزښته	$A \Leftrightarrow B$	(A و B ته برابر ارزښته دی) یا له A څخه B لاس ته راځي او برعکس	او B همغه یا برابر رښتیا ارزښتونه لري

د دې لپاره چې په منطقي افادو یا وېینو کې نوکان یا قوسونه سپما کړو، کره کوو، چې $\neg$ له $\wedge$ او $\vee$ څخه کلک یا قوي نښلوي او دا بیا له $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ او همداسې له $\not\equiv$.

دا ایمپلیکیشن په پام کې ونیسی، چې B ټیک هلته رښتیاه ده، چې A رښتیا وي. له ناټیکو نیونو(فرضیو) ، ټیک یا رښتیا او یا هم نارښتیا پایلې را وېستل کیدی شي.

دا د یا ترني لپاره نخښه یوه دv په شان نخښه ده، چې د vel (lat. oder) (لاتین. یا) لپاره ځای په ځای شوې. د یا ترني لپاره کېدی شي چې سومبول ،، $+$ ،، وکارول شي او د او- ترني لپاره ،، · ،،. که سومبول 0 د ناټیک یا غلط لپاره وکارول شي او هر بل ارزښت د رښتیا په ځیر و کارول شي، نو کیدی شي منطقي ترنې د طبیعي عددونو شمېرني له لارې هم پر مخ بوتلای شو یا استعمال کړای شو.

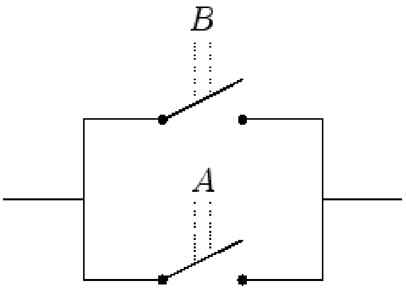
(c) ketabton.com: The Digital Library

په شمیروني (کمپیوتر ژبه کې له انګریزي راغلي کلیمې NOT (Negation) (نه والی)، AND (Konjunktion (کنجکشن)، OR (Disjunktion) (دیسجنکشن)، یا EXOR oder XOR (exclusive or, Antivalenz) (بې له یا نابرابر ارزښته) او د هغې نه والی NAND (negierte Konjunktion) (نه شوی کنجکشن) ، NOR (negierte Disjunktion) (نه شوی دیسجنکشن) او NXOR (Äquivalenz) (برابرارزښته) لپاره کارول شوي.

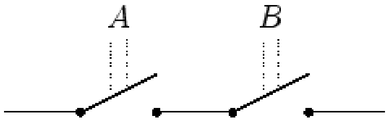
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر، کیمرلې

که وینا د سویچ په څېر انځور کړو، چې تړلي وي، که وینا رښتیا وي، په همدې توګه واز ، که وینا نارښتیا وي، نو کېدی شي مسلسل سویچونه د یا – تړني په څېر او غبرګ سویچونه د او-تړني په څېر صورت ومومي .

د یا-تړنه



د او-تړنه

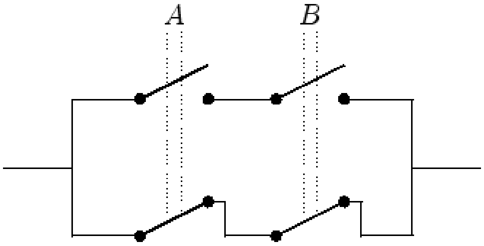


یوه نه-شوې وینا یو سویچ دی، چې تړلی دی، که وینا نارښتیا وي. له دې سره کېدی شي سویچ څېرې د برابر ارزښته، نابرابر ارزښته او ایمپلیکیشن لپاره ورکړل شي.

برابرارزښته : $A \Leftrightarrow B$ همداسې $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

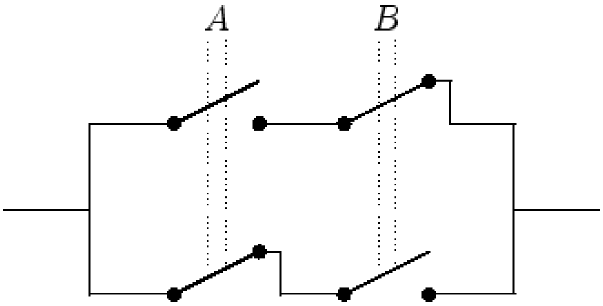
Äquivalenz:

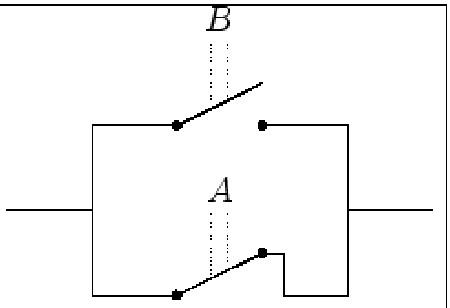
(c) ketabton.com: The Digital Library



نابرابرارزښته: $A \not\equiv B$ همداسي $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Antivalenz:



ایمپلیکېشن یا ترې لاس ته راتلنه: $A \Rightarrow B$ همداسي $\neg A \vee B$	

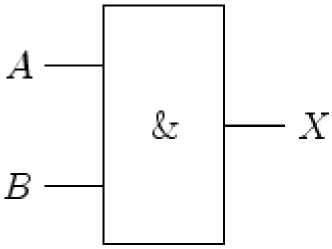
سویچونه کیدی د ترانزیستور له لارې منځ ته راشی یا صورت وومي، چې په جګ یا ټیټ اینسوول شوي شبانونګ جریان مومي یا تیریږي. د (1) ارزښت جګ شپانونګ دی ټیټ یا کم شپانونګ ارزښت (0) دی.

د دین DIN 40900 سره د اړونده (مطلوبه) شپانونګ تعریف ورکول کیږي. دا د ولاړګوډیز(مستطیل) خخه جوړ دی، په کومو کې چې اړونده تړنې ورکړ شوې دي. یو نه- والی د یوې ګردی(دایرې) سره په نخښه شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

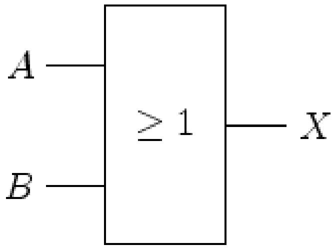
Konjunktion

کنجکشن



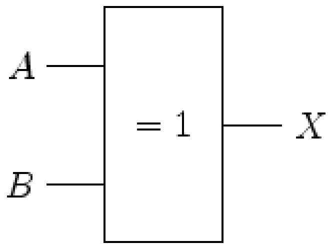
Disjunktion

دیسینکشن



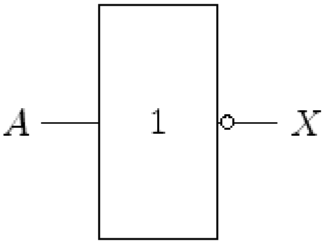
Antivalenz

نابرابررارزښته



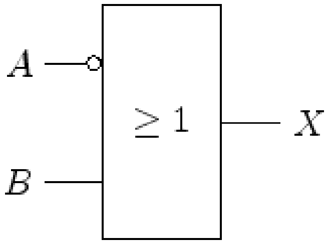
Negation

نه-والی



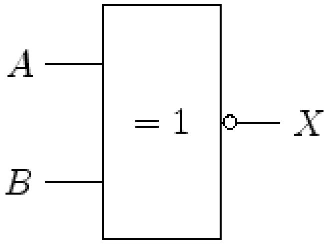
Implikation

ایمپلیکېشن



Äquivalenz

برابرارزښته



منطقي عملیو لپاره لاندې کتمتوالی Identitäten باوري دی.

اسوځیاتیو قانون :Assoziativgesetze

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

کموتاتیو یا بدلېدنقانون :Kommutativgesetze

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

De Morgansche Regeln: د دې مورګان قانو

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Distributivgesetze: دیستریبوتیو قانون

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

او نور :

$$\neg(\neg A) = A$$

$$A \wedge A = A$$

$$A \vee A = A$$

Alternative Darstellungen: الترناتیو یا بدیلیی انځورونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایمپلیکشن

Implikation: $A \Rightarrow B \quad = \quad \neg A \vee B \quad = \quad \neg A \Leftarrow \neg B$

Äquivalenz: ا $A \Leftrightarrow B \quad = \quad (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Antivalenz: $A \not\Leftrightarrow B \quad = \quad (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

بديلې فرمولونه زيات وخت په ښوونو کې استعمال مومي.

يوه منطقي افاده يا وينه ، چې د رامنخ ته شوې وينا رښتيا ارزښت خپلواکه تل رښتيا همداسې نارښتيا وي، تاوتولوجي Tautologie همداسې کونتراديکشن Kontradiktion بلل کيږي. داسې يوه افاده کړی شي د ښه بدلون سره همداسې د سره بدله شي. په ځانګړې توګه دا کټمټوالی باور لري:

$$A \vee \neg A = \mathrm{w} \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \neg A = \mathrm{f}\,,$$

همداسې

$$A \vee \mathrm{w} = \mathrm{w} \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \mathrm{w} = A\,,$$

همداسې

$$A \vee \mathrm{f} = A \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \mathrm{f} = \mathrm{f}\,.$$

همداسې

ليکونکي: هيوليک،، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مورګان قانون او د ډېستريبوتيو قانو کېدی شي وښوول شي، داسې چې د وينا د رښتيا ارزښت لپاره ټول امکانات وڅېړل شي. د دې مورګان قانون داپه لاندې جدول کې روښانه شوی دی.

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$, $\neg(A \wedge B)$
w	w	w	f	f	f
w	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	w
f	f	f	w	w	w

د ايمپليکېشن، برابرارزښتوالي او نابرابرارزښتوالي لپاره برابر ارزښته شننه له تعريف څخه لاس ته راځي.

د منطقي قانون د روښانه کونې لپاره د وينا

$$\underbrace{|x-1| > 1}_{A} \Longrightarrow \underbrace{(x < 0) \vee (x > 1)}_{B}$$

ښه دليرې.

د د ېمورګان قانون سره سم لرو:

$$\neg B = \neg(x < 0) \wedge \neg(x > 1) = (x \geq 0) \wedge (x \leq 1) .$$

له دې سره سم ايمپليکېشن $A \Rightarrow B$ د وينا د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|x-1| \leq 1 \Longleftarrow 0 \leq x \leq 1\,.$$

سره برابرارزښته دی

بیا هم دا نتیجه لاس ته راځي ، که ایمپلیکېشن د تعریف سره سم د

$$(\neg A) \vee B = |x-1| \leq 1 \vee \neg(0 \leq x \leq 1)$$

سره بدل کړي.

د بېلګې په توګه افاده یا ویېنه

$$L : (A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge B)$$

ساده کوو.. د ایپلیکېشن پهځای ایښونه او د دېموران قانون له امله لاس ته راځي

$$\neg(A \vee B) \vee (\neg A \wedge B) = (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)\,.$$

د دېتریبوتیو قانون له مخط دا وینا برابرارزښته ده د $\neg A \wedge (\neg B \vee B)$ سره.

پېژندل کیږي، چ د B ارزښت بې اغیزه دی یا ارزښتناک نه دی او $L = \neg A$.

د منطقي افادې L د ازماېښت ته الترناتیو یا بدیلي کېدی شي یو د رښتیا ارزښت جدول هم وکارول یا ا ستعمال شي.

A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge B$	L
w	w	f	f	f
w	f	f	f	f
f	w	f	w	w

(c) ketabton.com: The Digital Library

f	f	w	f	w

له دې دا هم لاس ته راځي: $L = \neg A$

کوانتورونه Quantoren

د فرمولو،، شتون لري....،، . ،، د ټولو .... لپاره،، لپاره لندوني شتونکوانتور $\exists$ او ټول کوانتور $\forall$ استعمالیږي.. دا کوانتورونه زيات وخت د $A(p)$ سره په تړاو کې استعمالیږي، چې د یوه پارامتر p چې د ډېرۍ یا سټ P توګی دی، په واک کې دي.

Schreibweise ليکندود	Bedeutung معنا
$\exists p \in P: \ A(p)$	یو توکی p له P شتون لري، د هغه لپاره چې $A(p)$ رښتیا دي.
$\forall p \in P: \ A(p)$	د ټولو p لپاره چې له P دی $A(p)$ رښتیا دی.

د دواړو وینا ډولونو د نه٠والي سره کونتوونه هم بدلیږي.

$$\neg(\exists p \in P: \ A(p)) = \forall p \in P: \ \neg A(p)$$

$$\neg(\forall p \in P: \ A(p)) = \exists p \in P: \ \neg A(p)$$

دا $\exists!$ لیکن ډول هم روښنی دی د فرمولولو لپاره، چې ،، ټیک یو ... شته،،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوانتورونو د شمېرنې ښوونې لپاره وینا

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\ \forall n \in \mathbb{N}:\ \ n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon$$

راوړل کیږي. دا په دې معنا چې یوه لړی(ترادف)

$$a_1, a_2, \ldots$$

د 0 په لور یا0 ته هځیږي، دا په دې معنا چې د پوره لوی n لپاره د a_n مطلق ا رزښت د هرې د مخه ورکړشوي بند یا بندیز ε څخه کوچنی دی.

نه-والی داسې لاس ته راځي، چې زړي وینا نه شي او کوانتورونه سره بدل شی،

$$\exists \leftrightarrow \forall\,.$$

د ایمپلیکېشن یا لاس ته راوړنې یا – راتلنې اینوونه او د مورګبن قانون څخه لاس تهراځي

$$\neg(n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon) = \neg(n \leq n_\varepsilon \vee |a_n| < \varepsilon) =$$

$$= n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon\,.$$

له دې سره د نه شوې وینا دا بڼه لري:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall n_\varepsilon\ \exists n \in \mathbb{N}:\ \ n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon\,.$$

دا په دې معنا چې پرلپسې(ترادف) (a_n) د 0 لورته نه هځیږي . دا په دې معنا چې یو لرزښت $\varepsilon > 0$ شتون لري، چې له هغه پرلپسې $|a_n|$ تل بیا اوړي یا تېرېږي.

لیکونی:ک. هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیده ښوونه

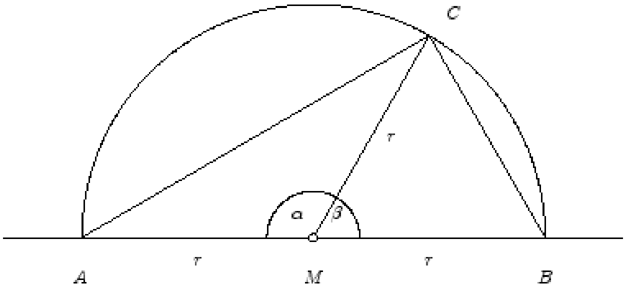
یوه غوښتنه ثبوت) B کېدی شي و ښوول شي، چې هغه له ربنتیا وینا A څخه را منځ ته شي او یا په داسې بېړته واړول شي.

$$A \Longrightarrow B \,.$$

ویناوې A کړی شي وړاندنیونې(فرضیې) هم ولري، چې هغه دِ غوښتنې B لپاره اړیینې دي.

لیکونکی: هیولیګ

د بېلګې لپاره یې د تالس جمله را اخلو، چې هر په یوه نیم ګردی(نیم دایره) کې رابند درېګودی(مثلث) ولاړګوډیز یا قایم الزاویه دی.



دا سیده ښوونه په لاندې دوه جملو ولاړه ده:

اول : په یوه مثلث کې د دننیو کونجونو جمعه π ده.

دویم : د یوه برابر پښیز (یا که غواړی: متساوی الاضلاع) مثلث بنسټکونجونه برابر لوي دي.

که دا په مثلث $\Delta(AMC)$ او $\Delta(CMB)$ و کاروو، نو له دې لاس ته راځي

$$\sphericalangle ACM = \frac{\pi-\alpha}{2}, \qquad \sphericalangle MCB = \frac{\pi-\beta}{2}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sphericalangle ACB = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

او له دې سره دی

او د $\alpha + \beta = \pi$ له امله په $\pi/2$ سره برابر.

ناسیده ښوونه

د دې لپاره چې وښایو چې له یوې وړاندنیونې(فرضیې) V ځخه غوښتنه(ثبوت) B لاس ته راځي یعنې) $B \implies V$(، کېدی شي ونیسو ، چې وینا B د V د وړاندنیونې له امله ناربښتیا ده، دا مو یوه تضاد ته بیايي:

$$V \wedge (\neg B) \implies F,$$

د F سره یوه ناربښتیا وینا ده، په ځانګړې توګه $F = \neg V$ یا $F = B$.

په ځانګړې توګه باور لري

$$B = (\neg B \implies F) = (\neg B \Rightarrow B),$$

که وړاند نیونې نه وي شوي.

لیکونکي: هیولیګ، کنش،اببربین

ایمپلیکېشن ترې لاس ته راتلنه یا - راوړنه

$$V \wedge (\neg B) \implies F$$

د $\neg(V \wedge (\neg B)) \vee F = (\neg V) \vee B \vee F.$ سره برابرارزښته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ایمپلېکشن رښتیا وي، داپه دې معنا چې د شمېرپوهنیزو قوانینو څخه لاس ته راغلی، نو باید غوښتنه(ثبوت) B رښتیا وي، ځکه چې $\neg V$ نارښتیا ده او F یا نارښتی او یا د B سره برابر دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د دې ناسیده ښوونې د روښانه ونې لپاره ښایو، چې $\sqrt{2}$ ایراشنل دی، داپه دې معنا چې د مات یا مسر په څېر نه شي انځورېدلای.

$$\neg B:\ \sqrt{2}=\frac{p}{q}$$

نیسو، چې غوښتنه B نارښتیا ده. بس باور لري

د $p,q\in\mathbb{N},\quad \mathrm{ggT}(p,q)=1$ سره .

دلته ggT انګرېزي یې gcdخورا عټ کډپروېشونی (ذوالاضعاف الاقل) دی.

د نیونې څخه د مربع کونې او د q^2 سره ضربونې له امله لاس ته راځي

$$2q^2=p^2\,,$$

دا یه دې معنا چې p^2 او له دې سره p یو چوړه یا جفت عدد دی. په ځانګړې توګه یو$r\in\mathbb{N}$ شتون لري د $p=2r$ سره. د $q^2=2r^2$ له امله q هم یو چوړه عدد دی او له دې سره $\mathrm{ggT}(p,q)=2$. دا د نیونې نیونې جوړښت $\neg B$ سره په تضاد کې ده، چې $\mathrm{ggT}(p,q)=1$ ، دا په دې معنا چې

$$(\neg B)\Longrightarrow B\,.$$

له دې امله یا د دې په تعقیب باید غوښتنه B رښتیا وی،

د پوره اندکشن له لارې ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

وينابنې د طبيعي پارامتر سره کېدی شي د پوره اينډکشن له لارې وښوول شي. که يوه د $A(n)$ په واک کې وينا وي، نو د دې لپاره دې لاندې دواړه د د $n \in \mathbb{N}$ ښوونې پلونه (قدمونه) روښانه- يا و اخستل شي. .

لومړی : د اينډکشن پيل : ښايو چې $A(1)$ رښتيا دی.

دويم : اينوکشنپايونه يا ختم: ښايو چې د نيونې چې $A(n)$ رښتيا دی(داينډکشن هیوپوتيزې)، لاسته زاځي، چې هم رښتيا دی، ياپه دې معنا چې

$$A(n) \implies A(n+1).$$

نو دا باوري دی، چې $A(n)$ د ټولو $n \in \mathbb{N}$ لپاره ضدق کوي.

د يوه اندکشن ښوونې سره يو په بل پسې sukzessive دا پسې د تر مخه ځخه لاس ته راځي.

که د اندکشن پيل د $n_0 = 1$ لپاره نه بلکه د $n_0 > 1$ لپاره سرته ورسيږي، نږ وينا بيا فقط د $n \geq n_0$ لپاره صدق کوي.

د مربع(څلوری) عددونو د جمعې لپاره فرمول

$$A(n):\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

کيدی شي د پوره اندکشن سره وښوول شي.

د اندکشن پيل ($A(1)$):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}.$$

د اندکشن پای

$$A(n) \implies A(n+1)):$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{A(n)} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

د اندکشن هیوپوتېزې، لکه چې روښانه شوه، په دریم برابروالي کې استعمال شو.

ډېرى(سټ)

یوه ډېرى A له توکو $a_1, a_2, \ldots$ جوړه ده یعنې

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}.$$

که توکي د یوه خوی له مخې خوی لرونکي (کرکترېزه) شي، نو د دې لپاره لیکو

A={a:د a خوی لري E}

د دې لپاره سرې لاندې نخښې کاروي یا استعمالوي:

معنا	لیکندول

(c) ketabton.com: The Digital Library

a د A توکی دی .	$a \in A$
a د A توکی دی .	$a \notin A$
B د A برخډېری(برخسټ) ده	$A \subseteq B$
B د A برخډېری(برخسټ) ده	$A \subset B$
دتوکو ګڼون یا تعداد په... کې	$\|A\|$
تشډېری یا تشسټ	$\emptyset$

که $|A| < \infty$ همداسي $A = \infty$ باور ولري، نو دلته د پای ډېری همداسي ناپای ډېری څخه غږېږو.

دوه یا څو ډېری برابرزوریزی بلل کیږي، که د دوی د توکو ترمنځ یو بیجکتیو بلواک یا تابع یعنې برعکسکیدونکی بلواک شتون ولري ($|B| = |A|$ د پای ډېری لپاره).

د A د ټول برخو ډېری $\mathcal{P}(A)$ تواندېری بلل کیږی، دا په دې معنا چې

$$\mathcal{P}(A) = \{B :\ B \subseteq A\}$$

له دې سره باور لري $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(A)$ او $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

ليکونکي: هيوليک، کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګڼونو (اعدادو) ډېرۍ

د لاندې ګڼونو ډېرۍ لپاره معیاري نخښې استعمال مومې:

طبعې اعداد : $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$

ټول اعداد: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$

راشنل یا هوښیار اعدا: $\mathbb{Q} = \{p/q :\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ \mathrm{ggT}(p, q) = 1\}$

ریل یا حقیقي(ریښتوني) اعداد: $\mathbb{R} = \{x :\ x = \lim_{n\to\infty} q_n,\ q_n \in \mathbb{Q}\}$

کومپلکس اعداد: $\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y :\ x, y \in \mathbb{R},\ \mathrm{i}^2 = -1\}$

په همدې توګه لاندلیکنډول هم کارول کیږي:

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ او $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} :\ x > 0\}$ او دې ته ورته یا په همدې ډول

$\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z}_0^-$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}_0^+$, $\mathbb{Q}^-$, $\mathbb{Q}_0^-$ $\mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}_0^-$.

لیکونکې: کرهیولیګ

په ډېریو کې عملیی

د دوه ډېریو A او B لپاره لاندې علمیې تعریف دي:

ټولنه (اتحاد)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A \cup B = \{x:\ x \in A\ \vee\ x \in B\},$$

غوڅی(قطاع):

$$A \cap B = \{x:\ x \in A\ \wedge\ x \in B\},$$

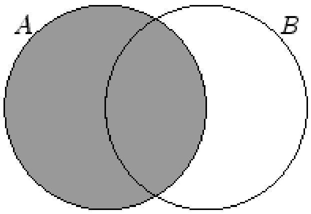
کمبنت یا کمون (تفریق)، پوره کېدونکې ډېرۍ،

$$A \setminus B = \{x:\ x \in A\ \wedge\ x \notin B\},$$

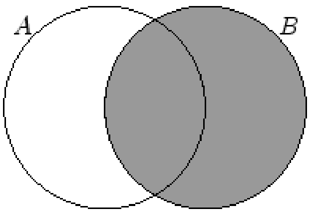
سیوتریکې کمبنت (کمون)

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

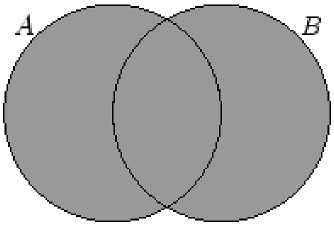
په لاندې ځېرو کې د ډېریو عللیې داسې په نامه ون-دیاګرام Venn-Diagramme سره ښوول شوي دي.



A



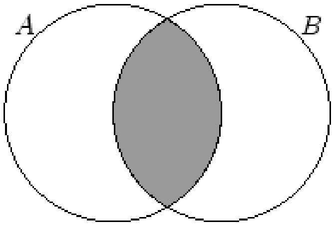
B



تولنه

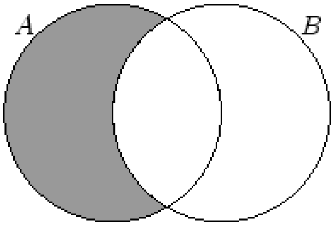
$A \cup B$ Vereinigung:

(c) ketabton.com: The Digital Library



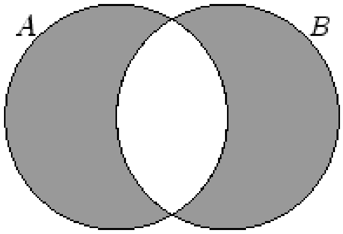
غوځی

$A \cap B$ Schnitt:



کمښت

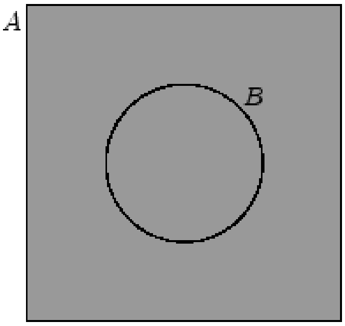
$A \setminus B$ Differenz:



سیومتریکي کمښت

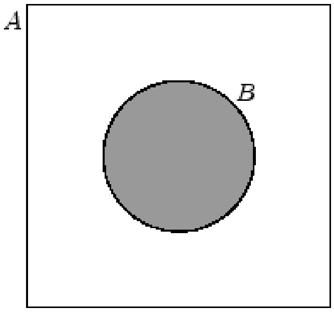
symmetrische $A \Delta B$ Differenz:

که $B \subset A$ وي، نو یوځو دیاګرامونه یو بل سره خوري یا یو په بل پریوځي:



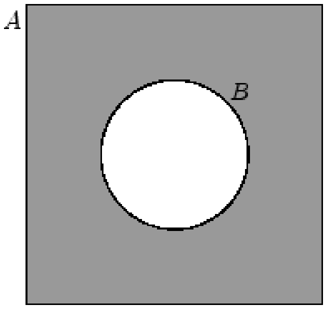
ټولنه

Vereinigung: $A = A \cup B$



غوځی

$B = A \cap B$ Schnitt:



پوره کېدنکې ډېرى

Komplementärmenge : $A \setminus B = A \Delta B$

لیکونکې: هولیک،هورنر، کنیش

د ډېریو عملیو لپاره شمېرقوانین:

اسوځیاتیو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

کموتاتیو یا بدلېدونکی قانون.

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

- Morgansche Regeln:
- د مورګان قانون یا قاعده

$$C \backslash (A \cap B) = (C \backslash A) \cup (C \backslash B)$$

$$C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B)$$

- دیستریبوتیو قانون.

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

دا قوانین د منطیقي قوانینو په کوته کونه هم ده، که د $\cap$ $\cup,$ عملیو په ځای $\wedge, \vee$ کیږدېږ او $C\backslash$ په ځای $\neg$ کیږدو.

لیکونکي:هیولیګ،هیونر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نمونې په توګه به د دې مورګان لومړی قانون و ښوول شي. باور لري:

$$x \in C\backslash(A \cap B) \Leftrightarrow \qquad x \in C \wedge x \notin (A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B).$$

د ډیستریبوتیو قاونو له مخې اخرنی افاده یا ویینه د لاندې سره برابرارزښته ده

$$(x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in (C\backslash A \cup C\backslash B),$$

له کوم سره چې غوښتونکی کتمتوالی ښوول شوې.

لیکڼنکی:ک. هیولیګ

د دې مورګان قاعدې له مخې د بیلګې په توګه لاس ته راځی

$$C \setminus (A \cap C) = (C \setminus A) \cup (C \setminus C) = (C \setminus A) \cup \emptyset = C \setminus A,$$

$$C \setminus (A \cup C) = \qquad (C \setminus A) \cap (C \setminus C) = (C \setminus A) \cap \emptyset = \emptyset.$$

د ډیستریبوتیو قانون د بېلګې په توګه لاس ته راځي:

$$(A \cup B) \cap B \quad = \qquad (A \cap B) \cup (B \cap B) = (A \cap B) \cup B.$$

له دې سره باور لري $(A \cap B) \cup B = B$ ، څکه چې $(A \cap B) \subseteq B$ دی

کارتېزي ضرب (حَل)

د دوه ډېریو A او B کاتېزي ضرب دواړو ډیریو د ټولو منظمو جوړو ډېری ده:

$$A \times B = \{(a,b):\ a \in A \wedge b \in B\}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري:

$$(a,b)=(a',b')\Leftrightarrow(a=a'\land b=b').$$

داپه دې معنا چې د ډېرى برابروالي ($\{a,b\}=\{b,a\}$) په عكس يا په ځنډ د لړی پرلپسې غوره ده

په ورته تو ګه n - واره يا څله كارتېزي ضرب تعريفوو

$$A_1\times\cdots\times A_n$$

د ټولو منظمو n - ګونونو $(a_1,\ldots,a_n)$ د $a_i\in A_i$ سره . كه ډېرى برابرى وي، نوليكو:

$$A^n=A\times\cdots\times A$$

ليكونكي:هيوليګ،هيورنر

اړيكې Relation

كه د ډېرى A توكي د ډېرى B له توكو سره په اړيكو كې قرار ولري يا ولاړې وي، نو كېدى شي دا د يوې اړيكې سره افاده يا وويل شي. دا د توكو (a,b) له منظمو جوړو جوړه ده، چې دا د اړيكو له لارې سره تړلي دي. نو يوه اړيكه R د A او B د كارتېزي ضرب برخډېرى ده. وايو چې a د b سره په اړيكو كې ده او د دې لپاره ليكو $a\,\mathrm{R}\,b$:

$$a\,\mathrm{R}\,b\Leftrightarrow(a,b)\in R\subseteq A\times B.$$

ليكونكي:ژ. هيورنر

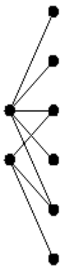
(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړیکو د داتا بانک Relationale Datenbank

یوه نمونه یي بېلګه د اړیکو د ،،داتا-بانک،، دی. دلته د بېلګې په توګه یو د درسونو (لکچرونو) جدول او یو د زده کړو جدول ورکول شوي چې یو له بل سره په اړیکو کې راغلي. دا په لاندې ځېره کې روښانه شوي.

په لاندې کې کیڼ لور ته نومونه دي

درس	کوټه
لوړه شمیرپوهنه ۱	V57.01
د زده کوونکو...	V47.02



Mtr.-Nr.	Name
1000000	Anton Antonius
1000001	Berta Bethel
1000002	Cornelius Cornell
1000003	Damian Damien
1000004	Egon Ekel
1000005	Frank Frankfurth

دا هم دلته روښانه شوي چې د یوې ډېرۍ توکي د بلې ډېرۍ د توکو سره په اړیکو کې راځي یا که غواړئ :قرار لري.

لیکونکي: بوسلر، هیورنر

د اړیکو خویونه

په یوه ډېرۍ A کې یوه اړیکه $R \subseteq A^2$ په لاندې توګه بلل یا نمول کیږي:

رفلکسیوreflexiv ، که هر توکی د خپل ځان سره په اړیکه کې وي:

$$\forall a \in A : (a, a) \in R$$

سیومتري symmetrisch ، که د توکو لړۍ پرلپسې کوم رول نه لوبوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$

انتی سیمتري antisymmetrisch ، که که له سیمتري څخه کټمتوالی لاس ته راشي:

$$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$$

ترانزتیوtransitiv ، که له یوه زنځی څخه منځنی توکی لرې کېدی شي:

$$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

ټوټالي total، که هر دوه توکي لږ تر لږه په یوه لور په اړیکو کې سره راتلی شي:

$$\forall a,b \in A : (a,b) \in R \vee (b,a) \in R$$

که یوه اړیکه رفلکسیو ، سیومتریک او ترانزیتیو وي، نو دا ،،ورته اړیکې،، (برابرارزښته اړیکې) بلل کیږي. دلته بیا زیات وخت $a \sim b$ د $a\,\mathrm{R}\,b$ په ځای لیکل کیږي. یو ورتهاړیکې ډېرۍ A په توکي پردیو برخډېریو ویشي (ورته یا برابر ارزښته ټولګیو)، د کوم سره چې د یوې برخډیرۍ دوه توکي یوبل سره په اړیکو کې دریږي(برابرارزښته دي). په داسې حالت کې چې دوه توکي له مختلفو برخډریو څخه داسې حالت نه لري.

که یوه اړیکه رفلکسیو، انتیسیمتري او ترانزیتیو وي، نو دا یو نیم نظم دی او د دې لپاره $a \leq b$ د $a\,\mathrm{R}\,b$ په ځای لیکل کیږی. که یو نیم نظم د دې برسېره(سربېره) توتالي وي، نو دا (توتال) نظم بللکیږي او A د $\leq$ سره منظمه ده.

لیکونکی:ژ هیورنر

د یوې ډېرۍ M پوتنځډېرۍ $\mathcal{P}(M)$ کې د ډېرۍ خوندیونه یا په کې ځایېدنه $\subseteq$ نیم نظم دی، ځکهچې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A \subseteq A$ رفلکسیو انتیترانزیتیو $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ او

ترانزیتیو $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ قوانین. که M له یوه زیات توکي ولري،
نو خوندیونه نظم نه ی، ځکه چې لاندې باور لري:

$$a, b \in M, a \neq b : \{a\} \nsubseteq \{b\} \wedge \{b\} \nsubseteq \{a\},$$

دا په دې معنا چې دا ټوتالي منظمه نه ده.

اړیکي ،، ټیک دومره توکي لري لکه،، د یوې پای ډېرۍ M په تواندېرۍ کې $\mathcal{P}(M)$ برابرارزښته ده ځکهچز باور لري : $|A| = |A|$ (رفلکسیو)،
$|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A|$ (سیومتري)،
$|A| = |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C|$ (ترنزیتیو)

لیکونکی:ژ هیورنر

په یوې ډېرۍ باندې زیات وخت اړیکي یا په همدې ډول پرابرارزښته – اړیکې د توکو د خویونو له لارط تعریقیږي. د بېلګې په توګه دوه اړیکي په

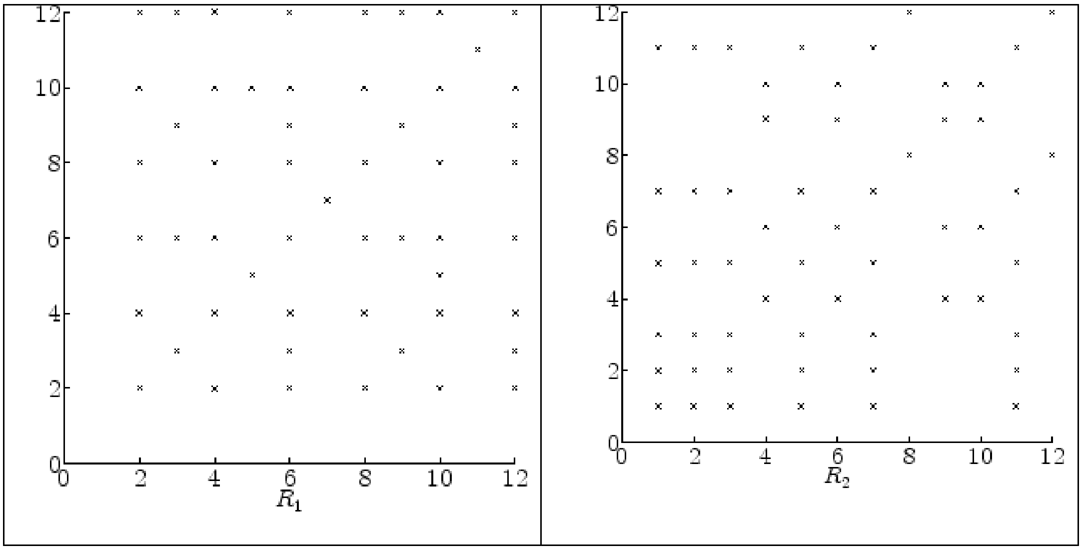
$$M = \{1, 2, \ldots, 12\}$$

کې ترځېرنې لاندې نیسو:

لومړی $x\ R_1\ y$: x او y یو ګډ پروېشونی (مقسوم علیه مشترک) $\neq 1$ لري .

دویم $x\ R_2\ y$: x او y برابرډېر پروېشوني لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



$M \times M$ برخدېريو په څير د اړيکو گراف ښايي . د ځيرونه يا يا تابع(بلواک)

اړيکې R_1 سيومتريک او رفلکسيو دي، مگر نه ترانزيتيو. د بيلگې په توگه $x = 4$ او $y = 6$ کډ پروېشونی 2 لري او $y = 6$ او $z = 9$ کډپروېشونی 3 لري، مگر $x = 4$ او $z = 9$ کډ پروېشونی نه لري. نو

$$(xR_1y \wedge yR_1z) \Rightarrow xR_1z$$

باور نه لري.

اړيکې برابرارزښت –اړيکې دي. رفلکسيويتي، سيومتري او ترادزيتيويتي په ځرگنده توگه پوره دي. برابرارزښته –ټولگې

دي د يوه، دوه، درې څلور او شپږ پروېشونو سره.

ليکونکي: هيليک،کرايخ

فنکشن (بلواک يا تابع)

د يوه فنکشن f لاندې له يوې ډېرى A په يوه ډېرى B باندې يوه قانونمندي پوهيږو، چې هر $a \in A$ توکی په يواځني ډول يو ټاکلي $b = f(a) \in B$ باندې تنظيم کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f : A \longrightarrow B\,.$$

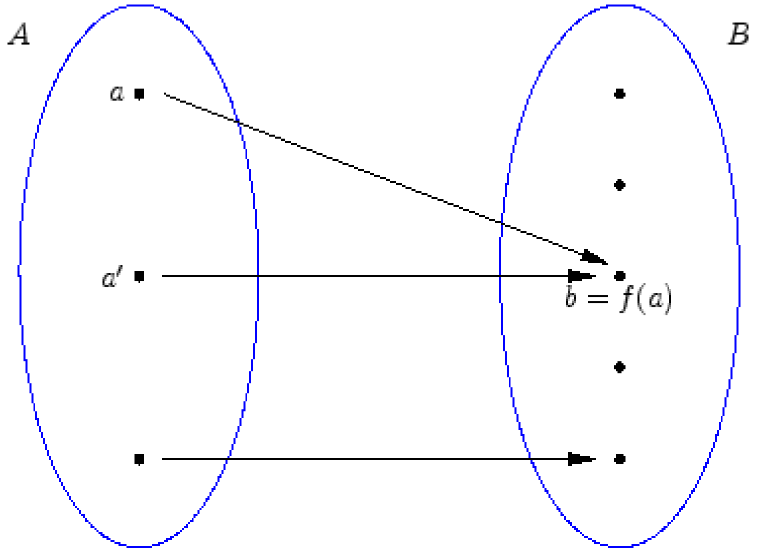
د توکو- نظم لپاره لاندي ليکندود استعماليږي

$$a \mapsto b = f(a)$$

او b د a ځېږي يا ارزښت په حيث بلل کيږي او همداسي a د b (د پخوا ځېږي)د تعريف توکي په ځېر بلل کيږي.

لکه د لاندي ځيري ځخه چي کتل کيږي، بايد د B توکي د A د يوه توکي د ځېږي توکي په توګه رامنځ ته شي او د B يو توکی کېدی شي د A د ډېرو توکو ځېره يا نظم وي. په هر حالت بايد د A د هرتوکی لپاره په يواځني توګه يوه ځېره شتون ولري، دا په دې معنا چي له هر a ځخه بايد يو غشی وتلی وي.

پيژندل کيږي چي ځيره زيات تعريفتوکي يا د ځيري پخوانی يا نوره هم ښه مخکني لري(دا په دې معنا چي ځيره کېدونکی دی)، دلته د بيلګي په توګه a او a'. د ځيرونی لپاره کليمه فنکشن هو کارول کيږي، په ځانګړې توګه په ريل ا حقيقي او کمپلکس اناليوزی کي.



ليکونکي: هيوليک،هيورنر،کيمرلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع يا ځيروني يا بلواک(تابع) خويونه

د دوه ډېريو A او B ترمنځ يوه تابع

$$f : A \longrightarrow B$$

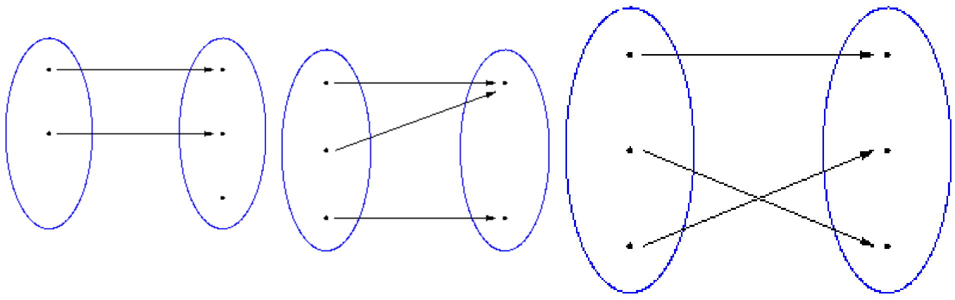
داسې يا په لاندې تکه بلل کيږي:

په کې بلواک injektiv : که د هر $a, a' \in A$ لپاره د $a \neq a'$ سره دا $f(a) \neq f(a')$ صدق وکړي.

په باندې (بلواک) surjektiv : که هر $b \in B$ لپاره يو $a \in A$ شتون ولري د $f(a) = b$ سره.

په (بلواک) bijektiv : که (تابع) f په کې او په باندې وي.

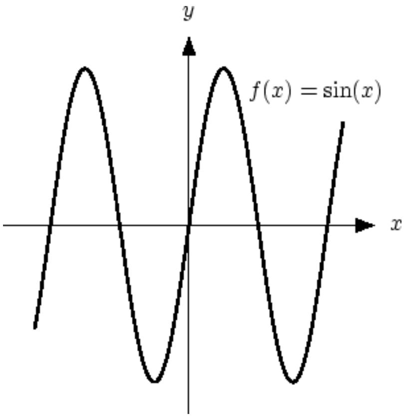
دا کليمې کېدی شي د ډېرې دياګرام له لارې روښانه شي.



په کې injektiv   په باندې surjektiv   په bijektiv

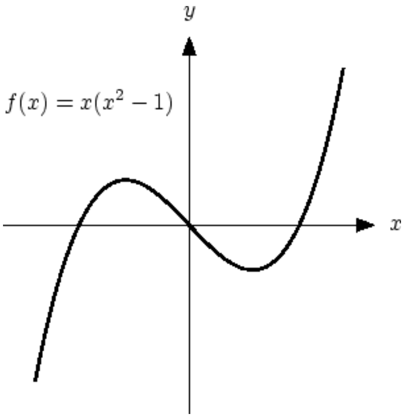
د يو څو بلواکو(توابعو) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ خويونه ورکړ شوي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



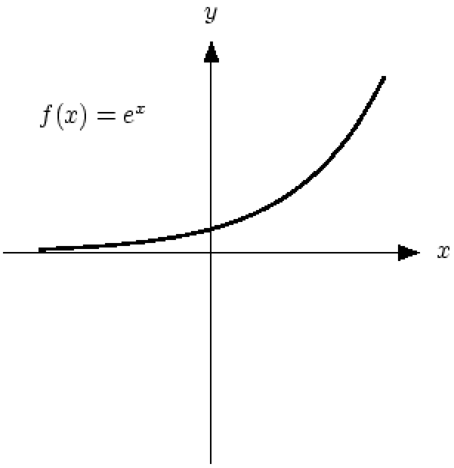
weder injektiv, noch surjektiv

نه په کې او نه په باندې



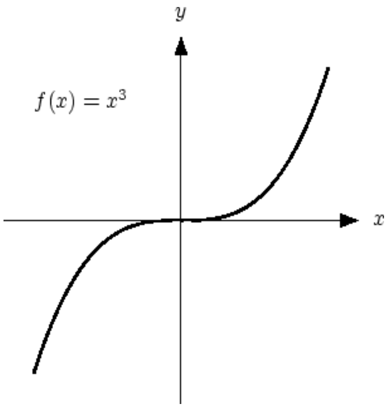
surjektiv, aber nicht injektiv

په باندې، مگر نه په کې



nicht surjektiv, aber injektiv

، نه په باندې مگر په کې



bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv

په، دا په دې معنا چې په کې او په باندې

(c) ketabton.com: The Digital Library

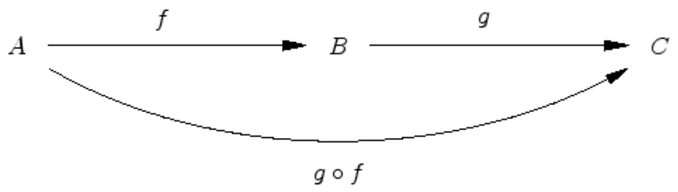
د فنکشنونو (بلواکو یا توتبعو) تړنه یا عملیې

Verknüpfung von Abbildungen

د دوه فنکشنونو $f : A \to B$ او $g : B \to C$ تړنه یا کمبوزیشن (زنځیرونه یا سره ګډ ایښونه) د

$$a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad a \in A,$$

له لارې تعریف شوی او په لاندې دیاګرام کې لیدوړ ګرځېدلی.



تابع اسوځیاتیو ده، دا په دې معنا چې ∘ تړنه

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

صدق کوي، مګر په ځرګند ډول کموتاتیو نه ده. .

لیکونکی: هیولیګ، کنش

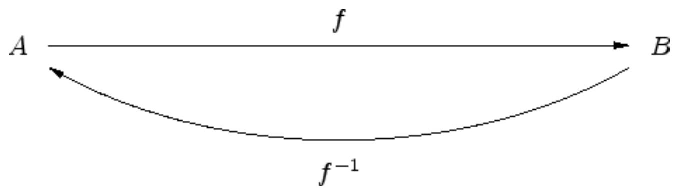
په څټ یا برعکس فنکشن (بلواک یا تابع)Inverse Abbildung

د یوه په فنکشن یا تابع $f : A \to B$ لپاره د

$$b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

له لارې په څټ فنکشن یا برعکس تابع $f^{-1} : B \to A$ تعریف ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ځانګړې توګه $a = f^{-1}(f(a))$ دی، داپه دې معنا چې $f^{-1} \circ f$ کټمټ یا ورته تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، کنش

فاکولتې یا فکتوریل Fakultät

د لومړیو n طبیعي اعدادو یا ګڼونو ضرب د

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$$

سره په نخښه کیږی. (لوستل یې : n فاکولتې). له دې سره کلک تړلی یا له دې سره ه کلکه په نړاو کې تش ضرب داسې لیکو: $0! = 1$.

ګڼ یاعدد $n!$ د n مختلو شیانو دمختلفو امکاناتو د ترتیب یا نظم ګڼون یا تعداد ر ښایي

د لوی n لپاره د $n!$ اسیپتوتیکي حالت د سترلینګ Stirlingschen فرمول له لارې په ورته نږدې ډول وښوول شي:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O(1/n)\right).$$

لیکونکي: هیولیګ،هیورنر

د بینوم ضریبونه (ځلووني) Binomialkoeffizient

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $n, k \in \mathbb{N}_0$ لپاره د $n \geq k$ سره د بينوم ضريبونه تعريفوو:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-2)(k-1)k}.$$

د $0! = 1$ له امله په ځانګړې توګه باور لري:

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1.$$

د بينومي ضريب $\binom{n}{k}$ د n توکو سره يوې ډېرۍ د k - توکيزو برخډېريو ګڼون يا تعداد ورکوي.

د پاسکال درېګودی(مثلث) Pascalsches Dreieck

د بينوم ضريبونه

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

د لاندې رېکورزيون Rekursion (په بېرته معلومو فرمولونو) په مرسته

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

په يوه درېګډيزې شيما يا شکل، داسې په نامه پاسکال درېګودي کې يا له لارې وشمېرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc}
\binom{0}{k} & & & & & & 1 & & & & & \\
\binom{1}{k} & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
\binom{2}{k} & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
\binom{3}{k} & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
\binom{4}{k} & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow \\
\binom{5}{k} & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

.

لیکونکي: هیولیګ، کنش

دا د ښوولو کټمټوالی

$$\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

د $n!$ سره وېشنې او $(n-k+1)!\,k!$ سره ضربونې له لارې د

$$n+1 = k + (n+1-k)\,.$$

سره برابرارزښته دی.

لیکونکي: هیولیګ، کنش

د بینوم درسي جمله Binomischer Lehrsatz

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بينوم درسي جملې سره کېدی شي د دوه متحولو يا اووښتونو د زياتون يا جمعې توان وشمېرل شي.

د ټولو $n \in \mathbb{N}_0$ لپاره صدق کوي:

$$(a+b)^n =$$

$$a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

په ځانګړي توګه د $n = 2,3$ لپاره:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

د بينوم جمله کيدی شي د پوره ايدکشن له لارې وښول شي.

د $n = 0$ او $n = 1$ لپاره کتمتوالی د

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k}b^k = \binom{0}{0} a^0b^0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k}b^k = a+b$$

له امله د په خوښه a او b لپاره رښتيا يا ټيک دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیسو چې د n لپاره صدق کوي. نو دی:

$$(a+b)^{n+1}$$

$$= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}$$

$$=$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^k + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k$$

د بینوم ضریبونو لپاره کتمتوالی Identitäten für Binomialkoeffizienten

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بینوم ضریبونو لپاره لاندې کتوتوالی صدق کوي:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k, \quad n \geq 1,$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}, \quad k < n,$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{i}, \quad k > 0.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

لومړي دواړه کتمتوالي تړلي د بینوم د درسي ځخه لاس ته راځي،

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

د ارزښتونو $a = b = 1$ همداسې $a = -b = 1$ سره .

دریم کتوتوالی د ریکورزین فرمول په بیا بیا استعمال له لارې لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

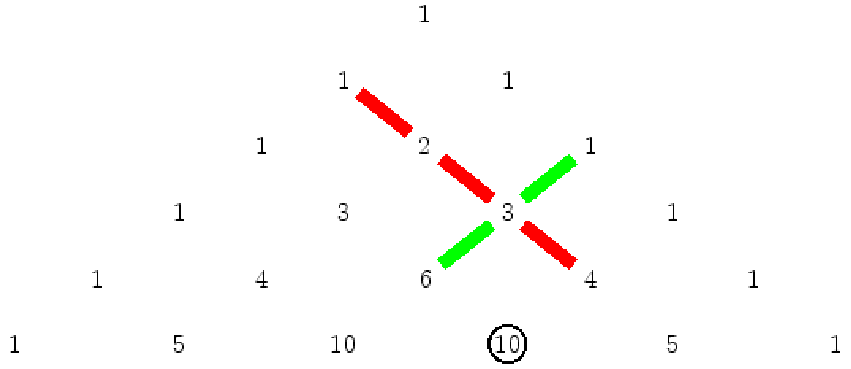
$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \\
&= \dots \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{n-k-1}{0} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}.
\end{aligned}$$

په دې مساواتو کې د په ځای اینولو یا سبستیچیشن Substitution

$(n-k) \leftrightarrow k$

له لارې ځلورم کتمتوالی لاس ته راځي.

دا اخرني دواړه کتوتوالي کېدی شي په پاشکال درېګوډي کې جمعه کوني لخ لارې انځور شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډېريو يا ستېونوکمبيناتوريک Kombinatorik von Mengen

(د کمبيناتوريک د نورې زياتې کتنې لپاره دې زما دشميرپوهنې ستر کتاب وکتل شي)

لاندې جدول د مختلفو امکاناتو ګڼون يا تعداد ورکوي، چې د يوې د n مختلفو توکو سره ډېرۍ ځخه k توکي ټاکلی شو، د کوم سره چې بايد توپير شي، چې ايا د لړۍ پرلپسې يو رول لري (ترتيبونه) او تکرار ونه په کې اجازه لري که نه.

	sortiert منظم(د ټاکلو اړخونو له لارې) ترتيب	nicht sortiert نا متظم
له تکرار سره	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
بې له تکرار سره	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

ليکونکې: هيوليک،کنش

لومړی : نا ترتيب يا نا منظم ټاکنه بې له تکرار ځخه

که د لړۍ پرلپسې په پام کې ونيو لې، نو د لومړي ځل لپاره n امکانات شتون لري، $(n-1)$ امکانات د دويم لپاره ، تر $(n-k+1)$ امکاناتو پورې د k-م توکي لپاره، نو په ټوليزه توګه

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

امکانات شتون لري.

دا بايد د ګڼون يا تعداد $k!$ سره وه وېشل شي چې د k توکو پرموتيشن (د توکو ځای بدلون : لنډ: ځای بدلون) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم : ناتتيب شوي انتخاب د تکرار سره

يو برابرارزښته پرابلم دادی، چې $n-1$ په نځښنه شوې (نشاني شوي) د $n+k$ ټکو تر منځ ځای په ځای شي.

$$\bullet \mid \bullet \mid \bullet \mid \bullet \mid \bullet \mid \bullet \mid \bullet \mid \bullet$$

$$\triangle \quad \triangle \quad \triangle \quad \triangle$$

د $(i-1)$ -م او i -م ترمنځ ټکو تعداد چې په 1 کم شوی د i –م توکي تکرارونو سره برابر دی. د لومړي سره سم د ممکنه په نخښنه کيدونو تعداد لپاره لاس ته راځي

$$\binom{n+k-1}{n-1},$$

کوم چې په جدول کې ورکړ شوي عدد سره سر خوري.

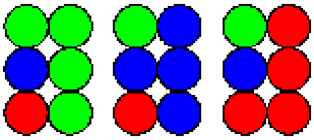
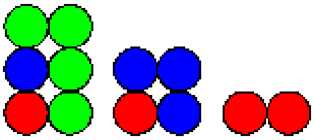
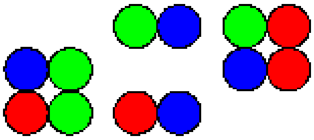
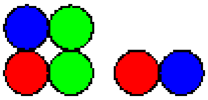
دريم : د تتيب شوي انتخاب لپاره فرمول پسې ترلی لاس ته راځي.

ليکونکي:هيوليک، کنش

په يوه مرتبان کې يو سور يو شين او يو اسماني توپونه (غونډوسکې) پراته دي. په جدول کې د دوه واره راوستنې د امکاناتو تعداد کتل کيږي ($k=2, n=3$) .

ناترتيب شوي يا نامنظم	ترتيب شوي	
$\binom{n+k-1}{k}$	n^k	د تکرار سره (دبېرته وراچونې سره)

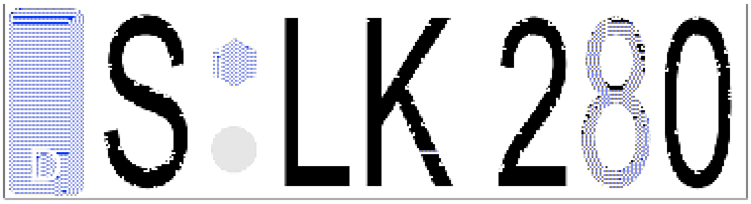
(c) ketabton.com: The Digital Library

		
	$3^2 = 9$	$\binom{3+2-1}{2} = 6$
بې د تکرار سره (نه دبېرته وراچوني سره)	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
		
	$3 \cdot 2 = 6$	$\binom{3}{2} = 3$

ليکونکي:هيوليک، کنش

د موټر نمره Autokennzeichen

د يوه الماني موټر نمره د ايالت يا ښار لپاره د ≤ 3 تورو کمبينېشن ، ≤ 2 د نورو تورو او تر يوه څلورځايز عدد څخه د بېلګې په توګه :



(c) ketabton.com: The Digital Library

له n تورو څخه 26^n کمبینېشنونه شتون لري او له دې سره

$$(26 + 26^2 + 26^3) \cdot (26 + 26^2) \cdot 9999 = 1.28 \cdot 10^{11}$$

ممکنه نمرې (که د ښار یا ایالت د ورسره ور ګډونه په پام کې ونه نیول شي

لیکونکي:هیولیګ، کنش

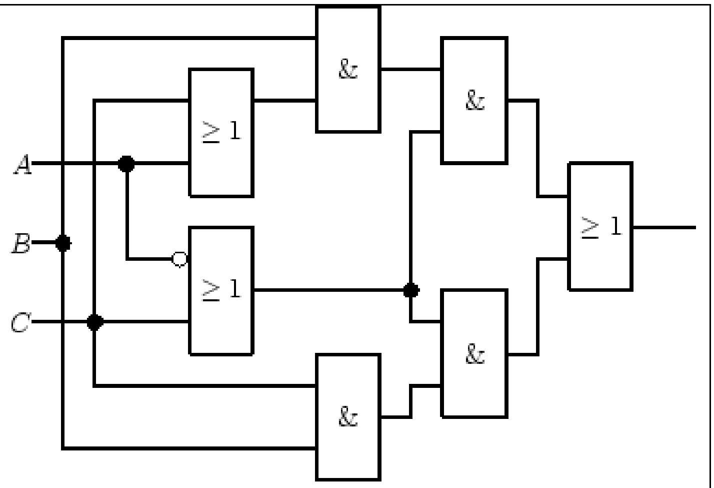
پوښتنې

- د بڼه بدلون او همداسې د رښتیا جدول سره و و زامیی، چې ایا افادې یا ویېنې تل ټیک دي یعني Tautologien دي:

$$(A \vee B) \Rightarrow ((\neg A \vee B) \wedge (A \Rightarrow \neg A))$$

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$$ پای.

- اړیکې $\Box$, $\Diamond$ د ډېرې پوهنې څخه د منطقي علیو $\{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ لپاره ځای په ځای شوي. په کومو حالتونو کې باور لري:

- محامخ سویچونه(شالتونګونه) ساده کړئ:	

(c) ketabton.com: The Digital Library

- ډېرې $A, B \neq \emptyset$ ، يوه تابع $f : A \to B$ همداسې برخډېرې $U, V \subset A$ او $X, Y \subset B$ ورکړ شوي دي. د لاندې اړيکو رښتياوالی همداسې نارښتياوالی د يوې مناسبې برعکس بېلګې په مرسته وښايئ:

الف- $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$ ب - $f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$

پ - $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

ت - $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

- د يوه تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ په هکله لاندې وېناوې په فورمال ليکندود افاده کړئ:

الف - fپه باندې نه دی ب - f په کې نه دی

پ – f په نه دی ت – fنه په کې او نه په باندې دی

ليکونکی: کريستيا اپيپش

- د $n \in \mathbb{N}$ لپاره د پوره ايدکشن له لارې وښايئ:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \textbf{a)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \textbf{b)}$$

- د $n \in \mathbb{N}$ لپاره د پوره ايدکشن له لارې وښايئ:

الف : $a_n = n^3 + 5n$ په 6 وېشونی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب : $b_n = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ یو طبیعي عدد دی.

- په یوه میلمستیا کې 25 کسان سره یوځای کیږي. څومره لاسونه سره ورکول کیږي، که هر میلمه هر بل مېلمه ته لاس ورکړي. .

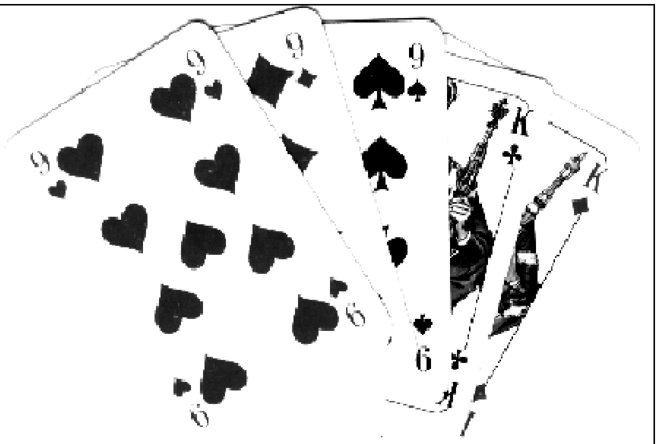
د شمیرپوهني له لومړني کورس څخه

- و ښایی:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$$ **a)**

$$\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n+k-\ell}{k} = \binom{n+k}{k+1}$$ **b)**

لاس ته راونې یې په پاسکال درېګوډي کې انځور کړئ. لیکونکی: کلاوس هیولیګ

	- په یوه د کارتو لوبه کې چې له 32 کارتو جوړه ده(8 ارزښتونه 4 رنګونه) څومره امکانت شته دی، چې فول هوز Full Haus (درې برابرارزښته او دوه برابر ارزښته) کارتې لاس ته راوړل شي؟ د دې لپاره څومره امکانات شته چې دا څېره شوي کارتې د دوه کارتو بدلولو سره یو پوکر(څلور برابر ارزښتونه) لاس ته راوړای شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ازماېښت Test

لومړۍ پوښتنه:

د لاندې منطقي ابادې رښتيا ارزښت پيدا کړئ

$$D: \ (A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \vee A)$$

چې د وېناو A, B, C د رښتيا ارزښتونو تابع يا په واک کې وي.

هر ځل يا'w' او يا 'f' ورکړئ.

دويمه پوښتنه:

ډېرۍ $A = \{1,2,3,4,5\}$ او $B = \{4,5,6,7\}$ ورکړئ.

په ګوته کړئ، چې ايا لاندې وېناوې رامنځ ته کيږي که نه(J د هو لپاره او N د نه لپاره)

دريمه پوښتنه:

د دوه هره يوه د درې توکيزه ډېريو A او B ترمنځ څومره اړيکې شتون لري؟

له ې څخه څومره بلواک يا تابع دي او څومره بلواک يې په باندې(سورجکتيو) دي؟

څلورمه پوښتنه:

و څېړئ چې ايا لاندې توابع يا بلواک $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ په باندې، په کې او په دي:

$$\mathbf{a)} \quad f(x) = x \sin x \qquad \mathbf{b)} \quad f(x) = \exp\left(-x^3 + 1\right)$$

$$\mathbf{c)} \quad f(x) = x \ln \frac{1}{|x| + 1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځمه پوښتنه:

څومره پنځه ځایزه ګڼونه یا عددونه شتون لري د لاندې سره

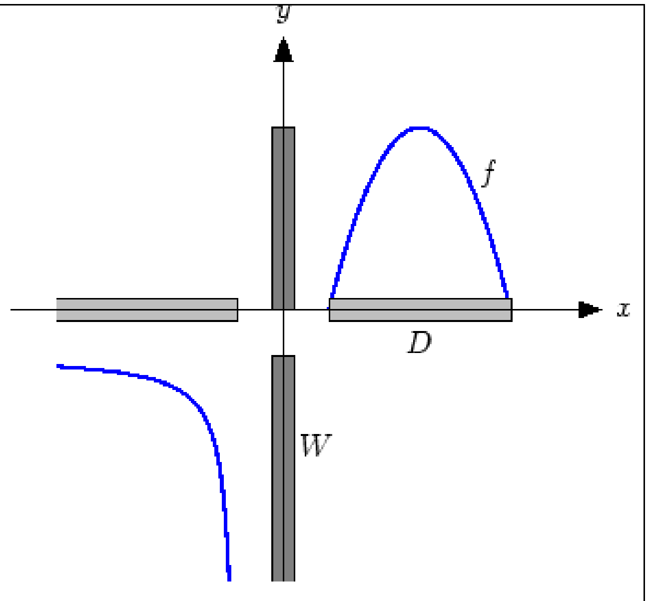
الف: پنځه مختلف عددونه

ب) تیک دوه جوړه عددونه

شپږمه پوښتنه:

څومره امکلنات شتون لري، چې ناه کسان په درېیز ګروپ وویشو؟

تابع یا فنکشن یا بلواکFunktion

یو فنکشن $f: D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ هر د تعریفورشو $D \subseteq \mathbb{R}$ هر توکی x په یوه د ارزښت ورشو $W \subseteq \mathbb{R}$ په یوه توکي $f(x)$ باندې تنظیموي.. د فنکشن یا بلوتک f ګراف له ټکو (x, y) جوړ دی د $y = f(x)$ سره.	

لکه د تابع څخه چې لیدل کیږي، د تعیف ورشو (روڼ شین) او د ارزښت ورشو(تیاره خړ) د x – محو ر همداسې د y -محور پرېوستونونه Projektionen دي.

د دې لپاره چې د تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعریف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، باید په ساده تابع رامنځ ته شوي بنديزونه په پام کې ونيسو. د لوګاريتم ارګومنت باید مثبت(زياتيز) وي:

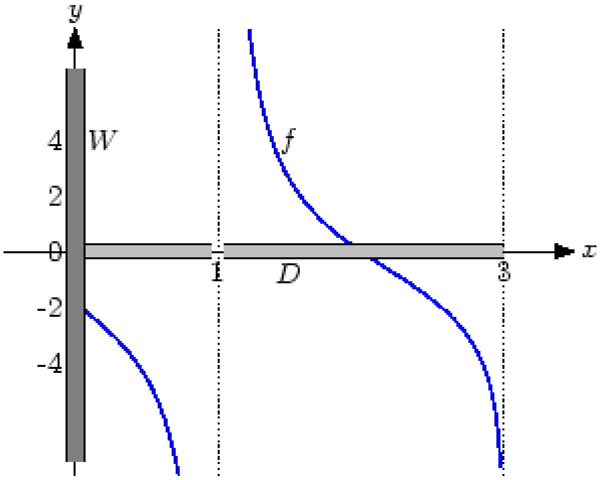
يعني $3-x>0$ او $x\geq 0.$

په هر حالت مخر-(ماتلاندې) بای صفر نه شي، دا په دې معنا چې $x\neq 1.$.

په ټوليزه توګه لاس ته راځي:

$$\mathrm{D}=[0,3)\backslash\{1\}=[0,1)\cup(1,3).$$

د f ارزښت د رسم سره روښانه یا واضح کیږي.



دا چې f د $x\in(1,3)$ لپاره د $-\infty$ او $+\infty$ ترمنځ ټول ارزښتونه نيسي يا اخلي، نو باور لري. $W=\mathbb{R}$

ليکونکي:هيوليک،هيورنر،کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې جدول د څو بنسټيزو بلواک يا توابعو د تعريف - او ارزښت ورشو بنايي:

$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\ln x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x : x = (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$

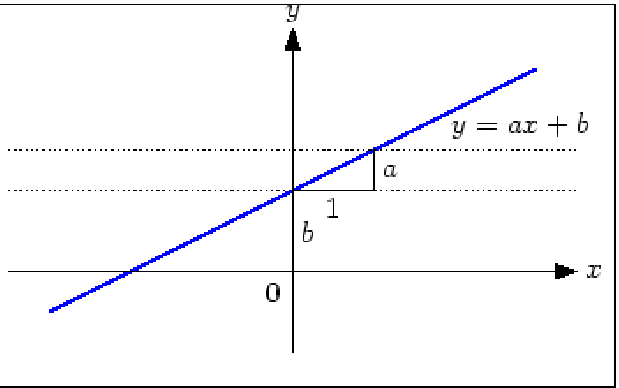
ليکونکي:هيوليک،هيورنر،کنش

کرښيز فنکشنونه   Lineare Funktion

د يوه کرښيز فنکشن

$$f(x) = ax + b$$

ګراف يوه کرښه ده د a جګېدنې سره او د y -محورغوځي b سره.



الترناتيو يا بديلې انځورونې يې تکي-جګيدنې-بڼه

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

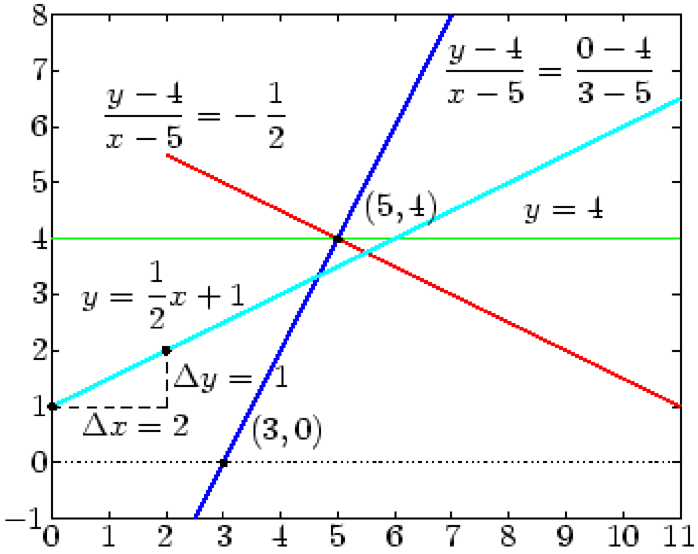
او د دوه ـټکو-بڼه

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

دي ، د کوم سره چې (x_0, y_0) او (x_1, y_1) په کرښه ټکي دي.

ليکونکي:هيوليګ،هيورنر

تابع د کرښيزو فنکشنونو مختلفو انځورونو بڼې ښايي يا په نخښه کوي.



مربعيز فنکشنونه Quadratische Funktion

د يوه مربعيز تابع ګراف

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

يو د

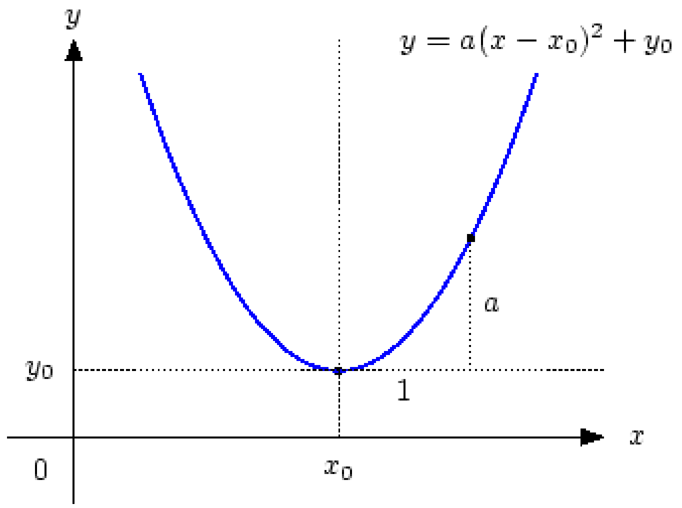
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د بڼي پارابول دی د ککرۍ

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right) .$$

سره.



مایل ګوزار یا – غورځونه Schräger Wurf

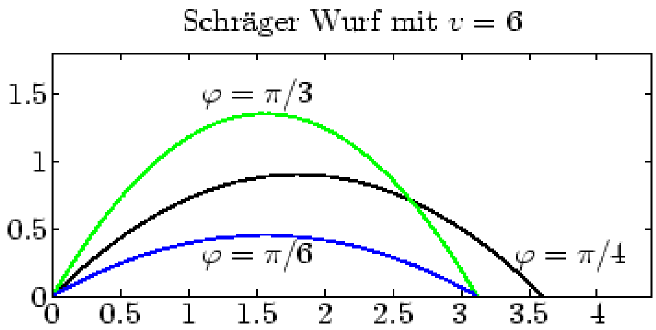
که یو تن د کونج φ لاندې د یوې چټکتیا v سره وغورځول شي، نو د الوتنې لار یې یو پارابول

$$y = x\tan\varphi - \frac{g}{2v^2\cos^2\varphi}x^2$$

ښايي ، چېرته   چې g د ځمکي بیره(تعجیل) ده.

مایله ګوزارونه یا –غورځونه د   v=6 سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مساوات د برابردوليز خوزښت څخه لاس ته راځي د پيل چټکتيا v سره په x - او y -کمپوننتونو يا برخو او د همدې وخت د ازادې غورځوني بيړه ييز خوزښت سره.:

$$x(t) = vt\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v\cos\varphi}$$

$$y(t) = vt\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow \; y(x) = \frac{vx\sin\varphi}{v\cos\varphi} - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\varphi} = x\left(\tan\varphi - \frac{gx}{2v^2\cos^2\varphi}\right).$$

د غورځوني واټن دی:

$$x = \frac{2v^2\cos^2\varphi}{g}\tan\varphi = \frac{v^2}{g}\sin(2\varphi)\,.$$

دا د $\varphi = \pi/4 \,\widehat{=}\, 45°$ لپاره ماکسيمال کيږي.

ليکونکي: هيورنر،هيوليک،کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم Polynom

یو د n-م دجي پولینوم p په لاندې بنه لیکل کیږي:

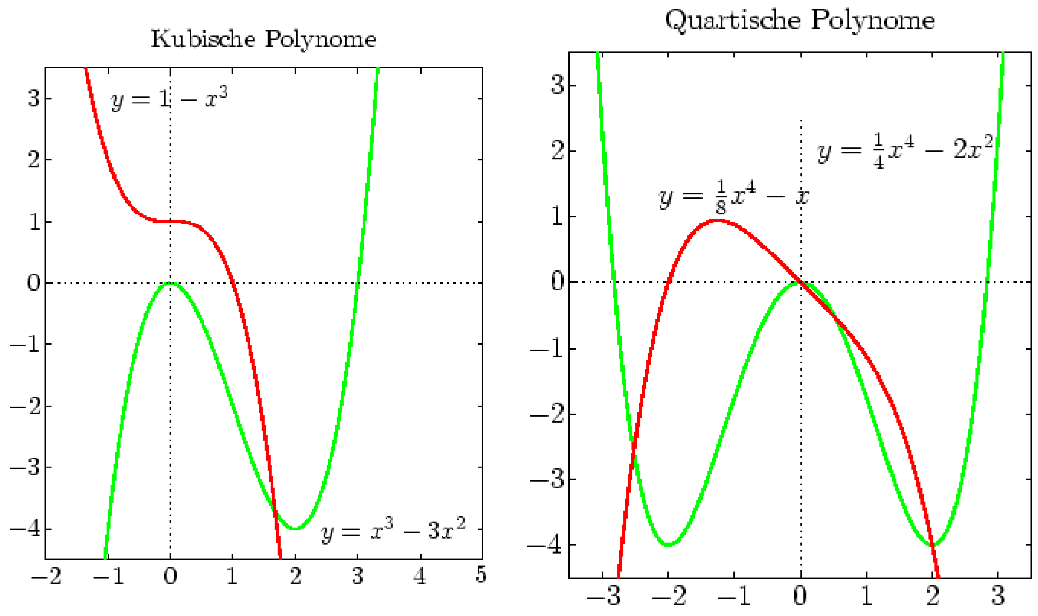
$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

د $a_n \neq 0$ سره .

اووبنتوني یا متحوله x او ضریبونه a_k کېدی شي رینتونی (حقیقی) یا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توګه له دې امله له حقیقی همداسي کمپلکس پولینومونو غږیږو.

لیکونکي:هیولیک،هیرنر

لاندې توابع مکعبي $n = 3$ او مربعیز $n = 4$ پولینومونه په ګوته کوي، د خرنګوالي (کوالیتي) مختلف تابع ګراف سره



لیکونکي: هیورنر،هیولیک،کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

راشنل فنکشن یا بلواک(تابع) Rationale Funktion

یو نسبتي تابع د صورت(ماتباندې) درجې m او مخرج(ماتلاندې) درجې n سره یو د دوه پولینومونو ویش دی.

$$r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n}\,.$$

دا انځورونه ناوېشوړ irreduzibel بلل کېږي، که p او q کوم ګډ کرښیز ضریب ونه لري.

د مخرج صفرځایونه راشنل تابع r د تعریف تشیاوې دي او د پول ځایونو په نامه یادیږي. د دوی نظم د صفرځایونو ډېرځلوالی دی.

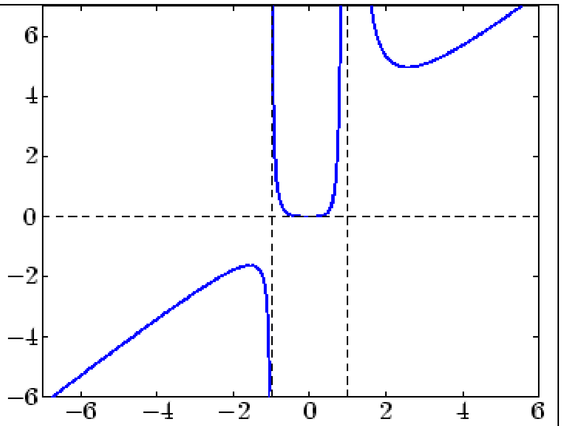
د اووښتوني یا متحولې x او ضریبونه a_k, b_k کېدی شي حقیقي یا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توګه د حقیقي یا کمپلکس رېښتوني فنکشن څخه غږېږو.

لیکونکي:هیولیک، اپپ

فنکشن

$$f(x)=\frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$$

په $x=-1$ کې یو ساده قطب لري او
په $x=1$ کې ډبل قطب لري



د تابع څخه پژندل کیږي، چې f په یوه ساده قطب کې مخنخښه بدلوي او په ډبل قطب کې مخنخښه نه تغیروي.   لیکونکي:هیولیک، اپپ

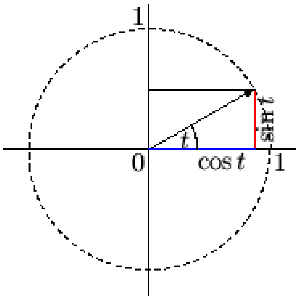
(c) ketabton.com: The Digital Library

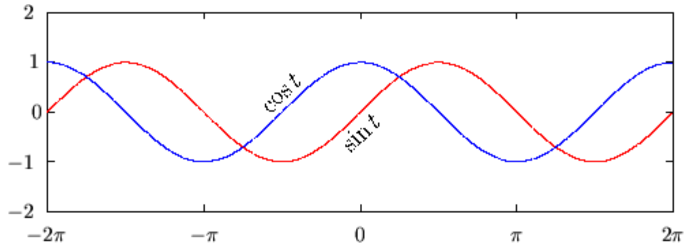
Sinus und Kosinus ساین او کوساین

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

سره کواودینات چې په سرچینه کې په کونچ t ځرخول شوی ټکی $(1,0)$ په نخښنه کېږي.





دواړه د ګردی یا دایرې توابع کوسان او ساین 2π - پریودیکي (تل بېرته راګرځېدوني) دي او باور لري

- $$\cos t = \sin(t + \pi/2)$$,
- $$\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$$,

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

د تر مخنخښي پورې د داېرې تابع د ولاړګوډیز درېګوډي(قایمالزایه مثلث) د قطر (نیمي) سره چې ا وړدوالی یې 1 دی دو لاړو (عودو) ضلعو اوږدوالی ښايي. یو څو ځانګړي ارزښتونه یې دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

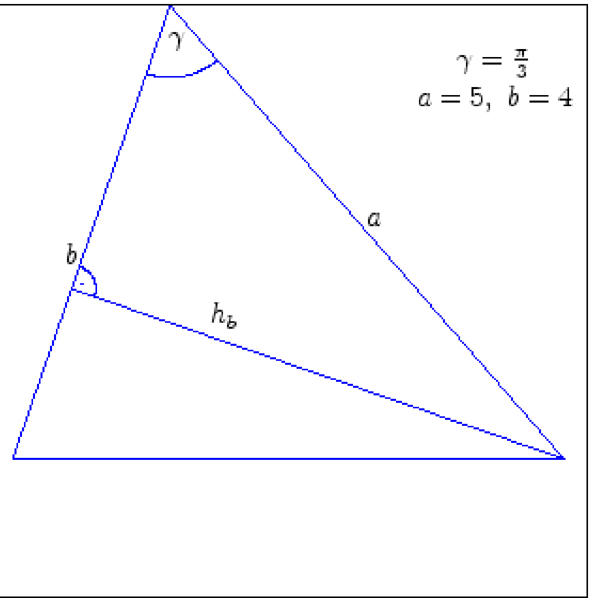
(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د ښېره شوي درېګوډي د سطه وټاکلی شو، لومړی جګوالی h_b شمېرو:

$$\sin\gamma = \frac{h_b}{a} \Rightarrow h_b = a\sin\gamma\,.$$

له دې سره لاس ته راځي:

$$F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma\,.$$



د ورکړ شوو ارزښتونو لپاره لاس تخ راځي:

$$F = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\,.$$

د ساین او کوساین لپاره د جمعي جمله(قضيه)

د داېرې توابعو $\sin t$ او $\cos t$ لپاره لاندې اړيکې صدق کوي:

- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta$

په ځانګې توګه

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

ليکونکی.ژ.هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع

$$u(t) = \cos(w_1 t) + \cos(w_2 t)$$

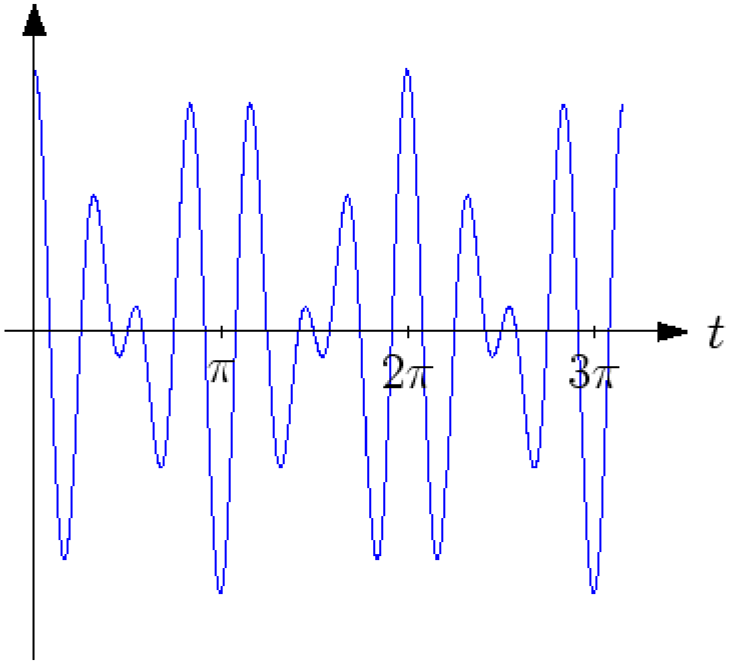
اړيکي د دوه لړزېدنو يو ځای رامنځ ته کېدنه روښانه کوي. د جمعي قضيې په مرسته کېدی شي انځورونه ساده شي. د $\overline{w} = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ او $\Delta w = |w_1 - \overline{w}|$ سره له

$$\cos(\overline{w} - \Delta w t) = \cos(\overline{w}t)\cos(\Delta w t) + \sin(\overline{w}t)\sin(\Delta w t)$$

$$\cos(\overline{w} + \Delta w t) = \cos(\overline{w}t)\cos(\Delta w t) - \sin(\overline{w}t)\sin(\Delta w t)$$

ځخه لاس ته راځي، چې

$$u(t) = 2\cos(\overline{w}t)\cos(\Delta w t)\,.$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بلواک د $w_1 = 7$, $w_2 = 5$ لپاره لړخېدنه ښايي، دا په دې معنا چې $\overline{w} = 6$. , $\Delta w = 1$ او

$$u(t) = 2\cos(6t)\cos t\,.$$

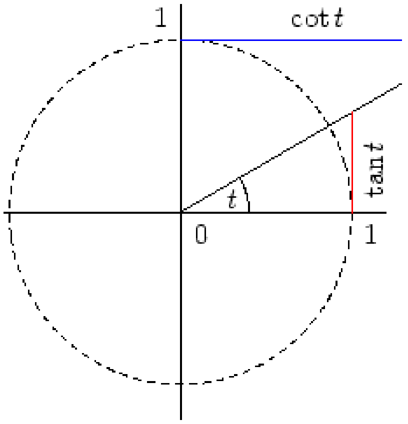
ليکونکي:هيوليک،کرايخ

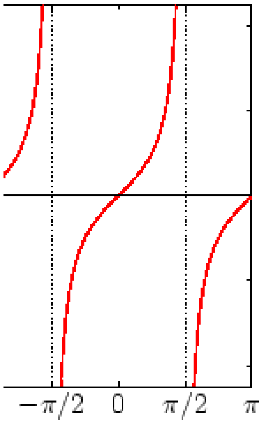
تانجنت او کوتانجنت

توابع تانجنت او کوتانجنت د

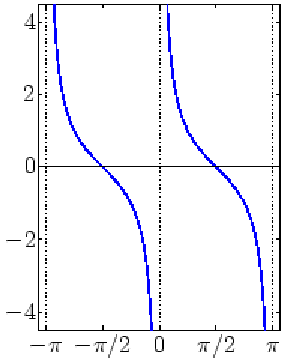
$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

سره تعريف شوي. دا په ولاړکوديز درېکوډي (قايوم الزاويه مثلث) کې د تر مخنخښې پورې د ولاړو اړخونو تناسب ورکوي





Tangens



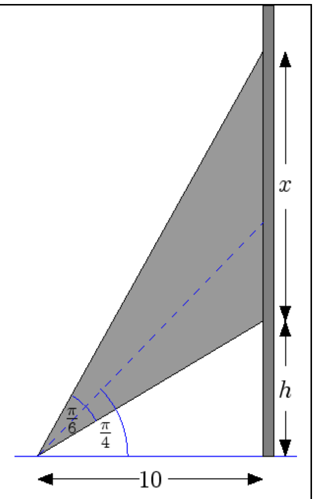
Kotangens

يو څو ځانګړي ارزښتوني دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

تابع د شکل له مخې یو د برېښنا مخروط ، چې په یوه ولاړ دېوال پرېوځي ښايي



د دې لپاره چې خورا لوي يا ماکسيمال پوسېده د ټاکلی شو، جوړوو

$$\frac{h}{10} = \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{x+h}{10} = \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

که $h = \frac{10}{3}\sqrt{3}$ په دويم مساوات کې ځاېه ځاى کړوو نو لاس ته راځي

$$\frac{x}{10} = \sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3},$$

يعني $x = \frac{20}{3}\sqrt{3}$

ليکونکي:هيوليک،کرايخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننشل توابع(بلواک)

توان تابع

$$y = e^x = \exp(x)$$

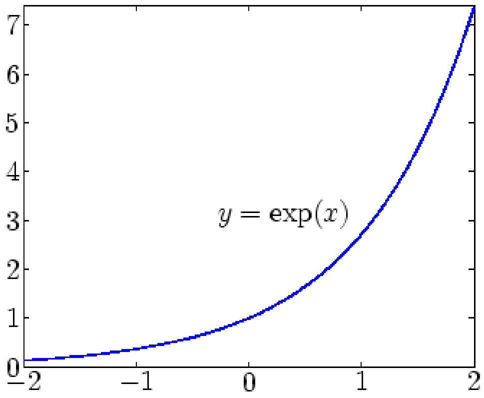
د اویلرEulerschen عدد $e = 2.71828...$ سره اکسپوننشل تابع بلل کیږي. دا د

تولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره مثبت(زاتیز) ده او فنکشنل مساوات

$$e^{x+y} = e^x e^y \,.$$

پوره کوي.

په خانګړې توګه دی $e^{-x} = 1/e^x$.



لیکونکي:هیولیک،هیورنر

اکسپوننشل تابع د ډېرو بیولوژیکي پروسو زیاتوالی روښانه یا تشریح کوي.

د بیلګې په توګه د یوه ساده نفوس مودل متناسب دی د اوسنیو نفوس تعداد $p(t)$ سره د t په وخت کې، دا په دې معنا چې

$$p(t + \Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t)) \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\Delta t \to 0$ لپاره دا د ډېروالي قانو د $p(t)$ مودلی کيږي.

لاندې جدول د نړۍ نفوس ښايي د کلني ډېرېدنې سره.(اټکل ارزښت)

Jahr کال	Bevölkerungszahl د نفوسو تعداد	اټکل ارزښت Rate
1950	2555078074	1.76 %
1955	2779669781	1.87 %
1960	3039332401	2.02 %
1965	3345837853	2.16 %
1970	3707610112	2.05 %
1975	4088224047	1.80 %
1980	4456705217	1.79 %
1985	4854602890	1.77 %
1990	5283755345	1.54 %
1995	5690865776	1.37 %
2000	6080141683	1.25 %
2005	6460553564	1.12 %
2010	6823634553	1.03 %

(c) ketabton.com: The Digital Library

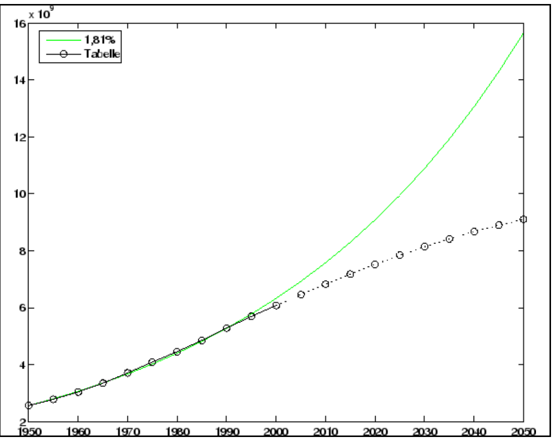
2015	7175675066	0.95 %
2020	7518010600	0.86 %
2025	7840660355	0.76 %
2030	8140344240	0.68 %
2035	8416742278	0.60 %
2040	8668391454	0.53 %
2045	8897073495	0.47 %
2050	9104205830	

کلنی د نفوسو منځنی ډېروالی په کلونو 1950-2000   کې % 1.81 وو. د 1950 کال وروسته د منځني ثابت ډېروالي سره.

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

د نړۍ نفوس به په 2050کال کې 16 میلیارده ته جګ شي(ټکي ټکي شوې کرښه (منحني)). په جدول کې اټکل د نفوسو د کمېدو ځخه مخ ته ځي

لیکونکي : هیولیګ، هیورنر



د ګټې ګټه Zinseszins

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه پیلبډایي x د n -واره وکونو همداسي اخستنو د یوې Rate r ($r < 0$ bzwهړداسې . $r > 0$) د یوې ګنې ضریب $(1+p)$ له کبله لاندې پیل پای بدآیي ورکوي :

$$y = (1+p)^n x + \frac{(1+p)^n - 1}{p} r \,.$$

له دې سره $p = 1$ یوه 100% د ګټې د یوې ربحې د کلنۍ اېښوونه په ګوته کوي

موثره کلنۍ ربحه p_j د میاشتنۍ ګټوني څخه شمېرې کیږي د یوې p_m ربحې (ګټې سره)

$$p_j = (1+p_m)^{12} - 1 \geq 12 p_m \,.$$

لیکونکي : هیولیګ، هیورنر

بنستیز ه سرمایه په لومړني ربحپریود کې په پام کې نیول کیږي، اینوونه او همداسي اخستنه یا راوستنه په لومړي څل د هر ورپسي کال. دا د ا لاندې راکوي:

$$\begin{aligned} n = 1: \quad & y = x(1+p) + r, \\ n = 2: \quad & y = \big(x(1+p) + r\big)(1+p) + r. \end{aligned}$$

په تولیزه توګه صدق کوي:

$$y = \Big(\cdots\big(x(1+p)+r\big)(1+p)+r\big)\cdots\Big)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= x(1+p)^n + \left(1 + (1+p) + (1+p)^2 + \cdots + (1+p)^{n-1}\right) r$$

دا په نوکانو کې د r افاده کيدی شي د هندسي جمعې فرمول سره واړول شي او سړی دا ورکړل شوی فرمول لاس ته راوړي.

ليکونکي : هيوليک، هيورنر

يو د 100000 يورو پور(قرضه) په کلنې ګټونه او يوې ګټونې يا ربحې % 5 سره د 10 کاله وروسته بېرته ورکړ شي. سړی د

$$y = 0\,,\ n = 10\,,\ p = 0.05\,,\ x = 100000$$

سره ګټه لاس ته راوړي:

$$r = 1.05^{10} \cdot 100000 \frac{0.05}{1.05^{10} - 1}$$

$$= 12950.46$$

د مياشتنی د $\frac{5}{12}\%$ په ګټوني يا په ګټه اېښووني سره دا راکوي

$$n = 120\,,\ p = \frac{1}{240}$$

په ورته توګه

$$r = \left(\frac{241}{240}\right)^{120} \cdot 100000 \frac{\frac{1}{240}}{(\frac{241}{240})^{120} - 1}$$

$$= 1060.66$$

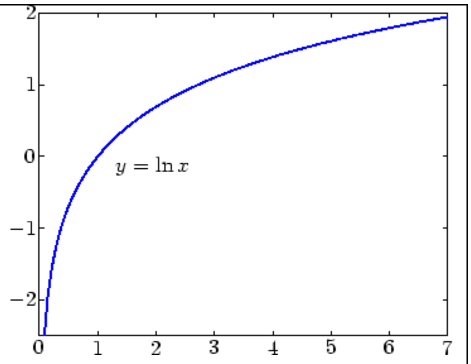
(c) ketabton.com: The Digital Library

د میاشتنی ګټې تادیه کونې ده، کلنی 12727.86 ده. دلته د مخه د ګټې تادیه کونه یو زیان منځ ته راولي. د $\frac{4}{12}$ % سره به دا د لاندې سره برابر وای:

$$\left(\frac{(1+\frac{1}{300})^{12}-1}{\frac{1}{300}}-12\right)\cdot 1060.66 = 235.96\,.$$

لیکونکي : هیولیک، کرایخ

لوګاریتم Logarithmus

	د لوګاریتم تابع د اکسپوننشل تابع برعکس (په ښت) تابع ده: $y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y.$

دا $(0,\infty)$ په $\mathbb{R}$ کره مونوتون(یوغږیز) کره جګېدونکی تنظیموي او لاندې د تابع مساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

په ځانګړې توګه لرو: $\ln(1/x) = -\ln x$

لیکونکی: هیولیک،کویف

(c) ketabton.com: The Digital Library

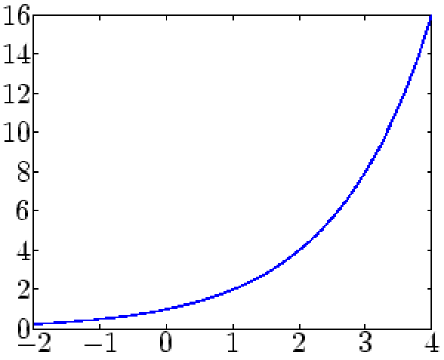
تولیز په توان تابع او لوګاریتم

د $a > 0$ لپاره تعریفوو :

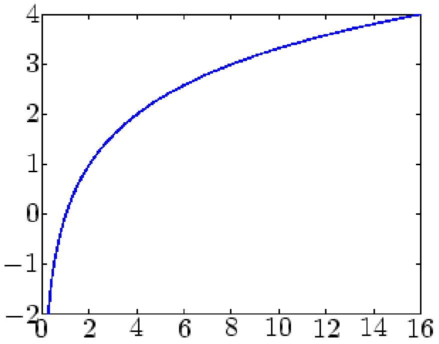
$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

د برعکس تابع(بلواک) سره $x = \log_a y, \quad y > 0.$

په خانګي توګه د 10 په بنسټ لوګاریتم لپاره لیکو $\log = \log_{10}$ او $\mathrm{ld} = \log_2$ د دوه ګوني یا دوال لوګاریتم لپاره.



$f(x) = 2^x$



$f(x) = \mathrm{ld}(x)$

لیکونکی: هیولیک،کویف

د توان او لوګاریتم لپاره شمیرقوانین

له تعریفونو او تابعمساواتو څخه د اکسپوننشل - او لوګاریتمي توابعو لپاره لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned} a^{s+t} &= a^s\, a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\ a^{s-t} &= a^s/a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\ (a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t \log_a x\,. \end{aligned}$$

برسیره (سربېره) پر دې د مختلفو بنسټونو ترمنځ شمېربدلون لپاره اړیکې باور لري:

$$\log_b x = \log_b a\ \log_a x\,.$$

په ځانګړې توګه

$$\log x = (\log e) \ln x\,.$$

لیکونکی: هیولیک،کوپف

لاندې بېلګې د شمېرقاعدو استعمال روښانه کوي .

(i)

$$\ln(4x^2) - 2\ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 =$$

$$= 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 = 2\ln x$$

(ii)

$$\log_4(x^2) +$$

$$(2x) = 2\frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2\frac{\ln x}{\ln 2}$$

ld

لیکونکی: هیولیک،کوپف

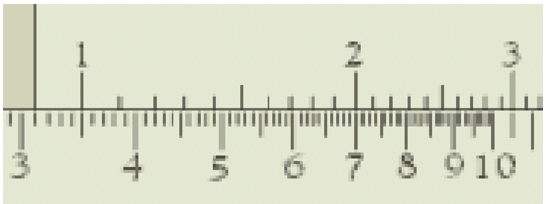
(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم شمېرونی

په لوګاریتم کې لاندې قانون باوري دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

له دې کبلخ کېدی شي دوه سکالا یا کچږرنې یو په بل کېږدو او د نتسجې په توګه نه د دې عددونو جمعه بلکه ضرب لاس ته راځي.



د پورته ځبرې ځخه د ببلګې په توګه لاس ته راړو، چې $3.5 \cdot 2 = 7$. دلته لومړی 1 د پورته سکالا په 3.5 (لومړی ضریب) د په لاندې سکالا شمېرل کيږي. بالاخره 2 د پورته سکالا (دویم ضریب) د ضرب نتیجه په لاندې سکالا لوستل کيږي.

لیکونکي،هیولیک.کوپف، ویپر

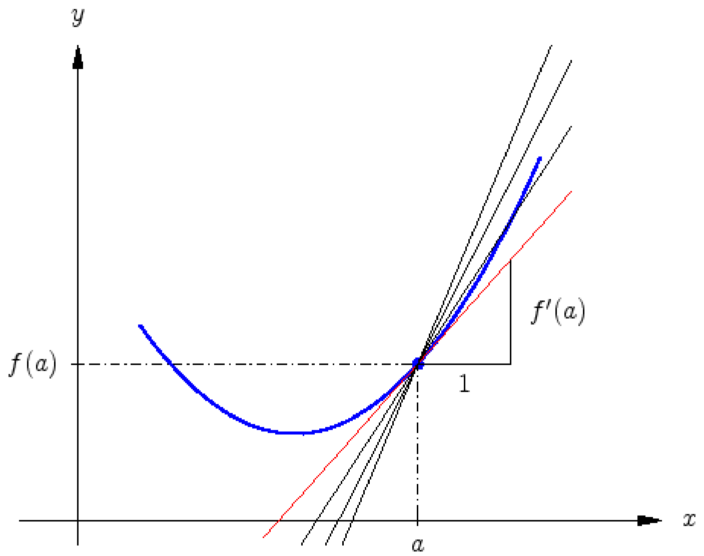
مشتق یا رابېلېدنه Ableitung

یو تابع f په یوه ټکي a کې مشتقوړ دی، که دا د رابېلېدنې یا مشتق په ځبر نیوله شوې پوله(لیمیټ)

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library



هندسي مشتقوړوالی په دې معنا دی، چې د غ،څوون(قطاعو) ځګېدنه چې د

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

سره ورکړل شوي د تانجنت ځګوالي په لور وهڅيري يا کورګنت شي.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

د دې لپاره هم ليکو او ځګ مشتقونه د $f'', f''', \ldots$ او

همداسې د $f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots$ سره ښايو. يو فنکشن f په يوه ډېرى D مشتقوړ بلل

کيږي، که د $f'(x)$ تولو $x \in D$ لپاره شتون ولري.

ليکونکی:هيوليګ،کويف

د تابع $f(x) = x^2$ مشتق

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مشتق $f''(x) = 2$ یو ثابت دی.

د یوه په خوښه مونوم $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ لپاره ، بینوم د فرمول په مرسته لاس ته راځي

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1}h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1},$$

د کوم سره چې $O(h^2)$ د نظم ترم h^2 په ګوته کوي.

لیکونکی:هیولیک،کوپف

د $f(x) = \sin x$ مشتق کېدی شي د جمعې قضیې په مرسته وشمېرل شي.

له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

د $t = x + h/2$ سره کمښترېښ لاس ته راکوي:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin\big((x+h/2)+h/2\big) - \sin\big((x+h/2)-h/2\big)}{h} =$$

$$= \frac{2\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h}.$$

له

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\sin(h/2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

امله بنی اړخ د $h \to 0$ لپاره د $\cos x$ په لور هڅيږي.

غوره (مهم) مشتقونه

لاندې جدول د غوره توابعو مشتقونه راکوي: :

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		$r \neq 0$, x^r	$r\,x^{r-1}$
e^x	e^x		$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق کربنيزوالی Linearität der Ableitung

مشتق کربنيز دی دا په دې معنا چې د مشتقوړ توابعو f او g لپاره صدق کوي

$$(rf)' = rf', \quad r \in \mathbb{R},$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ضرب يا ځل قانون

د دوه مشتقوړ توابعو f او g مشتق دی

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

تولیز د ضرب $f = f_1 \cdots f_n$ لپاره صدق کوي:

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \frac{f}{f_i}.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ضرب د قانو سره لاس ته رڅي

$$\frac{d}{dx}(x^2 \ln x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1).$$

که $\sin x$ د ضريب په حيېث ورزيات کړي، نو بيا د ضرب قانو ن استعمال لاس ته راڅي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x(x^2 \ln x)\right] = \cos x(x^2 \ln x) + \sin x(x(2\ln x + 1)).$$

په بديل ډول کېدی شي دا فرمول په ډېرواره ضرب وکارول شي او لاس ته ارې راوړي

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x(x^2 \ln x)\right] = \cos x(x^2 \ln x) + 2x(\sin x \ln x) + \frac{1}{x}(\sin x\, x^2).$$

ليکونکي: هيوليک، کرايخ

د وېش قانون Quotientenregel

د دوه مشتقوړ توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو x کې د $g(x) \neq 0$ سره. په ځانګړې توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د راشنل تابع

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2x}{4+3x^2}$$

مشتق دی:

$$\frac{(1-2x)'(4+3x^2) - (1-2x)(4+3x^2)'}{(4+3x^2)^2} = \frac{-2(4+3x^2) - (1-2x)(6x)}{(4+3x^2)^2} =$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4+3x^2)^2}$$

د ضرب قانون سره يي بديل لاس تهراخي

$$\left((1-2x)\frac{1}{4+3x^2}\right)' = (-2)\frac{1}{4+3x^2} + (1-2x)\frac{-6x}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(4+3x^2)^2}\,.$$

ليكونکي:هيوليک،کرايخ

زنځيري قانون

د توابعو دزنځيروني

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$$

لپاره مشتق دی:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

د $f(y) = z,\ \ g(x) = y,\ \ h(x) = z$ سره دا هم ليکل کيږي

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}$$

.

)ليكونکي:هيوليک، کوپف

د زنځير قانون

$$h(x) = \sin\left(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د روښانه ونې لپاره تعریفیږي:

$$h'(x) = \frac{d}{dy}\sin(y)g'(x) = \cos\big(\ln(1+x^2)\big)g'(x)\,.$$

د دننني مشتق شمېرنه $g'(x)$ سر له نوې د زنځیري قانو له مخې صورت نیسي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

بدیلي کېدی شي مشتقیزه لیکندود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = \cos(y)\frac{1}{w}2x = \cos\big(\ln(1+x^2)\big)\frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

لیکونکي:هیولیک، کوپف

ایمپلیځیت مشتقوږ توابع

د بیلګې په توګه د

$$E:\;\; x^2 + 3y^2 = 7$$

له لارې ورکړ شوې ایلیپسې (هګۍ یا بیضوي) له لارې لرو:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

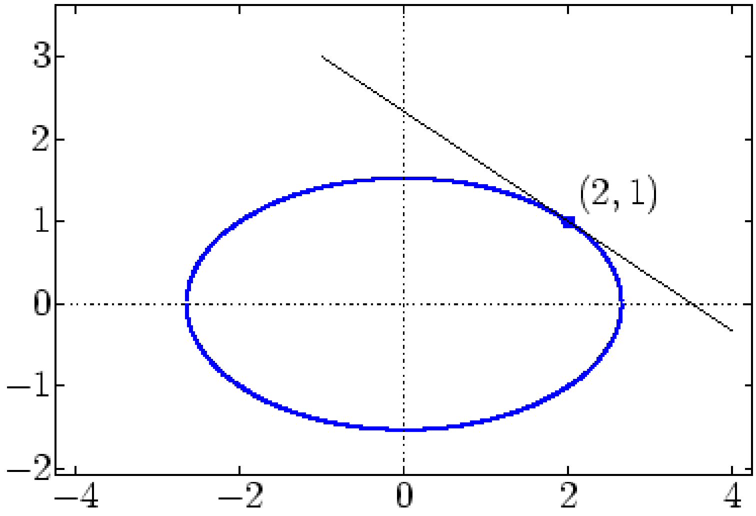
همداسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$$
.

سره د تانجنت جګوالی $y \neq 0$ باندې په یوه ټکي د E له دې سره کیدی شي په لپاره لاس ته راځي $(2,1)$ وټاکل شي. د بیلګې په توګه د

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$
.



په ورته توګه کیدی شي لوړ یا جګ مشتقونه هم وشمیرل شي. د yy' لپاره د ضرب قانون کارول یا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx}\,(2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y'' = -\frac{1+3(y')^2}{3y}.$$

ټاکلي $y'(x)$ د يوه ټکي د کواوردينات اېښوولو او همدا اوس د E بيرته په ارزښت له لارې څرګند ارزښتونه وټاکل شي.

ليمږنکي:هيوليګ،کنپف

لوګاريتمي مشتق

فرمول

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|$$

کېدی شي د بڼې $y = g(x)^{h(x)}$ مشتق نيوني ته د $g(x) > 0$ سره وکارول شي. لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)}\frac{d}{dx}\big(h(x)\ln g(x)\big).$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

تابع

$$f(x) = x^x$$

د $x > 0$ سره مشتق دی.

$$f'(x) = x^x\frac{d}{dx}\ln(x^x) = x^x\frac{d}{dx}(x\ln x) = x^x(\ln x + 1).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $g(x) = x^{\ln x}$ لپاره لاس ته راځي

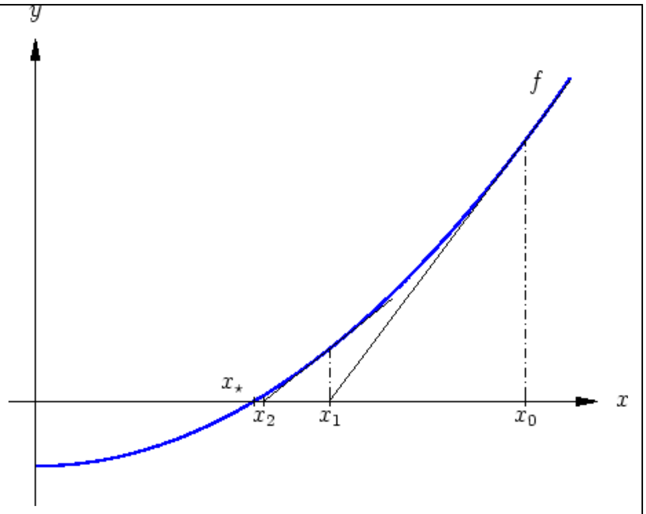
$$g'(x) = x^{\ln x} \frac{d}{dx} (\ln x)^2 = 2x^{\ln x} \frac{\ln x}{x} .$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

نیوټن تلنلار یا قانون Newton-Verfahren

د نیوټن قانون سره د یوه تابع f صفرځای کېدی شي و ټاکل شي. د $x_0, x_1 \ldots$ پرلپسي یا ترادف نږدې ارزښتشمېرنې یا Approximation د کرښیزوالی له لارې وګټل شي. نږدېونه x_{l+1} د تانجنتِ غوښتکی دی په $(x_l, f(x_l))$ ټکي کې د x - محور سره.

$$x_{l+1} = x_l - f(x_l)/f'(x_l)$$



د یوه ساده صفرځای $x_\star$ ($f'(x_\star) \neq 0$) لپاره د نیوټن –ایتراشن Newton-Iteration ځای - لوکالې مربعیز پولې ته هځیږي (کونورګنت) ، دا په دې معنا چې

$$|x_{l+1} - x_\star| \leq c \; |x_l - x_\star|^2$$

د پیلتکي x_0 لپاره د $x_\star$ په یوه پوره کوجني چاپیریال کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بابليانو ريښه (جذر)نيونه

داد بابليانو څخه کارول شوی ايتراشن(لاتين : تکرار Iteration)

$$x \longleftarrow (x + a/x)/2$$

د يوه مثبت عدد a درېيښي شمېرلو لپاره د ټيکي کتني څخه د نيوټن -تګلار په څېر د $f(x) = x^2 - a$ لپاره ځان راباسي

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

د $a = 2, x_0 = 1$ لپاره نږدې شمېرنې (Approximationen) لاس ته راځي.

1

1.5

1.41666666666666666666666666666666667

1.41421568627450980392156862745098039215 7

1.414213562374689910626295578890134910117

1.41421356237309504880168962350253024361 5

1.41421356237309504880168872420969807857 0

پولې ته تلنه خورا ګړندی ده. د هر پل سره د ټيک شوو ځايونوتعداد په نږدې توګه (د کرښې سره په نخښه شوی) دوه واره کيږي. مربعيز پولې ته تلنه کېدی شي په دې ښېلګه کې د ساده ښه بدلون سره وښوول شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{l+1}-\sqrt{a}=(x_l+a/x_l)/2-\sqrt{a}=\frac{1}{2x_l}(x_l-\sqrt{a})^2.$$

د نیوټون تلنلار هندسي روښانه ونې ښخه لاس ته راځي، چې $x_0 \neq 0$ د ټولو لپاره تکرار پولې ته ځي.

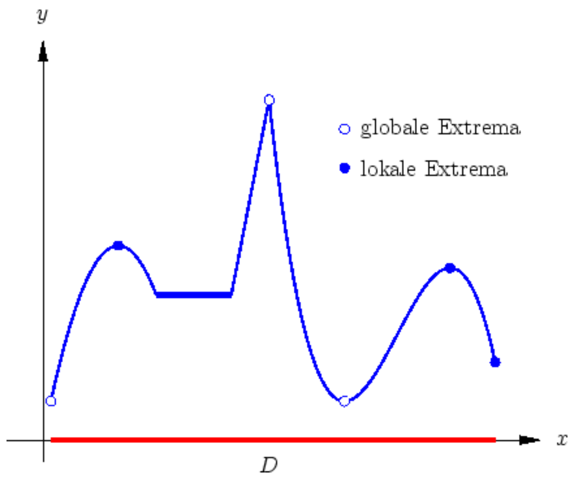
افراطیت Extrema

یو تابع f په a کې په ډېرى D یو ځاى اړوند مینیموم لري، که وي:

$$f(a)\leq f(x) \quad \forall x\in D.$$

د ځاى اړونده مینیموم سره د تابع ارزښت $f(a)$ په یوه خورا کوچني چاپېريال $(a-\delta,a+\delta)\cap D$ کې مینیموم دى.

ګلوبال او لوکال (مطلق او ځاى اړونده) خورا جګ ارزښتونه (ماکسیموم) په ورته توګه تعریف دي.



په یوه بند انتروال په ټوټه ډول نابرېکېدونى او مشتقوړ تابع کېدى شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتق په په صفرځایونو، پرېکېدځایونو یا ژى ټکو کې رامنځ ته شي. دا ډول تیوپ کېدى شي د ځګو مشتقونو په مرسته او دتابع ارزښتونو د پرتله کوني له لارې پیدا کړاى شي. ليکونکي:هیورنر،هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې به يو څو تيوپيکي حالتونه تر بحث لاندې راشي يا و څېړل شي.

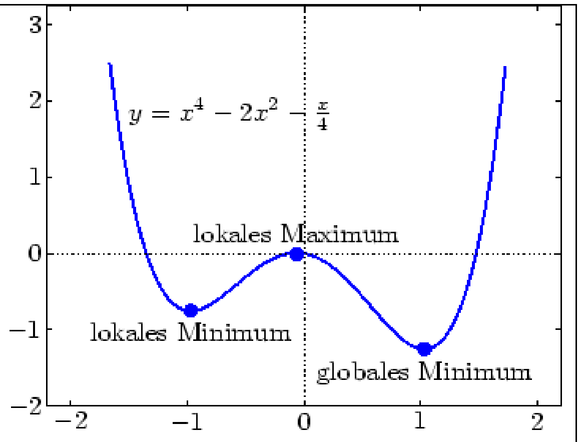
<table>
<tr><td>

$f(x) = x^4 - 2x^2 - x/4$
تابع

د $D = \mathbb{R}$ سره دوه مينيما لري او يو ماکسيما. مينيمومو د خورا کوچني تابع ارزښت سره مطلقه دی. يو مطلق ماکسيما شتون نه لري، ځکه چې

$x \to \pm\infty$ د $f(x) \to \infty$ لپاره

.
</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

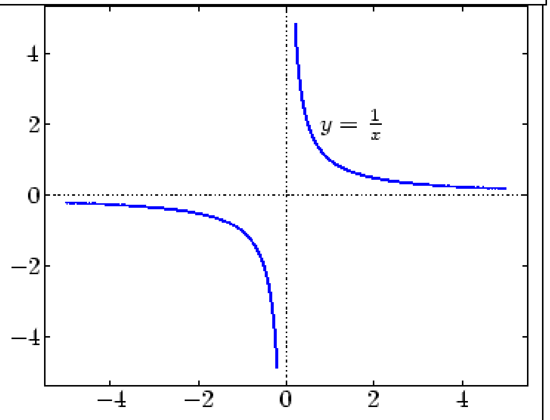
د $f(x) = 1/x$ تابع

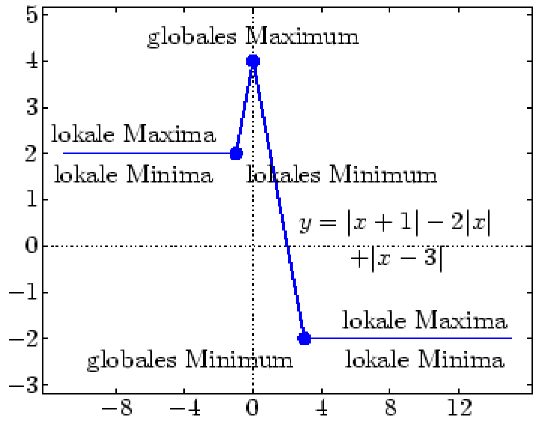
$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
سره کوم

افراطي ارزښت نه لري.

که يو تابع په واز انټروال کې ثابت وي، نو دا ځايونه (ځاييز (ځای اړونده) يا لوکال) ماکسيمال او هم (ځايز) مينيمال دي،

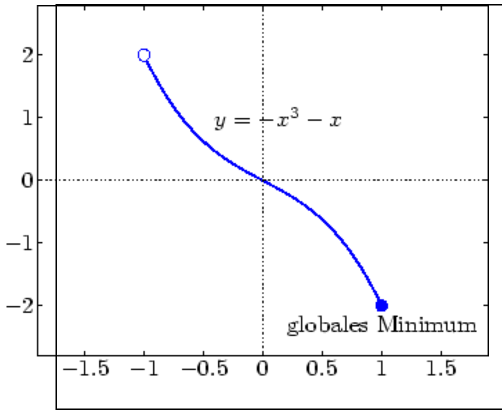
د يوه کره يوغړيز تابع سره افراطی ارزښتونه د ژی ټکو سره نيول کيږي، که دا دد تعريفورشو پورې اړه ولري.
</td><td>





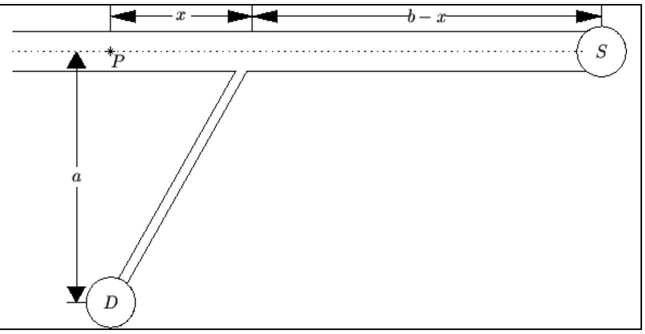
</td></tr>
</table>

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

له يوه کلي D ښخه يوه ښار S ته يو سرک جوړيږي. کلي ته په واټن a همدا اوس ښار ته يوه شاه لار (ګړندۍ لار) جوړه ده. د ښار ښخه د P ټکي پورې ، چې کلي ته نږدې ګړندۍ لار پرته ده، اوږدوالی b لري.

سيده کربنيزه توټه لار جوړيږي.له کومې چې ښا رته زر رسېدل تظمينوي، که په ګړندۍ لار له $v_a = 120$ km/hمنځنۍ چټکتيا(سرعت) او $v_n = 60$ km/h په دنوې ښنګيزه توټه لار لاړ شي.	

واټن $x \geq 0$ د P او فرعي توټه سرک ترمنځ په ګړندي د واټن $x \geq 0$ شمېرنه د اړيين وخت د مينيمال کولو له لارې.

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

ښار ته د رسيدو لپاره .

د مشتق صفر اينسوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2} v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0\,,$$

راکوي

$$v_a x = v_n \sqrt{a^2 + x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_m = a/\sqrt{3}$$

د لوکال انحرافي ځای په څېر. ایا چې دا مینیموم دی، باید دا د وهل شوې لار وخت د انتروال د پای ټکو لپاره و ازمایل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a + b}{v_a}\,, \qquad t(0) = \frac{2a + b}{v_a}\,, \qquad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{v_a}$$

په روښانه توګه $t(0) \geq t(x_m)$ دی. نامساوات $t(b) \geq t(x_m)$ ورته دي و دې لاندې ته:

$$t(b) \geq t(x_m) \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{3}a + b$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a^2 + 4b^2 \geq 3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = (a - \sqrt{3}b)^2 \geq 0\,.$$

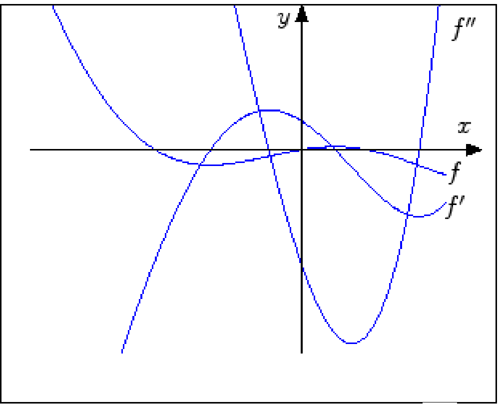
دا اخرني نامساوات تل پوره کیږي، او له دې سره x_m اوپتیمال دی، که $b \geq a/\sqrt{3}$ وي.

په بل حالت کې x_m په انتروال $[0, b]$ کې نه دی پروت او په ژۍ ټکي b پروت مینیموم ته ، یعني ښار ته په سیده ترنلار، رسېدی شي.

لیکونکي:هیورنر، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

افراطي ارزښتونو ازمايښت Extremwerttest



د افراطي ارزښتونو ډول يا تيوپ باندې کيدی د جګو مشتقونو په مرسته پرېکړه وشي که f دوه واره ناپرېکېدونکی او مشتقوړ وي او

$$f'(a) = 0\,, \qquad f''(a) > 0$$

$$(f''(a) < 0)\,,$$

نو f په a کې يو ځای اړونده مينيموم(ماکسيموم) لري. که دويم مشتق د a په ځای کې ورک شي، نو بايد جګ مشتقونه پرېکړې ته راکښل شي يا راوړل شي. که باور ولري:

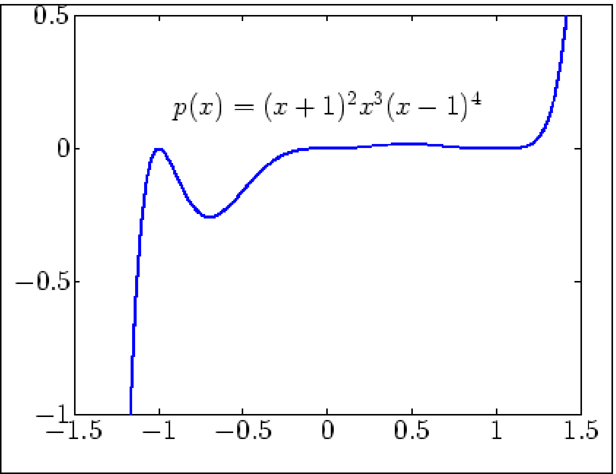
$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$$ او $$f^{(n)}(a) \neq 0\,,$$

نو f په a کې تيک هلته يو افراطي ځای لري، که جوړه وي. په دې حالتکې f په a کې يو ځای اړونده خورا جګ – يا همداشي خورا ټيټ ټکی لري، که $f^{(n)}(a) < 0$ همداسي $f^{(n)}(a) > 0$ وي.

پولينوم

$$p(x) = (x+1)^2x^3(x-1)^4$$

په $x = -1$ کې يو دبل، په $x = 0$ کې يو دريواره او په $x = 1$ کې يو څلورواره صفرځای لري.



(c) ketabton.com: The Digital Library

صدق کوي

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p''(-1) = 2(-1)^3(-2)^4 < 0\,.$$

په $x = -1$ کې p يو مينيموم لري. په $x = 1$ کې p يو ماکس لري، ځکه چې

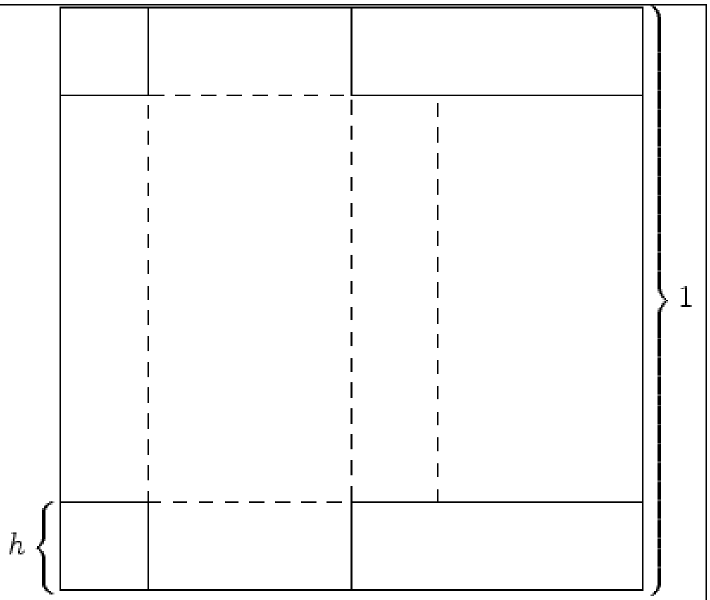
$$p(1) = \ldots = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0\,.$$

بالاخره د p

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 3!(-1)^4 \neq 0$$

له امله او يو مخنخبنه بدلون په $x = 0$ کې په سرچينه کې افراطي ځای نه شته.

کوتۍ Schachtel

د دې ورکړ شوي غوښ نمونې په مرسته دې د يوه مربع ډوله کارتوني کاغذ څخه خورا لوي کوتی جوړشي، چې خورا لوي حجم (ډکی) لري.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

حجم یا ډکی دی:

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

اوږدوالی سور جګوال

د مشتق صفرځایونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

تري

$$h = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

د ممکنه ځای اړونده افراطي ځایونه لاس ته راځي. فقط $h = \frac{1}{6}$ هندسي موخه ور دی او

$$v\left(1/6\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}.$$

.

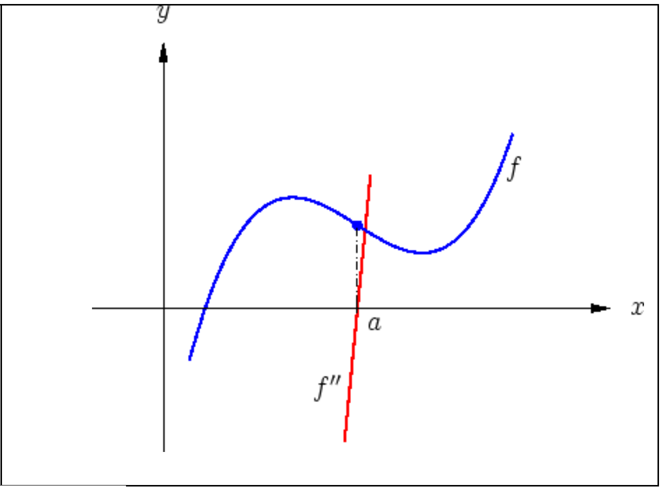
دا چې د ژۍ ټکو $h = 0$ او $h = 1/2$ لپاره حجم یا ډکی دی، نو کوتی د $h = 1/6$ لپاره خورا لوي حجم لري.

لیکونکي: هیولیک،هیورنر

اوړونټکي (نقاط انعطاف Wendepunkte)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یو تابع f په یوه اوړونټکي a کي دویم مشتق مخنخښنه بدلوي (یعني په دي ټکي کي تابع خپله لور بل لور ته اړوي) .



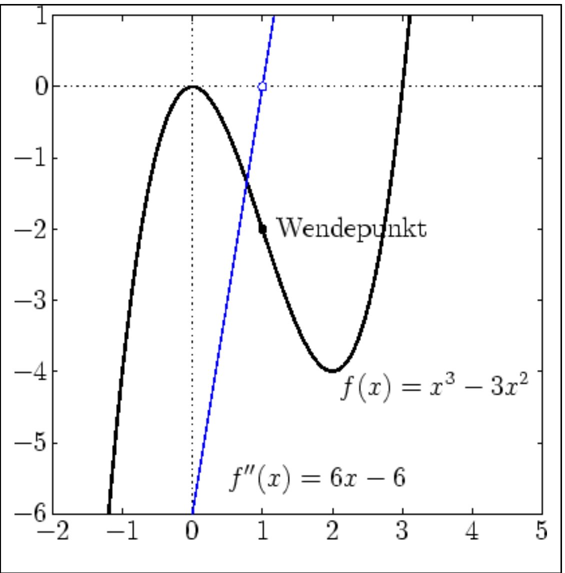
د یوه پوره هوار تابع لپاره اړین دی، چي $f''(a) = 0$ او پوره دی، چي $f'''(a) \neq 0$

لیکونکي: هیولیک،هیورنر

تابع یو مکعبي پولینوم ښايي.

دا چي دویم مشتق کرښیز دی، نو ټیک یو اوړونټکی(د انعطاف ټکی) شتون لري

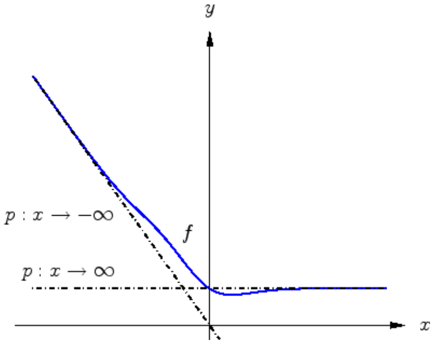
لیکونکي: هیولیک، هیورنر



ګاونډي یا لنډ: ګاونډ (مجاورتها Asymptoten)

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو تابع د یوه تابع f اسیمپتوت دی ، که $f(x)-p(x)\to 0$ وي د $x\to\infty$ یا د $x\to-\infty.$ لپاره.



په ورسره بلد ډول p د f په څېر یوه ساده بڼه لري او د دې په چوپېرکې ، چې د $f(x)$ د څرنګوالي حالت د لوی x لپاره وځېږي.

د ځانګړو معناو کربنیز اسیمپتوتونه $p(x)=ax+b$ دي. دوي د نورو ترڅنګ د منحني یا کږو بحث کې یو رول لوبوي.

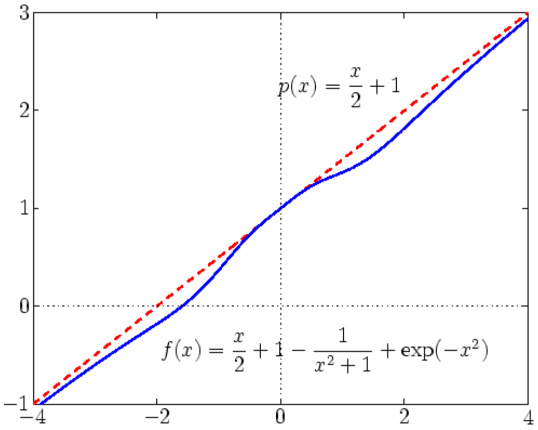
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د یوه څېره شوي یا متشکل شوي تابع $f(x)$ لپاره د $|x|\to\infty$ لپاره تناسب د کربنیزو ترمونو له خوا ټاکل کیږي، څکه چې

$$\lim_{|x|\to\infty}\exp(-x^2)=\lim_{|x|\to\infty}\frac{1}{x^2+1}=0\,.$$

له دې لاس ته راړني سره کربنه $p(x)=x/2+1$ اسیمپتوت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د راشنلتابع ګاونډ یا- اسیمپتوتونه Asymptoten rationaler Funktionen

یو راشنل تابع

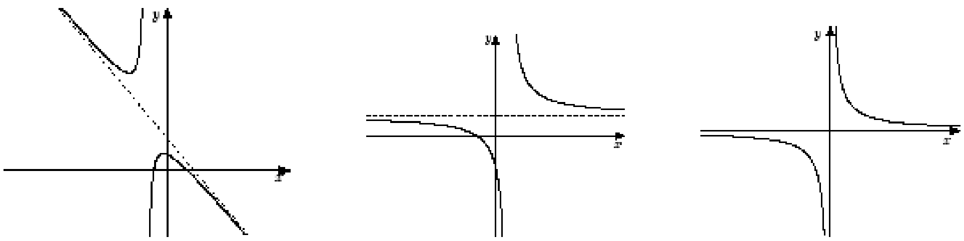
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

تیک هلته یو کربنیز اسیمپتوت لري که $q+1$ له ګراد یادرجي $p \leq$ وي.

د Grad q < Grad p لپاره باور لري

$$\lim_{p \to \pm\infty} r(x) = 0\,,$$

داپه دې معنا چې د x -محور اسیمپتوت دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د $q+1$ Grad $p \leq$ Grad $q \leq$ Grad e لپاره اسیمپتوت لاس ته راځي د پولینوموېش له خوا:

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

د Grad $\tilde{p} < q$ Grad سره. اسیمپتوت پرته (افقي) ده $(a = 0)$ ، که Grad $p = q$ Grad. وي.

که د صورا درجه له یوه څخه زیاته د محرج له درجې لویه وي، نو یوه اسیمپتوتیکي پولینوم لري د ≥ 2 درجې

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د راشنل توابعو

$$r_1 = \frac{4x+3}{2x+1} \quad \text{او} \quad r_2 = \frac{2x^2}{x+1}$$

لپاره دپولینوم وېش له لارې لاس ته راځي:

$$r_1(x) = 0x + 2 + \frac{1}{2x+1}$$

او

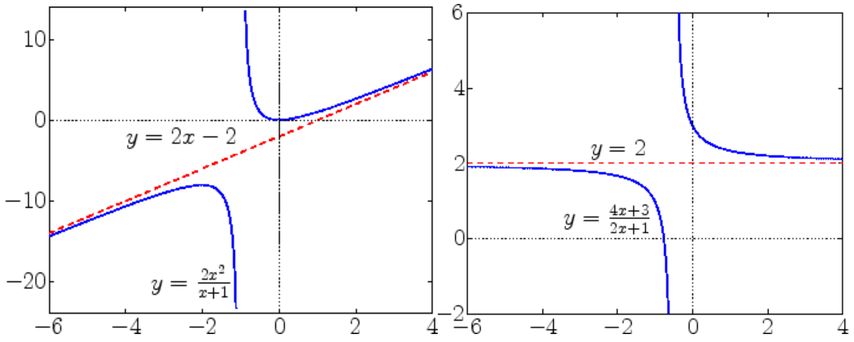
$$r_2(x) = 2x - 2 + \frac{2}{x+1}$$

اسیمپتوت یا ګاونډ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$y_1 = 2$ او $y_2 = 2x - 2\,.$

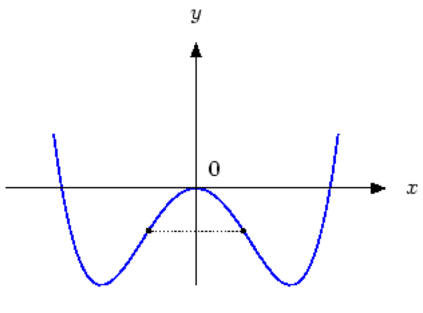
دا دوه بېلګې په لاندې ځېرو کې روښانه شوې دي.



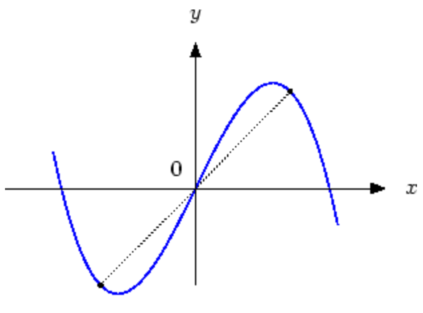
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

سيومتري Symmetrie

يو تابع f جوړه(جفت) دی، که $f(x) = f(-x)$ وي ، دا په دې معنا، چې که ګراف د y-محور ته سيومتري وي. د يوه ناجوړه (تاق) تابع لپاره $f(x) = -f(-x)$ دی، او ګراف و سرچيني ته ټکی سيومتريک دی.



gerade Funktion



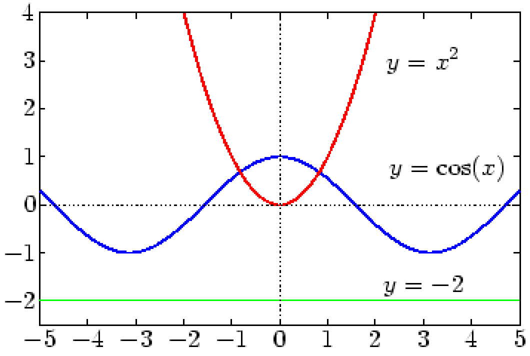
ungerade Funktion

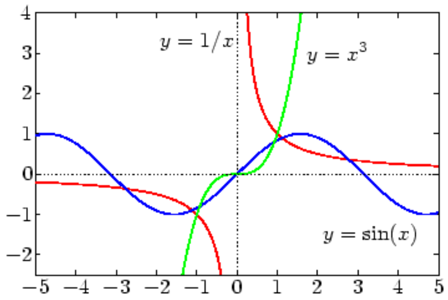
(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جوړه او ناجوړه توابعو ضرب جوړه دی. د دې برعکس د یوه جوړه او یوه ناجوړه تابع ضرب ناجوړه یا طاق دی. د جمعې او تفریق جوړولو سره ډول ساتلی پټیږي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر،کنش

دا لاندې څېره ښي لور ته یوځو جوړه او کیڼ لور ته یو څو ناجوړه توابع ښایي.





د مناسبو کمبینېشنونو جوړولو سره نورې بېلګې لاس ته راځي. نو توابع

$$f(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x, \qquad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x) \sin x - g(x) x^3$$

ناجوړه دي.

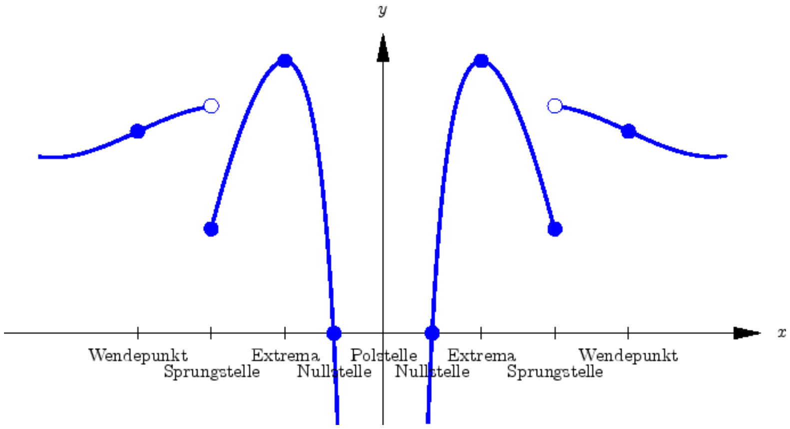
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر،کنش

د کرو یا منحنیو خبرې اترې(بحث)

د یوې تابع د څرنګوالي حالت د قضاوت لپاره کېدی شي لاندې ټکي په پام کې ولرل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- سیومترSymmetrien
- Periodizität تل بېرته راګرځېدنوالی
- پرېکېدنځايونهUnstetigkeitsstellen
- (Nullstellen → Vorzeichen مخنښنه (صفرځايونه
- (Extrema → Monotoniebereiche همغږيزوالي وشوګاني) افراپيت
- (Wendepunkte → Konvexitätsbereiche د کونوکسی ورشو) اوړونټکی د انعطافنقطه
- قطبځايونهPolstellen
- اسمپتوتي يا ګاونډيتوبونهAsymptoten



د توابعو داسې يو تحليل د ګړو خبرې اترې يا د منحنيو بحث بلل کيږي

ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

د کړو بحث ښوول يا روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin(3x)$$

ځيرو .

سيمتري: دا چې $\sin x = -\sin(-x)$ ناجوړه تابع دی..

(c) ketabton.com: The Digital Library

تل ببرته راګرځېدنه يا پريوديځيتي: تابع پخپله لکه د ساين تابع پخپله 2π - پريودي ده او په راتلونکي کي فقط په انتروال $[-\pi, \pi]$ ترڅېړني راځي.

د پرېکېدني ځايونه: تابع له ناپرېکدونکو توابعو مرکبه جوړهشوې او له دې امله پرېکېدنځايونه نه لري.

صفرځايونه: د جمعي(زياتون) قضيې سره $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$ دی:

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right)}_{\neq 0}.$$

تابع په 0 او $\pm\pi$ کې صفرځايونه لري..

افراطيت: تابع

$$f'(x) = 2\cos x - 4\sin^2 x\, \cos x = -2\cos x + 4\cos^3 x \overset{!}{=} 0$$

د $\cos x = 0$ يا $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$ لپاره ورکيږي ، نو

$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4.$$

دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعريف او پريوديکي ده، ژيتکي ترڅېړني نه راځي.

د دويم مشتق د مخنخښي يعني

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x\, \sin x$$

مخنخښي او تابع ارزښتونو د پرتله کوني له لارې کېدی شي د افراطيت تيوپ يا ډول وټاکل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اوړونتکی(نقطه انعطاف)

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x \sin x = -10\sin x + 12\sin^3 x \stackrel{!}{=} 0$$

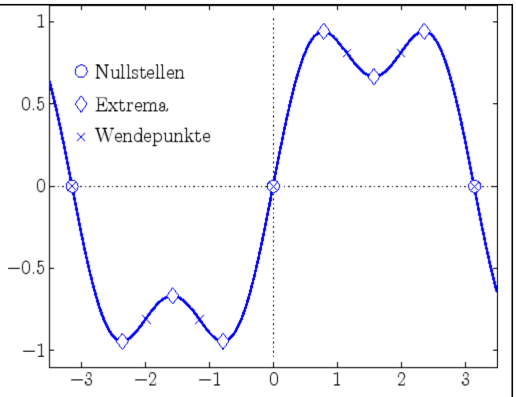
د $\sin x = 0$ یا $\sin x = \pm\sqrt{5/6}$ لپاره پوره دی، دا په دې معنا چې

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$

په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی. نو تابع په $(0,0)$ او $(\pm\pi,0)$ کې اوړونتکي لري، همداسي په $(-1.99,-0.81)$, $(-1.15,-0.81)$, $(1.15,0.81)$ او $(1.99,0.81)$ کې نږدې ازښتونه لري.

قطبونه : ناپرېکیدونکي توابع قطبځایونه نه لري.

اسیمپتوتونه: تابع پریودیکي او نا ثابت دی، نو اسیومپتوتونه نه لري.



لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه :

د یوه کړې بحث د ښوونې لپاره یو تابع

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترڅېړنې لاندې نیول کیږی.

سیومتري: صورت ناجوړه(طاق) او مخرج جوړه(جفت) دی. نو تابع ناجوړه دی، داپه دې معنا چې سرچینې ته ټکی سیومتریک دی.

پریودیوالی یا تل ببرته راګرځېدنوالی: تابع پریودیکي نه دی.

د پرېکېدنې ځایونه: صفرځایونه ± 1 د صورت صفرځایونه نه دي . له دې سره f په $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ باندې ناپرېکېدونکی دی.

صفرځایونه: صورت د $x = 0$ لپاره ورکیږی.

افراطیت:

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2-1)^2} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

دا چې تابع ساده صفځایونه لري، نو افراطیت فقط ځای اړوند دی. افراطي ارزښتونه دي:

$(-2, -4/5)$ ځای اړوند خورا جګ ټکی ، $(2, 4/5)$ ځای اړوند خورا ټیټ ټکی.

له دې سره کېدی شي، چې د f ډول یا ټیپ د کوالیتاتیو حالت څخه. دا چې $f(x) \to -\infty$ د $x \to -\infty$ او $x \to -1$ لپاره ، باید په انتروال

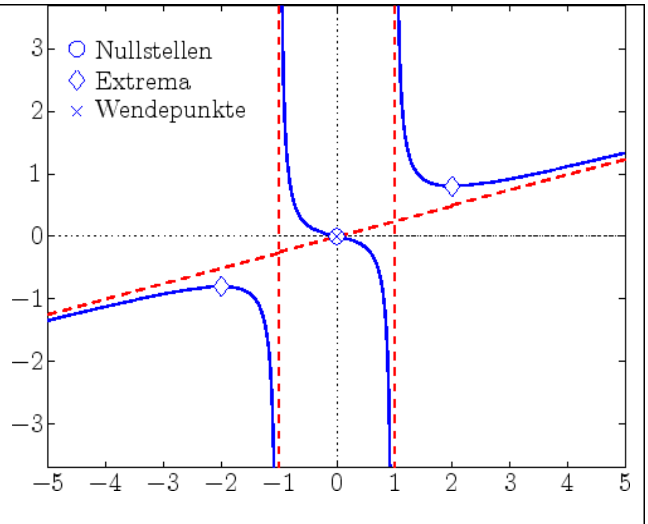
(c) ketabton.com: The Digital Library

$(-\infty,-1)$ کې يو ځای اړونده مينيموم ولري. په ورته توګه په $(1,\infty)$ کې لړ تر لړه يو ځای اړونده خورا ټيټ ارزښت.

اوړونټکی (نقطه انعطاف) :

$$f''(x)=\frac{-80x^5+398x^3+42x}{20(x^2-1)^3}\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad x=0$$

په دې ځای کې دريم مشتق صفر نه دی.

قطبځايونه: تابع په $x=\pm1$ کې ساده صفرځايونه لري، اسيمپتوتونه: ديوه پولينوم وېش څخه $p(x)=5x/20+0=x/4$ د اسيمپتوت په توګه لرو. ليکونکي:هيوليک،هيورنر	

بېلګه:

د کږې يا منحني بحث لپاره لاندې تابع تر څېړنې لاندې نيسو:

$$f(x)=e^{-x^2}+\frac{4|x|}{e^4}$$

سيومتر:

داچې x^2 او $|x|$ جوړه دي تابع جوړه دی، داپه دې معنا چې سيومتريک و y-محور ته.

پريوديوالی: تابع پريوديک نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرېکړېدنځایونه: تابع د ناپرېکړېدنتوابعو څخه مرکبه (یوڅای ایښول) شوې ده او له دې امله پرېکړېدنځایونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت توابعولپاره ټول مشتقونهپه صفرځای کې پرېکړېدونکي دي.

صفرځایونه: اکسپوننشل تابع تل مثبتّ(زاتیزه) ده، د مطلق ارزښت تابع نامنفي ده. نو صفرځایونه نه شته.

افراطیت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4}\operatorname{sign}(x) \stackrel{!}{=} 0,\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\,.$$

سربېره پردې دې کریتیکل ټکی $x = 0$ په پام کې وي، چېرته چې مشتق پرېکړېدونکی دی.

تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف دی، د x د $\pm\infty$ په لور حالت ته دې پام وي.

دا چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره f لږ ترلږه یو مطلق مینیموم لري، مګر هیڅ مطلق ماسیموم. پرتله د y - ارزښت کریتیکل ټکي

$$(-2, 9/e^4) \qquad (0,1) \qquad (2, 9/e^4)$$

ښایي، چې په $x = \pm 2$ کې مطلق مینیموم نیولکیږي. داچې f په انتروال $[-2,2]$ یو مینیموم او هم یو ماکسیموم لري، لاس ته راځي چې $(0,1)$ یو ځای اړونده مینیموم دی.

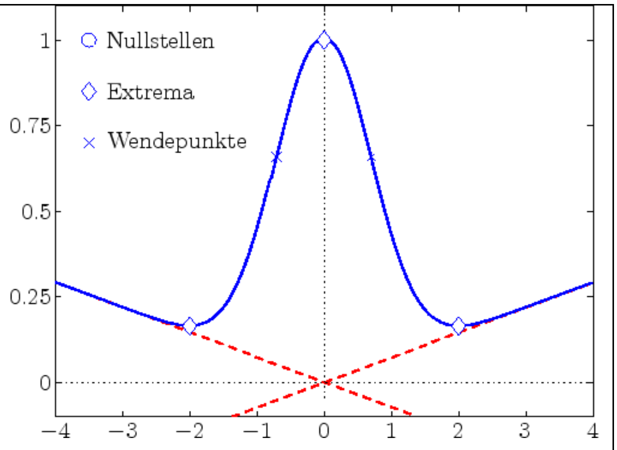
اوړونټکي :

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 2 \quad \Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{2}$$

دیم مشتق په دې ځای کې $\neq 0$ دی.



قطبځایونه: تابع قطبځایونه نه لري.

اسیمپتوټونه: دا چې e^{-x^2} له $|x|$ څخه د $x \to \infty$ لپاره ګړندی د صفر په لور درومي، تابع اسیمپتوټ $p_+(x) = \frac{4x}{e^4}$ او ی:

لیکونکي هیورنر، هیولیګ

د ریمن انټیګرال Riemann-Integral

دیوه ټوټه ډوله (په ټوټه ټوټه کې) ناپرېکېدونکی تابع f ټاکلی انټیګرال د

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \int_a^b f_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

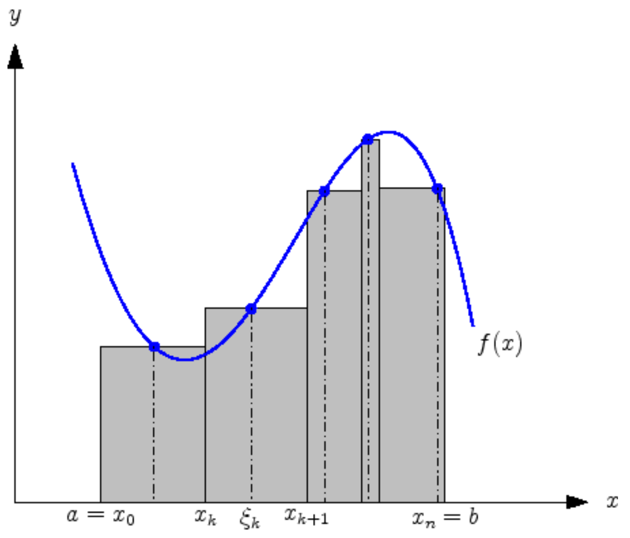
له خوا یا سره تعریف دی. دلته $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ د $[a,b]$ ټوټه ونه ښايي،

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\,, \qquad |\Delta| = \max_k \Delta x_k\,,$$

د انټروال ماکسیمال اوږدوالی دی او

ξ_k په خوښه ټکی دی په k -م انټروال کې. د انټیګرال تعریف په ښي لور جمعي د ریمن – جمعو په نامه یادیږی.

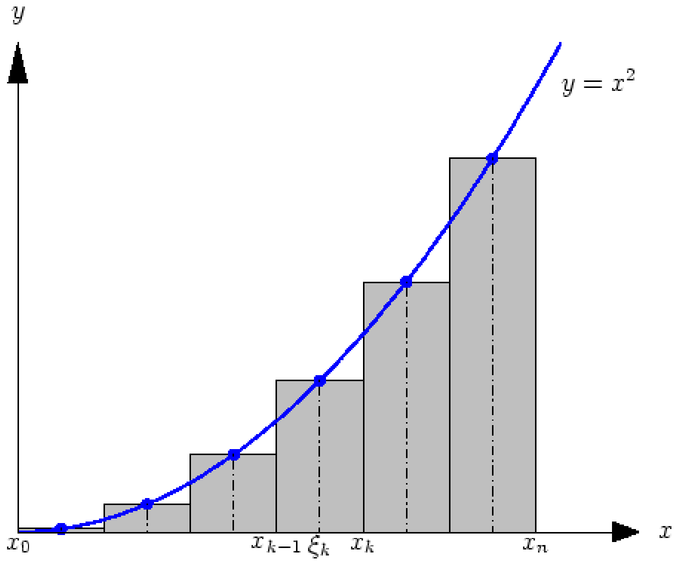
(c) ketabton.com: The Digital Library



د مثبت f لپاره $\int_a^b f(x)\,dx$ د سطحې مساحت دی د f د گراف لاندې.

لیکونکي: هیولیک، هیورنرو ویپر

د $\int_0^1 x^2\,dx$ د ریمن انتیگرال په حیث راوړنې سره کېدی شي د ټوټه ونو پرلپسې(ترادف)



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Delta_n : x_i = i/n \, , \, i = 0, \ldots , n \, ,$$

وکارول شي د ارزښت شوو ځايونو

$$\xi_i = (2i-1)/(2n) \, , \, i = 1, \ldots , n \, ,$$

سره د n -مې توته ونې لپاره.

د تعريف سره سم لاس ته راځي:

$$\int f_{\Delta_n} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{2i-1}{2n} \right)^2 = \frac{1}{4n^3} \left(4 \sum_{i=1}^{n} i^2 - 4 \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \right)$$

$$= \frac{1}{4n^3} \left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

او له دې سره

$$\lim_{n \to \infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

.

بنسټيزه تابع Stammfunktion

يو تابع F د $F' = f$ سره د f بنسټيز تابع ده، او د دې لپاره ليکو

$$\int f(x) \, dx = F(x) + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټول بنسټیزو توابعو ډېری یا سټ د ی ، چې د f ناټاکلی انتیګرال بلل کیږي. د انتیګرېشن ثابته په خوښه ده. د بېلګې په توګه

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

د $F_a(a) = 0$ سره یو ممکنه بنسټتابع دی.

د ټولو ساده توابعو لپاره د داسې بنسټیزو توابعو داسې اکسپلیڅیت ورکړه ممکنه نه ده، د دې لپاره بیلګه ده: $f(x) = \exp\left(x^2\right)$.

هر تابع

$$F_1(x) = x^3 + 2\,, \quad F_2(x) = x^3\,, \quad F_3(x) = x^3 - 1$$

د

$$f(x) = x^2\,.$$

یو بنسټیز تابع دی.

د $f(x) = \frac{1}{x}$ لپاره د $0 < c$ سره

$$F(x) = \ln(c|x|)$$

یو بنسټیز تابع دی.

لیکونکي: هیولیک،کرایڅ

د انتیګرال شمېرنې اصلي جمله

(c) ketabton.com: The Digital Library

که F د یوه ناپرېکېدونکي تابع f بنستیزه تابعوي، داپه دې معن، چې $f = F'$ ،
نو باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

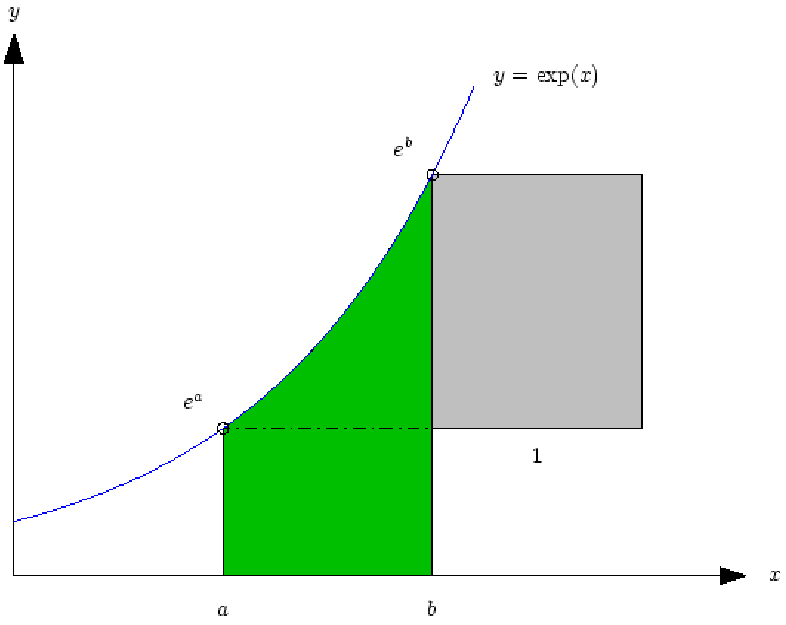
همداسې په لنډ لیکدول

$$\int_a^b f = [F]_a^b \ .$$

یو ټاکلی انتیګرال کېدی شي د بنستیزو توابعو د انتوال په پای ټکو کې د تابع ارزښتونو د کمښت په څېر وشمېرل شي.

لیکونکي: هیورنر، هیولیک

د اکسپوننشل تابع مشتق بیرته اکسپوننشلتابع دی او له دې امله لرو:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a\,.$$

د a او b ترمنځ دګراف سطحه مساوي ده د سور 1 او د تابع ارزښتونو دجګوالي واټن څخه جوړ ولاړګوديز (مستطيل).

د لوګاريتمي تابع $F(x)=\ln(x)$ مشتق $F'(x) = 1/x\,,\,x \in \mathbb{R}^+$ دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x\,dx = \ln(b) - \ln(a)\,,\quad a,b \in \mathbb{R}^+\,.$$

ليکونکي: هيورنر، هيوليک

د $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ يو بنسټيز تابع $F(x) = \arctan x$ دی . په تعقيب لرو

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}\,.$$

د کمښت سره verifiziert ، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

د $f(x) = \tan x$ بنسټيز تابع دی:

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

د دې پايله ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{\pi/4} \tan x\, dx = -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347\,.$$

ليکونکي: هيورنر، هيوليګ

يو پلانېټ د M کتلې سره يو د ګراويټيشن (راکښنې ورشو) ورشو توليدوي، چې په يوه تن يا بدن د m کتلې سره يوه قوه $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$ استعمالوي. د لته γ د ګراويټيشن ثابته ده او x د درونډ ټکو (د ثقل مرکزونو) واټن دی.

د $1/x^2$ لپاره بنسټيز تابع $-1/x$ دی. د دې لپاره چې يو بدن د a څخه و b ته په واټن يوسي، بايد کار

$$\int_a^b F(x)\, dx = \gamma m M \int_a^b \frac{1}{x^2}\, dx = -\left[\gamma m M/x\right]_a^b$$

$$= \gamma m M(1/a - 1/b)$$

سرته ورسيږي .

د a لپاره مساوي د پلانټ وړانګه او $b \to \infty$ کېدی شي د کينېټيکي انرژي سره د مساوي اينونې له امله داسې په نامه د تېښتې چټکتيا يا سرعت v و ټاکل شي،داپه دې معنا چې چټکتيا ، چې اړيينه ده، د يوه پلانېټ ګراويټېشن ورشو څخه وو تلی شي:

$$\frac{m}{2} v^2 = \gamma \frac{mM}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\gamma \frac{2M}{a}}\,.$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره $v = 11.2$ km/s. لرو.

ليکونکي: هيورنر، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوره – یا راوتلي بنسټیز توابع

لاندې جدول د زیات رامنځ ته کېدونکو توابعو $f(x)$ د بنسټیزو توابعو $F(x)$ جدول ښایي.

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
$x^s\,,\ s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln\|x\|$
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

لیکونکي: هیورنر، هیولیک

ټوټه انتیګرالونه Partielle Integration

د ضرب قانو $(fg)' = f'g + fg'$ له مخې د ناټاکیو انتیګرالولوپاره یو ورته فرمول لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

په اړونده توګه د ټاکلو انتيګرالونو لپاره لرو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

له دې سره دې په پام کې وي، چې د ژۍ ترمونه $[fg]_a^b$ ورکيږي، که يو له دې دواړو توابعو په انتروال ټکو کې صفر وي. دا د پريوديکي توابعو لپارهم ورکيږي ، د پريودې اوږدوالي $(b-a)$ سره.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

له

$$\int (1+x)^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\,(1+x)^{\alpha+1} + c$$

د $\alpha \neq -1$ لپاره

لرو

$$\begin{aligned}\int \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1+x}}\,dx &= x\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int 1\cdot\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,dx \\ &= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + c.\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه شمېرل کيږي

$$\int_0^1 \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1-x}}\,dx = \left[-x\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx$$

$$= \quad 0 - \left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\,.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د اووښتونو (واريابلو) بدلونVariablensubstitution

د زنځيري قانون څخه

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x))g'(x), \quad f = F',$$

د يوه بدلون $y = g(x)$ لپاره د بنسټتوابعو جوړولو له لارې لاس ته راځي

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(y) + c = \int f(y)\,dy\,.$$

په ورته توګه د ټاکلو انتيګرالونو لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

د دفرنشل په مرسته کېدی شي دا تابع په لاندې بڼه وليکل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

که په انتيګراند کې دننني مشتق پېژندوړ وي، لکه د بېلګې په تګه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx\,,$$

لپاره ، نو د بدلون استعمال خورا ساده دی. په دې بېلګه کې ږدو

$$y = g(x) = \ln x\,, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

او لاس ته راځي

$$\int g(x)^2\,g'(x)\,dx = \int y^2\,dy = \frac{1}{3}y^3 + c\,.$$

د په څټ بدلون له لارې لاس تهراځي

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

په تيپيک ډول د بدلون له لارې سړی هڅيږي چې انتيګرال ساده کړي.دبېلګې په توګه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y}-1}\,dy$$

لپاره په نږدې توګه ږدو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

دا د

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله ترانسفورمي شوى ناټاكلى انتيګرال راكوي.

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\frac{dy}{dx}\,dx =$$

$$= \int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)\,dx$$

$$= \int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c\,.$$

د $x = e^y$ په ځبړ يا برعكس بدلون سره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2}\left|\frac{e^y-1}{e^y+1}\right| + c\,.$$

ليكونكي: هيوليګ، كوپف

د مركاتور پرپوستونMercator-Projektion

بنسټتابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

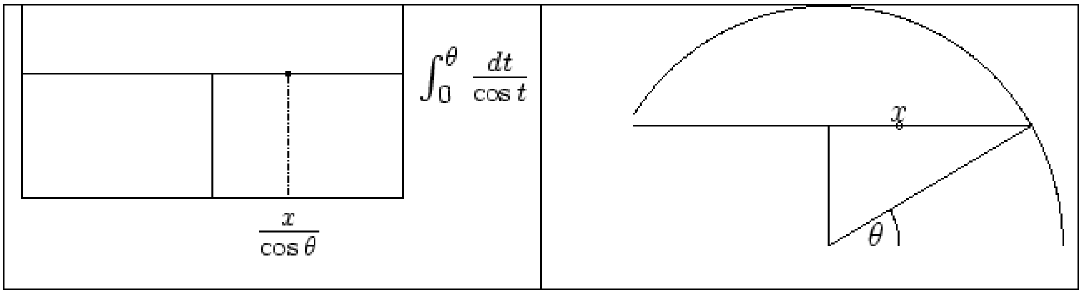
کېدی شي د بدلون

$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1+\sin x}{\cos x}, \qquad du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\, dx,$$

سره وشمېرل شي.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int (\cos x)^{-1} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} du \\ &= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \\ &= \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c. \end{aligned}$$

یو استعمال د مررکاتور پرېوستون دی. دلته د ځکي پوښ سطحه کږنجساتونکي یا کږنجیښتوني په یوه سطحه پریوځي یا پرې ایستلی شي.

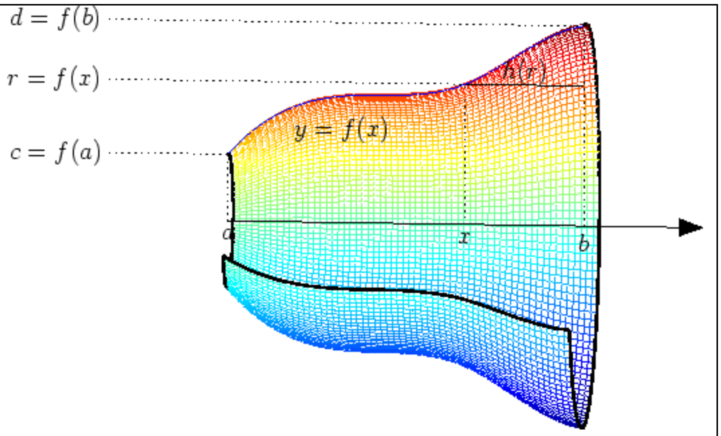


دلته سور درجه یا عرض البلد په اړیکو $1/\cos\theta$ غزول شوی.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څرخېدونکو بدنونو ډکی(حجم) Volumen von Rotationskörpern

په x -محور د تابع $r = f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$ د څرخېدنې له امله جوړ شوی بدن V ډکی(حجم) کېدی شي د ګردی ډوله(دایره ډوله) پروتِ غوځیو انتیګرال له لارې و شمېرل شي: $$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \, .$$	

په بدیلي ډول کېدی شي توټې(استواني) پوښ له لارې هم وشمېرل شي

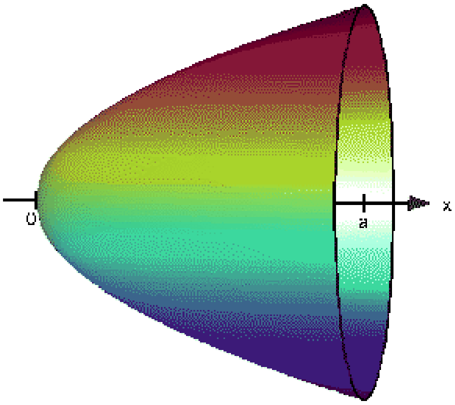
$$V = \pi c^2 (b - a) + 2\pi \int_c^d r h(r) \, dr \, ,$$

د کوم سره چې c همداسې d مینیمال همداسې ماکسیمال وړانګې r دي او $h(r)$ په بدن کې خوندي توټې پوښ تول جګوالی دي د وړانګې r سره. دا بدیل د تولو له مخه د همغږیز وړانګې تابع f لپاره موخه ور دی.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

دا جوړ یا څېره شوی پارابولوید د x – محور باندې د کرې $y = \sqrt{x}$ څرخون سره منځ ته اځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



د څرخون بدن د فرمول سره سم ډکی)حجم) دی:

$$\pi \int_0^a \left(\sqrt{x}\right)^2 \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{1}{2}\pi a^2 \, .$$

په بدیلې توګه د توتې پوښ باندې انتیګرال له لارې منځ ته راځي. 1

$$2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r(a-r^2)dr = 2\pi \left[-\frac{1}{4}(a-r^2)^2\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\pi a^2 \, .$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Diss . Uni. Wien Algebren .

Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, Dissertation at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې   انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل   دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

٣ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ١

٧ – انالیزې ٢

٨ – کرښیز الجبر

٩ - د شمیرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل انالیز

١٢ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته

تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزۍ پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لیکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم میړي شینواری د اروابنادې پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمریز کې د شینوارو هسکه مینه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې میني د لومړني ښوونځي (د لومړنیو زده کوونکو څخه) څخه وروسته

د رحمان بابا لیسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګې پیل او د دویم ټولګي څخه ګام او پای). د ۱۹۶۶ تر سپټبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپټمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنیو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمنی کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د ریاضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

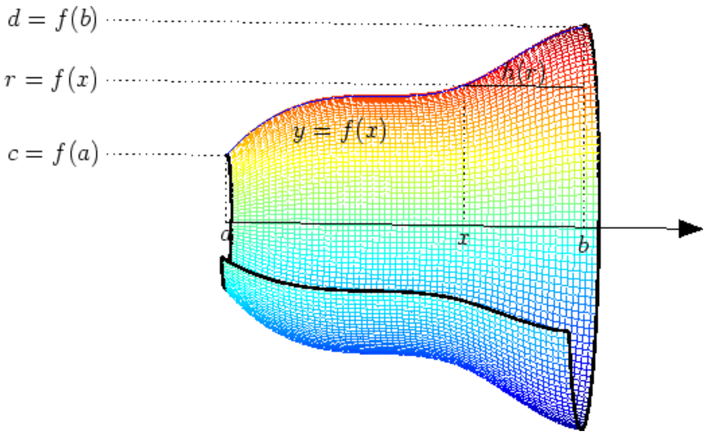
ماخان میړي په ۱۹۷۲ کې له لرې د میرمن ښاپیرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د میرمن ښاپیرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ویانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچیان وبخښل، چې څانګه او اباسین نومیږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسین ملي اقتصاد او ټولنیزه سایکولوژي لوستلي. ماخان شینواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۹۷ ۱۹ څخه همدا د کتابونو لیکلو او د ژباړې دنده په غاړه اخستي، چې خپل فکر تر شونې پولې پورې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شميرپوهنې بنسټونه



ليكونكي.: پروفيسور هيوليګ او ډله يې

(c) ketabton.com: The Digital Library

له مات. ن ج څخه

ژباړي : ډاکتر ماخان میرزي شینوالری

وینا ۱

منطقي(سم اندیزې) ترنې ۲
کوانتورونه ۱۱
سیده ښوونه ۱۳
ناسیده ښوونه ۱۴
ایمپلیکېشن ترې لاس ته راتلنه یا – راوړنه ۱۴
د پوره اندکشن له لارې ښوونه ۱۶
د مربع(ځلورۍ) عددونو د جمعي لپاره فرمول ۱۶
ډېرۍ(سټ) ۱۷
د ګڼونو (اعدادو) ډېرۍ ۱۹
په ډېریو کې عملیې ۱۹
کارتېزي ضرب (ځل) ۲۳
اړیکې ۲۴
د اړیکو د داتا بانک ۲۵
د اړیکو خویونه ۲۵
فنکشن ۲۸
د تابع یا څیروني یا بلواک(تابع) خویونه ۳۰
د فنکشنونو ۳۲
په څټ یا برعکس فنکشن ۳۲
فاکولتې یا فکتوریل ۳۳
د بینوم ضربیونه ۳۳
د پاسکال درېګودی ۳۴
د بینوم درسي جمله ۳۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بينوم ضريبونو لپاره کټمټوالی ۳۸
د دېريو يا ستونوکمبيناتوريک ۴۰
کربنيز فنکشنونه ۴۹
مربعيز فنکشنونه ۵۰
مايل ګوزار يا – غورځونه ۵۱
پولينوم ۵۳
راشنل فنکشن يا بلواک(تابع) ۵۴
ساين او کوساين ۵۵
تانجنت او کوتانجنت ۵۸
اکسپوننشل توابع(بلواک) ۶۰
د ګټې ګټه ۶۳
لوګاريتم ۶۵
ټوليز په توان تابع او لوګاريتم ۶۶
د لوګاريتم شمېرونی ۶۸
مشتق يا رابېلېدنه ۶۸
غوره (مهم) مشقونه ۷۱
د مشتق کربنيزوالی ۷۲
ايمپليځيت مشتقوړ توابع ۷۵
لوګاريتمي مشتق ۷۷
نيوټن تلنلار يا قانون ۷۸
د بابليانو ريښه (جذر)نيونه ۷۹
افراطيت ۸۰
د مشتق صفر اينوونه ۸۲
افراطي ارزښتونو ازمايښت ۸۴
کوتۍ ۸۵
ګاونډې ۸۸
د راشنلتابع ګاونډ يا- اسيمپټوتونه ۸۹
سيومتري ۹۱
د کږو يا منحنيو خبرې اترې(بحث) ۹۲
د ريمن انتيګرال ۹۹
بنسټيزه تابع ۱۰۱
د انتيګرال شميرنې اصلي جمله ۱۰۳
غوره – يا راوتلي بنسټيز توابع ۱۰۶
د اووښتونو (واريابلو) بدلون ۱۰۸
د مرکاتور پرېوستون ۱۱۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځرخیدونکو بدنونو ډکی(حجم) ۱۱۲
پوښتنه: ۱۱۵
د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې: ۱۱۹
د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او
ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي ۱۲۱

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library