د شمیرپوهنې بنسټونه

ډاکتر ماخان میرزي شینواری

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

وينا

د وينا لاندې يوه ژبنيزه افاده يا ويينه پوهيږو، چې د دې لاندې دوه رښتيا ارزښتونو ،، رښتيآ،،(``wahr,,) w همداسې ،، نارښتيا،، يا ناټيک (``falsch,,) f ځخه د يوه سره تنظيم كيدی شي.

ويناوې په لويو تورو A سره په نخښه کيږي : ، او کېدی شي د منطقي يا سم انديزو عمليو سره وتړل شي. بنسټيزې شمېرپوهنيزې ويېنې يا افادې ، چې له نورو افادو ځخه منځ ته نه شي راتلی اکسيومونه بلل کيږي

لاندې بيلګه د دې شميرپوهنې وينا روښانه کوي.

وينا

A : هر طبيعی عدد د لومړنيو عددونو ضرب دی. دا يوه رښتيا وينا ده.

وينا

B : هر لومړنی ګڼ يا عدد ناجوړه يا طاق دی. دا چې 2 جوړه يا حفت عدد او پريم دی، نو وينا نارښتيا ده.

دا تروسه ښوول شوي اټکلونه

C : ناپای ډير د پريم اعدادو غبرګوني شته. دا يوه شميرپوهنيزه وينا ده، ځکه چې دا يا رښتيا ده او يا نا رښتيا. دلته موخه د لومړني عدد د غبرګوني ځخه هغه لومړني ګاونډي ناجوړه عددونه دي ، چې دواړه لومړني عددونه دي ، د بيلګې په توګه.

$$(3,5),\ (5,7),\ (11,13),\ldots\ .$$

دا تراوسه حورا لويه د لومړنيو عددونو جوړه (د 19.4.2006 پورې) ده:

$$16869987339975\cdot 2^{171960}\pm 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کره کونې سره

D : د جمعې ۱۳ –مه یوه د بدبختۍ روځ ده.

دا یوه وینا نه ده، ځکه چې دا په یوه رښتیا ارزښت نه شي تنظیودی.

لیکونکې: هولیګ،هورنر

منطقي(سم اندیزې) تړنې(که غواړې: عملیی یا نښلونې)

منطقي یا سم اندیزې ویناوې کېدی شي په لاندې جدول کې ورکړ شوو عملیو سره و تړل شي.

یادونه : له کیڼ و ښي لور ته.

تیک هلته رښتیا، که	وییندود	لیکندود	نومونه	
A نارښتیا ده.	نه A	$\neg A$	نه والی	
	A او B رښتیا دي	(A او B)	$A \wedge B$	Konjunktion یا د او تړنه
	A یا B رښتیا ده.	(A یا B)	$A \vee B$	Disjunktion د یا تړنه
	A او B بیل رښتیا	(یا A یا B)	$A \not\equiv B$	Antivalenz نابرابر ارزښته

(c) ketabton.com: The Digital Library

			ارزښتونه ري
Implikation ترې لاس ته راوړنه	$A \Rightarrow B$ $B \Leftarrow A$	له A څخه B له B څخه A	A نارښتي یا B رښتیا ده
Äquivalenz برابر ارزښته	$A \Leftrightarrow B$	(A و B ته برابر ارزښته دی) یا له A څخه B لاس ته راځي او برعکس	او B همغه یا برابر رښتیا ارزښتونه لري

د دې لپاره چې په منطقي افادو یا وییینو کې نوکان یا قوسونه سپما کړو، کره کوو، چې $\neg$ له $\wedge$ او $\vee$ څخه کلک یا قوي نښلوي او دا بیا له $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ او همداسې له $\not\equiv$.

دا ایمپلیکیشن په پام کې ونیسی، چې B تیک هلته رښتیاه ده، چې A رښتیا وي. له ناتیکو نیونو(فرضیو) ، تیک یا رښتیا او یا هم نارښتیا پایلې را وپستل کیدی شي.

دا د یا ترني لپاره نخښه یوه دv په شان نخښه ده، چې د (vel (lat. oder (لاتین. یا) لپاره ځای په ځای شوې. د یا ترني لپاره کېدی شي چې سومبول ،، + ،، وکارول شي او د او- ترني لپاره ،، · ،،. که سومبول 0 د ناتیک یا غلط لپاره وکارول شي او هر بل ارزښت د رښتیا په څیر و کارول شي، نو کیدی شي منطقي ترني د طبیعي عددونو شمېرني له لارې هم پر مخ بوتلای شو یا استعمال کړای شو.

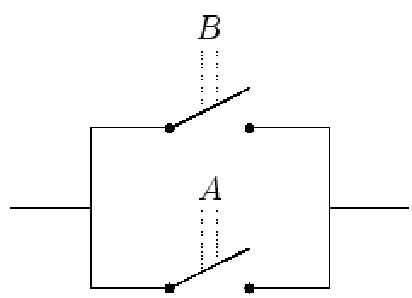
(c) ketabton.com: The Digital Library

په شميروني (کمپيوتر ژبه کې له انګريزي راغلي کليمې NOT (Negation) (نه والی)، AND (Konjunktion (کنجکشن)، OR (Disjunktion) (ديسجنکشن)، یا EXOR oder XOR (exclusive or, Antivalenz) (بې له یا نابرابر ارزښته) او د هغي نه والی NAND (negierte Konjunktion) (نه شوی کنجکشن) ، NOR (negierte Disjunktion) (نه شوی ديسجنکشن) او NXOR (Äquivalenz) (برابرارزښته) لپاره کارول شوي.

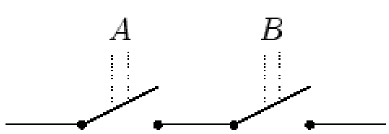
ليکونکي: هيوليګ، هيوررنر، کيمرلې

که وينا د سويچ په ځير انځور کړو، چې ترلي وي، که وينا ربښتيا وي، په همدې توګه واز ، که وينا نارښتيا وي، نو کېدی شي مسلسل سويچونه د یا – ترني په ځير او غبرګ سويچونه د او-ترني په ځير صورت وومي .

د یا-ترړنه



د او-ترړنه

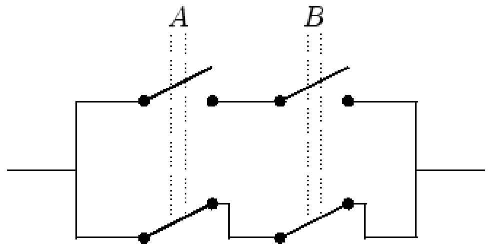


يوه نه-شوې وينا يو سويچ دی، چې ترلی دی، که وينا نارښتيا وي. له دې سره کېدی شي سويچ ځيرې د برابر ارزښته، نابرابر ارزښته او ايمپليکيشن لپاره ورکړل شي.

برابرارزښته : $A \Leftrightarrow B$ همداسي $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

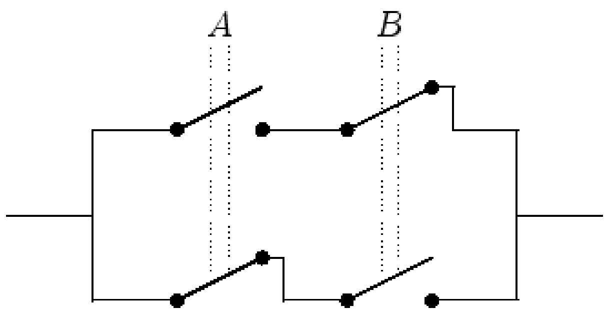
Äquivalenz:

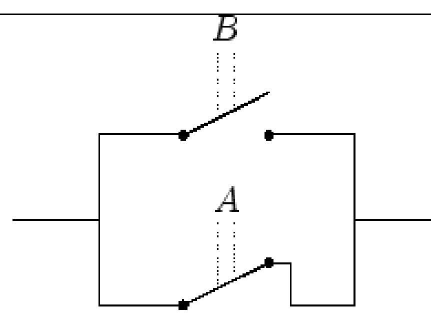
(c) ketabton.com: The Digital Library



نابرابرارزښته: $A \not\equiv B$ همداسي $(A \land \neg B) \lor (\neg A \land B)$

Antivalenz:



ایمپلیکېشن یا ترې لاس ته راتلنه: $A \Rightarrow B$ همداسي $\neg A \lor B$	

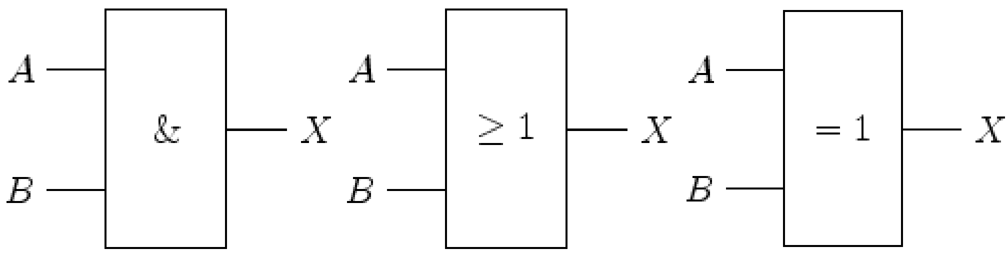
سویچونه کیدی د ترانزیستور له لارې منځ ته راشی یا صورت وموميږ، چې په جګ یا ټیټ اینسوول شوي شبانونګ جریان مومي یا تیریږي. د (1) ارزښت جګ شپانونګ دی ټیټ یا کم شپانونګ ارزښت (0) دی.

د دین DIN 40900 سره د اړونده (مطلوبه) شپانونګ تعریف ورکول کیږي. دا د ولاړګوډیز(مستطیل) خخه جوړ دی، په کومو کې چې اړونده تړنې ورکړ شوې دي. یو نه- والی د یوې ګردی(دایرې) سره په نخښه شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

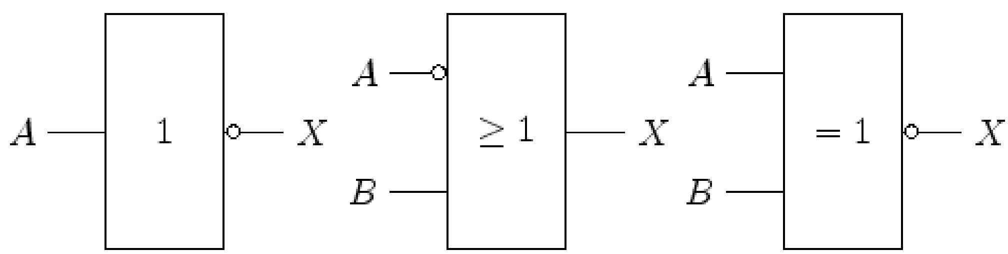
Konjunktion | Disjunktion | Antivalenz

کنجکشن | دیسینکشن | نابرابررارزښته



Negation | Implikation | Äquivalenz

نه-والی | ایمپلیکېشن | برابرارزښته



منطقي عملیو لپاره لاندې کتمتوالی Identitäten باوري دی.

Assoziativgesetze: اسوځیاتیو قانون

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

Kommutativgesetze: کموتاتیو یا بدلېدنقانون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

De Morgansche Regeln: د دي مورګان قانو

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Distributivgesetze: دیستریبوتیو قانون

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

او نور :

$$\neg(\neg A) = A$$

$$A \wedge A = A$$

$$A \vee A = A$$

Alternative Darstellungen: الترناتیو یا بدیلیی انځورونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

ایمپلیکشن
Implikation: $A \Rightarrow B \quad = \quad \neg A \vee B \quad = \quad \neg A \Leftarrow \neg B$

Äquivalenz: ا $A \Leftrightarrow B \quad = \quad (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Antivalenz: $A \not\equiv B \quad = \quad (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

بدیلې فرمولونه زیات وخت په ښوونو کې استعمال مومي.

یوه منطقي افاده یا وییته ، چې د رامنځ ته شوې وینا ربښتیا ارزښت خپلواکه تل ربښتیا همداسې ناربښتیا وي، تاوتولوجي Tautologie همداسې کونترادیکشن Kontradiktion بلل کیږي. داسې یوه افاده کړی شي د ښه بدلون سره همداسې د سره بدله شي. په ځانګړې توګه دا کټمټوالی باور لري:

$$A \vee \neg A = \mathrm{w} \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \neg A = \mathrm{f}\,,$$

همداسې

$$A \vee \mathrm{w} = \mathrm{w} \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \mathrm{w} = A\,,$$

همداسې

$$A \vee \mathrm{f} = A \quad \text{bzw.} \quad A \wedge \mathrm{f} = \mathrm{f}\,.$$

همداسې

لیکونکې: هیولیګ،، هیوررنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې مورګان قانون او د دېستريبوتيو قانو کېدی شي وښوول شي، داسې چې د وينا د رښتيا ارزښت لپاره ټول امکانات وځيړل شي. د دې مورګان قانون داپه لاندې جدول کې روښانه شوی دی.

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$, $\neg(A \wedge B)$
w	w	w	f	f	f
w	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	w
f	f	f	w	w	w

د ايمپليکېشن، برابرارزښتوالي او نابرابرارزښتوالي لپاره برابر ارزښته شننه له تعريف څخه لاس ته راځي.

د منطقي قانون د روښانه کونې لپاره د وينا

$$\underbrace{|x-1|>1}_{A} \Longrightarrow \underbrace{(x<0) \vee (x>1)}_{B}$$

ښه دليري.

د د پمورګان قانون سره سم لرو:

$$\neg B = \neg(x<0) \wedge \neg(x>1) = (x \geq 0) \wedge (x \leq 1)\,.$$

له دې سره سم ايمپليکېشن $A \Rightarrow B$ د وينا د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|x-1| \leq 1 \Longleftarrow 0 \leq x \leq 1\,.$$

سره برابرارزښته دی

بیا هم دا نتیجه لاس ته راځي ، که ایمپلیکېشن د تعریف سره سم د

$$(\neg A) \vee B = |x-1| \leq 1 \vee \neg(0 \leq x \leq 1)$$

سره بدل کړي.

د بېلګې په توګه افاده یا وینه

$$L : (A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge B)$$

ساده کوو.. د ایپلیکېشن پېځای اینونه او د دېموران قانون له امله لاس ته راځي

$$\neg(A \vee B) \vee (\neg A \wedge B) = (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)\,.$$

د دېتریبوتیو قانون له مخط دا وینا برابرارزښته ده د $\neg A \wedge (\neg B \vee B)$ سره.

پېژندل کیږي، چ د B ارزښت بې اغیزه دی یا ارزښتناک نه دی او $L = \neg A$.

د منطقي افادي L د ازماېښت ته الترناتیو یا بدیلي کېدی شي یو د رښتیا ارزښت جدول هم وکارول یا ا ستعمال شي.

A	B	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge B$	L
w	w	f	f	f
w	f	f	f	f
f	w	f	w	w

(c) ketabton.com: The Digital Library

f	f	w	f	w

له دې دا هم لاس ته راځي: $L = \neg A$

کوانتورونه Quantoren

د فرمولو،، شتون لري....،، . ،، د ټولو .... لپاره،، لپاره لنډوني شتونکوانتور $\exists$ او ټول کوانتور $\forall$ استعمالیږي.. دا کوانتورونه زیات وخت د $A(p)$ سره په تړاو کې استعمالیږي، چې د یوه پارامتر p چې د ډېرۍ یا سټ P توکی دی، په واک کې دي.

Schreibweise لیکندود	Bedeutung معنا
$\exists p \in P: \ A(p)$	یو توکی p له P شتون لري، د هغه لپاره چې $A(p)$ ربښتیا دي.
$\forall p \in P: \ A(p)$	د ټولو p لپاره چې له P دی $A(p)$ ربښتیا دی.

د دواړو وینا ډولونو د نه٠والي سره کونتوونه هم بدلیږي.

$$\neg(\exists p \in P: \ A(p)) = \forall p \in P: \ \neg A(p)$$

$$\neg(\forall p \in P: \ A(p)) = \exists p \in P: \ \neg A(p)$$

دا $\exists!$ لیکن ډول هم روڼنی دی د فرمولولو لپاره، چې ،، ټیک یو ... شته،،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوانتورونو د شمېرنې ښوونې لپاره وینا

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon\ \forall n \in \mathbb{N}:\ \ n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon$$

راوړل کیږي. دا په دې معنا چې یوه لړی(ترادف)

$$a_1, a_2, \ldots$$

د 0 په لور یا0 ته هڅیږي، دا په دې معنا چې د پوره لوی n لپاره د a_n مطلق ا رزښت د هرې د مخه ورکړشوي بند یا بندیز ε څخه کوچنی دی.

نه-والی داسې لاس ته راځي، چې زړې وینا نه شي او کوانتورونه سره بدل شی،

$$\exists \leftrightarrow \forall.$$

د ایمپلیکېشن یا لاس ته راوړنې یا – راتلنې اینوونه او د مورګېن قانون څخه لاس تهراځي

$$\neg(n > n_\varepsilon \Longrightarrow |a_n| < \varepsilon) = \neg(n \leq n_\varepsilon \vee |a_n| < \varepsilon) =$$

$$= n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon.$$

له دې سره د نه شوې وینا دا بڼه لري:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall n_\varepsilon\ \exists n \in \mathbb{N}:\ \ n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon.$$

دا په دې معنا چې پرلپسې(ترادف) (a_n) د 0 لورته نه هڅیږي . دا په دې معنا چې یو لرزښت $\varepsilon > 0$ شتون لري، چې له هغه پرلپسې $|a_n|$ تل بیا اوړي یا تېرېږي.

لیکونی:ک. هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

سیده ښوونه

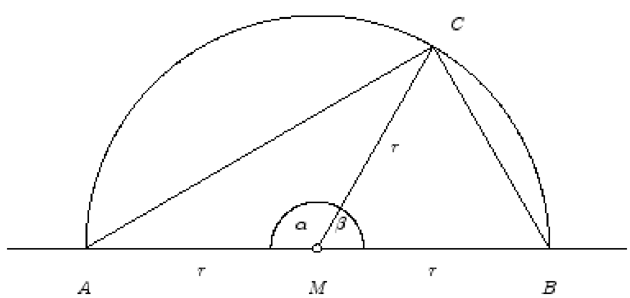
یوه غوښتنه ثبوت) B کېدی شي و ښوول شي، چې هغه له ربنتیا وینا A څخه را منځ ته شي او یا په داسې بېرته واړول شي.

$$A \Longrightarrow B .$$

ویناوې A کړی شي وړاندنیونې(فرضیې) هم ولري، چې هغه د ِغوښتنې B لپاره اړیینې دي.

لیکونکی: هیولیګ

د بېلګې لپاره یې د تالس جمله را اخلو، چې هر په یوه نیم ګردی(نیم دایره) کې رابند درېګودی(مثلث) ولاړګوډیز یا قایم الزاویه دی.



دا سیده ښوونه په لاندې دوه جملو ولاړه ده:

اول : په یوه مثلث کې د دننیو کونجونو جمعه π ده.

دویم : د یوه برابر پښیز (یا که غواړې: متساوی الاضلاع) مثلث بنسټکونجونه برابر لوي دي.

که دا په مثلث $\Delta(AMC)$ او $\Delta(CMB)$ و کاروو، نو له دې لاس ته راځي

$$\sphericalangle ACM = \frac{\pi - \alpha}{2}, \qquad \sphericalangle MCB = \frac{\pi - \beta}{2}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sphericalangle ACB = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

او له دې سره دی

او د $\alpha + \beta = \pi$ له امله په $\pi/2$ سره برابر.

ناسیده ښوونه

د دې لپاره چې وښایو چې له یوې وړاندنیونې(فرضیې) V څخه غوښتنه(ثبوت) B لاس ته راځي یعنې ($V \implies B$) ، کېدی شي ونیسو ، چې وینا B د V د وړاندنیونې له امله ناربښتیا ده، دا مو یوه تضاد ته بیایي:

$$V \wedge (\neg B) \implies F,$$

د F سره یوه ناربښتیا وینا ده، په ځانګړې توګه $F = \neg V$ یا $F = B$.

په ځانګړې توګه باور لري

$$B = (\neg B \implies F) = (\neg B \Rightarrow B),$$

که وړاند نیونې نه وي شوي.

لیکونکي: هیولیګ، کنش،اببریېنس

ایمپلیکېشن ترې لاس ته راتلنه یا - راوړنه

$$V \wedge (\neg B) \implies F$$

د $\neg(V \wedge (\neg B)) \vee F = (\neg V) \vee B \vee F.$ سره برابرارزښته دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

که ایمپلېکشن رښتیا وي، داپه دې معنا چې د شمېرپوهنیزو قوانینو څخه لاس ته راغلی، نو باید غوښتنه(ثبوت) B رښتیا وي، څکه چې $\neg V$ نارښتیا ده او F یا نارښتی او یا د B سره برابر دی.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د دې ناسیده ښوونې د روښانه ونې لپاره ښایو، چې $\sqrt{2}$ ایراشنل دی، داپه دې معنا چې د مات یا مسر په څېر نه شي انځورېدلای.

$$\neg B: \ \sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

نیسو، چې غوښتنه B نارښتیا ده. بس باور لري

د $p, q \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{ggT}(p,q) = 1$ سره .

دلته ggT انګرېزي یې gcdخورا عټ کډېروېشونی (ذوالاضعاف الاقل) دی.

د نیونې څخه د مربع کونې او د q^2 سره ضربونې له امله لاس ته راځي

$$2q^2 = p^2 \,,$$

دا یه دې معنا چې p^2 او له دې سره p یو چوړه یا جفت عدد دی. په ځانګړې توګه یو $r \in \mathbb{N}$ شتون لري د $p = 2r$ سره. د $q^2 = 2r^2$ له امله q هم یو چوړه عدد دی او له دې سره $\mathrm{ggT}(p,q) = 2$. دا د نیونې نیونې جوړښت $\neg B$ سره په تضاد کې ده، چې $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$ ، دا په دې معنا چې

$$(\neg B) \Longrightarrow B \,.$$

له دې امله یا د دې په تعقیب باید غوښتنه B رښتیا وی،

د پوره اندکشن له لارې ښوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

وینابنې د طبیعي پارامتر سره کېدی شي د پوره ایندکشن له لارې وښوول شي. که $A(n)$ یوه د $n \in \mathbb{N}$ په واک کې وینا وي، نو د دې لپاره دې لاندې دواړه د د ښوونې پلونه (قدمونه) روښانه- یا و اخستل شي. .

لومړی : د ایندکشن پیل : ښایو چې $A(1)$ رښتیا دی.

دویم : اینوکشنپایونه یا ختم: ښایو چې د نیونې چې $A(n)$ رښتیا دی(دایندکشن هیپوتیزې)، لاسته زاځي، چې هم رښتیا دی، یاپه دې معنا چې

$$A(n) \implies A(n+1).$$

نو دا باوري دی، چې $A(n)$ د ټولو $n \in \mathbb{N}$ لپاره ضدق کوي.

د یوه اندکشن ښوونې سره یو په بل پسې sukzessive دا پسې د تر مخه ځخه لاس ته راځي.

که د اندکشن پیل د $n_0 = 1$ لپاره نه بلکه د $n_0 > 1$ لپاره سرته ورسیږي، نږ وینا بیا فقط د $n \geq n_0$ لپاره صدق کوي.

د مربع(ځلورى) عددونو د جمعې لپاره فرمول

$$A(n): \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1),$$

کیدی شي د پوره اندکشن سره وښوول شي.

د اندکشن پیل ($A(1)$):

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}.$$

د اندکشن پای

$$A(n) \implies A(n+1)):$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2 = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{A(n)} + (n+1)^2$$

$$= \frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

د اندکشن هیوپوتېزې، لکه چې روښانه شوه، په دریم برابروالي کې استعمال شو.

ډېرى(سټ)

یوه ډېرى A له توکو $a_1, a_2, \ldots$ جوړه ده یعنې

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}.$$

که توکي د یوه خوی له مخې خوی لرونکي (کرکترېزه) شي، نو د دې لپاره لیکو

A={a:د E خوی لري:a}

د دې لپاره سرې لاندې نخښې کاروي یا استعمالوي:

معنا	لیکندول

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a \in A$	a د A توکی دی .
$a \notin A$	a د A توکی دی .
$A \subseteq B$	B د A برخدېرى(برخسټ) ده
$A \subset B$	Bد A برخدېرى(برخسټ) ده
$\|A\|$	دتوکو ګڼون يا تعداد په... کي
$\emptyset$	تشدېرى يا تشسټ

که $|A| < \infty$ همداسي $A = \infty$ باور ولري، نو دلته د پاى دېرى همداسي ناپاى دېرى څخه غږيږو.

دوه يا څو دېرى برابرزوريزى بلل کيږي، که د دوى د توکو ترمنځ يو بيجکتيو بلواک يا تابع يعنې برعکسکيدونکى بلواک شتون ولري ($|A| = |B|$ د پاى دېرى لپاره).

د A د ټول برخو دېرى $\mathcal{P}(A)$ تواندېرى بلل کيږى، دا په دې معنا چي

$$\mathcal{P}(A) = \{B : \; B \subseteq A\}$$

له دې سره باور لري $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$, $A \in \mathcal{P}(A)$ او $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

ليکونکي: هيوليک، کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګڼونو (اعدادو) ډېرۍ

د لاندې ګڼونو ډېرۍ لپاره معیاري نخښې استعمال مومي:

طبعي اعداد : $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

ټول اعداد: $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$

راشنل یا هوښیار اعدا: $\mathbb{Q} = \{p/q:\ p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{N},\, \mathrm{ggT}(p,q) = 1\}$

ریل یا حقیقي(ریښتوني) اعداد: $\mathbb{R} = \{x:\ x = \lim_{n\to\infty} q_n,\, q_n \in \mathbb{Q}\}$

کومپلکس اعداد: $\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y:\ x, y \in \mathbb{R},\, \mathrm{i}^2 = -1\}$

په همدې توګه لاندلیکنډول هم کارول کیږي:

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ او $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}:\ x > 0\}$ او دې ته ورته یا په همدې ډول

$\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z}_0^-$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}_0^+$, $\mathbb{Q}^-$, $\mathbb{Q}_0^-$, $\mathbb{R}_0^+$, $\mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}_0^-$.

لیکونکي: کرم هیولیګ

په ډېریو کې عملیې

د دوه ډېریو A او B لپاره لاندې علمیې تعریف دي:

تولنه (اتحاد)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A \cup B = \{x:\ x \in A\ \vee\ x \in B\},$$

غوڅی(قطاع):

$$A \cap B = \{x:\ x \in A\ \wedge\ x \in B\},$$

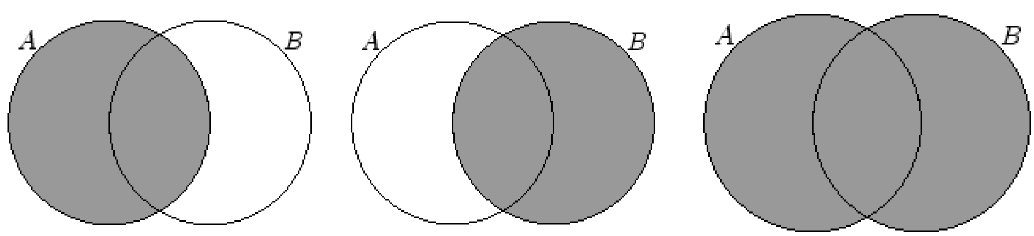
کمبنت یا کمون (تفریق)، پوره کېدونکي ډېرى،

$$A \setminus B = \{x:\ x \in A\ \wedge\ x \notin B\},$$

سيوتريکي کمبنت (کمون)

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

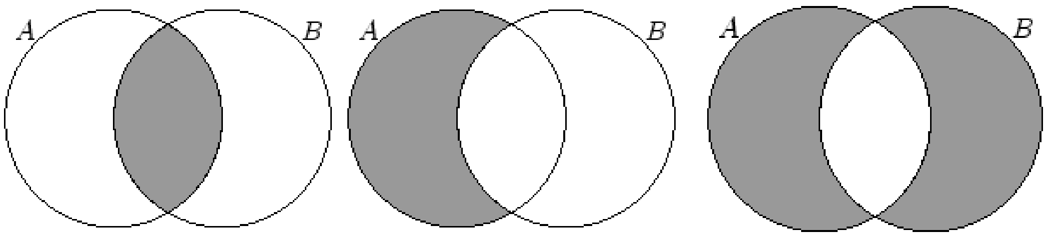
په لاندې ځېرو کې د ډېريو عللیې داسې په نامه ون-دياګرام Venn-Diagramme سره ښوول شوي دي.



تولنه

A B $A \cup B$ Vereinigung:

(c) ketabton.com: The Digital Library



غوځی

$A \cap B$ Schnitt:

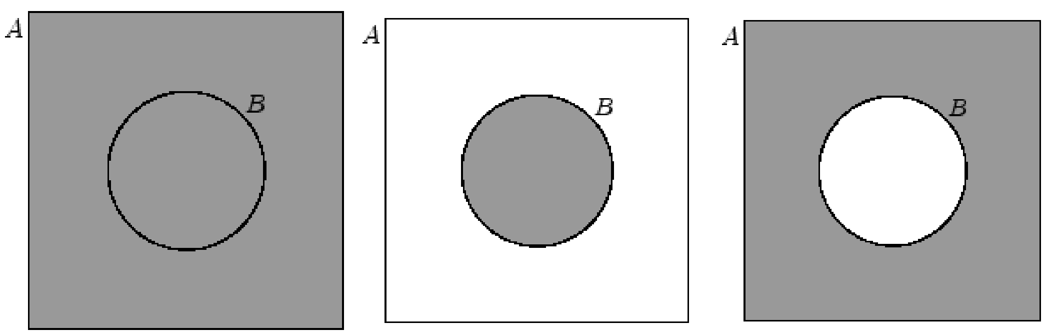
کمبنت

$A \setminus B$ Differenz:

سیومتریکي کمبنت

symmetrische $A \Delta B$ Differenz:

که $B \subset A$ وي، نو یوځو دیاګرامونه یو بل سره خوري یا یو په بل پریوځي:



تولنه

Vereinigung: $A = A \cup B$

غوځی

$B = A \cap B$ Schnitt:

پوره کېدنکي ډېری

Komplementärmenge : $A \setminus B = A \Delta B$

لیکونکي: هولیک،هورنر، کنیش

د ډېریو عملیو لپاره شمېرقوانین:

اسوځیاتیو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

کموتاتیو یا بدلېدونکی قانون.

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

- Morgansche Regeln:
- د مورګان قانون یا قاعده

$$C \backslash (A \cap B) = (C \backslash A) \cup (C \backslash B)$$

$$C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B)$$

- دیستریبوتیو قانون.

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

دا قوانین د منطیقي قوانینو په کوته کونه هم ده، که د $\cup, \cap$ عملیو په ځای $\wedge, \vee$ کیږدو. او $C\backslash$ په ځای $\neg$ کیږدو.

لیکونکي:هیولیګ،هیونر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نمونې په توګه به د دي مورګان لومړی قانون و ښوول شي. باور لري:

$$x \in C \backslash (A \cap B) \Leftrightarrow \qquad x \in C \wedge x \notin (A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B).$$

د ډېستريبوتيو قاونو له مخې اخرنی افاده يا ويېنه د لاندې سره برابرارزښته ده

$$(x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in (C \backslash A \cup C \backslash B),$$

له کوم سره چې غوښتونکی کتمتوالی ښوول شوې.

ليکړنکی:ک. هيوليګ

د دي مورګان قاعدې له مخې د بيلګې په توګه لاس ته راځی

$$C \setminus (A \cap C) = (C \setminus A) \cup (C \setminus C) = (C \setminus A) \cup \emptyset = C \setminus A,$$

$$C \setminus (A \cup C) = \qquad (C \setminus A) \cap (C \setminus C) = (C \setminus A) \cap \emptyset = \emptyset.$$

د ډېستريبوتيو قانون د بېلګې په توګه لاس ته راځي:

$$(A \cup B) \cap B \quad = \qquad (A \cap B) \cup (B \cap B) = (A \cap B) \cup B.$$

له دې سره باور لري $(A \cap B) \cup B = B$ ، ځکه چې $(A \cap B) \subseteq B$ دی

کارتېزي ضرب (ځل)

د دوه ډېريو A او B کاتېزي ضرب دواړو ډيريو د ټولو منظمو جوړو ډېری ده:

$$A \times B = \{(a,b): \ a \in A \wedge b \in B\}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

باور لري:

$$(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow (a = a' \wedge b = b')\,.$$

داپه دې معنا چې د ډېرې برابروالي ($\{a,b\} = \{b,a\}$) په عكس يا په ځت د لړې پرلپسې غوره ده

په ورته تو ګه n - واره يا څله كارتېزي ضرب تعريفوو

$$A_1 \times \cdots \times A_n$$

د ټولو منظمو n - ګونونو $(a_1, \ldots, a_n)$ د $a_i \in A_i$ سره . كه ډېرې برابرې وي، نوليكو:

$$A^n = A \times \cdots \times A$$

ليكونكي:هيوليک،هيورنر

اړيكې Relation

كه د ډېرې A توكي د ډېرې B له توكو سره په اړيكو كې قرار ولري يا ولاړې وي، نو كېدى شي دا د يوې اړيكې سره افاده يا وويل شي. دا د توكو له منظمو جوړو (a,b) جوړه ده، چې دا د اړيكو له لارې سره تړلي دي. نو يوه اړيكه R د A او B د كارتېزي ضرب برخډېرې ده. وايو چې a د b سره په اړيكو كې ده او د دې لپاره ليكو $a \,\mathrm{R}\, b$:

$$a \,\mathrm{R}\, b \Leftrightarrow (a,b) \in R \subseteq A \times B\,.$$

ليكونكي:ژ. هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اړیکو د داتا بانک Relationale Datenbank

یوه نمونه یي بېلګه د اړیکو د ،،داتا-بانک،، دی. دلته د بېلګې په توګه یو د درسونو (لکچرونو) جدول او یو د زده کړو جدول ورکول شوي چې یو له بل سره په اړیکو کې راغلي. دا په لاندې ځېره کې روښانه شوي.

په لاندې کې کيڼ لور ته نومونه دي

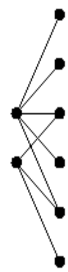
درس

لوړه شمیرپوهنه ۱

د زده کوونکو...

کوټه

V57.01
V47.02



Mtr.-Nr.	Name
1000000	Anton Antonius
1000001	Berta Bethel
1000002	Cornelius Cornell
1000003	Damian Damien
1000004	Egon Ekel
1000005	Frank Frankfurth

دا هم دلته روښانه شوي چې د یوې ډېرۍ توکي د بلې ډېرۍ د توکو سره په اړیکو کې راځي یا که غواړئ :قرار لري.

لیکونکي: بوسلر، هیورنر

د اړیکو خویونه

په یوه ډېرۍ A کې یوه اړیکه $R \subseteq A^2$ په لاندې توګه بلل یا نمول کیږي:

رفلکسیو reflexiv ، که هر توکی د خپل ځان سره په اړیکه کې وي:

$$\forall a \in A : (a,a) \in R$$

سیومتري symmetrisch ، که د توکو لړۍ پرلپسې کوم رول نه لوبوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$

انتی سیمتري antisymmetrisch ، که که له سیمتري څخه کټمتوالی لاس ته راشي:

$$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$$

ترانزتیوtransitiv ، که له یوه زنځی څخه منځنی توکی لرې کېدی شي:

$$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

ټوتالي total، که هر دوه توکي لږ تر لږه په یوه لور په اړیکو کې سره راتلی شي:

$$\forall a,b \in A : (a,b) \in R \vee (b,a) \in R$$

که یوه اړیکه رفلکسیو ، سیومتریک او ترانزیتیو وي، نو دا ،،ورته اړیکې،، (برابرارزښته اړیکې) بلل کیږي. دلته بیا زیات وخت $a \sim b$ د $a\,\mathrm{R}\,b$ په ځای لیکل کیږي. یو ورتهاړیکې ډېرۍA په توکي پردیو برخډېریو ویشي (ورته یا برابر ارزښته ټولګیو)، د کوم سره چې د یوې برخډیرۍ دوه توکي یوبل سره په اړیکو کې درېږي(برابرارزښته دي). په داسې حالت کې چې دوه توکي له مختلفو برخډریو څخه داسي حالت نه لري.
که یوه اړیکه رفلکسیو، انتیسیمتري او ترانزیتیو وي، نو دا یو نیم نظم دی او د دې لپاره $a \leq b$ د $a\,\mathrm{R}\,b$ په ځای لیکل کیږی. که یو نیم نظم د دې برسېره(سربېره) توتالي وي، نو دا (توتال) نظم بللکیږي او A د $\leq$ سره منظمه ده.

لیکونکی:ژ هیورنر

د یوې ډېرۍ M پوتنځډېرۍ $\mathcal{P}(M)$ کې د ډېرۍ خوندیونه یا په کې ځایېدنه $\subseteq$ نیم نظم دی، ځکهچې باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$A \subseteq A$ رفلکسیو انتیترانزیتیو $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ او ترانزیتیو $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ قوانین. که M له یوه زیات توکي ولري، نو خوندیونه نظم نه ی، ځکه چې لاندې باور لري:

$$a, b \in M, a \neq b : \{a\} \not\subseteq \{b\} \wedge \{b\} \not\subseteq \{a\},$$

دا په دې معنا چې دا ټوټالي منظمه نه ده.

اړیکي ،، ټیک دومره توکي لري لکه،، د یوې پای ډېرۍ M په توانډېرۍ کې $\mathcal{P}(M)$ برابرارزښته ده ځکهچز باور لري : $|A| = |A|$ (رفلکسیو)، $|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A|$ (سیومتري)، $|A| = |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C|$ (ترنزیتیو)

لیکونکی:ژ هیورنر

په یوې ډېرۍ باندې زیات وخت اړیکي یا په همدې ډول پرابرارزښته – اړیکې د توکو د خویونو له لارط تعریفیږي. د بېلګې په توګه دوه اړیکي په

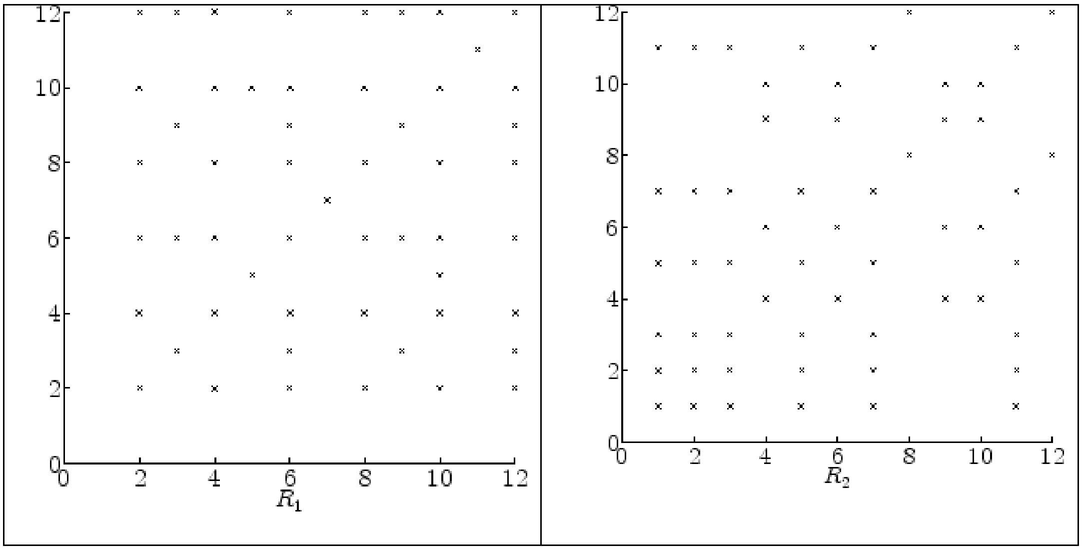
$$M = \{1, 2, \ldots, 12\}$$

کې ترځېرنې لاندې نیسو:

لومړی $x \; R_1 \; y$: x او y یو ګډ پروېشونی (مقسوم علیه مشترک) $\neq 1$ لري .

دویم $x \; R_2 \; y$: x او y برابرډېر پروېشوني لري

(c) ketabton.com: The Digital Library



ځيرونه يا يا تابع(بلواک) د $M \times M$ برخدېريو په ځير د اړيکو ګراف ښايي .
اړيکې R_1 سيومتريک او رفلکسيو دي، مګر نه ترانزيتيو. د بيلګې په توګه $x = 4$ او $y = 6$ کډ پروپشونى 2 لري او $y = 6$ او $z = 9$ کډپروپشونى 3 لري، مګر $x = 4$ او $z = 9$ کډ پروپشونى نه لري. نو

$$(xR_1y \wedge yR_1z) \Rightarrow xR_1z$$

باور نه لري.

اړيکې برابرارزښت –اړيکې دي. رفلکسيويتي، سيومتري او ترادزيتيويتي په ځرګنده توګه پوره دي. برابرارزښته –ټولګې

دي د يوه، دوه، درې ځلور او شپږ پروپشونو سره.

ليکونکي: هيليګ،کرايخ

فنکشن (بلواک يا تابع)

د يوه فنکشن f لاندې له يوې ډېرى A په يوه ډېرى B باندې يوه قانونمندي پوهيږو، چې هر $a \in A$ توکى په يواځني ډول يو ټاکلي $b = f(a) \in B$ باندې تنظيم کړي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f : A \longrightarrow B \, .$$

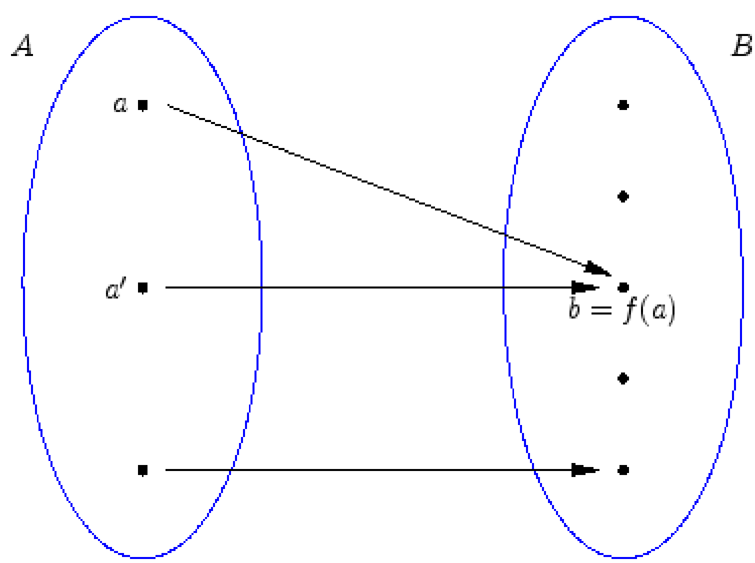
د توکو- نظم لپاره لاندې لیکندود استعمالیږي

$$a \mapsto b = f(a)$$

او b د a ځبرې یا ارزښت په حیث بلل کیږي او همداسې a د b (د پخوا ځبرې)د تعریف توکي په ځبر بلل کیږي.

لکه د لاندې ځیرې ځخه چې کتل کیږي، باید د B توکي د A د یوه توکي د ځبرې توکي په توګه رامنځ ته شي او د B یو توکی کېدی شي د A د ډېرو توکو ځبره یا نظم وي. په هر حالت باید د A د هرتوکی لپاره په یواځني توګه یوه ځبره شتون ولري، دا په دې معنا چې له هر a ځخه باید یو غشی وتلی وي.

پیژندل کیږي چې ځیره زیات تعریفتوکي یا د ځیرې پخوانۍ یا نوره هم ښه مخکنې لري(دا په دې معنا چې ځیره کېدونکی دی)، دلته د بیلګې په توګه a او a'. د ځیرونې لپاره کلیمه فنکشن هو کارول کیږي، په ځانګړې توګه په ریل ا حقیقي او کمپلکس انالیوزې کې.



لیکونکي: هیولیک،هیورنر،کیمرلي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع یا خیرونې یا بلواک(تابع) خویونه

د دوه ډېریو A او B ترمنځ یوه تابع

$$f : A \longrightarrow B$$

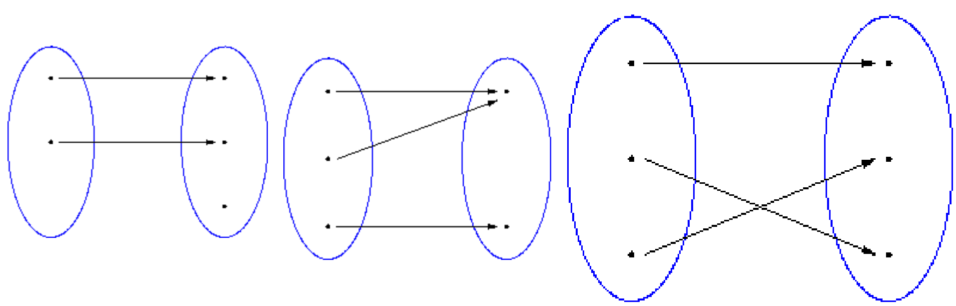
داسې یا په لاندې تګه بلل کیږي:

په کې بلواک injektiv : که د هر $a, a' \in A$ لپاره د $a \neq a'$ سره دا $f(a) \neq f(a')$ صدق وکړي.

په باندې (بلواک) surjektiv : که هر $b \in B$ لپاره یو $a \in A$ شتون ولري د $f(a) = b$ سره.

په (بلواک) bijektiv : که (تابع) f په کې او په باندې وي.

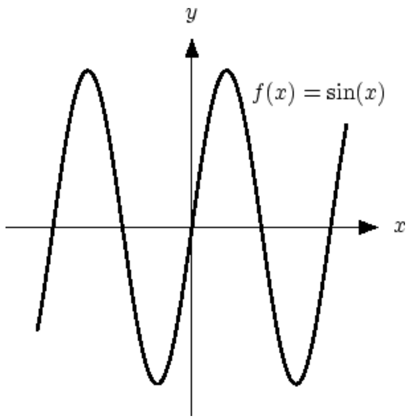
دا کلیمې کېدی شي د ډېرۍ دیاګرام له لارې روښانه شي.



injektivپه کې	surjektivپه باندې	bijektivپه

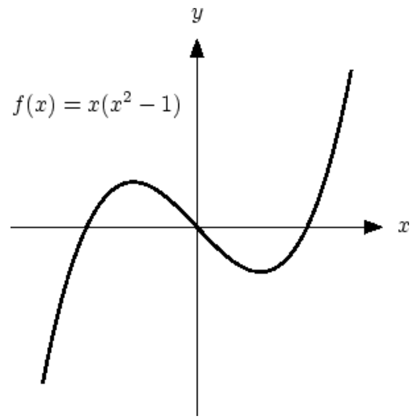
د یو څو بلواکو(توابعو) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ خویونه ورکړ شوي دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



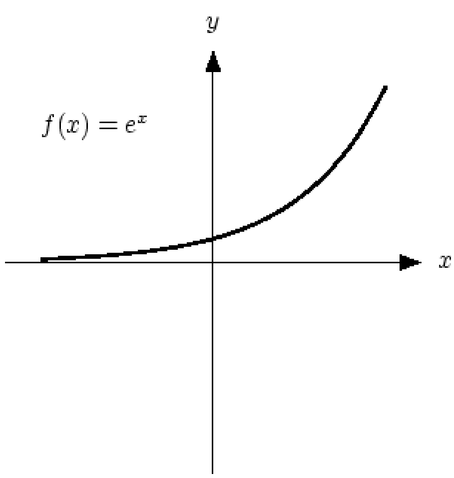
weder injektiv, noch surjektiv

نه په کې او نه په باندې



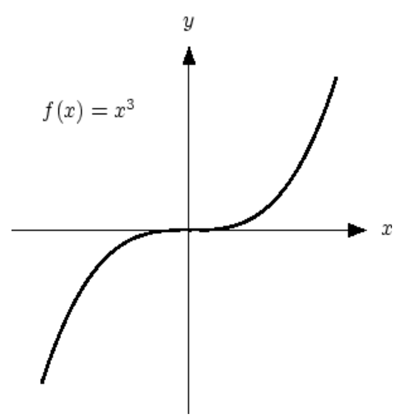
surjektiv, aber nicht injektiv

په باندې، مګر نه په کې



nicht surjektiv, aber injektiv

، نه په باندې مګر په کې



bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv

په، دا په دې معنا چې په کې او په باندې

(c) ketabton.com: The Digital Library

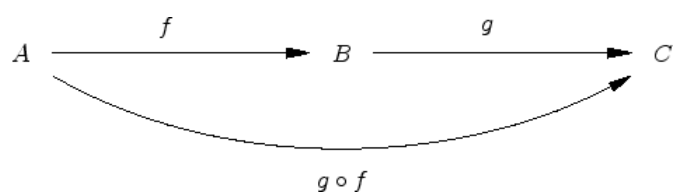
د فنکشنونو (بلواکو یا توتبعو) تړنه یا عملیې

Verknüpfung von Abbildungen

د دوه فنکشنونو $f : A \to B$ او $g : B \to C$ تړنه یا کمبوزیشن (زنځیرونه یا سره ګډ ایښونه) د

$$a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad a \in A,$$

له لارې تعریف شوی او په لاندې دیاګرام کې لیدوړ ګرځېدلی.



تابع اسوځیاتیو ده، دا په دې معنا چې ∘ تړنه

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

صدق کوي، مګر په ځرګند ډول کموتاتیو نه ده. .

لیکونکی: هیولیک، کنش

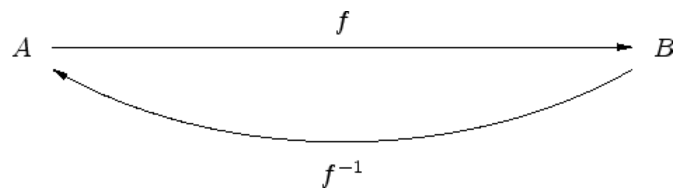
په څټ یا برعکس فنکشن (بلواک یا تابع)Inverse Abbildung

د یوه په فنکشن یا تابع $f : A \to B$ لپاره د

$$b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

له لارې په څټ فنکشن یا برعکس تابع $f^{-1} : B \to A$ تعریف ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ځانګړې توګه $a = f^{-1}(f(a))$ دی، داپه دې معنا چې $f^{-1} \circ f$ کټمټ یا ورته تابع دی.

لیکونکي: هیولیګ، کنش

فاکولتې یا فکتوریل Fakultät

د لومړیو n طبیعي اعدادو یا ګڼونو ضرب د

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n$$

سره په نخښه کیږی. (لوستل یې : n فاکولتې). له دې سره کلک تړلی یا له دې سره ه کلکه په نړاو کې تش ضرب داسې لیکو: $0! = 1$.

ګڼ یاعدد $n!$ د n مختلو شیانو دمختلفو امکاناتو د ترتیب یا نظم ګڼون یا تعداد ر ښایي

د لوی n لپاره د $n!$ اسیپتوتیکي حالت د سترلینګ Stirlingschen فرمول له لارې په ورته نږدې ډول وښوول شي:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + O(1/n)\right).$$

لیکونکي: هیولیګ،هیورنر

د بینوم ضریبونه (ځلوونې) Binomialkoeffizient

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $n,k \in \mathbb{N}_0$ لپاره د $n \geq k$ سره د بینوم ضریبونه تعریفوو:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-2)(k-1)k}.$$

د $0! = 1$ له امله په ځانګړې توګه باور لري:

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1.$$

د بینومي ضریب $\binom{n}{k}$ د n توکو سره یوې ډېرۍ د k - توکیزو برخډېریو ګڼون
یا تعداد ورکوي.

د پاسکال درېګودی(مثلث) Pascalsches Dreieck

د بینوم ضریبونه

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

د لاندې رېکورزیون Rekursion (په بېرته معلومو فرمولونو) په مرسته

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

په یوه درېګډیزې شیما یا شکل، داسې په نامه پاسکال درېګودي کې یا له لارې
وشمېرو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc}
\binom{0}{k} & & & & & & 1 & & & & & \\
\binom{1}{k} & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
\binom{2}{k} & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
\binom{3}{k} & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
\binom{4}{k} & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
 & \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \searrow \\
\binom{5}{k} & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

.

ليکونکي: هيوليګ، کنش

دا د ښوولو کتمتوالی

$$\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

د $n!$ سره وېشني او $(n-k+1)!\,k!$ سره ضربوني له لارې د

$$n+1 = k + (n+1-k)\,.$$

سره برابرارزښته دی.

ليکونکي: هيوليګ، کنش

د بينوم درسي جمله Binomischer Lehrsatz

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بینوم درسي جملې سره کېدی شي د دوه متحولو یا اووښتونو د زیاتون یا جمعې
توان وشمېرل شي.

د ټولو $n \in \mathbb{N}_0$ لپاره صدق کوي:

$$(a+b)^n =$$

$$a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

په ځانګړي توګه د $n = 2, 3$ لپاره:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

د بینوم جمله کیدی شي د پوره ایدکشن له لارې وښول شي.

د $n = 0$ او $n = 1$ لپاره کتمتوالی د

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{0-k}b^k = \binom{0}{0} a^0b^0 = 1, \quad \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k}b^k = a+b$$

له امله د په خوښه د a او b لپاره ربښتیا یا ټیک دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نیسو چې د n لپاره صدق کوي. نو دی:

$$(a+b)^{n+1}$$

$$= (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1}$$

$$=$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^k + b^{n+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^k + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k$$

د بینوم ضریبونو لپاره کتمتوالی Identitäten für Binomialkoeffizienten

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بینوم ضریبونو لپاره لاندې کتوتوالی صدق کوي:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k, \quad n \geq 1,$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}, \quad k < n,$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{i}, \quad k > 0.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

لومړي دواړه کتمتوالي ترلي د بینوم د درسي ځخه لاس ته راځي،

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

د ارزښتونو $a = b = 1$ همداسې $a = -b = 1$ سره .

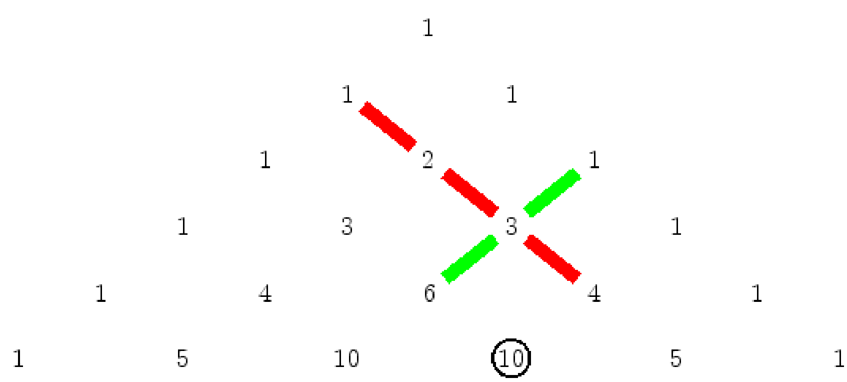
دریم کتوتوالی د ریکورزین فرمول په بیا بیا استعمال له لارې لاس ته راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \\
&= \dots \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{n-k-1}{0} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}.
\end{aligned}$$

په دې مساواتو کې د $(n-k) \leftrightarrow k$ په ځاى اينولو يا سبستيچيشن Substitution له لارې ځلورم كتمتوالى لاس ته راخي.

دا اخرني دواړه کتوتوالي کېدی شي په پاشکال درېکودي کې جمعه کوني لخ لارې انځور شي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دېريو يا سټونوکمبيناتوريک Kombinatorik von Mengen

(د کمبيناتوريک د نورې زياتې کتنې لپاره دې زما دشميرپوهنې ستر کتاب وکتل شي)

لاندې جدول د مختلفو امکاناتو ګڼون يا تعداد ورکوي، چې د يوې د n مختلفو توکو سره ډېرۍ څخه k ټوکي ټاکلی شو، د کوم سره چې بايد توپير شي، چې ايا د لړۍ پرلپسې يو رول لري (ترتيبونه) او تکرار ونه په کې اجازه لري که نه.

	sortiert منظم(د ټاکلو اړخونو له لارې) ترتيب	nicht sortiert نا منتظم
له تکرار سره	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
بې له تکرار سره	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

ليکونکي: هيوليک،کنش

لومړی : نا ترتيب يا نا منظم ټاکنه بې له تکرار څخه

که د لړۍ پرلپسې په پام کې ونيو لې، نو د لومړي ځل لپاره n امکانات شتون لري، $(n-1)$ امکانات د دويم لپاره ، تر $(n-k+1)$ امکاناتو پورې د k-م توکي لپاره، نو په ټوليزه توګه

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

امکانات شتون لري.

دا بايد د ګڼون يا تعداد $k!$ سره وه وېشل شي چې د k توکو پرموتيشن (د توکو ځای بدلون : لنډ: ځای بدلون) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم : ناتتیب شوي انتخاب د تکرار سره

یو برابرارزښته پرابلم دادی، چې $n-1$ په نځښنه شوې (نشاني شوي) د $n+k$ ټکو تر منځ ځای په ځای شي.

• | • | • | • | • | • | • | •

△ △ △ △

د $(i-1)$ -م او i -م ترمنځ ټکو تعداد چې په 1 کم شوی د i–م توکي تکرارونو سره برابر دی. د لومړي سره سم د ممکنه په نخښنه کیدونو تعداد لپاره لاس ته راځي

$$\binom{n+k-1}{n-1},$$

کوم چې په جدول کې ورکړ شوي عدد سره سر خوري.

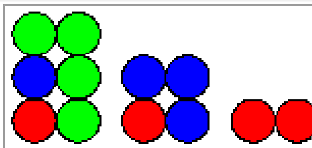
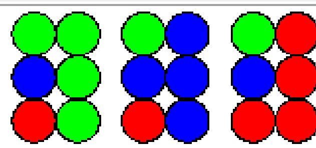
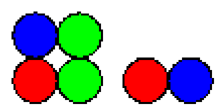
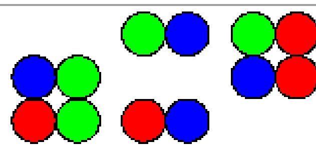
دریم : د تتیب شوي انتخاب لپاره فرمول پسې تړلی لاس ته راځي.

لیکونکي:هیولیک، کنش

په یوه مرتبان کې یو سور یو شین او یو اسماني توپونه (غونډوسکي) پراته دي. په جدول کې د دوه واره راوستنې د امکاناتو تعداد کتل کیږي ($k=2$, $n=3$) .

ناترتیب شوي یا نامنظم	ترتیب شوي	
$\binom{n+k-1}{k}$	n^k	د تکرار سره (دبیرته وراچوني سره)

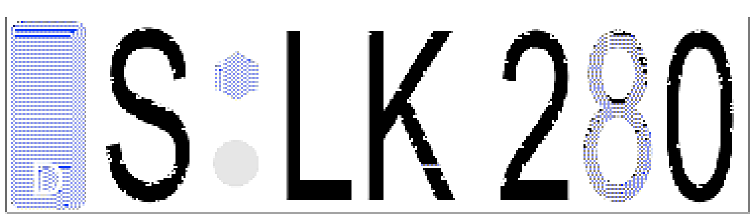
(c) ketabton.com: The Digital Library

		
$\binom{3+2-1}{2} = 6$	$3^2 = 9$	
$\binom{n}{k}$	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	بې د تکرار سره (نه دبېرته وراچوني سره)
		
$\binom{3}{2} = 3$	$3 \cdot 2 = 6$	

ليکونکي:هيوليک، کنش

د موټر نمره Autokennzeichen

د يوه الماني موټر نمره د ايالت يا ښار لپاره د ≤ 3 تورو کمبينېشن ، ≤ 2 د نورو تورو او تر يوه څلورځايز عدد څخه د بېلګي په توګه :



(c) ketabton.com: The Digital Library

له n تورو څخه 26^n کمبينېشنونه شتون لري او له دې سره

$$(26 + 26^2 + 26^3) \cdot (26 + 26^2) \cdot 9999 = 1.28 \cdot 10^{11}$$

ممکنه نمرې (که د ښار يا ايالت د ورسره ور ګډونه په پام کې ونه نيول شي

ليکونکي:هيوليګ، کنش

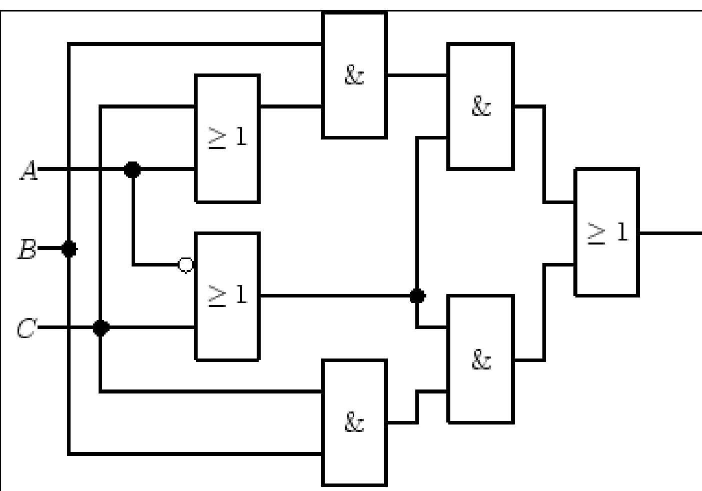
پوښتنې

- د ښه بدلون او همداسې د رښتيا جدول سره و و زاميی، چې ايا افادې يا ويېنې تل ټيک دي يعني Tautologien دي:

$$(A \vee B) \Rightarrow ((\neg A \vee B) \wedge (A \Rightarrow \neg A))$$

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$$ پای.

- اړيکې $\Diamond, \Box$ د ډېرې پوهنې څخه د منطقي عليو $\{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$ لپاره ځای په ځای شوي. په کومو حالتونو کې باور لري:

- محامخ سويچونه(شالتونګونه) ساده کړی:	

(c) ketabton.com: The Digital Library

- ډېرى $A,B \neq \emptyset$ ، يوه تابع $f : A \to B$ همداسې برخډېرى $U,V \subset A$ او $X,Y \subset B$ ورکړ شوي دي. د لاندې اړيکو رښتياوالى همداسې نارښتياوالى د يوې مناسبې برعکس بېلګې په مرسته وښايى:

الف- $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$ ب - $f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$

پ - $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$

ت - $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$

- د يوه تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ په هکله لاندې ويناوې په فورمال ليکندود افاده کړى:

الف - fپه باندې نه دى ب - f په کې نه دى

پ – f په نه دى ت – fنه په کې او نه په باندې دى

ليکونکى: کريستيا اپيينس

- د $n \in \mathbb{N}$ لپاره د پوره ايدکشن له لارې وښايى:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$ **a)** $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$ **b)**

- د $n \in \mathbb{N}$ لپاره د پوره ايدکشن له لارې وښايى:

الف : $a_n = n^3 + 5n$ په 6 وېشونى دى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ب : $b_n = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$ یو طبیعي عدد دی.

- په یوه میلمستیا کې 25 کسان سره یوځای کیږي. څومره لاسونه سره ورکول کیږي، که هر میلمه هر بل مېلمه ته لاس ورکړي. .

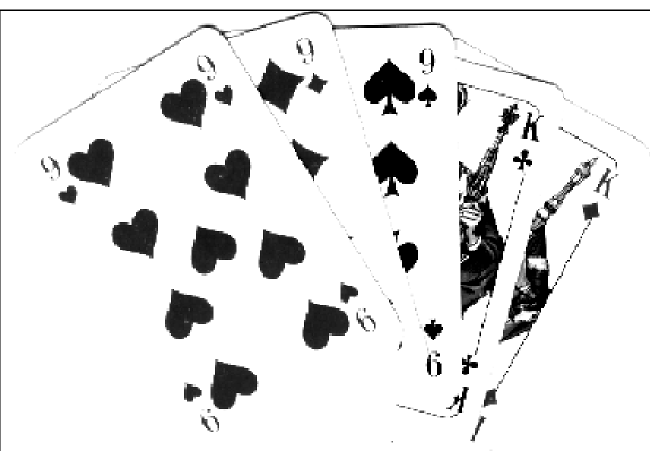
د شمیرپوهني له لومړني کورس څخه

- و ښایی:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$$ **a)**

$$\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n+k-\ell}{k} = \binom{n+k}{k+1}$$ **b)**

لاس ته راونې یې په پاسکال درېګوډي کې انځور کړی. لیکونکی: کلاوس هیولیګ

	- په یوه د کارتو لوبه کې چې له 32 کارتو جوړه ده(8 ارزښتونه 4 رنګونه) څومره امکانت شته دی، چې فول هوز Full Haus (درې برابرارزښته او دوه برابر ارزښته) کارتې لاس ته راوړل شي؟ د دې لپاره څومره امکانات شته چې دا څېره شوي کارتې د دوه کارتو بدلولو سره یو پوکر(څلور برابر ارزښتونه) لاس ته راوړای شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ازماېښت Test

لومړی پوښتنه:

د لاندې منطقي ابادې رښتیا ارزښت پیدا کړئ

$$D:\ (A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \vee A)$$

چې د ویناو A, B, C د رښتیا ارزښتونو تابع یا په واک کې وي.

هر ځل یا'w' او یا 'f' ورکړئ.

دویمه پوښتنه:

دېری $A = \{1,2,3,4,5\}$ او $B = \{4,5,6,7\}$ ورکړی.

په ګوته کړئ، چې ایا لاندې ویناوې رامنځ ته کیږي که نه(J د هو لپاره او N د نه لپاره)

دریمه پوښتنه:

د دوه هره یوه د درې توکیزه دېریو A او B ترمنځ څومره اړیکې شتون لري؟

له ې څخه څومره بلواک یا تابع دي او څومره بلواک یې په باندې(سورجکتیو) دي؟

څلورمه پوښتنه:

و څېړئ چې ایا لاندې توابع یا بلواک $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ په باندې، په کې او په دي:

$$\mathbf{a)}\quad f(x) = x\sin x \qquad \mathbf{b)}\quad f(x) = \exp\left(-x^3+1\right)$$

$$\mathbf{c)}\quad f(x) = x\ln\frac{1}{|x|+1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځمه پوښتنه:

ځومره پنځه ځایزه ګنونه یا عددونه شتون لري د لاندې سره

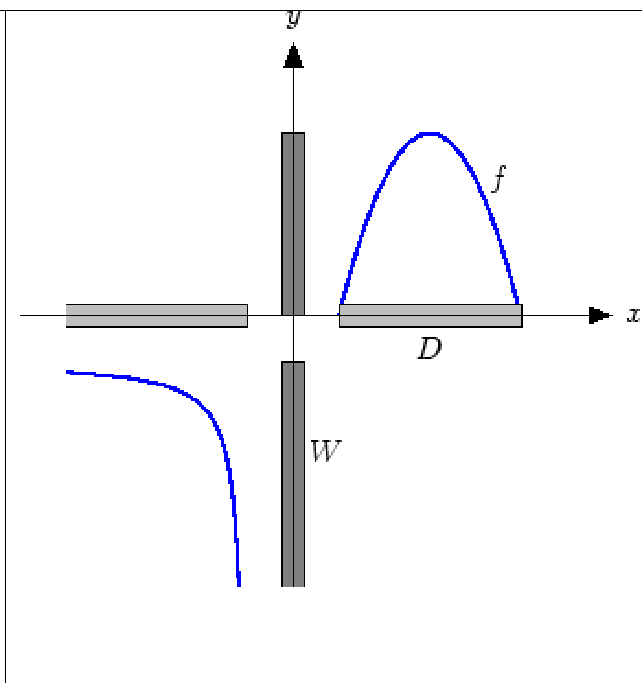
الف: پنځه مختلف عددونه

ب) تیک دوه جوړه عددونه

شپږمه پوښتنه:

څومره امکلنات شتون لري، چې ناه کسان په درېیز ګروپ ووېشو؟

تابع   یا فنکشن یا بلواک Funktion

یو فنکشن $f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ هر د تعریفورشو $D \subseteq \mathbb{R}$ هر توکی x په یوه د ارزښت ورشو $W \subseteq \mathbb{R}$ په یوه توکي $f(x)$ باندې تنظیموي.. د فنکشن یا بلوتک f ګراف له تکو (x,y) جوړ دی د $y = f(x)$ سره.	

لکه د تابع څخه چې لیدل کیږي، د تعیف ورشو (روڼ شین) او د ارزښت ورشو(تیاره خړ) د x – محو ر همداسي د y -محور پرېوستونونه Projektionen دي.

د دې لپاره چې د تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعریف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، باید په ساده تابع رامنځ ته شوي بنديزونه په پام کې ونيسو. د لوګاريتم ارګومنت باید مثبت(زياتيز) وي:

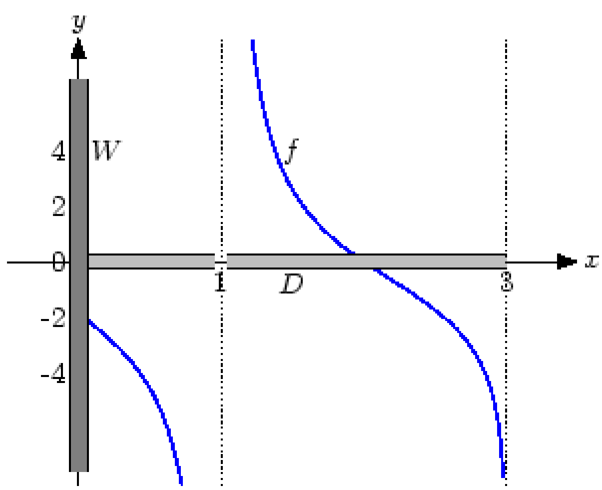
يعني $3-x>0$ او $x \geq 0.$

په هر حالت مخرـ(ماتلاندې) بای صفر نه شي، دا په دې معنا چې $x \neq 1$.

په ټوليزه توګه لاس ته راځي:

$$\mathrm{D} = [0,3)\setminus\{1\} = [0,1) \cup (1,3).$$

د f ارزښت د رسم سره روښانه یا واضح کيږي.



دا چې f د $x \in (1,3)$ لپاره د $-\infty$ او $+\infty$ ترمنځ ټول ارزښتونه نيسي یا اخلي، نو باور لري. $W = \mathbb{R}$

ليکونکي:هيوليک،هيورنر،کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې جدول د څو بنسټيزو بلواک یا توابعو د تعریف - او ارزښت ورشو بنايي:

$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\ln x$	$(0,\infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{x\ :\ x=(2k+1)\pi/2,\ k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$	$[0,\infty)$

ليکونکي:هيوليک،هيورنر،کنش

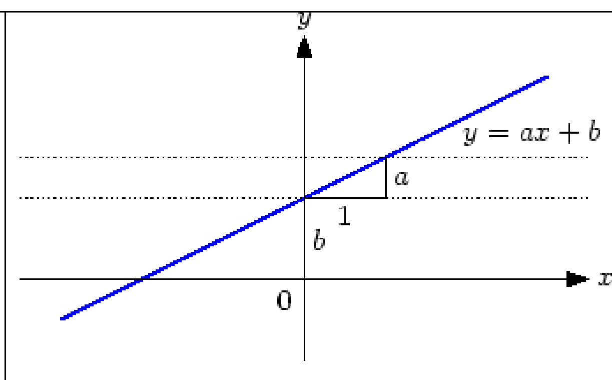
کرښيز فنکشنونه   Lineare Funktion

د يوه کرښيز فنکشن

$$f(x) = ax + b$$

ګراف يوه کرښه ده د a جګېدني

سره او د y -محورغوځي b سره.



الترناتيو يا بديلي انځورونې يې تکي-جګيدنې-بڼه

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

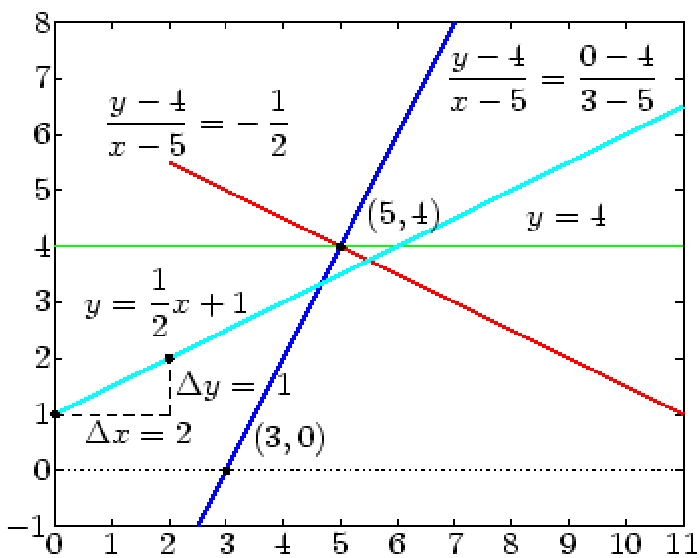
او د دوه ـټکو-بڼه

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},$$

دي ، د کوم سره چې (x_0, y_0) او (x_1, y_1) په کرښه ټکي دي.

ليکونکي:هيوليک،هيورنر

تابع د کرښيزو فنکشنونو مختلفو انځورونو بڼې ښايي يا په نخښه کوي.



مربعيز فنکشنونه Quadratische Funktion

د يوه مربعيز تابع ګراف

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

يو د

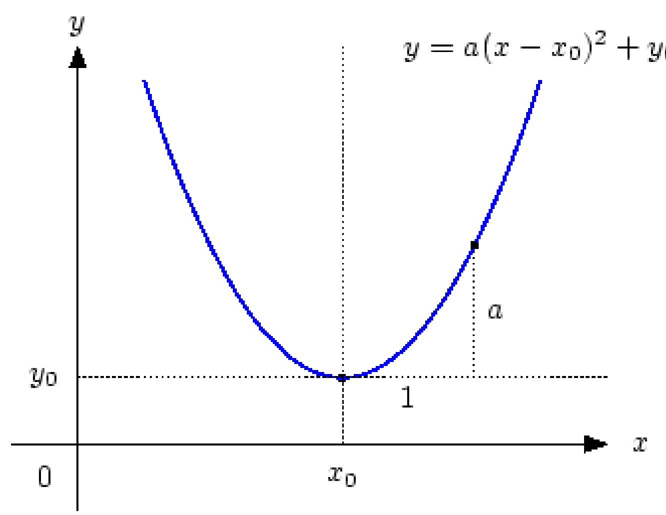
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د بنې پارابول دی د ککرې

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right).$$

سره.



مایل ګوزار یا – غورځونه Schräger Wurf

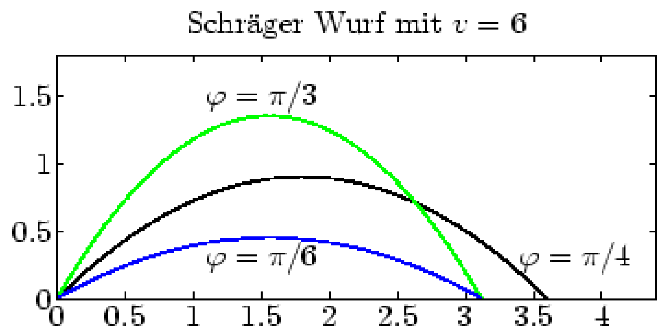
که یو تن د کونج φ لاندې د یوې چټکتیا v سره وغورځول شي، نو د الوتنې لار یې یو پارابول

$$y = x \tan\varphi - \frac{g}{2v^2 \cos^2\varphi} x^2$$

ښایي ، چېرته چې g د ځمکې بیړه(تعجیل) ده.

مایله ګوزارونه یا –غورځونه د v=6 سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مساوات د برابردوليز خوزښت ځخه لاس ته راځي د پيل چټکتيا v سره په x - او y -کمپوننتونو يا برخو او د همدې وخت د ازادې غورځوني بيړه ييز خوزښت سره.:

$$x(t) = vt\cos\varphi \quad\Rightarrow\quad t = \frac{x}{v\cos\varphi}$$

$$y(t) = vt\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow\ y(x) = \frac{vx\sin\varphi}{v\cos\varphi} - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\varphi} = x\left(\tan\varphi - \frac{gx}{2v^2\cos^2\varphi}\right).$$

د غورځوني واټن دی:

$$x = \frac{2v^2\cos^2\varphi}{g}\tan\varphi = \frac{v^2}{g}\sin(2\varphi)\,.$$

دا د $\varphi = \pi/4 \,\widehat{=}\, 45^\circ$ لپاره ماکسيمال کيږي.

ليکونکي: هيورنر،هيوليک،کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

پولینوم Polynom

یو د n-م دجي پولینوم p په لاندې بنه لیکل کیږي:

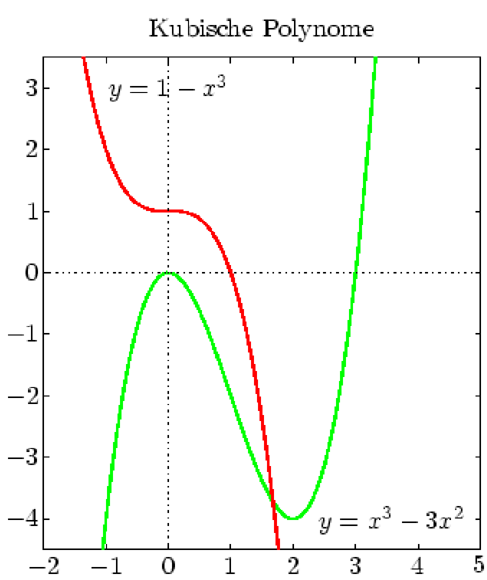
$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

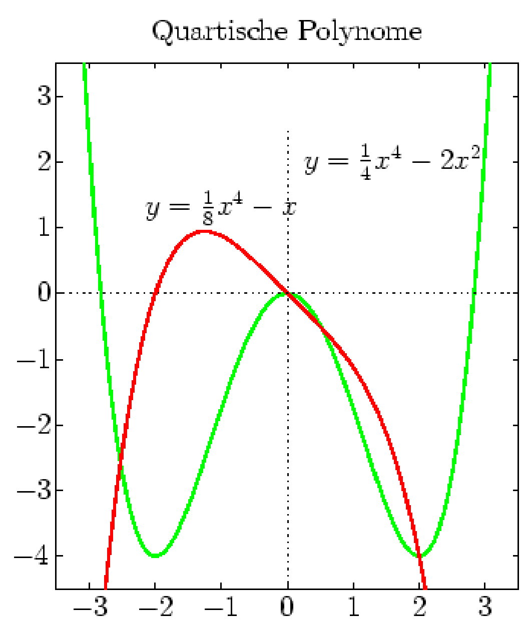
د $a_n \neq 0$ سره .

اووښتوني یا متحوله x او ضریبونه a_k کېدی شي رینتونی (حقیقی) یا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توګه له دې امله له حقیقی همداسې کمپلکس پولینومونو غږیږو.

لیکونکي:هیولیک،هیرنر

لاندې توابع مکعبي $n = 3$ او مربعیز $n = 4$ پولینومونه په ګوته کوي، د خرنګوالي (کوالیټي) مختلف تابع ګراف سره





لیکونکي: هیورنر،هیولیک،کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

راشنل فنکشن یا بلواک(تابع) Rationale Funktion

یو نسبتي تابع د صورت(ماتباندې) درجې m او مخرج(ماتلاندې) درجې n سره یو د دوه پولینومونو وېش دی.

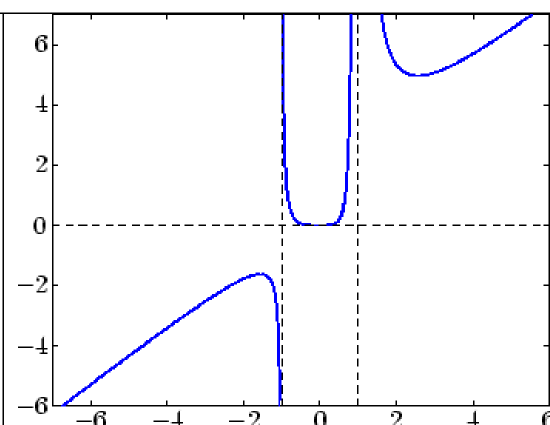
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}\,.$$

دا انځورونه ناوېشوړ irreduzibel بلل کيږي، که p او q کوم ګډ کربنيز ضريب ونه لري.

د مخرج صفرځايونه راشنل تابع r د تعریف تشیاوې دي او د پول ځایونو په نامه يادیږي. د دوی نظم د صفرځايونو ډېرځلوالی دی.

د   اووښتوني یا متحولي x او ضريبونه a_k, b_k کېدی شي حقيقي يا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توګه د حقيقي يا کمپلکس رېښتوني فنکشن څخه غږيږو.

ليکونکي:هيوليک، اپپ



فنکشن

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$$

په $x=-1$ کي يو ساده قطب لري او

په $x=1$ کي دبل قطب لري

د تابع څخه پژندل کيږي، چې f په يوه ساده قطب کې مخنخښه بدلوي او په دبل قطب کي مخنخښه نه تغيروي.   ليکونکي:هيوليک، اپپ

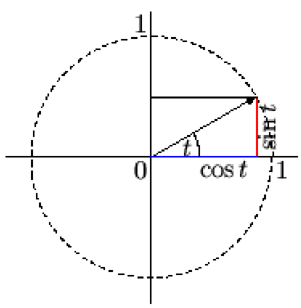
(c) ketabton.com: The Digital Library

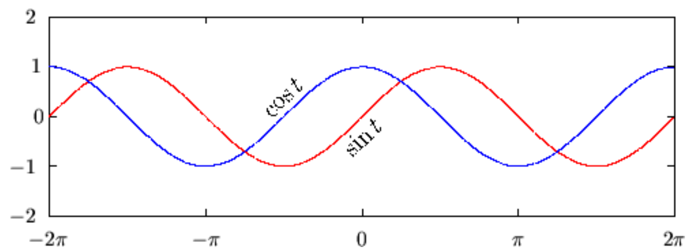
Sinus und Kosinus ساين او كوساين

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

سره كواودينات چې په سرچينه کې په كونچ t ځرخول شوی ټکی $(1,0)$ په نخښه كيږي.





دواړه د ګردی يا دايري توابع كوسان او ساين 2π - پريوديكي (تل بيرته راګرځېدوني) دي او باور لري

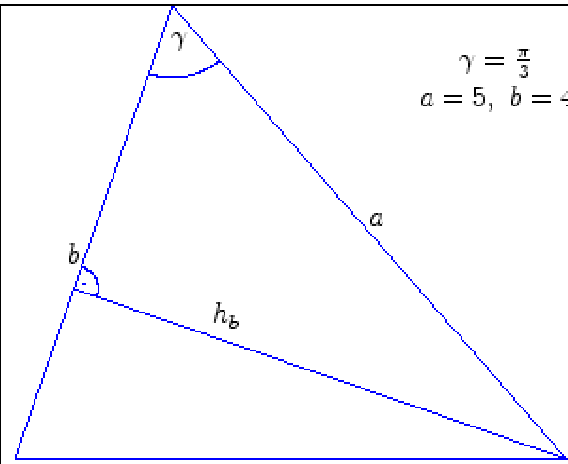
- $$\cos t = \sin(t + \pi/2)$$,
- $$\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$$,

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

د تر مخنخښي پورې د دايرې تابع د ولاړكوډيز درېګوډي(قايمالزايه مثلث) د قطر (نيمي) سره چې ا وړدوالی يې 1 دی دو لاړو (عودو) ضلعو اوږدوالی ښايي. يو ځو ځانګړي ارزښتونه يې دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دې لپاره چې د څېره شوي درېګودي د سطحه وتاکلی شو، لومړی جګوالی h_b شمېرو:

$$\sin\gamma = \frac{h_b}{a} \Rightarrow h_b = a\sin\gamma\,.$$

له دې سره لاس ته راځي:

$$F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma\,.$$

د ورکړ شوو ارزښتونو لپاره لاس تخ راځي:

$$F = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\,.$$

د ساین او کوساین لپاره د جمعي جمله(قضیه)

د داېرې توابعو $\sin t$ او $\cos t$ لپاره لاندې اړیکې صدق کوي:

- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta$

په ځانګې توګه

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

لیکونکی.ژ.هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع

$$u(t) = \cos(w_1 t) + \cos(w_2 t)$$

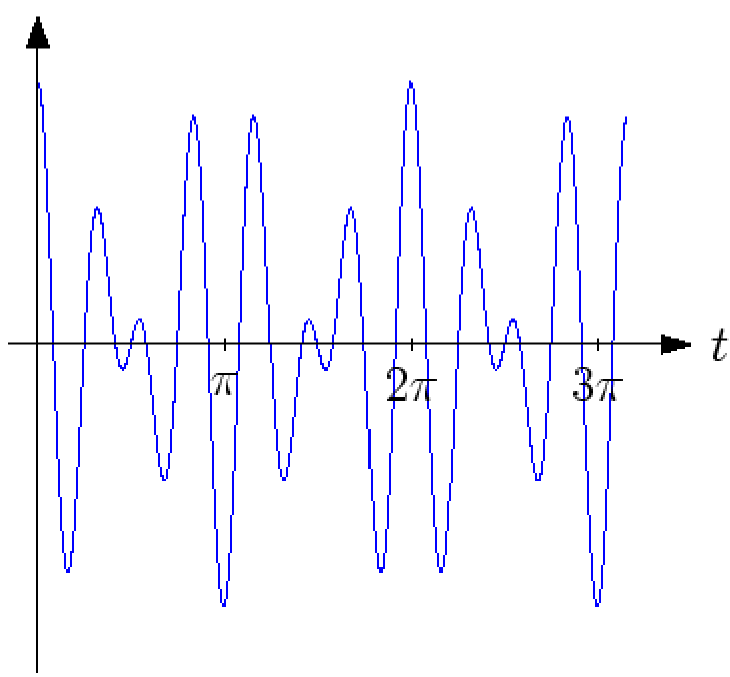
اړيکي د دوه لړزېدنو يو ځاى رامنځ ته کېدنه روښانه کوي. د جمعي قضيې په مرسته کېدى شي انځورونه ساده شي. د $\overline{w} = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ او $\Delta w = |w_1 - \overline{w}|$ سره له

$$\cos(\overline{w} - \Delta w t) = \cos(\overline{w} t)\cos(\Delta w t) + \sin(\overline{w} t)\sin(\Delta w t)$$

$$\cos(\overline{w} + \Delta w t) = \cos(\overline{w} t)\cos(\Delta w t) - \sin(\overline{w} t)\sin(\Delta w t)$$

ځخه لاس ته راځي، چې

$$u(t) = 2\cos(\overline{w} t)\cos(\Delta w t)\,.$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

بلواک د $w_1 = 7$, $w_2 = 5$ لپاره لړثېدنه ښايي، دا په دې معنا چې $\overline{w} = 6$. , $\Delta w = 1$ او

$$u(t) = 2\cos(6t)\cos t\,.$$

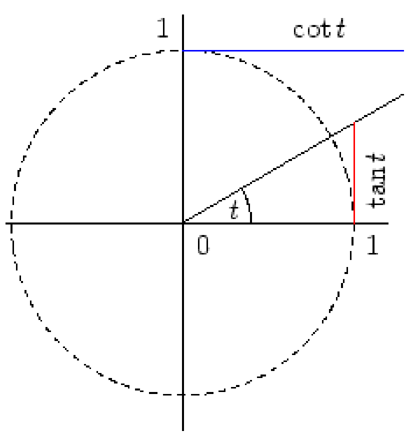
ليکونکي:هيوليک،کرايخ

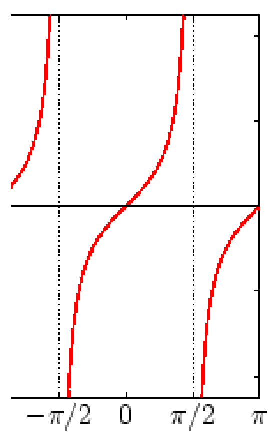
تانجنت او کوتانجنت

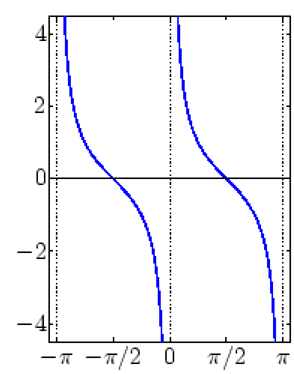
توابع تانجنت او کوتانجنت د

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

سره تعريف شوي. دا په ولاړکوديز درېګوډي (قايوم الزاويه مثلث) کې د تر مخنخښې پورې د ولاړو اړخونو تناسب ورکوي







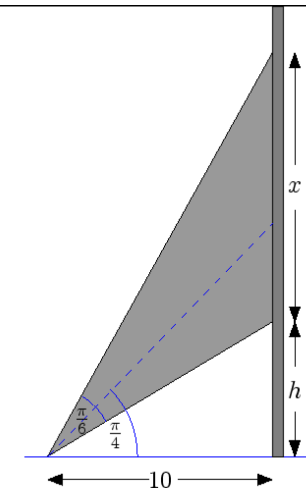
Tangens Kotangens

يو څو ځانګړي ارزښتوني دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

تابع د شکل له مخې يو د برېښنا مخروط ،
چې په يوه ولاړ دېوال پرېوځي ښايي



د دې لپاره چې خورا لوي يا ماکسيمال پوښېده د ټاکلی شو، جوړوو

$$\frac{h}{10} = \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{x+h}{10} = \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

که $h = \frac{10}{3}\sqrt{3}$ په دويم مساوات کې ځايه ځای کړوو نو لاس ته راځي

$$\frac{x}{10} = \sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3},$$

يعني $x = \frac{20}{3}\sqrt{3}$

ليکونکي:هيوليک،کرايخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسپوننشل توابع(بلواک)

توان تابع

$$y = e^x = \exp(x)$$

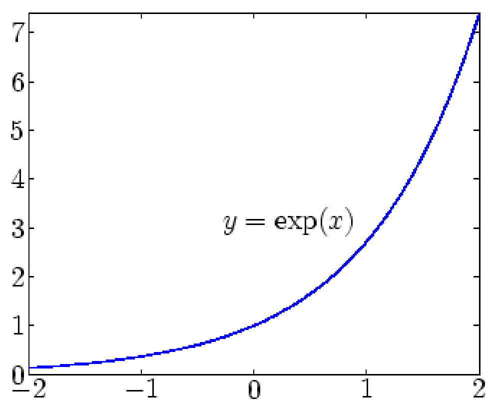
د اویلرEulerschen عدد $e = 2.71828...$ سره اکسپوننشل تابع بلل کيږي. دا د

تولو $x \in \mathbb{R}$ لپاره مثبت(زاتيز) ده او فنکشنل مساوات

$$e^{x+y} = e^x e^y .$$

پوره کوي.

په ځانګړې توګه دی $e^{-x} = 1/e^x$.



ليکونکي:هيوليک،هيورنر

اکسپوننشل تابع د ډېرو بيولوژيکي پروسو زياتوالی روښانه يا تشريح کوي.

د بيلګې په توګه د يوه ساده نفوس مودل متناسب دی د اوسنيو نفوس تعداد $p(t)$ سره د t په وخت کې، دا په دې معنا چې

$$p(t + \Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t)) .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $0 \leftarrow \Delta t$ لپاره دا د ډېروالي قانو د $p(t)$ مودلی کيږي.

لاندې جدول د نړۍ نفوس ښايي د کلني ډېرېدني سره.(اټکل ارزښت)

Jahr کال	Bevölkerungszahl د نفوسو تعداد	اټکل ارزښت Rate
1950	2555078074	1.76 %
1955	2779669781	1.87 %
1960	3039332401	2.02 %
1965	3345837853	2.16 %
1970	3707610112	2.05 %
1975	4088224047	1.80 %
1980	4456705217	1.79 %
1985	4854602890	1.77 %
1990	5283755345	1.54 %
1995	5690865776	1.37 %
2000	6080141683	1.25 %
2005	6460553564	1.12 %
2010	6823634553	1.03 %

(c) ketabton.com: The Digital Library

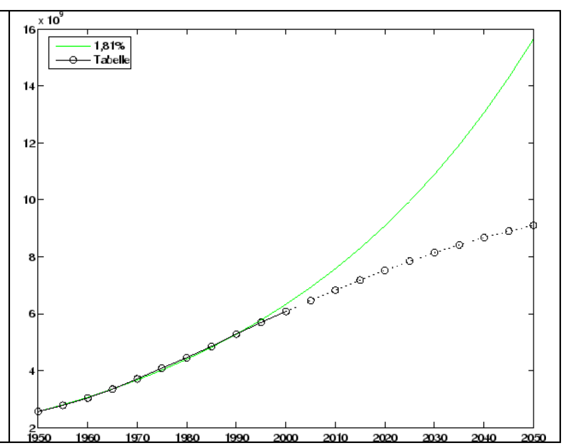
2015	7175675066	0.95 %
2020	7518010600	0.86 %
2025	7840660355	0.76 %
2030	8140344240	0.68 %
2035	8416742278	0.60 %
2040	8668391454	0.53 %
2045	8897073495	0.47 %
2050	9104205830	

کلنی د نفوسو منځنی ډېروالی په کلونو 1950-2000 کې % 1.81 وو. د 1950 کال وروسته د منځني ثابت ډېروالي سره.

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

د نړۍ نفوس به په 2050کال کې 16 میلیارده ته جګ شي(ټکي ټکي شوې کرښه (منحني)). په جدول کې اټکل د نفوسو د کمېدو څخه مخ ته ځي

لیکونکي : هیولیګ، هیورنر



د ګټې ګټه Zinseszins

(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه پیلبډایي x د n -واره وکونو همداسي اخستنو د یوې Rate r($r < 0$ bzwهړداسي . $r > 0$) د یوې ګنې ضریب $(1+p)$ له کبله لاندې پیل پای بدآیي ورکوي :

$$y = (1+p)^n x + \frac{(1+p)^n - 1}{p} r\,.$$

له دې سره $p = 1$ یوه 100% د ګټې د یوې ربحې د کلنۍ اېښوونه په ګوته کوي

موثره کلنۍ ربحه p_j د میاشتنۍ ګټوني څخه شمېرې کیږي د یوې p_m ربحې (ګټې سره)

$$p_j = (1+p_m)^{12} - 1 \geq 12 p_m\,.$$

لیکونکي : هیولیک، هیورنر

بنستیز ه سرمایه په لومړني ربحېریود کې په پام کې نیول کیږي، اینسوونه او همداسي اخستنه یا راوستنه په لومړي څل د هر ورپسي کال. دا د ا لاندې راکوي:

$$\begin{aligned} n = 1: &\quad y = x(1+p) + r, \\ n = 2: &\quad y = \big(x(1+p) + r\big)(1+p) + r. \end{aligned}$$

په ټولیزه توګه صدق کوي:

$$y = \Big(\cdots\big(x(1+p)+r\big)(1+p)+r\Big)\cdots\Big)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= x(1+p)^n + \left(1 + (1+p) + (1+p)^2 + \cdots + (1+p)^{n-1}\right)r$$

دا په نوکانو کې د r افاده کیدی شي د هندسي جمعې فرمول سره واړول شي او سرې دا ورکړل شوی فرمول لاس ته راوړي.

لیکونکي : هیولیک، هیورنر

یو د 100000 یورو پور(قرضه) په کلني ګټونه او یوې ګټونې یا ربحې % 5 سره د 10 کاله وروسته بېرته ورکړ شي. سړی د

$$y = 0\,,\ n = 10\,,\ p = 0.05\,,\ x = 100000$$

سره ګټه لاس ته راوړي:

$$r = 1.05^{10} \cdot 100000 \frac{0.05}{1.05^{10} - 1}$$

$$= 12950.46$$

د میاشتنی د $\frac{5}{12}\%$ په ګټوني یا په ګټه اېښووني سره دا راکوي

$$n = 120\,,\ p = \frac{1}{240}$$

په ورته توګه

$$r = \left(\frac{241}{240}\right)^{120} \cdot 100000 \frac{\frac{1}{240}}{(\frac{241}{240})^{120} - 1}$$

$$= 1060.66$$

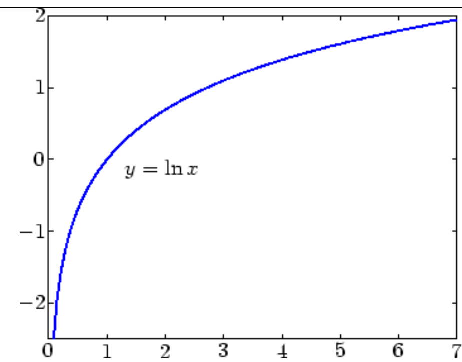
(c) ketabton.com: The Digital Library

د میاشتنی ګټې تادیه کونې ده، کلنی 12727.86 ده. دلته د مخه د ګټې تادیه کونه یو زیان منځ ته راولي. د $\frac{4}{12}$ % سره به دا د لاندې سره برابر وای:

$$\left(\frac{(1+\frac{1}{300})^{12}-1}{\frac{1}{300}}-12\right)\cdot 1060.66 = 235.96\,.$$

لیکونکي : هیولیک، کرایخ

لوګاریتم Logarithmus

	د لوګاریتم تابع د اکسپوننشل تابع برعکس (په ځت) تابع ده: $y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y.$

دا $(0,\infty)$ په $\mathbb{R}$ کره مونوتون(یوغږیز) کره جګېدونکی تنظیموي او لاندې د تابع مساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

په ځانګړې توګه لرو: $\ln(1/x) = -\ln x$

لیکونکی: هیولیک،کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

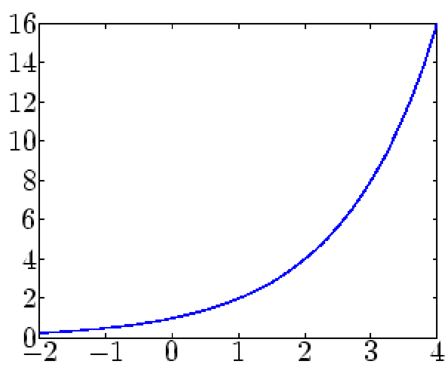
تولیز په توان تابع او لوګاریتم

د $a > 0$ لپاره تعریفوو :

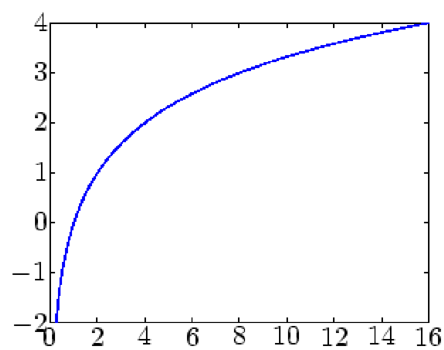
$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

د برعکس تابع(بلواک) $x = \log_a y, \quad y > 0.$ سره

په ځانګي توګه د 10 په بنسټ لوګاریتم لپاره لیکو $\log = \log_{10}$ او $\mathrm{ld} = \log_2$ د دوه ګوني یا دوال لوګاریتم لپاره.



$f(x) = 2^x$



$f(x) = \mathrm{ld}(x)$

لیکونکی: هیولیګ،کوپف

د توان او لوګاریتم لپاره شمېرقوانین

له تعریفونو او تابعمساواتو څخه د اکسپوننشل - او لوګاریتمي توابعو لپاره لاس ته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{aligned}
a^{s+t} &= a^s\, a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy),\\
a^{s-t} &= a^s / a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y),\\
(a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t \log_a x\,.
\end{aligned}
$$

برسیره (سربېره) پر دې د مختلفو بنسټونو ترمنځ شمېربدلون لپاره اړیکې باور لري:

$$\log_b x = \log_b a\, \log_a x\,.$$

په ځانګړې توګه

$$\log x = (\log e) \ln x\,.$$

لیکونکی: هیولیک،کوپف

لاندې بېلګې د شمېرقاعدو استعمال روښانه کوي .

(i)

$$\ln(4x^2) - 2\ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 =$$

$$= 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 = 2\ln x$$

(ii)

$$\log_4(x^2) +$$

$$(2x) = 2\frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2\frac{\ln x}{\ln 2}$$ ld

لیکونکی: هیولیک،کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوګاریتم شمېرونی

په لوګاریتم کې لاندې قانون باوري دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

له دې کبلخ کېدی شي دوه سکالا یا کچېرېنې يو په بل کېږدو او د نتسجې په توګه نه د دې عددونو جمعه بلکه ضرب لاس ته راځي.

د پورته څېرې څخه د بېلګې په توګه لاس ته راځو، چې $3.5 \cdot 2 = 7$. دلته لومړی 1 د پورته سکالا په 3.5 (لومړی ضریب) د په لاندې سکالا شمېرل کيږي. بالاخره 2 د پورته سکالا (دویم ضریب) د ضرب نتیجه په لاندې سکالا لوستل کيږي.

لیکونکي،هیولیک.کوپف، ویپر

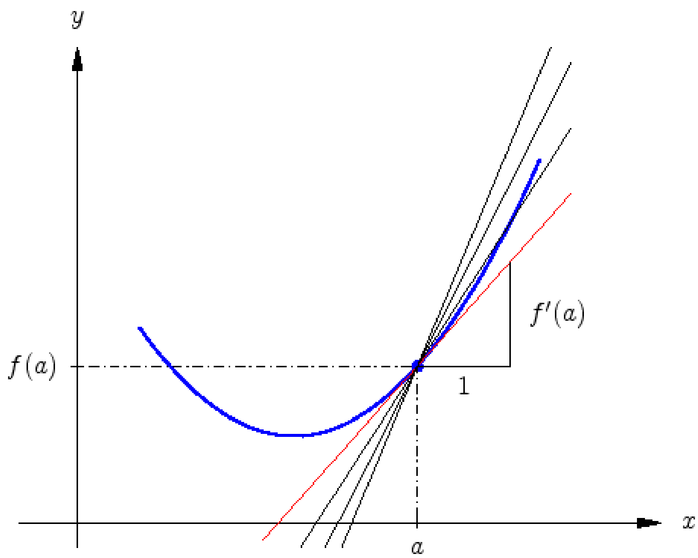
مشتق یا رابېلېدنه Ableitung

یو تابع f په یوه ټکي a کې مشتقوړ دی، که دا د رابېلېدنې یا مشتق په څېر نیوله شوې پوله(لیمیټ)

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري

(c) ketabton.com: The Digital Library



هندسي مشتقوړوالی په دې معنا دی، چې د غ،څوون(قطاعو) جګېدنه چې د

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

سره ورکړل شوي د تانجنت جګوالي په لور وهڅېږي یا کورګنت شي.

د دې لپاره $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$ هم لیکو او جګ مشتقونه د $f'', f''', \ldots$ او همداسي د $f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots$ سره ښایو. یو فنکشن f په یوه ډېرى D مشتقوړ بلل کیږي، که $f'(x)$ د ټولو $x \in D$ لپاره شتون ولري.

لیکونکی:هیولیک،کویف

د تابع $f(x) = x^2$ مشتق

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مشتق $f''(x) = 2$ يو ثابت دی.

د يوه په خوبنه مونوم $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ لپاره ، بينوم د فرمول په مرسته لاس ته راځي

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1}h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1},$$

د کوم سره چې $O(h^2)$ د نظم ترم h^2 په ګوته کوي.

ليکونکی:هيوليګ،کوپف

د $f(x) = \sin x$ مشتق کېدی شي د جمعي قضيې په مرسته وشمېرل شي.

له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

د $t = x + h/2$ سره کمښتربېش لاس ته راکوي:

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin\big((x+h/2)+h/2\big) - \sin\big((x+h/2)-h/2\big)}{h} =$$

$$= \frac{2\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h}.$$

له

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\sin(h/2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

امله بنی اړخ د $h \to 0$ لپاره د $\cos x$ په لور هڅيږي.

غوره (مهم) مشتقونه

لاندې جدول د غوره توابعو مشتقونه راکوي: :

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		$r \neq 0$, x^r	$r\,x^{r-1}$
e^x	e^x		$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق کرښیزوالی Linearität der Ableitung

مشتق کرښیز دی دا په دې معنا چې د مشتقوړ توابعو f او g لپاره صدق کوي

$$(r f)' = r f', \quad r \in \mathbb{R},$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ضرب یا ځل قانون

د دوه مشتقوړ توابعو f او g مشتق دی

$$(f g)' = f' g + f g'.$$

تولیز د ضرب $f = f_1 \cdots f_n$ لپاره صدق کوي:

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \frac{f}{f_i}.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ضرب د قانو سره لاس ته رځي

$$\frac{d}{dx}(x^2 \ln x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1).$$

که $\sin x$ د ضریب په حېیث ورزیات کړي، نو بیا د ضرب قانو ن استعمال لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x(x^2 \ln x)\right] = \cos x(x^2 \ln x) + \sin x(x(2 \ln x + 1)) .$$

په بدیل ډول کېدی شي دا فرمول په ډېرواره ضرب وکارول شي او لاس ته ارې راوړي

$$\frac{d}{dx}\left[\sin x(x^2 \ln x)\right] = \cos x(x^2 \ln x) + 2x(\sin x \ln x) + \frac{1}{x}(\sin x\, x^2) .$$

لیکونکي: هیولیګ، کرایخ

د وېش قانون Quotientenregel

د دوه مشتقوړ توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو x کې د $g(x) \neq 0$ سره. په ځانګړې توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} .$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د راشنل تابع

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2x}{4+3x^2}$$

مشتق دی:

$$\frac{(1-2x)'(4+3x^2)-(1-2x)(4+3x^2)'}{(4+3x^2)^2} = \frac{-2(4+3x^2)-(1-2x)(6x)}{(4+3x^2)^2} =$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4+3x^2)^2}$$

د ضرب قانون سره يې بديل لاس تهراخي

$$\left((1-2x)\frac{1}{4+3x^2}\right)' = (-2)\frac{1}{4+3x^2} + (1-2x)\frac{-6x}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(4+3x^2)^2}\,.$$

ليکونکي:هيوليک،کرايخ

زنځيري قانون

د توابعو دزنځيروني

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

لپاره مشتق دى:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

د $f(y) = z,\ \ g(x) = y,\ \ h(x) = z$ سره دا هم ليکل کيږي

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}$$

.

)ليکونکي:هيوليک، کوپف

د زنځير قانون

$$h(x) = \sin\big(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)}\big)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د روښانه ونې لپاره تعریفیږي:

$$h'(x) = \frac{d}{dy}\sin(y)g'(x) = \cos\big(\ln(1+x^2)\big)g'(x)\,.$$

د دننني مشتق شمېرنه $g'(x)$ سر له نوې د زنځیري قانو له مخې صورت نیسي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

بدیلي کېدی شي مشتقیزه لیکندود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = \cos(y)\frac{1}{w}2x = \cos\big(\ln(1+x^2)\big)\frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

لیکونکي:هیولیک، کوپف

ایمپلیځیت مشتقوړ توابع

د بیلګې په توګه د

$$E:\;\; x^2 + 3y^2 = 7$$

له لارې ورکړ شوې ایلیپسې (هګۍ یا بیضوي) له لارې لرو:

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

همداسې

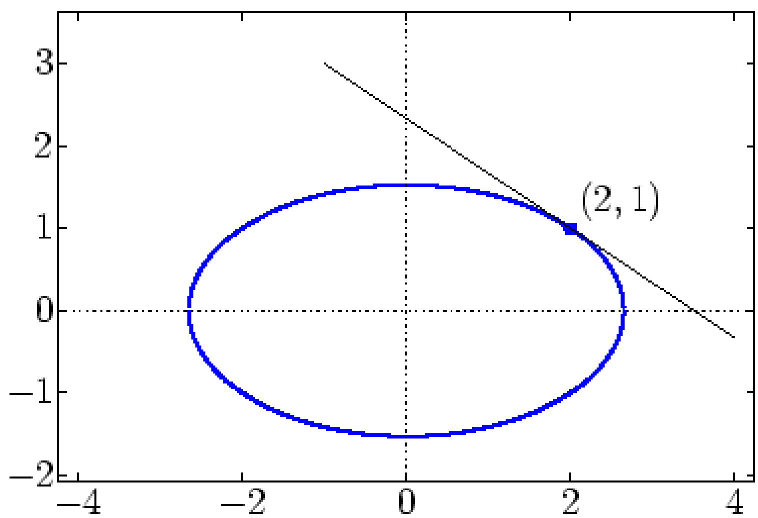
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$$
.

سره د تانجنت جګوالی $y \neq 0$ باندې په یوه ټکي د E له دې سره کیدی شي په

لپاره لاس ته راځي $(2,1)$ وټاکل شي. د بیلګې په توګه د

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$
.



په ورته توګه کیدی شي لوړ یا جګ مشتقونه هم وشمیرل شي. د yy' لپاره د ضرب قانون کارول یا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx}\,(2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y'' = -\frac{1+3(y')^2}{3y}$$
.

ټاکلي $y'(x)$ د يوه ټکي د کواوردينات اينوولو او همدا اوس د E بيرته په ارزښت له لارې څرگند ارزښتونه وټاکل شي.

ليمرنکي:هيوليګ،کنپف

لوګاريتمي مشتق

فرمول

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|$$

کېدی شي د بڼې $y = g(x)^{h(x)}$ مشتق نيوني ته د $g(x) > 0$ سره وکارول شي. لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)}\frac{d}{dx}\left(h(x)\ln g(x)\right).$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

تابع

$$f(x) = x^x$$

د $x > 0$ سره مشتق دی.

$$f'(x) = x^x\frac{d}{dx}\ln(x^x) = x^x\frac{d}{dx}(x\ln x) = x^x(\ln x + 1).$$

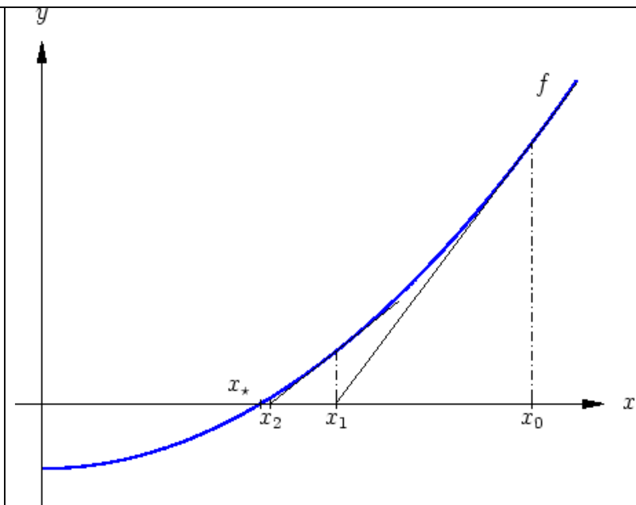
(c) ketabton.com: The Digital Library

د $g(x) = x^{\ln x}$ لپاره لاس ته راخي

$$g'(x) = x^{\ln x}\frac{d}{dx}(\ln x)^2 = 2x^{\ln x}\frac{\ln x}{x}\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

نیوټن تلنلار یا قانون Newton-Verfahren



د نيوټن قانون سره د يوه تابع f صفرځاى کېدى شي و تاکل شي. د $x_0, x_1 \ldots$ پرلپسي يا ترادف نږدې ارزښتشمېرنې يا Approximation د کرښيزوالى له لارې وګټل شي. نږدېونه x_{l+1} د تانجنتِ غوڅتکی دى په $(x_l, f(x_l))$ ټکي کې د x - محور سره.

$$x_{l+1} = x_l - f(x_l)/f'(x_l)$$

د يوه ساده صفرځاى $x_\star$ ($f'(x_\star) \neq 0$) لپاره د نيوټن –ايتراشن Newton-Iteration ځاى - لوکالي مربعيز پولې ته هځيږي (کونورګنت) ، دا په دې معنا چې

$$|x_{l+1} - x_\star| \leq c\ |x_l - x_\star|^2$$

د پيلټکي x_0 لباره د $x_\star$ په يوه پوره کوچني چاپيريال کې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بابلیانو ریښه (جذر)نیونه

داد بابلیانو څخه کارول شوی ایتراشن(لاتین : تکرار Iteration)

$$x \longleftarrow (x + a/x)/2$$

د یوه مثبت عدد a دریښي شمېرلو لپاره د ټیکي کتني څخه د نیوټن -تګلار په څېر د $f(x) = x^2 - a$ لپاره ځان راباسي

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

د $a = 2, x_0 = 1$ لپاره نږدې شمېرنې (Approximationen) لاس ته راځي.

1

1.5

1.41666666666666666666666666666666667

1.414215686274509803921568627450980392157

1.414213562374689910626295578890134910117

1.414213562373095048801689623502530243615

1.414213562373095048801688724209698078570

پولې ته تلنه خورا ګړندۍ ده. د هر پل سره د ټیک شوو ځایونوتعداد په نږدې توګه (د کرښې سره په نخښنه شوی) دوه واره کیږي. مربعیز پولې ته تلنه کېدی شي په دې بېلګه کې د ساده بڼه بدلون سره وښوول شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_{l+1}-\sqrt{a}=(x_l+a/x_l)/2-\sqrt{a}=\frac{1}{2x_l}(x_l-\sqrt{a})^2.$$

$x_0 \neq 0$

د نیوټون تلنلار هندسي روښانه وني ښخه لاس ته راځي، چي د ټولو لپاره تکرار پولې ته ځي.

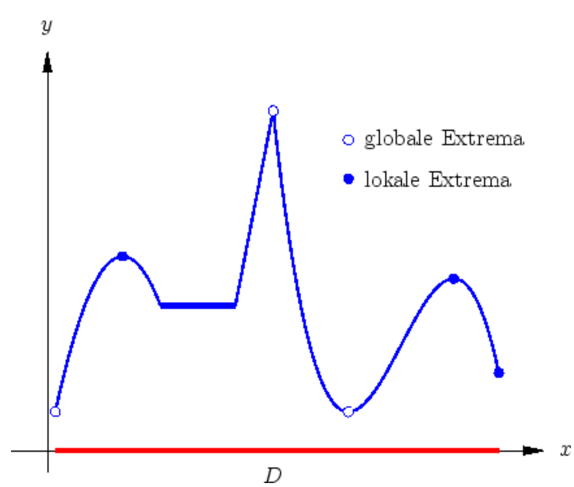
افراطیت Extrema

یو تابع f په a کې په ډېرى D یو ځاى اړوند مینیموم لري، که وي:

$$f(a)\leq f(x)\quad \forall x\in D.$$

د ځاى اړونده مینیموم سره د تابع ارزښت $f(a)$ په یوه خورا کوچني چاپېريال $(a-\delta,a+\delta)\cap D$ کې مینیموم دی.

ګلوبال او لوکال (مطلق او ځاى اړونده) خورا جګ ارزښتونه (ماکسیموم) په ورته توګه تعریف دي.

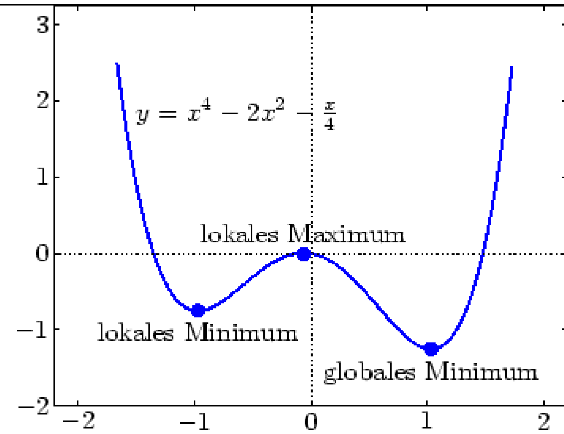


په یوه بند انټروال په ټوټه ډول نابرېکېدونی او مشتقوړ تابع کېدی شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتق په په صفرځایونو، پربېکېدځایونو یا ژی ټکو کې رامنځ ته شي. دا ډول تیوپ کېدی شي د ځګو مشتقونو په مرسته او دتابع ارزښتونو د پرتله کوني له لارې پیدا کړاى شي. لیکونکي:هیورنر،هیولیګ

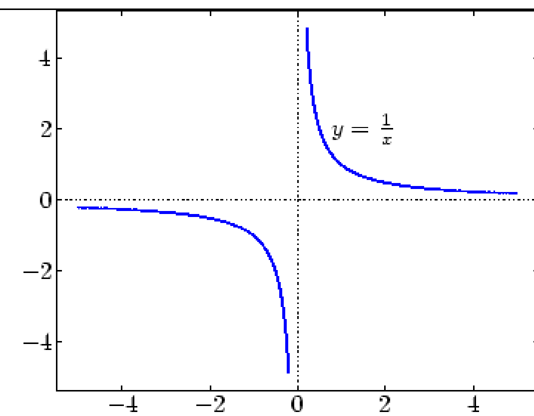
(c) ketabton.com: The Digital Library

په لاندې کې به یو څو تیوپیکې حالتونه تر بحث لاندې راښي یا و څېړل شي.

$f(x) = x^4 - 2x^2 - x/4$ تابع د $D = \mathbb{R}$ سره دوه مینیما لري او یو ماکسیما. مینیمومو د خورا کوچني تابع ارزښت سره مطلقه دی. یو مطلق ماکسیما شتون نه لري، ځکه چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره .

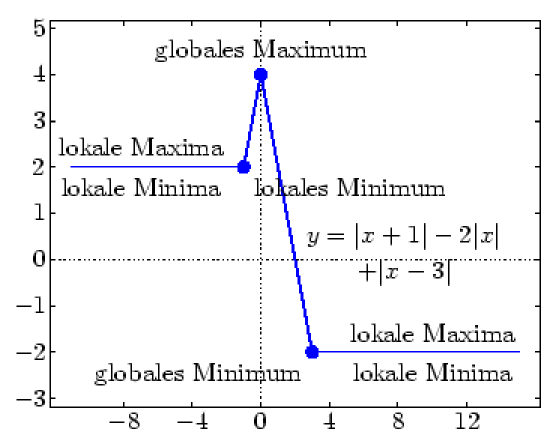


تابع د $f(x) = 1/x$ $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ سره کوم افراطي ارزښت نه لري.

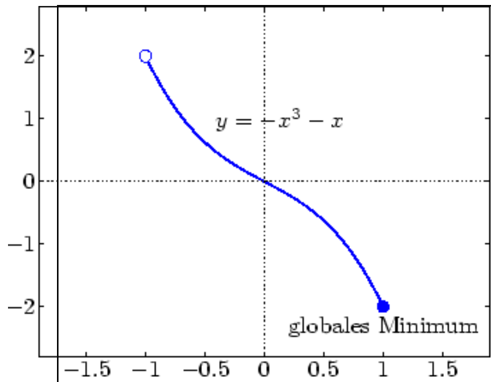


که یو تابع په واز انټروال کې ثابت وي، نو دا ځایونه (ځاییز (ځای اړونده) یا لوکال) ماکسیمال او هم (ځاییز) مینیمال دي،

د یوه کره یوغریز تابع سره افراطی ارزښتونه د ژی ټکو سره نیول کیږي، که دا دد تعریفورشو پوري اړه ولري.



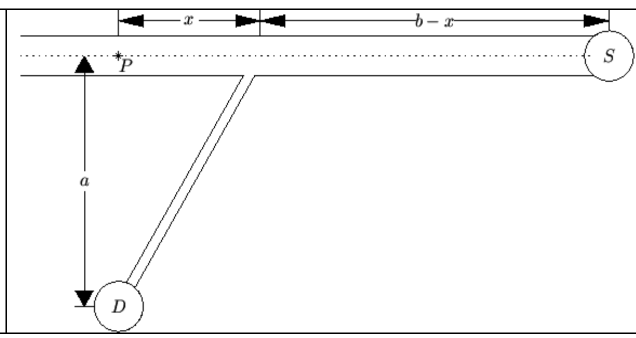
(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

له یوه کلي D څخه یوه ښار S ته یو سرک جوړیږي. کلي ته په واټن a همدا اوس ښار ته یوه شاه لار (ګړندی لار) جوړه ده. د ښار څخه د P ټکي پورې ، چې کلي ته نږدې ګړندی لار پرته ده، اوږدوالی b لري.

سیده کرښیزه توګه لار جوړیږي.له کومې چې ښا رته زر رسېدل تظمینوي، که په ګړندی لار له $v_a = 120$ km/h منځنۍ چټکتیا(سرعت) او $v_n = 60$ km/h په دنوې ځنګیزه توګه لار لاړ شي.



واټن $x \geq 0$ د P او فرعي توګه سرک ترمنځ په ګړندي د واټن $x \geq 0$ شمېرنه د اړیین وخت د مینیمال کولو له لارې.

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

ښار ته د رسیدو لپاره .

د مشتق صفر اینوونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0\,,$$

راکوي

$$v_a x = v_n\sqrt{a^2+x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_m = a/\sqrt{3}$$

د لوکال انحرافي ځای په څېر. ایا چې دا مینیموم دی، باید دا د وهل شوې لار وخت د انتروال د پای ټکو لپاره و ازمایل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a+b}{v_a}\,, \qquad t(0) = \frac{2a+b}{v_a}\,, \qquad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{v_a}$$

په روښانه توګه $t(0) \geq t(x_m)$ دی. نامساوات $t(b) \geq t(x_m)$ ورته دي و دې لاندې ته:

$$\begin{aligned} t(b) \geq t(x_m) \quad &\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{3}a+b \\ &\Leftrightarrow \quad 4a^2+4b^2 \geq 3a^2+2\sqrt{3}ab+b^2 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2-2\sqrt{3}ab+3b^2 = (a-\sqrt{3}b)^2 \geq 0\,. \end{aligned}$$

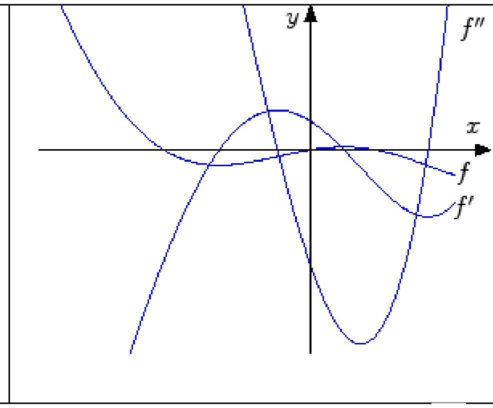
دا اخرني نامساوات تل پوره کیږي، او له دې سره x_m اوپټیمال دی، که $b \geq a/\sqrt{3}$ وي.

په بل حالت کې x_m په انتروال $[0,b]$ کې نه دی پروت او په ژۍ ټکي b پروت مینیموم ته ، یعني ښار ته په سیده تړنلار، رسېدی شي.

لیکونکي:هیورنر، هیولیګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

افراطي ارزښتونو ازمايښت Extremwerttest



د افراطي ارزښتونو ډول يا تيوپ باندې کيدی د ځکو مشتقونو په مرسته پرېکړه وشي که f دوه واره ناپرېکېدونکی او مشتقوړ وي او

$$f'(a) = 0\,, \qquad f''(a) > 0$$

$$(f''(a) < 0)\,,$$

نو f په a کې يو ځای اړونده مينيموم(ماکسيموم) لري. که دويم مشتق د a په ځای کې ورک شي، نو باېد جګ مشتقونه پرېکړې ته راکښل شي يا راوړل شي. که باور ولري:

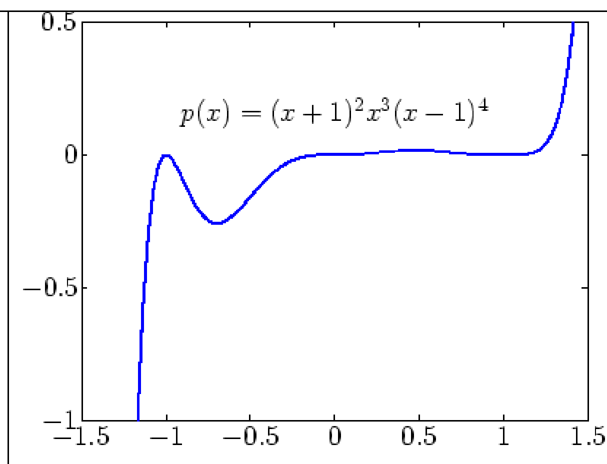
$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{او} \quad f^{(n)}(a) \neq 0\,,$$

نو f په a کې تيک هلته يو افراطي ځای لري، که جوړه وي. په دې حالتکې f په a کې يو ځای اړونده خورا جګ – يا همداشي خورا ټيټ ټکی لري، که $f^{(n)}(a) < 0$ همداسي $f^{(n)}(a) > 0$ وي.

پولينوم

$$p(x) = (x+1)^2 x^3 (x-1)^4$$

په $x = -1$ کې يو ډبل، په $x = 0$ کې يو دربواره او په $x = 1$ کې يو څلورواره صفرځای لري.



(c) ketabton.com: The Digital Library

صدق کوي

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p''(-1) = 2(-1)^3(-2)^4 < 0\,.$$

په $x=-1$ کې p یو مینیموم لري. په $x=1$ کې p یو ماکس لري، ځکه چې

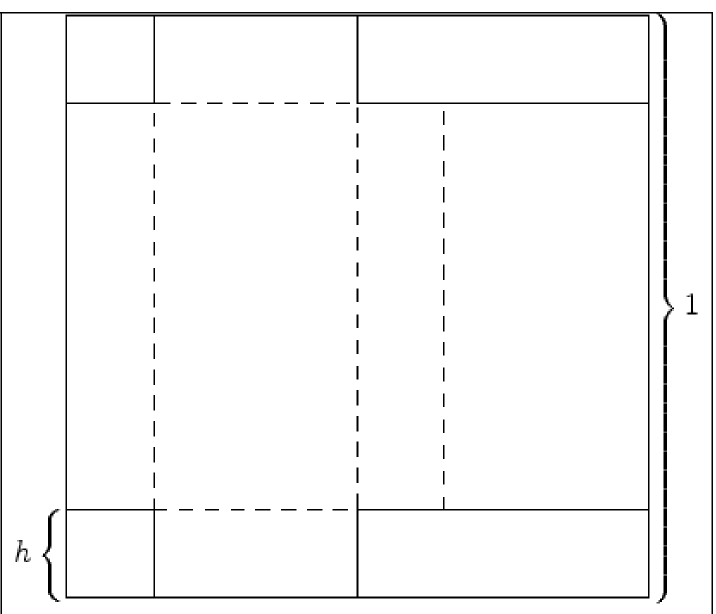
$$p(1) = \ldots = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0\,.$$

بالاخره د p

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 3!(-1)^4 \neq 0$$

له امله او یو مخنخښه بدلون په $x=0$ کې په سرچینه کې افراطي ځای نه شته.

کوتۍ Schachtel



د دې ورکړ شوي غوځ نمونې په مرسته دې د یوه مربع ډوله کارتوني کاغذ څخه خورا لوي کوتۍ جوړشي، چې خورا لوي حجم (ډکی) لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حجم یا ډکی دی:

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

اوږدوالی　　　　سور　　　　جګوال

د مشتق صفرځایونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

ترې

$$h = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

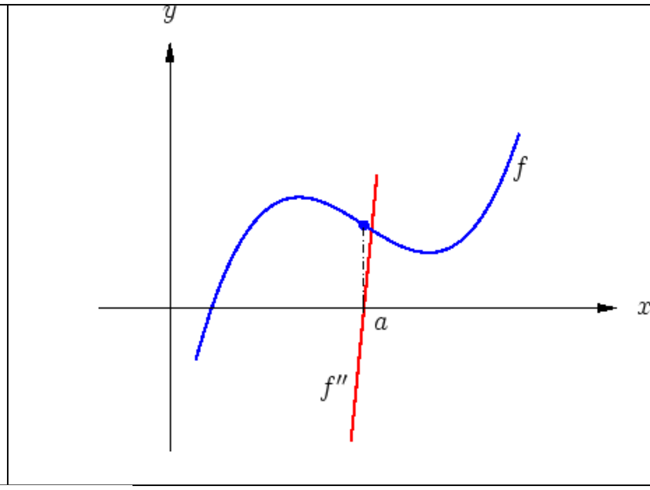
د ممکنه ځای اړونده افراطي ځایونه لاس ته راځي. فقط $h = \frac{1}{6}$ هندسي موخه ور دی او $v\left(1/6\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}$.

دا چې د ژی ټکو $h = 0$ او $h = 1/2$ لپاره حجم یا ډکی دی، نو کوتی د $h = 1/6$ لپاره خورا لوي حجم لري.

لیکونکي: هیولیک،هیورنر

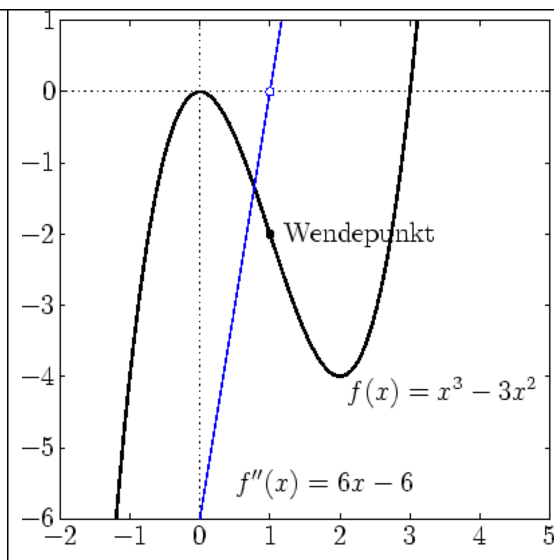
اوړونټکي (نقاط انعطاف Wendepunkte)

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د یو تابع f په یوه اوړونټکي a کي دويم مشتق مختخبنه بدلوي (يعني په دی ټکي کي تابع خپله لور بل لور ته اړوي) .

د یوه پوره هوار تابع لپاره اړين دی، چي $f''(a) = 0$ او پوره دی، چي $f'''(a) \neq 0$

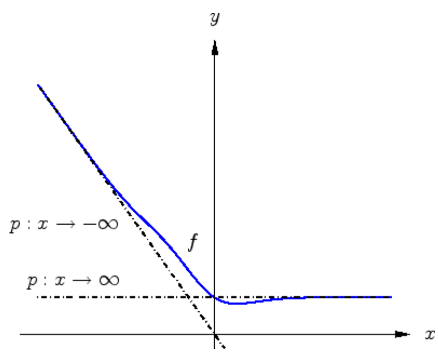
ليکونکي: هيوليک،هيورنر

	تابع یو مکعبي پولينوم ښايي. دا چي دويم مشتق کربنيز دی، نو ټيک یو اوړونټکی(د انعطاف ټکی) شتون لري ليکونکي: هيوليک، هيورنر

ګاونډي یا لنډ: ګاونډ (مجاورتها Asymptoten)

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو تابع د یوه تابع f اسیمپتوت دی ، که $f(x) - p(x) \to 0$ وي د $x \to \infty$ یا د $x \to -\infty.$ لپاره.



په ورسره بلد ډول p د f په څېر یوه ساده بڼه لري او د دې په چوپیرکې ، چې $f(x)$ د ځرنګوالي حالت د لوی x لپاره وڅېړي.

د ځانګړو معناو کربنیز اسیمپتوتونه $p(x) = ax + b$ دي. دوي د نورو ترڅنګ د منحني یا کړو بحث کې یو رول لوبوي.

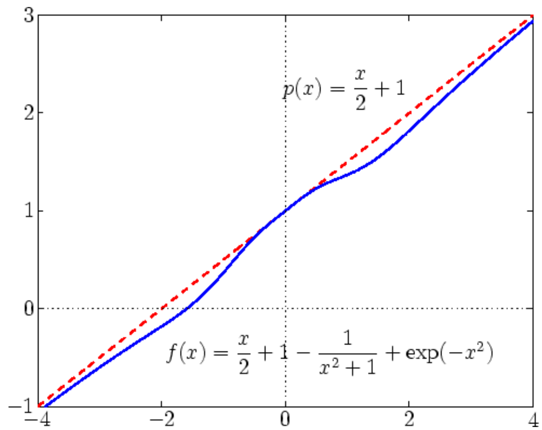
لیکونکي: هیولیګ، هیوررنر

د یوه څېره شوي یا متشکل شوي تابع $f(x)$ لپاره د $|x| \to \infty$ لپاره تناسب د کربنیزو ترمونو له خوا ټاکل کیږي، ځکه چې

$$\lim_{|x|\to\infty} \exp(-x^2) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0\,.$$

له دې لاس ته راړنې سره کربنه $p(x) = x/2 + 1$ اسیمپتوت ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د راشنلتابع ګاونډ یا- اسیمپتوتونه Asymptoten rationaler Funktionen

یو راشنل تابع

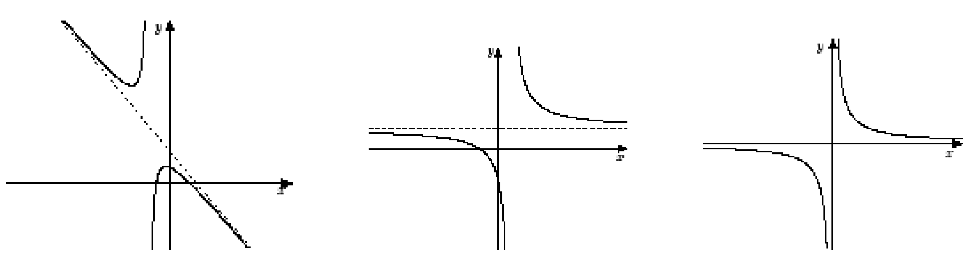
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

تیک هلته یو کرښیز اسیمپتوت لري که $q+1$ له ګراد یادرجي $p \le$ وي.

د Grad $p <$ Grad q لپاره باور لري

$$\lim_{p\to\pm\infty} r(x) = 0\,,$$

داپه دې معنا چې د x -محور اسیمپتوت دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د $q+1$ Grad $p \leq$ Grad $q \leq$ Grad e لپاره اسیمپتوت لاس ته راځي د پولینوموېش له خوا:

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

د Grad q $\tilde{p} <$ Grad سره. اسیمپتوت پرته (افقي) ده $(a = 0)$ ، که Grad q $p =$ Grad. وي.

که د صورا درجه له یوه څخه زیاته د محرج له درجې لویه وي، نو یوه اسیمپتوتیکي پولینوم لري د ≥ 2 درجې

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د راشنل توابعو

$$r_1 = \frac{4x+3}{2x+1}$$ او $$r_2 = \frac{2x^2}{x+1}$$

لپاره دپولینوم وېش له لارې لاس ته راځي:

$$r_1(x) = 0x + 2 + \frac{1}{2x+1}$$

او

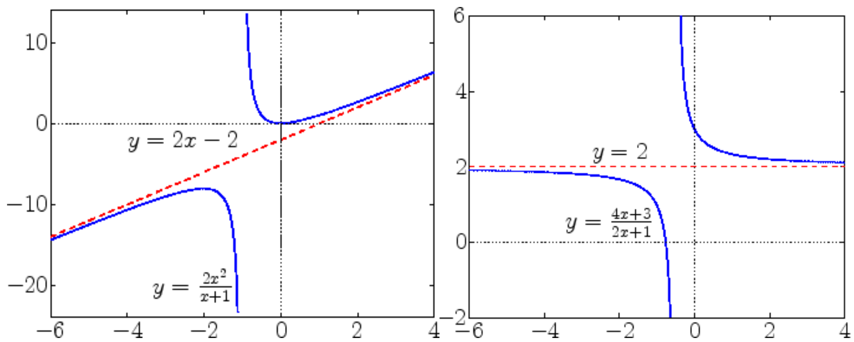
$$r_2(x) = 2x - 2 + \frac{2}{x+1}$$

اسیمپتوت یا ګاونډ

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $y_1 = 2$ $y_2 = 2x - 2$.

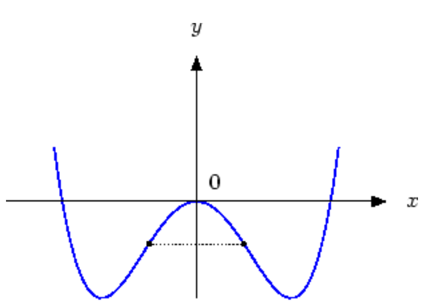
دا دوه بېلګې په لاندې ځېرو کې روښانه شوې دي.



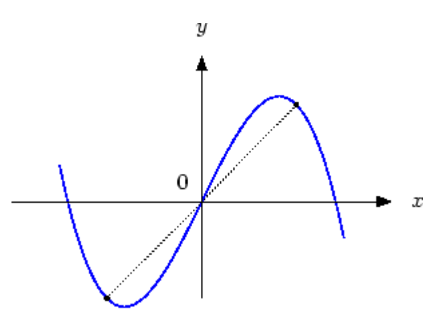
لیکونکي: هیولیک، هیورنر

سیومتري Symmetrie

یو تابع f جوړه(جفت) دی، که $f(x) = f(-x)$ وي ، دا په دې معنا، چې که ګراف د y-محور ته سیومتري وي. د یوه ناجوړه (تاق) تابع لپاره $f(x) = -f(-x)$ دی، او ګراف و سرچینې ته ټکی سیومتریک دی.



gerade Funktion



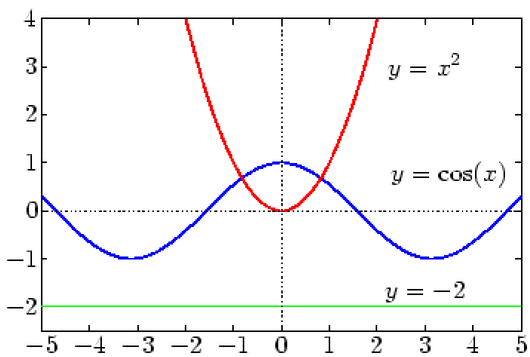
ungerade Funktion

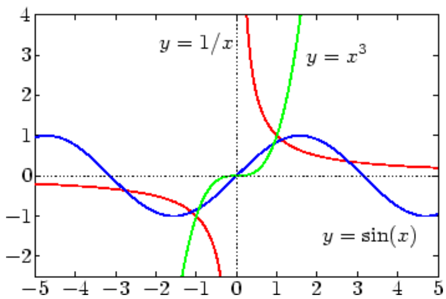
(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه جوړه او ناجوړه توابعو ضرب جوړه دی. د دې برعکس د یوه جوړه او یوه ناجوړه تابع ضرب ناجوړه یا طاق دی. د جمعې او تفریق جوړولو سره ډول ساتلی پټیږي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر،کنش

دا لاندې ځېره ښي لور ته یوڅو جوړه او کیڼ لور ته یو څو ناجوړه توابع ښايي.





د مناسبو کمبینېشنونو جوړولو سره نورې بېلګې لاس ته راځي. نو   توابع

$$f(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x, \qquad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x) \sin x - g(x) x^3$$

ناجوړه دي.

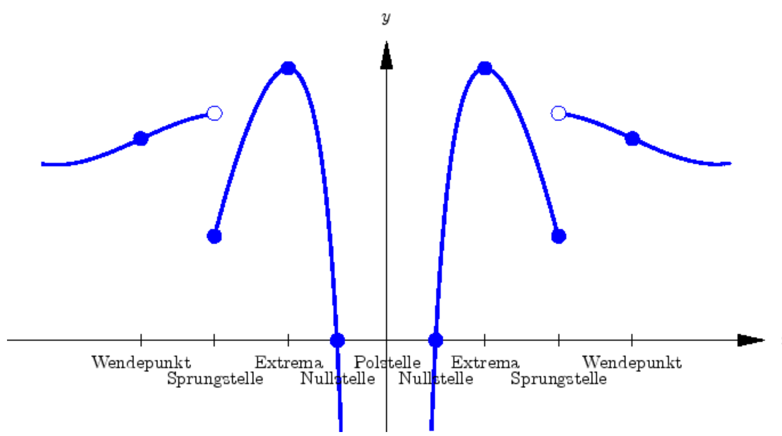
لیکونکي: هیولیک، هیورنر،کنش

د کږو یا منحنیو خبرې اترې(بحث)

د یوې تابع د ځرنګوالي حالت د قضاوت لپاره کېدی شي لاندې ټکي په پام کې ولرل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- Symmetrienسيومتر
- Periodizität تل بېرته راګرځېدنوالی
- Unstetigkeitsstellenپرېکېدنځايونه
- (Nullstellen → Vorzeichen مخنښنه (صفرځايونه
- (Extrema → Monotoniebereiche همغږيزوالي وشوګاني) افراپيت
- (Wendepunkte → Konvexitätsbereiche د کونوکسی ورشو) اوړونټکی د انعطافنقطه
- Polstellenقطبځايونه
- Asymptotenاسمپتوتي يا ګاونډيتوبونه



د توابعو داسې يو تحليل د ګرو خبرې اترې يا د منحنيو بحث بلل کيږي

ليکونکي: هيوليګ، هيوررنر

د ګرو بحث ښوول يا روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\sin(3x)$$

ځيرو .

سيمتري: دا چې $\sin x = -\sin(-x)$ ناجوړه تابع دی..

(c) ketabton.com: The Digital Library

تل ببرته راګرځېدنه یا پریوديځيتي: تابع پخپله لکه د ساین تابع پخپله 2π - پریودي ده او په راتلونکي کې فقط په انتروال $[-\pi, \pi]$ ترڅېړنې راځي.

د پرېکېدنې ځایونه: تابع له ناپرېکدونکو توابعو مرکبه جوړهشوې او له دې امله پرېکېدنځایونه نه لري.

صفرځایونه: د جمعې(زیاتون) قضیې سره $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$ دی:

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right)}_{\neq 0}.$$

تابع په 0 او $\pm\pi$ کې صفرځایونه لري..

افراطیت: تابع

$$f'(x) = 2\cos x - 4\sin^2 x\ \cos x = -2\cos x + 4\cos^3 x \stackrel{!}{=} 0$$

د $\cos x = 0$ یا $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$ لپاره ورکیږي ، نو

$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4.$$

دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف او پریوديکي ده، ژیتکي ترڅېړنې نه راځي.

د دویم مشتق د مخنخښې یعنې

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x\ \sin x$$

مخنخښې او تابع ارزښتونو د پرتله کوني له لارې کېدی شي د افراطیت تیوپ یا ډول وټاکل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

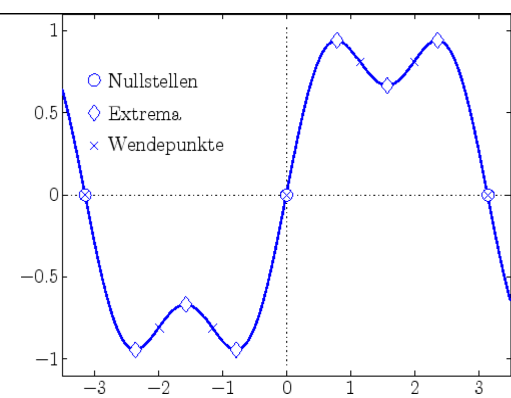
x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اوړونټکی(نقطه انعطاف)

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x \sin x = -10\sin x + 12\sin^3 x \overset{!}{=} 0$$

د $\sin x = 0$ یا $\sin x = \pm\sqrt{5/6}$ لپاره پوره دی، دا په دې معنا چې

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$



په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی. نو تابع په $(0,0)$ او $(\pm\pi,0)$ کې اوړونټکي لري، همداسي په $(-1.99,-0.81)$ ، $(-1.15,-0.81)$ ، $(1.15,0.81)$ او $(1.99,0.81)$ کې نږدې ازبنتونه لري.

قطبونه : ناپرېکیدونکي توابع قطبځایونه نه لري.

اسیمپتوتونه: تابع پریودیکي او نا ثابت دی، نو اسیومپتوتونه نه لري.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

بېلګه :

د یوه کړې بحث د ښوونې لپاره یو تابع

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترڅېړنې لاندې نیول کیږی.

سیومتري: صورت ناجوړه(طاق) او مخرج جوړه(جفت) دی. نو تابع ناجوړه دی، داپه دې معنا چې سرچینې ته ټکی سیومتریک دی.

پریودیوالی یا تل ببرته راګرځېدنوالی: تابع پریودیکي نه دی.

د پرېکېدنې ځایونه: صفرځایونه ± 1 د صورت صفرځایونه نه دي . له دې سره f په $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ باندې ناپرېکېدونکی دی.

صفرځایونه: صورت د $x = 0$ لپاره ورکیږی.

افراطیت:

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2-1)^2} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

دا چې تابع ساده صفځایونه لري، نو افراطیت فقط ځای اړوند دی. افراطي ارزښتونه دي:

$(-2, -4/5)$ ځای اړوند خورا جګ ټکی ، $(2, 4/5)$ ځای اړوند خورا ټیټ ټکی.

له دې سره کېدی شي، چې د f ډول یا ټیپ د کوالیتاتیو حالت ښخه. دا چې $f(x) \to -\infty$ د $x \to -\infty$ او $x \to -1$ لپاره ، باید په انتروال

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(-\infty,-1)$ کې یو ځای اړونده مینیموم ولري. په ورته توګه په $(1,\infty)$ کې لږ تر لږه یو ځای اړونده خورا ټیټ ارزښت.

اوړونټکی (نقطه انعطاف) :

$$f''(x) = \frac{-80x^5+398x^3+42x}{20(x^2-1)^3} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی.

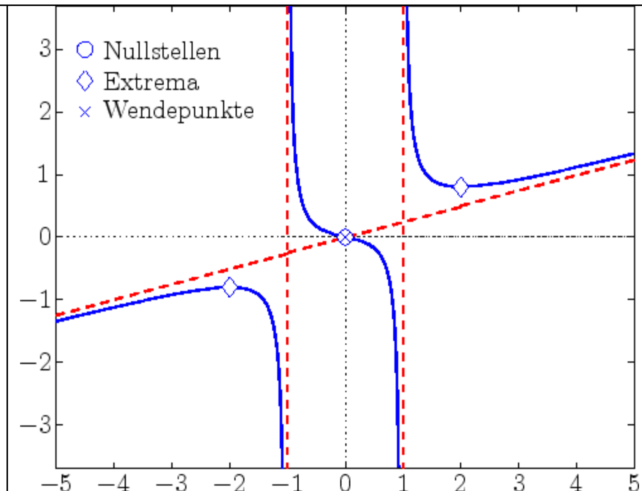
قطبځایونه: تابع په $x=\pm1$ کې ساده صفرځایونه لري،

اسیمپټوټونه: دیوه پولینوم ویش څخه

$$p(x)=5x/20+0=x/4$$

د اسیمپتوت په توګه لرو.

لیکونکي:هیولیک،هیورنر



بېلګه:

د کږې یا منحني بحث لپاره لاندې تابع تر څېړنې لاندې نیسو:

$$f(x)=e^{-x^2}+\frac{4|x|}{e^4}$$

سیومتر:

داچې x^2 او $|x|$ جوړه دې تابع جوړه دی، داپه دې معنا چې سیومتریک و y-محور ته.

پریودیوالی: تابع پریودیک نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرېکېدنځایونه: تابع د ناپرېکېدنتوابعو څخه مرکبه (یوځای ایښول) شوې ده او له دې امله پرېکېدنځایونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت توابعولپاره ټول مشتقونهپه صفرځای کې پرېکېدونکي دي.

صفرځایونه: اکسپوننشل تابع تل مثبتّ(زاتیزه) ده، د مطلق ارزښت تابع نامنفي ده. نو صفرځایونه نه شته.

افراطیت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4}\text{sign}(x) \stackrel{!}{=} 0,\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\,.$$

سربېره پردې دې کریتیکل ټکی $x = 0$ په پام کې وي، چېرته چې مشتق پرېکېدونکی دی.

تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف دی، د x د $\pm\infty$ په لور حالت ته دې پام وي.

دا چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره f لږ ترلږه یو مطلق مینیموم لري، مګر هیڅ مطلق ماسیموم. پرتله د y - ارزښت کریتیکل ټکي

$$(-2, 9/e^4) \qquad (0,1) \qquad (2, 9/e^4)$$

ښایي، چې په $x = \pm 2$ کې مطلق مینیموم نیولکیږي. داچې f په انتروال $[-2,2]$ یو مینیموم او هم یو ماکسیموم لري، لاس ته راځي چې $(0,1)$ یو ځای اړونده مینیموم دی.

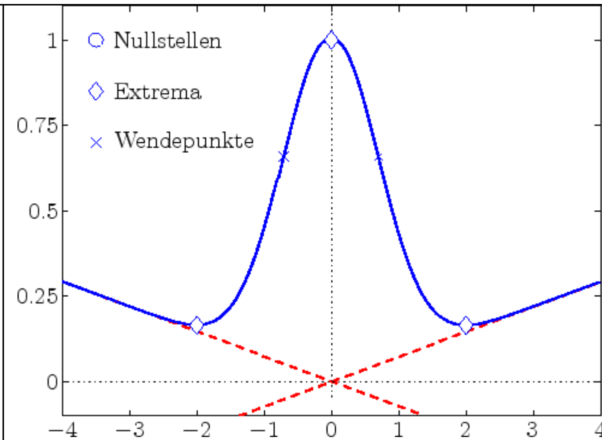
اوړونټکي :

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 2 \quad \Rightarrow$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{2}$$

ديم مشتق په دې ځای کې $\neq 0$ دی.

قطبځايونه: تابع قطبځايونه نه لري. اسيمپتوتونه: دا چې e^{-x^2} له $\lvert x \rvert$ څخه د $x \to \infty$ لپاره ګړندی د صفر په لور درومي، تابع اسيمپتوت $p_+(x) = \frac{4x}{e^4}$ او ی: ليکونکي هيورنر، هيوليک	

د ريمن انتيګرال Riemann-Integral

ديوه توټه دوله (په توټه توټه کې) ناپرېکېدونکی تابع f ټاکلی انتيګرال د

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \int_a^b f_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

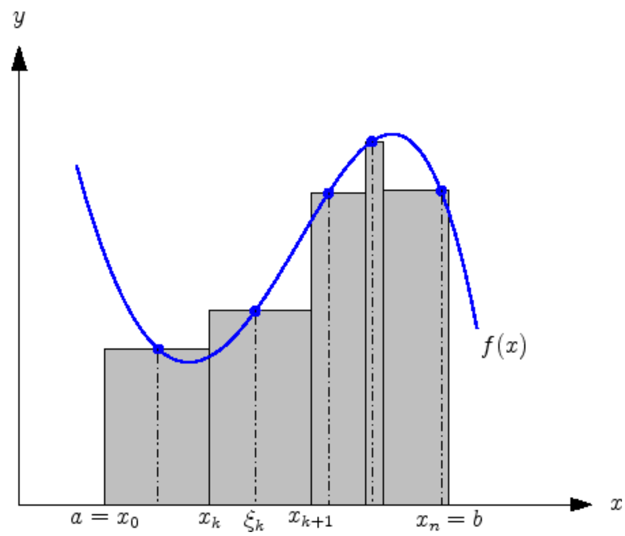
له خوا يا سره تعريف دی. دلته $\Delta:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ د $[a,b]$ توټه ونه ښايي،

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\,, \qquad \lvert\Delta\rvert = \max_k \Delta x_k\,,$$

د انتروال ماکسيمال اوږدوالی دی او

ξ_k په خوښه ټکی دی په k -م انتروال کې. د انتيګرال تعريف په بني لور جمعي د ريمن – جمعو په نامه ياديږی.

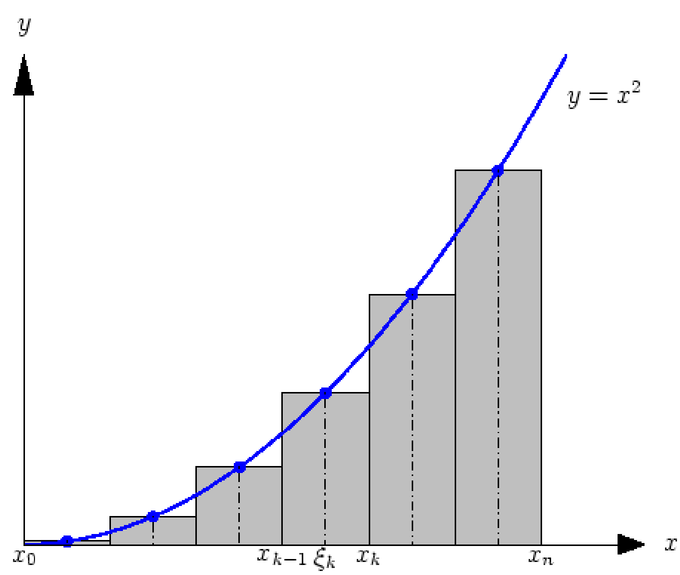
(c) ketabton.com: The Digital Library



د مثبت f لپاره $\int_a^b f(x)\,dx$ د سطحې مساحت دی د f د ګراف لاندې.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنرو ویپر

د $\int_0^1 x^2\,dx$ د ریمن انتیګرال په حیث راوړنې سره کېدی شي د ټوټه ونو پرلپسې(ترادف)



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Delta_n : x_i = i/n \,,\, i = 0, \ldots, n \,,$$

وکارول شي د ارزښت شوو ځايونو

$$\xi_i = (2i-1)/(2n) \,,\, i = 1, \ldots, n \,,$$

سره د n -مې ټوټه ونې لپاره.

د تعريف سره سم لاس ته راځي:

$$\int f_{\Delta_n} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{2i-1}{2n} \right)^2 = \frac{1}{4n^3} \left(4 \sum_{i=1}^{n} i^2 - 4 \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \right)$$

$$= \frac{1}{4n^3} \left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

او له دې سره

$$\lim_{n\to\infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

.

بنسټيزه تابع Stammfunktion

يو تابع F د $F' = f$ سره د f بنسټيز تابع ده، او د دې لپاره ليکو

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ټول بنسټيزو توابعو ډېرۍ يا سټ د ی ، چې د f ناټاکلی انټيګرال بلل کيږي. د انټيګرېشن ثابته په خوښه ده. د بېلګې په توګه

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

د $F_a(a) = 0$ سره يو ممکنه بنسټتابع دی.

د ټولو ساده توابعو لپاره د داسې بنسټيزو توابعو داسې اکسپليځيت ورکړه ممکنه نه ده، د دې لپاره بېلګه ده: $f(x) = \exp\left(x^2\right)$.

هر تابع

$$F_1(x) = x^3 + 2\,, \quad F_2(x) = x^3\,, \quad F_3(x) = x^3 - 1$$

د

$$f(x) = x^2\,.$$

يو بنسټيز تابع دی.

د $f(x) = \frac{1}{x}$ لپاره د $0 < c$ سره

$$F(x) = \ln(c|x|)$$

يو بنسټيز تابع دی.

ليکونکي: هيوليک،کرايخ

د انټيګرال شمېرنې اصلي جمله

(c) ketabton.com: The Digital Library

که F د یوه ناپرېکړدونکي تابع f بنسټیزه تابعوي، داپه دې معن، چې $f = F'$ ،
نو باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

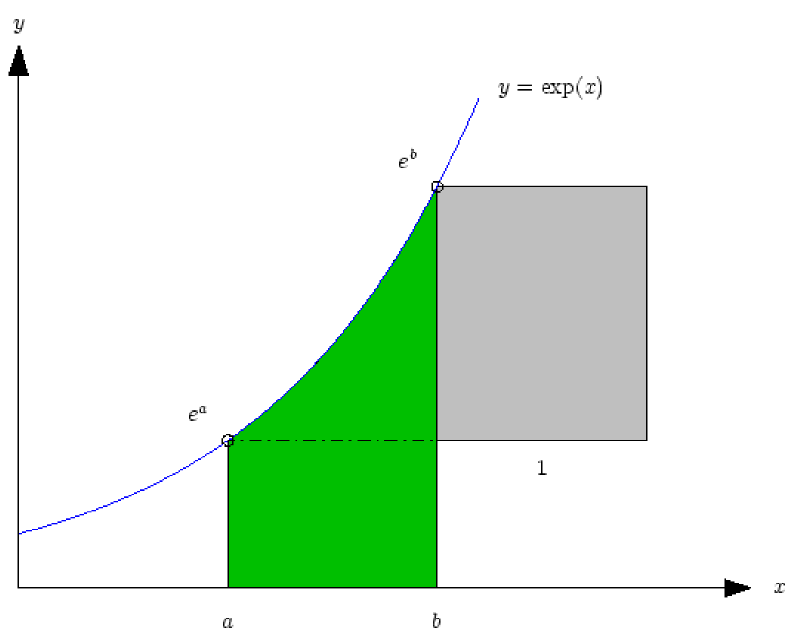
همداسې په لنډ لیکدول

$$\int_a^b f = [F]_a^b \ .$$

یو ټاکلی انتیګرال کېدی شي د بنسټیزو توابعو د انتوال په پای ټکو کې د تابع ارزښتونو د کمښت په څېر وشمېرل شي.

لیکونکي: هیورنر، هیولیک

د اکسپوننشل تابع مشتق بېرته اکسپوننشلتابع دی او له دې امله لرو:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a\,.$$

د a او b ترمنځ دګراف سطحه مساوي ده د سور 1 او د تابع ارزښتونو دجګوالي واټن څخه جوړ ولاړګوډيز (مستطيل).

د لوګاريتمي تابع $F(x)=\ln(x)$ مشتق $F'(x)=1/x\,,\ x\in\mathbb{R}^+$ دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x\,dx = \ln(b)-\ln(a)\,,\quad a,b\in\mathbb{R}^+\,.$$

ليکونکي: هيورنر، هيوليک

د $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ يو بنسټيز تابع $F(x)=\arctan x$ دی . په تعقيب لرو

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1)-\arctan(0)=\frac{\pi}{4}\,.$$

د کمښت سره verifiziert ، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

د $f(x)=\tan x$ بنسټيز تابع دی:

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

د دې پايله ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{\pi/4} \tan x\, dx = -[\ln(\cos x)]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347\,.$$

ليکونکي: هيورنر، هيوليک

يو پلانېټ د M کتلې سره يو د ګراويټيشن (راکښني ورشو) ورشو توليدوي، چې په يوه تن يا بدن د m کتلې سره يوه قوه $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$ استعمالوي. د لته د γ ګراويټيشن ثابته ده او x د دروند ټکو (د ثقل مرکزونو) واټن دی.

د $1/x^2$ لپاره بنسټيز تابع $-1/x$ دی. د دې لپاره چې يو بدن د a څخه و b ته په واټن يوسي، بايد کار

$$\int_a^b F(x)\, dx = \gamma m M \int_a^b \frac{1}{x^2}\, dx = -[\gamma m M/x]_a^b$$

$$= \gamma m M (1/a - 1/b)$$

سرته ورسيږي .

د a لپاره مساوي د پلانت وړانګه او $b \to \infty$ کېدی شي د کينېټيکي انرږي سره د مساوي اينوني له امله داسي په نامه د تېښتې چټکتيا يا سرعت v و ټاکل شي،داپه دې معنا چې چټکتيا ، چې اړيينه ده، د يوه پلانېټ ګراويټېشن ورشو څخه وو تلی شي:

$$\frac{m}{2} v^2 = \gamma \frac{mM}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\gamma \frac{2M}{a}}\,.$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره $v = 11.2$ km/s. لرو.

ليکونکي: هيورنر، هيوليګ

(c) ketabton.com: The Digital Library

غوره – یا راوتلي بنسټیز توابع

لاندې جدول د زیات رامنځ ته کېدونکو توابعو $f(x)$ د بنسټیزو توابعو $F(x)$ جدول ښايي.

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
$x^s \, , \, s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln\|x\|$
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

لیکونکي: هیورنر، هیولیک

ټوټه انتیګرالونه Partielle Integration

د ضرب قانو $(fg)' = f'g + fg'$ له مخې د ناټاکیو انتیګرالولپاره یو ورته فرمول لرو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

په اړونده توګه د ټاکلو انتیګرالونو لپاره لرو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

له دې سره دې په پام کې وي، چې د ژۍ ترمونه $[fg]_a^b$ ورکیږي، که یو له دې دواړو توابعو په انتروال ټکو کې صفر وي. دا د پریودیکي توابعو لپارهم ورکیږي ، د پریودې اوږدوالي $(b-a)$ سره.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

له

$$\int (1+x)^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\,(1+x)^{\alpha+1} + c$$

د $\alpha \neq -1$ لپاره

لرو

$$\begin{aligned}\int \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1+x}}\,dx &= x\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int 1\cdot\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,dx\\ &= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + c.\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه شمېرل کيږي

$$\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sqrt{1-x}}_{v'}\,dx = \left[-x\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx$$

$$= \quad 0-\left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\,.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د اووښتونو (واريابلو) بدلونVariablensubstitution

د زنځيري قانون څخه

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x))g'(x),\quad f=F',$$

د يوه بدلون $y = g(x)$ لپاره د بنسټتوابعو جوړولو له لارې لاس ته راځي

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(y)+c = \int f(y)\,dy\,.$$

په ورته توګه د ټاکلو انتيګرالونو لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b))-F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

د دفرنشل په مرسته کېدی شي دا تابع په لاندې بڼه وليکل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

که په انتيګراند کې دننني مشتق پېژندوړ وي، لکه د بېلګې په تګه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx\,,$$

لپاره ، نو د بدلون استعمال خورا ساده دی. په دې بېلګه کې ږدو

$$y = g(x) = \ln x\,, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

او لاس ته راځي

$$\int g(x)^2\, g'(x)\,dx = \int y^2\,dy = \frac{1}{3}y^3 + c\,.$$

د په ښت بدلون له لارې لاس تهراځي

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c\,.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

په تيپيک ډول د بدلون له لارې سرې هڅيږي چې انتيګرال ساده کړي.دبېلګې په توګه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y}-1}\,dy$$

لپاره په نږدې توګه ږدو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

دا د

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله ترانسفورمي شوی ناټاکلی انتیګرال راکوي.

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\frac{dy}{dx}\,dx$$
=

$$= \int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)\,dx$$

$$= \int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c\,.$$

د $x = e^y$ په ځنې یا برعکس بدلون سره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2}\left|\frac{e^y-1}{e^y+1}\right| + c\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د مرکاتور پرپوستون Mercator-Projektion

بنسټتابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کېدی شي د بدلون

$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1+\sin x}{\cos x}, \qquad du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\, dx,$$

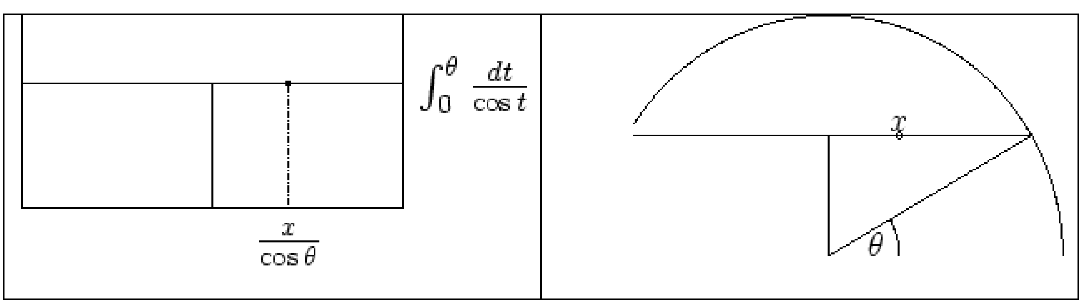
سره وشمېرل شي.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int (\cos x)^{-1} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} du$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

$$= \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c.$$

یو استعمال د مررکاتور پرېوستون دی. دلته د ځکي پوښ سطحه کږنجساتونکي یا کږنجیښتوني په یوه سطحه پریوځي یا پری ایستلی شي.



دلته سور درجه یا عرض البلد په اړیکو $1/\cos\theta$ غزول شوی.

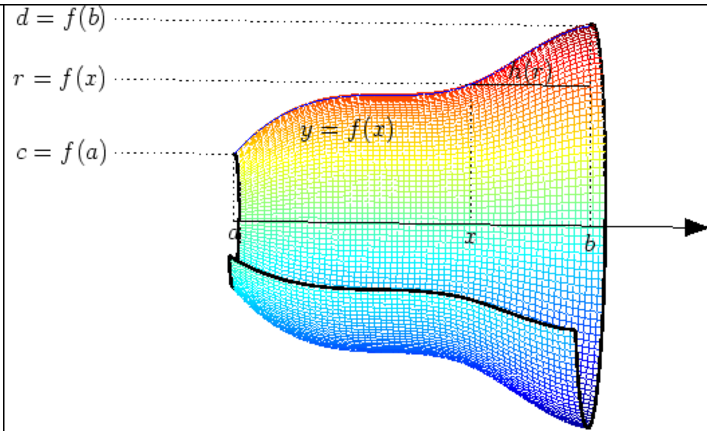
لیکونکي: هیولیک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څرخېدونکو بدنونو ډکی(حجم)Volumen von Rotationskörpern

په x -محور د تابع $r = f(x) \ge 0$, $a \le x \le b$ د څرخېدني له امله جوړ شوی بدن V ډکی(حجم) کېدی شي د ګردی ډوله(دایره ډوله) پروتِ غوڅيو انتيګرال له لارې و شمېرل شي:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx .$$



په بديلي ډول کېدی شي توتې(استواني) پوښ له لارې هم وشمېرل شي

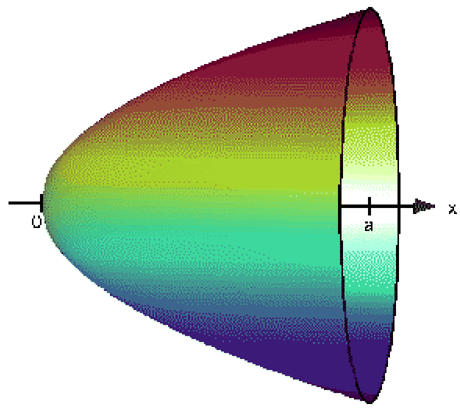
$$V = \pi c^2 (b-a) + 2\pi \int_c^d r\, h(r) \, dr ,$$

د کوم سره چې c همداسې d مینیمال همداسې ماکسیمال وړانګې r دي او $h(r)$ په بدن کې خوندي توتې پوښ تول جګوالی دي د وړانګې r سره. دا بديل د تولو له مخه د همغږيز وړانګې تابع f لپاره موخه ور دی.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

دا جوړ يا ځېره شوی پاراَبولويد د x – محور باندې د کرې $y = \sqrt{x}$ څرخون سره منځ ته اځي

(c) ketabton.com: The Digital Library



د څرخون بدن د فرمول سره سم ډکی)حجم) دی:

$$\pi \int_0^a \left(\sqrt{x}\right)^2 \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{1}{2}\pi a^2 \, .$$

په بدیلې توګه د توتې پوښ باندې انتیګرال له لارې منځ ته راځي. 1

$$2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r(a - r^2) dr = 2\pi \left[-\frac{1}{4}(a - r^2)^2\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\pi a^2 \, .$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دویم:</u>

Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Diss . Uni. Wien Algebren .

Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, Dissertation at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولي اړتیاوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنڅیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

٣ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ١

٧ – انالیزې ٢

٨ – کرښیز الجبر

٩ - د شمیرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل انالیز

١٢ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته

تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویيونو په پښتو روښانه ونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميرړي شينواری د اروابنادي پستو او اروابناد نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ؟ ه لمريز کې د شينوارو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترګې راغړولي.

د هسکې مينې د لومړنې ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته

د رحمان بابا ليسه له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې(ښوونځي له لومړي ټولګي پيل او د دويم ټولګي څخه ګام او پای). د ۱۹۶۶ تر سپتبر د کابل طب پوهنځی. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتريش برس، چې هلته يې د شميرپوهنې ډاکتري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د۱۹۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوريت سفارت شارژد افير(صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سياسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د د رياضي څانګه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

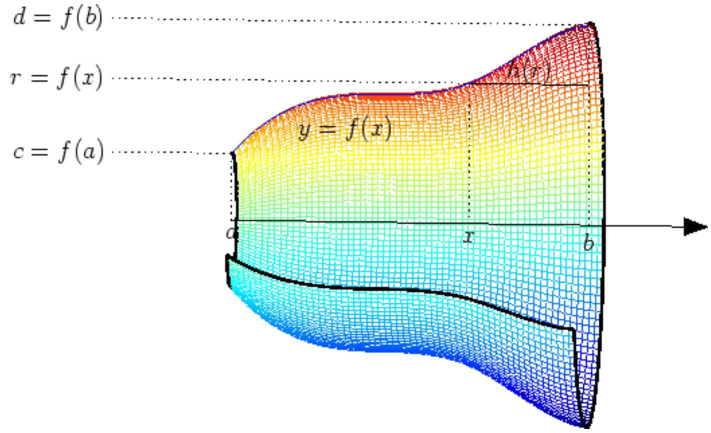
ماخان ميرړي په ۱۹۷۲ کې له لرې د ميرمن ښاپيرۍ سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتريش ته راغی.

ده د ميرمن ښاپيرۍ سره په ۱۹۶۳ ز ک کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتريش ويانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز ک دوه بچيان وبخښل، چې څانګه او اباسين نوميږي. څانګه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکتره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سايکولوژي لوستلې. ماخان شينواري بې کاره نه دی او لږ تر لږه له ۱۹ ۹۷ څخه همدا د کتابونو ليکلو او د ژباړې دنده په غاړه اخستې، چې خپل فکر تر شونې پولې پورې تازه وساتي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شمیرپوهنې بنسټونه



لیکونکي: پروفیسور هیولیګ او ډله یې

(c) ketabton.com: The Digital Library

له مات. ن ج څخه

ژباړي : ډاکتر ماخان میرې شینوالری

وینا ۱

منطقي(سم اندیزې) تړنې ۲
کوانتورونه ۱۱
سیده ښوونه ۱۳
ناسیده ښوونه ۱۴
ایمپلیکېشن ترې لاس ته راتلنه یا – راوړنه ۱۴
د پوره اندکشن له لارې ښوونه ۱۶
د مربع(څلورې) عددونو د جمعې لپاره فرمول ۱۶
ډېرۍ(ست) ۱۷
د ګڼونو (اعدادو) ډېرۍ ۱۹
په ډېریو کې عملیې ۱۹
کارتېزي ضرب (ځل) ۲۳
اړیکې ۲۴
د اړیکو د داتا بانک ۲۵
د اړیکو خویونه ۲۵
فنکشن ۲۸
د تابع یا څیروني یا بلواک(تابع) خویونه ۳۰
د فنکشنونو ۳۲
په څټ یا برعکس فنکشن ۳۲
فاکولتې یا فکتوریل ۳۳
د بینوم ضریبونه ۳۳
د پاسکال درېګودی ۳۴
د بینوم درسي جمله ۳۵

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بینوم ضریبونو لپاره کټمټوالی ۳۸
د دېریو یا ستونوکمبیناتوریک ۴۰
کرښیز فنکشنونه ۴۹
مربعیز فنکشنونه ۵۰
مایل ګوزار یا – غورځونه ۵۱
پولینوم ۵۳
راشنل فنکشن یا بلواک(تابع) ۵۴
ساین او کوساین ۵۵
تانجنت او کوتانجنت ۵۸
اکسپوننشل توابع(بلواک) ۶۰
د ګټې ګټه ۶۳
لوګاریتم ۶۵
تولیز په توان تابع او لوګاریتم ۶۶
د لوګاریتم شمېرونی ۶۸
مشتق یا رابېلېدنه ۶۸
غوره (مهم) مشقونه ۷۱
د مشتق کرښیزوالی ۷۲
ایمپلیځیت مشتقوږ توابع ۷۵
لوګاریتمي مشتق ۷۷
نیوټن تلنلار یا قانون ۷۸
د بابلیانو ریښه (جذر)نیونه ۷۹
افراطیت ۸۰
د مشتق صفر ایښوونه ۸۲
افراطي ارزښتونو ازمایښت ۸۴
کوتیۍ ۸۵
ګاونډېږ ۸۸
د راشنلتابع ګاونډ یا- اسیمپټوتونه ۸۹
سیومتري ۹۱
د کږو یا منحنیو خبرې اترې(بحث) ۹۲
د ریمن انتیګرال ۹۹
بنسټیزه تابع ۱۰۱
د انتیګرال شمیرنې اصلي جمله ۱۰۳
غوره – یا راوتلي بنسټیز توابع ۱۰۶
د اووښتونو (واریابلو) بدلون ۱۰۸
د مرکاتور پرېوستون ۱۱۰

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څرخیدونکو بدنونو ډکی(حجم) ۱۱۲
پوښتنه: ۱۱۵
د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوي لیکنې: ۱۱۹
د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او
ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي ۱۲۱

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library