

# د شميرپوهنې بنسټونه

ډاکټر ماخان ميري شينواری

[Ketabton.com](http://Ketabton.com)

وینا

د وینا لاندې یوه ژبنیزه افاده یا وینه پوهیږو، چې د دې لاندې دوه رښتیا ارزښتونو ،، رښتیا، (wahr) ،، همداسې ،، نارښتیا، یا ناتیګ (falsch) ،، څخه د یوه سره تنظیم کیدی شي.

ویناوې په لویو تورو  $A$  سره په نڅښه کيږي : ، او کېدی شي د منطقي یا سم اندیزو عملیو سره وتړل شي. بنسټیزې شمېرپوهنیزې وینې یا افادې ، چې له نورو افادو څخه منځ ته نه شي راتلی اکسیومونه بلل کيږي

لاندې بیلګه د دې شمیرپوهنې وینا روښانه کوي.

وینا

$A$  : هر طبیعي عدد د لومړنیو عددونو ضرب دی. دا یوه رښتیا وینا ده.

وینا

$B$  : هر لومړنی ګڼ یا عدد ناجوره یا طاق دی. دا چې 2 جوړه یا حفت عدد او پریم دی، نو وینا نارښتیا ده.

دا تروسه ښوول شوي اټکلونه

$C$  : ناپای ډیر د پریم اعدادو څېرګوني شته. دا یوه شمیرپوهنیزه وینا ده، ځکه چې دا یا رښتیا ده او یا نارښتیا. دلته موخه د لومړني عدد د څېرګوني څخه هغه لومړني ګاونډي ناجوره عددونه دي ، چې دواړه لومړني عددونه دي ، د بیلګې په توګه.

$(3, 5), (5, 7), (11, 13), \dots$

دا تراوسه حورا لویه د لومړنیو عددونو جوړه (د 19.4.2006 پورې) ده:

$1 \pm 2^{171960} \cdot 16869987339975$

د کره کونې سره

$D$  : د جمعي ۱۳ مه يوه د بدبختی روح ده.

دا يوه وينا نه ده، ځکه چې دا په يوه رښتيا ارزښت نه شي تنظيمولی.

ليکونکي: هولېگ، هورنر

### منطقي (سم انديزې) ترنې (که غواړې: عملي يا نېلوني)

منطقي يا سم انديزې ويناوې کېدې شي په لاندې جدول کې ورکړ شوو عمليو سره و تړل شي.

يادونه: له کين و بني لور ته.

نومونه	ليکنود	ويينود	ټيک هلته رښتيا، که
	نه والی	$\neg A$	نه $A$ نارښتيا ده.
Konjunktion يا د او ترنه	$A \wedge B$	او $A$ ( $B$	او $A$ رښتيا دي $B$
Disjunktion د يا ترنه	$A \vee B$	$B$ يا $A$ (	$B$ يا $A$ رښتيا ده.
Antivalenz نابرابر ارزښته	$A \neq B$	(يا $A$ يا ( $B$	$B$ او $A$ بيل رښتيا

			ارزښتونه ري
Implikation ترې لاس ته راورنه	$A \Rightarrow B$ $B \Leftarrow A$	له $A$ څخه $B$ له $B$ څخه $A$	$A$ نارښتي يا $B$ رښتيا ده
Äquivalenz برابر ارزښته	$A \Leftrightarrow B$	( $A$ و $B$ ته برابر ارزښته دی ) يا له $A$ څخه $B$ لاس ته راځي او برعکس	او $B$ همغه يا برابر رښتيا ارزښتونه لري

د دې لپاره چې په منطقي افادو يا ويينو کې نوکان يا قوسونه سپما کړو، کره کوو، چې  
 $\neg$  له  $\wedge$  او  $\vee$  څخه کلک يا قوي نښلوي او دا بيا له  $\Rightarrow$ ,  $\Leftrightarrow$  او همداسې له  $\neq$ .

دا ایمپليکیشن په پام کې ونیسئ، چې  $B$  ټیک هلته رښتيا ده، چې  $A$  رښتيا وي. له  
 ناتيکو نيونو (فرضيو) ، ټیک يا رښتيا او يا هم نارښتيا پایلې را وپستل کېدی شي.

دا د يا ترني لپاره نخښه يوه  $\vee$  په شان نخښه ده، چې د (vel (lat. oder) (يا  
 لپاره ځای په ځای شوي. د يا ترني لپاره کېدی شي چې سومبول ، ، + ، وکارول شي  
 او د او- ترني لپاره ، ، - ، .، که سومبول 0 د ناتيک يا غلط لپاره وکارول شي او  
 هر بل ارزښت د رښتيا په څير و کارول شي، نو کېدی شي منطقي ترني د طبيعي  
 عددونو شمېرنې له لارې هم پر مخ بوتلای شو يا استعمال کړای شو.

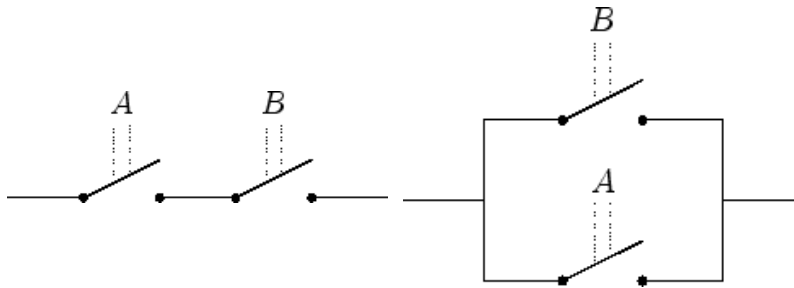
په شمېروني (کمپيوتر ژبه کې له انگرېزي راغلي کلیمې NOT (Negation) (نه والی)، AND (Konjunktion) (کنجکشن)، OR (Disjunktion) (دیسجنکشن)، یا EXOR oder XOR (exclusive or, Antivalenz) (بی له یا نابرابر ارزښته) او د هغې نه والی NAND (negierte Konjunktion) (نه شوی کنجکشن) ، NOR (negierte Disjunktion) (نه شوی دیسجنکشن) او NXOR (Äquivalenz) (برابرابر ارزښته) لپاره کارول شوي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر، کیمرلي

که وینا د سویچ په څېر انځور کړو، چې تړلي وي، که وینا رښتیا وي، په همدې توګه واز، که وینا نارښتیا وي، نو کېدی شي مسلسل سویچونه د یا – تړني په څېر او غبرګ سویچونه د او-تړني په څېر صورت ومومي .

د او-تړنه

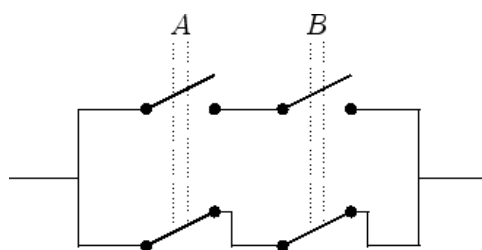
د یا-تړنه



یوه نه-شوي وینا یو سویچ دی، چې تړلی دی، که وینا نارښتیا وي. له دې سره کېدی شي سویچ څېرې د برابر ارزښته، نابرابر ارزښته او ایمپلیکیشن لپاره ورکړل شي.

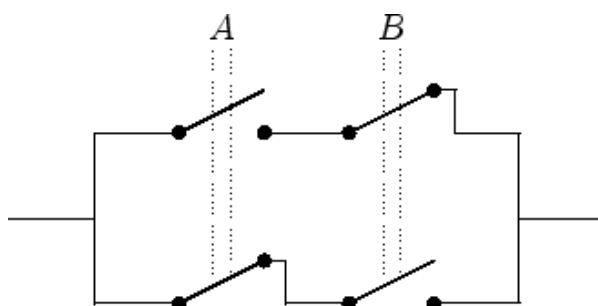
$$A \Leftrightarrow B : \text{همداسې } (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

Äquivalenz:



$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$        $A \neq B$   
 همداسي      نابرابر ارزښته:

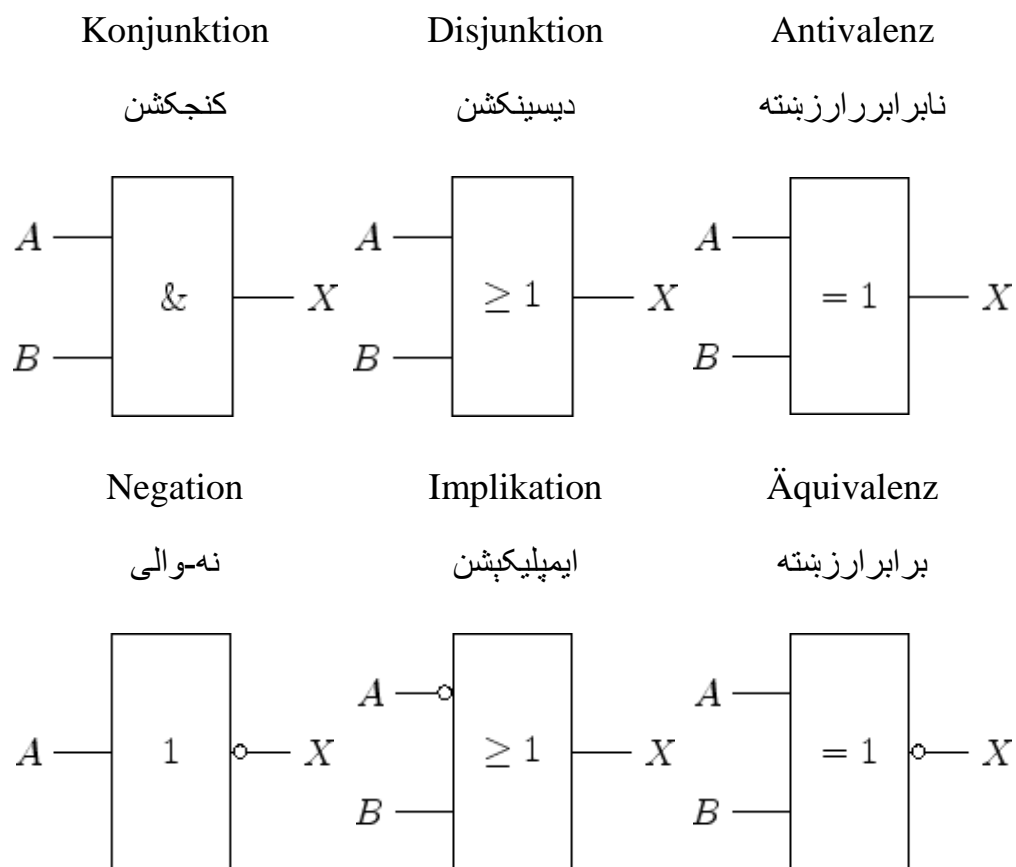
Antivalenz:



<p>ایمپلیکیشن یا تری لاس ته راتلنه:  <math>\neg A \vee B</math> همداسي <math>A \Rightarrow B</math></p>	
---	--

سویچونه کیدی د ترانزیستور له لاری منځ ته راشی یا صورت ومومي، چي په جگ یا ټیټ ایښول شوي شپانونگ جریان مومي یا تیریري. د (1) ارزښت جگ شپانونگ دی ټیټ یا کم شپانونگ ارزښت (0) دی.

د دین DIN 40900 سره د اړونده (مطلوبه) شپانونگ تعریف ورکول کیري. دا د ولاړگودیز(مستطیل) خخه جوړ دی، په کومو کي چي اړونده ټرني ورکړ شوي دي. یو نه-والی د یوي گردی(دایري) سره په نخښه شوی دی.



منطقی عملیو لپاره لاندی کتیمتوالی Identitäten باوری دی.

اسوخیاتیو قانون: Assoziativgesetze:

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

کموناتیو یا بدلیدنقانون: Kommutativgesetze:

$$A \wedge B = B \wedge A$$

$$A \vee B = B \vee A$$

د دې مورگان قانون: De Morgansche Regeln

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

دېسټریبوتیو قانون: Distributivgesetze

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

او نور:

$$\neg(\neg A) = A$$

$$A \wedge A = A$$

$$A \vee A = A$$

Alternative Darstellungen: الترناتیو یا بدیلی انخورونه



ایمپلیکشن  
 Implikation:  $A \Rightarrow B = \neg A \vee B = \neg A \Leftarrow \neg B$

Äquivalenz:  $A \Leftrightarrow B = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

Antivalenz:  $A \neq B = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

بدیلی فرمولونه زیات وخت په بنوونو کې استعمال مومي.

یوه منطقي افاده یا بیینه ، چې درامنځ ته شوی وینا رښتیا ارزښت خپلواکه تل رښتیا همداسې نارښتیا وي، تاوتولوجي **Tautologie** همداسې کونترادیکشن **Kontradiktion** بلل کیږي. داسې یوه افاده کړی شي د بڼه بدلون سره همداسې د سره بدله شي. په ځانگړې توگه دا کټموالی باور لري:

$A \vee \neg A = w$       bzw.       $A \wedge \neg A = f$  ,  
 همداسې

$A \vee w = w$       bzw.       $A \wedge w = A$  ,  
 همداسې

$A \vee f = A$       bzw.       $A \wedge f = f$  .  
 همداسې

لیکونکي: هیولیک،، هیورنر

د دې مورگان قانون او د دېسټریټیو قانون کېدی شي وېنول شي، داسې چې د وینا د رېنتیا ارزښت لپاره ټول امکانات وځیرل شي. د دې مورگان قانون داپه لاندې جدول کې روښانه شوی دی.

$A$	$B$	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A) \vee (\neg B)$ , $\neg(A \wedge B)$
w	w	w	f	f	f
w	f	f	f	w	w
f	w	f	w	f	w
f	f	f	w	w	w

د ایمپلیکېشن، برابر ارزښتوالي او نابرابر ارزښتوالي لپاره برابر ارزښته شننه له تعریف څخه لاس ته راځي.

د منطقي قانون د روښانه کونې لپاره د وینا

$$\underbrace{|x - 1| > 1}_A \implies \underbrace{(x < 0) \vee (x > 1)}_B$$

بڼه دلیري.

د دې مورگان قانون سره سم لرو:

$$\neg B = \neg(x < 0) \wedge \neg(x > 1) = (x \geq 0) \wedge (x \leq 1).$$

له دې سره سم ایمپلیکېشن  $A \implies B$  د وینا د

$$|x - 1| \leq 1 \iff 0 \leq x \leq 1.$$

سره برابرازبنته دی

بیا هم دا نتیجه لاس ته راڅي ، که ایمپلیکیشن د تعریف سره سم د

$$(\neg A) \vee B = |x - 1| \leq 1 \vee \neg(0 \leq x \leq 1)$$

سره بدل کړي.

د بېلگې په توگه افاده یا ویبڼه

$$L : (A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge B)$$

ساده کوو.. د ایمپلیکیشن پېڅای ایښونه او د دېموران قانون له امله لاس ته راڅي

$$\neg(A \vee B) \vee (\neg A \wedge B) = (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B).$$

د دېتريپوتیو قانون له مخط دا وینا برابرازبنته ده د  $\neg A \wedge (\neg B \vee B)$  سره.

پېژندل کیري، چ د  $B$  ارزښت بي اغیزه دی یا ارزښتناک نه دی او  $L = \neg A$ .

د منطقي افادې  $L$  د ازمایښت ته الترناتیو یا بدیلې کېدی شي یو د رښتیا ارزښت جدول هم وکارول یا استعمال شي.

$A$	$B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge B$	$L$
w	w	f	f	f
w	f	f	f	f
f	w	f	w	w

f	f	w	f	w
---	---	---	---	---

له دي دا هم لاس ته راځي:  $L = \neg A$

کوانتورونه Quantoren

د فرمولو، شتون لري...،، .، د ټولو ... لپاره،، لپاره لنډونې شتونکوانتور  $\exists$  او ټول کوانتور  $\forall$  استعمالیږي.. دا کوانتورونه زیات وخت د  $A(p)$  سره په تړاو کې استعمالیږي، چې د یوه پارامتر  $p$  چې د ډېرې یا ست  $P$  توگی دی، په واک کې دي.

Schreibweise لیکنډود	Bedeutung معنا
$\exists p \in P : A(p)$	یو توگی $p$ له $P$ شتون لري، د هغه لپاره چې $A(p)$ رښتیا دي.
$\forall p \in P : A(p)$	د ټولو $p$ لپاره چې له $P$ دی $A(p)$ رښتیا دی.

د دواړو وینا ډولونو د نه والي سره کونټوونه هم بدلیری.

$$\neg(\exists p \in P : A(p)) = \forall p \in P : \neg A(p)$$

$$\neg(\forall p \in P : A(p)) = \exists p \in P : \neg A(p)$$

دا  $\exists!$  لیکن ډول هم روځنی دی د فرمولولو لپاره، چې،، ټیک یو ... شته،،

د کوانتورونو د شمېرنې بنوونې لپاره وینا

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \forall n \in \mathbb{N} : n > n_\varepsilon \implies |a_n| < \varepsilon$$

راورل کيږي. دا په دې معنا چې یوه لړۍ (ترادف)

$$a_1, a_2, \dots$$

د 0 په لور یا 0 ته هڅيږي، دا په دې معنا چې د پوره لوی  $n$  لپاره د  $a_n$  مطلق ارزښت د هرې د مخه ورکړشوي بند یا بندیز  $\varepsilon$  څخه کوچنی دی.

نه-والی داسې لاس ته راځي، چې زړې وینا نه شي او کوانتورونه سره بدل شي،

$$\exists \leftrightarrow \forall.$$

د ایمپلیکېشن یا لاس ته راوړنې یا – راتلنې ایښوونه او د مورگن قانون څخه لاس تهرځي

$$\begin{aligned} \neg(n > n_\varepsilon \implies |a_n| < \varepsilon) &= \neg(n \leq n_\varepsilon \vee |a_n| < \varepsilon) = \\ &= n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon. \end{aligned}$$

له دې سره د نه شوي وینا دا بڼه لري:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n_\varepsilon \exists n \in \mathbb{N} : n > n_\varepsilon \wedge |a_n| \geq \varepsilon.$$

دا په دې معنا چې پرلپسې (ترادف)  $(a_n)$  د 0 لورته نه هڅيږي. دا په دې معنا چې یو

لرښت  $\varepsilon > 0$  شتون لري، چې له هغه پرلپسې  $|a_n|$  تل بیا اوري یا تېرېږي.

لیکونی:ک. هیولیک

سيده بنوونه

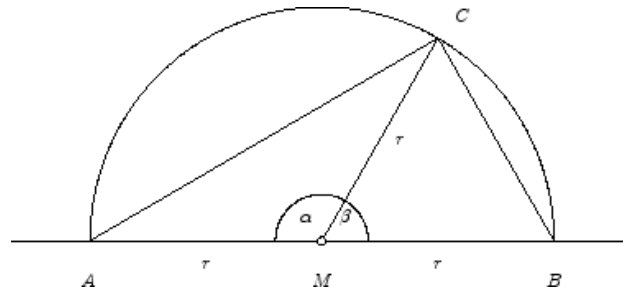
يوه غوښتنه ثبوت)  $B$  کېدی شي و بنوول شي، چې هغه له رښتيا وينا  $A$  څخه را منځ ته شي او يا په داسې بېرته وړول شي.

$$A \implies B .$$

ويناوې  $A$  کړی شي وړاندنيونې (فرضيې) هم ولري، چې هغه د غوښتنې  $B$  لپاره اړيني دي.

ليکونکی: هيوليگ

د بېلگې لپاره يې د تالس جمله را اخلو، چې هر په يوه نيم گردی (نيم دايره) کې رابند درېگودی (مثلث) ولاړگوديز يا قايم الزاويه دی.



دا سيده بنوونه په لاندې دوه جملو ولاړه ده:

اول: په يوه مثلث کې د دننيو کونجونو جمعه  $\pi$  ده.

دويم: د يوه برابر پښيز (يا که غواړی: متساوی الاضلاع) مثلث بنسټکونجونه پرابر لوي دي.

که دا په مثلث  $\Delta(CMB)$  او  $\Delta(AMC)$  و کاروو، نو له دې لاس ته راځي

$$\sphericalangle ACM = \frac{\pi - \alpha}{2}, \quad \sphericalangle MCB = \frac{\pi - \beta}{2}.$$

$$\angle ACB = \pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

او له دې سره دی

$$\alpha + \beta = \pi$$

او د له امله په  $\pi/2$  سره برابر.

### ناسیده بنوونه

د دې لپاره چې وښایو چې له یوې وړاندنیونې (فرضیې)  $V$  څخه غوښتنه (ثبوت)  $B$  لاس ته راځي یعنی  $(V \implies B)$  ، کېدی شي ونیسو ، چې وینا  $B$  د  $V$  د وړاندنیونې له امله نارښتیا ده، دا مو یوه تضاد ته بیایي:

$$V \wedge (\neg B) \implies F,$$

د  $F$  سره یوه نارښتیا وینا ده، په ځانګړې توګه  $F = \neg V$  یا  $F = B$  .

په ځانګړې توګه باور لري

$$B = (\neg B \implies F) = (\neg B \implies B),$$

که وړاند نیونې نه وي شوي.

لیکونکي: هیولیک، کنش، اببرین

ایمپلیکېشن تری لاس ته راتلنه یا - راوړنه

$$V \wedge (\neg B) \implies F$$

$$\neg(V \wedge (\neg B)) \vee F = (\neg V) \vee B \vee F.$$

د سره برابر ارزښته دي.

که ایمپلېکشن رېنتیا وي، داپه دې معنا چې د شمېرپوهنيزو قوانينو څخه لاس ته راغلی، نو باید غوښتنه(ثبوت)  $B$  رېنتیا وي، ځکه چې  $\neg V$  نارېنتیا ده او  $F$  يا نارېنتی او يا د  $B$  سره برابر دی.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د دې ناسيده بنووني د روښانه ونې لپاره بنايو، چې  $\sqrt{2}$  ايراشنل دی، داپه دې معنا چې د مات يا مسر په څېر نه شي انځورېدلای.

$$\neg B : \sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

نيسو، چې غوښتنه  $B$  نارېنتیا ده. بس باور لري

$$d. \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad \text{ggT}(p, q) = 1. \quad \text{سره .}$$

دلته  $\text{ggT}$  انگرېزي يې  $\text{gcd}$  خورا عت کډپروېشوني (ذوالضعاف الاقل) دی.

د نيوني څخه د مربع کوني او د  $q^2$  سره ضربوني له امله لاس ته راځي

$$2q^2 = p^2,$$

دا په دې معنا چې  $p^2$  او له دې سره  $p$  يو چوره يا جفت عدد دی. په ځانگړې توگه يو  $r \in \mathbb{N}$  شتون لري د  $p = 2r$  سره. د  $q^2 = 2r^2$  له امله  $q$  هم يو چوره عدد دی او له دې سره  $\text{ggT}(p, q) = 2$ . دا د نيوني نيوني جوړښت  $\neg B$  سره

په تضاد کې ده، چې  $\text{ggT}(p, q) = 1$ ، دا په دې معنا چې

$$(\neg B) \implies B.$$

له دې امله يا د دې په تعقيب بايد غوښتنه  $B$  رېنتیا وي،

د پوره اندکشن له لارې بنوونه



وینابڼې د طبیعي پارامتر سره کېدی شي د پوره ایندکشن له لارې وښوول شي. که  $A(n)$  یوه د  $n \in \mathbb{N}$  په واک کې وینا وي، نو د دې لپاره دې لاندې دواړه د د ښوونې پلونه (قدمونه) روښانه- یا و اخستل شي. .

لومړی : د ایندکشن پیل : ښایو چې  $A(1)$  رښتیا دی.

دویم : اینوګشڼاپایونه یا ختم: ښایو چې د نیونې چې  $A(n)$  رښتیا دی (د ایندکشن هیپوټیزي)، لاسته راځي، چې هم رښتیا دی، یاپه دې معنا چې

$$A(n) \implies A(n+1).$$

نو دا باوري دی، چې  $A(n)$  د ټولو  $n \in \mathbb{N}$  لپاره صدق کوي.

د یوه اندکشن ښوونې سره یو په بل پسې sukzessive دا پسې د تر مخه څخه لاس ته راځي.

که د اندکشن پیل د  $n_0 = 1$  لپاره نه بلکه د  $n_0 > 1$  لپاره سرته ورسیري، نو وینا بیا فقط د  $n \geq n_0$  لپاره صدق کوي.

د مربع (ځلوری) عددونو د جمعي لپاره فرمول

$$A(n) : \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

کیدی شي د پوره اندکشن سره وښوول شي.

د اندکشن پیل  $A(1)$  : ( )

$$\sum_{i=1}^1 i^2 = 1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}.$$

د اندکشن پای

$$:A(n) \implies A(n+1)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^n i^2 + (n+1)^2 = \underbrace{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}_{A(n)} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

د اندکشن هیوپوتېزې، لکه چې روښانه شوه، په دریم برابروالي کې استعمال شو.

ډېری (سټ)

یوه ډېری  $A$  له توکو  $a_1, a_2, \dots$  جوړه ده یعنې

$$A = \{a_1, a_2, \dots\}.$$

که توکي د یوه خوی له مخې خوی لرونکي (کرکترېزه) شي، نو د دې لپاره لیکو

$$A = \{a: E \text{ خوی لري}\}$$

د دې لپاره سړی لاندې نڅښې کاروي یا استعمالوي:

لیکنډول	معنا
---------	------

$a \in A$	$a$ د $A$ توکی دی .
$a \notin A$	$a$ د $A$ توکی دی .
$A \subseteq B$	$A$ د $B$ برخدېری (برخست) ده
$A \subset B$	$A$ د $B$ برخدېری (برخست) ده
$ A $	دتوکو گنون یا تعداد په... کې
$\emptyset$	تشدېری یا تشست

که  $|A| < \infty$  همداسې  $A = \infty$  باور ولري، نو دلته د پای دېری همداسې ناپای دېری څخه غږیږو.

دوه یا څو دېری برابرزوریزی بلل کیږي، که د دوی د توکو ترمنځ یو بیجکتیو بلواک یا تابع یعنی برعکسکیدونکی بلواک شتون ولري ( $|A| = |B|$  د پای دېری لپاره).

د  $A$  د ټول برخو دېری  $\mathcal{P}(A)$  تواندېری بلل کیږی، دا په دې معنا چې

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

له دې سره باور لري  $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ ,  $A \in \mathcal{P}(A)$  او  $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

لیکونکي: هیولیک، کنش

## د گڼونو (اعدادو) ډېری

د لاندې گڼونو ډېری لپاره معیاري نڅېښي استعمال مومي:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$$

طبعي اعداد:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$$

ټول اعداد:

$$\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \text{ggT}(p, q) = 1\}$$

راشنل یا هوبنبار اعداد:

$$\mathbb{R} = \{x : x = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n, q_n \in \mathbb{Q}\}$$

ریل یا حقیقي (ریښتوني) اعداد:

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

کومپلکس اعداد:

په همدې توگه لاندلیکنډول هم کارول کیري:

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

او دې ته ورته یا په همدې ډول

$$\mathbb{R}_0^-, \mathbb{R}^-, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{Q}_0^-, \mathbb{Q}^-, \mathbb{Q}_0^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{Z}_0^-, \mathbb{Z}^-$$

لیکونکي: کږه یولیک

## په ډېریو کې عملی

د دوه ډېریو  $A$  او  $B$  لپاره لاندې علمي تعريف دي:

ټولنه (اتحاد)

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\},$$

غوځی (قطاع):

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\},$$

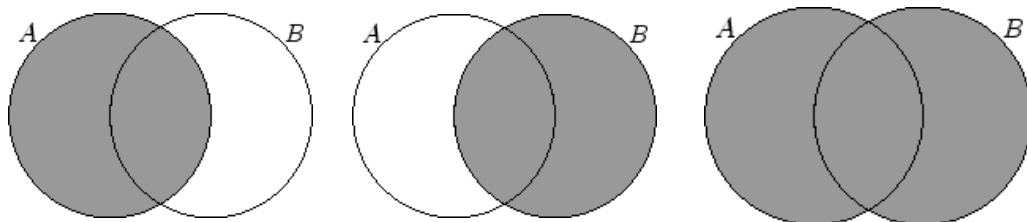
کمنبت یا کمون (تفریق)، پوره کېدونکې ډېرې،

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\},$$

سیوتریکي کمنبت (کمون)

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

په لاندې څېرو کې د ډېریو عللي داسې په نامه ون-ډیاگرام Venn-Diagramme سره بنوول شوي دي.

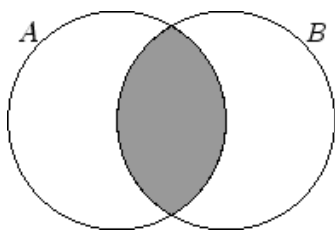


A

B

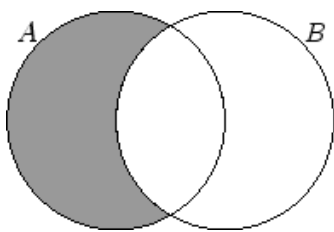
ټولنه

$A \cup B$  Vereinigung:



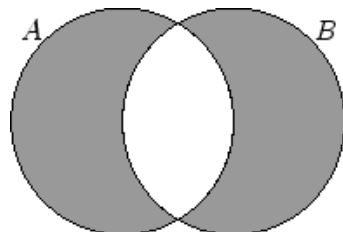
غوخی

$A \cap B$  Schnitt:



کمیبت

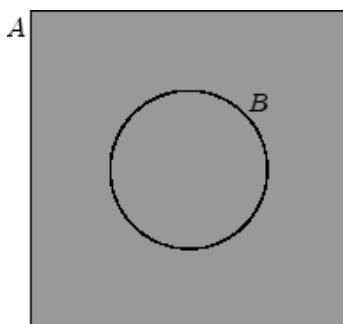
$A \setminus B$   
Differenz:



سیومتریکی کمیبت

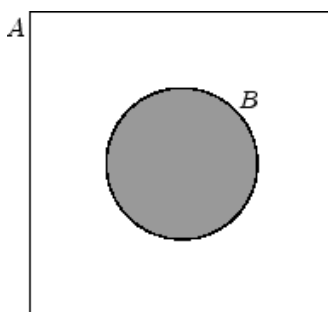
symmetrische  
 $A \Delta B$  Differenz:

که  $B \subset A$  وي، نو یوڅو دیاگرامونه یو بل سره خوري یا یو په بل پریوڅي:



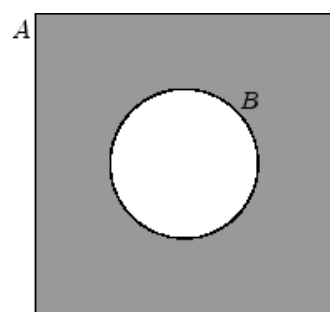
ټولنه

Vereinigung:  
 $A = A \cup B$



غوخی

$B = A \cap B$  Schnitt:



پوره کېدنکي ډېری

Komplementärmenge :  
 $A \setminus B = A \Delta B$

لیکونکي: هولیگ، هورنر، کنیش

د ډېریو عملیو لپاره شمېر قوانین:

اسوخیاتیو:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

کموناتیو یا بدلېدونکی قانون.

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

Morgansche Regeln: •

• د مورگان قانون یا قاعده

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

• دیستریبوتیو قانون.

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

دا قوانین د منطیقي قوانینو په کوته کونه هم ده، که د  $\cup, \cap$  عملیو په ځای  $\wedge, \vee$  کېږدو او  $C \setminus$  په ځای  $\neg$  کېږدو.

لیکونکي: هیولیک، هیونر

د نمونې په توګه به د دې مورګان لومړی قانون و بنوول شي. باور لري:

$$x \in C \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin (A \cap B)$$

$$\Leftrightarrow x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B).$$

د دبستريوتيو قانونو له مخې اخرنی افاده يا وپينه د لاندې سره برابرزبنته ده

$$(x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B) \Leftrightarrow x \in (C \setminus A \cup C \setminus B),$$

له کوم سره چې غوښتونکی کټمټوالی بنوول شوي.

ليکړنکی:ک. هیولیک

د دې مورګان قاعدې له مخې د بیلګې په توګه لاس ته راځي

$$C \setminus (A \cap C) = (C \setminus A) \cup (C \setminus C) = (C \setminus A) \cup \emptyset = C \setminus A,$$

$$C \setminus (A \cup C) = (C \setminus A) \cap (C \setminus C) = (C \setminus A) \cap \emptyset = \emptyset.$$

د دبستريوتيو قانون د بیلګې په توګه لاس ته راځي:

$$(A \cup B) \cap B = (A \cap B) \cup (B \cap B) = (A \cap B) \cup B.$$

له دې سره باور لري  $(A \cap B) \cup B = B$  ، ځکه چې  $(A \cap B) \subseteq B$  دی

### کارتېزي ضرب (حل)

د دوه ډېریو  $A$  او  $B$  کارتېزي ضرب دواړو ډېریو د ټولو منظمو جوړو ډېری ده:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$



باور لري:

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow (a = a' \wedge b = b').$$

داپه دې معنا چې د ډېرې برابروالي ( $\{a, b\} = \{b, a\}$ ) په عکس يا په خت د لړۍ پرلپسې غوره ده

په ورته توگه  $n$ - واره يا ځله کارتېزي ضرب تعريفوو

$$A_1 \times \dots \times A_n$$

د ټولو منظمو  $n$ - گونونو  $(a_1, \dots, a_n)$  د  $a_i \in A_i$  سره . که ډېرې برابرې وي، نولیکو:

$$A^n = A \times \dots \times A$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

## اریکي Relation

که د ډېرې  $A$  توکي د ډېرې  $B$  له توکو سره په اړیکو کې قرار ولري يا ولاړي وي، نو کېدی شي دا د یوې اړیکې سره افاده يا وویل شي. دا د توکو له منظمو جوړو

$(a, b)$

جوړه ده، چې دا د اړیکو له لاري سره تړلي دي. نو یوه اړیکه  $R$  د  $A$  او  $B$  د کارتېزي ضرب برخدېرې ده. وایو چې  $a$  د  $b$  سره په اړیکو کې ده او د دې لپاره لیکو  $a R b$  :

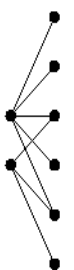
$$a R b \Leftrightarrow (a, b) \in R \subseteq A \times B.$$

لیکونکي: ژ. هیورنر

## د اړیکو د داتا بانک Relationale Datenbank

یوه نمونه یي بېلگه د اړیکو د ،داتا-بانک،، دی. دلته د بېلگې په توگه یو د درسونو (لکچرونو) جدول او یو د زده کړو جدول ورکول شوي چې یو له بل سره په اړیکو کې راغلي. دا په لاندې څېره کې روښانه شوي.

په لاندې کې کین لور ته نومونه دي

Mtr.-Nr.	Name		کوټه	درس		
1000000	Anton Antonius		<table border="1"> <tr><td>V57.01</td></tr> <tr><td>V47.02</td></tr> </table>	V57.01	V47.02	لوره شمیرپوهنه ۱ د زده کوونکو...
V57.01						
V47.02						
1000001	Berta Bethel					
1000002	Cornelius Cornell					
1000003	Damian Damien					
1000004	Egon Ekel					
1000005	Frank Frankfurth					

دا هم دلته روښانه شوي چې د یوې ډېرې توکي د بلې ډېرې د توکو سره په اړیکو کې راځي یا که غواړی: قرار لري.

لیکونکي: بوسلر، هیورنر

### د اړیکو خویونه

په یوه ډېرې  $A$  کې یوه اړیکه  $R \subseteq A^2$  په لاندې توگه بلل یا نمول کیږي:

رفلکسیو reflexiv، که هر توکی د خپل ځان سره په اړیکه کې وي:

$$\forall a \in A : (a, a) \in R$$

سیومتری symmetrisch، که د توکو لړۍ پرلپسې کوم رول نه لوبوي.

$$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$$

انتی سیمتری antisymmetrisch ، که که له سیمتری خُخه کټمټوالی لاس ته راشي:

$$(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$$

ترانزیتیو transitiv ، که له یوه زنجی خُخه منځنی توکی لري کېدی شي:

$$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$$

توتالی total ، که هر دوه توکي لږ تر لږه په یوه لور په اړیکو کې سره راتلی شي:

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \vee (b, a) \in R$$

که یوه اړیکه رفلکسیو ، سیومتریک او ترانزیتیو وي، نو دا ، ورته اړیکي، (برابرازبسته اړیکي) بلل کيږي. دلته بیا زیات وخت  $a \sim b$  د  $a R b$  په ځای لیکل کيږي. یو ورتهاریکي ډبري  $A$  په توکي پرډیو برخډبريو ویشي ( ورته یا برابرازبسته ټولگیو)، د کوم سره چې د یوې برخډبري دوه توکي یوبل سره په اړیکو کې دربري (برابرازبسته دي). په داسي حالت کې چې دوه توکي له مختلفو برخډبريو خُخه داسي حالت نه لري.

که یوه اړیکه رفلکسیو، انتیسیمتری او ترانزیتیو وي، نو دا یو نیم نظم دی او د دې لپاره

د  $a \leq b$  په ځای لیکل کيږي. که یو نیم نظم د دې برسېره (سربېره) توتالی

وي، نو دا (توتال) نظم بللکيږي او  $A$  د  $\leq$  سره منظمه ده.

لیکونکی: ژ هیورنر

د یوې ډبري  $M$  پوتنځډبري  $\mathcal{P}(M)$  کې د ډبري خونډیونه یا په کې ځایبډنه  $\subseteq$  نیم نظم دی، ځکه چې باور لري:

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B \quad \text{رفلکسیو} \quad A \subseteq A$$

انټیټرانزیتیو قوانین. که  $M$  له یوه زیات توکي ولري،  
 ترانزیتیو نو خونديونه نظم نه ی، ځکه چې لاندې باور لري:

$$A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

$a, b \in M, a \neq b : \{a\} \not\subseteq \{b\} \wedge \{b\} \not\subseteq \{a\},$   
 دا په دې معنا چې دا ټوتالي منظمه نه ده.

اړیکي،، ټیک دومره توکي لري لکه،، د یوې پای دېری  $M$  په تواندېری کې

$$P(M) \quad |A| = |A| \quad \text{برابر ارزښته ده ځکه چې باور لري: (رفلکسیو)،}$$

$$|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A| \quad \text{(سیومتري)،}$$

$$|A| = |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C| \quad \text{(ترنزیټیو)}$$

لیکونکی: ژ هیورنر

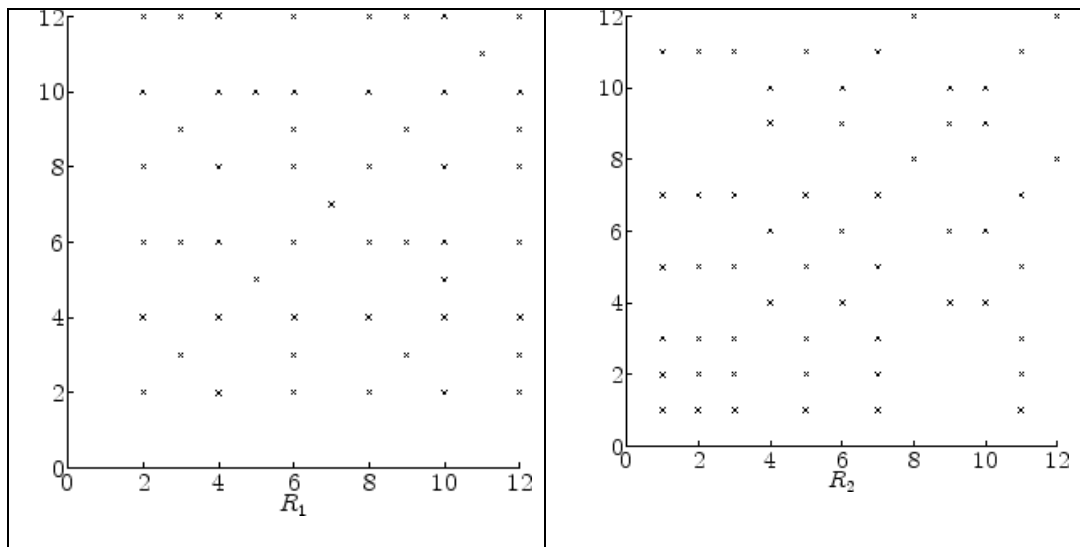
په یوې دېری باندې زیات وخت اړیکي یا په همدې ډول برابر ارزښته – اړیکي د توکو  
 د خوښو له لارط تعریفیږي. د بېلګې په توګه دوه اړیکي په

$$M = \{1, 2, \dots, 12\}$$

کې ترڅېړنې لاندې نیسو:

لومړی  $x R_1 y$  او  $x$  یو ګډ پروېشونی (مقسوم علیه مشترک)  $\neq 1$   
 لري .

دویم  $x R_2 y$  او  $x$  برابر دېر پروېشوني لري



ځيرونه يا يا تابع (بلواک) د  $M \times M$  برخدېريو په څير د اړيکو گراف بنايي .  
 اړيکې  $R_1$  سيومتريک او رفلکسيو دي، مگر نه ترانزيتيو. د بيلگې په توگه  $x = 4$  او  $y = 6$  گډ پروېشونی 2 لري او  $y = 6$  او  $z = 9$  گډ پروېشونی 3 لري، مگر  $x = 4$  او  $z = 9$  گډ پروېشونی نه لري. نو

$$(xR_1y \wedge yR_1z) \Rightarrow xR_1z$$

باور نه لري.

اړيکې برابر ارزښت - اړيکې دي. رفلکسيوي، سيومتري او ترانزيتيوي په څرگنده توگه پوره دي. برابر ارزښت - ټولگي

دي د يوه، دوه، درې څلور او شپږ پروېشونو سره.

ليکونکي: هيلېگ، کرايخ

فونکشن (بلواک يا تابع)

د يوه فونکشن  $f$  لاندې له يوې ډېرې  $A$  په يوه ډېرې  $B$  باندې يوه قانونمندی پوهيرو، چې هر  $a \in A$  توکی په يواځني ډول يو ټاکلي  $b = f(a) \in B$  باندې تنظيم کړي.

$$f : A \longrightarrow B .$$

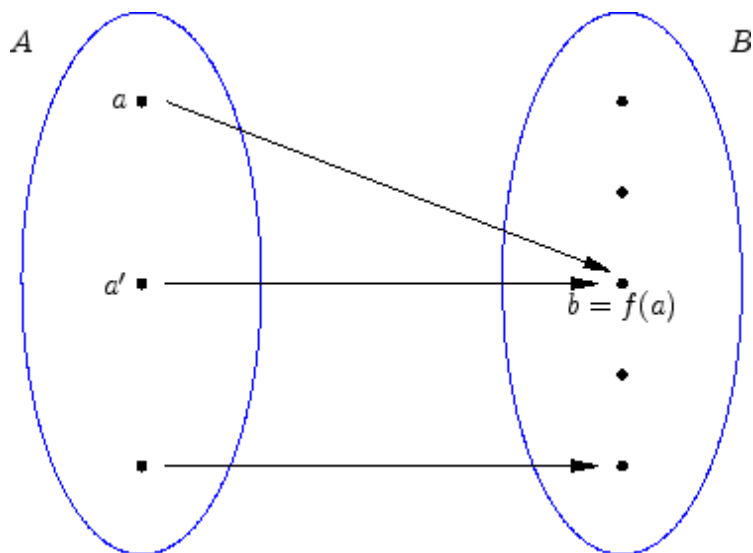
د توکو- نظم لپاره لاندې ليکنود استعماليري

$$a \mapsto b = f(a)$$

او  $b$  د  $a$  څېرې يا ارزښت په حيث بلل کيږي او همداسې  $a$  د  $b$  (د پخوا څېرې) د تعريف توکي په څېر بلل کيږي.

لکه د لاندې څېرې څخه چې کتل کيږي، بايد د  $B$  توکي د  $A$  د يوه توکي د څېرې توکي په توگه رامنځ ته شي او د  $B$  يو توکی کېدی شي د  $A$  د ډېرو توکو څېره يا نظم وي. په هر حالت بايد د  $A$  د هر توکی لپاره په يواځني توگه يوه څېره شتون ولري، دا په دې معنا چې له هر  $a$  څخه بايد يو غشی وتلی وي.

پېژندل کيږي چې څېره زيات تعريفتوکي يا د څېرې پخوانۍ يا نوره هم ښه مخکنې لري (دا په دې معنا چې څېره کېدونکی دی)، دلته د بيلگي په توگه  $a$  او  $a'$  د څېرونی لپاره کلیمه فنکشن هو کارول کيږي، په ځانگړې توگه په ريل ا حقيقي او کمپلکس اناليوزي کې.



ليکونکي: هيوليگ، هيورنر، کيمرلي

د تابع يا څيرونې يا بلواک (تابع) خويونه

د دوه ډېريو  $A$  او  $B$  ترمنځ يوه تابع

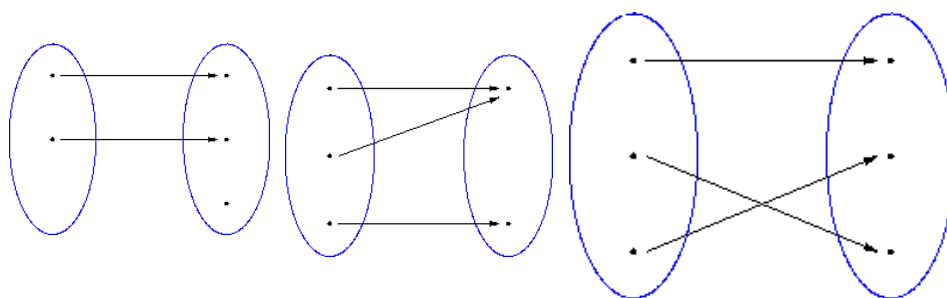
$$f : A \rightarrow B$$

داسې يا په لاندې تگه بلل کيږي:

په کې بلواک injektiv : که د هر  $a, a' \in A$  لپاره د  $a \neq a'$  سره دا  $f(a) \neq f(a')$  صدق وکړي.

په باندې (بلواک) surjektiv : که هر  $b \in B$  لپاره يو  $a \in A$  شتون ولري د  $f(a) = b$  سره.

په (بلواک) bijektiv : که (تابع)  $f$  په کې او په باندې وي. دا کليمې کېدې شي د ډېرې ډياگرام له لارې روښانه شي.

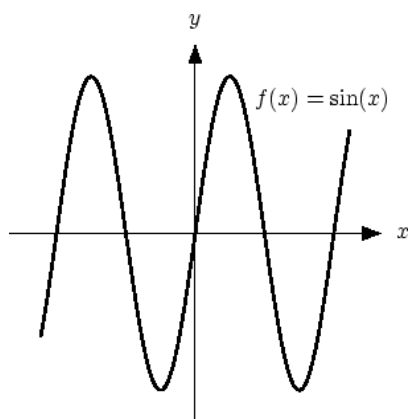


injektiv په کې

surjektiv په باندې

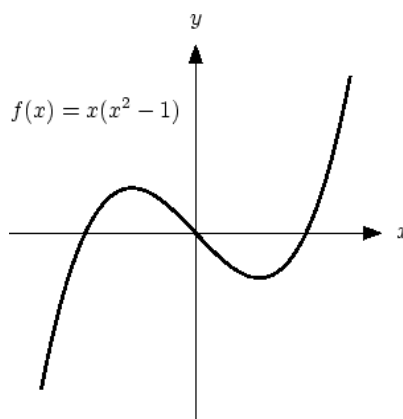
bijektiv په

د يو څو بلواکو (توابعو)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  خويونه ورکړ شوي دي



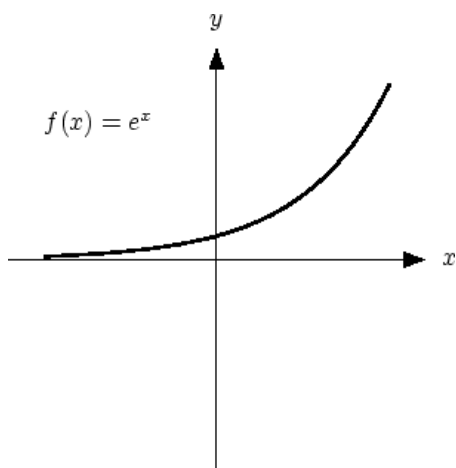
weder injektiv, noch surjektiv

نه په کې او نه په باندې



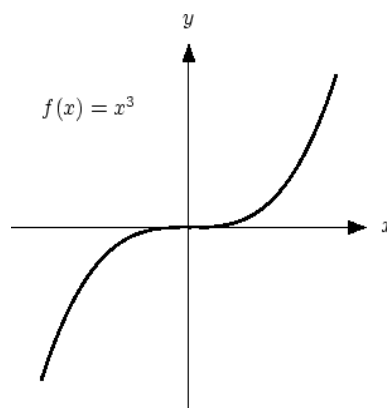
surjektiv, aber nicht injektiv

په باندې، مگر نه په کې



nicht surjektiv, aber injektiv

، نه په باندې مگر په کې



bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv

په، دا په دې معنا چې په کې او په باندې



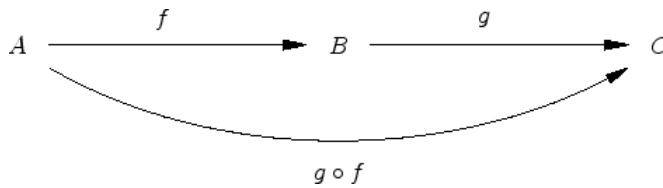
## د فنکشنونو (بلواکو یا توتبعو) ترنه یا عمليي

### Verknüpfung von Abbildungen

د دوه فنکشنونو سره گډ اېښونه) د  
 ترنه یا کمپوزیشن (زنځیرونه یا  
 $g : B \rightarrow C$  او  $f : A \rightarrow B$

$$a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad a \in A,$$

له لارې تعریف شوی او په لاندې دیاگرام کې لیدور گرځېدلی.



تابع اسوځیاتیو ده، دا په دې معنا چې  $\circ$  ترنه

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

صدق کوي، مگر په څرگند ډول کموتاتیو نه ده.

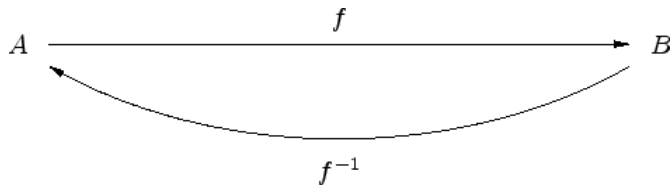
لیکونکی: هیولیک، کنش

## په څټ یا برعکس فنکشن (بلواک یا تابع) Inverse Abbildung

د یوه په فنکشن یا تابع  
 $f : A \rightarrow B$   
 لپاره د

$$b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

له لارې په څټ فنکشن یا برعکس تابع  $f^{-1} : B \rightarrow A$  تعریف ده.



په ځانگړې توگه ورته تابع دی.  $a = f^{-1}(f(a))$  دی، داپه دې معنا چې  $f^{-1} \circ f$  کټمټ يا

ليکونکي: هيوليگ، کنش

### فاکولتي يا فکتوريل Fakultät

د لومړيو  $n$  طبيعي اعدادو يا گڼونو ضرب د

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

سره په نڅښه کيږي. (لوسټل يي:  $n$  فاکولتي). له دې سره کلک ترلی يا له دې سره ه کلکه په نړاو کې تش ضرب داسې لیکو:  $0! = 1$ .

گڼ يا عدد  $n!$  د  $n$  مختلفو شیانو دمخلفو امکاناتو د ترتیب يا نظم گڼون يا تعداد ر بنایي

د لوی  $n$  لپاره د  $n!$  اسپیتوتیکي حالت دسترلینگ Stirlingschen فرمول له لارې په ورته نږدې ډول وښوول شي:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + O(1/n)).$$

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

### د بېنوم ضریبونه (خلووني) Binomialkoeffizient

د  $n, k \in \mathbb{N}_0$  لپاره د  $n \geq k$  سره د بېنوم ضریبونه تعریفوو:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-2)(k-1)k}.$$

د  $0! = 1$  له امله په ځانګړې توګه باور لري:

$$\binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1.$$

د بېنومي ضریب  $\binom{n}{k}$  د  $n$  توکوسره یوې ډېرې  $k$  - توکیزو برخدېریو ګڼون یا تعداد ورکوي.

د پاسکال درېګودی (مثلت) Pascalsches Dreieck

د بېنوم ضریبونه

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

د لاندې رېګورزیون Rekursion (په بېرته معلومو فرمولونو) په مرسته

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

په یوه درېګدیزې شېما یا شکل، داسې په نامه پاسکال درېګودي کې یا له لارې وشمېرو.

$\binom{0}{k}$				1						
$\binom{1}{k}$			1		1					
$\binom{2}{k}$			1		2		1			
$\binom{3}{k}$			1		3		3	1		
$\binom{4}{k}$		1		4		6		4		1
$\binom{5}{k}$	1	↙	↘ + ↙	↘ + ↙	↘ + ↙	↘ + ↙	↘ + ↙	↘ + ↙	↘	1
			5	10	10	5				
			⋮	⋮	⋮	⋮				

ليكونكي: هيوليگ، کنش

داد بنوولو کتمتوالی

$$\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

د  $n!$  سره وپشنې او  $(n-k+1)!k!$  سره ضربونې له لارې د

$$n+1 = k + (n+1-k).$$

سره برابرازبنته دی.

ليكونكي: هيوليگ، کنش

د بينوم درسي جمله Binomischer Lehrsatz

د بینوم درسي جملې سره کېدی شي د دوه متحولو یا اووښتونو د زیاتون یا جمعې توان وشمېرل شي.

د ټولو  $n \in \mathbb{N}_0$  لپاره صدق کوي:

$$(a + b)^n =$$

$$a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

په ځانګړي توګه د  $n = 2, 3$  لپاره:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

د بینوم جمله کېدی شي د پوره ایدګشن له لارې وښول شي.

د  $n = 0$  او  $n = 1$  لپاره کټمټوالی د

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^{0-k} b^k = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1, \quad \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = a + b$$

له امله د په خوښه  $a$  او  $b$  لپاره رښتیا یا ټیک دی.

نیسو چي د  $n$  لپاره صدق کوي. نو دی:

$$\begin{aligned}
 & (a+b)^{n+1} \\
 &= \\
 & (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\
 &= \\
 & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
 &= \\
 & a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + b^{n+1} \\
 &= \\
 & a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \\
 &= \\
 & a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\
 &= \\
 & \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k
 \end{aligned}$$

د بی نوم ضربونو لپاره کټمټوالی Identitäten für Binomialkoeffizienten

د بینوم ضربونو لپاره لاندې کټوتوالی صدق کوي:

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k},$$

$$0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k, \quad n \geq 1,$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n-k-1+i}{i}, \quad k < n,$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{i}, \quad k > 0.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

لومړي دواړه کټوتوالی تړلي د بینوم د درسي څخه لاس ته راځي،

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

د ارزښتونو  $a = b = 1$  همداسې  $a = -b = 1$  سره .

دریم کټوتوالی د ریکورزین فرمول په بیا بیا استعمال له لارې لاس ته راځي.

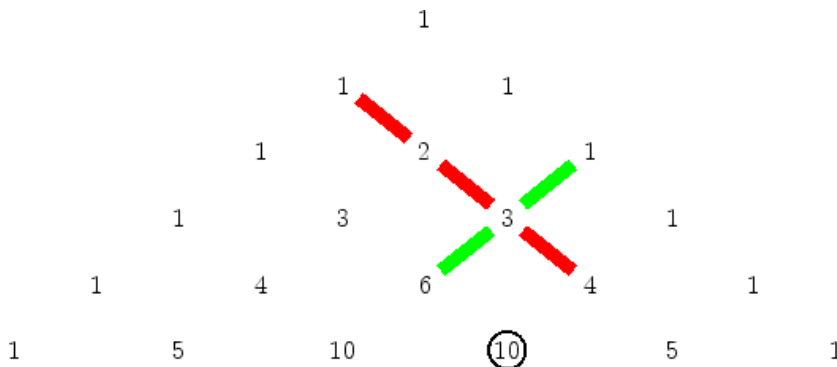
$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \\
&= \dots \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \dots + \binom{n-k-1}{0} \\
&= \sum_{i=0}^k \binom{n-k-1+i}{i}.
\end{aligned}$$

په دې مساواتو کې د په ځای ایښولو یا سبستیجیشن Substitution

$$(n - k) \leftrightarrow k$$

له لارې څلورم کټوتوالی لاس ته راځي.

دا اخري دواړه کټوتوالي کېدی شي په پاشکال درېګوډي کې جمعہ کوني لځ لارې انځور شي.





## د دېریو یا ستونو کمبیناتوریک Kombinatorik von Mengen

(د کمبیناتوریک د نورې زیاتې کتنې لپاره دې زما د شمیرپوهنې ستر کتاب وکتل شي)

لاندې جدول د مختلفو امکاناتو گڼون یا تعداد ورکوي، چې د یوې د  $n$  مختلفو توکو سره دېری خځه  $k$  توکي ټاکلی شو، د کوم سره چې باید توپیر شي، چې ایا د لړۍ پرلپسې یو رول لري (ترتیبونه) او تکرار ونه په کې اجازه لري که نه.

	sortiert منظم (د ټاکلو اړخونو له لارې) ترتیب	nicht sortiert نا منظم
له تکرار سره	$n^k$	$\binom{n+k-1}{k}$
بې له تکرار سره	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

لیکونکي: هیولیک، کنش

لومړی: نا ترتیب یا نا منظم ټاکنه بې له تکرار خځه

که د لړۍ پرلپسې په پام کې ونیو لي، نو د لومړي ځل لپاره  $n$  امکانات شتون لري،  
 $(n-1)$  امکانات د دویم لپاره، تر  $(n-k+1)$  امکاناتو پورې د  $k$ -م  
توکي لپاره، نو په ټولیزه توگه

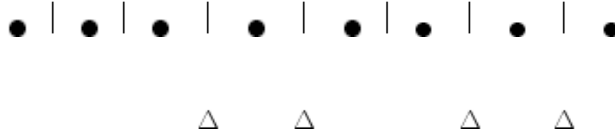
$$n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

امکانات شتون لري.

دا باید د گڼون یا تعداد  $k!$  سره وه وپشل شي چې د  $k$  توکو پرموتیشن (د توکو  
ځای بدلون: لنډ: ځای بدلون) دی.

دويم : ناتتیب شوي انتخاب د تکرار سره

يو برابر ارزښته پر اېلم دادی، چې  $n - 1$  په نځېنه شوي ( نشاني شوي) د  $n + k$  ټکو تر منح ځای په ځای شي.



د  $(i - 1)$  -م او  $i$  -م ترمنځ ټکو تعداد چې په 1 کم شوی د  $i$  -م ټوکي تکرارونو سره برابر دی. د لومړي سره سم د ممکنه په نځېنه کېدونو تعداد لپاره لاس ته راځي

$$\binom{n + k - 1}{n - 1},$$

کوم چې په جدول کې ورکړ شوي عدد سره سر خوري.

دریم : د تتیب شوي انتخاب لپاره فرمول پسې تړلی لاس ته راځي.

لیکونکي: هیولیک، کنش

په یوه مرتبان کې یو سور یو شین او یو اسماني توپونه (غونډوسکې) پراته دي. په جدول کې د دوه واړه راوستني د امکاناتو تعداد کتل کېږي (  $k = 2, n = 3$  ).

	ترتیب شوي	ناترتیب شوي یا نامنظم
د تکرار سره (دبېرته وراچوني سره)	$n^k$	$\binom{n + k - 1}{k}$

	$3^2 = 9$	$\binom{3+2-1}{2} = 6$
بی د تکرار سره (نه دبېرته وراچونې سره)	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$
	$3 \cdot 2 = 6$	$\binom{3}{2} = 3$

لیکونکي: هیولیک، کنش

### د موټر نمره Autokennzeichen

د یوه الماني موټر نمره د ایالت یا ښار لپاره د  $\leq 3$  تورو کمینېشن، د  $\leq 2$  نورو تورو او تر یوه څلورځایز عدد څخه د بېلگې په توګه :



له  $n$  توروڅخه  $26^n$  کمپینښونه شتون لري او له دې سره

$$(26 + 26^2 + 26^3) \cdot (26 + 26^2) \cdot 9999 = 1.28 \cdot 10^{11}$$

ممکنه نمرې ( که د ښار یا ایالت د ورسره ور ګډونه په پام کې ونه نیول شي

لیکونکي: هیولیګ، کنش

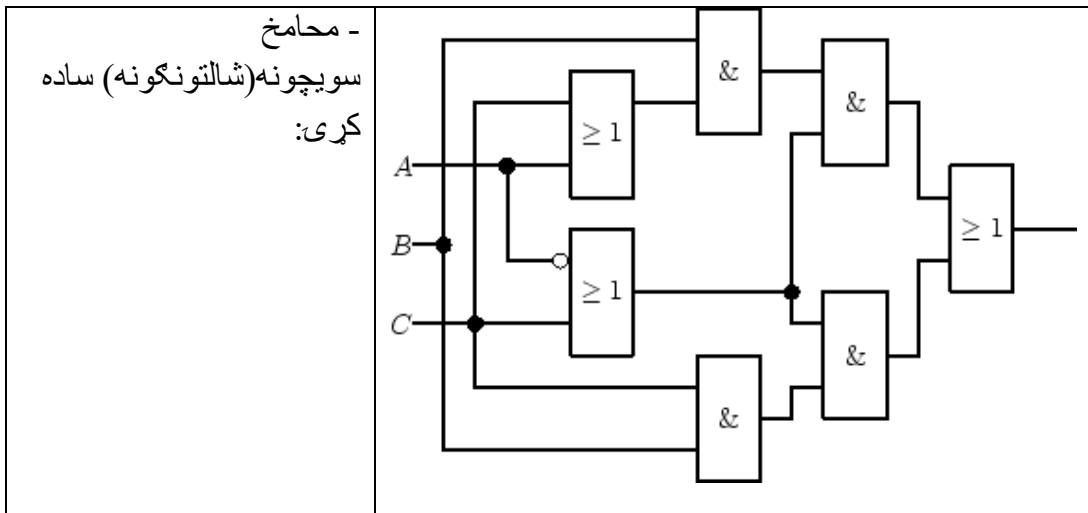
### پوښتنې

- د ښه بدلون او همداسې د رښتیا جدول سره و و زامی، چې ایا افادې یا ویبني تل ټیک دي یعنی Tautologien دي:

$$(A \vee B) \Rightarrow ((\neg A \vee B) \wedge (A \Rightarrow \neg A))$$

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \Rightarrow C)$$

- اړیکې  $\square, \diamond$  د ډېرې پوهنې څخه د منطقي علیو  $\{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$  لپاره ځای په ځای شوي. په کومو حالتونو کې باور لري:



$U, V \subset A$        $f : A \rightarrow B$        $A, B \neq \emptyset$   
 - دېری ، یوه تابع ، همداسې برخدېری

$X, Y \subset B$   
 او ورکړ شوي دي. د لاندې اړیکو رښتیاوالی همداسې نارښتیاوالی د یوې مناسبې برعکس بېلگې په مرسته وښایي:

$f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$        $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$   
 الف-      ب-

$f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$   
 پ-

$f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$   
 ت-

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 - د یوه تابع په هکله لاندې ویناوي په فورمال لیکندود افاده کړی:

الف -  $f$  په باندي نه دی      ب -  $f$  په کې نه دی

پ -  $f$  په نه دی      ت -  $f$  نه په کې او نه په باندي دی

لیکونکی: کریستیا اېپین

$n \in \mathbb{N}$   
 د - لپاره د پوره ایدکشن له لارې وښایي:

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

a)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

b)

$n \in \mathbb{N}$   
 د - لپاره د پوره ایدکشن له لارې وښایي:

الف :  $a_n = n^3 + 5n$  په 6 وپشونی دی.

ب :  $b_n = \frac{n}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$  يو طبيعي عدد دی.

- په يوه ميلمستيا کې 25 کسان سره يوځای کيږي. څومره لاسونه سره ورکول کيږي، که هر ميلمه هر بل ميلمه ته لاس ورکړي.

د شمير پوهني له لومړني کورس څخه

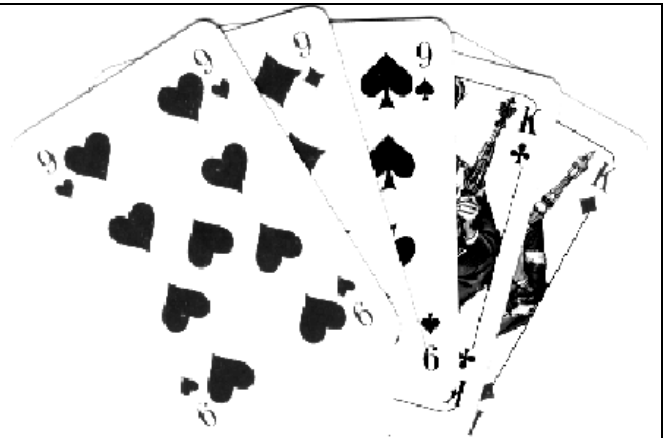
- و بنايي:

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n} \quad \text{a)}$$

$$\sum_{\ell=1}^n \binom{n+k-\ell}{k} = \binom{n+k}{k+1} \quad \text{b)}$$

لاس ته راوښي په پاسکال درېڼوډي کې انځور کړی. ليکونکی: کلاوس هيوليگ

- په يوه د کارتو لوبه کې چې له 32 کارتو جوړه ده (8 ارزښتونه 4 رنگونه) څومره امکانت شته دی، چې فول هوز Full Haus (درې برابر ارزښته او دوه برابر ارزښته) کارتې لاس ته راوړل شي؟



د دې لپاره څومره امکانت شته چې دا څېره شوي کارتې د دوه کارتو بدلولو سره يو پوکر (څلور برابر ارزښتونه) لاس ته راوړای شي؟

از مابینت Test

لومری پوینتنه:

د لاندې منطقي ابادې رښتیا ارزښت پیدا کړی

$$D : (A \Rightarrow B) \wedge (\neg C \vee A)$$

چې د ویناو  $A, B, C$  د رښتیا ارزښتونو تابع یا په واک کې وي.

هر ځل یا 'w' او یا 'f' ورکړی.

دویمه پوینتنه:

$$B = \{4, 5, 6, 7\} \quad A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

دېری او ورکړی.

په گوته کړی، چې ایا لاندې ویناوې رامنځ ته کيږي که نه (J) د هو لپاره او N د نه لپاره)

دریمه پوینتنه:

د دوه هره یوه د درې توکیزه دېریو A او B ترمنځ څومره اړیکې شتون لري؟

له ی څخه څومره بلواک یا تابع دي او څومره بلواک یې په باندې (سورجکتیو) دي؟

څلورمه پوینتنه:

و څېری چې ایا لاندې توابع یا بلواک  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  په باندې، په کې او په دي:

$$\text{a) } f(x) = x \sin x \quad \text{b) } f(x) = \exp(-x^3 + 1)$$

$$\text{c) } f(x) = x \ln \frac{1}{|x| + 1}$$

پنځمه پوښتنه:

خومره پنځه ځايزه گڼونه يا عددونه شتون لري د لاندې سره

الف: پنځه مختلف عددونه

ب) تیک دوه جوړه عددونه

شپږمه پوښتنه:

خومره امکانات شتون لري، چې ناه کسان په درېيز گروپ ووېشو؟

### تابع يا فنکشن يا بلواک Funktion

<p>يو فنکشن</p> $f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$ <p>هر د تعريف وړشو <math>D \subseteq \mathbb{R}</math> هر  توکي <math>x</math> په يوه د ارزښت  ورشو <math>W \subseteq \mathbb{R}</math> په يوه توکي  <math>f(x)</math> باندې تنظيموي..</p> <p>د فنکشن يا بلوتک <math>f</math> گراف له  تکو <math>(x, y)</math> جوړ دی د  <math>y = f(x)</math> سره.</p>	
--	--

لکه د تابع څخه چې ليدل کيږي، د تعيف وړشو (رون شين) او د ارزښت وړشو (تیاره

خر)  $x$  - محور همداسې د  $y$  - محور پرېوستونونه Projektionen دي.

د دې لپاره چې د تابع



$$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعريف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، بايد په ساده تابع رامنځ ته شوي بنديزونه په پام کې ونيسو. د لوگاريتم ارگومنټ بايد مثبت (زياتيز) وي:

$$x \geq 0. \quad 3 - x > 0$$

يعني او

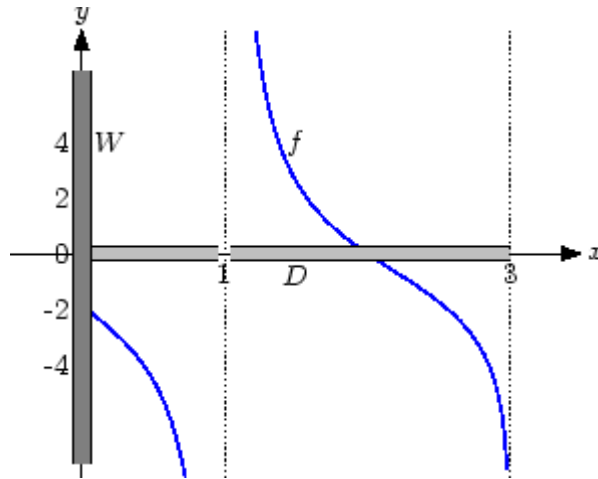
$$x \neq 1.$$

په هر حالت مخر-(ماتلاندي) بای صفر نه شي، دا په دې معنا چې

په ټوليزه توگه لاس ته راځي:

$$D = [0, 3] \setminus \{1\} = [0, 1) \cup (1, 3).$$

د  $f$  ارزښت د رسم سره روښانه يا واضح کيږي.



دا چې  $f$  د  $x \in (1, 3)$  لپاره د  $-\infty$  او  $+\infty$  ترمنځ ټول ارزښتونه نيسي يا اخلي، نو باور لري.  $W = \mathbb{R}$ .

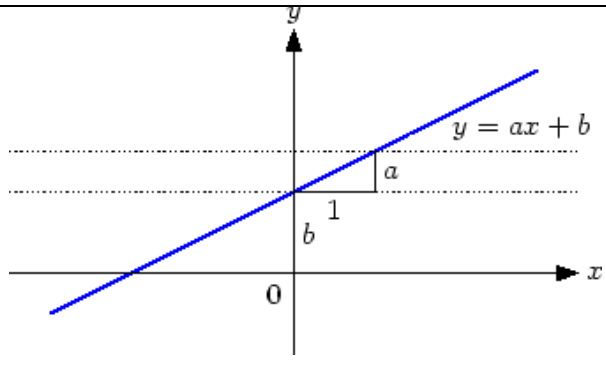
ليکونکي: هيوليگ، هيورنر، کنش

لاندي جدول د څو بنسټيزو بلواک يا توابعو د تعريف - او ارزښت ورشو بنايي:

$f(x)$	$D$	$W$
$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\ln x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x : x = (2k + 1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر، کنش

### کرښيز فنکشنونه Linear Funktion

<p>د يوه کرښيز فنکشن</p> $f(x) = ax + b$ <p>گراف يوه کرښه ده د <math>a</math> جگېډني سره او د <math>y</math> -محور غوڅي <math>b</math> سره.</p>	
---	--

الترناتيو يا بديلي انځورونې يې ټکي-جگېډني-بڼه

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = a$$

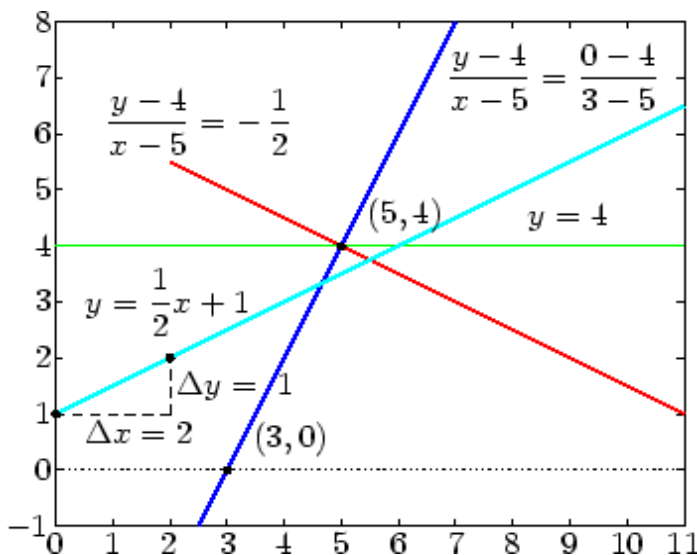
او د دوه ټکو-بڼه

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

دي، د كوم سره چې  $(x_0, y_0)$  او  $(x_1, y_1)$  په کرښه ټکي دي.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

تابع د کرښيزو فنکشنونو مختلفو انځورونو بڼې ښايي يا په نڅښه کوي.



### مربعیز فنکشنونه Quadratische Funktion

د یوه مربعیز تابع گراف

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

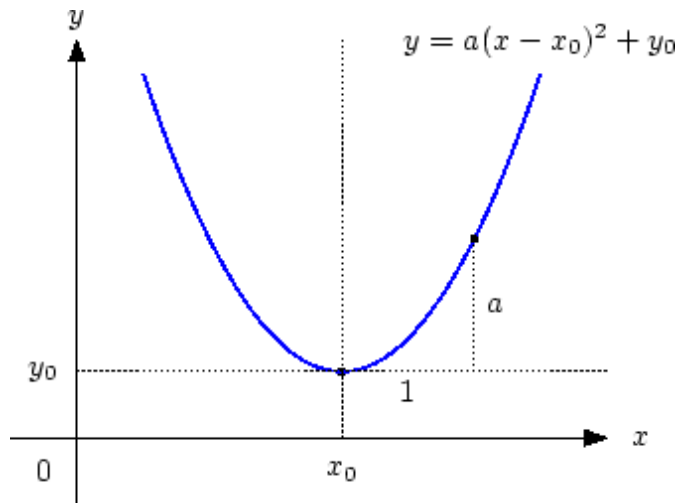
یو د

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د بني پارابول دی د ککړې

$$(x_0, y_0) = \left( -\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c \right).$$

سره.



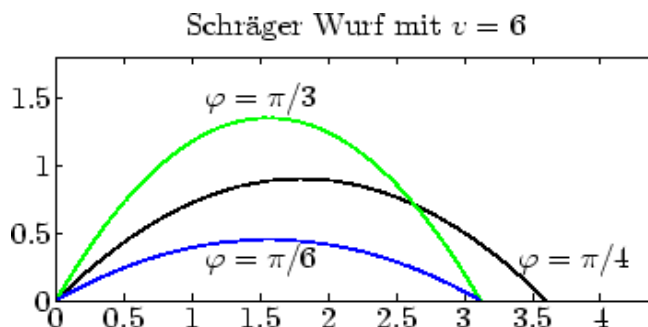
مایله گوزار یا - غورخونه Schräger Wurf

که یو تن د کوچ  $\varphi$  لاندې د یوې چټکتیا  $v$  سره وغورخول شي، نو د الوتنې لار یې یو پارابول

$$y = x \tan \varphi - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \varphi} x^2$$

بنایي، چپرته چې  $g$  د خټکي بیره (تعجیل) ده.

مایله گوزارونه یا - غورخونه د  $v=6$  سره.



مساوات د برابر د اوليز خوزبنت څخه لاس ته راځي د پيل چټکتيا  $v$  سره په  $x$  - او  $y$  - کمپوننتونو يا برخو او د همدې وخت د ازادې غورځونې بیره بيز خوزبنت سره.:

$$x(t) = vt \cos \varphi \Rightarrow t = \frac{x}{v \cos \varphi}$$

$$y(t) = vt \sin \varphi - \frac{1}{2} gt^2$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{vx \sin \varphi}{v \cos \varphi} - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \varphi} = x \left( \tan \varphi - \frac{gx}{2v^2 \cos^2 \varphi} \right).$$

د غورځونې واټن دی:

$$x = \frac{2v^2 \cos^2 \varphi}{g} \tan \varphi = \frac{v^2}{g} \sin(2\varphi).$$

دا د  $\varphi = \pi/4 \hat{=} 45^\circ$  لپاره ماکسیمال کيږي.

ليکونکي: هیورنر، هیولیک، کنش

## پولینوم Polynom

یو  $n$ -م دجې پولینوم  $P$  په لاندې بڼه لیکل کیږي:

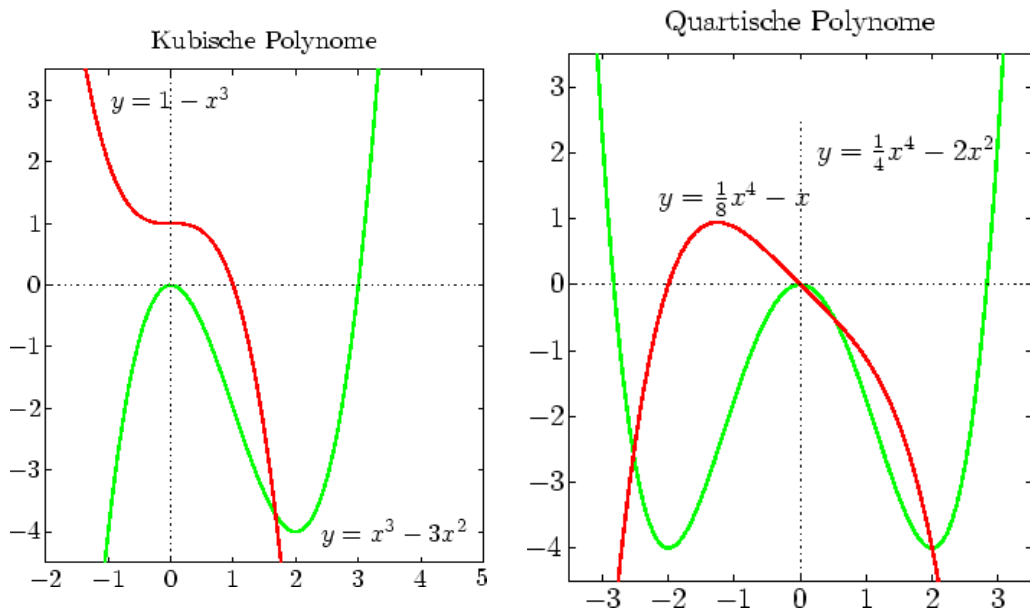
$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

د  $a_n \neq 0$  سره .

اووښتونې یا متحوله  $x$  او ضریبونه  $a_k$  کېدی شي ریښتونې ( حقیقی ) یا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توګه له دې امله له حقیقی همداسې کمپلکس پولینومونو غږیږو.

لیکونکي: هیولیک، هیرنر

لاندې توابع مکعبی  $n = 3$  او مربعی  $n = 4$  پولینومونه په ګوته کوي، د څرنګوالي (کوالیټي) مختلف تابع ګراف سره



لیکونکي: هیورنر، هیولیک، کنش

## راشنل فنکشن یا بلواک (تابع) Rationale Funktion

یونسبتي تابع د صورت (ماتباندي) درجي  $m$  او مخرج (ماتلاندي) درجي  $n$  سره یو د دوه پولینومونو وېش دی.

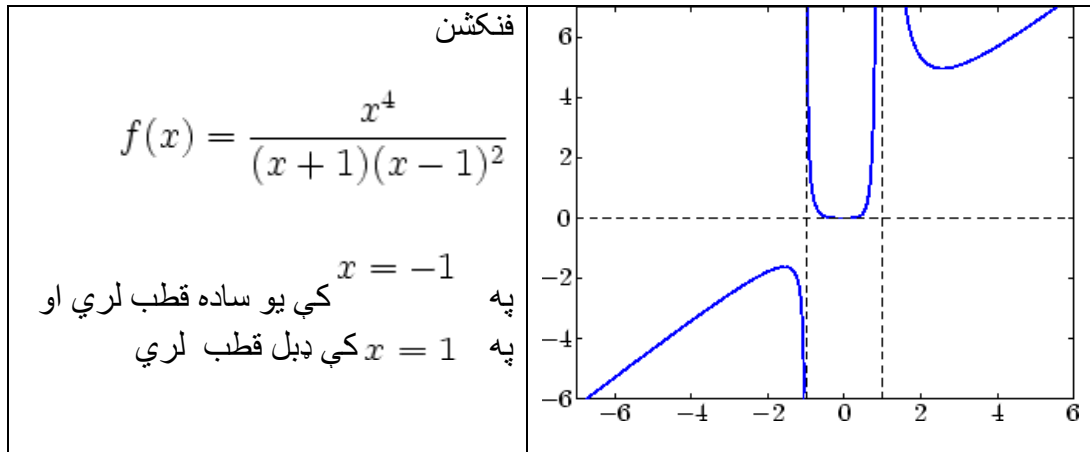
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n}.$$

دا انځورونه ناوېشور  $irreduzibel$  بلل کيږي، که  $p$  او  $q$  کوم گډ کرښیز ضریب ونه لري.

د مخرج صفرځایونه راشنل تابع  $r$  د تعریف تشیاوې دي او د پول ځایونو په نامه یاديږي. د دوی نظم د صفرځایونو ډېرځلوالی دی.

د اووښتونې یا متحولې  $x$  او ضریبونه  $a_k, b_k$  کېدی شي حقیقي یا کمپلکس عددونه وي. په اړونده توګه د حقیقي یا کمپلکس رېښتونې فنکشن څخه غږیږو.

لیکونکي: هیولیک، اپ



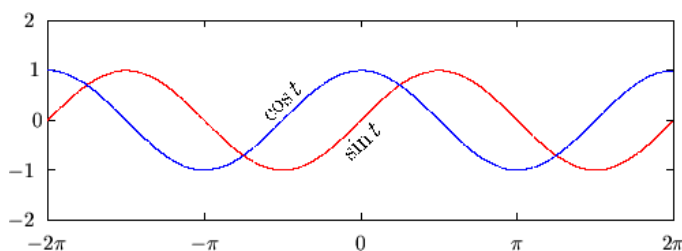
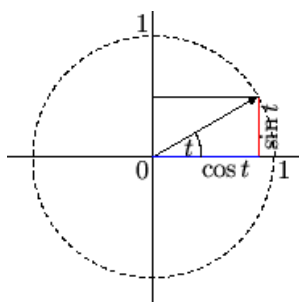
د تابع څخه پښندل کيږي، چې  $f$  په یوه ساده قطب کې مخخښه بدلوي او په ډبل قطب کې مخخښه نه تغیروي. لیکونکي: هیولیک، اپ

## ساین او کوساین Sinus und Kosinus

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

سره کواورینات چې په سرچینه کې په کوچ  $t$  څرخول شوی تکی  $(1, 0)$  په نڅبنه کیږي.



دواړه د گردۍ یا دایرې توابع کوسان او ساین  $2\pi$  - پریودیکی (تل بېرته راگرځېدونې) دي او باور لري

$$\cos t = \sin(t + \pi/2)$$

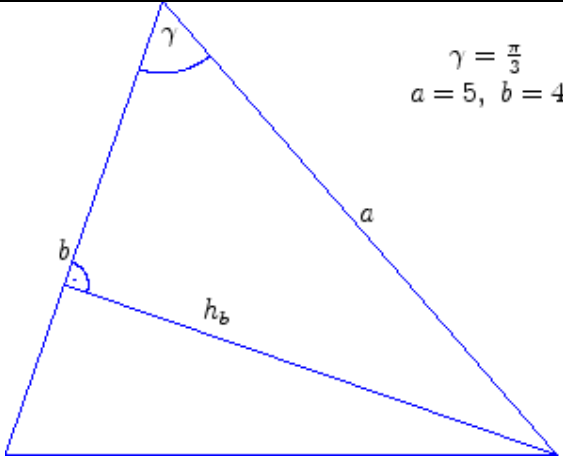
$$\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

د تر مخنڅبنې پورې د دایرې تابع د ولاړگودیز درېگودې (قایمالزایه مثلث) د قطر (نیمې) سره چې اوږدوالی یې 1 دی دو لارو (عودو) ضلعو اوږدوالی ښایي. یو څو ځانگړي ارزښتونه یې دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0



<p>د دې لپاره چې د خپره شوي درېګوډي د سطره وټاکلی شو، لومړی جکوالی <math>h_b</math> شمېرو:</p> $\sin \gamma = \frac{h_b}{a} \Rightarrow h_b = a \sin \gamma .$ <p>له دې سره لاس ته راځي:</p> $F = \frac{1}{2} ab \sin \gamma .$	 <p style="text-align: right;"><math>\gamma = \frac{\pi}{3}</math> <math>a = 5, b = 4</math></p>
---	--

د ورکړ شوو ارزښتونو لپاره لاس ته راځي:

$$F = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} .$$

د ساين او کوساين لپاره د جمعي جمله(قضيه)

د داېرې توابعو  $\sin t$  او  $\cos t$  لپاره لاندي اړيکي صدق کوي:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta$$

په ځانگي توگه

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha .$$

ليکونکی. ژ. هيورنر

تابع

$$u(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$$

اړيکي د دوه لړزېدنو يو ځای رامنځ ته کېدنه روښانه کوي. د جمعي قضیې په

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

مرسته کېدی شي انځورونه ساده شي. د

$$\Delta\omega = |\omega_1 - \bar{\omega}|$$

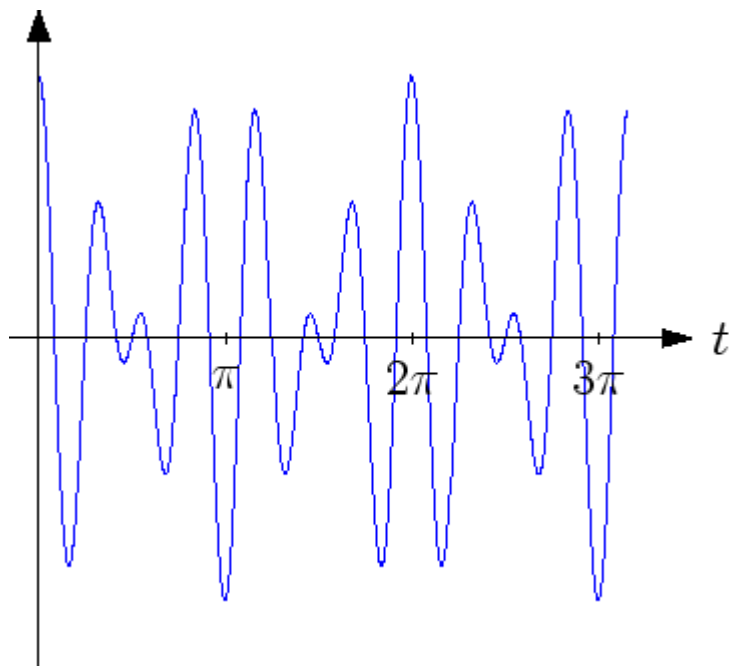
سره له

$$\cos(\bar{\omega} - \Delta\omega t) = \cos(\bar{\omega} t) \cos(\Delta\omega t) + \sin(\bar{\omega} t) \sin(\Delta\omega t)$$

$$\cos(\bar{\omega} + \Delta\omega t) = \cos(\bar{\omega} t) \cos(\Delta\omega t) - \sin(\bar{\omega} t) \sin(\Delta\omega t)$$

څخه لاس ته راځي، چې

$$u(t) = 2 \cos(\bar{\omega} t) \cos(\Delta\omega t).$$



بلواک د  $\omega_2 = 5$ ,  $\omega_1 = 7$  لپاره لرځېدنه بڼايي، دا په دې معنا چې  $\bar{\omega} = 6$ ،  
او  $\Delta\omega = 1$

$$u(t) = 2 \cos(6t) \cos t.$$

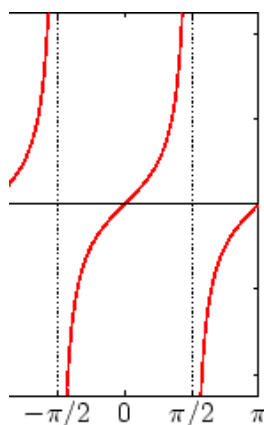
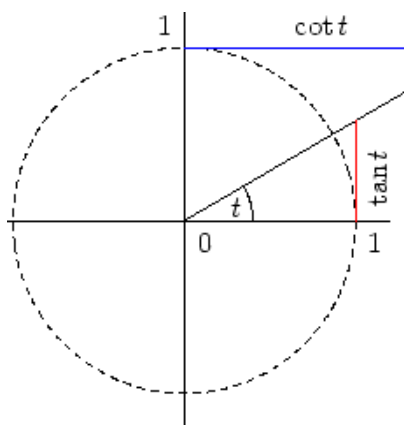
ليکونکي: هيوليگ، کرايڅ

## تانجنت او کوتانجنت

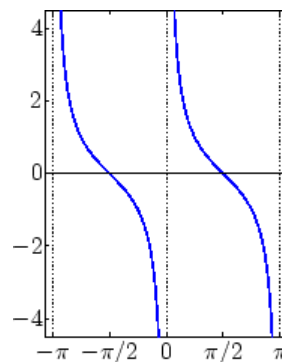
توابع تانجنت او کوتانجنت د

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

سره تعريف شوي. دا په ولاړگوييز درېگويي (قايم الزاويه مثلث) کې د تر  
مخنځينې پورې د ولاړو اړخونو تناسب ورکوي



Tangens

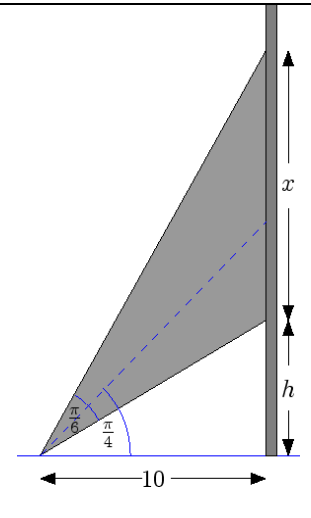


Kotangens

يو څو څانگري ارزښتوني دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

تابع د شکل له مخي یو د برېښنا مخروط ،  
چې په یوه ولاړ دېوال پرېوځي ښایي



د دې لپاره چې خورا لوي يا ماكسيمال پوسېده د ټاكنی شو، جوړوو

$$\frac{h}{10} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\frac{x+h}{10} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

که  $h = \frac{10}{3}\sqrt{3}$  په دویم مساوات کې ځای کړو نو لاس ته راځي

$$\frac{x}{10} = \sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3},$$

$$x = \frac{20}{3}\sqrt{3}$$

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

یعنی

## اکسپوننشل توابع (بلواک)

توان تابع

$$y = e^x = \exp(x)$$

د اویلر Eulerschen عدد  $e = 2.71828\dots$  سره اکسپوننشل تابع بلل کيږي. دا د

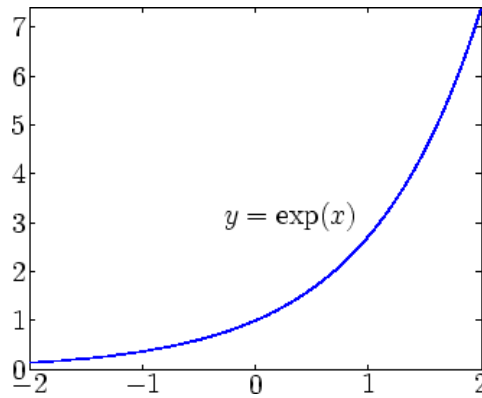
تولو  $x \in \mathbb{R}$  لپاره مثبت (زاتيز) ده او فنکشنل مساوات

$$e^{x+y} = e^x e^y .$$

پوره کوي.

$$e^{-x} = 1/e^x$$

په ځانگړې توگه دی .



ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

اکسپوننشل تابع د ډبرو بيولوژيکي پروسو زياتوالی روښانه يا تشریح کوي.

د بېلگې په توگه د يوه ساده نفوس موډل متناسب دی د اوسنيو نفوس تعداد  $p(t)$  سره د  $t$  په وخت کې، دا په دې معنا چې

$$p(t + \Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t)) .$$

د  $\Delta t \rightarrow 0$  لپاره دا د ډېروالي قانو د  $p(t)$  مودلی کیري.

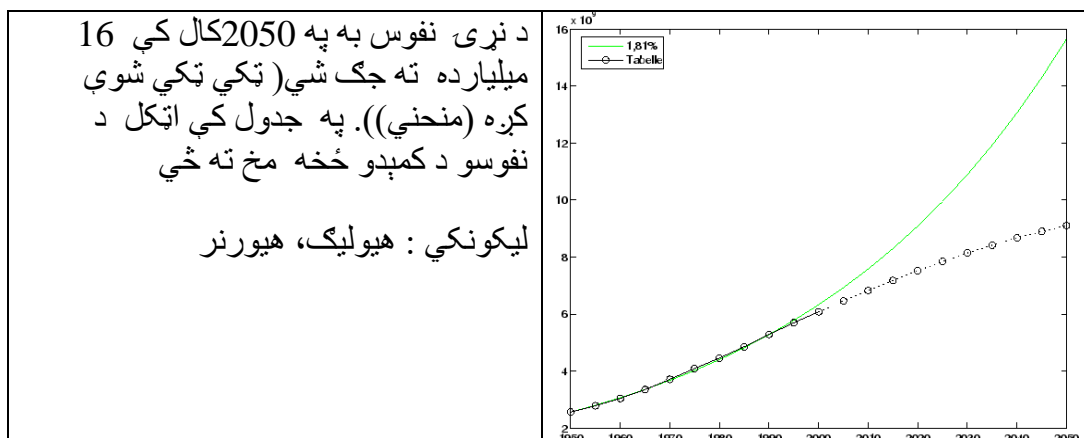
لاندي جدول د نړۍ نفوس بنيابي د کلني ډېرېدنې سره. (اتکل ارزښت)

Jahr	Bevölkerungszahl	اتکل ارزښت
کال	د نفوسو تعداد	Rate
1950	2555078074	1.76 %
1955	2779669781	1.87 %
1960	3039332401	2.02 %
1965	3345837853	2.16 %
1970	3707610112	2.05 %
1975	4088224047	1.80 %
1980	4456705217	1.79 %
1985	4854602890	1.77 %
1990	5283755345	1.54 %
1995	5690865776	1.37 %
2000	6080141683	1.25 %
2005	6460553564	1.12 %
2010	6823634553	1.03 %

2015	7175675066	0.95 %
2020	7518010600	0.86 %
2025	7840660355	0.76 %
2030	8140344240	0.68 %
2035	8416742278	0.60 %
2040	8668391454	0.53 %
2045	8897073495	0.47 %
2050	9104205830	

کلنی د نفوسو منځنی ډېروالی په کلونو 1950-2000 کې 1.81 % وو. د 1950 کال وروسته د منځني ثابت ډېروالي سره.

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$



د کټي گټه Zinseszins

یوه پیلېدایي  $x$  د  $n$  - واره وکونو همداسې اخستو د یوې **Rate**  $r$  ( $r < 0$ ) له کبله لاندې پیل پای بدایي  $r > 0$  بzw همداسې. د یوې گڼې ضریب  $(1 + p)$  له کبله لاندې پیل پای بدایي ورکوي:

$$y = (1 + p)^n x + \frac{(1 + p)^n - 1}{p} r .$$

له دې سره  $p = 1$  یوه 100% د گټې د یوې ربحي د کلنې اېښوونه په گوته کوي

موثره کلنې ربحه  $p_j$  د میاشتنۍ گټونې څخه شمېری کیري د یوې  $p_m$  ربحي (گټې) سره

$$p_j = (1 + p_m)^{12} - 1 \geq 12p_m .$$

لیکونکي : هیولیک، هیورنر

بنسټیزه سرمایه په لومړني ربحپرېود کې په پام کې نیول کیري، اېښوونه او همداسې اخستنه یا راوستنه په لومړي ځل د هر ورپسې کال. دا د لاندې راکوي:

$$\begin{aligned} n = 1 : & \quad y = x(1 + p) + r, \\ n = 2 : & \quad y = (x(1 + p) + r)(1 + p) + r. \end{aligned}$$

په ټولیزه توگه صدق کوي:

$$y = (\dots (x(1 + p) + r)(1 + p) + r) \dots)$$



$$= x(1+p)^n + (1 + (1+p) + (1+p)^2 + \dots + (1+p)^{n-1})r$$

دا په نوکانو کې د  $r$  افاده کیدی شي د هندسي جمعې فرمول سره واپول شي او سری دا ورکړل شوی فرمول لاس ته راوړي.

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

یو د 100000 یورو پور (قرضه) په کلني گټونه او یوې گټونې یا ربحي % 5 سره د 10 کاله وروسته بېرته ورکړ شي. سری د

$$y = 0, n = 10, p = 0.05, x = 100000$$

سره گټه لاس ته راوړي:

$$r = \frac{1.05^{10} \cdot 100000 \cdot 0.05}{1.05^{10} - 1}$$
$$= 12950.46$$

د میاشتنی د  $\frac{5}{12}\%$  په گټونې یا په گټه اېښوونې سره دا راکوي

$$n = 120, p = \frac{1}{240}$$

په ورته توگه

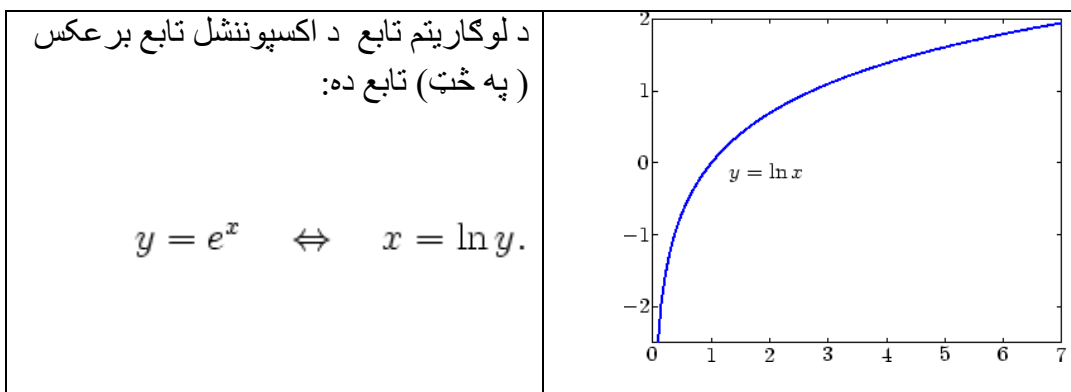
$$r = \left(\frac{241}{240}\right)^{120} \cdot 100000 \frac{\frac{1}{240}}{\left(\frac{241}{240}\right)^{120} - 1}$$
$$= 1060.66$$

د میاشتنی گټې تادیه کونې ده، کلنی 12727.86 ده. دلته د مخه د گټې تادیه کونه یو زیان منځ ته راولي. د  $\frac{4}{12}$  % سره به دا د لاندې سره برابر وای:

$$\left( \frac{(1 + \frac{1}{300})^{12} - 1}{\frac{1}{300}} - 12 \right) \cdot 1060.66 = 235.96 .$$

لیکونکي : هیولیگ، کرایخ

## لوگارېتم Logarithmus



دا  $(0, \infty)$  په  $\mathbb{R}$  کره مونوتون (یو غریز) کره جگېدونکی تنظیموي او لاندې د تابع مساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

$$\ln(1/x) = -\ln x$$

په ځانگړې توگه لرو:

لیکونکی: هیولیگ، کوپف

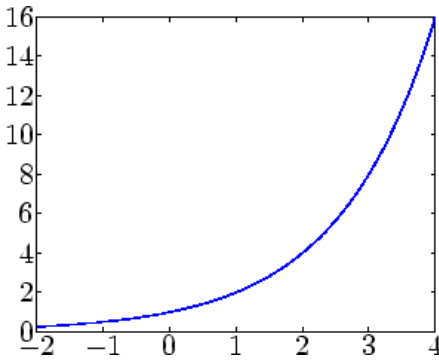
تولیز په توان تابع او لوگاریتم

$a > 0$   
د لپاره تعریفوو:

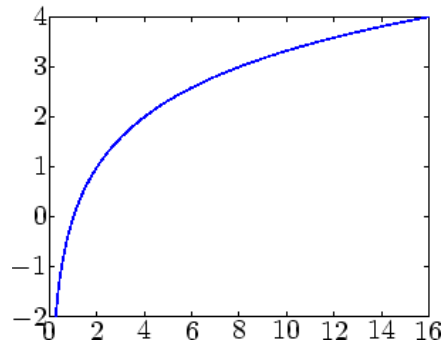
$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

د برعکس تابع (بلواک)  $x = \log_a y, y > 0$ .  
سره

په ځانګې توګه د 10 په بنسټ لوگاریتم لپاره لیکو  $\log = \log_{10}$  او  $\text{ld} = \log_2$   
د دوه ګوني یا دوال لوگاریتم لپاره.



$$f(x) = 2^x$$



$$f(x) = \text{ld}(x)$$

لیکونکی: هیولیک، کوپف

د توان او لوگاریتم لپاره شمېر قوانین

له تعریفونو او تابع مساواتو څخه د اکسپوننشل - او لوگاریتمي توابعو لپاره لاس ته راځي:

$$\begin{aligned}
a^{s+t} &= a^s a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\
a^{s-t} &= a^s/a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\
(a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t \log_a x.
\end{aligned}$$

برسیره (سربیره) پر دی د مختلفو بنسټونو ترمنځ شمېر بدلون لپاره اړیکې باور لري:

$$\log_b x = \log_b a \log_a x.$$

په ځانګړې توګه

$$\log x = (\log e) \ln x.$$

لیکونکی: هیولیک، کوپف

لاندې بېلګې د شمېر قاعدو استعمال روښانه کوي .

(i)

$$\begin{aligned}
\ln(4x^2) - 2\ln(2) &= \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 = \\
&= 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 = 2\ln x
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
&\log_4(x^2) + \\
(2x) &= 2\frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2\frac{\ln x}{\ln 2} \quad \text{ld}
\end{aligned}$$

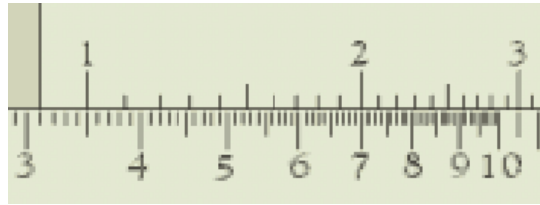
لیکونکی: هیولیک، کوپف

د لوگارېتم شمېرونی

په لوگارېتم کې لاندې قانون باوري دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

له دې کبله کېدی شي دوه سکالا یا کچېرني یو په بل کېږدو او د نتسجې په توگه نه د دې عددونو جمعه بلکه ضرب لاس ته راځي.



د پورته څېرې څخه د بېلگې په توگه لاس ته راوړو، چې  $3.5 \cdot 2 = 7$ . دلته لومړی 1 د پورته سکالا په 3.5 (لومړی ضریب) د په لاندې سکالا شمېرل کېږي. بالاخره 2 د پورته سکالا (دویم ضریب) د ضرب نتیجه په لاندې سکالا لوستل کېږي.

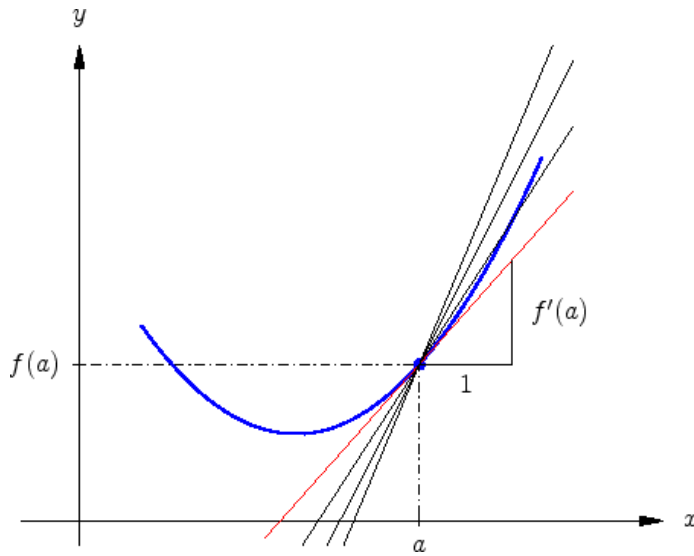
لیکونکي، هیولیک، کوپف، ویپر

## مشتق یا رابېلېدنه Ableitung

یو تابع  $f$  په یوه ټکي  $a$  کې مشتقور دی، که دا د رابېلېدنې یا مشتق په څېر نیوله شوي پوله (لیمیت)

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري



هندسي مشتقروالی په دې معنا دی، چې د غ،څوون (قطاعو) جگپښه چې د

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

سره ورکړل شوي د تانجنت جگوالي په لور و هڅيري يا کورگنت شي.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

د دې لپاره هم لیکو او جگ مشتقونه د  $f'', f''', \dots$  او

همداسې د  $f^{(2)}, f^{(3)}, \dots$  سره بنایو. یو فنکشن  $f$  په یوه ډېری  $D$  مشتق بلل

کیري، که  $f'(x)$  د ټولو  $x \in D$  لپاره شتون ولري.

لیکونکی: هیولیک، کویف

د تابع  $f(x) = x^2$  مشتق

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

دويم مشتق  $f''(x) = 2$  يو ثابت دی.

د يوه په خوښه مونوم  $f(x) = x^n$  ، لپاره ، بينوم د فرمول په مرسته لاس ته راځي

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1},$$

د كوم سره چې  $O(h^2)$  د نظم ترم  $h^2$  په گوته کوي.

ليکونکی: هيوليگ، کوپف

د  $f(x) = \sin x$  مشتق کېدی شي د جمعې قضيې په مرسته وشمېرل شي.

له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

د  $t = x + h/2$  سره کمېنټريش لاس ته راکوي:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin((x+h/2) + h/2) - \sin((x+h/2) - h/2)}{h} = \\ &= \frac{2 \cos(x+h/2) \sin(h/2)}{h}. \end{aligned}$$

له

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin(h/2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

امله بنی اړخ د  $h \rightarrow 0$  لپاره د  $\cos x$  په لور هڅیږي.

### غوره (مهم) مشقونه

لاندې جدول د غوره توابعو مشتقونه راكوي:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$c$	$0$	$r \neq 0, x^r$	$rx^{r-1}$
$e^x$	$e^x$	$\ln  x $	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

لیکونکي: هیولیک، کویف



## د مشتق کرښیزوالی Linearität der Ableitung

مشتق کرښیز دی دا په دې معنا چې د مشتقور تابعو  $f$  او  $g$  لپاره صدق کوي

$$(rf)' = rf', \quad r \in \mathbb{R},$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د ضرب یا حل قانون

د دوه مشتقور تابعو  $f$  او  $g$  مشتق دی

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

تولیز د ضرب لپاره صدق کوي:  $f = f_1 \cdots f_n$

$$f' = \sum_{i=1}^n f'_i \frac{f}{f_i}.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د ضرب د قانون سره لاس ته رځي

$$\frac{d}{dx}(x^2 \ln x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1).$$

که  $\sin x$  د ضریب په حیث ورزیات کړي، نو بیا د ضرب قانون استعمال لاس ته راځي

$$\frac{d}{dx} [\sin x(x^2 \ln x)] = \cos x(x^2 \ln x) + \sin x(x(2 \ln x + 1)).$$

په بدیل ډول کېدی شي دا فرمول په ډېرواره ضرب وکارول شي او لاس ته اړې راوړي

$$\frac{d}{dx} [\sin x(x^2 \ln x)] = \cos x(x^2 \ln x) + 2x(\sin x \ln x) + \frac{1}{x}(\sin x x^2).$$

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

د وېش قانون Quotientenregel

د دوه مشتقور توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو  $x$  کې د  $g(x) \neq 0$  سره. په ځانګړې توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د راشنل تابع

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - 2x}{4 + 3x^2}$$

مشتق دی:

$$\frac{(1 - 2x)'(4 + 3x^2) - (1 - 2x)(4 + 3x^2)'}{(4 + 3x^2)^2} = \frac{-2(4 + 3x^2) - (1 - 2x)(6x)}{(4 + 3x^2)^2} =$$

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4 + 3x^2)^2}$$

د ضرب قانون سره يې بدیل لاس ته راځي

$$\left( (1 - 2x) \frac{1}{4 + 3x^2} \right)' = (-2) \frac{1}{4 + 3x^2} + (1 - 2x) \frac{-6x}{(4 + 3x^2)^2} = \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4 + 3x^2)^2}.$$

لیکونکي: هیولیگ، کرایخ

زنځیري قانون

د توابعو دزنځیروني

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

لپاره مشتق دی:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

د  $f(y) = z, g(x) = y, h(x) = z$  سره دا هم لیکل کیري

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

(لیکونکي: هیولیگ، کوپف)

د زنځیر قانون

$$h(x) = \sin \left( \underbrace{\ln(1 + x^2)}_{y=g(x)} \right)$$

د روبښانه ونې لپاره تعريفيري:

$$h'(x) = \frac{d}{dy} \sin(y)g'(x) = \cos(\ln(1+x^2))g'(x).$$

د دنني مشتق شمېرنه  $g'(x)$  سر له نوې د زنځيري قانو له مخې صورت نيسي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x).$$

بديلي کېدی شي مشتقیزه ليکنود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dw} \frac{dw}{dx} = \cos(y) \frac{1}{w} 2x = \cos(\ln(1+x^2)) \frac{1}{1+x^2} (2x).$$

ليکونکي: هيوليگ، کوف

ايمپليځيت مشتقور توابع

د بيلگي په توگه د

$$E : x^2 + 3y^2 = 7$$

له لارې ورکړ شوې ايليپسي (هگي يا بيضوي) له لارې لرو:

$$\frac{d}{dx} (x^2 + 3y^2) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx} 7 = 0$$

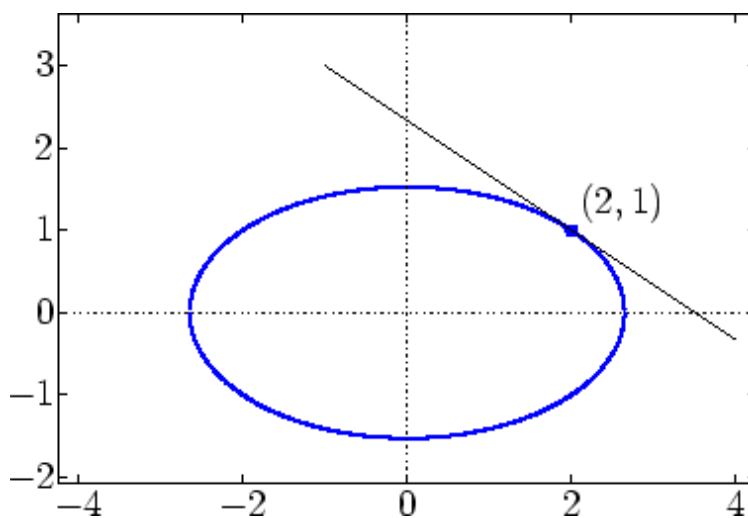
همداسي

$$y' = -\frac{1}{3} \frac{x}{y}$$

سره د تانجنت جگوالی  $y \neq 0$  باندې په یوه ټکي د  $E$  له سره کیدی شي په

لپاره لاس ته راځي  $(2, 1)$  وټاکل شي. د بیلگې په توگه د

$$y' = -\frac{1}{3} \frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$



په ورته توگه کیدی شي لور یا جگ مشتقونه هم وشمیرل شي. د  $yy'$  لپاره د ضرب قانون کارول یا استعمال له لارې دی

$$\frac{d}{dx} (2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0.$$

له دې لاس ته راځي

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

ټاکلي  $y'(x)$  د یوه ټکي د کواوردینات ایښوولو او همدا اوس د  $E$  بیرته په ارزښت له لارې څرګند ارزښتونه وټاکل شي.

لیمرنکي: هیولیګ، کنېف

## لوګاریتمي مشتق

فرمول

$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln |f(x)|$$

کېدی شي د بڼې  $y = g(x)^{h(x)}$  مشتق نیونې ته د  $g(x) > 0$  سره وکارول شي. لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx} (h(x) \ln g(x)) .$$

لیکونکي: اپې، هیولیګ

تابع

$$f(x) = x^x$$

د  $x > 0$  سره مشتق دی.

$$f'(x) = x^x \frac{d}{dx} \ln(x^x) = x^x \frac{d}{dx} (x \ln x) = x^x (\ln x + 1) .$$

د  $g(x) = x^{\ln x}$  لپاره لاس ته راځي

$$g'(x) = x^{\ln x} \frac{d}{dx}(\ln x)^2 = 2x^{\ln x} \frac{\ln x}{x} .$$

ليکونکي: اېپ، هيوليک

### نيوټن ټنلار يا قانون Newton-Verfahren

<p><math>f</math></p> <p>د نيوټن قانون سره د يوه تابع صفرځای کېدی شي و ټاکل شي. <math>x_0, x_1 \dots</math> د پرلپسې يا ترادف نږدې ارزښت شمېرنې يا Approximation د کرښيزوالی له لارې وگټل شي. نږدېونه <math>x_{l+1}</math> د تانجنت غوڅتکی دی په <math>(x_l, f(x_l))</math> تکي محور سره. کي د <math>x</math></p> $x_{l+1} = x_l - f(x_l)/f'(x_l)$	
--	--

د يوه ساده صفرځای  $x_*$  ( $f'(x_*) \neq 0$ ) لپاره د نيوټن-ايتراشن Newton-Iteration ځای - لوکالي مربعيز ټولې ته هڅيږي (کونورگنت)، دا په دې معنا چې

$$|x_{l+1} - x_*| \leq c |x_l - x_*|^2$$

د پيلتکي  $x_0$  لپاره د  $x_*$  په يوه پوره کوچني چاپيريال کې.





$$x_{l+1} - \sqrt{a} = (x_l + a/x_l)/2 - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_l} (x_l - \sqrt{a})^2.$$

$$x_0 \neq 0$$

د نیوتون تئلاړ هندسي روښانه وني څخه لاس ته راځي، چې د ټولو لپاره تکرار پولي ته ځي.

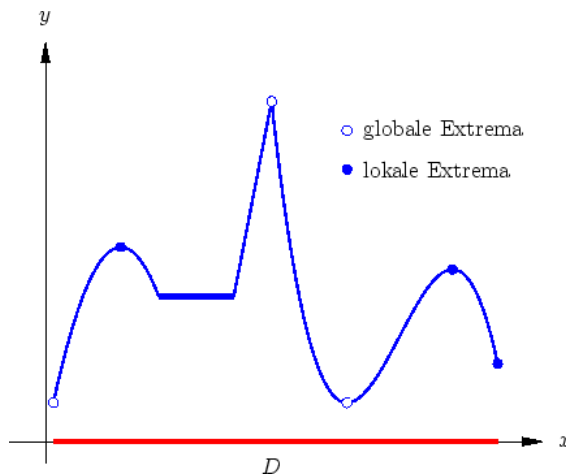
## افراطیت Extrema

يو تابع  $f$  په  $a$  کې په ډبري  $D$  يو ځای اړوند مينيموم لري، که وي:

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in D.$$

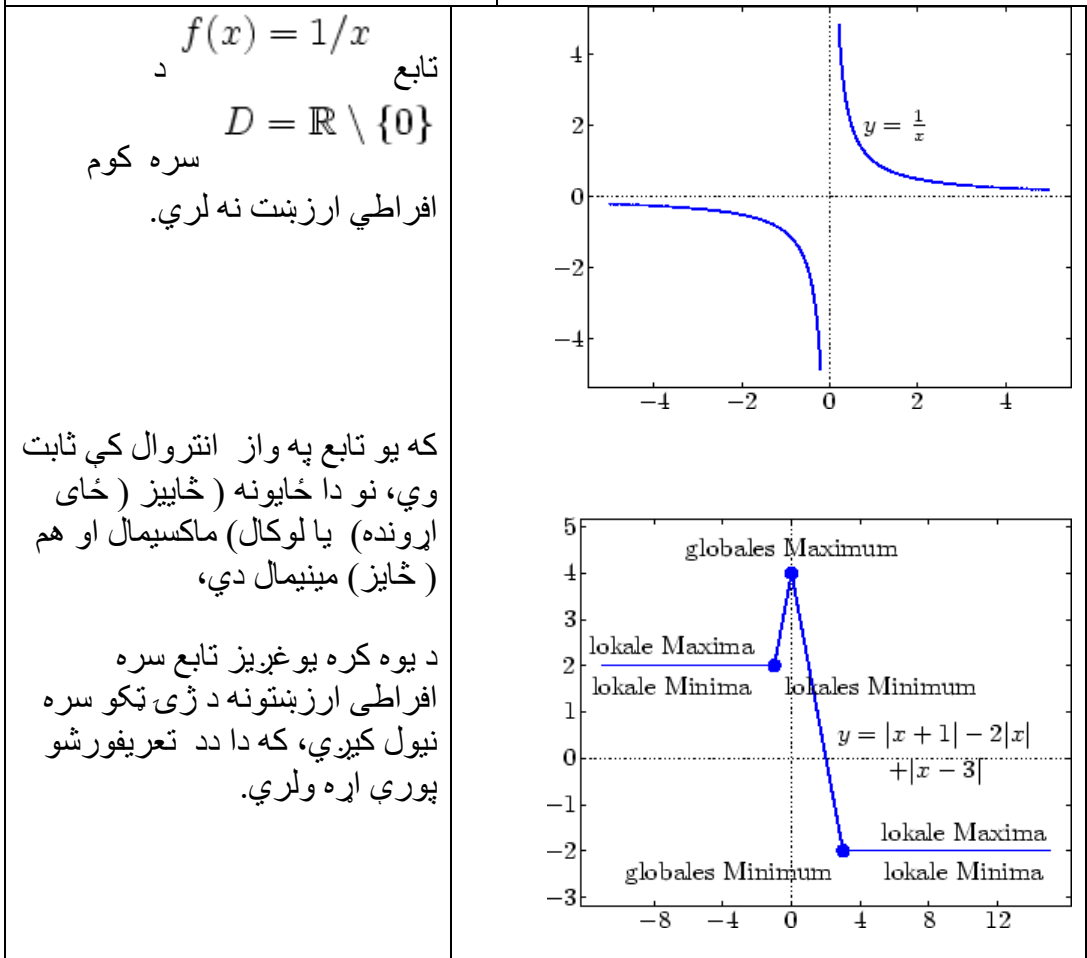
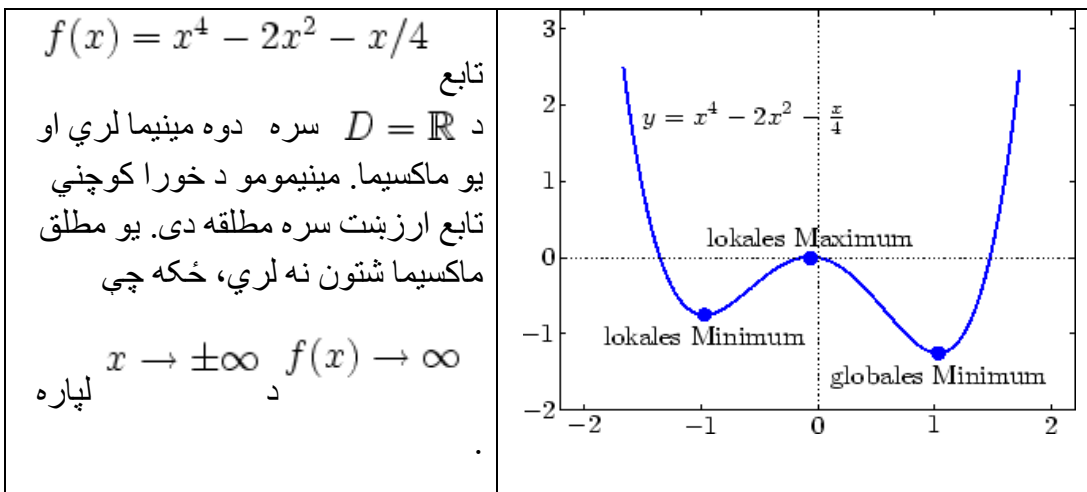
د ځای اړونده مينيموم سره د تابع ارزښت  $f(a)$  په يوه خورا کوچني چاپېريال  $(a - \delta, a + \delta) \cap D$  کې مينيموم دی.

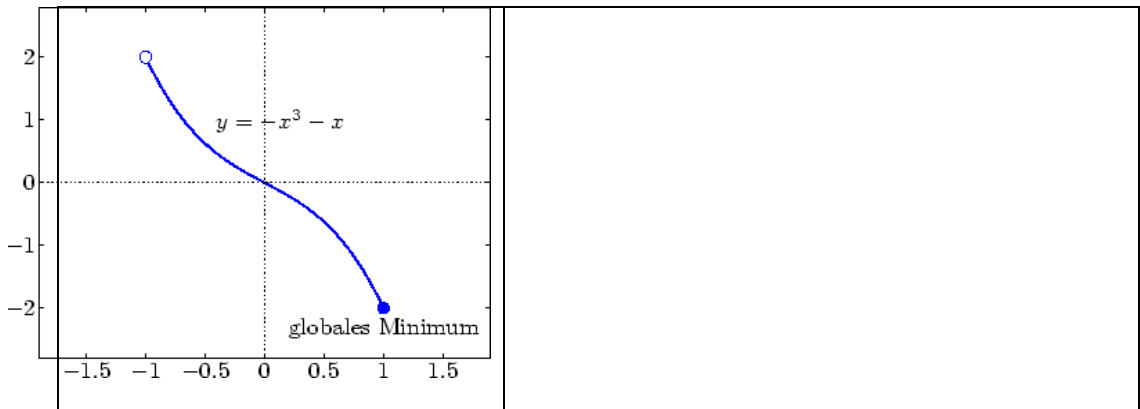
گلوبال او لوکال (مطلق او ځای اړونده) خورا جگ ارزښتونه (ماکسيموم) په ورته توگه تعريف دي.



په يوه بند انټروال په ټوټه ډول نابریکېدوني او مشتقور تابع کېدی شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتق په په صفر ځایونو، پرېکېدځایونو یا ژي ټکو کې رامنځ ته شي. دا ډول ټیوپ کېدی شي د جگو مشتقونو په مرسته او دتابع ارزښتونو د پرتله کوني له لاري پیدا کړای شي. لیکونکي: هیورنر، هیولیک

په لاندې کې به یو څو تیویپکې حالتونه تر بحث لاندې راښيي یا و څپرل شي.





لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

له یوه کلي  $D$  څخه یوه بنار  $S$  ته یو سرک جوړیږي. کلي ته په واټن  $a$  همدا اوس بنار ته یوه شاه لار (گرندی لار) جوړه ده. د بنار څخه د  $P$  ټکي پورې، چې کلي ته نږدې گرندی لار پرته ده، اوږدوالی  $b$  لري.

<p>سیده کرنیزه ټوټه لار جوړیږي. له کومې چې بنا رته زر رسېدل تضمینوي، که په گرندی لار له <math>v_a = 120</math> km/h منځنی چټکتیا (سرعت) او <math>v_n = 60</math> km/h په دنوې ځنګیزه ټوټه لار لار شي.</p>	
---	--

واټن  $x \geq 0$  د  $P$  او فرعي ټوټه سرک ترمنځ په گرندی د واټن شمېرته د اړیین وخت د مینیمال کولو له لارې.

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

بنار ته د رسیدو لپاره .

د مشتق صفر ایښوونه

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0,$$

راکوي

$$v_a x = v_n \sqrt{a^2 + x^2} \Leftrightarrow x_m = a/\sqrt{3}$$

د لوکال انحرافي ځای په څېر. ایا چې دا مینیموم دی، باید دا د وهل شوي لار وخت د انټروال د پای ټکو لپاره و ازمایل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a + b}{v_a}, \quad t(0) = \frac{2a + b}{v_a}, \quad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{v_a}$$

په روښانه توګه  $t(0) \geq t(x_m)$  دی. نامساوات  $t(b) \geq t(x_m)$  ورته دي و دي لاندې ته:

$$t(b) \geq t(x_m) \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{3}a + b$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 \geq 3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = (a - \sqrt{3}b)^2 \geq 0.$$

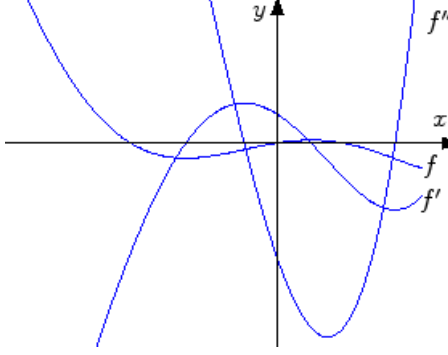
دا اخري نامساوات تل پوره کيږي، او له دې سره  $x_m$  اوپټیمال دی، که

$$b \geq a/\sqrt{3} \text{ وي.}$$

په بل حالت کې  $x_m$  په انټروال  $[0, b]$  کې نه دی پروت او په ژی ټکي  $b$  پروت مینیموم ته ، یعنی ښار ته په سیده ټرنلار، رسېدی شي.

لیکونکي: هیورنر، هیولیک

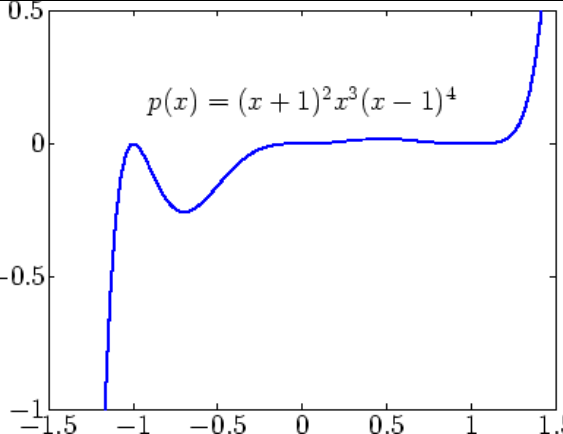
## افراطي ارزبنتونو آزماينت Extremwerttest

<p>د افراطي ارزبنتونو ډول يا تيوب باندي كيدي د جگو مشتقونو په مرسته پرېكړه وشي كه <math>f</math> دوه واړه ناپرېكېدونكي او مشتقور وي او</p> $f'(a) = 0, \quad f''(a) > 0$ $(f''(a) < 0),$	
--	--

نو  $f$  په  $a$  كې يو خای اړونده مينيموم (ماكسيموم) لري. كه دويم مشتق د  $a$  په خای كې ورك شي، نو بايد جگ مشتقونه پرېكړي ته راكښل شي يا راوړل شي. كه باور ولري:

$$f^{(n)}(a) \neq 0, \quad \text{او} \quad f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$$

نو  $f$  په  $a$  كې نيك هلته يو افراطي خای لري، كه جوړه وي. په دي حالت كې  $f$  په  $a$  كې يو خای اړونده خورا جگ - يا همداسي خورا نيبټ ټكي لري، كه  $f^{(n)}(a) < 0$  همداسي  $f^{(n)}(a) > 0$  وي.

<p>پولينوم</p> $p(x) = (x + 1)^2 x^3 (x - 1)^4$ <p>په <math>x = -1</math> كې يو ډبل، په <math>x = 0</math> كې يو درېواړه او په <math>x = 1</math> كې يو څلورواړه صقرخای لري.</p>	
--	--

صدق کوي

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p''(-1) = 2(-1)^3(-2)^4 < 0.$$

په  $x = -1$  کې  $p$  یو مینیموم لري. په  $x = 1$  کې  $p$  یو ماکس لري، ځکه چې

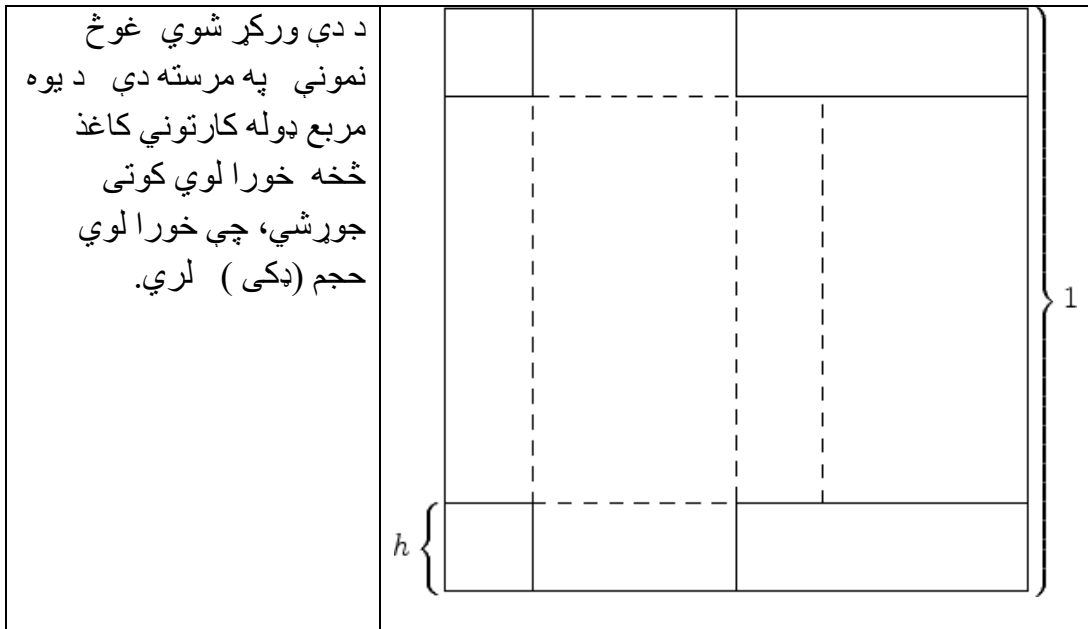
$$p(1) = \dots = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0.$$

بالاخره  $p$  د

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 3!(-1)^4 \neq 0$$

له امله او یو مخنځبنه بدلون په  $x = 0$  کې په سرچینه کې افراطي ځای نه شته.

کوتی Schachtel



حجم يا ڊڪي دی:

$$v(h) = \underbrace{(1 - 2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1 - 2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

اورڊوالی                      سور                      جگوال

د مشتق صفر ڇايونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

تري

$$h = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

د ممکنه ڇای ارونده افراطي ڇايونه لاس ته راڃي. فقط  $h = \frac{1}{6}$  هندسي موخه ور

$$v(1/6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}$$

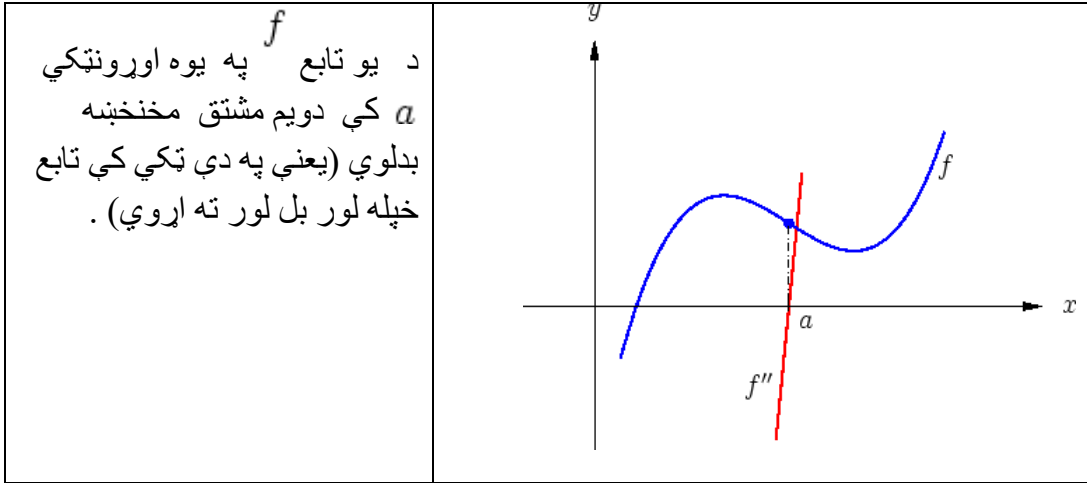
دی او

دا چي د ڙی تڪو  $h = 0$  او  $h = 1/2$  لپاره حجم يا ڊڪي دی، نو کوتی د

لپاره خورا لوي حجم لري.  $h = 1/6$

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

اورونتيکي ( نقاط انعطاف Wendepunkte )



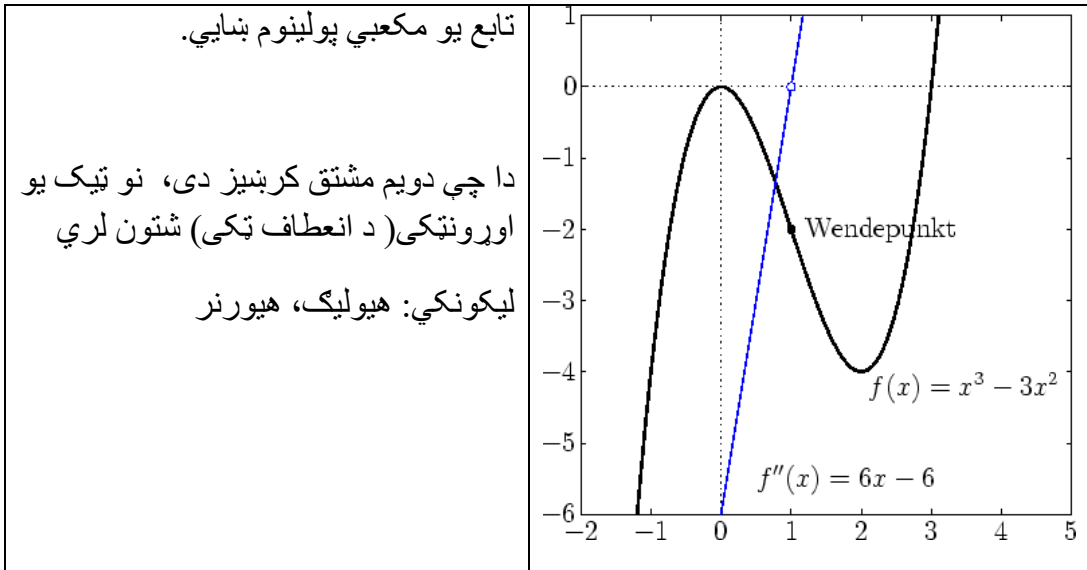
$$f''(a) = 0$$

او پوره دی، چې

د یوه پوره هوار تابع لپاره اړین دی، چې

$$f'''(a) \neq 0$$

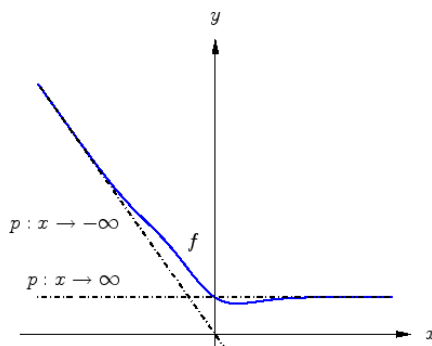
لیکونکي: هیولیگ، هیورنر



ګاونډي یا لنډ: ګاونډ (مجاورتها Asymptoten)



يو تابع د يوه تابع  $f$  اسيمپتوت دی ، که  $x \rightarrow -\infty$  يا د  $x \rightarrow \infty$  وي د  $f(x) - p(x) \rightarrow 0$  لپاره.



په ورسره بلد ډول  $p$  د  $f$  په څېر يوه ساده بڼه لري او د دې په چوپړکې ، چې  $f(x)$  د څرنگوالي حالت د لوی  $x$  لپاره وڅېړي.

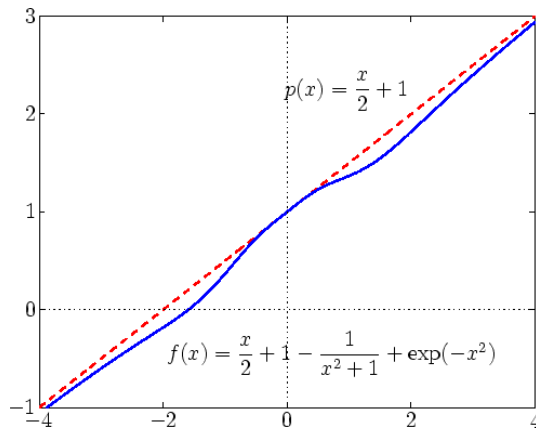
د ځانگړو معناو کرښيز اسيمپتوتونه  $p(x) = ax + b$  دي. دوي د نورو ترڅنگ د منحنی يا کزرو بحث کې يو رول لوبوي.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د يوه څېره شوي يا متشکل شوي تابع  $f(x)$  لپاره د  $|x| \rightarrow \infty$  لپاره تناسب د کرښيزو ترمونو له خوا ټاکل کيږي، ځکه چې

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \exp(-x^2) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0.$$

له دې لاس ته راړني سره کرښه  $p(x) = x/2 + 1$  اسيمپتوت ده.



ليكونكي: هيوليگ، هيورنر

د راشنلتابع گاونډيا- اسيمپتوتونه Asymptoten rationaler Funktionen

يو راشنل تابع

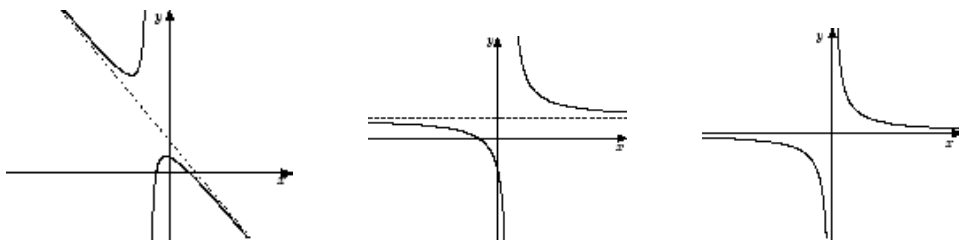
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

تيک هلته يو کرنيز اسيمپتوت لري که  $q + 1$  له گراد يادرجي  $p \leq$  وي.

د  $\text{Grad } p < \text{Grad } q$  لپاره باور لري

$$\lim_{p \rightarrow \pm\infty} r(x) = 0,$$

داپه دي معنا چي د  $x$ -محور اسيمپتوت دی.



د پولینومویش له خوا:  $\text{Grad } e^q \leq \text{Grad } p \leq \text{Grad } q + 1$  لپاره اسیمپتوت لاس ته راځي د

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

د  $\text{Grad } \tilde{p} < q$  سره. اسیمپتوت پرته (افقي) ده  $(a = 0)$  ، که  $\text{Grad } p = q$  وي.

که د صورت درجه له یوه څخه زیاته د محرج له درجې لویه وي، نو یوه اسیمپتوتیکي

پولینوم لري د  $\geq 2$  درجې

لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د راشنل توابعو

$$r_2 = \frac{2x^2}{x+1} \quad r_1 = \frac{4x+3}{2x+1}$$

او

لپاره دپولینوم وېش له لارې لاس ته راځي:

$$r_1(x) = 0x + 2 + \frac{1}{2x+1}$$

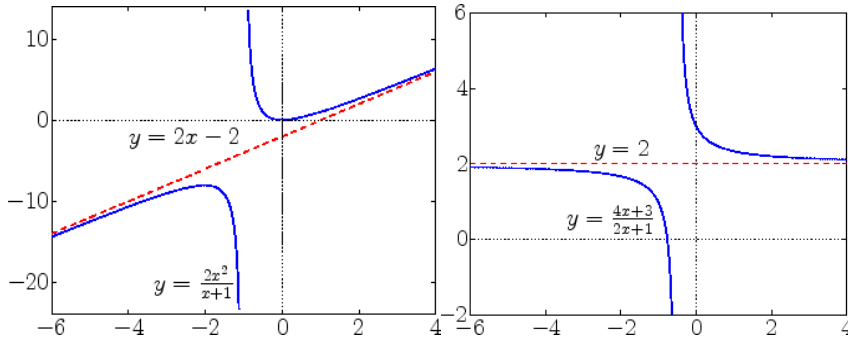
$$r_2(x) = 2x - 2 + \frac{2}{x+1}$$

او

اسیمپتوت یا گاوند

$$y_2 = 2x - 2 \quad \text{او} \quad y_1 = 2$$

دا دوه بېلگې په لاندې خُبرو کې روښانه شوي دي.



ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

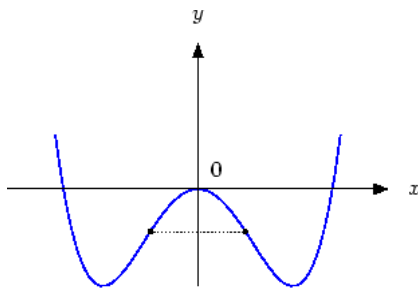
### سيومتري Symmetrie

يو تابع  $f$  جوړه (جفت) دی، که  $f(x) = f(-x)$  وي ، دا په دې معنا، چې که

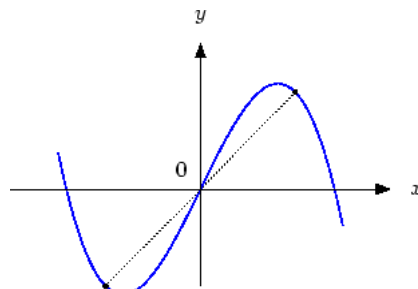
گراف د  $y$ -محور ته سيومتري وي. د يوه ناجوړه (تاق) تابع لپاره

$$f(x) = -f(-x)$$

دی، او گراف و سرچيني ته ټکی سيومتريک دی.



gerade Funktion

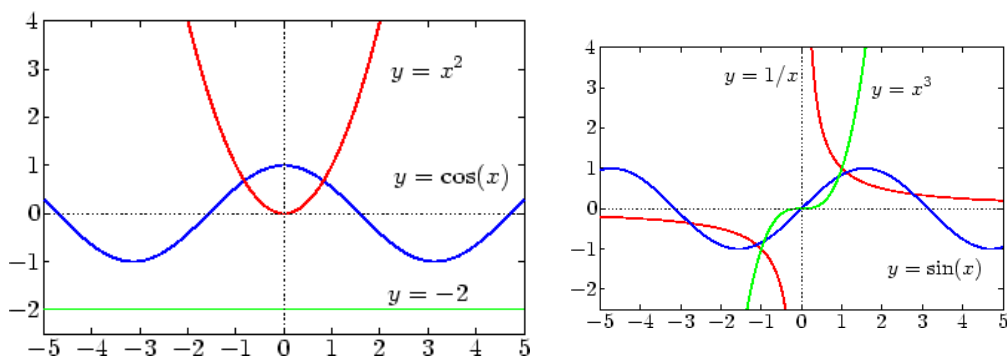


ungerade Funktion

د دوه جوړه او ناجوړه توابعو ضرب جوړه دی. د دې برعکس د یوه جوړه او یوه ناجوړه تابع ضرب ناجوړه یا طاق دی. د جمعي او تفریق جوړولو سره ډول ساتلی پتیري.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر، کنش

دا لاندې څېره بنسې لور ته یوڅو جوړه او کین لور ته یوڅو ناجوړه توابع بنسایي.



د مناسبو کمبینېشنونو جوړولو سره نورې بېلگې لاس ته راځي. نو توابع

$$f(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x, \quad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x) \sin x - g(x)x^3$$

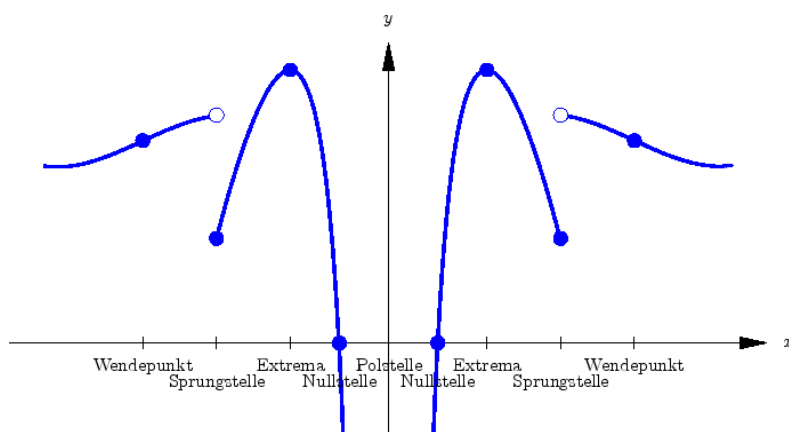
ناجوړه دي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر، کنش

د کږو یا منحنيو خبرې اترې (بحث)

د یوې تابع د څرنګوالي حالت د قضاوت لپاره کېدی شي لاندې ټکي په پام کې ولرل شي:

- Symmetrien سيومتر
- Periodizität تَل بېرته راگرځېدنوالی
- Unstetigkeitsstellen پرېکېدنځایونه
- Nullstellen → Vorzeichen (صفرځایونه)
- Extrema → Monotoniebereiche همغريزوالي وشوگاني ( افرابیت
- Wendepunkte → Konvexitätsbereiche د کونوکسی ورشو ( اورونتکی د انعطافنقطه
- Polstellen قطبځایونه
- Asymptoten اسمپتوتي يا گاونډيتوبونه



د توابعو داسې يو تحليل د گرو خبرې اترې يا د منحنيو بحث بلل کيږي

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

د کبرو بحث بنوول يا روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin(3x)$$

خيرو .

$$\sin x = -\sin(-x)$$

ناجوړه تابع دی..

سيمتري: دا چې

تل بېرته راگرځېدنه يا پريوديځي: تابع پخپله لکه د ساين تابع پخپله  $2\pi$  - پريودي ده او په راتلونکي کي فقط په انټروال  $[-\pi, \pi]$  ترڅېرني راځي.

د پرېکېدنې ځايونه: تابع له ناپرېکدونکو توابعو مرکبه جوړه شوي او له دې امله پرېکېدنځايونه نه لري.

صفر ځايونه: د جمعې (زياتون) قضيه سره  $\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

دی:

$$f(x) = 2 \sin x - \frac{4}{3} \sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3} \sin^2 x\right)}_{\neq 0}$$

تابع په 0 او  $\pm\pi$  کي صفر ځايونه لري..

افراطيت: تابع

$$f'(x) = 2 \cos x - 4 \sin^2 x \cos x = -2 \cos x + 4 \cos^3 x \stackrel{!}{=} 0$$

د  $\cos x = 0$  يا  $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$  لپاره ورکيري ، نو

$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4.$$

دا چي تابع په ټول  $\mathbb{R}$  تعريف او پريوديکي ده، زينکي ترڅېرني نه راځي.

د دويم مشتق د مخنځېني يعني

$$f''(x) = 2 \sin x - 12 \cos^2 x \sin x$$

مخنځېني او تابع ارزښتونو د پرتله کوني له لاري کېدی شي د افراطيت تيوپ يا ډول وټاکل شي:

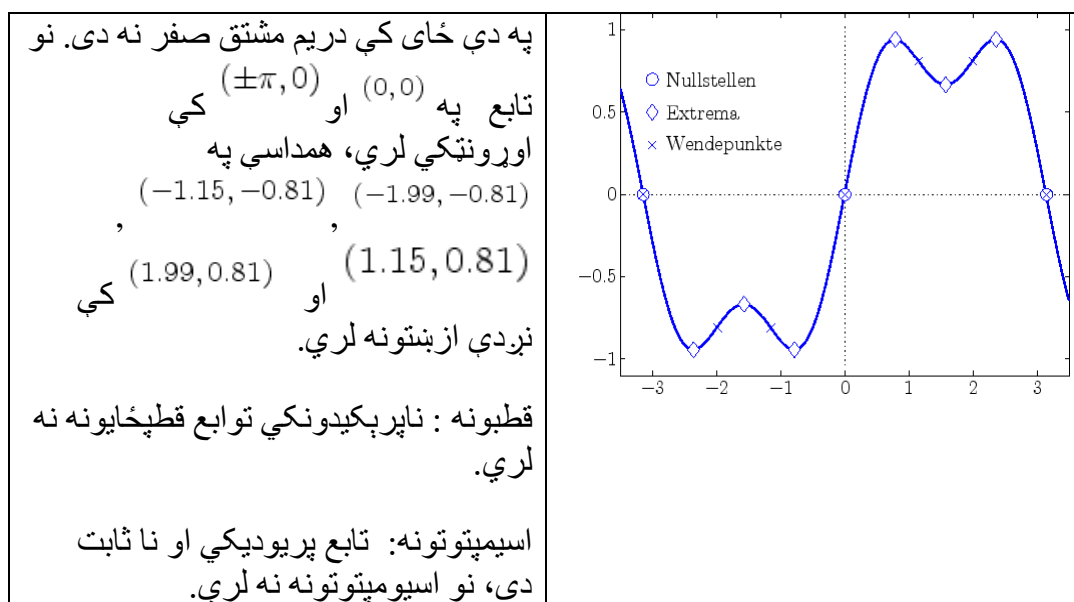
$x$	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اورونٽيکي (نقطه انعطاف)

$$f''(x) = 2 \sin x - 12 \cos^2 x \sin x = -10 \sin x + 12 \sin^3 x \stackrel{!}{=} 0$$

د  $\sin x = 0$  يا  $\sin x = \pm\sqrt{5/6}$  لپاره پوره دي، دا په دې معنا چې

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$



ليکونکي: هيوليگ، هيورنر



بیلگه :

د یوه کړي بحث د بنووني لپاره یو تابع

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترخپړني لاندې نیول کیری.

سیومتري: صورت ناجوره(طاق) او مخرج جوړه(جفت) دی. نو تابع ناجوره دی، داپه دې معنا چې سرچیني ته ټکی سیومتريک دی.

پریودیوالی یا تل بېرته راگرخېدنوالی: تابع پریودیکی نه دی.

د پرېکېدني ځایونه: صفرځایونه  $\pm 1$  د صورت صفرځایونه نه دي. له دې سره په  $f$  باندې ناپرېکېدونکی دی.  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

صفرځایونه: صورت د  $x = 0$  لپاره ورکیری.

افراطیت:

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2 - 1)^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

دا چې تابع ساده صفحایونه لري، نو افراطیت فقط ځای اړوند دی. افراطي ارزښتونه دي:

$(-2, -4/5)$  ،  $(2, 4/5)$  ځای اړوند خورا جگ ټکی ، ځای اړوند خورا ټیټ ټکی.

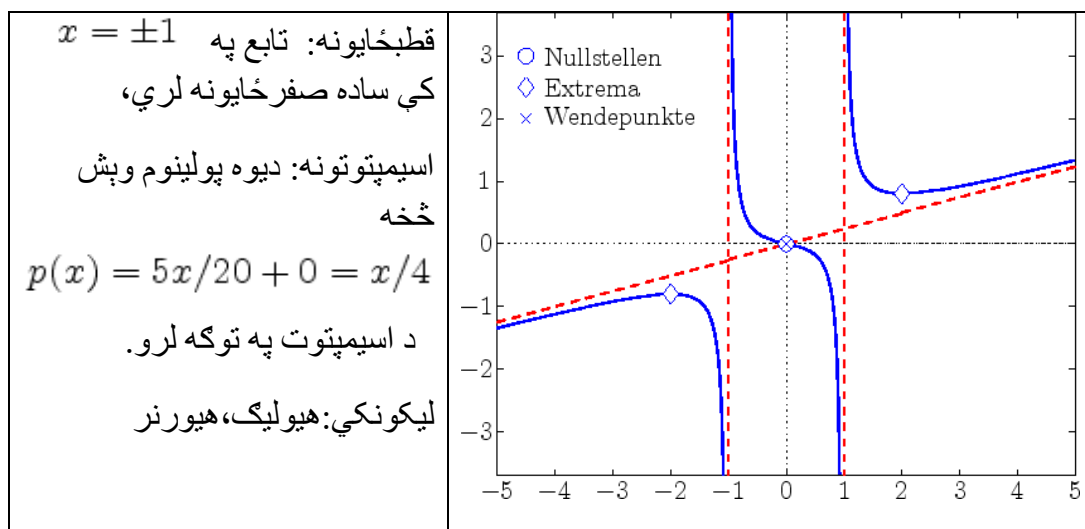
له دې سره کېدی شي، چې د  $f$  ډول یا ټیټ د کوالیتاتیو حالت څخه. دا چې  $f(x) \rightarrow -\infty$  د  $x \rightarrow -\infty$  او  $x \rightarrow -1$  لپاره ، باید په انټروال

$(-\infty, -1)$  کې يو ځای اړونده مينيموم ولري. په ورته توگه په  $(1, \infty)$  کې لږ تر لږه يو ځای اړونده خورا ټيټ ارزښت.

اورونټکی (نقطه انعطاف) :

$$f''(x) = \frac{-80x^5 + 398x^3 + 42x}{20(x^2 - 1)^3} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0$$

په دې ځای کې دريم مشتق صفر نه دی.



پبلگه:

د کرې يا منحنې بحث لپاره لاندې تابع تر څېړنې لاندې نيسو:

$$f(x) = e^{-x^2} + \frac{4|x|}{e^4}$$

سيومتر:

داچې  $x^2$  او  $|x|$  جوړه دي تابع جوړه دی، دا په دې معنا چې سيومتريک و  $y$ -محور ته.

پريوديوالي: تابع پريوديک نه ده.

پرېکېدنځايونه: تابع د ناپرېکېدننوابعو څخه مرکبه (يوځای اېنول) شوي ده او له دې امله پرېکېدنځايونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت توابعولپاره ټول مشتقونهيپه صفرځای کې پرېکېدونکي دي.

صفرځايونه: اکسيوننشل تابع تل مثبت (زاتيزه) ده، د مطلق ارزښت تابع نامنفي ده. نو صفرځايونه نه شته.

افراطيت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4} \text{sign}(x) \stackrel{!}{=} 0, x \neq 0 \Rightarrow x = \pm 2.$$

سربېره پردې دې کرېتیکل ټکی  $x = 0$  په پام کې وي، چېرته چې مشتق پرېکېدونکی دی.

تابع په ټول  $\mathbb{R}$  تعريف دی، د  $x$  د  $\pm\infty$  په لور حالت ته دې پام وي.

دا چې  $f(x) \rightarrow \infty$  د  $x \rightarrow \pm\infty$  لپاره  $f$  لږ تر لږه يو مطلق مينيموم لري، مگر

هيڅ مطلق ماسيموم. پرتله د  $y$  - ارزښت کرېتیکل ټکي

$$(-2, 9/e^4) \quad (0, 1) \quad (2, 9/e^4)$$

بنايي، چې په  $x = \pm 2$  کې مطلق مينيموم نیولکيري. داچې په انټروال

$$[-2, 2] \quad (0, 1)$$

يو مينيموم او هم يو ماکسيموم لري، لاس ته راځي چې يو ځای

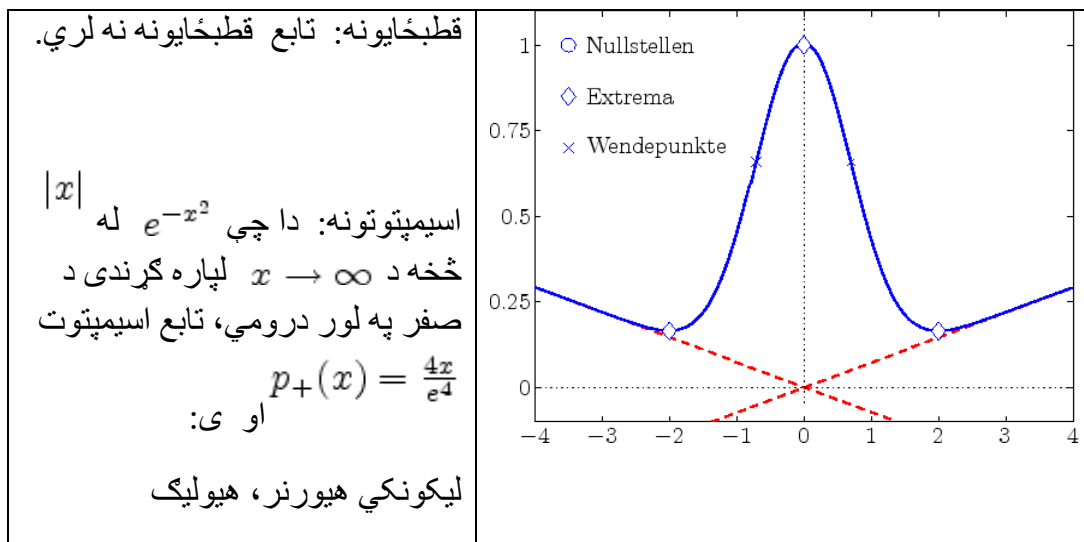
اړونده مينيموم دی.

اورونټکي:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow 4x^2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm 1/\sqrt{2}$$

دیم مشتق په دی خای کی  $\neq 0$  دی.



### د ریمن انتیگرال Riemann-Integral

دیوه توتہ ډوله ( په توتہ توتہ کی ) ناپربکډونکی تابع  $f$  ټاکلی انتیگرال د

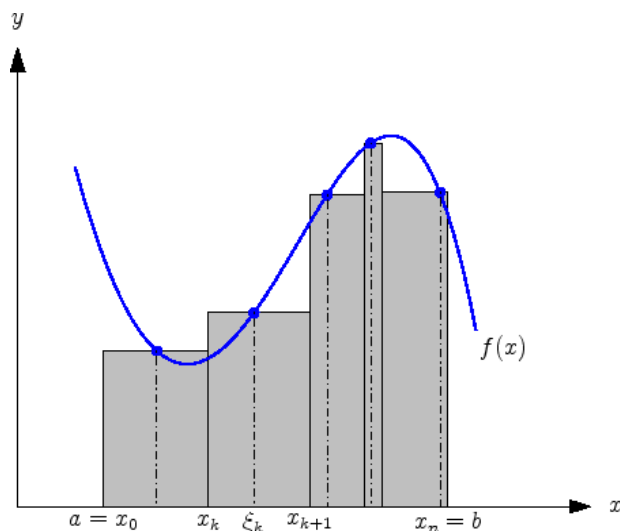
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \int_a^b f_{\Delta} = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_k f(\xi_k) \Delta x_k$$

له خوا یا سره تعریف دی. دلته  $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  د  $[a, b]$  توتہ ونه بنایي،

$$|\Delta| = \max_k \Delta x_k, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1},$$

د انتروال ماکسیمال اوږدوالی دی او

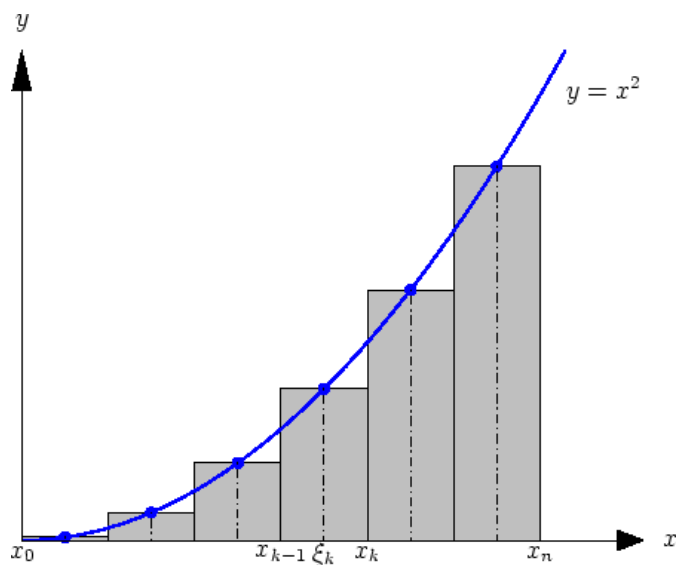
$\xi_k$  په خوبه ټکی دی په  $k$ -م انتروال کی. د انتیگرال تعریف په بني لور جمعی د ریمن - جمعو په نامه یادیری.



د مثبت  $f$  لپاره  $\int_a^b f(x) dx$  د سطحی مساحت دی د  $f$  د گراف لاندې.

لیکونکي: هیولیک، هیورنرو وپیر

د  $\int_0^1 x^2 dx$  د ریمن انتیگرال په حیث راوړني سره کېدی شي د ټوټه ونو پرلپسې (ترادف)



$$\Delta_n : x_i = i/n, i = 0, \dots, n,$$

وکارول شي د ارزښت شوو ځایونو

$$\xi_i = (2i - 1)/(2n), i = 1, \dots, n,$$

سره د  $n$  -مې ټوټه ونې لپاره.

د تعريف سره سم لاس ته راځي:

$$\int f_{\Delta_n} =$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left( \frac{2i-1}{2n} \right)^2 = \frac{1}{4n^3} \left( 4 \sum_{i=1}^n i^2 - 4 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right)$$

$$= \frac{1}{4n^3} \left( \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

او له دې سره

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

بنسټيزه تابع Stammfunktion

يو تابع  $F$  د  $F' = f$  سره د  $f$  بنسټيز تابع ده، او د دې لپاره ليکو

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

د ټول بنسټيزو توابعو ډېرۍ يا ست دى ، چې د  $f$  ناکلی انټیگرال بلل کيږي. د انټیگرېشن ثابته په خوښه ده. د بېلگې په توگه

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$$

د  $F_a(a) = 0$  سره يو ممکنه بنسټتابع دی.

د ټولو ساده توابعو لپاره د داسې بنسټيزو توابعو داسې اکسپلېڅيت ورکړه ممکنه نه ده، د دې لپاره بېلگه ده:  $f(x) = \exp(x^2)$ .

هر تابع

$$F_1(x) = x^3 + 2, \quad F_2(x) = x^3, \quad F_3(x) = x^3 - 1$$

د

$$f(x) = x^2.$$

يو بنسټيز تابع دی.

د  $f(x) = \frac{1}{x}$  لپاره د  $c > 0$  سره

$$F(x) = \ln(c|x|)$$

يو بنسټيز تابع دی.

ليکونکي: هيوليگ، کرايخ

د انټیگرال شمېرنې اصلي جمله

که  $F$  د یوه ناپرېکېدونکي تابع  $f$  بنسټیزه تابعوي، داپه دې معن، چې  $f = F'$  ، نو باور لري

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

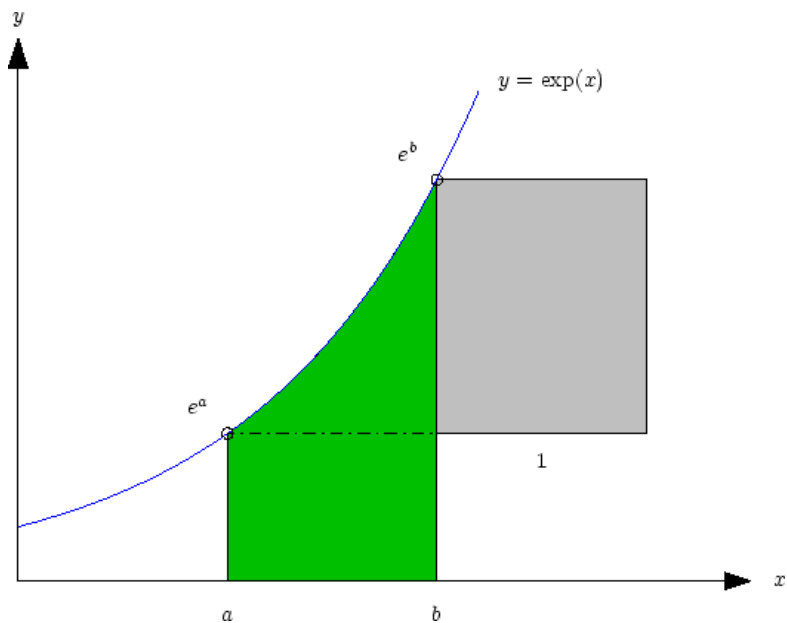
همداسې په لنډ لیکډول

$$\int_a^b f = [F]_a^b .$$

یو ټاکلی انتیگرال کېدی شي د بنسټیزو توابعو د انتوال په پای ټکو کې د تابع ارزښتونو د کمښت په څېر وشمېرل شي.

لیکونکي: هیورنر، هیولیک

د اکسپوننشل تابع مشتق بېرته اکسپوننشلتابع دی او له دې امله لرو:





$$\int_a^b e^x dx = e^b - e^a .$$

د  $a$  او  $b$  ترمنځ د گراف سطحه مساوي ده د سور 1 او د تابع ارزښتونو د جگوالي واین څخه جوړ ولاړگودیز (مستطیل).

د لوگاریتمي تابع  $F(x) = \ln(x)$  مشتق  $F'(x) = 1/x, x \in \mathbb{R}^+$  دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x dx = \ln(b) - \ln(a), \quad a, b \in \mathbb{R}^+ .$$

لیکونکي: هیورنر، هیولیک

د  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  یو بنسټیز تابع  $F(x) = \arctan x$  دی . په تعقیب لرو

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} .$$

د کمښت سره *verifiziert* ، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

د  $f(x) = \tan x$  بنسټیز تابع دی:

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

د دې پایله ده:

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = -[\ln(\cos x)]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347.$$

لیکونکي: هیورنر، هیولیگ

یو پلانېټ د  $M$  کتلې سره یو د گراویتیټیشن (راکبني ورشو) ورشو تولیدوي، چې په

یوه تن یا بدن د  $m$  کتلې سره یوه قوه  $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$  د استعمالوي. دلته  $\gamma$  د گراویتیټیشن ثابت ده او  $x$  د دروند ټکو (د ثقل مرکزونو) واټن دی.

د  $\frac{1}{x^2}$  لپاره بنسټیز تابع  $-\frac{1}{x}$  دی. د دې لپاره چې یو بدن د  $a$  څخه و  $b$  ته په واټن یوسي، باید کار

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) \, dx &= \gamma mM \int_a^b \frac{1}{x^2} \, dx = -[\gamma mM/x]_a^b \\ &= \gamma mM(1/a - 1/b) \end{aligned}$$

سرته ورسیري .

د  $a$  لپاره مساوي د پلانټ وړانگه او  $b \rightarrow \infty$  کېدی شي د کینېټيکي انرژي سره د مساوي ایښوني له امله داسې په نامه د تېښتي چټکتیا یا سرعت  $v$  و ټاکل شي، داپه دې معنا چې چټکتیا، چې اړینه ده، د یوه پلانېټ گراویتیټیشن ورشو څخه وو تلی شي:

$$\frac{m}{2}v^2 = \gamma \frac{mM}{a} \Rightarrow v = \sqrt{\gamma \frac{2M}{a}}.$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره  $v = 11.2 \text{ km/s}$  لرو.

لیکونکي: هیورنر، هیولیگ

### غوره - يا راوتلي بنسټيز توابع

لاندې جدول د زيات رامنځ ته کېدونکو توابعو  $f(x)$  د بنسټيزو توابعو  $F(x)$  جدول ښايي.

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^s, s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$	$1/x$	$\ln x $
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$	$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

ليکونکي: هيورنر، هيوليک

### توټه انټيگرالونه Partielle Integration

د ضرب قانو  $(fg)' = f'g + fg'$  له مخې د ناتيکيو انټيگرالولو لپاره يو ورته فرمول لرو:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx .$$

په اړونده توگه د ټاکلو انټیگرالونو لپاره لرو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

$$[fg]_a^b$$

له دې سره دې په پام کې وي، چې د ژی ترمونه ورکیري، که یو له دې دواړو توابعو په انټروال ټکو کې صفر وي. دا د پریودیکی توابعو لپاره هم ورکیري، د

پریودی اوردوالي  $(b - a)$  سره.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

له

$$\int (1+x)^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} (1+x)^{\alpha+1} + c$$

د  $\alpha \neq -1$  لپاره

لرو

$$\int \underset{u}{x} \underset{v'}{\sqrt{1+x}} dx = x \frac{2}{3} (1+x)^{3/2} - \int 1 \cdot \frac{2}{3} (1+x)^{3/2} dx$$

$$= \frac{2}{3} x (1+x)^{3/2} - \frac{4}{15} (1+x)^{5/2} + c.$$

په ورته توگه شمېرل کيږي

$$\int_0^1 x \sqrt{1-x} dx = \left[ -x \frac{2}{3} (1-x)^{3/2} \right]_0^1 + \int_0^1 1 \cdot \frac{2}{3} (1-x)^{3/2} dx$$

$$= 0 - \left[ \frac{4}{15} (1-x)^{5/2} \right]_0^1 = \frac{4}{15}.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د اووېستونو (واريابلو) بدلون Variablensubstitution

د زخيري قانون څخه

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = f(g(x))g'(x), \quad f = F',$$

د يوه بدلون  $y = g(x)$  لپاره د بنسټوابعو جوړولو له لارې لاس ته راځي

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(y) + c = \int f(y) dy.$$

په ورته توگه د ټاکلو انټيگرالونو لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy$$

د دفترشل په مرسته کېدی شي دا تابع په لاندې بڼه وليکل شي:

$$\int_a^b f(g(x)) \frac{dy}{dx} dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy$$

ليکونکي: هيوليگ، کوف

که په انټيگراند کي دننی مشتق پېژندور وي، لکه د بېلگي په تگه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx,$$

لپاره ، نو د بدلون استعمال خورا ساده دی. په دې بېلگه کي ردو

$$y = g(x) = \ln x, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

او لاس ته راځي

$$\int g(x)^2 g'(x) dx = \int y^2 dy = \frac{1}{3} y^3 + c.$$

د په څې بدلون له لارې لاس ته راځي

$$\int \frac{\ln x^2}{x} dx = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + c.$$

ليکونکي: هيوليگ، کوف

په ټيپيک ډول د بدلون له لارې سړی هڅيري چي انټيگرال ساده کړي. د بېلگي په توگه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y} - 1} dy$$

لپاره په نږدې توگه ردو

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

داد

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله ترانسفورمي شوی ناتیځلی انتیگرال راکوي.

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^3}{x^2 - 1} \frac{dy}{dx} dx \\ &= \int \frac{x^2}{x^2 - 1} dx = \int \left( 1 + \frac{1}{x^2 - 1} \right) dx \\ &= \int 1 dx + \int \frac{1}{x^2 - 1} dx = x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + c. \end{aligned}$$

د  $x = e^y$  په ځنډ یا برعکس بدلون سره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2} \left| \frac{e^y - 1}{e^y + 1} \right| + c.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د مرکاتور پربوستون Mercator-Projektion

بنسټابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

کېدی شي د بدلون

$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1 + \sin x}{\cos x}, \quad du = \left( \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx,$$

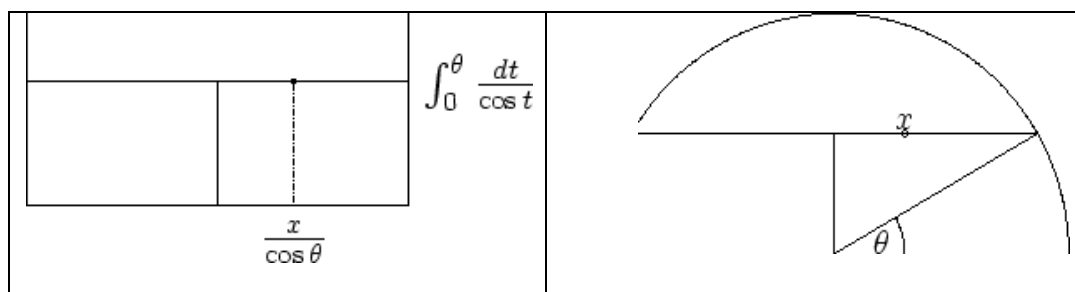
سره وشمېرل شي.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int (\cos x)^{-1} \left( \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right)^{-1} du$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c$$

$$= \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c.$$

يو استعمال د مررکاتور پرېوستون دی. دلته د ځکې پوښ سطحه کرنجساتونکي يا کرنجینتوني په يوه سطحه پر یوځي يا پری ایستلی شي.



دلته سور درجه يا عرض البلد په اړیکو  $1/\cos \theta$  غزول شوی.

لیکونکي: هیولیک، کوپف



### د څرخېدونکو بدنونو ډکۍ (حجم) Volumen von Rotationskörpern

<p>په <math>x</math> -محور د تابع  <math>r = f(x) \geq 0</math>          ،  <math>a \leq x \leq b</math>          د څرخېدنې          له امله جوړ شوی بدن <math>V</math>          ډکۍ (حجم) کېدی شي د          گردۍ ډوله (دایره ډوله)          پروت غوڅیو انټیګرال له          لارې و شمیرل شي:</p> $V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx .$	
---	--

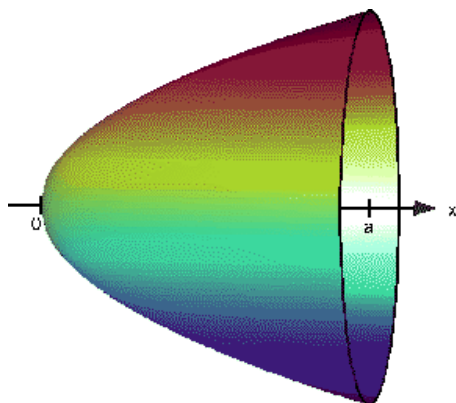
په بدیلې ډول کېدی شي توتې (استوانې) پوښ له لارې هم وشمېرل شي

$$V = \pi c^2(b - a) + 2\pi \int_c^d r h(r) dr ,$$

$h(r)$   
 د کوم سره چې  $c$  همدا سې  $d$  مینیمال همدا سې ماکسیمال وړانګې  $r$  دي او  
 په بدن کې خوندي توتې پوښ ټول جگوالی دي د وړانګې  $r$  سره. دا بدیل د ټولو له  
 مخه د همغږیز وړانګې تابع  $f$  لپاره موخه ور دی.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

دا جوړ یا څېره شوی پارابولویډ د  $x$  -محور باندې د کږې  $y = \sqrt{x}$   
 څرخون سره  
 منځ ته اخی



د څرخون بدن د فرمول سره سم ډکۍ (حجم) دی:

$$\pi \int_0^a (\sqrt{x})^2 dx = \pi \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{1}{2} \pi a^2 .$$

په بدیلې توگه د توتې پوښ باندې انتیگرال له لارې منځ ته راځي. 1

$$2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r(a - r^2) dr = 2\pi \left[ -\frac{1}{4}(a - r^2)^2 \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \pi a^2 .$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوي ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړۍ:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :  
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen  
Diss . Uni. Wien Algebrn .

*Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,  
Dissertation at the University of Vienna/Austria*

لاندې د شمیرپوهنې پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له  
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد  
لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ  
او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځني ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه ( هندسه ) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د گټې – او کټې د کټې  
شمیرنه ، د احتمالي شمیرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شمير: د شميرپوهنې انگرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنخيال برابرېون ( دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولگه

*Mathematical Formulas*

2003 Bonn (Germany):

لسم: شميرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپيني خبري: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،،د افغانستان روغي او بيا

آبادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،ميري،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندي د برينکمن ليکني چي له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

- ۱ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره لومړی توک
- ۲ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره دويم توک
- ۳ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره دريم توک
- ۴ - د احتمالوالي شميرنه د بنوونځي لپاره
- ۵ - احصايه يا ستاتيستيک د بنوونځي لپاره

لاندي کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چي د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

- ۶ - اناليزی ۱
- ۷ - اناليزی ۲
- ۸ - کر بنيز الجبر
- ۹ - د شمير پوهني بنستونه
- ۱۰ - د فرمولونو تولگه
- ۱۱ - فنکشنل اناليز
- ۱۲ - وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ - له [www.grundstudium.info/linearealgebra](http://www.grundstudium.info/linearealgebra) څخه: کړنيز الجبر

۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بنوونکو او زدهکونکو لپاره پوره گټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه ( هندسه ) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېری پوهنه يا ست تيوري

۱۹ - د شميرپوهنې سم اند ( منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ - د شمير پوهنې گډې وډې ليکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيگرال شميرنو ته

تمرينونه او اوبيوني يا حلونه يې

۲۳ - د شميرپوهنې انگرېزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شميرپوهنې پښتو انگرېزي ډکشنري

۲۵ - د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو ويونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زره له کومې ( دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې و به غزیري.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوتونو څخه ، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپریري:

د گروپونو تیوري

- د بسوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات گټور برېشي)

## د ليکوال ژوند ته لنډه کتنه

ماخان په اولني نوم ميړي شينواري د اروابناده پستو او اروابناده نوررحمان زوي په ۱۳۲۰ ه لمریز کې د شينواريو هسکه مينه کې دې نړۍ ته سترگې راغړولي.

د هسکې مينې د لومړني ښوونځي (د لومړنيو زده کوونکو څخه) څخه وروسته

د رحمان بابا لیسې له ۱۹۵۴ تر ۱۹۶۵ پورې (ښوونځي له لومړي ټولگي پیل او د دویم ټولگي څخه گام او پای). د ۱۹۶۶ تر سپتمبر د کابل طب پوهنځي. له ۱۹۶۶ سپتمبر څخه د اتریش برس، چې هلته یې د شمیرپوهنې ډاکټري په پوره ستونځو تر لاسه کړه.

د ۱۹۸۷ ش ک تر ۱۹۸۸ د فبروري تر پای د دباندنيو چارو وزارت کې مامور.

د ۱۹۸۸ مارچ څخه تر ۱۹۹۲ جون پورې په بن کې د افغانستان جمهوریت سفارت شارژد افیر (صفر نه وو).

له هغې وروسته په جرمني کې سیاسي پناه. له ۲۰۰۸ مارچ څخه د ۲۰۰۹ دسمبر پورې د ریاضي څانگه کې د پوهنې وزارت درسي نساب کې دنده.

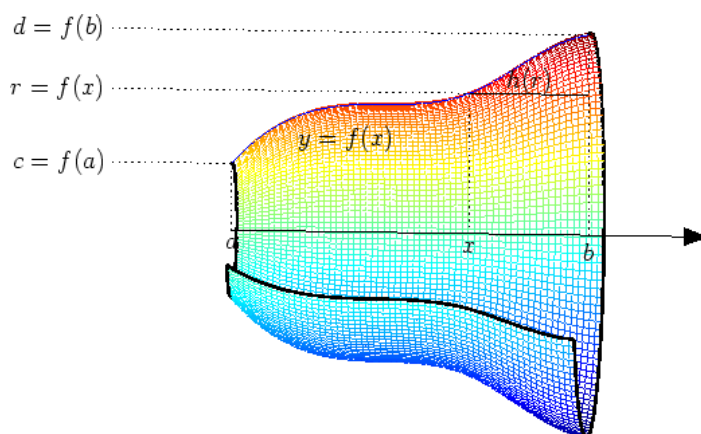
ماخان ميړي په ۱۹۷۲ کې له لري د ميرمن ښاپيري سره واده شوی، چې د واده خبر ورته اتریش ته راغی.

ده د ميرمن ښاپيري سره په ۱۹۶۳ ز کې کوزده کړې وه.

دوي ته لوي څښتن په اتریش ويانا کې د مای په شلم ۱۹۷۹ ز کې دوه بچيان وبخښل، چې څانگه او اباسين نوميرې. څانگه په المان کې د پوهنتون علمي همکاره وه او د حقوقو ډاکټره ده او اباسين ملي اقتصاد او ټولنيزه سایکولوژي لوستلې. ماخان شينواري بي کاره نه دی او لږ تر لږه له ۱۹۹۷ څخه همدا د کتابونو ليکلو او د ژباړې دنده په غاړه اخستې، چې خپل فکر تر شونې پولې پورې تازه وساتي.



## د شمیر پوهنې بنسټونه



لیکونکي: پروفیسور هیولیک او ډله یې

## له مات. ن ج څخه

### ژباړي : ډاکټر ماخان ميري شينو الری

۱	وينا
۲	منطقي(سم انديزي) ترني
۱۱	کوانټورونه
۱۳	سيده بنوونه
۱۴	ناسيده بنوونه
۱۴	ايمپليکېشن تري لاس ته راتلنه يا — راوړنه
۱۶	د پوره اندکشن له لاري بنوونه
۱۶	د مربع (څلوري) عددونو د جمعي لپاره فرمول
۱۷	ډبري(سټ)
۱۹	د گڼونو (اعدادو) ډبري
۱۹	په ډبريو کي عمليي
۲۳	کارتېزي ضرب (حل)
۲۴	اړيکي
۲۵	د اړيکو د داتا بانک
۲۵	د اړيکو خويونه
۲۸	فنکشن
۳۰	د تابع يا څيرونې يا بلواک(تابع) خويونه
۳۲	د فنکشنونو
۳۲	په څټ يا برعکس فنکشن
۳۳	فاکولتي يا فکتوريل
۳۳	د بينوم ضربيونه
۳۴	د پاسکال درېگودي
۳۵	د بينوم درسي جمله

۳۸	د بینوم ضریبونو لپاره کټمټوالی
۴۰	د دېریو یا ستونو کمبیناتوریک
۴۹	کرینیز فنکشنونه
۵۰	مرعیز فنکشنونه
۵۱	مایل گوزار یا - غورخونه
۵۳	پولینوم
۵۴	راشنل فنکشن یا بلواک (تابع)
۵۵	ساین او کوساین
۵۸	تانجنت او کوتانجنت
۶۰	اکسپوننشل توابع (بلواک)
۶۳	د گټې گټه
۶۵	لوگاریتم
۶۶	تولیز په توان تابع او لوگاریتم
۶۸	د لوگاریتم شمېرونی
۶۸	مشتق یا رابېلېدنه
۷۱	غوره (مهم) مشقونه
۷۲	د مشتق کرینیزوالی
۷۵	ایمپلیخیت مشتق توابع
۷۷	لوگاریتمي مشتق
۷۸	نیوتن تلنلار یا قانون
۷۹	د بابلیانو ریشه (جذر) نیونه
۸۰	افراطیت
۸۲	د مشتق صفر ایښوونه
۸۴	افراطي ارزښتونو ازمايښت
۸۵	کوټی
۸۸	گاوندې
۸۹	د راشنلتابع گاوندې یا- اسیمپتوتونه
۹۱	سیومتری
۹۲	د کبرو یا منحیو خبرې اترې (بحث)
۹۹	د ریمن انٹیگرال
۱۰۱	بنسټیزه تابع
۱۰۳	د انٹیگرال شمیرني اصلي جمله
۱۰۶	غوره - یا راوتلي بنسټیز توابع
۱۰۸	د اووښتونو (واریابلو) بدلون
۱۱۰	د مرکاتور پرېوستون

- ۱۱۲ د څرخيدونکو بدنونو ډکی (حجم)  
۱۱۵ پوښتنه:  
۱۱۹ د ډاکټر ماخان شينواري چاپ شوي ليکنې:  
د ډاکټر ماخان ،،ميري،، شينواري ليکنې او  
۱۲۱ ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**