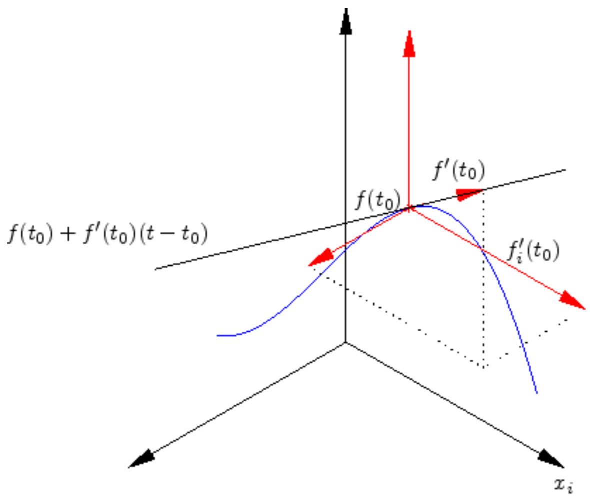
انالیز ۱ Analysis 1

د پوهنتون لپاره لکچرنوټونه

د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیز

یا انالیز دوه



لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتون د شمیرپوهنې یا ریاضي څانګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتګارت پوهنتون نه ځنه

Smakhan1946gmail.com

ژباړی: ډ اکتر ماخان (میرې) شینواری

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوی څښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلې او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې په لار د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

د کتاب نوم: د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیزې

لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتو د ریاضي څا نګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه

ژباړی: ډ اکتر ماخان میږي شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د چاپ لړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ژباړي مننه

د دې لیکنې مل نورې خپرونې د شتوتګارت د پوهنتون د شمیرپوهنې د څانګې د لکچرونو لړۍ چاپ باندې پیل کیږي

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې- زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس- سره مرسته وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

بلواک یا تابع یا فنکشن ۱

کربښيزې توابع ۳

څلورۍ- یا مربع فنکشنونه یا – توابع ۴

همغږیز توابع ۶

برعکس – یا په څټ فنکشن ۹

د فنکشنونو یا توابعو سره شمیرنه ۱۱

ننوتي او وتلي - یا مقعر او محدبې توابع ۱۲
پولینوم ۱۵

د پولینومونو سره انترپولیشن ۲۱

د لاګرانج-پولینوم ۲۳

راشنل (کسری یا نسبتي) توابع ۲۵
کمپلکس راشنل- یا کسري توابع ۲۷
په ټوټه مات ټوټه کونه یا تجزیه کونه ۲۸
د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه ۳۳
د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه ۳۹
د اویلر-مویورې فرمول ۴۰
تانجنت او کوتاجنت ۴۱
د ارکوس توابع ۴۲
هارمونیک لړځیدنې یا رپیدنې ۴۳
اکسپوننشل توابع ۴۹

ګټه یا ربح ۵۰

ټولیز توان توابع او لوګاریتم ۵۶

د ودې قانون ۵۷

د توان او لوګاریتم لپاره شمیرقوانین ۵۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

های پرابول تابع	۵۹
د یوې پرلپسې پوله ارزښت	۶۲
د کوشي قضیه	۶۶
همغږیز ه پولې ته تلنه	۶۸
د پرلپسې پولې ته تلنه	۷۰
نارېښتونی پوله ارزښت	۷۱
پوله اینفریور او پوله سوپریور	۷۲
پرتله کوونکې قضیه	۷۳
د یوې پرلپسې پنډغالي ټکی	۷۵
ورهولست- مودل	۷۶
ریکورژن	۷۶
د پي**Pi** رکورزیو اپروکسیمیشن	۷۸
د پرلپسیو یا ترادفونو ځانګړي ...	۸۲
د یوې لړۍ پرلپسې	۸۴
هندسي یا ځمککچیزې لړۍ	۸۶
هارموني لړۍ	۸۸
مطلق پولې ته تلونکې لړۍ	۸۹
مایورانت او مینورانت	۹۰
د وېش قضیه	۹۱
د رېښې قضیه	۹۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لایبنیځ قضیه ۹۴
د لړیو ځانګړي پوله ارزښتونه ۹۸
ناپرېکیدنه یا متمادیت ۹۹
یو اړخیز ناپرېکیدنوالی یا متمادیت ۱۰۲
د ناپرېکیدونکو توابعو لپاره ... ۱۰۴
منځ ارزښت جمله ۱۰۷
د دوه سطحو – یا برخو تلنلار ۱۰۹
د ناپرېکیدونکي تابع افرطیت ۱۱۰
برابرډوله ناپرېکیدنوالی ۱۱۱
په ټکي ډول پولې ته تلنه برابرارزښته ... ۱۱۲
د توابعو لړی پولې ته تلنه ۱۱۴
توابعو لړی ته مایورانت یا پورته پولې ۱۱۶
د اکسپوننشل تابع ضرب انځورونه ۱۱۷
د اکسپوننشال تابع لړی انځورونه ۱۱۹
مشتق(رابیلیدنه)
د بنسټتوابعو مشتق یا رابیلیدنه ۱۲۴
د مشتق یارابیلیدنې کرښزوالی ۱۲۷
د ضرب قانون ۱۲۷
د وېش قانون یا لار ۱۲۹
ځنځیری لار یا – قانون ۱۳۰
ایمپلیځیت مشتق نیول ۱۳۲
د لایبنیځ قاعده یا لار ۱۳۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

لوګاریتمي مشتق یا – رابیلیدنه ۱۴۱
د رولې جمله ۱۴۳
منخ ارزښت قضیه ۱۴۴
ټولیزه (شوې) منخ ارزښت جمله ۱۴۵
لانداو-سیمبول ۱۴۷
د لو، پیتال قاعده یا لار ۱۴۸
کرښیز اپروکسمیشن (ورنږدېوالی) ۱۵۰
د ناټیکاوي وده ۱۵۱
د نیوټن تلنلار یا – قانون ۱۵۳
د تیلور پولینوم ۱۵۷
حقیقي د تیلور لړئ ۱۶۱
اکسپوننشل تابع ۱۶۳
د اویلر فرمول ۱۶۵
د لوګاریتم تابع ۱۶۶
بینومیال لړئ ۱۶۷
د تیلور –لړئ مشتق او انتیګرال ۱۶۸
د تیلور-لړئ ضرب ۱۷۰
د تیلور-لړئ وېش ۱۷۲
د راشنل توابعو تیلور-ودیزېنه ۱۷۴
د یوې تیلور – لړئ ۱۷۵
د معکوس تابع د تیولور ودیزیینه ۱۷۷
د تیلور ځانګړې لړئ ۱۷۸
د پاد نږدې ارزښت شمیرنه ۱۷۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسترېما(افراطيت) ۱۸۱

د اکسترېم – يا افرطي ازښتونو ازماېښت ۱۸۵

پولينوم ۱۸۶

اسيمپټوتي(يو په بل نه پرېوتونکي يا ګاونډيتوب) ۱۹۰

د راشنل- يا کسر توابعو ګاونډ يا اسيمپټوټي ۱۹۱
د کږو يا منحنيو خبرې يا بحث ۱۹۲
ريمن-انتيګرال ۱۹۸

د انتيګرال خويونه ۲۰۱

د انتيګرالشميرنې منځ ارزښت جمله ۲۰۱

بنسټيز – يا ساده توابع ۲۰۳

د بنسټيزو توابعو لومړني توابع ۲۰۷

ټوټه- يا پارشل انتيګرالونه ۲۰۷

دلتا - تابع ۲۱۲

د متحولو – يا اووښتونو بدلون ۲۱۳

د متحولو – يا اووښتونو بدلون ۲۱۹

ساده راشنل انتيګرالونه د زياتواره قطب سره ۲۲۲

د راشنلتوابعو انيګرالونه ۲۲۵

د ساين او کوساين د ضرب انتيګرالونه ۲۲۷

د کمپلکس تريګونومتيکي توابعو انتيګرالونه ۲۲۸

تريګونومتريکي بدلونونه ۲۳۰

د ساين او کوساين راشنل توابع ۲۳۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځرخیدونو بدنونو ډکی یا حجم ۲۳۶

د یوې کږې یا منحني اوږدوالی ۲۴۱

د ذوزنقې قانون **۲۴۴**

د ګاوس فرمول ۲۴۸

ناڅرګند یا نا معلوم انتیګرال ۲۵۱

د نامعلوم انتیګرال لپاره د پرتلې قضیه ۲۵۵

ګاما تابع یا – فنکشن ۲۵۸

د کوشي اصلي ارزښت ۲۵۹

د انتیګرال لاندې مشتقول ۲۶۰

لایبنیځ-قانون ۲۶۳

د نامعلومو انتیګرالونو مشتقول ۲۶۸

د ډاکټر ماخان شینواري چاپ شوې،
چاپیدونکې او چاپ ته چمتو لیکنې ۲۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

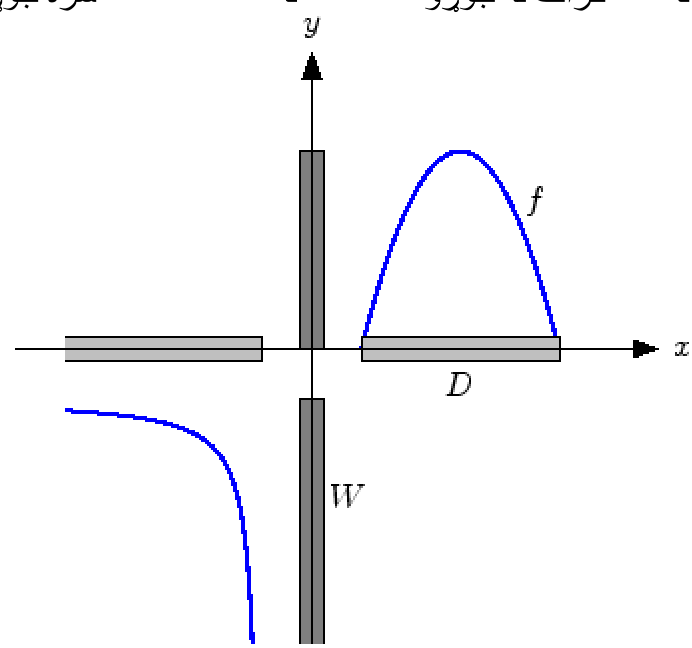
بلواک یا تابع (ټيک یې: فنکشن) Funktion

یو فنکشن یا بلواک یا تابع

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

د تعریف ورشو $D \subseteq \mathbb{R}$ هرتوکی x د ارزښت ډېری $W \subseteq \mathbb{R}$ څخه د یوه ارزښت $f(x)$ سره تنظیموي.

د f ګراف له جوړو (x, y) د $y = f(x)$ سره جوړ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د څیرې ځخه چې لیدلکیږي، تعریفورشو (رنه خړه یا پرته) او ارزښت ورشو (تیاره خړه یا ولاړه) په x -محور همداسې په y -محور د ګراف پریوتل دي.

لیکونکي: هیولیګ، هورنر، کنش

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x)=\frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعریف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، لومړی دې د په ساده –یا لومړنیو توابعو رامنځ ته کیدونکې بندیزونه یا محدودوالی په پام کې ونیول شي. د تعریف ورشو د توکي لوګاریتم باید زیاتیز یا مثبت وي او د ارزښت ورشو ناکمیز یا نامنفي وي:

$3-x>0$ او $x\geq 0.$

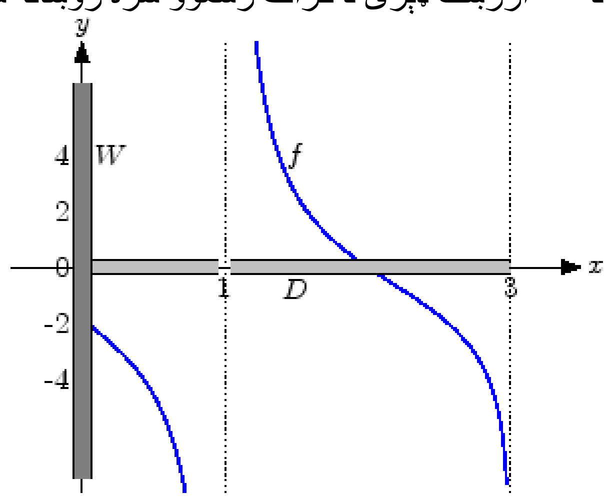
په همدې توګه باید ماتلاندې یا مخرج صفر نه وي، دا په دې معنا چې $x\neq 1$.

په ټولیزه توګه راکوي:

$$\mathrm{D}=[0,3)\setminus\{1\}=[0,1)\cup(1,3).$$

.

د f ارزښت ډېرى د ګراف رسموو سره روښانه شي



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې f د $x \in (1,3)$ لپاره د $-\infty$ او $+\infty$ ترمنځ ټول ارزښتونه نيسي، $W = \mathbb{R}$ باور لري.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش)

لاندې جدول د څو بنسټيزو توابعو تعريفورشو او ارزښت ورشو ښايي.

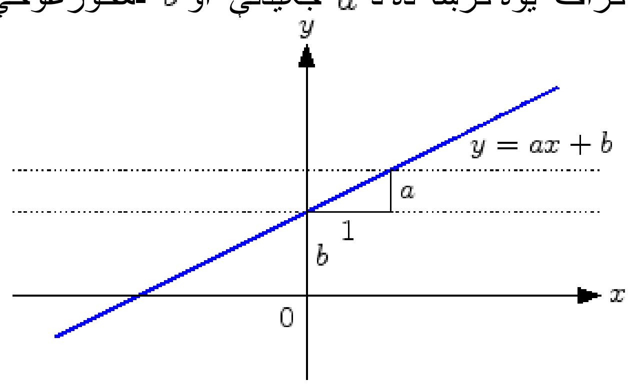
$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\ln x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x : x = (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$

(ليکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش)

کرښيزفنکشنونه يا توابع

د يوه کرښيز فنکشن يا تابع
$f(x) = ax + b$

ګراف يوه کرښه ده د a جګيدني او y -محورغوڅي(محورقاطع) b سره .



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره بديلي انځورونه د ټکي-جګيدنې – بڼه ده

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=a$$

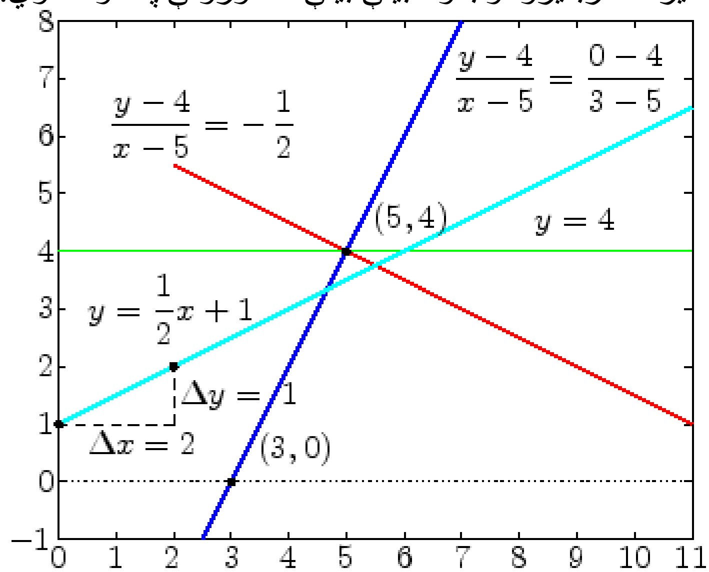
او د دوه-ټکو- بڼه

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},$$

چيرته چې (x_0,y_0) او (x_1,y_1) په کرښه پراته ټکي دي.

(ليکونکي: هيوليګ، هيورنر)

ځيره د کرښيزو توابعو بيلې بيلې انځورونې په کوته کوي:



ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

ځلورۍ- يا مربع فنکشنونه يا - توابع

د يوه مربع تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

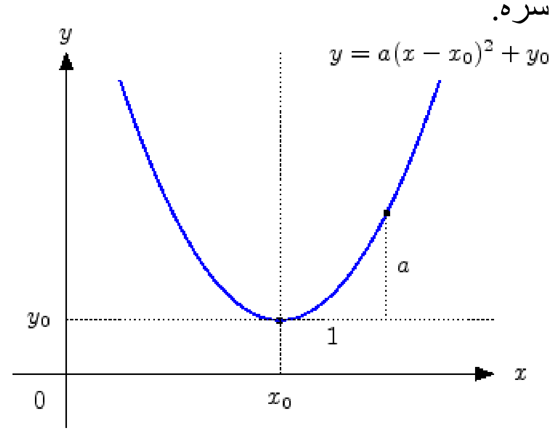
کراف د لاندې بڼې يو پارابول دی

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د ککرۍ- يا رأسټکي

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right).$$

سره.



پای

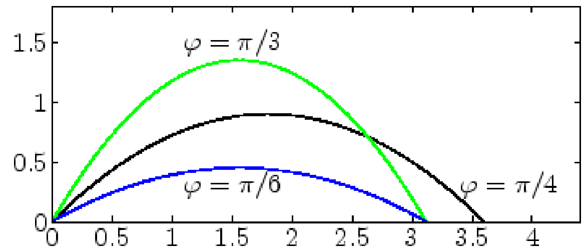
- که يو تن د يوه کونج φ لاندې په يوه v چټکتيا و توغول شي، د الوتنې لار دا لاندې پارابول

$$y = x\tan\varphi - \frac{g}{2v^2\cos^2\varphi}x^2$$

راکوي ، چيرته چې g د ځمکې بيره ده يا - تعجيل دی.

لاندې څيره: مايیل توغول يا غورځول د v = 6 سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مساوات د برابرډوله خوزښت په x - او y -کمپوننتونو د بيلوني يا ټوټه کوني(که غواړې: تجزيي) څخه لاس ته راځي ، د v پيل چټکتيا سره او د ازاده غوزوني د خوزښت ته پام کوني له لارې:

$$x(t) = vt\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v\cos\varphi}$$

$$y(t) = vt\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow y(x) =$$

$$= \frac{vx\sin\varphi}{v\cos\varphi} - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\varphi} = x\left(\tan\varphi - \frac{gx}{2v^2\cos^2\varphi}\right).$$

د غورځوني واټن دی

$$x = \frac{2v^2\cos^2\varphi}{g}\tan\varphi = \frac{v^2}{g}\sin(2\varphi).$$

دا د $\varphi = \pi/4 \mathrel{\widehat{=}} 45°$ لپاره ماکسيمال دی.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش

همغږيزې توابع Monotone Funktion

(c) ketabton.com: The Digital Library

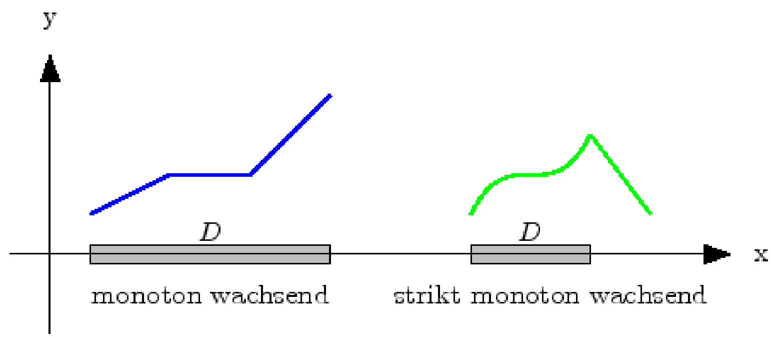
يو تابع f په يوه انټروال D (کره) همغږيز جګېدونکی دی، که وی

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \overset{(<)}{\leq} f(x_2), \quad x_k \in D,$$

همداسې که f ټوټه ډوله ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی، که وي

$$f'(x) \overset{(>)}{\geq} 0$$

د ټولو $x \in D$ لپاره تر ځانله یا جدا ټکي بورې



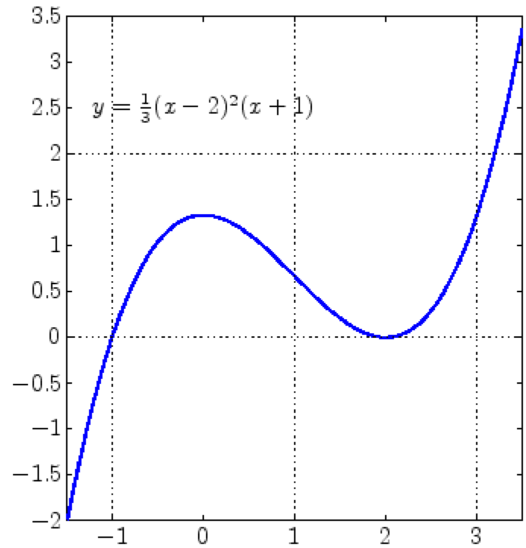
همغږيز جګېدونکي   کره همغږيز جګېدونکي

په ورته توګه (کره) همغږيز ټيټيدونکی تعريفيږي.

يکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش

تابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2(x+1)$ په $x = 0$ ځای کې يو جګ- یا ماکسيمال ټکی ($f'(0) = 0, f''(0) < 0$) لري او په $x = 2$ ځای ټيټ-يامينيمال ټکی ($f'(2) = 0, f''(2) > 0$) لري . د $x \leq 0$ او $x \geq 2$ لپاره تابع کره مونوتونجګېدونکي نخ ده او د $0 \leq x \leq 2$ لپاره کره مونوتون ټيټيدونکي نه ده.

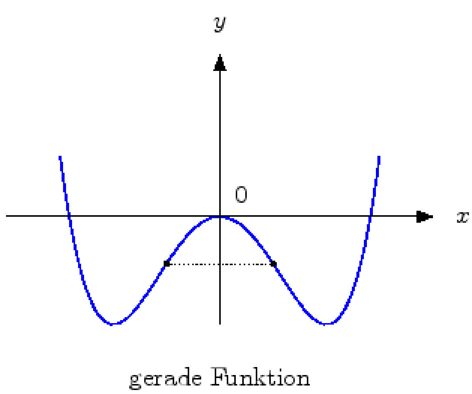
(c) ketabton.com: The Digital Library



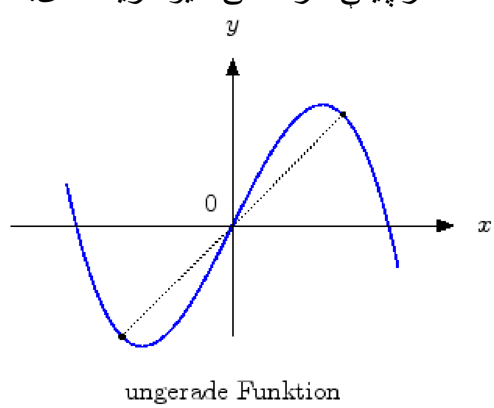
یکونکي: هیولیک، هیورنر،کنش

جوړه او ناجوړه – یا جفت او طاق توابع

یو تابع f جوړه دی، که $f(x) = f(-x)$ وي، دا په دې معنا چې که ګراف د y - محور سره سیومتریک وي. یو ناجوړه یا طاق تابع $f(x) = -f(-x)$ دی، او ګراف سرچینې سره ټکی سیومتریک دی.



جوړه یا جفت تابع

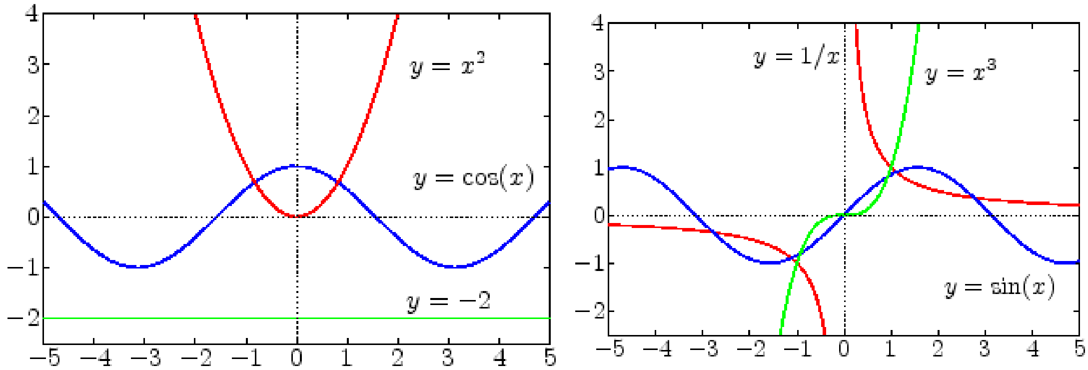


ناجوړه یا طاق تابع

د دوه جوړه توابعو ضرب جوړه تابع دی. برعکس د یوه ناجوړه یا طاق تابع ضرب د یوه جوړه تابع سره ناجوړه دی. د زیاتون یا جمعې او کمښت یا تفریق جوړولو سره د تابع تیپ یا ډول ساتلی پاتیږي.
پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې توابع يو کيڼ لور ته يو څو جوړه (جفت) او ښي لور ته يو څو ناجوړه (طاق) توابع ښايي.



د مناسب ترکيب جوړولو سره سرې نورې بيلګې لاس ته روا ړي. نو توابع

$$f(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x, \qquad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x)\sin x - g(x)x^3$$

ناجوړه دي.
پاي.

برعکس – يا په څټ فنکشن - تابع**Umkehrfunktion**

د يوه اينجکتيو (په کې -) تابع $f : D \to W$ د تعريفورشو D او ارزښت ورشو $W \subseteq \mathbb{R}$ سره د

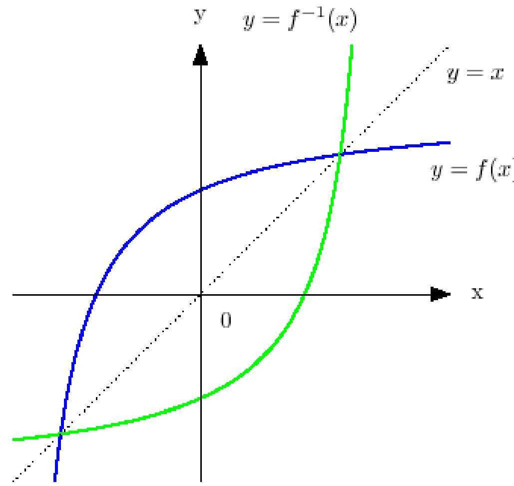
$$f^{-1} : W \to D \subseteq \mathbb{R},\ x \mapsto f^{-1}(x)$$

له لارې تعريف دی. له دې سره لاندې باور لري

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

د برعکس توابعو تعريف ورشو د f ارزښت ورشو ده. د هغه ګراف $y = f^{-1}(x)$د د ګراف f په لومړي کونجنيمی $(y = x)$ هنداره شوې څېره ده:

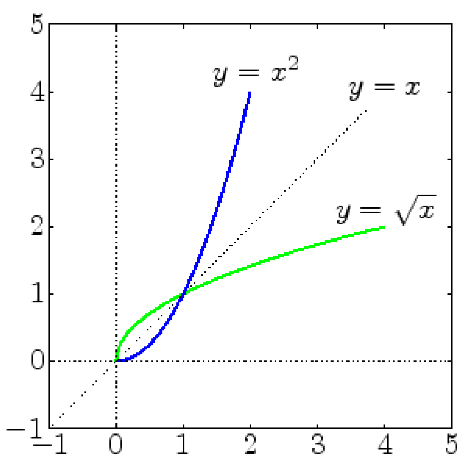
(c) ketabton.com: The Digital Library

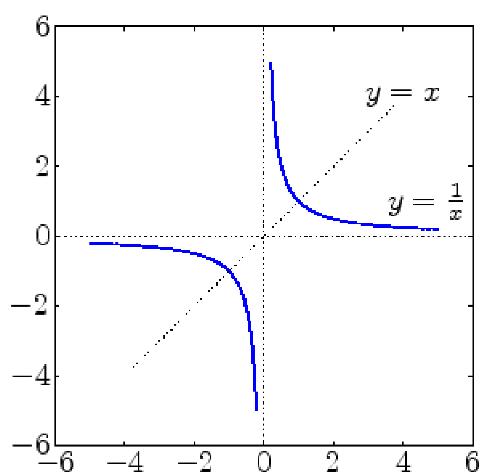


$f^{-1}(x)$
کيدی شي ليکندود مو په ساده توګه د معکوس ارزښت
$f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$
سره بدلولو ته لار ښود کړي. په ځانګړې توګه ، که د تابع x
ارزښت ونه ليکل شي، دا اړيکې دې بايد روښانه وي، چې موخه مو څه ده.

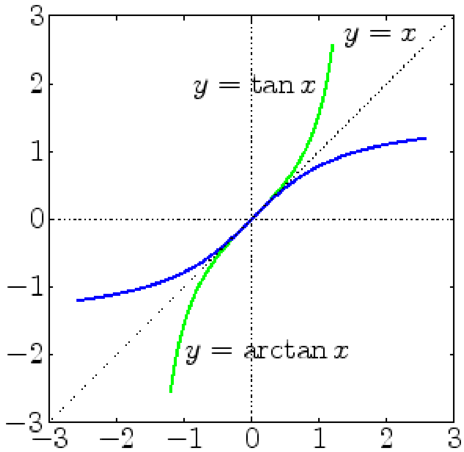
پای.

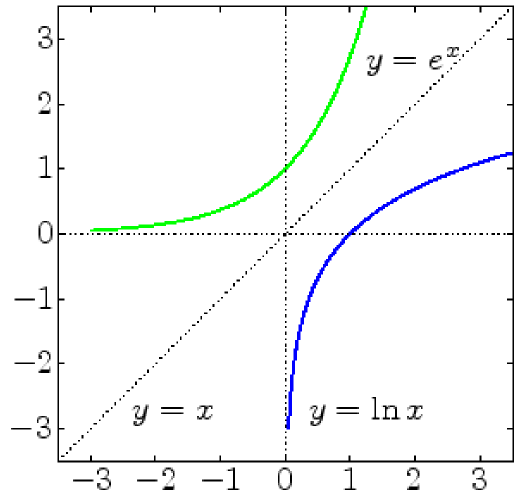
لاندې ځيرې د يو څو بيلګو برعکس - يا په څټ فنکشن يا تابع ښايي.





(c) ketabton.com: The Digital Library





په لاندې جدول کې هر اړونده تعریف ورشو وې ورکړ شوې دي:

f	D	f^{-1}	D
x^2	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$
e^x	$\mathbb{R}$	$\ln(x)$	$(0,\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{x\ :\ x=(2z+1)\pi/2\ ,z\in\mathbb{Z}\}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

د فنکشنونو یا توابعو سره شمیرنه Rechnen mit Funktionen

د توابعو کرښیز ترکیب ټکي دوله تعریف شوی دی، دا په دې معنا چې په توابعو د اړونده عملیو له لارې:

$$(rf+sg)(x)=rf(x)+sg(x).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه ضرب fg او وېش f/g . په وېرش کې باید g د صفر سره برابر نه وي..
بالاخره
$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
د دوه توابعو یو په بل پسې راوستل یا ځنځیرونه ښايي.
پای.

د بیلګې
$$f(x) = x^2 - 4, \qquad g(x) = x + 2$$
لپاره مختلفې ترېنې راکوي

$$(f + 2g)(x) = x^2 + 2x$$
$$(fg)(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x - 2, \qquad x \neq -2$$

په وېش کې تعریفتشځای $x = -2$ له منخه تلونکی یا د جګیدو وړ دی،

ځکه چې صورت یا ماتباندې $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ هم په $x = -2$ کې یو صفرځای لري.

د f او g یو په بل پسې ترېنه یا ځنځیرونه راکوي

$$(f \circ g)(x) = (x+2)^2 + 4$$
$$(g \circ f)(x) = x^2 - 2,$$

نو ترېنه یا عملیه $\circ$ کموتاتیو یا بدلوړ نه ده.

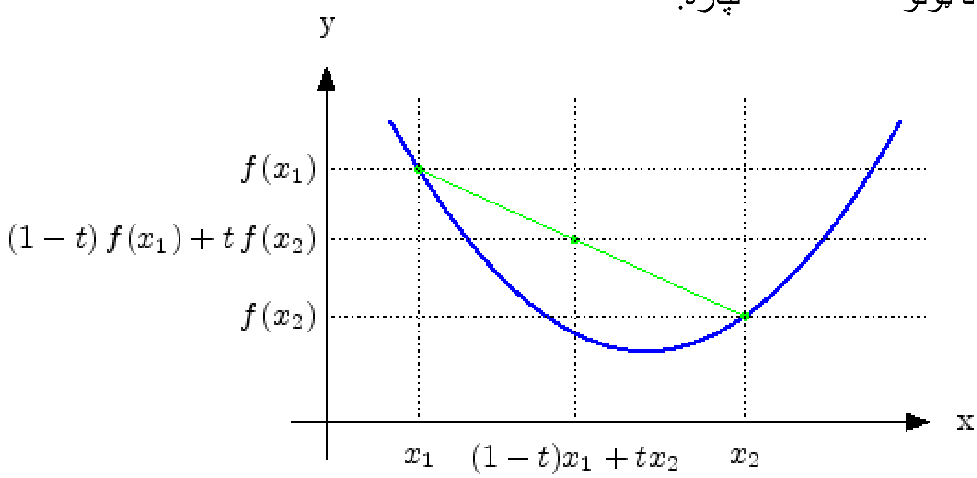
(c) ketabton.com: The Digital Library

ننوتي او وتلي - یا مقعر او محدبې توابع

یو تابع په یوه انتروال D کې(کره) ننوتی دی، که هر ټوټه ووني یا سیکانت د ګراف پورته لور ته پروت وي، دا په دې معناچې

$$f((1-t)\,x_1 + t x_2) \overset{(<)}{\leq} (1-t)\,f(x_1) + t\,f(x_2)\,, \quad t \in (0,1)$$

د ټولو $x_i \in D$ لپاره.



که f دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ وي، نو (کره) ننوتنه د ټولو $x \in D$ لپاره د

$$f''(x) \overset{(>)}{\geq} 0$$

سره تر هغه ځانله ټکي پورې ورته یا برابر ارزښته ده.

د ننوتو توابعو زیاتون یا جمعه ننوتي ده. ترني یا عملیې $/, \cdot, -$ همداسې یو په بل پسې راوړنه یا ځنځیرونه $\circ$ په ټولیزه توګه ننوتوالی نه ساتي. بالاخره هر ننوتی تابع ناپرېکېدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه وتلی تابع هم تعریف کيږي. د وتلي تابع لپاره ټوټه وونی یا سیکانت د ګراف کښته لور ته پروت دی، دا په دې معنا چې د x - محور باندې هنداره شوی تابع $-f$ وتلی دی.

پای.

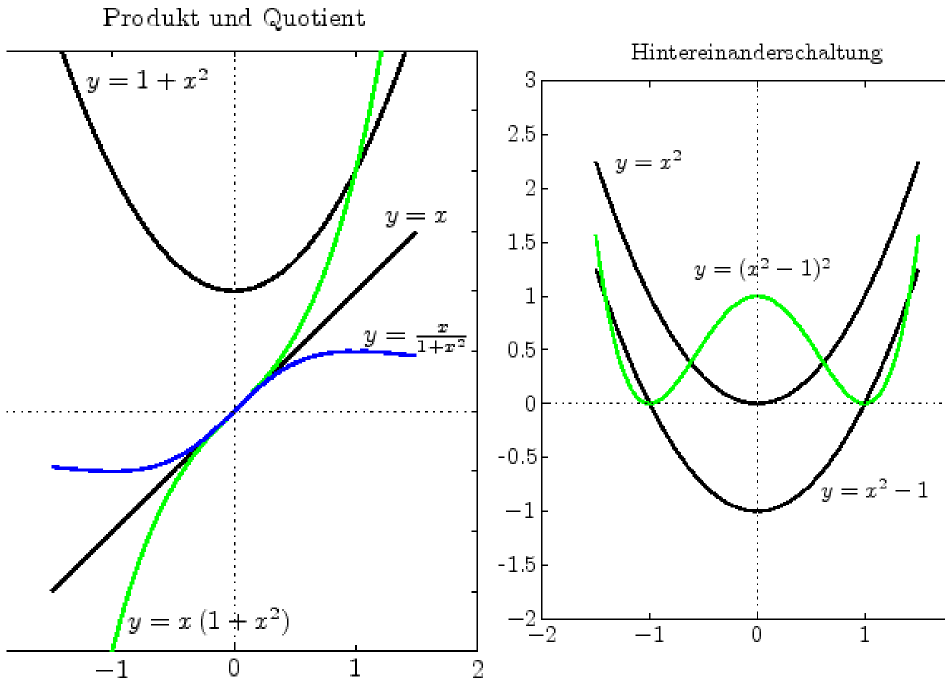
د دوه ننوتو فنکشنونو یا توابعو جمعه یا زیاتون د تعریف څخه ترلی لاس ته راځي:

$$\begin{aligned}
&(f+g)((1-t)x_1+tx_2) \\
&\quad = \quad f((1-t)x_1+tx_2)+g((1-t)x_1+tx_2) \\
&\quad \le \; (1-t)\,f(x_1)+t\,f(x_2)+(1-t)\,g(x_1)+t\,g(x_2) \\
&\quad = \; (1-t)(f+g)(x_1)+t(f+g)(x_2),
\end{aligned}$$

د کوم سره چې د نابرابرون ننوتوالی د f او g څخه کار اخستل کيږي.
نوری ترنې یا عملیې په ټولیزه توګه ننوتوالی نه ساتي، لکه چې لاندې بیلګې به یې وشایي.

یو په بل پسې ترنه ضرب او ویش

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دې لپاره چې په يوه ټکي کې د تابع ناپرېکدنوالی وښايو، ټاکو $c < a < x < b$.
نو دی

$$x = ta + (1-t)b$$

$$a = sx + (1-s)c$$

د $0 < s,t < 1$ سره. داچې ننوتی دی، نو باور لري

$$f(x) - f(a) \leq (1-t)(f(b) - f(a))$$

همداسې

$$f(x) - f(a) \geq \left(\frac{1-s}{s}\right)(f(a) - f(c)),$$

د $f(a) \leq sf(x) + (1-s)f(c)$ له امله.
د $x \to a$ لپاره s او t د 1 په لور هڅيږي، او له دې سره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0.$$

د $x<a$ لپاره ورته دلیل راوړل کیږي.

پولینوم Polynom

د n درجې یو پولینوم p په لاندې بڼه لیکل کیږي

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

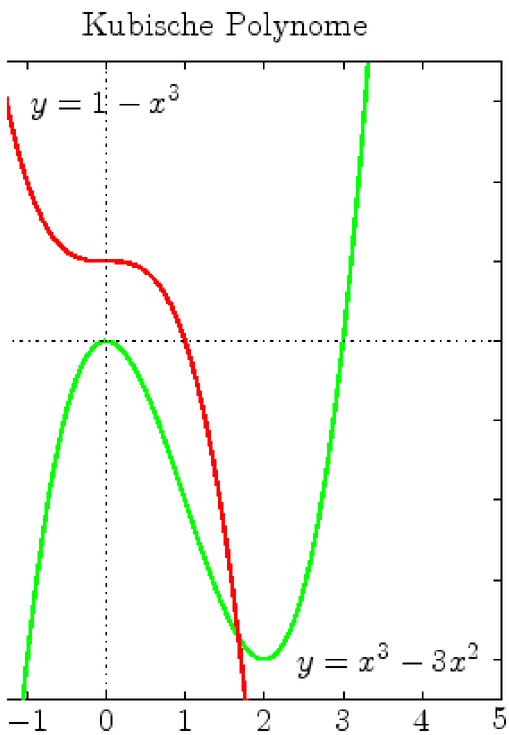
د $a_n\neq 0$ سره.

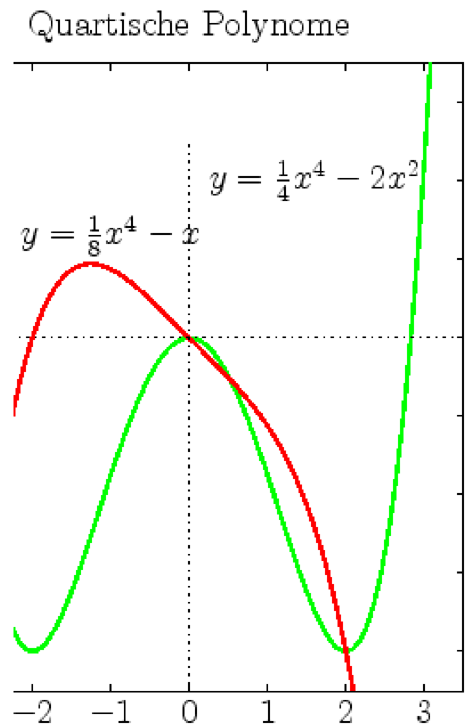
اووښتوني یا متحولې x او ضریب یا ځلووني a_k کیدی شي حقیقي – همداسې کمپلکس ګڼونه یا عددونه وي. په اړونده توګه د حقیقي همداسې د کمپلکس پولینوم څخه غږیږو.
لیکونکیة: هیورنر او هیولیګ

لاندې ځیرې مکعب ډوله ($n=3$) او کوارتیک ډوله ($n=4$) پولینومونه د ځرنګوالي له لورې مختلف تابع ګرافونو سره ښايي.

کوارتیک پولینومونه مکعب پولینومونه

(c) ketabton.com: The Digital Library





پولینوموېش Polynomdivision

پولینومونو p او q ته د $m = \text{Grad}\, q \leq \text{Grad}\, p = n$ سره یواځني
پولینومونه f او r شتون لري د

$$p = fq + r, \quad \text{Grad}\, f = n - m, \quad \text{Grad}\, r < m\,.$$

سره.

دا توته ونه کیدی شي د وېش له لارې د باتي یا باقی سره وټاکل شي.

په ځانګي توګه د p د صفرځای t لپاره لاس ته راځي چې $p(x) = f(x)(x - t)$
دی د $\text{Grad}\, f = n - 1$. پر سره.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د q سره د p وېش څخه لرو

$$\underbrace{a_n x^n + \cdots}_{p(x)} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \underbrace{(b_m x^m + \cdots)}_{q(x)} + p_{n-1}(x)$$

د يوه پاتې يا باقي $p_{n-1}(x) = a'_{n-1} x^{n-1} + \cdots$ سره.

که $m \le n-1$ وي کېدی شي بيا ووېشل شي:

$$p_{n-1}(x) = \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} q(x) + p_{n-2}(x) .$$

پروسه پرې کيږي، که د پاتې پولينوم درجه له m کوچنۍ وي، دا په دې معناچې
وروسته د $r = p_{n-(n-m+1)}$. سره.
د تل بيا ضرب له لارې لاس ته راځي

$$f(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} + \cdots .$$

که t د p صفرځای وي، نو باور لري

$$0 = p(t) = f(t)(t-t) + r(t) = r(t)$$

او له دې سره $r(x) = 0$ ، ځکه چې $\text{Grad } r < 1$ دی.

د پولينوم وېش د ليکنيز وېش سره ورته مخ ته تلی شي.

د بيلګې په توګه د $p(x) = 9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2$

او $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$ لپاره لاس ته راځي

$$(9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2) : (3x^2 + 2x + 1) =$$

$$= 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{r(x)}{q(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$
\begin{array}{r}
-(\,9x^5 + 6x^4 + 3x^3\,) \\
\hline
6x^4 + 7x^3 + 4x^2 \\
-(\,6x^4 + 4x^3 + 2x^2\,) \\
\hline
3x^3 + 2x^2 + 4x \\
-(\,3x^3 + 2x^2 + x\,) \\
\hline
3x + 2 = r(x)
\end{array}
$$

نو دی

$$\underbrace{9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2}_{p(x)} = \underbrace{(3x^3 + 2x^2 + x)}_{f(x)}\underbrace{(3x^2 + 2x + 1)}_{q(x)} + \underbrace{(3x + 2)}_{r(x)}\,.$$

د يوه پولينوم صفرځايونه او فاکتوري کول يا په ضريبونو ټوټه کول

يو د n درجې پولينوم p د څووالي يا تکرار سره ټيک z_k کمپلکس صفرځايونه لري او له دې سره کېدی شي په ورته کرښيزو ضريبونو يا فاکتورونو

$$p(z) = c(z - z_1)\cdots(z - z_n)$$

وليکل شي د ثابتې c سره.

که p حقيقی يا قبيل وي، نو کمپلکس صفرځايونه په کنجوګيری جوړو $x_k \pm \mathrm{i}y_k$ رامنځ ته کيږي.

يو حقيقي په ضريبونو ليکل يا فاکتوره کول کېدی شي د کرښيزو فاکتورونو ترڅنګ د لاندې مربع فاکتورونه

$$(z - x_k - \mathrm{i}y_k)(z - x_k + \mathrm{i}y_k) = (z - x_k)^2 + y_k^2$$

هم ولري.

د دويمې درجې پولينوم صفرځايونو لپاره کيدی د منځشپې يا **ABC فرمول(دا د p,q-فرمول ته روته يا همهغسې دی) و کارول شي** او د دريمې او څلورمې درجې پولينومونه د کاردان فرمولونو Cardanischen Formeln له لارې د اکسپليڅيت الجبری افادو يا ويېنو په توګه و ټاکل شي.
د جګو درجو پولينومونو لپاره بيا په ټوليزه توګه نومريکي تلنلارې کارول کيوي. که بيا يو صفرځای معلوم وی، نو کېدی شي د ا ړونده کرښيز فاکتورونې يا ضريبونې له لارې

(c) ketabton.com: The Digital Library

و وېشل شي.
$q(z)=p(z)/(z-z_1)$ او $z_2,\dots,z_n$ د $n-1$ درجې د پولينوم د د
صفرځايونو په توګه وټاکل شي.
د الجبر بنسټيزې جملې په اساس د $\mathrm{Grad}\geq 1$ درجې کمپلکس پولينوم يو صفرځای
لري . د پرلپسې پولينوموېشنې د صفرځايونو سره
اړونده کربنيز صريبونه يا فاکتورونه له دې سره ضريبونه راکوي.

که p فقط حقيقی صريبونه ولري، نو باور لري

$$\overline{p(z)}=\overline{\sum_{k=0}^{n}p_k z^k}=\sum_{k=0}^{n}p_k\overline{z^k}=\sum_{k=0}^{n}p_k\overline{z}^k=p(\overline{z})$$

يعني د يوه صفرځای z_0 لپاره هم $p(\overline{z_0})=\overline{0}=0$ دی.

د $p(z)=z^3-5z^2+9z-5$

په ضريبونو ليکل يا فاکتوره کول ټاکو. پيژنو، چې $z_1=1$ يو صفرځای دی او يو د
پولينوم وېش سره لرو
$p(z)/(z-1)=z^2-4z+5.$

د دې مربع پولينوم صفرځايونه د منځشپې فرمول له مخې دي
$z_{2,3}=2\pm i.$

د دې په تعقيب کمأبکس فاکتورونه لاندې ده

$$p(z)=(z-1)(z-2-i)(z-2+i).$$

حقيقی په ضريبونو ليکنه يا صريبونه د دواړو اخرني فکتورونو د ټولګې څخه لاس ته
راوړو همداسې سيده د مربع تکميلونې له لارې:

$$z^2-4z+5=(z-2)^2+1,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې

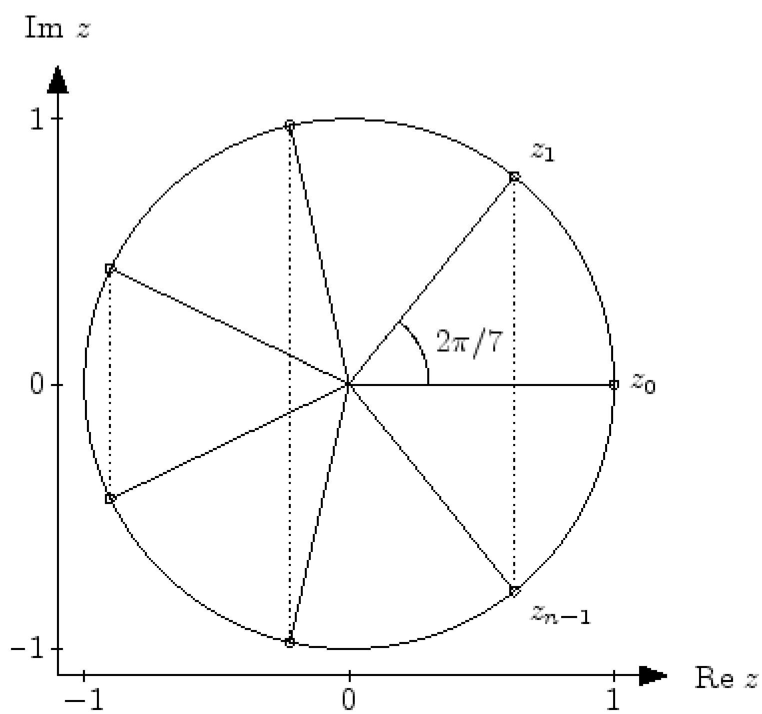
$$p(z) = (z-1)((z-2)^2+1).$$

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر، کنش

د $p(z) = z^n - 1$ صفرځايونه n -م يوونرېښي يا واحدجذرونه دي
$z_k = \exp(2k\pi \mathrm{i}/n), k = 0, ..., n-1.$

له دې سره کمپلکس فاکتورونه لاس ته راځي

$$p(z) = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \exp(2k\pi \mathrm{i}/n)).$$



د کمپلکس کنجږګيري صفرځايونو ټولګه يا يوځای کونه حقيقي فاکتوري کونه راکوي.

د جوړه n لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(z) = (z-1)(z+1)\prod_{k=1}^{n/2-1}\left(z^2 - 2z\cos(2k\pi/n) + 1\right)$$

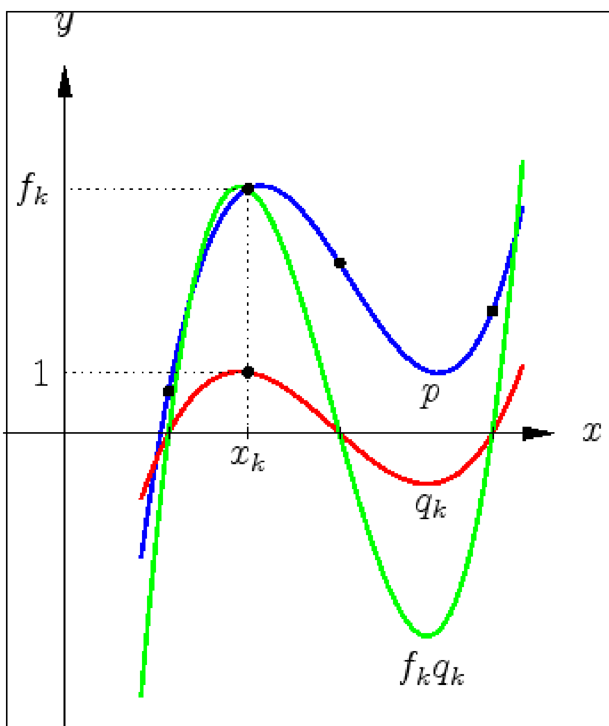
او د ناجوړه یا طاق n لپاره

$$p(z) = (z-1)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(z^2 - 2z\cos(2k\pi/n) + 1\right).$$

پای.

د پولینومونو سره انترپولیشن

په $n+1$ کي تابع ا رزښتونه f_k جوړه په مختلف تکیه ځایونو $x_0,\ldots,x_n$ کیدی شی یواځني د یوه $\le n$ Grad درجي پولینوم له لاري انترپولی شي:



$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0,\ldots,n\,.$$

دا انترپولیشن پولینوم کیدی شي د لاګرانج – بنه

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

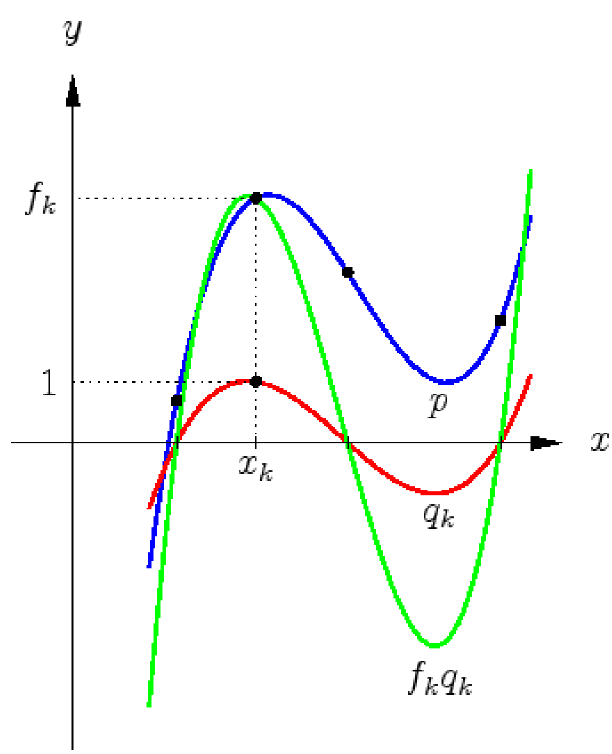
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x),$$

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n\,.$$

دا انترپولیشن پولینوم کیدی شي د لاګرانج – بڼه

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x), \quad q_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j},$$

انځور شي.



پولینوم q_k د لاګرانج-پولینوم بلل کیږي او په ټکي x_k کې ارزښت 1 لري او په نورو ټولو ټکو x_j کې یې ارزښت صفر دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$q_k(x_j) = \delta_{k,j}$$

د کرونيکر-سومبول δ سره.

د لاگرانج-پولينوم

$$q_k(x_j) = \delta_{j,k}$$

پوره کوي او له دې سره لاس ته راځي

$$p(x_j) = \sum_k f_k \delta_{j,k} = f_j ,$$

د انترپوليشن شرايط ټول پوره دي.

د دې لپاره چې يواځنوالی وښايو، چې يو بل انترپوليشنپولينوم $\tilde{p}$ شتون لري، کمښت را اخلو يا تر څېړنې نيسو.

$p - \tilde{p}$.

دا (لږتر لږه) $n+1$ صفرځاونه لري(د انترپوليشن کېدونکي ځايونه x_k)، مګر (زيات له زياته) د n درجو. له دط سره بايد کمښت کټمټ وي، نو پولينومونه سره توپير نخ لري.

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

په اکويديستانت يا برابرواټنيز تکيه -ځايونو $x_k = kh$ د f_k ارزښتونو توابعو ټيک ګرافيکي انځورونې ته کېدی شي مکعبيز انترپوليشن وکارول شي. له دې سره په تکيه-ځايونو $x_{k+1/2} = (k+1/2)h$ منځ ارزښتونه د

$$f_{k+1/2} = (-f_{k-1} + 9f_k + 9f_{k+1} - f_{k+2})/16$$

له لارې اپروکسيمی شي. دا پروسه تکراريږي، تر هغز چې پوره داتا منځ ته راشي.

د ـټکو -فرمول وزنونه

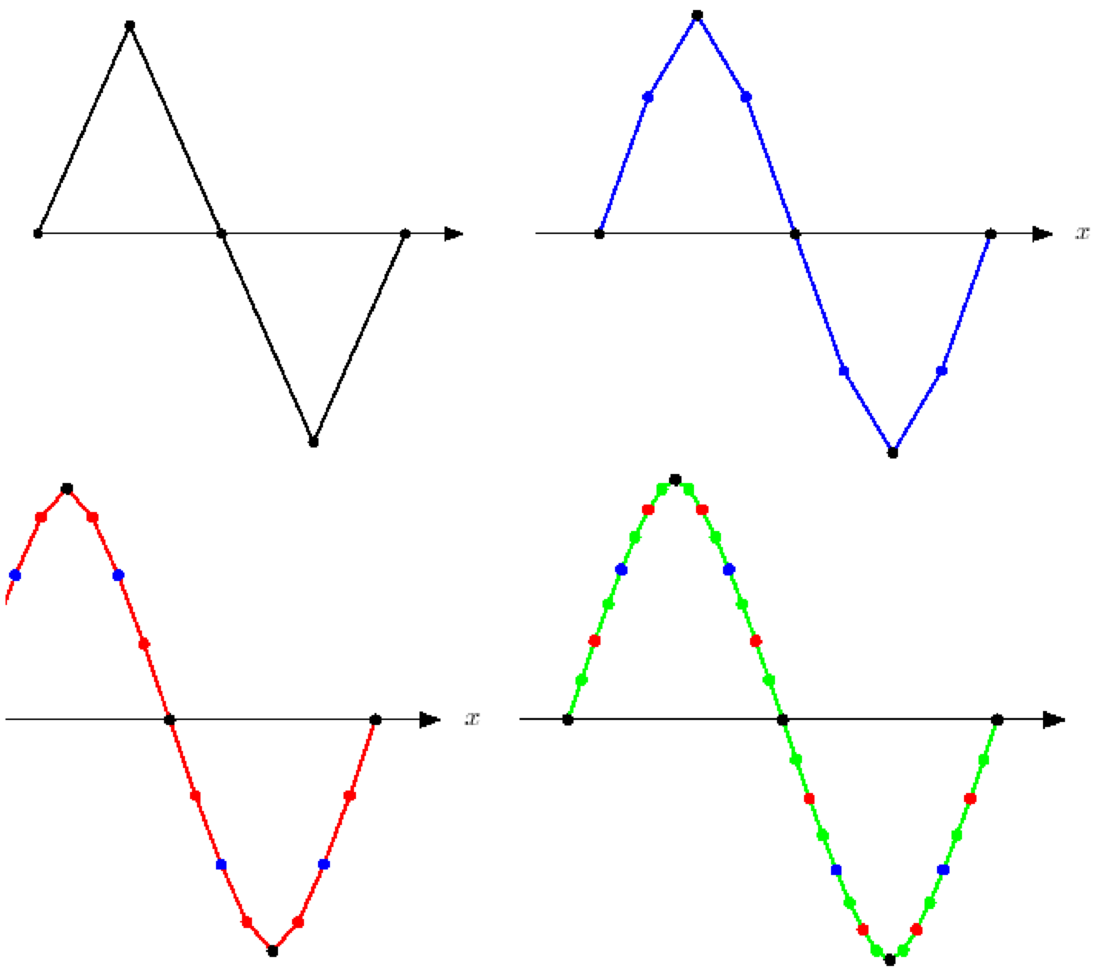
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{9}{16}, -\frac{1}{16}$$

په تکيه-ځايونو $x_{k+1/2}$ د لاګرانژ-پولینوم ارزښتونه دي.
د بېلګې په توګه

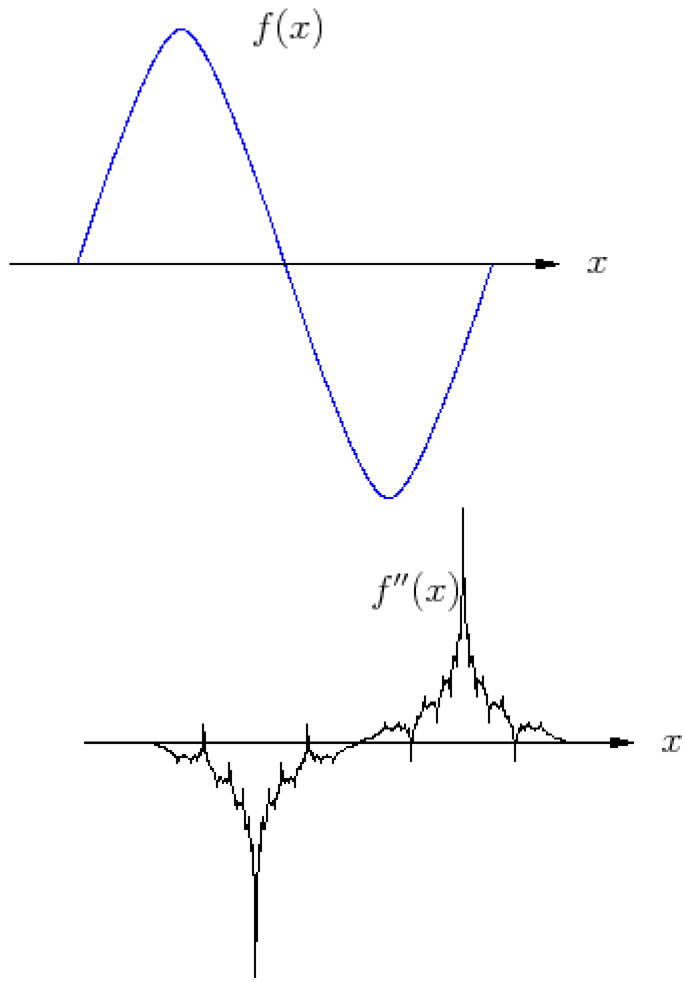
$$-\frac{1}{16} = \left(\frac{x-kh}{(k-1)h-kh}\frac{x-(k+1)h}{(k-1)h-(k+1)h}\frac{x-(k+2)h}{(k-1)h-(k+2)h}\right)\Big|_{x=(k+1/2)h}.$$

دی.
د سیمتري په بنسټ او دا چې ضريبونه بايد سيمتريک شي(د ثابتو داتا انترپوليشن) ، بې
له شمېرنې نور ضريبونه راکوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیره وتونداتا ښايي او د 4 -ټکو-انترپولیشن د درې ځله کاروني یا استعمال له لارې د منځ ته ارغلي ساین تابع اپروکسیمیشن . په حقیقت کې دا لاندې کیږ ښودل شوی پوله تابع خوی اغیز لري. مګر په هر حالت فقط لومړی مشتق ناپرېکیدونکی دی.



ښی ګرافیک وېشلی کمښت له لارې ورنږدې یا نږدې دویم مشتق د اته واره انترپولیشن پسې ښايي. سړی د ګراف فراکتال fraktalen (فراکتال: لاتین: مات) خویونه پیژني.

راشنل (کسری یا نسبتي) توابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو ريښتونی تابع r د صورت درجې m او مخرج درجې n سره د دوه پولينمونو وېش دی:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}.$$

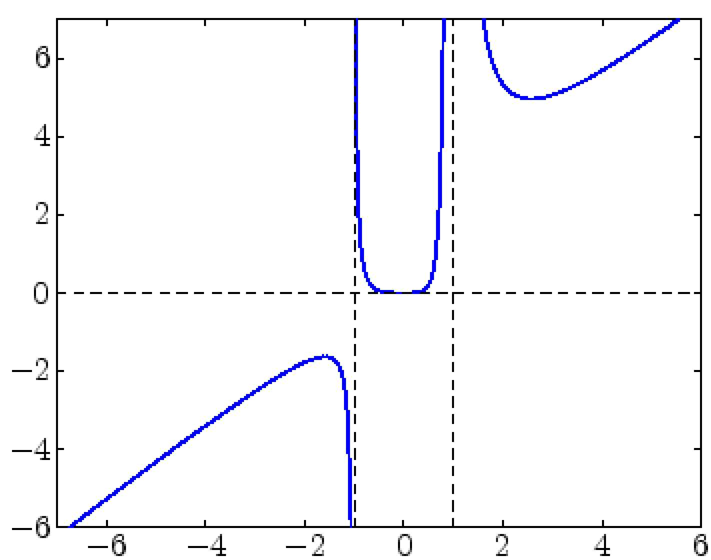
دا انځوونه نا ټوټه وونې بلل کيږي، که p او q کوم ګډ کربنيز ضريب يا فاکتور ونه لري. د مخرج صفرځايونه راشنل تابع r د تعريف تشځايونه دي او د قطبځايونه بلل کيږي. د دوی نظم د صفرځايونو ډېرځلوالی ښايي.

اووښتونې يا متحولې x او ضريبونه a_k, b_k کېدی شي حقيقي يا کمپلکس وي.
اړوند سرې د حقيقي يا کمپلکس راشنل تابع څخه غږيږي.
لليکونکي : اپپ، هيوليګ

تابع

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$$

تابع يو سادهقطب په $x = -1$ کې لري او دبل پول په $x = 1$ کې.



(c) ketabton.com: The Digital Library

سرې له تابع f ځخه درک کوي، چې په یوه ساده صفرځای کې مخنخښه بدلوي او په یوه ډبل صفرځای کې مخنخښه تغیر نه خوري.

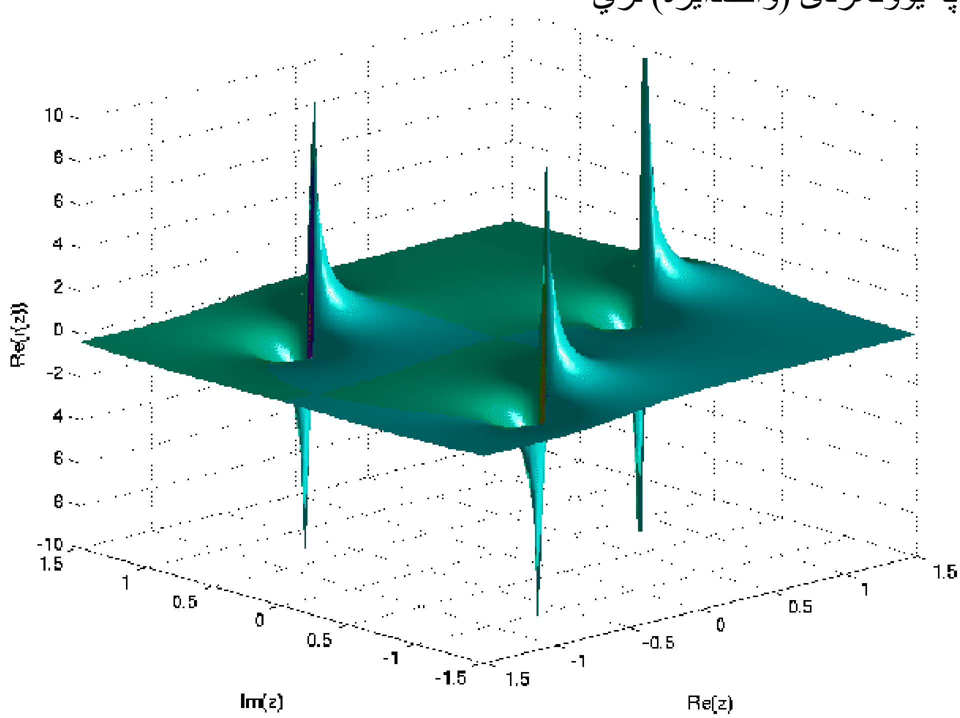
کمپلکس راشنل- یا کسري توابع

$$r(z) = \frac{z^2}{z^3 - 1}$$

درې صفرځایونه

$$z_1 = 1, z_2 = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = e^{-2\pi i/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

په یوونکردی (واحددایره) لري



ځیره د r د ګراف رییل - او ایماجینار برخه ښایي. له دې سره د رنګوښنه (که چېرې رنګه وه) د r د مطلق ارزښت له لارې تاوکل شوې.

) لیکونکي: اېپ،هیورنر، کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه مات ټوټه کونه يا تجزيه کونه **Partialbruchzerlegung**

يو د m_j نظم راشنل تابع r د n مختلفو صفرځايونو z_j سره ،

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_n)^{m_n}$$

کيدی شي په لاندې ټوټه شي

$$r(z) = f(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z), \quad r_j(z) = \frac{a_{j,1}}{z - z_j} + \ldots + \frac{a_{j,m_j}}{(z - z_j)^{m_j}},$$

دلته f د $d = \text{Grad } p - \text{Grad } q$ Grad درجې پولينوم دی ($f = 0$ ، که $d < 0$ وی). راشنل توابع r_j د r په قطبځايونو کې اصلي برخې بلل کيږي. دا د $r(z)$ لوېدنه تشريح کوي د $z \to z_j$ لپاره. پولينوم f کيدی شي د پولينوموېش له لارې وشمېرل شي:

$$p = fq + g, \quad \text{Grad } g < \text{Grad } q\,.$$

دلته g د p په q باندې وېشنې پاتې يا باقي دی. ضريبونه $a_{j,\nu}$ کيدی شي د z^k د ضريبونو د پرتله کونې له لارې په کټوټوالي

$$p(z) = q(z) \left(f(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z) \right)$$

وټاکل شي.

د بديل په توګه د اصلي برخو ټاکلو لپاره د پوله ارزښت متود هم کارول کيدی شي.

د قطبونو د خوراځګو ضريبونو لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{j,m_j} = \lim_{z\to z_j} (z - z_j)^{m_j} r(z).$$

د يوه نظم $(m_j > 1)$ قطبخای کې نه شي کېدی ضريبونه $a_{j,1}, \ldots, a_{j,m_j-1}$ سيده
د پولې ارزښت په توګه وټاکل شي. سړی کړی شي دا اوس شميرل شوی ترم
$a_{j,m_j} / (z - z_j)^{m_j}$ کم کړي او د رکورسيو متود وکاروي.. يو ضريب پرتله کونه
د همدا اوس شته ترمونو په پام کې نيولو هم شونې ده.
$(z - z_j)^{m_j}$
پوله ارزښت کېدی شي وټاکل شي، داسې چې د r په مخرج کې ضريب
لرې برېښوول شي او بيا z_j په پاتې کسر يا ــمات کې ځا په ځای شي. په ځانګړې
توګه باور لري

$$a_{j,1} = \frac{p(z_j)}{\prod_{k\neq j} (z_j - z_k)}$$

د ساده قطب ځايونو $z_1, \ldots, z_n$ لپاره.
ليکونکي : اپ، هيورنر

د ساده قطبځايونو ($m_j = 1$) لپاره به ټوټه کونه منځ ته راشي. د پولينوم وېش پسې
راشنل تابع منځ ته راځي

$$r(z) - f(z) = \frac{g(z)}{q(z)} = \frac{g(z)}{(z - z_1)\cdots(z - z_n)},$$

د کوم سره چې پولينوم $q(z)$ او $g(z)$ ګډ پروېشونی يا مقسوم عليه ونه لري، نيسو ،
چې ټول z_j مختلف دي، او $\text{Grad } g < n$ باور لري.
د ټوټه کسر ټوټه کوني سره د برابر ايښوونې وروسته

$$\frac{a_1}{z - z_1} + \cdots + \frac{a_n}{z - z_n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a_j = a_{j,1}$ سره او د q د ضربول سره سړی د $g(z)$ د لاګرانژ ـانځورونه لاس ته راوړي

$$g(z)=\sum_{j=1}^{n}\left(a_j\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z-z_k)\right)=\sum_{j=1}^{n}\left[a_j\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z_j-z_k)\right]\underbrace{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{z-z_k}{z_j-z_k}}_{q_j(z)}$$

دا په ي معناچې د $q_j(z_k)=\delta_{j,k}$ له امله په ګوډیزه نوکانو کې د $g(z_j)$ ازښتونه

$$a_j=g(z_j)/\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z_j-z_k).$$

دي. له دې سره لاس ته راځي
په ورته توګه د جګو درجو قطبځایونه هم کار ول کېدی شي. دا مګر تخنیکي لږ پې]لی دی.
لیکونکي : اپ، هیورنر
د

$$r(z)=\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{z^3}{z^2+z-2}$$

په ټوټه کسر(مات) ټوټه ونه دې وټاکل شي.
دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنی نه ده، باید لومړی یو پولینوم وېش صورت ونیسي. سړی لاس ته راوړي

$$(z^3):(z^2+z-2)=z-1+\frac{3z-2}{z^2+z-2},$$

$$\begin{array}{l}-(\underline{z^3+z^2-2z)}\\ \quad -z^2+2z\\ \quad -(\underline{-z^2-z+2)}\\ \qquad 3z-2\end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې $f(z) = z - 1, \quad g(z) = 3z - 2.$ د $r = f + \frac{g}{q}$ سره .
د دې لپاه چې د ټوټه مات ټوټه ونې اينونه چې لاس ته راوړو بايد اوس د r قطبځايونه وټاکل شي. د منځشپې فرمول سره لاس ته $z_1 = 1$ او $z_2 = -2$ راوړو د مخرج پلينوم د صفځای په ځېر:

$$q(z) = (z-1)(z+2).$$

د g/q ټوټه مات ټوټه ونه له دې سره لاندې بڼه لري

$$\frac{3z-2}{z^2+z-2} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{z+2}.$$

دا اخر پل د ضريبونو a_k ټاکل دي.
د پوله ارزښت متود سره لاس ت ه راځي

$$a_1 = \lim_{z \to 1} (z-1) \frac{3z-2}{z^2+z-2} = \left. \frac{3z-2}{z+2} \right|_{z=1} = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \left. \frac{3z-2}{z-1} \right|_{z=-2} = \frac{8}{3}.$$

او

په ټوليزه توګه لاس ته راځي

$$r(z) = z - 1 + \frac{1/3}{z-1} + \frac{8/3}{z+2}.$$

پای.

راشنل توابع

$$r(z) = \frac{2z^2 - 5z - 3}{z^3 - 3z^2}$$

په $z_1 = 3$ کې يوه سادهقطبځای لري او په $z_2 = 0.$ کې يو دبل قطبځای لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنۍ ده، پولينوم وېش ته اړتيا نه شته او د په ټوټه کسر ټوټه ونه دا بڼه لري

$$\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\frac{a_1}{z^2}+\frac{a_2}{z}+\frac{a_3}{z-3}.$$

د پوله ارزښت متود سره لرو

$$a_1 = \lim_{z\to 0} z^2\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2} = \left.\frac{2z^2-5z-3}{z-3}\right|_{z=0} = 1$$

$$a_3 = \lim_{z\to 3}(z-3)\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2} = \left.\frac{2z^2-5z-3}{z^2}\right|_{z=3} = 0\,.$$

سرې په ساده ډول کړی شي، چې دا پاتې (هغه په اصطلاح، چې ورته وايو باقي مانده) ضريبونه a_2 په يوه ټکي $z \neq 0,3$ د تابع ارزښتونو د پرتوله کوني له لارې وټاکي.
د بېلګې په توګه د z = 1 لپاره لرو

$$\frac{2-5-3}{1-3}=1+a_2+0$$

او سرې $a_2 = 2$ لاس ته راوړي.
ليکونکي: اپ،هيورنر
د راشنل توابعو لپاره

$$r(z)=\frac{z^2-5z+4}{z^3-3z^2+z+5}$$

لپاره قطبځايونه روښانه نه دي. د ازمايښت له لارې $z_1 = -1$ پيداکيږي او بيا د پولينوم وېش سره لاس ته راځي

$$(z^3-3z^2+z+5):(z+1)=z^2-4z+5.$$

.

د نيمي شپې فرمول سره د مخرج نور صفرځايونه $q(z)$ لاس ته راځي

$$z_{2,3}=2\pm i.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره ماتلاندې یا مخرج ضریبه ونه یا فاکتوری کونه

$$q(z) = (z+1)(z-2-i)(z-2+i)$$

لري او د ټوټه کسر ټوټه کونه داسې ده

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-2-i} + \frac{c}{z-2+i}.$$

د دې لپاره چې a, b, c د ضریبونو د پرتلې له لارې وټاکو، د مخرج $q(z)$ سره وېشو او لرو

$$+ 4 = a(z-2-i)(z-2+i) + b(z+1)(z-2+i) + c(z+1)(z-2-i).$$

د $1, z, z^2$ د ضریبونو د پرتله کونې له لارې د درې ناټاکلو یا نامعلومو a, b او c لپاره یو کرښیز مساوات سیتم لاس ته راځي:

a	b	c	
1	1	1	1
-4	$-1+i$	$-1-i$	-5
5	$-2+i$	$-2-i$	4

د حل په حیث لاس ته $b = i/2$ $a = 1,$ او $c = -i/2$ راځي ، دا په دې معنا ، چې

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{i/2}{z-2-i} + \frac{-i/2}{z-2+i}.$$

که اخري دواړه ترمونه سره یوځای کړو، نو حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه لاس ته راځي

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1/4}{z^2-4z+5}.$$

د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو حقیقي ریښتونی یا راشنل تابع r د حقیقي قطبځایونو x_j سره او کمپلکس کنجوګیري قطبځایونو $u_k \pm \mathrm{i}\, v_k$ سره او څو واره والی یا ډېروالی همداسې m_j n_k

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(x) = \prod_j (x - x_j)^{m_j} \prod_k ((x - u_k)^2 + v_k^2)^{n_k}$$

کیدی شي په لاندې بڼه

$$r(x) = f(x) + \sum_j \sum_{\nu \le m_j} \frac{a_{j,\nu}}{(x - x_j)^\nu} + \sum_k \sum_{\mu \le n_k} \frac{b_{k,\mu}(x - u_k) + c_{k,\mu}}{((x - u_k)^2 + v_k^2)^\mu}$$

ټوټه کیږي، د $d = \text{Grad } p - \text{Grad } q$ درجې ($f = 0$ ، که $d < 0$ وي) یوه پولینوم f سره. د په هر قطبځای زیاتونونو یا د جمعې غړو د ګڼون یا تعداد ډېرواره والی په ګوته کوي. په ځانګړې توګه د ساده قطبځای لپاره باور لري

$$r(x) = f(x) + \sum_j \frac{a_j}{x - x_j} + \sum_k \frac{b_k(x - u_k) + c_k}{(x - u_k)^2 + v_k^2} .$$

پولینوم f کیدی شي دپولینوم وېش له لارې وټاکل شي

$$p = fq + g, \quad \text{Grad } g < \text{Grad } q,$$

دا په دې معنا چې g p د q وېش په باندې پاتې یا باقي دی. ضریبونه کیدی شي د مخرج پولینوم سره له ضرب وروسته دضریبونو د پرتلې له لارې وشمېرل شي.
حقیقي ټوټه کسر ټوټه کونه هم کیدی شي د کمپلکس بڼې څخه و کټل شي یا لاس ته راوړل شي، داسې چې سړی کمپلکس کنجوګیري ترمونه سره یوځای کاندې.

ټوټه کونه د ساده قطبځایونو ($m_j = n_k = 1$) لپاره سرته رسیږي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

د r کمپلکس ټوټه کسر ټوټه کونه په دې حالت کې دا لاندې بڼه لري

$$p(x)+\sum_j \frac{a_j}{x-z_j}$$

د z_j سره د مخرج پرلینوم q ساده صفرځایونه او

$$a_j=\lim_{z\to z_j}(z-z_j)r(z).$$

دا q چې حقیقي دی، نو کمپلکس صفرځایونه د کمپلکس کونجږګیري جوړورپه توګه منځ ته راځي:

$$z_k=u+\mathrm{i}v,\quad z_l=u-\mathrm{i}v=\overline{z_k}.$$

له دې سره د اړونده ترمونو لپاره لاندې ټوټه ونه باور لري

$$\overline{a_k}=\lim_{z\to z_k}\overline{(z-z_k)r(z)}=\lim_{\overline{z}\to z_l}(\overline{z}-z_l)r(\overline{z})=a_l,$$

دا په دې معنا، چې

$$a_k=s+\mathrm{i}t,\quad a_l=s-\mathrm{i}t.$$

د دواړو ترمونو یوځای کونه غوښتونې بڼه راکوي:

$$\frac{s+\mathrm{i}t}{x-u-\mathrm{i}v}+\frac{s-\mathrm{i}t}{x-u+\mathrm{i}v}=\frac{2s(x-u)-2tv}{(x-u)^2+v^2}.$$

د جګو درجو قطبځایونه کیدی شي په ورته توګه تر څېړنې ونیول شي، مګر دلیل راوړنه یې په څرګنده توګه پیچلې ده.

د

$$r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{2x^3-9x^2+11x+1}{x^3-4x^2+5x}$$

حقیقي په ټوټه کسر ټوټه کونې ټاکنه په درې پلونو یا قدمونو وېشل کیږي

(i) دا چې $\mathrm{Grad}\ p \geq \mathrm{Grad}\ q$ دی، لومړی د پلوینوم وېشنه صورت نیسي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$(2x^3 - 9x^2 + 11x + 1) : (x^3 - 4x^2 + 5x) = 2$$

$$g(x) = -x^2 + x + 1.$$

پاتې

له دې سره لاس ته راځي

$$r(x) = f(x) + \frac{g(x)}{q(x)} = 2 + \frac{-x^2 + x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x}.$$

(ii) د دې لپاره چې د g/q ټوټه ونې اینوونه یا اسعمال پیداکړو، نو قطبځایونه ټاکو یا پیدا کوو.

د q د صفرځایونو $x = 0$ د نوکانو دباندېکونې وروسته د مبع تکمیل له لارې سرې نور دواړه صفرځایونه لاس ته راوړي:

$$x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1^2.$$

دا پاتې صفرځایونه کمپلکس کونجوګیري جوړې $u \pm iv = 2 \pm i$ دي.له دې سره اینوونه په لاندې توګه ده

$$\frac{-x^2 + x + 1}{x((x-2)^2 + 1^2)} = \frac{a}{x} + \frac{b(x-2) + c}{(x-2)^2 + 1^2}.$$

(iii) د ضریبونو د ټاکنو لپاره د اصلي مخرج q سره ضربیږي او ترې لاس ته راځي

$$-x^2 + x + 1 = a((x-2)^2 + 1^2) + b(x-2)x + cx$$

د x, 1 او x^2 ضریبونو پرتله مو کرښیز مساوات سیستم ته بیایي

$$1 = \qquad 5a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1 = -4a - 2b + c$$
$$-1 = a + b$$

د لاندې حل سره

$$a = \frac{1}{5},\ b = -\frac{6}{5},\ c = -\frac{3}{5}\,.$$

له دې سره حقیقي ټوټه کسر ټوټه کونه ده

$$r(x) = \frac{1/5}{x} + \frac{-6/5(x-2) + (-3/5)}{(x-2)^2 + 1^2}.$$

د ټاکلو لپاره پوله ارزښت متودونه هم کارول کیږي. که دا اینوونه یا ځای په ځای کونه د x سره ضرب شي او $x = 0$ کیږدي، نو لاس ته ترې راځي

$$\frac{1}{2^2 + 1^2} = a + 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{5}.$$

د $x = 2$ ځای په ځای کونې سره c لاس ته راځي:

$$\frac{-2^2 + 2 + 1}{2(0^2 + 1^2)} = \frac{1/5}{2} + \frac{c}{0^2 + 1^2} \Longrightarrow c = -\frac{3}{5}.$$

بالاخره کېدی b د ټکی ازماېښت $x \neq 2$ له لارې ، د بېلګې په توګه $x = 1$ منځ ته راشي.
پای.

د

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

حقیقي ټوټه کسر ټوټه کونې ټاکلو په دوه پلونو یا قدمونو کې ترتیبیږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(i) د اینسوونې د ټاکلو لومړی قطبځایونه پیدا کیږي. له

$$q(x) = (x^2+1)^2$$

پیژندل کیږي، چې $\pm i$ دبل صفرځایونه دي، دا په دې معنا چې $u=0$ او $v=1$.
له دې سره دا اینسوونه ده

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{b_1x+c_1}{x^2+1} + \frac{b_2x+c_2}{(x^2+1)^2}.$$

(ii) د ضریبونو د ټاکلو له امله دا سړی د اصلي مخرج q سره ضربوي او لاس ته
ترې راوړي

$$\begin{aligned} x^3 &= (b_1x+c_1)(x^2+1)+b_2x+c_2 \\ &= b_1x^3+c_1x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)1. \end{aligned}$$

د $1, x, x^2$ او x^3 د ضریبونو پرتله کونه مو کرښیز سیستم ته بیایي

$$\begin{aligned} 1 &= b_1 \\ 0 &= c_1 \\ 0 &= b_1+b_2 \\ 0 &= c_1+c_2 \end{aligned}$$

د لاندې حل سره
$b_1=1,\ c_1=0,\ b_2=-1,\ c_2=0$.

بدیلې کیدی شي د کمپلکس ټوټوه کسر ټوّ کونې څخه مخ ته لاړ شو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{a}{z-i} + \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{c}{z+i} + \frac{d}{(z+i)^2}.$$

ضریبونه $c = \overline{a},\ d = \overline{b}$ پوره کوي او د جمعي جوړولو له لارې

$$\frac{a}{z-i} + \frac{c}{z+i},\ \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{d}{(z+i)^2}$$

هم حقيقي توټهکسر ټوټه کونه لاس ته راوړي

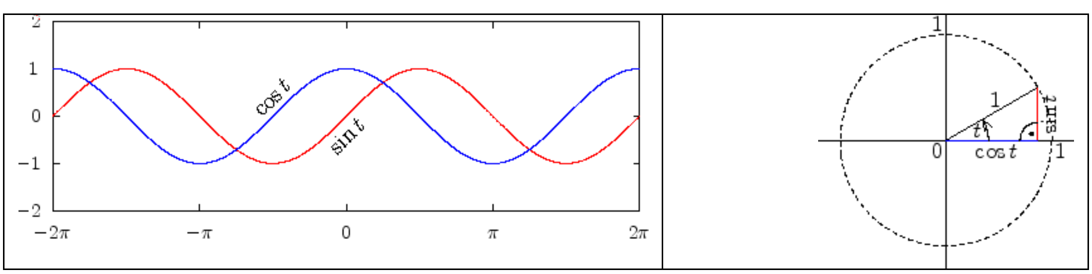
$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2}.$$

ساين او کوساين Sinus und Cosinus

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

سره په سرچينه په کونج t خرخول شوی ټکی $(1,0)$ کواوردينات نومولکيږي . د تر مخنښي پورې کوساين او ساين په يوه ولاړکوديز ړيږکودي (المثلث القايم الزاويه) کې د ولاړ اړخونو(هغه اضلاع وې چې يو د بل سره قلموازاويه جوړه وي) نسبت د نيمی(قطر) سرره په ګوته کوي.



دواړه ګردی توابع يا د داېرې توابع 2π - تلبېرته راګرځېدونې يا 2π - پريوديکي دي او باور لري

$$\cos t = \sin(t + \pi/2)$$

• ,

(c) ketabton.com: The Digital Library

- $\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$,
- $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

یو څو ځانګړي ارزښتونه دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

د اویلر-مویورې فرمول **Formel von Euler-Moivre**

یو اکسپوننشل تابع د ایماجینار x -محور سره کېدی شي د $t \in \mathbb{R}$ لپاره د تریګونومتریک(درېګوډي - یا مثلثاتي -) توابع په مرسته افاده شي.

$$\cos t + \mathrm{i} \sin t = \exp(\mathrm{i}t)$$

کوساین او ساین حقیقي – او ایماجینار ګنونه(عددونه) په ګوته کوي د ارزښت 1 ($|\exp(\mathrm{i}t)| = 1$) سره .

که پورته فرمول اینورتیر یا معکوس شي ، نو لاس ته راځي

$\cos t$	$= \mathrm{Re}\, e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}t} + e^{-\mathrm{i}t}\right)$
$\sin t$	$= \mathrm{Im}\, e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}\right)$.

د اکسپ، کوساین او ساین کتمتوالی اویلر او مویورې ته ځي. دا د جیومتریکي کمپلکس عددونو د انترپولیشن لپاره بنسټ جوړوي او د فوری-انالیوز کې غوره رول لوبوي.

لیکونکي: هیولیک، کوپف

د ساین او کوساین لپاره د زیاتون- یا جمع قضیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

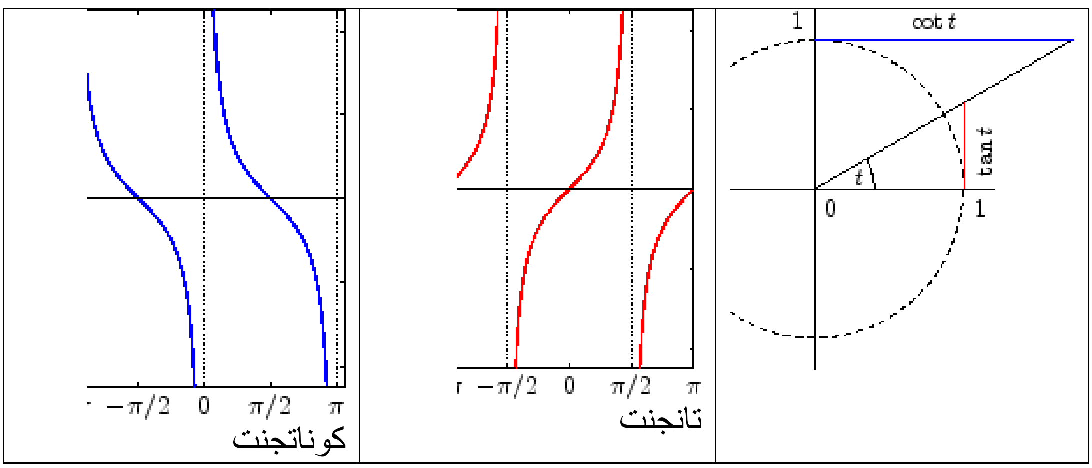
د ګردیتوابعو $\sin t$ او $\cos t$ لپاره لاندي اړيکي باور لري:

- $$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
- $$\sin(\alpha+\beta) = \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta$$

په ځانګړي توګه دی

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

تانجنت او کوتاجنت **Tangens und Cotangens**



د تانجنت او کوتانجنت توابع د

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

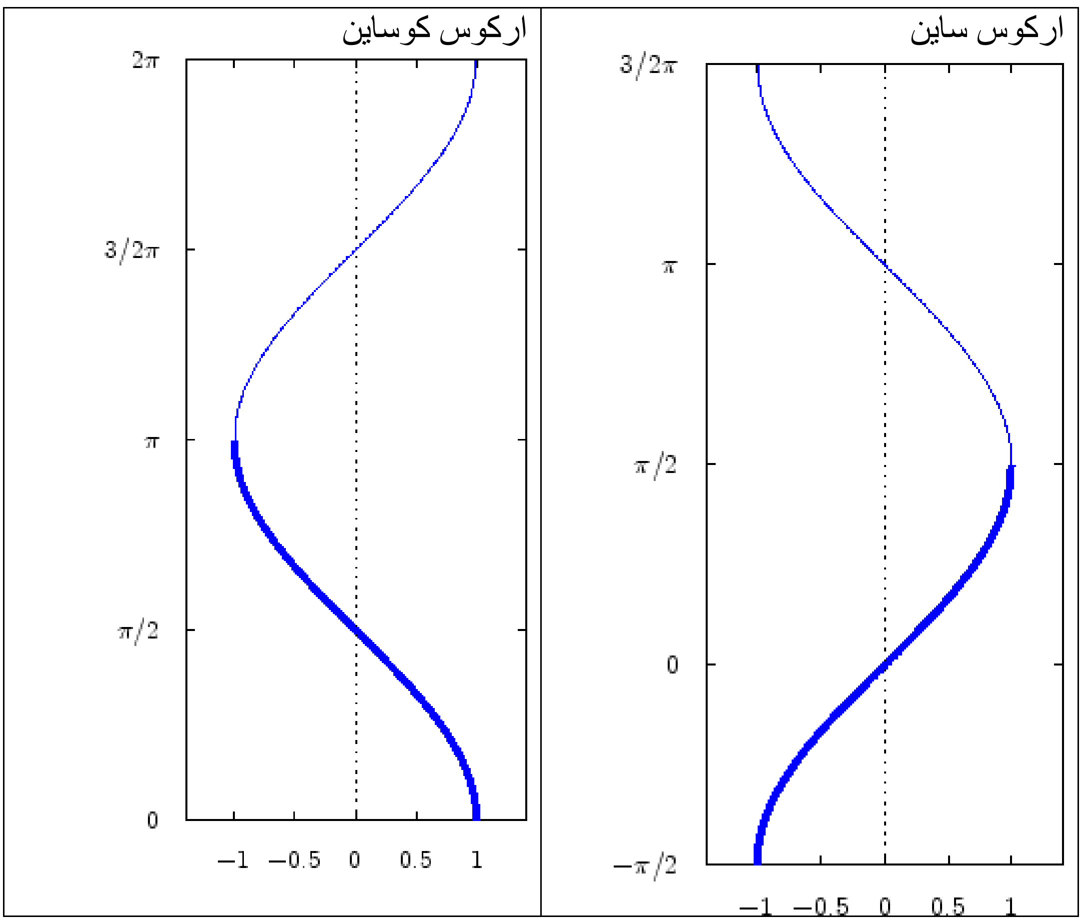
له لارې تعریف دي. دا تر دمخنخښي پورې د ولاړګوديز درېګوډي(- - مثلث) د ولاړکوډونو Katheten نسبت ورکوي

يو څو ځانګړي ارزښتونه دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

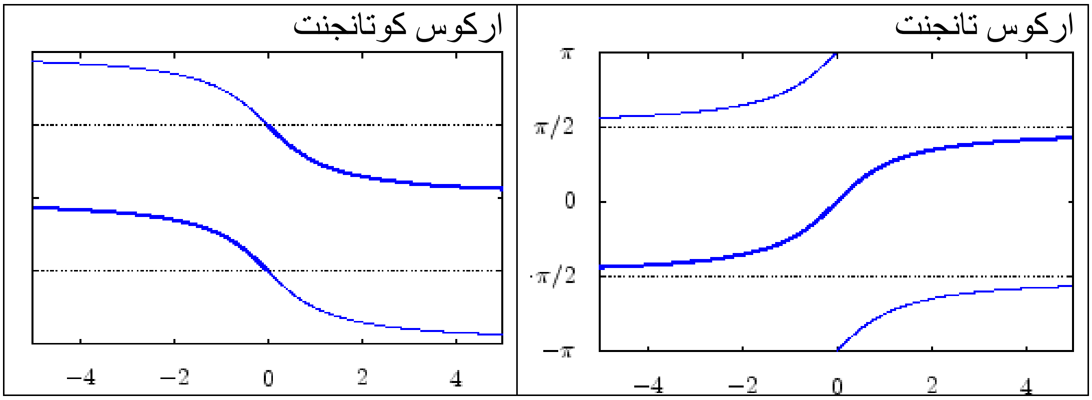
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

د ارکوس توابع Arcusfunktionen



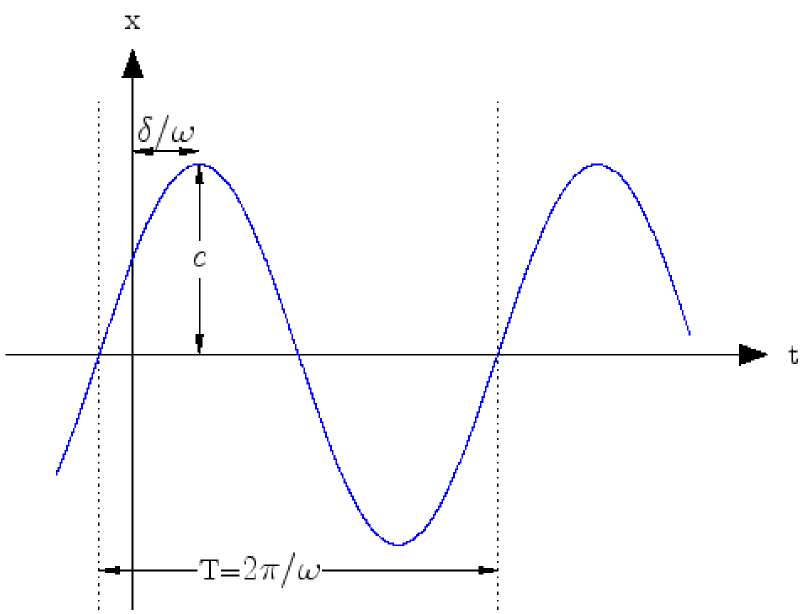
د درېګوډيز (ترېګونومتريکي يا مثلثاتي) توابعو په څټ يا معکوس توابع د $\arccos, \arcsin, \arctan, \text{arccot}$ سره ښوول کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دي تعریف – او ارزښت ورشو د پورته ځېرې څخه رانیول کېدی شي.
له دې سره اصلي څانګې غوړې یا پنډې کښل شوي دي.
لیکونکي: هیولیک، کنویف، کنش

هارمونیک لړځیدني یا رپیدني
Harmonische Schwingung



(c) ketabton.com: The Digital Library

يو هارمونيکي لړځيدنه د جګوالي Amplitude $c \geq 0$ سرره،د فاز بلځای ته وړنه يا راکښنه δ او فرکونځ ω همداسې پريودېوالی يا تل (بيرته) راګرځيدنه $T = 2\pi/\omega$ لاندې بڼه لري

$$x(t) = c\cos(\omega t - \delta) \ .$$

ورته يا برابر ارزښته انځورونه ده

$$\operatorname{Re} c \exp(\mathrm{i}(\omega t - \delta))$$

يا

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

د $a = c\cos(\delta), b = c\sin(\delta)$ سره ، دا په دې معنا چې (c, δ) د (a, b) قطبي کواوردیناتونه دي.
پای.

د پارمتر شميربدلون د جمعي تيورم څخه لاس ته راځ:

$$c\cos(\omega t - \delta) = c\,(\cos(\omega t)\cos(\delta) + \sin(\omega t)\sin\delta) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a = c\cos\delta, \quad b = c\sin\delta.$$

برعکس دی

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \delta = \arctan(b/a) + \varphi$$

د لاندې سره

$$\varphi = \begin{cases} 0, & \text{für } a \geq 0 \\ \pi, & \text{für } a < 0 \text{ und } b \geq 0 \\ -\pi & \text{sonst.} \end{cases}$$

پای.

د هارموني رپيدنې يو پر بل پرېوتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

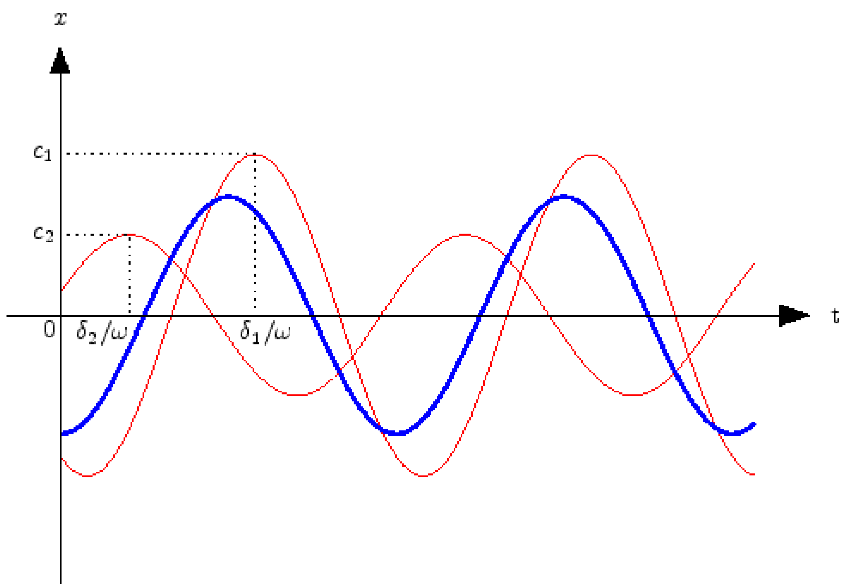
د دوه هارمونې رپېدنو يو پر بل پربوتنه (په څېره کې غوړ کېنل شوي دي)

$$x_k(t) = c_k \cos(\omega t - \delta_k), \quad k = 1, 2 \,,$$

د

امپليتودې سره هارمونيک دي

$$c = \sqrt{c_1^2 + 2\cos(\delta_1 - \delta_2)c_1 c_2 + c_2^2} \,.$$



ليکونکي: هيوليک، کوپف،کنش

د يو پر بل پربوتني کمپلکس بڼه

$$\operatorname{Re}\left(c_1 e^{\mathrm{i}\omega t - \delta_1} + c_2 e^{\mathrm{i}\omega t - \delta_2}\right) = \operatorname{Re}\left([c_1 e^{-\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{-\mathrm{i}\delta_2}] e^{\mathrm{i}\omega t}\right)$$

راکوي

$$[\ldots] = c e^{-\mathrm{i}\delta} = z$$

او له دې سره

$$c^2 = z\bar{z} = (c_1 e^{-\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{-\mathrm{i}\delta_2})(c_1 e^{\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{\mathrm{i}\delta_2}) \,.$$

$$e^{\mathrm{i}s} + e^{-\mathrm{i}s} = 2\cos s$$

د په پام کې نيولو سره ضربونه غوښتنه راکوي..

په بديله ت وګه کېدی شي امپليتود انځورونې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_k(t) = a_k\cos(\omega t) + b_k\sin(\omega t)$$

ځخه وشمېرل شي. سرې لاس ته راوړي

$$c = \sqrt{(a_1+a_2)^2 + (b_1+b_2)^2}\ .$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

په درځ يا مته باندې کړولو هارموني لړځېدنه يو په بل پرېوځي

$$\cos(\omega t - \delta_k), \quad \delta_k = k\delta,\ k = 0, \ldots, n,$$

د برابر يا همغه فرکونځ او امپليتود. لړځېدنه د کمپلکس انځوروني په مرسته د دې لاندې حقيقي برخې په حيث لاس ته راځي

$$e^{\mathrm{i}\omega t} + e^{\mathrm{i}(\omega t-\delta)} + \ldots + e^{\mathrm{i}(\omega t-n\delta)} = e^{\mathrm{i}\omega t}\frac{1-(e^{-\mathrm{i}\delta})^{n+1}}{1-e^{-\mathrm{i}\delta}}$$

$$= e^{\mathrm{i}\omega t}\frac{e^{-\mathrm{i}\frac{n+1}{2}\delta}(2\mathrm{i}\sin\frac{n+1}{2}\delta)}{e^{-\mathrm{i}\frac{\delta}{2}}(2\mathrm{i}\sin\frac{\delta}{2})} = \left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\right)e^{\mathrm{i}(\omega t-\frac{n}{2}\delta)}\ .$$

يو په بل پرېوتنه لاندې امپليتود لري

$$\frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

او فاز $(n/2)\delta$.

د $\omega = 0$ سره د ايماجينار برخې د پرتله کوني له لارې تريګونمتريکی کتمتوالی راکوي.

$$\sin\delta + \ldots + \sin n\delta = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta\sin\frac{n}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\ .$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه لړځېدنو $c_k e^{i\omega_k t}$ یو پر بل پرېوتنه کېدی شي د

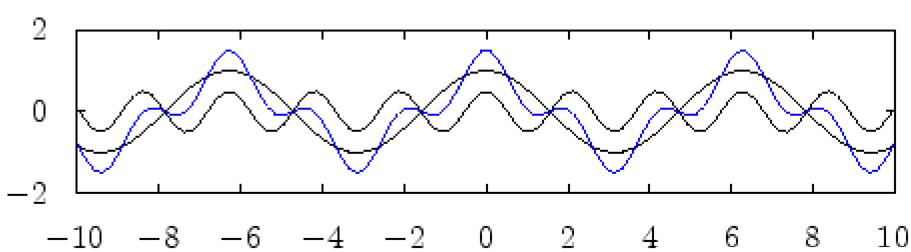
$$c(t)e^{i\bar{\omega}t}, \quad c(t) = c_1 e^{-i\Delta\omega t} + c_2 e^{i\Delta\omega t},$$

په ضرب د $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ او $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$ سره ولیکل شي.
لاس ته راغلی داسې په نامه مودولیري رپېدنه تیک هلته پریودیکي ده، که د فرکونځ نسبت ω_1/ω_2 راشنل وي.
د مودولي شوی کمپلکس امپلیتود مینیمال او ماکسیمال ارزښت همداسي مطلق ارزښت د $|c_1 - c_2|$ همداسې $c_1 + c_2$ ترمنځ لوړ ټیټ کیږي. په ځانګړې توګه دی

$$c(t) = 2c\cos(\Delta\omega t)$$

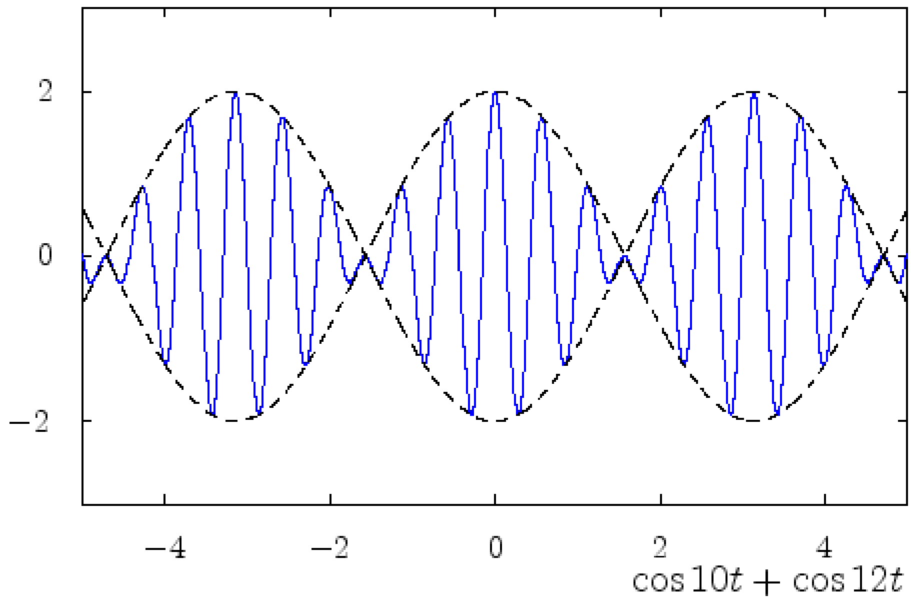
د همغي یا برابرې امپلیتود $c = c_1 = c_2$ لپاره.
لاندې ځیرې یو څو بېبیکي حالتونه په ګوته کوي

- periodische Überlagerungپریودیکي یو پر بل پرېوتنه

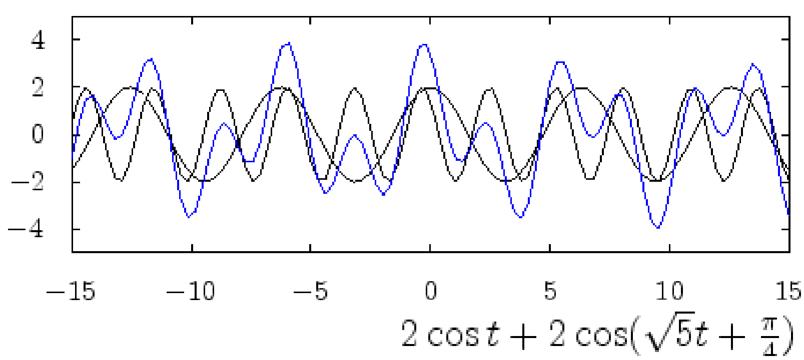


- برابر امپلیتود c_k او $\omega_1 \approx \omega_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



- aperiodische Überlagerungاپريوديکي يا نه - يو پر بل پرېوتنه



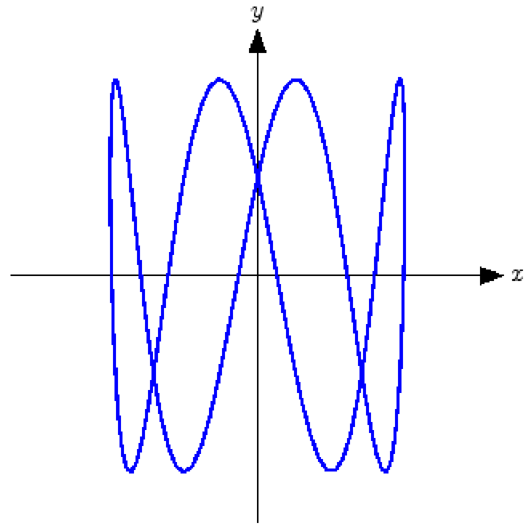
پاي.

د سطي لړځېدنو يو پر بل پرېوتنې د لړځېدنو مختالف لورو (a_1, a_2) او (b_1, b_2)
کږې يا منحني

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2) \,,$$

لاس ته راځي چې د مخترع Lissajous-Figuren ليساجوس ـځيرې بللکيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

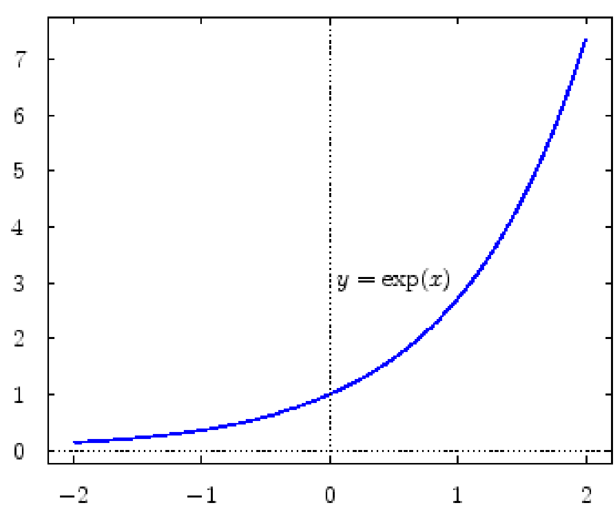


خبره د پارامتر يوه بېلګه بڼايي

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_1 = 1, \quad \delta_1 = 0, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = 4, \quad \delta_2 = \frac{\pi}{3}.$$

پای.

اکسپوننشل توابع
Exponentialfunktion



توان تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = e^x = \exp(x)$$

$x \in \mathbb{R}$
د اويلر عدد $e = 2.71828...$ سره اکسپونښل تابع بلل کيږي. دا د ټول لپاره مثبت ده او د تابع مساوات پوره کوي
$e^{x+y} = e^x e^y$.

$e^{-x} = 1/e^x$
په ځانګړې توګه

ګټه يا ربح Verzinsung

يوبيل بډايۍ د – وارهد اخستنې همداسې او ورکونې وروسته د يوې ګټوې Rate r ($r < 0$ همداسې $r > 0$) د يوې ګټونې فاکتور $(1 + p)$ سره لاندې پای بډايۍ ورکوي

$$y = (1 + p)^n x + \frac{(1 + p)^n - 1}{p} r \, .$$

دلته $p = 1$ د 100% يو ګټه اينسوونه ده په کلنۍ ګټه ا چونې سره.

فعاله کلنۍ ګټه د مياشتنۍ ګټونې ځخه شمېرل کيږي د يوه ګټې اينسونې p_m سره و لاندې ته

$$p_j = (1 + p_m)^{12} - 1 \geq 12 p_m \, .$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

بنسټ بډايۍ په همدې لومړني ګټونې پريود کې په پام کې نيول کيږي، اخستنه ههمداسې اچونه لومړی د ورپسې کال. په لاندې توګه يا د اسې راکوي

$$n = 1: \quad y = x(1 + p) + r,$$
$$n = 2: \quad y = \big(x(1 + p) + r\big)(1 + p) + r.$$

په ټولېزه توګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = (\cdots(x(1+p)+r)(1+p)+r)\cdots)$$
$$= x(1+p)^n + \left[1+(1+p)+(1+p)^2+\cdots+(1+p)^{n-1}\right]r$$

دا په ګوډيزو نوکانو کې افاده کېدی شي په هندسي جمعه فرمول واړوي او سړی دا ورکړ
شوی فرمول لاس ته راوړي.
پای.

د منهتان خرڅول 1626زک مورګن(د ځمکي د کچوني یوون یا واحد دی) 11000
Morgen د یوه حاضر قیمت په رانیولو ګټور تمام شو، ځکه چې په کلنی7 په سلو کې
ګټه دا بډایي په کال 2000 زک کې

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot(1.07)^{374} = 5.857\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\triangleq 2.658\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

ده(که متمأن بانکونه او د اسعارو رفورم له مخه نه وي نیول شوی یا فرض شوی).
په میاشتنی ګټه لرو

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot(1+7/1200)^{4488} = 13.030\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\triangleq 5.913\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

او

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot\exp(0.07\cdot374) = 14.060\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\triangleq 6.380\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

د ټولیزې ګټوني سره.
که مورګن د 0.81 Ha هکتارسره وشمېرل شي، نو د منهتان دا نننی سطحه د89
مربعکیلو متره ورکوي. یو کور هلته نن نږدې6500 USD/Quadratmeter امریکایي
ډالر په مربع متر ارزښت لري. دا پیسې به د یوه کور تعمیرلپاره چې څلور پوړیز وي
ورسیږي، چی په ټوله سطحه ونیسي.
پای.

د یوه $x = 200000$ یوروپور ، $n = 30$ کلونو لپاره او یوې کره شوې ګټې پینې $p = 5$
په سلو کې میاشتنی ګټه لاندې ده

$$p_m = (1+p)^{1/12} - 1 = 0.4074\%$$

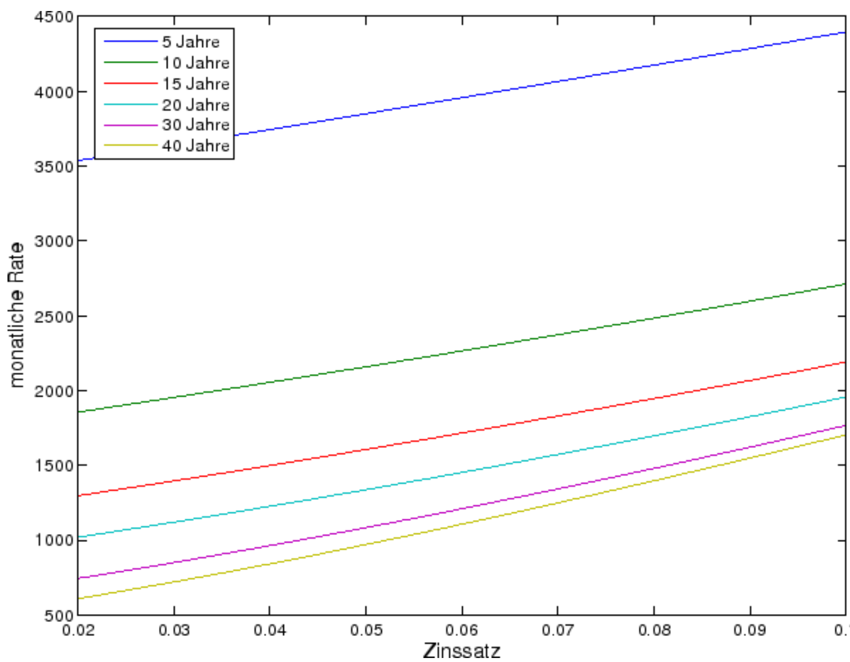
(c) ketabton.com: The Digital Library

او مياشتنی رات يا ګټه ده

$$r = \frac{p_m(1+p)^n}{(1+p)^n - 1} x = 1060.11\,\mathrm{EUR}.$$

د لاندې پسې ترلي له ګټي فرمول ځخه د صفراينيووني له لارې د پور ارزښت راکوي او د $(1+p_m)^{12} = 1+p$ په پام کې نيولو سره .

تولە تاديه $30 \cdot 12r = 381639.60$ يورو د پور جمعې ځخه د په 90.8 په سلو کې اوړي(د بانک مزدوري پرې زياته).



پروت: ګټونه يا د ګټې پينه ، ولاړ: مياشتنی ګټه
ګراف مياشتنی ګټه ښايي د يوه 200 000 يورو پور لپاره د ګټې پينې د ضريب په څېر د مختلفو وختونو لپاره.
پای.

کلني د پيسو ورکونه $z = 10000$ يور د يوې 7 په سلو کې ګټونې ته د $n = 12$ کلونو وروسته يوه دا لاندې بڼايي ورکوي

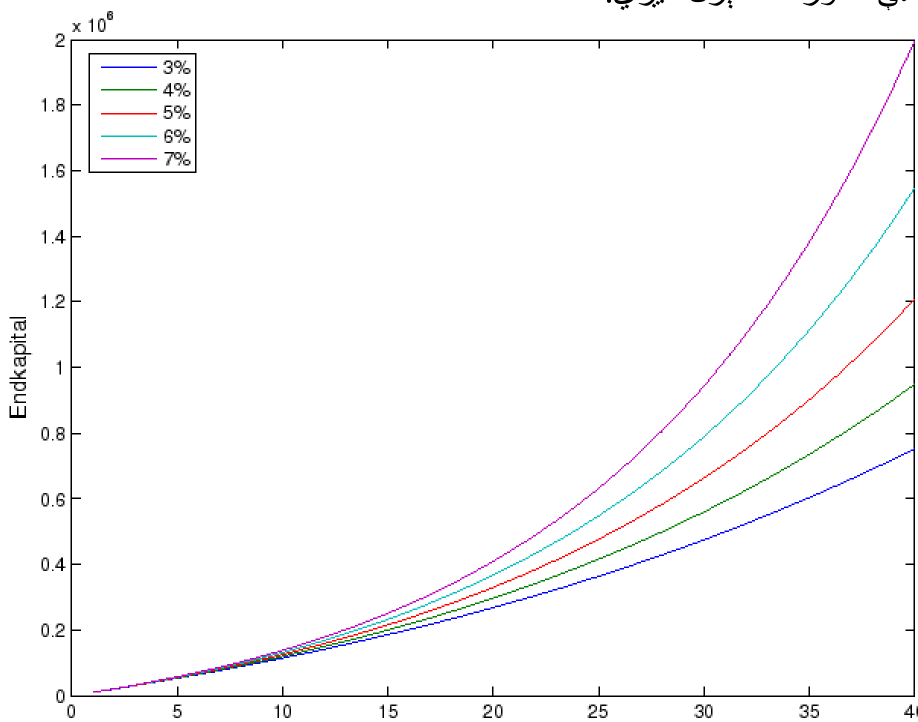
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = \frac{(1+p_j)^n - 1}{p_j} z = \frac{1.07^{12}-1}{0.07} 10000\,\mathrm{EUR} = 178884.51\,\mathrm{EUR}.$$

د نور لس کاله د ژوند انتظار ته دا د لاندې يوه مياشتني تقاوت ته بسيا کوي

$$r = \frac{p_m (1+p_j)^{10}}{(1+p_j)^{10}-1} y = \frac{0.005654 \cdot 1.07^{10}}{1.07^{10}-1} 178884.51\,\mathrm{EUR} = 2057.17\,\mathrm{EUR},$$

چې د هيپوتيکي(د کورونو جوړولو او اخستلو لپاره ارزانه پور دی) Hypotheken
ګټې ته ورته شمېرل کيږي.



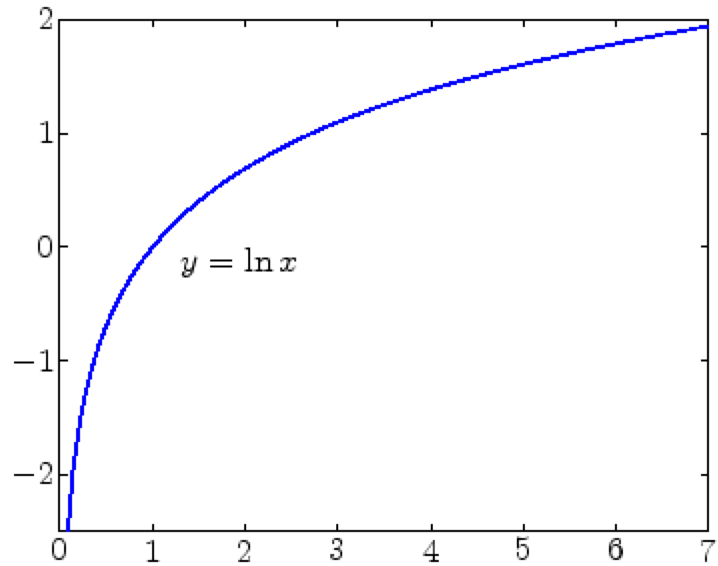
پروت: وخت ،   ولاړ: پای سرمايه
ځېره د مختلفو ګټونو لپاره د يوې سرمايې وده ښايي د وخت تېرېدو سره .
پای.

لوګاريتم **Logarithmus**

د لوګارتم تابع د اکسپوننشلتابع معکوس دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y.$$



دا $(0,\infty)$ کره مونوتونن جګېدونکی په $\mathbb{R}$ تنظيموي او لاندې تابعمساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

په ځانګړې توګه دی $\ln(1/x) = -\ln x$. پای.

د يوې مادې راديواکتيو له منځه تلنه(په زراتو تجزيه کېدنه) د زره کيدنې قانون

$$N(t) = N(0)e^{-kt}$$

له مخې تشريح کيږي. دلته $N(t)$ د ا تمونو ګڼون يا تعداد دی د t په وخت کې او $k > 0$ يوه د موادو په واک کې د زره کېدو ثابته ده.

د نيم ارزښت وخت T داسې تعريف دی $N(T) = \frac{1}{2}N(0)$ ، داپه دې معنا چې

$$e^{-kT} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T = \ln 2/k.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د چرنوبل د ریکتور د ډز یا الوتنې سره یو ه ډینګرۍ یا خولې یا مرخېړۍ په ځنو برخو کې Cäsium-137 د 2000Bq/kg   (Bq/kg د رادیواکتیویتی د فعالیت د کچوني لپاره یوون دی) سره د نیمارزښت وخت 29.7 کلونو په وړانګو خور شو.

$$k = \frac{\ln 2}{29.7} = 0.023$$

او له دې سره

$$N(t) = 2000 \exp(-0.023t).$$

په المان کې پوله ارزښت .600Bq/kg کې پروت د ی. د

$$600 = 2000 \exp(-0.023t) \Rightarrow -0.023t = \ln(0.3) \Rightarrow t \approx 52$$

له امله داپوله ارزښت د ورکړشوو ارزښتونو لپاره ۵۲ کالو وروسته کښته – یا کمیږي.
نیم وخت ارزښت :

Cäsium-134	2 Tage
Cäsium-137	29.7 Jahre
Jod-131	8 Tage
Kohlenstoff-14	5730 Jahre
Kalium-40	1.2 Mrd. Jahre
Plutonium-239	24000 Jahre
Radon-222	3.8 Tage
Radium-226	1600 Jahre
Strontium-90	28 Jahre
Uran-235	800 Mio. Jahre
Uran-238	4.5 Mrd. Jahre

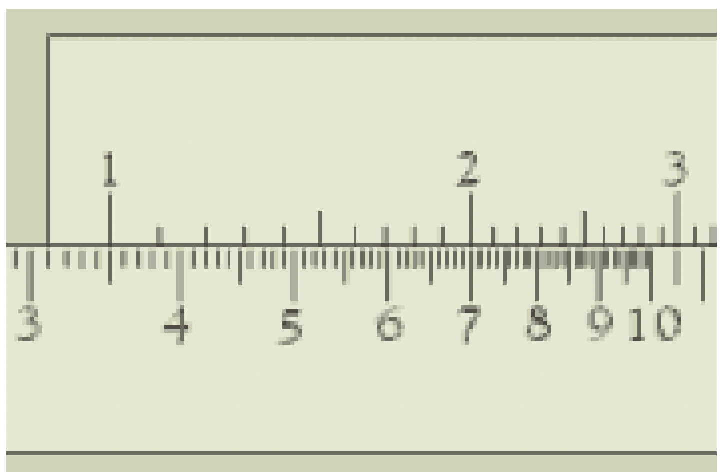
پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاريتم دا خوی لري، چې د دوه ګڼونو يا عددونود لوګاريتمونو جمعه د دې د دې دوه عددونو د ضرب د لوګاريتم سره برابر دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

په دې توګه کېدی شي چې دوه کرښې(خط کشونه) د لوګاريتم کچوونو سره يو په بل کيږدي او لاس ته راوړنه د دېعددونو جمعه نه بلکه ضرب دی.(د شمېرکښوونې (چې يوې او بلې لورته کښيږي) اصول)



د پورته ښېرې څخه د بېلګې په توګه ګورو چې $3.5 \cdot 2 = 7$ دی. د لته د پورته کچوونې ۱ د لاندې سکالا په3.5 (لومړی ضريب) کېښنول کيږي. بالاخره ۲ د پورته سکالا (دويم ضريب) د ضرب لاس ته راوړنه په لاندې سکالا لوستل کيږي.

پای.

تولیز توان توابع او لوګاريتم

د $a > 0$ لپاره تعريفوو

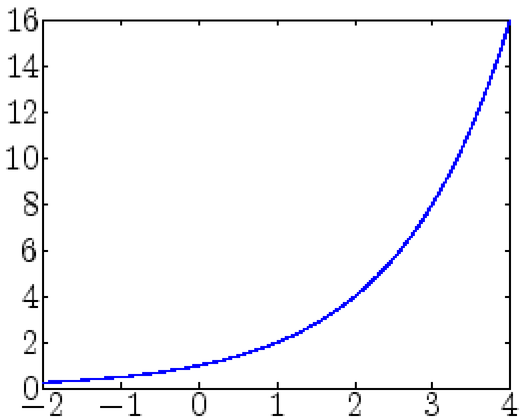
$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

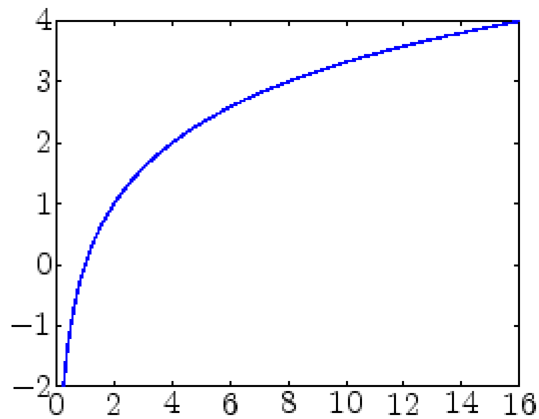
د معکوس يا په څټ تابع سره

$$x = \log_a y, \quad y > 0.$$

په ځانګړې توګه سرې ليکي $\log = \log_{10}$ د لوګاريتم لپاره د 10 بنسټ سره او
$\mathrm{ld} = \log_2$ د دوال لوګاريتم لپاره.



$f(x) = 2^x$



$f(x) = \mathrm{ld}(x)$

د ودې قانون

$$y = a^x, \quad a > 0$$

کيدی شي نيم لوګاريتمي دکبنل شي. دلته په يوه محور x او په بل محور $\log y$ ليکل کيږي. د x او $\log y$ ترمنځ نسبټ د ودې قانون له مخې کرښيز دی او رسم شوې کرښه لاندې جګړالی لري

$$m = \log a.$$

يو بل امکان دادی، چې په دواړو محورونو يو لوګاريتمي سکالا وکاروو.
دا د بېلګې په توګه د ناتيکاوي ارزښت لپاره

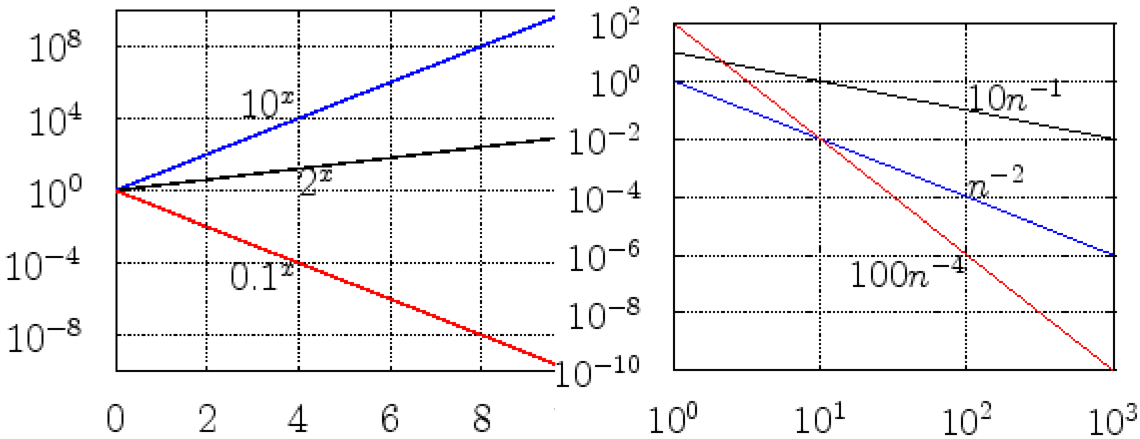
$$\varepsilon \approx cn^{-k}$$

مناسب ده. دا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log \varepsilon = \log c - k \log n \,,$$

د کرږې کميز يا منفي چګېدنه ورکوي.



$$y = 2^x, 10^x, 0.1^x \qquad \varepsilon = 10n^{-1}, n^{-2}, 100n^{-4}$$

د توان او لوګاريتم لپاره شميرقوانين

Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

د اکسپوننشل – او لوګاريتمي توابعو د تعريف او تابع مساواتو څخه لرو

$$\begin{aligned} a^{s+t} &= a^s\, a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\ a^{s-t} &= a^s/a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\ (a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t \log_a x \,. \end{aligned}$$

برسېره پردې د دوه مختلفو بنسټونو ت رمنځ د شمېربدلون لپاره باور لري

$$\log_b x = \log_b a \, \log_a x \,.$$

په ځانګړې توګه دی

$$\log x = (\log e) \ln x \,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کنوپف

که کيږدو

$$x = a^s, \quad y = a^t,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د توان او لوګاريتم د فرمولونو ورته وال يا برابرارزښتوالی روښانه دی. لومړي دواړه کتمتوالي د تابع مساواتو څخه لاس ته راځي او دريم له تعريف $b^r = e^{r\ln b}$ څخه.:

$$(a^s)^t = (e^{s\ln a})^t = e^{st\ln a} = a^{st}.$$

د شميبدلون فرمول برابرارزښت دی و لاندې ته

$$x = b^{\log_b a \, \log_a x},$$

او د ساده ونې له لارې ښی اړخ لاس ته راځي.
ليکونکي: هيوليګ، کنوپف

لاندې دواړه بېلط دشمېقوانين تشريح کوي يا په ګوته کوي.

(i)

$$) - 2\ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 = 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 = 2\ln x$$

(ii)

$$\log_4(x^2) + \mathrm{ld}(2x) = 2\frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2\frac{\ln x}{\ln 2}$$

های پرابول تابع **Hyperbelfunktionen**

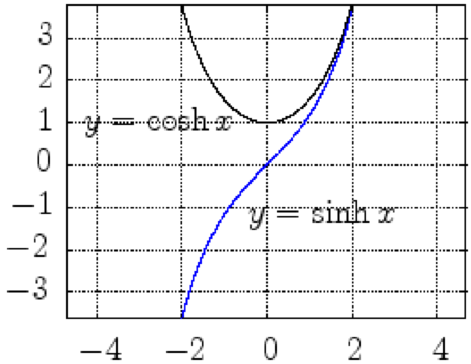
تريګونومتريکي توابعو ته ورته تعريفوو

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

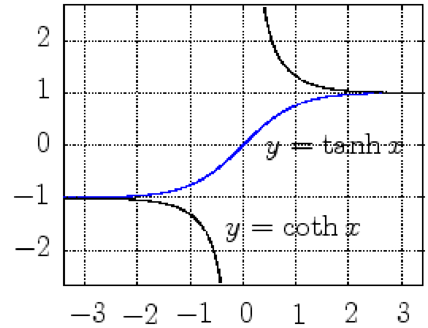
همداسې

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1/\coth x.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$\sinh x$, $\cosh x$

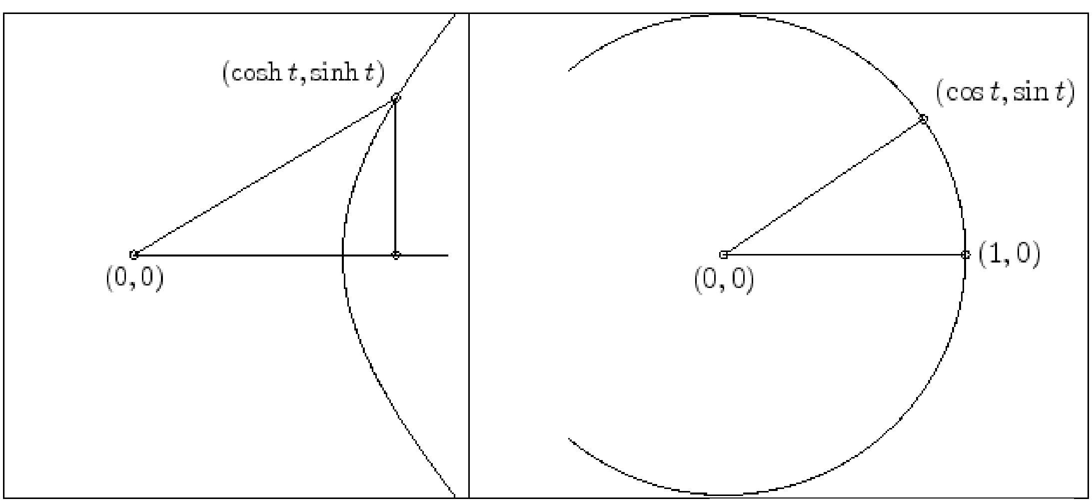


$\tanh x$, $\coth x$

معکوس يا په خټ توابع اکسپليثيت يا په روښانه توګه ورکول کيږي:

$$\begin{aligned} \mathrm{arsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}), && -\infty < x < \infty \\ \mathrm{arcosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}), && 1 \leq x < \infty. \end{aligned}$$

د هايربول تابع نوم د لاندې کتمتوالي خخه رانيول شوی



$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

دا روښانه کوي، چې د $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ له لارې د هايرابول يو ښاخ پارامتري کيږي..

له $y = (e^x - e^{-x})/2$ خخه د e^x سره ضرب له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

د مربع مساوات دویم حل د $e^x > 0$ له امله باید په پام کې ونه نیول شي. د لوګاریتمي کوني څخه لاس ته راځي

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

د کوساین هوپربولیک د فرمول څخه پورته ته په ورته توګه لاس تره اځي

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}.$$

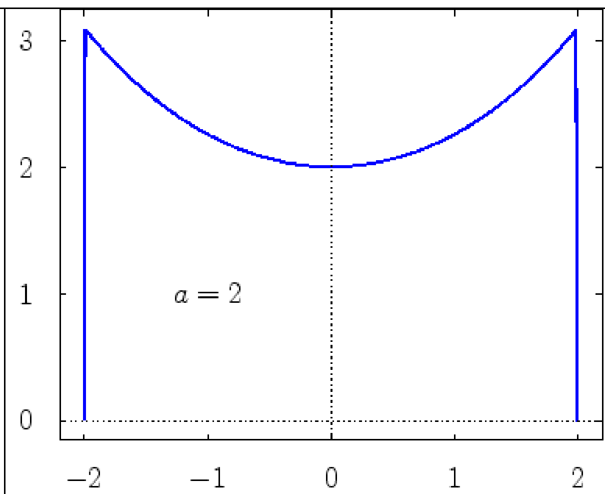
د لوګاریتم کوني له لارې د په ښت- یا معکوس تابع فرمول لاس ته راځي.
لیکونکي: هیولیګ، کنوپف

د یوه هایپارابول په پای ټکو کلک شوي سیم ځګوالی h د خپل وزن له لارې اغیزمنشوی دننی شپانونګ a دی

$$h(x) = a\cosh(x/a).$$

تابع h د لاندې دفرنخیال مساوات حل دی.

$$h'' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + (h')^2}.$$



هایپارابولیکی کټمټوتوالی
Hyperbolische Identitäten

تریګونومتریکي توابعو ته ورته کټمتوالی باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,,$$

چې د تعریفونوو له لارې کېدی شي نازک شي

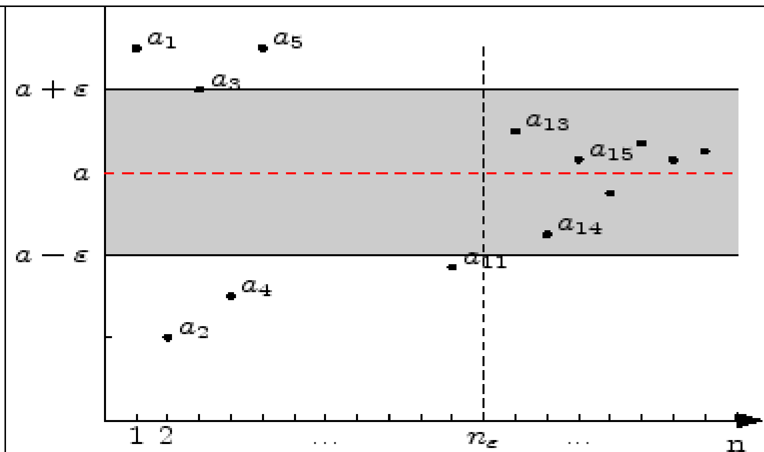
د یوې پرلپسې (ترادف)پوله ارزښت
Grenzwert einer Folge

یوه پرلپسې
$(a_n) = a_1, a_2, \ldots$

د یوه پوله ارزښت a
په لور هڅیږي،
$a = \lim_{n\to\infty} a_n,$

که هر $\varepsilon > 0$ ته یو
n_ε
داسې شتون
ولري د
$|a_n - a| < \varepsilon$

$n > n_\varepsilon$
سره د ټولو
لپاره



دا $a_n \to a$ لیکدود هم د یوې پرلپسې د کونورګنت یا پولې ته تلو لپاره کارول کیږي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (a_n) پوله ارزښت ونه لري، نو پرلپسې دیورګنت یا پولې ته نه تلونکې بللکیږي.

پای.

د دې لپاره چې د کونورګنت-قضیه وښایو یعني
$|a_n - a| < \varepsilon$ د $n > n_\varepsilon$ لپاره
وښایو، کیدی شي لومړی دا افاده $|a_n - a|$ د تخمین کوني له لارې پورته لور ته ساده کړو او بیا داسې په نامه نامساوات د n پسې حل کړو.

که دا د بیلګې په توګه د لاندې پرلپسې لپاره وکارول شي

$$a_n = \frac{n^2+n}{n^2+1},$$

کومه چې پوله ارزښت $a = 1$ لري، یو ممکنه تخمین دی

$$|a_n - a| = \left|\frac{n^2+n}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{n-1}{n^2+1}\right| \le \frac{n}{n^2+1},$$

دا چې $|n-1| \le n$ د ټولو $n \ge 0$ لپاره . پرته له دې $n^2+1 > n^2$ دی او له دې سره $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ هم . نو له دې لاس ته راځي

$$|a_n - a| \le \frac{n}{n^2+1} \le \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

له دې سره $\frac{1}{n} < \varepsilon$ دی، باید $n > \frac{1}{\varepsilon}$ وي. که n_ε یو طبیعي عدد چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وي ، وټاکو ، نو د ټولو $\varepsilon > 0$ او ټولو $n > n_\varepsilon$ لپاره باور لري.

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرلپسي
$1, q, q^2, \ldots$

د $|q| < 1$ لپاره يو پوله ارزښت 0 لري او د $|q| > 1$ يا $q = -1$ لپاره
ديورګنت دی

د پرلپسيو د پوله ارزښت شميرنې لارې
Rechenregeln für Grenzwerte bei Folgen

د پولې ته تلونکې پرلپسي (a_n) او (b_n) لپاره د پولو a او b سره باور لري:

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n / b_n) = a/b$, falls $b \neq 0$
- ليکونکی: اېپ، هيوليګ

زياتون او کمښت يا کمون : د درېګوډي نابرابرون څخه لاس ته راځي
$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| \to 0.$

ضرب يا ځل: دا چې a_n محدود ده، لرو

$$|a_nb_n - ab| = |a_nb_n - a_nb + a_nb - ab| \le |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \to 0.$$

وېش: د ټول $n > n_0$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$0 \notin \left(b - \frac{|b|}{2}, b + \frac{|b|}{2}\right) \ni b_n \,,$$

او له دې لاس ته راځي

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{bb_n}\right| \leq \text{const} \; |b_n - b| \to 0,$$

دا په دې معنا چې $1/b_n \to 1/b$. د a_n/b_n پولې ته تلنه دهمدا اوس ښوول شوي د پولې ته تلونکو پرلپسیو ضرب قانون څخه لاس ته راځي.

پای.

که دپرلپسیو توکي د n راشنل تابع وي، $a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$ ، نو کیدی شي پوله ارزښت د خورا جګ توان د لنډونې څخه پیداکړی شو. د بیلګې په توګه دی

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - 2n^2}{3n^2 + 4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n - 2}{3 + 4/n} = -\frac{2}{3}\,.$$

په ټولیزه توګه د صورت-درجې j او مخرج-درجې k لپاره باور لري

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_j n^j + \cdots p_0}{q_k n^k + \cdots q_0} = \begin{cases} 0, & \text{für } j < k \\ \frac{p_j}{q_k}, & \text{für } j = k. \end{cases}$$

د $j > k$ لپاره پرلپسې پولې ته نه ځي یعنې دیورګنت ده.

پای.

دمعلومو پوله ارزښتونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

په مرسته لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e\cdot\frac{1}{e} = 1.$$

په پام کې نيسو، چې

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \neq \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n = 1\ ,$$

ځکه چې د ضرب د ضريبونو ګڼون يا تعداد ثابت نه دی.

ليکونکی: هيوليک، کرايڅ

د کوشي   قضيه Cauchy-Kriterium

يوه پرلپسې (a_n) تيک هلته پولې ته ځي، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو n_ε شتون ولري، داسې چې

$$|a_j - a_k| < \varepsilon$$

د ټول $j, k > n_\varepsilon$ لپاره باور ولري.

د کوشي په نوم نومول شوي قضيې په مرسته د پوله ارزښت ثبوت بې د پوله ارزښت پيژندلو ممکن دی.

ليکونکی: اپپ، هيوليګ

د کوشي – قضيې اړينوالی د پوله ارزښت له تعزيف څخه لاس ته راځي:

$$a = \lim a_n \iff |a_m - a| < \varepsilon \quad \text{für } m > m_\varepsilon$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که کیږدو $n_\varepsilon = m_{\varepsilon/2}$ ، نو لرو

$$|a_j - a_k| \le |a_j - a| + |a - a_k| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

د ټول $j, k > n_\varepsilon$ لپاره، حه چې د ښوولو وو.

دا چې شرط پوره کېدونکی هم دی، ستونځمن دی چې و یې ښایو، او دا د حقیقی عددونو په پوره والي ولاړ دی.

پای.

یوه رکورزیو تعرف شوې پرلپسې (a_n) کېدی شي زيات وخت د کوشي-قضیه د تخمینونې له لارې

$$|a_{n+1} - a_n| \le cq^n$$

د $q \in [0,1)$ سره یې تیکوالی و ازمایل شي. داسې د هندسي پولې ته تلنه د $j < k$ لپاره راکوي

$$|a_j - a_k| \le |a_j - a_{j+1}| + |a_{j+1} - a_{j+2}| + \quad \dots \quad + |a_{k-1} - a_k| \le cq^j \left(1 + q + q^2 + \dots\right) \le \frac{cq^j}{1-q}.$$

ښی اړخ د $< \varepsilon$ لپاره ده د $j, k > n_\varepsilon = \ln \frac{\varepsilon(1-q)}{c} / \ln q$ لپاره ، نو د کوشي قضیه پوره ده. د ځرګند، د

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \quad a_0 = 1,$$

له لارې رکورزیو تعریف شوې پرلپسې a_n د کونورګنڅ قضيې د ثبوت لپاره استعمالوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایندکشن پیل $(n=1)$: نامساوات :

$$|a_1 - a_0| \leq cq$$

باور لري، که $c = |a_1 - a_0|/q$ کېښول شي.

د ایندکشن پای $(n \to n+1)$: شړی اټکل شوی کمښت یا تفریق د

$$|a_{n+1} - a_n| = |\sqrt{2+a_n} - \sqrt{2+a_{n-1}}| = \left|\frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2+a_n} + \sqrt{2+a_{n-1}}}\right|.$$

په ښه ښيي.

د اندکشن د نیوني له مخې ښی اړخ $\leq \frac{1}{2\sqrt{2}} cq^n$ دی او د ټاکني سره

$q = 1/2\sqrt{2} \leq cq^{n+1}$

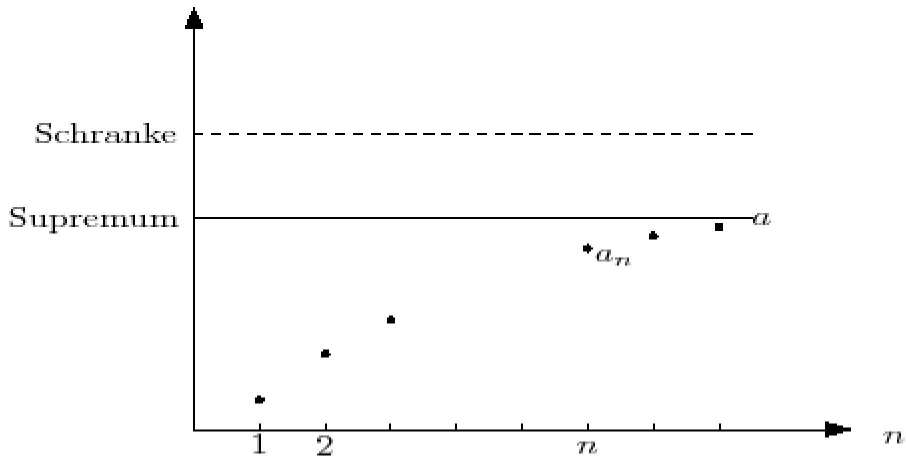
لکه چې غوښتل مو.

پای.

یوغبرېزه پولې ته تلنه **Monotone Konvergenz**

یو پرلپسي (a_n) همغږیز جګېدونکي $a_{n+1} \geq a_n$ همداسي همغږیز ټیټېدونکي $a_{n+1} \leq a_n$ بلل کیږي ، که همداسي وي د ټولو n لپاره. دا کره همغږیز جګېدونکي همداسي کره همغږیز ټیټېدونکي بلل کیږي ، که $a_{n+1} > a_n$ همداسي $a_{n+1} < a_n$ وي د ټولو n لپاره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



یوه رابنده یا محدوده ، د $n > n_0$ لپاره همغږیز جګېدونکي یا ټیټېدونکي پرلپسې a_n $n > n_0$, پولې ته تلونکي ده. پوله ارزښت يې د پرلپسې توکو (a_n) . سوپریموم همداسې اینفیموم دی.

لیکونکی: اپپ، هیولیګ

د یوې مونوتون جګېدونکې پرلپسې لپاره د سوپرېموم د تعریف سره، چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو n_ε شتون لري د کوم لپاره چې باور لري

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a = \sup_{n > n_0} a_n$$

د همغږیزوالي په بنسټ دی

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq a \quad \text{, für } n > n_\varepsilon \text{ ,}$$

نو $a_n \to a$.

د مونوتون ټیټېدونکې پرلپسې لپاره په ورته توګه دلایل راوړل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پرلپسي پولې ته تلنه

Die Konvergenz der Folge

$$a_n = (1 + 1/n)^n, \quad n = 0, 1, ...,$$

د اويلر عدد e په لور کېدی شي د مونوتون کونورګنت حملې په بنسټ و ښوول شي.
دواړه وړاندنيونې(فرضيې) کېدی شي د بېنوم درسي جملې په مرسته و ښوول شي.

(i) رابنديدنه يا محدوديت: له

$$a_n = (1 + 1/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + ...$$

او

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} \leq \frac{n^k}{1\cdot 2\cdots 2}$$

لاس ته راځي

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... \leq 3$$

(ii) همغږيزوالی: سړی a_{n+1} هم د بېنوم له جملې سره شماري:

$$a_{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}\frac{1}{n+1} + \binom{n+1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} + \binom{n+1}{3}\frac{1}{(n+1)^3} + ...$$

که دا په (i)کې د a_n انځورونې سره پرتله کړي، نو سړی کره کوي، چې اړونده ترمونه لوی دي:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{n^k}$$

$$\leq \frac{(n+1)\cdot n\cdots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{(n+1)^k} \quad =$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}.$$

دا له نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\frac{n-j}{n} \leq \frac{n+1-j}{n+1}$$

د يوګونوو ضريبونو لپاره. داچې د a_{n+1} لپاره زياتون يا جمعه لا ترم

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

لري لاس ته راځي

$$a_n < a_{n+1}.$$

ناربښتونی پوله ارزښت **Uneigentliche Grenzwerte**

يوه پرلپسي (a_n) دا ناربښتونی پوله ارزښت ($-\infty$) ∞ لري، که د ټولو $a > 0$ لپاره يو n_a شتون ولري، داسې چې

$$a_n > a \quad (< -a)$$

باور ولري د ټولو $n > n_a$ لپاره. پرلپسي چې ناربينتونی پوله ارزښت لري، دا ټاکلي ديورګنت –يا پولې ته نه تلونکې پرلپسې هم بلل کيږي.
ليکونکي:اپپ، هيوليګ، وبيپر

د دې لپاره چې وښايو ، چې

$$a_n = \frac{n!}{2^n} \to \infty,$$

دا په دې معنا چې

$$\frac{n!}{2^n} > a$$

د $n > n_a$, لپاره، دا a_n سړی د يوې ساده افادې يا وينې له لارې کښته لور ته تخمينوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{2 \cdot 2 \cdots 2} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2}.$$

له دې سره له $\frac{n}{4} > a$ همداسې له $n > 4a = n_a$ لرو $a_n > a$

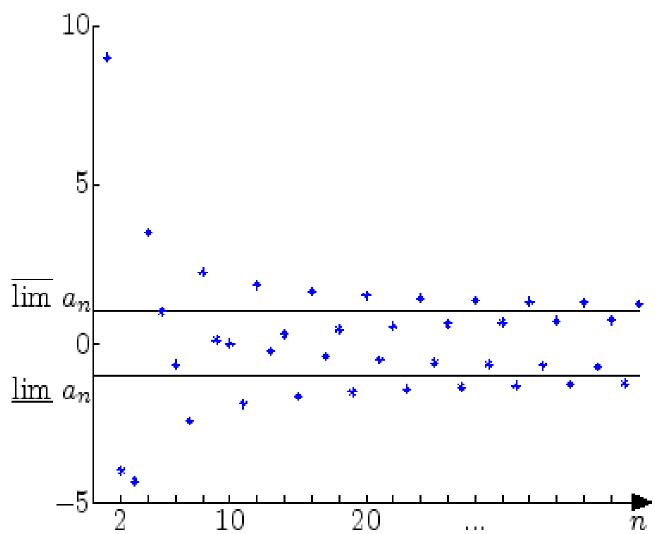
پوله اينفريور او پوله سوپريور(کښته - او پورته پوله ارزښت)

Limes Inferior und Limes Superio

د هرې پرلپسي (a_n) لپاره، په ناصلي حالت کې uneigentlichen Sinn ، يو پوله ارزښت شتون لري.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a_n}, \quad \underline{a_n} = \inf_{k\geq n} a_k$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a_n}, \quad \overline{a_n} = \sup_{k\geq n} a_k$$



لکه په خيره کې چې شوول شوی دی، پرلپسي (a_n) د همعريزي پرلپسي $(\underline{a_n})$ او $(\overline{a_n})$ له لارې يا نوره هم ښه له لورې رابندې دي:

$$\underline{a_n} \leq a_n \leq \overline{a_n}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که پوله اېنفريور او پوله سوپريور يو په بل پريوځي، نو پرلپسي (a_n) پولي ته تلونکي ده او لرو

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n\,.$$

ليکونکي: اېپ ،هيوليګ

د پولي اينفريور او پولي سوپريور شتون د همهغږيز پولي ته تلني جملي له لارې ترلي لاس ته راځي، خکه چې پرلپسي

$$\underline{a}_n = \inf_{k\geq n} a_n\ ,\quad \overline{a}_n = \sup_{k\geq n} a_n$$

همغږيز جګيدونکي همداسې همغږيز ټيټيدونکي دي.
په روښانه توګه باور لري

$$\underline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n\,.$$

که پوله اينفريور او پوله سوپريور همغه ازښت a ولري، نو لا سته راځي

$$a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره، نو $a_n \to a$.

پرتله کوونکې قضيه **Vergleichskriterium**

که د $\lim a_n = a$ او $\lim c_n = c$ سره د پوره کوچني n لپاره
$a_n \leq b_n \leq c_n$ باور لري، نو دی

$$a \leq \underline{\lim}\, b_n \leq \overline{\lim}\, b_n \leq c.$$

په ځانګړې توګه له $a = c$ د پرلپسي (b_n) کونورګنت لاس ته راځي:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a = c\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی غوښتنه ساده ده، ځکه چې نابرابرون $\leq$ د پولې ته تګ له امله ساتلی پتيږي:

$$\inf_{k\geq n} a_n \leq \inf_{k\geq n} b_n \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n .$$

په ورته توګه لرو $\overline{\lim}\, b_n \leq c$.

که پوله ارزښتونه سره برابر وي ($a = c$) ، نو باور لري

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره. له دې سره لرو $b_n \to a$.
پای.

پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

په لاندې نامساوات باندې د پرتلې قضيې استعمال له لارې لاس ته راځي

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} .$$

دلته ښی نابرابرون د بينوم د فرمول څخه باوري دی:

$$1 \leq n \leq 1 + n \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{4}{n} + \cdots$$

په تولیزه توګه د ضرب قانون څخه لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^k = 1$$

د $k \in \mathbb{N}$ لپاره . د کم نظم ترمونو د په زياتوالي له امله پوله ارزښت ساتلی پاتيږي. د يوه پولينوم

$$p(n) = a_k n^k + \cdots + a_0 \;,\; a_k > 0$$

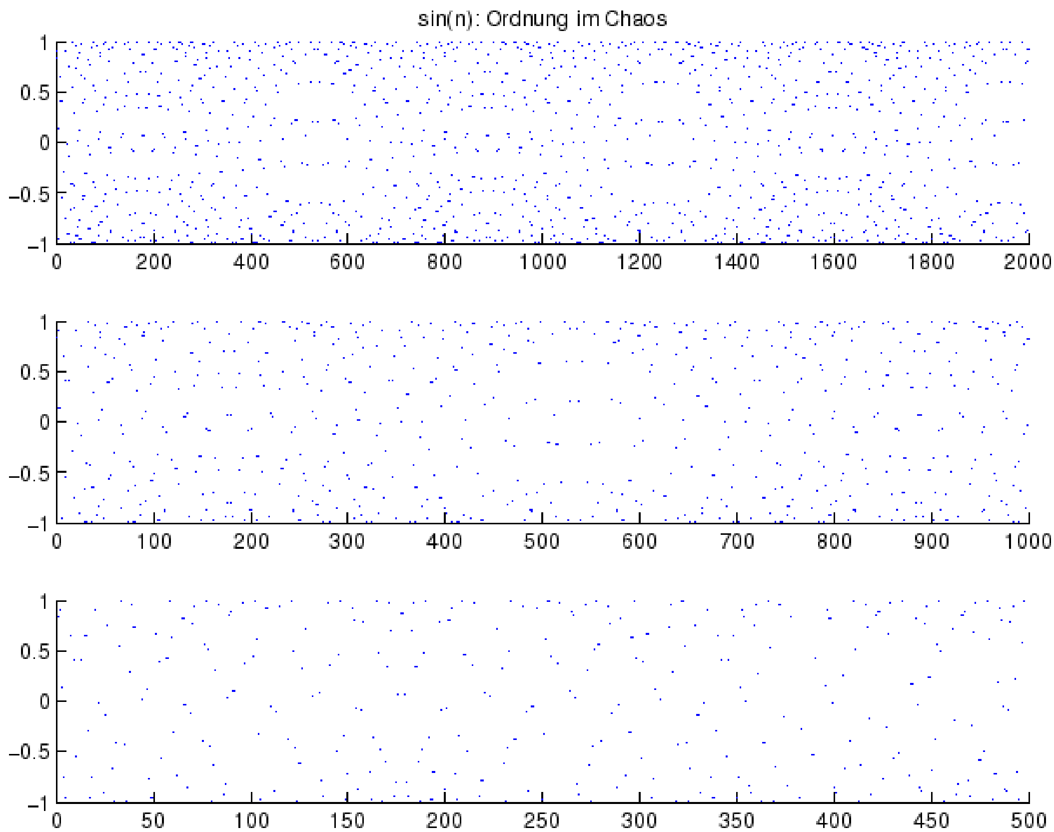
لپاره هم $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1$ دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې پرلپسې پنډغالي ټکی Häufungspunkt einer Folge

يوه پرلپسي (a_n) پنډغالي ټکی a لري، که هر انتروال $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ دپرلپسي ناپای ډېر توکي خوندي ولري. دې ته ورته د يوې برخه پرلپسي باور لري، چې a ته ځي. په ځانګړې توګه يوپوله ارزښت د پرلپسي بنډغالي ټکی هم دی.

ځيره پرلپسي $(\sin n)_{n \in N}$ ښايي.



سړی په نږدې توګه د پرلپسي يا ترادف توکو a_n برابرويشنه په انتروال $[-1,1]$ کې پيژني. په ريښتوني ښول کېدی شي، چې په $[-1,1]$ کې هر ټکی د پرلپسي پنډغالي ټکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې پرلپسې يا ترادف (a_n) د پندغالي ټکي د ټاکلو لپاره بايد کونورگنت برخه پرلپسې و پيژندل شي.
د بيلگې لپاره

هغه دا دي

$$a_n = \frac{n\sin(n\frac{\pi}{2})}{n+\sin(n\frac{\pi}{2})}$$

$$b_k = a_{2k} = \frac{0}{k}$$

$$c_k = a_{4k+1} = \frac{(4k+1)}{(4k+1)+1}$$

$$d_k = a_{4k+3} = \frac{-(4k+1)}{(4k+1)+1}.$$

له دې سره پنډغالي ټکی لاس ته راځي

$$\lim b_k = 0, \lim c_k = 1, \lim d_k = -1$$

ورهولست- - يا فرهولست- مودل **Verhulst-Modell**

يو بيلجيمي شميرپوه وو : Pierre-François **Verhulst** [vəɾˈhʏlst] (* 28. Oktober 1804 in Brüssel; † 15. Februar 1849 ebenda)

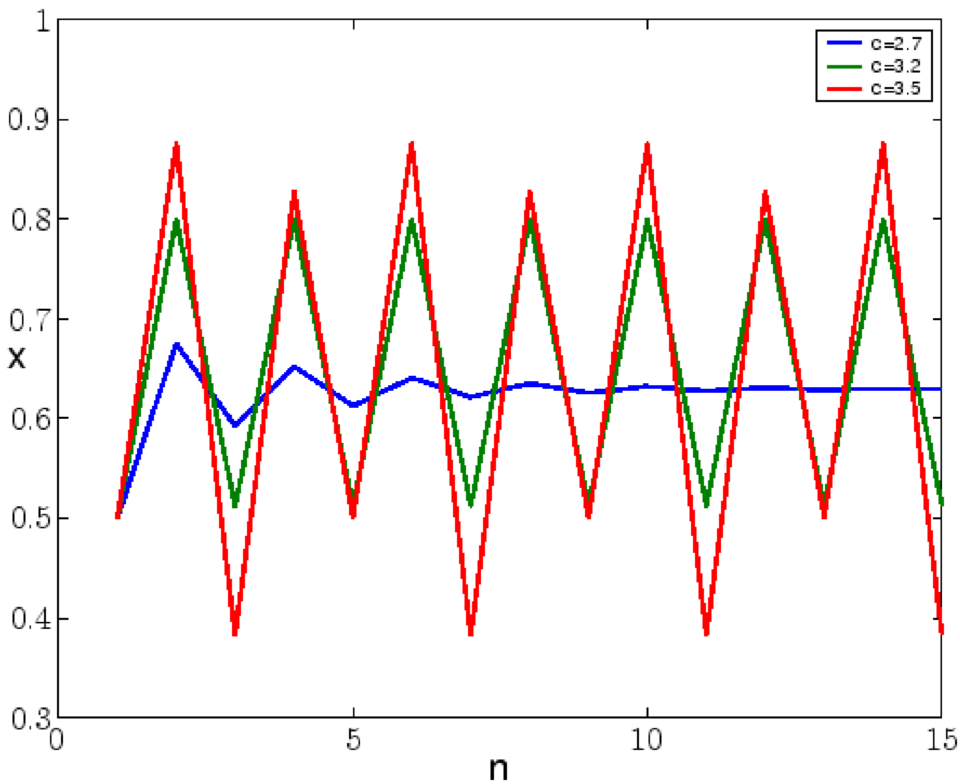
ريکورژن(په ځپ ځغاستل) Rekursion

هغه فنکشن، چې د خپل ځان له خوا پيژند لري يا تعريفيږي

$$x_{n+1} = cx_n(1-x_n)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $c \in (0,4]$ سره د نورمال شوي خلکو ګنوالي x_n وده په ګوته کوي. يو څو تيوپيکي بيلګې د ا لاندې څيره ښايي

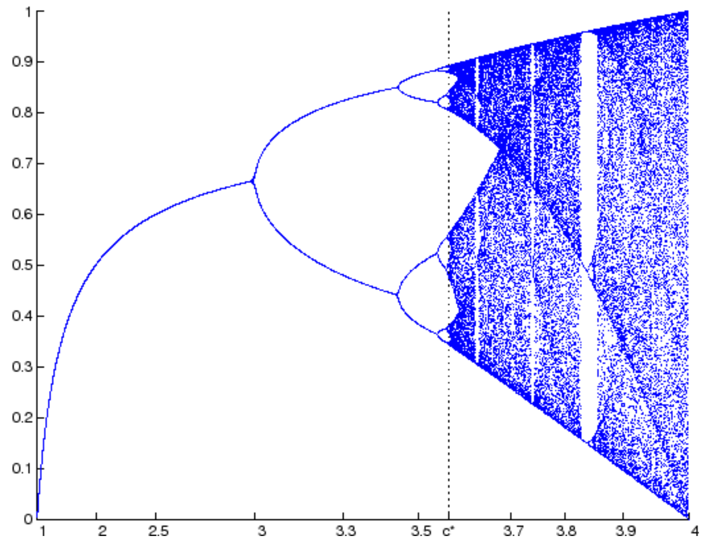


د $c \leq 3$ لپاره x_n د $n \to \infty$ لپاره لاندې پولې ارزښت ته ځي

$$x_* = \frac{c-1}{c}.$$

د $c > 3$ لپاره سرې اوسځليشن ګوري. که پارامتر تل لوی شي، نو د پنډغالي - ټکو x_* ګڼون يا تعداد دوه برابره کيږي د افاط پارامتر ارزښتونو c_i څخه اوښتلو باندې يعني له دې نور زياتيدلو باندې . دا په لاندې څيره کې کښل شوی دی، په کوم کې چې د ټکي x_* د c -محور پورته لور ته ځای په ځای شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n - c_{n-1}}{c_{n+1} - c_n} = 4,69920166\ldots$$

داسي په نامه د انځوروني ثابته ده، چې دا زيات وخت د ځانګو کولو پرابلم کې رول لوبوي.

له پورته څيري ښخه روښانه کيږي، چې ايتيشن د

$$c > c^* = \lim_{n\to\infty} c_n$$

لپاره يوګډوډيز chaotisches Verhalten حالت ښايي

د پيPi رکورزيو اپروکسيميشن
Rekursive Approximation von Pi

د a_n او b_n نيم اوږدوالی چې د يوې يوونګردی يا واحد داېرې د $(6 \cdot 2^n)$-ګوډونو يا کونجونو په باندې او په کې يعنې په دننه اودباندې لاندې ريکورژن پوره کړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}, \quad a_0 = 2\sqrt{3}, b_0 = 3,$$

د $\pi = 3.1415926535897932\ldots$ په مرسته اپروکسیمي کیدی شي.
دا فرمول د یوهان فریدریش پفاف Johann Friedrich Pfaff (1765-1825) له خوا په 1800 زکال میندل شوی.
ارښیمیدس Archimedes (287-212 v. Chr.) د 96 ـګوډونو ($n = 4$) او اټکل یا تخمین سره اړیکي

$$3.140845\ldots = \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} = 3.142857\ldots$$

ومیندلي یا ترې لاس ته راوړې.

د ګردۍ ګڼ یا عدد π له د یو میلیارد ځایونو ډېر شمیرل شوی دی. لاندې جدول د تاریخي ودې څخه یوه کاپی راکوي.:

Wert	korr. Stellen		Jahr	Autor
				Bibel (1. Könige 7:23)

Autor	Jahr		korr. Stellen	Wert
Bibel (1. Könige 7:23)	550	v. Chr.	0	3
Babylonier	2000	v. Chr.	1	3+1/8
Archimedes	250	v. Chr.	3	223/71 $< \pi <$ 22/7
Liu Hui	263		5	
Tsu Ch'ung Chi	480		7	
Al-Kashi	1429		14	

(c) ketabton.com: The Digital Library

Romanus	1593		15	
Van Ceulen	1596		20	
Van Ceulen	1615		35	
Sharp	1699		71	
Machin	1706		100	
Rutherford	1824		152	
Strassnitzky/Dase	1844		200	
Shanks	1874		527	
Smith/Wrench	1949		1 120	
Reitwiesner u.a.	1949		2 037	
Genuys	1958		10 000	
Shanks/Wrench	1961		100 265	
Guilloud/Filliatre	1966		250 000	
Guilloud/Dichampt	1967		500 000	
Guilloud/Bouyer	1973		1 001 250	
Kanada/Yoshino/Tamura	1982		16 777 206	
Kanada/Tamura/Kubo u.a.	1987		134 217 700	
Chudnovskys	1989		1 011 196 691	

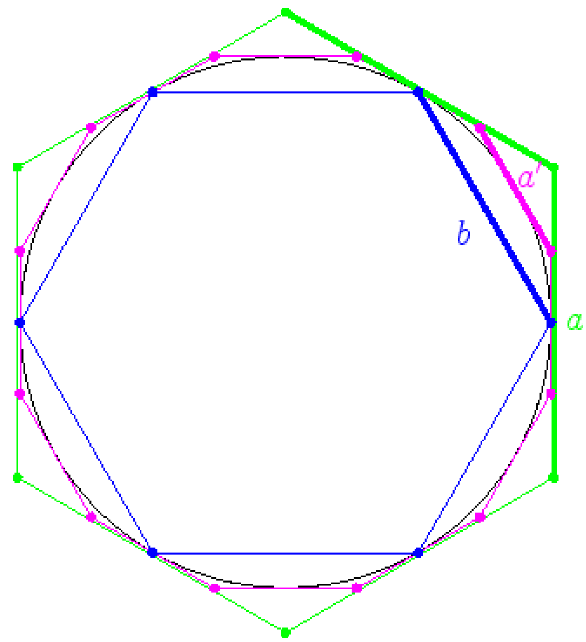
پای.

د ج.ف. پفاف ریکورزیون په ساده هندسي پامکوني باندې ولاړ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګې (تالس) جملې له مخې د a_n لپاره لاس ته راځي:

$$a' : b = \left(\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}\right) : \frac{a}{2} \Leftrightarrow a'a = ba - ba' \Leftrightarrow a' = \frac{ab}{a+b} .$$



که $k_n = 3 \cdot 2^n$ د ډېرګوډي نیم د اړخونوګښون یا تعداد په ګوته کړي، نو باور لري

$$a_n = k_n a \, , \; b_n = k_n b \Rightarrow a_{n+1} = k_{n+1} a' = 2k_n \cdot \frac{ab}{a+b}$$

$$= 2\frac{(k_n a)(k_n b)}{k_n a + k_n b} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} .$$

د b_n لپاره ریکورزیون کېدی شي د تریګونومتري توابعو په مرسته و ښوول شي. له

$$a_n = k_n 2 \tan(\pi / (2k_n)) \, , \quad b_n = k_n 2 \sin(\pi / (2k_n))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راځي

$$\begin{aligned} b_{n+1}^2 &= 4k_n^2 4\sin^2(\pi/(4k_n)) \\ &= \underbrace{2k_n 2\tan(\pi/(4k_n))}_{a_{n+1}} \underbrace{\cos(\pi/(4k_n)) 2k_n 2\sin(\pi/(4k_n))}_{k_n 2\sin(\pi/(2k_n))=b_n} \\ &= a_{n+1} b_n \, . \end{aligned}$$

د پرلپسيو يا ترادفونو ځانګړي پوله ارزښتونه

يو څو غوره پوله ارزښتونه په لاندې جدول کې راوړل شوي

a_n	$a = \lim_{n\to\infty} a_n$
$\sqrt[n]{n}$	1
$n^\alpha q^n\,,\ \lvert q\rvert < 1$	0
$n^{-\alpha}\ln n\,,\ \alpha > 0$	0
$q^n/n!$	0
$n!/n^n$	0
$(1+1/n)^n$	e
$(1-1/n)^n$	$1/e$

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زیات واره کیدی شي پوله ارزښتونه وشمیرل شي، داسې چې سړی د مناسب ښه بدلون له لارې معیاري افادې ته بېرته ولاړ شي. دا د دوه بیلو سره روښانه کیږي.

(i) د پرلپسې پوله ارزښت شمېرلو ته

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^{4n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

سړی ږدي

$$m = 2n+3,\ n = \frac{m-3}{2}$$

او لاس ته راوړي

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2m-6}.$$

په دې پسې یا د دې په تعقیب دی

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^2 \cdot \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)\right)^{-6} =$$

$$= e^2 \cdot 1^{-6} = e^2.$$

$$a_n = \binom{3n}{n}/2^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

(ii) د دې لپاره چې د
پوله ارزښت وشمیرو، سړی لیکي

$$a_n = \frac{(3n)(3n-1)\cdots(2n+1)}{n\cdot(n-1)\cdots 1}\cdot\frac{1}{2^n} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3-1/n}{2}\cdots\frac{2+1/n}{2}\right)\cdot\frac{n^n}{n!}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې په نوکانو کې افاده ≥ 1 ده لرو

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$$

د لاندې بڼې پوله ارزښت

$$\frac{a_n \pm b_n}{c_n \pm d_n}$$

په مناسب ډول سرى داسې شميري، چې سرى د مطلق ارزښت د لويې پرلپسې توکو سره
ووېشي:
د بيلګې په توګه دا پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3+\sqrt{n+4})^2}{5n+\ln\ n}$$

كه غواړو وشميرو، نو مات يا كسر په لاندې بڼه ليكو

$$\frac{9+3\sqrt{n+4}+n+4}{5n+\ln\ n} = \frac{13/n+6\sqrt{1/n+4/n^2}+1}{5+(\ln\ n)/n}.$$

دا چې $1/n, 1/n^2$ او $(\ln\ n)/n$ د صفر پهلور ځى، نو پوله ارزښت دا لاندې دى

$$\frac{0+6\cdot\sqrt{0}+1}{5+0} = \frac{1}{5}.$$

د يوې لړۍ پرلپسې (لنډ: لړۍ) پوله ارزښت
Grenzwert einer Reihe

يو زياتون يا جمعه $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ دډېروو زياتيدونو سره لړى بلل كيږي. دا د يوې پولې
ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

په لور هڅيږي، که ټوټه زياتوونويا – جمعو

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

پرلپسې (s_n) د s لور ته وهڅيږی يا کونورگنت شي. که پوله ارزښت شتون ونه لري نو پرلپسې پولې ته نه تلونکې يا ديورگنت بلل کيږي.
پوله ارزښت کېدی د زياتوونو (هغه عددونه چې يو په بل زياتيږي) د لړۍ پرلپسې په واک کې وي، همداسې اړتيا نه شته چې د نظم بدلون وروسته شتون ولري.

د يوې لړۍ د پولې ته تلنې لپاره اړيين (شرط) دی، چې

$$\lim a_n = 0.$$

فقط په لږو حالتونو کې د يوې لړۍ روښانه يا اکسپليځيټ شمېرنه ممکن ده. يوه بېلګه يې د ټاکلو لړيو ده د راشنل زياتيدونو سره لکه

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} = \frac{3}{2}.$$

د ټوټه کسر ټوټه ونې وروسته

$$\frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1},$$

کېدی شي دا لړۍ په

$$(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) + \ldots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنه ولیکل شي. تر $\frac{1}{1}$ او $\frac{1}{2}$ پورې ټول زیاتېدونې یو بل له منخه وړي یا پورته کوي،

داسې چې پوله ارزښت $\frac{3}{2}$ ترلی لوستل کېدی شي.

د ټوټه زیاتون د کمښت لپاره د ټول $n < m$ لپاره باور لري

$$|s_n - s_m| =$$

$$= |(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}) + \ldots + (\frac{1}{m-3} - \frac{1}{m-1}) + (\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m})| \leq$$

$$\leq \frac{4}{n-1},$$

داچې منځني ترمونه سره پورته کیږي یا له منځه سره وړي. ټوټه زیاتون یا ـجمعه د کوشي – پرلپسې جوړوي:

$$|s_n - s_m| < \varepsilon$$ د لپاره $$n > 1 + \frac{4}{\varepsilon}.$$

و پولې ارزښت ته کمون یا تفریق دی

$$|\frac{3}{2} - s_n| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \frac{2}{n}.$$

بیلګه دا هم ښایي، چې د زیاتوونو یا د جمعې د غړو لړۍ پرلپسې غوره یا ښه روښانه ده.

که لړۍ پرلپسې

$$(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8} - \frac{1}{5}) +$$
$$+ (\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16} - \frac{1}{6}) + \ldots,$$

وټاکو، نو هر ه په نوکاانو کې افاده $\geq \frac{1}{4}$ ده، نو لړۍ پرلپسې دیورګنت ده.

هندسي یا ځمککچیزې لړۍ
Geometrische Reihe

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمکچیزه لړۍ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ تیک هلته پولې ته ځي، $|q| < 1$ وي.
د هندسي زیاتونفرمول سره

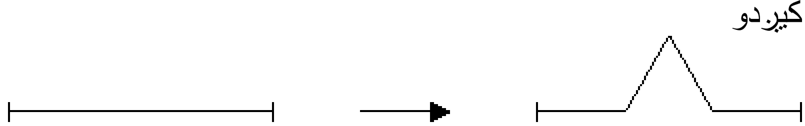
$$s_n = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

کېدی شي پوله ارزښت وښانه یا اکسپلیڅیت وشمېرل شي:

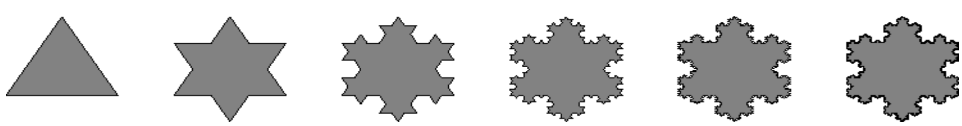
$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1 - q}$$

د $|q| < 1$ لپاره.
پای.

که د یوه برابر اړخیز درېکوډي یا مثلث مخ ته تک سره ژئ د قانون یا قاعدې سره سم کیږدو



نو یوه ډېرۍ یا ستې لاس ته راځي د وتلو ژیو سره ، داسې په نامه د کوښ-د واورو پوتې Koch-Schneeflocke.



- $1/3$-م د واورو پوتی $3 \cdot 4^n$ ژئ لري. دا چې د هر پل سره په ضریب کمیږي، نو د دې خومره والي لپاره لاس ته راځي

د ژیو ګنون یا – تعداد ضرب د ژیو اوږدوالی:

$$\left(3 \cdot 4^n\right)\left(3^{-n}\right) = 3\ \left(\tfrac{4}{3}\right)^n \to \infty,$$

،

دا په دې معنا چې د ژیو اوږدوالی پولې ته نه ځي یا دیورګنت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په n -م پل سره $3\cdot 4^{n-1}$ برابراړخيز درېګوډي لاس ته راځي د ژيو اوږدوالي 3^{-n}
او سطحې $\sqrt{3}/4\,(3^{-n})^2$ په ور زياتوالي سره. په دې توګه د n ــم د واورو پوټي د سطحې لپاره راکوي

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\sum_{i=1}^{n}\left(3\cdot 4^{i-1}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(3^{-i}\right)^2\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\frac{4^{i-1}}{9^{i-1}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{4}{9}\right)^i\right).$$

دا وتلې پوله ډېرۍ په پسې توګه سطحه لري

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-4/9}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

هارموني لړۍ Harmonische Reihe

هارموني لړۍ

$$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k},$$

پولې ته نه ځي يا همداسې ناټاکلی پوله ارزښت $s=\infty$ لري.
په ټوليزه توګه لړۍ

$$s_\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\alpha}$$

د $\alpha\leq 1$ لپاره ديورګنت او $\alpha>1$ لپاره پولې ته تلونکې ده. يو څو ځانګړي ارزښتونه د.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots ,$$

$$s_4 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots ,$$

$$s_6 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-6} = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots .$$

مطلق پولې ته تلونکې لړی **Absolut konvergente Reihen**

که

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

پولې ته لاړ شي، نو لړی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ مطلق پولې ته تلونکې بللل کیږي.

د کونورګنت د دې قوي بڼې څخه لرو، چې لړی د زیاتوونو لړې پرلپسې په خوښه تغیر له امله هم کونورګنت ده یعنې پولې ته ځی.

کوښی (کوشي) – کونورګنت قضیه راکوي:

$$\exists n_\varepsilon : |a_{m+1}| + \dots + |a_n| < \varepsilon \quad \text{für} \quad m, n > n_\varepsilon$$

د درېګوډي نابرابرون په مرسته د توته زیاتون د کمښت لپاره لاس ته راځي:

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \dots + a_n| \le |a_{m+1}| + \dots + |a_n| < \varepsilon$$

د $m, n > n_\varepsilon$, لپاره ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معناچې د $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ پولې ته تلنه.

مایورانت او مینورانت
Majorante und Minorante

که $|a_n| \le c|b_n|$ د $n \ge n_0$ لباره وي او یو مثبت یا زیاتیزه ثابته، نو د $\sum b_n$ مطلق کونورګنت څخه د $\sum a_n$ مطلق کونورګنت لاس ته راځي

که برعکس $|a_n| \ge c|b_n|$ وي دټولو تر پای ډیرو n لپارهو نو د $\sum |b_n|$ دیورګنت څخه لاس ته راځي، چې $\sum a_n$ هم مطلق کونورګنت نه ده.

زیاتوخت یا زیات واره هندسي لړۍ $\sum q^n$ او لړۍ $\sum n^{-\alpha}$ د پرتله کونې لړۍ په څیر کارول کیږي.

د لړۍ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^{-1}$$

لپاره دی

$$a_n = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{(2n) \cdot (2n-1) \cdots (n+1)} \le 2^{-n} .$$

د دې په تعقیب هندسي لړۍ $\sum 2^{-n}$ یوه مایورانت ده، نو دا پولې ته تلونکې ده.
د لړۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1000}$$

لپاره د $n > 9$ لپاره باور لري

$$a_n \geq \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} .$$

په دې پسې یا په تعقیب هارموني لړۍ یوه مینورانت ده، نو لړۍ پولې ته نه ځي یا دیورګنت ده.

د وېش قضیه Quotientenkriterium

که $a_n \neq 0$ د $n > n_0$ لپاره وي او یو عدد $q \in (0,1)$ شتون ولري د

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q\,, \quad n > n_0\,,$$

سره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. برعکس

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1\,, \quad n > n_0\,,$$

، نو $\sum a_n$ پولې ته نه ځي یا دیورګنت ده.

د پولې ته تلنې لپاره پوره کېدونکې قضیه کېدی شي په ورته بڼه

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

هم ولیکل شي.

په پام کې دې وي، چې پوره کېدونکي پولې ته تلونکي شرطونه رکورزیو د نابرابرون

$$|a_{n+1}| < |a_n|\,, \quad n > n_0\,,$$

په توګه دی، چې د هغې په بنسټ کومهوینا ممکن نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پای.

که

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\,,\,\left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right|\,,\,\dots\le q\,,$$

وي، نو دی

$$|a_{n+k}|\le q|a_{n+k-1}|\le\dots\le q^k|a_n|\,.$$

له دې سره هندسي لړۍ یوه مینورانت ده.
د دیورګنت لپاره قضیه راکوي، چې

$$0<|a_n|\le|a_{n+1}|\le\dots$$

د $n>n_0$ لپاره. زیاتیدوني صفرپرلپسی نه جوړوي، له کوم چې د $\sum a_n$ دیورګنت لاس ته راځي یا پولې ته نه تګ..
پای.

د وېش قاعده کېدی شي ګټوره وي که په لړیو استعمال شي، چې د هغې زیاتووني فاکولتیت او توانونه خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty}3^n\Big/\binom{2n}{n}$$

لپاره د بېلګې په توګه سړی لاس ته راوړي

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{3^{n+1}\,(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{3^n\,n!\,n!}=\frac{3\cdot(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}\,.$$

د دې افادې پوله ارزښت د $n\to\infty$ لپاره $\frac{3}{4}$ دی، پسې(تعقیب) یې لړۍ پولې ته ځي.

د زیاتوونو یو سیده تخمین

$$a_n=\frac{3\cdot6\cdots3n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مفصل دی یا ډېر کار غواړي. ضریبونه

$$\frac{3k}{n+k}\,, \quad k=1,\ldots,n\,,$$

له یو څخه هم لوی دي او هم کوچني. سړی باید مناسبې جوړې سره یوځای کاندي، چې یوه تخمین ته راشي.

د ریښې یا جذرقضیه **Wurzelkriterium**

که یو عدد $q \in [0,1)$ د

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le q$$

سره شتون ولري د $n > n_0$ لپاره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. که برعکس

$$|a_n| \ge 1$$

وي د ناپای ډېرو n لپاره، نو $\sum a_n$ پولې ته نه تلونکې ده.

د کونورګنت لپاره پوره کېدونکي شرطونه کېدی شي په ورته یا برابر ارزښته بڼې

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

هم ولیکل شي.

که $|a_n| \le q^n$ د $n > n_0$ لپاره باور ولري، نو هندسي لړۍ یو مایورانت جوړوي.

د دیورګنت لپاره شرط راکوي، چې (a_n) صفر پرلپسې نه ده، ځکه چې $|a_n| \ge 1$ د ناپای ډېرو n لپاره باور لري..

د ریښې قضیه استعما کېدی شي په هغو لړیو ګټوره وي، چې د هغو زیاتونونه n -م توان خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \ldots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره سړی د بيلګې په توګه لري

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{|3+(-1)^n|}\,.$$

د دې افادې يا ويينې پرلپسې

$$\frac{|x|}{2}, \frac{|x|}{4}, \frac{|x|}{2}, \ldots ,$$

د

$$q = \frac{|x|}{2}$$

له لارې يا سره محدود ده. په تعقيب يې لړی د $|x| < 2$ لپاره پولې ته ځي.
همدې نتيجې ته رسو، که سړی پوله سوپريور جوړه کړي.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{2}\,.$$

دا د n –مې ريښې اوسڅيليري پرلپسې پولې ته نه ځي بې پروا يا نا غوره يا مهمه نه ده.

د لايبنيڅ قضيه Leibniz-Kriterium

الترنيري (مخ نخښه بدلونې) لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots$$

پولې ته ځي، که (a_k) يوه مونوتون صفر پرلپسې وي. د لړۍ باقيو يا پاتو لپاره باور لري

$$0 \le \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \le |a_{n+1}|.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې الترنيري جمعې ارزښت کېدی شي تل د لومړي زياتوني د مطلق ارزښت له لارې اټکل شي.

د اټکل په بنسټ

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots - a_m| \leq |a_{n+1}|$$

د کوښنی قضيه پوره ده، او د لپاره د پاتې جمعې اټکل لاس ته راځي.
د دې نامساوات د ښوونې لپاره، چې د لړی دپاتې لپاره اټکل راکوي، سرې بې له ټوليزو بنديزونو (o.B.d.A.) $a_{n+1} \geq 0$ نيسي او $s_m - s_n$ د

$$a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\geq 0} - \ldots \leq a_{n+1}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي. او د

$$\underbrace{(a_{n+1} - a_{n+2})}_{\geq 0} + \underbrace{(a_{n+3} - a_{n+4})}_{\geq 0} + \ldots \geq -a_m \geq -a_{n+1}$$

له لارې کښته لور ته اټکل کوي

د لايبنيځ قضيې سره د الترنيري هارموني لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2 ;$$

پولې ته تګ لاس ته راځي ، پرلپسې

$$a_n = \frac{1}{n}$$

په روښانه توګه يوه همغږيزه صفر پرلپسې ده. د n ـم ټوټه جمعې ناټيکاوی ، دا په دې معنا چې د لړی پرلپسې مطلق ارزښ دا لاندې دی

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} - \ln 2 \right| \leq \frac{1}{n+1} .$$

د لايبنيځ قصيې دواړه وړاندنيونې غوره دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n} = -\frac{2}{1} + \frac{3}{2} - \frac{4}{3} + \frac{5}{4} - \dots$$

لړۍ لپاره زیاتووني a_n صفرپرلپسې نه جوړوي. له

$$|s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| \geq 1$$

څخه دیورګنت لاس ته راځي.

د

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}_{\max} \left(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^n}{2n}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \dots$$

لړې لپاره زیاتوونې a_n همغږیزې نه دي. که یو په بل پسې زیاتوني سره یوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي

$$b_n = a_{2n-1} + a_{2n} = -\frac{1}{2(2n-1)} + \frac{1}{2n} = \frac{2n-2}{(4n-2)(2n)} \geq \frac{1}{4n}$$

für $n > 1$.

په تعقیب هامونې لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ یوه مینورانت ده، نو له دې کبله لړۍ دیورګنت ده.

د اویلر **Euler** ګڼ یا عدد **e** دیوې پرلپسې او یوې لړۍ پولې په حیث

د اویلر عدد $e = 2,71828182845905\dots$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي د یوې پرلپسې او یوې لړۍ پوله ارزښت پّ څیر انځور شي

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

پای.

د لړۍ پولې ته تلنه له $1/n! \leq 4\cdot 2^{-n}$ څخه د مایورانت قضیې په بنسټ لاس ته راځي.

پرلپسې $a_n = (1+1/n)^n$ د لاندې دوارو اټکلونو په بنسټ د e سره نومول شوي یا په نخښه شوي پوله ارزښت په لور ځي.

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leq e$$
. (a)

د ښوونې لپاره لومړی په پام کې نیسو چې د $n \geq k \geq 0$ لپاره

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \;\leq\; \frac{1}{k!}$$

دی. له دې سره د بینوم فرمول څخه لرو

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq e$$

او دپوله ارزښت جوړولو سره غوښتنه لرو.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \geq e.$$
(b)

د ښوونې لپاره $N \geq 1$ په خوښه تاکو مګر کره او د $n > N$ لپاره لرو:

$$a_n \geq \sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \geq \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\left(\frac{n-N}{n}\right)^N.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{N}{n}\right)^N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$$

او د پولي ارزښت جوړولو($N \longrightarrow \infty$) سره غوښتنه.

له (a)او (b) څخه د $\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$ له امله لرو :

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = e.$$

د لړيو ځانګړي پوله ارزښتونه

په لاندې کې د ځو غوره لړيو پوله ارزښتونه ورکړ شوي.

.

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1-q}$$, für $|q| < 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots = \ln 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

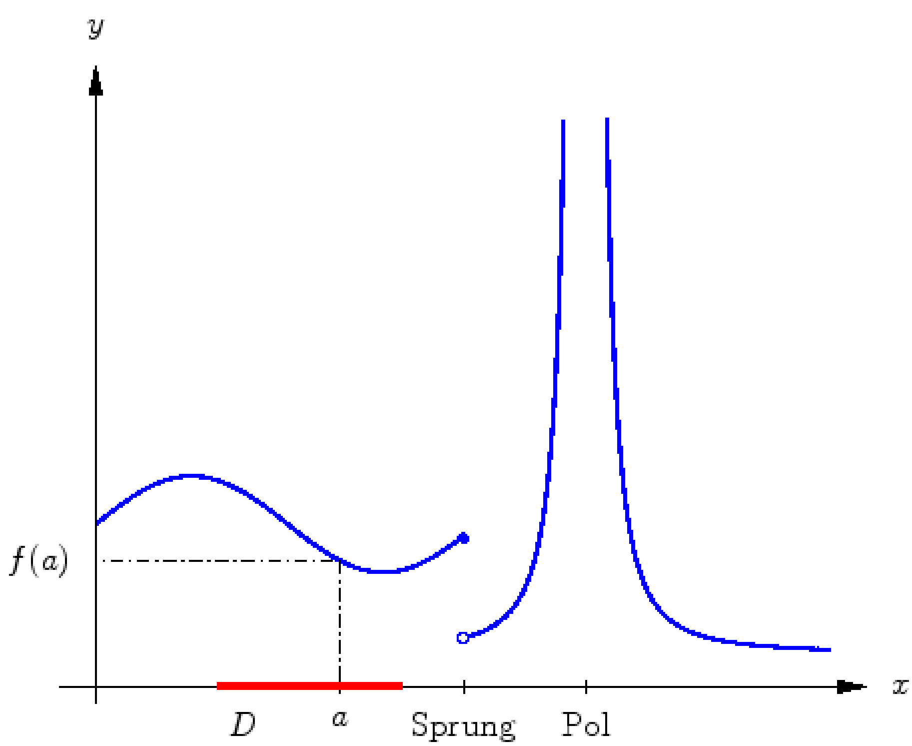
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \pm \cdots = \frac{1}{e}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k \cdot 2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \cdots = \ln 2$$

ناپرېکیدنه یا متمادیت **Stetigkeit**



(c) ketabton.com: The Digital Library

يو تابع f په ټکی a کې ناپرېکيدونکی يا متمادي دی، که د ټولو پرلپسيو (x_n) لپاره د د پولې a سره د تابع ارزښت $f(x_n)$ د $f(a)$ په لور کونورګنت وی يا هځيږي:

$$x_n \to a \Longrightarrow f(x_n) \to f(a)\,,$$

د پوله ارزښت د تعريف له مخې هر $\varepsilon > 0$ ته يو δ_ε شتون ل ري د $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ سره د $|x - a| < \delta_\varepsilon\,,$ لپاره ، او سړی ليکي

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$
.

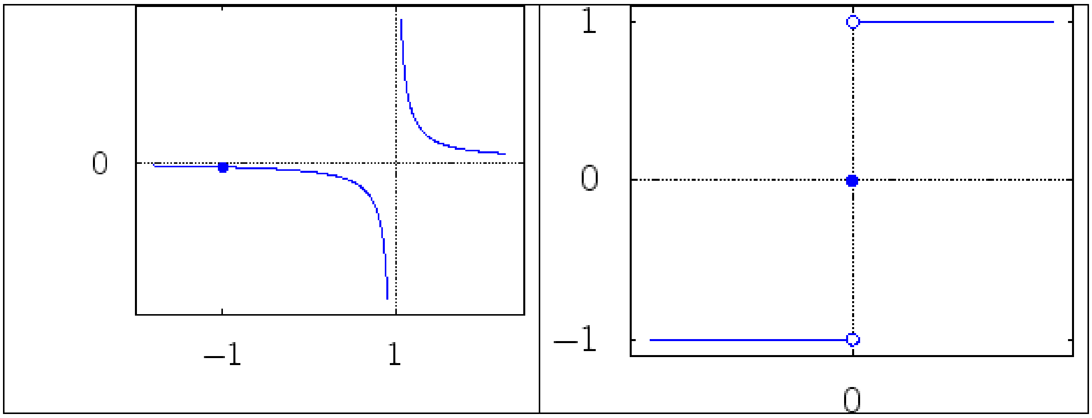
يو تابع په يوه انتروال D ناپرېکيدونکي ده، که دا د D په هر ټکي کې ناپرېکېدونکې وي.

دا په دې معناچې د f ګراف سره تړلی دی، تابع ګام يا ټوپ نه وهي او قطب نه لري (لنډ: نه پرې کيږي او نه ماتيږي).

بالاخره ناپرېکېدنه په دې معنا ده، چې ګراف بې له دې چې (پنسل پورته شي) پرې شي رسم کيږي.

فنکشن $f(x) = \operatorname{sign}(x)$	فنکشن $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پورته دواړه بیلګې د پرېکیدنې مختلف تیوپونه ښايي.

د سیګنوم تابع sign په صفرځای کې یو توپ وهي. په حقیقت کې د تابع ارزښت تعریف دی، $\mathrm{sign}(0)=0$، مګر د $f(x)$ پوله ارزښت د $x\to 0$ لپاره شتون نه لري.

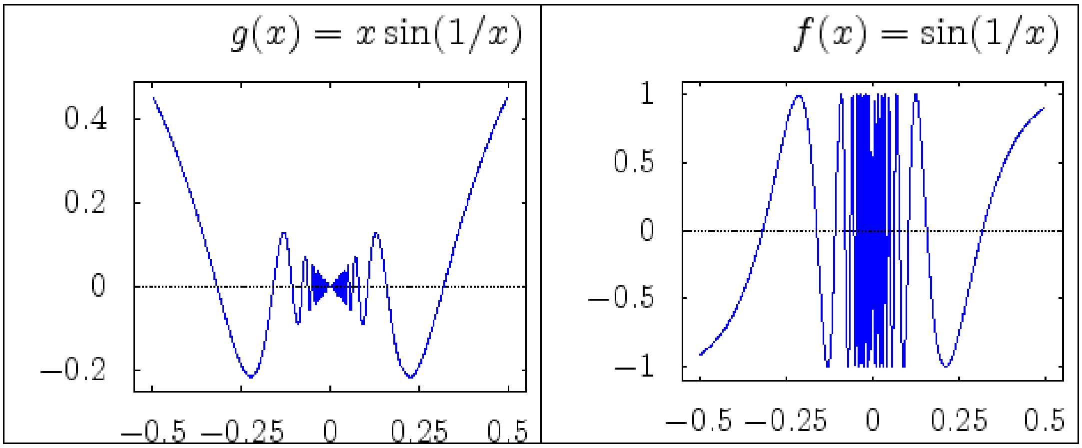
تابع په $x=\pm1$ کې تعریفتشیا لري. د $x\to 1$ لپاره $|g(x)|$ د ∞ په لور هخیږي، g هلته یو قطبځای لري. مګر سره له دې هم پوله ارزښت $\lim\limits_{x\to -1} g(x)$ شتون لري. دا تړلی د کربښیز ضریب $(x+1)$ د لنډونې څخه کتل کیږي.

$$g(x)=\frac{1}{x-1},\ x\neq -1\,.$$

دا یوه له منځه وړونکې یا پورته کیدونکې تعریفتشیا ده. د تابع ارزښت $g(-1)=-\frac{1}{2}$ د تکمیلونې له لارې g په $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ باندې یو ناپرېکیدونکې تابع کیږي.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library



تابع (ځيرې يې پورته دي)

$$f(x) = \sin(1/x)$$

په صفر 0کې پرېکېدونکې ده، ځکه چې د $x \to 0$ لپاره د -1 او 1 ترمنځ اوسځيلی کيږي.

برعکس ياپه ځت د تابع

$$g(x) = x\sin(1/x)$$

تعريفتشيا په $x = 0$ کې پورته کيدونکې يا له منځه وړونکې ده.

له

$$0 \le |x\sin(1/x)| \le |x|$$

د $\lim_{x\to 0} |x| = 0$ سره د پرتله کيدونکې قضيې په بنسټ لاس ته راځي

$$\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0.$$

له دې امله کيدی شي د g

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g(0) = 0$

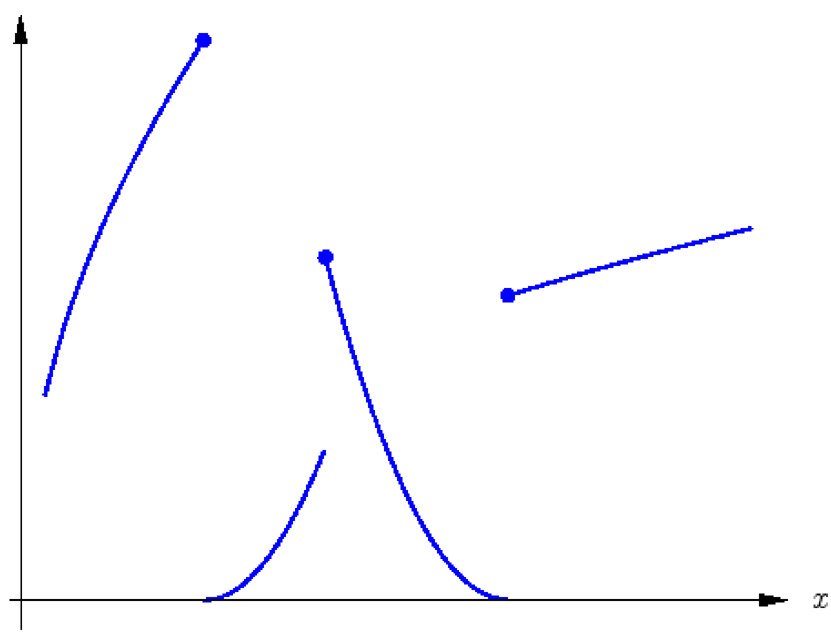
اینووني له لارې یوه په ټول $\mathbb{R}$ ناپرېکیدونکي تابع ته پوره شي.

یو اړخیز ناپرېکیدنوالی یا متمادیت **Einseitige Stetigkeit**

ناپرېکدنوالي ته ورته سرې کېږي- همداسې ښی ناپرېکېدنوالی تعریفوي

$$\lim_{x\to a-} f(x) = f^{-}(a)\,, \qquad \lim_{x\to a+} f(x) = f^{+}(a),$$

داسې چې د x محور د a په اړونده اړخ ترڅېړنې لاندې ونیسي

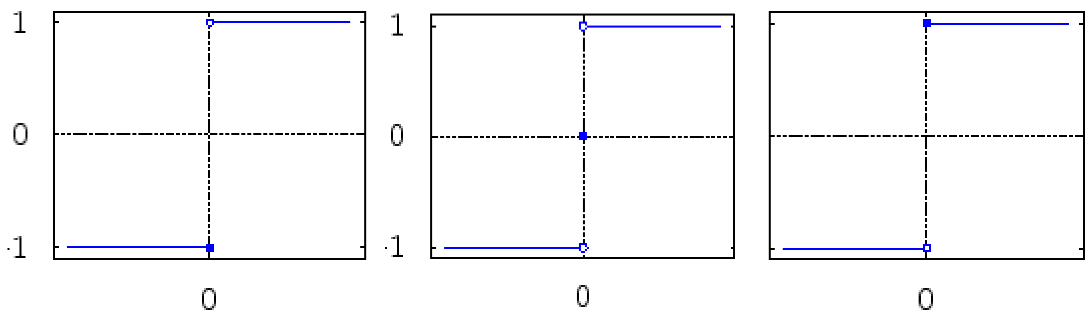


که د f په یوه ټوټه‌ای تابع ارزښت تعیف وي، نو دا په ګراف کې پنډ په نخښنه کېدی شي، چې روښانه شي چې د کیڼ- یا ښي اړخ د پولې ارزښت سره سر خوري.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع
$$f(x) = x/|x|$$
په ټولو ټکو کې تر تعريفتشيا $x = 0$ پورې ناپرېکيدونکې ده.



که $f(0) = -1$ کېږدو نو تابع به کېڼ اړخيزه او د $f(0) = 1$ سره ښې اړخيزه ناپرېکېدونکې په 0 کې مخ ته لاړه شي. د $f(0) = 0$ لپاره د سيګنوم-تابع

$$f(x) = \text{sign}(x),$$

لاس ته راځي، چې دا په 0 کې نه ښې – او نه کينه ناپرېکېدونکې دی.

د ناپرېکيدونکو توابعو لپاره لارې يا قاعدې

په يوه ټکي a کې ناپرېکېدونکې توابعو f او g لپاره

$rf \quad (r \in \mathbb{R})$

$f \pm g$

fg

$f/g \quad ($ وي $g(a) \neq 0)$ که $)$

$f \circ g$

په a کې ناپرېکيدونکې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته وګه په یوه انتروال D ناپرېکېدونکې تابع همداسې د کېږ – اوښې اړخیز ناپرېکېدنوالې ځایونو لپاره باور لرې.
پای.

دا لار د پوله ارزښت لپاره اړونده وینا ښخه تړلې لاس ته راځې.
که دبېلګې په ت وګه د ناپرېکېدونکو توابعو کمپوزېشن(ترکیب) تر څېړنې ونیسو، د g
د ناپرېکېدنوالې ښخه د هرې پرلپسې (x_n) لپاره د پوله ارزښت a سره دا راکوې

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a).$$

دا چې f هم ناپرېکېدونکی دی، لاس ته راځې

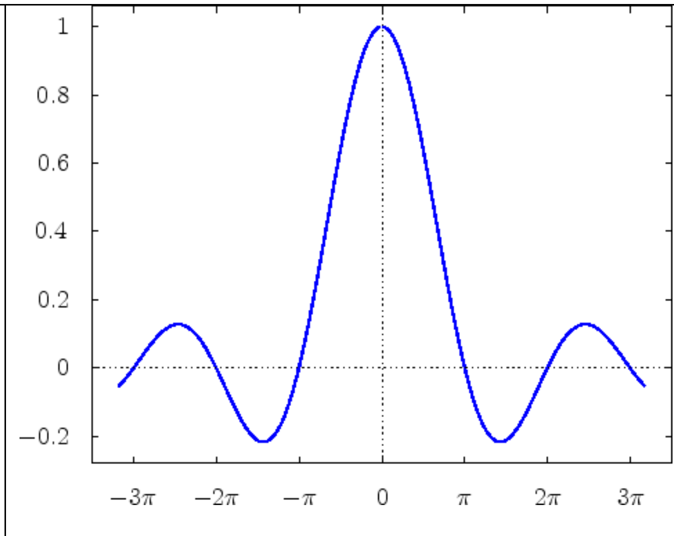
$$\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f(g(a)).$$

پای.

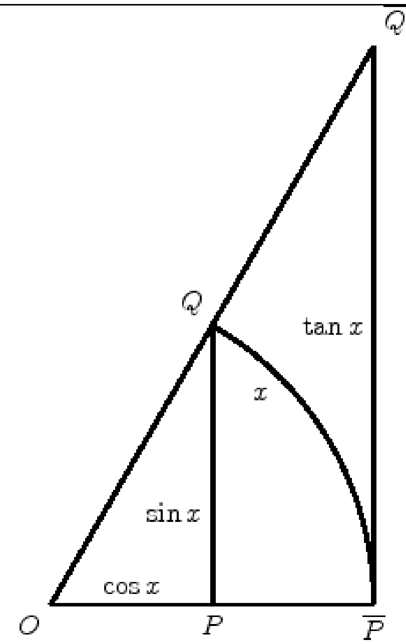
داسې په نامه sinc - تابع.

$$f(x) = \mathrm{sinc}\, x = \frac{\sin x}{x}$$

د مخ ته بیولو یا دوام $f(0) = 1$ سره په $\mathbb{R}$ باندې ناپیکېدونکې ده. ښوونه یې د ترېګونومتریک توابعو په تخمین پورې اړه لرې.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ردېګوډي $\Delta(OPQ)$ ، د ګردی ټوټه ووني یا وتر او درېګوډي $\Delta(O\overline{P}\overline{Q})$ د سطحو د پرتلې له لارې په څېره کې کتل کیږي، چې $$\frac{\sin x\cos x}{2}\leq\frac{x}{2}\leq\frac{\tan x}{2}$$ همداسې $$\frac{1}{\cos x}\geq\operatorname{sinc}x\geq\cos x,$$ د $\sin x/2$ سره وېشنې له لارې او د معکوس ارزښت جوړونه. د $\lim_{x\to 0}\cos x=1$ د پرتلې قضیې څخه لاس ته راځي. $$\lim_{x\to 0}\operatorname{sinc}x=1.$$	

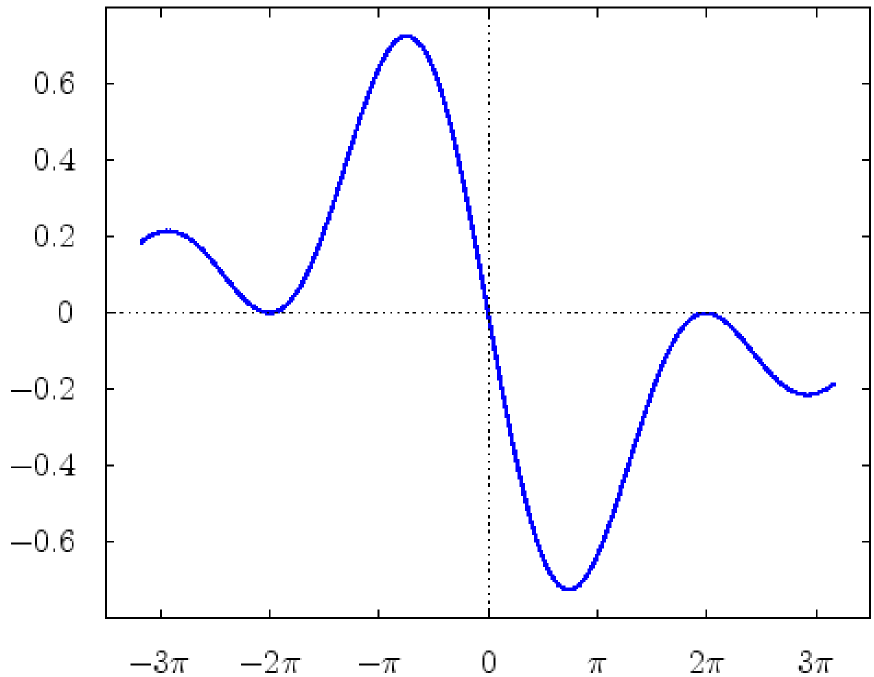
لیکونکي: اپپ، هیولیک

تابع

$$f(x)=\frac{\cos x-1}{x}$$

د مخ ته وړنې $f(0)=0$ سره په ټول $\mathbb{R}$ ناپرېکیدونکې ده

(c) ketabton.com: The Digital Library



باور لري

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)}$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x + 1}\sin x,$$

او له

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0}\sin x = 0$$

لاس ته راځي

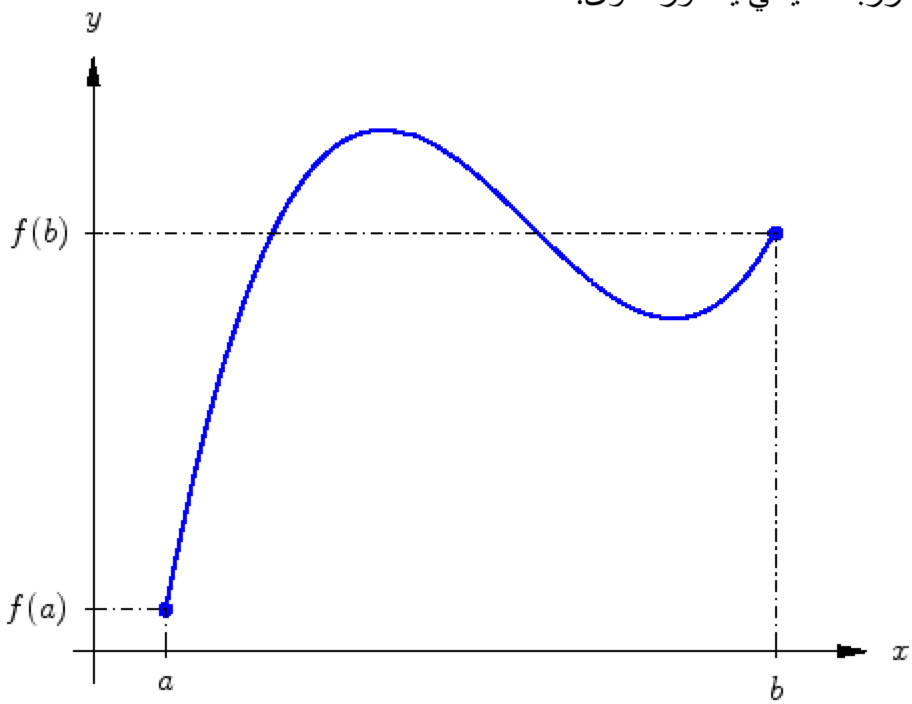
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځ ارزښت جمله **Zwischenwertsatz**

یو ناپرېکېدونی تابع f په یوه بندانتروال $[a,b]$ د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ هر ارزښت نیسي یا غوره کوی.



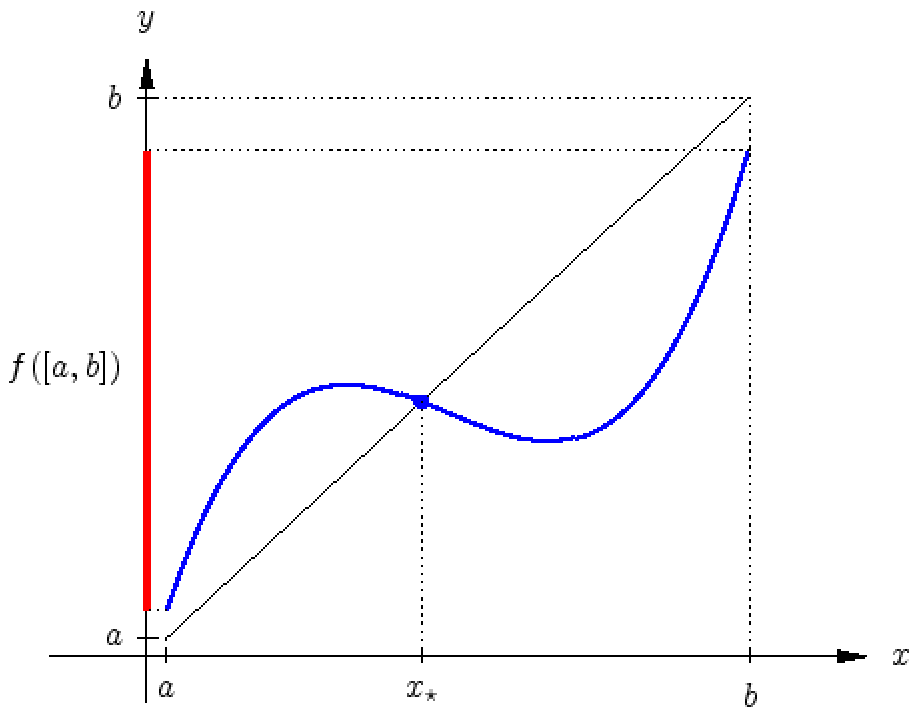
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

که یو تابع f انتروال $[a,b]$ په انتروال $[a,b]$ ناپرېکېدونکی تنظیم کړي، نو یو $x_\star$ شتون لري د

$$x_\star = f(x_\star).$$

سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ناپرېکيدونکې تابع

$$g(x) = f(x) - x$$

لپاره $g(a) \geq 0$ او $g(b) \leq 0$ باور لري. د منځ ارزښت جملې سره د یوه صفرځای $x_\star \in [a, b]$ شتون لاس ته راځي:

د نتپرېکيدونکو توابعو لپاره

$$g(x) = f(x) - x$$

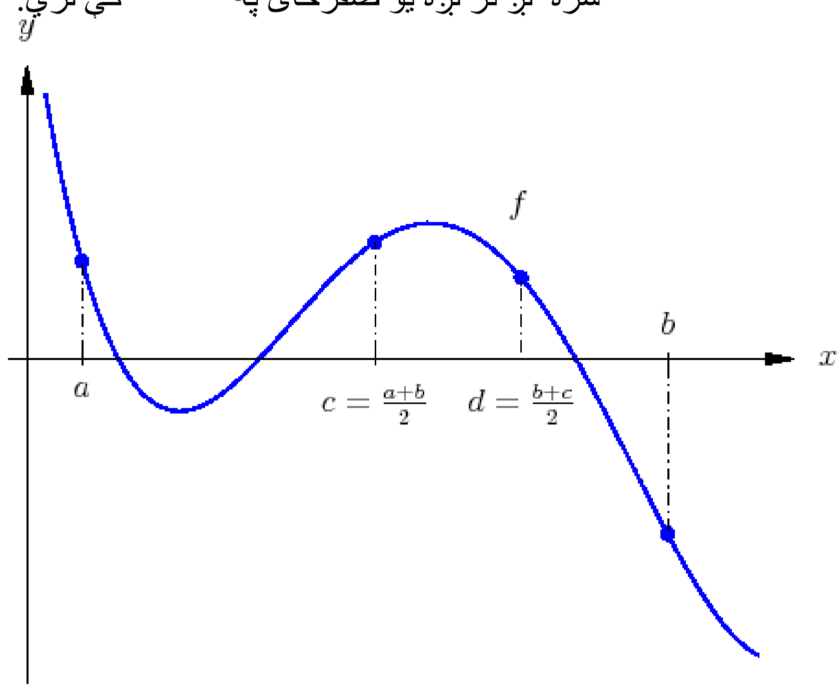
$$g(x_\star) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x_\star) = x_\star$$

دا په دې معناچې د f يو ځاي په ځای - يا بيکس تکی $x_\star$.
ليکونکي: هيوليګ، کراخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه سطحو – یا برخو تلنلار **Bisektionsverfahren**

د منځ ارزښت جملې په بنسټ یو ناپرېکیدونکی تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ د $f(a)f(b) \leq 0$ سره لږ تر لږه یو صفرځای په $[a,b]$ کې لري.



که دا انتروال نیم شي او f ته د انتروال په ةنځ کې ارزښت ورکړي

$$c = \frac{a+b}{2},$$

نو کیدی شي د مخنښي په مرسته پرېکړه وشي، چې د کوم انتروال په نیمايي کې باید صفرځای پروت وي:

$f(a)f(c) \leq 0$ لاسته راځي ، چې په $[a,c]$, کې صفرځای شتون لري

$f(a)f(c) \geq 0$: لاس ته راځي صفرځاب په $[c,b]$. کې شتون لري

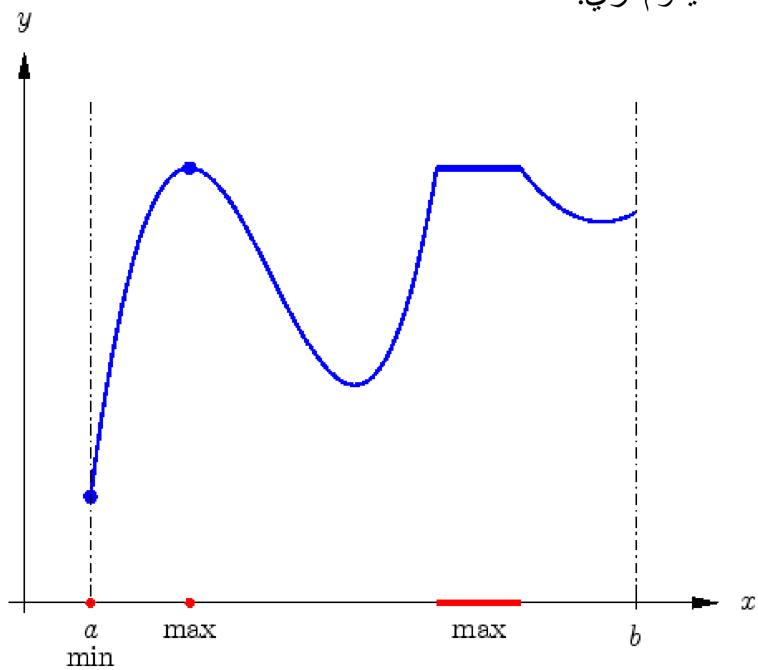
سرِی اوس دا اړونده برخه انتروال ټاکي او دااېتریر iteriert (ټیک حل ته ور نږدې کونه) کوي، تر څو د انتروال اوږدوالی غوښتوني ټیکوالي ته ورسیږي.

لیکونکي: اپپ، هیولیک، پفایل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناپرېکيدونکي تابع افرطيت Extrema stetiger Funktionen

يو ناپرېکيدونکی تابع په يوه پای رابند انتروال $[a,b]$ لږ تر لږه يو مينيموم او يو ماکسيموم لري.



ليکونکي: اېپ، هيوليک

يو $c > 0$ شتون لري د

$$(x+y)^n \leq c(x^n+y^n)$$

سره د $x, y \geq 0$ لپاره

د بنووني ته د $x \neq 0$ لپاره (حالت $x = 0$ ساده دی) ليکو

$$z = y/x$$

او ناپرېکيدونکی تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(z)=\frac{(1+z)^n}{1+z^n}.$$

څېړو.

دا چې $\lim_{z\to\infty} f(z)=1$ دی، نو يو $b>0$ شتون لري، داسې چې $f(z)\le 2$ د $z\ge b$ لپاره باوري کوي. د

$$c=\max\left\{2,\max_{z\in[0,b]} f(z)\right\}$$

سره لاس ته راځي

$$f(z)=\frac{(1+z)^n}{1+z^n}\le c$$

او له دې سره پورته غوښتنه

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

برابرډوله ناپرېکيدنوالی Gleichmäßige Stetigkeit

يو تابع f په يوه انتروال D برابرډوله يا برابرارزښته ناپرېکېدونکی دی ، که د ټولو $\varepsilon>0$ لپاره يو δ_ε شتون ولري ، دا سې چې راکړي

$$|x-a|<\delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

د ټولو $x,a\in D$ لپاره.

د f د تنها ناپرېکېدنې په برعکس δ_ε د a په واک کې نه ده. تنهاپه يوه محدود رابند انتروال کې ناپرېکېدنوال کی او برابرارزښته يا – ډوله ناپرېکېدنوالی سره ورته دی.

ليکونکي: هيوليګ، پفايل

په ټکي ډول پولې ته تلنه Punktweise Konvergenz

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توابعو (f_n) يوه پرلپسي په يوه انټروال D ټکي ډوله د پولې تابع f په لور پولې ته ځي.

$$f_n \underset{\text{pktw.}}{\longrightarrow} f,$$

که $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ وي د ټولو $x \in D$ لپاره.

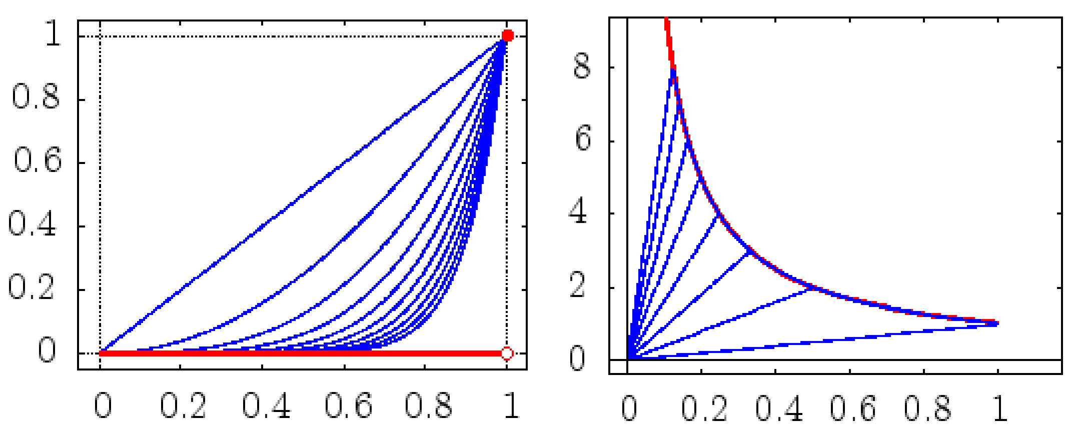
ليکونکي: اېپ، هيوليک

په ټکيډوله پولې ته تلنې بايد نه دی چې ناپرېکېدنوال او بندوالی ساتلي پاتې شي.

د بېيلګې په توګه د $f_n(x) = x^n$ ټکي ډوله پوله ارزښت په $[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

په ښي انټروال پای پرېکېدونکی دی، لکه په کينه څېره کې چې ښوول شوی دی.



د يو کونورګنت لپاره بېلګه چې د نامحدود پوله تابع په لور ښی څېره د پرلپسي سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 < x \le 1/n \\ 1/x, & 1/n < x \end{cases},$$

ښايي ، چې په $(0,1)$ ټکي ډوله د پوله تابع $f(x) = 1/x$ په لور پولې ته ځي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

برابرارزښته يا برابرډوله پولې ته تلنه **Gleichmäßige Konvergenz**

د توابعو يوه پرلپسي (f_n) په يوه انتروال D برابرډوله د يوه پولې تابع f په لور پولې ته ځي،

$$f_n \underset{\text{glm.}}{\longrightarrow} f,$$

که هر $\varepsilon > 0$ ته يو n_ε شتون ولرى، داسې چې

$$n > n_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري.

د کوشي قضيې په مرسته کېدی شي برابرډوله پولې ته تلنه بې د پولېتابع نسبت څخه تعريف شي. سرې ورته شرطونه لاس ته راوړي، داسې چې

$$m, n > n_\varepsilon \Longrightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره بايد باور ولري.

که توابع f_n ناپرېکېدونکي وي، نو پوله تابع f هم ده.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د درېګوډي نامساواتو څخه لرو

$$\begin{aligned} &|f(x_0) - f(x)| \\ &\le |f(x_0) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \\ &\le |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| . \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د په خوښه $\varepsilon > 0$ ته د برابرډوله کونورګنت له امله یو n_ε شتون لري، داسې چې د $n > n_\varepsilon$ لپاره

$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall\, y \in D$$

باوري کوي. د یوه داسې n لپاره اخرنی او لومړنی ترم $< \varepsilon$ دي، که $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ وي. دا له $|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$ لاس ته راځي او له دې سره د $x \to x_0$ $f(x) \to f(x_0)$ لپاره.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د توابعو لړۍ پولې ته تلنه **Konvergenz von Funktionenreihen**

یوه د توابعو f_k لړۍ $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ټکي ډوله (برابرډوله) پولې ته تلونکې ده، که دا د لاندې ټوټه جمعې یا زیاتون $s_n = \sum_{k \le n} f_k$ لپاره دا حالت ولري.

یوه کلکونه یې مطلق پولې ته تلنه ده، چې د هغې سرره د $\sum_n |f_n|$ د برابرډوله پولې ته تلنې لپاره غوښتل کیږي. په دې حالت کې پولې ته تلنه د لړۍ یوه نظم بدلون لپاره هم ساتلی پاتیږي.

د تعریف سره سم دا وینا وې په تابع پرلپسیوو هم د باور وړ دي.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

په لاندې کې د یو څو تیوپیکي بیلګو حالتونه ښولکیږي

(i) د توابعو لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(1-x)^k = x\left[1 + (1-x) + (1-x)^2 + \cdots\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $[0,1]$ تکي ډوله پولې ته ځي. د هندسي لړۍ لپاره فرمولپه مرسته پوله تابع لاس ته راځي

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

دا چې په $x = 0$ کې پرېکېدونکی دی، کېدی شي لړی برابرډوله کونورګنت نه وي.

(ii) د $x \in [0,1]$ لپاره لړی

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \pm \cdots$$

د لايبنيخ –پولې ته تلنې له امله ($\frac{x^k}{k}$ همغږيز صفر پرلپسې ده). دا چې د لړی پاتې د لايبنيخ پسې د

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-x)^k}{k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}\right| \leq \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1}$$

له لارې اټکل کېدی شي، لړۍ په $[0,1]$ حتی برابرډوله پولې ته ځي. مګر سره له دې په $[0,1]$ باندې مطلق پولې ته نه ځي، ځکه چې $\sum(1/k)$ ديورګنت ده.

(iii) لړی

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $[-1,1]$ باندې مطلق پولې ته ځي، ځکه چې

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{x^k}{k^2}\right| - \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{x^k}{k^2}\right| = \sum_{k=n+1}^{m}\left|\frac{x^k}{k^2}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

باور لري، او

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

پولې ته ځي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

توابعو لړۍ ته مایورانت یا پورته پولې
Majorante bei Funktionenreihen

د پوره لوی n لپاره باور لري

$$|f_n(x)| \leq ca_n\,, \quad x \in D\,,$$

اوکه لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ پولې ته ځي، بیا نو لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

مطلق پولې ته تلونکې ده.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

وینا تړلې د اعدادو لړۍ لپاره د مایورانت له جملې لاس ته راځي، ځکه چې د ټولو $x \in D$ لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| - \sum_{k=1}^{m} |f_k(x)| \le c \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د اکسپوننشل تابع ضرب انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د یوه ضرب د پوله ارزښت په حیث انځور شي:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} (1 + x/n)^n , x \in \mathbb{R},$$

په هر انتروال $[-a, a]$ د برابرډوله پولې ته تګ سره.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

لومړی به د

$$f_n(x) = (1 + x/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{x}{n} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{x^n}{n^n} .$$

برابرډوله پولې ته تلنه و ښوول شي. دې ته سړی ترې کار اخلي یا استعمالوي، چې

(i)

$a^k/k! \to 0$ د په خوښه $a \ge 0$ لپاره ؛

(ii)

$p_{n,j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j}$ د هر $j \in \mathbb{N}$ لپاره یو مونوتون جګېدونکې د 1 په لور تلونکې پرلپسي ده.

د دې لپاره چې د کوشي فرمول استعمال کړو، سړی کمښت یا تفریق $f_m(x) - f_n(x)$ په لاندې بڼه لیکي

$$\sum_{j=0}^{k-1}(p_{m,j} - p_{n,j})\frac{x^j}{j!} + \sum_{j=k}^{m} p_{m,j}\frac{x^j}{j!} - \sum_{j=k}^{n} p_{n,j}\frac{x^j}{j!}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k < n < m$ سره .

د $|x| \le a$ لپاره د $a \ge 1$ او $k \ge 2a$ سره د اخرنيو زياتېدونو ارزښت هر ځل

$$\le \frac{a^k}{k!} \underbrace{\left(1 + \frac{a}{k+1} + \frac{a^2}{(k+1)(k+2)} + \cdots\right)}_{\le 2},$$

$< \varepsilon/3$

دی، نو د(i) پسې د يوه پوره لوي ټاکلي k لپاره.

د (ii) پسې يا له مخې دی

$$|p_{m,j} - p_{n,j}| < \frac{\varepsilon/3}{ka^k}$$

د $m, n > N_j(\varepsilon)$ لپاره، اوله دې سره کيدی شي د لومړنی جمعې هره زياتېدونې د $f_m(x) - f_n(x)$ په تويته کيدو د $\frac{\varepsilon/3}{k}$ له لارې اټکل کړي. په ټوليزه توګه لرو

$$|f_m(x) - f_n(x)| < k\frac{\varepsilon/3}{k} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad m, n > \max_{j<k} N_j(\varepsilon).$$

د

برابرډوله پولې ته تلنې په بنسټ په هر انتروال $[-a, a]$ باندې د پولې تابع $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ ناپرېکېدونکې ده. بسيا کوي، چې $f(x) = e^x$ د راشنل پروت محور $x = p/q$ لپاره وښايو. د يوې برخه پرلپسې $n = mp$ په راوړنې سره د e د تعريف څخه لاس ته راځي

$$\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{x}{mp}\right)^{mp} = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{p}{mpq}\right)^{mpq/q} = e^{p/q}$$

د $t \mapsto t^{p/q}$ ناپرېکېدنې له امله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشال تابع لړۍ انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د یوې لړۍ د پولع ارزښت په تګه انځور شي:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \ , x \in \mathbb{R},$$

د هر انتروال $[-a,a]$ برابرډوله پولې ته تلنې سره.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

اوس د ضرب انځورونې ته ورته والی ښولکیږي:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

دا ترلی د تیلور-لړۍ په څېر د جمعې د روښانه ونې څخه لاس ته راځي. د $x > 0$ لپاره دا لاندې سیده ښوونه ستونځمنه ده، سره له دې بې له مشتق منځ راوځي.

سرۍ پوله ارزښت د $\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{x}{n}\right)^j = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{x^j}{j!}\underbrace{\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-j+1)}{n\cdot n\cdots n}}_{\leq 1}\right)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي او د

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{x^j}{j!}\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-j+1)}{n\cdot n\cdots n}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\geq \sum_{j=0}^{m}\left(\frac{x^j}{j!}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{j-1}(1-k/n)\right)$$
$$= \sum_{j=0}^{m}\frac{x^j}{j!}$$

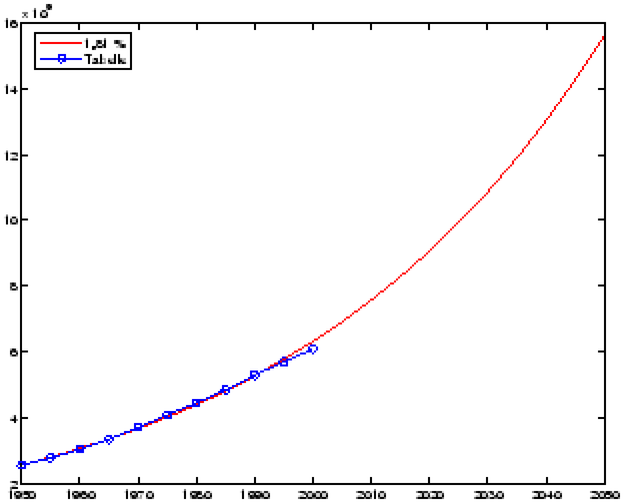
د یوه په خوښه $m \in \mathbb{N}$ کښته لور ته اټکل کوي. د $m \to \infty$ لپاره د پوله ارزښت جوړولو ځخه وروسته د دواړو آټکلونو یو بل سره برابروالی لاس ته راځي.
یوه ورته دلیل راوړنه د $x < 0$ لپاره همم شونې ده، که سړی مثبت او منفي برخه په دې منځ ته راغلې جمعه کې ځانله یا جداوځیري.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

اکسپوننشا تابع د ډېرې بیلوژیکي ودې پروسې تر ځیرنې لاندې نیسي. د بیلګې په توګه په یو ساده د د قومونو ودې مودل کې د زیږېدنې ګڼون یا تعداد متناسب دی د د ورځنې اوسیدونکو تعداد $p(t)$ سره د t په وخت کې، دا په دې معنا چې
$$p(t+\Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t)) .$$

د $\Delta t \to 0$ لپاه دا د ودې قانون
$$p(t) = ce^{\lambda t} , \qquad c = p(0) ,$$
له لارې مودلي کیږي.

کال	د نفوسو تعداد په میلیونو	ونډه
	2555	
1950	2779	1.76 %
1955	3039	1.87 %
1960	3345	2.02 %
1965	3707	2.16 %
1970	4088	1.80 %
1975	4456	1.80 %
1980	485	1.79 %
1985	5283	1.77 %
1990	5690	1.54 %
1995	6080	1.37 %
2000		1.25 %

(c) ketabton.com: The Digital Library



(کيڼ) جدول د نړۍ اوسېدونکي $p(t)$ ښايي همداسي کلنۍ د ودې تعداد(اټکل شوی ارزښت). کلنۍ منځني د ودې زياتون (ريټ) په کلونو 1950-2000کې % 1.81 وو. له 1950 کال څخه به د ثابت منځني اکسپوننشل ودې سره

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

به د نړۍ اوسېدونکي په کال 2050 کې 16 ميليارده وګڼل شي(ټکي په ټکي شوې کرښه يا منحني).
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

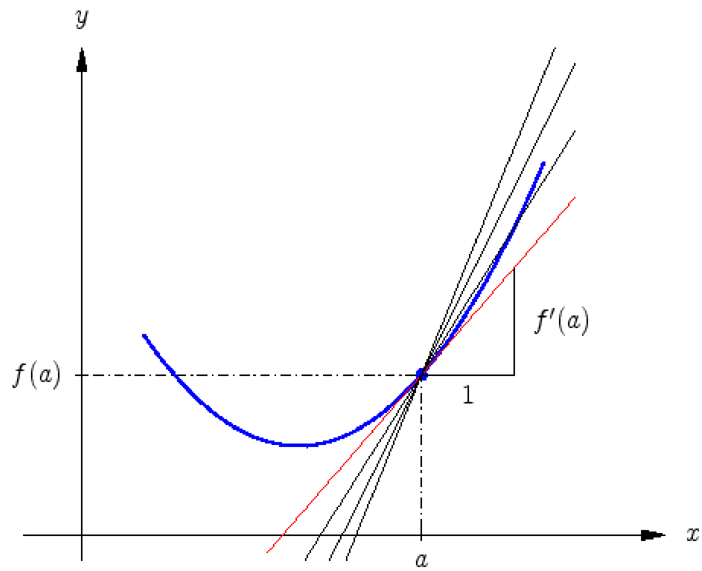
مشتق(رابيليدنه) Ableitung

يو تابع f په ټکي a کې مشتقوړ يا رابېلېدوړ دی، که د مشتق په نوم نومول شوې پوله ارزښت

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري..

(c) ketabton.com: The Digital Library



مشتقوړوالی یا رابیلیدوړوالی هندسي په دې معنا دی، چې د ټوټه ونې یا سیکانت جګوالی له

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

څخه د ورکړشوي تانجنت جګوالي په لور وهڅيږي یا کونورګنت شي(پوله يې ونيول شي).

سړی داسې هم لیکي:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{dy}{dx}$$

د $y = f(x)$ سره . دا لیکدود یا ه-دول په کمبنت وېش کې $\Delta x \to 0$ پولې ته تګ ښايي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جګ مشتقونه د $f'', f''', \ldots$ همداسې $f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots$ سره په نخښه کيږي.

يو تابع f په يوه ډېرۍ يا سټ D باندې مشتقوړ بلل کيږي، که $f'(x)$ د ټول $x \in D$ لپاره شتون ولري.

د تابع $f(x) = x^2$ د مشتق لپاره د تعريف سره سم لرو:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x\,.$$

دويم مشتق $f''(x) = 2$ ثابت دی.

په ټوليزه توګه يو د خوښې مونوم , $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ لپاره د بينوم فرمول په مرسته لرو

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1}h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1}\,,$$

د کوم سره چې $O(h^2)$ د نظم h^2 ترمونه په نخښه کوي.

د $f(x) = \sin x$ مشتق کېدی شي د زياتون – يا جمعي قضيې په مرسته وشمېرل شي له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

څخه د کمبنت وېش لپاره د $t = x + h/2$ سره راکوي

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin\left((x+h/2)+h/2\right) - \sin\left((x+h/2)-h/2\right)}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{2\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h}.$$

د

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(h/2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

له امله د $h \to 0$ لپاره بنی اړخ د $\cos x$ په لور هڅیږي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د بنسټتوابعو مشتق یا رابیلیدنه

لاندې جدول د غوره بنسټتوابعو مشتق ښايي:

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		$x^r,\ r \neq 0$	$r\,x^{r-1}$
e^x	e^x		$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د مشتق يارابيليدنې کرښزوالی **Linearität der Ableitung**

مشتق کرښيز دی، دا په دې معناچې د مشتقوړ توابعو f او g لپاره باور لري

$$(rf)' = rf', \quad r \in \mathbb{R},$$
$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ضرب قانون **Produktregel**

د دوه مشتقوړ توابعو f او g د ضرب مشتق دی
$$(fg)' = f'g + fg'.$$

په ټوليزه توګه د ضرب $f = f_1 \cdots f_n$ لپاره باور لري

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \frac{f}{f_i}.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د تعريف څخه ترلی راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د پولینوم

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

مشتق د $x = 1, 2, 3$ په ځایونو کې ټاکل کیږي. دا چې د هر کرښیز ـضریب مشتق 1 دی، د ضرب له لارې یا قاعدې څخه لرو

$$p'(1) = (1-2)(1-3) = 2,$$
$$p'(2) = (2-1)(2-3) = -1,$$
$$p'(3) = (3-1)(3-2) = 2.$$

په ورته توګه سړی د

$$p(x) = (x-1)\cdots(x-n),$$

لپاره شایي، چې

$$p'(k) = (-1)^{n-k}\,(n-k)!\,(k-1)!$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی د $k = 1, \ldots, n$ لپاره.
(Autoren: Höllig/Hörner/Knesch)

د وېش قانون یا لار Quotientenregel

د دوه مشتقوړ توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو x کې د $g(x) \neq 0$ سره. په ځانګړي توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} .$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2x}{4+3x^2}$$

د راشنل توابعو مشتق دی

$$\frac{(1-2x)'(4+3x^2) - (1-2x)(4+3x^2)'}{(4+3x^2)^2}$$

$$= \frac{-2(4+3x^2) - (1-2x)(6x)}{(4+3x^2)^2}$$

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4+3x^2)^2}$$

په بدیلي ډول د ضرب قانون سره لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left((1-2x)\frac{1}{4+3x^2}\right)' =$$

$$= (-2)\frac{1}{4+3x^2} + (1-2x)\frac{-6x}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(4+3x^2)^2}.$$

(Autoren: Höllig/Kreitz

ځنځيرى لار يا - قانون **Kettenregel**

د توابعو د ځنځيروني

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

لپاره مشتق دى

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

.

د $f(y) = z,\ g(x) = y,\ h(x) = z$ سره سړى ليکي

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}$$

.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د تعريف څخه ترلى لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$
\begin{aligned}
(f(g(x)))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \, \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{\tilde{h}\to 0} \frac{f(g(x)+\tilde{h})) - f(g(x))}{\tilde{h}} \, \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(g(x))g'(x),
\end{aligned}
$$

چیرته چې $\tilde{h} = g(x+h) - g(x)$ دی.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ځنځیري قانو د روښنه کولو ته تعریفیږي:

$$h'(x) = \frac{d}{dy} \text{s} \, h(x) = \sin\big(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)}\big) \cdot x^2)\big) g'(x) \,.$$

د دننني مشتق $g'(x)$ شمېرلو ته د سره د ځنځیر قانون کارول کیږي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x) \,.$$

په بدیلي توګه کېدی شي د مشتق لیکدود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx}=\cos(y)\frac{1}{w}2x=\cos\left(\ln(1+x^2)\right)\frac{1}{1+x^2}(2x).$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

ایمپلیښیت مشتق نیول Implizites Differenzieren

که یو تابع $y=f(x)$ ایمپلیښیت وي، دا په دې معناچې یو برابرون په x او y کې ورکړ شوی، داسې چې دواړه خواوې د x پسې مشتق کیدی شي. دلته یواځې په کې $y=y(x)$ افادو باندې ځنځیري قانون استعمالیږي.

د بېلګې په توګه سړی د

$$E:\ x^2+3y^2=7$$

له لارې ورکړ شوې ایلیپسې یا هګۍ

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+3y^2\right)=2x+6yy'=\frac{d}{dx}7=0$$

همداسې

$$y'=-\frac{1}{3}\frac{x}{y}$$

.

لاس ته راوړي.

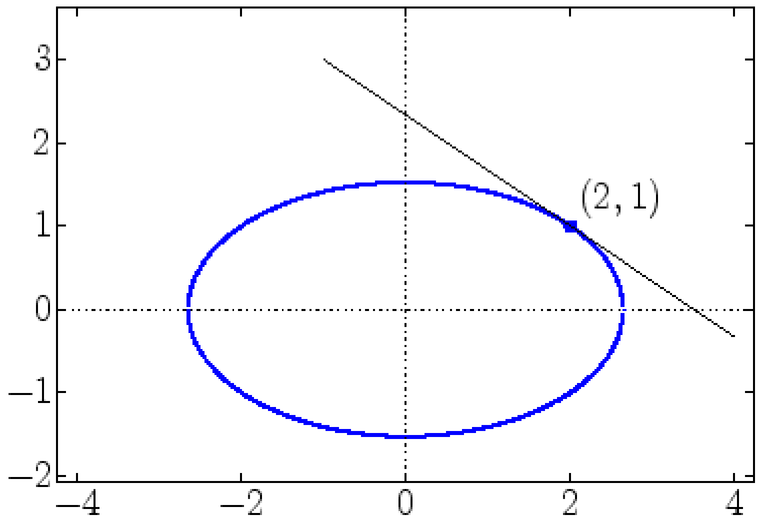
له دې سره کېدی شي د E په یوه ټکي د $y\neq 0$ سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي.

د بېلګې په توګه د $(2,1)$ لپاره په لاس راځي

$$y'=-\frac{1}{3}\frac{2}{1}=-\frac{2}{3}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه جګ مشفقونه شمېرل کيږي. د yy' لپاره دضرب قانون د استعمال سره دی

$$\frac{d}{dx}\left(2x + 6yy'\right) = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

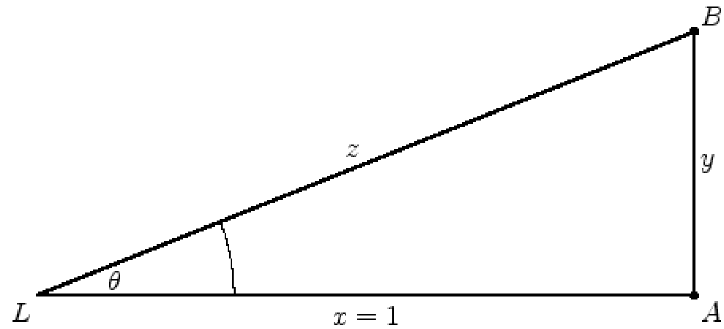
$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

.

کيدی شي په E باندې د يوه ټکي ځا په ځای کول او همدا د $y'(x)$ ارزښتونو پيژندلو له لارې څرګند ازښتونه ټاکي
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

په ټکي L کې يو د برېښنا يا رنا برج دی د يوه څرخېدونکي بېجلی يا ګروپ سره، چې د رنا وړانګه يې د ټکو A او B له لارې تللی $1\ \mathrm{km}$ کرښيز لرې دښته لويږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



وړانګه غورځونکی د یوه څرخون لپاره 2 ثانیو ته اړتیا لري، دا په دې معنا چې

$$\frac{d\theta}{dt} = \pi$$

. د رڼاوړانګې پوزیشن یا ځای په دښته کې دی

$$y(t) = x \tan\theta(t).$$

له دې سره د چټکتیا لپاره لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dt} = 1\pi \, \frac{1}{\cos^2(\theta)} \longrightarrow \infty \quad \text{für} \quad \theta \to \frac{\pi}{2},$$

دا په دې معنا چې سوری یې له رڼا چټک دی.

یو ټیکه معالعه لاندې راکوي. د دې وخت توپیر په پام کېنیولو له امله رڼا B ته د په

وخت $t = \frac{\theta}{\pi} + \frac{z}{c}$ ورسیږي، دکوم سره چې $c = 300000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ د رڼا چټکتیا ده،

له دې سره لرو

$$\frac{\theta'}{\pi} = 1 - \frac{z'}{c}.$$

وروسته د t پسې د $z^2 = y^2 + 1$ مشتق راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$zz' = yy', \qquad \frac{z'}{y'} = \frac{y}{z} = \sin(\theta).$$

د θ' او z' ايښوونه په

$$y' = \frac{\theta'}{\cos^2(\theta)}$$

کې بالاخره راکوي

$$y' = \frac{1}{\cos^2(\theta)} \left(\pi - \frac{\pi}{c} y' \sin\theta\right)$$

همداسې

$$y' = \frac{c \cdot 1\pi}{c\,\cos^2(\theta) + 1\pi\sin(\theta)}$$

.

د $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ لپاره اوس $y' \longrightarrow c$ هڅېږي، د اينشټاين د تيوري سره په هم غږۍ کې باور لري

t

$$y' \longrightarrow \infty \qquad \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} \to -\frac{c}{\pi},$$

für

$$\theta \approx 4.781 \in \left(\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

داپه دې معناچې د لپاره ببرته سړی يوو خورا لويه چټکتيا لاس ته راوړي. سوری له دې امله د رڼا ګړندی دی. دا د اينشټاين تيوري سره په تضاد کې نه دی، ځکه چې سړی يو ه پيښنه Phänomen, ګوري، نا دا خورنده ماده. د ،،ساده $300000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ ځپرونکي،، لپاره بو نا ښه احساس پاتيږي دا په هر صورت له څخه ورو خوزي.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لایبنیځ قاعده یا لارLeibniz-Regel

د یوه ضرب n -م مشتق دی

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

.

(Autoren: Höllig/Kopf)

د په حالت کې باور لري

$$(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg''$$

او د لپاره دی

$$(fg)''' = (f'g + fg')'' = (f''g + 2f'g' + fg'')' =$$

$$= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

ټولیزه ښوونه د اندکشن له لارې صورت په n نیسي د بینومیال ضریبونو لپاره د ریکورزین په پام کې نیولو سره.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د $x = 0$ په ځا کې دې د

$$f(x)\, g(x) = x^9 \, \cos(\sin x)$$

یولسم مشتق وشمېرل شي.

د دې لپاره لومړی له دې څخه کار اخلو، چې د $x = 0$ لپاره د مونوم f فقط 9 -م مشتق د صفر سره نابرابر دی:

$$f^{(9)}(0) = 9!\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لايبنيځ- فرمول له دې سره فقط په يوه ترم راکمه وي.

$$(fg)^{(11)}\,|_{x=0} = \binom{11}{2} f^{(9)}(0)\, g^{(2)}(0)\,.$$

د ځنځيري قانون سره لرو يا لاس ته اځي

$$g'(x) = -\sin(\sin x)\,\cos x$$

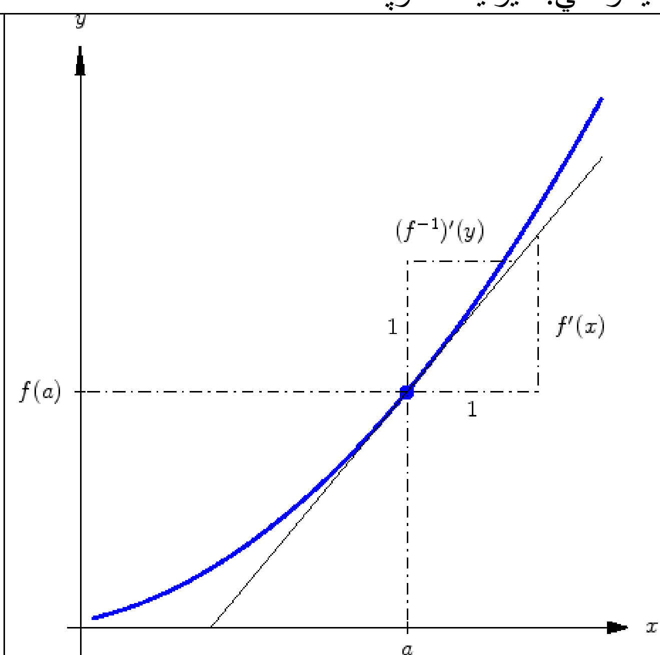
$$g''(x) = -\cos(\sin x)\cos^2 x + \sin(\sin x)\sin x,$$

يعني $g''(0) = -1$. له دې سره غوښتونی مشتق دا لاندې دی

$$\binom{11}{2} 9!\,(-1) = -\frac{1}{2}\,(11!)\,.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

که يو تابع $y = f(x)$ د $f'(x) \neq 0$ سره f ناپرېکېدونکي مشتقوړ وي، نو د x په يوه چاپېريال کې معکوس وړ دی ، او باور لري $(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1}$, همداسې $dx/dy = (dy/dx)^{-1}$.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه په ځېره کې چې ليدل کيږي، د f او f^{-1} ځګوالي معکوس دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

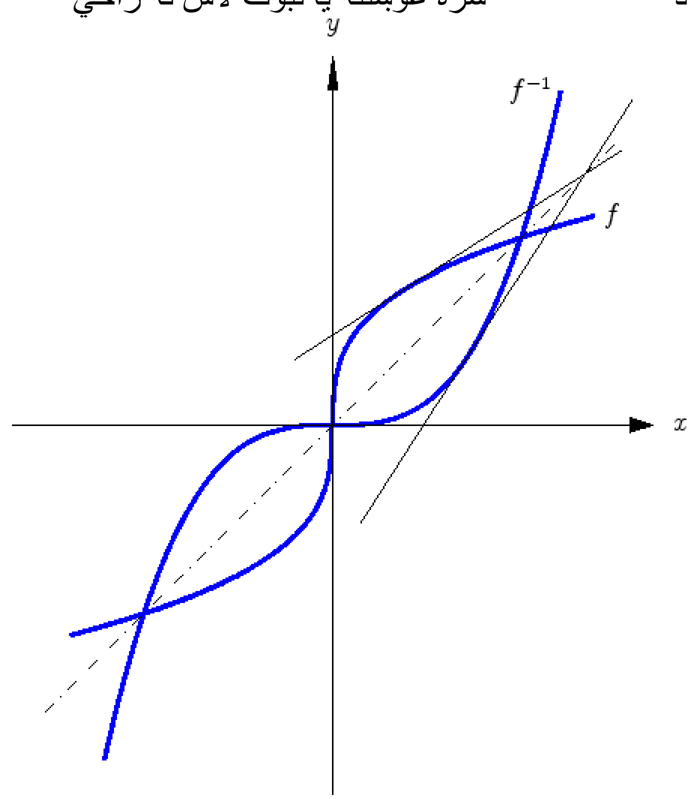
که کيږدو $g = f^{-1}$، نو لاس ته راوړو

$$x = g(f(x))$$

او د ځنځيري قانون سره مشتقونه

$$1 = g'(f(x))f'(x) \,.$$

د $y = f(x)$ سره غوښتنه يا ثبوت لاس ته راځي



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د f او f^{-1} جګوالی په اړونده د x او y په ځایونو کي سره معکوس دي، روښانيږي، که په پام کې ونیول شي، چې f او f^{-1} یو بل ته سیومتریک دي.

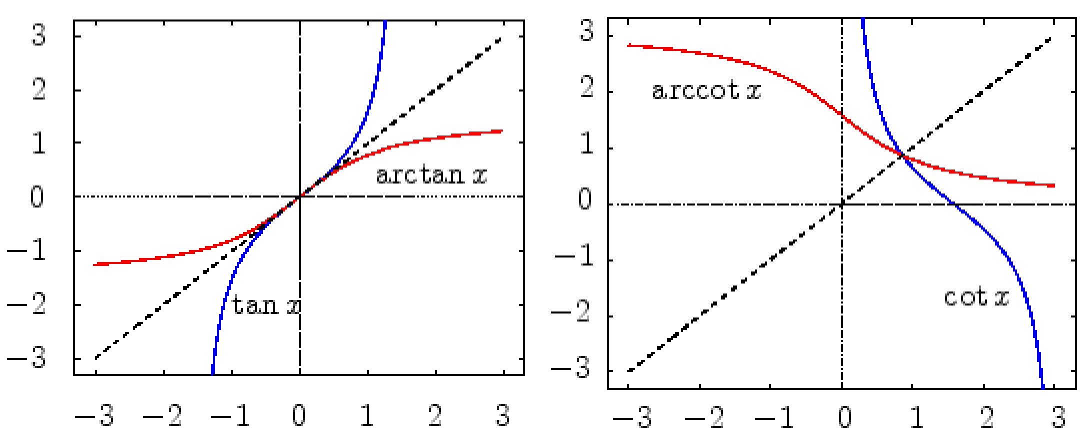
لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

دا چې د تانجنت تابع د $x = \arctan y$ معکوس تابع مشتق وټاکو، لومړی شمیرو

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

له دي سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dy}\arctan y = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} = \cos^2 x.$$



ښی اړخ اوس باید د y تابع په څېر ولیکل شي. د دې لپاره کټوتوالی کارول کیږي یا استعمالیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + y^2$$

او لاس ته راوړي

$$\frac{d}{dy}\operatorname{arctan} y = \frac{1}{1+y^2}.$$

په ورته توګه د کوتانجنت په څېټ- یا معکوس تابع ښایو.

$$\frac{d}{dy}\operatorname{arccot} y = -\frac{1}{1+y^2}.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

ع

$y = f(x) = x(1-x$

، انتروالونو

$(-\infty, 1/2$

او

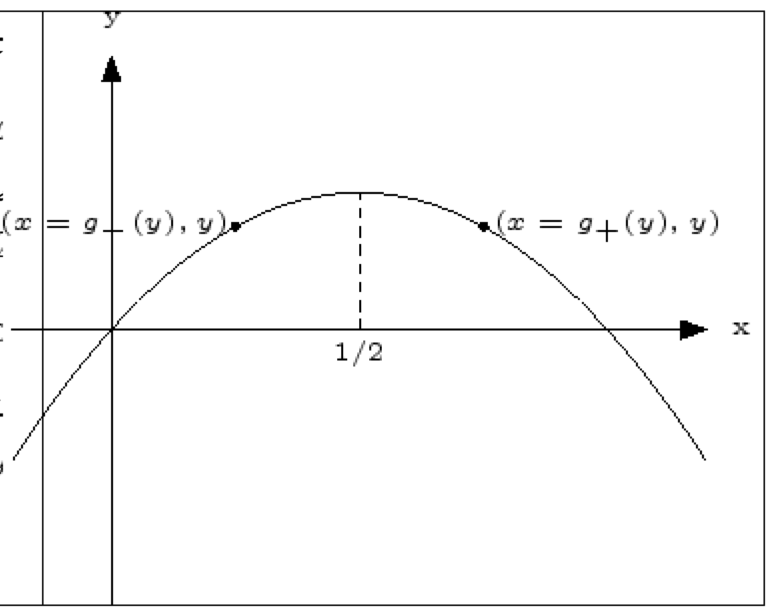
$[1/2, \infty$

هر وار په

ټ – یامعکوس تابع

$x = g(y$

لري.



(c) ketabton.com: The Digital Library

په دواړو حالتونو کې باور لري

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1-2x} \,.$$

بل يې مشتقنيول راکوي

$$g''(y) = \left(\frac{1}{1-2x}\right)' \frac{dx}{dy} = \frac{2}{(1-2x)^2}\frac{1}{1-2x} \,.$$

په ځانګړي ډول د $x=1, y=0$ لپاره لاس ته راځي

$$g'(0) = 1, \quad g''(0) = -2 \,.$$

مشتقونه شمېرلوړ دي، بې له دې چې معکوس تابع باید روښنه جوړه شي. دا ټيک هلته شونی دی، چې که سړی د y تابع د په څېر $g'(y)$ و ليکي. په دې بيلګه کې دا شوندی دی، ځکه x د y تابع په څېر ليکل کېدی شي:

$$g_{\pm}(y) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - y} \,.$$

پورته ارزښتونه داسې شمېرل کېدی شي، دکومو سره چې د هغوی د ارزښتجوړې $(1,0)$ اړونده څانګه باید وټاکل شي.
ليکونکي: هيوليک، کرايخ

لوګاريتمي مشتق يا - رابيليدنه **Logarithmische Ableitung**

دا فرمول

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|$$

کيدی شي د $g(x) > 0$ سره د $y = g(x)^{h(x)}$ بڼې توابعو مشتقيدو ته وکارول شي. سړی لاس ته راوړي

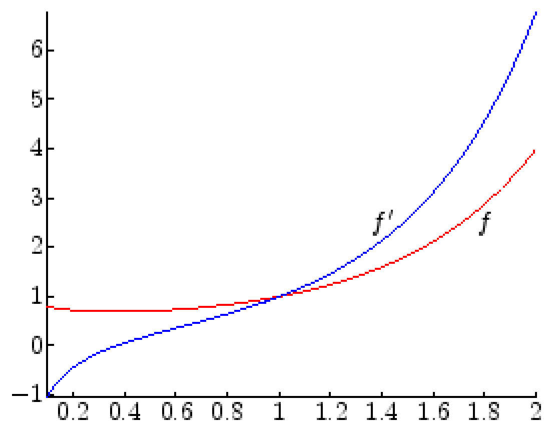
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx}\left(h(x) \ln g(x)\right) .$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د $x > 0$ سره تابع $f(x) = x^x$ لپاره مشتق دی

$$f'(x) = x^x \frac{d}{dx} \ln(x^x) = x^x \frac{d}{dx}(x \ln x) = x^x (\ln x + 1) .$$



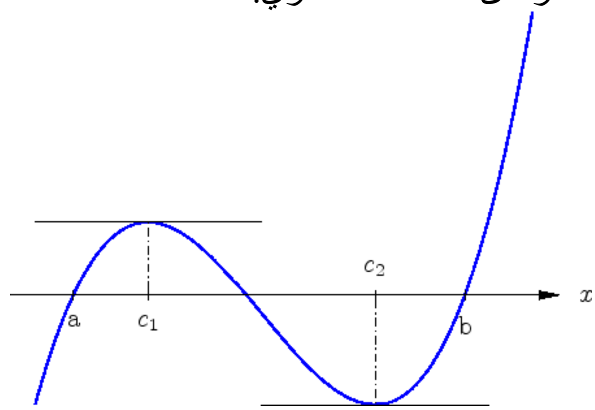
د $x \to 0$ لپاره $\ln f(x) = x \ln x$ د صفر په لور هڅیري، نو x^x د $e^0 = 1$ په لور. نو تابع په صفرځای کې ښي اړخیز ناپزېکېدونکې ده. د مشتق لپاره $\ln x + 1 \to -\infty$ دا حالت نه دی. د $x^x \to 1$ او f له امله د $x \to 0$ لپاره په صفر یو ولاړ یا عمود تانجنت لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د رولې جمله Satz von Rolle

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه ناپرېکیدونکي مشتقوړ تابع f مشتق د $f(a) = f(b) = 0$ سره لږ تر لږه یو $c \in (a,b)$ صفرځای لري.



تولیز باور لري: که یو تابع په یوه انتوال $[a,b]$ کې n صفرځایونه ولري (د دېرووار والي په شمول)، نو هلته kــم مشتق $\geq n-k$ صفرځایونه لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

دا چې f ناپرېکېدونکی دی، نو د افراطي ارزښت جملې له امله په $[a,b]$ کې ټکي c او d شتون لري دا لاندې باوري کوي

$$f(c) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$$

$$f(d) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که f ناثابت وي(د ثابت f حالت ساده دی)، نو $f(c) < f(d)$ باور لري. له دې امله لږ ترلږه د دې دواړو ټکو څخه یو یې په (a, b) کې پروت دی . دا چې f مشتقوړ دی باید د دې ځایز یا لوکال افراطیت لپاره مشتق ورک – یا صفر شي.

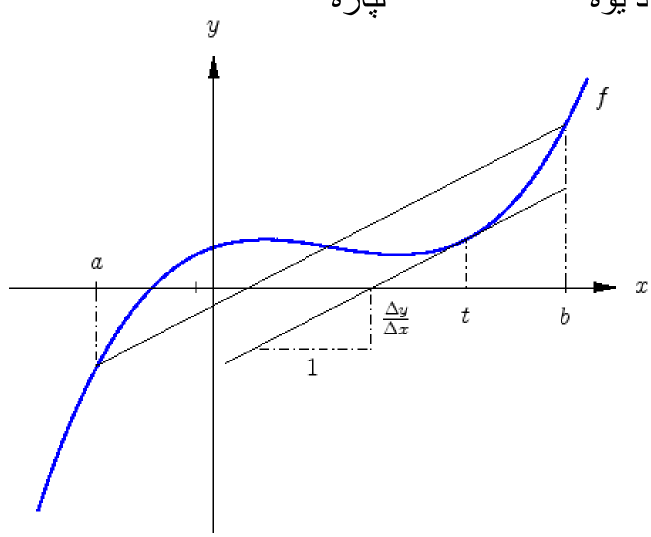
لیکونکي: اېپ، هیولیګ،

منځ ارزښت قضیه **Mittelwertsatz**

د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

$$f(b) - f(a) = f'(t)(b - a)$$

د یوه $t \in (a, b)$ لپاره



هندسي دا کتوتوالی په دې معنا دی، چې تانجنت په یوه ټکي کې غبرګ دی د له پای ټکو $(a, f(a))$ او $(b, f(b))$ تېرېدونکي توټه ونې یا وتر سره. داسي هم لیکو

$$\Delta y = f'(t)\Delta x$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د يوې تابع

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

لپاره $g(a) = g(b) = 0$ باور لري. دا چې f ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی، نو g هم ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی او د رولې د جملې پر بنسټ يو $t \in (a, b)$ شتون لري د لاندې سره

$$0 = g'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

همداسې

$$f(b) - f(a) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

ټوليزه (شوې) منځ ارزښت جمله **Verallgemeinerter Mittelwertsatz**

که f او g ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابع وي، نو $t \in (a, b)$ يو شتون لري د لاندې سره

$$(f(b) - f(a))g'(t) = (g(b) - g(a))f'(t)\,.$$

که برسېره پردې په (a, b) باندې $g'(x) \neq 0$ باور ولري، نو سړی کړی شي هم

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هم وليکي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

د تابع

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) - f(b)g(a) + f(a)g(b)$$

لپاره $h(a) = h(b) = 0$ باور لري. دا چې f او g ناپرېکېدونکي مشتقوړ دي،
نو h هم ناپرېکېدونکي مشتقوړ دی او د پورته د رولې د جملې سره سره سم يو $t \in (a,b)$ شتون لري د لاندې سره.

$$0 = h'(t) = (f(b) - f(a))g'(t) - (g(b) - g(a))f'(t)$$

bzw. همداسې

$$(f(b) - f(a))g'(t) = (g(b) - g(a))f'(t) .$$

که (a,b) په باندې $g'(x) \neq 0$ وي. نو د منځ ارزښت جملې سره سم $g(b) - g(a) \neq 0$ هم او سړی لاس ته راوړي.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} .$$

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

لانداو-سيمبول **Landau-Symbole**

سړی ليکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = O(g(x)) \qquad (\ x \to a)\ ,$$

که یو ثابت c شتون ولري، دسې چې $|f(x)| \le c|g(x)|$ وي a ته پوره نږدې x لپاره .

د $|f(x)|/|g(x)|$ د 0 په لور هځيږي، نو سړی په اړونده توګه ليکدود کاروي

$$f(x) = o(g(x))$$

.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د بينوم له جملې څخه لاس ته راځي

$$(1+x)^n = 1 + nx + O(x^2) \quad (x \to 0)$$

په ځتې – يا معکوس جوړونې د $1-nx$ سره دغزونې وروسته لاس ته راځي

$$\frac{1}{(1+x)^n} = \frac{1}{1+nx+O(x^2)}$$

$$= \frac{1-nx}{1-(nx)^2+O(x^2)} = \frac{1-nx}{1+O(x^2)}$$

$$= 1 - nx + O(x^2)\,.$$

د $x \to \infty$ لپاره دی

$$(1+x)^s = O(x^s)$$

د ټولو $s \in \mathbb{R}$ لپاره.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناپرېکیدنه او مشتقوړوالی کیدی شي د لاګرانژ فرمول په مرسته تعریف شي.

یو تابع f په $x = a$ کې ناپرېکېدونکی دی، که وي

$$f(x) - f(a) = o(1) \quad (x \to a)\,.$$

مشفقوړوالی د

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r$$

سره په یوه معنا دی د

$$r = o(h) \quad (|h| \to 0)\,.$$

سره.

د یوه دوه واره ناپرېکېدونکي مشتقوړتابع لپاره د تېلور –ودې څخه هغه تېره

$$r = O(h^2)$$

اټکل لاس ته راځي

لیکونکي:کلاوس، هیولیګ،

د لو، پیتال قاعده یا لار **Regel von l'Hospital**

که دوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابع f او g په a کې یوه ګډ صفرځای یا قطبځای ولري، نو باور لري

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

که ښی پوله ارزښت شتون ولري(په ورکړ شوي حالت کې په ناپای کې)
د ټولیزه منځ ارزښت جملې په بنسټ د x او a تر منځ یو t شتون لري د لاندې سره

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که سړی ، د يوه ناپای پوله ارزښت په موخه، $f'(t)/0$ يعني داسې $\pm\infty$ په معنا کړي.

له دې $x \to a$ سره هم a $t \to a$ ځي، نو سملاسي راکوي

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د لو، پيتال د جملې استعمال د يو څو بېلګو لړيو په بنسټ روښانه کيږي

د $0/0$ لپاره:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{3x^2-7x+4} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2}{6x-7} = -1$$

د $-\infty/\infty$ لپاره :

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} -x = 0$$

د ټولو $x \to \infty$ لپاره:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi/2-\arctan x}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = 1$$

دېواره استعمال:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2\cos(x) - x\sin(x)} = 0$$

په دې بېلګو کې دې پام وي، چې د شمېرلو پوله ارزښت شتون د لوپيتال قاعدې د استعمال پسې د منځته راغلې پوله ارزښت د شتون له لارې تضمين دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

کرښيز اپروکسميشن (ورنږدېوالی) **Lineare Approximation**

د يوه دوه واره ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + R$$

د لاندې پاتې غړي سره

$$R = \frac{1}{2}f''(t)(\Delta x)^2 = O((\Delta x)^2)$$

او د t د x او ترمنځ $x+\Delta x$ سره.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

تابع

$$g(y) := f(y) - f(x) - f'(x)(y-x) - \frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}(y-x)^2$$

د $y = x + \Delta x$ لپاره يو صفرځای لري او د $y = x$ لپاره يو ډبل يا دوه واره صفرځای لي. د رولې د جملې په تعقيب يو $y = x + \Delta x$ شتون لري د لاندې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$0 = g''(t)$	$= f''(t) - 2\frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}$

همداسې

$f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x$	$= \frac{1}{2} f''(t)(\Delta x)^2 \,.$

لیکونکي: اېپ، هیولیګ،

د ناټیکاوي وده **Fehlerfortpflanzung**

د یوه کچ – یا اندازونې ارزښت $\Delta x = \tilde{x} - x$ مطلق ناټیکاوی یا یو

نږدېوالی $x \approx \tilde{x}$ ښایي نو د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره

$$|\Delta y| = |f'(x)||\Delta x| + o(\Delta x)$$

باور لري د $\Delta y = f(\tilde{x}) - f(x)$ سره. په اړونده توګه د نسبي ناټیکاوی لپاره باور لري

$$\frac{|\Delta y|}{|y|} = \left(|f'(x)| \frac{|x|}{|y|} \right) \frac{|\Delta x|}{|x|} + o(\Delta x)$$

که $x, y \neq 0$ وي. په نوکانو کې افاده c_r د x په ځای کې د f د کندیشن عدد بلل کیږي.

د ترم $o(\Delta x)$ د پرېښږرلړ یعني له منځه وړلو له لارې کېدی شي د ناټیکاوي نږدیوالس اټکل شي. د دې سره کېدی شي د ټیک مشتق ارزښت په ځای مناسب بندیزونه هم وکارول شي:

$$|\Delta y| \le c_a |\Delta x| \,, \quad c_a \ge \max_{|t-x| \le |\Delta x|} |f'(t)| \,.$$

په ا ړونده توګه $c_r = c_a \frac{|x|}{|y|}$ د نسبي ناټیکاوي لپاره یو بندیز یا لنډ: بند دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

يو کونج $\vartheta \in (0,\pi/2)$ کېدی شي د کاتېتونو يا ولاو اړخونو د نسبت څخه په جګېدونکي درېګوډي کې داسې وټاکو :

$$\vartheta = \arctan(y/x)\,.$$

که y د کره ځای په ځای x سره کچ کړو، نو کېدی شي ضريب c_a د مطلق ناټيکاوي لپاره د

$$\left|\frac{d\vartheta}{dy}\right| = \left|\frac{1/x}{1+y^2/x^2}\right| = \left|\frac{x}{x^2+y^2}\right|$$

له لارې اټکل شي. افاده د $y = 0$ لپاره ماکسمال کيږي، او سړی لاس ته $c_a = \frac{1}{x}$ راوړي، دا په دې معنا چې

$$|\Delta\vartheta| \le |1/x|\ |\Delta y|\,.$$

لويې ناټيکياوی د کوچني x لپاره غزيږي. په ورته توګه د نسبي ناټيکاوي د قوی کېدني فکتور لپاره هم باور لري

$$c_r = \max_y \left|\frac{x}{x^2+y^2}\frac{y}{\vartheta}\right|\,.$$

که دا لاندې تخمين وکارول شي

$$|\vartheta| \ge |\sin\vartheta| = \left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\,,$$

،

نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c_r \leq \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1 \,.$$

نو نږدېوالي ډول باور لري

$$\frac{|\Delta \vartheta|}{|\vartheta|} \leq \frac{|\Delta y|}{|y|} \,,$$

دا په دې معنا چې نسبي فکتور نه غښتلی کیږي

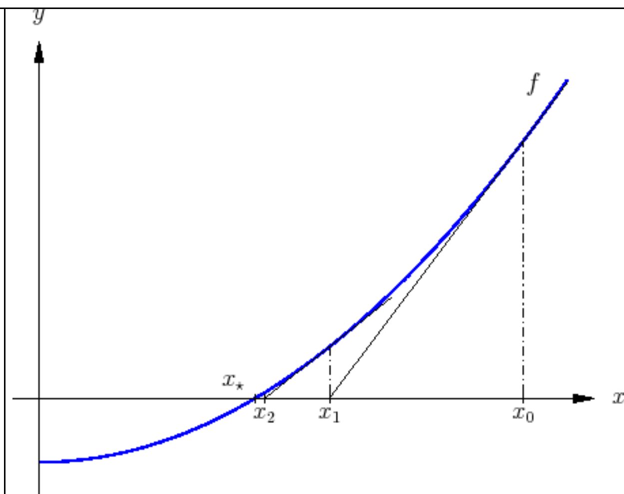
لیکونکي: کلاوس، هیولیک،

د نیوټن تلنلار یا - قانو Newton-Verfahren

د نیتن تلنلار سره کېدی شي د یوه تابع f صفرځای x_* نومریک وټاکل شي. د نږدېوني یا اپروکسمیشن پرلپسي $x_0, x_1 \dots$ د کرښیزوالي څخه کټل کیږي.

نږدېوالی $x_{\ell+1}$ د x -محور سره د تانجنت غوښتکی دی په ټکی $(x_\ell, f(x_\ell))$ کې :

$$x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell)$$



د یوه ساده صفرځای x_* ($f'(x_*) \neq 0$) لپاره د نیوټن – ایتریشن لوکال مربع پولې ته ځي، دا په دې معناچې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|x_{\ell+1} - x_*| \le c \ |x_\ell - x_*|^2$$

د پیلټکي x_0 لپاره د x_* په یوه پوره کوچني چاپریال کې.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د تیلور -نږدې ارزت Taylor-Approximation له لارې سره

$$0 = f(x_*) = f(x_\ell) + f'(x_\ell)(x_* - x_\ell) + r$$

لاس ته راوړي د پاتې غړي

$$r = \frac{1}{2} f''(t_\ell)(x_* - x_\ell)^2 \, ,$$

سره د یوه t_ℓ لپاره چې د x_* او x_ℓ ت رمنځ پرته ده. که د انترپولیشن قاعده کې کیږدو

$$f(x_\ell) = f'(x_\ell)(x_\ell - x_*) - r$$

،

نو لالاس ته راځي

$$x_{\ell+1} = x_* - r/f'(x_\ell) \, .$$

د $f'(x_\ell) \neq 0$ لپاره لرو

$$|x_{\ell+1} - x_*| = c_\ell |x_\ell - x_*|^2, \quad c_\ell = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(t_\ell)}{f'(x_\ell)} \right| \, .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $f'(x_*) \neq 0$ باور ولري، نو c_ℓ د ناپريکيدنبأه امله د x_ℓ لپاره په يوه د x_* چاپيريال $[x_* - \delta, x_* + \delta]$ کې مخدود دی:
$c_\ell \leq c\,.$

له ې سره د مربع يا څلوريز پولې ته تګ لاس ته راځي.
ليکونکې: اپپ، هيوليګ،

که په لاندې مساوات د نيټن قانون وکاروو

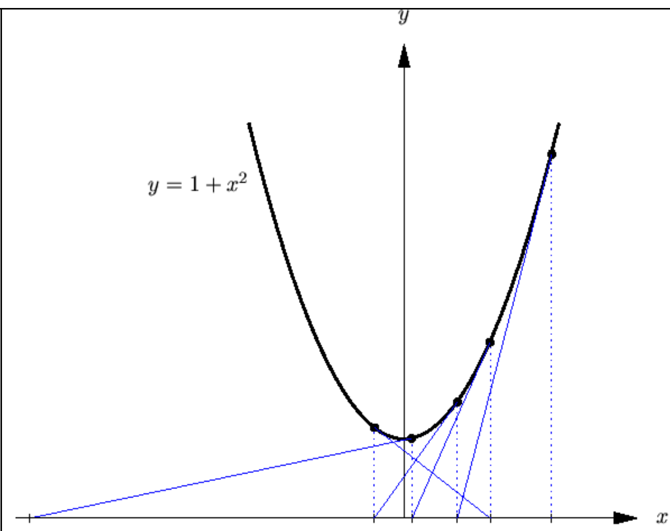
$$f(x) = x^2 + 1 = 0$$
،

نو اتريشن(پل په پل اصلي حل ته وردرېدې کېدنه) لاس ته راځي

$$x_{l+1} = \frac{1}{2}\left(x_l - \frac{1}{x_l}\right)\,.$$

f
په پام کې د ې وي. چې حقيقي حل نه لري، نيوټن تلنلار يا قانون په حقيقي پيل ارزښت x_0 سره پولې ته نه شي تللی.
(x_l)
په رښتيا کې پرلپسي يو ګډوډ حالت غوره کوي.

د کټمتوالي په مرسته



$$\cot(2\phi) = \frac{1}{2}\left(\cot\phi - \frac{1}{\cot\phi}\right)$$

پرلپسي (x_ℓ) کېدی شي اکسپليځيټ ورکړل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_0 = \cot\phi \implies x_\ell = \cot(2^\ell \phi).$$

ليکونکي: اېپ، هيوليگ،

ها له بابليانو ښخه کارول شوی ايترېشن يا پل پل مخ ته تلنه يا تکرار

$$x \longleftarrow (x + a/x)/2$$

د يوه حقيقی عدد a د ريښني شمېرلو ته په ټيکه مطالعه د $f(x) = x^2 - a$ لپاره د نيوتن تلنلار په حيږث ځان ښايي:

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

د $a = 2, x_0 = 1$ لپاره نږدې شمېرنه يا اپروکسيمېشن لاس ته راوړو.

1

1.5

1.41666666666666666666666666666666667

1.41421568627450980392156862745098039215 7

1.41421356237468991062629557889013491011 7

1.41421356237309504880168962350253024361 5

1.41421356237309504880168872420969807857 0

کونورګنځ فوق العاده ګړندی دی. د هر پل سره د د ټيکو ځايونو(ترې لاندې کرښه تېره ده) تعداد په نږدې توګه دوه واره کيږي. په دې بېلګه کې مربع پولې ته تلنه کېدی شي د ساده بڼې بدلون له لارې هم وښوول شي:

$$x_{\ell+1} - \sqrt{a} = (x_\ell + a/x_\ell)/2 - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_\ell}(x_\ell - \sqrt{a})^2.$$

د نيټن-تلنلار د هندسي روښانه ونې ښخه لرو، چې په نږدې توګه شمېرنه د $x_0 \neq 0$ لپاره پولې ته تلونکې ده.

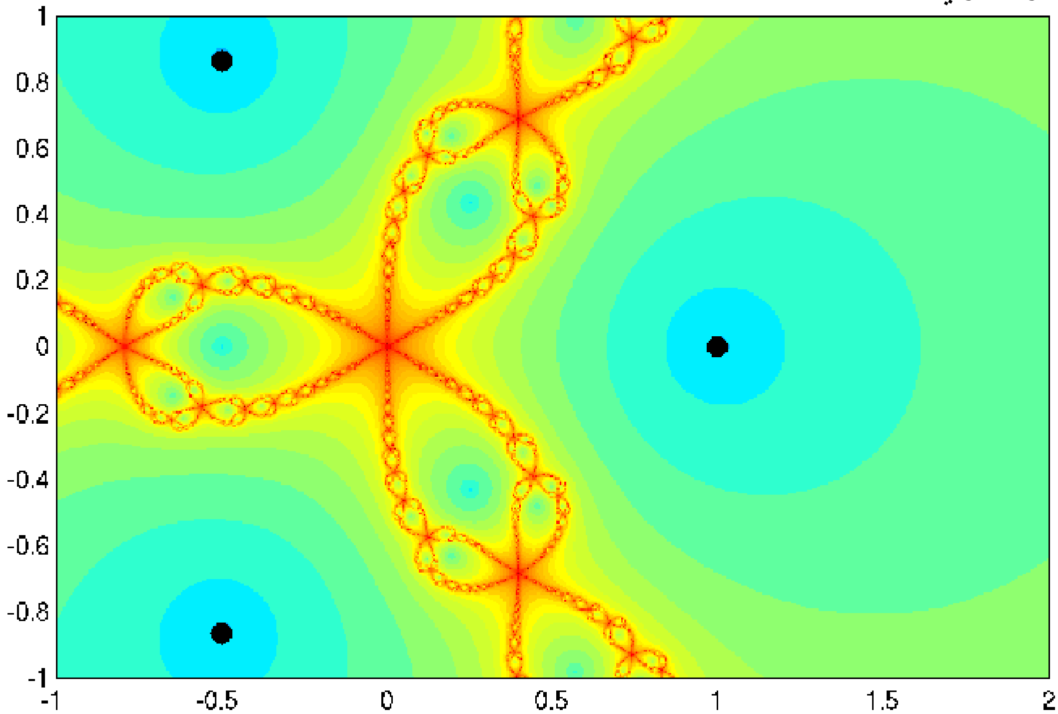
(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

لاندې ځېره د لاندې مساوات لپاره د کمپلکس نیوتن-اېترشن پولي ته تلنه ښايي

$$z^3 - 1 = 0$$

د حلونو $z = \exp(2\pi ik/3)$ سره. مختلف رنګونه د پولي ته تلني ورشو ګاني ښايي د همغه يا اړونده صفرځای لپاره. تیاره رنګه شوط ځایونه ګړندی پولي ته تلنه په ګوته کوي.



سرِی د پولي ته تلني ورشو په روښانه توګه fraktal مات خوي پيژني

د تیلور پولینوم**Taylor-Polynom**

د تیلور پولینوم Das Taylor-Polynom

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه تابع f انترپوليرى (ارزښت چې د دوه ټکو ترمنځ پروت وي) مشتق په ټکي a
$p_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)\,,\ k = 0, \dots, n$
تر ت نظم n پورې، دا په دې معنا چې .

که f يو $(n+1)$-واره ناپرېکېدونکى مشتقوړ وي، نو باور لري

$$f(x) = p_n(x) + R, \quad R = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

د يوه t لپاره چې د a او x ترمنځ وي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

سيده پسې شميرنه د f او p_n مشتق يو بل سره توافق يا يوغږيزوالى ښايي. د پاتې غړي R د پوره کيدو يا تکميل ته سرى د تيلور پولينوم په يوه بل ترم غزوي:
$q(y) = p_n(y) + c(y-a)^{n+1}$.

ثابته داسې ټاکل شوې، چې $q(x) = f(x)$ وي. پسې $q - f$ يو صفرځاى لري د $y = x$ کې، په ټوليزه $n+1$ د ډېروالي سره په $y = a$ کې او يو بل صفرځاى په $n+2$ نو صفرځايونه . درولې جملې پسې بايد $(n+1)$-م مشتق بايد لږ تر لږه يو صفرځاى t ولري:

$$0 = q^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(t) = c(n+1)! - f^{(n+1)}(t)\,.$$

له

$$R = f(x) - p_n(x) = q(x) - p_n(x) = c(x-a)^{n+1}$$

څخه د پاتې غړي غوښتونې ښه راکوي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساين تابع $f(x) = \sin x$ مشتقونه دي

$$f' = \cos x, \quad f'' = -\sin x, \quad f''' = -\cos x, \quad f^4 = f = \sin x, \ldots .$$

د ارزښتونو

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^4(0) = f = 0, \ldots .$$

سره لومړي د تيلور پولينومونه د ساين تابع دي.

$$p_1(x) = x$$

$$p_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$p_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$p_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

په ورته توګه د کوساين تابع لپاره هم باور لري

$$p_0(x) = 1$$

$$p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$p_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$p_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

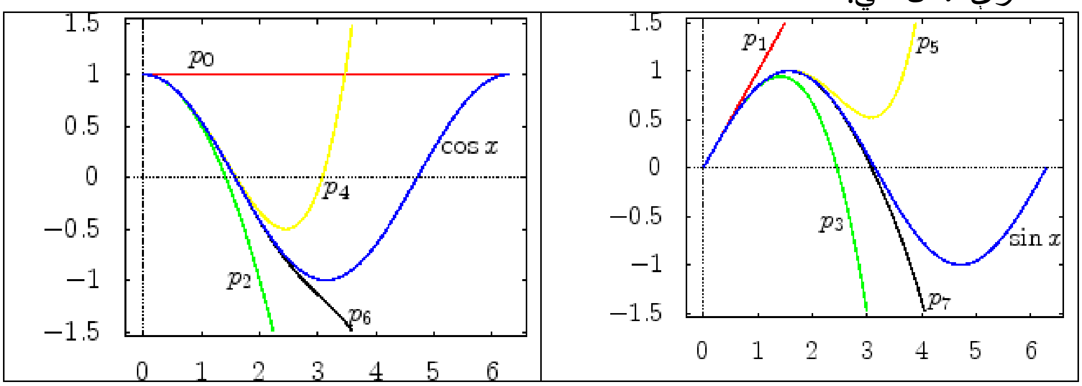
نږدې شمېرنه يا اپروکسيمېشن د ډېر کوچني x لپاره خورا دقيق دی. د بېلګې په توګه کېدی شي د نږدېوني ناتيکاوی

$$\sin 0.1 \approx p_4(0.1) = 0.09983...$$

د

$$|R| = \frac{|\cos t|}{5\,!}\,0.1^5 \leq \frac{1}{12000000} \leq 10^{-7}$$

له لارې اټکل شي.



لکه د ښېرې څخه چې ليدل کيږي، نږدې شمېرنه د لوی x لپاره لومړی د ځکو درجو سره پوره ټيک يا دقيق وي. په جدول کې د څو د x - ارزښت لپاره ناتيکاوي ورکړل شوي دي.

x	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/5$	$\pi/6$
$p_1(x)$	3.1416	0.5708	0.1812	0.0783	0.0405	0.0236
$p_3(x)$	2.0261	0.0752	0.0102	0.0025	0.0008	0.0003
$p_5(x)$	0.5240	0.0045	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
$p_7(x)$	0.0752	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

(c) ketabton.com: The Digital Library

$p_0(x)$	2.0000	1.0000	0.5000	0.2929	0.1910	0.1340
$p_2(x)$	2.9348	0.2337	0.0483	0.0155	0.0064	0.0031
$p_4(x)$	1.1239	0.0200	0.0018	0.0003	0.0001	0.0000
$p_6(x)$	0.2114	0.0009	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

حقيقي د تيلور لړۍ **Reelle Taylor-Reihe**

په يوه ټکي x_0 کې د يوه ناپای ډېرواره مشتقوړ تابع f د تيلور لړۍ د يوې په توان لړۍ يوه وده ده:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n, \quad a_n=\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(x_0)\,.$$

د $x\in\mathbb{R}$ لپاره لړۍ او همداسې ټول مشتقونه په يوه انتروال (x_0-r,x_0+r) کې مطلق پولې ته تلونکي دي او د $|x-x_0|>r$ لپاره پولې ته نه تلونکي دي. د $|x-x_0|=r$ لپاره بې له نورو څېړنو د لړېی پولې ته تلنې په هکله ويناوي ناشونې دي.

د ودې ټکي د واټن لپاره بند(بنديز) r د پولې ته تلنې يا کونورګنت –وړانګې په نامه ياديږي او د فرمول

$$r=\left(\varlimsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}\right)^{-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره شمېرل کيږي. له دې سره ارزښتونه $r = 0$ او $r = \infty$ شوني دي. په دې حالت کې د کونورګنت انتروال یا تش دی او یا ټول $\mathbb{R}$ دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د ریښي قضیې په بنسټ دی

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right|} = \frac{1}{r}\,|x-a|\,.$$

په توګه د $|x-a| < r$ لپاره د ټېلرو-اړې یوې ته ځي او د $|x-a| > r$ لپاره پولې ته نه ځي. د $|x-a| = r$ لپاره نورې څېړنې اړیینې دي یا نورو څېړنو ته اړتیا ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

تابع

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

په 0کې برابرډوله ناپرېکېدونکې ده. دا پسې دپوره ایندکشن له لارې ښوول کېدی شي، چې ټول مشتقونه د

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(1/x)}{\exp((1/x)^2)}$$

بڼې دي، د یوه مناسب پولینوم p_n سره. دا چې د $x \to 0$ (همداسې د $1/|x| \to \infty$) لپاره اکسپوننشل تابع نسبت یوه پولینوم ته په قوت یا قوي جګیږي، نو ټول پولینومونه په $x = 0$ ځای کې ارزښت 0لري. اړونده تیلور-لړی نو له دې امله صفر لړۍ ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0x^k .$$

داچې د $f(x) \neq 0$ $x \neq 0$ لپاره دی، نو د تیلور-لړۍ د f سره فقط د $x = 0$ لپاره یو بل سره برابر یا یو غبریز دي، دا په دې معنا چې د پولې ته تلنې وړانګه r 0 ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

اکسپوننشل تابع

$$f(x) = \exp(x)$$

لاندې مشتق لري

$$f^{(n)}(x) = \exp(x) .$$

که د $x = 0$ په ځای کې وارزول شي ، ترې لاس ته راځي

$$f^{(n)}(0) = 1 .$$

د دې په تعقیب د اکسپوننشل تابع د تیلور-لړۍ لاندې بڼه لري

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} .$$

دا چې

$$\lim_{k\to\infty} 1/\sqrt[k]{k!} = 0 ,$$

،

نو $r = \infty$ دی، دا په دې معنا چې د تیلورر-لړۍ په ټول $\mathbb{R}$ پولې ته ځي یا کونورګنت ده.
لیکونکي: اپپ، هیولیک،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې لپاره تابع

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

په$a = 4$ ودیز کیږي.

ددې لپاره لومړی مشتقونه جوړیږي:

$f'(x)$	=	$-\frac{1}{2}\, x^{-3/2}$
$f''(x)$	=	$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\, x^{-5/2}$
.	.	.
.	.	.
.	.	
$f^{n}(x)$	=	$(-1)^n\, 2^{-n}\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)\cdot x^{-\frac{2n+1}{2}}$.

په ودیزېنې ټکي د قیمت ایښووونې یا -وضع کونې سره سړی د تیلور-ضریبوننه لاس ته راوړي

$$c_n = \frac{f^{(n)}(4)}{n!} = (-1)^n\,\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\,2^{-2n-1}\,.$$

د لړۍ لومړي درې ترمونه دي

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\,(x-4) + \frac{3}{128}\,(x-4)^2 + \cdots\,.$$

د دې لپاره چې د ضریبونو وړانګه r وټاکو، په پام کې نیسو

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{2n}\,2^{-2n} \le c_n \le \frac{1}{2}\,2^{-2n}\,.$$

له دې سره دی

$$\frac{1}{4}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{1/(4n)} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{c_n} \le \frac{1}{4}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{1/2}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

دا چي دی لاس ته

$$r = \frac{1}{(1/4)} = 4$$

راځي .

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د اويلر فرمول

$$\exp(\mathrm{i}t) = \cos t + \mathrm{i}\sin t$$

کيدی شي د تيلور-وديزيېنې په مرسته

$$\cos t = \quad 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \dots$$

$$\sin t = \quad t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \dots$$

د کوساين - او ساين توابع منځ ته راوړل شي. له

$$-\frac{t^2}{2} = \frac{(\mathrm{i}t)^2}{2}, \quad -\frac{t^3}{6} = \frac{\mathrm{i}^2 t^3}{3!}, \quad +\frac{t^4}{24} = \frac{(\mathrm{i}t)^4}{4!}, \quad +\frac{t^5}{120} = \frac{\mathrm{i}^4 t^5}{5!}, \dots$$

څخه لاس ته راځي

$$\cos t = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^2 k}{(2k)!}$$

$$\mathrm{i}\sin t = \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

او د زياتون يا جمعې له لارې د تيلور –وديزيېنې له لارې د اويلر فرمول لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\exp(\mathrm{i}t) = 1 + \mathrm{i}t - \frac{t^2}{2!} - \mathrm{i}\frac{t^3}{3!} \cdots$$
$$= 1 - \frac{t^2}{2!} \pm \cdots + \mathrm{i}(t - \frac{t^3}{3!} \pm \cdots)$$
$$= \cos t + \mathrm{i} \sin t \,.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

د لوګاريتم تابع

$$f(x) = \ln x$$

لاندې مشتق لري

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3} \,.$$

په دې پسې مرربعيز د تيلور –پولينوم په ټکي $a = 1$ کې دی

$$p(x) = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 \,.$$

باقی – يا پاتې غړی دابنه لري

$$r(x) = f(x) - p(x) = \frac{1}{3!}\, f'''(\xi)\,(x-1)^3$$
$$= \frac{1}{3\,\xi^3}(x-1)^3$$

د ξ سره، چې د x او 1 ترمنځ پروت دی. ناټيکاوی د ممکن کوچني ξ لپاره خورا غټ دی. سړی اټکل لاس ته راوړي

$$|r(x)| \le \frac{1}{3} \left| \frac{x-1}{\min(1,x)} \right|^3 \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x \in [0.75, 1.25]$ لپاره ناتیکاوی دی

$$\leq \frac{1}{3}\left|\frac{1/4}{3/4}\right|^3 = \frac{1}{81}.$$

لیکونکي: هیولیګ،

بینومیال لړی Binomialreihe

تابع

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

د $\alpha \in \mathbb{R}$ سره یوه تیلور-لړی لري

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

د $|x| < 1$ لپاره ، د کوم سره چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

تولیز شوی بینوم ضریب دی

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

دا ترلي لاس ته راځي، چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لړۍ

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

د وېش قضيې

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{\binom{\alpha}{k+1}x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k}x^k}\right|=|x|\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right|=|x|<1.$$

له مخې پولې ته ځي
ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

د تيلور ـــلړۍ مشتق او انتيګرال
Differentiation und Integration von Taylor-Reihen

د يوې د تيلور- لړۍ

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k\,,\quad c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,,$$

کېدی شي غړي ډوله يا يې غړي په غړي مشتق او انتيګرال ونيول شي:

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}(x-a)^k$$

$$\int f(x)dx=c+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{k-1}}{k}(x-a)^k.$$

په دواړو عمليو کې د پولې ته تلنې وړانګه بې تغيره پاتېږي.

ليکونکي: هيوليګ، کرايخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بينوملړۍ

$$(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + \cdots,$$

ځخه د $t = -x^2$ او $\alpha = -1/2$ سره لاس ته راځي

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} x^{2k}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \cdots.$$

د انتيګرال له لارې او همداسي د

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arcsin(0) = 0$$

په پام کي نيولو سره د غړي په غړي انتيګرال له لارې داوده لاس ته راځي

$$\mathrm{arcs}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د انتيګرا

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

نږدې ډوله شميرنه د تيلور-اکسپوننشل تابع باندې لاس ته راولي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} .$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)} .$$

$$\int_0^1 e^{-t^2}\, dt$$

د نومريکي نږدېونې پخ حيث د لپاره لاندې ارزښتونه لاس ته راځي

k=0: 1
k=1: 0.66666666666667
k=2: 0.76666666666667
k=3: 0.74285714285714
k=4: 0.74748677248677
k=5: 0.74672919672920
k=6: 0.74683603433603
k=7: 0.74682280682281
k=8: 0.74682426573971
k=9: 0.74682412070118
(Autoren: App/Höllig)

د تيلور-لړۍ ضرب Multiplikation von Taylor-Reihen

د تيلور – لړۍ کېدی شي غړي په غړي سره ضرب شي:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_n(x-a)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-a)^k\right) = \sum_{k=9}^{\infty} c_k(x-a)^k$$

د لاندې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} f_{k-j} b_j \,.$$

د ضرب د کونورګنت وړانګه د دواړو ضریبونو د پولې ته تلنې وړانګې د مینیموم سره برابره ده.
لیکونکي: ، هیولیک، کرایخ

د لاندې تابع د تیلور – لړۍ شمیرنې ته
Zur Berechnung der Taylor-Reihe der Funktion

$$f(t) = e^{-t}\cos(\omega t)$$

سړی کړی شي د اکسپوننشل تابع د تیلور – لړۍ او د کوساین –تابع وکاروي

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} \pm \cdots$$

$$\cos = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} \pm \cdots \,.$$

د ضرب څخه د لومړي ترم لپاره لاس ته راځي

$$e^{-t}\cos(\omega t) = 1 - t + \frac{1-\omega^2}{2!}t^2 + \left(\frac{\omega^2}{2!} - \frac{1}{3!}\right)t^3 + \cdots \,.$$

$$e^{-t}\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(e^{(\mathrm{i}\omega - 1)t}\right)$$

بدیلي کېدی شي هم و کارول شي:

$$e^{-t}\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^k t^k}{k!}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \mathrm{Re}\left(1 + (\mathrm{i}\omega - 1)t + \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^2}{2!}t^2 + \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^3}{3!}t^3 \cdots\right)$$

$$= 1 - t + \frac{1-\omega^2}{2!}t^2 + \frac{3\omega^2 - 1}{3!}t^3 + \cdots .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د تيلور-لړۍ وېش Division von Taylor-Reihen

د دوه تيلور – لړيو وېش

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x-a)^k \Big/ \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x-a)^k, \qquad g_0 \neq 0,$$

د ضريبونو پرتلې له لارې کېدی شي له کټوټوالي

$$(q_0 + q_1 u + \ldots)(g_0 + g_1 u + \ldots) = f_0 + f_1 u + \ldots\ , \quad u = x - a\,,$$

څخه وټاکل شي:

$$q_0 g_0 = f_0 \quad \longrightarrow \quad q_0$$

$$q_1 g_0 + q_0 g_1 = f_1 \quad \longrightarrow \quad q_1$$

$$\vdots$$

$$q_n = (f_n - q_{n-1}g_1 - \ldots - q_0 g_n)/g_0 \quad \longrightarrow \quad q_n\,.$$

ليکونکي: هيوليک، اپريښ

د $q(x) = \tan x$ تر 5نظم پورې وديزونې لپاره ړدو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(q_1x+q_3x^3+q_5x^5+\ldots)\underbrace{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\ldots\right)}_{\cos x}=\underbrace{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\ldots}_{\sin x}.$$

له دې سره همدا اوس وکارول شو، چې تانجنت $\tan x$ ناجوړه(طاق) دی، دا په دې معنا چې $q_0=q_2=\ldots=0$.

د ضریبونوو له پرتلې څخه لرو:

$$\begin{aligned} q_1x &= x \longrightarrow q_1=1,\\ \left(-\frac{q_1}{2}+q_3\right)x^3 &= -\frac{1}{6}x^3 \longrightarrow q_3=\frac{1}{3},\\ \left(\frac{q_1}{24}-\frac{q_3}{2}+q_5\right)x^5 &= \frac{1}{120}x^5 \longrightarrow q_5=\frac{2}{15}.\end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیګ، اپریښ

د راشنل توابعو تیلور-ودیزېنه
Taylor-Entwicklung rationaler Funktionen

د یوه راشنل تابع $r(z)$ د تیلور –ودیزیېنه په ټکي $z=a$ کې کېدی شي د کمپلکس پارشل جمعې په مرسته وټاکل شي، دا په دې معناچې r د یوه پولینوم او د بنسټ تابع

$$\frac{1}{(u-z)^j}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{j-1}\frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+j}}.$$

جمعه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوګونو زياتونونو(د جمعي اعضاوې) د کونورګنت وړانګې د وديزېنې ټکي د قطب نقطو د واټن $|u-a|$ سره برابره ده
ليکونکي: کلاوس هيوليک

وديزېنه يا وده د بينوم لړۍ يو ځانګړی حالت دی:

$$\frac{1}{(u-z)^j}=\frac{1}{((u-a)-(z-a))^j}=(u-a)^{-j}(1+x)^{-j},$$

$$, \quad x=-\frac{z-a}{u-a}.$$

بديلي کېدی شي په ټکي $z=a$ کې مشتق وشمېرل شي او د n-م د تيلور ضريبونو لپاره لاس ته راوړو

$$\frac{j\cdot(j+1)\cdots(j+n-1)}{n!}=\binom{n+j-1}{n}(u-a)^{-j-n}.$$

د

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n+j-1}{j-1}^{1/n}=1$$

له امله د کونورګنت يا پولې ته تلنې وړانګه $|u-a|$ ده .
ليکونکي: کلاوس هيوليک

د ښووني لپاره د

$$r(z)=\frac{1}{z^2-z}=-\frac{1}{z}-\frac{1}{1-z}$$

وده په $a=3$ وتاکل شي. د لومړي ترم لپاره د ټوليز فرمول څخه د $u=0$ او $j=1$ سره لاندې د تيلور n-م ضريب لاس ته راوړي

$$\binom{n}{0}(-3)^{-(n+1)},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}((z-3)/(-3))^n, \quad |z-3| < 3\,.$$

دا ترې لاس ته راغلې هندسي لړۍ کېدی شي سیده هم لاس ته اروړل شي. دا د دویم ترم په بنسټ ښوول کیږی. سړی لیکي

$$-\frac{1}{1-3-(z-3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(z-3)/(-2)}$$

او لاس ته راوړي

$$-\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}((z-3)/(-2))^n, \quad |z-3| < 2\,.$$

د دواړو لړیو زیاتون یا جمعه دا وده راکوي

$$\frac{1}{z^2-z} = \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)(z-3) + O((z-3)^2)\,.$$

لیکونکي: کلاوس هیولیګ

د یوې تیلور – لړۍ معکوس ارزښت تکرار شمیرنه
Iterative Berechnung des Kehrwerts einer Taylor-Reihe

که $g(0) \neq 0$ وي، نو کېدی شي د ایترېشن له لارې

$$f \longleftarrow 2f - gf^2$$

له $f(x) = 1/g(0)$ څخه په وتو د معکوس ارزښت $f = 1/g$ وده وشمېرل شي.
د لته په هر پل کې د ټیکو ترمونو تعداد یا ګڼ،ن دوه برابره کیږي.

دا متود د نیوتن تلنلار د $\frac{1}{f} - g = 0$ د یوه حل f ټاکل په ګوته کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: کلاوس هیولیګ، اپپریښ

د پولې ته تلنې وینا کیدی شي د کېوتوالي

$$f_{\text{neu}} - \frac{1}{g} = -g\left(f_{\text{alt}} - \frac{1}{g}\right)^2$$

حخه ولوستل شي، څکه چې له $f_{\text{alt}} - 1/g = O(x^n)$ لاس ته

$$f_{\text{neu}} - 1/g = O(x^{2n})$$

راځي .

لیکونکي: کلاوس هیولیګ، اپپریښ

د

$$f(x) = 1/g(x) = 1/\cos x$$

تیلور ودیزیښه کېدی شي لکه چې په تعقیب یې پل په پل وشمېرل شي. له

$$g = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)\,, \quad f_0 = 1$$

څخه په وته لاس ته راځي

$$\begin{aligned} f_1 &= 2\cdot 1 - g\cdot 1^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + O(x^6) \\ f_2 &= 2(1+\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4) - g\,(1+\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4)^2 + O(x^6) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6)\,. \end{aligned}$$

سملاسې له دوه پلونو (قدمونو) وروسته لومړي شپږ ترمونه ټیک دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$ سره له ضرب پسې د تانجنت لړۍ راکوي

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

لیکونکي: کلاوس هیولیک، اپپریبش

د معکوس تابع د تیولور ودیزیینه
Taylor-Entwicklung der Umkehrfunktion

د یوه تابع f د معکوس تابع $g(x)$ د تیلور ضریبونه د $f'(a) \neq 0$ سره په ټکي $b = f(a)$ کې کېدی شي د $g(f(x)) = x$ له مشفونې و ټاکل شي :

$$g(b) = a$$

$$g'(b)\, f'(a) = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(b)$$

$$g''(b)\, f'(a)^2 + g'(b)\, f''(a) = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(b)$$

$$\vdots$$

دا منځ ته راغلې مساوات کېدی شي تل پسېsukzessive د مشتقونو $g'(b),\, g''(b), \dots$ پسې وشمېرل شي.

لیکونکي: کلاوس هیولیک، اپپریبش

د $f(x) = \sin x$, $g(x) = \arcsin x$ او $a = 0$ لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g(0) = 0$$

$$g'(0)\cos 0 = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(0) = 1$$

$$g''(0)\cos^2 0 - g'(0)\sin 0 = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(0) = 0$$

$$'(0)\cos^3 0 - g''(0)(-\sin 0) + g''(0)\cos 0(-\sin 0) + g'(0)(-\cos 0) = 0 \quad \longrightarrow \quad g'''(0) = 1$$

$$\vdots$$

$$\arcsin x = x + \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

دا په دې معنا چې . که په پام کې ونیول شي،
جې د یوه ناجوړه یا طاق تابع په څېر – یا معکوس تابع ناجوړه ده، نو سملاسي یې
ودیزیېنه تر پنځم ترم پورې ټیک ده.
لیکونکي: کلاوس هیولیگ، اپیریش

د تیلور ځانګړې لړۍ Spezielle Taylor-Reihen

$$(1 = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots \quad -1 < x \le 1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{t} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{ar} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots \quad |x| < 1$$

$$\mathrm{arcc} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots\right) \quad |x| < 1$$

$$\mathrm{arctar} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots \quad |x| < 1$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د پاد نږدې ارزښت شمېرنه **Pade-Approximation**

د يوه تابع $f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots$ د (m,n) - پاد-نږدې ارزښت شمېرنه يو راشنل تابع دی د صورت – يا ماتباندې درجې m او مخرج يا ماتلانې درجې n سره، چې د f سره د $z \to 0$ لپاره تر جګو درجو ترمونو همغږيز کيږي يا سره برابريږي:

$$\frac{p(z)}{q(z)} - f(z) = O(z^{m+n+1}).$$

پولينومونه $p(z) = a_0 + \cdots + a_m z^m$ او $q(z) = b_0 + \cdots + b_n z^n$ کېدی شي د ضريبونو د پرتلې له لارې وټاکل شي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د q سره د ضرب وروسته لاس ته راوړو

$$(a_0 + a_1 z + \cdots) - (c_0 + c_1 z + \cdots)(b_0 + b_1 z + \cdots) = c z^{m+n+1} + \cdots,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او لاس ته راځي، چې د $k \le m+n$, z^k ضريبونه باید ورک شي:

$$\begin{aligned} k=0: &\quad a_0 - c_0 b_0 = 0 \\ k=1: &\quad a_1 - c_0 b_1 - c_1 b_0 = 0 \\ &\quad \cdots . \end{aligned}$$

دا کښته – یا لامدې ټاکل شوی هوموجېن کربښيز مساوات سيستم ($m+n+1$ مساوات د $m+n+2$ متحولو یا ناټاکلو سره) راکوي، چې تل حل لري.
دا چې f په صفر کې قطب نه لري، راکوي $b_0 = 0$ ، چې $a_0 = 0$ راکوي. له دې امله کېدی شي د ممکنه لنډونو وروسته د q لومړي له صفر توبېرېدونکي ضريبونه د 1 سره برابر ايښول کېښولی شي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د اکسپوننشل توابعو لپاره د (m,n) -پاد-نږدې ارزښت شمېرنې ته مساوات سيستم په لاندې ډول دی.

$$0 = a_0 - b_0$$

$$0 = a_1 - b_1 - b_0$$

$$\cdots$$

$$0 = a_m - b_m - \cdots - \frac{1}{m!} b_0$$

$$0 = b_{m+1} - \cdots - \frac{1}{(m+1)!} b_0$$

$$\cdots$$

$$0 = \frac{1}{m!} b_n - \cdots - \frac{1}{(m+n)!} b_0 .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

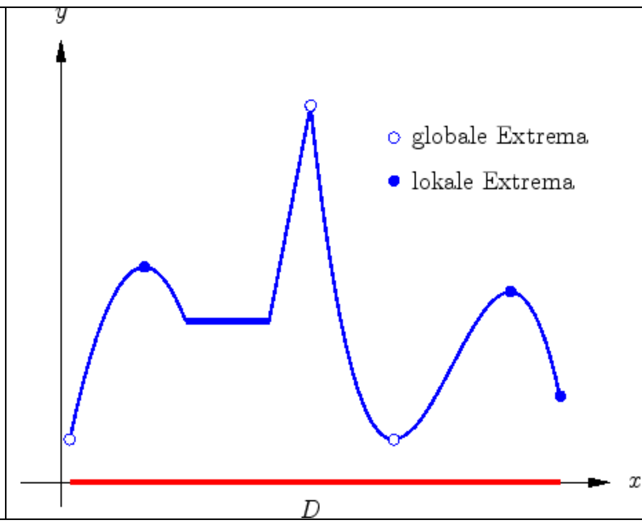
د حل لپاره د بېلګې په توګه لاس ته راوړی شو

$$r_{1,1}(x) = \frac{1 + x/2}{1 - x/2}, \quad r_{2,2}(x) = \frac{1 + x/2 + x^2/12}{1 - x/2 + x^2/12}.$$

لیکونکي: اېپ، هیولیک

اکستریما(افراطیت) Extrema

تابع f په a کې په یوه ډېری(ست) D یو تولیز یا ګلوبال مینیموم لري، که وي
$f(a) \le f(x) \quad \forall x \in D.$

په یوه ځاییز – یا لوکال مینیموم کې د تابع ارزښت $f(a)$ فقط په یوه کوچني]اپېریال $(a - \delta, a + \delta) \cap D$ کې مینیمال دی. ګلوبال او لوکال مینیموم سره ورته تعریف دي.	

په یوه رابند انټروال د یوه ټوټه ډوله ناپرېکېدونکی او مشتقوړ تابع لپاره کېدی شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتقونو په صفرځایونو ، پرېکېدونکي ځایونو او یا په ژئ ځایونو کې رامنځ ته شي. تیوپ یا ډول یې کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته او د ت ابع ارزښتونو د پرتلې له لارې پیداشي.

لیکونکي: هیولیک، هیوررنر
د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع لپاره د لوکال مینیموم سره د تعریفورشو په دننني ټکي a کې د مشتق لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

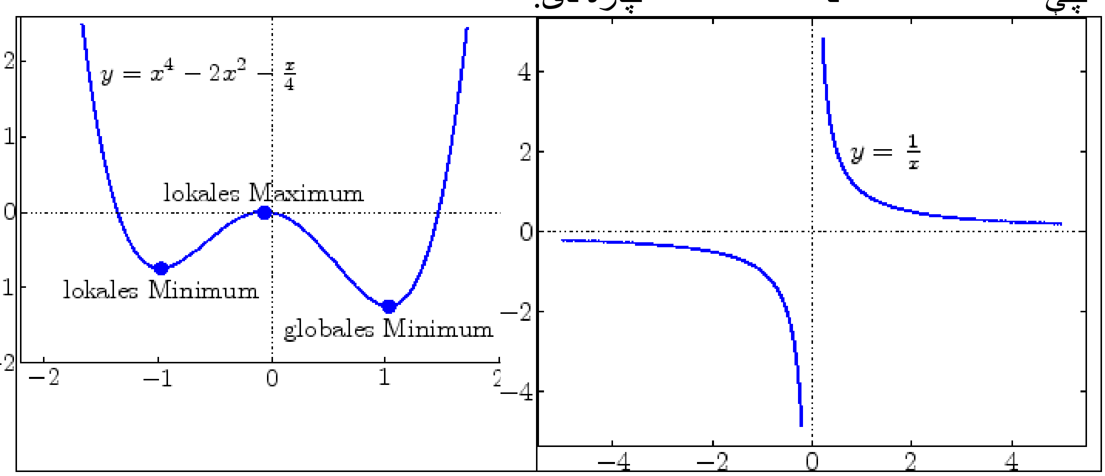
$$f'(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\geq 0}} \overbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}^{\geq 0} \geq 0$$

او

$$f'(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\leq 0}} \overbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}^{\geq 0} \leq 0$$

نو $f'(a)=0$. يعني د تعريف ورشو په دننه کې په يوه لوکال افراطيت کي بايد مشتق صفر وي يا f هلته مشتقوړ نه وي.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

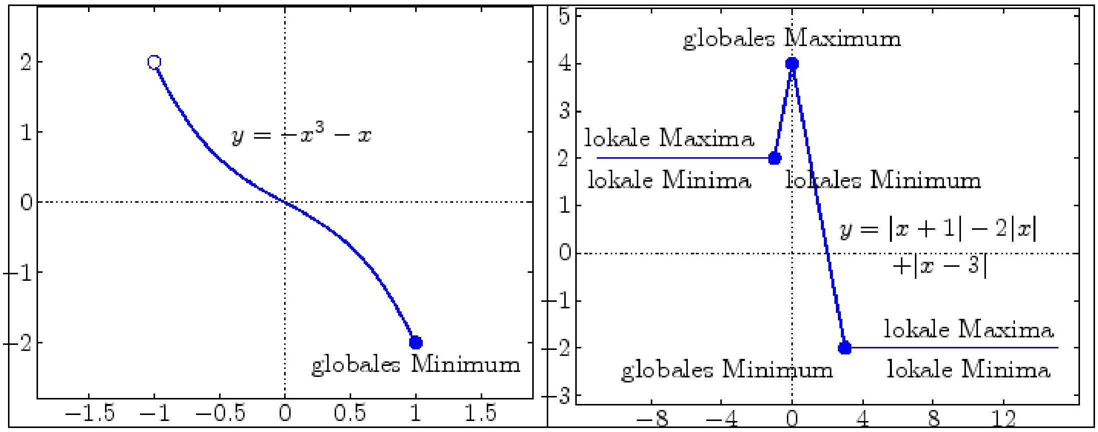
په لاندې کې به يو څو تيپيکي حالتونه وڅيړل شي.
تابع $f(x)=x^4-2x^2-x/4$ د $D=\mathbb{R}$ سره دوه مينيما اويو متکسيما لري. مينيموم د کوچني تابع ارزښت سره ګلوبال دی. يو کلوبال ماکسيموم شتون نه لي ، ځکه چې $f(x)\to\infty$ د $x\to\pm\infty$ لپاره دی.



تابع $f(x)=1/x$ د $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ سره اکستيم يا افراطي ارزښتونه نه لري.که يو تابع په يوه واز انتروال ثابت وي، نو دا ځايونه هم (لکال) ماکسيما او هم) لوکال) مينيما دي.

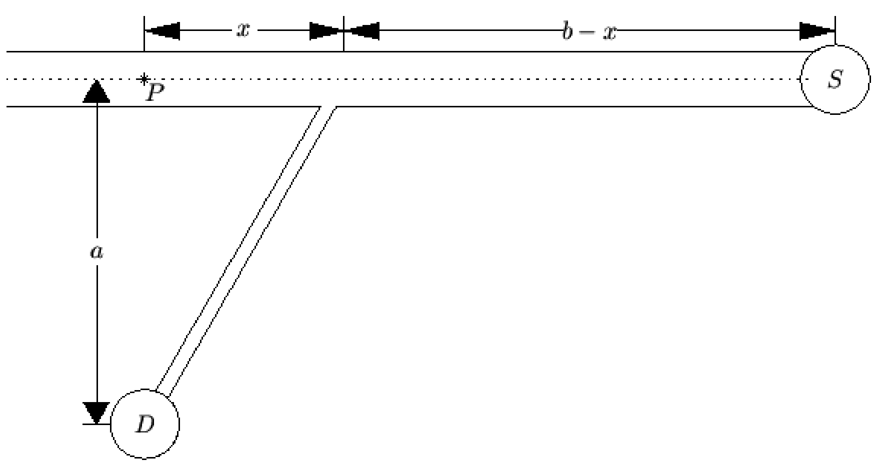
(c) ketabton.com: The Digital Library

يوه کره همغږيز – يا مونوتون تابع سره افراطي ارزښتونه په ژي ټکو کې نيول کيږي، که دا تعريفورشو پورې تعلق ولري يا اړوند وی.



ليکونکي: هيوليک، هيورنر

له يوه کلي D څخه يوه ښار S ته يوترنسرک جوړيږي. په واټن a همدا اوس له کلي و ښار ته يو سرک جوړ دی له ښار څخه تر ټکي P پورې لار ، هغه سرک چې کلي ته بل يا پسي نږدې پروت دی، اوږدوالی b لري.
دا سيده کرښيز توته لار بايد داسي جوړه وي، چي د ښار ګرندی رسيدنه شووني يا تظمين وي، که د يوه منځني [تکتيا $v_a = 120$ km/h د $v_n = 60$ په واټن په نوې څنګيز يا فرعي سرک څخه لاړ شو.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د P او د ښځګیز سرک ترمنځ واټن $x \geq 0$ د ټاکلو لپاره د مینیمی – یا کموني له لارې اړین وخت

ښار ته د خوزښت لپاره دی

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

د مشتق صفرځایونه

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}v_n} - \frac{1}{v_a} \overset{!}{=} 0\,,$$

راکوي

$$v_a x = v_n \sqrt{a^2 + x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_m = a/\sqrt{3}$$

یعني ممکنه لوکال اکسټرېم ځاي په (0, b)کې. ایا چې دا مینیموم دی، باید د خوزښت وخت سره په انټروالټکو کې د پرتلې له لارې وټاکل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a + b}{v_a}\,, \qquad t(0) = \frac{2a + b}{v_a}\,, \qquad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{v_a}$$

په روښانه توګه $t(0) \geq t(x_m)$ دی. د ښي پایټکو لپاره باور لري

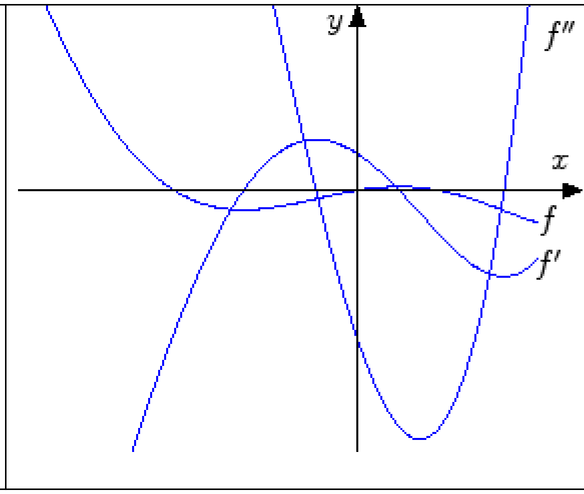
$$\begin{aligned} t(b) \geq t(x_m) \Leftrightarrow \quad & 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{3}a + b \\ \Leftrightarrow \quad & 4a^2 + 4b^2 \geq 3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2 \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = (a - \sqrt{3}b)^2 \geq 0\,. \end{aligned}$$

اخرنی مساوات تل پوره دی، او له دې سره x_m اوپټیمال یا اغیز من دی، که په غوره انټروال $(0, b)$ کې پروت وي: $b \geq a/\sqrt{3}$. په بل حالت کې به مینیموم په ژۍ ټکي b ته ، یعني ښار ته د سیده تړنې، سره ورسیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د اکستریم – یا افرطي ازښتونو ازمايښت **Extremwerttest**

	د یوه افراطی ارزښت تیوپ یا ډول په هکله کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته پرېکړه وشي. که f یو دوه واره ناپرېکیدونکی مشتقوړ تابع وي او $f'(a) = 0\,, \qquad f''(a) > 0$ $(f''(a) < 0)\,,$ ولرو،

نو f په a کې یو ځاییز مینیموم(ماکسیموم) لري. که د a په ځای کې دویم مشتق ورک شي یا صفر شي، نو باید جګ مشتقونه پرېکړې ته را وړاندې شي. که باور ولري

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(a) \neq 0\,,$$

نو f په a کې تیک هلته یو افراطیت لري، که جوړه وي. په دې حالت کې f په a کې یو لوکال یا ځای اړونده ماکسیموم همداسې مینیموم لري، که $f^{(n)}(a) < 0$ همداسې $f^{(n)}(a) > 0$ وي.

لیکونکي:اپپ، هیولیګ

د ښووني لپاره و f ته سړی د a په ځای کې د $n-1$ درجې د تیلور-پولینوم کاروي د باقي یا پاتي

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-a)^n$$

غړي سره او په پام کې نیسي، چې د $f^{(n)}(t)$ او د $f^{(n)}(a)$ لپاره(او له دې سره هم د t لپاره) a ته په بوره نږدېوالي همغه یا برابره مخنخښه ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناجوړه یا طاق n لپاره له $x < a$ څخه و $x > a$ ته په تلني کې د پورته مساوات ښی اړخ یو د مخنښني بدلون لري. د دې پسې $f(x) - f(a)$ هم هلته د مخنښني بدلون لري او د a د f افراطي ځای نه دی.

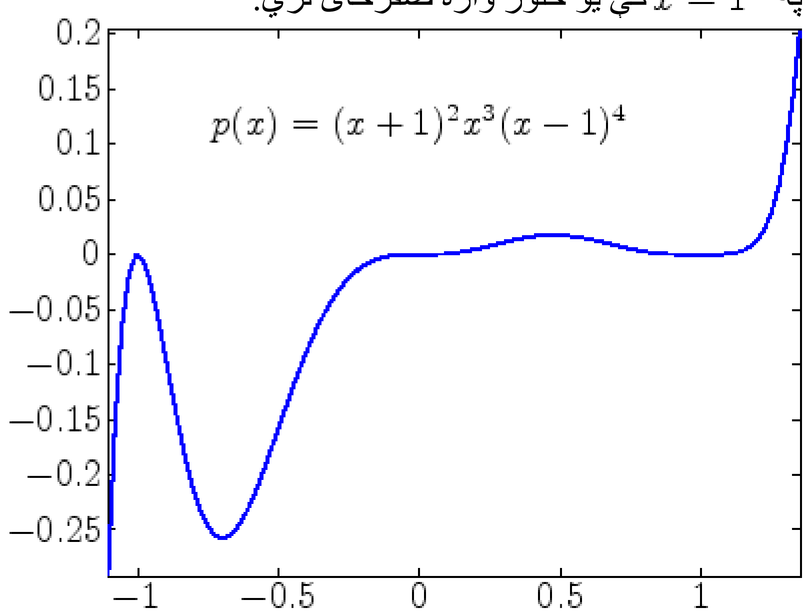
د جوړه n لپاره د $x \neq a$ لپاره تل $(x-a)^n > 0$ دی. د $f^{(n)}(a) < 0$ په حالت کې د $x \neq a$ لپاره او x چې a ته پوره نږدې پروت دی $f(x) < f(a)$ لاس ته راځي. نو تابع f په دې حالت کې په a کې یو لوکال ماکسیموم لري . حالت $f^{(n)}(a) > 0$ په ورته توګه یو لوکال میموم راکوي.

لیکونکي:اپپ، هیولیک

پولینوم

$$p(x) = (x+1)^2 x^3 (x-1)^4$$

په $x = -1$ کې یو ډبل صفرځای ، په $x = 0$ کې یو درېواره صفرځای لري او په $x = 1$ کې یو څلور واره صفرځای لري.



باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p''(-1) = 2(-1)^3(-2)^4 < 0.$$

په $x = -1$ کې p یو ماکسیموم لري. په $x = 1$ کې p یو مینیموم، خکه چې

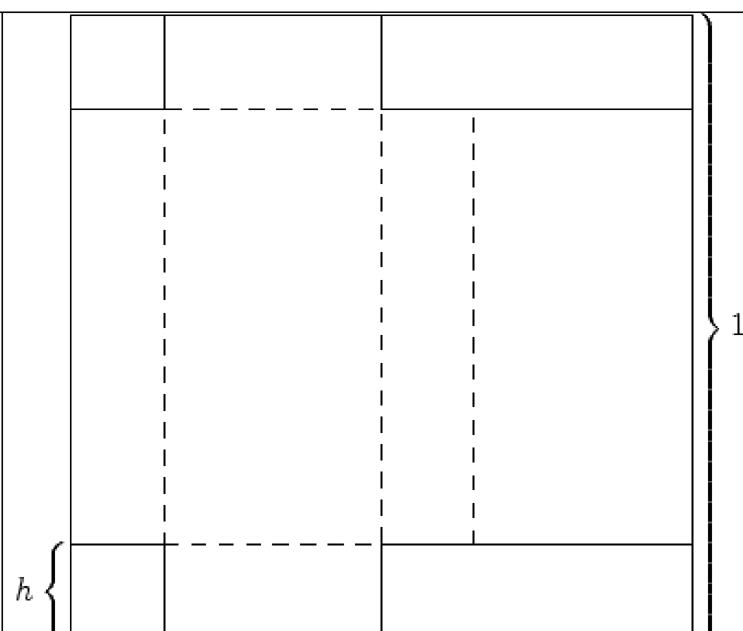
$$p(1) = \ldots = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0.$$ ،

بالاخره p د

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 3!(-1)^4 \neq 0$$

له امله او په $x = 0$ کې یو مخنخښې بدلون له امله په سرچینه کې افراطي ځایونه نه لري.

لیکونکي:اپپ، هیولیګ

د دې ورکړ شوي غوڅنموني په مرسته دې د مربعیز ټوټه کارتونونو څخه دې ممکنه د لوی حجم صندق جوړ شي	

ډکی یا حجم دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

اوږدوالی سور جګوالی

د مشتق صفرځایونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

راکوي

$$= \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

یعني ممکنه افراطي ځایونه. فقط $h = \frac{1}{6}$ هندسي موخه ور دی او

$$v(1/6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27} .$$

دا چې د ژی ټکو $h = 0$ او $h = 1/2$ لپاره ډکی یا حجم صفر 0 دی، صندق د $h = 1/6$ لپاره ماکسیمال ډکی یا حجم لري.

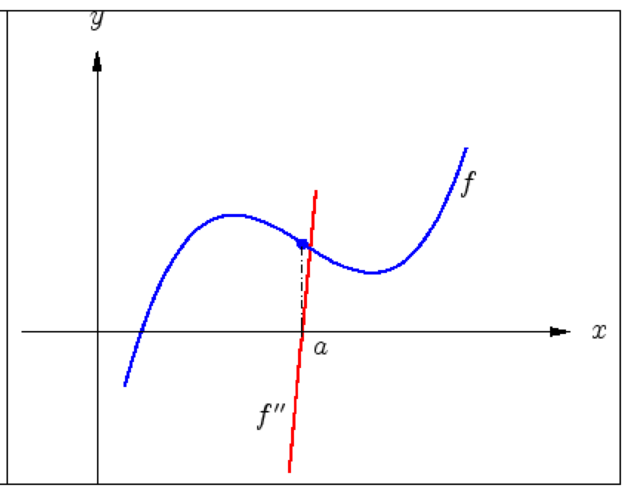
لیکونکي:ایپ، هیولیګ

اوړونټکي(نقطه انعطاف) **Wendepunkte**

د یوه تابع f په یوه اوړنټکي a کې دویم مشتق مخنخښه بدلوي.

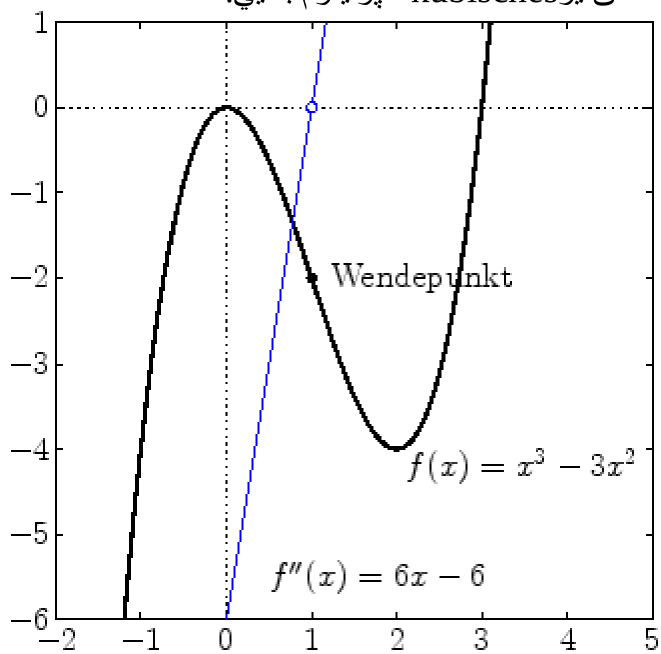
د یوه پوره هوار تابع لپاره اړین دی، چې $f''(a) = 0$ وي او پوره کېدونکي، چې $f'''(a) \neq 0$ وي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر



(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق یو kubisches پولینوم ښايي.



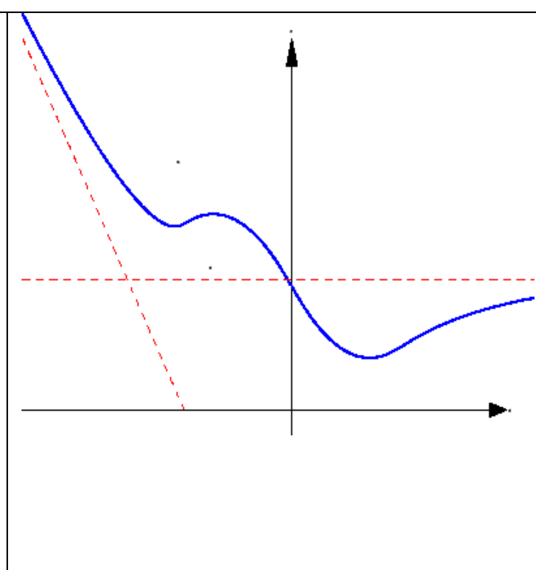
دا چې د ویم مشتق کرښیز دی، تل ټیک یو افراطی ټکی شتون لري.
لیکونکي: هیولیک، هیورنر

اسیمپتوتي(یو په بل نه پرېوتونکي یا ګاونډی) **Asymptoten**

یو کرښیز تابع $p(x) = ax + b$ د f یو اسیمپتوت یا ګاونډی دی، که د $x \to \infty$ یا $x \to -\infty$ لپاره $f(x) - p(x) \to 0$ وي.

لکه په ښېره کې چې ښوول شوی دی، ګاونډ د تابع f حالت د لوي x لپاره تشریح کوي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

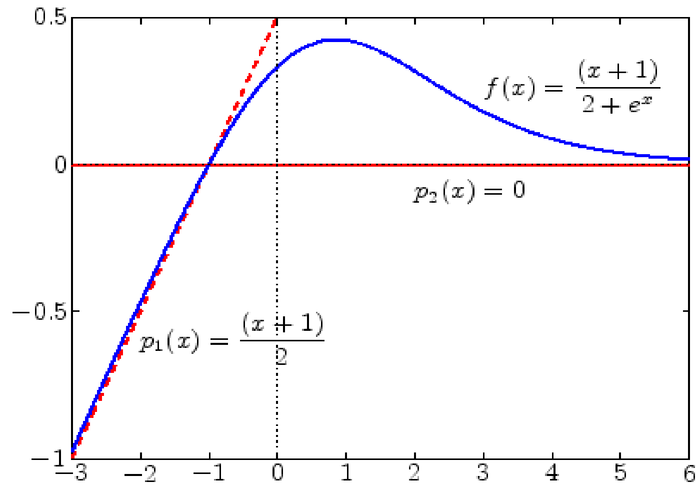


(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x) = \frac{x+1}{2+e^x}$$

ګاونډ وټاکو پوله ارزښتونه $x \to \pm\infty$ ځانله تر څېړنې نیسو.



د $x \to \infty$ لپاره دی

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)\cdot e^{-x}}{2\cdot e^{-x}+1}$$

$$= \frac{0}{0+1} = 0\,.$$

له دې سره د x محور ګاونډ یا اسیمپتوت دی

د $x \to -\infty$ لپاره e^x د 0 په لور هڅيږي او

$$p(x) = \frac{x+1}{2}$$

ګاونډ دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د راشنل- يا کسر توابعو ګاونډ يا اسيمپټوټې
Asymptoten rationaler Funktionen

يو راسنل تابع

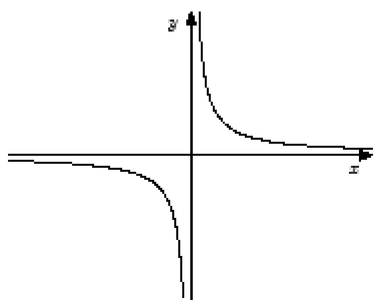
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

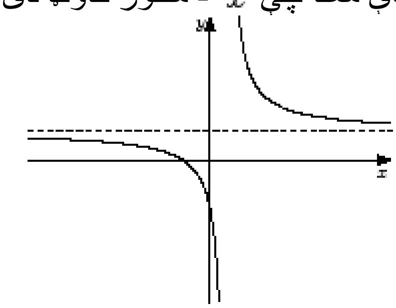
تيک هلته يو کرښيز ګاونډ لري، که $\text{Grad}\; p \leq \text{Grad}\; q+1$ وي.

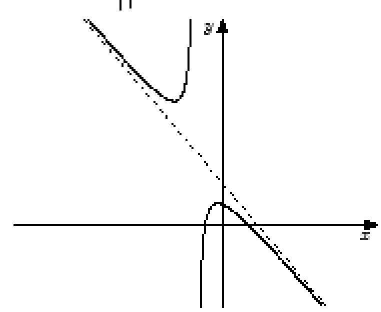
د $\text{Grad}\; p < \text{Grad}\; q$ لپاره باور لري

$$\lim_{p\to\pm\infty} r(x) = 0\,,$$

دا په دې معنا چې x - محور ګاونډ دی.







د $\text{Grad}\; q \leq \text{Grad}\; p \leq \text{Grad}\; q+1$ لپاره سړی کرښيز ګاونډ د پولينوم وېش سره لاس ته راوړي :

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

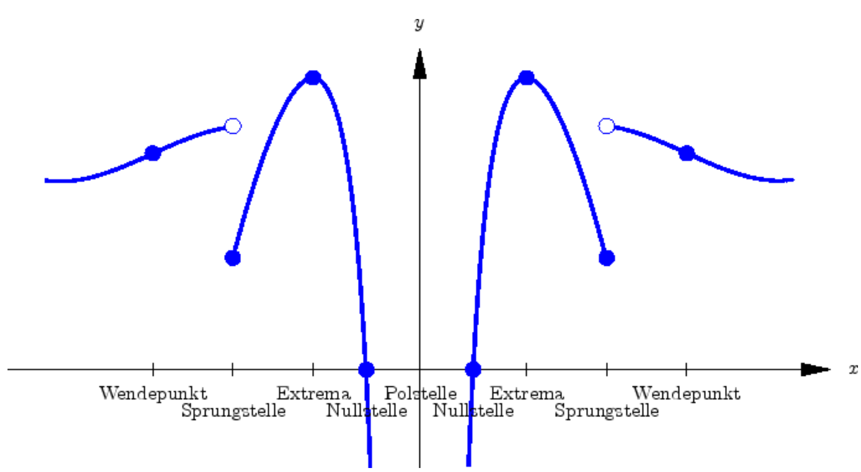
د q Grad $\tilde{p} <$ Grad سره. اسيمپتوت پروت يا افقي, $(a = 0)$ دی، که Grad q Grad $p =$ وي.

که د صورت درجه د مخرج له درجې له يو زيات وي، نو $r(x)$ د لوي x لپاره د يوه پولينوم سره، چې ≥ 2 درجه وي اپروکسيمي کيږي.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د کږو يا منحنيو خبرې يا بحث **Kurvendiskussion**

د يوه تابع د ځومره والي حالت باندې قضاوت ته لاندې نخښې کيدی شي رامخ ته شي:

- سيومتري Symmetrien
- تل بيرته راګرځيدنه Periodizität
- پرېکيدنوالي ځايونه Unstetigkeitsstellen
- صفرځايونه Nullstellen ($\longrightarrow$ Vorzeichen) (مخنخښه $\longrightarrow$)
- اکستريما Extrema ($\longrightarrow$ Monotoniebereiche) (همغږيزوالي $\longrightarrow$ ورشوګاني)
- اوړونټکی Wendepunkte ($\longrightarrow$ Konvexitätsbereiche) ($\longrightarrow$ ننوتلوالي ورشوګاني)
- قطبځايونه Polstellen
- اسيپتوتونه يا ګاونډي Asymptoten



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع يو اړونده تحليل د کږو خبرې اترې يا بحث بلل کيږي
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د کږوخبرو اترو د څګندوني لپاره يو تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\ \sin(3x)$$

تر څېړنې نيول کيږي.

سيمتري : داچې $\sin x = -\sin(-x)$ دی ، نو تابع ناجوړه دی

تل بيرته راګرځېدنه يا پريوديڅيتيPeriodizität : تابع لکه د ساين تابع پخپله 2π - پريوديکي دی او له دې امله په لاندې کې فقط په انتروال $[-\pi,\pi]$ کې راوړل کيږي.

د پرېکېدنوالي ځايونه : تابع له ناپرېکېدونکو توابعو څخه سره يرځای شوی، له دې امله برکېدنځاينه نه لري.

صفرځايونه: د زياتو- يا جمعه نقضيې سره $[-\pi,\pi]$ دی

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\ \sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right)}_{\neq 0}.$$

تابع صفرځايونه په 0 او $\pm\pi$ کې لري.

افراطيت: مشتق

$$f'(x) = 2\cos x - 4\sin^2 x\ \cos x = -2\cos x + 4\cos^3 x$$

صفر دی د $\cos x = 0$ يا د $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$ لپاره ، نو

$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4.$$

دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعريف او تلبيرته راګرځېدونې ده، ژۍ ترڅېړنې لاندې نه نيسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دويم مشتق د محنخښي څخه

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x \sin x$$

او د تابع ارزښت د پرتله کوني له لارې کېدی شي د افراطیت تیوپ یا ډول وټاکل شي:

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اوړونټکی یا د انعطاف ټکیWendepunkte :

دويم مشتق

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x \sin x = -10\sin x + 12\sin^3 x$$

$$\sin x = \pm\sqrt{5/6}$$

صفر دی د $\sin x = 0$ لپاره یا ، دا په دې معنا چې

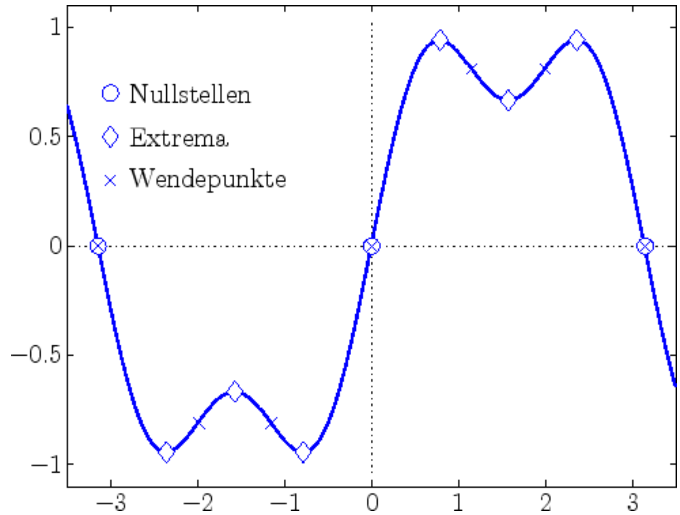
$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$

دا چې په دې ځای کې دريم مشتق نه ورکيږي. تابع f اوړونټکی په $(0,0)$ او $(\pm\pi, 0)$ کې لري همداسې په نږدې توګه په $(-1.99, -0.81)$ ، $(1.15, 0.81)$, $(-1.15, -0.81)$ او $(1.99, 0.81)$ کې.

قطبځایونه**Polstellen** : ناپرېکېدونکي توابع قطبځایونه نه لري.

ګاونډي **Asymptoten** : تابع پريوديکي او نه ثابت دی، نو ګاونډي یا اسیپتوت یا مجاورتونه نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د یوې کرښې خبرو یا بحث روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترخیرني لاندې نیول کیږي.
سیومتري : صورت ناجوړه او مخرج جوړه دی. تابع نو له دې امله ناجوړه دی، دا په دې معنا چې سرچیني ته سیومتریک دی.
پریودیځیتي یا (تل) بیرته راګرځیدنه: تابع پریودیک نه دی.
برېکیدنځایونه: د مخرج صورت صفرځایونه ± 1 د صورت صفرځایونه نه دي. له دې سره f په $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$ ناپرېکېدونکی دی.
صفرځایونه: صورت د $x = 0$ لپاره ورکیږي.
افراطیت :

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2-1)^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

دا چې تابع ساده صفرځایونه لري، افراطیت فقط لوکال یا ځای اړوند دی. د f د ځومره والي حالت خځه کیدی شي تیوب یا ډول لاس ته راشي. دا چې $f(x) \to -\infty$ د $x \to -\infty$ او $x \to -1$ لپاره دی، باید انټروال $(-\infty, -1)$ یو ماکسیموم ولري. په ورته توګه $(1, \infty)$ لر تر لره یو مینیموم لري. نو د مشتق صفرځایونو ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

سړی یو لوکال ماکسیموم په $(-2,-4/5)$ او یو لوکال مینیموم په $(2,4/5)$ کې لاس ته راوړي.

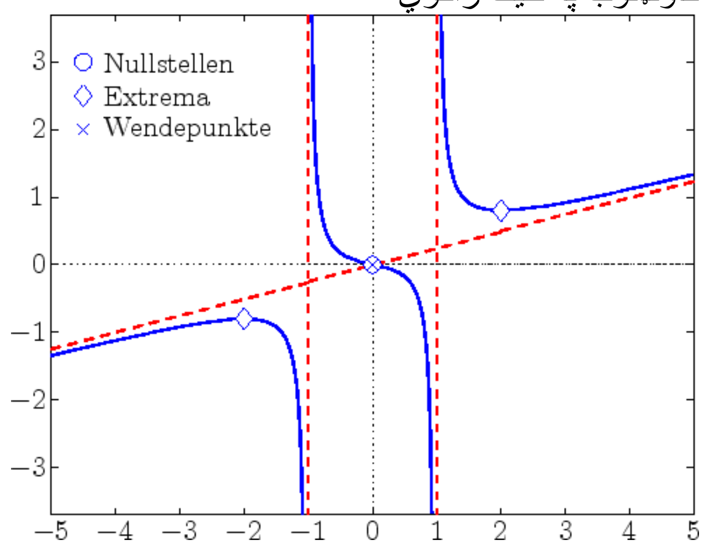
اوړونټکي یا نقاط انعطاف:

$$f''(x)=\frac{-80x^5+398x^3+42x}{20(x^2-1)^3}\stackrel{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

داچې په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی، نو $(0,0)$ یو اوړونټکی دی.

قطبځایونه: تابع په $x=\pm 1$ کې ساده قطبځایونه لري.

اسیمپتوت یا ګاونډپتوب: یو د پولینوم وېش $p(x)=5x/20+0=x/4$ د ګاونډتوب په حیث راکوي



لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د کړۍ خبرو اترو د ښوولو یا روښانه کولو ته تابع

$$f(x)=e^{-x^2}+\frac{4|x|}{e^4}$$

څېړل کېږي.

سیمتري : دا چې x^2 او $|x|$ جوړه دي، تابع جوړه دی، دا په دې معنا چې سیمتر و y - محور ته.

پریودیځیتي یا تل بېرته راګرځېدنه: تابع پریودیک نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرېکېدنوالي ځايونه: تابع له ناپرېکېدونکو توابعو څخه سره يوځای شوې ده او له دې امله پرېکېدنځايونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت تابع لپاره په هرحالت مشتق په صفرټکي کې ناپرېکېدونکی نه دی.
صفرځايونه: اکسپوننشل توابع تل مثبت يا زياتيز دي، د مطلق ارزښت تابع نه منفي دي. نو صفرځايونه نه شته.
افراطيت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4}\text{sign}(x) \stackrel{!}{=} 0,\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\,.$$

برسيره پردې دې افراطی ټکی په $x = 0$ کې ،څېړل شي، چېرته چې مشتق پرېکېدونکی دی. دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعريف دی، نو د x لپاره د $\pm\infty$ ته د تلنې حالت هم بايد په پام کې ونيول شي.
دا چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره دی، نو f لږ تر لږه يو ګلوبال مينيموم لري، مګر کلوبال ماکسيموم نه لري. د y ارزښت په پرتله کريتيکال ټکی

$$(-2, 9/e^4) \qquad (0, 1) \qquad (2, 9/e^4)$$

ښايي، چې ګلوبال مينيموم په $x = \pm 2$ کې نيول کيږي. دا چې f په انتروال $[-2, 2]$ کې مينيموم او هم يو ماکسيموم لري، ترې لاس ته راځي چې $(0, 1)$ يو لوکال ماکسيموم دی.
اوړونټکی يا د انعطاف ټکی:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{2}$$

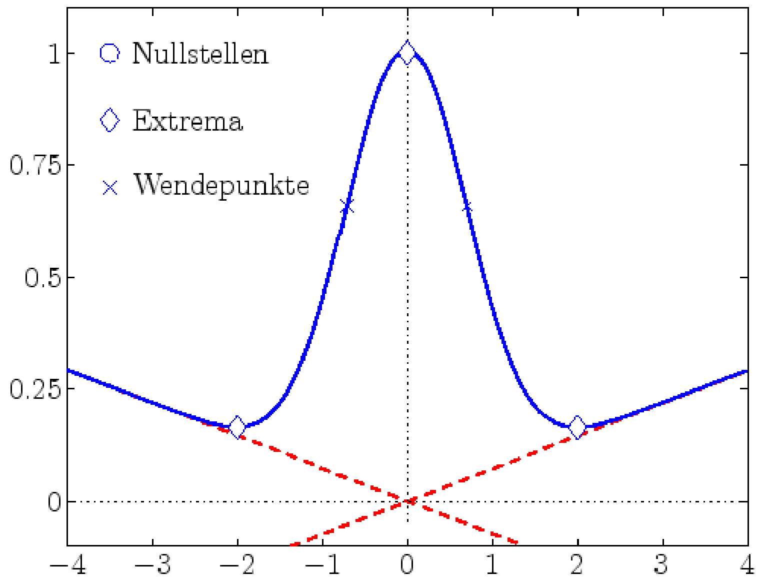
دريم مشتق په دې ځايونو $\neq 0$ کې دی. ترې لاس ته راځي چې f يو اوړونټکی

$$\left(\pm 1/\sqrt{2},\ e^{-1/2} + \frac{4}{\sqrt{2}\,e^4}\right).$$

لري.
قطبځايونه: تابع قطبځايونه نه لري.

ګاونډي يا مجاورتها: دا چې e^{-x^2} د $|x|$ لپاره د صفر په لور ګړندی دی، تابع ګاونډيان $p_+(x) = \frac{4x}{e^4}$ او $p_-(x) = \frac{-4x}{e^4}$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: هيوليک، هيورنر

ريمن-انتيګرال Riemann-Integral

د يوه ناپرېکېدونکي تابع f يو ټاکلی انتيګرال د

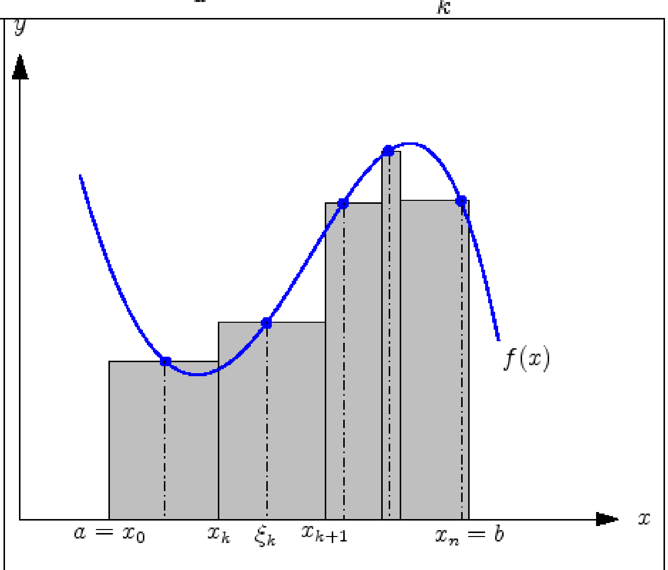
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0}\int_a^b f_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

له لارې تعريف شوی دی. دلته د $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ يوه توټه کونه بنايي،

$$|\Delta| = \max_k \Delta x_k\,,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\,,$$

يو ماکسيمال انتروال دی او ξ_k په k – م انتروال يو په خوښه ټکی دی. د انتيګرال تعريف په ښی لور زياتون ياجمعه د ريمن زياتون يا – جمعه بلل کيږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د زياتيز يا مثبت f لپاره $\int_a^b f(x)\,dx$ د f د ګراف کښته لورته سطحه په ګوته کوي

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر، ويپير

که $f(x)$ ناپرېکيدونکی مشتقوړ وي، نو د مشتقشمېرنې د منځ ارزښت جملې څخه د لپاره باور لري

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (x_2 - x_1) \max_{x\in[x_1,x_2]} |f'(x)|$$

Δ_i دې د ټوټه ونو يوه پرله پسې وي د $|\Delta_i| \to 0$ سره. د تابع پرلپسې دوه توکي Δ_m او Δ_n را اخلو او د Δ ټوټه ونه را اخلو، چې د Δ_m او Δ_n د نورو يا ورپسې يل لاندې ټوټه کونو له لارې منځ ته راځي ، چېرته چې Δ_m د لاندې يا ورپسې ټوټه ونو ټکي $x_i\ ,\ i=0,\dots,k_m$ دي او Δ ټکي $z_i\ ,\ i=0,\dots,k$ لري، نو د $\zeta_j\in[z_{j-1},z_j]$ سره باور لري

$$\left|\int f_\Delta - \int f_{\Delta_m}\right| = \left|\sum_{j=1}^{k} f(\zeta_j)\,\Delta z_j - \sum_{i=1}^{k_m} f(\xi_i)\,\Delta x_i\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{k_m}\ \sum_{x_{i-1}\leq z_{j-1}<z_j\leq x_i} (f(\zeta_j)-f(\xi_i))\Delta z_j\right|$$

$$\leq |\Delta_m| \max_{t\in[a,b]} |f'(t)| \underbrace{\sum_{i=1}^{k_m}\ \sum_{x_{i-1}\leq z_{j-1}<z_j\leq x_i} \Delta z_j}_{b-a}\ .$$

په ورته تګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left|\int f_\Delta - \int f_{\Delta_n}\right| = O(|\Delta_n|)\,,$$

او له دې سره

$$\left|\int f_{\Delta_m} - \int f_{\Delta_n}\right| \to 0$$

د $n, m \to \infty$ لپاره . د ريمن –زياتون نو يوه کوشي-پرلپسي جوړوي، نو پولي ته تلونکي دي.

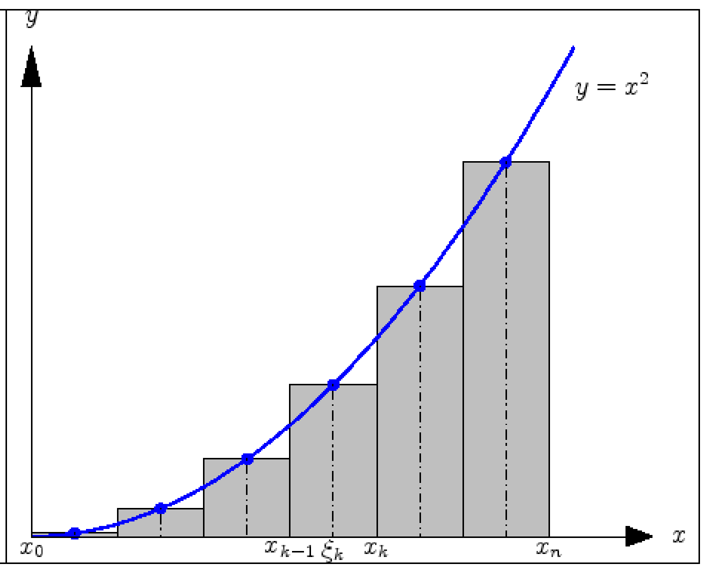
په ورته توګه د دوه پرلپسيو و همغې يا برابرې پولې ته تلنه وښوول شي.

د توته ناپرېکېدونکو f ښوونه تخنيکي داسې لږ پېچلې ده. سرې د f د ناپرېکېدنې انټروال بېل يا جدا ترخېړنې نيسي او هلته د برابرډوله ناپرېکېدنې څخه ګټه اخلي:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le \varepsilon \qquad \text{für} \quad |x_1 - x_2| < \delta\,.$$

دا اټکل د منځ ارزښت جملې په ځای رامنځ ته کيږي او نور دلايل په ورته وګه مخ ته بيولکيږي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

ريمن –انټيګرال په حيث د $\int_0^1 x^2\,dx$ شمېرلو کيدی شي د توته ونې پرلپسي وکارول شي د n-م توته ونې لپاره د ارزښتونو ځايونو $\xi_i = (2i-1)/(2n)\,,$ $,\, i = 1, \ldots, n\,,$ سره.	

د تعريف سره سم لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{4n^3}\left(4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right)$$

$$\frac{1}{4n^3}\left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

او له دې سره .

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د انتيګرال خويونه **Eigenschaften des Integrals**

دا لاندې ټاکلی انتيګرال دا لاندې خويونه لري :

$$\int f + g = \int f + \int g \quad , \quad \int r f = r \int f$$

کرښيزوالس,

$$f \le g \implies \int f \le \int g$$

همغږيزوالی :

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

زياتون يا جمعه

$\int_b^a f = -\int_a^b f$

د وروستيو خويونو د همغږيزونې له امله سرې تعريفوي: .

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

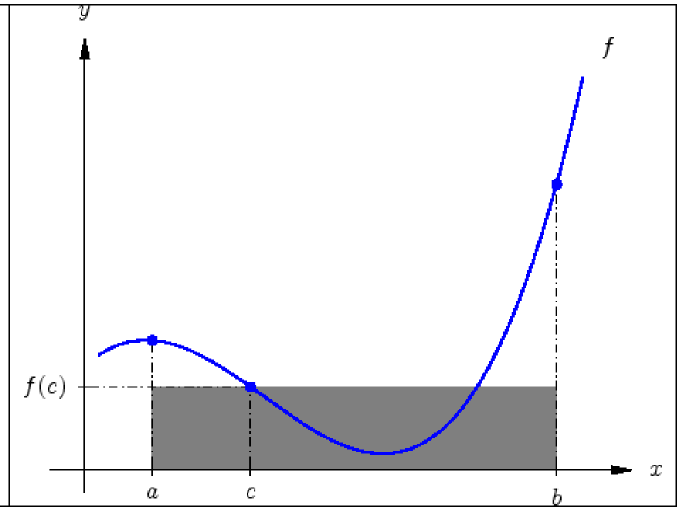
د انتيګرالشميرنې منځ ارزښت جمله
Mittelwertsatz der Integralrechnung

(c) ketabton.com: The Digital Library

که f او g په $[a,b]$ ناپرېکېدونکي توابع وي او g د مخنخښي بدلون ونه لري ، نو $c \in [a,b]$ شتون لري د

$$\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g.$$

سره



په ځانګي توګه ، لکه په ځېره کې چې ليدوړ دي، دی $\int_a^b f = (b-a)f(c)$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

بې له ټوليزو بنديزونو دې $g \geq 0$ وي. د انتيګرال د اټکل له لارې

$$\left(\min_{[a,b]} f\right) g(x) \leq f(x)g(x) \leq \left(\max_{[a,b]} f\right) g(x)$$

لاس ته راځي

$$\left(\min_{[a,b]} f\right) \int g \leq \int fg \leq \left(\max_{[a,b]} f\right) \int g .$$

دا چې f د منځارزښت جملې له مخې د $\min f$ او $\max f$ ترمنځ هر ارزښت نيسي، نو غوښتونی برابروالی راکوي.

په ټولېزه توګه وړاندنيونه ده، چې g د مخنخښي بدلون نه لري، اړيين، لکه د بېلګې

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}_{>0} = \int_{-1}^{1} x\cdot x\,dx \neq c\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځخه لیدل کیږی.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

بنسټیز – یا ساده توابع **Stammfunktion**

یو تابع F د $F' = f$ سره د f بنسټیز ت ابع دی، او د دې لپاره لیکو

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

د ټولو بنسټیز توابعو ډېرۍ لپاره، چې د f ناټاکلي انتیګرال بلل کیږي.
د انتیګرالونې ثابته c په خوښه ده. د بېلګې په توګه دی

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

د $F_a(a) = 0$ سره یو ممکنه لومړی یا بنسټیزه تابع.
نه ټولو بنسټیزو توابعو ته داسې روښانه د بنسټیزو توابعو اکسپلیځیت ورکړه شونې ده،

$$f(x) = \exp\left(x^2\right)$$

یوه بېلګه ده .
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د انتیګرالشمیرنې اصلي جمله یا قضیه
Hauptsatz der Integralrechnung

که F د یوه ناپرېکېدونکي تابع f بنسټیز یا لومړنی تابع وي ، دا په دې معنا چې $f = F'$ وي، نو باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

همداسې په لنډه لیکندول

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f = [F]_a^b \,.$$

یو بنئتیز انتیګرال کېدی شي د انتروال په پای ټکو کې د بنسټیزو توابعو د تابع ارزښتونو د کمښت په ډول وشمېرل شي
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

که دواړه خواوې د b تابع په څېر راوړل شي، نو بسیا کوي وښایو، چې دواړه خواوې برابر مشتق لري، ځکهچې د $b = a$ لپاره ارزښت سره سرخوري(دواړه خواوې صفر دي).
د کیڼ اړخ لپاره لرو

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{b+h} f - \int_a^b f\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_b^{b+h} f \,.$$

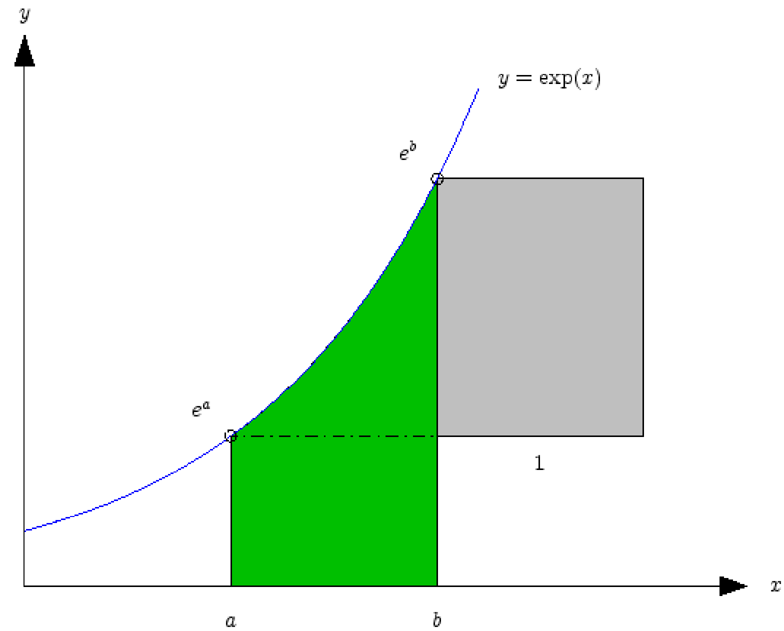
د منځ ارزښت جملې پسې یا په تعقیب انتیګرال مساوي دی په $(b + h - b)\, f(c)$ د $c \in (b, b+h)$ سره.
پوله ارزښت برابر دی په $f(b)$. دا د ښي اړخ د مشتق سره سر خوري یا یو غږیز دی
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د اکسپننشل تابع مشتق بېرته اکسپوننشل تابع دی او له دې امله دی

$$\int_a^b e^x \, dx = e^b - e^a \,.$$

د د a او b ترمنځ ګراف لاندې سطحه برابره د ولاړګوډیزر(مستطیل) د سطحې سره د سور 1 او د تابع ارزښت دواتن د اوږدوالي په حیث.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لوکایتم تابع $F(x) = \ln(x)$ مشتق $F'(x) = 1/x\,,\; x \in \mathbb{R}^+$ دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x\,dx = \ln(b) - \ln(a)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}^+ .$$

د $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ یو بنسټیز تابع $F(x) = \arctan x$ دی . د دې په تعقیب دی

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} .$$

د مشتقوني څخه لاس ته راځي، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = \tan x$ یو بنستیز تابع دی

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

په تعقیب دی:

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347 .$$

لیکونکي: هیولیګ، هیوررنر

د M کتلي یو ستوری یو د کښولو ورشو تولیدوي، چې د هغې له خوا په یوه کتله m یو زور $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$ واردوي . دلته γ د ګراویتیشن یا راکښني قوه ده او x د دروندتکو ترمنځ واټن دی.

د $1/x^2$ لپاره یو لومړنی یا بتستیز تابع $-1/x$ دی. د دې لپاره چې یو تن له واټن a و واټن b ته یوړولی شو ، باید کار

$$\int_a^b F(x) \, dx = \gamma m M \int_a^b \frac{1}{x^2} \, dx = -\left[\gamma m M/x\right]_a^b = \gamma m M(1/a - 1/b)$$

سرته ورسیږي.

د a لپاره د ستوري د وړانګې سرره برابر او $b \to \infty$ کېدی شي د برابر اینوونې له لارې د کینیتیکي انرژي سره چې داسي په نامه د تېښتي چټکتیا v تاکي دا په دې معنا چې چټکتیا ، چې اړین ده، چې د یوه ستوري راکښنقوه پرېښودی شي یا راکښنقوې څخه ووځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{m}{2}v^2 = \gamma\frac{mM}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\gamma\frac{2M}{a}}\,.$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره $v = 11.2\,\text{km/s.}$ دی .
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د بنسټيزو توابعو لومړني توابع**Stammfunktionen der Grundfunktionen**

لاندې جدول بنسټيزو توابعو $f(x)$ ته لومړني توابع $F(x)$ ښايي

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
$x^s\,,\ s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

ټوټه- يا پارشل انتيګرالونه**Partielle Integration**

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق د ضرب قانون $(fg)' = f'g + fg'$ څخه په ورته توګه فرمول بندي له لارې د ناټاکلي انتیګرال لپاره راکوي:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

په اړونده توګه د ناټاکلو انتیګرالونو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

لپاره باور لري. د لته دې په پام کې ونیول شي، چې د ژۍ ترم $[fg]_a^b$ ورکیږي، که د دواړو توابعو څخه یو یې د انتروال پای ټکو کې صفر وي. په همدې توګه د پریودیکي تابع لپاره د پریود اوږدوالي $(b-a)$ کې هم له منځه ځي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

له $\int (1+x)^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\,(1+x)^{\alpha+1} + c$ څخه د $\alpha \neq -1$ لپاره لاس ته راځي

$$\int \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1+x}}\,dx = x\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int 1\cdot\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + c.$$

په ورته توګه شمیرل کیږي

$$\int_0^1 \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1-x}}\,dx = \left[-x\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx$$

$$= 0 - \left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو لوګاريتمي ضريب د يو ځل ټوټه انتيګرالونې له لارې له منځه تلی شي.
د بيلګې په توګه دی

$$\int x^n(\ln|x|)\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln|x|) - \int \frac{1}{n+1}x^{n+1}\,\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln|x|) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + c.$$

په دې ډول کيدی شي په خوښه پولينومونه

$$\sum_{j,k} a_{j,k}x^j(\ln|x|)^k$$

په x او $\ln|x|$ کې انتيګرال شي يا انتيګرال ونيول شي.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ټوټه اتيګرالونې له لارې کېدی شي د پولينوم درجه کمه شي. د بېلګې په توګه دی

$$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x\,dx$$
$$= x^n e^x - n x^{n-1} e^x + \int n(n-1)x^{n-2} e^x\,dx$$
$$= \cdots$$
$$= e^x \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}x^k + c.$$

په دې توګه نېدی شي د $n \in \mathbb{N}$, $x^n\,e^{\beta x}$, بنې ترمونوکمبينېشن په خوښه انتيګرال شي يا يې انتيګرال ونيول شي. ليکونکي: هيوليګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x^n \cos x$ او $x^n \sin x$ ضربونه کېدی شي د ډېرواره ټوټه انتيګرالونې له لارې انتيګرال شي:

$$\int x^n \left\{ \begin{array}{c} \cos x \\ \sin x \end{array} \right\} dx = x^n \left\{ \begin{array}{r} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} - \int n x^{n-1} \left\{ \begin{array}{r} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} dx$$
$$= \ldots .$$

د تکرار ټوټه انتيګرالوني له لارې بالاخره ضريب x^k له منځه ځي. په دې توګه کېدی شي د په خوښه پولينوم توابعو لومړنی تابع په x, $\sin x$ او $\cos x$ کې وشمېرل شي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

له $\cosh'(x) = \sinh(x)$, $\sinh'(x) = \cosh(x)$ څخه لاس ته راځي

$$\int e^x \sinh(x)\,dx = e^x \cosh(x) - \int e^x \cosh(x)\,dx$$
$$= e^x \cosh(x) - e^x \sinh(x) + \int e^x \sinh(x)\,dx$$

او له دې سره لکه چې برېښي
$$e^x \cosh(x) = e^x \sinh(x),$$

يو په ځرګنده توګه مخامخوالی يا تضاد دی.
ناټيکاوی په اخرنظ پايونه کې پروت دی – د انتيګرالنيوني ثابته بايد په پام کې ونيول شي:
$$e^x \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2} + c.$$

د $c = 1$ ټاکنه مو ټيکې نتيجې ته لاربسودوي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ټوټه انتيګرالوني سره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx,\ (a \neq 0).$$

د ویم ځل انتیګرالونه مو بېرته برابر انتیګرال ته ته بیايي، او له دې سره لاس ته راځي:

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{ae^{ax}\sin(bx) - be^{ax}\cos(bx)}{a^2+b^2} + c$$

بدیلي سړی

کړی شي د اویلر-مویورې فرمول هم د پورته ډول انتیګرال شمېرنو ته استعمال کړي. د

$$\cos(t) = \mathrm{Re}\,(\exp(it))$$

بېلګې په توګه له لاس ته راځي

$$\int_0^{\pi} e^t\cos(t)\,dt\,\mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi}\exp(t+it)\,dt\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{\exp(t+it)}{1+i}\right]_0^{\pi}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{-e^{\pi}-1}{1+i}\right) = -(e^{\pi}+1)/2\,.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

له

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = -\int_{-\pi}^{\pi} n\cos(nx)(-\frac{1}{m}\cos(mx))\,dx$$
$$= \frac{n^2}{m^2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx$$

د $m \neq n$ لپاره لرو

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0\,.$$

په پام کې دې ونیول شي، چې د تابع پریودیځیتي یا تل بېرته رتکرځېدنه په ټوټه انتیګرالونه کې د ژۍ شرایط له منځه ځي. د $m = n$ لپاره د لومړي مساوات او

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

ځخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}1\,dx = 2\pi\,.$$

په ورته توګه سړی د تابع $\cos(mx)$ اورتوګونالیتي ښايي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

دلتا - تابع Delta-Funktion

د دیراکDiracsche دلتا-تابع δ د

$$\int_{\mathbb{R}}\delta f = f(0)$$

له لارې تعریف دی، د کوم سره چې یو په خوښه ناپرېکیدونکی تابع دی، چې د یوه انتروال (a,b) دباندې وکیږي. د ټوټه انتیګرالوني په مرسته یا په یوه پوله پروسه کېدی شي δ د Heavisideschen ټوپتابع د مشتق ټولیزوالي

$$H(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

په حیث تشریح کیدی شي.

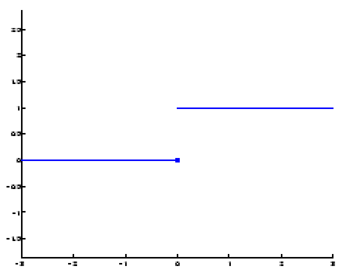
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

که $0 \in (a,b)$ وي، نو د ټوټه انتیګرال سره لاس ته راځي

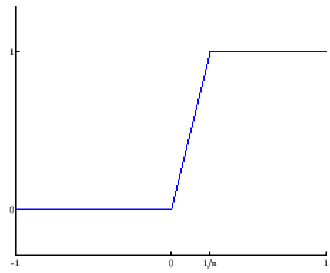
$$\begin{aligned}\int_{-a}^{b} H'f &= [Hf]_a^b - \int_a^b Hf' \\ &= -\int_0^b f' = -[f]_0^b \\ &= f(0)\end{aligned}$$

او له دې سره $\int H'f = \int \delta f$.

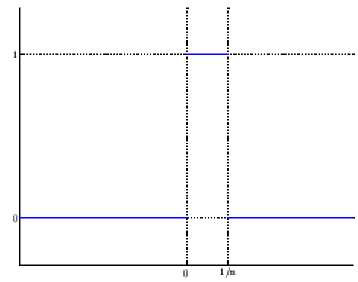
(c) ketabton.com: The Digital Library



Heaviside-Funktion H



نږدېوالی H_n Näherung der Heaviside-Funktion



نږدېوالی $\delta_n = H_n'$ Näherung der Delta-Funktion

په د پوله پروسې سره د جوړ شوې د Heavyside-Funktion اپروکسیمیشن سره سړی بدیل لاس ته راوړي :

$$\int_a^b H_n' f = n \int_0^{1/n} f = f(t_n) \rightarrow f(0)\,.$$

له دې سره د اخرني مساوات لپاره د منځ ا رزښت جمله کارول شوې.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د متحولو – یا اووښتونو بدلون Variablensubstitution

د ځنځیري قاونو

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x))g'(x), \quad f = F',$$

څخه د بدلون $y = g(x)$ لپاره لومړنیو تابع جوړولو له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(y)+c = \int f(y)\,dy.$$

په ورته توګه د ټاکلي انتيګرال لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b))-F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

.

د دفرنشل کونو په ورسته کېدی شي دا فرمول په لاندې بڼه

$$\int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

وليکل شي.

يو ساده ځانګړی حالت يو کرښيز متحول بدلون دی

$$x \mapsto y = px+q\,.$$

په دې حالت کې دی

$$\int f(px+q)\,dx = \frac{1}{q}\,F(y)+c$$

همداسې

$$\int_a^b f(px+q)\,dx = \frac{1}{p}\,[F]_{pa+q}^{pb+q}\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د انتيګرال

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin\varepsilon x}{x}dx$$

لپاره بدلون $dx = \frac{1}{\varepsilon}du$ $u = \varepsilon x\,,$ او د انتيګرالونې پولو ترانسفورميشن $x = \pi/\varepsilon \leftrightarrow u = \pi$ راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

په تولیزه توګه د یو بدلون $u = rx$ سره باور لري

$$\frac{dx}{x} \to \frac{du}{u}$$

او له دې سره

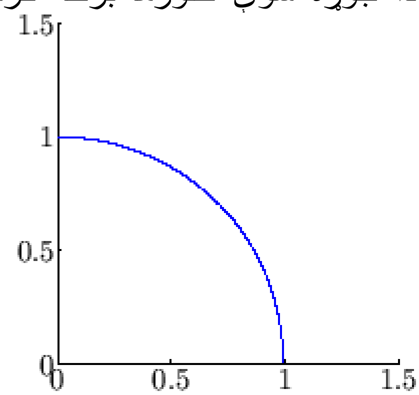
$$\int_a^b f(rx)\frac{dx}{x} = \int_{ra}^{rb} f(u)\frac{du}{u}.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

تابع

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \le x \le 1,$$

دا جوړه شوې څلورمه برخه ګردۍ یا څلورمه برخه دایره ښایي



له دې سره د انتیګرال لپاره باور لري

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4}.$$

که بدلن $x = \sin u,\ dx = \cos u\, du,\ x = 0 \to u = 0$ وکارول شي او $x = 1 \to u = \frac{\pi}{2}$ ، نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\,,$$

لکه څنګه چې انتظار کېده. د اخرني مساوات لپاره دا لاندې

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 u + \cos^2 u\, du = \frac{\pi}{2}$$

وکارول شو.

$$dx = -\sin u\, du$$

په عجيبه ډول بدلون $x = \cos u,$,

$$x = 0 \to u = -\pi/2$$

او $x = 1 \to u = 2\pi$ په بربښنده توګه يوه ناټيکه

نتيجه راکوي:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} -\sin^2 u\, du = -\frac{5\pi}{4}.$$

څه ناټيک وو؟ په کلکه نيولې توګه باور لري

$$\sqrt{1-\cos^2 u} = |\sin u|$$

او له دې سره

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} |\sin u|(-\sin u)du = \frac{\pi}{4}.$$

د لاندې انتيګرال لپاره

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2-1}}$$

بدلون $y = (x-3)/2 \quad dx = 2dy$, راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ورپسې بدلون f $y = \cosh t$, $dy = \sinh t\, dt$ سره د

$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ له امله لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} &= \int \frac{\sinh t\, dt}{\sinh t} \\ &= \int dt = t + c \\ &= \operatorname{arcosh} y + c \\ &= \operatorname{arcosh}((x-3)/2) + c \\ &= \ln\left(\frac{x-3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+5}\right) + c\end{aligned}$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس تهراځي

$$\begin{aligned}\int_5^7 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} &= \ln(2+\frac{1}{2}\sqrt{2}) - \ln 1 \\ &= \ln(2+\frac{1}{2}\sqrt{2}).\end{aligned}$$

که په انتګرالېدونکي کې دننه مشتق پېژندل کېږي، لکه د بېلې په توګه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx\,,$$

لپاره، نو د بدلون قانون په ځانګړې توګه ساده دی. په دې بېلګه کې

$$y = g(x) = \ln x\,, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

ځای په ځای کوو او لاس ته راوړو

$$\int g(x)^2\, g'(x)\, dx = \int y^2\, dy = \frac{1}{3}y^3 + c\,.$$

د په څټ یا معکوس بدلون سره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\, dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

په تیوپیکي توګه سړی هڅېري چې د بدلون له لارې انتیګرالېدونکی ساده کړي. د بېلګې په توګه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y} - 1}\, dy$$

لپاره نږدې دی چې

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

کېږدي. دا د

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله دا ترانسفورمي شوی ناټاکلی انتیګرال راکوي

$$\int \frac{x^3}{x^2 - 1}\, \frac{dy}{dx}\, dx = \int \frac{x^2}{x^2 - 1}\, dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2 - 1}\right)\, dx$$

$$\int 1\, dx + \int \frac{1}{x^2 - 1}\, dx = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| + c\,.$$

د $x = e^y$ دبېرته بدلون له لارې بالاخره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2}\left|\frac{e^y - 1}{e^y + 1}\right| + c\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

لومړی (بنسټیزه -) تابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

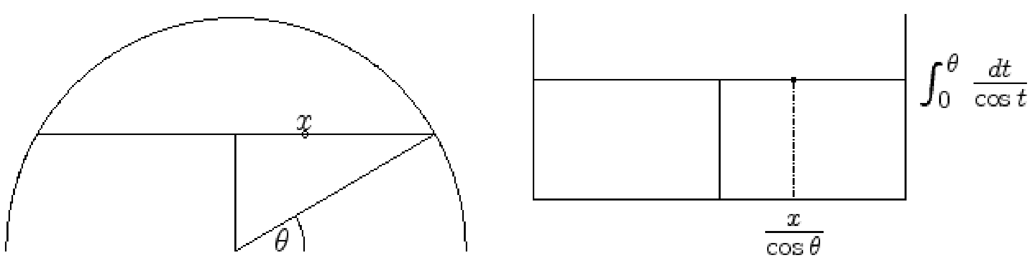
کیدی شي د بدلون سره

$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1+\sin x}{\cos x}, \qquad du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx,$$

وشمېرل شي:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int (\cos x)^{-1} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} du \\ &= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \\ &= \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c. \end{aligned}$$

یو کارونه يې د Mercator-Projektion دی. له دې سره د ځمکې بورته سطحه کونجرينتوني په سطحه بربوځي.



د سور گردی (طول البلد) له دې سره د $1/\cos\theta$ په نسبت سره غزيږي.

ليکونکي: هيوليک، کوپف

ساده راشنل انتيګراليدونکې د ساده قطب سره
Elementare rationale Integranden mit einfachen Polen

د درې بنستتيوپه راشنل توابعو لومړنی توابع دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|x+b/a| + c$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c$$

$$\int \frac{(x-a)dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2) + c$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

فرمولونه کېدی شي ترلي د مشتق له لارې پسې وشمېرل شي. بديل يې د انتيګرال ساده بڼه بدلونونه شوني دي.

له $\int dy/y = \ln|y| + c$ لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x+b/a} = \frac{1}{a}\ln|x+b/a| + c.$$

د بڼه بدلون پسې

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{((x-a)/b)^2+1}$$

بدلون $dx = b\,dy$, $y = (x-a)/b$ راکوي

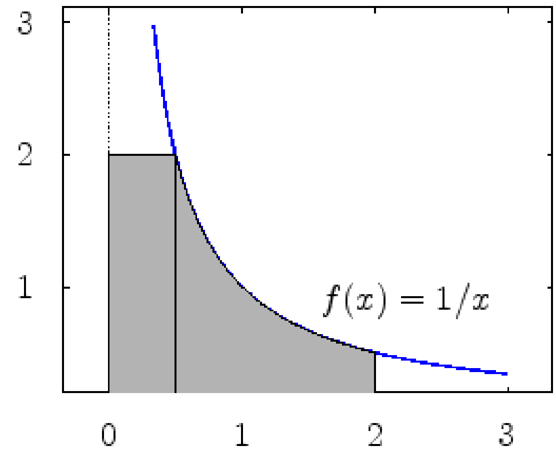
$$\frac{1}{b}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{b}\arctan y + c = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right) + c.$$

د بدلون , $y = (x-a)^2 + b^2$ سره لاس ته راځي

$$\int \frac{(x-a)\,dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ln|y| + c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

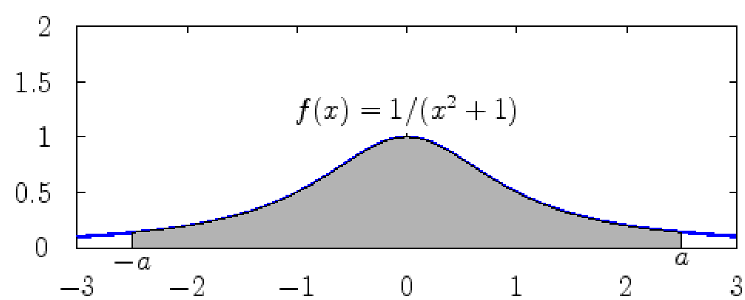
$$= \qquad \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2)+c.$$



د خړې سطحې مساحت د

$$2\frac{1}{2}+\int_{1/2}^{2}\frac{1}{x}dx=1+\ln 2-\ln\frac{1}{2}=1+\ln 4$$

له لارې شميرل کيږي.
ليکونکي: هيوليک، کوپف



د $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ د ګراف لاندې سطحه داسې شميرل کيږي

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{a\to\infty}\arctan a-\arctan(-a)\longrightarrow\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$r(x)=\frac{3x+6}{2x^2-4x+10}$$

لومړی تابع ټاکلو لپاره، لومړی د مخرج مربعتکمیلونه جوړیږي:

$$2(x^2-2x+5)=2((x-1)^2+2^2)\,.$$

په اړونده توګه صورت هم بڼه بدلیږي:

$$3(x+2)=3((x-1)+3)\,.$$

له دې سره کېدی شي د ستاندارد افادې په توګه توټه یا تجزیه شي:

$$r(x)=\frac{3}{2}\,\frac{x-1}{(x-1)^2+2^2}+\frac{9}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2+2^2}\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int r(x)\,dx=\frac{3}{4}\,\ln\left((x-1)^2+4\right)+\frac{3}{4}\,\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+c\,.$$

د ټاکلی انتیګرال $\int_1^3 r(x)\,dx$ لپاره سری د پولو د په ځای اینوونې له لارې لومړنی تابع لاس ته راوړي

$$\frac{3}{4}\left(\ln 8-\ln 4+\arctan(1)-\arctan(0)\right)=\frac{3}{4}\,\ln 2-\frac{3}{16}\,\pi\,.$$

لیکونکي: هیولیګ،

ساده راشنل انتیګرالونه د زیاتواره قطب سره

Elementare rationale Integranden mit mehrfachen Polen

د $n\in\mathbb{N}$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int (x-a)^{-n-1}dx = -\frac{1}{n}(x-a)^{-n} + c\,.$$

د ډېرواره کمپلکس کنجوګیري قطبځایونو کې د اړونده مربع

$$q(x) = (x-a)^2 + b^2$$

ضریبونو لپاره باور لري

$$\int \frac{c(x-a)+d}{q(x)^{n+1}}\,dx = \frac{d(x-a)}{2b^2n\,q(x)^n} - \frac{c}{2n\,q(x)^n} + \frac{d(2n-1)}{2b^2n}\int \frac{dx}{q(x)^n}\,.$$

د ګراد یا درجې ردکشن د لومړنې تابع رکورزیو شمېرنه شوونې کوي.
لیکونکي: هیولیک، کوپف

لومړنی فرمول د $y = x - a$ او $dx = dy$ د د بدلون له لارې لاس ته راځي:

$$\int (x-a)^{-n-1}dx = \int y^{-n-1}dy = -\frac{1}{n}y^{-n} + c\,.$$

د دویم فرمول د ښوونې لپاره لومړی یو ساده د رکوزیون فرمول منځ ته راځي.

د ټوټه انتیګرالونې سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{(1+y^2)^k} &= \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k\int \frac{y^2}{(1+y^2)^{k+1}}\,dy \\ &= \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k\left(\int \frac{dy}{(1+y^2)^k} - \int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}}\right)\,.\end{aligned}$$

له دې کټمټوالی منځ ته راځي

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}} = \frac{y}{2k(1+y^2)^k} + \frac{2k-1}{2k}\int \frac{1}{(1+y^2)^k}\,dy\,.$$

له دې سره اوس د بدلون $y = \frac{x-a}{b}$ سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}} &= \frac{1}{b^{2n+2}}\int \frac{dx}{((\frac{x-a}{b})^2+1)^{n+1}}\\ &= \frac{1}{b^{2n+1}}\int \frac{dy}{(1+y^2)^{n+1}}\\ &= \frac{1}{b^{2n+1}}\left(\frac{y}{2n(1+y^2)^n}+\frac{2n-1}{2n}\int\frac{dy}{(1+y^2)^n}\right)\\ &= \frac{x-a}{2b^2n((x-a)^2+b^2)^n} \quad + \frac{2n-1}{2b^2n}\int\frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^n}\,.\end{aligned}$$

ترم

$$\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\,dx$$

کيدی شي د بدلون $y=(x-a)^2+b^2$ له لارې وشميرل شي، ځکه چې په صورت کې د y مشتق ځای لري:

$$\begin{aligned}\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\,dx &= \frac{c}{2}\int\frac{dy}{y^{n+1}}\\ &= \frac{c}{2(-n)y^n}\\ &= -\frac{c}{2n((x-a)^2+b^2)^n}\,.\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د انتيګرال

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+9)^2}\,dx$$

لپاره په ټوليز فرمول کې د اېښوونې وروسته د ډېرواره قطبونو سره د $a=0, b=3, c=2, d=1$ او $n=1$ سره راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{-2}{2(x^2+9)} + \frac{x}{18(x^2+9)} + \frac{1}{18}\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$$

او د بنه بدلون پسې

$$\frac{x-18}{18(x^2+9)} + \frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}\arctan(\frac{x}{3}) + c\right)$$
$$= \frac{x-18}{18(x^2+9)} + \frac{1}{54}\arctan(\frac{x}{3}) + c'.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د راشنلتوابعو انيګرالونه Integration rationaler Funktionen

د حقيقي ټوټه کسر ټوټه ونې له لارې کېدی شي يو حقيقي راشنل تابع د لاندې درې ساده بنسټيتيوپ جمعي

$$ax^n\,, \quad \frac{c}{(ax+b)^n}\,, \quad \frac{c(x-a)+d}{((x-a)^2+b^2)^n}$$

د $n \in \mathbb{N}_0\,,\ a,b,c,d \in \mathbb{R}$ سره انځور شي. د لومړنيو توابعو په مرسته کېدی شي د دې بنسټيتوابعو لپاره د په خوښه راشنلتوابعو لپاره لومړنی توابع وټاکل شي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د

$$\int r(x)dx, \quad r(x) = \frac{x^5+10x^3+5^2-x+25}{x^4+8x^2-9}\,,$$

د شمېرلو لپاره لومړی يو ټوټه کسر ټوټه ونه سرته رسوو.
د پولينوم وېش پسې ،

$$r(x) = x + \frac{2x^3+5x^2+8x+25}{x^4+8x^2-9}\,,$$

اود مخرج ضريبونو جوړولو پسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^4+8x^2-9=(x+1)(x-1)(x^2+9)\,,$$

لاس ته راځي

$$r(x)-x=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{cx}{x^2+9}+\frac{d}{x^2+9}\,.$$

که د اصلي مجراج سره ضب شي، نو لاس ته راځي

$$\begin{aligned}&2x^3+5x^2+8x+25\\ =\quad & a(x-1)(x^2+9)+b(x+1)(x^2+9)+(cx+d)(x^2-1)\\ & x^3(a+b+c)+x^2(-a+b+d)+x(9a+9b-c)+1(-9a+9b-d)\end{aligned}$$

او د ضریبونو د پرتلې $c=1$,$b=2$,$a=-1$ او $d=2$ له لاري.
یوګوني ترمونه کېدی اوس ساده انتیګرال شي:

$$\begin{aligned}&\int\frac{x^5+10x^3+5^2-x+25}{x^4+8x^2-9}\\ =\quad &\int x dx+\int\frac{-dx}{x+1}+\int\frac{2dx}{x+1}+\int\frac{xdx}{x^2+9}+\int\frac{2dx}{x^2+9}\\ &\frac{1}{2}x^2-\ln|x+1|+2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+9)+\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+c.\end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

دساین او کوساین د ضرب انتیګرالونه

د $a^2\neq b^2$ لپاره د زیاتون-یا جمعي قضیې څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx = -\frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c.$$

په ځانګړې توګه د ټولګنيزو يا تامعددې a, b لپاره انتيګارل په پريوديکي انټروال $[-\pi, \pi]$ باندې ورکيږي. د ټوټه انتيګرالونې په مرسته لاس ته راځي

$$\int \sin^n(ax)da - \frac{1}{na}\sin^{n-1}(ax)\cos(ax) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(ax)dx$$

$$\int \cos^n(ax)dx\ \frac{1}{na}\sin(ax)\cos^{n-1}(ax) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(ax)dx.$$

داسي کيدی شي اکسپوننت سوکښيو يا تل کم شي. د $n = 2$ لپاره په ځانګړې توګه لاس ته راځي

$$\int \sin^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + c$$

$$\int \cos^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + c.$$

په ځانګړې توګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx = \pi$$

د $n \in \mathbb{N}$ لپاره .
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

که د لومړۍ کټمټوالي د ښي اړخ مشتق ونیول شي، نو سړی لاس ته راوړي

$$\frac{1}{2}\cos\left((a-b)\,x\right) - \frac{1}{2}\cos\left((a+b)\,x\right).$$

د زیاتون – یا جمعي قضیه راکوي

$$\frac{1}{2}\left(\cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx) - \cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx)\right) =$$

$$= \sin(ax)\sin(bx),$$

کوم چي د کيڼ لور د انتیګرال سره سر خ وري.

د $\cos^2(ax)$ او $\sin^2(ax)$ لومړنی تابع کېدی شي د ټوټه انتیګرال سره وشمېرل شي. د بېلګي په توګه دی

$$\int \sin(ax)\sin(ax)\,dx$$

=

$$-\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(ax) - \int \left(-\frac{1}{a}\cos(ax)\right)\left(a\cos(ax)\right)\,dx$$

$$= -\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(ax) + \int \left(1-\sin^2(ax)\right)\,dx.$$

د $\int \sin^2(ax)\,dx$ پسي حل کونه غوښتونی لومړنی تابع راکوي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د کمپلکس تریګونومتیکي توابعو انتیګرالونه

Integration komplexer trigonometrischer Polynome

له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^{\mathrm{i}kx}\,dx = \frac{1}{\mathrm{i}k}e^{\mathrm{i}kx} + c, \quad 0 \neq k \in \mathbb{Z},$$

څخه د کمپلکس تريګونومتريکي پولينومونو لپاره لاس ته راځي

$$p(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{\mathrm{i}kx},$$

داسې چې
dass

$$\int p(x)\,dx = c + c_0 x + \sum_{0 \neq |k| \leq n} \frac{c_k}{\mathrm{i}k} e^{\mathrm{i}kx}$$

همداسې
sowie

$$\int_{\pi}^{\pi} p = 2\pi c_0$$

باور لري.

د اوېلر-مويورې فرمول په مرسته کېدی شي په دې توګه په خوښه پولينومونه په $\sin(kx)$ او $\cos(kx)$ کې انتيګرال شي.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x\,dx$$

شمdرلو ته د اوېلر-مويورې فرمول په مرسته انتيګرال په لاندې توګه ليکل کيږي

$$\frac{1}{16}\left(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}\right)^4 = \frac{6}{16} + \sum_{k \neq 0} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $2\pi\frac{6}{16}=\frac{3}{4}\pi$ د انتيګرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي.

بديلي کيدی شي ټوټه انتيګرال وکارول شي:

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= \int \sin x \sin^3 x\, dx \\ &= -\cos x \sin^3 x + 3\int \cos^2 x \sin^2 x\, dx \\ &= -\cos x \sin^3 x + 3\int \sin^2 x\, dx - 3\int \sin^4 x\, dx.\end{aligned}$$

که په $\sin^4 x$ انتيګرال ښی لور ته راوړل شي، نو د درجې کموالی راکوي

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x\, dx = -\frac{1}{4}\left[\cos x \sin^3 x\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx\,.$$

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx = \pi$$

په مرسته سره $\frac{3}{4}\pi$ هم د انتيګرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي
ليکونکي: هيوليګ، پفايل

تريګونومتريکي بدلونونه **Trigonometrische Substitutionen**

د لاندې بدلونونو په مرسته کېدی شي د ساده الجبري انتيګراليدونکو يوه لړۍ اکسپليځيت يا په ښه هڅرګنده توګه وشمېرل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$x = a\sin t: \quad dx = a\cos t\,dt \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$$
$$x = a\tan t: \quad dx = a/\cos^2 t\,dt \quad \sqrt{a^2 + x^2} = a/\cos t$$
$$x = a/\cos t: \quad dx = a\sin t/\cos^2 t\,dt \quad \sqrt{x^2 - a^2} = a\tan t$$

په بل حالت کې باید د ريښې د پروت محور متحولې لومړی په مربعيز تکميلېدونکي بڼه راړل شي.
ليکونکي: هيوليک، پفايل

د انتيګرال

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1 - x^2}\,dx$$

لپاره بدلون $x = \sin t,\ dx = \cos t\,dt$ او د پولو اعيارول $x = 0 \rightarrow t = 0$ او $x = 1/2 \rightarrow t = \pi/6$ راکوي

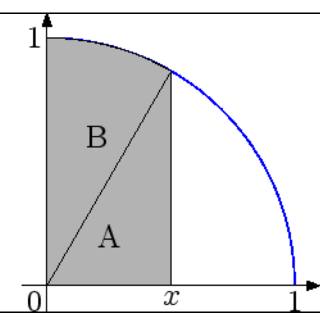
$$\int_0^{\pi/6} \cos^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}(\sin t\cos t + t)\right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

ناټاکلی انتيګرال دی

$$\int \sqrt{1 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c.$$

انتيګرال کيدی شي د يوه ساده هندسي يا ځمککچيز اند(فکر) سره هم وټاکل شي

لکه د څيرې ښخه چې ليدل کيږي، د $\sqrt{1 - x^2}$ د ګراف لاندې سطحه په دوه برخسطحو ودانه يا جوړه ده.



د درېګوډي سطحي مساحت $A = \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2}$ دی او د ګردی برخط يا قطاع مساحت د $t = \arcsin x$ کونج سره $B = \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\arcsin x$ ده. د دې سطحو د

(c) ketabton.com: The Digital Library

مساحت جمعه کیدل غوښتونې سطحه راکوي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د انتیګرال

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$$dx = 1/\cos^2 t\, dt$$

لپاره د بدلون $x = \tan t,$ څخه لاس ته راځي

$$\int \frac{dt/\cos^2 t}{\tan t/\cos t} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln|\tan\frac{t}{2}| + c,$$

د کوم سره چې اخرنی مساوات د ښی اړخ د مشتق نیولو له لارې ازمایل کېدی شی.
د بېرته بدلون له لارې لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln|\tan(\frac{1}{2}\arctan x)| + c.$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} &= \ln|\tan\frac{\pi}{4}| - \ln|\tan\frac{\pi}{8}| \\ &= \ln 1 - \ln\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right) \\ &= \ln(1+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د انتیګرال

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2-1}}$$

لپاره بدلون $y=(x-3)/2$, $dx=2dy$ راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}.$$

د پسي بدلون $y=\frac{1}{\cos t}$, $dy=\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt, \sqrt{y^2-1}=\tan t$ n سره لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1}{\cos t}+\tan t\right| + c,$$

د کوم سره چې اخرنی برابروالی د ښی خوا د مشتق نیوني له لارې ازمایل کیدی شي.
د په څټ یا معکوس بدلون پسې د

$$\sin t = \sqrt{1-(1/y)^2}, t = \arccos y = \arcsin\sqrt{1-(1/y)^2}$$

سره لومړنی تابع دلاس ته راځي

$$\ln\left|y+y\sin\left(\arccos\frac{1}{y}\right)\right| + c = \ln\left|y+y\sqrt{1-\left(\frac{1}{y}\right)^2}\right| + c$$

$$=\ln\left|\frac{x-3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+5}\right| + c.$$

ليکونکي: هيوليگ، کوپف

د ساین او کوساین راشنل توابع
Rationale Funktionen von Sinus und Cosinus

د بدلون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = \tan(t/2)$$

سره د يوه په خوښه راشنل تابع r لپاره لاس ته راځي

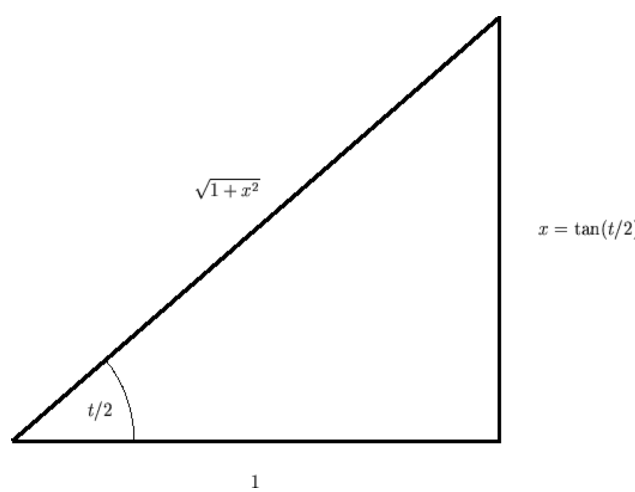
$$\int r(\cos t, \sin t)\, dt = \int r\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\right)\frac{2}{1+x^2}\, dx\, .$$

له دې سره تريګونومتريکي تابع کېدی شي په يوه راشنل انتيګرال واړوي، کوم چې د ټوټه کسر ټوټه ونې سره شمېرل کېدی شي.

ليکونکي: هيوليګ، اپرېښ

لکه د څيرې څخه چې ليدل کيږي، باور لري

$$\cos(t/2) = 1/\sqrt{1+x^2}\,, \quad \sin(t/2) = x/\sqrt{1+x^2}$$



له دې لاس ته راځي

$$dx = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2(t/2)}\, dt = \frac{1}{2}\,(1+x^2)\, dt$$

همداسې

$$\cos t = \cos^2(t/2) - \sin^2(t/2) = \frac{1-x^2}{1+x^2}\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin t = 2\cos(t/2)\sin(t/2) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

ليکونکي: هيوليګ، اپريبن

د بدلون $x=\tan(t/2)$ سره لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{1+x^2}{2x}\,\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} = \ln|\tan(t/2)| + c.$$

په اړونده تګه لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{1+x^2}{1-x^2}\,\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$= \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c.$$

د $x=\tan(t/2)$ د بېرته بدلون پسې لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1+\tan(t/2)}{1-\tan(t/2)}\right| + c.$$

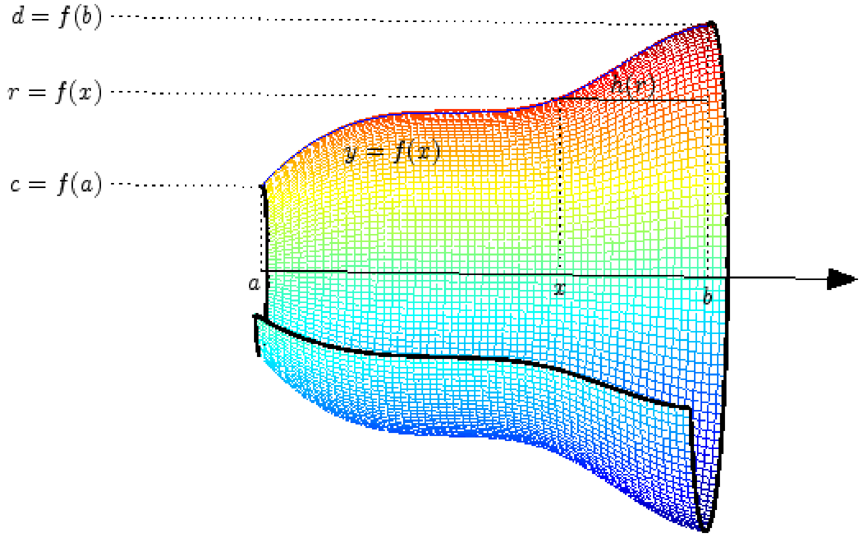
ليکونکي: هيوليګ، اپريبن

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څرخیدونو بدنونو ډکی یا حجم **Volumen von Rotationskörpern**

د V ډکی حجم د x په محور جوړ شوي بدن د تابع ګراف $r = f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$ د څرخون له لارې کېدی شي انتیګرېشن له لارې په ګردی ډوله غوڅي یا تقاطع باندې شمېرل کیدی شي:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx .$$



بدیلي کېدی شي د توتې پوښ باندې انتیګرال شي.

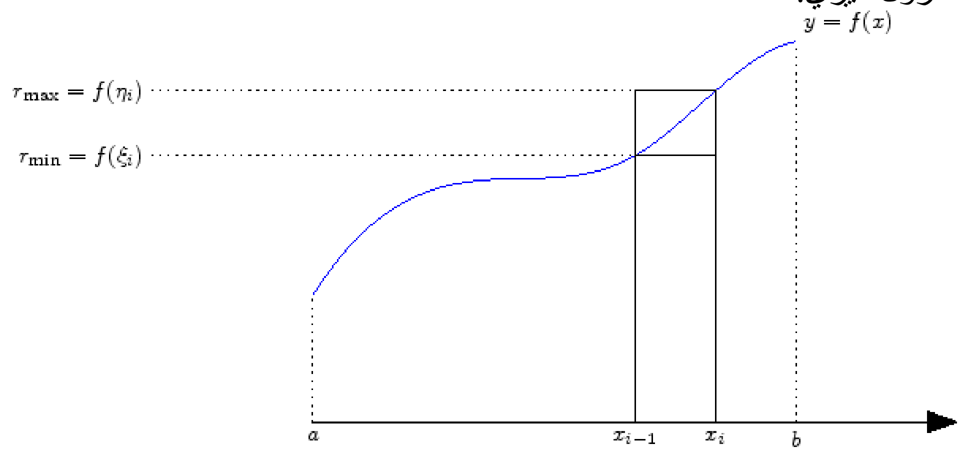
$$V = \pi c^2 (b - a) + 2\pi \int_c^d r \, h(r) \, dr ,$$

چیرته چې c همداسې d مینیمال همداسې ماکسیما وړانګه r او $h(r)$ په بدن کې خوندي توتې پوښ ټول جګوالی دی د وړانګې r سره. دا واریانت له ټولو د همغږیز وړانګې تابع f لپاره موخ وره ده.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړي فرمول د ښووني لپاره په څېره کي کښل شوی اپروکسیمیشن یا نږدېوالی کارول کیږي.



یوه ټوټه کوني Δ یوه انټروال $i = 1 \ldots n$, $[x_{i-1}, x_i]$ لپاره کېدی شي ډکی(حجم) د یوې ټوټې

له لارې د مینیمال وړانګې $f(\xi_i)$ سره او یوې ټوټې د ماکسیمال وړانګې $f(\eta_i)$ سره رابند شي. د ټول حجم V لپاره نو بیا باور لري

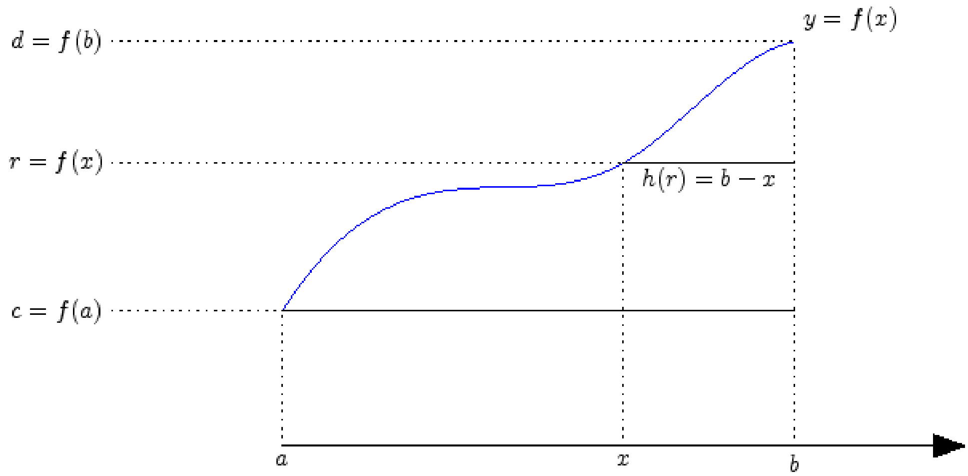
$$\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)^2 \Delta x_i \leq V \leq \pi \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)^2 \Delta x_i \ ,$$

د $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ سره. دواړه دباندني ترمونه د ریمن-جمعه ده، چې د انتیګرال ارزښت لور ته ځي، یعني باور لري

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

ددویم فرمول د ښووني لپاره لومړی نیول کیږي، چې f همغږیز جګېدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $dr = f'(x)\,dx$, $r = f(x)$ همداسې د $x = f^{-1}(r)$ سره لاس ته راځي

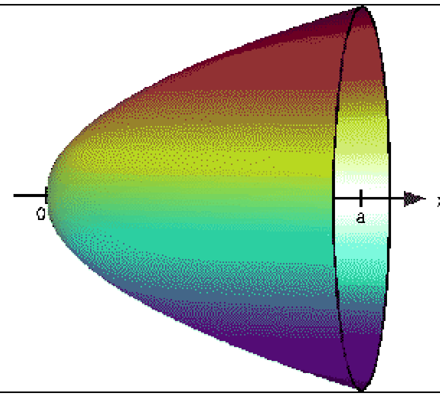
$$
\begin{aligned}
2\pi \int_{c=f(a)}^{d=f(b)} h(r) r\, dr &= \pi \int_a^b \underbrace{(b-x)}_{u} \underbrace{2f(x)f'(x)}_{v'}\, dx \\
&= \pi\, (b-x) f(x)^2 \Big|_a^b + \pi \int_a^b f(x)^2\, dx \\
&= \underbrace{-\pi (b-a) c^2}_{\text{innerer Zylinder}} + \pi \int_a^b f(x)^2\, dx\,,
\end{aligned}
$$

څه چې دويم فرمول په ګوته کوي.

د همغږيز تيټېدونکي توابعو لپاره کېدی شي په ورته توګه مخ ته ولاړ شو. په توليز حالت کې دا د همغږيزوالي ورشو د توته کوني له لارې لاس ته راځي

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

	دا څيره شوی پارابولوييد د کرښ يا منحني $y = \sqrt{x}$ د څرخون يا څرخېدو له لارې د x په محور څېره شوی .

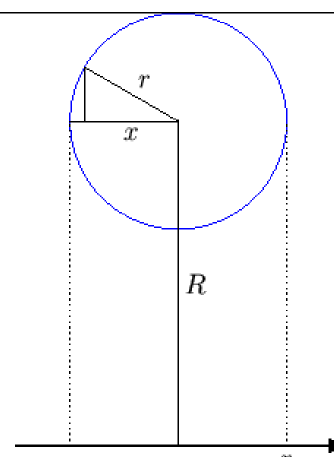
د څرخيدونکي بدن د څرخيدني قانون سره سم ډکی يا حجم دی

$$\pi \int_0^a \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{1}{2}\pi a^2 .$$

بديلي د توتي پوښ بادي انتيګرلوني له لارې لاس ته راوړي

$$2\pi \int_0^{\sqrt{a}} r\left(a - r^2\right)dr = 2\pi \left[-\frac{1}{4}\left(a - r^2\right)^2\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\pi a^2 .$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

	يو توروس (د ګردی يا داېرې کړی (Torus ديوې ګردی دڅرخون څخه منځ ته راځي د وړانګې r سره په يوه محور د منځ ټکي څخه په R واټن.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډکی یا حجم د دوه څرخیدونکو بدنونو د کمښت څخه شمیرل کیږي

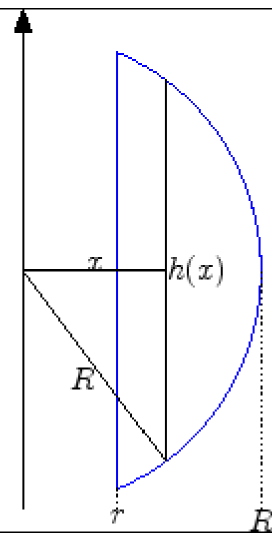
$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx - \pi \int_{-r}^{r} \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= 4\pi \int_{-r}^{r} R\sqrt{r^2 - x^2}\, dx .$$

د بدلون $x = r \sin\varphi$, $dx = r \cos\varphi\, d\varphi$ سره لاس ته راځي

$$V = 4\pi R r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\, r \cos\varphi\, d\varphi$$

$$= 4\pi R r^2 \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 R r^2 ,$$

ځکه چي $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2} .$$ لکه چي ښېره شوی یو له غونډاري د R په وړانګي په پراته محور د وړانګي r سره رابیله شوې توته ده.	

د دې لپاره چي ډکي یا حجم شمېرو، د وړانګي $x,\ r \le x \le R$ سره په توته پوښ انتیګرال نیولکیږي . د $R = 5, r = 3$ لپاره د $h(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V = 2\pi \int_r^R 2x\sqrt{R^2-x^2}\,dx = 2\pi\left[-\frac{2}{3}\left(R^2-x^2\right)^{3/2}\right]_r^R$$

$$= \frac{4}{3}\pi(25-9)^{3/2} = \frac{256}{3}\pi\,.$$

د یوې کږې یا منحني اوږدوالی **Länge einer Kurve**

د یوې کږې L اوږدوالی د ناپرېکېدونکي مشتقوړ پارامتریک کولو $t \mapsto p(t)$ سره، $a \le t \le b$ ، دی

$$\int_a^b |p'(t)|\,dt\,.$$

پّ ځانګړې توګه د یوې کږې لپاره په xy -سطحه د پارامتریک انځورونې $p(t) = (x(t), y(t))$ سره باور لري

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt\,.$$

په ځانګړې توګه دیوه تابع $y = f(x)\,,\ x \in [c,d]$ ګراف لاندې اوږدوالی لري

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx\,.$$

د $p(a)$ او $p(t)$ ترمنځ د کږو ټوټو اوږدوالی ،

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)|\,d\tau\,,$$

کیدی شي د کانونیکي کږې پارمتر په توګه وکارول شي. سړی داسې په نامه د کږې اوږدوالي پسې پارمتري کونه لاس ته راوړي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

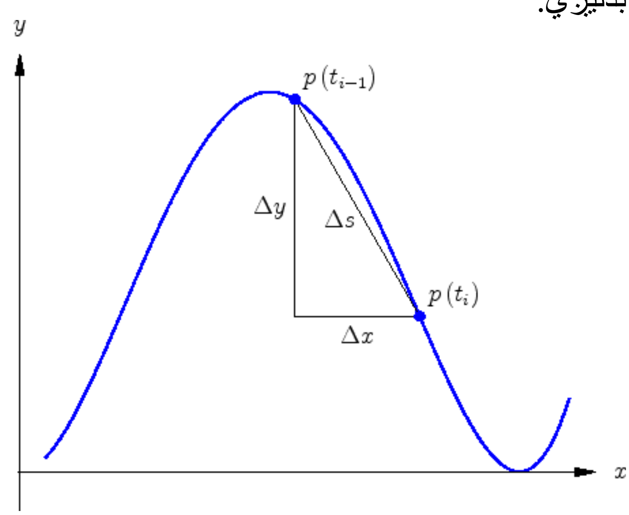
$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1 .$$

د نورمي تانجنت کرښې په بنسټ د کانونيکي پارمتري کوني لپاره باور لري

$$\int_C f = \int_0^L f(q(s))\, ds$$

د C د L اوږدوالي سره.
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د يوې مسطحې کرښې د اږودوالي شميرنې لپاره د پارامتر انټروال يپه ټوټو وېشل کيږي او يو برخه انټروال $[t_{i-1}, t_i]$ لپاره کږه د پای ټکو د ترونکرښې له لارې ځای بدليږي يا بدليږي.



د انتګرال د منځ ارزښت جملې سره بيا باور لري:

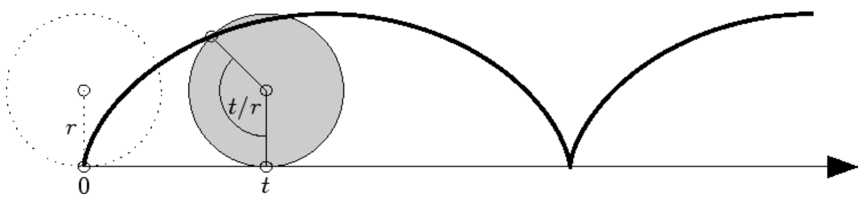
$$\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(p_1'(\xi_i))^2 + (p_2'(\eta_i))^2}\, \Delta t_i ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ سره . دا اخرنۍ ويينه يا افرده د ورکړ شوي انتيګرال د يمن-زياتون يا ـجمعې دی.
په ورته تګه د ډېرپراخېدونکي يا ډېربعديز ي کرږ لپاره د مشتق نورم د انتيګرال په بڼه راکوي.
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

که د r وړانګي سره يوه ګردۍ يا داېره د په محور ګرځوو يا وځرخوو، نو ژي ټکی يو ځيکلوييد تشريح کوي.



د سرچينې لپاره د پيل ټکي په حيث

$$\begin{aligned} x(t) &= t + r\cos(3\pi/2 - t/r) = t - r\sin(t/r) \\ y(t) &= r + r\sin(3\pi/2 - t/r) = r - r\cos(t/r) \end{aligned},$$

د $t \in [0, 2\pi r]$ سره ، د يوې ګرږ ليندۍ يو پارمتري کونه ده.
د ليندۍ اوږدوالی دی

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi r} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi r} \sqrt{(1-\cos(t/r))^2 + (\sin(t/r))^2}\, dt\,. \end{aligned}$$

د بدلون $s = t/r$, $dt = r\,ds$ او کټمټوالي
$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\,, \quad 1 - \cos(2\varphi) = 2\,\sin^2\varphi$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره لاس ته راځي

$$L = \quad r\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos(s))}\,ds = r\int_0^{2\pi} 2\sin(s/2)\,ds = 8\,r\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

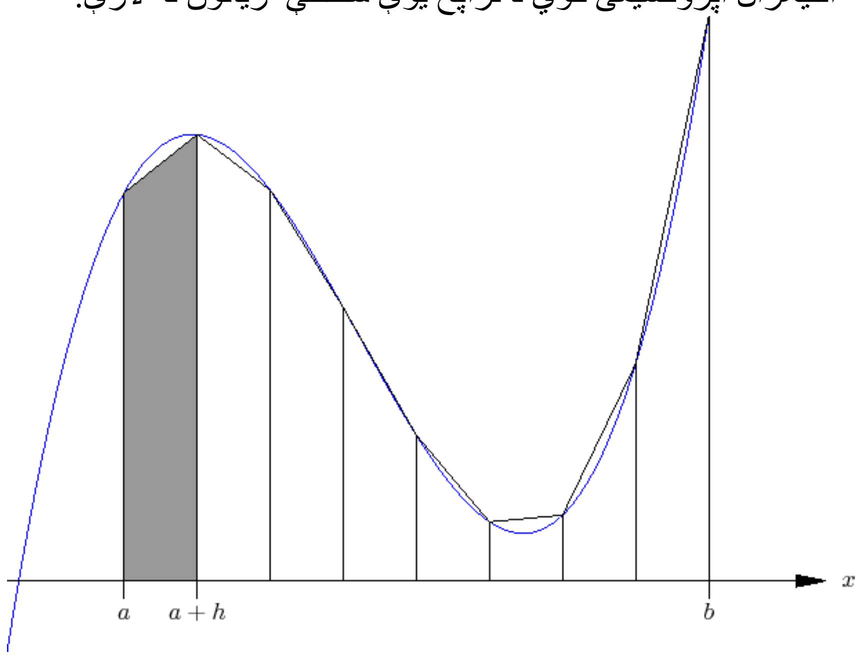
د ذوزنقي قانون **Trapez-Regel**

نږدیوالی

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx s_h f =$$

$$= h(f(a)/2 + f(a+h) + \cdots + f(b-h) + f(b)/2)$$

انتیګرال اپروکسیمی کوي د تراپخ یوې سطحې زیاتون له لارې.



د یوه دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ تابع د ناتیکاوي پاره باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_h f - \int_a^b f = \frac{b-a}{12} f''(r) h^2,$$

د $r \in [a,b]$ لپاره.

په ټيکه توګه ناټيکاوی د خويو يا هوارو توابعو لپاره ګاونديز يا اسيمپتوتيکي وده لري

$$s_h f - \int_a^b f = c_1 (f'(b) - f'(a)) h^2 + c_2 (f'''(b) - f'''(a)) h^4 + \ldots$$

له f او h څخه خپلواکې ثابتې c_j سره. له دې څخه لاس ته راځي، چې د تراپچ قانون د $(b-a)$-پريوديکي توابعو لپاره خورا دقيق دی. ناټيکاوی ګړندی د صفر په لور ځي نسبت هر h-توان ته.
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

په يوه ا نتروال ناټيکاوی دی

$$\frac{h}{2}(f(0) + f(h)) - \int_0^h 1 \cdot f = \int_0^h (t - h/2) f'(t)\, dt.$$

بيا ټوټه انټيګرالونه او منځ ا رزښت جملهې استعمال راکوي

$$-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h) f''(t)\, dt = \underbrace{-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h)\, dt}_{h^3/12}\; f''(r).$$

په ټوټه انتروال باندې د جمعې پسې سرې لاس ته راوړي

$$\frac{1}{12} h^3 \sum_{i=1}^{n} f''(r_i).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمعه کيدی شي د

$$n \min f'' \leq \sum f''(r_i) \leq n \max f''$$

له لارې اټکل شي. د ترمنځارزښت جملې پسې بالاخره لاس ته راځي

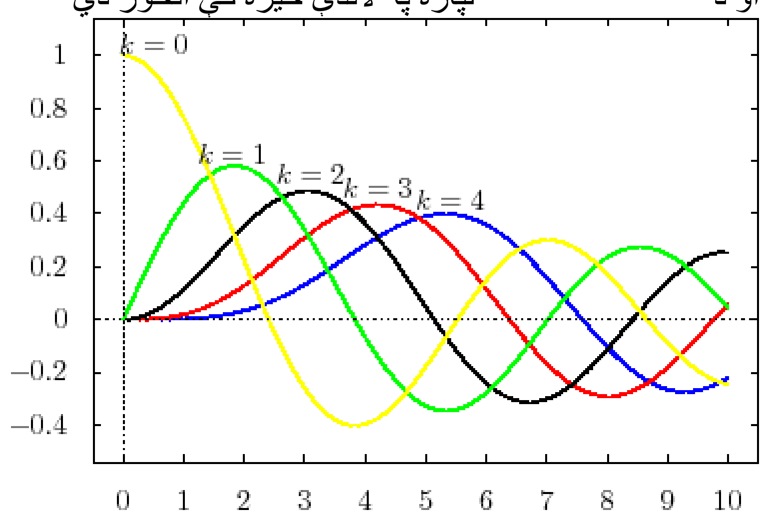
$$\sum f''(r_i) = nf''(r) = \frac{b-a}{h} f''(r)\,,$$

د يوه $r \in [a,b]$ سره.
د ګاونډ يا مجانب ناټيکاوي ودې ښوونه اوړده ده. دا د باقي غړي په تل ټوټه انټيګرالونه ولاړه ده او د ژی ترمونو په يوه مناسبه کارونه يا استعمال.
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د بسل-تابعBessel-Funktionen $\mathcal{J}_k$ د ټولګنيز k لپاره دا لاندې انټيګرال انځورونه لري

$$\mathcal{J}_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(kz - x\sin(z))}_{f(z)}\, dz$$

او د $k = 0, \ldots, 4$ لپاره په لاندې ډيره کې انځور دي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تراپخ قانو شميرلو سره شړی کاروي، چې

$$\frac{1}{2}\left(f(a)+f(a+2\pi)\right)=f(a)$$

او دا چې f جوړه دی. که ټکي

$$z_i=-\pi+\frac{1+2i}{2}\frac{2\pi}{n},$$

وټاکو ، نو جمعه

$$\sum_{i=0}^{n-1}f(z_i)=2\sum_{i=n/2}^{n-1}f(z_i)$$

دې جوړه شي.

لکه د $\mathcal{J}_1(2)$ لاندې نږدېونه يا اپرکسيميشن د $n=4,8,\dots 64$ ټکو سره ښايي، پولې ته تلنه فوقالعاده ګړندۍ ده.

n	
4	0.45464871341284084769800993295587
8	0.57655235602472460377030331810649
16	0.57672480775615774487465153090293
32	0.57672480775687338720244824226913
64	0.57672480775687338720244824226913

دا د ذوزنقي قانون جګ ټيکاوی د خوی پريوديکي انتيګرال لپاره يوپيک دی او کېدی شي د ناټيکاوي د يوهه ټيکې انځورونې ، د اويلر-ماکلورن-Euler-Maclaurinschen د جمعي فرمول مدلل کړای شي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس فرمول Gauß-Formel

د n –مې درجې یا نظم د ګاوس فرمول په نږدې بڼه یا ډول د یوه تابع انتیګرال ټاکي د انتیګرال د انترپولیشن پولینوم له لارې د n -مې درجې د لاګرانژ پولینومونو په صفرځایونو $x_1 < \cdots < x_n$ کې:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(x_i\right)$$

د w_i سره د لاګرانژپولینوم

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

په انتوال $[-1, 1]$ باندې.

فرمول د $< 2n$ Grad درجې پولینوم لپاره ټیک دی او د ټولو له مخه د تحلیلی توابعو لپاره خورا ټیک دی. ټول وزنونه w_i زیاتیز یا مثبت دي، او تکیه ځایونه x_i په انتګریشن انتروال $(-1, 1)$ کې پراته دي. دا د ګاوس پارامتر تر 10 -م نظم پورې جدولي شوی او په لاندې جدول کې ورکړ شوی دی

n	x_i	w_i
2	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1
3	0 $\pm\frac{1}{5}\sqrt{15}$	$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$
4	$\pm\frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$ $\pm\frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{36}\sqrt{30}$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{36}\sqrt{30}$
5	0 $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245-14\sqrt{70}}$ $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245+14\sqrt{70}}$	$\frac{128}{225}$ $\frac{161}{450}+\frac{13}{900}\sqrt{70}$ $\frac{161}{450}-\frac{13}{900}\sqrt{70}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس پارامتر x' او w' د خوښې انتګریشنانتروال $[a,b]$ لپاره د کرښنیز تراسفورمېشن له لارې لاس ته راځي:

$$x_k' = a + \frac{b-a}{2}(x_k+1), \quad w_k' = \frac{b-a}{2} w_k .$$

لومړی ښایو، چې نږدې ټاکنه د $< n$ Grad درجې د پلوینوم f لپاره ټیک دی. دا د لاندې څخه لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b p_k(x)\, dx \right) f(x_k) = \int_a^b \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p_k(x) f(x_k)}_{=q(x)} \, dx .$$

داچې p_k نسبت و ټکو x_k ته د لاګرانژ پولینومونه دي، q په دې ټکو کې و f ته انترپولیشنپولینوم دی او داسې له f سره همغږیز کیږي.

د ځانګړو ټکو ټاکلو له لارې کېدی شي حتی د $< 2n$ Grad درجې پولینوم f ټیک انتیګرال شي.

دې ته f د پولینوموېش په مرسته داسې لیکو

$$f(x) \qquad = p(x)s(x) + r(x)$$

د n Grad درجې لژندر-پولینوم p او د. $< n$ Grad دجې پولینومونه r او s.

که $p(x_k) = 0$ په پام کې ونیول شي، نو لکه پورته لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b p_k(x)\, dx \right) \left(p(x_k)s(x_k) + r(x_k) \right)$$

$$= \int_a^b \sum_{k=1}^{n} p_k(x) r(x_k)\, dx = \int_a^b r(x)\, dx .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له بلې خوا باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (p(x)s(x)+r(x))\,dx$$
$$= \int_a^b p(x)s(x)\,dx + \int_a^b r(x)\,dx$$
$$= \int_a^b r(x)\,dx\,,$$

ځکه چې p د $< n$ Grad درجې پولينوم ته اورتوګونال دی.
د وزن زاتيزوالی يا مثبتوالی د کتمتوالي څخه لاس ته راځي

$$w_k = \int p_k = \sum_i w_i\, p_k(x_i) = \sum_i w_i\, p_k(x_i)^2 = \int p_k^2\,.$$

د اخرنې تر مخ يا وړاندې مساوات د $p_k(x_i) = \delta_{k,i}$ له امله باور لري، او اخرنی، داچې p_k^2 $< 2n$ Gradدرجه لري، نو د ګاوس-فرمول له لارې ټيک انتيګرال کيدی شي.
د ګاوس-فرمول د روښانه ولو ته لاندې جدول د مختلفو انتيګراندونو يا انتيګرال کېدونکو نږدې ټاکل يا اپروکسيميشن ښايي.

n	$\int_1^1 e^{-x^2}\,dx$	$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$	$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\,dx$
1	2.000000	2.000000	0.968245
2	1.433062	1.848571	0.891006
3	1.498679	1.851976	0.879356
4	1.493334	1.851936	0.876417
5	1.493663	1.851937	0.875306

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرني انتیګرال کې ورو پولې ته تلنې دلیل په $x = 1$ کې زینګولاریتي ده.

د ګاوس-فرمول فقط خویو یا هوارو glatt (یو تابع خوی یا هوار تابع یو ماتماتیکي تابع دی، چې ناپرېکېدونکی او ناپای زیات مشتقوړ وي توابعو ته ډېر دقیق دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

ناڅرګند یا نا معلوم انتیګرال **Uneigentliches Integral**

د یو په یوه انتروال $[a, b)$ توته ډوله ناپرېکېدونکی تابع f لپاره کېدی شي د

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b-} \int_a^c f$$

له لارې د انتیګرال کلیمه په ناپای انتروالونو ($b = \infty$) او نامحدودو انتیګرالیدونکو($f(b) = \pm\infty$) وغزول شي.
په ورته توګه زینګولاریتي په لاندې یا په دواړو پولو مطالعه شي. په اخرني حالت کې باید پوله ارزښت د پرلپسې $c \to a+$, $d \to b-$ د ټاکنو څخه خپلواک وي.

د یوه ناټاکلي انتیګرال د شتون لپاره پوره کېدونکي د f مطلق انتیګرالوړوالی دی، دا په دې معناچې

$$\int_c^d |f(x)| \leq \text{ثابت}$$

د ټول برخه انترووالونو $[c, d] \subset (a, b)$ لپاره.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ناټاکلي انتیګرال د شمیرلو لپاره

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $b > 0$ لپاره ټاکي

$$\int_0^b e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^b = -e^{-b} + 1\,.$$

له دې سره سرړی لاس ته راوړي

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+1\right) = 1\,.$$

که پوله ارزښت ساده شمېرل کېدونکی وي، نو سړی پسې تړلي ناټاکلې پولې کاروي، داپه دې معنا چې سړی ليکي

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

او دا په راوړل شوې بېلګه کې.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ناټکلو انتيګرالونو

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^r}\,dx\,.$$

لپاره د بدلون $y = \ln(x)$, $dy = dx/x$
سره سړی لاس ته راوړي

$$\int_2^b \frac{1}{x(\ln(x))^r}\,dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{1}{y^r}\,dy = \begin{cases} \dfrac{(\ln(b))^{1-r} - (\ln(2))^{1-r}}{1-r}\,, & r \neq 1 \\ \ln(\ln(b)) - \ln(\ln(2))\,, & r = 1 \end{cases}.$$

په دې پسې د $b \to \infty$ لپاره پوله ارزښت ټيک هلته شتون لي، که $r > 1$ باور ولري. په دې حالت کې دی

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)^r}\,dx = -\frac{(\ln(2))^{1-r}}{1-r}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ناټاکلي انتیګرال

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx\,.$$

لپاره انتیګرالېدونکی په پورته انتیګرال پولې $x = \frac{\pi}{2}$ سیګولار دی. سړی د $0 < b < \frac{\pi}{2}$ لپاره لاس ته راوړي

$$\int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \left[-2\sqrt{\cos(x)}\right]_0^b = -2\sqrt{\cos(b)} + 2\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \left(-2\sqrt{\cos(b)} + 2\right) = 2\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ناټاکلي انتیګرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx\,.$$

لپاره

$$\arctan(x) + \ln(1+x^2)$$

د انتیګرالیدونکو بنسټ- یا ساده تابع دی. ناټیکه ایښوونه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\arctan(x) + \ln(1+x^2)\right]_{-b}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(2\arctan(b)\right) = \pi$$

د ناټاکلي انتیګرال لپاره راکوي. د تعریف سره سم د ناټاکلي انتیګرال پورته او کښته پولې باید یو له بل خپلواک و څېړل شي. داچې نه پوله ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{c\to-\infty}\int_c^0 \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to-\infty}\left(-\arctan(c)-\ln(1+c^2)\right)$$

او نه پوله ارزښت

$$\lim_{d\to\infty}\int_0^d \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{d\to\infty}\left(\arctan(d)+\ln(1+d^2)\right)$$

شتون لري، دا ناټاکلی انتیګرال

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+2x}{1+x^2}\,dx$$

هم شتون نه لري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د نامعلوم انتیګرال لپاره د پرتلې قضیه
Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale

که f د g لپاره یو مایورانت وي، داپه دې معناچې

$$|f(x)| \le |g(x)| \qquad a < x < b$$

باور لري، نو د g د مطلق انتیګرالوړوالي څخه د انتیګرال

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

شتون لاس ته راځي

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

فقط د پوله ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b-} \int_a^c f$$

شتون ترخیړنې لاندې نیول کیږي. په نورو حالتونو کې په ورته توګه مخ ته ځو.
تابع

$$r(c) = \int_a^c |f|$$

برابرغږیزه جګېدونکې ده او پورته لور ته د $\int_a^b |g|$ له لارې رابنده یا محدود ده. په دې پسې r د $c \to b-$ لپاره پولې ته تلونکی دی او له دې امله $\int_a^b |f|$ شتون لري.
تابع

$$s(c) = \int_a^c (f + |f|)$$

همم برابرغږیزه جګېدونکې ده او د $2\int_a^b |g|$ له لارې رابنده یا محدود. پسې s هم د $c \to b-$ لپاره پولې ته تلونکی دیاو له دې امله $\int_a^b (f + |f|)$ شتون لری.
له دې څخه د

$$\int_a^b f = \int_a^b (f + |f|) - \int_a^b |f|.$$

شتون لاس ته راځي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د پرتلع تلبع لپاره زیات وخت $f(x) = x^r$ کارول کیږي.
د $0 < a < b < \infty$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b x^r\,dx = \begin{cases} \dfrac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}, & r \neq -1 \\ \ln(b)-\ln(a), & r=-1\,. \end{cases}$$

دا ترم د $b \to \infty$ لپاره ټیک هلته پولې ته تلونکی دی، که $r < -1$ باور ولري، دا په دې معناچې انتیګرال

$$\int_1^\infty x^r\,dx$$

شتون ولري ټیک د $r < -1$ لپاره.

د $a \to 0+$ لپاره ټیک هلته پوله ارزښا لاس ته راځي، که $r > -1$ باور ولري، دا په دې معنا چې انتیګرال

$$\int_0^1 x^r\,dx$$

ټیک د $r > -1$ لپاره شتون ولري.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د دې لپاره چې د نامعلوم انتیګرال شتون د

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

په حیث وښایو ، سرې دا انتیګرال په دوه برخو توته کوي.

دا چې $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$ دی، نو لاندې انتیګرال شتون لري

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په انتروال $[1,\infty]$ د نامعلوم انتيګرال لپاره د ټوټه انتيګرالونې له لارې لاس ته راځي

$$\int_1^b \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\,.$$

د $b \to \infty$ لپاره لومړی ترم د $\cos(1)$ په لور ځي او دويم د پرتلې قضيې له مخې پولي ته ځي، ځکه چې

$$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \le \left|\frac{1}{x^2}\right|\,.$$

سره له دې چې د تابع کوم ورکړ شوی لومړی – يا بنسټيز تابع نه لري، کېدی شي د نامعلوم انتيګرال ارزښت وټاکي. .

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليک

ګاما تابع يا - فنکشن **Gamma-Funktion**

د

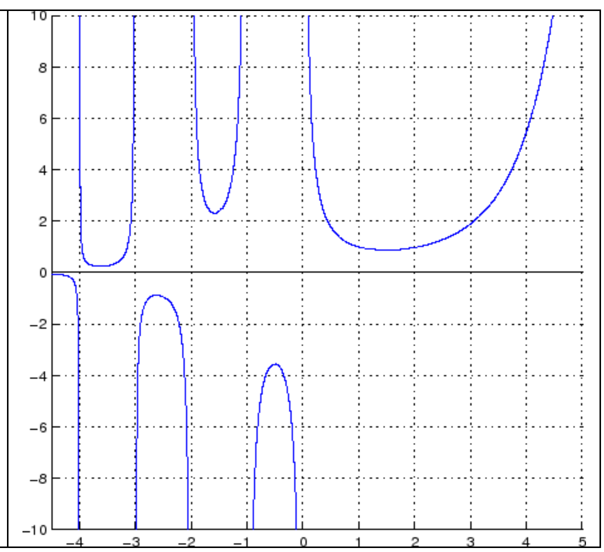
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt,$$

$$x \in (0,\infty)\,,$$

له اري تعريف شوی ګاما تابع فنکشنل مساوات پوره کوي

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,.$$

په ځانګړې توګه $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$. دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشنل مساواتو په مرسته کېدی شي گاما-تابع د کمیز پروت یا x محور لپاره هم تعریف کړی شي. لکه د جوړ شوي تابع گراف څخه چي لیدل کيږي، دا ساده قطبونه د $x = 0, -1, \ldots$ لپاره لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیگ

انتیگرال

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

فقط د $0 < x < 1$ لپاره پرابلم جوړوي. په دې حالت کې انتیگرال د $t^{x-1}e^{-t} \le t^{x-1}$ له امله د پرتلې قضیې له مخې پولې ته تلونکی دی.

انتیگرال

$$\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

هم د پرتلې قضیې په بنسټ شتون لري او اتکلونه

$$t^{x-1}e^{-t} \le t^{-2}$$

د پوره لوي t لپاره بسیا کوي.

د ټوټه انتیگرال سره لاس ته راځي

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_{t=0}^{\infty} + \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t}\, dt$$
$$= 0 + x\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt = x\Gamma(x)\,,$$

او له دې سره د پوره اینډکشن په مرسته او $\Gamma(1) = 1$ د $n \in \mathbb{N}$ لپاره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Gamma(n+1) = n!\,.$$

د ګاما تابع د ګاوس تعریف

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

د تابع یوه روښانه ونه په ټول $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$ اجازه ژاکوي.

.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د کوشي اصلي ارزښت **Cauchyscher Hauptwert**

د یوه په $x = c \in (a,b)$ کې زیګولار تابع f لپاره سړی

$$\mathrm{CHW}\int_a^b f = \lim_{h\to 0+}\left(\int_a^{c-h} f + \int_{c+h}^b f\right)$$

د کوشي اصلي ارزښت په ځېر تعریفوي

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د ټیپیکي بېلګې په ځېر د کوشي اصلې ارزښت

$$\mathrm{CHW}\int_{-a}^{a} x^k\,dx\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,,$$

شمېرل کیږي.

د $k=-1$ لپاره دی

$$\int_{-a}^{-h}\frac{dx}{x} + \int_h^a \frac{dx}{x} = \ln|h| - \ln|a| + \ln|a| - \ln|h| = 0\,.$$

د انتیګرالیدونکي د انتی سیمتري په دلیل د CHW ورکیږي په یو سیمتري انتروال لپاره.

د $k \neq -1$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-a}^{-h} x^k\,dx + \int_h^a x^k\,dx = \frac{1}{k+1}\left((-h)^{k+1} - (-a)^{k+1} + a^{k+1} - h^{k+1}\right)$$

د ناجوړه يا طاق k لپاره دا ا فاده يا ويينه او له دې سره د کوشي اصلي ارزښت صفر دی. د زياتيز يا مثبت جوړه(جفت) k لپاره دا د $2/(k+1)a^{k+1}$ په لور هڅيږي.
په ساده توګه د کوشي اصلي ارزښت د رګولار انتيګرال سره سره خوري يا يوعړيز کيږي. د $k = -2, -4, \dots$ لپاره برعکس يا د دې په خلاف هم انتيګرال او هم د کوشي اصلي ارزښت شتون نه لري.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د انتيګرال لاندې مشتقول **Differenzieren unter dem Integral**

انتيګرال $\int_a^b f(x,t)\,dx$ د ناپرېکېدونکې تابع f لپاره د t ناپرېکېدونکی تابع دی.
که f_t ناپرېکېدونکی وي، ن و باور لري

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b f_t(x,t)\,dx\,.$$

ليکونکي: هيوليګ،کنيش

د دې لپاره چې د

$$g(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$$

ناپرېکېدنه په ټکي $t_0 \in (c,d)$ کې وښايو، له دې څخه کار اخلو، چې f په ولاړګوډيز $[a,b] \times [c,d]$ کې برابرډوله ناپرېکېدونکی دی. هر $\varepsilon > 0$ ته له دې امله يو $\delta > 0$ شتون لري داسې چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f(x,t)-f(x,t_0)|<\varepsilon$$

باور لري د ټولو x او $|t-t_0|<\delta$ لپاره. د دې t لپاره نو دی

$$|g(t)-g(t_0)|\leq\int_a^b|f(x,t)-f(x,t_0)|\,dx<\varepsilon(b-a)\,.$$

له دې سره g ناپرېکېدونکی دی.

که f_t ناپرېکېدونکی وي، نو لاس ته راځي

$$\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=\int_a^b\frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}\,dx=$$

$$=\int_a^b\frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t+s)\,ds\,dx\,,$$

د کوم سره چې

$|f_t(x,t+s)-f_t(x,t)|<\varepsilon$ دی د ټولو $h<\delta\,.$ لپاره.

له دې امله کېدی شي د دفرنسل وېش کمښت و

$$\int_a^b f_t(x,t)\,dx=\int_a^b\frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t)\;ds\,dx$$

ته د

$$(b-a)\frac{1}{h}\,h\,\varepsilon$$

له لارې اټکل شي او د h سره د صفر په لور هڅيږي.

لیکونکي: بوسسلر، هیولیګ،کنیش

بسل- توابعBessel-Funktionen دا لاندې د انتيګرال انځورونه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t-nt)\,dt,\quad n=0,1,\ldots\ .$$

دا دا لاندې د دفرنځيال مساوات پوره کوي

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0\,.$$

دا کېدی شي د انتيګرا لاندې د دفرنځيال سره وازمايل شي. لومړی دی

$$J_n'(x)\quad=\quad-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \underbrace{\sin(x\sin t-nt)}_{v}\underbrace{\sin t}_{u'}\ dt$$

$$\frac{n}{\pi}\int_0^\pi \cos t\cos(x\sin t-nt)\,dt-\frac{x}{\pi}\int_0^\pi \cos^2 t\cos(x\sin t-nt)\,dt$$

$$J_n''(x)\quad=\quad-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t-nt)\sin^2 t\,dt$$

که $J_n'(x)$, $J_n(x)$ او $J_n''(x)$ د دفرنځيال مساوات په کيڼ لور کښيښول شي او له π سره ضرب شي، له کوم سره چې $\xi=x\sin t-nt$ کيښول شي، نو لاس ته راځي

Se

$$-x^2\int_0^\pi \cos\xi\sin^2 t\,dt-x^2\int_0^\pi \cos^2 t\cos\xi\,dt+nx\int_0^\pi \cos t\cos\xi\,dt+x^2\int_0^\pi \cos\xi\,dt-n^2\int_0^\pi \cos\xi\,dt$$

$$=\quad nx\int_0^\pi \cos t\cos\xi\,dt+x^2\int_0^\pi \cos\xi\,dt-n^2\int_0^\pi \cos\xi\,dt$$

$$=\quad n\int_0^\pi (x\cos t-n)\cos(x\sin t-nt)\,dt$$

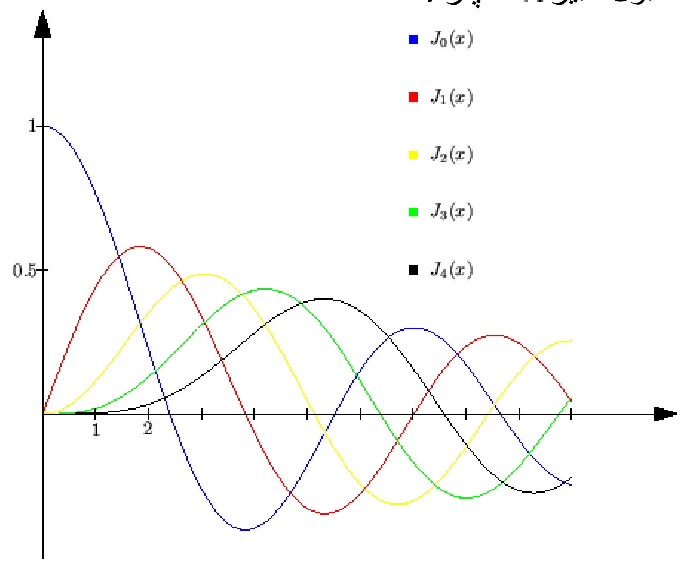
(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$n \sin(x \sin t - nt)|_0^\pi = 0$$

=

د ټول ګنیز n لپاره.



څېره 5 لومړني د بسل توابع بنايي .
لیکونکي: بوسسلر ، هیولیګ،کنیش

لاییبنیڅ-قانونLeibniz-Regel

د ناپرېکېدونکو مشتقوړ توابعو a, b او f لپاره دی

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x,t)dx + f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t)$$

لیکونکي: بوسسلر ، هیولیګ،کنیش

که انتیګرال له $g(t)$ سره وښوول شي او ځا په ځا کړو

$$V(t) = (a(t), b(t), t)\,, \quad U(c,d,e) = \int_c^d f(x,e)\ dx\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $g = U \circ V$ دی او فرمول د ځنځیري قانون له لارې لاس ته راځي:

$$g'(t) = U'(V(t))\,V'(t), \quad V' = (a', b', 1)\,.$$

له دې سره د U ټوټه مشتقونه دا لاندې دي

$$U_c(c,d,e) = -f(c,e),$$

$$U_d(c,d,e) = f(d,e), \quad U_e(c,d,e) = \int_c^d f_e(x,e)\,dx\,,$$

او د $g'(t)$ لپاره په افاده یا ویینه کې اینوولو سره غوښتنه راکوي.
لیکونکي: بوسسلر، هیولیګ،کنیش

د لایبنیځ فرمول سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dt}\int_0^{\sqrt{t}} e^{x^2/t}\,dx = \int_0^{\sqrt{t}} -\frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\,dx + e\frac{d}{dt}\sqrt{t}$$

$$= -\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

بیا مشتقول یې راکوي

$$\frac{d}{dt}\left(-\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}\right)$$

$$=$$

$$\int_0^{\sqrt{t}} 2\frac{x^2}{t^3}e^{x^2/t} + \frac{x^4}{t^4}e^{x^2/t}\,dx - \frac{e}{2t^{3/2}} - \frac{e}{4t^{3/2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2tx^2 + x^4}{t^4} e^{x^2/t}\, dx - \frac{3e}{4t^{3/2}}$$

بدیلي لومړی کېدی شي بدلون $x = \sqrt{t}y$, $dx = \sqrt{t}\, dy$ ولیکي او دا انتیګرال لاس ته راوړي

$$g(t) = \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy$$

د کره یا ځای په ځای پولو سره . نو کېدی شي

$$g'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2}\, dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t}\, dx$$

او

$$g''(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2}\, dy = -\int_0^1 \frac{1}{4t^{3/2}} e^{y^2}\, dy$$

$$= -\int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{4t^2} e^{x^2/t}\, dx$$

په ساده توګه وشمیرل شي.

د لومړي مشتق لپاره د فرمول مساوات روښانه نه دي، خو کېدی شي اسان د توټه انتیګرالوني سره و ازمایل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}} = \qquad -\frac{1}{2t}\int_0^{\sqrt{t}} \underbrace{x}_{v}\,\underbrace{\frac{2x}{t}e^{x^2/t}}_{u'}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

$$-\frac{1}{2t}\left[xe^{x^2/t}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{t}} + \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t}e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

$$= \qquad \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t}e^{x^2/t}\,dx$$

د دويم برابرون مشتق کېدی شي په ورته توګه و ښوول شي.
ليکونکي: هيوليګ،کنيش

په t پسې د انتيګرال د مشتق

$$\int_{t^2}^{e^t} \frac{\cos(tx)}{x}\,dx$$

لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int_{t^2}^{e^t} -\sin(tx)\,dx + \frac{\cos(te^t)}{e^t}\,\frac{d}{dt}e^t - \frac{\cos(t^3)}{t^2}\,\frac{d}{dt}t^2 \\ = \frac{1}{t}\cos(te^t) - \frac{1}{t}\cos(t^3) + \cos(te^t) - \frac{2}{t}\cos(t^3) \\ = \left(\frac{1}{t}+1\right)\cos(te^t) - \frac{3}{t}\cos(t^3)\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ،کنيش

د دفرنشل مساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(t) - \lambda u(t) = f(t)$$

یو زره یا کوچنی حل u_p کېدی شي دهوموجېن مساوات حل $\exp(\lambda t)$ د سوپر پوزېشن له لارې و کتل شي:

$$u_p(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)\,ds\,.$$

د لاینیخ فرمول په بنسټ دی

$$u_p'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s)\,ds = \int_0^t \lambda \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s)\,ds + f(t)\frac{d}{dt}t$$

$$= \lambda \int_0^t \lambda e^{\lambda(t-s)} f(s)\,ds + f(t)$$

په دفرنشل مساوات کې د $u_p(t)$ او $u_p'(t)$ د ایښوولو له لارې کېدی شي حل تصدیق شي.

لیکونکي: هیولیګ،کنیش

د نامعلومو انتیګرالونو مشتقول

Differenzieren uneigentlicher Integrale

که توابع f او f_t ناپرېکېدونکې وي او د $t \in (c,d)$ لپاره باور ولري

$$|f(x,t)| \le \psi(x), \qquad \int_0^\infty \psi < \infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f_t(x,t)| \le \varphi(x), \qquad \int_0^\infty \varphi < \infty,$$

نو کیدی شي د انتیګرال د نخښې لاندې مشتق ونیول شي:

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty f(x,t)\,dx = \int_0^\infty f_t(x,t)\,dx\,, \quad c < t < d.$$

په ورته توګه ویناوې د محدودو انتیګرالېدونکو سره د نامعلومو انتیګرالونو لپاره باور لري.

لیکونکي: هیولیګ،کنیش

د دې لپاره چې وښایو، چې

$$\int_0^\infty \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h} - f_t(x,t)\,dx$$

د $h \to 0$ لپاره د 0 په لور هڅیږي، انتیګرال توټه کیږي:

$$\int_0^\infty \ldots = \int_0^b \ldots + \int_b^\infty \ldots$$

دویمه زیاتېدونکې یا د جمعې غړی د نیونې له مخې د

$$\left|\int_b^\infty \frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t+s)\,ds - f_t(x,t)\,dx\right| \le \int \frac{1}{h}\,h\varphi(x)+\varphi(x)\,dx = 2\int_b^\infty \varphi(x)\,dx$$

له لارې اټکل شي. دا انتیګرال له $< \varepsilon$ کیږي. د پوره لویې b لپاره. د دې b لپاره لومړی زیاتېدونکی $< \varepsilon$ دی د پوره کوچني h لپاره.، ځکه چې د پای انتیګریشن انتروال لپاره د انتیګرال لاندې مشتق کېدی شي.

لیکونکي: هیولیګ،کنیش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاما تابع مشتقونه

$$\Gamma(t)=\int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}\,dx,\quad t>0\,,$$

دي

$$\Gamma^{(k)}(t)=\int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}(\ln x)^k\,dx\,.$$

مشتقیدنه په حق ده، ځکه چې انتیګرالېدونکي $f(x,t)=e^{-x}x^{t-1}(\ln x)^k$ یو
برابرډوله مایورانت لري:

$$|f(x,t)|\le e^{-x}\,x^{r-1}\,x^k\le ce^{-x/2},\quad x\ge 1$$

او

$$|f(x,t)|\le x^{1/r-1}|\ln x|^k\le cx^{1/(2r)-1}\,,\quad x\le 1$$

د $t\in[1/r,r]$ لپاره. د دې لپاره وکارول شو، چې

$$\lim_{x\to\infty}x^\alpha e^{-\beta x}=0,\quad \lim_{x\to 0+}x^\alpha|\ln x|^\beta=0$$

د ټولو $\alpha,\beta>0$ لپاره

لیکونکي: بوسسلر، هیولیګ،کنیش

دا د پارامتر په واک کې انتیګرال

$$g(t)=\int_0^\infty\sin(xt)\,\frac{dx}{x}$$

مطلق پولې ته تلونکی نه دی، له دې امله برابر ډوله مایورانت هم نه لري.
د لته مو د t پسې د انتیګرال لاندې یو فورمال دفرنځیشن یوه تضاد ته لاربښودوي.
فورمال مشتق

$$g'(t)=\int_0^\infty\cos(xt)\,dx$$

یو پولې ته نه تلونکی انتیګرال دی. له بلې خوا یو واریابل بدلون , $y=xt$
$dy=t\,dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

راکوي

$$g(t) = \int_0^\infty \sin(y)\,\frac{dy}{y} = \frac{\pi}{2}\,.$$

مشتق په دې لاس ته راوړنه کېمټ صفر دی.
لیکونکي: بوسسلر، هیولیګ،کنیش

د ۲۰۱۱ ز ک د مارچ لسم
برى د لوی څښتن سره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

ځلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

٣ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ١

٧ – انالیزې ٢

٨ – کربنیز الجبر

٩ - د شمیرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل انالیز

١٢ – وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

١٣ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کربنیز الجبر

١۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما ليکنې

onn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسيره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ – د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ – د شمير پوهنې ګډې وډې ليکنې

۲۲-   داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيګرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيونې يا حلونه يې

۲۳ – د شميرپوهنې انګريزۍ پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شميرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شميرپوهنې پښتو ډکشنري د شميرپوهنيزو ويبونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library