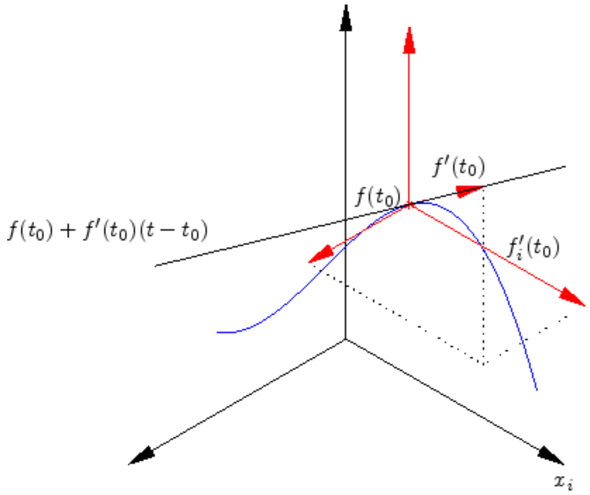
انالیز ۱ Analysis 1

د پوهنتون لپاره لکچرنوټونه

د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیز

یا انالیز دوه



لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتون د شمیرپوهنې یا ریاضي څا نګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتګارت پوهنتون [illegible] څانګه

Smakhan1946gmail.com

Ketabton.com

ژباړی: ډ اکتر ماخان (میرِي) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوی څښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلې او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې په لار د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

د کتاب نوم: د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیزې

لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتو د ریاضي څا نګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه

ژباړی: ډ اکتر ماخان میرې شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د چاپ لړې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ژباړې مننه

د دې لیکنې مل نورې خپرونې د شتوتګارت د پوهنتون د شمیرپوهنې د څانګې د لکچرونو لړۍ چاپ باندې پیل کیږي

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې- زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس- سره مرسته وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

بلواک یا تابع یا فنکشن ۱

کربښيزې توابع ۳

څلورۍ- یا مربع فنکشنونه یا – توابع ۴

همغږیز توابع ۶

برعکس – یا په څټ فنکشن ۹

د فنکشنونو یا توابعو سره شمیرنه ۱۱

ننوتي او وتلي - یا مقعر او محدبې توابع ۱۲
پولینوم ۱۵

د پولینومونو سره انترپولیشن ۲۱

د لاګرانج-پولینوم ۲۳

راشنل (کسرى یا نسبتي) توابع ۲۵
کمپلکس راشنل- یا کسري توابع ۲۷
په ټوټه مات ټوټه کونه یا تجزیه کونه ۲۸
د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه ۳۳
د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه ۳۹
د اویلر-مویورې فرمول ۴۰
تانجنت او کوتاجنت ۴۱
د ارکوس توابع ۴۲
هارمونیک لړځیدنې یا رپیدنې ۴۳
اکسپوننشل توابع ۴۹

ګټه یا ربح ۵۰

ټولیز توان توابع او لوګاریتم ۵۶

د ودې قانون ۵۷

د توان او لوګاریتم لپاره شمیرقوانین ۵۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

هاى پرابول تابع ۵۹

د يوې پرلپسې پوله ارزښت ۶۲

د کوشي قضيه ۶۶

همغږيز ه پولې ته تلنه ۶۸

د پرلپسې پولې ته تلنه ۷۰

نارېښتونی پوله ارزښت ۷۱

پوله اینفریور او پوله سوپریور ۷۲

پرتله کوونکې قضیه ۷۳

د يوې پرلپسې پنډغالي ټکی ۷۵

ورهولست- مودل ۷۶

ريکورژن ۷۶

د پيPi رکورزيو اپروکسيميشن ۷۸

د پرلپسيو يا ترادفونو ځانګړي ... ۸۲

د يوې لړۍ پرلپسې ۸۴

هندسي يا ځمککچيزې لړۍ ۸۶

هارموني لړۍ ۸۸

مطلق پولې ته تلونکې لړۍ ۸۹

مايورانت او مینورانت ۹۰

د وېش قضيه ۹۱

د ريښي قضيه ۹۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لايبنيځ قضيه ۹۴

د لړيو ځانګړي پوله ارزښتونه ۹۸

ناپرېکيدنه يا متماديت ۹۹

يو اړخيز ناپرېکيدنوالی يا متماديت ۱۰۲

د ناپرېکيدونکو توابعو لپاره ... ۱۰۴
منځ ارزښت جمله ۱۰۷
د دوه سطحو – يا برخو تلنلار ۱۰۹
د ناپرېکيدونکي تابع افرطيت ۱۱۰

برابرډوله ناپرېکيدنوالی ۱۱۱

په ټکي ډول پولې ته تلنه برابرارزښته ... ۱۱۲

د توابعو لړۍ پولې ته تلنه ۱۱۴

توابعو لړۍ ته مايورانت يا پورته پولې ۱۱۶

د اکسپوننشل تابع ضرب انځورونه ۱۱۷
د اکسپوننشال تابع لړۍ انځورونه ۱۱۹

مشتق(رابيليدنه)

د بنسټتوابعو مشتق يا رابيليدنه ۱۲۴

د مشتق يارابيليدنې کرښزوالی ۱۲۷

د ضرب قانون ۱۲۷

د وېش قانون يا لار ۱۲۹

ځنځيری لار يا – قانون ۱۳۰

ايمپليځيت مشتق نيول ۱۳۲

د لايبنيځ قاعده يا لار ۱۳۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

لوګاریتمي مشتق یا – رابیلیدنه ۱۴۱

د رولې جمله ۱۴۳

منځ ارزښت قضیه ۱۴۴

تولیزه (شوې) منځ ارزښت جمله ۱۴۵

لانداو-سیمبول ۱۴۷

د لو، پیتال قاعده یا لار ۱۴۸

کرښیز اپروکسمیشن (ورنږدېوالی) ۱۵۰

د ناټیکاوي وده ۱۵۱

د نیوټن تلنلار یا – قانون ۱۵۳

د تیلور پولینوم ۱۵۷
حقیقي د تیلور لړۍ ۱۶۱

اکسپوننشل تابع ۱۶۳
د اویلر فرمول ۱۶۵
د لوګاریتم تابع ۱۶۶
بینومیال لړۍ ۱۶۷
د تیلور –لړۍ مشتق او انتیګرال ۱۶۸

د تیلور-لړۍ ضرب ۱۷۰

د تیلور-لړۍ وېش ۱۷۲

د راشنل توابعو تیلور-ودیزېنه ۱۷۴

د یوې تیلور – لړۍ ۱۷۵

د معکوس تابع د تیولور ودیزیینه ۱۷۷
د تیلور ځانګړې لړۍ ۱۷۸
د پاد نږدې ارزښت شمیرنه ۱۷۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکستریما(افراطیت) ۱۸۱

د اکستریم – یا افرطي ازښتونو ازماېښت ۱۸۵

پولینوم ۱۸۶

اسیمپټوټي(یو په بل نه پرېوتونکي یا ګاونډیتوب) ۱۹۰

د راشنل- یا کسر توابعو ګاونډ یا اسیمپټوټي ۱۹۱
د کږو یا منحنیو خبرې یا بحث ۱۹۲
ریمن-انتیګرال ۱۹۸

د انتیګرال خویونه ۲۰۱

د انتیګرالشمیرنې منځ ارزښت جمله ۲۰۱

بنسټیز – یا ساده توابع ۲۰۳

د بنسټیزو توابعو لومړني توابع ۲۰۷

ټوټه- یا پارشل انتیګرالونه ۲۰۷

دلتا - تابع ۲۱۲

د متحولو – یا اووښتونو بدلون ۲۱۳

د متحولو – یا اووښتونو بدلون ۲۱۹

ساده راشنل انتیګرالونه د زیاتواره قطب سره ۲۲۲

د راشنلتوابعو انیګرالونه ۲۲۵

د ساین او کوساین د ضرب انتیګرالونه ۲۲۷

د کمپلکس تریګونومتیکي توابعو انتیګرالونه ۲۲۸

تریګونومتریکي بدلونونه ۲۳۰

د ساین او کوساین راشنل توابع ۲۳۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

د ځرخیدونو بدنونو ډکی یا حجم ۲۳۶

د یوې کږې یا منحني اوږدوالی ۲۴۱

د ذوزنقې قانون **۲۴۴**

د ګاوس فرمول ۲۴۸

ناڅرګند یا نا معلوم انتیګرال ۲۵۱

د نامعلوم انتیګرال لپاره د پرتلې قضیه ۲۵۵

ګاما تابع یا – فنکشن ۲۵۸

د کوشي اصلي ارزښت ۲۵۹

د انتیګرال لاندې مشتقول ۲۶۰

لایبنیځ-قانون ۲۶۳

د نامعلومو انتیګرالونو مشتقول ۲۶۸

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې،

چاپیدونکې او چاپ ته چمتو لیکنې ۲۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

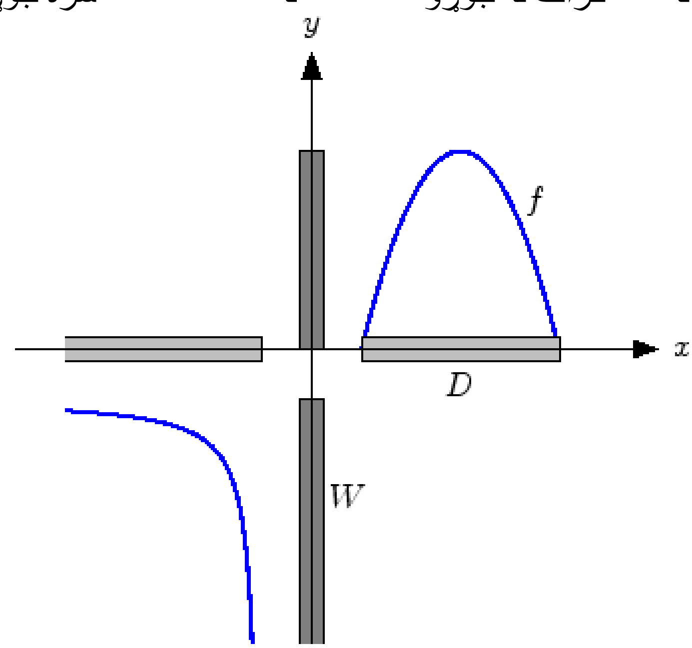
بلواک یا تابع (ټیک یې: فنکشن) Funktion

یو فنکشن یا بلواک یا تابع

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

د تعریف ورشو $D \subseteq \mathbb{R}$ هرتوکی x د ارزښت ډېری $W \subseteq \mathbb{R}$ څخه د یوه ارزښت $f(x)$ سره تنظیموي.

د f ګراف له جوړو (x, y) د $y = f(x)$ سره جوړ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د څیرې څخه چې لیدلکیږي، تعریفورشو (رنه خړه یا پرته) او ارزښت ورشو (تیاره خړه یا ولاړه) په x -محور همداسې په y -محور د ګراف پریوتل دي.

لیکونکي: هیولیګ، هورنر، کنش

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعریف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، لومړی دې د په ساده –یا لومړنیو توابعو رامنځ ته کیدونکې بندیزونه یا محدودوالی په پام کې ونیول شي. د تعریف ورشو د توکي لوګاریتم باید زیاتیز یا مثبت وي او د ارزښت ورشو ناکمیز یا نامنفي وي:

$3-x>0$ او $x \geq 0.$

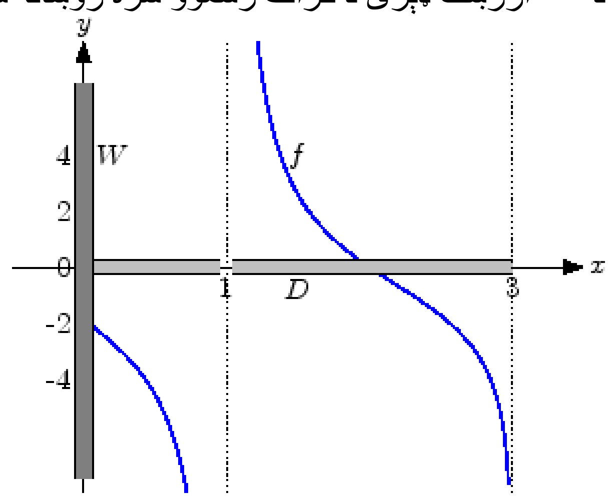
په همدې توګه باید ماتلاندې یا مخرج صفر نه وي، دا په دې معنا چې $x \neq 1$.

په ټولیزه توګه راکوي:

$$\mathrm{D} = [0,3)\backslash\{1\} = [0,1) \cup (1,3).$$

.

د f ارزښت ډېری د ګراف رسموو سره روښانه شي



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې f د $x \in (1,3)$ لپاره د $-\infty$ او $+\infty$ ترمنځ ټول ارزښتونه نيسي، $W = \mathbb{R}$ باور لري.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر،کنش)

لاندې جدول د ځو بنسټيزو توابعو تعريفورشو او ارزښت ورشو ښايي.

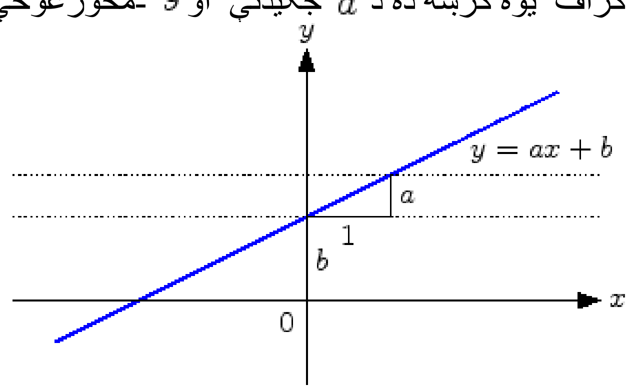
$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\ln x$	$(0,\infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{x\,:\,x=(2k+1)\pi/2,\ k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$	$[0,\infty)$

(ليکونکي: هيوليګ، هيورنر،کنش)

کرښيزفنکشنونه يا توابع

د يوه کرښيز فنکشن يا تابع
$f(x) = ax + b$

ګراف يوه کرښه ده د a جګيدني او y -محورغوځي(محورقاطع) b سره .



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره بديلي انځورونه د ټکي-جګيدنې – بڼه ده

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=a$$

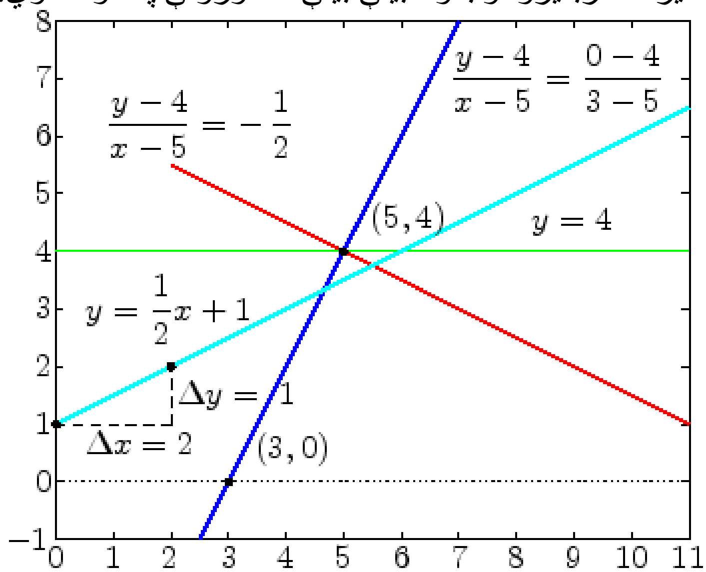
او د دوه-ټکو- بڼه

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},$$

چيرته چې (x_0,y_0) او (x_1,y_1) په کرښه پراته ټکي دي.

(ليکونکي: هيوليګ، هيورنر)

ځيره د کرښيزو توابعو بيلې بيلې انځورونې په کوته کوي:



ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

څلورى- يا مربع فنکشنونه يا - توابع

د يوه مربع تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

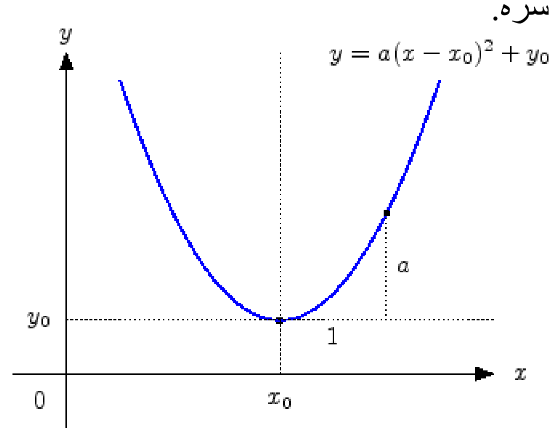
کراف د لاندې بڼې یو پارابول دی

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د ککرۍ- یا رأسټکي

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right).$$

سره.



پای

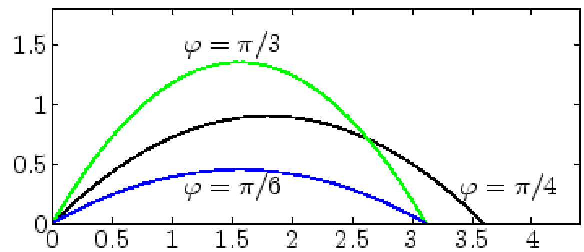
- که یو تن د یوه کونج φ لاندې په یوه v چټکتیا و توغول شي، د الوتنې لار دا لاندې پارابول

$$y = x\tan\varphi - \frac{g}{2v^2\cos^2\varphi}x^2$$

راکوي ، چیرته چې g د ځمکې بیره ده یا - تعجیل دی.

لاندې څیره: ماییل توغول یا غورځول د $v = 6$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مساوات د برابرېدوله خوزښت په x - او y -کمپوننتونو د بیلوني یا ټوټه کوني(که غواړې: تجزيې) څخه لاس ته راځي ، د v پيل چټکتيا سره او د ازاده غوزوني د خوزښت ته پام کوني له لارې:

$$x(t) = vt \cos\varphi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v\cos\varphi}$$

$$y(t) = vt \sin\varphi - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\Rightarrow y(x) =$$

$$= \frac{vx \sin\varphi}{v \cos\varphi} - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2\varphi} = x\left(\tan\varphi - \frac{gx}{2v^2 \cos^2\varphi}\right).$$

د غورځوني واټن دی

$$x = \frac{2v^2\cos^2\varphi}{g}\tan\varphi = \frac{v^2}{g}\sin(2\varphi).$$

دا د $\varphi = \pi/4 \mathrel{\widehat{=}} 45°$ لپاره ماکسيمال دی.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش

همغږيزې توابع **Monotone Funktion**

(c) ketabton.com: The Digital Library

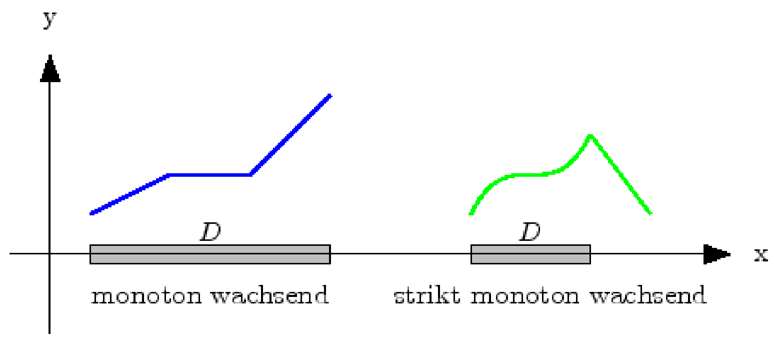
یو تابع f په یوه انتروال D (کره) همغږیز جګیدونکی دی، که وی

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \overset{(<)}{\leq} f(x_2), \quad x_k \in D,$$

همداسي که f ټوټه ډوله ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی، که وي

$$f'(x) \overset{(>)}{\geq} 0$$

د ټولو $x \in D$ لپاره تر ځانله یا جدا ټکي بوری



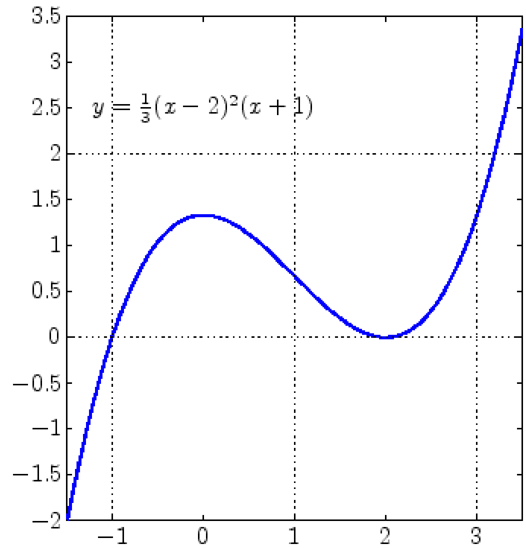
همغږیز جګیدونکي کره همغږیز جګیدونکي

په ورته توګه (کره) همغږیز ټيټيدونکی تعریفیږي.

یکونکي: هیولیک، هیورنر،کنش

تابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2(x+1)$ په $x = 0$ ځای کي یو جګ- یا ماکسیمال ټکی ($f'(0) = 0, f''(0) < 0$) لري او په $x = 2$ ځای ټيټ-یامینیمال ټکی ($f'(2) = 0, f''(2) > 0$) لري . د $x \leq 0$ او $x \geq 2$ لپاره تابع کره مونوتونجګېدونکي نخ ده او د $0 \leq x \leq 2$ لپاره کره مونوتون ټيټيدونکي نه ده.

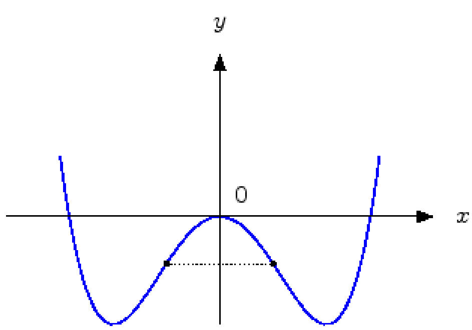
(c) ketabton.com: The Digital Library



یکونکي: هیولیک، هیورنر،کنش

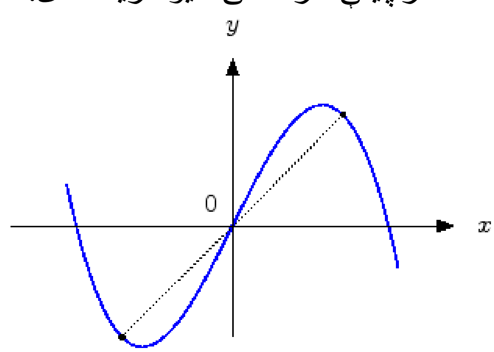
جوړه او ناجوړه – یا جفت او طاق توابع

یو تابع f جوړه دی، که $f(x) = f(-x)$ وي، دا په دې معنا چې که گراف د y - محور سره سیومتریک وي. یو ناجوړه یا طاق تابع $f(x) = -f(-x)$ دی، او گراف سرچینې سره ټکی سیومتریک دی.



gerade Funktion

جوړه یا جفت تابع



ungerade Funktion

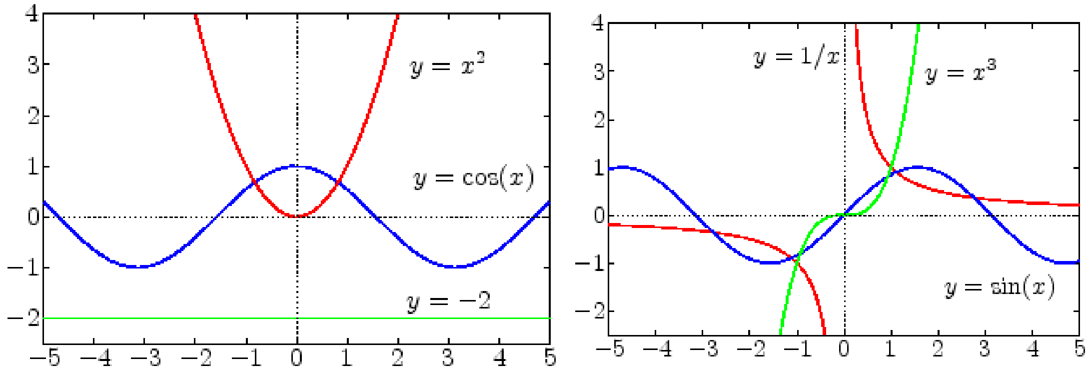
ناجوړه یا طاق تابع

د دوه جوړه توابعو ضرب جوړه تابع دی. برعکس د یوه ناجوړه یا طاق تابع ضرب د یوه جوړه تابع سره ناجوړه دی. د زیاتون یا جمعي او کمښت یا تفریق جوړولو سره د تابع تیپ یا ډول ساتلی پاتیږي.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې توابع يو کيڼ لور ته يو څو جوړه (جفت) او ښي لور ته يو څو ناجوړه (طاق) توابع ښايي.



د مناسب ترکيب جوړولو سره سرې نورې بېلګې لاس ته راوړي. نو توابع

$$f(x)=x^2\cos x-x^3\sin x,\qquad g(x)=-2+\frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x)=f(x)\sin x-g(x)x^3$$

ناجوړه دي.

پاي.

برعکس – يا په څټ فنکشن - تابع **Umkehrfunktion**

د يوه اينجکتيو (په کې -) تابع $f:D\to W$ د تعريفورشو D او ارزښت ورشو $W\subseteq\mathbb{R}$ سره د

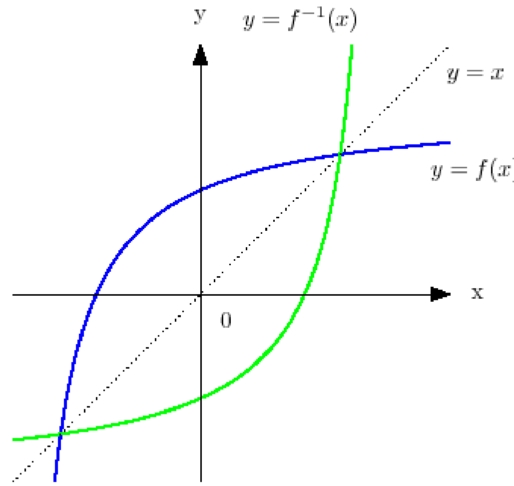
$$f^{-1}:W\to D\subseteq\mathbb{R},\ x\mapsto f^{-1}(x)$$

له لارې تعريف دی. له دې سره لاندې باور لري

$$y=f(x)\iff x=f^{-1}(y).$$

د برعکس توابعو تعريف ورشو د f ارزښت ورشو ده. د هغه ګراف $y=f^{-1}(x)$ د f د ګراف په لومړي کونجنيمی $(y=x)$ هنداره شوې څېره ده:

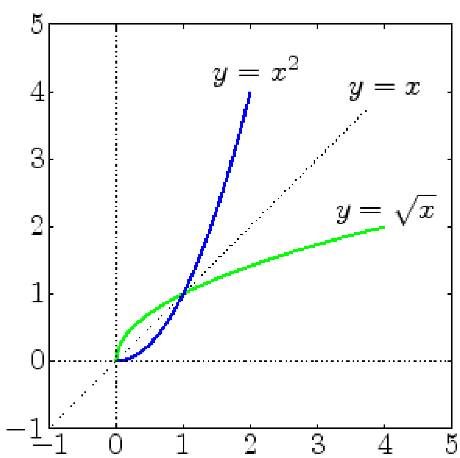
(c) ketabton.com: The Digital Library

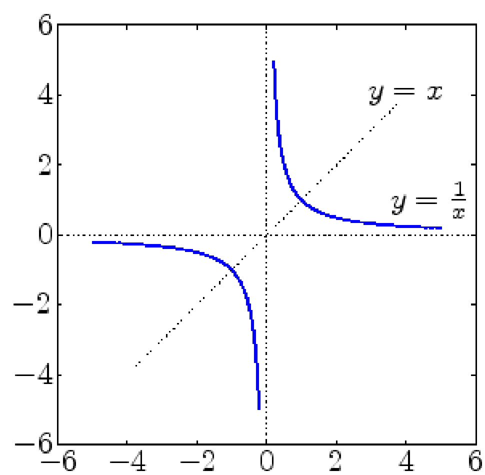


کيدی شي ليکندود $f^{-1}(x)$ مو په ساده توګه د معکوس ارزښت $f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ سره بدلولو ته لار ښود کړي. په ځانګړې توګه ، که د تابع x ارزښت ونه ليکل شي، دا اړيکې دې بايد روښانه وي، چې موخه مو څه ده.

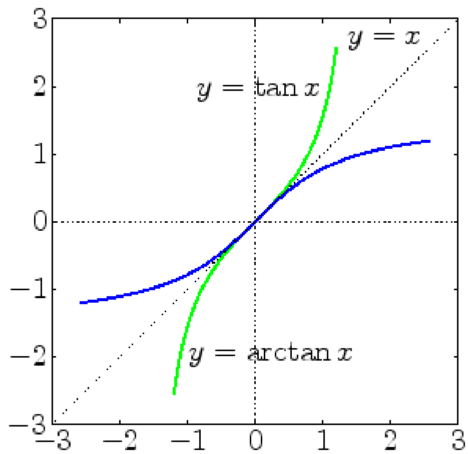
پای.

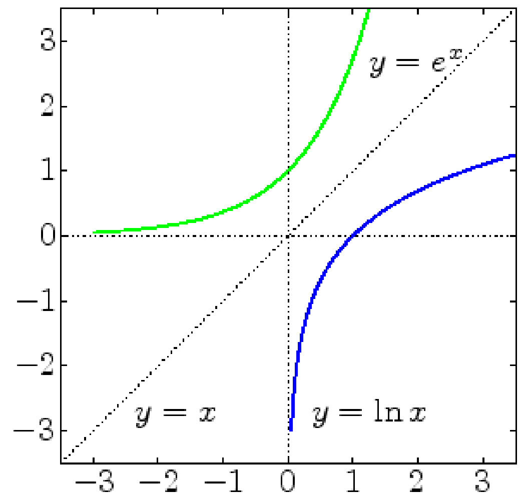
لاندې ځيرې د يو څو بيلګو برعکس - يا په ښې فنکشن يا تابع ښايي.





(c) ketabton.com: The Digital Library





په لاندې جدول کې هر اړونده تعريف ورشو وې ورکړ شوې دي:

f	D	f^{-1}	D
x^2	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$
e^x	$\mathbb{R}$	$\ln(x)$	$(0,\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{x\,:\,x=(2z+1)\pi/2\,,z\in\mathbb{Z}\}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

د فنکشنونو يا توابعو سره شميرنه Rechnen mit Funktionen

د توابعو کرښيز ترکيب تکي دوله تعريف شوی دی، دا په دې معنا چې په توابعو د اړونده عمليو له لارې:

$$(rf+sg)(x)=rf(x)+sg(x).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه ضرب fg او وېش f/g . په وېرش کې باید g د صفر سره برابر نه وي..
بالاخره

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

د دوه توابعو یو په بل پسې راوستل یا ځنځیرونه ښايي.
پای.

د بیلګي

$$f(x) = x^2 - 4, \qquad g(x) = x + 2$$

لپاره مختلفې ترڼې راکوي

$$(f + 2g)(x) = x^2 + 2x$$

$$(fg)(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x - 2, \qquad x \neq -2$$

په وېش کې تعریفتشځای $x = -2$ له منخه تلونکی یا د جګیدو وړ دی،

ځکه چې صورت یا ماتباندې $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ هم په $x = -2$ کې یو صفرځای لري.

د f او g یو په بل پسې ترڼه یا ځنځیرونه راکوي

$$(f \circ g)(x) = (x+2)^2 + 4$$

$$(g \circ f)(x) = x^2 - 2,$$

نو ترڼه یا عملیه $\circ$ کموتاتیو یا بدلوړ نه ده.

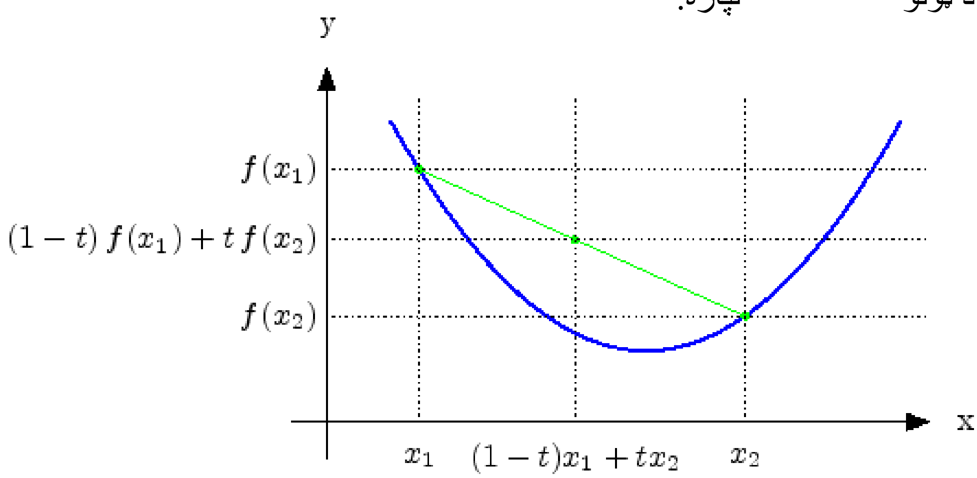
(c) ketabton.com: The Digital Library

ننوتي او وتلي - يا مقعر او محدبې توابع

يو تابع په يوه انټروال D کې(کره) ننوتی دی، که هر ټوټه ووني يا سيکانت د ګراف پورته لور ته پروت وي، دا په دې معناچې

$$f((1-t)\,x_1+tx_2)\overset{(<)}{\leq}(1-t)\,f(x_1)+t\,f(x_2)\,,\quad t\in(0,1)$$

د ټولو $x_i\in D$ لپاره.



که f دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ وي، نو (کره) ننوتنه د ټولو $x\in D$ لپاره د

$$f''(x)\overset{(>)}{\geq}0$$

سره تر هغه ځانله ټکي پورې ورته يا برابر ارزښته ده.

د ننوتو توابعو زياتون يا جمعه ننوتي ده. ترڼي يا عمليې $/,\cdot,+,-$ همداسې يو په بل پسې راوړنه يا ځنځيرونه $\circ$ په ټوليزه توګه ننوتوالی نه ساتي. بالاخره هر ننوتی تابع ناپرېکېدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه وتلی تابع هم تعریف کیږي. د وتلي تابع لپاره ټوټه وونی یا سیکانت د ګراف کښته لور ته پروت دی، دا په دې معنا چې د x - محور باندې هنداره شوی تابع $-f$ وتلی دی.

پای.

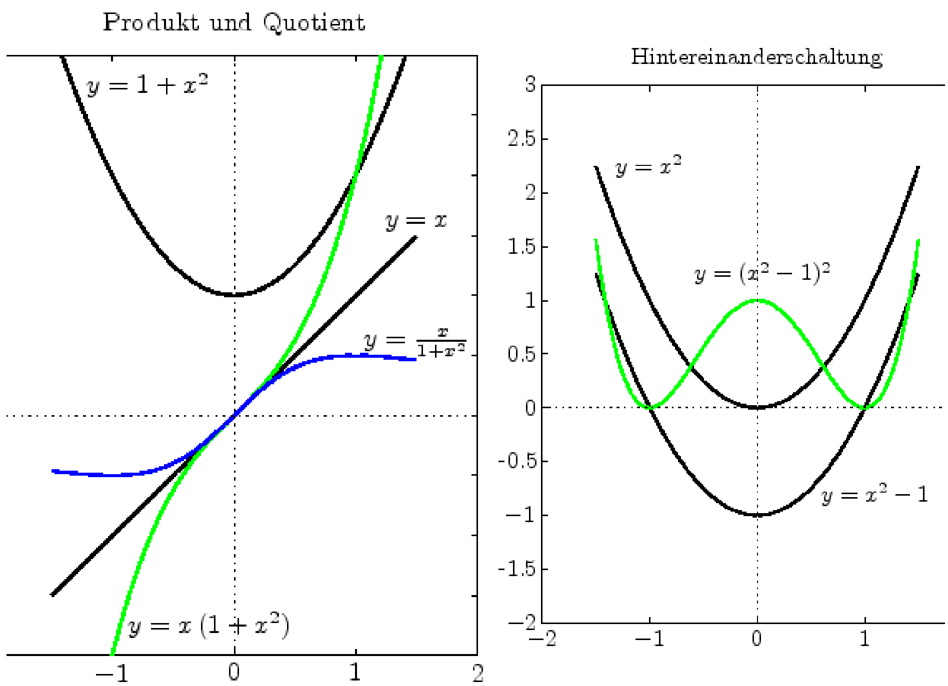
د دوه ننوتو فنکشنونو یا توابعو جمعه یا زیاتون د تعریف څخه ترلی لاس ته راځي:

$$\begin{aligned}
&(f+g)((1-t)x_1+tx_2) \\
&\quad= \quad f((1-t)x_1+tx_2)+g((1-t)x_1+tx_2) \\
&\quad\le \; (1-t)\,f(x_1)+t\,f(x_2)+(1-t)\,g(x_1)+t\,g(x_2) \\
&\quad= \; (1-t)(f+g)(x_1)+t(f+g)(x_2),
\end{aligned}$$

د کوم سره چې د نابرابرون ننوتوالی د f او g څخه کار اخستل کیږي.
نوری ترنې یا عملیې په ټولیزه توګه ننوتوالی نه ساتي، لکه چې لاندې بیلګې به یې وشايي.

یو په بل پسې ترنه ضرب او ویش

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دې لپاره چې په يوه ټکي کې د تابع ناپرېکدنوالی وښايو، ټاکو $c < a < x < b$.
نو دی

$$x = ta + (1-t)b$$

$$a = sx + (1-s)c$$

د $0 < s,t < 1$ سره. داچې ننوتی دی، نو باور لري

$$f(x) - f(a) \leq (1-t)(f(b) - f(a))$$

همداسې

$$f(x) - f(a) \geq \left(\frac{1-s}{s}\right)(f(a) - f(c)),$$

د $f(a) \leq sf(x) + (1-s)f(c)$ له امله.
د $x \to a$ لپاره s او t د 1 په لور هڅيږي، او له دې سره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$\lim_{x \to a}(f(x) - f(a)) = 0.$$

د $x < a$ لپاره ورته دليل راوړل کيږي.

پولينوم **Polynom**

د n درجې يو پولينوم p په لاندې بڼه ليکل کيږي

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

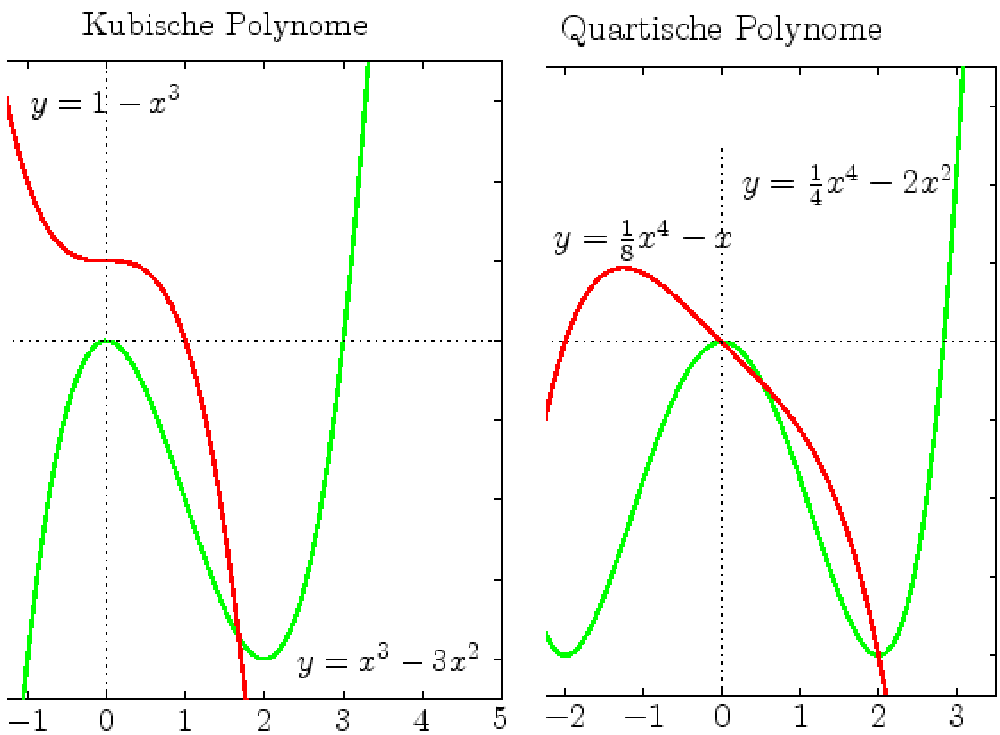
د $a_n \neq 0$ سره.

اووښتوني يا متحولي x او ضريب يا ځلووني a_k کيدی شي حقيقي – همداسې کمپلکس ګڼونه يا عددونه وي. په اړونده توګه د حقيقي همداسې د کمپلکس پولينوم څخه غږيږو.
ليکونکية: هيورنر او هيوليګ

لاندې څيرې مکعب ډوله ($n = 3$) او کوارتيک ډوله ($n = 4$) پولينومونه د څرنګوالي له لورې مختلف تابع ګرافونو سره ښايي.

کوارتيک پولينومونه مکعب پولينومونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



پولينوموېش Polynomdivision

پولينومونو p او q ته د $m = \text{Grad}\, q \leq \text{Grad}\, p = n$ سره يواځني
پولينومونه f او r شتون لري د
$$p = fq + r, \quad \text{Grad}\, f = n - m, \quad \text{Grad}\, r < m.$$
سره.

دا توټه ونه کیدی شي د وېش له لارې د باتي یا باقی سره وټاکل شي.

په ځانګي توګه د p د صفرځای t لپاره لاس ته راځي چې $p(x) = f(x)(x - t)$
دی د Grad $f = n - 1$. سره.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د q سره د p وېش ښخه لرو

$$\underbrace{a_n x^n + \cdots}_{p(x)} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \underbrace{(b_m x^m + \cdots)}_{q(x)} + p_{n-1}(x)$$

د یوه پاتي یا باقي $p_{n-1}(x) = a'_{n-1}x^{n-1} + \cdots$ سره.

که $m \le n-1$ وي کېدی شي بیا ووېشل شي:

$$p_{n-1}(x) = \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} q(x) + p_{n-2}(x)\,.$$

پروسه پرې کيږي، که د پاتي پولينوم درجه له m کوچنۍ وي، دا په دې معناچې
وروسته د $r = p_{n-(n-m+1)}\,.$ سره.
د تل بیا ضرب له لارې لاس ته راځي

$$f(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} + \cdots\,.$$

که t د p صفرځای وي، نو باور لري

$$0 = p(t) = f(t)(t-t) + r(t) = r(t)$$

او له دې سره $r(x) = 0$ ، ځکه چې $r < 1$ Grad دی.

د پولينوم وېش د ليکنيز وېش سره ورته مخ ته تلی شي.

د بيلګې په توګه د $p(x) = 9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2$
او $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$ لپاره لاس ته راځي

$$(\,9x^5 \;+\; 12x^4 \;+\; 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2\,) : (3x^2 + 2x + 1) =$$
$$= 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{r(x)}{q(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$
\begin{array}{r}
-(\,9x^5 + \;\; 6x^4 + \;\; 3x^3\;) \qquad\qquad \\
\hline
6x^4 + \;\; 7x^3 + 4x^2 \qquad \\
-(\;\; 6x^4 + \;\; 4x^3 + 2x^2\;) \qquad \\
\hline
3x^3 + 2x^2 + 4x \\
-(\;\; 3x^3 + 2x^2 + \;\; x\;) \\
\hline
3x + 2 = r(x)
\end{array}
$$

نو دی

$$\underbrace{9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2}_{p(x)} = \underbrace{(3x^3 + 2x^2 + x)}_{f(x)}\underbrace{(3x^2 + 2x + 1)}_{q(x)} + \underbrace{(3x + 2)}_{r(x)} .$$

د يوه پولينوم صفرځايونه او فاکتوري کول يا په ضريبونو ټوټه کول

يو د n درجې پولينوم p د څووالي يا تکرار سره ټيک z_k کمپلکس صفرځايونه لري او له دې سره کېدی شي په ورته کرښيزو ضريبونو يا فاکتورونو

$$p(z) = c(z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

وليکل شي د ثابتي c سره.

که p حقيقی يا قبيل وي، نو کمپلکس صفرځايونه په کنجوګيری جوړو $x_k \pm \mathrm{i}y_k$ رامنځ ته کيږي.

يو حقيقي په ضريبونو ليکل يا فاکتوره کول کېدی شي د کرښيزو فاکتورونو ترڅنګ د لاندې مربع فاکتورونه

$$(z - x_k - \mathrm{i}y_k)(z - x_k + \mathrm{i}y_k) = (z - x_k)^2 + y_k^2$$

هم ولري.

د دويمې درجې پولينوم صفرځايونو لپاره کيدی د منځشپې يا **ABC فرمول(دا د p,q -فرمول ته روته يا همهغسې دی) و کارول شي** او د دريمې او څلورمې درجې پولينومونه د کاردان فرمولونو Cardanischen Formeln له لارې د اکسپليځيت الجبری افادو يا ويېنو په توګه و ټاکل شی.

د جګو درجو پولينومونو لپاره بيا په ټوليزه توګه نومريکي تلنلارې کارول کيوي. که بيا يو صفرځای معلوم وی، نو کېدی شي د ا ړونده کرښيز فاکتورونې يا ضريبونې له لارې

(c) ketabton.com: The Digital Library

و وېشل شي.
$q(z) = p(z)/(z - z_1)$ او $z_2, \ldots, z_n$ د $n - 1$ درجې د پولينوم د د
صفرځايونو په توګه وټاکل شي.
د الجبر بنسټيزې جملې په اساس د $1 \geq$ Grad درجې کمپلکس پولينوم يو صفرځای
لري . د پرلپسې پولينوموېشنې د صفرځايونو سره
اړونده کربنيز صريبونه يا فاکتورونه له دې سره ضريبونه راکوي.

که p فقط حقيقی صريبونه ولري، نو باور لري

$$\overline{p(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} p_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} p_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} p_k \overline{z}^k = p(\overline{z})$$

يعني د يوه صفرځای z_0 لپاره هم $p(\overline{z_0}) = \overline{0} = 0$ دی.

د $p(z) = z^3 - 5z^2 + 9z - 5$

په ضريبونو ليکل يا فاکتوره کول ټاکو. پيژنو، چې $z_1 = 1$ يو صفرځای دی او يو د
پولينوم وېش سره لرو
$p(z)/(z - 1) = z^2 - 4z + 5.$

د دې مربع پولينوم صفرځايونه د منځشپې فرمول له مخې دي
$z_{2,3} = 2 \pm i.$

د دې په تعقيب کمأبکس فاکتورونه لاندې ده

$$p(z) = (z - 1)(z - 2 - i)(z - 2 + i).$$

حقيقی په ضريبونو ليکنه يا صريبونه د دواړو اخرني فکتورونو د ټولګې څخه لاس ته
راوړو همداسې سيده د مربع تکميلونې له لارې:

$$z^2 - 4z + 5 = (z - 2)^2 + 1,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې

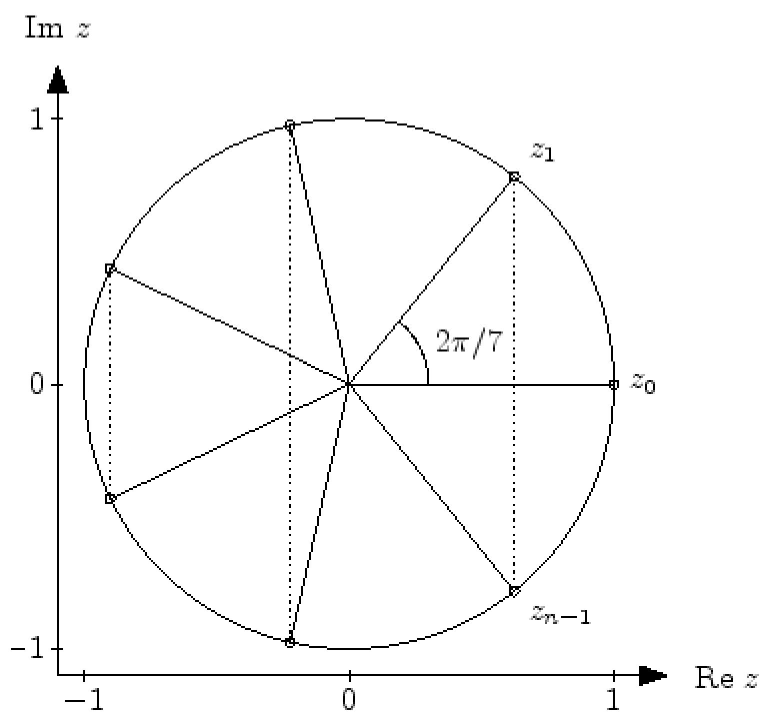
$$p(z) = (z-1)((z-2)^2+1).$$

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر، کنش

د $p(z) = z^n - 1$ صفرځايونه n -م يوونرېښي يا واحدجذرونه دي
$z_k = \exp(2k\pi\mathrm{i}/n), k = 0, ..., n-1.$

له دې سره کمپلکس فاکتورونه لاس ته راځي

$$p(z) = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \exp(2k\pi\mathrm{i}/n)).$$



د کمپلکس کنجر.ګيري صفرځايونو ټولګه يا يوځای کونه حقيقي فاکتوري کونه راکوي.

د جوړه n لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(z) = (z-1)(z+1)\prod_{k=1}^{n/2-1}\left(z^2 - 2z\cos(2k\pi/n) + 1\right)$$

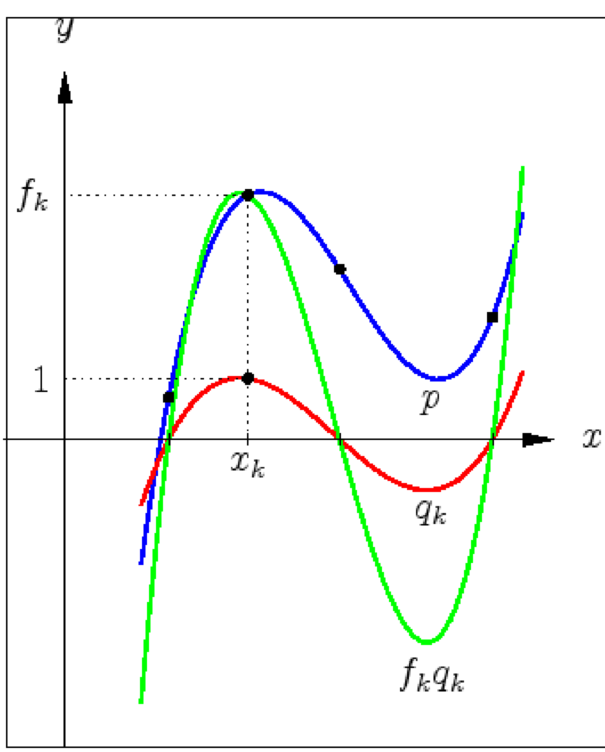
او د ناجوړه یا طاق n لپاره

$$p(z) = (z-1)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(z^2 - 2z\cos(2k\pi/n) + 1\right).$$

پای.

د پولینومونو سره انترپولیشن

په $n+1$ کي تابع ا رزښتونه f_k جوړه په مختلف تکیه ځایونو $x_0, \ldots, x_n$ کیدی شی یواځني د یوه $\leq n$ Grad درجي پولینوم له لاري انترپولی شي:



$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

دا انترپولیشن پولینوم کیدی شي د لاګرانج – بڼه

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

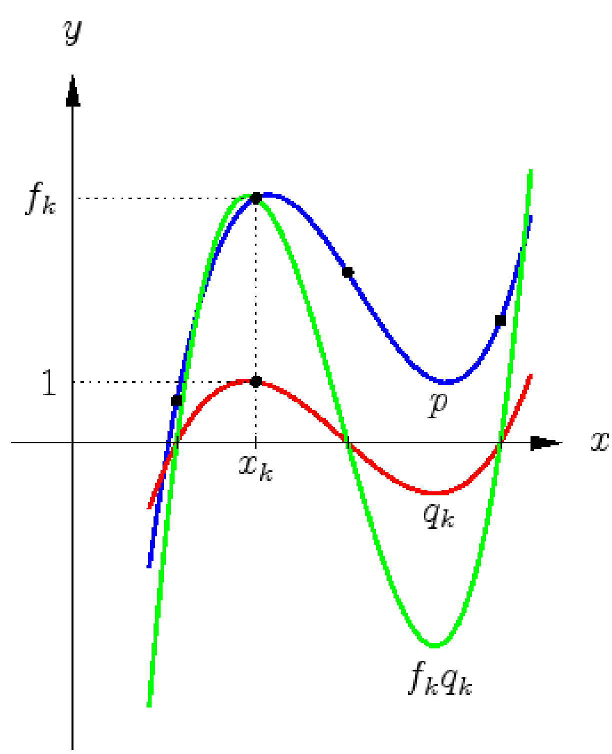
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x),$$

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \dots, n\,.$$

دا انترپوليشن پولينوم کيدی شي د لاګرانج – بڼه

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x), \quad q_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j},$$

انځور شي.



پولينوم q_k د لاګرانج-پولينوم بلل کيږي او په ټکي x_k کې ارزښت 1 لري او په نورو ټولو ټکو x_j کې يې ارزښت صفر دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$q_k(x_j) = \delta_{k,j}$$

د کرونيکر-سومبول δ سره.

د لاګرانج-پولينوم

$$q_k(x_j) = \delta_{j,k}$$

پوره کوي او له دې سره لاس ته راځي

$$p(x_j) = \sum_k f_k \delta_{j,k} = f_j \,,$$

د انترپوليشن شرايط ټول پوره دي.

د دې لپاره چې يواځنوالی وښايو، چې يو بل انترپوليشنپولينوم $\tilde{p}$ شتون لري، کمښت را اخلو يا تر څېړنې نيسو.

$p - \tilde{p}$.

دا (لږتر لږه) $n+1$ صفرځاونه لري(د انترپوليشن کېدونکي ځايونه x_k)، مګر (زيات له زياته) د n درجو. له دط سره بايد کمښت کټمټ وي، نو پولينومونه سره توپير نخ لري.

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

په اکويديستانت يا برابرواټنيز تکيه -ځايونو $x_k = kh$ د f_k ارزښتونو توابعو ټيک ګرافيکي انځورونې ته کېدی شي مکعبيز انترپوليشن وکارول شي. له دې سره په تکيه-ځايونو $x_{k+1/2} = (k+1/2)h$ منځ ارزښتونه د

$$f_{k+1/2} = (-f_{k-1} + 9f_k + 9f_{k+1} - f_{k+2})/16$$

له لارې اپروکسيمی شي. دا پروسه تکراريږي، تر هغز چې پوره داتا منځ ته راشي.

د –ټکو -فرمول وزنونه

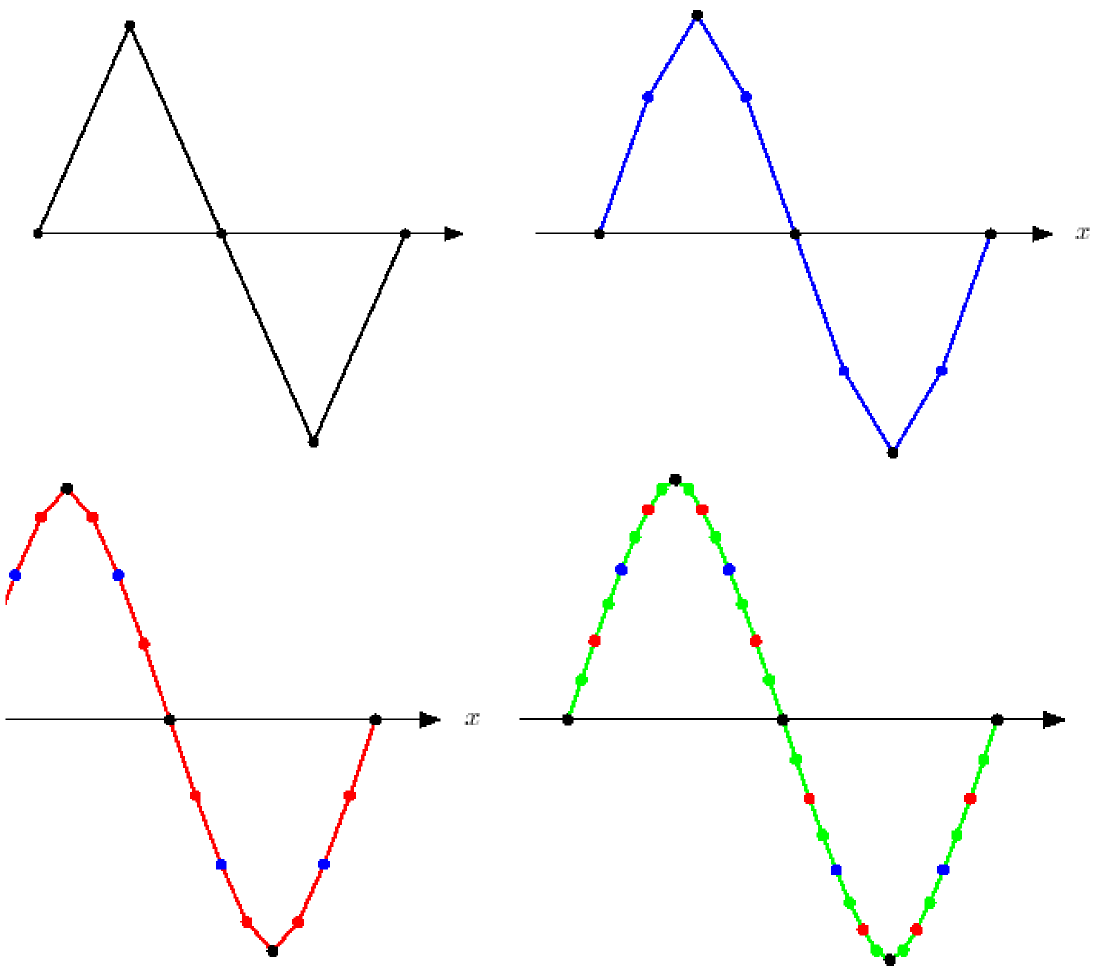
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{9}{16}, -\frac{1}{16}$$

په تکيه-ځايونو $x_{k+1/2}$ د لاګرانژ-پولينوم ارزښتونه دي.
د بېلګې په بتوګه

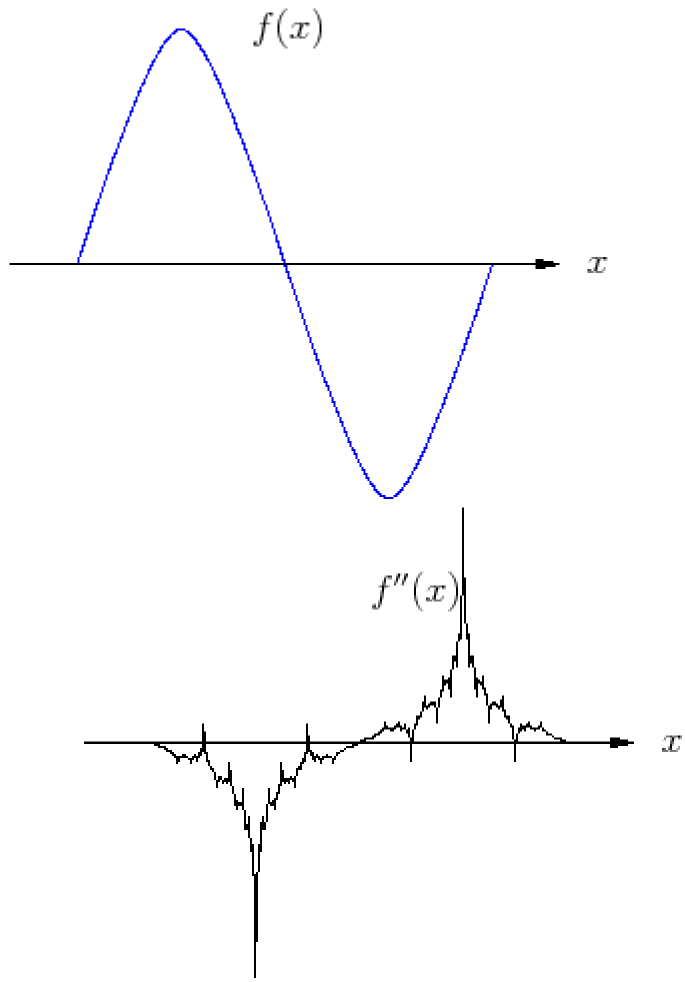
$$-\frac{1}{16} = \left(\frac{x-kh}{(k-1)h-kh}\frac{x-(k+1)h}{(k-1)h-(k+1)h}\frac{x-(k+2)h}{(k-1)h-(k+2)h}\right)\Big|_{x=(k+1/2)h}.$$

دی.
د سيمتري په بنسټ او دا چې ضريبونه بايد سيمتريک شي(د ثابتو داتا انترپوليشن) ، بې له شمېرنې نور ضريبونه راکوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

ځيره وتونداتا ښايي او د 4 -ټکو-انترپوليشن د درې ځله کاروني يا استعمال له لارې د منځ ته ارغلي ساين تابع اپروکسيميشن . په حقيقت کې دا لاندې کيڼ ښودل شوى پوله تابع خوی اغيز لري. مګر په هر حالت فقط لومړى مشتق ناپرېکيدونکی دی.



ښى ګرافيک وېشلی کمښت له لارې ورنږدې يا نږدې دويم مشتق د اته واره انترپوليشن پسې ښايي. سرې د ګراف فراکتال fraktalen (فراکتال: لاتين: مات) خويونه پيژني.

راشنل (کسرى يا نسبتي) توابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو ريښتونی تابع r د صورت درجې m او مخرج درجې n سره د دوه پولينمونو وېش دی:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}.$$

دا انځوونه نا ټوټه ووني بلل کيږي، که p او q کوم ګډ کرښيز ضريب يا فاکتور ونه لري. د مخرج صفرځايونه راشنل تابع r د تعريف تشځايونه دي او د قطبځايونه بلل کيږي. د دوی نظم د صفرځايونو ډېرځلوالی ښايي.

اووښتوني يا متحولې x او ضريبونه a_k , b_k کېدی شي حقيقي يا کمپلکس وي.

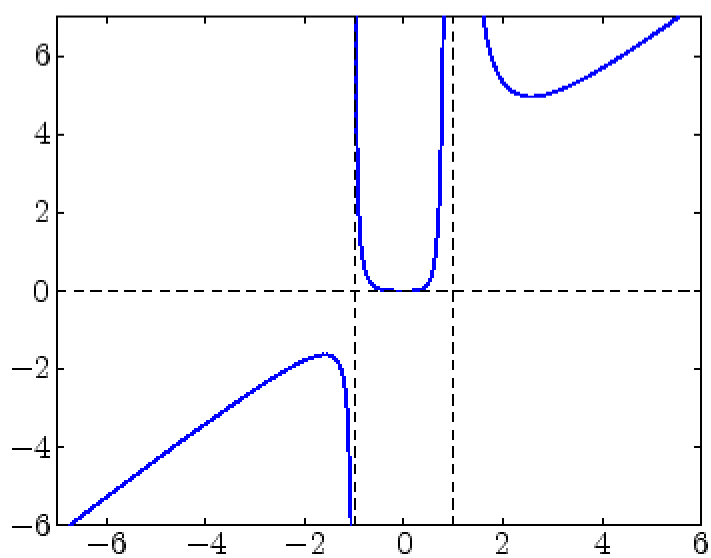
اړوند سړی د حقيقي يا کمپلکس راشنل تابع څخه غږيږي.

لليکونکي : اېپ، هيوليګ

تابع

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$$

تابع يو سادهقطب په $x = -1$ کې لري او دبل پول په $x = 1$ کې.



(c) ketabton.com: The Digital Library

سرې له تابع f ځخه درک کوي، چې په یوه ساده صفرځای کې مخنخښه بدلوي او په یوه ډبل صفرځای کې مخنخښه تغیر نه خوري.

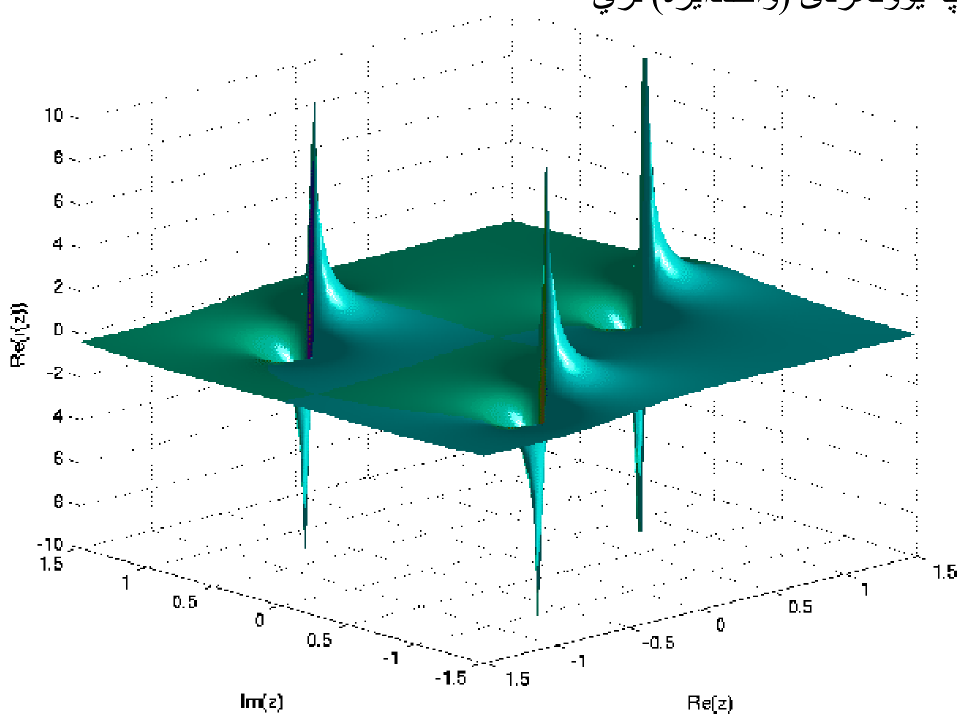
کمپلکس راشنل- یا کسري توابع

$$r(z) = \frac{z^2}{z^3 - 1}$$

درې صفرځایونه

$$z_1 = 1, z_2 = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = e^{-2\pi i/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

په یوونګردی (واحددایره) لري



ځیره د r د ګراف رییل - او ایماجینار برخه ښایي. له دې سره د رنګوښنه (که چېرې رنګه وه) د r د مطلق ارزښت له لارې تاوکل شوې.

) لیکونکي: اپپ،هیورنر، کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه مات ټوټه کونه یا تجزیه کونه **Partialbruchzerlegung**

یو د m_j نظم راشنل تابع r د n مختلفو صفرځایونو z_j سره ،

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_n)^{m_n}$$

کیدی شي په لاندې ټوټه شي

$$r(z) = f(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z), \quad r_j(z) = \frac{a_{j,1}}{z - z_j} + \ldots + \frac{a_{j,m_j}}{(z - z_j)^{m_j}},$$

دلته f د $d = \mathrm{Grad}\ p - \mathrm{Grad}\ q$ Grad درجې پولینوم دی ($f = 0$ ، که $d < 0$ وی). راشنل توابع r_j د r په قطبځایونو کې اصلي برخې بلل کیږي. دا د $r(z)$ لوېدنه تشریح کوي د $z \to z_j$ لپاره. پولینوم f کیدی شي د پولینوموېش له لارې وشمېرل شي:

$$p = fq + g, \quad \mathrm{Grad}\ g < \mathrm{Grad}\ q\,.$$

دلته g د p په q باندې وېشنې پاتې یا باقي دی. ضریبونه $a_{j,\nu}$ کیدی شي د z^k د ضریبونو د پرتله کونې له لارې په کټوټوالي

$$p(z) = q(z)\left(f(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z)\right)$$

وټاکل شي.

د بدیل په توګه د اصلي برخو ټاکلو لپاره د پوله ارزښت متود هم کارول کیدی شي.

د قطبونو د خوراجګو ضریبونو لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{j,m_j} = \lim_{z \to z_j} (z - z_j)^{m_j} r(z).$$

د یوه نظم $(m_j > 1)$ قطبخای کې نه شي کېدی ضریبونه $a_{j,1}, \ldots, a_{j,m_j-1}$ سیده د پولې ارزښت په توګه وټاکل شي. سړی کړی شي دا اوس شمیرل شوی ترم $a_{j,m_j} / (z - z_j)^{m_j}$ کم کړي او د رکورسیو متود وکاروي.. یو ضریب پرتله کونه د همدا اوس شته ترمونو په پام کې نیولو هم شونې ده.

پوله ارزښت کېدی شي وټاکل شي، داسې چې د r په مخرج کې ضریب $(z - z_j)^{m_j}$ لرې برېښوول شي او بیا z_j په پاتې کسر یا ـمات کې ځا په ځای شي. په ځانګړې توګه باور لري

$$a_{j,1} = \frac{p(z_j)}{\prod_{k \neq j} (z_j - z_k)}$$

د ساده قطب ځایونو $z_1, \ldots, z_n$ لپاره.

لیکونکي : اپ، هیورنر

د ساده قطبځایونو ($m_j = 1$) لپاره به ټوټه کونه منځ ته راشي. د پولینوم وېش پسې راشنل تابع منځ ته راځي

$$r(z) - f(z) = \frac{g(z)}{q(z)} = \frac{g(z)}{(z - z_1) \cdots (z - z_n)},$$

د کوم سره چې پولینوم $q(z)$ او $g(z)$ ګډ پروېشونی یا مقسوم علیه ونه لري، نیسو ، چې ټول z_j مختلف دي، او $\text{Grad } g < n$ باور لري.

د ټوټه کسر ټوټه کوني سره د برابر اېښوونې وروسته

$$\frac{a_1}{z - z_1} + \cdots + \frac{a_n}{z - z_n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a_j = a_{j,1}$ سره او د q د ضربول سره سړی د $g(z)$ د لاګرانژ ـانځورونه لاس ته راوړي

$$g(z) = \sum_{j=1}^{n}\left(a_j\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z-z_k)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left[a_j\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z_j-z_k)\right]\underbrace{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{z-z_k}{z_j-z_k}}_{q_j(z)}$$

دا په ې معناچې د $q_j(z_k) = \delta_{j,k}$ له امله په ګوډيزه نوکانو کې د $g(z_j)$ ازښتونه

$$a_j = g(z_j)/\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z_j-z_k).$$

دي. له دې سره لاس ته راځي

په ورته توګه د جګو درجو قطبځایونه هم کار ول کېدی شي. دا مګر تخنیکي لږ پې]لی دی.

لیکونکي : اپ، هیورنر

د

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z^3}{z^2+z-2}$$

په ټوټه کسر(مات) ټوټه ونه دې وټاکل شي.

دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنی نه ده، باید لومړی یو پولینوم وېش صورت ونیسي. سړی لاس ته راوړي

$$(z^3):(z^2 \;+z \;-2) = z-1+\frac{3z-2}{z^2+z-2},$$

$$\begin{array}{l} -(\underline{z^3 \quad +z^2 -2z}) \\ \qquad -z^2 +2z \\ \quad -(\underline{-z^2 -z \;\; +2}) \\ \qquad\quad 3z \;\; -2 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې $r = f + \frac{g}{q}$ د $f(z) = z - 1, \quad g(z) = 3z - 2.$ سره .
د دې لپاره چې د ټوټه مات ټوټه ونې اېښونه چې لاس ته راوړو باید اوس د r قطبځایونه وټاکل شي. د منځشپې فرمول سره لاس ته $z_1 = 1$ او $z_2 = -2$ راوړو د مخرج پلینوم د صفځای په څېر:

$$q(z) = (z-1)(z+2).$$

د g/q ټوټه مات ټوټه ونه له دې سره لاندې بڼه لري

$$\frac{3z-2}{z^2+z-2} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{z+2}.$$

دا اخر پل د ضریبونو a_k ټاکل دي.
د پوله ارزښت متود سره لاس ت ه راځي

$$a_1 = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{3z-2}{z^2+z-2} = \left.\frac{3z-2}{z+2}\right|_{z=1} = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \left.\frac{3z-2}{z-1}\right|_{z=-2} = \frac{8}{3}.$$

او

په ټولیزه توګه لاس ته راځي

$$r(z) = z - 1 + \frac{1/3}{z-1} + \frac{8/3}{z+2}.$$

پای.

راشنل توابع

$$r(z) = \frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}$$

په $z_1 = 3$ کې یوه سادهقطبځای لري او په $z_2 = 0.$ کې یو دبل قطبځای لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنی ده، پولینوم وېش ته اړتیا نه شته او د په ټوټه کسر ټوټه ونه دا بڼه لري

$$\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\frac{a_1}{z^2}+\frac{a_2}{z}+\frac{a_3}{z-3}.$$

د پوله ارزښت متود سره لرو

$$a_1 = \lim_{z\to 0} z^2\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\left.\frac{2z^2-5z-3}{z-3}\right|_{z=0}=1$$

$$a_3=\lim_{z\to 3}(z-3)\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\left.\frac{2z^2-5z-3}{z^2}\right|_{z=3}=0\,.$$

سړی په ساده ډول کړی شي، چې دا پاتې (هغه په اصطلاح، چې ورته وایو باقي مانده) ضریبونه a_2 په یوه ټکي $z \neq 0,3$ د تابع ارزښتونو د پرتوله کونې له لارې وټاکي.

د بېلګې په توګه د $z = 1$ لپاره لرو

$$\frac{2-5-3}{1-3}=1+a_2+0$$

او سړی $a_2=2$ لاس ته راوړي.

لیکونکي: اپ،هیورنر

د راشنل توابعو لپاره

$$r(z)=\frac{z^2-5z+4}{z^3-3z^2+z+5}$$

لپاره قطبځایونه روښانه نه دي. د ازمایښت له لارې $z_1=-1$ پیداکیږي او بیا د پولینوم وېش سره لاس ته راځي

$$(z^3-3z^2+z+5):(z+1)=z^2-4z+5.$$

.

د نیمې شپې فرمول سره د مخرج نور صفرځایونه $q(z)$ لاس ته راځي

$$z_{2,3}=2\pm i.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره ماتلاندې یا مخرج ضربیه ونه یا فاکتوری کونه

$$q(z) = (z+1)(z-2-i)(z-2+i)$$

لري او د ټوټه کسر ټوټه کونه داسې ده

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-2-i} + \frac{c}{z-2+i}.$$

د دې لپاره چې a, b, c د ضریبونو د پرتلې له لارې وټاکو، د مخرج $q(z)$ سره وپشو او لرو

$$+ 4 = a(z-2-i)(z-2+i) + b(z+1)(z-2+i) + c(z+1)(z-2-i).$$

د $1, z, z^2$ د ضریبونو د پرتله کونې له لارې د درې ناټاکلو یا نامعلومو a, b او c لپاره یو کرښیز مساوات سیتم لاس ته راځي:

a	b	c	
1	1	1	1
-4	$-1+i$	$-1-i$	-5
5	$-2+i$	$-2-i$	4

د حل په حیث لاس ته $b = i/2$ $a = 1,$ او $c = -i/2$ راځي ، دا په دې معنا ، چې

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{i/2}{z-2-i} + \frac{-i/2}{z-2+i}.$$

که اخري دواړه ترمونه سره یوځای کړو، نو حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه لاس ته راځي

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1/4}{z^2-4z+5}.$$

د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو حقيقي ريښتونی يا راشنل تابع r د حقيقي قطبځايونو x_j سره او کمپلکس کنجوګيري قطبځايونو $u_k \pm$ i v_k سره او څو واره والی يا ډېروالی همداسي m_j n_k

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(x) = \prod_j (x - x_j)^{m_j} \prod_k ((x - u_k)^2 + v_k^2)^{n_k}$$

کيدی شي په لاندې بڼه

$$r(x) = f(x) + \sum_j \sum_{\nu \leq m_j} \frac{a_{j,\nu}}{(x - x_j)^\nu} + \sum_k \sum_{\mu \leq n_k} \frac{b_{k,\mu}(x - u_k) + c_{k,\mu}}{((x - u_k)^2 + v_k^2)^\mu}$$

ټوټه کيږي، د $d = \text{Grad } p - \text{Grad } q$ درجې ($f = 0$ ، که $d < 0$ وي)

يوه پولينوم f سره. د په هر قطبځای زياتونونو يا د جمعې غړو د ګڼون يا تعداد ډېرواره والی په ګوته کوي. په ځانګړې توګه د ساده قطبځای لپاره باور لري

$$r(x) = f(x) + \sum_j \frac{a_j}{x - x_j} + \sum_k \frac{b_k(x - u_k) + c_k}{(x - u_k)^2 + v_k^2} .$$

پولينوم f کيدی شي دپولينوم وېش له لارې وټاکل شي

$$p = fq + g, \quad \text{Grad } g < \text{Grad } q,$$

دا په دې معنا چې q د p وېش په g باندې پاتې يا باقي دی. ضريبونه کيدی شي د مخرج پولينوم سره له ضرب وروسته دضريبونو د پرتلې له لارې وشمېرل شي.
حقيقي ټوټه کسر ټوټه کونه هم کيدی شي د کمپلکس بڼې څخه و کتل شي يا لاس ته راوړل شي، داسې چې سړی کمپلکس کنجوګيري ترمونه سره يوځای کاندې.

ټوټه کونه د ساده قطبځايونو ($m_j = n_k = 1$) لپاره سرته رسيږي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

د r کمپلکس ټوټه کسر ټوټه کونه په دې حالت کې دا لاندې بڼه لري

$$p(x)+\sum_j \frac{a_j}{x-z_j}$$

د z_j سره د مخرج پرلينوم q ساده صفرځايونه او

$$a_j=\lim_{z\to z_j}(z-z_j)r(z).$$

دا q چې حقيقي دی، نو کمپلکس صفرځايونه د کمپلکس کونجږګيري جوړوړپه توګه منځ ته راځي:

$$z_k=u+\mathrm{i}v,\quad z_l=u-\mathrm{i}v=\overline{z_k}.$$

له دې سره د اړونده ترمونو لپاره لاندې ټوټه ونه باور لري

$$\overline{a_k}=\lim_{z\to z_k}\overline{(z-z_k)r(z)}=\lim_{\overline{z}\to z_l}(\overline{z}-z_l)r(\overline{z})=a_l,$$

دا په دې معنا، چې

$$a_k=s+\mathrm{i}t,\quad a_l=s-\mathrm{i}t.$$

د دواړو ترمونو يوځای کونه غوښتونې بڼه راکوي:

$$\frac{s+\mathrm{i}t}{x-u-\mathrm{i}v}+\frac{s-\mathrm{i}t}{x-u+\mathrm{i}v}=\frac{2s(x-u)-2tv}{(x-u)^2+v^2}.$$

د جګو درجو قطبځايونه کيدی شي په ورته توګه تر ځيړنې ونيول شي، مګر دليل راوړنه يې په ځرګنده توګه پيچلې ده.

د

$$r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{2x^3-9x^2+11x+1}{x^3-4x^2+5x}$$

حقيقي په ټوټه کسر ټوټه کونې ټاکنه په درې پلونو يا قدمونو وېشل کيږي

(i) دا چې $\mathrm{Grad}\ p \geq \mathrm{Grad}\ q$ دی، لومړی د پلوينوم وېشنه صورت نيسي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$(2x^3 - 9x^2 + 11x + 1) : (x^3 - 4x^2 + 5x) = 2$$

$$g(x) = -x^2 + x + 1.$$

پاتې

له دې سره لاس ته راځي

$$r(x) = f(x) + \frac{g(x)}{q(x)} = 2 + \frac{-x^2 + x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x}.$$

(ii) د دې لپاره چې د g/q ټوټه ونې اینبوونه یا اسمعمال پیداکړو، نو قطبځایونه ټاکو یا پیدا کوو.

د q د صفرځایونو $0 = x$ د نوکانو دباندېکونې وروسته د مبع تکمیل له لارې سرې نور دواړه صفرځایونه لاس ته راوړي:

$$x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1^2.$$

دا پاتې صفرځایونه کمپلکس کونجوګیري جوړې $u \pm iv = 2 \pm i$ دي.له دې سره اینبوونه په لاندې توګه ده

$$\frac{-x^2 + x + 1}{x((x - 2)^2 + 1^2)} = \frac{a}{x} + \frac{b(x - 2) + c}{(x - 2)^2 + 1^2}.$$

(iii) د ضریبونو د ټاکنو لپاره د اصلي مخرج q سره ضربیږي او ترې لاس ته راځي

$$-x^2 + x + 1 = a((x - 2)^2 + 1^2) + b(x - 2)x + cx$$

د x, 1 او x^2 ضریبونو پرتله مو کرښیز مساوات سیستم ته بیایي

$$1 = \qquad 5a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1 = -4a - 2b + c$$
$$-1 = a + b$$

د لاندې حل سره

$$a = \frac{1}{5},\ b = -\frac{6}{5},\ c = -\frac{3}{5}\ .$$

له دې سره حقيقي ټوټه کسر ټوټه کونه ده

$$r(x) = \frac{1/5}{x} + \frac{-6/5(x-2) + (-3/5)}{(x-2)^2 + 1^2}.$$

د ټاکلو لپاره پوله ارزښت متودونه هم کارول کيږي. که دا ابېنوونه يا ځای په ځای کونه د x سره ضرب شي او $x = 0$ کيږدي، نو لاس ته ترې راځي

$$\frac{1}{2^2 + 1^2} = a + 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{5}.$$

د $x = 2$ ځای په ځای کونې سره c لاس ته راځي:

$$\frac{-2^2 + 2 + 1}{2(0^2 + 1^2)} = \frac{1/5}{2} + \frac{c}{0^2 + 1^2} \Longrightarrow c = -\frac{3}{5}.$$

بالاخره کېدی b د ټکی ازماېښت $x \neq 2$ له لارې ، د بېلګې په توګه $x = 1$ منځ ته راشي.
پای.

د

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

حقيقي ټوټه کسر ټوټه کونې ټاکلو په دوه پلونو يا قدمونو کې ترتيبيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(i) د اینسوونې د ټاکلو لومړی قطبځایونه پیدا کیږي. له

$$q(x) = (x^2 + 1)^2$$

پیژندل کیږي، چې $\pm i$ ډبل صفرځایونه دي، دا په دې معنا چې $u = 0$ او $v = 1$.
له دې سره دا اینسوونه ده

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{b_1 x + c_1}{x^2+1} + \frac{b_2 x + c_2}{(x^2+1)^2}.$$

(ii) د ضریبونو د ټاکلو له امله دا سړی د اصلي مخرج q سره ضربوي او لاس ته
ترې راوړي

$$\begin{aligned} x^3 &= (b_1 x + c_1)(x^2+1) + b_2 x + c_2 \\ &= b_1 x^3 + c_1 x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)1. \end{aligned}$$

د $1, x, x^2$ او x^3 د ضریبونو پرتله کونه مو کرښیز سیستم ته بیایي

$$\begin{aligned} 1 &= b_1 \\ 0 &= c_1 \\ 0 &= b_1 + b_2 \\ 0 &= c_1 + c_2 \end{aligned}$$

د لاندې حل سره

$$b_1 = 1,\; c_1 = 0,\; b_2 = -1,\; c_2 = 0\,.$$

بدیلې کیدی شي د کمپلکس ټوټوه کسر ټوّ کونې څخه مخ ته لاړ شو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{a}{z-i} + \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{c}{z+i} + \frac{d}{(z+i)^2}.$$

ضریبونه $c = \overline{a},\ d = \overline{b}$ پوره کوي او د جمعي جوړولو له لارې

$$\frac{a}{z-i} + \frac{c}{z+i},\ \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{d}{(z+i)^2}$$

هم حقيقي توټهکسر ټوټه کونه لاس ته راوړي

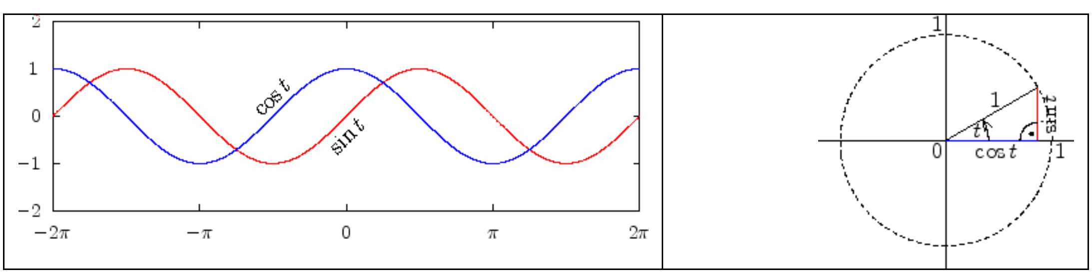
$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2}.$$

ساین او کوساین **Sinus und Cosinus**

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

سره په سرچينه په کونج t خرخول شوی ټکی $(1,0)$ کواوردينات نومولکيږي . د تر مخنښي پورې کوساين او ساين په يوه ولاړکوديز ړيږکودي (المثلث القايم الزاويه) کې د ولاړ اړخونو(هغه اضلاع وي چې يو د بل سره قلموازاويه جوړه وي) نسبت د نيمی(قطر) سرره په ګوته کوي.



دواړه ګردی توابع يا د داېرې توابع 2π - تلبرته راګرځېدونې يا 2π - پريوديکي دي او باور لري

$$\cos t = \sin(t + \pi/2)$$

, •

(c) ketabton.com: The Digital Library

- $\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$,
- $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

يو څو ځانګړي ارزښتونه دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

د اويلر-مويورې فرمول **Formel von Euler-Moivre**

يو اکسپوننشل تابع د ايماجينار x -محور سره کېدی شي د $t \in \mathbb{R}$ لپاره د تريکونومتريک(درېکوډي - يا مثلثاتي -) توابع په مرسته افاده شي.

$$\cos t + \mathrm{i} \sin t = \exp(\mathrm{i}t)$$

کوساين او ساين حقيقي – او ايماجينار ګنونه(عددونه) په ګوته کوي د ارزښت 1 ($|\exp(\mathrm{i}t)| = 1$) سره .

که پورته فرمول اينورتير يا معکوس شي ، نو لاس ته راځي

$\cos t$	$= \mathrm{Re}\, e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}t} + e^{-\mathrm{i}t}\right)$
$\sin t$	$= \mathrm{Im}\, e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}\right)$.

د اکسپ، کوساين او ساين کټمتوالی اويلر او مويورې ته ځي. دا د جيومتريکي کمپلکس عددونو د انترپوليشن لپاره بنسټ جوړوي او د فوری-انالیوز کې غوره رول لوبوي.

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د ساين او کوساين لپاره د زياتون- يا جمع قضيه

(c) ketabton.com: The Digital Library

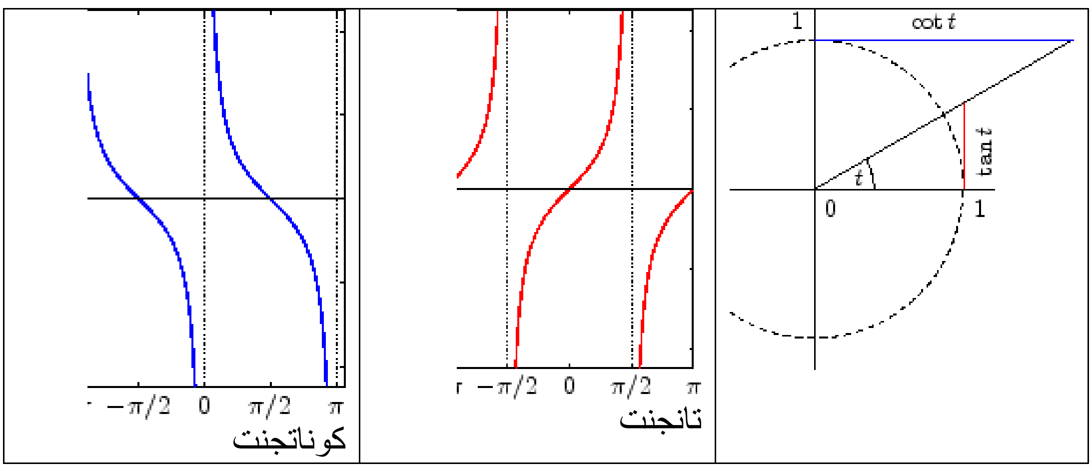
د گردیتوابعو $\sin t$ او $\cos t$ لپاره لاندې اړيکې باور لري:

- $$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
- $$\sin(\alpha+\beta) = \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta$$

په ځانګړې توګه دی

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

تانجنت او کوتاجنت Tangens und Cotangens



د تانجنت او کوتانجنت توابع د

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

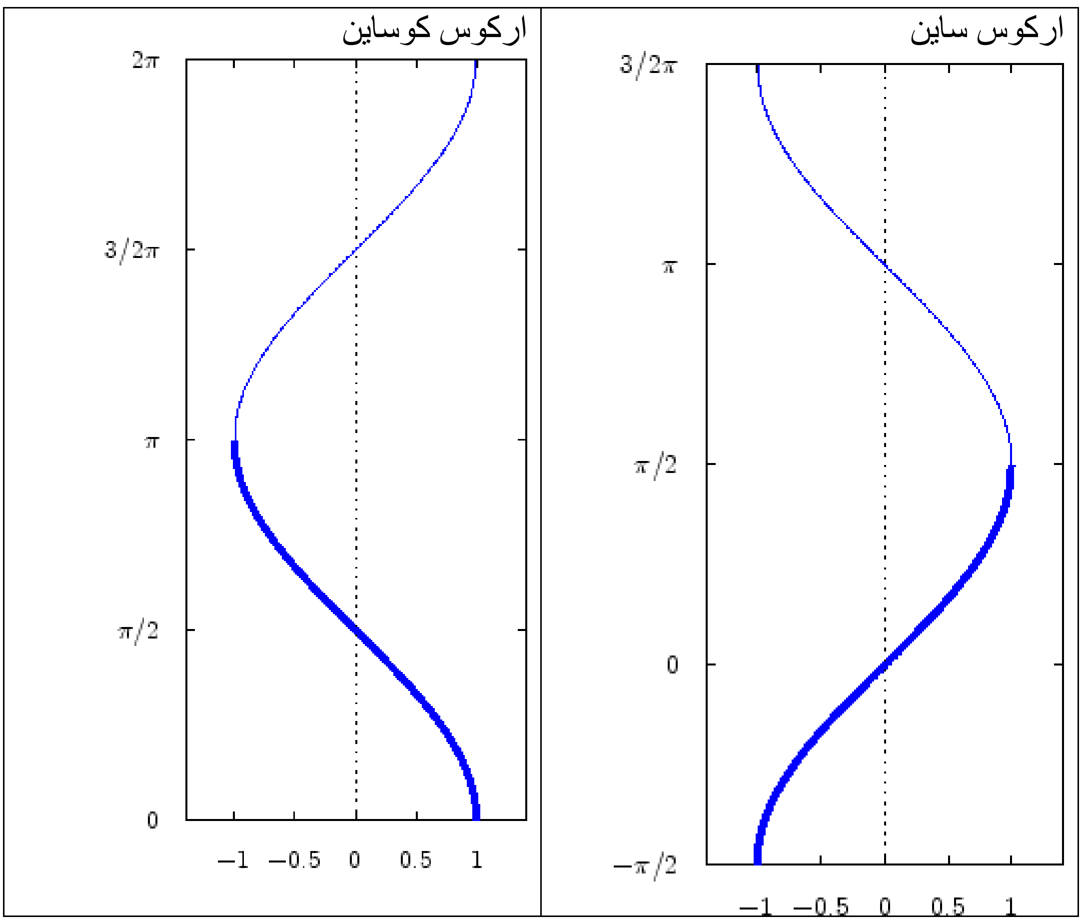
له لارې تعریف دي. دا تر دمخنښي پورې د ولاړکوډيز درېکوډي(- - مثلث) د ولاړکوډونو Katheten نسبت ورکوي

يو څو ځانګړي ارزښتونه دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

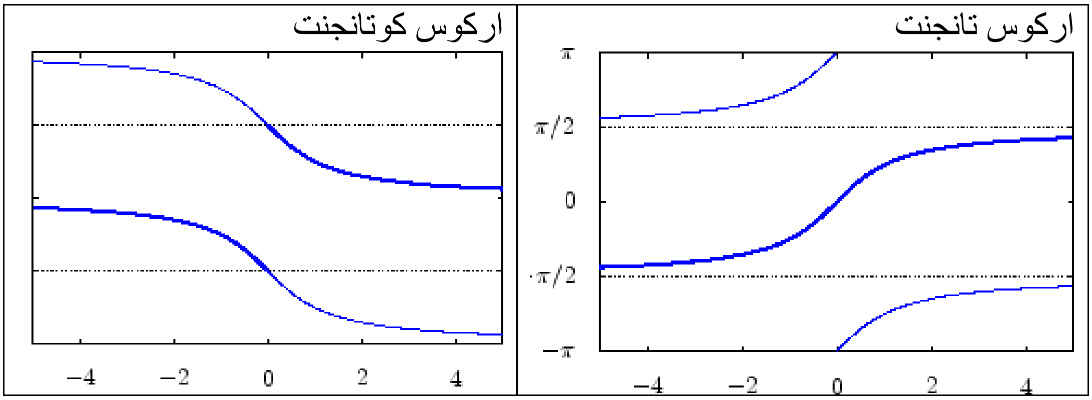
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

د ارکوس توابع Arcusfunktionen



د درېګوډيز (ترېګونومتريکي يا مثلثاتي) توابعو په څټ يا معکوس توابع د arccos, arcsin, arctan, arccot سره ښوول کيږي.

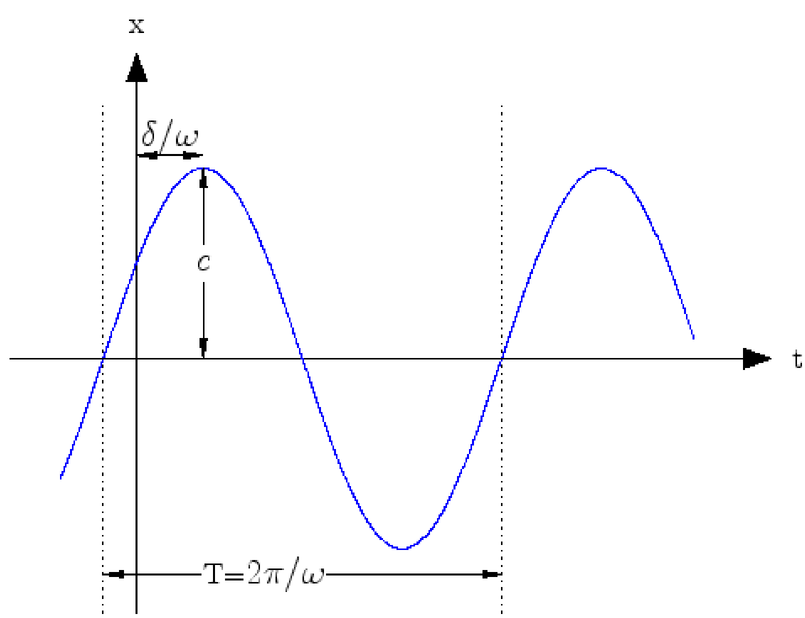
(c) ketabton.com: The Digital Library



د دي تعريف – او ارزښت ورشو د پورته ښېرې ښخه رانيول کېدى شي.
له دې سره اصلي ځانګې غوړې يا پنډې کښل شوي دي.
ليکونکي: هيوليک، کنويف، کنش

هارمونيک لړځيدني يا رپيدني

Harmonische Schwingung



(c) ketabton.com: The Digital Library

يو هارمونيکي لړځيدنه د جګوالي Amplitude $c \geq 0$ سرره،د فاز بلځای ته وړنه يا راکښنه δ او فرکونڅ ω همداسې پريودېوالی يا تل (بيرته) راګرځيدنه $T = 2\pi/\omega$
لاندې بڼه لري

$$x(t) = c\cos(\omega t - \delta)\ .$$

ورته يا برابر ارزښته انځورونه ده

$$\mathrm{Re}\, c \exp(\mathrm{i}(\omega t - \delta))$$

يا

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

د $a = c\cos(\delta), b = c\sin(\delta)$ سره ، دا په دې معنا چې (c, δ) د (a, b) قطبي کواوردیناتونه دي.
پای.

د پارمتر شميربدلون د جمعي تيورم څخه لاس ته راځ:

$$c\cos(\omega t - \delta) = c\left(\cos(\omega t)\cos(\delta) + \sin(\omega t)\sin\delta\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a = c\cos\delta, \quad b = c\sin\delta.$$

برعکس دی

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \delta = \arctan(b/a) + \varphi$$

د لاندې سره

$$\varphi = \begin{cases} 0, & \text{für } a \geq 0 \\ \pi, & \text{für } a < 0 \text{ und } b \geq 0 \\ -\pi & \text{sonst.} \end{cases}$$

پای.

د هارموني رپيدنې يو پر بل پرېوتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

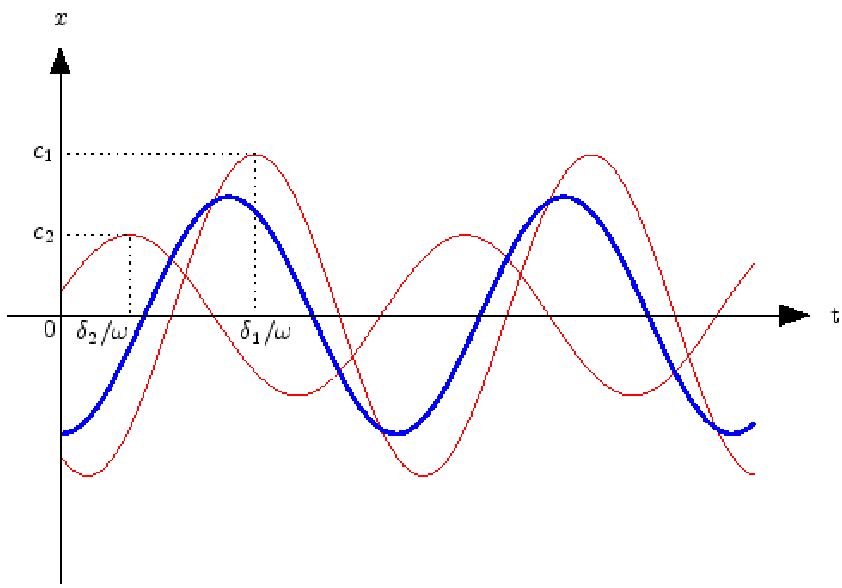
د دوه هارموني رپېدنو يو پر بل پربوتنه (په څېره کې غوړ کبنل شوي دي)

$$x_k(t) = c_k \cos(\omega t - \delta_k), \quad k = 1, 2 ,$$

د

امپليتودې سره هارمونيک دي

$$c = \sqrt{c_1^2 + 2\cos(\delta_1 - \delta_2) c_1 c_2 + c_2^2} \, .$$



ليکونکي: هيوليک، کوپف،کنش

د يو پر بل پربوتني کمپلکس بڼه

$$\mathrm{Re}\,(c_1 e^{\mathrm{i}\omega t - \delta_1} + c_2 e^{\mathrm{i}\omega t - \delta_2}) = \mathrm{Re}\,([c_1 e^{-\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{-\mathrm{i}\delta_2}] e^{\mathrm{i}\omega t})$$

راکوي

$$[\ldots] = c e^{-\mathrm{i}\delta} = z$$

او له دې سره

$$c^2 = z\bar{z} = (c_1 e^{-\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{-\mathrm{i}\delta_2})(c_1 e^{\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{\mathrm{i}\delta_2}) \, .$$

$$e^{\mathrm{i}s} + e^{-\mathrm{i}s} = 2\cos s$$

د په پام کې نيولو سره ضربونه غوښتنه راکوي..

په بديله ت وګه کېدی شي امپليتود انځوروني

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_k(t) = a_k \cos(\omega t) + b_k \sin(\omega t)$$

څخه وشمېرل شي. سرِی لاس ته راوړي

$$c = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}\ .$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

په درځ یا متِه باندې کړولو هارموني لړځېدنه یو په بل پرېوځي

$$\cos(\omega t - \delta_k), \quad \delta_k = k\delta,\ k = 0, \ldots, n,$$

د برابر یا همغه فرکونځ او امپليتود. لړځېدنه د کمپلکس انځوروني په مرسته د دې لاندې حقيقي برخې په حيث لاس ته راځي

$$e^{\mathrm{i}\omega t} + e^{\mathrm{i}(\omega t - \delta)} + \ldots + e^{\mathrm{i}(\omega t - n\delta)} = e^{\mathrm{i}\omega t} \frac{1 - (e^{-\mathrm{i}\delta})^{n+1}}{1 - e^{-\mathrm{i}\delta}}$$

$$= e^{\mathrm{i}\omega t} \frac{e^{-\mathrm{i}\frac{n+1}{2}\delta}(2\mathrm{i}\sin\frac{n+1}{2}\delta)}{e^{-\mathrm{i}\frac{\delta}{2}}(2\mathrm{i}\sin\frac{\delta}{2})} = \left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\right) e^{\mathrm{i}(\omega t - \frac{n}{2}\delta)}\ .$$

یو په بل پرېوتنه لاندې امپليتود لري

$$\frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

او فاز $(n/2)\delta$.

د $\omega = 0$ سره د ايماجيناربرخې د پرتله کوني له لارې تريګونمتريکی کتمتوالی راکوي.

$$\sin\delta + \ldots + \sin n\delta = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta \sin\frac{n}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\ .$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه لړځېدنو $c_k e^{i\omega_k t}$ يو پر بل پرېوتنه کېدی شي د

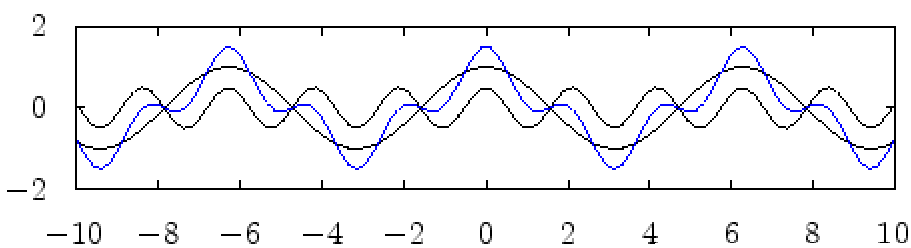
$$c(t)e^{i\bar{\omega} t}, \quad c(t) = c_1 e^{-i\Delta\omega t} + c_2 e^{i\Delta\omega t},$$

په ضرب د $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ او $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$ سره ولیکل شي.
لاس ته راغلی داسي په نامه مودوليري رپېدنه تیک هلته پريوديکي ده، که د فرکونځ نسبت ω_1/ω_2 راشنل وي.
د مودولي شوی کمپلکس امپلیتود مینیمال او ماکسیمال ارزښت همداسي مطلق ارزښت د $|c_1 - c_2|$ همداسې $c_1 + c_2$ ترمنځ لوړ ټیټ کیږي. په ځانګړې توګه دی

$$c(t) = 2c\cos(\Delta\omega t)$$

د همغي یا برابرې امپلیتود $c = c_1 = c_2$ لپاره.
لاندې ځیرې یو څو بېیکي حالتونه په ګوته کوي

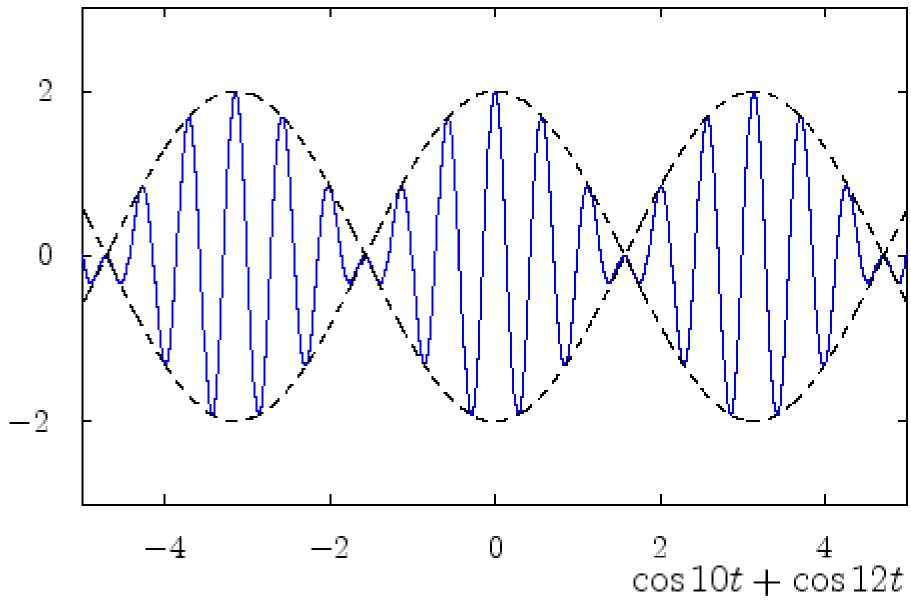
- periodische Überlagerungپریودیکي يو پر بل پرېوتنه



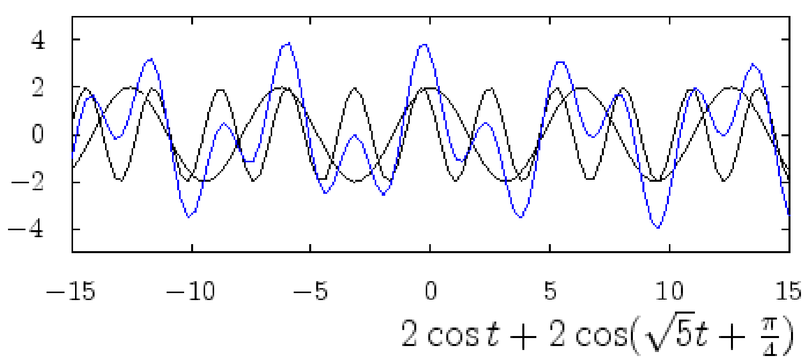
$\cos t + \frac{1}{2}\cos 3t$

- برابر امپلیتود c_k او $\omega_1 \approx \omega_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



- aperiodische Überlagerungاپریودیکي یا نه - یو پر بل پرېوتنه



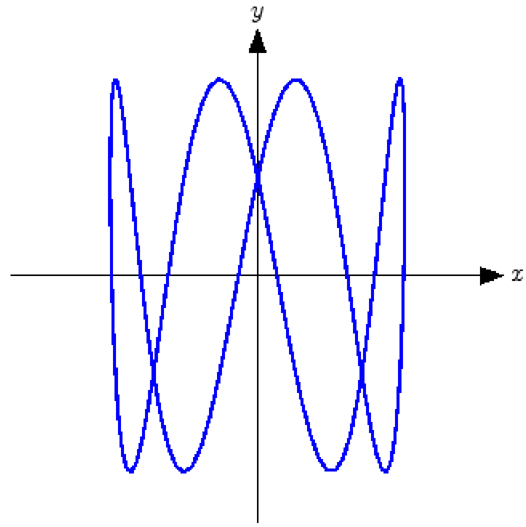
پاي.

د سطي لړځېدنو یو پر بل پرېوتنې د لړځېدنو مختالف لورو (a_1, a_2) او (b_1, b_2) کړۍ یا منحني

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2)\,,$$

لاس ته راځي چې د مخترع Lissajous-Figuren لیساجوس –څېرې بللکیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

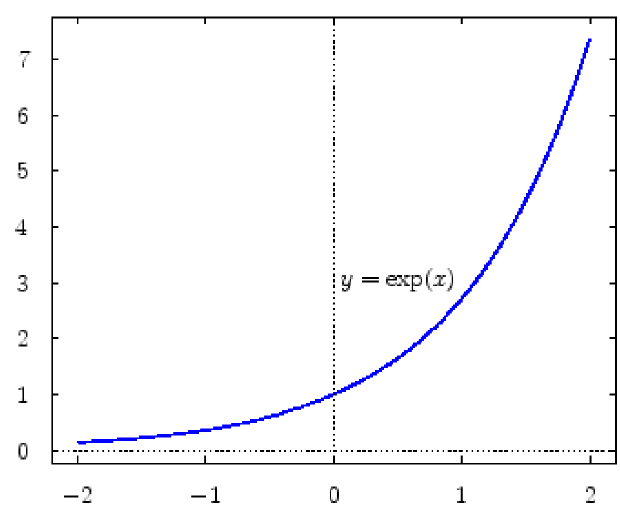


خبره د پارامتر يوه بېلګه بناېي

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega_1 = 1, \quad \delta_1 = 0, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = 4, \quad \delta_2 = \frac{\pi}{3}.$$

پای.

اکسپوننشل توابع
Exponentialfunktion



توان تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = e^x = \exp(x)$$

$x \in \mathbb{R}$

د اویلر عدد $e = 2.71828...$ سره اکسپونننشل تابع بلل کیږي. دا د ټول لپاره مثبت ده او د تابع مساوات پوره کوي
$e^{x+y} = e^x e^y$.

$e^{-x} = 1/e^x$
په ځانګړې توګه

ګټه یا ربح **Verzinsung**

یوبیل بډایی د – وارهد اخستني همداسي او ورکوني وروسته د یوې ګټوې Rate r ($r < 0$ همداسي $r > 0$) د یوې ګټوني فاکتور $(1+p)$ سره لاندې پای بډایی ورکوي

$$y = (1+p)^n x + \frac{(1+p)^n - 1}{p} r \,.$$

دلته $p = 1$ د 100% یو ګټه اینوونه ده په کلنی ګټه ا چوني سره.

فعاله کلنی ګټه د میاشتنی ګټوني ځخه شمېرل کیږي د یوه ګټې اینوني p_m سره و لاندې ته

$$p_j = (1+p_m)^{12} - 1 \geq 12 p_m \,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

بنسټ بډایی په همدې لومړني ګټوني پریود کې په پام کې نیول کیږي، اخستنه ههمداسې اچونه لومړی د وربېسې کال. په لاندې توګه یا د اسې راکوي

$$n = 1: \quad y = x(1+p) + r,$$
$$n = 2: \quad y = \big(x(1+p) + r\big)(1+p) + r.$$

په ټولېزه توګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = (\cdots(x(1+p)+r)(1+p)+r)\cdots)$$
$$= x(1+p)^n + \left[1+(1+p)+(1+p)^2+\cdots+(1+p)^{n-1}\right]r$$

دا په ګوډیزو نوکانو کې افاده کېدی شي په هندسي جمعه فرمول واړوي او سړی دا ورکړ
شوی فرمول لاس ته راوړي.
پای.

د منهتان خرڅول 1626زک مورګن(د ځمکي د کچوني یوون یا واحد دی) 11000
Morgen د یوه حاضر قیمت په رانیولو ګټور تمام شو، ځکه چې په کلنی7 په سلو کې
ګټه دا بډایي په کال 2000 زک کې

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot(1.07)^{374} = 5.857\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\hat{=}\ 2.658\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

ده(که متمأن بانکونه او د اسعارو رفورم له مخه نه وي نیول شوی یا فرض شوی).
په میاشتنی ګټه لرو

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot(1+7/1200)^{4488} = 13.030\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\hat{=}\ 5.913\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

او

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot\exp(0.07\cdot374) = 14.060\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\hat{=}\ 6.380\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

د ټولیزې ګټوني سره.
که مورګن د 0.81 Ha هکتارسره وشمېرل شي، نو د منهتان دا نننی سطحه د89
مربعکیلو متره ورکوي. یو کور هلته نن نږدې6500 USD/Quadratmeter امریکایي
ډالر په مربع متر ارزښت لري. دا پیسې به د یوه کور تعمیرلپاره چې څلور پوړیز وي
ورسیږي، چی په ټوله سطحه ونیسي.
پای.

د یوه $x = 200000$ یوروپور ، $n = 30$ کلونو لپاره او یوې کره شوې ګټې پینې $p = 5$
په سلو کې میاشتنی ګټه لاندې ده

$$p_m = (1+p)^{1/12} - 1 = 0.4074\%$$

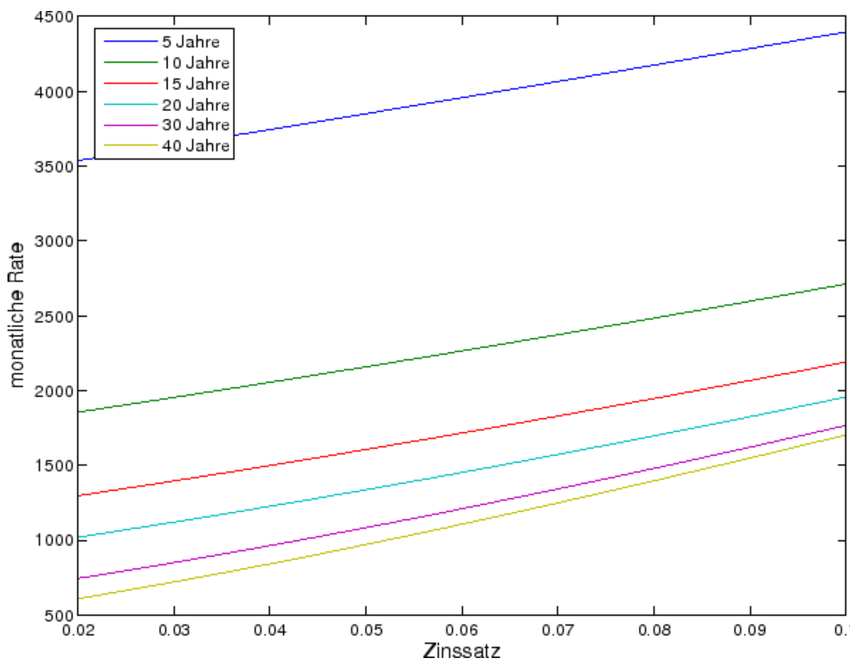
(c) ketabton.com: The Digital Library

او مياشتنی رات يا ګټه ده

$$r = \frac{p_m(1+p)^n}{(1+p)^n - 1}\, x = 1060.11\,\mathrm{EUR}.$$

د لاندې پسې تړلي له ګټي فرمول څخه د صفراينوونې له لارې د پور ارزښت راکوي او د $(1+p_m)^{12} = 1+p$ په پام کې نيولو سره .

ټوله تاديه $30 \cdot 12r = 381639.60$ يورو د پور جمعې څخه د په 90.8 په سلو کې اوړي(د بانک مزدوري پرې زياته).



پروت: ګټونه يا د ګټې پينه ، ولاړ: مياشتنی ګټه
ګراف مياشتنی ګټه ښايي د يوه 200 000 يورو پور لپاره د ګټې پينې د ضريب په څېر د مختلفو وختونو لپاره.
پای.

کلنې د پيسو ورکونه $x = 10000$ يور د يوې 7 په سلو کې ګټونې ته د $n = 12$ کلونو وروسته يوه دا لاندې بډايي ورکوي

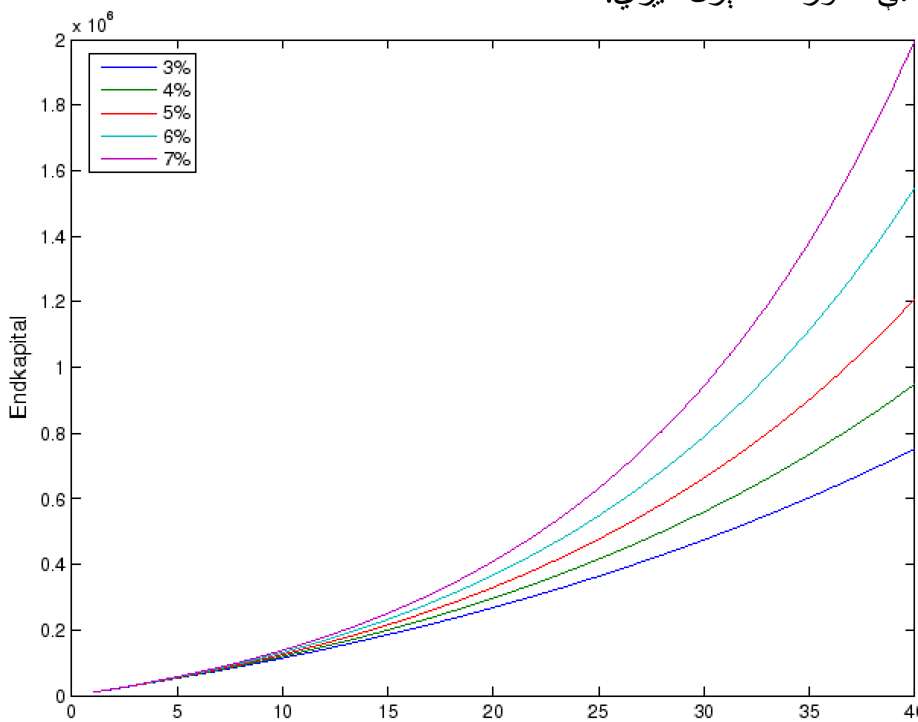
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = \frac{(1+p_j)^n - 1}{p_j} z = \frac{1.07^{12} - 1}{0.07} 10000\,\mathrm{EUR} = 178884.51\,\mathrm{EUR}.$$

د نور لس کاله د ژوند انتظار ته دا د لاندې یوه میاشتني تقاوت ته بسیا کوي

$$r = \frac{p_m (1+p_j)^{10}}{(1+p_j)^{10} - 1} y = \frac{0.005654 \cdot 1.07^{10}}{1.07^{10} - 1} 178884.51\,\mathrm{EUR} = 2057.17\,\mathrm{EUR},$$

چې د هیپوتیکي(د کوروڼو جوړولو او اخستلو لپاره ارزانه پور دی) Hypotheken ګټي ته ورته شمېرل کیږي.



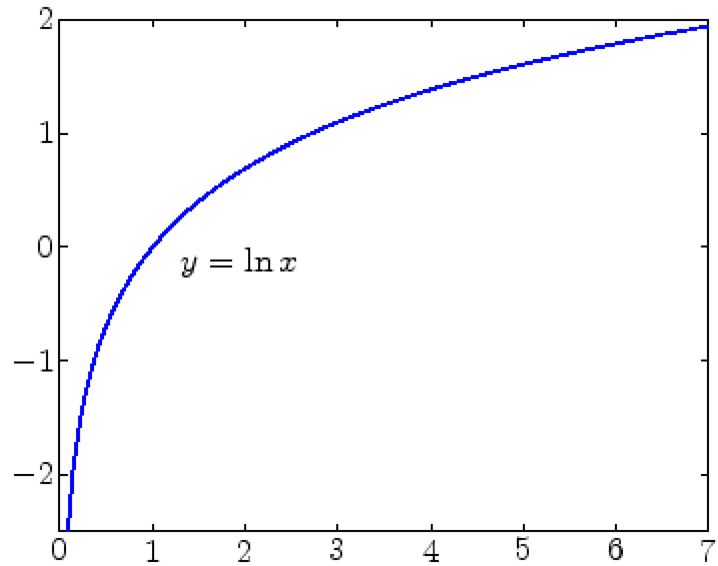
پروت: وخت ،   ولاړ: پای سرمایه
ځېره د مختلفو ګټونو لپاره د یوې سرمایې وده ښايي د وخت تېرېدو سره . پای.

لوګاریتم **Logarithmus**

د لوګارتم تابع د اکسپوننشلتابع معکوس دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y.$$



دا $(0,\infty)$ کره مونوتونن جګېدونکی په $\mathbb{R}$ تنظیموي او لاندې تابعمساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

په ځانګړې توګه دی . $\ln(1/x) = -\ln x$ پای.

د یوې مادې راديواکتيو له منځه تلنه(په زراتو تجزيه کېدنه) د زره کيدنې قانون

$$N(t) = N(0)e^{-kt}$$

له مخې تشريح کيږي. دلته $N(t)$ د ا تمونو ګڼون يا تعداد دی د t په وخت کې او $k > 0$ يوه د موادو په واک کې د زره کېدو ثابته ده.

د نیم ارزښت وخت T داسې تعريف دی $N(T) = \frac{1}{2}N(0)$ ، داپه دې معنا چې

$$e^{-kT} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T = \ln 2/k.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د چرنوبل د ریکتور د ډز یا الوتنې سره یو ه ډینگرۍ یا خولې یا مرخېړی په څنو برخو کې Cäsium-137 د 2000Bq/kg   (Bq/kg د رادیواکتیویتی د فعالیت د کچونې لپاره یوون دی) سره د نیمارزښت وخت 29.7 کلونو په وړانگو خور شو.

$$k = \frac{\ln 2}{29.7} = 0.023$$

او له دې سره

$$N(t) = 2000 \exp(-0.023t).$$

په المان کې پوله ارزښت .600Bq/kg کې پروت د ی. د

$$600 = 2000 \exp(-0.023t) \Rightarrow -0.023t = \ln(0.3) \Rightarrow t \approx 52$$

له امله داپوله ارزښت د ورکړشوو ارزښتونو لپاره ۵۲ کالو وروسته کښته – یا کمیږي.

نیم وخت ارزښت :

Cäsium-134	2 Tage
Cäsium-137	29.7 Jahre
Jod-131	8 Tage
Kohlenstoff-14	5730 Jahre
Kalium-40	1.2 Mrd. Jahre
Plutonium-239	24000 Jahre
Radon-222	3.8 Tage
Radium-226	1600 Jahre
Strontium-90	28 Jahre
Uran-235	800 Mio. Jahre
Uran-238	4.5 Mrd. Jahre

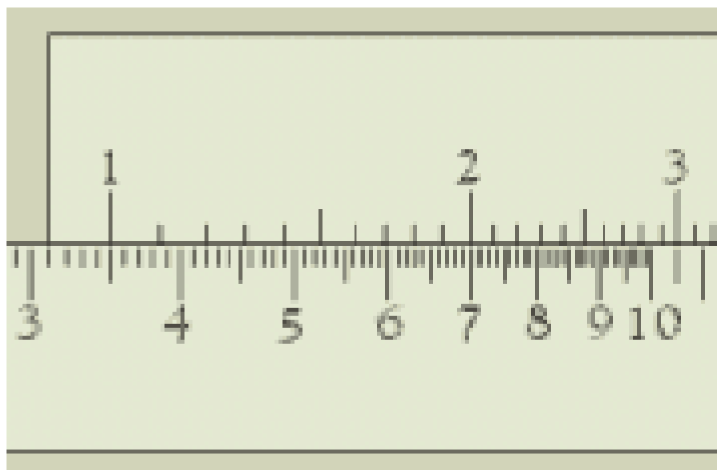
پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاریتم دا خوی لري، چې د دوه ګڼونو یا عددونود لوګاریتمونو جمعه د دې د دې دوه عددونو د ضرب د لوګاریتم سره برابر دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

په دې توګه کېدی شي چې دوه کرښې(خط کشونه) د لوګاریتم کچوونو سره یو په بل کیږدي او لاس ته راوړنه د دېعددونو جمعه نه بلکه ضرب دی.(د شمېرکښوونې (چې یوې او بلې لورته کښیږي) اصول)



د پورته ښېرې ښخه د بېلګې په توګه ګورو چې $3.5 \cdot 2 = 7$ دی. د لته د پورته کچوونې ١ د لاندې سکالا په3.5 (لومړی ضریب) کېښول کيږي. بالاخره ٢ د پورته سکالا (دویم ضریب) د ضرب لاس ته راوړنه په لاندې سکالا لوستل کیږي.

پای.

تولیز توان توابع او لوګاریتم

د $a > 0$ لپاره تعریفوو

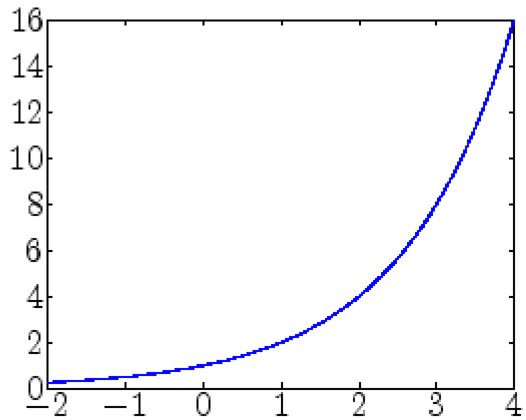
$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

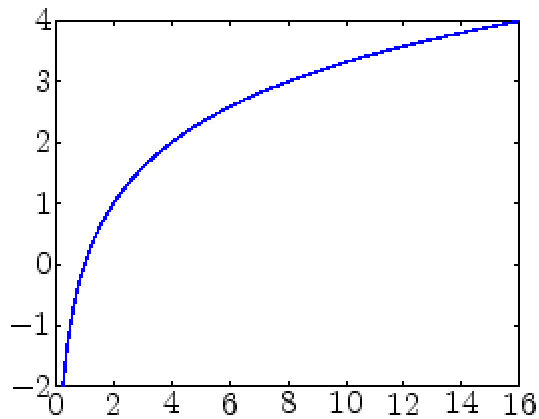
د معکوس یا په څټ تابع سره

$$x = \log_a y, \quad y > 0.$$

په ځانګړي توګه سړی لیکي $\log = \log_{10}$ د لوګاریتم لپاره د 10 بنسټ سره او $\mathrm{ld} = \log_2$ د دوال لوګاریتم لپاره.



$f(x) = 2^x$



$f(x) = \mathrm{ld}(x)$

د ودې قانون

$$y = a^x, \quad a > 0$$

کیدی شي نیم لوګاریتمي دکښل شي. دلته په یوه محور x او په بل محور $\log y$ لیکل کیږي. د x او $\log y$ ترمنځ نسبت د ودې قانون له مخې کرښیز دی او رسم شوې کرښه لاندې جګړالی لري

$$m = \log a.$$

یو بل امکان دادی، چې په دواړو محورونو یو لوګاریتمي سکالا وکاروو.
دا د بېلګې په توګه د ناټیکاوي ارزښت لپاره

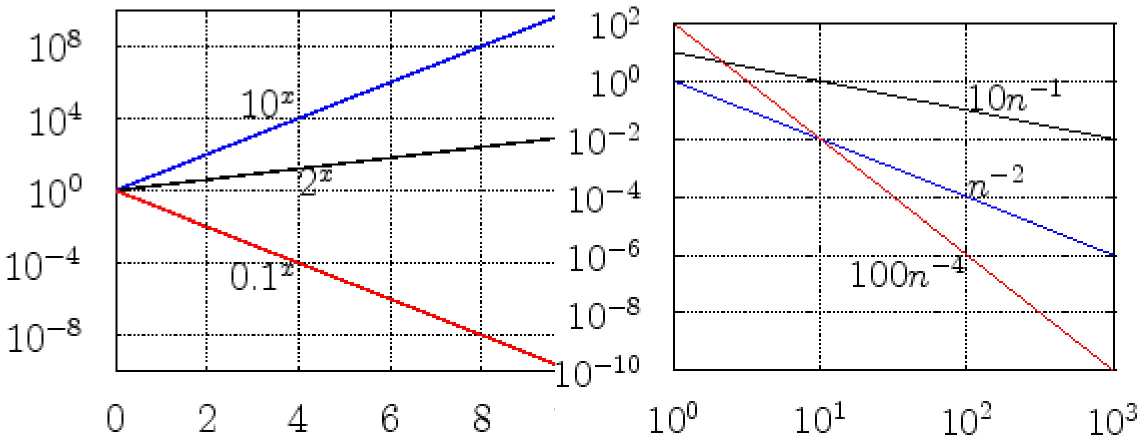
$$\varepsilon \approx cn^{-k}$$

مناسب ده. دا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log \varepsilon = \log c - k \log n \,,$$

د کرښې کميز يا منفي چګښدنه ورکوي.



$y = 2^x, 10^x, 0.1^x$ $\quad$ $\varepsilon = 10n^{-1}, n^{-2}, 100n^{-4}$

د توان او لوګاريتم لپاره شميرقوانين

Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

د اکسپوننشل – او لوګاريتمي توابعو د تعريف او تابع مساواتو څخه لرو

$$\begin{aligned} a^{s+t} &= a^s\,a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\ a^{s-t} &= a^s/a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\ (a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t \log_a x \,. \end{aligned}$$

برسېره پردې د دوه مختلفو بنسټونو ت رمنځ د شمېربدلون لپاره باور لري

$$\log_b x = \log_b a \, \log_a x \,.$$

په ځانګړې توګه دی

$$\log x = (\log e) \ln x \,.$$

ليکونکي: هيوليک، کنوپف

که کيږدو

$$x = a^s, \quad y = a^t,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د توان او لوګاریتم د فرمولونو ورته وال یا برابرارزښتوالی روښانه دی. لومړي دواړه کتمتوالي د تابع مساواتو څخه لاس ته راځي او دريم له تعریف $b^r = e^{r\ln b}$ څخه.:

$$(a^s)^t = (e^{s\ln a})^t = e^{st\ln a} = a^{st}.$$

د شمیبدلون فرمول برابرارزښت دی و لاندې ته

$$x = b^{\log_b a \log_a x},$$

او د ساده وني له لارې ښی اړخ لاس ته راځي.
لیکونکي: هیولیګ، کنوپف

لاندې دواړه بېلط دشمېقوانین تشریح کوي یا په ګوته کوي.

(i)

$${}^2) - 2\ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 = 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 = 2\ln x$$

(ii)

$$\log_4(x^2) + \mathrm{ld}(2x) = 2\frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2\frac{\ln x}{\ln 2}$$

های پرابول تابع **Hyperbelfunktionen**

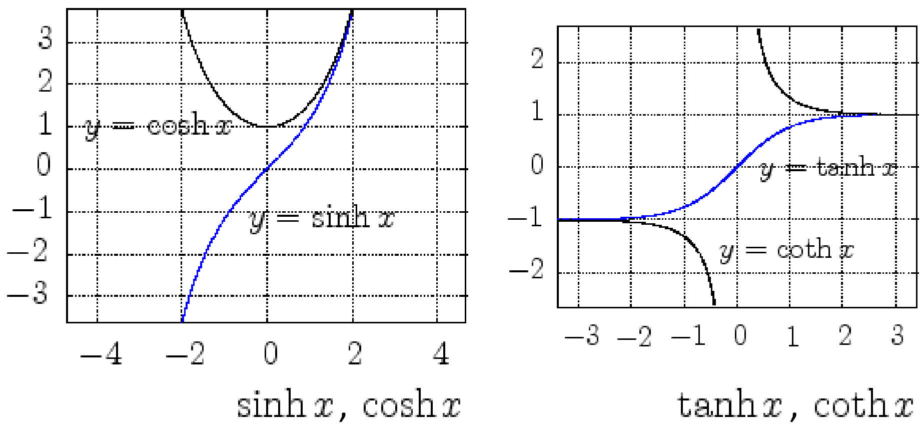
تریګونومتریکي توابعو ته ورته تعریفوو

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

همداسې

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1/\coth x.$$

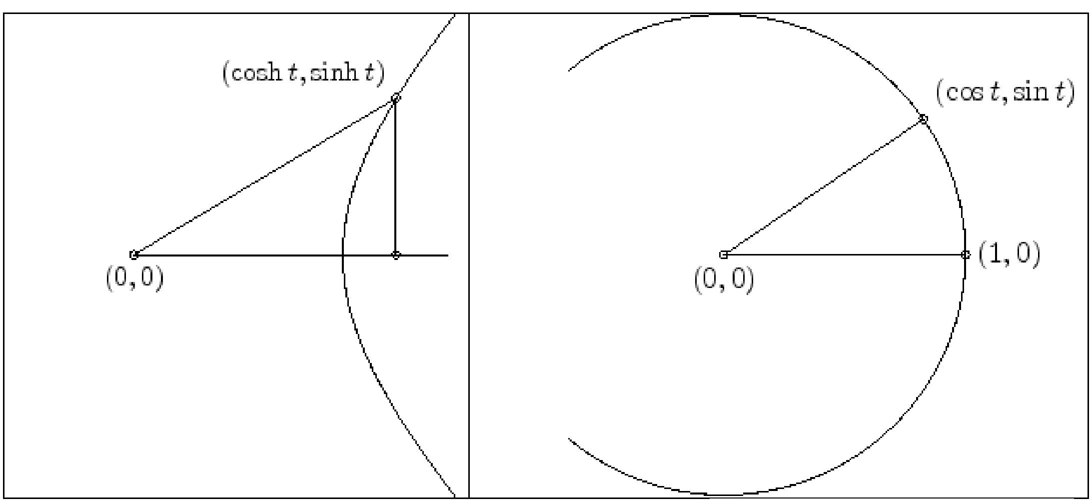
(c) ketabton.com: The Digital Library



معکوس يا په څټ توابع اکسپليڅيت يا په روښانه توګه ورکول کيږي:

$$\text{arsinh}x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \qquad -\infty < x < \infty$$
$$\text{arcosh}x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \qquad 1 \leq x < \infty.$$

د هاپربول تابع نوم د لاندې کټمتوالي څخه رانيول شوی



$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

دا روښانه کوي، چې د $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ له لارې د هاپرابول يو ښاخ پارامتري کيږي..

له $y = (e^x - e^{-x})/2$ څخه د e^x سره ضرب له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

د مربع مساوات دويم حل د $e^x > 0$ له امله بايد په پام کې ونه نيول شي. د لوګاريتمي کوني څخه لاس ته راځي

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

د کوساين هوپربوليک د فرمول څخه پورته ته په ورته توګه لاس ته ره احي

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}.$$

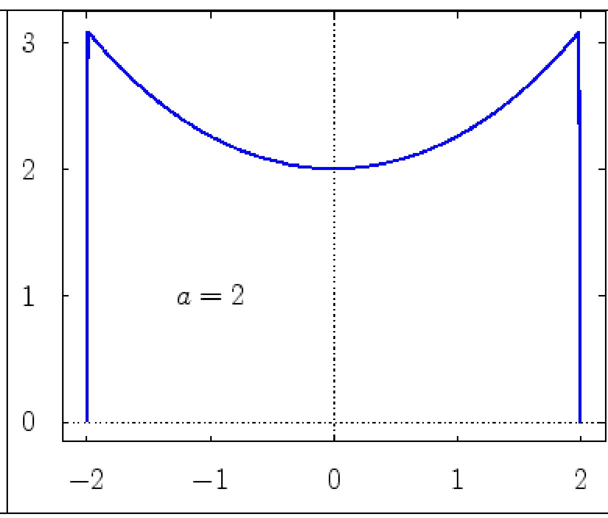
د لوګاريتم کوني له لارې د په ښت- يا معکوس تابع فرمول لاس ته راځي.
ليکونکي: هيوليک، کنوپف

د يوه هايپارابول په ډول ځوړند شوي سيم ځګوالی h د خپل وزن له لارې اغيزمنشوی دننی شپانونګ a دی

$$h(x) = a\cosh(x/a).$$

تابع h د لاندې دفرنځيال مساوات حل دی.

$$h'' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + (h')^2}.$$



هايپارابوليکی کتمتوتوالی

Hyperbolische Identitäten

تريګونومتريکي توابعو ته ورته کتمتوالی باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sinh(-x) = -\sinh x$$

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,,$$

چې د تعریفونوو له لارې کېدی شي نازک شي

د یوې پرلپسي (ترادف)پوله ارزښت
Grenzwert einer Folge

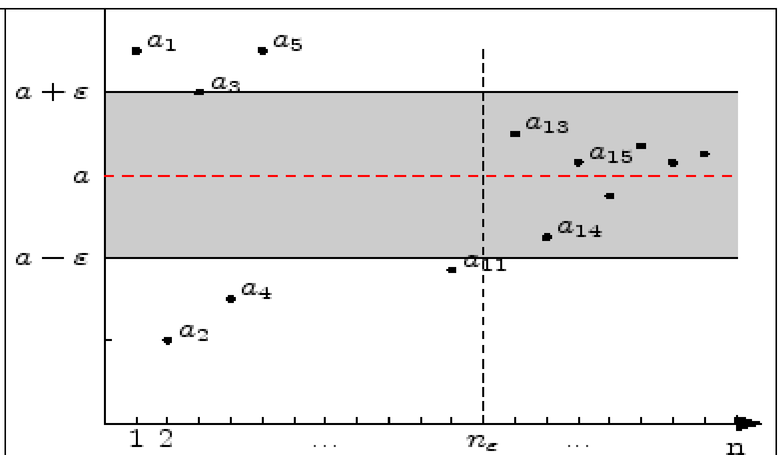
یوه پرلپسي

$(a_n) = a_1, a_2, \ldots$

د یوه پوله ارزښت a په لور هڅیږي،

$a = \lim_{n\to\infty} a_n,$

که هر $\varepsilon > 0$ ته یو n_ε داسې شتون ولري د $|a_n - a| < \varepsilon$ $n > n_\varepsilon$ سره د ټولو لپاره



دا $a_n \to a$ لیکدود هم د یوې پرلپسي د کونورګنت یا پولې ته تلو لپاره کارول کیږي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (a_n) پوله ارزښت ونه لري، نو پرلپسې ديورګنت يا پولې ته نه تلونکې بللکيږي.

پای.

د دې لپاره چې د کونورګنت-قضيه وښايو يعنې $|a_n - a| < \varepsilon$ د $n > n_\varepsilon$ لپاره

وښايو، کيدی شي لومړی دا افاده $|a_n - a|$ د تخمين کونې له لارې پورته لور ته ساده کړو او بيا داسې په نامه نامساوات د n پسې حل کړو.

که دا د بيلګې په توګه د لاندې پرلپسې لپاره وکارول شي

$$a_n = \frac{n^2+n}{n^2+1},$$

کومه چې پوله ارزښت $a = 1$ لري، يو ممکنه تخمين دی

$$|a_n - a| = \left|\frac{n^2+n}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{n-1}{n^2+1}\right| \le \frac{n}{n^2+1},$$

دا چې $|n-1| \le n$ د ټولو $n \ge 0$ لپاره . پرته له دې $n^2+1 > n^2$ دی او له دې سره $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ هم . نو له دې لاس ته راځي

$$|a_n - a| \le \frac{n}{n^2+1} \le \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

له دې سره $\frac{1}{n} < \varepsilon$ دی، بايد $n > \frac{1}{\varepsilon}$ وي. که n_ε يو طبيعي عدد چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وي ، وټاکو ، نو د ټولو $\varepsilon > 0$ او ټولو $n > n_\varepsilon$ لپاره باور لري.

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرلپسي
$1, q, q^2, \ldots$

د $|q| < 1$ لپاره یو پوله ارزښت 0 لري او د $|q| > 1$ یا $q = -1$ لپاره دیورګنت دی

د پرلپسیو د پوله ارزښت شمیرنې لارې
Rechenregeln für Grenzwerte bei Folgen

د پولې ته تلونکې پرلپسي (a_n) او (b_n) لپاره د پولو a او b سره باور لري:

- $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n / b_n) = a/b$, falls $b \neq 0$
- لیکونکی: اپپ، هیولیګ

زیاتون او کمښت یا کمون : د درېګوډي نابرابرون څخه لاس ته راځي
$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \to 0.$$

ضرب یا ځل: دا چې a_n محدود ده، لرو

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \to 0.$$

وېش: د ټول $n > n_0$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$0 \notin \left(b - \frac{|b|}{2}, b + \frac{|b|}{2}\right) \ni b_n ,$$

او له دې لاس ته راځي

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{bb_n}\right| \leq \text{const}\ |b_n - b| \to 0,$$

دا په دې معنا چې $1/b_n \to 1/b$. د a_n/b_n پولې ته تلنه دهمدا اوس ښوول شوي د پولې ته تلونکو پرلپسيو ضرب قانون څخه لاس ته راځي.

پای.

که دپرلپسيو توکي د n راشنل تابع وي، $a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$ ، نو کيدی شي پوله ارزښت د خورا جګ توان د لنډونې څخه پيداکړی شو. د بيلګې په توګه دی

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - 2n^2}{3n^2 + 4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n - 2}{3 + 4/n} = -\frac{2}{3} .$$

په ټوليزه توګه د صورت-درجې j او مخرج-درجې k لپاره باور لري

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_j n^j + \cdots p_0}{q_k n^k + \cdots q_0} = \begin{cases} 0, & \text{für } j < k \\ \frac{p_j}{q_k}, & \text{für } j = k. \end{cases}$$

د $j > k$ لپاره پرلپسې پولې ته نه ځي يعنې ديورګنت ده.

پای.

دمعلومو پوله ارزښتونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

په مرسته لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e\cdot\frac{1}{e} = 1.$$

په پام کې نیسو، چې

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \neq \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n = 1 \,,$$

ځکه چې د ضرب د ضریبونو ګڼون یا تعداد ثابت نه دی.
لیکونکی: هیولیک، کرایڅ

د کوشي قضیه Cauchy-Kriterium

یوه پرلپسې (a_n) تیک هلته پولې ته ځي، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو n_ε شتون ولري، داسې چې

$$|a_j - a_k| < \varepsilon$$

د ټول $j, k > n_\varepsilon$ لپاره باور ولري.
د کوشي په نوم نومول شوي قضیې په مرسته د پوله ارزښت ثبوت بې د پوله ارزښت پیژندلو ممکن دی.
لیکونکی: اپپ، هیولیګ

د کوشي – قضیې اړینوالی د پوله ارزښت له تعزیف څخه لاس ته راځي:

$$a = \lim a_n \iff |a_m - a| < \varepsilon \quad \text{für } m > m_\varepsilon$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که کیږدو $n_\varepsilon = m_{\varepsilon/2}$ ، نو لرو

$$|a_j - a_k| \le |a_j - a| + |a - a_k| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

د ټول $j,k > n_\varepsilon$ لپاره، حه چې د ښوولو وو.

دا چې شرط پوره کېدونکی هم دی، ستونځمن دی چې و يې ښايو، او دا د حقيقی عددونو په پوره والي ولاړ دی.

پای.

یوه رکورزيو تعرف شوې پرلپسې (a_n) کېدی شي زيات وخت د کوشي-قضيه د تخمينونې له لارې

$$|a_{n+1} - a_n| \le cq^n$$

د $q \in [0,1)$ سره يې ټيکوالی و ازمايل شي. داسې د هندسي پولې ته تلنه د $j < k$ لپاره راکوي

$$|a_j - a_k| \le |a_j - a_{j+1}| + |a_{j+1} - a_{j+2}| + \quad \dots \quad + |a_{k-1} - a_k| \le cq^j\,(1 + q + q^2 + \dots) \le \frac{cq^j}{1-q}.$$

ښی اړخ د $< \varepsilon$ لپاره ده د $j,k > n_\varepsilon = \ln\frac{\varepsilon(1-q)}{c}/\ln q$ لپاره ، نو د کوشي قضيه پوره ده. د ځرگند، د

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \quad a_0 = 1,$$

له لارې رکورزيو تعريف شوې پرلپسې a_n د کونورګنځ قضيې د ثبوت لپاره استعمالوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایندکشن پیل : $(n = 1)$: نامساوات

$$|a_1 - a_0| \le cq$$

باور لري، که $c = |a_1 - a_0|/q$ کېښول شي.

د ایندکشن پای $(n \to n+1)$: شړی اټکل شوی کمښت یا تفریق د

$$|a_{n+1} - a_n| = |\sqrt{2 + a_n} - \sqrt{2 + a_{n-1}}| = \left|\frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2 + a_n} + \sqrt{2 + a_{n-1}}}\right|.$$

په بڼه ښيي.

د اندکشن د نیونې له مخې ښی اړخ $\le \frac{1}{2\sqrt{2}} cq^n$ دی او د ټاکنې سره
$q = 1/2\sqrt{2} \le cq^{n+1}$

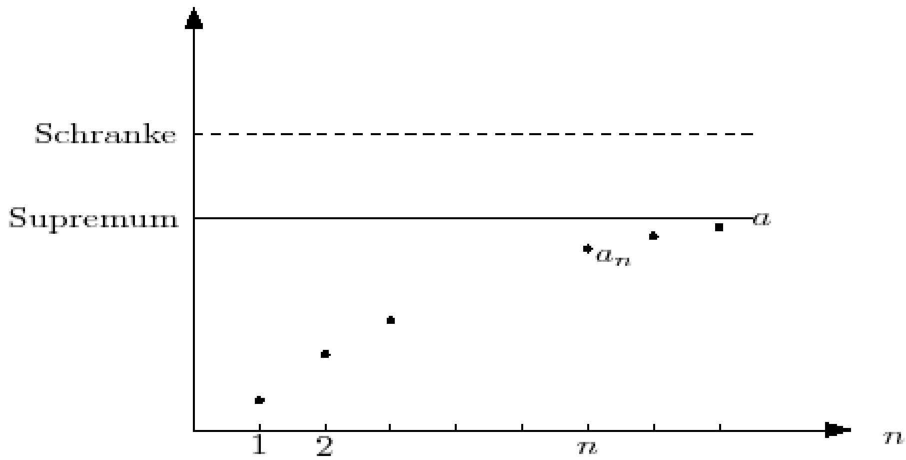
لکه چې غوښتل مو.

پای.

یو غبرېزه پولې ته تلنه **Monotone Konvergenz**

یو پرلپسي (a_n) همغږیز جګېدونکي $a_{n+1} \ge a_n$ همداسي همغږیز
ټیټېدونکي $a_{n+1} \le a_n$ بلل کیږي ، که همداسي وي د ټولو n لپاره. دا کره همغږیز
جګېدونکي همداسي کره همغږیز ټیټېدونکي بلل کیږي ، که $a_{n+1} > a_n$
همداسي $a_{n+1} < a_n$ وي د ټولو n لپاره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



یوه رابنده یا محدوده ، د $n > n_0$ لپاره همغږیز جګېدونکي یا ټیټېدونکي پرلپسي (a_n) پولې ته تلونکي ده. پوله ارزښت يې د پرلپسي توکو a_n, $n > n_0$ سوپریموم همداسې اینفیموم دی.

لیکونکی: اپپ، هیولیګ

د یوې مونوتون جګېدونکې پرلپسې لپاره د سوپرېموم د تعریف سره، چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو n_ε شتون لري د کوم لپاره چې باور لري

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \le a = \sup_{n > n_0} a_n$$

د همغږيزوالي په بنسټ دی

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \le a_n \le a \quad \text{, für } n > n_\varepsilon ,$$

نو $a_n \to a$.

د مونوتون ټیټېدونکې پرلپسې لپاره په ورته توګه دلایل راوړل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پرلپسې پولې ته تلنه

Die Konvergenz der Folge

$$a_n = (1 + 1/n)^n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

د اويلر عدد e په لور کېدی شي د مونوتون کونورګنت حملې په بنسټ و ښوول شي. دواړه وړاندنيونې(فرضيې) کېدی شي د بېنوم درسي جملې په مرسته و ښوول شي.

(i) رابنديدنه يا محدوديت: له

$$a_n = (1 + 1/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \ldots$$

او

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \leq \frac{n^k}{1 \cdot 2 \cdots 2}$$

لاس ته راځي

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots \leq 3$$

(ii) همغږيزوالی: سړی a_{n+1} هم د بېنوم له جملې سره شماري:

$$a_{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}\frac{1}{n+1} + \binom{n+1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} + \binom{n+1}{3}\frac{1}{(n+1)^3} + \ldots.$$

که دا په (i)کې د a_n انځورونې سره پرتله کړي، نو سړی کره کوي، چې اړونده ترمونه لوی دي:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}\frac{1}{n^k}$$

$$\leq \frac{(n+1) \cdot n \cdots (n-k+2)}{1 \cdot 2 \cdots k}\frac{1}{(n+1)^k} \quad =$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}.$$

دا له نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\frac{n-j}{n} \leq \frac{n+1-j}{n+1}$$

د یوګونوو ضریبونو لپاره. داچې د a_{n+1} لپاره زیاتون یا جمعه لا ترم

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

لري لاس ته راځي

$$a_n < a_{n+1}.$$

ناربښتونی پوله ارزښت **Uneigentliche Grenzwerte**

یوه پرلپسي (a_n) دا ناربښتونی پوله ارزښت ($-\infty$) ∞ لري، که د ټولو $a > 0$ لپاره یو n_a شتون ولري، داسې چې

$$a_n > a \ \ (< -a)$$

باور ولري د ټولو $n > n_a$ لپاره. پرلپسې چې ناربښتونی پوله ارزښت لري، دا ټاکلې دیورګنت –یا پولې ته نه تلونکې پرلپسې هم بلل کیږي.
لیکونکي:اپپ، هیولیګ، ویپپر

د دې لپاره چې وښایو ، چې

$$a_n = \frac{n!}{2^n} \to \infty,$$

دا په دې معنا چې

$$\frac{n!}{2^n} > a$$

د $n > n_a$, لپاره، دا a_n سرې د یوې ساده افادې یا ویینې له لارې کښته لور ته تخمینوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{2 \cdot 2 \cdots 2} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{2}.$$

له دې سره له $\frac{n}{4} > a$ همداسې له $n > 4a = n_a$ لرو $a_n > a$

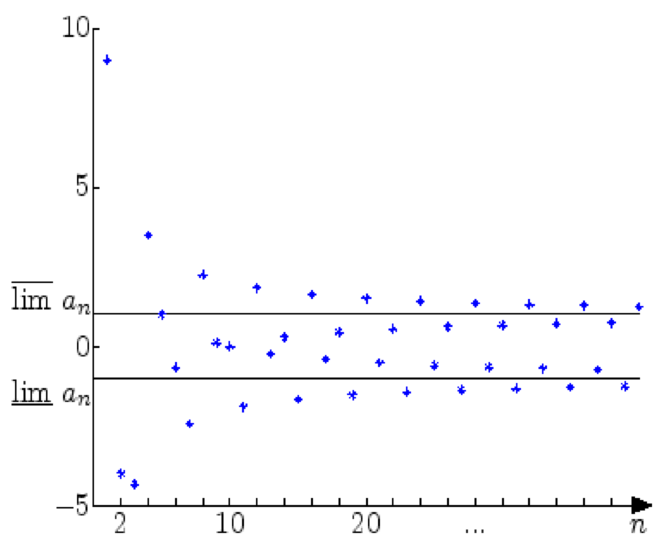
پوله اينفريور او پوله سوپريور(کښته - او پورته پوله ارزښت)

Limes Inferior und Limes Superio

د هرې پرلپسي (a_n) لپاره، په ناصلي حالت کې uneigentlichen Sinn ، يو پوله ارزښت شتون لري.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a_n}\,,\quad \underline{a_n} = \inf_{k\geq n} a_k$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a_n}\,,\quad \overline{a_n} = \sup_{k\geq n} a_k$$



لکه په خيره کې چې شوول شوی دی، پرلپسي (a_n) د همعبريزی پرلپسي $(\underline{a_n})$ او $(\overline{a_n})$ له لاري يا نوره هم ښه له لوري رابندې دي:

$$\underline{a_n} \leq a_n \leq \overline{a_n}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که پوله اینفریور او پوله سوپریور یو په بل پریوځي، نو پرلپسي (a_n) پولي ته تلونکي ده او لرو

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \,.$$

لیکونکي: اپپ ،هیولیګ

د پولي اینفریور او پولي سوپریور شتون د همهغږیز پولي ته تلني جملي له لارې ترلي لاس ته راځي، خکه چې پرلپسي

$$\underline{a}_n = \inf_{k\geq n} a_n \,, \quad \overline{a}_n = \sup_{k\geq n} a_n$$

همغږیز جګیدونکي همداسې همغږیز ټیټیدونکي دي.
په روښانه توګه باور لري

$$\underline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n \,.$$

که پوله اینفریور او پوله سوپریور همغه ازښت a ولري، نو لا سته راځي

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره، نو $a_n \to a$.

پرتله کوونکې قضیه **Vergleichskriterium**

که د $\lim a_n = a$ او $\lim c_n = c$ سره د پوره کوچني n لپاره
$a_n \leq b_n \leq c_n$ باور لري، نو دی

$$a \leq \underline{\lim}\, b_n \leq \overline{\lim}\, b_n \leq c.$$

په ځانګړې توګه له $a = c$ د پرلپسي (b_n) کونورګنت لاس ته راځي:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a = c \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی غوښتنه ساده ده، ځکه چې نابرابرون $\le$ د پولې ته تګ له امله ساتلی پتيري:

$$\inf_{k\geq n} a_n \leq \inf_{k\geq n} b_n \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n .$$

په ورته توګه لرو $\overline{\lim}\, b_n \leq c$.

که پوله ارزښتونه سره برابر وي ($a = c$) ، نو باور لري

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره. له دې سره لرو $b_n \to a$.

پای.

پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

په لاندې نامساوات باندې د پرتلې قضيې استعمال له لارې لاس ته راځي

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} .$$

دلته ښی نابرابرون د بينوم د فرمول څخه باوري دی:

$$1 \leq n \leq 1 + n \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{4}{n} + \cdots$$

په تولیزه توګه د ضرب قانون څخه لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^k = 1$$

د $k \in \mathbb{N}$ لپاره . د کم نظم ترمونو د په زياتوالي له امله پوله ارزښت ساتلی پاتيري. د يوه پولينوم

$$p(n) = a_k n^k + \cdots + a_0 \;,\; a_k > 0$$

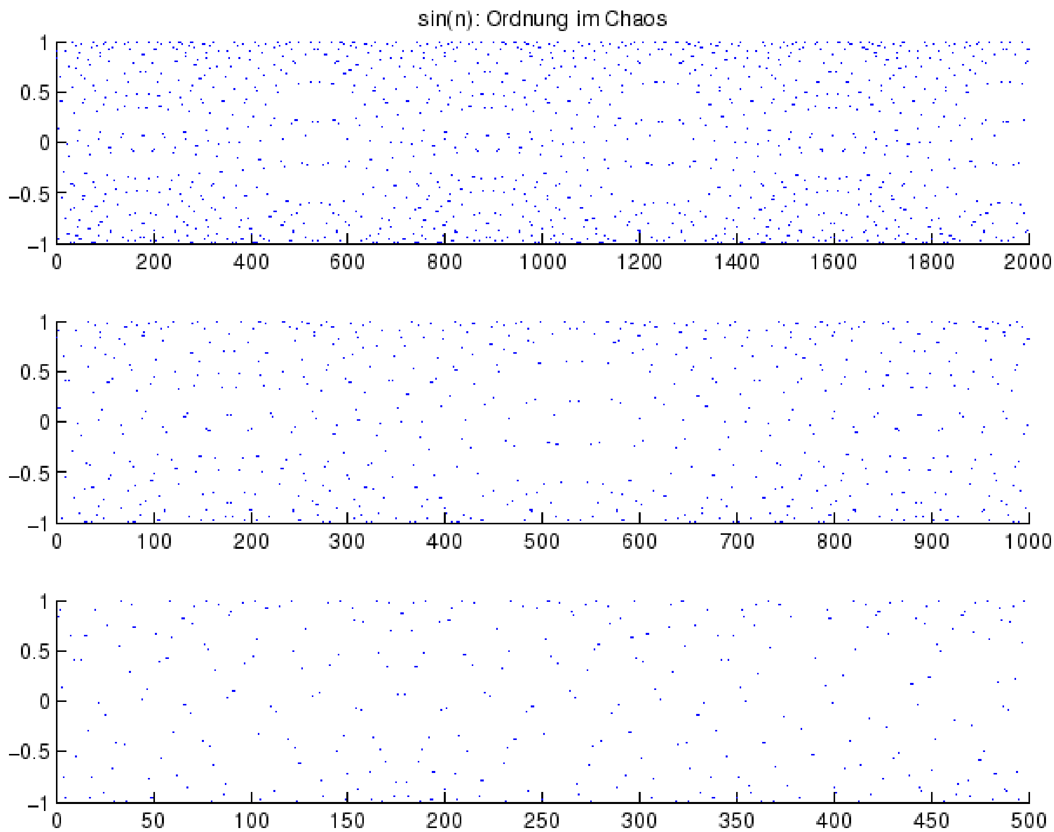
لپاره هم $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1$ دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې پرلپسې پنډغالي ټکی **Häufungspunkt einer Folge**

يوه پرلپسې (a_n) پنډغالي ټکی a لري، که هر انټروال $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ دپرلپسې ناپای ډېر توکي خوندي ولري. دې ته ورته د يوې برخه پرلپسې باور لري، چې a ته ځي. په ځانګړې توګه يوپوله ارزښت د پرلپسې بنډغالي ټکی هم دی.

ځېره پرلپسې $(\sin n)_{n\in N}$ ښايي.



سړی په نږدې توګه د پرلپسې يا ترادف توکو a_n برابروېشنه په انټروال $[-1,1]$ کې پيژني. په ريښتوني ښول کېدی شي، چې په $[-1,1]$ کې هر ټکی د پرلپسې پنډغالي ټکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې پرلپسې يا ترادف (a_n) د پندغالي ټکي د ټاکلو لپاره باید کونورګنت برخه پرلپسې و پيژندل شي.
د بيلګې لپاره

هغه دا دي
$$a_n = \frac{n\sin(n\frac{\pi}{2})}{n+\sin(n\frac{\pi}{2})}$$

$$b_k = a_{2k} = \frac{0}{k}$$

$$c_k = a_{4k+1} = \frac{(4k+1)}{(4k+1)+1}$$

$$d_k = a_{4k+3} = \frac{-(4k+1)}{(4k+1)+1}.$$

له دې سره پنډغالي ټکی لاس ته راځي
$$\lim b_k = 0, \lim c_k = 1, \lim d_k = -1$$

ورهولست- - یا فرهولست- مودل **Verhulst-Modell**

يو بيلجيمي شميرپوه وو : Pierre-François **Verhulst** [vəɾˈhʏlst]
(* 28. Oktober 1804 in Brüssel; † 15. Februar 1849 ebenda)

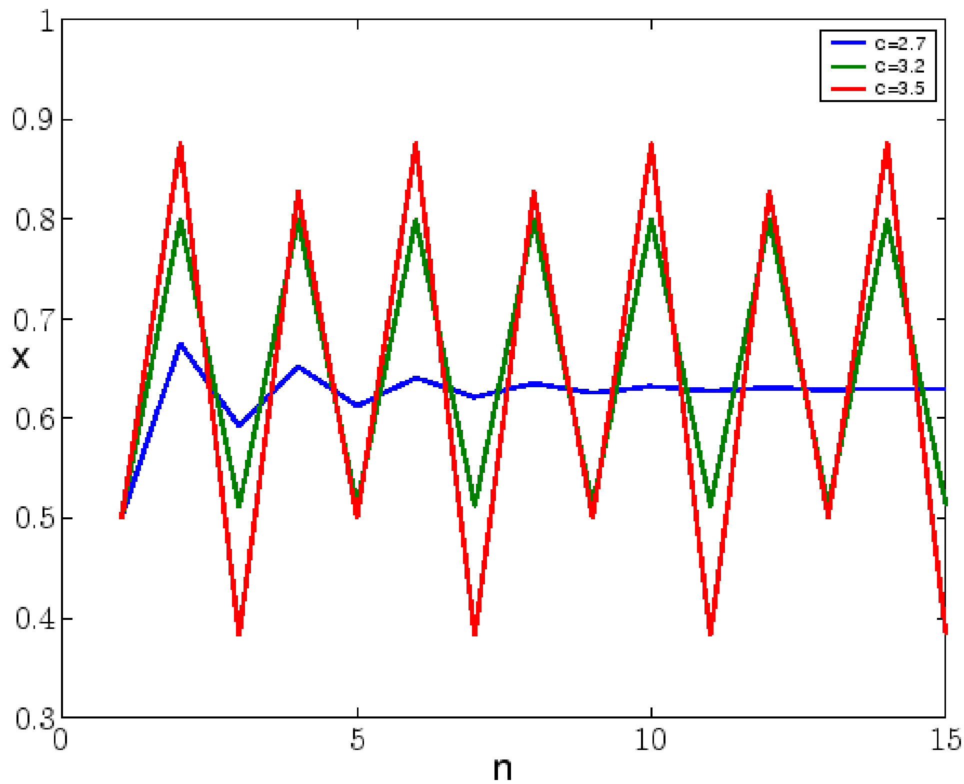
ریکورژن(په ځت ځغاستل) Rekursion

هغه فنکشن، چې د خپل ځان له خوا پيژند لري يا تعريفيږي

$$x_{n+1} = cx_n(1-x_n)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $c \in (0,4]$ سره د نورمال شوي خلکو ګنوالي x_n وده په ګوته کوي. یو څو تیوپیکي بیلګې د ا لاندې څیره ښايي

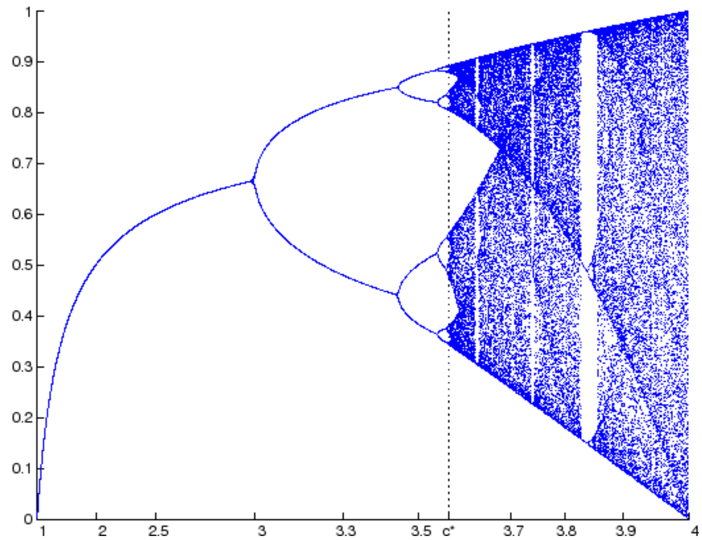


د $c \leq 3$ لپاره x_n د $n \to \infty$ لپاره لاندې پولې ارزښت ته ځي

$$x_* = \frac{c-1}{c}\,.$$

د $c > 3$ لپاره سرې اوسځليشن ګوري. که پارامتر تل لوی شي، نو د پندغالي - ټکو x_* ګڼون یا تعداد دوه برابره کیږي د افاظ پارامتر ارزښتونو c_i څخه اوښتلو باندې یعني له دې نور زیاتیدلو باندې . دا په لاندې څیره کې کښل شوی دی، په کوم کې چې د ټکي x_* د c -محور پورته لور ته ځای په ځای شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n - c_{n-1}}{c_{n+1} - c_n} = 4,69920166\ldots$$

داسي په نامه د انځوروني ثابته ده، چي دا زيات وخت د ښانګو کولو پرابلم کي رول لوبوي.

له پورته ځيري ښخه روښانه کيږي، چي ايتيشن د
$$c > c^* = \lim_{n\to\infty} c_n$$
لپاره يوګډوډيز chaotisches Verhalten حالت ښايي

د پيPi رکورزيو اپروکسيميشن
Rekursive Approximation von Pi

د a_n او b_n نيم اوږدوالی چي د يوې يوونګردی يا واحد داېرې د $(6 \cdot 2^n)$ -ګوډونو
يا کونجونو په باندې او په کي يعني په دننه اودباندي لاندي ريکورژن پوره کړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}\,, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}\,, \quad a_0 = 2\sqrt{3}\,, \, b_0 = 3\,,$$

د $\pi = 3.1415926535897932\ldots$ په مرسته اپروکسيمي کيدی شي.
دا فرمول د يوهان فريدريش پفاف Johann Friedrich Pfaff (1765-1825) له خوا په 1800 زکې کال ميندل شوی.
ارښيميدس Archimedes (287-212 v. Chr.) د 96 ـ ګوړونو ($n = 4$) او اټکل يا تخمين سره اړيکي

$$3.140845\ldots = \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} = 3.142857\ldots$$

وميندلي يا ترې لاس ته راوړي.

د ګردۍ ګڼ يا عدد π له د يو ميليارد ځايونو ډېر شميرل شوی دی. لاندې جدول د تاريخي ودې څخه يوه کاپی راکوي.:

Wert	korr. Stellen		Jahr	Autor
				Bibel (1. Könige 7:23)

Autor	Jahr		korr. Stellen	Wert
Bibel (1. Könige 7:23)	550	v. Chr.	0	3
Babylonier	2000	v. Chr.	1	3+1/8
Archimedes	250	v. Chr.	3	223/71 $< \pi <$ 22/7
Liu Hui	263		5	
Tsu Ch'ung Chi	480		7	
Al-Kashi	1429		14	

(c) ketabton.com: The Digital Library

Romanus	1593		15	
Van Ceulen	1596		20	
Van Ceulen	1615		35	
Sharp	1699		71	
Machin	1706		100	
Rutherford	1824		152	
Strassnitzky/Dase	1844		200	
Shanks	1874		527	
Smith/Wrench	1949		1 120	
Reitwiesner u.a.	1949		2 037	
Genuys	1958		10 000	
Shanks/Wrench	1961		100 265	
Guilloud/Filliatre	1966		250 000	
Guilloud/Dichampt	1967		500 000	
Guilloud/Bouyer	1973		1 001 250	
Kanada/Yoshino/Tamura	1982		16 777 206	
Kanada/Tamura/Kubo u.a.	1987		134 217 700	
Chudnovskys	1989		1 011 196 691	

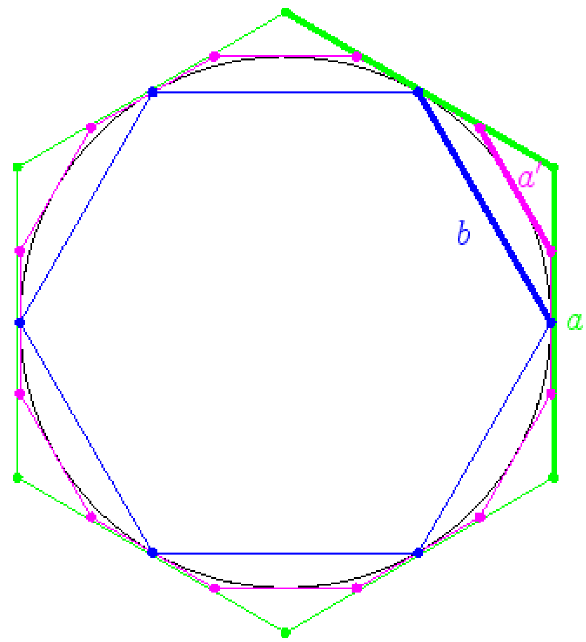
پای.

د ج.ف. پفاف ریکورزیون په ساده هندسي پامکوني باندې ولاړ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګي (تالس) جملي له مخې د a_n لپاره لاس ته راځي:

$$a' : b = \left(\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}\right) : \frac{a}{2} \Leftrightarrow a'a = ba - ba' \Leftrightarrow a' = \frac{ab}{a+b}\,.$$



که $k_n = 3 \cdot 2^n$ د ډېرګوډي نیم د اړخونوګښون یا تعداد په ګوته کړي، نو باور لري

$$a_n = k_n a\,,\ b_n = k_n b \Rightarrow a_{n+1} = k_{n+1} a' = 2k_n \cdot \frac{ab}{a+b}$$

$$= 2\frac{(k_n a)(k_n b)}{k_n a + k_n b} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}\,.$$

د b_n لپاره ریکورزیون کېدی شي د تریګونومتري توابعو په مرسته و ښوول شي. له

$$a_n = k_n 2 \tan(\pi/(2k_n))\,,\quad b_n = k_n 2 \sin(\pi/(2k_n))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راځي

$$
\begin{aligned}
b_{n+1}^2 &= 4k_n^2 4\sin^2(\pi/(4k_n)) \\
&= \underbrace{2k_n 2\tan(\pi/(4k_n))}_{a_{n+1}} \underbrace{\cos(\pi/(4k_n))2k_n 2\sin(\pi/(4k_n))}_{k_n 2\sin(\pi/(2k_n))=b_n} \\
&= a_{n+1} b_n \,.
\end{aligned}
$$

د پرلپسیو یا ترادفونو ځانګړي پوله ارزښتونه

یو څو غوره پوله ارزښتونه په لاندې جدول کې راوړل شوي

a_n	$a = \lim_{n\to\infty} a_n$
$\sqrt[n]{n}$	1
$n^\alpha q^n\,,\ \lvert q\rvert < 1$	0
$n^{-\alpha}\ln n\,,\ \alpha > 0$	0
$q^n/n!$	0
$n!/n^n$	0
$(1+1/n)^n$	e
$(1-1/n)^n$	$1/e$

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زيات واره کيدی شي پوله ارزښتونه وشميرل شي، داسې چې سړی د مناسب بڼه بدلون له لارې معياري افادې ته بېرته ولاړ شي. دا د دوه بيلو سره روښانه کيږي.
(i) د پرلپسې پوله ارزښت شمېرلو ته

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^{4n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

سړی ږدي

$$m = 2n + 3,\ n = \frac{m-3}{2}$$

او لاس ته راوړي

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2m-6}.$$

په دې پسې يا د دې په تعقيب دی

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^2 \cdot \left(\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right)^{-6} =$$

$$= e^2 \cdot 1^{-6} = e^2.$$

$$a_n = \binom{3n}{n} / 2^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

(ii) د دې لپاره چې د
پوله ارزښت وشميرو، سړی ليکي

$$a_n = \frac{(3n)(3n-1)\cdots(2n+1)}{n\cdot(n-1)\cdots 1} \cdot \frac{1}{2^n} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3-1/n}{2}\cdots\frac{2+1/n}{2}\right)\cdot\frac{n^n}{n!}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې په نوکانو کې افاده ≥ 1 ده لرو

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$$

د لاندې بڼې پوله ارزښت

$$\frac{a_n \pm b_n}{c_n \pm d_n}$$

په مناسب ډول سړی داسې شميري، چې سړی د مطلق ارزښت د لويې پرلپسې توکو سره وويشي:

د بيلګې په توګه دا پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3+\sqrt{n+4})^2}{5n+\ln n}$$

که غواړو وشميرو، نو مات يا کسر په لاندې بڼه ليکو

$$\frac{9+3\sqrt{n+4}+n+4}{5n+\ln n} = \frac{13/n+6\sqrt{1/n+4/n^2}+1}{5+(\ln n)/n}.$$

دا چې $1/n, 1/n^2$ او $(\ln n)/n$ د صفر پهلور ځی، نو پوله ارزښت دا لاندې دی

$$\frac{0+6\cdot\sqrt{0}+1}{5+0} = \frac{1}{5}.$$

د يوې لړۍ پرلپسې (لنډ: لړۍ) پوله ارزښت
Grenzwert einer Reihe

يو زياتون يا جمعه $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ دډېروو زياتيدونو سره لړی بلل کيږي. دا د يوې پولې ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

په لور هڅيږي، که ټوټه زياتوونويا – جمعو

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

پرلپسې (s_n) د s لور ته وهڅيږی یا کونورګنت شي. که پوله ارزښت شتون ونه لري نو پرلپسې پولي ته نه تلونکې یا ديورګنت بلل کيږي.
پوله ارزښت کېدی د زياتوونو (هغه عددونه چې يو په بل زياتيږي) د لړۍ پرلپسې په واک کې وي، همداسې اړتيا نه شته چې د نظم بدلون وروسته شتون ولري.

د يوې لړۍ د پولې ته تلنې لپاره اړيين (شرط) دی، چې

$$\lim a_n = 0.$$

فقط په لږو حالتونو کې د يوې لړی روښانه يا اکسپليڅيټ شمېرنه ممکن ده. يوه بېلګه يې د ټاکلو لړيو ده د راشنل زياتيدونو سره لکه

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} = \frac{3}{2}.$$

د ټوټه کسر ټوټه ونې وروسته

$$\frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1},$$

کېدی شي دا لړۍ په

$$(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) + \dots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنه ولیکل شي. تر $\frac{1}{1}$ او $\frac{1}{2}$ پورې ټول زیاتېدونې یو بل له منځه وړي یا پورته کوي،
داسې چې پوله ارزښت $\frac{3}{2}$ ترلی لوستل کېدی شي.
د ټوټه زیاتون د کمښت لپاره د ټول $n < m$ لپاره باور لري

$$|s_n - s_m| =$$

$$= |(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}) + \ldots + (\frac{1}{m-3} - \frac{1}{m-1}) + (\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m})| \leq$$

$$\leq \frac{4}{n-1},$$

داچې منځني ترمونه سره پورته کیږي یا له منځه سره وړي. ټوټه زیاتون یا –جمعه د کوشي – پرلپسي جوړوي:

$$|s_n - s_m| < \varepsilon$$

د لپاره

$$n > 1 + \frac{4}{\varepsilon}.$$

و پولې ارزښت ته کمون یا تفریق دی

$$|\frac{3}{2} - s_n| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \frac{2}{n}.$$

بیلګه دا هم ښایي، چې د زیاتوونو یا د جمعې د غړو لړۍ پرلپسي غوره یا ښه روښانه ده.

که لړۍ پرلپسي

$$(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8} - \frac{1}{5}) +$$
$$+ (\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16} - \frac{1}{6}) + \ldots,$$

وټاکو، نو هر ه په نوکاانو کې افاده $\geq \frac{1}{4}$ ده، نو لړۍ پرلپسي دیورګنت ده.

هندسي یا ځمککچیزې لړۍ
Geometrische Reihe

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمکچیزه لړۍ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ تیک هلته پولې ته ځي، $|q| < 1$ وي.
د هندسي زیاتونفرمول سره

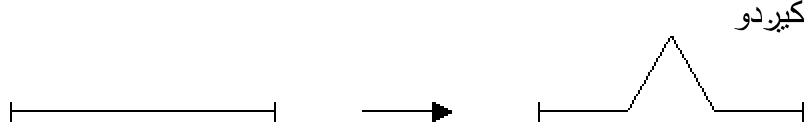
$$s_n = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

کېدی شي پوله ارزښت وښانه یا اکسپلیڅیت وشمېرل شي:

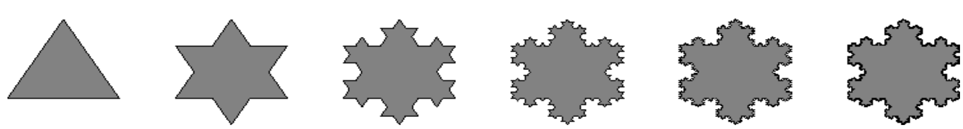
$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1-q}$$

د $|q| < 1$ لپاره.
پای.

که د یوه برابر اړخیز درېکوڼي یا مثلث مخ ته تک سره ژۍ د قانون یا قاعدې سره سم کیږدو



نو یوه ډېرۍ یا ستې لاس ته راځي د وتلو ژیو سره ، داسې په نامه د کوښ-د واورو پوتې Koch-Schneeflocke.



- $1/3$-م د واورو پوتی $3 \cdot 4^n$ ژۍ لري. دا چې د هر پل سره په ضریب کمیږي، نو د دې خومره والي لپاره لاس ته راځي

د ژیو ګڼون یا – تعداد ضرب د ژیو اوږدوالی:

$$(3 \cdot 4^n)\,(3^{-n}) = 3\,\left(\tfrac{4}{3}\right)^n \to \infty\,,$$

،

دا په دې معنا چې د ژیو اوږدوالی پولې ته نه ځي یا دیورګنت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په n -م پل سره $3 \cdot 4^{n-1}$ برابراړخيز درېګوډي لاس ته راځي د ژيو اوږدوالي 3^{-n}
او سطحې $\sqrt{3}/4\,(3^{-n})^2$ په ور زياتوالي سره. په دې توګه د n –م د واورو پوټي د سطحې لپاره راکوي

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\sum_{i=1}^{n}\left(3\cdot 4^{i-1}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(3^{-i}\right)^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\frac{4^{i-1}}{9^{i-1}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{4}{9}\right)^{i}\right).$$

دا وتلې پوله ډېرى په پسې توګه سطحه لري

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-4/9}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

هارموني لړۍ **Harmonische Reihe**

هارموني لړۍ

$$s = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k},$$

پولې ته نه ځي يا همداسې ناټاکلې پوله ارزښت $s=\infty$ لري.
په ټوليزه توګه لړۍ

$$s_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}$$

د $\alpha \leq 1$ لپاره ديورګنت او $\alpha > 1$ لپاره پولې ته تلونکې ده. يو څو ځانګړي ارزښتونه د.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots ,$$

$$s_4 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots ,$$

$$s_6 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-6} = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots .$$

مطلق پولې ته تلونکې لړۍ **Absolut konvergente Reihen**

که

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

پولې ته لاړ شي، نو لړۍ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ مطلق پولې ته تلونکې بللل کیږي.

د کونورګنت د دې قوي بڼې څخه لرو، چې لړۍ د زیاتوونو لړې پرلپسي په خوښه تغیر له امله هم کونورګنت ده یعنې پولې ته ځی.

کوښی (کوشي) – کونورګنت قضیه راکوي:

$$\exists n_\varepsilon : |a_{m+1}| + \dots + |a_n| < \varepsilon \quad \text{für} \quad m, n > n_\varepsilon$$

د درېکودي نابرابرون په مرسته د توته زیاتون د کمښت لپاره لاس ته راځي:

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \dots + a_n| \le |a_{m+1}| + \dots + |a_n| < \varepsilon$$

د $m, n > n_\varepsilon$, لپاره ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معناچې د $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ پولې ته تلنه.

مايورانت او مينورانت
Majorante und Minorante

که $|a_n| \le c|b_n|$ د $n \ge n_0$ لباره وي او يو مثبت يا زياتيزه ثابته، نو د $\sum b_n$ مطلق کونورګنت څخه د $\sum a_n$ مطلق کونورګنت لاس ته راځي

که برعکس $|a_n| \ge c|b_n|$ وي دېولو تر پای ډېرو n لپارهو نو د $\sum |b_n|$ ديورګنت څخه لاس ته راځي، چې $\sum a_n$ هم مطلق کونورګنت نه ده.

زياتوخت يا زيات واره هندسي لړۍ $\sum q^n$ او لړۍ $\sum n^{-\alpha}$ د پرتله کونې لړۍ په څير کارول کيږي.

د لړۍ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^{-1}$$

لپاره دی

$$a_n = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{(2n) \cdot (2n-1) \cdots (n+1)} \le 2^{-n}.$$

د دې په تعقيب هندسي لړۍ $\sum 2^{-n}$ يوه مايورانت ده، نو دا پولې ته تلونکې ده.
د لړۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1000}$$

لپاره د $n > 9$ لپاره باور لري

$$a_n \geq \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} .$$

په دې پسې یا په تعقیب هارموني لړۍ یوه مینورانت ده، نو لړۍ پولې ته نه ځي یا دیورګنت ده.

د وېش قضیه **Quotientenkriterium**

که $a_n \neq 0$ د $n > n_0$ لپاره وي او یو عدد $q \in (0,1)$ شتون ولري د

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q\,, \quad n > n_0\,,$$

سره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. برعکس

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1\,, \quad n > n_0\,,$$

، نو $\sum a_n$ پولې ته نه ځي یا دیورګنت ده.

د پولې ته تلنې لپاره پوره کېدونکې قضیه کېدی شي په ورته بڼه

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

هم ولیکل شي.

په پام کې دې وي، چې پوره کېدونکي پولې ته تلونکي شرطونه رکورزیو د نابرابرون

$$|a_{n+1}| < |a_n|\,, \quad n > n_0\,,$$

په توګه دی، چې د هغې په بنسټ کومهوینا ممکن نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پای.

که

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\,,\;\left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right|\,,\;\dots\;\leq q\,,$$

وي، نو دی

$$|a_{n+k}| \leq q|a_{n+k-1}| \leq \dots \leq q^k|a_n|\,.$$

له دې سره هندسي لړۍ يوه مينورانت ده.
د ديورګنت لپاره قضيه راکوي، چې

$$0 < |a_n| \leq |a_{n+1}| \leq \dots$$

د $n > n_0$ لپاره. زياتيدونې صفرپرلپسې نه جوړوي، له کوم چې د $\sum a_n$ ديورګنت
لاس ته راځي يا پولې ته نه تګ..
پای.

د وېش قاعده کېدی شي ګټوره وي که په لړيو استعمال شي، چې د هغې زياتوونې
فاکولتيت او توانونه خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \Big/ \binom{2n}{n}$$

لپاره د بېلګې په توګه سړی لاس ته راوړي

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3^{n+1}\,(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{3^n\,n!\,n!} = \frac{3\cdot(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}\,.$$

د دې افادې پوله ارزښت د $n \to \infty$ لپاره $\frac{3}{4}$ دی، پسې(تعقيب) يې لړۍ پولې ته ځي.

د زياتوونو يو سيده تخمين

$$a_n = \frac{3\cdot 6\cdots 3n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مفصل دی یا ډېر کار غواړي. ضریبونه

$$\frac{3k}{n+k}, \quad k=1,\ldots,n,$$

له یو څخه هم لوی دي او هم کوچني. سړی باید مناسبې جوړې سره یوځای کاندي، چې یوه تخمین ته راشي.

د ریښې یا جذرقضیه **Wurzelkriterium**

که یو عدد $q \in [0,1)$ د

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le q$$

سره شتون ولري د $n > n_0$ لپاره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. که برعکس

$$|a_n| \ge 1$$

وي د ناپای ډېرو n لپاره، نو $\sum a_n$ پولې ته نه تلونکې ده.

د کونورګنت لپاره پوره کېدونکي شرطونه کېدی شي په ورته یا برابر ارزښته بڼې

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

هم ولیکل شي.

که $|a_n| \le q^n$ د $n > n_0$ لپاره باور ولري، نو هندسي لړۍ یو مایورانت جوړوي.

د دیورګنت لپاره شرط راکوي، چې (a_n) صفر پرلپسې نه ده، ځکه چې $|a_n| \ge 1$ د ناپای ډېرو n لپاره باور لري..

د ریښې قضیه استعما کېدی شي په هغو لړیو ګټوره وي، چې د هغو زیاتونونه n -م توان خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \ldots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره سړی د بيلګې په توګه لري

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{|3+(-1)^n|}\,.$$

د دې افادې يا وييڼې پرلپسې

$$\frac{|x|}{2}, \frac{|x|}{4}, \frac{|x|}{2}, \ldots\,,$$

د

$$q = \frac{|x|}{2}$$

له لارې يا سره محدود ده. په تعقيب يې لړی د $|x| < 2$ لپاره پولې ته ځي.
همدې نتيجې ته رسو، که سړی پوله سوپريور جوړه کړي.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{2}\,.$$

دا د n –مې ريښې اوسخيليري پرلپسې پولې ته نه ځي بې پروا يا نا غوره يا مهمه نه ده.

د لايبنيخ قضيه **Leibniz-Kriterium**

الترنيري (مخ نخښه بدلونې) لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots$$

پولې ته ځي، که (a_k) يوه مونوتون صفر پرلپسې وي. د لړۍ باقيو يا پاتو لپاره باور لري

$$0 \le |\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k| \le |a_{n+1}|.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې الترنیري جمعې ارزښت کېدی شي تل د لومړي زیاتوني د مطلق ارزښت له لارې اټکل شي.

د اټکل په بنسټ

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots - a_m| \leq |a_{n+1}|$$

د کوښنی قضیه پوره ده، او د لپاره د پاتې جمعې اټکل لاس ته راځي.
د دې نامساوات د ښوونې لپاره، چې د لړی دپاتې لپاره اټکل راکوي، سړی بې له ټولیزو بندیزونو (o.B.d.A.) $a_{n+1} \geq 0$ نیسي او $s_m - s_n$ د

$$a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\geq 0} - \ldots \leq a_{n+1}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي. او د

$$\underbrace{(a_{n+1} - a_{n+2})}_{\geq 0} + \underbrace{(a_{n+3} - a_{n+4})}_{\geq 0} + \ldots \geq -a_m \geq -a_{n+1}$$

له لارې کښته لور ته اټکل کوي

د لایبنیخ قضیې سره د الترنیري هارموني لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2\,;$$

پولې ته تګ لاس ته راځي ، پرلپسې

$$a_n = \frac{1}{n}$$

په روښانه توګه یوه همغږېزه صفر پرلپسې ده. د n ـم ټوټه جمعې ناټیکاوی ، دا په دې معنا چې د لړی پرلپسې مطلق ارزښ دا لاندې دی

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} - \ln\,2\right| \leq \frac{1}{n+1}\,.$$

د لایبنیخ قصیې دواړه وړاندنیونې غوره دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n} = -\frac{2}{1}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{5}{4}-\dots$$

لړۍ لپاره زیاتوونې a_n صفرپرلپسې نه جوړوي. له

$$|s_{n+1}-s_n| = |a_{n+1}| \geq 1$$

څخه دیورګنت لاس ته راځي.

د

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}_{\max}\left(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^n}{2n}\right) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\dots$$

لړۍ لپاره زیاتوونې a_n همغږیزې نه دي. که یو په بل پسې زیاتوني سره یوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي

$$b_n = a_{2n-1}+a_{2n} = -\frac{1}{2(2n-1)}+\frac{1}{2n} = \frac{2n-2}{(4n-2)(2n)} \geq \frac{1}{4n}$$

für $n > 1$.

په تعقیب هامونې لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ یوه مینورانت ده، نو له دې کبله لړۍ دیورګنت ده.

د اویلر **Euler** ګڼ یا عدد **e** دیوې پرلپسې او یوې لړۍ پولې په حیث
د اویلر عدد $e = 2,71828182845905\dots$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کيدی شي د يوې پرلپسې او يوې لړۍ پوله ارزښت پّ ځير انځور شي

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

پای.

د لړۍ پولې ته تلنه له $1/n! \leq 4\cdot 2^{-n}$ څخه د مايورانت قضيې په بنسټ لاس ته راځي.

پرلپسې $a_n = (1+1/n)^n$ د لاندې دواړو اټکلونو په بنسټ د e سره نومول شوي يا په نخښه شوي پوله ارزښت په لور ځي.

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leq e$$

. (a)

د ښوونې لپاره لومړی په پام کې نيسو چې د $n \geq k \geq 0$ لپاره

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \;\leq\; \frac{1}{k!}$$

دی. له دې سره د بينوم فرمول څخه لرو

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq e$$

او دپوله ارزښت جوړولو سره غوښتنه لرو.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \geq e.$$ (b)

د ښوونې لپاره $N \geq 1$ په خوښه تاکو مګر کره او د $n > N$ لپاره لرو:

$$a_n \geq \sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \geq \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\left(\frac{n-N}{n}\right)^N.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{N}{n}\right)^N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$$

او د پولې ارزښت جوړولو($N \longrightarrow \infty$) سره غوښتنه.

له (a)او (b) څخه د $\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$ له امله لرو :

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = e.$$

د لړيو ځانګړي پوله ارزښتونه

په لاندې کې د ځو غوره لړيو پوله ارزښتونه ورکړ شوي.

.

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1-q} \text{, für } |q| < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots = \ln 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

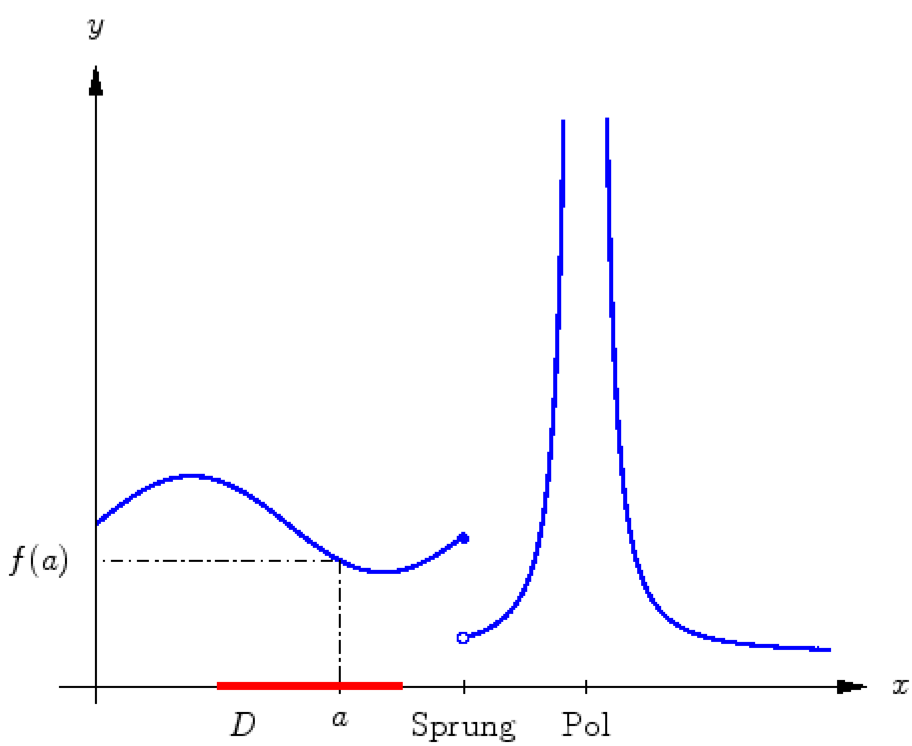
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2} = 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\pm\cdots=\frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=e$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{k!} = 1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\pm\cdots=\frac{1}{e}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 2^k} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\cdots=\ln 2$$

ناپرېکیدنه یا متمادیت **Stetigkeit**



(c) ketabton.com: The Digital Library

یو تابع f په ټکی a کې ناپرېکیدونکی یا متمادي دی، که د ټولو پرلپسیو (x_n) لپاره د د پولې a سره د تابع ارزښت $f(x_n)$ د $f(a)$ په لور کونورګنت وی یا هځیږي:

$$x_n \to a \Longrightarrow f(x_n) \to f(a)\,,$$

د پوله ارزښت د تعریف له مخې هر $\varepsilon > 0$ ته یو δ_ε شتون ل ري د $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ سره د $|x - a| < \delta_\varepsilon\,,$ لپاره ، او سړی لیکي

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\,.$$

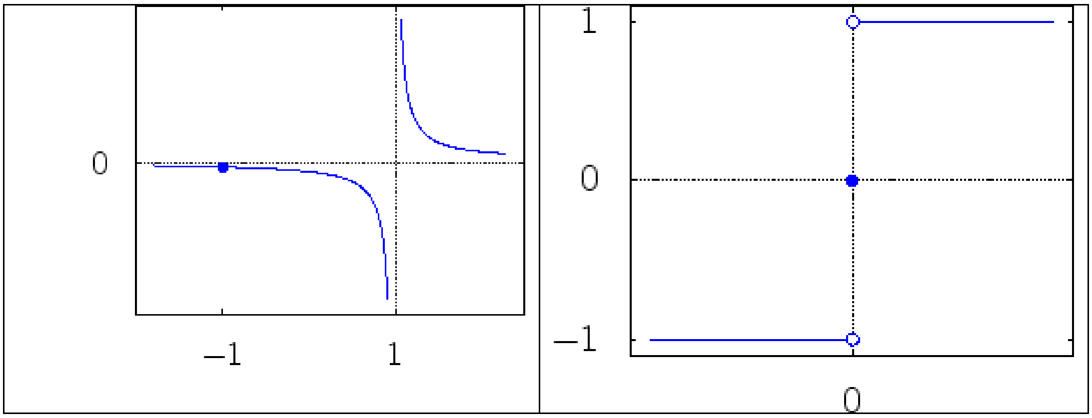
یو تابع په یوه انتروال D ناپرېکیدونکي ده، که دا د D په هر ټکي کې ناپرېکېدونکې وي.

دا په دې معناچې د f ګراف سره تړلی دی، تابع ګام یا ټوپ نه وهي او قطب نه لري (لنډ: نه پرې کیږي او نه ماتیږي).

بالاخره ناپرېکېدنه په دې معنا ده، چې ګراف بې له دې چې (پنسل پورته شي) پرې شي رسم کیږي.

$f(x) = \operatorname{sign}(x)$ فنکشن	$g(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library



پورته دواړه بیلګې د پرېکیدنې مختلف تیوپونه ښايي.

د سیګنوم تابع sign په صفرځای کې یو توپ وهي. په حقیقت کې د تابع ارزښت $\text{sign}(0) = 0$ تعریف دی، مګر د $f(x)$ پوله ارزښت د $x \to 0$ لپاره شتون نه لري.

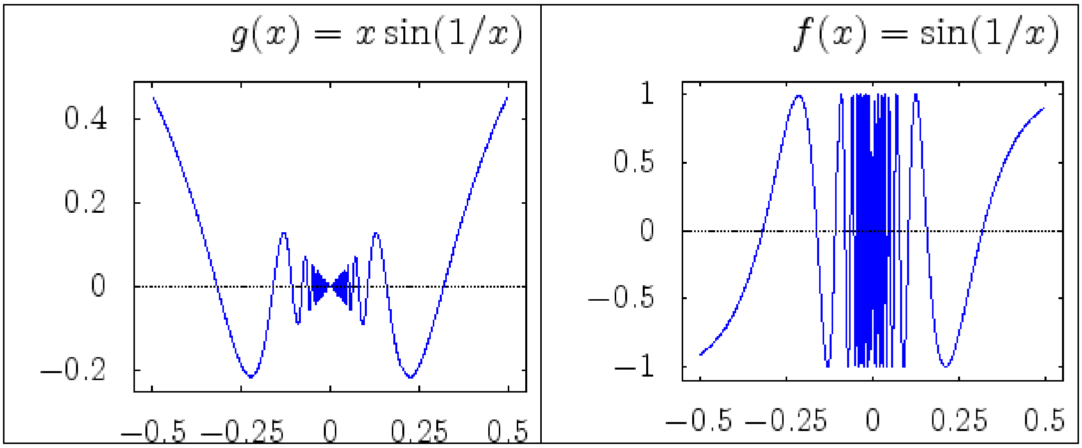
تابع په $x = \pm 1$ کې تعریفتشیا لري. د $x \to 1$ لپاره $|g(x)|$ د ∞ په لور هڅيږي، g هلته یو قطبځای لري. مګر سره له دې هم پوله ارزښت $\lim_{x \to -1} g(x)$ شتون لري. دا تړلی د کرښيز ضریب $(x+1)$ د لنډوني څخه کتل کیږي.

$$g(x) = \frac{1}{x-1}, \ x \neq -1 .$$

دا یوه له منځه وړونکي یا پورته کیدونکي تعریفتشیا ده. د تابع ارزښت $g(-1) = -\frac{1}{2}$ د تکمیلوني له لارې g په $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ باندې یو ناپرېکیدونکی تابع کیږي.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library



تابع (خيرې يې پورته دي)
$f(x) = \sin(1/x)$

-1

په صفر 0کې پرېکيدونکې ده، ځکه چې د $x \to 0$ لپاره د او 1 ترمنځ اوسخيلی کيږي.

برعکس ياپه ښتې د تابع

$$g(x) = x\sin(1/x)$$

تعريفتشيا په $x = 0$ کې پورته کيدونکې يا له منځه وړونکې ده.

له

$$0 \le |x\sin(1/x)| \le |x|$$

د $\lim_{x\to 0} |x| = 0$ سره د پرتله کيدونکې قضيې په بنسټ لاس ته راځي

$$\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0.$$

له دې امله کيدی شي g د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g(0) = 0$

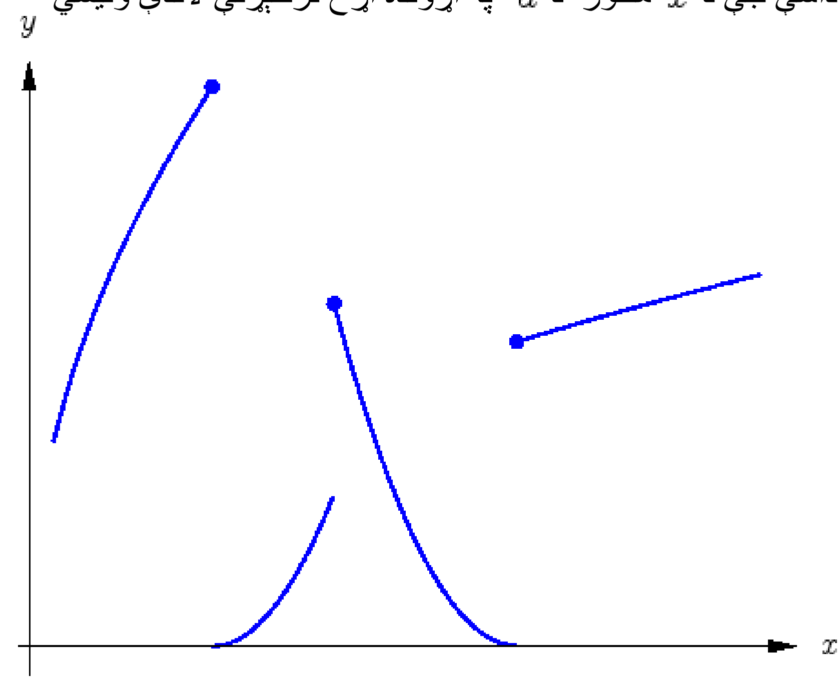
اینوونې له لارې یوه په ټول $\mathbb{R}$ ناپرېکېدونکې تابع ته پوره شي.

یو اړخیز ناپرېکېدنوالی یا متمادیت **Einseitige Stetigkeit**

ناپرېکدنوالي ته ورته سرې کېږ- همداسې ښی ناپرېکېدنوالی تعریفوي

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f^{-}(a)\,, \qquad \lim_{x \to a+} f(x) = f^{+}(a),$$

داسې چې د x محور د a په اړونده اړخ ترخېړنې لاندې ونیسي

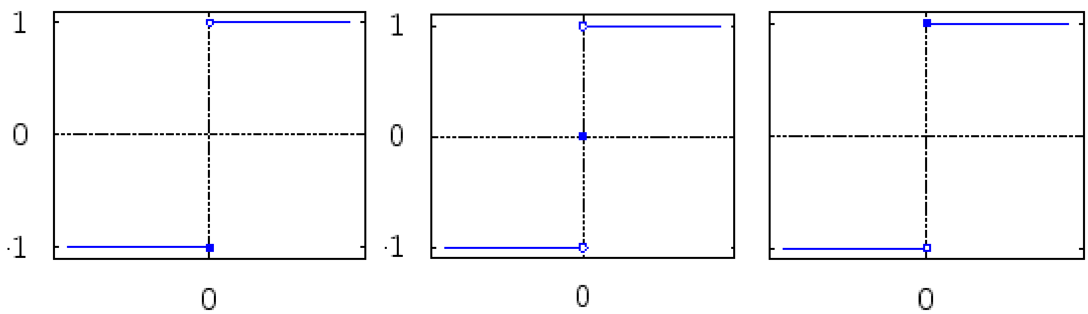


که د f په یوه ټوپځای تابع ارزښت تعیف وي، نو دا په ګراف کې پنډ په نخښه کېدی شي، چې روښانه شي چې د کېږ- یا ښي اړخ د پولې ارزښت سره سر خوري.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع
$$f(x) = x/|x|$$
په ټولو ټکو کې تر تعريفتشيا $x = 0$ پورې ناپرېکيدونکې ده.



که $f(0) = -1$ کېږدو نو تابع به کيڼ اړخيزه او د $f(0) = 1$ سره ښۍ اړخيزه ناپرېکېدونکې په 0 کې مخ ته لاړه شي. د $f(0) = 0$ لپاره د سيګنوم-تابع

$$f(x) = \operatorname{sign}(x),$$

لاس ته راځي، چې دا په 0 کې نه ښۍ – او نه کينه ناپرېکېدونکې دی.

د ناپرېکيدونکو توابعو لپاره لارې يا قاعدې

په يوه ټکي a کې ناپرېکېدونکې توابعو f او g لپاره

$rf \quad (r \in \mathbb{R})$

$f \pm g$

fg

$f/g \quad$ (وي $g(a) \neq 0$) که

$f \circ g$

په a کې ناپرېکيدونکې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته وګه په یوه انتروال D ناپرېکېدونکې تابع همداسې د کيڼ – اوښي اړخيز ناپرېکېدنوالي ځايونو لپاره باور لري.
پاى.

دا لار د پوله ارزښت لپاره اړونده وينا څخه ترلې لاس ته راځي.
که دبيلګې په ت وګه د ناپرېکېدونکو توابعو کمپوزيشن(ترکيب) تر څېړنې ونيسو، د g د ناپرېکېدنوالي څخه د هرې پرلپسې (x_n) لپاره د پوله ارزښت a سره دا راکوي

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a).$$

دا چې f هم ناپرېکېدونکی دی، لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f(g(a)).$$

پاي.

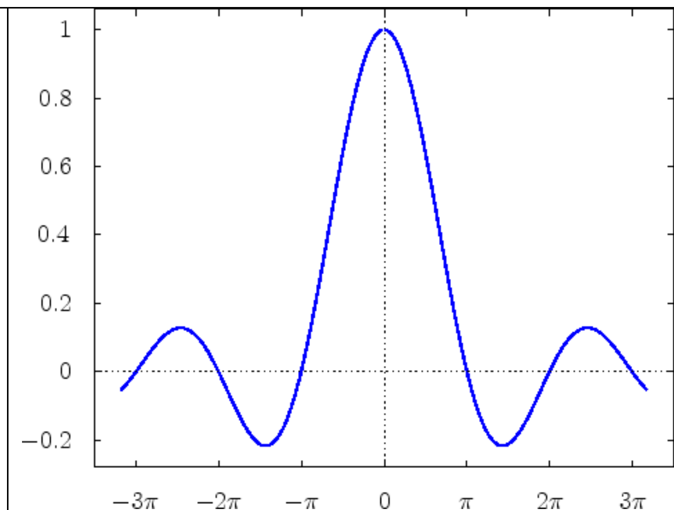
داسې په نامه sinc - تابع.

$$f(x) = \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$$

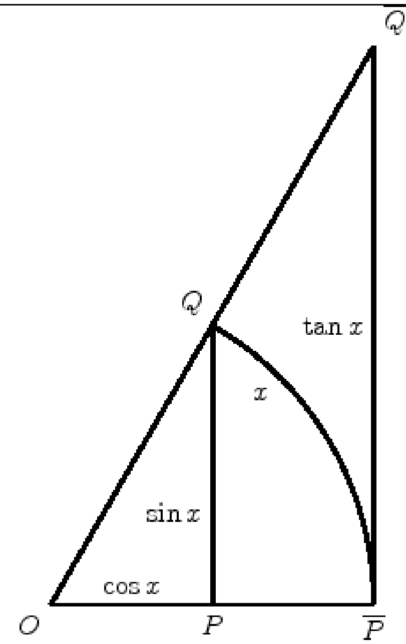
د مخ ته بيولو يا دوام

$$f(0) = 1$$

سره په $\mathbb{R}$ باندې ناپيکېدونکې ده. ښوونه يې د ترېګونومتريک توابعو په تخمين پورې اړه لري.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ردېکوډي $\Delta(OPQ)$ ، د ګردی ټوټه ووني یا $\Delta(O\overline{P}\overline{Q})$ وتر او درېکوډي د سطحو د پرتلې له لارې په څېره کې کتل کيږي، چې $$\frac{\sin x\cos x}{2}\leq\frac{x}{2}\leq\frac{\tan x}{2}$$ همداسې $$\frac{1}{\cos x}\geq\operatorname{sinc}x\geq\cos x,$$ د $\sin x/2$ سره وېشني له لارې او د معکوس ارزښت جوړونه. د $\lim_{x\to 0}\cos x=1$ د پرتلې قضيې څخه لاس ته راځي. $$\lim_{x\to 0}\operatorname{sinc}x=1.$$	

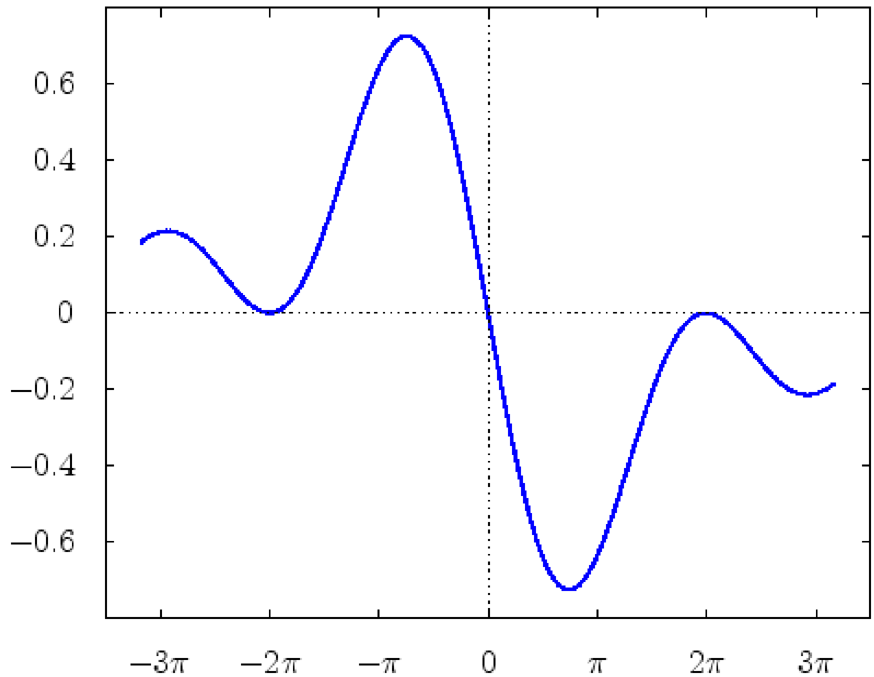
ليکونکي: اېپ، هيوليک

تابع

$$f(x)=\frac{\cos x-1}{x}$$

د مخ ته وړنې $f(0)=0$ سره په ټول $\mathbb{R}$ ناپرېکيدونکې ده

(c) ketabton.com: The Digital Library



باور لري

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)}$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x + 1}\sin x,$$

او له

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0}\sin x = 0$$

لاس ته راځي

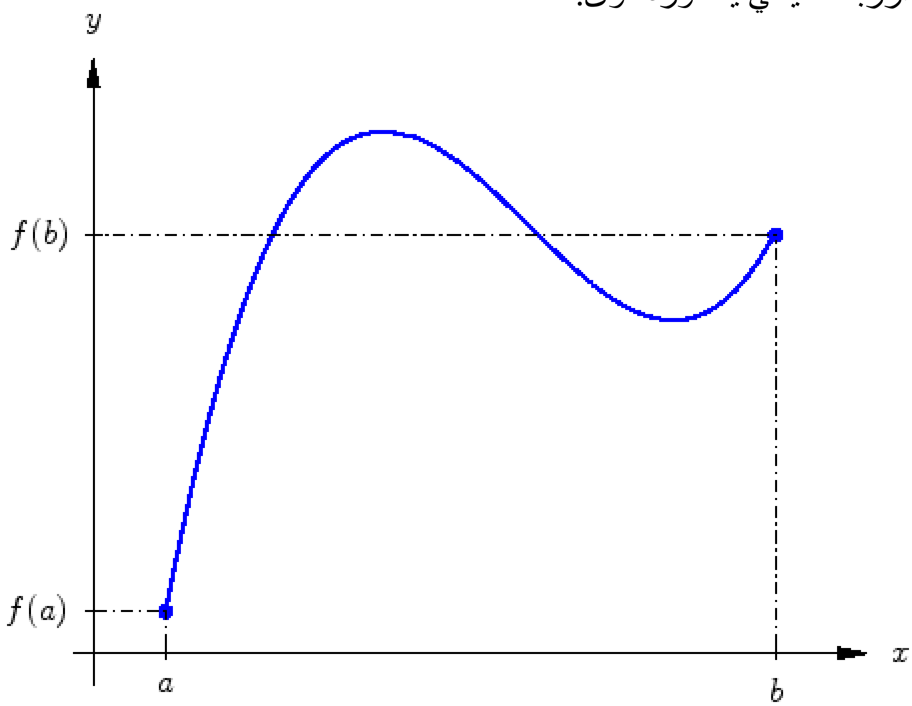
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځ ارزښت جمله **Zwischenwertsatz**

یو ناپرېکپدونی تابع f په یوه بندانتروال $[a,b]$ د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ هر ارزښت نیسي یا غوره کوی.



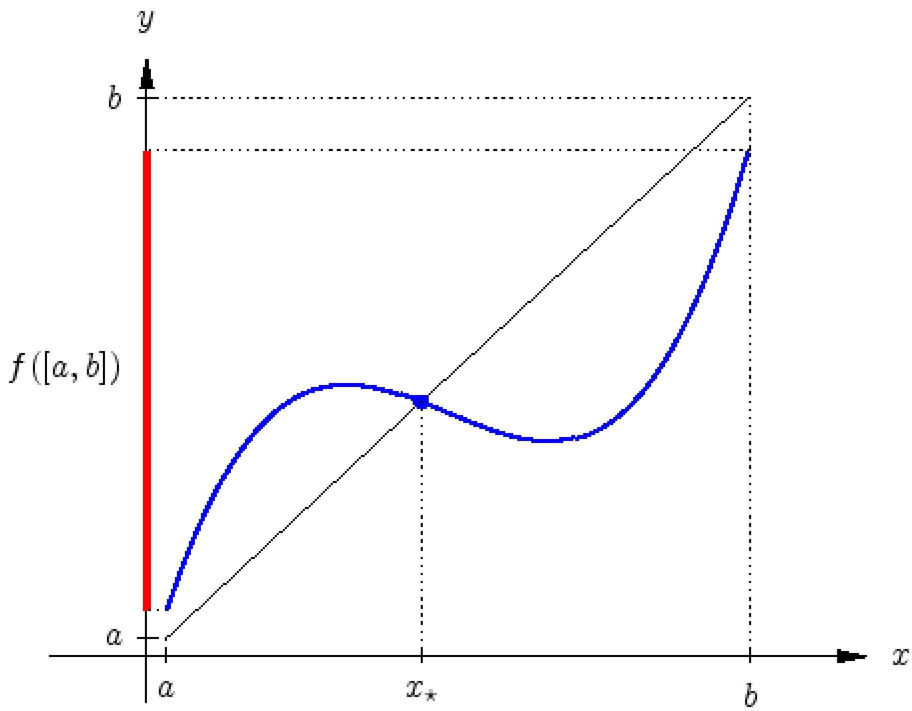
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

که یو تابع f انتروال $[a,b]$ په انتروال $[a,b]$ ناپرېکپدونکی تنظیم کړي، نو یو $x_\star$ شتون لري د

$$x_\star = f(x_\star).$$

سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ناپرېکيدونکې تابع

$$g(x) = f(x) - x$$

لپاره $g(a) \geq 0$ او $g(b) \leq 0$ باور لري. د منځ ارزښت جملې سره د يوه صفرځای $x_\star \in [a, b]$ شتون لاس ته راځي:

د نتپرېکيدونکو توابعو لپاره

$$g(x) = f(x) - x$$

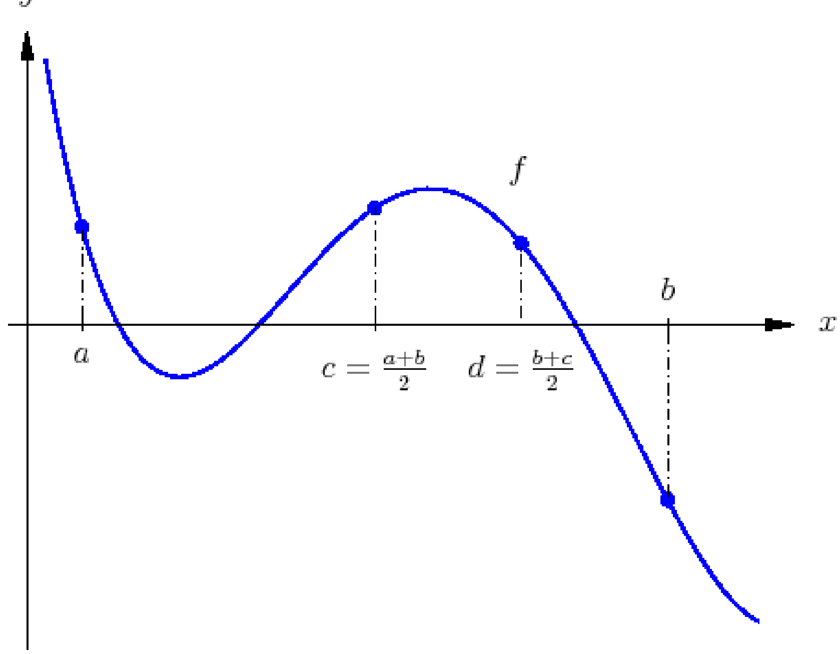
$$g(x_\star) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x_\star) = x_\star$$

دا په دې معناجې د f يو ځای په ځای - يا بيکس تکی $x_\star$.
ليکونکي: هيوليک، کراخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه سطحو – يا برخو تلنلار **Bisektionsverfahren**

د منځ ارزښت جملې په بنسټ يو ناپرېکيدونکی تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ د $f(a)f(b)\leq 0$ سره لږ تر لږه يو صفرځای په $[a,b]$ کې لري.



که دا انتروال نیم شي او f ته د انتروال په ةنځ کې ارزښت ورکړي

$$c=\frac{a+b}{2}$$ ،

نو کيدی شي د مخنځښي په مرسته پرېکړه وشي، چې د کوم انتروال په نيمايي کې بايد صفرځای پروت وي:

$f(a)f(c)\leq 0$ لاسته راځي ، چې په $[a,c]$ ، کې صفرځای شتون لري

$f(a)f(c)\geq 0$: لاس ته راځي صفرځاب په $[c,b]$. کې شتون لري

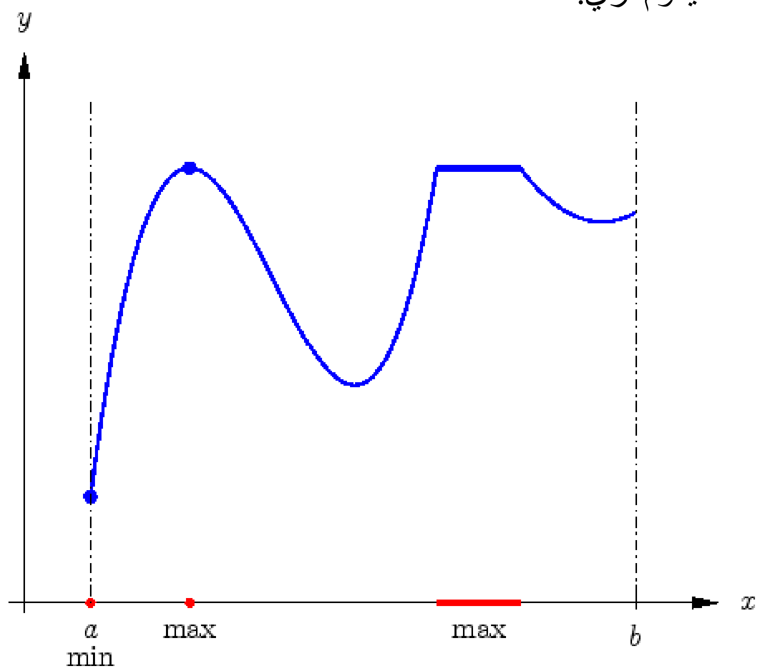
سرِی اوس دا اړونده برخه انتروال تاکي او دااېتریر iteriert (ټيک حل ته ور نږدې کونه) کوي، تر څو د انتروال اوږدوالی غوښتوني ټيکوالي ته ورسيږي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک، پفايل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناپرېکيدونکي تابع افرطيت Extrema stetiger Funktionen

يو ناپرېکيدونکی تابع په يوه پای رابند انتروال $[a,b]$ لر. تر لږه يو مينيموم او يو ماکسيموم لري.



ليکونکي: اېپ، هيوليک

يو $c > 0$ شتون لري د
$$(x+y)^n \le c(x^n+y^n)$$
سره د $x,y \ge 0$ لپاره

د بنووني ته د $x \neq 0$ لپاره (حالت $x = 0$ ساده دی) ليکو

$$z = y/x$$

او ناپرېکيدونکی تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n}.$$

څېړو.

دا چې $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$ دی، نو یو $b > 0$ شتون لري، داسې چې $f(z) \le 2$ د $z \ge b$ لپاره باوري کوي. د

$$c = \max\left\{2, \max_{z\in[0,b]} f(z)\right\}$$

سره لاس ته راځي

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n} \le c$$

او له دې سره پورته غوښتنه

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

برابرډوله ناپرېکیدنوالی **Gleichmäßige Stetigkeit**

یو تابع f په یوه انتروال D برابرډوله یا برابرارزښته ناپرېکېدونکی دی ، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو δ_ε شتون ولري ، دا سې چې راکړي

$$|x-a| < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

د ټولو $x, a \in D$ لپاره.

د f د تنها ناپرېکېدنې په برعکس δ_ε د a په واک کې نه ده. تنهاپه یوه محدود رابند انتروال کې ناپرېکېدنوال کی او برابرارزښته یا – ډوله ناپرېکېدنوالی سره ورته دی.

لیکونکي: هیولیګ، پفایل

په ټکي ډول پولې ته تلنه **Punktweise Konvergenz**

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توابعو (f_n) يوه پرلپسي په يوه انټروال D ټکي ډوله د پولي تابع f په لور پولي ته ځي.

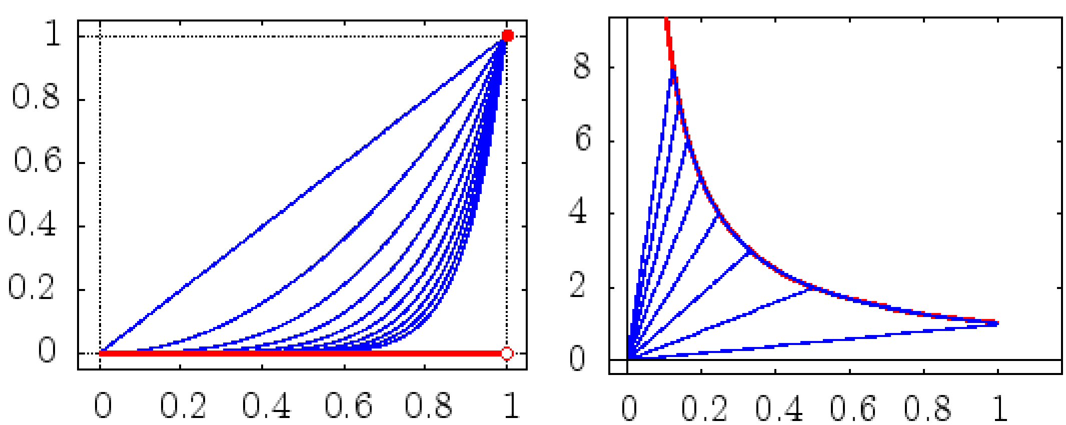
$$f_n \underset{\text{pktw.}}{\longrightarrow} f,$$

که $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ وي د ټولو $x \in D$ لپاره.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

په ټکيډوله پولي ته تلني بايد نه دی چي ناپرېکېدنوال او بندوالی ساتلي پاتي شي.
د بېلګي په توګه د $f_n(x) = x^n$ ټکي ډوله پوله ارزښت په $[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

په ښي انټروال پای پرېکېدونکی دی، لکه په کينه څېره کي چي ښوول شوی دی.



د يو کونورګنت لپاره بېلګه چي د نامحدود پوله تابع په لور ښی څېره د پرلپسي سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 < x \le 1/n \\ 1/x, & 1/n < x \end{cases},$$

ښايي ، چې په $(0,1)$ ټکي ډوله د پوله تابع $f(x) = 1/x$ په لور پولې ته ځي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

برابرارزښته يا برابرډوله پولې ته تلنه **Gleichmäßige Konvergenz**

د توابعو يوه پرلپسي (f_n) په يوه انتروال D برابرډوله د يوه پولې تابع f په لور پولې ته ځي،

$$f_n \underset{\text{glm.}}{\longrightarrow} f,$$

که هر $\varepsilon > 0$ ته يو n_ε شتون ولرى، داسې چې

$$n > n_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري.

د کوشي قضيې په مرسته کېدى شي برابرډوله پولې ته تلنه بې د پولېتابع نسبت څخه تعريف شي. سرى ورته شرطونه لاس ته راوړي، داسې چې

$$m, n > n_\varepsilon \Longrightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره بايد باور ولري.

که توابع f_n ناپرېکېدونکي وي، نو پوله تابع f هم ده.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د درېګوډي نامساواتو څخه لرو

$$\begin{aligned} &|f(x_0) - f(x)| \\ &\le |f(x_0) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \\ &\le |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د په خوښه $\varepsilon > 0$ ته د برابرډوله کونورګنت له امله یو n_ε شتون لري، داسې چې د $n > n_\varepsilon$ لپاره

$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall\, y \in D$$

باوري کوي. د یوه داسې n لپاره اخرنی او لومړنی ترم $< \varepsilon$ دي، که $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ وي. دا له $|f\,(x) - f\,(x_0)\,| < 3\varepsilon$ لاس ته راځي او له دې سره د $f\,(x) \to f\,(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د توابعو لړۍ پولې ته تلنه **Konvergenz von Funktionenreihen**

یوه د توابعو f_k لړۍ $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ټکي ډوله (برابرډوله) پولې ته تلونکې ده، که دا د لاندې ټوټه جمعې یا زیاتون $s_n = \sum_{k \le n} f_k$ لپاره دا حالت ولري.

یوه کلکونه یې مطلق پولې ته تلنه ده، چې د هغې سرره د $\sum_n |f_n|$ د برابرډوله پولې ته تلنې لپاره غوښتل کیږي. په دې حالت کې پولې ته تلنه د لړۍ یوه نظم بدلون لپاره هم ساتلی پاتیږي.

د تعریف سره سم دا وینا وې په تابع پرلپسیوو هم د باور وړ دي.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

په لاندې کې د یو څو تیوپیکي بیلکو حالتونه ښولکیږي

(i) د توابعو لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(1-x)^k = x\left[1 + (1-x) + (1-x)^2 + \cdots\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $[0,1]$ ټکي ډوله پولې ته ځي. د هندسي لړی لپاره فرمولپه مرسته پوله تابع لاس ته راځي

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

دا چې په $x = 0$ کې پرېکېدونکی دی، کېدی شي لړی برابرډوله کونورګنت نه وي.

(ii) د $x \in [0,1]$ لپاره لړی

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \pm \cdots$$

د لایبنیخ ــپولې ته تلنې له امله ($\frac{x^k}{k}$ همغږیز صفر پرلپسې ده). دا چې د لړی پاتې د لایبنیخ پسې د

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-x)^k}{k} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} \right| \le \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| \le \frac{1}{n+1}$$

له لارې اټکل کېدی شي، لړی په $[0,1]$ حتی برابرډوله پولې ته ځي. مګر سره له دې په $[0,1]$ باندې مطلق پولې ته نه ځي، ځکه چې $\sum(1/k)$ دیورګنت ده.

(iii) لړی

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $[-1,1]$ باندې مطلق پولې ته ځي، ځکه چې

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{x^k}{k^2}\right|-\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{x^k}{k^2}\right|=\sum_{k=n+1}^{m}\left|\frac{x^k}{k^2}\right|\leq\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

باور لري، او

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

پولې ته ځي.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

توابعو لړۍ ته مایورانت یا پورته پولې
Majorante bei Funktionenreihen

د پوره لوی n لپاره باور لري

$$|f_n(x)|\leq ca_n\,,\quad x\in D\,,$$

اوکه لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ پولې ته ځي، بیا نو لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

مطلق پولې ته تلونکې ده.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

وینا تړلې د اعدادو لړۍ لپاره د مایورانت له جملې لاس ته راځي، ځکه چې د ټولو $x\in D$ لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)| - \sum_{k=1}^{m}|f_k(x)| \le c \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د اکسپوننشل تابع ضرب انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د يوه ضرب د پوله ارزښت په حيث انځور شي:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n \ , x \in \mathbb{R} \, ,$$

په هر انټروال $[-a,a]$ د برابرډوله پولې ته تګ سره.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

لومړی به د

$$f_n(x) = (1+x/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{x}{n} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{x^n}{n^n} \, .$$

برابرډوله پولې ته تلنه و ښوول شي. دې ته سړی ترې کار اخلي يا استعمالوي، چې

(i)

د په خوښه $a^k/k! \to 0$ لپاره $a \ge 0$ ؛

(ii)

$p_{n,j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j}$ د هر $j \in \mathbb{N}$ لپاره يو مونوتون جګېدونکې د 1

په لور تلونکي پرلپسي ده.

د دې لپاره چې د کوشي فرمول استعمال کړو، سړی کمښت يا تفريق $f_m(x) - f_n(x)$ په لاندې بڼه ليکي

$$\sum_{j=0}^{k-1}(p_{m,j}-p_{n,j})\frac{x^j}{j!} + \sum_{j=k}^{m} p_{m,j}\frac{x^j}{j!} - \sum_{j=k}^{n} p_{n,j}\frac{x^j}{j!}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k<n<m$ سره .

د $|x|\le a$ لپاره د $a\ge 1$ او $k\ge 2a$ سره د اخرنیو زیاتېدونو ارزښت هر ځل

$$\le \frac{a^k}{k!}\underbrace{\left(1+\frac{a}{k+1}+\frac{a^2}{(k+1)(k+2)}+\cdots\right)}_{\le 2},$$

$<\varepsilon/3$

دی، نو د(i) پسې د یوه پوره لوي ټاکلې k لپاره.

د (ii) پسې یا له مخې دی

$$|p_{m,j}-p_{n,j}|<\frac{\varepsilon/3}{ka^k}$$

د $m,n>N_j(\varepsilon)$ لپاره، اوله دې سره کیدی شي د لومړنی جمعې هره زیاتېدونې د $f_m(x)-f_n(x)$ په توته کیدو د $\frac{\varepsilon/3}{k}$ له لارې اټکل کړي. په ټولیزه توګه لرو

$$|f_m(x)-f_n(x)|<k\frac{\varepsilon/3}{k}+2\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\quad m,n>\max_{j<k}N_j(\varepsilon)\,.$$

د

برابرډوله پولې ته تلنې په بنسټ په هر انتروال $[-a,a]$ باندې د پولې تابع $f=\lim_{n\to\infty}f_n$ ناپرېکېدونکې ده. بسیا کوي، چې $f(x)=e^x$ د راشنل پروت محور $x=p/q$ لپاره وښایو. د یوې برخه پرلپسې $n=mp$ په راوړنې سره د e د تعریف څخه لاس ته راځي

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{x}{mp}\right)^{mp}=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{p}{mpq}\right)^{mpq/q}=e^{p/q}$$

د $t\mapsto t^{p/q}$ ناپرېکېدنې له امله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشال تابع لړۍ انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د یوې لړۍ د پولع ارزښت په تګه انځور شي:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \ , x \in \mathbb{R},$$

د هر انتروال $[-a,a]$ برابرډوله پولې ته تلنې سره.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

اوس د ضرب انځورونې ته ورته والی ښولکیږي:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

$x > 0$

دا ترلی د تیلور-لړۍ په څېر د جمعې د روښانه ونې څخه لاس ته راځي. د لپاره دا لاندې سیده ښوونه ستونځمنه ده، سره له دې بې له مشتق منځ راوځي.

د $\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n$ سرې پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(\frac{x}{n}\right)^j = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{x^j}{j!}\underbrace{\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-j+1)}{n\cdot n\cdots n}}_{\le 1}\right)$$

$$\le \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{x^j}{j!}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي او د

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{x^j}{j!}\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-j+1)}{n\cdot n\cdots n}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\geq \sum_{j=0}^{m}\left(\frac{x^j}{j!}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{j-1}(1-k/n)\right)$$
$$= \sum_{j=0}^{m}\frac{x^j}{j!}$$

د يوه په خوښه $m \in \mathbb{N}$ کښته لور ته اټکل کوي. د $m \to \infty$ لپاره د پوله ارزښت جوړولو ځخه وروسته د دواړو آټکلونو يو بل سره برابروالی لاس ته راځي.

يوه ورته دليل راوړنه د $x < 0$ لپاره همم شوني ده، که سړی مثبت او منفي برخه په دې منځ ته راغلي جمعه کې ځانله يا جداوځيري.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

اکسپوننشا تابع د ډېرې بيلوژيکي ودې پروسې تر ځيرنې لاندې نيسي. د بيلګې په توګه په يو ساده د د قومونو ودې مودل کې د زېږېدنې ګڼون يا تعداد متناسب دی د د ورځنې اوسيدونکو تعداد $p(t)$ سره د t په وخت کې، دا په دې معنا چې

$$p(t+\Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t))\,.$$

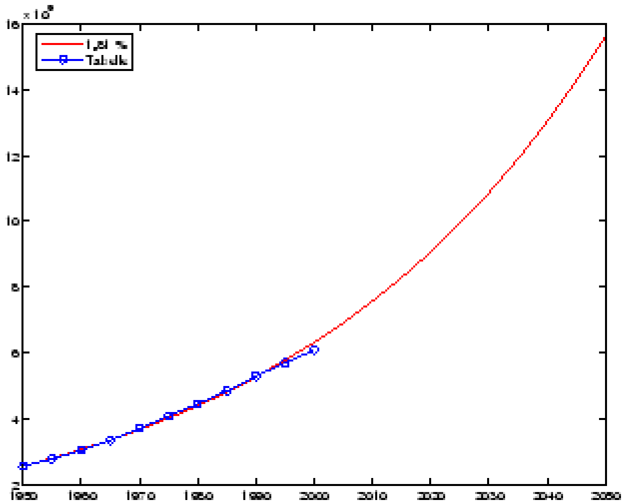
د $\Delta t \to 0$ لپاه دا د ودې قانون

$$p(t) = ce^{\lambda t}\,, \qquad c = p(0)\,,$$

له لارې مودلي کيږي.

کال	د نفوسو تعداد په ميليونو	ونده
	2555	
1950	2779	1.76 %
1955	3039	1.87 %
1960	3345	2.02 %
1965	3707	2.16 %
1970	4088	1.80 %
1975	4456	1.80 %
1980	485	1.79 %
1985	5283	1.77 %
1990	5690	1.54 %
1995	6080	1.37 %
2000		1.25 %

(c) ketabton.com: The Digital Library



(کيڼ) جدول د نړۍ اوسېدونکي $p(t)$ ښايي همداسي کلنۍ د ودې تعداد(اټکل شوی ارزښت). کلنۍ منحٔني د ودې زياتون (ريټ) په کلونو 1950-2000کې 1.81 % وو. له 1950 کال څخه به د ثابت منحٔني اکسپوننشل ودې سره

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

به د نړۍ اوسېدونکي په کال 2050 کې 16 ميلياړده وګڼل شي(ټکي په ټکي شوې کړه يا منحني).

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

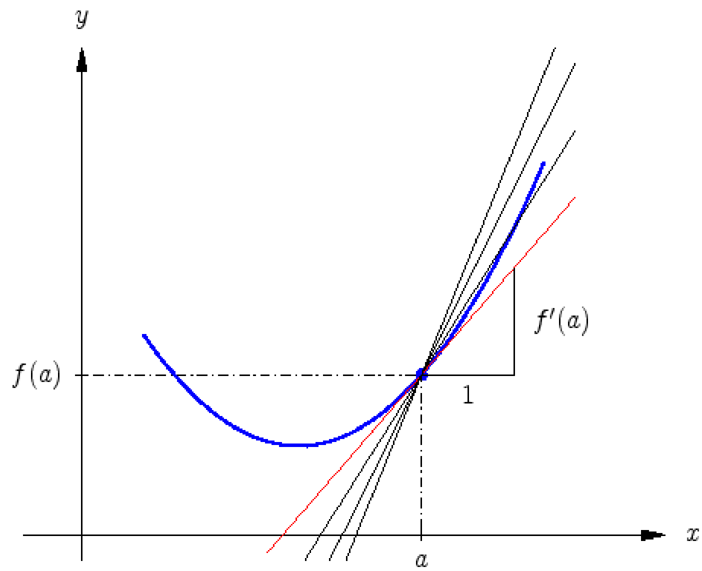
مشتق(رابيليدنه) Ableitung

يو تابع f په ټکي a کې مشتقوړ يا رابېلېدوړ دی، که د مشتق په نوم نومول شوې پوله ارزښت

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري..

(c) ketabton.com: The Digital Library



مشتقوړوالی یا رابیلیدوړوالی هندسي په دې معنا دی، چې د ټوټه ونې یا سیکانت جګوالی له

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

څخه د ورکړشوي تانجنت جګوالي په لور وهڅيږي یا کونورګنت شي(پوله یې ونیول شي).

سړی داسې هم لیکي:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{dy}{dx}$$

د $y = f(x)$ سره . دا لیکدود یا ه‍دول په کمبنت وېش کې $\Delta x \to 0$ پولې ته تګ ښایي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جګ مشتقونه د $f'', f''', \ldots$ همداسې $f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots$ سره په نخښه کيږي.

يو تابع f په يوه ډېرۍ يا سټ D باندې مشتقوړ بلل کيږي، که $f'(x)$ د ټول $x \in D$ لپاره شتون ولري.

د تابع $f(x) = x^2$ د مشتق لپاره د تعريف سره سم لرو:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0}(2x + h) = 2x\,.$$

دويم مشتق $f''(x) = 2$ ثابت دی.

په ټوليزه توګه يو د خوښې مونوم $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ لپاره د بينوم فرمول په مرسته لرو

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1}h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1}\,,$$

د کوم سره چې $O(h^2)$ د نظم h^2 ترمونه په نخښه کوي.

د $f(x) = \sin x$ مشتق کېدی شي د زياتون – يا جمعي قضيې په مرسته وشمېرل شي له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

څخه د کمښت وېش لپاره د $t = x + h/2$ سره راکوي

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin\left((x+h/2)+h/2\right) - \sin\left((x+h/2)-h/2\right)}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{2\cos(x + h/2)\sin(h/2)}{h}.$$

د

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(h/2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

له امله د $h \to 0$ لپاره ښی اړخ د $\cos x$ په لور هخیږي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د بنسټتوابعو مشتق یا رابیلیدنه

لاندې جدول د غوره بنسټتوابعو مشتق ښایي:

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		x^r, $r \neq 0$	$r\,x^{r-1}$
e^x	e^x		$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د مشتق يارابيليدنې کرښزوالی **Linearität der Ableitung**

مشتق کرښيز دی، دا په دې معناچې د مشتقوړ توابعو f او g لپاره باور لري

$$(rf)' = rf', \quad r \in \mathbb{R},$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ضرب قانون **Produktregel**

د دوه مشتقوړ توابعو f او g د ضرب مشتق دی

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

په ټوليزه توګه د ضرب $f = f_1 \cdots f_n$ لپاره باور لري

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \frac{f}{f_i}.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د تعريف څخه ترلی راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د پولينوم

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

مشتق د $x = 1,2,3$ په ځايونو کې ټاکل کيږي. دا چې د هر کرښيز ضريب مشتق 1 دی، د ضرب له لارې يا قاعدې څخه لرو

$$\begin{aligned} p'(1) &= (1-2)(1-3) = 2, \\ p'(2) &= (2-1)(2-3) = -1, \\ p'(3) &= (3-1)(3-2) = 2. \end{aligned}$$

په ورته توګه سرې د

$$p(x) = (x-1)\cdots(x-n),$$

لپاره شايي، چې

$$p'(k) = (-1)^{n-k}(n-k)!\,(k-1)!$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی د $k = 1, \ldots, n$ لپاره.
(Autoren: Höllig/Hörner/Knesch)

د وېش قانون یا لار **Quotientenregel**

د دوه مشتقوړ توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو x کې د $g(x) \neq 0$ سره. په ځانګړې توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2x}{4+3x^2}$$

د راشنل توابعو مشتق دی

$$\frac{(1-2x)'(4+3x^2) - (1-2x)(4+3x^2)'}{(4+3x^2)^2}$$

$$= \frac{-2(4+3x^2) - (1-2x)(6x)}{(4+3x^2)^2}$$

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4+3x^2)^2}$$

په بدیلي ډول د ضرب قانون سره لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left((1-2x)\frac{1}{4+3x^2}\right)' =$$

$$= (-2)\frac{1}{4+3x^2} + (1-2x)\frac{-6x}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(4+3x^2)^2}\,.$$

(Autoren: Höllig/Kreitz

ځنځيری لار یا - قانون **Kettenregel**

د توابعو د ځنځيروني

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$$

لپاره مشتق دی

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

.

د $f(y) = z,\ g(x) = y,\ h(x) = z$ سره سړی ليکي

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\ \frac{dy}{dx}$$

.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د تعريف څخه ترلی لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$
\begin{aligned}
(f(g(x)))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \, \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{\tilde{h}\to 0} \frac{f(g(x)+\tilde{h})) - f(g(x))}{\tilde{h}} \, \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(g(x))g'(x),
\end{aligned}
$$

چيرته چې $\tilde{h} = g(x+h) - g(x)$ دی.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ځنځيري قانو د روښنه کولو ته تعريفيږي:

$$h'(x) = \frac{d}{dy} s\, h(x) = \sin\big(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)}\big) \cdot x^2)\big)g'(x).$$

د دننني مشتق $g'(x)$ شمېرلو ته د سره د ځنځير قانون کارول کيږي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x).$$

په بديلي توګه کېدی شي د مشتق ليکدود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = \cos(y)\frac{1}{w}2x = \cos\left(\ln(1+x^2)\right)\frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

ایمپلیڅیت مشتق نیول Implizites Differenzieren

که یو تابع $y = f(x)$ ایمپلیڅیت وي، دا په دې معناچې یو برابرون په x او y کې ورکړ شوی، داسې چې دواړه خواوې د x پسې مشتق کیدی شي. دلته یواځې په کې $y = y(x)$ افادو باندې ځنځیري قانون استعمالیږي.

د بېلګې په توګه سړی د

$$E:\; x^2 + 3y^2 = 7$$

له لارې ورکړ شوې ایلیپسې یا هګۍ

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

همداسې

$$y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$$

.

لاس ته راوړي.

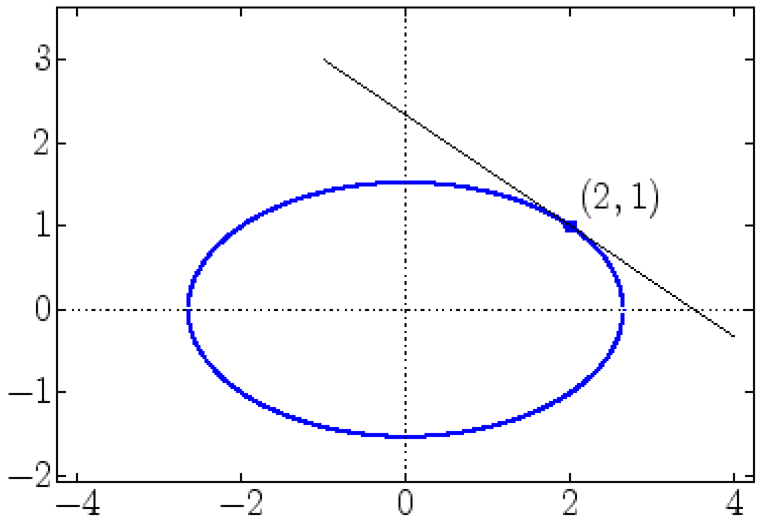
له دې سره کېدی شي د E په یوه ټکي د $y \neq 0$ سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي.

د بېلګې په توګه د $(2,1)$ لپاره په لاس راځي

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه جګ مشفقونه شمېرل کېږي. د yy' لپاره دضرب قانون د استعمال سره دی

$$\frac{d}{dx}(2x+6yy') = 2+6(y')^2+6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

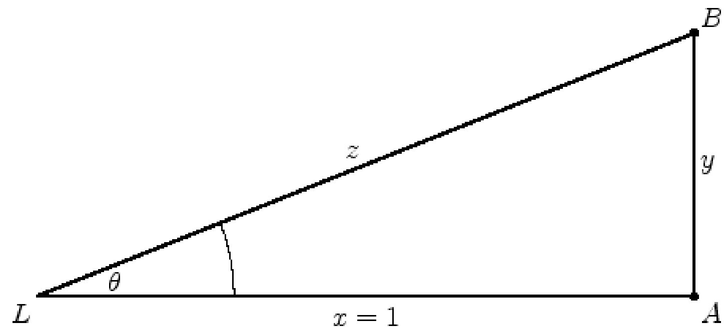
$$y'' = -\frac{1+3(y')^2}{3y}$$

.

کیدی شي په E باندې د یوه ټکي ځا په ځای کول او همدا د $y'(x)$ ارزښتونو پېژندلو له لارې څرګند ازښتونه ټاکي
لیکونکي: هیولیک، کوپف

په ټکي L کې یو د برېښنا یا رڼا برج دی د یوه څرخېدونکي بېجلی یا ګروپ سره، چې د رڼا وړانګه یې د ټکو A او B له لارې تللی 1 km کرښیز لرې دښته لوېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



وړانګه غورځونکی د یوه څرخون لپاره 2 ثانیو ته اړتیا لري، دا په دې معنا چې

$$\frac{d\theta}{dt} = \pi$$

. د رڼاوړانګې پوزیشن یا ځای په دښته کې دی

$$y(t) = x\tan\theta(t).$$

له دې سره د چټکتیا لپاره لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dt} = 1\pi\,\frac{1}{\cos^2(\theta)} \longrightarrow \infty \quad \text{für} \quad \theta \to \frac{\pi}{2},$$

دا په دې معنا چې سورى یې له رڼا چټک دی.

یو ټیکه معالعه لاندې راکوي. د دې وخت توپیر په پام کېنیولو له امله رڼا B ته د په

وخت $t = \frac{\theta}{\pi} + \frac{z}{c}$ ورسیږي، دکوم سره چې $c = 300000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ د رڼا چټکتیا ده،

له دې سره لرو

$$\frac{\theta'}{\pi} = 1 - \frac{z'}{c}$$

.

وروسته د t پسې د $z^2 = y^2 + 1$ مشتق راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$zz' = yy', \qquad \frac{z'}{y'} = \frac{y}{z} = \sin(\theta).$$

د θ' او z' ابښوونه په

$$y' = \frac{\theta'}{\cos^2(\theta)}$$

کې بالاخره راکوي

$$y' = \frac{1}{\cos^2(\theta)} \left(\pi - \frac{\pi}{c} y' \sin\theta \right)$$

همداسې

$$y' = \frac{c \cdot 1\pi}{c\,\cos^2(\theta) + 1\pi \sin(\theta)}$$

.

د $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ لپاره اوس $y' \longrightarrow c$ هڅېږي، د اینشټاین د تیوري سره په هم غږۍ کې باور لري

t

$$y' \longrightarrow \infty \qquad \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} \to -\frac{c}{\pi},$$

für

$$\theta \approx 4.781 \in \left(\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

داپه دې معناچې د لپاره بېرته سړی یوو خورا لویه چټکتیا لاس ته راوړي. سوری له دې امله د رڼا ګړندی دی. دا د اینشټاین تیوري سره په تضاد کې نه دی، ځکه چې سړی یو ه پیښنه Phänomen, ګوري، نا دا خورنده ماده. د ،،ساده $300000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ څېړونکي،، لپاره بو نا ښه احساس پاتیږي دا په هر صورت له څخه ورو خوزي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لايبنيخ قاعده يا لارLeibniz-Regel

د يوه ضرب n -م مشتق دی

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

.

(Autoren: Höllig/Kopf)

د په حالت کې باور لري

$$(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg''$$

او د لپاره دی

$$(fg)''' = (f'g + fg')'' = (f''g + 2f'g' + fg'')' =$$

$$= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

ثوليزه ښوونه د اندکشن له لارې صورت په n نيسي د بينوميال ضريبونو لپاره د ريکورزين په پام کې نيولو سره.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د $x = 0$ په ځا کې دې د

$$f(x)\,g(x) = x^9\ \cos(\sin x)$$

يولسم مشتق وشمېرل شي.

د دې لپاره لومړی له دې څخه کار اخلو، چې د $x = 0$ لپاره د مونوم f فقط 9 -م مشتق د صفر سره نابرابر دی:

$$f^{(9)}(0) = 9!\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لايبنيخ- فرمول له دې سره فقط په يوه ترم راکمه وي.

$$(fg)^{(11)}|_{x=0} = \binom{11}{2} f^{(9)}(0)\, g^{(2)}(0)\,.$$

د ځنځيري قانون سره لرو يا لاس ته اځي

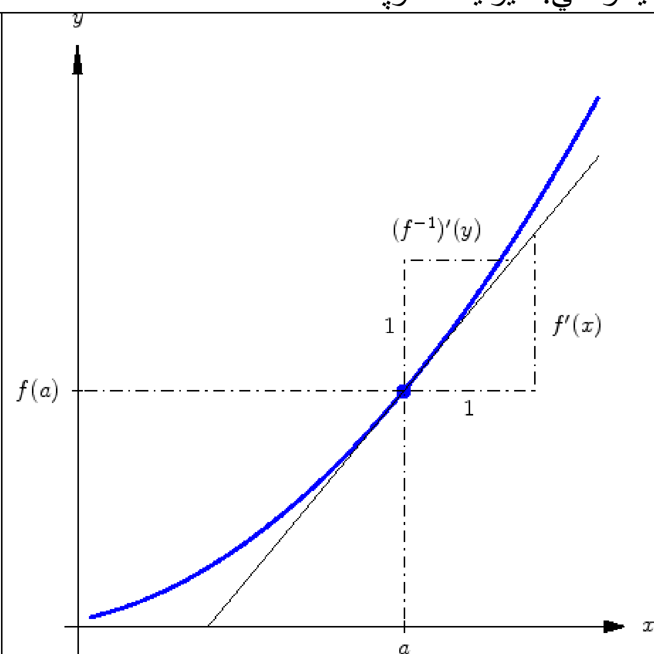
$$g'(x) = -\sin(\sin x)\,\cos x$$

$$g''(x) = -\cos(\sin x)\cos^2 x + \sin(\sin x)\sin x,$$

يعني $g''(0) = -1$. له دې سره غوښتونی مشتق دا لاندې دی

$$\binom{11}{2} 9!\,(-1) = -\frac{1}{2}\,(11!)\,.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

که يو تابع د $y = f(x)$ سره $f'(x) \neq 0$ f ناپرېکېدونکي مشتقوړ وي، نو د x په يوه چاپېريال کې معکوس وړ دی ، او باور لري $(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1},$ همداسي $dx/dy = (dy/dx)^{-1}$.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه په څېره کې چې لیدل کیږي، د f او f^{-1} جګوالي معکوس دي.

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

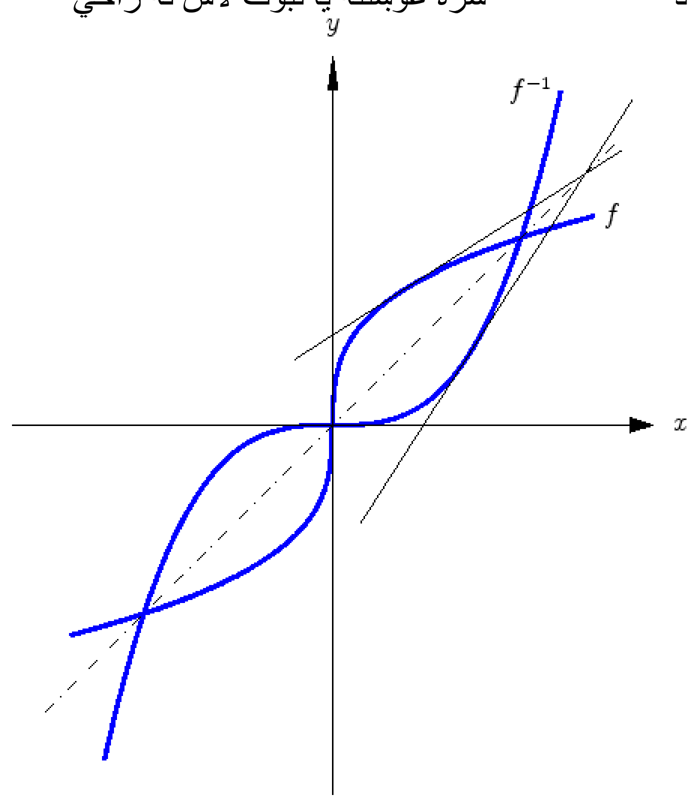
که کیږدو $g = f^{-1}$ ، نو لاس ته راوړو

$$x = g(f(x))$$

او د ځنځیري قانون سره مشتقونه

$$1 = g'(f(x))f'(x) .$$

د $y = f(x)$ سره غوښتنه یا ثبوت لاس ته راځي



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د f او f^{-1} جګوالى په اړونده د x او y په ځايونو کې سره معکوس دي، روښانيږي، که په پام کې ونيول شي، چې f او f^{-1} يو بل ته سيومتريک دي.

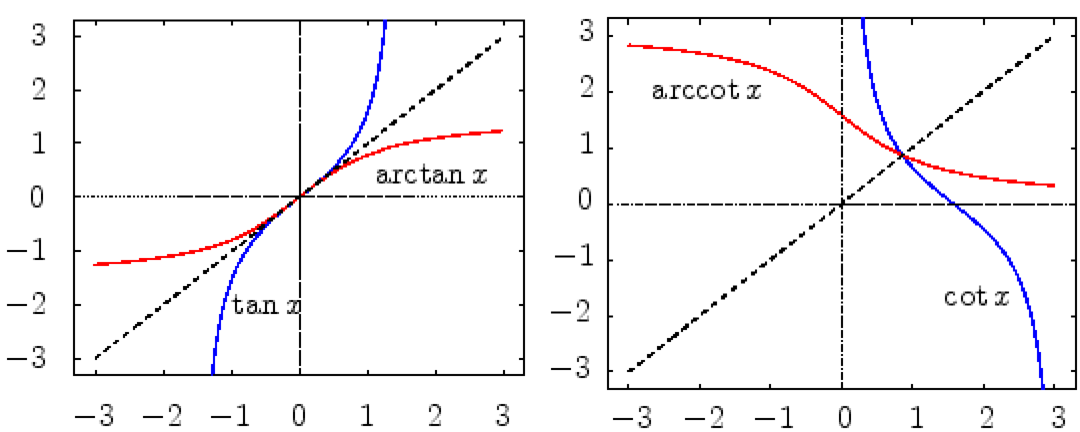
ليکونکي: اپپ، هيوليک،

دا چې د تانجنت تابع د $x = \arctan y$ معکوس تابع مشتق وټاکو، لومړى شميرو

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dy}\arctan y = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} = \cos^2 x.$$



ښى اړخ اوس بايد د y تابع په څېر وليکل شي. د دې لپاره کټوتوالى کارول کيږي يا استعماليږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + y^2$$

او لاس ته راوړي

$$\frac{d}{dy}\arctan y = \frac{1}{1+y^2}.$$

په ورته توګه د کوتانجنت په څېټ- یا معکوس تابع ښایو.

$$\frac{d}{dy}\operatorname{arccot} y = -\frac{1}{1+y^2}.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

ع

$y = f(x) = x(1-x$

، انتروالونو

$(-\infty, 1/2$

او

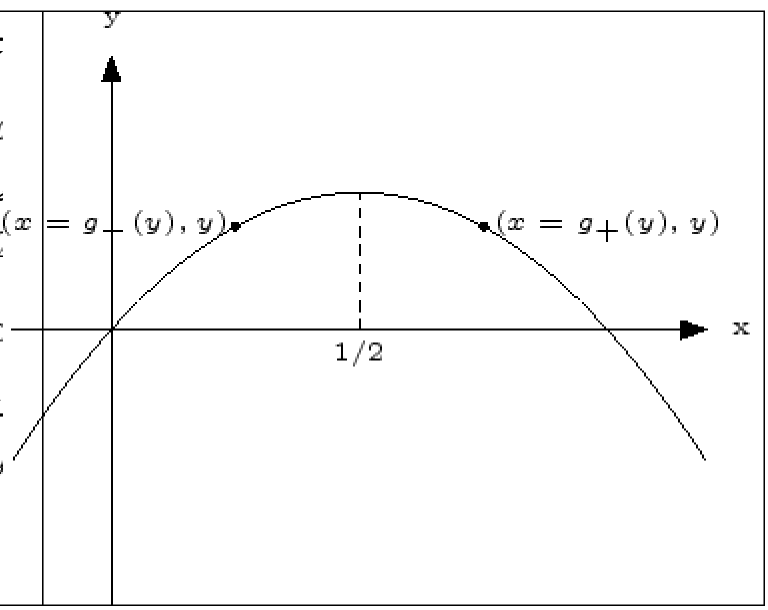
$[1/2, \infty$

هر وار په

ټ – یامعکوس تابع

$x = g(y$

لري.



(c) ketabton.com: The Digital Library

په دواړو حالتونو کې باور لري

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1-2x}\,.$$

بل يې مشتقنيول راکوي

$$g''(y) = \left(\frac{1}{1-2x}\right)'\frac{dx}{dy} = \frac{2}{(1-2x)^2}\frac{1}{1-2x}\,.$$

په ځانګړي ډول د $x=1, y=0$ لپاره لاس ته راځي

$$g'(0) = 1, \quad g''(0) = -2\,.$$

مشتقونه شمېرلوړ دي، بې له دې چې معکوس تابع باید روښنه جوړه شي. دا ټيک هلته شونی دی، چې که سړی د y تابع د په څېر $g'(y)$ و ليکي. په دې بيلګه کې دا شوندی دی، ځکه x د y تابع په څېر ليکل کېدی شي:

$$g_{\pm}(y) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - y}\,.$$

پورته ارزښتونه داسې شمېرل کېدی شي، دکومو سره چې د هغوی د ارزښتجوړې $(1,0)$ اړونده څانګه باید وټاکل شي.

ليکونکي: هيوليک، کرايخ

لوګاريتمي مشتق يا - رابيليدنه **Logarithmische Ableitung**

دا فرمول

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|$$

کيدی شي د $g(x) > 0$ سره د $y = g(x)^{h(x)}$ بڼې توابعو مشتقيدو ته وکارول شي. سړی لاس ته راوړي

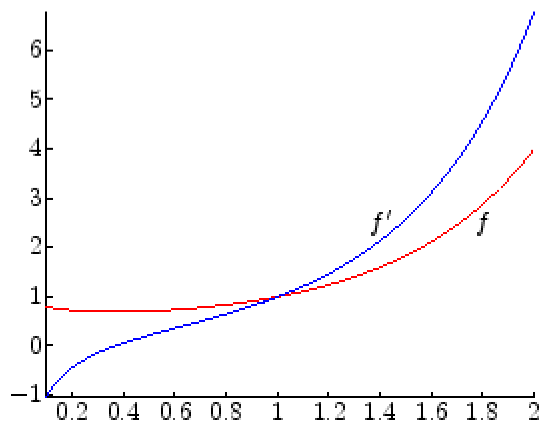
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx}\left(h(x) \ln g(x)\right) .$$

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

د $x > 0$ سره تابع $f(x) = x^x$ لپاره مشتق دی

$$f'(x) = x^x \frac{d}{dx} \ln(x^x) = x^x \frac{d}{dx} (x \ln x) = x^x (\ln x + 1) .$$



$$\ln f(x) = x \ln x$$

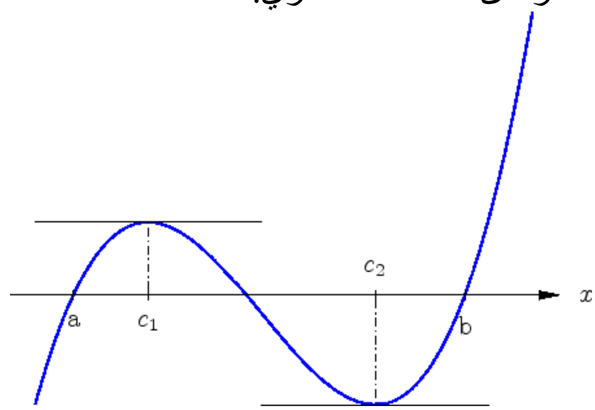
د $x \to 0$ لپاره د صفر په لور هڅيري، نو x^x د $e^0 = 1$ په لور. نو تابع په صفرځای کې ښي اړخيز ناپزېکېدونکي ده. د مشتق لپاره f دا حالت نه دی. د $x^x \to 1$ او $\ln x + 1 \to -\infty$ له امله د $x \to 0$ لپاره f په صفر يو ولاړ يا عمود تانجنت لري.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

د روليې جمله Satz von Rolle

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه ناپرېکیدونکي مشتقوړ تابع f مشتق د $f(a)=f(b)=0$ سره لږ تر لږه یو صفرځای $c\in(a,b)$ لري.



تولیز باور لري: که یو تابع په یوه انتوال $[a,b]$ کې n صفرځایونه ولري (د ډېروار والي په شمول)، نو هلته k ــم مشتق $\geq n-k$ صفرځایونه لري.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ،

دا چې f ناپرېکېدونکی دی، نو د افراطي ارزښت جملې له امله په $[a,b]$ کې ټکي c او d شتون لري دا لاندې باوري کوي

$$f(c) = \min_{x\in[a.b]} f(x)$$

$$f(d) = \max_{x\in[a.b]} f(x).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

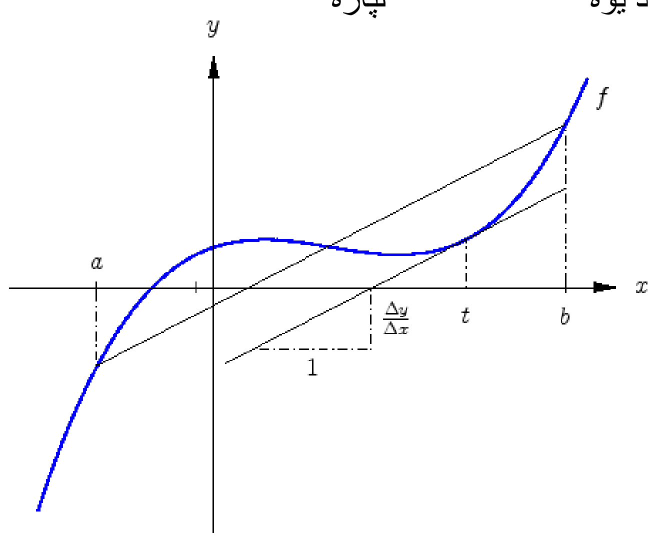
که f ناثابت وي(د ثابت f حالت ساده دی)، نو $f(c) < f(d)$ باور لري. له دې امله لږ ترلږه د دې دواړو ټکو څخه یو یې په (a, b) کې پروت دی . دا چې f مشتقوړ دی باید د دې ځایز یا لوکال افراطیت لپاره مشتق ورک – یا صفر شي.
لیکونکي: اپپ، هیولیک،

منځ ارزښت قضیه **Mittelwertsatz**

د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

$$f(b) - f(a) = f'(t)(b - a)$$

د یوه $t \in (a, b)$ لپاره



هندسي دا کټوټوالی په دې معنا دی، چې تانجنت په یوه ټکي کې غبرګ دی د له پای ټکو $(a, f(a))$ او $(b, f(b))$ تېرېدونکي ټوټه ونې یا وتر سره. داسي هم لیکو

$$\Delta y = f'(t)\Delta x$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

د یوې تابع

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

لپاره $g(a) = g(b) = 0$ باور لري. دا چې f ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی، نو g هم ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی او د رولې د جملې پر بنسټ یو $t \in (a, b)$ شتون لري د لاندې سره

$$0 = g'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

همداسې

$$f(b) - f(a) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

تولیزه (شوې) منخ ارزښت جمله **Verallgemeinerter Mittelwertsatz**

که f او g ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابع وي، نو $t \in (a, b)$ یو شتون لري د لاندې سره

$$(f(b) - f(a))g'(t) = (g(b) - g(a))f'(t) .$$

که برسېره پردې په (a, b) باندې $g'(x) \neq 0$ باور ولري، نو سرې کړی شي هم

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هم وليکي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د تابع

$$h(x)=(f(b)-f(a))g(x)-(g(b)-g(a))f(x)-f(b)g(a)+f(a)g(b)$$

لپاره $h(a)=h(b)=0$ باور لري. دا چې f او g ناپرېکېدونکي مشتقوړ دي،
نو h هم ناپرېکېدونکي مشتقوړ دی او د پورته د رولې د جملې سره سره سم يو $t\in(a,b)$ شتون لري د لاندې سره.

$$0=h'(t)=(f(b)-f(a))g'(t)-(g(b)-g(a))f'(t)$$

bzw. همداسې

$$(f(b)-f(a))g'(t)=(g(b)-g(a))f'(t)\,.$$

که (a,b) په باندې $g'(x)\neq 0$ وي. نو د منځ ارزښت جملې سره سم
$g(b)-g(a)\neq 0$ هم او سړی لاس ته راوړي.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(t)}{g'(t)}\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

لانداو-سيمبول **Landau-Symbole**

سړی ليکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = O(g(x)) \qquad (x \to a) \ ,$$

که یو ثابت c شتون ولري، دسې چې $|f(x)| \le c|g(x)|$ وي a ته پوره نږدې x لپاره .

د $|f(x)|/|g(x)|$ د 0 په لور هڅيږي، نو سړی په اړونده توګه ليکدود کاروي

$$f(x) = o(g(x))$$

.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د بينوم له جملې څخه لاس ته راځي

$$(1 + x)^n = 1 + nx + O(x^2) \quad (x \to 0)$$

په څېر – يا معکوس جوړونې د $1 - nx$ سره دغزونې وروسته لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^n} &= \frac{1}{1+nx+O(x^2)} \\ &= \frac{1-nx}{1-(nx)^2+O(x^2)} = \frac{1-nx}{1+O(x^2)} \\ &= 1-nx+O(x^2)\,. \end{aligned}$$

د $x \to \infty$ لپاره دی

$$(1 + x)^s = O(x^s)$$

د ټولو $s \in \mathbb{R}$ لپاره.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناپرېکیدنه او مشتقوړوالی کیدی شي د لاګرانژ فرمول په مرسته تعریف شي.

یو تابع f په $x = a$ کې ناپرېکېدونکی دی، که وي

$$f(x) - f(a) = o(1) \quad (x \to a) .$$

مشفقوړوالی د

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r$$

سره په یوه معنا دی د

$$r = o(h) \quad (|h| \to 0) .$$

سره.

د یوه دوه واره ناپرېکېدونکي مشتقوړتابع لپاره د تېلور ـودې څخه هغه تېره $r = O(h^2)$

اټکل لاس ته راځي

لیکونکي:کلاوس، هیولیګ،

د لو، پیتال قاعده یا لار **Regel von l'Hospital**

که دوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابع f او g په a کې یوه ګډ صفرځای یا قطبځای ولري، نو باور لري

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

که ښی پوله ارزښت شتون ولري(په ورکړ شوي حالت کې په ناپای کې)

د ټولیزه منځ ارزښت جملې په بنسټ د x او a تر منځ یو t شتون لري د لاندې سره

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که سړی ، د یوه ناپای پوله ارزښت په موخه، $f'(t)/0$ یعنې داسې $\pm\infty$ په معنا کړي.

له دې $x \to a$ سره هم a $t \to a$ ځي، نو سملاسي راکوي

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د لو، پيتال د جملې استعمال د یو څو بېلګو لړيو په بنسټ روښانه کيږي

د $0/0$ لپاره:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{3x^2-7x+4}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2}{6x-7}=-1$$

د $-\infty/\infty$ لپاره :

$$\lim_{x\to 0+}x\ln(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(x)}{1/x}=\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0+}-x=0$$

د ټولو $x \to \infty$ لپاره:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi/2-\arctan x}{1/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2}=1$$

دېواره استعمال:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \qquad \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2\cos(x) - x\sin(x)} = 0$$

په دې بېلګو کې دې پام وي، چې د شمېرلو پوله ارزښت شتون د لوپيتال قاعدې د استعمال پسې د منځته راغلې پوله ارزښت د شتون له لارې تضمين دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

کرښيز اپروکسميشن (ورنږدېوالی) **Lineare Approximation**

د يوه دوه واره ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + R$$

د لاندې پاتې غړي سره

$$R = \frac{1}{2} f''(t)(\Delta x)^2 = O((\Delta x)^2)$$

او د t د x او ترمنځ $x + \Delta x$ سره.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

تابع

$$g(y) := f(y) - f(x) - f'(x)(y - x) -$$

$$- \frac{f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}(y - x)^2$$

د $y = x + \Delta x$ لپاره يو صفرځای لري او د $y = x$ لپاره يو دېبل يا دوه واره صفرځای لي. د رولې د جملې په تعقيب يو $y = x + \Delta x$ شتون لري د لاندې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$0 = g''(t)$	$= f''(t) - 2\frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}$

همداسې

$f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x$	$= \frac{1}{2}f''(t)(\Delta x)^2\,.$

لیکونکي: اېپ، هیولیګ،

د ناټیکاوي وده Fehlerfortpflanzung

د یوه کچ – یا اندازونې ارزښت $\Delta x = \tilde{x} - x$ مطلق ناټیکاوی یا یو نږدېوالی $x \approx \tilde{x}$ ښایي نو د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره

$$|\Delta y| = |f'(x)||\Delta x| + o(\Delta x)$$

باور لري د $\Delta y = f(\tilde{x}) - f(x)$ سره. په اړونده توګه د نسبي ناټیکاوی لپاره باور لري

$$\frac{|\Delta y|}{|y|} = \left(|f'(x)|\,\frac{|x|}{|y|}\right)\frac{|\Delta x|}{|x|} + o(\Delta x)$$

که $x, y \neq 0$ وي. په نوکانو کې افاده c_r د x په ځای کې د f د کندیشن عدد بلل کیږي.

د ترم $o(\Delta x)$ د پرېښږږلړ یعنې له منځه وړلو له لارې کېدی شي د ناټیکاوي نږدیوالس اټکل شي. د دې سره کېدی شي د ټیک مشتق ارزښت په ځای مناسب بندیزونه هم وکارول شي:

$$|\Delta y| \leq c_a|\Delta x|\,, \quad c_a \geq \max_{|t-x|\leq|\Delta x|}|f'(t)|\,.$$

په ا ړونده توګه $c_r = c_a\frac{|x|}{|y|}$ د نسبي ناټیکاوي لپاره یو بندیز یا لنډ: بند دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

يو کونج $\vartheta \in (0, \pi/2)$ کېدی شي د کاټېټونو يا ولاو اړخونو د نسبت څخه په جګېدونکي درېګوډي کې داسې وټاکو :

$$\vartheta = \arctan(y/x) \, .$$

که y د کره ځای په ځای x سره کچ کړو، نو کېدی شي ضريب c_a د مطلق ناټيکاوي لپاره د

$$\left|\frac{d\vartheta}{dy}\right| = \left|\frac{1/x}{1 + y^2/x^2}\right| = \left|\frac{x}{x^2 + y^2}\right|$$

له لارې اټکل شي. افاده د $y = 0$ لپاره ماکسمال کيږي، او سړی لاس ته $c_a = \frac{1}{x}$ راوړي، دا په دې معنا چې

$$|\Delta\vartheta| \leq |1/x| \; |\Delta y| \, .$$

لويې ناټيکياوی د کوچني x لپاره غزيږي. په ورته توګه د نسبي ناټيکاوي د قوی کېدني فکتور لپاره هم باور لري

$$c_r = \max_y \left|\frac{x}{x^2 + y^2} \frac{y}{\vartheta}\right| \, .$$

که دا لاندې تخمين وکارول شي

$$|\vartheta| \geq |\sin\vartheta| = \left|\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right| \, ,$$

،

نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c_r \le \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le 1\,.$$

نو نږدېوالي دول باور لري

$$\frac{|\Delta\vartheta|}{|\vartheta|} \le \frac{|\Delta y|}{|y|}\,,$$

دا په دې معنا چې نسبي فکتور نه غښتلی کېږي

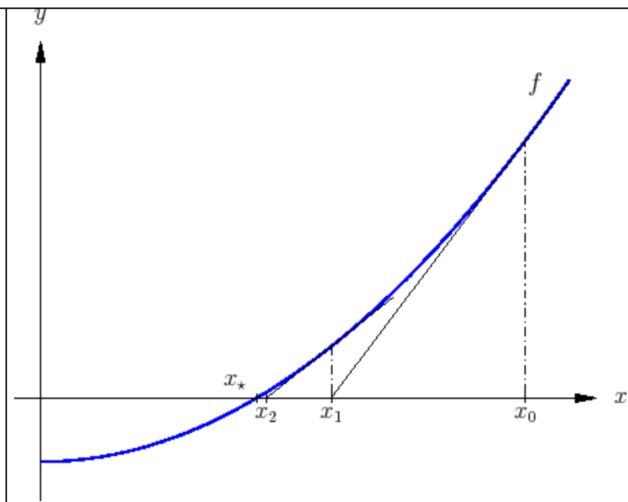
لیکونکي: کلاوس، هیولیک،

د نیوټن تلنلار یا - قانو **Newton-Verfahren**

د نیتن تلنلار سره کېدی شي د یوه تابع f صفرځای x_* نومریک وټاکل شي. د نږدېوني یا اپروکسمیشن پرلپسي $x_0, x_1\ \ldots$ د کرښیزوالي څخه کټل کېږي.

نږدېوالی $x_{\ell+1}$ د x -محور سره د تانجنت غوښتکی دی په ټکی $(x_\ell, f(x_\ell))$ کې :

$$x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell)$$



د یوه ساده صفرځای x_* ($f'(x_*) \neq 0$) لپاره د نیوټن – ایټریشن لوکال مربع پولې ته ځي، دا په دې معناچې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|x_{\ell+1} - x_*| \le c\ |x_\ell - x_*|^2$$

د پيلټکي x_0 لپاره د x_* په يوه پوره کوچني چاپريال کې.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د تيلور -نږدې ارزت Taylor-Approximation له لارې سړی

$$0 = f(x_*) = f(x_\ell) + f'(x_\ell)(x_* - x_\ell) + r$$

لاس ته راوړي د پاتې غړي

$$r = \frac{1}{2} f''(t_\ell)(x_* - x_\ell)^2\,,$$

سره د يوه t_ℓ لپاره چې د x_* او x_ℓ ت رمنځ پرته ده. که د انترپوليشن قاعده کې کيږدو

$$f(x_\ell) = f'(x_\ell)(x_\ell - x_*) - r$$

،

نو لالاس ته راځي

$$x_{\ell+1} = x_* - r/f'(x_\ell)\,.$$

د $f'(x_\ell) \neq 0$ لپاره لرو

$$|x_{\ell+1} - x_*| = c_\ell |x_\ell - x_*|^2, \quad c_\ell = \frac{1}{2}\ \left|\frac{f''(t_\ell)}{f'(x_\ell)}\right|\ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $f'(x_*) \neq 0$ باور ولري، نو c_ℓ د ناپريکيدنبأه امله د x_ℓ لپاره په يوه د x_* چاپيريال $[x_* - \delta, x_* + \delta]$ کې مخدود دی:
$c_\ell \leq c$.

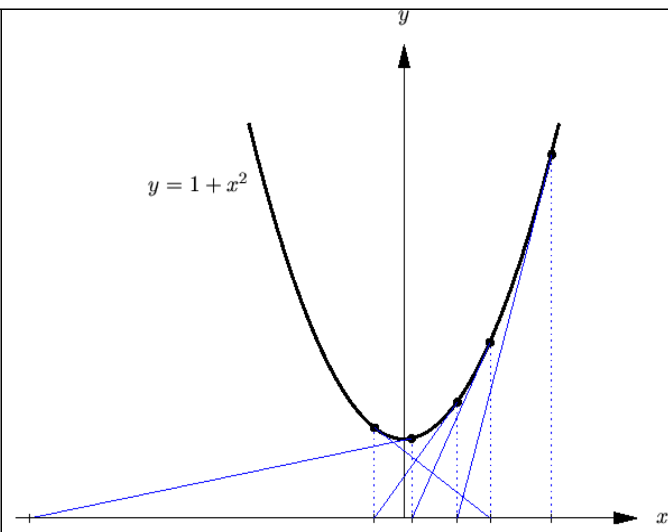
له ې سره د مربع يا خلوريز پولې ته تک لاس ته راځي.
ليکونکي: اېپ، هيوليک،

که په لاندې مساوات د نيټن قانون وکاروو

$$f(x) = x^2 + 1 = 0$$

،
نو اتريشن(پل په پل اصلي حل ته وردردې کېدنه) لاس ته راځي

$$x_{l+1} = \frac{1}{2}\left(x_l - \frac{1}{x_l}\right) .$$

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>f په پام کې د ې وي. چې حقيقي حل نه لري، نيوټن تلنلار يا قانون په حقيقي پيل ارزښت x_0 سره پولې ته نه شي تللی.
(x_l) په رښتيا کې پرلپسي يو ګډوډ حالت غوره کوي.

د کټمتوالي په مرسته</td>
</tr>
</table>

$$\cot(2\phi) = \frac{1}{2}\left(\cot\phi - \frac{1}{\cot\phi}\right)$$

پرلپسي (x_ℓ) کېدی شي اکسپليځيټ ورکړل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_0 = \cot\phi \implies x_\ell = \cot(2^\ell \phi).$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

ها له بابلیانو ځخه کارول شوی ایترېشن یا پل پل مخ ته تلنه یا تکرار
$$x \longleftarrow (x + a/x)/2$$

د یوه حقیقی عدد a د ریښي شمېرلو ته په ټیکه مطالعه د $f(x) = x^2 - a$ لپاره د نیوتن تلنلار په حیث ځان ښایي:

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

د $a = 2, x_0 = 1$ لپاره نږدې شمېرنه یا اپروکسیمېشن لاس ته راوړو.

1

1.5

1.41666666666666666666666666666666667

1.414215686274509803921568627450980392157

1.414213562374689910626295578890134910117

1.414213562373095048801689623502530243615

1.414213562373095048801688724209698078570

کونورګنځ فوق العاده ګړندی دی. د هر پل سره د د ټیکو ځایونو(ترې لاندې کرښه تېره ده) تعداد په نږدې توګه دوه واره کیږي. په دې بېلګه کې مربع پولې ته تلنه کېدی شي د ساده بڼې بدلون له لارې هم وښوول شي:

$$x_{\ell+1} - \sqrt{a} = (x_\ell + a/x_\ell)/2 - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_\ell}(x_\ell - \sqrt{a})^2.$$

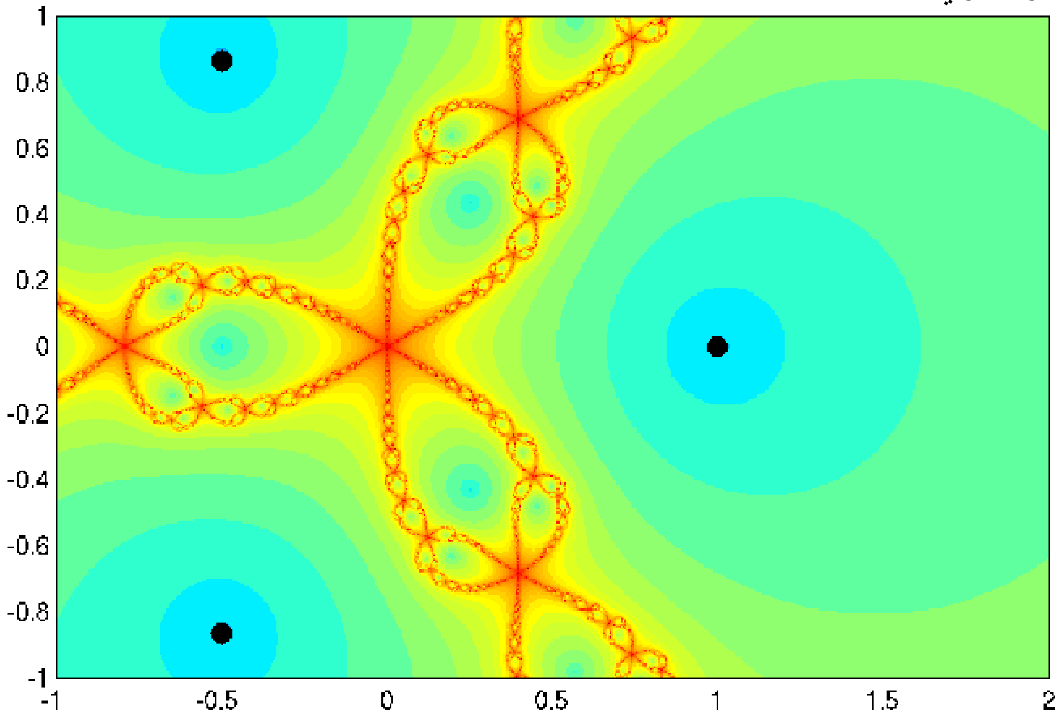
د نیټن-تلنلار د هندسي روښانه ونې ځخه لرو، چې په نږدې توګه شمېرنه د $x_0 \neq 0$ لپاره پولې ته تلونکې ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې ښېره د لاندې مساوات لپاره د کمپلکس نيوتن-اېترشن پولي ته تلنه ښايي

$$z^3 - 1 = 0$$

د حلونو $z = \exp(2\pi i k/3)$ سره. مختلف رنګونه د پولي ته تلني ورشو ګاني ښايي د همغه يا اړونده صفرځای لپاره. تياره رنګه شوط ځايونه ګړندی پولي ته تلنه په ګوته کوي.



سړی د پولې ته تلني ورشو په روښانه توګه fraktal مات خوي پيژني

د تيلور پولينوم**Taylor-Polynom**

د تيلور پولينوم   Das Taylor-Polynom

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه تابع f انترپولیری (ارزښت چې د دوه ټکو ترمنځ پروت وي) مشتق په ټکي a
$p_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)\,,\ k = 0, \ldots, n$
تر ت نظم n پورې، دا په دې معنا چې .
که f یو $(n+1)$-واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ وي، نو باور لري

$$f(x) = p_n(x) + R, \quad R = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

د یوه t لپاره چې د a او x ترمنځ وي.
لیکونکي: اپپ، هیولیک،

سیده پسې شمیرنه د p_n او f مشتق یو بل سره توافق یا یوغږیزوالی ښایي. د پاتې غږي R د پوره کیدو یا تکمیل ته سړی د تیلور پولینوم په یوه بل ترم غزوي:
$q(y) = p_n(y) + c(y-a)^{n+1}$.

ثابته داسې ټاکل شوې، چې $q(x) = f(x)$ وي. پسې $q - f$ یو صفرځای لري د $n+1$ د ډېروالي سره په $y = a$ کې او یو بل صفرځای په $y = x$ کې، په ټولیزه نو $n+2$ صفرځایونه . دروليې جملې پسې باید $(n+1)$-م مشتق باید لږ تر لږه یو صفرځای t ولري:

$$0 = q^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(t) = c(n+1)! - f^{(n+1)}(t)\,.$$

له

$$R = f(x) - p_n(x) = q(x) - p_n(x) = c(x-a)^{n+1}$$

څخه د پاتې غړي غوښتونې بڼه راکوي.
لیکونکي: اپپ، هیولیک،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساين تابع $f(x) = \sin x$ مشتقونه دي

$$f' = \cos x, \quad f'' = -\sin x, \quad f''' = -\cos x, \quad f^4 = f = \sin x, \ldots .$$

د ارزښتونو

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^4(0) = f = 0, \ldots .$$

سره لومړي د تيلور پولينومونه د ساين تابع دي.

$$p_1(x) = x$$

$$p_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$p_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$p_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

په ورته توګه د کوساين تابع لپاره هم باور لري

$$p_0(x) = 1$$

$$p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$p_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$p_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

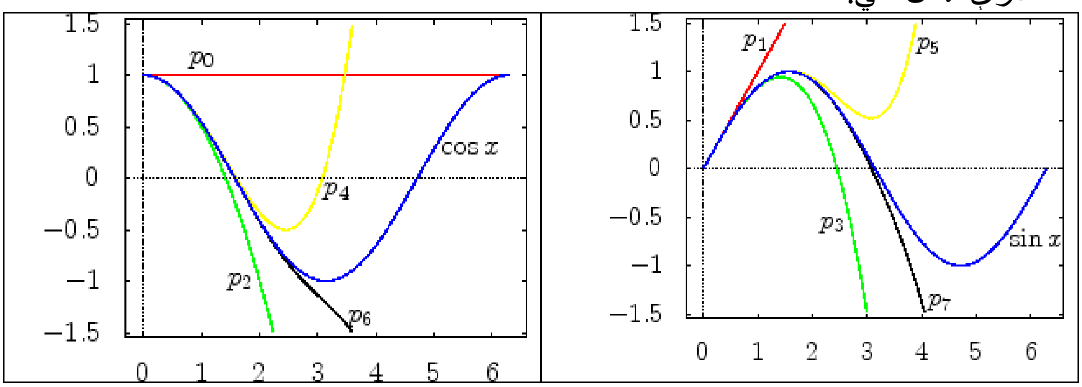
نږدې شمېرنه يا اپروکسيمېشن د ډېر کوچني x لپاره خورا دقيق دی. د بېلګې په توګه کېدی شي د نږدېوني ناتيکاوی

$$\sin 0.1 \approx p_4(0.1) = 0.09983\ldots$$

د

$$|R| = \frac{|\cos t|}{5\,!}\, 0.1^5 \leq \frac{1}{12000000} \leq 10^{-7}$$

له لارې اټکل شي.



لکه د ښېرې خخه چې ليدل کيږي، نږدې شمېرنه د لوی x لپاره لومړی د ځګو درجو سره پوره ټيک يا دقيق وي. په جدول کې د خو د x - ارزښت لپاره ناتيکاوي ورکړل شوي دي.

x	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/5$	$\pi/6$
$p_1(x)$	3.1416	0.5708	0.1812	0.0783	0.0405	0.0236
$p_3(x)$	2.0261	0.0752	0.0102	0.0025	0.0008	0.0003
$p_5(x)$	0.5240	0.0045	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
$p_7(x)$	0.0752	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

(c) ketabton.com: The Digital Library

$p_0(x)$	2.0000	1.0000	0.5000	0.2929	0.1910	0.1340
$p_2(x)$	2.9348	0.2337	0.0483	0.0155	0.0064	0.0031
$p_4(x)$	1.1239	0.0200	0.0018	0.0003	0.0001	0.0000
$p_6(x)$	0.2114	0.0009	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

حقيقي د تيلور لړۍ **Reelle Taylor-Reihe**

په يوه ټکي x_0 کې د يوه ناپای ډېرواره مشتقوړ تابع f د تيلور لړۍ د يوې په توان لړۍ يوه وده ده:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n, \quad a_n=\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(x_0)\,.$$

د $x\in\mathbb{R}$ لپاره لړۍ او همداسې ټول مشتقونه په يوه انټروال (x_0-r,x_0+r) کې مطلق پولې ته تلونکي دي او د $|x-x_0|>r$ لپاره پولې ته نه تلونکي دي. د $|x-x_0|=r$ لپاره بې له نورو څېړنو د لړېی پولې ته تلنې په هکله ويناوي ناشونې دي.

د ودې ټکي د واټن لپاره بند(بنديز) r د پولې ته تلنې يا کونورګنت –وړانګې په نامه ياديږي او د فرمول

$$r=\left(\varlimsup_{n\to\infty}\,|a_n|^{1/n}\right)^{-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره شمېرل کيږي. له دې سره ارزښتونه $r = 0$ او $r = \infty$ شوني دي. په دې حالت کې د کونورګنت انتروال يا تش دی او يا ټول $\mathbb{R}$ دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د ريښې قضيې په بنسټ دی

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right|} = \frac{1}{r}\,|x-a|\,.$$

په توګه د $|x-a| < r$ لپاره د ټېلرو-اړې يوې ته ځي او د $|x-a| > r$ لپاره پولې ته نه ځي. د $|x-a| = r$ لپاره نورې څېړنې اړيينې دي يا نورو څېړنو ته اړتيا ده.
ليکونکي: اپپ، هيوليک،

تابع

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

په 0کې برابرډوله ناپرېکېدونکې ده. دا پسې دپوره ايندکشن له لارې ښوول کېدی شي، چې ټول مشتقونه د

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(1/x)}{\exp((1/x)^2)}$$

بڼې دي، د يوه مناسب پولينوم p_n سره. دا چې د $x \to 0$ (همداسې د $1/|x| \to \infty$) لپاره اکسپوننشل تابع نسبت يوه پولينوم ته په قوت يا قوي جګيږي، نو ټول پولينومونه په $x = 0$ ځای کې ارزښت 0لري. اړونده تيلور-لړی نو له دې امله صفر لړی ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0x^k .$$

داچې د f $f(x) \neq 0$ لپاره $x \neq 0$ دی، نو د تیلور-لړۍ د f سره فقط د $x = 0$ لپاره یو بل سره برابر یا یو غږیز دي، دا په دې معنا چې د پولې ته تلنې وړانګه r 0 ده.

ليکونکي: اېپ، هيوليک،

اکسپوننشل تابع

$$f(x) = \exp(x)$$

لاندې مشتق لري

$$f^{(n)}(x) = \exp(x) .$$

که د $x = 0$ په ځای کې وارزول شي ، ترې لاس ته راځي

$$f^{(n)}(0) = 1 .$$

د دې په تعقیب د اکسپوننشل تابع د تیلور-لړۍ لاندې بڼه لري

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} .$$

دا چې

$$\lim_{k\to\infty} 1/\sqrt[k]{k!} = 0 ,$$

نو $r = \infty$ دی، دا په دې معنا چې د تیلورر-لړۍ په ټول $\mathbb{R}$ پولې ته ځي یا کونورګنت ده.

ليکونکي: اېپ، هيوليک،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بيلګې لپاره تابع

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

په $a = 4$ ودیز کيږي.

ددې لپاره لومړی مشتقونه جوړيږي:

$f'(x)$	=	$-\frac{1}{2}\,x^{-3/2}$
$f''(x)$	=	$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\,x^{-5/2}$
.	.	.
.	.	.
.	.	
$f^{n}(x)$	=	$(-1)^n\,2^{-n}\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)\cdot x^{-\frac{2n+1}{2}}\,.$

په وديزېنې ټکي د قيمت اېښووونې يا -وضع کونې سره سړی د تيلور-ضريبوننه لاس ته راوړي

$$c_n = \frac{f^{(n)}(4)}{n!} = (-1)^n\,\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\,2^{-2n-1}\,.$$

د لړۍ لومړي درې ترمونه دي

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\,(x-4) + \frac{3}{128}\,(x-4)^2 + \cdots\,.$$

د دې لپاره چې د ضريبونو وړانګه r وټاکو، په پام کې نيسو

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{2n}\,2^{-2n} \le c_n \le \frac{1}{2}\,2^{-2n}\,.$$

له دې سره دی

$$\frac{1}{4}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{1/(4n)} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{c_n} \le \frac{1}{4}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{1/2}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

دا چي دی لاس ته

$$r = \frac{1}{(1/4)} = 4$$

راځي .

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د اويلر فرمول

$$\exp(\mathrm{i}t) = \cos t + \mathrm{i}\sin t$$

کيدی شي د تيلور-وديزيښني په مرسته

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \dots$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \dots$$

د کوساين - او ساين توابع منځ ته راوړل شي. له

$$-\frac{t^2}{2} = \frac{(\mathrm{i}t)^2}{2}, \quad -\frac{t^3}{6} = \frac{\mathrm{i}^2 t^3}{3!}, \quad +\frac{t^4}{24} = \frac{(\mathrm{i}t)^4}{4!}, \quad +\frac{t^5}{120} = \frac{\mathrm{i}^4 t^5}{5!}, \dots$$

څخه لاس ته راځي

$$\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^2 k}{(2k)!}$$

$$\mathrm{i}\sin t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

او د زياتون يا جمعي له لارې د تيلور –وديزيښني له لارې د اويلر فرمول لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\exp(\mathrm{i}t) = 1 + \mathrm{i}t - \frac{t^2}{2!} - \mathrm{i}\frac{t^3}{3!} \cdots$$
$$= 1 - \frac{t^2}{2!} \pm \cdots + \mathrm{i}(t - \frac{t^3}{3!} \pm \cdots)$$
$$= \cos t + \mathrm{i} \sin t \,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د لوګاريتم تابع

$$f(x) = \ln x$$

لاندې مشتق لري

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3} \,.$$

په دې پسې مرربعيز د تيلور –پولينوم په ټکي $a = 1$ کې دی

$$p(x) = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 \,.$$

باقي – يا پاتې غړی دابنه لري

$$r(x) = f(x) - p(x) = \frac{1}{3!} f'''(\xi)\,(x-1)^3$$
$$= \frac{1}{3\,\xi^3}(x-1)^3$$

د ξ سره، چې د x او 1 ترمنځ پروت دی. ناټيکاوی د ممکن کوچني ξ لپاره خورا غټ دی. سړی اټکل لاس ته راوړي

$$|r(x)| \leq \frac{1}{3} \left| \frac{x-1}{\min(1,x)} \right|^3 .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x \in [0.75, 1.25]$ لپاره ناتیکاوی دی

$$\le \frac{1}{3}\left|\frac{1/4}{3/4}\right|^3 = \frac{1}{81}\,.$$

ليکونکي: هیولیګ،

بينوميال لړی Binomialreihe

تابع

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

د $\alpha \in \mathbb{R}$ سره یوه تیلور-لړی لري

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

د $|x| < 1$ لپاره ، د کوم سره چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

تولیز شوی بینوم ضریب دی

ليکونکي: اپپ، هیولیګ،

دا ترلي لاس ته راځي، چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لړی

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

د وېش قضیې

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{\binom{\alpha}{k+1}x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k}x^k}\right|=|x|\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right|=|x|<1\,.$$

له مخې پولې ته ځي

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د تیلور ــلړۍ مشتق او انتیګرال

Differentiation und Integration von Taylor-Reihen

د یوې د تیلور- لړۍ

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k\,,\quad c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,,$$

کېدی شي غړي ډوله یا یې غړي په غړي مشتق او انتیګرال ونیول شي:

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}(x-a)^k$$

$$\int f(x)dx=c+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{k-1}}{k}(x-a)^k\,.$$

په دواړو عملیو کې د پولې ته تلنې وړانګه بې تغیره پاتېږي.

لیکونکي: هیولیګ، کرایخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بينوملړی

$$(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + \cdots,$$

څخه د $t = -x^2$ او $\alpha = -1/2$ سره لاس ته راځي

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} x^{2k}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \cdots.$$

د انتيګرال له لارې او همداسې د

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arcsin(0) = 0$$

په پام کې نيولو سره د غړي په غړي انتيګرال له لارې داوده لاس ته راځي

$$\mathrm{arcs}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots$$

ليکونکي: ايپ، هيوليک،

د انتيګرا

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

نږدې دوله شميرنه د تيلور-اکسپوننشل تابع باندې لاس ته راولي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)}\,.$$

$$\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$$

د نومریکي نږدېوني پخ حیث د لپاره لاندې ارزښتونه لاس ته راځي

k=0: 1
k=1: 0.66666666666667
k=2: 0.76666666666667
k=3: 0.74285714285714
k=4: 0.74748677248677
k=5: 0.74672919672920
k=6: 0.74683603433603
k=7: 0.74682280682281
k=8: 0.74682426573971
k=9: 0.74682412070118
(Autoren: App/Höllig)

د تیلور-لړۍ ضرب Multiplikation von Taylor-Reihen

د تیلور – لړۍ کېدی شي غړي په غړي سره ضرب شي:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_n (x-a)^k\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k\right) = \sum_{k=9}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

د لاندې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} f_{k-j} b_j \; .$$

د ضرب د کونورګنت وړانګه د دواړو ضريبونو د پولې ته تلنې وړانګې د مينيموم سره برابره ده.
ليکونکي: ، هيوليک، کرايخ

د لاندې تابع د تيلور – لړۍ شميرنې ته
Zur Berechnung der Taylor-Reihe der Funktion

$$f(t) = e^{-t}\cos(\omega t)$$

سړی کړی شي د اکسپوننشل تابع د تيلور – لړۍ او د کوساين –تابع وکاروي

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} \pm \cdots$$

$$\cos = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} \pm \cdots \; .$$

د ضرب څخه د لومړي ترم لپاره لاس ته راځي

$$e^{-t}\cos(\omega t) = 1 - t + \frac{1-\omega^2}{2!} t^2 + \left(\frac{\omega^2}{2!} - \frac{1}{3!}\right) t^3 + \cdots \; .$$

$$e^{-t}\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(e^{(\mathrm{i}\omega - 1)t}\right)$$

بديلي کېدی شي هم و کارول شي:

$$e^{-t}\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^k t^k}{k!}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \mathrm{Re}\left(1 + (\mathrm{i}\omega - 1)t + \frac{(\mathrm{i}\omega-1)^2}{2!}t^2 + \frac{(\mathrm{i}\omega-1)^3}{3!}t^3 \cdots\right)$$

$$= 1 - t + \frac{1-\omega^2}{2!}t^2 + \frac{3\omega^2-1}{3!}t^3 + \cdots .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د تيلور-لړۍ وېش Division von Taylor-Reihen

د دوه تيلور – لړيو وېش

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (x-a)^k \Big/ \sum_{k=0}^{\infty} g_k (x-a)^k, \qquad g_0 \neq 0,$$

د ضريبونو پرتلې له لارې کېدی شي له کټوتوالي

$$(q_0 + q_1 u + \ldots)(g_0 + g_1 u + \ldots) = f_0 + f_1 u + \ldots\ , \quad u = x - a\,,$$

څخه وټاکل شي:

$$\begin{aligned} q_0 g_0 &= f_0 & \longrightarrow \quad & q_0 \\ q_1 g_0 + q_0 g_1 &= f_1 & \longrightarrow \quad & q_1 \\ & & & \vdots \\ q_n = (f_n - q_{n-1} g_1 - \ldots - q_0 g_n)/g_0 & & \longrightarrow \quad & q_n\,. \end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليک، اپريېس

د $q(x) = \tan x$ تر 5نظم پورې وديزونې لپاره ړدو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(q_1x+q_3x^3+q_5x^5+\ldots)\underbrace{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\ldots\right)}_{\cos x}=\underbrace{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\ldots}_{\sin x}.$$

له دې سره همدا اوس وکارول شو، چې تانجنت $\tan x$ ناجوړه(طاق) دی، دا په دې معنا چې $q_0=q_2=\ldots=0$.
د ضریبونوو له پرتلې څخه لرو:

$$\begin{aligned} q_1x &= x \longrightarrow q_1=1,\\ \left(-\frac{q_1}{2}+q_3\right)x^3 &= -\frac{1}{6}x^3 \longrightarrow q_3=\frac{1}{3},\\ \left(\frac{q_1}{24}-\frac{q_3}{2}+q_5\right)x^5 &= \frac{1}{120}x^5 \longrightarrow q_5=\frac{2}{15}. \end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیګ، اپریښ

د راشنل توابعو تیلور-ودیزېنه
Taylor-Entwicklung rationaler Funktionen

د یوه راشنل تابع $r(z)$ د تیلور –ودیزیېنه په ټکي $z=a$ کې کېدی شي د کمپلکس پارشل جمعې په مرسته وټاکل شي، دا په دې معناچې r د یوه پولینوم او د بنسټ تابع

$$\frac{1}{(u-z)^j}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{j-1}\frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+j}}.$$

جمعه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوګونو زیاتونونو(د جمعي اعضاوې) د کونورګنت وړانګې د وديزېنې ټکي د قطب نقطو د واټن $|u-a|$ سره برابره ده
لیکونکي: کلاوس هیولیګ

وديزېنه یا وده د بینوم لړۍ یو ځانګړی حالت دی:

$$\frac{1}{(u-z)^j} = \frac{1}{((u-a)-(z-a))^j} = (u-a)^{-j}(1+x)^{-j},$$

$$, \quad x = -\frac{z-a}{u-a}.$$

بدیلي کېدی شي په ټکي $z=a$ کې مشتق وشمېرل شي او د n-م د تیلور ضریبونو لپاره لاس ته راوړو

$$\frac{j\cdot(j+1)\cdots(j+n-1)}{n!} = \binom{n+j-1}{n}(u-a)^{-j-n}.$$

د

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n+j-1}{j-1}^{1/n} = 1$$

له امله د کونورګنت یا پولې ته تلنې وړانګه $|u-a|$ ده .
لیکونکي: کلاوس هیولیګ

د ښوونې لپاره د

$$r(z) = \frac{1}{z^2-z} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z}$$

وده په $a=3$ وتاکل شي. د لومړي ترم لپاره د تولیز فرمول څخه د $u=0$ او $j=1$ سره لاندې د تیلور n -م ضریب لاس ته راوړي

$$\binom{n}{0}(-3)^{-(n+1)},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}((z-3)/(-3))^n, \quad |z-3| < 3 .$$

دا ترې لاس ته راغلې هندسي لړۍ کېدی شي سیده هم لاس ته اروړل شي. دا د دویم ترم په بنسټ ښوول کیږی. سړی لیکي

$$-\frac{1}{1-3-(z-3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(z-3)/(-2)}$$

او لاس ته راوړي

$$-\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}((z-3)/(-2))^n, \quad |z-3| < 2 .$$

د دواړو لړیو زیاتون یا جمعه دا وده راکوي

$$\frac{1}{z^2-z} = \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)(z-3) + O((z-3)^2) .$$

لیکونکي: کلاوس هیولیګ

د یوې تیلور – لړۍ معکوس ارزښت تکرار شمیرنه
Iterative Berechnung des Kehrwerts einer Taylor-Reihe

که $g(0) \neq 0$ وي، نو کېدی شي د ایترېشن له لارې

$$f \longleftarrow 2f - gf^2$$

له $f(x) = 1/g(0)$ څخه په وتو د معکوس ارزښت $f = 1/g$ وده وشمېرل شي.
د لته په هر پل کې د ټیکو ترمونو تعداد یا ګڼ،ن دوه برابره کیږي.

دا متود د نیوتن تلنلار د $\frac{1}{f} - g = 0$ د یوه حل f ټاکل په ګوته کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: کلاوس هيوليک، اپيريش

د پولې ته تلنې وينا کيدی شي د کټوټوالي

$$f_{\text{neu}} - \frac{1}{g} = -g\left(f_{\text{alt}} - \frac{1}{g}\right)^2$$

حخه ولوستل شي، ځکه چې له $f_{\text{alt}} - 1/g = O(x^n)$ لاس ته

$$f_{\text{neu}} - 1/g = O(x^{2n})$$

راځي .

ليکونکي: کلاوس هيوليک، اپيريش

د

$$f(x) = 1/g(x) = 1/\cos x$$

تيلور وديزيېنه کېدی شي لکه چې په تعقيب يې پل په پل وشمېرل شي. له

$$g = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)\,, \quad f_0 = 1$$

څخه په وته لاس ته راځي

$$\begin{aligned} f_1 &= 2\cdot 1 - g\cdot 1^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + O(x^6) \\ f_2 &= 2(1+\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4) - g\,(1+\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4)^2 + O(x^6) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6)\,. \end{aligned}$$

سملاسې له دوه پلونو (قدمونو) وروسته لومړي شپږ ترمونه ټيک دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$ سره له ضرب پسې د تانجنت لړۍ راکوي

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

لیکونکي: کلاوس هیولیک، اپیریښ

د معکوس تابع د تیولور ودیزیینه
Taylor-Entwicklung der Umkehrfunktion

د یوه تابع f د معکوس تابع $g(x)$ د تیلور ضریبونه د $f'(a) \neq 0$ سره په ټکي $b = f(a)$ کې کېدی شي د $g(f(x)) = x$ له مشفونې و ټاکل شي :

$$g(b) = a$$

$$g'(b)\, f'(a) = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(b)$$

$$g''(b)\, f'(a)^2 + g'(b)\, f''(a) = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(b)$$

$$\vdots$$

دا منځ ته راغلي مساوات کېدی شي تل پسېsukzessive د مشتقونو $g'(b),\, g''(b), \dots$ پسې وشمېرل شي.

لیکونکي: کلاوس هیولیک، اپیریښ

د $f(x) = \sin x$, $g(x) = \arcsin x$ او $a = 0$ لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g(0) = 0$$

$$g'(0)\cos 0 = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(0) = 1$$

$$g''(0)\cos^2 0 - g'(0)\sin 0 = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(0) = 0$$

$$'(0)\cos^3 0 - g''(0)(-\sin 0) + g''(0)\cos 0(-\sin 0) + g'(0)(-\cos 0) = 0 \quad \longrightarrow \quad g'''(0) = 1$$

$$\vdots$$

$$\arcsin x = x + \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

دا په دې معنا چې . که په پام کې ونيول شي،
جې د يوه ناجوړه يا طاق تابع په څېر – يا معکوس تابع ناجوړه ده، نو سملاسي يې
وديزيېنه تر پنځم ترم پورې ټيک ده.
ليکونکي: کلاوس هيوليک، اپيريش

د تيلور ځانګړې لړۍ Spezielle Taylor-Reihen

$$(1 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots \quad -1 < x \leq 1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{t} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}B_{2k}x^{2k-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{ar} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots \quad |x| < 1$$

$$\mathrm{arcc} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots\right) \quad |x| < 1$$

$$\mathrm{arctar} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots \quad |x| < 1$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د پاد نږدې ارزښت شميرنه **Pade-Approximation**

د يوه تابع $f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots$ د (m,n) - پاد-نږدې ارزښت شمېرنه يو راشنل تابع دی د صورت – يا ماتباندې درجې m او مخرج يا ماتلانې درجې n سره، چې د f سره د $z \to 0$ لپاره تر جګو درجو ترمونو همغږيز کيږي يا سره برابرېږي:

$$\frac{p(z)}{q(z)} - f(z) = O(z^{m+n+1})\,.$$

پولينومونه $p(z) = a_0 + \cdots + a_m z^m$ او $q(z) = b_0 + \cdots + b_n z^n$ کېدی شي د ضريبونو د پرتلې له لارې وټاکل شي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د q سره د ضرب وروسته لاس ته راوړو

$$(a_0 + a_1 z + \cdots) - (c_0 + c_1 z + \cdots)(b_0 + b_1 z + \cdots) = c z^{m+n+1} + \cdots\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او لاس ته راځي، چې د $k \leq m+n$, z^k ضریبونه باید ورک شي:

$$k=0: \quad a_0 - c_0 b_0 = 0$$
$$k=1: \quad a_1 - c_0 b_1 - c_1 b_0 = 0$$
$$\ldots.$$

دا کښته – یا لامدې ټاکل شوی هوموجېن کرښیز مساوات سیستم ($m+n+1$ مساوات د $m+n+2$ متحولو یا ناټاکلو سره) راکوي، چې تل حل لري.
دا چې f په صفر کې قطب نه لري، راکوي $b_0 = 0$ ، چې $a_0 = 0$ راکوي. له دې امله کېدی شي د ممکنه لنډونو وروسته د q لومړي له صفر توبیرېدونکي ضریبونه د 1 سره برابر اېښول کېښولی شي.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د اکسپوننشل توابعو لپاره د (m,n)-پاد-نږدې ارزښت شمېرنې ته مساوات سیستم په لاندې ډول دی.

$$0 = a_0 - b_0$$

$$0 = a_1 - b_1 - b_0$$

$$\ldots$$

$$0 = a_m - b_m - \cdots - \frac{1}{m!} b_0$$

$$0 = b_{m+1} - \cdots - \frac{1}{(m+1)!} b_0$$

$$\ldots$$

$$0 = \frac{1}{m!} b_n - \cdots - \frac{1}{(m+n)!} b_0 \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

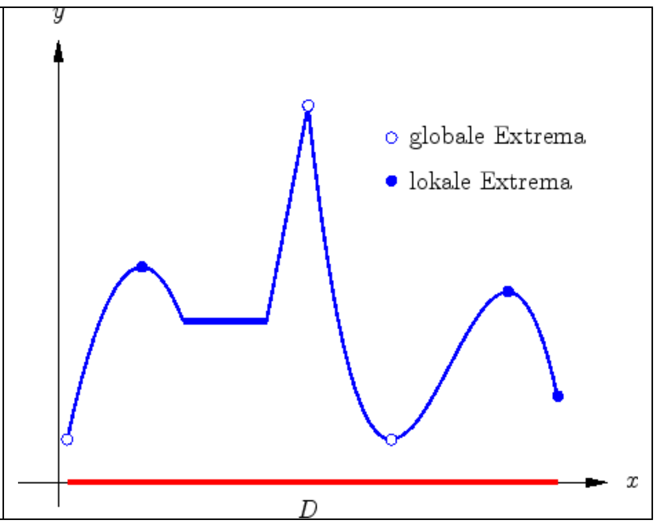
د حل لپاره د بيلګي په توګه لاس ته راوړی شو

$$r_{1,1}(x)=\frac{1+x/2}{1-x/2},\quad r_{2,2}(x)=\frac{1+x/2+x^2/12}{1-x/2+x^2/12}.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليک

اکسترېما(افراطيت) Extrema

تابع f په a کي په يوه ډېرۍ(سټ) D يو تولېز يا ګلوبال مينيموم لري، که وي $f(a)\le f(x)\quad \forall x\in D.$

په يوه ځاييز – يا لوکال مينيموم کي د تابع ارزښت $f(a)$ فقط په يوه کوچني]اپېريال $(a-\delta,a+\delta)\cap D$ کي مينيمال دی. ګلوبال او لوکال مينيموم سره ورته تعريف دي.	

په يوه رابند انتروال د يوه ټوټه ډوله ناپرېکېدونکی او مشتقوړ تابع لپاره کېدی شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتقونو په صفرځايونو ، پرېکېدونکي ځايونو او يا په ژئ ځايونو کي رامنځ ته شي. تيوپ يا ډول يې کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته او د ت ابع ارزښتونو د پرتلې له لارې پيداشي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر
د يوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع لپاره د لوکال مينيموم سره د تعريفورشو په دننني ټکي a کي د مشتق لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

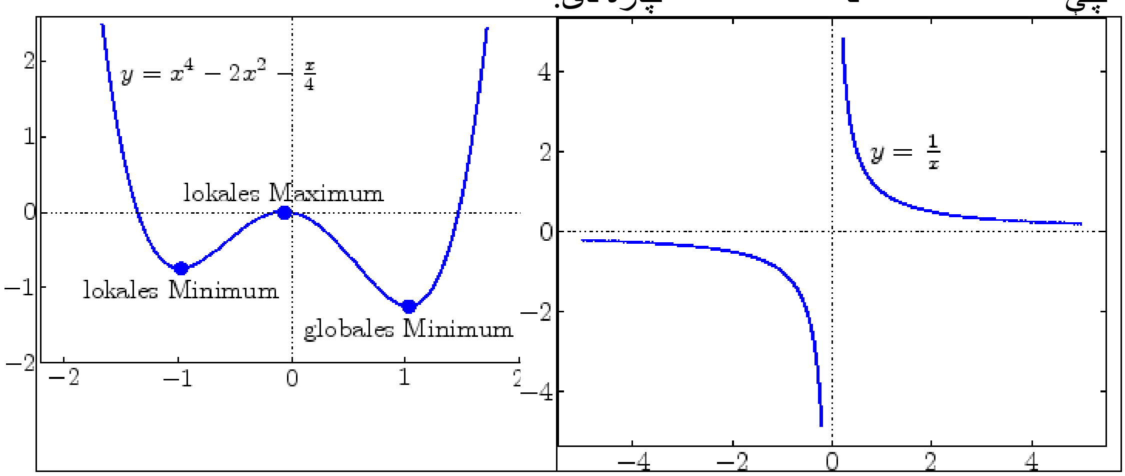
$$f'(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\geq 0}} \overbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}^{\geq 0} \geq 0$$

او

$$f'(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\leq 0}} \overbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}^{\geq 0} \leq 0$$

نو $f'(a)=0$. يعني د تعريف ورشو په دننه کې په يوه لوکال افراطيت کې بايد مشتق صفر وي يا f هلته مشتقوړ نه وي.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

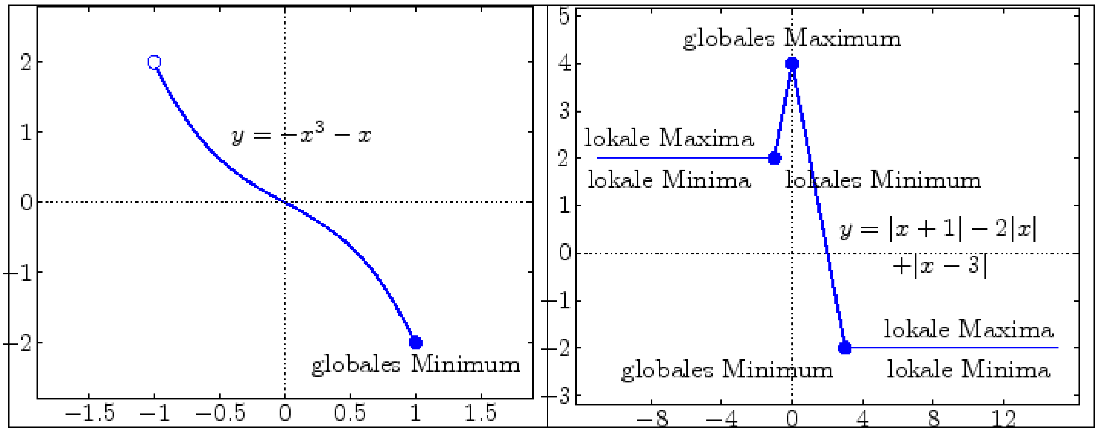
په لاندې کې به يو څو تيپيکي حالتونه وڅيړل شي.
تابع $f(x)=x^4-2x^2-x/4$ د $D=\mathbb{R}$ سره دوه مينيما اويو متکسيما لري.
مينيموم د کوچني تابع ارزښت سره ګلوبال دی. يو ګلوبال ماکسيموم شتون نه لي ، ځکه چې $f(x)\to\infty$ د $x\to\pm\infty$ لپاره دی.



تابع $f(x)=1/x$ د $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ سره اکستيم يا افراطي ارزښتونه نه لري.که يو تابع په يوه واز انتروال ثابت وي، نو دا ځايونه هم (لکال) ماکسيما او هم) لوکال) مينيما دي.

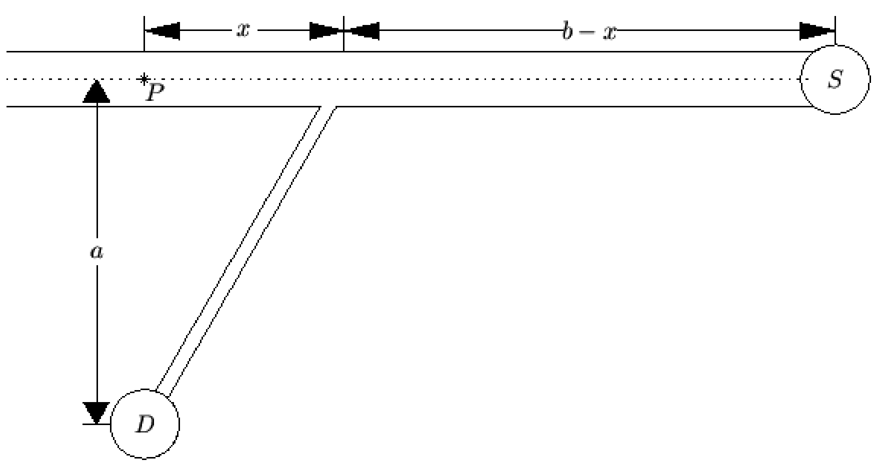
(c) ketabton.com: The Digital Library

یوه کره همغږیز – یا مونوتون تابع سره افراطي ارزښتونه په ژی ټکو کې نیول کیږي، که دا تعریفورشو پورې تعلق ولري یا اړوند وی.



لیکونکي: هیولیک، هیوررنر

له یوه کلي D څخه یوه ښار S ته یوترنسرک جوړیږي. په واټن a همدا اوس له کلي و ښار ته یو سرک جوړ دی له ښار څخه تر ټکي P پورې لار ، هغه سرک چې کلي ته بل یا پسي نږدې پروت دی، اوږدوالی b لري.
دا سیده کرښیز توته لار باید داسي جوړه وي، چې د ښار ګرندی رسیدنه شووني یا تظمین وي، که د یوه منځني [تکتیا km/h $v_a = 120$ د $v_n = 60$ په واټن په نوي څنګیز یا فرعي سرک څخه لاړ شو.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د P او د ځنګيز سرک ترمنځ واټن $x \geq 0$ د ټاکلو لپاره د مينيمی – يا کموني له لارې اړين وخت

ښار ته د خوزښت لپاره دی

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

د مشتق صفرځايونه

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2} v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0\,,$$

راکوي

$$v_a x = v_n \sqrt{a^2 + x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_m = a/\sqrt{3}$$

يعني ممکنه لوکال اکسترېم ځاي په (0, b) کې. ايا چې دا مينيموم دی، بايد د خوزښت وخت سره په انتروالټکو کې د پرتلې له لارې وټاکل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a + b}{v_a}\,, \qquad t(0) = \frac{2a + b}{v_a}\,, \qquad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{v_a}$$

په روښانه توګه $t(0) \geq t(x_m)$ دی. د ښي پايټکو لپاره باور لري

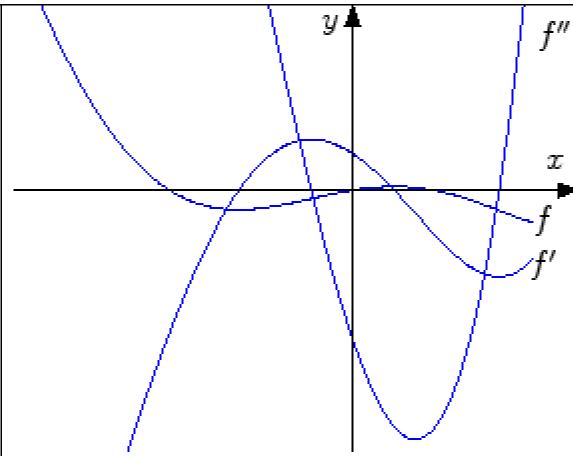
$$\begin{aligned} t(b) \geq t(x_m) \Leftrightarrow &\quad 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{3}a + b \\ \Leftrightarrow &\quad 4a^2 + 4b^2 \geq 3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2 \\ \Leftrightarrow &\quad a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = (a - \sqrt{3}b)^2 \geq 0\,. \end{aligned}$$

اخرنی مساوات تل پوره دی، او له دې سره x_m اوپټيمال يا اغيز من دی، که په غوره انتروال $(0, b)$ کې پروت وي.: $b \geq a/\sqrt{3}$. په بل حالت کې به مينيموم په ژی ټکي b ته ، يعنې ښار ته د سيده ترنې، سره ورسيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د اکستريم – يا افرطي ازښتونو ازماېښت **Extremwerttest**

د يوه افراطی ارزښت تيوپ يا ډول په هکله کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته پرېکړه وشي. که f يو دوه واره ناپرېکيدونکی مشتقوړ تابع وي او $f'(a)=0\,, \qquad f''(a)>0$ $(f''(a)<0)\,,$ ولرو،	

نو f په a کې يو ځاييز مينيموم(ماکسيموم) لري. که د a په ځای کې دويم مشتق ورک شي يا صفر شي، نو بايد جګ مشتقونه پرېکړې ته را وړاندې شي. که باور ولري

$$f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(a)\neq 0\,,$$

نو f په a کې تيک هلته يو افراطيت لري، که جوړه وي. په دې حالت کې f په a کې يو لوکال يا ځای اړونده ماکسيموم همداسي مينيموم لري، که $f^{(n)}(a)<0$ همداسي $f^{(n)}(a)>0$ وي.

ليکونکي:اپپ، هيوليک

د ښووني لپاره و f ته سرې د a په ځای کې د $n-1$ درجې د تيلور-پولينوم کاروي د باقي يا پاتي

$$f(x)-f(a)=\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-a)^n$$

غړي سره او په پام کې نيسي، چې د $f^{(n)}(t)$ او د $f^{(n)}(a)$ لپاره(او له دې سره هم د t لپاره) a ته په بوره نږدېوالي همغه يا برابره مخنخښه ولري.

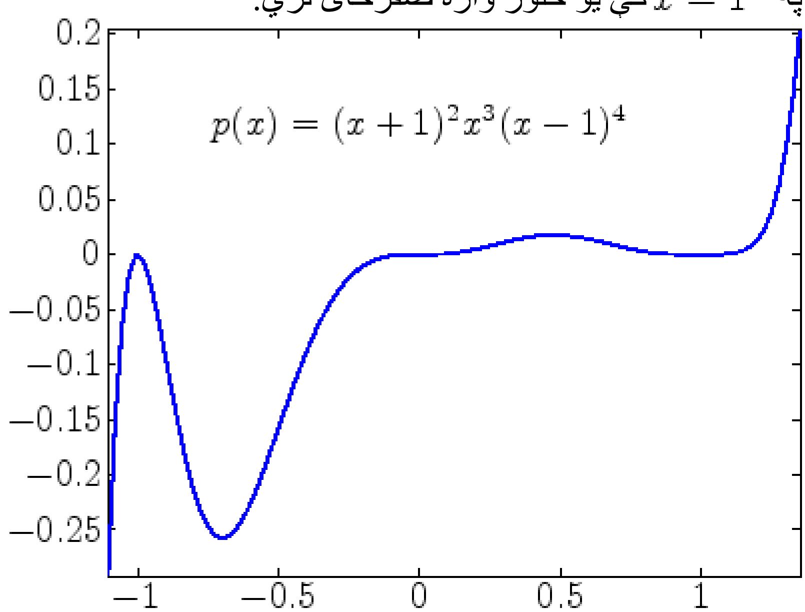
(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناجوړه یا طاق n لپاره له $x < a$ څخه و $x > a$ ته په تلني کې د پورته مساوات
ښی اړخ یو د مخنخښي بدلون لري. د دې پسې $f(x) - f(a)$ هم هلته د مخنخښي
بدلون لري او د a د f افراطي ځای نه دی.
د جوړه n لپاره د $x \neq a$ لپاره تل $(x-a)^n > 0$ دی. د $f^{(n)}(a) < 0$ په
حالت کې د $x \neq a$ لپاره او x چې a ته پوره نږدې پروت دی $f(x) < f(a)$
لاس ته راځي. نو تابع f په دې حالت کې په a کې یو لوکال ماکسیموم لري . حالت
$f^{(n)}(a) > 0$ په ورته توګه یو لوکال میموم راکوي.
لیکونکي:اپپ، هیولیک

پولینوم

$$p(x) = (x+1)^2 x^3 (x-1)^4$$

په $x = -1$ کې یو ډبل صفرځای ، په $x = 0$ کې یو درېواره صفرځای لري او
په $x = 1$ کې یو څلور واره صفرځای لري.



باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p''(-1) = 2(-1)^3(-2)^4 < 0.$$

په $x = -1$ کې p يو ماکسيموم لري. په $x = 1$ کې p يو مينيموم، څکه چې

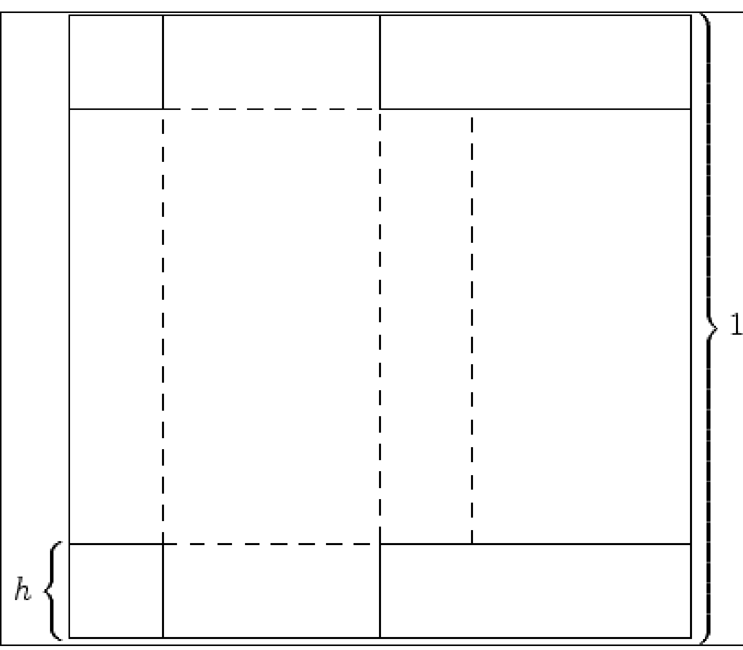
$$p(1) = \ldots = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0.$$ ،

بالاخره p د

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 3!(-1)^4 \neq 0$$

له امله او په $x = 0$ کې يو مخنخښې بدلون له امله په سرچينه کې افراطي ځايونه نه لري.

ليکونکي:اپپ، هيوليګ

د دې ورکړ شوي غوڅنموني په مرسته دې د مربعيز ټوټه کارتونونو څخه دې ممکنه د لوی حجم صندق جوړ شي	

ډکی يا حجم دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

اوږدوالی سور جګوالی

د مشتق صفرځایونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

راکوي

$$= \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

یعني ممکنه افراطي ځایونه. فقط $h = \frac{1}{6}$ هندسي موخه ور دی او

$$v(1/6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}\,.$$

دا چې د ژی ټکو $h = 0$ او $h = 1/2$ لپاره ډکی یا حجم صفر 0 دی، صندق د $h = 1/6$ لپاره ماکسیمال ډکی یا حجم لري.

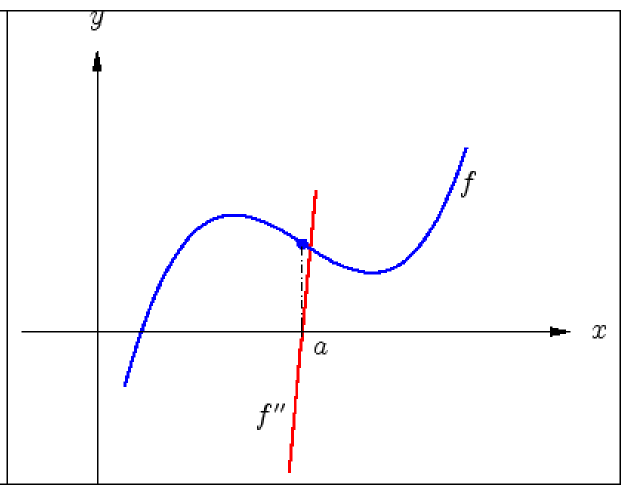
لیکونکي:اپپ، هیولیک

اوړونټکي(نقطه انعطاف) Wendepunkte

د یوه تابع f په یوه اوړنټکي a کې دویم مشتق مخنخښنه بدلوي.

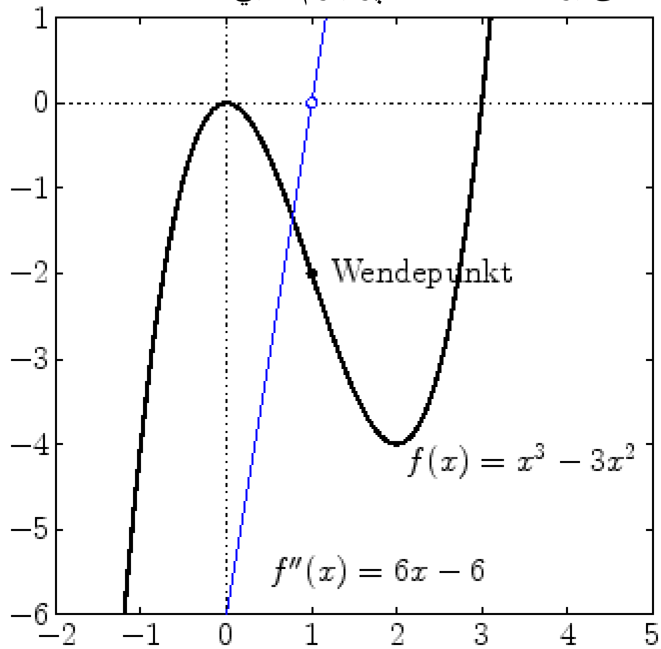
د یوه پوره هوار تابع لپاره اړین دی، چې $f''(a) = 0$ وي او پوره کېدونکي، چې $f'''(a) \neq 0$ وي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر



(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق يو kubisches پولينوم ښايي.



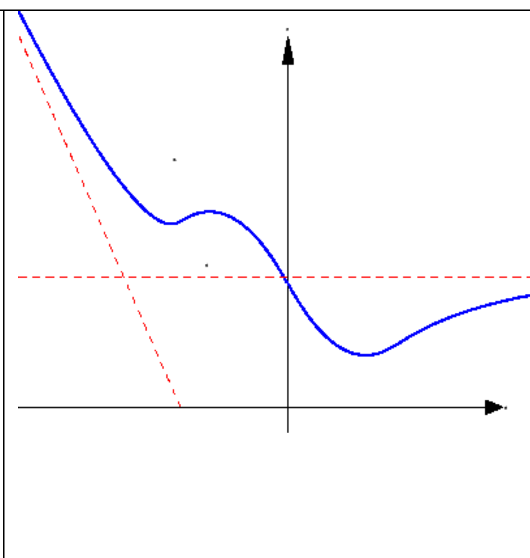
دا چي د ويم مشتق کرښيز دی، تل ټيک يو افراطی ټکی شتون لري.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

اسيمپتوتي(يو په بل نه پرېوتونکي يا ګاونډی) Asymptoten

يو کرښيز تابع $p(x) = ax + b$ د f يو اسيمپتوت يا ګاونډی دی، که د $x \to \infty$ يا $x \to -\infty$ لپاره $f(x) - p(x) \to 0$ وي.

لکه په ښېره کې چې ښوول شوی دی، ګاونډ د تابع f حالت د لوي x لپاره تشريح کوي.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

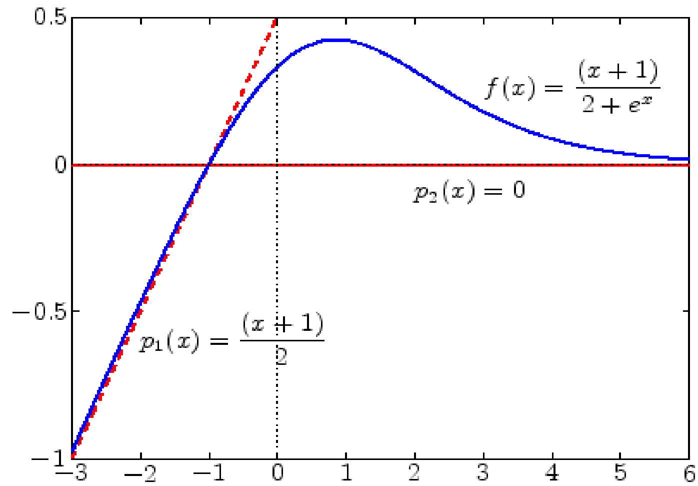


(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x) = \frac{x+1}{2+e^x}$$

ګاونډ وټاکو پوله ارزښتونه $x \to \pm\infty$ ځانله تر څېړنې نیسو.



د $x \to \infty$ لپاره دی

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)\cdot e^{-x}}{2\cdot e^{-x}+1} = \frac{0}{0+1} = 0\,.$$

له دې سره د x محور ګاونډ یا اسیمپټوت دی

د $x \to -\infty$ لپاره e^x د 0 په لور هڅیږي او

$$p(x) = \frac{x+1}{2}$$

ګاونډ دی.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د راشنل- یا کسر توابعو ګاونډ یا اسیمپټوټې
Asymptoten rationaler Funktionen

یو راسنل تابع

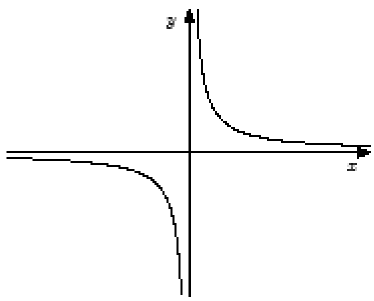
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

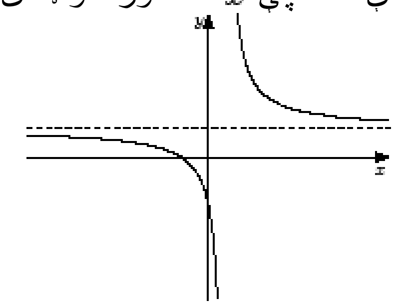
تیک هلته یو کرښیز ګاونډ لري، که $\text{Grad}\; p \le \text{Grad}\; q+1$ وي.

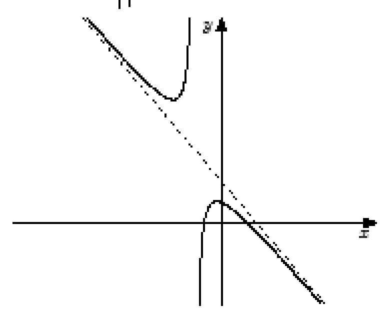
د $\text{Grad}\; p < \text{Grad}\; q$ لپاره باور لري

$$\lim_{p \to \pm\infty} r(x) = 0\,,$$

دا په دې معنا چې x - محور ګاونډ دی.







د $\text{Grad}\; q \le \text{Grad}\; p \le \text{Grad}\; q+1$ لپاره سړی کرښیز ګاونډ د پولینوم وېش سره لاس ته راوړي :

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

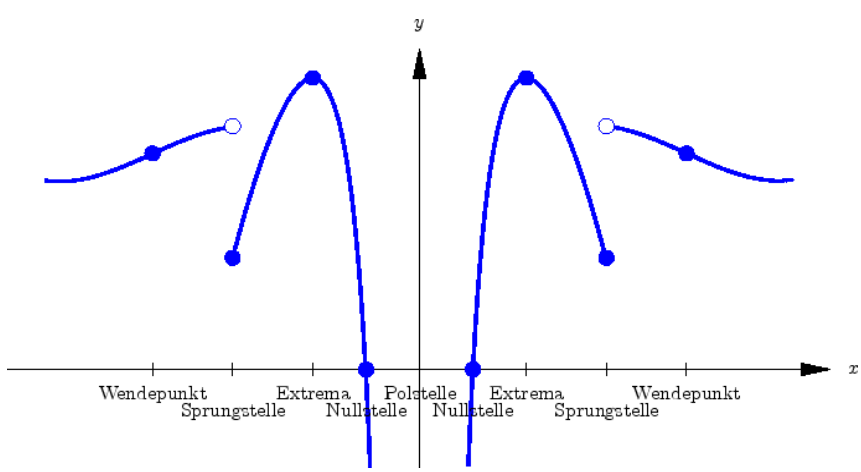
د q Grad $\tilde{p} <$ Grad سره. اسیمپتوت پروت یا افقي, $(a = 0)$ دی، که Grad q Grad $p =$ وي.

که د صورت درجه د مخرج له درجې له یو زیات وي، نو $r(x)$ د لوي x لپاره د یوه پولینوم سره، چې ≥ 2 درجه وي اپروکسیمي کیږي.
لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د کږو یا منحنیو خبرې یا بحث Kurvendiskussion

د یوه تابع د څومره والي حالت باندې قضاوت ته لاندې نخښې کیدی شي رامخ ته شي:

- Symmetrien سیومتري
- Periodizität تل بیرته راګرځیدنه
- Unstetigkeitsstellen پرېکیدنوالي ځایونه
- Nullstellen ($\longrightarrow$ Vorzeichen) صفرځایونه(مخنخښه $\longrightarrow$)
- Extrema ($\longrightarrow$ Monotoniebereiche) اکستریما (همغږیزوالي ورشوګاني $\longrightarrow$)
- Wendepunkte ($\longrightarrow$ Konvexitätsbereiche) اوړونټکی (ننوتلوالي ورشوګاني $\longrightarrow$)
- Polstellen قطبځایونه
- Asymptoten اسیپتوتونه یا ګاونډي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع یو اړونده تحلیل د کړو خبرې اترې یا بحث بلل کیږي
لیکونکي: هیولیگ، هیورنر

د کړوخبرو اترو د ښکندوني لپاره یو تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\ \sin(3x)$$

تر څېړنې نیول کیږي.

سیمتري : داچې $\sin x = -\sin(-x)$ دی ، نو تابع ناجوړه دی

تل بیرته راګرځېدنه یا پریودیڅیتيPeriodizität : تابع لکه د ساین تابع پخپله 2π - پریودیکي دی او له دې امله په لاندې کې فقط په انتروال $[-\pi, \pi]$ کې راوړل کیږي.

د پرېکېدنوالي ځایونه : تابع له ناپرېکېدونکو توابعو څخه سره یرځای شوی، له دې امله برکېدنځاینه نه لري.

صفرځایونه: د زیاتو- یا جمعه نقضیې سره $[-\pi, \pi]$ دی

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\ \sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right)}_{\neq 0}.$$

تابع صفرځایونه په 0 او $\pm\pi$ کې لري.
افراطیت: مشتق

$$f'(x) = 2\cos x - 4\sin^2 x\ \cos x = -2\cos x + 4\cos^3 x$$

صفر دی د $\cos x = 0$ یا د $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$ لپاره ، نو

$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4.$$

دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف او تلبیرته راګرځېدونې ده، ژیٔ ترڅېړنې لاندې نه نیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دويم مشتق د محنخښي څخه

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x \sin x$$

او د تابع ارزښت د پرتله کوني له لارې کېدی شي د افراطيت تيوپ يا ډول وټاکل شي:

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اوړونټکی يا د انعطاف ټکیWendepunkte :

دويم مشتق

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x \sin x = -10\sin x + 12\sin^3 x$$

$$\sin x = \pm\sqrt{5/6}$$

صفر دی د $\sin x = 0$ لپاره يا ، دا په دې معنا چې

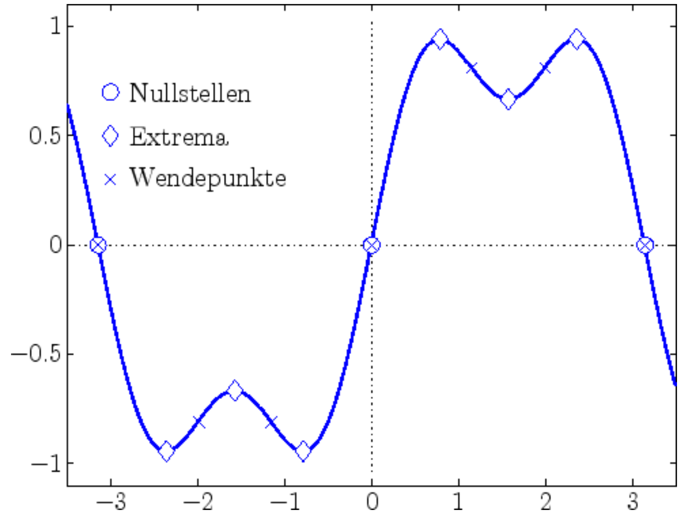
$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$

دا چې په دې ځای کې دريم مشتق نه ورکيږي. تابع f اوړونټکی په $(0,0)$ او $(\pm\pi, 0)$ کې لري همداسې په نږدې توګه په $(-1.99, -0.81)$، $(1.15, 0.81)$, $(-1.15, -0.81)$ او $(1.99, 0.81)$ کې.

قطبځايونه**Polstellen** : ناپرېکېدونکي توابع قطبځايونه نه لري.

ګاونډي **Asymptoten** : تابع پريوديکي او نه ثابت دی، نو ګاونډي يا اسيپتوت يا مجاورتونه نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د یوې کړۍ خبرو یا بحث روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترخیرني لاندې نیول کیږي.
سیومتري : صورت ناجوړه او مخرج جوړه دی. تابع نو له دې امله ناجوړه دی، دا په دې معنا چې سرچینې ته سیومتریک دی.
پریودیڅیتي یا (تل) بیرته راګرځیدنه: تابع پریودیک نه دی.
برېکیدنځایونه: د مخرج صورت صفرځایونه ± 1 د صورت صفرځایونه نه دي. له دې سره f په $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ ناپرېکېدونکی دی.
صفرځایونه: صورت د $x = 0$ لپاره ورکیږي.
افراطیت :

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2-1)^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

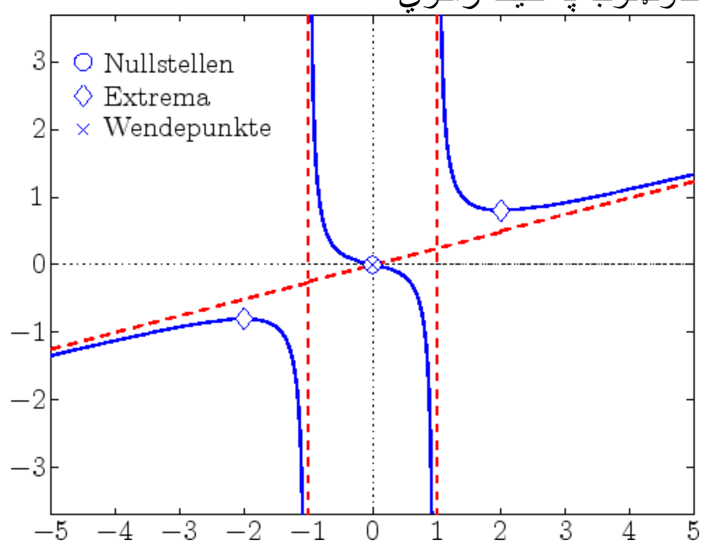
دا چې تابع ساده صفرځایونه لري، افراطیت فقط لوکال یا ځای اړوند دی. د f د ځومره والي حالت څخه کیدی شي تیوب یا ډول لاس ته راشي. دا چې $f(x) \to -\infty$ د $x \to -\infty$ او $x \to -1$ لپاره دی، باید انترول $(-\infty, -1)$ یو ماکسیموم ولري. په ورته توګه $(1, \infty)$ لږ تر لږه یو مینیموم لري. نو د مشتق صفرځایونو ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

سړی یو لوکال ماکسیموم په $(-2,-4/5)$ او یو لوکال مینیموم په $(2,4/5)$ کې لاس ته راوړي.
اوړونټکي یا نقاط انعطاف:

$$f''(x)=\frac{-80x^5+398x^3+42x}{20(x^2-1)^3}\stackrel{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad x=0$$

داچې په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی، نو $(0,0)$ یو اوړونټکی دی.
قطبځایونه: تابع په $x=\pm1$ کې ساده قطبځایونه لري.
اسیمپتوت یا ګاونډېتوب: یو د پولینوم وېش $p(x)=5x/20+0=x/4$ د ګاونډتوب په حیث راکوي



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د کړې خبرو اترو د ښوولو یا روښانه کولو ته تابع

$$f(x)=e^{-x^2}+\frac{4|x|}{e^4}$$

څېړل کیږي.

سیمټري : دا چې x^2 او $|x|$ جوړه دي، تابع جوړه دی، دا په دې معنا چې سیمتر و - y محور ته.
پریودیځیتي یا تل ببرته راګرځېدنه: تابع پریودیک نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرېکړېدنوالي ځايونه: تابع له ناپرېکړېدونکو توابعو څخه سره يوځای شوې ده او له دې امله پرېکړېدنځايونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت تابع لپاره په هرحالت مشتق په صفرټکي کې ناپرېکړېدونکی نه دی.
صفرځايونه: اکسپوننشل توابع تل مثبت يا زياتيز دي، د مطلق ارزښت تابع نه منفي دي. نو صفرځايونه نه شته.
افراطيت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4}\operatorname{sign}(x) \stackrel{!}{=} 0,\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\,.$$

برسيره پردې دې افراطی ټکی په $x = 0$ کې ،څېړل شي، چېرته چې مشتق پرېکړېدونکی دی. دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعريف دی، نو د x لپاره د $\pm\infty$ ته د تلنې حالت هم بايد په پام کې ونيول شي.
دا چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره دی، نو f لږ تر لږه يو ګلوبال مينيموم لري، مګر کلوبال ماکسيموم نه لري. د y ارزښت په پرتله کريتيکال ټکی

$$(-2, 9/e^4) \qquad (0,1) \qquad (2, 9/e^4)$$

ښايي، چې ګلوبال مينيموم په $x = \pm 2$ کې نيول کيږي. دا چې f په انتروال $[-2,2]$ کې مينيموم او هم يو ماکسيموم لري، ترې لاس ته راځي چې $(0,1)$ يو لوکال ماکسيموم دی.
اوړونټکی يا د انعطاف ټکی:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{2}$$

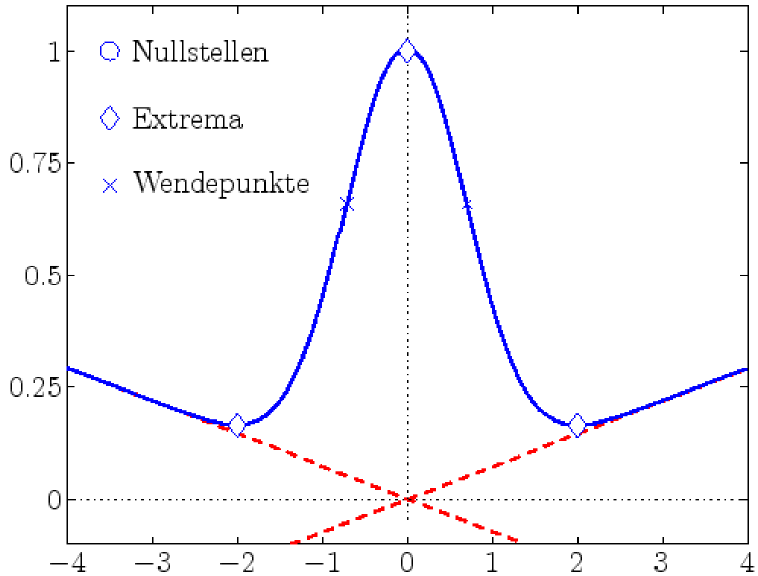
دريم مشتق په دې ځايونو $\neq 0$ کې دی. ترې لاس ته راځي چې f يو اوړنټکی

$$\left(\pm 1/\sqrt{2},\ e^{-1/2} + \frac{4}{\sqrt{2}\,e^4}\right)\,.$$

لري.
قطبځايونه: تابع قطبځايونه نه لري.

ګاونډي يا مجاورتها: دا چې e^{-x^2} د $|x|$ لپاره د صفر په لور ګړندی دی، تابع ګاونډيان $p_+(x) = \frac{4x}{e^4}$ او $p_-(x) = \frac{-4x}{e^4}$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

ریمن-انتیګرال Riemann-Integral

د یوه ناپرېکېدونکي تابع f یو تاکلی انتیګرال د

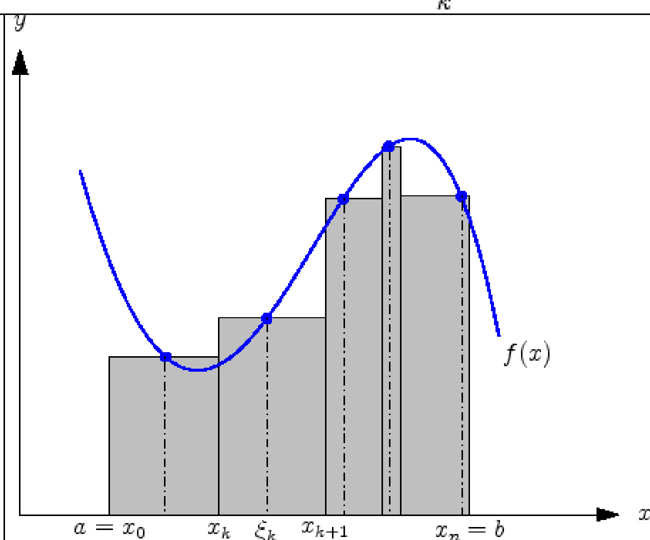
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \int_a^b f_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

له لارې تعریف شوی دی. دلته د $\Delta :\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ یوه توټه کونه بنایي،

$$|\Delta| = \max_k \Delta x_k\ ,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\ ,$$

ξ_k یو ماکسیمال انتروال دی او په k – م انترول یو په خوښه ټکی دی. د انتیګرال تعریف په بنی لور زیاتون یاجمعه د ریمن زیاتون یا – جمعه بلل کیږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د زياتيز يا مثبت f لپاره $\int_a^b f(x)\,dx$ د f د ګراف کښته لورته سطحه په ګوته کوي

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر، ويپپر

که $f(x)$ ناپرېکيدونکی مشتقوړ وي، نو د مشتقشمېرنې د منځ ارزښت جملې څخه د لپاره باور لري

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le (x_2 - x_1) \max_{x\in[x_1,x_2]} |f'(x)|$$

Δ_i دې د ټوټه ونو يوه پرله پسې وي د $|\Delta_i| \to 0$ سره. د تابع پرلپسې دوه توکي Δ_m او Δ_n را اخلو او د Δ ټوټه ونه را اخلو، چې د Δ_m او Δ_n د نورو يا ورپسې يل لاندې ټوټه کونو له لارې منځ ته راځي ، چېرته چې Δ_m د لاندې يا ورپسې ټوټه ونو ټکي $x_i\,,\, i=0,\ldots,k_m$ دي او Δ ټکي $z_i\,,\, i=0,\ldots,k$ لري، نو د $\zeta_j \in [z_{j-1}, z_j]$ سره باور لري

$$\left|\int f_\Delta - \int f_{\Delta_m}\right| = \left|\sum_{j=1}^{k} f(\zeta_j)\,\Delta z_j - \sum_{i=1}^{k_m} f(\xi_i)\,\Delta x_i\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1}\le z_{j-1}<z_j\le x_i} (f(\zeta_j) - f(\xi_i))\Delta z_j\right|$$

$$\le |\Delta_m| \max_{t\in[a,b]} |f'(t)| \underbrace{\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1}\le z_{j-1}<z_j\le x_i} \Delta z_j}_{b-a} .$$

په ورته تګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left|\int f_\Delta - \int f_{\Delta_n}\right| = O(|\Delta_n|)\,,$$

او له دې سره

$$\left|\int f_{\Delta_m} - \int f_{\Delta_n}\right| \to 0$$

د $n,m \to \infty$ لپاره . د ریمن –زیاتون نو یوه کوشي-پرلپسي جوړوي، نو پولې ته تلونکې دي.

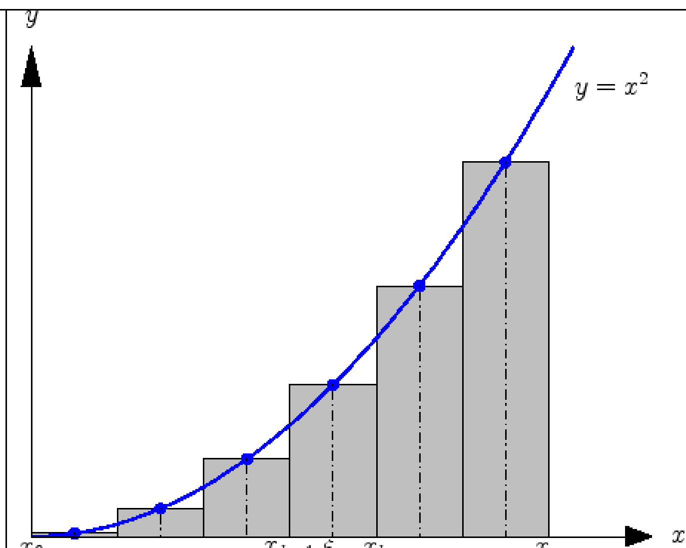
په ورته توګه د دوه پرلپسیو و همغې یا برابرې پولې ته تلنه وښوول شي.

د توټه ناپرېکېدونکو f ښوونه تخنیکي داسې لږ پېچلې ده. سرې د f د ناپرېکېدنې انتروال بېل یا جدا ترڅېړنې نیسي او هلته د برابرډوله ناپرېکېدنې څخه ګټه اخلي:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le \varepsilon \qquad \text{für} \quad |x_1 - x_2| < \delta\,.$$

دا اټکل د منځ ارزښت جملې په ځای رامنځ ته کیږي او نور دلایل په ورته وګه مخ ته بیولکیږي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

ریمن –انتیګرال په حیث د $\int_0^1 x^2\,dx$ شمېرلو کیدی شي د توټه ونې پرلپسي وکارول شي د n -م توټه ونې لپاره د ارزښتونو ځایونو $\xi_i = (2i-1)/(2n)\,,$ $,\, i = 1,\ldots,n\,,$ سره.	

د تعریف سره سم لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{4n^3}\left(4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right)$$

$$\frac{1}{4n^3}\left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

او له دې سره .

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د انتيګرال خويونه Eigenschaften des Integrals

دا لاندې تاکلی انتيګرال دا لاندې خويونه لري :

کربنيزوالس,

$$\int f + g = \int f + \int g \,, \quad \int r f = r \int f$$

همغږيزوالی :

$$f \le g \implies \int f \le \int g$$

زياتون يا جمعه

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

$\int_b^a f = -\int_a^b f$

د وروستيو خويونو د همغږيزونې له امله سرې تعريفوي: .

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

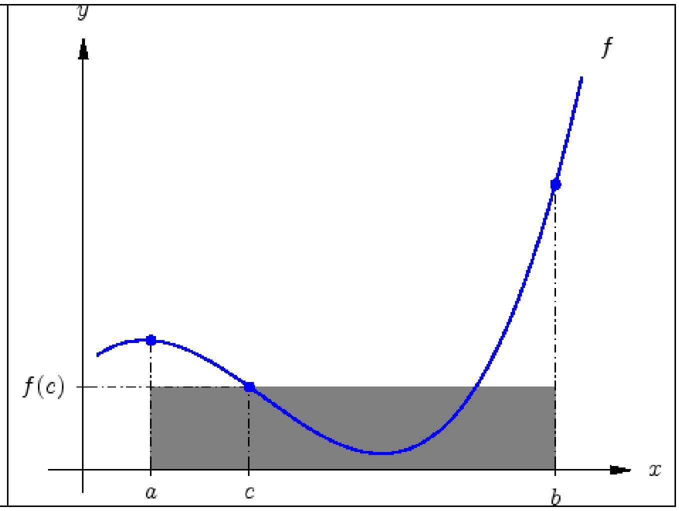
د انتيګرالشميرنې منځ ارزښت جمله
Mittelwertsatz der Integralrechnung

(c) ketabton.com: The Digital Library

که f او g په $[a,b]$ ناپرېکېدونکي توابع وي او g د مخنخښي بدلون ونه لري ، نو $c \in [a,b]$ شتون لري د

$$\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g.$$

سره



په ځانګي توګه ، لکه په ځېره کې چې ليدوړ دي، دی $\int_a^b f = (b-a)f(c)$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

بې له تولېزو بنديزونو دې $g \geq 0$ وي. د انتيګرال د اتکل له لارې

$$\left(\min_{[a,b]} f\right) g(x) \leq f(x)g(x) \leq \left(\max_{[a,b]} f\right) g(x)$$

لاس ته راځي

$$\left(\min_{[a,b]} f\right) \int g \leq \int fg \leq \left(\max_{[a,b]} f\right) \int g .$$

دا چې f د منځارزښت جملې له مخې د $\min f$ او $\max f$ ترمنځ هر ارزښت نيسي، نو غوښتونی برابروالی راکوي.

په تولېزه توګه وړاندنيونه ده، چې د g مخنخښي بدلون نه لري، اړيين، لکه د بېلګې

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}_{>0} = \int_{-1}^{1} x \cdot x\,dx \neq c\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څخه لیدل کیږی.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

بنسټیز – یا ساده توابع Stammfunktion

یو تابع F د $F' = f$ سره د f بنسټیز ت ابع دی، او د دې لپاره لیکو

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

د ټولو بنسټیز توابعو ډېرۍ لپاره، چې د f ناټاکلي انتیګرال بلل کیږي.
د انتیګرالونې ثابته c په خوښه ده. د بېلګې په توګه دی

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$F_a(a) = 0$$

د سره یو ممکنه لومړی یا بنسټیزه تابع.
نه ټولو بنسټیزو توابعو ته داسې روښانه د بنسټیزو توابعو اکسپلیڅیت ورکړه شونې ده،

$$f(x) = \exp\left(x^2\right)$$

یوه بېلګه ده .
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د انتیګرالشمیرنې اصلي جمله یا قضیه
Hauptsatz der Integralrechnung

که F د یوه ناپرېکېدونکي تابع f بنسټیز یا لومړنی تابع وي ، دا په دې معنا چې

$$f = F'$$

وي، نو باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

همداسې په لنډه لیکندول

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f = [F]_a^b \,.$$

یو بنئتیز انتیګرال کېدی شي د انتروال په پای ټکو کې د بنسټیزو توابعو د تابع ارزښتونو د کمښت په ډول وشمېرل شي
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

که دواړه خواوې د b تابع په څېر راوړل شي، نو بسیا کوي وښایو، چې دواړه خواوې برابر مشتق لري، ځکهچې د $b=a$ لپاره ارزښت سره سرخوري(دواړه خواوې صفر دي).
د کیڼ اړخ لپاره لرو

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{b+h} f - \int_a^b f \right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_b^{b+h} f \,.$$

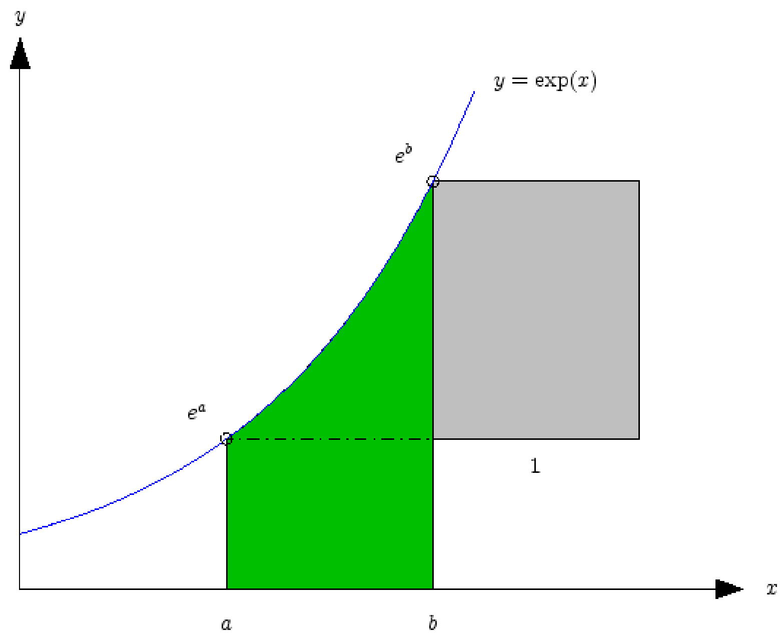
د منځ ارزښت جملې پسې یا په تعقیب انتیګرال مساوي دی په $(b+h-b)\,f(c)$ د $c \in (b, b+h)$ سره.
پوله ارزښت برابر دی په $f(b)$. دا د ښي اړخ د مشتق سره سر خوري یا یو غړیز دی
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د اکسپننشل تابع مشتق بېرته اکسپوننشل تابع دی او له دې امله دی

$$\int_a^b e^x \, dx = e^b - e^a \,.$$

د د a او b ترمنځ ګراف لاندې سطحه برابره د ولاړګوډیزر(مستطیل) د سطحې سره د سور 1 او د تابع ارزښت دواټن د اوږدوالي په حیث.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لوګاریتم تابع $F(x) = \ln(x)$ مشتق $F'(x) = 1/x\,,\; x \in \mathbb{R}^+$ دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x\,dx = \ln(b) - \ln(a)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}^+\,.$$

د $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ یو بنسټيز تابع $F(x) = \arctan x$ دی . د دې په تعقیب دی

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}\,.$$

د مشتقوني څخه لاس ته راځي، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = \tan x$ يو بنستيز تابع دی

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

په تعقيب دی:

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د M کتلې يو ستوری يو د کښولو ورشو توليدوي، چې د هغې له خوا په يوه کتله m يو زور $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$ واردوي . دلته γ د ګراويتيشن يا راکښنې قوه ده او x د دروندتکو ترمنځ واټن دی.

د $1/x^2$ لپاره يو لومړنی يا بتستيز تابع $-1/x$ دی. د دې لپاره چې يو تن له واټن a و واټن b ته يوړولی شو ، بايد کار

$$\int_a^b F(x)\,dx = \gamma mM \int_a^b \frac{1}{x^2}\,dx = -\left[\gamma mM/x\right]_a^b = \gamma mM(1/a - 1/b)$$

سرته ورسيږي.

د a لپاره د ستوري د وړانګې سرره برابر او $b \to \infty$ کېدی شي د برابر اينوونې له لارې د کينيتيکي انرژي سره چې داسې په نامه د تېښتې چټکتيا v تاکي دا په دې معنا چې چټکتيا ، چې اړين ده، چې د يوه ستوري راکښنقوه پرېښودی شي يا راکښنقوې څخه ووځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{m}{2}v^2 = \gamma\frac{mM}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\gamma\frac{2M}{a}}\,.$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره $v = 11.2\,\text{km/s}$. دی .
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د بنسټیزو توابعو لومړني توابع Stammfunktionen der Grundfunktionen

لاندې جدول بنسټیزو توابعو $f(x)$ ته لومړني توابع $F(x)$ ښايي

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
$x^s\,,\ s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln\|x\|$
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

ټوټه- یا پارشل انتیګرالونه Partielle Integration

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق د ضرب قانون $(fg)' = f'g + fg'$ څخه په ورته توګه فرمول بندي له لارې د ناټاکلي انتيګرال لپاره راکوي:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

په اړونده توګه د ناټاکلو انتيګرالونو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

لپاره باور لري. د لته دې په پام کې ونيول شي، چې د ژئ ترم $[fg]_a^b$ ورکيږي، که د دواړو توابعو څخه يو يې د انتروال پای ټکو کې صفر وي. په همدې توګه د پريوديکي تابع لپاره د پريود اوږدوالي $(b-a)$ کې هم له منځه ځي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

له $\int (1+x)^\alpha\,dx = \dfrac{1}{\alpha+1}(1+x)^{\alpha+1} + c$ څخه د $\alpha \neq -1$ لپاره لاس ته راځي

$$\int \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1+x}}\,dx = x\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int 1\cdot\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + c.$$

په ورته توګه شميرل کيږي

$$\int_0^1 \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1-x}}\,dx = \left[-x\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx$$

$$= 0 - \left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو لوګاريتمي ضريب د يو ځل ټوټه انتيګرالونې له لارې له منځه تلی شي.
د بيلګې په توګه دی

$$\int x^n(\ln|x|)\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln|x|) - \int \frac{1}{n+1}x^{n+1}\,\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln|x|) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + c.$$

په دې ډول کيدی شي په خوښه پولينومونه

$$\sum_{j,k} a_{j,k}x^j(\ln|x|)^k$$

په x او $\ln|x|$ کې انتيګرال شي يا انتيګرال ونيول شي.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ټوټه اتيګرالونې له لارې کېدی شي د پولينوم درجه کمه شي. د بېلګې په توګه دی

$$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x\,dx$$
$$= x^n e^x - n x^{n-1} e^x + \int n(n-1)x^{n-2} e^x\,dx$$
$$= \cdots$$
$$= e^x \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k + c.$$

په دې توګه نېدی شي د , $n \in \mathbb{N}$ $x^n\, e^{\beta x}$, بڼې ترمونوکمبينېشن په خوښه انتيګرال شي يا يې انتيګرال ونيول شي.   ليکونکي: هيوليګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x^n \cos x$ او $x^n \sin x$ ضربونه کېدی شي د ډېرواره ټوټه انتيګرالونې له لارې انتيګرال شي:

$$\int x^n \begin{Bmatrix} \cos x \\ \sin x \end{Bmatrix} dx = x^n \begin{Bmatrix} \sin x \\ -\cos x \end{Bmatrix} - \int nx^{n-1} \begin{Bmatrix} \sin x \\ -\cos x \end{Bmatrix} dx$$
$$= \ldots .$$

د تکرار ټوټه انتيګرالوني له لارې بالاخره ضريب x^k له منځه ځي. په دې توګه کېدی شي د په خوښه پولينوم توابعو لومړنی تابع په x, $\sin x$ او $\cos x$ کې وشمېرل شي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

له $\cosh'(x) = \sinh(x)$, $\sinh'(x) = \cosh(x)$ څخه لاس ته راځي

$$\int e^x \sinh(x)\,dx = e^x \cosh(x) - \int e^x \cosh(x)\,dx$$
$$= e^x \cosh(x) - e^x \sinh(x) + \int e^x \sinh(x)\,dx$$

او له دې سره لکه چې برېښي
$$e^x \cosh(x) = e^x \sinh(x),$$

يو په ځرګنده توګه مخامخوالی يا تضاد دی.
ناټيکاوی په اخرنظ پايونه کې پروت دی – د انتيګرالنيوني ثابته بايد په پام کې ونيول شي:
$$e^x \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2} + c.$$

د $c = 1$ ټاکنه مو ټيکې نتيجې ته لاربشودوي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ټوټه انتيګرالونې سره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx,\ (a \neq 0).$$

د ویم ځل انتیګرالونه مو بېرته برابر انتیګرال ته ته بیایي، او له دې سره لاس ته راځي:

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{ae^{ax}\sin(bx) - be^{ax}\cos(bx)}{a^2+b^2} + c$$

بدیلي سړی

کړی شي د اویلر-مویورې فرمول هم د پورته ډول انتیګرال شمېرنو ته استعمال کړي. د

$$\cos(t) = \mathrm{Re}\left(\exp(\mathrm{i}t)\right)$$

بېلګې په توګه له لاس ته راځي

$$\int_0^{\pi} e^t\cos(t)\,dt\,\mathrm{Re}\left(\int_0^{\pi}\exp(t+\mathrm{i}t)\,dt\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{\exp(t+\mathrm{i}t)}{1+\mathrm{i}}\right]_0^{\pi}\right)$$
$$= \mathrm{Re}\left(\frac{-e^{\pi}-1}{1+\mathrm{i}}\right) = -(e^{\pi}+1)/2\,.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

له

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = -\int_{-\pi}^{\pi} n\cos(nx)(-\frac{1}{m}\cos(mx))\,dx$$
$$= \frac{n^2}{m^2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx$$

د $m \neq n$ لپاره لرو

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0\,.$$

په پام کې دې ونیول شي، چې د تابع پریودیځیتي یا تل بېرته رتګرځېدنه په ټوټه انتیګرالونه کې د ژی شرایط له منځه ځي. د $m = n$ لپاره د لومړي مساوات او

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}1\,dx=2\pi\,.$$

په ورته توګه سړی د تابع $\cos(mx)$ اورتوګونالیتي ښایي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

دلتا - تابع Delta-Funktion

د دیراکDiracsche دلتا-تابع δ د

$$\int_{\mathbb{R}}\delta f=f(0)$$

له لارې تعریف دی، د کوم سره چې یو په خوښه ناپرېکیدونکی تابع دی، چې د یوه انتروال (a,b) دباندې وکیږي. د ټوټه انتیګرالوني په مرسته یا په یوه پوله پروسه کېدی شي δ د Heavisideschen ټوپتابع د مشتق ټولیزوالي

$$H(x)=\begin{cases}1, & \text{für } x>0\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

په حیث تشریح کیدی شي.

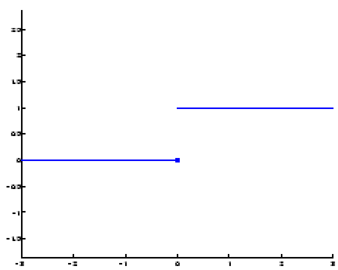
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

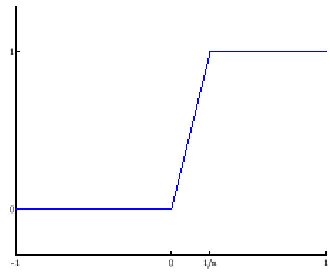
که $0\in(a,b)$ وي، نو د ټوټه انتیګرال سره لاس ته راځي

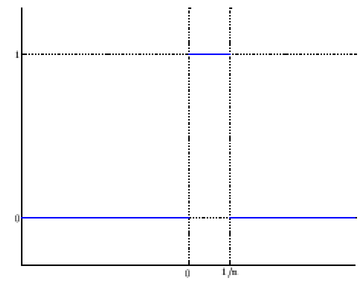
$$\begin{aligned}\int_{-a}^{b}H'f&=[Hf]_a^b-\int_a^b Hf'\\&=-\int_0^b f'=-[f]_0^b\\&=f(0)\end{aligned}$$

او له دې سره $\int H'f=\int\delta f$.

(c) ketabton.com: The Digital Library







Heaviside-Funktion
H

نږدېوالی
H_n
Näherung
der Heaviside-Funktion

نږدېوالی
$\delta_n = H_n'$
Näherung
der Delta-Funktion

په د پوله پروسې سره د جوړ شوې د Heavyside-Funktion اپروکسيميشن سره سرې بدیل لاس ته راوړي :

$$\int_a^b H_n' f = n \int_0^{1/n} f = f(t_n) \to f(0) .$$

له دې سره د اخرني مساوات لپاره د منځ ا رزښت جمله کارول شوې.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د متحولو – يا اووبنتونو بدلون Variablensubstitution

د ځنځيري قاونو

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x))g'(x), \quad f = F',$$

ځخه د بدلون $y = g(x)$ لپاره لومړنيو تابع جوړولو له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(y)+c = \int f(y)\,dy.$$

په ورته توګه د ټاکلي انتيګرال لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

.

د دفرنشل کونو په ورسته کېدی شي دا فرمول په لاندې بڼه

$$\int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

وليکل شي.

يو ساده ځانګړی حالت يو کرښيز متحول بدلون دی

$$x \mapsto y = px + q\,.$$

په دې حالت کې دی

$$\int f(px+q)\,dx = \frac{1}{q}F(y)+c$$

همداسې

$$\int_a^b f(px+q)\,dx = \frac{1}{p}\,[F]_{pa+q}^{pb+q}\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د انتيګرال

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin\varepsilon x}{x}dx$$

لپاره بدلون $u = \varepsilon x$, $dx = \frac{1}{\varepsilon}du$ او د انتيګرالونې پولو ترانسفورميشن $x = \pi/\varepsilon \leftrightarrow u = \pi$ راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

په ټوليزه توګه د يو بدلون $u = rx$ سره باور لري

$$\frac{dx}{x} \to \frac{du}{u}$$

او له دې سره

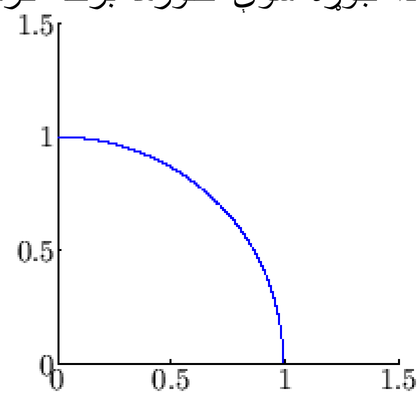
$$\int_a^b f(rx) \frac{dx}{x} = \int_{ra}^{rb} f(u) \frac{du}{u}.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

تابع

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \le x \le 1,$$

دا جوړه شوې څلورمه برخه ګردۍ يا څلورمه برخه داېره ښايي



له دې سره د انتيګرال لپاره باور لري

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4}.$$

که بدلن $x = \sin u,\ dx = \cos u\, du,\ x = 0 \to u = 0$ وکارول شي او $x = 1 \to u = \frac{\pi}{2}$ ، نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\,,$$

لکه څنګه چې انتظار کېده. د اخرني مساوات لپاره دا لاندې

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 u + \cos^2 u\, du = \frac{\pi}{2}$$

وکارول شو.

په عجيبه ډول بدلون $x = \cos u,$, $dx = -\sin u\, du$

$x = 0 \rightarrow u = -\pi/2$

او $x = 1 \rightarrow u = 2\pi$ په برېښنده توګه يوه ناټيکه

نتيجه راکوي:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} -\sin^2 u\, du = -\frac{5\pi}{4}.$$

څه ناټيک وو؟ په کلکه نيولې توګه باور لري

$$\sqrt{1-\cos^2 u} = |\sin u|$$

او له دې سره

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} |\sin u|(-\sin u)du = \frac{\pi}{4}.$$

د لاندې انتيګرال لپاره

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2-1}}$$

بدلون $y = (x-3)/2$, $dx = 2dy$ راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ورپسې بدلون f $y = \cosh t$, $dy = \sinh t \, dt$ سره د

له املە لاس تە راځي $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} &= \int \frac{\sinh t \, dt}{\sinh t} \\
&= \int dt = t + c \\
&= \operatorname{arcosh} y + c \\
&= \operatorname{arcosh}((x-3)/2) + c \\
&= \ln\left(\frac{x-3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 5}\right) + c
\end{aligned}$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس تهراځي

$$\begin{aligned}
\int_5^7 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} &= \ln(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}) - \ln 1 \\
&= \ln(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

که په انتګرالېدونکي کې دننه مشتق پېژندل کيږي، لکه د بېلې په توګه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} \, dx ,$$

لپاره، نو د بدلون قانون په ځانګړې توګه ساده دی. په دې بېلګه کې

$$y = g(x) = \ln x , \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

ځای په ځای کوو او لاس ته راوړو

$$\int g(x)^2 \, g'(x) \, dx = \int y^2 \, dy = \frac{1}{3} y^3 + c .$$

د په خټ یا معکوس بدلون سره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

په تيوپيکي توګه سړی هڅيږي چې د بدلون له لارې انتيګرالېدونکی ساده کړي. د بېلګې په توګه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y}-1}\,dy$$

لپاره نږدې دی چې

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

کيږدي. دا د

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله دا ترانسفورمي شوی ناټاکلی انتيګرال راکوي

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\frac{dy}{dx}\,dx = \int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)dx$$

$$\int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c\,.$$

د $x = e^y$ دبېرته بدلون له لارې بالاخره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2}\left|\frac{e^y-1}{e^y+1}\right| + c\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

لومړی (بنسټيزه -) تابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

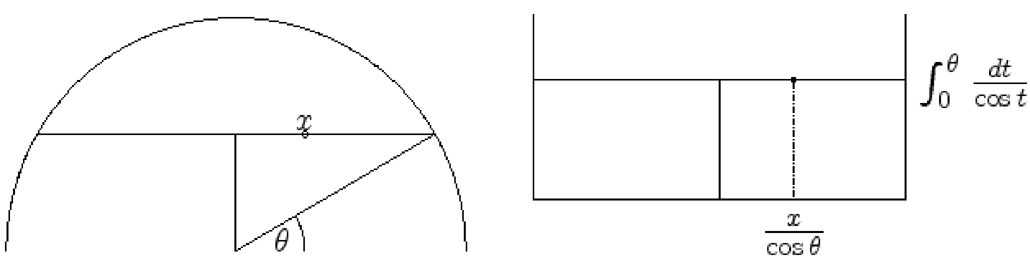
کیدی شي د بدلون سره

$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1+\sin x}{\cos x}, \qquad du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx,$$

وشمېرل شي:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int (\cos x)^{-1} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right)^{-1} du \\ &= \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c \\ &= \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c. \end{aligned}$$

یو کارونه يې د Mercator-Projektion دی. له دې سره د ځمکې بورته سطحه کونجرېښتونې په سطحه برېوځي.



د سور ګردی (طول البلد) له دې سره د $1/\cos\theta$ په نسبت سره غزیږي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

ساده راشنل انتیګرالیدونکي د ساده قطب سره
Elementare rationale Integranden mit einfachen Polen

د درې بنستیتیوپه راشنل توابعو لومړنی توابع دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \qquad \frac{1}{a}\ln|x+b/a|+c$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \qquad \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+c$$

$$\int \frac{(x-a)dx}{(x-a)^2+b^2} = \qquad \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2)+c$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

فرمولونه کېدی شي ترلي د مشتق له لارې پسې وشمېرل شي. بديل يې د انتيګرال ساده بڼه بدلونونه شوني دي.

له $\int dy/y = \ln|y|+c$ لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x+b/a} = \frac{1}{a}\ln|x+b/a|+c.$$

د بڼه بدلون پسې

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{((x-a)/b)^2+1}$$

بدلون $dx = b\,dy$, $y=(x-a)/b$ راکوي

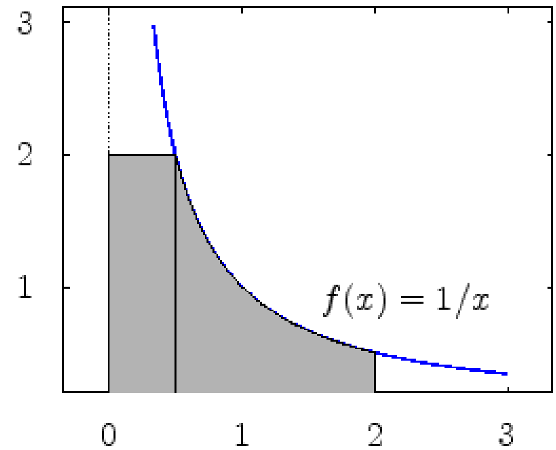
$$\frac{1}{b}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{b}\arctan y + c = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+c.$$

د بدلون , $y=(x-a)^2+b^2$ سره لاس ته راځي

$$\int \frac{(x-a)\,dx}{(x-a)^2+b^2} = \qquad \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ln|y|+c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

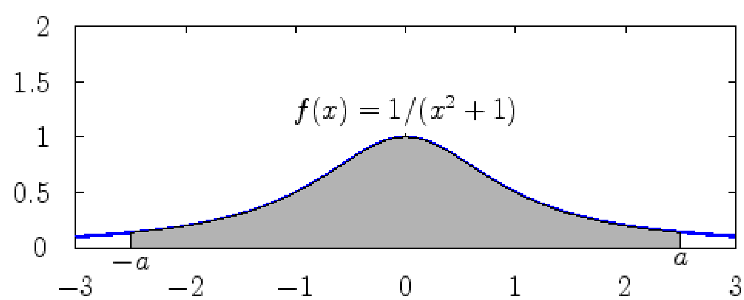
$$= \qquad \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2)+c.$$



د خړې سطحې مساحت د

$$2\frac{1}{2}+\int_{1/2}^{2}\frac{1}{x}dx = 1+\ln 2-\ln\frac{1}{2} = 1+\ln 4$$

له لارې شمیرل کیږي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف



د $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ د ګراف لاندې سطحه داسې شمېرل کیږي

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty}\arctan a-\arctan(-a) \longrightarrow \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$r(x) = \frac{3x+6}{2x^2-4x+10}$$

لومړی تابع ټاکلو لپاره، لومړی د مخرج مربعتکمیلونه جوړیږي:

$$2(x^2-2x+5) = 2((x-1)^2+2^2)\,.$$

په اړونده توګه صورت هم بڼه بدلیږي:

$$3(x+2) = 3((x-1)+3)\,.$$

له دې سره کېدی شي د ستاندارد افادې په توګه ټوټه یا تجزیه شي:

$$r(x) = \frac{3}{2}\,\frac{x-1}{(x-1)^2+2^2} + \frac{9}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2+2^2}\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int r(x)\,dx = \frac{3}{4}\,\ln\left((x-1)^2+4\right) + \frac{3}{4}\,\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c\,.$$

د ټاکلی انتیګرال $\int_1^3 r(x)\,dx$ لپاره سرې د پولو د په ځای اینسووني له لارې لومړنی تابع لاس ته راوړي

$$\frac{3}{4}\left(\ln 8 - \ln 4 + \arctan(1) - \arctan(0)\right) = \frac{3}{4}\,\ln 2 - \frac{3}{16}\,\pi\,.$$

لیکونکي: هیولیګ،

ساده راشنل انتیګرالونه د زیاتواره قطب سره

Elementare rationale Integranden mit mehrfachen Polen

د $n \in \mathbb{N}$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int (x-a)^{-n-1}dx = -\frac{1}{n}(x-a)^{-n} + c\,.$$

د ډېرواره کمپلکس کنجوګيري قطبځايونو کي د اړونده مربع
$q(x) = (x-a)^2 + b^2$
ضريبونو لپاره باور لري

$$\int \frac{c(x-a)+d}{q(x)^{n+1}}\,dx = \frac{d(x-a)}{2b^2n\,q(x)^n} - \frac{c}{2n\,q(x)^n} + \frac{d(2n-1)}{2b^2n}\int \frac{dx}{q(x)^n}\,.$$

د ګراد يا درجي ردکشن د لومړني تابع رکورزيو شمېرنه شوونې کوي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

لومړنی فرمول د $y = x - a$ او $dx = dy$ د د بدلون له لارې لاس ته راځي:

$$\int (x-a)^{-n-1}dx = \int y^{-n-1}dy = -\frac{1}{n}y^{-n} + c\,.$$

د دويم فرمول د ښووني لپاره لومړی يو ساده د رکوزيون فرمول منځ ته راځي.

د ټوټه انتيګرالونې سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{(1+y^2)^k} &= \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k\int \frac{y^2}{(1+y^2)^{k+1}}\,dy \\ &= \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k\left(\int \frac{dy}{(1+y^2)^k} - \int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}}\right)\,.\end{aligned}$$

له دې کټمټوالی منځ ته راځي

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}} = \frac{y}{2k(1+y^2)^k} + \frac{2k-1}{2k}\int \frac{1}{(1+y^2)^k}\,dy\,.$$

له دې سره اوس د بدلون $y = \frac{x-a}{b}$ سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}} = \frac{1}{b^{2n+2}} \int \frac{dx}{((\frac{x-a}{b})^2+1)^{n+1}}$$
$$= \frac{1}{b^{2n+1}} \int \frac{dy}{(1+y^2)^{n+1}}$$
$$= \frac{1}{b^{2n+1}} \left(\frac{y}{2n(1+y^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{dy}{(1+y^2)^n} \right)$$
$$= \frac{x-a}{2b^2n((x-a)^2+b^2)^n} + \frac{2n-1}{2b^2n} \int \frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^n}.$$

ترم

$$\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\, dx$$

کیدی شي د بدلون $y = (x-a)^2 + b^2$ له لارې وشمیرل شي، ځکه چې په صورت کې د y مشتق ځای لري:

$$\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\, dx = \frac{c}{2} \int \frac{dy}{y^{n+1}}$$
$$= \frac{c}{2(-n)y^n}$$
$$= -\frac{c}{2n((x-a)^2+b^2)^n}.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د انتیګرال

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+9)^2}\, dx$$

لپاره په تولیز فرمول کې د اینسوونې وروسته د دپرواره قطبونو سره د $a = 0, b = 3, c = 2, d = 1$ او $n = 1$ سره راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{-2}{2(x^2+9)} + \frac{x}{18(x^2+9)} + \frac{1}{18}\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$$

او د بنه بدلون پسې

$$\frac{x-18}{18(x^2+9)} + \frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}\arctan(\frac{x}{3}) + c\right)$$
$$= \frac{x-18}{18(x^2+9)} + \frac{1}{54}\arctan(\frac{x}{3}) + c'.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د راشنلتوابعو انيګرالونه **Integration rationaler Funktionen**

د حقيقي ټوټه کسر ټوټه ونې له لارې کېدی شي يو حقيقي راشنل تابع د لاندې درې ساده بنسټيزوپ جمعي

$$ax^n\,, \quad \frac{c}{(ax+b)^n}\,, \quad \frac{c(x-a)+d}{((x-a)^2+b^2)^n}$$

د $n \in \mathbb{N}_0\,,\ a,b,c,d \in \mathbb{R}$ سره انځور شي. د لومړنيو توابعو په مرسته کېدی شي
د دې بنسټيزتوابعو لپاره د په خوښه راشنلتوابعو لپاره لومړنۍ توابع وټاکل شي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د

$$\int r(x)dx, \quad r(x) = \frac{x^5+10x^3+5^2-x+25}{x^4+8x^2-9}\,,$$

د شمېرلو لپاره لومړی يو ټوټه کسر ټوټه ونه سرته رسوو.
د پولينوم وېش پسې ،

$$r(x) = x + \frac{2x^3+5x^2+8x+25}{x^4+8x^2-9}\,,$$

اود مخرج ضريبونو جوړولو پسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^4 + 8x^2 - 9 = (x+1)(x-1)(x^2+9)\,,$$

لاس ته راځي

$$r(x) - x = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{cx}{x^2+9} + \frac{d}{x^2+9}\,.$$

که د اصلي مجراج سره ضب شي، نو لاس ته راځي

$$\begin{aligned} & 2x^3 + 5x^2 + 8x + 25 \\ = \quad & a(x-1)(x^2+9) + b(x+1)(x^2+9) + (cx+d)(x^2-1) \\ & x^3(a+b+c) + x^2(-a+b+d) + x(9a+9b-c) + 1(-9a+9b-d) \end{aligned}$$

او د ضریبونو د پرتلې $a = -1$, $b = 2$, $c = 1$ او $d = 2$ له لارې.
یوګوني ترمونه کېدی اوس ساده انتیګرال شي:

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^5 + 10x^3 + 5^2 - x + 25}{x^4 + 8x^2 - 9} \\ = \quad & \int x\,dx + \int \frac{-dx}{x+1} + \int \frac{2dx}{x+1} + \int \frac{x\,dx}{x^2+9} + \int \frac{2dx}{x^2+9} \\ & \frac{1}{2}x^2 - \ln|x+1| + 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+9) + \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + c. \end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ساین او کوساین د ضرب انتیګرالونه

د $a^2 \neq b^2$ لپاره د زیاتون-یا جمعې قضیې څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx = -\frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c.$$

په ځانګړې توګه د ټولګنیزو یا تامعددې a,b لپاره انتیګارل په پریودیکي انتروال $[-\pi,\pi]$ باندې ورکیږي. د ټوټه انتیګرالونې په مرسته لاس ته راځي

$$\int \sin^n(ax)dx - \frac{1}{na}\sin^{n-1}(ax)\cos(ax) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(ax)dx$$

$$\int \cos^n(ax)dx\ \frac{1}{na}\sin(ax)\cos^{n-1}(ax) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(ax)dx.$$

داسې کیدی شي اکسپوننت سوکځسیو یا تل کم شي. د $n=2$ لپاره په ځانګړې توګه لاس ته راځي

$$\int \sin^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + c$$

$$\int \cos^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + c.$$

په ځانګړې توګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx = \pi$$

د $n \in \mathbb{N}$ لپاره .

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

که د لومړۍ کتمتوالي د ښي اړخ مشتق ونيول شي، نو سړی لاس ته راوړي

$$\frac{1}{2}\cos\left((a-b)\,x\right) - \frac{1}{2}\cos\left((a+b)\,x\right).$$

د زياتون – يا جمعي قضيه راکوي

$$\frac{1}{2}\left(\cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx) - \cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx)\right) =$$

$$= \sin(ax)\sin(bx),$$

کوم چې د کيڼ لور د انتيګرال سره سر خوري.

د $\cos^2(ax)$ او $\sin^2(ax)$ لومړنی تابع کېدی شي د ټوټه انتيګرال سره وشمېرل شي. د بېلګې په توګه دی

$$\int \sin(ax)\sin(ax)\,dx$$

$$= -\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(ax) - \int\left(-\frac{1}{a}\cos(ax)\right)\left(a\cos(ax)\right)\,dx$$

$$= -\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(ax) + \int\left(1-\sin^2(ax)\right)\,dx.$$

د $\int \sin^2(ax)\,dx$ پسې حل کونه غوښتونی لومړنی تابع راکوي.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د کمپلکس تريګونومتيکي توابعو انتيګرالونه

Integration komplexer trigonometrischer Polynome

له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^{\mathrm{i}kx}\,dx = \frac{1}{\mathrm{i}k}e^{\mathrm{i}kx} + c, \quad 0 \neq k \in \mathbb{Z},$$

ځخه د کمپلکس تريګونومتريکي پولينومونو لپاره لاس ته راځي

$$p(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{\mathrm{i}kx},$$

داسې چې
dass

$$\int p(x)\,dx = c + c_0 x + \sum_{0 \neq |k| \leq n} \frac{c_k}{\mathrm{i}k} e^{\mathrm{i}kx}$$

همداسې
sowie

$$\int_{\pi}^{\pi} p = 2\pi c_0$$

باور لري.

د اوېلر-مويورې فرمول په مرسته کېدی شي په دې توګه په خوښه پولينومونه په $\sin(kx)$ او $\cos(kx)$ کې انتيګرال شي.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x\,dx$$

شمdرلو ته د اوېلر-مويورې فرمول په مرسته انتيګرال په لاندې توګه ليکل کيږي

$$\frac{1}{16}\left(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}\right)^4 = \frac{6}{16} + \sum_{k \neq 0} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $2\pi\frac{6}{16}=\frac{3}{4}\pi$ د انتيګرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي.

بديلي کيدی شي توټه انتيګرال وکارول شي:

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= \int \sin x \sin^3 x\, dx \\ &= -\cos x \sin^3 x + 3\int \cos^2 x \sin^2 x\, dx \\ &= -\cos x \sin^3 x + 3\int \sin^2 x\, dx - 3\int \sin^4 x\, dx.\end{aligned}$$

که په $\sin^4 x$ انتيګرال بنی لور ته راوړل شي، نو د درجې کموالی راکوي

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x\, dx = -\frac{1}{4}\left[\cos x \sin^3 x\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx\,.$$

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx = \pi$$

په مرسته سرې $\frac{3}{4}\pi$ هم د انتيګرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي

ليکونکي: هيوليک، پفايل

تريګونومتريکي بدلونونه Trigonometrische Substitutionen

د لاندې بدلونونو په مرسته کېدی شي د ساده الجبري انتيګراليدونکو يوه لړۍ اکسپليځيت يا په ښه هڅرګنده توګه وشمېرل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$x = a\sin t: \qquad dx = a\cos t\,dt \qquad \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$$
$$x = a\tan t: \qquad dx = a/\cos^2 t\,dt \qquad \sqrt{a^2+x^2} = a/\cos t$$
$$x = a/\cos t: \qquad dx = a\sin t/\cos^2 t\,dt \qquad \sqrt{x^2-a^2} = a\tan t$$

په بل حالت کې باید د ریښې د پروت محور متحولې لومړی په مربعیز تکمیلېدونکې بڼه رااړل شي.
لیکونکي: هیولیګ، پفایل

د انتیګرال

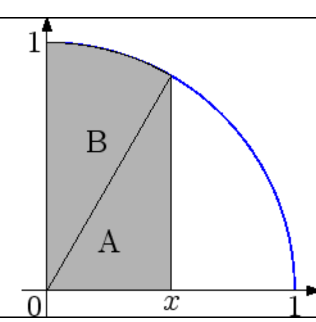
$$\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

لپاره بدلون $x = \sin t,\ dx = \cos t\,dt$ او د پولو اعیارول $x = 0 \rightarrow t = 0$
او $x = 1/2 \rightarrow t = \pi/6$ راکوي

$$\int_0^{\pi/6} \cos^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}(\sin t\cos t + t)\right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

ناټاکلی انتیګرال دی

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c.$$

	انتیګرال کیدی شي د یوه ساده هندسي یا ځمکګچیز اند(فکر) سره هم وټاکل شي لکه د څیرې څخه چې لیدل کیږي، د $\sqrt{1-x^2}$ د ګراف لاندې سطحه په دوه برخسطحو ودانه یا جوړه ده.

د درېګوټي سطحي مساحت $A = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$ دی او د ګردی برخط یا قطاع مساحت د $t = \arcsin x$ کونج سره $B = \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\arcsin x$ ده. د دې سطحو د

(c) ketabton.com: The Digital Library

مساحت جمعه کیدل غوښتونې سطحه راکوي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د انتیګرال

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$$dx = 1/\cos^2 t\,dt$$

لپاره د بدلون $x = \tan t,$ څخه لاس ته راځي

$$\int \frac{dt/\cos^2 t}{\tan t/\cos t} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln|\tan\frac{t}{2}| + c,$$

د کوم سره چې اخرنی مساوات د ښی اړخ د مشتق نیولو له لارې ازمایل کېدی شی.
د بېرته بدلون له لارې لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln|\tan(\frac{1}{2}\arctan x)| + c.$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} &= \ln|\tan\frac{\pi}{4}| - \ln|\tan\frac{\pi}{8}| \\ &= \ln 1 - \ln\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right) \\ &= \ln(1+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د انتیګرال

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2-1}}$$

لپاره بدلون $y=(x-3)/2$, $dx = 2dy$ راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}\,.$$

د پسي بدلون $y=\frac{1}{\cos t}$, $dy = \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt, \sqrt{y^2-1} = \tan t$ n سره لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1}{\cos t} + \tan t\right| + c\,,$$

د کوم سره چې اخرنی برابروالی د بنی خوا د مشتق نیونې له لارې ازمايل کيدی شي.
د په څټ يا معکوس بدلون پسې د

$$\sin t = \sqrt{1-(1/y)^2}, t = \arccos y = \arcsin\sqrt{1-(1/y)^2}$$

سره لومړنی تابع دلاس ته راځي

$$\ln\left|y + y\sin\left(\arccos\frac{1}{y}\right)\right| + c = \ln\left|y + y\sqrt{1-\left(\frac{1}{y}\right)^2}\right| + c$$

$$= \ln\left|\frac{x-3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+5}\right| + c\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ساين او کوساين راشنل توابع

Rationale Funktionen von Sinus und Cosinus

د بدلون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = \tan(t/2)$$

سره د يوه په خوښه راشنل تابع r لپاره لاس ته راځي

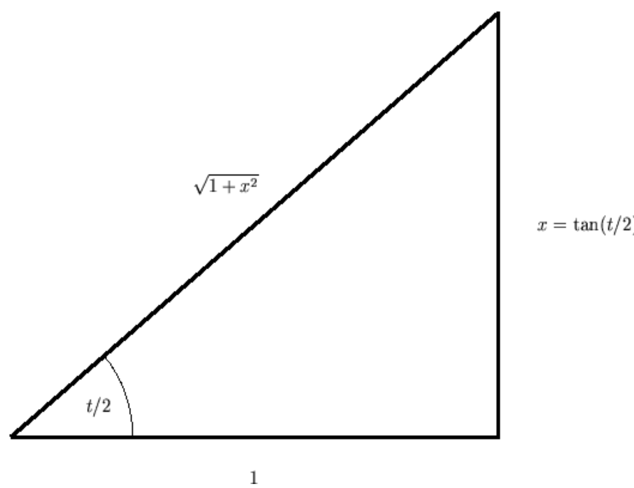
$$\int r(\cos t, \sin t)\, dt = \int r\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\right)\frac{2}{1+x^2}\, dx\,.$$

له دې سره تريګونومتريکي تابع کېدی شي په يوه راشنل انتيګرال واړوي، کوم چې د ټوټه کسر ټوټه ونې سره شمېرل کېدی شي.

ليکونکي: هيوليګ، اپريښ

لکه د څيرې څخه چې ليدل کيږي، باور لري

$$\cos(t/2) = 1/\sqrt{1+x^2}\,, \quad \sin(t/2) = x/\sqrt{1+x^2}$$



له دې لاس ته راځي

$$dx = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2(t/2)}\, dt = \frac{1}{2}\,(1+x^2)\, dt$$

همداسې

$$\cos t = \cos^2(t/2) - \sin^2(t/2) = \frac{1-x^2}{1+x^2}\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin t = 2\cos(t/2)\sin(t/2) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

ليکونکي: هيوليګ، اپريښ

د بدلون $x=\tan(t/2)$ سره لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{1+x^2}{2x}\,\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} = \ln|\tan(t/2)| + c.$$

په اړونده تګه لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{1+x^2}{1-x^2}\,\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$= \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c.$$

د $x=\tan(t/2)$ د بېرته بدلون پسې لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1+\tan(t/2)}{1-\tan(t/2)}\right| + c.$$

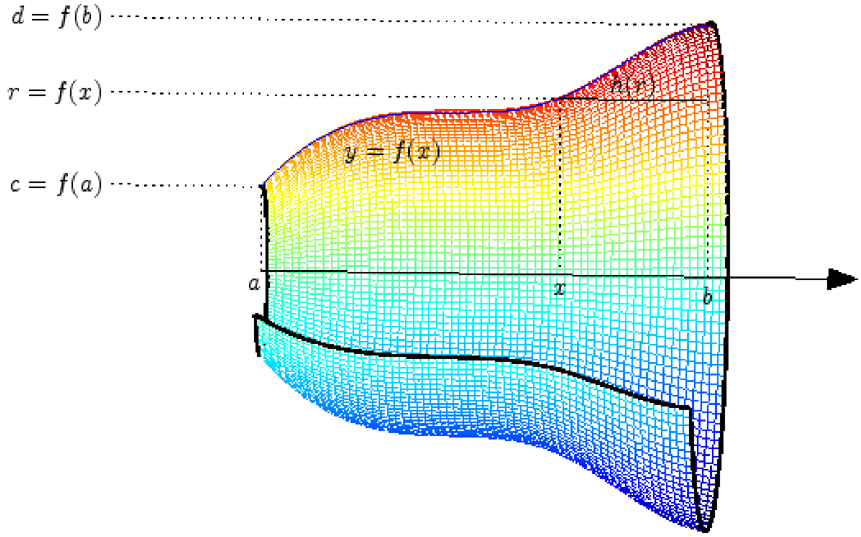
ليکونکي: هيوليګ، اپريښ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څرخیدونو بدنونو ډکی یا حجم Volumen von Rotationskörpern

د V ډکی حجم د x په محور جوړ شوي بدن د تابع ګراف $r = f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$ د څرخون له لارې کېدی شي انتيګرېشن له لارې په ګردی ډوله غوڅي يا تقاطع باندې شمېرل کيدی شي:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \, .$$



بديلي کېدی شي د توتې پوښ باندې انتيګرال شي.

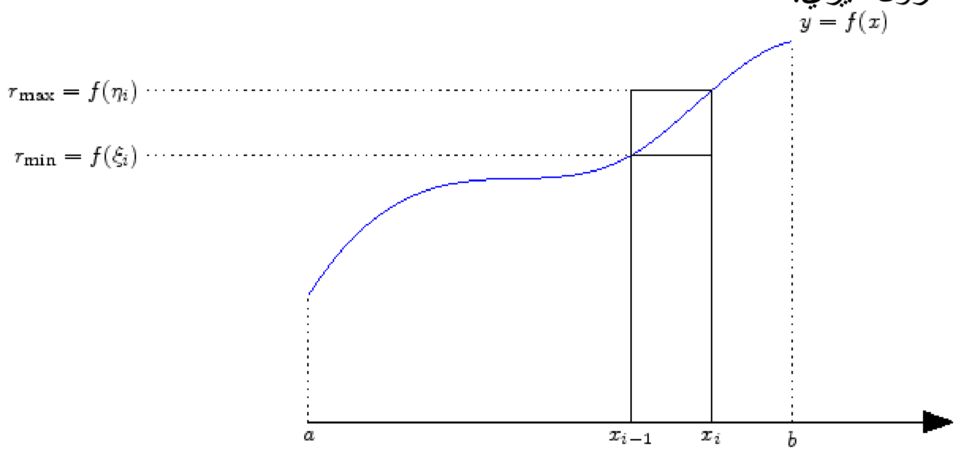
$$V = \pi c^2 (b - a) + 2\pi \int_c^d r \, h(r) \, dr \, ,$$

چيرته چې c همداسې d مينيمال همداسې ماکسيما وړانګه r او $h(r)$ په بدن کې خوندي توتې پوښ تول جګوالی دی د وړانګې r سره. دا واريانت له تولو د همغږيز وړانګې تابع f لپاره موخ وره ده.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړي فرمول د ښووني لپاره په څېره کي کښل شوی اپروکسیمیشن یا نږدېوالی کارول کیږي.



یوه ټوټه کوني Δ یوه انتروال $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 \ldots n,$ لپاره کېدی شي ډکی(حجم) د یوې توټې

له لارې د مینیمال وړانګې $f(\xi_i)$ سره او یوې توټې د ماکسیمال وړانګې $f(\eta_i)$ سره رابند شي. د ټول حجم V لپاره نو بیا باور لري

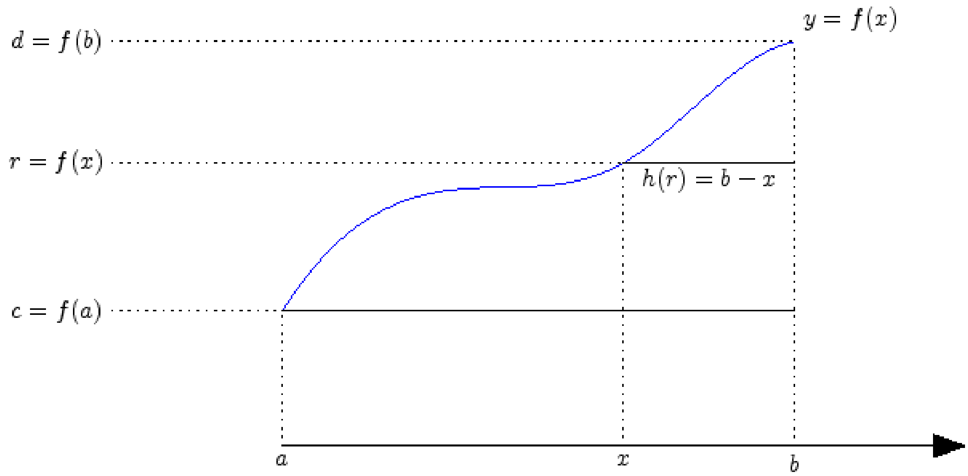
$$\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)^2 \Delta x_i \le V \le \pi \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)^2 \Delta x_i \ ,$$

د $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ سره. دواړه دباندني ترمونه د ریمن-جمعه ده، چې د انتیګرال ارزښت لور ته ځي، یعني باور لري

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

ددویم فرمول د ښووني لپاره لومړی نیول کیږي، چې f همغږیز جګېدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $dr = f'(x)\,dx$, $r = f(x)$ همداسې د $x = f^{-1}(r)$ سره لاس ته راځي

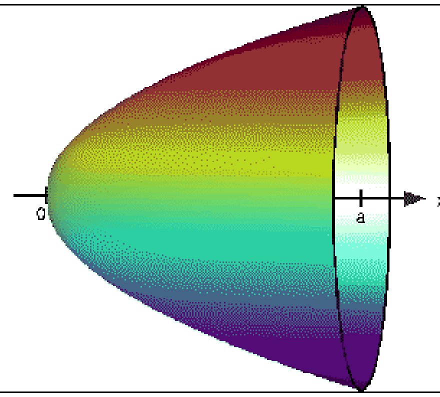
$$
\begin{aligned}
2\pi \int_{c=f(a)}^{d=f(b)} h(r) r\,dr &= \pi \int_a^b \underbrace{(b-x)}_{u}\underbrace{2f(x)f'(x)}_{v'}\,dx \\
&= \pi\,(b-x)f(x)^2\Big|_a^b + \pi \int_a^b f(x)^2\,dx \\
&= \underbrace{-\pi(b-a)c^2}_{\text{innerer Zylinder}} + \pi \int_a^b f(x)^2\,dx\,,
\end{aligned}
$$

څه چې دويم فرمول په ګوته کوي.

د همغږيز ټيټپډونکي توابعو لپاره کېدی شي په ورته توګه مخ ته ولاړ شو. په ټوليز حالت کې دا د همغږيزوالي ورشو د ټوټه کوني له لارې لاس ته راځي

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

	دا څېره شوی پارابولوييد د کږې يا منحني $y=\sqrt{x}$ د څرخون يا څرخېدو له لارې د x په محور څېره شوی .

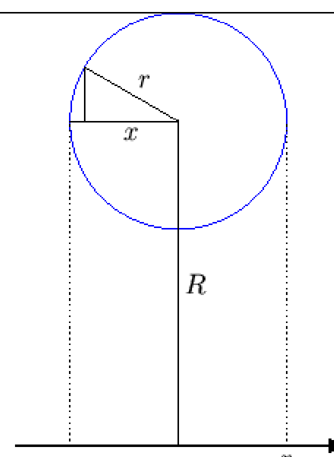
د څرخيدونکي بدن د څرخيدنې قانون سره سم ډکی يا حجم دی

$$\pi\int_0^a\left(\sqrt{x}\right)^2\,dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a=\frac{1}{2}\pi a^2\,.$$

بديلي د توتي پوښ بادي انتيګرلوني له لارې لاس ته راوړي

$$2\pi\int_0^{\sqrt{a}}r(a-r^2)dr=2\pi\left[-\frac{1}{4}(a-r^2)^2\right]_0^{\sqrt{a}}=\frac{1}{2}\pi a^2\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

	يو توروس (د ګردی يا داېرې کړی (Torus ديوې ګردی دڅرخون څخه منځ ته راځي د وړانګې r سره په يوه محور د منځ ټکي څخه په R واټن.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډکی یا حجم د دوه څرخیدونکو بدنونو د کمښت څخه شمیرل کیږي

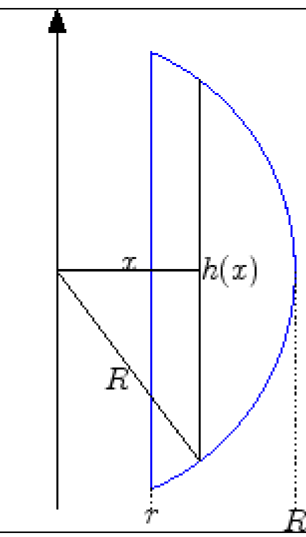
$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx - \pi \int_{-r}^{r} \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= 4\pi \int_{-r}^{r} R\sqrt{r^2 - x^2}\, dx .$$

د بدلون $dx = r \cos\varphi \, d\varphi$, $x = r \sin\varphi$ سره لاس ته راځي

$$V = 4\pi R r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi \, r \cos\varphi \, d\varphi$$

$$= 4\pi R r^2 \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 R r^2 ,$$

	ځکه چې $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{2} .$$ لکه چې ښېره شوی یو له غونډاري د R په وړانګې په پراته محور د وړانګې r سره رابيله شوې توته ده.

د دې لپاره چې ډکي یا حجم شمېرو، د وړانګې $x, r \leq x \leq R$ سره په توته پوښ انتیګرال نیولکیږي . د $R = 5, r = 3$ لپاره د $h(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V = 2\pi \int_r^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 2\pi \left[-\frac{2}{3} \left(R^2 - x^2\right)^{3/2} \right]_r^R$$

$$= \frac{4}{3}\pi(25-9)^{3/2} = \frac{256}{3}\pi\,.$$

د يوې کږې يا منحني اوږدوالی **Länge einer Kurve**

د يوې کږي L اوږدوالی د ناپرېکېدونکي مشتقوړ پارامتريک کولو $t \mapsto p(t)$ سره، $a \le t \le b$ ، دی

$$\int_a^b |p'(t)|\, dt\,.$$

بېّ ځانګړې توګه د يوې کږې لپاره په xy -سطحه د پارامتريک انځورونې $p(t) = (x(t), y(t))$ سره باور لري

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt\,.$$

په ځانګړې توګه ديوه تابع $y = f(x)\,,\ x \in [c,d]$ ګراف لاندې اوږدوالی لري

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx\,.$$

د $p(a)$ او $p(t)$ ترمنځ د کږو ټوټو اوږدوالی ،

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)|\, d\tau\,,$$

کيدی شي د کانونيکي کږې پارمتر په توګه وکارول شي. سړی داسې په نامه د کږې اوږدوالي پسې پارمتري کونه لاس ته راوړي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1\,.$$

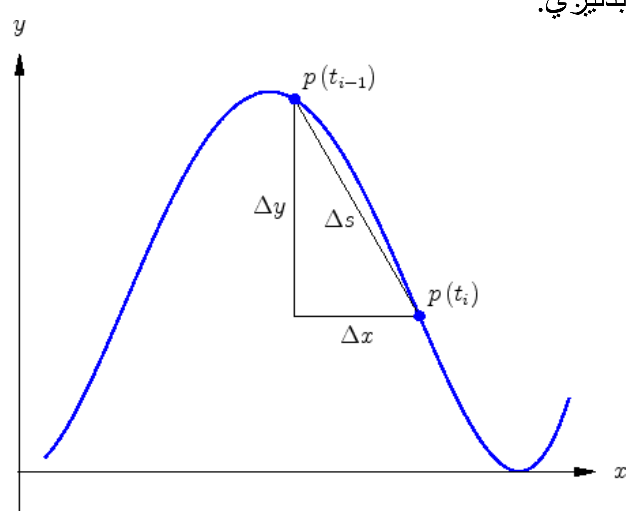
د نورمي تانجنت کرږې په بنسټ د کانونيکي پارمتري کونې لپاره باور لري

$$\int_C f = \int_0^L f(q(s))\,ds$$

د C د L اوږدوالي سره.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د يوې مسطحې کرږې د اږودوالي شميرنې لپاره د پارامتر انټروال بيه ټوټو وېشل کيږي او يو برخه انټروال $[t_{i-1}, t_i]$ لپاره کږه د پای ټکو د ټرونکربنې له لارې ځای بدليږي يا بدليږي.



د انتګرال د منځ ارزښت جملې سره بيا باور لري:

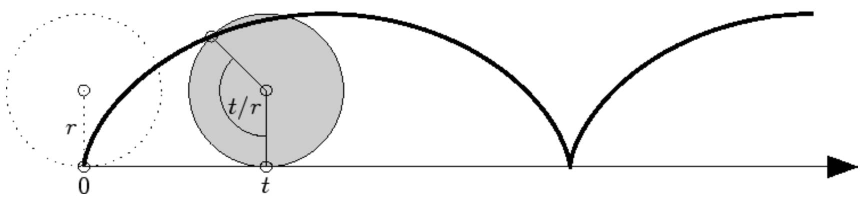
$$\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(p_1'(\xi_i))^2 + (p_2'(\eta_i))^2}\,\Delta t_i\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ سره . دا اخرنی ویېنه یا افرده د ورکړ شوي انتیګرال د یمن-زیاتون یا –جمعې دی.
په ورته تګه د ډېرپراخېدونکي یا ډېربعدیز ې کرږې لپاره د مشتق نورم د انتیګرال په بنه راکوي.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

که د r وړانګي سره یوه ګردئ یا داېره د په محور ګرځوو یا وڅرخوو، نو ژي ټکی یو څیکلویید تشریح کوي.



د سرچینې لپاره د پیل ټکي په حیث

$$\begin{aligned} x(t) &= t + r\cos(3\pi/2 - t/r) = t - r\sin(t/r) \\ y(t) &= r + r\sin(3\pi/2 - t/r) = r - r\cos(t/r) \end{aligned},$$

د $t \in [0, 2\pi r]$ سره ، د یوې ګرږې لیندې یو پارمتري کونه ده.
د لیندې اوږدوالی دی

$$L = \int_0^{2\pi r} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi r} \sqrt{(1-\cos(t/r))^2 + (\sin(t/r))^2}\, dt\,.$$

د بدلون $dt = r\,ds$, $s = t/r$ او کتمتوالي

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\,, \quad 1 - \cos(2\varphi) = 2\,\sin^2\varphi$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره لاس ته راځي

$$L = \quad r\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos(s))}\,ds = r\int_0^{2\pi} 2\sin(s/2)\,ds = 8\,r\,.$$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

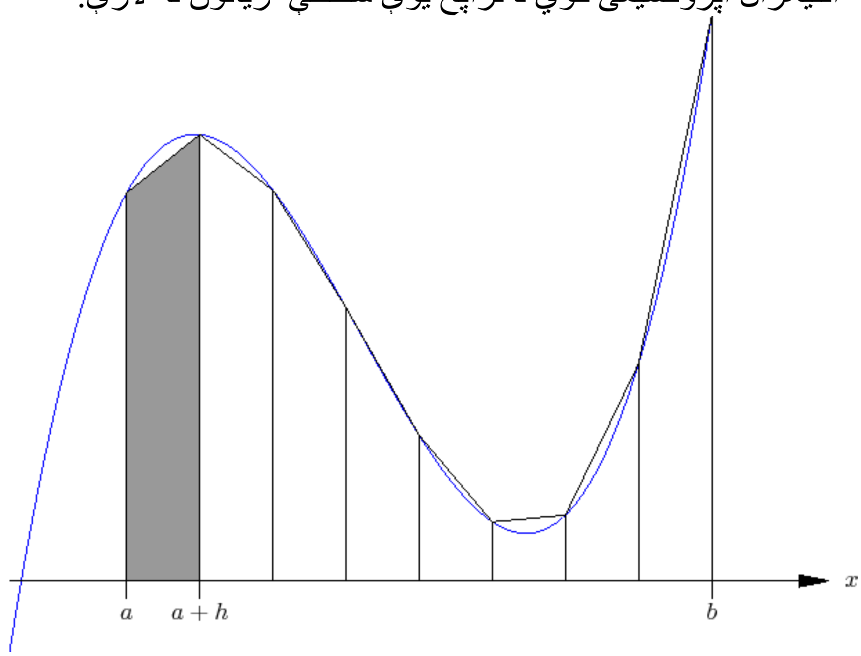
د ذوزنقي قانون **Trapez-Regel**

نږديوالی

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx s_h f =$$

$$= h(f(a)/2 + f(a+h) + \cdots + f(b-h) + f(b)/2)$$

انتيګرال اپروکسيمی کوي د تراپخ يوې سطحې زياتون له لارې.



د يوه دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ تابع د ناتيکاوي پاره باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_h f - \int_a^b f = \frac{b-a}{12} f\,''(r) h^2,$$

د $r \in [a,b]$ لپاره.

په ټيکه توګه ناټيکاوی د خويو يا هوارو توابعو لپاره ګاونديز يا اسيمپټوټيکي وده لري

$$s_h f - \int_a^b f = c_1 (f'(b) - f'(a)) h^2 + c_2 (f'''(b) - f'''(a)) h^4 + \ldots$$

له f او h څخه خپلواکې ثابتې c_j سره. له دې څخه لاس ته راځي، چې د تراپج قانون د $(b-a)$-پريوديکي توابعو لپاره خورا دقيق دی. ناټيکاوی ګړندی د صفر په لور ځي نسبت هر h-توان ته.
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

په يوه ا نتروال ناټيکاوی دی

$$\frac{h}{2}(f(0) + f(h)) - \int_0^h 1 \cdot f = \int_0^h (t - h/2) f'(t)\, dt.$$

بيا ټوټه انټيګرالونه او منځ ا رزښت جملهې استعمال راکوي

$$-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h) f''(t)\, dt = \underbrace{-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h)\, dt}_{h^3/12}\; f''(r).$$

په ټوټه انتروال باندې د جمعې پسې سړی لاس ته راوړي

$$\frac{1}{12} h^3 \sum_{i=1}^{n} f''(r_i).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمعه کيدی شي د

$$n \min f'' \leq \sum f''(r_i) \leq n \max f''$$

له لارې اټکل شي. د ترمنځارزښت جملې پسې بالاخره لاس ته راځي

$$\sum f''(r_i) = nf''(r) = \frac{b-a}{h} f''(r) ,$$

د يوه $r \in [a,b]$ سره.

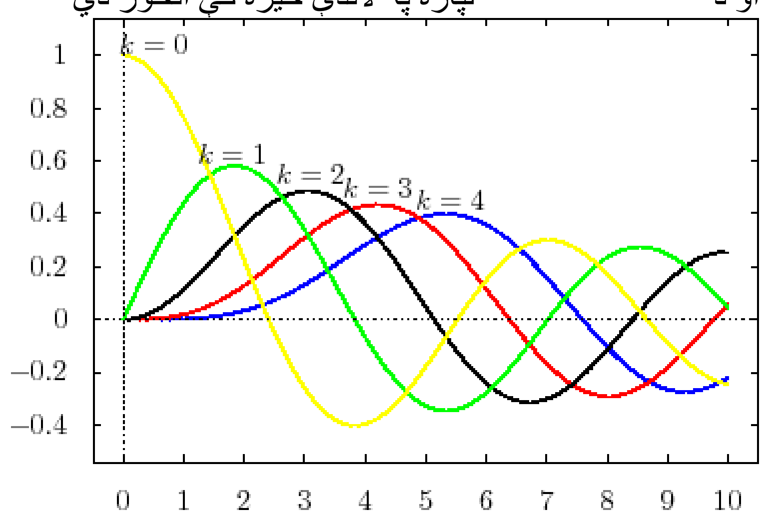
د ګاونډ يا مجانب ناټيکاوي ودې ښوونه اوړده ده. دا د باقي غړي په تل ټوټه انتيګرالونه ولاړه ده او د ژی ترمونو په يوه مناسبه کارونه يا استعمال.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د بسل-تابعBessel-Funktionen $\mathcal{J}_k$ د ټولګنيز k لپاره دا لاندې انتيګرال انځورونه لري

$$\mathcal{J}_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(kz - x\sin(z))}_{f(z)} \, dz$$

او د $k = 0, \ldots, 4$ لپاره په لاندې ځيره کې انځور دي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تراپخ قانو شميرلو سره شړی کاروي، چې

$$\frac{1}{2}\left(f(a)+f(a+2\pi)\right)=f(a)$$

او دا چې f جوړه دی. که ټکي

$$z_i=-\pi+\frac{1+2i}{2}\frac{2\pi}{n},$$

وټاکو ، نو جمعه

$$\sum_{i=0}^{n-1}f(z_i)=2\sum_{i=n/2}^{n-1}f(z_i)$$

دې جوړه شي.

لکه د $\mathcal{J}_1(2)$ لاندې نږدېونه يا اپرکسيميشن د $n=4,8,\ldots 64$ ټکو سره ښايي، پولې ته تلنه فوقالعاده ګړندۍ ده.

n	
4	0.45464871341284084769800993295587
8	0.57655235602472460377030331810649
16	0.57672480775615774487465153090293
32	0.57672480775687338720244824226913
64	0.57672480775687338720244824226913

دا د ذوزنقي قانون جګ ټيکاوی د خوی پريوديکي انتيګرال لپاره يوپيک دی او کېدی شي د ناټيکاوي د يوهه ټيکې انځوروني ، د اويلر-ماکلورن-Euler-Maclaurinschen د جمعي فرمول مدلل کړای شي.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس فرمول Gauß-Formel

د n –مې درجې يا نظم د ګاوس فرمول په نږدې بڼه يا ډول د يوه تابع انتيګرال ټاکي د انتيګرال د انتربوليشن پولينوم له لارې د n -مې درجې د لاګرانژ پولينومونو په صفرځايونو $x_1 < \cdots < x_n$ کې:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(x_i\right)$$

د w_i سره د لاګرانژپولينوم

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

په انتوال $[-1,1]$ باندې.

فرمول د $< 2n$ Grad درجې پولينوم لپاره ټيک دی او د ټولو له مخه د تحليلی توابعو لپاره خورا ټيک دی. ټول وزنونه w_i زياتيز يا مثبت دي، او تکيه ځايونه x_i په انتګريشن انتروال $(-1,1)$ کې پراته دي. دا د ګاوس پارامتر تر 10 -م نظم پورې جدولي شوی او په لاندې جدول کې ورکړ شوی دی

n	x_i	w_i
2	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1
3	0 $\pm\frac{1}{5}\sqrt{15}$	$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$
4	$\pm\frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$ $\pm\frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{36}\sqrt{30}$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{36}\sqrt{30}$
5	0 $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245-14\sqrt{70}}$ $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245+14\sqrt{70}}$	$\frac{128}{225}$ $\frac{161}{450}+\frac{13}{900}\sqrt{70}$ $\frac{161}{450}-\frac{13}{900}\sqrt{70}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس پارامتر x' او w' د خوښې انتګريشنانتروال $[a,b]$ لپاره د کربنيز تراسفورمېشن له لارې لاس ته راځي:

$$x'_k = a + \frac{b-a}{2}(x_k+1), \quad w'_k = \frac{b-a}{2} w_k .$$

لومړی ښايو، چې نږدې ټاکنه د $< n$ Grad درجې د پلوينوم f لپاره ټيک دی. دا د لاندې څخه لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b p_k(x)\, dx \right) f(x_k) = \int_a^b \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p_k(x) f(x_k)}_{=q(x)}\, dx .$$

داچې p_k نسبت و ټکو x_k ته د لاګرانژ پولينومونه دي، q په دې ټکو کې و f ته انترپوليشنپولينوم دی او داسې له f سره همغږيز کيږي.

د ځانګړو ټکو ټاکلو له لارې کېدی شي حتی د $< 2n$ Grad درجې پولينوم f ټيک انتيګرال شي.

دې ته f د پولينومېش په مرسته داسې ليکو

$$f(x) = p(x)s(x) + r(x)$$

د n Grad درجې لژندر-پولينوم p او د. $< n$ Grad دجې پولينومونه r او s.

که $p(x_k) = 0$ په پام کې ونيول شي، نو لکه پورته لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b p_k(x)\, dx \right) \left(p(x_k)s(x_k) + r(x_k) \right)$$

$$= \int_a^b \sum_{k=1}^{n} p_k(x) r(x_k)\, dx = \int_a^b r(x)\, dx .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له بلې خوا باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (p(x)s(x)+r(x))\,dx$$
$$= \int_a^b p(x)s(x)\,dx + \int_a^b r(x)\,dx$$
$$= \int_a^b r(x)\,dx\,,$$

ځکه چې p د $< n$ Grad درجې پولينوم ته اورتوګونال دی.
د وزن زاتيزوالی يا مثبتوالی د کټمټوالي څخه لاس ته راځي

$$w_k = \int p_k = \sum_i w_i\, p_k(x_i) = \sum_i w_i\, p_k(x_i)^2 = \int p_k^2\,.$$

د اخرنې تر مخ يا وړاندې مساوات د $p_k(x_i) = \delta_{k,i}$ له امله باور لري، او اخرنی، داچې p_k^2 $< 2n$ Gradدرجه لري، نو د ګاوس-فرمول له لارې ټيک انتيګرال کيدی شي.
د ګاوس-فرمول د روښانه ولو ته لاندې جدول د مختلفو انتيګراندونو يا انتيګرال کېدونکو نږدې ټاکل يا اپروکسيميشن ښايي.

n	$\int_1^1 e^{-x^2}\,dx$	$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$	$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\,dx$
1	2.000000	2.000000	0.968245
2	1.433062	1.848571	0.891006
3	1.498679	1.851976	0.879356
4	1.493334	1.851936	0.876417
5	1.493663	1.851937	0.875306

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرني انتيګرال کې ورو پولې ته تلنې دليل په $x = 1$ کې زينګولاريتې ده.

د ګاوس-فرمول فقط خوږيو يا هوارو glatt (يو تابع خوی يا هوار تابع يو ماتماتيکي تابع دی، چې ناپرېکېدونکی او ناپای زيات مشتقوړ وي توابعو ته ډېر دقيق دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ناڅرګند يا نا معلوم انتيګرال **Uneigentliches Integral**

د يو په يوه انتروال $[a, b)$ توته ډوله ناپرېکېدونکی تابع f لپاره کېدی شي د

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b-} \int_a^c f$$

له لارې د انتيګرال کليمه په ناپای انتروالونو ($b = \infty$) او نامحدودو انتيګراليدونکو($f(b) = \pm\infty$) وغزول شي.
په ورته توګه زينګولاريتي په لاندې يا په دواړو پولو مطالعه شي. په اخرني حالت کې بايد پوله ارزښت د پرلپسې $c \to a+$, $d \to b-$ د ټاکنو څخه خپلواک وي.

د يوه ناټاکلي انتيګرال د شتون لپاره پوره کېدونکي د f مطلق انتيګرالوړوالی دی، دا په دې معناچې

$$\int_c^d |f(x)| \leq$$ ثابت

د ټول برخه انتروالونو $[c, d] \subset (a, b)$ لپاره.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ناټاکلي انتيګرال د شميرلو لپاره

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $b > 0$ لپاره ټاکي

$$\int_0^b e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^b = -e^{-b} + 1\,.$$

له دې سره سرې لاس ته راوړي

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b} + 1\right) = 1\,.$$

که پوله ارزښت ساده شمېرل کېدونکی وي، نو سرې پسې ترلي ناټاکلې پولې کاروي، داپه دې معنا چې سرې ليکي

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

او دا په راوړل شوې بيلګه کې.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ناټکلو انټيګرالونو

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^r}\,dx\,.$$

لپاره د بدلون $y = \ln(x)$, $dy = dx/x$
سره سرې لاس ته راوړي

$$\int_2^b \frac{1}{x(\ln(x))^r}\,dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{1}{y^r}\,dy = \begin{cases} \dfrac{(\ln(b))^{1-r} - (\ln(2))^{1-r}}{1-r}\,, & r \neq 1 \\ \ln(\ln(b)) - \ln(\ln(2))\,, & r = 1 \end{cases}.$$

په دې پسې د $b \to \infty$ لپاره پوله ارزښت ټيک هلته شتون لي، که $r > 1$ باور ولري. په دې حالت کې دی

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)^r}\,dx = -\frac{(\ln(2))^{1-r}}{1-r}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ناټاکلي انتیګرال

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx\,.$$

لپاره انتیګرالېدونکی په پورته انتیګرال پولي $x = \frac{\pi}{2}$ سیګولار دی. سړی د $0 < b < \frac{\pi}{2}$ لپاره لاس ته راوړي

$$\int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \left[-2\sqrt{\cos(x)}\right]_0^b = -2\sqrt{\cos(b)} + 2\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \left(-2\sqrt{\cos(b)} + 2\right) = 2\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ناټاکلي انتیګرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx\,.$$

لپاره

$$\arctan(x) + \ln(1+x^2)$$

د انتیګرالیدونکو بنسټ- یا ساده تابع دی. ناټیکه ایښوونه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\arctan(x) + \ln(1+x^2)\right]_{-b}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(2\arctan(b)\right) = \pi$$

د ناټاکلي انتیګرال لپاره راکوي. د تعریف سره سم د ناټاکلي انتیګرال پورته او کښته پولي باید یو له بل څخپلواک و څېړل شي. داچې نه پوله ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{c\to-\infty}\int_c^0 \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to-\infty}\left(-\arctan(c)-\ln(1+c^2)\right)$$

او نه پوله ارزښت

$$\lim_{d\to\infty}\int_0^d \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx \quad = \lim_{d\to\infty}\left(\arctan(d)+\ln(1+d^2)\right)$$

شتون لري، دا ناټاکلی انتیګرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx$$

هم شتون نه لري.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د نامعلوم انتیګرال لپاره د پرتلې قضيه

Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale

که f د g لپاره يو مايورانت وي، داپه دې معناچې

$$|f(x)| \le |g(x)| \qquad a < x < b$$

باور لري، نو د g د مطلق انتیګرالوړوالي څخه د انتیګرال

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

شتون لاس ته راځي

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

فقط د پوله ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f = \lim_{c\to b-} \int_a^c f$$

شتون ترخيږني لاندې نيول کيږي. په نورو حالتونو کې په ورته توګه مخ ته ځو.
تابع

$$r(c) = \int_a^c |f|$$

برابرغږېزه جګېدونکې ده او پورته لور ته د $\int_a^b |g|$ له لارې رابنده يا محدود ده. په دې پسې د r د $c \to b-$ لپاره پولې ته تلونکی دی او له دې امله $\int_a^b |f|$ شتون لري.
تابع

$$s(c) = \int_a^c (f + |f|)$$

همم برابرغږېزه جګېدونکې ده او د $2\int_a^b |g|$ له لارې رابنده يا محدود. پسې s هم د $c \to b-$ لپاره پولې ته تلونکی دياو له دې امله $\int_a^b (f + |f|)$ شتون لری.
له دې څخه د

$$\int_a^b f = \int_a^b (f + |f|) - \int_a^b |f| .$$

شتون لاس ته راځي.
ليکونکي: ايپ، هيوليګ

د پرتلع تلبع لپاره زيات وخت $f(x) = x^r$ کارول کيږي.
د $0 < a < b < \infty$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b x^r\,dx = \begin{cases} \dfrac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}, & r \neq -1 \\ \ln(b)-\ln(a), & r = -1 \,. \end{cases}$$

دا ترم د $b \to \infty$ لپاره تیک هلته پولې ته تلونکی دی، که $r < -1$ باور ولري، دا په دې معناچې انتیګرال

$$\int_1^{\infty} x^r\,dx$$

شتون ولري تیک د $r < -1$ لپاره.

د $a \to 0+$ لپاره تیک هلته پوله ارزښا لاس ته راځي، که $r > -1$ باور ولري، دا په دې معنا چې انتیګرال

$$\int_0^1 x^r\,dx$$

تیک د $r > -1$ لپاره شتون ولري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د دې لپاره چې د نامعلوم انتیګرال شتون د

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

په حیث وښایو ، سرې دا انتیګرال په دوه برخو توته کوي.

دا چې $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ دی، نو لاندې انتیګرال شتون لري

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په انتروال $[1,\infty]$ د نامعلوم انتيګرال لپاره د ټوټه انتيګرالوني له لارې لاس ته راځي

$$\int_1^b \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\,.$$

د $b \to \infty$ لپاره لومړی ترم د $\cos(1)$ په لور ځي او دويم د پرتلې قضيې له مخې پولې ته ځي، ځکه چې

$$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \le \left|\frac{1}{x^2}\right|\,.$$

سره له دې چې د تابع کوم ورکړ شوی لومړی – يا بنسټيز تابع نه لري، کېدی شي د نامعلوم انتيګرال ارزښت وټاکي. .

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليک

ګاما تابع يا - فنکشن **Gamma-Funktion**

د

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt,$$

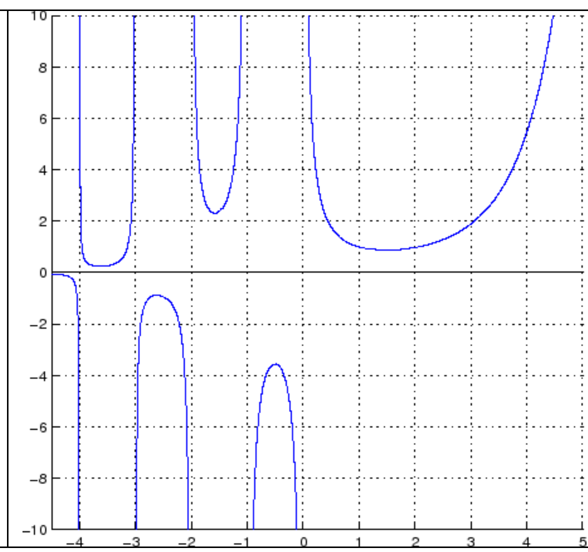
$$x \in (0,\infty)\,,$$

له ارې تعريف شوی ګاما تابع فنکشنل مساوات پوره کوي

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,.$$

په ځانګړې توګه

$\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$. دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشنل مساواتو په مرسته کېدی شي ګاما-تابع د کمیز پروت یا x محور لپاره هم تعریف کړی شي. لکه د جوړ شوي تابع ګراف څخه چې لیدل کیږي، دا ساده قطبونه د $x = 0, -1, \ldots$ لپاره لري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

انتیګرال

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

فقط د $0 < x < 1$ لپاره پرابلم جوړوي. په دې حالت کې انتیګرال د $t^{x-1} e^{-t} \le t^{x-1}$ له امله د پرتلې قضیې له مخې پولې ته تلونکی دی.

انتیګرال

$$\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

هم د پرتلې قضیې په بنسټ شتون لري او اټکلونه

$t^{x-1} e^{-t} \le t^{-2}$

د پوره لوي t لپاره بسیا کوي.

د ټوټه انتیګرال سره لاس ته راځي

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_{t=0}^\infty + \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t}\, dt$$
$$= 0 + x\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt = x\Gamma(x)\,,$$

او له دې سره د پوره اېندکشن په مرسته او $\Gamma(1) = 1$ د $n \in \mathbb{N}$ لپاره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Gamma(n+1) = n!\,.$$

د ګاما تابع د ګاوس تعریف

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

د تابع یوه روښانه ونه په ټول $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$ اجازه زاکوي.

.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د کوشي اصلي ارزښت **Cauchyscher Hauptwert**

د یوه په $x = c \in (a,b)$ کې زیګولار تابع f لپاره سړی

$$\mathrm{CHW}\int_a^b f = \lim_{h\to 0+}\left(\int_a^{c-h} f + \int_{c+h}^b f\right)$$

د کوشي اصلي ارزښت په څېر تعریفوي

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ټیپیکي بېلګې په څېر د کوشي اصلې ارزښت

$$\mathrm{CHW}\int_{-a}^{a} x^k\,dx\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,,$$

شمېرل کیږي.

د $k=-1$ لپاره دی

$$\int_{-a}^{-h}\frac{dx}{x} + \int_h^a \frac{dx}{x} = \ln|h| - \ln|a| + \ln|a| - \ln|h| = 0\,.$$

د انتیګرالیدونکي د انتی سیمتري په دلیل د CHW ورکیږي په یو سیمتري انتروال لپاره.

د $k \neq -1$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-a}^{-h} x^k\,dx + \int_h^a x^k\,dx = \frac{1}{k+1}\left((-h)^{k+1} - (-a)^{k+1} + a^{k+1} - h^{k+1}\right)$$

د ناجوړه يا طاق k لپاره دا ا فاده يا ويينه او له دې سره د کوشي اصلي ارزښت صفر دی. د زياتيز يا مثبت جوړه(حفت) k لپاره دا د $2/(k+1)a^{k+1}$ په لور هڅيږي.
په ساده توګه د کوشي اصلي ارزښت د رګولار انتيګرال سره سره خوري يا يوعړيز کيږي. د $k=-2,-4,\dots$ لپاره برعکس يا د دې په خلاف هم انتيګرال او هم د کوشي اصلي ارزښت شتون نه لري.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د انتيګرال لاندې مشتقول Differenzieren unter dem Integral

انتيګرال $\int_a^b f(x,t)\,dx$ د ناپرېکېدونکې تابع f لپاره د t ناپرېکېدونکی تابع دی. که f_t ناپرېکېدونکی وي، ن و باور لري

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b f_t(x,t)\,dx\,.$$

ليکونکي: هيوليګ،کنيش

د دې لپاره چې د

$$g(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$$

ناپرېکېدنه په ټکي $t_0 \in (c,d)$ کې وښايو، له دې څخه کار اخلو، چې f په ولاړګوډيز $[a,b]\times[c,d]$ کې برابرډوله ناپرېکېدونکی دی. هر $\varepsilon > 0$ ته له دې امله يو $\delta > 0$ شتون لري داسې چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f(x,t)-f(x,t_0)|<\varepsilon$$

باور لري د ټولو x او $|t-t_0|<\delta$ لپاره. د دې t لپاره نو دی

$$|g(t)-g(t_0)|\leq\int_a^b|f(x,t)-f(x,t_0)|\,dx<\varepsilon(b-a)\,.$$

له دې سره g ناپرېکېدونکی دی.

که f_t ناپرېکېدونکی وي، نو لاس ته راځي

$$\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=\int_a^b\frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}\,dx=$$

$$=\int_a^b\frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t+s)\,ds\,dx\,,$$

د کوم سره چې

$|f_t(x,t+s)-f_t(x,t)|<\varepsilon$ دی د ټولو $h<\delta\,.$ لپاره.

له دې امله کېدی شي د دفرنسل وېش کمښت و

$$\int_a^b f_t(x,t)\,dx=\int_a^b\frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t)\;ds\,dx$$

ته د

$$(b-a)\frac{1}{h}\,h\,\varepsilon$$

له لارې اټکل شي او د h سره د صفر په لور هڅيږي.

ليکونکي: بوسسلر، هيوليک،کنيش

بسل- توابعBessel-Funktionen دا لاندې د انټيګرال انځورونه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t - nt)\,dt, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

دا دا لاندې د دفرنڅیال مساوات پوره کوي

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0 .$$

دا کېدی شي د انتیګرا لاندې د دفرنڅیال سره وازمایل شي. لومړی دی

$$J_n'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \underbrace{\sin(x\sin t - nt)}_{v}\underbrace{\sin t}_{u'}\,dt$$

$$\frac{n}{\pi}\int_0^\pi \cos t\cos(x\sin t - nt)\,dt - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi \cos^2 t\cos(x\sin t - nt)\,dt$$

$$J_n''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t - nt)\sin^2 t\,dt$$

که $J_n'(x)$, $J_n(x)$ او $J_n''(x)$ د دفرنڅیال مساوات په کیڼ لور کښیښول شي او له π سره ضرب شي، له کوم سره چې $\xi = x\sin t - nt$ کیښول شي، نو لاس ته راځي

Se

$$-x^2\int_0^\pi \cos\xi\sin^2 t\,dt - x^2\int_0^\pi \cos^2 t\cos\xi\,dt + nx\int_0^\pi \cos t\cos\xi\,dt + x^2\int_0^\pi \cos\xi\,dt - n^2\int_0^\pi \cos\xi\,dt$$

$$= \cdot\, nx\int_0^\pi \cos t\cos\xi\,dt + x^2\int_0^\pi \cos\xi\,dt - n^2\int_0^\pi \cos\xi\,dt$$

$$= n\int_0^\pi (x\cos t - n)\cos(x\sin t - nt)\,dt$$

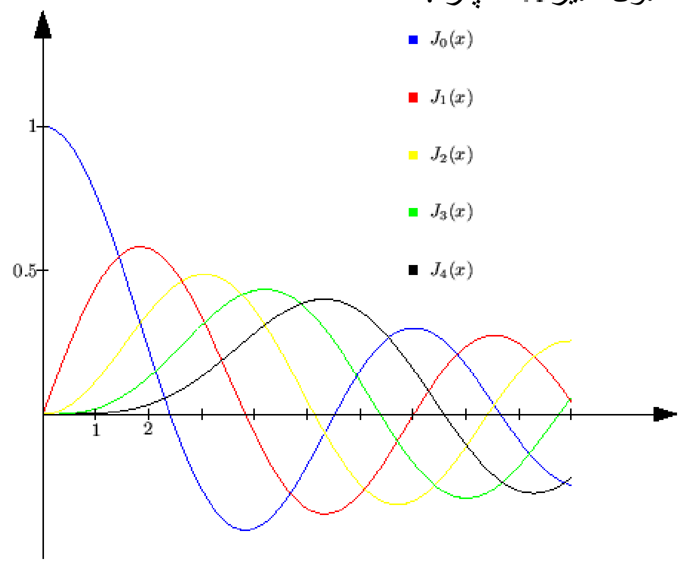
(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$n\sin(x\sin t - nt)\Big|_0^\pi = 0$$

=

د ټول ګنيز n لپاره.



څېره 5 لومړني د بسل توابع بنايي .

ليکونکي: بوسسلر، هيوليګ،کنيش

Leibniz-Regelلايبنيځ-قانون

د ناپرېکېدونکو مشتقوړ توابعو a, b او f لپاره دی

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x,t)dx + f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t)$$

ليکونکي: بوسسلر، هيوليګ،کنيش

که انتيګرال له $g(t)$ سره وښوول شي او ځا په ځا کړو

$$V(t) = (a(t), b(t), t)\,, \quad U(c,d,e) = \int_c^d f(x,e)\; dx\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $g = U \circ V$ دی او فرمول د ځنځیري قانون له لارې لاس ته راځي:

$$g'(t) = U'(V(t))\,V'(t), \quad V' = (a', b', 1)\,.$$

له دې سره د U ټوټه مشتقونه دا لاندې دي

$$U_c(c,d,e) = -f(c,e),$$

$$U_d(c,d,e) = f(d,e), \quad U_e(c,d,e) = \int_c^d f_e(x,e)\,dx\,,$$

او د $g'(t)$ لپاره په افاده یا ویینه کې اینوولو سره غوښتنه راکوي.
لیکونکي: بوسسلر، هیولیګ،کنیش

د لایبنیځ فرمول سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dt}\int_0^{\sqrt{t}} e^{x^2/t}\,dx = \int_0^{\sqrt{t}} -\frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\,dx + e\frac{d}{dt}\sqrt{t}$$

$$= -\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

بیا مشتقول یې راکوي

$$\frac{d}{dt}\left(-\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}\right)$$

$$=$$

$$\int_0^{\sqrt{t}} 2\frac{x^2}{t^3}e^{x^2/t} + \frac{x^4}{t^4}e^{x^2/t}\,dx - \frac{e}{2t^{3/2}} - \frac{e}{4t^{3/2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2tx^2 + x^4}{t^4} e^{x^2/t}\, dx - \frac{3e}{4t^{3/2}}$$

بدیلي لومړی کېدی شي بدلون $x = \sqrt{t}y$, $dx = \sqrt{t}\, dy$ ولیکي او دا انتیګرال لاس ته راوړي

$$g(t) = \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy$$

د کره یا ځای په ځای پولو سره . نو کېدی شي

$$g'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2}\, dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t}\, dx$$

او

$$g''(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2}\, dy = -\int_0^1 \frac{1}{4t^{3/2}} e^{y^2}\, dy$$

$$= -\int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{4t^2} e^{x^2/t}\, dx$$

په ساده توګه وشمیرل شي.

د لومړي مشتق لپاره د فرمول مساوات روښانه نه دي، خو کېدی شي اسان د ټوټه انتیګرالوني سره و ازمایل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}} = -\frac{1}{2t}\int_0^{\sqrt{t}} \underbrace{x}_{v}\underbrace{\frac{2x}{t}e^{x^2/t}}_{u'}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

$$-\frac{1}{2t}\left[xe^{x^2/t}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{t}} + \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t}e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t}e^{x^2/t}\,dx$$

د دویم برابرون مشتق کېدی شي په ورته توګه و ښوول شي.
ليکونکي: هيوليګ،کنيش

په t پسې د انتيګرال د مشتق

$$\int_{t^2}^{e^t} \frac{\cos(tx)}{x}\,dx$$

لپاره لاس ته راځي

$$\int_{t^2}^{e^t} -\sin(tx)\,dx + \frac{\cos(te^t)}{e^t}\frac{d}{dt}e^t - \frac{\cos(t^3)}{t^2}\frac{d}{dt}t^2$$
$$= \frac{1}{t}\cos(te^t) - \frac{1}{t}\cos(t^3) + \cos(te^t) - \frac{2}{t}\cos(t^3)$$
$$= \left(\frac{1}{t}+1\right)\cos(te^t) - \frac{3}{t}\cos(t^3)$$

ليکونکي: هيوليګ،کنيش

د دفرنشل مساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(t) - \lambda u(t) = f(t)$$

یو زره یا کوچنی حل u_p کېدی شي دهوموجېن مساوات حل $\exp(\lambda t)$ د سوپر پوزېشن له لارې و کتل شي:

$$u_p(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)\, ds\,.$$

د لایبنیخ فرمول په بنسټ دی

$$u_p'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s)\, ds = \int_0^t \lambda \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s)\, ds + f(t) \frac{d}{dt} t$$

$$= \lambda \int_0^t \lambda e^{\lambda(t-s)} f(s)\, ds + f(t)$$

په دفرنشل مساوات کې د $u_p(t)$ او $u_p'(t)$ د اینوولو له لارې کېدی شي حل تصدیق شي.
لیکونکي: هیولیګ،کنیش

د نامعلومو انتیګرالونو مشتقول
Differenzieren uneigentlicher Integrale

که توابع f او f_t ناپرېکېدونکې وي او د $t \in (c, d)$ لپاره باور ولري

$$|f(x,t)| \le \psi(x), \qquad \int_0^\infty \psi < \infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f_t(x,t)| \le \varphi(x), \qquad \int_0^\infty \varphi < \infty,$$

نو کیدی شي د انتیګرال د نخښې لاندې مشتق ونیول شي:

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty f(x,t)\,dx = \int_0^\infty f_t(x,t)\,dx\,, \quad c<t<d.$$

په ورته توګه ویناوې د محدودو انتیګرالېدونکو سره د نامعلومو انتیګرالونو لپاره باور لري.

لیکونکي: هیولیګ،کنیش

د دې لپاره چې وښایو، چې

$$\int_0^\infty \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h} - f_t(x,t)\,dx$$

د $h \to 0$ لپاره د 0 په لور هڅیږي، انتیګرال توټه کیږي:

$$\int_0^\infty \ldots = \int_0^b \ldots + \int_b^\infty \ldots$$

دویمه زیاتېدونکې یا د جمعې غړی د نیونې له مخې د

$$\left|\int_b^\infty \frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t+s)\,ds - f_t(x,t)\,dx\right| \le \int \frac{1}{h}\,h\varphi(x)+\varphi(x)\,dx = 2\int_b^\infty \varphi(x)\,dx$$

له لارې اټکل شي. دا انتیګرال له $<\varepsilon$ کیږي. د پوره لویې b لپاره. د دې b لپاره لومړی زیاتېدونکی $<\varepsilon$ دی د پوره کوچني h لپاره.، ځکه چې د پای انتیګریشن انتروال لپاره د انتیګرال لاندې مشتق کېدی شي.

لیکونکي: هیولیګ،کنیش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د گاما تابع مشتقونه

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\, dx, \quad t > 0\,,$$

دي

$$\Gamma^{(k)}(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} (\ln x)^k\, dx\,.$$

مشتقيدنه په حق ده، ځکه چې انتيګرالېدونکي $f(x,t) = e^{-x} x^{t-1} (\ln x)^k$ يو
برابرډوله مايورانت لري:

$$|f(x,t)| \le e^{-x}\, x^{r-1}\, x^k \le c e^{-x/2}, \quad x \ge 1$$

او

$$|f(x,t)| \le x^{1/r-1} |\ln x|^k \le c x^{1/(2r)-1}\,, \quad x \le 1$$

د $t \in [1/r, r]$ لپاره. د دې لپاره وکارول شو، چې

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0, \quad \lim_{x\to 0+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$$

د ټولو $\alpha, \beta > 0$ لپاره
ليکونکي: بوسسلر، هيوليګ،کنيش

دا د پارامتر په واک کې انتيګرال

$$g(t) = \int_0^\infty \sin(xt)\, \frac{dx}{x}$$

مطلق پولې ته تلونکی نه دی، له دې امله برابر ډوله مايورانت هم نه لري.
د لته مو د t پسې د انتيګرال لاندې يو فورمال دفرنځيشن يوه تضاد ته لاربښودوي.
فورمال مشتق

$$g'(t) = \int_0^\infty \cos(xt)\, dx$$

يو پولې ته نه تلونکی انتيګرال دی. له بلې خوا يو واريابل بدلون , $y = xt$

$$dy = t\, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

راکوي

$$g(t) = \int_0^\infty \sin(y)\,\frac{dy}{y} = \frac{\pi}{2}\,.$$

مشتق په دې لاس ته راوړنه کېمټ صفر دی.
ليکونکي: بوسسلر، هيوليگ،کنيش

د ۲۰۱۱ ز ک د مارچ لسم
برى د لوى ځښتن سره دى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې څنو ځايونو غزېدلې او څنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: څمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګټې – او کټې د کټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

<u>*2003 Bonn (Germany):*</u>

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

<u>*2003 Bonn (Germany):*</u>

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

<u>*2003 Bonn (Germany):*</u>

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

<u>*Bonn (Germany): 2003*</u>

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

<u>*2003 Bonn (Germany):*</u>

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

<u>1997 Bonn (Germany):</u>

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

۳ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ۱

۷ – اناليزې ۲

۸ – کرښيز الجبر

۹ - د شميرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل اناليز

۱۲ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما لیکنې

onn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ ــ الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ ــ د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ ــ د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ ــ د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ ــ د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ ــ د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ ــ د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library