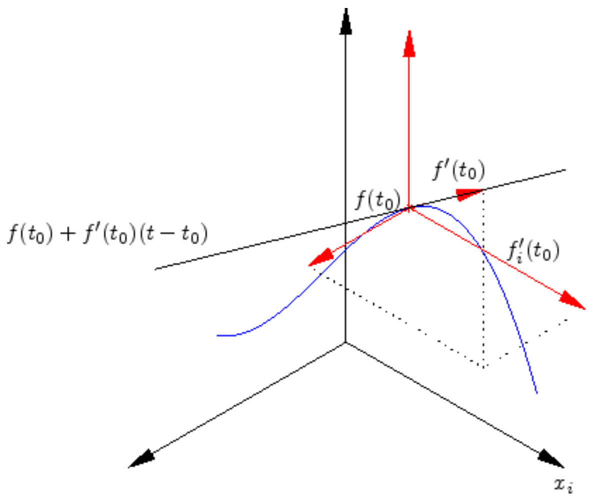
انالیز ۱ Analysis 1

د پوهنتون لپاره لکچرنوټونه

د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیز

یا انالیز دوه



لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتون د شمیرپوهنې یا ریاضي څانګه

د مات انلاين څخه يا د شتوتګارت پوهنتون نه څخه

Ketabton.com

Smakhan1946gmail.com

ژباړی: ډ اکتر ماخان (میرِي) شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوی څښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې په لار د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

د کتاب نوم: د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیزې

لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتو د ریاضي څا نګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه

ژباړی: ډ اکتر ماخان میرِي شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د چاپ لړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ژباړې مننه

د دې ليکنې مل نورې خپرونې د شتوتګارت د پوهنتون د شميرپوهنې د څانګې د لکچرونو لړۍ چاپ باندې پيل کيږي

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې- زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس- سره مرسته وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

بلواک یا تابع یا فنکشن ۱

کرښيزې توابع ۳

څلوری- یا مربع فنکشنونه یا – توابع ۴

همغږيز توابع ۶

برعکس – یا په څټ فنکشن ۹

د فنکشنونو یا توابعو سره شمیرنه ۱۱

ننوتي او وتلي - یا مقعر او محدبې توابع ۱۲
پولینوم ۱۵

د پولینومونو سره انترپولیشن ۲۱

د لاګرانج-پولینوم ۲۳

راشنل (کسری یا نسبتي) توابع ۲۵
کمپلکس راشنل- یا کسري توابع ۲۷
په ټوټه مات ټوټه کونه یا تجزیه کونه ۲۸
د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه ۳۳
د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه ۳۹
د اویلر-مویورې فرمول ۴۰
تانجنت او کوتاجنت ۴۱
د ارکوس توابع ۴۲
هارمونیک لړځیدنې یا رپیدنې ۴۳
اکسپوننشل توابع ۴۹

ګټه یا ربح ۵۰

ټولیز توان توابع او لوګاریتم ۵۶

د ودې قانون ۵۷

د توان او لوګاریتم لپاره شمیرقوانین ۵۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

های پرابول تابع	۵۹
د یوې پرلپسې پوله ارزښت	۶۲
د کوشي قضیه	۶۶
همغږیز ه پولې ته تلنه	۶۸
د پرلپسې پولې ته تلنه	۷۰
نارېښتونی پوله ارزښت	۷۱
پوله اینفریور او پوله سوپریور	۷۲
پرتله کوونکې قضیه	۷۳
د یوې پرلپسې پنډغالي ټکی	۷۵
ورهولست- مودل	۷۶
ریکورژن	۷۶
د پي**Pi** رکورزیو اپروکسیمیشن	۷۸
د پرلپسیو یا ترادفونو ځانګړي ...	۸۲
د یوې لړۍ پرلپسې	۸۴
هندسي یا ځمککچیزې لړۍ	۸۶
هارموني لړۍ	۸۸
مطلق پولې ته تلونکې لړۍ	۸۹
مایورانت او مینورانت	۹۰
د وېش قضیه	۹۱
د ریښې قضیه	۹۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لایبنیڅ قضیه ۹۴

د لړیو ځانګړي پوله ارزښتونه ۹۸

ناپرېکیدنه یا متمادیت ۹۹

یو اړخیز ناپرېکیدنوالی یا متمادیت ۱۰۲

د ناپرېکیدونکو توابعو لپاره ... ۱۰۴
منځ ارزښت جمله ۱۰۷
د دوه سطحو – یا برخو تلنلار ۱۰۹
د ناپرېکیدونکي تابع افرطیت ۱۱۰

برابرډوله ناپرېکیدنوالی ۱۱۱

په ټکي ډول پولې ته تلنه برابرارزښته ... ۱۱۲

د توابعو لړۍ پولې ته تلنه ۱۱۴

توابعو لړۍ ته مایورانت یا پورته پولې ۱۱۶

د اکسپوننشل تابع ضرب انځورونه ۱۱۷
د اکسپوننشال تابع لړۍ انځورونه ۱۱۹

مشتق(رابیلیدنه)

د بنسټتوابعو مشتق یا رابیلیدنه ۱۲۴

د مشتق یارابیلیدنې کرښزوالی ۱۲۷

د ضرب قانون ۱۲۷

د وېش قانون یا لار ۱۲۹

ځنځیری لار یا – قانون ۱۳۰

ایمپلیځیت مشتق نیول ۱۳۲

د لایبنیڅ قاعده یا لار ۱۳۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

لوګاریتمي مشتق یا – رابیلیدنه ۱۴۱

د رولې جمله ۱۴۳

منخ ارزښت قضیه ۱۴۴

ټولیزه (شوې) منخ ارزښت جمله ۱۴۵

لانداو-سیمبول ۱۴۷

د لو، پیتال قاعده یا لار ۱۴۸

کرښیزاپروکسمیشن (ورنږدېوالی) ۱۵۰

د ناټیکاوي وده ۱۵۱

د نیوټن تلنلار یا – قانون ۱۵۳

د تیلور پولینوم ۱۵۷
حقیقي د تیلور لړۍ ۱۶۱

اکسپوننشل تابع ۱۶۳
د اویلر فرمول ۱۶۵
د لوګاریتم تابع ۱۶۶
بینومیال لړۍ ۱۶۷
د تیلور –لړۍ مشتق او انتیګرال ۱۶۸

د تیلور-لړۍ ضرب ۱۷۰

د تیلور-لړۍ وېش ۱۷۲

د راشنل توابعو تیلور-ودیزېنه ۱۷۴

د یوې تیلور – لړۍ ۱۷۵

د معکوس تابع د تیولور ودیزیینه ۱۷۷
د تیلور ځانګړې لړۍ ۱۷۸
د پاد نږدې ارزښت شمیرنه ۱۷۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکستریما(افراطیت)	۱۸۱
د اکستریم – یا افرطي ازښتونو ازماېښت	۱۸۵
پولینوم	۱۸۶
اسیمپټوټي(یو په بل نه پرېوتونکي یا ګاونډیتوب)	۱۹۰
د راشنل- یا کسر توابعو ګاونډ یا اسیمپټوټي	۱۹۱
د کږو یا منحنیو خبرې یا بحث	۱۹۲
ریمن-انتیګرال	۱۹۸
د انتیګرال خویونه	۲۰۱
د انتیګرالشمیرنې منځ ارزښت جمله	۲۰۱
بنسټیز – یا ساده توابع	۲۰۳
د بنسټیزو توابعو لومړني توابع	۲۰۷
ټوټه- یا پارشل انتیګرالونه	۲۰۷
دلتا - تابع	۲۱۲
د متحولو – یا اووښتونو بدلون	۲۱۳
د متحولو – یا اووښتونو بدلون	۲۱۹
ساده راشنل انتیګرالونه د زیاتواره قطب سره	۲۲۲
د راشنلتوابعو انیګرالونه	۲۲۵
د ساین او کوساین د ضرب انتیګرالونه	۲۲۷
د کمپلکس تریګونومتیکي توابعو انتیګرالونه	۲۲۸
تریګونومتریکي بدلونونه	۲۳۰
د ساین او کوساین راشنل توابع	۲۳۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځرخيدونو بدنونو ډکی يا حجم ۲۳۶

د يوې کرښې يا منحني اوږدوالی ۲۴۱

د ذوزنقې قانون **۲۴۴**

د ګاوس فرمول ۲۴۸

ناځرګند يا نا معلوم انتيګرال ۲۵۱

د نامعلوم انتيګرال لپاره د پرتلې قضيه ۲۵۵

ګاما تابع يا – فنکشن ۲۵۸

د کوشي اصلي ارزښت ۲۵۹

د انتيګرال لاندې مشتقول ۲۶۰

لايبنيځ-قانون ۲۶۳

د نامعلومو انتيګرالونو مشتقول ۲۶۸

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې،
چاپيدونکې او چاپ ته چمتو ليکنې ۲۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

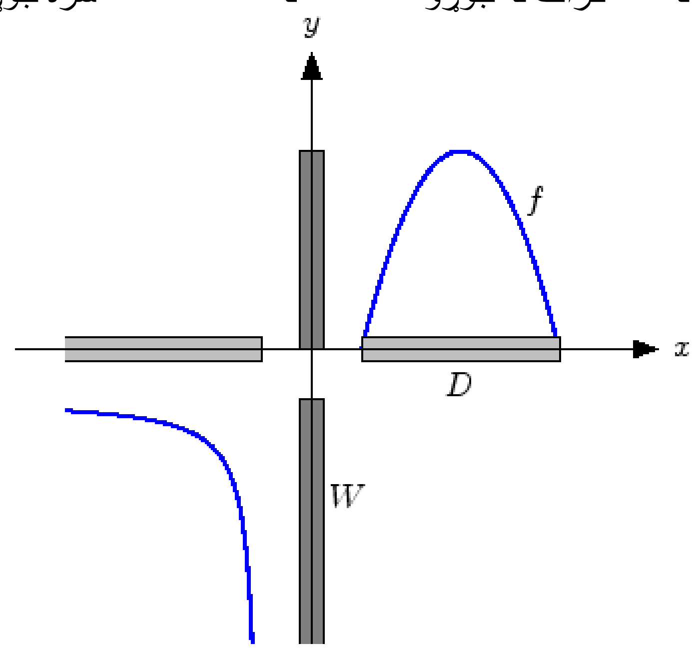
بلواک یا تابع (ټیک یی: فنکشن) **Funktion**

یو فنکشن یا بلواک یا تابع

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

د تعریف ورشو $D \subseteq \mathbb{R}$ هرتوکی x د ارزښت ډیری $W \subseteq \mathbb{R}$ څخه د یوه ارزښت $f(x)$ سره تنظیموي.

د f ګراف له جوړو (x, y) د $y = f(x)$ سره جوړ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د څیرې څخه چې لیدلکیږي، تعریفورشو (رڼه خړه یا پرته) او ارزښت ورشو (تیاره خړه یا ولاړه) په x -محور همداسې په y -محور د ګراف پریوتل دي.

لیکونکي: هیولیګ، هورنر، کنش

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعریف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، لومړی دې د په ساده –یا لومړنیو توابعو رامنځ ته کیدونکې بندیزونه یا محدودوالی په پام کې ونیول شي. د تعریف ورشو د توکي لوګاریتم باید زیاتیز یا مثبت وي او د ارزښت ورشو ناکمیز یا نامنفي وي:

$3 - x > 0$ او $x \geq 0.$

په همدې توګه باید ماتلاندې یا مخرج صفر نه وي، دا په دې معنا چې

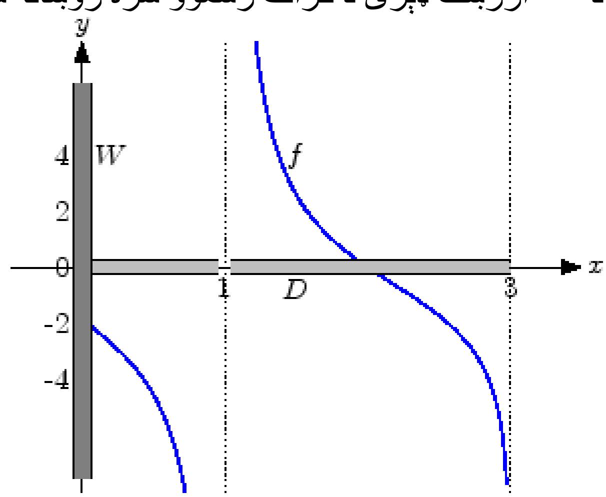
$x \neq 1.$

په ټولیزه توګه راکوي:

$$\mathrm{D} = [0,3)\backslash\{1\} = [0,1) \cup (1,3).$$

.

د f ارزښت دېرۍ د ګراف رسموو سره روښانه شي



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې f د $x \in (1,3)$ لپاره د $-\infty$ او $+\infty$ ترمنځ ټول ارزښتونه نيسي، $W = \mathbb{R}$ باور لري.

ليکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش)

لاندې جدول د څو بنستيزو توابعو تعريفورشو او ارزښت ورشو ښايي.

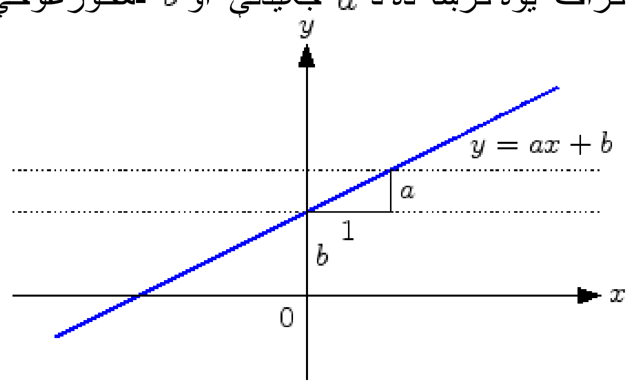
$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\ln x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x : x = (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$

(ليکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش)

کرښيز فنکشنونه يا توابع

د يوه کرښيز فنکشن يا تابع
$f(x) = ax + b$

ګراف يوه کرښه ده د a جګيدنې او y -محورغوڅي(محورقاطع) b سره .



(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره بدیلي انځورونه د ټکي-جګېدنې – بڼه ده

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=a$$

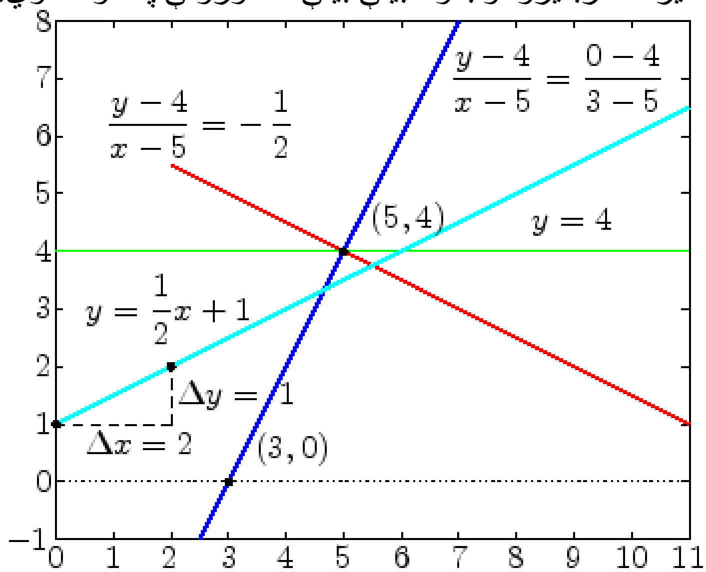
او د دوه-ټکو - بڼه

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0},$$

چیرته چې (x_0,y_0) او (x_1,y_1) په کرښه پراته ټکي دي.

(لیکونکي: هیولیګ، هیورنر)

څیره د کرښیزو توابعو بیلي بیلي انځورونې په کوته کوي:



لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

څلوری- یا مربع فنکشنونه یا - توابع

د یوه مربع تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

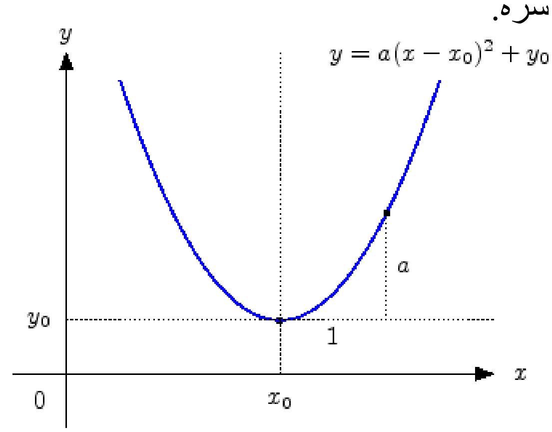
کراف د لاندې بڼې يو پارابول دی

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د ککرۍ- يا رأسټکي

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right).$$

سره.



پای

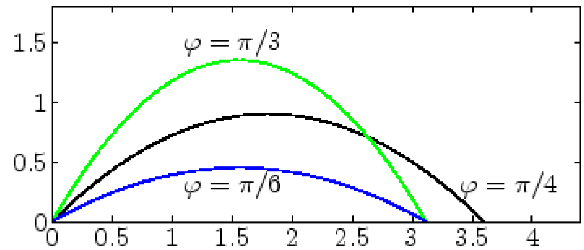
- که يو تن د يوه کونج φ لاندې په يوه v چټکتيا و توغول شي، د الوتنې لار دا لاندې پارابول

$$y = x \tan \varphi - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \varphi} x^2$$

راکوي ، چيرته چې g د ځمکې بيړه ده يا - تعجيل دی.

لاندې ځيره: مايل توغول يا غورځول د v = 6 سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مساوات د برابرېدوله خوزښت په x - او y -کمپوننتونو د بیلوني یا ټوټه کوني(که غواړې: تجزیې) څخه لاس ته راځي ، د v پیل چټکتیا سره او د ازاده غوزوني د خوزښت ته پام کوني له لاري:

$$x(t) = vt\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v\cos\varphi}$$

$$y(t) = vt\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow y(x) =$$

$$= \frac{vx\sin\varphi}{v\cos\varphi} - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\varphi} = x\left(\tan\varphi - \frac{gx}{2v^2\cos^2\varphi}\right).$$

د غورځوني واټن دی

$$x = \frac{2v^2\cos^2\varphi}{g}\tan\varphi = \frac{v^2}{g}\sin(2\varphi).$$

دا د $\varphi = \pi/4 \mathrel{\widehat{=}} 45°$ لپاره ماکسیمال دی.
لیکونکي: هیولیگ، هیورنر،کنش

همغږېزې توابع Monotone Funktion

(c) ketabton.com: The Digital Library

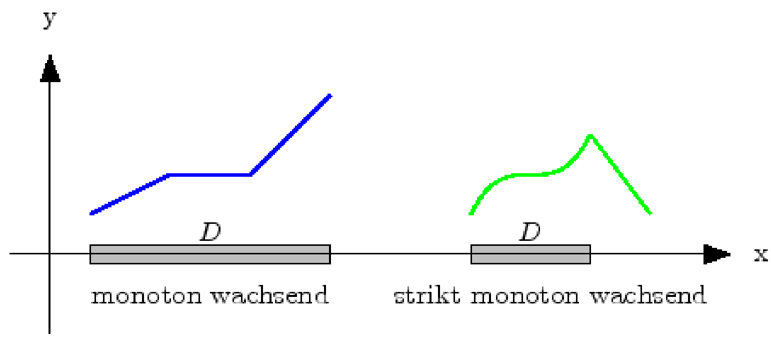
یو تابع f په یوه انتروال D (کره) همغږیز جګیدونکی دی، که وی

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \overset{(<)}{\leq} f(x_2), \quad x_k \in D,$$

همداسي که f تو‌ته دوله ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی، که وي

$$f'(x) \overset{(>)}{\geq} 0$$

د تولو $x \in D$ لپاره تر ځانله یا جدا تکي بوري



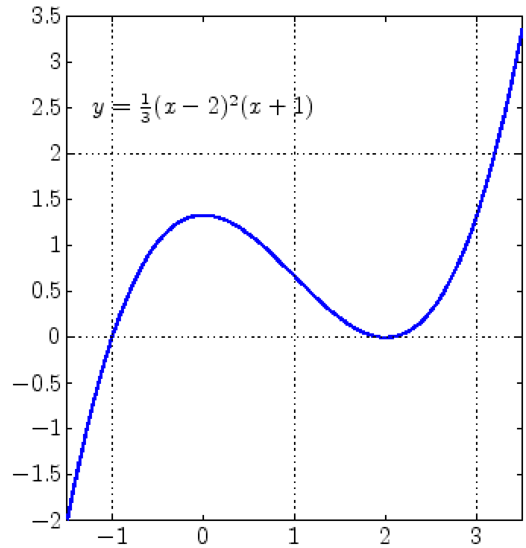
همغږیز جګیدونکي کره همغږیز جګیدونکي

په ورته توګه (کره) همغږیز ټیټیدونکی تعریفیږي.

یکونکي: هیولیک، هیوررنر،کنش

تابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2(x+1)$ په $x = 0$ ځای کي یو جګ- یا ماکسیمال ټکی ($f'(0) = 0, f''(0) < 0$) لري او په $x = 2$ ځای ټیټ-یامینیمال ټکی ($f'(2) = 0, f''(2) > 0$) لري . د $x \leq 0$ او $x \geq 2$ لپاره تابع کره مونوتونجګېدونکي نخ ده او د $0 \leq x \leq 2$ لپاره کره مونوتون ټیټیدونکي نه ده.

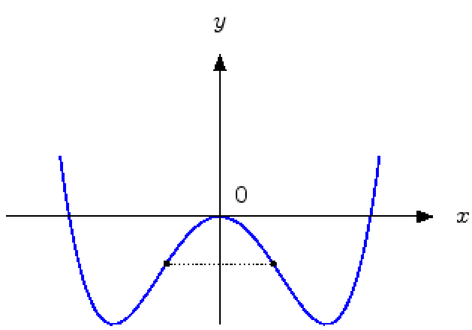
(c) ketabton.com: The Digital Library



يکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش

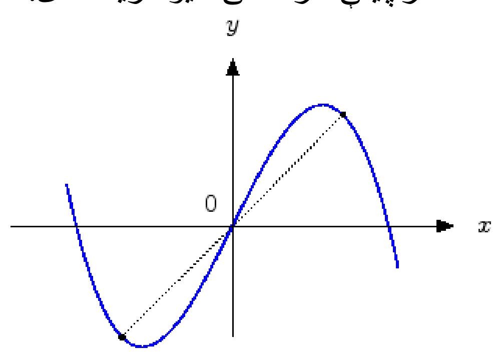
جوړه او ناجوړه – يا جفت او طاق توابع

يو تابع f جوړه دی، که $f(x)=f(-x)$ وي، دا په دې معنا چې که ګراف د y - محور سره سيومتريک وي. يو ناجوړه يا طاق تابع $f(x)=-f(-x)$ دی، او ګراف سرچيني سره ټکی سيومتريک دی.



gerade Funktion

جوړه يا جفت تابع



ungerade Funktion

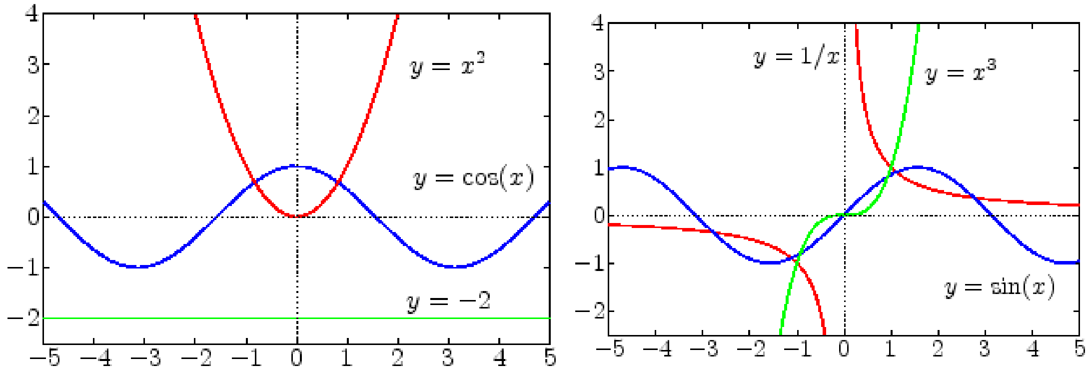
ناجوړه يا طاق تابع

د دوه جوړه توابعو ضرب جوړه تابع دی. برعکس د يوه ناجوړه يا طاق تابع ضرب د يوه جوړه تابع سره ناجوړه دی. د زياتون يا جمعې او کمښت يا تفريق جوړولو سره د تابع تيپ يا ډول ساتلی پاتيږي.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې توابع یو کيڼ لور ته یو ځو جوړه (جفت) او ښي لور ته یو ځو ناجوړه (طاق) توابع ښايي.



د مناسب ترکیب جوړولو سره سرې نورې بيلګې لاس ته روا ړي. نو توابع

$$f(x) = x^2\ \cos x - x^3\ \sin x, \qquad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x)\sin x - g(x)x^3$$

ناجوړه دي.
پاي.

برعکس – یا په ښت فنکشن - تابع**Umkehrfunktion**

د یوه اينجکتيو (په کې -) تابع $f : D \to W$ د تعريفورشو D او ارزښت ورشو $W \subseteq \mathbb{R}$ سره د

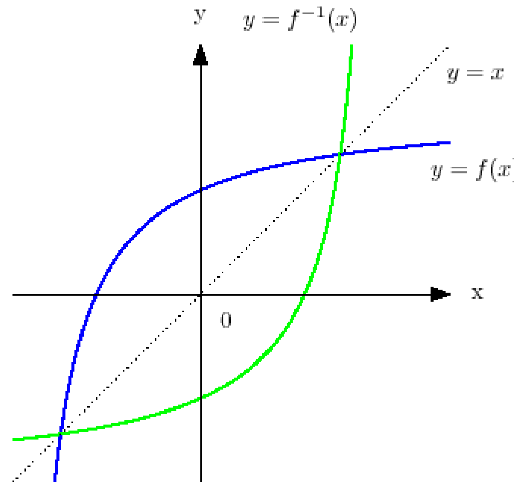
$$f^{-1} : W \to D \subseteq \mathbb{R},\ x \mapsto f^{-1}(x)$$

له لارې تعريف دی. له دې سره لاندې باور لري

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

د برعکس توابعو تعریف ورشو د f ارزښت ورشو ده. د هغه ګراف $y = f^{-1}(x)$ د f د ګراف په لومړي کونجنيمی $(y = x)$ هنداره شوې ښېره ده:

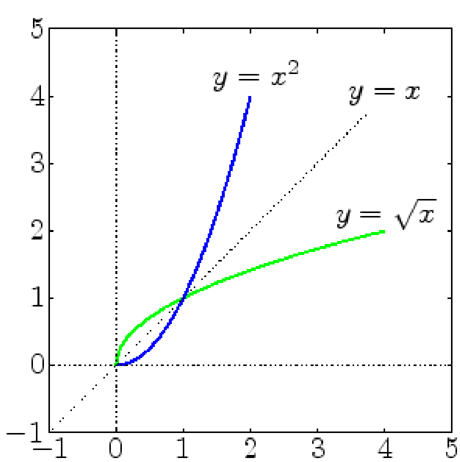
(c) ketabton.com: The Digital Library

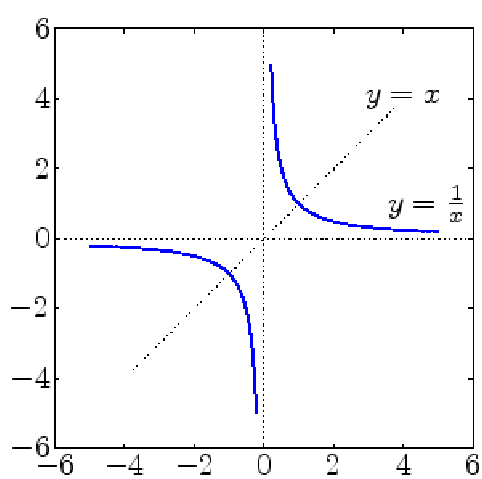


کيدی شي ليکندود $f^{-1}(x)$ مو په ساده توګه د معکوس ارزښت $f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ سره بدلولو ته لار ښود کړي. په ځانګړې توګه ، که د تابع x ارزښت ونه ليکل شي، دا اړيکې دې بايد روښانه وي، چې موخه مو څه ده.

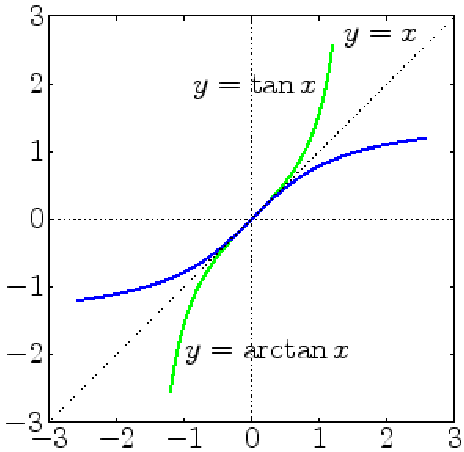
پای.

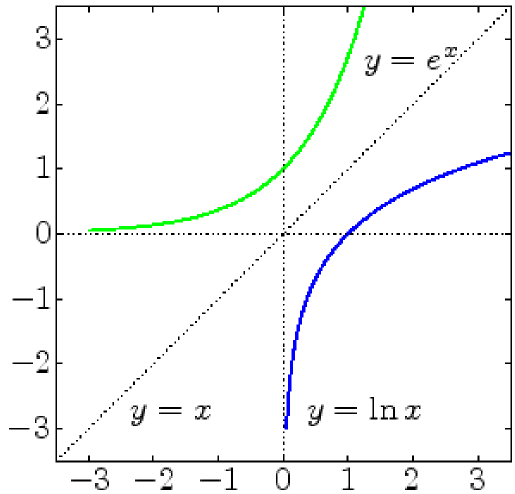
لاندې ځيرې د يو څو بيلګو برعکس - يا په ښې فنکشن يا تابع ښايي.





(c) ketabton.com: The Digital Library





په لاندې جدول کې هر اړونده تعریف ورشو وې ورکړ شوي دي:

f	D	f^{-1}	D
x^2	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$
e^x	$\mathbb{R}$	$\ln(x)$	$(0,\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{x\,:\,x=(2z+1)\pi/2\,,z\in\mathbb{Z}\}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

د فنکشنونو یا توابعو سره شمیرنه Rechnen mit Funktionen

د توابعو کربنیز ترکیب ټکي دوله تعریف شوی دی، دا په دې معنا چې په توابعو د اړونده عملیو له لارې:

$$(rf+sg)(x)=rf(x)+sg(x).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه ضرب fg او وېش f/g . په وېرش کې باید g د صفر سره برابر نه وي..
بالاخره

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

د دوه توابعو یو په بل پسې راوستل یا ځنځیرونه ښایي.
پای.

د بیلګې

$$f(x) = x^2 - 4, \qquad g(x) = x + 2$$

لپاره مختلفې ترېنې راکوي

$$\begin{aligned} (f + 2g)(x) &= x^2 + 2x \\ (fg)(x) &= x^3 + 2x^2 - 4x - 8 \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= x - 2, \qquad x \neq -2 \end{aligned}$$

په وېش کې تعریفتشځای $x = -2$ له منخه تلونکی یا د جګیدو وړ دی،

ځکه چې صورت یا ماتباندې $x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ هم په $x = -2$ کې یو صفرځای لري.

د f او g یو په بل پسې ترېنه یا ځنځیرونه راکوي

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= (x + 2)^2 + 4 \\ (g \circ f)(x) &= x^2 - 2, \end{aligned}$$

نو ترېنه یا عملیه $\circ$ کموتاتیو یا بدلوړ نه ده.

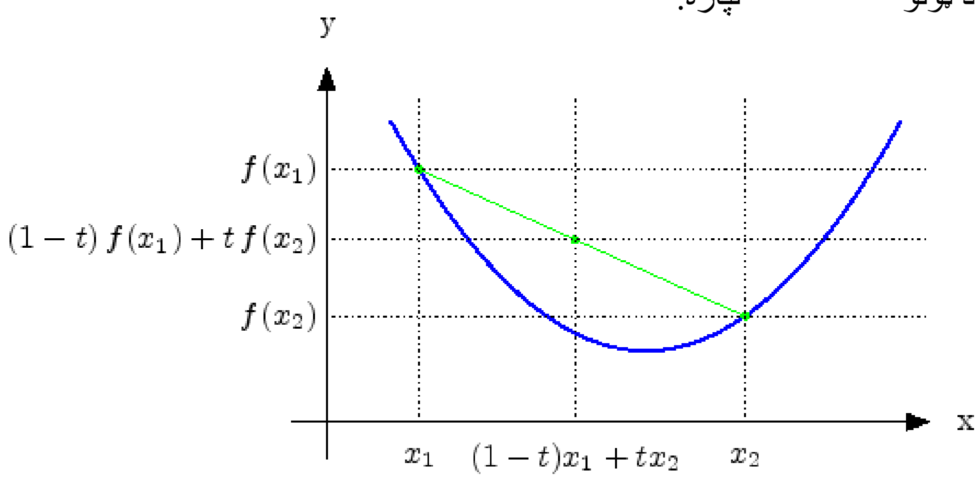
(c) ketabton.com: The Digital Library

ننوتي او وتلي - يا مقعر او محدبې توابع

يو تابع په يوه انټروال D کې(کره) ننوتی دی، که هر ټوټه وونې يا سيکانت د ګراف پورته لور ته پروت وي، دا په دې معناچې

$$f((1-t)\,x_1 + t x_2) \overset{(<)}{\leq} (1-t)\,f(x_1) + t\,f(x_2)\,, \quad t \in (0,1)$$

د ټولو $x_i \in D$ لپاره.



که f دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ وي، نو (کره) ننوتنه د ټولو $x \in D$ لپاره د

$$f''(x) \overset{(>)}{\geq} 0$$

سره تر هغه ځانله ټکي پورې ورته يا برابر ارزښته ده.

د ننوتو توابعو زياتون يا جمعه ننوتي ده. ترڼي يا عمليې $/, \cdot, -$ همداسي يو په بل پسې راوړنه يا ځنځيرونه $\circ$ په ټوليزه توګه ننوتوالی نه ساتي. بالاخره هر ننوتی تابع ناپرېکېدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه وتلی تابع هم تعریف کیږي. د وتلي تابع لپاره ټوټه وونی یا سیکانت د ګراف کښته لور ته پروت دی، دا په دې معنا چې د x - محور باندې هنداره شوی $-f$ تابع وتلی دی.

پای.

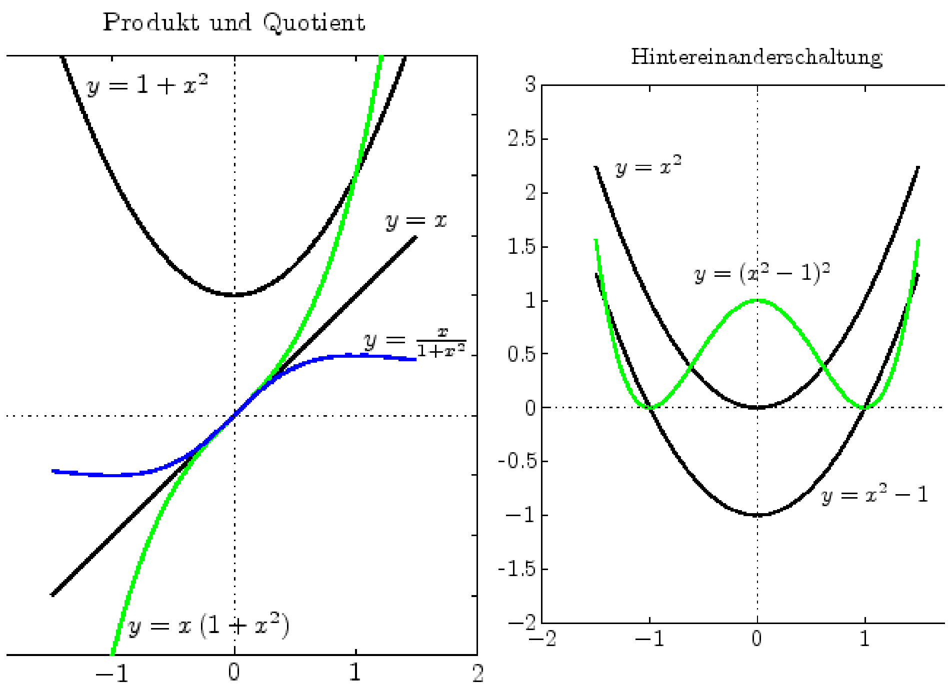
د دوه ننوتو فنکشنونو یا توابعو جمعه یا زیاتون د تعریف څخه ترلی لاس ته راځي:

$$\begin{aligned}(f+g)((1-t)x_1+tx_2)\\ &= f((1-t)x_1+tx_2)+g((1-t)x_1+tx_2)\\ &\le (1-t)\,f(x_1)+t\,f(x_2)+(1-t)\,g(x_1)+t\,g(x_2)\\ &= (1-t)(f+g)(x_1)+t(f+g)(x_2),\end{aligned}$$

د کوم سره چې د نابرابرون ننوتوالی د f او g څخه کار اخستل کیږي.
نورې ترنې یا عملیې په ټولیزه توګه ننوتوالی نه ساتي، لکه چې لاندې بیلګې به یې وشایي.

یو په بل پسې ترنه　　　　　　ضرب او ویش

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دې لپاره چې په يوه ټکي کې د تابع ناپرېکدنوالی وښايو، ټاکو $c<a<x<b$. نو دی

$$x = ta+(1-t)b$$

$$a = sx+(1-s)c$$

د $0<s,t<1$ سره. داچې ننوتی دی، نو باور لري

$$f(x)-f(a) \leq (1-t)(f(b)-f(a))$$

همداسې

$$f(x)-f(a) \geq \left(\frac{1-s}{s}\right)(f(a)-f(c)),$$

د $f(a) \leq sf(x)+(1-s)f(c)$ له امله.

د $x\to a$ لپاره s او t د 1 په لور هڅيږي، او له دې سره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0.$$

د $x<a$ لپاره ورته دلیل راوړل کیږي.

پولینوم Polynom

د n درجې یو پولینوم p په لاندې بڼه لیکل کیږي

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

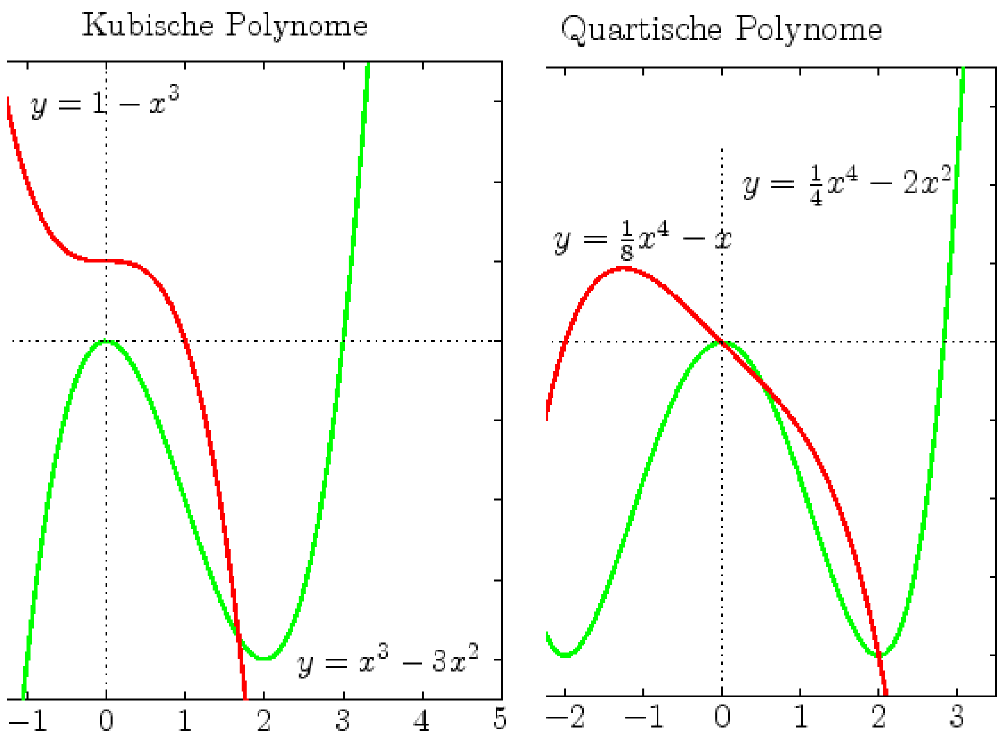
د $a_n\neq 0$ سره.

اووښتوني یا متحولې x او ضریب یا ځلووني a_k کیدی شي حقیقي – همداسې کمپلکس ګڼونه یا عددونه وي. په اړونده توګه د حقیقي همداسې د کمپلکس پولینوم څخه غږیږو.
لیکونکیة: هیورنر او هیولیګ

لاندې ځیرې مکعب دوله ($n=3$) او کوارتیک دوله ($n=4$) پولینومونه د ځرنګوالي له لورې مختلف تابع ګرافونو سره ښایي.

کوارتیک پولینومونه مکعب پولینومونه

(c) ketabton.com: The Digital Library



پولينوموېش Polynomdivision

پولينومونو p او q ته د $m = \mathrm{Grad}\, q \leq \mathrm{Grad}\, p = n$ سره يو اځني
پولينومونه f او r شتون لري د

$$p = fq + r,\quad \mathrm{Grad}\, f = n - m,\quad \mathrm{Grad}\, r < m.$$

سره.

دا ټوټه ونه کيدی شي د وېش له لارې د باتي يا باقی سره وټاکل شي.

په ځانګي توګه د p د صفرځای t لپاره لاس ته راځي چې $p(x) = f(x)(x-t)$
دی د $\mathrm{Grad}\, f = n - 1$. سره.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د q سره د p وېش څخه لرو

$$\underbrace{a_n x^n + \cdots}_{p(x)} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \underbrace{(b_m x^m + \cdots)}_{q(x)} + p_{n-1}(x)$$

د يوه پاتې يا باقي $p_{n-1}(x) = a'_{n-1} x^{n-1} + \cdots$ سره.

که $m \leq n-1$ وي کېدی شي بيا ووېشل شي:

$$p_{n-1}(x) = \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} q(x) + p_{n-2}(x) .$$

پروسه پرې کيږي، که د پاتې پولينوم درجه له m کوچنۍ وي، دا په دې معناچې
وروسته د $r = p_{n-(n-m+1)}$. سره.
د تل بيا ضرب له لارې لاس ته راځي

$$f(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} + \cdots .$$

که t د p صفرځای وي، نو باور لري

$$0 = p(t) = f(t)(t-t) + r(t) = r(t)$$

او له دې سره $r(x) = 0$ ، ځکه چې $1 >$ Grad r دی.

د پولينوم وېش د ليکنيز وېش سره ورته مخ ته تلی شي.

د بيلگې په توگه د $p(x) = 9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2$

او $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$ لپاره لاس ته راځي

$$(9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2) : (3x^2 + 2x + 1) =$$
$$= 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{r(x)}{q(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{r} -(9x^5 + 6x^4 + 3x^3) \\ \hline 6x^4 + 7x^3 + 4x^2 \\ -(6x^4 + 4x^3 + 2x^2) \\ \hline 3x^3 + 2x^2 + 4x \\ -(3x^3 + 2x^2 + x) \\ \hline 3x + 2 = r(x) \end{array}$$

نو دی

$$\underbrace{9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2}_{p(x)} = \underbrace{(3x^3 + 2x^2 + x)}_{f(x)} \underbrace{(3x^2 + 2x + 1)}_{q(x)} + \underbrace{(3x + 2)}_{r(x)} .$$

د يوه پولينوم صفرځايونه او فاکتوري کول يا په ضريبونو ټوټه کول

يو د n درجې پولينوم p د ځووالي يا تکرار سره ټيک z_k کمپلکس صفرځايونه لري او له دې سره کېدی شي په ورته کرښيزو ضريبونو يا فاکتورونو

$$p(z) = c(z - z_1) \cdots (z - z_n)$$

وليکل شي د ثابتې c سره.

که p حقيقی يا قبيل وي، نو کمپلکس صفرځايونه په کنجوګيری جوړو $x_k \pm \mathrm{i}y_k$ رامنځ ته کيږي.
يو حقيقي په ضريبونو ليکل يا فاکتوره کول کېدی شي د کرښيزو فاکتورونو ترڅنګ د لاندې مربع فاکتورونه

$$(z - x_k - \mathrm{i}y_k)(z - x_k + \mathrm{i}y_k) = (z - x_k)^2 + y_k^2$$

هم ولري.

د دويمې درجې پولينوم صفرځايونو لپاره کيدی د منځشپې يا **ABC فرمول(دا د p,q -فرمول ته روته يا همهغسې دی) و کارول شي** او د دريمې او څلورمې درجې پولينومونه د کاردان فرمولونو Cardanischen Formeln له لارې د اکسپليڅيت الجبری افادو يا ويېنو په توګه و ټاکل شی.
د جګو درجو پولينومونو لپاره بيا په ټوليزه توګه نومريکي تلنلارې کارول کيوي. که بيا يو صفرځای معلوم وی، نو کېدی شي د ا ړونده کرښيز فاکتورونې يا ضريبونې له لارې

(c) ketabton.com: The Digital Library

و وېشل شي.
$q(z) = p(z)/(z - z_1)$ او $z_2, \dots, z_n$ د $n - 1$ درجې د پولینوم د د
صفرځایونو په توګه وټاکل شي.
د الجبر بنسټيزې جملې په اساس د ≥ 1 Grad درجې کمپلکس پولینوم یو صفرځای
لري . د پرلپسي پولينوموېشنې د صفرځايونو سره
اړونده کربنيز صريبونه یا فاکتورونه له دې سره ضريبونه راکوي.

که p فقط حقیقی صریبونه ولري، نو باور لري

$$\overline{p(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} p_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} p_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} p_k \overline{z}^k = p(\overline{z})$$

یعني د یوه صفرځای z_0 لپاره هم $p(\overline{z_0}) = \overline{0} = 0$ دی.

د $p(z) = z^3 - 5z^2 + 9z - 5$

په ضریبونو لیکل یا فاکتوره کول ټاکو. پیژنو، چې $z_1 = 1$ یو صفرځای دی او یو د
پولینوم وېش سره لرو
$p(z)/(z - 1) = z^2 - 4z + 5.$

د دې مربع پولینوم صفرځایونه د منځشېې فرمول له مخې دي
$z_{2,3} = 2 \pm i.$

د دې په تعقیب کمأبکس فاکتورونه لاندې ده

$$p(z) = (z - 1)(z - 2 - i)(z - 2 + i).$$

حقیقی په ضریبونو لیکنه یا صریبونه د دواړو اخرني فکتورونو د ټولګې څخه لاس ته
راوړو همداسې سیده د مربع تکمیلونې له لارې:

$$z^2 - 4z + 5 = (z - 2)^2 + 1,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې

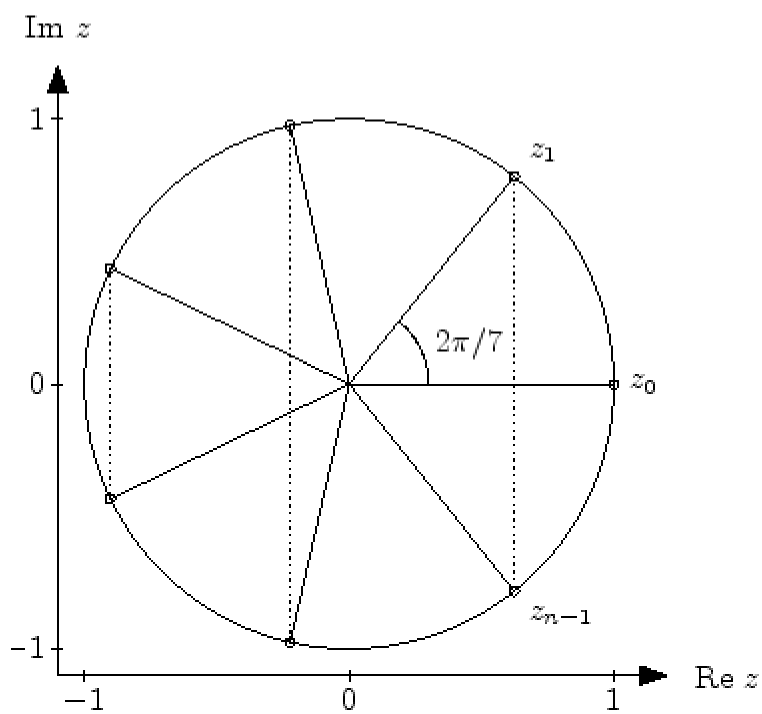
$$p(z) = (z-1)((z-2)^2+1).$$

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر، کنش

د $p(z) = z^n - 1$ صفرځايونه n -م يوونرېښې يا واحدجذرونه دي
$z_k = \exp(2k\pi i/n), k = 0, ..., n-1.$

له دې سره کمپلکس فاکتورونه لاس ته راځي

$$p(z) = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \exp(2k\pi i/n)).$$



د کمپلکس کنجرګيري صفرځايونو ټولګه يا يوځای کونه حقيقي فاکتوري کونه راکوي.

د جوړه n لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(z) = (z-1)(z+1)\prod_{k=1}^{n/2-1}\left(z^2 - 2z\cos(2k\pi/n) + 1\right)$$

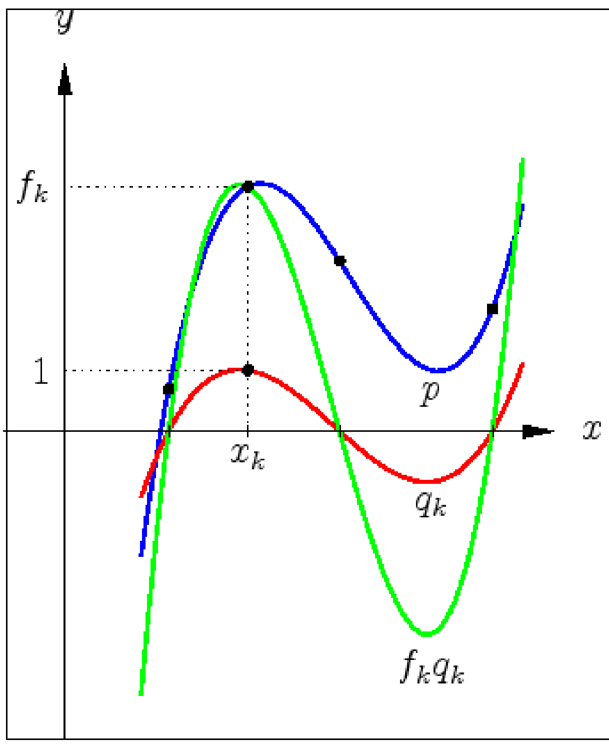
او د ناجوړه یا طاق n لپاره

$$p(z) = (z-1)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(z^2 - 2z\cos(2k\pi/n) + 1\right).$$

پای.

د پولینومونو سره انترپولیشن

په $n+1$ کي تابع ا رزښتونه f_k جوړه په مختلف تکیه ځایونو $x_0, \ldots, x_n$ کیدی شی یواځني د یوه $\leq n$ Grad درجي پولینوم له لاري انترپولی شي:



$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

دا انترپولیشن پولینوم کیدی شي د لاګرانج – بڼه

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

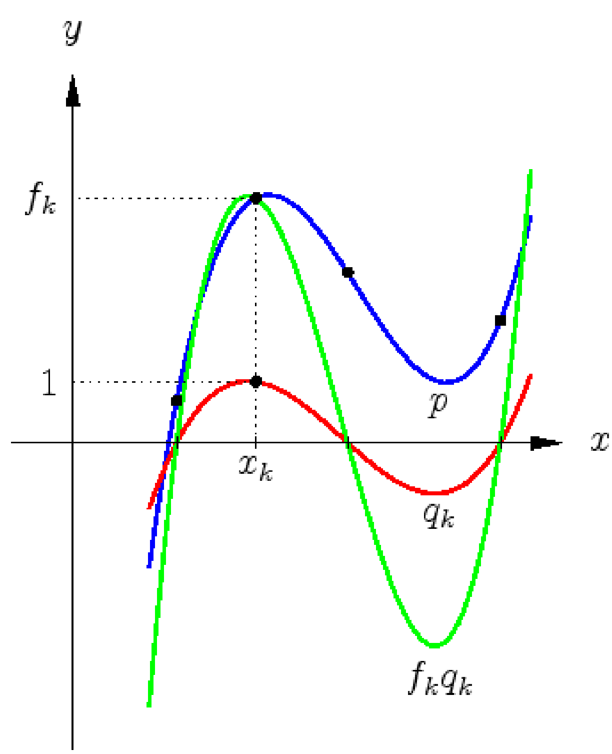
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x),$$

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

دا انترپوليشن پولينوم کيدی شي د لاګرانج – بڼه

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x), \quad q_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j},$$

انځور شي.



پولينوم q_k د لاګرانج-پولينوم بلل کيږي او په ټکي x_k کې ارزښت 1 لري او په نورو ټولو ټکو x_j کې يې ارزښت صفر دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$q_k(x_j) = \delta_{k,j}$$

د کرونیکر-سومبول δ سره.

د لاگرانج-پولینوم

$$q_k(x_j) = \delta_{j,k}$$

پوره کوي او له دې سره لاس ته راځي

$$p(x_j) = \sum_k f_k \delta_{j,k} = f_j \,,$$

د انترپولیشن شرایط ټول پوره دي.

د دې لپاره چې یواځنوالی وښایو، چې یو بل انترپولیشنپولینوم $\tilde{p}$ شتون لري، کمښت را اخلو یا تر څېړنې نیسو.
$p - \tilde{p}$.

دا (لږتر لږه) $n+1$ صفرځاونه لري(د انترپولیشن کېدونکي ځایونه x_k)، مگر (زیات له زیاته) د n درجو. له دظ سره باید کمښت کټمټ وي، نو پولینومونه سره توپير نخ لري.
لیکونکي: هیولیگ،هیورنر

په اکویدیستانت یا برابرواټنیز تکیه -ځایونو $x_k = kh$ د f_k ارزښتونو توابعو ټیک گرافیکي انځورونې ته کېدی شي مکعبیز انترپولیشن وکارول شي. له دې سره په تکیه-ځایونو $x_{k+1/2} = (k+1/2)h$ منځ ارزښتونه د

$$f_{k+1/2} = (-f_{k-1} + 9f_k + 9f_{k+1} - f_{k+2})/16$$

له لارې اپروکسیمی شي. دا پروسه تکراریږي، تر هغږ چې پوره داتا منځ ته راشي.
د ـټکو -فرمول وزنونه

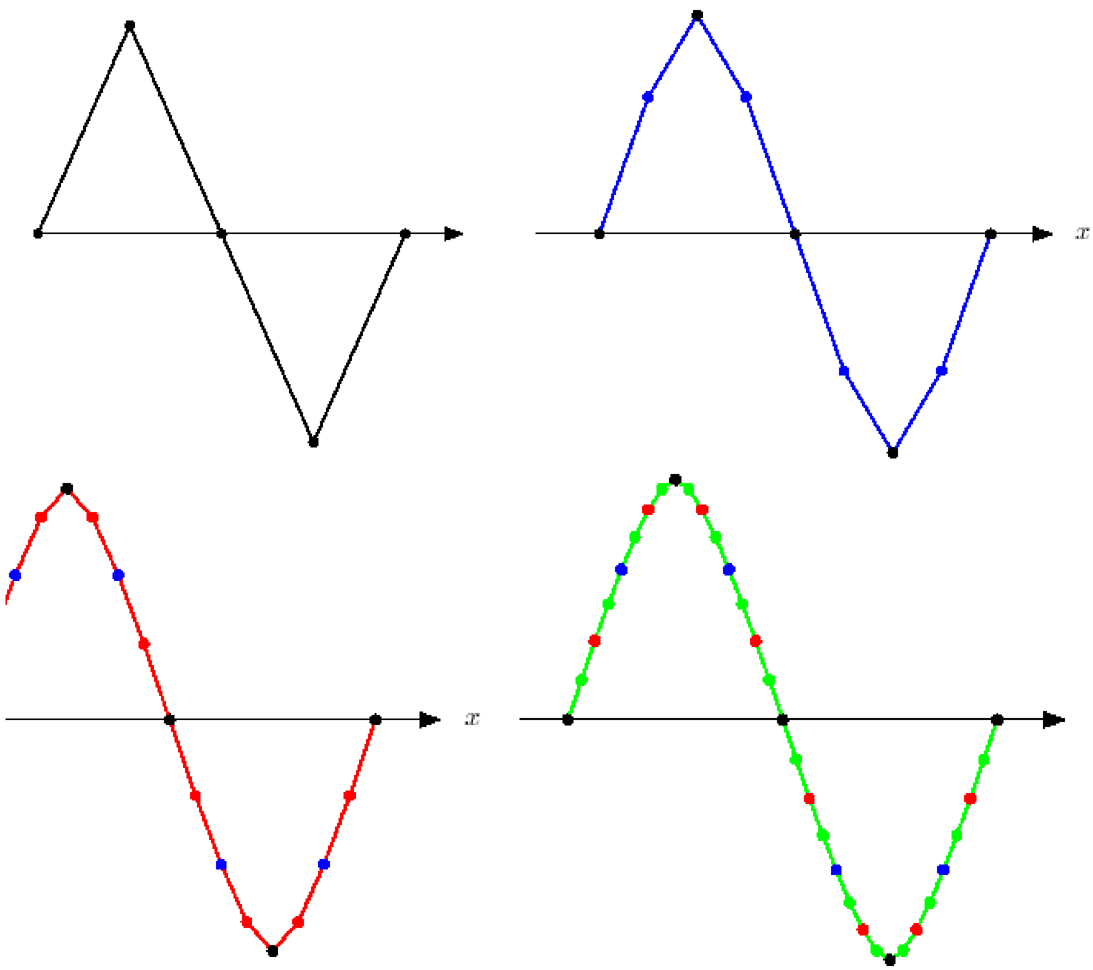
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{1}{16},\ \frac{9}{16},\ \frac{9}{16},\ -\frac{1}{16}$$

په تکيه-ځايونو $x_{k+1/2}$ د لاګرانژ-پولينوم ارزښتونه دي.
د بېلګې په بتوګه

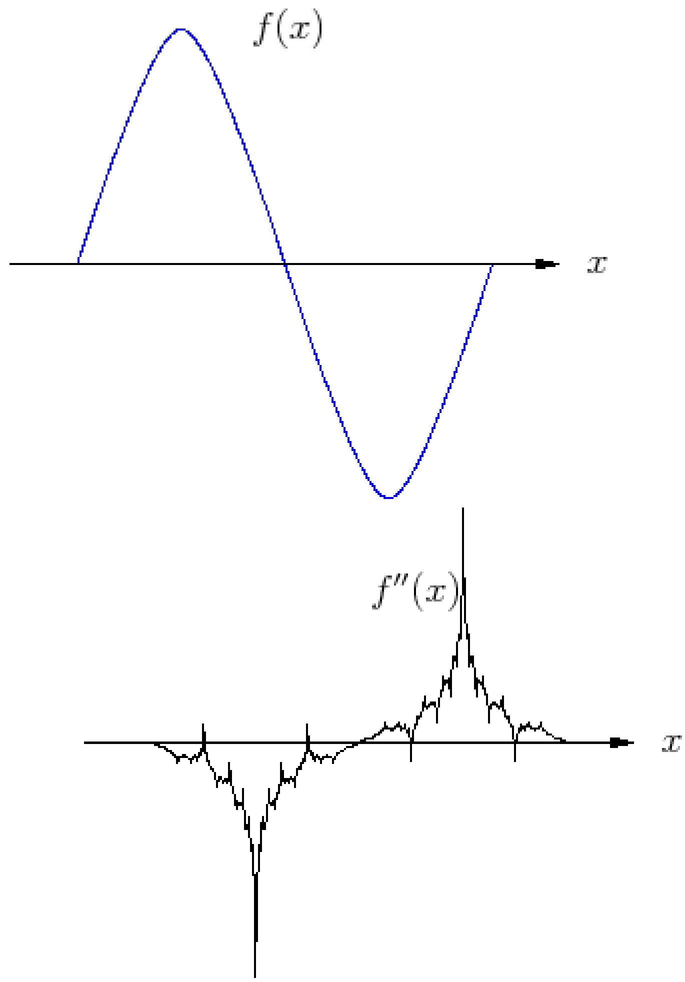
$$-\frac{1}{16} = \left(\frac{x-kh}{(k-1)h-kh}\,\frac{x-(k+1)h}{(k-1)h-(k+1)h}\,\frac{x-(k+2)h}{(k-1)h-(k+2)h}\right)\Bigg|_{x=(k+1/2)h}.$$

دی.
د سيمتري په بنسټ او دا چې ضريبونه بايد سيمتريک شي(د ثابتو داتا انترپوليشن) ، بې
له شمېرنې نور ضريبونه راکوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیره وتونداتا ښايي او د 4 -ټکو-انترپولیشن د دري ځله کاروني یا استعمال له لارې د منځ ته ارغلي ساین تابع اپروکسیمیشن . په حقیقت کې دا لاندې کېنې ښودل شوی پوله تابع خوی اغیز لري. مګر په هر حالت فقط لومړی مشتق ناپرېکیدونکی دی.



ښی ګرافیک وېشلی کمښت له لارې ورنږدې یا نږدې دویم مشتق د اته واره انترپولیشن پسې ښايي. سړی د ګراف فراکتال fraktalen (فراکتال: لاتین: مات) خویونه پیژني.

راشنل (کسری یا نسبتي) توابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

يو رينتونی تابع r د صورت درجې m او مخرج درجې n سره د دوه پولينمونو وېش دی:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}.$$

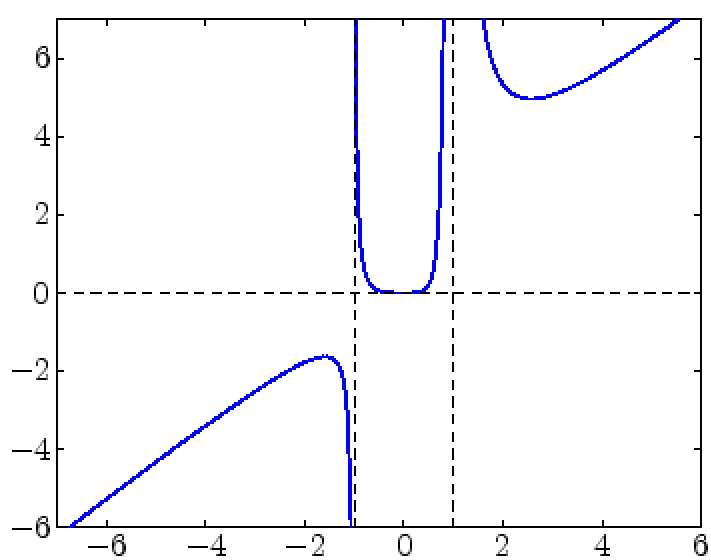
دا انځوونه نا ټوټه وونې بلل کيږي، که p او q کوم ګډ کربنيز ضريب يا فاکتور ونه لري. د مخرج صفرځايونه راشنل تابع r د تعريف تشځايونه دي او د قطبځايونه بلل کيږي. د دوی نظم د صفرځايونو ډېرځلوالی ښايي.

اووښتوني يا متحولې x او ضريبونه a_k, b_k کېدی شي حقيقي يا کمپلکس وي.
اړوند سړی د حقيقي يا کمپلکس راشنل تابع څخه غږيږي.
لليکونکي : اپپ، هيوليګ

تابع

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$$

تابع يو سادهقطب په $x=-1$ کې لري او ډبل پول په $x=1$ کې.



(c) ketabton.com: The Digital Library

سرې له تابع f څخه درک کوي، چې په يوه ساده صفرځای کې مخنښنه بدلوي او په يوه دبل صفرځای کې مخنښنه تغير نه خوري.

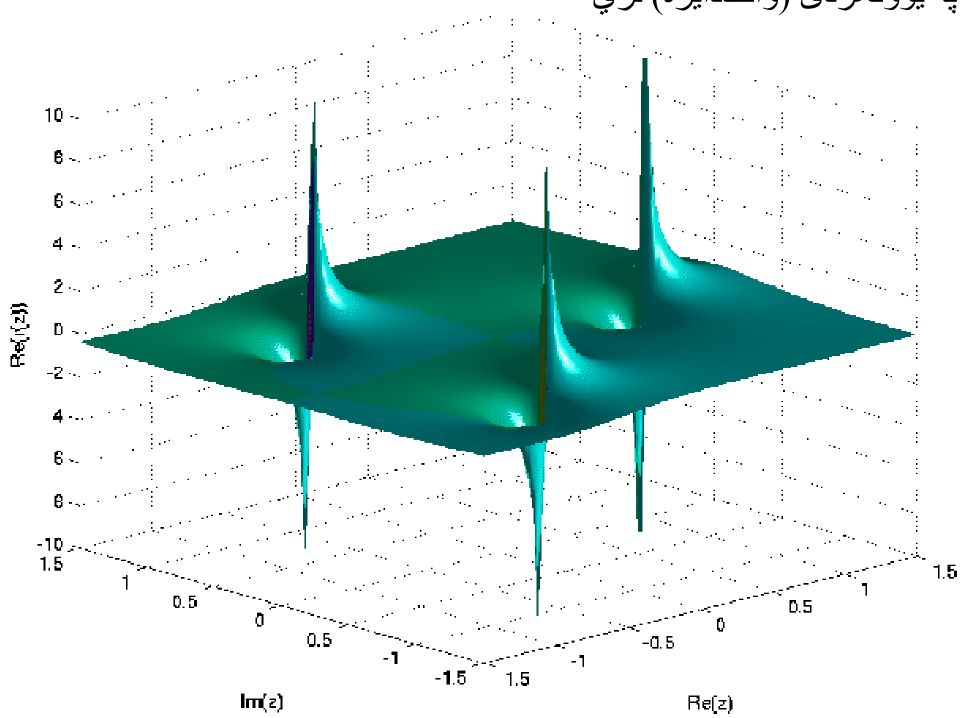
کمپلکس راشنل- يا کسري توابع

$$r(z) = \frac{z^2}{z^3 - 1}$$

درې صفرځايونه

$$z_1 = 1, z_2 = e^{2\pi i/3} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = e^{-2\pi i/3} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

په يوونکردی (واحددايره) لري



ځيره د r د ګراف رييل - او ايماجينار برخه ښايي. له دې سره د رنګوښنه (که چېرې رنګه وه) د r د مطلق ارزښت له لارې تاوکل شوې.

) ليکونکي: اېپ،هيورنر، کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه مات ټوټه کونه يا تجزيه کونه **Partialbruchzerlegung**

يو د m_j نظم راشنل تابع r د n مختلفو صفرځايونو z_j سره ،

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_n)^{m_n}$$

کيدی شي په لاندې ټوټه شي

$$r(z) = f(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z), \quad r_j(z) = \frac{a_{j,1}}{z - z_j} + \ldots + \frac{a_{j,m_j}}{(z - z_j)^{m_j}},$$

دلته f د $d = \text{Grad}\ p - \text{Grad}\ q$ Grad درجې پولينوم دی ($f = 0$ ، که $d < 0$ وی). راشنل توابع r_j د r په قطبځايونو کې اصلي برخې بلل کيږي. دا د $r(z)$ لوېدنه تشريح کوي د $z \to z_j$ لپاره. پولينوم f کيدی شي د پولينوموېش له لارې وشمېرل شي:

$$p = fq + g, \quad \text{Grad}\ g < \text{Grad}\ q\,.$$

دلته g د p په q باندې وېشنې پاتې يا باقي دی. ضريبونه $a_{j,\nu}$ کيدی شي د z^k د ضريبونو د پرتله کونې له لارې په کټوټوالي

$$p(z) = q(z)\left(f(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z)\right)$$

وټاکل شي.

د بديل په توګه د اصلي برخو ټاکلو لپاره د پوله ارزښت متود هم کارول کيدی شي.

د قطبونو د خوراجګو ضريبونو لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{j,m_j} = \lim_{z\to z_j}(z-z_j)^{m_j} r(z).$$

د يوه نظم $(m_j > 1)$ قطبخاى کې نه شي کېدى ضريبونه $a_{j,1},\dots,a_{j,m_j-1}$ سيده د پولې ارزښت په توګه وټاکل شي. سړى کړى شي دا اوس شميرل شوى ترم $a_{j,m_j}/(z-z_j)^{m_j}$ کم کړي او د رکورسيو متود وکاروي.. يو ضريب پرتله کونه د همدا اوس شته ترمونو په پام کې نيولو هم شونې ده.

پوله ارزښت کېدى شي وټاکل شي، داسې چې د r په مخرج کې ضريب $(z-z_j)^{m_j}$ لرې برېښوول شي او بيا z_j په پاتې کسر يا ـمات کې ځا په ځاى شي. په ځانګړې توګه باور لري

$$a_{j,1} = \frac{p(z_j)}{\prod_{k\neq j}(z_j-z_k)}$$

د ساده قطب ځايونو $z_1,\dots,z_n$ لپاره.
ليکونکي : اپ، هيورنر

د ساده قطبځايونو ($m_j = 1$) لپاره به ټوټه کونه منځ ته راشي. د پولينوم وېش پسې راشنل تابع منځ ته راځي

$$r(z) - f(z) = \frac{g(z)}{q(z)} = \frac{g(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_n)},$$

د کوم سره چې پولينوم $g(z)$ او $q(z)$ ګډ پروېشونى يا مقسوم عليه ونه لري، نيسو ، چې ټول z_j مختلف دي، او $\mathrm{Grad}\ g < n$ باور لري.
د ټوټه کسر ټوټه کوني سره د برابر اېښووني وروسته

$$\frac{a_1}{z-z_1} + \cdots + \frac{a_n}{z-z_n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a_j = a_{j,1}$ سره او د q د ضربول سره سړی د $g(z)$ د لاګرانژ ـانځورونه لاس ته راوړي

$$g(z)=\sum_{j=1}^{n}\left(a_j\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z-z_k)\right)=\sum_{j=1}^{n}\left[a_j\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z_j-z_k)\right]\underbrace{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{z-z_k}{z_j-z_k}}_{q_j(z)}$$

دا په ې معناچې د $q_j(z_k)=\delta_{j,k}$ له امله په ګوډیزه نوکانو کې د $g(z_j)$ ازښتونه

$$a_j = g(z_j)/\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z_j-z_k).$$

دي. له دې سره لاس ته راځي
په ورته توګه د جګو درجو قطبځایونه هم کار ول کېدی شي. دا مګر تخنیکي لږ پې]لی دی.
لیکونکي : اپ، هیورنر
د

$$r(z)=\frac{p(z)}{q(z)}=\frac{z^3}{z^2+z-2}$$

په ټوټه کسر(مات) ټوټه ونه دې وټاکل شي.
دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنی نه ده، باید لومړی یو پولینوم وېش صورت ونیسي. سړی لاس ته راوړي

$$\begin{array}{l}(z^3):(z^2+z-2)=z-1+\dfrac{3z-2}{z^2+z-2},\\ -(\underline{z^3+z^2-2z})\\ \quad -z^2+2z\\ \quad -(\underline{-z^2-z+2})\\ \qquad 3z-2\end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې $f(z) = z - 1, \quad g(z) = 3z - 2.$ د $r = f + \frac{g}{q}$ سره .

د دې لپاه چې د ټوټه مات ټوټه ونې ايبنونه چې لاس ته راوړو بايد اوس د r قطبځايونه وټاکل شي. د منځشپې فرمول سره لاس ته $z_1 = 1$ او $z_2 = -2$ راوړو د مخرج پلينوم د صفځای په څېر:

$$q(z) = (z-1)(z+2).$$

د g/q ټوټه مات ټوټه ونه له دې سره لاندې بڼه لري

$$\frac{3z-2}{z^2+z-2} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{z+2}.$$

دا اخر پل د ضريبونو a_k ټاکل دي.

د پوله ارزښت متود سره لاس ت ه راځي

$$a_1 = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{3z-2}{z^2+z-2} = \left.\frac{3z-2}{z+2}\right|_{z=1} = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \left.\frac{3z-2}{z-1}\right|_{z=-2} = \frac{8}{3}.$$

او

په ټوليزه توګه لاس ته راځي

$$r(z) = z - 1 + \frac{1/3}{z-1} + \frac{8/3}{z+2}.$$

پای.

راشنل توابع

$$r(z) = \frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}$$

په $z_1 = 3$ کې يوه سادهقطبځای لري او په $z_2 = 0.$ کې يو دبل قطبځای لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنۍ ده، پولینوم وېش ته اړتیا نه شته او د په ټوټه کسر ټوټه ونه دا بڼه لري

$$\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\frac{a_1}{z^2}+\frac{a_2}{z}+\frac{a_3}{z-3}.$$

د پوله ارزښت متود سره لرو

$$a_1 = \lim_{z\to 0} z^2\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\left.\frac{2z^2-5z-3}{z-3}\right|_{z=0}=1$$

$$a_3=\lim_{z\to 3}(z-3)\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\left.\frac{2z^2-5z-3}{z^2}\right|_{z=3}=0\,.$$

سړی په ساده ډول کړی شي، چې دا پاتې (هغه په اصطلاح، چې ورته وایو باقي مانده) ضریبونه a_2 په یوه ټکي $z\neq 0,3$ د تابع ارزښتونو د پرتوله کوني له لارې وټاکي.
د بېلګې په توګه د $z = 1$ لپاره لرو

$$\frac{2-5-3}{1-3}=1+a_2+0$$

او سړی $a_2=2$ لاس ته راوړي.
لیکونکي: اپ،هیورنر
د راشنل توابعو لپاره

$$r(z)=\frac{z^2-5z+4}{z^3-3z^2+z+5}$$

لپاره قطبځایونه روښانه نه دي. د ازمایښت له لارې $z_1=-1$ پیداکیږي او بیا د پولینوم وېش سره لاس ته راځي

$$(z^3-3z^2+z+5):(z+1)=z^2-4z+5.$$

.

د نیمي شپې فرمول سره د مخرج نور صفرځایونه $q(z)$ لاس ته راځي

$$z_{2,3}=2\pm i.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره ماتلاندې يا مخرج ضريبه ونه يا فاکتوری کونه

$$q(z) = (z+1)(z-2-i)(z-2+i)$$

لري او د ټوټه کسر ټوټه کونه داسې ده

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-2-i} + \frac{c}{z-2+i}.$$

د دې لپاره چې a, b, c د ضريبونو د پرتلې له لارې وټاکو، د مخرج $q(z)$ سره وپشو او لرو

$$+ 4 = a(z-2-i)(z-2+i) + b(z+1)(z-2+i) + c(z+1)(z-2-i).$$

د $1, z, z^2$ د ضريبونو د پرتله کوني له لارې د درې ناټاکلو يا نامعلومو a, b او c لپاره يو کرښيز مساوات سيتم لاس ته راځي:

a	b	c	
1	1	1	1
-4	$-1+i$	$-1-i$	-5
5	$-2+i$	$-2-i$	4

د حل په حيث لاس ته $b = i/2$ $a = 1,$ او $c = -i/2$ راځي ، دا په دې معنا ، چې

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{i/2}{z-2-i} + \frac{-i/2}{z-2+i}.$$

که اخري دواړه ترمونه سره يوځای کړو، نو حقيقي ټوټه کسر ټوټه ونه لاس ته راځي

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1/4}{z^2-4z+5}.$$

د حقيقي ټوټه کسر ټوټه ونه يا تجزيه

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو حقيقي ريښتونی يا راشنل تابع r د حقيقي قطبځايونو x_j سره او کمپلکس کنجوګيري قطبځايونو i $u_k \pm$ v_k سره او څو واره والی يا ډېروالی همداسي m_j n_k

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(x) = \prod_j (x - x_j)^{m_j} \prod_k ((x - u_k)^2 + v_k^2)^{n_k}$$

کيدی شي په لاندې بڼه

$$r(x) = f(x) + \sum_j \sum_{\nu \le m_j} \frac{a_{j,\nu}}{(x - x_j)^\nu} + \sum_k \sum_{\mu \le n_k} \frac{b_{k,\mu}(x - u_k) + c_{k,\mu}}{((x - u_k)^2 + v_k^2)^\mu}$$

ټوټه کيږي، د $d = \text{Grad } p - \text{Grad } q$ درجې ($f = 0$ ، که $d < 0$ وي)

يوه پولينوم f سره. د په هر قطبځای زياتونونو يا د جمعي غړو د ګڼون يا تعداد ډېرواره والی په ګوته کوي. په ځانګړې توګه د ساده قطبځای لپاره باور لري

$$r(x) = f(x) + \sum_j \frac{a_j}{x - x_j} + \sum_k \frac{b_k(x - u_k) + c_k}{(x - u_k)^2 + v_k^2}.$$

پولينوم f کيدی شي دپولينوم وېش له لارې وټاکل شي

$$p = fq + g, \quad \text{Grad } g < \text{Grad } q,$$

دا په دې معنا چې q د p وېش په g باندې پاتې يا باقي دی. ضريبونه کيدی شي د مخرج پولينوم سره له ضرب وروسته دضريبونو د پرتلې له لارې وشمېرل شي.
حقيقي ټوټه کسر ټوټه کونه هم کيدی شي د کمپلکس بڼې څخه و کټل شي يا لاس ته راوړل شي، داسې چې سړی کمپلکس کنجوګيري ترمونه سره يوځای کاندې.

ټوټه کونه د ساده قطبځايونو ($m_j = n_k = 1$) لپاره سرته رسيږي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

د r کمپلکس ټوټه کسر ټوټه کونه په دې حالت کې دا لاندې بڼه لري

$$p(x) + \sum_j \frac{a_j}{x - z_j}$$

د z_j سره د مخرج پرلینوم q ساده صفرځایونه او

$$a_j = \lim_{z \to z_j} (z - z_j) r(z).$$

دا q چې حقیقي دی، نو کمپلکس صفرځایونه د کمپلکس کونجږګیري جوړوړپه توګه منځ ته راځي:

$$z_k = u + \mathrm{i} v, \quad z_l = u - \mathrm{i} v = \overline{z_k}.$$

له دې سره د اړونده ترمونو لپاره لاندې ټوټه ونه باور لري

$$\overline{a_k} = \lim_{z \to z_k} \overline{(z - z_k) r(z)} = \lim_{\overline{z} \to z_l} (\overline{z} - z_l) r(\overline{z}) = a_l,$$

دا په دې معنا، چې

$$a_k = s + \mathrm{i} t, \quad a_l = s - \mathrm{i} t.$$

د دواړو ترمونو یوځای کونه غوښتونې بڼه راکوي:

$$\frac{s + \mathrm{i}t}{x - u - \mathrm{i}v} + \frac{s - \mathrm{i}t}{x - u + \mathrm{i}v} = \frac{2s(x-u) - 2tv}{(x-u)^2 + v^2}.$$

د جګو درجو قطبځایونه کیدی شي په ورته توګه تر څېړنې ونیول شي، مګر دلیل راوړنه یې په څرګنده توګه پیچلې ده.

د

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{2x^3 - 9x^2 + 11x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x}$$

حقیقي په ټوټه کسر ټوټه کونې ټاکنه په درې پلونو یا قدمونو وېشل کیږي

(i) دا چې $\mathrm{Grad}\ p \geq \mathrm{Grad}\ q$ دی، لومړی د پلوینوم وېشنه صورت نیسي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$(2x^3 - 9x^2 + 11x + 1) : (x^3 - 4x^2 + 5x) = 2$$

$$g(x) = -x^2 + x + 1.$$

پاتې

له دې سره لاس ته راځي

$$r(x) = f(x) + \frac{g(x)}{q(x)} = 2 + \frac{-x^2 + x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x}.$$

(ii) د دې لپاره چې د g/q ټوټه وني اینبوونه یا اسعمال پیداکړو، نو قطبځایونه ټاکو یا پیدا کوو.

د q د صفرځایونو $x = 0$ د نوکانو دباندېکونې وروسته د مبع تکمیل له لارې سرې نور دواړه صفرځایونه لاس ته راوړي:

$$x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1^2.$$

دا پاتې صفرځایونه کمپلکس کونجوګیري جوړې $u \pm iv = 2 \pm i$ دي.له دې سره اینبوونه په لاندې توګه ده

$$\frac{-x^2 + x + 1}{x((x-2)^2 + 1^2)} \;=\; \frac{a}{x} + \frac{b(x-2) + c}{(x-2)^2 + 1^2}.$$

(iii) د ضریبونو د ټاکنو لپاره د اصلي مخرج q سره ضربېږي او ترې لاس ته راځي

$$-x^2 + x + 1 \;=\; a((x-2)^2 + 1^2) + b(x-2)x + cx$$

د x, 1 او x^2 ضریبونو پرتله مو کربنیز مساوات سیستم ته بیایي

$$1 = \qquad 5a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned} 1 &= -4a - 2b + c \\ -1 &= \qquad\quad a + b \end{aligned}$$

د لاندې حل سره

$$a = \frac{1}{5},\ b = -\frac{6}{5},\ c = -\frac{3}{5}\,.$$

له دې سره حقيقي ټوټه کسر ټوټه کونه ده

$$r(x) = \frac{1/5}{x} + \frac{-6/5(x-2) + (-3/5)}{(x-2)^2 + 1^2}.$$

د ټاکلو لپاره پوله ارزښت متودونه هم کارول کيږي. که دا اېښوونه يا ځای په ځای کونه د x سره ضرب شي او $x = 0$ کيږدي، نو لاس ته ترې راځي

$$\frac{1}{2^2 + 1^2} = a + 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{5}.$$

د $x = 2$ ځای په ځای کونې سره c لاس ته راځي:

$$\frac{-2^2 + 2 + 1}{2(0^2 + 1^2)} = \frac{1/5}{2} + \frac{c}{0^2 + 1^2} \Longrightarrow c = -\frac{3}{5}.$$

بالاخره کېدی b د ټکی ازماېښت $x \neq 2$ له لارې ، د بېلګې په توګه $x = 1$ منځ ته راشي.
پای.

د

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

حقيقي ټوټه کسر ټوټه کونې ټاکلو په دوه پلونو يا قدمونو کې ترتيبيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(i) د اینسوونې د ټاکلو لومړی قطبځایونه پیدا کیږي. له

$$q(x) = (x^2+1)^2$$

پیژندل کیږي، چې $\pm i$ ډبل صفرځایونه دي، دا په دې معنا چې $u=0$ او $v=1$.
له دې سره دا اینسوونه ده

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{b_1x+c_1}{x^2+1} + \frac{b_2x+c_2}{(x^2+1)^2}.$$

(ii) د ضریبونو د ټاکلو له امله دا سړی د اصلي مخرج q سره ضربوي او لاس ته
ترې راوړي

$$\begin{aligned} x^3 &= (b_1x+c_1)(x^2+1)+b_2x+c_2 \\ &= b_1x^3+c_1x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2)1. \end{aligned}$$

د $1, x, x^2$ او x^3 د ضریبونو پرتله کونه مو کرښیز سیستم ته بیایي

$$\begin{aligned} 1 &= b_1 \\ 0 &= c_1 \\ 0 &= b_1+b_2 \\ 0 &= c_1+c_2 \end{aligned}$$

د لاندې حل سره

$$b_1=1,\ c_1=0,\ b_2=-1,\ c_2=0\,.$$

بدیلې کیدی شي د کمپلکس ټوټوه کسر ټوّ کونې ځخه مخ ته لاړ شو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{a}{z-i} + \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{c}{z+i} + \frac{d}{(z+i)^2}.$$

ضریبونه $c = \overline{a},\ d = \overline{b}$ پوره کوي او د جمعي جوړولو له لارې

$$\frac{a}{z-i} + \frac{c}{z+i},\ \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{d}{(z+i)^2}$$

هم حقيقي توټهكسر توټه كونه لاس ته راوړي

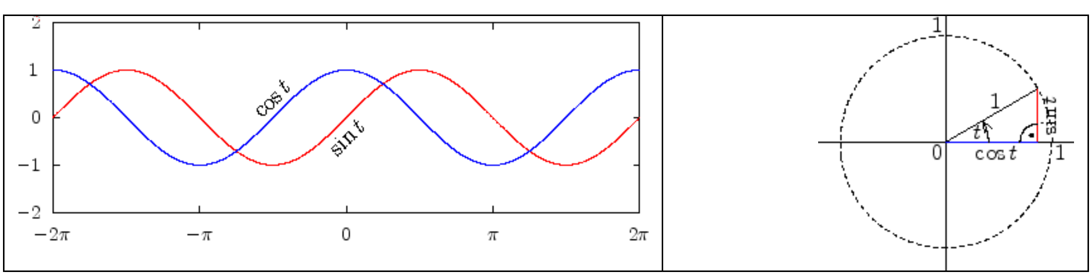
$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2}.$$

ساین او کوساین **Sinus und Cosinus**

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

سره په سرچینه په کونج t خرخول شوی ټکی $(1,0)$ کواوردینات نومولکيږي . د تر مخنښي پورې کوساين او ساين په يوه ولاړکوديز يرېکوډي (المثلث القايم الزاويه) کې د ولاړ اړخونو(هغه اضلاع وې چې يو د بل سره قلموازاويه جوړه وي) نسبت د نيمی(قطر) سرره په ګوته کوي.



دواړه ګردی توابع يا د داېرې توابع 2π - تلبېرته راګرځېدوني يا 2π - پريوديکي دي او باور لري

$$\cos t = \sin(t + \pi/2)$$

, •

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$$

• ,

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

• .

يو څو ځانګړي ارزښتونه دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

د اويلر-مويورې فرمول Formel von Euler-Moivre

يو اکسپوننشل تابع د ايماجينار x -محور سره کېدی شي د $t \in \mathbb{R}$ لپاره د تريګونومتريک(درېګوډي - يا مثلثاتي -) توابع په مرسته افاده شي.

$$\cos t + \mathrm{i}\sin t = \exp(\mathrm{i}t)$$

کوساين او ساين حقيقي – او ايماجينار ګنونه(عددونه) په ګوته کوي د ارزښت 1 ($|\exp(\mathrm{i}t)| = 1$) سره .

که پورته فرمول اينورتير يا معکوس شي ، نو لاس ته راځي

$\cos t$	$= \mathrm{Re}\, e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}t} + e^{-\mathrm{i}t}\right)$
$\sin t$	$= \mathrm{Im}\, e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}\right)$.

د اکسپ، کوساين او ساين کټمټوالی اويلر او مويورې ته ځي. دا د جيومتريکي کمپلکس عددونو د انترپوليشن لپاره بنسټ جوړوي او د فوری-اناليوز کې غوره رول لوبوي.

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د ساين او کوساين لپاره د زياتون- يا جمع قضيه

(c) ketabton.com: The Digital Library

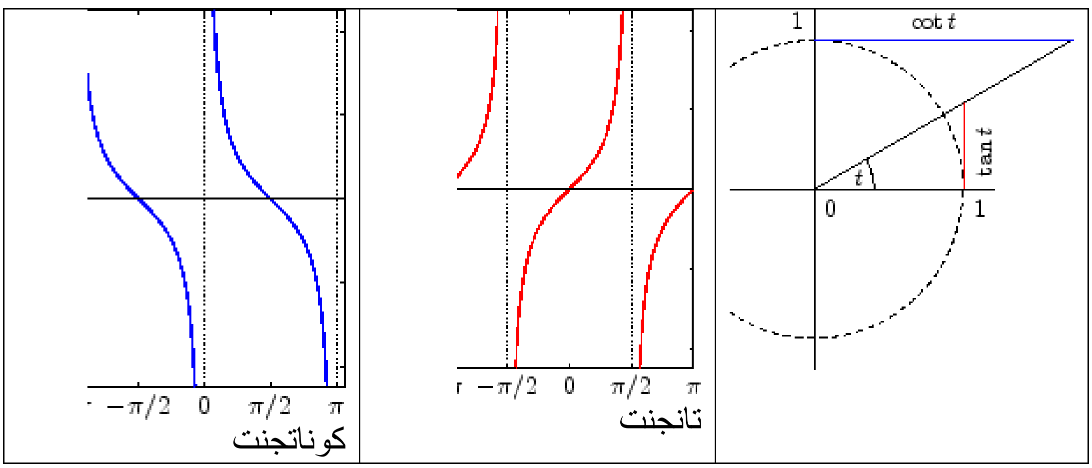
د گردۍتوابعو $\sin t$ او $\cos t$ لپاره لاندې اړیکې باور لري:

- $$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
- $$\sin(\alpha+\beta)=\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta$$

په ځانګړې توګه دی

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\qquad \sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

تانجنت او کوتاجنت **Tangens und Cotangens**



د تانجنت او کوتانجنت توابع د

$$\tan t=\frac{\sin t}{\cos t},\qquad \cot t=\frac{\cos t}{\sin t}$$

له لارې تعریف دي. دا تر دمخنښې پورې د ولاړګوډیز درېګوډي(- - مثلث) د ولاړګوډونو Katheten نسبت ورکوي

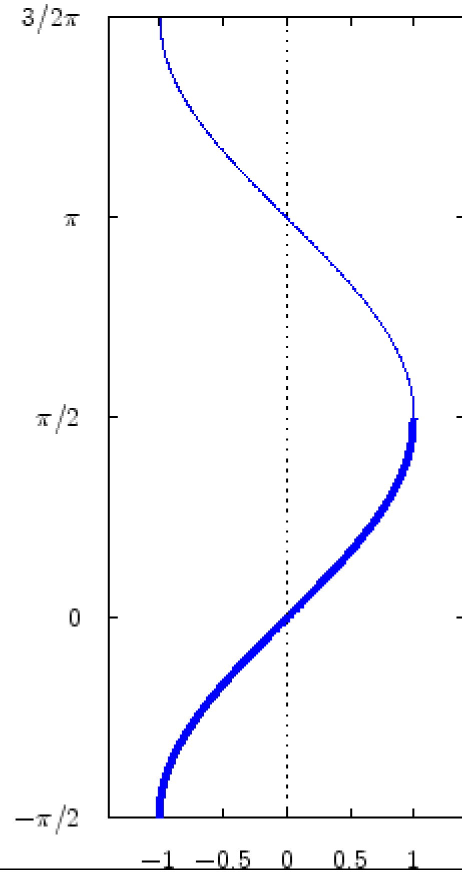
یو څو ځانګړي ارزښتونه دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

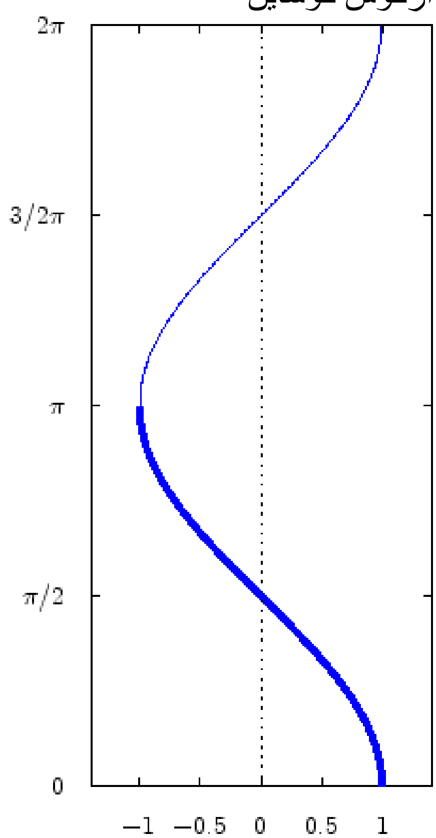
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

د اركوس توابع **Arcusfunktionen**

اركوس ساين

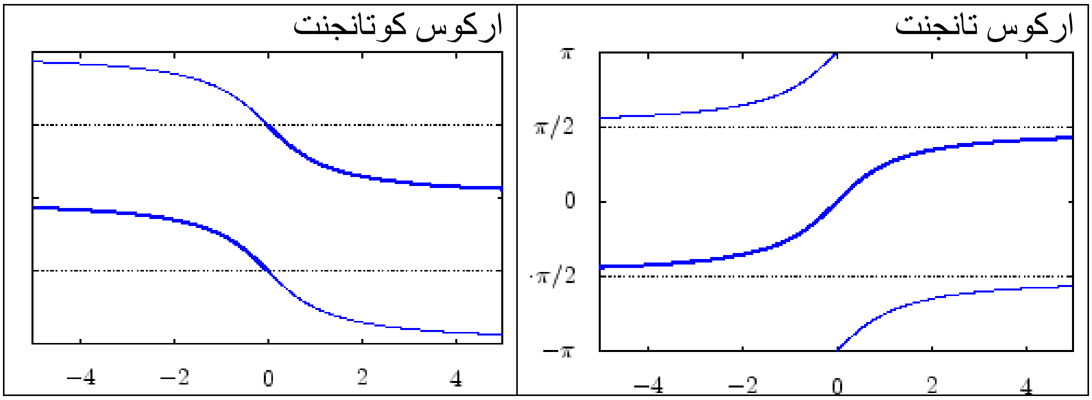


اركوس كوساين



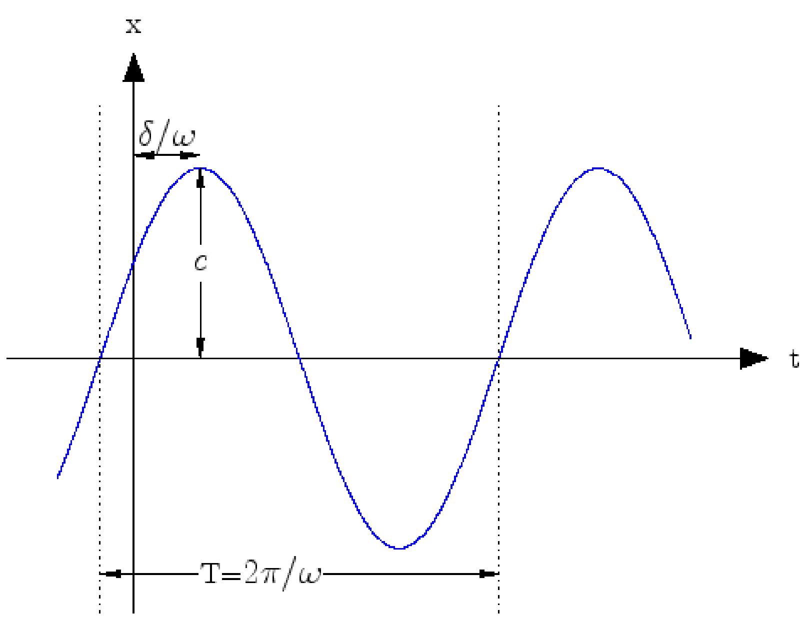
د درېګوډيز (ترېګونومتريکي يا مثلثاتي) توابعو په څټ يا معکوس توابع د arccos, arcsin, arctan, arccot سره ښوول کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دي تعريف – او ارزښت ورشو د پورته ځېرې څخه رانيول کېدی شي.
له دې سره اصلي ځانګې غوړې یا پنډې کښل شوي دي.
ليکونکي: هيوليک، کنويف، کنش

هارمونيک لړځيدني يا رپيدني
Harmonische Schwingung



(c) ketabton.com: The Digital Library

يو هارمونيکي لړځيدنه د جګوالي Amplitude $c \geq 0$ سرره،د فاز بلځای ته وړنه يا راکښنه δ او فرکونځ ω همداسې پريودېوالی يا تل (بيرته) راګرځيدنه $T = 2\pi/\omega$ لاندې بڼه لري

$$x(t) = c\cos(\omega t - \delta)\ .$$

ورته يا برابر ارزښته انځورونه ده

$$\mathrm{Re}\, c\exp(\mathrm{i}(\omega t - \delta))$$

يا

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

د $a = c\cos(\delta), b = c\sin(\delta)$ سره ، دا په دې معنا چې (c,δ) د (a,b) قطبي کواورديناتونه دي.
پای.

د پارمتر شميربدلون د جمعي تيورم څخه لاس ته راځ:

$$c\cos(\omega t - \delta) = c\left(\cos(\omega t)\cos(\delta) + \sin(\omega t)\sin\delta\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a = c\cos\delta, \quad b = c\sin\delta.$$

برعکس دی

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \delta = \arctan(b/a) + \varphi$$

د لاندې سره

$$\varphi = \begin{cases} 0, & \text{für } a \geq 0 \\ \pi, & \text{für } a < 0 \text{ und } b \geq 0 \\ -\pi & \text{sonst.} \end{cases}$$

پای.

د هارموني رپيدنې يو پر بل پرېوتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

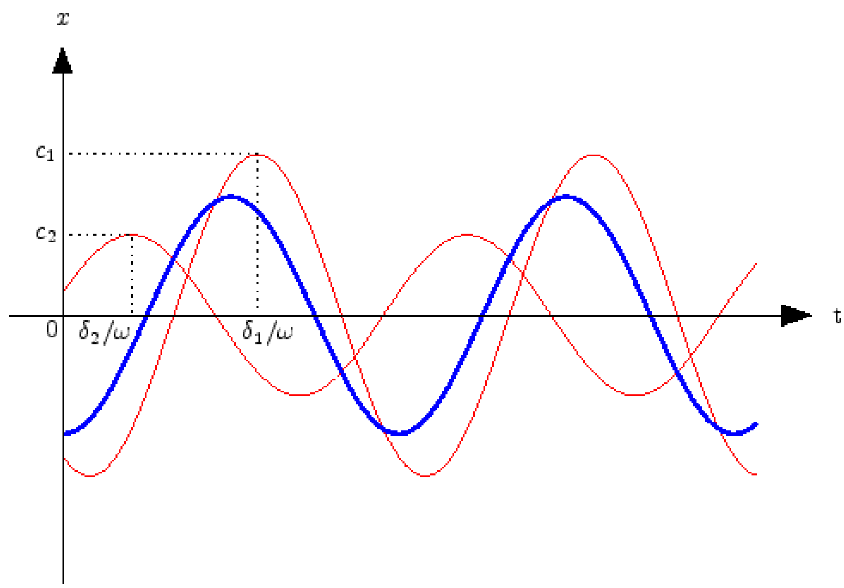
د دوه هارمونې رپېدنو يو پر بل پرېوتنه (په ځېره کې غوړ کښل شوي دي)

$$x_k(t) = c_k \cos(\omega t - \delta_k), \quad k = 1, 2 \,,$$

د

امپليتودې سره هارمونيک دي

$$c = \sqrt{c_1^2 + 2\cos(\delta_1 - \delta_2) c_1 c_2 + c_2^2} \,.$$



ليکونکي: هيوليک، کويف،کنش

د يو پر بل پرېوتني کمپلکس بڼه

$$\mathrm{Re}\,(c_1 e^{\mathrm{i}\omega t - \delta_1} + c_2 e^{\mathrm{i}\omega t - \delta_2}) = \mathrm{Re}\,([c_1 e^{-\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{-\mathrm{i}\delta_2}] e^{\mathrm{i}\omega t})$$

راکوي

$$[\ldots] = c e^{-\mathrm{i}\delta} = z$$

او له دې سره

$$c^2 = z\bar{z} = (c_1 e^{-\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{-\mathrm{i}\delta_2})(c_1 e^{\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{\mathrm{i}\delta_2}) \,.$$

$$e^{\mathrm{i}s} + e^{-\mathrm{i}s} = 2\cos s$$

د په پام کې نيولو سره ضربونه غوښتنه راکوي..

په بديله ت وګه کېدی شي امپليتود انځورونې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_k(t) = a_k \cos(\omega t) + b_k \sin(\omega t)$$

څخه وشمېرل شي. سرې لاس ته راوړي

$$c = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}\ .$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

په درځ يا مته باندې کړولو هارموني لړځېدنه يو په بل پرېوځي

$$\cos(\omega t - \delta_k), \quad \delta_k = k\delta,\ k = 0, \ldots, n,$$

د برابر يا همغه فرکونځ او امپليتود. لړځېدنه د کمپلکس انځوروني په مرسته د دې لاندې حقيقي برخې په حيث لاس ته راځي

$$e^{i\omega t} + e^{i(\omega t - \delta)} + \ldots + e^{i(\omega t - n\delta)} = e^{i\omega t}\frac{1 - (e^{-i\delta})^{n+1}}{1 - e^{-i\delta}}$$

$$= e^{i\omega t}\frac{e^{-i\frac{n+1}{2}\delta}(2i\sin\frac{n+1}{2}\delta)}{e^{-i\frac{\delta}{2}}(2i\sin\frac{\delta}{2})} = \left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\right)e^{i(\omega t - \frac{n}{2}\delta)}\ .$$

يو په بل پرېوتنه لاندې امپليتود لري

$$\frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

او فاز $(n/2)\delta$.

د $\omega = 0$ سره د ايماجينار برخې د پرتله کوني له لارې تريګونمتريکی کتمتوالی راکوي.

$$\sin\delta + \ldots + \sin n\delta = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta\,\sin\frac{n}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\ .$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه لړځېدنو $c_k e^{i\omega_k t}$ یو پر بل پرېوتنه کېدی شي د

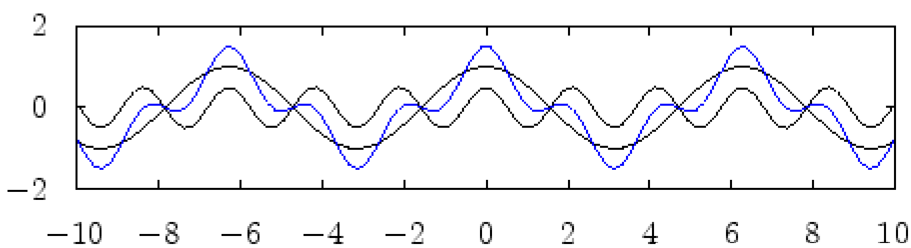
$$c(t)e^{i\bar{\omega}t}, \quad c(t) = c_1 e^{-i\Delta\omega t} + c_2 e^{i\Delta\omega t},$$

په ضرب د $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ او $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$ سره ولیکل شي.
لاس ته راغلی داسي په نامه مودولیري رپېدنه تیک هلته پریودیکي ده، که د فرکونڅ نسبت ω_1/ω_2 راشنل وي.
د مودولي شوی کمپلکس امپلیتود مینیمال او ماکسیمال ارزښت همداسي مطلق ارزښت د $|c_1 - c_2|$ همداسې $c_1 + c_2$ ترمنځ لوړ تیټ کیږي. په ځانګړې توګه دی

$$c(t) = 2c\cos(\Delta\omega t)$$

د همغې یا برابرې امپلیتود $c = c_1 = c_2$ لپاره.
لاندې ځیرې یو څو بیپیکي حالتونه په ګوته کوي

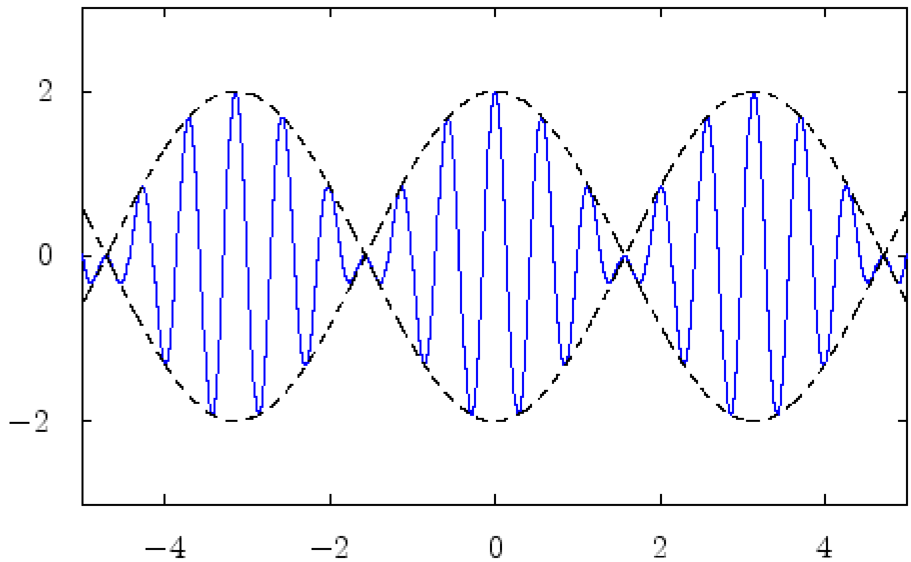
- periodische Überlagerungپریودیکي یو پر بل پرېوتنه



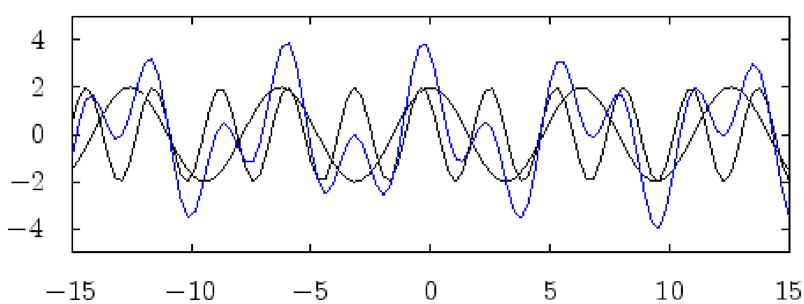
$\cos t + \frac{1}{2}\cos 3t$

- برابر امپلیتود c_k او $\omega_1 \approx \omega_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



• aperiodische Überlagerung اپريوديکي يا نه - يو پر بل پرېوتنه



$2\cos t + 2\cos(\sqrt{5}t + \frac{\pi}{4})$

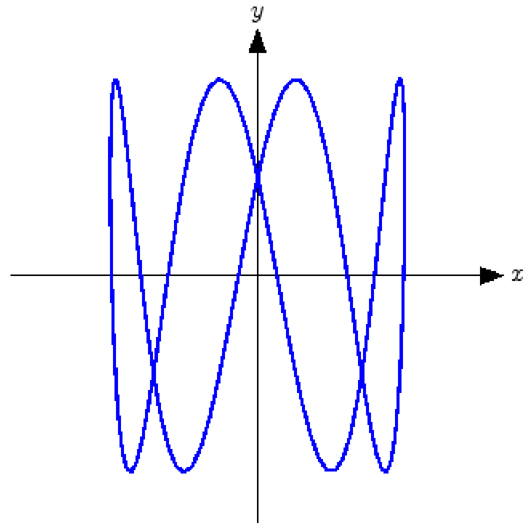
پاي.

د سطي لړځېدنو يو پر بل پرېوتني د لړځېدنو مختالف لورو (a_1, a_2) او (b_1, b_2) کږې يا منحني

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2),$$

لاس ته راځي چې د مخترع Lissajous-Figuren ليساجوس –ځيرې بللکيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

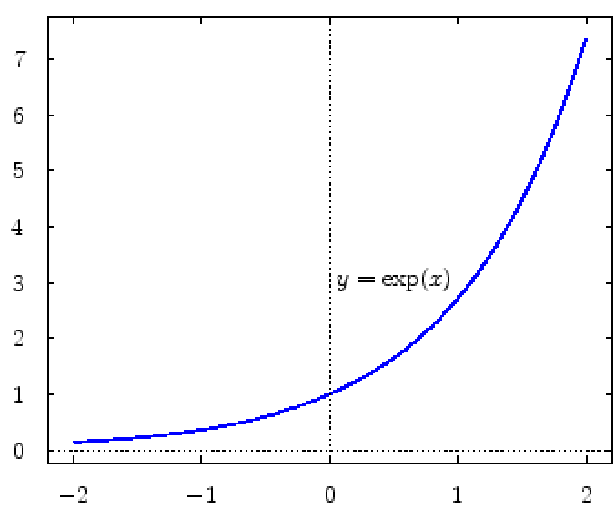


خبره د پارامتر يوه بېلګه بڼايي

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega_1 = 1\,, \quad \delta_1 = 0\,, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = 4\,, \quad \delta_2 = \frac{\pi}{3}\,.$$

پای.

اکسپوننشل توابع
Exponentialfunktion



توان تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = e^x = \exp(x)$$

$x \in \mathbb{R}$

د اویلر عدد $e = 2.71828...$ سره اکسپونشل تابع بلل کیږي. دا د ټول لپاره مثبت ده او د تابع مساوات پوره کوي

$$e^{x+y} = e^x e^y \ .$$

$$e^{-x} = 1/e^x$$

په ځانګړې توګه

ګټه یا ربح Verzinsung

یوبیل بډایی د – وارهد اخستني همداسي او ورکوني وروسته د یوې ګټوې Rate r ($r < 0$ همداسي $r > 0$) د یوې ګټونې فاکتور $(1+p)$ سره لاندې پای بډایی ورکوي

$$y = (1+p)^n x + \frac{(1+p)^n - 1}{p} r \ .$$

دلته $p = 1$ د 100% یو ګټه اینسوونه ده په کلنۍ ګټه ا چونې سره.

فعاله کلنی ګټه د میاشتنۍ ګټونې څخه شمېرل کیږي د یوه ګټې اینسونې p_m سره و لاندې ته

$$p_j = (1+p_m)^{12} - 1 \geq 12 p_m \ .$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

بنسټ بډایۍ په همدې لومړني ګټونې پریود کې په پام کې نیول کیږي، اخستنه ههمداسي اچونه لومړی د وریسې کال. په لاندې توګه یا د اسې راکوي

$$n = 1: \quad y = x(1+p) + r,$$
$$n = 2: \quad y = \big(x(1+p) + r\big)(1+p) + r.$$

په ټولېزه توګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = (\cdots(x(1+p)+r)(1+p)+r)\cdots)$$
$$= x(1+p)^n + \left[1+(1+p)+(1+p)^2+\cdots+(1+p)^{n-1}\right]r$$

دا په ګوډيزو نوکانو کې افاده کېدی شي په هندسي جمعه فرمول واړوي او سړی دا ورکړ
شوی فرمول لاس ته راوړي.
پای.

د منهتان خرڅول 1626زک مورګن(د ځمکي د کچوني يوون يا واحد دی) 11000
Morgen د يوه حاضر قيمت په رانيولو ګټور تمام شو، ځکه چې په کلنی7 په سلو کې
ګټه دا بډايي په کال 2000 زک کي

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot(1.07)^{374} = 5.857\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\;(\triangleq 2.658\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

ده(که متمأن بانکونه او د اسعارو رفورم له مخه نه وي نيول شوی يا فرض شوی).
په مياشتنی ګټه لرو

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot(1+7/1200)^{4488} = 13.030\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\;(\triangleq 5.913\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

او

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot\exp(0.07\cdot374) = 14.060\cdot10^{12}\,\mathrm{NLG}\;(\triangleq 6.380\cdot10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

د ټوليزې ګټوني سره.
که مورګن د 0.81 Ha هکتارسره وشمېرل شي، نو د منهتان دا ننني سطحه د89
مربعکيلو متره ورکوي. يو کور هلته نن نږدې6500 USD/Quadratmeter امريکايي
ډالر په مربع متر ارزښت لري. دا پيسې به د يوه کور تعميرلپاره چې څلور پوړيز وي
ورسيږي، چی په ټوله سطحه ونيسي.
پای.

د يوه $x = 200000$ يوروپور ، $n = 30$ کلونو لپاره او يوې کره شوې ګټې پينې
$p = 5$
په سلو کې مياشتنی ګټه لاندې ده

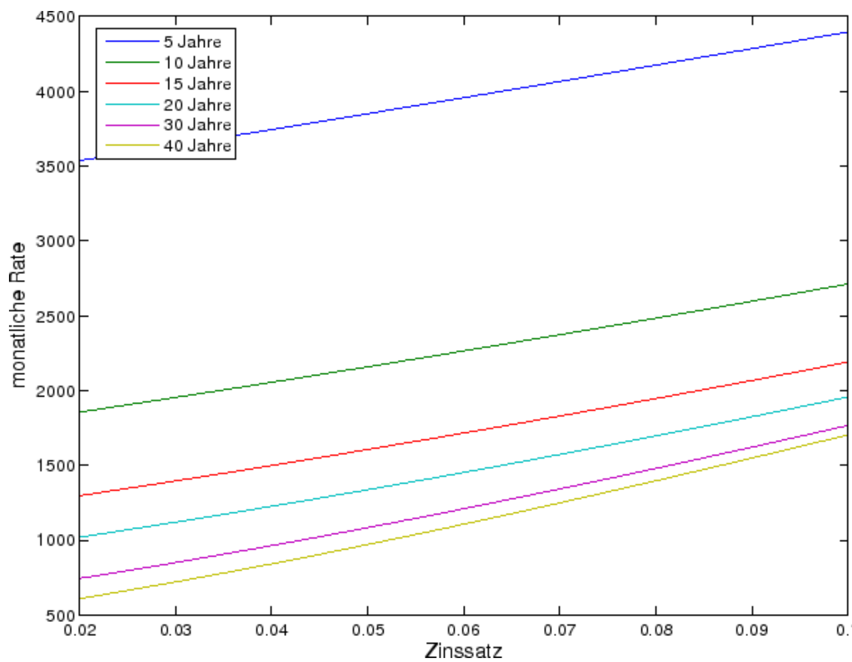
$$p_m = (1+p)^{1/12} - 1 = 0.4074\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او میاشتنی رات یا کټه ده

$$r = \frac{p_m(1+p)^n}{(1+p)^n - 1} x = 1060.11\,\mathrm{EUR}.$$

د لاندې پسې تړلي له ګټي فرمول څخه د صفرایښووني له لارې د پور ارزښت راکوي او
د $(1+p_m)^{12} = 1+p$ په پام کې نیولو سره .
ټوله تادیه $30 \cdot 12r = 381639.60$ یورو د پور جمعي څخه د په 90.8 په سلو کې اوړي(د بانک مزدوري پرې زیاته).



پروت: ګټونه یا د ګټې پینه ، ولاړ: میاشتنی کټه
ګراف میاشتنی کټه ښایي د یوه 200 000 یورو پور لپاره د ګټي پیني د ضریب په څېر د مختلفو وختونو لپاره.
پای.

کلني د پیسو ورکونه $z = 10000$ یور د یوې 7 په سلو کې ګټوني ته د $n = 12$ کلونو وروسته یوه دا لاندې بډایي ورکوي

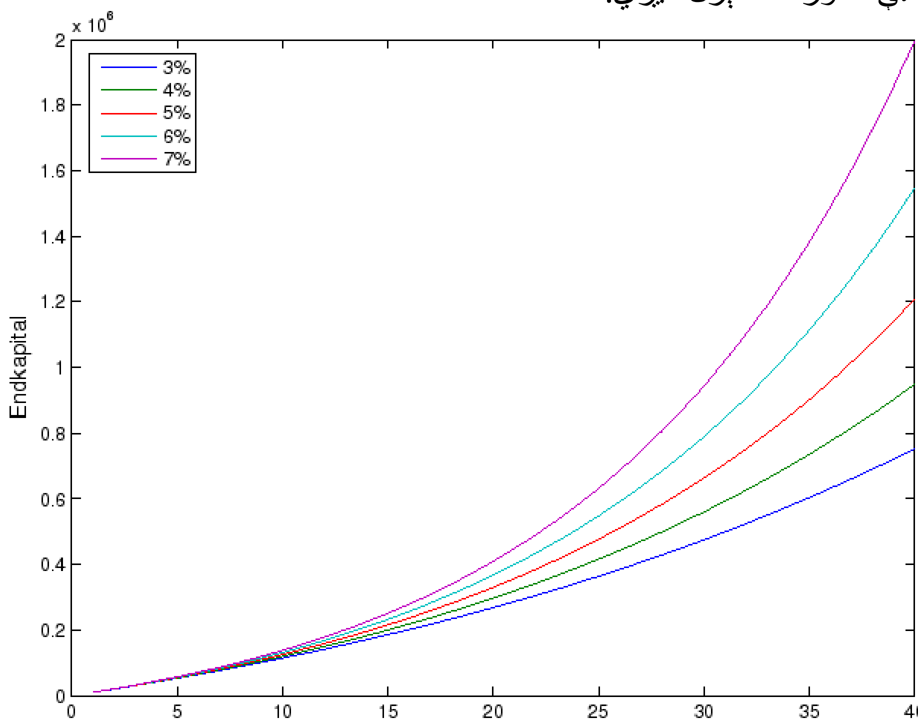
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = \frac{(1+p_j)^n - 1}{p_j} z = \frac{1.07^{12} - 1}{0.07} 10000\,\mathrm{EUR} = 178884.51\,\mathrm{EUR}.$$

د نور لس کاله د ژوند انتظار ته دا د لاندې یوه میاشتنۍ تقاوت ته بسیا کوي

$$r = \frac{p_m (1+p_j)^{10}}{(1+p_j)^{10} - 1} y = \frac{0.005654 \cdot 1.07^{10}}{1.07^{10} - 1} 178884.51\,\mathrm{EUR} = 2057.17\,\mathrm{EUR},$$

چې د هیپوتیکي(د کورونو جوړولو او اخستلو لپاره ارزانه پور دی) Hypotheken
ګټې ته ورته شمېرل کیږي.



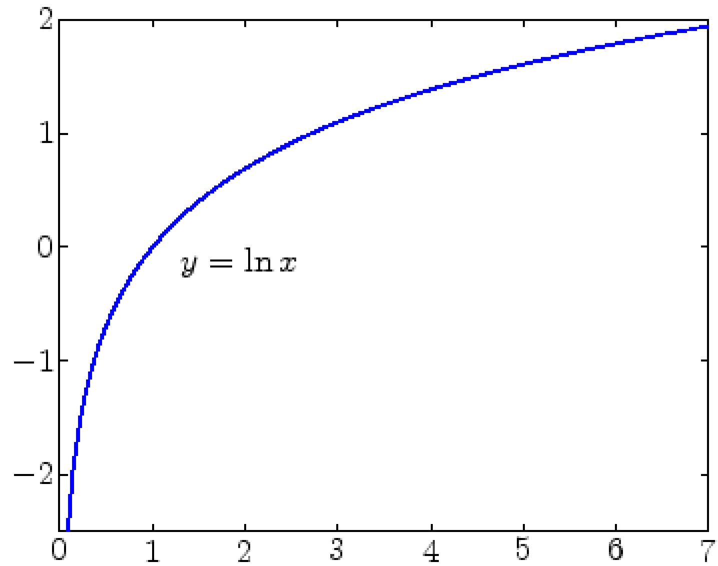
پروت: وخت ،   ولاړ: پای سرمایه
ځېره د مختلفو ګټونو لپاره د یوې سرمایې وده ښایي د وخت تېرېدو سره .
پای.

لوګاریتم **Logarithmus**

د لوګارتم تابع د اکسپوننشلتابع معکوس دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y.$$



دا $(0,\infty)$ کره مونوتونن جګېدونکی په $\mathbb{R}$ تنظيموي او لاندې تابعمساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

په ځانګړې توګه دی $\ln(1/x) = -\ln x$.
پای.

د يوې مادې راديواکتيو له منځه تلنه(په زراتو تجزيه کېدنه) د زره کيدنې قانون

$$N(t) = N(0)e^{-kt}$$

له مخې تشريح کيږي. دلته $N(t)$ د ا تمونو ګڼون يا تعداد دی د t په وخت کې او $k > 0$ يوه د موادو په واک کې د زره کېدو ثابته ده.

د نيم ارزښت وخت T داسې تعريف دی $N(T) = \frac{1}{2}N(0)$ ، داپه دې معنا چې

$$e^{-kT} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T = \ln 2/k.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د چرنوبل د ریکتور د ړز یا الوتنې سره یو ه ډینګری یا خولې یا مرخېړی په ځنو برخو کې Cäsium-137 د 2000Bq/kg (Bq/kg د رادیواکتیویتی د فعالیت د کچونې لپاره یوون دی) سره د نیمارزښت وخت 29.7 کلونو په وړانګو خور شو.

$$k = \frac{\ln 2}{29.7} = 0.023$$

او له دې سره

$$N(t) = 2000 \exp(-0.023t).$$

په المان کې پوله ارزښت .600Bq/kg کې پروت د ی. د

$$600 = 2000 \exp(-0.023t) \Rightarrow -0.023t = \ln(0.3) \Rightarrow t \approx 52$$

له امله داپوله ارزښت د ورکړشوو ارزښتونو لپاره ۵۲ کالو وروسته کښته – یا کمیږي.

نیم وخت ارزښت :

Cäsium-134	2 Tage
Cäsium-137	29.7 Jahre
Jod-131	8 Tage
Kohlenstoff-14	5730 Jahre
Kalium-40	1.2 Mrd. Jahre
Plutonium-239	24000 Jahre
Radon-222	3.8 Tage
Radium-226	1600 Jahre
Strontium-90	28 Jahre
Uran-235	800 Mio. Jahre
Uran-238	4.5 Mrd. Jahre

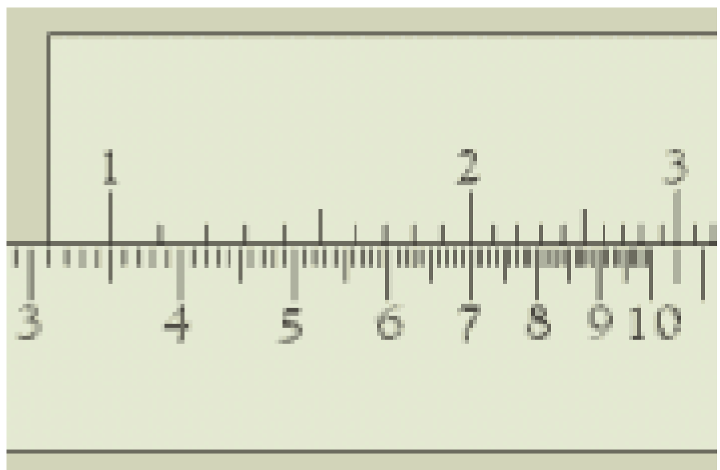
پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاریتم دا خوی لري، چې د دوه ګڼونو یا عددونود لوګاریتمونو جمعه د دې د دې دوه عددونو د ضرب د لوګاریتم سره برابر دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

په دې توګه کېدی شي چې دوه کرښي(خط کشونه) د لوګاریتم کچوونو سره یو په بل کیږدي او لاس ته راوړنه د دېعددونو جمعه نه بلکه ضرب دی.(د شمېرکښوونې (چې یوې او بلې لورته کښېږي) اصول)



د پورته ښېرې ښخه د بېلګې په توګه ګورو چې $3.5 \cdot 2 = 7$ دی. د لته د پورته کچوونې ۱ د لاندې سکالا په3.5 (لومړی ضریب) کېښول کیږي. بالاخره ۲ د پورته سکالا (دویم ضریب) د ضرب لاس ته راوړنه په لاندې سکالا لوستل کیږي.

پای.

تولیز توان توابع او لوګاریتم

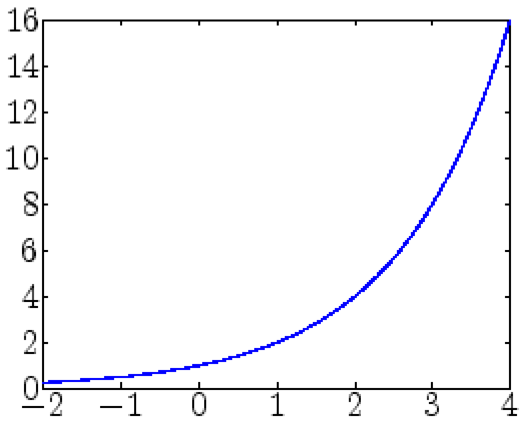
د $a > 0$ لپاره تعریفوو

$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

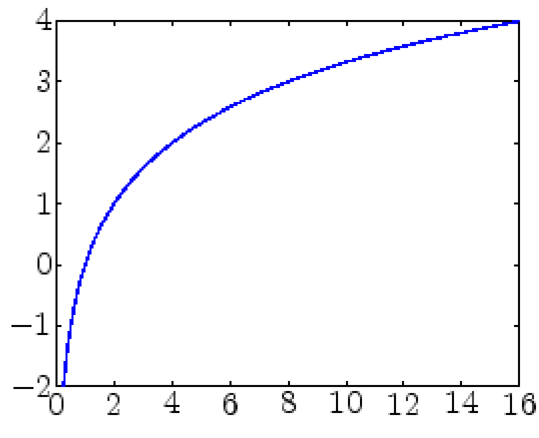
(c) ketabton.com: The Digital Library

د معکوس یا په خڅ تابع سره
$$x = \log_a y, \quad y > 0.$$

په ځانګړې توګه سرې لیکي $\log = \log_{10}$ د لوګاریتم لپاره د 10 بنسټ سره او $\mathrm{ld} = \log_2$ د دوال لوګاریتم لپاره.



$f(x) = 2^x$



$f(x) = \mathrm{ld}(x)$

د ودې قانون

$$y = a^x, \quad a > 0$$

کیدی شي نیم لوګاریتمي دکبنل شي. دلته په یوه محور x او په بل محور $\log y$ لیکل کیږي. د x او $\log y$ ترمنځ نسبت د ودې قانون له مخې کرښیز دی او رسم شوې کرښه لاندې جګړ.الی لري

$$m = \log a.$$

یو بل امکان دادی، چې په دواړو محورونو یو لوګاریتمي سکالا وکاروو.
دا د بیلګې په توګه د ناټیکاوي ارزښت لپاره

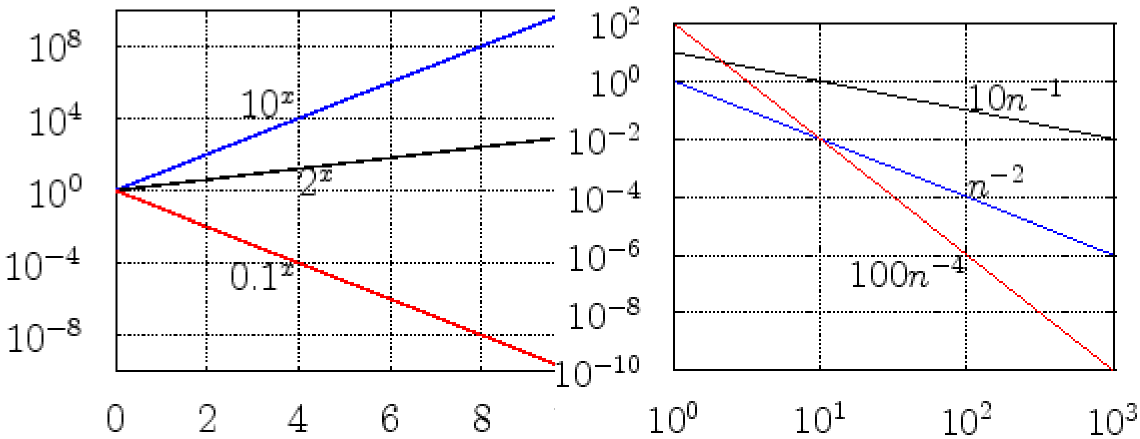
$$\varepsilon \approx cn^{-k}$$

مناسب ده. دا چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log \varepsilon = \log c - k \log n \,,$$

د کږې کميز يا منفي چګېدنه ورکوي.



$y = 2^x, 10^x, 0.1^x$ $\qquad$ $\varepsilon = 10n^{-1}, n^{-2}, 100n^{-4}$

د توان او لوګاريتم لپاره شميرقوانين

Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

د اکسپوننشل – او لوګاريتمي توابعو د تعريف او تابع مساواتو څخه لرو

$$\begin{aligned} a^{s+t} &= a^s\, a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\ a^{s-t} &= a^s/a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\ (a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t \log_a x \,. \end{aligned}$$

برسېره پردې د دوه مختلفو بنسټونو ت رمنځ د شمېربدلون لپاره باور لري

$$\log_b x = \log_b a \, \log_a x \,.$$

په ځانګړې توګه دی

$$\log x = (\log e) \ln x \,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کنوپف

که کيږدو

$$x = a^s, \quad y = a^t,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د توان او لوگاریتم د فرمولونو ورته وال یا برابرارزښتوالی روښانه دی. لومړي دواړه کتمتوالي د تابع مساواتو څخه لاس ته راځي او دریم له تعریف $b^r = e^{r\ln b}$ څخه.:

$$(a^s)^t = (e^{s\ln a})^t = e^{st\ln a} = a^{st}.$$

د شمیبدلون فرمول برابرارزښت دی و لاندې ته

$$x = b^{\log_b a \log_a x},$$

او د ساده ونې له لارې ښی اړخ لاس ته راځي.
لیکونکي: هیولیگ، کنوپف

لاندې دواړه بېلط دشمېقوانین تشریح کوي یا په گوته کوي.

(i)

$$^2) - 2\ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 = 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 = 2\ln x$$

(ii)

$$\log_4(x^2) + \mathrm{ld}(2x) = 2\frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2\frac{\ln x}{\ln 2}$$

های پرابول تابع **Hyperbelfunktionen**

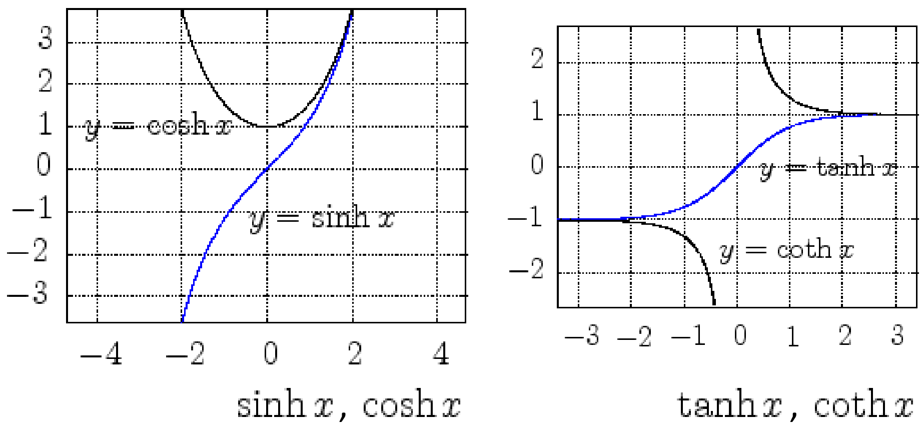
تریگونومتریکي توابعو ته ورته تعریفوو

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

همداسې

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1/\coth x.$$

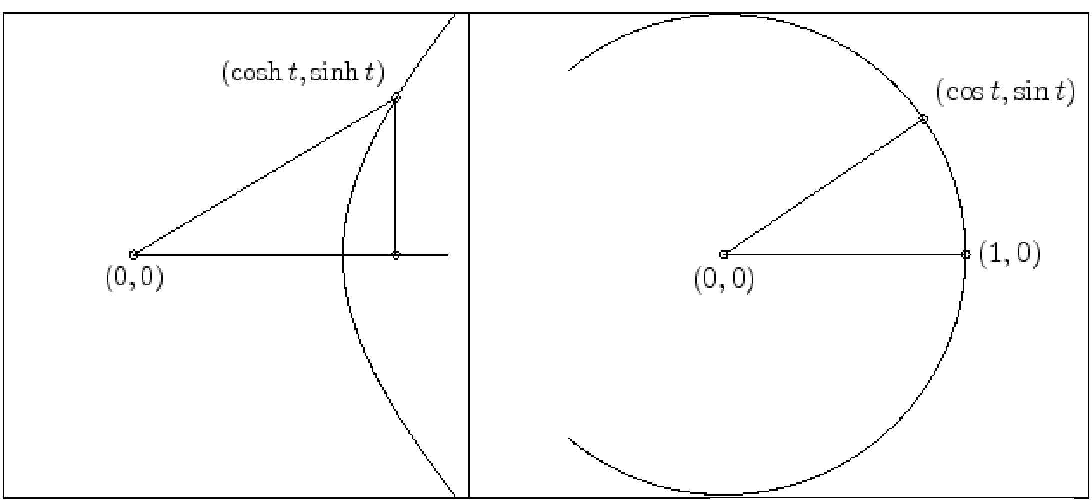
(c) ketabton.com: The Digital Library



معکوس يا په خټ توابع اکسپليثيت يا په روښانه توګه ورکول کيږي:

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \qquad -\infty < x < \infty$$
$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \qquad 1 \le x < \infty.$$

د هاپربول تابع نوم د لاندې کتمتوالي څخه رانيول شوی



$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

دا روښانه کوي، چې د $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ له لارې د هاپرابول يو ښاخ پارامتري کيږي..

له $y = (e^x - e^{-x})/2$ څخه د e^x سره ضرب له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}.$$

د مربع مساوات دويم حل د $e^x > 0$ له امله بايد په پام کې ونه نيول شي. د لوګاريتمي کونې څخه لاس ته راځي

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

د کوساين هوپربوليک د فرمول څخه پورته ته په ورته توګه لاس تره اځي

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}.$$

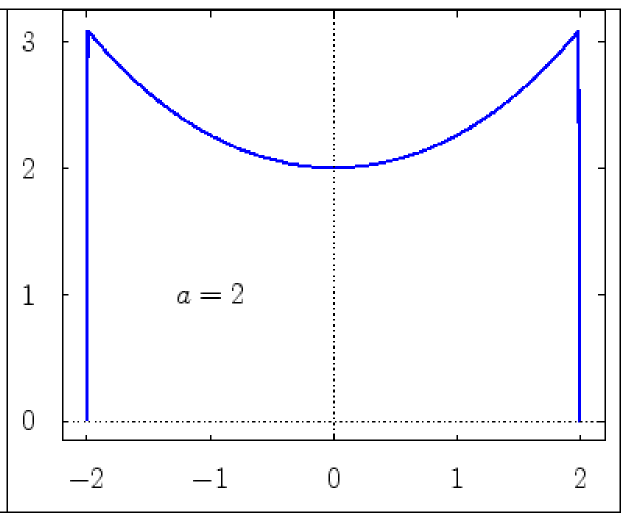
د لوګاريتم کوني له لارې د په خټ- يا معکوس تابع فرمول لاس ته راځي.
ليکونکي: هيوليک، کنوپف

د يوه هايپارابول په پاى ټکو کلک شوي سيم حګوالی h د خپل وزن له لارې اغيزمنشوى دننى شپانونګ a دى

$$h(x) = a\cosh(x/a).$$

تابع h د لاندې دفرنخيال مساوات حل دى.

$$h'' = \frac{1}{a}\sqrt{1 + (h')^2}.$$



هايپارابوليکی کتمتوتوالی

Hyperbolische Identitäten

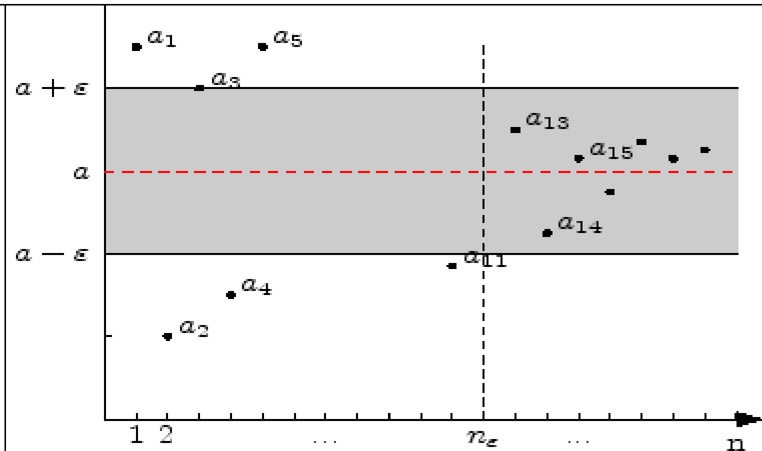
تريګونومتريکي توابعو ته ورته کتمتوالی باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}
\sinh(-x) &= -\sinh x \\
\cosh(-x) &= \cosh x \\
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1\,,
\end{aligned}$$

چې د تعریفونوو له لارې کېدی شي نازک شي

د یوې پرلپسې (ترادف)پوله ارزښت
Grenzwert einer Folge

یوه پرلپسې $(a_n) = a_1, a_2, \ldots$ د یوه پوله ارزښت a په لور هڅیږي، $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n,$ که هر $\varepsilon > 0$ ته یو n_ε داسې شتون ولري د $\lvert a_n - a \rvert < \varepsilon$ $n > n_\varepsilon$ سره د ټولو لپاره	

دا $a_n \to a$ لیکدود هم د یوې پرلپسې د کونورګنت یا پولې ته تلو لپاره کارول کیږي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (a_n) پوله ارزښت ونه لري، نو پرلپسې ديورګنت يا پولې ته نه تلونکې بللکيږي.

پای.

د دې لپاره چې د کونورګنت-قضيه وښايو يعنې $|a_n - a| < \varepsilon$ د $n > n_\varepsilon$ لپاره

وښايو، کيدی شي لومړی دا افاده $|a_n - a|$ د تخمين کونې له لارې پورته لور ته ساده کړو او بيا داسې په نامه نامساوات د n پسې حل کړو.

که دا د بيلګې په توګه د لاندې پرلپسې لپاره وکارول شي

$$a_n = \frac{n^2 + n}{n^2 + 1},$$

کومه چې پوله ارزښت $a = 1$ لري، يو ممکنه تخمين دی

$$|a_n - a| = \left|\frac{n^2 + n}{n^2 + 1} - 1\right| = \left|\frac{n - 1}{n^2 + 1}\right| \le \frac{n}{n^2 + 1},$$

دا چې $|n - 1| \le n$ د ټولو $n \ge 0$ لپاره . پرته له دې $n^2 + 1 > n^2$ دی او له دې سره $\frac{1}{n^2 + 1} < \frac{1}{n^2}$ هم . نو له دې لاس ته راځي

$$|a_n - a| \le \frac{n}{n^2 + 1} \le \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

له دې سره $\frac{1}{n} < \varepsilon$ دی، بايد $n > \frac{1}{\varepsilon}$ وي. که n_ε يو طبيعي عدد چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وي ، وټاکو ، نو د ټولو $\varepsilon > 0$ او ټولو $n > n_\varepsilon$ لپاره باور لري.

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرلپسي
$1, q, q^2, \ldots$

د $|q| < 1$ لپاره يو پوله ارزښت 0 لري او د $|q| > 1$ يا $q = -1$ لپاره ديورګنت دی

د پرلپسيو د پوله ارزښت شميرنې لارې
Rechenregeln für Grenzwerte bei Folgen

د پولې ته تلونکې پرلپسي (a_n) او (b_n) لپاره د پولو a او b سره باور لري:

- $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n / b_n) = a/b$, falls $b \neq 0$
- ليکونکی: اپپ، هيوليګ

زياتون او کمښت يا کمون : د درېګوډي نابرابرون څخه لاس ته راځي
$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \to 0.$

ضرب يا ځل: دا چې a_n محدود ده، لرو

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \to 0.$$

وېش: د ټول $n > n_0$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$0 \notin \left(b - \frac{|b|}{2}, b + \frac{|b|}{2}\right) \ni b_n \,,$$

او له دې لاس ته راځي

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b b_n}\right| \leq \text{const}\, |b_n - b| \to 0,$$

دا په دې معنا چې $1/b_n \to 1/b$. د a_n/b_n پولې ته تلنه دهمدا اوس ښوول شوي د پولې ته تلونکو پرلپسيو ضرب قانون څخه لاس ته راځي.

پای.

که دپرلپسيو توکي د n راشنل تابع وي، $a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$ ، نو کيدی شي پوله ارزښت د خورا جګ توان د لنډوني څخه پيداکړی شو. د بېلګې په توګه دی

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - 2n^2}{3n^2 + 4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n - 2}{3 + 4/n} = -\frac{2}{3}\,.$$

په ټوليزه توګه د صورت-درجې j او مخرج-درجې k لپاره باور لري

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_j n^j + \cdots p_0}{q_k n^k + \cdots q_0} = \begin{cases} 0, & \text{für } j < k \\ \frac{p_j}{q_k}, & \text{für } j = k. \end{cases}$$

د $j > k$ لپاره پرلپسې پولې ته نه ځي يعنې ديورګنت ده.

پای.

دمعلومو پوله ارزښتونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

په مرسته لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e\cdot\frac{1}{e} = 1.$$

په پام کې نيسو، چې

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \neq \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n = 1\ ,$$

ځکه چې د ضرب د ضريبونو ګڼون يا تعداد ثابت نه دی.

ليکونکی: هيوليک، کرايش

د کوشي قضيه **Cauchy-Kriterium**

يوه پرلپسې (a_n) تيک هلته پولې ته ځي، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو n_ε شتون ولري، داسې چې

$$|a_j - a_k| < \varepsilon$$

د ټول $j,k > n_\varepsilon$ لپاره باور ولري.

د کوشي په نوم نومول شوي قضيې په مرسته د پوله ارزښت ثبوت بې د پوله ارزښت پيژندلو ممکن دی.

ليکونکی: اپپ، هيوليګ

د کوشي – قضيې اړينوالی د پوله ارزښت له تعزيف څخه لاس ته راځي:

$$a = \lim a_n \iff |a_m - a| < \varepsilon \quad \text{für} \quad m > m_\varepsilon$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که کیږدو $n_\varepsilon = m_{\varepsilon/2}$ ، نو لرو

$$|a_j - a_k| \le |a_j - a| + |a - a_k| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

د ټول $j, k > n_\varepsilon$ لپاره، حه چې د ښوولو وو.

دا چې شرط پوره کېدونکی هم دی، ستونځمن دی چې و يې ښايو، او دا د حقيقی عددونو په پوره والي ولاړ دی.

پای.

يوه رکورزيو تعرف شوې پرلپسې (a_n) کېدی شي زيات وخت د کوشي-قضيه د تخمينونې له لارې

$$|a_{n+1} - a_n| \le cq^n$$

د $q \in [0, 1)$ سره يې تيکوالی و ازمايل شي. داسې د هندسي پولې ته تلنه د $j < k$ لپاره راکوي

$$|a_j - a_k| \le |a_j - a_{j+1}| + |a_{j+1} - a_{j+2}| + \quad \dots \quad + |a_{k-1} - a_k| \le cq^j \left(1 + q + q^2 + \dots\right) \le \frac{cq^j}{1-q}.$$

ښی اړخ د $< \varepsilon$ لپاره ده د $j, k > n_\varepsilon = \ln \frac{\varepsilon(1-q)}{c} / \ln q$ لپاره ، نو د کوشي قضيه پوره ده. د ځرګند، د

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \quad a_0 = 1,$$

له لارې رکورزيو تعريف شوې پرلپسې a_n د کونورګنځ قضيې د ثبوت لپاره استعمالوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایندکشن پیل : $(n=1)$: نامساوات

$$|a_1 - a_0| \le cq$$

باور لري، که $c = |a_1 - a_0|/q$ کېښول شي.

د ایندکشن پای $(n \to n+1)$: شړی اټکل شوی کمښت یا تفریق د

$$|a_{n+1} - a_n| = |\sqrt{2 + a_n} - \sqrt{2 + a_{n-1}}| = \left|\frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2 + a_n} + \sqrt{2 + a_{n-1}}}\right|.$$

په بڼه ښيي.

د اندکشن د نیونې له مخې ښی اړخ $\le \frac{1}{2\sqrt{2}} cq^n$ دی او د ټاکنې سره
$q = 1/2\sqrt{2} \le cq^{n+1}$

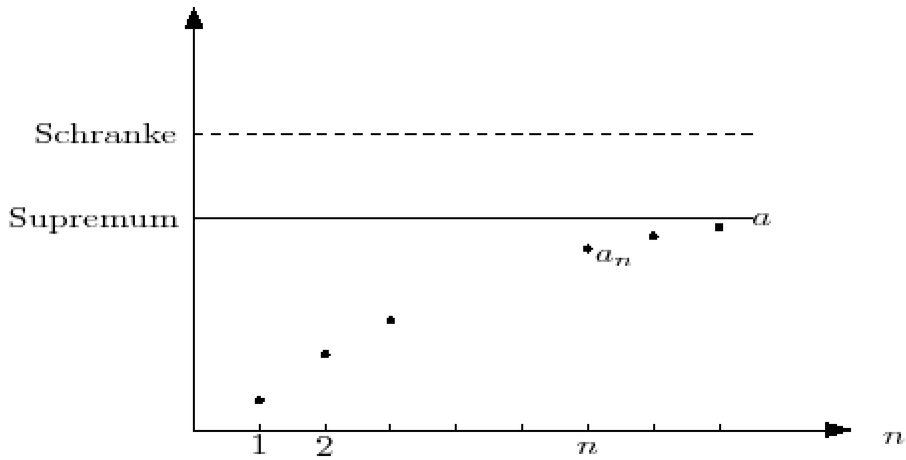
لکه چې غوښتل مو.

پای.

یوغرېزه پولې ته تلنه **Monotone Konvergenz**

یو پرلپسي (a_n) همغرېز جګېدونکي $a_{n+1} \ge a_n$ همداسي همغرېز ټیټېدونکي $a_{n+1} \le a_n$ بلل کیږي ، که همداسي وي د ټولو n لپاره. دا کره همغرېز جګېدونکي همداسي کره همغرېز ټیټېدونکي بلل کیږي ، که $a_{n+1} > a_n$
همداسي $a_{n+1} < a_n$ وي د ټولو n لپاره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



یوه رابنده یا محدوده ، د $n > n_0$ لپاره همغږیز جګېدونکې یا ټیټېدونکې پرلپسې (a_n) پولې ته تلونکې ده. پوله ارزښت یې د پرلپسې توکو a_n, $n > n_0$ سوپریموم همداسې اینفیموم دی.

لیکونکی: اپپ، هیولیګ

د یوې مونوتون جګېدونکې پرلپسې لپاره د سوپرېموم د تعریف سره، چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو n_ε شتون لري د کوم لپاره چې باور لري

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a = \sup_{n > n_0} a_n$$

د همغږیزوالي په بنسټ دی

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq a \quad \text{, für} \quad n > n_\varepsilon \,,$$

نو $a_n \to a$.

د مونوتون ټیټېدونکې پرلپسې لپاره په ورته توګه دلایل راوړل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پرلپسي پولې ته تلنه

Die Konvergenz der Folge

$$a_n = (1+1/n)^n, \quad n = 0, 1, ...,$$

د اويلر عدد e په لور کېدی شي د مونوتون کونورګنت حملې په بنسټ و ښوول شي.
دواړه وړاندنيونې(فرضيې) کېدی شي د بېنوم درسي جملې په مرسته و ښوول شي.

(i) رابنديدنه يا محدوديت: له

$$a_n = (1+1/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + ...$$

او

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} \leq \frac{n^k}{1\cdot 2\cdots 2}$$

لاس ته راځي

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... \leq 3$$

(ii) همغږيزوالی: سړی a_{n+1} هم د بېنوم له جملې سره شماري:

$$a_{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}\frac{1}{n+1} + \binom{n+1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} + \binom{n+1}{3}\frac{1}{(n+1)^3} + ...$$

که دا په (i)کې د a_n انځوروني سره پرتله کړي، نو سړی کره کوي، چې اړونده ترمونه لوی دي:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{n^k}$$

$$\leq \frac{(n+1)\cdot n\cdots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{(n+1)^k} \quad =$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}.$$

دا له نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\frac{n-j}{n} \leq \frac{n+1-j}{n+1}$$

د یوګونوو ضریبونو لپاره. داچې د a_{n+1} لپاره زیاتون یا جمعه لا ترم

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

لري لاس ته راځي

$$a_n < a_{n+1}.$$

نارېښتونی پوله ارزښت **Uneigentliche Grenzwerte**

یوه پرلپسي (a_n) دا نارېښتونی پوله ارزښت ($-\infty$) ∞ لري، که د ټولو $a > 0$ لپاره یو n_a شتون ولري، داسې چې

$$a_n > a \ \ (< -a)$$

باور ولري د ټولو $n > n_a$ لپاره. پرلپسي چې نارېښتونی پوله ارزښت لري، دا ټآکلي دیورګنت –یا پولې ته نه تلونکې پرلپسې هم بلل کیږي.
لیکونکي:اېپ، هیولیګ، ویپېر

د دې لپاره چې وښایو ، چې

$$a_n = \frac{n!}{2^n} \to \infty,$$

دا په دې معنا چې

$$\frac{n!}{2^n} > a$$

د $n > n_a$, لپاره، دا a_n سړی د یوې ساده افادې یا ویېنې له لارې کښته لور ته تخمینوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_n = \frac{1\cdot 2\cdots n}{2\cdot 2\cdots 2} \geq \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}.$$

له دې سره له $\frac{n}{4} > a$ همداسې له $n > 4a = n_a$ لرو $a_n > a$

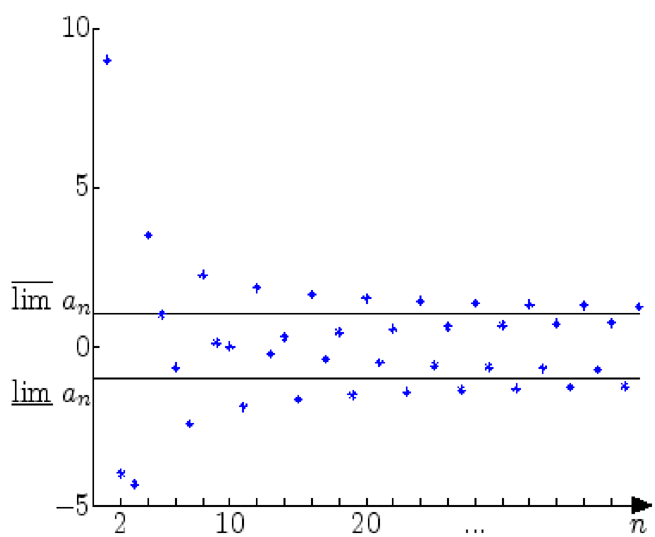
پوله اينفريور او پوله سوپريور(کښته - او پورته پوله ارزښت)

Limes Inferior und Limes Superio

د هرې پرلپسې (a_n) لپاره، په ناصلي حالت کې uneigentlichen Sinn ، يو پوله ارزښت شتون لري.

$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a_n}\,,\ \underline{a_n} = \inf_{k\geq n} a_k$

$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a_n}\,,\ \overline{a_n} = \sup_{k\geq n} a_k$



لکه په څېره کې چې شوول شوی دی، پرلپسې (a_n) د همعرېزې پرلپسې $(\underline{a_n})$ او $(\overline{a_n})$ له لارې يا نوره هم ښه له لورې رابندې دي:

$$\underline{a_n} \leq a_n \leq \overline{a_n}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که پوله اېنفريور او پوله سوپريور يو په بل پريوځي، نو پرلپسي (a_n) پولي ته تلونکي ده او لرو

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \,.$$

ليکونکي: اپپ ،هيوليګ

د پولي اينفريور او پولي سوپريور شتون د همهغږيز پولي ته تلني جملي له لارې ترلي لاس ته راځي، خکه چې پرلپسي

$$\underline{a}_n = \inf_{k\geq n} a_n \;, \quad \overline{a}_n = \sup_{k\geq n} a_n$$

همغږيز جګيدونکي همداسې همغږيز ټيټيدونکي دي.
په روښانه توګه باور لري

$$\underline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n \,.$$

که پوله اينفريور او پوله سوپريور همغه ازښت a ولري، نو لا سته راځي

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره، نو $a_n \to a$.

پرتله کوونکې قضيه **Vergleichskriterium**

که د $\lim a_n = a$ او $\lim c_n = c$ سره د پوره کوچني n لپاره
$a_n \leq b_n \leq c_n$ باور لري، نو دی

$$a \leq \underline{\lim}\, b_n \leq \overline{\lim}\, b_n \leq c.$$

په ځانګړې توګه له $a = c$ د پرلپسي (b_n) کونورګنت لاس ته راځي:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a = c \,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی غوښتنه ساده ده، ځکه چې نابرابرون $\leq$ د پولې ته تګ له امله ساتلی پتیږي:

$$\inf_{k\geq n} a_n \leq \inf_{k\geq n} b_n \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n .$$

په ورته توګه لرو $\overline{\lim}\, b_n \leq c$.

که پوله ارزښتونه سره برابر وي ($a = c$) ، نو باور لري

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره. له دې سره لرو $b_n \longrightarrow a$.
پای.

پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

په لاندې نامساوات باندې د پرتلې قضیې استعمال له لارې لاس ته راځي

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} .$$

دلته ښی نابرابرون د بینوم د فرمول څخه باوري دی:

$$1 \leq n \leq 1 + n \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{4}{n} + \cdots$$

په ټولیزه توګه د ضرب قانون څخه لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^k = 1$$

د $k \in \mathbb{N}$ لپاره . د کم نظم ترمونو د په زیاتوالي له امله پوله ارزښت ساتلی پاتیږي. د یوه پولینوم

$$p(n) = a_k n^k + \cdots + a_0 \;,\; a_k > 0$$

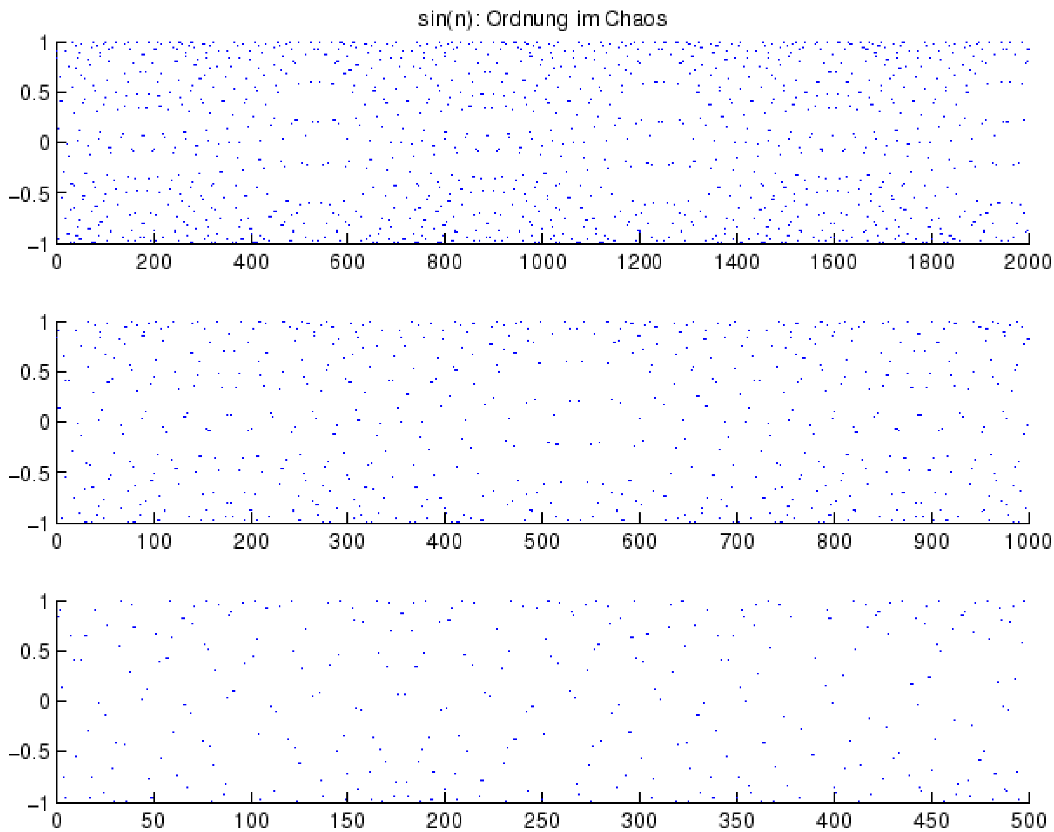
لپاره هم $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1$ دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې پرلپسې پنډغالي ټکی Häufungspunkt einer Folge

یوه پرلپسې (a_n) پنډغالي ټکی a لري، که هر انټروال $\varepsilon > 0$, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ دپرلپسې ناپای ډېر توکي خوندي ولري. دې ته ورته د یوې برخه پرلپسې باور لري، چې a ته ځي. په ځانګړې توګه یوپوله ارزښت د پرلپسې بنډغالي ټکی هم دی.

خیره پرلپسې $(\sin n)_{n\in \mathrm{N}}$ ښايي.



سرې په نږدې توګه د پرلپسې یا ترادف توکو a_n برابروېشنه په انټروال $[-1,1]$ کې پېژني. په ریښتوني بڼول کېدی شي، چې په $[-1,1]$ کې هر ټکی د پرلپسې پنډغالي ټکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې پرلپسې يا ترادف (a_n) د پندغالي ټکي د ټاکلو لپاره باید کونورګنت برخه پرلپسې و پیژندل شي.
د بيلګې لپاره

هغه دا دي
$$a_n = \frac{n\sin(n\frac{\pi}{2})}{n+\sin(n\frac{\pi}{2})}$$

$$b_k = a_{2k} = \frac{0}{k}$$

$$c_k = a_{4k+1} = \frac{(4k+1)}{(4k+1)+1}$$

$$d_k = a_{4k+3} = \frac{-(4k+1)}{(4k+1)+1}.$$

له دې سره پنډغالي ټکی لاس ته راځي
$$\lim b_k = 0, \lim c_k = 1, \lim d_k = -1$$

ورهولست- - يا فرهولست- مودل **Verhulst-Modell**

يو بيلجيمي شميرپوه وو : Pierre-François **Verhulst** [vəɾˈhʏlst] (* 28. Oktober 1804 in Brüssel; † 15. Februar 1849 ebenda)

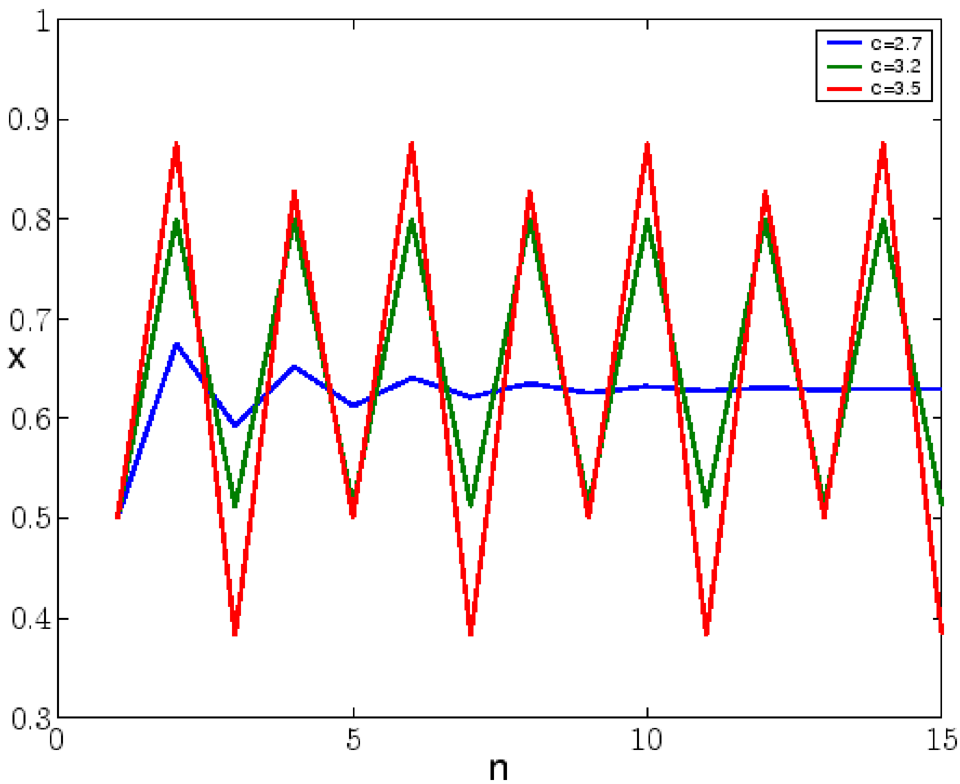
ريکورژن(په ښټ ځغاستل) Rekursion

هغه فنکشن، چې د خپل ځان له خوا پیژند لري یا تعریفیږي

$$x_{n+1} = cx_n(1-x_n)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $c \in (0,4]$ سره د نورمال شوي خلکو ګڼوالي x_n وده په ګوته کوي. يو څو تيوپيکي بيلګې د ا لاندې ځيره ښايي

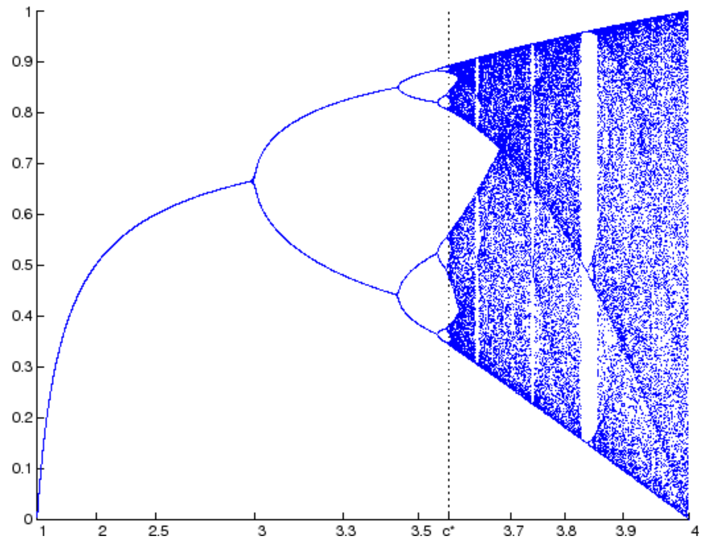


د $c \leq 3$ لپاره x_n د $n \to \infty$ لپاره لاندې پولې ارزښت ته ځي

$$x_* = \frac{c-1}{c} .$$

د $c > 3$ لپاره سرى اوسځليشن ګوري. که پارامتر تل لوى شي، نو د پندغالي - ټکو x_* ګڼون يا تعداد دوه برابره کيږي د افاط پارامتر ارزښتونو c_i څخه اوښتلو باندې يعني له دې نور زياتيدلو باندې . دا په لاندې ځيره کې کښل شوى دى، په کوم کې چې د ټکي x_* د c -محور پورته لور ته ځاى په ځاى شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



پوله ارزبنت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n - c_{n-1}}{c_{n+1} - c_n} = 4,69920166\ldots$$

داسي په نامه د انځوروني ثابته ده، چي دا زيات وخت د ځانګو کولو پرابلم کي رول لوبوي.

له پورته ځيري څخه روښانه کيږي، چي ايتيشن د

$$c > c^* = \lim_{n\to\infty} c_n$$

لپاره يوګډوډيز chaotisches Verhalten حالت ښايي

د پيPi ركوررزيو اپروكسيميشن
Rekursive Approximation von Pi

د a_n او b_n نيم اوږدوالی چي د يوې يوونګردی يا واحد داېرې د $(6 \cdot 2^n)$ -ګوډونو
يا كونجونو په باندې او په كي يعني په دننه اودباندې لاندې ريكورژن پوره كړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}\,, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}\,, \quad a_0 = 2\sqrt{3}\,, b_0 = 3\,,$$

د $\pi = 3.1415926535897932\ldots$ په مرسته اپروکسیمي کیدی شي.
دا فرمول د یوهان فریدریش پفاف Johann Friedrich Pfaff (1765-1825) له خوا په 1800 زکې کال میندل شوی.
ارښیمیدس Archimedes (287-212 v. Chr.) د 96 ـګوډونو ($n = 4$) او اټکل یا تخمین سره اړیکي

$$3.140845\ldots = \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} = 3.142857\ldots$$

ومیندلې یا ترې لاس ته راوړې.

د ګردی ګڼې یا عدد π له د یو میلیارد ځایونو ډېر شمیرل شوی دی. لاندې جدول د تاریخي ودې څخه یوه کاپی راکوي.:

Wert	korr. Stellen		Jahr	Autor
				Bibel (1. Könige 7:23)

Autor	Jahr		korr. Stellen	Wert
Bibel (1. Könige 7:23)	550	v. Chr.	0	3
Babylonier	2000	v. Chr.	1	3+1/8
Archimedes	250	v. Chr.	3	223/71 $< \pi <$ 22/7
Liu Hui	263		5	
Tsu Ch'ung Chi	480		7	
Al-Kashi	1429		14	

(c) ketabton.com: The Digital Library

Romanus	1593		15	
Van Ceulen	1596		20	
Van Ceulen	1615		35	
Sharp	1699		71	
Machin	1706		100	
Rutherford	1824		152	
Strassnitzky/Dase	1844		200	
Shanks	1874		527	
Smith/Wrench	1949		1 120	
Reitwiesner u.a.	1949		2 037	
Genuys	1958		10 000	
Shanks/Wrench	1961		100 265	
Guilloud/Filliatre	1966		250 000	
Guilloud/Dichampt	1967		500 000	
Guilloud/Bouyer	1973		1 001 250	
Kanada/Yoshino/Tamura	1982		16 777 206	
Kanada/Tamura/Kubo u.a.	1987		134 217 700	
Chudnovskys	1989		1 011 196 691	

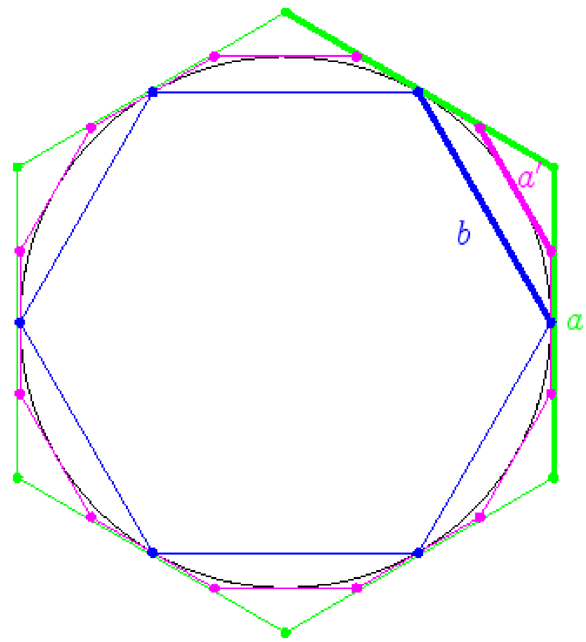
پای.

د ج.ف. پفاف ریکورزیون په ساده هندسي پامکوني باندې ولاړ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګي (تالس) جملې له مخې د a_n لپاره لاس ته راځي:

$$a' : b = \left(\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}\right) : \frac{a}{2} \Leftrightarrow a'a = ba - ba' \Leftrightarrow a' = \frac{ab}{a+b}\,.$$



که $k_n = 3 \cdot 2^n$ د ډېرګوډي نیم د اړخونوګڼون یا تعداد په ګوته کړي، نو باور لري

$$a_n = k_n a\,,\; b_n = k_n b \Rightarrow a_{n+1} = k_{n+1} a' = 2k_n \cdot \frac{ab}{a+b}$$

$$= 2\frac{(k_n a)(k_n b)}{k_n a + k_n b} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}\,.$$

د b_n لپاره ریکورزیون کېدی شي د تریګونومتري توابعو په مرسته و ښوول شي. له

$$a_n = k_n 2\tan(\pi/(2k_n))\,,\quad b_n = k_n 2\sin(\pi/(2k_n))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راځي

$$\begin{aligned} b_{n+1}^2 &= 4k_n^2 4\sin^2(\pi/(4k_n)) \\ &= \underbrace{2k_n 2\tan(\pi/(4k_n))}_{a_{n+1}} \underbrace{\cos(\pi/(4k_n)) 2k_n 2\sin(\pi/(4k_n))}_{k_n 2\sin(\pi/(2k_n))=b_n} \\ &= a_{n+1} b_n \,. \end{aligned}$$

د پرلپسيو يا ترادفونو ځانګړي پوله ارزښتونه

يو څو غوره پوله ارزښتونه په لاندې جدول کې راوړل شوي

a_n	$a = \lim_{n\to\infty} a_n$
$\sqrt[n]{n}$	1
$n^\alpha q^n \,,\ \lvert q\rvert < 1$	0
$n^{-\alpha}\ln n \,,\ \alpha > 0$	0
$q^n/n!$	0
$n!/n^n$	0
$(1+1/n)^n$	e
$(1-1/n)^n$	$1/e$

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زیات واره کیدی شي پوله ارزښتونه وشمیرل شي، داسې چې سړی د مناسب بڼه بدلون له لارې معیاري افادې ته بېرته ولاړ شي. دا د دوه بیلو سره روښانه کېږي.

(i) د پرلپسې پوله ارزښت شمېرلو ته

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^{4n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

سړی ږدي

$$m = 2n+3,\ n = \frac{m-3}{2}$$

او لاس ته راوړي

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2m-6}.$$

په دې پسې یا د دې په تعقیب دی

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^2 \cdot \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)\right)^{-6} =$$

$$= e^2 \cdot 1^{-6} = e^2.$$

$$a_n = \binom{3n}{n}/2^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

(ii) د دې لپاره چې د
پوله ارزښت وشمیرو، سړی لیکي

$$a_n = \frac{(3n)(3n-1)\cdots(2n+1)}{n\cdot(n-1)\cdots 1}\cdot\frac{1}{2^n} =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3-1/n}{2}\cdots\frac{2+1/n}{2}\right)\cdot\frac{n^n}{n!}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې په نوکانو کې افاده ≥ 1 ده لرو

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$$

د لاندې بڼې پوله ارزښت

$$\frac{a_n \pm b_n}{c_n \pm d_n}$$

په مناسب ډول سرى داسې شميري، چې سرى د مطلق ارزښت د لويې پرلپسې توکو سره ووېشي:

د بيلګې په توګه دا پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3+\sqrt{n+4})^2}{5n+\ln n}$$

که غواړو وشميرو، نو مات يا کسر په لاندې بڼه ليکو

$$\frac{9+3\sqrt{n+4}+n+4}{5n+\ln n} = \frac{13/n+6\sqrt{1/n+4/n^2}+1}{5+(\ln n)/n}.$$

دا چې $1/n, 1/n^2$ او $(\ln n)/n$ د صفر پهلور ځى، نو پوله ارزښت دا لاندې دى

$$\frac{0+6\cdot\sqrt{0}+1}{5+0} = \frac{1}{5}.$$

د يوې لړى پرلپسې (لنډ: لړى) پوله ارزښت
Grenzwert einer Reihe

يو زياتون يا جمعه $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ دډېروو زياتيدونو سره لړى بلل کيږي. دا د يوې پولې ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

په لور هڅيږي، که ټوټه زياتوونويا – جمعو

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

پرلپسې (s_n) د s لور ته وهڅيږی يا کونورګنت شي. که پوله ارزښت شتون ونه لري نو پرلپسې پولي ته نه تلونکې يا ديورګنت بلل کيږي.
پوله ارزښت کېدی د زياتوونو (هغه عددونه چې يو په بل زياتيږي) د لړۍ پرلپسې په واک کې وي، همداسې اړتيا نه شته چې د نظم بدلون وروسته شتون ولري.

د يوې لړۍ د پولي ته تلني لپاره اړيين (شرط) دی، چې

$$\lim a_n = 0.$$

فقط په لږو حالتونو کې د يوې لړۍ روښانه يا اکسپليځيت شمېرنه ممکن ده. يوه بېلګه يې د ټاکلو لړيو ده د راشنل زياتيدونو سره لکه

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} = \frac{3}{2}.$$

د ټوټه کسر ټوټه وني وروسته

$$\frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1},$$

کېدی شي دا لړۍ په

$$(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) + \dots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بنه ولیکل شي. تر $\frac{1}{1}$ او $\frac{1}{2}$ پورې ټول زیاتېدونې یو بل له منخه وړي یا پورته کوي،
داسې چې پوله ارزښت $\frac{3}{2}$ ترلی لوستل کېدی شي.
د ټوټه زیاتون د کمښت لپاره د ټول $n < m$ لپاره باور لري

$$|s_n - s_m| =$$

$$= |(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}) + \ldots + (\frac{1}{m-3} - \frac{1}{m-1}) + (\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m})| \leq$$

$$\leq \frac{4}{n-1},$$

داچې منځني ترمونه سره پورته کیږي یا له منځه سره وړي. ټوټه زیاتون یا ــجمعه د کوشي – پرلپسي جوړوي:

$$n > 1 + \frac{4}{\varepsilon}. \quad |s_n - s_m| < \varepsilon$$

د لپاره

و پولې ارزښت ته کمون یا تفریق دی

$$|\frac{3}{2} - s_n| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \frac{2}{n}.$$

بیلګه دا هم ښایي، چې د زیاتوونو یا د جمعې د غړو لړۍ پرلپسي غوره یا ښه روښانه ده.

که لړۍ پرلپسي

$$(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8} - \frac{1}{5}) +$$
$$+ (\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16} - \frac{1}{6}) + \ldots,$$

وټاکو، نو هر ه په نوکاانو کې افاده $\geq \frac{1}{4}$ ده، نو لړۍ پرلپسي دیورګنت ده.

هندسي یا ځمککچیزې لړۍ
Geometrische Reihe

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمکچیزه لړۍ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ تیک هلته پولې ته ځي، $|q| < 1$ وي.
د هندسي زیاتونفرمول سره

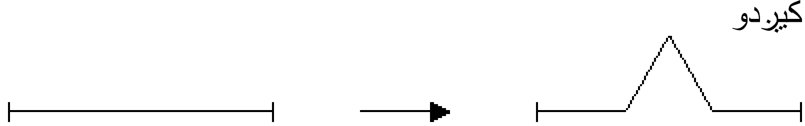
$$s_n = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

کېدی شي پوله ارزښت وښانه یا اکسپلیځیت وشمېرل شي:

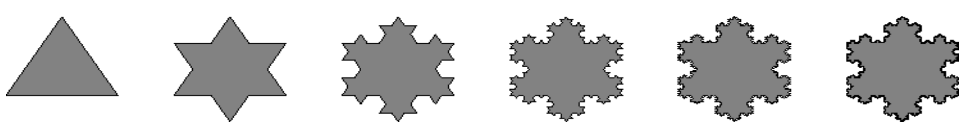
$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1 - q}$$

د $|q| < 1$ لپاره.
پای.

که د یوه برابر اړخیز درېکوڼي یا مثلث مخ ته تک سره ژۍ د قانون یا قاعدې سره سم کیږدو



نو یوه ډېرۍ یا سټ لاس ته راځي د وتلو ژیو سره ، داسې په نامه د کوښ-د واورو پوټي Koch-Schneeflocke.



- $1/3$ -م د واورو پوټی $3 \cdot 4^n$ ژۍ لري. دا چې د هر پل سره په ضریب کمیږي، نو د دې خومره والي لپاره لاس ته راځي

د ژیو ګڼون یا – تعداد ضرب د ژیو اوږدوالی:

$$(3 \cdot 4^n)(3^{-n}) = 3 \left(\tfrac{4}{3}\right)^n \to \infty ,$$

،

دا په دې معنا چې د ژیو اوږدوالی پولې ته نه ځي یا دیورګنت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په n -م پل سره $3\cdot 4^{n-1}$ برابراړخيز درېګوډي لاس ته راځي د ژيو اوږدوالي 3^{-n} او سطحې $\sqrt{3}/4\,(3^{-n})^2$ په ور زياتوالي سره. په دې توګه د n –م د واورو پوټي د سطحې لپاره راکوي

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\sum_{i=1}^{n}\left(3\cdot 4^{i-1}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(3^{-i}\right)^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\frac{4^{i-1}}{9^{i-1}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{4}{9}\right)^{i}\right).$$

دا وتلې پوله دېرۍ په پسې توګه سطحه لري

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-4/9}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

هارموني لړۍ **Harmonische Reihe**

هارموني لړۍ

$$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k},$$

پولې ته نه ځي يا همداسې ناټاکلی پوله ارزښت $s=\infty$ لري.
په ټوليزه توګه لړۍ

$$s_\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\alpha}$$

د $\alpha\le 1$ لپاره ديورګنت او $\alpha>1$ لپاره پولې ته تلونکې ده. يو څو ځانګړي ارزښتونه د.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots ,$$

$$s_4 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots ,$$

$$s_6 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-6} = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots .$$

مطلق پولې ته تلونکې لړی **Absolut konvergente Reihen**

که

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

پولې ته لاړ شي، نو لړی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ مطلق پولې ته تلونکې بللل کیږي.

د کونورګنت د دې قوي بڼې څخه لرو، چې لړی د زیاتوونو لړې پرلپسې په خوښه تغیر له امله هم کونورګنت ده یعنې پولې ته ځی.

کوښی (کوشي) – کونورګنت قضیه راکوي:

$$\exists n_\varepsilon : |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| < \varepsilon \quad \text{für} \quad m,n > n_\varepsilon$$

د درېګودي نابرابرون په مرسته د توته زیاتون د کمښت لپاره لاس ته راځي:

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \cdots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| < \varepsilon$$

د $m,n > n_\varepsilon$, لپاره ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معناچې د $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ پولې ته تلنه.

مایورانت او مینورانت
Majorante und Minorante

که $|a_n| \le c|b_n|$ د $n \ge n_0$ لپاره وي او یو مثبت یا زیاتیزه ثابته، نو د $\sum b_n$ مطلق کونورګنت ځخه د $\sum a_n$ مطلق کونورګنت لاس ته راځي

که برعکس $|a_n| \ge c|b_n|$ وي دېولو تر پای ډېرو n لپارهو نو د $\sum |b_n|$ دیورګنت ځخه لاس ته راځي، چې $\sum a_n$ هم مطلق کونورګنت نه ده.

زیاتوخت یا زیات واره هندسي لړۍ $\sum q^n$ او لړۍ $\sum n^{-\alpha}$ د پرتله کونې لړۍ په ځیر کارول کیږي.

د لړۍ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^{-1}$$

لپاره دی

$$a_n = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{(2n) \cdot (2n-1) \cdots (n+1)} \le 2^{-n} .$$

د دې په تعقیب هندسي لړۍ $\sum 2^{-n}$ یوه مایورانت ده، نو دا پولې ته تلونکې ده.
د لړۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1000}$$

لپاره د $n > 9$ لپاره باور لري

$$a_n \geq \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}\,.$$

په دې پسې يا په تعقيب هارموني لړۍ يوه مينورانت ده، نو لړۍ پولې ته نه ځي يا ديورګنت ده.

د وېش قضيه Quotientenkriterium

که $a_n \neq 0$ د $n > n_0$ لپاره وي او يو عدد $q \in (0,1)$ شتون ولري د

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q\,, \quad n > n_0\,,$$

سره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. برعکس

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1\,, \quad n > n_0\,,$$

، نو $\sum a_n$ پولې ته نه ځي يا ديورګنت ده.

د پولې ته تلنې لپاره پوره کېدونکې قضيه کېدی شي په ورته بڼه

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

هم وليکل شي.

په پام کې دې وي، چې پوره کېدونکي پولې ته تلونکي شرطونه رکورزيو د نابرابرون

$$|a_{n+1}| < |a_n|\,, \quad n > n_0\,,$$

په توګه دی، چې د هغې په بنسټ کومهوينا ممکن نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پای.

که

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right|, \ldots \leq q,$$

وي، نو دی

$$|a_{n+k}| \leq q|a_{n+k-1}| \leq \ldots \leq q^k|a_n|.$$

له دې سره هندسي لړۍ یوه مینورانت ده.
د دیورګنت لپاره قضیه راکوي، چې

$$0 < |a_n| \leq |a_{n+1}| \leq \ldots$$

د $n > n_0$ لپاره. زیاتیدونې صفرپرلپسي نه جوړوي، له کوم چې د $\sum a_n$ دیورګنت لاس ته راځي یا پولې ته نه تګ..
پای.

د وېش قاعده کېدی شي ګټوره وي که په لړیو استعمال شي، چې د هغې زیاتوونې فاکولتیت او توانونه خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \Big/ \binom{2n}{n}$$

لپاره د بیلګې په توګه سړی لاس ته راوړي

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3^{n+1}\,(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{3^n\, n!\, n!} = \frac{3\cdot(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}.$$

د دې افادې پوله ارزښت د $n \to \infty$ لپاره $\frac{3}{4}$ دی، پسې(تعقیب) یې لړۍ پولې ته ځي.

د زیاتوونو یو سیده تخمین

$$a_n = \frac{3\cdot 6\cdots 3n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مفصل دی یا ډېر کار غواړي. ضریبونه

$$\frac{3k}{n+k}, \quad k=1,\dots,n,$$

له یو څخه هم لوی دي او هم کوچني. سړی باید مناسبې جوړې سره یوځای کاندي، چې یوه تخمین ته راشي.

د ريښې یا جذرقضیه **Wurzelkriterium**

که یو عدد $q \in [0,1)$ د

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le q$$

سره شتون ولري د $n > n_0$ لپاره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. که برعکس

$$|a_n| \ge 1$$

وي د ناپای ډېرو n لپاره، نو $\sum a_n$ پولې ته نه تلونکي ده.
د کونورګنت لپاره پوره کېدونکي شرطونه کېدی شي په ورته یا برابر ارزښته بڼې

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

هم وليکل شي.

که $|a_n| \le q^n$ د $n > n_0$ لپاره باور ولري، نو هندسي لړی یو مايورانت جوړوي.
د ديورګنت لپاره شرط راکوي، چې (a_n) صفر پرلپسې نه ده، ځکه چې $|a_n| \ge 1$ د ناپای ډېرو n لپاره باور لري..

د ريښې قضیه استعما کېدی شي په هغو لړيو ګټوره وي، چې د هغو زياتونونه n -م توان خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \dots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره سړی د بیلګې په توګه لري

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{|3+(-1)^n|}\,.$$

د دې افادې یا وییني پرلپسې

$$\frac{|x|}{2}, \frac{|x|}{4}, \frac{|x|}{2}, \dots,$$

د

$$q = \frac{|x|}{2}$$

له لارې یا سره محدود ده. په تعقیب یې لړی د $|x| < 2$ لپاره پولې ته ځي.
همدې نتیجې ته رسو، که سړی پوله سوپریور جوړه کړي.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{2}\,.$$

دا د n –مې ریښې اوسځیلیري پرلپسې پولې ته نه ځي بې پروا یا نا غوره یا مهمه نه ده.

د لایبنیخ قضیه Leibniz-Kriterium

الترنیري (مخ نخښه بدلوني) لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots$$

پولې ته ځي، که (a_k) یوه مونوتون صفر پرلپسې وي. د لړۍ باقیو یا پاتو لپاره باور لري

$$0 \le \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k\right| \le |a_{n+1}|.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې الترنيري جمعې ارزښت کېدی شي تل د لومړي زياتوني د مطلق ارزښت له لارې اټکل شي.

د اټکل په بنسټ

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots - a_m| \leq |a_{n+1}|$$

د کوښنی قضيه پوره ده، او د لپاره د پاتې جمعې اټکل لاس ته راځي.
د دې نامساوات د ښوونې لپاره، چې د لړی دپاتې لپاره اټکل راکوي، سړی بې له ټوليزو بنديزونو (o.B.d.A.) $a_{n+1} \geq 0$ نيسي او $s_m - s_n$ د

$$a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\geq 0} - \ldots \leq a_{n+1}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي. او د

$$\underbrace{(a_{n+1} - a_{n+2})}_{\geq 0} + \underbrace{(a_{n+3} - a_{n+4})}_{\geq 0} + \ldots \geq -a_m \geq -a_{n+1}$$

له لارې کښته لور ته اټکل کوي

د لايبنيځ قضيې سره د الترنيري هارموني لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2 ;$$

پولې ته تګ لاس ته راځي ، پرلپسې

$$a_n = \frac{1}{n}$$

په روښانه توګه يوه همغږيزه صفر پرلپسې ده. د n –م ټوټه جمعې ناټيکاوی ، دا په دې معنا چې د لړی پرلپسې مطلق ارزښ دا لاندې دی

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} - \ln 2 \right| \leq \frac{1}{n+1} .$$

د لايبنيځ قصيې دواړه وړاندنيونې غوره دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n} = -\frac{2}{1}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{5}{4}-\dots$$

لړۍ لپاره زیاتووني a_n صفرپرلپسې نه جوړوي. له

$$|s_{n+1}-s_n| = |a_{n+1}| \geq 1$$

څخه دیورګنت لاس ته راځي.

د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max\left(\frac{(-1)^n}{n},\frac{(-1)^n}{2n}\right) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\dots$$

لړې لپاره زیاتوونې a_n همغږیزې نه دي. که یو په بل پسې زیاتوني سره یوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي

$$b_n = a_{2n-1}+a_{2n} = -\frac{1}{2(2n-1)}+\frac{1}{2n} = \frac{2n-2}{(4n-2)(2n)} \geq \frac{1}{4n}$$

für $n > 1$.

په تعقیب هامونې لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ یوه مینورانت ده، نو له دې کبله لړۍ دیورګنت ده.

د اویلر **Euler** ګڼ یا عدد **e** دیوې پرلپسې او یوې لړۍ پولې په حیث

د اویلر عدد $e = 2,71828182845905\dots$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کيدی شي د يوې پرلپسې او يوې لړۍ پوله ارزښت پّ ځير انځور شي

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

پای.

د لړۍ پولې ته تلنه له $1/n! \le 4\cdot 2^{-n}$ څخه د مايورانت قضيې په بنسټ لاس ته راځي.

پرلپسې $a_n = (1+1/n)^n$ د لاندې دواړو اټکلونو په بنسټ د e سره نومول شوي يا په نخښه شوي پوله ارزښت په لور ځي.

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \le e$$

. (a)

د ښوونې لپاره لومړی په پام کې نيسو چې د $n \ge k \ge 0$ لپاره

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \;\le\; \frac{1}{k!}$$

دی. له دې سره د بينوم فرمول څخه لرو

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \le \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \le e$$

او دپوله ارزښت جوړولو سره غوښتنه لرو.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \ge e.$$ (b)

د ښوونې لپاره $N \ge 1$ په خوښه تاکو مګر کره او د $n > N$ لپاره لرو:

$$a_n \ge \sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} \ge \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\left(\frac{n-N}{n}\right)^N.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{N}{n}\right)^{N} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$$

او د پولې ارزښت جوړولو($N \longrightarrow \infty$) سره غوښتنه.

له (a)او (b) څخه د $\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$ له امله لرو :

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = e.$$

د لړيو ځانګړي پوله ارزښتونه

په لاندې کې د څو غوره لړيو پوله ارزښتونه ورکړ شوي.

.

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1-q} \text{, für } |q| < 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots = \ln 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

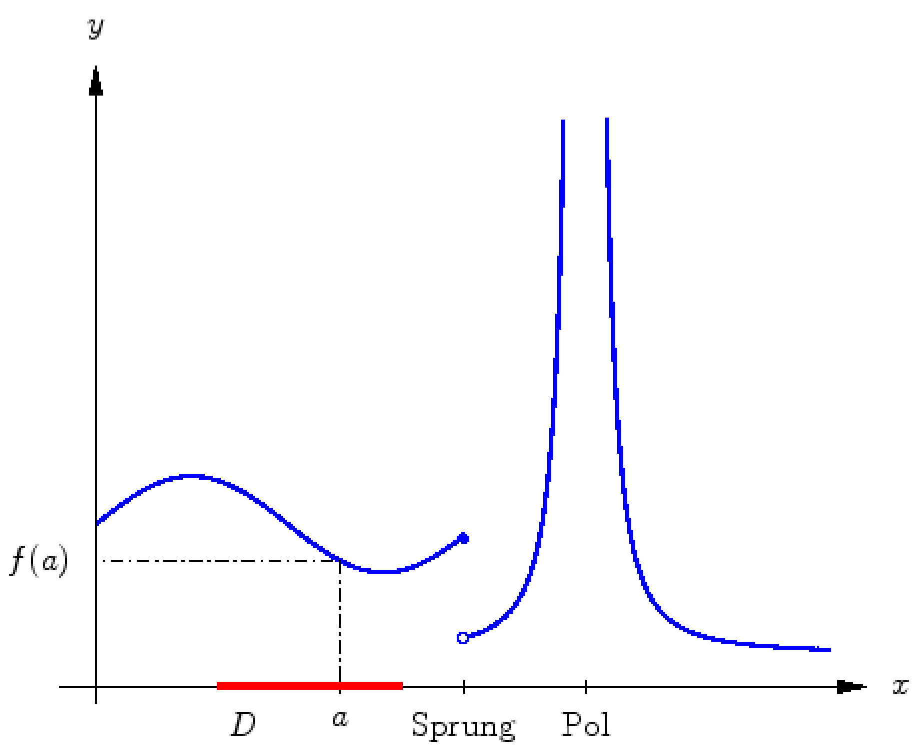
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2} = 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\pm\cdots=\frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=e$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{k!} = 1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\pm\cdots=\frac{1}{e}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 2^k} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\cdots=\ln 2$$

ناپرېکیدنه یا متمادیت **Stetigkeit**



(c) ketabton.com: The Digital Library

یو تابع f په ټکی a کې ناپرېکېدونکی یا متمادي دی، که د ټولو پرلپسیو (x_n) لپاره د د پولې a سره د تابع ارزښت $f(x_n)$ د $f(a)$ په لور کونورګنت وی یا هځیږي:

$$x_n \to a \Longrightarrow f(x_n) \to f(a)\,,$$

د پوله ارزښت د تعریف له مخې هر $\varepsilon > 0$ ته یو δ_ε شتون ل ري د $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ سره د $|x - a| < \delta_\varepsilon\,,$ لپاره ، او سړی لیکي

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

.

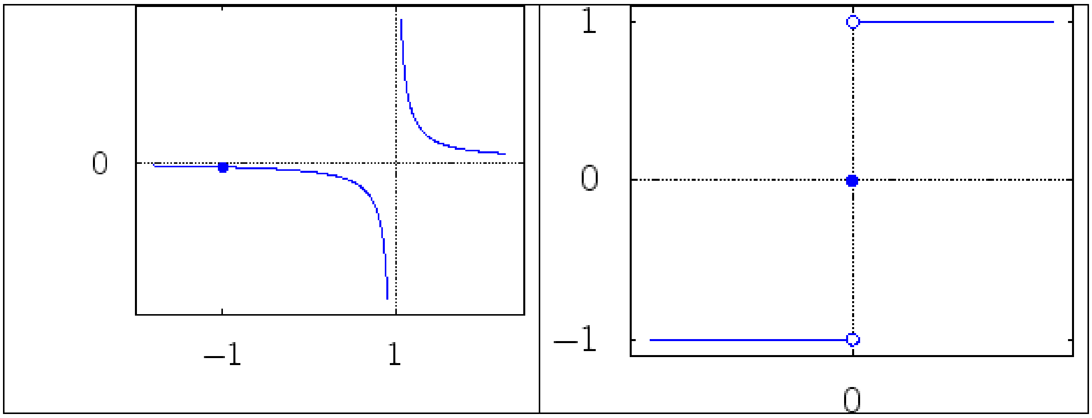
یو تابع په یوه انتروال D ناپرېکیدونکي ده، که دا د D په هر ټکي کې ناپرېکېدونکې وي.

دا په دې معناچې د f ګراف سره تړلی دی، تابع ګام یا ټوپ نه وهي او قطب نه لري (لنډ: نه پرې کیږي او نه ماتیږي).

بالاخره ناپرېکېدنه په دې معنا ده، چې ګراف بې له دې چې (پنسل پورته شي) پرې شي رسم کیږي.

فنکشن $f(x) = \operatorname{sign}(x)$	فنکشن $g(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پورته دواړه بيلګې د پرېکيدنې مختلف تيوپونه ښايي.

د سيګنوم تابع sign په صفرځای کې يو توپ وهي. په حقيقت کې د تابع ارزښت $\operatorname{sign}(0) = 0$ تعريف دی، مګر د $f(x)$ پوله ارزښت د $x \to 0$ لپاره شتون نه لري.

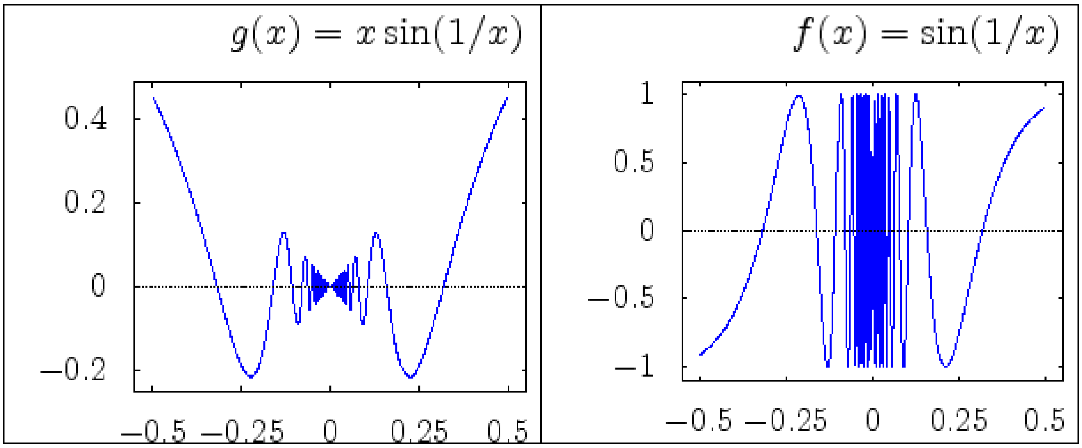
تابع په $x = \pm 1$ کې تعريفتشيا لري. د $x \to 1$ لپاره $|g(x)|$ د ∞ په لور هخيږي، g هلته يو قطبځای لري. مګر سره له دې هم پوله ارزښت $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$ شتون لري. دا ترلی د کرښيز ضريب $(x+1)$ د لنډونې څخه کټل کيږي.

$$g(x) = \frac{1}{x-1}, \; x \neq -1 .$$

دا يوه له منځه وړونکي يا پورته کيدونکي تعريفتشيا ده. د تابع ارزښت $g(-1) = -\frac{1}{2}$ د تکميلونې له لارې g په $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ باندې يو ناپرېکيدونکی تابع کيږي.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library



تابع (ښيرې يې پورته دي)

$$f(x) = \sin(1/x)$$

په صفر 0کې پرېکيدونکې ده، ځکه چې د $x \to 0$ لپاره د -1 او 1 ترمنځ اوسځيلی کيږي.

برعکس ياپه ښت د تابع

$$g(x) = x\sin(1/x)$$

تعريفتشيا په $x = 0$ کې پورته کيدونکې يا له منځه وړونکې ده.

له

$$0 \leq |x\sin(1/x)| \leq |x|$$

د $\lim_{x\to 0}|x| = 0$ سره د پرتله کيدونکي قضيې په بنسټ لاس ته راځي

$$\lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0.$$

له دې امله کيدی شي د g

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g(0) = 0$

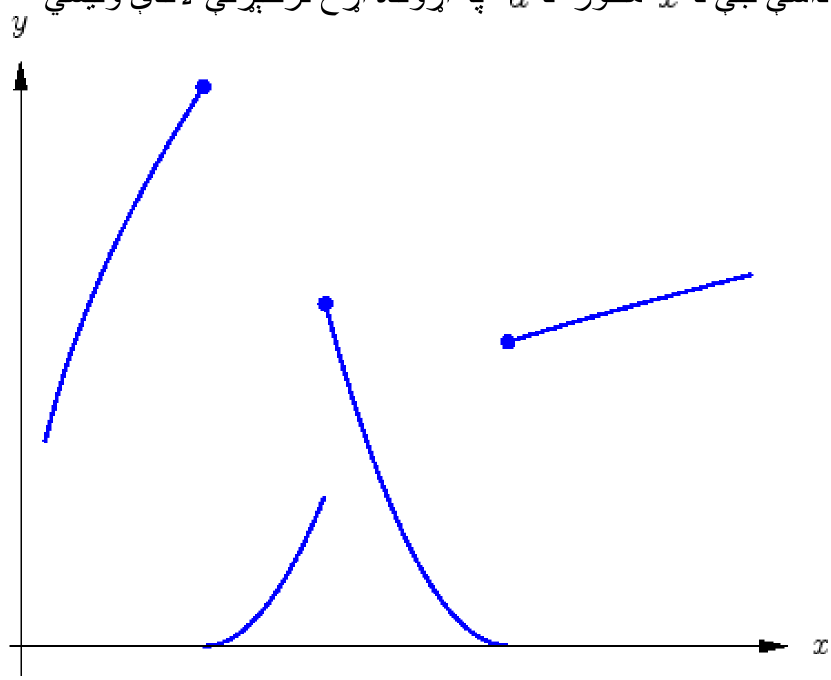
اینووني له لارې یوه په ټول $\mathbb{R}$ ناپرېکېدونکي تابع ته پوره شي.

یو اړخیز ناپرېکېدنوالی یا متمادیت **Einseitige Stetigkeit**

ناپرېکدنوالي ته ورته سرې کېږي- همداسې ښی ناپرېکېدنوالی تعریفوي

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f^{-}(a)\,, \qquad \lim_{x \to a+} f(x) = f^{+}(a),$$

داسې چې د x محور د a په اړونده اړخ ترخېړنې لاندې ونیسي



که د f په یوه ټوپځای تابع ارزښت تعیف وي، نو دا په ګراف کې پنډ په نخښه کېدی شي، چې روښانه شي چې د کېږ- یا ښي اړخ د پولې ارزښت سره سر خوري.

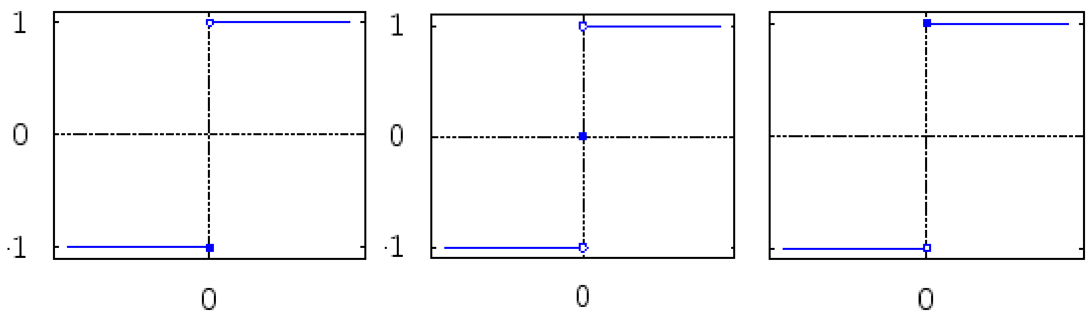
پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع

$$f(x) = x/|x|$$

په ټولو ټکو کې تر تعریفتشیا $x = 0$ پورې ناپرېکیدونکي ده.



که $f(0) = -1$ کېږدو نو تابع به کيڼ اړخیزه او د $f(0) = 1$ سره ښۍ اړخیزه ناپرېکېدونکي په 0 کې مخ ته لاړه شي. د $f(0) = 0$ لپاره د سیګنوم-تابع

$$f(x) = \mathrm{sign}(x),$$

لاس ته راځي، چې دا په 0 کې نه ښۍ – او نه کینه ناپرېکېدونکی دی.

د ناپرېکیدونکو توابعو لپاره لاري یا قاعدې

په یوه ټکي a کې ناپرېکېدونکي توابعو f او g لپاره

$$rf \quad (r \in \mathbb{R})$$

$$f \pm g$$

$$fg$$

f/g (وي $g(a) \neq 0$) که

$$f \circ g$$

په a کې ناپرېکیدونکي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته وګه په یوه انتروال D ناپرېکېدونکې تابع همداسې د کیڼ – اوښي اړخيز ناپرېکېدنوالي ځایونو لپاره باور لري.
پای.

دا لار د پوله ارزښت لپاره اړونده وینا څخه ترلې لاس ته راځي.
که دبېلګې په ت وګه د ناپرېکېدونکو توابعو کمپوزېشن(ترکیب) تر څېړنې ونیسو، د g د ناپرېکېدنوالي څخه د هرې پرلپسې (x_n) لپاره د پوله ارزښت a سره دا راکوي

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a).$$

دا چې f هم ناپرېکېدونکی دی، لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f(g(a)).$$

پاي.

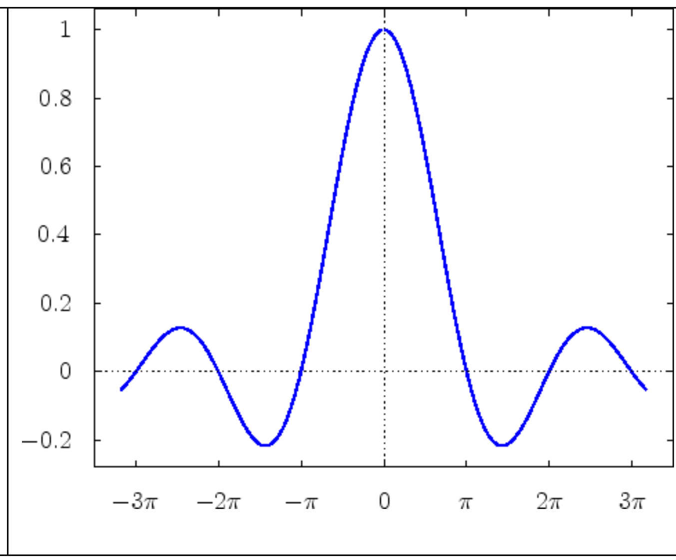
داسې په نامه sinc - تابع.

$$f(x) = \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$$

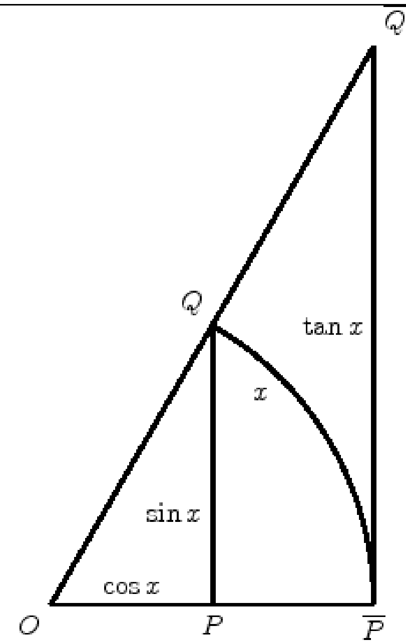
د مخ ته بیولو یا دوام

$$f(0) = 1$$

سره په $\mathbb{R}$ باندې ناپیکېدونکې ده.
ښوونه یې د ترېګونومتریک توابعو په تخمین پورې اړه لري.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ردېګوډي $\Delta(OPQ)$ ، د ګردی ټوټه ووني يا وتر او دربېګوډي $\Delta(O\overline{P}\overline{Q})$ د سطحو د پرتلې له لارې په ښېره کې کتل کيږي، چې $$\frac{\sin x\cos x}{2} \le \frac{x}{2} \le \frac{\tan x}{2}$$ همداسې $$\frac{1}{\cos x} \ge \operatorname{sinc} x \ge \cos x,$$ د $\sin x/2$ سره وېشني له لارې او د معکوس ارزښت جوړونه. د $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$ د پرتلې قضيې څخه لاس ته راځي. $$\lim_{x\to 0}\operatorname{sinc} x = 1.$$	

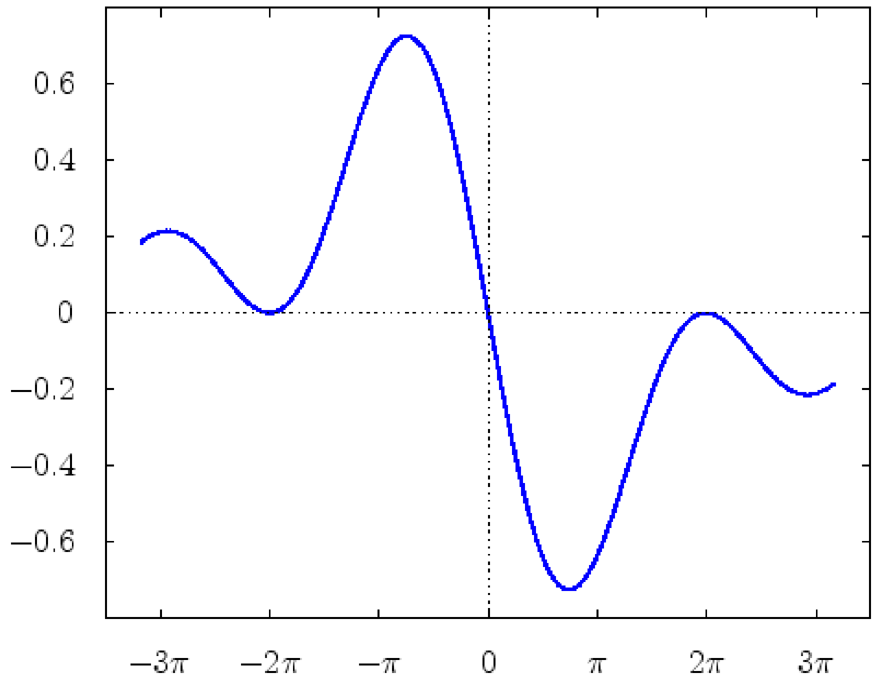
ليکونکي: اېپ، هيوليک

تابع

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$$

د مخ ته وړنې $f(0) = 0$ سره په ټول $\mathbb{R}$ ناپرېکيدونکې ده

(c) ketabton.com: The Digital Library



باور لري

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)}$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x + 1}\sin x,$$

او له

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0}\sin x = 0$$

لاس ته راځي

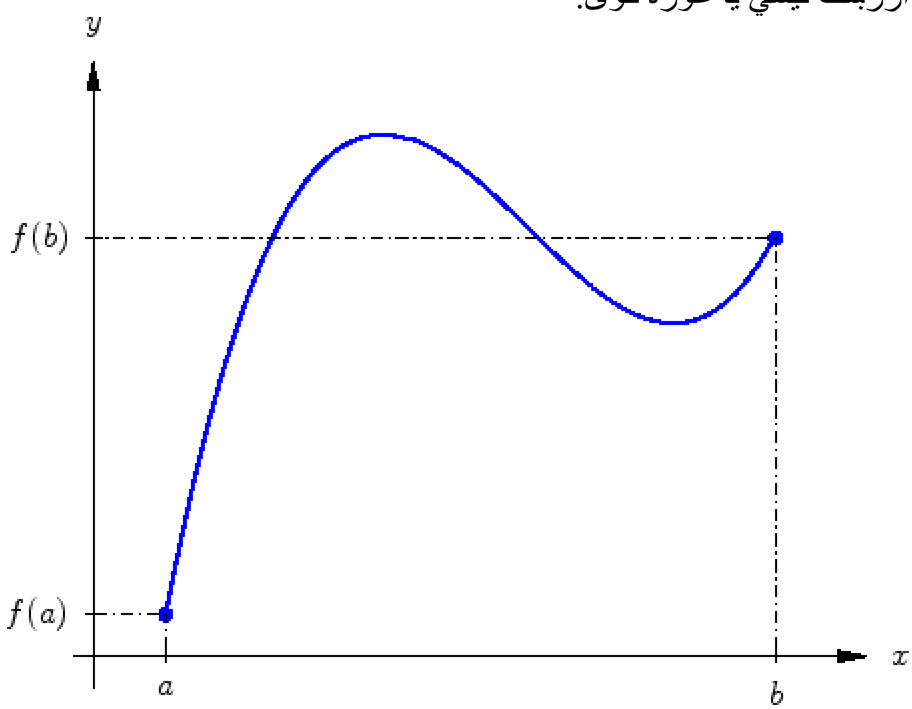
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځ ارزښت جمله **Zwischenwertsatz**

يو ناپرېکېدونی تابع f په يوه بندانتروال $[a,b]$ د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ هر ارزښت نيسي يا غوره کوی.



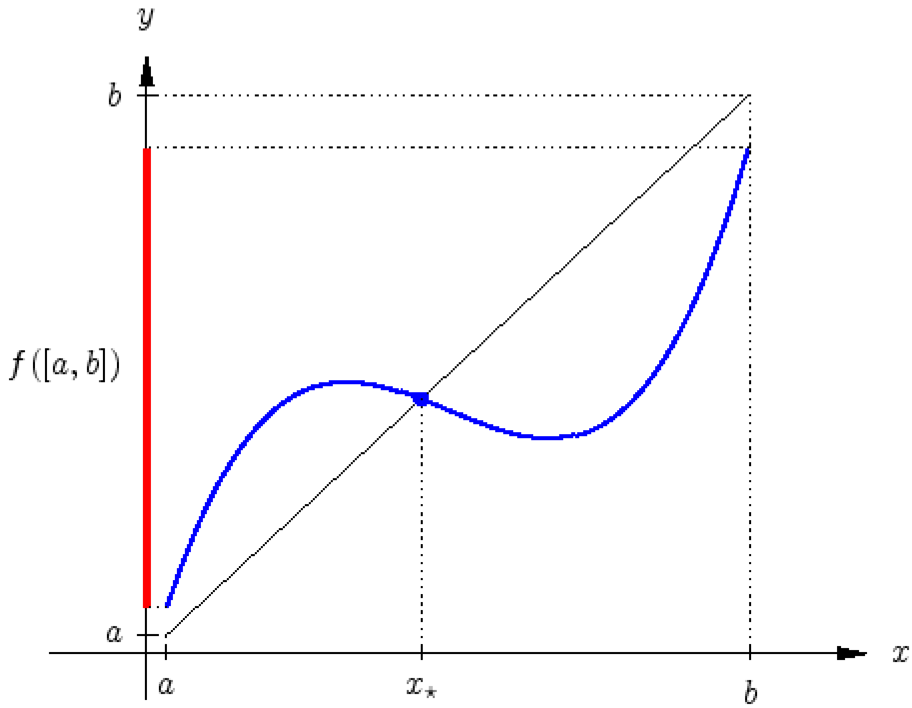
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

که يو تابع f انتروال $[a,b]$ په انتروال $[a,b]$ ناپرېکېدونکی تنظيم کړي، نو يو $x_\star$ شتون لري د

$$x_\star = f(x_\star).$$

سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ناپرېکيدونکې تابع

$$g(x) = f(x) - x$$

لپاره $g(a) \geq 0$ او $g(b) \leq 0$ باور لري. د منځ ارزښت جملې سره د يوه صفرځای $x_\star \in [a,b]$ شتون لاس ته راځي:

د نتپرېکيدونکو توابعو لپاره

$$g(x) = f(x) - x$$

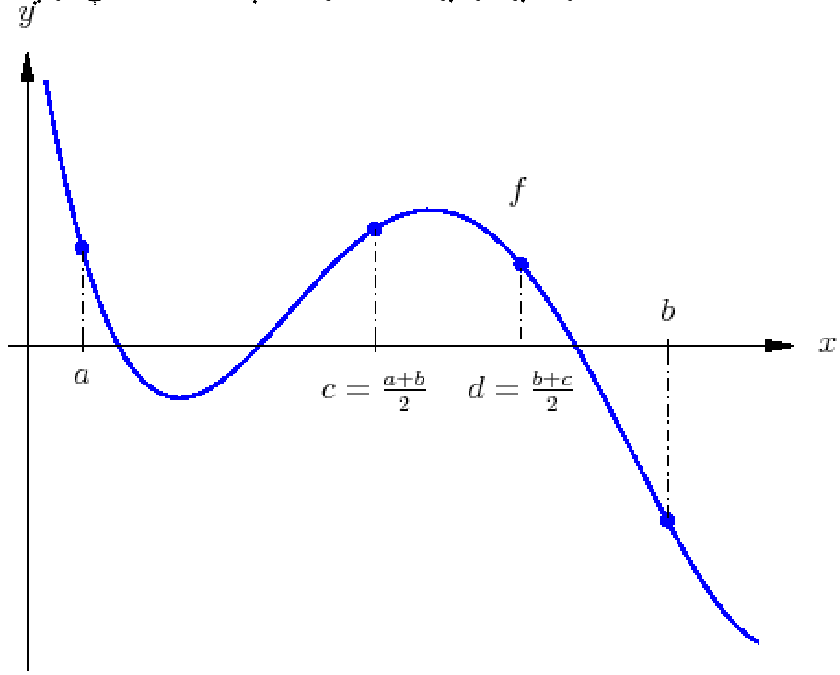
$$g(x_\star) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x_\star) = x_\star$$

دا په دې معناجې د f يو ځاي په ځای - يا بيکس تکی $x_\star$.
ليکونکي: هيوليګ، کراخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه سطحو – يا برخو تلنلار **Bisektionsverfahren**

د منځ ارزښت جملې په بنسټ يو ناپرېکيدونکی تابع $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ د $f(a)f(b) \leq 0$ سره لږ تر لږه يو صفرځای په $[a,b]$ کې لري.



که دا انتروال نيم شي او f ته د انتروال په ةنځ کې ارزښت ورکړي

$$c = \frac{a+b}{2}$$

،

نو کيدی شي د مخنښې په مرسته پرېکړه وشي، چې د کوم انتروال په نيمايي کې بايد صفرځای پروت وي:

$f(a)f(c) \leq 0$ لاسته راځي ، چې په $[a,c]$, کې صفرځای شتون لري

$f(a)f(c) \geq 0$: لاس ته راځي صفرځاب په $[c,b]$. کې شتون لري

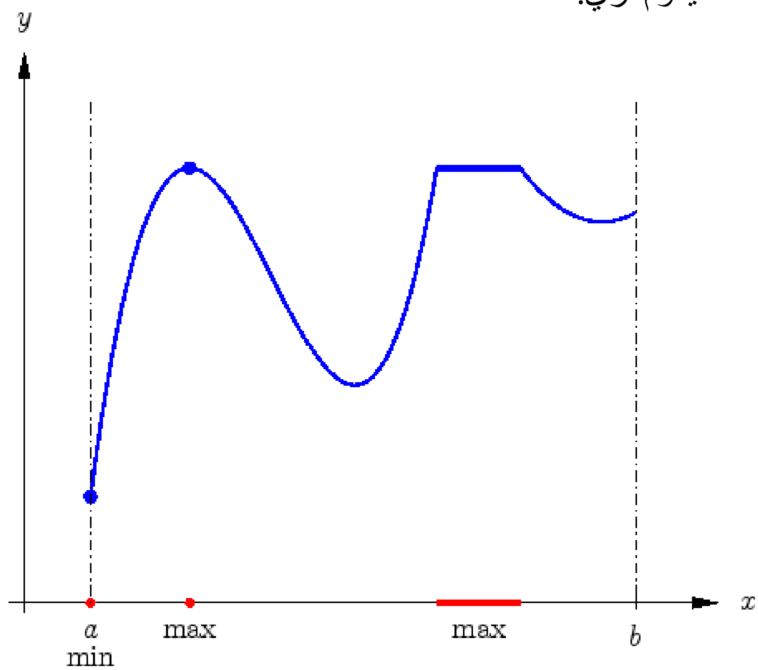
سړی اوس دا اړونده برخه انتروال تاکي او داايتريرiteriert (تيک حل ته ور نږدې کونه) کوي، تر څو د انتروال اوږدوالی غوښتوني تيکوالي ته ورسيږي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک، پفايل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناپرېکيدونکي تابع افرطيت Extrema stetiger Funktionen

يو ناپرېکيدونکی تابع په يوه پای رابند انتروال $[a,b]$ لږ تر لږه يو مينيموم او يو ماکسيموم لري.



ليکونکي: اپپ، هيوليګ

يو $c > 0$ شتون لري د
$(x+y)^n \leq c(x^n + y^n)$

سره د $x, y \geq 0$ لپاره

د ښوونې ته د $x \neq 0$ لپاره (حالت $x = 0$ ساده دی) ليکو

$z = y/x$

او ناپرېکيدونکی تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n}.$$

څېړو.

دا چې $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$ دی، نو یو $b > 0$ شتون لري، داسې چې $f(z) \le 2$ د $z \ge b$ لپاره باوري کوي. د

$$c = \max\left\{2, \max_{z\in[0,b]} f(z)\right\}$$

سره لاس ته راځي

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n} \le c$$

او له دې سره پورته غوښتنه

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

برابرډوله ناپرېکیدنوالی Gleichmäßige Stetigkeit

یو تابع f په یوه انتروال D برابرډوله یا برابرارزښته ناپرېکېدونکی دی ، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو δ_ε شتون ولري ، دا سې چې راکړي

$$|x-a| < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

د ټولو $x, a \in D$ لپاره.

د f د تنها ناپرېکېدنې په برعکس δ_ε د a په واک کې نه ده. تنهاپه یوه محدود رابند انتروال کې ناپرېکېدنوال کی او برابرارزښته یا – ډوله ناپرېکېدنوالی سره ورته دی.

لیکونکي: هیولیګ، پفایل

په ټکي ډول پولې ته تلنه Punktweise Konvergenz

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توابعو (f_n) يوه پرلپسي په يوه انتروال D ټکي ډوله د پولي تابع f په لور پولي ته ځي.

$$f_n \underset{\text{pktw.}}{\longrightarrow} f,$$

که $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ وي د ټولو $x \in D$ لپاره.

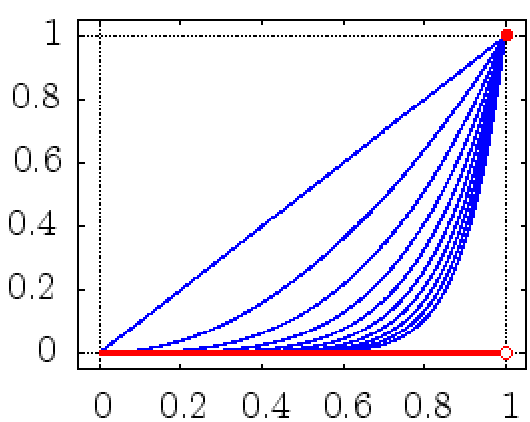
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

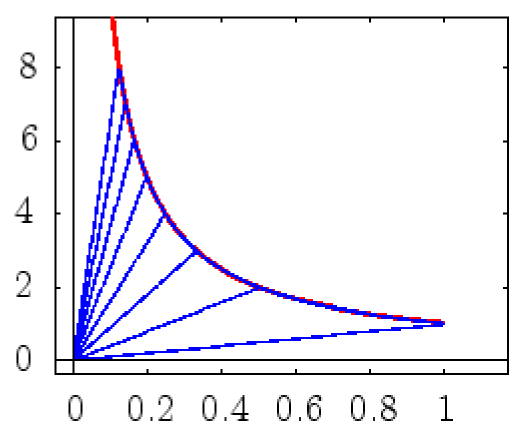
په ټکيډوله پولي ته تلنې بايد نه دی چي ناپرېکېدنوال او بندوالی ساتلي پاتي شي.

د بېيلګي په توګه د $f_n(x) = x^n$ ټکي ډوله پوله ارزښت په $[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

په ښي انتروال پای پرېکېدونکی دی، لکه په کينه څېره کي چي ښوول شوی دی.





د يو کونورګنت لپاره بېلګه چي د نامحدود پوله تابع په لور ښی څېره د پرلپسي سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2x, & 0 < x \le 1/n \\ 1/x, & 1/n < x \end{cases},$$

ښايي ، چې په $(0,1)$ تېکي ډوله د پوله تابع $f(x) = 1/x$ په لور پولې ته ځي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

برابرارزښته يا برابرډوله پولې ته تلنه **Gleichmäßige Konvergenz**

د توابعو يوه پرلپسي (f_n) په يوه انتروال D برابرډوله د يوه پولې تابع f په لور پولې ته ځي،

$$f_n \underset{\text{glm.}}{\longrightarrow} f,$$

که هر $\varepsilon > 0$ ته يو n_ε شتون ولرى، داسې چې

$$n > n_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري.
د کوشي قضيې په مرسته کېدى شي برابرډوله پولې ته تلنه بې د پولېتابع نسبت څخه تعريف شي. سرى ورته شرطونه لاس ته راوړي، داسې چې

$$m, n > n_\varepsilon \Longrightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره بايد باور ولري.
که توابع f_n ناپرېکېدونکي وي، نو پوله تابع f هم ده.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د درېګوډي نامساواتو څخه لرو

$$\begin{aligned} &|f(x_0) - f(x)| \\ &\le |f(x_0) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)| \\ &\le |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|. \end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د په خوښه $\varepsilon > 0$ ته د برابرډوله کونورګنت له امله یو n_ε شتون لري، داسې چې د $n > n_\varepsilon$ لپاره

$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall\, y \in D$$

باوري کوي. د یوه داسې n لپاره اخرنی او لومړنی ترم $< \varepsilon$ دي، که $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ وي. دا له $|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$ لاس ته راځي او له دې سره $f(x) \to f(x_0)$ د $x \to x_0$ لپاره.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د توابعو لړۍ پولې ته تلنه **Konvergenz von Funktionenreihen**

یوه د توابعو f_k لړۍ $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ټکي ډوله (برابرډوله) پولې ته تلونکې ده، که دا د لاندې توټه جمعې یا زیاتون $s_n = \sum_{k \le n} f_k$ لپاره دا حالت ولري.

یوه کلکونه یې مطلق پولې ته تلنه ده، چې د هغې سرره د $\sum_n |f_n|$ د برابرډوله پولې ته تلنې لپاره غوښتل کیږي. په دې حالت کې پولې ته تلنه د لړۍ یوه نظم بدلون لپاره هم ساتلی پاتیږي.

د تعریف سره سم دا وینا وې په تابع پرلپسیوو هم د باور وړ دي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

په لاندې کې د یو څو تیوپیکي بیلګو حالتونه ښولکیږي

(i) د توابعو لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(1-x)^k = x\left[1 + (1-x) + (1-x)^2 + \cdots\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $[0,1]$ ټکې ډوله پولې ته ځي. د هندسي لړی لپاره فرمولپه مرسته پوله تابع لاس ته راځي

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

دا چې په $x = 0$ کې پرېکېدونکی دی، کېدی شي لړی برابرډوله کونورګنت نه وي.

(ii) د $x \in [0,1]$ لپاره لړی

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \pm \cdots$$

د لایبنیخ ـپولې ته تلنې له امله ($\frac{x^k}{k}$ همغږیز صفر پرلپسې ده). دا چې د لړی پاتې د لایبنیخ پسې د

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-x)^k}{k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}\right| \leq \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1}$$

له لارې اټکل کېدی شي، لړۍ په $[0,1]$ حتی برابرډوله پولې ته ځي. مګر سره له دې په $[0,1]$ باندې مطلق پولې ته نه ځي، ځکه چې $\sum(1/k)$ دیورګنت ده.

(iii) لړی

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $[-1,1]$ باندې مطلق پولې ته ځي، ځکه چې

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{x^k}{k^2}\right| - \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{x^k}{k^2}\right| = \sum_{k=n+1}^{m}\left|\frac{x^k}{k^2}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

باور لري، او

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

پولې ته ځي.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

توابعو لړۍ ته مایورانت یا پورته پولې
Majorante bei Funktionenreihen

د پوره لوی n لپاره باور لري

$$|f_n(x)| \leq ca_n\,, \quad x \in D\,,$$

اوکه لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ پولې ته ځي، بیا نو لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

مطلق پولې ته تلونکې ده.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

وینا تړلې د اعدادو لړۍ لپاره د مایورانت له جملې لاس ته راځي، ځکه چې د ټولو $x \in D$ لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| - \sum_{k=1}^{m} |f_k(x)| \leq c \sum_{k=m+1}^{n} a_k$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د اکسپوننشل تابع ضرب انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د یوه ضرب د پوله ارزښت په حیث انځور شي:

$$e^x = \lim_{n\to\infty} (1 + x/n)^n \,, x \in \mathbb{R},$$

په هر انتروال $[-a, a]$ د برابرډوله پولې ته تګ سره.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

لومړی به د

$$f_n(x) = (1 + x/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{x}{n} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{x^n}{n^n}\,.$$

برابرډوله پولې ته تلنه و ښوول شي. دې ته سړی ترې کار اخلي یا استعمالوي، چې

(i)

د $a^k/k! \to 0$ په خوښه $a \geq 0$ لپاره ؛

(ii)

$p_{n,j} = \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j}$ د هر $j \in \mathbb{N}$ لپاره یو مونوتون جګېدونکې د 1

په لور تلونکي پرلپسي ده.

د دې لپاره چې د کوشي فرمول استعمال کړو، سړی کمښت یا تفریق

$f_m(x) - f_n(x)$ په لاندې بڼه لیکي

$$\sum_{j=0}^{k-1}(p_{m,j} - p_{n,j})\frac{x^j}{j!} + \sum_{j=k}^{m} p_{m,j}\frac{x^j}{j!} - \sum_{j=k}^{n} p_{n,j}\frac{x^j}{j!}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k < n < m$ سره .

د $|x| \leq a$ لپاره د $a \geq 1$ او $k \geq 2a$ سره د اخرنيو زياتېدونو ارزښت هر ځل

$$\leq \frac{a^k}{k!} \underbrace{\left(1 + \frac{a}{k+1} + \frac{a^2}{(k+1)(k+2)} + \cdots\right)}_{\leq 2},$$

$< \varepsilon/3$

دی، نو د(i) پسې د يوه پوره لوي ټاکلې k لپاره.

د (ii) پسې يا له مخې دی

$$|p_{m,j} - p_{n,j}| < \frac{\varepsilon/3}{ka^k}$$

د $m, n > N_j(\varepsilon)$ لپاره، اوله دې سره کيدی شي د لومړنی جمعې هره زياتېدونې د $f_m(x) - f_n(x)$ په ټوټه کيدو د $\frac{\varepsilon/3}{k}$ له لارې اټکل کړي. په ټوليزه توګه لرو

$$|f_m(x) - f_n(x)| < k\frac{\varepsilon/3}{k} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad m, n > \max_{j<k} N_j(\varepsilon) .$$

د

برابرېدوله پولې ته تلنې په بنسټ په هر انتروال $[-a, a]$ باندې د پولې تابع $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ ناپرېکېدونکې ده. بسيا کوي، چې $f(x) = e^x$ د راشنل پروت محور $x = p/q$ لپاره وښايو. د يوې برخه پرلپسې $n = mp$ په راوړنې سره د e د تعريف څخه لاس ته راځي

$$\lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{x}{mp}\right)^{mp} = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{p}{mpq}\right)^{mpq/q} = e^{p/q}$$

د $t \mapsto t^{p/q}$ ناپرېکېدنې له امله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشال تابع لړۍ انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د یوې لړی د پولع ارزښت په تګه انځور شي:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \ , x \in \mathbb{R},$$

د هر انتروال $[-a, a]$ برابرډوله پولې ته تلنې سره.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

اوس د ضرب انځورونې ته ورته والی ښولکیږي:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

$x > 0$

دا ترلی د تیلور-لړۍ په څېر د جمعې د روښانه ونې څخه لاس ته راځي. د لپاره دا لاندې سیده ښوونه ستونځمنه ده، سره له دې بې له مشتق منځ راوځي.

سړی پوله ارزښت $\lim_{n\to\infty} (1 + x/n)^n$ د

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{x}{n}\right)^j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{x^j}{j!} \underbrace{\frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-j+1)}{n \cdot n \cdots n}}_{\leq 1} \right)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي او د

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{x^j}{j!} \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-j+1)}{n \cdot n \cdots n} \right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\geq \sum_{j=0}^{m}\left(\frac{x^j}{j!}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{j-1}(1-k/n)\right)$$
$$= \sum_{j=0}^{m}\frac{x^j}{j!}$$

د يوه په خوښه $m \in \mathbb{N}$ کښته لور ته اټکل کوي. د $m \to \infty$ لپاره د پوله ارزښت جوړولو څخه وروسته د دواړو آټکلونو يو بل سره برابروالی لاس ته راځي.

يوه ورته دليل راوړنه د $x < 0$ لپاره همم شوني ده، که سړی مثبت او منفي برخه په دې منځ ته راغلي جمعه کې ځانله يا جداوڅيړي.

ليکونکي: هيوليگ، هيورنر

اکسپوننشا تابع د ډېرې بيلوژيکي ودې پروسې تر څيړنې لاندې نيسي. د بيلګې په توګه په يو ساده د د قومونو ودې مودل کې د زيږېدنې ګڼون يا تعداد متناسب دی د د ورځنې اوسيدونکو تعداد $p(t)$ سره د t په وخت کې، دا په دې معنا چې

$$p(t+\Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t)) .$$

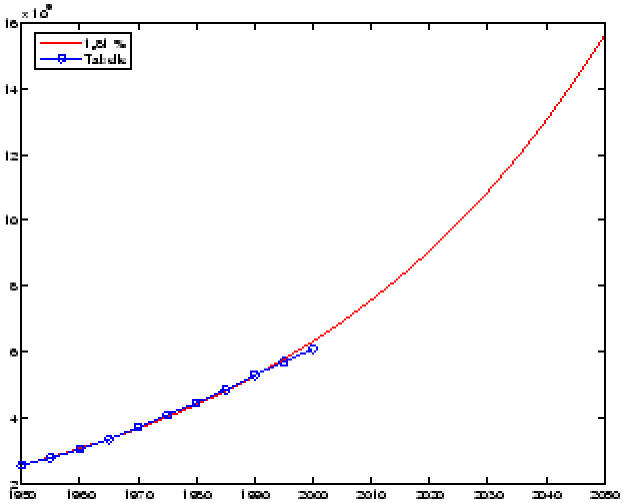
د $\Delta t \to 0$ لپاه دا د ودې قانون

$$p(t) = ce^{\lambda t} \;, \qquad c = p(0) \;,$$

له لارې مودلي کيږي.

کال	د نفوسو تعداد په ميليونو	ونده
	2555	
1950	2779	1.76 %
1955	3039	1.87 %
1960	3345	2.02 %
1965	3707	2.16 %
1970	4088	1.80 %
1975	4456	1.80 %
1980	485	1.79 %
1985	5283	1.77 %
1990	5690	1.54 %
1995	6080	1.37 %
2000		1.25 %

(c) ketabton.com: The Digital Library



(کينې) جدول د نړۍ اوسېدونکي $p(t)$ ښايي همداسي کلنۍ د ودې تعداد(اټکل شوی ارزښت). کلنۍ منحني د ودې زياتون (ريټ) په کلونو 1950-2000کې 1.81 % وو. له 1950 کال څخه به د ثابت منحني اکسپوننشل ودې سره

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

به د نړۍ اوسېدونکي په کال 2050 کې 16 ميلياړده وګنل شي(ټکي په ټکي شوې کرښه يا منحني).
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

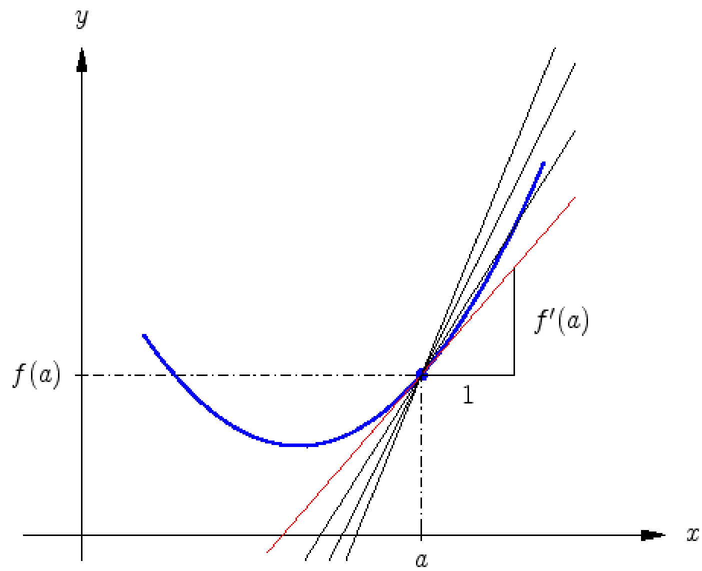
مشتق(رابيليدنه) Ableitung

يو تابع f په ټکي a کې مشتقوړ يا رابېلېدوړ دی، که د مشتق په نوم نومول شوې پوله ارزښت

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري..

(c) ketabton.com: The Digital Library



مشتقوړوالی یا رابیلیدوړوالی هندسي په دې معنا دی، چې د ټوټه ونې یا سيکانت جګوالی له

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

څخه د ورکړشوي تانجنت جګوالي په لور وهڅيږي یا کونورګنت شي(پوله يې ونيول شي).

سرې داسې هم ليکي:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{dy}{dx}$$

د $y = f(x)$ سره . دا ليکدود یا ه-دول په کمبنت وېش کې $\Delta x \to 0$ پولې ته تګ بنايي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جګ مشتقونه د $f'', f''', \dots$ همداسې $f^{(2)}, f^{(3)}, \dots$ سره په نخښه کيږي.

يو تابع f په يوه ډېرۍ يا سټ D باندې مشتقوړ بلل کيږي، که د ټول $x \in D$ لپاره شتون ولري.

$f'(x)$

د تابع $f(x) = x^2$ د مشتق لپاره د تعریف سره سم لرو:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x\,.$$

دويم مشتق $f''(x) = 2$ ثابت دی.

په ټوليزه توګه يو د خوښې مونوم $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ لپاره د بينوم فرمول په مرسته لرو

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x^{n-1}h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1}\,,$$

د کوم سره چې $O(h^2)$ د نظم h^2 ترمونه په نخښه کوي.

د $f(x) = \sin x$ مشتق کېدی شي د زياتون – يا جمعي قضيې په مرسته وشمېرل شي له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t \cos(h/2) \pm \cos t \sin(h/2)$$

څخه د کمښت وېش لپاره د $t = x + h/2$ سره راکوي

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin\left((x+h/2)+h/2\right) - \sin\left((x+h/2)-h/2\right)}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{2\cos(x + h/2)\sin(h/2)}{h}.$$

د

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\sin(h/2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

له امله د $0 \to h$ لپاره ښی اړخ د $\cos x$ په لور هڅیږي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د بنسټتوابعو مشتق یا رابیلیدنه

لاندې جدول د غوره بنسټتوابعو مشتق ښايي:

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		x^r, $r \neq 0$	$r\,x^{r-1}$
e^x	e^x		$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د مشتق يارابيليدنې کربنزوالى **Linearität der Ableitung**

مشتق کربنيز دی، دا په دې معناچي د مشتقوړ توابعو f او g لپاره باور لري

$$(rf)' = rf', \quad r \in \mathbb{R},$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g' .$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ضرب قانون **Produktregel**

د دوه مشتقوړ توابعو f او g د ضرب مشتق دی
$$(fg)' = f'g + fg' .$$

په ټوليزه توګه د ضرب $f = f_1 \cdots f_n$ لپاره باور لري
$$f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \frac{f}{f_i} .$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د تعريف څخه ترلى راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د پولینوم

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

مشتق د $x = 1, 2, 3$ په ځایونو کې ټاکل کیږي. دا چې د هر کرښیز ــضریب مشتق 1 دی، د ضرب له لارې یا قاعدې څخه لرو

$$p'(1) = (1-2)(1-3) = 2,$$

$$p'(2) = (2-1)(2-3) = -1,$$

$$p'(3) = (3-1)(3-2) = 2.$$

په ورته توګه سړی د

$$p(x) = (x-1)\cdots(x-n),$$

لپاره شایي، چې

$$p'(k) = (-1)^{n-k}(n-k)!\,(k-1)!$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی د $k = 1, \ldots, n$ لپاره.
(Autoren: Höllig/Hörner/Knesch)

د وېش قانون یا لار **Quotientenregel**

د دوه مشتقوړ توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو x کې د $g(x) \neq 0$ سره. په ځانګړې توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2x}{4+3x^2}$$

د راشنل توابعو مشتق دی

$$\frac{(1-2x)'(4+3x^2) - (1-2x)(4+3x^2)'}{(4+3x^2)^2}$$

$$= \frac{-2(4+3x^2) - (1-2x)(6x)}{(4+3x^2)^2}$$

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4+3x^2)^2}$$

په بدیلي ډول د ضرب قانون سره لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left((1-2x)\frac{1}{4+3x^2}\right)' =$$

$$= (-2)\frac{1}{4+3x^2} + (1-2x)\frac{-6x}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(4+3x^2)^2}\,.$$

(Autoren: Höllig/Kreitz

ځنځيری لار یا - قانون **Kettenregel**

د توابعو د ځنځيروني

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$$

لپاره مشتق دی

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

.

د $f(y) = z,\ g(x) = y,\ h(x) = z$ سره سړی ليکي

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}$$

.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د تعريف ښخه ترلی لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\begin{aligned}(f(g(x)))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \, \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{\tilde{h}\to 0} \frac{f(g(x)+\tilde{h})) - f(g(x))}{\tilde{h}} \, \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(g(x))g'(x),\end{aligned}$$

چیرته چې $\tilde{h} = g(x+h) - g(x)$ دی.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ځنځیري قانو د روښنه کولو ته تعریفیږي:

$$h'(x) = \frac{d}{dy} \mathrm{s}\, h(x) = \sin\big(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)}\big) \; x^2))g'(x).$$

د دننني مشتق $g'(x)$ شمېرلو ته د سره د ځنځیر قانون کارول کیږي:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}(2x).$$

په بدیلي توګه کېدی شي د مشتق لیکدود وکارول شي. د

$$z = \sin y, y = \ln w, w = 1 + x^2$$

سره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = \cos(y)\frac{1}{w}2x = \cos\left(\ln(1+x^2)\right)\frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

ليکونکي: هیولیګ، کوپف

ایمپلیڅیت مشتق نیول **Implizites Differenzieren**

که یو تابع $y = f(x)$ ایمپلیڅیت وي، دا په دې معناچې یو برابرون په x او y کې ورکړ شوی، داسې چې دواړه خواوي د x پسې مشتق کیدی شي. دلته یواځې په کې $y = y(x)$ افادو باندې ځنځیري قانون استعمالیږي.

د بېلګې په توګه سړی د

$$E:\ \ x^2 + 3y^2 = 7$$

له لارې ورکړ شوې ایلیپسې یا هګۍ

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

همداسې

$$y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$$

.

لاس ته راوړي.

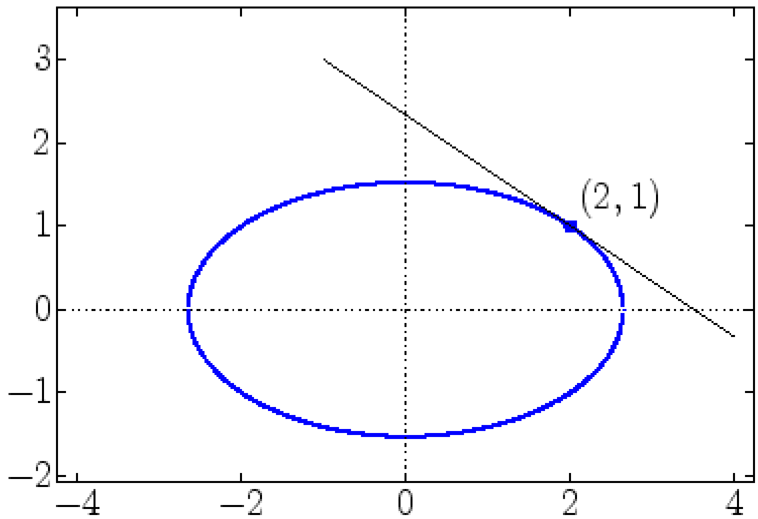
له دې سره کېدی شي د E په یوه ټکي د $y \neq 0$ سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي.

د بېلګې په توګه د $(2,1)$ لپاره په لاس راځي

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه جګ مشققونه شمېرل کيږي. د yy' لپاره دضرب قانون د استعمال سره دی

$$\frac{d}{dx}(2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0\,.$$

له دې لاس ته راځي

$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

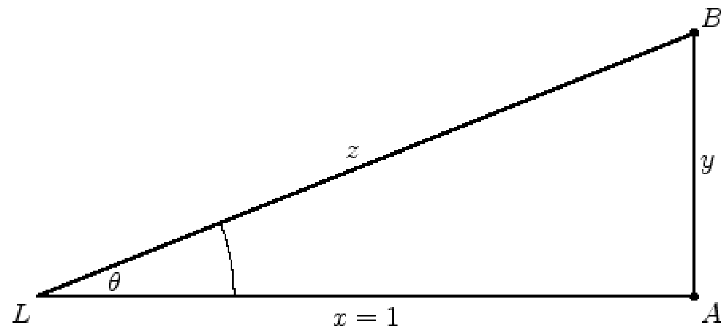
.

کيدی شي په E باندې د يوه ټکي ځا په ځای کول او همدا د $y'(x)$ ارزښتونو پيژندلو له لارې ځرګند ازښتونه ټاکي

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

په ټکي L کې يو د برېښنا يا رڼا برج دی د يوه ځرخېدونکي بېجلی يا ګروپ سره، چې د رڼا وړانګه يې د ټکو A او B له لارې تللی 1 km کرښيز لرې دښته لويږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



وړانګه غورځونکی د یوه څرخون لپاره 2 ثانیو ته اړتیا لري، دا په دې معنا چې

$$\frac{d\theta}{dt} = \pi$$

. د رڼاوړانګې پوزیشن یا ځای په دښته کې دی

$$y(t) = x\,\tan\theta(t).$$

له دې سره د چټکتیا لپاره لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dt} = 1\pi\,\frac{1}{\cos^2(\theta)} \longrightarrow \infty \quad \text{für} \quad \theta \to \frac{\pi}{2},$$

دا په دې معنا چې سوری یې له رڼا چټک دی.

یو ټیکه معالعه لاندې راکوي. د دې وخت توپیر په پام کېنیولو له امله رڼا B ته د په وخت $t = \frac{\theta}{\pi} + \frac{z}{c}$ ورسیږي، دکوم سره چې $c = 300000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ د رڼا چټکتیا ده،
له دې سره لرو

$$\frac{\theta'}{\pi} = 1 - \frac{z'}{c}.$$

وروسته د t پسې د $z^2 = y^2 + 1$ مشتق راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$zz' = yy', \qquad \frac{z'}{y'} = \frac{y}{z} = \sin(\theta).$$

د θ' او z' ایښوونه په

$$y' = \frac{\theta'}{\cos^2(\theta)}$$

کې بالاخره راکوي

$$y' = \frac{1}{\cos^2(\theta)}\left(\pi - \frac{\pi}{c}y'\sin\theta\right)$$

همداسې

$$y' = \frac{c \cdot 1\pi}{c\,\cos^2(\theta) + 1\pi\sin(\theta)}$$

.

د $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ لپاره اوس $y' \longrightarrow c$ هڅېږي، د اینشټاین د تیوري سره په هم غږۍ
کې باور لري

t

$$y' \longrightarrow \infty \qquad \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} \to -\frac{c}{\pi},$$

für

$$\theta \approx 4.781 \in \left(\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

داپه دې معناچې د لپاره ببرته سړی یوو خورا لویه چټکتیا
لاس ته راوړي. سوری له دې امله د رڼا ګړندی دی. دا د اینشټاین تیوري سره په تضاد
کې نه دی، ځکه چې سړی یو ه پېښنه Phänomen, ګوري، نا دا خورنده ماده. د ،،ساده

$300000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$

ځېرونکي،، لپاره بو نا ښه احساس پاتیږي دا په هر صورت له ځخه
ورو خوزي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لايبنيڅ قاعده يا لار**Leibniz-Regel**

د يوه ضرب n -م مشتق دی

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

.

(Autoren: Höllig/Kopf)

د په حالت کې باور لري

$$(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg''$$

او د لپاره دی

$$(fg)''' = (f'g + fg')'' = (f''g + 2f'g' + fg'')' =$$

$$= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

ټوليزه ښوونه د اندکشن له لارې صورت په n نيسي د بينوميال ضريبونو لپاره د ريکورزين په پام کې نيولو سره.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د $x = 0$ په ځا کې دې د

$$f(x)\, g(x) = x^9 \ \cos(\sin x)$$

يولسم مشتق وشمېرل شي.

د دې لپاره لومړی له دې څخه کار اخلو، چې د $x = 0$ لپاره د مونوم f فقط 9 -م مشتق د صفر سره نابرابر دی:

$$f^{(9)}(0) = 9!\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لایبنیخ- فرمول له دې سره فقط په یوه ترم راکمه وي.

$$(fg)^{(11)}\,|_{x=0} = \binom{11}{2}\, f^{(9)}(0)\, g^{(2)}(0)\,.$$

د ځنځیري قانون سره لرو یا لاس ته اځي

$$g'(x) = -\sin\left(\sin x\right)\,\cos x$$

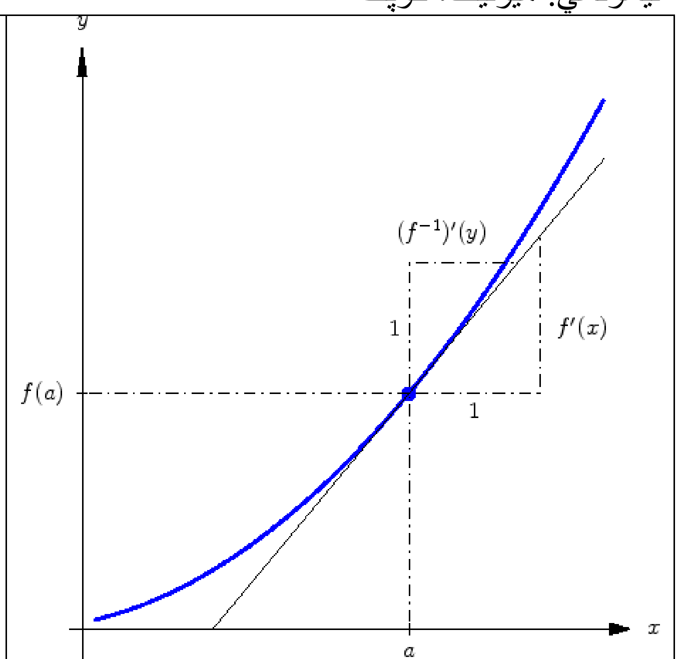
$$g''(x) = -\cos\left(\sin x\right)\cos^2 x + \sin\left(\sin x\right)\sin x,$$

یعني $g''(0) = -1$. له دې سره غوښتونی مشتق دا لاندې دی

$$\binom{11}{2}\, 9!\,(-1) = -\frac{1}{2}\,(11!)\,.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

که یو تابع $y = f(x)$ د $f'(x) \neq 0$ سره f ناپریکېدونکي مشتقوړ وي، نو د x په یوه چاپېریال کې معکوس وړ دی ، او باور لري
$(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1},$
همداسي
$dx/dy = (dy/dx)^{-1}$
.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه په ځېره کې چې ليدل کيږي، د f او f^{-1} ځګوالي معکوس دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

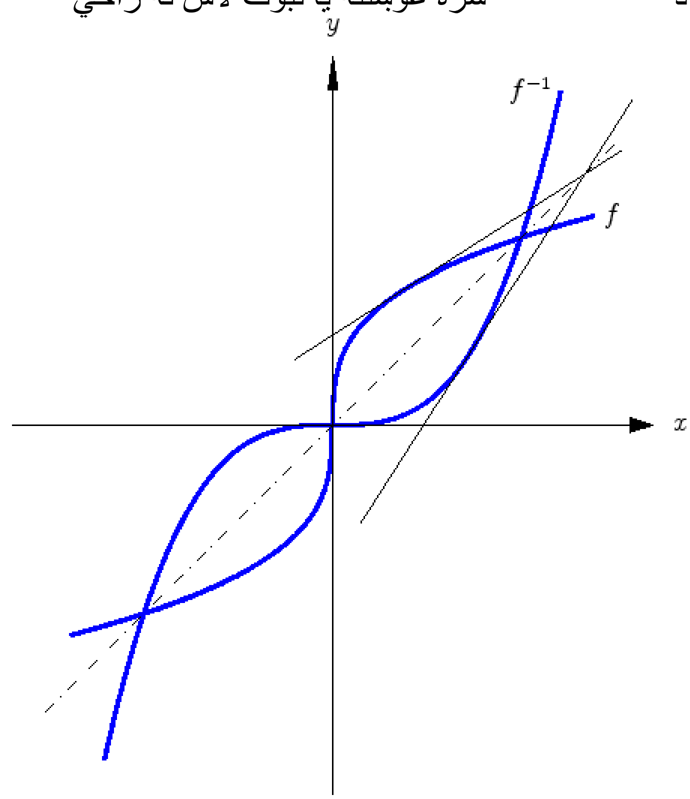
که کيږدو $g = f^{-1}$، نو لاس ته راوړو

$$x = g(f(x))$$

او د ځنځيري قانون سره مشتقونه

$$1 = g'(f(x))f'(x)\,.$$

د $y = f(x)$ سره غوښتنه يا ثبوت لاس ته راځي



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د f او f^{-1} جګوالی په اړونده د x او y په ځایونو کې سره معکوس دي، روښانيږي، که په پام کې ونيول شي، چې f او f^{-1} يو بل ته سيومتريک دي.

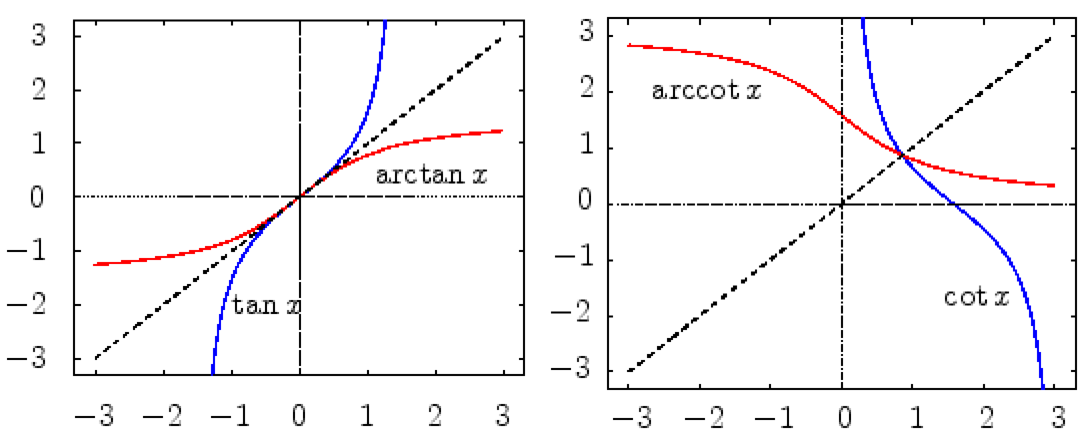
ليکونکي: اپپ، هيوليک،

دا چې د تانجنت تابع د $x = \arctan y$ معکوس تابع مشتق وټاکو، لومړی شمېرو

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

له دي سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dy}\arctan y = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} = \cos^2 x.$$



ښی اړخ اوس باید د y تابع په څېر وليکل شي. د دې لپاره کټوتوالی کارول کيږي يا استعماليږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + y^2$$

او لاس ته راوړي

$$\frac{d}{dy}\arctan y = \frac{1}{1+y^2}.$$

په ورته توګه د کوتانجنت په څېټ- يا معکوس تابع ښايو.

$$\frac{d}{dy}\text{arccot}y = -\frac{1}{1+y^2}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

ع

$y = f(x) = x\,(1 - x$

، انتروالونو

$(-\infty, 1/2$

او

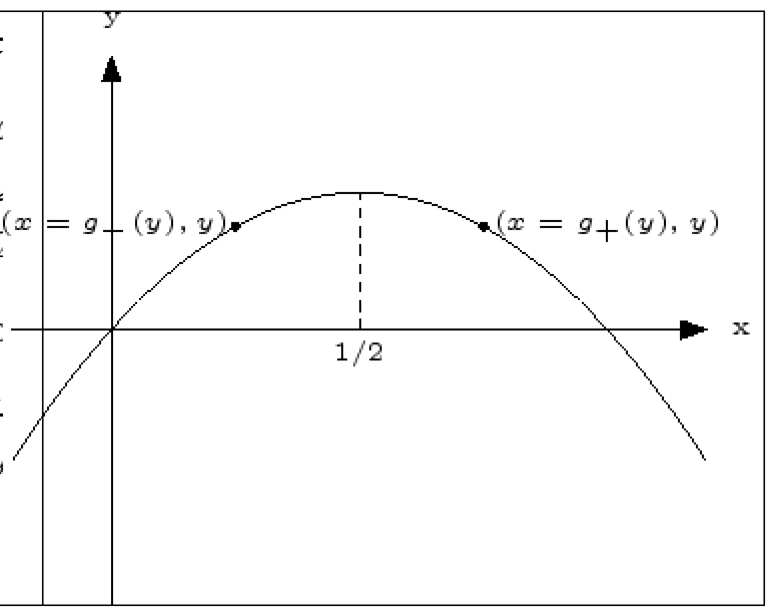
$[1/2, \infty$

هر وار په

ټ – يامعکوس تابع

$x = g(y$

لري.



(c) ketabton.com: The Digital Library

په دواړو حالتونو کې باور لري

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1-2x}\,.$$

بل يې مشتقنيول راکوي

$$g''(y) = \left(\frac{1}{1-2x}\right)' \frac{dx}{dy} = \frac{2}{(1-2x)^2}\frac{1}{1-2x}\,.$$

په ځانګړي ډول د $x = 1, y = 0$ لپاره لاس ته راځي

$$g'(0) = 1, \quad g''(0) = -2\,.$$

مشتقونه شمېرلوړ دي، بې له دې چې معکوس تابع باید روښنه جوړه شي. دا ټيک هلته شونی دی، چې که سړی د y تابع د په څېر $g'(y)$ و ليکي. په دې بيلګه کې دا شوندی دی، ځکه x د y تابع په څېر ليکل کېدی شي:

$$g_{\pm}(y) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - y}\,.$$

پورته ارزښتونه داسې شمېرل کېدی شي، دکومو سره چې د هغوی د ارزښتجوړې $(1,0)$ اړونده څانګه باید وټاکل شي.

ليکونکي: هيوليک، کرايخ

لوګاريتمي مشتق يا - رابيليدنه **Logarithmische Ableitung**

دا فرمول

$$f'(x) = f(x)\frac{d}{dx}\ln|f(x)|$$

کيدی شي د $g(x) > 0$ سره د $y = g(x)^{h(x)}$ بڼې توابعو مشتقيدو ته وکارول شي. سړی لاس ته راوړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

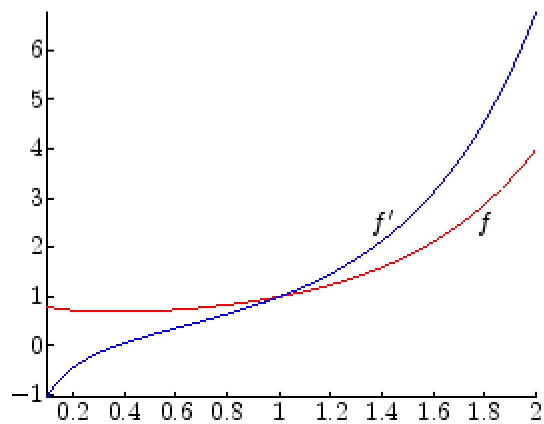
$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx}\left(h(x) \ln g(x)\right) .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د $x > 0$ سره تابع $f(x) = x^x$

لپاره مشتق دی

$$f'(x) = x^x \frac{d}{dx} \ln(x^x) = x^x \frac{d}{dx}(x \ln x) = x^x(\ln x + 1) .$$



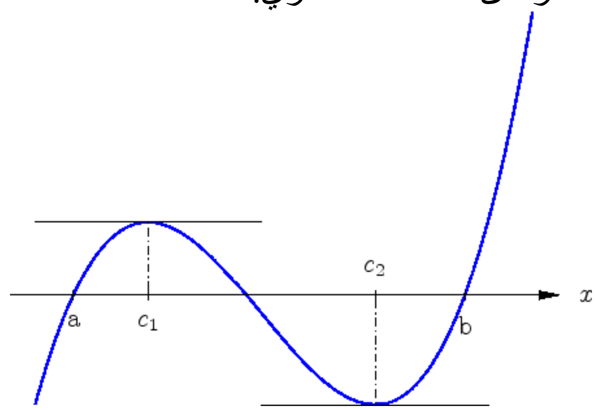
د $x \to 0$ لپاره $\ln f(x) = x \ln x$ د صفر په لور هڅيري، نو x^x د $e^0 = 1$ په لور. نو تابع په صفرځای کې ښي اړخيز ناپزېکېدونکي ده. د مشتق لپاره دا حالت نه دی. د $x^x \to 1$ او $\ln x + 1 \to -\infty$ له امله د $x \to 0$ لپاره f په صفر یو ولاړ یا عمود تانجنت لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د رولې جمله Satz von Rolle

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه ناپرېکيدونکي مشتقوړ تابع f مشتق د $f(a)=f(b)=0$ سره لږ تر لږه يو صفرځای $c\in(a,b)$ لري.



توليز باور لري: که يو تابع په يوه انتوال $[a,b]$ کې n صفرځايونه ولري (د دېرووار والي په شمول)، نو هلته kــم مشتق $\geq n-k$ صفرځايونه لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

دا چې f ناپرېکېدونکی دی، نو د افراطي ارزښت جملې له امله په $[a,b]$ کې ټکي c او d شتون لري دا لاندې باوري کوي

$$f(c)=\min_{x\in[a,b]} f(x)$$

$$f(d)=\max_{x\in[a,b]} f(x).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که f ناثابت وي(د ثابت f حالت ساده دی)، نو $f(c) < f(d)$ باور لري. له دې املهٔ لږ ترلږه د دې دواړو ټکو څخه يو يې په (a,b) کې پروت دی . دا چې f مشتقوړ دی باید د دې ځایز یا لوکال افراطیت لپاره مشتق ورک – یا صفر شي.

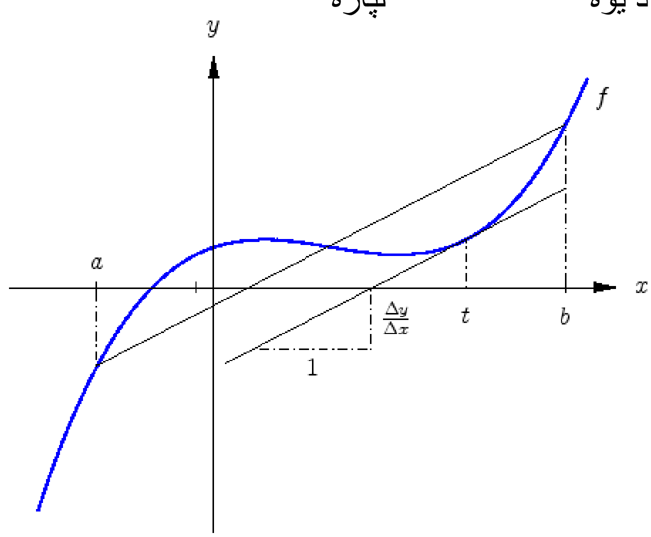
ليکونکي: اپپ، هيوليک،

منځ ارزښت قضيه Mittelwertsatz

د يوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

$$f(b) - f(a) = f'(t)(b-a)$$

د يوه $t \in (a,b)$ لپاره



هندسي دا ګټوټوالی په دې معنا دی، چې تانجنت په يوه ټکي کې غبرګ دی د له پای ټکو $(a, f(a))$ او $(b, f(b))$ تېرېدونکي ټوټه ونې يا وتر سره. داسې هم ليکو

$$\Delta y = f'(t)\Delta x$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

د يوې تابع

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

لپاره $g(a) = g(b) = 0$ باور لري. دا چې f ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی، نو g هم ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی او د رولې د جملې پر بنسټ يو $t \in (a,b)$ شتون لري د لاندې سره

$$0 = g'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

همداسې

$$f(b) - f(a) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

تولیزه (شوې) منخ ارزښت جمله **Verallgemeinerter Mittelwertsatz**

که f او g ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابع وي، نو $t \in (a,b)$ يو شتون لري د لاندې سره

$$(f(b) - f(a))g'(t) = (g(b) - g(a))f'(t)\,.$$

که برسېره پردې په (a,b) باندې $g'(x) \neq 0$ باور ولري، نو سړی کړی شي هم

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هم وليکي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د تابع

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) - f(b)g(a) + f(a)g(b)$$

لپاره $h(a) = h(b) = 0$ باور لري. دا چې f او g ناپرېکېدونکي مشتقوړ دي،
نو h هم ناپرېکېدونکي مشتقوړ دی او د پورته د رولې د جملې سره سره سم يو
$t \in (a,b)$ شتون لري د لاندې سره.

$$0 = h'(t) = (f(b) - f(a))g'(t) - (g(b) - g(a))f'(t)$$

bzw. همداسې

$$(f(b) - f(a))g'(t) = (g(b) - g(a))f'(t) .$$

که (a,b) په باندې $g'(x) \neq 0$ وي. نو د منځ ارزښت جملې سره سم
$g(b) - g(a) \neq 0$ هم او سړی لاس ته راوړي.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

لانداو-سيمبول **Landau-Symbole**

سړی ليکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = O(g(x)) \qquad (\ x \to a)\ ,$$

که يو ثابت c شتون ولري، دسې چې $|f(x)| \le c|g(x)|$ وي a ته پوره نږدې x لپاره .

د $|f(x)|/|g(x)|$ د 0 په لور هڅيږي، نو سړی په اړونده توګه ليکدود کاروي

$$f(x) = o(g(x))$$

.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د بينوم له جملې څخه لاس ته راځي

$$(1+x)^n = 1 + nx + O(x^2) \quad (x \to 0)$$

په څېر – يا معکوس جوړونې د $1 - nx$ سره دغزونې وروسته لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+x)^n} &= \frac{1}{1 + nx + O(x^2)} \\
&= \frac{1-nx}{1-(nx)^2+O(x^2)} = \frac{1-nx}{1+O(x^2)} \\
&= 1 - nx + O(x^2)\,.
\end{aligned}$$

د $x \to \infty$ لپاره دی

$$(1+x)^s = O(x^s)$$

د ټولو $s \in \mathbb{R}$ لپاره.

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناپرېکیدنه او مشتقوړوالی کیدی شي د لاګرانژ فرمول په مرسته تعریف شي.

یو تابع f په $x = a$ کې ناپرېکېدونکی دی، که وي

$$f(x) - f(a) = o(1) \quad (x \to a).$$

مشفقوړوالی د

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r$$

سره په یوه معنا دی د

$$r = o(h) \quad (|h| \to 0).$$

سره.

د یوه دوه واره ناپرېکېدونکي مشتقوړتابع لپاره د تېلور –ودې څخه هغه تېره

$$r = O(h^2)$$

اټکل لاس ته راځي

لیکونکي:کلاوس، هیولیګ،

د لو، پیتال قاعده یا لار **Regel von l'Hospital**

که دوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابع f او g په a کې یوه ګډ صفرځای یا قطبځای ولري، نو باور لري

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

که ښی پوله ارزښت شتون ولري(په ورکړ شوي حالت کې په ناپای کې)

د ټولیزه منځ ارزښت جملې په بنسټ د x او a تر منځ یو t شتون لري د لاندې سره

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که سړی ، د یوه ناپای پوله ارزښت په موخه، $f'(t)/0$ یعنې داسې $\pm\infty$ په معنا کړي.

له دې $x \to a$ سره هم a $t \to a$ ځي، نو سملاسي راکوي

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د لو، پيتال د جملې استعمال د يو څو بېلګو لړيو په بنسټ روښانه کيږي

د $0/0$ لپاره:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{3x^2-7x+4} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2}{6x-7} = -1$$

د $-\infty/\infty$ لپاره :

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} -x = 0$$

د ټولو $x \to \infty$ لپاره:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi/2-\arctan x}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = 1$$

دېواره استعمال:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \qquad \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{2\cos(x)-x\sin(x)} = 0$$

په دې بېلګو کې دې پام وي، چې د شمېرلو پوله ارزښت شتون د لوپيتال قاعدې د استعمال پسې د منځته راغلې پوله ارزښت د شتون له لارې تضمين دی.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

کرښيزاپروکسميشن (ورنږدېوالی) **Lineare Approximation**

د يوه دوه واره ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + R$$

د لاندې پاتې غړي سره

$$R = \frac{1}{2}f''(t)(\Delta x)^2 = O((\Delta x)^2)$$

او د t د x او ترمنځ $x+\Delta x$ سره.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

تابع

$$g(y) := f(y) - f(x) - f'(x)(y-x) -$$

$$-\ \frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}(y-x)^2$$

د $y = x + \Delta x$ لپاره يو صفرځای لري او د $y = x$ لپاره يو دېل يا دوه واره صفرځای لي. د رولې د جملې په تعقيب يو $y = x + \Delta x$ شتون لري د لاندې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$0 = g''(t)$	$= f''(t) - 2\frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}$

همداسې

$f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x$	$= \frac{1}{2}f''(t)(\Delta x)^2.$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د ناټیکاوي وده **Fehlerfortpflanzung**

د یوه کچ – یا اندازونې ارزښت $\Delta x = \tilde{x} - x$ مطلق ناټیکاوی یا یو

نږدېوالی $x \approx \tilde{x}$ ښایي نو د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره

$$|\Delta y| = |f'(x)||\Delta x| + o(\Delta x)$$

باور لري د $\Delta y = f(\tilde{x}) - f(x)$ سره. په اړونده توګه د نسبي ناټیکاوی لپاره باور لري

$$\frac{|\Delta y|}{|y|} = \left(|f'(x)|\,\frac{|x|}{|y|}\right)\frac{|\Delta x|}{|x|} + o(\Delta x)$$

که $x, y \neq 0$ وي. په نوکانو کې افاده c_r د x په ځای کې د f د کندیشن عدد بلل کیږي.

د ترم $o(\Delta x)$ د پرېښږړلړ یعنې له منځه وړلو له لارې کېدی شي د ناټیکاوي نږدیوالس اټکل شي. د دې سره کېدی شي د ټیک مشتق ارزښت په ځای مناسب بندیزونه هم وکارول شي:

$$|\Delta y| \leq c_a|\Delta x|\,, \quad c_a \geq \max_{|t-x|\leq|\Delta x|} |f'(t)|\,.$$

په ا ړونده توګه $c_r = c_a\frac{|x|}{|y|}$ د نسبي ناټیکاوي لپاره یو بندیز یا لنډ: بند دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

یو کونج $\vartheta \in (0,\pi/2)$ کېدی شي د کاتېتونو یا ولاو اړخونو د نسبت څخه په جګېدونکي درېګوډي کې داسې وټاکو :

$$\vartheta = \arctan(y/x) \, .$$

که y د کره ځای په ځای x سره کچ کړو، نو کېدی شي ضریب c_a د مطلق ناټیکاوي لپاره د

$$\left|\frac{d\vartheta}{dy}\right| = \left|\frac{1/x}{1+y^2/x^2}\right| = \left|\frac{x}{x^2+y^2}\right|$$

له لارې اټکل شي. افاده د $y = 0$ لپاره ماکسمال کیږي، او سړی لاس ته $c_a = \frac{1}{x}$ راوړي، دا په دې معنا چې

$$|\Delta\vartheta| \leq |1/x| \; |\Delta y| \, .$$

لویې ناټیکیاوی د کوچني x لپاره غزیږي. په ورته توګه د نسبي ناټیکاوي د قوی کېدني فکتور لپاره هم باور لري

$$c_r = \max_y \left|\frac{x}{x^2+y^2}\frac{y}{\vartheta}\right| \, .$$

که دا لاندې تخمین وکارول شي

$$|\vartheta| \geq |\sin\vartheta| = \left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \, ,$$

،

نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c_r \le \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \le 1 .$$

نو نږدېوالي دول باور لري

$$\frac{|\Delta\vartheta|}{|\vartheta|} \le \frac{|\Delta y|}{|y|} ,$$

دا په دې معنا چې نسبي فکتور نه غښتلی کیږي

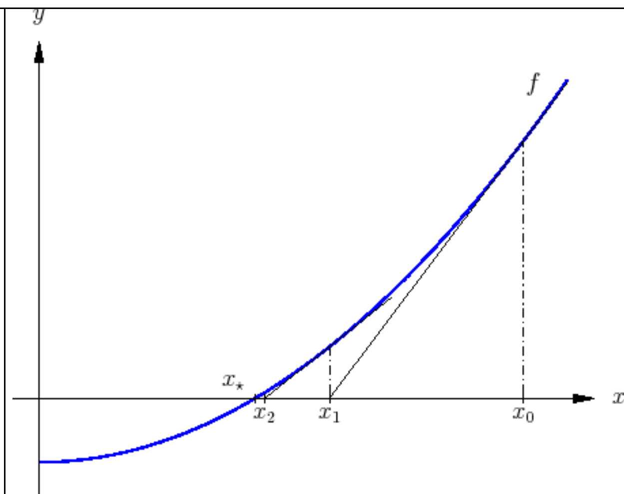
لیکونکي: کلاوس، هیولیک،

د نیوټن تلنلار یا - قانو**Newton-Verfahren**

د نیتن تلنلار سره کېدی شي د یوه تابع f صفرځای x_* نومریک وټاکل شي. د نږدېوني یا اپروکسمیشن پرلپسي $x_0, x_1 \ldots$ د کرښیزوالي څخه کټل کیږي.

نږدېوالی $x_{\ell+1}$ د x -محور سره د تانجنت غوښتکی دی په ټکی $(x_\ell, f(x_\ell))$ کي :

$$x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell)$$



د یوه ساده صفرځای x_* ($f'(x_*) \neq 0$) لپاره د نیوټن – ایتریشن لوکال مربع پولې ته ځي، دا په دې معناچې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|x_{\ell+1} - x_*| \le c\ |x_\ell - x_*|^2$$

د پيلټکي x_0 لپاره د x_* په يوه پوره کوچني چاپريال کې.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د تيلور -نږدې ارزت Taylor-Approximation له لارې سړی

$$0 = f(x_*) = f(x_\ell) + f'(x_\ell)(x_* - x_\ell) + r$$

لاس ته راوړي د پاتې غړي

$$r = \frac{1}{2} f''(t_\ell)(x_* - x_\ell)^2\,,$$

سره د يوه t_ℓ لپاره چې د x_* او x_ℓ ت رمنځ پرته ده. که د انترپوليشن قاعده کې کيږدو

$$f(x_\ell) = f'(x_\ell)(x_\ell - x_*) - r$$

،

نو لالاس ته راځي

$$x_{\ell+1} = x_* - r / f'(x_\ell)\,.$$

د $f'(x_\ell) \ne 0$ لپاره لرو

$$|x_{\ell+1} - x_*| = c_\ell |x_\ell - x_*|^2, \quad c_\ell = \frac{1}{2}\ \left|\frac{f''(t_\ell)}{f'(x_\ell)}\right|\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $f'(x_*) \neq 0$ باور ولري، نو c_ℓ د ناپریکیدنبأه امله د x_ℓ لپاره په یوه د x_* چاپیریال $[x_* - \delta, x_* + \delta]$ کې مخدود دی:

$c_\ell \leq c$.

له ې سره د مربع یا ځلوریز پولې ته تګ لاس ته راځي.
لیکونکي: اپپ، هیولیک،

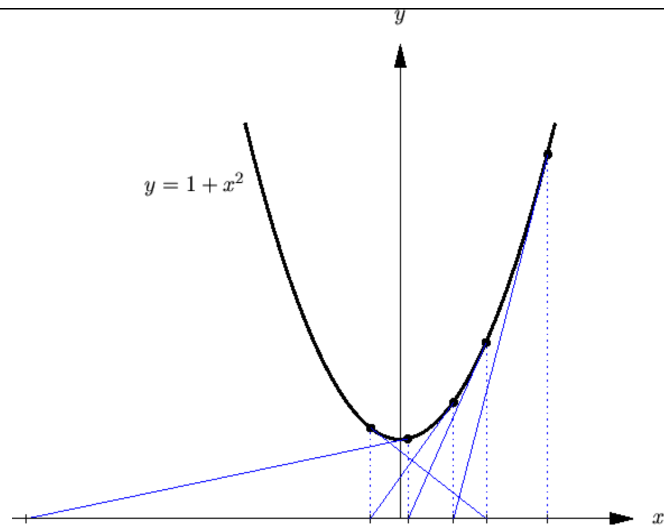
که په لاندې مساوات د نیټن قانون وکاروو

$$f(x) = x^2 + 1 = 0$$

،

نو اتریشن(پل په پل اصلي حل ته وردږدې کېدنه) لاس ته راځي

$$x_{l+1} = \frac{1}{2}\left(x_l - \frac{1}{x_l}\right) .$$

f په پام کې د ې وي. چې حقیقي حل نه لري، نیوټن تلنلار یا قانون په حقیقي پیل ارزښت x_0 سره پولې ته نه شي تللی. (x_l) په رښتیا کې پرلپسي یو ګډوډ حالت غوره کوي. د کټمتوالي په مرسته	

$$\cot(2\phi) = \frac{1}{2}\left(\cot\phi - \frac{1}{\cot\phi}\right)$$

پرلپسي (x_ℓ) کېدی شي اکسپلیځیټ ورکړل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_0 = \cot\phi \implies x_\ell = \cot(2^\ell\phi).$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

ها له بابلیانو څخه کارول شوی ایترېشن یا پل پل مخ ته تلنه یا تکرار

$$x \longleftarrow (x + a/x)/2$$

د یوه حقیقی عدد a د ریښي شمېرلو ته په ټیکه مطالعه د $f(x) = x^2 - a$ لپاره د نیوتن تلنلار په حیث ځان ښایي:

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

د $a = 2, x_0 = 1$ لپاره نږدې شمېرنه یا اپروکسیمېشن لاس ته راوړو.

1

1.5

1.4166666666666666666666666666666666666667

1.4142156862745098039215686274509803921569

1.4142135623746899106262955788901349101165

1.4142135623730950488016896235025302436149

1.4142135623730950488016887242096980785697

کونورګنڅ فوق العاده ګړندی دی. د هر پل سره د د ټیکو ځایونو(ترې لاندې کرښه تېره ده) تعداد په نږدې توګه دوه واره کیږي. په دې بېلګه کې مربع پولې ته تلنه کېدی شي د ساده بڼې بدلون له لارې هم وښوول شي:

$$x_{\ell+1} - \sqrt{a} = (x_\ell + a/x_\ell)/2 - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_\ell}(x_\ell - \sqrt{a})^2.$$

د نیټن-تلنلار د هندسي روښانه ونې څخه لرو، چې په نږدې توګه شمېرنه د $x_0 \neq 0$ لپاره پولې ته تلونکې ده.

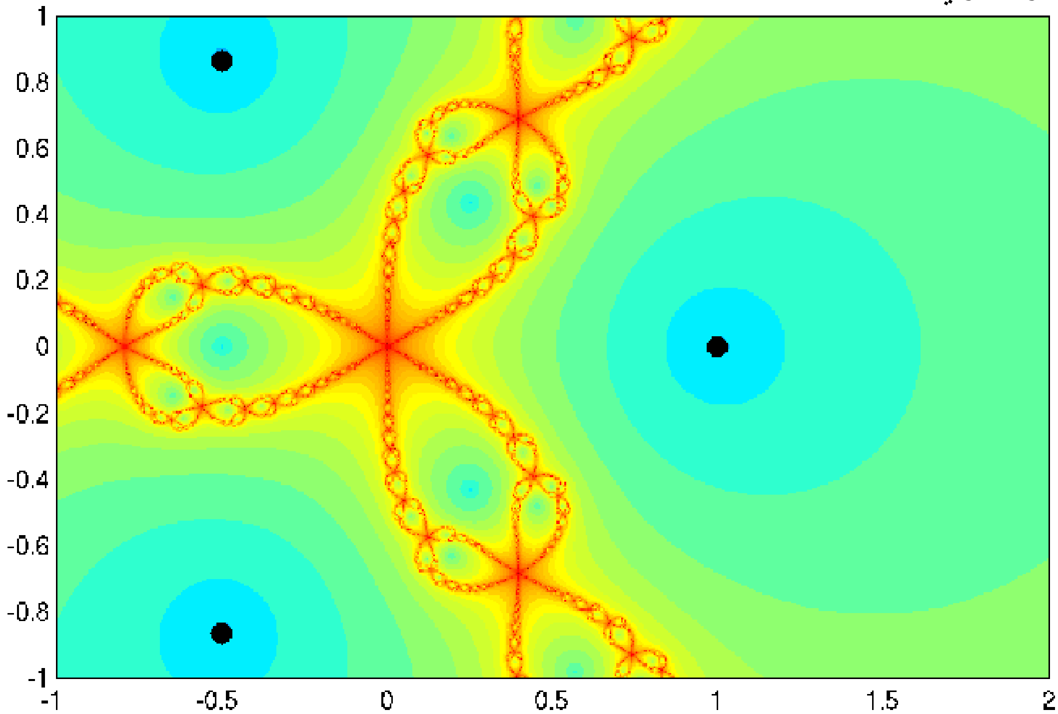
(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اېپ، هيوليک،

لاندې څېره د لاندې مساوات لپاره د کمپلکس نيوټن-اېټرشن پولي ته تلنه ښايي

$$z^3 - 1 = 0$$

د حلونو $z = \exp(2\pi i k/3)$ سره. مختلف رنګونه د پولي ته تلني ورشو ګاني ښايي د همغه يا اړونده صفرځای لپاره. تياره رنګه شوط ځايونه ګړندی پولي ته تلنه په ګوته کوي.



سرې د پولې ته تلني ورشو   په روښانه توګه fraktal مات خوي پيژني

د تيلور پولينوم**Taylor-Polynom**

د تيلور پولينوم   Das Taylor-Polynom

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه تابع f انترپولیری (ارزښت چې د دوه ټکو ترمنځ پروت وي) مشتق په ټکي a

$$p_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)\,,\ k = 0, \ldots, n$$

تر ت نظم n پورې، دا په دې معنا چې .

که f یو $(n+1)$-واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ وي، نو باور لري

$$f(x) = p_n(x) + R, \quad R = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

د یوه t لپاره چې د a او x ترمنځ وي.
لیکونکي: اپپ، هیولیگ،

سیده پسې شمیرنه د f او p_n مشتق یو بل سره توافق یا یوغږیزوالی ښایي. د پاتې غړي R د پوره کیدو یا تکمیل ته سړی د تیلور پولینوم په یوه بل ترم غزوي:

$$q(y) = p_n(y) + c(y-a)^{n+1}\,.$$

ثابته داسې ټاکل شوې، چې $q(x) = f(x)$ وي. پسې $q - f$ یو صفرځای لري د $n+1$ د ډېروالي سره په $y = a$ کې او یو بل صفرځای په $y = x$ کې، په ټولیزه نو $n+2$ صفرځایونه . درولې جملې پسې باید $(n+1)$-م مشتق باید لږ تر لږه یو صفرځای t ولري:

$$0 = q^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(t) = c(n+1)! - f^{(n+1)}(t)\,.$$

له

$$R = f(x) - p_n(x) = q(x) - p_n(x) = c(x-a)^{n+1}$$

څخه د پاتې غړي غوښتونې ښه راکوي.
لیکونکي: اپپ، هیولیگ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساين تابع $f(x) = \sin x$ مشتقونه دي

$$f' = \cos x, \quad f'' = -\sin x, \quad f''' = -\cos x, \quad f^4 = f = \sin x, \dots .$$

د ارزښتونو

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^4(0) = f = 0, \dots .$$

سره لومړي د تيلور پولينومونه د ساين تابع دي.

$$p_1(x) = x$$

$$p_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

$$p_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

$$p_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$$

په ورته توګه د کوساين تابع لپاره هم باور لري

$$p_0(x) = 1$$

$$p_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$p_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

$$p_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

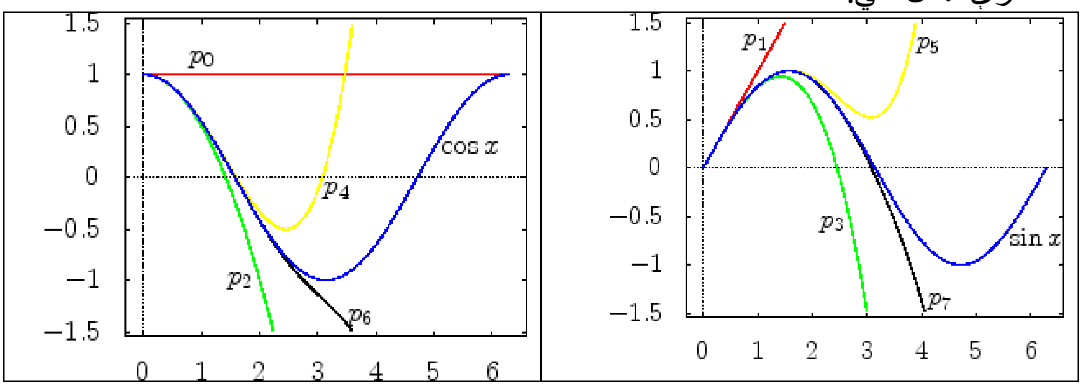
نږدې شمېرنه يا اپروکسيمېشن د ډېر کوچني x لپاره خورا دقيق دی. د بېلګې په توګه کېدی شي د نږدېوني ناتيکاوی

$$\sin 0.1 \approx p_4(0.1) = 0.09983\ldots$$

د

$$|R| = \frac{|\cos t|}{5\,!}\, 0.1^5 \leq \frac{1}{12000000} \leq 10^{-7}$$

له لارې اټکل شي.



لکه د ښېرې څخه چې ليدل کېږي، نږدې شمېرنه د لوی x لپاره لومړی د ځګو درجو سره پوره ټيک يا دقيق وي. په جدول کې د ځو د x - ارزښت لپاره ناتيکاوي ورکړل شوي دي.

x	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/5$	$\pi/6$
$p_1(x)$	3.1416	0.5708	0.1812	0.0783	0.0405	0.0236
$p_3(x)$	2.0261	0.0752	0.0102	0.0025	0.0008	0.0003
$p_5(x)$	0.5240	0.0045	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
$p_7(x)$	0.0752	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

(c) ketabton.com: The Digital Library

$p_0(x)$	2.0000	1.0000	0.5000	0.2929	0.1910	0.1340
$p_2(x)$	2.9348	0.2337	0.0483	0.0155	0.0064	0.0031
$p_4(x)$	1.1239	0.0200	0.0018	0.0003	0.0001	0.0000
$p_6(x)$	0.2114	0.0009	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

حقيقي د تيلور لړی **Reelle Taylor-Reihe**

په يوه ټکي x_0 کې د يوه ناپای ډېرواره مشتقوړ تابع f د تيلور لړۍ د يوې په توان لړۍ يوه وده ده:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{n!} \, f^{(n)}(x_0) \,.$$

د $x \in \mathbb{R}$ لپاره لړۍ او همداسې ټول مشتقونه په يوه انتروال $(x_0 - r, x_0 + r)$ کې مطلق پولې ته تلونکي دي او د $|x - x_0| > r$ لپاره پولې ته نه تلونکي دي. د $|x - x_0| = r$ لپاره بې له نورو څېړنو د لړېی پولې ته تلنې په هکله وېناوي ناشونې دي.

د ودې ټکي د واټن لپاره بند(بنديز) r د پولې ته تلنې يا کونورګنت –وړانګې په نامه ياديږي او د فرمول

$$r = \left(\varlimsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره شمېرل کیږي. له دې سره ارزښتونه $r=0$ او $r=\infty$ شوني دي. په دې حالت کې د کونورګنت انتروال یا تش دی او یا ټول $\mathbb{R}$ دی.

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

د ریښي قضیې په بنسټ دی

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right|}=\frac{1}{r}\,|x-a|\,.$$

په توګه د $|x-a|<r$ لپاره د تېلرو-اړی یوې ته ځي او د $|x-a|>r$ لپاره پولې ته نه ځي. د $|x-a|=r$ لپاره نوري څېړنې اړیینې دي یا نورو څېړنو ته اړتیا ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

تابع

$$f(x)=\begin{cases}\exp(-1/x^2), & \text{für } x\neq 0\\ 0, & \text{für } x=0\end{cases}$$

په 0کې برابرډوله ناپرېکېدونکې ده. دا پسې دپوره ایندکشن له لارې ښوول کېدی شي، چې ټول مشتقونه د

$$f^{(n)}(x)=\frac{p_n(1/x)}{\exp((1/x)^2)}$$

بڼې دي، د یوه مناسب پولینوم p_n سره. دا چې د $x\to 0$ (همداسې د $1/|x|\to\infty$) لپاره اکسپوننشل تابع نسبت یوه پولینوم ته په قوت یا قوي جګیږي، نو ټول پولینومونه په $x=0$ ځای کې ارزښت 0لري. اړونده تیلور-لړی نو له دې امله صفر لړی ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0x^k \,.$$

داچې د $f(x) \neq 0$ $x \neq 0$ لپاره دی، نو د تیلور-لړۍ د f سره فقط د $x = 0$ لپاره یو بل سره برابر یا یو غږیز دي، دا په دې معنا چې د پولې ته تلنې وړانګه r 0 ده.

لیکونکي: اېپ، هیولیک،

اکسپوننشل تابع

$$f(x) = \exp(x)$$

لاندې مشتق لري

$$f^{(n)}(x) = \exp(x)\,.$$

که د $x = 0$ په ځای کې وارزول شي ، ترې لاس ته راځي

$$f^{(n)}(0) = 1\,.$$

د دې په تعقیب د اکسپوننشل تابع د تیلور-لړۍ لاندې بڼه لري

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,.$$

دا چې

$$\lim_{k\to\infty} 1/\sqrt[k]{k!} = 0\,,$$

،

نو $r = \infty$ دی، دا په دې معنا چې د تیلورر-لړۍ په ټول $\mathbb{R}$ پولې ته ځي یا کونورګنت ده.

لیکونکي: اېپ، هیولیک،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې لپاره تابع

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

په $a = 4$ ودیز کیږي.

ددې لپاره لومړی مشتقونه جوړیږي:

$f'(x)$	=	$-\frac{1}{2}\,x^{-3/2}$
$f''(x)$	=	$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\,x^{-5/2}$
.	.	.
.	.	.
.	.	
$f^{n}(x)$	=	$(-1)^n\,2^{-n}\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)\cdot x^{-\frac{2n+1}{2}}\,.$

په ودیزېنې ټکي د قیمت اینووونې یا -وضع کونې سره سړی د تیلور-ضریبوننه لاس ته راوړي

$$c_n = \frac{f^{(n)}(4)}{n!} = (-1)^n\,\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\,2^{-2n-1}\,.$$

د لړۍ لومړي درې ترمونه دي

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{16}\,(x-4) + \frac{3}{128}\,(x-4)^2 + \cdots\,.$$

د دې لپاره چې د ضریبونو وړانګه r وټاکو، په پام کې نیسو

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{2n}\,2^{-2n} \le c_n \le \frac{1}{2}\,2^{-2n}\,.$$

له دې سره دی

$$\frac{1}{4}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{1/(4n)} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{c_n} \le \frac{1}{4}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{1/2}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty}\ \sqrt[n]{1/n} = \lim_{n\to\infty}\ \sqrt[n]{c} = 1$$

دا چي دی لاس ته

$$r = \frac{1}{(1/4)} = 4$$

راځي .

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د اويلر فرمول

$$\exp(\mathrm{i}t) = \cos t + \mathrm{i}\sin t$$

کيدی شي د تيلور-وديزيښني په مرسته

$$\cos t = \qquad 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \dots$$

$$\sin t = \qquad t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \dots$$

د کوساين - او ساين توابع منځ ته راوړل شي. له

$$-\frac{t^2}{2} = \frac{(\mathrm{i}t)^2}{2}, \quad -\frac{t^3}{6} = \frac{\mathrm{i}^2 t^3}{3!}, \quad +\frac{t^4}{24} = \frac{(\mathrm{i}t)^4}{4!}, \quad +\frac{t^5}{120} = \frac{\mathrm{i}^4 t^5}{5!}, \dots$$

څخه لاس ته راځي

$$\cos t = \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^2 k}{(2k)!}$$

$$\mathrm{i}\sin t = \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

او د زياتون يا جمعې له لارې د تيلور –وديزيښني له لارې د اويلر فرمول لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}\exp(\mathrm{i}t) &= 1+\mathrm{i}t-\frac{t^2}{2!}-\mathrm{i}\frac{t^3}{3!}\cdots\\ &= 1-\frac{t^2}{2!}\pm\cdots+\mathrm{i}(t-\frac{t^3}{3!}\pm\cdots)\\ &= \cos t+\mathrm{i}\sin t\,.\end{aligned}$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د لوګاريتم تابع

$$f(x)=\ln x$$

لاندې مشتق لري

$$f'(x)=\frac{1}{x},\quad f''(x)=-\frac{1}{x^2},\quad f'''(x)=\frac{2}{x^3}\,.$$

په دې پسې مرربعيز د تيلور –پولينوم په ټکي $a=1$ کې دی

$$p(x)=0+(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2\,.$$

باقی – يا پاتې غړی دابنه لري

$$\begin{aligned}r(x)=f(x)-p(x) &= \frac{1}{3!}\,f'''(\xi)\,(x-1)^3\\ &= \frac{1}{3\,\xi^3}(x-1)^3\end{aligned}$$

د ξ سره، چې د x او 1 ترمنځ پروت دی. ناټيکاوی د ممکن کوچني ξ لپاره خورا غټ دی. سړی اټکل لاس ته راوړي

$$|r(x)|\le\frac{1}{3}\left|\frac{x-1}{\min(1,x)}\right|^3\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x \in [0.75, 1.25]$ لپاره ناتيکاوی دی

$$\leq \frac{1}{3} \left|\frac{1/4}{3/4}\right|^3 = \frac{1}{81}\,.$$

ليکونکي: هيوليګ،

بينوميال لړی Binomialreihe

تابع

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

د $\alpha \in \mathbb{R}$ سره يوه تيلور-لړی لري

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

د $|x| < 1$ لپاره ، د کوم سره چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

تولیز شوی بينوم ضريب دی

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

دا ترلي لاس ته راځي، چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لړۍ

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

د وړش قضیي

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{\binom{\alpha}{k+1}x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k}x^k}\right|=|x|\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right|=|x|<1.$$

له مخې پولې ته ځي
لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د تیلور ـــلړۍ مشتق او انتیګرال
Differentiation und Integration von Taylor-Reihen

د یوې د تیلور- لړۍ

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k\,,\quad c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,,$$

کېدی شي غړي ډوله یا یې غړي په غړي مشتق او انتیګرال ونیول شي:

$$f'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}(x-a)^k$$

$$\int f(x)dx=c+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{k-1}}{k}(x-a)^k.$$

په دواړو عملیو کې د پولې ته تلنې وړانګه بې تغیره پاتېږي.

لیکونکي: هیولیګ، کرایخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بينوملړۍ

$$(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + \cdots,$$

څخه د $t = -x^2$ او $\alpha = -1/2$ سره لاس ته راځي

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} x^{2k}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \cdots.$$

د انتيګرال له لارې او همداسې د

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arcsin(0) = 0$$

په پام کې نيولو سره د غړي په غړي انتيګرال له لارې داوده لاس ته راځي

$$\text{arcs}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک،

د انتيګرا

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

نږدې ډوله شميرنه د تيلور-اکسپوننشل تابع باندې لاس ته راولي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{k!}\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)}\,.$$

د نومریکي نږدېوني پخ حیث د $\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ لپاره لاندې ارزښتونه لاس ته راځي

k=0: 1
k=1: 0.66666666666667
k=2: 0.76666666666667
k=3: 0.74285714285714
k=4: 0.74748677248677
k=5: 0.74672919672920
k=6: 0.74683603433603
k=7: 0.74682280682281
k=8: 0.74682426573971
k=9: 0.74682412070118
(Autoren: App/Höllig)

د تیلور-لړۍ ضرب **Multiplikation von Taylor-Reihen**

د تیلور – لړۍ کېدی شي غړي په غړي سره ضرب شي:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_n (x-a)^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k\right) = \sum_{k=9}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

د لاندې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} f_{k-j} b_j \ .$$

د ضرب د کونورګنت وړانګه د دواړو ضریبونو د پولې ته تلنې وړانګې د مینیموم سره برابره ده.
لیکونکي: ، هیولیک، کرایخ

د لاندې تابع د تیلور – لړۍ شمیرنې ته
Zur Berechnung der Taylor-Reihe der Funktion

$$f(t) = e^{-t}\cos(\omega t)$$

سړی کړی شي د اکسپوننشل تابع د تیلور – لړۍ او د کوساین –تابع وکاروي

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} \pm \cdots$$

$$\cos = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} \pm \cdots \ .$$

د ضرب څخه د لومړي ترم لپاره لاس ته راځي

$$e^{-t}\cos(\omega t) = 1 - t + \frac{1-\omega^2}{2!} t^2 + \left(\frac{\omega^2}{2!} - \frac{1}{3!}\right) t^3 + \cdots \ .$$

$$e^{-t}\cos(\omega t) = \operatorname{Re}\left(e^{(\mathrm{i}\omega - 1)t}\right)$$

بدیلي کېدی شي هم و کارول شي:

$$e^{-t}\cos(\omega t) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^k t^k}{k!}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \mathrm{Re}\left(1 + (\mathrm{i}\omega - 1)t + \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^2}{2!}t^2 + \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^3}{3!}t^3 \cdots\right)$$

$$= 1 - t + \frac{1 - \omega^2}{2!}t^2 + \frac{3\omega^2 - 1}{3!}t^3 + \cdots .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د تيلور-لړۍ وېش Division von Taylor-Reihen

د دوه تيلور – لړيو وېش

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x-a)^k \Big/ \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x-a)^k, \qquad g_0 \neq 0,$$

د ضريبونو پرتلې له لارې کېدی شي له کټوټوالي

$$(q_0 + q_1 u + \ldots)(g_0 + g_1 u + \ldots) = f_0 + f_1 u + \ldots\ , \quad u = x - a\,,$$

څخه وټاکل شي:

$$q_0 g_0 = f_0 \quad \longrightarrow \quad q_0$$

$$q_1 g_0 + q_0 g_1 = f_1 \quad \longrightarrow \quad q_1$$

$$\vdots$$

$$q_n = (f_n - q_{n-1}g_1 - \ldots - q_0 g_n)/g_0 \quad \longrightarrow \quad q_n\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، اپرپيش

د $q(x) = \tan x$ تر 5نظم پورې وديزونې لپاره ږدو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(q_1x + q_3x^3 + q_5x^5 + \dots)\underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots\right)}_{\cos x} = \underbrace{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots}_{\sin x}.$$

له دې سره همدا اوس وکارول شو، چې تانجنت $\tan x$ ناجوړه(طاق) دی، دا په دې معنا چې $q_0 = q_2 = \dots = 0$.
د ضریبونوو له پرتلې څخه لرو:

$$\begin{aligned} q_1x &= & x &\longrightarrow & q_1 &= 1, \\ \left(-\frac{q_1}{2} + q_3\right)x^3 &= & -\frac{1}{6}x^3 &\longrightarrow & q_3 &= \frac{1}{3}, \\ \left(\frac{q_1}{24} - \frac{q_3}{2} + q_5\right)x^5 &= & \frac{1}{120}x^5 &\longrightarrow & q_5 &= \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیګ، اپریښ

د راشنل توابعو تیلور-ودیزېنه
Taylor-Entwicklung rationaler Funktionen

د یوه راشنل تابع $r(z)$ د تیلور –ودیزیېنه په ټکي $z = a$ کې کېدی شي د کمپلکس پارشل جمعې په مرسته وټاکل شي، دا په دې معناچې r د یوه پولینوم او د بنسټ تابع

$$\frac{1}{(u-z)^j} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j-1}{j-1} \frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+j}}.$$

جمعه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوګونو زیاتونونو(د جمعې اعضاوې) د کونورګنت وړانګې د ودیزېنې ټکي د قطب نقطو د واټن $|u-a|$ سره برابره ده
لیکونکي: کلاوس هیولیګ

ودیزېنه یا وده د بینوم لړۍ یو ځانګړی حالت دی:

$$\frac{1}{(u-z)^j} = \frac{1}{((u-a)-(z-a))^j} = (u-a)^{-j}(1+x)^{-j},$$

$$, \quad x = -\frac{z-a}{u-a}.$$

بدیلي کېدی شي په ټکي $z=a$ کې مشتق وشمېرل شي او د n-م د تیلور ضریبونو لپاره لاس ته راوړو

$$\frac{j\cdot(j+1)\cdots(j+n-1)}{n!} = \binom{n+j-1}{n}(u-a)^{-j-n}.$$

د

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n+j-1}{j-1}^{1/n} = 1$$

له امله د کونورګنت یا پولې ته تلنې وړانګه $|u-a|$ ده .
لیکونکي: کلاوس هیولیګ

د ښوونې لپاره د

$$r(z) = \frac{1}{z^2-z} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z}$$

وده په $a=3$ وتاکل شي. د لومړي ترم لپاره د تولیز فرمول څخه د $u=0$ او $j=1$ سره لاندې د تیلور n -م ضریب لاس ته راوړي

$$\binom{n}{0}(-3)^{-(n+1)},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}((z-3)/(-3))^n, \quad |z-3| < 3\,.$$

دا ترې لاس ته راغلې هندسي لړۍ کېدی شي سيده هم لاس ته اروړل شي. دا د دويم ترم په بنسټ ښوول کيږی. سړی ليکي

$$-\frac{1}{1-3-(z-3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(z-3)/(-2)}$$

او لاس ته راوړي

$$-\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}((z-3)/(-2))^n, \quad |z-3| < 2\,.$$

د دواړو لړيو زياتون يا جمعه دا وده راکوي

$$\frac{1}{z^2-z} = \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)(z-3) + O((z-3)^2)\,.$$

ليکونکي: کلاوس هيوليګ

د يوې تيلور – لړۍ معکوس ارزښت تکرار شميرنه
Iterative Berechnung des Kehrwerts einer Taylor-Reihe

که $g(0) \neq 0$ وي، نو کېدی شي د ايترېشن له لارې

$$f \;\longleftarrow\; 2f - gf^2$$

له $f(x) = 1/g(0)$ څخه په وتو د معکوس ارزښت $f = 1/g$ وده وشميرل شي.
د لته په هر پل کې د ټيکو ترمونو تعداد يا ګڼ،ن دوه برابره کيږي.

دا متود د نيوتن تلنلار د $\frac{1}{f} - g = 0$ د يوه حل f ټاکل په ګوته کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: کلاوس هیولیګ، اپیریښ

د پولې ته تلنې وینا کیدی شي د کتوتوالي

$$f_{\text{neu}} - \frac{1}{g} = -g\left(f_{\text{alt}} - \frac{1}{g}\right)^2$$

حخه ولوستل شي، ځکه چې له $f_{\text{alt}} - 1/g = O(x^n)$ لاس ته

$$f_{\text{neu}} - 1/g = O(x^{2n})$$

راځي .

لیکونکي: کلاوس هیولیګ، اپیریښ

د

$$f(x) = 1/g(x) = 1/\cos x$$

تیلور ودیزیېنه کېدی شي لکه چې په تعقیب یې پل په پل وشمېرل شي. له

$$g = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6), \quad f_0 = 1$$

څخه په وته لاس ته راځي

$$f_1 = 2 \cdot 1 - g \cdot 1^2$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$$

$$f_2 = 2(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4) - g\,(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4)^2 + O(x^6)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6).$$

سملاسې له دوه پلونو (قدمونو) وروسته لومړي شپږ ترمونه ټیک دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$ سره له ضرب پسي د تانجنت لړۍ راکوي

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

ليکونکي: کلاوس هيوليګ، اپيريښ

د معکوس تابع د تيولور وديزيينه
Taylor-Entwicklung der Umkehrfunktion

د يوه تابع f د معکوس تابع $g(x)$ د تيلور ضريبونه د $f'(a) \neq 0$ سره په ټکي $b = f(a)$ کې کېدی شي د

$$g(f(x)) = x$$

له مشفونې و ټاکل شي :

$$g(b) = a$$

$$g'(b)\,f'(a) = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(b)$$

$$g''(b)\,f'(a)^2 + g'(b)\,f''(a) = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(b)$$

$$\vdots$$

دا منځ ته راغلي مساوات کېدی شي تل پسيsukzessive د مشتقونو $g'(b),\, g''(b), \dots$ پسي وشمېرل شي.

ليکونکي: کلاوس هيوليګ، اپيريښ

د $f(x) = \sin x$, $g(x) = \arcsin x$ او $a = 0$ لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g(0) = 0$$

$$g'(0)\cos 0 = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(0) = 1$$

$$g''(0)\cos^2 0 - g'(0)\sin 0 = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(0) = 0$$

$$'(0)\cos^3 0 - g''(0)(-\sin 0) + g''(0)\cos 0(-\sin 0) + g'(0)(-\cos 0) = 0 \quad \longrightarrow \quad g'''(0) = 1$$

$$\vdots$$

$$\arcsin x = x + \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

دا په دې معنا چې   . که په پام کې ونیول شي،
جې د یوه ناجوړه یا طاق تابع په څېر – یا معکوس تابع ناجوړه ده، نو سملاسي یې
ودیزیېنه تر پنځم ترم پورې ټیک ده.
لیکونکي: کلاوس هیولیګ، اپېریش

د تیلور ځانګړې لړۍ Spezielle Taylor-Reihen

$$(1 = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots \quad -1 < x \leq 1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\pm\cdots \quad x\in\mathbb{R}$$

$$\mathrm{t} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}B_{2k}x^{2k-1} = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots \quad |x|<\frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{ar} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2k)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+\cdots \quad |x|<1$$

$$\mathrm{arcc} = \frac{\pi}{2}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2k)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+\cdots\right) \quad |x|<1$$

$$\mathrm{arctar} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\pm\cdots \quad |x|<1$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د پاد نږدې ارزښت شمیرنه **Pade-Approximation**

د یوه تابع $f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots$ د (m,n) - پاد-نږدې ارزښت شمېرنه یو راشنل تابع دی د صورت – یا ماتباندې درجې m او مخرج یا ماتلانې درجې n سره،
چې د f سره د $z \to 0$ لپاره تر ځګو درجو ترمونو همغږیز کیږي یا سره برابرېږي:

$$\frac{p(z)}{q(z)} - f(z) = O(z^{m+n+1}).$$

پولینومونه $p(z) = a_0 + \cdots + a_m z^m$ او $q(z) = b_0 + \cdots + b_n z^n$ کېدی
شي د ضریبونو د پرتلې له لارې وټاکل شي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د q سره د ضرب وروسته لاس ته راوړو

$$(a_0 + a_1 z + \cdots) - (c_0 + c_1 z + \cdots)(b_0 + b_1 z + \cdots) = c z^{m+n+1} + \cdots,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او لاس ته راځي، چې د $k \le m+n$, z^k ضریبونه باید ورک شي:

$$k = 0 : \quad a_0 - c_0 b_0 = 0$$
$$k = 1 : \quad a_1 - c_0 b_1 - c_1 b_0 = 0$$
$$\cdots.$$

دا کښته – یا لامدې ټاکل شوی هوموجېن کرښیز مساوات سیستم ($m+n+1$ مساوات د $m+n+2$ متحولو یا ناټاکلو سره) راکوي، چې تل حل لري.
دا چې f په صفر کې قطب نه لري، راکوي $b_0 = 0$ ، چې $a_0 = 0$ راکوي. له دې
امله کېدی شي د ممکنه لنډونو وروسته د q لومړي له صفر توبېرېدونکي ضریبونه د 1 سره برابر اېښول کېښولی شي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د اکسپوننشل توابعو لپاره د (m,n)-پاد-نږدې ارزښت شمېرنې ته مساوات سیستم په لاندې ډول دی.

$$0 = a_0 - b_0$$

$$0 = a_1 - b_1 - b_0$$

$$\cdots$$

$$0 = a_m - b_m - \cdots - \frac{1}{m!} b_0$$

$$0 = b_{m+1} - \cdots - \frac{1}{(m+1)!} b_0$$

$$\cdots$$

$$0 = \frac{1}{m!} b_n - \cdots - \frac{1}{(m+n)!} b_0 \, .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حل لپاره د بیلګي په توګه لاس ته راوړی شو

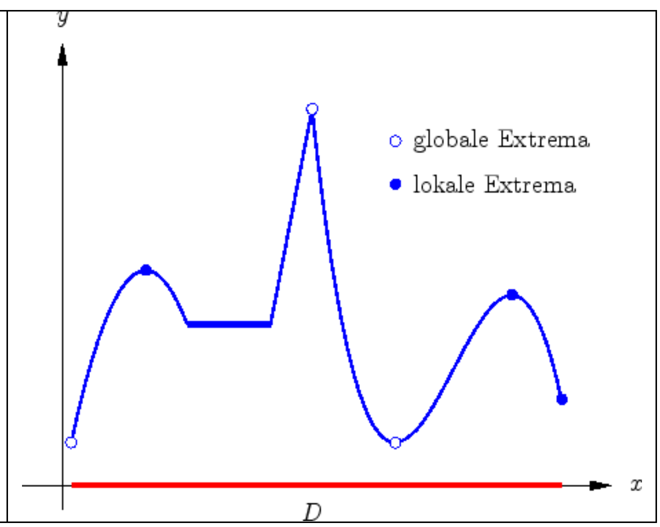
$$r_{1,1}(x) = \frac{1 + x/2}{1 - x/2}, \quad r_{2,2}(x) = \frac{1 + x/2 + x^2/12}{1 - x/2 + x^2/12}.$$

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

اکسترېما(افراطیت) **Extrema**

تابع f په a کي په یوه ډېری(سټ) D یو تولیز یا ګلوبال مینیموم لري، که وي $f(a) \le f(x) \quad \forall x \in D.$

په یوه ځاییز – یا لوکال مینیموم کي د تابع ارزښت $f(a)$ فقط په یوه کوچني]اپیریال $(a-\delta, a+\delta) \cap D$ کي مینیمال دی.
ګلوبال او لوکال مینیموم سره ورته تعریف دي.



په یوه رابند انتروال د یوه توټه ډوله ناپرېکېدونکی او مشتقوړ تابع لپاره کېدی شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتقونو په صفرځایونو ، پرېکېدونکي ځایونو او یا په ژئ ځایونو کي رامنځ ته شي. تیوپ یا ډول یي کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته او د ت ابع ارزښتونو د پرتلې له لارې پیداشي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر
د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع لپاره د لوکال مینیموم سره د تعریفورشو په دننني ټکي a کي د مشتق لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

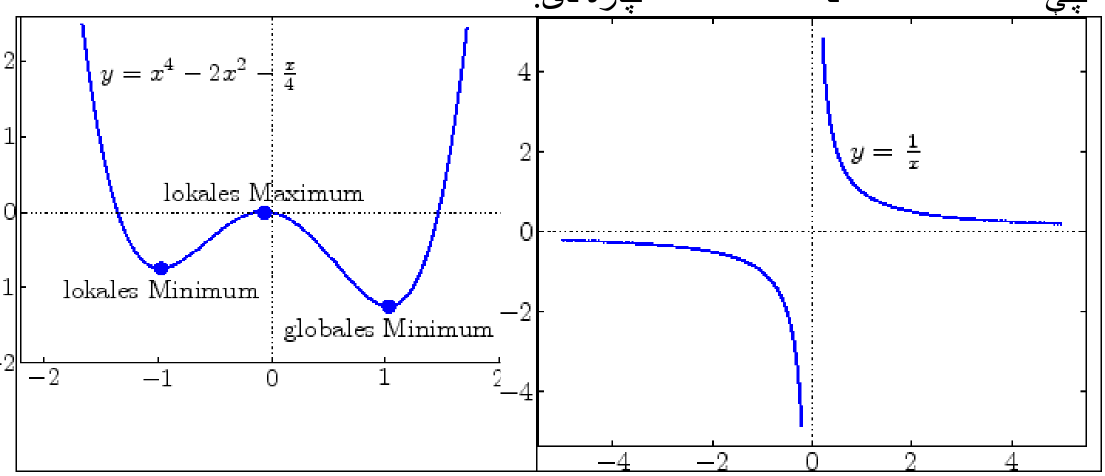
$$f'(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\geq 0}} \overbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}^{\geq 0} \geq 0$$

او

$$f'(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\leq 0}} \overbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}^{\geq 0} \leq 0$$

نو $f'(a)=0$. يعني د تعريف ورشو په دننه کې په يوه لوکال افراطيت کې بايد مشتق صفر وي يا f هلته مشتقوړ نه وي.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

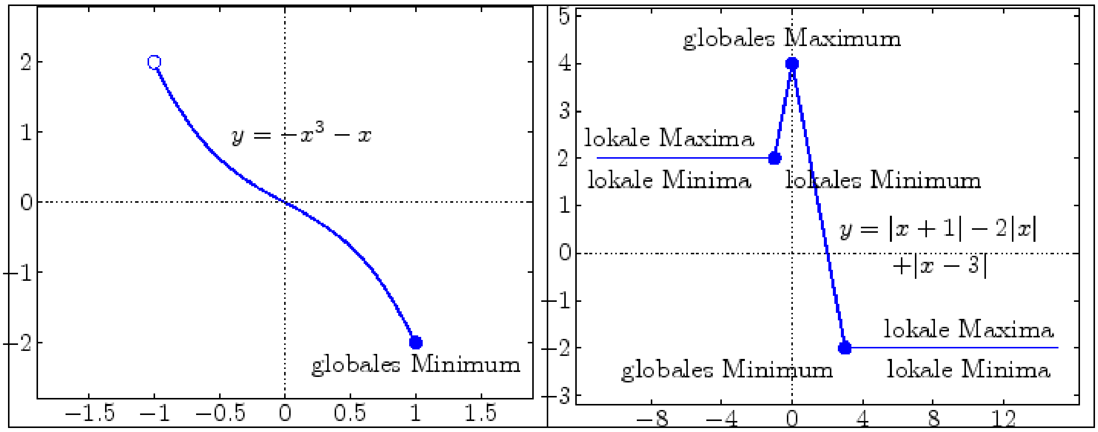
په لاندې کې به يو څو تيپيکي حالتونه وڅيړل شي.
تابع $f(x)=x^4-2x^2-x/4$ د $D=\mathbb{R}$ سره دوه مينيما اويو متکسيما لري. مينيموم د کوچني تابع ارزښت سره ګلوبال دی. يو ګلوبال ماکسيموم شتون نه لي ، ځکه چې $f(x)\to\infty$ د $x\to\pm\infty$ لپاره دی.



تابع $f(x)=1/x$ د $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ سره اکستيم يا افراطي ارزښتونه نه لري.که يو تابع په يوه واز انتروال ثابت وي، نو دا ځايونه هم (لکال) ماکسيما او هم (لوکال) مينيما دي.

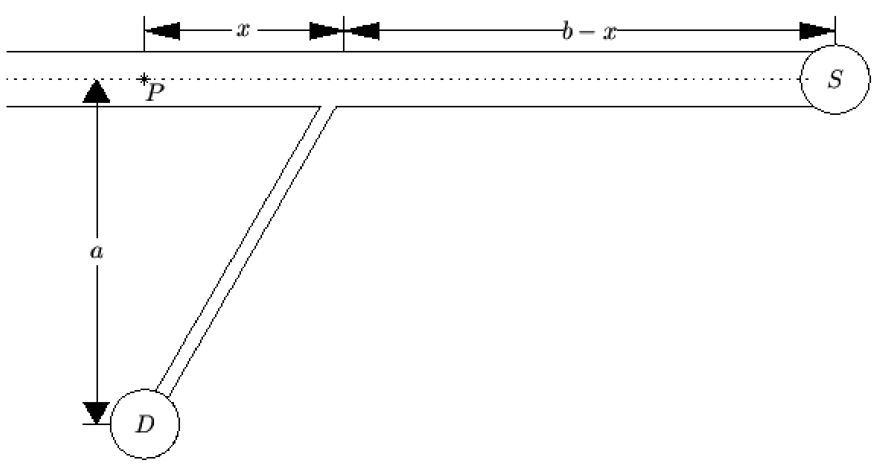
(c) ketabton.com: The Digital Library

يوه کره همغږيز – يا مونوتون تابع سره افراطي ارزښتونه په ژی ټکو کې نيول کيږي، که دا تعريفورشو پورې تعلق ولري يا اړوند وی.



ليکونکي: هيوليک، هيورنر

له يوه کلي D څخه يوه ښار S ته يوترنسرک جوړيږي. په واټن a همدا اوس له کلي و ښار ته يو سرک جوړ دی له ښار څخه تر ټکي P پورې لار ، هغه سرک چې کلي ته بل يا پسي نږدي پروت دی، اوږدوالی b لري.
دا سيده کرښيز توته لار بايد داسي جوړه وي، چې د ښار ګرندی رسيدنه شووني يا تظمين وي، که د يوه منځني [ټکتيا km/h $v_a = 120$ د $v_n = 60$ په واټن په نوي څنګيز يا فرعي سرک څخه لاړ شو.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د P او د څنګیز سرک ترمنځ واټن $x \geq 0$ د ټاکلو لپاره د مینیمی – یا کموني له لارې اړین وخت

ښار ته د خوزښت لپاره دی

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

د مشتق صفرځایونه

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2} v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0\,,$$

راکوي

$$v_a x = v_n \sqrt{a^2 + x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_m = a/\sqrt{3}$$

یعني ممکنه لوکال اکسټرېم ځاي په (0, b)کې. ایا چې دا مینیموم دی، باید د خوزښت وخت سره په انټروالټکو کې د پرتلې له لارې وټاکل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a + b}{v_a}\,, \qquad t(0) = \frac{2a + b}{v_a}\,, \qquad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{v_a}$$

په روښانه توګه $t(0) \geq t(x_m)$ دی. د ښې پایټکو لپاره باور لري

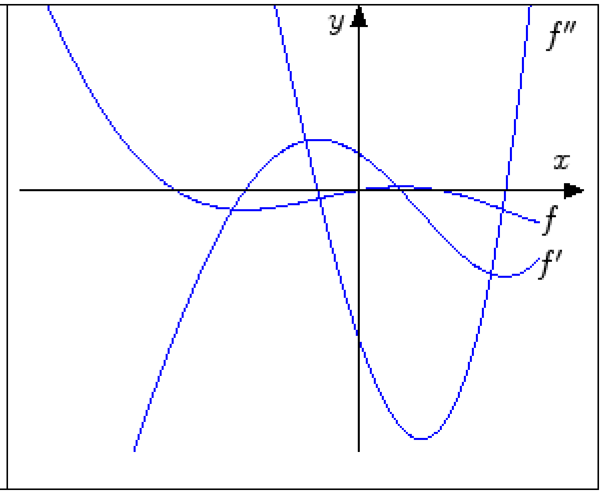
$$\begin{aligned} t(b) \geq t(x_m) \Leftrightarrow \quad & 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{3}a + b \\ \Leftrightarrow \quad & 4a^2 + 4b^2 \geq 3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2 \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = (a - \sqrt{3}b)^2 \geq 0\,. \end{aligned}$$

اخرنی مساوات تل پوره دی، او له دې سره x_m اوپټیمال یا اغیز من دی، که په غوره انټروال $(0, b)$ کې پروت وي.: $b \geq a/\sqrt{3}$. په بل حالت کې به مینیموم په ژی ټکي b ته ، یعنې ښار ته د سیده تړنې، سره ورسیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د اکستريم – يا افرطي ازښتونو ازماېښت **Extremwerttest**

د يوه افراطی ارزښت تيوپ يا ډول په هکله کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته پرېکړه وشي. که f يو دوه واره ناپرېکيدونکی مشتقوړ تابع وي او $f'(a)=0\,,\qquad f''(a)>0$ $(f''(a)<0)\,,$ ولرو،	

نو f په a کې يو ځايېز مينيموم(ماکسيموم) لري. که د a په ځای کې دويم مشتق ورک شي يا صفر شي، نو بايد جګ مشتقونه پرېکړې ته را وړاندې شي. که باور ولري

$$f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(a)\neq 0\,,$$

نو f په a کې تيک هلته يو افراطيت لري، که جوړه وي. په دې حالت کې f په a کې يو لوکال يا ځای اړونده ماکسيموم همداسي مينيموم لري، که $f^{(n)}(a)<0$ همداسي $f^{(n)}(a)>0$ وي.

ليکونکي:اپپ، هيوليګ

د ښووني لپاره و f ته سړی د a په ځای کې د $n-1$ درجې د تيلور-پولينوم کاروي د باقي يا پاتی

$$f(x)-f(a)=\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-a)^n$$

غړي سره او په پام کې نيسي، چې د $f^{(n)}(t)$ او د $f^{(n)}(a)$ لپاره(او له دې سره هم د t لپاره) a ته په بوره نږدېوالي همغه يا برابره مخنخښه ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناجوړه یا طاق n لپاره له $x < a$ څخه و $x > a$ ته په تلني کې د پورته مساوات
ښی اړخ یو د مخنښې بدلون لري. د دې پسې $f(x) - f(a)$ هم هلته د مخنښې
بدلون لري او د a د f افراطي ځای نه دی.

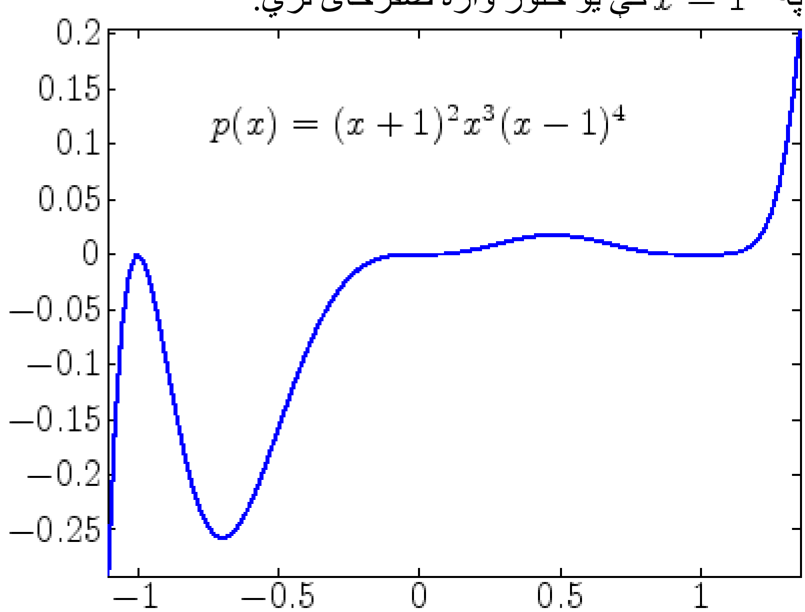
د جوړه n لپاره د $x \neq a$ لپاره تل $(x-a)^n > 0$ دی. د $f^{(n)}(a) < 0$ په
حالت کې د $x \neq a$ لپاره او x چې a ته پوره نږدې پروت دی $f(x) < f(a)$
لاس ته راځي. نو تابع f په دې حالت کې په a کې یو لوکال ماکسیموم لري . حالت
$f^{(n)}(a) > 0$ په ورته توګه یو لوکال میموم راکوي.

لیکونکي:اپپ، هیولیک

پولینوم

$$p(x) = (x+1)^2 x^3 (x-1)^4$$

په $x = -1$ کې یو دبل صفرځای ، په $x = 0$ کې یو دریواره صفرځای لري او
په $x = 1$ کې یو څلور واره صفرځای لري.



باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(-1)=p'(-1)=0,\quad p''(-1)=2(-1)^3(-2)^4<0\,.$$

په $x=-1$ کې p یو ماکسیموم لري. په $x=1$ کې p یو مینیموم، خکه چې

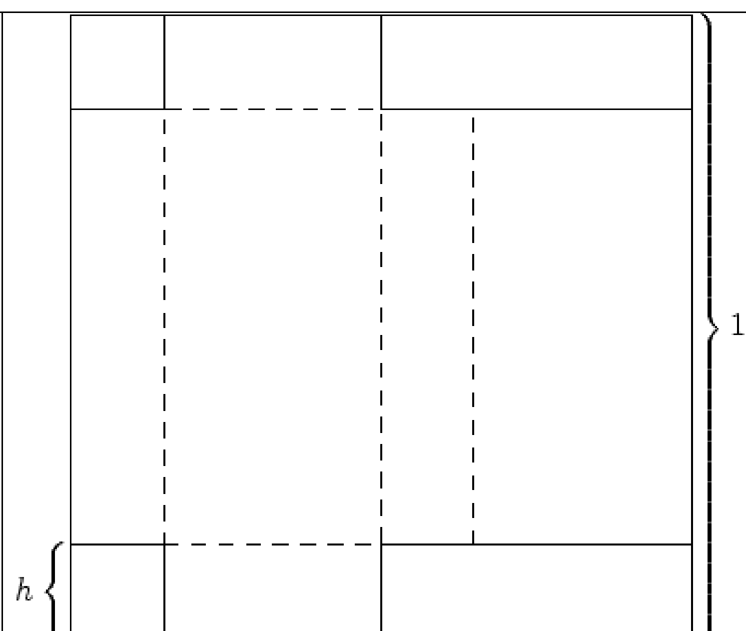
$$p(1)=\ldots=p'''(1)=0,\quad p^{(4)}(1)=2^2 1^3 4!>0\,.$$ ،

بالاخره p د

$$p(0)=p'(0)=p''(0)=0,\quad p'''(0)=3!(-1)^4\neq 0$$

له امله او په $x=0$ کې یو مخنخښې بدلون له امله په سرچینه کې افراطي ځایونه نه لري.

لیکونکي:اپپ، هیولیګ

د دې ورکړ شوي غوڅنمونې په مرسته دې د مربعيز ټوټه کارتونونو څخه دې ممکنه د لوی حجم صندق جوړ شي	

ډکی یا حجم دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

جګوالی سور اوږدوالی

د مشتق صفرځایونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \overset{!}{=} 0$$

راکوي

$$= \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

یعني ممکنه افراطي ځایونه. فقط $h = \frac{1}{6}$ هندسي موخه ور دی او

$$v(1/6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}.$$

دا چې د ژی ټکو $h = 0$ او $h = 1/2$ لپاره ډکی یا حجم صفر 0 دی، صندق د $h = 1/6$ لپاره ماکسیمال ډکی یا حجم لري.

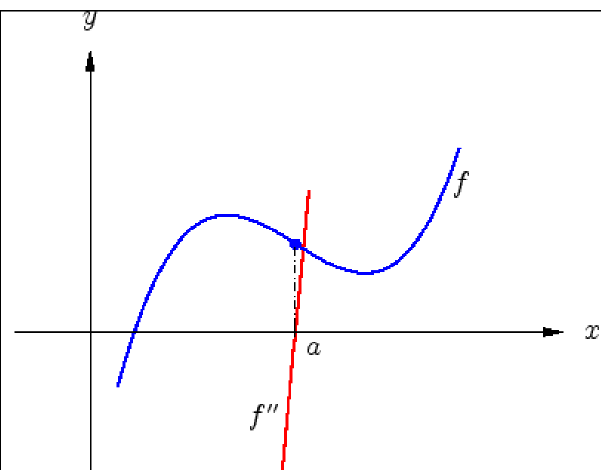
لیکونکي:اېپ، هیولیک

اوړونټکي(نقطه انعطاف) **Wendepunkte**

د یوه تابع f په یوه اوړنټکي a کې دویم مشتق مخنخبنه بدلوي.

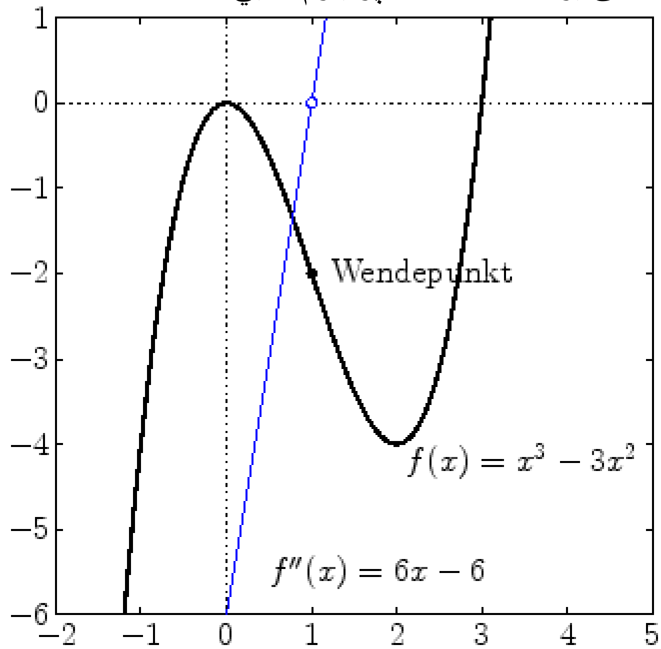
د یوه پوره هوار تابع لپاره اړین دی، چې $f''(a) = 0$ وي او پوره $f'''(a) \neq 0$ کېدونکي، چې وي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر



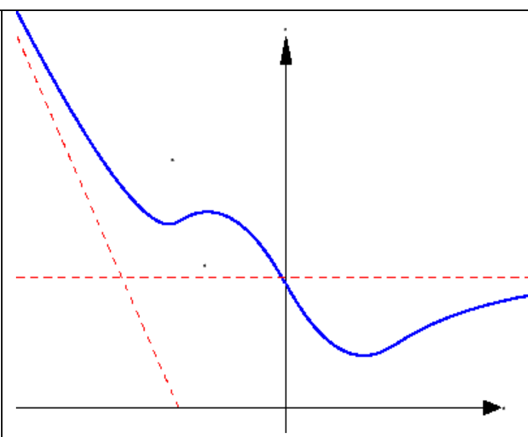
(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق يو kubisches پولينوم ښايي.



دا چې د ويم مشتق كربنيز دى، تل ټيک يو افراطي ټكى شتون لري.
ليكونكي: هيوليک، هيورنر

اسيمپتوتي(يو په بل نه پرېوتونكي يا ګاونډى) **Asymptoten**

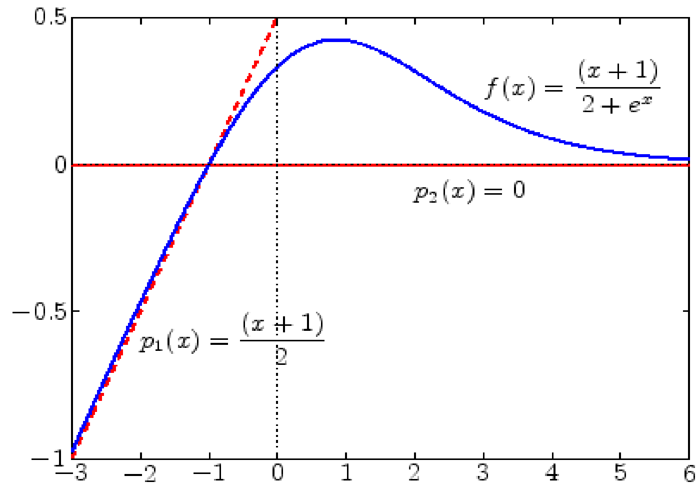
يو كربنيز تابع $p(x) = ax + b$ د f يو اسيمپتوت يا ګاونډى دى، كه د $x \to \infty$ يا $x \to -\infty$ لپاره $f(x) - p(x) \to 0$ وي. لكه په څېره كې چې ښوول شوى دى، ګاونډ د تابع f حالت د لوي x لپاره تشريح كوي. ليكونكي: هيوليک، هيورنر	

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x) = \frac{x+1}{2+e^x}$$

ګاونډ وټاکو پوله ارزښتونه $x \to \pm\infty$ ځانله تر څېړنې نيسو.



د $x \to \infty$ لپاره دی

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)\cdot e^{-x}}{2\cdot e^{-x}+1}$$

$$= \frac{0}{0+1} = 0 .$$

له دې سره د x محور ګاونډ يا اسيمپتوت دی

د $x \to -\infty$ لپاره e^x د 0 په لور هڅيږي او

$$p(x) = \frac{x+1}{2}$$

ګاونډ دی.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د راشنل- یا کسر توابعو ګاونډ یا اسیمپټوټې
Asymptoten rationaler Funktionen

یو راسنل تابع

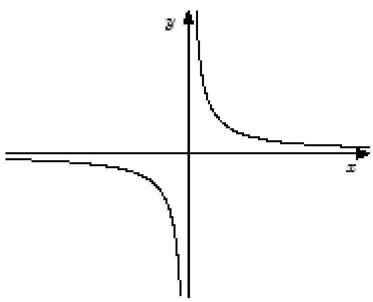
$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

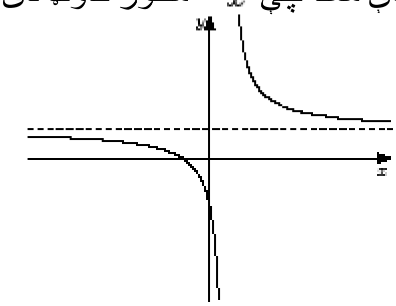
تیک هلته یو کرښیز ګاونډ لري، که $\text{Grad}\, p \leq \text{Grad}\, q+1$ وي.

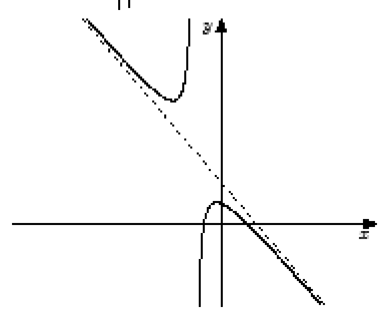
د $\text{Grad}\, p < \text{Grad}\, q$ لپاره باور لري

$$\lim_{p \to \pm\infty} r(x) = 0\,,$$

دا په دې معنا چې x - محور ګاونډ دی.







د $\text{Grad}\, q \leq \text{Grad}\, p \leq \text{Grad}\, q+1$ لپاره سرې کرښیز ګاونډ د پولینوم وېش سره لاس ته راوړي :

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

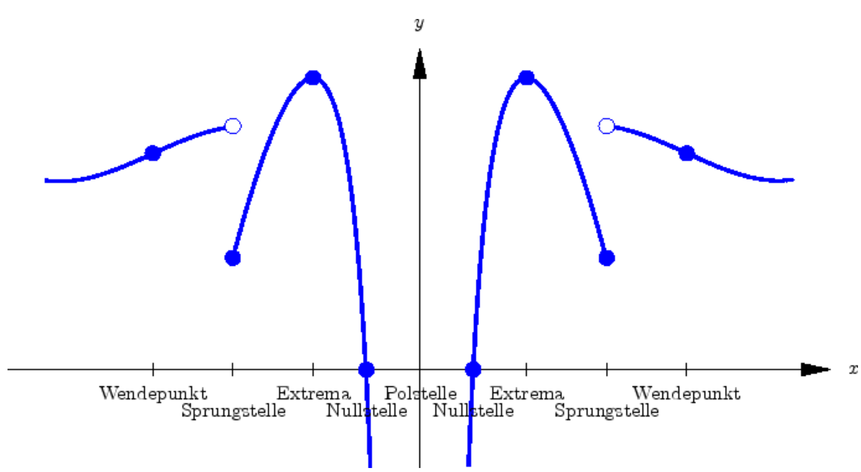
د q Grad $\tilde{p} <$ Grad سره. اسيمپتوت پروت يا افقي, $(a = 0)$ دی، که Grad q Grad $p =$ وي.

که د صورت درجه د مخرج له درجې له يو زيات وي، نو $r(x)$ د لوي x لپاره د يوه پولينوم سره، چې ≥ 2 درجه وي اپروکسيمي کيږي.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د کږو يا منحنيو خبرې يا بحث Kurvendiskussion

د يوه تابع د خومره والي حالت باندې قضاوت ته لاندې نخښې کيدی شي رامخ ته شي:

- Symmetrien سيومتري
- Periodizität تل بيرته راګرځيدنه
- Unstetigkeitsstellen پرېکيدنوالي ځايونه
- Nullstellen ($\longrightarrow$ Vorzeichen) صفرځايونه(مخنخښه $\longrightarrow$)
- Extrema ($\longrightarrow$ Monotoniebereiche) اکستريما (همغږيزوالي ورشوګاني $\longrightarrow$)
- Wendepunkte ($\longrightarrow$ Konvexitätsbereiche) اوړونتکی (ننوتلوالي ورشوګاني $\longrightarrow$)
- Polstellen قطبځايونه
- Asymptoten اسيپتوتونه يا ګاونډي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع يو اړونده تحليل د کړو خبرې اترې يا بحث بلل کيږي
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د کړوخبرو اترو د ځګندوني لپاره يو تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\ \sin(3x)$$

تر ځيړنې نيول کيږي.

سيمتري : داچې $\sin x = -\sin(-x)$ دی ، نو تابع ناجوړه دی

تل بيرته راګرځېدنه يا پريوديځيتيPeriodizität : تابع لکه د ساين تابع پخپله 2π - پريوديکي دی او له دې امله په لاندې کې فقط په انتروال $[-\pi, \pi]$ کې راوړل کيږي.

د پرېکېدنوالي ځايونه : تابع له ناپرېکېدونکو توابعو څخه سره يرځای شوی، له دې امله برکېدنځاينه نه لري.

صفرځايونه: د زياتو- يا جمعه نقضيې سره $[-\pi, \pi]$ دی

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\ \sin^3 x = \sin x \underbrace{\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right)}_{\neq 0}.$$

تابع صفرځايونه په 0 او $\pm\pi$ کې لري.
افراطيت: مشتق

$$f'(x) = 2\cos x - 4\sin^2 x\ \cos x = -2\cos x + 4\cos^3 x$$

صفر دی د $\cos x = 0$ يا د $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$ لپاره ، نو
$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4.$

دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعريف او تلبېرته راګرځېدونې ده، ژئ ترځيړنې لاندې نه نيسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دویم مشتق د محنخښې څخه

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x \sin x$$

او د تابع ارزښت د پرتله کونې له لارې کېدی شي د افراطیت تیوپ یا ډول وټاکل شي:

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اوړونټکی یا د انعطاف ټکیWendepunkte :

دویم مشتق

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x \sin x = -10\sin x + 12\sin^3 x$$

$$\sin x = \pm\sqrt{5/6}$$

صفر دی د $\sin x = 0$ لپاره یا ، دا په دې معنا چې

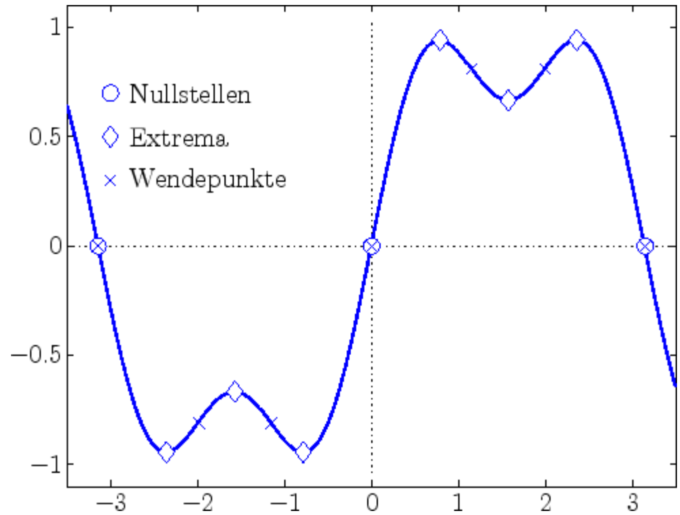
$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$

دا چې په دې ځای کې دریم مشتق نه ورکیږي. تابع f اوړونټکی په $(0,0)$ او $(\pm\pi, 0)$ کې لري همداسې په نږدې توګه په $(-1.99, -0.81)$، $(1.15, 0.81)$, $(-1.15, -0.81)$ او $(1.99, 0.81)$ کې.

قطبځایونه**Polstellen** : ناپرېکېدونکي توابع قطبځایونه نه لري.

ګاونډي **Asymptoten** : تابع پریودیکې او نه ثابت دی، نو ګاونډي یا اسیپتوت یا مجاورتونه نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د يوې کړې خبرو يا بحث روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترخيرني لاندې نيول کيږي.
سيومتري : صورت ناجوړه او مخرج جوړه دی. تابع نو له دې امله ناجوړه دی، دا په دې معنا چې سرچينې ته سيومتريک دی.
پريوديځيتي يا (تل) بيرته راګځيدنه: تابع پريوديک نه دی.
برېکيدنځايونه: د مخرج صورت صفرځايونه ± 1 د صورت صفرځايونه نه دي. له دې سره f په $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ ناپرېکېدونکی دی.
صفرځايونه: صورت د $x = 0$ لپاره ورکيږي.
افراطيت :

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2-1)^2} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

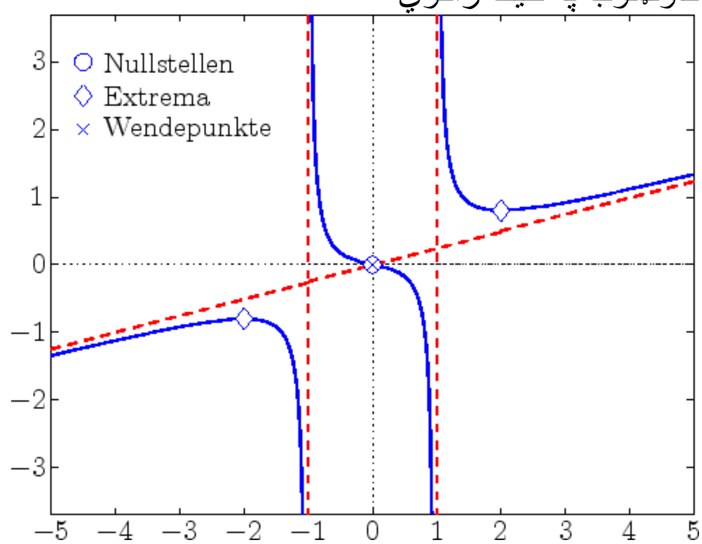
دا چې تابع ساده صفرځايونه لري، افراطيت فقط لوکال يا ځای اړوند دی. د f د ځومره والي حالت خخه کيدی شي تيوب يا ډول لاس ته راشي. دا چې $f(x) \to -\infty$ د $x \to -\infty$ او $x \to -1$ لپاره دی، بايد انټروال $(-\infty, -1)$ يو ماکسيموم ولري. په ورته توګه $(1, \infty)$ لږ تر لږه يو مينيموم لري. نو د مشتق صفرځايونو ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

سړی یو لوکال ماکسیموم په $(-2,-4/5)$ او یو لوکال مینیموم په $(2,4/5)$ کې لاس ته راوړي.
اوړونټکي یا نقاط انعطاف:

$$f''(x)=\frac{-80x^5+398x^3+42x}{20(x^2-1)^3}\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad x=0$$

داچې په دې ځای کې دریم مشتق صفر نه دی، نو $(0,0)$ یو اوړونټکی دی.
قطبځایونه: تابع په $x=\pm 1$ کې ساده قطبځایونه لري.
اسیمپتوت یا ګاونډپتوب: یو د پولینوم وېش $p(x)=5x/20+0=x/4$ د ګاونډتوب په حیث راکوي



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د کړې خبرو اترو د ښوولو یا روښانه کولو ته تابع

$$f(x)=e^{-x^2}+\frac{4|x|}{e^4}$$

څېړل کیږي.

سیمتري : دا چې x^2 او $|x|$ جوړه دي، تابع جوړه دی، دا په دې معنا چې سیمتر و y - محور ته.
پریوديځيتي یا تل بېرته راګرځېدنه: تابع پریودیک نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرېکېدنوالي ځایونه: تابع له ناپرېکېدونکو توابعو څخه سره یوځای شوې ده او له دې امله پرېکېدنځایونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت تابع لپاره په هرحالت مشتق په صفرټکي کې ناپرېکېدونکی نه دی.
صفرځایونه: اکسپوننشل توابع تل مثبت یا زیاتیز دي، د مطلق ارزښت تابع نه منفي دي. نو صفرځایونه نه شته.
افراطیت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4}\text{sign}(x) \overset{!}{=} 0,\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\,.$$

برسیره پردې دې افراطی ټکی په $x=0$ کې ،څېړل شي، چېرته چې مشتق پرېکېدونکی دی. دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف دی، نو د x لپاره د $\pm\infty$ ته د تلنې حالت هم باید په پام کې ونیول شي.
دا چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره دی، نو f لږ تر لږه یو ګلوبال مینیموم لري، مګر کلوبال ماکسیموم نه لري. د y ارزښت په پرتله کریتیکال ټکی

$$(-2, 9/e^4) \qquad (0,1) \qquad (2, 9/e^4)$$

ښایي، چې ګلوبال مینیموم په $x = \pm 2$ کې نیول کیږي. دا چې f په انتروال $[-2,2]$ کې مینیموم او هم یو ماکسیموم لري، ترې لاس ته راځي چې $(0,1)$ یو لوکال ماکسیموم دی.
اوړونټکی یا د انعطاف ټکی:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{2}$$

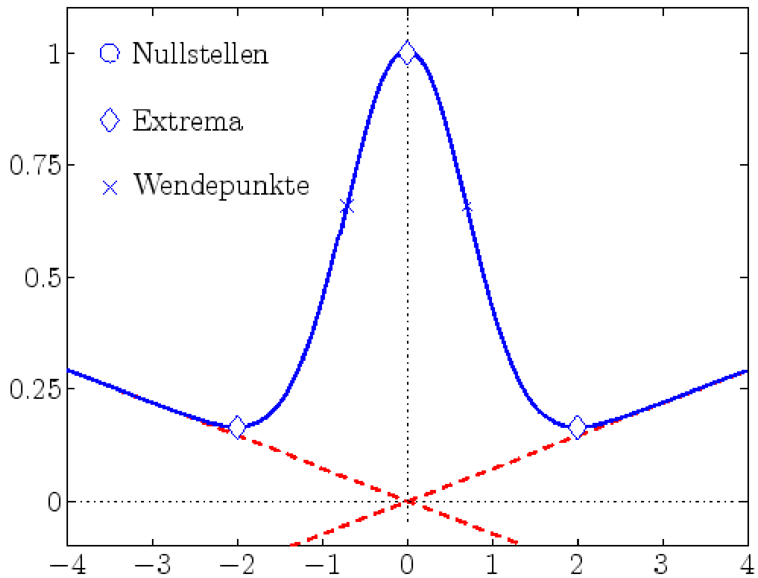
دریم مشتق په دې ځایونو $\neq 0$ کې دی. ترې لاس ته راځي چې f یو اوړنټکی

$$\left(\pm 1/\sqrt{2},\ e^{-1/2} + \frac{4}{\sqrt{2}\,e^4}\right).$$

لري.
قطبځایونه: تابع قطبځایونه نه لري.

ګاونډي یا مجاورتها: دا چې e^{-x^2} د $|x|$ لپاره د صفر په لور ګړندی دی، تابع ګاونډیان $p_+(x) = \frac{4x}{e^4}$ او $p_-(x) = \frac{-4x}{e^4}$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

ریمن-انتیګرال Riemann-Integral

د یوه ناپرېکېدونکي تابع f یو تاکلی انتیګرال د

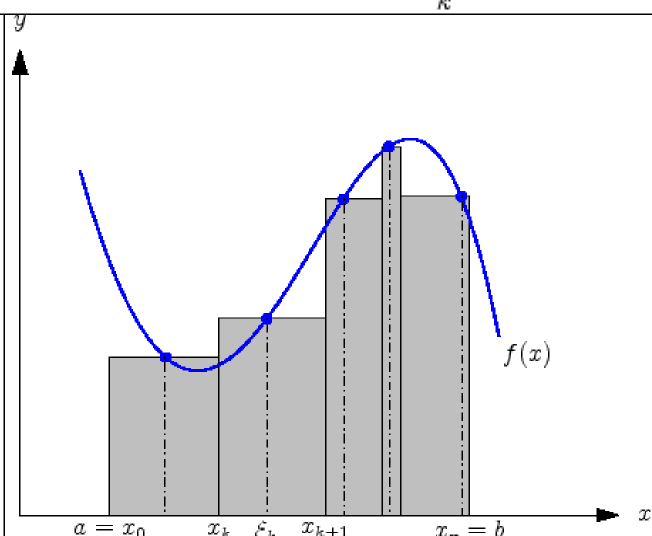
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \int_a^b f_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

له لارې تعریف شوی دی. دلته د $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ یوه توټه کونه بنايي،

$$|\Delta| = \max_k \Delta x_k\,,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\,,$$

یو ماکسیمال انترول دی او ξ_k په k – م انترول یو په خوښه ټکی دی. د انتیګرال تعریف په بنی لور زیاتون یاجمعه د ریمن زیاتون یا – جمعه بلل کیږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د زياتيز يا مثبت f لپاره $\int_a^b f(x)\,dx$ د f د ګراف کښته لورته سطحه په ګوته کوي

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر، ويپپر

که $f(x)$ ناپرېکيدونکی مشتقوړ وي، نو د مشتقشمېرنې د منځ ارزښت جملې څخه د لپاره باور لري

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (x_2 - x_1) \max_{x \in [x_1, x_2]} |f'(x)|$$

Δ_i دې د ټوټه ونو يوه پرله پسې وي د $|\Delta_i| \to 0$ سره. د تابع پرلپسې دوه توکي Δ_m او Δ_n را اخلو او د Δ ټوټه ونه را اخلو، چې د Δ_m او Δ_n د نورو يا ورپسې يل لاندې ټوټه کونو له لارې منځ ته راځي ، چېرته چې Δ_m د لاندې يا ورپسې ټوټه ونو ټکي $x_i\,,\, i = 0, \ldots, k_m$ دي او Δ ټکي $z_i\,,\, i = 0, \ldots, k$ لري، نو د $\zeta_j \in [z_{j-1}, z_j]$ سره باور لري

$$\left| \int f_\Delta - \int f_{\Delta_m} \right| = \left| \sum_{j=1}^{k} f(\zeta_j)\,\Delta z_j - \sum_{i=1}^{k_m} f(\xi_i)\,\Delta x_i \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1} \leq z_{j-1} < z_j \leq x_i} (f(\zeta_j) - f(\xi_i))\Delta z_j \right|$$

$$\leq |\Delta_m| \max_{t \in [a,b]} |f'(t)| \underbrace{\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1} \leq z_{j-1} < z_j \leq x_i} \Delta z_j}_{b-a} .$$

په ورته تګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left|\int f_\Delta - \int f_{\Delta_n}\right| = O(|\Delta_n|)\,,$$

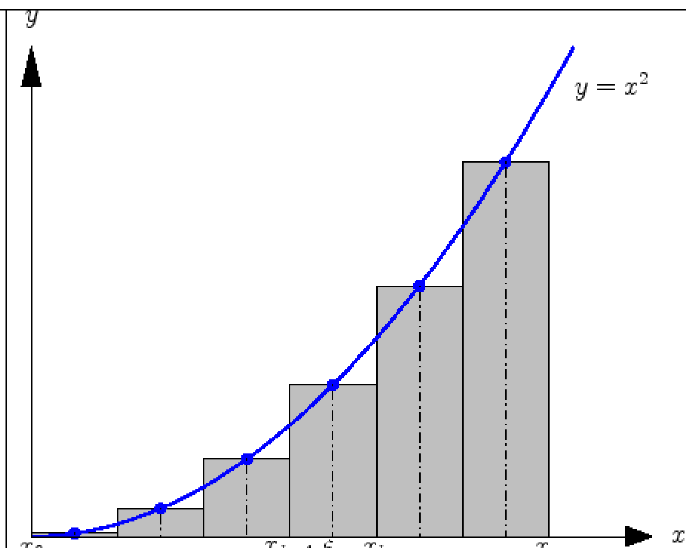
او له دي سره

$$\left|\int f_{\Delta_m} - \int f_{\Delta_n}\right| \to 0$$

د $n,m \to \infty$ لپاره . د ريمن –زياتون نو يوه کوشي-پرلپسي جوړوي، نو پولي ته تلونکي دي.
په ورته توګه د دوه پرلپسيو و همغي يا برابرې پولي ته تلنه وښوول شي.
د تونه ناپرېکېدونکو f ښوونه تخنيکي داسي لږ پېچلي ده. سرې د f د ناپرېکېدني انتروال بېل يا جدا ترخېږني نيسي او هلته د برابرډوله ناپرېکېدني څخه ګټه اخلي:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le \varepsilon \qquad \text{für} \quad |x_1 - x_2| < \delta\,.$$

دا اټکل د منځ ارزښت جملي په ځای رامنځ ته کيږي او نور دلايل په ورته وګه مخ ته بيولکيږي.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

ريمن –انتيګرال په حيث د $\int_0^1 x^2\,dx$ شمېرلو کيدی شي د تونه ونې پرلپسي وکارول شي د n-م تونه ونې لپاره د ارزښتونو ځايونو $\xi_i = (2i-1)/(2n)\,,$ $,\, i = 1, \ldots, n\,,$ سره.	

د تعريف سره سم لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{2i-1}{2n} \right)^2 = \frac{1}{4n^3} \left(4 \sum_{i=1}^{n} i^2 - 4 \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \right)$$

$$\frac{1}{4n^3} \left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

او له دې سره .

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د انتیګرال خویونه **Eigenschaften des Integrals**

دا لاندې تاکلی انتیګرال دا لاندې خویونه لري :

کربنیزوالس, $\int f + g = \int f + \int g$ ، $\int rf = r \int f$

همغږیزوالی : $f \leq g \implies \int f \leq \int g$

زیاتون یا جمعه $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$

$\int_b^a f = -\int_a^b f$

د وروستیو خویونو د همغږیزونې له امله سره تعریفوي: .

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

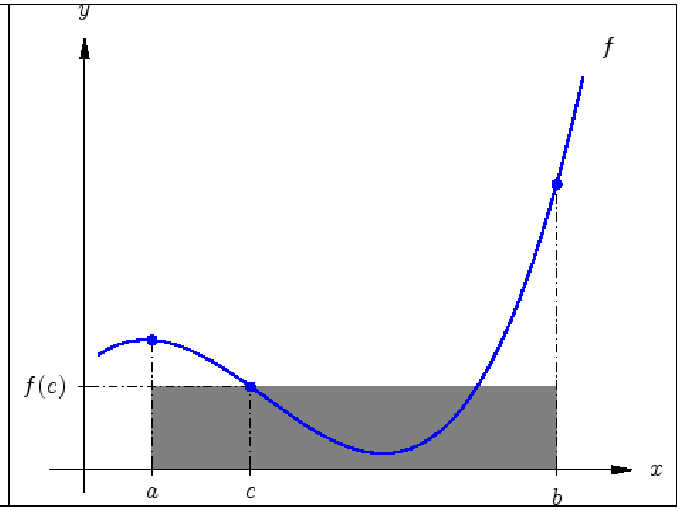
د انتیګرالشمیرنې منځ ارزښت جمله **Mittelwertsatz der Integralrechnung**

(c) ketabton.com: The Digital Library

که f او g په $[a,b]$ ناپرېکېدونکي توابع وي او g د مخنخښي بدلون ونه لري ، نو $c \in [a,b]$ شتون لري د

$$\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g.$$

سره



په ځانګي توګه ، لکه په ښېره کې چې ليدوړ دي، دی $\int_a^b f = (b-a)f(c)$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

بې له ټولېزو بنديزونو دې $g \geq 0$ وي. د انتيګرال د اټکل له لارې

$$\left(\min_{[a,b]} f\right) g(x) \leq f(x)g(x) \leq \left(\max_{[a,b]} f\right) g(x)$$

لاس ته راځي

$$\left(\min_{[a,b]} f\right) \int g \leq \int fg \leq \left(\max_{[a,b]} f\right) \int g .$$

دا چې f د منځارزښت جملې له مخې د $\min f$ او $\max f$ ترمنځ هر ارزښت نيسي، نو غوښتونی برابروالی راکوي.

په ټولېزه توګه وړاندنيونه ده، چې د g مخنخښي بدلون نه لري، اړيين، لکه د بېلګې

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}_{>0} = \int_{-1}^{1} x\cdot x\,dx \neq c\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځخه لیدل کیږی.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

بنسټیز – یا ساده توابع **Stammfunktion**

یو تابع F د $F' = f$ سره د f بنسټیز ت ابع دی، او د دې لپاره لیکو

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

د ټولو بنسټیز توابعو ډېرۍ لپاره، چې د f ناټاکلي انټیګرال بلل کیږي.
د انتیګرالونې ثابته c په خوښه ده. د بېلګې په توګه دی

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

د $F_a(a) = 0$ سره یو ممکنه لومړی یا بنسټیزه تابع.
نه ټولو بنسټیزو توابعو ته داسې روښانه د بنسټیزو توابعو اکسپلیځیت ورکړه شونې ده،

$$f(x) = \exp\left(x^2\right)$$

یوه بېلګه ده .
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د انتیګرالشمیرنې اصلي جمله یا قضیه **Hauptsatz der Integralrechnung**

که F د یوه ناپرېکېدونکي تابع f بنسټیز یا لومړنی تابع وي ، دا په دې معنا چې $f = F'$ وي، نو باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

همداسې په لنډه لیکنډول

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f = [F]_a^b \,.$$

یو بنئتیز انتیګرال کېدی شي د انتروال په پای ټکو کې د بنسټیزو توابعو د تابع ارزښتونو د کمښت په ډول وشمېرل شي
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

که دواړه خواوې د b تابع په څېر راوړل شي، نو بسیا کوي وښایو، چې دواړه خواوې برابر مشتق لري، ځکهچې د $b = a$ لپاره ارزښت سره سرخوري(دواړه خواوې صفر دي).
د کیڼ اړخ لپاره لرو

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{b+h} f - \int_a^b f \right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_b^{b+h} f \,.$$

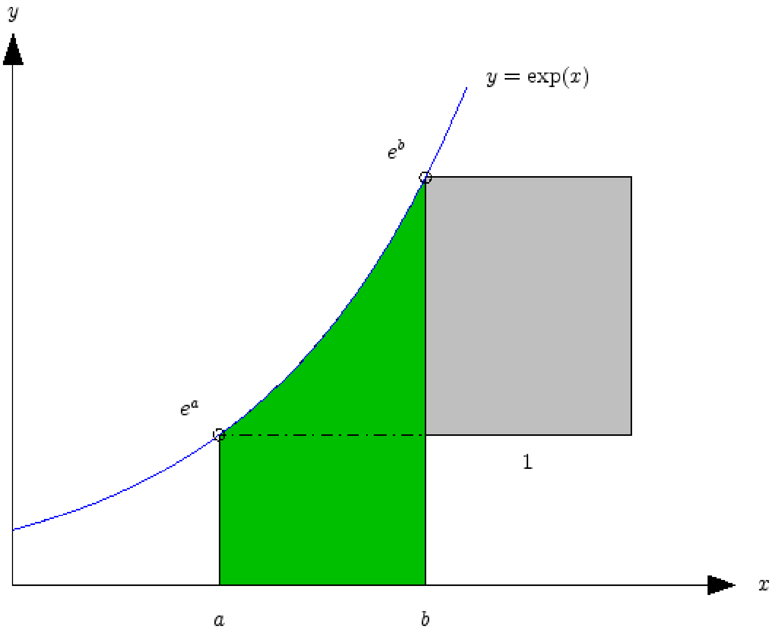
د منځ ارزښت جملې پسې یا په تعقیب انتیګرال مساوي دی په $(b+h-b)\,f(c)$ د $c \in (b, b+h)$ سره.
پوله ارزښت برابر دی په $f(b)$. دا د ښي اړخ د مشتق سره سر خوري یا یو غږیز دی
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د اکسپننشل تابع مشتق بېرته اکسپوننشل تابع دی او له دې امله دی

$$\int_a^b e^x\, dx = e^b - e^a \,.$$

د د a او b ترمنځ ګراف لاندې سطحه برابره د ولاړګوډیزر(مستطیل) د سطحې سره د سور 1 او د تابع ارزښت دواټن د اوږدوالي په حیث.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لوکايتم تابع $F(x) = \ln(x)$ مشتق $F'(x) = 1/x\,,\ x \in \mathbb{R}^+$ دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x\,dx = \ln(b) - \ln(a)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}^+ .$$

د $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ يو بنستيز تابع $F(x) = \arctan x$ دی . د دې په تعقيب دی

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} .$$

د مشتقوني ځخه لاس ته راځي، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = \tan x$ يو بنستيز تابع دی

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

په تعقيب دی:

$$\int_0^{\pi/4} \tan x\, dx = -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د M کتلې يو ستوری يو د کښونلو ورشو توليدوي، چې د هغې له خوا په يوه کتله m يو زور $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$ واردوي . دلته γ د ګراويتيشن يا راکښنې قوه ده او x د دروندتکو ترمنځ واټن دی.

د $1/x^2$ لپاره يو لومړنی يا بتستيز تابع $-1/x$ دی. د دې لپاره چې يو تن له واټن a و واټن b ته يوړولی شو ، بايد کار

$$\int_a^b F(x)\, dx = \gamma mM \int_a^b \frac{1}{x^2}\, dx = -\left[\gamma mM/x\right]_a^b = \gamma mM(1/a - 1/b)$$

سرته ورسيږي.

د a لپاره د ستوري د وړانګې سرره برابر او $b \to \infty$ کېدی شي د برابر اينوونې له لارې د کينيتيکي انرژي سره چې داسې په نامه د تېښتې چټکتيا v ټاکي دا په دې معنا چې چټکتيا ، چې اړين ده، چې د يوه ستوري راکښنقوه پرېښودی شي يا راکښنقوې څخه ووځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{m}{2}v^2 = \gamma\frac{mM}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\gamma\frac{2M}{a}}\,.$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره $v = 11.2\,\text{km/s}$. دی .
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د بنسټیزو توابعو لومړني توابع Stammfunktionen der Grundfunktionen

لاندې جدول بنسټیزو توابعو $f(x)$ ته لومړني توابع $F(x)$ ښايي

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
$x^s\,,\ s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

ټوټه- یا پارشل انتیګرالونه Partielle Integration

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق د ضرب قانون $(fg)' = f'g + fg'$ څخه په ورته توګه فرمول بندي له لارې د ناټاکلي انتيګرال لپاره راکوي:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

په اړونده توګه د ناټاکلو انتيګرالونو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

لپاره باور لري. د لته دې په پام کې ونيول شي، چې د ژئ ترم $[fg]_a^b$ ورکيږي، که د دواړو توابعو څخه يو يې د انتروال پای ټکو کې صفر وي. په همدې توګه د پريوديکي تابع لپاره د پريود اوږدوالي $(b-a)$ کې هم له منځه ځي.
ليکونکي: هيوليک، کوپف

له $\int (1+x)^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}(1+x)^{\alpha+1} + c$ څخه د $\alpha \neq -1$ لپاره لاس ته راځي

$$\int \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1+x}}\,dx = x\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int 1\cdot\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,dx$$
$$= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + c.$$

په ورته توګه شميرل کيږي

$$\int_0^1 \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1-x}}\,dx = \left[-x\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx$$
$$= 0 - \left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو لوګاریتمي ضریب د یو ځل ټوټه انتیګرالونې له لارې له منځه تلی شي.
د بیلګې په توګه دی

$$\int x^n(\ln|x|)\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln|x|) - \int \frac{1}{n+1}x^{n+1}\,\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln|x|) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + c.$$

په دې ډول کیدی شي په خوښه پولینومونه

$$\sum_{j,k} a_{j,k}x^j(\ln|x|)^k$$

په x او $\ln|x|$ کې انتیګرال شي یا انتیګرال ونیول شي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ټوټه اتیګرالونې له لارې کېدی شي د پولینوم درجه کمه شي. د بېلګې په توګه دی

$$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - \int n x^{n-1}e^x\,dx$$
$$= x^n e^x - n x^{n-1}e^x + \int n(n-1)x^{n-2}e^x\,dx$$
$$= \cdots$$
$$= e^x \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}x^k + c.$$

په دې توګه نېدی شي د $n \in \mathbb{N}$, $x^n\,e^{\beta x}$, بنې ترمونوکمبینېشن په خوښه انتیګرال شي یا یې انتیګرال ونیول شي. لیکونکي: هیولیګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x^n \cos x$ او $x^n \sin x$ ضربونه کېدی شي د ډېرواره ټوټه انتيګرالونې له لارې انتيګرال شي:

$$\int x^n \left\{ \begin{array}{c} \cos x \\ \sin x \end{array} \right\} dx = x^n \left\{ \begin{array}{c} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} - \int n x^{n-1} \left\{ \begin{array}{c} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} dx$$
$$= \ldots .$$

د تکرار ټوټه انتيګرالوني له لارې بالاخره ضريب x^k له منځه ځي. په دې توګه کېدی شي د په خوښه پولينوم توابعو لومړنی تابع په x, $\sin x$ او $\cos x$ کې وشمېرل شي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

له $\cosh'(x) = \sinh(x)$, $\sinh'(x) = \cosh(x)$ څخه لاس ته راځي

$$\int e^x \sinh(x)\,dx = e^x \cosh(x) - \int e^x \cosh(x)\,dx$$
$$= e^x \cosh(x) - e^x \sinh(x) + \int e^x \sinh(x)\,dx$$

او له دې سره لکه چې برېښي
$$e^x \cosh(x) = e^x \sinh(x),$$

يو په ځرګنده توګه مخامخوالی يا تضاد دی.
ناټيکاوی په اخرنظ پايونه کې پروت دی – د انتيګرالنيوني ثابته بايد په پام کې ونيول شي:
$$e^x \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2} + c.$$

د $c = 1$ ټاکنه مو ټيکې نتيجې ته لاربنودوي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ټوټه انتيګرالوني سره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx,\ (a\neq 0).$$

د ويم ځل انتيګرالونه مو بېرته برابر انتيګرال ته ته بيايي، او له دې سره لاس ته راځي:

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{ae^{ax}\sin(bx) - be^{ax}\cos(bx)}{a^2+b^2} + c$$

بديلي سړی

کړی شي د اويلر-مويورې فرمول هم د پورته ډول انتيګرال شمېرنو ته استعمال کړي. د

$$\cos(t) = \mathrm{Re}\,(\exp(it))$$

بېلګې په توګه له لاس ته راځي

$$\int_0^\pi e^t\cos(t)\,dt\,\mathrm{Re}\left(\int_0^\pi \exp(t+\mathrm{i}t)\,dt\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{\exp(t+\mathrm{i}t)}{1+\mathrm{i}}\right]_0^\pi\right)$$

$$= \qquad \mathrm{Re}\left(\frac{-e^\pi-1}{1+\mathrm{i}}\right) = -(e^\pi+1)/2\,.$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

له

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = -\int_{-\pi}^{\pi} n\cos(nx)(-\frac{1}{m}\cos(mx))\,dx$$
$$= \frac{n^2}{m^2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx$$

د $m\neq n$ لپاره لرو

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0\,.$$

په پام کې دې ونيول شي، چې د تابع پريوديځيتي يا تل بېرته رتګرځېدنه په ټوټه انتيګرالونه کې د ژی شرايط له منځه ځي. د $m = n$ لپاره د لومړي مساوات او

$$\sin^2+\cos^2 = 1$$

څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}1\,dx=2\pi\,.$$

په ورته توګه سړی د تابع $\cos(mx)$ اورتوګونالیتي ښايي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

دلتا - تابع Delta-Funktion

د دیراکDiracsche دلتا-تابع δ د

$$\int_{\mathbb{R}}\delta f=f(0)$$

له لارې تعریف دی، د کوم سره چې یو په خوښه ناپرېکیدونکی تابع دی، چې د یوه انتروال (a,b) دباندې وکیږي. د ټوټه انتیګرالونې په مرسته یا په یوه پوله پروسه کېدی شي δ د Heavisideschen ټوپتابع د مشتق ټولیزوالي

$$H(x)=\begin{cases}1, & \text{für } x>0\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

په حیث تشریح کیدی شي.

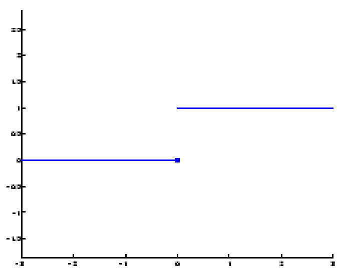
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

که $0\in(a,b)$ وي، نو د ټوټه انتیګرال سره لاس ته راځي

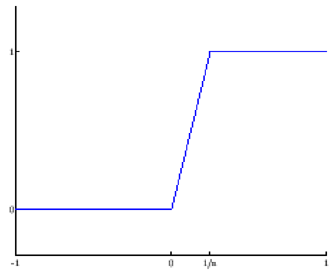
$$\begin{aligned}\int_{-a}^{b}H'f&=[Hf]_a^b-\int_a^b Hf'\\&=-\int_0^b f'=-[f]_0^b\\&=f(0)\end{aligned}$$

او له دې سره $\int H'f=\int\delta f$.

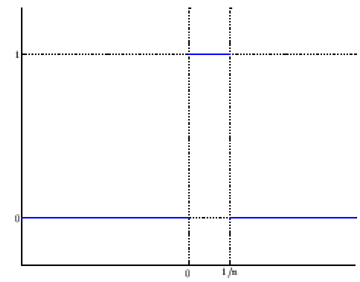
(c) ketabton.com: The Digital Library



Heaviside-Funktion
H



نږدېوالی
H_n
Näherung
der Heaviside-Funktion



نږدېوالی
$\delta_n = H_n'$
Näherung
der Delta-Funktion

په د پوله پروسي سره د جوړ شوي د Heavyside-Funktion اپروکسیمیشن سره سړی بدیل لاس ته راوړي :

$$\int_a^b H_n' f = n \int_0^{1/n} f = f(t_n) \to f(0) .$$

له دې سره د اخرني مساوات لپاره د منځ ا رزښت جمله کارول شوې.
لیکونکي: هیولیگ، کوپف

د متحولو – یا اووښتونو بدلون Variablensubstitution

د ځنځیري قاونو

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x))g'(x), \quad f = F',$$

ځخه د د بدلون $y = g(x)$ لپاره لومړنیو تابع جوړولو له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(y) + c = \int f(y)\,dy.$$

په ورته توګه د ټاکلي انتيګرال لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

.

د دفرنشل کونو په ورسته کېدی شي دا فرمول په لاندې بڼه

$$\int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

وليکل شي.

يو ساده ځانګړی حالت يو کرښيز متحول بدلون دی

$$x \mapsto y = px + q\,.$$

په دې حالت کې دی

$$\int f(px+q)\,dx = \frac{1}{q}F(y) + c$$

همداسې

$$\int_a^b f(px+q)\,dx = \frac{1}{p}\,[F]_{pa+q}^{pb+q}\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د انتيګرال

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon x}{x}\,dx$$

لپاره بدلون $dx = \frac{1}{\varepsilon}du$ $u = \varepsilon x\,,$ او د انتيګرالونې پولو ترانسفورميشن $x = \pi/\varepsilon \leftrightarrow u = \pi$ راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

په ټولیزه توګه د یو بدلون $u = rx$ سره باور لري

$$\frac{dx}{x} \to \frac{du}{u}$$

او له دې سره

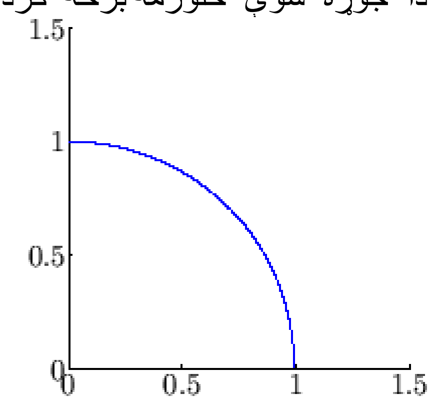
$$\int_a^b f(rx)\frac{dx}{x} = \int_{ra}^{rb} f(u)\frac{du}{u}.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

تابع

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad 0 \le x \le 1,$$

دا جوړه شوې څلورمه برخه ګردۍ یا څلورمه برخه داېره ښايي



له دې سره د انتیګرال لپاره باور لري

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4}.$$

که بدلن $x = \sin u,\ dx = \cos u\, du,\ x = 0 \to u = 0$ وکارول شي او $x = 1 \to u = \frac{\pi}{2}$ ، نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\,,$$

لکه ښنګه چې انتظار کېده. د اخرني مساوات لپاره دا لاندې

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 u + \cos^2 u\, du = \frac{\pi}{2}$$

وکارول شو.

په عجیبه ډول بدلون $x = \cos u,\quad dx = -\sin u\, du$,

$x = 0 \to u = -\pi/2$ او $x = 1 \to u = 2\pi$ په بربښنده توګه یوه ناټیکه نتیجه راکوي:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} -\sin^2 u\, du = -\frac{5\pi}{4}.$$

څه ناټیک وو؟ په کلکه نیولې توګه باور لري

$$\sqrt{1-\cos^2 u} = |\sin u|$$

او له دې سره

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} |\sin u|(-\sin u)du = \frac{\pi}{4}.$$

د لاندې انتیګرال لپاره

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2-1}}$$

بدلون $y = (x-3)/2 \quad dx = 2dy$, راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ورپسې بدلون f $y = \cosh t$, $dy = \sinh t\, dt$ سره د

$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ له امله لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} &= \int \frac{\sinh t\, dt}{\sinh t} \\ &= \int dt = t + c \\ &= \operatorname{arcosh} y + c \\ &= \operatorname{arcosh}((x-3)/2) + c \\ &= \ln\left(\frac{x-3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+5}\right) + c\end{aligned}$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس تهراځي

$$\begin{aligned}\int_5^7 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} &= \ln(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}) - \ln 1 \\ &= \ln(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}).\end{aligned}$$

که په انتګرالېدونکي کې دننه مشتق پېژندل کېږي، لکه د بېلې په توګه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx\,,$$

لپاره، نو د بدلون قانون په ځانګړې توګه ساده دی. په دې بېلګه کې

$$y = g(x) = \ln x\,, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

ځای په ځای کوو او لاس ته راوړو

$$\int g(x)^2\, g'(x)\, dx = \int y^2\, dy = \frac{1}{3}y^3 + c\,.$$

د په څټ یا معکوس بدلون سره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

په تيوپيکي توګه سرې هڅيري چې د بدلون له لارې انتيګرالېدونکی ساده کړي. د بېلګې په توګه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y}-1}\,dy$$

لپاره نرډې دی چې

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

کيږدي. دا د

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله دا ترانسفورمي شوی ناټاکلی انتيګرال راکوي

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\frac{dy}{dx}\,dx = \int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)\,dx$$

$$\int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c\,.$$

د $x = e^y$ دبېرته بدلون له لارې بالاخره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2}\left|\frac{e^y-1}{e^y+1}\right| + c\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

لومړی (بنستيزه -) تابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

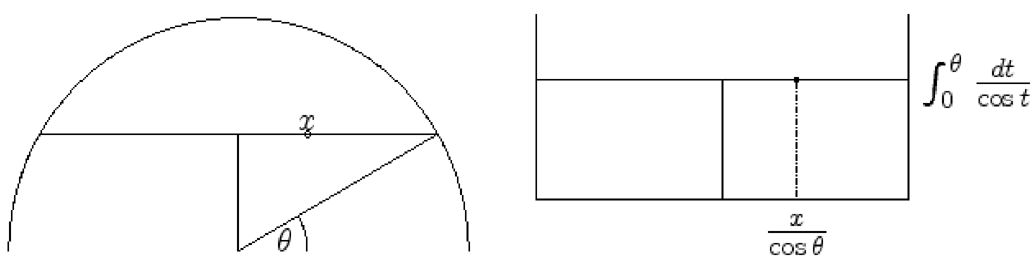
کیدی شي د بدلون سره

$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1+\sin x}{\cos x}, \qquad du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx,$$

وشمېرل شي:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int (\cos x)^{-1} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} du \\ &= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \\ &= \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c. \end{aligned}$$

یو کارونه یې د Mercator-Projektion دی. له دې سره د ځمکې بورته سطحه کونجرېښتونې په سطحه بربوځي.



د سور ګردی (طول البلد) له دې سره د $1/\cos\theta$ په نسبت سره غزیږي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

ساده راشنل انتیګرالیدونکې د ساده قطب سره
Elementare rationale Integranden mit einfachen Polen

د درې بنستیتیوپه راشنل توابعو لومړنی توابع دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \qquad \frac{1}{a}\ln|x+b/a|+c$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \qquad \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+c$$

$$\int \frac{(x-a)dx}{(x-a)^2+b^2} = \qquad \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2)+c$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

فرمولونه کېدی شي ثړلي د مشتق له لارې پسې وشمېرل شي. بديل يې د انتيګرال ساده بڼه بدلونونه شوني دي.

له $\int dy/y = \ln|y|+c$ لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x+b/a} = \frac{1}{a}\ln|x+b/a|+c.$$

د بڼه بدلون پسې

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{((x-a)/b)^2+1}$$

بدلون $dx = b\,dy$, $y=(x-a)/b$ راکوي

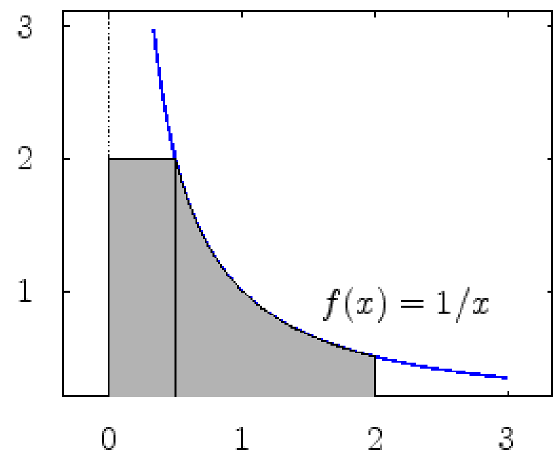
$$\frac{1}{b}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{b}\arctan y + c = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+c.$$

د بدلون , $y=(x-a)^2+b^2$ سره لاس ته راځي

$$\int \frac{(x-a)\,dx}{(x-a)^2+b^2} = \qquad \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ln|y|+c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

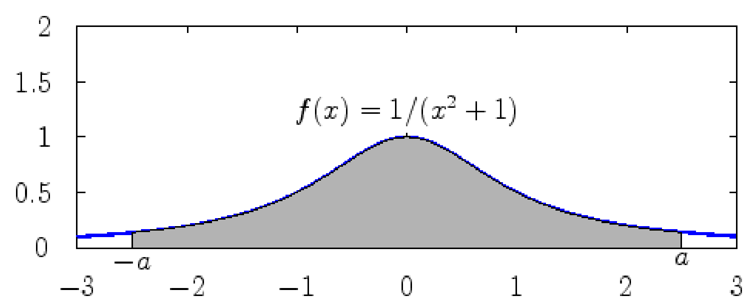
$$= \qquad \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2)+c.$$



د خړې سطحې مساحت د

$$2\frac{1}{2}+\int_{1/2}^{2}\frac{1}{x}dx = 1+\ln 2-\ln\frac{1}{2} = 1+\ln 4$$

له لارې شمېرل کيږي.
ليکونکي: هيوليک، کوپف



د $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ د ګراف لاندې سطحه داسې شمېرل کيږي

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty}\arctan a - \arctan(-a) \longrightarrow \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$r(x) = \frac{3x+6}{2x^2-4x+10}$$

لومړی تابع ټاکلو لپاره، لومړی د مخرج مربعتکمیلونه جوړیږي:

$$2(x^2-2x+5) = 2((x-1)^2+2^2)\,.$$

په اړونده توګه صورت هم بڼه بدلیږي:

$$3(x+2) = 3((x-1)+3)\,.$$

له دې سره کېدی شي د ستاندارد افادې په توګه توټه یا تجزیه شي:

$$r(x) = \frac{3}{2}\,\frac{x-1}{(x-1)^2+2^2} + \frac{9}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2+2^2}\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int r(x)\,dx = \frac{3}{4}\,\ln\left((x-1)^2+4\right) + \frac{3}{4}\,\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c\,.$$

د ټاکلی انتیګرال $\int_1^3 r(x)\,dx$ لپاره سری د پولو د په ځای اینسوونې له لارې لومړنی تابع لاس ته راوړي

$$\frac{3}{4}\left(\ln 8 - \ln 4 + \arctan(1) - \arctan(0)\right) = \frac{3}{4}\,\ln 2 - \frac{3}{16}\,\pi\,.$$

لیکونکي: هیولیګ،

ساده راشنل انتیګرالونه د زیاتواره قطب سره

Elementare rationale Integranden mit mehrfachen Polen

د $n \in \mathbb{N}$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int (x-a)^{-n-1}dx = -\frac{1}{n}(x-a)^{-n} + c\,.$$

د ډېرواره کمپلکس کنجوګیري قطبځایونو کې د اړونده مربع
$q(x) = (x-a)^2 + b^2$
ضریبونو لپاره باور لري

$$\int \frac{c(x-a)+d}{q(x)^{n+1}}\,dx = \frac{d(x-a)}{2b^2n\,q(x)^n} - \frac{c}{2n\,q(x)^n} + \frac{d(2n-1)}{2b^2n}\int \frac{dx}{q(x)^n}\,.$$

د ګراد یا درجې ردکشن د لومړنې تابع رکورزیو شمېرنه شوونې کوي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

لومړنی فرمول د $y = x - a$ او $dx = dy$ د د بدلون له لارې لاس ته راځي:

$$\int (x-a)^{-n-1}dx = \int y^{-n-1}dy = -\frac{1}{n}y^{-n} + c\,.$$

د دویم فرمول د ښوونې لپاره لومړی یو ساده د رکوزیون فرمول منځ ته راځي.

د ټوټه انتیګرالونې سره لاس ته راځي

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^k} = \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k\int \frac{y^2}{(1+y^2)^{k+1}}\,dy$$
$$= \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k\left(\int \frac{dy}{(1+y^2)^k} - \int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}}\right)\,.$$

له دې کتمتوالی منځ ته راځي

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}} = \frac{y}{2k(1+y^2)^k} + \frac{2k-1}{2k}\int \frac{1}{(1+y^2)^k}\,dy\,.$$

له دې سره اوس د بدلون $y = \frac{x-a}{b}$ سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}} &= \frac{1}{b^{2n+2}} \int \frac{dx}{((\frac{x-a}{b})^2+1)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{b^{2n+1}} \int \frac{dy}{(1+y^2)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{b^{2n+1}} \left(\frac{y}{2n(1+y^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{dy}{(1+y^2)^n} \right) \\ &= \frac{x-a}{2b^2n((x-a)^2+b^2)^n} + \frac{2n-1}{2b^2n} \int \frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^n} .\end{aligned}$$

ترم

$$\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\, dx$$

کيدی شي د بدلون $y = (x-a)^2 + b^2$ له لارې وشميرل شي، ځکه چې په صورت کې د y مشتق ځای لري:

$$\begin{aligned}\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\, dx &= \frac{c}{2} \int \frac{dy}{y^{n+1}} \\ &= \frac{c}{2(-n)y^n} \\ &= -\frac{c}{2n((x-a)^2+b^2)^n} .\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د انتيګرال

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+9)^2}\, dx$$

لپاره په تولېز فرمول کې د ايښووني وروسته د ډېرواره قطبونو سره د $a = 0, b = 3, c = 2, d = 1$ او $n = 1$ سره راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{-2}{2(x^2+9)} + \frac{x}{18(x^2+9)} + \frac{1}{18}\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$$

او د بنه بدلون پسې

$$\frac{x-18}{18(x^2+9)} + \frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}\arctan(\frac{x}{3}) + c\right) = \frac{x-18}{18(x^2+9)} + \frac{1}{54}\arctan(\frac{x}{3}) + c'.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د راشنلتوابعو انیګرالونه **Integration rationaler Funktionen**

د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونې له لارې کېدی شي یو حقیقي راشنل تابع د لاندې درې ساده بنسټیتوپ جمعي

$$ax^n\,,\quad \frac{c}{(ax+b)^n}\,,\quad \frac{c(x-a)+d}{((x-a)^2+b^2)^n}$$

د $n \in \mathbb{N}_0\,,\ a,b,c,d \in \mathbb{R}$ سره انځور شي. د لومړنیو توابعو په مرسته کېدی شي د دې بنسټیتوابعو لپاره د په خوښه راشنلتوابعو لپاره لومړنۍ توابع وټاکل شي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د

$$\int r(x)dx,\quad r(x) = \frac{x^5+10x^3+5^2-x+25}{x^4+8x^2-9}\,,$$

د شمېرلو لپاره لومړی یو ټوټه کسر ټوټه ونه سرته رسوو.
د پولینوم وېش پسې ،

$$r(x) = x + \frac{2x^3+5x^2+8x+25}{x^4+8x^2-9}\,,$$

اود مخرج ضریبونو جوړولو پسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x^4+8x^2-9=(x+1)(x-1)(x^2+9)\,,$$

لاس ته راځي

$$r(x)-x=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{cx}{x^2+9}+\frac{d}{x^2+9}\,.$$

که د اصلي مجراج سره ضب شي، نو لاس ته راځي

$$\begin{aligned} &2x^3+5x^2+8x+25 \\ =\quad & a(x-1)(x^2+9)+b(x+1)(x^2+9)+(cx+d)(x^2-1) \\ & x^3(a+b+c)+x^2(-a+b+d)+x(9a+9b-c)+1(-9a+9b-d) \end{aligned}$$

او د ضریبونو د پرتلې $c=1$,$b=2$, $a=-1$ او $d=2$ له لارې.
یوګوني ترمونه کېدی اوس ساده انتیګرال شي:

$$\begin{aligned} &\int\frac{x^5+10x^3+5^2-x+25}{x^4+8x^2-9} \\ =\quad & \int x\,dx+\int\frac{-dx}{x+1}+\int\frac{2dx}{x+1}+\int\frac{x\,dx}{x^2+9}+\int\frac{2dx}{x^2+9} \\ & \frac{1}{2}x^2-\ln|x+1|+2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+9)+\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+c. \end{aligned}$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ساین او کوساین د ضرب انتیګرالونه

د $a^2\neq b^2$ لپاره د زیاتون-یا جمعي قضیې څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx = -\frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c.$$

په ځانګړې توګه د ټولګنیزو یا تامعددې a,b لپاره انتیګارل په پریودیکي انتروال $[-\pi,\pi]$ باندې ورکیږي. د ټوټه انتیګرالونې په مرسته لاس ته راځي

$$\int \sin^n(ax)da - \frac{1}{na}\sin^{n-1}(ax)\cos(ax) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(ax)dx$$

$$\int \cos^n(ax)dx\ \frac{1}{na}\sin(ax)\cos^{n-1}(ax) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(ax)dx.$$

داسي کیدی شي اکسپوننت سوکڅسیو یا تل کم شي. د $n=2$ لپاره په ځانګړې توګه لاس ته راځي

$$\int \sin^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + c$$

$$\int \cos^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + c.$$

په ځانګړې توګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx = \pi$$

د $n \in \mathbb{N}$ لپاره .

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

که د لومړۍ کټمټوالي د ښي اړخ مشتق ونيول شي، نو سړی لاس ته راوړي

$$\frac{1}{2}\cos\left((a-b)\,x\right) - \frac{1}{2}\cos\left((a+b)\,x\right) .$$

د زياتون – يا جمعي قضيه راکوي

$$\frac{1}{2}\left(\cos(ax)\cos(bx)+\sin(ax)\sin(bx)-\cos(ax)\cos(bx)+\sin(ax)\sin(bx)\right) =$$

$$= \sin(ax)\sin(bx) ,$$

کوم چې د کيڼ لور د انتيګرال سره سر خ وري.

د $\sin^2(ax)$ او $\cos^2(ax)$ لومړنی تابع کېدی شي د ټوټه انتيګرال سره وشمېرل شي. د بېلګي په توګه دی

$$\int \sin(ax)\sin(ax)\,dx$$

=

$$-\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(ax) - \int \left(-\frac{1}{a}\cos(ax)\right)\left(a\cos(ax)\right)\,dx$$

$$= -\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(ax) + \int \left(1-\sin^2(ax)\right)\,dx .$$

د $\int \sin^2(ax)\,dx$ پسې حل کونه غوښتونی لومړنی تابع راکوي.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د کمپلکس تريګونومتيکي توابعو انتيګرالونه

Integration komplexer trigonometrischer Polynome

له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^{ikx}\,dx = \frac{1}{ik}e^{ikx} + c, \quad 0 \neq k \in \mathbb{Z},$$

څخه د کمپلکس تريګونومتريکي پولينومونو لپاره لاس ته راځي

$$p(x) = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx},$$

داسې چې
dass

$$\int p(x)\,dx = c + c_0 x + \sum_{0 \neq |k| \leq n} \frac{c_k}{ik} e^{ikx}$$

همداسې
sowie

$$\int_{\pi}^{\pi} p = 2\pi c_0$$

باور لري.

د اوېلر-مويورې فرمول په مرسته کېدی شي په دې توګه په خوښه پولينومونه په $\cos(kx)$ او $\sin(kx)$ کي انتيګرال شي.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x\,dx$$

شمdرلو ته د اوېلر-مويورې فرمول په مرسته انتيګرال په لاندې توګه ليکل کيږي

$$\frac{1}{16}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^4 = \frac{6}{16} + \sum_{k \neq 0} c_k e^{ikx}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $2\pi\frac{6}{16}=\frac{3}{4}\pi$ د انتیګرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي.

بدیلي کیدی شي ټوټه انتیګرال وکارول شي:

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x dx &= \int \sin x \sin^3 x\, dx \\ &= -\cos x \sin^3 x + 3\int \cos^2 x \sin^2 x\, dx \\ &= -\cos x \sin^3 x + 3\int \sin^2 x\, dx - 3\int \sin^4 x\, dx.\end{aligned}$$

که په $\sin^4 x$ انتیګرال بنی لور ته راوړل شي، نو د درجې کموالی راکوي

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x\, dx = -\frac{1}{4}\left[\cos x \sin^3 x\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx\,.$$

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\, dx = \pi$$

په مرسته سړی $\frac{3}{4}\pi$ هم د انتیګرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي
لیکونکي: هیولیک، پفایل

تریګونومتریکي بدلونونه **Trigonometrische Substitutionen**

د لاندې بدلونونو په مرسته کېدی شي د ساده الجبري انتیګرالیدونکو یوه لړۍ اکسپلیڅیت یا په ښه هڅرګنده توګه وشمېرل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = a\sin t: \qquad dx = a\cos t\, dt \qquad \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t$$
$$x = a\tan t: \qquad dx = a/\cos^2 t\, dt \qquad \sqrt{a^2 + x^2} = a/\cos t$$
$$x = a/\cos t: \qquad dx = a\sin t/\cos^2 t\, dt \qquad \sqrt{x^2 - a^2} = a\tan t$$

په بل حالت کې باید د ريښي د پروت محور متحولې لومړی په مربعيز تکميلېدونکې بڼه راړل شي.
ليکونکې: هيوليک، پفايل

د انتيګرال

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

لپاره بدلون $x = \sin t,\ dx = \cos t\, dt$ او د پولو اعيارول $x = 0 \rightarrow t = 0$ او $x = 1/2 \rightarrow t = \pi/6$ راکوي

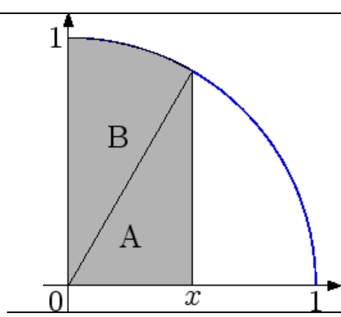
$$\int_0^{\pi/6} \cos^2 t\, dt = \left[\frac{1}{2}(\sin t\cos t + t)\right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

ناټاکلی انتيګرال دی

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c.$$

انتيګرال کيدی شي د يوه ساده هندسي يا ځمککچيز اند(فکر) سره هم وټاکل شي

لکه د څيرې څخه چې ليدل کيږي، د $\sqrt{1 - x^2}$ د ګراف لاندې سطحه په دوه برخسطحو ودانه يا جوړه ده.



د دربېکوډي سطحي مساحت $A = \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2}$ دی او د ګردی برخط يا قطاع مساحت د $t = \arcsin x$ کونج سره $B = \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\arcsin x$ ده. د دې سطحو د

(c) ketabton.com: The Digital Library

مساحت جمعه کيدل غوښتوني سطحه راکوي.
ليکونکي: هيوليک، کوپف

د انتيګرال

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

لپاره د بدلون $x = \tan t,\quad dx = 1/\cos^2 t\, dt$ څخه لاس ته راځي

$$\int \frac{dt/\cos^2 t}{\tan t/\cos t} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln|\tan\frac{t}{2}| + c,$$

د کوم سره چې اخرنی مساوات د ښی اړخ د مشتق نيولو له لارې ازمايل کېدی شی.
د بېرته بدلون له لارې لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln|\tan(\frac{1}{2}\arctan x)| + c.$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس ته راځي

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln|\tan\frac{\pi}{4}| - \ln|\tan\frac{\pi}{8}|$$

$$= \ln 1 - \ln\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right)$$

$$= \ln(1+\sqrt{2}).$$

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د انتيګرال

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2-1}}$$

لپاره بدلون $y=(x-3)/2$, $dx=2dy$ راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}.$$

د پسي بدلون $y=\frac{1}{\cos t}$, $dy=\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt, \sqrt{y^2-1}=\tan t$ n سره لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1}{\cos t}+\tan t\right|+c,$$

د کوم سره چې اخرنی برابروالی د بنی خوا د مشتق نیونې له لارې ازمایل کیدی شي.
د په څټ يا معکوس بدلون پسې د

$$\sin t=\sqrt{1-(1/y)^2}, t=\arccos y=\arcsin\sqrt{1-(1/y)^2}$$

سره لومړنی تابع دلاس ته راځي

$$\ln\left|y+y\sin\left(\arccos\frac{1}{y}\right)\right|+c = \qquad \ln\left|y+y\sqrt{1-\left(\frac{1}{y}\right)^2}\right|+c$$

$$=\ln\left|\frac{x-3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+5}\right|+c.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ساین او کوساین راشنل توابع
Rationale Funktionen von Sinus und Cosinus

د بدلون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = \tan(t/2)$$

سره د يوه په خوښه راشنل تابع r لپاره لاس ته راځي

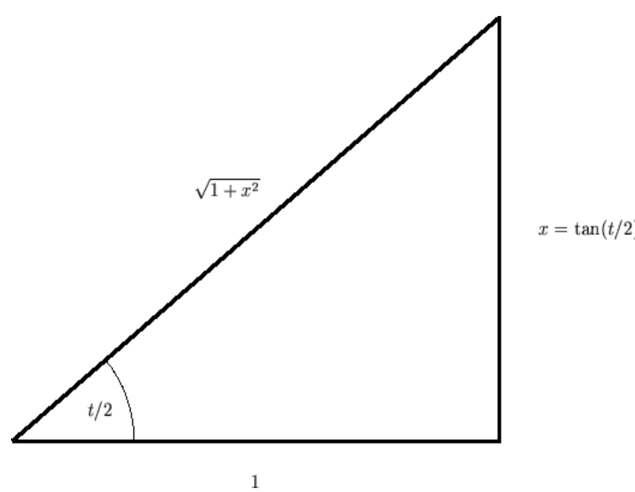
$$\int r(\cos t, \sin t)\, dt = \int r\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\right)\frac{2}{1+x^2}\, dx\,.$$

له دې سره تريګونومتريکي تابع کېدی شي په يوه راشنل انتيګرال واړوي، کوم چې د ټوټه کسر ټوټه ونې سره شمېرل کېدی شي.

ليکونکي: هيوليګ، اپريښ

لکه د ځيرې ځخه چې ليدل کيږي، باور لري

$$\cos(t/2) = 1/\sqrt{1+x^2}\,, \quad \sin(t/2) = x/\sqrt{1+x^2}$$



له دې لاس ته راځي

$$dx = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2(t/2)}\, dt = \frac{1}{2}\,(1+x^2)\, dt$$

همداسې

$$\cos t = \cos^2(t/2) - \sin^2(t/2) = \frac{1-x^2}{1+x^2}\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin t = 2\cos(t/2)\sin(t/2) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

ليکونکي: هيوليګ، اپريېن

د بدلون $x = \tan(t/2)$ سره لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{1+x^2}{2x}\,\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} = \ln|\tan(t/2)| + c.$$

په اړونده تګه لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{1+x^2}{1-x^2}\,\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$= \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c.$$

د $x = \tan(t/2)$ د بېرته بدلون پسې لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1+\tan(t/2)}{1-\tan(t/2)}\right| + c.$$

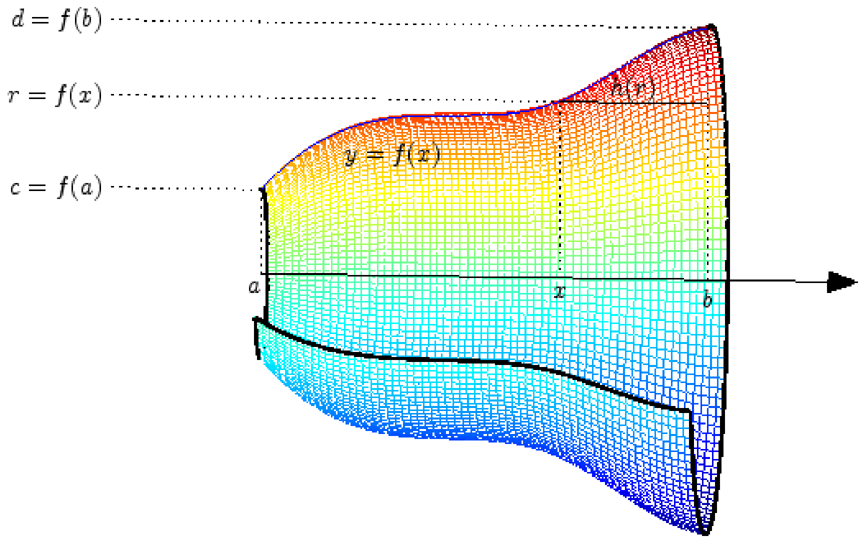
ليکونکي: هيوليګ، اپريېن

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څرخیدونو بدنونو ډکی یا حجم **Volumen von Rotationskörpern**

د V ډکی حجم د x په محور جوړ شوي بدن د تابع ګراف $r = f(x) \geq 0$, $a \leq x \leq b$
د څرخون له لارې کېدی شي انتیګرېشن له لارې په ګردی ډوله غوڅي یا تقاطع باندې شمېرل کیدی شي:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \, .$$



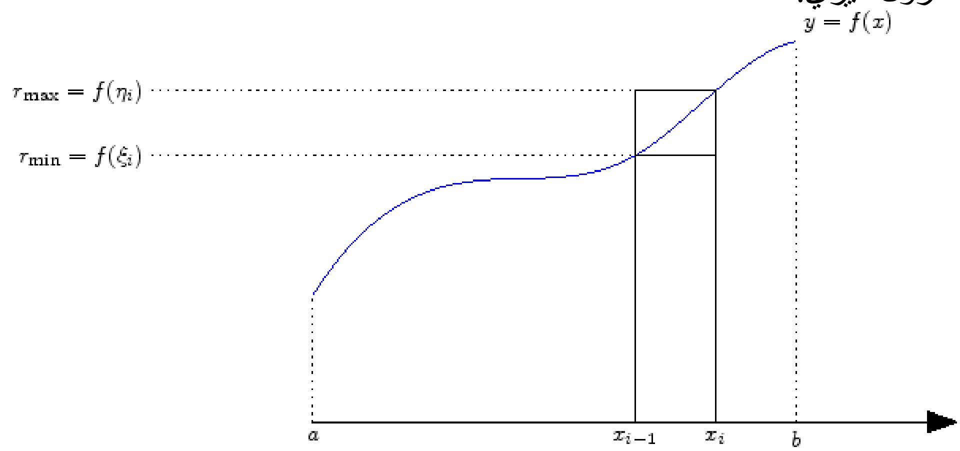
بدیلي کېدی شي د توتې پوښ باندې انتیګرال شي.

$$V = \pi c^2 (b - a) + 2\pi \int_c^d r \, h(r) \, dr \, ,$$

چیرته چې c همداسې d مینیمال همداسې ماکسیما وړانګه r او $h(r)$ په بدن کې
خوندي توتې پوښ ټول جګوالی دی د وړانګې r سره. دا واریانت له ټولو د همغږیز
وړانګې تابع f لپاره موخ وره ده.
لیکونکي: هیولیک، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړي فرمول د ښووني لپاره په څېره کي کښل شوی اپروکسیمیشن   یا نږدېوالی کارول کیږي.



یوه ټوټه کوني Δ یوه انټروال $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 \ldots n$, لپاره کېدی شي ډکی(حجم) د یوې توټي

له لاری د مینیمال وړانګي $f(\xi_i)$ سره او یوې توټي د ماکسیمال وړانګي $f(\eta_i)$ سره رابند شي. د ټول حجم V لپاره نو بیا باور لري

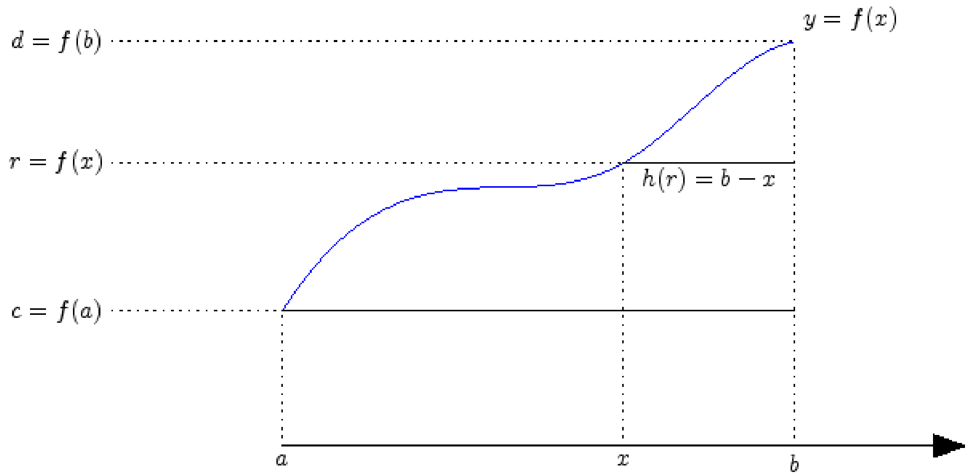
$$\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)^2 \Delta x_i \leq V \leq \pi \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)^2 \Delta x_i ,$$

د $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ سره. دواړه دباندني ترمونه د ريمن-جمعه ده، چې د انتیګرال ارزښت لور ته ځي، یعني باور لري

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

ددویم فرمول د ښووني لپاره لومړی نیول کیږي، چې f همغږیز جګېدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $dr = f'(x)\,dx$ ، $r = f(x)$ همداسې د $x = f^{-1}(r)$ سره لاس ته راځي

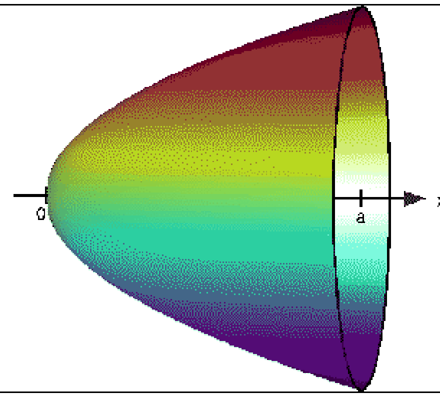
$$
\begin{aligned}
2\pi \int_{c=f(a)}^{d=f(b)} h(r) r \, dr &= \pi \int_a^b \underbrace{(b-x)}_{u} \underbrace{2 f(x) f'(x)}_{v'} \, dx \\
&= \pi \, (b-x) f(x)^2 \Big|_a^b + \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \\
&= \underbrace{-\pi (b-a) c^2}_{\text{innerer Zylinder}} + \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \, ,
\end{aligned}
$$

څه چې دويم فرمول په ګوته کوي.

د همغږيز ټيټپډونکي توابعو لپاره کېدی شي په ورته توګه مخ ته ولاړ شو. په ټوليز حالت کې دا د همغږيزوالي ورشو د ټوټه کوني له لارې لاس ته راځي

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

	دا څیره شوی پارابولویید د کږې یا منحني $y=\sqrt{x}$ د څرخون یا څرخېدو له لارې د x په محور څېره شوی .

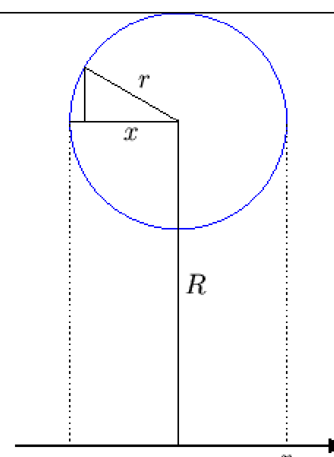
د څرخیدونکي بدن د څرخیدني قانون سره سم ډکی یا حجم دی

$$\pi\int_0^a(\sqrt{x})^2\,dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a=\frac{1}{2}\pi a^2 .$$

بدیلي د توتي پوښ بادي انتیګرلوني له لارې لاس ته راوړي

$$2\pi\int_0^{\sqrt{a}} r(a-r^2)dr=2\pi\left[-\frac{1}{4}(a-r^2)^2\right]_0^{\sqrt{a}}=\frac{1}{2}\pi a^2 .$$

لیکونکي: هیولیګ، هیوررنر

	یو توروس (د ګردی یا داېرې کړی (Torus دیوې ګردی دڅرخون څخه منځ ته راځي د وړانګي r سره په یوه محور د منځ ټکي څخه په R واټن.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډکی یا حجم د دوه څرخیدونکو بدنونو د کمښت څخه شمیرل کیږي

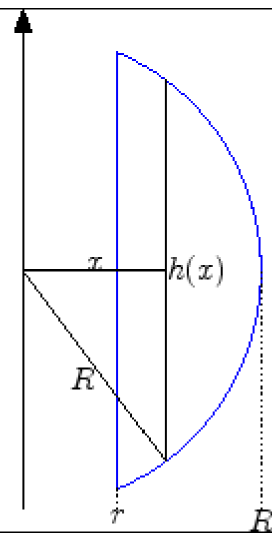
$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx - \pi \int_{-r}^{r} \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= 4\pi \int_{-r}^{r} R\sqrt{r^2 - x^2}\, dx .$$

د بدلون $dx = r \cos\varphi\, d\varphi$, $x = r \sin\varphi$ سره لاس ته راځي

$$V = 4\pi R r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\, r \cos\varphi\, d\varphi$$

$$= 4\pi R r^2 \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 R r^2 ,$$

	ځکه چې $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2} .$$ لکه چې څېره شوی یو له غونډاري د R په وړانګې په پراته محور د وړانګې r سره رابیله شوې توته ده.

د دې لپاره چې ډکې یا حجم شمېرو، د وړانګې $x, r \leq x \leq R$ سره په توته پوښ انتيګرال نیولکیږي . د $R = 5, r = 3$ لپاره د $h(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V = 2\pi \int_r^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx = 2\pi \left[-\frac{2}{3} \left(R^2 - x^2\right)^{3/2} \right]_r^R$$

$$= \frac{4}{3}\pi (25 - 9)^{3/2} = \frac{256}{3}\pi \,.$$

د يوې کږې يا منحني اوږدوالی Länge einer Kurve

د يوې کږې L اوږدوالی د ناپرېکېدونکي مشتقوړ پارامتريک کولو $t \mapsto p(t)$ سره، $a \le t \le b$ ، دی

$$\int_a^b |p'(t)|\, dt \,.$$

پۀ ځانګړې توګه د يوې کږې لپاره په xy -سطحه د پارامتريک انځورونې $p(t) = (x(t), y(t))$ سره باور لري

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt \,.$$

په ځانګړې توګه ديوه تابع $y = f(x)\,,\ x \in [c,d]$ ګراف لاندې اوږدوالی لري

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \,.$$

د $p(a)$ او $p(t)$ ترمنځ د کږو ټوټو اوږدوالی ،

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)|\, d\tau \,,$$

کيدی شي د کانونيکي کږې پارمتر په توګه وکارول شي. سړی داسې په نامه د کږې اوږدوالي پسې پارمتري کونه لاس ته راوړي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

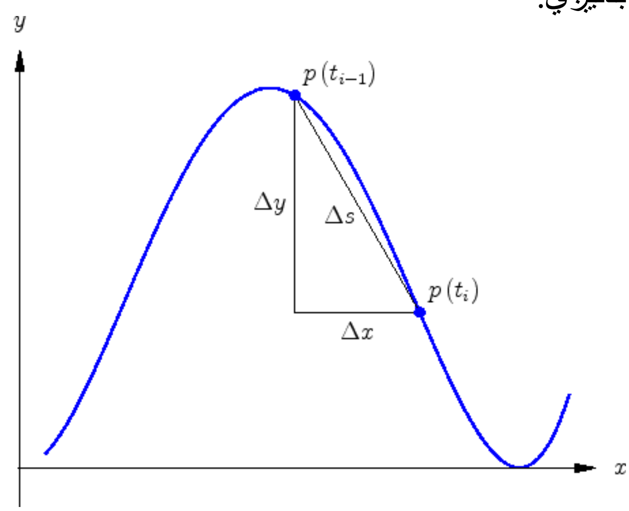
$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1\,.$$

د نورمي تانجنت کږې په بنسټ د کانونيکي پارامتري کونې لپاره باور لري

$$\int\limits_C f = \int\limits_0^L f(q(s))\, ds$$

د C د L اوږدوالي سره.
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د يوې مسطحې کږې د اوږدوالي شميرنې لپاره د پارامتر انټروال پيه ټوټو وېشل کيږي او يو برخه انټروال $[t_{i-1}, t_i]$ لپاره کږه د پاى ټکو د ترونکربنې له لارې ځاى بدليږي يا بدليږي.



د انټګرال د منځ ارزښت جملې سره بيا باور لري:

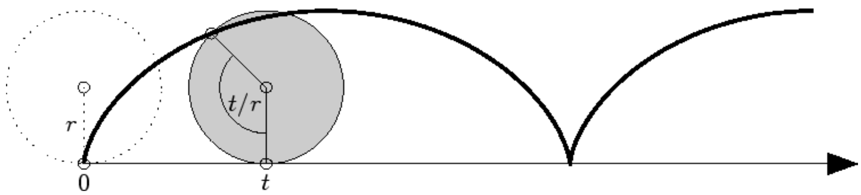
$$\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(p_1'(\xi_i))^2 + (p_2'(\eta_i))^2}\, \Delta t_i\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ سره . دا اخرنۍ ویینه یا افرده د ورکړ شوي انتیګرال د یمن- زیاتون یا –جمعې دی.
په ورته تګه د ډېرپراخېدونکي یا ډېربعدیز ې کرږې لپاره د مشتق نورم د انتیګرال په بنه راکوي.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

که د r وړانګې سره یوه ګردۍ یا داېره د په محور ګرځوو یا وخرخوو، نو ژي ټکی یو ځیکلویید تشریح کوي.



د سرچینې لپاره د پیل ټکي په حیث

$$\begin{aligned} x(t) &= t + r\cos(3\pi/2 - t/r) = t - r\sin(t/r) \\ y(t) &= r + r\sin(3\pi/2 - t/r) = r - r\cos(t/r) \end{aligned} ,$$

د $t \in [0, 2\pi r]$ سره ، د یوې ګرږې لیندې یو پارمتري کونه ده.
د لیندې اوږدوالی دی

$$L = \int_0^{2\pi r} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi r} \sqrt{(1-\cos(t/r))^2 + (\sin(t/r))^2}\, dt\,.$$

د بدلون $s = t/r$, $dt = r\,ds$ او کتمتوالي

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\,, \quad 1 - \cos(2\varphi) = 2\,\sin^2\varphi$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره لاس ته راځي

$$L = \quad r\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos(s))}\,ds = r\int_0^{2\pi} 2\sin(s/2)\,ds = 8\,r\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

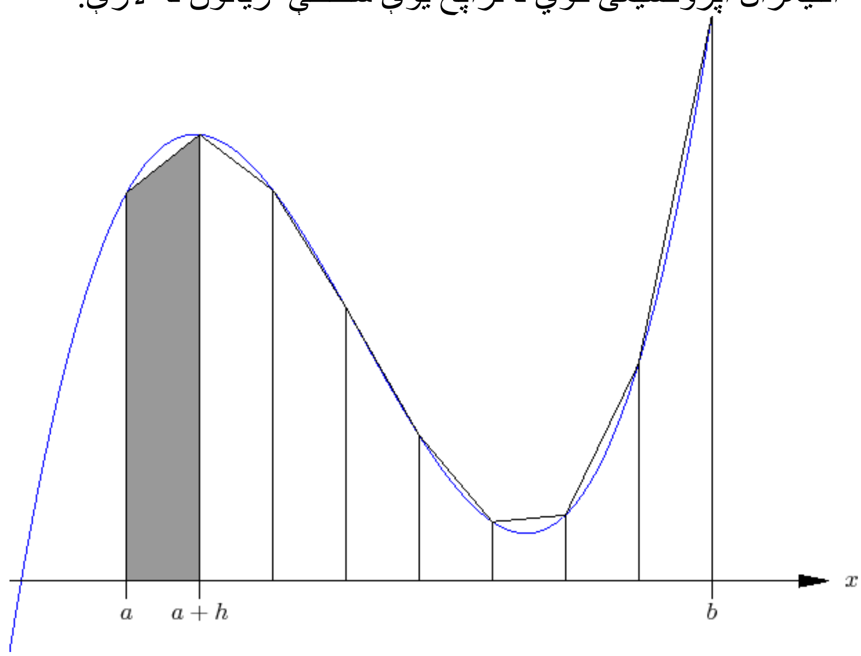
د ذوزنقي قانون **Trapez-Regel**

نږديوالی

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx s_h f =$$

$$= h(f(a)/2 + f(a+h) + \cdots + f(b-h) + f(b)/2)$$

انتيګرال اپروکسيمی کوي د تراپخ يوې سطحې زياتون له لارې.



د يوه دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ تابع د ناتيکاوي پاره باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_h f - \int_a^b f = \frac{b-a}{12} f''(r) h^2,$$

د $r \in [a,b]$ لپاره.

په ټيکه توګه ناټيکاوی د خويو يا هوارو توابعو لپاره ګاونډيز يا اسيمپټوټيکي وده لري

$$s_h f - \int_a^b f = c_1 (f'(b) - f'(a)) h^2 + c_2 (f'''(b) - f'''(a)) h^4 + \ldots$$

له f او h څخه خپلواکې ثابتې c_j سره. له دې څخه لاس ته راځي، چې د تراپچ قانون د $(b-a)$-پريوديکي توابعو لپاره خورا دقيق دی. ناټيکاوی ګړندی د صفر په لور ځي نسبت هر h-توان ته.
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

په يوه انتروال ناټيکاوی دی

$$\frac{h}{2}(f(0) + f(h)) - \int_0^h 1 \cdot f = \int_0^h (t - h/2) f'(t)\, dt.$$

بيا ټوټه انتيګرالونه او منځ ارزښت جملهې استعمال راکوي

$$-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h) f''(t)\, dt = \underbrace{-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h)\, dt}_{h^3/12}\; f''(r).$$

په ټوټه انتروال باندې د جمعې پسې سړی لاس ته راوړي

$$\frac{1}{12} h^3 \sum_{i=1}^{n} f''(r_i).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمعه کيدی شي د

$$n \min f'' \leq \sum f''(r_i) \leq n \max f''$$

له لارې اټکل شي. د ترمنځارزښت جملې پسې بالاخره لاس ته راځي

$$\sum f''(r_i) = nf''(r) = \frac{b-a}{h} f''(r) \,,$$

$r \in [a,b]$

د یوه سره.

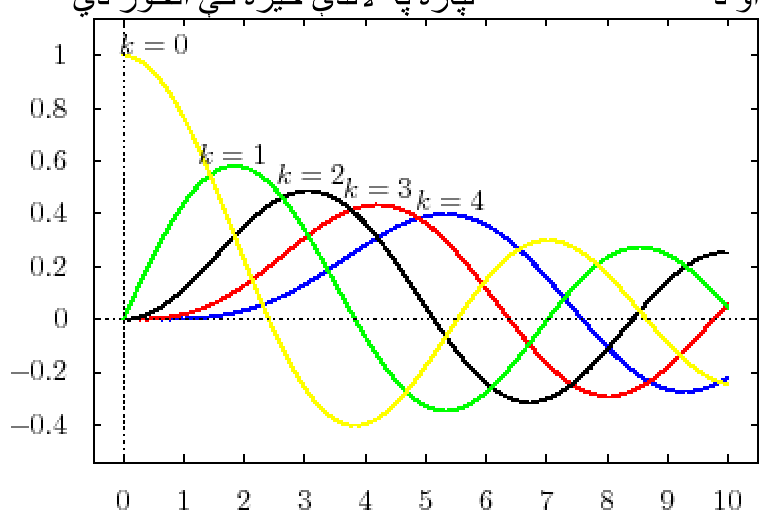
د ګاونډ یا مجانب ناټیکاوي ودې ښوونه اوړده ده. دا د باقي غړي په تل توته انتیګرالونه ولاړه ده او د ژی ترمونو په یوه مناسبه کارونه یا استعمال.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د بسل-تابعBessel-Funktionen $\mathcal{J}_k$ د تولګنیز k لپاره دا لاندې انتیګرال انځورونه لري

$$\mathcal{J}_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(kz - x\sin(z))}_{f(z)} \, dz$$

او د $k = 0, \ldots, 4$ لپاره په لاندې ځيره کې انځور دي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تراپخ قانو شمیرلو سره شړی کاروي، چې

$$\frac{1}{2}\left(f(a)+f(a+2\pi)\right)=f(a)$$

او دا چې f جوړه دی. که ټکي

$$z_i=-\pi+\frac{1+2i}{2}\frac{2\pi}{n},$$

وټاکو ، نو جمعه

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(z_i)=2\sum_{i=n/2}^{n-1} f(z_i)$$

دې جوړه شي.

لکه د $\mathcal{J}_1(2)$ لاندې نږدېونه یا اپرکسیمیشن د $n=4,8,\ldots 64$ ټکو سره ښایي، پولې ته تلنه فوقالعاده ګړندی ده.

n	
4	0.45464871341284084769800993295587
8	0.57655235602472460377030331810649
16	0.57672480775615774487465153090293
32	0.57672480775687338720244824226913
64	0.57672480775687338720244824226913

دا د ذوزنقي قانون جګ تیکاوی د خوی پریودیکي انتیګرال لپاره یوپیک دی او کېدی شي د ناتیکاوي د یوهه تیکې انځورونې ، د اویلر-ماکلورن-Euler-Maclaurinschen د جمعي فرمول مدلل کړای شي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس فرمول Gauß-Formel

د n –مې درجې یا نظم د ګاوس فرمول په نږدې بڼه یا ډول د یوه تابع انتیګرال ټاکي د انتیګرال د انټربولیشن پولینوم له لارې د n -مې درجې د لاګرانژ پولینومونو په صفرځایونو $x_1 < \cdots < x_n$ کې:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(x_i\right)$$

د w_i سره د لاګرانژپولینوم

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

په انتوال $[-1,1]$ باندې.

فرمول د $< 2n$ Grad درجې پولینوم لپاره ټیک دی او او د ټولو له مخه د تحلیلی توابعو لپاره خورا ټیک دی. ټول وزنونه w_i زیاتیز یا مثبت دي، او تکیه ځایونه x_i په انتګریشن انتروال $(-1,1)$ کې پراته دي. دا د ګاوس پارامتر تر 10 -م نظم پورې جدولي شوی او په لاندې جدول کې ورکړ شوی دی

n	x_i	w_i
2	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1
3	0 $\pm\frac{1}{5}\sqrt{15}$	$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$
4	$\pm\frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$ $\pm\frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{36}\sqrt{30}$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{36}\sqrt{30}$
5	0 $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245-14\sqrt{70}}$ $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245+14\sqrt{70}}$	$\frac{128}{225}$ $\frac{161}{450}+\frac{13}{900}\sqrt{70}$ $\frac{161}{450}-\frac{13}{900}\sqrt{70}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس پارامتر x' او w' د خوښي انتګريشنانتروال $[a,b]$ لپاره د کرښيز تراسفورمېشن له لارې لاس ته راځي:

$$x_k' = a + \frac{b-a}{2}(x_k+1)\,, \quad w_k' = \frac{b-a}{2}\,w_k\,.$$

لومړی ښايو، چې نږدې ټاکنه د $< n$ Grad درجې د پلوينوم f لپاره ټيک دی. دا د لاندې څخه لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_a^b p_k(x)\,dx\right) f(x_k) = \int_a^b \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p_k(x) f(x_k)}_{=q(x)}\ dx\,.$$

داچې p_k نسبت و ټکو x_k ته د لاګرانژ پولينومونه دي، q په دې ټکو کې و f ته انترپوليشنپولينوم دی او داسې له f سره همغږيز کيږي.

د ځانګړو ټکو ټاکلو له لارې کېدی شي حتی د $< 2n$ Grad درجې پولينوم f ټيک انتيګرال شي.

دې ته f د پولينومونو په مرسته داسې ليکو

$$f(x) = p(x)s(x) + r(x)$$

د n Grad درجې لژندر-پولينوم p او د. $< n$ Grad دجې پولينومونه r او s.

که $p(x_k) = 0$ په پام کې ونيول شي، نو لکه پورته لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_a^b p_k(x)\,dx\right)\left(p(x_k)s(x_k) + r(x_k)\right)$$

$$= \int_a^b \sum_{k=1}^{n} p_k(x) r(x_k)\,dx = \int_a^b r(x)\,dx\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له بلې خوا باور لري

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b (p(x)s(x) + r(x))\,dx \\ &= \int_a^b p(x)s(x)\,dx + \int_a^b r(x)\,dx \\ &= \int_a^b r(x)\,dx\,,\end{aligned}$$

ځکه چې p د $< n$ Grad درجې پولينوم ته اورتوګونال دی.
د وزن زاتيزوالی يا مثبتوالی د کتمتوالي څخه لاس ته راځي

$$w_k = \int p_k = \sum_i w_i\, p_k(x_i) = \sum_i w_i\, p_k(x_i)^2 = \int p_k^2\,.$$

د اخرنې ترمخ يا وړاندې مساوات د $p_k(x_i) = \delta_{k,i}$ له امله باور لري، او اخرنی، داچې p_k^2 $< 2n$ Gradدرجه لري، نو د ګاوس-فرمول له لارې ټيک انتيګرال کيدی شي.
د ګاوس-فرمول د روښانه ولو ته لاندې جدول د مختلفو انتيګراندونو يا انتيګرال کېدونکو نږدې ټاکل يا اپروکسيميشن ښايي.

n	$\int_1^1 e^{-x^2}\,dx$	$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$	$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\,dx$
1	2.000000	2.000000	0.968245
2	1.433062	1.848571	0.891006
3	1.498679	1.851976	0.879356
4	1.493334	1.851936	0.876417
5	1.493663	1.851937	0.875306

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرني انتيګرال کې ورو پولي ته تلنې دليل په $x = 1$ کې زينګولاريتي ده.

د ګاوس-فرمول فقط خويو يا هواروglatt (يو تابع خوی يا هوار تابع يو ماتماتيکي تابع دی، چې ناپرېکېدونکی او ناپای زيات مشتقوړ وي توابعو ته ډېر دقيق دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

ناڅرګند يا نا معلوم انتيګرال Uneigentliches Integral

د يو په يوه انتروال $[a, b)$ توته ډوله ناپرېکېدونکی تابع f لپاره کېدی شي د

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b-} \int_a^c f$$

له لارې د انتيګرال کليمه په ناپای انتروالونو ($b = \infty$) او نامحدودو انتيګراليدونکو($f(b) = \pm\infty$) وغزول شي.
په ورته توګه زينګولاريتي په لاندې يا په دواړو پولو مطالعه شي. په اخرني حالت کې بايد پوله ارزښت د پرلپسې $c \to a+$, $d \to b-$ د ټاکنو څخه خپلواک وي.

د يوه ناټاکلي انتيګرال د شتون لپاره پوره کېدونکي د f مطلق انتيګرالوړوالی دی، دا په دې معناچې

$$\int_c^d |f(x)| \leq$$ ثابت

د ټول برخه انتروالونو $[c, d] \subset (a, b)$ لپاره.

ليکونکي: اپپ، هيوليک

د ناټاکلي انتيګرال د شميرلو لپاره

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $b > 0$ لپاره ټاکي

$$\int_0^b e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^b = -e^{-b} + 1\,.$$

له دې سره سرې لاس ته راوړي

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+1\right) = 1\,.$$

که پوله ارزښت ساده شمېرل کېدونکی وي، نو سرې پسې ترلي ناټاکلې پولې کاروي، داپه دې معنا چې سرې ليکي

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

او دا په راوړل شوې بيلګه کې.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د ناټکلو انټيګرالونو

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^r}\,dx\,.$$

لپاره د بدلون $y = \ln(x)$, $dy = dx/x$
سره سرې لاس ته راوړي

$$\int_2^b \frac{1}{x(\ln(x))^r}\,dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{1}{y^r}\,dy = \begin{cases} \dfrac{(\ln(b))^{1-r} - (\ln(2))^{1-r}}{1-r}\,, & r \neq 1 \\ \ln(\ln(b)) - \ln(\ln(2))\,, & r = 1 \end{cases}.$$

په دې پسې د $b \to \infty$ لپاره پوله ارزښت ټيک هلته شتون لي، که $r > 1$ باور ولري. په دې حالت کې دی

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)^r}\,dx = -\frac{(\ln(2))^{1-r}}{1-r}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ناټاکلي انتيګرال

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx\,.$$

لپاره انتيګرالېدونکی په پورته انتيګرال پولي $x = \frac{\pi}{2}$ سيګولار دی. سړی د $0 < b < \frac{\pi}{2}$ لپاره لاس ته راوړي

$$\int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \left[-2\sqrt{\cos(x)}\right]_0^b = -2\sqrt{\cos(b)} + 2\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \left(-2\sqrt{\cos(b)} + 2\right) = 2\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ناټاکلي انتيګرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx\,.$$

لپاره

$$\arctan(x) + \ln(1+x^2)$$

د انتيګراليدونکو بنسټ- يا ساده تابع دی. ناټيکه ايښوونه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\arctan(x) + \ln(1+x^2)\right]_{-b}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(2\arctan(b)\right) = \pi$$

د ناټاکلي انتيګرال لپاره راکوي. د تعريف سره سم د ناټاکلي انتيګرال پورته او کښته پولي بايد يو له بل خپلواک و څېړل شي. داچې نه پوله ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{c\to-\infty}\int_c^0 \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to-\infty}\left(-\arctan(c)-\ln(1+c^2)\right)$$

او نه پوله ارزښت

$$\lim_{d\to\infty}\int_0^d \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx \qquad = \lim_{d\to\infty}\left(\arctan(d)+\ln(1+d^2)\right)$$

شتون لري، دا ناټاکلی انټیګرال

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+2x}{1+x^2}\,dx$$

هم شتون نه لري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د نامعلوم انټیګرال لپاره د پرتلې قضیه
Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale

که f د g لپاره یو مایورانت وي، داپه دې معناچې
$$|f(x)| \le |g(x)| \qquad a < x < b$$

باور لري، نو د g د مطلق انټیګرالوړوالي څخه د انټیګرال

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

شتون لاس ته راځي

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

فقط د پوله ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f = \lim_{c\to b-} \int_a^c f$$

شتون ترخيږني لاندې نيول كيږي. په نورو حالتونو كې په ورته توګه مخ ته ځو.
تابع

$$r(c) = \int_a^c |f|$$

برابرغږېزه جګېدونکې ده او پورته لور ته د $\int_a^b |g|$ له لارې رابنده يا محدود ده. په دې پسې د r د $c \to b-$ لپاره پولې ته تلونکی دی او له دې امله $\int_a^b |f|$ شتون لري.
تابع

$$s(c) = \int_a^c (f + |f|)$$

همم برابرغږېزه جګېدونکې ده او د $2\int_a^b |g|$ له لارې رابنده يا محدود. پسې s هم د $c \to b-$ لپاره پولې ته تلونکی دیاو له دې امله $\int_a^b (f + |f|)$ شتون لری.
له دې څخه د

$$\int_a^b f = \int_a^b (f + |f|) - \int_a^b |f| .$$

شتون لاس ته راځي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د پرتلع تلبع لپاره زيات وخت $f(x) = x^r$ كارول كيږي.
د $0 < a < b < \infty$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b x^r\,dx = \begin{cases} \dfrac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}, & r \neq -1 \\ \ln(b)-\ln(a), & r = -1\,. \end{cases}$$

دا ترم د $b \to \infty$ لپاره تیک هلته پولې ته تلونکی دی، که $r < -1$ باور ولري، دا په دې معناچې انتیګرال

$$\int_1^\infty x^r\,dx$$

شتون ولري تیک د $r < -1$ لپاره.

د $a \to 0+$ لپاره تیک هلته پوله ارزښا لاس ته راځي، که $r > -1$ باور ولري، دا په دې معنا چې انتیګرال

$$\int_0^1 x^r\,dx$$

تیک د $r > -1$ لپاره شتون ولري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د دې لپاره چې د نامعلوم انتیګرال شتون د

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

په حیث وښایو ، سرې دا انتیګرال په دوه برخو توټه کوي.

دا چې $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ دی، نو لاندې انتیګرال شتون لري

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په انټروال $[1,\infty]$ د نامعلوم انتيګرال لپاره د ټوټه انتيګرالونې له لارې لاس ته راځي

$$\int_1^b \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\,.$$

د $b \to \infty$ لپاره لومړی ترم د $\cos(1)$ په لور ځي او دويم د پرتلې قضيې له مخې پولې ته ځي، ځکه چې

$$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \le \left|\frac{1}{x^2}\right|\,.$$

سره له دې چې د تابع کوم ورکړ شوی لومړی – يا بنسټيز تابع نه لري، کېدی شي د نامعلوم انتيګرال ارزښت وټاکي .

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليک

ګاما تابع يا - فنکشن **Gamma-Funktion**

د

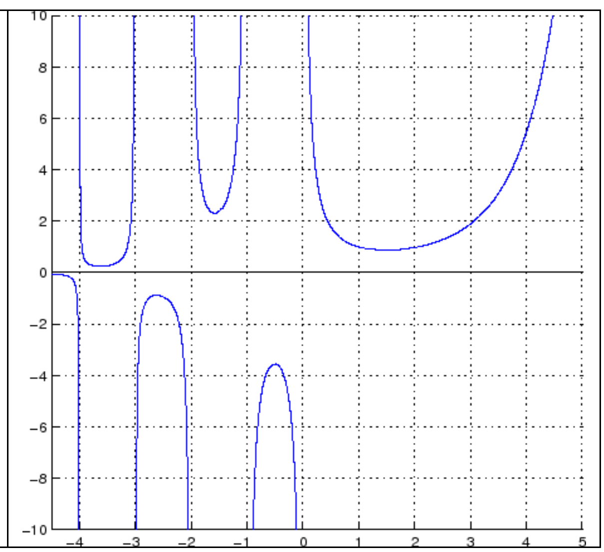
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt,$$

$$x \in (0,\infty)\,,$$

له ارې تعريف شوی ګاما تابع فنکشنل مساوات پوره کوي

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,.$$

په ځانګړې توګه $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$. دی



(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشنل مساواتو په مرسته کېدی شي ګاما-تابع د کميز پروت يا x محور لپاره هم تعريف کړی شي. لکه د جوړ شوي تابع ګراف څخه چې ليدل کيږي، دا ساده قطبونه د $x = 0, -1, \ldots$ لپاره لري.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

انتيګرال

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

فقط د $0 < x < 1$ لپاره پرابلم جوړوي. په دې حالت کې انتيګرال د $t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1}$ له امله د پرتلې قضيې له مخې پولې ته تلونکی دی.

انتيګرال

$$\int_1^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

هم د پرتلې قضيې په بنسټ شتون لري او اټکلونه $t^{x-1} e^{-t} \leq t^{-2}$

د پوره لوي t لپاره بسيا کوي.
د ټوټه انتيګرال سره لاس ته راځي

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_{t=0}^\infty + \int_0^\infty x t^{x-1} e^{-t}\, dt$$
$$= 0 + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt = x\Gamma(x)\,,$$

او له دې سره د پوره اېندکشن په مرسته او $\Gamma(1) = 1$ د $n \in \mathbb{N}$ لپاره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Gamma(n+1) = n!\,.$$

د ګاما تابع د ګاوس تعریف

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

د تابع یوه روښانه ونه په ټول $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$ اجازه زاکوي.
.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د کوشي اصلي ارزښت **Cauchyscher Hauptwert**

د یوه په $x = c \in (a,b)$ کې زیګولار تابع f لپاره سړی

$$\mathrm{CHW}\int_a^b f = \lim_{h\to 0+}\left(\int_a^{c-h} f + \int_{c+h}^b f\right)$$

د کوشي اصلي ارزښت په څېر تعریفوي

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د ټیپیکي بېلګې په څېر د کوشي اصلې ارزښت

$$\mathrm{CHW}\int_{-a}^{a} x^k\,dx\,, \quad k\in\mathbb{Z}\,,$$

شمېرل کیږي.

د $k=-1$ لپاره دی

$$\int_{-a}^{-h}\frac{dx}{x} + \int_h^a \frac{dx}{x} = \ln|h| - \ln|a| + \ln|a| - \ln|h| = 0\,.$$

د انتیګرالیدونکي د انتی سیمتري په دلیل د CHW ورکیږي په یو سیمتري انتروال لپاره.

د $k \neq -1$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-a}^{-h} x^k\,dx + \int_h^a x^k\,dx = \frac{1}{k+1}\left((-h)^{k+1} - (-a)^{k+1} + a^{k+1} - h^{k+1}\right)$$

د ناجوړه يا طاق k لپاره دا ا فاده يا ويېنه او له دې سره د کوشي اصلي ارزښت صفر دی. د زياتيز يا مثبت جوړه(حفت) k لپاره دا د $2/(k+1)a^{k+1}$ په لور هڅيږي.
په ساده توګه د کوشي اصلي ارزښت د رګولار انتيګرال سره سره خوري يا يوعږيز کيږي. د $k = -2, -4, \ldots$ لپاره برعکس يا د دې په خلاف هم انتيګرال او هم د کوشي اصلي ارزښت شتون نه لري.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د انتيګرال لاندې مشتقول Differenzieren unter dem Integral

انتيګرال $\int_a^b f(x,t)\,dx$ د ناپرېکېدونکې تابع f لپاره د t ناپرېکېدونکی تابع دی.
که f_t ناپرېکېدونکی وي، ن و باور لري

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b f_t(x,t)\,dx\,.$$

ليکونکي: هيوليګ،کنيش

د دې لپاره چې د

$$g(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$$

ناپرېکېدنه په ټکي $t_0 \in (c,d)$ کې وښايو، له دې څخه کار اخلو، چې په f ولاړګوډيز $[a,b] \times [c,d]$ کې برابرډوله ناپرېکېدونکی دی. هر $\varepsilon > 0$ ته له دې امله يو $\delta > 0$ شتون لري داسې چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f(x,t)-f(x,t_0)|<\varepsilon$$

باور لري د ټولو x او $|t-t_0|<\delta$ لپاره. د دې t لپاره نو دی

$$|g(t)-g(t_0)|\leq\int_a^b|f(x,t)-f(x,t_0)|\,dx<\varepsilon(b-a)\,.$$

له دې سره g ناپرېکیدونکی دی.

که f_t ناپرېکېدونکی وي، نو لاس ته راځي

$$\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=\int_a^b\frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}\,dx=$$

$$=\int_a^b\frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t+s)\,ds\,dx\,,$$

د کوم سره چې

$|f_t(x,t+s)-f_t(x,t)|<\varepsilon$ دی د ټولو $h<\delta\,.$ لپاره.

له دې امله کېدی شي د دفرنسل وېش کمښت و

$$\int_a^b f_t(x,t)\,dx=\int_a^b\frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t)\;ds\,dx$$

ته د

$$(b-a)\frac{1}{h}\,h\,\varepsilon$$

له لارې اټکل شي او د h سره د صفر په لور هڅيږي.

لیکونکي: بوسسلر، هیولیک،کنیش

بسل- توابعBessel-Funktionen دا لاندې د انتیګرال انځورونه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin t-nt)\,dt,\quad n=0,1,\ldots\ .$$

دا دا لاندې د دفرنځيال مساوات پوره کوي

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0\,.$$

دا کېدی شي د انتيګرا لاندې د دفرنځيال سره وازمايل شي. لومړی دی

$$J_n'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\underbrace{\sin(x\sin t-nt)}_{v}\underbrace{\sin t}_{u'}\,dt$$

$$\frac{n}{\pi}\int_0^{\pi}\cos t\cos(x\sin t-nt)\,dt-\frac{x}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 t\cos(x\sin t-nt)\,dt$$

$$J_n''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin t-nt)\sin^2 t\,dt$$

که $J_n'(x)$, $J_n(x)$ او $J_n''(x)$ د دفرنځيال مساوات په کېن لور کښيښول شي او له π سره ضرب شي، له کوم سره چې $\xi = x\sin t-nt$ کيښول شي، نو لاس ته راځي

Se

$$-x^2\int_0^{\pi}\cos\xi\sin^2 t\,dt-x^2\int_0^{\pi}\cos^2 t\cos\xi\,dt+nx\int_0^{\pi}\cos t\cos\xi\,dt+x^2\int_0^{\pi}\cos\xi\,dt-n^2\int_0^{\pi}\cos\xi\,dt$$

$$= \cdot\, nx\int_0^{\pi}\cos t\cos\xi\,dt+x^2\int_0^{\pi}\cos\xi\,dt-n^2\int_0^{\pi}\cos\xi\,dt$$

$$= n\int_0^{\pi}(x\cos t-n)\cos(x\sin t-nt)\,dt$$

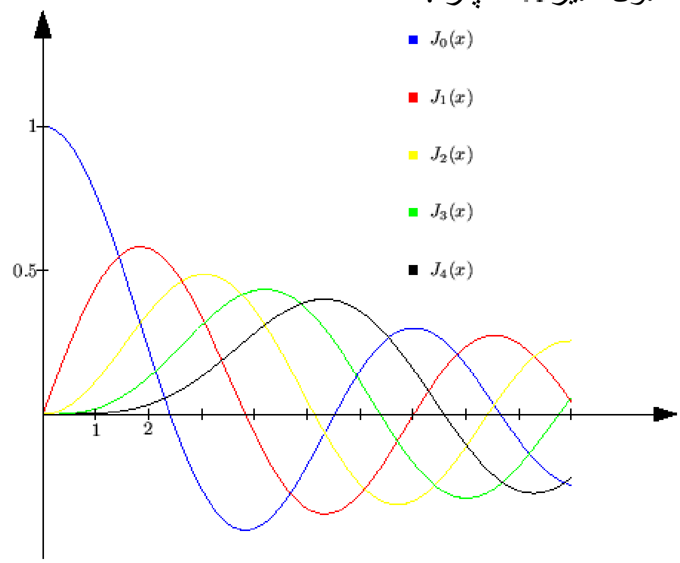
(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$n \sin(x \sin t - nt)|_0^\pi = 0$$

=

د ټول ګنيز n لپاره.



څېره 5 لومړني د بسل توابع بنايي .
ليکونکي: بوسسلر ، هيوليګ،کنيش

لايبنيخ-قانونLeibniz-Regel

د ناپرېکېدونکو مشتقوړ توابعو a, b او f لپاره دی

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x,t)dx + f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t)$$

ليکونکي: بوسسلر ، هيوليګ،کنيش

که انتيګرال له $g(t)$ سره وښوول شي او ځا په ځا کړو

$$V(t) = (a(t), b(t), t)\,, \quad U(c,d,e) = \int_c^d f(x,e)\;dx\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $g = U \circ V$ دی او فرمول د ځنځیري قانون له لارې لاس ته راځي:

$$g'(t) = U'(V(t))\,V'(t), \quad V' = (a', b', 1)\,.$$

له دې سره د U ټوټه مشتقونه دا لاندې دي

$$U_c(c,d,e) = -f(c,e),$$

$$U_d(c,d,e) = f(d,e), \quad U_e(c,d,e) = \int_c^d f_e(x,e)\,dx\,,$$

او د $g'(t)$ لپاره په افاده یا ویینه کې اینوولو سره غوښتنه راکوي.
لیکونکي: بوسسلر، هیولیګ،کنیش

د لایینیځ فرمول سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dt}\int_0^{\sqrt{t}} e^{x^2/t}\,dx = \int_0^{\sqrt{t}} -\frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\,dx + e\frac{d}{dt}\sqrt{t}$$

$$= -\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

بیا مشتقول یې راکوي

$$\frac{d}{dt}\left(-\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}\right)$$

$$= \int_0^{\sqrt{t}} 2\frac{x^2}{t^3}e^{x^2/t} + \frac{x^4}{t^4}e^{x^2/t}\,dx - \frac{e}{2t^{3/2}} - \frac{e}{4t^{3/2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2tx^2 + x^4}{t^4} e^{x^2/t}\, dx - \frac{3e}{4t^{3/2}}$$

بديلي لومړی کېدی شي بدلون $x = \sqrt{t}y$, $dx = \sqrt{t}\,dy$ وليکي او دا انتيګرال لاس ته راوړي

$$g(t) = \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy$$

د کره يا ځای په ځای پولو سره . نو کېدی شي

$$g'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2}\, dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t}\, dx$$

او

$$g''(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2}\, dy = -\int_0^1 \frac{1}{4t^{3/2}} e^{y^2}\, dy$$

$$= -\int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{4t^2} e^{x^2/t}\, dx$$

په ساده توګه وشميرل شي.

د لومړي مشتق لپاره د فرمول مساوات روښانه نه دي، خو کېدی شي اسان د ټوټه انتيګرالوني سره و ازمايل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t}\, dx + \frac{e}{2\sqrt{t}} = \quad -\frac{1}{2t}\int_0^{\sqrt{t}} \underbrace{x}_{v} \underbrace{\frac{2x}{t} e^{x^2/t}}_{u'}\, dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

$$-\frac{1}{2t}\left[x e^{x^2/t}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{t}} + \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t}\, dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

$$= \quad \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t}\, dx$$

د دويم برابرون مشتق کېدی شي په ورته توګه و ښوول شي.
ليکونکي: هيوليګ،کنيش

په t پسې د انتيګرال د مشتق

$$\int_{t^2}^{e^t} \frac{\cos(tx)}{x}\, dx$$

لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
&\int_{t^2}^{e^t} -\sin(tx)\, dx + \frac{\cos(te^t)}{e^t}\frac{d}{dt}e^t - \frac{\cos(t^3)}{t^2}\frac{d}{dt}t^2 \\
&= \frac{1}{t}\cos(te^t) - \frac{1}{t}\cos(t^3) + \cos(te^t) - \frac{2}{t}\cos(t^3) \\
&= \left(\frac{1}{t}+1\right)\cos(te^t) - \frac{3}{t}\cos(t^3)
\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ،کنيش

د دفرنشل مساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(t) - \lambda u(t) = f(t)$$

یو زره یا کوچنی حل u_p کېدی شي دهوموجېن مساوات حل $\exp(\lambda t)$ د سوپر پوزېشن له لارې و کتل شي:

$$u_p(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)\, ds\,.$$

د لایبنیخ فرمول په بنسټ دی

$$u_p'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s)\, ds = \int_0^t \lambda \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s)\, ds + f(t)\frac{d}{dt}t$$

$$= \lambda \int_0^t \lambda e^{\lambda(t-s)} f(s)\, ds + f(t)$$

په دفرنشل مساوات کې د $u_p(t)$ او $u_p'(t)$ د اینوولو له لارې کېدی شي حل تصدیق شي.
لیکونکي: هیولیگ،کنیش

د نامعلومو انتیگرالونو مشتقول
Differenzieren uneigentlicher Integrale

که توابع f او f_t ناپرېکېدونکې وي او د $t \in (c,d)$ لپاره باور ولري

$$|f(x,t)| \le \psi(x), \qquad \int_0^\infty \psi < \infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f_t(x,t)| \le \varphi(x), \qquad \int_0^\infty \varphi < \infty,$$

نو کیدی شي د انتیګرال د نخښې لاندې مشتق ونیول شي:

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty f(x,t)\,dx = \int_0^\infty f_t(x,t)\,dx\,, \quad c < t < d.$$

په ورته توګه وېناوې د محدودو انتیګرالېدونکو سره د نامعلومو انتیګرالونو لپاره باور لري.
لیکونکي: هیولیک،کنیش

د دې لپاره چې وښایو، چې

$$\int_0^\infty \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h} - f_t(x,t)\,dx$$

د $h \to 0$ لپاره د 0 په لور هڅیږي، انتیګرال توټه کیږي:

$$\int_0^\infty \ldots = \int_0^b \ldots + \int_b^\infty \ldots$$

دویمه زیاتېدونکې یا د جمعې غړی د نیونې له مخې د

$$\left|\int_b^\infty \frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t+s)\,ds - f_t(x,t)\,dx\right| \le \int \frac{1}{h}\,h\varphi(x) + \varphi(x)\,dx = 2\int_b^\infty \varphi(x)\,dx$$

له لارې اټکل شي. دا انتیګرال له $< \varepsilon$ کیږي. د پوره لویې b لپاره. د دې b لپاره لومړی زیاتېدونکی $< \varepsilon$ دی د پوره کوچنې h لپاره.، ځکه چې د پای انتیګریشن انټروال لپاره د انتیګرال لاندې مشتق کېدی شي.

لیکونکي: هیولیک،کنیش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاما تابع مشتقونه

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\, dx, \quad t > 0\,,$$

دي

$$\Gamma^{(k)}(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} (\ln x)^k\, dx\,.$$

مشتقيدنه په حق ده، ځکه چې انتيګرالېدونکي $f(x,t) = e^{-x} x^{t-1} (\ln x)^k$ يو
برابرډوله مايورانت لري:

$$|f(x,t)| \le e^{-x}\, x^{r-1}\, x^k \le c e^{-x/2}, \quad x \ge 1$$

او

$$|f(x,t)| \le x^{1/r-1} |\ln x|^k \le c x^{1/(2r)-1}\,, \quad x \le 1$$

د $t \in [1/r, r]$ لپاره. د دې لپاره وکارول شو، چې

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0, \quad \lim_{x\to 0+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$$

د ټولو $\alpha, \beta > 0$ لپاره
ليکونکي: بوسسلر، هيوليګ،کنيش

دا د پارامتر په واک کې انتيګرال

$$g(t) = \int_0^\infty \sin(xt)\, \frac{dx}{x}$$

مطلق پولې ته تلونکی نه دی، له دې امله برابر ډوله مايورانت هم نه لري.
د لته مو د t پسې د انتيګرال لاندې يو فورمال دفرنځيشن يوه تضاد ته لاربښودوي.
فورمال مشتق

$$g'(t) = \int_0^\infty \cos(xt)\, dx$$

يو پولې ته نه تلونکی انتيګرال دی. له بلې خوا يو واريابل بدلون , $y = xt$
$dy = t\, dx$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

راکوي

$$g(t) = \int_0^\infty \sin(y)\,\frac{dy}{y} = \frac{\pi}{2}\,.$$

مشتق په دي لاس ته راوړنه کېمټ صفر دی.
ليکونکي: بوسسلر، هيوليګ،کنيش

د ۲۰۱۱ ز ک د مارچ لسم
برى د لوى ښتن سره دى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

<u>1987 Vienna (Austria):</u>

<u>دويم:</u>

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

<u>2000 Bonn (Germany):</u>

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګتې – او کتې د کتې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

<u>2003 Bonn (Germany):</u>

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج ځخه ژباړل شوي دي.

١ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

٣ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ١

٧ – اناليزې ٢

٨ – کرښيز الجبر

٩ - د شميرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل اناليز

١٢ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

١٣ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

١۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما لیکنې

onn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲-   داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته   تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویبونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې څنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library