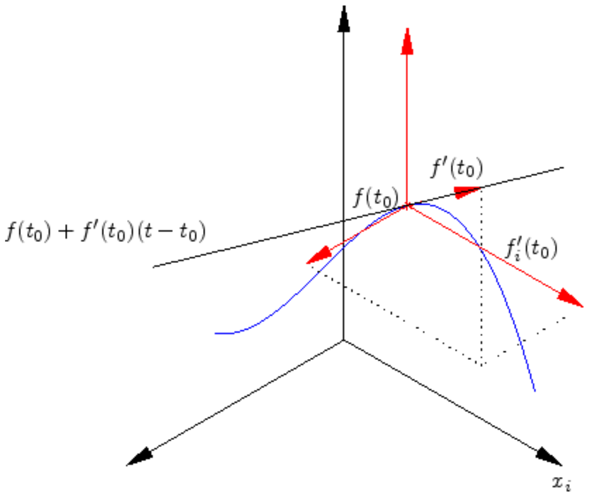
انالیز ۱ Analysis 1

د پوهنتون لپاره لکچرنوټونه

د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیز

یا انالیز دوه



لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتون د شمیرپوهنې یا ریاضي څانګه

د مات[illegible] انلاین څخه یا [illegible]توتګا[illegible]ت [illegible]هنتون [illegible] نه

Smakhan1946gmail.com

ژباړی: ډ اکتر ماخان (میرزي) شینواری

Ketabton.com

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لوی څښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلې او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې په لار د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

د کتاب نوم: د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیزې

لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتو د ریاضي څا نګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه

ژباړی: ډ اکتر ماخان میرِي شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د چاپ لړي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ژباړي مننه

د دې ليکنې مل نورې خپروني د شتوتګارت د پوهنتون د شميرپوهني د څانګې د لکچرونو لړۍ چاپ باندې پيل کيږي

د هر څه له مخه د هغو ليکونکو پروفيسرانو څخه زياته مننه، چې د ليکنو څخه يې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د ليکنو د ژباړې په هيڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې يوازې په يوه د پوهني توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ويونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفيسرانو له خوا په پوهنيزه اړخ کې- زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس- سره مرسته وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

بلواک يا تابع يا فنکشن ۱

کربنيزې توابع ۳

څلورى- يا مربع فنکشنونه يا – توابع ۴

همغږيز توابع ۶

برعکس – يا په څټ فنکشن ۹

د فنکشنونو يا توابعو سره شميرنه ۱۱

ننوتي او وتلي - يا مقعر او محدبې توابع ۱۲
پولينوم ۱۵

د پولينومونو سره انترپوليشن ۲۱

د لاګرانج-پولينوم ۲۳

راشنل (کسرى يا نسبتي) توابع ۲۵
کمپلکس راشنل- يا کسري توابع ۲۷
په ټوټه مات ټوټه کونه يا تجزيه کونه ۲۸
د حقيقي ټوټه کسر ټوټه ونه يا تجزيه ۳۳
د حقيقي ټوټه کسر ټوټه ونه يا تجزيه ۳۹
د اويلر-مويورې فرمول ۴۰
تانجنت او کوتاجنت ۴۱
د ارکوس توابع ۴۲
هارمونيک لړځيدنې يا رپيدنې ۴۳
اکسپوننشل توابع ۴۹

ګټه يا ربح ۵۰

ټوليز توان توابع او لوګاريتم ۵۶

د ودې قانون ۵۷

د توان او لوګاريتم لپاره شميرقوانين ۵۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

های پرابول تابع ۵۹
د يوې پرلپسې پوله ارزښت ۶۲
د کوشي قضيه ۶۶
همغږيز ه پولې ته تلنه ۶۸
د پرلپسې پولې ته تلنه ۷۰
نارېښتونی پوله ارزښت ۷۱
پوله اينفريور او پوله سوپريور ۷۲
پرتله کوونکې قضيه ۷۳
د يوې پرلپسې پنډغالي ټکی ۷۵
ورهولست- مودل ۷۶
ريکورژن ۷۶
د پيPi رکورزيو اپروکسيميشن ۷۸
د پرلپسيو يا ترادفونو ځانګړي ... ۸۲
د يوې لړۍ پرلپسې ۸۴
هندسي يا ځمککچيزې لړۍ ۸۶
هارموني لړۍ ۸۸
مطلق پولې ته تلونکې لړۍ ۸۹
مايورانت او مينورانت ۹۰
د وېش قضيه ۹۱
د ريښې قضيه ۹۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لایبنیڅ قضیه ۹۴

د لړیو ځانګړي پوله ارزښتونه ۹۸

ناپرېکیدنه یا متمادیت ۹۹

یو اړخیز ناپرېکیدنوالی یا متمادیت ۱۰۲

د ناپرېکیدونکو توابعو لپاره ... ۱۰۴
منځ ارزښت جمله ۱۰۷
د دوه سطحو – یا برخو تلنلار ۱۰۹
د ناپرېکیدونکي تابع افرطیت ۱۱۰

برابرډوله ناپرېکیدنوالی ۱۱۱

په ټکي ډول پولې ته تلنه برابرارزښته ... ۱۱۲

د توابعو لړی پولې ته تلنه ۱۱۴

توابعو لړی ته مایورانت یا پورته پولې ۱۱۶

د اکسپوننشل تابع ضرب انځورونه ۱۱۷
د اکسپوننشال تابع لړی انځورونه ۱۱۹

مشتق(رابیلیدنه)

د بنسټتوابعو مشتق یا رابیلیدنه ۱۲۴

د مشتق یارابیلیدنې کرښزوالی ۱۲۷

د ضرب قانون ۱۲۷

د وېش قانون یا لار ۱۲۹

ځنځیری لار یا – قانون ۱۳۰

ایمپلیځیت مشتق نیول ۱۳۲

د لایبنیڅ قاعده یا لار ۱۳۶

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاريتمي مشتق يا – رابيليدنه	۱۴۱
د رولې جمله	۱۴۳
منځ ارزښت قضيه	۱۴۴
تولېزه (شوې) منځ ارزښت جمله	۱۴۵
لانداو-سيمبول	۱۴۷
د لو، پيتال قاعده يا لار	۱۴۸
کرښيز اپروکسميشن (ورنږدېوالی)	۱۵۰
د ناټيکاوي وده	۱۵۱
د نيوټن تلنلار يا – قانون	۱۵۳
د تيلور پولينوم	۱۵۷
حقيقي د تيلور لړۍ	۱۶۱
اکسپوننشل تابع	۱۶۳
د اويلر فرمول	۱۶۵
د لوګاريتم تابع	۱۶۶
بينوميال لړۍ	۱۶۷
د تيلور –لړۍ مشتق او انتيګرال	۱۶۸
د تيلور-لړۍ ضرب	۱۷۰
د تيلور-لړۍ وېش	۱۷۲
د راشنل توابعو تيلور-وديزېنه	۱۷۴
د يوې تيلور – لړۍ	۱۷۵
د معکوس تابع د تيولور وديزيينه	۱۷۷
د تيلور ځانګړې لړۍ	۱۷۸
د پاد نږدې ارزښت شميرنه	۱۷۹

(c) ketabton.com: The Digital Library

اکسترېما(افراطيت) ۱۸۱

د اکسترېم – يا افرطي ازښتونو ازماېښت ۱۸۵

پولينوم ۱۸۶

اسيمپټوتې(يو په بل نه پرېوتونکې يا ګاونډېتوب) ۱۹۰

د راشنل- يا کسر توابعو ګاونډ يا اسيمپټوتې ۱۹۱
د کږو يا منحنيو خبرې يا بحث ۱۹۲
ريمن-انتيګرال ۱۹۸

د انتيګرال خويونه ۲۰۱

د انتيګرالشميرنې منځ ارزښت جمله ۲۰۱

بنسټيز – يا ساده توابع ۲۰۳

د بنسټيزو توابعو لومړنې توابع ۲۰۷

ټوټه- يا پارشل انتيګرالونه ۲۰۷

دلتا - تابع ۲۱۲

د متحولو – يا اووښتونو بدلون ۲۱۳

د متحولو – يا اووښتونو بدلون ۲۱۹

ساده راشنل انتيګرالونه د زياتواره قطب سره ۲۲۲

د راشنلتوابعو انيګرالونه ۲۲۵

د ساين او کوساين د ضرب انتيګرالونه ۲۲۷

د کمپلکس تريګونومتيکې توابعو انتيګرالونه ۲۲۸

تريګونومتريکې بدلونونه ۲۳۰

د ساين او کوساين راشنل توابع ۲۳۳

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

د څرخيدونو بدنونو ډکی یا حجم ۲۳۶
د يوې کږې یا منحني اوږدوالی ۲۴۱
د ذوزنقې قانون **۲۴۴**
د ګاوس فرمول ۲۴۸
ناڅرګند یا نا معلوم انتيګرال ۲۵۱
د نامعلوم انتيګرال لپاره د پرتلې قضيه ۲۵۵
ګاما تابع یا – فنکشن ۲۵۸
د کوشي اصلي ارزښت ۲۵۹
د انتيګرال لاندې مشتقول ۲۶۰
لایبنیځ-قانون ۲۶۳
د نامعلومو انتيګرالونو مشتقول ۲۶۸
د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې،
چاپيدونکې او چاپ ته چمتو ليکنې ۲۷۱

(c) ketabton.com: The Digital Library

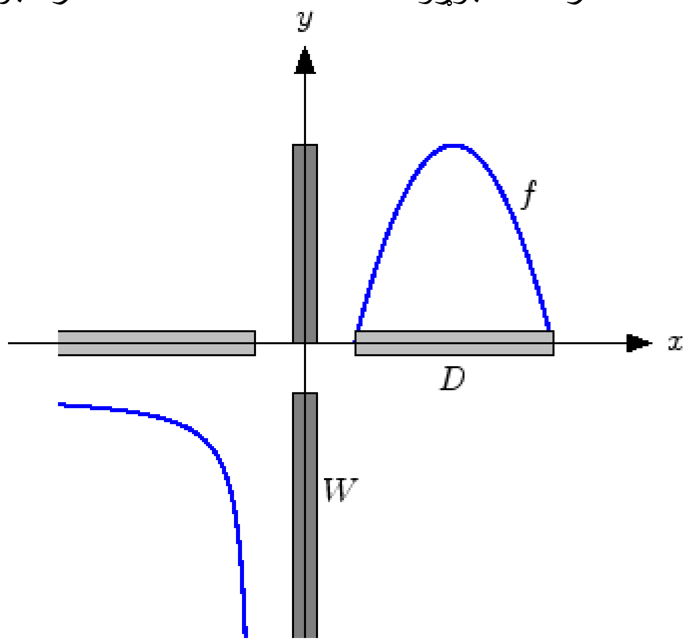
بلواک یا تابع (ټیک یې: فنکشن) Funktion

یو فنکشن یا بلواک یا تابع

$$f : D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)$$

د تعریف ورشو $D \subseteq \mathbb{R}$ هرتوکی x د ارزښت ډېری $W \subseteq \mathbb{R}$ څخه د یوه ارزښت $f(x)$ سره تنظیموي.

د f ګراف له جوړو (x,y) د $y = f(x)$ سره جوړ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د ځيري ځخه چي ليدلکيږي، تعريفورشو (رنه خړه يا پرته) او ارزښت ورشو (تياره خړه يا ولاړه) په x -محور همداسې په y -محور د ګراف پريوتل دي.

ليکونکي: هيوليګ، هورنر، کنش

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x) = \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{x}-1}$$

تعريف ورشو او ارزښت ورشو وټاکو، لومړی دې د په ساده –يا لومړنيو توابعو رامنځ ته کيدونکې بنديزونه يا محدودوالى په پام کې ونيول شي. د تعريف ورشو د توکي لوګاريتم بايد زياتيز يا مثبت وي او د ارزښت ورشو ناکميز يا نامنفي وي:

$3-x>0$ او $x \geq 0$.

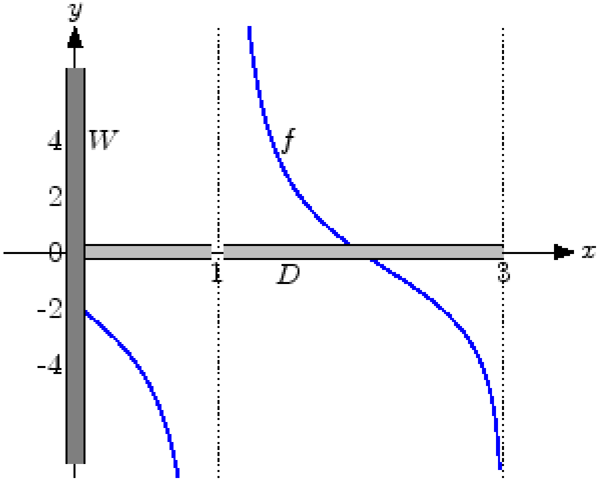
په همدې توګه بايد ماتلاندې يا مخرج صفر نه وي، دا په دې معنا چې $x \neq 1$.

په ټوليزه توګه راکوي:

$$\mathrm{D} = [0,3)\backslash\{1\} = [0,1) \cup (1,3).$$

.

د f ارزښت ډېرى د ګراف رسموو سره روښانه شي



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې f د $x \in (1,3)$ لپاره د $-\infty$ او $+\infty$ ترمنځ ټول ارزښتونه نیسي، $W = \mathbb{R}$ باور لري.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر،کنش)

لاندې جدول د ځو بنسټیزو توابعو تعریفورشو او ارزښت ورشو ښايي.

$f(x)$	D	W
$1/x$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\ln x$	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{x \,:\, x = (2k+1)\pi/2,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$

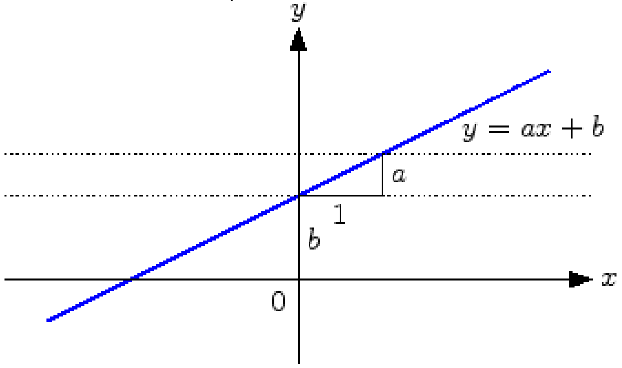
(لیکونکي: هیولیګ، هیورنر،کنش)

کرښیز فنکشنونه یا توابع

د یوه کرښیز فنکشن یا تابع

$$f(x) = ax + b$$

ګراف یوه کرښه ده د a جګیدنې او y -محورغوځې(محورقاطع) b سره .



(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

د دې لپاره بديلي انځورونه د ټکي-جګيدنې – بڼه ده

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = a$$

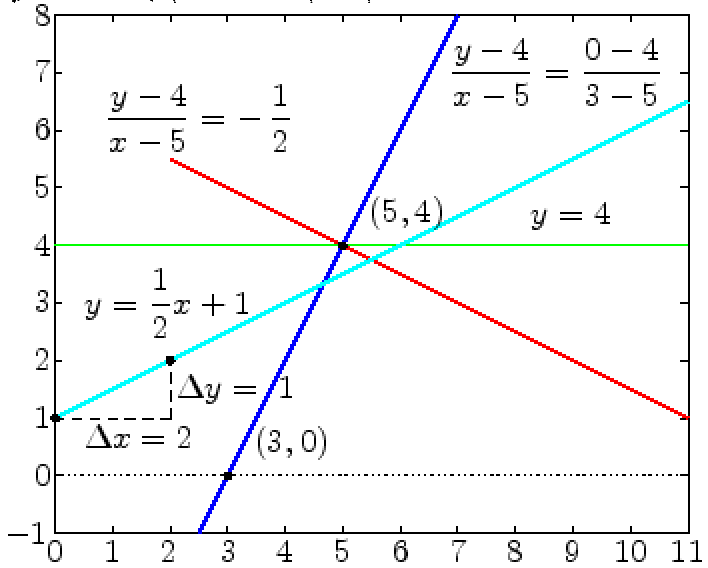
او د دوه-ټکو- بڼه

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

چيرته چې (x_0, y_0) او (x_1, y_1) په کرښه پراته ټکي دي.

(ليکونکي: هيوليک، هيورنر)

ځيره د کرښيزو توابعو بيلې بيلې انځورونې په کوته کوي:



ليکونکي: هيوليک، هيورنر

خلورۍ- يا مربع فنکشنونه يا - توابع

د يوه مربع تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

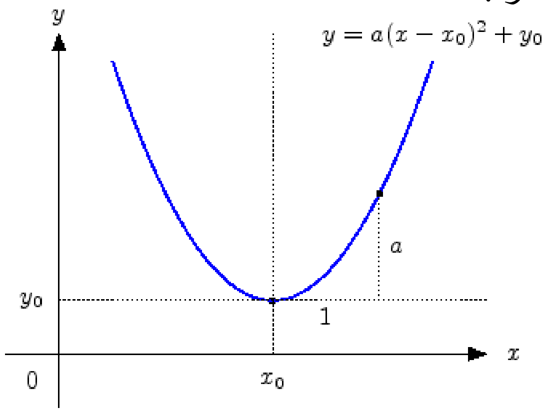
كراف د لاندې بڼې يو پارابول دی

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

د ككرۍ- يا رأسټكي

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c\right).$$

سره.



پای

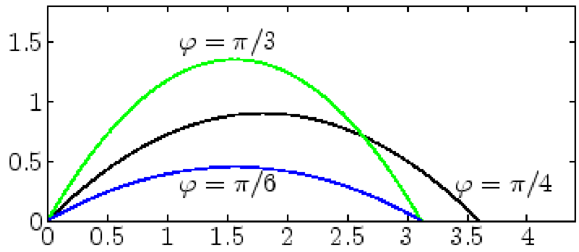
- كه يو تن د يوه كونج φ لاندې په يوه v چټكتيا و توغول شي، د الوتنې لار دا لاندې پارابول

$$y = x\tan\varphi - \frac{g}{2v^2\cos^2\varphi}x^2$$

راكوي ، چيرته چې g د ځمكې بيره ده يا - تعجيل دی.

لاندې ځيره: مايېل توغول يا غورځول د $v = 6$ سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



مساوات د برابرېدوله خوزښت په x - او y -کمپوننتونو د بیلوني یا ټوټه کوني(که غواړې: تجزیې) څخه لاس ته راځي ، د v پیل چټکتیا سره او د ازاده غوزوني د خوزښت ته پام کونې له لارې:

$$x(t) = vt\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v\cos\varphi}$$

$$y(t) = vt\sin\varphi - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow y(x) =$$

$$= \frac{vx\sin\varphi}{v\cos\varphi} - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2\varphi} = x\left(\tan\varphi - \frac{gx}{2v^2\cos^2\varphi}\right).$$

د غورځوني واټن دی

$$x = \frac{2v^2\cos^2\varphi}{g}\tan\varphi = \frac{v^2}{g}\sin(2\varphi).$$

دا د $\varphi = \pi/4 \mathrel{\widehat{=}} 45°$ لپاره ماکسیمال دی.
لیکونکي: هیولیک، هیورنر،کنش

همغږیزې توابع Monotone Funktion

(c) ketabton.com: The Digital Library

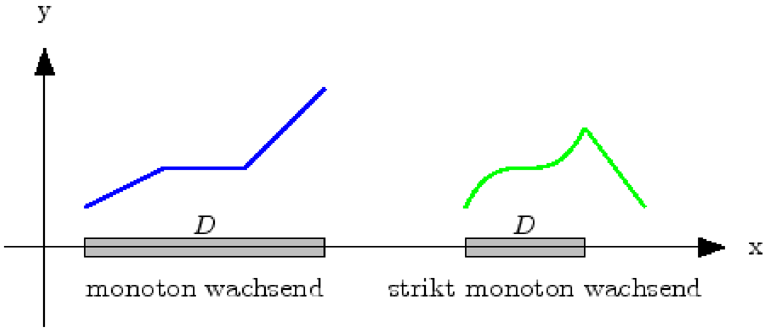
يو تابع f په يوه انټروال D (کره) همغږيز جګيدونکی دی، که وی

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \overset{(<)}{\leq} f(x_2), \quad x_k \in D,$$

همداسې که f ټوټه ډوله ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی، که وي

$$f'(x) \overset{(>)}{\geq} 0$$

د ټولو $x \in D$ لپاره تر ځانله يا جدا ټکي بورې



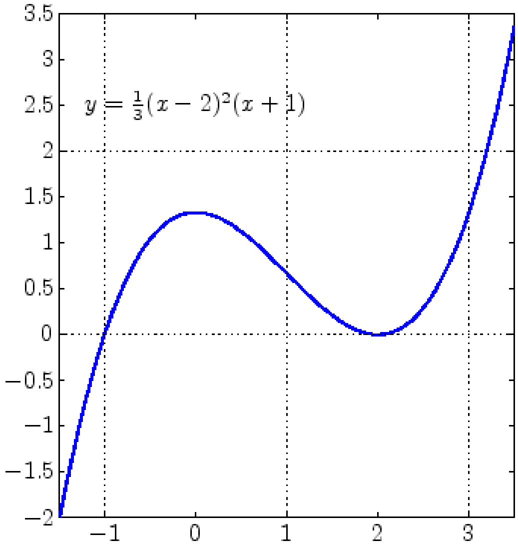
همغږيز جګيدونکي　　　　کره همغږيز جګيدونکي

په ورته توګه (کره) همغږيز ټيټيدونکی تعريفيږي.

يکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش

تابع $x \mapsto f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2(x+1)$ په $x=0$ ځای کي يو جګ- يا ماکسيمال ټکی ($f'(0)=0, f''(0)<0$) لري او په $x=2$ ځای ټيټ-يامينيمال ټکی ($f'(2)=0, f''(2)>0$) لري . د $x \leq 0$ او $x \geq 2$ لپاره تابع کره مونوتونجګېدونکي نخ ده او د $0 \leq x \leq 2$ لپاره کره مونوتون ټيټيدونکي نه ده.

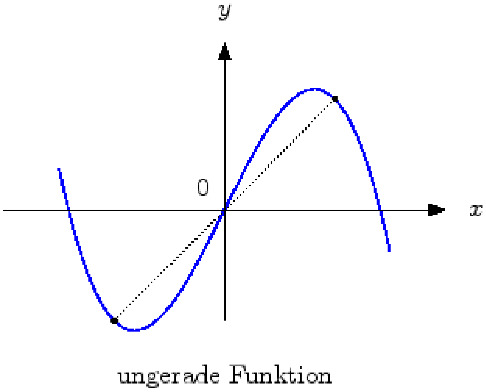
(c) ketabton.com: The Digital Library



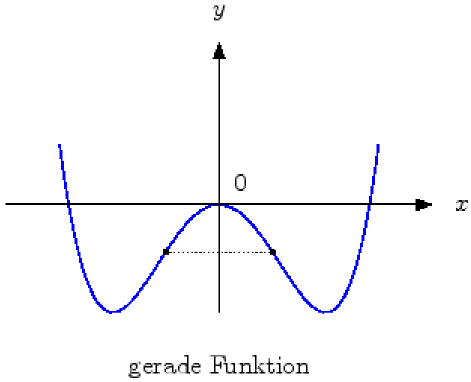
يکونکي: هيوليک، هيورنر،کنش

جوړه او ناجوړه – يا جفت او طاق توابع

يو تابع f جوړه دی، که $f(x) = f(-x)$ وي، دا په دې معنا چې که گراف د y - محور سره سيومتريک وي. يو ناجوړه يا طاق تابع $f(x) = -f(-x)$ دی، او گراف سرچيني سره ټکی سيومتريک دی.



ناجوړه يا طاق تابع



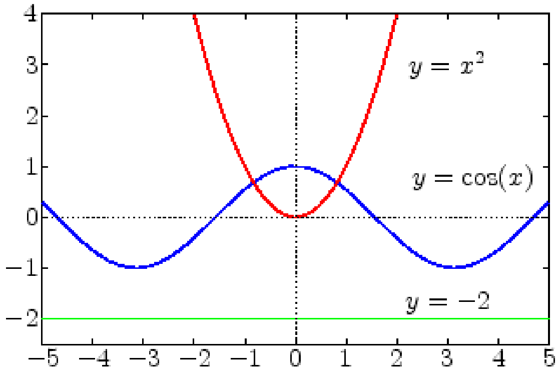
جوړه يا جفت تابع

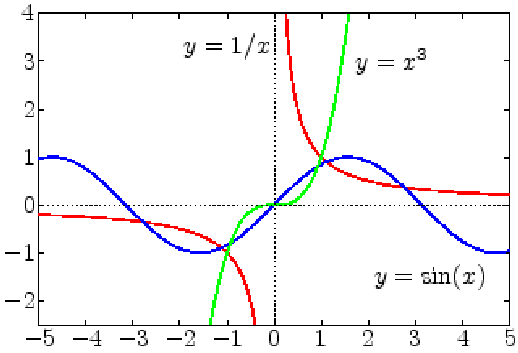
د دوه جوړه توابعو ضرب جوړه تابع دی. برعکس د يوه ناجوړه يا طاق تابع ضرب د يوه جوړه تابع سره ناجوړه دی. د زياتون يا جمعي او کمښت يا تفريق جوړولو سره د تابع تيپ يا ډول ساتلی پاتيږي.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاندې توابع يو کيڼ لور ته يو څو جوړه (جفت) او ښي لور ته يو څو ناجوړه (طاق) توابع ښايي.





د مناسب ترکيب جوړولو سره سرې نورې بيلګې لاس ته رواړي. نو توابع

$$f(x) = x^2 \cos x - x^3 \sin x, \qquad g(x) = -2 + \frac{1}{x^2}$$

جوړه دي او

$$h(x) = f(x) \sin x - g(x) x^3$$

ناجوړه دي.
پاي.

برعکس – يا په څټ فنکشن - تابعUmkehrfunktion

د يوه اينجکتيو (په کې -) تابع $f : D \to W$ د تعريفورشو D او ارزښت ورشو $W \subseteq \mathbb{R}$ سره د

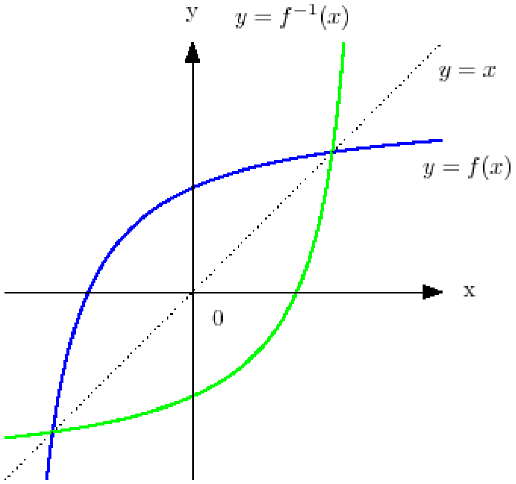
$$f^{-1} : W \to D \subseteq \mathbb{R},\ x \mapsto f^{-1}(x)$$

له لارې تعريف دی. له دې سره لاندې باور لري

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

د برعکس توابعو تعريف ورشو د f ارزښت ورشو ده. د هغه ګراف $y = f^{-1}(x)$ د f د ګراف په لومړي کونجنيمی $(y = x)$ هنداره شوې څېره ده:

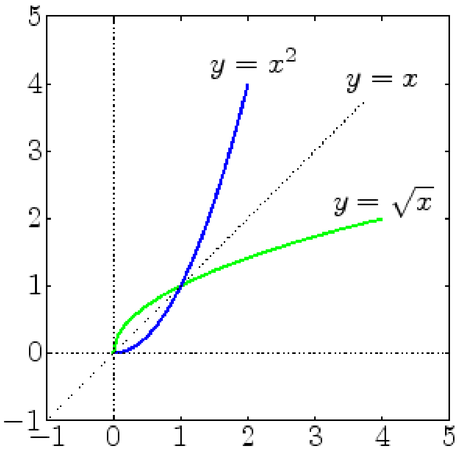
(c) ketabton.com: The Digital Library

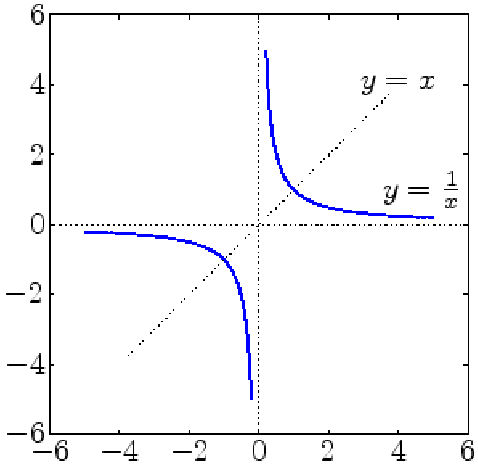


کیدی شي لیکندود $f^{-1}(x)$ مو په ساده توګه د معکوس ارزښت $f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$ سره بدلولو ته لار ښود کړي. په ځانګړې توګه ، که د تابع x ارزښت ونه لیکل شي، دا اړیکې دې باید روښانه وي، چې موخه مو څه ده.

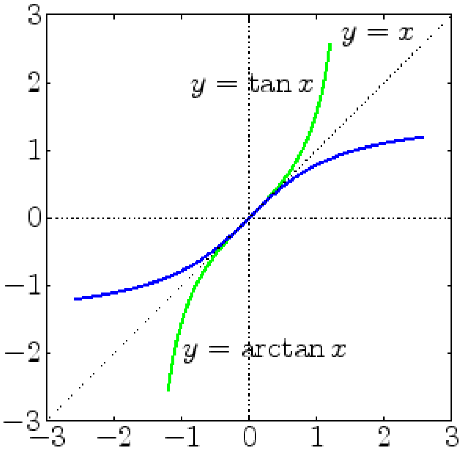
پای.

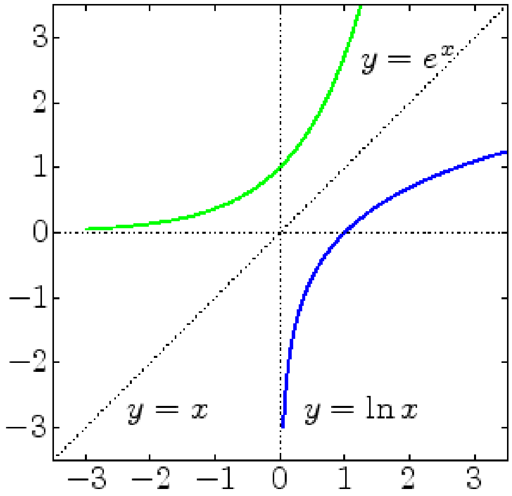
لاندې څيرې د یو څو بیلګو برعکس - یا په څټ فنکشن یا تابع ښايي.





(c) ketabton.com: The Digital Library





په لاندې جدول کې هر اړونده تعریف ورشو وې ورکړ شوې دي:

f	D	f^{-1}	D
x^2	$\mathbb{R}$	$\sqrt{x}$	$[0,\infty)$
e^x	$\mathbb{R}$	$\ln(x)$	$(0,\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$\tan x$	$\mathbb{R}\setminus\{x\ :\ x=(2z+1)\pi/2\ ,z\in\mathbb{Z}\}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$

د فنکشنونو یا توابعو سره شمیرنه Rechnen mit Funktionen

د توابعو کربنیز ترکیب تکي دوله تعریف شوی دی، دا په دې معنا چې په توابعو د اړونده عملیو له لارې:

$$(rf+sg)(x)=rf(x)+sg(x).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه ضرب fg او وېش f/g . په وېرش کې باید g د صفر سره برابر نه وي..
بالاخره
$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
د دوه توابعو یو په بل پسې راوستل یا ځنځیرونه ښایي.
پای.

د بیلګې
$$f(x) = x^2 - 4, \qquad g(x) = x + 2$$
لپاره مختلفې ترړنې راکوي

$$(f + 2g)(x) = x^2 + 2x$$
$$(fg)(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = x - 2, \qquad x \neq -2$$

په وېش کې تعریفتشځای $x = -2$ له منځه تلونکی یا د جګیدو وړ دی،

ځکه چې صورت یا ماتباندې $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ هم په $x = -2$ کې یو صفرځای لري.

د f او g یو په بل پسې ترړنه یا ځنځیرونه راکوي

$$(f \circ g)(x) = (x+2)^2 + 4$$
$$(g \circ f)(x) = x^2 - 2,$$

نو ترړنه یا عملیه $\circ$ کموتاتیو یا بدلوړ نه ده.

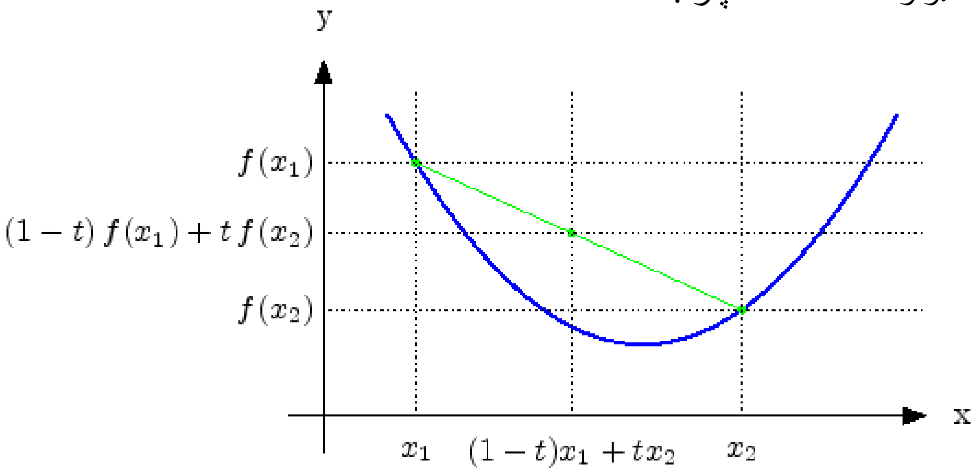
(c) ketabton.com: The Digital Library

ننوتي او وتلي - يا مقعر او محدبې توابع

يو تابع په يوه انټروال D کې(کره) ننوتی دی، که هر ټوټه وونې يا سيکانت د ګراف پورته لور ته پروت وي، دا په دې معناچې

$$f((1-t)\,x_1+tx_2) \overset{(<)}{\leq} (1-t)\,f(x_1)+t\,f(x_2)\,, \quad t\in(0,1)$$

د ټولو $x_i \in D$ لپاره.



که f دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ وي، نو (کره) ننوتنه د ټولو $x \in D$ لپاره د

$$f''(x) \overset{(>)}{\geq} 0$$

سره تر هغه ځانله ټکي پورې ورته يا برابر ارزښته ده.

د ننوتو توابعو زياتون يا جمعه ننوتې ده. ترنې يا عمليې $/, \cdot, -$ همداسې يو په بل پسې راوړنه يا ځنځيرونه $\circ$ په ټوليزه توګه ننوتوالی نه ساتي. بالاخره هر ننوتی تابع ناپرېکېدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته توګه وتلی تابع هم تعریف کیږي. د وتلي تابع لپاره ټوټه وونی یا سیکانت د ګراف کښته لور ته پروت دی، دا په دې معنا چې د x - محور باندې هنداره شوی $-f$ تابع وتلی دی.

پای.

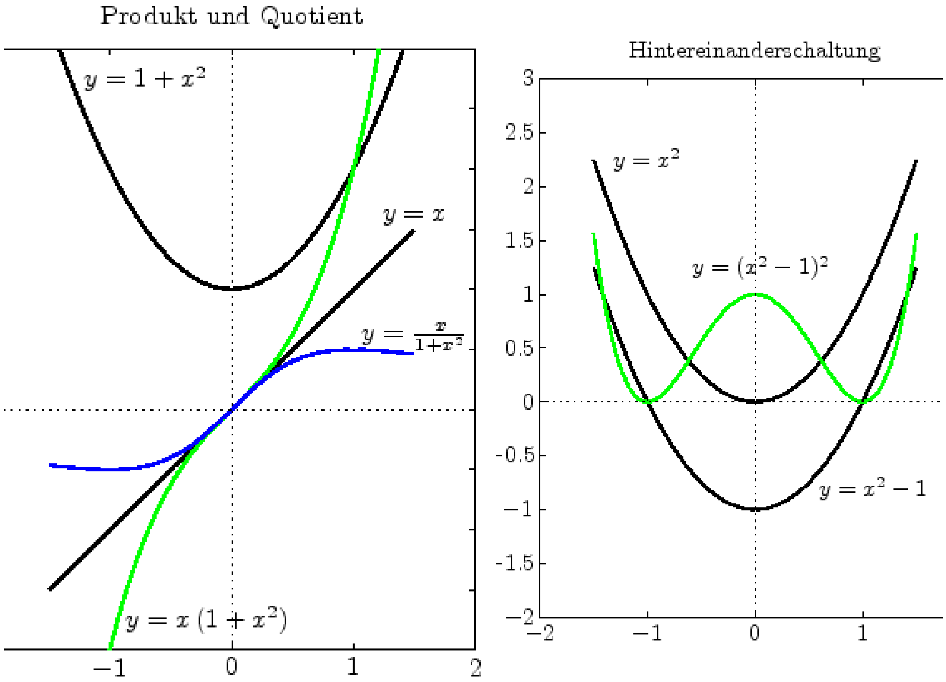
د دوه ننوتو فنکشنونو یا توابعو جمعه یا زیاتون د تعریف څخه ترلی لاس ته راځي:

$$
\begin{aligned}
&(f+g)((1-t)x_1+tx_2) \\
&\quad= \quad f((1-t)x_1+tx_2)+g((1-t)x_1+tx_2) \\
&\quad\le \; (1-t)\,f(x_1)+t\,f(x_2)+(1-t)\,g(x_1)+t\,g(x_2) \\
&\quad= \; (1-t)(f+g)(x_1)+t(f+g)(x_2),
\end{aligned}
$$

د کوم سره چې د نابرابرون ننوتوالی د f او g څخه کار اخستل کیږي.
نوري ترنې یا عملیې په ټولیزه توګه ننوتوالی نه ساتي، لکه چې لاندې بیلګې به یې وشایي.

یو په بل پسې ترنه — ضرب او ویش

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دې لپاره چې په يوه ټکي $c < a < x < b$ کې د تابع ناپرېکدنوالی وښايو، ټاکو نو دی .

$$x = ta + (1-t)b$$

$$a = sx + (1-s)c$$

د $0 < s,t < 1$ سره. داچې ننوتی دی، نو باور لري

$$f(x) - f(a) \leq (1-t)(f(b) - f(a))$$

همداسې

$$f(x) - f(a) \geq \left(\frac{1-s}{s}\right)(f(a) - f(c)),$$

د $f(a) \leq sf(x) + (1-s)f(c)$ له امله.

د $a \to x$ لپاره s او t د 1 په لور هځيږي، او له دې سره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0.$$

د $x < a$ لپاره ورته دلیل راوړل کیږي.

پولینوم Polynom

د n درجې یو پولینوم p په لاندې بڼه لیکل کیږي

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

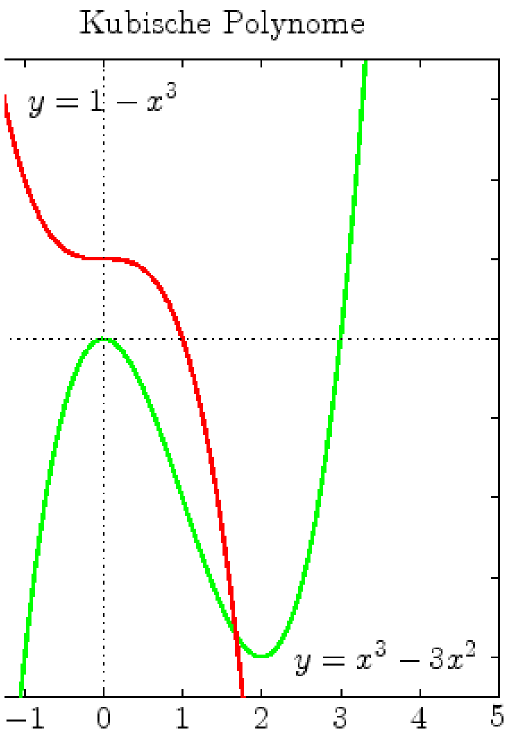
د $a_n \neq 0$ سره.

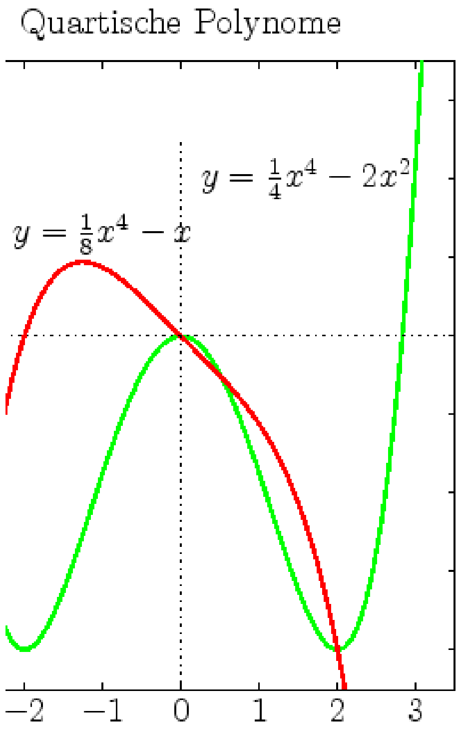
اووښتوني یا متحولې x او ضریب یا ځلوونی a_k کیدی شي حقیقي – همداسې کمپلکس ګڼونه یا عددونه وي. په اړونده توګه د حقیقي همداسې د کمپلکس پولینوم څخه غږیږو.
لیکونکیة: هیورنر او هیولیګ

لاندې ځیرې مکعب ډوله ($n = 3$) او کوارتیک ډوله ($n = 4$) پولینومونه د څرنګوالي له لورې مختلف تابع ګرافونو سره ښایي.

کوارتیک پولینومونه مکعب پولینومونه

(c) ketabton.com: The Digital Library





Polynomdivision پولينوموېش

پولينومونو p او q ته د $n = \text{Grad}\, p \leq \text{Grad}\, q = m$ سره يواځني پولينومونه f او r شتون لري د

$$p = fq + r, \quad \text{Grad}\, f = n - m, \quad \text{Grad}\, r < m.$$

سره.

دا تونه ونه کيدی شي د وېش له لارې د باتې يا باقی سره وتاکل شي.

په ځانګي توګه د p د صفرځای t لپاره لاس ته راځي چې $p(x) = f(x)(x - t)$ دی د $\text{Grad}\, f = n - 1$ سره.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د q سره د p وېش ځخه لرو

$$\underbrace{a_n x^n + \cdots}_{p(x)} = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \underbrace{(b_m x^m + \cdots)}_{q(x)} + p_{n-1}(x)$$

د يوه پاتې يا باقي $p_{n-1}(x) = a'_{n-1}x^{n-1} + \cdots$ سره.

که $m \leq n-1$ وي کېدی شي بيا ووېشل شي:

$$p_{n-1}(x) = \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} q(x) + p_{n-2}(x)\,.$$

پروسه پرې کيږي، که د پاتې پولينوم درجه له m کوچنۍ وي، دا په دې معناچې وروسته د $r = p_{n-(n-m+1)}\,.$ سره.

د تل بيا ضرب له لارې لاس ته راځي

$$f(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \frac{a'_{n-1}}{b_m} x^{n-1-m} + \cdots\,.$$

که t د p صفرځای وي، نو باور لري

$$0 = p(t) = f(t)(t-t) + r(t) = r(t)$$

او له دې سره $r(x) = 0$ ، ځکه چې Grad $r < 1$ دی.

د پولينوم وېش د ليکنيز وېش سره ورته مخ ته تلی شي.

د بيلګې په توګه د $p(x) = 9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2$

او $q(x) = 3x^2 + 2x + 1$ لپاره لاس ته راځي

$$(\,9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2\,) : (3x^2 + 2x + 1) =$$
$$= 3x^3 + 2x^2 + x + \frac{r(x)}{q(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\begin{array}{r} -(9x^5 + 6x^4 + 3x^3) \\ \hline 6x^4 + 7x^3 + 4x^2 \\ -(6x^4 + 4x^3 + 2x^2) \\ \hline 3x^3 + 2x^2 + 4x \\ -(3x^3 + 2x^2 + x) \\ \hline 3x + 2 = r(x) \end{array}$$

نو دی

$$\underbrace{9x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 4x^2 + 4x + 2}_{p(x)} = \underbrace{(3x^3 + 2x^2 + x)}_{f(x)}\underbrace{(3x^2 + 2x + 1)}_{q(x)} + \underbrace{(3x + 2)}_{r(x)}.$$

د یوه پولینوم صفرځایونه او فاکتوري کول یا په ضریبونو ټوټه کول

یو د n درجې پولینوم p د څووالي یا تکرار سره ټیک z_k کمپلکس صفرځایونه لري او له دې سره کېدی شي په ورته کربنیزو ضریبونو یا فاکتورونو

$$p(z) = c(z - z_1)\cdots(z - z_n)$$

ولیکل شي د ثابتې c سره.

که p حقیقی یا قبیل وي، نو کمپلکس صفرځایونه په کنجوګیری جوړو $x_k \pm \mathrm{i}y_k$ رامنځ ته کیږي.

یو حقیقي په ضریبونو لیکل یا فاکتوره کول کېدی شي د کربنیزو فاکتورونو ترڅنګ د لاندې مربع فاکتورونه

$$(z - x_k - \mathrm{i}y_k)(z - x_k + \mathrm{i}y_k) = (z - x_k)^2 + y_k^2$$

هم ولري.

د دویمې درجې پولینوم صفرځایونو لپاره کیدی د منځشپې یا **ABC فرمول(دا د p,q-فرمول ته روته یا همهغسې دی) و کارول شي** او د دریمې او څلورمې درجې پولینومونه د کاردان فرمولونو Cardanischen Formeln له لارې د اکسپلیځیت الجبری افادو یا ویېنو په توګه و ټاکل شی.

د جګو درجو پولینومونو لپاره بیا په ټولیزه توګه نومریکي تلنلارې کارول کیوي. که بیا یو صفرځای معلوم وی، نو کېدی شي د ا ړونده کربنیز فاکتورنې یا ضریبونې له لارې

(c) ketabton.com: The Digital Library

و وېشل شي.

$q(z) = p(z)/(z - z_1)$ او $z_2, \dots, z_n$ د $n - 1$ درجې د پولینوم د د صفرځایونو په توګه وټاکل شي.

د الجبر بنسټيزې جملې په اساس د ≥ 1 Grad درجې کمپلکس پولينوم يو صفرځای لري . د پرلپسې پولينوموېشنې د صفرځايونو سره اړونده کربنيز صريبونه يا فاکتورونه له دې سره ضريبونه راکوي.

که p فقط حقيقی صريبونه ولري، نو باور لري

$$\overline{p(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{n} p_k z^k} = \sum_{k=0}^{n} p_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} p_k \overline{z}^k = p(\overline{z})$$

يعني د يوه صفرځای z_0 لپاره هم $p(\overline{z_0}) = \overline{0} = 0$ دی.

د $p(z) = z^3 - 5z^2 + 9z - 5$

په ضريبونو ليکل يا فاکتوره کول ټاکو. پيژنو، چې $z_1 = 1$ يو صفرځای دی او يو د پولينوم وېش سره لرو

$$p(z)/(z - 1) = z^2 - 4z + 5.$$

د دې مربع پولينوم صفرځايونه د منځشېې فرمول له مخې دي

$$z_{2,3} = 2 \pm i.$$

د دې په تعقيب کمأبکس فاکتورونه لاندې ده

$$p(z) = (z - 1)(z - 2 - i)(z - 2 + i).$$

حقيقی په ضريبونو ليکنه يا صريبونه د دواړو اخرني فکتورونو د ټولګې څخه لاس ته راوړو همداسې سيده د مربع تکميلونې له لارې:

$$z^2 - 4z + 5 = (z - 2)^2 + 1,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې

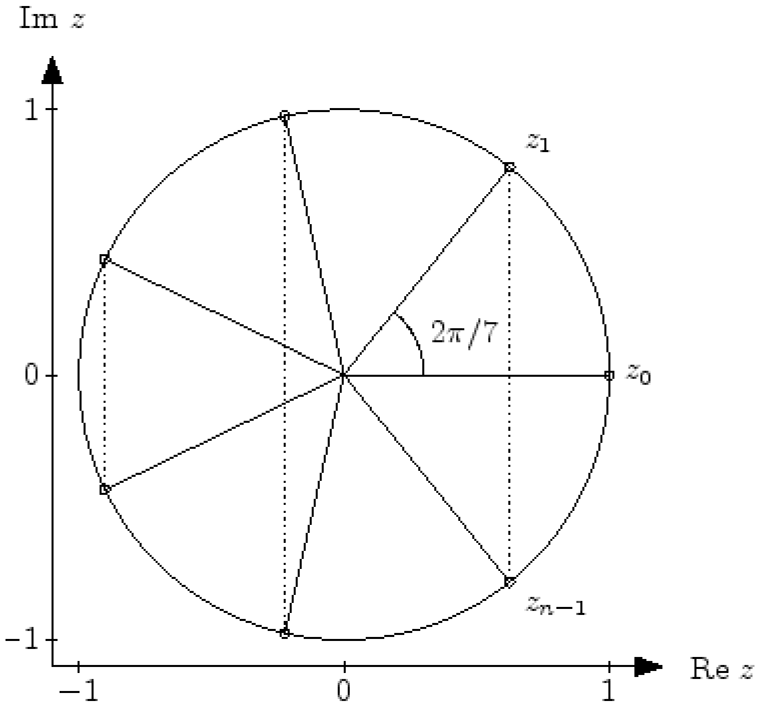
$$p(z) = (z-1)((z-2)^2+1).$$

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر، کنش

د $p(z) = z^n - 1$ صفرځايونه n -م يوونرېښې يا واحدجذرونه دي
$z_k = \exp(2k\pi i/n), k = 0, ..., n-1.$

له دې سره کمپلکس فاکتورونه لاس ته راځي

$$p(z) = \prod_{k=0}^{n-1}(z - \exp(2k\pi i/n)).$$



د کمپلکس کنجرګيري صفرځايونو ټولګه يا يوځاى کونه حقيقي فاکتوري کونه راکوي.

د جوړه n لپاره دى

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(z) = (z-1)(z+1)\prod_{k=1}^{n/2-1}\left(z^2 - 2z\cos(2k\pi/n) + 1\right)$$

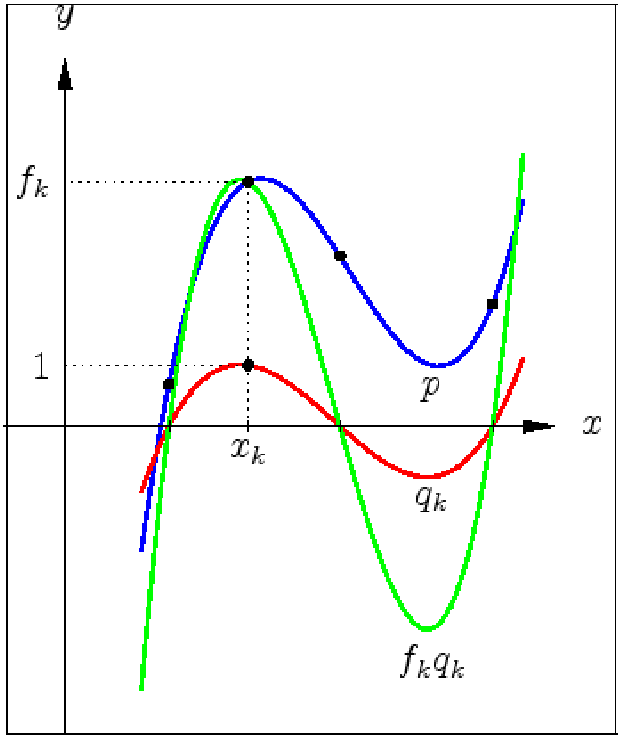
او د ناجوړه یا طاق n لپاره

$$p(z) = (z-1)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(z^2 - 2z\cos(2k\pi/n) + 1\right).$$

پای.

د پولینومونو سره انترپولیشن

په $n+1$ کې تابع ا رزښتونه f_k جوړه په مختلف تکیه ځایونو $x_0, \ldots, x_n$ کیدی شی یواځنی د یوه $\leq n$ Gradدرجي پولینوم له لارې انترپولی شي:



$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

دا انترپولیشن پولینوم کیدی شي د لاګرانج – بڼه

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x),$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

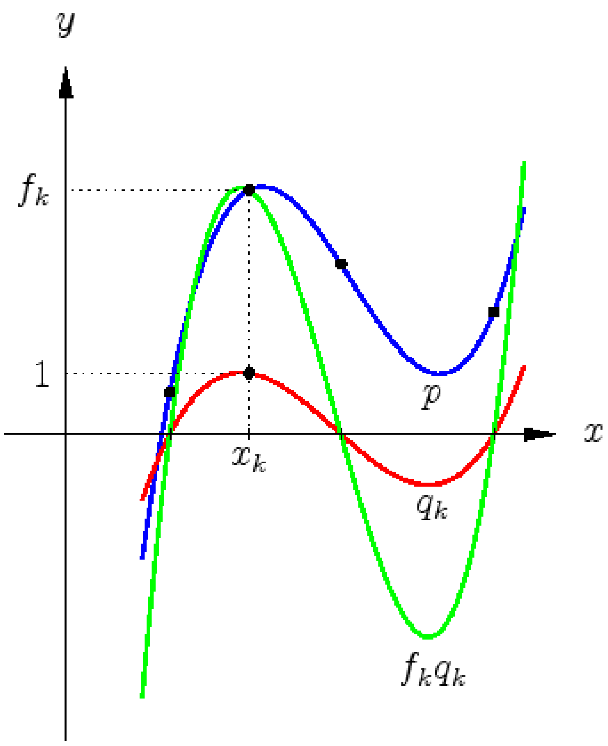
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x),$$

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n\,.$$

دا انترپوليشن پولينوم کيدی شي د لاګرانج – بنه

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k q_k(x), \quad q_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j},$$

انځور شي.



پولينوم q_k د لاګرانج-پولينوم بلل کيږي او په ټکي x_k کې ارزښت 1 لري او په نورو ټولو ټکو x_j کې يې ارزښت صفر دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$q_k(x_j) = \delta_{k,j}$$

د کرونيکر-سومبول δ سره.

د لاګرانج-پولينوم

$$q_k(x_j) = \delta_{j,k}$$

پوره کوي او له دې سره لاس ته راځي

$$p(x_j) = \sum_k f_k \delta_{j,k} = f_j \,,$$

د انترپوليشن شرايط ټول پوره دي.

د دې لپاره چې يواځنوالى وښايو، چې يو بل انترپوليشنپولينوم $\tilde{p}$ شتون لري، کمښت را اخلو يا تر څېړنې نيسو.

$$p - \tilde{p} \,.$$

دا (لږ‌تر لږه) $n+1$ صفرځاونه لري(د انترپوليشن کېدونکي ځايونه x_k)، مګر (زيات له زياته) د n درجو. له دظ سره بايد کمښت کتمتې وي، نو پولينومونه سره توپير نخ لري.

ليکونکي: هيوليګ،هيورنر

په اکويديستانت يا برابرواټنيز تکيه -ځايونو $x_k = kh$ د f_k ارزښتونو توابعو تيک ګرافيکي انځورونې ته کېدى شي مکعبيز انترپوليشن وکارول شي. له دې سره په تکيه-ځايونو $x_{k+1/2} = (k+1/2)h$ منځ ارزښتونه د

$$f_{k+1/2} = (-f_{k-1} + 9f_k + 9f_{k+1} - f_{k+2})/16$$

له لارې اپروکسيمى شي. دا پروسه تکراريږي، تر هغز چې پوره داتا منځ ته راشي.

د ـټکو -فرمول وزنونه

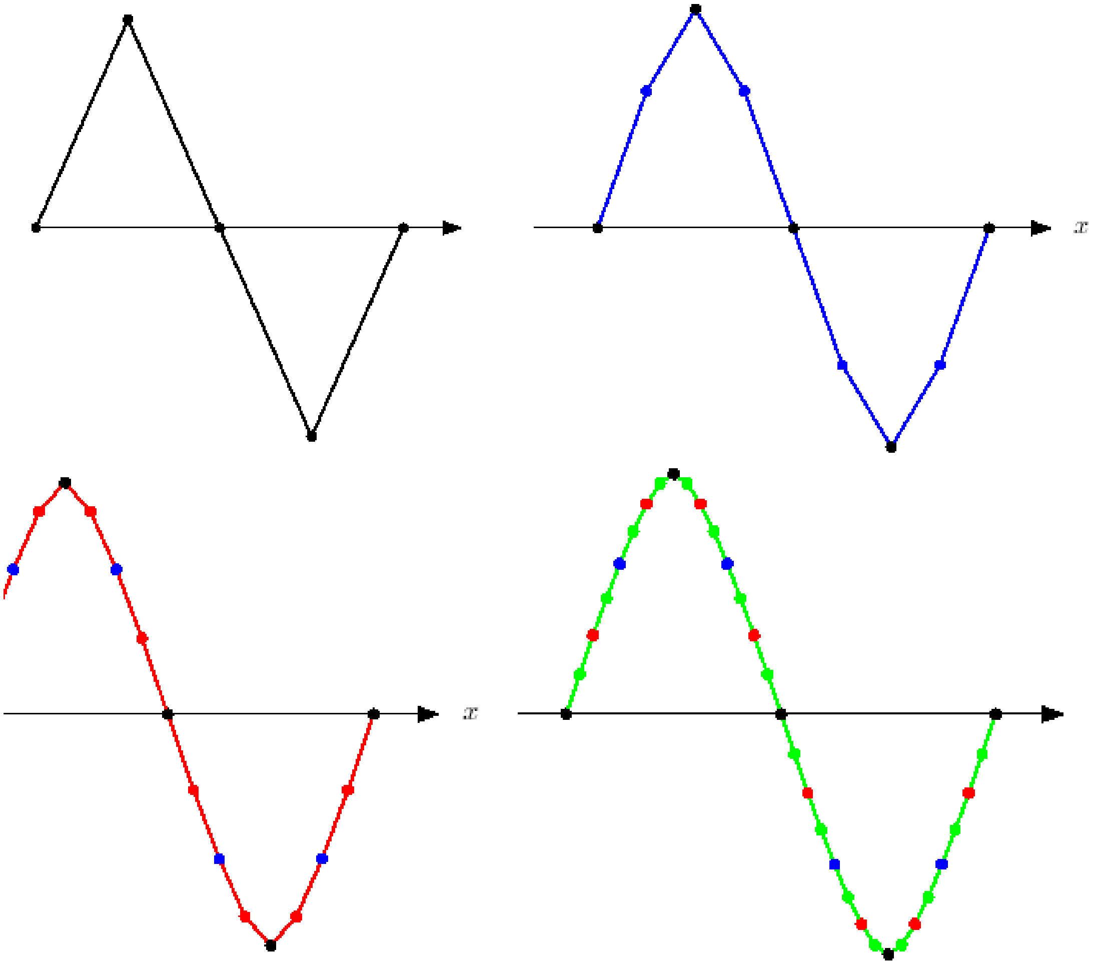
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\frac{1}{16}, \frac{9}{16}, \frac{9}{16}, -\frac{1}{16}$$

په تکيه-ځايونو $x_{k+1/2}$ د لاګرانژ-پولينوم ارزښتونه دي.
د بېلګې په بتوګه

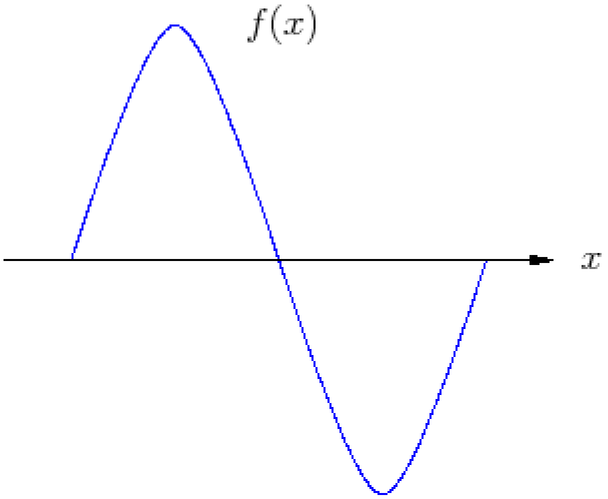
$$-\frac{1}{16} = \left(\frac{x-kh}{(k-1)h-kh} \frac{x-(k+1)h}{(k-1)h-(k+1)h} \frac{x-(k+2)h}{(k-1)h-(k+2)h} \right) \Bigg|_{x=(k+1/2)h} .$$

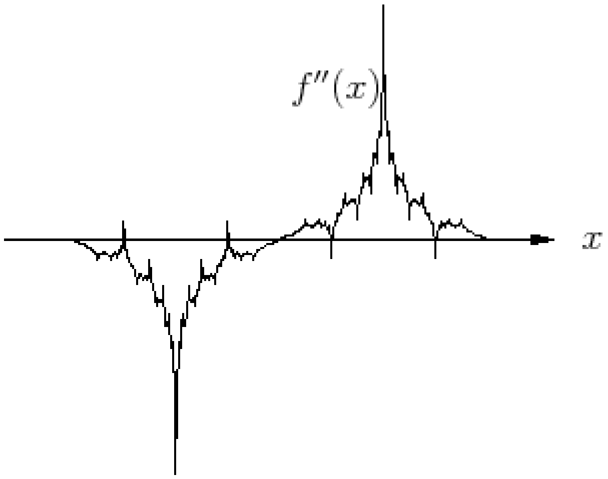
دی.
د سيمتري په بنسټ او دا چې ضريبونه بايد سيمتريک شي(د ثابتو داتا انترپوليشن) ، بې
له شمېرنې نور ضريبونه راکوي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

ځيره وتونداتا ښايي او د 4 -ټکو-انترپوليشن د دري ځله کاروني يا استعمال له لارې د منځ ته ارغلي ساين تابع اپروکسيميشن . په حقيقت کې دا لاندې کيږ ښودل شوی پوله تابع خوی اغيز لري. مګر په هر حالت فقط لومړی مشتق ناپرېکيدونکی دی.





ښی ګرافيک وښلی کمښت له لارې ورنږدې يا نږدې دويم مشتق د اته واره انترپوليشن پسې ښايي. سړی د ګراف فراکتال fraktalen (فراکتال: لاتين: مات) خويونه پيژنې.

راشنل (کسری يا نسبتي) توابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

یو رینتونی تابع r د صورت درجې m او مخرج درجې n سره د دوه پولینمونو وپش دی:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}.$$

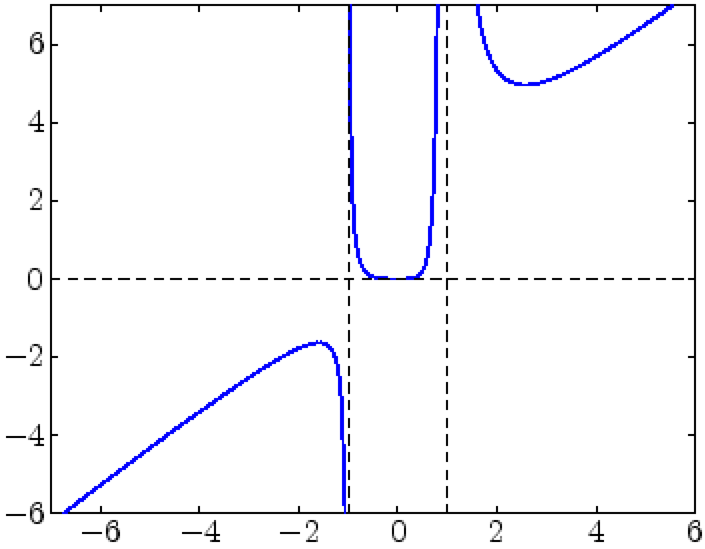
دا انځوونه نا توته وونې بلل کیږي، که p او q کوم ګډ کربنیز ضریب یا فاکتور ونه لري. د مخرج صفرځایونه راشنل تابع r د تعریف تشځایونه دي او د قطبځایونه بلل کیږي. د دوی نظم د صفرځایونو ډېرځلوالی ښايي.

اووښتونې یا متحولې x او ضریبونه a_k, b_k کېدی شي حقیقي یا کمپلکس وي.
اړوند سړی د حقیقي یا کمپلکس راشنل تابع څخه غږیږي.
للیکونکي : اپپ، هیولیګ

تابع

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)(x-1)^2}$$

تابع یو سادهقطب په $x = -1$ کې لري او دبل پول په $x = 1$ کې.



(c) ketabton.com: The Digital Library

سړی له تابع f څخه درک کوي، چې په يوه ساده صفرځای کې مختخښه بدلوي او په يوه ډبل صفرځای کې مختخښه تغير نه خوري.

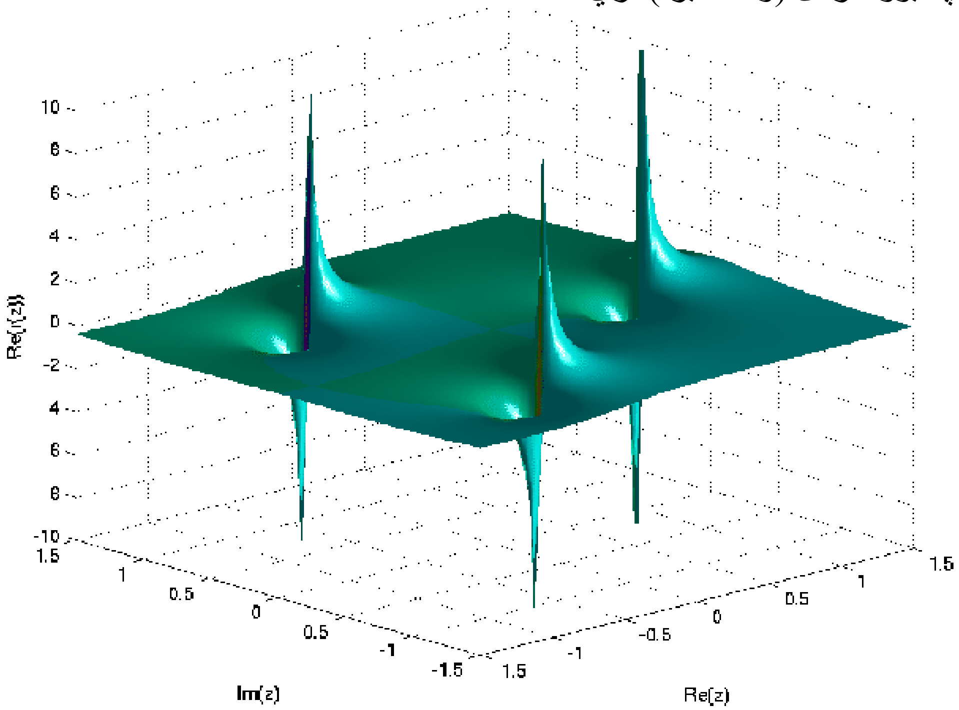
کمپلکس راشنل- يا کسري توابع

$$r(z) = \frac{z^2}{z^3 - 1}$$

درې صفرځايونه

$$z_1 = 1, z_2 = e^{2\pi i/3} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2}i, z_3 = e^{-2\pi i/3} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{3}}{2}i$$

په يوونکردی (واحددايره) لري



ځيره د r د گراف رييل - او ايماجينار برخه ښايي. له دې سره د رنگوښنه (که چېرې رنگه وه) د r د مطلق ارزښت له لارې تاوکل شوې.

) ليکونکي: اپپ،هيورنر، کنش

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ټوټه مات ټوټه کونه یا تجزیه کونه **Partialbruchzerlegung**

یو د m_j نظم راشنل تابع r د n مختلفو صفرځایونو z_j سره ،

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_n)^{m_n}$$

کیدی شي په لاندې ټوټه شي

$$r(z) = f(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z), \quad r_j(z) = \frac{a_{j,1}}{z - z_j} + \ldots + \frac{a_{j,m_j}}{(z - z_j)^{m_j}},$$

دلته f د $d = \text{Grad}\ p - \text{Grad}\ q$ Grad درجې پولینوم دی ($f = 0$ ، که $d < 0$ وی). راشنل توابع r_j د r په قطبځایونو کې اصلي برخې بلل کیږي. دا د $r(z)$ لوېدنه تشریح کوي د $z \to z_j$ لپاره. پولینوم f کیدی شي د پولینوموېش له لارې وشمېرل شي:

$$p = fq + g, \quad \text{Grad}\ g < \text{Grad}\ q\,.$$

دلته g د p په q باندې وېشنې پاتې یا باقي دی. ضریبونه $a_{j,\nu}$ کیدی شي د z^k د ضریبونو د پرتله کونې له لارې په کټوټوالي

$$p(z) = q(z) \left(f(z) + \sum_{j=1}^{n} r_j(z) \right)$$

وټاکل شي.

د بدیل په توګه د اصلي برخو ټاکلو لپاره د پوله ارزښت متود هم کارول کیدی شي.

د قطبونو د خوراجګو ضریبونو لپاره باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{j,m_j} = \lim_{z\to z_j}(z-z_j)^{m_j} r(z)\,.$$

د یوه نظم $(m_j > 1)$ قطبخای کې نه شي کېدی ضريبونه $a_{j,1},\ldots,a_{j,m_j-1}$ سیده د پولې ارزښت په توګه وټاکل شي. سرى كړى شي دا اوس شميرل شوى ترم $a_{j,m_j}/(z-z_j)^{m_j}$ کم کړي او د رکورسيو متود وكاروي.. یو ضریب پرتله کونه د همدا اوس شته ترمونو په پام کې نیولو هم شونې ده.

$(z-z_j)^{m_j}$ پوله ارزښت کېدی شي وټاکل شي، داسې چې د r په مخرج کې ضريب لرې برېښوول شي او بيا z_j په پاتې کسر یا –مات کې ځا په ځای شي. په ځانګړې توګه باور لري

$$a_{j,1} = \frac{p(z_j)}{\prod_{k\neq j}(z_j - z_k)}$$

د ساده قطب ځايونو $z_1,\ldots,z_n$ لپاره.
ليكونكي : اپ، هيورنر

د ساده قطبځایونو ($m_j = 1$) لپاره به ټوټه کونه منځ ته راشي. د پولینوم وېش پسې راشنل تابع منځ ته راځي

$$r(z) - f(z) = \frac{g(z)}{q(z)} = \frac{g(z)}{(z-z_1)\cdots(z-z_n)},$$

د کوم سره چې پولینوم $q(z)$ او $g(z)$ ګډ پروېشونی یا مقسوم علیه ونه لري، نیسو ، چې ټول z_j مختلف دي، او $\mathrm{Grad}\ g < n$ باور لري.
د ټوټه کسر ټوټه کوني سره د برابر اېښوونې وروسته

$$\frac{a_1}{z-z_1} + \cdots + \frac{a_n}{z-z_n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a_j = a_{j,1}$ د ضربول سره سړی د $g(z)$ سره او د q د لاګرانژ -انځورونه لاس ته راوړي

$$g(z) = \sum_{j=1}^{n}\left(a_j \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z-z_k)\right) = \sum_{j=1}^{n}\left[a_j \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z_j-z_k)\right]\underbrace{\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{z-z_k}{z_j-z_k}}_{q_j(z)}$$

دا په ي معناچې د $q_j(z_k) = \delta_{j,k}$ له امله په ګوډيزه نوکانو کې د $g(z_j)$ ازښتونه

$$a_j = g(z_j) / \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(z_j - z_k).$$

دي. له دې سره لاس ته راځي
په ورته توګه د جګو درجو قطبځايونه هم کار ول کېدی شي. دا مګر تخنيکي لړ پې]لی دی.
ليکونکي : اپ، هيورنر
د

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{z^3}{z^2+z-2}$$

په ټوټه کسر(مات) ټوټه ونه دې وټاکل شي.
دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنی نه ده، بايد لومړی يو پولينوم وېش صورت ونيسي. سړی لاس ته راوړي

$$(z^3):(z^2 \ +z \ -2) = z - 1 + \frac{3z-2}{z^2+z-2},$$

$$\begin{array}{l} -(\underline{z^3 \quad +z^2 \ -2z}) \\ \qquad -z^2 \ +2z \\ \quad -(\underline{-z^2 \ -z \ \ +2}) \\ \qquad\quad 3z \quad -2 \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(z) = z - 1, \quad g(z) = 3z - 2. \qquad r = f + \frac{g}{q}$$

دا په دې معنا چې د سره .

د دې لپاه چې د ټوټه مات ټوټه ونې ايښونه چې لاس ته راوړو بايد اوس د r قطبځايونه

وټاکل شي. د منځشپې فرمول سره لاس ته $z_1 = 1$ او $z_2 = -2$ راوړو د مخرج

پلينوم د صفځای په څېر:

$$q(z) = (z-1)(z+2).$$

د g/q ټوټه مات ټوټه ونه له دې سره لاندې بڼه لري

$$\frac{3z-2}{z^2+z-2} = \frac{a_1}{z-1} + \frac{a_2}{z+2}.$$

دا اخر پل د ضريبونو a_k ټاکل دي.

د پوله ارزښت متود سره لاس ت ه راځي

$$a_1 = \lim_{z \to 1}(z-1)\frac{3z-2}{z^2+z-2} = \left.\frac{3z-2}{z+2}\right|_{z=1} = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \left.\frac{3z-2}{z-1}\right|_{z=-2} = \frac{8}{3}.$$

او

په ټوليزه توګه لاس ته راځي

$$r(z) = z - 1 + \frac{1/3}{z-1} + \frac{8/3}{z+2}.$$

پای.

راشنل توابع

$$r(z) = \frac{2z^2 - 5z - 3}{z^3 - 3z^2}$$

په $z_1 = 3$ کې يوه سادهقطبځای لري او په $z_2 = 0.$ کې يو دبل قطبځای لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د صورت درجه د مخرج له درجې کوچنۍ ده، پولینوم وېش ته اړتیا نه شته او د په ټوټه کسر ټوټه ونه دا بڼه لري

$$\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\frac{a_1}{z^2}+\frac{a_2}{z}+\frac{a_3}{z-3}.$$

د پوله ارزښت متود سره لرو

$$a_1 = \lim_{z\to 0} z^2\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\left.\frac{2z^2-5z-3}{z-3}\right|_{z=0}=1$$

$$a_3=\lim_{z\to 3}(z-3)\frac{2z^2-5z-3}{z^3-3z^2}=\left.\frac{2z^2-5z-3}{z^2}\right|_{z=3}=0\,.$$

سړی په ساده ډول کړی شي، چې دا پاتې (هغه په اصطلاح، چې ورته وایو باقي مانده)

ضریبونه a_2 په یوه ټکي $z\neq 0,3$ د تابع ارزښتونو د پرتوله کونې له لارې وټاکي.

د بېلګې په توګه د $z = 1$ لپاره لرو

$$\frac{2-5-3}{1-3}=1+a_2+0$$

او سړی $a_2=2$ لاس ته راوړي.

لیکونکي: اپ،هیورنر

د راشنل توابعو لپاره

$$r(z)=\frac{z^2-5z+4}{z^3-3z^2+z+5}$$

لپاره قطبځایونه روښانه نه دي. د ازمایښت له لارې $z_1=-1$ پیداکیږي او بیا د پولینوم وېش سره لاس ته راځي

$$(z^3-3z^2+z+5):(z+1)=z^2-4z+5.$$

.

د نیمي شپې فرمول سره د مخرج نور صفرځایونه $q(z)$ لاس ته راځي

$$z_{2,3}=2\pm i.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره ماتلاندې یا مخرج ضریبه ونه یا فاکتوری کونه

$$q(z) = (z+1)(z-2-i)(z-2+i)$$

لرې او د ټوټه کسر ټوټه کونه داسې ده

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a}{z+1} + \frac{b}{z-2-i} + \frac{c}{z-2+i}.$$

د دې لپاره چې a, b, c د ضریبونو د پرتلې له لارې وټاکو، د مخرج $q(z)$ سره وېشو او لرو

$$z + 4 = a(z-2-i)(z-2+i) + b(z+1)(z-2+i) + c(z+1)(z-2-i).$$

د $1, z, z^2$ د ضریبونو د پرتله کونې له لارې د درې ناټاکلو یا نامعلومو a, b او c لپاره یو کرښیز مساوات سیټم لاس ته راځي:

a	b	c	
1	1	1	1
-4	$-1+i$	$-1-i$	-5
5	$-2+i$	$-2-i$	4

د حل په حیث لاس ته $b = i/2$ $a = 1,$ او $c = -i/2$ راځي ، دا په دې معنا ، چې

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{i/2}{z-2-i} + \frac{-i/2}{z-2+i}.$$

که اخري دواړه ترمونه سره یوځای کړو، نو حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه لاس ته راځي

$$r(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1/4}{z^2-4z+5}.$$

د حقیقي ټوټه کسر ټوټه ونه یا تجزیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو حقيقي ريښتونی يا راشنل تابع r د حقيقي قطبځايونو x_j سره او کمپلکس کنجوګيري قطبځايونو $u_k \pm$ i v_k سره او څو واره والی يا ډېروالی همداسې m_j n_k

$$r = \frac{p}{q}, \quad q(x) = \prod_j (x - x_j)^{m_j} \prod_k ((x - u_k)^2 + v_k^2)^{n_k}$$

کيدی شي په لاندې بڼه

$$r(x) = f(x) + \sum_j \sum_{\nu \leq m_j} \frac{a_{j,\nu}}{(x - x_j)^\nu} + \sum_k \sum_{\mu \leq n_k} \frac{b_{k,\mu}(x - u_k) + c_{k,\mu}}{((x - u_k)^2 + v_k^2)^\mu}$$

ټوټه کيږي، د $d = \text{Grad } p - \text{Grad } q$ درجې ($f = 0$ ، که $d < 0$ وي)

يوه پولينوم f سره. د په هر قطبځای زياتونونو يا د جمعي غړو د ګڼون يا تعداد ډېرواره والی په ګوته کوي. په ځانګړې توګه د ساده قطبځای لپاره باور لري

$$r(x) = f(x) + \sum_j \frac{a_j}{x - x_j} + \sum_k \frac{b_k(x - u_k) + c_k}{(x - u_k)^2 + v_k^2}.$$

پولينوم f کيدی شي دپولينوم وېش له لارې وټاکل شي

$$p = fq + g, \quad \text{Grad } g < \text{Grad } q,$$

دا په دې معنا چې p g د q وېش په باندې پاتې يا باقي دی. ضريبونه کيدی شي د مخرج پولينوم سره له ضرب وروسته دضريبونو د پرتلې له لارې وشمېرل شي. حقيقي ټوټه کسر ټوټه کونه هم کيدی شي د کمپلکس بڼې څخه و کټل شي يا لاس ته راوړل شي، داسې چې سړی کمپلکس کنجوګيري ترمونه سره يوځای کاندې.

ټوټه کونه د ساده قطبځايونو ($m_j = n_k = 1$) لپاره سرته رسيږي..

(c) ketabton.com: The Digital Library

د r کمپلکس ټوټه کسر ټوټه کونه په دې حالت کې دا لاندې بڼه لري

$$p(x)+\sum_j \frac{a_j}{x-z_j}$$

د z_j سره د مخرج پرلینوم q ساده صفرځایونه او

$$a_j=\lim_{z\to z_j}(z-z_j)r(z).$$

دا q چې حقیقي دی، نو کمپلکس صفرځایونه د کمپلکس کونجرګیري جوړوړپه توګه منځ ته راځي:

$$z_k=u+\mathrm{i}v,\quad z_l=u-\mathrm{i}v=\overline{z_k}.$$

له دې سره د اړونده ترمونو لپاره لاندې ټوټه ونه باور لري

$$\overline{a_k}=\lim_{z\to z_k}\overline{(z-z_k)r(z)}=\lim_{\overline{z}\to z_l}(\overline{z}-z_l)r(\overline{z})=a_l,$$

دا په دې معنا، چې

$$a_k=s+\mathrm{i}t,\quad a_l=s-\mathrm{i}t.$$

د دواړو ترمونو یوځای کونه غوښتونې بڼه راکوي:

$$\frac{s+\mathrm{i}t}{x-u-\mathrm{i}v}+\frac{s-\mathrm{i}t}{x-u+\mathrm{i}v}=\frac{2s(x-u)-2tv}{(x-u)^2+v^2}.$$

د جګو درجو قطبځایونه کیدی شي په ورته توګه تر څیړنې ونیول شي، مګر دلیل راوړنه یې په څرګنده توګه پیچلې ده.

د

$$r(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{2x^3-9x^2+11x+1}{x^3-4x^2+5x}$$

حقیقي په ټوټه کسر ټوټه کونې ټاکنه په درې پلونو یا قدمونو وېشل کیږي

(i) دا چې $\mathrm{Grad}\ p \geq \mathrm{Grad}\ q$ دی، لومړی د پلوینوم وېشنه صورت نیسي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$(2x^3 - 9x^2 + 11x + 1) : (x^3 - 4x^2 + 5x) = 2$$

$$g(x) = -x^2 + x + 1.$$

پاتې

له دې سره لاس ته راځي

$$r(x) = f(x) + \frac{g(x)}{q(x)} = 2 + \frac{-x^2 + x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x}.$$

(ii) د دې لپاره چې د g/q ټوټه ونې اینووونه یا اسعمال پیداکړو، نو قطبځایونه ټاکو یا پیدا کوو.

د q د صفرځایونو $x = 0$ د نوکانو دباندېکونې وروسته د مبع تکمیل له لارې سړی نور دواړه صفرځایونه لاس ته راوړي:

$$x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1^2.$$

دا پاتې صفرځایونه کمپلکس کونجوګیري جوړې $u \pm iv = 2 \pm i$ دي.له دې سره اینووونه په لاندې توګه ده

$$\frac{-x^2 + x + 1}{x((x-2)^2 + 1^2)} = \frac{a}{x} + \frac{b(x-2) + c}{(x-2)^2 + 1^2}.$$

(iii) د ضریبونو د ټاکنو لپاره د اصلي مخرج q سره ضربیري او ترې لاس ته راځي

$$-x^2 + x + 1 = a((x-2)^2 + 1^2) + b(x-2)x + cx$$

د x ,1 او x^2 ضریبونو پرتله مو کرښیز مساوات سیستم ته بیایي

$$1 = \qquad 5a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1 = -4a - 2b + c$$
$$-1 = a + b$$

د لاندې حل سره

$$a = \frac{1}{5},\ b = -\frac{6}{5},\ c = -\frac{3}{5}\ .$$

له دې سره حقيقي ټوټه کسر ټوټه کونه ده

$$r(x) = \frac{1/5}{x} + \frac{-6/5(x-2) + (-3/5)}{(x-2)^2 + 1^2}.$$

د ټاکلو لپاره پوله ارزښت متودونه هم کارول کيږي. که دا اېښوونه يا ځای په ځای کونه د x سره ضرب شي او $x = 0$ کيږدي، نو لاس ته ترې راځي

$$\frac{1}{2^2 + 1^2} = a + 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{5}.$$

د $x = 2$ ځای په ځای کونې سره c لاس ته راځي:

$$\frac{-2^2 + 2 + 1}{2(0^2 + 1^2)} = \frac{1/5}{2} + \frac{c}{0^2 + 1^2} \Longrightarrow c = -\frac{3}{5}.$$

بالاخره کېدی b د ټکی ازماېښت $x \neq 2$ له لارې ، د بېلګې په توګه $x = 1$ منځ ته راشي.
پای.

د

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

حقيقي ټوټه کسر ټوټه کونې ټاکلو په دوه پلونو يا قدمونو کې ترتيبيږي

(c) ketabton.com: The Digital Library

(i) د اینںوونې د ټاکلو لومړی قطبځایونه پیدا کیږي. له

$$q(x) = (x^2+1)^2$$

پیژندل کیږي، چې $\pm i$ ډبل صفرځایونه دي، دا په دې معنا چې $u=0$ او $v=1$.
له دې سره دا اینںوونه ده

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{b_1 x + c_1}{x^2+1} + \frac{b_2 x + c_2}{(x^2+1)^2}.$$

(ii) د ضریبونو د ټاکلو له امله دا سړی د اصلي مخرج q سره ضربوي او لاس ته
ترې راوړي

$$\begin{aligned} x^3 &= (b_1 x + c_1)(x^2+1) + b_2 x + c_2 \\ &= b_1 x^3 + c_1 x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)1. \end{aligned}$$

د $1, x, x^2$ او x^3 د ضریبونو پرتله کونه مو کرښیز سیستم ته بیایي

$$\begin{aligned} 1 &= b_1 \\ 0 &= c_1 \\ 0 &= b_1 + b_2 \\ 0 &= c_1 + c_2 \end{aligned}$$

د لاندې حل سره

$$b_1 = 1,\ c_1 = 0,\ b_2 = -1,\ c_2 = 0\,.$$

بدیلې کیدی شي د کمپلکس ټوټوه کسر ټوّ کونې څخه مخ ته لاړ شو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{a}{z-i} + \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{c}{z+i} + \frac{d}{(z+i)^2}.$$

ضریبونه $c = \bar{a},\ d = \bar{b}$ پوره کوي او د جمعي جوړولو له لارې

$$\frac{a}{z-i} + \frac{c}{z+i},\ \frac{b}{(z-i)^2} + \frac{d}{(z+i)^2}$$

هم حقيقي توټهکسر توټه کونه لاس ته راوړي

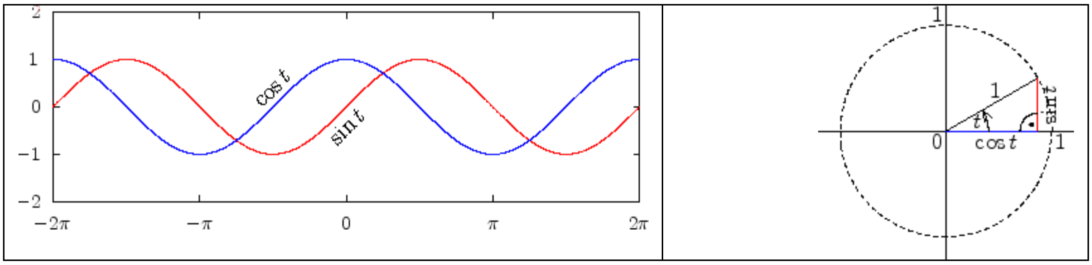
$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2}.$$

ساین او کوساین Sinus und Cosinus

د

$$(\cos t, \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

سره په سرچینه په کونج t خرخول شوی ټکی $(1,0)$ کواوردینات نومولکيږي . د تر مخنښي پورې کوساین او ساین په یوه ولاړکوډیز یرېکوډي (المثلث القايم الزاويه) کې د ولاړ اړخونو(هغه اضلاع وې چې یو د بل سره قلموازاویه جوړه وي) نسبت د نیمی(قطر) سرره په ګوته کوي.



دواړه ګردی توابع یا د داېرې توابع 2π - تلبېرته راګرځېدونې یا 2π - پریودیکي دي او باور لري

$$\cos t = \sin(t + \pi/2)$$

• ,

(c) ketabton.com: The Digital Library

- $\cos t = \cos(-t), \quad \sin t = -\sin(-t)$,
- $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

يو څو ځانګړي ارزښتونه دي:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

د اويلر-مويورې فرمول Formel von Euler-Moivre

يو اکسپوننشل تابع د ايماجينار x -محور سره کېدی شي د $t \in \mathbb{R}$ لپاره د تريګونومتريک(درېګوډي - يا مثلثاتي -) توابع په مرسته افاده شي.

$$\cos t + \mathrm{i}\sin t = \exp(\mathrm{i}t)$$

کوساين او ساين حقيقي – او ايماجينار ګنونه(عددونه) په ګوته کوي د ارزښت 1 ($|\exp(\mathrm{i}t)| = 1$) سره .

که پورته فرمول اينورتير يا معکوس شي ، نو لاس ته راځي

$\cos t$	$= \mathrm{Re}\, e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}t} + e^{-\mathrm{i}t}\right)$
$\sin t$	$= \mathrm{Im}\, e^{\mathrm{i}t} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}\right)$.

د اکسپ، کوساين او ساين کتمتوالی اويلر او مويورې ته ځي. دا د جيومتريکي کمپلکس عددونو د انترپوليشن لپاره بنسټ جوړوي او د فوری-اناليوز کې غوره رول لوبوي.

ليکونکي: هيوليک، کوپف

د ساين او کوساين لپاره د زياتون- يا جمع قضيه

(c) ketabton.com: The Digital Library

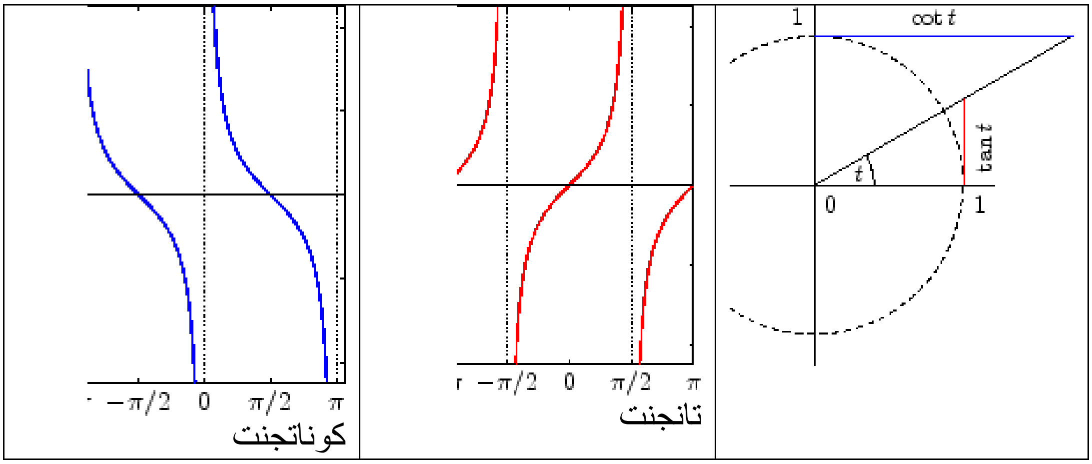
د ګردیتوابعو $\sin t$ او $\cos t$ لپاره لاندې اړیکې باور لري:

- $$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
- $$\sin(\alpha+\beta) = \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta$$

په ځانګړې توګه دی

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad \sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

تانجنت او کوتاجنت Tangens und Cotangens



د تانجنت او کوتانجنت توابع د

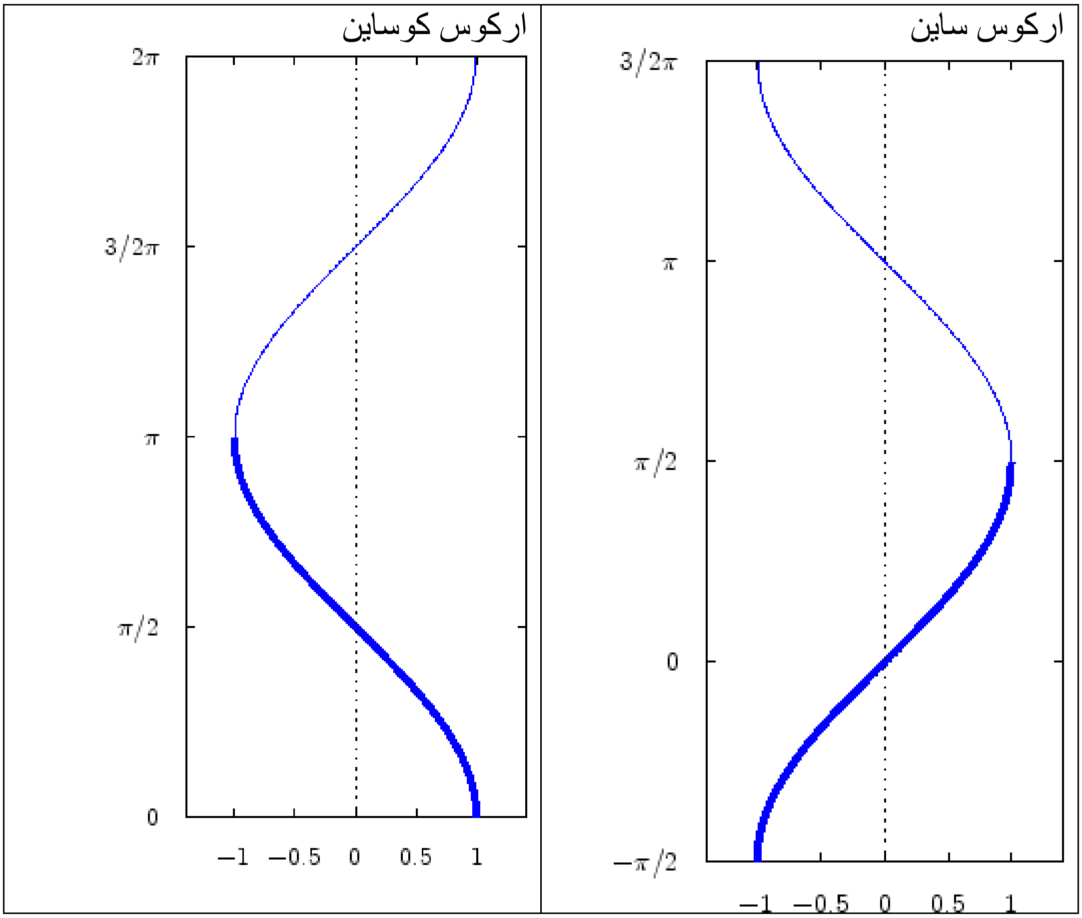
$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}, \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\sin t}$$

له لارې تعریف دي. دا تر دمخنخښي پورې د ولاړکوډیز درېکوډي(- - مثلث) د ولاړکوډونو Katheten نسبت ورکوي
یو څو ځانګړي ارزښتونه دي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	nicht def.
cot	nicht def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

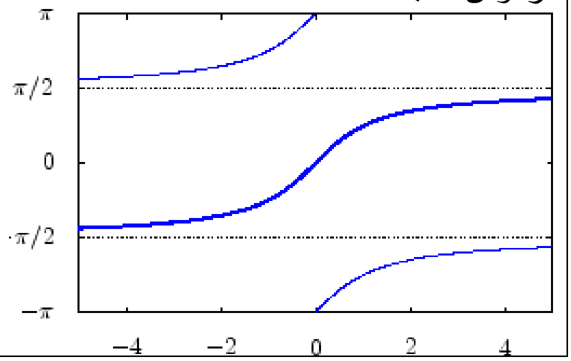
د ارکوس توابع **Arcusfunktionen**



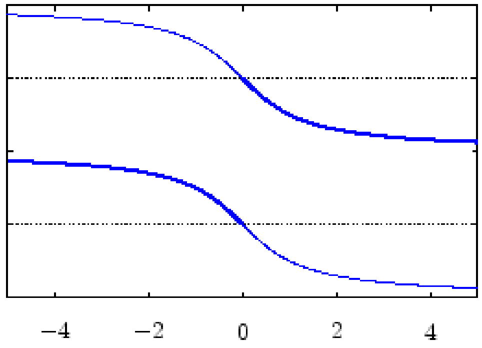
د درېګوډيز (ترېګونومتريکي یا مثلثاتي) توابعو په څټ یا معکوس توابع د arccos, arcsin, arctan, arccot سره ښوول کيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ارکوس تانجنت

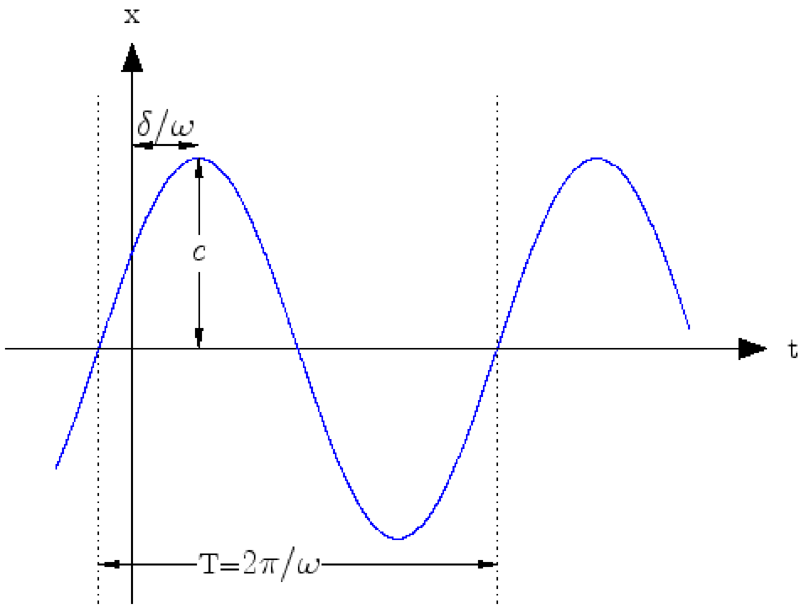


ارکوس کوتانجنت



د دې تعریف – او ارزښت ورشو د پورته ځېرې څخه رانیول کېدی شي.
له دې سره اصلي ځانګې غوړې یا پنډې کښل شوي دي.
لیکونکي: هیولیک، کنوپف، کنش

هارمونیک لړځیدني یا رپیدنې
Harmonische Schwingung



(c) ketabton.com: The Digital Library

یو هارمونیکي لړځیدنه د جګوالي Amplitude $c \geq 0$ سرره،د فاز بلځای ته ورڼه یا راکښنه δ او فرکونځ ω همداسې پریودېوالی یا تل (بیرته) راګرځیدنه $T = 2\pi/\omega$ لاندې بڼه لري

$$x(t) = c\cos(\omega t - \delta)\ .$$

ورته یا برابر ارزښته انځورونه ده

$$\mathrm{Re}\, c\exp(\mathrm{i}(\omega t - \delta))$$

یا

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

د $a = c\cos(\delta), b = c\sin(\delta)$ سره ، دا په دې معنا چې (c, δ) د (a, b) قطبي کواوردیناتونه دي.
پای.

د پارمتر شمیربدلون د جمعي تیورم څخه لاس ته راځ:

$$c\cos(\omega t - \delta) = c\left(\cos(\omega t)\cos(\delta) + \sin(\omega t)\sin\delta\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a = c\cos\delta, \quad b = c\sin\delta.$$

برعکس دی

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \delta = \arctan(b/a) + \varphi$$

د لاندې سره

$$\varphi = \begin{cases} 0, & \text{für } a \geq 0 \\ \pi, & \text{für } a < 0 \text{ und } b \geq 0 \\ -\pi & \text{sonst.} \end{cases}$$

پای.

د هارموني رپيدنې یو پر بل پرېوتنه

(c) ketabton.com: The Digital Library

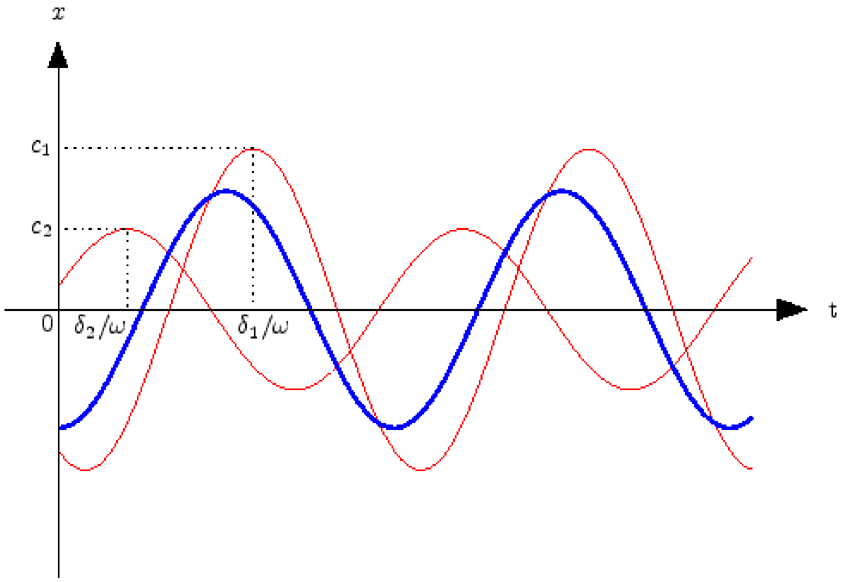
د دوه هارموني رپېدنو يو پر بل پرېوتنه (په څېره کې غوړ کښل شوي دي)

$$x_k(t) = c_k \cos(\omega t - \delta_k), \quad k = 1, 2 ,$$

د

امپليتودې سره هارمونيک دي

$$c = \sqrt{c_1^2 + 2\cos(\delta_1 - \delta_2)c_1c_2 + c_2^2} \ .$$



ليکونکي: هيوليک، کوپف،کنش

د يو پر بل پرېوتني کمپلکس بڼه

$$\mathrm{Re}\left(c_1 e^{\mathrm{i}\omega t - \delta_1} + c_2 e^{\mathrm{i}\omega t - \delta_2}\right) = \mathrm{Re}\left([c_1 e^{-\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{-\mathrm{i}\delta_2}] e^{\mathrm{i}\omega t}\right)$$

راکوي

$$[\ldots] = c e^{-\mathrm{i}\delta} = z$$

او له دي سره

$$c^2 = z\bar{z} = (c_1 e^{-\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{-\mathrm{i}\delta_2})(c_1 e^{\mathrm{i}\delta_1} + c_2 e^{\mathrm{i}\delta_2}) \ .$$

$$e^{\mathrm{i}s} + e^{-\mathrm{i}s} = 2\cos s$$

د په پام کې نيولو سره ضربونه غوښتنه راکوي..

په بديله ت وګه کېدی شي امپليتود انځوروني

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_k(t) = a_k \cos(\omega t) + b_k \sin(\omega t)$$

څخه وشمېرل شي. سړی لاس ته راوړي

$$c = \sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2}\ .$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

په درځ يا متې باندې کړولو هارموني لړځېدنه يو په بل پرېوځي

$$\cos(\omega t - \delta_k), \quad \delta_k = k\delta,\ k = 0, \ldots, n,$$

د برابر يا همغه فرکونځ او امپليتود. لړځېدنه د کمپلکس انځوروني په مرسته د دې لاندې حقيقي برخې په حيث لاس ته راځي

$$e^{\mathrm{i}\omega t} + e^{\mathrm{i}(\omega t - \delta)} + \ldots + e^{\mathrm{i}(\omega t - n\delta)} = e^{\mathrm{i}\omega t} \frac{1 - (e^{-\mathrm{i}\delta})^{n+1}}{1 - e^{-\mathrm{i}\delta}}$$

$$= e^{\mathrm{i}\omega t} \frac{e^{-\mathrm{i}\frac{n+1}{2}\delta}(2\mathrm{i}\sin\frac{n+1}{2}\delta)}{e^{-\mathrm{i}\frac{\delta}{2}}(2\mathrm{i}\sin\frac{\delta}{2})} = \left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\right) e^{\mathrm{i}(\omega t - \frac{n}{2}\delta)}\ .$$

يو په بل پرېوتنه لاندې امپليتود لري

$$\frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

او فاز $(n/2)\delta$.

د $\omega = 0$ سره د ايماجينار برخې د پرتله کوني له لارې تريګونمتريکی کتمتوالی راکوي.

$$\sin\delta + \ldots + \sin n\delta = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta \sin\frac{n}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}}\ .$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه لړځېدنو $c_k e^{i\omega_k t}$ يو پر بل پرېوتنه کېدی شي د

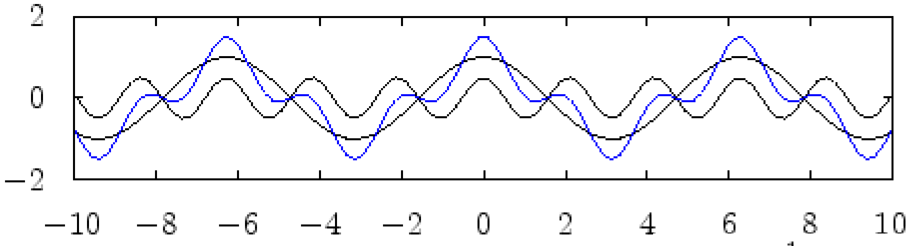
$$c(t)e^{i\bar{\omega}t}, \quad c(t) = c_1 e^{-i\Delta\omega t} + c_2 e^{i\Delta\omega t},$$

په ضرب د $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ او $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$ سره وليکل شي.
لاس ته راغلی داسې په نامه مودوليري رپېدنه تيک هلته پريوديکي ده، که د فرکونځ نسبت ω_1/ω_2 راشنل وي.
د مودولي شوی کمپلکس امپليتود مينيمال او ماکسيمال ارزښت همداسې مطلق ارزښت د $|c_1 - c_2|$ همداسې $c_1 + c_2$ ترمنځ لوړ تيټ کيږي. په ځانګړې توګه دی

$$c(t) = 2c\cos(\Delta\omega t)$$

د همغې يا برابرې امپليتود $c = c_1 = c_2$ لپاره.
لاندې ځيرې يو څو بېپيکي حالتونه په ګوته کوي

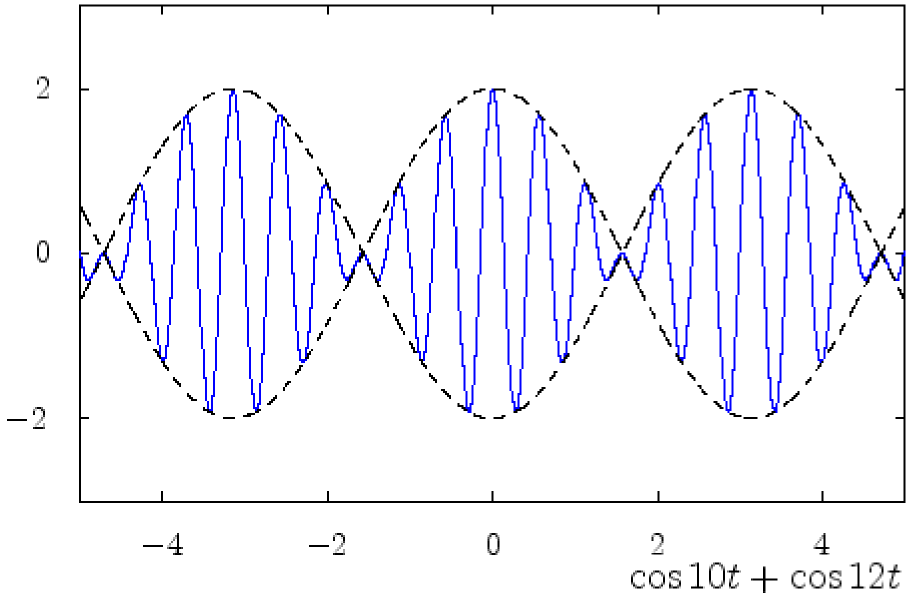
- periodische Überlagerungپريوديکي يو پر بل پرېوتنه



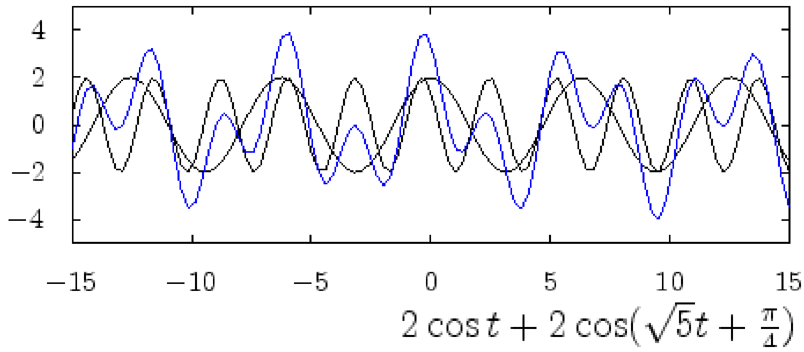
$\cos t + \frac{1}{2}\cos 3t$

- برابر امپليتود c_k او $\omega_1 \approx \omega_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



- اپريوديکي يا نه - يو پر بل پرېوتنه aperiodische Überlagerung



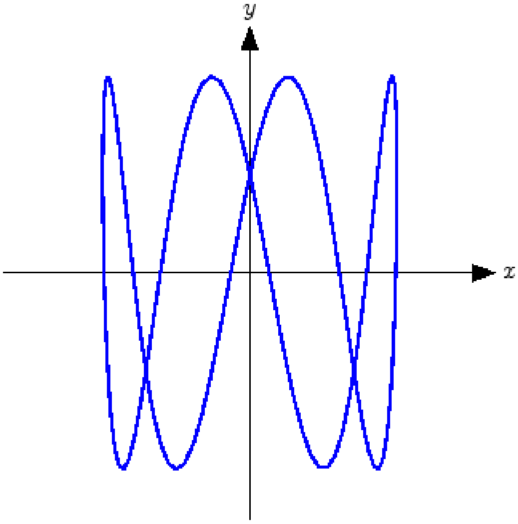
پاي.

د سطي لړځېدنو يو پر بل پرېوتنې د لړځېدنو مختالف لورو (a_1, a_2) او (b_1, b_2) کرږې يا منحني

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2)\,,$$

لاس ته راځي چې د مخترع Lissajous-Figuren ليساجوس –ځيرې بللکيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



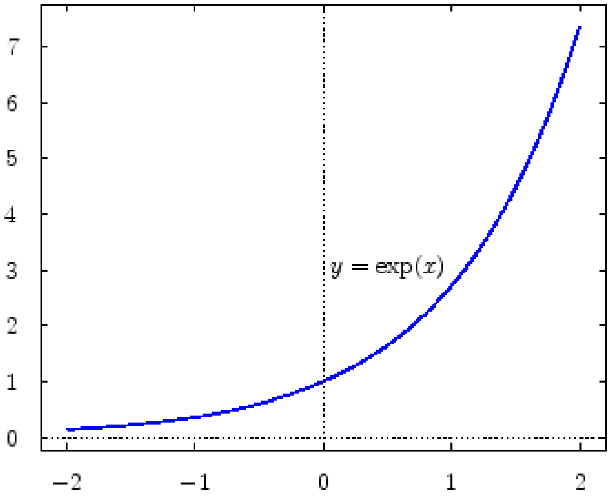
خبره د پارامتر يوه بېلګه بنايي

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega_1 = 1\,, \quad \delta_1 = 0\,, \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = 4\,, \quad \delta_2 = \frac{\pi}{3}\,.$$

پای.

اکسپوننشل توابع

Exponentialfunktion



توان تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = e^x = \exp(x)$$

$x \in \mathbb{R}$

د اویلر عدد $e = 2.71828...$ سره اکسپوننشل تابع بلل کیږي. دا د ټول لپاره مثبت ده او د تابع مساوات پوره کوي
$$e^{x+y} = e^x e^y \,.$$

$$e^{-x} = 1/e^x$$
په ځانګړې توګه

ګټه یا ربح **Verzinsung**

یوبیل بډایی د – وارهد اخستنې همداسي او ورکوني وروسته د یوې ګټوې Rate r
($r < 0$ همداسي $r > 0$) د یوې ګټونې فاکتور $(1+p)$ سره لاندې پای بډایی ورکوي

$$y = (1+p)^n x + \frac{(1+p)^n - 1}{p} r \,.$$

دلته $p = 1$ د 100% یو ګټه اینوونه ده په کلنۍ ګټه ا چونې سره.

فعاله کلنۍ ګټه د میاشتنۍ ګټونې څخه شمېرل کیږي د یوه ګټې اینونې p_m سره و لاندې ته
$$p_j = (1+p_m)^{12} - 1 \geq 12 p_m \,.$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

بنسټ بډایۍ په همدې لومړني ګټوني پریود کې په پام کې نیول کیږي، اخستنه ههمداسې اچونه لومړی د ورپسې کال. په لاندې توګه یا د اسې راکوي

$$n = 1: \quad y = x(1+p) + r,$$
$$n = 2: \quad y = \big(x(1+p) + r\big)(1+p) + r.$$

په ټولېزه توګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = \quad (\cdots(x(1+p)+r)(1+p)+r)\cdots)$$
$$= x(1+p)^n + \left[1+(1+p)+(1+p)^2+\cdots+(1+p)^{n-1}\right]r$$

دا په ګوډیزو نوکانو کې افاده کېدی شي په هندسي جمعه قرمول واړوي او سړی دا ورکړ شوی فرمول لاس ته راوړي.
پای.

د منهتان خرڅول 1626زک مورګن(د ځمکي د کچوني یوون یا واحد دی) 11000 Morgen د یوه حاضر قیمت په رانیولو ګټور تمام شو، ځکه چې په کلنی7 په سلو کې ګټه دا بډایي په کال 2000 زک کې

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot(1.07)^{374} = 5.857\cdot 10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\triangleq 2.658\cdot 10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

ده(که متمأن بانکونه او د اسعارو رفورم له مخه نه وي نیول شوی یا فرض شوی).
په میاشتنی ګټه لرو

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot(1+7/1200)^{4488} = 13.030\cdot 10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\triangleq 5.913\cdot 10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

او

$$y = 60\,\mathrm{NLG}\cdot\exp(0.07\cdot 374) = 14.060\cdot 10^{12}\,\mathrm{NLG}\ (\triangleq 6.380\cdot 10^{12}\,\mathrm{EUR})$$

د ټولیزې ګټوني سره.
که مورګن د 0.81 Ha هکتارسره وشمېرل شي، نو د منهتان دا نننی سطحه د89 مربعکیلو متره ورکوي. یو کور هلته نن نږدې6500 USD/Quadratmeter امریکایي ډالر په مربع متر ارزښت لري. دا پیسې به د یوه کور تعمیرلپاره چې څلور پوړیز وي ورسیږي، چی په ټوله سطحه ونیسي.
پای.

د یوه $x = 200000$ یوروپور ، $n = 30$کلونو لپاره او یوې کره شوې ګټې پېنې $p = 5$ په سلو کې میاشتنی ګټه لاندې ده

$$p_m = (1+p)^{1/12} - 1 = 0.4074\%$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

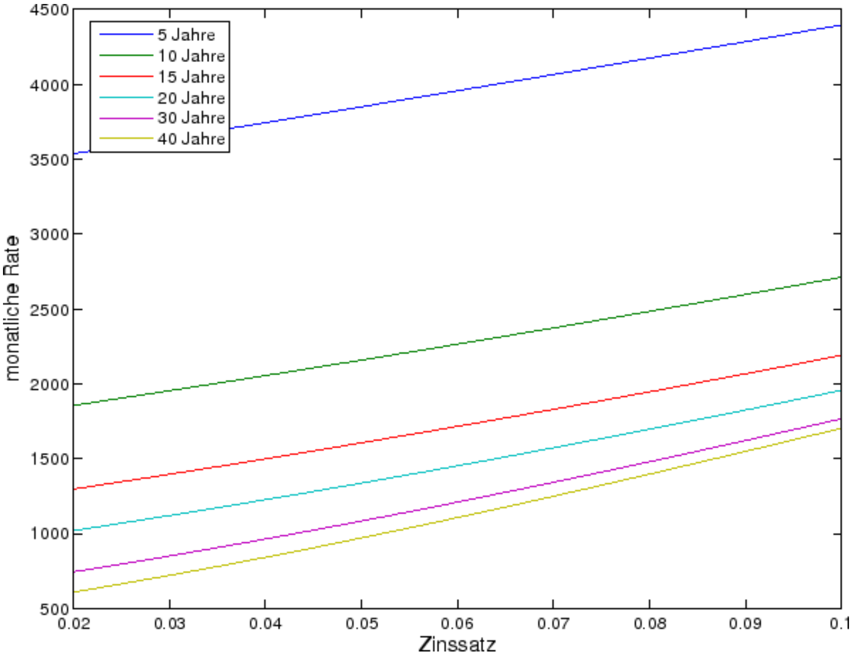
او مياشتنۍ رات يا ګټه ده

$$r = \frac{p_m(1+p)^n}{(1+p)^n - 1} x = 1060.11\,\text{EUR}.$$

د لاندې پسې ترلي له ګټې فرمول څخه د صفرايښووني له لارې د پور ارزښت راکوي او

د $(1+p_m)^{12} = 1+p$ په پام کې نيولو سره .

ټوله تاديه $30 \cdot 12r = 381639.60$ يورو د پور جمعې څخه د په 90.8 په سلو کې اوړي(د بانک مزدوري پرې زياته).



پروت: ګټونه يا د ګټې پينه ، ولاړ: مياشتنۍ ګټه
ګراف مياشتنۍ ګټه ښايي د يوه 200 000 يورو پور لپاره د ګټې پينې د ضريب په څېر د مختلفو وختونو لپاره.
پای.

کلني د پيسو ورکونه $z = 10000$ يور د يوې 7 په سلو کې ګټونې ته د $n = 12$ کلونو وروسته يوه دا لاندې بډايي ورکوي

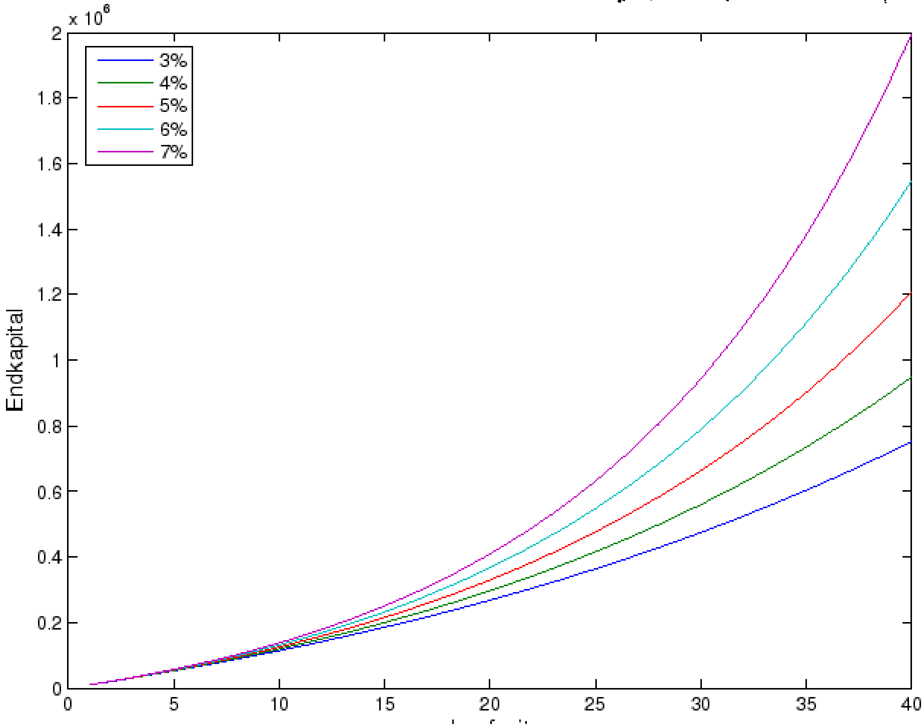
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = \frac{(1+p_j)^n - 1}{p_j} z = \frac{1.07^{12} - 1}{0.07} 10000\,\mathrm{EUR} = 178884.51\,\mathrm{EUR}.$$

د نور لس کاله د ژوند انتظار ته دا د لاندې یوه میاشتنې تقاوت ته بسیا کوي

$$r = \frac{p_m (1+p_j)^{10}}{(1+p_j)^{10} - 1} y = \frac{0.005654 \cdot 1.07^{10}}{1.07^{10} - 1} 178884.51\,\mathrm{EUR} = 2057.17\,\mathrm{EUR},$$

چې د هیپوتیکې(د کورونو جوړولو او اخستلو لپاره ارزانه پور دی) Hypotheken
ګټې ته ورته شمېرل کیږي.



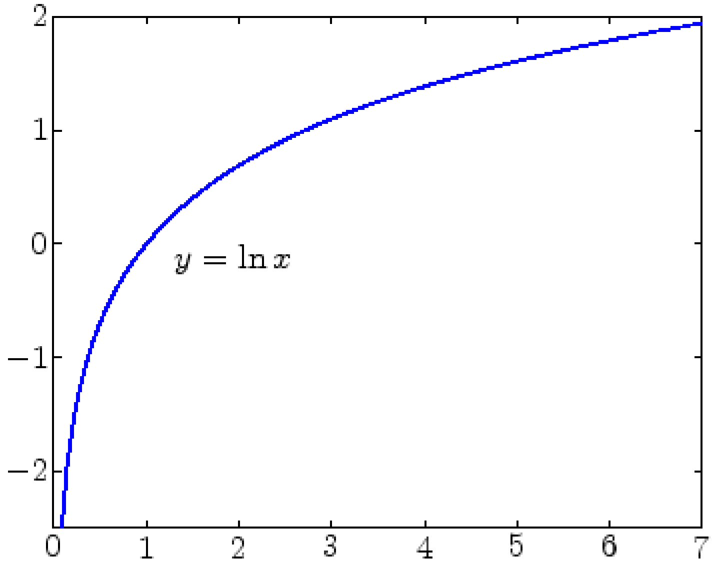
پروت: وخت ،   ولاړ: پای سرمایه
څېره د مختلفو ګټونو لپاره د یوې سرمایې وده ښایې د وخت تېرېدو سره .
پای.

لوګاریتم **Logarithmus**

د لوګارتم تابع د اکسپوننشلتابع معکوس دی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y.$$



دا $(0,\infty)$ کره مونوتونن جګېدونکی په $\mathbb{R}$ تنظيموي او لاندې تابعمساوات پوره کوي

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y.$$

په ځانګړې توګه دی $\ln(1/x) = -\ln x$.
پای.

د يوې مادې راديواکتيو له منځه تلنه(په زراتو تجزيه کېدنه) د زره کيدنې قانون

$$N(t) = N(0)e^{-kt}$$

له مخې تشريح کيږي. دلته $N(t)$ د ا تمونو ګڼون يا تعداد دی د t په وخت کې
او $k > 0$ يوه د موادو په واک کې د زره کېدو ثابته ده.

د نيم ارزښت وخت T داسې تعريف دی $N(T) = \frac{1}{2}N(0)$ ، داپه دې معنا چې

$$e^{-kT} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow T = \ln 2/k.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د چرنوبل د ريکتور د ډز يا الوتنې سره یو ه ډینګری يا خولې يا مرخېړی په څنو برخو کې Cäsium-137 د 2000Bq/kg (Bq/kg د راديواکتيويتى د فعاليت د کچونې لپاره یوون دی) سره د نيمارزښت وخت 29.7 کلونو په وړانګو خور شو.

$$k = \frac{\ln 2}{29.7} = 0.023$$

او له دې سره

$$N(t) = 2000 \exp(-0.023t).$$

په المان کې پوله ارزښت .600Bq/kg کې پروت د ی. د

$$600 = 2000 \exp(-0.023t) \Rightarrow -0.023t = \ln(0.3) \Rightarrow t \approx 52$$

له امله داپوله ارزښت د ورکړشوو ارزښتونو لپاره ۵۲ کالو وروسته کښته – یا کميږي.
نیم وخت ارزښت :

Cäsium-134	2 Tage
Cäsium-137	29.7 Jahre
Jod-131	8 Tage
Kohlenstoff-14	5730 Jahre
Kalium-40	1.2 Mrd. Jahre
Plutonium-239	24000 Jahre
Radon-222	3.8 Tage
Radium-226	1600 Jahre
Strontium-90	28 Jahre
Uran-235	800 Mio. Jahre
Uran-238	4.5 Mrd. Jahre

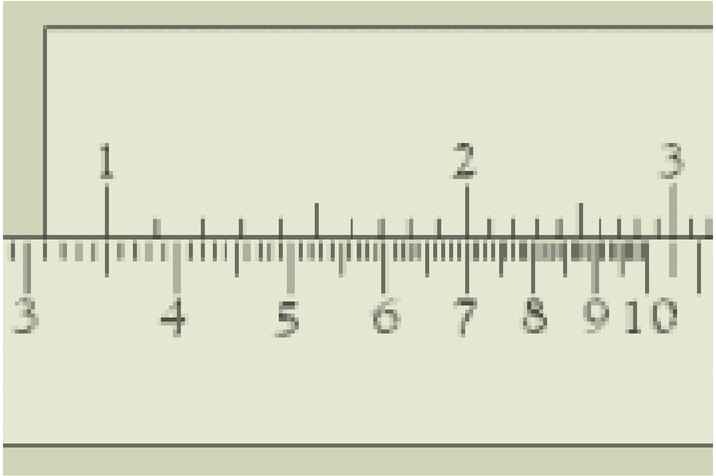
پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لوګاریتم دا خوی لري، چې د دوه ګڼونو یا عددونود لوګاریتمونو جمعه د دې د دې دوه عددونو د ضرب د لوګاریتم سره برابر دی:

$$\log x + \log y = \log(xy).$$

په دې توګه کېدی شي چې دوه کرښي(خط کشونه) د لوګاریتم کچوونو سره یو په بل کیږدي او لاس ته راوړنه د دېعددونو جمعه نه بلکه ضرب دی.(د شمېرکښوونې (چې یوې او بلې لورته کښيږي) اصول)



د پورته ښېرې ښخه د بېلګې په توګه ګورو چې $7 = 2 \cdot 3.5$ دی. د لته د پورته کچوونې ۱ د لاندې سکالا په3.5 (لومړی ضریب) کېښول کیږي. بالاخره ۲ د پورته سکالا (دویم ضریب) د ضرب لاس ته راوړنه په لاندې سکالا لوستل کیږي.

پای.

تولیز توان توابع او لوګاریتم

د $a > 0$ لپاره تعریفوو

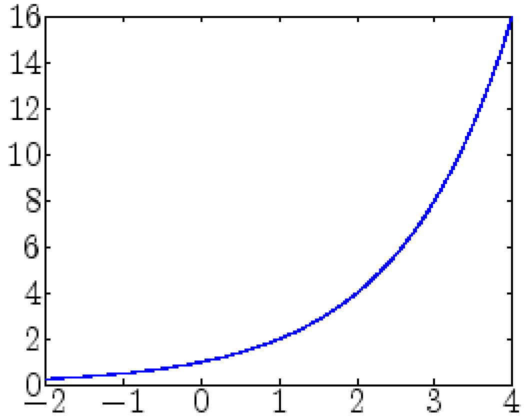
$$y = a^x = \exp(x \ln a)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

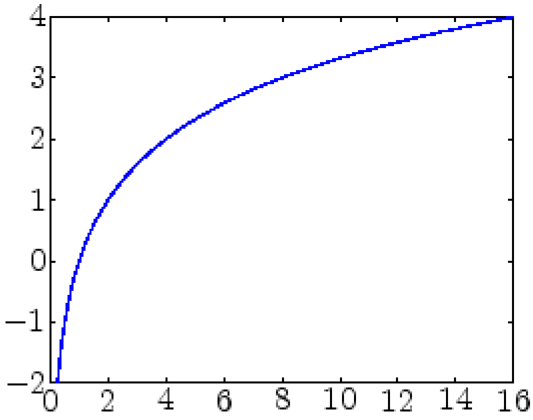
د معکوس یا په ځښ تابع سره

$$x = \log_a y, \quad y > 0.$$

په ځانګړي توګه سړی لیکي $\log = \log_{10}$ د لوګاریتم لپاره د 10 بنسټ سره او $\text{ld} = \log_2$ د دوال لوګاریتم لپاره.



$f(x) = 2^x$



$f(x) = \text{ld}(x)$

د ودې قانون

$$y = a^x, \quad a > 0$$

کیدی شي نیم لوګاریتمي دکښل شي. دلته په یوه محور x او په بل محور $\log y$ لیکل کیږي. د x او $\log y$ ترمنځ نسبت د ودې قانون له مخې کرښیز دی او رسم شوې کرښه لاندې جګړالی لري

$$m = \log a.$$

یو بل امکان دادی، چې په دواړو محورونو یو لوګاریتمي سکالا وکاروو.
دا د بېلګې په توګه د ناتیکاوي ارزښت لپاره

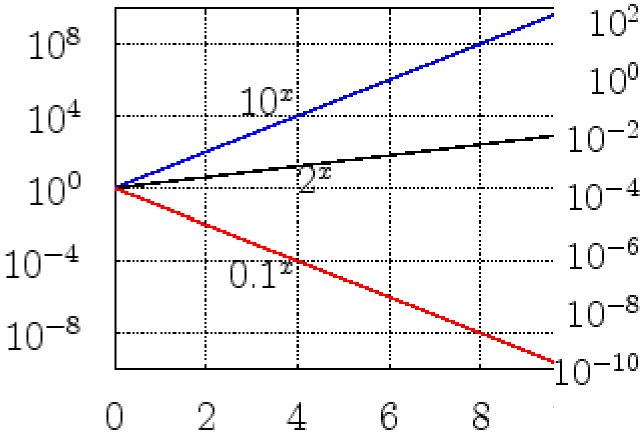
$$\varepsilon \approx cn^{-k}$$

مناسب ده. دا چې

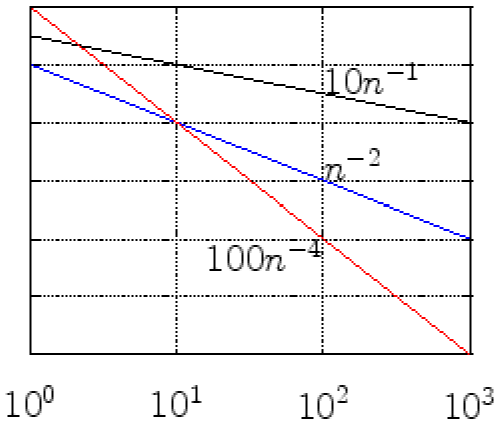
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\log \varepsilon = \log c - k \log n\,,$$

د کرښې کميز يا منفي چګېدنه ورکوي.



$y = 2^x, 10^x, 0.1^x$



$\varepsilon = 10n^{-1}, n^{-2}, 100n^{-4}$

د توان او لوګاريتم لپاره شميرقوانين

Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

د اکسپوننشل – او لوګاريتمي توابعو د تعريف او تابع مساواتو څخه لرو

$$\begin{aligned} a^{s+t} &= a^s\, a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy), \\ a^{s-t} &= a^s / a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y), \\ (a^s)^t &= a^{st} & \log_a x^t &= t \log_a x\,. \end{aligned}$$

برسېره پردې د دوه مختلفو بنسټونو ت رمنځ د شمېربدلون لپاره باور لري

$$\log_b x = \log_b a\ \log_a x\,.$$

په ځانګړې توګه دی

$$\log x = (\log e) \ln x\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کنوپف

که کيږدو

$$x = a^s, \quad y = a^t,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د توان او لوګاریتم د فرمولونو ورته وال یا برابرارزښتوالی روښانه دی. لومړي دواړه کټمټوالي د تابع مساواتو څخه لاس ته راځي او دریم له تعریف $b^r = e^{r\ln b}$ څخه.:

$$(a^s)^t = (e^{s\ln a})^t = e^{st\ln a} = a^{st}.$$

د شمیبدلون فرمول برابرارزښت دی و لاندې ته

$$x = b^{\log_b a\,\log_a x},$$

او د ساده ونې له لارې ښی اړخ لاس ته راځي.
لیکونکي: هیولیګ، کنوپف

لاندې دواړه بېلګې دشمېقوانین تشریح کوي یا په ګوته کوي.

(i)

$$\ldots^2) - 2\ln(2) = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 = 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 = 2\ln x$$

(ii)

$$\log_4(x^2) + \mathrm{ld}(2x) = 2\frac{\ln x}{\ln 4} + 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + \frac{\ln x}{\ln 2} + \frac{\ln x}{\ln 2} = 1 + 2\frac{\ln x}{\ln 2}$$

های پرابول تابع **Hyperbelfunktionen**

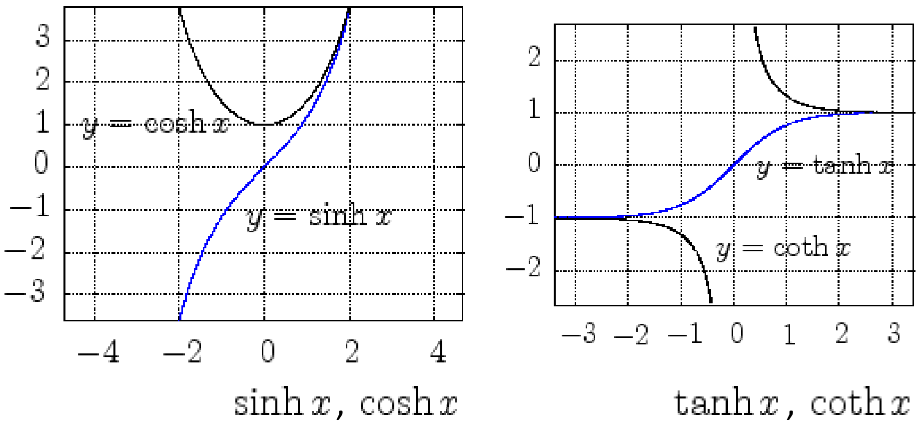
تریګونومتریکي توابعو ته ورته تعریفوو

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

همداسې

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = 1/\coth x.$$

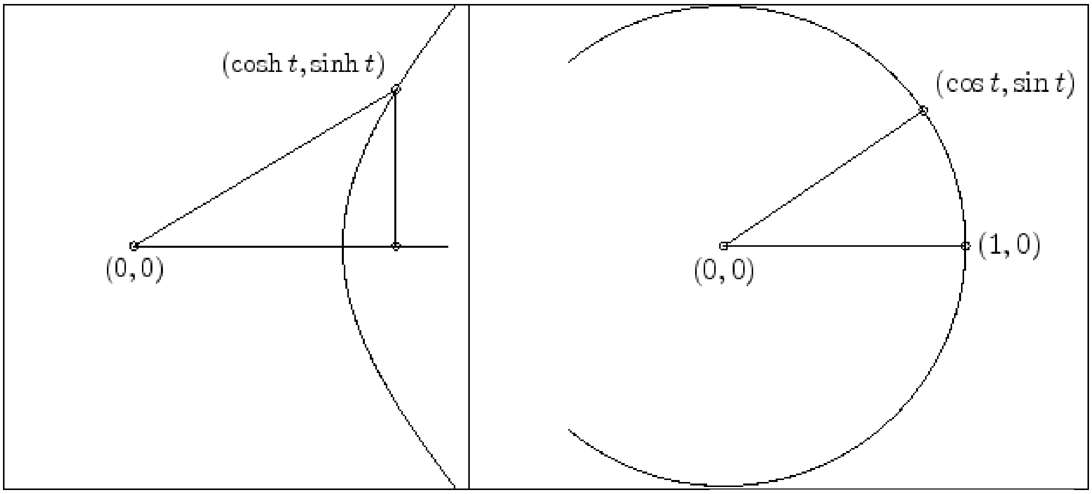
(c) ketabton.com: The Digital Library



معکوس يا په خټ توابع اکسپليثيت يا په روښانه توګه ورکول کيږي:

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \qquad -\infty < x < \infty$$
$$\operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \qquad 1 \le x < \infty.$$

د هاپربول تابع نوم د لاندې کتمتوالي څخه رانيول شوی



$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

دا روښانه کوي، چې د $t \mapsto (\cosh t, \sinh t)$ له لارې د هايرابول يو ښاخ پارامتري کيږي..

له $y = (e^x - e^{-x})/2$ څخه د e^x سره ضرب له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1}.$$

د مربع مساوات دويم حل د $e^x > 0$ له امله بايد په پام کې ونه نيول شي. د لوګاريتمي کونې څخه لاس ته راځي

$$\operatorname{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

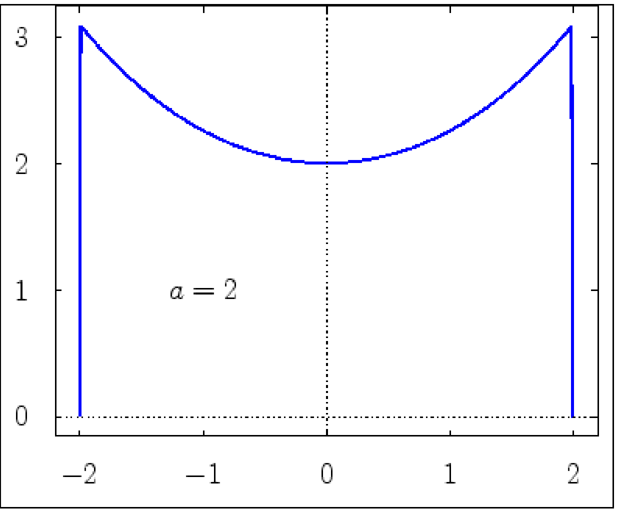
د کوساين هوپربوليک د فرمول څخه پورته ته په ورته توګه لاس تره اځي

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0$$

او له دې سره

$$e^x = y + \sqrt{y^2-1}.$$

د لوګاريتم کونې له لارې د په ښت- يا معکوس تابع فرمول لاس ته راځي.
ليکونکي: هيوليک، کنوپف

د يوه هايپارابول په پای ټکو کلک شوي سيم ځګوالی h د خپل وزن له لارې اغيزمنشوی دننی شپانونګ a دی $h(x) = a\cosh(x/a).$ تابع h د لاندې دفرنځيال مساوات حل دی. $h'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+(h')^2}.$	

هايپارابوليکی کتمتوتوالی
Hyperbolische Identitäten

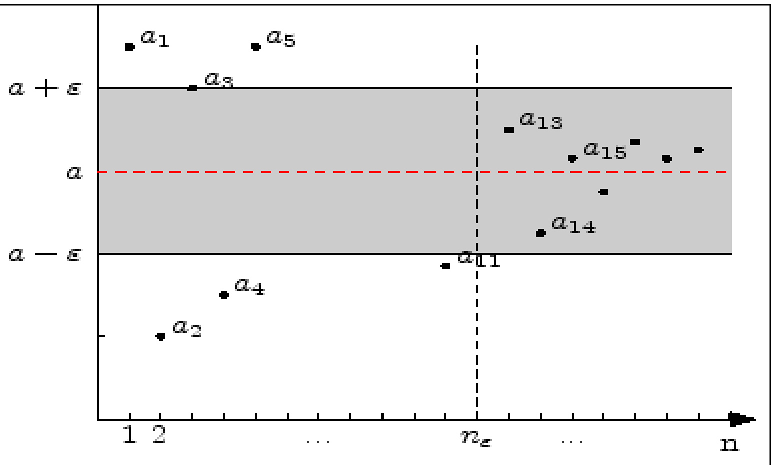
تريګونومتريکي توابعو ته ورته کتمتوالی باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}
\sinh(-x) &= -\sinh x \\
\cosh(-x) &= \cosh x \\
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \\
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1\,,
\end{aligned}$$

چې د تعريفونوو له لارې کېدی شي نازک شي

د يوې پرلپسې (ترادف)پوله ارزښت
Grenzwert einer Folge

يوه پرلپسی $(a_n) = a_1, a_2, \dots$ د يوه پوله ارزښت a په لور هڅيرږي، $a = \lim_{n\to\infty} a_n,$ که هر $\varepsilon > 0$ ته يو n_ε داسې شتون ولري د $\lvert a_n - a \rvert < \varepsilon$ $n > n_\varepsilon$ سره د ټولو لپاره	

دا $a_n \to a$ ليکدود هم د يوې پرلپسې د کونورګنت يا پولې ته تلو لپاره کارول کيږي .

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (a_n) پوله ارزښت ونه لري، نو پرلپسې دیورګنت یا پولې ته نه تلونکې بللکیږي.

پای.

د دې لپاره چې د کونورګنت-قضیه وښایو یعني $|a_n - a| < \varepsilon$ د $n > n_\varepsilon$ لپاره

وښایو، کیدی شي لومړی دا افاده $|a_n - a|$ د تخمین کوني له لارې پورته لور ته ساده کړو او بیا داسې په نامه نامساوات د n پسې حل کړو.

که دا د بیلګې په توګه د لاندې پرلپسې لپاره وکارول شي

$$a_n = \frac{n^2 + n}{n^2 + 1},$$

کومه چې پوله ارزښت $a = 1$ لري، یو ممکنه تخمین دی

$$|a_n - a| = \left|\frac{n^2 + n}{n^2 + 1} - 1\right| = \left|\frac{n - 1}{n^2 + 1}\right| \leq \frac{n}{n^2 + 1},$$

دا چې $|n - 1| \leq n$ د ټولو $n \geq 0$ لپاره . پرته له دې $n^2 + 1 > n^2$ دی او له دې سره $\frac{1}{n^2 + 1} < \frac{1}{n^2}$ هم . نو له دې لاس ته راځي

$$|a_n - a| \leq \frac{n}{n^2 + 1} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

له دې سره $\frac{1}{n} < \varepsilon$ دی، باید $n > \frac{1}{\varepsilon}$ وي. که n_ε یو طبیعي عدد چې له $\frac{1}{\varepsilon}$ لوی وي ، وټاکو ، نو د ټولو $\varepsilon > 0$ او ټولو $n > n_\varepsilon$ لپاره باور لري.

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرلپسي
$1, q, q^2, \ldots$

د $|q| < 1$ لپاره يو پوله ارزښت 0 لري او د $|q| > 1$ يا $q = -1$ لپاره ديورګنت دی

د پرلپسيو د پوله ارزښت شميرنې لارې
Rechenregeln für Grenzwerte bei Folgen

د پولې ته تلونکې پرلپسي (a_n) او (b_n) لپاره د پولو a او b سره باور لري:

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$
- $\lim_{n\to\infty}(a_n / b_n) = a/b$, falls $b \neq 0$
- ليکونکی: اپپ، هيوليګ

زياتون او کمښت يا کمون : د دريګوډي نابرابرون څخه لاس ته راځي
$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \to 0.$$

ضرب يا ځل: دا چې a_n محدود ده، لرو

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \to 0.$$

وېش: د ټول $n > n_0$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$0 \notin \left(b - \frac{|b|}{2}, b + \frac{|b|}{2}\right) \ni b_n \,,$$

او له دې لاس ته راځي

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{bb_n}\right| \leq \text{const}\, |b_n - b| \to 0,$$

دا په دې معنا چې $1/b_n \to 1/b$. د a_n/b_n پولې ته تلنه دهمدا اوس ښوول شوي د پولې ته تلونکو پرلپسيو ضرب قانون څخه لاس ته راځي.

پای.

که دپرلپسيو توکي د n راشنل تابع وي، $a_n = \frac{p(n)}{q(n)}$ ، نو کيدی شي پوله ارزښت د خورا جګ توان د لنډونې څخه پيداکړی شو. د بيلګې په توګه دی

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - 2n^2}{3n^2 + 4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n - 2}{3 + 4/n} = -\frac{2}{3} \,.$$

په ټوليزه توګه د صورت-درجې j او مخرج-درجې k لپاره باور لري

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_j n^j + \cdots p_0}{q_k n^k + \cdots q_0} = \begin{cases} 0, & \text{für } j < k \\ \frac{p_j}{q_k}, & \text{für } j = k. \end{cases}$$

د $j > k$ لپاره پرلپسې پولې ته نه ځي يعنې ديورګنت ده.

پای.

دمعلومو پوله ارزښتونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

په مرسته لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e\cdot\frac{1}{e} = 1.$$

په پام کې نیسو، چې

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \neq \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^n = 1 \,,$$

ځکه چې د ضرب د ضریبونو ګڼون یا تعداد ثابت نه دی.
لیکونکی: هیولیک، کرایځ

د کوشي قضیه Cauchy-Kriterium

یوه پرلپسې (a_n) ټیک هلته پولې ته ځي، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو n_ε شتون ولري، داسې چې

$$|a_j - a_k| < \varepsilon$$

د ټول $j,k > n_\varepsilon$ لپاره باور ولري.
د کوشي په نوم نومول شوي قضیې په مرسته د پوله ارزښت ثبوت بې د پوله ارزښت پېژندلو ممکن دی.
لیکونکی: اپپ، هیولیګ

د کوشي – قضیې اړینوالی د پوله ارزښت له تعزیف څخه لاس ته راځي:

$$a = \lim a_n \iff |a_m - a| < \varepsilon \quad \text{für } m > m_\varepsilon$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که کیږدو $n_\varepsilon = m_{\varepsilon/2}$ ، نو لرو

$$|a_j - a_k| \le |a_j - a| + |a - a_k| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

د ټول $j, k > n_\varepsilon$ لپاره، حه چې د ښوولو وو.

دا چې شرط پوره کېدونکی هم دی، ستونځمن دی چې و یې ښایو، او دا د حقیقی عددونو په پوره والي ولاړ دی.

پای.

یوه رکورزیو تعرف شوې پرلپسې (a_n) کېدی شي زیات وخت د کوشي-قضیه د تخمینونې له لارې

$$|a_{n+1} - a_n| \le cq^n$$

د $q \in [0,1)$ سره یې ټیکوالی و ازمایل شي. داسې د هندسي پولې ته تلنه د $j < k$ لپاره راکوي

$$|a_j - a_k| \le |a_j - a_{j+1}| + |a_{j+1} - a_{j+2}| + \quad \dots \quad + |a_{k-1} - a_k| \le cq^j\,(1 + q + q^2 + \dots) \le \frac{cq^j}{1-q}.$$

ښی اړخ د $< \varepsilon$ لپاره ده د $j, k > n_\varepsilon = \ln\frac{\varepsilon(1-q)}{c} / \ln q$ لپاره ، نو د کوشي قضیه پوره ده. د ځرګند، د

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}, \quad a_0 = 1,$$

له لارې رکورزیو تعریف شوې پرلپسې a_n د کونورګنځ قضیې د ثبوت لپاره استعمالوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ایندکشن پیل : $(n = 1)$: نامساوات

$$|a_1 - a_0| \leq cq$$

باور لري، که $c = |a_1 - a_0|/q$ کېښول شي.

د ایندکشن پای $(n \to n+1)$: شړی اټکل شوی کمښت یا تفریق د

$$|a_{n+1} - a_n| = |\sqrt{2 + a_n} - \sqrt{2 + a_{n-1}}| = \left|\frac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{2 + a_n} + \sqrt{2 + a_{n-1}}}\right|.$$

په بڼه ښيي.

د اندکشن د نیونې له مخې ښی اړخ $\leq \frac{1}{2\sqrt{2}} cq^n$ دی او د ټاکنې سره

$$q = 1/2\sqrt{2} \leq cq^{n+1}$$

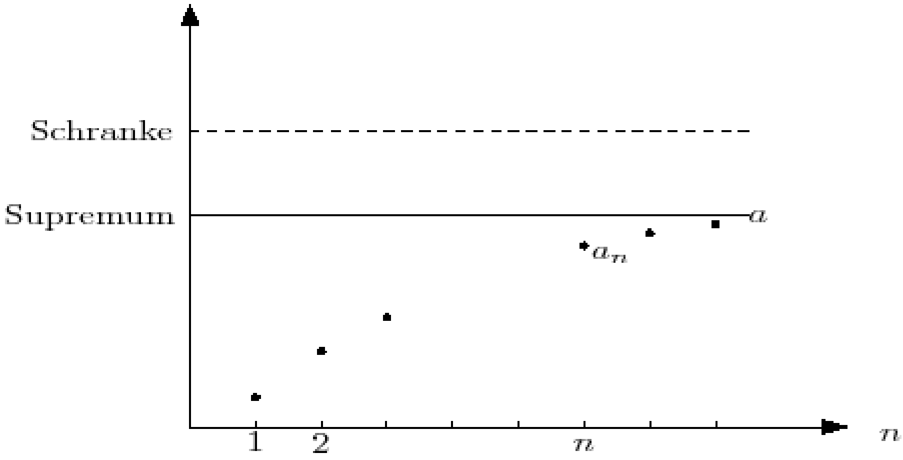
لکه چې غوښتل مو.

پای.

یو غږیزه پولې ته تلنه **Monotone Konvergenz**

یو پرلېسې (a_n) همغږیز جګېدونکي $a_{n+1} \geq a_n$ همداسې همغږیز ټیټېدونکي $a_{n+1} \leq a_n$ بلل کیږي ، که همداسې وي د ټولو n لپاره. دا کره همغږیز جګېدونکي همداسې کره همغږیز ټیټېدونکي بلل کیږي ، که $a_{n+1} > a_n$ همداسې $a_{n+1} < a_n$ وي د ټولو n لپاره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



یوه رابنده یا محدوده ، د $n > n_0$ لپاره همغږیز جګېدونکي یا ټیټېدونکي پرلپسې (a_n) پولې ته تلونکې ده. پوله ارزښت يې د پرلپسې توکو a_n , $n > n_0$. سوپریموم همداسې اینفیموم دی.

لیکونکی: ایپ، هیولیګ

د یوې مونوتون جګېدونکې پرلپسې لپاره د سوپرېموم د تعریف سره، چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو n_ε شتون لري د کوم لپاره چې باور لري

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a = \sup_{n > n_0} a_n$$

د همغږیزوالي په بنسټ دی

$$a - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq a \quad , \text{für } n > n_\varepsilon ,$$

نو $a_n \to a$.

د مونوتون ټیټېدونکې پرلپسې لپاره په ورته توګه دلایل راوړل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پرلپسي پولې ته تلنه

Die Konvergenz der Folge

$$a_n = (1+1/n)^n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

د اويلر عدد e په لور کېدی شي د مونوتون کونورگنت حملې په بنسټ و ښوول شي. دواړه وړاندنيونې(فرضيې) کېدی شي د بېنوم درسي جملې په مرسته و ښوول شي.

(i) رابنديدنه يا محدوديت: له

$$a_n = (1+1/n)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \ldots$$

او

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k} \leq \frac{n^k}{1\cdot 2\cdots 2}$$

لاس ته راځي

$$a_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots \leq 3$$

(ii) همغږيزوالی: سړی a_{n+1} هم د بېنوم له جملې سره شماري:

$$a_{n+1} = 1 + \binom{n+1}{1}\frac{1}{n+1} + \binom{n+1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} + \binom{n+1}{3}\frac{1}{(n+1)^3} + \ldots.$$

که دا په (i)کې د a_n انځورونې سره پرتله کړي، نو سړی کره کوي، چې اړونده ترمونه لوی دي:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{n^k}$$

$$\leq \frac{(n+1)\cdot n\cdots(n-k+2)}{1\cdot 2\cdots k}\frac{1}{(n+1)^k} \quad =$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k}.$$

دا له نامساوات څخه لاس ته راځي

$$\frac{n-j}{n} \leq \frac{n+1-j}{n+1}$$

د يوګونوو ضريبونو لپاره. داچې د a_{n+1} لپاره زياتون يا جمعه لا ترم

$$\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

لري لاس ته راځي

$$a_n < a_{n+1}.$$

ناربښتونی پوله ارزښت **Uneigentliche Grenzwerte**

يوه پرلپسې (a_n) دا ناربښتونی پوله ارزښت ∞ ($-\infty$) لري، که د ټولو $a > 0$ لپاره يو n_a شتون ولري، داسې چې

$$a_n > a \ (< -a)$$

باور ولري د ټولو $n > n_a$ لپاره. پرلپسې چې ناربښتونی پوله ارزښت لري، دا ټاکلي ديورګنت –يا پولي ته نه تلونکې پرلپسې هم بلل کيږي.
ليکونکي:اپپ، هيوليګ، وييپر

د دې لپاره چې وښايو ، چې

$$a_n = \frac{n!}{2^n} \to \infty,$$

دا په دې معنا چې

$$\frac{n!}{2^n} > a$$

د $n > n_a$, لپاره، دا a_n سرى د يوې ساده افادې يا وېينې له لارې کښته لور ته تخمينوي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_n = \frac{1\cdot 2\cdots n}{2\cdot 2\cdots 2} \geq \frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}.$$

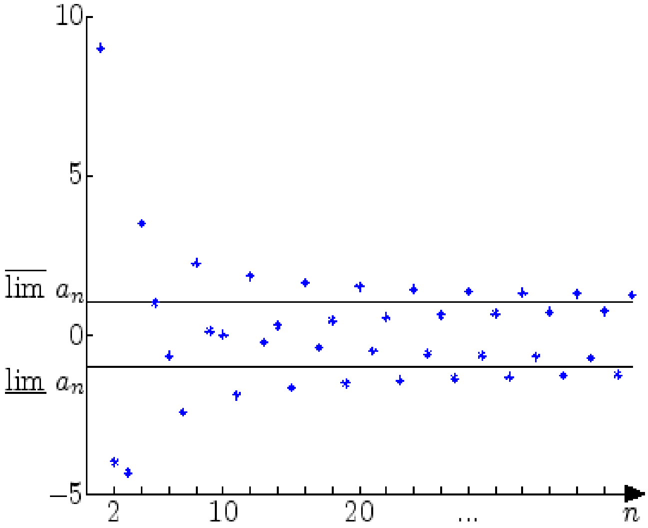
له دې سره له $\frac{n}{4} > a$ همداسې له $n > 4a = n_a$ لرو $a_n > a$

پوله اینفریور او پوله سوپریور(کښته - او پورته پوله ارزښت)
Limes Inferior und Limes Superio

د هرې پرلپسي (a_n) لپاره، په ناصلي حالت کې uneigentlichen Sinn ، یو پوله ارزښت شتون لري.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a_n}\,,\quad \underline{a_n} = \inf_{k\geq n} a_k$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a_n}\,,\quad \overline{a_n} = \sup_{k\geq n} a_k$$



لکه په خيره کې چې شوول شوی دی، پرلپسي (a_n) د همعریزې پرلپسي $(\underline{a_n})$ او $(\overline{a_n})$ له لارې یا نوره هم ښه له لورې رابندې دي:

$$\underline{a_n} \leq a_n \leq \overline{a_n}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که پوله اېنفریور او پوله سوپریور یو په بل پریوځي، نو پرلپسې (a_n) پولې ته تلونکې ده او لرو

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n .$$

لیکونکي: اپپ ،هیولیګ

د پولې اینفریور او پولې سوپریور شتون د هممهغږیز پولې ته تلنې جملې له لارې ترلې لاس ته راځي، خکه چې پرلپسې

$$\underline{a}_n = \inf_{k\geq n} a_n \ , \quad \overline{a}_n = \sup_{k\geq n} a_n$$

همغږیز جګېدونکې همداسې همغږیز ټيټيدونکې دي.
په روښانه توګه باور لري

$$\underline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n .$$

که پوله اینفریور او پوله سوپریور همغه ازښت a ولري، نو لا سته راځي

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره، نو $a_n \to a$.

پرتله کوونکې قضیه **Vergleichskriterium**

که د $\lim a_n = a$ او $\lim c_n = c$ سره د پوره کوچنې n لپاره

$a_n \leq b_n \leq c_n$ باور لري، نو دی

$$a \leq \underline{\lim}\, b_n \leq \overline{\lim}\, b_n \leq c.$$

په ځانګړې توګه له $a = c$ د پرلپسې (b_n) کونورګنت لاس ته راځي:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a = c \ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی غوښتنه ساده ده، ځکه چې نابرابرون $\leq$ د پولې ته تګ له امله ساتلی پتیږي:

$$\inf_{k\geq n} a_n \leq \inf_{k\geq n} b_n \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}\, a_n \leq \underline{\lim}\, b_n .$$

په ورته توګه لرو $\overline{\lim}\, b_n \leq c$.

که پوله ارزښتونه سره برابر وي ($a = c$) ، نو باور لري

$$a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$$

د $n > n_\varepsilon$ لپاره. له دې سره لرو $b_n \to a$.
پای.

پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

په لاندې نامساوات باندې د پرتلې قضیې استعمال له لارې لاس ته راځي

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} .$$

دلته ښی نابرابرون د بینوم د فرمول څخه باوري دی:

$$1 \leq n \leq 1 + n \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{4}{n} + \cdots$$

په تولیزه توګه د ضرب قانون څخه لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^k = 1$$

د $k \in \mathbb{N}$ لپاره . د کم نظم ترمونو د په زیاتوالي له امله پوله ارزښت ساتلی پاتیږي. د یوه پولینوم

$$p(n) = a_k n^k + \cdots + a_0 \;,\; a_k > 0$$

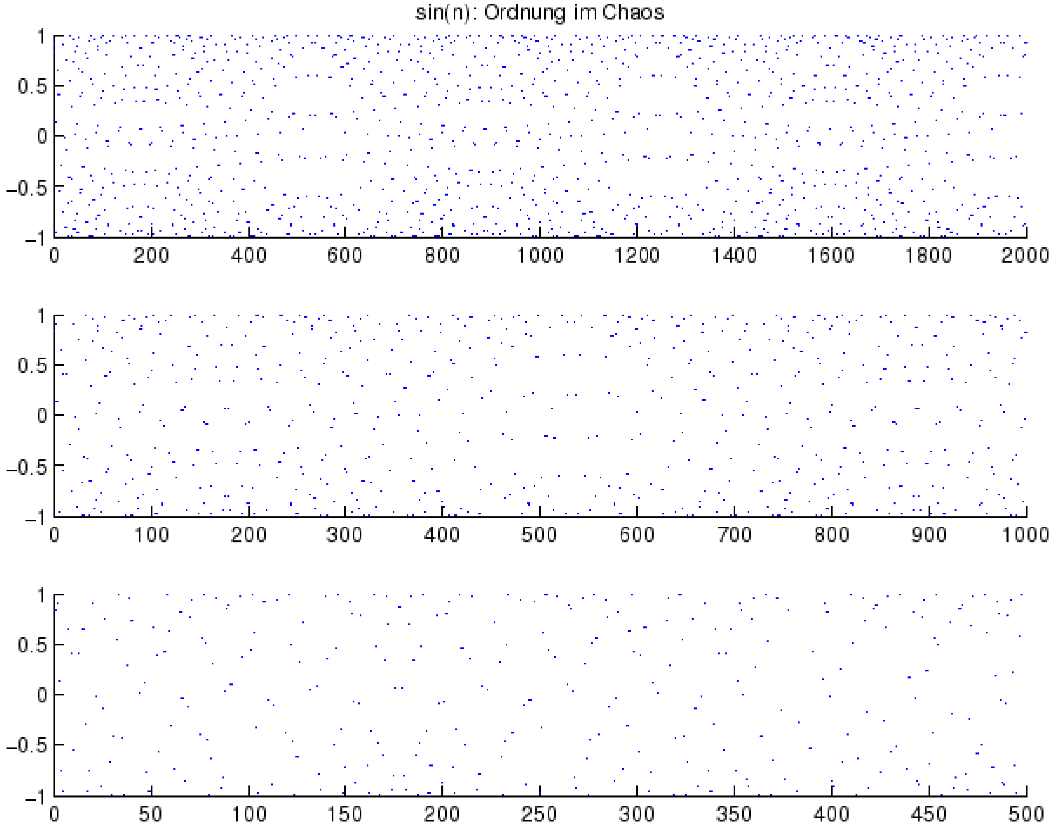
لپاره هم $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1$ دی .

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې پرلپسې پنډغالي ټکی Häufungspunkt einer Folge

یوه پرلپسې (a_n) پنډغالي ټکی a لري، که هر انتروال $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ دپرلپسې ناپای ډېر توکي خوندي ولري. دې ته ورته د یوې برخه پرلپسې باور لري، چې a ته ځي. په ځانګړې توګه یوپوله ارزښت د پرلپسې بنډغالي ټکی هم دی.

خیره پرلپسې $(\sin n)_{n\in N}$ ښایي.



سرې په نږدې توګه د پرلپسې یا ترادف توکو a_n برابروېشنه په انتروال $[-1,1]$ کې پېژني. په ریښتوني ښول کېدی شي، چې په $[-1,1]$ کې هر ټکی د پرلپسې پنډغالي ټکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې پرلپسې يا ترادف (a_n) د پندغالي ټکي د ټاکلو لپاره باید کونورګنت برخه پرلپسې و پیژندل شي.
د بیلګې لپاره

هغه دا دي

$$a_n = \frac{n\sin(n\frac{\pi}{2})}{n+\sin(n\frac{\pi}{2})}$$

$$b_k = a_{2k} = \frac{0}{k}$$

$$c_k = a_{4k+1} = \frac{(4k+1)}{(4k+1)+1}$$

$$d_k = a_{4k+3} = \frac{-(4k+1)}{(4k+1)+1}.$$

له دې سره پنډغالي ټکی لاس ته راځي

$$\lim b_k = 0, \lim c_k = 1, \lim d_k = -1$$

ورهولست- - یا فرهولست- مودل **Verhulst-Modell**

یو بیلجیمي شمیرپوه وو : Pierre-François **Verhulst** [vəɾˈhʏlst]
(* 28. Oktober 1804 in Brüssel; † 15. Februar 1849 ebenda)

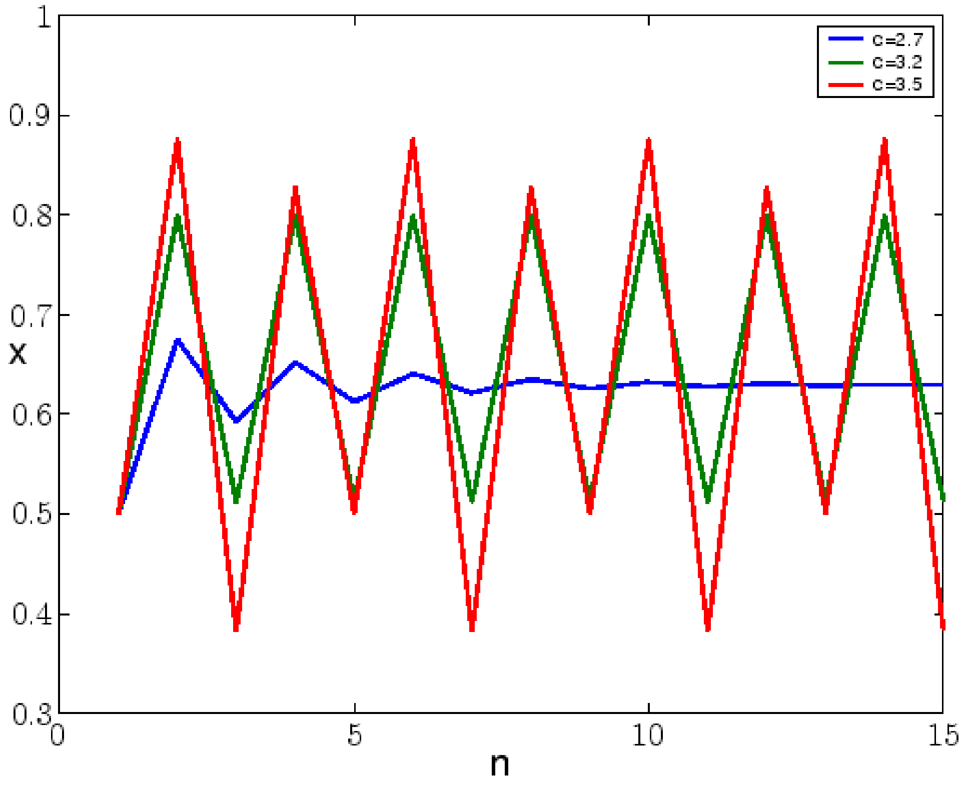
ریکورژن(په ځت ځغاستل) Rekursion

هغه فنکشن، چې د خپل ځان له خوا پیژند لري یا تعریفیږي

$$x_{n+1} = cx_n(1-x_n)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $c \in (0,4]$ سره د نورمال شوي خلکو ګنوالي x_n وده په ګوته کوي. يو څو تيوپيکي بيلګې د ا لاندې څيره ښايي

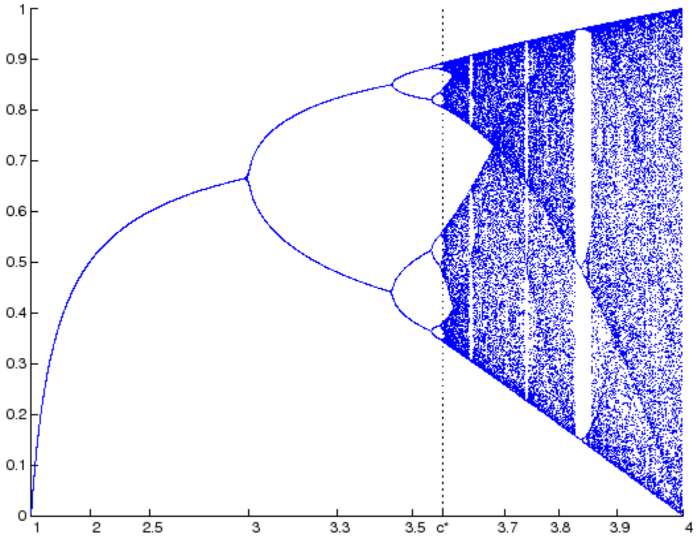


د $c \le 3$ لپاره x_n د $n \to \infty$ لپاره لاندې پولې ارزښت ته ځي

$$x_* = \frac{c-1}{c}\,.$$

د $c > 3$ لپاره سرى اوسځليشن ګوري. که پارامتر تل لوى شي، نو د پندغالي - تکو x_* ګڼون يا تعداد دوه برابره کيږي د افاط پارامتر ارزښتونو c_i څخه اوښتلو باندې يعني له دې نور زياتيدلو باندې . دا په لاندې څيره کې کښل شوى دى، په کوم کې چې د تکي x_* د c -محور پورته لور ته ځاى په ځاى شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n - c_{n-1}}{c_{n+1} - c_n} = 4,69920166\ldots$$

داسې په نامه د انځورونې ثابته ده، چې دا زیات وخت د ځانګو کولو پرابلم کې رول لوبوي.

له پورته ځیرې څخه روښانه کیږي، چې ایتیشن د

$$c > c^* = \lim_{n\to\infty} c_n$$

لپاره یوګډوډیز chaotisches Verhalten حالت ښایي

د پيPi رکورزیو اپروکسیمیشن
Rekursive Approximation von Pi

د a_n او b_n نیم اوږدوالی چې د یوې یوونګردی یا واحد داېرې د $(6 \cdot 2^n)$ -ګوډونو
یا کونجونو په باندې او په کې یعنې په دننه اودباندې لاندې ریکورژن پوره کړي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}, \quad a_0 = 2\sqrt{3}, b_0 = 3,$$

د $\pi = 3.1415926535897932\ldots$ په مرسته اپروکسیمي کیدی شي.
دا فرمول د یوهان فریدریش پفاف Johann Friedrich Pfaff (1765-1825) له خوا
په 1800 زکـ کال میندل شوی.
ارشمیدس Archimedes (287-212 v. Chr.) د 96 ـگوډونو ($n = 4$) او اټکل
یا تخمین سره اړیکي

$$3.140845\ldots = \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} = 3.142857\ldots$$

ومیندلې یا ترې لاس ته راوړې.

د گردئ گڼ یا عدد π له د یو میلیارد ځایونو ډېر شمیرل شوی دی. لاندې جدول د
تاریخي ودې ځخه یوه کاپی راکوي.:

Autor	Jahr		korr. Stellen	Wert
Bibel (1. Könige 7:23)				

Autor	Jahr		korr. Stellen	Wert
Bibel (1. Könige 7:23)	550	v. Chr.	0	3
Babylonier	2000	v. Chr.	1	3+1/8
Archimedes	250	v. Chr.	3	223/71 $< \pi <$ 22/7
Liu Hui	263		5	
Tsu Ch'ung Chi	480		7	
Al-Kashi	1429		14	

(c) ketabton.com: The Digital Library

Romanus	1593		15	
Van Ceulen	1596		20	
Van Ceulen	1615		35	
Sharp	1699		71	
Machin	1706		100	
Rutherford	1824		152	
Strassnitzky/Dase	1844		200	
Shanks	1874		527	
Smith/Wrench	1949		1 120	
Reitwiesner u.a.	1949		2 037	
Genuys	1958		10 000	
Shanks/Wrench	1961		100 265	
Guilloud/Filliatre	1966		250 000	
Guilloud/Dichampt	1967		500 000	
Guilloud/Bouyer	1973		1 001 250	
Kanada/Yoshino/Tamura	1982		16 777 206	
Kanada/Tamura/Kubo u.a.	1987		134 217 700	
Chudnovskys	1989		1 011 196 691	

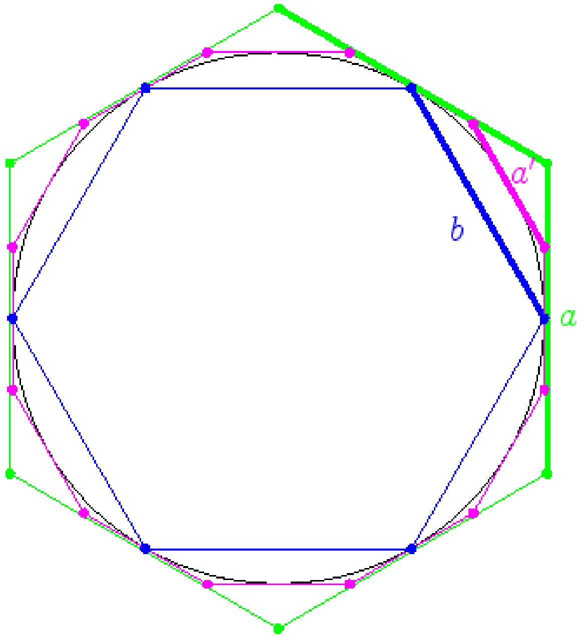
پای.

د ج.ف. پفاف ریکورزیون په ساده هندسي پامکونې باندې ولاړ دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وړانګې (تالس) جملې له مخې د a_n لپاره لاس ته راځي:

$$a' : b = \left(\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}\right) : \frac{a}{2} \Leftrightarrow a'a = ba - ba' \Leftrightarrow a' = \frac{ab}{a+b} .$$



که $k_n = 3 \cdot 2^n$ د ډېرګوډي نیم د اړخونوګڼون یا تعداد په ګوته کړي، نو باور لري

$$a_n = k_n a \, , \; b_n = k_n b \Rightarrow a_{n+1} = k_{n+1} a' = 2k_n \cdot \frac{ab}{a+b}$$

$$= 2\frac{(k_n a)(k_n b)}{k_n a + k_n b} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} .$$

د b_n لپاره ریکورزیون کېدی شي د تریګونومتري توابعو په مرسته و بنوول شي. له

$$a_n = k_n 2 \tan(\pi / (2k_n)) \, , \quad b_n = k_n 2 \sin(\pi / (2k_n))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لاس ته راځي

$$\begin{aligned} b_{n+1}^2 &= 4k_n^2 4\sin^2(\pi/(4k_n)) \\ &= \underbrace{2k_n 2\tan(\pi/(4k_n))}_{a_{n+1}} \underbrace{\cos(\pi/(4k_n)) 2k_n 2\sin(\pi/(4k_n))}_{k_n 2\sin(\pi/(2k_n))=b_n} \\ &= a_{n+1} b_n \,. \end{aligned}$$

د پرلپسيو يا ترادفونو ځانګړي پوله ارزښتونه

يو څو غوره پوله ارزښتونه په لاندې جدول کې راوړل شوي

a_n	$a = \lim_{n\to\infty} a_n$
$\sqrt[n]{n}$	1
$n^\alpha q^n\,,\ \lvert q\rvert < 1$	0
$n^{-\alpha}\ln n\,,\ \alpha > 0$	0
$q^n/n!$	0
$n!/n^n$	0
$(1+1/n)^n$	e
$(1-1/n)^n$	$1/e$

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

زيات واره کيدی شي پوله ارزښتونه وشميرل شي، داسې چې سړی د مناسب ښه بدلون له لارې معياري افادې ته بېرته ولاړ شي. دا د دوه بيلو سره روښانه کيږي.
(i) د پرلپسې پوله ارزښت شمېرلو ته

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+3}\right)^{4n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

سړی ږدي

$$m = 2n + 3,\ n = \frac{m-3}{2}$$

او لاس ته راوړي

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{2m-6}.$$

په دې پسې يا د دې په تعقيب دی

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right)^2 \cdot \left(\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)\right)^{-6} =$$

$$= e^2 \cdot 1^{-6} = e^2.$$

$$a_n = \binom{3n}{n} / 2^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

(ii) د دې لپاره چې د
پوله ارزښت وشميرو، سړی ليکي

$$a_n = \frac{(3n)(3n-1)\cdots(2n+1)}{n\cdot(n-1)\cdots 1} \cdot \frac{1}{2^n} =$$

$$= \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{3-1/n}{2} \cdots \frac{2+1/n}{2}\right) \cdot \frac{n^n}{n!}.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې په نوکانو کې افاده ≥ 1 ده لرو

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$$

د لاندې بڼې پوله ارزښت

$$\frac{a_n \pm b_n}{c_n \pm d_n}$$

په مناسب ډول سرې داسې شميري، چې سرې د مطلق ارزښت د لويې پرلپسې توکو سره ووېشي:

د بيلګې په توګه دا پوله ارزښت

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(3+\sqrt{n+4})^2}{5n+\ln\, n}$$

که غواړو وشميرو، نو مات يا کسر په لاندې بڼه ليکو

$$\frac{9+3\sqrt{n+4}+n+4}{5n+\ln\, n} = \frac{13/n+6\sqrt{1/n+4/n^2}+1}{5+(\ln\, n)/n}.$$

دا چې $1/n, 1/n^2$ او $(\ln\, n)/n$ د صفر پهلور ځی، نو پوله ارزښت دا لاندې دی

$$\frac{0+6\cdot\sqrt{0}+1}{5+0} = \frac{1}{5}.$$

د يوې لړۍ پرلپسې (لنډ: لړۍ) پوله ارزښت
Grenzwert einer Reihe

يو زياتون يا جمعه $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ دډېروو زياتيدونو سره لړۍ بلل کيږي. دا د يوې پولې ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

په لور هڅیږي، که ټوټه زیاتوونویا – جمعو

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

پرلپسې (s_n) د s لور ته وهڅیږی یا کونورګنت شي. که پوله ارزښت شتون ونه لري
نو پرلپسې پولې ته نه تلونکې یا دیورګنت بلل کیږي.
پوله ارزښت کېدی د زیاتوونو (هغه عددونه چې یو په بل زیاتیږي) د لړۍ پرلپسې په
واک کې وي، همداسې اړتیا نه شته چې د نظم بدلون وروسته شتون ولري.

د یوې لړۍ د پولې ته تلنې لپاره اړیین (شرط) دی، چې

$$\lim a_n = 0.$$

فقط په لږو حالتونو کې د یوې لړۍ روښانه یا اکسپلیځیټ شمېرنه ممکن ده. یوه بېلګه
یې د ټاکلو لړیو ده د راشنل زیاتیدونو سره لکه

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} = \frac{3}{2}.$$

د ټوټه کسر ټوټه ونې وروسته

$$\frac{2}{n^2-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1},$$

کېدی شي دا لړۍ په

$$(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) + \ldots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

بڼه ولیکل شي. تر $\frac{1}{1}$ او $\frac{1}{2}$ پورې تول زیاتېدونې یو بل له منځه وړي یا پورته کوي، داسې چې پوله ارزښت $\frac{3}{2}$ ترلې لوستل کېدی شي.

د توته زیاتون د کمښت لپاره د تول $n < m$ لپاره باور لري

$$|s_n - s_m| =$$

$$= |(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}) + \ldots + (\frac{1}{m-3} - \frac{1}{m-1}) + (\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m})| \leq$$

$$\leq \frac{4}{n-1},$$

داچې منځني ترمونه سره پورته کیږي یا له منځه سره وړي. توته زیاتون یا ـجمعه د کوشي – پرلپسې جوړوي:

$$n > 1 + \frac{4}{\varepsilon}. \qquad |s_n - s_m| < \varepsilon$$

د لپاره

و پولې ارزښت ته کمون یا تفریق دی

$$|\frac{3}{2} - s_n| = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \frac{2}{n}.$$

بیلګه دا هم ښایي، چې د زیاتوونو یا د جمعې د غړو لړۍ پرلپسې غوره یا ښه روښانه ده.

که لړۍ پرلپسې

$$(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8} - \frac{1}{5}) +$$
$$+ (\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16} - \frac{1}{6}) + \ldots,$$

وټاکو، نو هر ه په نوکالانو کې افاده $\geq \frac{1}{4}$ ده، نو لړۍ پرلپسې دیورګنت ده.

هندسي یا ځمککچیزې لړۍ
Geometrische Reihe

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځمکچیزه لړۍ $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ تیک هلته پولې ته ځي، $|q| < 1$ وي.
د هندسي زیاتونفرمول سره

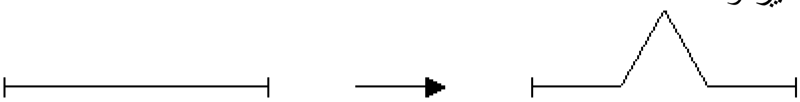
$$s_n = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

کېدی شي پوله ارزښت وښانه یا اکسپلیڅیت وشمېرل شي:

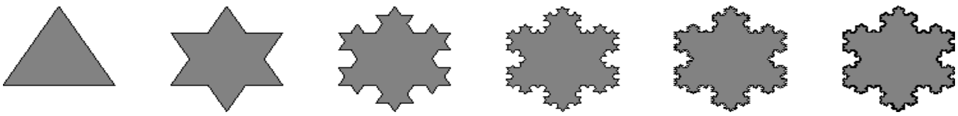
$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + \cdots = \frac{1}{1 - q}$$

د $|q| < 1$ لپاره.
پای.

که د یوه برابر اړخیز درېکوډي یا مثلث مخ ته تګ سره ژۍ د قانون یا قاعدې سره سم کیږدو



نو یوه ډېرۍ یا ستې لاس ته راځي د وتلو ژیو سره ، داسې په نامه د کوښ-د واورو پوټې Koch-Schneeflocke.



- $1/3$-م د واورو پوټی $3 \cdot 4^n$ ژۍ لري. دا چې د هر پل سره په ضریب کمیږي، نو د دې څومره والي لپاره لاس ته راځي

د ژیو ګښون یا – تعداد ضرب د ژیو اوږدوالی:

$$\left(3 \cdot 4^n\right)\left(3^{-n}\right) = 3\ \left(\tfrac{4}{3}\right)^n \to \infty,$$

،

دا په دې معنا چې د ژیو اوږدوالی پولې ته نه ځي یا دیورګنت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په n -م پل سره $3\cdot 4^{n-1}$ برابراړخيز درېګوډي لاس ته راځي د ژيو اوږدوالي 3^{-n} او سطحي $\sqrt{3}/4\,(3^{-n})^2$ په ور زياتوالي سره. په دې توګه د n –م د واورو پوټي د سطحې لپاره راکوي

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\sum_{i=1}^{n}\left(3\cdot 4^{i-1}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(3^{-i}\right)^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\frac{4^{i-1}}{9^{i-1}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{4}{9}\right)^i\right).$$

دا وتلي پوله ډېرۍ په پسې توګه سطحه لري

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-4/9}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

هارموني لړۍ Harmonische Reihe

هارموني لړۍ

$$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k},$$

پولې ته نه ځي يا همداسې ناټاکلی پوله ارزښت $s=\infty$ لري.
په ټوليزه توګه لړۍ

$$s_\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-\alpha}$$

د $\alpha\le 1$ لپاره ديورګنت او $\alpha>1$ لپاره پولې ته تلونکې ده. يو څو ځانګړي ارزښتونه د.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots ,$$

$$s_4 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots ,$$

$$s_6 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-6} = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \dots .$$

مطلق پولې ته تلونکې لړۍ **Absolut konvergente Reihen**

که

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|,$$

پولې ته لاړ شي، نو لړۍ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ مطلق پولې ته تلونکې بللل کیږي.

د کونورګنت د دې قوي بڼې څخه لرو، چې لړۍ د زیاتوونو لړې پرلپسې په خوښه تغیر له امله هم کونورګنت ده یعنې پولې ته ځی.

کوښی (کوشي) – کونورګنت قضیه راکوي:

$$\exists n_\varepsilon : |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| < \varepsilon \quad \text{für} \quad m,n > n_\varepsilon$$

د درېګوډي نابرابرون په مرسته د ټوټه زیاتون د کمښت لپاره لاس ته راځي:

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \cdots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \cdots + |a_n| < \varepsilon$$

د $m,n > n_\varepsilon$, لپاره ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معناچې د $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ پولې ته تلنه.

مايورانت او مينورانت
Majorante und Minorante

که $|a_n| \leq c|b_n|$ د $n \geq n_0$ لپاره وي او يو مثبت يا زياتيزه ثابته، نو د $\sum b_n$ مطلق کونورګنت څخه د $\sum a_n$ مطلق کونورګنت لاس ته راځي

که برعکس $|a_n| \geq c|b_n|$ وي دېولو تر پای ډېرو n لپارهو نو د $\sum |b_n|$ ديورګنت څخه لاس ته راځي، چې $\sum a_n$ هم مطلق کونورګنت نه ده.

زياتوخت يا زيات واره هندسي لړۍ $\sum q^n$ او لړۍ $\sum n^{-\alpha}$ د پرتله کونې لړۍ په څير کارول کيږي.

د لړۍ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}^{-1}$$

لپاره دی

$$a_n = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{(2n) \cdot (2n-1) \cdots (n+1)} \leq 2^{-n} .$$

د دې په تعقيب هندسي لړۍ $\sum 2^{-n}$ يوه مايورانت ده، نو دا پولې ته تلونکې ده.

د لړۍ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1000}$$

لپاره د $n > 9$ لپاره باور لري

$$a_n \geq \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \,.$$

په دې پسې یا په تعقیب هارموني لړۍ یوه مینورانت ده، نو لړۍ پولې ته نه ځي یا دیورگنت ده.

د وېش قضیه Quotientenkriterium

که $a_n \neq 0$ د $n > n_0$ لپاره وي او یو عدد $q \in (0,1)$ شتون ولري د

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q \,, \quad n > n_0 \,,$$

سره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. برعکس

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 \,, \quad n > n_0 \,,$$

، نو $\sum a_n$ پولې ته نه ځي یا دیورگنت ده.

د پولې ته تلنې لپاره پوره کېدونکې قضیه کېدی شي په ورته بڼه

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

هم ولیکل شي.

په پام کې دې وي، چې پوره کېدونکي پولې ته تلونکي شرطونه رکورزیو د نابرابرون

$$|a_{n+1}| < |a_n| \,, \quad n > n_0 \,,$$

په توگه دی، چې د هغې په بنسټ کومهوینا ممکن نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پای.

که

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\,,\;\left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right|\,,\;\ldots\;\le q\,,$$

وي، نو دی

$$|a_{n+k}| \le q|a_{n+k-1}| \le \ldots \le q^k|a_n|\,.$$

له دې سره هندسي لړۍ یوه مینورانت ده.
د دیورګنت لپاره قضیه راکوي، چې

$$0 < |a_n| \le |a_{n+1}| \le \ldots$$

د $n > n_0$ لپاره. زیاتیدونې صفرپرلپسې نه جوړوي، له کوم چې د $\sum a_n$ دیورګنت
لاس ته راځي یا پولې ته نه تګ..
پای.

د وېش قاعده کېدی شي ګټوره وي که په لړیو استعمال شي، چې د هغې زیاتوونې فاکولتیت او توانونه خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \Big/ \binom{2n}{n}$$

لپاره د بېلګې په توګه سرۍ لاس ته راوړي

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3^{n+1}\,(n+1)!\,(n+1)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{3^n\,n!\,n!} = \frac{3\cdot(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}\,.$$

د دې افادې پوله ارزښت د $n \to \infty$ لپاره $\frac{3}{4}$ دی، پسې(تعقیب) یې لړۍ پولې ته ځي.

د زیاتوونو یو سیده تخمین

$$a_n = \frac{3\cdot 6\cdots 3n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مفصل دی یا ډېر کار غواړي. ضریبونه

$$\frac{3k}{n+k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

له یو څخه هم لوی دي او هم کوچني. سړی باید مناسبې جوړې سره یوځای کاندي، چې یوه تخمین ته راشي.

د ریښي یا جذرقضیه **Wurzelkriterium**

که یو عدد $q \in [0,1)$ د

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le q$$

سره شتون ولري د $n > n_0$ لپاره، نو $\sum a_n$ مطلق پولې ته ځي. که برعکس

$$|a_n| \ge 1$$

وي د ناپای ډېرو n لپاره، نو $\sum a_n$ پولې ته نه تلونکې ده.
د کونورګنت لپاره پوره کېدونکې شرطونه کېدی شي په ورته یا برابر ارزښته بڼې

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

هم ولیکل شي.

که $|a_n| \le q^n$ د $n > n_0$ لپاره باور ولري، نو هندسي لړی یو مایورانت جوړوي.
د دیورګنت لپاره شرط راکوي، چې (a_n) صفر پرلپسې نه ده، ځکه چې $|a_n| \ge 1$ د ناپای ډېرو n لپاره باور لري..

د ریښي قضیه استعما کېدی شي په هغو لړیو ګټوره وي، چې د هغو زیاتونونه n -م توان خوندي ولري. د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^n} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \dots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لپاره سړی د بیلګې په توګه لري

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{|3+(-1)^n|} \,.$$

د دې افادې یا وییني پرلپسې

$$\frac{|x|}{2}, \frac{|x|}{4}, \frac{|x|}{2}, \ldots \,,$$

د

$$q = \frac{|x|}{2}$$

له لارې یا سره محدود ده. په تعقیب یې لړی د $|x| < 2$ لپاره پولې ته ځي.
همدې نتیجې ته رسو، که سړی پوله سوپریور جوړه کړي.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{2} \,.$$

دا د n –مې ریښې اوسځیلیري پرلپسې پولې ته نه ځي بې پروا یا نا غوره یا مهمه نه ده.

د لایبنیڅ قضیه Leibniz-Kriterium

الترنیري (مخ نخښه بدلونې) لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots$$

پولې ته ځي، که (a_k) یوه مونوتون صفر پرلپسې وي. د لړۍ باقیو یا پاتو لپاره باور لري

$$0 \leq |\sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k| \leq |a_{n+1}|.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې الترنیري جمعې ارزښت کېدی شي تل د لومړي زیاتوني د مطلق ارزښت له لارې اټکل شي.

د اټکل په بنسټ

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} - a_{n+2} + \ldots - a_m| \leq |a_{n+1}|$$

د کوښی قضیه پوره ده، او د لپاره د پاتې جمعې اټکل لاس ته راځي.
د دې نامساوات د ښوونې لپاره، چې د لړۍ دپاتې لپاره اټکل راکوي، سړی بې له ټولیزو بندیزونو (o.B.d.A.) $a_{n+1} \geq 0$ نیسي او $s_m - s_n$ د

$$a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{\geq 0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{\geq 0} - \ldots \leq a_{n+1}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي. او د

$$\underbrace{(a_{n+1} - a_{n+2})}_{\geq 0} + \underbrace{(a_{n+3} - a_{n+4})}_{\geq 0} + \ldots \geq -a_m \geq -a_{n+1}$$

له لارې کښته لور ته اټکل کوي

د لایبنیځ قضیې سره د الترنیري هارموني لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2\,;$$

پولې ته تګ لاس ته راځي ، پرلپسې

$$a_n = \frac{1}{n}$$

په روښانه توګه یوه همغږېزه صفر پرلپسې ده. د n –م ټوټه جمعې ناټیکاوی ، دا په دې معنا چې د لړۍ پرلپسې مطلق ارزښ دا لاندې دی

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} - \ln\,2\right| \leq \frac{1}{n+1}\,.$$

د لایبنیځ قصیې دواړه وړاندنیونې غوره دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n} = -\frac{2}{1}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{5}{4}-\ldots$$

لړۍ لپاره زیاتووني a_n صفرپرلپسې نه جوړوي. له

$$|s_{n+1}-s_n| = |a_{n+1}| \geq 1$$

څخه دیورګنت لاس ته راځي.

د

$$\sum_{n=1}^{\infty} \max\left(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^n}{2n}\right) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\ldots$$

لړۍ لپاره زیاتوونې a_n همغږیزې نه دي. که یو په بل پسې زیاتوني سره یوځای کړو، نو لاس ته ترې راځي

$$b_n = a_{2n-1}+a_{2n} = -\frac{1}{2(2n-1)}+\frac{1}{2n} = \frac{2n-2}{(4n-2)(2n)} \geq \frac{1}{4n}$$

für $n > 1$.

په تعقیب هامونې لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ یوه مینورانت ده، نو له دې کبله لړی دیورګنت ده.

د اویلر **Euler** ګڼ یا عدد **e** دیوې پرلپسې او یوې لړۍ پولې په حیث

د اویلر عدد $e = 2,71828182845905\ldots$

(c) ketabton.com: The Digital Library

کیدی شي د یوې پرلپسې او یوې لړۍ پوله ارزښت پّ ځیر انځور شي

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

پای.

د لړۍ پولې ته تلنه له $1/n! \leq 4\cdot 2^{-n}$ څخه د مایورانت قضیې په بنسټ لاس ته راځي.

د لاندې دواړو اټکلونو په بنسټ د e سره نومول $a_n = (1+1/n)^n$ پرلپسې شوي یا په نخښه شوي پوله ارزښت په لور ځي.

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \leq e$$

. (a)

د ښووني لپاره لومړی په پام کې نیسو چې د $n \geq k \geq 0$ لپاره

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\,\cdots\frac{n-k+1}{n} \;\leq\; \frac{1}{k!}$$

دی. له دې سره د بینوم فرمول څخه لرو

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq e$$

او دپوله ارزښت جوړولو سره غوښتنه لرو.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \geq e$$. (b)

د ښووني لپاره $N \geq 1$ په خوښه تاکو مګر کره او د $n > N$ لپاره لرو:

$$a_n \geq \sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\,\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\,\cdots\frac{n-k+1}{n} \geq \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\left(\frac{n-N}{n}\right)^N.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له دې سره لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{N}{n}\right)^{N} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$$

او د پولې ارزښت جوړولو($N \longrightarrow \infty$) سره غوښتنه.

له (a)او (b) څخه د $\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$ له امله لرو :

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n = \overline{\lim}_{n\to\infty}\, a_n = e.$$

د لړيو ځانګړي پوله ارزښتونه

په لاندې کې د څو غوره لړيو پوله ارزښتونه ورکړ شوي.

.

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1-q}$$, für $|q| < 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \infty$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots = \ln 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

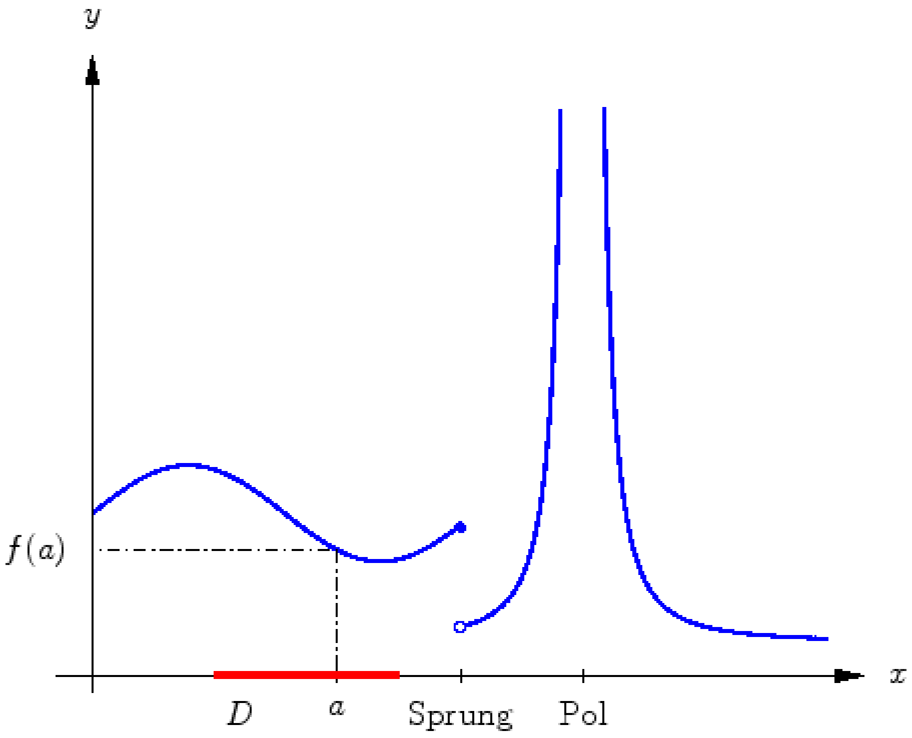
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \pm \cdots = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \pm \cdots = \frac{1}{e}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k \cdot 2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \cdots = \ln 2$$

ناپرېکیدنه یا متمادیت **Stetigkeit**



(c) ketabton.com: The Digital Library

یو تابع f په ټکی a کې ناپرېکیدونکی یا متمادي دی، که د ټولو پرلپسیو (x_n) لپاره د د پولې a سره د تابع ارزښت $f(x_n)$ د $f(a)$ په لور کونورګنت وی یا هڅیږي:

$$x_n \to a \Longrightarrow f(x_n) \to f(a)\,,$$

د پوله ارزښت د تعریف له مخې هر $\varepsilon > 0$ ته یو δ_ε شتون ل ري د $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ سره د $|x - a| < \delta_\varepsilon\,,$ لپاره ، او سړی لیکي

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$
.

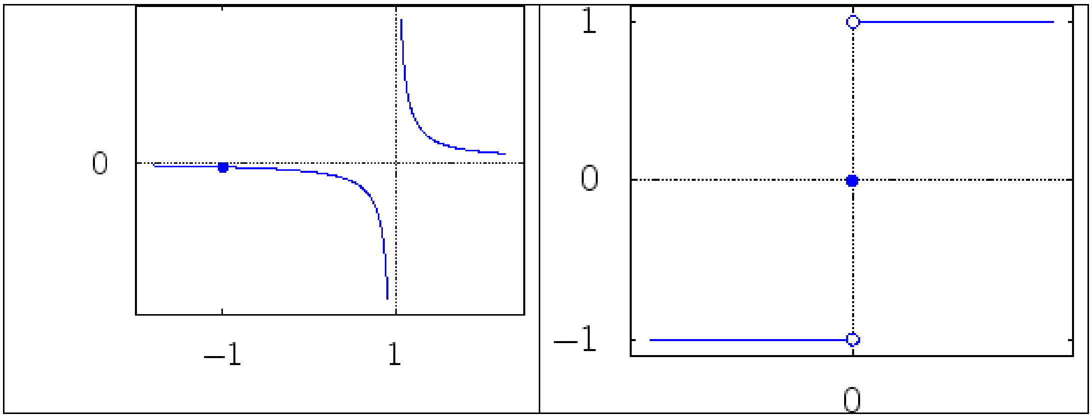
یو تابع په یوه انتروال D ناپرېکیدونکې ده، که دا د D په هر ټکي کې ناپرېکېدونکې وي.

دا په دې معناچې د f ګراف سره تړلی دی، تابع ګام یا ټوپ نه وهي او قطب نه لري (لنډ: نه پرې کیږي او نه ماتیږي).

بالاخره ناپرېکېدنه په دې معنا ده، چې ګراف بې له دې چې (پنسل پورته شي) پرې شي رسم کیږي.

$g(x) = \dfrac{x+1}{x^2-1}$ فنکشن	$f(x) = \mathrm{sign}(x)$ فنکشن

(c) ketabton.com: The Digital Library



پورته دواړه بيلګې د پرېکيدني مختلف تيوپونه ښايي.

د سيګنوم تابع sign په صفرځای کې يو توپ وهي. په حقيقت کې د تابع ارزښت $\operatorname{sign}(0)=0$ تعريف دی، مګر د $f(x)$ پوله ارزښت د $x \to 0$ لپاره شتون نه لري.

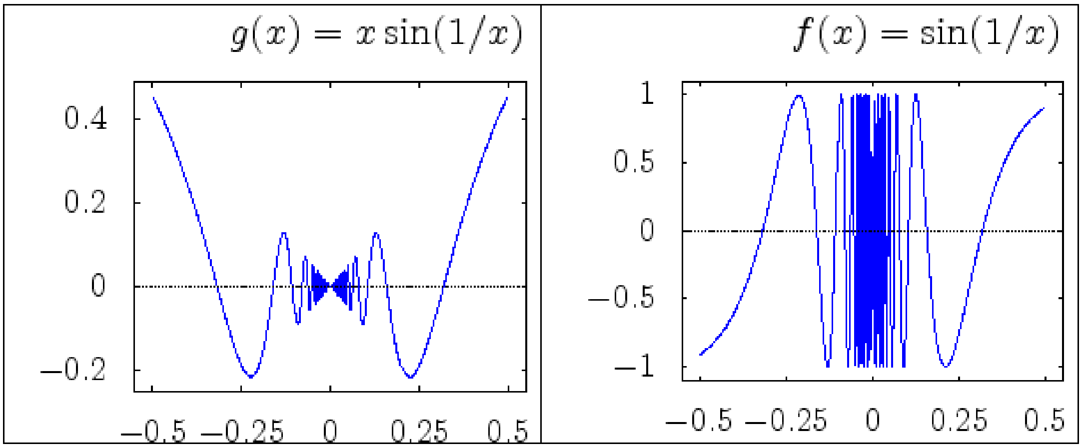
تابع په $x = \pm 1$ کې تعريفتشيا لري. د $x \to 1$ لپاره $|g(x)|$ د ∞ په لور هڅيږي، g هلته يو قطبځای لري. مګر سره له دې هم پوله ارزښت $\lim_{x \to -1} g(x)$ شتون لري. دا ترلی د کرښيز ضريب $(x+1)$ د لنډوني څخه کټل کيږي.

$$g(x) = \frac{1}{x-1}, \; x \neq -1 .$$

دا يوه له منځه وړونکي يا پورته کيدونکي تعريفتشيا ده. د تابع ارزښت $g(-1) = -\frac{1}{2}$ د تکميلوني له لارې g په $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ باندې يو ناپرېکيدونکی تابع کيږي.

پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library



تابع (خيرې يې پورته دي)

$f(x)=\sin(1/x)$

په صفر 0کې پرېکيدونکې ده، ځکه چې د $x\to 0$ لپاره د -1 او 1 ترمنځ اوسخيلی کيږي.

برعکس ياپه ښت د تابع

$$g(x)=x\sin(1/x)$$

تعريفتشيا په $x=0$ کې پورته کيدونکې يا له منځه وړونکي ده.

له

$$0\le|x\sin(1/x)|\le|x|$$

د $\lim_{x\to 0}|x|=0$ سره د پرتله کيدونکي قضيې په بنسټ لاس ته راځي

$$\lim_{x\to 0}x\sin(1/x)=0.$$

له دې امله کيدی شي د g

(c) ketabton.com: The Digital Library

$g(0) = 0$

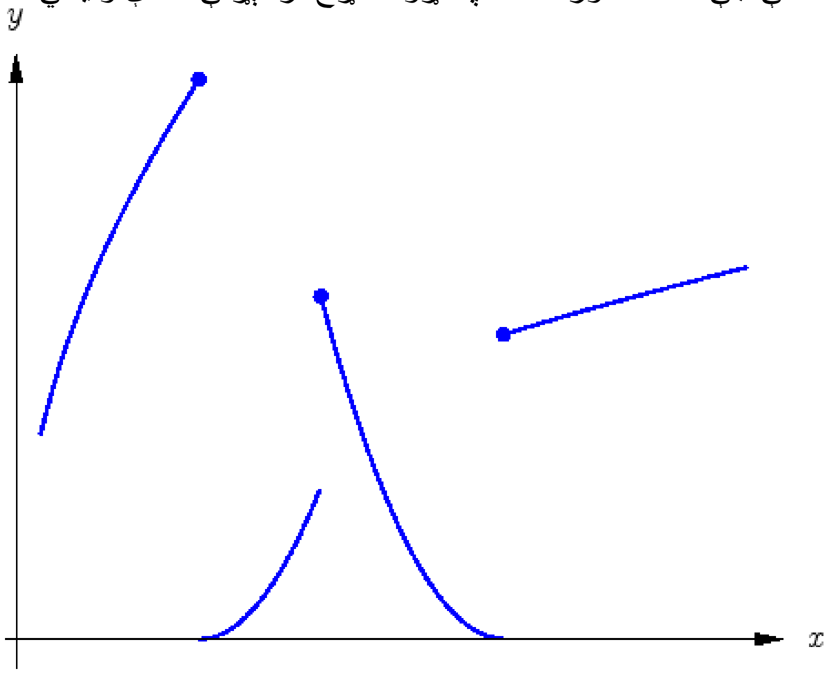
اینوونې له لارې یوه په ټول $\mathbb{R}$ ناپرېکېدونکي تابع ته پوره شي.

یو اړخیز ناپرېکېدنوالی یا متمادیت Einseitige Stetigkeit

ناپرېکدنوالي ته ورته سرې کېږ- همداسې ښی ناپرېکېدنوالی تعریفوي

$$\lim_{x\to a-} f(x) = f^{-}(a)\,, \qquad \lim_{x\to a+} f(x) = f^{+}(a),$$

داسې چې د x محور د a په اړونده اړخ ترځېړنې لاندې ونیسي



که د f په یوه ټوټځای تابع ارزښت تعیف وي، نو دا په ګراف کې پنډ په نخښه کېدی شي، چې روښانه شي چې د کېږ- یا ښي اړخ د پولې ارزښت سره سر خوري.

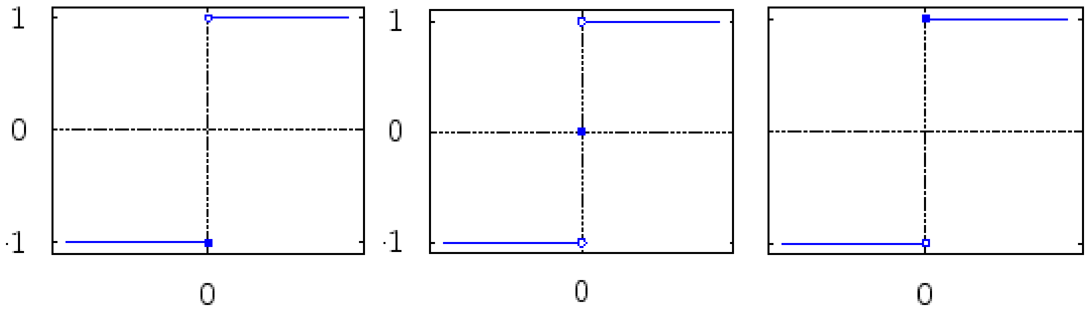
پای.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع

$$f(x) = x/|x|$$

په ټولو ټکو کې تر تعریفتشیا $x = 0$ پورې ناپرېکیدونکي ده.



که $f(0) = -1$ کېږدو نو تابع به کیڼ اړخیزه او د $f(0) = 1$ سره ښی اړخیزه ناپرېکېدونکي په 0 کې مخ ته لاړه شي. د $f(0) = 0$ لپاره د سیګنوم-تابع

$$f(x) = \text{sign}(x),$$

لاس ته راځي، چې دا په 0 کې نه ښی – او نه کینه ناپرېکېدونکی دی.

د ناپرېکیدونکو توابعو لپاره لارې یا قاعدې

په یوه ټکي a کې ناپرېکېدونکي توابعو f او g لپاره

$rf \quad (r \in \mathbb{R})$

$f \pm g$

fg

f/g (وي $g(a) \neq 0$) که

$f \circ g$

په a کې ناپرېکیدونکي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په ورته وګه په یوه انتروال D ناپرېکېدونکې تابع همداسې د کېږ – اوښې اړخيز ناپرېکېدنوالي ځايونو لپاره باور لري.
پای.

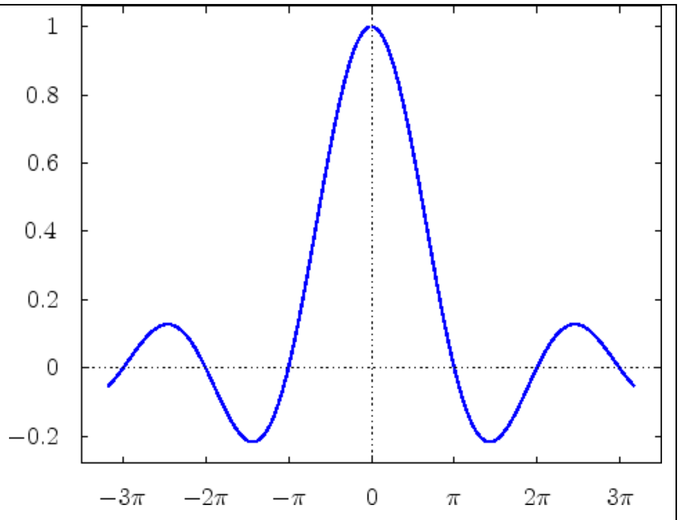
دا لار د پوله ارزښت لپاره اړونده وينا ښخه تړلې لاس ته راځي.
که دېبلګې په ت وګه د ناپرېکېدونکو توابعو کمپوزېشن(ترکيب) تر څېړنې ونيسو، د g د ناپرېکېدنوالي ښخه د هرې پرلپسې (x_n) لپاره د پوله ارزښت a سره دا راکوي

$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a).$$

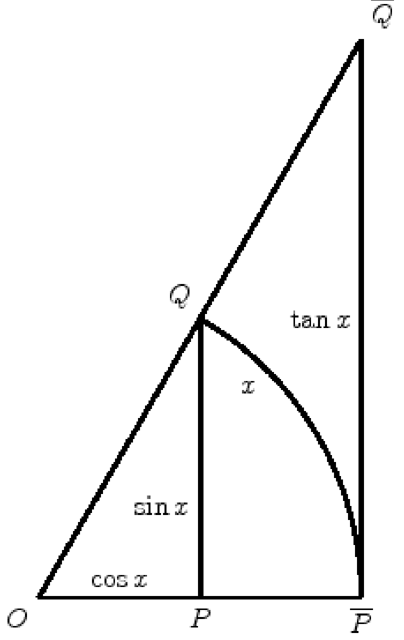
دا چې f هم ناپرېکېدونکی دی، لاس ته راځي

$$\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f(g(a)).$$

پاي.

داسې په نامه sinc - تابع. $f(x) = \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$ د مخ ته بيولو يا دوام $f(0) = 1$ سره په $\mathbb{R}$ باندې ناپيکېدونکې ده. ښوونه يې د ترېګونومتريک توابعو په تخمين پورې اړه لري.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

<table>
<tr>
<td>
د ردېګوډي $\Delta(OPQ)$ ، د ګردی ټوټه وونې یا
وتر او درېګوډي $\Delta(O\overline{P}\overline{Q})$ د سطحو د پرتلې
له لارې په څېره کې کتل کیږي، چې
$$\frac{\sin x\cos x}{2}\le\frac{x}{2}\le\frac{\tan x}{2}$$
همداسې
$$\frac{1}{\cos x}\ge\operatorname{sinc}x\ge\cos x,$$
د $\sin x/2$ سره وېشنې له لارې او د معکوس
ارزښت جوړونه. د $\lim_{x\to 0}\cos x=1$ د پرتلې
قضیې څخه لاس ته راځي.
$$\lim_{x\to 0}\operatorname{sinc}x=1.$$
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

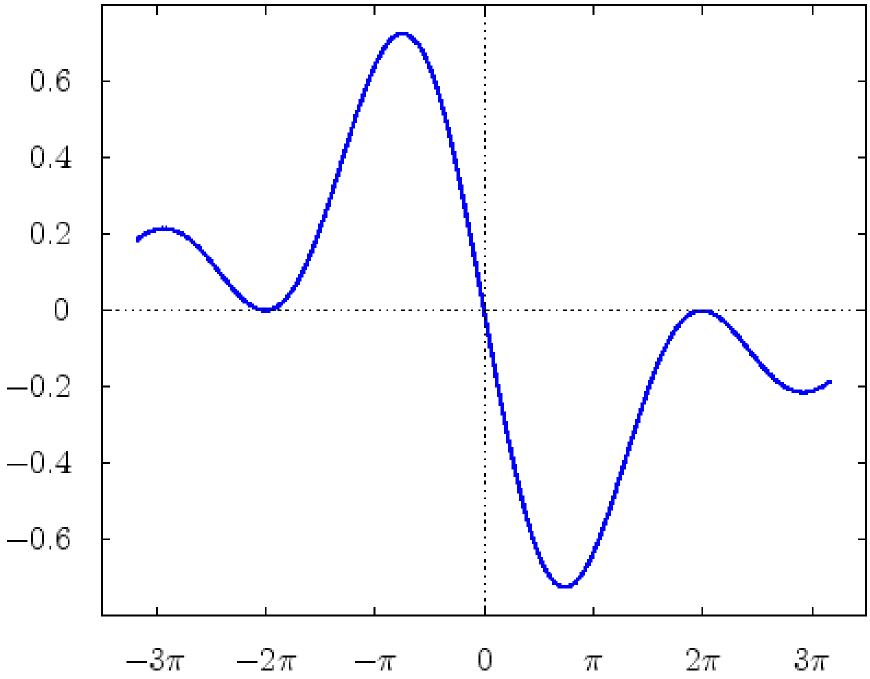
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

تابع

$$f(x)=\frac{\cos x-1}{x}$$

د مخ ته وړنې $f(0)=0$ سره په ټول $\mathbb{R}$ ناپرېکیدونکي ده

(c) ketabton.com: The Digital Library



باور لري

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)}$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x + 1}\sin x,$$

او له

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x + 1} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0}\sin x = 0$$

لاس ته راځي

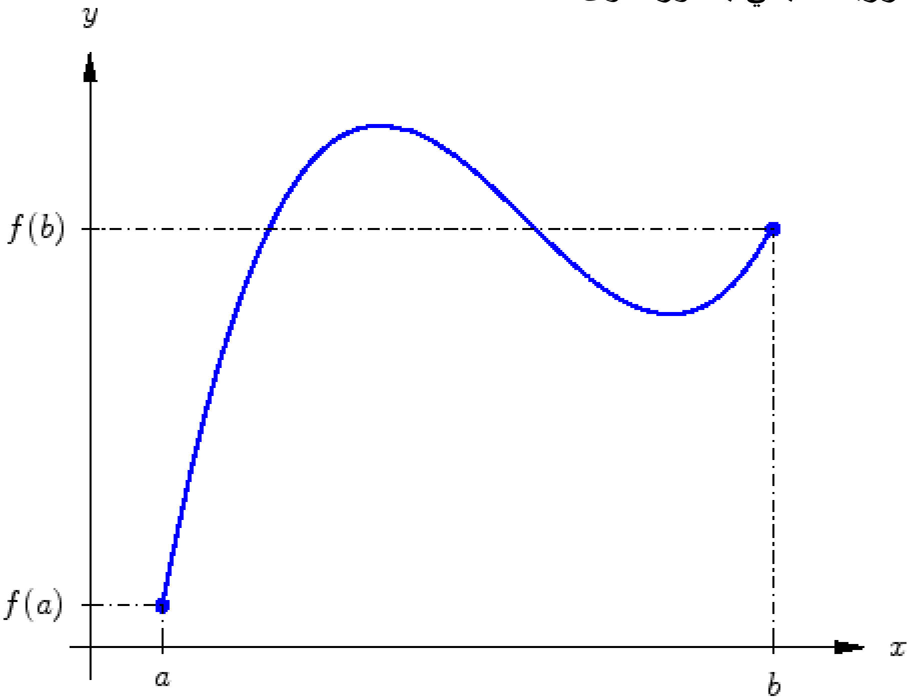
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليک

(c) ketabton.com: The Digital Library

منځ ارزښت جمله **Zwischenwertsatz**

یو ناپرېکېدونی تابع f په یوه بندانتروال $[a,b]$ د $f(a)$ او $f(b)$ ترمنځ هر ارزښت نیسي یا غوره کوی.



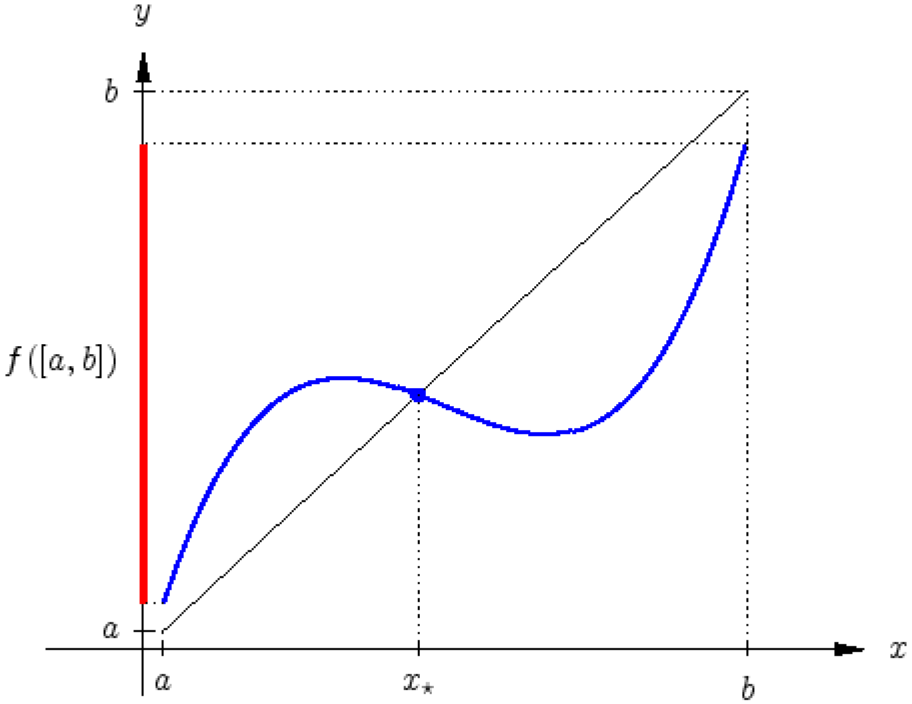
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

که یو تابع f انتروال $[a,b]$ په انتروال $[a,b]$ ناپرېکېدونکی تنظیم کړي، نو یو $x_\star$ شتون لري د

$$x_\star = f(x_\star).$$

سره.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ناپرېکیدونکې تابع

$$g(x) = f(x) - x$$

لپاره $g(a) \geq 0$ او $g(b) \leq 0$ باور لري. د منځ ارزښت جملې سره د يوه صفرځای $x_\star \in [a,b]$ شتون لاس ته راځي:

د نتپرېکيدونکو توابعو لپاره

$$g(x) = f(x) - x$$

$$g(x_\star) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x_\star) = x_\star$$

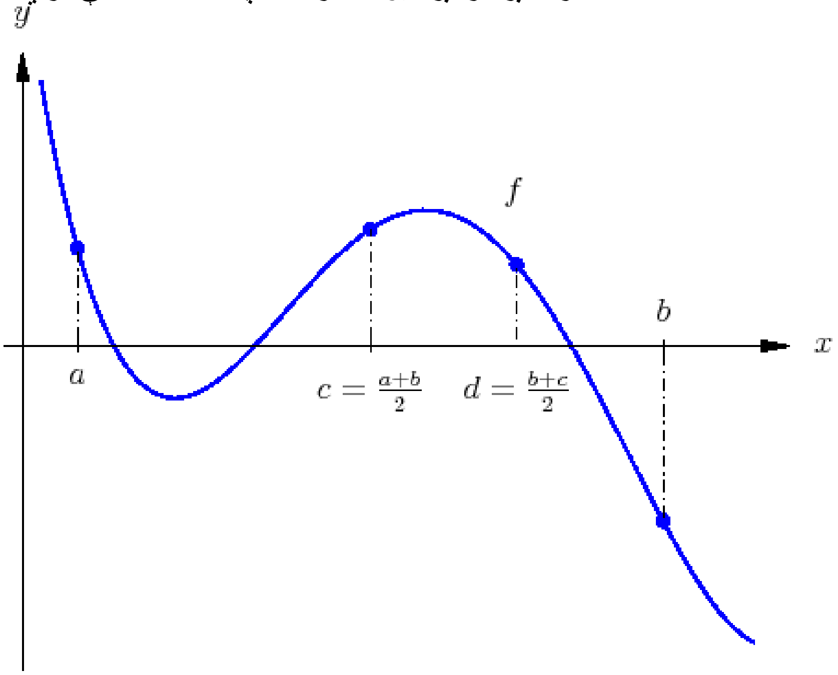
دا په دې معناجې د f يو ځاي په ځای - يا بيکس تکی $x_\star$.

ليکونکي: هيوليګ، کراخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه سطحو – یا برخو تلنلار **Bisektionsverfahren**

د منځ ارزښت جملې په بنسټ یو ناپرېکیدونکی تابع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ د $f(a)f(b)\leq 0$ سره لږ تر لږه یو صفرځای په $[a,b]$ کې لري.



که دا انټروال نیم شي او f ته د انټروال په ځنځ کې ارزښت ورکړي

$$c=\frac{a+b}{2}$$
،

نو کیدی شي د مختښتي په مرسته پرېکړه وشي، چې د کوم انټروال په نیمایي کې باید صفرځای پروت وي:

$f(a)f(c)\leq 0$ لاسته راځي ، چې په $[a,c]$, کې صفرځای شتون لري

$f(a)f(c)\geq 0$: لاس ته راځي صفرځاب په $[c,b]$. کې شتون لري

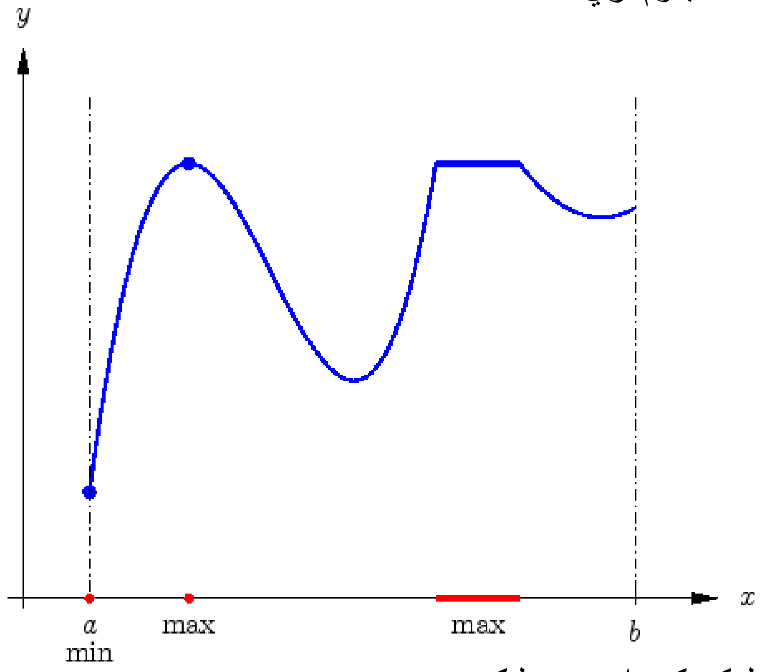
سرې اوس دا اړونده برخه انټروال ټاکي او دااېتریر iteriert (ټیک حل ته ور نږدې کونه) کوي، تر څو د انټروال اوږدوالی غوښتوني ټیکوالي ته ورسیږي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ، پفایل

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناپرېکیدونکي تابع افرطیت Extrema stetiger Funktionen

یو ناپرېکیدونکی تابع په یوه پای رابند انټروال $[a,b]$ لږ تر لږه یو مینیموم او یو ماکسیموم لري.



لیکونکي: اپپ، هیولیک

یو $c>0$ شتون لري د
$$(x+y)^n \le c(x^n+y^n)$$
سره د $x,y\ge 0$ لپاره

د بنووني ته د $x\ne 0$ لپاره (حالت $x=0$ ساده دی) لیکو

$$z=y/x$$

او ناپرېکیدونکی تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n}.$$

ځیرو.

دا چې $\lim_{z\to\infty} f(z) = 1$ دی، نو یو $b > 0$ شتون لري، داسې چې $f(z) \le 2$ د $z \ge b$ لپاره باوري کوي. د

$$c = \max\left\{2, \max_{z\in[0,b]} f(z)\right\}$$

سره لاس ته راځي

$$f(z) = \frac{(1+z)^n}{1+z^n} \le c$$

او له دې سره پورته غوښتنه

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

برابرډوله ناپرېکیدنوالی Gleichmäßige Stetigkeit

یو تابع f په یوه انتروال D برابرډوله یا برابرارزښته ناپرېکېدونکی دی ، که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره یو δ_ε شتون ولري ، دا سې چې راکړي

$$|x-a| < \delta_\varepsilon \;\Rightarrow\; |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

د ټولو $x, a \in D$ لپاره.

د f د تنها ناپرېکېدني په برعکس δ_ε د a په واک کې نه ده. تنهاپه یوه محدود رابند انتروال کې ناپرېکېدنوال کی او برابرارزښته یا – ډوله ناپرېکېدنوالی سره ورته دی.

لیکونکي: هیولیګ، پفایل

په ټکي ډول پولې ته تلنه Punktweise Konvergenz

(c) ketabton.com: The Digital Library

د توابعو (f_n) یوه پرلپسي په یوه انتروال D ټکي ډوله د پولي تابع f په لور پولي ته ځي.

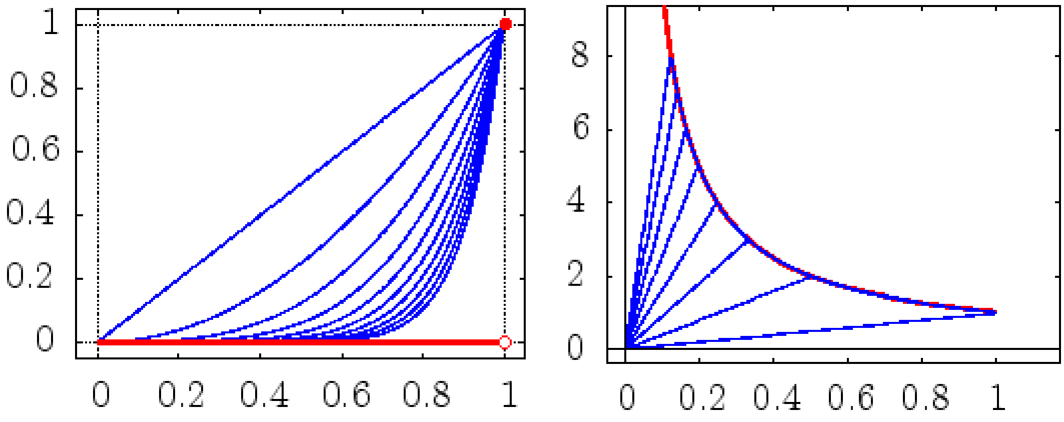
$$f_n \underset{\text{pktw.}}{\longrightarrow} f,$$

که $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ وي د ټولو $x \in D$ لپاره.
لیکونکي: اپپ، هیولیک

په ټکیډوله پولي ته تلني باید نه دی چي ناپرېکېدنوال او بندوالی ساتلي پاتي شي.
د بېيلګي په توګه د $f_n(x) = x^n$ ټکي ډوله پوله ارزښت په $[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

په بني انتروال پای پرېکېدونکی دی، لکه په کینه څېره کي چي ښوول شوی دی.



د یو کونورګنت لپاره بېلګه چي د نامحدود پوله تابع په لور ښی څېره د پرلپسي سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 < x \leq 1/n \\ 1/x, & 1/n < x \end{cases},$$

ښايي ، چې په $(0,1)$ ټکي ډوله د پوله تابع $f(x) = 1/x$ په لور پولې ته ځي.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

برابرارزښته يا برابرډوله پولې ته تلنه **Gleichmäßige Konvergenz**

د توابعو يوه پرلپسي (f_n) په يوه انتروال D برابرډوله د يوه پولې تابع f په لور پولې ته ځي،

$$f_n \underset{\text{glm.}}{\longrightarrow} f,$$

که هر $\varepsilon > 0$ ته يو n_ε شتون ولرى، داسې چې

$$n > n_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري.
د کوشي –قضيې په مرسته کېدى شي برابرډوله پولې ته تلنه بې د پولېتابع نسبت څخه تعريف شي. سرى ورته شرطونه لاس ته راوړي، داسې چې

$$m, n > n_\varepsilon \Longrightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

د ټولو $x \in D$ لپاره بايد باور ولري.

که توابع f_n ناپرېکېدونکي وي، نو پوله تابع f هم ده.
ليکونکي: اېپ، هيوليګ

د درېګوډي نامساواتو څخه لرو

$$|f(x_0) - f(x)|$$

$$\leq |f(x_0) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f_n(x) + f_n(x) - f(x)|$$

$$\leq |f(x_0) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د په خوښه $\varepsilon > 0$ ته د برابرډوله کونورګنت له امله يو n_ε شتون لري، داسې چې د $n > n_\varepsilon$ لپاره

$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall\, y \in D$$

باوري کوي. د يوه داسې n لپاره اخرنی او لومړنی ترم $< \varepsilon$ دي، که $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ وي. دا له $|f(x) - f(x_0)| < 3\varepsilon$ لاس ته راځي او له دې سره د $x \to x_0$ $f(x) \to f(x_0)$ لپاره.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د توابعو لړۍ پولې ته تلنه Konvergenz von Funktionenreihen

يوه د توابعو f_k لړۍ $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ټکي ډوله (برابرډوله) پولې ته تلونکې ده، که دا د لاندې ټوټه جمعې يا زياتون $s_n = \sum_{k \le n} f_k$ لپاره دا حالت ولري.

يوه کلکونه يې مطلق پولې ته تلنه ده، چې د هغې سرره د $\sum_n |f_n|$ د برابرډوله پولې ته تلنې لپاره غوښتل کيږي. په دې حالت کې پولې ته تلنه د لړۍ يوه نظم بدلون لپاره هم ساتلی پاتيږي.

د تعريف سره سم دا وينا وې په تابع پرلپسيوو هم د باور وړ دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

په لاندې کې د يو څو تيوپيکي بيلګو حالتونه ښولکيږي

(i) د توابعو لړۍ

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(1-x)^k = x\left[1 + (1-x) + (1-x)^2 + \cdots\right]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $[0,1]$ ټکي ډوله پولې ته ځي. د هندسي لړی لپاره فرمولپه مرسته پوله تابع لاس ته راځي

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

دا چې په $x = 0$ کې پرېکېدونکی دی، کېدی شي لړی برابرډوله کونورګنت نه وي.

(ii) د $x \in [0,1]$ لپاره لړۍ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \pm \cdots$$

د لایبنیخ ـپولې ته تلنې له امله ($\frac{x^k}{k}$ همغږیز صفر پرلپسې ده). دا چې د لړۍ پاتې د لایبنیخ پسې د

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-x)^k}{k}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k}\right| \leq \left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1}$$

له لارې اټکل کېدی شي، لړۍ په $[0,1]$ حتی برابرډوله پولې ته ځي. مګر سره له دې په $[0,1]$ باندې مطلق پولې ته نه ځي، ځکه چې $\sum(1/k)$ دیورګنت ده.

(iii) لړۍ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \cdots$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $[-1,1]$ باندې مطلق پولې ته ځي، ځکه چې

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{x^k}{k^2}\right| - \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{x^k}{k^2}\right| = \sum_{k=n+1}^{m}\left|\frac{x^k}{k^2}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

باور لري، او

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

پولې ته ځي.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

توابعو لړۍ ته مایورانت یا پورته پولې
Majorante bei Funktionenreihen

د پوره لوی n لپاره باور لري

$$|f_n(x)| \leq ca_n\,, \quad x \in D\,,$$

اوکه لړۍ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ پولې ته ځي، بیا نو لړۍ

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

مطلق پولې ته تلونکې ده.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

وینا تړلې د اعدادو لړۍ لپاره د مایورانت له جملې لاس ته راځي، ځکه چې د ټولو $x \in D$ لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{k=1}^{n}|f_k(x)|-\sum_{k=1}^{m}|f_k(x)|\le c\sum_{k=m+1}^{n}a_k$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د اکسپوننشل تابع ضرب انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د یوه ضرب د پوله ارزښت په حیث انځور شي:

$$e^x=\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n\ ,x\in\mathbb{R},$$

په هر انتروال $[-a,a]$ د برابرډوله پولې ته تګ سره.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

لومړی به د

$$f_n(x)=(1+x/n)^n=1+\binom{n}{1}\frac{x}{n}+\cdots+\binom{n}{n}\frac{x^n}{n^n}\,.$$

برابرډوله پولې ته تلنه و ښوول شي. دې ته سړی ترې کار اخلي یا استعمالوي، چې

(i)

$a^k/k!\to 0$ د په خوښه $a\ge 0$ لپاره ؛

(ii)

$p_{n,j}=\frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j}$ د هر $j\in\mathbb{N}$ لپاره یو مونوتون جګېدونکې د 1

په لور تلونکې پرلپسې ده.

د دې لپاره چې د کوشي فرمول استعمال کړو، سړی کمښت یا تفریق

$f_m(x)-f_n(x)$ په لاندې بڼه لیکي

$$\sum_{j=0}^{k-1}(p_{m,j}-p_{n,j})\frac{x^j}{j!}+\sum_{j=k}^{m}p_{m,j}\frac{x^j}{j!}-\sum_{j=k}^{n}p_{n,j}\frac{x^j}{j!}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $k < n < m$ سره .

د $|x| \le a$ لپاره د $a \ge 1$ او $k \ge 2a$ سره د اخرنیو زیاتېدونو ارزښت هر ځل

$$\le \frac{a^k}{k!} \underbrace{\left(1 + \frac{a}{k+1} + \frac{a^2}{(k+1)(k+2)} + \cdots\right)}_{\le 2},$$

دی، نو د(i) پسې $< \varepsilon/3$ د یوه پوره لوي ټاکلې k لپاره.

د (ii) پسې یا له مخې دی

$$|p_{m,j} - p_{n,j}| < \frac{\varepsilon/3}{ka^k}$$

د $m, n > N_j(\varepsilon)$ لپاره، اوله دې سره کیدی شي د لومړنی جمعې هره زیاتېدونې د $f_m(x) - f_n(x)$ په ټوټه کیدو د $\frac{\varepsilon/3}{k}$ له لارې اټکل کړي. په ټولیزه توګه لرو

$$|f_m(x) - f_n(x)| < k\frac{\varepsilon/3}{k} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \quad m, n > \max_{j<k} N_j(\varepsilon).$$

د

برابرېدوله پولې ته تلنې په بنسټ په هر انتروال $[-a, a]$ باندې د پولې تابع $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ ناپرېکېدونکې ده. بسیا کوي، چې $f(x) = e^x$ د راشنل پروت محور $x = p/q$ لپاره وښایو. د یوې برخه پرلپسې $n = mp$ په راوړنې سره د e د تعریف څخه لاس ته راځي

$$\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{x}{mp}\right)^{mp} = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{p}{mpq}\right)^{mpq/q} = e^{p/q}$$

د $t \longmapsto t^{p/q}$ ناپرېکېدنې له امله.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د اکسپوننشال تابع لړۍ انځورونه

اکسپوننشل تابع کېدی شي د یوې لړۍ د پولع ارزښت په تګه انځور شي:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \ , x \in \mathbb{R},$$

د هر انتروال $[-a,a]$ برابرډوله پولې ته تلنې سره.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

اوس د ضرب انځورونې ته ورته والی ښولکیږي:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

دا تړلی د تیلور-لړۍ په څېر د جمعې د روښانه ونې څخه لاس ته راځي. د $x>0$ لپاره دا لاندې سیده ښوونه ستونځمنه ده، سره له دې بې له مشتق منځ راوځي.

سړی پوله ارزښت د $\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{x}{n}\right)^j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{x^j}{j!} \underbrace{\frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-j+1)}{n\cdot n\cdots n}}_{\leq 1} \right)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$$

له لارې پورته لور ته اټکل کوي او د

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{x^j}{j!} \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-j+1)}{n\cdot n\cdots n} \right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\geq \sum_{j=0}^{m}\left(\frac{x^j}{j!}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{j-1}(1-k/n)\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{m}\frac{x^j}{j!}$$

د یوه په خوښه $m \in \mathbb{N}$ کښته لور ته اټکل کوي. د $m \to \infty$ لپاره د پوله ارزښت جوړولو څخه وروسته د دواړو آتکلونو یو بل سره برابروالی لاس ته راځي.

یوه ورته دلیل راوړنه د $x < 0$ لپاره همم شونې ده، که سړی مثبت او منفي برخه په دې منځ ته راغلې جمعه کې ځانله یا جداوڅیړي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

اکسپوننشا تابع د ډېرې بیلوژیکي ودې پروسې تر څیړنې لاندې نیسي. د بیلګې په توګه په یو ساده د د قومونو ودې مودل کې د زیږېدنې ګڼون یا تعداد متناسب دی د د ورځنې اوسیدونکو تعداد $p(t)$ سره د t په وخت کې، دا په دې معنا چې

$$p(t+\Delta t) \approx p(t) + \Delta t(\lambda p(t))\,.$$

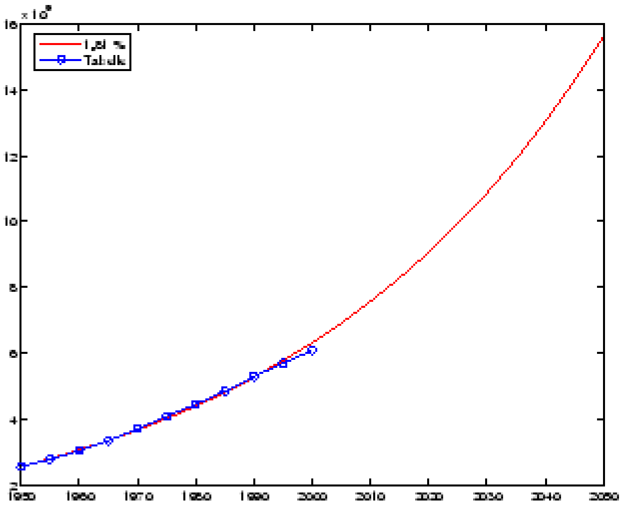
د $\Delta t \to 0$ لپاه دا د ودې قانون

$$p(t) = ce^{\lambda t}\,, \qquad c = p(0)\,,$$

له لارې مودلي کیږي.

کال	د نفوسو تعداد په میلیونو	ونده
	2555	
1950	2779	1.76 %
1955	3039	1.87 %
1960	3345	2.02 %
1965	3707	2.16 %
1970	4088	1.80 %
1975	4456	1.80 %
1980	485	1.79 %
1985	5283	1.77 %
1990	5690	1.54 %
1995	6080	1.37 %
2000		1.25 %

(c) ketabton.com: The Digital Library



(کيڼ) جدول د نړۍ اوسېدونکي $p(t)$ ښايي همداسي کلنۍ د ودې تعداد(اټکل شوی ارزښت). کلنۍ منحنۍ د ودې زياتون (ريټ) په کلونو 1950-2000کې % 1.81 وو. له 1950 کال څخه به د ثابت منحني اکسپوننشل ودې سره

$$p(t) = 2555078074e^{0.0181(t-1950)}$$

به د نړۍ اوسېدونکي په کال 2050 کې 16 ميليارده وګنل شي(ټکي په ټکي شوې کرښه يا منحني).
ليکونکي: هيوليک، هيوررنر

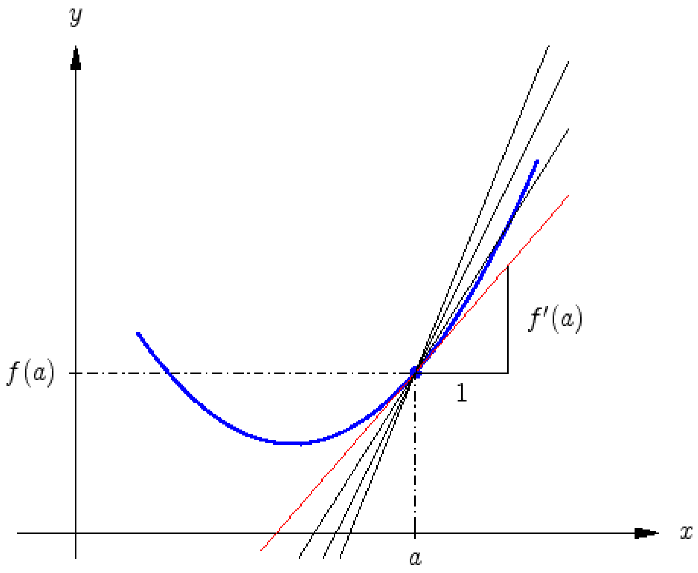
مشتق(رابيليدنه) Ableitung

يو تابع f په ټکي a کې مشتقوړ يا رابېلېدوړ دی، که د مشتق په نوم نومول شوې پوله ارزښت

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

شتون ولري..

(c) ketabton.com: The Digital Library



مشتقوړوالی یا رابیلیدوړوالی هندسي په دي معنا دی، چې د ټوټه ونې یا سیکانت جګوالی له

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

څخه د ورکړشوي تانجنت جګوالي په لور وهڅيږي یا کونورګنت شي(پوله يې ونيول شي).

سړی داسې هم لیکي:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \frac{dy}{dx}$$

د $y = f(x)$ سره . دا لیکدود یا ه-دول په کمبنت وېش کي $\Delta x \to 0$ پولې ته تګ ښايي

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{x + \Delta x - x}\ .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جګ مشتقونه د $f'', f''', \ldots$ همداسې $f^{(2)}, f^{(3)}, \ldots$ سره په نخښه کيږي.

يو تابع f په يوه ډېرۍ يا سټ D باندې مشتقوړ بلل کيږي، که د ټول $x \in D$ لپاره $f'(x)$ شتون ولري.

د تابع $f(x) = x^2$ د مشتق لپاره د تعريف سره سم لرو:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x\,.$$

دويم مشتق $f''(x) = 2$ ثابت دی.

په ټوليزه توګه يو د خوښې مونوم $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, لپاره د بينوم فرمول په مرسته لرو

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1}h + O(h^2)}{h} = nx^{n-1}\,,$$

د کوم سره چې $O(h^2)$ د نظم h^2 ترمونه په نخښه کوي.

د $f(x) = \sin x$ مشتق کېدی شي د زياتون – يا جمعې قضيې په مرسته وشمېرل شي له

$$\sin(t \pm h/2) = \sin t\cos(h/2) \pm \cos t\sin(h/2)$$

څخه د کمبنت وېش لپاره د $t = x + h/2$ سره راکوي

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin\left((x+h/2)+h/2\right) - \sin\left((x+h/2)-h/2\right)}{h}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{2\cos(x+h/2)\sin(h/2)}{h}$$

د

$$\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(h/2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h/2)}{h/2} = 1$$

له امله د $h \to 0$ لپاره ښی اړخ د $\cos x$ په لور هڅیږي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د بنسټتوابعو مشتق يا رابيليدنه

لاندې جدول د غوره بنسټتوابعو مشتق ښايي:

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
c	0		x^r, $r \neq 0$	$r\,x^{r-1}$
e^x	e^x		$\ln\|x\|$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$		$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos x$	$-\sin x$		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\tan^2 x + 1$		$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$		$\operatorname{arccot} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

د مشتق یارابیلیدنې کربنزوالی **Linearität der Ableitung**

مشتق کربنیز دی، دا په دې معناچې د مشتقوړ توابعو f او g لپاره باور لري

$$(rf)' = rf', \quad r \in \mathbb{R},$$
$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

د ضرب قانون **Produktregel**

د دوه مشتقوړ توابعو f او g د ضرب مشتق دی

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

په ټولیزه توګه د ضرب $f = f_1 \cdots f_n$ لپاره باور لري

$$f' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \frac{f}{f_i}.$$

لیکونکي: هیولیگ، کوپف

د تعریف څخه تړلی راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} g(x+h)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د پولینوم

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

مشتق د $x = 1, 2, 3$ په ځایونو کې ټاکل کیږي. دا چې د هر کرښیز ضریب مشتق 1 دی، د ضرب له لارې یا قاعدې څخه لرو

$$p'(1) = (1-2)(1-3) = 2,$$

$$p'(2) = (2-1)(2-3) = -1,$$

$$p'(3) = (3-1)(3-2) = 2.$$

په ورته توګه سرې د

$$p(x) = (x-1)\cdots(x-n),$$

لپاره شایي، چې

$$p'(k) = (-1)^{n-k}\,(n-k)!\,(k-1)!$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی د $k = 1, \ldots, n$ لپاره.
(Autoren: Höllig/Hörner/Knesch)

د وېش قانون یا لار **Quotientenregel**

د دوه مشتقوړ توابعو د وېش مشتق دی

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

په ټول ټکو x کې د $g(x) \neq 0$ سره. په ځانګړې توګه باور لري

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1-2x}{4+3x^2}$$

د راشنل توابعو مشتق دی

$$\frac{(1-2x)'(4+3x^2) - (1-2x)(4+3x^2)'}{(4+3x^2)^2}$$

$$= \frac{-2(4+3x^2) - (1-2x)(6x)}{(4+3x^2)^2}$$

$$= \frac{6x^2 - 6x - 8}{(4+3x^2)^2}$$

په بدیلي ډول د ضرب قانون سره لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left((1-2x)\frac{1}{4+3x^2}\right)' =$$

$$= (-2)\frac{1}{4+3x^2} + (1-2x)\frac{-6x}{(4+3x^2)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(4+3x^2)^2}\,.$$

(Autoren: Höllig/Kreitz

ځنځيرى لار يا - قانون **Kettenregel**

د توابعو د ځنځيروني

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\left(g(x)\right)$$

لپاره مشتق دى

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

.

د $f(y) = z,\ g(x) = y,\ h(x) = z$ سره سړى ليکي

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\ \frac{dy}{dx}$$

.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د تعريف څخه ترلى لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\begin{aligned}(f(g(x)))' &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= \lim_{\tilde{h}\to 0}\frac{f(g(x)+\tilde{h}))-f(g(x))}{\tilde{h}}\,\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(g(x))g'(x),\end{aligned}$$

چیرته چې $\tilde{h}=g(x+h)-g(x)$ دی.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ځنځیري قانو د روښنه کولو ته تعریفیږي:

$$h'(x)=\frac{d}{dy}\,\text{s}\,h(x)=\sin\big(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{y=g(x)}\big)\;x^2)\big)g'(x)\,.$$

د دننني مشتق $g'(x)$ شمېرلو ته د سره د ځنځیر قانون کارول کیږي:

$$g'(x)=\frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

په بدیلي توګه کېدی شي د مشتق لیکدود وکارول شي. د

$$z=\sin y, y=\ln w, w=1+x^2$$

سره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = \cos(y)\frac{1}{w}2x = \cos\left(\ln(1+x^2)\right)\frac{1}{1+x^2}(2x)\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

ایمپلیڅیت مشتق نیول Implizites Differenzieren

که یو تابع $y = f(x)$ ایمپلیڅیت وي، دا په دې معناچې یو برابرون په x او y کې ورکړ شوی، داسې چې دواړه خواوي د x پسې مشتق کیدی شي. دلته یواځې په $y = y(x)$ کې افادو باندې ځنځیري قانون استعمالیږي.

د بېلګې په توګه سړی د

$$E:\ x^2 + 3y^2 = 7$$

له لارې ورکړ شوې ایلیپسې یا هګۍ

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + 3y^2\right) = 2x + 6yy' = \frac{d}{dx}7 = 0$$

همداسې

$$y' = -\frac{1}{3}\,\frac{x}{y}$$

.

لاس ته راوړي.

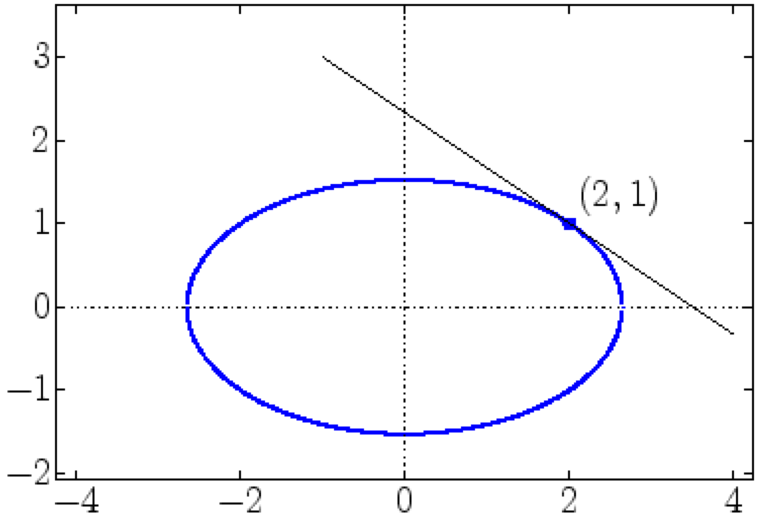
له دې سره کېدی شي د E په یوه ټکي د $y \neq 0$ سره د تانجنت جګوالی وټاکل شي.

د بېلګې په توګه د $(2,1)$ لپاره په لاس راځي

$$y' = -\frac{1}{3}\frac{2}{1} = -\frac{2}{3}$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library



په ورته توګه جګ مشتقونه شمېرل کیږي. د yy' لپاره دضرب قانون د استعمال سره دی

$$\frac{d}{dx}(2x + 6yy') = 2 + 6(y')^2 + 6yy'' = 0 .$$

له دې لاس ته راځي

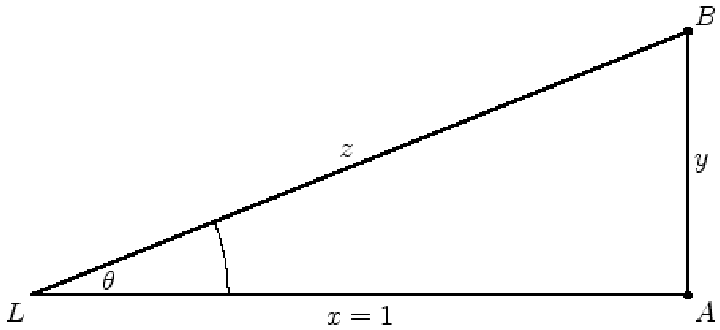
$$y'' = -\frac{1 + 3(y')^2}{3y}$$

.

کیدی شي په E باندې د یوه ټکي ځا په ځای کول او همدا د $y'(x)$ ارزښتونو پیژندلو له لارې ځرګند ازښتونه ټاکي
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

په ټکي L کې یو د برېښنا یا رنا برج دی د یوه څرخېدونکي بېجلی یا ګروپ سره، چې د رڼا وړانګه یې د ټکو A او B له لارې تللی 1 km کرښیز لرې دښته لویږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



وړانګه غورځونکی د یوه څرخون لپاره 2 ثانیو ته اړتیا لري، دا په دې معنا چې

$$\frac{d\theta}{dt} = \pi$$

د رڼاوړانګې پوزیشن یا ځای په دښته کې دی .

$$y(t) = x \tan\theta(t).$$

له دې سره د چټکتیا لپاره لاس ته راځي

$$\frac{dy}{dt} = 1\pi \, \frac{1}{\cos^2(\theta)} \longrightarrow \infty \quad \text{für} \quad \theta \to \frac{\pi}{2},$$

دا په دې معنا چې سوری یې له رڼا چټک دی.

یو ټیکه معالعه لاندې راکوي. د دې وخت توپیر په پام کښېولو له امله رڼا B ته د په وخت $t = \frac{\theta}{\pi} + \frac{z}{c}$ ورسیږي، دکوم سره چې $c = 300000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ د رڼا چټکتیا ده،

له دې سره لرو

$$\frac{\theta'}{\pi} = 1 - \frac{z'}{c}.$$

وروسته د t پسې د $z^2 = y^2 + 1$ مشتق راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$zz' = yy', \qquad \frac{z'}{y'} = \frac{y}{z} = \sin(\theta).$$

د θ' او z' اېښوونه په

$$y' = \frac{\theta'}{\cos^2(\theta)}$$

کې بالاخره راکوي

$$y' = \frac{1}{\cos^2(\theta)}\left(\pi - \frac{\pi}{c}y'\sin\theta\right)$$

همداسې

$$y' = \frac{c \cdot 1\pi}{c\,\cos^2(\theta) + 1\pi\sin(\theta)}$$

.

د $\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ لپاره اوس $y' \longrightarrow c$ هڅېږي، د اينشټاين د تيوري سره په هم غږۍ کې باور لري

t

$$y' \longrightarrow \infty \qquad \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)} \to -\frac{c}{\pi},$$

für

$$\theta \approx 4.781 \in \left(\tfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

داپه دې معناچې د لپاره ببرته سرۍ يوو خورا لويه چټکتيا لاس ته راوړي. سورۍ له دې امله د رڼا ګړندۍ دی. دا د اينشټاين تيوري سره په تضاد کې نه دی، ځکه چې سرۍ يو ه پيښنه ,Phänomen ګوري، نا دا خورنده ماده. د ،،ساده $300000\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ څېړونکي،، لپاره بو نا ښه احساس پاتيږي دا په هر صورت له څخه ورو خوزي.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لایبنیخ قاعده یا لار**Leibniz-Regel**

د یوه ضرب n -م مشتق دی

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

.

(Autoren: Höllig/Kopf)

د په حالت کې باور لري

$$(fg)'' = (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg''$$

او د لپاره دی

$$(fg)''' = (f'g + fg')'' = (f''g + 2f'g' + fg'')' =$$

$$= f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

ثبوت: عمومي ښوونه د اندکشن له لارې صورت په n نیسي د بینومیال ضریبونو لپاره د ریکورزین په پام کې نیولو سره.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د0 $x = 0$ په ځای کې دې د

$$f(x)\,g(x) = x^9\ \cos(\sin x)$$

یولسم مشتق وشمېرل شي.

د دې لپاره لومړی له دې څخه کار اخلو، چې د $x = 0$ لپاره د مونوم f فقط 9 -م مشتق د صفر سره نابرابر دی:

$$f^{(9)}(0) = 9!\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لایبنیځ- فرمول له دې سره فقط په یوه ترم راکمه وي.

$$(fg)^{(11)}\,|_{x=0} = \binom{11}{2}\, f^{(9)}(0)\, g^{(2)}(0)\,.$$

د ځنځيري قانون سره لرو یا لاس ته اځي

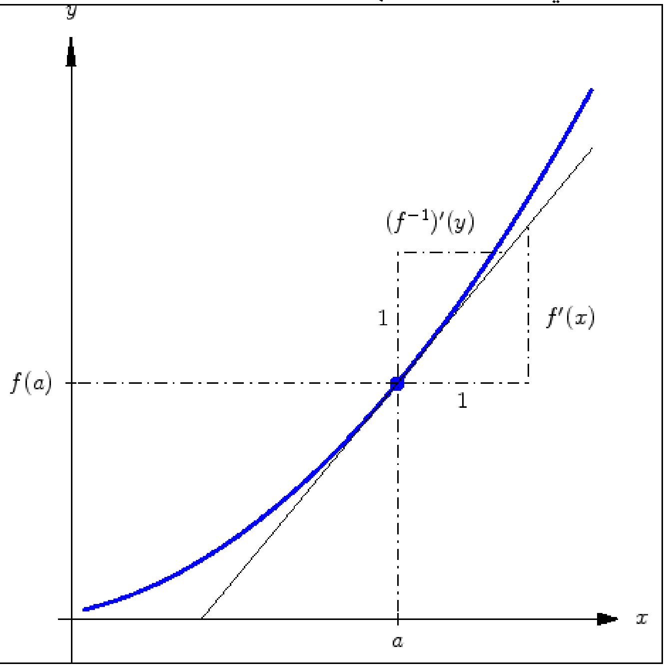
$$g'(x) = -\sin(\sin x)\,\cos x$$

$$g''(x) = -\cos(\sin x)\cos^2 x + \sin(\sin x)\sin x,$$

یعني $g''(0) = -1$. له دې سره غوښتونی مشتق دا لاندې دی

$$\binom{11}{2}\, 9!\,(-1) = -\frac{1}{2}\,(11!)\,.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

که یو تابع $y=f(x)$ د $f'(x) \neq 0$ سره f ناپرېکېدونکي مشتقوړ وي، نو د x په یوه چاپېریال کې معکوس وړ دی ، او باور لري $(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1},$ همداسي $dx/dy = (dy/dx)^{-1}$.	

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه په څېره کې چې ليدل کيږي، د f او f^{-1} جګوالي معکوس دي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

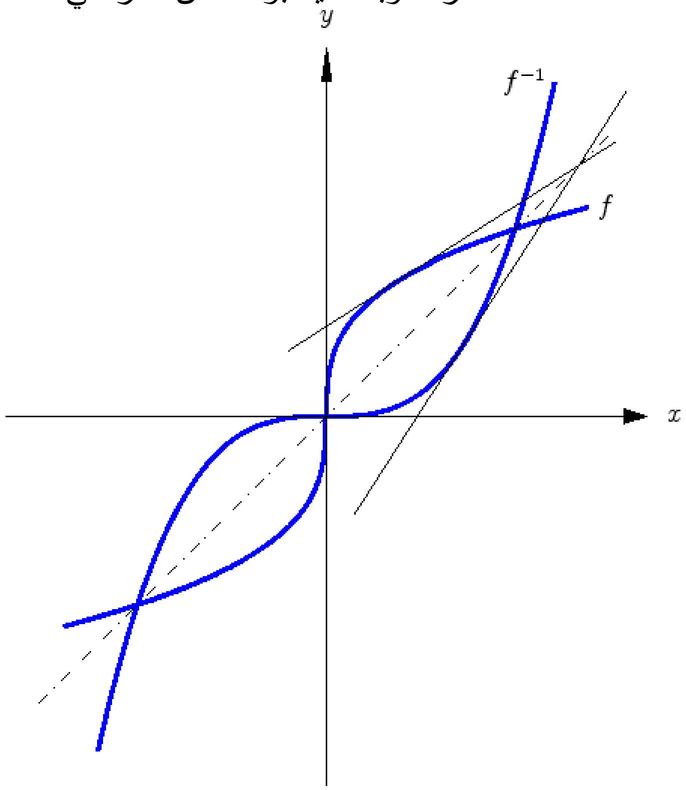
که کيږدو $g = f^{-1}$ ، نو لاس ته راوړو

$$x = g(f(x))$$

او د ځنځيري قانون سره مشتقونه

$$1 = g'(f(x))f'(x)\,.$$

د $y = f(x)$ سره غوښتنه يا ثبوت لاس ته راځي



(c) ketabton.com: The Digital Library

دا چې د f او f^{-1} جګوالی په اړونده د x او y په ځایونو کې سره معکوس دي، روښانيږي، که په پام کې ونیول شي، چې f او f^{-1} یو بل ته سیومتریک دي.

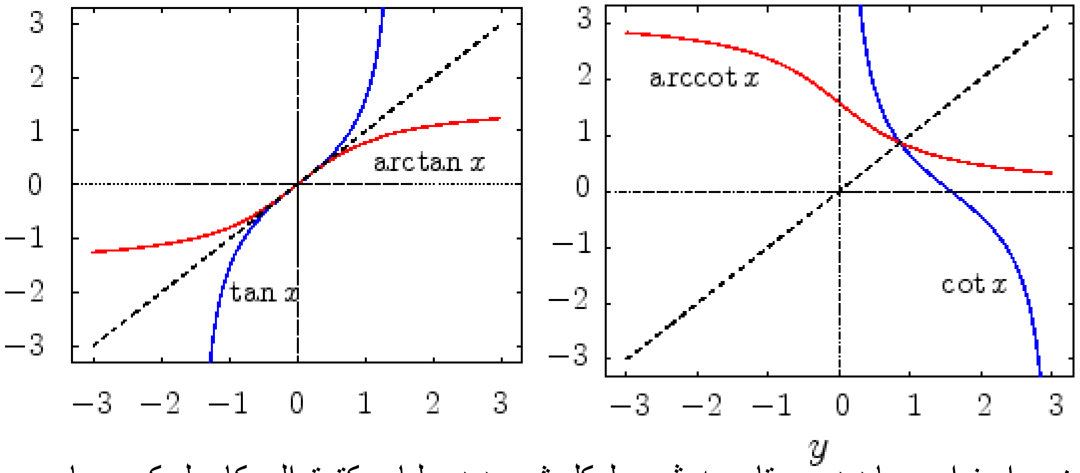
لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

دا چې د تانجنت تابع د $x = \arctan y$ معکوس تابع مشتق وټاکو، لومړی شمېرو

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dy}\arctan y = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} = \cos^2 x.$$



ښی اړخ اوس باید د y تابع په څېر ولیکل شي. د دې لپاره کټوټوالی کارول کیږي یا استعمالیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + y^2$$

او لاس ته راوړي

$$\frac{d}{dy}\,\mathrm{arctan}y = \frac{1}{1+y^2}.$$

په ورته توګه د کوتانجنت په څېړ- یا معکوس تابع ښایو.

$$\frac{d}{dy}\,\mathrm{arccot}y = -\frac{1}{1+y^2}.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

ع

$y = f(x) = x\,(1-x$

ء انتروالونو

$(-\infty, 1/2$

او

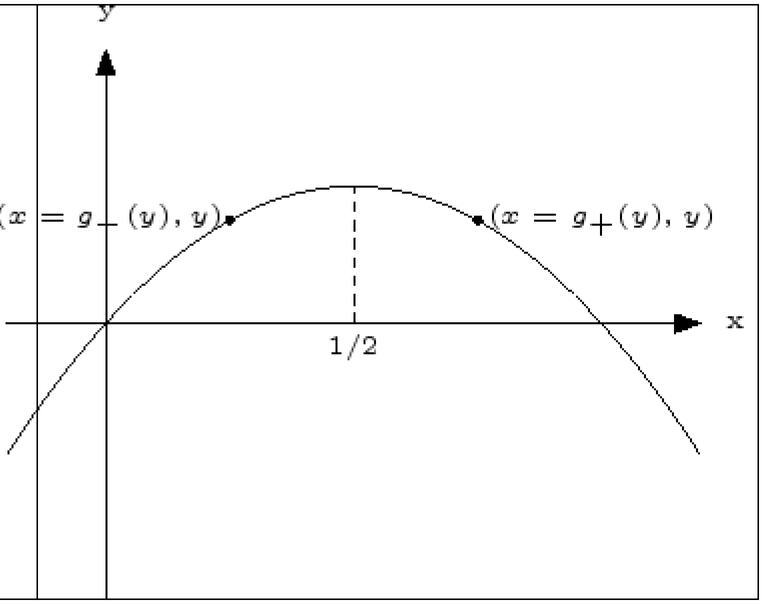
$[1/2, \infty$

هر وار په

ټ – یامعکوس تابع

$x = g(y$

لري.



(c) ketabton.com: The Digital Library

په دواړو حالتونو کې باور لري

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1-2x} \, .$$

بل یې مشتقنیول راکوي

$$g''(y) = \left(\frac{1}{1-2x}\right)' \frac{dx}{dy} = \frac{2}{(1-2x)^2} \frac{1}{1-2x} \, .$$

په ځانګړي ډول د $x = 1, y = 0$ لپاره لاس ته راځي

$$g'(0) = 1, \quad g''(0) = -2 \, .$$

مشتقونه شمېرلوړ دي، بې له دې چې معکوس تابع باید روښنه جوړه شي. دا ټیک هلته شونی دی، چې که سړی د y تابع د په څېر $g'(y)$ و لیکي. په دې بیلګه کې دا شوندی دی، ځکه x د y تابع په څېر لیکل کېدی شي:

$$g_{\pm}(y) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{1/4 - y} \, .$$

پورته ارزښتونه داسې شمېرل کېدی شي، دکومو سره چې د هغوی د ارزښتجوړې $(1,0)$ اړونده څانګه باید وټاکل شي.

لیکونکي: هیولیک، کرایخ

لوګاریتمي مشتق یا - رابیلیدنه **Logarithmische Ableitung**

دا فرمول

$$f'(x) = f(x) \frac{d}{dx} \ln |f(x)|$$

کیدی شي د $g(x) > 0$ سره د $y = g(x)^{h(x)}$ بڼې توابعو مشتقیدو ته وکارول شي. سړی لاس ته راوړي

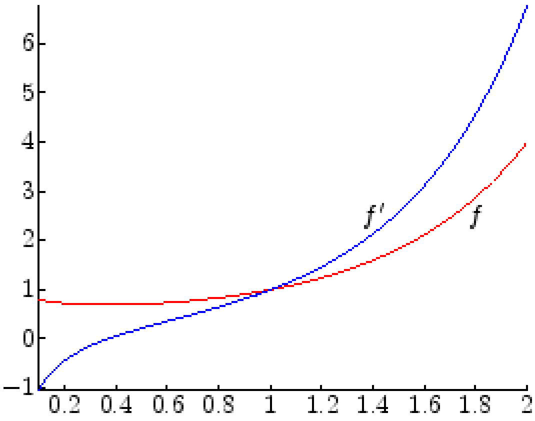
(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{dy}{dx} = g(x)^{h(x)} \frac{d}{dx}\left(h(x) \ln g(x)\right).$$

ليکونکي: اېپ، هيوليک،

د $x > 0$ سره تابع $f(x) = x^x$ لپاره مشتق دی

$$f'(x) = x^x \frac{d}{dx} \ln(x^x) = x^x \frac{d}{dx}(x \ln x) = x^x (\ln x + 1).$$



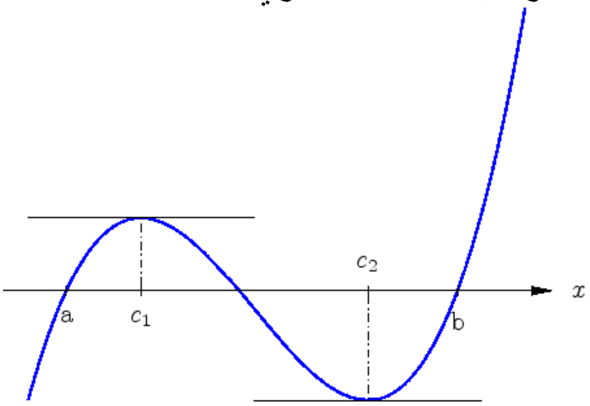
د $x \to 0$ لپاره $\ln f(x) = x \ln x$ د صفر په لور هخيري، نو x^x د $e^0 = 1$ په لور. نو تابع په صفرځای کې ښي اړخيز ناپرېکېدونکې ده. د مشتق لپاره دا حالت نه دی. د $x^x \to 1$ او $\ln x + 1 \to -\infty$ له امله د $x \to 0$ لپاره f په صفر يو ولاړ يا عمود تانجنت لري.

ليکونکي: اېپ، هيوليک،

د رولې جمله Satz von Rolle

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه ناپرېکيدونکي مشتقوړ تابع f مشتق د $f(a) = f(b) = 0$ سره لږ تر لږه يو صفرځای $c \in (a, b)$ لري.



توليز باور لري: که يو تابع په يوه انتوال $[a, b]$ کې n صفرځايونه ولري (د ډېروار والي په شمول)، نو هلته k ــم مشتق $\geq n - k$ صفرځايونه لري.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

دا چې f ناپرېکېدونکی دی، نو د افراطي ارزښت جملې له امله په $[a, b]$ کې ټکي c او d شتون لري دا لاندې باوري کوي

$$f(c) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

$$f(d) = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

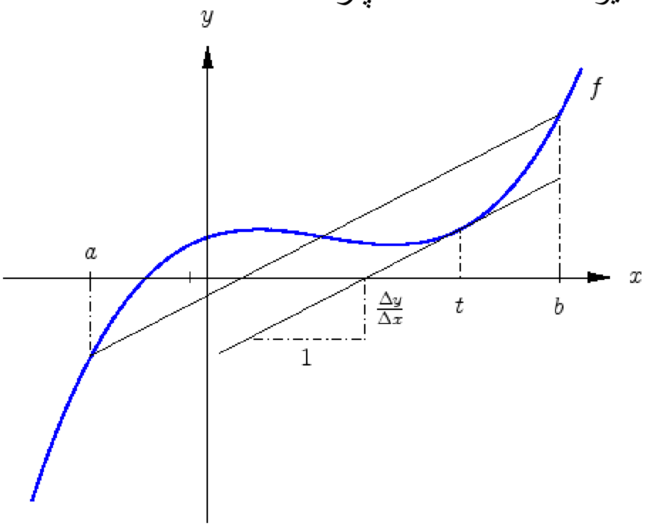
که f ناثابت وي(د ثابت f حالت ساده دی)، نو $f(c) < f(d)$ باور لري. له دې املې لږ ترلږه د دې دواړو ټکو څخه يو يې په (a,b) کې پروت دی . دا چې f مشتقوړ دی باید د دې ځايز يا لوکال افراطيت لپاره مشتق ورک – يا صفر شي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

منځ ارزښت قضيه Mittelwertsatz

د يوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

$$f(b) - f(a) = f'(t)(b-a)$$

د يوه $t \in (a,b)$ لپاره



هندسي دا کتوتوالی په دې معنا دی، چې تانجنت په يوه ټکي کې غبرګ دی د له پای ټکو $(a, f(a))$ او $(b, f(b))$ تېرېدونکي توټه ونې يا وتر سره. داسي هم ليکو

$$\Delta y = f'(t)\Delta x$$

.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

د يوې تابع

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

لپاره $g(a) = g(b) = 0$ باور لري. دا چې f ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی، نو g هم ناپرېکېدونکی مشتقوړ دی او د رولې د جملې پر بنسټ يو $t \in (a,b)$ شتون لري د لاندې سره

$$0 = g'(t) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

همداسې

$$f(b) - f(a) = f'(t) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

ټوليزه (شوې) منخ ارزښت جمله **Verallgemeinerter Mittelwertsatz**

که f او g ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابع وي، نو $t \in (a,b)$ يو شتون لري د لاندې سره

$$(f(b) - f(a))g'(t) = (g(b) - g(a))f'(t).$$

که برسېره پردې په (a,b) باندې $g'(x) \neq 0$ باور ولري، نو سړی کړی شي هم

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

هم وليکي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د تابع

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) - f(b)g(a) + f(a)g(b)$$

لپاره $h(a) = h(b) = 0$ باور لري. دا چې f او g ناپرېکېدونکي مشتقوړ دي، نو h هم ناپرېکېدونکې مشتقوړ دی او د پورته د رولې د جملې سره سره سم يو $t \in (a,b)$ شتون لري د لاندې سره.

$$0 = h'(t) = (f(b) - f(a))g'(t) - (g(b) - g(a))f'(t)$$

bzw. همداسې

$$(f(b) - f(a))g'(t) = (g(b) - g(a))f'(t) .$$

که (a,b) په باندې $g'(x) \neq 0$ وي. نو د منځ ارزښت جملې سره سم $g(b) - g(a) \neq 0$ هم او سړی لاس ته راوړي.

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(t)}{g'(t)} .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

لانداو-سيمبول **Landau-Symbole**

سړی ليکي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x) = O(g(x)) \qquad (\ x \to a\ )\ ,$$

که یو ثابت c شتون ولري، دسې چې $|f(x)| \le c|g(x)|$ وي a ته پوره نږدې x لپاره .

د 0 په لور هڅیږي، نو سږی په اړونده توګه لیکدود کاروي $|f(x)|/|g(x)|$

$$f(x) = o(g(x))$$

.

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

د بینوم له جملې څخه لاس ته راځي

$$(1+x)^n = 1 + nx + O(x^2) \quad (x \to 0)$$

په څټ – یا معکوس جوړونې د $1 - nx$ سره دغزونې وروسته لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^n} &= \frac{1}{1+nx+O(x^2)} \\ &= \frac{1-nx}{1-(nx)^2+O(x^2)} = \frac{1-nx}{1+O(x^2)} \\ &= 1 - nx + O(x^2)\,. \end{aligned}$$

د $x \to \infty$ لپاره دی

$$(1+x)^s = O(x^s)$$

د ټولو $s \in \mathbb{R}$ لپاره.

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

(c) ketabton.com: The Digital Library

ناپرېکیدنه او مشتقوړوالی کیدی شي د لاګرانژ فرمول په مرسته تعریف شي.

یو تابع f په $x = a$ کې ناپرېکېدونکی دی، که وي

$$f(x) - f(a) = o(1) \quad (x \to a).$$

مشفقوړوالی د

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r$$

سره په یوه معنا دی د

$$r = o(h) \quad (|h| \to 0).$$

سره.

د یوه دوه واره ناپرېکېدونکي مشتقوړتابع لپاره د تېلور ـودې څخه هغه تېره

$$r = O(h^2)$$

اټکل لاس ته راځي

لیکونکي:کلاوس، هیولیګ،

د لو، پیتال قاعده یا لار **Regel von l'Hospital**

که دوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابع f او g په a کې یوه ګډ صفرځای یا قطبځای ولري، نو باور لري

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

که بنی پوله ارزښت شتون ولري(په ورکړ شوي حالت کې په ناپای کې)

د ټولیزه منځ ارزښت جملې په بنسټ د x او a تر منځ یو t شتون لري د لاندې سره

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(t)}{g'(t)},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که سړی ، د یوه ناپای پوله ارزښت په موخه، $f'(t)/0$ یعنې داسې $\pm\infty$ په معنا کړي.

له دې $a \to x$ سره هم $a \to t$ ځي، نو سملاسي راکوي

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د لو، پیتال د جملې استعمال د یو څو بېلګو لړیو په بنسټ روښانه کیږي

د $0/0$ لپاره:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-2x+1}{3x^2-7x+4} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2}{6x-7} = -1$$

د $-\infty/\infty$ لپاره :

$$\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(x)}{1/x} = \lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} -x = 0$$

د ټولو $\infty \to x$ لپاره:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi/2-\arctan x}{1/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-1/(1+x^2)}{-1/x^2} = 1$$

دړواره استعمال:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)+x\cos(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2\cos(x) - x\sin(x)} = 0$$

په دې بېلګو کې دې پام وي، چې د شمېرلو پوله ارزښت شتون د لوپيتال قاعدې د استعمال پسې د منځته راغلې پوله ارزښت د شتون له لارې تضمين دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

کرښيز اپروکسميشن (ورنږدېوالی) **Lineare Approximation**

د يوه دوه واره ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + R$$

د لاندې پاتې غړي سره

$$R = \frac{1}{2} f''(t)(\Delta x)^2 = O((\Delta x)^2)$$

او د t د x او ترمنځ $x+\Delta x$ سره.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

تابع

$$g(y) := f(y) - f(x) - f'(x)(y-x) -$$

$$- \frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}(y-x)^2$$

د $y = x + \Delta x$ لپاره يو صفرځای لري او د $y = x$ لپاره يو ډبل يا دوه واره صفرځای لي. د رولې د جملې په تعقيب يو $y = x + \Delta x$ شتون لري د لاندې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$0 = g''(t)$	$= f''(t) - 2\frac{f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x}{(\Delta x)^2}$

همداسي

$f(x+\Delta x) - f(x) - f'(x)\Delta x$	$= \frac{1}{2}f''(t)(\Delta x)^2\,.$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د ناټيکاوي وده **Fehlerfortpflanzung**

د يوه کچ – يا اندازونې ارزښت $\Delta x = \tilde{x} - x$ مطلق ناټيکاوى يا يو

نږدېوالى $x \approx \tilde{x}$ ښايې نو د يوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره

$$|\Delta y| = |f'(x)||\Delta x| + o(\Delta x)$$

باور لري د $\Delta y = f(\tilde{x}) - f(x)$ سره. په اړونده توګه د نسبي ناټيکاوى لپاره باور لري

$$\frac{|\Delta y|}{|y|} = \left(|f'(x)|\,\frac{|x|}{|y|}\right)\frac{|\Delta x|}{|x|} + o(\Delta x)$$

که $x, y \neq 0$ وي. په نوکانو کې افاده c_r د x په ځاى کې د f د کنديشن عدد بلل کيږي.

د ترم $o(\Delta x)$ د پرېښږږلړ. يعنې له منځه وړلو له لارې کېدى شي د ناټيکاوي نږديوالس اټکل شي. د دې سره کېدى شي د ټيک مشتق ارزښت په ځاى مناسب بنديزونه هم وکارول شي:

$$|\Delta y| \le c_a|\Delta x|\,, \quad c_a \ge \max_{|t-x|\le|\Delta x|}|f'(t)|\,.$$

په ا ړونده توګه $c_r = c_a\frac{|x|}{|y|}$ د نسبي ناټيکاوي لپاره يو بنديز يا لنډ: بند دى

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

يو کونج $\vartheta \in (0,\pi/2)$ کېدی شي د کاتېتونو يا ولاو اړخونو د نسبت څخه په جګېدونکي درېګوډي کې داسې وټاکو :

$$\vartheta = \arctan(y/x)\,.$$

که y د کره ځای په ځای x سره کچ کړو، نو کېدی شي ضريب c_a د مطلق ناټيکاوي لپاره د

$$\left|\frac{d\vartheta}{dy}\right| = \left|\frac{1/x}{1+y^2/x^2}\right| = \left|\frac{x}{x^2+y^2}\right|$$

له لارې اټکل شي. افاده د $y = 0$ لپاره ماکسمال کيږي، او سړی لاس ته $c_a = \frac{1}{x}$ راوړي، دا په دې معنا چې

$$|\Delta\vartheta| \leq |1/x|\ |\Delta y|\ .$$

لويې ناټيکياوی د کوچني x لپاره غزيږي. په ورته توګه د نسبي ناټيکاوي د قوی کېدني فکتور لپاره هم باور لري

$$c_r = \max_y \left|\frac{x}{x^2+y^2}\,\frac{y}{\vartheta}\right|\ .$$

که دا لاندې تخمين وکارول شي

$$|\vartheta| \geq |\sin\vartheta| = \left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\,,$$

،

نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c_r \le \left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le 1 .$$

نو نږدېوالي ډول باور لري

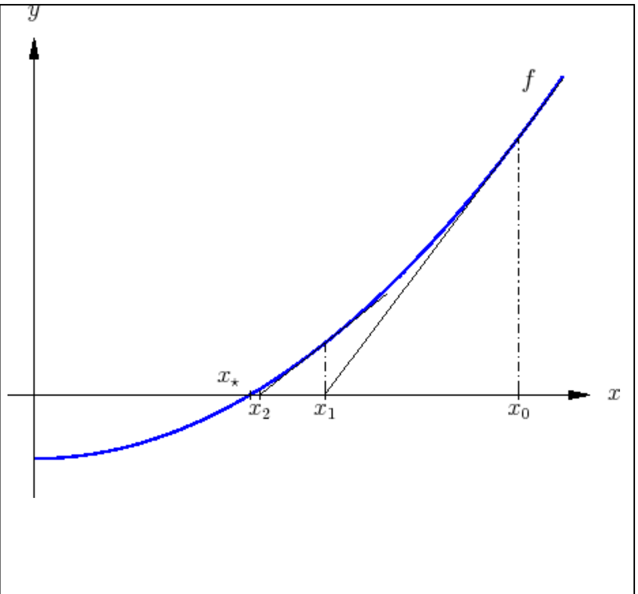
$$\frac{|\Delta\vartheta|}{|\vartheta|} \le \frac{|\Delta y|}{|y|} ,$$

دا په دې معنا چې نسبي فکتور نه غښتلی کيږي

ليکونکي: کلاوس، هيوليک،

د نيوټن تلنلار يا - قانو Newton-Verfahren

د نيټن تلنلار سره کېدی شي د يوه تابع f صفرځای x_* نومريک وټاکل شي. د نږدېوني يا اپروکسميشن پرلپسي $x_0, x_1 \ldots$ د کرښيزوالي ښخه ګټل کيږي.
نږدېوالی $x_{\ell+1}$ د x -محور سره د تانجنت غوښتکی دی په تکی $(x_\ell, f(x_\ell))$ کي :
$x_{\ell+1} = x_\ell - f(x_\ell)/f'(x_\ell)$



د يوه ساده صفرځای x_* ($f'(x_*) \neq 0$) لپاره د نيوټن – ايتريشن لوکال مربع پولې ته ځي، دا په دې معناچې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|x_{\ell+1} - x_*| \le c\ |x_\ell - x_*|^2$$

د پيلټکي x_0 لپاره د x_* په يوه پوره کوچني چاپريال کې.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د تيلور -نږدې ارزت Taylor-Approximation له لارې سره

$$0 = f(x_*) = f(x_\ell) + f'(x_\ell)(x_* - x_\ell) + r$$

لاس ته راوړي د پاتې غړي

$$r = \frac{1}{2} f''(t_\ell)(x_* - x_\ell)^2 \, ,$$

سره د يوه t_ℓ لپاره چې د x_* او x_ℓ ت رمنځ پرته ده. که د انترپوليشن قاعده کې کيږدو

$$f(x_\ell) = f'(x_\ell)(x_\ell - x_*) - r$$

،

نو لالاس ته راځي

$$x_{\ell+1} = x_* - r/f'(x_\ell) \, .$$

د $f'(x_\ell) \neq 0$ لپاره لرو

$$|x_{\ell+1} - x_*| = c_\ell |x_\ell - x_*|^2, \quad c_\ell = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(t_\ell)}{f'(x_\ell)} \right| \, .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $f'(x_*) \neq 0$ باور ولري، نو c_ℓ د ناپریکیدنبأه امله د x_ℓ لپاره په یوه د x_* چاپیریال $[x_* - \delta, x_* + \delta]$ کې مخدود دی:

$$c_\ell \leq c\,.$$

له ې سره د مربع یا څلوریز پولې ته تګ لاس ته راځي.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

که په لاندې مساوات د نیټن قانون وکاروو

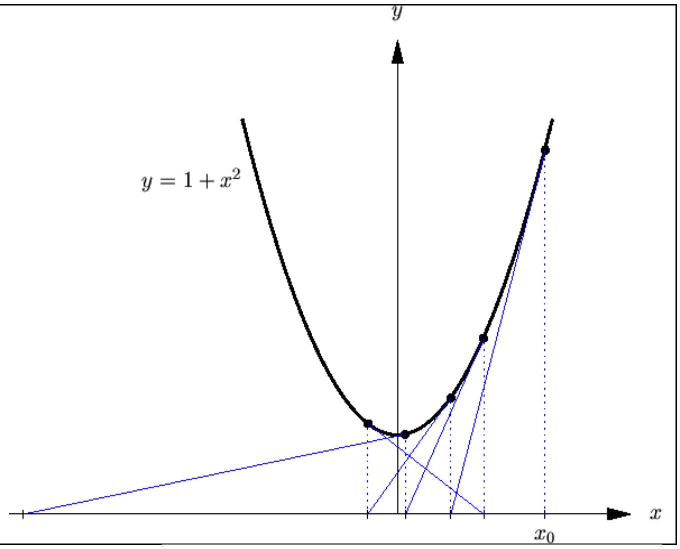
$$f(x) = x^2 + 1 = 0$$

،
نو اتریشن(پل په پل اصلي حل ته ورډرډې کېدنه) لاس ته راځي

$$x_{l+1} = \frac{1}{2}\left(x_l - \frac{1}{x_l}\right).$$

f په پام کې د ې وي. چې حقیقي حل نه لري، نیوټن تلنلار یا قانون په حقیقي پیل ارزښت x_0 سره پولې ته نه شي تللی.
په رښتیا کې پرلپسي (x_l) یو ګډوډ حالت غوره کوي.

د کتمتوالي په مرسته



$$\cot(2\phi) = \frac{1}{2}\left(\cot\phi - \frac{1}{\cot\phi}\right)$$

پرلپسي (x_ℓ) کېدی شي اکسپلیځیټ ورکړل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_0 = \cot\phi \implies x_\ell = \cot(2^\ell \phi)\,.$$

لیکونکي: اېپ، هیولیګ،

ها له بابلیانو ځخه کارول شوی ایترېشن یا پل پل مخ ته تلنه یا تکرار
$$x \longleftarrow (x + a/x)/2$$

د یوه حقیقی عدد a د رېښنې شمېرلو ته په ټیکه مطالعه د $f(x) = x^2 - a$ لپاره د نیوتن تلنلار په حیڅ ځان ښایي:
$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = x - \frac{x^2 - a}{2x}$$

د $a = 2, x_0 = 1$ لپاره نږدې شمېرنه یا اپروکسیمېشن لاس ته راوړو.

1

1.5

1.41666666666666666666666666666666667

1.414215686274509803921568627450980392157

1.414213562374689910626295578890134910117

1.414213562373095048801689623502530243615

1.414213562373095048801688724209698078570

کونورګنځ فوق العاده ګړندی دی. د هر پل سره د د ټیکو ځایونو(ترې لاندې کرښه تېره ده) تعداد په نږدې توګه دوه واره کیږي. په دې بېلګه کې مربع پولې ته تلنه کېدی شي د ساده بڼې بدلون له لارې هم وښوول شي:

$$x_{\ell+1} - \sqrt{a} = (x_\ell + a/x_\ell)/2 - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_\ell}(x_\ell - \sqrt{a})^2.$$

د نیټن-تلنلار د هندسي روښانه ونې ځخه لرو، چې په نږدې توګه شمېرنه د $x_0 \neq 0$ لپاره پولې ته تلونکې ده.

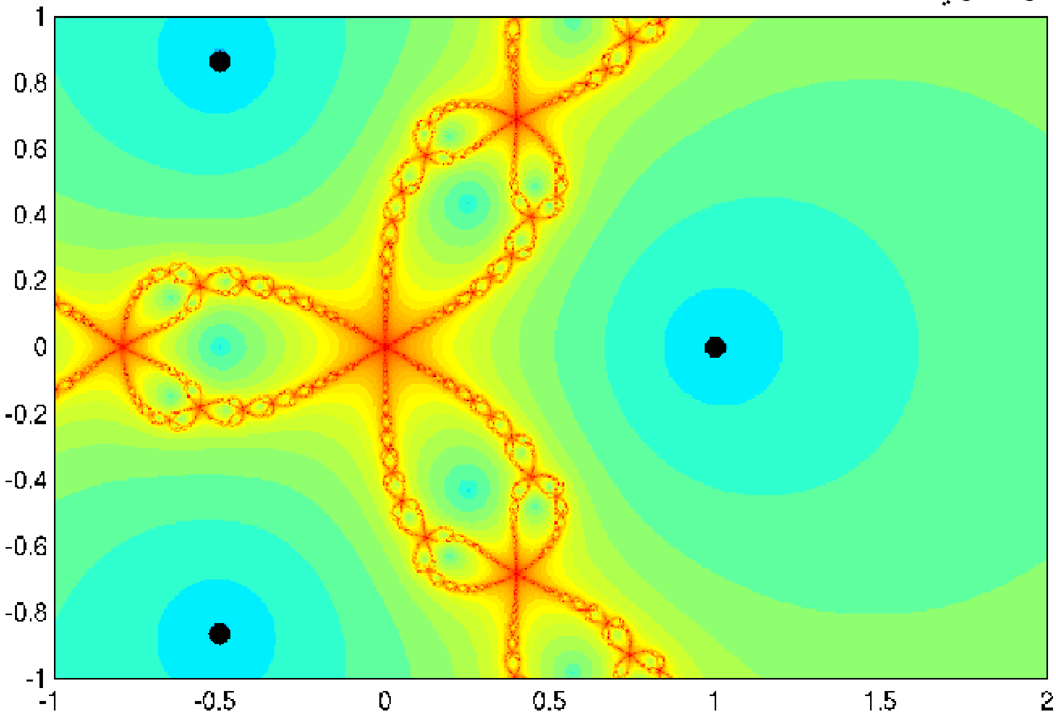
(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

لاندې ښېره د لاندې مساوات لپاره د کمپلکس نیوتن-اېټرشن پولې ته تلنه ښايي

$$z^3 - 1 = 0$$

د حلونو $z = \exp(2\pi i k/3)$ سره. مختلف رنګونه د پولې ته تلني ورشو ګاني ښايي د همغه یا اړونده صفرځای لپاره. تیاره رنګه شوط ځایونه ګړندی پولې ته تلنه په ګوته کوي.



سږی د پولې ته تلني ورشو په روښانه توګه fraktal مات خوي پیژني

د تیلور پولینوم**Taylor-Polynom**

د تیلور پولینوم   Das Taylor-Polynom

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوه تابع f انترپوليرى (ارزښت چې د دوه ټکو ترمنځ پروت وي) مشتق په ټکي a

$$p_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)\,,\ k = 0,\dots,n$$

تر ت نظم n پورې، دا په دې معنا چې .

که f يو $(n+1)$-واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ وي، نو باور لري

$$f(x) = p_n(x) + R, \quad R = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

د يوه t لپاره چې د a او x ترمنځ وي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

سيده پسې شميرنه د f او p_n مشتق يو بل سره توافق يا يوغړيزوالی ښايي. د پاتې غړي R د پوره کيدو يا تکميل ته سړی د تيلور پولينوم په يوه بل ترم غزوي:

$$q(y) = p_n(y) + c(y-a)^{n+1}\,.$$

ثابته داسې ټاکل شوې، چې $q(x) = f(x)$ وي. پسې $q - f$ يو صفرځای لري د $n+1$ د ډېروالي سره په $y = a$ کې او يو بل صفرځای په $y = x$ کې، په ټوليزه نو $n+2$ صفرځايونه . درولې جملې پسې بايد $(n+1)$-م مشتق بايد لږ تر لږه يو صفرځای t ولري:

$$0 = q^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(t) = c(n+1)! - f^{(n+1)}(t)\,.$$

له

$$R = f(x) - p_n(x) = q(x) - p_n(x) = c(x-a)^{n+1}$$

څخه د پاتې غړي غوښتونې ښه راکوي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساین تابع $f(x)=\sin x$ مشتقونه دي

$$f' = \cos x, \quad f'' = -\sin x, \quad f''' = -\cos x, \quad f^4 = f = \sin x, \ldots .$$

د ارزښتونو

$$f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^4(0) = f = 0, \ldots .$$

سره لومړي د تيلور پولينومونه د ساين تابع دي.

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= x \\
p_3(x) &= x - \frac{x^3}{6} \\
p_5(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \\
p_7(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}
\end{aligned}$$

په ورته توګه د کوساين تابع لپاره هم باور لري

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= 1 \\
p_2(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} \\
p_4(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\
p_6(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} .
\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

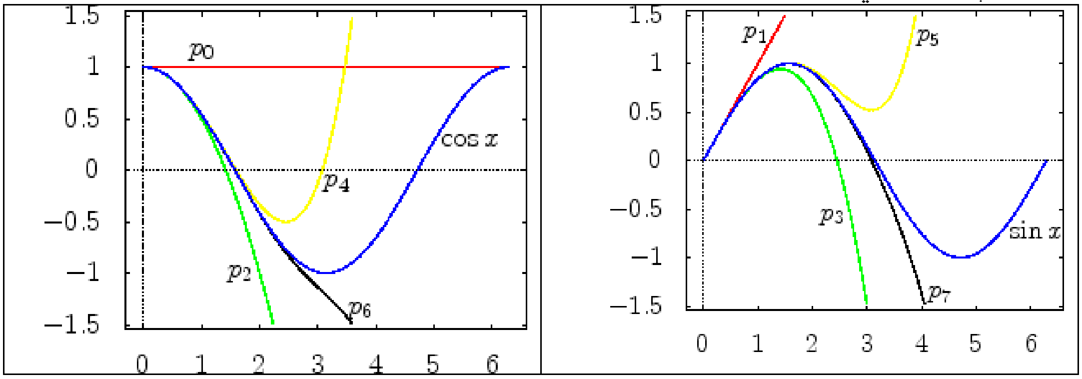
نږدې شمېرنه یا اپروکسیمېشن د ډېر کوچني x لپاره خورا دقیق دی. د بېلګې په توګه کېدی شي د نږدېوني ناتیکاوی

$$\sin 0.1 \approx p_4(0.1) = 0.09983\ldots$$

د

$$|R| = \frac{|\cos t|}{5\,!}\,0.1^5 \le \frac{1}{12000000} \le 10^{-7}$$

له لارې اټکل شي.



لکه د ښېرې ښخه چې لیدل کیږي، نږدې شمېرنه د لوی x لپاره لومړی د ځکو درجو سره پوره ټیک یا دقیق وي. په جدول کې د څو د x - ارزښت لپاره ناتیکاوي ورکړل شوي دي.

x	π	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/5$	$\pi/6$
$p_1(x)$	3.1416	0.5708	0.1812	0.0783	0.0405	0.0236
$p_3(x)$	2.0261	0.0752	0.0102	0.0025	0.0008	0.0003
$p_5(x)$	0.5240	0.0045	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
$p_7(x)$	0.0752	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

(c) ketabton.com: The Digital Library

$p_0(x)$	2.0000	1.0000	0.5000	0.2929	0.1910	0.1340
$p_2(x)$	2.9348	0.2337	0.0483	0.0155	0.0064	0.0031
$p_4(x)$	1.1239	0.0200	0.0018	0.0003	0.0001	0.0000
$p_6(x)$	0.2114	0.0009	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

حقیقي د تیلور لړۍ Reelle Taylor-Reihe

په یوه ټکي x_0 کې د یوه ناپای ډېرواره مشتقوړ تابع f د تیلور لړۍ د یوې په توان لړۍ یوه وده ده:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n, \quad a_n=\frac{1}{n!}\,f^{(n)}(x_0)\,.$$

د $x\in\mathbb{R}$ لپاره لړۍ او همداسې ټول مشتقونه په یوه انتروال (x_0-r,x_0+r) کې مطلق پولې ته تلونکي دي او د $|x-x_0|>r$ لپاره پولې ته نه تلونکي دي. د $|x-x_0|=r$ لپاره بې له نورو څېړنو د لړېی پولې ته تلنې په هکله ویناوي ناشونې دي.

د ودې ټکي د واټن لپاره بند(بندیز) r د پولې ته تلنې یا کونورګنت ـوړانګې په نامه یادیږي او د فرمول

$$r=\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|a_n|^{1/n}\right)^{-1}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره شمېرل کيږي. له دې سره ارزښتونه $r = 0$ او $r = \infty$ شوني دي. په دې حالت کې د کونورګنت انتروال یا تش دی او یا ټول $\mathbb{R}$ دی.

لیکونکي: اېپ، هیولیک،

د ریښې قضیې په بنسټ دی

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right|} = \frac{1}{r}\,|x-a|\,.$$

په توګه د $|x-a| < r$ لپاره د تېلرو-اړی یوې ته ځي او د $|x-a| > r$ لپاره پولې ته نه ځي. د $|x-a| = r$ لپاره نورې څېړنې اړیینې دي یا نورو څېړنو ته اړتیا ده.

لیکونکي: اېپ، هیولیک،

تابع

$$f(x) = \begin{cases}\exp(-1/x^2), & \text{für } x \neq 0\\ 0, & \text{für } x = 0\end{cases}$$

په 0کې برابرډوله ناپرېکېدونکې ده. دا پسې دپوره اینډکشن له لارې ښوول کېدی شي، چې ټول مشتقونه د

$$f^{(n)}(x) = \frac{p_n(1/x)}{\exp((1/x)^2)}$$

بڼې دي، د یوه مناسب پولینوم p_n سره. دا چې د $x \to 0$ (همداسې د $1/|x| \to \infty$) لپاره اکسپوننشل تابع نسبت یوه پولینوم ته په قوت یا قوي جګیږي، نو ټول پولینومونه په $x = 0$ ځای کې ارزښت 0لري. اړونده تیلور-لړۍ نو له دې امله صفر لړۍ ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0x^k \,.$$

داچې د f لپاره $f(x) \neq 0$ دی، نو د تیلور-لړۍ د $x \neq 0$ سره فقط د $x = 0$ لپاره یو بل سره برابر یا یو غږیز دي، دا په دې معنا چې د پولې ته تلنې وړانګه r 0 ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

اکسپوننشل تابع

$$f(x) = \exp(x)$$

لاندې مشتق لري

$$f^{(n)}(x) = \exp(x)\,.$$

که د $x = 0$ په ځای کې وارزول شي ، ترې لاس ته راځي

$$f^{(n)}(0) = 1\,.$$

د دې په تعقیب د اکسپوننشل تابع د تیلور-لړۍ لاندې بڼه لري

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\,.$$

دا چې

$$\lim_{k\to\infty} 1/\sqrt[k]{k!} = 0\,,$$

،

نو $r = \infty$ دی، دا په دې معنا چې د تیلورر-لړۍ په ټول $\mathbb{R}$ پولې ته ځي یا کونورګنت ده.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بیلګې لپاره تابع

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

په $a = 4$ وديز کيږي.
ددې لپاره لومړی مشتقونه جوړيږي:

$-\frac{1}{2}\, x^{-3/2}$	=	$f'(x)$
$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) x^{-5/2}$	=	$f''(x)$
.	.	.
.	.	.
	.	.
$(-1)^n\, 2^{-n} \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-1) \cdot x^{-\frac{2n+1}{2}}$.	=	$f^n(x)$

په وديزېنې ټکي د قیمت اینووونې یا -وضع کونې سره سړی د تیلور-ضریبوننه لاس ته راوړي

$$c_n = \frac{f^{(n)}(4)}{n!} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}\, 2^{-2n-1} .$$

د لړۍ لومړي درې ترمونه دي

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{16}(x-4) + \frac{3}{128}(x-4)^2 + \cdots .$$

د دې لپاره چې د ضریبونو وړانګه r وټاکو، په پام کې نیسو

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{2n}\, 2^{-2n} \leq c_n \leq \frac{1}{2}\, 2^{-2n} .$$

له دې سره دی

$$\frac{1}{4}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{1/(4n)} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{c_n} \leq \frac{1}{4}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\sqrt[n]{1/2} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{n\to\infty}\ \sqrt[n]{1/n} = \lim_{n\to\infty}\ \sqrt[n]{c} = 1$$

دا چي دی لاس ته

$$r = \frac{1}{(1/4)} = 4$$

راځي .

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د اويلر فرمول

$$\exp(\mathrm{i}t) = \cos t + \mathrm{i}\sin t$$

کيدی شي د تيلور-وديزيېني په مرسته

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \dots$$

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \dots$$

د کوساين ـ او ساين توابع منځ ته راوړل شي. له

$$-\frac{t^2}{2} = \frac{(\mathrm{i}t)^2}{2}\,, \quad -\frac{t^3}{6} = \frac{\mathrm{i}^2 t^3}{3!}\,, \quad +\frac{t^4}{24} = \frac{(\mathrm{i}t)^4}{4!}\,, \quad +\frac{t^5}{120} = \frac{\mathrm{i}^4 t^5}{5!}\,, \dots$$

څخه لاس ته راځي

$$\cos t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^2 k}{(2k)!}$$

$$\mathrm{i}\sin t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

او د زياتون يا جمعې له لارې د تيلور –وديزيېني له لارې د اويلر فرمول لاس ته راوړو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{aligned}\exp(\mathrm{i}t) &= 1 + \mathrm{i}t - \frac{t^2}{2!} - \mathrm{i}\frac{t^3}{3!}\cdots \\ &= 1 - \frac{t^2}{2!} \pm \cdots + \mathrm{i}(t - \frac{t^3}{3!} \pm \cdots) \\ &= \cos t + \mathrm{i}\sin t\,.\end{aligned}$$

ليکونکي: اېپ، هيوليګ،

د لوګاريتم تابع

$$f(x) = \ln x$$

لاندې مشتق لري

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}\,.$$

په دې پسې مرربعيز د تيلور –پولينوم په ټکي $a = 1$ کې دی

$$p(x) = 0 + (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2\,.$$

باقی – يا پاتې غړی دابنه لري

$$\begin{aligned}r(x) = f(x) - p(x) &= \frac{1}{3!}\,f'''(\xi)\,(x-1)^3 \\ &= \frac{1}{3\,\xi^3}(x-1)^3\end{aligned}$$

د ξ سره، چې د x او 1 ترمنځ پروت دی. ناټيکاوی د ممکن کوچني ξ لپاره خورا غټ دی. سړی اټکل لاس ته راوړي

$$|r(x)| \leq \frac{1}{3}\left|\frac{x-1}{\min(1,x)}\right|^3\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x \in [0.75, 1.25]$ لپاره ناتيکاوی دی

$$\leq \frac{1}{3} \left|\frac{1/4}{3/4}\right|^3 = \frac{1}{81} .$$

ليکونکي: هيوليګ،

بينوميال لړۍ Binomialreihe

تابع

$$f(x) = (1+x)^\alpha$$

د $\alpha \in \mathbb{R}$ سره يوه تيلور-لړۍ لري

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

د $|x| < 1$ لپاره ، د کوم سره چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

تولیز شوی بينوم ضريب دی

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

دا ترلي لاس ته راځي، چې

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لړۍ

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

د وېش قضیې

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left| \frac{\binom{\alpha}{k+1} x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k} x^k} \right| = |x| \overline{\lim_{k\to\infty}} \left| \frac{\alpha - k}{k+1} \right| = |x| < 1 .$$

له مخې پولې ته ځي

لیکونکي: اپپ، هیولیګ،

د تیلور ـــلړۍ مشتق او انتیګرال
Differentiation und Integration von Taylor-Reihen

د یوې د تیلور- لړۍ

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k , \quad c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} ,$$

کېدی شي غړي ډوله یا یې غړي په غړي مشتق او انتیګرال ونیول شي:

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} (x-a)^k$$

$$\int f(x) dx = c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{k-1}}{k} (x-a)^k .$$

په دواړو عملیو کې د پولې ته تلنې وړانګه بې تغیره پاتېږي.

لیکونکي: هیولیګ، کرایخ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د بینوملړی

$$(1+t)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}t^3 + \cdots,$$

څخه د $t=-x^2$ او $\alpha=-1/2$ سره لاس ته راځي

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} x^{2k}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \cdots.$$

د انتیګرال له لارې او همداسې د

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \arcsin(0) = 0$$

په پام کې نیولو سره د غړي په غړي انتیګرال له لارې داوده لاس ته راځي

$$\text{arcs}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-1/2}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots$$

لیکونکي: اپپ، هیولیک،

د انتیګرا

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

نږدې ډوله شمیرنه د تیلور-اکسپوننشل تابع باندې لاس ته راولي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$e^{-t^2} \qquad = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{k!} \,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^x e^{-t^2}\, dt \quad = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)} \,.$$

د نومريکي نږدېوني پخ حيث د $\int_0^1 e^{-t^2}\, dt$ لپاره لاندې ارزښتونه لاس ته راځي

k=0: 1
k=1: 0.66666666666667
k=2: 0.76666666666667
k=3: 0.74285714285714
k=4: 0.74748677248677
k=5: 0.74672919672920
k=6: 0.74683603433603
k=7: 0.74682280682281
k=8: 0.74682426573971
k=9: 0.74682412070118
(Autoren: App/Höllig)

د تيلور-لړۍ ضرب **Multiplikation von Taylor-Reihen**

د تيلور – لړۍ کېدی شي غړي په غړي سره ضرب شي:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_n (x-a)^k\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-a)^k\right) = \sum_{k=9}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

د لاندې سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} f_{k-j} b_j \; .$$

د ضرب د کونورګنت وړانګه د دواړو ضریبونو د پولې ته تلنې وړانګې د مینیموم سره برابره ده.
لیکونکي: ، هیولیک، کرایخ

د لاندې تابع د تیلور – لړۍ شمیرنې ته
Zur Berechnung der Taylor-Reihe der Funktion

$$f(t) = e^{-t}\cos(\omega t)$$

سړی کړی شي د اکسپوننشل تابع د تیلور – لړۍ او د کوساین –تابع وکاروي

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{k!} = 1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} \pm \cdots$$

$$\cos = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} \pm \cdots \; .$$

د ضرب څخه د لومړي ترم لپاره لاس ته راځي

$$e^{-t}\cos(\omega t) = 1 - t + \frac{1-\omega^2}{2!} t^2 + \left(\frac{\omega^2}{2!} - \frac{1}{3!}\right) t^3 + \cdots \; .$$

$$e^{-t}\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(e^{(\mathrm{i}\omega - 1)t}\right)$$

بدیلي کېدی شي هم و کارول شي:

$$e^{-t}\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^k t^k}{k!}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \mathrm{Re}\left(1 + (\mathrm{i}\omega - 1)t + \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^2}{2!}t^2 + \frac{(\mathrm{i}\omega - 1)^3}{3!}t^3 \cdots\right)$$

$$= 1 - t + \frac{1 - \omega^2}{2!}t^2 + \frac{3\omega^2 - 1}{3!}t^3 + \cdots .$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ،

د تيلور-لړی وېش **Division von Taylor-Reihen**

د دوه تيلور – لړيو وېش

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x-a)^k \Big/ \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x-a)^k, \qquad g_0 \neq 0,$$

د ضريبونو پرتلې له لارې کېدی شي له کتوتوالي

$$(q_0 + q_1 u + \ldots)(g_0 + g_1 u + \ldots) = f_0 + f_1 u + \ldots\ , \quad u = x - a\,,$$

څخه وټاکل شي:

$$\begin{aligned} q_0 g_0 = f_0 \quad &\longrightarrow \quad q_0 \\ q_1 g_0 + q_0 g_1 = f_1 \quad &\longrightarrow \quad q_1 \\ &\vdots \\ q_n = (f_n - q_{n-1}g_1 - \ldots - q_0 g_n)/g_0 \quad &\longrightarrow \quad q_n . \end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ، اپريښ

د $q(x) = \tan x$ تر 5نظم پورې وديزونې لپاره ړدو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(q_1x+q_3x^3+q_5x^5+\ldots)\underbrace{\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\ldots\right)}_{\cos x}=\underbrace{x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\ldots}_{\sin x}.$$

له دې سره همدا اوس وکارول شو، چې تانجنت $\tan x$ ناجوړه(طاق) دی، دا په دې معنا چې $q_0=q_2=\ldots=0$.
د ضريبونوو له پرتلې څخه لرو:

$$\begin{aligned}
q_1x &= & x &\longrightarrow & q_1&=1,\\
\left(-\frac{q_1}{2}+q_3\right)x^3 &= & -\frac{1}{6}\,x^3 &\longrightarrow & q_3&=\frac{1}{3},\\
\left(\frac{q_1}{24}-\frac{q_3}{2}+q_5\right)x^5 &= & \frac{1}{120}\,x^5 &\longrightarrow & q_5&=\frac{2}{15}.
\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ، اپريس

د راشنل توابعو تيلور-وديزېنه

Taylor-Entwicklung rationaler Funktionen

د يوه راشنل تابع $r(z)$ د تيلور –وديزيېنه په ټکي $z=a$ کې کېدی شي د کمپلکس پارشل جمعي په مرسته وټاکل شي، دا په دې معناچې r د يوه پولينوم او د بنسټ تابع

$$\frac{1}{(u-z)^j}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+j-1}{j-1}\frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+j}}.$$

جمعه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوګونو زياتونونو(د جمعي اعضاوې) د کونورګنت وړانګې د وديزېنې ټکي د قطب
$|u-a|$
نقطو د واټن سره برابره ده
ليکونکي: کلاوس هيوليک

وديزېنه يا وده د بينوم لړۍ يو ځانګړې حالت دی:

$$\frac{1}{(u-z)^j} = \frac{1}{((u-a)-(z-a))^j} = (u-a)^{-j}(1+x)^{-j},$$

$$, \quad x = -\frac{z-a}{u-a}.$$

بديلي کېدی شي په ټکي $z = a$ کې مشتق وشمېرل شي او د n-م د تيلور ضريبونو لپاره لاس ته راوړو

$$\frac{j\cdot(j+1)\cdots(j+n-1)}{n!} = \binom{n+j-1}{n}(u-a)^{-j-n}.$$

د

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n+j-1}{j-1}^{1/n} = 1$$

له امله د کونورګنت يا پولې ته تلنې وړانګه $|u-a|$ ده .
ليکونکي: کلاوس هيوليک

د ښوونې لپاره د

$$r(z) = \frac{1}{z^2-z} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z}$$

وده په $a = 3$ وتاکل شي. د لومړي ترم لپاره د ټوليز فرمول څخه د $u = 0$ او $j = 1$
سره لاندې د تيلور n -م ضريب لاس ته راوړي

$$\binom{n}{0}(-3)^{-(n+1)},$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دا په دې معنا چې

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}((z-3)/(-3))^n, \quad |z-3| < 3\,.$$

دا ترې لاس ته راغلې هندسي لړۍ کېدی شي سیده هم لاس ته اروړل شي. دا د دویم ترم په بنسټ بښوول کیږی. سړی لیکي

$$-\frac{1}{1-3-(z-3)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(z-3)/(-2)}$$

او لاس ته راوړي

$$-\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}((z-3)/(-2))^n, \quad |z-3| < 2\,.$$

د دواړو لړیو زیاتون یا جمعه دا وده راکوي

$$\frac{1}{z^2-z} = \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)(z-3) + O((z-3)^2)\,.$$

لیکونکي: کلاوس هیولیګ

د یوې تیلور – لړۍ معکوس ارزښت تکرار شمیرنه
Iterative Berechnung des Kehrwerts einer Taylor-Reihe

که $g(0) \neq 0$ وي، نو کېدی شي د ایترېشن له لارې

$$f \;\longleftarrow\; 2f - gf^2$$

له $f(x) = 1/g(0)$ څخه په وتو د معکوس ارزښت $f = 1/g$ وده وشمېرل شي.
د لته په هر پل کې د ټیکو ترمونو تعداد یا ګڼ،ن دوه برابره کیږي.

دا متود د نیوتن تلنلار د $\frac{1}{f} - g = 0$ د یوه حل f ټاکل په ګوته کوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: کلاوس هیولیګ، اپپریش

د پولې ته تلنې وینا کیدی شي د کتوتوالي

$$f_{\text{neu}} - \frac{1}{g} = -g\left(f_{\text{alt}} - \frac{1}{g}\right)^2$$

حخه ولوستل شي، ځکه چې له $f_{\text{alt}} - 1/g = O(x^n)$ لاس ته

$$f_{\text{neu}} - 1/g = O(x^{2n})$$

راځي .

لیکونکي: کلاوس هیولیګ، اپپریش

د

$$f(x) = 1/g(x) = 1/\cos x$$

تیلور ودیزیښه کېدی شي لکه چې په تعقیب یې پل په پل وشمېرل شي. له

$$g = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)\,, \quad f_0 = 1$$

څخه په وته لاس ته راځي

$$\begin{aligned} f_1 &= 2\cdot 1 - g\cdot 1^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + O(x^6) \\ f_2 &= 2(1+\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4) - g\,(1+\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4)^2 + O(x^6) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6)\,. \end{aligned}$$

سملاسې له دوه پلونو (قدمونو) وروسته لومړي شپږ ترمونه ټیک دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$ سره له ضرب پسې د تانجنت لړۍ راکوي

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots$$

لیکونکي: کلاوس هیولیګ، اپیریش

د معکوس تابع د تیولور ودیزیینه
Taylor-Entwicklung der Umkehrfunktion

د یوه تابع f د معکوس تابع $g(x)$ د تیلور ضریبونه د $f'(a) \neq 0$ سره په ټکي $b = f(a)$ کې کېدی شي د $g(f(x)) = x$ له مشفونې و ټاکل شي :

$$g(b) = a$$

$$g'(b)\, f'(a) = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(b)$$

$$g''(b)\, f'(a)^2 + g'(b)\, f''(a) = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(b)$$

$$\vdots$$

دا منځ ته راغلې مساوات کېدی شي تل پسېsukzessive د مشتقونو $g'(b), g''(b), \dots$ پسې وشمېرل شي.

لیکونکي: کلاوس هیولیګ، اپیریش

د $f(x) = \sin x$, $g(x) = \arcsin x$ او $a = 0$ لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$g(0) = 0$$

$$g'(0)\cos 0 = 1 \quad \longrightarrow \quad g'(0) = 1$$

$$g''(0)\cos^2 0 - g'(0)\sin 0 = 0 \quad \longrightarrow \quad g''(0) = 0$$

$$'(0)\cos^3 0 - g''(0)(-\sin 0) + g''(0)\cos 0(-\sin 0) + g'(0)(-\cos 0) = 0 \quad \longrightarrow \quad g'''(0) = 1$$

$$\vdots$$

$$\arcsin x = x + \tfrac{1}{6}x^3 + O(x^4)$$

دا په دې معنا چې . که په پام کې ونيول شي،
جې د يوه ناجوړه يا طاق تابع په څېټ – يا معکوس تابع ناجوړه ده، نو سملاسي يې
وديزيېنه تر پنځم ترم پورې ټيک ده.
ليکونکي: کلاوس هيوليگ، اپيريښ

د تيلور ځانګړې لړۍ Spezielle Taylor-Reihen

$$(1 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad |x| < 1$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots \quad -1 < x \leq 1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{t} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}B_{2k}x^{2k-1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \quad |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{ar} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots \quad |x| < 1$$

$$\mathrm{arcc} = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \cdots\right) \quad |x| < 1$$

$$\mathrm{arctar} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots \quad |x| < 1$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د پاد نږدې ارزښت شميرنه **Pade-Approximation**

د يوه تابع $f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots$ د (m,n) - پاد-نږدې ارزښت شمېرنه يو
راشنل تابع دی د صورت – يا ماتباندې درجې m او مخرج يا ماتلاني درجې n سره،
چې د f سره د $z \to 0$ لپاره تر ځګو درجو ترمونو همغږيز کيږي يا سره برابريږي:

$$\frac{p(z)}{q(z)} - f(z) = O(z^{m+n+1}) .$$

پولينومونه $p(z) = a_0 + \cdots + a_m z^m$ او $q(z) = b_0 + \cdots + b_n z^n$ کېدی
شي د ضريبونو د پرتلې له لارې وټاکل شي.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د q سره د ضرب وروسته لاس ته راوړو

$$(a_0 + a_1 z + \cdots) - (c_0 + c_1 z + \cdots)(b_0 + b_1 z + \cdots) = c z^{m+n+1} + \cdots ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او لاس ته راځي، چې د $k \leq m + n$, z^k ضریبونه باید ورک شي:

$$k = 0: \quad a_0 - c_0 b_0 = 0$$
$$k = 1: \quad a_1 - c_0 b_1 - c_1 b_0 = 0$$
$$\cdots .$$

دا کښته – یا لامدې ټاکل شوی هوموجېن کرښیز مساوات سیستم ($m + n + 1$ مساوات د $m + n + 2$ متحولو یا ناټاکلو سره) راکوي، چې تل حل لري.

دا چې f په صفر کې قطب نه لري، راکوي $a_0 = 0$ ، چې $b_0 = 0$ راکوي. له دې املـه کېدی شي د ممکنه لنډونو وروسته د q لومړي له صفر توبېرېدونکي ضریبونه د 1 سره برابر ایښول کېښولی شي.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د اکسپوننشل توابعو لپاره د (m, n) -پاد-نږدې ارزښت شمېرنې ته مساوات سیستم په لاندې ډول دی.

$$0 = a_0 - b_0$$

$$0 = a_1 - b_1 - b_0$$

$$\cdots$$

$$0 = a_m - b_m - \cdots - \frac{1}{m!} b_0$$

$$0 = b_{m+1} - \cdots - \frac{1}{(m+1)!} b_0$$

$$\cdots$$

$$0 = \frac{1}{m!} b_n - \cdots - \frac{1}{(m+n)!} b_0 .$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د حل لپاره د بیلګي په توګه لاس ته راوړی شو

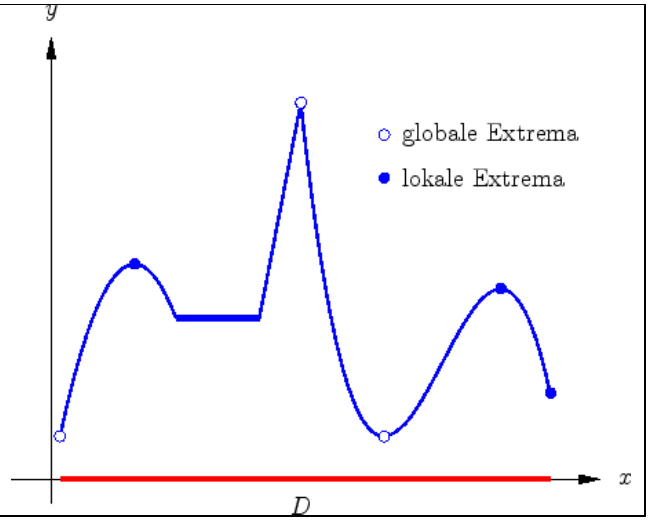
$$r_{1,1}(x) = \frac{1 + x/2}{1 - x/2}, \quad r_{2,2}(x) = \frac{1 + x/2 + x^2/12}{1 - x/2 + x^2/12}.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

اکستریما(افراطیت) **Extrema**

تابع f په a کي په یوه ډېری(سټ) D یو تولیز یا ګلوبال مینیموم لري، که وي $f(a) \le f(x) \quad \forall x \in D.$

په یوه ځاییز – یا لوکال مینیموم $f(a)$ کي د تابع ارزښت فقط په یوه کوچني]اپېریال $(a-\delta, a+\delta) \cap D$ کې مینیمال دی.
ګلوبال او لوکال مینیموم سره ورته تعریف دي.



په یوه رابند انتروال د یوه توټه ډوله ناپرېکېدونکی او مشتقوړ تابع لپاره کېدی شي افراطي ارزښتونه فقط د مشتقونو په صفرځایونو ، پرېکېدونکي ځایونو او یا په ژئ ځایونو کي رامنځ ته شي. تیوپ یا ډول یې کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته او د ت ابع ارزښتونو د پرتلې له لارې پیداشي.

لیکونکي: هیولیګ، هیوررنر
د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع لپاره د لوکال مینیموم سره د تعریفورشو په دننني ټکي a کي د مشتق لپاره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

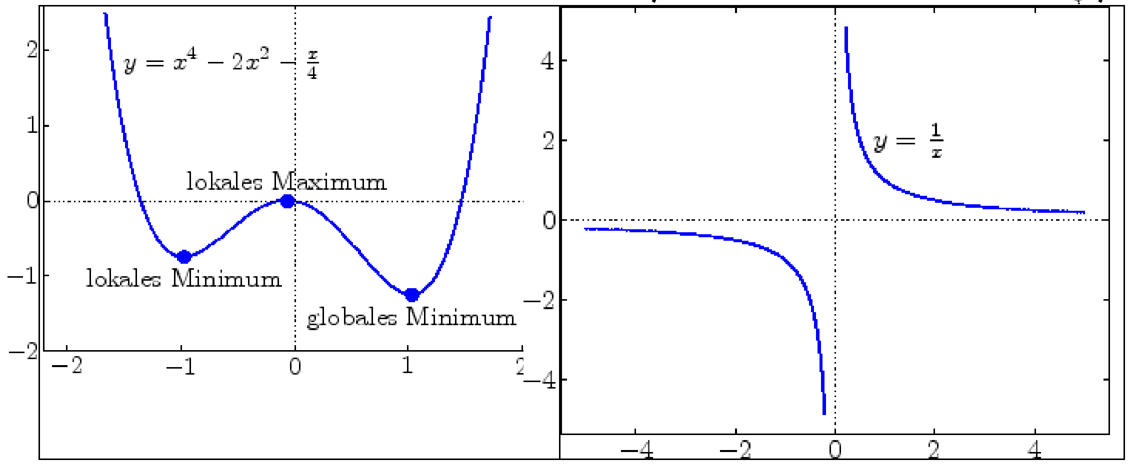
$$f'(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\geq 0}} \frac{\overbrace{f(a+h)-f(a)}^{\geq 0}}{h} \geq 0$$

او

$$f'(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\leq 0}} \frac{\overbrace{f(a+h)-f(a)}^{\geq 0}}{h} \leq 0$$

نو $f'(a)=0$. يعني د تعريف ورشو په دننه کې په يوه لوکال افراطيت کې بايد مشتق صفر وي يا f هلته مشتقوړ نه وي.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

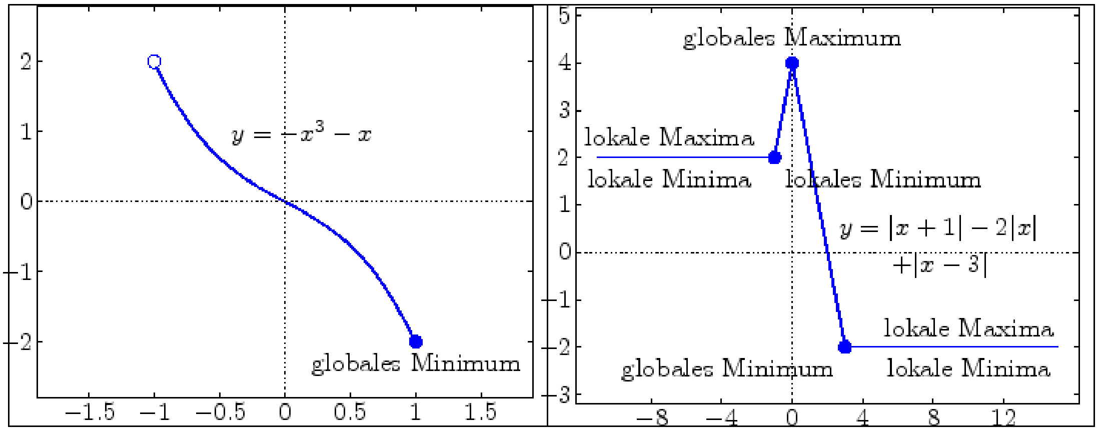
په لاندې کې به يو څو تيپيکي حالتونه وڅيړل شي.
تابع $f(x)=x^4-2x^2-x/4$ د $D=\mathbb{R}$ سره دوه مينيما اويو متکسيما لري. مينيموم د کوچني تابع ارزښت سره ګلوبال دی. يو ګلوبال ماکسيموم شتون نه لي ، ځکه چې $f(x)\to\infty$ د $x\to\pm\infty$ لپاره دی.



تابع $f(x)=1/x$ د $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ سره اکستيم يا افراطي ارزښتونه نه لري.که يو تابع په يوه واز انتروال ثابت وي، نو دا ځايونه هم (لکال) ماکسيما او هم (لوکال) مينيما دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

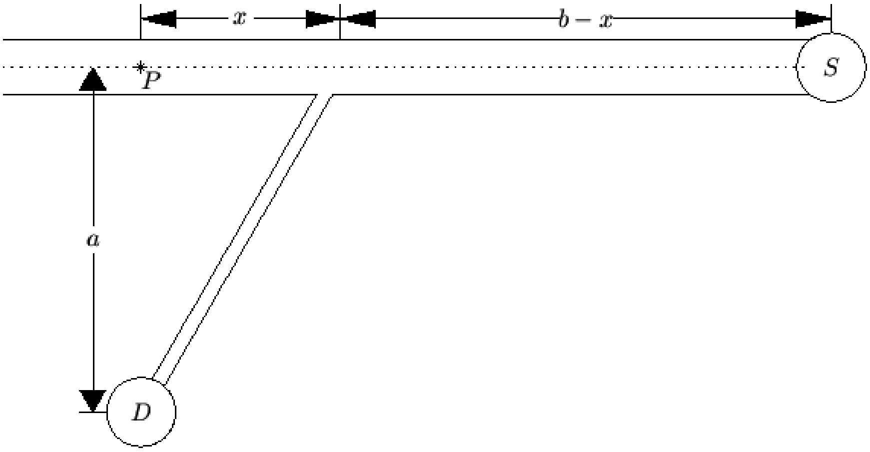
يوه کره همغږيز – يا مونوتون تابع سره افراطي ارزښتونه په ژی ټکو کې نيول کيږي، که دا تعريفورشو پورې تعلق ولري يا اړوند وی.



ليکونکي: هيوليک، هيورنر

له يوه کلي D څخه يوه ښار S ته يوترنسرک جوړيږي. په واټن a همدا اوس له کلي و ښار ته يو سرک جوړ دی له ښار څخه تر ټکي P پورې لار ، هغه سرک چې کلي ته بل يا پسي نږدې پروت دی، اوږدوالی b لري.

دا سيده کرښيز توته لار بايد داسې جوړه وي، چې د ښار ګړندی رسيدنه شووني يا تظمين وي، که د يوه منځني [ټکتيا km/h $v_a = 120$ د $v_n = 60$ په واټن په نوي څنګيز يا فرعي سرک څخه لاړ شو.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د P او د څنګیز سرک ترمنځ واټن $x \geq 0$ د ټاکلو لپاره د مینیمی – یا کمونې له لارې اړین وخت

ښار ته د خوزښت لپاره دی

$$t(x) = \sqrt{a^2 + x^2}/v_n + (b - x)/v_a$$

د مشتق صفرځایونه

$$t'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}v_n} - \frac{1}{v_a} \stackrel{!}{=} 0\,,$$

راکوي

$$v_a x = v_n\sqrt{a^2 + x^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_m = a/\sqrt{3}$$

یعنې ممکنه لوکال اکستېرم ځاي په (0, b)کې. ایا چې دا مینیموم دی، باید د خوزښت وخت سره په انتروالټکو کې د پرتلې له لارې وټاکل شي:

$$t(a/\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}a + b}{v_a}\,, \qquad t(0) = \frac{2a + b}{v_a}\,, \qquad t(b) = \frac{2\sqrt{a^2 + b^2}}{v_a}$$

په روښانه توګه $t(0) \geq t(x_m)$ دی. د ښي پایټکو لپاره باور لري

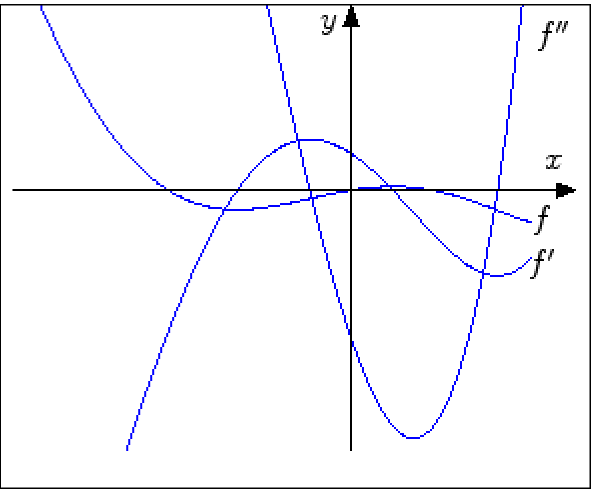
$$\begin{aligned} t(b) \geq t(x_m) \Leftrightarrow \quad & 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{3}a + b \\ \Leftrightarrow \quad & 4a^2 + 4b^2 \geq 3a^2 + 2\sqrt{3}ab + b^2 \\ \Leftrightarrow \quad & a^2 - 2\sqrt{3}ab + 3b^2 = (a - \sqrt{3}b)^2 \geq 0\,. \end{aligned}$$

اخرنی مساوات تل پوره دی، او له دې سره x_m اوپټیمال یا اغیز من دی، که په غوره انتروال $(0, b)$ کې پروت وي.: $b \geq a/\sqrt{3}$. په بل حالت کې به مینیموم په ژی ټکي b ته ، یعنې ښار ته د سیده تړنې، سره ورسیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د اکستریم – یا افرطي ازښتونو ازماېښت Extremwerttest

	د یوه افراطی ارزښت تیوپ یا ډول په هکله کېدی شي د جګو مشتقونو په مرسته پرېکړه وشي. که f یو دوه واره ناپرېکیدونکی مشتقوړ تابع وي او $f'(a) = 0, \qquad f''(a) > 0$ $(f''(a) < 0),$ ولرو،

نو f په a کې یو ځاییز مینیموم(ماکسیموم) لري. که د a په ځای کې دویم مشتق ورک شي یا صفر شي، نو باید جګ مشتقونه پرېکړې ته را وړاندې شي. که باور ولري

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(a) \neq 0,$$

نو f په a کې تیک هلته یو افراطیت لري، که جوړه وي. په دې حالت کې f په a کې یو لوکال یا ځای اړونده ماکسیموم همداسې مینیموم لري، که $f^{(n)}(a) < 0$ همداسې $f^{(n)}(a) > 0$ وي.

لیکونکي:اېپ، هیولیګ

د ښوونې لپاره و f ته سرې د a په ځای کې د $n-1$ درجې د تیلور-پولینوم کاروې د باقي یا پاتې

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-a)^n$$

غږي سره او په پام کې نیسې، چې د $f^{(n)}(t)$ او د $f^{(n)}(a)$ لپاره(او له دې سره هم د t لپاره) a ته په بوره نږدېوالي همغه یا برابره مخنخښه ولري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناجوړه يا طاق n لپاره له $x < a$ څخه و $x > a$ ته په تلنې کې د پورته مساوات ښی اړخ يو د مخنخښې بدلون لري. د دې پسې $f(x) - f(a)$ هم هلته د مخنخښې بدلون لري او د a د f افراطي ځاى نه دى.

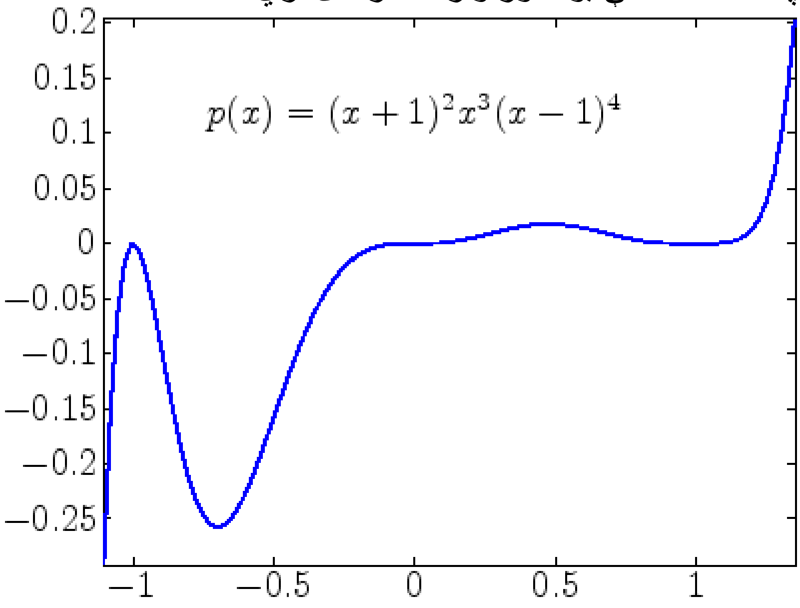
د جوړه n لپاره د $x \neq a$ لپاره تل $(x-a)^n > 0$ دى. د $f^{(n)}(a) < 0$ په حالت کې د $x \neq a$ لپاره او x چې a ته پوره نږدې پروت دى $f(x) < f(a)$ لاس ته راځي. نو تابع f په دې حالت کې په a کې يو لوکال ماکسيموم لري . حالت $f^{(n)}(a) > 0$ په ورته توګه يو لوکال ميموم راکوي.

ليکونکي:اپپ، هيوليک

پولينوم

$$p(x) = (x+1)^2 x^3 (x-1)^4$$

په $x = -1$ کې يو ډبل صفرځاى ، په $x = 0$ کې يو درېواره صفرځاى لري او په $x = 1$ کې يو څلور واره صفرځاى لري.



باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$p(-1) = p'(-1) = 0, \quad p''(-1) = 2(-1)^3(-2)^4 < 0\,.$$

په $x = -1$ کې p يو ماکسيموم لري. په $x = 1$ کې p يو مينيموم، خکه چې

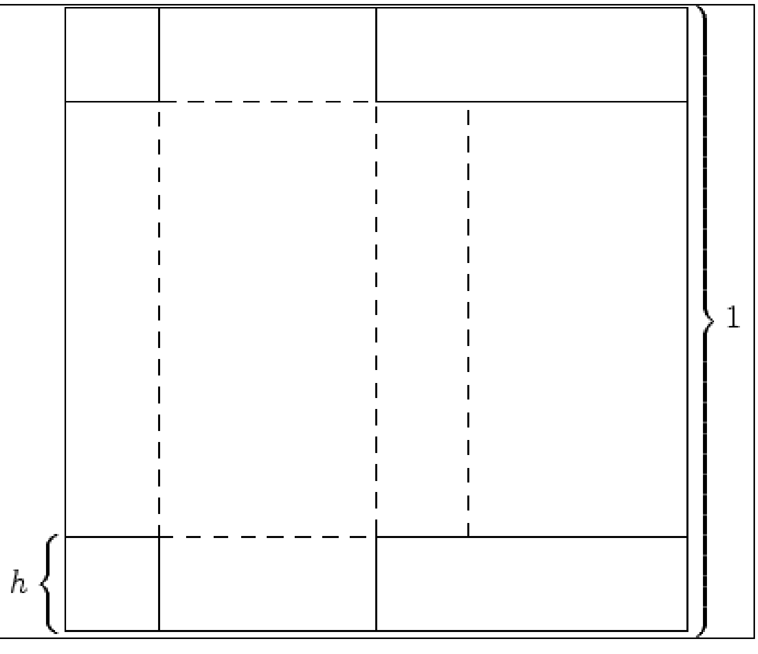
$$p(1) = \ldots = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 1^3 4! > 0\,.$$ ،

بالاخره p د

$$p(0) = p'(0) = p''(0) = 0, \quad p'''(0) = 3!(-1)^4 \neq 0$$

له امله او په $x = 0$ کې يو مخنخښې بدلون له امله په سرچينه کې افراطي ځايونه نه لري.

ليکونکي:اپپ، هيوليگ

د دې ورکړ شوي غوڅنموني په مرسته دې د مربعيز ټوټه کارتونونو څخه دې ممکنه د لوی حجم صندق جوړ شي	

ډکی يا حجم دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$v(h) = \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

اوږدوالی سور جګوالی

د مشتق صفرځایونه

$$v'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

راکوي

$$= \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

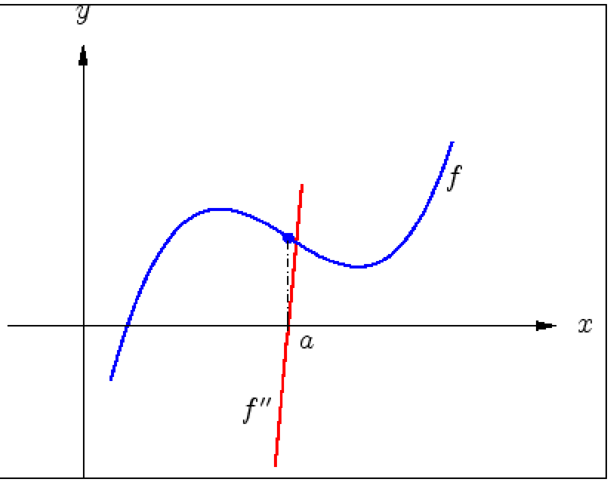
یعني ممکنه افراطي ځایونه. فقط $h = \frac{1}{6}$ هندسي موخه ور دی او

$$v(1/6) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}.$$

دا چې د ژی ټکو $h = 0$ او $h = 1/2$ لپاره ډکی یا حجم صفر 0 دی، صندق د $h = 1/6$ لپاره ماکسیمال ډکی یا حجم لري.

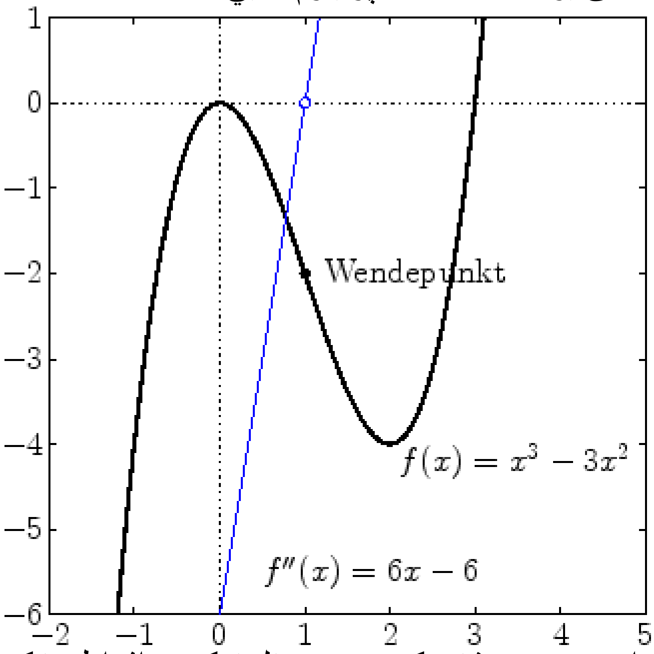
لیکونکي:اپپ، هیولیک

اوړونټکي(نقطه انعطاف) Wendepunkte

د یوه تابع f په یوه اوړنټکي a کې دویم مشتق مخنخبنه بدلوي. د یوه پوره هوار تابع لپاره اړین دی، چې $f''(a) = 0$ وي او پوره کېدونکي، چې $f'''(a) \neq 0$ وي. لیکونکي: هیولیک، هیورنر	

(c) ketabton.com: The Digital Library

مشتق یو kubisches پولینوم ښايي.



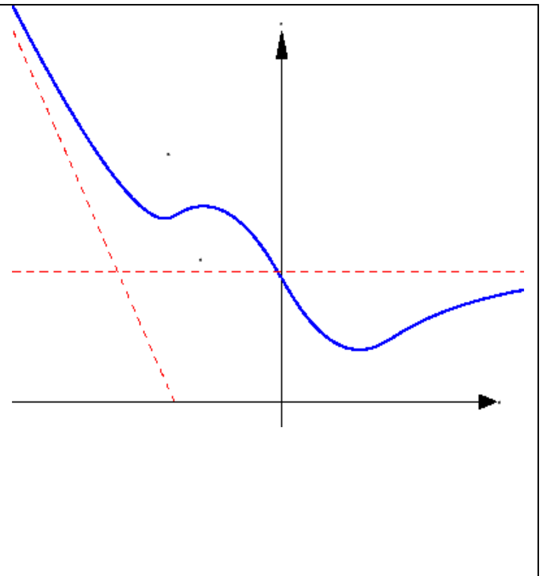
دا چې د ویم مشتق کرښیز دی، تل ټیک یو افراطی ټکی شتون لري.
لیکونکي: هیولیک، هیورنر

اسیمپتوتي(یو په بل نه پرېوتونکي یا ګاونډی) **Asymptoten**

یو کرښیز تابع $p(x) = ax + b$ د f یو اسیمپتوت یا ګاونډی دی، که د $x \to \infty$ یا $x \to -\infty$ لپاره $f(x) - p(x) \to 0$ وي.

لکه په ښېره کې چې ښوول شوی دی، ګاونډ د تابع f حالت د لوي x لپاره تشریح کوي.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

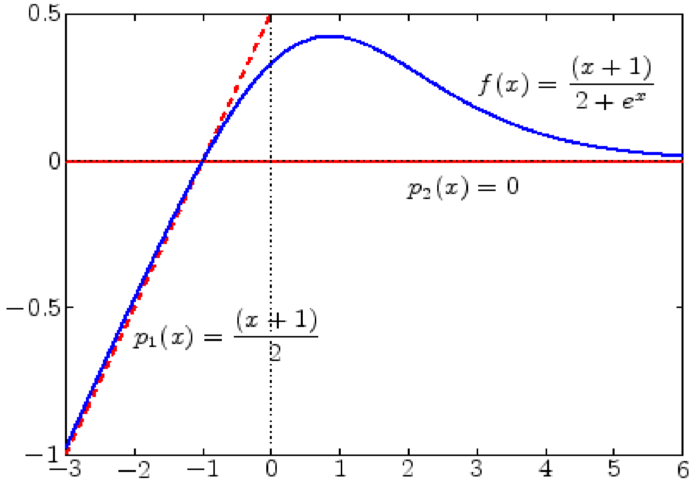


(c) ketabton.com: The Digital Library

د دې لپاره چې د تابع

$$f(x) = \frac{x+1}{2+e^x}$$

ګاونډ وټاکو پوله ارزښتونه $x \to \pm\infty$ ځانله تر څېړنې نيسو.



د $x \to \infty$ لپاره دی

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)\cdot e^{-x}}{2\cdot e^{-x}+1}$$

$$= \frac{0}{0+1} = 0 .$$

له دې سره د x محور ګاونډ يا اسيمپتوت دی

د $x \to -\infty$ لپاره e^x د 0 په لور هخيږي او

$$p(x) = \frac{x+1}{2}$$

ګاونډ دی.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د راشنل- یا کسر توابعو ګاونډ یا اسیمپټوټې
Asymptoten rationaler Funktionen

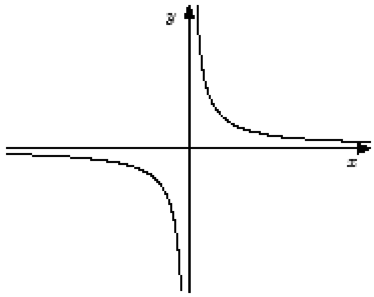
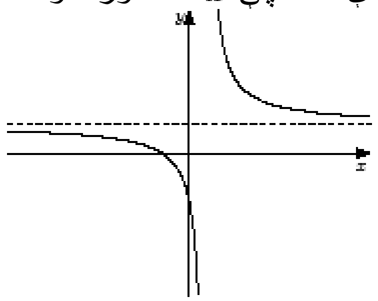
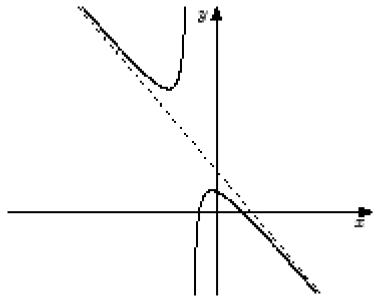
یو راسنل تابع

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

تیک هلته یو کربنیز ګاونډ لري، که Grad $p \leq$ Grad $q+1$ وي.
د Grad $p <$ Grad q لپاره باور لري

$$\lim_{p\to\pm\infty} r(x) = 0\,,$$

دا په دې معنا چې x - محور ګاونډ دی.

د Grad $q \leq$ Grad $p \leq$ Grad $q+1$ لپاره سړی کربنیز ګاونډ د پولینوم وېش سره لاس ته راوړي :

$$r(x) = ax + b + \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

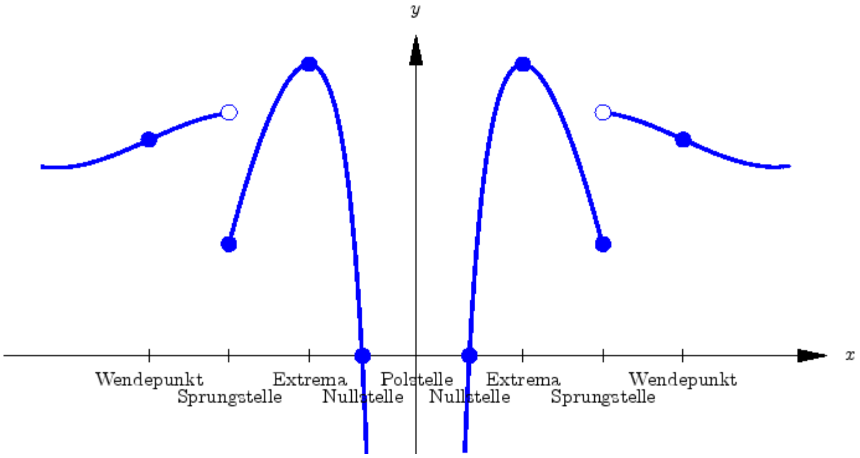
د q Grad $\tilde{p} <$ Grad سره. اسیمپتوت پروت یا افقي, $(a = 0)$ دی، که Grad q Grad $p =$ وي.

که د صورت درجه د مخرج له درجې له یو زیات وي، نو $r(x)$ د لوي x لپاره د یوه پولینوم سره، چې ≥ 2 درجه وي اپروکسیمي کیږي.
لیکونکي: هیولیک، هیوررنر

د کږو یا منحنیو خبري یا بحثKurvendiskussion

د یوه تابع د څومره والي حالت باندې قضاوت ته لاندې نخښې کیدی شي رامخ ته شي:

- سیومتريSymmetrien
- تل بیرته راګرځیدنهPeriodizität
- پرېکیدنوالي ځایونهUnstetigkeitsstellen
- صفرځایونه(مخنخښه $\longrightarrow$)Nullstellen ($\longrightarrow$ Vorzeichen)
- اکسترېما (همغږیزوالي ورشوګاني $\longrightarrow$)Extrema ($\longrightarrow$ Monotoniebereiche)
- اوړونتکی (ننوتلوالي ورشوګاني $\longrightarrow$)Wendepunkte ($\longrightarrow$ Konvexitätsbereiche)
- قطبځایونهPolstellen
- اسیپتوتونه یا ګاونډيAsymptoten



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع یو اړونده تحلیل د کړو خبرې اترې یا بحث بلل کیږي
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د کړوخبرو اترو د ښکندونې لپاره یو تابع

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{3}\,\sin(3x)$$

تر څېړنې نیول کیږي.

سیمتري : داچې $\sin x = -\sin(-x)$ دی ، نو تابع ناجوړه دی

تل بیرته راګرځېدنه یا پریودیځیتيPeriodizität : تابع لکه د ساین تابع پخپله 2π - پریودیکي دی او له دې امله په لاندې کې فقط په انټروال $[-\pi, \pi]$ کې راوړل کیږي.

د پرېکېدنوالي ځایونه : تابع له ناپرېکېدونکو توابعو څخه سره یرځای شوی، له دې امله برکېدنځاینه نه لري.

صفرځایونه: د زیاتو- یا جمعه نقضیې سره $[-\pi, \pi]$ دی

$$f(x) = 2\sin x - \frac{4}{3}\,\sin^3 x = \sin x\underbrace{\left(2 - \frac{4}{3}\sin^2 x\right)}_{\neq 0}.$$

تابع صفرځایونه په 0 او $\pm\pi$ کې لري.
افراطیت: مشتق

$$f'(x) = 2\cos x - 4\sin^2 x\,\cos x = -2\cos x + 4\cos^3 x$$

صفر دی د $\cos x = 0$ یا د $\cos x = \pm 1/\sqrt{2}$ لپاره ، نو

$$x = \pm\pi/2 \quad \vee \quad x = \pm\pi/4 \quad \vee \quad x = \pm 3\pi/4.$$

دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف او تلبیرته راګرځېدونې ده، ژئ ترڅېړنې لاندې نه نیسو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دویم مشتق د محنخښې ځخه

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x \sin x$$

او د تابع ارزښت د پرتله کونې له لارې کېدی شي د افراطیت تیوپ یا ډول وټاکل شي:

x	$f(x)$	$f''(x)$	Typ
$-3\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$-\pi/2$	$-2/3$	$-2 < 0$	lokales Maximum
$-\pi/4$	$-\sqrt{8}/3$	$2\sqrt{2} > 0$	globales Minimum
$\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum
$\pi/2$	$2/3$	$2 > 0$	lokales Minimum
$3\pi/4$	$\sqrt{8}/3$	$-2\sqrt{2} < 0$	globales Maximum

اوړونټکی یا د انعطاف ټکیWendepunkte **:**

دویم مشتق

$$f''(x) = 2\sin x - 12\cos^2 x \sin x = -10\sin x + 12\sin^3 x$$

$$\sin x = \pm\sqrt{5/6}$$

صفر دی د $\sin x = 0$ لپاره یا ، دا په دې معنا چې

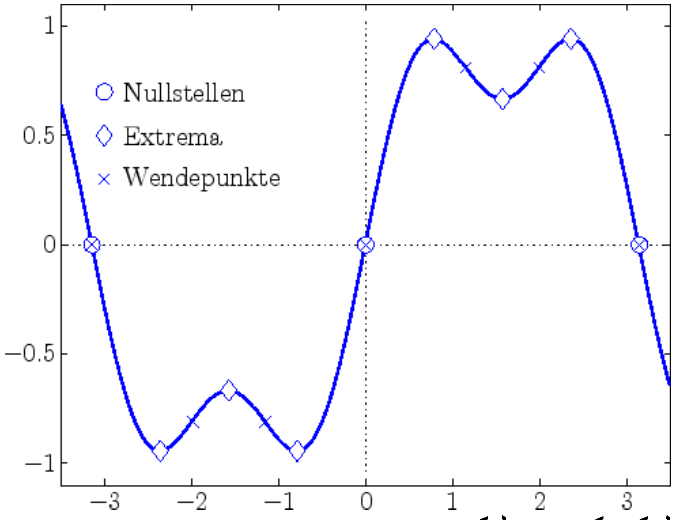
$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm\pi \quad \vee \quad x \approx \pm 1.15 \quad \vee \quad x \approx \pm 1.99$$

دا چې په دې ځای کې دریم مشتق نه ورکیږي. تابع f اوړونټکی په $(0,0)$ او $(\pm\pi, 0)$ کې لري همداسې په نږدې توګه په $(-1.99, -0.81)$ ، $(1.15, 0.81)$, $(-1.15, -0.81)$ او $(1.99, 0.81)$ کې.

قطبځایونه**Polstellen** : ناپرېکېدونکي توابع قطبځایونه نه لري.

ګاونډي **Asymptoten** : تابع پریودیکې او نه ثابت دی، نو ګاونډي یا اسیپتوت یا مجاورتونه نه لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د يوې کړې خبرو يا بحث روښانه ولو لپاره تابع

$$f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{20(x-1)(x+1)}$$

ترخيرني لاندې نيول کيږي.

سيومتري : صورت ناجوړه او مخرج جوړه دی. تابع نو له دې امله ناجوړه دی، دا په دې معنا چې سرچيني ته سيومتريک دی.

پريوديځيتي يا (تل) بيرته راګځيدنه: تابع پريوديک نه دی.

برېکيدنځايونه: د مخرج صورت صفرځايونه ± 1 د صورت صفرځايونه نه دي. له دې سره f په $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ ناپرېکيدونکی دی.

صفرځايونه: صورت د $x = 0$ لپاره ورکيږي.

افراطيت :

$$f'(x) = \frac{5x^4 - 19x^2 - 4}{20(x^2-1)^2} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2$$

دا چې تابع ساده صفرځايونه لري، افراطيت فقط لوکال يا ځای اړوند دی. د f د ځومره والي حالت خخه کيدی شي تيوپ يا ډول لاس ته راشي. دا چې $f(x) \to -\infty$ د $x \to -\infty$ او $x \to -1$ لپاره دی، بايد انتروال $(-\infty, -1)$ يو ماکسيموم ولري. په ورته توګه $(1, \infty)$ لږ تر لږه يو مينيموم لري. نو د مشتق صفرځايونو ته

(c) ketabton.com: The Digital Library

سړی يو لوکال ماکسيموم په $(-2, -4/5)$ او يو لوکال مينيموم په $(2, 4/5)$ کې لاس ته راوړي.

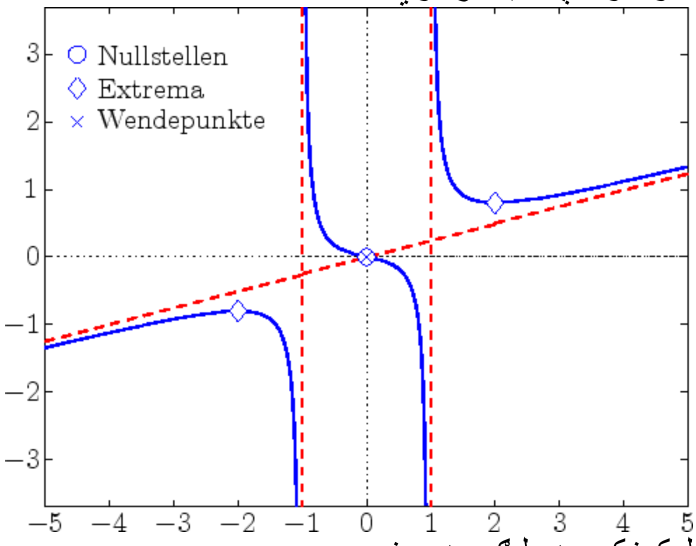
اوړونټکي يا نقاط انعطاف:

$$f''(x) = \frac{-80x^5 + 398x^3 + 42x}{20(x^2-1)^3} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

داچې په دې ځای کې دريم مشتق صفر نه دی، نو $(0,0)$ يو اوړونټکی دی.

قطبځايونه: تابع په $x = \pm 1$ کې ساده قطبځايونه لري.

اسيمپتوت يا ګاونډېتوب: يو د پولينوم وېش $p(x) = 5x/20 + 0 = x/4$ د ګاونډتوب په حيث راکوي



ليکونکي: هيوليک، هيورنر

د کړې خبرو اترو د ښوولو يا روښانه کولو ته تابع

$$f(x) = e^{-x^2} + \frac{4|x|}{e^4}$$

څيړل کيږي.

سيمټري : دا چې x^2 او $|x|$ جوړه دي، تابع جوړه دی، دا په دې معنا چې سيمتر و y - محور ته.

پريوديځيتي يا تل ببرته راګرځېدنه: تابع پريوديک نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پرېکړېدنوالي ځایونه: تابع له ناپرېکړېدونکو توابعو څخه سره یوځای شوې ده او له دې امله پرېکړېدنځایونه نه لري. لکه د مطلق ارزښت تابع لپاره په هرحالت مشتق په صفرټکي کې ناپرېکړېدونکی نه دی.
صفرځایونه: اکسپوننشل توابع تل مثبت یا زیاتیز دي، د مطلق ارزښت تابع نه منفي دي. نو صفرځایونه نه شته.
افراطیت:

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} + \frac{4}{e^4}\operatorname{sign}(x) \stackrel{!}{=} 0,\ x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 2\,.$$

برسیره پردې دې افراطی ټکی په $x = 0$ کې ،څېړل شي، چېرته چې مشتق پرېکړېدونکی دی. دا چې تابع په ټول $\mathbb{R}$ تعریف دی، نو د x لپاره د $\pm\infty$ ته د تلنې حالت هم باید په پام کې ونیول شي.
دا چې $f(x) \to \infty$ د $x \to \pm\infty$ لپاره دی، نو f لږ تر لږه یو ګلوبال مینیموم لري، مګر کلوبال ماکسیموم نه لري. د y ارزښت په پرتله کریتیکال ټکی

$$(-2, 9/e^4) \qquad (0,1) \qquad (2, 9/e^4)$$

ښايي، چې ګلوبال مینیموم په $x = \pm 2$ کې نیول کیږي. دا چې f په انټروال $[-2,2]$ کې مینیموم او هم یو ماکسیموم لري، ترې لاس ته راځي چې $(0,1)$ یو لوکال ماکسیموم دی.
اوړونټکی یا د انعطاف ټکی:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{2}$$

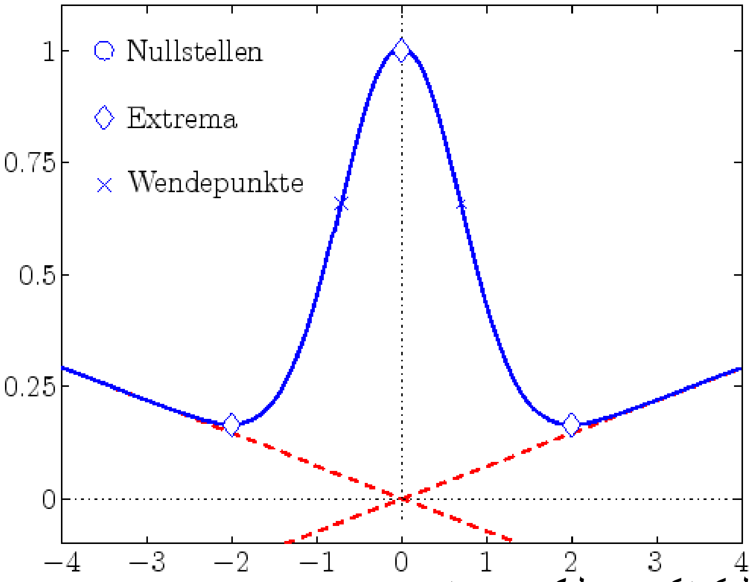
دریم مشتق په دې ځایونو $\neq 0$ کې دی. ترې لاس ته راځي چې f یو اوړنټکی

$$\left(\pm 1/\sqrt{2},\ e^{-1/2} + \frac{4}{\sqrt{2}\,e^4}\right).$$

لري.
قطبځایونه: تابع قطبځایونه نه لري.

ګاونډي یا مجاورتها: دا چې e^{-x^2} د $|x|$ لپاره د صفر په لور ګړندی دی، تابع ګاونډیان $p_+(x) = \frac{4x}{e^4}$ او $p_-(x) = \frac{-4x}{e^4}$ لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لیکونکي: هیولیک، هیورنر

ریمن-انتیګرال Riemann-Integral

د یوه ناپرېکېدونکي تابع f یو تاکلی انتیګرال د

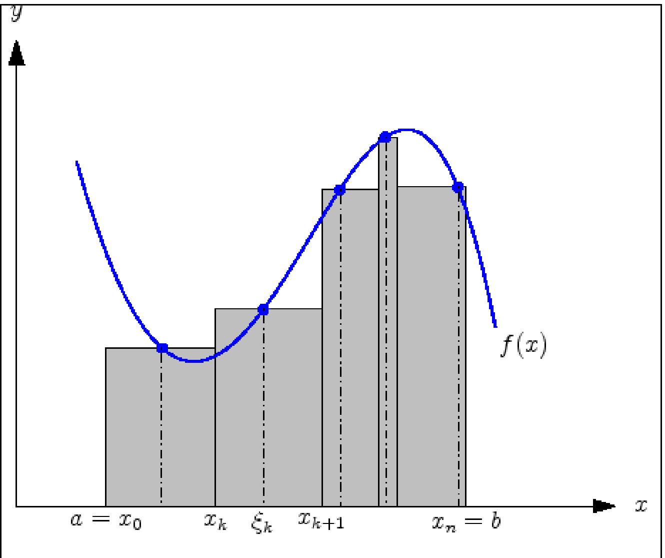
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0}\int_a^b f_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_k f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

له لارې تعریف شوی دی. دلته د $\Delta:\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ یوه توټه کونه ښایي،

$$|\Delta| = \max_k \Delta x_k\,,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\,,$$

یو ماکسیمال انټروال دی او ξ_k په k – م انټروال یو په خوښه ټکی دی. د انتیګرال تعریف په بنی لور زیاتون یاجمعه د ریمن زیاتون یا – جمعه بلل کیږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د زیاتیز یا مثبت f لپاره $\int_a^b f(x)\,dx$ د f د ګراف کښته لورته سطحه په ګوته کوي

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر، ویپپر

که $f(x)$ ناپرېکیدونکی مشتقوړ وي، نو د مشتقشمېرنې د منځ ارزښت جملې څخه د لپاره باور لري

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le (x_2 - x_1) \max_{x\in[x_1,x_2]} |f'(x)|$$

Δ_i دې د ټوټه ونو یوه پرله پسې وي د $|\Delta_i| \to 0$ سره. د تابع پرلپسې دوه توکي Δ_m او Δ_n را اخلو او د Δ ټوټه ونه را اخلو، چې د Δ_m او Δ_n د نورو یا ورپسې یل لاندې ټوټه کونو له لارې منځ ته راځي ، چېرته چې Δ_m د لاندې یا ورپسې ټوټه ونو ټکي $x_i\,,\, i = 0, \ldots, k_m$ دي او Δ ټکي $z_i\,,\, i = 0, \ldots, k$ لري، نو د $\zeta_j \in [z_{j-1}, z_j]$ سره باور لري

$$\left|\int f_\Delta - \int f_{\Delta_m}\right| = \left|\sum_{j=1}^{k} f(\zeta_j)\,\Delta z_j - \sum_{i=1}^{k_m} f(\xi_i)\,\Delta x_i\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1}\le z_{j-1}<z_j\le x_i} (f(\zeta_j) - f(\xi_i))\Delta z_j\right|$$

$$\le |\Delta_m| \max_{t\in[a,b]} |f'(t)| \underbrace{\sum_{i=1}^{k_m} \sum_{x_{i-1}\le z_{j-1}<z_j\le x_i} \Delta z_j}_{b-a} .$$

په ورته تګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\left|\int f_{\Delta}-\int f_{\Delta_n}\right| = O(|\Delta_n|)\,,$$

او له دې سره

$$\left|\int f_{\Delta_m}-\int f_{\Delta_n}\right| \to 0$$

د $n,m\to\infty$ لپاره . د ریمن –زیاتون نو یوه کوشي-پرلپسي جوړوي، نو پولې ته تلونکي دي.

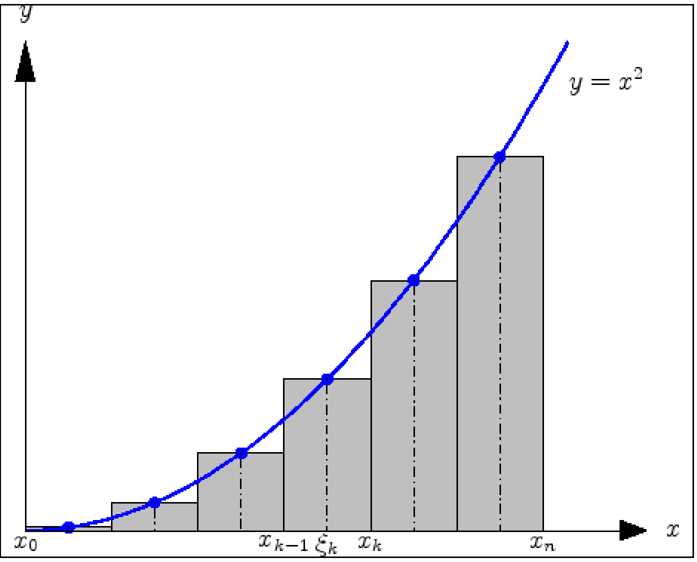
په ورته توګه د دوه پرلپسیو و همغې یا برابرې پولې ته تلنه وښوول شي.

د توته ناپرېکېدونکو f ښوونه تخنیکي داسي لږ پېچلي ده. سرې د f د ناپرېکېدني انتروال بېل یا جدا ترځېړني نیسي او هلته د برابرېدوله ناپرېکېدني څخه ګټه اخلي:

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le\varepsilon \qquad \text{für} \quad |x_1-x_2|<\delta\,.$$

دا اټکل د منځ ارزښت جملې په ځای رامنځ ته کېږي او نور دلایل په ورته وګه مخ ته بیولکېږي.

لیکونکي: هیولیګ، هیوررنر

ریمن –انتیکرال په حیث د $\int_0^1 x^2\,dx$ شمېرلو کیدی شي د توته وني پرلپسي وکارول شي د n-م توته وني لپاره د ارزښتونو ځایونو $\xi_i=(2i-1)/(2n)\,,$ $,\,i=1,\ldots,n\,,$ سره.	

د تعریف سره سم لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$\int f_{\Delta_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{2i-1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{4n^3}\left(4\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1\right)$$

$$\frac{1}{4n^3}\left(\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_{\Delta_n} = \frac{1}{3}$$

او له دې سره .

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د انتيګرال خويونه **Eigenschaften des Integrals**

دا لاندې تاکلی انتيګرال دا لاندې خويونه لري :

$$\int f + g = \int f + \int g \quad , \quad \int r f = r \int f$$

کربنيزوالس,

$$f \leq g \implies \int f \leq \int g$$

همغږيزوالی :

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

زياتون يا جمعه

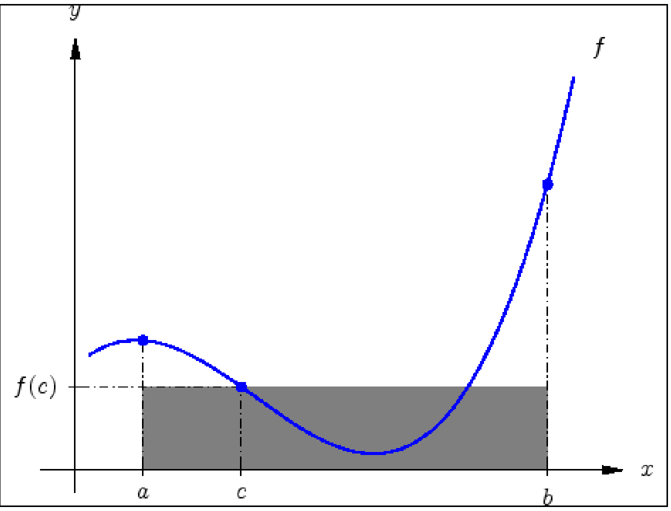
$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

د وروستيو خويونو د همغږيزونې له امله سړی تعريفوي: .

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د انتيګرالشميرنې منځ ارزښت جمله **Mittelwertsatz der Integralrechnung**

(c) ketabton.com: The Digital Library

	که f او g په $[a,b]$ ناپرېکېدونکي توابع وي او g د مخنخښي بدلون ونه لري ، نو $c \in [a,b]$ شتون لري د $\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g.$ سره

په ځانګي توګه ، لکه په خبره کې چې ليدوړ دي، دی $\int_a^b f = (b-a)f(c)$

ليکونکي: هيوليک، هيورنر

بی له تولیزو بندیزونو دې $g \geq 0$ وي. د انتيګرال د اتکل له لارې

$$(\min_{[a,b]} f)\, g(x) \leq f(x)g(x) \leq (\max_{[a,b]} f)\, g(x)$$

لاس ته راځي

$$(\min_{[a,b]} f)\int g \leq \int fg \leq (\max_{[a,b]} f)\int g.$$

دا چې f د منځارزښت جملې له مخې د $\min f$ او $\max f$ ترمنځ هر ارزښت نيسي، نو غوښتونی برابروالی راکوي.

په تولېزه توګه وړاندنيونه ده، چې g د مخنخښي بدلون نه لري، اړيين، لکه د بېلګي

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}_{>0} = \int_{-1}^{1} x\cdot x\,dx \neq c\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څخه لیدل کیږی.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

بنسټیز – یا ساده توابع Stammfunktion

یو تابع F د $F' = f$ سره د f بنسټیز ت ابع دی، او د دې لپاره لیکو

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

د ټولو بنسټیز توابعو ډېرۍ لپاره، چې د f ناټاکلي انتیګرال بلل کیږي.
د انتیګرالونې ثابته c په خوښه ده. د بېلګې په توګه دی

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$F_a(a) = 0$$

د سره یو ممکنه لومړی یا بنسټیزه تابع.
نه ټولو بنسټیزو توابعو ته داسې روښانه د بنسټیزو توابعو اکسپلیڅیت ورکړه شونې ده،

$$f(x) = \exp\left(x^2\right)$$

یوه بېلګه ده .
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د انتیګرالشمیرنې اصلي جمله یا قضیه
Hauptsatz der Integralrechnung

که F د یوه ناپرېکېدونکي تابع f بنسټیز یا لومړنی تابع وي ، دا په دې معنا چې $f = F'$ وي، نو باور لري

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

همداسې په لنډه لیکندول

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f = [F]_a^b \, .$$

يو بنئتيز انتيګرال کېدی شي د انټروال په پای ټکو کې د بنسټيزو توابعو د تابع ارزښتونو د کمښت په ډول وشمېرل شي
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

که دواړه خواوې د b تابع په څېر راوړل شي، نو بسيا کوي وښايو، چې دواړه خواوې برابر مشتق لري، ځکهچې د $b = a$ لپاره ارزښت سره سرخوري(دواړه خواوې صفر دي).
د کيڼ اړخ لپاره لرو

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{b+h} f - \int_a^b f \right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_b^{b+h} f \, .$$

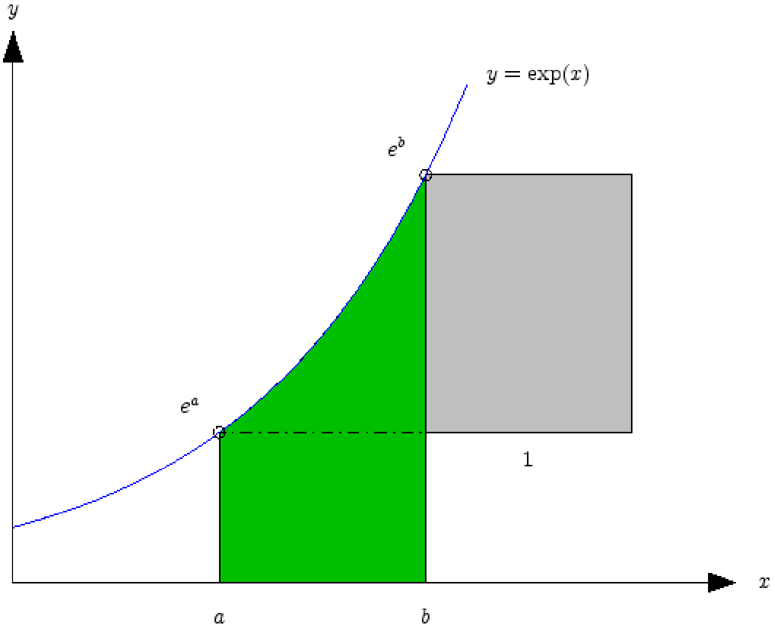
د منځ ارزښت جملې پسې يا په تعقيب انتيګرال مساوي دی په $(b + h - b)\, f(c)$
د $c \in (b, b+h)$ سره.
پوله ارزښت برابر دی په $f(b)$. دا د ښي اړخ د مشتق سره سر خوري يا يو غږيز دی
ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د اکسپننشل تابع مشتق بېرته اکسپوننشل تابع دی او له دې امله دی

$$\int_a^b e^x \, dx = e^b - e^a \, .$$

د a د b او ترمنځ ګراف لاندې سطحه برابره د ولاړګوډيزر(مستطيل) د سطحې سره د سور 1 او د تابع ارزښت دواټن د اوږدوالي په حيث.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د لوکايتم تابع $F(x) = \ln(x)$ مشتق $F'(x) = 1/x\,,\ x \in \mathbb{R}^+$ دی او له دې سره

$$\int_a^b 1/x\,dx = \ln(b) - \ln(a)\,, \quad a, b \in \mathbb{R}^+\,.$$

د $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ يو بنسټيز تابع $F(x) = \arctan x$ دی . د دې په تعقيب دی

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}\,.$$

د مشتقوني څخه لاس ته راځي، چې

$$F(x) = -\ln(\cos x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $f(x) = \tan x$ یو بنستیز تابع دی

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x).$$

په تعقیب دی:

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = -\left[\ln(\cos x)\right]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \approx 0.347 \, .$$

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

د M کتلې یو ستوری یو د کښنولو ورشو تولیدوي، چې د هغې له خوا په یوه کتله m یو زور $F(x) = \gamma \frac{mM}{x^2}$ واردوي . دلته γ د ګراویتیشن یا راکښنې قوه ده او x د دروندتکو ترمنځ واټن دی.

د $1/x^2$ لپاره یو لومړنی یا بنستیز تابع $-1/x$ دی. د دې لپاره چې یو تن له واټن a و واټن b ته یوړولی شو ، باید کار

$$\int_a^b F(x) \, dx = \gamma m M \int_a^b \frac{1}{x^2} \, dx = -\left[\gamma m M / x\right]_a^b = \gamma m M (1/a - 1/b)$$

سرته ورسیږي.

د a لپاره د ستوري د وړانګې سرره برابر او $b \to \infty$ کېدی شي د برابر اینوونې له لارې د کینیتیکي انرژي سره چې داسې په نامه د تېښتې چټکتیا v ټاکي دا په دې معنا چې چټکتیا ، چې اړین ده، چې د یوه ستوري راکښنقوه پرېښودی شي یا راکښنقوې څخه ووځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{m}{2}v^2 = \gamma \frac{mM}{a} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\gamma \frac{2M}{a}}\,.$$

په اکواتور کې د ځمکې لپاره $v = 11.2\,\mathrm{km/s}$. دی .
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

Stammfunktionen der Grundfunktionen د بنسټیزو توابعو لومړني توابع

لاندې جدول بنسټیزو توابعو $f(x)$ ته لومړني توابع $F(x)$ ښايي

$f(x)$	$F(x)$		$f(x)$	$F(x)$
$x^s\,,\ s \neq -1$	$x^{s+1}/(s+1)$		$1/x$	$\ln\lvert x\rvert$
$\exp(x)$	$\exp(x)$		$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$
$\sin x$	$-\cos x$		$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$		$\sin x \cos x$	$\sin^2(x)/2$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x$		$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x$

Partielle Integration ټوټه- یا پارشل انتیګرالونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مشتق د ضرب قانون $(fg)' = f'g + fg'$ څخه په ورته توګه فرمول بندي له لارې د ناټاکلي انتيګرال لپاره راکوي:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx\,.$$

په اړونده توګه د ناټاکلو انتيګرالونو

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'$$

لپاره باور لري. د لته دې په پام کې ونيول شي، چې د ژۍ ترم $[fg]_a^b$ ورکيږي، که د دواړو توابعو څخه يو يې د انتروال پای ټکو کې صفر وي. په همدې توګه د پريوديکي تابع لپاره د پريود اوږدوالي $(b-a)$ کې هم له منځه ځي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

له $\int (1+x)^\alpha\,dx = \dfrac{1}{\alpha+1}(1+x)^{\alpha+1} + c$ څخه د $\alpha \neq -1$ لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1+x}}\,dx &= x\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - \int 1\cdot\frac{2}{3}(1+x)^{3/2}\,dx \\ &= \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + c.\end{aligned}$$

په ورته توګه شميرل کيږي

$$\begin{aligned}\int_0^1 \underset{u}{x}\underset{v'}{\sqrt{1-x}}\,dx &= \left[-x\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\right]_0^1 + \int_0^1 1\cdot\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}\,dx \\ &= 0 - \left[\frac{4}{15}(1-x)^{5/2}\right]_0^1 = \frac{4}{15}\,.\end{aligned}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يو لوګاريتمي ضريب د يو ځل ټوټه انتيګرالونې له لارې له منځه تلی شي.
د بيلګې په توګه دی

$$\int x^n (\ln|x|)\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln|x|) - \int \frac{1}{n+1}x^{n+1}\,\frac{1}{x}\,dx$$
$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln|x|) - \frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1} + c.$$

په دې ډول کيدی شي په خوښه پولينومونه

$$\sum_{j,k} a_{j,k}x^j(\ln|x|)^k$$

په x او $\ln|x|$ کې انتيګرال شي يا انتيګرال ونيول شي.

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ټوټه اتيګرالونې له لارې کېدی شي د پولينوم درجه کمه شي. د بېلګې په توګه دی

$$\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - \int n x^{n-1} e^x\,dx$$
$$= x^n e^x - n x^{n-1} e^x + \int n(n-1)x^{n-2}e^x\,dx$$
$$= \cdots$$
$$= e^x \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}x^k + c.$$

په دې توګه نېدی شي د $n \in \mathbb{N}$, $x^n\, e^{\beta x}$, بنې ترمونوکمبينېشن په خوښه انتيګرال شي يا يې انتيګرال ونيول شي. ليکونکي: هيوليګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $x^n \cos x$ او $x^n \sin x$ ضربونه کېدی شي د ډېرواره ټوټه انتيګرالونې له لارې انتيګرال شي:

$$\int x^n \left\{ \begin{array}{c} \cos x \\ \sin x \end{array} \right\} dx = x^n \left\{ \begin{array}{c} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} - \int n x^{n-1} \left\{ \begin{array}{c} \sin x \\ -\cos x \end{array} \right\} dx$$
$$= \ldots .$$

د تکرار ټوټه انتيګرالوني له لارې بالاخره ضريب x^k له منځه ځي. په دې توګه کېدی شي د په خوښه پولينوم توابعو لومړنی تابع په x, $\sin x$ او $\cos x$ کې وشمېرل شي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

له $\cosh'(x) = \sinh(x)$, $\sinh'(x) = \cosh(x)$ څخه لاس ته راځي

$$\int e^x \sinh(x)\, dx = e^x \cosh(x) - \int e^x \cosh(x)\, dx$$
$$= e^x \cosh(x) - e^x \sinh(x) + \int e^x \sinh(x)\, dx$$

او له دې سره لکه چې برېښي
$$e^x \cosh(x) = e^x \sinh(x),$$

يو په ځرګنده توګه مخامخوالی يا تضاد دی.
ناټيکاوی په اخرنظ پايونه کې پروت دی – د انتيګرالنيوني ثابته بايد په پام کې ونيول شي:
$$e^x \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2} + c.$$

د $c = 1$ ټاکنه مو ټيکې نتيجې ته لاربښودوي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د ټوټه انتيګرالونې سره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$$
$$= \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx,\ (a \neq 0).$$

د ویم ځل انتیګرالونه مو بېرته برابر انتیګرال ته ته بیایي، او له دې سره لاس ته راځي:

$$\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{ae^{ax}\sin(bx) - be^{ax}\cos(bx)}{a^2+b^2} + c$$

بدیلي سړی

کړی شي د اویلر-مویورې فرمول هم د پورته ډول انتیګرال شمېرنو ته استعمال کړي. د

$$\cos(t) = \mathrm{Re}\,(\exp(\mathrm{i}t))$$

بېلګې په توګه له لاس ته راځي

$$\int_0^\pi e^t\cos(t)\,dt\,\mathrm{Re}\left(\int_0^\pi \exp(t+\mathrm{i}t)\,dt\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{\exp(t+\mathrm{i}t)}{1+\mathrm{i}}\right]_0^\pi\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{-e^\pi - 1}{1+\mathrm{i}}\right) = -(e^\pi+1)/2\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

له

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = -\int_{-\pi}^{\pi} n\cos(nx)(-\frac{1}{m}\cos(mx))\,dx$$
$$= \frac{n^2}{m^2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx$$

د $m \neq n$ لپاره لرو

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(mx)\,dx = 0\,.$$

په پام کې دې ونیول شي، چې د تابع   پریودیځیتي یا تل بېرته رتګرځېدنه په ټوټه انتیګرالونه کې د ژې شرایط له منځه ځي. د $m = n$ لپاره د لومړي مساوات   او

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(nx)\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}1\,dx=2\pi\,.$$

په ورته توګه سړی د تابع $\cos(mx)$ اورتوګونالیتي ښايي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

دلتا - تابع Delta-Funktion

د ديراکDiracsche دلتا-تابع δ د

$$\int_{\mathbb{R}}\delta f=f(0)$$

له لارې تعريف دی، د کوم سره چې يو په خوښه ناپرېکيدونکی تابع دی، چې د يوه انتروال (a,b) دباندې وکيږي. د ټوټه انتيګرالوني په مرسته يا په يوه پوله پروسه کېدی شي δ د Heavisideschen ټوپتابع د مشتق توليزوالي

$$H(x)=\begin{cases}1, & \text{für } x>0\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

په حيث تشريح کيدی شي.

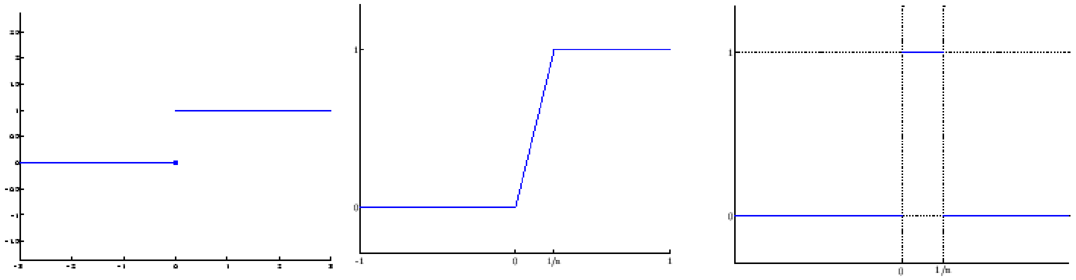
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

که $0\in(a,b)$ وي، نو د ټوټه انتيګرال سره لاس ته راځي

$$\int_{-a}^{b}H'f=[Hf]_a^b-\int_a^b Hf'$$
$$=-\int_0^b f'=-[f]_0^b$$
$$=f(0)$$

او له دې سره $\int H'f=\int\delta f$.

(c) ketabton.com: The Digital Library



Heaviside-Funktion
H

نږدېوالی
H_n
Näherung
der Heaviside-Funktion

نږدېوالی
$\delta_n = H_n'$
Näherung
der Delta-Funktion

په د پوله پروسې سره د جوړ شوي د Heavyside-Funktion اپروکسیمیشن سره سړی بدیل لاس ته راوړي :

$$\int_a^b H_n' f = n \int_0^{1/n} f = f(t_n) \to f(0)\,.$$

له دې سره د اخرني مساوات لپاره د منځ ا رزښت جمله کارول شوې.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د متحولو – یا اووښتونو بدلون **Variablensubstitution**

د ځنځیري قاونو

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = f(g(x)) g'(x), \quad f = F',$$

څخه د د بدلون $y = g(x)$ لپاره لومړنیو تابع جوړولو له لارې لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(y)+c = \int f(y)\,dy.$$

په ورته توګه د ټاکلي انتيګرال لپاره باور لري

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

.

د دفرنشل کونو په ورسته کېدی شي دا فرمول په لاندې بڼه

$$\int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy$$

وليکل شي.

يو ساده ځانګړی حالت يو کرښيز متحول بدلون دی

$$x \mapsto y = px + q.$$

په دې حالت کې دی

$$\int f(px+q)\,dx = \frac{1}{q}F(y)+c$$

همداسې

$$\int_a^b f(px+q)\,dx = \frac{1}{p}\,[F]_{pa+q}^{pb+q}.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د انتيګرال

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin\varepsilon x}{x}dx$$

لپاره بدلون $dx = \frac{1}{\varepsilon}du$, $u = \varepsilon x$ او د انتيګرالونې پولو ترانسفورميشن $x = \pi/\varepsilon \leftrightarrow u = \pi$ راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^{\pi/\varepsilon} \frac{\sin \varepsilon x}{x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du.$$

په ټولیزه توګه د یو بدلون $u = rx$ سره باور لري

$$\frac{dx}{x} \to \frac{du}{u}$$

او له دې سره

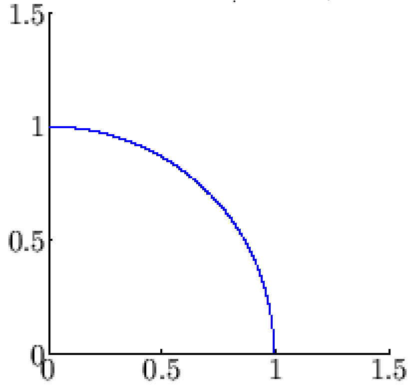
$$\int_a^b f(rx)\frac{dx}{x} = \int_{ra}^{rb} f(u)\frac{du}{u}.$$

لیکونکي: هیولیک، کوپف

تابع

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \le x \le 1,$$

دا جوړه شوې څلورمه برخه ګردۍ یا څلورمه برخه داېره ښايي



له دې سره د انتیګرال لپاره باور لري

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{\pi}{4}.$$

که بدلن $x = \sin u,\ dx = \cos u\, du,\ x = 0 \to u = 0$ وکارول شي او $x = 1 \to u = \frac{\pi}{2}$ ، نو لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u\, du = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\,,$$

لکه ښکاري انتظار کېږه. د اخرني مساوات لپاره دا لاندې

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 u + \cos^2 u\, du\ = \frac{\pi}{2}$$

وکارول شو.

په عجیبه ډول بدلون , $x = \cos u,\quad dx = -\sin u\, du$

$x = 0 \to u = -\pi/2$

او $x = 1 \to u = 2\pi$ په بربښنده توګه یوه ناټیکه

نتیجه راکوي:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} -\sin^2 u\, du = -\frac{5\pi}{4}.$$

څه ناټیک وو؟ په کلکه نیولې توګه باور لري

$$\sqrt{1-\cos^2 u} = |\sin u|$$

او له دې سره

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-\pi/2}^{2\pi} |\sin u|(-\sin u)du = \frac{\pi}{4}.$$

د لاندې انتیګرال لپاره

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2-1}}$$

بدلون $y = (x-3)/2$, $dx = 2dy$ راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ورپسي بدلون f $y = \cosh t$, $dy = \sinh t\, dt$ سره د

له $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ امله لاس ته راځي

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} &= \int \frac{\sinh t\, dt}{\sinh t} \\
&= \int dt = t + c \\
&= \operatorname{arcosh} y + c \\
&= \operatorname{arcosh}((x-3)/2) + c \\
&= \ln\left(\frac{x-3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 5}\right) + c
\end{aligned}$$

له دې سره د بېلګې په توګه لاس تهراځي

$$\begin{aligned}
\int_5^7 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} &= \ln(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}) - \ln 1 \\
&= \ln(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

که په انتګرالېدونکي کې دننه مشتق پېژندل کيږي، لکه د بېلې په توګه د

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\, dx\,,$$

لپاره، نو د بدلون قانون په ځانګړې توګه ساده دی. په دې بېلګه کې

$$y = g(x) = \ln x\,, \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

ځای په ځای کوو او لاس ته راوړو

$$\int g(x)^2\, g'(x)\, dx = \int y^2\, dy = \frac{1}{3} y^3 + c\,.$$

د په څټ يا معکوس بدلون سره لرو

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{\ln x^2}{x}\,dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + c\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

په تيوپيکي توګه سرى هڅيږي چې د بدلون له لارې انتيګرالېدونکى ساده کړي. د بېلګې په توګه د

$$\int \frac{e^{3y}}{e^{2y}-1}\,dy$$

لپاره نږدې دى چې

$$y = g(x) = \ln x \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$$

کيږدي. دا د

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = \frac{1}{x} = e^{-y}$$

له امله دا ترانسفورمي شوى ناټاکلى انتيګرال راکوي

$$\int \frac{x^3}{x^2-1}\,\frac{dy}{dx}\,dx = \int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)dx$$

$$\int 1\,dx + \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c\,.$$

د $x = e^y$ دبېرته بدلون له لارې بالاخره لاس ته راځي

$$F(y) = e^y + \frac{1}{2}\left|\frac{e^y-1}{e^y+1}\right| + c\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

لومړى (بنسټيزه -) تابع

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

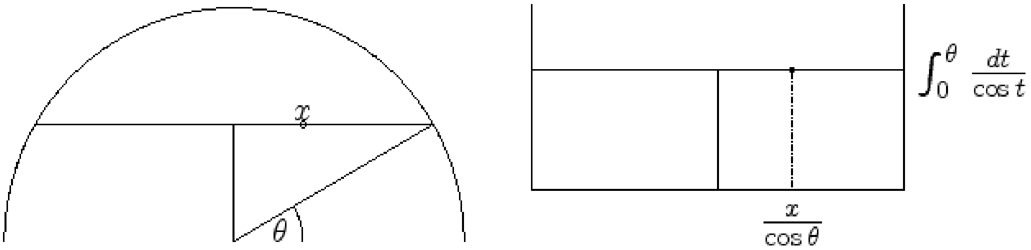
کيدی شي د بدلون سره

$$u = \frac{1}{\cos x} + \tan x = \frac{1+\sin x}{\cos x}, \qquad du = \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx,$$

وشمېرل شي:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos x} &= \int (\cos x)^{-1}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^{-1} du \\ &= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c \\ &= \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c.\end{aligned}$$

يو کارونه يې د Mercator-Projektion دی. له دې سره د ځمکې بورته سطحه کونجريېنتونې په سطحه برېوځي.



د سور گردی (طول البلد) له دې سره د $1/\cos\theta$ په نسبت سره غزيږي.

ليکونکي: هيوليگ، کوپف

ساده راشنل انتيگراليدونکې د ساده قطب سره
Elementare rationale Integranden mit einfachen Polen

د درې بنستيتيوپه راشنل توابعو لومړنی توابع دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \qquad \frac{1}{a}\ln|x+b/a|+c$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \qquad \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+c$$

$$\int \frac{(x-a)dx}{(x-a)^2+b^2} = \qquad \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2)+c$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

فرمولونه کېدی شي ترلي د مشتق له لارې پسې وشمېرل شي. بديل يې د انتيګرال ساده بڼه بدلونونه شوني دي.

له $\int dy/y = \ln|y|+c$ لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x+b/a} = \frac{1}{a}\ln|x+b/a|+c.$$

د بڼه بدلون پسې

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b^2}\int \frac{dx}{((x-a)/b)^2+1}$$

بدلون $dx = b\,dy$, $y=(x-a)/b$ راکوي

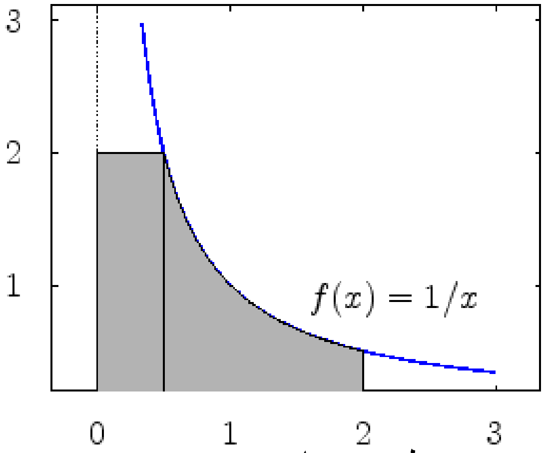
$$\frac{1}{b}\int \frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{b}\arctan y + c = \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+c.$$

د بدلون , $y=(x-a)^2+b^2$ سره لاس ته راځي

$$\int \frac{(x-a)\,dx}{(x-a)^2+b^2} = \qquad \frac{1}{2}\int\frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\ln|y|+c$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

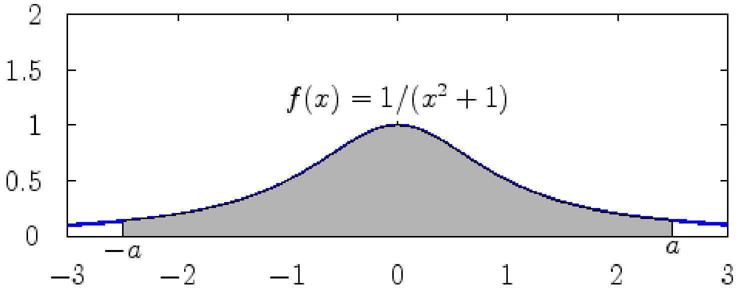
$$= \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2)+c.$$



د خړې سطحې مساحت د

$$2\frac{1}{2} + \int_{1/2}^{2} \frac{1}{x}dx = 1 + \ln 2 - \ln\frac{1}{2} = 1 + \ln 4$$

له لارې شمیرل کیږي.
لیکونکي: هیولیګ، کوپف



د $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ د ګراف لاندې سطحه داسې شمېرل کیږي

$$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty}\arctan a - \arctan(-a) \longrightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

(c) ketabton.com: The Digital Library

د

$$r(x) = \frac{3x+6}{2x^2-4x+10}$$

لومړی تابع ټاکلو لپاره، لومړی د مخرج مربعتکمیلونه جوړېږي:

$$2(x^2-2x+5) = 2((x-1)^2+2^2)\,.$$

په اړونده توګه صورت هم بڼه بدلیږي:

$$3(x+2) = 3((x-1)+3)\,.$$

له دې سره کېدی شي د ستاندارد افادې په توګه ټوټه یا تجزیه شي:

$$r(x) = \frac{3}{2}\,\frac{x-1}{(x-1)^2+2^2} + \frac{9}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2+2^2}\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int r(x)\,dx = \frac{3}{4}\,\ln\left((x-1)^2+4\right) + \frac{3}{4}\,\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c\,.$$

د ټاکلی انتیګرال $\int_1^3 r(x)\,dx$ لپاره سرې د پولو د په ځای اینوونې له لارې لومړنۍ تابع لاس ته راوړي

$$\frac{3}{4}\left(\ln 8 - \ln 4 + \arctan(1) - \arctan(0)\right) = \frac{3}{4}\,\ln 2 - \frac{3}{16}\,\pi\,.$$

لیکونکي: هیولیګ،

ساده راشنل انتیګرالونه د زیاتواره قطب سره

Elementare rationale Integranden mit mehrfachen Polen

د $n \in \mathbb{N}$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int (x-a)^{-n-1}dx = -\frac{1}{n}(x-a)^{-n} + c\,.$$

د ډېرواره کمپلکس کنجوګيري قطبځایونو کې د اړونده مربع

$$q(x) = (x-a)^2 + b^2$$

ضربیونو لپاره باور لري

$$\int \frac{c(x-a)+d}{q(x)^{n+1}}\,dx = \frac{d(x-a)}{2b^2n\,q(x)^n} - \frac{c}{2n\,q(x)^n} + \frac{d(2n-1)}{2b^2n}\int \frac{dx}{q(x)^n}\,.$$

د ګراد یا درجې ردکشن د لومړنې تابع رکورزيو شمېرنه شوونې کوي.

ليکونکي: هیولیګ، کوپف

لومړنی فرمول د $y = x - a$ او $dx = dy$ د د بدلون له لارې لاس ته راځي:

$$\int (x-a)^{-n-1}dx = \int y^{-n-1}dy = -\frac{1}{n}y^{-n} + c\,.$$

د دويم فرمول د ښوونې لپاره لومړی يو ساده د رکوزيون فرمول منځ ته راځي.

د ټوټه انتيګرالونې سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{(1+y^2)^k} &= \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k\int \frac{y^2}{(1+y^2)^{k+1}}\,dy \\ &= \frac{y}{(1+y^2)^k} + 2k\left(\int \frac{dy}{(1+y^2)^k} - \int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}}\right)\,.\end{aligned}$$

له دې کټمټوالی منځ ته راځي

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^{k+1}} = \frac{y}{2k(1+y^2)^k} + \frac{2k-1}{2k}\int \frac{1}{(1+y^2)^k}\,dy\,.$$

له دې سره اوس د بدلون $y = \frac{x-a}{b}$ سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}} = \frac{1}{b^{2n+2}} \int \frac{dx}{((\frac{x-a}{b})^2+1)^{n+1}}$$
$$= \frac{1}{b^{2n+1}} \int \frac{dy}{(1+y^2)^{n+1}}$$
$$= \frac{1}{b^{2n+1}} \left(\frac{y}{2n(1+y^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{dy}{(1+y^2)^n} \right)$$
$$= \frac{x-a}{2b^2n((x-a)^2+b^2)^n} + \frac{2n-1}{2b^2n} \int \frac{dx}{((x-a)^2+b^2)^n} .$$

ترم

$$\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\, dx$$

کیدی شي د بدلون $y=(x-a)^2+b^2$ له لارې وشمیرل شي، څکه چې په صورت کې د y مشتق څای لري:

$$\int \frac{c(x-a)}{((x-a)^2+b^2)^{n+1}}\, dx = \frac{c}{2} \int \frac{dy}{y^{n+1}}$$
$$= \frac{c}{2(-n)y^n}$$
$$= -\frac{c}{2n((x-a)^2+b^2)^n} .$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د انتیګرال

$$\int \frac{2x+1}{(x^2+9)^2}\, dx$$

لپاره په تولیز فرمول کې د ایښوونې وروسته د ډېرواره قطبونو سره د $a=0, b=3, c=2, d=1$ او $n=1$ سره راکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{-2}{2(x^2+9)}+\frac{x}{18(x^2+9)}+\frac{1}{18}\int\frac{1}{x^2+9}\,dx$$

او د بنه بدلون پسې

$$\frac{x-18}{18(x^2+9)}+\frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}\arctan(\frac{x}{3})+c\right) = \frac{x-18}{18(x^2+9)}+\frac{1}{54}\arctan(\frac{x}{3})+c'.$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د راشنلتوابعو انيګرالونه **Integration rationaler Funktionen**

د حقيقي ټوټه کسر ټوټه ونې له لارې کېدی شي يو حقيقي راشنل تابع د لاندې درې ساده بنسټيوپ جمعې

$$ax^n\,,\quad \frac{c}{(ax+b)^n}\,,\quad \frac{c(x-a)+d}{((x-a)^2+b^2)^n}$$

د $n\in\mathbb{N}_0\,,\ a,b,c,d\in\mathbb{R}$ سره انځور شي. د لومړنيو توابعو په مرسته کېدی شي د دې بنسټيزتوابعو لپاره د په خوښه راشنلتوابعو لپاره لومړنۍ توابع وټاکل شي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د

$$\int r(x)dx,\quad r(x)=\frac{x^5+10x^3+5^2-x+25}{x^4+8x^2-9}\,,$$

د شمېرلو لپاره لومړی يو ټوټه کسر ټوټه ونه سرته رسوو.
د پولينوم وېش پسې ،

$$r(x)=x+\frac{2x^3+5x^2+8x+25}{x^4+8x^2-9}\,,$$

اود مخرج ضربيونو جوړولو پسې

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرلیک

$$x^4+8x^2-9=(x+1)(x-1)(x^2+9),$$

لاس ته راځي

$$r(x)-x=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{cx}{x^2+9}+\frac{d}{x^2+9}.$$

که د اصلي مجراج سره ضب شي، نو لاس ته راځي

$$2x^3+5x^2+8x+25$$

$$=\quad a(x-1)(x^2+9)+b(x+1)(x^2+9)+(cx+d)(x^2-1)$$

$$x^3(a+b+c)+x^2(-a+b+d)+x(9a+9b-c)+1(-9a+9b-d)$$

او د ضریبونو د پرتلې $a=-1$, $b=2$, $c=1$ او $d=2$ له لارې.
یوګوني ترمونه کېدی اوس ساده انتیګرال شي:

$$\int\frac{x^5+10x^3+5^2-x+25}{x^4+8x^2-9}$$

$$=\quad\int xdx+\int\frac{-dx}{x+1}+\int\frac{2dx}{x+1}+\int\frac{xdx}{x^2+9}+\int\frac{2dx}{x^2+9}$$

$$\frac{1}{2}x^2-\ln|x+1|+2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+9)+\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right)+c.$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ساین او کوساین د ضرب انتیګرالونه

د $a^2\neq b^2$ لپاره د زیاتون-یا جمعې قضیې څخه لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \sin(ax)\sin(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \sin(ax)\cos(bx)\,dx = -\frac{\cos((a-b)x)}{2(a-b)} - \frac{\cos((a+b)x)}{2(a+b)} + c$$

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{\sin((a-b)x)}{2(a-b)} + \frac{\sin((a+b)x)}{2(a+b)} + c.$$

په ځانګړې توګه د ټولګڼیزو یا تامعددې a, b لپاره انتیګارل په پریودیکي انتروال $[-\pi, \pi]$ باندې ورکیږي. د ټوټه انتیګرالونې په مرسته لاس ته راځي

$$\int \sin^n(ax)dx - \frac{1}{na}\sin^{n-1}(ax)\cos(ax) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(ax)dx$$

$$\int \cos^n(ax)dx\ \frac{1}{na}\sin(ax)\cos^{n-1}(ax) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(ax)dx.$$

داسې کیدی شي اکسپوننت سوکښسیو یا تل کم شي. د $n = 2$ لپاره په ځانګړې توګه لاس ته راځي

$$\int \sin^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a} + c$$

$$\int \cos^2(ax)\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a} + c.$$

په ځانګړې توګه باور لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx = \pi$$

د $n \in \mathbb{N}$ لپاره .

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

که د لومړۍ کټمټوالي د ښي اړخ مشتق ونیول شي، نو سړی لاس ته راوړي

$$\frac{1}{2}\cos\left((a-b)\,x\right) - \frac{1}{2}\cos\left((a+b)\,x\right) .$$

د زیاتون – یا جمعي قضیه راکوي

$$\frac{1}{2}\left(\cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx) - \cos(ax)\cos(bx) + \sin(ax)\sin(bx)\right) =$$

$$= \sin(ax)\sin(bx) ,$$

کوم چې د کیڼ لور د انتیګرال سره سر خ وري.

د $\cos^2(ax)$ او $\sin^2(ax)$ لومړنی تابع کېدی شي د ټوټه انتیګرال سره وشمېرل شي. د بېلګې په توګه دی

$$\int \sin(ax)\sin(ax)\,dx$$

$$= -\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(ax) - \int\left(-\frac{1}{a}\cos(ax)\right)\left(a\cos(ax)\right)\,dx$$

$$= -\frac{1}{a}\cos(ax)\sin(ax) + \int\left(1-\sin^2(ax)\right)\,dx .$$

د $\int \sin^2(ax)\,dx$ پسې حل کونه غوښتونی لومړنی تابع راکوي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د کمپلکس تریګونومتیکي توابعو انتیګرالونه

Integration komplexer trigonometrischer Polynome

له

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int e^{\mathrm{i}kx}\,dx = \frac{1}{\mathrm{i}k}e^{\mathrm{i}kx} + c, \quad 0 \neq k \in \mathbb{Z},$$

څخه د کمپلکس تریګونومتریکي پولینومونو لپاره لاس ته راځي

$$p(x) = \sum_{|k|\leq n} c_k e^{\mathrm{i}kx},$$

داسې چې
dass

$$\int p(x)\,dx = c + c_0 x + \sum_{0\neq|k|\leq n} \frac{c_k}{\mathrm{i}k} e^{\mathrm{i}kx}$$

همداسې
sowie

$$\int_{\pi}^{\pi} p = 2\pi c_0$$

باور لري.

د اویلر-مویورې فرمول په مرسته کېدی شي په دې توګه په خوښه پولینومونه
په $\sin(kx)$ او $\cos(kx)$ کې انتیګرال شي.

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x\,dx$$

شمdرلو ته د اویلر-مویورې فرمول په مرسته انتیګرال په لاندې توګه لیکل کیږي

$$\frac{1}{16}\left(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}\right)^4 = \frac{6}{16} + \sum_{k\neq 0} c_k e^{\mathrm{i}kx}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

او $2\pi\frac{6}{16}=\frac{3}{4}\pi$ د انتيګرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي.

بديلي کيدی شي ټوټه انتيګرال وکارول شي:

$$\begin{aligned}\int\sin^4 x dx &= \int\sin x\sin^3 x\,dx\\ &= -\cos x\sin^3 x+3\int\cos^2 x\sin^2 x\,dx\\ &= -\cos x\sin^3 x+3\int\sin^2 x\,dx-3\int\sin^4 x\,dx.\end{aligned}$$

که په $\sin^4 x$ انتيګرال ښی لور ته راوړل شي، نو د درجې کموالی راکوي

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^4 x\,dx=-\frac{1}{4}\left[\cos x\sin^3 x\right]_{-\pi}^{\pi}+\frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx\,.$$

د

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx=\pi$$

په مرسته سره $\frac{3}{4}\pi$ هم د انتيګرال ارزښت په توګه لاس ته راوړي
ليکونکي: هيوليګ، پفايل

تريګونومتريکي بدلونونه Trigonometrische Substitutionen

د لاندې بدلونونو په مرسته کېدی شي د ساده الجبري انتيګراليدونکو يوه لړۍ اکسپليځيت يا په ښه هڅرګنده توګه وشمېرل شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = a\sin t: \qquad dx = a\cos t\,dt \qquad \sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$$
$$x = a\tan t: \qquad dx = a/\cos^2 t\,dt \qquad \sqrt{a^2+x^2} = a/\cos t$$
$$x = a/\cos t: \qquad dx = a\sin t/\cos^2 t\,dt \qquad \sqrt{x^2-a^2} = a\tan t$$

په بل حالت کې باید د ریښې د پروت محور متحولې لومړی په مربعیز تکمیلېدونکې بڼه راړل شي.
لیکونکي: هیولیک، پفایل

د انتیګرال

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

لپاره بدلون $x = \sin t,\ dx = \cos t\,dt$ او د پولو اعیارول $x = 0 \to t = 0$
او $x = 1/2 \to t = \pi/6$ راکوي

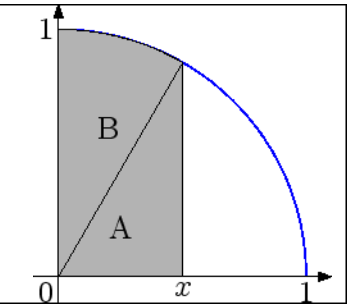
$$\int_0^{\pi/6} \cos^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}(\sin t\cos t + t)\right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

ناټاکلی انتیګرال دی

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + c.$$

انتیګرال کیدی شي د یوه ساده هندسي یا ځمککچیز اند(فکر) سره هم وټاکل شي

لکه د ځیرې ښخه چې لیدل کیږي، د $\sqrt{1-x^2}$ د ګراف لاندې سطحه په دوه برخسطحو ودانه یا جوړه ده.



د درېکوډي سطحي مساحت $A = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$ دی   او د ګردی برخط یا قطاع مساحت د $t = \arcsin x$ کونج سره $B = \frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\arcsin x$ ده. د دې سطحو د

(c) ketabton.com: The Digital Library

مساحت جمعه کيدل غوښتونې سطحه راکوي.
ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د انتيګرال

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$$dx = 1/\cos^2 t\, dt$$

لپاره د بدلون $x = \tan t,$ څخه لاس ته راځي

$$\int \frac{dt/\cos^2 t}{\tan t/\cos t} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln|\tan\frac{t}{2}| + c,$$

د کوم سره چې اخرنی مساوات د ښی اړخ د مشتق نيولو له لارې ازمايل کېدی شی.
د بېرته بدلون له لارې لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \ln|\tan(\frac{1}{2}\arctan x)| + c.$$

له دې سره د بيلګې په توګه لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} &= \ln|\tan\frac{\pi}{4}| - \ln|\tan\frac{\pi}{8}| \\ &= \ln 1 - \ln\left(\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\right) \\ &= \ln(1+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ، کوپف

د انتيګرال

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2-4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{((x-3)/2)^2-1}}$$

لپاره بدلون $y=(x-3)/2$, $dx=2dy$ راکوي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} .$$

د پسې بدلون $y=\frac{1}{\cos t}$, $dy=\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt, \sqrt{y^2-1}=\tan t$ سره n لاس ته راځي

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+5}} = \int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1}{\cos t}+\tan t\right| + c ,$$

د کوم سره چې اخرنی برابروالی د بنی خوا د مشتق نیوني له لارې ازمایل کیدی شي.
د په څټ یا معکوس بدلون پسې د

$$\sin t = \sqrt{1-(1/y)^2}, t = \arccos y = \arcsin\sqrt{1-(1/y)^2}$$

سره لومړنی تابع دلاس ته راځي

$$\ln\left|y+y\sin\left(\arccos\frac{1}{y}\right)\right|+c = \ln\left|y+y\sqrt{1-\left(\frac{1}{y}\right)^2}\right|+c$$

$$=\ln\left|\frac{x-3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-6x+5}\right|+c .$$

لیکونکي: هیولیګ، کوپف

د ساین او کوساین راشنل توابع
Rationale Funktionen von Sinus und Cosinus

د بدلون

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x = \tan(t/2)$$

سره د يوه په خوښه راشنل تابع r لپاره لاس ته راځي

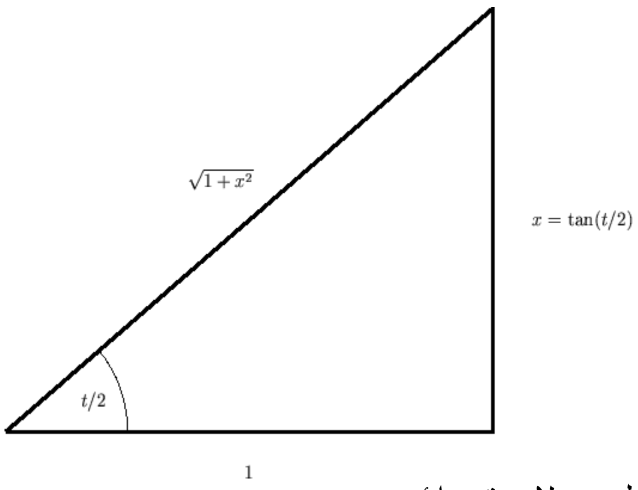
$$\int r(\cos t, \sin t)\, dt = \int r\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{2x}{1+x^2}\right) \frac{2}{1+x^2}\, dx\,.$$

له دې سره ترېگونومتريکي تابع کېدی شي په يوه راشنل انتيګرال واړوي، کوم چې د ټوټه کسر ټوټه ونې سره شمېرل کېدی شي.

لیکونکي: هیولیګ، اپریش

لکه د ځيرې ځخه چې ليدل کيږي، باور لري

$$\cos(t/2) = 1/\sqrt{1+x^2}\,, \quad \sin(t/2) = x/\sqrt{1+x^2}$$



له دې لاس ته راځي

$$dx = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2(t/2)}\, dt = \frac{1}{2}\,(1+x^2)\, dt$$

همداسې

$$\cos t = \cos^2(t/2) - \sin^2(t/2) = \frac{1-x^2}{1+x^2}\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin t = 2\cos(t/2)\sin(t/2) = \frac{2x}{1+x^2}\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، اپریښ

د بدلون $x = \tan(t/2)$ سره لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \int \frac{1+x^2}{2x}\,\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{dx}{x} = \ln|\tan(t/2)| + c.$$

په اړونده تګه لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{1+x^2}{1-x^2}\,\frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx$$

$$= \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c\,.$$

د $x = \tan(t/2)$ د بېرته بدلون پسې لاس ته راځي

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\frac{1+\tan(t/2)}{1-\tan(t/2)}\right| + c\,.$$

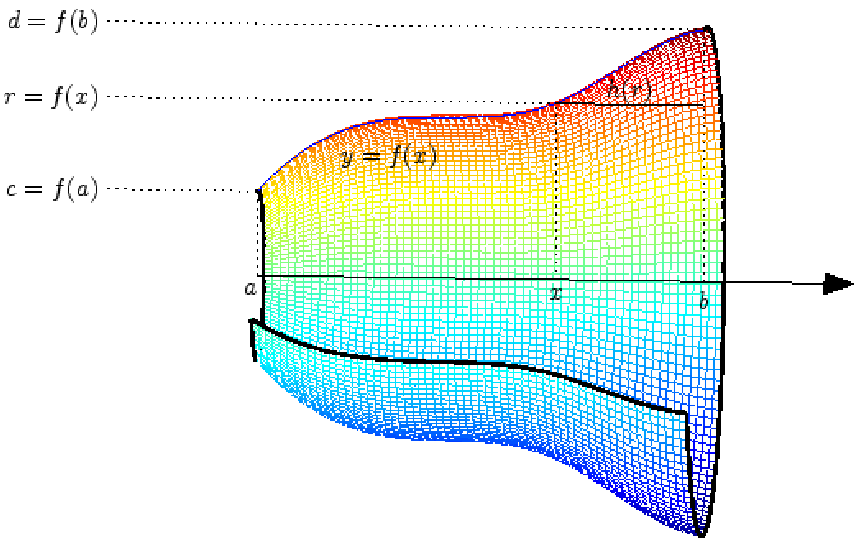
لیکونکي: هیولیګ، اپریښ

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څرخيدونو بدنونو ډکی یا حجم Volumen von Rotationskörpern

د V ډکی حجم د x په محور جوړ شوي بدن د تابع ګراف $r = f(x) \geq 0$,
$a \leq x \leq b$
د څرخون له لارې کېدی شي انتيګرېشن له لارې په ګردی ډوله غوڅي یا تقاطع باندې شمېرل کيدی شي:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx .$$



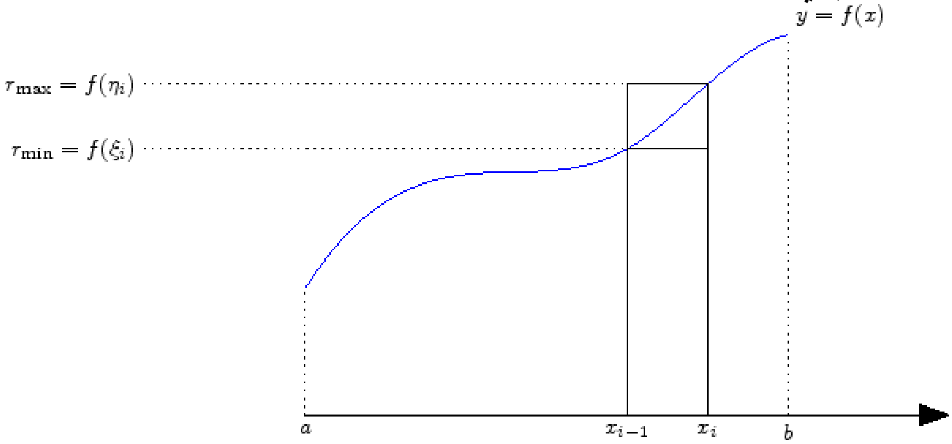
بديلي کېدی شي د توتې پوښ باندې انتيګرال شي.

$$V = \pi c^2 (b - a) + 2\pi \int_c^d r\, h(r) \, dr ,$$

چيرته چې c همداسې d مينيمال همداسې ماکسيما وړانګه r او $h(r)$ په بدن کې خوندي توتې پوښ ټول جګوالی دی د وړانګې r سره. دا واريانت له ټولو د همغږيز وړانګې تابع f لپاره موخ وره ده.
ليکونکي: هيوليک، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د لومړي فرمول د ښوونې لپاره په ځېره کې کېنل شوی اپروکسیمیشن یا نږدېوالی کارول کيږي.



يوه ټوټه کونې Δ يوه انتروال $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1 \ldots n$, لپاره کېدی شي ډکی(حجم) د يوې توتې

له لارې د مينيمال وړانګې $f(\xi_i)$ سره او يوې توتې د ماکسيمال وړانګې $f(\eta_i)$ سره رابند شي. د ټول حجم V لپاره نو بيا باور لري

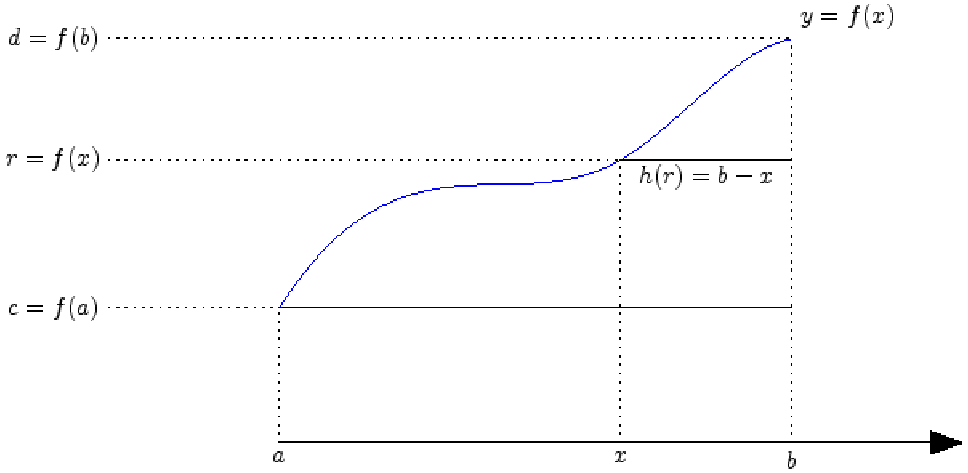
$$\pi \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)^2 \Delta x_i \leq V \leq \pi \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)^2 \Delta x_i \ ,$$

د $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ سره. دواړه دباندني ترمونه د ريمن-جمعه ده، چې د انتيګرال ارزښت لور ته ځي، يعنې باور لري

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx.$$

ددويم فرمول د ښوونې لپاره لومړی نيول کيږي، چې f همغږيز جګېدونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $r = f(x)$ ، $dr = f'(x)\,dx$ همداسې د $x = f^{-1}(r)$ سره لاس ته راځي

$$2\pi \int_{c=f(a)}^{d=f(b)} h(r) r\,dr = \pi \int_a^b \underbrace{(b-x)}_{u}\underbrace{2f(x)f'(x)}_{v'}\,dx$$

$$= \pi\,(b-x)f(x)^2\Big|_a^b + \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$$

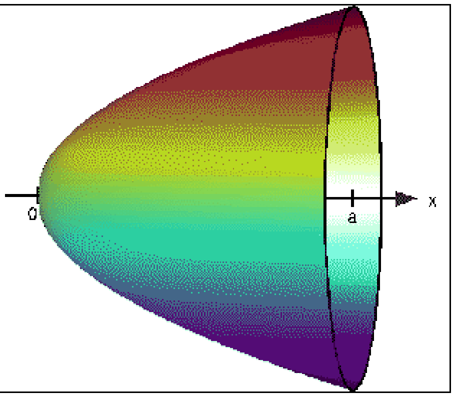
$$= \underbrace{-\pi(b-a)c^2}_{\text{innerer Zylinder}} + \pi \int_a^b f(x)^2\,dx\,,$$

څه چې دويم فرمول په ګوته کوي.

د همغږيز ټيټپدونکي توابعو لپاره کېدی شي په ورته توګه مخ ته ولاړ شو. په ټوليز حالت کې دا د همغږيزوالي ورشو د ټوټه کوني له لارې لاس ته راځي

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library



دا څیره شوی پارابولویید د کږې یا منحني
$y=\sqrt{x}$
د څرخون یا څرخېدو له
لارې د x په محور څېره شوی .

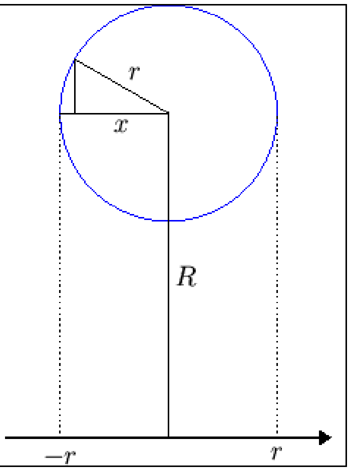
د څرخیدونکي بدن د څرخیدنې قانون سره سم ډکی یا حجم دی

$$\pi\int_0^a\left(\sqrt{x}\right)^2\,dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a=\frac{1}{2}\pi a^2\,.$$

بدیلي د توتي پوښ بادي انتیګرلونې له لارې لاس ته راوړي

$$2\pi\int_0^{\sqrt{a}}r\,(a-r^2)dr=2\pi\left[-\frac{1}{4}(a-r^2)^2\right]_0^{\sqrt{a}}=\frac{1}{2}\pi a^2\,.$$

لیکونکي: هیولیک، هیورنر



یو توروس (د ګردی یا داېرې کږی
(Torus دیوې ګردی دڅرخون څخه منځ
ته راځي د وړانګې r سره په یوه محور د
منځ ټکي څخه په R واټن.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ډکی یا حجم د دوه ځرخیدونکو بدنونو د کمښت څخه شمیرل کیږي

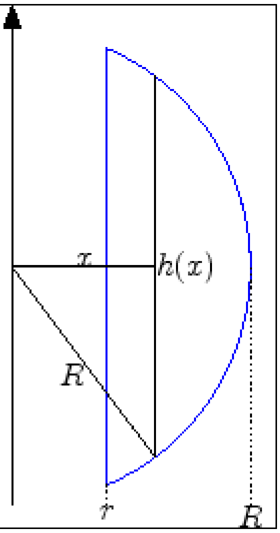
$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(R + \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx - \pi \int_{-r}^{r} \left(R - \sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= 4\pi \int_{-r}^{r} R\sqrt{r^2 - x^2}\, dx\,.$$

د بدلون $x = r\sin\varphi$, $dx = r\cos\varphi\, d\varphi$ سره لاس ته راځي

$$V = 4\pi Rr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\, r\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= 4\pi Rr^2 \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 Rr^2\,,$$

ځکه چې $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\,.$$ لکه چې ښیره شوی یو له غونډاري د R په وړانګې په پراته محور د وړانګې r سره رابیله شوې توته ده.	

د دې لپاره چې ډکي یا حجم شمېرو، د وړانګې $x, r \le x \le R$ سره په توته پوښ انتیګرال نیولکیږي . د $R = 5, r = 3$ لپاره د $h(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ سره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$V = 2\pi \int_r^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}\, dx \;=\; 2\pi \left[-\frac{2}{3}\left(R^2 - x^2\right)^{3/2} \right]_r^R$$

$$= \frac{4}{3}\pi(25-9)^{3/2} \;=\; \frac{256}{3}\pi\,.$$

د یوې کږې یا منحني اوږدوالی **Länge einer Kurve**

د یوې کږې L اوږدوالی د ناپرېکېدونکي مشتقوړ پارامتریک کولو $t \mapsto p(t)$ سره، $a \le t \le b$ ، دی

$$\int_a^b |p'(t)|\, dt\,.$$

پّ ځانګړې توګه د یوې کږې لپاره په xy -سطحه د پارامتریک انځورونې $p(t) = (x(t), y(t))$ سره باور لري

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt\,.$$

په ځانګړې توګه دیوه تابع $y = f(x)\,,\; x \in [c,d]$ ګراف لاندې اوږدوالی لري

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx\,.$$

د $p(a)$ او $p(t)$ ترمنځ د کږو ټوټو اوږدوالی ،

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)|\, d\tau\,,$$

کیدی شي د کانونیکي کږې پارمتر په توګه وکارول شي. سرې داسې په نامه د کږې اوږدوالي پسې پارمتري کونه لاس ته راوړي :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1 \, .$$

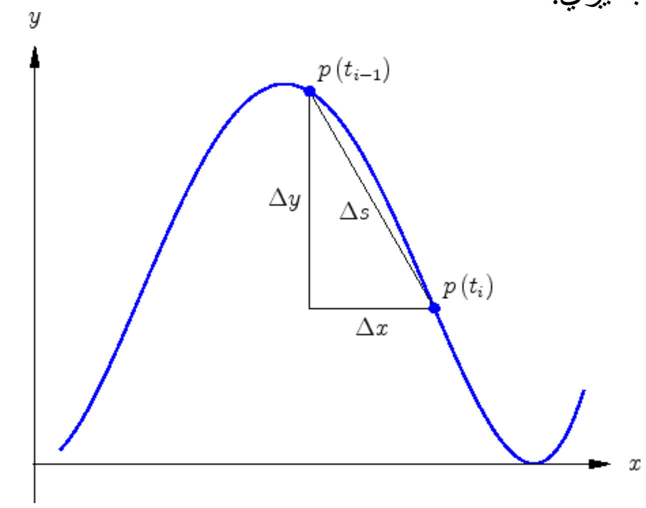
د نورمي تانجنت کرښې په بنسټ د کانونيکي پارمتري کونې لپاره باور لري

$$\int_C f = \int_0^L f(q(s))\, ds$$

د C د L اوږدوالي سره.

لیکونکي: هیولیک، هیورنر

د يوې مسطحې کرښې د اږودوالي شميرنې لپاره د پارامتر انټروال پيه ټوټو وېشل کيږي او يو برخه انټروال $[t_{i-1}, t_i]$ لپاره کرږه د پای ټکو د ترونکرښې له لارې ځای بدليږي يا بدليږي.



د انتګرال د منځ ارزښت جملې سره بيا باور لري:

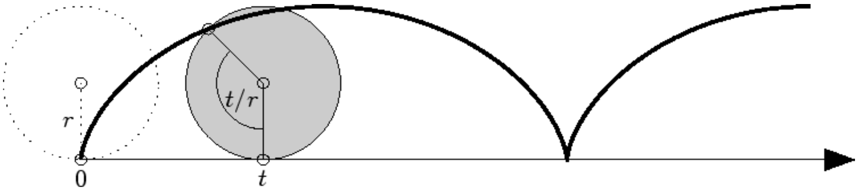
$$\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(p_1'(\xi_i))^2 + (p_2'(\eta_i))^2}\, \Delta t_i \, ,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ سره . دا اخرنی ویینه یا افرده د ورکړ شوي انتیګرال د یمن-
زیاتون یا -جمعي دی.
په ورته تګه د ډېرپراخېدونکي یا ډېربعدیز ې کږې لپاره د مشتق نورم د انتیګرال په بڼه راکوي.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

که د r وړانګي سره یوه ګردۍ یا داېره د په محور ګرځوو یا وځرخوو، نو ژي ټکی یو ځیکلویید تشریح کوي.



د سرچینې لپاره د پیل ټکي په حیث

$$\begin{aligned} x(t) &= t + r\cos(3\pi/2 - t/r) = t - r\sin(t/r) \\ y(t) &= r + r\sin(3\pi/2 - t/r) = r - r\cos(t/r) \end{aligned},$$

د $t \in [0, 2\pi r]$ سره ، د یوې ګږې لیندۍ یو پارمتري کونه ده.
د لیندۍ اوږدوالی دی

$$L = \int_0^{2\pi r} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi r} \sqrt{(1-\cos(t/r))^2 + (\sin(t/r))^2}\, dt .$$

د بدلون $s = t/r$, $dt = r\, ds$ او کټمټوالي

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 , \quad 1 - \cos(2\varphi) = 2\, \sin^2\varphi$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سره لاس ته راځي

$$L = \qquad r\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos(s))}\,ds = r\int_0^{2\pi} 2\sin(s/2)\,ds = 8\,r\,.$$

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

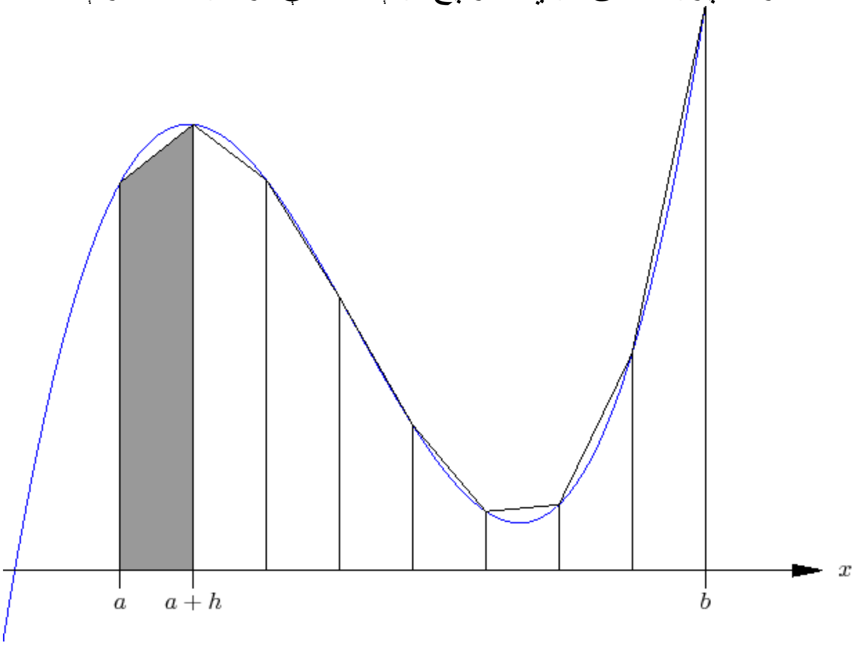
د ذوزنقي قانون **Trapez-Regel**

نږديوالی

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx s_h f =$$

$$= h(f(a)/2 + f(a+h) + \cdots + f(b-h) + f(b)/2)$$

انتيګرال اپروکسيمی کوي د تراپخ يوې سطحې زياتون له لارې.



د يوه دوه واره ناپرېکېدونکی مشتقوړ تابع د ناتيکاوي پاره باور لري:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$s_h f - \int_a^b f = \frac{b-a}{12} f''(r) h^2,$$

د $r \in [a,b]$ لپاره.

په ټیکه توګه ناټیکاوی د خویو یا هوارو توابعو لپاره ګاونډیز یا اسیمپټوټیکي وده لري

$$s_h f - \int_a^b f = c_1(f'(b) - f'(a))h^2 + c_2(f'''(b) - f'''(a))h^4 + \dots$$

له f او h څخه خپلواکې ثابتې c_j سره. له دې څخه لاس ته راځي، چې د تراپچ قانون د $(b-a)$-پریودیکي توابعو لپاره خورا دقیق دی. ناټیکاوی ګړندی د صفر په لور ځي نسبت هر h-توان ته.
لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

په یوه انتروال ناټیکاوی دی

$$\frac{h}{2}(f(0) + f(h)) - \int_0^h 1 \cdot f = \int_0^h (t - h/2) f'(t)\, dt.$$

بیا ټوټه انتیګرالونه او منځ ارزښت جملهې استعمال راکوي

$$-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h) f''(t)\, dt = \underbrace{-\int_0^h \frac{1}{2} t(t-h)\, dt}_{h^3/12}\; f''(r).$$

په ټوټه انتروال باندې د جمعې پسې سرې لاس ته راوړي

$$\frac{1}{12} h^3 \sum_{i=1}^n f''(r_i).$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

جمعه کيدی شي د

$$n \min f'' \leq \sum f''(r_i) \leq n \max f''$$

له لارې اټکل شي. د ترمنځارزښت جملې پسې بالاخره لاس ته راځي

$$\sum f''(r_i) = nf''(r) = \frac{b-a}{h} f''(r) \,,$$

$$r \in [a,b]$$

د يوه سره.

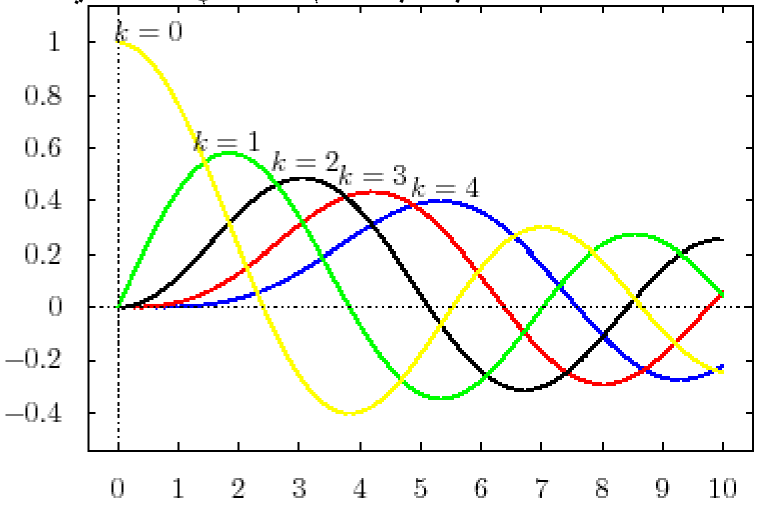
د ګاونډ يا مجانب ناټيکاوي ودې ښوونه اوړده ده. دا د باقي غړي په تل توګه انتيګرالونه ولاړه ده او د ژی ترمونو په يوه مناسبه کارونه يا استعمال.

ليکونکي: هيوليګ، هيورنر

د بسل-تابعBessel-Funktionen $\mathcal{J}_k$ د توليګنيز k لپاره دا لاندې انتيګرال انځورونه لري

$$\mathcal{J}_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos(kz - x\sin(z))}_{f(z)} \, dz$$

او د $k = 0, \ldots, 4$ لپاره په لاندې ځيره کې انځور دي



(c) ketabton.com: The Digital Library

د تراپخ قانو شمیرلو سره شړی کاروي، چې

$$\frac{1}{2}\left(f(a)+f(a+2\pi)\right)=f(a)$$

او دا چې f جوړه دی. که ټکي

$$z_i=-\pi+\frac{1+2i}{2}\frac{2\pi}{n},$$

وټاکو ، نو جمعه

$$\sum_{i=0}^{n-1}f(z_i)=2\sum_{i=n/2}^{n-1}f(z_i)$$

دې جوړه شي.

لکه د $\mathcal{J}_1(2)$ لاندې نږدېونه یا اپرکسیمیشن د $n=4,8,\ldots 64$ ټکو سره ښایي، پولې ته تلنه فوقالعاده ګړندی ده.

n	
4	0.45464871341284084769800993295587
8	0.57655235602472460377030331810649
16	0.57672480775615774487465153090293
32	0.57672480775687338720244824226913
64	0.57672480775687338720244824226913

دا د ذوزنقي قانون جګ ټیکاوی د خوی پریودیکي انتیګرال لپاره یوپیک دی او کېدی شي د ناټیکاوي د یوهه ټیکې انځورونې ، د اویلر-ماکلورن-Euler-Maclaurinschen د جمعي فرمول مدلل کړای شي.

لیکونکي: هیولیګ، هیورنر

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګاوس فرمول Gauß-Formel

د n –مې درجې يا نظم د ګاوس فرمول په نږدې بڼه يا ډول د يوه تابع انتيګرال ټاکي د انتيګرال د انتربوليشن پولينوم له لارې د n -مې درجې د لاګرانژ پولينومونو په صفرځايونو $x_1 < \cdots < x_n$ کې:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(x_i\right)$$

د w_i سره د لاګرانژپولينوم

$$p_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

په انتوال $[-1,1]$ باندې.

فرمول د $< 2n$ Grad درجې پولينوم لپاره ټيک دی او د ټولو له مخه د تحليلی توابعو لپاره خورا ټيک دی. ټول وزنونه w_i زياتيز يا مثبت دي، او تکيه ځايونه x_i په انتګريشن انتروال $(-1,1)$ کې پراته دي. دا د ګاوس پارامتر تر 10 -م نظم پورې جدولي شوی او په لاندې جدول کې ورکړ شوی دی

n	x_i	w_i
2	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1
3	0 $\pm\frac{1}{5}\sqrt{15}$	$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$
4	$\pm\frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}}$ $\pm\frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{36}\sqrt{30}$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{36}\sqrt{30}$
5	0 $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245-14\sqrt{70}}$ $\pm\frac{1}{21}\sqrt{245+14\sqrt{70}}$	$\frac{128}{225}$ $\frac{161}{450}+\frac{13}{900}\sqrt{70}$ $\frac{161}{450}-\frac{13}{900}\sqrt{70}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د گاوس پارامتر x' او w' د خوښې انتگریشنانتروال $[a,b]$ لپاره د کرښیز تراسفورمېشن له لارې لاس ته راځي:

$$x_k' = a + \frac{b-a}{2}(x_k+1)\,, \quad w_k' = \frac{b-a}{2} w_k\,.$$

لومړی ښایو، چې نږدې ټاکنه د $< n$ Grad درجې د پلوینوم f لپاره ټیک دی. دا د لاندې څخه لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b p_k(x)\,dx\right) f(x_k) = \int_a^b \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p_k(x) f(x_k)}_{=q(x)}\,dx\,.$$

داچې p_k نسبت و ټکو x_k ته د لاگرانژ پولینومونه دي، q په دې ټکو کې و f ته انترپولیشنپولینوم دی او داسې له f سره همغږیز کیږي.

د ځانگړو ټکو ټاکلو له لارې کېدی شي حتی د $< 2n$ Grad درجې پولینوم f ټیک انتیگرال شي.

دې ته f د پولینومېش په مرسته داسې لیکو

$$f(x) = p(x)s(x) + r(x)$$

د n Grad درجې لژندر-پولینوم p او د. $< n$ Grad دجې پولینومونه r او s.

که $p(x_k) = 0$ په پام کې ونیول شي، نو لکه پورته لاس ته راځي

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b p_k(x)\,dx\right) \left(p(x_k)s(x_k) + r(x_k)\right)$$

$$= \int_a^b \sum_{k=1}^{n} p_k(x) r(x_k)\,dx = \int_a^b r(x)\,dx\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له بلې خوا باور لري

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^b (p(x)s(x)+r(x))\,dx \\ &= \int_a^b p(x)s(x)\,dx + \int_a^b r(x)\,dx \\ &= \int_a^b r(x)\,dx\,,\end{aligned}$$

ځکه چې p د $< n$ Grad درجې پولينوم ته اورتوګونال دی.
د وزن زاتيزوالی يا مثبتوالي د کثمتوالي څخه لاس ته راځي

$$w_k = \int p_k = \sum_i w_i\, p_k(x_i) = \sum_i w_i\, p_k(x_i)^2 = \int p_k^2\,.$$

د اخرنې تر مخ يا وړاندې مساوات د $p_k(x_i) = \delta_{k,i}$ له امله باور لري، او اخرنی، داچې p_k^2 $< 2n$ Gradدرجه لري، نو د ګاوس-فرمول له لارې ټيک انتيګرال کيدی شي.
د ګاوس-فرمول د روښانه ولو ته لاندې جدول د مختلفو انتيګراندونو يا انتيګرال کېدونکو نږدې ټاکل يا اپروکسيميشن ښايي.

n	$\int_1^1 e^{-x^2}\,dx$	$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$	$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\,dx$
1	2.000000	2.000000	0.968245
2	1.433062	1.848571	0.891006
3	1.498679	1.851976	0.879356
4	1.493334	1.851936	0.876417
5	1.493663	1.851937	0.875306

(c) ketabton.com: The Digital Library

په اخرني انتيګرال کې ورو پولې ته تلنې دليل په $x = 1$ کې زينګولاريتي ده.

د ګاوس-فرمول فقط خويو يا هوارو glatt (يو تابع خوی يا هوار تابع يو ماتماتيکي تابع دی، چې ناپرېکېدونکی او ناپای زيات مشتقوړ وي توابعو ته ډېر دقيق دی.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

ناڅرګند يا نا معلوم انتيګرال **Uneigentliches Integral**

د يو په يوه انتروال $[a, b)$ ټوټه ډوله ناپرېکېدونکی تابع f لپاره کېدی شي د

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b-} \int_a^c f$$

له لارې د انتيګرال کليمه په ناپای انتروالونو ($b = \infty$) او نامحدودو انتيګراليدونکو($f(b) = \pm\infty$) وغزول شي.

په ورته توګه زينګولاريتي په لاندې يا په دواړو پولو مطالعه شي. په اخرني حالت کې بايد پوله ارزښت د پرلپسې $c \to a+$, $d \to b-$ د ټاکنو څخه خپلواک وي.

د يوه ناټاکلي انتيګرال د شتون لپاره پوره کېدونکي د f مطلق انتيګرالوړوالی دی، دا په دې معناچې

$$\int_c^d |f(x)| \leq$$ ثابت

د ټول برخه انتروالونو $[c, d] \subset (a, b)$ لپاره.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ناټاکلي انتيګرال د شميرلو لپاره

$$\int_0^\infty e^{-x}\, dx\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $b > 0$ لپاره ټاکي

$$\int_0^b e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^b = -e^{-b} + 1\,.$$

له دې سره سرې لاس ته راوړي

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+1\right) = 1\,.$$

که پوله ارزښت ساده شمېرل کېدونکی وي، نو سرې پسې ترلي ناټاکلې پولې کاروي، داپه دې معنا چې سرې لیکي

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

او دا په راوړل شوې بیلګه کې.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ناټکلو انتیګرالونو

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln(x))^r}\,dx\,.$$

لپاره د بدلون $y = \ln(x)$, $dy = dx/x$
سره سرې لاس ته راوړي

$$\int_2^b \frac{1}{x(\ln(x))^r}\,dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(b)} \frac{1}{y^r}\,dy = \begin{cases} \dfrac{(\ln(b))^{1-r} - (\ln(2))^{1-r}}{1-r}\,, & r \neq 1 \\ \ln(\ln(b)) - \ln(\ln(2))\,, & r = 1 \end{cases}.$$

په دې پسې د $r > 1$ لپاره پوله ارزښت $b \to \infty$ ټیک هلته شتون لي، که باور ولري. په دې حالت کې دی

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)^r}\,dx = -\frac{(\ln(2))^{1-r}}{1-r}\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ناټاکلي انتيګرال

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx\,.$$

لپاره انتيګرالېدونکی په پورته انتيګرال پولې $x = \frac{\pi}{2}$ سيګولار دی. سرې د $0 < b < \frac{\pi}{2}$ لپاره لاس ته راوړي

$$\int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \left[-2\sqrt{\cos(x)}\right]_0^b = -2\sqrt{\cos(b)} + 2\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}}\,dx = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \int_0^b \frac{\sin(x)}{\sqrt{\cos(x)}} = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}} \left(-2\sqrt{\cos(b)} + 2\right) = 2\,.$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د ناټاکلي انتيګرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx\,.$$

لپاره

$$\arctan(x) + \ln(1+x^2)$$

د انتيګراليدونکو بنسټ- يا ساده تابع دی. ناټيکه ايښوونه

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\arctan(x) + \ln(1+x^2)\right]_{-b}^{b}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(2\arctan(b)\right) = \pi$$

د ناټاکلي انتيګرال لپاره راکوي. د تعريف سره سم د ناټاکلي انتيګرال پورته او کښته پولې بايد يو له بل خپلواک و څېړل شي. داچې نه پوله ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\lim_{c\to-\infty}\int_c^0 \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to-\infty}\left(-\arctan(c) - \ln(1+c^2)\right)$$

او نه پوله ارزښت

$$\lim_{d\to\infty}\int_0^d \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx \qquad = \lim_{d\to\infty}\left(\arctan(d) + \ln(1+d^2)\right)$$

شتون لري، دا ناټاکلی انتيګرال

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+2x}{1+x^2}\,dx$$

هم شتون نه لري.
ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د نامعلوم انتيګرال لپاره د پرتلې قضيه

Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale

که f د g لپاره يو مايورانت وي، داپه دې معناچې

$$|f(x)| \le |g(x)| \qquad a < x < b$$

باور لري، نو د g د مطلق انتيګرالوړوالي څخه د انتيګرال

$$\int_a^b f(x)\,dx\,.$$

شتون لاس ته راځي

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

فقط د پوله ارزښت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b f = \lim_{c \to b-} \int_a^c f$$

شتون ترڅېړنې لاندې نیول کیږي. په نورو حالتونو کې په ورته توګه مخ ته ځو.
تابع

$$r(c) = \int_a^c |f|$$

برابرغږېزه جګېدونکې ده او پورته لور ته د $\int_a^b |g|$ له لارې رابنده یا محدود ده. په دې پسې د r لپاره $c \to b-$ پولې ته تلونکی دی او له دې امله $\int_a^b |f|$ شتون لري.
تابع

$$s(c) = \int_a^c (f + |f|)$$

همم برابرغږېزه جګېدونکې ده او د $2\int_a^b |g|$ له لارې رابنده یا محدود. پسې د s هم د $c \to b-$ لپاره پولې ته تلونکی دیاو له دې امله $\int_a^b (f + |f|)$ شتون لری.
له دې څخه د

$$\int_a^b f = \int_a^b (f + |f|) - \int_a^b |f| .$$

شتون لاس ته راځي.
لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د پرتلع تلبع لپاره زیات وخت $f(x) = x^r$ کارول کیږي.
د $0 < a < b < \infty$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_a^b x^r\,dx = \begin{cases} \dfrac{b^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}, & r \neq -1 \\ \ln(b)-\ln(a), & r=-1 \end{cases}.$$

دا ترم د $b \to \infty$ لپاره ټیک هلته پولې ته تلونکی دی، که $r < -1$ باور ولري، دا په دې معناچې انتیګرال

$$\int_1^\infty x^r\,dx$$

شتون ولري ټیک د $r < -1$ لپاره.

د $a \to 0+$ لپاره ټیک هلته پوله ارزښنا لاس ته راځي، که $r > -1$ باور ولري، دا په دې معنا چې انتیګرال

$$\int_0^1 x^r\,dx$$

ټیک د $r > -1$ لپاره شتون ولري.

لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د دې لپاره چې د نامعلوم انتیګرال شتون د

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$$

په حیث وښایو ، سړی دا انتیګرال په دوه برخو توته کوي.

دا چې $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ دی، نو لاندې انتیګرال شتون لري

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په انټروال $[1,\infty]$ د نامعلوم انټیګرال لپاره د ټوټه انټیګرالونې له لارې لاس ته راځي

$$\int_1^b \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_1^b - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx\,.$$

د $b \to \infty$ لپاره لومړی ترم د $\cos(1)$ په لور ځي او دویم د پرتلې قضیې له مخې پولې ته ځي، ځکه چې

$$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \le \left|\frac{1}{x^2}\right|\,.$$

سره له دې چې د تابع کوم ورکړ شوی لومړی – یا بنسټیز تابع نه لري، کېدی شي د نامعلوم انټیګرال ارزښت وټاکي. .

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

لیکونکي: اپپ، هیولیک

ګاما تابع یا - فنکشن **Gamma-Funktion**

د

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt,$$

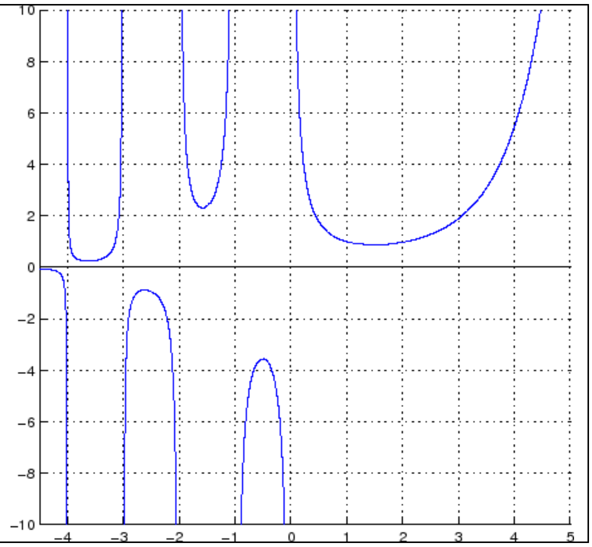
$$x \in (0,\infty)\,,$$

له اري تعریف شوی ګاما تابع فنکشنل مساوات پوره کوي

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\,.$$

په ځانګړي توګه

$\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د فنکشنل مساواتو په مرسته کېدی شي ګاما-تابع د کميز پروت يا x محور لپاره هم تعريف کړی شي. لکه د جوړ شوي تابع ګراف ښخه چې ليدل کيږي، دا ساده قطبونه د $x = 0, -1, \ldots$ لپاره لري.

ليکونکي: اېپ، هيوليګ

انتيګرال

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

فقط د $0 < x < 1$ لپاره پرابلم جوړوي. په دې حالت کې انتيګرال د

$$t^{x-1}e^{-t} \leq t^{x-1}$$

له امله د پرتلې قضيې له مخې پولې ته تلونکی دی.

انتيګرال

$$\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

هم د پرتلې قضيې په بنسټ شتون لري او اټکلونه

$$t^{x-1}e^{-t} \leq t^{-2}$$

د پوره لوي t لپاره بسيا کوي.
د ټوټه انتيګرال سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = \left[-t^x e^{-t}\right]_{t=0}^\infty + \int_0^\infty x t^{x-1}e^{-t}\,dt \\ &= 0 + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\Gamma(x)\,,\end{aligned}$$

او له دې سره د پوره اېندکشن په مرسته او $\Gamma(1) = 1$ د $n \in \mathbb{N}$ لپاره لاس ته راځي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Gamma(n+1) = n!\,.$$

د ګاما تابع د ګاوس تعریف

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

د تابع یوه روښانه ونه په ټول $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^-$ اجازه زاکوي.

.

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د کوشي اصلي ارزښت Cauchyscher Hauptwert

د یوه په $x = c \in (a,b)$ کې زیګولار تابع f لپاره سرړی

$$\mathrm{CHW}\int_a^b f = \lim_{h\to 0+}\left(\int_a^{c-h} f + \int_{c+h}^b f\right)$$

د کوشي اصلي ارزښت په څېر تعریفوي

لیکونکي: اېپ، هیولیګ

د تیپیکي بېلګې په څېر د کوشي اصلې ارزښت

$$\mathrm{CHW}\int_{-a}^{a} x^k\,dx\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,,$$

شمېرل کیږي.

د $k=-1$ لپاره دی

$$\int_{-a}^{-h}\frac{dx}{x} + \int_h^a \frac{dx}{x} = \ln|h| - \ln|a| + \ln|a| - \ln|h| = 0\,.$$

د انتیګرالیدونکي د انتی سیمتري په دلیل د CHW ورکیږي په یو سیمتري انتروال لپاره.

د $k \neq -1$ لپاره دی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_{-a}^{-h} x^k\,dx + \int_h^a x^k\,dx = \frac{1}{k+1}\left((-h)^{k+1} - (-a)^{k+1} + a^{k+1} - h^{k+1}\right)$$

د ناجوړه یا طاق k لپاره دا ا فاده یا ویینه او له دې سره د کوشي اصلي ارزښت صفر دی. د زیاتیز یا مثبت جوړه(حفت) k لپاره دا د $2/(k+1)a^{k+1}$ په لور هڅیږي.
په ساده توګه د کوشي اصلي ارزښت د رګولار انتیګرال سره سره خوري یا یوعږیز کیږي. د $k=-2,-4,\dots$ لپاره برعکس یا د دې په خلاف هم انتیګرال او هم د کوشي اصلي ارزښت شتون نه لري.
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د انتیګرال لاندې مشتقول Differenzieren unter dem Integral

انتیګرال $\int_a^b f(x,t)\,dx$ د ناپرېکېدونکې تابع f لپاره د t ناپرېکېدونکی تابع دی.
که f_t ناپرېکېدونکی وي، ن و باور لري

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b f_t(x,t)\,dx\,.$$

لیکونکي: هیولیګ،کنیش

د دې لپاره چې د

$$g(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$$

ناپرېکېدنه په ټکي $t_0 \in (c,d)$ کې وښایو، له دې څخه کار اخلو، چې f په ولاړګوډیز $[a,b]\times[c,d]$ کې برابرډوله ناپرېکېدونکی دی. هر $\varepsilon > 0$ ته له دې امله یو $\delta > 0$ شتون لري داسې چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f(x,t)-f(x,t_0)|<\varepsilon$$

باور لري د ټولو x او $|t-t_0|<\delta$ لپاره. د دې t لپاره نو دی

$$|g(t)-g(t_0)|\le\int_a^b|f(x,t)-f(x,t_0)|\,dx<\varepsilon(b-a)\,.$$

له دې سره g ناپرېکېدونکی دی.

که f_t ناپرېکېدونکی وي، نو لاس ته راځي

$$\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=\int_a^b\frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}\,dx=$$

$$=\int_a^b\frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t+s)\,ds\,dx\,,$$

د کوم سره چې

$$|f_t(x,t+s)-f_t(x,t)|<\varepsilon$$

دی د ټولو $h<\delta\,.$ لپاره.

له دې امله کېدی شي د دفرنسل وېش کمښت و

$$\int_a^b f_t(x,t)\,dx=\int_a^b\frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t)\;ds\,dx$$

ته د

$$(b-a)\frac{1}{h}\,h\,\varepsilon$$

له لارې اټکل شي او د h سره د صفر په لور هڅيږي.

ليکونکي: بوسسلر، هيوليګ،کنيش

بسل- توابعBessel-Funktionen دا لاندې د انتيګرال انځورونه لري

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin t - nt)\,dt, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

دا دا لاندې د دفرنځیال مساوات پوره کوي

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0 .$$

دا کېدی شي د انتیګرا لاندې د دفرنځیال سره وازمایل شي. لومړی دی

$$J_n'(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\sin(x\sin t - nt)}_{v}\,\underbrace{\sin t}_{u'}\,dt$$

$$\frac{n}{\pi}\int_0^{\pi} \cos t\cos(x\sin t - nt)\,dt - \frac{x}{\pi}\int_0^{\pi} \cos^2 t\cos(x\sin t - nt)\,dt$$

$$J_n''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin t - nt)\sin^2 t\,dt$$

که $J_n'(x)$, $J_n(x)$ او $J_n''(x)$ د دفرنځیال مساوات په کېڼ لور کښیښنول شي او له π سره ضرب شي، له کوم سره چې $\xi = x\sin t - nt$ کیښنول شي، نو لاس ته راځي

Se

$$-x^2\int_0^{\pi} \cos\xi\sin^2 t\,dt - x^2\int_0^{\pi} \cos^2 t\cos\xi\,dt + nx\int_0^{\pi} \cos t\cos\xi\,dt + x^2\int_0^{\pi} \cos\xi\,dt - n^2\int_0^{\pi} \cos\xi\,dt$$

$$= nx\int_0^{\pi} \cos t\cos\xi\,dt + x^2\int_0^{\pi} \cos\xi\,dt - n^2\int_0^{\pi} \cos\xi\,dt$$

$$= n\int_0^{\pi} (x\cos t - n)\cos(x\sin t - nt)\,dt$$

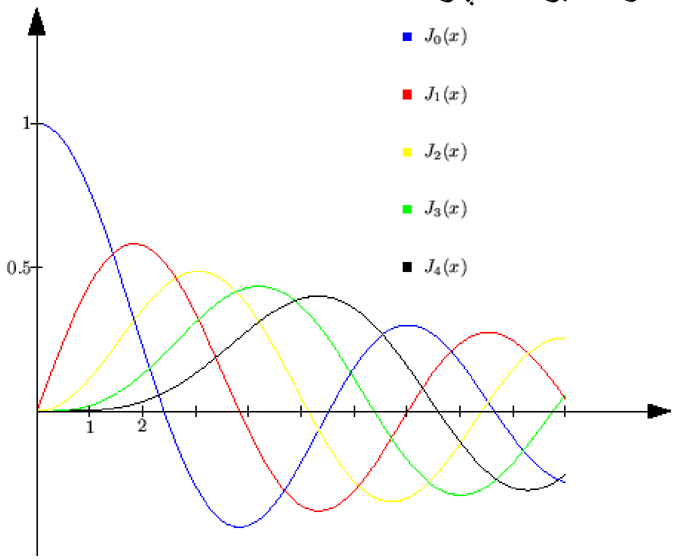
(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$n \sin(x \sin t - nt)|_0^\pi = 0$$

=

د ټول ګنيز n لپاره.



څېره 5 لومړني د بسل توابع بنايي .
ليکونکي: بوسسلر ، هيوليګ،کنيش

لايبنيخ-قانونLeibniz-Regel

د ناپرېکېدونکو مشتقوړ توابعو a, b او f لپاره دی

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x,t)dx + f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t)$$

ليکونکي: بوسسلر ، هيوليګ،کنيش

که انتيګرال له $g(t)$ سره وښوول شي او ځا په ځا کړو

$$V(t) = (a(t), b(t), t)\,, \quad U(c,d,e) = \int_c^d f(x,e)\;dx\,,$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $g = U \circ V$ دی او فرمول د ځنځيري قانون له لارې لاس ته راځي:

$$g'(t) = U'(V(t))\,V'(t), \quad V' = (a', b', 1)\,.$$

له دې سره د U ټوټه مشتقونه دا لاندې دي

$$U_c(c,d,e) = -f(c,e),$$

$$U_d(c,d,e) = f(d,e), \quad U_e(c,d,e) = \int_c^d f_e(x,e)\,dx\,,$$

او د $g'(t)$ لپاره په افاده يا ويېنه کې ايښوولو سره غوښتنه راکوي.

ليکونکي: بوسسلر، هيوليګ،کنيش

د لايبنيځ فرمول سره لاس ته راځي

$$\frac{d}{dt}\int_0^{\sqrt{t}} e^{x^2/t}\,dx = \int_0^{\sqrt{t}} -\frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\,dx + e\frac{d}{dt}\sqrt{t}$$

$$= -\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

بيا مشتقول يې راکوي

$$\frac{d}{dt}\left(-\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2}e^{x^2/t}\,dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}\right)$$

$$=$$

$$\int_0^{\sqrt{t}} 2\frac{x^2}{t^3}e^{x^2/t} + \frac{x^4}{t^4}e^{x^2/t}\,dx - \frac{e}{2t^{3/2}} - \frac{e}{4t^{3/2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2tx^2 + x^4}{t^4}\, e^{x^2/t}\, dx - \frac{3e}{4t^{3/2}}$$

بديلي لومړی کېدی شي بدلون $x = \sqrt{t}y, \; dx = \sqrt{t}\, dy$ وليکي او دا انتيګرال لاس ته راوړي

$$g(t) = \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy$$

د کره يا ځای په ځای پولو سره . نو کېدی شي

$$g'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 e^{y^2} \sqrt{t} dy = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2}\, dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t} e^{x^2/t}\, dx$$

او

$$g''(t) = \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{y^2}\, dy = -\int_0^1 \frac{1}{4t^{3/2}} e^{y^2}\, dy$$

$$= -\int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{4t^2} e^{x^2/t}\, dx$$

په ساده توګه وشميرل شي.
د لومړي مشتق لپاره د فرمول مساوات روښانه نه دي، خو کېدی شي اسان د ټوټه انتيګرالوني سره و ازمايل شي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-\int_0^{\sqrt{t}} \frac{x^2}{t^2} e^{x^2/t}\, dx + \frac{e}{2\sqrt{t}} = \qquad -\frac{1}{2t}\int_0^{\sqrt{t}} \underbrace{x}_{v}\underbrace{\frac{2x}{t}e^{x^2/t}}_{u'}\, dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

$$-\frac{1}{2t}\left[xe^{x^2/t}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{t}} + \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t}e^{x^2/t}\, dx + \frac{e}{2\sqrt{t}}$$

$$= \qquad \int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{2t}e^{x^2/t}\, dx$$

د دويم برابرون مشتق کېدی شي په ورته توګه و ښوول شي.
ليکونکي: هيوليګ،کنيش

په t پسې د انتيګرال د مشتق

$$\int_{t^2}^{e^t} \frac{\cos(tx)}{x}\, dx$$

لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\int_{t^2}^{e^t} -\sin(tx)\, dx + \frac{\cos(te^t)}{e^t}\,\frac{d}{dt}e^t - \frac{\cos(t^3)}{t^2}\,\frac{d}{dt}t^2 \\ = \frac{1}{t}\cos(te^t) - \frac{1}{t}\cos(t^3) + \cos(te^t) - \frac{2}{t}\cos(t^3) \\ = \left(\frac{1}{t}+1\right)\cos(te^t) - \frac{3}{t}\cos(t^3)\end{aligned}$$

ليکونکي: هيوليګ،کنيش

د دفرنشل مساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$u'(t) - \lambda u(t) = f(t)$$

يو زره يا کوچنی حل $\exp(\lambda t)$ کېدی شي دهوموجېن مساوات حل u_p د سوپر پوزېشن له لارې و کتل شي:

$$u_p(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)\, ds\,.$$

د لايبنيځ فرمول په بنسټ دی

$$u_p'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s)\, ds = \int_0^t \lambda \frac{e^{\lambda t}}{e^{\lambda s}} f(s)\, ds + f(t)\frac{d}{dt}t$$

$$= \lambda \int_0^t \lambda e^{\lambda(t-s)} f(s)\, ds + f(t)$$

په دفرنشل مساوات کې د $u_p(t)$ او $u_p'(t)$ د ايښوولو له لارې کېدی شي حل تصديق شي.

ليکونکي: هيوليګ،کنيش

د نامعلومو انتيګرالونو مشتقول

Differenzieren uneigentlicher Integrale

که توابع f او f_t ناپرېکېدونکې وي او د $t \in (c,d)$ لپاره باور ولري

$$|f(x,t)| \le \psi(x), \qquad \int_0^\infty \psi < \infty$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|f_t(x,t)| \le \varphi(x), \qquad \int_0^\infty \varphi < \infty,$$

نو کیدی شي د انتیګرال د نخښې لاندې مشتق ونیول شي:

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty f(x,t)\,dx = \int_0^\infty f_t(x,t)\,dx\,, \quad c < t < d.$$

په ورته توګه وېناوې د محدودو انتیګرالېدونکو سره د نامعلومو انتیګرالونو لپاره باور لري.
لیکونکي: هیولیګ،کنیش

د دې لپاره چې وښایو، چې

$$\int_0^\infty \frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h} - f_t(x,t)\,dx$$

د $h \to 0$ لپاره د 0 په لور هڅیږي، انتیګرال توټه کیږي:

$$\int_0^\infty \dots = \int_0^b \dots + \int_b^\infty \dots$$

دویمه زیاتېدونکې یا د جمعې غړی د نیونې له مخې د

$$\left|\int_b^\infty \frac{1}{h}\int_0^h f_t(x,t+s)\,ds - f_t(x,t)\,dx\right| \le \int \frac{1}{h}\,h\varphi(x)+\varphi(x)\,dx = 2\int_b^\infty \varphi(x)\,dx$$

له لارې اټکل شي. دا انتیګرال له $< \varepsilon$ کیږي. د پوره لویې b لپاره. د دې b لپاره لومړی زیاتېدونکی $< \varepsilon$ دی د پوره کوچني h لپاره.، ځکه چې د پای انتیګریشن انتروال لپاره د انتیګرال لاندې مشتق کېدی شي.

لیکونکي: هیولیګ،کنیش

(c) ketabton.com: The Digital Library

د گاما تابع مشتقونه

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\, dx, \quad t > 0\,,$$

دي

$$\Gamma^{(k)}(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} (\ln x)^k\, dx\,.$$

$f(x,t) = e^{-x} x^{t-1} (\ln x)^k$

مشتقیدنه په حق ده، ځکه چې انتیګرالېدونکي يو
برابرډوله مایورانت لري:

$$|f(x,t)| \le e^{-x}\, x^{r-1}\, x^k \le c e^{-x/2}, \quad x \ge 1$$

او

$$|f(x,t)| \le x^{1/r-1} |\ln x|^k \le c x^{1/(2r)-1}\,, \quad x \le 1$$

د $t \in [1/r, r]$ لپاره. د دې لپاره وکارول شو، چې

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-\beta x} = 0, \quad \lim_{x\to 0+} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0$$

د ټولو $\alpha, \beta > 0$ لپاره

لیکونکي: بوسسلر، هیولیک،کنیش

دا د پارامتر په واک کې انتیګرال

$$g(t) = \int_0^\infty \sin(xt)\, \frac{dx}{x}$$

مطلق پولې ته تلونکی نه دی، له دې امله برابر ډوله مایورانت هم نه لري.
د لته مو د t پسې د انتیګرال لاندې یو فورمال دفرنځیشن یوه تضاد ته لاربښودوي.
فورمال مشتق

$$g'(t) = \int_0^\infty \cos(xt)\, dx$$

یو پولې ته نه تلونکی انتیګرال دی. له بلې خوا یو واریابل بدلون , $y = xt$

$$dy = t\, dx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

راکوي

$$g(t) = \int_0^\infty \sin(y)\,\frac{dy}{y} = \frac{\pi}{2}\,.$$

مشتق په دې لاس ته راوړنه کېمتې صفر دی.
ليکونکي: بوسسلر، هيوليگ،کنيش

د ۲۰۱۱ ز ک د مارچ لسم
بری د لوی ښتن سره دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوې لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

<u>*2003 Bonn (Germany):*</u>

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

<u>*2003 Bonn (Germany):*</u>

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

<u>*2003 Bonn (Germany):*</u>

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

<u>*Bonn (Germany): 2003*</u>

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

<u>*2003 Bonn (Germany):*</u>

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

<u>1997 Bonn (Germany):</u>

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

سرليک

Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de) :

لاندې د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

٣ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ١

٧ – انالیزې ٢

٨ – کرښيز الجبر

٩ - د شميرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل انالیز

١٢ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

١٣ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

١۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

(c) ketabton.com: The Digital Library

زما لیکنې

onn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲-   داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپرېږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په کې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library