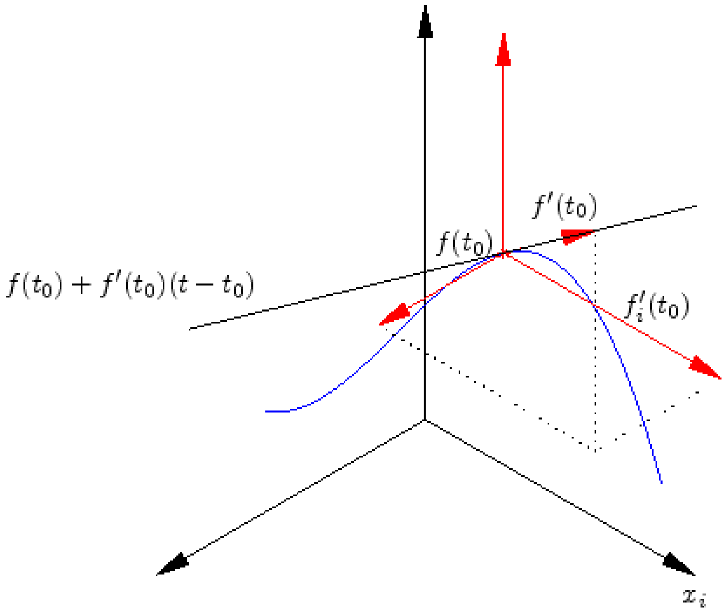
د پوهنتون لپاره لکچرنوټونه

د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیز

یا انالیز دوه



لیکونکي: د شتوتګارت پوهنتون د شمیرپوهنې یا ریاضي څانګه

د مات انلاین څخه یا د شتوتګارت پوهنتو ن ن ج څخه

ژباړی: ډ اکټر [illegible] (میرزي) شینواری

سرلیک

د لوی څښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زمونږ د بې وزلې او له پوهې پاتې ملت - په ما د پوهنې په لار د لګښت - لپاره د پوهنې په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

د کتاب نوم: د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیزې

ډ اکتر ماخان میرزي شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د چاپ لړي:

د ژباړي مننه

د دې لیکنې مل نورې خپروني د شتوتګارت د پوهنتون د شمیرپوهنې د څانګې د لکچرونو لړی چاپ باندې پیل کیږي

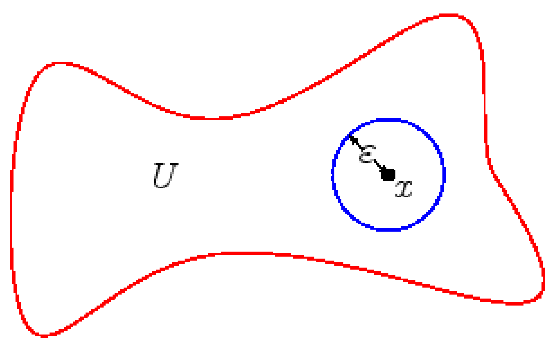
د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي ګټه نه شته او دا کار مې یوازې په یوه د پوهنې توانمندې ، مګر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې- زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس- سره مرسته وي.

سرلیک

بنسټيزې ياساسي کليمې
ډېرۍ يا سټ او پولې ته تلنه

چاپېريال

دا د يوه ټکي $x \in \mathbb{R}^n$ د ε-چاپيريال په حيث دا لاندې غونډوسکه(غونډارې،توپ که غواړئ: کره) نوموو
$B_\varepsilon(x) = \{y : |y - x| < \varepsilon\}$.



په ټوليزه توګه د x چاپيريال U يوه ډېرئ ده، چې يو چاپيريال ε خوندي لري.

ليکونکي: هوليک او پفايل

د وکتورونوکونورګنت يا پولې ته تلنه

د وکتورونو $x_k \in \mathbb{R}^n$ يوه پرلپسې د يوه وکتور x خواته کنورګ کيږي يا ځي،
$\lim x_k = x$ همداسې , $x_k \to x$
که د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو اينډکس k_ε شتون ولري

د $|x_k - x| < \varepsilon$ سره د $k > k_\varepsilon.$ لپاره.

په بل ډول هر ε -چاپيريال $B_\varepsilon(x) = \{y : \ |y - x| < \varepsilon\}$

ټولې ترپاي ډېرو پرلپسي(ترادف) توکو پورې خوندي لري.

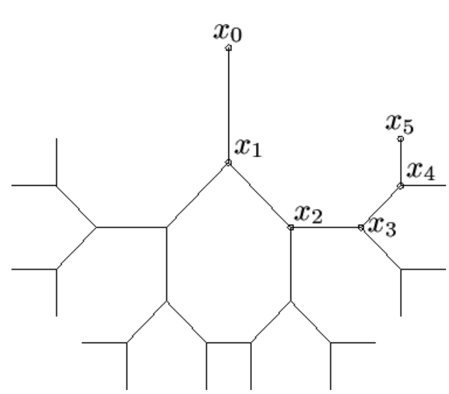
د (x_k) کونورګنځ ته ورته د ټولو کمپوننتونو کونوی رګنځ دی، د اپه دې معنا چې کيدی شي يو پراخيدونې يا يوبعدې کونورګنځ کريتيريوم ورته راکښل - يا راونيول شي.

(ليکونکي : بوسلر، هوليک، شترايت)

د وکتورونوو لپاره د کوشي**Cauchy** کريتيريوم يا قضيه

يوه د وکتورونوو پرلپسي $x_k \in \mathbb{R}^n$ تيک هلته پولې ته ځي(کونورګنت ده) ، که دا کوشي **پرلپسي وي.**
داپه دې معنا چې د ټولو $\varepsilon > 0$ لپاره يو k_ε شتون لري د $|x_\ell - x_k| < \varepsilon$ سره د $\ell, k > k_\varepsilon.$ لپاره .
د ا له دې سره په برابره يا همغه معنادی، داسې چې د (x_k) د کمپوننتونو هر يو يې يوه کوشي پرلپسي ده.
(ليکونکي: هيوليک، شترايت)

د کوشي کريتيريوم د روښانه ونې لپاره يوه بينار(دوه ګونې) ونه راوړو.



په یوه ټوټه(کرښه) هره یوه په ضریب $\lambda\ (0 < \lambda < 1)$ سره لنډیږي او په $45°$- کونج اینبول شوی بله ټوټه باندې ورزیاتیږي. په داسې یوه جوړه شوې دوه یزه ونه د داسې سوکڅیسیو په ښاخونو بیل شوي ټکو هره پرلپسې پولې x_k ته ځي یا کونورګیر کیږي. د تعریف سره سم باور لري د دوه یوپه بل پسې پرلپسیو (تصاعدونو) (x_k) لپاره باور لري: $|x_{k+1} - x_k| = c\lambda^k$.

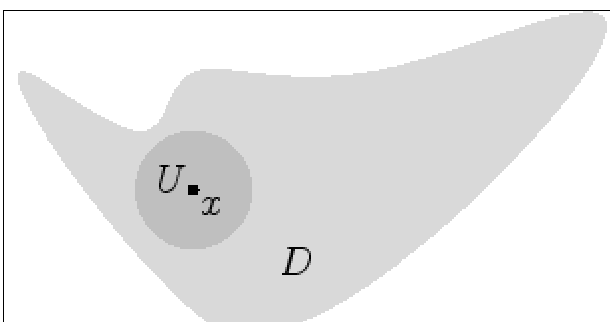
دا راکوي، چې داپرلپسې د کوشي پرلپسې ده، څکه چې:

$$
\begin{aligned}
|x_\ell - x_k| &= |x_\ell - x_{\ell-1} + x_{\ell-1} - \ldots + \ldots - x_{k+1} + x_{k+1} - x_k| \\
& |x_\ell - x_{\ell-1}| + |x_{\ell-1} - x_{\ell-2}| + \ldots + |x_{k+2} - x_{k+1}| + |x_{k+1} - x_k| \\
&\leq c\lambda^{\ell-1} + c\lambda^{\ell-2} + \ldots + c\lambda^k \\
&= c\lambda^k\,\frac{1-\lambda^{\ell-k}}{1-\lambda} \leq c'\,\lambda^k \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}
$$

د $\ell > k > k_\varepsilon$ لپاره

(لیکونکي: هیولیګ، شترایت)

وازه ډېرۍ یا -سټ **Offene Menge**

	یوه ډېرۍ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ وازه بلل کیږي، که چیرې د ډېرۍ هر ټکی $x \in D$ یو چاپېریال ولري، چې دا ټول په D کې پروت وي، په ځانګړې توګه $\mathbb{R}^n$ او تشډېرۍ $\emptyset$ وازې دي.

د یوې په خوښه ډېرۍ D لپاره $\mathring{D} \subseteq D$ د D دننه بنايي، دا په دې معنا چې د ټول تکو ډېرۍ د يوه چاپيريال سره په D کې پرته ده.

(ليکونکي: هيوليک، پفايف)

رابنده ډېرۍ Abgeschlossene Mengen

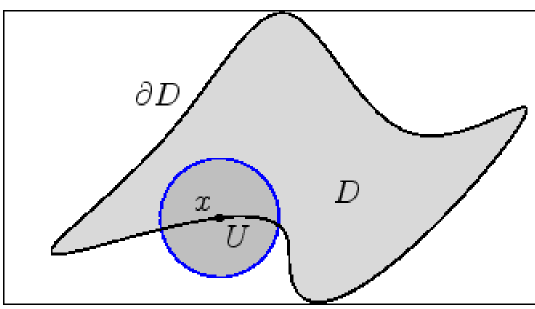
يوه ډېرۍ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ رابنده يا بنده بلل کيږي، که ديوې د تکو $x_k \in D$ پولې ته تلونې پرلپسې په D کې پرته وي. په ځانګړې توګه $\mathbb{R}^n$ او تشډېرۍ $\emptyset$ بندې دي.

د په خوښه ډېرۍ D لپاره دا $\overline{D} \supseteq D$ د D رابندونه بولو، داپه دې معنا چې د پرلپسيو د ټولو پوله ارزښتونه په D کې.

(ليکونکي: هيوليک، پفايف)

د يوې ډېرۍ ژۍ يا غاړه

د يوې ډېرۍ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ژۍ ∂D له ټولو تکو x جوړه ده، کومه چې چاپيريال U نه لري، دا يا ټوله په D کې پرته ده او يا د D په کمپليمنت (پوره کيدونکي) کې پرته ده.



د بديل په توګه کيد شي چې ژۍ د رابند کمون يا تفريق او دننه،

$$\partial D = \overline{D} \setminus \mathring{D}$$

په حيث تعريف شي.

(ليکونکي هيوليګ او پفايف)

پوره کيدونکې ډېرئ Kompakte Menge

يوه تړلي او محدوده ډېرئ $D \subseteq \mathbb{R}^n$ کمپليمنت يا پوره کيدونکې بلل کيږي.
لاندې کرکتريستيکا دې ته ورته يا اکويوالنځ دي:

- هره پرلپسې په D کې يوه کونورګنځ برخه ډېرئ لري د پولې سره په D کې.
- د D هر د وازې ډېرئ د سره پټوني يا پوښونې سره يوه پاى پوښونه يا پټونه لري.

(ليکونکي: هيوليګ او پفايف)

مولتيواريانت – يا د ډېرو توابع Multivariate Funktionen

يو ريل يا حقيقی مولتی واريانت(د ډيرو متحولو - يا اوښتونوتوابع هم بلل کيږي)

$$f : \mathbb{R}^n \supseteq D \to \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto f(x)\,,$$

د تعريف ډېرئ D يو وکتور $x = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{t}}$ په يوه وکتور $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^{\mathrm{t}}$ تنظيموي. پس f د n ريل حقيقي متحولو $x_1, \dots, x_n$ په واک کې دی.

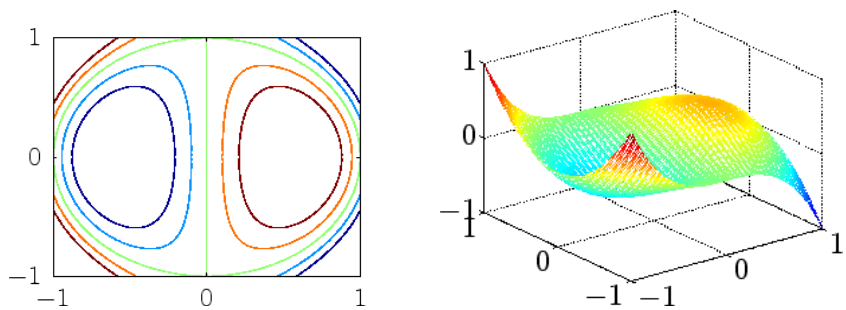
د تابعورشو يا خيره ورشو د m بعد يا پراخيدوني له مخې سرې د سکالارو $(m = 1)$ او وکتور ارزښتيزو $(m > 1)$ توابعو ترمنځ توپير کوي. که $n = 1$ (او f ناپريکيدونکې وي)، نو f يوه پارامتري شوې کرږه يا منحني بلل کيږي.

د $m, n \leq 3$ لپاره زيات وخت ايندکسونه نه کارول کيږي او واريابلې له x, y او z سره په نخښه کوو.

د بیلګي په توګه

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}.$$

د $m = n = 2$ په حالت کي



لکه دا شکل چي روښانه کوي، Visualisierung ته دګراف سکالار توابع

$$\{(x, f(x)) : \; x \in D\}$$

او د نیوتن سطحي

$$\{x \in D : \; f(x) = c\}$$

وکارول شي.

پولینومونه د ډېرو متحولو سره :

یو پولینوم p په n اوښتونو $x_1, \dots, x_n$ كي د مونومونو کرښیز کمبینیشن دی

$$p(x) = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \ ,$$

د $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ سره، هريو د جمعې ورشو له مخې د لاندو ترمنځ توپير کوي:

د ټولو درجو $\le m$: $\sum \alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \le m$

د ماکسيمالو درجو $\le m$: $\max \alpha = \max_i \alpha_i \le m$

يو د k -درجې پولينوم هوموجين بلل کيږي، که کرښيزترکيب فقط مونوم د $\sum \alpha = k$ سره خوندي ولري. د داسې هوموجينو مونومونو ګڼون يا تعداد $\binom{k+n-1}{n-1}$ په دی.

تعقيب يې د پولينوم پراخيدونی يا بعد د توتال درجې $\le k$ سره برابر

$$\binom{k+n}{n} = \sum_{k=0}^{m} \binom{k+n-1}{n-1} .$$

دی

د n -متحولو پولينومونو بعد د $\le m$ ماکسيمال درجې $(m+1)^n$ دی.

د بيواريات يا دوه اووښتونو يا متحولو پولينومونو $(n = 2)$ لپاره د هومو جينن مونومونو له ليست څخه

$$\begin{array}{ll} k = 0: & 1 \\ k = 1: & x, y \\ k = 2: & x^2, xy, y^2 \\ k = 3: & x^3, x^2y, y^2x, y^3 \\ \ldots, & \end{array}$$

کتل کيږي چې د k درجې لپاره د دوی تعداد

$$k+1=\binom{k+2-1}{2-1}$$

دی

د دوه متحولو پولینومونو د توتال درجې $\leq m$ د بعد لپاره لرو

$$1+2+\cdots+(m+1)=\frac{(m+2)(m+1)}{2}=\binom{m+2}{2}.$$

په ځرګنده توګه $(k+1)^2$ مونومونه شتون لري

$$x^i y^j, \quad i,j\leq m,$$

د $\leq k$ ماکسیمال درجې

په تولیزه توګه (د n -متحولو پولینومونو) لپاره کیدی شي یو اکسپوننت

$$(\alpha_1,\ldots,\alpha_n), \sum\alpha=m$$

د یوه کره مونوتونې پرلپسی یا ترادف سره

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1+1\\ \beta_2 &= \alpha_1+\alpha_2+2\\ \ldots\\ \beta_{n-1} &= \alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1}+(n-1)\end{aligned}$$

له $\{1,\ldots,m+n-1\}$ څخه و پیژندل شي:

$$\alpha_i=\beta_i-\beta_{i-1}-1$$

د $\beta_0 = 0,\ \beta_n = m+n$ سره. نو $\binom{m+n-1}{n-1}$ امکانات شتون لري

د ټول $\leq k$ درجو n–وارایت مونومونه د $(n+1)$-متحولو د درجو k هوموجین مونومونه پ هګوته کوي:

$$x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} \leftrightarrow x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} x_{n+1}^{k-\sum \alpha_i}$$

(اخرنی اکسپوننت ټینګ ځای په ځای دی). نو بعد دی

$$\binom{k+(n+1)-1}{(n+1)-1}.$$

د مکسیمال $\leq k$ درجو د پولینوم بعد په ورته توګه بیواریات حالت ته شمیري.

یو د توتال درجو ≤ 3 پولینوم په 2 متحولو کی لاندې ټولیزه بڼه لري

$$p(x,y) =$$

$$a_{3,0}x^3 + a_{2,1}x^2y + a_{1,2}xy^2 + a_{0,3}y^3$$

$$+a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2$$

$$+a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{0,0}\ ,$$

او

$$4x^3 - 2xy^2 + 5y^3$$

د 3 درجو هوموجین بیواریات پولینوم لپار یوه بیلګه ده.

دیوه ≤ 2 درجو پولینومم ټولیزه بڼه په درې متحولو کی ده:

$$p(x,y,z) =$$

$$a_{2,0,0}x^2 + a_{0,2,0}y^2 + a_{0,0,2}z^2$$

$$+a_{1,1,0}xy + a_{1,0,1}xz + a_{0,1,1}yz$$

$$+a_{1,0,0}x + a_{0,1,0}y + a_{0,0,1}z + a_{0,0,0}\,.$$

د ډېرو اووښتونو يا متحولو توابعوو ناپريکيدنه يا متماديت

يو تابع f د تعريف ورشو D په يوه ټکي x کې ناپريکيدونکي دی، که

$$D \ni x_k \to x_{k\to\inf} \implies \lim_{k\to\inf} f(x_k) = f(x)\,.$$

که دا د ټولو $x \in D$ لپاره باور ولري ، نو f په ټول D باندې نا پونکی دی

که د تعريف ورشو په ژی ∂D د ټکي x لپاره پوله ارزښت شتونولري، نو کيدی شي f ناپريکيد ونکی مخ ته يو ول شي.

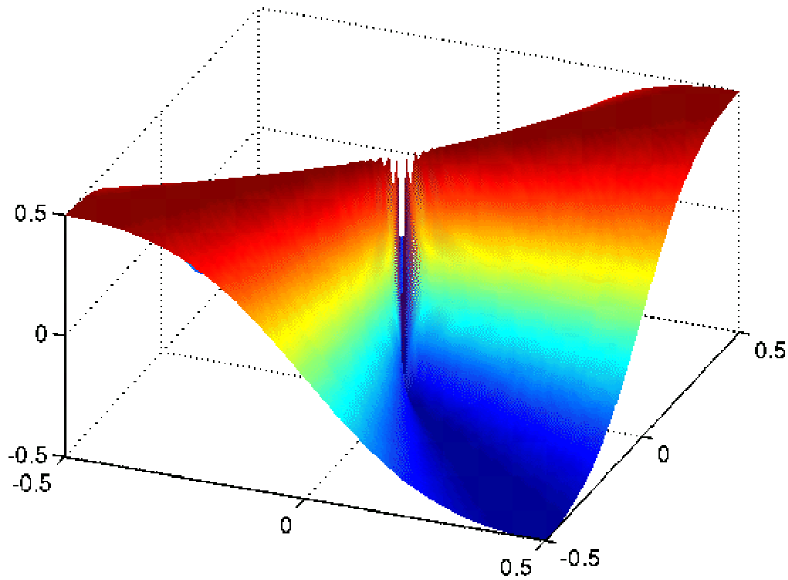
د ډېرې متحولو د ترنو لپاره همغه قوانين باور لري،لکه د يوې متحولي تابع لپاره.

(ليکونکي: هيوليگ او شترايت)

يو ناثابت بيواريات تابع $f(\varphi)$ ، چې فقط له کونج او نه د وړانګې $r = \sqrt{x^2+y^2}$ په واک کې يا تابع ده،په صفرټکي کې پريکيدونکي ده. د دې لپاره تيپيکې بيلګه

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} = \cos\varphi\sin\varphi$$

راړل کيږي.



که په صفرټکي کې یوه کرښه وټاکو،

$g:\ y = mx$ همداسې , $g: \varphi = c$

نو په کرښه تابع- یا خطي تابع ا رزښت ثابت دی،

$$f(x,mx) = \frac{mx^2}{x^2+(mx)^2} = \frac{m}{1+m^2} = c_m$$

همداسې

$$f(\varphi) = \cos\varphi \sin\varphi = c_\varphi \ ,$$

$$f(x,mx) = \frac{mx^2}{x^2+(mx)^2} = \frac{m}{1+m^2} = c_m$$

$$f(\varphi) = \cos\varphi \sin\varphi = c_\varphi \ ,$$

bzw.

پرته له صفرټکي چې هلته تابع ارزښت نه دی تعریف.
پرته له صفرټکي د ټول ټکو لپاره باور لري

$$D \ni (x_k, y_k) \to (x, y) \implies$$

$$\implies f(x_k, y_k) = \frac{x_k y_k}{x_k^2 + y_k^2} \to \frac{xy}{x^2 + y^2} = f(x, y) .$$

په صفرټکي کې تابع بریکیدونکي مخ ته وړلوړ ده. که د $x \to 0$ لپاره په مختلو کرښو باندې پوله ارزښت په پام کې ونیسو، نو لاس ته راړل کیږي

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{m}{1 + m^2} = \frac{m}{1 + m^2} ,$$

دا په دې معنا چې پوله ارزښتپه هر سرچینه یزې کرښې مختلف دی. له دې سره یوله ارزښت

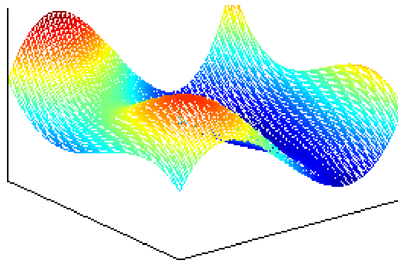
$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$$

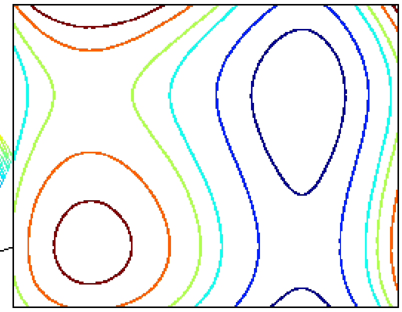
شتون نه لري.

(لیکونکي: بوسلر،هیولیګ، شترایت)

په کومپاکت ډېریو د ناپریکیدونکو-یا متمادي توابعو افراطي ارزښتونه

یو ناپریکیدونکی تابع په یوه کومپاکته ډېرۍ یو مینیموم او هم یو ماکسیموم لري.
په کینه څیره شوي تابع باندې مینیموم اړ ماکسیموم په نخښه شوي دي. په نیو وکرښه ا فراطي ځایونه د رابندو منحنیو له لارې پیژندلکیږي، هغه چې دا ټکي رابندوي یا (په بر کې) رانیسي.





ليکونکي: هيوليک، شترايت

وکتورنورمونو برابروالی

هر وکتورنورم $\| \ \|$ په $\mathbb{R}^n$ کې دا وکليدنورم $| \ |$ ته اکويوالنت يا برابرارزښته دی، دا په دې معنا چې شابتې c_i شتون لري د $c_1\|x\| \leq |x| \leq c_2\|x\|$ سره د ټولو $x \in \mathbb{R}^n$ لپاره.

(ليکونکی: هيوليک،پفايف)

نابرابرونونه يا نا مساوات سکالارانواريانت دي، دا په دې معنا چې د بدلون $x \mapsto \lambda x$ سره تغير نه خوري. دا بسيا کې، چې وکتورونه x په يوون- يا واحدسفيري يا فضا

$$S: \quad |x| = 1$$

کې تر ځخيرنې لاندې ونيسو. په S باندې هر نورم د 0 سره نا برابر دی، لهدې امله تابع

$$x \mapsto \frac{\|x\|}{|x|}$$

ناپريکيدونکې دی،ځکه چې S کومپک دی، نو يو مينيموم c_1 شتون لري او يو ماکسيموم c_2.

(لیکونکي: هیولیګ او پفایف)

لیپشیخ-ناپریکیدنه *Lipschitz-Stetigkeit*

یو تابع c_2 په یوې ډیرئ D لیپشیخ-ناپریکیدونکی Lipschitz-stetig بللکیږي، که یوه لیپشیخ- ثابته c شتونولري، داسې چې

$$||f(x) - f(y)|| \leq c||x - y||$$

د ټولو $x, y \in D$ لپاره.

که f ناپریکیدونکی اومشتقوړ او D کونکاو یا وتلی یا محدب؟؟وي، نو د لیپشیخ-ثابته د جاکوبي-ماکسیموم Jacobi-Matrix سره اړکل کیدی شي،:

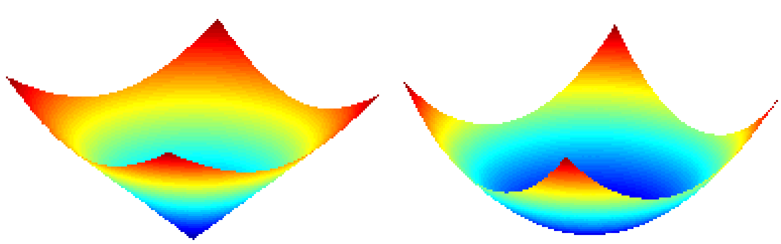
$$c \leq \sup_{x \in D} |f'(x)|.$$

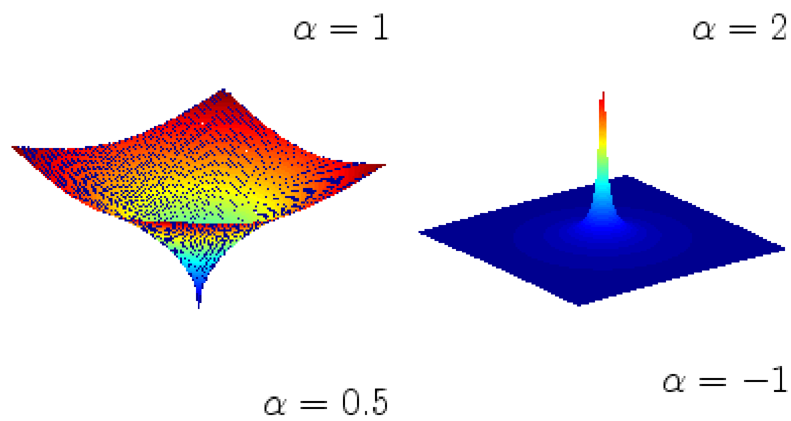
(لیکوني: اپپ، هیولیګ)

د تابع

$$f(x) = r^{\alpha}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

لپاره ډیر حالتونه سره توپیر کیږي.





(i) د $\alpha = 1$ لپاره f کلوبال لیپشیخ ناپریکیدونکی دی. د درېګوډییا مثلث د نامساوات څخه لاس ته راځي

$$|r - r'| = ||x| - |x'|| \le |x - x'|\,,$$

دا په دې معنا چې $c = 1$ د $D = \mathbb{R}^n$ لپاره لیپشیخ-ثابته ده.

(ii) د $\alpha > 1$ لپاره f په محدود ه ډېرئ D باندې لیپشیخ-ناپرېکیدونکی دی. د منځ ارزښت جمیپه بنسټ

$$|r^\alpha - (r')^\alpha| = \alpha s^{\alpha-1}|r - r'|$$

دی سره د r او r' ترمنځ،پهتعقیب یي

$$c = \max_{x \in D} \alpha |x|^{\alpha-1}$$

ټاکل کیدی شي.

(iii) د $0 < \alpha < 1$ لپاره f ناپریکیدونکی دی مګر نه لیپشیخ- ناپریکیدونکی د 0 په یوه چاپریال کې. شرایط

$$|r^\alpha - 0^\alpha| \leq c|r-0|$$

د $r \to 0$ لپاره پوره نه دي

(iv) د $\alpha < 0$ لپاره f په 0 کې پريکيدونکيدی،ځکه چې د $r \to 0$ لپاره r^α د ∞ په لور هڅيږي.

(ليکونکي: بوسلر،هيوليګ،شترايت)

کونترا هيري فنکشن يا -- تابعKontrahierende Abbildung

يو تابع

$$g : D \to D$$

کونتراهيرکيدونکی(کيکاږل کيدونکی) دی، که په يوه مناسب نورم

$$\|g(x)-g(y)\| \leq c\,\|x-y\|, \quad x,y \in D\,,$$

کې د $c < 1$ سره باورولري. د دېسره c داسېپه نامه د g کونتراکشنثابته ده،دا کړی شيد يوې کونوکسډيرئ لپاره د جاکوبي ماتريکس په مرسته د

$$\sup_{x \in D} ||g(x)||$$

اټکل کولای شي.

(ليکونکي: بوسلر،هيولير)

د يوه مثبت ديفينيت ماتريکس A لپاره

$$g(x) = x - \omega(Ax-b)$$

کونتراهیر دی،، که پارامتر ωپوره کوچنی وټاکل شي. باور لري

$$g(x) - g(y) = Q(x - y), \quad Q = E - \omega A \,,$$

دکوم سره چې د Qا یګن ارزښت ϱ_i د A له ا یګنارزښت λ_i څخه شمیرل کیدی شي:

$$\varrho_i = 1 - \omega\lambda_i \,.$$

که څا په څای کړو $\omega = 1/\max_i \lambda_i$ ، نوټول ایګن ارزښتونه‌په $[0,1)$ کې پراته دي، او د اویکلیدینورم استعمال سره
$c = \|Q\| = 1 - (\min_i \lambda_i)/(\max_i \lambda_i) < 1$ دی.

د بانښ څاي په څای ټکیجمله *Banachscher Fixpunktsatz*

که gیو کونتراهیري تابع یا څیرونه وي، چی دا یوه ناتشه، رابنده ډیرئ $D \subset \mathbb{R}^n$ په خپل ځان ځیره کړي یعنې د ځان تابع وي دا په دې معنا چې باور لري:

- $D = \overline{D}$
- $x \in D \Rightarrow g(x) \in D$
- $\|g(x) - g(y)\| \le c\|x - y\| \quad \forall x, y \in D$

د $c < 1$ سره، نو gیوه یواځنی ټاکلي څای په څای ټکی $x_* = g(x_*) \in D$لري،له $x_0 \in D$څخه په وتنه یا تلنه کیدی شي x_* دایتراشن پرلپسي

$$x_0,\, x_1 = g(x_0),\, x_2 = g(x_1),\, \ldots$$

اپروکسیمیرشي. د ناتیکاوي لپاره باور لري

$$\|x_* - x_k\| \leq \frac{c^k}{1-c}\|x_1 - x_0\|$$

دا په دې معنا چې ایتراشن پرلپسې د هر پیلارزښت لپاره کرښیز پولې ته ځي.

د ځای په ځای ټکوچمل په پوره متریکي فضاو کې تولیز باور لري. دا چې د نورمترانسلیشن اینواریانځ او هوموجینیتی ته اړتیا نه شته، سرې کړی شي $\|x-y\|$ د یوه تولیز واټن تابع $d(x,y)$ سره بدل کړي.

(لیکونکې: ا پپ،بوسلر،هیولیګ)

دا چې $g(D) \subseteq D$ ، د ټولو $\ell > 0$ لپاره $x_\ell \in D$ باور لري، او د کونتراکشن شرطو ځخه لاس ته راځي

$$\|x_{\ell+1} - x_\ell\| = \|g(x_\ell) - g(x_{\ell-1})\| \leq c\|x_\ell - x_{\ell-1}\|.$$

ددې نامساوات ایترایشن ځخه لاس ته راځي

$$\|x_{\ell+1} - x_\ell\| \leq c^\ell\|x_1 - x_0\|.$$

د $j > \ell$ لپاره د دریګوډي نامساوات ځخه لاسته راځي

$$\begin{aligned}\|x_j - x_\ell\| &\leq \|x_j - x_{j-1}\| + \|x_{j-1} - x_{j-2}\| + \cdots + \|x_{\ell+1} - x_\ell\| \\ &\leq (c^{j-1} + \cdots + c^\ell)\|x_1 - x_0\| = \frac{c^j - c^\ell}{c-1}\|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{c^\ell}{1-c}\|x_1 - x_0\|,\end{aligned}$$

او له دې سره د کوشي-کونورګنت پرلپسې x_ℓ یوه پوله ارزښت x_* ته. که له نامساوات

$$\|g(x_*) - x_*\| \leq \|g(x_*) - g(x_j)\| + \|g(x_j) - x_*\| \leq$$
$$\leq c\,\|x_* - x_j\| + \|x_{j+1} - x_*\|$$

څخه پوله ارزښت $j \to \infty$ ته سرې لاړ شي، نو ګوري، چې x_* د g يو ځای په ځای ټکی دی. دا هم يواځنی بيکس ټکيدی. که ونيسو، چې يوو بل ټکی $\tilde{x}_* \neq x_*$ هم شتون لري، نو د کونتراديکشن شرليطوڅخه برعکس راکوي.

$$\|\tilde{x}_* - x_*\| = \|g(\tilde{x}_*) - g(x_*)\| \leq c\|\tilde{x}_* - x_*\|\,.$$

د ناټيکاوي لپاره اټکل د $\|x_j - x_\ell\|$ لپاره د نامساوات څخه لاس ته راځي دا هم وپولې $j \to \infty$ته د ټک له لارې.

(ليکونکي: بوسلې، هيوليګ)

د نمونيې يا ټيپيکي استعمال لپاره يولړمتظرر کرښيزسيستم تر څيړنې لاندې نيسو:

$$Ax + \varepsilon f(x) = b$$

د يوه مربع ماتريکس A سره. د پوره کوجني ε د کرښيزېبرخې تعريفورشو لپاره، او سرې کړی شي دا سيستم د ايترايشن

$$x \leftarrow g(x) = A^{-1}(b - \varepsilon f(x))$$

سره حل کړي. دلته نيول کيږي، چې A انورتيرکيدونکيدی او تابع f ليپشيڅ – ناپريکيدونکېده د ثابتې c_f سره.

د بانښ فيکسټکي چملېBanachschen Fixpunktsatzes د نيوني يا فرضيي د ازمايښت لپاره سرې ټاکي

$$D = \{y : \ \|y - p\| \leq r\}, \quad p = A^{-1}b\,.$$

د په خوښه $x \in D$ لپاره دی

$$\|g(x) - p\| = \varepsilon \|A^{-1} f(x)\| \le \varepsilon \|A^{-1}\| \max_{y \in D} \|f(y)\| .$$

ټاکو

$$\varepsilon \le \frac{r}{\|A^{-1}\| \max_{y \in D} \|f(y)\|},$$

نو $g(x) \in D$ دی ،دا په د معنا چی g په D ځبره کوي یا مپینګکوي

د کنترکشنثابتيKontraktionskonstante c لپاره اټکلونه

$$\|g(x) - g(y)\| = \varepsilon \|A^{-1}(f(x) - f(y)\| \le \underbrace{\varepsilon \|A^{-1}\| c_f}_{c} \|x - y\|$$

له f څخه د لیپپشیځ-ثا بتې c_f سره

$$\varepsilon < \frac{1}{\|A^{-1}\| c_f}$$

لاس ته راځي $c < 1$ ، که

که و غوښتل شي. دواړه شرایط به روښانه توګه د پوره کوچنی ε لپاره پوره ردي

(لیکونکي: بوسلي،هیلیګ)

ټوټه مشتق Partielle Ableitungen

د یوېتابع f مشتق $\partial_i f$ په i –مه واریلابلي متحولي پسي یونیوارینتي ابع

$x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, تابع مشتق دید هغه سره چې واریبلي x_i ،

$j \neq i$ د ثابتیول ې په ځبر ترځېړني کیږي.

داسې هم لیکو

$$\partial_i f = f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}\,.$$

د یونیواریات مشتق د تعریع سره سم باور لري

$$\partial_i f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\ldots, x_i + h, \ldots) - f(\ldots, x_i, \ldots)}{h}\,.$$

پارشل مشتعونه د سکالارو او همد وکتورارزښتیزړ حقیقی توابعو لپاره تعریع دي. په پارشلمشفقنیونه کې په دواړو حالتونوړ کې د تابع تیوپ یا ډول ساتلی پاتې کیږي. د تعریف سره سم باور لري

$$\partial_i \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_i f_1 \\ \vdots \\ \partial_i f_n \end{pmatrix}\,.$$

پارشل مشتق د کمپوننتونو سره سیمولتان یل همغهوختیز جوړیږي

د توتال یا بیخي انتیګرال همداسې کرښیز اپرو کسیماشن لپاره د وکتوربنه یا تیوپ د معنا دډکدی. دا ورسره بلد کنونشن یا قرار و وکتورونو داد د متحولې x او هم تابع f لپاره کارول کیږي

(لیکونکي:هیلیک، شترایت)

د سکالار تابع لپاره ټوټه مشفق هم سکالار دی.

د بیلګی په توګه د

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + 5x_2 x_3$$

لپاره مشتق لاسته راځي

$$\begin{aligned} \partial_1 f &= 2x_1 x_2 \,, \\ \partial_2 f &= x_1^2 + 5x_3 \,, \\ \partial_3 f &= 5x_2 \,. \end{aligned}$$

د يوه وكتور ارزښتيز تابع لپاره ،لکه د بيلګي په توګه

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^3 x_3 \\ x_1 x_2 x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

د کمپوننتونونو تعداد پارشل- يا توټه مشتق سره ساتلی پاتي کيږي:

$$\partial_1 f = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 \\ \partial_1 f_2 \\ \partial_1 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 x_3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\partial_2 f = \begin{pmatrix} \partial_2 f_1 \\ \partial_2 f_2 \\ \partial_2 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2^2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial_3 f = \begin{pmatrix} \partial_3 f_1 \\ \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^3 \\ x_1 x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ليکونکي: بوسلي،شترايت)

دپرواره ټوټه مشتق

دوه واره (يو په بل پسې نيول شوی) ټوټه مشتقونه د

$$\partial_i \partial_j f = f_{x_j x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

سره په نخښه کيږي،

په ورته د توګه د جګو مشتقونو لپاره تګه ليکو

$$\partial_i \partial_j \partial_k \ldots f$$

په بديلي توګه کيدی شي مولتی ايندکس نوتيشن

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f, \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

وکارول شي،چېرته چي ایندکس $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$ د توټه مشتقونو د توټه مشتقونو تعداد په i - مه متحولی پسې په نخښه کيږي

زیاتون یا جمعه $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ توټه مشتق بلل کيږي

(لیکونکي: هیولیک، شترایت)

تابع

$$f(x) = \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y) = \exp(\mathrm{i}(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n))$$

مسطحه څپه بلل کيږي اود نورو تر څنګ د فوري-انالیوزې Fourier-Analysis کي رول یو غوره رول لوبوي

مشتقونه ساده شمیرل کیدی شي. دځنځیري قانون سره لاس ته راځي

$$= \partial_k f(x) \quad \mathrm{i}y_k \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y)$$

$$\partial_\ell \partial_k f(x) = \quad (\mathrm{i}y_\ell)(\mathrm{i}y_k) \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y)$$

او له دې سره

$$\partial^\alpha f(x) = (\mathrm{i}y)^\alpha \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y) = \mathrm{i}^{|\alpha|} y^\alpha \exp(\mathrm{i}x^{\mathrm{t}}y)$$

د $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ او $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} \cdots y_n^{\alpha_n}$ سره .

د بیلګیپه توګه د $n = 2$ لپاره دی

$$\partial^{(3,4)} f = \underbrace{\mathrm{i}^7}_{-\mathrm{i}} \, y_1^3 y_2^4 \exp(\mathrm{i}(x_1y_1 + x_2y_2)) \, .$$

(لیکونکي: بوسلي، هیولیک،شترایت)

د مولتیواریانتو(ډېرواره اووښتونو) پولینومونو ټوټه مشتق

د یوه مونوم ټوټه مشتق

$$\partial^\alpha x^\beta = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n} \left(x_1^{\beta_1} \ldots x_n^{\beta_n} \right)$$

تیک هلته له صفر سره نابرابر دی، چې

ویي او په دې حالت کي دی

$$c x^{\beta-\alpha}, \quad c = \prod_i \beta_i (\beta_i - 1) \cdots (\beta_i - \alpha_i + 1) \,.$$

په توګه

دی $\partial^\alpha x^\beta|_{x=0} = \alpha! \delta_{\alpha\beta}$ د $\alpha! = \prod_k \alpha_k!$ سره.

د ټولو پولینومونو $p(x) = \sum_\beta x^\beta$ لپاره باور لري

$$\partial^\alpha p = 0, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = k \,,$$

نو p توتالدرجه $< k$ لري.

(لیکونکي: هیولیک، شترایت)

د ښوونې فکريېپه دې ځانګړي حالت $n = 2$ او $|\alpha| = 3$ وښوول شي. پسې د د مشتق له ورکېدو لاسته ارځې

$$p_{xxx},\, p_{xxy},\, p_{xyy},\, p_{yyy}, \quad p(x,y) = \sum_{j,k} c_{j,k} x^j y^k \,,$$

دا چې p يود توتال درجې ≤ 2 پولينوم دی، دا په د ې معنا چې ټول ضريبونه $c_{j,k}, \quad j+k>2\,,$ ورکيږ.ي.

$$c_{j,k}, \quad j+k>2\,,$$

كه يو اړونده ترم (د بېلګې په توګه $c_{2,1}x^2y$)صفرنه واي، نو لړتر لړه يو د دريمې درجې يو ټوټه مشتقشته(د بيلګې په توګه p_{xxy})، کوم چط دا ترم نه انولېannulliert کوي.

په ټوليزه توګه هم همداسې دلايل راوړلکيږ ی.

د هر مولتي ايندکس $|\beta| \geq k$ لپاره γ شتون لريد $|\gamma| = k, \quad \partial^\gamma x^\beta \neq 0\,.$ سره.

د بېلګې په توګه سړی کړی شي $n = 3$ ، $k = 4$ اود $\beta = (1,2,3)$ لپاره

$$\gamma = (1,2,1),\ (1,1,2),\ (1,0,3),\ (0,2,2),\ (0,1,3)$$

وټاکي.

(ليکونکي: هيوليګ، شترايت)

د یوه تابع د ټوټه مشتق بدلوړوالی

که د یوه تابع f لومړی اودویم ټوټه مشتق ناپرېکیدونکي وي،نوباورلري

$$\partial_i\partial_j f = \partial_j\partial_i f \,.$$

د پوره کېدونکي خویتابع لپاره د ټوټه توابعو مشتق لړئ پرلپسي بدلوړ دي.

په ځانګړي توګه دا د مولتی ایندکس-لیکنډول ته ټیکاوی ورکوي.

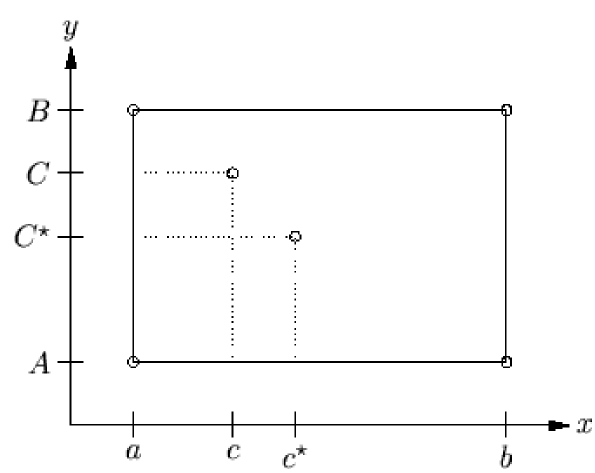
دا چې ټوټه مشتق سره متحولي $x_k,\ k \neq i,j$ ځاي په ځای پاتې کیږي ، بسیا کوي،

چې یو بیواریات تابع $f(x,y)$ په بکاور واچوو یا تر ځېړني لاندې ونیسو.

په یوه واړه ولاړکوډي د (x,y) لپاره د

$$g(x)=f(x,B)-f(x,A), \quad h(y)=f(b,y)-f(a,y)\,,$$

سره مشفقونه په y - همداسې x -لورو په نخښه کړو.



په کونجونو کي دفرنځ

$$Q = f(b,B) - f(b,A) - f(a,B) + f(a,A)$$

په دوه مختلف ډولونود منځجملې په مرسسته شميرل کيږي:

$$Q = [f(b,B) - f(b,A)] - [f(a,B) - f(a,A)]$$

$$= g(b) - g(a)$$

$$= (b-a)g_x(c)$$

$$= (b-a)[f_x(c,B) - f_x(c,A)]$$

$$= (b-a)(B-A)f_{xy}(c,C)$$

د $a \le c \le b$ او $A \le C \le B$ او لاندې سره

Q=	$[f(b,B) - f(a,B)] - [f(b,A) - f(a,A)]$
Q=	$h(B) - h(A)$
Q=	$(B-A)h_y(C^\star)$
Q=	$(B-A)[f_y(b,C^\star) - f_y(a,C^\star)]$
Q=	$(B-A)(b-a)f_{yx}(c^\star,C^\star)$

د $a \le c^\star \le b$ او $A \le C^\star \le B$ سره.له دې سره لاست ارائې

$$f_{xy}(c,C) = f_{yx}(c^\star,C^\star),$$

او ولاړکوډيز په واړه کونه سره($b \to a,\ B \to A$) ، د دويمګړوله کشتق د ناپرېکيدنې په بنسټ لرو

$$f_{xy}(a, A) = f_{yx}(a, A)\,.$$

او د لاړګوډي په کوجنيوالي،($b \to a,\ B \to A$) د دويم ګړوله مشتق د ناپريکيدني په بنسټ لاسته راځي

$$f_{xy}(a, A) = f_{yx}(a, A)\,.$$

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ، شترايت

فنکشن يا تابع يا بلواک

$$f(x,y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}$$

د $(x,y) \neq (0,0)$ لپاره په خوښه ناپرېکيدونکي اومشتقوړ دی

لومړ دوه مشقونه

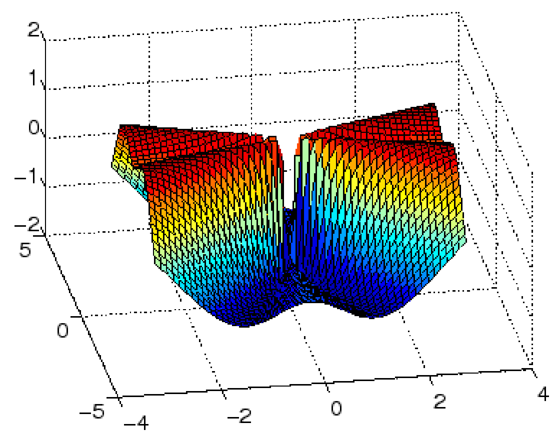
$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{3x^2y - y^3}{x^2+y^2} - 2x\frac{x^3y - xy^3}{(x^2+y^2)^2}, \\ f_y(x,y) &= \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2+y^2} - 2y\frac{x^3y - xy^3}{(x^2+y^2)^2}\,, \end{aligned}$$

په ټول $\mathbb{R}^2$ ناپريکيدونکي دي، ځکه چې د

$$|f_x(x,y)|, |f_y(x,y)| \leq (3+1+2(1+1))\sqrt{x^2+y^2}$$

له امله f_x ا و f_y په ټول په پیل کئ د 0 ارزښتونو سره ناپریکیدونکي مخ ته ورلوړدي

ګډوله مشتق ($f_{xy} = f_{yx}$) په $\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$ دی مګر په صفرتکي کط پریکیدونکی، کوم چې له مشتق څخهه لید ل کیږي



بدلون ناشونی دی:

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \frac{d}{dy}\left(f_x(0,y)\right)_{|y=0} = \frac{d}{dy}\left(\frac{-y^3}{y^2} - 0\right)_{|y=0} = -1, \\ f_{yx}(0,0) &= \frac{d}{dx}\left(f_y(x,0)\right)_{|x=0} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{x^2} - 0\right)_{|x=0} = 1\,. \end{aligned}$$

مختلف پوله ارزښتونه لاسته راځي، په دې اړوند چې په کومه لړۍ-پرلپسي تونه مشتقونه نیول شوي دي

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

توتال مشتقونه *Totale Ableitung*

يو حقيقى تابع $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ په يوه ټکي x کې مشتقوړ دی، که د $|h| \to 0$ لپاره.توتال مشتق د ټوټه مشتق جاکوبي -ماتريکس دی:

$$f' = \mathrm{J}\,f = \frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = (\partial_1 f,\ldots,\partial_n f) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \ldots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m & \ldots & \partial_n f_m \end{pmatrix}.$$

$$f' = (\mathrm{grad}\ f)^{\mathrm{t}}\ ,$$

د يوه سکالارتابع($m=1$) لپاره مشتق ګرادينت بللکيږي او د يوې کرږې($n=1$) پارامتري کولو لپارهدتانجنت وکتور. د

توتال مشتق $f'(x)$ شتون لپاره پوره کيدونکي شرطونه د يوه په x چاپيريال کې د ټوټه مشتقونو نه پرېکيدنه ده.

د توتال مشتق $f'(x)$ د شتون لپاره پوره کيدنکي شرطونه په يوه چاپيريال x کې د ټوټه مشتق ناپرېکدنه ده.

د توتال مشتق سره کيدی شي د يوه تابع په ارګومنټو يا تعريفورشوکې $(x \to x + \Delta x)$ د کوچنيورمونو تغيراتو سره اپرکسيمه $(x \to x + \Delta x)$ شي. د نظم $o(|\Delta x|)$ سره ترمونو څخه صرف نظرکيدنه په نږدې توګه باور لري

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x\,.$$

د دې دلپاره چې د پولط پرسه $|\Delta x| \to 0$ رامنځ ته کړو، ليکو

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

داسي په نامه دفرنشال df او dx_i ،کوم چې د کرښيزو اپروکسيميشن تغيرات تشريح کوي

dx_i چې وښايو چې توتالمشتق توټه مشتق خوندي لري، د ساده کونېپه بنسټ يو تابع د

دوه متحولو $f(x,y)$ سره رواړو. په دې حالت کې $h = (s,t)^t$ يووکتور دی د دوه

کمپوننتونو سره. په د حالت کې $h = (s,t)^t$ يوووکتور دی د وه کمپوونتونو سره. که

بيلګي په توګه $t = 0$ ځاي په ځای کړو نو لرو

$$\begin{aligned} f(x+s,y) &= f(x,y) + f'(x,y)\,(s,0)^t + o(|(s,0)|) \\ &= f(x,y) + (\mathrm{J}\,f)_1\,s + o(|s|)\,, \end{aligned}$$

چيرته چې $(\mathrm{J}\,f)_1$ د $\mathrm{J}\,f$ لومړی درځيا مته ښايي له s او پوله ارزښت $s \to 0$ د

جوړېدوسره، د $f(x,y)$ توټه مشتق راکوی دپسې x :

$$(\mathrm{J}\,f)_1 = \lim_{s\to 0}\frac{f(x+s,y) - f(x,y)}{s} = \partial_1 f(x,y)\,.$$

د توټه مشتق نا پريکيدنه مقشتوړوالی ايمپليځي کوي، دا په دې معنا چې د توتالمشتق شتونوال.

$$f' = (\partial_1 f, \ldots, \partial_n f)\,.$$

د دې لپاره چې د ټوټه مشتق د ناپرېکيدنې څخه د توتال مشتق شتون لاس ته راوړو لومړی يوسکالار تابع $f(x,y)$ تر څېړنې نيسو. د منځ ارزښت جملې له مخې د $h=(s,t)$ لپاره باور لري

$$f(x+s,y+t) = f(x+s,y)-f(x,y)+f(x+s,y+t)$$

$$-f(x+s,y)+f(x,y)$$

$$= s\ f_x(\xi,y)+t\ f_y(x+s,\eta)+f(x,y)\,,$$

د $\xi\in(x,x+s)$ ، $\eta\in(y,y+t)$ سره. د وړاندنيونې(فرضيی) په بنسټ ټوټه مشتقونه f_x او f_y ناپرېکيدونکي دي، دا په دې معنا چې

$$f_x(\xi,y)\to f_x(x,y)\,,\quad f_y(x+s,\eta)\to f_y(x,y)$$

د $|h|\to 0$ لپاره. له دې سره د تابع f توتال مشتقوړوالی لاسته راوړل کيږي:

$$f(x+s,y+t)=f(x,y)+sf_x(x,y)+tf_y(x,y)+o(|h|).$$

په ورته توګه د n متحولو سکالار تابع لپاره دلايل راوړلکيږي. ټوليزحالت يې په ځانله توګه د کمپوننتو له لارې څخه لاسته راځي.

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ، شترايت

تابع

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

په صفرځای کې پرکیدونکې ده. دا کتل کیدی شي که د بیلګې په توګه سړی په دوه مختلفو سرچینه کرښو پوله ارزښت $0 \to x$ ونیسی یا راوړي:

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2} = \lim_{x\to 0} f(x,-x)\,.$$

په تعقیب یې f په صفرځای کې مشتقوړ نه دی، ځکه چې له مشتقوړوالي څخه ناپرېکیدنه منځ ته راځي.

په صفرټکي کي مګر دواړه ټوټه مشتقونه شتون لري. له

$$f(x,0) = f(0,y) = 0$$

لاس ته راځي

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

دواړه ټوټه مشتقونه مر په صفرټکي کي پريکيدونکي دي.

که په مختلفو کرو باندې د مشتق

$$f_x(x,y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

که پوله ارزښت $(x,y) \to (0,0)$ تر څېړنې لاندې ونيسو، نو د بېلګې په توګه د $y = x$ لپاره لرو

$$\lim_{x\to 0} f_x(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

او د $y = x^2$ لپاره

$$\lim_{x\to 0} f_x(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2} = -1 .$$

په اړونده توګه په صفرځای کې د ټوټه مشتق f_y پرې کېدنه شمیرل کيږي. دا ښایی، چې د مشتقوړوالي لپاره د ټوټه مشتقوني شتونوالی پوره کېدونکې نه دی، بلکه برسیره پردې ناپرېکېدنه هم غوښتل کيږي.

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ، شترايت

تابع

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x+2y \\ xy \\ 3x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

او $h = (s,t)^t$ دي

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ y & x \\ 6x & 2y \end{pmatrix}$$

او

$$f(x+s,y+t) = \begin{pmatrix} (x+s)+2(y+t) \\ (x+s)(y+t) \\ 3(x+s)^2+(y+t)^2 \end{pmatrix}.$$

له دې سره يو تابع

$$g(s,t) = f(x+s,y+t) - f(x,y) - f'(x,y)\,(s,t)^t = (0, st, 3s^2+t^2)^t,$$

لاس ته راځي، د کوم سره چې د $(s,t) \to (0,0)$ لپَاره هر کمپوننت ګړندی صفر ته ځي نسبت و $|h| = |(s,t)|$ ته،دا په دې معنا چې $g(s,t) = o(|(s,t)|)$

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

د سکالار تابع $f(x,y) = r = \sqrt{x^2+y^2}$ لپاره د ګرادينتت په حيث ورکوي

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \end{pmatrix}.$$

د يوې ګړي $f(t) = (\cos t, \sin t, t)^t$ پارامتريککولو له لارې د مشتق په حيث يود تانجنتوکتورراکوي

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)^t\,.$$

د

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

له لارې تعریف شوي غونډآري کواوردینات لاندې د جاکوب-ماتریکسدی

$$f'(r,\vartheta,\varphi) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\vartheta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

کرښیزا پروکسیمیشن***Lineare Approximation***

په لومړئ نږدېونه کې د ناپریکیدونکي مشتقوړ تابع لپاره باور لري، دا په دې معنا چې د نظم ترمونو $o(|\Delta x|)$ باندې صرفنظرکونې یا پرېښونې له لارې

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x\,.$$

لیکونکي ، هیولیګ، شترایت

د مولتیواریت توابعو د غلطیو وده یا تکثیر

Fehlerfortpflanzung multivariater Funktionen

د یوه نا پرېکیدونکي مشتقوړ تابع $x \mapsto y = f(x)$ لپاره کیدی شي دایناکوراتو X inakuraten-ارزښتونو $x + \Delta x \approx x$ د f تونه مشتق په مرسته تشریح کړای شي. د مطلق ناټیکاوي لپاره د $o(|\Delta x|)$ نظم د ترمونوڅخه په صرفنظر باور لري

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f_{x_1}(x)\Delta x_1 + \cdots + f_{x_n}(x)\Delta x_n\,.$$

که $|x_i|,\ |y| \neq 0$, وي، نو د نسبي ناټيکاوي لپاره لاس ته راځي

$$\frac{\Delta y}{|y|} \approx c_1 \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \cdots + c_n \frac{\Delta x_n}{|x_n|}$$

د لاندې کنډېشن عدد Konditionszahlen سره

$$c_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{|x_i|}{|y|} \,.$$

يادونه (ژباړی) : د کنديشن سره سړی پهشميرپوهنه کې هغه شی تشريح کوي، چې يوه پرابلم حل د هغه دد وتون داتا د مضاحمت په واک کې وي. د کنديشن عدد د دې په واکوالي کچه انځوروي، چې په هغه وتن ناټيکاوی په نا مساعد حالت کې زواکمنه کيږي. دا د تاکلو حل تلنلارو څخه خپلواکه دی. پای.

د کارتيزي کواوردينات څخه د قطبي کواوردينات د φ کونج شميرنې له امله

د مطلق ناټيکاوي لپاره لاس ته راځي

$$\Delta\varphi \approx f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y = -\frac{y\Delta x}{x^2+y^2} + \frac{x\Delta y}{x^2+y^2} \,.$$

د نسبي ناټيکاوي لپاره لاس ته راځي

$$\frac{\Delta\varphi}{|\varphi|} \approx -\frac{y|x|}{(x^2+y^2)|\varphi|}\frac{\Delta x}{|x|} + \frac{x|y|}{(x^2+y^2)|\varphi|}\frac{\Delta y}{|y|} \,.$$

د $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ سره د $|\sin\varphi/\varphi| \leq 1$ له امله لاس ته راځي،

چې د ښي اړخ ارزښت له

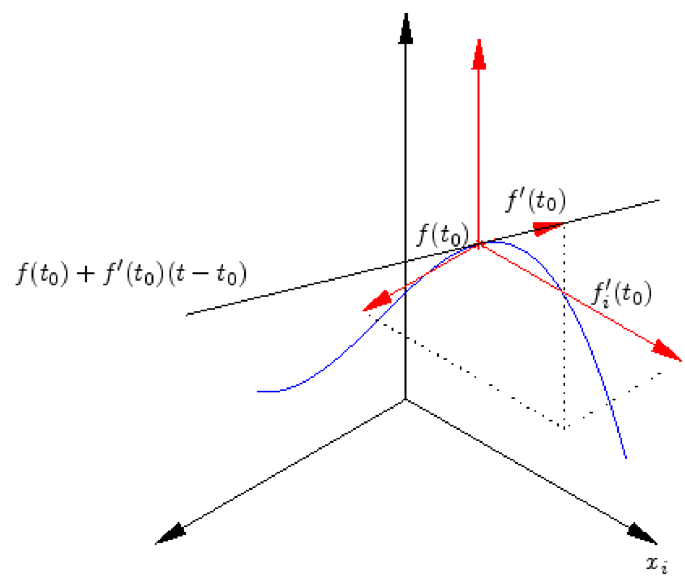
$$\left|\frac{\cos\varphi\ \ \sin\varphi}{\varphi}\right|\left(\frac{|\Delta x|}{|x|}+\frac{|\Delta y|}{|y|}\right)\le 2\max\left(\frac{|\Delta x|}{|x|},\frac{|\Delta y|}{|y|}\right)$$

لارې اټکل کيدی شي. نسبي ناټيکاوی زيات له زيا ته د يوه ضريب 2قوي کيدی شي.

مطلق ناټيکاوی کيدی شي د يوه ضريب سره چې $1/r$ ته متناسب وي لوی شي. د انتظار سره سم په x او y کې د کونج اندازه کونه د برابر زغم له امله د کوچنۍ وړانګې لپاره ناټيک دی.

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ، شترايت

Tangente تانجنت



په ټکي $f\,(t_0)$ کې د مشتقوړ پارامتريکي کرښې(منحني) $t\mapsto (f_1(t),\ldots,f_n(t))^t$

تانجنت يوه کرښه

$$f(t_0)+f'(t_0)(t-t_0)\,, \quad t\in\mathbb{R}$$

ده داسې چې لږ تر لږه د تانجنت وکتور یو کمپوننت $f_i'(t_0)$ له صفر سره توپیر ولري.

لیکونکي: بوسلي، هیولیګ، شترایت

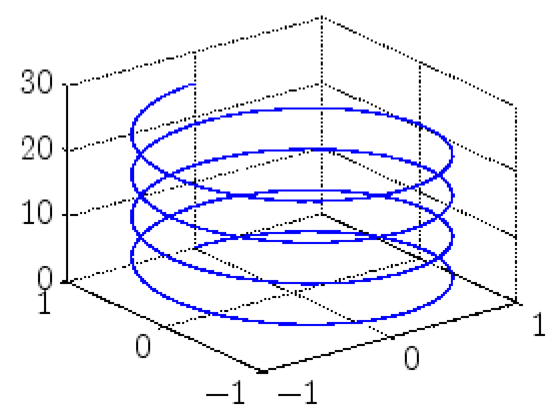
د

$$t\mapsto f(t)=\begin{pmatrix}\sin t\\ \cos t\\ t\end{pmatrix}$$

له لارې پارامتریکي پیچمیخ کرښه باندې تانجنت دی

$$f'(t)=(\cos t,-\sin t,1)^t$$

.



د بیلګې په توګه په ټکي $f(3\pi)=(0,-1,3\pi)$ کې د تانجنت لپاره پارامتریکي کیدنه لاس ته راځو:

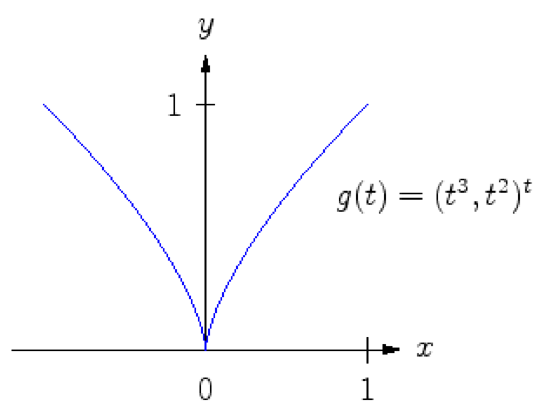
$$t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (t - 3\pi) .$$

ليکونکي: هيوليګ، پفايفر

د $t_0 = 0$ لپاره له $t \mapsto g(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$ لارې د پارامتريکي کږې لپاره د دواړو کمپوننتونو مشتق ورکيږي. د کږې لور سملاسي له $(0, -1)^t$ څخه و $(0, 1)^t$ ته تغير خوري.

که $g(t)$ د وخت په واک کې ځايزوکتور په حيث تعبير کړو، نو د $t_0 = 0$ لپاره چټکتيا صفرده. له دې سره، سره له دې چېناپريکيدونکي مشتقوړ کواوردينات، يو پريکيدونکی لورتغير ممکن

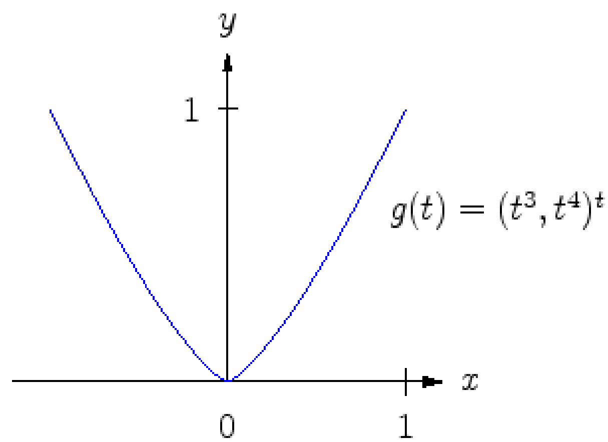
دی.



د $g(t) = (t^3, t^4)^t$ لپاره همداسي $g'(0) = (0, 0)$ دی. د پارامتر اړونه يا بدلون

$$s = t^3, \quad g(t) = q(s) = \begin{pmatrix} s \\ s^{4/3} \end{pmatrix}$$

ښايی، چې له $s = 0$ سره د تانجنتتغير ناپريکيدونکي دي.



ليکونکي: بوسلي، هيوليک، شترايت

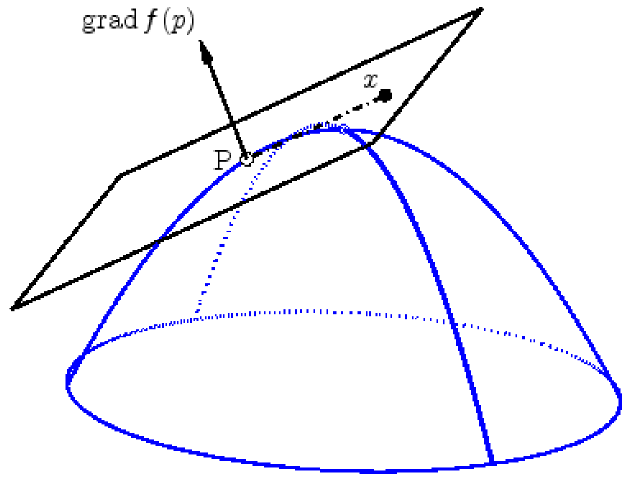
Tangentialebeneتانجنتي سطحه

f دې يوناپريکيدونکی مشتقوړ تابع او $(p_1, \ldots, p_n)$ دې يو ټکی وي په له $f(x_1, \ldots, x_n) = c$ لاربې ايمپليحيت تعريف شوې سطحه باندې. که $\operatorname{grad} f(p) \neq 0$, وي نو تانجنتي سطحه په ټکي P کې مساوات

$$E: \quad (\operatorname{grad} f(p))^t \, (x - p) = 0\,.$$

لري.

نورمالوکتور و $\operatorname{grad} f$ ته غبرګ دی.



د یوه تابع $y = g\left(x_1\,,\dots\,,x_{n-1}\right)$ د ګراف لپاره په ځانګړې توګه

$$E:\quad y - g(q) = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i g(q)\,(x_i - q_i)$$

د تانجنتي سطحېمساوات دی په لاندې ټکي کې:

$$(q_i\,,\dots\,,q_{n-1}\,,g(q))^{\mathrm{t}}$$

.

توبه مشتق $\partial_i g$ له دې امله دتانجتي سطحي جګوالی ښايي د i -م کواوردينات محور په لور

ليکونکي: ب، هيوليک، کيمرلي، شترايت

د توتالمشتق $f)^{\mathrm{t}}$ ($= f'$ gradتعريف دی

$$f(x) = f(p) + (\text{grad } f)^{\mathrm{t}}(x-p) + o(|x-p|)\,.$$

که له ترم $o(|x-p|)$ څخه صرفنظروشي،نو د $f(x)=f(p)=c$ له امله د تانجنتي سطحې مساوات لاس ته راځي.

په ورته توګه د يوه د $y=g\left(x_1,\ldots,x_{n-1}\right)$ له لارې تعريف شوي تابع ګراف لپاره باور لري

$$\Delta y=\sum_{i=1}^{n-1}\partial_i g(q)(\Delta x_i)$$

د $\Delta y=y-g(q)$ او $\Delta x=x-q$ سره. د باقي غړي څخه صرف نظر له امله بيرته د تانجنت سطحې ښوول شوې انځور ته ورځو.

ليکونکي: بوسلې، هيوليک، شترايت

د ککل

$$K:\ f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2=0$$

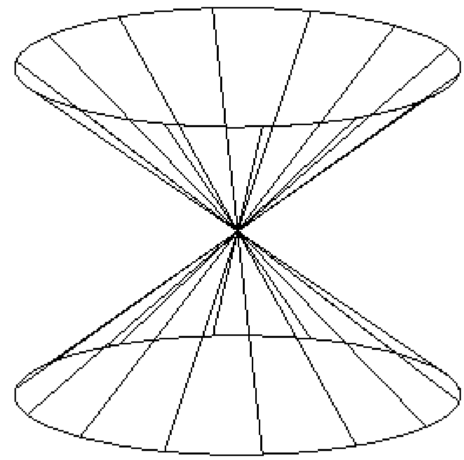
لپاره $\operatorname{grad} f(x,y,z)=(2x,2y,-2z)^t$ دی. له دې سره سرې د تانجنتي سطحې په حيث لاس ته راوړي.

$$E:\ \ -2z_0(z-z_0)+2y(y-y_0)+2x(x-x_0)=0.$$

د بيلګې په توګه تنجنتي سطحه په ټکي $P=(3,4,5)$ کې لاندې مساوات لري

$$E:\ \ -10z+8y+6x=0.$$

په ټکي $Q=(0,0,0)$ کې ګرادينت ورکيږي،د مخروط په ککره يا څوکه کې تانجنتي سطحه شتون نه لري.



ليکونکي: بوسلې، هيوليګ، شترايت

د يوه ديپول(دوه قطبي) پوټنشل

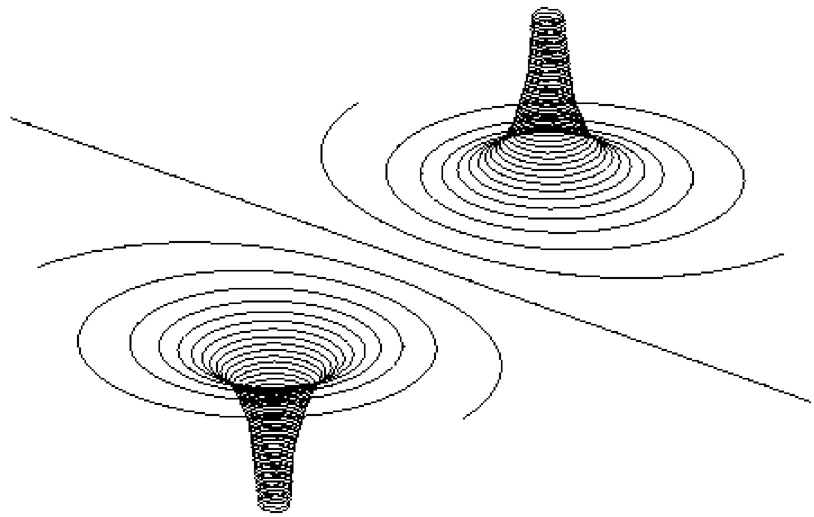
$$f(x) = |x-p|^{-1} - |x+p|^{-1}\,, \quad x = (x_1, x_2)\,,$$

لپاره ،په کوم کې کې چې برق(Ladungen)(دلته بايد موخه هغه بار وي،چې دلته شتون لري) په ټکو $-P$ او P کې شتون لري د کراډينټ په څېر لاس ته راځي

$$\operatorname{grad} f(x) = \frac{(x+p)}{|x+p|^3} - \frac{(x-p)}{|x-p|^3}$$

او له دې سره په يوه ټکي $A = (a_1, a_2)$ کې تنجنتي سطحه

$$x_3 = f(a) + (\operatorname{grad} f(a))^{\mathrm{t}}\,(x-a).$$



د بیلګې په توګه د $A=(0,0)$ لپاره دی

$$x_3 = 0 + (2p^{\mathrm{t}}/|p|^3)(x_1, x_2)^{\mathrm{t}}\,,$$

دا په دې معناچې تانجنتي سطحه په سرچینه کې ځغلي او و P ته ولاړه یا عمود کرښه خوندي لري.

په سیګولاریتیو P او $-P$ کې تانجنتي سطحه شتون نه لري.

لیکونکي: بوسلې، هیولیک، شترایت

مولتیواریات ځنځیري قاعده یا لار

Multivariate Kettenregel

د ناپریکیدونکومشتقوړ توابعو $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^\ell$ او $g:\mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^n$ یو بل پسې تړلو

$$h = g\circ f : x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y)\,,$$

له امله باور لري

$$h'(x) = g'(y)f'(x)\,,$$

دا په دې معنا چې د جاکوبي-ماتریکس h د جاکوبي-ماتریکسونو f او g ضرب دی.د یوګونې لاس ته راوړنې یا لرنو د ماتریکس ضرب له لارې لاس ته راځي

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_k} = \sum_j \frac{\partial g_i}{\partial y_j}\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\,.$$

په ځانګړې توګه ځنځیري قانون د ځانګړي حالت $m = n = 1$ لپاره (دا په دېمعنا چې f یوه پارامتریک شوې کږه او g د متحولې یو سکالار تابع) لاندې څېره یا شکل لري:

$$\frac{d\,h}{d\,x} = (\operatorname{grad} g)^{\mathrm{t}}\, f'(x)\,.$$

د یوه تابع د توتالمشتق لپاره باور لري

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \varphi'(x)h + o(|h|)\,.$$

له دې سره د مشتقونو $f'(x)$ او $g'(y)$ د شتون څخه لس ته راځي

$$g(f(x+h)) = g(f(x) + \underbrace{f'(x)h + o(|h|)}_{\tilde{h}}) =$$

$$= g(f(x)) + [g'(y)\,\tilde{h}] + o(|\tilde{h}|)\,.$$

دا چې

$$[g'(y)\,\tilde{h}] = g'(y)f'(x)h + o(|h|)$$

او $|\tilde{h}| = O(|h|)$ لرود $g \circ f$ د جاکوبي - ماتریکس لپاره غوښتلی فرمول ورکوي.

لیکونکي: هیولیګ، کنش

د ځنځیري قانون د تشکیل یا روښانه ونې لپاره لاندې تابع راوړو

$$y = f(x) = \begin{pmatrix} x_3 \sin(x_1) \\ e^{x_2}/x_3 \end{pmatrix}, \quad g(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 + \ln(y_2) \\ 0 \\ y_2 \cos(y_1) \end{pmatrix}$$

د دې لپاره چې د $h = g \circ f$ د جاکوبي-ماتریکس په $p = (\pi,\, 0,\, 1)^t$ کې وشمیرلی شو، تشکیلوو

$$f'(x)_{|x=p} = \begin{pmatrix} \cos(x_1)x_3 & 0 & \sin(x_1) \\ 0 & e^{x_2}/x_3 & -e^{x_2}/x_3^2 \end{pmatrix}_{|x=p} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

همداسې

$$g'(y)_{|y=f(p)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/y_2 \\ 0 & 0 \\ -y_2\sin(y_1) & \cos(y_1) \end{pmatrix}_{|y=(0,\,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

او لاس ته راوړو

$$h'(\pi,0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: هيوليګ، کنش

د يوه سکالار تابع $f(x,y)$ لپاره د کږې $t \mapsto (x(t), y(t))^{t}$ په اوږدو د خنځيريقانو له مخې باور لري

$$\frac{d}{dt} f = f_x x' + f_y y'.$$

د بيلګې په توګه د

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad x = \sin t\,, \quad y = \cos t$$

لپاره لاندې مشتق لاس ته راځي

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos(t) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(-\sin(t))$$

$$= \frac{\sin(t)\cos(t) - \cos(t)\sin(t)}{1}$$

$$= 0$$

دا يوځای اينوول شوي تابع

$$f(x(t), y(t)) = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$$

د سيده مشتق سره خوري يا برابر دی.

ليکونکي: هيوليګ، کنش

د يوه پارامتريکي سطحي $(x(s,t), y(s,t), z(s,t))^t$ له لارې د وکتورارزښتيز تابع $(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))^t$

د جاکوب-ماتريکس نسبت واريا بلو (s,t) ته دی:

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(s,t)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \\ z_s & z_t \, . \end{pmatrix}$$

د بيلګي په توګه د يوه راديال تابع

$$(u, v, w) = (x, y, z)/r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,,$$

لپاره د

$$(x, y, z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z)\,, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]\,, \quad z \in \mathbb{R}$$

له لارې پارامتريک شوي مخروط پوښ دی

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = r^{-3}\begin{pmatrix} r^2-x^2 & -xy & -xz \\ -xy & r^2-y^2 & -yz \\ -xz & -yz & r^2-z^2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varphi,z)} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi & 0 \\ \cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

د $s = \sin\varphi$ او $c = \cos\varphi$ سره په دې اساس لاسته راځي

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(\varphi,z)} =$$

$$r^{-3}\begin{pmatrix} r^2-c^2 & -cs & -cz \\ -cs & r^2-s^2 & -sz \\ -cz & -sz & r^2-z^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -s & 0 \\ c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$r^{-3}\begin{pmatrix} -sr^2 & -cz \\ cr^2 & -sz \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, =$$

د کوم سره چې دی

$$r = \sqrt{1+z^2}$$

.

ليکونکي: بوسلي،هيوليګ، کنش

د دې لپاره چې د دواړو توابعو

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u^2+v^2-1 \end{pmatrix}, \quad g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

د $h = g \circ f$ ګرادينت شمېرل کيږي سړی د f د جاکوب-ماتريکس جوړوي

$$f' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

په همدې تګه د g ګرادينت

$$\operatorname{grad} g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u^2+v^2-1 \end{pmatrix}.$$

له دې سره د ځنځيري قانون سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} (\operatorname{grad} h)^t &= (\operatorname{grad} g)^t f' \\ &= 2 \begin{pmatrix} u+v+u-v+2u(u^2+v^2-1) \\ u+v-u+v+2v(u^2+v^2-1) \end{pmatrix}^t \end{aligned}$$

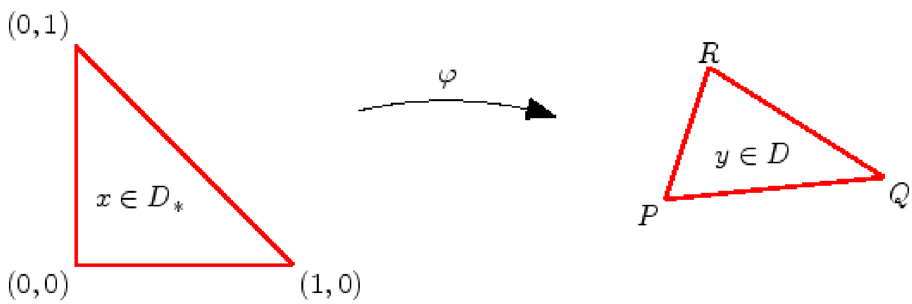
او د ساده کونې وروسته

$$\operatorname{grad} h = 4(u^2+v^2) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ،

په يوه د رېګوډي D باندې د د يوه رفرنځدرېګوډي افين تابع
$D_* : x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_i \geq 0\,,$ د کوډېټکو Q $P,$ او R سره کيدی شي په
لاندې بڼه وليکل شي

$$y = \varphi(x) = p + (q-p)x_1 + (r-p)x_2$$



افين تبع د جاکوب-ماتريکس لري

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = (q-p, r-p)\ .$$

له دې سره د يوه سکالار تابع $h(x) = g(\varphi(x))$ ځخه لاسته راځي

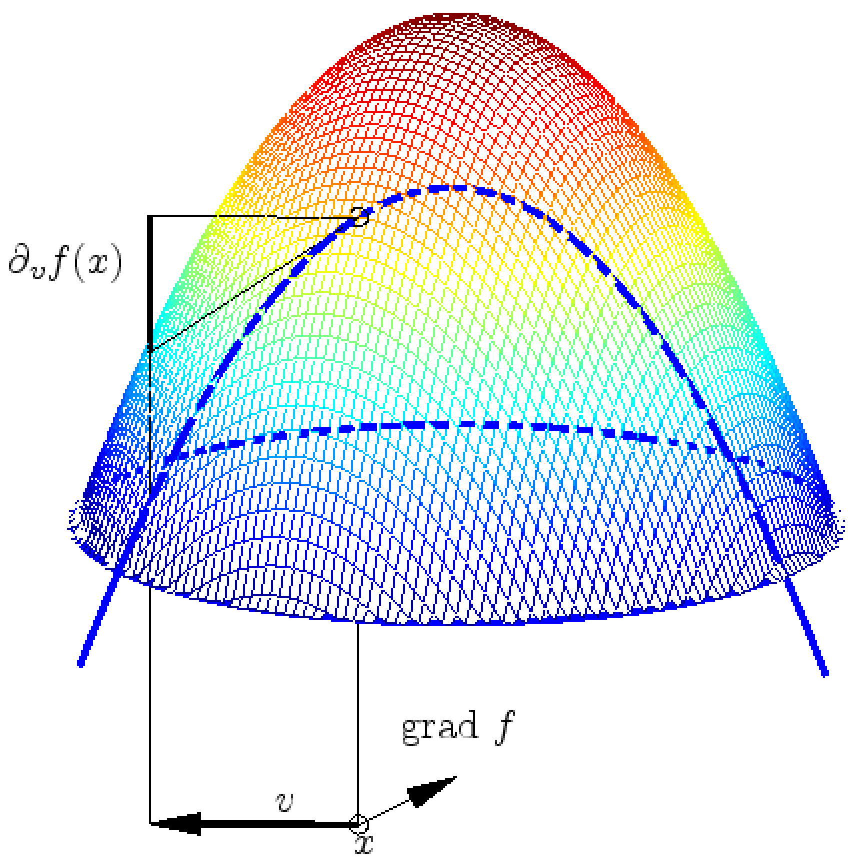
$$(\operatorname{grad} h(x))^t = (\operatorname{grad} g(y))^t \begin{pmatrix} q_1 - p_1 & r_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \end{pmatrix}.$$

دا تراسفورميشن د نورو ترځنګ د ستيفيګکايتماتريکسونو Steifigkeitsmatrizen په ليکنوکې د فينيت-توکو-تګلار Finite-Elemente-Verfahren ته اړيينه ده.

د يوه تابع لوريز مشتق

د يوه فنکشن يا تابع f مشتق د يوه وکتور v په لرو دی

$$\partial_v f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+hv) - f(x)}{h}.$$



دا کيدی شي د جاکوب-ماتريکس f' په مرسته د ځنځيرقانون په بنسټ د

$$\left(\frac{d}{dt} f(x+tv) \right)_{t=0} = f'(x)v$$

له لارې وشمیرل شي. په ځانګړي توګه $\partial_{e_\nu} f$ د e_ν سره د ν–م یوونوکتور(واحدوکتور) ټوټه مشتق دی نسبت و ν–م کواوردینات ته.

د سکالر تابع تابع لپاره دی

$$\partial_v f = (\operatorname{grad} f(x))^{\mathrm{t}} \,.$$

لکه څنګه چیپه مشتق کې متشکلدی، لوریز مشتق شتون لري په دې حالت کې له f د v په لور. لوکال تغیر د $v \parallel \operatorname{grad}\, f(x)$ لپاره ما کسیمال دی.

(Autoren: Höllig/Knesch)

د تابع

$$f(x,y) = x^2 y^3$$

لوریزمشتق په ټکي $(x,y) = (2,-1)$ کې شمیرلکیږي. د دې لپاره لومړی

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 \end{pmatrix} .$$

ټاکو.

د معلومو کواوردینات د ځایپه ځایکولووروسته د یوه لور $v = (a,b)^{\mathrm{t}}$ لپاره لاسته راځي

$$\partial_v f(2,-1) = (-4,12) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -4a + 12b \,.$$

لوریزوکتور د

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

لپاره ماکسیمال کیږي، نو د بیلګې په توګه . $v = (-1, 3)$ په لومړئ نږدېونه کې له دې سره

$$f(2-t, -1+3t) \approx f(2,-1) + t\partial_v f(2,-1) = -4 + 40t$$

د f خورا لویه ځایزه یا لوکال جګیدنه په ګوته کوي یا تشریح کوي

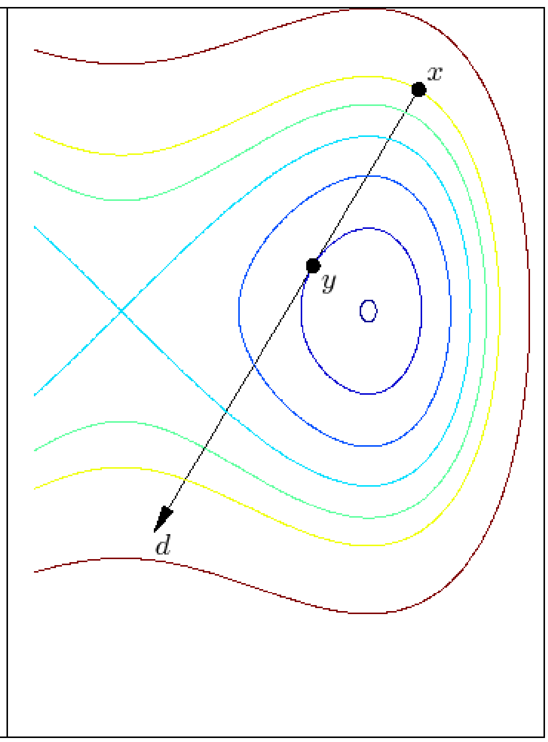
د ډېرې زوږندې یا کښته کیدنې متود

د ډېرې زوږندې کښته کیدنېمتود د مولتیواریات توابعو $f(x_1, \ldots, x_n)$ مینیمي کولو په چوپړ کې دی. د یوه ایترایشنپل $x \to y$ عملي کولو ته لومړی منفي ګرادینت

$$d = -\mathrm{grad} f(x)$$

د لوکال بهترین کښته کیدلور په حیث شمیرلکیږي. پسې y د f مینیمال ځای په حیث د d په لورتاکل کیږي:

$$f(y) = \min_{t \geq 0} f(x + td) \,.$$



لکه په تابع یا څیره کې چې انځوردی، لټونلور و نیوو ډېرئ **Niveaumenge** ته د x له لارې اورتوګونال ده او تابع د نیووډېرئ په y کې یوه کوچني ار زښت ته لمسوي

یادونه : د نیوو**Niveaumenge** یا روښانه ونه (ژباړې): پهشمیرنه کې د یوه سکالار پټي یا ورشو ټولو ډېریو یا ستونو ټکي، چې هغه همغه ارزښت سره ترتیب یا تنظیم وي. پای.

د خورا زوړندکښته کیدني متود له لارې تولید شوې پرلپسي $x_0, x_1, \ldots$ کونورګنت کیدی شي د ډېرې ټولیزې نیونې سره وښوول شي. پوره کیدونکی دی، که f د کښته لور ته محدود وي او $\operatorname{grad} f$ په یوه د ډېرئ په یوه چاپیریال U کې لیپشیڅ- ناپریکیدونکې وي، دا په دې معنا چې

$$\| \operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(\tilde{x}) \| \le L \| x - \tilde{x} \|, \quad x, \tilde{x} \in U \,.$$

باور لري

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \| \operatorname{grad} f(x_\ell) \|^2 < \infty \,.$$

دا په ځانګړې توګه دې کې خوندي ده، چې د پرلپسي $x_0, x_1, \ldots$ هر پډغالي ټکی د f یو انحرافي یا بهتره افراطي ټکي دی. دا چې دا یو ځاییز یا لوکال مینیموم دی ستاتیستیکي په اطمنان، مګر نه جبرأ ترې لاسته راځي.

په الګرړیتم کې یوبعدي یا یو پراخېدونکی مینیموم اړتیا ده چې فقط په نږدې توګه وکړای شي. لټونلور d باید نه دي چې د کمیز یا منفي ګرادینت په څیرو ټاکلی شي او یوه ځییزه مینیموم ځاي y و نه ټاکلشي. د کونورګنت لپاره په ساده توګه پریکړیدی، چې هر ایتراشنپل سره د تابع ارزښت یو ردکښن و $\| \operatorname{grad} f(x) \|^2$ ته متناسب ورسیدای شي.

(Autoren: Höllig/Hörner/Pfeil)

د یوه مربع تابع

$$f(x) = \frac{1}{2} x^{t} A x - b^{t} x$$

$x \to y$

لپاره د يوه سيومتريک زياتيز يا مثبت ديفينيت ماتريکس A سره يوايتريشنپل لري د ډېرزوړندجګيدني بنې متود سره

$$y = x + td,\ d = -\mathrm{grad} f(x) = b - Ax,\ t = \frac{d^{t} d}{d^{t} A d}.$$

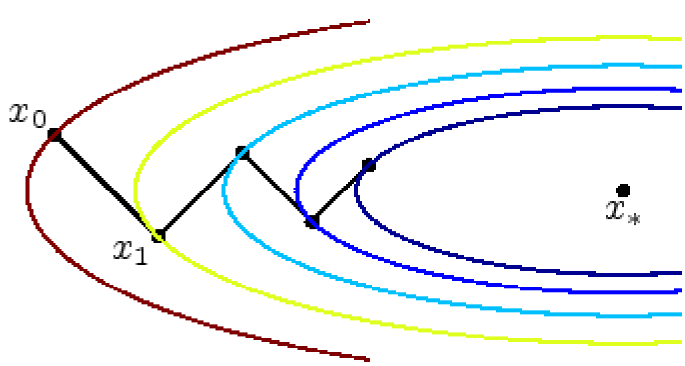
د

$$\begin{aligned} f(x+td) &= \tfrac{1}{2}(x+td)^{t} A (x+td) - b^{t}(x+td) \\ &= \tfrac{1}{2} d^{t} A d t^{2} + (x^{t} A d - b^{t} d) t + c \end{aligned}$$

مينيموم کيدی شي په دې حالت کې ا کسپليثيت يا روښانه توګه ورکړ شي. د t پسې مشتق صفرځايونوله لارې لسته راځي

$$0 = d^{t} A d t - (\underbrace{b - Ax}_{d})^{t} d$$

او له دې سره د نيمکربنيزپارامتر t لپاره فرمول.



تابع چې ښايي،کیدی شي ناغوښتلو رپيدنو ياOszillationen ته راشي، که A أيګنارزښت قوي توپير کيدونکی د لوي نظم لري. يوه افراطي پيلګه د

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

لپاره لاسته راي.

د $x = \begin{pmatrix} c & 1 \end{pmatrix}^t$ لپاره دی

$$d = -\begin{pmatrix} c \\ 100 \end{pmatrix}, \quad Ad = -\begin{pmatrix} c \\ 10^4 \end{pmatrix}$$

او

$$d^t d = c^2 + 10^4, \quad d^t A d = c^2 + 10^6, \quad t = \frac{c^2 + 10^4}{c^2 + 10^6}.$$

له دې سره لرو

$$y = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{c^2 + 10^4}{c^2 + 10^6} \begin{pmatrix} c \\ 100 \end{pmatrix} = \frac{99c^2}{c^2 + 10^6} \begin{pmatrix} 10^4/c \\ -1 \end{pmatrix}.$$

په رښتيا د $c = 100$ لپاره لرو

$$y = \frac{99}{101} \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

سړی پيژني، چې مينيموم ته د واټنونو په هر ايتراېشنپل کې په سرجينه کې فقط له 1% په کچه کميږي.

په څټ- یا برعکس تابع Umkehrfunktion

$f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ دې د یوه ټکي x_* په چاپیریال کې ناپریکیدونکی مشتقوړ تابع وي

د انورتیري جاکوبي-ماتریکس $f'(x_*)$ سره.

نو f د x_* په یوه چاپیریال U کې بیجکتیو دی، دا په دې معنا چې یو ناپریکیدونکی

مشتقوړ برعکستابع $g = f^{-1}$ شتون لري د

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)\,, \quad x \in U\,.$$

سره.

له دې برسیره د جاکوبي-ماتریکس

$$g'(y) = f'(x)^{-1}$$

لپاره باور لري، د ټولو $x \in U$ لپاره.

(Autoren: Höllig/Streit)

مساوات $f(x) = y$ کړی شي د یوه ټکي (x_*, y_*) په چاپیریال

$$U \times V = \{x:\ |x - x_*| \le \delta\} \times \{y:\ |y - y_*| \le \varepsilon\}$$

کې د لیترایشن

$$x \leftarrow \varphi(x) = x - f'(x_*)^{-1}(f(x) - y)$$

سره د بانخ Banachځاي په ځاي يا فيکس ټکي جملې سره حل شي.

دې ته ښوول کيږي، چې φ د کره لپاره يو را ټول شوی kontrahierende ځانيزه تابع ده په U .

د کنوتراکشن ثابته کيدی شي د $\sup_{x\in U}\|\varphi'(x)\|$ له لاريتخمين شي، داسېچې د اويکليد يا اقليدس نورم $|\cdot|$ باندې تنظيم ماتريکسنورم وکارول شي. د

$$\begin{aligned} \|\varphi'(x)\| &= \|E - f'(x_*)^{-1}f'(x)\| \\ &= \|E - f'(x_*)^{-1}[f'(x_*) + f'(x) - f'(x_*)]\,\| \\ &= \|f'(x_*)^{-1}(f'(x) - f'(x_*))\| \end{aligned}$$

له امله ديوون – يا وادماتريکس E سره $\leq c < 1$ سوپريمومو دی د پوره کوچني δ لپاره، ځکه چې $f'(x) \to f'(x_*)$ د $x \to x_*$ لپاره.

خوندي لرنه يا Die Inklusion $\varphi(U) \subseteq U$ د

$$\varphi(x) - x_* = x - x_* - f'(x_*)^{-1}(f(x) - f(x_*) + y_* - y)\,.$$

نورم د تخمين له لارې لاسته راځي.

د f د ناپريکيدني او مشتقوړوالي په بنسټ باور لر ي

$$f(x) - f(x_*) = f'(x_*)(x - x_*) + R, \quad |R| = o(|x - x_*|).$$

د دې په تعقيب دی

$$|\varphi(x) - x_*| \le \|f'(x_*)^{-1}\|(o(\delta) + \varepsilon) \le \delta$$

د پوره کوچني δ ($o(\delta)/\delta \to 0$) او ε لپاره

له دې سره د باناخ ځاېی ځای تکي جملې نيونې يا فرضيپوره دي، او د ټولو $y \in V$ لپاره د لاندې سره x شتون لري د لاندې سره

$$x = x - f'(x_*)^{-1}(f(x) - y) \Leftrightarrow f(x) - y = 0,$$

دا په دې معنا چې سرې کړی شي مساوات د x پسې حل کړي:

$$g(y) = f^{-1}(y) = x$$

.

فورمال د $x = g(f(x))$ مشتق له لارې د ځنځيري قانون سره سم لاس ته راځي

$$E = g'(y)f'(x).$$

د g د جاکوبي-ماتريکس د f د جاکوبي-ماتريکس معکوس دی. د دې لپاره چېد دې فرمولټيکاوی د ازمايو ، د

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

لپاره د $x,\, x+\Delta x \in U$ سره ليکو

$$\begin{aligned} &g(y+\Delta y)-g(y)-f'(x)^{-1}(\Delta y) \\ &\quad = \Delta x - f'(x)^{-1}[f(x+\Delta x)-f(x)+|\Delta x|/2] = f'(x)^{-1}R \end{aligned}$$

د $R=o(|\Delta x|)$ سره د f مشتقوړوالي په بنسټ. دا پاتې دي چې وښوولشي، چې د $|\Delta x|$ د $|\Delta y|$ له لارېکيدی شي تخمين يا اټکل شي.

دا له

$$\Delta x = f'(x)^{-1}(\Delta y - R)$$

لاس ته راځي

د $\|f'(x)^{-1}\|$ په : U محدوديت له امله:

$$|\Delta x| \le c^*\left(|\Delta y| + o(|\Delta x|)\right) \le \tilde{c}|\Delta y|$$

د پوره کوچني $|\Delta x|$ لپاره د ثابتو c^* او $\tilde{c}$ سره.

(Autoren: Höllig/Streit)

و دې ښيرل شي، چې ايا تابع

$$f:\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x/y \end{pmatrix}$$

په ټکي $(x,y)=(2,1)$ کې لوکال معکوسوړ ده. د دې لپاره لومړی د جا کوبي – ماتریکس

$$f'(x,y)=\begin{pmatrix} y & x \\ 1/y & -x/y^2 \end{pmatrix}.$$

جوړیږي.

تر څیړنې لاندې ټکې کې دی

$$\mathrm{J}\,f=f'(2,1)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

د $\det \mathrm{J}=-4\neq 0$ له امله د

$$\begin{pmatrix} u_* \\ v_* \end{pmatrix}=f(x,y)=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

په چاپیریال کې یو معکوس تابع g شتون لري

د دهجاکوبیماتریکس په ټکي (u_*,v_*) کې دی

$$g'(2,2)=\mathrm{J}^{-1}\,f=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

په دې ساده بیلګه کې کیدی شي g د افادود حلولنو له لارې د u او v لپاره د x او y پسې ایکسپلیڅیټexplizit ورکړي:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{uv} \\ \sqrt{u/v} \end{pmatrix}.$$

له دې سره سرې کرې شي چې فرمول د $g'(2,2)$ لپاره په سيده لاره و ازمايي.

(Autor: Höllig)

کومپلکس اکسپوننشل تابع

$$z = x + \mathrm{i}y \mapsto \exp(z) = u + \mathrm{i}v$$

کيدی شي ريل يا حقيقي د

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(x)\cos y \\ \exp(x)\sin y \end{pmatrix}$$

په خير وليکي او دجاکوبي-ما تريکس

$$f'(x,y) = \exp(x) \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}.$$

د $\det f'(x,y) = \exp(2x) > 0$ له امله د هر ټکي $(u,v)^{\mathrm{t}}$ په چاپيريال يو

برعکستابع g (د کمپلکس لوګاريتم) شتون لري د لاند/ط مشتق سره

$$g'(u,v) = (f'(x,y))^{-1} = \exp(-x) \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix}.$$

يو ګلوبال برعکس تابع د

$$f(x, y + 2\pi k) = f(x, y), \quad k \in \mathbb{Z},$$

له امله شتون نه لري. د پريوديوالي يا تل بېرته را ګرځيدني له امله هر ټکي $(u, v) \neq (0, 0)$ ناپای ډېر ترمخ عکسونه لري.

(Autoren: Boßle/Höllig/Streit)

په پولار کوارديناتو باندې اړولو سره،

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

د کواوردينات x پسې د وړانګ ې ټوټه مشت ق لپاره باور لري

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\varphi.$$

له بله پلوه له $r = x/\cos(\varphi)$ لاسته راځي

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\cos(\varphi)}.$$

د دې برېښنده تظاد لپاره دليل دا دی، چې د ټوټه مشتقشمېرنې له لارې همغه اووښتونې ثابتې نه شي ساتل کيدی. په لومړي مساوات کې y ثابت دی اوپه دويمکې φ . په دواړو حالتونو کې تغيروخوړ او اغيزه يې په r کې وکتل شوه. دلته ټکی (x, y) هر ځل په پرته لور يا همداسې د کونج φ سره مايل کربنه حرکت کوي. په ورته توګه ځاييز يا لوکال توګه د r تغيرمختلف دی.

د سکالار مشتق قانون

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

طبعاً د هر توته مشتق لپاره باورنه لري. د يوه بيجکتيو تابع

$$(x,y) \leftrightarrow (u,v)$$

لپاره په توليزه توګه

$$x_u \neq (u_x)^{-1} .$$

دی، له دې ورزيات بايد د تابع

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} ,$$

جاکوبي-ماتريکس رامنځ ته شي:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}^{-1} .$$

په دې راوړې بيلګه کې

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\,\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\,\cos\varphi \end{pmatrix} .$$

دی.

معکوس مشتق د x او y پسې لاندې ډوه مشتق لري:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r}\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{pmatrix}.$$

په ځانګړې توګه لرو، چې $r_x = \cos\varphi$

(Autoren: Boßle/Höllig/Knesch)

ایمپلیځیت توابع

که د یوه ناپریکیدونکیمشتقوړ تابع

$$f:\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

لپاره وي

$$f(x_*, y_*) = 0, \quad \det\, f_x(x_*, y_*) \neq 0\,,$$

نودا مساوات سیستم

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0\,, \quad \nu = 1, \ldots, n\,,$$

د y_* په یوه چاپیریال کې د x پسې حل کړئ:

$$x = \varphi(y)\,.$$

ایمپلیځیت تعریف شوی تابع φ د x_* په یوه چاپیریال کې ناپریکیدونکی مشتقوړ دی او دا لاندېد جاکوبي-ماتریکس لري

$$\varphi' = -(f_x)^{-1} f_y \,.$$

په ورته توګه د توابعو

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m}),\ j = 1, \ldots, n\ ,$$

لپاره باور لري د اووښتونو يا متحولو د پرموتيشن پسې، دا په دې معنا چې سړی کړی شي په $x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}$ پسې يې حل کړي، که د جاکوبي- ماتريکس f' درځ يا متېه $j_1, \ldots, j_n$ کرښيز خپلواکه وي.

(Autoren: Höllig/Streit)

توابع

$$(x, y) \mapsto u(x, y) = (f(x, y), y)$$

په ټکي (x_*, y_*) کې د په ځټ تابع جملې وړاندنيونې پوره کوي. په ځا نګړې توګه د x اووښتونو ګڼون يا تعداد د f د کمپوننتونو تعداد په ګوته کوي، او

$$u'(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ 0 & E \end{pmatrix}_{|(x_*, y_*)} ,$$

د E سره يوونماتريکس، په ځټ-يا برعکس کيدونکيدی. له دې امله سړی کړی شي

$$(\varphi(y), y) = u^{-1}(0, y)$$

کيږدي، د u^{-1} سره د u ناپريکيدونکی مشتقوړ برعکس تابع.

د جاکوبي-ماتریکساکسپلیځیت فرمول له

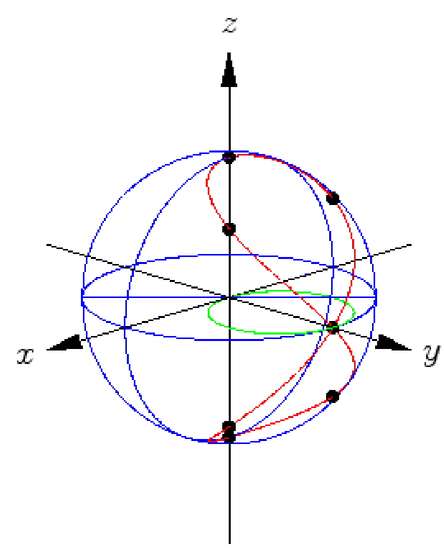
$$0 = (f(\varphi(y), y))_y = f_x \varphi' + f_y \,.$$

لاسته راځي.

د ویواني Vivianische کره یا منحني

$$C: \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \cos t \\ \sin(2t) \\ \cos t \end{pmatrix} , \quad t \in [0, 2\pi) \,,$$

د توتي یا استواني سره د یوونفضا د غوځي له لارې لاسته راځي.



په ایمپلیخیت بڼې کره د

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 &= 0 \\ g(x,y,z) &= x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} &= 0 \end{aligned}$$

له لارې انځوروړ ده. د ايمپليځيتتابع جملېسره سړی کړی شي د جاکوبي-ماتريکس

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y-1 & 0 \end{pmatrix} .$$

لرلو سره پريکړه وکړي، چې ايا کړه ځان لوکال يا ځاييزد کواوردينات x, y, z څخه د يوې له لارې پارامتريک کيدی شي.

نسبت x ته پارامتريککولو لپاره ، دا په دې معنا چې د y او z پسې حلونه پوره کيدونکېده،داسې چې

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y-1 & 0 \end{pmatrix}$$

برعکس وړ ده. دا د $z \neq 0$ او $y \neq 1/2$ لپاره حالت دی. سړی لاسته راوړي

$$y(x) = \frac{1}{2} + \delta\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}, \quad z(x) = \delta'\sqrt{\frac{1}{2} - \delta\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}} .$$

چيرته چې په اړونده توګه د يوګونو ښاخونو مخنخښه $\delta,\ \delta' \in \{-1, 1\}$ بايد و ټاکل شي.

په رينتوني دا پارامتريک کونه په ټکو $(0,1,0)^t$, ، $(\pm 1/2, 1/2, \pm\sqrt{2}/2)^t$ او $(\pm 1/2, 1/2, \mp\sqrt{2}/2)^t$ سينګړ.لارده. د x پسې

پارمتریک کونې لپاره هندسي اړین دی، چې د تانجنت لور و $(1,0,0)^t$ ته ارتوګونال نه ده، دا په دې معنا چې یو ناساده کمپوننت د x په لور لري.

په ورته توګه نسبت y او z ته د پارامتریکوړوالي لپاره پوره کیدونکیشرطونه لاس ته راځي.

په تکي $(0,1,0)^t$ کې لوکال پارمتریک کیدنه شتون نه لري. کرﻩ دلته دبل ټکی لري. د جاکوبي –ماتریکس

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)}\,|_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

فقط رانګ 1 لري.

د n متحولي یا اووښتوني یوه سکالار تابع f لپاره دا جمله د ایمپیلځیت توابعوپه هکله وایي، چې مساوات

$$f(x_1,\dots,x_n)=0$$

د $x \approx x_*$ لپاره د x_k پسې حلکیدی شي، که $\partial_k f(x_*) \neq 0$.

.

د روښانه بیلګې په توګه مسوات

$$f(x,y,z) = xe^y - yz = 0$$

راوړو. ګرادینت دی

$$(f_x,f_y,f_z)^t = (e^y, xe^y - z, -y)^t\,.$$

د $f_x > 0$ له امله $f = 0$ د ټولو (x, y, z) لپاره د x پسې حلوړ دی. دا د مساوات

$$x = yze^{-y}$$

پسې ترلي هم ليدل کيدی

په ورته توګه کتل کيږي، چې د z پسې حل د $y \neq 0$ لپاره هم ممکن دي.

په y پسې مسات ساده نه شي حل کيدی. د ايمپليڅيت توابعو په هکله جمله د (x_*, y_*, z_*) په يوه چاپيريال کې تظمينوي که

$$f_y(x_*, y_*, z_*) = x_* e^{y_*} - z_* \neq 0\,.$$

دا د بيلګې په توګه د مساوات د حل $(0, 0, 1)$ لپاره پوره دی:

$$f_y(0, 0, 1) = -1\,.$$

په تعقيب يی يو تابع φ شتون لري د

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x, z)\,, \quad (x, z) \approx (0, 1)\,.$$

سره.

سره له دې چې φ اکسپليڅيت د ورکړي وړ نه دی، کيدی شي ګرادينت و ټاکل شي:

$$0 = f(x, \varphi(x, z), z) \Longrightarrow 0 = f_x + f_y \varphi_x\,, \quad 0 = f_z + f_y \varphi_z\,.$$

د راوړل شوي ټکي (x_*, y_*, z_*) کې باور لري

$$\varphi_x(0,1) = -f_x(0,0,1)/f_y(0,0,1) = 1/(-1) = -1$$

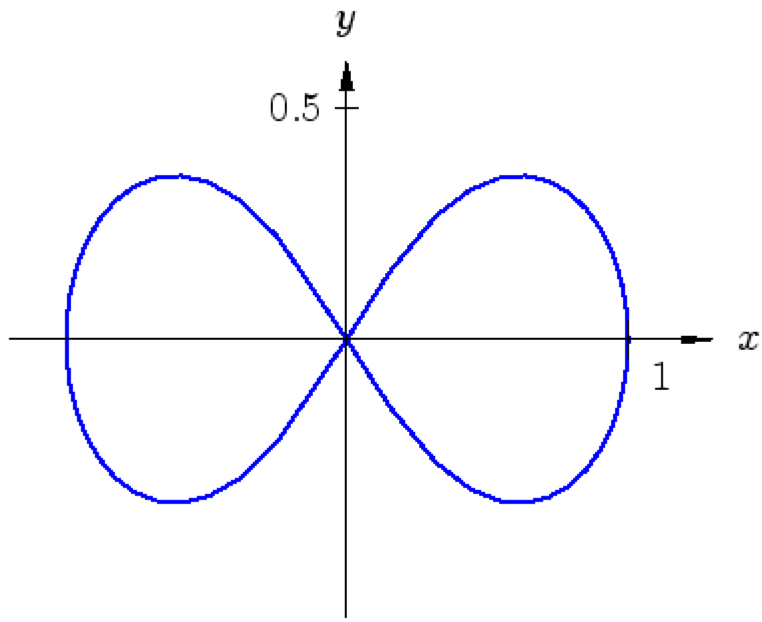
$$\varphi_z(0,1) = -f_z(0,0,1)/f_y(0,0,1) = 0/(-1) = 0\,.$$

(Autor: Höllig)

د بيوارياتت پولينوم p لپاره د

$$p(x,y) = 0$$

له لاربيوه الجبري کږه تعريفيږي. که درجه $p \neq 0$ وي، نو يا x لوکال يو د y تابع دی او يا په څټ. په ټکو کې چې درجه يې ورکيدونکې وي کيدی شي کږه يو سينګولاريټي ولري



د $p(x,y) = y^2 - x^2 + x^4 = 0$ له لارې تعریف شوې لیمنیسکاتې ګرادینت

$$\operatorname{grad} p(x,y) = (-2x + 4x^3, 2y)^t$$

فقط په ټکي $(0,0)$ کې په ورکیږي. لکه په خیره کې چې کتل کیږي، نه شي کیدی چې کږه یواځنۍ په x پسې یا په y پسې حل شي.

په دې $(1,0)$ ټکي ا و $(-1,0)$ کې تانجنت و x –محور ته ولاړ یا عمود دی. کږه کږی شي لوکال فقط په x پسې حل شي:

$$x = \sigma \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}}$$

د $x = \sigma \in \{-1,1\}$ په چاپېريال کې. برعکس کيدی شي کرہ په ټکو $\pm(1/\sqrt{2},1/2)$ کې لوکال فقطد x تابع په ځير نه د y په ځير ورکړ شي:

$$y = \pm\sqrt{x^2 - x^4}\,.$$

په نورو ټول ټکو (x_0, y_0) کې کيدی شي چې سړی يې هم د x او يا y پسې حل کړي.

بيلګه

$$\frac{dy}{dx} = -p_y^{-1} p_x = \frac{4x^3 - 2x}{2y}$$

ده او

$$y - y_0 = \frac{4x_0^3 - 2x_0}{2y_0}\,(x - x_0)$$

په ټک (x_0, y_0) کې د تانجنت مساوات دي.

(Autoren: Höllig/Streit)

په ناکربنيز مساواتسيستم کې د مخ ته بيونې متود

په يوه د پارامتر تابع مساواتسيستم کې

$$f(x,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

د ناپريکيدونکيمشتقوړ f تويه جاکوبي-ماتريکس f_x سره ناسينګولار دی، نو حلونه

ناپريکيدونکي مشتقوږ د t په واک کې دي. په ځانګړې توګه کيدی شي کرښيز تيلور- وديزونه

$$x(t+h) \approx x(t) - f_x(x,t)^{-1} f_t(x,t)h$$

د ګاونډيو اپروکسيکيشن لپاره وکارول شي.

دا متود زيات وخت د نيوټن -تګلار د پيل ارزښت د Generierung ته کارول کيږي

ليکوال :هيوليګ، سترايت

د تيلور اپروکسيميشن Taylor-Approximation

Approximation(لاتين: هغه بل، شميرپوهنيزه ترې پوهيدنه(مفهوم) نږدېوالی)

د يوه ټکي په چاپيريال کې يو $(a_1, \ldots, a_m)(n+1)$ -ځله ناپريکيدونکی مشتقوږ د m متحولو x_i سکالار تابع f کيدی شي د يوه ټيلور-پولينوم له لارې د ټوټال درجي له لارې اپرکسيميشي:

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \le n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a)(x-a)^\alpha + R\,, \quad |x-a| < r\,,$$

د $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_m!$ سره.

پاتې غړی لاندې بڼه لري

$$R = \sum_{|\alpha| = n+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(u)(x-a)^\alpha\,, \quad u = a + \theta(x-a)\,,$$

د يوه $\theta \in [0,1]$ لپاره.

د ښوونې لپاره د m متحولو د يوه تابع د تيلور وده په يونيواريات حالت بيرته اړولکيږي.
سړی بې د ټوليزو بنديزونو $a = 0$ راوړي او داسې يې ځاي پّ ځای کوي

$$f(x_1, \ldots, x_m) = f(tx_1, \ldots, tx_m)|_{t=1} = g(t)|_{t=1}\,.$$

د يونيواريات تابع $g(t)$ لپاره د تيلور ــوده په صفرټکي کې ده

$$g(t) = g(0) + g'(0)\,t + \cdots + \frac{1}{n!}g^{(n)}(0)t^n + R$$

د

$$R = \frac{1}{(n+1)!}g^{(n+1)}(\theta t)t^{n+1}, \quad \theta \in [0,1]\,.$$

سره.

د ځنځيري قانو پسې لرو

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) \\ g'(0) &= \sum_j (\partial_j f(0))x_j \\ g''(0) &= \sum_i \sum_j (\partial_i \partial_j f(0))x_i x_j \\ &\vdots \end{aligned}$$

دا په دې معنا چې k -م مشتق m^k ترمونه لري. له دوي څخه هغه راټوليږي، په کومو کې چې د يوګونو متحولو پسې برابرزيات واره مشتق ونيول شي.
د بيلګې په توګه د ټولو $m = 2,\ k = 5$ مشتقونو لپاره، کوم چې درې واره د لومړي کمپوننت او دوه واره د دويم کمپوننت پسې مشتق شوی دی، سړی

$$\partial_1\partial_1\partial_1\partial_2\partial_2,\ \ \partial_1\partial_2\partial_1\partial_2\partial_1,\ \ \partial_1\partial_2\partial_2\partial_1\partial_1,\ \ \dots$$

یوځایراوړي. په ټولیزه توګه په دې کنکریت حالت کې ټوټه مشتق $\partial^\alpha\ ,\ \alpha = (3,2)$

$\binom{5}{3} = 5!/(3!\,2!)$ ترمونه دي. په ټولیزه توګه

$$\binom{k}{\alpha_1}\cdot\binom{k-\alpha_1}{\alpha_2}\cdots\binom{k-\alpha_1-\ldots-\alpha_{m-1}}{\alpha_m} = k!/(\alpha_1!\ \ldots\ \alpha_m!)$$

ترمونه دي، که د ν -م کمپوننت پسې یې α_ν -ځله مشتق ونیول شي.

که د تابع $g(t)$ دا پورته شمیرل شوي مشتقونه د تیلور-ودیزیینه کې کیږدو، ضریب یا ځلوونی $k!$ لنډیږي او سړی لاسته د f غوښتونېودیزینه راوړي.

لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

د یوه دوه متحولو تابع لپاره تیلور –ودیزیینه دا لاندې بڼه لري

$$f(x,y)\ \ f + f_x\,(x-x_0) + f_y\,(y-y_0) =$$

$$+\frac{f_{xx}}{2}\,(x-x_0)^2 + f_{xy}\,(x-x_0)\,(y-y_0) + \frac{f_{yy}}{2}\,(y-y_0)^2$$

$$+\frac{f_{xxx}}{6}\,(x-x_0)^3 + \frac{f_{xxy}}{2}\,(x-x_0)^2\,(y-y_0)$$

$$+\frac{f_{xyy}}{2}\,(x-x_0)\,(y-y_0)^2 + \frac{f_{yyy}}{6}\,(y-y_0)^3 + R\,,$$

چېمشتق يې تل په ټکي (x_0, y_0) کې ارزښتول کيږي.

د بيلګې په توګه د

$$f(x,y) = \sin(x - \omega y)$$

او د $(x_0, y_0) = (0,0)$ لپاره د

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta f(0,0) = \sin^{(\alpha+\beta)}(0)\,(-\omega)^\beta$$

له امله اپروکسيميشن

$$\sin(x - \omega y) =$$

$$= x - \omega y - \frac{1}{3!}\underbrace{(x^3 - 3\omega x^2 y + 3\omega^2 x y^2 - \omega^3 y^3)}_{(x-\omega y)^3} + R$$

د

$$R = \frac{1}{4!}(f_{x^4} + 4f_{x^3 y} + 6f_{x^2 y^2} + 4f_{xy^3} + f_{y^4})(\theta(x,y))$$

$$= \frac{1}{4!}(x - \omega y)^4 \sin(\theta(x - \omega y)),$$

سره د يوه $\theta \in [0,1]$ لپاره لاسته راوړي.

په بدیل ډول سړی د تیلور-پولینوم د $t = x - \omega y$ ځاي په ځای کولو له لارې لاسته راوړي د ساین تابع په یوه بعدیز لړئ انځورونه کې:

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots.$$

د $t = x - \omega y$ سره لاس ته راځي

$$f(x,y) = (x - \omega y) - \frac{1}{3!}(x - \omega y)^3 + \frac{1}{5!}\cos(\theta)(x - \omega y)^5,$$

چېرته چې د یونیواریانت پاتې غړي انځورونه کا رول کیږي

لیکونکې: بوسلې، هیولیګ، شترایت

د بیلګې په توګه پولینوم

$$f(x,y,z) = z^2 - xy$$

د $(0,-2,1)$ په ځای کې ودیز کیږي یا تکامل ورکول کیږي. دا له صفر سره نابرابرمشتقونه دي

$$f_x = -y\,,\; f_y = -x\,,\; f_z = 2z\,,\; f_{xy} = -1\,,\; f_{zz} = 2\,.$$

په ودیزوونټکیکې ارزونې د تیلور-انځورونې

$$1 + 2x + (-0)(y+2) + 2(z-1) + (-1)x(y+2) + \frac{1}{2}2(z-1)^2\,,$$

لاس ته راځي، کوم چې طبعاً د f سره همغږیز دی.

په بدیل ډول کیدی شي ودیزینه د بڼهبدلون له لارې هم و کتلی شول

$$y+2=\eta\,,\quad z-1=\zeta$$

او لاس ته راشي

$$f(x,y,z)=(\zeta+1)^2-x(\eta-2)=\zeta^2++2\zeta+1-x\eta+2x\,.$$

د هسي ماتریکس Hesse-Matrix

په ټکي $(a_1,\ldots,a_n)$ کې د یوه سکالار تابع f مربعیز تیلور-اپروکسیمیشن کیدی شي په بڼه

$$f(x) = f(a)+(\operatorname{grad} f(a))^t\,(x-a)+\frac{1}{2}(x-a)^t\,\mathrm{H}\,f(a)(x-a)+O(|(x-a)|^3)$$

ولیکل شي، د کوم سره چې د سیمتریک هسې- ماتریکس

$$\mathrm{H}\,f(a)=\begin{pmatrix}\partial_1\partial_1 f(a) & \cdots & \partial_1\partial_n f(a)\\ \vdots & & \vdots\\ \partial_n\partial_1 f(a) & \cdots & \partial_n\partial_n f(a)\end{pmatrix}$$

دویم مشتق خوندي لري.

لیکونکې: بوسلې، هیولیګ، شترایت

کتمتوالی د تیلور-ودیزییني د مربع ترمونو د Umschreiben له لارې منځ ته راځي. په بیواریات حالت کې ($n=2$)

$$f(x,y) = f + f_x\,(x-x_0) + f_y\,(y-y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}(f_{xx}\,(x-x_0)^2 + 2f_{xy}\,(x-x_0)\,(y-y_0) + f_{yy}\,(y-y_0)^2) + R$$

$$= f + f_x\,(x-x_0) + f_y\,(y-y_0)$$

$$+\frac{1}{2!}\,((x-x_0)\,,(y-y_0))\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(x-x_0)\\(y-y_0)\end{pmatrix} + R,$$

دی، د کوم سره چې په بنی اړخ د تابع تعریفدیرئ (x_0,y_0) پریښوول شي یا ونه لیکل شي. باقي یا پاتېغږي

$$R = \sum_{|\alpha|=3}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(u,v)\,(x-x_0)^{\alpha_1}\,(y-y_0)^{\alpha_2}\,,$$

د

$$(u,v) = (1-\theta)(x_0,y_0) + \theta(x,y)$$

سره د $\theta \in [0,1]$ لپاره د لوي نظم $O(|(x,y)|^3)$ دی.

په ټولیز حالت کې شوونه په ورته تګه ده.

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د تابع

$$f(x,y) = \ln(x+1/y)$$

لپاره

$$f_x = \frac{1}{x+1/y}, \quad f_y = -\frac{1}{xy^2+y},$$
$$f_{xx} = -\frac{1}{(x+1/y)^2}, \quad f_{xy} = \frac{1}{(xy+1)^2}, \quad f_{yy} = \frac{2xy+1}{(xy^2+y)^2}.$$

دی.

په ځانګړې توګه په ټکي $(0,1)$ کې د ګرادینت او د هسې- ماتریکس لپاره لرو

$$\operatorname{grad} f(0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{H} f(0,1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

او له دې سره مربعیز تیلور- ودیزیینه

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & (1,-1)\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} \\ & +\frac{1}{2}(x,y-1)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} + O(|(x,y)|^3) \\ = {} & x-y+1+\frac{1}{2}(-x^2+2xy-2x+1+y^2-2y) \\ & + O(|(x,y)|^3). \end{aligned}$$

د دې لپاره چې په ټکي $(1,1,1)$ کې د

$$f(x,y,z) = (xy)^z$$

تيلور-وديزيينه وټاکو، شميرولومړی

$$f_x = yz(xy)^{z-1}, \quad f_z = \ln(xy)(xy)^z,$$
$$f_{xx} = y^2 z(z-1)(xy)^{z-2}, \quad f_{zz} = (\ln(xy))^2(xy)^z,$$
$$f_{xy} = z(xy)^{z-1} + xyz(z-1)(xy)^{z-2}, \quad f_{xz} = y(xy)^{z-1} + yz\ln(xy)(xy)^{z-1},$$

(f_y ، f_{yy} او f_{yz} د متحولې د بدليدو له لارې لاسته راځي).

له دې سره لاسته راځي

$$\operatorname{grad} f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{H}\, f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

او له دې سره سړی لاس ته راوړي

$$f(x,y,z) = 1 + (1,1,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}(x-1, y-1, z-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

$$+ O(|(x,y,z)|^3)$$

$$= \quad 1 + (x-1) + (y-1) + (x-1)(y-1)$$

$$+(x-1)(z-1) + (y-1)(z-1)$$

$$+ O(|(x,y,z)|^3).$$

ليکونکي: بوسلې، هيوليګ، شترايت

د نيوټن تنلار ***Newton-Verfahren***

د يوه نه کرښيز مساواتسيستم

$$f_1(x_*) = \cdots = f_n(x_*) = 0$$

حل $x_* \in \mathbb{R}^n$ کيدی شي د

$$f'(x)\Delta x = f(x)$$
$$x \leftarrow x - \Delta x$$

له لارې تعريف شوی د نيوټن ايتريشن و ټاکل شي.

که f دوه واره ناپريکيدونکی ټوټه دفررنڅيالوړ او د جاکوبي-ماتريکس $f'(x_*)$ برعکسوړ وي، نو د x_* په يوه چاپيريال U کې د پيل ارزښت لپاره دا تلنلار مربعيز کونورګ يا پولې ته تلونکې ده

$$|x_{\mathrm{neu}} - x_*| \leq c|x_{\mathrm{alt}} - x_*|^2$$

په ځانګړې توګه د $x \in U$ لپاره $\det f'(x) \neq 0$ دی، داسې چې د Δx لپاره دا کربنیز سیستم یوائځنی حل کیدونکی دی.

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د یوه حل x_* لپاره د نږدېوالي x_{alt} څخه په مخ ته تلنه کیدی شي د f کربنیز اپروکسیمیشن له لارې یو ښه شوی نږدیوالی x_{neu} د ټاکل شي، دا په دې معنا چې له

$$0 = f(x_*) = f(x_{\text{alt}}) + f'(x_{\text{alt}})(x_* - x_{\text{alt}}) + R, \quad R = O(|x_* - x_{\text{alt}}|^2)$$

څخه سړی د x_* پسې حل له لارې او باتې غړي پاتې یا لرې کیدو سره د ایتریشنقانون

$$x_{\text{neu}} = x_{\text{alt}} - (f'(x_{\text{alt}}))^{-1} f(x_{\text{alt}}).$$

ګټلی شي.

که لومړی مساوات د $f(x_{\text{alt}})$ پسې حل شي،

$$f(x_{\text{alt}}) = -f'(x_{\text{alt}})(x_* - x_{\text{alt}}) - R,$$

او دا د ایتریشن قانون کې ځا په ځاي کړي، نو لاس ته ترې راځي

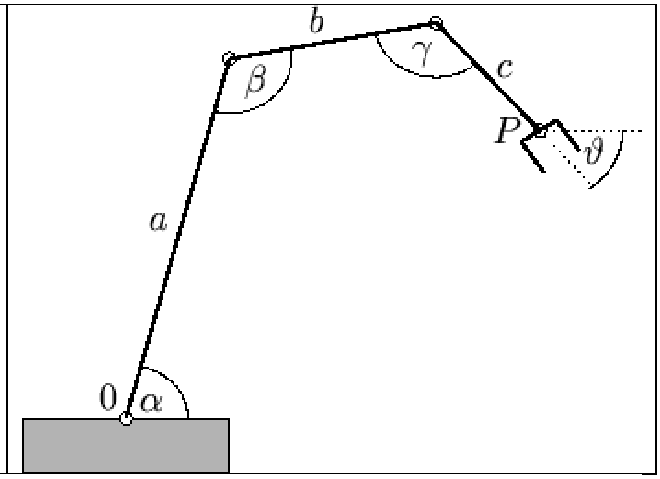
$$x_{\text{neu}} = x_* + (f'(x_{\text{alt}}))^{-1} R.$$

د $f(x)$ د ناپریکیدني او مشتقوړوالي په بنسټ $\left|(f'(x))^{-1}\right|$ په یوه د x_* چاپیریال U کې محدود یا رابند دی او له دې سره

$$|x_{\mathrm{neu}} - x_*| = \left| \left(f'(x_{\mathrm{alt}})\right)^{-1} R \right| \le c \left| x_{\mathrm{alt}} - x_* \right|^2 .$$

لیکونکي: بوسلي، هیولیګ، شترایت

د نیوټن-تلنلارد دي د کتني لپاره یو ساده روبوتر په کاراچول ترخیرنې لاندې نیسو.
دا ځیره یا عکس یو د روبوتر لاس ښایي له درې څرخون بندونو سره.
له دې سره د پوزیشن یا ځای P او ϑ د اخرې برخې لوریزوالی د بندونود کونجونو α، β، γ نا کربنیز تابع q دي:



$$\begin{aligned}
q_1(\alpha,\beta,\gamma) &= a\cos(\alpha) + b\cos(\alpha+\beta-\pi) + c\cos(\alpha+\beta+\gamma-2\pi) \\
q_2(\alpha,\beta,\gamma) &= a\sin(\alpha) + b\sin(\alpha+\beta-\pi) + c\sin(\alpha+\beta+\gamma-2\pi) \\
q_3(\alpha,\beta,\gamma) &= \alpha+\beta+\gamma-2\pi .
\end{aligned}$$

د څرګندو ارزښتونو $a = 3,\ b = 2,\ c = 1$ لپاره د

$$\beta' = \alpha + \beta, \quad \vartheta = q_3 = \alpha + \beta + \gamma - 2\pi$$

بدلون یا سبستیچیوشن له لارې سرې دا ناکربنیز سیستم لاس ته راوړي

$$\begin{aligned}
0 = f_1(\alpha,\beta') &= p_1 - 3\cos\alpha + 2\cos\beta' - \cos\vartheta \\
0 = f_2(\alpha,\beta') &= p_2 - 3\sin\alpha + 2\sin\beta' - \sin\vartheta .
\end{aligned}$$

د روبوتر لاس ارام حالت $\tilde{p} = (2,2)^t$، $\vartheta = -\pi/2$ حل $\alpha_0 = \pi/2$، $\beta_0' = \pi$ په ګوته کوي د جاکوبي-ماتریکس

$$f'(\alpha_0, \beta'_0) = \begin{bmatrix} 3\sin\alpha_0 & -2\sin\beta'_0 \\ -3\cos\alpha_0 & 2\cos\beta'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

سره.

و ګاونډي ځاي $\vartheta = -\pi/4$، $p = (2,3)^t$ ته رسيدني ته د نيوټن-ټنلارد لومړي پل لپاره دي کرښيز مساواتسيستم

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix},$$

حل شي. له دې سره لاس ته راځي $\Delta\alpha = -\sqrt{2}/6\,,\ \Delta\beta' = -\sqrt{2}/4$ او سړی لاس ته راوړي

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/2 + \sqrt{2}/6 \\ \pi + \sqrt{2}/4 \end{pmatrix}.$$

په پوزيشن p کې ناتيکاوی له دې سره همدا اوس په

$$f(\alpha_1, \beta'_1) \approx (0.1172,\, 0.0976)$$

راکم شو.

بويلي، هيوليک، شترايت

کرييکال ټکي يا افراطي(که انحرافي) ټکی Kritischer Punkt

د یوه سکالار تابع f لپاره سړی x افراطي ټکی بولي، که ګراد یا درجه $f(x)=0$ grad وي. که دوه واره ناپریکیدونکی مشتقوړ وي، نو د افراطي ټکي تیپ یا ډول، دا په دې معنا چې د تابعګراف د x په یوه چاپیریال کې د هسې-ماتریکس له لارې تا کل کیږي. د $\mathrm{H}\,f(x)$ د ایګن ارزښتونو λ_i د مخنخښي له امله د لاندې ترمنځ توپیر کوي:

- هواره ټکی(یعنې په یوه سطحه پروت-) : ټول ایګن ارزښتونه λ_i صفر دي.

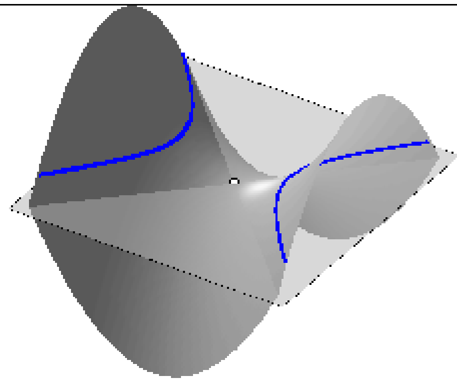
- هګېډوله یا بیضوي ټکی: ټول ایګن ارزښتونه λ_i د صفر سره نامساوي دي او برابرېیا همغه مخ نخښې لري. تابع f په دې حالت کې په x کې یو ځایز(لوکال) افراتیت لري

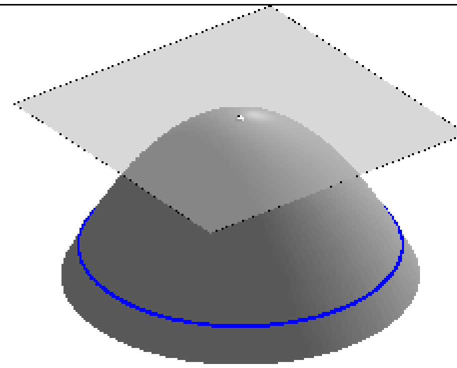
- هایپراپاربولیک ټکی : ایګن ارزښتونه λ_i شته د مختلفو مخنخښو سره. سړی x زینټکی هم بولي.

- پارابولیک ټکی: لږ تر لږه یو ایګن ارزښت λ_i صفر دی اونور ټول ا یګن ارزښتونه برابره مخنخښه لري.

په نخښهوني یا نوموني د جګکړښې له لارې په بی واریات حالت کې پاموړ یا جالبې دي، لکه دا چې په څېره کې کښل شوې دي.

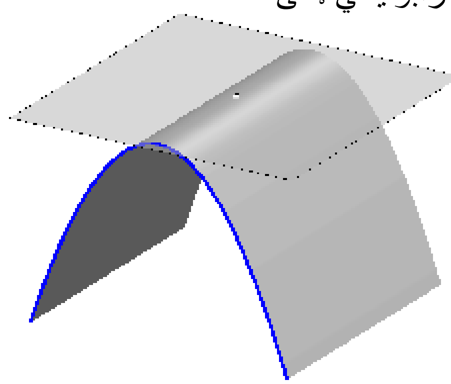
بیضوي ټکی	های پارابولیکي ټکی





د دوه متحولو یا اووښتونو د تابع ته
کیدی شي ډول یا ټیپ د هسي-ماتریکس
د دیترمینانت سره ټولګیز کړو. که
$< 0 \quad \det(\mathrm{H}\, f) > 0$
( ) وي،نو ادا
یو افراطیت دی(یو زینتکی دی).
د یوه مینیموم همداسي ماکسیموم لپاره
$< 0 \quad \mathrm{Spur}(\mathrm{H}\, f) > 0$
همداسي
دی. که دیترمینانت له منځه لاړه یا
ورکه شي او هسي- ماتریکس صفرنه
وي، نو ټکی پارابولیک دی.

پارابولیکي ټکی



لیکونکي: هیولیک، وایس

د تابع

$$f(x,y) = y(1 - x^2 - y^2)$$

افراطي(کریتیکي kritischen) ټکي همداسي ټیپ وټاکل شي. د دې لپاره سرې لومړی ګرادینت جوړوي او بیا د هسي – ماتریکس:

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} -2xy \\ 1 - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}\, f = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ -2x & -6y \end{pmatrix}.$$

له

$$\operatorname{grad} f = 0 \quad \iff \quad xy = 0 \quad \wedge \quad x^2 = 1 - 3y^2$$

څخه د انحرافي ټکي په څير

$$\left(0, \pm 1/\sqrt{3}\right), \qquad (\pm 1, 0),$$

لاسته راځي. د هسي ماتريکس هر ځل دلاندې سره برابر دی

$$\begin{pmatrix} \mp 2/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \mp 6/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & \mp 2 \\ \mp 2 & 0 \end{pmatrix}$$

د $(x,y) = (0, \pm 1/\sqrt{3})$ لپاره دی $\det(\mathrm{H}\, f) > 0$ او $\operatorname{Spur}(\mathrm{H}\, f) = \mp 8/\sqrt{3}$.

له دې سره په $(0, -1/\sqrt{3})$ کې يومينيموم او په $(0, 1/\sqrt{3})$ کې يو ماکسيموم شتون لري.

د $(x,y) = (\pm 1, 0)$ لپاره باور لري

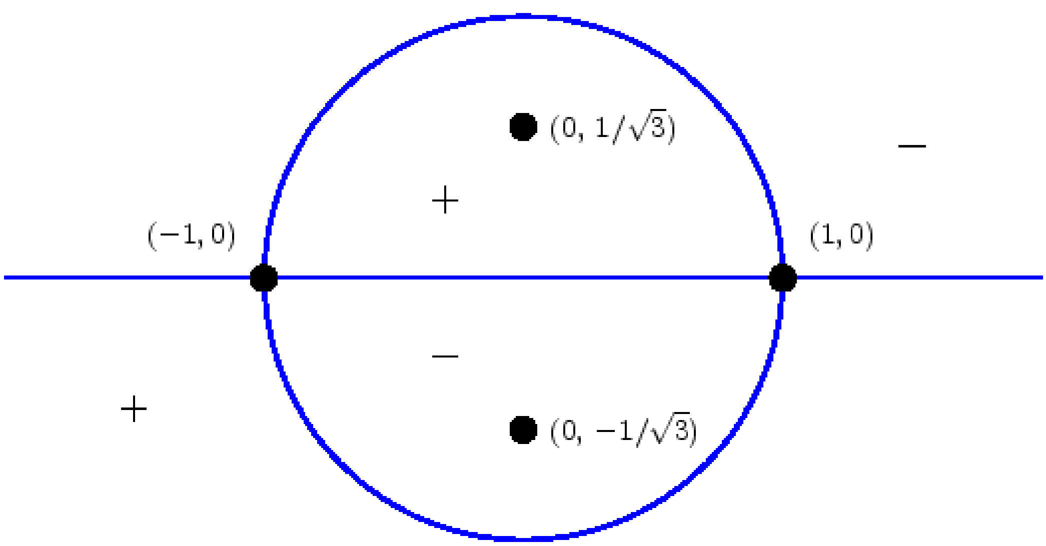
$$\det(\mathrm{H}\, f) = -4 < 0,$$

نو دلته يو زينټکی شته.

د کريميکيټکو تيپ کيدی شي د صفرځايتوکواو د f له دې څخه ورکړ شوو مخنخښنو وېشنو له لارې وپيژندل شي. د f ضرب بڼې لاس ته راځي

$$f(x,y)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad y=0 \quad\vee\quad x^2+y^2=1\,,$$

داا په دي معنا چي د صفرځايډيرئ د x –محور G او يونګردئ C څخه جوړ دی. د G يا C پل اړولو سره مخنخښه بدليږي. په غوښتکوکي $\operatorname{grad} f$ ورکيږي، ځکه لورمشتقونه د G او C په اوږدوالي کې صفر دي. د مخ نخښي بدليدني په بنسټ دا يو زينتکی دي. د يوون)واحد)ګردئ تيکلي په نيمايي، چې د صفرتکيډيرئ څخه يي ژئ جوړيږيو بايد هر ځل يو افرطيت شتون ولري، ځکه چې ډيرئ کړمپکټ ده او f په ژئ صفر دی. د مثبت تابع ارز/شت سره دا يو ماکسيموم دی او د منفي سره يومينيموم.



ليکونکي: بوسلي، هيوليګ

د تابع

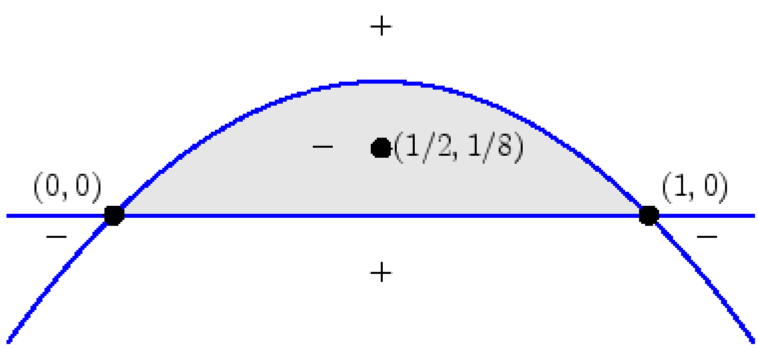
$$f(x,y)=(y-x+x^2)y$$

لپاره

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} (-1+2x)y \\ 2y - x + x^2 \end{pmatrix}$$

دی.

دا انحرافي ټکي critical pointله دې امله $(0,0),\ (1,0),\ (\frac{1}{2},\frac{1}{8})$ دي. تيپ يا ډول کيدی شي د f د مخنخښي ويش څخه وټاکل شي.



د x –محور سره د پارابولونو غوښتکي(د تقاطع نقطي) زين ټکي دي، ځکه چې په f چاپيريال کې زيايز(مثبت٩ او کميز(منفي) ارزښتونه شتون لري. په خړه روښو ؟؟ کې صفر په ژئ يا غاړه دی او کميز ارزښت په دننه کې، بايد هلته لږترلږه يو ځايز يا لوکال مينيمومشتون ولري.

شميرپوهنيزدا تبوپيا ډول د هسي-ماتريکس په مرسته فصديقيدی شي.

$$\operatorname{H} f = \begin{pmatrix} 2y & 2x-1 \\ 2x-1 & 2 \end{pmatrix}.$$

د انتقادي يا انحرافي ټکيلپاره لاس ته راوړو

$$\mathrm{H}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}\, f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}\, f(1/2,1/8) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

په لومړیو داوړو ټکو کې د هسي-ماتریکسدیترمینانت کمیز دی، ټکي لکه انتظار چې کیده زینټکي دي. په $(1/2,1/8)$ کې دیترمینانت او شپور Spur زیاتیز یا مثبت دي، پس دلته یو ځاییز یا لوکال مینیمومو لرو

(Autoren: Höllig/Reble)

د ډېرو متحولو- یا مولتیواریات توابعو افراطیت

xtrema multivariater Funktionen

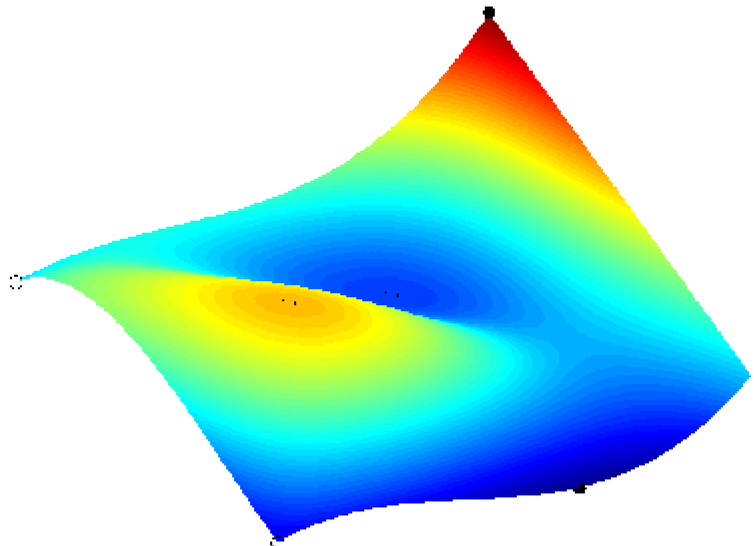
که $f(x_*)$ د x_* په یوه چاپیریال د یوه ناپریکیدونکي مشتقوړ سکالار تابع f مینیموم(ماکسیموم) وي، نو باور لري

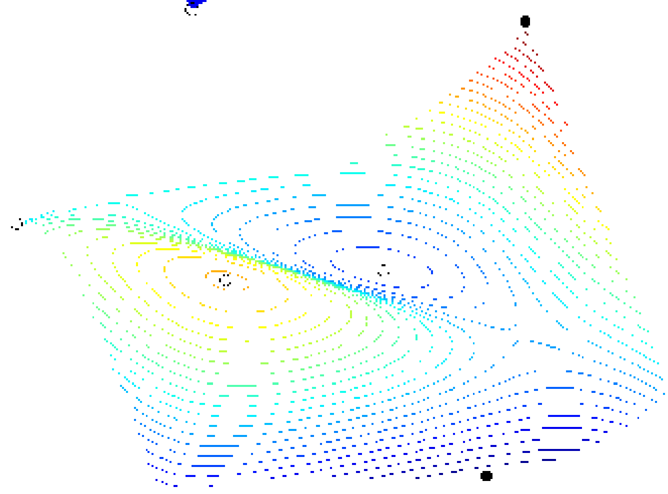
$$\operatorname{grad} f(x_*) = 0\,.$$

یو پورهکید ونکیشرط دی، چې برسیره پردې د هسی-ماتریکس ټول ا یګن ارزښتونه په انحرافټکي x_* زیاتیز یا مثبت(کمیزیا منفي) وي.

که ایګن ارزښتونه د مختلفومخنخښو سره شتونولري، نو دا یو زینټکی دی، یعنې ځایز یل لوکال افراطيټکی نه دی. که د صفر سره نابرابرو ایګن ارزښتونو د برابر منخنخښې سره لږتر لږه یو ایګن ارزښت صفر وي، نو د احرافي یا انتقادي اټکي x_* تيوپ يا ډول د دويممشتق له لارې نه شي ټولګيز(صنفي) کيدی يعنې چې په کومه ډله يا ټولګي کې دی. ځاييز مينيموم(ماکسيموم) کيدی شي د تعريف ورشو D د ژئ ټکو په څير هم رامنځ ته شي. په دې حالت کې بايد لوريز مشتق $\partial_v f(x_*)$ د D په منفي ښودونکي لپاره لور v مثبت(منفي) وي.

د يوه سکالار تابع f يو ځاييز افراطي ټکی په يوه ډيرئ D يا انحرافي ټکی دی(دا په دې معنا چې $\operatorname{grad} f = 0$)، يو ژئ ټکی يا د ټوټه – پارشل مشتق پريکيدونکی ځای دی. کيدی شي په دې ځايونو کې مينيموم او ماکسيموم په دې ټکو کې د تابع ارزښتونو د پرتلې له لارې وشميرل شي.





ځيرونه يا تابع مختلف امکانات ښايي. دلته ځاييز افراطي ټکي په ګردئ او ګلوبال يا ټوليز افراطي ټکي په ټکو سره په نخښه شوي دي.

ليکونکي: بوسلي، هيوليک، وايس

د کرښو په اوږدو تابع f راوړو او د په خوښه لور v لپاره تعريفوو

$$g(t) = f(x_* + tv)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

که f په x_* کې یو ځایيز افراطیت ولري، نو g په $t=0$ کې یو افراطیت لري.

پایله یې ده

$$0 = g\prime(0) = (\operatorname{grad} f(x_*))^{\mathrm{t}} v = \partial_v f(x_*)\,.$$

دا چې v په خوښه ټاکلی وو، باید ګرادینت په x_* کې ورکشي.

د مینیموم لپاره د f تعریفورشو تنها په ژئ لاس ته راځي، چې د D په دننه لور ښودونکي وکتور v لپاره لوریز مشتق ورکیږي. تنها په داسې لورو g د $t=0$ په یوه چاپیریال کې په یوه ښي اړخیز چاپیریال کې یو غړیز جګیدونکی دی. د یوه ما کسیموم لپاره په ورته توګه دلا یل راوړل کیږي

که $\operatorname{H} f(x_*)$ فقط مثبت ایګن ارزښتونه ولري، نو د وکتور v لپاره د $|v|=1$ سره باور لري

$$v^{\mathrm{t}} \operatorname{H} f(x_*) v \geqslant c > 0\,.$$

د دویم مشتق د ناپریکیدنې له امله دا چاپیریال د c په خای کې د یوې ثابتې $c/2$ سره همداسې د x_* په یوه چاپیریال U کې تیک پاتې کیږي. د g د تیلور- ودیزیینې سره لاس ته راځي

$$g(t) = g(0) + \underbrace{g\prime(0)t}_{=0} + \frac{1}{2} g''(\theta t) t^2$$

د $\theta \in [0,1]$ سره. د

$$g''(\theta t) = v^{\mathrm{t}} \operatorname{H} f(x_* + \theta t v) v^{\mathrm{t}}$$

له امله د 0 په نږدې کې د t لپارهلاس ته راځي

$$g(t) \geqslant g(0) + (c/2)t^2 ,$$

دا په دې معنا چې f په هره لور په x_* کې يو ځا ييز مينيموم لري. د ماکسيموم د پوره کيدونکو شرايطو د لاس ته راوړلو لپاره په ورته توګه مخ ته تلل کيږي.

ليکونکي: هيوليګ، وايس

د مربع تابع

$$f(x) = \frac{1}{2}x^t Ax - x^t b + c$$

ګرادينت د سيومتري ماتريکس A سره دی

$$\operatorname{grad} f = Ax - b$$

او A د هسې-ماتريکس دی. ځاييز يا لوکال افراطي ځايونه د کرښيز مساوات سيستم $Ax = b$ حلونه دي.

که د A ا يګن ارزښتونه مثبت يا منفي وي، نو $\det A \neq 0$ دی او د مساوات $Ax = b$ يواځنی حل د f يواځنی ځاييزاو همداسې ټوليز افراطيت دی.

د ځرګندې بيلګې لپاره

$$f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + \frac{3}{2}y^2 + x + 4y - 3$$

دی

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

د

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

حل $(x,y) = (1,-2)$ دی. دا چې $\det A = 5$ او $\operatorname{Spur} A = 6$ مثبت دي، نو A مثبت ایګنارزښت لري،او (x,y) د f ټولیز مینیموم دی

ليکونکي: هيوليګ، وايس

غواړو د تابع

$$f(x,y) = \cos x + \cos y + \cos(x+y).$$

ځاییز اکسترما پیدا کړو، چې f نسبت x او y ته 2π-پریودیک دی او پسې هم $f(y,x) = f(x,y) = f(-x,-y)$ بسیا کوي،چې د f $(-\pi,\pi] \times [0,\pi]$.

په ورشوکې وڅېړو. د ټوټه مشتق ژئ ټکي او پریکیدنځایونه په پام کې نه نیول کیږي. نو باید انحرافي ټکي پیدا شي.

له

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} -\sin x - \sin(x+y) \\ -\sin y - \sin(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لاس ته راځي $\sin x = -\sin(x+y) = \sin y$، نو د $y \in [0,\pi]$ لپاره په ځانګړې توګه $x = y$ یا $y = \pi - x$. دواړه امکانات یو له بل بیل څېړل کیږي.

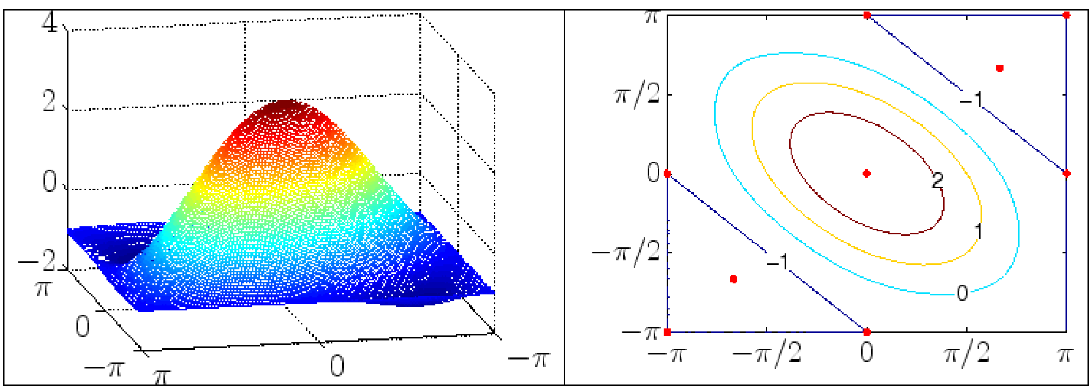
(i) $x = y$:
له

$$\sin x = -\sin(2x) = -2\sin x \cos x$$

په اړونده ورشو کې انحرافي ټکي $(0,0)$، (π,π) او $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ لاس ته راځي.

(ii) $y = \pi - x$:

له $\sin(x) = -\sin(\pi) = 0$ انحرافي ټکي $(0,\pi)$ او $(\pi,0)$ لاس ته راځي.



د تابع ارزښتونو د پرتلې څخه، چې د مشتق څخه رانیول کیدی شي، پیژندل کیږي، چې $(0,0)$ یو ځاییز ماکسیموم د ارزښت $f(0,0) = 3$ سره دی او $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ یو تولیزمینیموم د ارزښت $f\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3}{2}$ سره دي.

د بل انحرافي ټکي دول یا ټیپ کیدی شي د هسي ماتریکس Hesse Matrix

$$\mathrm{H}\, f = \begin{pmatrix} -\cos x - \cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -\cos y - \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

سره وټاکل شي. په ټکي (π,π) کې

$$\mathrm{H}\,f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

دی.

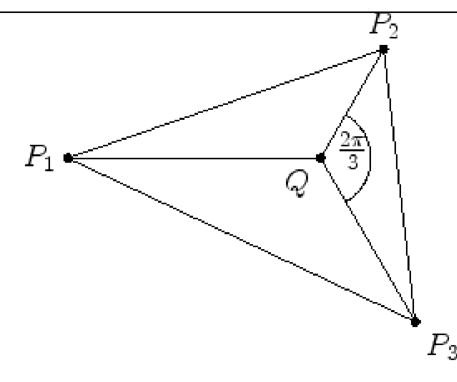
دا چې دیترمینانت منفي دی،نو دا یو زینټکی دی. ټکي $(\pi,0)$ او $(0,\pi)$ د سیومتري له امله یو بل سره enstsprechenورکوي. د هسې-ماتریکس

$$\mathrm{H}\,f = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}\,f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

هم منفي دیترمینانت لري. له دې امله هم دا یو زینټکی دی.

نو په ټولیزه توګه ټکي $(2k\pi, 2l\pi)$ ($k,l \in \mathbb{Z}$) د ټولیز ماکسیموم او ټکي $(\frac{2\pi}{3}+2k\pi, \frac{2\pi}{3}+2l\pi)$ همداسې $(-\frac{2\pi}{3}+2k\pi, -\frac{2\pi}{3}+2l\pi)$ د ټولیزمینیموم په حیث لاس ته راځي

لیکونکي: هیولیګ، وایس

د شتاینرSteiners پرابلم په دې کې پروت دی،چې یو ټکی $Q \in \mathbb{R}^2$ وټاکي، د کوم لپاره چې ورکړ شوو ټکو P_i د واټنونو زیاتون یا جمعه مینیمال شي.دا ساده ځانګړی حالت یې په څیره کې ورکړ شوی دی. د درې ټکو P_1 ، P_2 ، P_3 لپاره Q یا د یوه ټکي سره سر	

	خوري يا د ټول ټكو جوړو لپاره دی $\sphericalangle(P_i, Q, P_j) = 2\pi/3$

د دې لپاره چې غوښتل شوی خويونه(خوي) وښايو، d_i دي د $Q = (x, y)$ او $P_i = (x_i, y_i)$ ترمنځ واټن وښايي، دا په دې معنا چې

$$d_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 .$$

د ځنزيريقانون له مخې لاسته راخ

$$2d_i \frac{\partial d_i}{\partial x} = 2\,(x - x_i)$$

لاسته راځي. همداسې

$$\frac{\partial d_i}{\partial x} = \frac{x - x_i}{d_i}$$

اوپه اړونده ډول $\frac{\partial d_i}{\partial y} = \frac{y - y_i}{d_i}$. د واټن تابع ګرادينت ،

$$\operatorname{grad} d_i = \frac{1}{d_i} \begin{pmatrix} x - x_i \\ y - y_i \end{pmatrix} ,$$

له دې امله يويوون يا واحد وكتور دی، كوم چې له P_i د ټكي Q په لور ښايي.

د

$$f = d_1 + d_2 + d_3$$

مینیموم به شي

ماکسیموم د له ټکو P_i څخه په یوه کې و نه نیول شي، په کومو کې چې $\operatorname{grad} d_i$ پریکیدونکیدی، نو باید په مینیموم کې

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

باورولري. د وکتورګرادینت د برابر اوږدوالي په بنسټ له دې لاسته راځي، چې که دا یو په بل کینول شي یو برابراړخیزدرېګوډی جوړوي. د دوي ترمنځ کونج له دې امله برابره دی په $2\pi/3$.

لیکونکي: بوسلي، هیولیک، وایس

د لانګرانژ ضریبونه(څلووني) *Lagrange-Multiplikatoren*

که د څنګیزو شرایطو $g_i(x) = 0$ لاندې x_* د سکالار تابع f یوځاییز افراطي ځای وي، نود لاګرانژ ضریب λ_i شتون لري، داسي چې

$$f'(x_*) = \lambda^{\mathrm{t}} g'(x_*)\,.$$

دلته وړاند نیونه کیږي، چې f او g د x_* په یوه چاپیریال کې ناپرېکیدونکي مشتقوړ دي او د جاکوبي-ماتریکس $g'(x_*)$ پوره رانګ لري.

د فقط یوه فرعینژ – شرایط ساده بنه

$$\operatorname{grad} f(x_*) \parallel \operatorname{grad} g(x_*)\,,$$

لري که $\operatorname{grad} g(x_*) \neq 0$ وي،د ا په دې معنا و چې د f او g نیوو سطحې یو بل په افراطي ځای کې لمسوي.

د لاګرانژ شرطونه پوره کیدونکینه دي، چې پریکړه وکړي، چې یو لوکال افراطیت مو مخ ته پروت دی او یا مینمومو یا ماکسیموم دی. دا د نورو معلوماتو په مرسته کره کیدی شي.

ټولیزه افرا طیت د توابعو د پرتلي په اساس په ټکو کې کیدی شي، کوم چې د لاګرانژ شرطونه پوره کړي، کوم چې په ورکړ شوي حالت کې هغه د ورکړ شوې ډیرئ په ژئ او یا د g' په رانګ ضایع سره.

لیکونکي: بوسلي، هیولیګ، وایس

n دې د اووښتونو ګڼونن یا تعداد وي او m دې فرعي یا څنګیز شرایط وي.

د $m \geq n$ لپاره نه ښوول کیږي، ځکه چې یو په خوښه n–وکتور د n د کرښیز کمبینشن په حیث د g' دکرښیزو خپلواکو لیکو په څیرانځورور دی.

د $m < n$ لپاره دې $x = (u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ یو د اووښتونو یا واریبلو ټوټه ونه وي، د کوم سره چې د ممکنه پرموتیشن د $g_u(u_*, v_*)$ په څټوړوالی یا برعکس وړوالی له وړاندې نیول شوی وي. نو د ایمپلیځیت تابع جملې د فرعي شرایطو له مخې ځاییز حلوړ دی:

$$g(u,v) = 0 \Leftrightarrow u = \varphi(v), \quad v \approx v_* \,.$$

په تعقیب په یوافراطي ټکي د تابع $v \mapsto f(\varphi(v), v)$ ګرادینت ورکیږي:

$$f_u(u_*, v_*)\varphi'(v_*) + f_v(u_*, v_*) = 0 \,.$$

د ځنګيز يا فرعي شرايطو $g(\varphi(v),v)=0$ مشتقيدو له لارې پسې لاسته راځي

$$\varphi'(v) = -g_u(u,v)^{-1}g_v(u,v).$$

په ګرادينت کې د φ' اينسوولو پسې کتل کيږي، چې د

$$\lambda = f_u(u_*,v_*)g_u(u_*,v_*)^{-1}$$

سره مساوات

$$f_u = \lambda g_u, \quad f_v = \lambda g_v,$$

کوم چې د $f' = \lambda g'$ شرايطو u - او v -کمپوننتونه په ګوته کوي، په ټکي (u_*,v_*) کې پوره دي.

ليکونکي: هيوليک، وايس

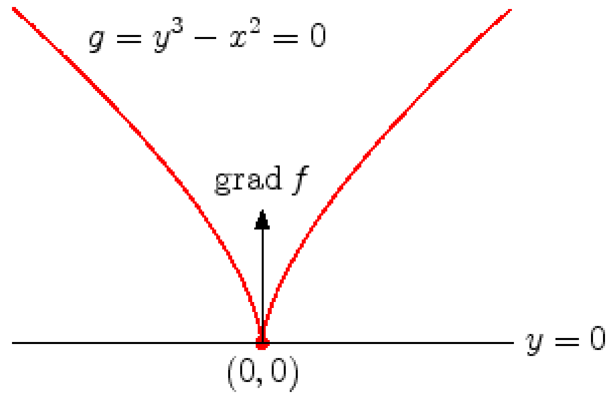
تابع

$$f(x,y) = y$$

لاندې فرعي شرطونه لري

$$g(x,y) = y^3 - x^2 = 0$$

په څرګند ډول په $(0,0)$ کې يو ځاييز يا لوکال مينيموم.



په هر حالت د لاګرنز-شرطونه $(f_x,f_y)+\lambda(g_x,g_y)=0$ نه دي پوره:

$$(0,1)+\lambda(-2x_*,3y_*^2)\neq(0,0).$$

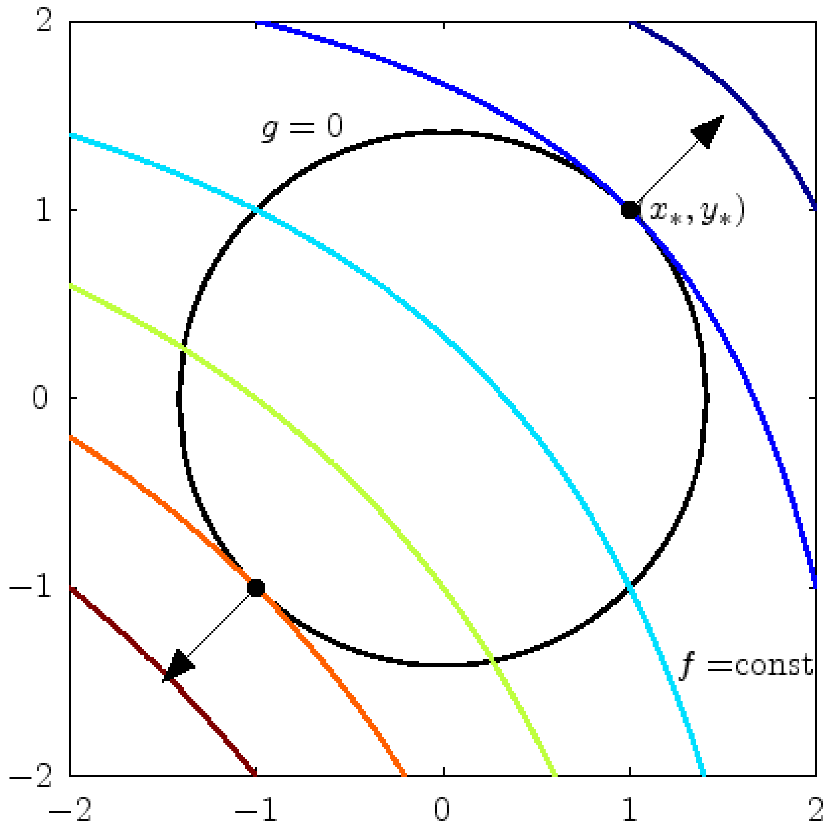
دا له دي امله چېد جاکوبي-ماتريکس $g'(x_*,y_*)=(0,0)$ پوره رانک نه لري. د g ځاييز حالت د جګ نظم ترمونو له لارې تشريح دي. د لاګرانژ-شرطوه په داسي يوه سينګولار ټکي کې استعمالوړ نه دي.

ليکونکي: هيوليک، وايس

د يوه بيواريات تابع $f(x,y)$ د افراطي ځای لپاره د فرعي يا څنګيزو شرايطو $g(x,y)=0$ لاندي باور لري

$$(f_x,f_y)=\lambda(g_x,g_y),$$

دا په دي معنا چې ګراد g وګراد f ته غبرګ دی. د نورو کلمو سره د f د نيو سطحې په ټکي (x_*,y_*) کې د g له لارې تعريف شوې کرې سره تانجنتي ده يا تانجنت جوړوي.



په ځيره کې په روښانه توګه ښوول شوې بيلګه کې

$$f(x,y) = (x-3)(y-3) \rightarrow \min\,, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$$

د لاګرانژ-شرايط په لاندې توګه دي

$$(y-3, x-3) = \lambda(2x, 2y)\,.$$

د λ له منځه وړنه راکوي

$$y(y-3) - x(x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y-x)(x+y-3) = 0\,.$$

د فرعي شرايطو $x^2 + y^2 - 2 = 0$ سره په تړاو ممکنه افراطي ځايونه $(1,1)$ او $(-1,-1)$ لاس ته راځي. دا چې يوناپريکيدونکی تابع په يوه کومپکته ډيرئ هم

مینیموم او هم ماکسیموم لري، د تابع ارزښتونو پرتله يې ښايي، چې f په $(1,1)$ کې مینیمال او په $(-1,-1)$ کې ماکسیمال کیږي.

لیکونکي: هیولیگ، وایس

د

$$f(x,y,z) = x + 2y - z$$

افراطییت غاړو پیدا کړو د لاندې فرعي شریطو لاندې

$$x^2 + y^2 - 8 = 0, \quad x + z - 4 = 0\,,$$

کوم چې د توتې(استوانې) غوڅی(تقاطع) د یوې سطحې سره یوه هګۍ تشریح کوي یا ورکوي.

د فرعي طریطو لاندې د جاکوبې-ماتریکس دی

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

دا فقط د $x = y = 0$ لپاره پوره رانګ نه لري. دا حالت د فرعي سرایطو په اساس نه شیرامنځ ته کیدی. یوه افراطیت (x,y,z) ته پسې هر ځل د لاګرانژ-ضریبونه λ_1, λ_2 داسې شتون لري،چې

$$(1,2,-1) = (\lambda_1, \lambda_2) \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

همداسې

$$1 = 2\lambda_1 x + \lambda_2$$

$$2 = 2\lambda_1 y$$

$$-1 = \lambda_2 .$$

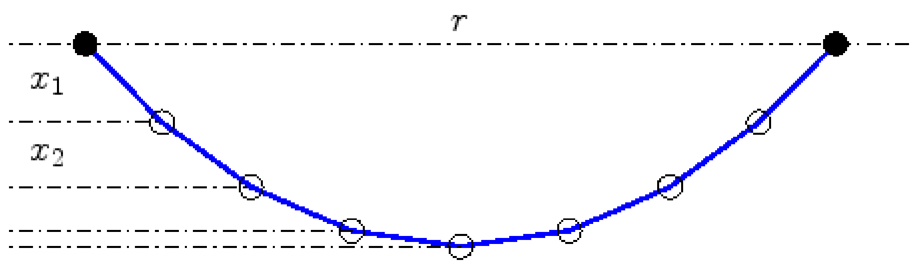
که $\lambda_1 = 1/y$ او $\lambda_2 = -1$ په لومړي برابرون یا مساوات کې ځای په ځای شي، نو $x = y$ ترې لاسته راځي. د فرعي شرایطو څخه ممکنه افرطیت $(2,2,2)$ او $(-2,-2,6)$ لاس ته راوړل کیږي. دا چې په هګۍ باندې مینیموم او هم ماکسیموم باید شتون ولري، د تابع ارزښت

$$f(-2,-2,6) = -12 < 4 = f(2,2,2)\,,$$

پرتله کونه یې ښایي، داسې چې f په $(-2,-2,6)$ کې مینیمال او په $(2,2,2)$ کې ماکسیمال کیږي.

(Autoren: Höllig/Weiß)

اوس دې په دوه ټکو ځوړند شوي ځنزیر د ځنزیر غړي $2n$ سره برابروزنځای د 1 اوږدوالي سره وټاکی شي.



د ځيرې څخه په نخښهونې سره مو د پوتنشل انرژي مینیمي کوني یا کمونې ته بیایي

$$-\left(\frac{x_1}{2}\right)-\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)-\cdots-\left(x_1+\cdots+x_{n-1}+\frac{x_n}{2}\right)$$

په دې پرابلم د سیومتري په استعمال

$$f(x)=-a_1x_1-\cdots-a_nx_n\to\min\,,$$

$$g(x)=r/2-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i^2}=0\,,$$

د $a_i=n-i+1/2$ سره.

د لاګرانژ-شرطونه په لاندې توګه دي

$$a_i=\lambda\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i^2}}\,,\quad i=1,\ldots,n\,.$$

دا کیدی شي د x_i پسې مربع(ځلورئ-) کونې سره حل شي:

$$x_i^2=\frac{a_i^2}{a_i^2+\lambda^2}\,.$$

په فرعي شریطو کې د اینوولو سره لاندې برابرون راکوي

$$\frac{r}{2}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{\lambda^2}{a_i^2+\lambda^2}}\,,$$

له هغه چې λ او له دې سره x_i نومریکټاکل کیدی شي.

مربعیزه(څلورئ ییزه) مینیمال کونه د کرښیز برابرونشرلیطو سره

Quadratische Minimierung mit linearen Gleichungsbedingungen

مربعیزه اوپټیمي کونې پرابلم Optimierungsproblem

$$\frac{1}{2}x^{\mathrm{t}}Gx - c^{\mathrm{t}}x \to \min, \quad Ax = b\,,$$

ټیک هلته حل کیدونکې دی، که وکتور b د ماتریکس A په څېره- ورشو کې پروت وي او سیومتریک ماتریکس G د A په زړي مثبت سیمیدیفینیت وي.

ټول حلونه x_* د لاګرانژ-شرطونه

$$\begin{pmatrix} G & A^{\mathrm{t}} \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$$

د یوه لاګرانژ-ضریب λ سره پوره کوي. حل یواځنی دی، که $\operatorname{Kern} A \cap \operatorname{Kern} G = 0$ وي.

که G برعکس کیدونکی وي، ن و کیدی شي بلاکسیستم په ګډه یا په دله حل شي.

سړی لومړی د لاګرانژ –ضریب ټاکي

$$AG^{-1}A^{\mathrm{t}}\lambda = AG^{-1}c - b$$

او له

$$Gx_* = c - A^{\mathrm{t}}\lambda .$$

اوپتیمال وکتور لاسته راوړي.

دا داسې په نامه د شور-کمپلیمنت-متود Schur-Komplement-Methode په ځانګړې توګه هلته موخه ور دی، که G^{-1} ساده وټاکل شي او یا فقط فرعي شرایط شتون ولري.

لیکونمکي: هیولیګ، هیورنر، پفایل

Q دې یو ماتریکس وي، چې مټه یا درز یې د A د زړې لپاره یو بنسټ جوړوي، او y یو وکتور چې اجازه ولري، دا په دې معنا چې $Ay = b$. یو اجازه وکتور x کیدی شي چې په لاندې بڼه ولیکل شي

$$x = y + Qz$$

.

که په موخه تابع کې ولیکل شي نو لاس ته ترې راځي

$$(Qz)^{\mathrm{t}}Gy = y^{\mathrm{t}}GQz$$

$$\frac{1}{2}z^{\mathrm{t}}Q^{\mathrm{t}}GQz - (Q^{\mathrm{t}}c - Q^{\mathrm{t}}Gy)^{\mathrm{t}}z + \frac{1}{2}y^{\mathrm{t}}Gy - c^{\mathrm{t}}y .$$

د دې مربع تابع یو مینیموم z_* تیک هلته شتون لري، که $Q^{\mathrm{t}}GQ$ مثبت دیفینیت وي، او په دې حالت کې پوره کړي

$$Q^{\mathrm{t}}GQz_* = Q^{\mathrm{t}}(c - Gy) .$$

دا چې دی

$$Q^{\mathrm{t}}u = 0 \Leftrightarrow u \in (\operatorname{Kern} A)^{\perp} \Leftrightarrow u \in \operatorname{Bild} A^{\mathrm{t}}\,,$$

نو ورته کرکتريسک کيدنه لاس ته راځي

$$G(y + Qz_*) - c = A^{\mathrm{t}}(-\lambda)\,,$$

يعني د لاګرانژ-شرايط.

حل z_* يواځنی دی، که G د A په زړي مثبت ديفينيت وي، يعنې که $\operatorname{Kern} A \cap \operatorname{Kern} G = 0$ وي.

د ډلې يا بلوک سيستم لاندې باندې gestaffelte اينسوول شوی حل لاس ته راځي، په کوم کې چې لومړی حل

$$Gx_* + A^{\mathrm{t}}\lambda = c$$

د کيڼ لورد AG^{-1} سره ضرب کړي او بدل يا سبستيتوه $b = Ax_*$ يې کړي.

ليکونمکي: هيوليګ، هيورنر، پفايل

د اوپټيمي کوني پرابلم حل غواړو پيدا کړو

$$x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x \to \min$$

د لاندې فرعيشرايطو لاندې

$$x - 2y = 1\,.$$

دا پرابلم $\frac{1}{2}x^tQx - c^tx \to \min$ ، $Ax = b$ د

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = (1, -2), \quad b = 1 .$$

سره په ګوته کوي

په ساده توګه اجازه لرونکي ټکي شتون لري او دا چې Q مثبت ديفينيت دی،يو واځنی حل (x_*, y_*) شتون لري، کوم چېډ لاګرانژ ـشرايطو

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ټاکل کيدی شي. لاسته راځي

$$x_* = -\frac{2}{5}, \quad y_* = -\frac{7}{10}, \quad \lambda = -\frac{9}{5} .$$

ليکونکي : هيوليک، وايس

د بيلګي په توګه مربع تابع

$$\frac{3}{2}x_1^2 + 4x_1x_2 - \frac{3}{2}x_2^2 + x_3^2 - 5x_1 + 4x_3$$

د فرعي شرايطو

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$$

لاندې مينيمي کيږي

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$$

د

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = -2$$

دا پرابلم لاندې ستاندارد بڼه لري

$$\frac{1}{2}x^{\mathrm{t}}Gx - c^{\mathrm{t}}x \to \min, \quad Ax = b\,.$$

د دې پرابلم حل باندې چې پریکړه کوو، نو لومړی د A د زړې لپاره یوبنسټ یا باسیس $\{q_1, q_2\}$ ټاکو:

$$(q_1, q_2) = Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

بیا جوړوو

$$S = Q^{\mathrm{t}}GQ = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\,.$$

دا چې د S دیترمینانت او شپور مثبت دی، نو S مثبت دیفینیت دی، او له دې سره د اوپتیمیریکولوپرابلم یو یوائنی حل لري. دا کیدی شي د کون-تکر-شرطونو -Kuhn-Tucker-Bedingungen سره و ټاکل شي:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x_{*,1} \\ x_{*,2} \\ x_{*,3} \\ \hline \lambda \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 0 \\ -4 \\ \hline -2 \end{array}\right).$$

سړی $x_* = (1,0,-3)^t$ او $\lambda = 2$ لاس ته راوړي.

په بدیله توګه سړی کړی شي د شور-کمپلمنت-متودوکاروي.

سړی لومړی ماتریکس G برعکس کوي:

$$G^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 25/2 \end{pmatrix}.$$

بیا د برابرون $AG^{-1}A^t\lambda = AG^{-1}c - b$ څخه سړی λ ټاکي:

$$-\frac{1}{2}\lambda = -3 + 2 \implies \lambda = 2.$$

د کون-ټرکر-شرایط مو لومړی برابرونډله یا -ګروپ

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{*,1} \\ x_{*,2} \\ x_{*,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},$$

مو بیرته حل $x_* = (1,0,-3)^t$ ته بیایي.

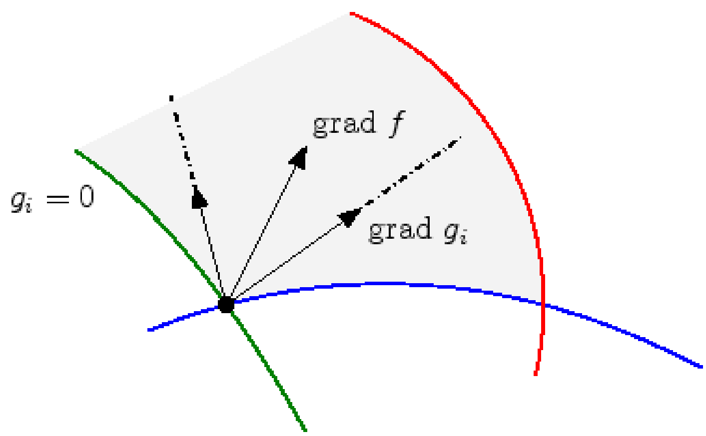
لیکونمکي: هیولیګ، هیورنر، پفایل

د کون-تکر-شرطونه(*Kuhn-Tucker-Bedingungen*)

که x_* د فرعي شرايطو $g_i(x) \geq 0$ لاندې د سکالار تابع f يو مينيموم وي او د فعال برابرونونو $g_i(x_*) = 0$ ، $i \in I$ گرادينت کربشيز خپلواک وي، نو د لاگرانژ-ضريبونه $\lambda_i \geq 0$ شتون لري، داسي چې ترې لرو

$$\operatorname{grad} f(x_*) = \sum_{i \in I} \lambda_i \operatorname{grad} g_i(x_*) .$$

د لوکال ماکسيموم لپاره په ورته توگه $\lambda_i \leq 0$ دی.



د مينيموم لپاره د کون-تکر شرطونه ځمککچيز يا هنسي په دې معنا دي، چې د موخه تابع گرادينت چې د فعال فرعي شرايطو څخه خور شوی مخروط (کربنه ، کربنه) کې پروت دی.

پيژنددېرى يا ايندکسدېرئ I کيدی شي ايمپليځيت د شراطو

$$\lambda^{t} g(x_*) = 0 , \qquad \lambda \geq 0 ,$$

لاندې کره شي. که $g_k(x_*) > 0$ وي،نو لرو $\lambda_k = 0$ ، دا په دې معنا چې ناساده يا ناتريويال ضريبونه فعال شرايط په ګوته کوي.

ليکونکي: هيوليګ، وايس

سرې بايد د x_* په چاپيريال کې فعال شرايط په پام کې ونيسي، ځکه چې نابرابرونونه $g_j(x) > 0$ ، $j \notin I$ په يوه د x_* چاپيريال کې ټيک پاتيږي. تابع f په روښانه توګه په يوه وړه ډيرئ هم مينمال پاتيږي، چې د برابرون شريطو $g_i(x) = 0$ له لارې ورکول کيږي. له دې امله د لاګرانژ-ضريبونوجملې څخه غوښتل شوی کټمتوالی لاس ته راځي. اوس فقط بايد وښوول شي، چې $\lambda_i \geq 0$.

کيدی شي د يوه $k \in I$ لپاره (وړاند) نيونه $\lambda_k < 0$ مو تضا د يا مخامخوالي ته بوزي. د ګرادينت د کرښيز خپلواکوالي يو وکتور v شتون لري د

$$(\operatorname{grad} g_k(x_*))^{\mathrm{t}} v = 1, \quad (\operatorname{grad} g_i(x_*))^{\mathrm{t}} v = 0,\ i \in I \backslash k\,,$$

سره، چې د g_i ، $i \neq k$ له لارې تعريف شوې سطحې تنجنتي هوارې (سطحی) باندې پروت دی. $t \mapsto x(t)$ دې په سطحه يوه کږه(منحني)وي د پيل ټکي $x(0) = x_*$ او پيل لور $x'(0) = v$ سره. د $t \to 0$ لپاره دی

$$g_k(x(t)) = g_k(x_*) + \left((\operatorname{grad} g_k(x_*))^{\mathrm{t}} v\right) t + O(t^2) = 0 + t + O(t^2)\,.$$

په کږه باندې ټکي د پوره کيدونکي کوچني $t > 0$ لپاره پريښودونکي (يعنې اجازه لرونکي) دي:

$$g_k(x(t)) \geq 0, \quad g_i(x(t)) = 0,\ i \in I \setminus k\,.$$

د v جوړښت له مخې او f کټمټوالي لپاره دی

$$\frac{d}{dt} f(x(t))_{|t=0} = (\operatorname{grad} f(x_*))^t v = \lambda_k (\operatorname{grad} g_k(x_*))^t v = \lambda_k < 0\,.$$

تابع fد کرښې په اوږدوالي کمیږي، د $f(x_*)$ د مینیمالوالي سره په تضاد یا مخامخ.

لیکونکي: هیولیګ، وایس

د کون-ترکر-شرایطو ښوولو ته د تابع $f(x,y) = y^2 - x$

افراطیت د

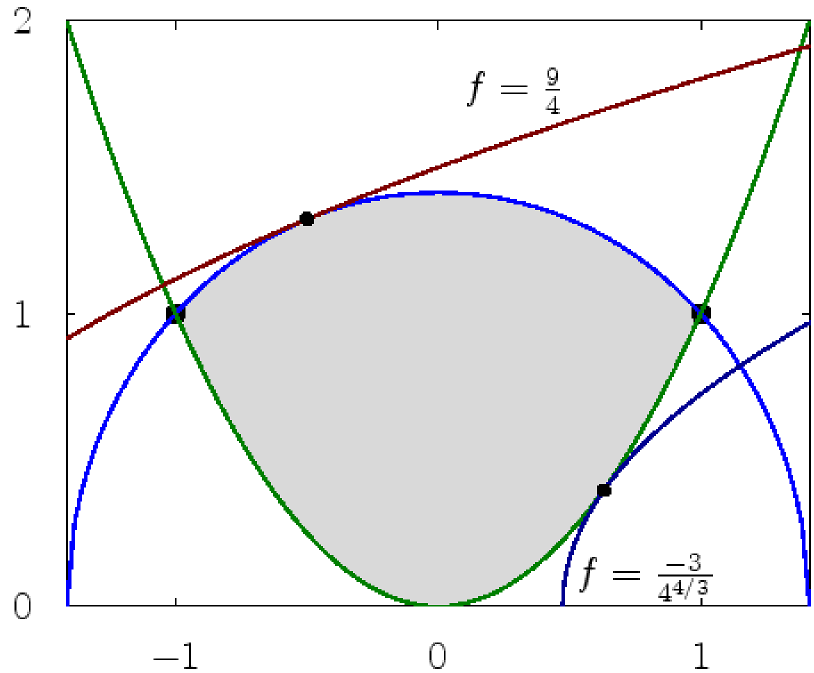
$$y - x^2 \geq 0\,, \quad 2 - x^2 - y^2 \geq 0$$

له لارې په تعریف شوي رونخړ ډیرئ D باندې ټاکو.

د کون-تکر-شرطونه دي

$$(-1, 2y) = \lambda(-2x, 1) + \mu(-2x, -2y)$$

$$\lambda(y - x^2) + \mu(2 - x^2 - y^2) = 0\,,$$



چيرته چې د لاګرانژ- ضريبونه λ او μ برابرې يا همغه مخنخښي لري. د څېرې څخه پيژندل کيږي، چې د معال څن\يز شرايطو د ټولو اجازه لرونکو ټکو لپاره کربنيز خپواک دي)(دا صفر نه دي او د ژيکړې په غوښتکو غبرګ نه دي).له دط امله د کون-تکر شرايط د ټولو اکستريم ارزښتونو لپاره اړيندي. په دې توګه يا داسې چې کوم څنګيز شرطونه فعال دي، بايد لاندې حالتونه وپيژندل شي:

(i) $\lambda = 0, \quad \mu = 0$ (کوم څنګيز شرط فعالنه دی):د $\operatorname{grad} f$ لپاره مساوات

$$(-1, 2y) = (0,0)$$

د پوره کېدووړ نه دی. په دې لاس ته راړنه د D په دننه کې f اکستريما نه لري.

(ii) $\lambda = 0, \quad \mu \neq 0$) $2 - x^2 - y^2 \geq 0$ فعال): له

$$(-1, 2y) = \mu(-2x, -2y)$$

$$2 - x^2 - y^2 = 0$$

په تعقیب $\mu = -1 < 0$ ($y = 0$ د $(\pm\sqrt{2}, 0) \notin D$ له امله ناشونی دی)،

$x = -1/2$ او $y = \sqrt{7}/2$. د یوه لوکال اکتریموم لپاره د کون – تکر – شرطونه پوره دي.

$\mu = 0$, $\lambda \neq 0$ (iii) ($y - x^2 \geq 0$ فعال): له

$$(-1, 2y) = \lambda(-2x, 1)$$

$$y - x^2 = 0$$

لاس ته راځي

$$\lambda = 2y = 2x^2 \geq 0\,, \quad -1 = (2x^2)(-2x) \Leftrightarrow x = 4^{-1/3}$$

او $y = 4^{-2/3}$.

د کون-تکر-شرطونه د یوه لوکال اکستریموم لپاره پوره دي.

$\mu \neq 0$, $\lambda \neq 0$ (iv) ($y - x^2 \geq 0$ او $2 - x^2 - y^2 \geq 0$ فعال): له

$$y = x^2 \quad \wedge \quad x^2 + y^2 = 2$$

لاس ته $(x,y)=(1,1)$ راځي یا $(x,y)=(-1,1)$. د $\operatorname{grad} f$ لپاره په مساوات کې ځای په ځای کوو نو راکوي

$$(-1,2)=\lambda(-2,1)+\mu(-2,-2) \quad \Rightarrow \quad \lambda=1\,, \quad \mu=-\frac{1}{2}$$

همداسې

$$(-1,2)=\lambda(2,1)+\mu(2,-2) \quad \Rightarrow \quad \lambda=1/3\,, \quad \mu=-\frac{5}{6}$$

د لاګرانژ ضرب د مختلفومختخښو له امله یا په بنسټ دواړه ټکي اکستریم ځایونه نه دي.

دا چې f په کومپاکت ډېرئ D هم ماکسیمومو او هم مینیموم لري، کېدی شي په ډول یې د لاګرانژ مختخښې په لاس پرېکړه وشي یا هم د تابع ارزښتونو د پرتلې په اساس. په تعقیب f په $(-1/2,\sqrt{7}/2)$ کې یو ماکسیموم او په $(4^{-1/3},4^{-2/3})$ کې یو مینیموم لري.

لیکونکي: هیلیک، پفایل

د مینیمي پرابلم لپاره

$$f(x)\to\min\,, \quad a_i\le x_i\le b_i$$

د کون-تکر-شرطونه د لوکالمینیموم لپاره

$$\operatorname{grad} f(x_*)=\sum_i(\lambda_i-\mu_i)\,e_i$$

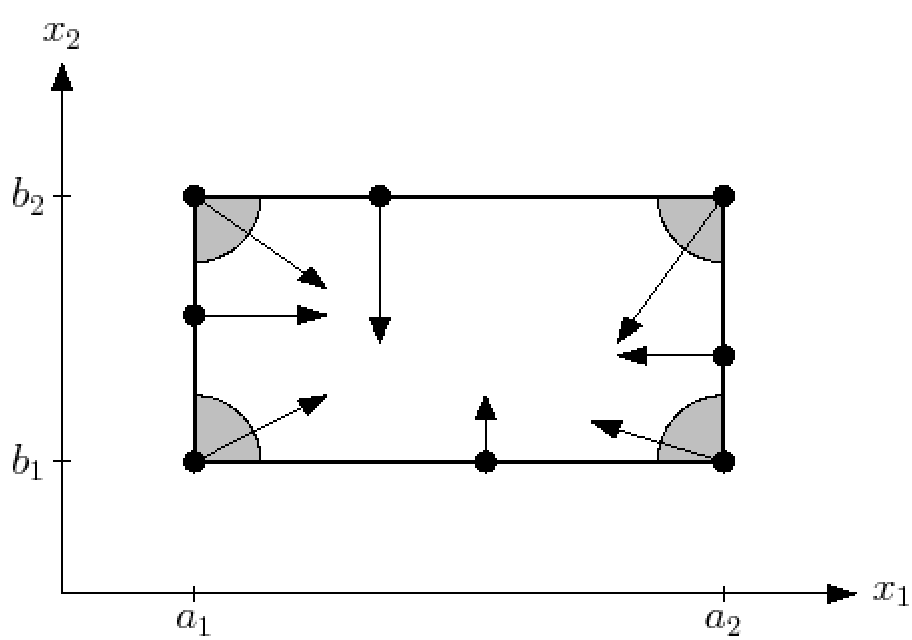
$$\lambda_i\,,\ \mu_i\ge 0$$

$$\lambda^{\mathrm{t}}\,(x_* - a) + \mu^{\mathrm{t}}\,(b - x_*) = 0$$

دي د e_i د i -م یوون-یا واحدوکتور سره. له دې سره ارزښتونه $\pm\infty$ د انتروال د پولې په توګه پرېښوول شوی یعنط نجازه لري، داسط چې تولې متحولې یا اووښتونې د همغه ډول نامساوات پوره کوي.

که $a_i < x_{*,i} < b_i$ وي، نو نودواړه د لاګرانژ-ضریبونه λ_i او μ_i صفر دي او له دې سره د $\operatorname{grad} f(x_*)$ i -م کمپوننت g_i. برعکس که یو له دې نامساواتو د x_i لپاره فعال وي، په اړونده توګه د لاګرانژ-ضریب د g_i مخنخښه کره کوي:

$$x_{*,i} = a_i \;\rightarrow\; g_i \geq 0 \,; \quad x_{*,i} = b_i \;\rightarrow\; g_i \leq 0\,.$$



تابع د بیواریات موخه فنکشن لپاره د $\operatorname{grad} f(x_*)$ ممکنه لورې ښايي د مینیموم لپاره په اړخونو د $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ په ګوډونو یا کونجونو. د مینیموم لپاره د ولاړګوډېز یا مستطیل په دننه کې $\operatorname{grad} f(x_*)=0$ باور لري.

لیونکي: هیولیک، پفایل

د یوه کرښیز تابع

$$(c_1,\dots,c_n)x\to\min$$

مینیموم د کرښیزو فرعي شرطونو لاندې

$$Ax\ge b$$

د یوه $m\times n$ -ماتریکس A سره سړی مرښیز پروګرام ښايي.

یو حل $x_*\in\mathbb{R}^n$ د کون-تکر-شرطونه پوره کوي

$$c^t=\lambda^t A,\quad \lambda^t(Ax_*-b)=0$$

د $\lambda_i\ge 0$ سره.په ورته توګه د ماکسیموم لپاره $\lambda_i\le 0$ باور لري.

د روښانه بیلګې

$$x+y\to\min,\qquad x\ge 2,\qquad y\ge 1,\qquad x+2y\ge 8$$

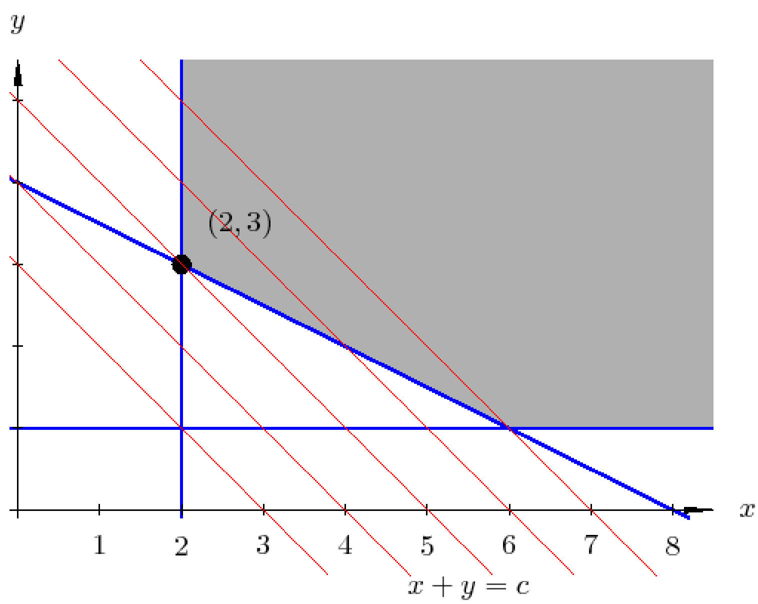
لپاره دی

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

او سړی د کون-تکر-شرایط لاس ته راوړي

$$1 = \lambda_1 + \lambda_3, \qquad 1 = \lambda_2 + 2\lambda_3, \qquad \lambda_1[x-2] + \lambda_2[y-1] + \lambda_3[x+2y-8] = 0$$

د $\lambda_i, [\dots] \geq 0$ سره. سړی زر پیژندلی شي، چې تیک یو د لاګرانژ -ضریب باید صفر وي، چط په بل ډول په شرایطو کې یو تضاد باید رامنځ ته شي. په دې درې حالتونو کې دوه فرعي شرایط فعال دي. دا (x, y) یواځنی کره کوي:



$$\lambda_1 = 0 \longrightarrow (6,1) \qquad \lambda_2 = 0 \longrightarrow (2,3) \qquad \lambda_3 = 0 \longrightarrow (2,1)$$

له دې سره $(2,1)$ فرعي شر طونهنه پوره کوي او د $\lambda_1 = 0$ لپاره $(2,1)$ او $\lambda_3 = 1$ راکوي، دلته د لاګرانژ د ضرب د همغط یا برابرې مخنخښي اړیین شرطونه

نه دې پوره.د تابع مینیموم په $(2,3)$ نیول یا فرض کیږي. په دط حالت کې د لاګرانژ – ضریبونه داسې دي $\lambda = (1/2, 0, 1/2)^t$.

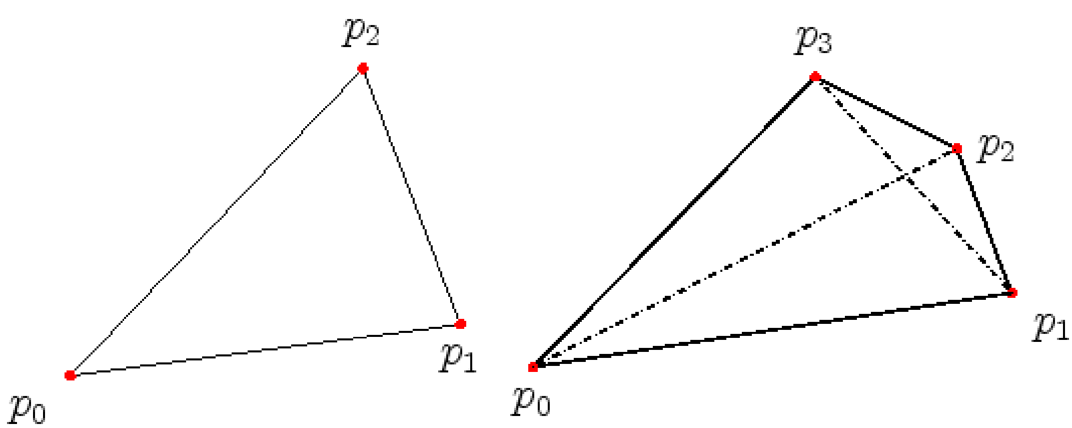
یوځمککچیز یا هدسي جوړښت په ښیره کط ښوول شوی دی. حل تکی $(2,3)$ دی، په کوم کې چې د موخه تابع سطحیزې کرښې معتبره ورشو لمس کړي. دا روښانه ده چې موخه تابع جګیږي(ټیټیږي)، که سطحیزه کرښه دا معتبره ساحه غوځه(غوځه نه) کړي.

لیکونکي: بوسلي، هیولیګ

سیمپلکس*Simplex*

یو n–بعدیز(پراخېدونی) سیمپلکس S د $n+1$ ټکو $p_0, \ldots, p_n$ یو konvexe Hülle ده، چې دا ټول په یوه $(n-1)$-بعدیز لاندې فضا کې نه دي پراته:

$$S = \{x = \sum_j \alpha_j p_j \; : \; \sum_j \alpha_j = 1, \; \alpha_j \geq 0\}$$



n=2 n=3

دوه- او درېبعديز سيمأبمکسونه د درې ګوډي همداسې تيترايدر بلل کيږي.

د يوه سيمپلکس ډکی يا حجم د وکتورونو $p_i - p_0\,,\ i = 1, \ldots, n$ د ديترمينانت په مرسته افاده کيدی شي:

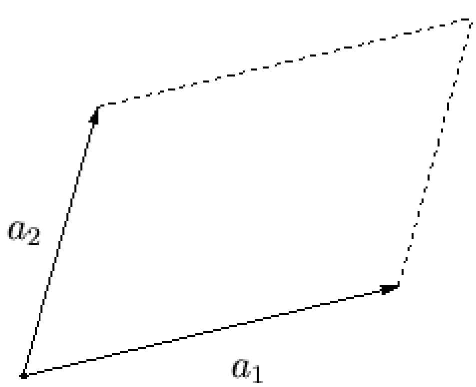
$$\operatorname{vol} S = \frac{1}{n!} |\det(p_1 - p_0, \ldots, p_n - p_0)|\,.$$

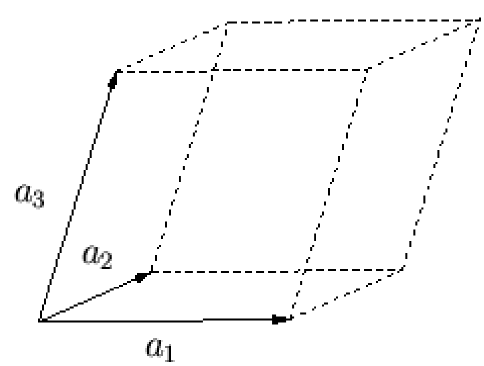
(Autoren: Boßle/Höllig/Streit)

غبرګ اپيپيد(غبرګ اړخيز يا مکعبنما)Parallelepiped

يو n -بعديز (يا پراخيدونی)غبرګ اپيپيد P د n کربنيزو وکتورونو a_i څخه غزيږي:

$$P = \{x = \sum_i \alpha_i a_i :\ 0 \leq \alpha_i \leq 1\}\,.$$





n=3 n=2

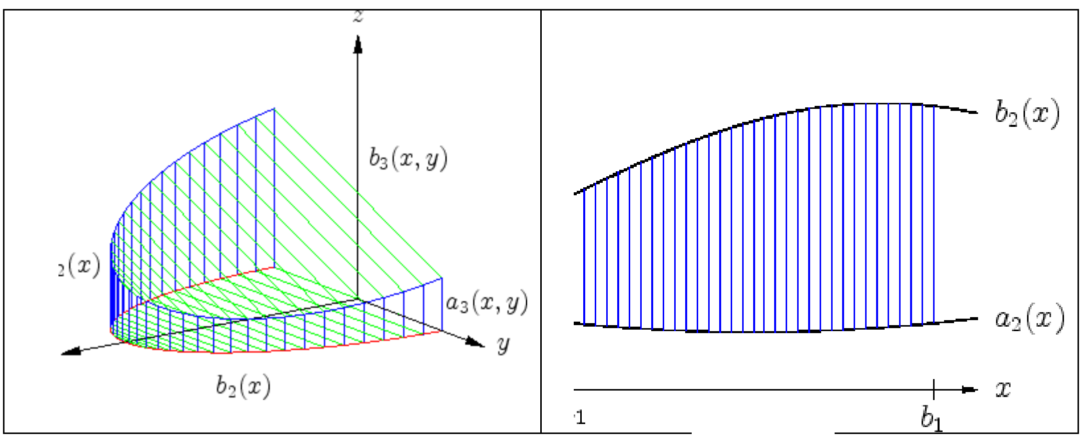
دوه – او درې بعدیز غبرګ خواییز غبرک اړخیز همداسې شپاټات بلل کیږي.

د غبرګخواییزوډکی(حجم) د ترې غزیدلووکتورونو د دیترمینانت مطلق ارزښت دی:

$$\operatorname{vol} P = |\det(a_1, \dots, a_n)|\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

د انتیګریشن ورشو



یوه بنستسزه ورشو $V \subseteq \mathbb{R}^n$ د یوه مناسب کواوردیناتسیستم ترانسفورمیشن $x \to x'$

پسي د د ناپریکیدونکو توابعو a_i او b_i ګراف له لارې رابند دي:

$$\begin{aligned}
&a_1 \le x_1' \le b_1\\
&a_2(x_1') \le x_2' \le b_2(x_1')\\
&\vdots\\
&a_n(x_1', \dots, x_{n-1}') \le x_n' \le b_n(x_1', \dots, x_{n-1}')
\end{aligned}$$

د بنسټیز ورشوګانو یو تر زئکړو یا منحنیو پای ټولنه رګولار ورشو بلل کیږي. د دې لپاره یو ځاګړی حالت یو سیمپلکس دی چې پولیګونالورشو څخه جوړ وي:

لیکونکي: بوسلی، هیولیک، شترایت

د هوزدورف واټن Hausdorff-Abstand

په یوه متریکیفضا M کې د یوې ډیرئ U لپاره د متریک d سره کیدی شي د

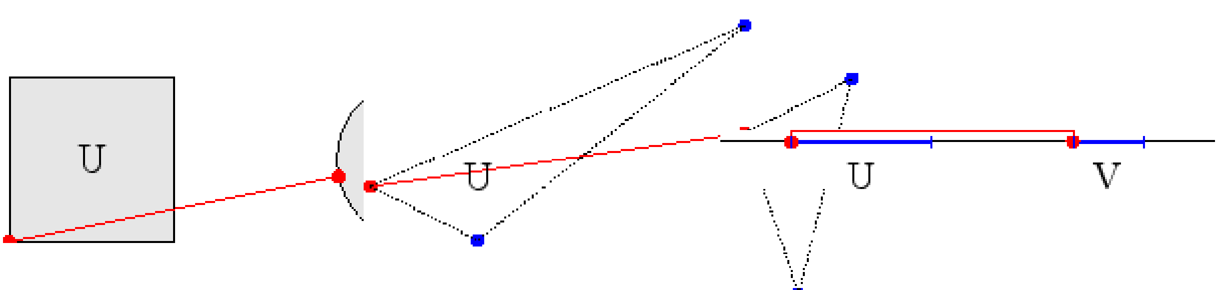
$$\operatorname{dist}(x,U) = \inf_{u\in U} d(x,u)$$

سره د واټن و ته بلل کیږي. په ټولیزه توګه د د وه ډیریو هوزدورف-واټن په لاندې توګه تعریفیږي

$$\operatorname{dist}_H(U,V) = \max\left(\sup_{u\in U}\operatorname{dist}(u,V),\ \sup_{v\in V}\operatorname{dist}(v,U)\right).$$

)لیکونکي: هیولیک، شترایت

په لاندې څېره کې د ډېریو U او V لپاره یوڅو جوړې په هرکې ټکې په نخښه شوې، د هوزدورف –واټن همدایي داویکلید متریک نیول کیږي.



لکه د بیلګو ځخه چې لیدل کیږي، $\mathrm{dist}_H(U,V)$ د دوه ټکو U او V لنډ واټن نه دی

لیکونکي : هیولیک، شترایت

Mehrdimensionales Integral

ډېر بعدیز(ډېر پراخیدونی) انتیګرال

په یوه رګولار ورشو د یوه ناپریکیدونکي تا بع f انتیګرال کیدی شي د ریمن جمعي د پولې په ځیر تعریف شي:

$$\int_V f\,dV = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_i f(P_i)\Delta V_i\,, \quad \Delta V_i = \mathrm{vol}(V_i)\,.$$

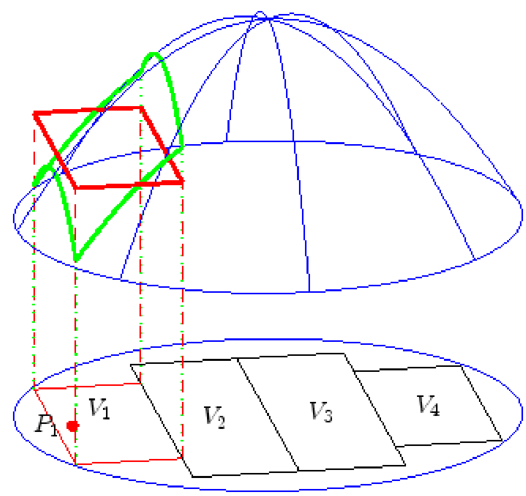
له دې سره د (توکي) پردیو ساده ورشوګانو V_i (په ټولیزه توګه سیمپلیکسونو یا غبرګ ایپیپیدونو) ټولنې یا اتحاد له لارې V اپروکسمې کیږي، دا په دې معنا چې د V او $\bigcup_i V_i$ د هوزدورف – واټن د صفر په لورهڅیږي. د $|\Delta|$ سره کیدی شي د V_i ماکسیمال کچونه په نخښه شي، P_i په خوښه ټکي په V_i کې دي.

د لیکنې ډول $\Delta V_i \to dV$ د پولې پروسې سومبولي کول دي، او dV سرې ډکی یا حجم بولي. په لنډ ډول $\int_V f$ هم لیکو یا په مفصل ډول

$$\int_V f\, dV = \int_V f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n\,,$$

که څوک د انتيګريشن متحولې راباسي.

د f ناپرېکېدني په اساس د ريمن انتيګرال تعريف هم د توکو ورشوګانو V_i او هم له ټکي P_i خپلواک دی.



د يوه زاتيز يا مثبت تابع لپاره انتيګرال د دېرئ ډکی يا حجم دی.

$$\{(x_1, \ldots, x_n, h) : \; 0 \leq h \leq f(x),\, x \in V\}\,.$$

په ځانګړې توګه $\int_V 1$ د امتيګريتي ورشو V حجم دی.

په f او V د د هوارولي وړاندنيونه(فرضيه) کېدی شي ضعيفه شي، داسې چې ا نتيګرال په يوه مناسب پوله پروسه باندې تعريف وي.

ليکونکي : بوسلي، هيوليک، شترايت

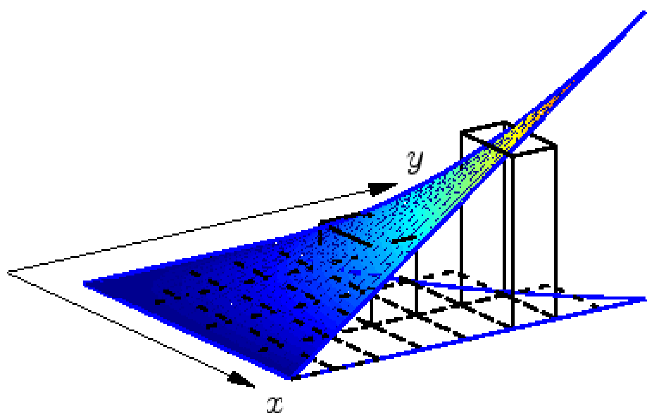
د تابع

$$f(x,y) = xy$$

دې په ورشو

$$V: \quad 0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 1 + x^2$$

کې انتیګرال ونیول شي.



خیره د انتیګریشن ورشو په یوه شډل مربع ګیټر یا ـمنډو ؟؟؟ باندې وېشنه یا توټه کېدنه بنايي. د منډو پراختیا $h = 1/n$ لپاره دا اپرکسیمسشن لاس ته راوړو

$$h^2 \sum_{0 \le j < n} \sum_{0 \le kh < 1 + (jh)^2} (jh)(kh) = h^4 \sum_{0 \le j < n} j \sum_{0 \le k < n + j^2/n} k \,.$$

د جګودرجو درجو ترمونو تېرېدني سره دا د دې ډبلې جمعي سره برابر دی

$$h^4 \sum_{0 \le j < n} j \left((n + j^2/n)^2/2 + Ch^4 \sum_{0 \le j < n} jn^2/2 + j^3 + j^5/(2n^2) + O(n^2)\right)$$

$$= \qquad \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)+O(h)\,,$$

اوله دې سره انتيګرال ارزښت $\frac{7}{12}$ لري.

ليکونکي: بوسلي، هيوليګ. شترايت

د فابيني جمله Satz von Fubini

په يوه بنستيزه ورشو د يوه ناپرېکېدونکي تابع انتيګرال

$$V:\ \ a_j(x_1,\ldots,x_{j-1}) \le x_j \le b_j(x_1,\ldots,x_{j-1})$$

کېدی شي د يوبعدي يا يوپراخېدوني انتيګرالونو د يوبل پسې شمېرني له لارې لاس ته راشي:

$$\int\limits_V f\,dV = \int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)}\cdots\int\limits_{a_n(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{b_n(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n\cdots dx_2dx_1\,.$$

له دې سره د بنستيزوورشوګانو د لړئ پرلپسې رول نه لوبوي. په ځانګړې توګه د دېل انتيګرال لپاره د ثابتې انتيګرېشن پولې سره

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d f(x,y)\ dydx = \int\limits_c^d\int\limits_a^b f(x,y)\ dxdy\,.$$

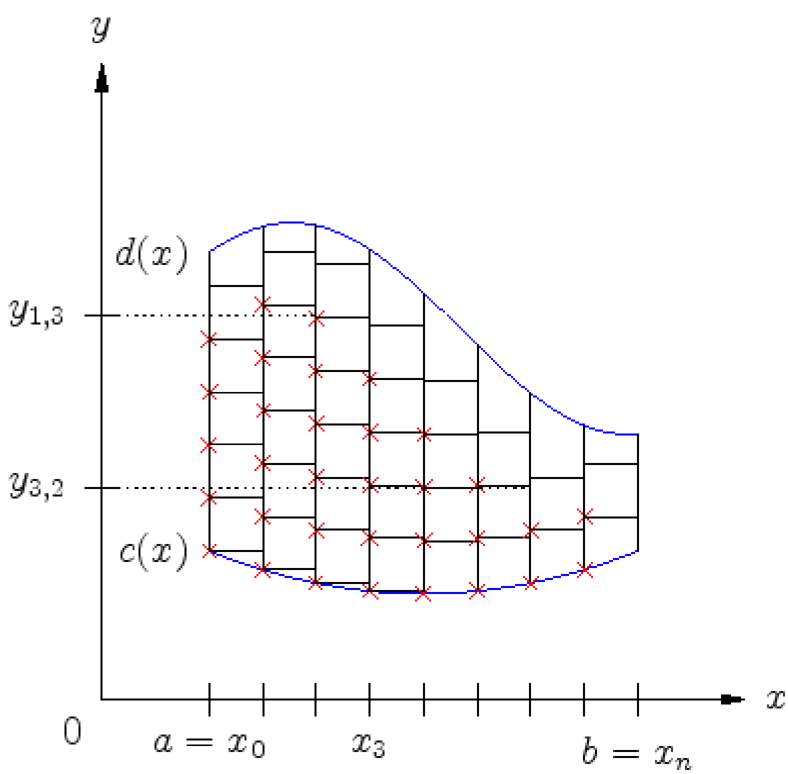
ټوليزه تلنلار کېدی شي په دوهبعدي ځانګړي حالت

$$V: \quad a \le x \le b, \quad c(x) \le y \le d(x)$$

لیدوړ وګرځي. د تعریف سره سم سړی $\int_V f$ د ریمن جمعې له لارې اپروکسیمیکوي

$$s_n = h^2 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m_j-1} f(x_j, y_{j,k})$$

د $h = (b-a)/n$ ، $x_j = a + jh$ او $y_{j,k} = c(x_j) + kh$ سره.



د f په کومپکت انتیګریشن ورشو V باندې برابرډوله ناپرېکیدني په بنسټ دی

$$|f(x_j,y)-f(x_j,y_{j,k})|\le\varepsilon,\quad y_{j,k-1}\le y\le y_{j,k}\,,$$

د $h<h_\varepsilon$ لپاره. د دې په تعقيب کېدی شي دننئ جمعه د يوه بعدي يا يو پراخيدوني انتيګرال سره پرتله شي:

$$s_n=h\sum_{j=1}^{n}\left(\int_{c(x_j)}^{d(x_j)}f(x_j,y)\,dy+r_{n,j}\right)$$

د $|r_{n,j}|\le m_j h\varepsilon$ سره. همدا دليل کېدی شي په ناپرېکيدونکو توابعو $g(x)=\int_{c(x)}^{d(x)}f(x,y)\,dy$ وکارول شي،، او سړی لاس ته راوړي

$$s_n=\int_a^b g(x)\,dx+\left[r_n+h\sum_j r_{n,j}\right]$$

د $|r_n|\le nh\varepsilon$ سره د $h<h'_\varepsilon$ لپاره. دا چې

$$\|[\ldots]\|\le\Big((b-a)+\max_x(d(x)-c(x))\Big)\,\varepsilon$$

او $\varepsilon>0$ په خوښه ټاکل کېدی شي، نو پوله $\lim_{n\to\infty}s_n$ د ايتربر شوي iterierten يو بعدي انتيګرال سره سر خوري.

ليکونکي : هيوليګ، شترايت

د تابع

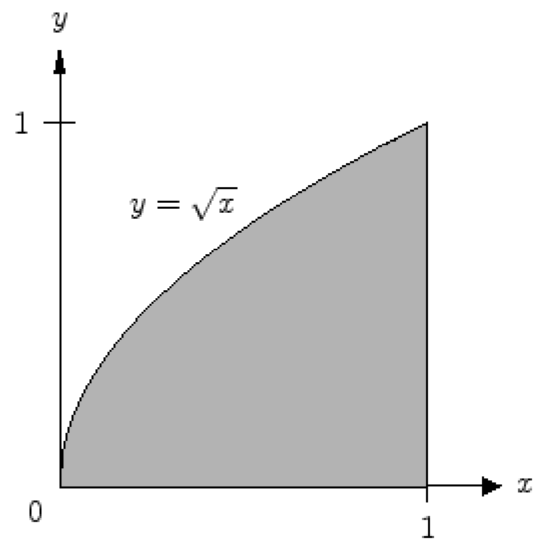
سرليک

$$f(x,y) = y\cos\left(x^2\right)$$

دي داپه ځېره کې انځور شوي ورشو

$$V: \quad 0 \leq x \leq 1\,, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{x}$$

کې انتيګرال ونيول شي.



د فوبينيجملې سره کيدی شي انتيګرال د دوه بعدي انتيګريشن له لارې وشميرل شي:

$$\int_V f = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{x}} y\cos\left(x^2\right)\ dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\cos\left(x^2\right) \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx$$

$$= \qquad \int_0^1 \frac{1}{2}x\cos\left(x^2\right)\ dx = \left[\frac{1}{4}\sin\left(x^2\right) \right]_0^1 = \frac{1}{4}\sin 1\,.$$

که انتیګریشن لړئ پرلپسې سره بدل شي، نو لاس ته راځي

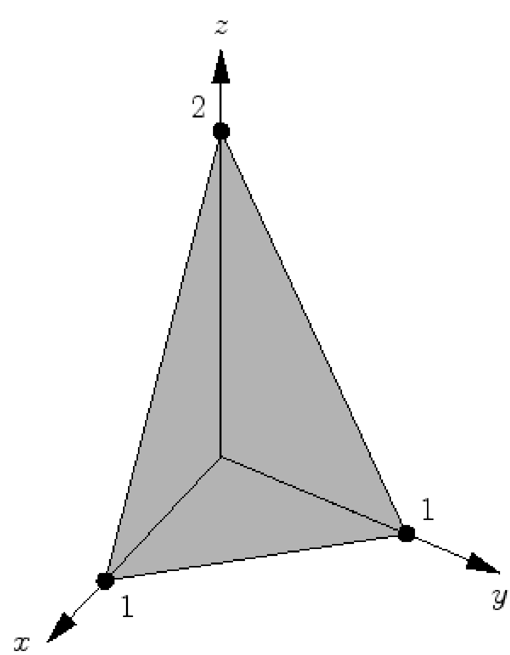
$$\int_V f = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^1 y \cos\left(x^2\right)\, dx \right) dy\,.$$

په دې حالت کې دننی انتیګرال اکسپلیځیت شمیروړ نه دی. د ایتریر شوي انتیګرال د عملي شمیرنې لپاره کیدی شي د انتیګریشن لړئ پرلپسې غوره وي.

لیکونکي : بوسلي، هیولیک، شترایت

د دې لپاره چې تابع

$$f(x, y, z) = x$$



په تیتر اید

$$T: \quad x,y,z \geq 0, \quad x+y+\frac{z}{2} \leq 1$$

باندې وشمیرل شي، نو لومړی به T د بنسټیزې ورشو په توګه ورکړل:

$$T: \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1-x\,, \quad 0 \leq z \leq 2\left(1-x-y\right).$$

نو بیا دا انتیګرال د فوبیني د جملې په بنسټ شمیرلکیدی شي:

$$\int_T f = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{2(1-x-y)} x\,dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} 2x\left(1-x-y\right)\,dy \right) dx$$

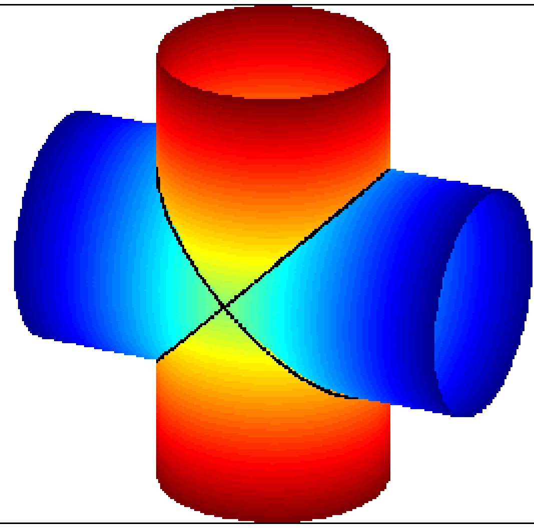
$$= \int_0^1 \left(x-2x^2+x^3\right)\,dx = \frac{1}{12}\,.$$

لیکونکي: بوسلي، هیولیګ، شترایت

ډکی یا حجم شمیرلکیږي، چې د دواړو توتو له (ګډ) غوځي

$$Z_1: \; x^2+y^2 \leq r^2, \quad Z_2: \; x^2+z^2 \leq r^2$$

له لارې منځ ته راځي.

د سیومتر ي په بنسټ لومړی د اوکتانتونو ډکي یا حجمونه شمیرلکیږي. په لومړي اوکتانت کې د انتیګریشن ورشو د ګردۍ یا دايرې څلورمه ده	

$$K:\ 0 \le x \le r, \quad 0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}.$$

په K باندې د (ګډ) غوښې بدن جګوالی $h(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2}$ د Z_2 له لارې ورکړ شوی دی. د ډکي یا حجم په حیث لرو

$$\int_K h = \int_0^r \left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} \sqrt{r^2 - x^2}\, dy \right) dx = \int_0^r (r^2 - x^2)\, dx = r^3 - \frac{1}{3} r^3 = 2r^3/3 \,,$$

او له دې سره د ټول بدن لپاره حجم $16r^3/3$.

ليکونکي:بیوسلر ،هیولیک،شترایت

د n -بعدیز یونغونداري(چې وړانګه یې یو واحد دی) ډکی(حجم)

د n - بعدي یوونغونداري ډکی یا حجم V_n دی

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| \le 1\}$$

$$V_n = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{n\,\Gamma(\frac{n}{2})},$$

د ګاما تابع Γ سره. د $n \le 6$ لپاره ارزښتونه په لاندې جدول کې ورکړشوي دي:

n	1	2	3	4	5	6
V_n	2	π	$4\pi/3$	$\pi^2/2$	$8\pi^2/15$	$\pi^3/6$

ليکونکي:بيوسلر،هيوليک،شترايت

د ګاما تبع د تعريف له مخې د $B_1 = [-1,1]$ لپاره دی

$$\operatorname{vol} B_1 = 2 = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$
.

د ايندکشن پل(قدم) $(n-1) \to n$ لپاره لومړی په پام کې نيسو، چې د B_n هيوپرسطحې $x_n = -1$ او $x_n = 1$ ترمنځ پروت دی او د هيوپرسطحې سره غوڅې(قطاع) $x_n = \xi,\ (-1 \le \xi \le 1)$ يو $(n-1)$ - بعديز غونډاری دی د وړانګې $\sqrt{1-\xi^2}$ سره . د B_n حجم له دې امله کيدی شي د فوبينوسجملې سره په لاندې توګه وشميرلشي:

$$\mathrm{vol}\, B_n = \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}\ \mathrm{vol}\, B_{n-1}\, d\xi\,.$$

د اینکشن وړاندنیوني

$$\mathrm{vol}\, B_{n-1} = \frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

سره او د ګاما- تابع د تابعمسالات،

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)\,,$$

لاس ته راځي

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}\, B_n \ &= \sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}\,\frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{2})} \\ &= \frac{2\sqrt{\pi^n}\,\frac{n-1}{2}\,\Gamma(\frac{n-1}{2})}{(n-1)\,\Gamma(\frac{n-1}{2})\,\frac{n}{2}\,\Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{n\,\Gamma(\frac{n}{2})}\,.\end{aligned}$$

له دې سره کېدی شي انتیګرال $\int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}\ d\xi$ د په ځای ایښووني یا سبستیچیوشن $\xi = \sin t$ ، $d\xi = \cos t\, dt$ له لارې وشمېرل شي:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^2 t)^{\frac{n-1}{2}}\ \cos t\, dt = \int_{-1}^{1} (1-\xi^2)^{\frac{n-1}{2}}\ d\xi$$

$$2\int_0^{\pi/2}(\cos t)^{n-1}\,\cos t\,dt=\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\,.=$$

ليکونکي:بيوسل،هيوليګ،شترايت

د ډېربعديز انتيګرال ترانسفورميشن

د يوه رګولار ورشو $U\subseteq\mathbb{R}^n$ د د يوه په (بيجکتيو)، ناپرېکيدونکي، مشتقوړ ترانسفورميشن g لپاره د

$$\det g'(x)\neq 0,\quad x\in U\,,$$

سره د ناپريکيدونکو توابعو f لپاره باور لري:

$$\int\limits_U f\circ g\,|\det g'|\,dU=\int\limits_V f\,dV\,,\quad V=g(U)\,,$$

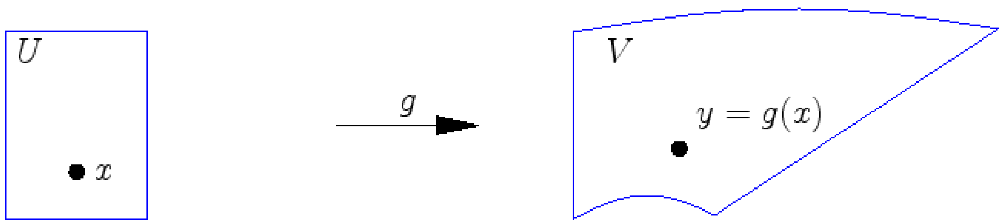
له کوم سره چې $\det g'$ د ترانسفورميشن د تابع ديترمينانت بلل کيږي. دا ډکي- يا حجم توکيځای اړونده يا ځاييز تغير تشريح کوي.

$$dV=|\det g'|\,dU\,.$$

د يوه لو کال اورتوګونال يا عمود کواورديناتو ترانسفورميشن ، دا په دې معنا چې د g' عمودې متې

$$|\det g'| = \prod_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right| ,$$

دي،دا په دې معنا چې د حجمتوکو سکالير ضريب د يوګونو متحولو سکاليري ضريبونو ضرب دی.



د يوه افين ترانسفورميشن $y = Ax + b$ سره حجمتوکي د

$$dy = |\det A|\, dx .$$

سره تغير خوري.

په ځانګړې توګه د متحولې د سکالي کولو لپاره باور لري، $y_i = \lambda_i x_i$

$$dy_i = \lambda_i\, dx_i .$$

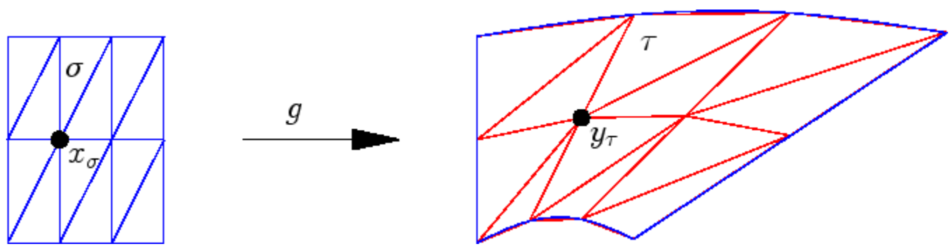
وړاندنيوني يا فرضيي کيدی شي لږ ضعيفي شي.

په ځانګړې توګه بايد د g بيجکتيويتي او د g' برعکسوړوالی فقط د U په دننه کې وغوښتل شي. د f پريکيدنه او ټاکلې زينګولاريتې هم ممکن دي، که ددواړو انتيګرالونو شتون تضمين وي.

ليکونکي: هيوليک، موبش

د ښووني یا ثبوت فکر کیدی شي د دوه بعدي انتیگرال لپاره وښوول شي. د ساده والي لپاره نیول کیږي، چې g دوه ځله ناپرېکیدونکی مشتقوړ دی. دا را کوي، چې د $x \in U$

$$|\det g'(x)| \geq 1/c > 0,$$
$$g(x+\Delta x) - g(x) = g'(x)\Delta x + r, \quad |r| \leq c|\Delta x|^2 .$$



لپاره لکه په خیره کېروښانه شوي،یواپروکسیمیشن ارگومنت کارول کیږي. د دې لپاره د ورشو U د یوه تریانگولیرکونې(مثلثي کونې) ځخه مخ ته ځو، او کېږ ا نتیگرال د ریمن جمعې

$$S_U = \sum_{\sigma} f(g(x_\sigma))|\det g'(x_\sigma)|\,\mathrm{vol}\,\sigma, \qquad x_\sigma \in \sigma$$

له لارې نږدې کوو. درېگوډي(مثلثونو) σ دې ډیر زیات خواره verzerrt نه شي، دا په دې معنا چې

$$h/c' \leq a \leq c'h$$

د ټولو درېگوډیو سیکانتواوږدوالي a لپاره. دا په ځانگې توگه راکوي، چې لوی کونج برابرېدوله په h کې کښېته لور ته بنده یا محدود ده. دزئ اپروکسیمیشن پوره ښه دی، داسې چې د ریمن/جمعه یا – زیاتون د $h \to 0$ لپاره د $\int_U (f \circ g)|\det g'|$ په لور هڅیږي.

د کونجټکو د تابع له لارې $x_\sigma \mapsto y_\tau = g(x_\sigma)$ د ځیره –یا ارزښت ورشو $V = g(U)$ یو درېګوډیزوالی یا مثلث کیدنه منځ ته راځي. کطدی شي د درېګوډي خوربدنه زیاته شي،مګر د نه پرېکیدني او له دې سره د g د جاکوبي-ماتریکس د محدودیت اود برعکس تابع g^{-1} اړخونه د اپروکسیمیشن پارامتر h سره پرتله کیدونکې پاتیږي. برسیره پردې د $\det g' > 0$ په حالت کې د درېګوډي لوريزوالی ساتلی پاتیږي(په همدې ډول د ديترمينانت د مخنخښې بدلون سره برعکس یا په څټ کيږي)،داسې چې يوپه بل پریوتل منځ ته نه راځي.

د منځ ته راغلي ځيره – یا ارزښت ورشو منځ ته را ته راغلي درېګوډيزوالي ريمن-جمعه، $S_V = \sum_\tau f(y_\tau)\,\mathrm{vol}\,\tau, \qquad y_\tau = g(x_\sigma) \in \tau\,,$ د $\int_V f$ په لور ځي. دا باید وښول شي، چې د دواړو ريمن –جمعو کمښت د صفر په لور ځي يه هڅيږي. دا د τ درېګوډي د ښه اپروکيميشن څخه لاسته راځي د σ د افيني ځيرې $\tilde\tau$ له لارې:

$$\mathrm{dist}_H(\tilde\tau, \tau) = O(h^2), \quad \tilde\tau = y_\tau + g'(x_\sigma)(\sigma - x_\sigma)\,.$$

دا $\mathrm{vol}\,\tilde\tau = |\det g'(x_\sigma)|\,\mathrm{vol}\,\sigma,$ د دواړو ريمن--جمعود $O(h^3)$ جمعې غړويا زياتونونو اود دوی د تعداد $O(h^{-2})$ ديسکريپانځ دی. له دې سره لاس ته راځي

$$|S_U - S_V| = O(h) \to 0\,.$$

د هوزدورف-وا ټن د تخمين د ښووني لپاره سړی درېګوډي(مثل ثونه) سره پرتله کوي

$$\tau = \Delta(y_\tau, y_1, y_2), \quad \tilde\tau = y_\tau + g'(x_\sigma)\Delta(0, x_1 - x_\sigma, x_2 - x_\sigma)$$

د $y_i = g(x_i)$ سره ګاونډي ټکي

$$y_\tau + \alpha'(y_1 - y_\tau) + \alpha''(y_2 - y_\tau),$$

$$y_\tau + \alpha' g'(x_\sigma)(x_1 - x_\sigma) + \alpha'' g'(x_\sigma)(x_2 - x_\sigma)$$

د $0 \le \alpha', \alpha'' \le 1$ سره. د دویممشتق د ناپرېکېدنې د نیونې په بنسټ لاس ته راځي، چې کمښت برابر ډوله د

$$O(\max(|x_1 - x_\sigma|^2, |x_2 - x_\sigma|^2))$$

له لارې اټکل کېدی شي،څه مو چې ښوول.

لیکونکیة هیولیک، موبش

د ترانسفورمېشن ښوولو ته کېدی شي یوه ورشو V تر څېړنې ونیول شي، هغه د دوه کرښیز سره تړلو پارابلسګمنت له لارې

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le u \le 1$$

رابندیږي. که د پارابولسګمنتونه وخوزول شي یعنې تل بل ځایت ه یووړل شي، نو سړی یو پیجکتیو تابع په یوون – یا واحد مربع U لاس ته راوړي.

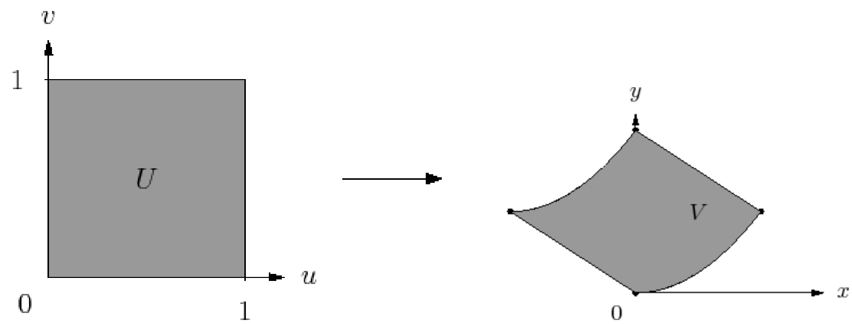
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v + u \\ v + u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \le u,\ v \le 1\,.$$

د تابع جاکوبي ماتریکس دی

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2u & 1 \end{pmatrix},$$

او سړی د تابع دیترمینانت په ځېر لاسته راوړي

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 2u + 1 > 0\,.$$



له دې سره د ډکي توکی د لاندط سره تغیریږي

$$dV = dx\,dy = (2u+1)du\,dv = (2u+1)dU\,.$$

په V باندې د $f(x,y) = x + y$ د ا نتیګرال لپاره د ترانسفورمیشن قانون سره لاس ته راځي

$$\int_V (x+y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 (\frac{2}{4} + 1 + \frac{1}{2})\,dv = 2\,.$$

لیکونکي: هیولیګ، موبش

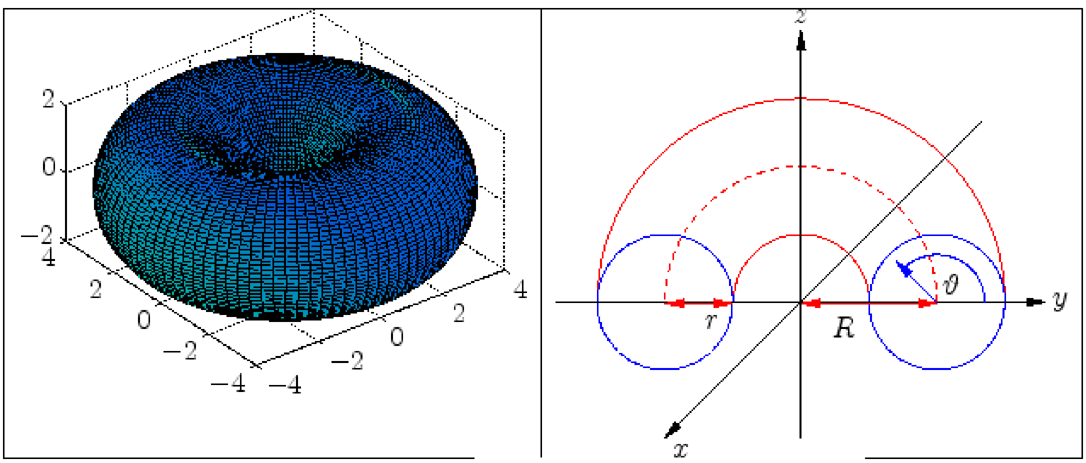
یوتوروس یا کړئ د بېلګې په توګه د ګردئ - دابرې تیکلي د ځرخونن رامنځ ته کیږي

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R + r\,s\cos\vartheta \\ r\,s\sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad 0 \le s \le 1, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi$$

د z- په محور د $r < R$ سره،دا په دي معنا چي

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p(s,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} (R + r\,s\cos\vartheta)\cos\varphi \\ (R + r\,s\cos\vartheta)\sin\varphi \\ r\,s\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

يو ممکنه پارامتري کېدنه ده د $0 \le \varphi \le 2\pi$ سره.



د ترانسفورميشن $p : \begin{pmatrix} s \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ جاکوبي ما تريکس دی

$$p' = (p_s, p_\vartheta, p_\varphi) =$$

$$\begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\,s\sin\vartheta\cos\varphi & -(R + r\,s\cos\vartheta)\sin\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi & -r\,s\sin\vartheta\sin\varphi & (R + r\,s\cos\vartheta)\cos\varphi \\ r\sin\vartheta & r\,s\cos\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

داچې متې يا ستنې يو بل ته اورتوگونال دي،د تابع ديترمينانتو لپاره باور لري

$$|\det p'| = |p_s||p_\vartheta||p_\varphi| = |r||r\,s||R + r\,s\cos\vartheta| =$$

$$= r^2 s(R + r\,s\cos\vartheta).$$

له دې سره د ډکي يا خجم لپاره لاس ته راوړو

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 s(R + r\,s\cos\vartheta)\,d\varphi\,d\vartheta\,ds$$

$$= 2\pi r^2 \left(\int_0^1 \int_0^{2\pi} sR\,d\vartheta\,ds + \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\,s^2\cos\vartheta\,d\vartheta\,ds \right)$$

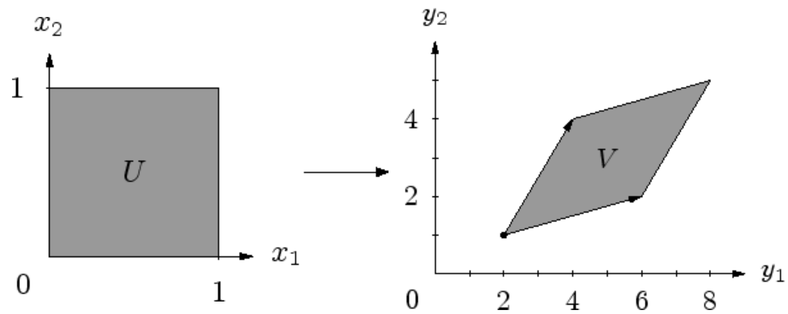
$$= 2\pi r^2 \left(\int_0^1 2\pi sR\,ds + 0 \right) = 2\pi^2 R r^2 .$$

يو غبرگ اړخيزParallelogramm يا موازيالاضلاع V کېدی شي د يوون گردئ U يوه افين ترانسفورمېشن د څېرې په حيث انځور شی:

$$U \ni x \mapsto y = Ax + b \in V .$$

له دې سره b يو گوډ تکی دی او د A متې وکتورونه دي، چې دا غبرگ اړخيز غزوي.
د دې څېره شوې بېلگې لپاره دی

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} .$$



د ترانسفورمیشن تابع دیترمینانت دی

$$\det \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \det A = 10\,.$$

له دې سره د بېلګې په توګه د انتیګرال لپاره په V یو کرښیز تابع لاس ته راځي

$$f(y) = 3y_1 - 4y_2$$

$$\int_V f \quad = \int_U f(Ax+b) 10\, dV$$

په ټولیززه توګه معکوسکیدونکی تابع

$$(x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}} \mapsto Ax + b$$

یوونمکعب $U = [0,1]^n$ په غبرګ اړخیز (-اپیپد) جوړوي، چې د ماتریکس متې یا ستن څخه غزيږي.په ورته توګه دې روښانه بېلګې د $n = 2$ لپاره ا نتیګرال په V یو کرښیز تابع $f(y) = c^{\mathrm{t}} y$ دی.

$$\int_V f = \int_U c^t(Ax+b)|\det A|\,dx = c^t(Ae/2+b)|\det A|$$

د $e = (1,\ldots,1)^t$ سره.

) لیکونکي: هیولیګ، موبش

په توته کواودینات کې ډکیتوکې یا حجم توکي

Volumenelement in Zylinderkoordinaten

د کواوردینات ترانسفورمیشن لپاره

$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi, \quad z = z$$

دی

$$dx\,dy\,dz = \varrho d\varrho\,d\varphi\,dz\,.$$

له دې سره په ځانګې توګه د یوه تابع f د انتیګرال لپاره په یوه توته یا استوانه باور لري

$$Z: \quad 0 \le \varrho \le \varrho_0\,, \quad 0 \le z \le z_0$$

$$\int_Z f = \int_0^{z_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\varrho_0} f(\varrho,\varphi,z)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi\,dz\,.$$

په ځانګړې توګه د یوه اکسیاسیمتریک یا محور سیمتریک تابع $f(\varrho)$ لپاره دی

$$\int_Z f = 2\pi z_0 \int_0^{\varrho_0} f(\varrho)\,\varrho\,d\varrho\,.$$

د سطحې قطبي کواوردینات لپاره د سطحې توکي په ورته توګه ترانسفورمي کیږي.

(Autoren: Höllig/Much)

د کواوردینات ترانسفورمیشن

$$(x, y, z) = g(\varrho, \varphi, z)$$

لوکال یا ځای اړونده اورتوګونال دی،دا په دې معنا چې د جاکوبي ماتریکس

$$g' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اورتوګونال متې یا ستنط لري. په تعقیب د تابعدیترمینانت یا فنکشنل دیترمینانت لپاره باور لري

$$|\det g'| = |g_\varrho|\,|g_\varphi|\,|g_z| = 1\cdot\varrho\cdot 1 = \varrho\,.$$

)لیکونکی: هولیګ، موښ

د ګاوس تابع د انتیګرال ټاکنې ته،

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx = \sqrt{\pi}\,,$$

سړی لاندې مرستندوی جوړښت کاروي. سړی د انتیګرال مربع شمېري:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx\right)^2 \quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2\right) dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-y^2\right) dy\right)$$

$$= \qquad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-x^2 - y^2\right) dx\, dy\ .$$

دا انتیګرال کېدیشي د قطبي کواوردینات په مرسته ساده وټاکل شي:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \exp\left(-r^2\right) r\, dr\, d\varphi = 2\pi \left[-\frac{1}{2}\exp\left(-r^2\right)\right]_0^{\infty} = \pi\ .$$

))ليکونکی: هولیګ، موښ

په غونډوسکې یا غونډاري(کورې-) کواوردینات کې د ډکي –یا حجم توکي

د کواوردینات د ترانسفورمیشن لپاره

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r \cos\vartheta$$

دی

$$dx\,dy\,dz = r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi\,.$$

په ځانګړې توګه په یوه غوډوسکې یا کورې $K:\ 0 \le r \le R$ باندې د یوه تابع f انتیګرال لپاره باور لري

$$\int\limits_K f = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{R} f(r,\vartheta,\varphi)\, r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi\,.$$

په ځانګې ډول د رادیالسیمتریک تابع $f(r)$ لپاره دی

$$\int\limits_K f = 4\pi \int\limits_0^{R} f(r) r^2 dr\,.$$

)لیکونکی: هولیک، موبښ

د کواوردینات ترانسفورمیشن

$$(x,y,z) = g(r,\vartheta,\varphi)$$

لوکال اورتوګونال دی،دا په دې معنا چې د جاکوبي – ماتریکس

$$g' = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

اورتوګونال مټې لري. په دې پسې د فنکشنلډیترمینانت لپاره باور لري

$$|\det g'| = |g_r|\,|g_\vartheta|\,|g_\varphi| = 1\cdot r\cdot r\sin\vartheta = r^2\sin\vartheta\,.$$

د یوه رادیالسیمتریک تابع f لپاره انتیګرال په ϑ او φ راکوي

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = 2\pi\,[-\cos\vartheta]_0^{\pi} = 4\pi\,.$$

دا ترمخضریب د $\int_K f$ شمېرنې له امله د یوونغونډارې پورته هوارې سطحه ده.

) لیکونکی: هولیګ، موبش

په غونډوسکې(کرې) $K: r\leq 1$ د r^α انتیګرال دی

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^2 r^\alpha\sin\vartheta\,dr\;d\vartheta\,d\varphi = 4\pi\int_0^1 r^{\alpha+2}\,dr\,.$$

فقط د $\alpha > -3$ لپاره شتون لري او په دې حالت کې مساوي دی لاندې سره

$$4\pi\left[\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{\alpha+3}\,.$$

انتیګرال په $\mathbb{R}^3\setminus K$ دی

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{\infty} r^{\alpha} r^2 \sin\vartheta dr\, d\vartheta\, d\varphi = 4\pi \int_1^{\infty} r^{\alpha+2}\, dr$$

دا انتیګرال فقط د $\alpha < -3$ لپاره شتون لري او په دې حالت کې د لاندې سره مساویدی

$$4\pi \left[\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3}\right]_1^{\infty} = \frac{-4\pi}{\alpha+3} .$$

)لیکونکی: هولیګ، موبښ

د صفر نیو باندې د h په جګوالي فشار د بارومتري جګوالیفرمول له لارې ټاکل کیږي:

$$p(h) = p_0\, e^{-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}} .$$

له دې سره نورمال فشار $p_0 = 101300\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$ دی، $\varrho_0 = 0.150\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ د اکسیجن تینګوالی(غلظت) په صفر نیو(21%د هوا اکسیجن دی) او $g = 9,80\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ د ځمکې بیړه یا تعجیل دی.

تینګوالی د فشار سره د ایدیال غازمساوات سره تړلی:

$$\varrho = \frac{p}{R_s T}$$

د $R_s = \frac{k_B}{m_{\text{Molekül}}} = 519\frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{K\,kg}}$ سره د spezifischen دغاز ثابته د اکسیجن لپاره او T په کالوین کچ شوې تودوخې. د ساده ونې له امله دا د ثابتې $-3°C$ په حیث ، یعنې $T = 270$ K ،نیول- یا کیږي.

له دواړو مساواتو څخه کيدی شي په اتموسفير کې په نږدې توګه د اکسيجن ټوله کتله وشمېرل شي:

$$M=\int_V \varrho\, dV=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_0}^{\infty}\frac{1}{R_sT}p_0\, e^{-\frac{\varrho_0 g h}{p_0}}\, r^2\sin\vartheta\, dr\, d\varphi d\vartheta,$$

له کوم سره چې m $r_0=6.37\cdot 10^6$ د ځمکې وړانګه ده. د

$h=r-r_0$ سبستيچيوشن پسې او په ϑ او φ باندې انتيګرال سره لاس ته راځي

$$M=4\pi\,\frac{p_0}{R_s\cdot T}\, e^{\frac{\varrho_0 g}{p_0}r_0}\int_{r_0}^{\infty} e^{-\frac{\varrho_0 g}{p_0}r}r^2\, dr\,,$$

او د دوه واره ټوټه – يا پارشل انتيګرال سره د انتيګرال لپاره لاس ته راځي

$$\int_{r_0}^{\infty} e^{-cr}r^2\, dr=\left[-\frac{r^2}{c}e^{-cr}\right]_{r_0}^{\infty}+\left[-\frac{2r}{c^2}e^{-cr}\right]_{r_0}^{\infty}+\left[-\frac{2}{c^3}e^{-cr}\right]_{r_0}^{\infty}$$

($c=\frac{\varrho_0 g}{p_0}$). په ټوليزه توګه لاس ته راځي

$$M=\frac{4\pi p_0}{R_sT}\left(c^{-1}r_0^2+2c^{-2}r_0+2c^{-3}\right)=2.59\cdot 10^{19}\ \text{kg}\,.$$

د پرتلې لپاره :

ځمککتله - $6\cdot 10^{24}$ kg $(2.3\cdot 10^5\, M)$

سپوږمۍ کتله - $7.4\cdot 10^{22}$ kg $(2.9\cdot 10^3\, M)$

کتله اودروندتکی(نقطه ثقل؟)

د یوه بدن K کتله د تیګوالي $\varrho(x),\, x \in K\,,$ سره د

$$m = \int\limits_K \varrho(x)\, dK$$

له لارې ورکړ شوی ده. په ځانګړې توګه د $\varrho(x) = 1$ لپاره د K . دکی(حجم) V لاس ته راوړو.

د کتلې دروندتکي ν ـم کواوردینات د لاندې سره سم شمیرل کیږي

$$s_\nu = m^{-1} \int\limits_K x_\nu \varrho(x)\, dK\,.$$

د $\varrho(x) = 1$ لپاره لرو

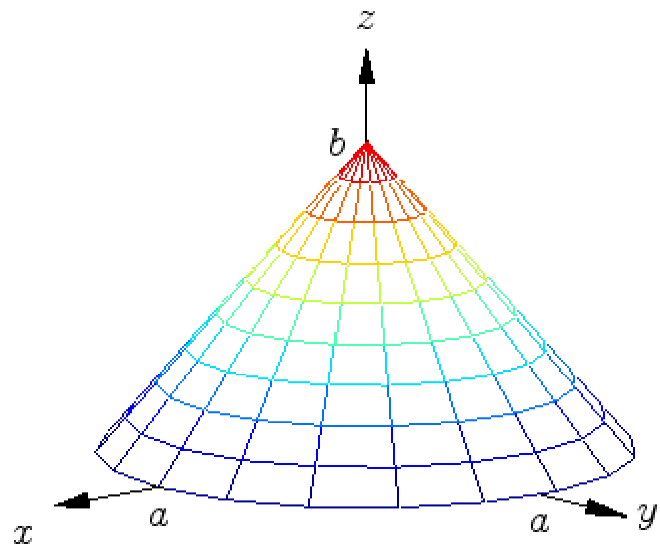
$$s_\nu = V^{-1} \int\limits_K x_\nu\, dK\,,$$

او S هندسي دروندتکی او یا هم په ساده توګه دروندتکی بلل کیږي.

لیکونکي: هیولیګ، کیمرلې، ترایت

یو غونډاری(کره) K د بنسټوړانګې a او جګوالي b سره دکی(حجم) $V = \frac{\pi}{3}a^2b$ لري او په توته کواوردینات کېلاندې انځورونه لري

$$K\ :\quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \varrho \le \frac{a}{b}(b-z), \quad 0 \le z \le b\,.$$



د سيمتري له ا مله د درونديتکي د x – او y -کواوردیناتونه صفر دي. د z –کواوردینات داسې شمیرل کیږي

$$s_z = \frac{1}{V}\int_K z$$

اوپه توته کواوردینات باندې د ترانسفورمیشن وروسته لاس ته راوړو

$$V s_z = \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \int_0^{2\pi} \varrho\, z\, d\varphi d\varrho dz$$

$$= 2\pi \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \varrho\, z\, d\varrho dz$$

$$= \pi \int_0^b z \left(\frac{a}{b}(b-z)\right)^2 \, dz$$

$$= \frac{\pi}{12} a^2 b^2 \, .$$

$$V s_z = \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \int_0^{2\pi} \varrho \, z \, d\varphi d\varrho dz$$

$$= 2\pi \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \varrho \, z \, d\varrho dz$$

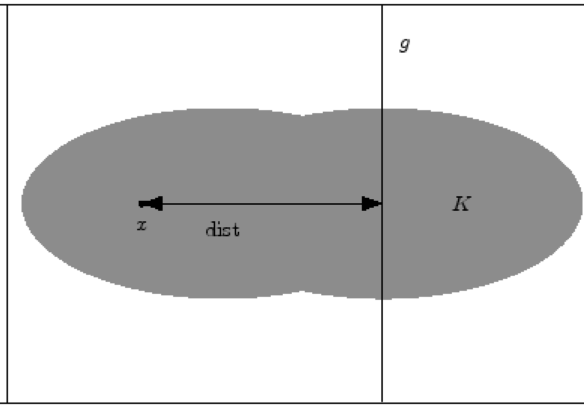
$$= \pi \int_0^b z \left(\frac{a}{b}(b-z)\right)^2 \, dz$$

$$= \frac{\pi}{12} a^2 b^2 \, .$$

له دې سره $S = (0, 0, b/4)$. دروندټکی دی.

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

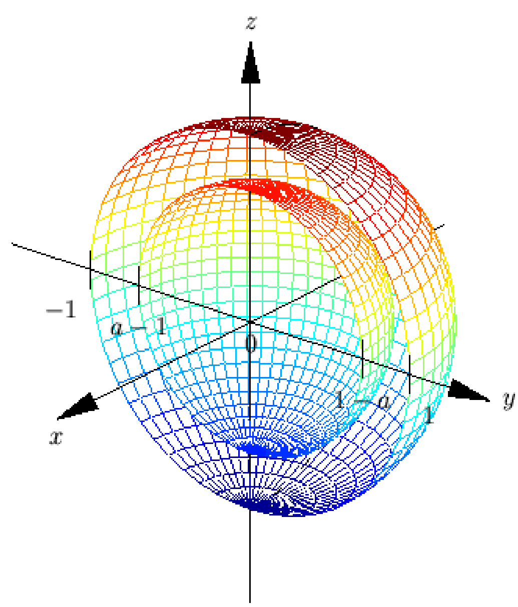
ترايګهايتسمومنت Trägheitsmoment (د کتلې څرکون اړونده لويه)

په يوه محور g د يوه تن K د تينګوالي $\varrho(x),\, x \in K$ سره د Trägheitsmoment دی $$I = \int_K \mathrm{dist}(x,g)^2 \varrho(x)\, dK\,,$$ د کومسره چې dist د واټن تابع ښايي	

ليکونکي: هيوليګ، شترايت

تشکيل-يا جوړه شوې تشه غونډوسکه يا کره په کواورډينات سيستم کې لاندې انځورونه لري

$$K \;:\quad 1-a \le r \le 1\,,\quad 0 \le \vartheta \le \pi\,,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,.$$



د يوه ثابت تينګوالي ϱ لپاره په z –محور د Trägheitsmoment g دی

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{1-a}^{1} \varrho(\underbrace{r\sin\vartheta}_{\mathrm{dist}((x,y,z),g)})^2 \underbrace{(r^2\sin\vartheta)\ dr\,d\vartheta\,d\varphi}_{dK} =$$

$$= \frac{2\pi\varrho}{5}(1-(1-a)^5)\int_0^{\pi}\sin^3\vartheta\,d\vartheta$$

$$\frac{2\pi\varrho}{5}(1-(1-a)^5)\left[-\cos\vartheta+\frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right]_0^{\pi} = \frac{8\pi\varrho}{15}(1-(1-a)^5)$$

که ټینګوالي ϱ له شرایطو، چې تشغونډوسکې کتله دې یو وي، سرې غواړي وټاکي،

$$1 = \int_K \varrho = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{1-a}^{1} \varrho r^2\sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi = \frac{4\pi\varrho}{3}(1-(1-a)^3)\,,$$

نو لاس ته راځي

$$I(a) = \frac{2}{5}\frac{(1-(1-a)^5)}{(1-(1-a)^3)}\,.$$

په ځانګړي توګه د ټولې غونډوسکې د Trägheitsmoment لپاره $I(1)=2/5$ راکوي او د $a=0$ لپاره د پولې ته تلنې له لارې د لوپيتال قانون سره $I(0)=2/3$

ليکونکي: هيوليک، شترايت

د کږې (منحني) انتيګرال

د یوه ناپرېکیدونکې تابع f انتیګرال د یوې کږې(منحني) C په اودوالي د ریګولار ناپرېکیدونکي مشتقوړ پارامتریککونې

$$t \to p(t) \in \mathbb{R}^n\,, \quad p'(t) \neq 0\,, \quad t \in [a,b]\,,$$

سره

$$\int_C f = \int_a^b f(p(t))|p'(t)|\,dt$$

تعریف دی اود ټاکل شوي پارامتریککونې څخه خپلواک دی.

په ځا نګې توګه د $f = 1$ لپاره سړی د کږې اوږدوالی لاس ته راوړي.

په f او p هوارتیا نیونه کیدی شي ضعیفه شي، داسې چې سړی ا نتیګرال په یوه مناسب پولې پروسه باندې تشریح کړي.

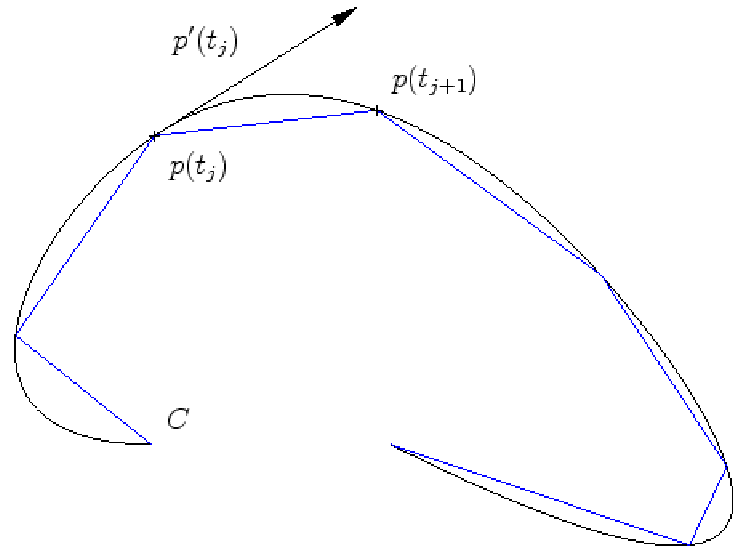
لیکونکي: اپپ، هیولیګ

د ریمن زیاتون یا جمعې په مرسته کېدی شي تعریف مدلل شي. په کږې د د ټکو پرلپسې

$$p(t_j), \quad t_{j+1} - t_j = \Delta t_j\,,$$

دا لاندې دی

$$\int_C f \approx \sum_j f(p_j)|p\,(t_{j+1}) - p\,(t_j)|\,.$$



د منځ ارزښت جملې په بنسټ باور لري

$$p(t_{j+1}) - p(t_j) = \begin{pmatrix} p_1'(\tau_{1,j}) \\ \vdots \\ p_n'(\tau_{n,j}) \end{pmatrix} \Delta t_j$$

د $\tau_{\nu,j} \in [t_j, t_{j+1}]$ سره.د p' د برابرډوله ناپرېکيدني له امله په $[a,b]$ لرو

$$|p(t_{j+1}) - p(t_j)| = |p'(t_j)| + r_j |\Delta t_j|$$

د $|r_j| < \varepsilon$ سره د $|\Delta t_j| < \delta$ لپاره. د ټوټه ونې د نرېوالي له امله بنې اړخ د

$$\int_a^b f(p(t))\, |p'(t)|\, dt$$

په لور هڅيږي.

پورته دليل هم د پارانتی کونط خپلواوالی ښايي، ځکه چې دا د ريکمزاتون کېمنځ ته نه راځي.

په بديلي توګه کيدی شي مختلف پارامتريککونه د يوې متحولې سبستيچيوشن له لارې يو په واړوي.

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د تابع

$$f(x,y,z)=\exp(-z)$$

انتيګرال به د C پيچي ميخ د n اړونو يا څرخونو په اوږدوالي د پارانتريک کونې

$$C:\quad p(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ t\end{pmatrix},\quad p'(t)=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 1\end{pmatrix},\quad t\in[0,2\pi n],$$

سره وټاکلشي.

سړی لاس ته راوړي

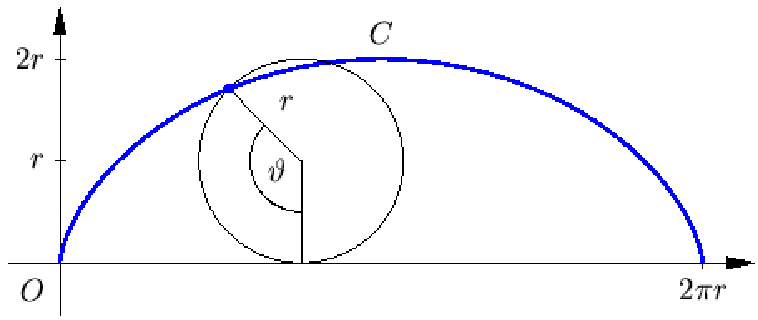
$$|p'(t)|=\sqrt{2}$$

او له دې سره

$$\int_C f=\int_0^{2\pi n}\exp(-t)\sqrt{2}\,dt$$

ليکونکي: اپپ، هيوليګ

د خیوکلوید C اوږدوالی L ټاکل کیږي، هغه چې یو ټکي د یوې دایرې په چاپیریال د $r > 0$ وړانګې سره تشریح کوي، چې په یوه کرښه ګرځي یا څرخي



د پارامتري کونبلپاره

$$C: \quad p(\vartheta) = r \begin{pmatrix} \vartheta - \sin\vartheta \\ 1 - \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

دی

$$p'(\vartheta) = r \begin{pmatrix} 1 - \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad |p'(t)| = r\sqrt{(1-\cos\vartheta)^2 + \sin^2\vartheta} = r\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}.$$

له دې سره د خیکلویید د اوږدوالي لپاره لاس ته راځي

$$L = \int_0^{2\pi} r\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}\, d\vartheta$$

$$= 2r\int_0^{2\pi} \sin(\vartheta/2)\, d\vartheta = 2r\left[-2\cos(\vartheta/2)\right]_0^{2\pi} = 8r,$$

د کوم سره چې کټوټوالی $1-\cos\vartheta = 2\sin^2(\vartheta/2)$ کارول شوی.

ليکونکي اپپ، هیولیګ

د کږې (منحني) انتيګرالخويونه

د کږې انتيګرال $\int_C f$ په f کې کرښيز د ی اونسبت و C ته زيا تيزيا د جمعې په ډول:

- $$\int_C \alpha f + \beta g = \alpha \int_C f + \beta \int_C g$$
- $$\int_C f\, dC = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f$$,

که $C = C_1 \cup C_2$ او C_1 او C_2 د ځانله ټکي پورې ټکي پردي وي،

دا له پارامتري کونې څخه خپلواک دی او په ځانګړې توګه د کږې د لوريزوالي څخه هم خپواک دی.

ليکونکي: اپپ،   هیولیګ

د ليندې اوږدوالی

د يوې د

$$t \mapsto p(t)\,, \qquad a \le t \le b\,,$$

له لارې پارامتري شوې کږه(منحني) C د $p(a)$ او $p(t)$ ترمنځ د کږې اوږدوالی

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)|\, d\tau\,,$$

کیدی شي د کانوني کږې پارمتر په حیث وکارول شي. سړی داسې په نا مه د لیندۍ پسې پارامتري کیدنه لاس ته اروړي:

$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1\,.$$

د کاندید تانجنتوکتور له مخې یا پر بنسټ د دې کانوني پارامتري کوني لپاره باور لري

$$\int_C f = \int_0^L f(q(s))\, ds$$

د C د اوږدوالي L سره.

لیکونکي: اپپ، هیولیک

د بېلګې په توګه د لیندۍ $q(s)$ پسې د شپیرالي

$$C: \quad p(t) = \exp(t)\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad p'(t) = \exp(t)\begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

پاراه متري کونه له $t = 0$ تاکل کیږي. سړی لاس ته راوړي

$$s(t) = \int_0^t |p'(\tau)|\, d\tau = \int_0^t \sqrt{2}\exp(\tau)\, d\tau = \sqrt{2}(\exp(t) - 1)$$

همداسې

$$t(s) = \ln(s/\sqrt{2} + 1)\,.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$q(s) = (s/\sqrt{2} + 1)\begin{pmatrix} \cos(\ln(s/\sqrt{2} + 1)) \\ \sin(\ln(s/\sqrt{2} + 1)) \end{pmatrix}.$$

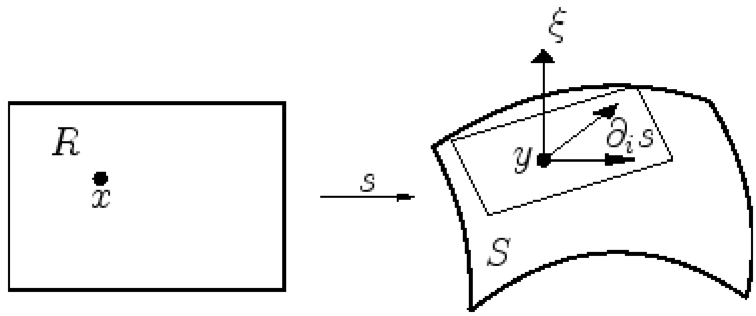
لیکونکي: اېپ،   هیولیګ

د یوې ټوټې سطحې رګولار پارامتریکونه

یو ناپرېکېدونکی مشتقموړ پارامتري کونه

$$R \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto s(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

په یوه رګولار ورشو R باندې یو رګولار د سطحې ټوټه $S = s(R)$ تشریح کوي، که s د R په دننه کې اینجکتیو(په باندې) وي او وکتورونه $\partial_1 s(x), \ldots, \partial_{n-1} s(x)$ د ټولو $x \in \mathring{R}$ لپاره کرښیز خپلواک وي.



دا تر مخنخښي پورې يوائځنی ټاکلی يوونوکتور(واحدوکتور) ξ ، چې د $\partial_1 s(x),\ldots,\partial_{n-1} s(x)$ څخه يا له لارې غزېدلی تانجنت سطحې ته اورتوګونال دی، سطحې نورمال بلل کيږي. دا ووکتورونو $\partial_i s(x)$ سره يوځای د $\mathbb{R}^n$ يوه بنسټ جوړوي

ليونکي: هيوليګ، موښ

د سطحې انتيګرال *Flächenintegral*

د يوه ناپرېکيدونکي تابع f انتيګرال په يوه رګولار سطحې توټې د پارمتري کونې سره

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto s(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad x \in R,$$

او سطحې نورمالې ξ سره د

$$\int_S f\, dS = \int_R (f \circ s)\,|\det(\partial_1 s, \ldots, \partial_{n-1} s, \xi)|\, dR$$

په حيث تعريف دی او د تاکل شوي پارمتري کوني څخه خپلواک دی.

د ديترمينانت ارزښت د سطحپتوکي د سکالي شوی ضريب دی:

$$dS = |\det(\partial_1 s, \ldots, \partial_{n-1} s, \xi)|\, dR\,.$$

د $f = 1$ لپاره د ځانګړي حالت په حيث سړی د S سطحې مساحت لاس ته راوړي.

د f او s مساواتوړاندنيوني کيدی شي ضعيفي شي، داسي چې ا نتيګرال په يوه مناسب پوله پروسه باندې تعريف شي. برسېره پردې کېدی شي يوه سطحه د ډېرو سطحې ټوټو يوځای شوې يا جوړه شوي وي. د سطحې انتيګرال نو په دې حالت کې د يوګونو ټوټه سطحو باندې د انتيګرالونو زياتون يا جمعه ده.

ليونکي: هيوليک، موښ

د ساده ونې له ا مله دوه پرا خيدونی يا دوه ديمنزنال حالت ترڅيرنې لاندې نيسو.

کېدی شي تعريف د ريمن-زياتون يا –جمعې په مرسته مدلل کړی شي. لکه په څېره کې چې ښوول شوي، سړی د ترياڼګولي کولو له لارې R اپروکسيمي کوي د درېګوډي د σ کانتي اوړدوالي سره متناسب و ته h. د ګوډتکو د توابعو له لارې دا د S يوترياڼګل توليدوي د درېګوډيو τ سره:

$$\tau \ni (x_\tau, y_\tau, z_\tau) = s(u_\sigma, v_\sigma)\,.$$

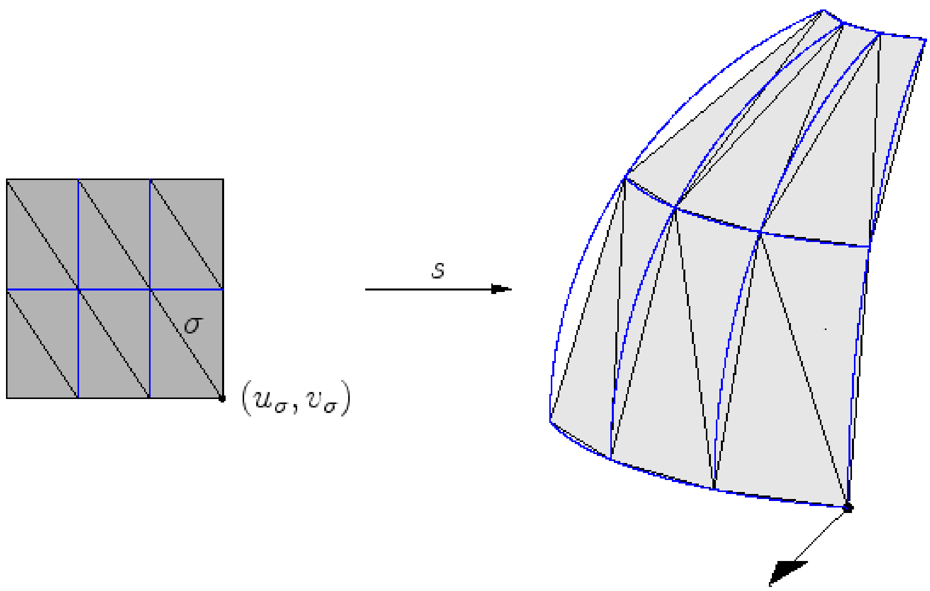
د سکالی کولو ضريب د درېګوډي د سطحې تغير اپروکسيمي کوي

$$\text{area}(\tau) = |\det(s_u(u_\sigma, v_\sigma), s_v(u_\sigma, v_\sigma), \xi)|\, \text{area}(\sigma) + O(h^3)\,.$$

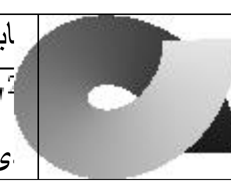
په تعقيب انتيګرال د $h \to 0$ لپاره د ريمن – زياتون له لارې

$$\sum_{\sigma} f(x_\tau, y_\tau, z_\tau) |\det(s_u(u_\sigma, v_\sigma), s_v(u_\sigma, v_\sigma), \xi)| \operatorname{area}(\sigma)$$

نږدې کيږي، هغه چې د $h \to 0$ لپاره د انتيګرال په لور هخيږي



ليونکي: هيوليک، موبش

ابع $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ي د	

$$(r, \varphi) \mapsto s(r, \varphi) = \begin{pmatrix} (1+r)\cos\varphi \\ (1+r)\sin\varphi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{1}{2}$$

له لارې پارامتري شوې د راتاو پوړظ يا زينې Wendeltreppe S برخه توتو

انتيګرال ونيول شي.

د سطحې توکو د سکالي کولو فاکتور د ټاکلو لپاره لومړی شميرو(ځيره پورته مخ کې):

$$s_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s_\varphi = \begin{pmatrix} -(1+r)\sin\varphi \\ (1+r)\cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

دا چې ټوټه مشتقونه اورتوګونال دي،دی

$$|\det(s_r, s_\varphi, \xi)| = |s_r|\,|s_\varphi| = \sqrt{(1+r)^2+1}.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\int_S f\,dS = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1+r)\sqrt{(1+r)^2+1}\,dr\,d\varphi = 2\pi\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1+r)\sqrt{(1+r)^2+1}\,dr$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left[\left((1+r)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{3}\left(\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right).$$

ليونکي: هيوليک، موبش

د يوه تابع $z(x,y)$ د ګراف S د سطحېتوکی دی

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy.$$

دا د پارمتیکولو لپاره د ټولیز تعریف څخه ترلې لاس ته راځي

$$(x,y) \mapsto s(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{pmatrix},$$

ځکه چې د سطحې نورمال ξ غبرګ دی و

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{pmatrix}}_{s_x} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{pmatrix}}_{s_y} = \begin{pmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

ته او د $|\xi| = 1$ له امله دی

$$|\det(s_x, s_y, \xi)| = |s_x \times s_y| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}.$$

د بیلګې په توګه د کونکرت یا روښانه تابع $z(x,y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$ د ګراف لپاره دی

$$dS = \sqrt{1 + 4x^2 + y^2},$$

او سړی د $f(x,y) = xy$ لپاره لاس ته راوړي او دا په ولاړګوډیز $[0,1] \times [0,2]$ پرتې سطحې ټوټې

$$\int_S f\,dS = \int_0^1 \int_0^2 xy\sqrt{1 + 4x^2 + y^2}\,dy\,dx$$

سرليک

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 \left[x(1+4x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x(5+4x^2)^{\frac{3}{2}} - x(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\right) dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{20}(5+4x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{20}(1+4x^2)^{\frac{5}{2}}\right)\right]_0^1 = \frac{61}{15} - \frac{625}{6}\sqrt{5}\,.$$

ليونکي: هيوليک، موبش

د سطحې توکي په توته کواوردينات کې

د سطحې توکي د يوه د

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi \\ \varrho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

له لارې پارامتري شوی د يوې توتې پورته پوښ S د وړانګې ϱ سره دی

$$dS = \varrho\, d\varphi\, dz\;.$$

له دې سره په توته کواوردينات کې د يوه تابع f د ا نتيګرال لپاره باور لري

$$\int_S f\; dS = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}}\int_0^{2\pi} f(\varrho,\varphi,z)\;\varrho\, d\varphi\, dz\;.$$

ليونکي: هيوليک، موبش

د تانجنت وکتور د اورتوګونالیتي له امله

$$s_\varphi = \begin{pmatrix} -\varrho\sin\varphi \\ \varrho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

د سکالا کولو کتور د سطحې توکو لپاره دی

$$|\det(s_\varphi, s_z, \xi)| = |s_\varphi|\,|s_z| = \varrho,$$

لکه چې غوښتل مو.

لیونکي: هیولیک، موښ

$$V = [0,1]^2$$

د ځلورئ یا مربع لپاره اصلي جمله داسې ده

$$\int_0^1 \int_0^1 \operatorname{grad} f(x,y)\,dx\,dy = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(1,y) - f(0,y)\,dy \\ \int_0^1 f(x,1) - f(x,0)\,dx \end{pmatrix}.$$

دا له تابع څخه ترلي لیدل کیږي:

$$n = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$$

د کتمتوالي کمپوننتونه د اونیواریانت(یومتحولي یا اووښوتوني) اصلي جمله په ګوته کوي.
د بیلګې په توګه لومړی کمپوننت و لاندطته ورته یا یو ارزښته یا اکویوالنتدی

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f_x(x,y)\,dx - [f(x,y)]_{x=0}^{x=1} \right)\,dy = 0\,.$$

(Aus: Mathematik-Online)

په غونډاري کواوردینات کې د سطحو توکي

د سطحې د توکي د یوه د

$$\begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

له لارې لپاره پارمتري شوی فضا Sphäre د وړانګې R سره دی

$$dS = R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\,.$$

له دېسره په غونډاري کواوردینات کې د یوه تابع f د انتیګرال لپاره باور لري

$$\int_S f\;dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(R,\vartheta,\varphi)\,R^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,.$$

لیونکي: هیولیک، موبش

د تانجنت وکتور د اورتوګونالیټي له امله

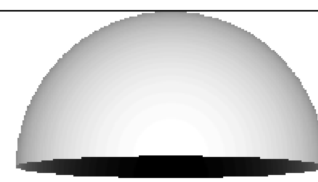
$$s_\vartheta = \begin{pmatrix} R\cos\vartheta\cos\varphi \\ R\cos\vartheta\sin\varphi \\ -R\sin\vartheta \end{pmatrix}, \qquad s_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

د سکالیکولووکتور د سطحې توکو لپاره دی

$$|\det(s_\vartheta, s_\varphi, \xi)| = |s_\vartheta|\,|s_\varphi| = R^2\sin\vartheta\,,$$

لکه چې غوښتل مو.

لیکونکي: هیولیګ، موبش

د نیمغونډاري(-پیالي یا پوښ) درونډټکی S دې $H\ :\quad x^2+y^2+z^2=1\,,\quad z\geq 0\,,$ د ثابت تیګوالي سره وټاکل شي	

د سیومټري په اساس د درونټکي د x -او y - کواوردیناتونه صفر دي. د z − کواوردینات لپاره د غونډاري کواوردینات د کارولوله امله سرې لاس ته راوړي

$$s_z\,\mathrm{area}(H) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = \pi\,,$$

او د $\mathrm{area}(H) = 2\pi$ سره لاسته راځي $s_z = \frac{1}{2}$.

لیکونکي: هیولیګ، موبش

د ډېرواره اتیګرال لپاره اصلي جمله

که n د یوه رګولارورشو $V \subset \mathbb{R}^m$ د باندې لور ته لوریزه یوونورم یا واحدنورم وښایید رګولار $(m-1)$ -- بعد یا پراخېدوني ژئ ∂V سره، نو د یوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ تابع f لپاره باور لري

$$\int_V \partial_\nu f = \int_{\partial V} f\, n_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, m.$$

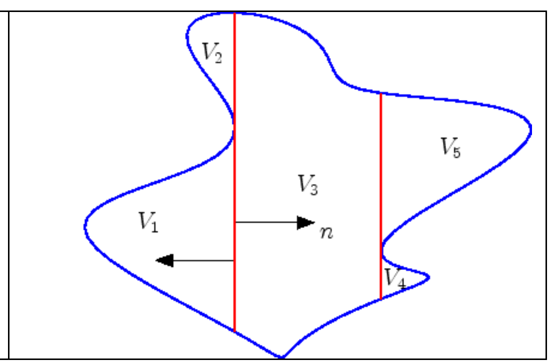
که سرى دا مساوات سره یوځاى کړي، نو سرى وکتوري کتمتوالى لاس ته راوړي.

$$\int_V \operatorname{grad} f = \int_{\partial V} f\, n.$$

(لیکونکي:هولیک، هورنر)

د ښووني فکر د $m = 2$ لپاره ښوول کیږي.

لومړى په پام کې نیول کیږي، چې د انتیګرال نیولوو ورشو په برخه ورشوګانو وېشل کیدى شي، ځکه چې د نورم د لوریزوني له امله د ټوټه کېدنو په دننئ ژئ د ژئ انتیګرالونه لرې کیږي. له دې امله بسیا کوي، یو د انتیګرال نیوني ساده ورشو راوخلو یا تر څېړني ونیسو.



د $m = 2$ لپاره سرى V په ساده ورشوګانو ټوټه کوي په لاندې بڼه

$$V : a \le x \le b, \quad c(x) \le y \le d(x).$$

بيا د ډبل انتيګرال لپاره باور لري

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f_y(x,y)\,dy dx = \int_a^b (f(x,d(x)) - f(x,c(x))\,dx\,.$$

په ولاړو يا عمودوvertikalen ژيو د y – کمپوننت د صفر عمود دی له دې امله بايد د ژئ ا نتيګرال لپاره پورته اوکښته ژئ په پام کې ونيول شي يا وکتل شي. لاندې ژئ کيدی شي په لاندې بڼه

$$C:\; x \mapsto (x, c(x)), \quad a \le x \le b$$

پارامتريک شي او

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 + c'(x)^2}} \begin{pmatrix} c'(x) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

دا چې $dC = \sqrt{1 + c'(x)^2} dx$ دی، نو باور لري

$$\int_C f n_2 = \int_a^b f(x, c(x))(-1)\,dx\,.$$

په ورته توګه لاندطژئانتيګرال شمېرل کيږي، او د ارزښتونو زياتون يا جمعه د ډبل انتيګرال سره سر خوري يا همغږيز کيږي.

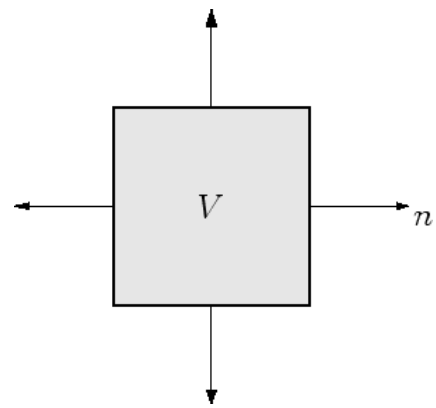
(ليکونکي:هوليک، هورنر)

د مربع $V = [0,1]^2$ لپاره اصلي جمله ده

$$\int_0^1 \int_0^1 \operatorname{grad} f(x,y)\, dx\, dy = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(1,y) - f(0,y)\, dy \\ \int_0^1 f(x,1) - f(x,0)\, dx \end{pmatrix}.$$

دا له تابع څخه تړلي لیدل کیږي:

$$n = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$$

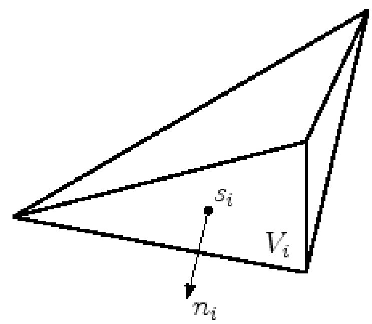


د کتمتوالي کمپوننتونه د یومتحول والي اصلي جمله ده. د بیلګې په توګه لومړی کتپوننت و لاندې ته ورته یا اکویوالنت دی

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f_x(x,y)\, dx - [f(x,y)]_{x=0}^{x=1} \right) dy = 0\,.$$

(Aus: Mathematik-Online)

$V \subseteq \mathbb{R}^m$ دې یو سیمپلکس وي، چې د $(m-1)$ -بعدي سیمپلکسونو $V_i\,,\ i=1,\ldots,m+1$ له لارې را بندیږي او n_i د باندې لور ته لوریز یوونورمال یا واحدنورمال نومول کیږي او s_i د V_i درونټکی وي.



د یوه ثابت تابع $f(x)=b$ لپاره د اصلي جملېلاسته راځي

$$0=\sum_i \mathrm{vol}_{m-1}(V_i)n_i\,.$$

د یوه کرښیز تابع $f(x)=a^{\mathrm{t}}x$ لپاره باور لري

$$\mathrm{vol}_m(V)\,a=\sum_i \mathrm{vol}_{m-1}(V_i)(a^{\mathrm{t}}s_i)n_i\,.$$

دلته وکارول شوی،چې د یوه سیمپلکس S لپاره د دروندټکي s سره مربعیز فرمول Quadraturformel د کرښزې تابع f لپاره ټیک ده

(Aus: Mathematik-Online)

د یوه غونداري لپاره په یوه غونداریکواوردینات کې د وړانګې R اوپاس –یا پورته یا پوښ سطحې یا هوارې سره باور لري

$$dV = r^2 \sin\vartheta \, dr \; d\vartheta \, d\varphi \,, \quad dS = R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

او $n = (x, y, z)^t / R$ یوونو‌رمال دی. د دې پسې یا دېلاسته راوړنې پسې اصلي جمله ده

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{grad} f(r, \vartheta, \varphi) \, r^2 \sin\vartheta d\varphi \, d\vartheta \, dr =$$

$$= R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(R, \vartheta, \varphi) \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, .$$

د بېلګې په د روښانه تابع لپاره سرې لاس ته راوړي

$$f(x, y, z) = xz^2 = R^3 \sin\vartheta \cos\varphi \cos^2\vartheta$$

د ګرادینت او fn لپاره

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z^2 \\ 0 \\ 2xz \end{pmatrix} ,$$

$$f(x, y, z) n = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x^2 z^2 \\ xyz^2 \\ xz^3 \end{pmatrix} \, .$$

د سیومتري په بنسټ اخرودواړو لیکوباندې انتیګرال صفر راکوي.د لومړئ لیکې لپاره په غونډاري کواوردینات کې صفر لاس ته راځي

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \cos^2 \vartheta \ \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr \ =$$

$$= R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^3 \sin^3 \vartheta \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$= \frac{4}{15} \pi R^5 \, .$$

(Aus: Mathematik-Online)

Partielle Integration ***نوټه انتیګرال***

د ځوی توابعو f او g لپاره د کومپاکت وړونکي سره باور لري

$$\int_{\mathbb{R}^m} g \, \partial^\alpha f \, = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^m} f \, \partial^\alpha g \, .$$

(لیکونکي:هولیګ، هورنر)

دا چې f او g کومپاکت وړونکي لري، يوه کوادر V شتونلري،داسې چې د V په ژئ او هم دباندې له V دواړه توابع ورک شي.

د اصلي جملې له مخې د دېرواره انتيګرالونې لپاره با ور لري

$$\int_{\mathbb{R}^m} \partial_\nu (fg) = \int_V \partial_\nu (fg) = \int_{\partial V} (fg) n_\nu = 0$$

د يوه په خوښه ټوټه مشتق ∂_ν لپاره.له بلې خوا د ضرب قانون له مخې دی

$$\partial_\nu (fg) = g\partial_\nu f + f\partial_\nu g$$

او له دې سره

$$\int_{\mathbb{R}^m} g\partial_\nu f + \int_{\mathbb{R}^m} f\partial_\nu g = 0\,, \quad \text{bzw.} \quad \int_{\mathbb{R}^m} g\partial_\nu f = -\int_{\mathbb{R}^m} f\partial_\nu g\,.$$

د ∂^α په تجزيه په يوګونو ټوټه مشتقونو له لارې او پرلپسې د مساواتو استعمال سره سرې دا ورکړ شوی فرمول لاس ته راوړي، ځکه چې په هوارو يا خويو توابعو کې د ټوټه مشتق سره بدلېدلی شي.

(ليکونکي:هوليګ، هورنر)

د ګرين فرمولونه ***Greensche Formeln***

که n د باندې لور ته لوريز د يوه رګولارورشو $V \subseteq \mathbb{R}^m$ يوونرمال يا واحدنورمال وښايي د رګولارژئ سطحې $S = \partial V$ سره، نود دوه ناپرېکېدونکي مشتقوړ توابعو f او g لپاره باور لري

$$\int_S f\,\frac{\partial g}{\partial n} = \int_V (\mathrm{grad}\, f)^{\mathrm{t}}\ \mathrm{grad}\, g + f\,\Delta g\,.$$

چېرته چې $\frac{\partial g}{\partial n}$ د دباندې لورته مشتق ښايي نورمال دی.

په ځانګړي د $f = 1$ لپاره لرو

$$\int_S \frac{\partial g}{\partial n} = \int_V \Delta g\,.$$

يوسيومتري واريانت په ګرين نومول شوې کټمټوالی دی

$$\int_S f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} = \int_V f\Delta g - g\Delta f\,.$$

د دواړو ګرين فرمولونو نه کېدی شي دخوی والي وړاندنيونه ضعيفه شي، داسې چې په مناسب پوله ارزښت تعريف شي.

(ليکونکي:هوليک، هورنر)

د ډېرواره اينتګرال اصلي جملې پسې دی

$$\int_S f\,\partial_\nu g\, n_\nu = \int_V \partial_\nu\,(f\,\partial_\nu g)\ ,\quad \nu = 1,\cdots,m\,.$$

د ضرب قانون سره په ښي اړخ انتيګرال لپاره لاس ته راځي

$$(\partial_\nu f)(\partial_\nu g) + f(\partial_\nu\partial_\nu g)$$

په $\nu = 1,\ldots,n$ باندې زياتون يا جمعي له دې سره د ګرين لومړی فرمول راکوي.

دويم فرمول د f او g يدلون له لارې لاس ته راځي. سرې د

$$\int_S f \frac{\partial g}{\partial n} \quad \text{او} \quad \int_S g \frac{\partial f}{\partial n}$$

لپاره کتمېتوالی کموي يا سره تفريقوي او په پام کې نيول کيږي، چې د ډکي- يا حجم اينتګرالونو د ګرادينت ضرب له منځه وړي يا پورته کوي؟

(ليکونکي:هولېګ، هورنر)

د فبروری ۲۴ د۲۰۱۱ ز ک.

د لوی څښتن په برکت او مهربانۍ(ژباړی)

هر پيل شوی کار چې پای کيږي، نو ناروغه زړه ورسره، هغه د شاعرانو خبره، باغ باغ کيږي.(ژباړی)

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Uni. Wien

Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, at the University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د ګڼې – او کڼې د کڼې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

<u>*2003 Bonn (Germany):*</u>

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل   دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

<u>*Bonn (Germany): 2003*</u>

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

<u>*2003 Bonn (Germany):*</u>

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

<u>1997 Bonn (Germany):</u>

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلي.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په چاپیدو یې پیل کیږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

لاندې د برینکمن لیکنې چې له برینکمن ن ج ځخه ژباړل شوي دي.

سرليک

١ - شميرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دويم ټوک

٣ – شميرپوهنه د ښوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالوالي شميرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصايه يا ستاتيستيک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – اناليزی ١

٧ – اناليزې ٢

٨ – کرښيز الجبر

٩ - د شميرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل اناليز

١٢ – وکتور شميرنه

نورې ژباړې

١٣ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

١۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما لیکنې

<u>Bonn (Germany):</u>

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په

کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلې

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

-۲۲   داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزې پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویپونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري ليكنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتكارت پوهنتون لكچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپريږي:

د ګروپونو تيوري

- د ښوونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليكنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره ښه ليکنه ده، چې -د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيونې سره په كې راغلي او ماته زيات ګټور برېښي)