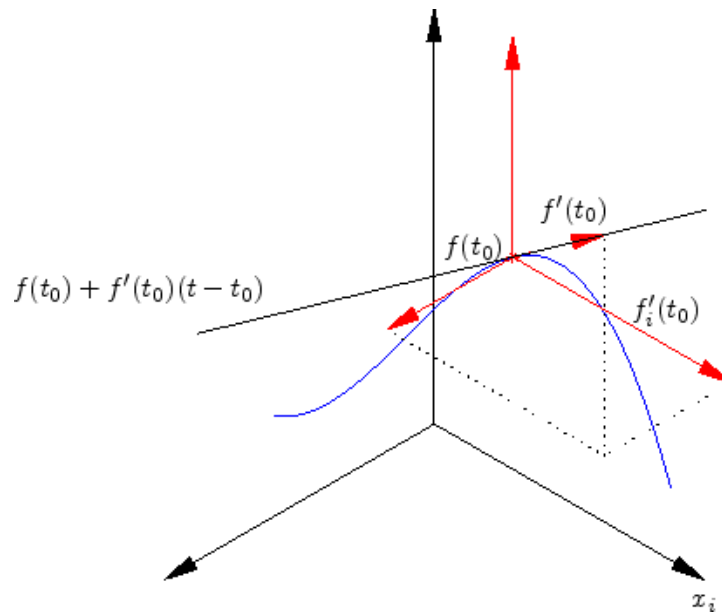


د پوهنتون لپاره لکچرنوټونه  
د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیز  
یا انالیز دوه



لیکونکي: د شتوتگارت پوهنتون د شمیرپوهنې یا ریاضي څانګه

د مات انالیز څخه یا د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه

**Ketabton.com**  
ژباړی: د اکر ساحا (میری) شینواری

سرلیک

## د لوی څښتن په نامه

په دې هیله، چې په دې لیکنو او ژباړو به مې زموږ د بې وزلي او له پوهې پاتې ملت  
- په ما د پوهني په لار د لگښت - لپاره د پوهني په لور داسې لږ ونډه اخستې وي.

د کتاب نوم: د ډېرو متحولو یا اووښتونو انالیزې

ډاکټر ماخان میري شینواری

Smakhan1946@gmail.com

د چاپ لري:

## د ژباړې مننه

د دې لیکنې مل نورې خپرونې د شتوتگارت د پوهنتون د شمیرپوهنې د خانگي د لکچرونو لړۍ چاپ باندې پیل کيږي

د هر څه له مخه د هغو لیکونکو پروفیسرانو څخه زیاته مننه، چې د لیکنو څخه یې زما د ژباړې لپاره تفاهم لري. ماته د دوي د لیکنو د ژباړې په هیڅ ډول مادي گټه نه شته او دا کار مې یوازي په یوه د پوهنې توانمندی، مگر وروسته پاتې ژبې ویونکي ولس ته وړاندې دی، دا دې د دې پروفیسرانو له خوا په پوهنیزه اړخ کې- زموږ په دې اړخ کې هم مرستې ته اړ ولس- سره مرسته وي.

	د ژباړې سرريزه
	ټول... ټول
١	اساسي کليمې
١	ډېرې يا سټ او پولې ته تلنه
١	چاپيريال
١	د وکتورونو پولې ته تلنه
٢	د وکتورونو لپار د کوشي پولې ته تلنه
٣	وازه ډېرې يا سټ
٤	رابنده ډېرې(سټ)
٤	د يوې ډېرې ژئ يا غاړه
٥	کومپاکته ډېرې
	--- تابع
٥	د ډېرو متحولو توابع
٦	ډېر متحولي پولينو مونه
١٠	د ډېر متحولو توابعو ناپرېکيدنه
١٢	په کومپاکتو ډېريو د ناپرېکيدونکو توابعو افراطي ارزښتونه
١٣	د وکتور نورمونو برابر ارزښتوالی
١٤	د لپسشټيخ Lipschitz ناپرېکيدنه
١٦	کونتر اھيري کيدونکې څيرونې يا توابع
١٧	د باناښ Banach ځای په ځای ټکي جمله
	---- مشتق يا رابيليدنه
٢٠	---ټوټه يا پارشل مشتق
	ټوټه مشتق
٢٢	ډيرواره ټوټه مشتقونه
٢٤	د ډېرو متحولو پولينو مونو ټوټه مشتق
	د يوې تابع ټوټه مشتق بد ليدنوالی
٣٠	توتال يا تمام مشتق
٣٤	کربنيز اپروکسيميشن
٣٧	د مولتيواريت توابعو د غلطيو وده يا تکثير
	د ډېر متحولو توابعو د ناټيکاوې زېږنده يا وده
٣٨	تانجنټ
٤١	تانجنټي سطحه
	--- د مشتق قوانين
٤٥	د ډېرو متحولو زخيري قانون

۵۳	د یوې تابع لوریز مشتق
۵۵	د خورا زورنډې کیوتنې متودونه
۵۹	په څټ - یا معکوس توابع
۶۷	ایمپلیڅیت توابع
۶۹	د ویوانې ګړه
۷۵	د نه کر بنیزو توابعو د مخته بیوني ===== مساوات سیستمونه
۶۷	--- د تیلور Taylor وده
۸۱	د هیسی Hesse ماتریکس
۸۵	د نیوتون Newton تلنار
۸۸	--- افراطی ارزښتونه <b>کریتیکال</b> ټکی
۹۴	د ډېر متحولو توابعو افراطیت
۱۰۲	د لاګرانژ ضریبونه <a href="#">Lagrange-Multiplikatoren</a>
۱۱۰	د کر بنیز مساوات شرایطو سره مربعیز مینیمالونه (را کمونه)
۱۱۶	د کون-تکر Kuhn-Tucker شرایط ډېر بعدیز یا - پراخیدنی اینتګرال --- ډېر بعدیز - یا - پراخیدونی اینتګرال
۱۲۵	سیمپلکس <a href="#">Simplex</a>
۱۲۶	غبرګ ایپیپید <a href="#">Parallelepiped</a>
۱۲۶	د اینتګرال ورشو
۱۲۸	د هاوزدورف Hausdorff واټن
۱۲۹	ډېر بعدیز یا - پراخیدنی اینتګرال
۱۳۲	د فوبیني Fubini جمله
۱۳۸	د بعدی یا - پراخیدونی واحدکری (یوونګونډوسکي) ډکی یا حجم

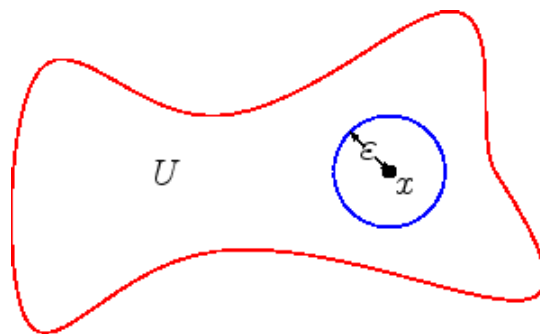
- د ڊيپريڊيزو اينٽيگريشنون ترانسفورميشن ۱۴۱
- د ڊيپريڊيزو اينٽيگريشنون ترانسفورميشن
- په توتو ييز (استونو ڊوله) ڪو اوڊينيات ڪي د حجم توڪي (ڊڪي-) ۱۵۰
- په گري (غونڊوسڪي-) ڪو اوڊينيات ڪي د حجم (ڊڪي) توڪي. ۱۵۲
- ڪتله او درونڊيڪي (د سقل مرڪز) ۱۵۷
- د (بار) ورنه مومنت Trägheitsmoment moment of inertia عزم العطالة
- د منحنيو (ڪرو-) او سطحو اينٽيگريشن
- د منحنيو اينٽيگريشن ۱۶۱
- د منحنيو اينٽيگريشن خويونه ۱۶۶
- د لينڊي اوڊوالي ۱۶۶
- د سطحي يوي توتي منظم بار امٽريڪ ڪونه. ۱۶۸
- د سطحي اينٽيگريشن ۱۶۹
- په توتو ڪو اوڊينيات ڪي د سطحي توڪي ۱۷۴
- په غونڊوسڪي يا ڪري ڪو اوڊينيات ڪي د سطحي توڪي ۱۷۶
- د ڊيپرواره اينٽيگريشنون بنسٽجمله يا اصلي جمله ۱۷۸
- د ڊيپرواره اينٽيگريشنون بنسٽجمله يا اصلي جمله
- توتو اينٽيگريشن ۱۸۳
- د گرين Greensche فرمولونه ۱۸۴

بنسټيزې يا اساسي کليمې  
ډېرې يا ستې او پولې ته تلنه

## چاپيريال

دا د يوه ټکي  $x \in \mathbb{R}^n$  د  $\varepsilon$ -چاپيريال په حيث دا لاندي غونډوسکه (غونډارې، توپ که غواري: کره) نوموو

$$B_\varepsilon(x) = \{y : |y - x| < \varepsilon\} .$$



په توليزه توگه د  $x$  چاپيريال  $U$  يوه ډېرې ده، چې يو چاپيريال  $\varepsilon$  خوندي لري.

ليکونکي: هولېگ او پفايل

د وکتورونو کونورگنت يا پولې ته تلنه

د وکتورونو  $x_k \in \mathbb{R}^n$  يوه پرلپسې د يوه وکتور  $x$  خواته کنورگ کيږي يا ځي،

$$\lim x_k = x, \text{ همداسې, } x_k \rightarrow x$$

که د ټولو  $\varepsilon > 0$  لپاره يو ايندکس  $k_\varepsilon$  شتون ولري

سرلیک

د  $|x_k - x| < \varepsilon$  سره د  $k > k_\varepsilon$  لپاره.

په بل ډول هر  $\varepsilon$  -چاپیریال  $B_\varepsilon(x) = \{y : |y - x| < \varepsilon\}$

ټولې ترپاي ډېرو پرلپسې (ترادف) توکو پورې خوندي لري.

د  $(x_k)$  کونورگنځ ته ورته د ټولو کمپوننتونو کونوی رگنځ دی، د اړه دې معنا چې کیدی شي یو پراخیدونې یا یو بعدې کونورگنځ کریتیریوم ورته راکنبل - یا راونیول شي.

(لیکونکي: بوسلر، هولیک، شترایت)

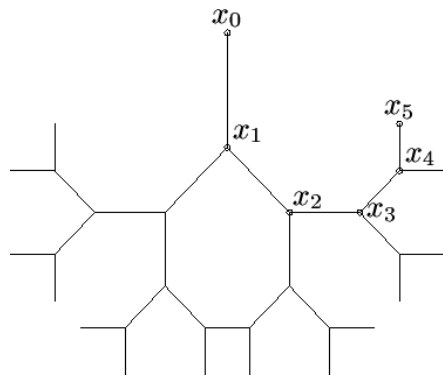
## د وکتورونو لپاره د کوشي Cauchy کریتیریوم یا قضیه

یوه د وکتورونو پرلپسې  $x_k \in \mathbb{R}^n$  ټیک هلته پولي ته ځي (کونورگنت ده)، که دا کوشي پرلپسې وي.

د اړه دې معنا چې د ټولو  $\varepsilon > 0$  لپاره یو  $k_\varepsilon$  شتون لري د  $|x_\ell - x_k| < \varepsilon$  سره د  $\ell, k > k_\varepsilon$  لپاره.

د ا له دې سره په برابره یا همغه معنادی، داسې چې د  $(x_k)$  د کمپوننتونو هر یو یې یوه کوشي پرلپسې ده. (لیکونکي: هیولیک، شترایت)

د کوشي کریتیریوم د روښانه ونې لپاره یوه بینار (دوه گونې) ونه راوړو.





په یوه ټوټه (کرښه) هره یوه په ضریب  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ) سره لنډیږي او په  $-45^\circ$  کونج ایښول شوی بله ټوټه باندې ورزیاتیږي. په داسې یوه جوړه شوې دوه یزه ونه د

داسې سوکڅیسو په ښاخونو بیل شوي ټکو هره پرلپسې پولې  $x_k$  ته ځي یا کونورگیر کیږي. د تعریف سره سم باور لري د دوه یوپه بل پسې پرلپسېو (تصادونو)  $(x_k)$  لپاره

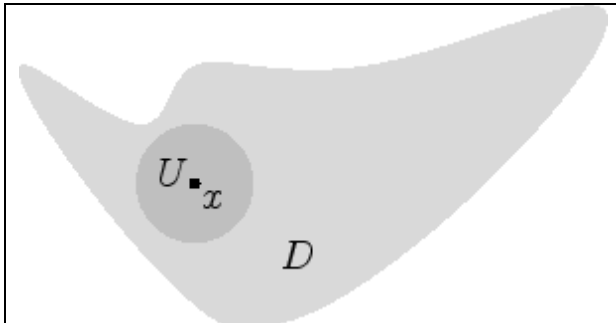
$$|x_{k+1} - x_k| = c\lambda^k.$$

باور لري: چې داپرلپسې د کوشي پرلپسې ده، ځکه چې:

$$\begin{aligned} |x_\ell - x_k| &= |x_\ell - x_{\ell-1} + x_{\ell-1} - \dots + \dots - x_{k+1} + x_{k+1} - x_k| \\ &= |x_\ell - x_{\ell-1}| + |x_{\ell-1} - x_{\ell-2}| + \dots + |x_{k+2} - x_{k+1}| + |x_{k+1} - x_k| \\ &\leq c\lambda^{\ell-1} + c\lambda^{\ell-2} + \dots + c\lambda^k \\ &= c\lambda^k \frac{1 - \lambda^{\ell-k}}{1 - \lambda} \leq c' \lambda^k \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

د  $\ell > k > k_\varepsilon$  لپاره  
(لیکونکي: هیولیگ، شترایت)

### وازه ډیرئ یا -سټ Offene Menge

	<p>یوه ډبرئ <math>D \subseteq \mathbb{R}^n</math> وازه بلل کیږي، که چېرې د ډبرئ هر ټکی <math>x \in D</math> یو چاپیریال ولري، چې دا ټول په <math>D</math> کې پروت وي، په ځانګړې توګه <math>\mathbb{R}^n</math> او تشډیرئ <math>\emptyset</math> وازې دي.</p>
---	--

سرلیک

د یوې په خوښه ډېرې  $D$  لپاره  $\overset{\circ}{D} \subseteq D$  د  $D$  دننه بنایي، دا په دې معنا چې د ټول ټکو ډېرې د یوه چاپیریال سره په  $D$  کې پرته ده.

(لیکونکي: هیولیک، پفایف)

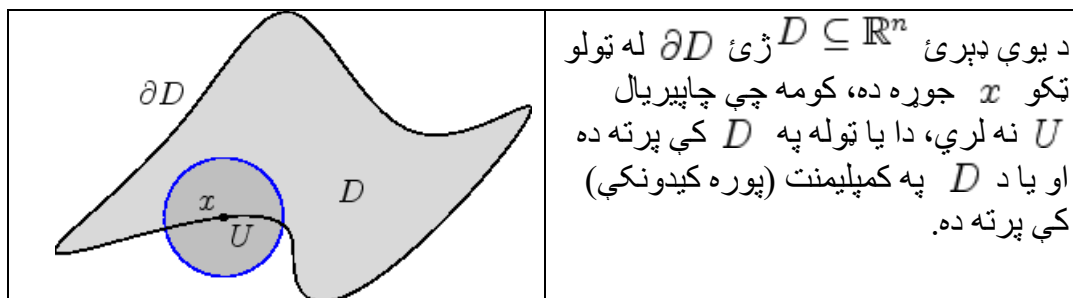
### رابطه ډېرې **Abgeschlossene Mengen**

یوه ډېرې  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  رابطنه یا بنده بلل کیږي، که دیوې د ټکو  $x_k \in D$  پولي ته تلونې پرلپسې په  $D$  کې پرته وي. په ځانګړې توګه  $\mathbb{R}^n$  او تشډېرې  $\emptyset$  بندې دي.

د په خوښه ډېرې  $D$  لپاره دا  $\bar{D} \supseteq D$  د  $D$  رابندونه بولو، دا په دې معنا چې د پرلپسېو د ټولو پوله ارزښتونه په  $D$  کې.

(لیکونکي: هیولیک، پفایف)

### د یوې ډېرې ژئ یا غاړه



د بدیل په توګه کید شي چې ژئ د رابند کمون یا تفریق او دننه،

$$\partial D = \bar{D} \setminus \overset{\circ}{D}$$

په حیث تعریف شي.

(لیکونکي هیولیک او پفايف)

**Kompakte Menge** ډېرئ

یوه تړلي او محدوده ډېرئ  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  کمپلیمنت یا پوره کیدونکي بلل کیري. لاندې کرکتریسټیکا دي ته ورته یا اکویوالنځ دي:

- هره پرلپسې په  $D$  کې یوه کونورگنځ برخه ډېرئ لري د پولې سره په  $D$  کې.
- د  $D$  هر د وازې ډېرئ د سره پټونې یا پوښونې سره یوه پای پوښونه یا پټونه لري.

(لیکونکي: هیولیک او پفايف)

**Multivariate Funktionen** مولتیواریانت – یا د ډېرو توابع

یو ریل یا حقیقی مولتی واریانت (د ډېرو متحولو - یا اوبستونو توابع هم بلل کیري)

$$f : \mathbb{R}^n \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto f(x),$$

د تعریف ډېرئ  $D$  یو وکتور  $x = (x_1, \dots, x_n)^t$  په یوه وکتور

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^t$$

ریل حقیقی متحولو  $x_1, \dots, x_n$  په واک کې دی.

د تابعورشو یا څیره ورشو د  $m$  بعد یا پراخیدونې له مخې سری د سکالارو

( $m = 1$ ) او وکتور ارزښتیزو ( $m > 1$ ) توابعو ترمنځ توپیر کوي. که  $n = 1$

(او  $f$  ناپریکیدونکي وي)، نو  $f$  یوه پارامترې شوې کبه یا منحنې بلل کیري.

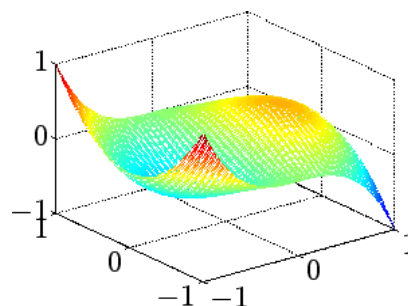
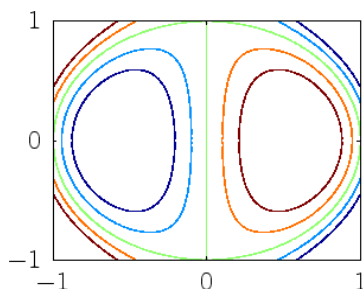
د  $m, n \leq 3$  لپاره زیات وخت ایندکسونه نه کارول کیري او واریابلي له  $x, y$  او

$z$  سره په نخښه کوو.

د بیلگې په توګه

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} .$$

د  $m = n = 2$  په حالت کې



لکه دا شکل چې روښانه کوي، Visualisierung ته دګراف سکالار توابع

$$\{(x, f(x)) : x \in D\}$$

او د نیوټن سطحې

$$\{x \in D : f(x) = c\}$$

وکارول شي.

پولینومونه د ډېرو متحولو سره :

یو پولینوم  $p$  په  $n$  اوبختونو  $x_1, \dots, x_n$  کې د مونومونو کرښیز کمپینیشن دی

$$p(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}, \quad x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

د  $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$  سره، هر یو د جمعې ورشو له مخې د لاندو ترمنځ توپیر کوي:

$$\sum \alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq m: \leq m$$

$$\max \alpha = \max_i \alpha_i \leq m: \leq m$$

یو د  $k$ -درجې پولینوم هوموجین بلل کېږي، که کرښیز ترکیب فقط مونوم د  $\sum \alpha = k$  سره خوندي ولري. د داسې هوموجینو مونومونو ګڼون یا تعداد  $\binom{k+n-1}{n-1}$  دی. په

تعقیب یې د پولینوم پراخیدونې یا بعد د توتال درجې  $\leq k$  سره برابر

$$\binom{k+n}{n} = \sum_{k=0}^m \binom{k+n-1}{n-1}.$$

دی

د  $n$ -متحولو پولینومونو بعد د  $\leq m$  ماکسیمال درجې  $(m+1)^n$  دی.

د بیواریات یا دوه اووښتونو یا متحولو پولینومونو  $(n=2)$  لپاره د هوموجینو مونومونو له لیست څخه

$$k=0: \quad 1$$

$$k=1: \quad x, y$$

$$k=2: \quad x^2, xy, y^2$$

$$k=3: \quad x^3, x^2y, y^2x, y^3$$

...

کنټل کېږي چې د  $k$  درجې لپاره د دوی تعداد

سرلیک

$$k + 1 = \binom{k + 2 - 1}{2 - 1}$$

دی

د دوه متحولو پولینومونو د توتال درجې  $\leq m$  د بعد لپاره لرو

$$1 + 2 + \cdots + (m + 1) = \frac{(m + 2)(m + 1)}{2} = \binom{m + 2}{2}.$$

په څرگنده توګه  $(k + 1)^2$  مونومونه شتون لري

$$x^i y^j, \quad i, j \leq m,$$

د  $\leq k$  ماکسیمال درجې

په ټولیزه توګه (د  $n$ -متحولو پولینومونو) لپاره کیدی شي یو اکسپوننت

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \sum \alpha = m$$

د یوه کره مونوتوني پرلپسې یا ترادف سره

$$\beta_1 = \alpha_1 + 1$$

$$\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2$$

...

$$\beta_{n-1} = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1} + (n - 1)$$

له  $\{1, \dots, m + n - 1\}$  څخه و بیژندل شي:

$$\alpha_i = \beta_i - \beta_{i-1} - 1$$

د  $\beta_0 = 0, \beta_n = m + n$  سره. نو  $\binom{m+n-1}{n-1}$  امکانات شتون لري

د ټول  $\leq k$  درجو  $n$ -وارایت مونومونه د  $(n+1)$ -متحولو درجو  $k$  هوموجین مونومونه پ هگوته کوي:

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leftrightarrow x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} x_{n+1}^{k-\sum \alpha_i}$$

(اخرنی اکسپوننت ټینگ ځای په ځای دی). نو بعد دی

$$\binom{k + (n+1) - 1}{(n+1) - 1}.$$

د مکسیمال  $\leq k$  درجو د پولینوم بعد په ورته توګه بیواریات حالت ته شمیري.

یو د ټوتال درجو  $\leq 3$  پولینوم په 2 متحولو کی لاندې ټولیزه بڼه لري

$$p(x, y) =$$

$$a_{3,0}x^3 + a_{2,1}x^2y + a_{1,2}xy^2 + a_{0,3}y^3$$

$$+ a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2$$

$$+ a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{0,0},$$

او

$$4x^3 - 2xy^2 + 5y^3$$

د 3 درجو هوموجین بیواریات پولینوم لپار یوه بیلګه ده.

دیوه  $\leq 2$  درجو پولینوم ټولیزه بڼه په درې متحولو کی ده:

سرلیک

$$\begin{aligned}
 p(x, y, z) = & \\
 & a_{2,0,0}x^2 + a_{0,2,0}y^2 + a_{0,0,2}z^2 \\
 & + a_{1,1,0}xy + a_{1,0,1}xz + a_{0,1,1}yz \\
 & + a_{1,0,0}x + a_{0,1,0}y + a_{0,0,1}z + a_{0,0,0}.
 \end{aligned}$$

د ډېرو اووښتونو یا متحولو توابعو و ناپریکیدنه یا متمادیت

یو تابع  $f$  د تعریف ورشو  $D$  په یوه ټکي  $x$  کې ناپریکیدونکي دی، که

$$D \ni x_k \rightarrow x_{k \rightarrow \text{inf}} \implies \lim_{k \rightarrow \text{inf}} f(x_k) = f(x).$$

که دا د ټولو  $x \in D$  لپاره باور ولري، نو  $f$  په ټول  $D$  باندې ناپونکی دی

که د تعریف ورشو په ژی  $\partial D$  د ټکي  $x$  لپاره پوله ارزښت شتون ولري، نو کیدی شي  $f$  ناپریکیدونکی مخ ته یو ول شي.

د ډېرر متحولو د ټرنو لپاره همغه قوانین باور لري، لکه د یوې متحولې تابع لپاره.

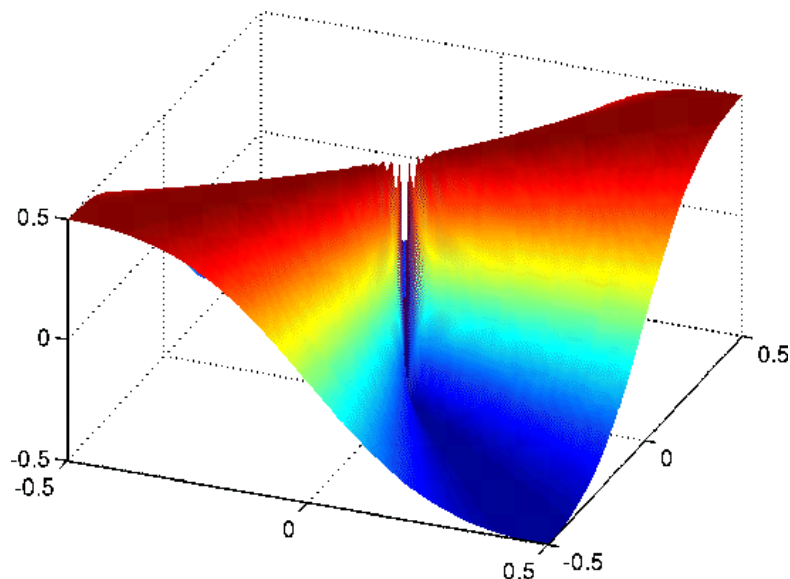
(لیکونکي: هیولیک او شترایت)

یو نا ثابت بیواریات تابع  $f(\varphi)$ ، چې فقط له کونج او نه د وړانګي  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  په واک کې یا تابع ده، په صفر ټکي کې پریکیدونکي ده. د دې لپاره ټیپیکي بیلګه

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \cos \varphi \sin \varphi$$

راړل کیري.





که په صفر تکی کې یوه کرښه وټاکو،

$$g : \varphi = c, \text{ همداسې } g : y = mx$$

نو په کرښه تابع- یا خطي تابع ارزښت ثابت دی،

$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + (mx)^2} = \frac{m}{1 + m^2} = c_m$$

همداسې

$$f(\varphi) = \cos \varphi \sin \varphi = c_\varphi ,$$

$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + (mx)^2} = \frac{m}{1 + m^2} = c_m$$

$$f(\varphi) = \cos \varphi \sin \varphi = c_\varphi ,$$

bzw.

سرلیک

پرته له صفر ټکي چې هلته تابع ارزښت نه دی تعریف.  
پرته له صفر ټکي د ټول ټکو لپاره باور لري

$$D \ni (x_k, y_k) \rightarrow (x, y) \implies$$

$$\implies f(x_k, y_k) = \frac{x_k y_k}{x_k^2 + y_k^2} \rightarrow \frac{xy}{x^2 + y^2} = f(x, y).$$

په صفر ټکي کې تابع بریکیدونکي مخ ته وړلور ده. که د  $x \rightarrow 0$  لپاره په مختلفو کرښو باندې پوله ارزښت په پام کې ونیسو، نو لاس ته راول کیري

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{1 + m^2} = \frac{m}{1 + m^2},$$

دا په دې معنا چې پوله ارزښتپه هر سرچینه یزې کرښې مختلف دی. له دې سره یوله ارزښت

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

شتون نه لري.

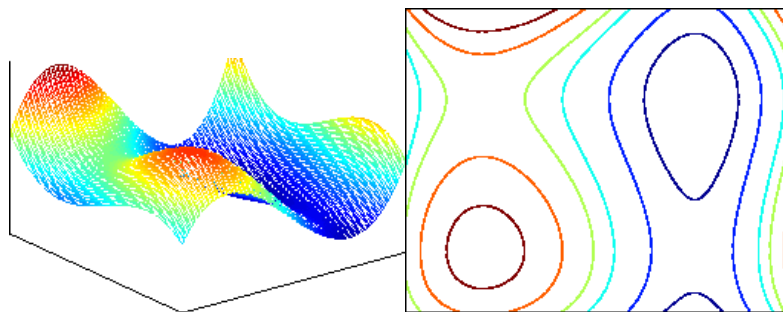
(لیکونکي: بوسلر، هیولیک، شترایت)

په کومپاکت ډېریو د ناپریکیدونکو-یا متمادي توابعو افراطي

ارزښتونه

یو ناپریکیدونکی تابع په یوه کومپاکته ډېری یو مینیموم او هم یو ماکسیموم لري.

په کینه خیره شوي تابع باندې مینیموم او ماکسیموم په نخبه شوي دي. په نیو وکرښه افراطي ځایونه د رابندو منحیو له لارې پیژندلکیري، هغه چې دا ټکي رابندوي یا (په بر کې) رانیسي.



لیکونکی: هیولیک، شترایت

وکتور نورمونو برابر والی

هر وکتور نورم  $\| \cdot \|$  په  $\mathbb{R}^n$  کې دا وکلیدنورم  $|\cdot|$  ته اکویوانت یا برابر ارزښته دی، دا په دې معنا چې شتابتي  $c_i$  شتون لري د

$$c_1 \|x\| \leq |x| \leq c_2 \|x\|$$

سرته

د ټولو  $x \in \mathbb{R}^n$  لپاره.

(لیکونکی: هیولیک، پفايف)

نابرابرونونه یا نا مساوات سکالارانوار یانت دي، دا په دې معنا چې د بدلون  $x \mapsto \lambda x$  سره تغیر نه خوري. دا بسیا کي، چې وکتورونه  $x$  په یوون- یا واحدسفيري یا فضا

$$S : |x| = 1$$

کې تر څڅیرني لاندې ونیسو. په  $S$  باندې هر نورم د  $0$  سره نا برابر دی، له دې امله تابع

$$x \mapsto \frac{\|x\|}{|x|}$$

ناپریکیدونکي دی، ځکه چې  $S$  کومپک دی، نو یو مینیموم  $c_1$  شتون لري او یو  
 ماکسیموم  $c_2$ .

(لیکونکي: هیولیک او پفایف)

**لیپشیتز-ناپریکیدنه Lipschitz-Stetigkeit**

یو تابع  $C_2$  په یوې ډیرې  $D$  لپشیتز-ناپریکیدونکی Lipschitz-stetig بللکیري، که یوه لپشیتز-ثابته  $c$  شتون ولري، داسې چې

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|$$

د ټولو  $x, y \in D$  لپاره.

که  $f$  ناپریکیدونکی او مشتقور او  $D$  کونکاو یا وتلی یا محدب؟؟ وي، نو د لپشیتز-ثابته د جاکوبي-ماکسیموم Jacobi-Matrix سره اټکل کیدی شي:

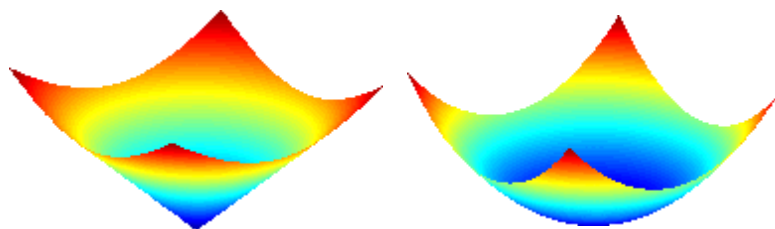
$$c \leq \sup_{x \in D} |f'(x)|.$$

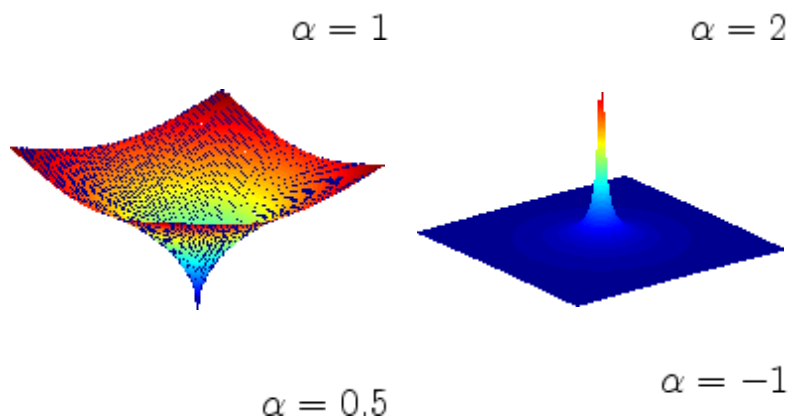
(لیکوني: اپ، هیولیک)

د تابع

$$f(x) = r^\alpha, \quad r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

لپاره ډیر حالتونه سره توپیر کیري.





(i) د  $\alpha = 1$  لپاره  $f$  گلوبال لپیشیخ ناپریکیدونکی دی. د درېگودیا مثلث د نامساوات څخه لاس ته راځي

$$|r - r'| = ||x| - |x'|| \leq |x - x'|,$$

دا په دې معنا چې  $c = 1$  د  $D = \mathbb{R}^n$  لپاره لپیشیخ-ثابته ده.

(ii) د  $\alpha > 1$  لپاره په محدوده  $D$  باندې لپیشیخ-ناپریکیدونکی دی. د منځ ارزښت جملې بنسټ

$$|r^\alpha - (r')^\alpha| = \alpha s^{\alpha-1} |r - r'|$$

د  $r$  او  $r'$  ترمنځ، پهنهقیب یې

$$c = \max_{x \in D} \alpha |x|^{\alpha-1}$$

ټاکل کیدی شي.

(iii) د  $0 < \alpha < 1$  لپاره  $f$  ناپریکیدونکی دی مگر نه لپیشیخ-ناپریکیدونکی د  $0$  په یوه چاپریال کې. شرایط

سرلیک

$$|r^\alpha - 0^\alpha| \leq c|r - 0|$$

د  $r \rightarrow 0$  لپاره پوره نه دي

(iv) د  $\alpha < 0$  لپاره  $f$  په 0 کې پریکړدونکیدی، ځکه چې د  $r \rightarrow 0$  لپاره  $r^\alpha$  د  $\infty$  په لور هڅیږي.

(لیکونکي: بوسلر، هیولیگ، شترایت)

کونترا هیري فنکشن یا -- تابع Kontrahierende Abbildung

یو تابع

$$g : D \rightarrow D$$

کونترا هیر کیدونکی (کیکارل کیدونکی) دی، که په یوه مناسب نورم

$$\|g(x) - g(y)\| \leq c \|x - y\|, \quad x, y \in D,$$

کې د  $c < 1$  سره باورولږي. د دېسره  $c$  داسپیه نامه د  $g$  کونتراکشن ثابت ده، دا کری شید یوې کونوکسیدیرئ لپاره د جاکوبي ماتریکس په مرسته د

$$\sup_{x \in D} \|g(x)\|$$

اتکل کولای شي.

(لیکونکي: بوسلر، هیولیر)

د یوه مثبت دیفینیت ماتریکس  $A$  لپاره

$$g(x) = x - \omega(Ax - b)$$

کونتر اهری دی،، که پارامتر  $\omega$  پوره کوچنی وټاکل شي. باور لري

$$g(x) - g(y) = Q(x - y), \quad Q = E - \omega A,$$

دکوم سره چې د  $Q$  ایگن ارزښت  $q_i$  د  $A$  له ایگن ارزښت  $\lambda_i$  څخه شمیرل کیدی شي:

$$q_i = 1 - \omega \lambda_i.$$

که څا په ځای کړو  $\omega = 1 / \max_i \lambda_i$ ، نوټول ایگن ارزښتونه په  $[0, 1)$  کې پراته دي، او د اویکلیدینورم استعمال سره

$$c = \|Q\| = 1 - (\min_i \lambda_i) / (\max_i \lambda_i) < 1$$

دی.

### د بانډس ځای په ځای ټکیجمله *Banachscher Fixpunktsatz*

که  $g$  یو کونتر اهری تابع یا څیرونه وي، چې دا یوه ناتشه، رابنده ډیری  $D \subset \mathbb{R}^n$  په خپل ځان څیره کړي یعنی د ځان تابع وي دا په دې معنا چې باور لري:

$$\begin{aligned} D &= \overline{D} \quad \bullet \\ x \in D &\Rightarrow g(x) \in D \quad \bullet \\ \|g(x) - g(y)\| &\leq c \|x - y\| \quad \forall x, y \in D \quad \bullet \end{aligned}$$

د  $c < 1$  سره، نو  $g$  یوه یواځنی ټاکلي ځای په ځای ټکی  $x_* = g(x_*) \in D$  لري، له

$x_0 \in D$  څخه په وټته یا تلنه کیدی شي  $x_*$  دایټراشن پرلپسې

$$x_0, x_1 = g(x_0), x_2 = g(x_1), \dots$$

اپروکسیمیرشي. د ناتیټیکایي لپاره باور لري

سرلیک

$$\|x_* - x_k\| \leq \frac{c^k}{1-c} \|x_1 - x_0\|$$

دا په دې معنا چې ایتراشن پرلپسې د هر پیلارزښت لپاره کرښیز پولې ته ځي.

د ځای په ځای ټکوچمل په پوره متریکي فضاو کې ټولیز باور لري. دا چې د نورمترانسلیشن اینواریانځ او هوموجینیتی ته اړتیا نه شته، سری کری شي  $\|x - y\|$  د یوه ټولیز واټن تابع  $d(x, y)$  سره بدل کړي.

(لیکونکي: اپپ، بوسلر، هیولیک)

دا چې  $g(D) \subseteq D$ ، د ټولو  $\ell > 0$  لپاره  $x_\ell \in D$  باور لري، او د کونټراکشن شرطو څخه لاس ته راځي

$$\|x_{\ell+1} - x_\ell\| = \|g(x_\ell) - g(x_{\ell-1})\| \leq c \|x_\ell - x_{\ell-1}\|.$$

د دې نامساوات ایتراشن څخه لاس ته راځي

$$\|x_{\ell+1} - x_\ell\| \leq c^\ell \|x_1 - x_0\|.$$

د  $j > \ell$  لپاره د درېګوډي نامساوات څخه لاسته راځي

$$\begin{aligned} \|x_j - x_\ell\| &\leq \|x_j - x_{j-1}\| + \|x_{j-1} - x_{j-2}\| + \cdots + \|x_{\ell+1} - x_\ell\| \\ &\leq (c^{j-1} + \cdots + c^\ell) \|x_1 - x_0\| = \frac{c^j - c^\ell}{c-1} \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \frac{c^j}{1-c} \|x_1 - x_0\|, \end{aligned}$$

او له دې سره د کوشي-کونورگنت پرلپسې  $x_\ell$  یوه پوله ارزښت  $x_*$  ته. که له نامساوات



$$\begin{aligned} \|g(x_*) - x_*\| &\leq \|g(x_*) - g(x_j)\| + \|g(x_j) - x_*\| \leq \\ &\leq c \|x_* - x_j\| + \|x_{j+1} - x_*\| \end{aligned}$$

څخه پوله ارزښت  $j \rightarrow \infty$  ته سړی لار شي، نو گوري، چې  $x_*$  د  $g$  یو ځای په ځای تکی دی. دا هم یواځنی بیکس تکیدی. که ونیسو، چې یوو بل تکی  $\tilde{x}_* \neq x_*$  هم شتون لري، نو د کونترادیکشن شرلیطو څخه برعکس راکوي.

$$\|\tilde{x}_* - x_*\| = \|g(\tilde{x}_*) - g(x_*)\| \leq c \|\tilde{x}_* - x_*\|.$$

د ناتیکاوې لپاره اټکل د  $\|x_j - x_\ell\|$  لپاره د نامساوات څخه لاس ته راځي دا هم وپولي  $j \rightarrow \infty$  ته د تگ له لارې.

(لیکونکي: بوسلي، هیولیگ)

د نمونې یا تېپیکي استعمال لپاره یولر متظرر کر بنیز سیستم تر څیرني لاندې نیسو:

$$Ax + \varepsilon f(x) = b$$

د یوه مربع ماتریکس  $A$  سره. د پوره کوچني  $\varepsilon$  د کر بنیز بېرځي تعریفور شو لپاره، او سړی کړی شي دا سیستم د ایترايشن

$$x \leftarrow g(x) = A^{-1}(b - \varepsilon f(x))$$

سره حل کړي. دلته نیول کیري، چې  $A$  انور تیر کیدونکیدی او تابع  $f$  لپیشیخ – ناپریکیدونکېده د ثابتې  $c f$  سره.

د باننښ فیکسټکي چملي Banachschen Fixpunktsatzes د نیوني یا فرضیې د ازمايننت لپاره سړی تاکي

$$D = \{y : \|y - p\| \leq r\}, \quad p = A^{-1}b.$$

سرلیک

د په خوښه  $x \in D$  لپاره دی

$$\|g(x) - p\| = \varepsilon \|A^{-1}f(x)\| \leq \varepsilon \|A^{-1}\| \max_{y \in D} \|f(y)\|.$$

ټاکو

$$\varepsilon \leq \frac{r}{\|A^{-1}\| \max_{y \in D} \|f(y)\|},$$

نو  $g(x) \in D$  دی، دا په د معنا چې  $g$  په  $D$  څېره کوي یا مپینګکويد کنترکشن ثابتې Kontraktionskonstante  $c$  لپاره اټکلونه

$$\|g(x) - g(y)\| = \varepsilon \|A^{-1}(f(x) - f(y))\| \leq \underbrace{\varepsilon \|A^{-1}\| c_f}_c \|x - y\|$$

له  $f$  څخه د لیبیش-ثابتې  $c_f$  سره

$$\varepsilon < \frac{1}{\|A^{-1}\| c_f} \quad \text{لاس ته راځي } c < 1, \text{ که}$$

که و غوښتل شي. دواړه شرایط به روښانه توګه د پوره کوچنی  $\varepsilon$  لپاره پوره ردي

(لیکونکي: بوسلي، هیلک)

### توټه مشتق Partielle Ableitungen

د یو تابع  $f$  مشتق  $\partial_i f$  په  $i$ -مه واریابلې متحولې پسې یونیوارینټې ابع  $x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  تابع مشتق دید هغه سره چې واریابلې  $x_i$ ،  $i \neq j$  د ثابتول ی په څېر ترڅېرني کیري.

سرلیک

داسې هم لیکو

$$\partial_i f = f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

د یونیوریات مشتق د تعریف سره سم باور لري

$$\partial_i f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\dots, x_i + h, \dots) - f(\dots, x_i, \dots)}{h}.$$

پارشل مشتعونه د سکالارو او همد وکتور ارزښتیزر حقیقی توابعو لپاره تعریف دي. په پارشل مشتعونیونه کې په دواړو حالتونو کې د تابع تیوپ یا ډول ساتلی پاتې کیږي. د تعریف سره سم باور لري

$$\partial_i \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_i f_1 \\ \vdots \\ \partial_i f_n \end{pmatrix}.$$

پارشل مشتق د کمپوننتونو سره سیمولتان یل همغږختیز جوړیږي

د توتال یا بیخي انټیگرال همداسې کرښیز اېرو کسسیماشن لپاره د وکتورښه یا تیوپ د معنا دډکدی. دا ورسره بلد کنونشن یا قرار و وکتورونو داد د متحولې  $x$  او هم تابع

لپاره کارول کیږي  $f$ 

(لیکونکي: هیلیگ، شترایت)

د سکالار تابع لپاره توتیه مشتق هم سکالار دی.

د بیلگی په توګه د

سرلیک

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + 5x_2 x_3$$

لپاره مشتق لاسته راځي

$$\partial_1 f = 2x_1 x_2,$$

$$\partial_2 f = x_1^2 + 5x_3,$$

$$\partial_3 f = 5x_2.$$

د یوه وکتور ارزښتیز تابع لپاره، لکه د بیلگې په توګه

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, x_3) \\ f_2(x_1, x_2, x_3) \\ f_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^3 x_3 \\ x_1 x_2 x_3 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

د کمپوننتونو تعداد پارشل- یا ټوټه مشتق سره ساتلی پاتې کیري:

$$\partial_1 f = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 \\ \partial_1 f_2 \\ \partial_1 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 x_3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\partial_2 f = \begin{pmatrix} \partial_2 f_1 \\ \partial_2 f_2 \\ \partial_2 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2^2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial_3 f = \begin{pmatrix} \partial_3 f_1 \\ \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^3 \\ x_1 x_2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(لیکونکي: بوسلي، شترایت)

### ډېرواره ټوټه مشتق

دوه واره (يو په بل پسې نیول شوی) ټوټه مشتقونه د

$$\partial_i \partial_j f = f_{x_j x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

سره په نخه کيږي،

په ورته د توگه د جگو مشتقونو لپاره تگه لیکو

$$\partial_i \partial_j \partial_k \dots f$$

په بدلي توگه کیدی شي مولتی ایندکس نوټیشن

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} f, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

سرلیک

وکارول شي، چېرته چې ایندکس  $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$  د ټوټه مشتقونو د ټوټه مشتقونو تعداد په  $i$  - مه متحولی پسي په نځبڼه کيږي

زیاتون یا جمعه  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  ټوټه مشتق بلل کيږي  
(لیکونکي: هیولیک، شترایت)

تابع

$$f(x) = \exp(ix^t y) = \exp(i(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n))$$

مسطحه څپه بلل کيږي اود نورو تر څنگ د فوري-انالیوزي Fourier-Analysis کې رول یو غوره رول لوبوي

مشتقونه ساده شمیرل کیدی شي. دځنځيري قانون سره لاس ته راځي

$$= \partial_k f(x) \quad iy_k \exp(ix^t y)$$

$$\partial_\ell \partial_k f(x) = (iy_\ell)(iy_k) \exp(ix^t y)$$

او له دې سره

$$\partial^\alpha f(x) = (iy)^\alpha \exp(ix^t y) = i^{|\alpha|} y^\alpha \exp(ix^t y)$$

د  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  او  $y^\alpha = y_1^{\alpha_1} \dots y_n^{\alpha_n}$  سره .

د بیلگيپه توگه د  $n = 2$  لپاره دی

$$\partial^{(3,4)} f = \underbrace{i^7}_{-i} y_1^3 y_2^4 \exp(i(x_1 y_1 + x_2 y_2)) .$$

(لیکونکي: بوسلي، هیولیک، شترایت)

د مولتیواریانتو (ډېرواره او وینتونو) پولینومونو توتیه مشتق

د یوه مونوم توتیه مشتق

$$\partial^\alpha x^\beta = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} \left( x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} \right)$$

تیک هلته له صفر سره نابرابر دی، چې

ویي او په دې حالت کې دی

$$cx^{\beta-\alpha}, \quad c = \prod_i \beta_i(\beta_i - 1) \dots (\beta_i - \alpha_i + 1).$$

په توګه

$$\alpha! = \prod_k \alpha_k! \quad \partial^\alpha x^\beta|_{x=0} = \alpha! \delta_{\alpha\beta}$$

د سره د دی

$$p(x) = \sum_\beta x^\beta$$

د ټولو پولینومونو لپاره باور لري

$$\partial^\alpha p = 0, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k,$$

نو توتالدرجه  $p < k$  لري.

(لیکونکي: هیولیک، شترایت)

سرليک

د بنووني فکريپه دي خانگري حالت  $n = 2$  او  $|\alpha| = 3$  وبنوول شي. پسي د د مشتق له ورکېدو لاسته اړخي

$$p_{xxx}, p_{xxy}, p_{xyy}, p_{yyy}, \quad p(x, y) = \sum_{j,k} c_{j,k} x^j y^k,$$

دا چې  $p$  يود توتال درجي  $\leq 2$  پولينوم دی، دا په دې معنا چې ټول ضريبونه  $c_{j,k}$ ،  $j + k > 2$ ، ورکيري.

$$c_{j,k}, \quad j + k > 2,$$

که يو اړونده ترم (د بېلگي په توگه  $c_{2,1} x^2 y$ ) صفر نه وي، نو لږتر لږه يو د دريمي درجي يو توتو مشتقسته (د بېلگي په توگه  $p_{xxy}$ )، کوم چې دا ترم نه انولي annulliert کوي.

په توليزه توگه هم همداسې دلایل راوړلکين ی.

د هر مولتي ايندکس  $|\beta| \geq k$  لپاره  $\gamma$  شتون لريد  $|\gamma| = k$ ،  $\partial^\gamma x^\beta \neq 0$ .  
سره.

د بېلگي په توگه سړی کړی شي  $n = 3$ ،  $k = 4$  اود  $\beta = (1, 2, 3)$  لپاره

$$\gamma = (1, 2, 1), (1, 1, 2), (1, 0, 3), (0, 2, 2), (0, 1, 3)$$

وتاکي.

(ليکونکي: هيوليگ، شتر ايت)



د یوه تابع د ټوټه مشتق بدلور والی

که د یوه تابع  $f$  لومړی اودویم ټوټه مشتق ناپرېکښونکي وي، نوباور لري

$$\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f .$$

د پوره کېدونکي خویتاب لپاره د ټوټه توابعو مشتق لړۍ پرلپسې بدلور دي.

په ځانگړې توگه دا د مولتی ایندکس-لیکنډول ته ټیکاوې ورکوي.

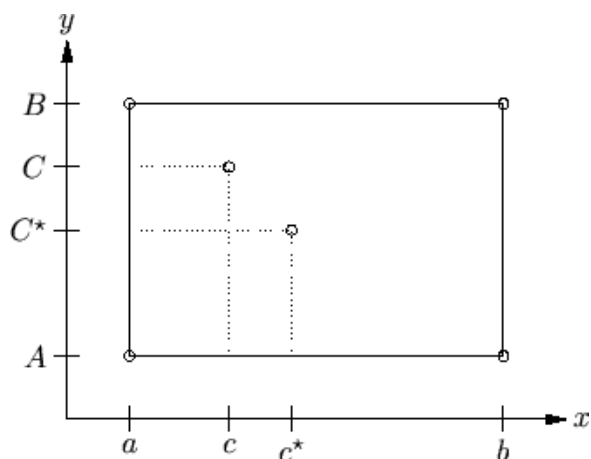
دا چې ټوټه مشتق سره متحولي  $x_k, k \neq i, j$  ځای په ځای پاتې کيږي، بسیا کوي،

چې یو بیواریات تابع  $f(x, y)$  په بکاور واچوو یا تر څېړنې لاندې ونیسو.

په یوه واړه ولاړکودې د  $(x, y)$  لپاره د

$$g(x) = f(x, B) - f(x, A), \quad h(y) = f(b, y) - f(a, y),$$

سره مشفقونه په  $y$  - همداسې  $x$  - لورو په نڅبنه کړو.



په کونجونو کې دفرنځ

سرلیک

$$Q = f(b, B) - f(b, A) - f(a, B) + f(a, A)$$

په دوه مختلف ډولونو د منځملي په مرسته شمیرل کیري:

$$\begin{aligned} Q &= [f(b, B) - f(b, A)] - [f(a, B) - f(a, A)] \\ &= g(b) - g(a) \\ &= (b - a)g_x(c) \\ &= (b - a)[f_x(c, B) - f_x(c, A)] \\ &= (b - a)(B - A)f_{xy}(c, C) \end{aligned}$$

د  $a \leq c \leq b$  او  $A \leq C \leq B$  لاندې سره

Q=	$[f(b, B) - f(a, B)] - [f(b, A) - f(a, A)]$
Q=	$h(B) - h(A)$
Q=	$(B - A)h_y(C^*)$
Q=	$(B - A)[f_y(b, C^*) - f_y(a, C^*)]$
Q=	$(B - A)(b - a)f_{yx}(c^*, C^*)$

د  $a \leq c^* \leq b$  او  $A \leq C^* \leq B$  سره له دې سره لاسته راځي

$$f_{xy}(c, C) = f_{yx}(c^*, C^*),$$

او ولاړکودیز په واره کونه سره ( $b \rightarrow a, B \rightarrow A$ ) ، د دویمگډوله کشتق د ناپربکیدني په بنسټ لرو

$$f_{xy}(a, A) = f_{yx}(a, A).$$

او د لارگودي په کوچنیوالي، ( $b \rightarrow a, B \rightarrow A$ ) د دویم گډوله مشتق د ناپربکیدني په بنسټ لاسته راځي

$$f_{xy}(a, A) = f_{yx}(a, A).$$

لیکونکي: بوسلي، هیولیک، شترایت

فنکشن یا تابع یا بلواک

$$f(x, y) = \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}$$

د  $(x, y) \neq (0, 0)$  لپاره په خوښه ناپربکیدونکي او مشتقور دی

لومړ دوه مشقونه

$$f_x(x, y) = \frac{3x^2y - y^3}{x^2 + y^2} - 2x \frac{x^3y - xy^3}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f_y(x, y) = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} - 2y \frac{x^3y - xy^3}{(x^2 + y^2)^2},$$

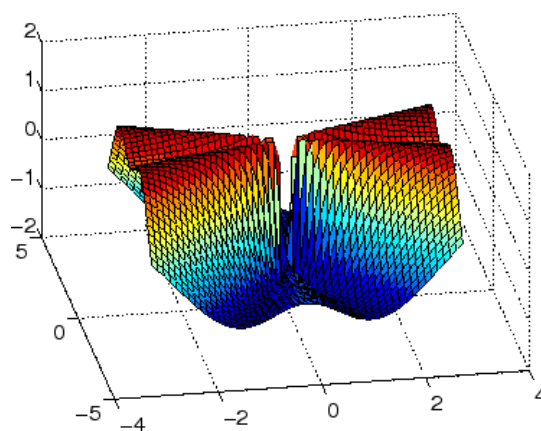
په ټول  $\mathbb{R}^2$  ناپربکیدونکي دي، ځکه چې د

سرلیک

$$|f_x(x, y)|, |f_y(x, y)| \leq (3 + 1 + 2(1 + 1))\sqrt{x^2 + y^2}$$

له امله  $f_x$  او  $f_y$  په ټول په پیل کې د 0 ارزښتونو سره ناپریکیدونکي مخ ته وړلوردي

ګډوله مشتق  $f_{xy}$  (په  $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$  کې) دی مګر په صفر کې کټ پریکیدونکی، کوم چې له مشتق څخه لیدل کېږي



بدلون ناشونی دی:

$$f_{xy}(0, 0) = \frac{d}{dy} (f_x(0, y))|_{y=0} = \frac{d}{dy} \left( \frac{-y^3}{y^2} - 0 \right)|_{y=0} = -1,$$

$$f_{yx}(0, 0) = \frac{d}{dx} (f_y(x, 0))|_{x=0} = \frac{d}{dx} \left( \frac{x^3}{x^2} - 0 \right)|_{x=0} = 1.$$

مختلف ټوله ارزښتونه لاسته راځي، په دې اړوند چې په کومه لړۍ-پرلپسې ټوټه مشتقونه نیول شوي دي

لیکونکي: هیولیک، شترایت

توتال مشتقونه *Totale Ableitung*

يو حقيقي تابع  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  په يوه ټکي  $x$  کې مشتقور دی، که د  $|h| \rightarrow 0$  لپاره توتال مشتق د ټوټه مشتق جاکوبي-ماتریکس دی:

$$f' = Jf = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \partial_n f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m & \dots & \partial_n f_m \end{pmatrix}.$$

$$f' = (\text{grad } f)^t,$$

د يوه سکالار تابع ( $m = 1$ ) لپاره مشتق گراډینټ بللکیري او د یوې کرې ( $n = 1$ ) پارامترې کولو لپاره هډتانجنت وکتور.

توتال مشتق  $f'(x)$  شتون لپاره پوره کیدونکي شرطونه د يوه په  $x$  چاپیریال کې د ټوټه مشتقونو نه پرېکښه ده.

د توتال مشتق  $f'(x)$  د شتون لپاره پوره کیدونکي شرطونه په يوه چاپیریال کې د ټوټه مشتق ناپرېکښه ده.

د توتال مشتق سره کیدی شي د يوه تابع په ارگومنټو یا تعریفورشوکې ( $x \rightarrow x + \Delta x$ ) د کوچنیورمونو تغیراتو سره اړکسیمه شي. د نظم  $o(|\Delta x|)$  سره ترمونو څخه صرف نظر کیدنه په نږدې توگه باور لري

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

د دې دلپاره چې د پولط پرسه  $|\Delta x| \rightarrow 0$  رامنځ ته کړو، لیکو

سرلیک

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

داسې په نامه دفرنشال  $df$  او  $dx_i$ ، کوم چې د کربنیزو اډروکسیمیشن تغیرات تشریح کوي

$dx_i$  چې وښایو چې توتالمشتق ټوټه مشتق خوندي لري، د ساده کونډیبه بنسټ یو تابع د

دوه متحولو  $f(x, y)$  سره روارو. په دې حالت کې  $h = (s, t)^t$  یووکتور دی د دوه

کمپوننتونو سره. په د حالت کې  $h = (s, t)^t$  یووکتور دی د وه کمپوننتونو سره. که بیلګې په توګه  $t = 0$  ځای په ځای کړو نو لرو

$$\begin{aligned} f(x + s, y) &= f(x, y) + f'(x, y) (s, 0)^t + o(|(s, 0)|) \\ &= f(x, y) + (Jf)_1 s + o(|s|), \end{aligned}$$

چیرته چې  $(Jf)_1$  د  $Jf$  لومړی درځیا مټه ښایي له  $s$  او پوله ارزښت  $0 \rightarrow s$  د جوړېدوسره، د  $f(x, y)$  ټوټه مشتق راګوی دپسې  $x$ :

$$(Jf)_1 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x + s, y) - f(x, y)}{s} = \partial_1 f(x, y).$$

د ټوټه مشتق نا پریکښنه مقشتوروالی ایملېڅي کوي، دا په دې معنا چې د توتالمشتق شتونوال.

$$f' = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f).$$

د دې لپاره چې د ټوټه مشتق د ناپېرېکېدنې څخه د توتال مشتق شتون لاس ته راوړو

لومړی یوسکالار تابع  $f(x, y)$  تر څیرني نیسو. د منځ ارزښت جملې له مخې د  $h = (s, t)$  لپاره باور لري

$$\begin{aligned} f(x + s, y + t) &= f(x + s, y) - f(x, y) + f(x + s, y + t) \\ &\quad - f(x + s, y) + f(x, y) \\ &= s f_x(\xi, y) + t f_y(x + s, \eta) + f(x, y), \end{aligned}$$

د  $\eta \in (y, y + t)$  ،  $\xi \in (x, x + s)$  سره. د وړاندنیوني (فرضیې) په بنسټ ټوټه

مشتقونه  $f_x$  او  $f_y$  ناپېرېکېدونکي دي، دا په دې معنا چې

$$f_x(\xi, y) \rightarrow f_x(x, y), \quad f_y(x + s, \eta) \rightarrow f_y(x, y)$$

د  $|h| \rightarrow 0$  لپاره. له دې سره د تابع  $f$  توتال مشتق وړوالی لاسته راوړل کېږي:

$$f(x + s, y + t) = f(x, y) + s f_x(x, y) + t f_y(x, y) + o(|h|).$$

په ورته توګه د  $n$  متحولو سکالار تابع لپاره دلایل راوړل کېږي. ټولیز حالت یې په ځانله توګه د کمپوننتو له لارې څخه لاسته راځي.

لیکونکي: بوسلې، هیولیګ، شترایت

سرلیک

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

په صفرخای کې پرکیدونکې ده. دا کتل کیدی شي که د بیلگې په توگه سری په دوه مختلفو سرچینه کربنو پوله ارزښت  $x \rightarrow 0$  ونیسی یا راوړي:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, -x).$$

په تعقیب یې  $f$  په صفرخای کې مشتقور نه دی، ځکه چې له مشتقوروالي څخه ناپربکیدنه منځ ته راځي.

په صفرتکي کې مگر دواړه توتیه مشتقونه شتون لري. له

$$f(x, 0) = f(0, y) = 0$$

لاس ته راځي

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0.$$

دواړه توتیه مشتقونه مر په صفرتکي کې پرکیدونکي دي.

که په مختلفو کبرو باندي د مشتق

$$f_x(x, y) = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

که پوله ارزښت  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  تر څپرني لاندې ونیسو، نو د بیلگې په توگه د

$$y = x$$

لپاره لرو



$$\lim_{x \rightarrow 0} f_x(x, x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

او د  $y = x^2$  لپاره

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_x(x, x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{(1 + x^2)^2} = -1.$$

په اړونده توګه په صفرخای کې د توتیه مشتق  $f_y$  پرې کېدنه شمیرل کېږي. دا ښایي، چې د مشتقووالي لپاره د توتیه مشتقونې شتونوالی پوره کېدونکي نه دی، بلکه برسیره پردې ناپربکېدنه هم غوښتل کېږي. لیکونکي: بوسلې، هیولیک، شترایت

تابع

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} x + 2y \\ xy \\ 3x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

او  $h = (s, t)^t$  دي

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ y & x \\ 6x & 2y \end{pmatrix}$$

او

سرلیک

$$f(x+s, y+t) = \begin{pmatrix} (x+s) + 2(y+t) \\ (x+s)(y+t) \\ 3(x+s)^2 + (y+t)^2 \end{pmatrix}.$$

له دې سره یو تابع

$$g(s, t) = f(x+s, y+t) - f(x, y) - f'(x, y)(s, t)^t = (0, st, 3s^2 + t^2)^t,$$

لاس ته راځي، د کوم سره چې د  $(s, t) \rightarrow (0, 0)$  لپاره هر کمپوننت گړندی صفر ته  
 $g(s, t) = o(|(s, t)|)$  ته، دا په دې معنا چې  $|h| = |(s, t)|$  ځي نسبت و

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د سکالار تابع  $f(x, y) = r = \sqrt{x^2 + y^2}$  لپاره د گرادینت په حیث ورکوي

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \end{pmatrix}.$$

د یوې گړي  $f(t) = (\cos t, \sin t, t)^t$  پارامتریک کولو له لارې د مشتق په حیث یو د  
 تانجنټ وکتور راکوي

$$f'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)^t.$$

د

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

له لاري تعريف شوي غونډاري کواو ارديناټ لاندې د جاکوب-ماتريکسدي

$$f'(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

ليکونکي: بوسلي، هيوليگ، شتر ايت

### کر بنيزا پروکسيميشن *Linear Approximation*

په لومړئ نږدې بونه کې د ناپريکيدونکي مشتقور تابع لپاره باور لري، دا په دې معنا چې د

نظم ترمونو  $o(|\Delta x|)$  باندې صرف نظر کونې يا پرېښونې له لاري

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x.$$

ليکونکي، هيوليگ، شتر ايت

د مولتيواريت توابعو د غلطيو وده يا تکثير

### Fehlerfortpflanzung multivariater Funktionen

د يوه ناپريکيدونکي مشتقور تابع  $x \mapsto y = f(x)$  لپاره کيدی شي د ايناکور اتو

د  $x + \Delta x \approx x$  ارزښتونو  $X$ -inakuraten د  $f$  توتې مشتق په مرسته تشریح کرای

شي. د مطلق ناتیکايوي لپاره د  $o(|\Delta x|)$  نظم د ترمونو څخه په صرف نظر باور لري

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f_{x_1}(x) \Delta x_1 + \dots + f_{x_n}(x) \Delta x_n.$$

سرلیک

که  $|x_i|, |y| \neq 0$  وي، نو د نسبي ناتيکاوې لپاره لاس ته راځي

$$\frac{\Delta y}{|y|} \approx c_1 \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \dots + c_n \frac{\Delta x_n}{|x_n|}$$

د لاندي کونډيشن عدد  $Konditionszahlen$  سره

$$c_i = \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{|x_i|}{|y|}$$

يادونه (ژباړی): د کونډيشن سره سرې پېشميرپوهنه کې هغه شی تشریح کوي، چې يوه پرابلم حل د هغه دد وتون داتا د مضاحمت په واک کې وي. د کونډيشن عدد د دې په واکوالي کچه انځوروي، چې په هغه وتن ناتيکاوې په نا مساعد حالت کې زواکمنه کيږي. دا د تاڅلو حل تلنلارو څخه خپلواکه دی. پای.

د کارټيزي کواورډينات څخه د قطبي کواورډينات د  $\varphi$  کونج شميرني له امله

د مطلق ناتيکاوې لپاره لاس ته راځي

$$\Delta \varphi \approx f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y = -\frac{y \Delta x}{x^2 + y^2} + \frac{x \Delta y}{x^2 + y^2}$$

د نسبي ناتيکاوې لپاره لاس ته راځي

$$\frac{\Delta \varphi}{|\varphi|} \approx -\frac{y|x|}{(x^2 + y^2)|\varphi|} \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{x|y|}{(x^2 + y^2)|\varphi|} \frac{\Delta y}{|y|}$$

د  $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$  سره د  $|\sin \varphi / \varphi| \leq 1$  له امله لاس ته راځي،

چې د بني اړخ ارزښت له

$$\left| \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\varphi} \right| \left( \frac{|\Delta x|}{|x|} + \frac{|\Delta y|}{|y|} \right) \leq 2 \max \left( \frac{|\Delta x|}{|x|}, \frac{|\Delta y|}{|y|} \right)$$

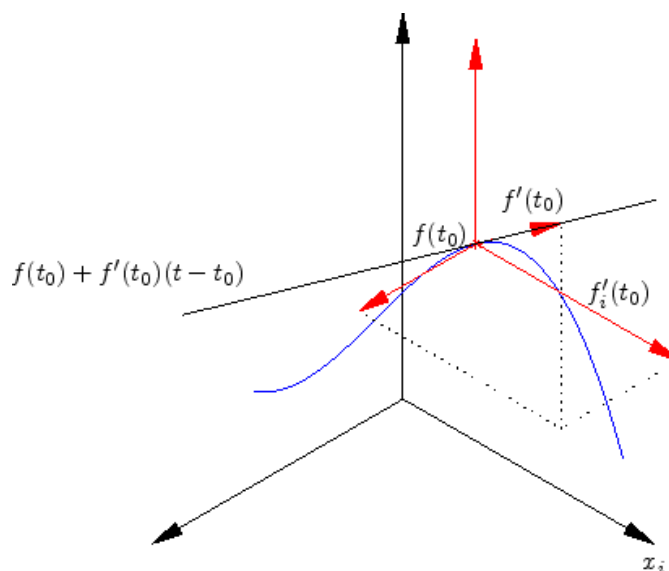
لارې اټکل کیدی شي. نسبي ناتیځاوی زیات له زیاتو ته د یوه ضریب 2 قوی کیدی شي.

مطلق ناتیځاوی کیدی شي د یوه ضریب سره چې  $1/r$  ته متناسب وي لوی شي. د

انتظار سره سم په  $x$  او  $y$  کې د کونج اندازه کونه د برابر زغم له امله د کوچنی وړانګې لپاره ناتیځ دی.

لیکونکي: بوسلی، هیولیګ، شترایت

## Tangente تانجنت



په ټکي  $f(t_0)$  کې د مشتقو پارامتریکي کړي (منحنی)  $t \mapsto (f_1(t), \dots, f_n(t))^t$

تانجنت یوه کرښه

سرلیک

$$f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

ده داسې چې لږ تر لږه د تانجنت وکتور یو کمپوننت  $f'_i(t_0)$  له صفر سره توپیر ولري.

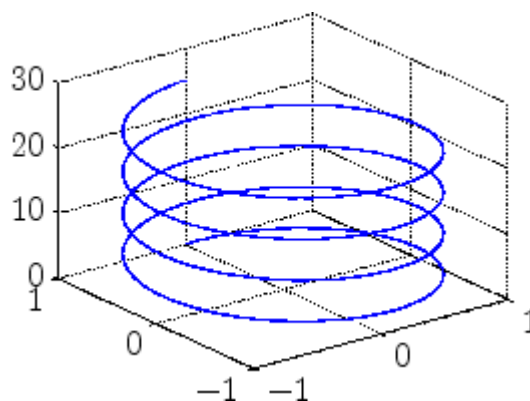
لیکونکي: بوسلې، هیولیک، شترایت

د

$$t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ t \end{pmatrix}$$

له لارې پارامتریکې پیچمیخ کرښه باندې تانجنت دی

$$f'(t) = (\cos t, -\sin t, 1)^t$$



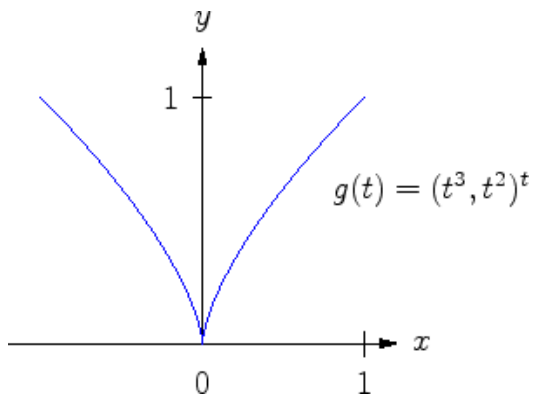
د بیلګې په توګه په ټکي  $f(3\pi) = (0, -1, 3\pi)$  کې د تانجنت لپاره پارامتریکې کیدنه لاس ته راوړو:

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (t - 3\pi).$$

لیکونکی: هیولیک، پفايفر

د  $t_0 = 0$  لپاره له  $t \mapsto g(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$  لارې د پارامتریکې کبرې لپاره د دواړو کمپوننتونو مشتق ورکیري. د کبرې لور سملاسي له  $(0, -1)^t$  څخه و  $(0, 1)^t$  ته تغیر خوري.

که  $g(t)$  د وخت په واک کې خایزوکتور په حیث تعبیر کړو، نو د  $t_0 = 0$  لپاره چټکتیا صفرده. له دې سره، سره له دې چېناپریکیدونکي مشتقور کواوردینات، یو پریکیدونکی لور تغیر ممکن دی.

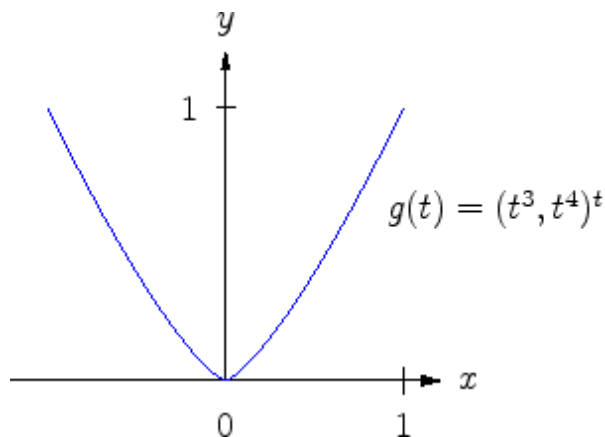


د  $g(t) = (t^3, t^4)^t$  لپاره همداسې  $g'(0) = (0, 0)$  دی. د پارامتر ارونه یا بدلون

سرلیک

$$s = t^3, \quad g(t) = q(s) = \begin{pmatrix} s \\ s^{4/3} \end{pmatrix}$$

بنايي، چي له  $s = 0$  سره د تانجنټتغير ناپريکيدونکي دي.



ليکونکي: بوسلي، هيوليگ، شتر ايت

Tangentialebene تانجنټي سطحه

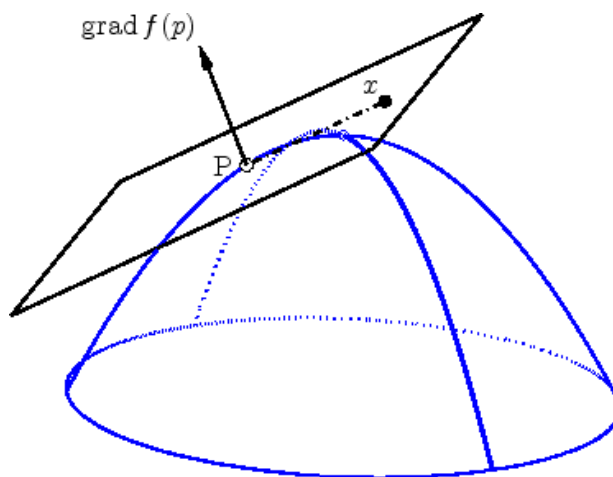
$f$  د يو ناپريکيدونکي مشتقور تابع او  $(p_1, \dots, p_n)$  د يو ټکي وي په له  $f(x_1, \dots, x_n) = c$  لاري ايمپليحيټ تعريف شوي سطحه باندي. که  $\text{grad } f(p) \neq 0$ , وي نو تانجنټي سطحه په ټکي  $P$  کي مساوات

$$E : (\text{grad } f(p))^t (x - p) = 0.$$

لري.

نور مالوکتور و  $\text{grad } f$  ته غبرگ دي.





د یوه تابع  $y = g(x_1, \dots, x_{n-1})$  د گراف لپاره په ځانگړې توگه

$$E: y - g(q) = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i g(q) (x_i - q_i)$$

د تانجنټي سطحې مساوات دی په لاندې ټکي کې:

$$(q_1, \dots, q_{n-1}, g(q))^t$$

تویه مشتق  $\partial_i g$  له دې امله د تانجنټي سطحې جغوالی بنیایي د  $i$ -م کواوردینات محور په لور

لیکونکي: ب، هیولیگ، کیمرلی، شترایت

د توتالمشتق  $\text{grad } f' = (f)^t$  تعریف دی

$$f(x) = f(p) + (\text{grad } f)^t (x - p) + o(|x - p|).$$

سرليک

که له ترم  $o(|x - p|)$  څخه صرف نظر وشي، نو د  $f(x) = f(p) = c$  له امله د تانجنټي سطحې مساوات لاس ته راځي.

په ورته توګه د یوه د  $y = g(x_1, \dots, x_{n-1})$  له لارې تعریف شوي تابع ګراف لپاره باور لري

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i g(q)(\Delta x_i)$$

د  $\Delta y = y - g(q)$  او  $\Delta x = x - q$  سره. د باقي غړي څخه صرف نظر له امله بیرته د تانجنټ سطحې بنوول شوي انځور ته ورځو.

لیکونکي: بوسلي، هیولیک، شترایت

د کگل

$$K : f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

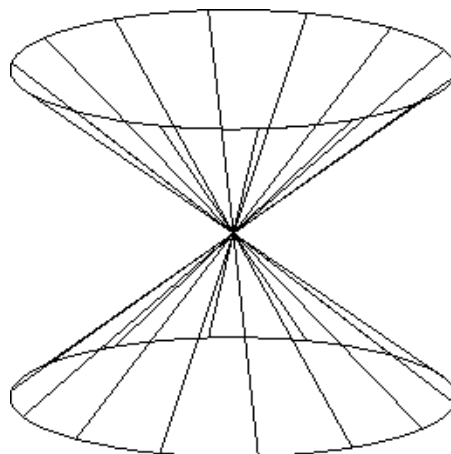
لپاره  $\text{grad } f(x, y, z) = (2x, 2y, -2z)^t$  دی. له دې سره سرې د تانجنټي سطحې په حیث لاس ته راوړي.

$$E : -2z_0(z - z_0) + 2y(y - y_0) + 2x(x - x_0) = 0.$$

د بیلګې په توګه تانجنټي سطحه په ټکي  $P = (3, 4, 5)$  کې لاندې مساوات لري

$$E : -10z + 8y + 6x = 0.$$

په ټکي  $Q = (0, 0, 0)$  کې ګرادینټ ورکیري، د مخروط په ککره یا څوکه کې تانجنټي سطحه شتون نه لري.



لیکونکی: بوسلی، هیولیگ، شترایت

د یوه ډیپول (دوه قطبي) پوتنشل

$$f(x) = |x - p|^{-1} - |x + p|^{-1}, \quad x = (x_1, x_2),$$

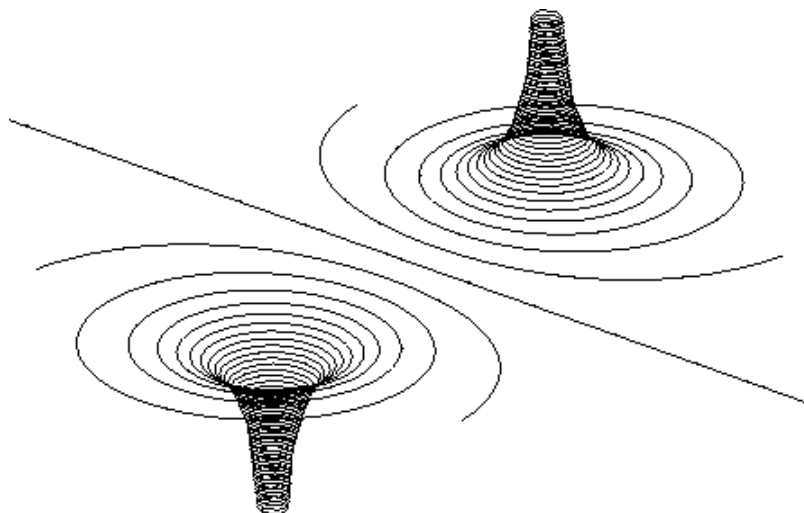
لپاره، په کوم کې کې چې برق (Ladungen) دلته باید موخه هغه بار وي، چې دلته شتون لري) په ټکو  $-P$  او  $P$  کې شتون لري د کراډینټ په څېر لاس ته راځي

$$\text{grad } f(x) = \frac{(x + p)}{|x + p|^3} - \frac{(x - p)}{|x - p|^3}$$

او له دې سره په یوه ټکي  $A = (a_1, a_2)$  کې تنجتي سطحه

$$x_3 = f(a) + (\text{grad } f(a))^t (x - a).$$

سرلیک



د بیلګې په توګه د  $A = (0, 0)$  لپاره دی

$$x_3 = 0 + (2p^t/|p|^3)(x_1, x_2)^t ,$$

دا په دې معنا چې تانجنټي سطحه په سرچینه کې خُغلي او و  $P$  ته ولاړه یا عمود کرښه خوندي لري.

په سیګولاریټیو  $P$  او  $-P$  کې تانجنټي سطحه شتون نه لري.

لیکونکي: بوسلي، هیولیک، شترایت

مولتیواریات خُنخیري قاعده یا لار

Multivariate Kettenregel

د ناپریکیدونکو مشتقوړ توابعو  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  او یو بل پسې تړلو  $g : \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$h = g \circ f : x \mapsto y = f(x) \mapsto z = g(y) ,$$

له امله باور لري

$$h'(x) = g'(y)f'(x),$$

دا په دې معنا چې د جاکوبي-ماتریکس  $h$  د جاکوبي-ماتریکسونو  $f$  او  $g$  ضرب دی. د یوگوني لاس ته راوړني يا لرنو د ماتریکس ضرب له لارې لاس ته راځي

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_k} = \sum_j \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}.$$

په ځانگړې توگه ځنځيري قانون د ځانگړي حالت  $m = n = 1$  لپاره (دا په دېمعنا چې  $f$  یوه پارامتریک شوې کبره او  $g$  د متحولي یو سکالار تابع) لاندې څېره یا شکل لري:

$$\frac{dh}{dx} = (\text{grad } g)^t f'(x).$$

د یوه تابع د توتالمشتق لپاره باور لري

$$\varphi(x+h) = \varphi(x) + \varphi'(x)h + o(|h|).$$

له دې سره د مشتقونو  $f'(x)$  او  $g'(y)$  د شتون څخه لس ته راځي

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) &= g(f(x) + \underbrace{f'(x)h + o(|h|)}_{\tilde{h}}) = \\ &= g(f(x)) + [g'(y)\tilde{h}] + o(|\tilde{h}|). \end{aligned}$$

سرلیک

دا چې

$$[g'(y) \tilde{h}] = g'(y) f'(x) h + o(|h|)$$

او  $|\tilde{h}| = O(|h|)$  لږود  $g \circ f$  د جاکوبي - ماتریکس لپاره غوښتلی فرمول ورکوي.

لیکونکي: هیولیگ، کنش

د ځنځیري قانون د تشکیل یا روښانه ونې لپاره لاندې تابع راوړو

$$y = f(x) = \begin{pmatrix} x_3 \sin(x_1) \\ e^{x_2/x_3} \end{pmatrix}, \quad g(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 + \ln(y_2) \\ 0 \\ y_2 \cos(y_1) \end{pmatrix}$$

د دې لپاره چې د  $h = g \circ f$  د جاکوبي-ماتریکس په  $p = (\pi, 0, 1)^t$  کې وشمیرلی شو، تشکیلوو

$$\begin{aligned} f'(x)|_{x=p} &= \begin{pmatrix} \cos(x_1)x_3 & 0 & \sin(x_1) \\ 0 & e^{x_2/x_3} & -e^{x_2/x_3}/x_3^2 \end{pmatrix} \Big|_{x=p} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

همداسې

$$g'(y)|_{y=f(p)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1/y_2 \\ 0 & 0 \\ -y_2 \sin(y_1) & \cos(y_1) \end{pmatrix} \Big|_{y=(0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

او لاس ته راوړو

$$h'(\pi, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

لیکونکي: هیولیک، کنش

د یوه سکالار تابع  $f(x, y)$  لپاره د کړي  $t \mapsto (x(t), y(t))$  په اوږدو د خنځیر یقانو له مخې باور لري

$$\frac{d}{dt}f = f_x x' + f_y y'.$$

د بیلگې په توګه د

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t$$

لپاره لاندې مشتق لاس ته راځي

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos(t) + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} (-\sin(t))$$

سرلیک

$$= \frac{\sin(t) \cos(t) - \cos(t) \sin(t)}{1}$$

$$= 0$$

دا یوځای ایښوول شوي تابع

$$f(x(t), y(t)) = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$$

د سیده مشتق سره خوري یا برابر دی.

لیکونکي: هیولیگ، کنش

د یوه پارامتریکې سطحې  $(x(s, t), y(s, t), z(s, t))^t$  له لارې د وکتور ارزښتیز تابع

$$(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))^t$$
د جاکوب-ماتریکس نسبت واریا بلو  $(s, t)$  ته دی:

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(s, t)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \\ z_s & z_t \end{pmatrix}$$

د بیلگې په توګه د یوه رادیال تابع

$$(u, v, w) = (x, y, z)/r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

لپاره د

$$(x, y, z) = (\cos \varphi, \sin \varphi, z), \quad \varphi \in (-\pi, \pi], \quad z \in \mathbb{R}$$



له لارې پارامتریک شوي مخروط پوښ دی

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = r^{-3} \begin{pmatrix} r^2 - x^2 & -xy & -xz \\ -xy & r^2 - y^2 & -yz \\ -xz & -yz & r^2 - z^2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varphi, z)} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi & 0 \\ \cos \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

د  $s = \sin \varphi$  او  $c = \cos \varphi$  سره په دې اساس لاسته راځي

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(\varphi, z)} &= \\ r^{-3} \begin{pmatrix} r^2 - c^2 & -cs & -cz \\ -cs & r^2 - s^2 & -sz \\ -cz & -sz & r^2 - z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -s & 0 \\ c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \\ r^{-3} \begin{pmatrix} -sr^2 & -cz \\ cr^2 & -sz \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, &= \end{aligned}$$

د کوم سره چې دی

$$r = \sqrt{1 + z^2}$$

لیکونکي: بوسلې، هیولیک، کنش

سرلیک

د دې لپاره چې د دواړو توابعو

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \\ u^2 + v^2 - 1 \end{pmatrix}, \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

د  $h = g \circ f$  گرادینت شمېرل کيږي سړی د  $f$  د جاکوب-ماتریکس جوړوي

$$f' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

په همدې تګه د  $g$  گرادینت

$$\text{grad } g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} u + v \\ u - v \\ u^2 + v^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

له دې سره د ځنځیري قانون سره لاس ته راځي

$$(\text{grad } h)^t = (\text{grad } g)^t f'$$

$$= 2 \begin{pmatrix} u + v + u - v + 2u(u^2 + v^2 - 1) \\ u + v - u + v + 2v(u^2 + v^2 - 1) \end{pmatrix}^t$$

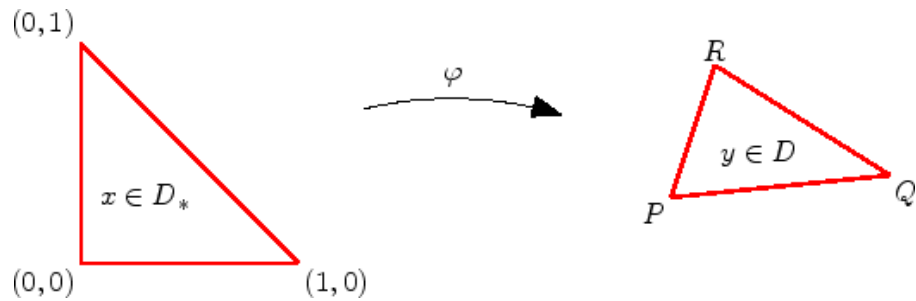
او د ساده کوني وروسته

$$\text{grad } h = 4(u^2 + v^2) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

لیکونکي: بوسلي، هیولیک،

په یوه د رېښوونې  $D$  باندې د د یوه رفرنډرېښوونې افین تابع  
 $D_* : x_1 + x_2 \leq 1, x_i \geq 0$ ,  
 د ګوډټکو  $Q$ ,  $P$ , او  $R$  سره کیدی شي په  
 لاندې بڼه ولیکل شي

$$y = \varphi(x) = p + (q - p)x_1 + (r - p)x_2$$



افین تبع د جاکوب-ماتریکس لري

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = (q - p, r - p) .$$

له دې سره د یوه سکالار تابع  $h(x) = g(\varphi(x))$  څخه لاسته راځي

$$(\text{grad } h(x))^t = (\text{grad } g(y))^t \begin{pmatrix} q_1 - p_1 & r_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \end{pmatrix} .$$

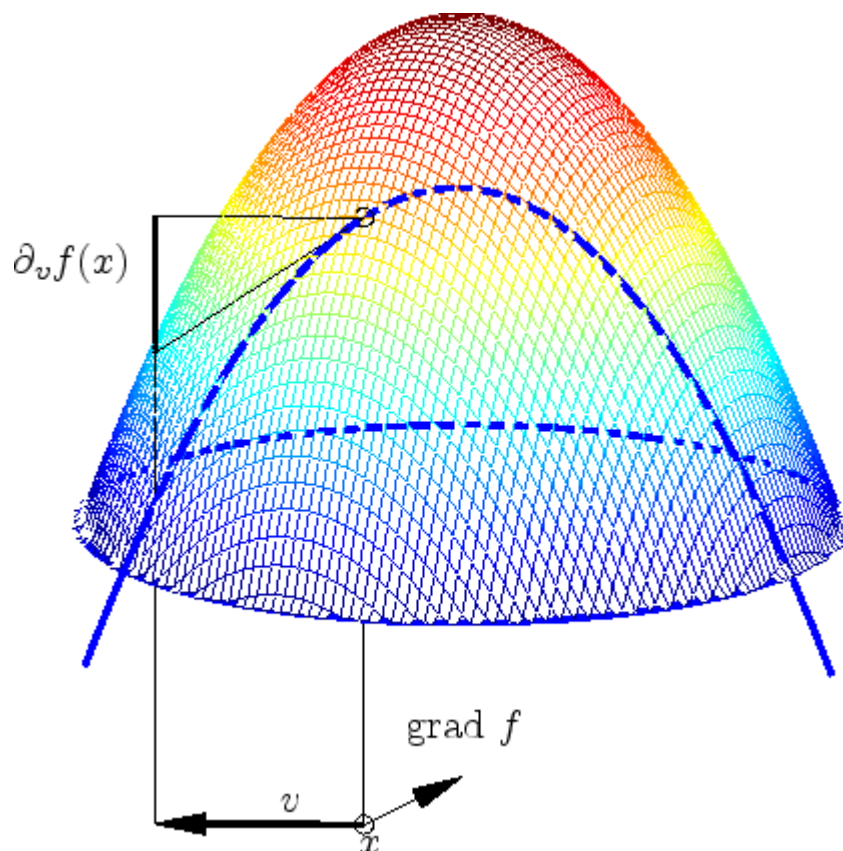
دا تر اسفورمیشن د نورو ترڅنګ د سټیفیګکایتماتریکسونو Steifigkeitsmatrizen په  
 لیکنوکې د فینیت-توکو-تگلار Finite-Elemente-Verfahren ته اړینه ده.

لیکنوکې: بوسلی، هیولیک، کنیش

د یوه تابع لوریز مشتق

د یوه فنکشن یا تابع  $f$  مشتق د یوه وکتور  $v$  په لړو دی

$$\partial_v f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}.$$



دا کیدی شي د جاکوب-ماتریکس  $f'$  په مرسته د ځنځیریفانون په بنسټ د

$$\left( \frac{d}{dt} f(x + tv) \right)_{t=0} = f'(x)v$$

له لارې وشمیرل شي. په ځانګړې توګه  $\partial_{e_\nu} f$  د  $e_\nu$  سره د  $\nu$  م یونوکتور (واحدوکتور) ټوټه مشتق دی نسبت و  $\nu$  م کواوردینات ته.

د سکار تابع تابع لپاره دی

$$\partial_\nu f = (\text{grad } f(x))^t .$$

لکه څنګه چې په مشتق کې متشکلدی، لوریز مشتق شتون لري په دې حالت کې له  $f$  د  $v \parallel \text{grad } f(x)$  په لور. لوکال تغیر د لپاره ما کسیمال دی.

(Autoren: Höllig/Knesch)

د تابع

$$f(x, y) = x^2 y^3$$

لوریز مشتق په ټکي  $(x, y) = (2, -1)$  کې شمیرلکیري. د دې لپاره لومړی

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy^3 \\ 3x^2y^2 \end{pmatrix} .$$

ټاکو.

د معلومو کواوردینات د ځای په ځای کولو وروسته د یوه لور  $v = (a, b)^t$  لپاره لاسته راځي

$$\partial_\nu f(2, -1) = (-4, 12) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -4a + 12b .$$

لوریزوکتور د

سرلیک

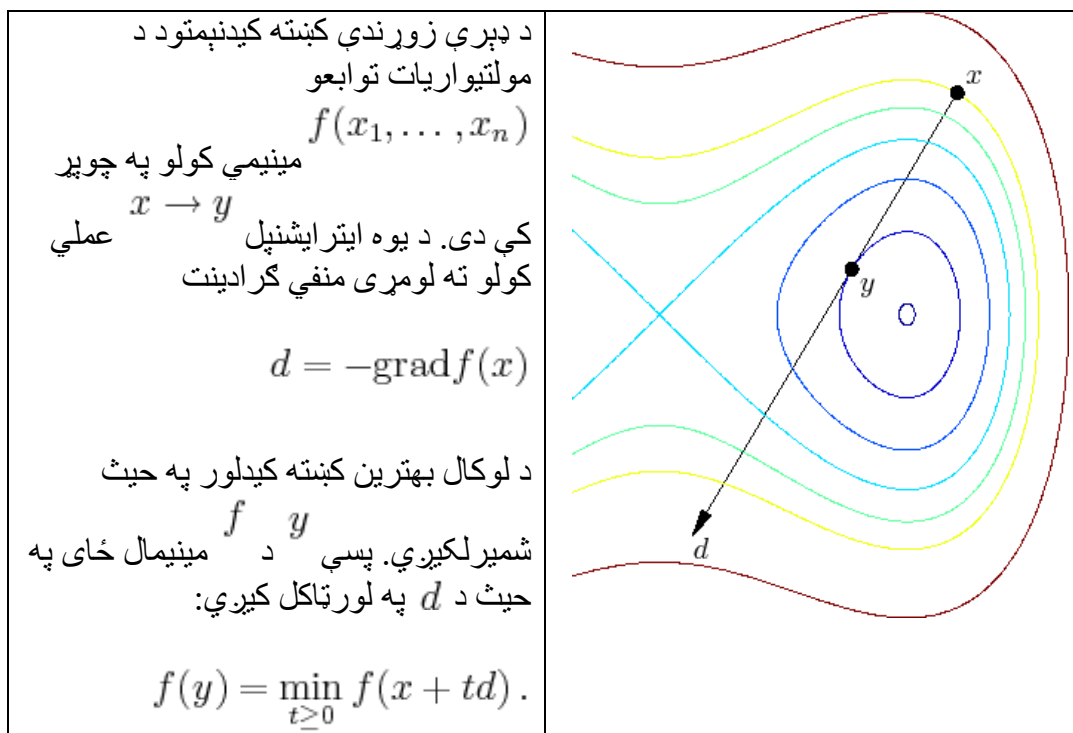
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

لپاره ماڪسیمال کیري، نو د بیلگی په توگه  $v = (-1, 3)$  په لومړئ نږدېونه کې له دې سره

$$f(2 - t, -1 + 3t) \approx f(2, -1) + t \partial_v f(2, -1) = -4 + 40t$$

د  $f$  خورا لویه ځایزه یا لوکال جکښنه په گوته کوي یا تشریح کوي

د ډېرې زورنډې یا کښته کیدني متود



لکه په تابع یا څیره کې چې انځوردی، لټولور و نیوو ډېرې **Niveaumenge** ته د  $x$  له لارې اور توگونال ده او تابع د نیوو ډېرې په  $y$  کې یوه کوچني ارزښت ته لمسوي

یادونه : د نیوونو **Niveaumenge** یا روښانه ونه (ژباړی): په شمیرنه کې د یوه سکالار پټي یا ورشو ټولو ډېریو یا ستونو ټکي، چې هغه همغه ارزښت سره ترتیب یا تنظیم وي. پای.

د خورا زورندکښته کیدني متود له لارې تولید شوي پرلپسې  $x_0, x_1, \dots$  کونورگنت کیدی شي د ډېرې ټولیزې نیوني سره وښوول شي. پوره کیدونکی دی، که  $f$  د کښته لور ته محدود وي او  $\text{grad } f$  په یوه د ډېرې په یوه چاپیریال  $U$  کې لپیشیخ-ناپریکیدونکي وي، دا په دې معنا چې

$$\|\text{grad } f(x) - \text{grad } f(\tilde{x})\| \leq L\|x - \tilde{x}\|, \quad x, \tilde{x} \in U.$$

باور لري

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \|\text{grad } f(x_\ell)\|^2 < \infty.$$

دا په ځانګړې توګه دې کې خوندي ده، چې د پرلپسې  $x_0, x_1, \dots$  هر پدغالي ټکی د  $f$  یو انحرافي یا بهتره افراطي ټکي دی. دا چې دا یو ځاییز یا لوکال مینیموم دی ستاتیستیکی په اطمینان، مګر نه جبراً ترې لاسته راځي.

په الګوریتم کې یو بعدي یا یو پراخېدونکی مینیموم اړتیا ده چې فقط په نږدې توګه وګرځي شي. لټونلور  $d$  باید نه دي چې د کمیز یا منفي ګرادینټ په څیرو ټاکلی شي او یوه ځییزه مینیموم ځای  $y$  و نه ټاکلشي. د کونورگنت لپاره په ساده توګه پریکړیدی، چې هر ایتراشنپل سره د تابع ارزښت یو ریدکشن و  $\|\text{grad } f(x)\|^2$  ته متناسب ورسیدای شي.

(Autoren: Höllig/Hörner/Pfeil)

د یوه مربع تابع

سرلیک

$$f(x) = \frac{1}{2}x^t Ax - b^t x$$

 $x \rightarrow y$ 

لپاره د یوه سیومتريک زیاتيز یا مثبت ديفینیت ماتریکس  $A$  سره یوایتریشنیل لري د ډېر زور نندجگیدني بني متود سره

$$y = x + td, \quad d = -\text{grad}f(x) = b - Ax, \quad t = \frac{d^t d}{d^t Ad}$$

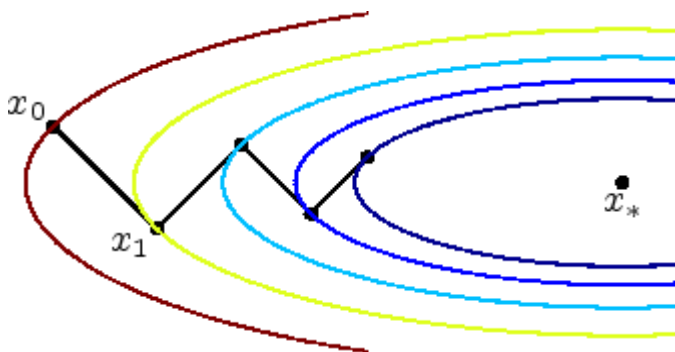
د

$$\begin{aligned} f(x + td) &= \frac{1}{2}(x + td)^t A(x + td) - b^t(x + td) \\ &= \frac{1}{2}d^t Ad t^2 + (x^t Ad - b^t d)t + c \end{aligned}$$

مینیموم کیدی شي په دې حالت کې ا کسپلیخیت یا روښانه توگه ورکړ شي. د  $t$  پسې مشتق صفر ځایونوله لاري لسته راځي

$$0 = d^t Ad t - \underbrace{(b - Ax)^t d}_d$$

اوله دې سره د نیمکر بنیز پارامتر  $t$  لپاره فرمول.





تابع چې بنایي، کیدی شي ناغوبنډلو ریډنو یا Oszillationen ته راشي، که  $A$  ایکنارزبنت قوي توپیر کیدونکی د لوي نظم لري. یوه افراطي پیلگه د

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

لپاره لاسته راي.

$$x = \begin{pmatrix} c & 1 \end{pmatrix}^t$$

د لپاره دی

$$d = - \begin{pmatrix} c \\ 100 \end{pmatrix}, \quad Ad = - \begin{pmatrix} c \\ 10^4 \end{pmatrix}$$

او

$$d^t d = c^2 + 10^4, \quad d^t Ad = c^2 + 10^6, \quad t = \frac{c^2 + 10^4}{c^2 + 10^6}.$$

له دې سره لرو

$$y = \begin{pmatrix} c \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{c^2 + 10^4}{c^2 + 10^6} \begin{pmatrix} c \\ 100 \end{pmatrix} = \frac{99c^2}{c^2 + 10^6} \begin{pmatrix} 10^4/c \\ -1 \end{pmatrix}.$$

په رښتیا د  $c = 100$  لپاره لرو

$$y = \frac{99}{101} \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

1%

سری پیژني، چې مینیموم ته د واټونو په هر ایترایشنپل کې په سرچینه کې فقط له په کچه کمیري.

سرلیک

## په حټ- یا بر عکس تابع Umkehrfunktion

دې د یوه ټکي  $x_*$  په چاپیریال کې ناپریکیدونکی مشتقور تابع وي  
 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$   
 د انورټیري جاکوبي-ماتریکس  $f'(x_*)$  سره.

نو  $f$  د  $x_*$  په یوه چاپیریال  $U$  کې بیجکتیو دی، دا په دې معنا چې یو ناپریکیدونکی  
 مشتقور برعکستابع  $g = f^{-1}$  شتون لري د  
 $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y), \quad x \in U.$

سره.

له دې برسیره د جاکوبي-ماتریکس

$$g'(y) = f'(x)^{-1}$$

لپاره باور لري، د ټولو  $x \in U$  لپاره.

(Autoren: Höllig/Streit)

مسوات  $f(x) = y$  کړی شي د یوه ټکي  $(x_*, y_*)$  په چاپیریال

$$U \times V = \{x : |x - x_*| \leq \delta\} \times \{y : |y - y_*| \leq \varepsilon\}$$

کې د لیترايشن

$$x \leftarrow \varphi(x) = x - f'(x_*)^{-1}(f(x) - y)$$

سره د بانخ Banach ځای په ځای یا فیکس تکی جملې سره حل شي.

دې ته بنوول کيږي، چې  $\varphi$  د کره لپاره یو را ټول شوی  $\text{kontraahierende}$  ځانیزه تابع ده په  $U$ .

د کنوتر اکشن ثابته کیدی شي د  $\sup_{x \in U} \|\varphi'(x)\|$  له لارې تخمین شي، داسې چې د اویکلید یا اقلیدس نورم  $\|\cdot\|$  باندې تنظیم ماتریکس نورم وکارول شي. د

$$\begin{aligned} \|\varphi'(x)\| &= \|E - f'(x_*)^{-1}f'(x)\| \\ &= \|E - f'(x_*)^{-1}[f'(x_*) + f'(x) - f'(x_*)]\| \\ &= \|f'(x_*)^{-1}(f'(x) - f'(x_*))\| \end{aligned}$$

له امله دیوون - یا وادما تریکس  $E$  سره  $\leq c < 1$  سوپریمومو دی د پوره کوچني  $\delta$  لپاره، ځکه چې  $x \rightarrow x_*$  د  $f'(x) \rightarrow f'(x_*)$  لپاره.

$\varphi(U) \subseteq U$  د خوندی لرنه یا Die Inklusion

$$\varphi(x) - x_* = x - x_* - f'(x_*)^{-1}(f(x) - f(x_*) + y_* - y).$$

نورم د تخمین له لارې لاسته راځي.

سرلیک

د  $f$  د ناپریکیدني او مشتقووالي په بنسټ باور لري

$$f(x) - f(x_*) = f'(x_*)(x - x_*) + R, \quad |R| = o(|x - x_*|).$$

د دې په تعقیب دی

$$|\varphi(x) - x_*| \leq \|f'(x_*)^{-1}\|(o(\delta) + \varepsilon) \leq \delta$$

د پوره کوچني  $\delta$  (  $o(\delta)/\delta \rightarrow 0$  ) او  $\varepsilon$  لپاره

$y \in V$

له دې سره د باناخ ځایي ځای ټکي جملې نیوني یا فرضیپوره دي، او د ټولو لپاره د لاندې سره  $x$  شتون لري د لاندې سره

$$x = x - f'(x_*)^{-1}(f(x) - y) \Leftrightarrow f(x) - y = 0,$$

دا په دې معنا چې سری کړی شي مساوات د  $x$  پسې حل کړي:

$$g(y) = f^{-1}(y) = x$$

فورمال د  $x = g(f(x))$  مشتق له لارې د ځنځیري قانون سره سم لاس ته راځي

$$E = g'(y)f'(x).$$

د  $g$  د جاکوبي-ماتریکس د  $f$  د جاکوبي-ماتریکس معکوس دی. د دې لپاره چې دې فرمولتیکاوی د ازمايو، د

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

لپاره د  $x, x + \Delta x \in U$  سره لیکو

$$\begin{aligned} g(y + \Delta y) - g(y) - f'(x)^{-1}(\Delta y) \\ = \Delta x - f'(x)^{-1}[f(x + \Delta x) - f(x) + |\Delta x|/2] = f'(x)^{-1}R \end{aligned}$$

د  $R = o(|\Delta x|)$  سره د  $f$  مشتقووالي په بنسټ. دا پاتې دي چې وینوولشي، چې  $|\Delta y|$  د  $|\Delta x|$  له لارېکیدی شي تخمین یا اټکل شي.

دا له

$$\Delta x = f'(x)^{-1}(\Delta y - R)$$

لاس ته راځي

د  $\|f'(x)^{-1}\|$  په  $U$  محدودیت له امله:

$$|\Delta x| \leq c^* (|\Delta y| + o(|\Delta x|)) \leq \tilde{c} |\Delta y|$$

د پوره کوچني  $|\Delta x|$  لپاره د ثابتو  $c^*$  او  $\tilde{c}$  سره.

(Autoren: Höllig/Streit)

و دې څیرل شي، چې ایا تابع

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ x/y \end{pmatrix}$$

سرليڪ

په ٽڪي  $(x, y) = (2, 1)$  کي لوڪال معڪوسور ده. د دي لپاره لومري د جا ڪوبي -  
ماتريڪس

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1/y & -x/y^2 \end{pmatrix}.$$

جوريزي.

تر څيرني لاندي ٽڪي ڪي دي

$$Jf = f'(2, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\det J = -4 \neq 0$$

د له امله د

$$\begin{pmatrix} u_* \\ v_* \end{pmatrix} = f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

په چاپيريال ڪي يو معڪوس تابع  $g$  شتون لري

د دهجاڪو بيماتريڪس په ٽڪي  $(u_*, v_*)$  ڪي دي

$$g'(2, 2) = J^{-1} f = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

په دي ساده بيلگه ڪي ڪيدي شي  $g$  د افادود حلونو له لاري د  $u$  او  $v$  لپاره د  $x$  او  $y$  پسي ايڪسپليڇيٽ  $\text{explizit}$  ورڪري:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g(u, v) = \begin{pmatrix} \sqrt{uv} \\ \sqrt{u/v} \end{pmatrix}.$$

له دې سره سرې کړی شي چې فرمول د  $g'(2, 2)$  لپاره په سیده لاره و ازمایي.

(Autor: Höllig)

کومپلکس اکسپوننشل تابع

$$z = x + iy \mapsto \exp(z) = u + iv$$

کیدې شي ریل یا حقیقي د

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(x) \cos y \\ \exp(x) \sin y \end{pmatrix}$$

په څیر ولیکي او دجاکوبي-ما تریکس

$$f'(x, y) = \exp(x) \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}.$$

د  $\det f'(x, y) = \exp(2x) > 0$  له امله د هر ټکي  $(u, v)^t$  په چاپیریال یو

برعکستابع  $g$  (د کمپلکس لوگاریتم) شتون لري د لاند/ط مشتق سره

$$g'(u, v) = (f'(x, y))^{-1} = \exp(-x) \begin{pmatrix} \cos y & \sin y \\ -\sin y & \cos y \end{pmatrix}.$$

یو گلوبال برعکس تابع د

سرلیک

$$f(x, y + 2\pi k) = f(x, y), \quad k \in \mathbb{Z},$$

له امله شتون نه لري. د پریودیوالي یا تل بېرته را گرځیدني له امله هر ټکي  
 $(u, v) \neq (0, 0)$   
 ناپای ډیر تر مخ عکسونه لري.

(Autoren: Boßle/Höllig/Streit)

په پولار کوارډیناتو باندې اړولو سره،

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

د کوارډینات  $x$  پسي د وړانگې ټوټه مشتق لپاره باور لري

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \varphi.$$

له بله پلوه له  $r = x / \cos(\varphi)$  لاسته راځي

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\cos(\varphi)}.$$

د دې برېښنده تضاد لپاره دلیل دا دی، چې د ټوټه مشتق شمېرنې له لارې همغه اووښتوني  
 ثابتې نه شي ساتل کیدی. په لومړي مساوات کې ثابت دی او په دویمې کې  $\varphi$ . په دواړو  
 حالتونو کې تغیر وخور او اغیزه یې په  $r$  کې وکتل شوه. دلته ټکی  $(x, y)$  هر ځل په  
 پرته لور یا همداسې د کوچني  $\varphi$  سره مایل کربنه حرکت کوي. په ورته توګه ځاییز یا  
 لوکال توګه د  $r$  تغیر مختلف دی.



سرلیک

د سکالار مشتق قانون

$$\frac{dy}{dx} = \left( \frac{dx}{dy} \right)^{-1}$$

طبعاً د هر توپه مشتق لپاره باورنه لري. د يوه بيجکتيو تابع

$$(x, y) \leftrightarrow (u, v)$$

لپاره په ټوليزه توگه

$$x_u \neq (u_x)^{-1}.$$

دی، له دې ورزیات باید د تابع

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix},$$

جاکوبي-ماتریکس رامنځ ته شي:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}^{-1}.$$

په دې راوړې بیلگه کې

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

دی.

سرلیک

معکوس مشتق د  $x$  او  $y$  پسې لاندې توه مشتق لري:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{1}{r} \sin \varphi & \frac{1}{r} \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{pmatrix}.$$

$r_x = \cos \varphi$  په ځانگړې توگه لرو، چې

(Autoren: Boßle/Höllig/Knesch)

### ایمپلیخیت توابع

که د یوه ناپریکیدونکیمشتقور تابع

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

لپاره وي

$$f(x_*, y_*) = 0, \quad \det f_x(x_*, y_*) \neq 0,$$

نودا مساوات سیستم

$$f_\nu(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0, \quad \nu = 1, \dots, n,$$

د  $y_*$  په یوه چاپیریال کې د  $x$  پسې حل کړئ:

$$x = \varphi(y).$$

ایمپلیخیت تعریف شوی تابع  $\varphi$  د  $x_*$  په یوه چاپیریال کې ناپریکیدونکی مشتقور دی او دا لاندې جاکوبي-ماتریکس لري

سرلیک

$$\varphi' = -(f_x)^{-1} f_y.$$

په ورته توگه د توابعو

$$f_j(x_1, x_2, \dots, x_{n+m}), j = 1, \dots, n,$$

لپاره باور لري د اووبنتونو يا متحولو د پرموتيشن پسي، دا په دې معنا چې سړی کړی شي په  $x_{j_1}, \dots, x_{j_n}$  پسي يې حل کړي، که د جاکوبي-ماتريکس  $f'$  درخ يا مته  $j_1, \dots, j_n$  کرښيز خپلواکه وي.

(Autoren: Höllig/Streit)

توابع

$$(x, y) \mapsto u(x, y) = (f(x, y), y)$$

په ټکي  $(x_*, y_*)$  کې د په خټ تابع جملې وړاندنيونې پوره کوي. په ځانگړې توگه د  $x$  اووبنتونو گڼون يا تعداد د  $f$  د کمپوننتونو تعداد په گوته کوي، او

$$u'(x_*, y_*) = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ 0 & E \end{pmatrix} \Big|_{(x_*, y_*)},$$

د  $E$  سره يوونماتريکس، په خټ-يا برعکس کيدونکيدی. له دې امله سړی کړی شي

$$(\varphi(y), y) = u^{-1}(0, y)$$

کيردي، د  $u^{-1}$  سره د  $u$  ناپريکيدونکی مشتقور برعکس تابع.

سرلیک

د جاکوبي-ماتریکساکسپلیټیت فرمول له

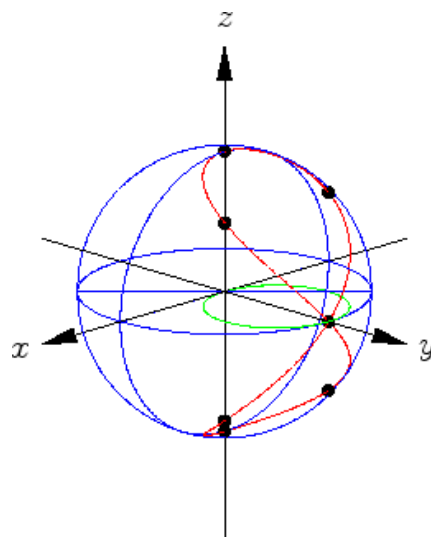
$$0 = (f(\varphi(y), y))_y = f_x \varphi' + f_y.$$

لاسته راځي.

د ویوانی Vivianische کره یا منحنی

$$C: t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t \cos t \\ \sin(2t) \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi),$$

د توتی یا استوانی سره د یوونفضا د غوڅي له لاری لاسته راځي.



په ایمپلیټیت بڼی کره د

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$g(x, y, z) = x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

له لارې انځور ور ده. د ایمپلیځیتتابع جملپسره سری کری شي د جاکوبي-ماتریکس

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y & f_z \\ g_x & g_y & g_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y - 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

لرلو سره پریکړه وکړي، چې ایا کړه ځان لوکال یا ځاییزد کو اور دینات  $x, y, z$  څخه د یوې له لارې پارامتریک کیدی شي.

نسبت  $x$  ته پارامتریکولو لپاره، دا په دې معنا چې د  $y$  او  $z$  پسي حلونه پوره کیدونکېده، داسې چې

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)} = \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ 2y - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

برعکس ور ده. دا د  $y \neq 1/2$  او  $z \neq 0$  لپاره حالت دی. سری لاسته راوړي

$$y(x) = \frac{1}{2} + \delta \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}, \quad z(x) = \delta' \sqrt{\frac{1}{2} - \delta \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}.$$

چیرته چې په اړونده توگه د یوگونو بناخونو مخنځینه  $\delta, \delta' \in \{-1, 1\}$  باید و ټاکل شي.

په ریښتوني دا پارامتریک کونه په ټکو  $(0, 1, 0)^t$ ،  
 $(\pm 1/2, 1/2, \mp \sqrt{2}/2)^t$   $(\pm 1/2, 1/2, \pm \sqrt{2}/2)^t$   
 او سینگر لارده. د  $x$  پسي

سرلیک

پارمتریک کوني لپاره هندسي اړین دی، چې د تانجنت لور و  
ده، دا په دې معنا چې یو ناساده کمپوننت د  $x$  په لور لري.  
ته ارتوگونال نه  $(1, 0, 0)^t$

په ورته توګه نسبت  $y$  او  $z$  ته د پارامتریکوروالي لپاره پوره کیدونکي شرطونه لاس ته راځي.

په ټکي  $(0, 1, 0)^t$  کې لوکال پارمتریک کیدنه شتون نه لري. کړه دلته ډبل ټکی لري. د جاکوبي-ماتریکس

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y, z)} \Big|_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

فقط رانګ 1 لري.

د  $n$  متحولې یا اووښتوني یوه سکالار تابع  $f$  لپاره دا جمله د ایمپلیټیت توابعو په هکله وایي، چې مساوات

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$\partial_k f(x_*) \neq 0. \quad \text{د } x \approx x_* \text{ لپاره د } x_k \text{ پسي حلکیدى شي، که}$$

د روښانه بیلګې په توګه مساوات

$$f(x, y, z) = xe^y - yz = 0$$

راورو. ګرادینټ دی

$$(f_x, f_y, f_z)^t = (e^y, xe^y - z, -y)^t.$$

د  $f_x > 0$  له امله  $f = 0$  د ټولو  $(x, y, z)$  لپاره د  $x$  پسي حلور دی. دا د مساوات

$$x = yze^{-y}$$

پسي ترلي هم ليدل کیدی

په ورته توگه کتل کيږي، چې د  $z$  پسي حل د  $y \neq 0$  لپاره هم ممکن دي.

په  $y$  پسي مسات ساده نه شي حل کیدی. د ايمپليڅيت توابعو په هکله جمله د  $(x_*, y_*, z_*)$  په يوه چاپيريال کې تظمينوي که

$$f_y(x_*, y_*, z_*) = x_* e^{y_*} - z_* \neq 0.$$

دا د بيلگي په توگه د مساوات د حل  $(0, 0, 1)$  لپاره پوره دی:

$$f_y(0, 0, 1) = -1.$$

په تعقيب يی يو تابع  $\varphi$  شتون لري د

$$f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x, z), \quad (x, z) \approx (0, 1).$$

سره.

سره له دې چې  $\varphi$  اکسپليڅيت د ورکړي وړ نه دی، کیدی شي گراډينټ و ټاکل شي:

$$0 = f(x, \varphi(x, z), z) \implies 0 = f_x + f_y \varphi_x, \quad 0 = f_z + f_y \varphi_z.$$

سرليڪ

د راورل شوي ٽڪي  $(x_*, y_*, z_*)$  کي باور لري

$$\begin{aligned}\varphi_x(0, 1) &= -f_x(0, 0, 1)/f_y(0, 0, 1) \\ &= 1/(-1) = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_z(0, 1) &= -f_z(0, 0, 1)/f_y(0, 0, 1) \\ &= 0/(-1) = 0.\end{aligned}$$

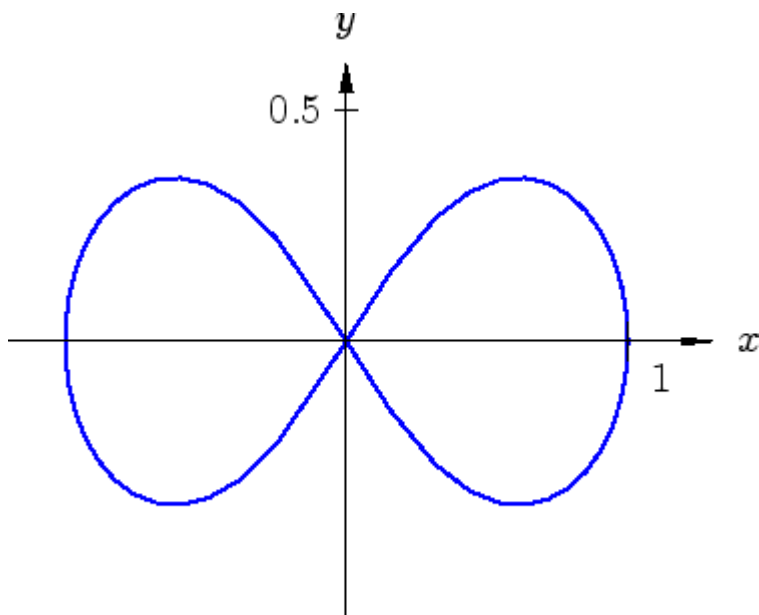
(Autor: Höllig)

د بيوارياتت پولينوم  $p$  لپاره د

$$p(x, y) = 0$$

له لاربيوه الجبري ڪره تعريفيري. ڪه درجه  $p \neq 0$  وي، نو يا  $x$  لوڪال يو د  $y$  تابع دي او يا په خت. په ٽڪو ڪي چي درجه بي ورڪيڊونڪي وي ڪيڊي شي ڪره يو سينگولاريتي ولري





له لارې تعريف شوي ليمنيסקاتي گرادينټ  $p(x, y) = y^2 - x^2 + x^4 = 0$  د

$$\text{grad } p(x, y) = (-2x + 4x^3, 2y)^t$$

فقط په ټکي  $(0, 0)$  کې په ورکيزي. لکه په څيره کې چې کنټل کيزي، نه شي کيدی چې کره يواځنئ په  $x$  پسې يا په  $y$  پسې حل شي.

په دې ټکي او  $(-1, 0)$  کې تانجنټ و  $x$ -محور ته ولاړ يا عمود دی. کره کړی شي لوکال فقط په  $x$  پسې حل شي:

$$x = \sigma \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}}$$

سرلیک

د  $x = \sigma \in \{-1, 1\}$  په چاپیریال کې. برعکس کیدی شي کړه په ټکو  
 $\pm(1/\sqrt{2}, 1/2)$  کې لوکال فقطد  $x$  تابع په څیر نه د  $y$  په څیر ورکړ شي:  
 $y = \pm\sqrt{x^2 - x^4}$ .

په نورو ټول ټکو  $(x_0, y_0)$  کې کیدی شي چې سری یې هم د  $x$  او یا  $y$  پسې حل کړي.

بیلگه

$$\frac{dy}{dx} = -p_y^{-1} p_x = \frac{4x^3 - 2x}{2y}$$

ده او

$$y - y_0 = \frac{4x_0^3 - 2x_0}{2y_0} (x - x_0)$$

په ټکی  $(x_0, y_0)$  کې د تانجنت مساوات دي.

(Autoren: Höllig/Streit)

په ناکرېټیز مساواتسیستم کې د مخ ته بیوني متود

په یوه د پارامتر تابع مساواتسیستم کې

$$f(x, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

د ناپریکیدونکیمشتقور  $f$  توپه جاکوبي-ماتریکس  $f_x$  سره ناسینګولار دی، نو حلونه

ناپریکیدونکی مشتقور د  $t$  په واک کې دي. په ځانگړې توگه کیدی شي کرښیز تیلور-ودیزونه

$$x(t+h) \approx x(t) - f_x(x,t)^{-1} f_t(x,t)h$$

د گاونډیو اپروکسیمیشن لپاره وکارول شي.

دا متود زیات وخت د نیوتن-تگلار د پیل ارزښت د Generierung ته کارول کیري

لیکوال: هیولیک، سترایت

### د تیلور اپروکسیمیشن Taylor-Approximation

Approximation (لاتین: هغه بل، شمیرپوهنیزه تری پوهیدنه(مفهوم) نردېوالی)

د یوه تکي په چاپیریال کې یو  $(a_1, \dots, a_m)(n+1)$ -ځله ناپریکیدونکی مشتقور د  $m$  متحولو  $x_i$  سکالار تابع  $f$  کیدی شي د یوه تیلور-پولینوم له لارې د توتال درجې له لارې اپروکسیمیشي:

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) (x-a)^\alpha + R, \quad |x-a| < r,$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_m! \quad \text{د سره.}$$

پاتي غری لاندې بڼه لري

$$R = \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(u) (x-a)^\alpha, \quad u = a + \theta(x-a),$$

$$\theta \in [0, 1] \quad \text{د یوه لپاره.}$$

سرلیک

د بنووني لپاره د  $m$  متحولو د یوه تابع د تیلور وده په یونیواریات حالت بیرته اړولکیري. سری بی د تویزو بندیزونو  $a = 0$  راوړي او داسې یې ځای پځای کوي

$$f(x_1, \dots, x_m) = f(tx_1, \dots, tx_m)|_{t=1} = g(t)|_{t=1}.$$

د یونیواریات تابع  $g(t)$  لپاره د تیلور وده په صفر ټکی کې ده

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \dots + \frac{1}{n!}g^{(n)}(0)t^n + R$$

د

$$R = \frac{1}{(n+1)!}g^{(n+1)}(\theta t)t^{n+1}, \quad \theta \in [0, 1].$$

سره.

د ځنځیري قانون پسي لرو

$$\begin{aligned} g(0) &= f(0) \\ g'(0) &= \sum_j (\partial_j f(0))x_j \\ g''(0) &= \sum_i \sum_j (\partial_i \partial_j f(0))x_i x_j \\ &\vdots \end{aligned}$$

دا په دې معنا چې  $k$ -م مشتق  $m^k$  ترمونه لري. له دوي څخه هغه راټولیري، په کومو کې چې د یوگونو متحولو پسي برابرزیات واره مشتق ونيول شي.

$$m = 2, k = 5$$

د بیلگې په توګه د ټولو مشتقونو لپاره، کوم چې درې واره د لومړي کمپوننت او دوه واره د دویم کمپوننت پسي مشتق شوی دی، سری

$$\partial_1 \partial_1 \partial_1 \partial_2 \partial_2, \partial_1 \partial_2 \partial_1 \partial_2 \partial_1, \partial_1 \partial_2 \partial_2 \partial_1 \partial_1, \dots$$

$$\partial^\alpha, \alpha = (3, 2)$$

یوځایراوري. په ټولیزه توګه په دې کنکریټ حالت کې ټوټه مشتق

$$\binom{5}{3} = 5! / (3! 2!)$$

ترمونه دي. په ټولیزه توګه

$$\binom{k}{\alpha_1} \cdot \binom{k - \alpha_1}{\alpha_2} \dots \binom{k - \alpha_1 - \dots - \alpha_{m-1}}{\alpha_m} = k! / (\alpha_1! \dots \alpha_m!)$$

ترمونه دي، که د  $\nu$  -م کمپوننت پسي يې  $\alpha_\nu$  -خه مشتق ونيول شي.

که د تابع  $g(t)$  دا پورته شمیرل شوي مشتقونه د ټیلور-وډیزینه کې کېږدو، ضریب یا

ځلونی  $k!$  لندیري او سری لاسته د  $f$  غوښتونېوډیزینه راوري.

لیکونکي: بوسلي، هیولیک، شترایت

د یوه دوه متحولو تابع لپاره ټیلور-وډیزینه دا لاندې بڼه لري

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f + f_x (x - x_0) + f_y (y - y_0) \\ &+ \frac{f_{xx}}{2} (x - x_0)^2 + f_{xy} (x - x_0)(y - y_0) + \frac{f_{yy}}{2} (y - y_0)^2 \\ &+ \frac{f_{xxx}}{6} (x - x_0)^3 + \frac{f_{xxy}}{2} (x - x_0)^2 (y - y_0) \\ &+ \frac{f_{xyy}}{2} (x - x_0)(y - y_0)^2 + \frac{f_{yyy}}{6} (y - y_0)^3 + R, \end{aligned}$$

چې مشتق يې تل په ټکي  $(x_0, y_0)$  کې ارزښتول کيږي.  
د بيلگي په توگه د

$$f(x, y) = \sin(x - \omega y)$$

او د  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  لپاره د

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta f(0, 0) = \sin^{(\alpha+\beta)}(0) (-\omega)^\beta$$

له امله اېروکسېميشن

$$\sin(x - \omega y) =$$

$$= x - \omega y - \frac{1}{3!} \underbrace{(x^3 - 3\omega x^2 y + 3\omega^2 x y^2 - \omega^3 y^3)}_{(x-\omega y)^3} + R$$

د

$$R = \frac{1}{4!} (f_{x^4} + 4f_{x^3 y} + 6f_{x^2 y^2} + 4f_{x y^3} + f_{y^4})(\theta(x, y))$$

$$= \frac{1}{4!} (x - \omega y)^4 \sin(\theta(x - \omega y)),$$

سر د يوه  $\theta \in [0, 1]$  لپاره لاسته راوړي.

په بدیل ډول سری د تیلور-پولینوم د  $t = x - \omega y$  ځای په ځای کولو له لارې لاسته راوړي د ساین تابع په یوه بعدیز لړۍ انځورونه کې:

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots$$

د  $t = x - \omega y$  سره لاس ته راځي

$$f(x, y) = (x - \omega y) - \frac{1}{3!}(x - \omega y)^3 + \frac{1}{5!} \cos(\theta)(x - \omega y)^5,$$

چېرته چې د یونیوارینت پاتې غړي انځورونه کارول کېږي

لیکونکي: بوسلی، هیولیک، شترایت

د بیلګې په توګه پولینوم

$$f(x, y, z) = z^2 - xy$$

د  $(0, -2, 1)$  په ځای کې وډیز کېږي یا تکامل ورکول کېږي. دا له صفر سره نابرابر مشتقونه دي

$$f_x = -y, f_y = -x, f_z = 2z, f_{xy} = -1, f_{zz} = 2.$$

په وډیزونټیکي ارزونې د تیلور-انځورونې

$$1 + 2x + (-0)(y + 2) + 2(z - 1) + (-1)x(y + 2) + \frac{1}{2}2(z - 1)^2,$$

سرلیک

لاس ته راځي، کوم چې طبعاً د  $f$  سره همغږیز دی.

په بدیل ډول کیدی شي وديزینه د بنهېدلون له لارې هم وکتلی شول

$$y + 2 = \eta, \quad z - 1 = \zeta$$

او لاس ته راځي

$$f(x, y, z) = (\zeta + 1)^2 - x(\eta - 2) = \zeta^2 + 2\zeta + 1 - x\eta + 2x.$$

د هسي ماتریکس Hesse-Matrix

په ټکي  $(a_1, \dots, a_n)$  کې د یوه سکالار تابع  $f$  مربعیز تیلور-اپروکسیمیشن کیدی شي په بڼه

$$f(x) = f(a) + (\text{grad } f(a))^t (x - a) + \frac{1}{2}(x - a)^t H f(a)(x - a) + O(|(x - a)|^3)$$

ولیکل شي، د کوم سره چې د سیمتریک هسي-ماتریکس

$$H f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f(a) & \cdots & \partial_1 \partial_n f(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f(a) & \cdots & \partial_n \partial_n f(a) \end{pmatrix}$$

دویم مشتق خوندي لري.

لیکونکي: بوسلي، هیولیک، شترایت

کټمټوالی د تیلور-وډیزیني د مربع ترمونو د Umschreiben له لارې منځ ته راځي. په بیواریات حالت کې ( $n = 2$ )



$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f + f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) \\
 &+ \frac{1}{2!} (f_{xx}(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(y - y_0)^2) + R \\
 &= f + f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) \\
 &+ \frac{1}{2!} ((x - x_0), (y - y_0)) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x - x_0) \\ (y - y_0) \end{pmatrix} + R,
 \end{aligned}$$

دی، د کوم سره چې په بنی اړخ د تابع تعریفیږي  $(x_0, y_0)$  پریښوول شي یا ونه لیکل شي. باقي یا پاتېږي

$$R = \sum_{|\alpha|=3} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(u, v) (x - x_0)^{\alpha_1} (y - y_0)^{\alpha_2},$$

د

$$(u, v) = (1 - \theta)(x_0, y_0) + \theta(x, y)$$

سر د  $\theta \in [0, 1]$  لپاره د لوي نظم  $O(|(x, y)|^3)$  دی.

په ټوليز حالت کې شوونه په ورته تگه ده.

لیکونکي: هیولیگ، شترایت

د تابع

$$f(x, y) = \ln(x + 1/y)$$

لپاره

$$f_x = \frac{1}{x + 1/y}, \quad f_y = -\frac{1}{xy^2 + y},$$

$$f_{xx} = -\frac{1}{(x + 1/y)^2}, \quad f_{xy} = \frac{1}{(xy + 1)^2}, \quad f_{yy} = \frac{2xy + 1}{(xy^2 + y)^2}.$$

دی.

په ځانګړې توګه په ټکي  $(0, 1)$  کې د ګرادینټ او د هسې-ماتریکس لپاره لرو

$$\text{grad } f(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Hf(0, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

او له دې سره مربعیز ټیلور-وډیزینه

$$f(x, y) = (1, -1) \begin{pmatrix} x \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2}(x, y - 1) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - 1 \end{pmatrix} + O(|(x, y)|^3)$$

$$= x - y + 1 + \frac{1}{2}(-x^2 + 2xy - 2x + 1 + y^2 - 2y) + O(|(x, y)|^3).$$

د دې لپاره چې په ټکي  $(1, 1, 1)$  کې د

$$f(x, y, z) = (xy)^z$$

ټیلور-وډیزینه وټاکو، شمیرولومری

$$\begin{aligned} f_x &= yz(xy)^{z-1}, & f_z &= \ln(xy)(xy)^z, \\ f_{xx} &= y^2z(z-1)(xy)^{z-2}, & f_{zz} &= (\ln(xy))^2(xy)^z, \\ f_{xy} &= z(xy)^{z-1} + xyz(z-1)(xy)^{z-2}, & f_{xz} &= y(xy)^{z-1} + yz \ln(xy)(xy)^{z-1}, \end{aligned}$$

$(f_y, f_{yy}, f_{yz})$  د متحولې د بدلیدو له لارې لاسته راځي.

له دې سره لاسته راځي

$$\text{grad } f(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Hf(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

او له دې سره سری لاس ته راوړي

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & 1 + (1, 1, 0) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{2} (x-1, y-1, z-1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

سرلیک

$$\begin{aligned}
& + O(|(x, y, z)|^3) \\
= & 1 + (x - 1) + (y - 1) + (x - 1)(y - 1) \\
& + (x - 1)(z - 1) + (y - 1)(z - 1) \\
& + O(|(x, y, z)|^3).
\end{aligned}$$

لیکونکي: بوسلې، هیولیک، شترایت

### د نیوټن تنلار *Newton-Verfahren*

د یوه نه کرښیز مساواتسیستم

$$f_1(x_*) = \dots = f_n(x_*) = 0$$

حل  $x_* \in \mathbb{R}^n$  کیدی شي د

$$\begin{aligned}
f'(x)\Delta x &= f(x) \\
x &\leftarrow x - \Delta x
\end{aligned}$$

له لارې تعریف شوی د نیوټن ایتریشن و ټاکل شي.

که  $f$  دوه واره ناپریکیدونکی ټوټه دفررنخیالور او د جاکوبي-ماتریکس

برعکسور وي، نو د  $x_*$  په یوه چاپیریال  $U$  کې د پیل ارزښت لپاره دا تنلار مربعیز کونورگ یا پولې ته تلونکي ده

$$|x_{\text{neu}} - x_*| \leq c |x_{\text{alt}} - x_*|^2$$

په ځانگړې توگه د  $x \in U$  لپاره  $\det f'(x) \neq 0$  دی، داسې چې د  $\Delta x$  لپاره دا کرښیز سیستم یواځنی حل کیدونکی دی.

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د یوه حل  $x_*$  لپاره د نږدېوالي  $x_{\text{alt}}$  څخه په مخ ته تلنه کیدی شي د  $f$  کرښیز اپروکسیمیشن له لارې یو بنه شوی نږدېوالی  $x_{\text{neu}}$  د ټاکل شي، دا په دې معنا چې له

$$0 = f(x_*) = f(x_{\text{alt}}) + f'(x_{\text{alt}})(x_* - x_{\text{alt}}) + R, \quad R = O(|x_* - x_{\text{alt}}|^2)$$

څخه سړی د  $x_*$  پسې حل له لارې او باتې غږې پاتې یا لرې کیدو سره د ایتريشنقانون

$$x_{\text{neu}} = x_{\text{alt}} - (f'(x_{\text{alt}}))^{-1} f(x_{\text{alt}}).$$

گټلی شي.

که لومړی مساوات د  $f(x_{\text{alt}})$  پسې حل شي،

$$f(x_{\text{alt}}) = -f'(x_{\text{alt}})(x_* - x_{\text{alt}}) - R,$$

او دا د ایتريشن قانون کې ځا په ځای کړي، نو لاس ته ترې راځي

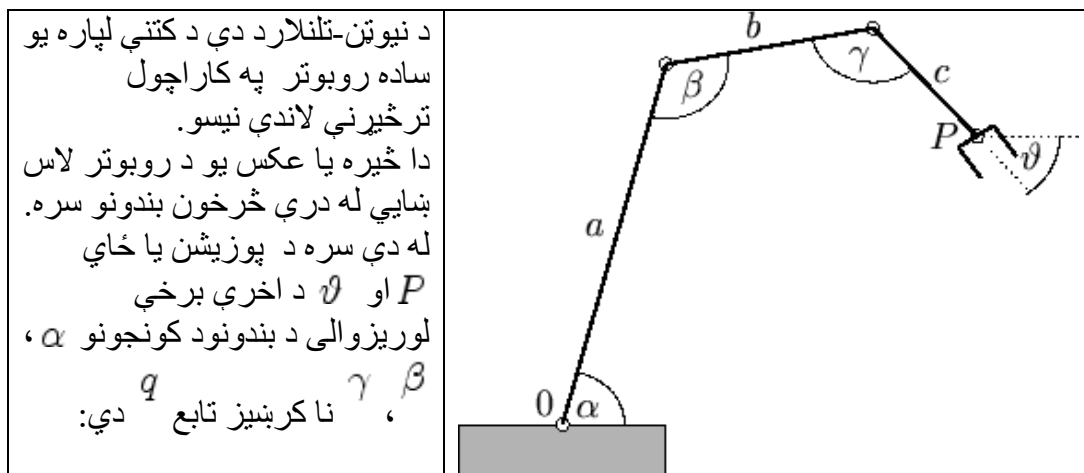
$$x_{\text{neu}} = x_* + (f'(x_{\text{alt}}))^{-1} R.$$

د  $f(x)$  د ناپریکیدني او مشتقوروالي په بنسټ  $|f'(x)|^{-1}$  په یوه د  $x_*$  چاپیریال  $U$  کې محدود یا رابند دی او له دې سره

سرلیک

$$|x_{\text{neu}} - x_*| = \left| (f'(x_{\text{alt}}))^{-1} R \right| \leq c |x_{\text{alt}} - x_*|^2.$$

لیکونکي: بوسلي، هیولیک، شترایت



$$\begin{aligned} q_1(\alpha, \beta, \gamma) &= a \cos(\alpha) + b \cos(\alpha + \beta - \pi) + c \cos(\alpha + \beta + \gamma - 2\pi) \\ q_2(\alpha, \beta, \gamma) &= a \sin(\alpha) + b \sin(\alpha + \beta - \pi) + c \sin(\alpha + \beta + \gamma - 2\pi) \\ q_3(\alpha, \beta, \gamma) &= \alpha + \beta + \gamma - 2\pi. \end{aligned}$$

د څرگندو ارزښتونو  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $c = 1$  لپاره د

$$\beta' = \alpha + \beta, \quad \vartheta = q_3 = \alpha + \beta + \gamma - 2\pi$$

بدلون یا سبستیچوشن له لارې سری دا نا کرښیز سیستم لاس ته راوړي

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(\alpha, \beta') = p_1 - 3 \cos \alpha + 2 \cos \beta' - \cos \vartheta \\ 0 &= f_2(\alpha, \beta') = p_2 - 3 \sin \alpha + 2 \sin \beta' - \sin \vartheta. \end{aligned}$$

$$\alpha_0 = \pi/2, \quad \vartheta = -\pi/2, \quad \tilde{p} = (2, 2)^t$$

حل ،

د روباتر لاس آرام حالت

په گوته کوي د جاکوبي-ماتریکس  $\beta'_0 = \pi$

$$f'(\alpha_0, \beta'_0) = \begin{bmatrix} 3 \sin \alpha_0 & -2 \sin \beta'_0 \\ -3 \cos \alpha_0 & 2 \cos \beta'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

سره.

و گاونډي ځاي  $\vartheta = -\pi/4, p = (2, 3)^t$  ته رسيدني ته د نيون-تنلارد لومړي پل لپاره دي کرښيز مساواتسيستم

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix},$$

حل شي. له دي سره لاس ته راځي  $\Delta\alpha = -\sqrt{2}/6, \Delta\beta' = -\sqrt{2}/4$  او سړی لاس ته راوړي

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/2 + \sqrt{2}/6 \\ \pi + \sqrt{2}/4 \end{pmatrix}.$$

په پوزيشن  $p$  کي ناتيکاوای له دي سره همدا اوس په

$$f(\alpha_1, \beta'_1) \approx (0.1172, 0.0976)$$

راکم شو.

بويلی، هيوليگ، شترایت

کرييکال ټکي يا افراطي(که انحرافي) ټکی Kritischer Punkt

سرلیک

د یوه سکالار تابع  $f$  لپاره سری  $x$  افراطي تکی بولي، که گراد یا درجه  $f(x) = 0$

grad وي. که دوه واره ناپریکیدونکی مشتقور وي، نو د افراطي تکی تیپ یا ډول، دا په دې معنا چې د تابعگراف د  $x$  په یوه چاپیریال کې د هسی-ماتریکس له لارې ټاکل کیږي. د  $Hf(x)$  د ایگن ارزښتونو  $\lambda_i$  د مخنځې له امله د لاندې ترمنځ توپیر کوي:

- هواره تکی (یعني په یوه سطحه پروت-): ټول ایگن ارزښتونه  $\lambda_i$  صفر دي.
- هڅېډوله یا بیضوي تکی: ټول ایگن ارزښتونه  $\lambda_i$  د صفر سره نامساوي دي او برابریا همغه مخ نځېني لري. تابع  $f$  په دې حالت کې په  $x$  کې یو ځایز (لوکال) افرا تیت لري

- هایبراپارابولیک تکی: ایگن ارزښتونه  $\lambda_i$  شته د مختلفو مخنځېنو سره. سری  $x$  زینتکی هم بولي.

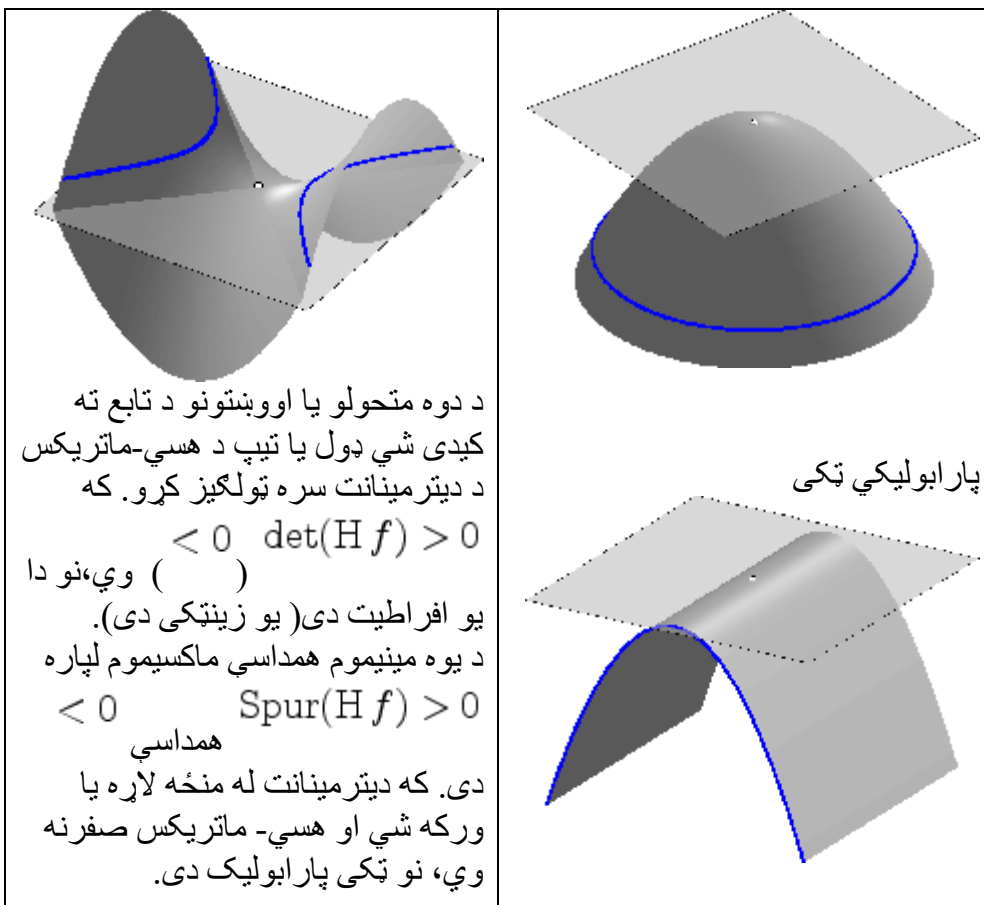
- پارابولیک تکی: لږ تر لږه یو ایگن ارزښت  $\lambda_i$  صفر دی اونور ټول ایگن ارزښتونه برابره مخنځېنه لري.

په نځېهوني یا نوموني د جگړېني له لارې په بی واریات حالت کې پامور یا جالبې دي، لکه دا چې په څیره کې کښل شوې دي.

های پارابولیکي تکی

بیضوي تکی





لیکونکي: هیولیک، وایس

د تابع

$$f(x, y) = y(1 - x^2 - y^2)$$

افراطي(کریټیکي kritischen) ټکي همداسي تیپ وټاکل شي. د دي لپاره سړی لومړی گرادینت جوړوي او بیا د هسي – ماتریکس:

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} -2xy \\ 1 - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}, \quad Hf = \begin{pmatrix} -2y & -2x \\ -2x & -6y \end{pmatrix}.$$

له

سرلیک

$$\text{grad } f = 0 \iff xy = 0 \wedge x^2 = 1 - 3y^2$$

څخه د انحرافي ټکي په څیر

$$(0, \pm 1/\sqrt{3}), \quad (\pm 1, 0),$$

لاسته راځي. د هسي ماتریکس هر ځل دلاندې سره برابر دی

$$\begin{pmatrix} \mp 2/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \mp 6/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mp 2 \\ \mp 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(H f) > 0 \quad (x, y) = (0, \pm 1/\sqrt{3}) \quad \text{د لپاره دی او}$$

$$\text{Spur}(H f) = \mp 8/\sqrt{3}.$$

له دې سره په  $(0, -1/\sqrt{3})$  کې یو مینیموم او په  $(0, 1/\sqrt{3})$  کې یو ماکسیموم شتون لري.

$$(x, y) = (\pm 1, 0) \quad \text{د لپاره باور لري}$$

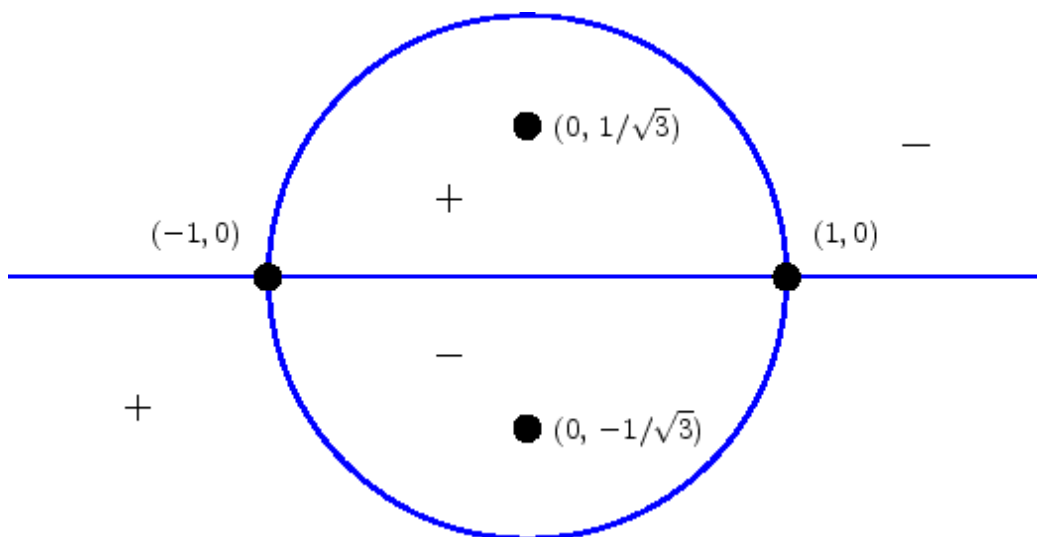
$$\det(H f) = -4 < 0,$$

نو دلته یو زینټکی شته.

د کریمیکیتکو تیپ کیدی شي د صفر ځایتو کو او د  $f$  له دې څخه ورکړ شوو مخنښنو وپشنو له لارې وپیژندل شي. د  $f$  ضرب بڼې لاس ته راځي

$$f(x, y) = 0 \iff y = 0 \vee x^2 + y^2 = 1,$$

داا په دې معنا چې د صفر ځایډیرئ د  $x$ -محور  $G$  او یونگرډئ  $C$  څخه جوړ دی. د  $\text{grad } f$  ورکیري، ځکه لور مشتقونه د  $G$  او  $C$  په اوږدوالي کې صفر دي. د مخ نڅیښې بدلیدنې په بنسټ دا یو زینتکی دي. د یوون(واحد)گرډئ تیکلي په نیمایي، چې د صفر ټکیډیرئ څخه یې ژئ جوړیږیو باید هر ځل یو افرطیت شتون ولري، ځکه چې ډیرئ کریمپکت ده او په ژئ صفر دی. د مثبت تابع ارز/شت سره دا یو ماکسیموم دی او د منفي سره یو مینیموم.



لیکونکي: بوسلي، هیولیک

د تابع

$$f(x, y) = (y - x + x^2)y$$

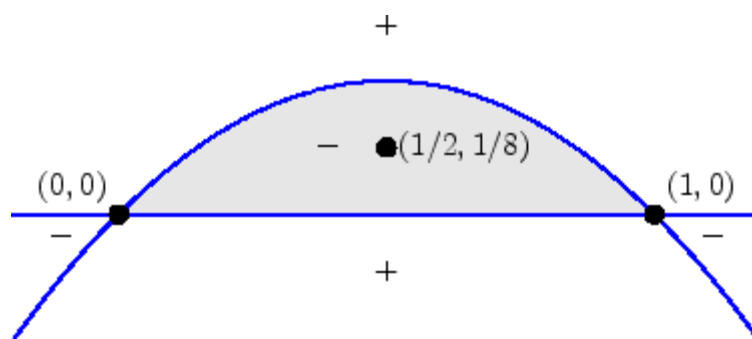
لیاره

سرلیک

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} (-1 + 2x)y \\ 2y - x + x^2 \end{pmatrix}$$

دی.

دا انحرافي ټکي  $\text{critical point}$  له دې امله  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$  دي. ټیپ یا ډول کیدی شي د  $f$  د مخنځیني ویش څخه وټاکل شي.



د  $x$ -محور سره د پارابولونو غوڅتکي (د تقاطع نقطې) زین ټکي دي، ځکه چې په  $f$  چاپیریال کې زیایز (مثبت) ۹ او کمیز (منفي) ارزښتونه شتون لري. په څره روشو؟؟ کې صفر په ژئ یا غاړه دی او کمیز ارزښت په دننه کې، باید هلته لږترلږه یو ځایز یا لوکال مینیموم شتون ولري.

شمیرپوهنیز دا تبویبا ډول د هسي-ماتریکس په مرسته فصدیقیدی شي.

$$Hf = \begin{pmatrix} 2y & 2x - 1 \\ 2x - 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

د انتقادي یا انحرافي ټکیلپاره لاس ته راوړو

$$H f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H f(1/2, 1/8) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

په لومړيو داوړو ټكو كې د هسي-ماتريكسدیترمینانت كميز دی، ټكي لكه انتظار چې كیده  
 $(1/2, 1/8)$   
 زینتكي دي. په كې دیترمینانت او شپور Spur زیاتیز یا مثبت دي، پس  
 دلته یو خاییز یا لوکال مینیموم لرو

(Autoren: Höllig/Reble)

د ډېرو متحولو- یا مولتیواریات توابعو افراطیت

xtrema multivariater Funktionen

که  $x_*$  د  $f(x_*)$  په یوه چاپیریال د یوه ناپریکیدونکي مشتقوړ سکالار تابع  
 $f$   
 مینیموم (ماکسیموم) وي، نو باور لري

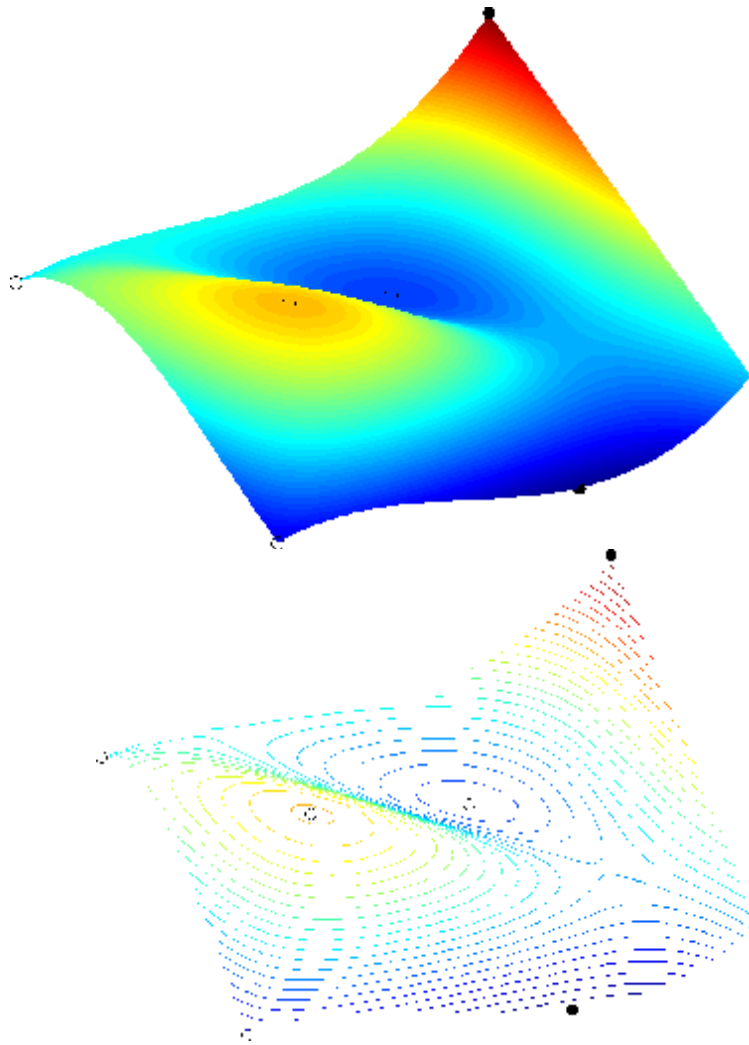
$$\text{grad } f(x_*) = 0.$$

یو پور هکید ونکیشرط دی، چې برسیره پردې د هسي-ماتریکس ټول ایگن ارزښتونه په  
 انحرافټکي  $x_*$  زیاتیز یا مثبت (کميز یا منفي) وي.

## سرلیک

که ایکن ارزښتونه د مختلفو منځنیو سره شتون لري، نو دا یو زینتکی دی، یعنې ځایز یل لوکال افراطیتکی نه دی. که د صفر سره نابرابرو ایکن ارزښتونو د برابر منځنځی سره لږتر لږه یو ایکن ارزښت صفر وي، نو د احرافي یا انتقادي اټکي  $x_*$  تپوپ یا ډول د دویم مشتق له لارې نه شي ټولگیز (صنفي) کیدی یعنې چې په کومه ډله یا ټولگي کې دی. ځایز مینیموم (ماکسیموم) کیدی شي د تعریف ورشو  $D$  د ژئ ټکو په څیر هم رامنځ ته شي. په دې حالت کې باید لوریز مشتق  $\partial_v f(x_*)$  د  $D$  په منفي ښودونکي لپاره لور  $v$  مثبت (منفي) وي.

د یوه سکالار تابع  $f$  یو ځایز افراطي ټکی په یوه ډیرئ  $D$  یا انحرافي ټکی دی (دا په  $\text{grad } f = 0$  دې معنا چې)، یو ژئ ټکی یا د ټوټه – پارشل مشتق پریکیدونکی ځای دی. کیدی شي په دې ځایونو کې مینیموم او ماکسیموم په دې ټکو کې د تابع ارزښتونو د پرتلي له لارې وشمیرل شي.



خپرونه يا تابع مختلف امکانات بنایي. دلته خایيز افراطي ټکي په گردئ او گلوبال يا ټوليز افراطي ټکي په ټکو سره په نخښه شوي دي.

لیکونکي: بوسلي، هیولیک، وایس

د کرښو په اوږدو تابع  $f$  راوړو او د په خوښه لور  $v$  لپاره تعریفوو

$$g(t) = f(x_* + tv), \quad t \in \mathbb{R}.$$

سرلیک

که  $f$  په  $x_*$  کې یو ځاییز افراطیت ولري، نو  $g$  په  $t = 0$  کې یو افراطیت لري. پایله یې ده

$$0 = g'(0) = (\text{grad } f(x_*))^t v = \partial_v f(x_*).$$

دا چې  $v$  په خوښه ټاکلی وو، باید گرادینټ په  $x_*$  کې ورکشي.

د مینیموم لپاره د  $f$  تعریفور شو تنها په ژئ لاس ته راځي، چې د  $D$  په دننه لور ښودونکي وکتور  $v$  لپاره لوریز مشتق ورکيږي. تنها په داسې لورو  $g$  د  $t = 0$  په یوه چاپیریال کې په یوه ښي اړخیز چاپیریال کې یو غریز جگیدونکی دی. د یوه ما کسیموم لپاره په ورته توګه د لایل راورل کيږي

که  $H f(x_*)$  فقط مثبت ایګن ارزښتونه ولري، نو د وکتور  $v$  لپاره د  $|v| = 1$  سره باور لري

$$v^t H f(x_*) v \geq c > 0.$$

د دویم مشتق د ناپریکیدني له امله دا چاپیریال د  $c$  په ځای کې د یوې ثابتې  $c/2$  سره همدا سې د  $x_*$  په یوه چاپیریال  $U$  کې ټیک پاتې کيږي. د  $g$  د تیلور-وډیزیني سره لاس ته راځي

$$g(t) = g(0) + \underbrace{g'(0)}_{=0} t + \frac{1}{2} g''(\theta t) t^2$$

د  $\theta \in [0, 1]$  سره د

$$g''(\theta t) = v^t H f(x_* + \theta t v) v^t$$



له امله د 0 په نږدې کې د  $t$  لپاره هلاس ته راځي

$$g(t) \geq g(0) + (c/2)t^2,$$

دا په دې معنا چې  $f$  په هره لور په  $x^*$  کې یو ځاییز مینیموم لري. د ماکسیموم د پوره کیدونکو شرایطو د لاس ته راوړلو لپاره په ورته توګه مخ ته تلل کیږي.

لیکونکي: هیولیګ، وایس

د مربع تابع

$$f(x) = \frac{1}{2}x^t Ax - x^t b + c$$

ګرادینټ د سیومتري ماتریکس  $A$  سره دی

$$\text{grad } f = Ax - b$$

او  $A$  د هسې-ماتریکس دی. ځاییز یا لوکال افراطي ځایونه د کرښیز مساوات سیستم  $Ax = b$  حلونه دي.

که د  $A$  ایګن ارزښتونه مثبت یا منفي وي، نو  $\det A \neq 0$  دی او د مساوات

$Ax = b$  یواځنی حل د  $f$  یواځنی ځاییز او همداسې ټولیز افراطیت دی.

د څرګندې بیلګې لپاره

$$f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + \frac{3}{2}y^2 + x + 4y - 3$$

دی

سرليڪ

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

د

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

حل  $(x, y) = (1, -2)$  دی. دا چي  $\det A = 5$  او  $\text{Spur } A = 6$  مثبت دي،

نو  $A$  مثبت ايگنارزبنٽ لري، او  $(x, y)$  د  $f$  ٽوليز مينيموم دی

ليکونکي: هيوليگ، واپس

غواريو د تابع

$$f(x, y) = \cos x + \cos y + \cos(x + y).$$

خاييز اکستروما پيدا ڪرو، چي  $f$  نسبت  $x$  او  $y$  ته  $2\pi$ -پريوڊيڪ دی او پسي هم

$$f(y, x) = f(x, y) = f(-x, -y)$$

په ورشوڪي وڃيرو. د ٽوٽه مشتق ڙي ٽڪي او پريڪيڊنخايونه په پام کي نه نيول ڪيري. نو بايد انحرافي ٽڪي پيدا شي.

له

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} -\sin x - \sin(x + y) \\ -\sin y - \sin(x + y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

لاس ته راڻي  $\sin x = -\sin(x + y) = \sin y$ ، نو د  $y \in [0, \pi]$  لپاره په

خانگري توگه  $x = y$  يا  $y = \pi - x$ . دواړه امڪانات يو له بل بيل څيرل ڪيري.

سرلیک

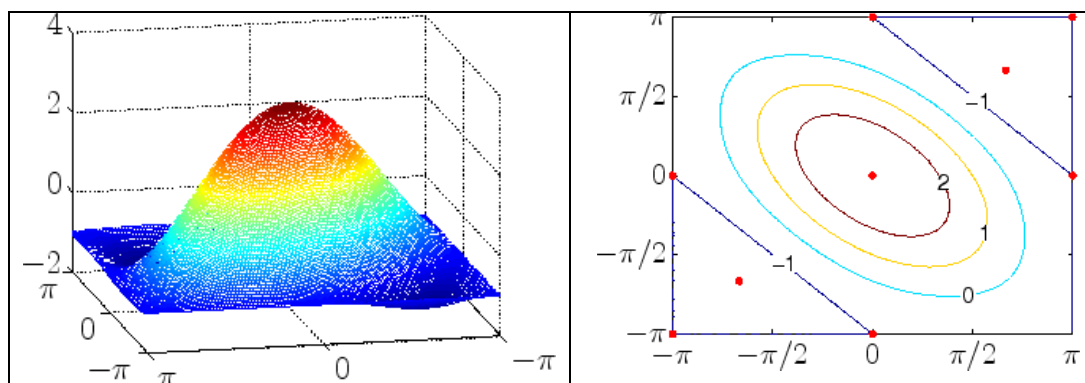
$$(i) \quad x = y : \\ \text{له}$$

$$\sin x = -\sin(2x) = -2 \sin x \cos x$$

په اړونده ورشو کې انحرافي ټکي  $(0, 0)$ ،  $(\pi, \pi)$  او  $(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$  لاس ته راځي.

$$(ii) \quad y = \pi - x :$$

له  $\sin(x) = -\sin(\pi) = 0$  انحرافي ټکي  $(0, \pi)$  او  $(\pi, 0)$  لاس ته راځي.



د تابع ارزښتونو د پرتلي څخه، چې د مشتق څخه رانيول کیدی شي، پېژندل کيږي، چې

$$(0, 0) \quad f(0, 0) = 3 \quad \text{يو ځاييز ماکسيموم د ارزښت سره دی او} \quad (\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) \quad \text{يو}$$

$$f(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) = -\frac{3}{2} \quad \text{ټوليز مينيموم د ارزښت سره دي.}$$

د بل انحرافي ټکي ډول يا ټيپ کیدی شي د هسي ماتريکس Hesse Matrix

$$H f = \begin{pmatrix} -\cos x - \cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -\cos y - \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

سرلیک

سره وټاکل شي. په ټکي  $(\pi, \pi)$  کې

$$Hf = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

دی.

دا چې دېترمینانت منفي دی، نو دا یو زینټکی دی. ټکي  $(\pi, 0)$  او  $(0, \pi)$  د سیومتری له امله یو بل سره  $\text{enstsprechen}$  مورکوي. د هسې-ماتریکس

$$Hf = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Hf = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

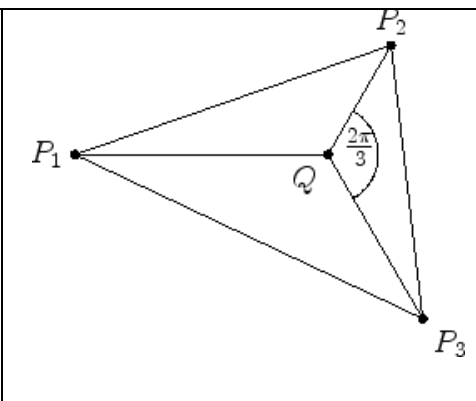
هم منفي دېترمینانت لري. له دې امله هم دا یو زینټکی دی.

نو په ټولیزه توګه ټکي  $(2k\pi, 2l\pi)$   $k, l \in \mathbb{Z}$  د ټولیز ماګسیموم او ټکي  $(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2l\pi)$  همداسې د ټولیز مینیموم  $(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2l\pi)$

په حیث لاس ته راځي

لیکونکي: هیولیک، وایس

د شټاینر  $\text{Steiners}$  پرابلم په دې کې پروت دی، چې یو ټکی  $Q \in \mathbb{R}^2$  وټاکي، د کوم لپاره چې ورکړ شوو ټکو  $P_i$  د واټنونو زیاتون یا جمعه مینیمال شي. دا ساده ځانګړی حالت یې په څیره کې ورکړ شوی دی. د درې ټکو  $P_1, P_2, P_3$  لپاره  $Q$  یا د یوه ټکي سره سره



خوري يا د ټول ټکو جوړو لپاره دی $\sphericalangle(P_i, Q, P_j) = 2\pi/3$	
--	--

د دې لپاره چې غوښتل شوی خوږونه (خوي) وښايو،  $d_i$  دي د

$$Q = (x, y)$$

او

$$P_i = (x_i, y_i)$$

ترمنځ واټن وښايي، دا په دې معنا چې

$$d_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2.$$

د ځنډيريقانون له مخې لاسته راځ

$$2d_i \frac{\partial d_i}{\partial x} = 2(x - x_i)$$

لاسته راځي. همداسي

$$\frac{\partial d_i}{\partial x} = \frac{x - x_i}{d_i}$$

او په اړونده ډول  $\frac{\partial d_i}{\partial y} = \frac{y - y_i}{d_i}$ . د واټن تابع گرادینت،

$$\text{grad } d_i = \frac{1}{d_i} \begin{pmatrix} x - x_i \\ y - y_i \end{pmatrix},$$

له دې امله یو یوون یا واحد وکتور دی، کوم چې له  $P_i$  د ټکي  $Q$  په لور ښايي.

د

$$f = d_1 + d_2 + d_3$$

مینیموم به شي

ماکسیموم د له ټکو  $P_i$  څخه په یوه کې و نه نیول شي، په کومو کې چې  $\text{grad } d_i$  پریکړدونکیدی، نو باید په مینیموم کې

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

باورولري. د وکتورگرادینت د برابر اوږدوالي په بنسټ له دې لاسته راځي، چې که دا یو په بل کینول شي یو برابر اړخیز درېږدې جوړوي. د دوي ترمنځ کونج له دې امله برابر دې په  $2\pi/3$  دې په

لیکونکي: بوسلي، هیولیک، وایس

### د لانگرانژ ضریبونه (څلوونې) *Lagrange-Multiplikatoren*

که د څنګیزو شرایطو  $g_i(x) = 0$  لاندې  $x_*$  د سکالار تابع  $f$  یو ځاییز افراطي ځای وي، نو د لانگرانژ ضریب  $\lambda_i$  شتون لري، داسې چې

$$f'(x_*) = \lambda^t g'(x_*).$$

دلته وړاند نیونه کیري، چې  $f$  او  $g$  د  $x_*$  په یوه چاپیریال کې ناپرېکړدونکي مشتقور دي او د جاکوبي-ماتریکس  $g'(x_*)$  پوره رانګ لري.

د فقط یوه فرعیټز – شرایط ساده بڼه

$$\text{grad } f(x_*) \parallel \text{grad } g(x_*),$$

لري که  $\text{grad } g(x_*) \neq 0$  وي، دا په دې معنا و چې د  $f$  او  $g$  نیوو سطحې یو بل په افراطي ځای کې لمسوي.

د لاگرانژ شرطونه پوره کیدونکینه دي، چې پریکړه وکړي، چې یو لوکال افراطیت مو مخ ته پروت دی او یا مینومو یا ماکسیموم دی. دا د نورو معلوماتو په مرسته کره کیدی شي.

تولیزه افراطیت د توابعو د پرتلي په اساس په ټکو کې کیدی شي، کوم چې د لاگرانژ شرطونه پوره کړي، کوم چې په ورکړ شوي حالت کې هغه د ورکړ شوي ډیري په ژي او یا د  $g'$  په رانگ ضایع سره.

لیکونکي: بوسلي، هیولیگ، وایس

$n$  دې د اووښتونو گڼونن یا تعداد وي او  $m$  دې فرعي یا څنګیز شرایط وي.

د  $m \geq n$  لپاره نه ښوول کېږي، ځکه چې یو په خوبه  $n$ —وکتور د  $n$  د کرښو کمیشن په حیث د  $g'$  دکرښو خپلواکو لیکو په څیرانخوړو دی.

د  $m < n$  لپاره دې  $x = (u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$  یو د اووښتونو یا واریلو ټوټه

ونه وي، د کوم سره چې د ممکنه پرموتیشن د  $g_u(u_*, v_*)$  په څټوروالی یا برعکس وروالی له وړاندې نیول شوی وي. نو د ایمپلیڅیت تابع جملې د فرعي شرایطو له مخې ځاییز حلور دی:

$$g(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = \varphi(v), \quad v \approx v_*.$$

په تعقیب په یو افراطي ټکي د تابع  $v \mapsto f(\varphi(v), v)$  گرادینت ورکیري:

$$f_u(u_*, v_*)\varphi'(v_*) + f_v(u_*, v_*) = 0.$$

سرليڪ

د ڇنگيز يا فرعي شرايطو  $g(\varphi(v), v) = 0$  مشتقيدو له لاري پسي لاسته راڃي

$$\varphi'(v) = -g_u(u, v)^{-1} g_v(u, v).$$

په گراڊينٽ کي د  $\varphi'$  ايسوولو پسي ڪٽل ڪيري، ڇي د

$$\lambda = f_u(u_*, v_*) g_u(u_*, v_*)^{-1}$$

سره مساوات

$$f_u = \lambda g_u, \quad f_v = \lambda g_v,$$

ڪوم ڇي د  $f' = \lambda g'$  شرايطو  $u$  - او  $v$  - ڪمپوننٽونه په گوته ڪوي، په ٽڪي  $(u_*, v_*)$  کي پوره دي.

ليکونکي: هيوليڪ، وائس

تابع

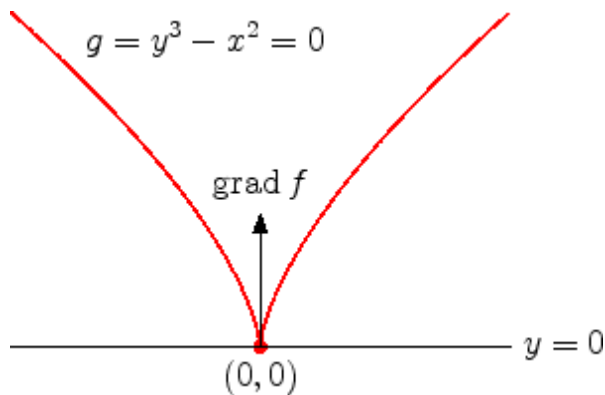
$$f(x, y) = y$$

لاندي فرعي شرطونه لري

$$g(x, y) = y^3 - x^2 = 0$$

په څرگند ڊول په  $(0, 0)$  کي يو ڇاييز يا لوڪال مينيموم.





په هر حالت د لاگرانژ-شرطونه  $(f_x, f_y) + \lambda(g_x, g_y) = 0$  نه دي پوره:

$$(0, 1) + \lambda(-2x_*, 3y_*^2) \neq (0, 0).$$

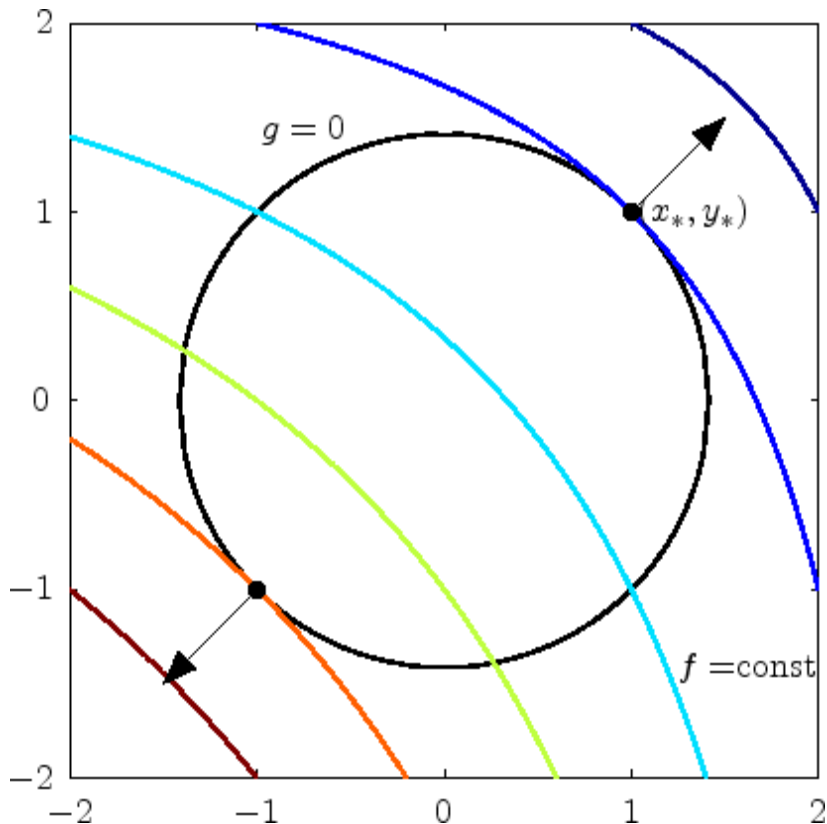
دا له دې امله چېد جاکوبي-ماتریکس  $g'(x_*, y_*) = (0, 0)$  پوره رانگ نه لري. د  $g$   $f$  د ایزو حالت د جگ نظم ترمونو له لارې تشریح دي. د لاگرانژ-شرطوه په داسې یوه سینګولار ټکي کې استعمالور نه دي.

لیکونکي: هیولیک، وایس

د یوه بیواریات تابع  $f(x, y)$  د افراطي ځای لپاره د فرعي یا ځنګیزو شرایطو  $g(x, y) = 0$  لاندې باور لري

$$(f_x, f_y) = \lambda(g_x, g_y),$$

دا په دې معنا چې گراد  $g$  وگراد  $f$  ته غیرگ دی. د نورو کلمو سره د  $f$  د نیو سطحې په ټکي  $(x_*, y_*)$  کې د  $g$  له لارې تعریف شوي کړي سره تانجنتي ده یا تانجنت جوړوي.



په څیره کې په روښانه توګه ښوول شوي بیلګه کې

$$f(x, y) = (x - 3)(y - 3) \rightarrow \min, \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$$

د لاګرانژ-شرایط په لاندې توګه دي

$$(y - 3, x - 3) = \lambda(2x, 2y).$$

د  $\lambda$  له منځه وړنه راکوي

$$y(y - 3) - x(x - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (y - x)(x + y - 3) = 0.$$

د فرعي شرایطو  $x^2 + y^2 - 2 = 0$  سره په تړاو ممکنه افراطي ځایونه  $(1, 1)$  او

$(-1, -1)$  لاس ته راځي. دا چې یونایریکیدونکی تابع په یوه کومپکته ډیری هم

مینیموم او هم ماکسیموم لري، د تابع ارزښتونو پرتله یې ښایي، چې  $f$  په  $(1, 1)$  کې مینیمال او په  $(-1, -1)$  کې ماکسیمال کيږي.

لیکونکي: هیولیک، وایس

د

$$f(x, y, z) = x + 2y - z$$

افراطیبت غاړو پیدا کړو د لاندې فرعي شریطو لاندې

$$x^2 + y^2 - 8 = 0, \quad x + z - 4 = 0,$$

کوم چې د توتې (استوانې) غوڅې (تقاطع) د یوې سطحې سره یوه هڅې تشریح کوي یا ورکوي.

د فرعي شریطو لاندې د جاکوبې-ماتریکس دی

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

دا فقط د  $x = y = 0$  لپاره پوره رانگ نه لري. دا حالت د فرعي شرایطو په اساس نه

شیرامنځ ته کیږي. یوه افراطیبت  $(x, y, z)$  ته پسي هر حل د لاگرانژ-ضریبونه  $\lambda_1, \lambda_2$  داسې شتون لري، چې

$$(1, 2, -1) = (\lambda_1, \lambda_2) \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

سرليڪ

$$\begin{aligned}
 1 &= 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\
 2 &= 2\lambda_1 y \\
 -1 &= \lambda_2 .
 \end{aligned}$$

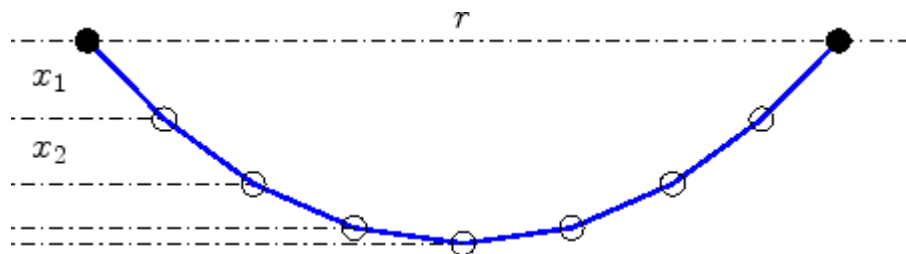
که  $\lambda_2 = -1$  او  $\lambda_1 = 1/y$  په لومړي برابرۍ يا مساوات کې ځای په ځای شي، نو  $x = y$  ترې لاسته راځي. د فرعي شرايطو څخه ممکنه افرطيت او  $(2, 2, 2)$  او  $(-2, -2, 6)$  لاس ته راوړل کيږي. دا چې په هغې باندې مينيموم او هم ماکسيموم بايد شتون ولري، د تابع ارزښت

$$f(-2, -2, 6) = -12 < 4 = f(2, 2, 2),$$

پرتله کونه يې بنايي، داسې چې په  $(-2, -2, 6)$  کې مينيمال او په  $(2, 2, 2)$  کې ماکسيمال کيږي.

(Autoren: Höllig/Weiß)

اوس دې په دوه ټکو ځورند شوي ځنډير د ځنډير غړي  $2n$  سره برابر ونځای د 1 ا وړدوالي سره وټاکي شي.



د څیرې څخه په نخبه‌ونې سره مو د پوتنشل انرژي مینیمي کونې یا کمونې ته بیایي

$$-\left(\frac{x_1}{2}\right) - \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right) - \cdots - \left(x_1 + \cdots + x_{n-1} + \frac{x_n}{2}\right)$$

په دې پر اېلم د سیومتري په استعمال

$$f(x) = -a_1 x_1 - \cdots - a_n x_n \rightarrow \min ,$$

$$g(x) = r/2 - \sum_{i=1}^n \sqrt{1 - x_i^2} = 0 ,$$

$$a_i = n - i + 1/2 \quad \text{د سره.}$$

د لاگرانژ-شرطونه په لاندې توګه دي

$$a_i = \lambda \frac{x_i}{\sqrt{1 - x_i^2}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

دا کیدی شي د  $x_i$  پسې مربع (څلورئ-) کونې سره حل شي:

$$x_i^2 = \frac{a_i^2}{a_i^2 + \lambda^2} .$$

په فرعي شریطو کې د ایښوولو سره لاندې برابرې راکوي

$$\frac{r}{2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{\lambda^2}{a_i^2 + \lambda^2}} ,$$

له هغه چې  $\lambda$  او له دې سره  $x_i$  نومریکتاکل کیدی شي.

مربعیزه (خلورئ بیزه) مینیمال کونه د کرښیز برابر ونشر لیطو سره

### *Quadratische Minimierung mit linearen Gleichungsbedingungen*

مربعیزه اوپتیمي کوني پر اېلم Optimierungsproblem

$$\frac{1}{2} x^t G x - c^t x \rightarrow \min, \quad Ax = b,$$

تیک هلته حل کیدونکي دی، که وکتور  $b$  د ماتریکس  $A$  په څېره- ورشو کي پروت وي او سیومتزیک ماتریکس  $G$  د  $A$  په زري مثبت سیمیدیفینیت وي.

تول حلونه  $x^*$  د لاگرانژ-شرطونه

$$\begin{pmatrix} G & A^t \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}$$

د یوه لاگرانژ-ضریب  $\lambda$  سره پوره کوي. حل یواځنی دی، که  $\text{Kern } A \cap \text{Kern } G = 0$  وي.

که  $G$  برعکس کیدونکی وي، ن و کیدی شي بلاکسیستم په گډه یا په دله حل شي.

سری لومړی د لاگرانژ-ضریب ټاکي

$$AG^{-1}A^t\lambda = AG^{-1}c - b$$

$$Gx_* = c - A^t \lambda.$$

اوپتیمال وکتور لاسته راوړي.

دا داسې په نامه د شور-کمپلیمنت-متود Schur-Komplement-Methode په ځانگړې توگه هلته موخه ور دی، که  $G^{-1}$  ساده وټاکل شي او یا فقط فرعي شرایط شتون ولري.

لیکونمکي: هیولیک، هیورنر، پفایل

دې یو ماتریکس وي، چې مټه یا درز یې د  $A$  د زري لپاره یو بنسټ جوړوي، او  $Q$   
 $Ay = b$  یو وکتور چې اجازه ولري، دا په دې معنا چې  $y$   
 شي چې په لاندې بڼه ولیکل شي

$$x = y + Qz$$

که په موخه تابع کې ولیکل شي نو لاس ته ترې راځي

$$(Qz)^t G y = y^t G Q z$$

$$\frac{1}{2} z^t Q^t G Q z - (Q^t c - Q^t G y)^t z + \frac{1}{2} y^t G y - c^t y.$$

د دې مربع تابع یو مینیموم  $z_*$  ټیک هلته شتون لري، که  $Q^t G Q$  مثبت دیفینیت وي، او  
 په دې حالت کې پوره کړي

$$Q^t G Q z_* = Q^t (c - G y).$$

دا چې دی

$$Q^t u = 0 \Leftrightarrow u \in (\text{Kern } A)^\perp \Leftrightarrow u \in \text{Bild } A^t,$$

نو ورته کرکتریسک کیدنه لاس ته راځي

$$G(y + Qz_*) - c = A^t(-\lambda),$$

يعني د لاگرانژ-شرایط.

حل  $z_*$  یواځنی دی، که  $G$  د  $A$  په زړي مثبت ديفینیت وي، يعني که  $\text{Kern } A \cap \text{Kern } G = 0$  وي.

د ډلې يا بلوک سیستم لاندې باندې gestaffelte اینښول شوی حل لاس ته راځي، په کوم کې چې لومړی حل

$$Gx_* + A^t\lambda = c$$

د کین لورد  $AG^{-1}$  سره ضرب کړي او بدل یا سبستیتوه  $b = Ax_*$  یې کړي.

لیکونمکي: هیولیگ، هیورنر، پفایل

د اوپتیمي کوني پرابلم حل غواړو پیدا کړو

$$x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x \rightarrow \min$$

د لاندې فرعیشرایطو لاندې

$$x - 2y = 1.$$

دا پرابلم  $\frac{1}{2}x^t Q x - c^t x \rightarrow \min$  د  $Ax = b$  ،



$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A = (1, -2), \quad b = 1.$$

سره په گوته کوي

په ساده توګه اجازه لرونکي ټکي شتون لري او دا چې مثبت ديفينيت دی، يو يواځنی حل  $(x_*, y_*)$  شتون لري، کوم چېډ لاکرانز - شرايطو

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ y_* \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ټاکل کېدی شي. لاسته راځي

$$x_* = -\frac{2}{5}, \quad y_* = -\frac{7}{10}, \quad \lambda = -\frac{9}{5}.$$

ليکونکي : هيو ليگ، وایس

د بيلگي په توګه مربع تابع

$$\frac{3}{2}x_1^2 + 4x_1x_2 - \frac{3}{2}x_2^2 + x_3^2 - 5x_1 + 4x_3$$

د فرعي شرايطو

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$$

لاندي مينيمي کيري

سرلیک

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$$

د

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad A = (1 \quad -2 \quad 1), \quad b = -2$$

دا پرابلم لاندې ستاندارد بڼه لري

$$\frac{1}{2}x^t G x - c^t x \rightarrow \min, \quad Ax = b.$$

د دې پرابلم حل باندې چې پریکړه کوو، نو لومړی د  $A$  د زري لپاره یو بنسټ یا باسیس  $\{q_1, q_2\}$  ټاکو:

$$(q_1, q_2) = Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

بیا جوړوو

$$S = Q^t G Q = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

دا چې د  $S$  دیترمینانت او شپور مثبت دی، نو  $S$  مثبت دیفینیت دی، او له دې سره د اوپتیمیری کولو پرابلم یو یواځنی حل لري. دا کیدی شي د کون-تکر-شرطونو Kuhn-Tucker-Bedingungen سره و ټاکل شي:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_{*,1} \\ x_{*,2} \\ x_{*,3} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

سری  $x_* = (1, 0, -3)^t$  او  $\lambda = 2$  لاس ته راوړي.

په بدیله توگه سری سری کړی شي د شور-کمپلمنت-متودوکاروي.

سری لومړی ماتریکس  $G$  برعکس کوي:

$$G^{-1} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 25/2 \end{pmatrix}.$$

بیاد برابرې  $AG^{-1}A^t\lambda = AG^{-1}c - b$  څخه سری  $\lambda$  ټاکي:

$$-\frac{1}{2}\lambda = -3 + 2 \implies \lambda = 2.$$

د کون-تړکر-شرایط مو لومړی برابرې ونډله یا-گروپ

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{*,1} \\ x_{*,2} \\ x_{*,3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix},$$

مو بیرته حل  $x_* = (1, 0, -3)^t$  ته بیایي.

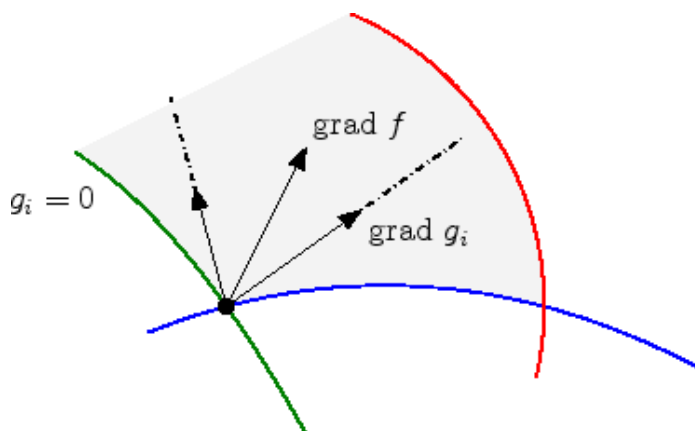
لیکونمکي: هیولیک، هیورنر، پفایل

### د کون-تکر-شرطونه (Kuhn-Tucker-Bedingungen)

که  $x_*$  د فرعي شرایطو  $g_i(x) \geq 0$  لاندې د سکالار تابع  $f$  یو مینیموم وي او د فعال برابررونو  $i \in I$  ،  $g_i(x_*) = 0$  ، گرادینت کرنیز خپلواک وي، نو د لاگرانژ-ضریبونه  $\lambda_i \geq 0$  شتون لري، داسې چې ترې لرو

$$\text{grad } f(x_*) = \sum_{i \in I} \lambda_i \text{grad } g_i(x_*).$$

د لوکال ماکسیموم لپاره په ورته توګه  $\lambda_i \leq 0$  دی.



د مینیموم لپاره د کون-تکر شرطونه ځمککچیز یا هنسي په دې معنا دي، چې د موخه تابع گرادینت چې د فعال فرعي شرایطو څخه خور شوی مخروط (کرنه ، کرنه) کې پروت دی.

پیژندډیری یا ایندکسډیری  $I$  کیدی شي ایمپلیسیت د شرطو

$$\lambda^t g(x_*) = 0, \quad \lambda \geq 0,$$

لاندي کره شي. که  $g_k(x_*) > 0$  وي، نو لرو  $\lambda_k = 0$ ، دا په دي معنا چي ناساده يا ناتريويال ضربيونه فعال شرايط په گوته کوي.

ليکونکي: هيوليگ، وایس

سری باید د  $x_*$  په چاپیریال کې فعال شرايط په پام کې ونیسي، ځکه چي نابرابرونه  $j \notin I$   $g_j(x) > 0$ ، په یوه د  $x_*$  چاپیریال کې ټیک پاتیري. تابع  $f$  په روښانه توگه په یوه وره ډیرئ هم مینمال پاتیري، چي د برابرې شریطو  $g_i(x) = 0$  له لاري ورکول کیري. له دي امله د لاگرانژ-ضربونو جملې څخه غوښتل شوی کټمټوالی لاس ته راځي. اوس فقط باید وښوول شي، چي

کیدی شي د یوه  $k \in I$  لپاره (وراندي) نیونه  $\lambda_k < 0$  مو تضاد یا مخامخوالي ته بوزي. د گراډینت د کرښیز خپلواکوالي یو وکتور  $v$  شتون لري د

$$\left( \text{grad } g_k(x_*) \right)^t v = 1, \quad \left( \text{grad } g_i(x_*) \right)^t v = 0, \quad i \in I \setminus k,$$

سره، چي د  $i \neq k$   $g_i$  له لاري تعريف شوي سطحې تنجنتي هواري (سطحي) باندي پروت دی. دي په سطحه یوه کره (منحني) وي د پیل ټکي او پیل لور  $x'(0) = v$  سره. د  $t \rightarrow 0$  لپاره دی

$$g_k(x(t)) = g_k(x_*) + \left( \left( \text{grad } g_k(x_*) \right)^t v \right) t + O(t^2) = 0 + t + O(t^2).$$

په کره باندي ټکي د پوره کیدونکي کوچني  $t > 0$  لپاره پریښودونکي (یعني اجازه لرونکي) دي:

سرلیک

$$g_k(x(t)) \geq 0, \quad g_i(x(t)) = 0, \quad i \in I \setminus k.$$

د  $v$  جوړښت له مخې او  $f$  کټمټوالي لپاره دی

$$\frac{d}{dt} f(x(t))|_{t=0} = (\text{grad } f(x_*))^t v = \lambda_k (\text{grad } g_k(x_*))^t v = \lambda_k < 0.$$

تابع  $f$  د کرښې په اوږدوالي کمیري، د  $f(x_*)$  د مینیمالوالي سره په تضاد یا مخامخ.

لیکونکي: هیولیک، وایس

$$f(x, y) = y^2 - x$$

د کون-ترکر-شرایطو بنوولو ته د تابع

افراطیت د

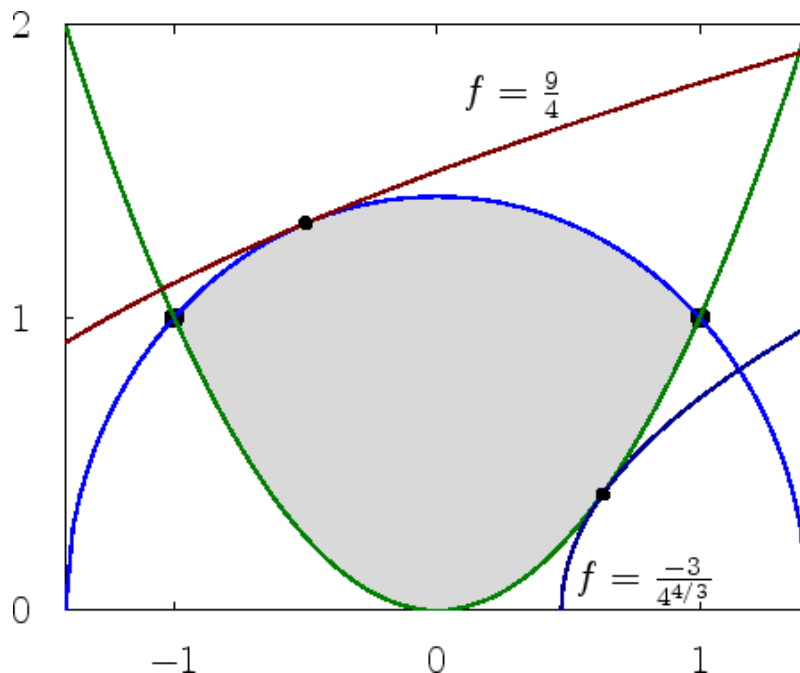
$$y - x^2 \geq 0, \quad 2 - x^2 - y^2 \geq 0$$

له لارې په تعریف شوي روځر ډیرئ  $D$  باندې ټاکو.

د کون-ترکر-شرطونه دي

$$(-1, 2y) = \lambda(-2x, 1) + \mu(-2x, -2y)$$

$$\lambda(y - x^2) + \mu(2 - x^2 - y^2) = 0,$$



چیرته چې د لاگرانژ-ضریبونه  $\lambda$  او  $\mu$  برابري یا همغه مخخښي لري. د څپري څخه پیژندل کيږي، چې د معال ځن ایز شرایطو د ټولو اجازه لرونکو ټکو لپاره کرښیز خپواک دي) (دا صفر نه دي او د ژیکړي په غوڅتکو غبرگ نه دي). له دط امله د کون-تکر شرایط د ټولو اکستریم ارزښتونو لپاره اړیندي. په دي توگه یا داسي چې کوم څنګیز شرطونه فعال دي، باید لاندې حالتونه وپیژندل شي:

$$\text{grad } f \quad \lambda = 0, \quad \mu = 0 \quad (\text{i})$$

(کوم څنګیز شرط فعالنه دی): لپاره مساوات

$$(-1, 2y) = (0, 0)$$

د پوره کېدوړ نه دی. په دي لاس ته راړنه د  $D$  په دننه کې اکستریما نه لري.

$$2 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \lambda = 0, \quad \mu \neq 0 \quad (\text{ii})$$

له (فعال):

سرلیک

$$(-1, 2y) = \mu(-2x, -2y)$$

$$2 - x^2 - y^2 = 0$$

په تعقیب  $(\pm\sqrt{2}, 0) \notin D$  د  $y = 0$  له امله ناشونی دی،  $\mu = -1 < 0$

او  $y = \sqrt{7}/2$   $x = -1/2$  . د یوه لوکال اکتریموم لپاره د کون-تکر-شرطونه پوره دي.

$y - x^2 \geq 0$   $\lambda \neq 0, \mu = 0$  (iii) فعال: له

$$(-1, 2y) = \lambda(-2x, 1)$$

$$y - x^2 = 0$$

لاس ته راځي

$$\lambda = 2y = 2x^2 \geq 0, \quad -1 = (2x^2)(-2x) \Leftrightarrow x = 4^{-1/3}$$

$$y = 4^{-2/3}.$$

او

د کون-تکر-شرطونه د یوه لوکال اکستریموم لپاره پوره دي.

$2 - x^2 - y^2 \geq 0$   $y - x^2 \geq 0$   $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$  (iv) فعال: له

$$y = x^2 \quad \wedge \quad x^2 + y^2 = 2$$



لاس ته  $(x, y) = (1, 1)$  راځي يا  $(x, y) = (-1, 1)$  د  $\text{grad } f$  لپاره په مساوات کي ځای په ځای کوو نو راکوي

$$(-1, 2) = \lambda(-2, 1) + \mu(-2, -2) \Rightarrow \lambda = 1, \quad \mu = -\frac{1}{2}$$

همداسي

$$(-1, 2) = \lambda(2, 1) + \mu(2, -2) \Rightarrow \lambda = 1/3, \quad \mu = -\frac{5}{6}$$

د لاگرانژ ضرب د مختلفو مخخښو له امله يا په بنسټ دواړه ټکي اکسترېم ځايونه نه دي.

دا چې  $f$  په کومپاڪټ ډېرئ  $D$  هم ماکسيموم او هم مينيموم لري، کېدی شي په ډول يي د لاگرانژ مخخښي په لاس پرېکړه وشي يا هم د تابع ارزښتونو د پرتلي په اساس. په تعقيب په  $(-1/2, \sqrt{7}/2)$  کي يو ماکسيموم او په  $(4^{-1/3}, 4^{-2/3})$  کي يو مينيموم لري.

ليکونکي: هيلېگ، پفایل

د مينيمي پرابلم لپاره

$$f(x) \rightarrow \min, \quad a_i \leq x_i \leq b_i$$

د کون-ټکر-شرطونه د لوکالمينيموم لپاره

$$\text{grad } f(x_*) = \sum_i (\lambda_i - \mu_i) e_i$$

$$\lambda_i, \mu_i \geq 0$$

سرلیک

$$\lambda^t (x_* - a) + \mu^t (b - x_*) = 0$$

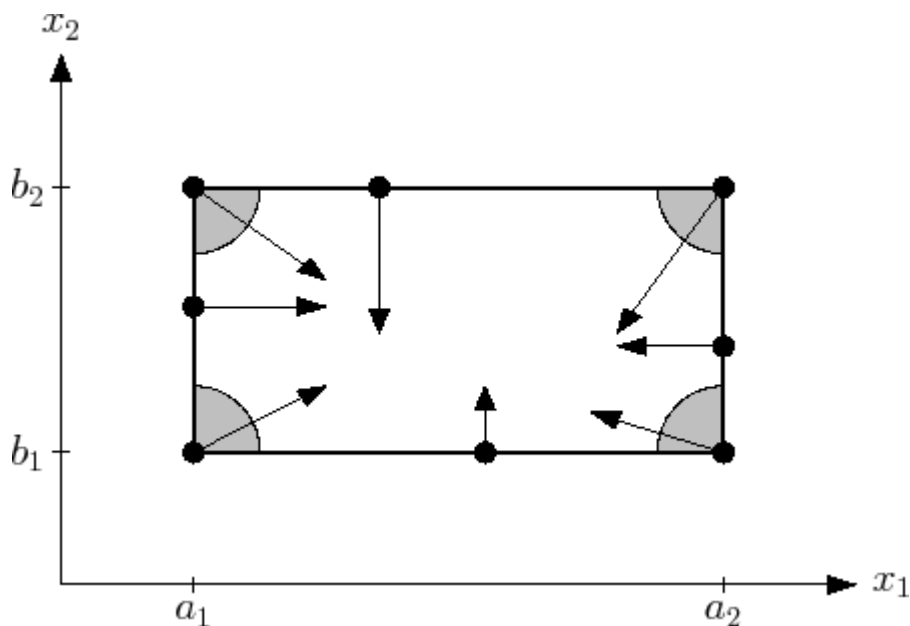
دې د  $e_i$  د  $i$ -م یون-یا واحدوکتور سره. له دې سره ارزښتونه  $\pm\infty$  د انتروال د پولې په توګه پرېښوول شوی یعنې نجازه لري، داسې چې ټولې متحولې یا اوښتونې د همغه ډول نامساوات پوره کوي.

که  $a_i < x_{*,i} < b_i$  وي، نو نودواره د لاګرانژ-ضریبونه  $\lambda_i$  او  $\mu_i$  صفر دي او

له دې سره د  $\text{grad } f(x_*)$   $i$ -م کمپوننت  $g_i$  برعکس که یو له دې نامساواتو د  $x_i$

لپاره فعال وي، په اړونده توګه د لاګرانژ-ضریب د  $g_i$  مخخښه کره کوي:

$$x_{*,i} = a_i \rightarrow g_i \geq 0 ; \quad x_{*,i} = b_i \rightarrow g_i \leq 0 .$$



تابع د بیواریات موخه فنکشن لپاره د  $\text{grad } f(x_*)$  ممکنه لوري بنایي د مینیموم لپاره  
 په اړخونو د  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$  په ګودونو یا کونجونو. د مینیموم لپاره د ولاړګودیز  
 یا مستطیل په دننه کې  $\text{grad } f(x_*) = 0$  باور لري.  
 لیونکي: هیولیک، پفایل

د یوه کرښیز تابع

$$(c_1, \dots, c_n)x \rightarrow \min$$

مینیموم د کرښیزو فرعي شرطونو لاندې

$$Ax \geq b$$

د یوه  $m \times n$  -ماتریکس  $A$  سره سری مرښیز پروګرام بنایي.

یو حل  $x_* \in \mathbb{R}^n$  د کون-تکر-شرطونه پوره کوي

$$c^t = \lambda^t A, \quad \lambda^t (Ax_* - b) = 0$$

د  $\lambda_i \geq 0$  سره په ورته توګه د ماکسیموم لپاره  $\lambda_i \leq 0$  باور لري.

د روشانه بیلګې

$$x + y \rightarrow \min, \quad x \geq 2, \quad y \geq 1, \quad x + 2y \geq 8$$

لپاره دی

سرلیک

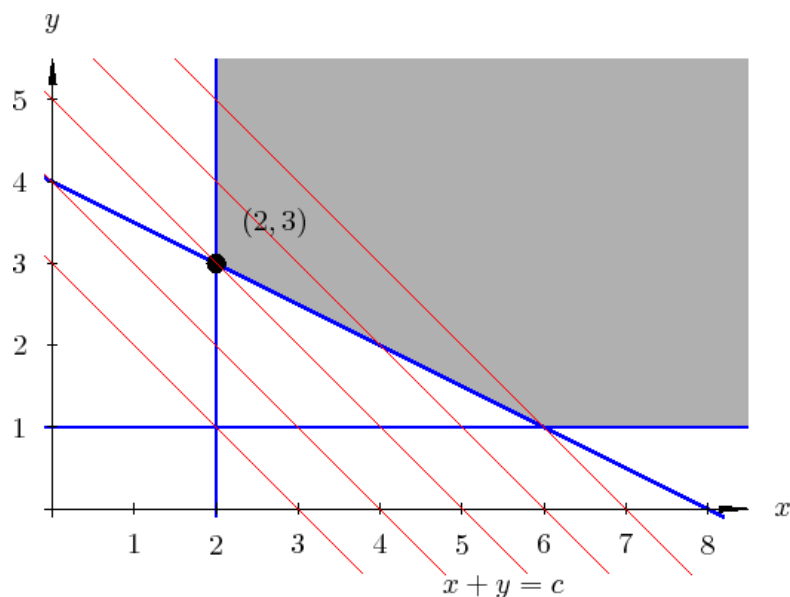
$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

او سړی د کون-تکر-شرایط لاس ته راوړي

$$1 = \lambda_1 + \lambda_3, \quad 1 = \lambda_2 + 2\lambda_3, \quad \lambda_1[x - 2] + \lambda_2[y - 1] + \lambda_3[x + 2y - 8] = 0$$

د  $\lambda_i, [\dots] \geq 0$  سره. سړی زر پیژندلی شي، چې ټیک یو د لاگرانژ-ضریب باید صفر وي، چط په بل ډول په شرایطو کې یو تضاد باید رامنځ ته شي. په دې درې حالتونو

کې دوه فرعي شرایط فعال دي. دا  $(x, y)$  یواځنی کره کوي:



$$\lambda_1 = 0 \longrightarrow (6, 1) \quad \lambda_2 = 0 \longrightarrow (2, 3) \quad \lambda_3 = 0 \longrightarrow (2, 1)$$

له دې سره  $(2, 1)$  فرعي شرطونه پوره کوي او د  $\lambda_1 = 0$  لپاره  $(2, 1)$  او  $\lambda_3 = 1$

راکوي، دلته د لاگرانژ د ضرب د همغږي یا برابري مخنځې اړین شرطونه

نه دي پوره د تابع مینیموم په  $(2, 3)$  نیول یا فرض کیري. په دط حالت کي د لاگرانژ –  

$$\lambda = (1/2, 0, 1/2)^t$$
 ضریبونه داسي دي .

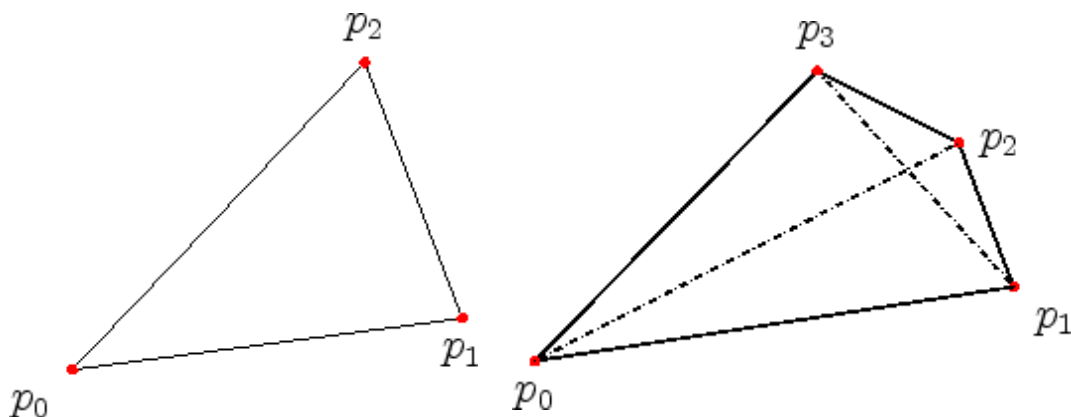
یوخمکچیز یا هدسي جورښت په څیره کط ښوول شوی دی. حل ټکی  $(2, 3)$  دی، په کوم کي چي د موخه تابع سطحيزي کرښي معتبره ورشو لمس کړي. دا روښانه ده چي موخه تابع جگړي (ټیټیري)، که سطحيزه کرښه دا معتبره ساحه غوڅه (غوڅه نه) کړي.

لیکونکي: بوسلي، هیولیک

### Simplex سیمپلکس

یو  $n$ -بعدیز (پراخېدونی) سیمپلکس  $S$  د  $n + 1$  ټکو  $p_0, \dots, p_n$  یو konvexe Hülle ده، چي دا ټول په یوه  $(n - 1)$ -بعدیز لاندې فضا کي نه دي پراته:

$$S = \left\{ x = \sum_j \alpha_j p_j : \sum_j \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0 \right\}$$



سرلیک

n=2

n=3

دوه- او درېبعديز سیمابمکسونه د درې گوډي همداسې تیترايدر بلل کيږي.

د یوه سیمپلکس ډکي یا حجم د وکتورونو  $p_i - p_0, i = 1, \dots, n$  د دیترمینانت په مرسته افاده کیدی شي:

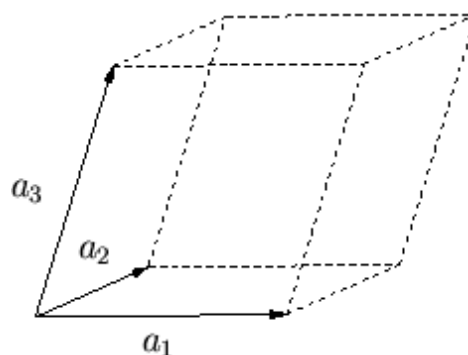
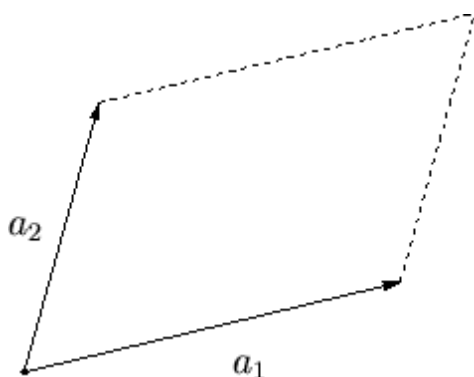
$$\text{vol } S = \frac{1}{n!} |\det(p_1 - p_0, \dots, p_n - p_0)|.$$

(Autoren: Boßle/Höllig/Streit)

### غبرگ اېپيډ (غبرگ اړخيز يا مکعبنا) Parallelepiped

یو  $n$ -بعديز (یا پراخیدونی) غبرگ اېپيډ  $P$  د  $n$  کرښيزو وکتورونو  $a_i$  څخه غزیري:

$$P = \{x = \sum_i \alpha_i a_i : 0 \leq \alpha_i \leq 1\}.$$



n=2

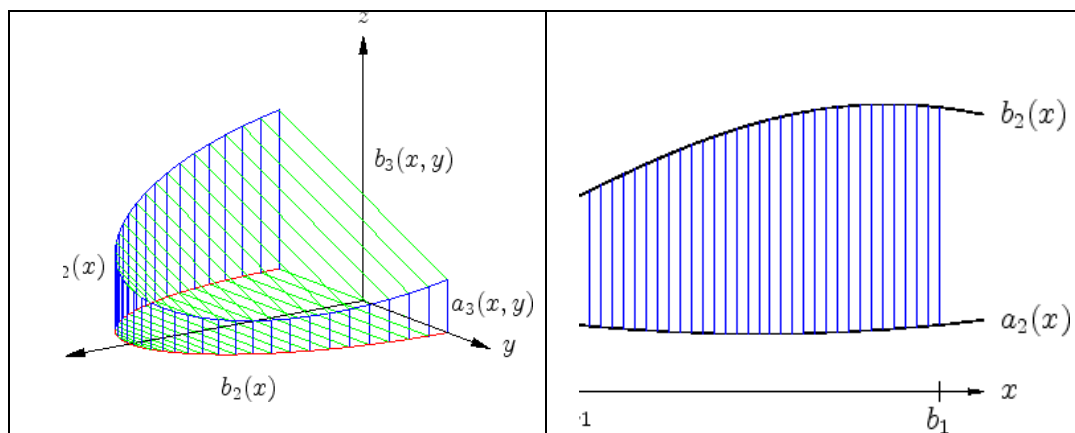
n=3

دوه – او درې بعدیز غبرگ خواویز غبرک اړخیز همداسې شپاات بلل کیري. د غبرگخواویز وډکی (حجم) د ترې غزیدلو وکتورونو د دیترمینانت مطلق ارزښت دی:

$$\text{vol } P = |\det(a_1, \dots, a_n)|.$$

لیکونکي: هیولیک، شترایت

### د انتیگریشن ورشو



$$V \subseteq \mathbb{R}^n$$

د یوه مناسب کو او ردینا تسیستم ترانسفورمیشن  $x \rightarrow x'$  یوه بنسټیزه ورشو

پسې د د ناپریکیدونکو توابعو  $a_i$  او  $b_i$  گراف له لارې رابند دي:

$$\begin{aligned}
 a_1 &\leq x'_1 \leq b_1 \\
 a_2(x'_1) &\leq x'_2 \leq b_2(x'_1) \\
 &\vdots \\
 a_n(x'_1, \dots, x'_{n-1}) &\leq x'_n \leq b_n(x'_1, \dots, x'_{n-1})
 \end{aligned}$$

سرلیک

د بنسټیز ورشوگانو یو تر زئکرو یا منحیو پای ټولنه رگولار ورشو بلل کیږي. د دې لپاره یو ځاګری حالت یو سیمپلکس دی چې پولیوګونالور شو څخه جوړ وي:

لیکونکي: بوسلی، هیولیک، شترایت

### د هوزدورف واټن *Hausdorff-Abstand*

په یوه متریکفضا  $M$  کې د یوې ډیرې  $U$  لپاره د متریک  $d$  سره کیدی شي د

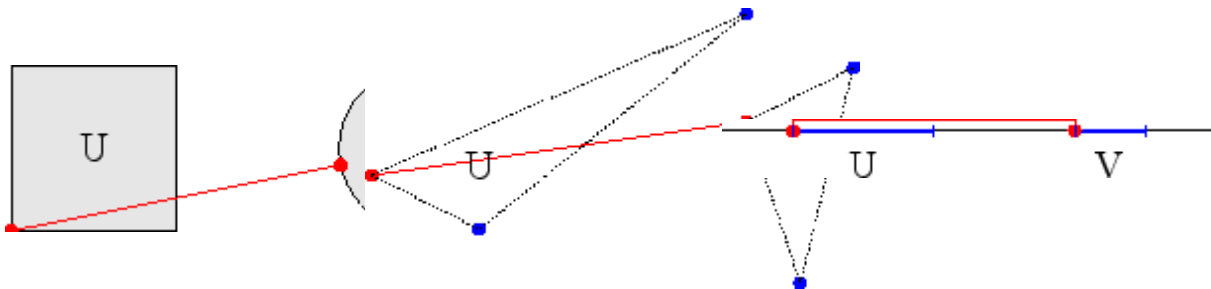
$$\text{dist}(x, U) = \inf_{u \in U} d(x, u)$$

سره د واټن و ته بلل کیږي. په ټولیزه توګه د دوه ډیریو هوزدورف-واټن په لاندې توګه تعریفیږي

$$\text{dist}_H(U, V) = \max \left( \sup_{u \in U} \text{dist}(u, V), \sup_{v \in V} \text{dist}(v, U) \right).$$

(لیکونکي: هیولیک، شترایت)

په لاندې څېره کې د ډیریو  $U$  او  $V$  لپاره یوڅو جوړې په هرکې ټکي په نڅبنه شوي، د هوزدورف-واټن همدایې داویکلید متریک نیول کیږي.





لکه د بیلگو څخه چې لیدل کیږي،  $\text{dist}_H(U, V)$  د دوه ټکو  $U$  او  $V$  لنډ واټن نه دی

لیکونکي: هیولیک، شترایت

### *Mehrdimensionales Integral*

ډېر بعدیز (ډېر پراخیدونکی) انټیگرال

په یوه رګولار ورشو د یوه ناپریکیدونکي تابع  $f$  انټیگرال کیدی شي د ریمن جمعی د پولې په څیر تعریف شي:

$$\int_V f dV = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_i f(P_i) \Delta V_i, \quad \Delta V_i = \text{vol}(V_i).$$

له دې سره د (توکي) پردیو ساده ورشوگانو  $V_i$  (په ټولیزه توګه سیمپلیګسونو یا غیرګ ایپیپیدونو) ټولني یا اتحاد له لارې  $V$  اړوکسمې کیږي، دا په دې معنا چې د  $V$  او

$\bigcup_i V_i$  د هوزدورف – واټن د صفر په لور هڅیږي. د  $|\Delta|$  سره کیدی شي د  $V_i$  ماکسیمال کچونه په نڅبنه شي، په خوښه ټکي په  $P_i$  کې دي.

د لیکنې ډول  $\Delta V_i \rightarrow dV$  د پولې پروسی سومبولي کول دي، او  $dV$  سری ډکی یا

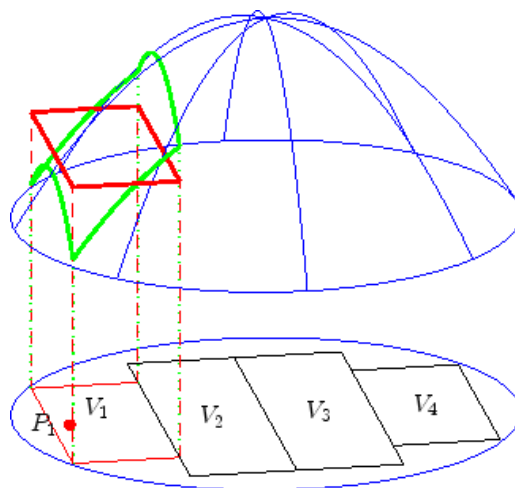
حجم بولي. په لنډ ډول  $\int_V f$  هم لیکو یا په مفصل ډول

سرلیک

$$\int_V f dV = \int_V f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

که څوک د انټیگریشن متحولې راباسي.

د  $f$  ناپېرېکېدنې په اساس د ریمن انټیگرال تعریف هم د توکو ورشوگانو  $V_i$  او هم له  $P_i$  ټکي خپلواک دی.



د یوه زاتیز یا مثبت تابع لپاره انټیگرال د ډېرئ ټکي یا حجم دی.

$$\{(x_1, \dots, x_n, h) : 0 \leq h \leq f(x), x \in V\}.$$

په ځانګړې توګه  $\int_V 1$  د امتیګریتي ورشو  $V$  حجم دی.

په  $f$  او  $V$  د د هواروالي وړاندنیونه (فرضیه) کېدی شي ضعیفه شي، داسې چې انټیگرال په یوه مناسب پوله پروسه باندې تعریف وي.

لیکونکي: بوسلي، هیولیک، شترایت

سرلیک

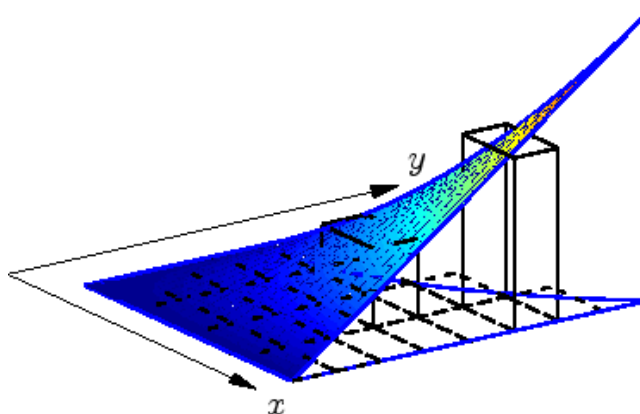
د تابع

$$f(x, y) = xy$$

دې په ورشو

$$V: 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 + x^2$$

کې انټیگرال و نیول شي.



څیره د انټیگریشن ورشو په یوه شډل مربع گینز یا -منډو؟؟؟ باندې وپشنه یا ټوټه کېدنه

$$h = 1/n$$

بنایې. د منډو پراختیا لپاره دا اپرکسیمیشن لاس ته راوړو

$$h^2 \sum_{0 \leq j < n} \sum_{0 \leq kh < 1 + (jh)^2} (jh)(kh) = h^4 \sum_{0 \leq j < n} j \sum_{0 \leq k < n + j^2/n} k.$$

د جگودر جو درجو ترمونو تېرېدنې سره دا د دې ډېلې جمعې سره برابر دی

$$h^4 \sum_{0 \leq j < n} j \left( (n + j^2/n)^2 / 2 + Ch^4 \sum_{0 \leq j < n} jn^2 / 2 + j^3 + j^5 / (2n^2) + O(n^2) \right)$$

سرلیک

$$= \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right) + O(h),$$

اوله دی سره انتیگرال ارزښت  $\frac{7}{12}$  لري.

لیکونکي: بوسلي، هیولیک. شترایت

### د فابینی جمله *Satz von Fubini*

په یوه بنسټیزه ورشو د یوه ناپرېکېدونکي تابع انتیگرال

$$V : a_j(x_1, \dots, x_{j-1}) \leq x_j \leq b_j(x_1, \dots, x_{j-1})$$

کېدی شي د یو بعدي یا یو پر اڅېدونې انتیگرالونو د یو بل پسي شمېرنې له لارې لاس ته راشي:

$$\int_V f dV = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)} \cdots \int_{a_n(x_1, \dots, x_{n-1})}^{b_n(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \cdots dx_2 dx_1.$$

له دی سره د بنسټیزو ورشوگانو د لړۍ پر لپسي رول نه لوبوي. په ځانگړې توگه د ډبل انتیگرال لپاره د ثابتې انتیگرېشن پولې سره

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

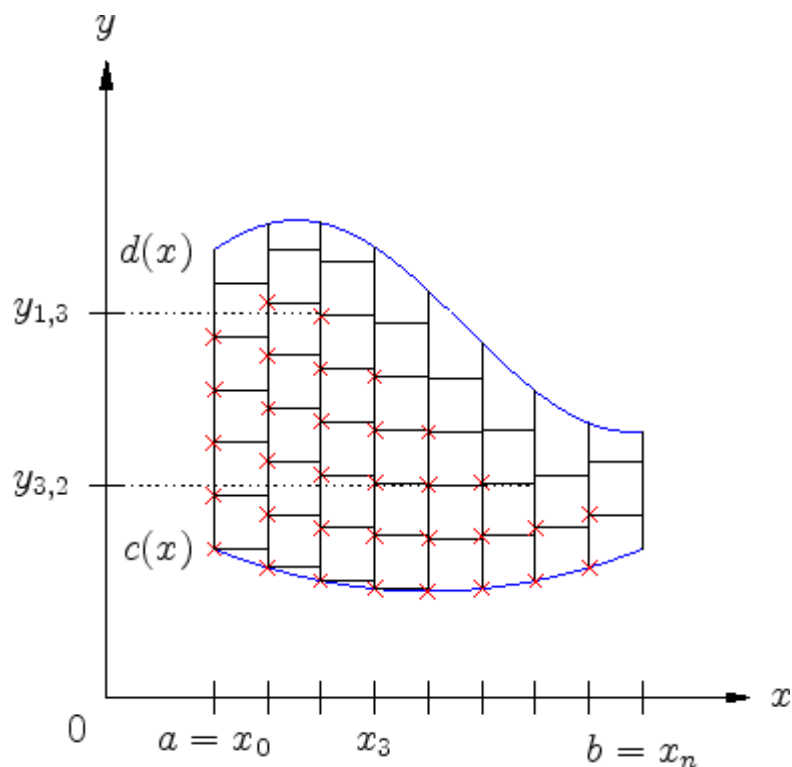
تولیزه تڼلار کېدی شي په دو هبعدي ځانگړي حالت

$$V : a \leq x \leq b, \quad c(x) \leq y \leq d(x)$$

لیدور وگرځي. د تعريف سره سم سری  $\int_V f$  د ریمن جمعې له لارې اپروکسیمیکوي

$$s_n = h^2 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m_j-1} f(x_j, y_{j,k})$$

د  $h = (b - a)/n$  ، او  $x_j = a + jh$  ،  $y_{j,k} = c(x_j) + kh$  سره.



د  $f$  په کومپکت انٹیگریشن ورشو  $V$  باندې برابر ډوله ناپرېکيدنې په بنسټ دی

سرلیک

$$|f(x_j, y) - f(x_j, y_{j,k})| \leq \varepsilon, \quad y_{j,k-1} \leq y \leq y_{j,k},$$

د  $h < h_\varepsilon$  لپاره. د دې په تعقیب کېدی شي دننئ جمعہ د یوه بعدی یا یو پراخیدونی انتیگرال سره پرتله شي:

$$s_n = h \sum_{j=1}^n \left( \int_{c(x_j)}^{d(x_j)} f(x_j, y) dy + r_{n,j} \right)$$

د  $|r_{n,j}| \leq m_j h \varepsilon$  سره. همدا دلیل کېدی شي په ناپریکیدونکو توابعو

وکارول شي، او سری لاس ته راوړي

$$g(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy$$

$$s_n = \int_a^b g(x) dx + \left[ r_n + h \sum_j r_{n,j} \right]$$

د  $|r_n| \leq n h \varepsilon$  سره د  $h < h'_\varepsilon$  لپاره. دا چي

$$|[\dots]| \leq \left( (b-a) + \max_x (d(x) - c(x)) \right) \varepsilon$$

او  $\varepsilon > 0$  په خوبه ټاکل کېدی شي، نو پوله  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  د ایتیریشن شوي iterierten یو بعدی انتیگرال سره سر خوري.

لیکونکي: هیولیگ، شترایت

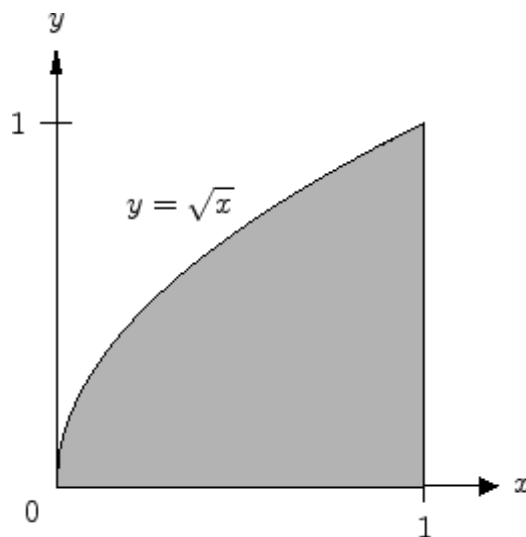
د تابع

$$f(x, y) = y \cos(x^2)$$

دې داپه څېره کې انځور شوي ورشو

$$V: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}$$

کې انتیگرال ونيول شي.



د فوبینجملې سره کیدی شي انتیگرال د دوه بعدي انتیگریشن له لارې وشمیرل شي:

$$\begin{aligned} \int_V f &= \int_0^1 \left( \int_0^{\sqrt{x}} y \cos(x^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left[ \frac{y^2}{2} \cos(x^2) \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} x \cos(x^2) dx = \left[ \frac{1}{4} \sin(x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{4} \sin 1. \end{aligned}$$

که انتیگریشن لړۍ پرلپسې سره بدل شي، نو لاس ته راځي

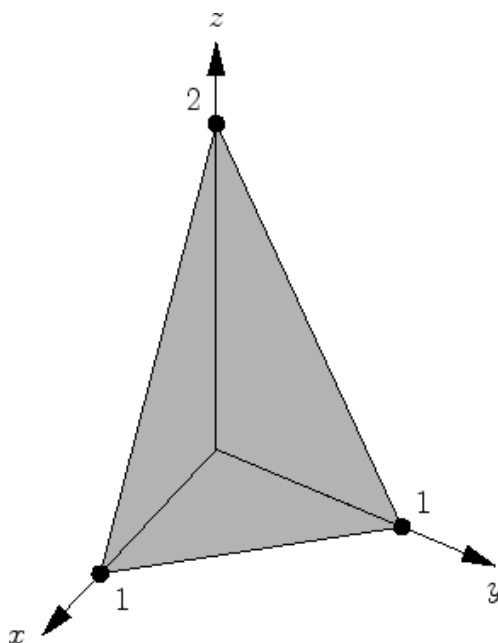
$$\int_V f = \int_0^1 \left( \int_{y^2}^1 y \cos(x^2) dx \right) dy .$$

په دې حالت کې دننۍ انتیگرال اکسپلیسیت شمیرور نه دی. د ایتزیر شوي انتیگرال د عملي شمیرني لپاره کیدی شي د انتیگریشن لړۍ پرلپسې غوره وي.

لیکونکي: بوسلي، هیولیک، شترایت

د دې لپاره چې تابع

$$f(x, y, z) = x$$





$$T : x, y, z \geq 0, \quad x + y + \frac{z}{2} \leq 1$$

باندې وشميرل شي، نو لومړی به  $T$  د بنسټيزې ورشو په توګه ورکړل:

$$T : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \quad 0 \leq z \leq 2(1 - x - y).$$

نو بيا دا انتيګرال د فوینني د جملې په بنسټ شميرلکيدی شي:

$$\begin{aligned} \int_T f &= \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{2(1-x-y)} x \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} 2x(1-x-y) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 (x - 2x^2 + x^3) \, dx = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

ليکونکي: بوسلي، هيوليګ، شترایت

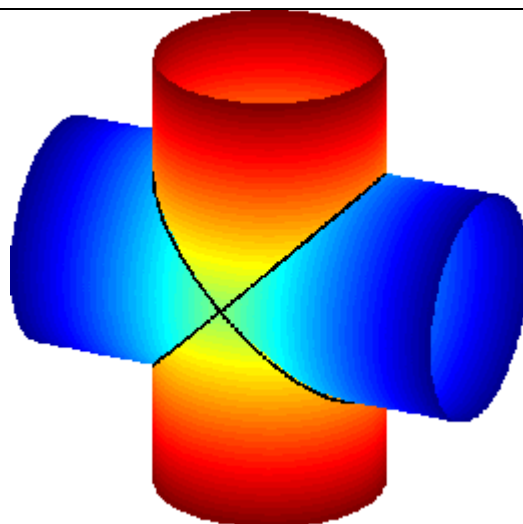
ډکی يا حجم شميرلکيري، چې د دواړو توتوله (ګډ) غوڅي

$$Z_1 : x^2 + y^2 \leq r^2, \quad Z_2 : x^2 + z^2 \leq r^2$$

له لارې منځ ته راځي.

سرلیک

د سیومتر ی په بنسټ لومړی د اوکتانتونو  
ډکي یا حجمونه شمیرلکیري. په لومړي  
اوکتانت کې د انتیگریشن ورشو د گردی یا  
دایرې څلورمه ده



$$K : 0 \leq x \leq r, \quad 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}.$$

په  $K$  باندې د (ګډ) غوڅي بدن جگوالی  
ورکړ شوی دی. د ډکي یا حجم په حیث لرو

$$\int_K h = \int_0^r \left( \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2}} \sqrt{r^2 - x^2} dy \right) dx = \int_0^r (r^2 - x^2) dx = r^3 - \frac{1}{3}r^3 = 2r^3/3,$$

$$16r^3/3$$

اوله دې سره ډټول بدن لپاره حجم .

لیکونکي: بیوسلر، هیولیک، شترایت

د  $n$  - بعدیز یونغونډاري (چې وړانګه یې یو واحد دی) ډکي (حجم)

د  $n$  - بعدی یونغونډاري ډکي یا حجم  $V_n$  دی

$$B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$$

$$V_n = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{n\Gamma(\frac{n}{2})},$$

د گاما تابع  $\Gamma$  سره د  $n \leq 6$  لپاره ارزښتونه په لاندې جدول کې ورکړ شوي دي:

$n$	1	2	3	4	5	6
$V_n$	2	$\pi$	$4\pi/3$	$\pi^2/2$	$8\pi^2/15$	$\pi^3/6$

لیکونکي: بیوسلر، هیولیک، شترایت

د گاما تابع د تعریف له مخې د  $B_1 = [-1, 1]$  لپاره دی

$$\text{vol } B_1 = 2 = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$

د ایندکشن پل (قدم)  $(n-1) \rightarrow n$  لپاره لومړی په پام کې نیسو، چې  $B_n$  د هیوپر سطحې  $x_n = 1$  او  $x_n = -1$  ترمنځ پروت دی او د هیوپر سطحې سره غوڅی (قطاع)  $x_n = \xi, (-1 \leq \xi \leq 1)$  یو - بعدیز غونډاری دی د  $B_n$  وړانګې  $\sqrt{1-\xi^2}$  سره د حجم له دې امله کیدی شي د فوبینوسجملې سره په لاندې توګه وشمیرل شي:

سرلیک

$$\text{vol } B_n = \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{\frac{n-1}{2}} \text{vol } B_{n-1} d\xi.$$

د اینکشن وړاندنیونی

$$\text{vol } B_{n-1} = \frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

سره او د گاما- تابع د تابعمسات،

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \text{vol } B_n &= \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{2})} \\ &= \frac{2\sqrt{\pi^n} \frac{n-1}{2} \Gamma(\frac{n-1}{2})}{(n-1)\Gamma(\frac{n-1}{2}) \frac{n}{2} \Gamma(\frac{n}{2})} = \frac{2\sqrt{\pi^n}}{n\Gamma(\frac{n}{2})}. \end{aligned}$$

له دې سره کېدی شي انتیگرال  $\int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{\frac{n-1}{2}} d\xi$  د په ځای ایښوونې یا  
 سبستیچوشن  $d\xi = \cos t dt$  ،  $\xi = \sin t$  له لارې وشمېرل شي:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)^{\frac{n-1}{2}} \cos t dt = \int_{-1}^1 (1 - \xi^2)^{\frac{n-1}{2}} d\xi$$

$$2 \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{n-1} \cos t dt = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} =$$

ليڪونڪي: بيوسل، هيوليڪ، شتر ايت

د ڊپر بعديز انٽيگراڻل ٽرانسفورميشن

د ڊيوه رگولار ورشو  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  د ڊيوه په (بيجڪٽيو)، ناپر پڪيدونڪي، مشتقور  
ٽرانسفورميشن  $g$  لپاره د

$$\det g'(x) \neq 0, \quad x \in U,$$

سره د ناپر پڪيدونڪو توابعو  $f$  لپاره باور لري:

$$\int_U f \circ g |\det g'| dU = \int_V f dV, \quad V = g(U),$$

له كوم سره ڇي  $\det g'$  د ٽرانسفورميشن د تابع ديٽرمينانٽ بلل ڪيري. دا ڊڪي- يا حجم  
توڪيخاي ارونده يا خاييز تغير تشریح ڪوي.

$$dV = |\det g'| dU.$$

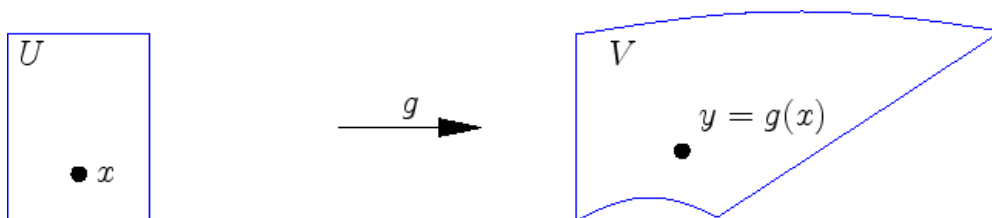
د ڊيوه لو ڪال اور توگونال يا عمود ڪواورڊيناتو ٽرانسفورميشن، دا په ڊي معنا ڇي د

عمودي مٽي  $g'$

سرلیک

$$|\det g'| = \prod_{i=1}^n \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right| ,$$

دي، دا په دې معنا چې د حجمتو کو سکالیر ضریب د یوگونو متحولو سکالیري ضریبونو ضرب دی.



د یوه افین ترانسفورومیشن  $y = Ax + b$  سره حجمتو کي د

$$dy = |\det A| dx .$$

سره تغیر خوري.

$$y_i = \lambda_i x_i$$

په ځانگړې توگه د متحولی د سکالي کولو لپاره باور لري،

$$dy_i = \lambda_i dx_i .$$

وړاندنیوني یا فرضیي کیدی شي لږ ضعیفی شي.

په ځانگړې توگه باید د  $g$  بیجکتیویتي او د  $g'$  برعکسروالی فقط د  $U$  په دننه کي و غوښتل شي. د  $f$  پریکیدنه او ټاکلي زینگولاریتي هم ممکن دي، که ددوارو انٹیگرالونو شتون تضمین وي.

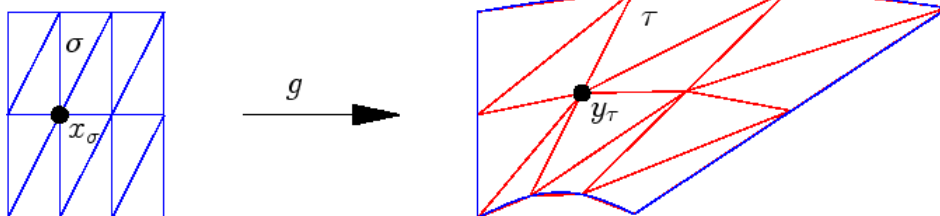
لیکونکي: هیولیگ، موبن

د بنوونې یا ثبوت فکر کیدې شي د دوه بعدي انټیگرال لپاره وینوول شي. د ساده والي لپاره نیول کیري، چې  $g$  دوه ځله ناپرېکيدونکي مشتقور دی. دا را کوي، چې د

$$x \in U$$

$$|\det g'(x)| \geq 1/c > 0,$$

$$g(x + \Delta x) - g(x) = g'(x)\Delta x + r, \quad |r| \leq c|\Delta x|^2.$$



لپاره لکه په څیره کېروښانه شوي، یو اېروکسیمیشن **ارگومنت کارول کیري**. د دې لپاره د ورشو  $U$  د یوه تریانگولیر کوني (مثلي کوني) څخه مخ ته ځو، او کین انټیگرال د ریمن جمعي

$$S_U = \sum_{\sigma} f(g(x_{\sigma})) |\det g'(x_{\sigma})| \text{vol } \sigma, \quad x_{\sigma} \in \sigma$$

له لارې نږدې کوو. درېگودي (مثلثونو)  $\sigma$  دې ډیر زیات خواره *verzerrt* نه شي، دا په دې معنا چې

$$h/c' \leq a \leq c'h$$

د ټولو درېگوديو سیکانتو اوږدوالي  $a$  لپاره. دا په ځانگې توگه راکوي، چې لوی کوچ برابرډوله په  $h$  کې کښته لور ته بنده یا محدود ده. دزئ اېروکسیمیشن پوره بنه دی، داسې چې د ریمن/جمعه یا - زیاتون د  $h \rightarrow 0$  لپاره د  $\int_U (f \circ g) |\det g'|$  په لور هڅیري.

## سرلیک

د کونجټکو د تابع له لارې  $x_\sigma \mapsto y_\tau = g(x_\sigma)$  د څیره-یا ارزښت ورشو  
 $V = g(U)$  یو درېځوډیزوالی یا مثلث کیدنه منځ ته راځي. کطدی شي د درېځوډي  
 خورېدنه زیاته شي، مگر د نه پرېکیدني او له دې سره د  $g$  د جاکوبي-ماتریکس د  
 محدودیت اود برعکس تابع  $g^{-1}$  اړخونه د اپروکسیمیشن پارامتر  $h$  سره پرتله  
 کیدونکي پاتیري. برسیره پردې د  $\det g' > 0$  په حالت کې د درېځوډي لوریزوالی  
 ساتلی پاتیري (په همدې ډول د دیترمینانت د مخنځې بدلون سره برعکس یا په څنټ  
 کیري)، داسې چې یو په بل پریوتل منځ ته نه راځي.

د منځ ته راغلي څیره - یا ارزښت ورشو منځ ته را ته راغلي درېځوډیزوالي ریمن-

$$S_V = \sum_{\tau} f(y_\tau) \text{vol } \tau, \quad y_\tau = g(x_\sigma) \in \tau,$$

جمعه،

ځي. دا باید وینول شي، چې د دواړو ریمن-جمعو کمښت د صفر په لور ځي په هڅیري.  
 دا د  $\tau$  درېځوډي د ښه اپروکسیمیشن څخه لاسته راځي د  $\sigma$  د افیني څیري  $\tilde{\tau}$  له لارې:

$$\text{dist}_H(\tilde{\tau}, \tau) = O(h^2), \quad \tilde{\tau} = y_\tau + g'(x_\sigma)(\sigma - x_\sigma).$$

$$\text{vol } \tilde{\tau} = |\det g'(x_\sigma)| \text{vol } \sigma, \quad \text{دا د دواړو ریمن-جمعود } O(h^3) \text{ جمعي غړویا}$$

$$\text{زیاتونونو اود دوی د تعداد } O(h^{-2}) \text{ دیسکریپیانڅ دی. له دې سره لاس ته راځي}$$

$$|S_U - S_V| = O(h) \rightarrow 0.$$

د هوزدورف-واتن د تخمین د ښوونې لپاره سړی درېځوډي(مثل ټونه) سره پرتله کوي

$$\tau = \Delta(y_\tau, y_1, y_2), \quad \tilde{\tau} = y_\tau + g'(x_\sigma)\Delta(0, x_1 - x_\sigma, x_2 - x_\sigma)$$

$$y_i = g(x_i) \quad \text{د سره گاوندې ټکي}$$



$$y_\tau + \alpha'(y_1 - y_\tau) + \alpha''(y_2 - y_\tau),$$

$$y_\tau + \alpha'g'(x_\sigma)(x_1 - x_\sigma) + \alpha''g'(x_\sigma)(x_2 - x_\sigma)$$

د  $0 \leq \alpha', \alpha'' \leq 1$  سره. د دویمشتق د ناپربکېدنې د نیونې په بنسټ لاس ته راځي،  
چې کمښت برابر ډوله د

$$O(\max(|x_1 - x_\sigma|^2, |x_2 - x_\sigma|^2))$$

له لارې اټکل کېدی شي، څه مو چې ښوول.

لیکونکۍ هیولیک، موبن

د ترانسفورمېشن ښوولو ته کېدی شي یوه ورشو  $V$  تر څېړنې ونيول شي، هغه د دوه  
کرښیز سره تړلو پارابلسگمنت له لارې

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u \\ u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u \leq 1$$

رابندیږي. که د پارابولسگمنتونه وخورول شي یعنی تل بل ځای ته یو ورل شي، نو سړی  
یو پیچکتیو تابع په یوون - یا واحد مربع  $U$  لاس ته راوړي.

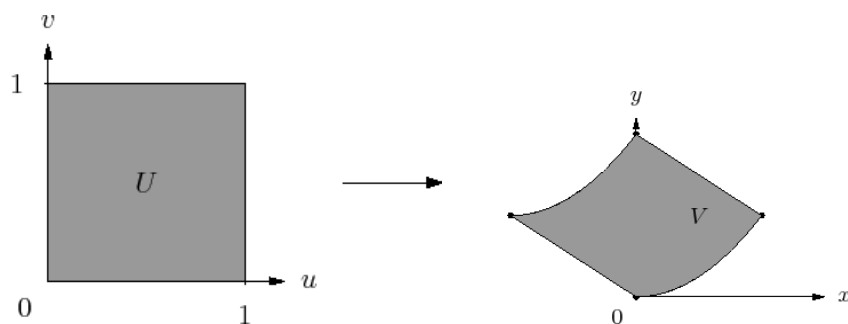
$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v + u \\ v + u^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u, v \leq 1.$$

د تابع جاکوبي ماتریکس دی

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2u & 1 \end{pmatrix},$$

او سړی د تابع دیترمینانت په څېر لاسته راوړي

$$\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 2u + 1 > 0.$$



له دې سره د ډکي توکي د لاندې سره تغیر پیري

$$dV = dx dy = (2u + 1) du dv = (2u + 1) dU.$$

په  $V$  باندې د  $f(x, y) = x + y$  ته راځي  
د انتیگرال لپاره د ترانسفورمیشن قانون سره لاس

$$\int_V (x + y) dx dy$$

$$= \int_0^1 \left( \frac{2}{4} + 1 + \frac{1}{2} \right) dv = 2.$$

لیکونکي: هیولیک، موش

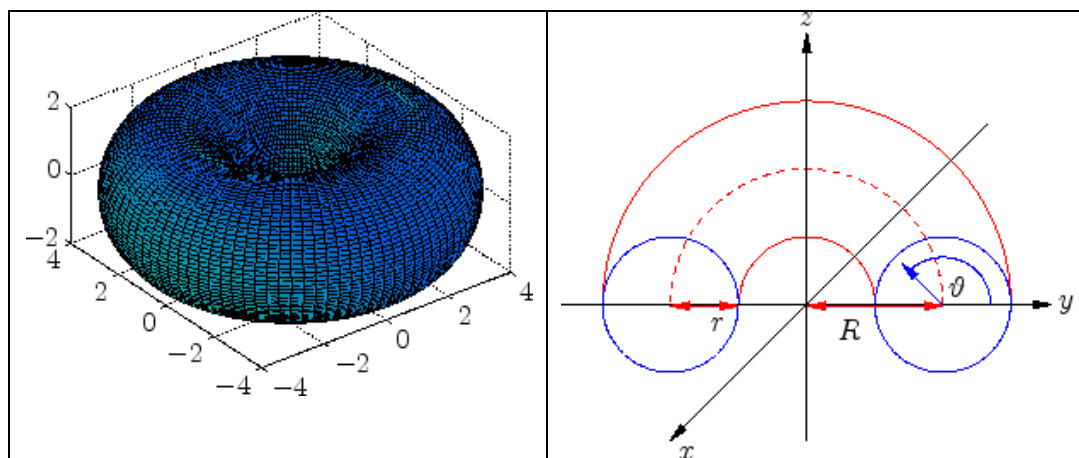
پوتوروس یا کری د بېلگې په توگه د گردی - داېرې ټیکلي د څرخونن رامنځ ته کیري

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R + rs \cos \vartheta \\ rs \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

د  $z$ - په محور د  $r < R$  سره، دا په دې معنا چې

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = p(s, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} (R + rs \cos \vartheta) \cos \varphi \\ (R + rs \cos \vartheta) \sin \varphi \\ rs \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

یو ممکنه پارامترې کېښنه ده د  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  سره.



د ترانسفورمیشن  $p: \begin{pmatrix} s \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  جاکوبي ماټریکس دی

$$p' = (p_s, p_\vartheta, p_\varphi) =$$

$$\begin{pmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi & -rs \sin \vartheta \cos \varphi & -(R + rs \cos \vartheta) \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi & -rs \sin \vartheta \sin \varphi & (R + rs \cos \vartheta) \cos \varphi \\ r \sin \vartheta & r s \cos \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

سرلیک

داچې متي يا سنتي يو بل ته اور توگونال دي، د تابع دیترمینانتو لپاره باور لري

$$\begin{aligned} |\det p'| &= |p_s| |p_\vartheta| |p_\varphi| = |r| |rs| |R + rs \cos \vartheta| = : \\ &= r^2 s (R + rs \cos \vartheta). \end{aligned}$$

له دې سره د ډکي يا حجم لپاره لاس ته راوړو

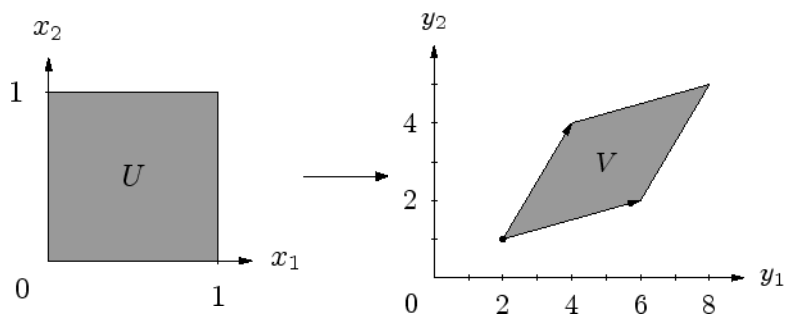
$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 s (R + rs \cos \vartheta) d\varphi d\vartheta ds \\ &= 2\pi r^2 \left( \int_0^1 \int_0^{2\pi} sR d\vartheta ds + \int_0^1 \int_0^{2\pi} r s^2 \cos \vartheta d\vartheta ds \right) \\ &= 2\pi r^2 \left( \int_0^1 2\pi sR ds + 0 \right) = 2\pi^2 R r^2. \end{aligned}$$

يو غبرگ اړخيز Parallelogramm يا موازيلاضلاع  $V$  کېدی شي د يوون گردئ  $U$  يوه افین ترانسفورمېشن د څېرې په حيث انځور شي:

$$U \ni x \mapsto y = Ax + b \in V.$$

له دې سره  $b$  يو ګوډ ټکی دی او د  $A$  متي وکتورونه دي، چې دا غبرگ اړخيز غزوي. د دې څېره شوي بېلګې لپاره دی

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



د ترانسفورمیشن تابع دیترمینانت دی

$$\det \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \det A = 10.$$

له دې سره د بېلگې په توګه د انټیګرال لپاره په  $V$  یو کرښیز تابع لاس ته راځي

$$f(y) = 3y_1 - 4y_2$$

$$\int_V f = \int_U f(Ax + b) 10 dV$$

په ټولیزه توګه معکوسکیدونکی تابع

$$(x_1, \dots, x_n)^t \mapsto Ax + b$$

یوونمکعب  $U = [0, 1]^n$  په غبرګ اړخیز (-اښود) جوړوي، چې د ماتریکس متې یا ستن څخه غزیري. په ورته توګه دې روښانه بېلگې د  $n = 2$  لپاره انټیګرال په  $V$  یو

$$f(y) = c^t y$$

کرښیز تابع دی.

سرلیک

$$\int_V f = \int_U c^t(Ax + b) |\det A| dx = c^t(Ae/2 + b) |\det A|$$

$$e = (1, \dots, 1)^t$$

د سره.

(لیکونکي: هیولیگ، موبس)

په توتو کواور دینات کې ډکیتوکې یا حجم توكي

## Volumenelement in Zylinderkoordinaten

د کواور دینات ترانسفورمیشن لپاره

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z$$

دی

$$dx dy dz = \varrho d\varrho d\varphi dz .$$

له دې سره په ځانگې توگه د یوه تابع  $f$  د انٹیگرال لپاره په یوه توتو یا استوانه باور لري

$$Z : 0 \leq \varrho \leq \varrho_0, \quad 0 \leq z \leq z_0$$

$$\int_Z f = \int_0^{z_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\varrho_0} f(\varrho, \varphi, z) \varrho d\varrho d\varphi dz .$$

په ځانگړې توگه د یوه اکسیاسیمتریک یا محور سیمتریک تابع  $f(\varrho)$  لپاره دی

$$\int_Z f = 2\pi z_0 \int_0^{\varrho_0} f(\varrho) \varrho d\varrho.$$

د سطحې قطبي کواوردینات لپاره د سطحې توکي په ورته توگه ترانسفورمي کيږي.

(Autoren: Höllig/Much)

د کواوردینات ترانسفورمیشن

$$(x, y, z) = g(\varrho, \varphi, z)$$

لوکال یا ځای اړونده اورتوگونال دی، دا په دې معنا چې د جاکوبي ماتریکس

$$g' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

اورتوگونال متي یا ستنط لري. په تعقیب د تابعدیترمینانت یا فنکشنل دیترمینانت لپاره باور لري

$$|\det g'| = |g_\varrho| |g_\varphi| |g_z| = 1 \cdot \varrho \cdot 1 = \varrho.$$

(لیکونکی: هولیک، موبن)

د گاوس تابع د انتیگرال ټاکنې ته،

سرلیک

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi},$$

سری لاندې مرستندوی جوړښت کاروي. سری د انتیگرال مربع شمېري:

$$\begin{aligned} & \left( \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \right)^2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2 - y^2) dx dy. \end{aligned}$$

دا انتیگرال کېدېشي د قطبي کوارډینات په مرسته ساده وټاکل شي:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \exp(-r^2) r dr d\varphi = 2\pi \left[ -\frac{1}{2} \exp(-r^2) \right]_0^{\infty} = \pi.$$

((لیکونکی: هولیک، موبن

په غونډوسکي یا غونډاري (کورې-) کوارډینات کې د ډکي یا حجم توکي

د کوارډینات د ترانسفورمیشن لپاره

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta$$

دی



$$dx dy dz = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi .$$

په ځانگړې توگه په یوه غوږوسکي یا کورې باندي د یوه تابع  $K : 0 \leq r \leq R$  انتیگرال لپاره باور لري  $f$

$$\int_K f = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R f(r, \vartheta, \varphi) r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi .$$

په ځانگړي ډول د **راديال** سیمتریک تابع  $f(r)$  لپاره دی

$$\int_K f = 4\pi \int_0^R f(r) r^2 dr .$$

(لیکونکی: هولیک، موبن)

د کوارډینات ترانسفورمیشن

$$(x, y, z) = g(r, \vartheta, \varphi)$$

لوکال اور توگونال دی، دا په دې معنا چې د جاکوبي – ماتریکس

$$g' = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

سرلیک

اورتوگونال متی لري. په دې پسي د فنکشنلديترمينانت لپاره باور لري

$$|\det g'| = |g_r| |g_\theta| |g_\varphi| = 1 \cdot r \cdot r \sin \vartheta = r^2 \sin \vartheta.$$

د يوه راديبالسيمتریک تابع  $f$  لپاره انتیگرال په  $\vartheta$  او  $\varphi$  راكوي

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = 2\pi [-\cos \vartheta]_0^\pi = 4\pi.$$

دا تر مخضريب د  $\int_K f$  شمېرني له امله د يونغوندياري پورته هوارې سطحه ده.

(ليكونکی: هولیک، موبس)

په غونډوسکي (کري)  $K : r \leq 1$  د  $r^\alpha$  انتیگرال دی

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 r^2 r^\alpha \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = 4\pi \int_0^1 r^{\alpha+2} \, dr.$$

فقط د  $\alpha > -3$  لپاره شتون لري او په دې حالت کي مساوي دی لاندي سره

$$4\pi \left[ \frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3} \right]_0^1 = \frac{4\pi}{\alpha+3}.$$

انتیگرال په  $\mathbb{R}^3 \setminus K$  دی

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_1^{\infty} r^{\alpha} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = 4\pi \int_1^{\infty} r^{\alpha+2} dr$$

دا انټیگرال فقط د  $\alpha < -3$  لپاره شتون لري او په دې حالت کې د لاندې سره مساويدي

$$4\pi \left[ \frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3} \right]_1^{\infty} = \frac{-4\pi}{\alpha+3}.$$

(لیکونکی: هولیک، موبن)

د صفر نیو باندي د  $h$  په جگوالي فشار د بارومتري جگواليفرمول له لارې ټاکل کيږي:

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}}.$$

له دې سره نورمال فشار  $p_0 = 101300 \frac{N}{m^2}$  دی،  $\rho_0 = 0.150 \frac{kg}{m^3}$  د اکسیجن د ټینګوالي (غلذت) په صفر نیو (21% د هوا اکسیجن دی) او  $g = 9,80 \frac{m}{s^2}$  د ځمکې بیړه یا تعجیل دی.

ټینګوالي د فشار سره د ایډیال غاز مساوات سره تړلی:

$$\rho = \frac{p}{R_s T}$$

د  $R_s = \frac{k_B}{m_{Molekül}} = 519 \frac{Nm}{Kkg}$  سره د spezifischen دغاز ثابتته د اکسیجن لپاره او

$T$  په کالوین کچ شوي تودوخي. د ساده ونې له امله دا د ثابتې  $-3^\circ C$  په حیث، یعنی  $T = 270 K$ ، نیول- یا کيږي.

سرلیک

له دواړو مساواتو څخه کیدی شي په اتموسفیر کې په نږدې توګه د اکسیجن ټوله کتله وشمېرل شي:

$$M = \int_V \rho dV = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_{r_0}^\infty \frac{1}{R_s T} p_0 e^{-\frac{\rho_0 g h}{p_0}} r^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta,$$

له کوم سره چې  $r_0 = 6.37 \cdot 10^6$  m د ځمکې وړانګه ده. د

سبسټیچیشن پسي او په  $\vartheta$  او  $\varphi$  باندې انټیګرال سره لاس ته راځي  $h = r - r_0$

$$M = 4\pi \frac{p_0}{R_s \cdot T} e^{\frac{\rho_0 g}{p_0} r_0} \int_{r_0}^\infty e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0} r} r^2 dr,$$

او د دوه واړه ټوټه – یا پارشل انټیګرال سره د انټیګرال لپاره لاس ته راځي

$$\int_{r_0}^\infty e^{-cr} r^2 dr = \left[ -\frac{r^2}{c} e^{-cr} \right]_{r_0}^\infty + \left[ -\frac{2r}{c^2} e^{-cr} \right]_{r_0}^\infty + \left[ -\frac{2}{c^3} e^{-cr} \right]_{r_0}^\infty$$

(  $c = \frac{\rho_0 g}{p_0}$  ) . په ټولیزه توګه لاس ته راځي

$$M = \frac{4\pi p_0}{R_s T} (c^{-1} r_0^2 + 2c^{-2} r_0 + 2c^{-3}) = 2.59 \cdot 10^{19} \text{ kg}$$

د پرتلي لپاره :

$$(2.3 \cdot 10^5 M)$$

$$6 \cdot 10^{24} \text{ kg} - \text{ځمککته}$$

$$(2.9 \cdot 10^3 M)$$

$$7.4 \cdot 10^{22} \text{ kg} - \text{سپورمي کتله}$$

### کټله او درونډتکی (نقطه ثقل؟)

د یوه بدن  $K$  کټله د تیځوالي  $\varrho(x)$ ,  $x \in K$ , سره د

$$m = \int_K \varrho(x) dK$$

له لارې ورکړ شوی ده. په ځانګړې توګه د  $\varrho(x) = 1$  لپاره د  $K$  ډکی (حجم)  $V$  لاس ته راوړو.

د کټلي درونډتکي  $s_\nu$  م کواوردینات د لاندې سره سم شمیرل کیږي

$$s_\nu = m^{-1} \int_K x_\nu \varrho(x) dK .$$

د  $\varrho(x) = 1$  لپاره لرو

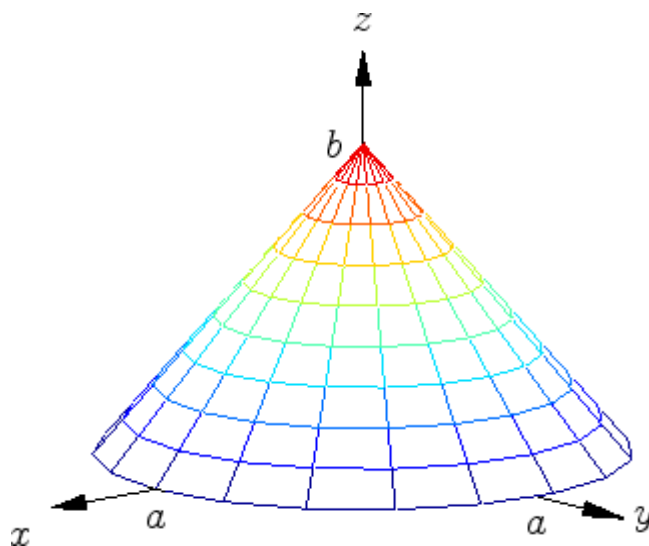
$$s_\nu = V^{-1} \int_K x_\nu dK ,$$

او  $S$  هندسي درونډتکی او یا هم په ساده توګه درونډتکی بلل کیږي.

لیکونکي: هیولیګ، کیمرلې، تراپت

یو غونډاری (کره)  $K$  د بنسټورانګې  $a$  او جګوالي  $b$  سره ډکی (حجم)  $V = \frac{\pi}{3} a^2 b$  لري او په توتو کواوردینات کېلاندې انځورونه لري

$$K : 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varrho \leq \frac{a}{b}(b - z), \quad 0 \leq z \leq b.$$



د سیمتري له امله د دروندتکي د  $x$  او  $y$  -کووردیناتونه صفر دي. د  $z$  -کووردینات داسې شمیرل کيږي

$$s_z = \frac{1}{V} \int_K z$$

اوپه توتو کووردینات باندې د ترانسفورمیشن وروسته لاس ته راوړو

$$\begin{aligned} V s_z &= \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \int_0^{2\pi} \rho z d\varphi d\rho dz \\ &= 2\pi \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \rho z d\rho dz \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \pi \int_0^b z \left( \frac{a}{b}(b-z) \right)^2 dz \\ = & \\ & = \frac{\pi}{12} a^2 b^2 . \end{aligned}$$

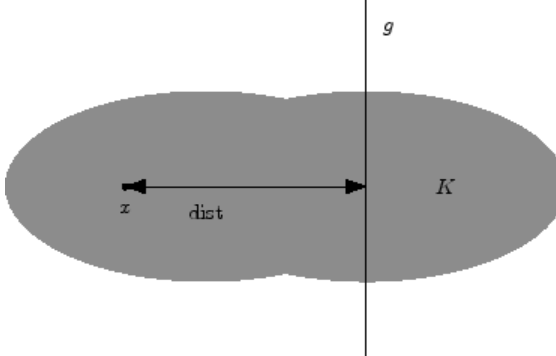
$$\begin{aligned} V_{S_z} &= \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \int_0^{2\pi} \rho z d\varphi d\rho dz \\ &= 2\pi \int_0^b \int_0^{a(b-z)/b} \rho z d\rho dz \\ &= \pi \int_0^b z \left( \frac{a}{b}(b-z) \right)^2 dz \\ &= \frac{\pi}{12} a^2 b^2 . \end{aligned}$$

له دې سره  $S = (0, 0, b/4)$  دروندتکی دی.

لیکونکي: هیولیک، شترایت

سرلیک

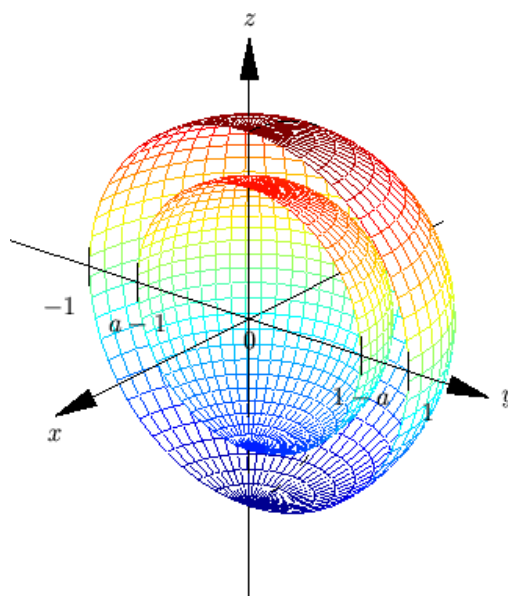
ترایگهایتسمومنت (Trägheitsmoment) د کتلی څرکون اړونده لویه)

<p>په یوه محور <math>g</math> د یوه تن <math>K</math> د تینګوالي <math>\rho(x), x \in K</math> سره دی Trägheitsmoment <math display="block">I = \int_K \text{dist}(x, g)^2 \rho(x) dK,</math> د کومسره چې <math>\text{dist}</math> د واټن تابع ښایي</p>	
---	--

لیکونکي: هیولیګ، شترایت

تشکیل-یا جوړه شوی تشه غونډوسکه یا کره په کواور دینات سیستم کې لاندې انځورونه لري

$$K : 1 - a \leq r \leq 1, 0 \leq \vartheta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$



د یوه ثابت تینګوالي  $\rho$  لپاره په  $z$ -محور د Trägheitsmoment  $I$  دی



$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{1-a}^1 \rho \underbrace{(r \sin \vartheta)^2}_{\text{dist}((x,y,z),g)} \underbrace{(r^2 \sin \vartheta)}_{dK} dr d\vartheta d\varphi = \\
 &= \frac{2\pi\rho}{5} (1 - (1-a)^5) \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta \\
 &= \frac{2\pi\rho}{5} (1 - (1-a)^5) \left[ -\cos \vartheta + \frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right]_0^{\pi} = \frac{8\pi\rho}{15} (1 - (1-a)^5)
 \end{aligned}$$

که ټینګوالي  $\rho$  له شرایطو، چې تشغوندوسکي کتله دي یو وي، سړی غواري وټاکي،

$$1 = \int_K \rho = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{1-a}^1 \rho r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \frac{4\pi\rho}{3} (1 - (1-a)^3),$$

نو لاس ته راځي

$$I(a) = \frac{2}{5} \frac{(1 - (1-a)^5)}{(1 - (1-a)^3)}.$$

په ځانګړي توګه د ټولې غوندوسکي د  $I(1) = 2/5$  Trägheitsmoment لپاره  
 راګوي او د  $a = 0$  لپاره د پولې ته تلني له لارې د لوپیتال قانون سره  $I(0) = 2/3$

لیکونکي: هیولیک، شترایت

د کزې (منحني) انټیګرال

سرلیک

د یوه ناپرېکيدونکي تابع  $f$  انتیگرال د یوې کرې (منحنی)  $C$  په اودوالي د ریډولار ناپرېکيدونکي مشتقور پارامتریکوني

$$t \rightarrow p(t) \in \mathbb{R}^n, \quad p'(t) \neq 0, \quad t \in [a, b],$$

سره

$$\int_C f = \int_a^b f(p(t)) |p'(t)| dt$$

تعریف دی اود ټاکل شوي پارامتریکوني څخه خپلواک دی.

په ځانگي توگه د  $f = 1$  لپاره سری د کرې اوردوالی لاس ته راوړي.

په  $f$  او  $p$  هوارتیا نیونه کیدی شي ضعیفه شي، داسې چې سری انتیگرال په یوه مناسب ډولې پروسه باندې تشریح کړي.

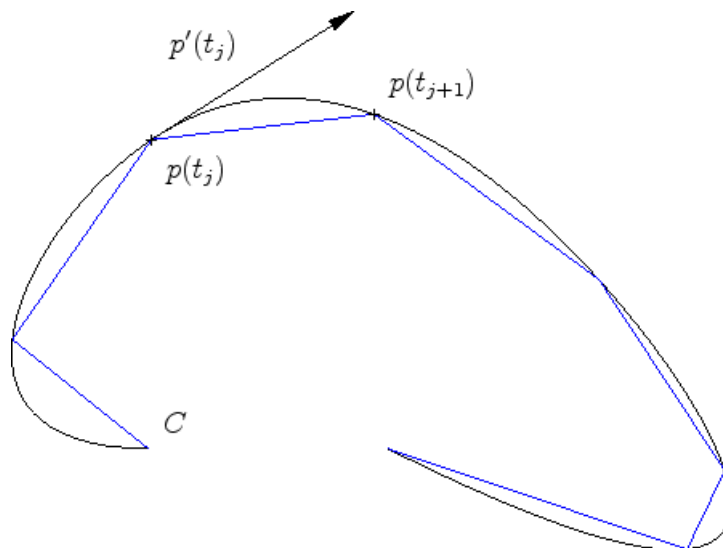
لیکونکي: ایپ، هیولیک

د ریمن زیاتون یا جمعی په مرسته کېدی شي تعریف مدلل شي. په کرې د د ټکو پرلپسې

$$p(t_j), \quad t_{j+1} - t_j = \Delta t_j,$$

دا لاندې دی

$$\int_C f \approx \sum_j f(p_j) |p(t_{j+1}) - p(t_j)|.$$



د منځ ارزښت جملې په بنسټ باور لري

$$p(t_{j+1}) - p(t_j) = \begin{pmatrix} p'_1(\tau_{1,j}) \\ \vdots \\ p'_n(\tau_{n,j}) \end{pmatrix} \Delta t_j$$

د  $\tau_{v,j} \in [t_j, t_{j+1}]$  سره د  $p'$  د برابر ډوله ناپرېکېدنې له امله په  $[a, b]$  لرو

$$|p(t_{j+1}) - p(t_j)| = |p'(t_j)| + r_j |\Delta t_j|$$

د  $|r_j| < \varepsilon$  سره د  $|\Delta t_j| < \delta$  لپاره. د توتې ونې د نړيوالې له امله بنې اړخ د

$$\int_a^b f(p(t)) |p'(t)| dt$$

په لور هڅيري.

سرلیک

پورته دلیل هم د پارانتی کونط خپلواوالی بنایي، ځکه چې دا د ریکمزاتون کپمنځ ته نه راځي.

په بدیلی توگه کیدی شي مختلف پارامتریککونه د یوې متحولي سبستیچیوشن له لاری یو په واروي.

لیکونکي: اپب، هیولیگ

د تابع

$$f(x, y, z) = \exp(-z)$$

انتیگرال به د  $C$  پیچي میخ د  $n$  ارونو یا څرخونو په اوږدوالي د پارانتریک کوني

$$C: \quad p(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad p'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi n],$$

سره وټاکلشي.

سری لاس ته راوري

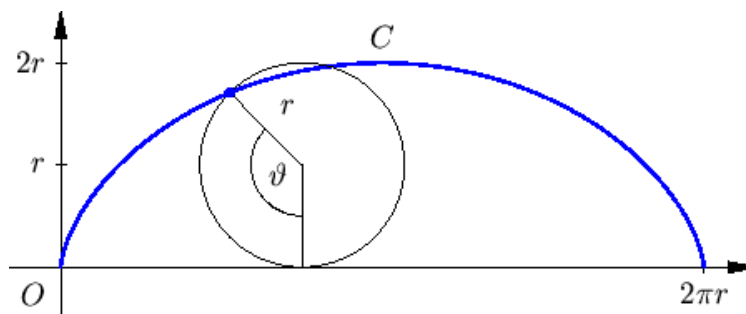
$$|p'(t)| = \sqrt{2}$$

او له دې سره

$$= \int_0^{2\pi n} \exp(-t) \sqrt{2} dt \int_C f$$

لیکونکي: اپب، هیولیگ

د څیکلوید  $C$  اوږدوالی  $L$  ټاکل کیږي، هغه چې یو ټکی د یوې داېرې په چاپېریال د وړانګې سره تشریح کوي، چې په یوه کرښه ګرځي یا څرخي  $r > 0$



د پارامترې کونډلپاره

$$C : p(\vartheta) = r \begin{pmatrix} \vartheta - \sin \vartheta \\ 1 - \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [0, 2\pi],$$

دی

$$p'(\vartheta) = r \begin{pmatrix} 1 - \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad |p'(t)| = r \sqrt{(1 - \cos \vartheta)^2 + \sin^2 \vartheta} = r \sqrt{2(1 - \cos \vartheta)}.$$

له دې سره د څیکلوید د اوږدوالي لپاره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} r \sqrt{2(1 - \cos \vartheta)} d\vartheta \\ &= 2r \int_0^{2\pi} \sin(\vartheta/2) d\vartheta = 2r [-2 \cos(\vartheta/2)]_0^{2\pi} = 8r, \end{aligned}$$

سرلیک

د کوم سره چې کټوتوالی  
لیکونکي اېپ، هیولیک

$$1 - \cos \vartheta = 2 \sin^2(\vartheta/2)$$

کارول شوی.

د کږې (منحني) انټیگرالځویونه

د کږې انټیگرال په  $\int_C f$  کې کرښیز دی او نسبت و  $C$  ته زیاتیزیا د جمعې په ډول:

$$\int_C \alpha f + \beta g = \alpha \int_C f + \beta \int_C g$$

$$\int_C f dC = \int_{C_1} f + \int_{C_2} f$$

که  $C = C_1 \cup C_2$  او  $C_1$  او  $C_2$  د ځانله ټکي پورې ټکي پردي وي،

دا له پارامټري کوني څخه خپلواک دی او په ځانگړې توگه د کږې د لوریزوالي څخه هم خپواک دی.

لیکونکي: اېپ، هیولیک

د لیندي اوردوالی

د یوې د

$$t \mapsto p(t), \quad a \leq t \leq b,$$

له لارې پارامترې شوي كره (منحنې)  $C$  د  $p(a)$  او  $p(t)$  ترمنځ د كبرې اوږدوالي

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)| d\tau,$$

كیدی شي د كانوني كبرې پارمتر په حيث وکارول شي. سری داسې په نامه د لیندې پسي پارامترې کیدنه لاس ته اوري:

$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1.$$

د کاندید تانجنوکتور له مخې یا پر بنسټ د دې كانوني پارامترې کوني لپاره باور لري

$$\int_C f = \int_0^L f(q(s)) ds$$

د  $C$  د اوږدوالي  $L$  سره.

لیکونکي: اپ، هیولیک

د بېلگې په توگه د لیندې پسي د شپيرالي  $q(s)$

$$C : \quad p(t) = \exp(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad p'(t) = \exp(t) \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

پاره مترې کونه له  $t = 0$  ټاکل کيږي. سری لاس ته راوري

سرليک

$$s(t) = \int_0^t |p'(\tau)| d\tau = \int_0^t \sqrt{2} \exp(\tau) d\tau = \sqrt{2}(\exp(t) - 1)$$

همداسي

$$t(s) = \ln(s/\sqrt{2} + 1).$$

له دي سره لاس ته راځي

$$q(s) = (s/\sqrt{2} + 1) \begin{pmatrix} \cos(\ln(s/\sqrt{2} + 1)) \\ \sin(\ln(s/\sqrt{2} + 1)) \end{pmatrix}.$$

ليکونکي: اېپ، هيوليک

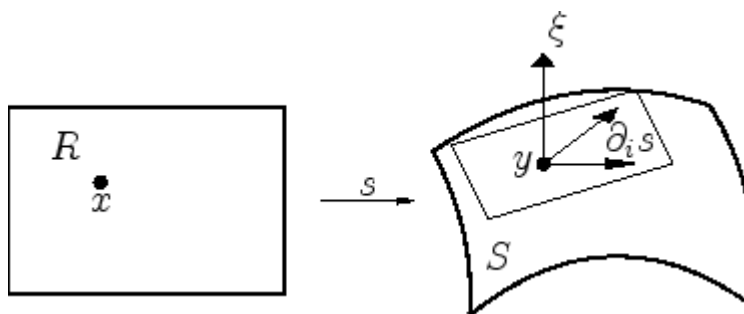
د يوې ټوټې سطحې رگولار پارامټريکونه

يو ناپربکېدونکی مشتقموږ پارامټري کونه

$$R \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto s(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

په يوه رگولار ورشو  $R$  باندې يو رگولار د سطحې ټوټه  $S = s(R)$  تشریح کوي، کهد  $R$  په دننه کې اينجکتيو (په باندې) وي او وکتورونه  $\partial_1 s(x), \dots, \partial_{n-1} s(x)$ ټولو  $x \in \overset{\circ}{R}$  لپاره کرښيز خپلواک وي.





دا تر مخښنې پورې یواځنی ټاکلی یوونوکتور (واحدوکتور)  $\xi$ ، چې د  $\partial_1 s(x), \dots, \partial_{n-1} s(x)$  څخه یا له لارې غزېدلی تانجنت سطحې ته اور توگونال دی، سطحې نورمال بلل کېږي. دا ووکتورونو سره یوځای د  $\mathbb{R}^n$  یوه بنسټ جوړوي

لیونکي: هیولیک، موبس

### د سطحې انټیگرال *Flächenintegral*

د یوه ناپېرېکېدونکي تابع  $f$  انټیگرال په یوه رگولار سطحې توتې د پارمټري کوني سره

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto s(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad x \in R,$$

او سطحې نورمالي  $\xi$  سره د

سرلیک

$$\int_S f dS = \int_R (f \circ s) |\det(\partial_1 s, \dots, \partial_{n-1} s, \xi)| dR$$

په حیث تعریف دی او د ټاکل شوي پارمټري کوني څخه خپلواک دی.

د دیترمینانت ارزښت د سطحټوکي د سکالي شوی ضریب دی:

$$dS = |\det(\partial_1 s, \dots, \partial_{n-1} s, \xi)| dR.$$

د  $f = 1$  لپاره د ځانگړي حالت په حیث سری د  $S$  سطحی مساحت لاس ته راوړي.

د  $f$  او  $s$  مساواتورانډنیوني کیدی شي ضعیفی شي، داسې چې انټیگرال په یوه مناسب پوله پروسه باندې تعریف شي. برسېره پردې کېدی شي یوه سطحه د ډېرو سطحې ټوټو یوځای شوي یا جوړه شوي وي. د سطحی انټیگرال نو په دې حالت کې د یوگونو ټوټه سطحو باندې د انټیگرالونو زیاتون یا جمعه ده.

لیونکي: هیولیگ، موبن

د ساده ونې له امله دوه پراخیدونې یا دوه دیمزنال حالت ترڅیرني لاندې نیسو.

کېدی شي تعریف د ریمن-زیاتون یا -جمعی په مرسته مدلل کړی شي. لکه په څېره کې چې بنوول شوي، سری د تریانگولي کولو له لارې  $R$  اېروکسیمی کوي د درېگودي  $\sigma$  د کانتی **اوردوالي سره متناسب و**  $h$  ته. د گودتکو د ټوابو له لارې دا د  $S$  یوتریانگل تولیدوي د درېگوديو  $\tau$  سره:

$$\tau \ni (x_\tau, y_\tau, z_\tau) = s(u_\sigma, v_\sigma).$$

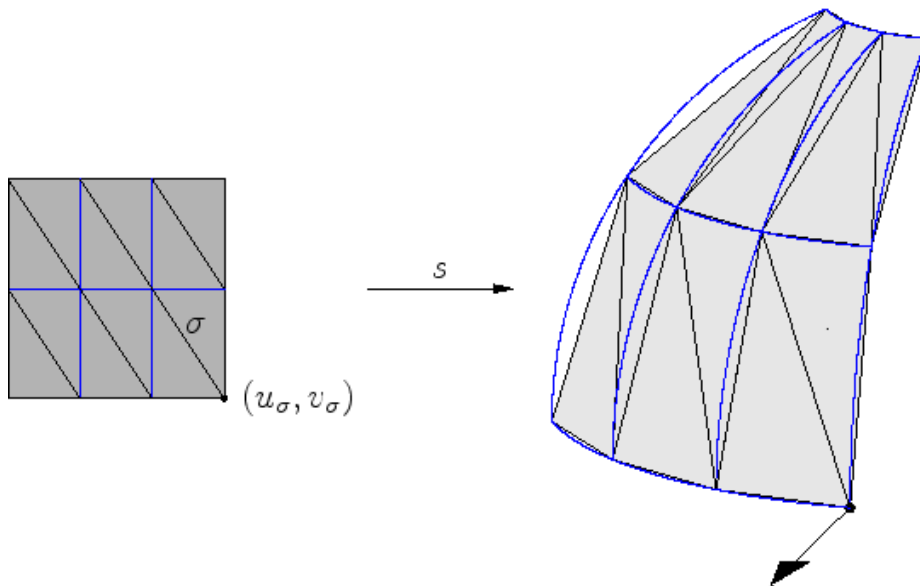
د سکالی کولو ضریب د درېگودي د سطحی تغیر اېروکسیمی کوي

$$\text{area}(\tau) = |\det(s_u(u_\sigma, v_\sigma), s_v(u_\sigma, v_\sigma), \xi)| \text{area}(\sigma) + O(h^3).$$

په تعقیب انتیگرال د  $h \rightarrow 0$  لپاره د ریمنن - زیاتون له لارې

$$\sum_{\sigma} f(x_{\tau}, y_{\tau}, z_{\tau}) | \det(s_u(u_{\sigma}, v_{\sigma}), s_v(u_{\sigma}, v_{\sigma}), \xi) | \text{area}(\sigma)$$

نږدې کیري، هغه چې د  $h \rightarrow 0$  لپاره د انتیگرال په لور هڅیري



لیونکي: هیولیک، موبن

$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$	
------------------------------	--

$$(r, \varphi) \mapsto s(r, \varphi) = \begin{pmatrix} (1+r) \cos \varphi \\ (1+r) \sin \varphi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{1}{2} \leq r \leq \frac{1}{2}$$

له لارې پارامترې شوې د راتاو پورظ یا زینې Wendeltreppe  $S$  برخه توتو

سرلیک

انٹیگرال ونیول شي.

د سطحی توکو د سکالي کولو فاکتور د ټاکلو لپاره لومړی شمیر و (خیره پورته مخ کې):

$$s_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_\varphi = \begin{pmatrix} -(1+r) \sin \varphi \\ (1+r) \cos \varphi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

دا چې ټوټه مشتقونه اور توگونال دي، دی

$$|\det(s_r, s_\varphi, \xi)| = |s_r| |s_\varphi| = \sqrt{(1+r)^2 + 1}.$$

له دې سره لاس ته راځي

$$\begin{aligned} \int_S f d\omega &= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1+r) \sqrt{(1+r)^2 + 1} dr d\varphi = 2\pi \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1+r) \sqrt{(1+r)^2 + 1} dr \\ &= \frac{2\pi}{3} \left[ ((1+r)^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{3} \left( \left( \frac{13}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - \left( \frac{5}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \right). \end{aligned}$$

لیونکي: هیولایگ، موبن

د یوه تابع  $z(x, y)$  د گراف  $S$  د سطحې توکی دی

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy.$$

دا د پارمټیکولو لپاره د ټولیز تعریف څخه ترلی لاس ته راځي

$$(x, y) \mapsto s(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z(x, y) \end{pmatrix},$$

څکه چې د سطحې نورمال  $\xi$  غبرګ دی و

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{pmatrix}}_{s_x} \times \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{pmatrix}}_{s_y} = \begin{pmatrix} -z_x \\ -z_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

ته او د  $|\xi| = 1$  له امله دی

$$|\det(s_x, s_y, \xi)| = |s_x \times s_y| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}.$$

د بیلګې په توګه د کونکرت یا روښانه تابع  $z(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$  د ګراف لپاره دی

$$dS = \sqrt{1 + 4x^2 + y^2},$$

او سری د  $f(x, y) = xy$  لپاره لاس ته راوړي او دا په ولاړګوډیز

$$[0, 1] \times [0, 2]$$

پرته سطحې ټوټې

$$= \int_0^1 \int_0^2 xy \sqrt{1 + 4x^2 + y^2} dy dx \int_S f dS$$

سرلیک

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 \left[ x(1 + 4x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \left( x(5 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} - x(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} \right) dx \\
 &= \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{1}{20}(5 + 4x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{20}(1 + 4x^2)^{\frac{5}{2}} \right) \right]_0^1 = \frac{61}{15} - \frac{625}{6}\sqrt{5}.
 \end{aligned}$$

لیونکی: هیولیگ، موبن

د سطحی توکی په توتہ کو اور دینات کی

د سطحی توکی دیوه د

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

له لاری پارامتری شوی دیوی توتی پورته پوین  $S$  د وړانگی  $\varrho$  سره دی

$$dS = \varrho d\varphi dz.$$

له دی سره په توتہ کو اور دینات کی دیوه تابع  $f$  د انتیگرال لپاره باور لری

$$\int_S f dS = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \int_0^{2\pi} f(\varrho, \varphi, z) \varrho d\varphi dz.$$

لیونکی: هیولیگ، موبن

د تانجنت وکتور د اور توگونالیتی له امله

$$s_\varphi = \begin{pmatrix} -\varrho \sin \varphi \\ \varrho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

د سکالا کولو کتور د سطحې توکو لپاره دی

$$|\det(s_\varphi, s_z, \xi)| = |s_\varphi| |s_z| = \varrho,$$

لکه چې غوښتل مو.

لیونکي: هیولیگ، موبن

د څلورۍ یا مربع  $V = [0, 1]^2$  لپاره اصلي جمله داسې ده

$$\int_0^1 \int_0^1 \text{grad } f(x, y) \, dx \, dy = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(1, y) - f(0, y) \, dy \\ 0 \\ \int_0^1 f(x, 1) - f(x, 0) \, dx \end{pmatrix}.$$

دا له تابع څخه ترلي لیدل کیږي:

$$n = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$$

د کټمټوالي کمپوننتونه د اونیوارینت (یومتحولي یا اوښوتوني) اصلي جمله په گوته کوي. د بیلگې په توګه لومړی کمپوننت و لاندې ورته یا یو ارزښته یا اکویوالنتدی

سرلیک

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f_x(x, y) dx - [f(x, y)]_{x=0}^{x=1} \right) dy = 0.$$

(Aus: Mathematik-Online)

په غونډاري کواوردینات کې د سطحو توکي

د سطحې د توکي د یوه د

$$\begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} R \sin \vartheta \cos \varphi \\ R \sin \vartheta \sin \varphi \\ R \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

له لاري لپاره پارمترې شوی فضا Sphäre د ورانگي R سره دی

$$dS = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

له دېسره په غونډاري کواوردینات کې د یوه تابع  $f$  د انٹیگرال لپاره باور لري

$$\int_S f dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(R, \vartheta, \varphi) R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

لیونکي: هیولیگ، موبس

د تانجنت وکتور د اور توگونالیتی له امله




$$s_\vartheta = \begin{pmatrix} R \cos \vartheta \cos \varphi \\ R \cos \vartheta \sin \varphi \\ -R \sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad s_\varphi = \begin{pmatrix} -R \sin \vartheta \sin \varphi \\ R \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

د سکالی کولو وکتور د سطحې توکو لپاره دی

$$|\det(s_\vartheta, s_\varphi, \xi)| = |s_\vartheta| |s_\varphi| = R^2 \sin \vartheta,$$

لکه چې غوښتل مو.

لیکونکي: هیولیک، موبن

<p>د نیمغونډاري (-بیالی یا پوښ) دروندتکی <math>S</math> دی  <math>H : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0,</math>          د ثابت تیگوالي سره وټاکل شي</p>	
--	--

د سیومتری په اساس د درونټکي د  $x$ - او  $y$ - کواردیناتونه صفر دي. د  $z$  - کواردینات لپاره د غونډاري کواردینات د کارولوله امله سړی لاس ته راوړي

$$s_z \text{ area}(H) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \pi,$$

$$s_z = \frac{1}{2}.$$

او د  $\text{area}(H) = 2\pi$  سره لاسته راځي

لیکونکي: هیولیک، موبن

سرلیک

د ډیرواره انټیگرال لپاره اصلي جمله

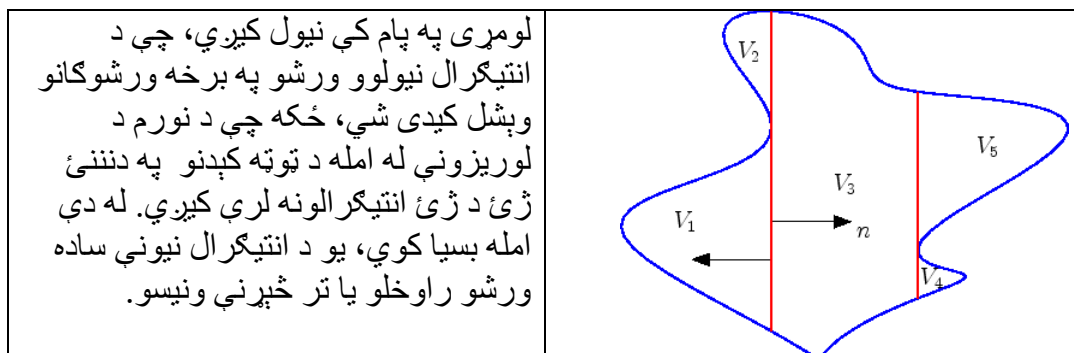
که  $n$  د یوه رگولارو رشو  $V \subset \mathbb{R}^m$  د باندې لور ته لوریزه یوونورم یا واحدنورم وښایید رگولار  $(m-1)$  -- بعد یا پراخېدونې ژئ  $\partial V$  سره، نو د یوه ناپربکېدونکي مشتقور تابع  $f$  لپاره باور لري

$$\int_V \partial_\nu f = \int_{\partial V} f n_\nu, \quad \nu = 1, \dots, m.$$

که سړی دا مساوات سره یوځای کړي، نو سړی وکتوري کټمتوالی لاس ته راوړي.

$$\int_V \text{grad } f = \int_{\partial V} f n.$$

(لیکونکي: هولیک، هورنر)

د ښوونې فکر د  $m = 2$  لپاره ښوول کيږي.

د  $m = 2$  لپاره سړی  $V$  په ساده وړشوگانو ټوټه کوي په لاندې بڼه

$$V : a \leq x \leq b, \quad c(x) \leq y \leq d(x).$$

بیا د ډبل انټیگرال لپاره باور لري

$$\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f_y(x, y) dy dx = \int_a^b (f(x, d(x)) - f(x, c(x))) dx.$$

په ولاړو یا عمودو *vertikalen* ژبو د  $y$  - کمپوننت د صفر عمود دی له دې امله باید د ژبې انټیگرال لپاره پورته اوکښته ژبې په پام کې ونیول شي یا وکتل شي. لاندې ژبې کیدی شي په لاندې بڼه

$$C : x \mapsto (x, c(x)), \quad a \leq x \leq b$$

پارامتریک شي او

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 + c'(x)^2}} \begin{pmatrix} c'(x) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$dC = \sqrt{1 + c'(x)^2} dx$$

دا چې دی، نو باور لري

$$\int_C f n_2 = \int_a^b f(x, c(x)) (-1) dx.$$

په ورته توګه لاندې نائینټیگرال شمېرل کيږي، او د ارزښتونو زیاتون یا جمعه د ډبل انټیگرال سره سره خوري یا همغږیز کيږي.

(لیکونکي: هولیک، هورنر)

$$V = [0, 1]^2$$

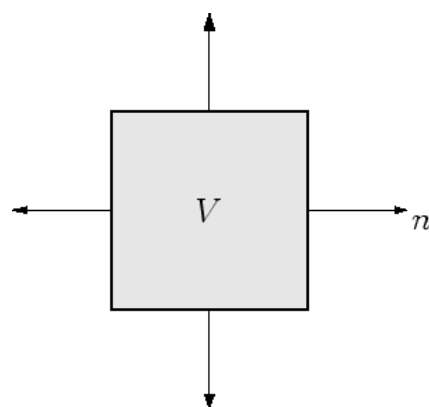
د مربع لپاره اصلي جمله ده

سرلیک

$$\int_0^1 \int_0^1 \text{grad } f(x, y) dx dy = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(1, y) - f(0, y) dy \\ \int_0^1 f(x, 1) - f(x, 0) dx \end{pmatrix}.$$

دا له تابع څخه ترلی لیدل کیږي:

$$n = (\pm 1, 0), (0, \pm 1)$$

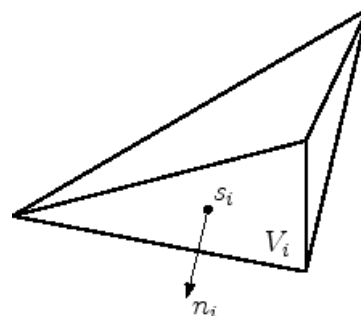


د کټمټوالي کمپوننتونه د یو متحول والي اصلي جمله ده. د بیلګې په توګه لومړی کټپوننت و لاندې ته ورته یا اکویوالنت دی

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f_x(x, y) dx - [f(x, y)]_{x=0}^{x=1} \right) dy = 0.$$

(Aus: Mathematik-Online)

$V \subseteq \mathbb{R}^m$  دې یو سیمپلکس وي، چې د  $(m-1)$ -بعدي سیمپلکسونو له لارې را بنديږي او  $V_i, i = 1, \dots, m+1$  د باندې لور ته لوریز یوونورمال یا واحدنورمال نومول کيږي او  $s_i$  د  $V_i$  درونټکی وي.



د یوه ثابت تابع  $f(x) = b$  لپاره د اصلي جملېلاسته راځي

$$0 = \sum_i \text{vol}_{m-1}(V_i) n_i.$$

د یوه کرښیز تابع  $f(x) = a^t x$  لپاره باور لري

$$\text{vol}_m(V) a = \sum_i \text{vol}_{m-1}(V_i) (a^t s_i) n_i.$$

دلته وکارول شوی، چې د یوه سیمپلکس  $S$  لپاره د درونټکي  $s$  سره مربعیز فرمول

Quadraturformel د کرښیز تابع  $f$  لپاره ټیک ده

(Aus: Mathematik-Online)

سرلیک

د یوه غونډاري لپاره په یوه غونډاريکوار دینات کې د وړانګې  $R$  اوپاس-یا پورته یا پوښ سطحې یا هواري سره باور لري

$$dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi, \quad dS = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

او  $n = (x, y, z)^t / R$  یووننورمال دی. د دې پسي یا دبلاسته راوړني پسي اصلي جمله ده

$$\begin{aligned} & \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \text{grad } f(r, \vartheta, \varphi) r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta dr = \\ & = R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(R, \vartheta, \varphi) \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \sin \vartheta d\varphi d\vartheta. \end{aligned}$$

د بېلګې په د روښانه تابع لپاره سړی لاس ته راوړي

$$f(x, y, z) = xz^2 = R^3 \sin \vartheta \cos \varphi \cos^2 \vartheta$$

د ګرادینت او  $f n$  لپاره

$$\text{grad } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z^2 \\ 0 \\ 2xz \end{pmatrix},$$

$$f(x, y, z)n = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x^2 z^2 \\ xyz^2 \\ xz^3 \end{pmatrix}.$$

د سیومتری په بنسټ اڅرودواړو لیکوباندې انتیگرال صفر راځي. د لومړئ لیکي لپاره په غونډاري کواوردینات کې صفر لاس ته راځي

$$\begin{aligned} & \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^4 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr = \\ & R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^3 \sin^3 \vartheta \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi \, d\varphi \, d\vartheta \\ & = \frac{4}{15} \pi R^5. \end{aligned}$$

(Aus: Mathematik-Online)

### نوټه انتیگرال *Partielle Integration*

د ځوی توابعو  $f$  او  $g$  لپاره د کومپاکت وړونکي سره باور لري

$$\int_{\mathbb{R}^m} g \partial^\alpha f = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^m} f \partial^\alpha g.$$

(لیکونکي: هولیک، هورنر)

سرلیک

دا چې  $f$  او  $g$  کومپاکت وړونکي لري، یوه کواډر  $V$  شتون لري، داسې چې د  $V$  په ژئ او هم د باندې له  $V$  دواړه توابع ورک شي.

د اصلي جملې له مخې د ډېرواره انټیگرالونې لپاره باور لري

$$\int_{\mathbb{R}^m} \partial_\nu(fg) = \int_V \partial_\nu(fg) = \int_{\partial V} (fg)n_\nu = 0$$

د یوه په خوښه توپه مشتق  $\partial_\nu$  لپاره له بلي خوا د ضرب قانون له مخې دی

$$\partial_\nu(fg) = g\partial_\nu f + f\partial_\nu g$$

او له دې سره

$$\int_{\mathbb{R}^m} g\partial_\nu f + \int_{\mathbb{R}^m} f\partial_\nu g = 0, \text{ bzw. } \int_{\mathbb{R}^m} g\partial_\nu f = - \int_{\mathbb{R}^m} f\partial_\nu g.$$

د  $\partial^\alpha$  په تجزیه په یوگونو توپه مشتقونو له لارې او پرلپسې د مساواتو استعمال سره سړی دا ورکړ شوی فرمول لاس ته راوړي، ځکه چې په هوارو یا خویو توابعو کې د توپه مشتق سره بدلېدلی شي.

(لیکونکي: هولیک، هورنر)

د گرین فرمولونه **Greensche Formeln**

که  $n$  د باندې لور ته لوریز د یوه رگولارو ریشو  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  یوونورمال یا واحد نورمال وښايي د رگولار ژئ سطحې  $S = \partial V$  سره، نود دوه ناپربکېدونکي مشتقور توابعو  $f$  اوع لپاره باور لري



$$\int_S f \frac{\partial g}{\partial n} = \int_V (\text{grad } f)^t \text{grad } g + f \Delta g.$$

چېرته چې  $\frac{\partial g}{\partial n}$  د دباندې لورته مشتق بنایي نورمال دی.

په ځانګړي د  $f = 1$  لپاره لرو

$$\int_S \frac{\partial g}{\partial n} = \int_V \Delta g.$$

یوسیومتری واریانت په ګرین نومول شوي کټمټوالی دی

$$\int_S f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} = \int_V f \Delta g - g \Delta f.$$

د دواړو ګرین فرمولونو نه کېدی شي دخوی والي وړاندنیونه ضعیفه شي، داسې چې په مناسب پوله ارزښت تعریف شي.

(لیکونکي: هولیک، هورنر)

د ډېرواره اینتگرال اصلي جملې پسي دی

$$\int_S f \partial_\nu g n_\nu = \int_V \partial_\nu (f \partial_\nu g), \quad \nu = 1, \dots, m.$$

د ضرب قانون سره په بني اړخ انتیگرال لپاره لاس ته راځي

$$(\partial_\nu f)(\partial_\nu g) + f(\partial_\nu \partial_\nu g)$$

په  $\nu = 1, \dots, n$  باندې زیاتون یا جمعی له دې سره د ګرین لومړی فرمول راګوي.

سرلیک

دویم فرمول د  $f$  او  $g$  بدلون له لارې لاس ته راځي. سړی د

$$\int_S g \frac{\partial f}{\partial n} \quad \text{او} \quad \int_S f \frac{\partial g}{\partial n}$$

لپاره کټمتوالی کموي یا سره تفریقوي او په پام کې نیول کیږي، چې د ډکي- یا حجم اینتگرالونو د گرادینت ضرب له منځه وړي یا پورته کوي؟

(لیکونکي: هولیک، هورنر)

د فبروری ۲۴ د ۲۰۱۱ ز ک.

د لوی څښتن په برکت او مهربانی (ژباړی)

هر پیل شوی کار چې پای کیږي، نو ناروغه زړه ورسره، هغه د شاعرانو خبره، باغ باغ کیږي. (ژباړی)

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوي لیکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra :  
general algebra 6 ; Page 117 – 122 contributions to

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .  
Uni. Wien

*Dissertation Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,  
at the University of Vienna/Austria*

لاندي د شميرپوهني پښتوتول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له  
خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شميرپوهني ستر کتاب : د شميرپوهني برسیره د انجنري، فزيک او اقتصاد  
لپاره ، همداسي د بنوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ  
او دا نوې ليکنه به يې ځنو ځايونو غزېدلې او ځني ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمکچپوهنه ( هندسه ) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د گټې – او کټې د کټې  
شميرنه ، د احتمالي شميرنه کتاب د بنوونځي ټولې اړتياوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شميرپوهني انگرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شميرپوهني الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنخيال برابر وون ( دا کتاب په دې څانگه کې يو پيل دی، ساده ليکل شوی)

*Differential equation Translation; An Introduction*

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمير پوهنې فرمولونو ټولگه

*Mathematical Formulas*

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمير پوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

يوولسم: د افغانستان په هکله سپينې خبرې: په المان کې

،، د افغانستان روغي او بيا ابادولو ټولنه،، له خو

يادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شينواري د ،، د افغانستان روغي او بيا

آبادولو ټولنه،، له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،، ميرې،، شينواري ليکنې او ژباړې چې په چاپيدو يې پيل کيږي

2012 Bonn; Germany; Kabul Afghanistan

ژباړې:

لاندي د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

- ۱ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره لومړی توک
- ۲ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دویم توک
- ۳ - شمیرپوهنه د بنوونځي لپاره دریم توک
- ۴ - د احتمالي شمیرنه د بنوونځي لپاره
- ۵ - احصایه یا ستاتیستیک د بنوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

- ۶ - انالیزی ۱
- ۷ - انالیزی ۲
- ۸ - کرینیز الجبر
- ۹ - د شمیرپوهني بنسټونه
- ۱۰ - د فرمولونو ټولگه
- ۱۱ - فنکشنل انالیز
- ۱۲ - وکتور شمیرنه

نورې ژباړې

۱۳ - له [www.grundstudium.info/linearealgebra](http://www.grundstudium.info/linearealgebra) څخه: کرینیز الجبر

۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمير پوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شمير پوهنې برخې برسیره د

انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بنوونکو او زدهکونکو لپاره پوره گټور دی. په

کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه ( هندسه ) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېرې پوهنه يا ست تيوري

۱۹ - د شمير پوهنې سم اند ( منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شمير پوهانو ژوندليک

۲۱ - د شمير پوهنې گډې ودې ليکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو ليکونکي يې متأسفانه راڅخه نابلد شوی: د مشتق او انتيگرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيوني يا حلونه يې

۲۳ - د شمير پوهنې انگريزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

۲۴ - د شمير پوهنې پښتو انگريزي ډکشنري

۲۵ - د شمير پوهنې پښتو ډکشنري د شمير پوهنيزو ويونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې ( دا هغه ليکنې دي، چې ځنې يې په نړيوال جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ - د افغانستان په هکله سپينې خبرې، چې وبه غزيرې.

نوري ليکنې، چې په ژباړه يې پيل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپريري:

د گروپونو تيوري

- د بسونځي لپاره فزيک د برينکمن ليکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دويم مسلک فزيک دی، دا ليکنې ژباړم. دا هم د دې ليکوال يوه ډېره بڼه ليکنه ده، چې د شميرپوهنې په څير- دلته هم زيات تمرينونه د حل يا اوبيوني سره په کې راغلي او ماته زيات گټور برېشي)

**Get more e-books from [www.ketabton.com](http://www.ketabton.com)  
Ketabton.com: The Digital Library**