د فرمولونو ټولګه

لیکونکی:

ډاکتر ماخان (میرزی) شینواری

Ketabton.com

2016

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فرمولونو ټولګه

راټولوونکی : ډاکتر ماخان میرزی شینواری

(c) ketabton.com: The Digital Library

سریزه: بې له سریزې

وینا سم اند یا - منطق **Aussagenlogik**

سم اندیزې تړنې

نخښه ونه	لیکنډول	وییندول
نه والی	$\neg A$	Aنه
د او تړنه	$A \wedge B$	AوB
د یا تړنه	$A \vee B$	Aیا B
ناورته والی(انتیوالتڅ)	$A \not\equiv B$	یا Aیا B
ترې لاس ته راتلنه	$A \Rightarrow B$	له A لاس ته راځي B
ورته والی	$A \Leftrightarrow B$	و ته ورته ده

لارې یا قوانین

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

د مورگان لار یا - قانون Morgansche Regeln

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

دېستریبوتیو قانو Distributivgesetze

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$A \vee \neg A = w \qquad A \wedge \neg A = f$$

نورقوانینweitere Regeln

$$A \vee w = w \qquad A \wedge w = A$$

$$A \vee f = A \qquad A \wedge f = f$$

کوانتورونه Quantoren   د شتون – یا موجودیت کوانتور: $\exists$ (لږ تر لږه یو...شته)

ټولکوانتور : $\forall$ (د ټولو ... لپاره)

(c) ketabton.com: The Digital Library

Mengen ډېرئ

د ډېريو کاروني يا - عمليېMengenoperationen

ټولنه: $A \cup B$

غوڅې يا تقاطع : $A \cap B$

$A \backslash B$

کمېنت يا تفريق:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

سيومتريک کمېنت :

قوانين

$$C \backslash (A \cap B) = (C \backslash A) \cup (C \backslash B)$$

د مورګان قانونMorgansche Regeln

$$C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

دېستربوتيوقانون Distributivgesetze

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

اړيکې

Relation $a \; R \; b \Leftrightarrow (a, b) \in R \subseteq A \times B$

$(a, a) \in R$

هنداريزې reflexiv:

$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

: سيومتريک symmetrisch:

$(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$

:انتي سيومتريک antisymmetrisch:

$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

ترانزيتيو يا پسې تلوني transitiv:

(c) ketabton.com: The Digital Library

:

توتال يا ټول

total: $(a,b) \in R \vee (b,a) \in R$

ورته يا اکويوالنت اړيکې : هنداريزې،سيومتريک اوترانزتيو

نيم نظم : هنداريزې، او ترانزيتيو

Äquivalenzrelation: reflexiv, symmetrisch und transitiv

Halbordnung: reflexiv, antisymmetrisch und transitiv

Kombinatorik کومبيناتوريک

د بينوم ضريبونه

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-1)k}$$

قوانين

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k\,, \quad n \geq 1$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}\,, \quad k < n$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{i}\,, \quad k > 0$$

کمبينيشنونه		mit Reihenfolge د پرلپسي لړئ سره	ohne Reihenfolge بې له پرلپسي لړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

	د تکرار سره	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
	بې له تکراره	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

کمپلکس یا ګډوله اعدا یا – ګڼونه komplexe Zahlen

Betrag ارزښت (مطلق)

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Argument(د x ارزښتونه) ارګومنت

$\sin\varphi = y/r$ او $\cos\varphi = x/r$

: Polarformقطبي بڼه

$$x + \mathrm{i}y = z = r\,e^{\mathrm{i}\varphi}$$

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
y	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$	**اویلر-مویورې**
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\|z_2\|^2}\, z_1\,\overline{z_2} = (r_1/r_2)\, e^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}$	وېش
$z^{1/n} = r^{1/n} e^{\mathrm{i}\varphi/n} e^{2\pi\mathrm{i}k/n}$	رېښه
$\|z-a\| = \|z-b\|$ $\|z-a\| = s\,\|z-b\| \Leftrightarrow \|z-w\| = r$ $w = \frac{1}{1-s^2}\,a - \frac{s^2}{1-s^2}\,b\,,\quad r = \frac{s}{\|1-s^2\|}\,\|b-a\|$	منځنی ولاړه یا –عمود ګردئ – یا دایر همساوات

(c) ketabton.com: The Digital Library

Vektoren وکتورونه

Betrag
ارزښت (مطلق)

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Dreiecksungleichung
درېګوډي نامساوات

$$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leq \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$$

Skalarprodukt
سکالار ضرب

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \cos\varphi$$

Vektorprodukt
وکتوري ضرب

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}, \quad \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\varphi$$

Grassmann-Identität
د ګرسمن کتمتوالی

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) \vec{b} - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \vec{a}$$

Lagrange-Identität
د لاګرانژ کتمتوالی

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$$

Spatprodukt
شپات ضرب

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$$

ځیوکلیکي – یا تل بیرته راګرځیدونی بدلون

zyklische Vertauschung:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right] = \left[\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right]$$

Vektor inوکتورونه په
$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$
ONB
کي

$$\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{u})\vec{u} + (\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{v} + (\vec{x} \cdot \vec{w})\vec{w}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Polarkoordinaten
قطبيکواوردیناتونه

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi\,, \qquad r \geq 0,\ \varphi \in (-\pi, \pi]$$

Zylinderkoordinaten
توته يي يا استووانه يي
کواوردیناتونه

$$x = \varrho\cos\varphi \qquad \varrho \geq 0$$

$$y = \varrho\sin\varphi \quad , \qquad \varphi \in (-\pi, \pi]$$

$$z = z \qquad z \in \mathbb{R}$$

Kugelkoordinaten
غونډوسکي يا غونډاري
کواوردیناتونه

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta \qquad r \geq 0$$

$$y = r\sin\varphi\sin\vartheta \quad , \qquad \varphi \in (-\pi, \pi]$$

$$z = r\cos\vartheta \qquad \vartheta \in [0, \pi]$$

(Autor: M. Reble)

Geraden und Ebenen کربني او سطحې (هوارې)

کربنهGerade

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{u}$$

د پارامتربنه :Parameterform

$$(\vec{x} - \vec{p}) \times \vec{u} = 0$$

مومتن يا لحضويبنهMomentenform:

سطحهEbene

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

: پارامتر بنه Parameterform

: $\vec{x} \cdot \vec{n} = h$ د هسېنورمال بنه Hesse-Normalform

Abstand Punkt-Gerade
واټن ټکی- کربنه

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Abstand windschiefer
واټن بادي ماېل

Geradenکرښه

$$d = \frac{|[(\vec{q}-\vec{p}), \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Abstand Punkt-Ebene
واټن ټکی- سطحه

$$d = |\vec{p} \cdot \vec{n} - h| / |\vec{n}|$$

لیکونکی : میبیل

Ellipse , Parabel, Hyperbel هګۍ(ایلیپس)، پارابول،های پارابل

ایلیپسي یا هګۍ: دوه سوزون تکو(نقطه محراق) ته واټن

$$F_{\pm} = (\pm f, 0)$$

konstant ثابت

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$$

$$r^2 = \frac{b^2}{1-(f/a)^2 \cos^2(\varphi)}$$

Parabelپارابول

یوه سوزون ټکي $F = (0, f)$ او وړون کرښې $g : y = -f$ ته برابر واټن

$$4fy = x^2$$

$$r = \frac{4f\,\sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi)}$$

هاپارابول : دوه سوزون ټکو ته کمښت یا تفریق

$$F_{\pm} = (\pm f, 0)$$

ثابت

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2$$

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

ليکونکی:م. ربل

(Autor: M. Reble)

Funktionen توابع يا څيرونه

Exponentialfunktion
اکسپوننشل تابع

$$y = b^x \Leftrightarrow x = \log_b y\,, \quad y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

$$b^x = e^{x \ln b}$$

Logarithmen
لوګاريتمونه

$$\ln 1 = 0\,, \quad \ln e = 1$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln(x^n) = n \ln x$$

$$\log_a y = \ln y / \ln a$$

Trigonometrische Funktionen
تريګونږمتريکي توابع

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

هایپارابول توابعHyperbelfunktionen

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

پرلپسي اولړئ**Folgen und Reihen**

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

پولي ته تلنه Konvergenz:

a د a_n پوله بلل کیږي:

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n$$

د پولي ته تلني نظم p Konvergenz-Ordnung:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$|a_{n+1} - a_n| \le c\,|a_n - a|^p$$

Cauchy-Kriterium
کوشي-قضیه

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,:\, \forall n, m > n_\varepsilon \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

د همغږیزوالي قضیه Monotonie-Kriterium: ر ابندي همغږیزې
پرلپسي پولي ته تلونکي دي.

د پرتلي قضیه Vergleichs-Kriterium:

$$c_n \to a \Rightarrow b_n \to a \quad \text{او} \quad a_n \le b_n \le c_n, \quad a_n \to a$$

ځانګړي پوله ارزښتونه

Spezielle Grenzwerte $(n \to \infty)$

$(1+\frac{a}{n})^n$	$\to$	e^a		$\sqrt[n]{n}$	$\to$	1	
$\sqrt[n]{a}$	$\to$	1	$(a > 0)$	$\sqrt[n]{n!}$	$\to$	∞	
$\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$	$\to$	$\frac{1}{e}$		$\frac{a^n}{n!}$	$\to$	0	
$\frac{n!}{n^n}$	$\to$	0		$\frac{n^k}{a^n}$	$\to$	0	$(a > 1)$
$a^n\, n^k$	$\to$	0	$(\lvert a\rvert < 1)$				

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

د لپاره اړینه قضیه

په لړیوکي پولي ته تلنه

$$\sum b_n \quad \text{او} \quad |a_n| < b_n$$

د مایورانت قضیه پولي ته ځي

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1$$

د وېش قضیه

$$\sqrt[n]{|a_n|} \le q < 1$$

د ریښي قضیه

$$a_n, b_n > 0,\; a_n/b_n \to c > 0$$

دپرتله کوني قضیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Rightarrow a_n, b_n$$

همغه یا برابرپولي ته د تلني حالت لري

د انتيګرال قضيه $a_n = f(n)$ او $f(x)$ همغږيزلوېدونکي دي

له دې لاس ته راځي $\Rightarrow \int_c^{\infty} f(x)\,dx$ او $\sum_n a_n$ همغه دپولي ته تلني حالت لري.

د لايبنيځ Leibniz قضيه : a_n اترنيري کيږي او $|a_n|$ همغږيزه صفرپرلېسي ده.

ځانګړې لړۍ

Spezielle Reihen

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (|x|<1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) \quad (|x|<1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \cos x$$

Harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$, konvergent für $\alpha > 1$, divergent für $\alpha \leq 1$

هارموني لړي د لپاره پولي ته ځي د لپاره پولط ته نه ځي یا پوله نه لري

(Autor: M. Reble)

Differentiationدفرنشيشن

Linearität
کرښيزوالی

$$(r\ f(x) + s\ g(x))' = r\ f'(x) + s\ g'(x)$$

Produktregel
د ضرب قانون

$$(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Quotientenregel
د وېش قانون

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$$

Kettenregel
ځنځيري قانون

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$$

Umkehrfunktion
معکوس تابع(په ځټ-)

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}\,, \quad y = f(x)$$

Logarithmische

$$f'(x) = f(x)\,(\ln f(x))'\,, \quad f(x) > 0$$

Ableitung

لوګاريتمي مشتق

Leibniz-Regel
د لايبنيڅ قانون

$$(f\,g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}\,g^{(k)}$$

غوره مشتقونه:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	x^n	$n\,x^{n-1}$
e^x	e^x	$\sin x$	$\cos x$
$a^x\ (a>0)$	$a^x \ln a$	$\cos x$	$-\sin x$
$\ln\lvert x\rvert$	$1/x$	$\tan x$	$1/\cos^2 x$
$\arcsin x\ (\lvert x\rvert<1)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\arccos x\ (\lvert x\rvert<1)$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\arctan x$	$1/(1+x^2)$	$\tanh x$	$1/\cosh^2 x$
$\operatorname{arsinh} x$	$1/\sqrt{1+x^2}$	$\operatorname{arcosh} x\ (x>1)$	$1/\sqrt{x^2-1}$
$\operatorname{artanh} x\ (\lvert x\rvert<1)$	$1/(1-x^2)$		

Mittelwertsatz

منځارزښت جمله

$$\exists c \in (a,b)\ :\ f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$$

Verallgemeinerter

Mittelwertsatz

(c) ketabton.com: The Digital Library

تولیزه منځ ارزښت قضیه

$$\exists c \in (a,b)\ :\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Regel von l'Hospital
د ل، پیتال قاعده

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ \left(\text{bei } \tfrac{0}{0} \text{ und } \tfrac{\infty}{\infty}\right)$$

Satz von Taylor
د تیلور جمله

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}$$

Newton-Verfahren

د نیوټن تلنلار

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Leibniz-Regel
د لا یبنیځ قانون

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x,t)\,dx + b'(t)\,f(b(t),t) - a'(t)\,f(a(t),t)$$

Extremum
افراطیت

Notwendig اړین :

$$f'(x) = 0$$

د مینیموم(مکسیموم) لپاره پوره کېدونکي شرطونه : ورزیا یا برعلاوه

$$f''(x) > 0\ (< 0)$$

Wendepunkt
اوړونتکی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f''(x) = 0$
: ; اړین Notwendig
$f'''(x) \neq 0$
پوره کېدونکي: ورزيات

(Autor: M. Reble)

Integration اینتیګرېشن

Hauptsatz
اصلي جمله

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

partielle Integration
توټه اینتیګرېشن

$$\int f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

Substitution
بدلون يا تعويض

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy\,, \qquad y = g(x)\,, dy = g'(x)dx$$

wichtige Substitutionen
غوره بدلونونه

$\sqrt{a^2 - x^2}$
Subst.: $x = a\sin t$

$\sqrt{a^2 + x^2}$
Subst.: $x = a\sinh t$

$R(\sin x, \cos x)$ Subst.: $t = \tan\frac{x}{2},\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

لومړنئ توابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^n\ (n \neq -1)$	$x^{n+1}/(n+1)$	$1/x$	$\ln\|x\|$
e^x	e^x	$\ln x$	$x \ln x - x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$		

ډکی یا حجم

څرخیدونی بدن یا –جسم: حرخون د x په محور:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

څرخون د y په محور (د f همغږیزچگیدونکي لپاره):

$$V = 2\pi \int_0^b x(f(b) - f(x))\, dx$$

د څرخیدوني بدن پوښ یا پورته سطحه

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

د لیندۍ اوږدوالس

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \quad L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

د ترایڅ قانون

$$\int_a^b f(x)\, dx = h\,(f(a)/2 + f(a+h) + \ldots + f(b-h) + f(b)/2) + R_h$$

$$R_h = -\frac{b-a}{12} f''(\xi)\, h^2, \quad \xi \in (a,b)$$

(Autor: M. Reble)

Grundlegende Strukturenبنسټیز جوړښتونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

گروپونه

اسوڅیاتیو قانون Assoziativgesetz:

$$a \diamond (b \diamond c) = (a \diamond b) \diamond c$$

Neutrales Element بې اغیزه توکی $a \diamond e = e \diamond a = a$:

معکوستوکی Inverses Element

$$a \diamond a^{-1} = a^{-1} \diamond a = e$$

د ابل گروپ

کموتاتیو قانون Kommutativ: $a \diamond b = b \diamond a$

بدن یا تن

$(K, +)$ ist abelsche Gruppe د ابل گروپ دب

$(K\backslash\{0\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe د ابل گروپ دی

دیستریبوتیو قانونDistributivgesetz:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

وکتورفضاVektorraum

$(V, +)$ په K د ابل گروپ

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$$

$$\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$$

$$(\lambda_1 \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$$

$$1 \cdot v = v$$

سکالار ضرب

$\langle v, v \rangle > 0$ د $v \neq 0$ لپاره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$

$$\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$$

$$\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$$

اورتوگونال بستونهorthogonale Basis :

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k\ ,\ c_k = \frac{\langle x, u_k\rangle}{\langle u_k, u_k\rangle}$$

$$|x|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 |u_k|^2$$

کوشي - شورڅ Cauchy-Schwarz

$$|\langle u, v\rangle| \leq |u||v|\ , |u| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

نورم Norm :

$$\|v\| > 0\ , v \neq 0$$

$$\|\lambda\, v\| = |\lambda|\ \|v\|$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

کربنيز تابع

حمعوالی Additivität :

$$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$$

$$L(\lambda v) = \lambda\, L(v)$$

هوموجينيتيHomogenität:

بيلد او کيرن Bild und Kern(پښتويي: ځيره يا عکس اوزړی)

Bild

بيلد يا عکس $(L) = \{w \in W\ :\ \exists v \in V$ له

$L(v) = w\}$

سره

کرن يا زړی

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\ker(L) = \{v \in V \ : \ L(v) = 0\}$$

dim V = dim ker(L) + dim Bild(L)

(Autor: M. Reble)

Matrizen ماتریکسونه

د ماتریکونو سضربMatrix-Multiplikation

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

$$A(BC) = (AB)C, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (AB)^* = B^*A^*$$

Kommutatorکموتاتور

$$[A, B] = AB - BA$$

رانګ Rang :د کرښیز خپلواکو(تابعو) لیک یا متو تعداد یا ګڼون

$$\text{Rang } A = \text{Rang } A^t$$

$$\text{Rang}\,(BAC) = \text{Rang}\,(A)$$, (B, C معکوسوړ invertierbar)

شپور Spur : د دیاګونا-یا دوهکونجتړو توکو زیاتون یا جمعه:

$$\text{Spur } A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

$$\text{Spur}\,(AB) = \text{Spur}\,(BA)$$

: hermitesch (symmetrisch)(سیمیک)هرمیتیک

$A^* = A$($A^t = A$)

فقط حقیقیایګن رزښتونه، (Orthonormalbasis) *ONB* د ایګن وکتورونو څخه شتون لري

یونیتار(اورتوګونال)

$A^* = A^{-1}$($A^t = A^{-1}$)

$$|\det A| = 1$$

،متي ONB جوړوي

نورمال

(c) ketabton.com: The Digital Library

normal

$$AA^* = A^*A$$

⇔ کيدونکې (وتر) دوهکونتړيیونيتار unitär diagonalisierbar

Drehmatrix
څرخونمتاريکس

$\det A = 1$ اوتوګونال او A

څرخونمحور و ايګن ارزښت 1 ته ايګنوکتور دی

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}\ A - 1)$$

څرخونکونجDrehwinkel:

Spiegelungهندارونه

$$E:\ d^t x = 0: \quad M = E - 2\,\frac{dd^t}{d^t d}$$

Ebene سطحه

$$G:\ x = \lambda v: \quad M = 2\,\frac{vv^t}{v^t v} - E$$

Gerade کرښه

Eigenwerte / -vektoren
ايګنوکتور ايګن ارزښت

$$Av = \lambda v\ ,\ v \neq 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

$$\sum \lambda_i = \mathrm{Spur}\, A\,, \quad \prod \lambda_i = \det A$$

A^t ايګن ارزښت λ لري

A^{-1} ای‌ګنوکتور v او ايګن ارزښت $1/\lambda$ لري

A^n ايګنوکتور v او ايګن ارزښت λ^n لري

$Q^{-1}AQ$ ايګنوکتور $Q^{-1}v$ او ايګن ارزښت λ لري

دوه کوجتړي کونه يا وتري کونه:

د ايګنارزښتونو لپاره : البر = هندسي . ډېرواروالی

$$B^{-1}AB = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

$B = (b_1, \ldots, b_n)$
د ايګنوکتورونو بنسټ

(c) ketabton.com: The Digital Library

جوردان- بنه:
بلوکوتري –یا دوهکونجړی ماتریکسBlockdiagonalmatrix

$$J = B^{-1}AB = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_m)$$

بلوکونه په دیاګونال ایګن ارزښت λ لري،
په پورته څنګیز دیاګونال کې 1
د ماتریکس توانونهMatrix-Potenzen

$$A = Q^{-1}JQ \Rightarrow A^n = Q^{-1}J^nQ$$

$$|\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow A^n \to 0$$

زینګولار ارزښت تجزیه کونه

$$U^*AV = \mathrm{diag}(s_1, s_2, \ldots), \quad U, V \text{ unitär}$$

زینګولار ارزښتونه

$$s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k > 0, \quad k = \mathrm{Rang}\, A$$

s_i د A^*A د ایګن ارزښت ریښې دي

د V متې د A^*A ایګن وکتورونه دي

د U متې د AA^* ایګن وکتورونه دي

(Autor: M. Reble)

دیترمینانتونه او کرښیز مساوات سیستم

Determinanten und lineare Gleichungssysteme

دیترميناتونه

$$\det A^t = \det A, \quad \det(AB) = \det A \det B$$

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}, \quad \det A^n = (\det A)^n$$

د دوه متو(لیکو) بدلېدنه مخ نخښه بدلوي.
د یو متې ډېرواره یوي بلې ته زیاتول دیترمینانت ته تغیر نه ورکوي

(c) ketabton.com: The Digital Library

وديزيينه:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \det \tilde{A}_{k,j}$$

ليکې پسې) k (ودسزينه د

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{i,l} \det \tilde{A}_{i,l}$$

متې پسې) l وديزينه د

$\det A = 0$ دی صفر ايګن ارزښت $\Leftrightarrow 0$

$Ax = b$ $\Leftrightarrow$ يواځنی حل نه لري

A $\Leftrightarrow$ پوره رانګ نه لري

A $\Leftrightarrow$ اينوارريانت نه دی

کرښيزمساوات سيستمونه: يا ټيک يو، هيڅ يا ناپای ډېر حلونه لري.

د ګاوس ترانسفرميشنونه: د کرښيزمساواتسيستم حلډېرئ د دوه مساواتو په بدلون تغير نه خوري.

$$r \neq 0$$

د يوه مساوات ضرب د سره.

د دوه مساواتو زياتون

د کرامرقاعده

$$x_i = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{\det(a_1, \ldots, a_n)}$$

برابروالي پرابلم

$$|Ax - b| \to \min \Leftrightarrow A^{t}Ax = A^{t}b$$

(Autor: M. Reble)

کوادريکونه Quadriken

شدله (پهبرخ) وېشنه

$$Q: \quad x^{t}Ax + 2b^{t}x + c = 0, \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & b^{t} \\ \hline b & A \end{array}\right)$$

$$\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A$$

مخروطي کوادريکونه:

$$\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 1$$

منځټکيکوادريکونه :

$$\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 2$$

پارابوليکي کوادريکونه:

$$Am = -b$$

منځټکی

نورمالې بڼې

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

د مخروطي کوادريکونو (ډبل)مخروط

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

غوڅوونکي سطحه

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

منځتکي کوادریکونه منځځای هایپرابول

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

یو پوښیز هاپرا بلویید

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

ایلیپسویید

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

هاپارابولیکه توته یا استوانه

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

ایلیپتیکي توته

$$-\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$$

غبرګپسطحې

پارابولیکیکوادریکونه

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2z = 0$$

ایلیپتیکي پارابولویید

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2z = 0$$

هاپربولیکي پارابولویید

$$\frac{x^2}{a^2} + 2y = 0$$

پارابولیکي توته یا حیولیندر

Differentiationدفرنځییشن

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{t}}$$

ګرادینت

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f' = \mathbf{J}\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

جاکوبي ماتریکس

$$\mathbf{H}\, f = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f & \cdots & \partial_1\partial_n f \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n\partial_1 f & \cdots & \partial_n\partial_n f \end{pmatrix}$$

هسسي ماتریکس

$$h(x) = g(y),\ y = f(x) : \quad h'(x) = g'(y)\ f'(x)$$

ځنځیري قانون

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha|\le n} \tfrac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x) h^\alpha + R$$

د تیلور ودیزینه

پاتي غړی $R = \sum_{|\alpha|=n+1} \tfrac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x+\theta h)h^\alpha$ د یوه $\theta \in [0,1]$ لپاره

نظم 2 :

$$f(x+h) = f(x) + (\mathrm{grad}\ f(x))^{\mathrm{t}}\ h + \tfrac{1}{2} h^t\,\mathbf{H}\, f(x) h + O(|h|^3)$$

تانجنتي سطحه

سطحه $f(x,y,z) = c$ همداسي $(u,v) \mapsto p(u,v)$

نورمالوکتور $n = \mathrm{grad}\ f$ همداسي $n = p_u \times p_v$

$$\partial_v f(x) = (\mathrm{grad}\ f)^{\mathrm{t}} v$$

لوریز مشتق

$$\det f_x(x_*, y_*) \neq 0 \Rightarrow f(x,y) = 0$$

ا یمأیخیت تابع د x پسي حل

معکوس تابع f لوکال معکوس کیدونکی دی، که $\det f'(x_0) \neq 0$ وي.

$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}\ ,\ y = f(x)$ د $x \approx x_0$ لپاره .

$$\mathrm{grad}\ f(x) = 0$$

کریتیکال ټکي

ایلیپتیش: د H ټول ایګنوارزښتونه همغه برابره مخنخښه لري

لوکال افراطیت ⟵

هاپارابولیک : ایګن ارزښتونه شته د مختلفومخنخښوسره

زینټکی ⟵

پارابولیش: لوترلږه یو ایګنارزښت صفر دی، او نور ټول ایګن ارزښتونه برابرې مخنخښې لري.

لاګرانژ ضرب

افراطي ارزښتونه x_* د فرعي شرایطو $g_i(x) = 0$ لاندې

$$\Rightarrow f'(x_*) = \lambda^{\mathrm{t}} g'(x_*)$$

د کون-تاکر Kuhn-Tucker شرطونه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

افراطي ارزښتونه x_* د فرعي شرطونو $g_i(x) \geq 0$ لاندې

$$\Rightarrow f'(x_*) = \lambda^t g'(x_*)\,, \quad \lambda^t g(x_*) = 0$$

مينيموم $\lambda_i \geq 0$ ، ما کسيموم $\lambda_i \leq 0$

(Autor: M. Reble)

اينت

اينتيګرالونه **Integration**

بدلون

$$\int\limits_U f(g(x))\,|\,\mathrm{det}g'(x)|\,dx = \int\limits_{g(U)} f(y)\,dy$$

دسطحې مسطح يا هدار توکې

کارتيزي کواورديناتونه: $dA = dxdy$

قطبي کواودينات : $dA = rdrd\varphi$

د ډکې يا حجم توکې

کارتيزي کواورديناتونه : $dV = dxdydz$

د کږې انتيګرال

$$\int\limits_C f = \int\limits_a^b f(c(t))\,|c'(t)|\,dt$$

د سطحئ توکې

پارامتري کونه : $dS = |s_u \times s_v|\,dudv$

تابع : $z(x,y):\; dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

د توتې پوښ: $dS = \varrho\, d\varphi dz$

د غونډاري سطحه: $dS = r^2 \sin\vartheta\, d\varphi d\vartheta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Schwerpunkt دروندېکی	$x_S = \frac{1}{m} \int\limits_V x \varrho(x)\, dV$
Trägheitsmoment بارتېکی	$I = \int\limits_V \mathrm{dist}(x,g)^2 \varrho(x)\, dV$
Hauptsatz اصلي جمله	$\int\limits_V \mathrm{grad}\, f = \int\limits_{\partial V} f n^\circ$
Greensche Integralformeln د ګرين امتيګرال بنه	$\int\limits_{\partial V} f\, \frac{\partial g}{\partial n} = \int\limits_V \mathrm{grad}\, f \cdot (\mathrm{grad}\, g)^{\mathrm{t}} + f\, \Delta g$

$$\int\limits_{\partial V} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n}\right) = \int\limits_V (f \Delta g - g \Delta f)$$

(Autor: Marcus Reble)

spezielle Differentialgleichungen ځانګي دفرنشل مساوات

د لومړئ درجي کربنيز دفرنشل مساوات
Lineare DGL 1. Ordnung

$$y' = p(x)\, y + q(x)$$

د P د p بن ستتابع او $y(x_0) = y_0 \;\Rightarrow\; c = y_0$ سره

$$y = y_p + y_h$$

$$y_h = c \exp\big(P(x) - P(x_0)\big)\,, \quad y_p = \int_{x_0}^{x} \exp\big(P(x) - P(s)\big)\, q(s)\, ds$$

د برنولي دبرنشل مساوات
Bernoulli DGL

$$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^k$$

$$u = y^{1-k}$$

بلون:

$$\frac{1}{1-k} u' = -p(x)\, u + q(x)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Separable DGL
سيپارابلي دم
$$y' = p(x)\,g(y)$$
د متحولو بيلول
$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int p(x)\,dx$$

هوموجين دف مساوات

$$y' = f(y/x)$$
$$xz(x) = y(x)$$
بدلون
$$z' = \frac{1}{x}\left(f(z) - z\right)$$

ټيک دف مساوات
$$y' = f(y/x)$$
دټيکوالي لپاره اړيموالی
$$p_y = q_x$$
$$p(x,y) + q(x,y)\,y' = 0$$
$$F(x,y) = c$$
ايمپليخيت حل
د $F_x = p$ او د $F_y = q$ سره حل

ثات ضريبونه
$$u'' + pu' + qu = 0$$

د کرکتريستيکي پولينوم صفرځايونه λ_1, λ_2
دوه حقيقي
$$u_h = a\exp(\lambda_1 t) + b\exp(\lambda_2 t)$$
يو ډبل
$$u_h = a\exp(\lambda t) + b\,t\exp(\lambda t)$$
کنجوګيري کمپلکس له $\lambda_{1,2} = \mu \pm \varrho\mathrm{i}$ سره

$$u_h = \exp(\mu t)\left(a\cos(\varrho t) + b\sin(\varrho t)\right)$$

کيداميفتي هارموني لړځيدني

(c) ketabton.com: The Digital Library

Gedämpfte harmonische Schwingung

$$u'' + 2ru' + \omega_0^2 u = c\,\cos(\omega t)$$

$$r^2 > \omega_0^2$$

قوي Dämpfung:

$$r^2 = \omega_0^2$$

کريتيکل Dämpfung:

$$r^2 < \omega_0^2$$

ضعيف Dämpfung :

$$u_p = \tilde{c}\cos(\omega t + \delta)$$

د

$$\tilde{c} = c/\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2r\omega)^2}$$

سره

$$\delta = \arg(\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\,2r\omega)$$

او

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2r^2$$

ريزونانڅ :

د پارتيکولار حلونو لپاره ځانګړي اينوونې

spezielle Ansätze für partikuläre Lösungen

نظم 1. Ordnung

$$y' = py + q(x)$$

$$q(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j \;\rightarrow\; y_p = \sum_{j=0}^{n} d_j x^j$$

$$q(x) = c\exp(\lambda x),\; \lambda \neq p \;\rightarrow\; y_p = \frac{c}{\lambda - p}\exp(\lambda x)$$

$$q(x) = c\exp(px) \;\rightarrow\; y_p = cx\exp(px)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$q(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) \;\; \rightarrow \;\; y_p = c\cos(\omega x) + d\sin(\omega x)$$

2. Ordnung . نظم

$$u'' + pu' + qu = f(t)$$

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j t^j \;\; \rightarrow \;\; u_p = \sum_{j=0}^{n} u_j t^j$$

، که وي

$p \neq 0$ ، $q \neq 0$

$$f(t) = \exp(\lambda t) \;\; \rightarrow \;\; u_p = c\exp(\lambda t)$$

و که وي

$$\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$$

که λ د کرکتریستیکي پولینوم یو ساده یعني یو (ډبل) صفرځای وي، باید c د ct (ct^2) په ځای کښیښنول شي.

$$f(t) = \exp(\alpha t)\left(a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)\right)$$

$$\rightarrow \;\; u_p = \exp(\alpha t)\left(c\sin(\omega t) + d\cos(\omega t)\right)$$

که $\alpha \pm \mathrm{i}\omega$ د کرکتریستیکي پولینوم صفرځایونه وي، باید u_p د t سره ضرب شي.

ټولیز:

د u_p ضریبونو ټاکل د په ځای ایښنوني له لاري

ټولیز حل دی $y = y_h + y_p$ همداسي

$$u = u_h + u_p$$

په ګډوله حالتونو کي د یوګونو حالتونو ایښوولو Superposition

Überlagerung د څپو یو په بل پرطوتل (فزیک، ماتماتیک)

(Autor: Joachim Wipper)

ټولیزه تیوري Allgemeine Theorie

د پیانو جمله

$$u' = f(t, u)\,, u(t_0) = u_0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

f
ناپرېکيدون کی: پيل ارزښت پرابلم لږ تر لږه يو ناپرېکيدونکی مشتقوړ حل لري.
f
ليپشيڅ ناپرېکيدونکی نسبت u ته: د پيل ارزښت پرابلم حل يراځنی دی.

پيکارد-ايترېشنPicard-Iteration

$$u^{\ell+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(\tau, u^{\ell}(\tau)\right)\, d\tau\,, \quad u^0(t) = u_0$$

د پيل شرايطو په واک کي والی

$$\left|v(t) - w(t)\right| \leq \left|v(t_0) - w(t_0)\right| \exp\left(L(t - t_0)\right)$$

f
د د ليپشيڅ – ثابتي L سره نسبت u ته.
د بني اړخ خپلواکوالی

$$u(t_0) = v(t_0) \qquad u' = f(t, u)\,, \quad v' = g(t, v)$$

سره د

$$\left|u(t) - v(t)\right| \leq \varepsilon(t - t_0) \exp\left(L(t - t_0)\right)$$

د

$$\varepsilon = \max_{(s,w)\in D} \left|f(s, w) - g(s, w)\right|$$

سره

د نظم ريدکشن Reduktion der Ordnung

$$u'' = f(u, u')$$

$$v\,\frac{dv}{du} = f(u, v) \qquad u' = v(u)$$

بدلون راکوي

ستابيليتي

$$u' = f(u)$$

u_*
کرېتيکل ټکی :

$$v = u - u_* \qquad v' = f'(u_*)\, v$$

کرښيزوالی: د سره

ستابيليتي :

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = u_*\,, u(0) \approx u_* \ \Leftarrow\ \mathrm{Re}\,\lambda_i < 0\ \forall\lambda_i$$

نه ستابيليتي

$$\Leftarrow\ \exists\lambda_i :\ \mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$$

λ_i $f'(u_*)$
د سره د ايگن رازښت

(Autoren: K. Höllig/M. Reble)

(c) ketabton.com: The Digital Library

کرښیز سیستمونه **Lineare Systeme**

ورونسکی – دیترمینانتونهWronski-Determinante

$$\Gamma' = A(t)\Gamma$$

$$(\det\Gamma)' = \operatorname{Spur} A(t)(\det\Gamma)\,, \quad \Gamma$$

بنسټیزه ماتریکس

د ثابتو وریېشن

$$u' = A(t)u + b(t)$$

$$c' = \Gamma^{-1}(t)\; b(t) \qquad u_p = \Gamma c$$

اینبوونه راکوي

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = \Gamma(t)\left[\Gamma(t_0)^{-1}u(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Gamma(s)^{-1}b(s)\,ds\right]$$

ثات ضریبونه

$$u'(t) = A\,u(t)$$

که v ایګنوکتورویو ایګن ارزښت λ ته، نو

$$u(t) = \exp(\lambda t)\,v$$

حل دی

کمپلکس ایګنارزښت و ایګنوکتور

$$\lambda = \sigma + \mathrm{i}\varrho$$

$$a + \mathrm{i}b$$

ته دی

$$\operatorname{Re}\big(\exp(\lambda t)\,v\big) = \exp(\sigma t)\big(a\cos(\varrho t) - b\sin(\varrho t)\big)$$

او

$$\operatorname{Im}\big(\exp(\lambda t)\,v\big) = \exp(\sigma t)\big(a\sin(\varrho t) + b\cos(\varrho t)\big)$$

حقیقی حل دی.

جوردان-بڼه

$$u'(t) = A\,u(t) + b(t)$$

$$v' = Jv + Q^{-1}b \qquad u = Qv \qquad Q^{-1}AQ = J$$

بدلون دا سیستم راکوي، چې سوکڅیسیو کمپوننت ډوله حل کیدی شي.

$$v_i' = \lambda_i v_i + (Q^{-1}b)_i$$

سره یوځای شوی یا سره نخلولی سیستم د دوه کونجتړي یا وتر J سره.

آویلر-دیرنخیالمساواتEuler-Differentialgleichung

$$a_n t^n u^{(n)} + \cdots + a_0 u = f(t)$$

$$v(s) \qquad t = e^s\,, \quad v(s) = u(t)$$

بدلون د لپاره کرښیز دفرنځیال مساسوات راکوي د د ثابت ضریبونو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

ستابیلیتي

$$u' = Au$$

ستابیل :
$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,\lambda_i < 0\ \forall\lambda_i$$

د (2×2) - ماتریکس لپاره:
$$\det A > 0 \wedge \mathrm{Spur} < 0$$

بباغیزه یا ناپیلی ستابیل: $u(t)$ بنده او پیل ارزښت شتون لري.

د کومم لپاره چي $|u(t)|$ د 0 په لور پولي ته نه ځي.

ایستابیل:
$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = \infty \Leftarrow \exists\lambda_i :\ \mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$$

لاپلاس- ترانسفورمیشن **Laplace-Transformation**

لاپلاس- ترانسفورمیشن	$U = \mathcal{L}u\,, \quad U(s) = \int\limits_0^\infty u(t)\exp(-st)\,dt$
معکوس- ترانسفورمیشن	$u(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{b-\mathrm{i}\infty}^{b+\mathrm{i}\infty} U(s)\exp(st)\,ds$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$au(t) + bv(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} aU(s) + bV(s)$	کربنیزوالی
$u^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n U(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \cdots - u^{(n-1)}(0)$ $t^n u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n U^{(n)}(s)$	دفرنځیشن
$\int\limits_0^t u(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{U(s)}{s}\,, \quad u(t)/t \xrightarrow{\mathcal{L}} \int\limits_s^\infty U(\tau)d\tau$	انتیګرېشن
$u(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \exp(-as)U(s)\,, \quad u(t) = 0\,\text{für}\; t < 0$ $\exp(at)u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s-a)$	راکښنه
$u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1-\exp(-Ts)} \int\limits_0^T u(t)\exp(-st)\,dt$	T - پریودیکي تابع
$u(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a}U(s/a)$	-سکاله کونه
$(u \star v)(t) = \int\limits_0^t u(\tau)\,v(t-\tau)\,d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)\,V(s)$	- غبرګونه

$u(t)$	$U(s)$	$u(t)$	$U(s)$	ځانګړې توارع
1	$1/s$	t^n	$n!/s^{n+1}$	
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$t^n\,e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	
$e^{-at}\,\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\,\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	

پیل ارزښت پرابلم $U/\Phi - u(0) = F$ د $\Phi(s) = 1/(s+p)$ سره
۱. درجه

$u' + pu = f\,,\; p \in \mathbb{R}$ د په څټ ترانسفورمیشن وروسته $u = \varphi \star f + u(0)\varphi$ د $\varphi = e^{-pt}$ سره

پیل ارزښت پرابلم
۲ . درجه

(c) ketabton.com: The Digital Library

Anfangswertproblem 1. Ordnung $u' + pu = f\ ,\ p \in \mathbb{R}$	$U/\Phi - u(0) = F$ mit $\Phi(s) = 1/(s+p)$ nach Rücktransformation $u = \varphi \star f + u(0)\varphi$ mit $\varphi = e^{-pt}$
Anfangswertproblem 2. Ordnung $u'' + pu' + qu = f\ ,\ p, q \in \mathbb{R}$	$U/\Phi - (s+p)u(0) - u'(0) = F$ mit $\Phi(s) = 1/(s^2 + ps + q)$ nach Rücktransformation $u = \varphi \star f + u(0)\varphi' + (u(0)p + u'(0))\varphi$ $\lambda \neq \varrho$ Nullstellen von $1/\Phi \Rightarrow \varphi = (e^{\lambda t} - e^{\varrho t})/(\lambda - \varrho)$ λ doppelte Nullstelle von $1/\Phi \Rightarrow \varphi = te^{\lambda t}$

Sturm-Liouville-Probleme د شتورم-ليوويل –پرابلم

د ځان سره اديونګيري

$$Lu = -(pu')' + qu$$

دفرنشل اوپراتور

ترانفروميشن په ځانسره اديونګيري بڼې

$$au'' + bu' + cu = f\ ,\ a(x) \neq 0$$

صرب له $-p/a$ سره راکوي $-(pu')' + qu = g$ د لاندې سره

$$p(x) = \exp\left(\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx\right)$$

$$q(x) = -c(x)p(x)/a(x)$$

$$g(x) = -f(x)p(x)/a(x)\,.$$

آيګنارزښت پرابلم

$$L\psi = \lambda\varrho\psi$$

د ژئ شرطونو سره

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\alpha_0\psi(a)+\alpha_1\psi'(a)=0\,,\ \beta_0\psi(b)+\beta_1\psi'(b)=0$$

ψ
آيګن تابع بلل کيږي، ايګن ارزښت

پخپله اديونګيري ايګن ارزښت پرابلمونه
ايګن ارزښونه حقيقي دي
همغهيا برابر ايګا ارزښت ته ايګت وابع کرښيز بلواک دي

مختلفو ايګن ارزښتونو ته ايګن توابع ϱ -اورتوګونالدي
ايګن ارزښتونه په کلکخ همغږيزه پرلپسي
$\lambda_1<\lambda_2<\ldots$

جوړوي

دفرنځيشن **Differentiation**

ګرادينت

$$\operatorname{grad}U=(\partial_xU,\partial_yU,\partial_zU)^{\mathrm{t}}$$

$$\operatorname{grad}\vec F=(\operatorname{grad}F_x,\operatorname{grad}F_y,\operatorname{grad}F_z)^{\mathrm{t}}$$

$$\operatorname{div}\vec F=\partial_xF_x+\partial_yF_y+\partial_zF_z$$

ديورګنت(پولي ته نه تلنه)

ځرخونRotation

$$\operatorname{rot}\vec F=\begin{pmatrix}\partial_yF_z-\partial_zF_y\\ \partial_zF_x-\partial_xF_z\\ \partial_xF_y-\partial_yF_x\end{pmatrix}$$

$$\left(\operatorname{rot}\vec F\right)_i=\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\,\partial_jF_k$$

$$\operatorname{rot}\vec F=\partial_xF_y-\partial_yF_x$$

په همدې توګه

لاپاس -اوپراتورLaplace-Operator

$$\Delta U=\operatorname{div}(\operatorname{grad}U)=\partial_x^2U+\partial_y^2U+\partial_z^2U$$

شميرقوانين   ټول اوپراتورونه کرښيز دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, U) = \vec{0}$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \vec{F}) = 0$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, \vec{F}) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\, \vec{F}) - \Delta \vec{F}$$

$$\mathrm{grad}(U\, V) = U\ \mathrm{grad}\, V + V\ \mathrm{grad}\, U$$

$$\mathrm{grad}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\mathrm{grad}\, \vec{F})^{\mathrm{t}} \vec{G} + (\mathrm{grad}\, \vec{G})^{\mathrm{t}} \vec{F}$$

$$\mathrm{div}(U \vec{F}) = U\ \mathrm{div}\, \vec{F} + \vec{F} \cdot \mathrm{grad}\, U$$

$$\mathrm{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{F} - \vec{F} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{G}$$

$$\mathrm{rot}(U \vec{F}) = U\ \mathrm{rot}\, \vec{F} - \vec{F} \times \mathrm{grad}\, U$$

توته- یا استوانه کواوردیناتونه (پروتولاړ ارزښتونه)

$$(x, y, z) = (\varrho \cos\varphi, \varrho \sin\varphi, z)\,,\ \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U(x, y, z) = \Phi(\varrho, \varphi, z)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = \Psi_\varrho\, \vec{e}_\varrho + \Psi_\varphi\, \vec{e}_\varphi + \Psi_z\, \vec{e}_z$$

$$\mathrm{grad}\, U = \partial_\varrho \Phi \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi + \partial_z \Phi \vec{e}_z$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Delta U = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho\partial_\varrho\Phi) + \frac{1}{\varrho^2}\partial_\varphi^2\Phi + \partial_z^2\Phi$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho\Psi_\varrho) + \frac{1}{\varrho}\partial_\varphi\Psi_\varphi + \partial_z\Psi_z$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \Big(\frac{1}{\varrho}\partial_\varphi\Psi_z - \partial_z\Psi_\varphi\Big)\vec{e}_\varrho + (\partial_z\Psi_\varrho - \partial_\varrho\Psi_z)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\varrho}\Big(\partial_\varrho(\varrho\Psi_\varphi) - \partial_\varphi\Psi_\varrho\Big)\vec{e}_z$$

اکسیال سیمتریک ورشوګانط یا پټي Axialsymmetrische Felder

Φ همداسي Ψ د $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$ په واک کي دي

$$\operatorname{grad}\Phi = \partial_\varrho\Phi\vec{e}_\varrho$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho\partial_\varrho\Phi)$$

$$\operatorname{div}(\Psi\vec{e}_\varrho) = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho\Psi)$$

$$\operatorname{rot}(\Psi\vec{e}_\varrho) = \vec{0}$$

$$\operatorname{div}(\Psi\vec{e}_\varphi) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\Psi\vec{e}_\varphi) = \frac{1}{\varrho}\,\partial_\varrho(\varrho\Psi)\,\vec{e}_z$$

د غونډوسکي یا کري کواوردیناتونه Kugelkoordinaten

$$(x,y,z) = (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\,,\ \varphi\in[0,2\pi)\,,\ \vartheta\in[0,\pi]$$

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\vartheta\\ \sin\varphi\sin\vartheta\\ \cos\vartheta\end{pmatrix},\ \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\vartheta\\ \sin\varphi\cos\vartheta\\ -\sin\vartheta\end{pmatrix},\ \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$U(x,y,z) = \Phi(r,\vartheta,\varphi)$$

$$\vec{F}(x,y,z) = \Psi_r\,\vec{e}_r + \Psi_\vartheta\,\vec{e}_\vartheta + \Psi_\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

$$\operatorname{grad} U = \partial_r\Phi\vec{e}_r + \frac{1}{r}\partial_\vartheta\Phi\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi\Phi\vec{e}_\varphi$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\Phi) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\partial_\varphi^2\Phi + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta\partial_\vartheta\Phi)$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\Psi_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi\Psi_\varphi + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta\Psi_\vartheta)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{F} = &\frac{1}{r\sin\vartheta}\big(\partial_\vartheta(\sin\vartheta\Psi_\varphi) - \partial_\varphi\Psi_\vartheta\big)\vec{e}_r\\ &+\frac{1}{r\sin\vartheta}\big(\partial_\varphi\Psi_r - \sin\vartheta\partial_r(r\Psi_\varphi)\big)\vec{e}_\vartheta\\ &+\frac{1}{r}\big(\partial_r(r\Psi_\vartheta) - \partial_\vartheta\Psi_r\big)\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

راديال سيمتريكي ورشوګاني Radialsymmetrische Felder

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Φ همداسي Ψ د فقط د په واک کي دي

$$\operatorname{grad}\Phi = \partial_r\Phi\vec{e}_r$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\Phi)$$

$$\operatorname{div}(\Psi\vec{e}_r) = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\Psi)$$

$$\operatorname{rot}(\Psi\vec{e}_r) = \vec{0}$$

(Autor: Marcus Reble)

انتيګرالونه **Integration**

پارامتريک کونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$C:\ [a,b] \ni t \mapsto \vec{r}\,(t)$$

Kurve کږه

$$S:\ D \ni (u,v) \mapsto \vec{r}\,(u,v)$$

Fläche سطحه

Kurvenintegral د کږې انتيګرال

$$\int\limits_C U = \int\limits_a^b U\big(\vec{r}\,(t)\big)\,|\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

Arbeitsintegral د کارانتيګرال

$$\int\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_a^b \vec{F}\big(\vec{r}\,(t)\big)\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$$

د سطحي انيګرال

Flächenintegral

$$\iint\limits_S U\,dS = \iint\limits_D U\big(\vec{r}(u,v)\big)|\vec{n}(u,v)|\,du\,dv\,,\quad \vec{n} = \partial_u\vec{r}\times\partial_v\vec{r}$$

Flussintegral
جريان انتيګرال

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_D \vec{F}\big(\vec{r}(u,v)\big)\cdot\vec{n}(u,v)\,du\,dv\,,\quad \vec{n} = \partial_u\vec{r}\times\partial_v\vec{r}$$

Fluss durch Funktionsgraph
جريان له
فنکشنګراف څخه

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_D -F_x\partial_x f - F_y\partial_y f + F_z\,dx\,dy\,,\quad z = f(x,y)$$

Fluss durch Zylindermantel
جريان له توتي
پوښ څخه

$$\varrho = \varrho(\varphi):\quad \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho\varrho - F_\varphi\partial_\varphi\varrho\,dz\,d\varphi$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\varrho = \varrho(z): \quad \int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho \varrho - F_z \varrho \partial_z \varrho \, dz \, d\varphi$$

خانګړی $2\pi a(z_{\max} - z_{\min}) f(a)$ د لپاره $\vec{F} = f(\varrho)\vec{e}_\varrho$ د $\varrho = a$ سره

Fluss durch Kugeloberfläche

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F_r a^2 \sin\vartheta \, d\varphi d\vartheta$$

mit $r = a$

speziell $4\pi a^2 f(a)$ für $\vec{F} = f(r)\vec{e}_r$

vektorielle

Kurvenintegrale وکتوري

ګږي انتيګرالونه

$$\int_C \vec{F} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \, |\vec{r}\,'(t)| \, dt = \left(\int_C F_x \,, \int_C F_y \,, \int_C F_z \right)^{\mathrm{t}}$$

$$\int_C \vec{F} \times d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \times \vec{r}\,'(t) \, dt = \begin{pmatrix} \int_C (F_y \, dz - F_z \, dy) \\ \int_C (F_z \, dx - F_x \, dz) \\ \int_C (F_x \, dy - F_y \, dx) \end{pmatrix}$$

vektorielle

Flächenintegrale

وکتوري سطحي انتيګرالونه

$$\iint_S \vec{F} dS = \left(\iint_S F_x \, dS \,, \iint_S F_y \, dS \,, \iint_S F_z \, dS \right)^{\mathrm{t}}$$

$$\iint_S U d\vec{S} = \iint_S U(\vec{r}\,) \, \vec{n}^\circ \, dS$$

$$\iint_S \vec{F} \times d\vec{S} = \iint_S \vec{F}(\vec{r}\,) \times \vec{n}^\circ \, dS$$

د ګاوس جمله

(c) ketabton.com: The Digital Library

Satz von Gauß

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$\iiint\limits_V \operatorname{grad} U\, dV = \iint\limits_S U\, d\vec{S}$$

$$\iiint\limits_V \operatorname{rot} \vec{F}\, dV = -\iint\limits_S \vec{F} \times d\vec{S}$$

$$\iint\limits_A \operatorname{div} \vec{F}\, dA = \int\limits_C \vec{F} \times d\vec{r}\,, \quad A \subset \mathbb{R}^2$$

د ګري Griesche انټيګرال فرمولونه

Griesche Integralformeln

$$\iint\limits_S (U \operatorname{grad} W) \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_V \big(\operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} W + U \Delta W\big)\, dV$$

$$\iint\limits_S \big(U \operatorname{grad} W - W \operatorname{grad} U\big) \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_V (U \Delta W - W \Delta U)\, dV$$

د ستوکس جمله

Satz von Stokes

$$\iint\limits_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$-\iint\limits_S (\operatorname{grad} U) \times d\vec{S} = \int\limits_C U\, d\vec{r}$$

$$\iint\limits_A \operatorname{rot} \vec{F}\, dA = \int\limits_C \vec{F} \cdot\, d\vec{r}\,, \quad A \subset \mathbb{R}^2$$

سکالار پوتنشل

(c) ketabton.com: The Digital Library

Skalares Potential

$$\operatorname{grad} U = \vec{F}$$

د U سکلار ورشو سره

د شتون له پاره اړيين شرطونه

notwendige Bedingung für Existenz: $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$,

په يوه ساده سره اړوند ورشو باندې پوره کيدونکي

hinreichend auf einfach zusammenhängenden Gebieten D

C خوښه، په کې له ځخه د په لور ځغليدونکي لار

C ein beliebiger, in D von A nach B verlaufender Weg:

د انتيګرال د لارې خپلواکوالی

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A) \Rightarrow$$

Wegunabhängigkeit des Integrals

Vektorpotential

وکتوررشو يا پټیVektorfeld $\vec{A}$ mit $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{F}$

د شتون له پاره اړيين شرطونه

notwendige Bedingung für Existenz: $\operatorname{div} \vec{F} = 0$,

په يوه ساده سره اړوند ورشو باندې پوره کيدونکي

hinreichend auf einfach zusammenhängenden Gebieten

Grundfunktionen بنستيز توابع

]

Komplexe Funktion ګډوله توابع

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)\,, \quad z = x + \mathrm{i}y = re^{\mathrm{i}\varphi}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Möbius-Transformation

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \quad f^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$$

Geraden / Kreise werden auf Geraden / Kreise abgebildet

کرښې همداسې دايرې(گردی) په کرښو همداسې په گرديو تنظميږي

Festlegung durch drei Punkte (z_i, w_i) : د درې ټکو له لارې کره کيدنه

$$\frac{w-w_2}{w-w_3} : \frac{w_1-w_2}{w_1-w_3} = \frac{z-z_2}{z-z_3} : \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$$

Exponentialfunktion

$$e^z = e^x\,(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

Komplexer Logarithmus

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln r + \mathrm{i}(\varphi + 2\pi k)\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Potenzfunktion

$$z^{p/q} = r^{p/q}\,\exp\left(p(\varphi + 2\pi j)\mathrm{i}/q\right), \quad j = 0, \ldots, q-1$$

komplexe Differenzierbarkeit und konforme Abbildungen

Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

f komplex differenzierbar:

$$f'(z) = f_x(z) = -\mathrm{i} f_y(z) \quad \Leftrightarrow \quad u_x = v_y\,, \quad u_y = -v_x$$

$$\Rightarrow \Delta u = \Delta v = 0$$

konjugiert harmonische Funktion

$\Delta u = 0$ auf D einfach zusammenhängend

$\Rightarrow \exists v : \Delta v = 0$ und $f = u + \mathrm{i}v$ komplex differenzierbar

Isotropie

Abbildung $z \mapsto w(z)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

und Winkeltreue

dreht Richtungen um Winkel $\arg f'(z)$

streckt Längen um Faktor $|f'(z)|$

Orthogonalität krummliniger Gitter bleibt erhalten

elementare Abbildungen
خيره وني يا تابعګاني

خيره ونه يا تابع Abbildung	له مخه خيره يا – تابع Urbild	حيره يا تابعBild
$w = z^\alpha$	Sektor $0 < \arg z < \gamma$	Sektor $0 < \arg w < \gamma\alpha$
$w = \dfrac{z+1}{\mathrm{i}z - \mathrm{i}}$ $\Leftrightarrow \quad z = \dfrac{\mathrm{i}w+1}{\mathrm{i}w-1}$	Einheitskreisscheibe یونګردی کتره یا ټوټه $\lvert z\rvert < 1$	obere Halbebene پورتنی نیمهواره $\mathrm{Im}\, w > 0$
$w = e^z$ $\Leftrightarrow \quad z = \mathrm{Ln}\, w$	Streifen $0 < \mathrm{Im}\, z < \gamma$ كربني	برخهSektor $0 < \arg w < \gamma$

Integration

Kurvenintegral

$$\int_C f\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt\,, \quad C : t \mapsto z(t)\,,\ t \in [a,b]$$

Stammfunktion f im Gebiet D komplex differenzierbar, C ein in D verlaufender Weg von z_0 nach z_1 :

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_C f'\,dz = f(z_1) - f(z_0) = [f]_{z_0}^{z_1}$$

Singularitäten

schwache Singularität: $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$

Pol n-ter Ordnung: $|z-a|^{n-1}|f(z)| \to \infty$ für $z \to a$, $(z-a)^n f(z)$ beschränkt für $z \to a$

wesentliche Singularität: $(z-a)^n f(z)$ für kein n beschränkt

Cauchys Theorem

f analytisch in D bis auf endlich viele schwache Singularitäten, $C \subset D$ geschlossene Kurve, homotop zu einem Punkt:

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

Cauchysche Integralformel

f analytisch, $n(C,z)$ Umlaufzahl von C bzgl. z:

$$n(C,z)f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Integralformel für

Ableitungen

f analytisch, $n(C,z)$ =1:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Mittelwerteigenschaft

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{\mathrm{i}t})\, dt$$

Maximumprinzip

$$\max_{z \in D} |f(z)| \le \max_{z \in \partial D} |f(z)|$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

Residuenkalkül

Residuum

f analytisch in $D \setminus \{a\}$,

$C \subset D$ entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufener Kreis um a

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \operatorname*{Res}_{a} f = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C f(z)\, dz$$

einfache Polstelle: $\operatorname*{Res}_{a} f = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$

Pol n-ter Ordnung:

$$\operatorname*{Res}_{a} f = \lim_{z \to a} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} \left((z-a)^n f(z)\right)$$

Residuensatz

C entgegen dem Uhrzeigersinn orientierter Rand eines beschränkten Gebietes D, a_j Singularitäten von f in D:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi \mathrm{i} \sum_j \operatorname*{Res}_{a_j} f$$

Trigonometrische Integranden	$\int_0^{2\pi} r(\cos t, \sin t)\,dt$ geht mit der Substitution $z = e^{\mathrm{i}t}$ über in $$\int_{\lvert z\rvert=1} f(z)\,dz\,, \quad f(z) = r\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{\mathrm{i}z}$$
Rationale Integranden	f rational ohne reelle Polstellen, Zählergrad mindestens um 2 kleiner als Nennergrad: $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}\,a>0} \operatorname*{Res}_a f$$
Transzendente Integranden	f rational ohne reelle Polstellen, Zählergrad kleiner als Nennergrad: $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\,dx = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\mathrm{Im}\,a>0} \operatorname*{Res}_a \left(f(z)e^{\mathrm{i}\lambda z}\right)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$
Algebraische Integranden	f rational ohne Polstellen auf der positiven reellen Achse, höchstens einfacher Pol bei 0, Zählergrad mindestens um 2 kleiner als Nennergrad: $$\int_0^{\infty} f(x)x^{\alpha}\,dx = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-e^{2\pi\mathrm{i}\alpha}} \sum_{a\neq 0} \operatorname*{Res}_a \left(f(z)z^{\alpha}\right)\,, \quad 0<\alpha<1$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

(c) ketabton.com: The Digital Library

automatisch erstellt am 31.1.2006

Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Komplexe Analysis

Potenzreihen

[vorangehende Seite] [nachfolgende Seite] [Gesamtverzeichnis][Seitenübersicht]

Taylor-Polynom

$$p_n(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(z-a)^j$$

Restglied:

$$f(z) - p_n(z) = \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}(w-z)}\, dw \right)(z-a)^{n+1}$$

Taylor-Reihe

f analytisch in $D:\ |z-a| < r$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

,

Konvergenzradius r: Abstand zur nächsten Singularität

$$r = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

Laurent-Reihe

f analytisch in $D:\ r_1 < |z-a| < r_2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad , \quad c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw$$

Konvergenzgebiet: maximaler Kreisring um a ohne Singularitäten, r_1, r_2: Abstand der begrenzenden Singularitäten zu a

$$r_1 = \overline{\lim_{n\to-\infty}} |c_n|^{-1/n} \quad , \quad r_2 = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

Differentialgleichungen

Regulärer Punkt

Die Differentialgleichung

$$r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$$

ist bei a regulär, wenn q/r und p/r analytisch in einer Umgebung von a sind.

Entwicklung: $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n (z-a)^n$

Rekursion: $u_n = f_n(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_0)\,,\ n \geq 2$

mit durch Anfangsbedingungen $u_0 = u(a)$ und $u_1 = u'(a)$ eindeutig bestimmten Koeffizienten u_n

(c) ketabton.com: The Digital Library

Singulärer Punkt

Die Differentialgleichung $r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$ hat bei a einen regulären singulären Punkt, wenn $q/r = q_0/(z-a) + O(1)$ und $p/r = p_0/(z-a)^2 + O(1/(z-a))$.

Charakteristische Gleichung: $\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + q_0\lambda + p_0 = 0$

Entwicklung: $u = (z-a)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n (z-a)^n, \; u_0 \neq 0$

Rekursion: $\varphi(\lambda + n)u_n = f_n(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_0), \; n \geq 1$

Differenz der Nullstellen ganzzahlig: eine Lösung zur Nullstelle mit größtem Realteil, zweite Lösung mit Variation der Konstanten

Hypergeometrische Differentialgleichung

$$z(1-z)u''(z) + (c - (a+b+1)z)u'(z) - abu(z) = 0,$$

$$-c \notin \mathbb{N}_0$$

$$u(z) = F(a,b,c,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} z^n, \quad (t)_n = t(t+1)\cdots(t+n-1)$$

Bessel-Differentialgleichung

$$z^2u''(z) + zu'(z) + (z^2 - \alpha^2)u(z) = 0, \; \alpha \notin \mathbb{Z}$$

linear unabhängige Lösungen:

$$J_{\pm\alpha} = \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\pm\alpha + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

(c) ketabton.com: The Digital Library

Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Fourier-Analysis

Fourier-Reihen

[vorangehende Seite] [nachfolgende Seite] [Gesamtverzeichnis][Seitenübersicht]

Reelle Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$$ mit

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt\,, \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt\,, \quad k \geq 1$$

Komplexe Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$ mit $$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$$

شمیربدلون د فوریي ضریبونو له پاره
Umrechnungsformeln für Fourier-Koeffizienten

$$a_0 = 2c_0\,, \quad a_k = c_k + c_{-k}\,, \quad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) \quad \text{für } k \geq 1$$

$$c_0 = a_0/2\,, \quad c_k = (a_k - \mathrm{i}b_k)/2\,, \quad c_{-k} = (a_k + \mathrm{i}b_k)/2 \quad \text{für } k \geq 1$$

سیموترSymmetrien

f gerade:

$$b_k = 0, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt, \quad c_k = c_{-k}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

f ungerade:

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt, \quad c_k = -c_{-k}$$

سکالار ضربSkalarprodukt نورم, Norm

$$\langle f, g\rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

, $$\|f\|_{2\pi}^2 = \langle f, f\rangle_{2\pi}$$

Fourier-Projektion فوريي برپوستون

$$(p_n f)(x) = \sum_{|k|\le n} \langle f, e^{ikt}\rangle_{2\pi} e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left((n+1/2)(x-t)\right)}{\sin\left((x-t)/2\right)}\, f(t)\,dt$$

Konvergenzrate د پولي ته تلني کچه

$$\|f - p_n f\|_{2\pi} \le (n+1)^{-k}\, \|f^{(k)}\|_{2\pi}$$

برزيول-ورته والیParseval-Identität

$$\|f\|_{2\pi}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$$

$$= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

Diskrete Fourier-Transformation

د فوريي ماتريکسونهFourier-Matrizen

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$W_n = \begin{pmatrix} w_n^{0\cdot 0} & \cdots & w_n^{0\cdot(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{(n-1)\cdot 0} & \cdots & w_n^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{pmatrix}, \quad w_n = \exp(2\pi \mathrm{i}/n)$$

$$(W_n)^{-1} = \frac{1}{n}\, W_n^*$$

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Diskrete Fourier-Transformation

$$f = W_n c \;\Leftrightarrow\; f_j = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{jk}\, c_k\,, \quad j = 0, \ldots, n-1$$

Inverse diskrete Fourier-Transformation

$$c = \frac{1}{n} W_n^* f \;\Leftrightarrow\; c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} w_n^{-kj}\, f_j\,, \quad k = 0, \ldots, n-1$$

Fourier-Transformation

Fourier-Transformation

$$\widehat{f} = \mathcal{F} f, \quad \widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-\mathrm{i}xy}\, dx$$

Inverse Fourier-Transformation

$$f = \mathcal{F}^{-1} \widehat{f}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)\, e^{\mathrm{i}xy}\, dy$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترانسفورمیشن لاري یا قوانین Transformationsregeln

Linearitätکرښیزوالی

$$af(x) + bg(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} a\widehat{f}(y) + b\widehat{g}(y)$$

Symmetrie سیومتري

$$\widehat{f}(y) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-x)$$

Konjugation

$$\overline{f}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \overline{\widehat{f}(-y)}$$

Skalierung

$$f(ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y/a)/|a|$$

Verschiebung

$$f(x-a) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\mathrm{i}ay}\widehat{f}(y)$$

$$e^{\mathrm{i}ax}f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y-a)$$

Differentiation

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (\mathrm{i}y)^n\widehat{f}(y)$$

$$(-\mathrm{i}x)^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \left(\frac{d}{dy}\right)^n \widehat{f}(y)$$

Faltung

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau)g(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y)\,\widehat{g}(y)$$

$$f(x)\,g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y-\tau)\widehat{g}(\tau)\,d\tau$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Spezielle Funktionen

f	$\widehat{f}$
1	$2\pi\,\delta(y)$
1 für $x \in [-a, a]$, 0 sonst	$2a\,\mathrm{sinc}(ay)$
$\mathrm{sign}(x)$	$2/(\mathrm{i}y)$
$e^{-a\|x\|}$	$2a/(a^2+y^2)$
e^{-ax^2}	$\sqrt{\pi/a}\,e^{-y^2/(4a)}$

د پلانشرل جمله Satz von Plancherel

$$2\pi\langle f, g\rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle\,,\;\; \sqrt{2\pi}\|f\| = \|\widehat{f}\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)|^2\,dy\right)^{1/2}$$

Poisson-Summationsformel

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(2\pi l)$$

Heisenbergs Unschärfeprinzip

$$\|xf\|\,\|y\widehat{f}\| \geq \frac{1}{2}\|f\|\,\|\widehat{f}\|$$

Rekonstruktionssatz

Hat f Bandbreite h, d.h. $\widehat{f}(y) = 0$ für $|y| > h$, dann gilt

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j\pi/h)\,\mathrm{sinc}(hx - j\pi)\,.$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Multivariate Fourier-Transformation

Fourier-Transformation	$\widehat{f} = \mathcal{F} f, \quad \widehat{f}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\mathrm{i} y^{\mathrm{t}} x}\, dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$
Inverse Fourier-Transformation	$f = \mathcal{F}^{-1} \widehat{f}, \quad f(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{\mathrm{i} y^{\mathrm{t}} x}\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$

Transformationsregeln

Linearität	$a f(x) + b g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} a \widehat{f}(y) + b \widehat{g}(y)$
Symmetrie	$\widehat{f}(y) \xrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi)^n f(-x)$
Transformation	$f(Ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \lvert \det(A) \rvert^{-1} \widehat{f}((A^{-1})^{\mathrm{t}} y), \quad \det(A) \neq 0$
Verschiebung	$f(x - v) \xrightarrow{\mathcal{F}} \exp(-\mathrm{i} v^{\mathrm{t}} y) \widehat{f}(y)$ $\exp(\mathrm{i} v^{\mathrm{t}} x) f \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y - v)$
Differentiation	$\partial^\alpha f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{i}^{\lvert\alpha\rvert} y^\alpha \widehat{f}(y), \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $x^\alpha f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{i}^{\lvert\alpha\rvert} \partial^\alpha \widehat{f}(y)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

Faltung

$$(f \star g)(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y)\widehat{g}(y)$$

Spezielle Funktionen

f	$\widehat{f}$
1 für $x \in [-a,a]^n$, 0 sonst	$(2a)^n \operatorname{sinc}(ay_1) \cdots \operatorname{sinc}(ay_n)$
$\exp(-\|x\|)$	$\dfrac{2^n \pi^{(n-1)/2} \Gamma((n+1)/2)}{(1+\|y\|^2)^{(n+1)/2}}$
$\exp(-\|x\|^2/2)$	$(2\pi)^{n/2} e^{-\|y\|^2/2}$

Norminvarianz

$$(2\pi)^{n/2}\|f\| = \|\widehat{f}\| = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(y)|^2 \, dy \right)^{1/2}$$

د ډاکتر ماخان شینواري چاپ شوي او ناچاپ ليکنې:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

(c) ketabton.com: The Digital Library

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندي د شمیرپوهنی پښتوټول کتابونه په المان کي د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دریم: د شمیرپوهني ستر کتاب : د شمیرپوهني برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کي چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځني ځایونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: ځمککچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کي شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنستونه دي)

(c) ketabton.com: The Digital Library

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې   انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنځیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل   دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،،

له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میرې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په ۲۰۱۲ کې چاپ شوې.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

١ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

٢ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

٣ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ١

٧ – انالیزې ٢

٨ – کرښیز الجبر

٩ - د شمیرپوهنې بنسټونه

١٠ - د فرمولونو ټولګه

١١ – فنکشنل انالیز

(c) ketabton.com: The Digital Library

۱۲ – وکتور شمیرنه

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکني

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسي د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی:

د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + درې ډکشنري

(c) ketabton.com: The Digital Library

۲۴ ــ د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ ــ د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویيونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ ــ د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

ــ د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي).

د اوم څخه تر دولسم ټولګي پورې د شمیرپوهنې کتابونه، چې لنډ وخت کې به ن ج ته پورته شي.

د دولسم ټولګي کتاب په درې،چې دا به هم زرترزره ن ج ته پورته شي.

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library