# د فرمولونو ټولګه

لیکونکی:

ډاکتر ماخان (میرزی ) شینواری



2016

# د فرمولونو ټولګه

راټولوونکی :        ډاکتر ماخان میرزی شینواری

سریزه: بې له سریزې

# وینا سم اند یا - منطق **Aussagenlogik**

## سم اندیزې تړنې

| ویینډول | لیکنډول | نخښه ونه |
|---|---|---|
| | $\overline{\quad\quad}$ | |
| نهA | $\neg A$ | نه والی |
| AاوB | $A \wedge B$ | د او تړنه |
| Aیا B | $A \vee B$ | د یا تړنه |
| یا Aیا B | $A \not\equiv B$ | ناورته والی(انتیوالتڅ) |
| له A لاس ته راځي B | $A \Rightarrow B$ | تړې لاس ته راتلنه |
| و ته ورته ده | $A \Leftrightarrow B$ | ورته والی |

لارې یا قوانین

$$\neg (A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

Morgansche Regeln د مورګان لار یا - قانون

$$\neg (A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

Distributivgesetze دېستريبوتيو قانو

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$A \vee \neg A = w \qquad A \wedge \neg A = f$$

weitere Regeln نورقوانین

$$A \vee w = w \qquad A \wedge w = A$$

$$A \vee f = A \qquad A \wedge f = f$$

کوانتورونه Quantoren د شتون – یا موجودیت کوانتور: $\exists$ ( لږ تر لږه یو...شته)

ټولکوانتور : $\forall$ ( د ټولو ... لپاره)

# Mengen ډېرئ

د ډېريو کاروني يا - عمليیMengenoperationen

ټولنه: $A \cup B$

غوڅی یا تقاطع : $A \cap B$

$A \backslash B$
کمبنت یا تفریق:

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
سیومتریک کمبنت :

قوانین

$$C \backslash (A \cap B) = (C \backslash A) \cup (C \backslash B)$$

د مورگان قانونMorgansche Regeln

$$C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

دیستربوتیوقانون Distributivgesetze

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

اړيکي

Relation $a\ R\ b \Leftrightarrow (a, b) \in R \subseteq A \times B$

$(a, a) \in R$
هنداریزی reflexiv:

$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$
: سیومتریک symmetrisch:

$(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$
:انتي سیومتریک antisymmetrisch:

$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$
ترانزیتیو یا پسې تلوني transitiv:

:

توتال یا ټول

total: $(a,b) \in R \vee (b,a) \in R$

ورته یا اکویوالنت اړیکي : هنداریزې،سیومتریک اوترانزتیو

نیم نظم : هنداریزې، او ترانزیتیو

Äquivalenzrelation: reflexiv, symmetrisch und transitiv

Halbordnung: reflexiv, antisymmetrisch und transitiv

# Kombinatorik کومبیناتوریک

د بینوم ضریبونه

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-1)k}$$

قوانین

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k\,, \quad n \geq 1$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}\,, \quad k < n$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{i}\,, \quad k > 0$$

| کمبینیشنونه | | mit Reihenfolge<br>د پرلپسي لړئ سره | ohne Reihenfolge<br>بی له پرلپسي لړئ |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\binom{n+k-1}{k}$ | $n^k$ | د تکرار سره | |
| $\binom{n}{k}$ | $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ | بې له تکراره | |

# کمپلکس یا ګډوله اعدا یا – ګڼونه komplexe Zahlen

(مطلق) ارزښت Betrag

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ارګومنت ( د x ارزښتونه)Argument

$\sin\varphi = y/r$ او $\cos\varphi = x/r$

قطبي بڼهPolarform :

$$x + \mathrm{i}y = z = r\,e^{\mathrm{i}\varphi}$$

| $\varphi$ | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $1/2$ | 0 |
| $y$ | 0 | $1/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 |

| | |
|---|---|
| **اويلر-مويورې** | $e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ |
| وېش | $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\|z_2\|^2}\, z_1\,\overline{z_2} = (r_1/r_2)\, e^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}$ |
| رېښه | $z^{1/n} = r^{1/n} e^{\mathrm{i}\varphi/n} e^{2\pi\mathrm{i}k/n}$ |
| منځنی ولاړه یا –عمود | $\|z-a\| = \|z-b\|$ |
| ګردۍ – یا دایر همساوات | $\|z-a\| = s\,\|z-b\| \Leftrightarrow \|z-w\| = r$<br>$w = \frac{1}{1-s^2}\,a - \frac{s^2}{1-s^2}\,b\,,\quad r = \frac{s}{\|1-s^2\|}\,\|b-a\|$ |

# Vektoren وکتورونه

Betrag
(مطلق) ارزښت

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Dreiecksungleichung
درېګوډي نامساوات

$$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leq \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$$

Skalarprodukt
سکالار ضرب

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \cos\varphi$$

Vektorprodukt
وکتوري ضرب

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}, \quad \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\varphi$$

Grassmann-Identität
د ګرسمن کټمټوالی

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a}$$

Lagrange-Identität
د لاګرانژ کټمټوالی

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Spatprodukt
شپات ضرب

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

ځیوکلیکي – یا تل بیرته راګرځیدونی بدلون

zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

Vektor inوکتورونه په
$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$
ONB
کې

$$\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{u})\vec{u} + (\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{v} + (\vec{x} \cdot \vec{w})\vec{w}$$

Polarkoordinaten
قطبيکواوردیناتونه

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi\,,\qquad r \geq 0\,,\ \varphi \in (-\pi,\pi]$$

Zylinderkoordinaten
توته يي يا استووانه يي
کواوردیناتونه

$$x = \varrho\cos\varphi \qquad \varrho \geq 0$$

$$y = \varrho\sin\varphi \quad , \qquad \varphi \in (-\pi,\pi]$$

$$z = z \qquad z \in \mathbb{R}$$

Kugelkoordinaten
غونډوسکي يا غونډاري
کواوردیناتونه

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta \qquad r \geq 0$$

$$y = r\sin\varphi\sin\vartheta \quad , \qquad \varphi \in (-\pi,\pi]$$

$$z = r\cos\vartheta \qquad \vartheta \in [0,\pi]$$

(Autor: M. Reble)

# Geraden und Ebenen (هوارې) کرښې او سطحې

کرښهGerade

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{u}$$

د پارامتربنه: Parameterform

$$(\vec{x} - \vec{p}) \times \vec{u} = 0$$

مومنتن يا لحضويبنهMomentenform:

سطحهEbene

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

: پارامتر بنه Parameterform

: $\vec{x}\cdot\vec{n} = h$ د هسېنورمال بنه Hesse-Normalform

Abstand Punkt-Gerade
واټن ټکی- کرښه

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Abstand windschiefer
واټن بادي ماټل

Gerادenکرښه

$$d = \frac{|[(\vec{q}-\vec{p}),\vec{u},\vec{v}]|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$$

Abstand Punkt-Ebene
واټن ټکی- سطحه

$$d = |\vec{p}\cdot\vec{n} - h|/|\vec{n}|$$

ليکونکی : ميبيل

# Ellipse , Parabel, Hyperbel هګۍ(ايليپس)، پارابول،های پارابل

ايليپسي يا هګی: دوه سوزون ټکو(نقطه محراق) ته واټن

$$F_\pm = (\pm f, 0)$$

*konstant* ثابت

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad b^2=a^2-f^2$$

$$r^2 = \frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2(\varphi)}$$

Parabelپارابول

يوه سوزون ټکي $F = (0, f)$ او وړون کرښي $g : y = -f$ ته برابر واټن

$$4fy = x^2$$

$$r = \frac{4f\,\sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi)}$$

هاپارابول : دوه سوزون ټکو ته کمښت يا تفريق

$$F_\pm = (\pm f, 0)$$

ثابت

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2$$

$$r^2 = -\frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2\varphi}$$

ليکونکی:م. ربل

(Autor: M. Reble)

# Funktionen توابع يا ځيرونه

Exponentialfunktion
اکسپوننشل تابع

$$y = b^x \Leftrightarrow x = \log_b y\,, \quad y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

$$b^x = e^{x \ln b}$$

Logarithmen
لوگاريتمونه

$$\ln 1 = 0\,, \quad \ln e = 1$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln(x^n) = n \ln x$$

$$\log_a y = \ln y / \ln a$$

Trigonometrische Funktionen
تريگونړمتريکي توابع

| $x$ | 0 | $\pi/6$ | $\pi/4$ | $\pi/3$ | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | 1 |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\tan x$ | 0 | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - |

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

هایپاربول توابعHyperbelfunktionen

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

## **Folgen und Reihen**پرلپسي اولړئ

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \,:\, \forall n > n_\varepsilon \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

پولي ته تلنه Konvergenz:

$a$ د $a_n$ پوله بلل کيږي:

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n$$

د پولي ته تلني نظم $p$ Konvergenz-Ordnung:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq c\,|a_n - a|^p$$

Cauchy-Kriterium
کوشي-قضيه

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_\varepsilon \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

د همغږيزوالي قضيه Monotonie-Kriterium: ر ابندي همغږيزې پرلپسي پولي ته تلونکي دي.

د پرتلي قضيه Vergleichs-Kriterium:

$$c_n \to a \Rightarrow b_n \to a \quad a_n \leq b_n \leq c_n, \quad a_n \to a$$
او

ځانګړي پوله ارزښتونه

Spezielle Grenzwerte $(n \to \infty)$

$$\begin{array}{rcll|rcll} (1+\frac{a}{n})^n & \to & e^a & & \sqrt[n]{n} & \to & 1 & \\ \sqrt[n]{a} & \to & 1 & (a>0) & \sqrt[n]{n!} & \to & \infty & \\ \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} & \to & \frac{1}{e} & & \frac{a^n}{n!} & \to & 0 & \\ \frac{n!}{n^n} & \to & 0 & & \frac{n^k}{a^n} & \to & 0 & (a>1) \\ a^n\, n^k & \to & 0 & (|a|<1) & & & & \end{array}$$

د $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ لپاره اړينه قضيه

په لړيوکي پولي ته تلنه

د مايورانت قضيه $|a_n| < b_n$ او $\sum b_n$ پولي ته ځي

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$$
د وېش قضيه

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$$
د ريښي قضيه

$$a_n, b_n > 0,\ a_n/b_n \to c > 0$$
دپرتله کوني قضيه

$$\Rightarrow a_n, b_n$$

همغه یا برابرپولي ته د تلني حالت لري

د انتیګرال قضیه $a_n = f(n)$ او $f(x)$ همغږیزلوېدونکي دي

له دې لاس ته راځي $\Rightarrow \int_c^\infty f(x)\,dx$ او $\sum_n a_n$ همغه دپولي ته تلني حالت لري.

د لایبنیځ Leibniz قضیه : $a_n$ اترنیري کیږي او $|a_n|$ همغږیزه صفرپرلپسي ده.

ځانګړي لړئ

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Spezielle Reihen | $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ | $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ |
| | $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ | $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad (\lvert x\rvert < 1)$ |
| | $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ | $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) \quad (\lvert x\rvert < 1)$ |
| | $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x$ | $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \cos x$ |

Harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, konvergent für $\alpha > 1$, divergent für $\alpha \le 1$

هارموني لړي د لپاره پولي ته ځي د لپاره پولط ته نه ځي یا پوله نه لري

(Autor: M. Reble)

# Differentiationدفرنشیشن

Linearität
کرښیزوالی

$$(r\,f(x) + s\,g(x))' = r\,f'(x) + s\,g'(x)$$

Produktregel
د ضرب قانون

$$(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$$

Quotientenregel
د وېش قانون

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$$

Kettenregel
ځنځيري قانون

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$$

Umkehrfunktion
معکوس تابع(په ځتې-)

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}\,, \quad y = f(x)$$

Logarithmische

$$f'(x) = f(x)\,(\ln f(x))'\,, \quad f(x) > 0$$

Ableitung

لوګاريتمي مشتق

Leibniz-Regel
د لايبنيڅ  قانون

$$(f\,g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}\,g^{(k)}$$

غوره مشتقونه:

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|---|
| $c$ | $0$ | $x^n$ | $n\,x^{n-1}$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\sin x$ | $\cos x$ |
| $a^x\ (a>0)$ | $a^x \ln a$ | $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\ln\lvert x\rvert$ | $1/x$ | $\tan x$ | $1/\cos^2 x$ |
| $\arcsin x\ (\lvert x\rvert<1)$ | $1/\sqrt{1-x^2}$ | $\sinh x$ | $\cosh x$ |
| $\arccos x\ (\lvert x\rvert<1)$ | $-1/\sqrt{1-x^2}$ | $\cosh x$ | $\sinh x$ |
| $\arctan x$ | $1/(1+x^2)$ | $\tanh x$ | $1/\cosh^2 x$ |
| $\operatorname{arsinh} x$ | $1/\sqrt{1+x^2}$ | $\operatorname{arcosh} x\ (x>1)$ | $1/\sqrt{x^2-1}$ |
| $\operatorname{artanh} x\ (\lvert x\rvert<1)$ | $1/(1-x^2)$ | | |

Mittelwertsatz

منځارزښت جمله

$$\exists c \in (a,b)\ :\ f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$$

Verallgemeinerter

Mittelwertsatz

تولیزه منځ ارزښت قضیه

$$\exists c \in (a,b) \;:\; \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Regel von l'Hospital
د ل، پیتال قاعده

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \; \left(\text{bei } \tfrac{0}{0} \text{ und } \tfrac{\infty}{\infty}\right)$$

Satz von Taylor
د تیلور جمله

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}$$

Newton-Verfahren

د نیوټن تلنلار

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Leibniz-Regel
د لا یبنیځ قانون

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x,t)\,dx + b'(t)\,f(b(t),t) - a'(t)\,f(a(t),t)$$

Extremum
افراطیت

Notwendig اړین :

$$f'(x) = 0$$

د مینیموم(مکسیموم) لپاره پوره کېدونکي شرطونه : ورزیا یا برعلاوه

$$f''(x) > 0\ (< 0)$$

Wendepunkt
اوړونټکی

$f''(x) = 0$
: ; اړین Notwendig
$f'''(x) \neq 0$
پوره کېدونکي: ورزيات

(Autor: M. Reble)

# Integration اینتیګرېشن

Hauptsatz
اصلي جمله

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

partielle Integration
توټه اینتیګرېشن

$$\int f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

Substitution
بدلون یا تعویض

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy\,, \qquad y = g(x)\,, dy = g'(x)dx$$

wichtige Substitutionen
غوره بدلونونه

$\sqrt{a^2 - x^2}$
Subst.: $x = a\sin t$

$\sqrt{a^2 + x^2}$
Subst.: $x = a\sinh t$

$R(\sin x, \cos x)$ Subst.: $t = \tan\frac{x}{2},\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

لومړنۍ توابع

Stammfunktionen

| $f(x)$ | $F(x)$ | $f(x)$ | $F(x)$ |
|---|---|---|---|
| $x^n\ (n \neq -1)$ | $x^{n+1}/(n+1)$ | $1/x$ | $\ln\lvert x\rvert$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\ln x$ | $x \ln x - x$ |
| $\sin x$ | $-\cos x$ | $\cos x$ | $\sin x$ |
| $\tan x$ | $-\ln(\cos x)$ | $\frac{1}{1+x^2}$ | $\arctan x$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\arcsin x$ | | |

ډکی یا حجم

څرخیدونی بدن یا ـجسم: حرخون د $x$ په محور:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

څرخون د $y$ په محور ( د $f$ همغږیزچګیدونکي لپاره):

$$V = 2\pi \int_0^b x(f(b) - f(x))\, dx$$

د څرخیدوني بدن پوښ یا پورته سطحه

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

د لیندۍ اوږدوالس

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \quad L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

د ترا پیځ قا نون

$$\int_a^b f(x)\, dx = h\,(f(a)/2 + f(a+h) + \ldots + f(b-h) + f(b)/2) + R_h$$

$$R_h = -\frac{b-a}{12} f''(\xi)\, h^2, \quad \xi \in (a, b)$$

(Autor: M. Reble)

# Grundlegende Strukturen بنسټیز جوړښتونه

## ګروپونه

اسوښیاتیو قانون Assoziativgesetz:

$$a \diamond (b \diamond c) = (a \diamond b) \diamond c$$

بې اغیزه توکی Neutrales Element : $a \diamond e = e \diamond a = a$

معکوستوکی Inverses Element

$$a \diamond a^{-1} = a^{-1} \diamond a = e$$

د ابل ګروپ

کموتاتیو قانون Kommutativ: $a \diamond b = b \diamond a$

بدن یا تن

$(K, +)$ د ابل ګروپ دب ist abelsche Gruppe

$(K \setminus \{0\}, \cdot)$ د ابل ګروپ دی ist abelsche Gruppe

دیستریبوتیو قانون Distributivgesetz:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

وکتورفضا Vektorraum

$(V, +)$ په $K$ د ابل ګروپ

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$$

$$\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$$

$$(\lambda_1 \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$$

$$1 \cdot v = v$$

سکالار ضرب

$v \neq 0$ لپاره د $\langle v, v \rangle > 0$

$$\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$$

$$\langle \lambda u,v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$$

$$\langle u+v,w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$$

اورتوګونال بستونهorthogonale Basis :

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k\ ,\ c_k = \frac{\langle x,u_k\rangle}{\langle u_k,u_k\rangle}$$

$$|x|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 |u_k|^2$$

کوشي - شورځ Cauchy-Schwarz

$$|\langle u,v\rangle| \leq |u||v|\ , |u| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$$

نورم Norm :

$$\|v\| > 0\ ,\ v \neq 0$$

$$\|\lambda\, v\| = |\lambda|\ \|v\|$$

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

کربنيز تابع

حمعوالی Additivität :

$$L(v_1+v_2) = L(v_1) + L(v_2)$$

$$L(\lambda v) = \lambda\, L(v)$$

هوموجينيتيHomogenität:

بيلد او کيرن Bild und Kern(پښتويي: خيره يا عکس اوزړى)

Bild

له $(L) = \{w \in W\ :\ \exists v \in V$ بيلد يا عکس

$L(v) = w\}$

سره

کرن يا زړى

$$\ker(L) = \{v \in V \ : \ L(v) = 0\}$$

dim $V$ = dim ker( $L$ ) + dim Bild( $L$ )

(Autor: M. Reble)

# Matrizen ماتریکسونه

د ماتریکونو سضربMatrix-Multiplikation

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

$$A(BC) = (AB)C, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (AB)^* = B^* A^*$$

Kommutatorکموتاتور

$$[A, B] = AB - BA$$

رانګ Rang :د کرښیز خپلواکو(تابعو) لیک یا متو تعداد یا ګڼون

$$\text{Rang } A = \text{Rang } A^{t}$$

$$\text{Rang}\,(BAC) = \text{Rang}\,(A) \quad , \quad (B, C \text{ معکوسوړ invertierbar})$$

شپور Spur : د دیاګونا-یا دوهکونجتړو توکو زیاتون یا جمعه:

$$\text{Spur } A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

$$\text{Spur }(AB) = \text{Spur }(BA)$$

: hermitesch (symmetrisch)(سیمیک) هرمیتیک

$$A^* = A \quad (A^{t} = A)$$

فقط حقیقیایګن رزښتونه، (Orthonormalbasis) *ONB* د ایګن وکتورونو څخه شتون لري

یونیتار(اورتوګونال)

$$A^* = A^{-1} \quad (A^{t} = A^{-1})$$

$$|\det A| = 1$$

،متي ONB جوړوي

نورمال

normal

$$AA^* = A^*A$$

⇔ يونيتار دوهکونتړي(وتر) کيدونکيunitär diagonalisierbar

Drehmatrix
څرخونمتاريکس

$\det A = 1$ اوتوګونال اوA

څرخونمحور و ايګن ارزښت 1 ته ايګنوکتور دی

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}(\mathrm{Spur}\ A - 1)$$

څرخونکونجDrehwinkel:

Spiegelungهندارونه

$$E:\ d^t x = 0: \quad M = E - 2\,\frac{dd^t}{d^t d}$$

Ebene سطحه

$$G:\ x = \lambda v: \quad M = 2\,\frac{vv^t}{v^t v} - E$$

Gerade کرښه

Eigenwerte / -vektoren
ايګنوکتور ايګن ارزښت

$$Av = \lambda v\,,\ v \neq 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

$$\sum \lambda_i = \mathrm{Spur}\,A\,, \quad \prod \lambda_i = \det A$$

$A^t$ ايګن ارزښت $\lambda$ لري

$A^{-1}$ ایګنوکتور $v$ او ايګن ارزښت $1/\lambda$ لري

$A^n$ ايګنوکتور $v$ او ايګن ارزښت $\lambda^n$ لري

$Q^{-1}AQ$ ايګنوکتور $Q^{-1}v$ او ايګن ارزښت $\lambda$ لري

دوه کوچنړي کونه يا وتري کونه:

د ايګنارزښتونو لپاره : الجبر = هندسي . ډيروارالی

$$B^{-1}AB = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

$B = (b_1, \ldots, b_n)$ د ايګنوکتورونو بنسټ

جوردان- بنه:
بلوکوتري –یا دوهکونجړی ماتریکسBlockdiagonalmatrix

$J = B^{-1}AB = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_m)$

بلوکونه په دیاګونال ایګن ارزښت $\lambda$ لري،
$1$ په پورته څنګیز دیاګونال کي
د ماتریکس توانونهMatrix-Potenzen

$$A = Q^{-1}JQ \Rightarrow A^n = Q^{-1}J^nQ$$

$$|\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow A^n \to 0$$

زینګولار ارزښت تجزیه کونه

$$U^*AV = \mathrm{diag}(s_1, s_2, \ldots) \;, \quad U,\, V \text{ unitär}$$

زینګولار ارزښتونه

$$s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k > 0 \;, \quad k = \mathrm{Rang}\, A$$

$s_i$ د $A^*A$ د ایګن ارزښت ریښي دي

د $V$ متي د $A^*A$ ایګن وکتورونه دي

د $U$ متي د $AA^*$ ایګن وکتورونه دي

(Autor: M. Reble)

## دیترمینانتونه او کرښیز مساوات سیستم

# Determinanten und lineare Gleichungssysteme

## دیترمیناتونه

$$\det A^t = \det A\,, \quad \det(AB) = \det A \det B$$

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1} \;, \quad \det A^n = (\det A)^n$$

د دوه متو( لیکو) بدلېدنه مخ نخښه بدلوي.
د یو متي ډېرواره یوي بلې ته زیاتول دیترمینانت ته تغیر نه ورکوي

ودیزیینه:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \det \tilde{A}_{k,j}$$

لیکي پسي) $k$ ( ودسزینه د

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{i,l} \det \tilde{A}_{i,l}$$

متې پسي) $l$ ودیزینه د

$\det A = 0$ دی ارزښت ایگن صفر $\Leftrightarrow 0$

یواځنی حل نه لري $\Leftrightarrow Ax = b$

$A$ $\Leftrightarrow$ پوره رانګ نه لري

$\Leftrightarrow A$ اینواریانت نه دی

کرښیزمساوات سیستمونه: یا ییک یو، هیڅ یا ناپای ډېر حلونه لري.

د ګاوس ترانسفرمیشنونه: د کرښیزمساواتسیستم حلډېرئ د دوه مساواتو په بدلون تغیر نه خوري.

$$r \neq 0$$

د یوه مساوات ضرب د سره.

د دوه مساواتو زیاتون

د کرامرقاعده

$$x_i = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{\det(a_1, \ldots, a_n)}$$

برابروالي پرابلم

$$|Ax - b| \to \min \Leftrightarrow A^{\mathrm{t}}Ax = A^{\mathrm{t}}b$$

(Autor: M. Reble)

# کوادریکونه **Quadriken**

شدله (پهبرخ) وپشنه

$$Q: \quad x^{\mathrm{t}}Ax + 2b^{\mathrm{t}}x + c = 0\,, \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & b^{\mathrm{t}} \\ \hline b & A \end{array}\right)$$

$$\mathrm{Rang}\,\tilde{A} = \mathrm{Rang}\,A$$

مخروطي کوادریکونه:

$$\mathrm{Rang}\,\tilde{A} = \mathrm{Rang}\,A + 1$$

منځتکيکوادریکونه :

$$\mathrm{Rang}\,\tilde{A} = \mathrm{Rang}\,A + 2$$

پارابولیکي کوادریکونه:

$$Am = -b$$

منځتکی

نورمالې بنې

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

د مخروطي کوادریکونو (ډبل)مخروط

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

غوڅوونکي سطحه

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

منځتکي کوادريکونه منځځای هاپيرابول

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

يو پوښيز هاپرا بلوييد

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

ايليپسوييد

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

هاپارابوليکه توته يا استوانه

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

ايليپتيکي توته

$$-\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$$

غبرګېسطحي

پارابوليکيکوادريکونه

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2z = 0$$

ايليپتيکي پارابولوييد

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2z = 0$$

هاپربوليکي پارابولوييد

$$\frac{x^2}{a^2} + 2y = 0$$

پارابوليکي توته يا حيولیندر

## **Differentiation**دفرنځييشن

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{t}$$

ګرادينت

$$f' = \mathbf{J}\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

جاکوبي ماتريکس

$$\mathbf{H}\, f = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f & \cdots & \partial_1\partial_n f \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n\partial_1 f & \cdots & \partial_n\partial_n f \end{pmatrix}$$

هسسي ماتريکس

$$h(x) = g(y),\ y = f(x) : \quad h'(x) = g'(y)\ f'(x)$$

ځتزيري قانون

$$f(x+h) = \textstyle\sum_{|\alpha|\le n} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x) h^\alpha + R$$

د تيلور وديزينه

پاتې غړی د يوه $R = \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x+\theta h)h^\alpha$ لپاره $\theta \in [0,1]$

نظم 2 :

$$f(x+h) = f(x) + (\mathrm{grad}\ f(x))^{\mathrm{t}}\, h + \tfrac{1}{2} h^t\, \mathbf{H}\, f(x) h + O(|h|^3)$$

تانجنتي سطحه

سطحه $f(x,y,z) = c$ همداسي $(u,v) \mapsto p(u,v)$

نورمالوکتور $n = \mathrm{grad}\ f$ همداسي $n = p_u \times p_v$

$$\partial_v f(x) = (\mathrm{grad}\ f)^{\mathrm{t}} v$$

لوريز مشتق

$$\det f_x(x_*, y_*) \neq 0 \Rightarrow f(x,y) = 0$$

ا يمأيخيت تابع د $x$ پسي حل

معکوس تابع $f$ لوکال معکوس کيدونکی دی، که $\det f'(x_0) \neq 0$ وي.

$$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}\ ,\ y = f(x)$$

د $x \approx x_0$ لپاره .

$$\mathrm{grad}\ f(x) = 0$$

کريتيکال ټکي

ايليپتيش: د $H$ ټول ايګنوارزښتونه همغه برابره مخنخښنه لري

لوکال افراطيت ⟶

هاپارابوليک : ايګن ارزښتونه شته د مختلفومخنخښنوسره

زينتېکی ⟶

پارابوليش: لوترلږه يو ايګنارزښت صفر دی، او نور ټول ايګن ارزښتونه برابرې مخنخښني لري.

لاګرانژ ضرب

افراطي ارزښتونه $x_*$ د فرعي شرايطو $g_i(x) = 0$ لاندې

$$\Rightarrow\ f'(x_*) = \lambda^{\mathrm{t}} g'(x_*)$$

د کون-تاکر Kuhn-Tucker شرطونه:

افراطي ارزښتونه $x_*$ د فرعي شرطونو $g_i(x) \geq 0$ لاندې

$$\Rightarrow f'(x_*) = \lambda^t g'(x_*)\,, \quad \lambda^t g(x_*) = 0$$

مينيموم $\lambda_i \geq 0$ ، ماکسيموم $\lambda_i \leq 0$

(Autor: M. Reble)

اينت

# اينتيګرالونه Integration

بدلون

$$\int_U f(g(x))\,|\,\mathrm{det} g'(x)|\,dx = \int_{g(U)} f(y)\,dy$$

دسطحي مسطح يا هدار توکي

کارتيزي کواوردیناتونه:

$$dA = dxdy$$

قطبي کواودينات :

$$dA = r dr d\varphi$$

د ډکي يا حجم توکي

کارتيزي کواوردیناتونه :

$$dV = dxdydz$$

د کږې انتيګرال

$$\int_C f = \int_a^b f(c(t))\,|c'(t)|\,dt$$

د سطحئ توکي

پارامتري کونه :

$$dS = |s_u \times s_v|\,dudv$$

تابع :

$$z(x,y):\; dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy$$

د توتي پوښ:

$$dS = \varrho\, d\varphi dz$$

د غونډاري سطحه:

$$dS = r^2 \sin\vartheta\, d\varphi d\vartheta$$

| | |
|---|---|
| Schwerpunkt<br>دروندټکی | $x_S = \frac{1}{m} \int\limits_V x \varrho(x)\, dV$ |
| Trägheitsmoment<br>بارټکی | $I = \int\limits_V \mathrm{dist}(x,g)^2 \varrho(x)\, dV$ |
| Hauptsatz<br>اصلي جمله | $\int\limits_V \mathrm{grad}\, f = \int\limits_{\partial V} f n^\circ$ |
| Greensche Integralformeln<br>د گرین امتیګرال بنه | $\int\limits_{\partial V} f \frac{\partial g}{\partial n} = \int\limits_V \mathrm{grad}\, f \cdot (\mathrm{grad}\, g)^{\mathrm{t}} + f\, \Delta g$ |

$$\int\limits_{\partial V} \left( f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) = \int\limits_V (f \Delta g - g \Delta f)$$

(Autor: Marcus Reble)

# spezielle Differentialgleichungen ځانګي دفرنشل مساوات

د لومړئ درجي کربنیز دفرنشل مساوات
Lineare DGL 1. Ordnung

$$y' = p(x)\, y + q(x)$$

د $P$ د $p$ بن ستتابع او $y(x_0) = y_0 \;\Rightarrow\; c = y_0$ سره

$$y = y_p + y_h$$

$$y_h = c \exp\big(P(x) - P(x_0)\big)\,, \quad y_p = \int_{x_0}^{x} \exp\big(P(x) - P(s)\big)\, q(s)\, ds$$

د برنولي دبرنشل مساوات
Bernoulli DGL

$$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^k$$

$$u = y^{1-k}$$

بلون:

$$\frac{1}{1-k} u' = -p(x)\, u + q(x)$$

Separable DGL

سيپارابلي دم

$$y' = p(x)\,g(y)$$

د متحولو بيلول

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int p(x)\,dx$$

هوموجين دف مساوات

$$y' = f(y/x)$$

$$xz(x) = y(x)$$

بدلون

$$z' = \frac{1}{x}\left(f(z) - z\right)$$

تيک دف مساوات

$$y' = f(y/x)$$

دتيکوالي لپاره اړيموالی

$$p_y = q_x$$

$$p(x,y) + q(x,y)\,y' = 0$$

$$F(x,y) = c$$

ايمپليخيت حل

د $F_x = p$ او د $F_y = q$ سره حل

ثات ضريبونه

$$u'' + pu' + qu = 0$$

د کرکتريستيکي پولينوم صفرځايونه $\lambda_1, \lambda_2$

دوه حقيقي

$$u_h = a\exp(\lambda_1 t) + b\exp(\lambda_2 t)$$

يو ډبل

$$u_h = a\exp(\lambda t) + b\,t\exp(\lambda t)$$

کنجوګيري کمپلکس له $\lambda_{1,2} = \mu \pm \varrho\mathrm{i}$ سره

$$u_h = \exp(\mu t)\left(a\cos(\varrho t) + b\sin(\varrho t)\right)$$

کيداميفتي هارموني لړځيدني

Gedämpfte harmonische Schwingung

$$u'' + 2ru' + \omega_0^2 u = c\,\cos(\omega t)$$

$$r^2 > \omega_0^2$$
قوي Dämpfung:

$$r^2 = \omega_0^2$$
کريتيکل Dämpfung:

$$r^2 < \omega_0^2$$
ضعيف Dämpfung :

$$u_p = \tilde{c}\cos(\omega t + \delta)$$

د

$$\tilde{c} = c/\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2r\omega)^2}$$

سره

$$\delta = \arg(\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\,2r\omega)$$

او

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2r^2$$
ريزونانځ :

## د پارتيکولار حلونو لپاره ځانګړي اينوونې

# spezielle Ansätze für partikuläre Lösungen

نظم 1. Ordnung

$$y' = py + q(x)$$

$$q(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j \;\rightarrow\; y_p = \sum_{j=0}^{n} d_j x^j$$

$$q(x) = c\exp(\lambda x),\ \lambda \neq p \;\rightarrow\; y_p = \frac{c}{\lambda - p}\exp(\lambda x)$$

$$q(x) = c\exp(px) \;\rightarrow\; y_p = cx\exp(px)$$

$$q(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) \;\; \rightarrow \;\; y_p = c\cos(\omega x) + d\sin(\omega x)$$

نظم . 2. Ordnung

$$u'' + pu' + qu = f(t)$$

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j t^j \;\; \rightarrow \;\; u_p = \sum_{j=0}^{n} u_j t^j$$

، که وي

$p \neq 0$ ، $q \neq 0$

$$f(t) = \exp(\lambda t) \;\; \rightarrow \;\; u_p = c\exp(\lambda t)$$

و که وي

$$\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$$

که $\lambda$ د کرکتریستیکي پولینوم یو ساده یعني یو ( ډبل) صفرځای وي، باید $c$ د $ct$ ( $ct^2$ ) په ځای کښیښنول شي.

$$f(t) = \exp(\alpha t)\left(a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)\right)$$

$$\rightarrow \;\; u_p = \exp(\alpha t)\left(c\sin(\omega t) + d\cos(\omega t)\right)$$

که $\alpha \pm \mathrm{i}\omega$ د کرکتریستیکي پولینوم صفرځایونه وي، باید $u_p$ د $t$ سره ضرب شي.

ټولیز:

د $u_p$ ضریبونو ټاکل د په ځای ایښوني له لاري

ټولیز حل دی $y = y_h + y_p$ همداسي

$$u = u_h + u_p$$

په ګډوله حالتونو کي د یوګونو حالتونو ایښوولو Superposition

Überlagerung د ښپو یو په بل پرطوتل (فزیک، ماتماتیک)

(Autor: Joachim Wipper)

# تولیزه تیوري **Allgemeine Theorie**

د پیانو جمله

$$u' = f(t,u)\,,\, u(t_0) = u_0$$

$f$ ناپرېکیدون کی: پیل ارزښت پرابلم لږ تر لږه یو ناپرېکیدونکی مشتقوړ حل لري.

$f$ لیپشیځ ناپرېکیدونکی نسبت $u$ ته: د پیل ارزښت پرابلم حل یراځنی دی.

پیکارد-ایتریشنPicard-Iteration

$$u^{\ell+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(\tau, u^{\ell}(\tau)\right)\, d\tau\,, \quad u^0(t) = u_0$$

د پیل شرایطو په واک کي والی

$$\left|v(t) - w(t)\right| \le \left|v(t_0) - w(t_0)\right| \exp\left(L(t-t_0)\right)$$

د $f$ د لیپشیځ – ثابتي $L$ سره نسبت $u$ ته.

د بنې اړخ خپلواکوالی

د $u' = f(t,u)\,, \quad v' = g(t,v)$ سره $u(t_0) = v(t_0)$

د

$$\left|u(t) - v(t)\right| \le \varepsilon(t-t_0)\, \exp\left(L(t-t_0)\right)$$

سره

$$\varepsilon = \max_{(s,w)\in D} \left|f(s,w) - g(s,w)\right|$$

د نظم ریدکشن Reduktion der Ordnung

$$u'' = f(u, u')$$

بدلون $u' = v(u)$ راکوي $v\,\dfrac{dv}{du} = f(u,v)$

ستابیلیتي

$$u' = f(u)$$

کرېتیکل ټکی $u_*$:

کرښیزوالی: $v' = f'(u_*)\,v$ د $v = u - u_*$ سره

ستابیلیتي :

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = u_*\,, u(0) \approx u_* \;\Leftarrow\; \mathrm{Re}\,\lambda_i < 0\;\forall\lambda_i$$

نه ستابیلیتي

$$\Leftarrow\;\exists\lambda_i:\;\mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$$

د $\lambda_i$ سره د $f'(u_*)$ ایګن رازښت

(Autoren: K. Höllig/M. Reble)

# کرښيز سيستمونه Lineare Systeme

ورونسکی – ديترمينانتونهWronski-Determinante

$$\Gamma' = A(t)\Gamma$$

$$(\det\Gamma)' = \operatorname{Spur} A(t)(\det\Gamma)\,, \quad \Gamma$$

بنستيزه ماتريکس

د ثابتو ورييشن

$$u' = A(t)u + b(t)$$

$$c' = \Gamma^{-1}(t)\; b(t) \qquad u_p = \Gamma c$$

اينبوونه راکوي

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = \Gamma(t)\left[\Gamma(t_0)^{-1}u(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Gamma(s)^{-1}b(s)\,ds\right]$$

ثات ضريبونه

$$u'(t) = A\,u(t)$$

که $v$ ايګنوکتورويو ايګن ارزښت $\lambda$ ته، نو

$$u(t) = \exp(\lambda t)\,v$$

حل دی

کمپلکس ايګنارزښت و ايګنوکتور

$$\lambda = \sigma + \mathrm{i}\varrho$$

$$a + \mathrm{i}b$$

ته دی

$$\mathrm{Re}\big(\exp(\lambda t)\,v\big) = \exp(\sigma t)\big(a\cos(\varrho t) - b\sin(\varrho t)\big)$$

او

$$\mathrm{Im}\big(\exp(\lambda t)\,v\big) = \exp(\sigma t)\big(a\sin(\varrho t) + b\cos(\varrho t)\big)$$

حقيقی حل دی.

جوردان-بڼه

$$u'(t) = A\,u(t) + b(t)$$

$$v' = Jv + Q^{-1}b \qquad u = Qv \qquad Q^{-1}AQ = J$$

بدلون دا سيستم راکوي، چې سوکڅيسيو کمپوننت ډوله حل کيدی شي.

$$v_i' = \lambda_i v_i + (Q^{-1}b)_i$$

سره يوځای شوی يا سره نخلولی سيستم د دوه کونجتړي يا وتر $J$ سره.

آويلر-ديرنځيالمساواتEuler-Differentialgleichung

$$a_n t^n u^{(n)} + \cdots + a_0 u = f(t)$$

$$v(s) \qquad t = e^s\,, \quad v(s) = u(t)$$

بدلون د لپاره کرښيز دفرنځيال مساسوات راکوي د د ثابت ضريبونو سره

ستابيليتي

$$u' = Au$$

ستابيل :

$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,\lambda_i < 0 \,\forall \lambda_i$$

د $(2\times 2)$ - ماتريکس لپاره: $\det A > 0 \wedge \mathrm{Spur} < 0$

بباغيزه يا ناپيلی ستابيل: $u(t)$ بنده او پيل ارزښت شتون لري.

د کومم لپاره چي $|u(t)|$ د 0 په لور پولي ته نه ځي.

ايستابيل:

$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = \infty \Leftarrow \exists \lambda_i :\ \mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$$

# لاپلاس- ترانسفورميشن **Laplace-Transformation**

| | |
|---|---|
| لاپلاس- ترانسفورميشن | $U = \mathcal{L}u\,,\quad U(s) = \int\limits_0^\infty u(t)\exp(-st)\,dt$ |
| معکوس- ترانسفورميشن | $u(t) = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{b-\mathrm{i}\infty}^{b+\mathrm{i}\infty} U(s)\exp(st)\,ds$ |

| | |
|---|---|
| $a u(t) + b v(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} a U(s) + b V(s)$ | کربنیزوالی |
| $u^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n U(s) - s^{n-1} u(0) - s^{n-2} u'(0) - \cdots - u^{(n-1)}(0)$<br>$t^n u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n U^{(n)}(s)$ | دفرنځیشن |
| $\int\limits_0^t u(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{U(s)}{s}, \quad u(t)/t \xrightarrow{\mathcal{L}} \int\limits_s^\infty U(\tau) d\tau$ | انتیګرېشن |
| $u(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \exp(-as) U(s), \quad u(t) = 0 \,\text{für}\, t < 0$<br>$\exp(at) u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s-a)$ | راکښنه |
| $u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1-\exp(-Ts)} \int\limits_0^T u(t) \exp(-st)\, dt$ | T - پریودیکي تابع |
| $u(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a} U(s/a)$ | -سکاله کونه |
| $(u \star v)(t) = \int\limits_0^t u(\tau)\, v(t-\tau)\, d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)\, V(s)$ | - غبرګونه |

ځانګړي توارع

| $u(t)$ | $U(s)$ | $u(t)$ | $U(s)$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $1/s$ | $t^n$ | $n!/s^{n+1}$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a}$ | $t^n\, e^{at}$ | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ |
| $\cos(\omega t)$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ | $\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| $e^{-at}\, \cos(\omega t)$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$ | $e^{-at}\, \sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$ |

پیل ارزښت پرابلم $U/\Phi - u(0) = F$ د $\Phi(s) = 1/(s+p)$ سره
۱. درجه

$u' + pu = \breve{f}\,,\ p \in \mathbb{R}$ د په څټ ترانسفورمیشن وروسته $u = \varphi \star f + u(0)\varphi$ د $\varphi = e^{-pt}$ سره

پیل ارزښت پرابلم
۲ . درجه

| | |
|---|---|
| Anfangswertproblem<br>1. Ordnung<br>$u' + pu = f\ ,\ \ p \in \mathbb{R}$ | $U/\Phi - u(0) = F$ mit $\Phi(s) = 1/(s+p)$<br><br>nach Rücktransformation $u = \varphi \star f + u(0)\varphi$ mit $\varphi = e^{-pt}$ |
| Anfangswertproblem<br>2. Ordnung<br>$u'' + pu' + qu = f\ ,\ \ p, q \in \mathbb{R}$ | $U/\Phi - (s+p)u(0) - u'(0) = F$ mit $\Phi(s) = 1/(s^2 + ps + q)$<br><br>nach Rücktransformation $u = \varphi \star f + u(0)\varphi' + (u(0)p + u'(0))\varphi$<br>$\lambda \neq \varrho$ Nullstellen von $1/\Phi \Rightarrow \varphi = (e^{\lambda t} - e^{\varrho t})/(\lambda - \varrho)$<br>$\lambda$ doppelte Nullstelle von $1/\Phi \Rightarrow \varphi = te^{\lambda t}$ |

# Sturm-Liouville-Probleme د شتورم-ليوويل –پرابلم

د ځان سره اديونګيري

$$Lu = -(pu')' + qu$$

دفرنشل اوپراتور

ترانفروميشن په ځانسره اديونګيري بڼې

$$au'' + bu' + cu = f\ ,\ \ a(x) \neq 0$$

صرب له $-p/a$ سره راکوي $-(pu')' + qu = g$ د لاندې سره

$$p(x) = \exp\left(\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx\right)$$

$$q(x) = -c(x)p(x)/a(x)$$

$$g(x) = -f(x)p(x)/a(x)\,.$$

آيګنارزښت پرابلم

$$L\psi = \lambda\varrho\psi$$

د ژئ شرطونو سره

$$\alpha_0\psi(a) + \alpha_1\psi'(a) = 0\,,\ \beta_0\psi(b) + \beta_1\psi'(b) = 0$$

$\psi$
آيګن تابع بلل کيږي، ايګن ارزښت

پخپله اديونګيري ايګن ارزښت پرابلمونه
ايګن ارزښونه حقيقي دي
همغهيا برابر ايګا ارزښت ته ايګت وابع کرښيز بلواک دي

مختلفو ايګن ارزښتونو ته ايګن توابع $\varrho$ -اورتوګونالدي
ايګن ارزښتونه په کلکخ همغږيزه پرلپسي
$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$

جوړوي

# دفرنځيشن **Differentiation**

ګرادينت

$$\operatorname{grad} U = (\partial_x U, \partial_y U, \partial_z U)^{\mathrm{t}}$$

$$\operatorname{grad} \vec{F} = (\operatorname{grad} F_x, \operatorname{grad} F_y, \operatorname{grad} F_z)^{\mathrm{t}}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

ديورګنت(پولي ته نه تلنه)

ځرخونRotation

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix}$$

$$\left(\operatorname{rot} \vec{F}\right)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \partial_j F_k$$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \partial_x F_y - \partial_y F_x$$

په همدې توګه

لاپاس -اوپراتورLaplace-Operator

$$\Delta U = \operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = \partial_x^2 U + \partial_y^2 U + \partial_z^2 U$$

شميرقوانين    ټول اوپراتورونه کرښيز دي

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \vec{0}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) - \Delta \vec{F}$$

$$\operatorname{grad}(U\,V) = U\ \operatorname{grad} V + V\ \operatorname{grad} U$$

$$\operatorname{grad}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\operatorname{grad} \vec{F})^{\mathrm{t}} \vec{G} + (\operatorname{grad} \vec{G})^{\mathrm{t}} \vec{F}$$

$$\operatorname{div}(U \vec{F}) = U\ \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot \operatorname{grad} U$$

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}$$

$$\operatorname{rot}(U \vec{F}) = U\ \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \times \operatorname{grad} U$$

توته- یا استوانه کواوردیناتونه ( پروتولاړ ارزښتونه)

$$(x, y, z) = (\varrho \cos\varphi, \varrho \sin\varphi, z)\,,\ \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U(x, y, z) = \Phi(\varrho, \varphi, z)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = \Psi_\varrho\, \vec{e}_\varrho + \Psi_\varphi\, \vec{e}_\varphi + \Psi_z\, \vec{e}_z$$

$$\operatorname{grad} U = \partial_\varrho \Phi \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi + \partial_z \Phi \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho\partial_\varrho\Phi) + \frac{1}{\varrho^2}\partial_\varphi^2\Phi + \partial_z^2\Phi$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho\Psi_\varrho) + \frac{1}{\varrho}\partial_\varphi\Psi_\varphi + \partial_z\Psi_z$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{F} = {} & \left(\frac{1}{\varrho}\partial_\varphi\Psi_z - \partial_z\Psi_\varphi\right)\vec{e}_\varrho + (\partial_z\Psi_\varrho - \partial_\varrho\Psi_z)\vec{e}_\varphi \\ & + \frac{1}{\varrho}\big(\partial_\varrho(\varrho\Psi_\varphi) - \partial_\varphi\Psi_\varrho\big)\vec{e}_z\end{aligned}$$

اکسیال سیمتریک ورشوګانط یا پټي Axialsymmetrische Felder

$$\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$\Phi$ همداسي $\Psi$ د پـه واک کي دي

$$\operatorname{grad}\Phi = \partial_\varrho\Phi\vec{e}_\varrho$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho\partial_\varrho\Phi)$$

$$\operatorname{div}(\Psi\vec{e}_\varrho) = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho\Psi)$$

$$\operatorname{rot}(\Psi\vec{e}_\varrho) = \vec{0}$$

$$\operatorname{div}(\Psi\vec{e}_\varphi) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\Psi\vec{e}_\varphi) = \frac{1}{\varrho}\,\partial_\varrho(\varrho\Psi)\,\vec{e}_z$$

د غونډوسکي يا کري کواوردیناتونه Kugelkoordinaten

$$(x,y,z) = (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\,,\ \varphi\in[0,2\pi)\,,\ \vartheta\in[0,\pi]$$

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\vartheta\\ \sin\varphi\sin\vartheta\\ \cos\vartheta\end{pmatrix},\ \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\vartheta\\ \sin\varphi\cos\vartheta\\ -\sin\vartheta\end{pmatrix},\ \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$U(x,y,z) = \Phi(r,\vartheta,\varphi)$$

$$\vec{F}(x,y,z) = \Psi_r\,\vec{e}_r + \Psi_\vartheta\,\vec{e}_\vartheta + \Psi_\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

$$\operatorname{grad} U = \partial_r\Phi\vec{e}_r + \frac{1}{r}\partial_\vartheta\Phi\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi\Phi\vec{e}_\varphi$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\Phi) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\partial_\varphi^2\Phi + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta\partial_\vartheta\Phi)$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\Psi_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi\Psi_\varphi + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta\Psi_\vartheta)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{F} = &\frac{1}{r\sin\vartheta}\big(\partial_\vartheta(\sin\vartheta\Psi_\varphi) - \partial_\varphi\Psi_\vartheta\big)\vec{e}_r\\ &+\frac{1}{r\sin\vartheta}\big(\partial_\varphi\Psi_r - \sin\vartheta\partial_r(r\Psi_\varphi)\big)\vec{e}_\vartheta\\ &+\frac{1}{r}\big(\partial_r(r\Psi_\vartheta) - \partial_\vartheta\Psi_r\big)\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

راديال سيمتريکي ورشوگاني Radialsymmetrische Felder

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$\Phi$ همداسي $\Psi$ د فقط د په واک کي دي

$$\operatorname{grad}\Phi = \partial_r\Phi\vec{e}_r$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\Phi)$$

$$\operatorname{div}(\Psi\vec{e}_r) = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\Psi)$$

$$\operatorname{rot}(\Psi\vec{e}_r) = \vec{0}$$

(Autor: Marcus Reble)

# انتيگرالونه Integration

پارامتريک کونه

$$C : \; [a,b] \ni t \mapsto \vec{r}\,(t)$$

Kurve کږه

$$S : \; D \ni (u,v) \mapsto \vec{r}\,(u,v)$$

Fläche سطحه

Kurvenintegral د کږې انتيګرال

$$\int_C U = \int_a^b U\big(\vec{r}\,(t)\big)\,|\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

Arbeitsintegral د کار انتيګرال

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\big(\vec{r}\,(t)\big)\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$$

د سطحي انيګرال

Flächenintegral

$$\iint_S U\,dS = \iint_D U\big(\vec{r}(u,v)\big)|\vec{n}(u,v)|\,du\,dv\,, \quad \vec{n} = \partial_u\vec{r}\times\partial_v\vec{r}$$

Flussintegral
جريان انتيګرال

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}\big(\vec{r}(u,v)\big)\cdot\vec{n}(u,v)\,du\,dv\,, \quad \vec{n} = \partial_u\vec{r}\times\partial_v\vec{r}$$

Fluss durch Funktionsgraph
جريان له فنکشنګراف څخه

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_D -F_x\partial_x f - F_y\partial_y f + F_z\,dx\,dy\,, \quad z = f(x,y)$$

Fluss durch Zylindermantel
جريان له توتي پوښ څخه

$$\varrho = \varrho(\varphi) : \quad \int_0^{2\pi}\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho\varrho - F_\varphi\partial_\varphi\varrho\,dz\,d\varphi$$

$$\varrho = \varrho(z): \quad \int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho \varrho - F_z \varrho \partial_z \varrho \, dz \, d\varphi$$

خانګړی $2\pi a(z_{\max} - z_{\min}) f(a)$ د لپاره $\vec{F} = f(\varrho)\vec{e}_\varrho$ د $\varrho = a$ سره

Fluss durch Kugeloberfläche

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} F_r a^2 \sin\vartheta \, d\varphi d\vartheta$$

mit $r = a$

speziell $4\pi a^2 f(a)$ für $\vec{F} = f(r)\vec{e}_r$

vektorielle

Kurvenintegrale وکتوري
ګړي انتيګرالونه

$$\int_C \vec{F} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \, |\vec{r}\,'(t)| \, dt = \left( \int_C F_x \, , \, \int_C F_y \, , \, \int_C F_z \right)^{\mathrm{t}}$$

$$\int_C \vec{F} \times d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \times \vec{r}\,'(t) \, dt = \begin{pmatrix} \int_C (F_y \, dz - F_z \, dy) \\ \int_C (F_z \, dx - F_x \, dz) \\ \int_C (F_x \, dy - F_y \, dx) \end{pmatrix}$$

vektorielle

Flächenintegrale

وکتوري سطحي انتيګرالونه

$$\iint_S \vec{F} dS = \left( \iint_S F_x \, dS \, , \, \iint_S F_y \, dS \, , \, \iint_S F_z \, dS \right)^{\mathrm{t}}$$

$$\iint_S U d\vec{S} = \iint_S U(\vec{r}\,) \, \vec{n}^\circ \, dS$$

$$\iint_S \vec{F} \times d\vec{S} = \iint_S \vec{F}(\vec{r}) \times \vec{n}^\circ \, dS$$

د ګاوس جمله

Satz von Gauß

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$\iiint_V \operatorname{grad} U\, dV = \iint_S U\, d\vec{S}$$

$$\iiint_V \operatorname{rot} \vec{F}\, dV = -\iint_S \vec{F} \times d\vec{S}$$

$$\iint_A \operatorname{div} \vec{F}\, dA = \int_C \vec{F} \times d\vec{r}\,, \quad A \subset \mathbb{R}^2$$

د گري Griesche انتيګرال فرمولونه

Griesche Integralformeln

$$\iint_S (U \operatorname{grad} W) \cdot d\vec{S} = \iiint_V \left(\operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} W + U \Delta W\right) dV$$

$$\iint_S \left(U \operatorname{grad} W - W \operatorname{grad} U\right) \cdot d\vec{S} = \iiint_V (U \Delta W - W \Delta U)\, dV$$

د ستوکس جمله

Satz von Stokes

$$\iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$-\iint_S (\operatorname{grad} U) \times d\vec{S} = \int_C U\, d\vec{r}$$

$$\iint_A \operatorname{rot} \vec{F}\, dA = \int_C \vec{F} \cdot\, d\vec{r}\,, \quad A \subset \mathbb{R}^2$$

سکالار پوتنشل

Skalares Potential

$$\operatorname{grad} U = \vec{F}$$

د $U$ سکلار ورشو سره

د شتون له پاره اړيين شرطونه

notwendige Bedingung für Existenz: $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$,

په يوه ساده سره اړوند ورشو باندې پوره کيدونکي

hinreichend auf einfach zusammenhängenden Gebieten $D$

C خوښه، په کې له ځخه د په لور ځغليدونکي لار

$C$ ein beliebiger, in $D$ von $A$ nach $B$ verlaufender Weg:

د انتيګرال د لارې خپلواکوالى

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A) \Rightarrow$$

Wegunabhängigkeit des Integrals

Vektorpotential

وکتورورشو يا پتې Vektorfeld $\vec{A}$ mit $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{F}$

د شتون له پاره اړيين شرطونه

notwendige Bedingung für Existenz: $\operatorname{div} \vec{F} = 0$,

په يوه ساده سره اړوند ورشو باندې پوره کيدونکي

hinreichend auf einfach zusammenhängenden Gebieten

# Grundfunktionen بنسټيز توابع

]

Komplexe Funktion ګډوله توابع

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)\,, \quad z = x + \mathrm{i}y = re^{\mathrm{i}\varphi}$$

Möbius-Transformation

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \quad f^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$$

Geraden / Kreise werden auf Geraden / Kreise abgebildet

كربني همداسي دايرې(گردی) په كربنو همداسي په گرديو تنظميري

د درې ټکو له لارې کره کيدنهFestlegung durch drei Punkte $(z_i, w_i)$ :

$$\frac{w-w_2}{w-w_3} : \frac{w_1-w_2}{w_1-w_3} = \frac{z-z_2}{z-z_3} : \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$$

Exponentialfunktion

$$e^z = e^x\left(\cos y + \mathrm{i}\sin y\right)$$

Komplexer Logarithmus

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln r + \mathrm{i}(\varphi + 2\pi k)\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Potenzfunktion

$$z^{p/q} = r^{p/q}\, \exp\left(p(\varphi + 2\pi j)\mathrm{i}/q\right), \quad j = 0, \ldots, q-1$$

# komplexe Differenzierbarkeit und konforme Abbildungen

Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

$f$ komplex differenzierbar:

$$f'(z) = f_x(z) = -\mathrm{i}f_y(z) \quad \Leftrightarrow \quad u_x = v_y\,, \quad u_y = -v_x$$

$$\Rightarrow \Delta u = \Delta v = 0$$

konjugiert harmonische Funktion

$\Delta u = 0$ auf $D$ einfach zusammenhängend

$\Rightarrow \exists v : \Delta v = 0$ und $f = u + \mathrm{i}v$ komplex differenzierbar

Isotropie

Abbildung $z \mapsto w(z)$

und Winkeltreue

dreht Richtungen um Winkel $\arg f'(z)$

streckt Längen um Faktor $|f'(z)|$

Orthogonalität krummliniger Gitter bleibt erhalten

elementare Abbildungen
خيره وني يا تابعگاني

| خيره ونه يا تابع Abbildung | له مخه خيره يا – تابع Urbild | حيره يا تابعBild |
|---|---|---|
| $w = z^\alpha$ | Sektor $0 < \arg z < \gamma$ | Sektor $0 < \arg w < \gamma\alpha$ |
| | | |
| $w = \frac{z+1}{\mathrm{i}z - \mathrm{i}}$ $\Leftrightarrow \quad z = \frac{\mathrm{i}w+1}{\mathrm{i}w-1}$ | Einheitskreisscheibe يونگردى كتره يا ټوټه $\lvert z\rvert < 1$ | obere Halbebene پورتنى نيمهواره $\operatorname{Im} w > 0$ |
| | | |
| $w = e^z$ $\Leftrightarrow \quad z = \operatorname{Ln} w$ | Streifen $0 < \operatorname{Im} z < \gamma$ كربني | برخهSektor $0 < \arg w < \gamma$ |

# Integration

Kurvenintegral

$$\int_C f\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt\,, \quad C : t \mapsto z(t)\,,\ t \in [a,b]$$

Stammfunktion $f$ im Gebiet $D$ komplex differenzierbar, $C$ ein in $D$ verlaufender Weg von $z_0$ nach $z_1$ :

$$\int_C f'\,dz = f(z_1) - f(z_0) = [f]_{z_0}^{z_1}$$

Singularitäten

schwache Singularität: $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$

Pol $n$-ter Ordnung: $|z-a|^{n-1}|f(z)| \to \infty$ für $z \to a$, $(z-a)^n f(z)$ beschränkt für $z \to a$

wesentliche Singularität: $(z-a)^n f(z)$ für kein $n$ beschränkt

Cauchys Theorem

$f$ analytisch in $D$ bis auf endlich viele schwache Singularitäten, $C \subset D$ geschlossene Kurve, homotop zu einem Punkt:

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

Cauchysche Integralformel

$f$ analytisch, $n(C,z)$ Umlaufzahl von $C$ bzgl. $z$:

$$n(C,z)f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Integralformel für

Ableitungen

$f$ analytisch, $n(C,z)$ =1:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$$

Mittelwerteigenschaft

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{\mathrm{i}t})\, dt$$

Maximumprinzip

$$\max_{z \in D} |f(z)| \leq \max_{z \in \partial D} |f(z)|$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

[vorangehende Seite] [nachfolgende Seite] [Gesamtverzeichnis][Seitenübersicht]

automatisch erstellt am 31.1.2006

[Home] [Lexikon] [Aufgaben] [Tests] [Kurse] [Begleitmaterial] [Hinweise] [Mitwirkende] [Publikationen] [Suche]

Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Komplexe Analysis

# Residuenkalkül

[vorangehende Seite] [nachfolgende Seite] [Gesamtverzeichnis][Seitenübersicht]

Residuum

$f$ analytisch in $D \setminus \{a\}$,

$C \subset D$ entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufener Kreis um $a$

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \operatorname*{Res}_{a} f = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C f(z)\, dz$$

einfache Polstelle: $\operatorname*{Res}_{a} f = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$

Pol $n$-ter Ordnung:

$$\operatorname*{Res}_{a} f = \lim_{z \to a} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} \left((z-a)^n f(z)\right)$$

Residuensatz

$C$ entgegen dem Uhrzeigersinn orientierter Rand eines beschränkten Gebietes $D$, $a_j$ Singularitäten von $f$ in $D$:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi\mathrm{i}\sum_j \operatorname*{Res}_{a_j} f$$

Trigonometrische Integranden

$$\int_0^{2\pi} r(\cos t, \sin t)\,dt$$

geht mit der Substitution $z = e^{\mathrm{i}t}$ über in

$$\int_{|z|=1} f(z)\,dz\,, \quad f(z) = r\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{\mathrm{i}z}$$

Rationale Integranden

$f$ rational ohne reelle Polstellen, Zählergrad mindestens um 2 kleiner als Nennergrad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname*{Res}_a f$$

Transzendente Integranden

$f$ rational ohne reelle Polstellen, Zählergrad kleiner als Nennergrad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\,dx = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname*{Res}_a \left(f(z)e^{\mathrm{i}\lambda z}\right)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Algebraische Integranden

$f$ rational ohne Polstellen auf der positiven reellen Achse, höchstens einfacher Pol bei 0, Zählergrad mindestens um 2 kleiner als Nennergrad:

$$\int_0^{\infty} f(x)x^\alpha\,dx = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-e^{2\pi\mathrm{i}\alpha}}\sum_{a\neq 0} \operatorname*{Res}_a \left(f(z)z^\alpha\right)\,, \quad 0<\alpha<1$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

automatisch erstellt am 31.1.2006



Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Komplexe Analysis

# Potenzreihen

[vorangehende Seite] [nachfolgende Seite] [Gesamtverzeichnis][Seitenübersicht]

Taylor-Polynom

$$p_n(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(z-a)^j$$

Restglied:

$$f(z) - p_n(z) = \left( \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}(w-z)}\, dw \right) (z-a)^{n+1}$$

Taylor-Reihe

$f$ analytisch in $D: |z-a| < r$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

,

Konvergenzradius $r$: Abstand zur nächsten Singularität

$$r = \left( \overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

Laurent-Reihe

$f$ analytisch in $D: \ r_1 < |z-a| < r_2$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad c_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw$$
,

Konvergenzgebiet: maximaler Kreisring um $a$ ohne Singularitäten, $r_1, r_2$: Abstand der begrenzenden Singularitäten zu $a$

$$r_1=\overline{\lim_{n\to-\infty}}|c_n|^{-1/n} \qquad r_2=\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}|c_n|^{1/n}\right)^{-1}$$
,

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)



Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Komplexe Analysis

# Differentialgleichungen



Regulärer Punkt

Die Differentialgleichung

$$r(z)u''(z)+q(z)u'(z)+p(z)u(z)=0$$

ist bei $a$ regulär, wenn $q/r$ und $p/r$ analytisch in einer Umgebung von $a$ sind.

Entwicklung: $$u=\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z-a)^n$$

Rekursion: $$u_n=f_n(u_{n-1},u_{n-2},\ldots,u_0)\,,\ n\geq 2$$

mit durch Anfangsbedingungen $u_0=u(a)$ und $u_1=u'(a)$ eindeutig bestimmten Koeffizienten $u_n$

Singulärer Punkt

Die Differentialgleichung $r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$ hat bei $a$ einen regulären singulären Punkt, wenn $q/r = q_0/(z-a) + O(1)$ und $p/r = p_0/(z-a)^2 + O(1/(z-a))$.

Charakteristische Gleichung: $\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + q_0\lambda + p_0 = 0$

Entwicklung: $u = (z-a)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n (z-a)^n\,,\ u_0 \neq 0$

Rekursion: $\varphi(\lambda + n)u_n = f_n(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_0)\,,\ n \geq 1$

Differenz der Nullstellen ganzzahlig: eine Lösung zur Nullstelle mit größtem Realteil, zweite Lösung mit Variation der Konstanten

Hypergeometrische Differentialgleichung

$$z(1-z)u''(z) + (c - (a+b+1)z)u'(z) - abu(z) = 0,$$

$$-c \notin \mathbb{N}_0$$

$$u(z) = F(a,b,c,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} z^n\,, \quad (t)_n = t(t+1)\cdots(t+n-1)$$

Bessel-Differentialgleichung

$$z^2 u''(z) + zu'(z) + (z^2 - \alpha^2)u(z) = 0\,,\ \alpha \notin \mathbb{Z}$$

linear unabhängige Lösungen:

$$J_{\pm\alpha} = \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\pm\alpha + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

# Fourier-Reihen

[vorangehende Seite] [nachfolgende Seite] [Gesamtverzeichnis][Seitenübersicht]

Reelle Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$$

mit

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt\,, \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt\,, \quad k \geq 1$$

Komplexe Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

mit

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$$

شميربدلون د فوريي ضريبونو له پاره Umrechnungsformeln für Fourier-Koeffizienten

$$a_0 = 2c_0\,, \quad a_k = c_k + c_{-k}\,, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) \quad \text{für } k \geq 1$$

$$c_0 = a_0/2\,, \quad c_k = (a_k - ib_k)/2\,, \quad c_{-k} = (a_k + ib_k)/2 \quad \text{für } k \geq 1$$

سيمونترSymmetrien

$f$ gerade:

$$b_k = 0, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt, \quad c_k = c_{-k}$$

$f$ ungerade:

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(kt)\,dt, \quad c_k = -c_{-k}$$

سکالار ضربSkalarprodukt نورم, Norm

$$\langle f, g\rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

, $$\|f\|_{2\pi}^2 = \langle f, f\rangle_{2\pi}$$

Fourier-Projektion فوریي برپوستون

$$(p_n f)(x) = \sum_{|k|\le n}\langle f, e^{ikt}\rangle_{2\pi} e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left((n+1/2)(x-t)\right)}{\sin\left((x-t)/2\right)}\, f(t)\,dt$$

Konvergenzrate د پولي ته تلني کچه

$$\|f - p_n f\|_{2\pi} \le (n+1)^{-k}\,\|f^{(k)}\|_{2\pi}$$

برزیول-ورته والیParseval-Identität

$$\|f\|_{2\pi}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}}|c_k|^2$$

$$= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

# Diskrete Fourier-Transformation

د فوریي ماتریکسونهFourier-Matrizen

$$W_n = \begin{pmatrix} w_n^{0\cdot 0} & \cdots & w_n^{0\cdot(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{(n-1)\cdot 0} & \cdots & w_n^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{pmatrix}, \quad w_n = \exp(2\pi \mathrm{i}/n)$$

$$(W_n)^{-1} = \frac{1}{n} W_n^*$$

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Diskrete Fourier-Transformation

$$f = W_n c \;\Leftrightarrow\; f_j = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{jk} c_k\,, \quad j = 0, \ldots, n-1$$

Inverse diskrete Fourier-Transformation

$$c = \frac{1}{n} W_n^* f \;\Leftrightarrow\; c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} w_n^{-kj} f_j\,, \quad k = 0, \ldots, n-1$$

# Fourier-Transformation

Fourier-Transformation

$$\widehat{f} = \mathcal{F} f, \quad \widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-\mathrm{i}xy}\, dx$$

Inverse Fourier-Transformation

$$f = \mathcal{F}^{-1} \widehat{f}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)\, e^{\mathrm{i}xy}\, dy$$

د ترانسفورميشن لاري يا قوانين Transformationsregeln

کربنيزوالیLinearität

$$a f(x) + b g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} a\widehat{f}(y) + b\widehat{g}(y)$$

سيومتري Symmetrie

$$\widehat{f}(y) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-x)$$

Konjugation

$$\overline{f}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \overline{\widehat{f}(-y)}$$

Skalierung

$$f(ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y/a)/|a|$$

Verschiebung

$$f(x-a) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\mathrm{i}ay}\widehat{f}(y)$$

$$e^{\mathrm{i}ax} f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y-a)$$

Differentiation

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (\mathrm{i}y)^n \widehat{f}(y)$$

$$(-\mathrm{i}x)^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \left(\frac{d}{dy}\right)^n \widehat{f}(y)$$

Faltung

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau) g(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y)\,\widehat{g}(y)$$

$$f(x)\, g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y-\tau)\widehat{g}(\tau)\, d\tau$$

Spezielle Funktionen

| $f$ | $\widehat{f}$ |
|---|---|
| $1$ | $2\pi\delta(y)$ |
| $1$ für $x \in [-a, a]$, $0$ sonst | $2a\,\mathrm{sinc}(ay)$ |
| $\mathrm{sign}(x)$ | $2/(\mathrm{i}y)$ |
| $e^{-a\lvert x\rvert}$ | $2a/(a^2+y^2)$ |
| $e^{-ax^2}$ | $\sqrt{\pi/a}\,e^{-y^2/(4a)}$ |

د پلانشرل جمله Satz von Plancherel

$$2\pi\langle f, g\rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle\,, \quad \sqrt{2\pi}\|f\| = \|\widehat{f}\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)|^2\,dy\right)^{1/2}$$

Poisson-Summationsformel

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(2\pi l)$$

Heisenbergs Unschärfeprinzip

$$\|xf\|\,\|y\widehat{f}\| \geq \frac{1}{2}\|f\|\,\|\widehat{f}\|$$

Rekonstruktionssatz

Hat $f$ Bandbreite $h$, d.h. $\widehat{f}(y) = 0$ für $|y| > h$, dann gilt

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j\pi/h)\,\mathrm{sinc}(hx - j\pi)\,.$$

# Multivariate Fourier-Transformation

| | |
|---|---|
| Fourier-Transformation | $\widehat{f} = \mathcal{F}f, \quad \widehat{f}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\mathrm{i}y^{\mathrm{t}}x}\, dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$ |
| Inverse Fourier-Transformation | $f = \mathcal{F}^{-1}\widehat{f}, \quad f(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{\mathrm{i}y^{\mathrm{t}}x}\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$ |

Transformationsregeln

| | |
|---|---|
| Linearität | $af(x) + bg(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} a\widehat{f}(y) + b\widehat{g}(y)$ |
| Symmetrie | $\widehat{f}(y) \xrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi)^n f(-x)$ |
| Transformation | $f(Ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \lvert\det(A)\rvert^{-1} \widehat{f}((A^{-1})^{\mathrm{t}}y), \quad \det(A) \neq 0$ |
| Verschiebung | $f(x - v) \xrightarrow{\mathcal{F}} \exp(-\mathrm{i}v^{\mathrm{t}}y)\widehat{f}(y)$ <br> $\exp(\mathrm{i}v^{\mathrm{t}}x)f \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y - v)$ |
| Differentiation | $\partial^\alpha f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{i}^{\lvert\alpha\rvert} y^\alpha \widehat{f}(y), \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ <br> $x^\alpha f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{i}^{\lvert\alpha\rvert} \partial^\alpha \widehat{f}(y)$ |

Faltung

$$(f \star g)(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y)\widehat{g}(y)$$

Spezielle Funktionen

| $f$ | $\widehat{f}$ |
|---|---|
| $1$ für $x \in [-a,a]^n$ , $0$ sonst | $(2a)^n \operatorname{sinc}(ay_1) \cdots \operatorname{sinc}(ay_n)$ |
| $\exp(-\lvert x\rvert)$ | $\dfrac{2^n \pi^{(n-1)/2}\Gamma((n+1)/2)}{(1+\lvert y\rvert^2)^{(n+1)/2}}$ |
| $\exp(-\lvert x\rvert^2/2)$ | $(2\pi)^{n/2}e^{-\lvert y\rvert^2/2}$ |

Norminvarianz

$$(2\pi)^{n/2}\|f\| = \|\widehat{f}\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(y)|^2 \, dy\right)^{1/2}$$

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې  او ناچاپ ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دویم:

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

*Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria*

لاندي د شمیرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

*2000 Bonn (Germany):*

دریم: د شمیرپوهنې ستر کتاب : د شمیرپوهنې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زده کوونکو لپاره ( دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې لیکنه به یې ځنو ځایونو غزېدلې او ځنې ځایونه ترې لرې شوي دي)

*2003 Bonn (Germany):*

څلورم: ځمککچپوهنه( هندسه) ، په سلو، زرو کې شمیرنه، د ګټې – او کټې د کټې شمیرنه ، د اختمالوالي شمېرنه کتاب د ښوونځي ټولې اړتیاوې پوره کوي

*2003 Bonn (Germany):*

پنځم: الجبرونه ( د الجبر بنستونه دي)

*2003 Bonn (Germany):*

شپږم: د شمیرپوهنې انګرېزي – پښتو ډکشنري.

*2003 Bonn (Germany):*

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

*Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German*

*2003 Bonn (Germany):*

اتم: دفرنځیال برابرون ( دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

*Bonn (Germany): 2003*

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

*Mathematical Formulas*

*2003 Bonn (Germany):*

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغي او بیا ابادولو ټولنه،،

له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میړې،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په ۲۰۱۲ کې چاپ شوې.

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښيز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner ګڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکني

Bonn (Germany):

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمککچپوهنه ( هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند ( منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی:

د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ ــ د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ ــ د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویيونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې( دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ ــ د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

ــ د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

| |
|---|
| له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی ( دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي). |

د اوم څخه تر دولسم ټولګي پورې د شمیرپوهنې کتابونه، چې لنډ وخت کې به ن ج ته پورته شي.

د دولسم ټولګي کتاب په درې،چې دا به هم زرترزره ن ج ته پورته شي.