د فرمولونو ټولګه

لیکونکی:

ډاکتر ماخان (میرِی) شینواری

2016

د فرمولونو ټولګه

راټولوونکی :   ډاکتر ماخان میرزی شینواری

سریزه: بې له سریزې

وینا سم اند یا - منطق**Aussagenlogik**

سم اندیزې تړنې

وییندول	لیکندول	نخښه ونه
Aنه	$\overline{\neg A}$	نه والی
BاوA	$A \wedge B$	د او تړنه
B یاA	$A \vee B$	د یا تړنه
B یاA یا	$A \not\equiv B$	ناورته والی(انتیوالتځ)
له A لاس ته راځي B	$A \Rightarrow B$	ترې لاس ته راتلنه
و ته ورته ده	$A \Leftrightarrow B$	ورته والی

لارې یا قوانین

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

Morgansche Regeln د مورگان لار یا - قانون

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

Distributivgesetze دېستریبوتیو قانو

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$A \vee \neg A = w \qquad A \wedge \neg A = f$$

weitere Regelnنورقوانین

$$A \vee w = w \qquad A \wedge w = A$$

$$A \vee f = A \qquad A \wedge f = f$$

کوانتورونه Quantoren د شتون – یا موجودیت کوانتور: $\exists$ (لږ تر لږه یو...شته)

ټولکوانتور : $\forall$ (د ټولو ... لپاره)

Mengen ډېرئ

د ډېريو کاروني يا - عمليې Mengenoperationen

ټولنه: $A \cup B$

غوڅې يا تقاطع : $A \cap B$

$A \backslash B$

کمبنت يا تفريق:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

سيومتريک کمبنت :

قوانين

$$C \backslash (A \cap B) = (C \backslash A) \cup (C \backslash B)$$

د مورګان قانون Morgansche Regeln

$$C \backslash (A \cup B) = (C \backslash A) \cap (C \backslash B)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

دېستربوتيوقانون Distributivgesetze

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

اړيکي

Relation $a \; R \; b \Leftrightarrow (a, b) \in R \subseteq A \times B$

$(a, a) \in R$

هنداريزې reflexiv:

$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

: سيومتريک symmetrisch:

$(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$

:انتي سيومتريک antisymmetrisch:

$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

ترانزيتيو يا پسې تلوني transitiv:

:

توتال یا ټول

total: $(a,b) \in R \vee (b,a) \in R$

ورته یا اکویوالنت اړیکي : هنداریزې،سیومتریک اوترانزتیو

نیم نظم : هنداریزې، او ترانزیتیو

Äquivalenzrelation: reflexiv, symmetrisch und transitiv

Halbordnung: reflexiv, antisymmetrisch und transitiv

Kombinatorik کومبیناتوریک

د بینوم ضریبونه

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-1)k}$$

قوانین

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k\,, \quad n \geq 1$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}\,, \quad k < n$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{i}\,, \quad k > 0$$

کمبینیشنونه		mit Reihenfolge د پرلپسي لړئ سره	ohne Reihenfolge بی له پرلپسي لړئ

	د تکرار سره	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
	بې له تکراره	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

کمپلکس یا ګډوله اعدا یا – ګڼونه komplexe Zahlen

Betrag ارزښت (مطلق)

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ارګومنت (د x ارزښتونه)Argument

$\sin\varphi = y/r$ او $\cos\varphi = x/r$

قطبي بڼهPolarform :

$$x + \mathrm{i}y = z = r\,e^{\mathrm{i}\varphi}$$

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
y	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

اویلر-مویورې	$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$
وېش	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\|z_2\|^2}\, z_1\, \overline{z_2} = (r_1/r_2)\, e^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}$
رېښنه	$z^{1/n} = r^{1/n} e^{\mathrm{i}\varphi/n} e^{2\pi\mathrm{i}k/n}$
منځنی ولاړه یا –عمود ګردئ – یا دایر همساوات	$\|z-a\| = \|z-b\|$ $\|z-a\| = s\,\|z-b\| \Leftrightarrow \|z-w\| = r$ $w = \frac{1}{1-s^2}\,a - \frac{s^2}{1-s^2}\,b\,,\quad r = \frac{s}{\|1-s^2\|}\,\|b-a\|$

Vektoren وکتورونه

Betrag
(مطلق) ارزښت

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Dreiecksungleichung
درېګوډي نامساوات

$$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leq \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$$

Skalarprodukt
سکالار ضرب

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \cos\varphi$$

Vektorprodukt
وکتوري ضرب

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}, \quad \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \sin\varphi$$

Grassmann-Identität
د ګرسمن کېمتوالی

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right) \vec{b} - \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) \vec{a}$$

Lagrange-Identität
د لاګرانژ کېمتوالی

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \left(\vec{a} \cdot \vec{c}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right) - \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$$

Spatprodukt
شپات ضرب

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$$

ځیوکلیکي – یا تل بیرته راګرځیدونی بدلون

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \left[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\right] = \left[\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\right]$$

zyklische Vertauschung:

Vektor inوکتورونه په
$\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$
ONB
کې

$$\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{u})\vec{u} + (\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{v} + (\vec{x} \cdot \vec{w})\vec{w}$$

Polarkoordinaten
قطبيکواوردیناتونه

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi\,, \qquad r \geq 0\,,\ \varphi \in (-\pi, \pi]$$

Zylinderkoordinaten
توته يي يا استووانه يي
کواوردیناتونه

$$x = \varrho\cos\varphi \qquad \varrho \geq 0$$

$$y = \varrho\sin\varphi \quad , \quad \varphi \in (-\pi, \pi]$$

$$z = z \qquad z \in \mathbb{R}$$

Kugelkoordinaten
غونډوسکي يا غونډاري
کواوردیناتونه

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta \qquad r \geq 0$$

$$y = r\sin\varphi\sin\vartheta \quad , \quad \varphi \in (-\pi, \pi]$$

$$z = r\cos\vartheta \qquad \vartheta \in [0, \pi]$$

(Autor: M. Reble)

Geraden und Ebenen کرښې او سطحې (هوارې)

کرښهGerade

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{u}$$

د پارامتربنه: Parameterform

$$(\vec{x} - \vec{p}) \times \vec{u} = 0$$

مومتن يا لحضويبنهMomentenform:

سطحهEbene

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

: پارامتر بنه Parameterform

: $\vec{x} \cdot \vec{n} = h$ د هسينورمال بنه Hesse-Normalform

Abstand Punkt-Gerade
واټن ټکی- کرښه

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Abstand windschiefer واټن بادي ماېل کرښهGeraden	$d = \frac{\lvert[(\vec{q}-\vec{p}),\vec{u},\vec{v}]\rvert}{\lvert\vec{u}\times\vec{v}\rvert}$
Abstand Punkt-Ebene واټن ټکی- سطحه	$d = \lvert\vec{p}\cdot\vec{n}-h\rvert/\lvert\vec{n}\rvert$

لیکونکی : میبیل

Ellipse , Parabel, Hyperbel هګۍ(ایلیپس)، پارابول،های پارابل

ایلیپسي یا هګۍ: دوه سوزون تکو(نقطه محراق) ته واټن

$$F_\pm = (\pm f, 0)$$

konstantثابت

$$\lvert\overrightarrow{PF_-}\rvert + \lvert\overrightarrow{PF_+}\rvert = 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$$

$$r^2 = \frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2(\varphi)}$$

پارابولParabel

$g : y = -f$ ته برابر واټن   او وړون کرښي $F = (0, f)$ یوه سوزون ټکي

$$4fy = x^2$$

$$r = \frac{4f\,\sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi)}$$

هاپارابول : دوه سوزون ټکو ته کمښت یا تفریق

$$F_\pm = (\pm f, 0)$$

ثابت

$$\lvert\overrightarrow{PF_-}\rvert - \lvert\overrightarrow{PF_+}\rvert = \pm 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2$$

$$r^2 = -\frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2\varphi}$$

ليکونکی:م. ربل

(Autor: M. Reble)

Funktionen توابع یا څیرونه

Exponentialfunktion
اکسپوننشل تابع

$$y = b^x \Leftrightarrow x = \log_b y\,, \quad y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

$$b^x = e^{x \ln b}$$

Logarithmen
لوگاریتمونه

$$\ln 1 = 0\,, \quad \ln e = 1$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln(x^n) = n \ln x$$

$$\log_a y = \ln y / \ln a$$

Trigonometrische Funktionen
تریگونړمتریکي توابع

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

هایپارابول توابع Hyperbelfunktionen

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

Folgen und Reihen پرلپسي اولړئ

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

پولي ته تلنه Konvergenz:

a د a_n پوله بلل کيږي:

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n$$

د پولي ته تلني نظم p Konvergenz-Ordnung:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq c\,|a_n - a|^p$$

Cauchy-Kriterium
کوشي-قضيه

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_\varepsilon \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

د همغږيزوالي قضيه Monotonie-Kriterium: ر ابندي همغږيزې
پرلپسې پولې ته تلونکې دي.

د پرتلې قضيه Vergleichs-Kriterium:

$$a_n \to a \quad a_n \leq b_n \leq c_n, \quad c_n \to a \Rightarrow b_n \to a$$
او

ځانګړي پوله ارزښتونه

Spezielle Grenzwerte $(n \to \infty)$

$$\begin{array}{rcll|rcll} (1+\frac{a}{n})^n & \to & e^a & & \sqrt[n]{n} & \to & 1 & \\ \sqrt[n]{a} & \to & 1 & (a>0) & \sqrt[n]{n!} & \to & \infty & \\ \frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} & \to & \frac{1}{e} & & \frac{a^n}{n!} & \to & 0 & \\ \frac{n!}{n^n} & \to & 0 & & \frac{n^k}{a^n} & \to & 0 & (a>1) \\ a^n n^k & \to & 0 & (|a|<1) & & & & \end{array}$$

د $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ لپاره اړينه قضيه

د مايورانت قضيه $|a_n| < b_n$ او $\sum b_n$ پولې ته ځي
په لړيوکې پولې ته تلنه

د وېش قضيه
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$$

د ريښې قضيه
$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$$

دپرتله کونې قضيه
$$a_n, b_n > 0,\ a_n/b_n \to c > 0$$

$$\Rightarrow a_n, b_n$$

همغه يا برابرپولي ته د تلني حالت لري

د انتيګرال قضيه $a_n = f(n)$ او $f(x)$ همغږېزلوېدونکي دي

له دې لاس ته راځي $\Rightarrow \int_c^{\infty} f(x)\,dx$ او $\sum_n a_n$ همغه دپولي ته تلني حالت لري.

د لايبنيڅ Leibniz قضيه : a_n اترنيري کيږي او $|a_n|$ همغږېزه صفرپرلېپسي ده.

ځانګړي لړئ

Spezielle Reihen

$$\begin{array}{rcl|rcl}
\sum_{k=1}^{n} k & = & \frac{n(n+1)}{2} & \sum_{k=1}^{n} k^2 & = & \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
\sum_{k=0}^{n} x^k & = & \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \sum_{k=0}^{\infty} x^k & = & \frac{1}{1-x} \quad (|x|<1) \\
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} & = & e^x & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} & = & -\ln(1-x) \quad (|x|<1) \\
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} & = & \sin x & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} & = & \cos x
\end{array}$$

Harmonische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$, konvergent für $\alpha > 1$, divergent für $\alpha \leq 1$

هارموني لړي د لپاره پولي ته ځي د لپاره پولط ته نه ځي يا پوله نه لري

(Autor: M. Reble)

Differentiationدفرنشيشن

Linearität
کرښيزوالی

$$(r\ f(x) + s\ g(x))' = r\ f'(x) + s\ g'(x)$$

Produktregel
د ضرب قانون

$$(f\,g)' = f'\,g + f\,g'$$

Quotientenregel
د وېش قانون

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$$

Kettenregel
ځنځيري قانون

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$$

Umkehrfunktion
معکوس تابع(په څټ-)

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}\,, \quad y = f(x)$$

Logarithmische

Ableitung

لوګاريتمي مشتق

$$f'(x) = f(x)\,(\ln f(x))'\,, \quad f(x) > 0$$

Leibniz-Regel
د لايبنيځ قانون

$$(f\,g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}\,g^{(k)}$$

غوره مشتقونه:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	x^n	$n\,x^{n-1}$
e^x	e^x	$\sin x$	$\cos x$
$a^x\ (a>0)$	$a^x \ln a$	$\cos x$	$-\sin x$
$\ln\lvert x\rvert$	$1/x$	$\tan x$	$1/\cos^2 x$
$\arcsin x\ (\lvert x\rvert<1)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\arccos x\ (\lvert x\rvert<1)$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\arctan x$	$1/(1+x^2)$	$\tanh x$	$1/\cosh^2 x$
$\operatorname{arsinh} x$	$1/\sqrt{1+x^2}$	$\operatorname{arcosh} x\ (x>1)$	$1/\sqrt{x^2-1}$
$\operatorname{artanh} x\ (\lvert x\rvert<1)$	$1/(1-x^2)$		

Mittelwertsatz

منځارزښت جمله

$$\exists c \in (a,b)\ :\ f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$$

Verallgemeinerter

Mittelwertsatz

تولیزه منځ ارزښت قضیه

$$\exists c \in (a,b)\ :\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Regel von l'Hospital
د ل، پیتال قاعده

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ \left(\text{bei } \tfrac{0}{0} \text{ und } \tfrac{\infty}{\infty}\right)$$

Satz von Taylor
د تیلور جمله

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}$$

Newton-Verfahren

د نیوټن تلنلار

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Leibniz-Regel
د لا یبنیځ قانون

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x,t)\,dx + b'(t)\,f(b(t),t) - a'(t)\,f(a(t),t)$$

Extremum
افراطیت

Notwendig اړین :

$$f'(x) = 0$$

د مینیموم(مکسیموم) لپاره پوره کېدونکي شرطونه : ورزیا یا برعلاوه

$$f''(x) > 0\ (< 0)$$

Wendepunkt
اوړونټکی

$f''(x) = 0$

: ; اړین Notwendig

$f'''(x) \neq 0$

پوره کېدونکي: ورزيات

(Autor: M. Reble)

Integration اینتیګرېشن

Hauptsatz
اصلي جمله

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

partielle Integration
توټه اینتیګرېشن

$$\int f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

Substitution
بدلون یا تعویض

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,dy\,, \qquad y = g(x)\,, dy = g'(x)dx$$

wichtige Substitutionen
غوره بدلونونه

$\sqrt{a^2 - x^2}$

Subst.: $x = a\sin t$

$\sqrt{a^2 + x^2}$

Subst.: $x = a\sinh t$

$R(\sin x, \cos x)$ Subst.: $t = \tan\frac{x}{2},\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

لومړنئ توابع

Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^n\ (n \neq -1)$	$x^{n+1}/(n+1)$	$1/x$	$\ln\|x\|$
e^x	e^x	$\ln x$	$x \ln x - x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln(\cos x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$		

ډکی یا حجم

څرخیدونی بدن یا ـجسم: حرخون د x په محور:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

څرخون د y په محور (د f همغږیزچګیدونکي لپاره):

$$V = 2\pi \int_0^b x(f(b) - f(x))\,dx$$

د څرخیدوني بدن پوښ یا پورته سطحه

$$M = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$$

د لیندۍ اوږدوالس

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx \quad L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

د تراپیځ قا ُنون

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\,(f(a)/2 + f(a+h) + \ldots + f(b-h) + f(b)/2) + R_h$$

$$R_h = -\frac{b-a}{12}\,f''(\xi)\,h^2, \quad \xi \in (a,b)$$

(Autor: M. Reble)

Grundlegende Strukturenبنسټيز جوړښتونه

گروپونه

اسوځیاتیو قانون Assoziativgesetz:

$$a \diamond (b \diamond c) = (a \diamond b) \diamond c$$

Neutrales Element بې اغيزه توکی $a \diamond e = e \diamond a = a$:

Inverses Element معکوستوکی

$$a \diamond a^{-1} = a^{-1} \diamond a = e$$

د ابل گروپ

Kommutativ کموتاتيو قانون: $a \diamond b = b \diamond a$

بدن يا تن

د ابل گروپ دب $(K, +)$ ist abelsche Gruppe

د ابل گروپ دی $(K \backslash \{0\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe

ديستريبوتيو قانونDistributivgesetz:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

وکتورفضاVektorraum

په K د ابل گروپ $(V, +)$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$$

$$\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$$

$$(\lambda_1 \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$$

$$1 \cdot v = v$$

سکالار ضرب

د $\langle v, v \rangle > 0$ لپاره $v \neq 0$

$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$$

$$\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$$

$$\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$$

اورتوگونال بستونهorthogonale Basis :

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k \, , \; c_k = \frac{\langle x, u_k\rangle}{\langle u_k, u_k\rangle}$$

$$|x|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 |u_k|^2$$

کوشي - شورخ Cauchy-Schwarz

$$|\langle u, v\rangle| \leq |u||v| \, , |u| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

نورم Norm :

$$\|v\| > 0 \, , \, v \neq 0$$

$$\|\lambda \, v\| = |\lambda| \; \|v\|$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

کرښيز تابع

حمعوالی Additivität :

$$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$$

$$L(\lambda v) = \lambda \, L(v)$$

هوموجينيتيHomogenität:

بيلد او کيرن Bild und Kern(پښتويي: خيره يا عکس اوزړی)

Bild

له $(L) = \{w \in W \; : \; \exists v \in V$ بيلد يا عکس

$L(v) = w\}$

سره

کرن يا زړی

$$\ker(L) = \{v \in V \;:\; L(v) = 0\}$$

dim V = dim ker(L) + dim Bild(L)

(Autor: M. Reble)

Matrizen ماتريکسونه

د ماتريکونو سضرب Matrix-Multiplikation

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

$$A(BC) = (AB)C, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (AB)^* = B^*A^*$$

Kommutator کموتاتور

$$[A, B] = AB - BA$$

رانګ Rang :د کربنيز خپلواکو(تابعو) ليک يا متو تعداد يا ګڼون

$$\mathrm{Rang}\; A = \mathrm{Rang}\; A^t$$

$$\mathrm{Rang}\,(BAC) = \mathrm{Rang}\,(A)$$, (B, C معکوسوړ invertierbar)

شپور Spur : د دياګونا-يا دوهکونجتړو توکو زياتون يا جمعه:

$$\mathrm{Spur}\; A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

$$\mathrm{Spur}\,(AB) = \mathrm{Spur}\,(BA)$$

هرميتيک(سيميک) hermitesch (symmetrisch) :

$A^* = A$($A^t = A$)

فقط حقيقيايګن رزښتونه، *ONB* (Orthonormalbasis) د ايګن وکتورونو څخه شتون لري

يونيتار(اورتوګونال)

$A^* = A^{-1}$($A^t = A^{-1}$)

$|\det A| = 1$

،متي ONB جوړوي

نورمال

normal $AA^* = A^*A$

$\Leftrightarrow$ یونیتار دوهکونتړي(وتر) کيدونکي unitär diagonalisierbar

Drehmatrix
څرخونمتاريکس

$\det A = 1$ او اوتوګونال A

څرخونمحور و ايګن ارزښت 1 ته ايګنوکتور دی

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}(\text{Spur } A - 1)$$

څرخونکونج Drehwinkel:

Spiegelung هندارونه

$$E:\; d^t x = 0: \quad M = E - 2\,\frac{dd^t}{d^t d}$$

Ebene سطحه

$$G:\; x = \lambda v: \quad M = 2\,\frac{vv^t}{v^t v} - E$$

Gerade کرښه

Eigenwerte / -vektoren
ايګنوکتور ايګن ارزښت

$$Av = \lambda v\,,\; v \neq 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

$$\sum \lambda_i = \text{Spur}\, A\,, \quad \prod \lambda_i = \det A$$

A^t ايګن ارزښت λ لري

A^{-1} ای‌ګنوکتور v او ايګن ارزښت $1/\lambda$ لري

A^n ايګنوکتور v او ايګن ارزښت λ^n لري

$Q^{-1}AQ$ ايګنوکتور $Q^{-1}v$ او ايګن ارزښت λ لري

دوه کوچنړي کونه يا وتري کونه:

د ايګنارزښتونو لپاره : البر = هندسي . ډېرواروالی

$$B^{-1}AB = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

$B = (b_1, \ldots, b_n)$ د ايګنوکتورونو بنسټ

جوردان- بنه:
بلوکوټري ـيا دوهکونجڙی ماتريکسBlockdiagonalmatrix

$$J = B^{-1}AB = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_m)$$

بلوکونه په دياګونال ايګن ارزښت λ لري،
1 په پورته څنګيز دياګونال کي
د ماتريکس توانونهMatrix-Potenzen

$$A = Q^{-1}JQ \Rightarrow A^n = Q^{-1}J^nQ$$

$$|\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow A^n \to 0$$

زينګولار ارزښت تجزيه کونه

$$U^*AV = \mathrm{diag}(s_1, s_2, \ldots) \quad , \quad U,\ V \text{ unitär}$$

زينګولار ارزښتونه

$$s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_k > 0 \ , \ k = \mathrm{Rang}\, A$$

s_i د A^*A د ايګن ارزښت رينښي دي

د V متي د A^*A ايګن وکتورونه دي

د U متي د AA^* ايګن وکتورونه دي

(Autor: M. Reble)

ديترمينانتونه او کرښيز مساوات سيستم

Determinanten und lineare Gleichungssysteme

ديترميناتونه

$$\det A^{t} = \det A\,, \quad \det(AB) = \det A \det B$$

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}\ , \quad \det A^n = (\det A)^n$$

د دوه متو(ليکو) بدلېدنه مخ نخښه بدلوي.
د يو متي ډېرواره يوي بلي ته زياتول ديترمينانت ته تغير نه ورکوي

ودیزیینه:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \det \tilde{A}_{k,j}$$

لیکي پسي) k (ودسزینه د

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{i,l} \det \tilde{A}_{i,l}$$

متې پسي) l ودیزینه د

$\det A = 0$ دی ارزښت ایګن صفر $\Leftrightarrow 0$

$\Leftrightarrow Ax = b$ یواځنی حل نه لري

$A \Leftrightarrow$ پوره رانګ نه لري

$\Leftrightarrow A$ اینواریانت نه دی

کرښیز مساوات سیستمونه: یا ټیک یو، هیڅ یا ناپای ډېر حلونه لري.

د ګاوس ترانسفرمیشنونه: د کرښیز مساواتسیستم حلډېرئ د دوه مساواتو په بدلون تغیر نه خوري.

$r \neq 0$

د یوه مساوات ضرب د سره.

د دوه مساواتو زیاتون

د کرامرقاعده

$$x_i = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)}{\det(a_1, \ldots, a_n)}$$

برابروالي پرابلم

$$|Ax - b| \to \min \Leftrightarrow A^t A x = A^t b$$

(Autor: M. Reble)

کوادریکونه Quadriken

شدله (پهبرخ) وېشنه

$$Q: \quad x^t A x + 2b^t x + c = 0, \qquad \tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} c & b^t \\ \hline b & A \end{array} \right)$$

$$\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A$$

مخروطي کوادریکونه:

$$\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 1$$

منځتکیکوادریکونه :

$$\operatorname{Rang} \tilde{A} = \operatorname{Rang} A + 2$$

پارابولیکي کوادریکونه:

$$Am = -b$$

منځتکی

نورمالې بڼې

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

د مخروطي کوادریکونو (ډبل)مخروط

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

غوڅوونکي سطحه

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$$

منحٔنکي کوادریکونه منحٔحٔای هایپرابول

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$$

یو پوښیز هاپرا بلویید

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$$

ایلیپسویید

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0$$

هاپارابولیکه توته یا استوانه

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0$$

ایلیپتیکي توته

$$-\frac{x^2}{a^2}+1=0$$

غبرګېسطحي

پارابولیکیکوادریکونه

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+2z=0$$

ایلیپتیکي پارابولویید

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+2z=0$$

هاپربولیکي پارابولویید

$$\frac{x^2}{a^2}+2y=0$$

پارابولیکي توته یا حیولیندر

Differentiationدفرنځییشن

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{t}}$$

ګرادینت

$$f' = \mathbf{J}\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

جاکوبي ماتريکس

$$\mathbf{H}\, f = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f & \cdots & \partial_1 \partial_n f \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f & \cdots & \partial_n \partial_n f \end{pmatrix}$$

هسسي ماتريکس

$$h(x) = g(y),\ y = f(x): \quad h'(x) = g'(y)\, f'(x)$$

ځتزيري قانون

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \le n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) h^\alpha + R$$

د تيلور وديزينه

پاتې غړی $R = \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x+\theta h) h^\alpha$ د يوه $\theta \in [0,1]$ لپاره

نظم 2 :

$$f(x+h) = f(x) + (\mathrm{grad}\, f(x))^{\mathrm{t}}\, h + \tfrac{1}{2} h^t\, \mathbf{H}\, f(x) h + O(|h|^3)$$

تانجنتي سطحه

سطحه $f(x,y,z) = c$ همداسې $(u,v) \mapsto p(u,v)$

نورمالوکتور $n = \mathrm{grad}\, f$ همداسې $n = p_u \times p_v$

$$\partial_v f(x) = (\mathrm{grad}\, f)^{\mathrm{t}} v$$

لوريز مشتق

$$\det f_x(x_*, y_*) \ne 0 \Rightarrow f(x,y) = 0$$

ا يمأيخيت تابع د x پسي حل

معکوس تابع f لوکال معکوس کيدونکی دی، که $\det f'(x_0) \ne 0$ وي.

$(f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}\ ,\ y = f(x)$ د $x \approx x_0$ لپاره .

$$\mathrm{grad}\, f(x) = 0$$

کريتيکال ټکي

ايليپتيش: د H ټول ايګنوارزښتونه همغه برابره مخنخښه لري

لوکال افراطيت ⟶

هاپارابوليک : ايګن ارزښتونه شته د مختلفومخنخښوسره

زينټکی ⟶

پارابوليش: لوترلږه يو ايګنارزښت صفر دی، او نور ټول ايګن ارزښتونه برابرې مخنخښې لري.

لاګرانژ ضرب

افراطي ارزښتونه x_* د فرعي شرايطو $g_i(x) = 0$ لاندې

$$\Rightarrow f'(x_*) = \lambda^{\mathrm{t}} g'(x_*)$$

د کون-تاکر Kuhn-Tucker شرطونه:

افراطي ارزښتونه x_* د فرعي شرطونو $g_i(x) \geq 0$ لاندې

$$\Rightarrow f'(x_*) = \lambda^t g'(x_*)\,, \quad \lambda^t g(x_*) = 0$$

مينيموم $\lambda_i \geq 0$ ، ماکسيموم $\lambda_i \leq 0$

(Autor: M. Reble)

اينت

اينتيګرالونه Integration

بدلون

$$\int_U f(g(x))\,|\,\mathrm{det} g'(x)|\,dx = \int_{g(U)} f(y)\,dy$$

دسطحي مسطح يا هدار توکي

$$dA = dxdy$$

کارتيزي کواورديناتونه:

$$dA = r dr d\varphi$$

قطبي کواودينات :

د ډکي يا حجم توکي

$$dV = dxdydz$$

کارتيزي کواورديناتونه :

د کږې انتيګرال

$$\int_C f = \int_a^b f(c(t))\,|c'(t)|\,dt$$

د سطحئ توکي

$$dS = |s_u \times s_v|\,dudv$$

پارامتري کونه :

$$z(x,y): \; dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,dxdy$$

تابع :

$$dS = \varrho\,d\varphi dz$$

د توتي پوښ:

$$dS = r^2 \sin\vartheta\,d\varphi d\vartheta$$

د غونډاري سطحه:

Schwerpunkt
دروندتیکی

$$x_S = \frac{1}{m} \int\limits_V x \varrho(x)\, dV$$

Trägheitsmoment
بارتیکی

$$I = \int\limits_V \mathrm{dist}(x,g)^2 \varrho(x)\, dV$$

Hauptsatz
اصلي جمله

$$\int\limits_V \mathrm{grad}\, f = \int\limits_{\partial V} f n^\circ$$

Greensche Integralformeln
د گرین امتیگرال بنه

$$\int\limits_{\partial V} f \frac{\partial g}{\partial n} = \int\limits_V \mathrm{grad}\, f \cdot (\mathrm{grad}\, g)^{\mathrm{t}} + f\, \Delta g$$

$$\int\limits_{\partial V} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n}\right) = \int\limits_V (f \Delta g - g \Delta f)$$

(Autor: Marcus Reble)

spezielle Differentialgleichungen ځانګي دفرنشل مساوات

د لومړئ درجي کربنيز دفرنشل مساوات
Lineare DGL 1. Ordnung

$$y' = p(x)\, y + q(x)$$

د P د p بن ستتابع او $y(x_0) = y_0 \;\Rightarrow\; c = y_0$ سره

$$y = y_p + y_h$$

$$y_h = c \exp\big(P(x) - P(x_0)\big)\,, \quad y_p = \int_{x_0}^{x} \exp\big(P(x) - P(s)\big)\, q(s)\, ds$$

د برنولي دبرنشل مساوات
Bernoulli DGL

$$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^k$$

$$u = y^{1-k}$$

بلون:

$$\frac{1}{1-k} u' = -p(x)\, u + q(x)$$

Separable DGL

سيپارابلي دم

$$y' = p(x)\,g(y)$$

د متحولو بيلول

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int p(x)\,dx$$

هوموجين دف مساوات

$$y' = f(y/x)$$

$$xz(x) = y(x)$$

بدلون

$$z' = \frac{1}{x}\left(f(z) - z\right)$$

تيک دف مساوات

$$y' = f(y/x)$$

دتيکوالي لپاره اړيموالی

$$p_y = q_x$$

$$p(x,y) + q(x,y)\,y' = 0$$

$$F(x,y) = c$$

ايمپليخيت حل

د $F_x = p$ او د $F_y = q$ سره حل

ثات ضريبونه

$$u'' + pu' + qu = 0$$

د کرکتريستيکي پولينوم صفرځايونه λ_1, λ_2

دوه حقيقي

$$u_h = a\exp(\lambda_1 t) + b\exp(\lambda_2 t)$$

يو ډبل

$$u_h = a\exp(\lambda t) + b\,t\exp(\lambda t)$$

کنجوګيري کمپلکس له $\lambda_{1,2} = \mu \pm \varrho\mathrm{i}$ سره

$$u_h = \exp(\mu t)\left(a\cos(\varrho t) + b\sin(\varrho t)\right)$$

کيداميفتي هارموني لړځيدني

Gedämpfte harmonische Schwingung

$$u'' + 2ru' + \omega_0^2 u = c\,\cos(\omega t)$$

$$r^2 > \omega_0^2$$

قوي Dämpfung:

$$r^2 = \omega_0^2$$

كريتيكل Dämpfung:

$$r^2 < \omega_0^2$$

ضعيف Dämpfung :

$$u_p = \tilde{c}\cos(\omega t + \delta)$$

د

$$\tilde{c} = c/\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2r\omega)^2}$$

سره

$$\delta = \arg(\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\,2r\omega)$$

او

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2r^2$$

ريزونانځ :

د پارتيكولار حلونو لپاره ځانګړي اينوونې

spezielle Ansätze für partikuläre Lösungen

نظم 1. Ordnung

$$y' = py + q(x)$$

$$q(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j \;\longrightarrow\; y_p = \sum_{j=0}^{n} d_j x^j$$

$$q(x) = c\exp(\lambda x),\ \lambda \neq p \;\longrightarrow\; y_p = \frac{c}{\lambda - p}\exp(\lambda x)$$

$$q(x) = c\exp(px) \;\longrightarrow\; y_p = cx\exp(px)$$

$$q(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) \;\; \rightarrow \;\; y_p = c\cos(\omega x) + d\sin(\omega x)$$

نظم . 2. Ordnung

$$u'' + pu' + qu = f(t)$$

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j t^j \;\; \rightarrow \;\; u_p = \sum_{j=0}^{n} u_j t^j$$

، که وي

$p \neq 0$ ، $q \neq 0$

$$f(t) = \exp(\lambda t) \;\; \rightarrow \;\; u_p = c\exp(\lambda t)$$

و که وي

$$\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$$

که λ د کرکتریستیکي پولینوم یو ساده یعني یو (ډبل) صفرځای وي، باید c د ct (ct^2) په ځای کښیښول شي.

$$f(t) = \exp(\alpha t)\left(a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)\right)$$

$$\rightarrow \;\; u_p = \exp(\alpha t)\left(c\sin(\omega t) + d\cos(\omega t)\right)$$

که $\alpha \pm \mathrm{i}\omega$ د کرکتریستیکي پولینوم صفرځایونه وي، باید u_p د t سره ضرب شي.

تولیز:

د u_p ضریبونو ټاکل د په ځای ایښوني له لاري

تولیز حل دی $y = y_h + y_p$ همداسي

$$u = u_h + u_p$$

په ګډوله حالتونو کي د یوګونو حالتونو ایښوولو Superposition

Überlagerung د ښپو یو په بل پرطوتل (فزیک، ماتماتیک)

(Autor: Joachim Wipper)

تولیزه تیوري**Allgemeine Theorie**

د پیانو جمله

$$u' = f(t,u)\,, u(t_0) = u_0$$

f ناپرېکیدون کی: پیل ارزښت پرابلم لږ تر لږه یو ناپرېکیدونکی مشتقوړ حل لري.

f لیپشیڅ ناپرېکیدونکی نسبت u ته: د پیل ارزښت پرابلم حل یراځنی دی.

پیکارد-ایتریشنPicard-Iteration

$$u^{\ell+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(\tau, u^{\ell}(\tau)\right)\, d\tau\,, \quad u^0(t) = u_0$$

د پیل شرایطو په واک کي والی

$$\left|v(t) - w(t)\right| \le \left|v(t_0) - w(t_0)\right| \exp\left(L(t-t_0)\right)$$

د f د لیپشیڅ – ثابتي L سره نسبت u ته.

د بنې اړخ خپلواکوالی

د $u' = f(t,u)\,, \quad v' = g(t,v)$ سره $u(t_0) = v(t_0)$

د $\left|u(t) - v(t)\right| \le \varepsilon(t-t_0)\exp\left(L(t-t_0)\right)$

سره $\varepsilon = \max_{(s,w)\in D} \left|f(s,w) - g(s,w)\right|$

د نظم ریدکشن Reduktion der Ordnung

$$u'' = f(u,u')$$

بدلون $u' = v(u)$ راکوي $v\,\dfrac{dv}{du} = f(u,v)$

ستابیلیتي

$$u' = f(u)$$

کرېتیکل ټکی u_* :

کرښیزوالی: $v' = f'(u_*)\,v$ د $v = u - u_*$ سره

ستابیلیتي :

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = u_*\,, u(0) \approx u_* \;\Leftarrow\; \mathrm{Re}\,\lambda_i < 0\ \forall\lambda_i$$

نه ستابیلیتي

$$\Leftarrow\; \exists\lambda_i:\ \mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$$

د λ_i سره د $f'(u_*)$ ایگن رازښت

(Autoren: K. Höllig/M. Reble)

کربنیز سیستمونه **Lineare Systeme**

ورونسکی – دیترمینانتونهWronski-Determinante

$$\Gamma' = A(t)\Gamma$$

$$(\det\Gamma)' = \mathrm{Spur}\,A(t)(\det\Gamma)\,,\quad \Gamma$$

بنسټیزه ماتریکس

د ثابتو ورییشن

$$u' = A(t)u + b(t)$$

$$c' = \Gamma^{-1}(t)\;b(t) \qquad u_p = \Gamma c$$

اینبوونه راکوي

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = \Gamma(t)\left[\Gamma(t_0)^{-1}u(t_0) + \int_{t_0}^{t}\Gamma(s)^{-1}b(s)\,ds\right]$$

ثات ضریبونه

$$u'(t) = A\,u(t)$$

که v ایگنوکتورویو ایگن ارزښت λ ته، نو

$$u(t) = \exp(\lambda t)\,v$$

حل دی

کمپلکس ایگنارزښت و ایگنوکتور

$$\lambda = \sigma + \mathrm{i}\varrho$$

$$a + \mathrm{i}b$$

ته دی

$$\mathrm{Re}\big(\exp(\lambda t)\,v\big) = \exp(\sigma t)\big(a\cos(\varrho t) - b\sin(\varrho t)\big)$$

او

$$\mathrm{Im}\big(\exp(\lambda t)\,v\big) = \exp(\sigma t)\big(a\sin(\varrho t) + b\cos(\varrho t)\big)$$

حقیقی حل دی.

جوردان-بڼه

$$u'(t) = A\,u(t) + b(t)$$

$$v' = Jv + Q^{-1}b \qquad u = Qv \qquad Q^{-1}AQ = J$$

بدلون دا سیستم راکوي، چې سوکڅیسیو کمپوننت ډوله

حل کیدی شي.

$$v_i' = \lambda_i v_i + (Q^{-1}b)_i$$

سره یوځای شوی یا سره نخلولی سیستم د دوه کونجتړي یا وتر J سره.

آویلر-دیرنځیالمساواتEuler-Differentialgleichung

$$a_n t^n u^{(n)} + \cdots + a_0 u = f(t)$$

$$v(s) \qquad t = e^s\,, \quad v(s) = u(t)$$

بدلون د لپاره کربنیز دفرنځیال مساسوات راکوي د د ثابت ضریبونو سره

ستابيليتي

$$u' = Au$$

ستابيل :

$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,\lambda_i < 0\;\forall\lambda_i$$

د (2×2) - ماتريکس لپاره: $\det A > 0 \wedge \mathrm{Spur} < 0$

بباغيزه يا ناپيلی ستابيل: $u(t)$ بنده او پيل ارزښت شتون لري.

د کومم لپاره چي $|u(t)|$ د 0 په لور پولي ته نه ځي.

ايستابيل:

$$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = \infty \Leftarrow \exists\lambda_i :\; \mathrm{Re}\,\lambda_i > 0$$

لاپلاس- ترانسفورميشن **Laplace-Transformation**

$U = \mathcal{L}u\,, \quad U(s) = \int\limits_0^\infty u(t)\exp(-st)\,dt$	لاپلاس- ترانسفورميشن
$u(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{b-\mathrm{i}\infty}^{b+\mathrm{i}\infty} U(s)\exp(st)\,ds$	معکوس- ترانسفورميشن

$au(t) + bv(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} aU(s) + bV(s)$	کربنیزوالی
$u^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n U(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \cdots - u^{(n-1)}(0)$ $t^n u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n U^{(n)}(s)$	دفرنځیشن
$\int_0^t u(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{U(s)}{s}, \quad u(t)/t \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_s^\infty U(\tau)d\tau$	انتیګرېشن
$u(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \exp(-as)U(s), \quad u(t) = 0 \text{ für } t < 0$ $\exp(at)u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s-a)$	راکښنه
$u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1-\exp(-Ts)} \int_0^T u(t)\exp(-st)\,dt$	T - پریودیکي تابع
$u(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a}U(s/a)$	-سکاله کونه
$(u \star v)(t) = \int_0^t u(\tau)\,v(t-\tau)\,d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)\,V(s)$	- غبرګونه

$u(t)$	$U(s)$	$u(t)$	$U(s)$	ځانګړي توارع
1	$1/s$	t^n	$n!/s^{n+1}$	
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	
$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	

پیل ارزښت پرابلم $U/\Phi - u(0) = F$ د $\Phi(s) = 1/(s+p)$ سره
۱. درجه

$u' + pu = f\,,\ p \in \mathbb{R}$ د په ځنټ ترانسفورمیشن وروسته $u = \varphi \star f + u(0)\varphi$ د $\varphi = e^{-pt}$ سره

پیل ارزښت پرابلم
۲ . درجه

Anfangswertproblem 1. Ordnung $u' + pu = f\ ,\ p \in \mathbb{R}$	$U/\Phi - u(0) = F$ mit $\Phi(s) = 1/(s+p)$ nach Rücktransformation $u = \varphi \star f + u(0)\varphi$ mit $\varphi = e^{-pt}$
Anfangswertproblem 2. Ordnung $u'' + pu' + qu = f\ ,\ p, q \in \mathbb{R}$	$U/\Phi - (s+p)u(0) - u'(0) = F$ mit $\Phi(s) = 1/(s^2 + ps + q)$ nach Rücktransformation $u = \varphi \star f + u(0)\varphi' + (u(0)p + u'(0))\varphi$ $\lambda \neq \varrho$ Nullstellen von $1/\Phi \Rightarrow \varphi = (e^{\lambda t} - e^{\varrho t})/(\lambda - \varrho)$ λ doppelte Nullstelle von $1/\Phi \Rightarrow \varphi = te^{\lambda t}$

Sturm-Liouville-Probleme د شتورم-ليوويل –پرابلم

د ځان سره اديونګيري

$$Lu = -(pu')' + qu$$

دفرنشل اوپراتور

ترانفروميشن په ځانسره اديونګيري بڼې

$$au'' + bu' + cu = f \quad a(x) \neq 0$$

،

صرب له $-p/a$ سره راكوي $-(pu')' + qu = g$ د لاندې سره

$$p(x) = \exp\left(\int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx\right)$$

$$q(x) = -c(x)p(x)/a(x)$$

$$g(x) = -f(x)p(x)/a(x)\,.$$

آيګنارزښت پرابلم

$$L\psi = \lambda\varrho\psi$$

د ژئ شرطونو سره

$$\alpha_0\psi(a)+\alpha_1\psi'(a)=0\,,\ \beta_0\psi(b)+\beta_1\psi'(b)=0$$

ψ آیگن تابع بلل کیږي، ایگن ارزښت

پخپله ادیونګیري ایگن ارزښت پرابلمونه
ایگن ارزښونه حقیقي دي
همغهیا برابر ایگا ارزښت ته ایگت وابع کرښیز بلواک دي
مختلفو ایگن ارزښتونو ته ایگن توابع ϱ -اورتوګونالدي
ایگن ارزښتونه په کلکخ همغږیزه پرلپسي
$\lambda_1<\lambda_2<\ldots$

جوړوي

دفرنځیشن **Differentiation**

ګرادینت

$$\operatorname{grad}U=(\partial_xU,\partial_yU,\partial_zU)^t$$

$$\operatorname{grad}\vec F=(\operatorname{grad}F_x,\operatorname{grad}F_y,\operatorname{grad}F_z)^t$$

$$\operatorname{div}\vec F=\partial_xF_x+\partial_yF_y+\partial_zF_z$$

دیورګنت(پولي ته نه تلنه)

ځرخون Rotation

$$\operatorname{rot}\vec F=\begin{pmatrix}\partial_yF_z-\partial_zF_y\\ \partial_zF_x-\partial_xF_z\\ \partial_xF_y-\partial_yF_x\end{pmatrix}$$

$$\left(\operatorname{rot}\vec F\right)_i=\sum_{j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\,\partial_jF_k$$

$$\operatorname{rot}\vec F=\partial_xF_y-\partial_yF_x$$

په همدې توګه

لاپاس -اوپراتور Laplace-Operator

$$\Delta U=\operatorname{div}(\operatorname{grad}U)=\partial_x^2U+\partial_y^2U+\partial_z^2U$$

شمیرقوانین ټول اوپراتورونه کرښیز دي

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} U) = \vec{0}$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) - \Delta \vec{F}$$

$$\operatorname{grad}(U\, V) = U \ \operatorname{grad} V + V \ \operatorname{grad} U$$

$$\operatorname{grad}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\operatorname{grad} \vec{F})^{\mathrm{t}} \vec{G} + (\operatorname{grad} \vec{G})^{\mathrm{t}} \vec{F}$$

$$\operatorname{div}(U \vec{F}) = U \ \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot \operatorname{grad} U$$

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}$$

$$\operatorname{rot}(U \vec{F}) = U \ \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \times \operatorname{grad} U$$

توته- يا استوانه كواورديناتونه (پروتولاړ ارزښتونه)

$$(x, y, z) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, z)\,, \ \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U(x, y, z) = \Phi(\varrho, \varphi, z)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = \Psi_\varrho \, \vec{e}_\varrho + \Psi_\varphi \, \vec{e}_\varphi + \Psi_z \, \vec{e}_z$$

$$\operatorname{grad} U = \partial_\varrho \Phi \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi + \partial_z \Phi \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho\partial_\varrho\Phi) + \frac{1}{\varrho^2}\partial_\varphi^2\Phi + \partial_z^2\Phi$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho\Psi_\varrho) + \frac{1}{\varrho}\partial_\varphi\Psi_\varphi + \partial_z\Psi_z$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{1}{\varrho}\partial_\varphi\Psi_z - \partial_z\Psi_\varphi\right)\vec{e}_\varrho + (\partial_z\Psi_\varrho - \partial_\varrho\Psi_z)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{\varrho}\big(\partial_\varrho(\varrho\Psi_\varphi) - \partial_\varphi\Psi_\varrho\big)\vec{e}_z$$

اکسيال سيمتريک ورشوگانط يا پټي Axialsymmetrische Felder

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Φ همداسي Ψ د $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$ په واک کې دي

$$\operatorname{grad}\Phi = \partial_\varrho\Phi\vec{e}_\varrho$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho\partial_\varrho\Phi)$$

$$\operatorname{div}(\Psi\vec{e}_\varrho) = \frac{1}{\varrho}\partial_\varrho(\varrho\Psi)$$

$$\operatorname{rot}(\Psi\vec{e}_\varrho) = \vec{0}$$

$$\operatorname{div}(\Psi\vec{e}_\varphi) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\Psi\vec{e}_\varphi) = \frac{1}{\varrho}\,\partial_\varrho(\varrho\Psi)\,\vec{e}_z$$

د غونډوسکي يا کري کواوردیناتونه Kugelkoordinaten

$$(x,y,z) = (r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\,,\ \varphi\in[0,2\pi)\,,\ \vartheta\in[0,\pi]$$

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix}\cos\varphi\sin\vartheta\\ \sin\varphi\sin\vartheta\\ \cos\vartheta\end{pmatrix},\ \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix}\cos\varphi\cos\vartheta\\ \sin\varphi\cos\vartheta\\ -\sin\vartheta\end{pmatrix},\ \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$

$$U(x,y,z) = \Phi(r,\vartheta,\varphi)$$

$$\vec{F}(x,y,z) = \Psi_r\,\vec{e}_r + \Psi_\vartheta\,\vec{e}_\vartheta + \Psi_\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

$$\operatorname{grad} U = \partial_r\Phi\vec{e}_r + \frac{1}{r}\partial_\vartheta\Phi\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi\Phi\vec{e}_\varphi$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\Phi) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\partial_\varphi^2\Phi + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta\partial_\vartheta\Phi)$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\Psi_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi\Psi_\varphi + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta\Psi_\vartheta)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{F} = &\frac{1}{r\sin\vartheta}\big(\partial_\vartheta(\sin\vartheta\Psi_\varphi) - \partial_\varphi\Psi_\vartheta\big)\vec{e}_r \\ &+\frac{1}{r\sin\vartheta}\big(\partial_\varphi\Psi_r - \sin\vartheta\partial_r(r\Psi_\varphi)\big)\vec{e}_\vartheta \\ &+\frac{1}{r}\big(\partial_r(r\Psi_\vartheta) - \partial_\vartheta\Psi_r\big)\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

راديال سيمتريکې ورشوګانېRadialsymmetrische Felder

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Φ همداسې Ψ د فقط د پہ واک کې دي

$$\operatorname{grad}\Phi = \partial_r\Phi\vec{e}_r$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\Phi)$$

$$\operatorname{div}(\Psi\vec{e}_r) = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\Psi)$$

$$\operatorname{rot}(\Psi\vec{e}_r) = \vec{0}$$

(Autor: Marcus Reble)

انتيګرالونه **Integration**

پارامتريک کونه

$$C:\ [a,b] \ni t \mapsto \vec{r}\,(t)$$

Kurve کږه

$$S:\ D \ni (u,v) \mapsto \vec{r}\,(u,v)$$

Fläche سطحه

Kurvenintegral د کږې انتیګرال

$$\int_C U = \int_a^b U\big(\vec{r}\,(t)\big)\,|\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

Arbeitsintegral د کار انتیګرال

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\big(\vec{r}\,(t)\big)\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$$

د سطحي انیګرال

Flächenintegral

$$\iint_S U\,dS = \iint_D U\big(\vec{r}(u,v)\big)|\vec{n}(u,v)|\,du\,dv\,, \quad \vec{n} = \partial_u\vec{r}\times\partial_v\vec{r}$$

Flussintegral
جریان انتیګرال

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}\big(\vec{r}(u,v)\big)\cdot\vec{n}(u,v)\,du\,dv\,, \quad \vec{n} = \partial_u\vec{r}\times\partial_v\vec{r}$$

Fluss durch Funktionsgraph
جریان له
فنکشنګراف څخه

$$\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_D -F_x\partial_x f - F_y\partial_y f + F_z\,dx\,dy\,, \quad z = f(x,y)$$

Fluss durch Zylindermantel
جریان له توتي
پوښ څخه

$$\varrho = \varrho(\varphi):\quad \int_0^{2\pi}\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho\varrho - F_\varphi\partial_\varphi\varrho\,dz\,d\varphi$$

$$\varrho = \varrho(z): \quad \int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho \varrho - F_z \varrho \partial_z \varrho \, dz \, d\varphi$$

$$2\pi a (z_{\max} - z_{\min}) f(a) \qquad \vec{F} = f(\varrho)\vec{e}_\varrho \qquad \varrho = a$$

خانګړی د لپاره د سره

Fluss durch Kugeloberfläche

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F_r a^2 \sin\vartheta \, d\varphi d\vartheta$$

mit $r = a$

$$4\pi a^2 f(a) \qquad \vec{F} = f(r)\vec{e}_r$$

speziell für

vektorielle Kurvenintegrale وکتوري ګري انتیګرالونه

$$\int_C \vec{F} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \, |\vec{r}\,'(t)| \, dt = \left(\int_C F_x \, , \int_C F_y \, , \int_C F_z \right)^{t}$$

$$\int_C \vec{F} \times d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \times \vec{r}\,'(t) \, dt = \begin{pmatrix} \int_C (F_y \, dz - F_z \, dy) \\ \int_C (F_z \, dx - F_x \, dz) \\ \int_C (F_x \, dy - F_y \, dx) \end{pmatrix}$$

vektorielle Flächenintegrale

وکتوري سطحي انتیګرالونه

$$\iint_S \vec{F} dS = \left(\iint_S F_x \, dS \, , \iint_S F_y \, dS \, , \iint_S F_z \, dS \right)^{t}$$

$$\iint_S U d\vec{S} = \iint_S U(\vec{r}\,) \, \vec{n}^{\circ} \, dS$$

$$\iint_S \vec{F} \times d\vec{S} = \iint_S \vec{F}(\vec{r}) \times \vec{n}^{\circ} \, dS$$

د ګاوس جمله

Satz von Gauß

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$\iiint_V \operatorname{grad} U\, dV = \iint_S U\, d\vec{S}$$

$$\iiint_V \operatorname{rot} \vec{F}\, dV = -\iint_S \vec{F} \times d\vec{S}$$

$$\iint_A \operatorname{div} \vec{F}\, dA = \int_C \vec{F} \times d\vec{r}\,, \quad A \subset \mathbb{R}^2$$

د ګري Griesche انتيګرال فرمولونه

Griesche Integralformeln

$$\iint_S (U \operatorname{grad} W) \cdot d\vec{S} = \iiint_V \big(\operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} W + U \Delta W\big)\, dV$$

$$\iint_S \big(U \operatorname{grad} W - W \operatorname{grad} U\big) \cdot d\vec{S} = \iiint_V (U \Delta W - W \Delta U)\, dV$$

د ستوکس جمله

Satz von Stokes

$$\iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$-\iint_S (\operatorname{grad} U) \times d\vec{S} = \int_C U\, d\vec{r}$$

$$\iint_A \operatorname{rot} \vec{F}\, dA = \int_C \vec{F} \cdot\, d\vec{r}\,, \quad A \subset \mathbb{R}^2$$

سکالار پوتنشل

Skalares Potential

$$\operatorname{grad} U = \vec{F}$$

د U سکلار ورشو سره

د شتون له پاره اړيين شرطونه

notwendige Bedingung für Existenz: $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$,

په يوه ساده سره اړوند ورشو باندې پوره کيدونکي

hinreichend auf einfach zusammenhängenden Gebieten D

C خوښه، په کې له ځخه د په لور ځغليدونکي لار

C ein beliebiger, in D von A nach B verlaufender Weg:

د انتيګرال د لارې خپلواکوالی

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A) \ \Rightarrow$$

Wegunabhängigkeit des Integrals

Vektorpotential

وکتورورشو يا پټیVektorfeld $\vec{A}$ mit $\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{F}$

د شتون له پاره اړيين شرطونه

notwendige Bedingung für Existenz: $\operatorname{div} \vec{F} = 0$,

په يوه ساده سره اړوند ورشو باندې پوره کيدونکي

hinreichend auf einfach zusammenhängenden Gebieten

Grundfunktionen بنسټيز توابع

]

Komplexe Funktion ګډوله توابع

$$f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)\,, \quad z = x + \mathrm{i}y = re^{\mathrm{i}\varphi}$$

Möbius-Transformation

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \quad f^{-1}(w) = \frac{-dw+b}{cw-a}$$

Geraden / Kreise werden auf Geraden / Kreise abgebildet

کربښي همداسي دايري(گردی) په کربښو همداسي په گرديو تنظميري

د دري ټکو له لاري کره کيدنهFestlegung durch drei Punkte (z_i, w_i) :

$$\frac{w-w_2}{w-w_3} : \frac{w_1-w_2}{w_1-w_3} = \frac{z-z_2}{z-z_3} : \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$$

Exponentialfunktion

$$e^z = e^x\,(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$

Komplexer Logarithmus

$$\mathrm{Ln}\,z = \ln r + \mathrm{i}(\varphi + 2\pi k)\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Potenzfunktion

$$z^{p/q} = r^{p/q}\,\exp\left(p(\varphi + 2\pi j)\mathrm{i}/q\right), \quad j = 0, \ldots, q-1$$

komplexe Differenzierbarkeit und konforme Abbildungen

Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

f komplex differenzierbar:

$$f'(z) = f_x(z) = -\mathrm{i} f_y(z) \quad \Leftrightarrow \quad u_x = v_y\,, \quad u_y = -v_x$$

$$\Rightarrow \Delta u = \Delta v = 0$$

konjugiert harmonische Funktion

$\Delta u = 0$ auf D einfach zusammenhängend

$\Rightarrow \exists v : \Delta v = 0$ und $f = u + \mathrm{i}v$ komplex differenzierbar

Isotropie

Abbildung $z \mapsto w(z)$

und Winkeltreue

dreht Richtungen um Winkel $\arg f'(z)$

streckt Längen um Faktor $|f'(z)|$

Orthogonalität krummliniger Gitter bleibt erhalten

elementare Abbildungen
خيره وني يا تابعگاني

خيره ونه يا تابع Abbildung	له مخه خيره يا – تابع Urbild	حيره يا تابعBild
$w = z^\alpha$	Sektor $0 < \arg z < \gamma$	Sektor $0 < \arg w < \gamma\alpha$
$w = \frac{z+1}{iz - i}$ $\Leftrightarrow \quad z = \frac{iw+1}{iw-1}$	Einheitskreisscheibe يونگردی کتره يا ټوټه $\lvert z\rvert < 1$	obere Halbebene پورتنی نيمهواره $\operatorname{Im} w > 0$
$w = e^z$ $\Leftrightarrow \quad z = \operatorname{Ln} w$	Streifen $0 < \operatorname{Im} z < \gamma$ کربښي	برخهSektor $0 < \arg w < \gamma$

Integration

Kurvenintegral

$$\int_C f\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt\,, \quad C : t \mapsto z(t)\,,\ t \in [a,b]$$

Stammfunktion f im Gebiet D komplex differenzierbar, C ein in D verlaufender Weg von z_0 nach z_1 :

$$\int_C f'\,dz = f(z_1) - f(z_0) = [f]_{z_0}^{z_1}$$

Singularitäten

schwache Singularität: $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$

Pol n-ter Ordnung: $|z-a|^{n-1}|f(z)| \to \infty$ für $z \to a$, $(z-a)^n f(z)$ beschränkt für $z \to a$

wesentliche Singularität: $(z-a)^n f(z)$ für kein n beschränkt

Cauchys Theorem

f analytisch in D bis auf endlich viele schwache Singularitäten, $C \subset D$ geschlossene Kurve, homotop zu einem Punkt:

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

Cauchysche Integralformel

f analytisch, $n(C,z)$ Umlaufzahl von C bzgl. z:

$$n(C,z)f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Integralformel für

Ableitungen

f analytisch, $n(C,z)$ =1:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\,dw$$

Mittelwerteigenschaft

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{\mathrm{i}t})\, dt$$

Maximumprinzip

$$\max_{z \in D} |f(z)| \leq \max_{z \in \partial D} |f(z)|$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Komplexe Analysis

Residuenkalkül

[vorangehende Seite] [nachfolgende Seite] [Gesamtverzeichnis][Seitenübersicht]

Residuum f analytisch in $D \setminus \{a\}$,

$C \subset D$ entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufener Kreis um a

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \operatorname*{Res}_{a} f = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_C f(z)\, dz$$

einfache Polstelle: $$\operatorname*{Res}_{a} f = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$$

Pol n-ter Ordnung:

$$\operatorname*{Res}_{a} f = \lim_{z \to a} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1} \left((z-a)^n f(z)\right)$$

Residuensatz C entgegen dem Uhrzeigersinn orientierter Rand eines beschränkten Gebietes D, a_j Singularitäten von f in D:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi\mathrm{i}\sum_j \operatorname{Res}_{a_j} f$$

Trigonometrische Integranden	$\int_0^{2\pi} r(\cos t, \sin t)\,dt$ geht mit der Substitution $z = e^{\mathrm{i}t}$ über in $$\int_{\lvert z\rvert=1} f(z)\,dz\,, \quad f(z) = r\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{\mathrm{i}z}$$
Rationale Integranden	f rational ohne reelle Polstellen, Zählergrad mindestens um 2 kleiner als Nennergrad: $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}_a f$$
Transzendente Integranden	f rational ohne reelle Polstellen, Zählergrad kleiner als Nennergrad: $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{\mathrm{i}\lambda x}\,dx = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname{Res}_a \left(f(z)e^{\mathrm{i}\lambda z}\right)\,, \quad \lambda\in\mathbb{R}^+$$
Algebraische Integranden	f rational ohne Polstellen auf der positiven reellen Achse, höchstens einfacher Pol bei 0, Zählergrad mindestens um 2 kleiner als Nennergrad: $$\int_0^{\infty} f(x)x^\alpha\,dx = \frac{2\pi\mathrm{i}}{1-e^{2\pi\mathrm{i}\alpha}}\sum_{a\neq 0}\operatorname{Res}_a\left(f(z)z^\alpha\right)\,, \quad 0<\alpha<1$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Komplexe Analysis

Potenzreihen

[vorangehende Seite] [nachfolgende Seite] [Gesamtverzeichnis][Seitenübersicht]

Taylor-Polynom

$$p_n(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(z-a)^j$$

Restglied:

$$f(z) - p_n(z) = \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}(w-z)}\, dw \right) (z-a)^{n+1}$$

Taylor-Reihe

f analytisch in $D: |z-a| < r$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Konvergenzradius r: Abstand zur nächsten Singularität

$$r = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} |c_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

Laurent-Reihe

f analytisch in $D:\ r_1 < |z-a| < r_2$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \qquad c_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw$$
,

Konvergenzgebiet: maximaler Kreisring um a ohne Singularitäten, r_1, r_2: Abstand der begrenzenden Singularitäten zu a

$$r_1=\overline{\lim_{n\to-\infty}}|c_n|^{-1/n} \qquad r_2=\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}|c_n|^{1/n}\right)^{-1}$$
,

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

Differentialgleichungen

Regulärer Punkt

Die Differentialgleichung

$$r(z)u''(z)+q(z)u'(z)+p(z)u(z)=0$$

ist bei a regulär, wenn q/r und p/r analytisch in einer Umgebung von a sind.

Entwicklung:
$$u=\sum_{n=0}^{\infty} u_n(z-a)^n$$

Rekursion:
$$u_n=f_n(u_{n-1},u_{n-2},\ldots,u_0)\,,\ n\geq 2$$

mit durch Anfangsbedingungen $u_0=u(a)$ und $u_1=u'(a)$ eindeutig bestimmten Koeffizienten u_n

Singulärer Punkt

Die Differentialgleichung $r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$ hat bei a einen regulären singulären Punkt, wenn $q/r = q_0/(z-a) + O(1)$ und $p/r = p_0/(z-a)^2 + O(1/(z-a))$.

Charakteristische Gleichung: $\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda-1) + q_0\lambda + p_0 = 0$

Entwicklung: $u = (z-a)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n(z-a)^n\,,\ u_0 \neq 0$

Rekursion: $\varphi(\lambda+n)u_n = f_n(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots, u_0)\,,\ n \geq 1$

Differenz der Nullstellen ganzzahlig: eine Lösung zur Nullstelle mit größtem Realteil, zweite Lösung mit Variation der Konstanten

Hypergeometrische Differentialgleichung

$$z(1-z)u''(z) + (c - (a+b+1)z)u'(z) - abu(z) = 0,$$

$$-c \notin \mathbb{N}_0$$

$$u(z) = F(a,b,c,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n} z^n\,, \quad (t)_n = t(t+1)\cdots(t+n-1)$$

Bessel-Differentialgleichung

$$z^2u''(z) + zu'(z) + (z^2 - \alpha^2)u(z) = 0\,,\ \alpha \notin \mathbb{Z}$$

linear unabhängige Lösungen:

$$J_{\pm\alpha} = \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\pm\alpha+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Fourier-Analysis

Fourier-Reihen

[vorangehende Seite] [nachfolgende Seite] [Gesamtverzeichnis][Seitenübersicht]

Reelle Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$$

mit

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt\,, \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt\,, \quad k \geq 1$$

Komplexe Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

mit

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$$

شمیربدلون د فوريي ضريبونو له پاره Umrechnungsformeln für Fourier-Koeffizienten

$$a_0 = 2c_0\,, \quad a_k = c_k + c_{-k}\,, \quad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k}) \quad \text{für } k \geq 1$$

$$c_0 = a_0/2\,, \quad c_k = (a_k - \mathrm{i}b_k)/2\,, \quad c_{-k} = (a_k + \mathrm{i}b_k)/2 \quad \text{für } k \geq 1$$

سیموترSymmetrien

f gerade:

$$b_k = 0, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt, \quad c_k = c_{-k}$$

f ungerade:

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt, \quad c_k = -c_{-k}$$

سکالار ضربSkalarprodukt نورم, Norm

$$\langle f, g\rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

, $\|f\|_{2\pi}^2 = \langle f, f\rangle_{2\pi}$

Fourier-Projektion فوريي برپوستون

$$(p_n f)(x) = \sum_{|k|\le n} \langle f, e^{ikt}\rangle_{2\pi} e^{ikx}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left((n+1/2)(x-t)\right)}{\sin\left((x-t)/2\right)}\, f(t)\,dt$$

Konvergenzrate د پولي ته تلني کچه

$$\|f - p_n f\|_{2\pi} \le (n+1)^{-k}\,\|f^{(k)}\|_{2\pi}$$

برزيول-ورته والیParseval-Identität

$$\|f\|_{2\pi}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2$$

$$= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

Diskrete Fourier-Transformation

د فوريي ماتريکسونهFourier-Matrizen

$$W_n = \begin{pmatrix} w_n^{0\cdot 0} & \cdots & w_n^{0\cdot(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{(n-1)\cdot 0} & \cdots & w_n^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{pmatrix}, \quad w_n = \exp(2\pi \mathrm{i}/n)$$

$$(W_n)^{-1} = \frac{1}{n} W_n^*$$

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Diskrete Fourier-Transformation

$$f = W_n c \;\Leftrightarrow\; f_j = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{jk} c_k\,, \quad j = 0, \ldots, n-1$$

Inverse diskrete Fourier-Transformation

$$c = \frac{1}{n} W_n^* f \;\Leftrightarrow\; c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} w_n^{-kj} f_j\,, \quad k = 0, \ldots, n-1$$

Fourier-Transformation

Fourier-Transformation

$$\widehat{f} = \mathcal{F} f, \quad \widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-\mathrm{i}xy}\, dx$$

Inverse Fourier-Transformation

$$f = \mathcal{F}^{-1} \widehat{f}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)\, e^{\mathrm{i}xy}\, dy$$

د ترانسفورميشن لاري يا قوانين Transformationsregeln

کرښيزوالیLinearität

$$a f(x) + b g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} a \widehat{f}(y) + b \widehat{g}(y)$$

سيومتري Symmetrie

$$\widehat{f}(y) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-x)$$

Konjugation

$$\overline{f}(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \overline{\widehat{f}(-y)}$$

Skalierung

$$f(ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y/a)/|a|$$

Verschiebung

$$f(x-a) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-\mathrm{i}ay} \widehat{f}(y)$$

$$e^{\mathrm{i}ax} f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y-a)$$

Differentiation

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (\mathrm{i}y)^n \widehat{f}(y)$$

$$(-\mathrm{i}x)^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \left(\frac{d}{dy}\right)^n \widehat{f}(y)$$

Faltung

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\tau) g(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y)\, \widehat{g}(y)$$

$$f(x)\, g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y-\tau) \widehat{g}(\tau)\, d\tau$$

Spezielle Funktionen

f	$\widehat{f}$
1	$2\pi\,\delta(y)$
1 für $x \in [-a, a]\,,\; 0$ sonst	$2a\,\mathrm{sinc}(ay)$
$\mathrm{sign}(x)$	$2/(\mathrm{i}y)$
$e^{-a\lvert x\rvert}$	$2a/(a^2+y^2)$
e^{-ax^2}	$\sqrt{\pi/a}\,e^{-y^2/(4a)}$

د پلانشرل جمله Satz von Plancherel

$$2\pi\langle f, g\rangle = \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle\,,\; \sqrt{2\pi}\|f\| = \|\widehat{f}\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(y)|^2\,dy\right)^{1/2}$$

Poisson-Summationsformel

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(2\pi l)$$

Heisenbergs Unschärfeprinzip

$$\|xf\|\,\|y\widehat{f}\| \geq \frac{1}{2}\|f\|\,\|\widehat{f}\|$$

Rekonstruktionssatz

Hat f Bandbreite h, d.h. $\widehat{f}(y) = 0$ für $|y| > h$, dann gilt

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j\pi/h)\,\mathrm{sinc}(hx - j\pi)\,.$$

Multivariate Fourier-Transformation

Fourier-Transformation	$\widehat{f} = \mathcal{F}f, \quad \widehat{f}(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-\mathrm{i}y^{\mathrm{t}}x}\, dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$
Inverse Fourier-Transformation	$f = \mathcal{F}^{-1}\widehat{f}, \quad f(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{\mathrm{i}y^{\mathrm{t}}x}\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$

Transformationsregeln

Linearität	$af(x) + bg(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} a\widehat{f}(y) + b\widehat{g}(y)$
Symmetrie	$\widehat{f}(y) \xrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi)^n f(-x)$
Transformation	$f(Ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \lvert\det(A)\rvert^{-1} \widehat{f}((A^{-1})^{\mathrm{t}} y), \quad \det(A) \neq 0$
Verschiebung	$f(x-v) \xrightarrow{\mathcal{F}} \exp(-\mathrm{i}v^{\mathrm{t}}y)\widehat{f}(y)$
	$\exp(\mathrm{i}v^{\mathrm{t}}x)f \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y-v)$
Differentiation	$\partial^\alpha f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{i}^{\lvert\alpha\rvert} y^\alpha \widehat{f}(y), \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$
	$x^\alpha f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{i}^{\lvert\alpha\rvert} \partial^\alpha \widehat{f}(y)$

Faltung

$$\left(f \star g\right)(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y)\widehat{g}(y)$$

Spezielle Funktionen

f	$\widehat{f}$
1 für $x \in [-a,a]^n$, 0 sonst	$(2a)^n \operatorname{sinc}(ay_1)\cdots\operatorname{sinc}(ay_n)$
$\exp(-\lvert x\rvert)$	$\dfrac{2^n\pi^{(n-1)/2}\Gamma((n+1)/2)}{(1+\lvert y\rvert^2)^{(n+1)/2}}$
$\exp(-\lvert x\rvert^2/2)$	$(2\pi)^{n/2}e^{-\lvert y\rvert^2/2}$

Norminvarianz

$$(2\pi)^{n/2}\|f\| = \|\widehat{f}\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(y)|^2\,dy\right)^{1/2}$$

د ډاکتر ماخان شينواري چاپ شوې او ناچاپ ليکنې:

<u>1988 Vienna (Austria):</u>

<u>لومړی:</u>

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دويم:

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren . Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras, University of Vienna/Austria

لاندي د شميرپوهني پښتوټول كتابونه په المان كې د ،، افغانستان كلتوري ودې ټولنه،،له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

دريم: د شميرپوهني ستر كتاب : د شميرپوهني برسيره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونكو او زده كوونكو لپاره (دا كتاب په ۹۰۰ مخونو كې چاپ او دا نوې ليكنه به يې څنو ځايونو غزېدلې او څنې ځايونه ترې لرې شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

څلورم: څمككچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو كې شميرنه، د ګټې – او كټې د كټې شميرنه ، د اختمالوالي شمېرنه كتاب د ښوونځي ټولې اړتياوې پوره كوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنستونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې   انګرېزي – پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني ـ پښتو- او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/ Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنشیال برابرون (دا کتاب په دې ځانګه کې یو پیل   دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولګه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپیني خبرې: په   المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

.یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،،

له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میړي،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په ۲۰۱۲ کې چاپ شوي.

ژباړې:

: *Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)*

لاندې د برینکمن لیکنې چې له پرینکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دویم ټوک

۳ – شمیرپوهنه د ښوونځي لپاره دریم ټوک

۴ - د احتمالوالي شمیرنه د ښوونځي لپاره

۵ – احصایه یا ستاتیستیک دښوونځي لپاره

لاندې کتابونه د شتوتګارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ – انالیزی ۱

۷ – انالیزې ۲

۸ – کرښیز الجبر

۹ - د شمیرپوهنې بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولګه

۱۱ – فنکشنل انالیز

۱۲ – وکتور شمیرنه

۱۳ – له www./grundstudium.info/linearealgebra څخه:کرښیز الجبر

۱۴ – Georg Gutenbrunner گڼونپوهنه یا د اعدادو تیوري

زما لیکنې

<u>*Bonn (Germany):*</u>

۱۵ - د شمیرپوهنې ستر کتاب دویم چاپ د پوره تغیراتو سره : دا کتاب د شمیرپوهنې برخې برسیره د انجنري، فزیک او اقتصاد لپاره ، همداسې د ښوونکو او زدهکوونکو لپاره پوره ګټور دی. په کتاب کې د اړتیا سره زیاتونه او کونه راغلي

۱۶ - څمککچپوهنه (هندسه) دویم چاپ د پوره تغیراتو سره

۱۷ – الجبر بنسټونه دویم چاپ له تغیراتو سره

۱۸ - ډېرۍ پوهنه یا سټ تیوري

۱۹ – د شمیرپوهنې سم اند (منطق ریاضي)

۲۰ - د یو څو شمیرپوهانو ژوندلیک

۲۱ – د شمیر پوهنې ګډې وډې لیکنې

۲۲- داهم ژباړه ده، خو لیکونکی یې متآسفانه راڅخه نابلد شوی:

د مشتق او انتیګرال شمیرنو ته تمرینونه او اوبیونې یا حلونه یې

۲۳ – د شمیرپوهنې انګریزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ – د شمیرپوهنې پښتو انګرېزي ډکشنري

۲۵ – د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو ویيونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زړه له کومې(دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ – د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې وبه غزیږي.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

– د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه ، چې د شتوتګارت پوهنتون ن ج څخه خپریږي:

د ګروپونو تیوري

- د ښوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولګي څخه تر اووم ټولګي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره ښه لیکنه ده، چې -د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیونې سره په کې راغلي او ماته زیات ګټور برېښي).

د اوم څخه تر دولسم ټولګي پورې د شمیرپوهنې کتابونه، چې لنډ وخت کې به ن ج ته پورته شي.

د دولسم ټولګي کتاب په درې،چې دا به هم زرترزره ن ج ته پورته شي.