

د فرمولونو ټولګه

لیکونکی:

ډاکټر ماخان (میری) شینواری

Ketabton.com

2016

د فرمولونو ټولګه

راتولونکی : ډاکټر ماخان میړی شینواری

سریزه: بی له سریزی

وینا سم اندیا - منطق **Aussagenlogik**

سم اندیزی ترنی

وینیدول نه A B او A B یا A یا A یا B له A لاس ته راځي B و ته ورته ده	لیکنډول $\neg A$ $A \wedge B$ $A \vee B$ $A \neq B$ $A \Rightarrow B$ $A \Leftrightarrow B$	نخبه ونه نه والی د او ترنه د یا ترنه ناورته والی (انتیوالتخ) ترې لاس ته راتلنه ورته والی
--	---	--

لاری یا قوانین

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$$

Morgansche Regeln د مورگان لاری - قانون

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$$

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

Distributivgesetze دپستریبوتیو قانون

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$A \vee \neg A = w \quad A \wedge \neg A = f$$

weitere Regeln نور قوانین

$$A \vee w = w \quad A \wedge w = A$$

$$A \vee f = A \quad A \wedge f = f$$

کوانتورونه Quantoren - د شتون - یا موجودیت کوانتور: \exists (لر تر لږه یو... شته)

تولکوانتور: \forall (د ټولو ... لپاره)

دېرئ Mengen

د دېرئو کارونې يا - عملیې Mengenoperationen

تولنه: $A \cup B$

غوڅی يا تقاطع: $A \cap B$

$A \setminus B$

کمښت يا تفريق:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

سیومتريک کمښت:

قوانین

$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

د مورگان قانون Morgansche Regeln

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

دېسټرېبوتیو قانون Distributivgesetze

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

اریکی

Relation

$$a R b \Leftrightarrow (a, b) \in R \subseteq A \times B$$

$$(a, a) \in R$$

reflexiv: هنداریزی

$$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$$

symmetrisch: سیومتريک:

$$(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$$

antisymmetrisch: انتي سیومتريک:

$$(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$$

transitiv: ترانزیتيو يا پسې تلوني

:

توتال يا تول

$$(a, b) \in R \vee (b, a) \in R$$

total:

ورته يا اكويوالنت اړيکي : هنداريزي، سيومتريک او ترانزيتيو

نيم نظم : هنداريزي، او ترانزيتيو

Äquivalenzrelation: reflexiv, symmetrisch und transitiv

Halbordnung: reflexiv, antisymmetrisch und transitiv

کومبيناټوريک Kombinatorik

د بينوم ضربيونه

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-1)k}$$

قوانين

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k, \quad n \geq 1$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n-k-1+i}{i}, \quad k < n$$

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{i}, \quad k > 0$$

کمبينيټيونه

mit Reihenfolge

د پرلپسي لړۍ سره

ohne Reihenfolge

بي له پرلپسي لړۍ

	د تکرار سره	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
	بې له تکراره	$n(n-1)\cdots(n-k+1)$	$\binom{n}{k}$

کمپلکس یا گډوله اعدا یا – ګڼونه **komplexe Zahlen**

Betrag (مطلق) ارزښت

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ارګومنټ (د x ارزښتونه) Argument

$$\sin \varphi = y/r \quad \cos \varphi = x/r$$

او

قطبي بڼه Polarform:

$$x + iy = z = r e^{i\varphi}$$

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
y	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1

$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{ z_2 ^2} z_1 \bar{z}_2 = (r_1/r_2) e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$ $z^{1/n} = r^{1/n} e^{i\varphi/n} e^{2\pi i k/n}$ $ z - a = z - b $ $ z - a = s z - b \Leftrightarrow z - w = r$ $w = \frac{1}{1 - s^2} a - \frac{s^2}{1 - s^2} b, \quad r = \frac{s}{ 1 - s^2 } b - a $	<p>اوپلر-موپوري</p> <p>وېش</p> <p>رېښه</p> <p>منځنۍ ولاړه یا – عمود گردۍ – یا دایر همساوات</p>
--	--

وکتورونه Vektoren

Betrag
مطلق (ارزښت)

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Dreiecksungleichung
درېکودې نامساوات

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

Skalarprodukt
سکالار ضرب

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$$

Vektorprodukt
وکتوري ضرب

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}, \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$$

Grassmann-Identität
د ګراسمن کټمټوالي

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}$$

Lagrange-Identität
د لاکرانژ کټمټوالي

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Spatprodukt
شپات ضرب

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

ځيوکليکي - يا تل بيرته راګرځيدونى بدلون

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

zyklische Vertauschung:

Vektor in وکتورونه په
 $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$

$$\vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{u})\vec{u} + (\vec{x} \cdot \vec{v})\vec{v} + (\vec{x} \cdot \vec{w})\vec{w}$$

ONB

کي

Polarkoordinaten
قطبیکو اور دیناتونہ

$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi, \quad r \geq 0, \varphi \in (-\pi, \pi]$$

Zylinderkoordinaten
تونہ یی یا استوانہ یی
کو اور دیناتونہ

$$x = \varrho \cos \varphi \quad \varrho \geq 0$$
$$y = \varrho \sin \varphi, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]$$
$$z = z \quad z \in \mathbb{R}$$

Kugelkoordinaten
گونڈوسکی یا غونڈاری
کو اور دیناتونہ

$$x = r \cos \varphi \sin \vartheta \quad r \geq 0$$
$$y = r \sin \varphi \sin \vartheta, \quad \varphi \in (-\pi, \pi]$$
$$z = r \cos \vartheta \quad \vartheta \in [0, \pi]$$

(Autor: M. Reble)

Geraden und Ebenen (هوارې) کرینی او سطحی

Gerade کرینہ

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{u}$$

Parameterform: د پارامترینہ

$$(\vec{x} - \vec{p}) \times \vec{u} = \vec{0}$$

Momentenform: مومتن یا لحضوبینہ

Ebene سطحہ

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

Parameterform: پارامتر بنہ

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = h$$

Hesse-Normalform: د ہسپنورمال بنہ

Abstand Punkt-
Gerade
واتن نکے- کرینہ

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Abstand
windschiefer
واتن بادی مایل

$$d = \frac{|[(\vec{q} - \vec{p}), \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Geraden
کریبته

Abstand Punkt-
Ebene
واتن تکی- سطحه

$$d = |\vec{p} \cdot \vec{n} - h| / |\vec{n}|$$

لیکونکی : میبیل

Ellipse , Parabel, Hyperbel هگی (ایلیپس)، پارابول، های پارابل

ایلیپسی یا هگی: دوه سوزون تکو (نقطه محراق) ته واتن

$$F_{\pm} = (\pm f, 0)$$

ثابت *konstant*

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$$

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2(\varphi)}$$

پارابول *Parabel*

$F = (0, f)$ یوه سوزون تکی
او ورون کریبته
 $g : y = -f$ ته برابر واتن

$$4fy = x^2$$

$$r = \frac{4f \sin(\varphi)}{\cos^2(\varphi)}$$

هایپارابول: دوه سوزون تکو ته کمبنت یا تفریق

$$F_{\pm} = (\pm f, 0)$$

ثابت

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2$$

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

لیکونکی: م. ربل

(Autor: M. Reble)

Funktionen توابع یا خیرونه

Exponentialfunktion اکسپوننشل تابع $y = b^x \Leftrightarrow x = \log_b y, \quad y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

$$b^x = e^{x \ln b}$$

Logarithmen
لوگاریتمونه

$$\ln 1 = 0, \quad \ln e = 1$$

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln(x^n) = n \ln x$$

$$\log_a y = \ln y / \ln a$$

Trigonometrische
Funktionen
تریگونومتریکی توابع

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
----------	---	-----------------------	---	------------	---

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

Hyperbelfunktionen هاييار ابول توابع

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

Folgen und Reihen پرلپسي اولري

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

پولي ته تلنه Konvergenz:

a_n د a پوله بلل کيږي:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

د پولي ته تلني نظم P Konvergenz-Ordnung:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq c |a_n - a|^p$$

Cauchy-Kriterium

کوشي-قضيه

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_\varepsilon \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

د همغريزوالي قضيه Monotonie-Kriterium: ر اېنډې همغريزې پرلپسې پولې ته تلونکې دي.

د پرتلي قضيه Vergleichs-Kriterium:

$$c_n \rightarrow a \Rightarrow b_n \rightarrow a \quad a_n \leq b_n \leq c_n, \quad a_n \rightarrow a$$

او

ځانگړي پوله ارزښتونه

Spezielle Grenzwerte ($n \rightarrow \infty$)	$(1 + \frac{a}{n})^n \rightarrow e^a$	$\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$
	$\sqrt[n]{a} \rightarrow 1 \quad (a > 0)$	$\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty$
	$\frac{1}{n} \sqrt[n]{n!} \rightarrow \frac{1}{e}$	$\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$
	$\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$	$\frac{n!}{a^n} \rightarrow 0 \quad (a > 1)$
	$a^n n^k \rightarrow 0 \quad (a < 1)$	

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

د لپاره اړينه قضيه

په لړيوکې پولې ته تلنه
د مایورانت قضيه $\sum b_n \quad |a_n| < b_n$
پولې ته ځي او

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$$

د وېش قضيه

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$$

د رېښې قضيه

$$a_n, b_n > 0, \quad a_n/b_n \rightarrow c > 0$$

د پرتله کونې قضيه

$$\Rightarrow a_n, b_n$$

همغه يا برابرپولي ته د تلني حالت لري

$$f(x) \quad a_n = f(n) \quad \text{د انټيگرال قضيه}$$

او همغريز لوېدونکي دي

$$\sum_n a_n \Rightarrow \int_c^\infty f(x) dx$$

له دې لاس ته راځي او همغه ډېولي ته تلني حالت لري.

د لايبنيخ Leibniz قضيه: a_n اترنيري کيږي او همغريزه صفر پرلپسي ده.

ځانگړي لړۍ

Spezielle Reihen

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{k=0}^n x^k &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} &= e^x \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} &= \sin x \end{aligned} \right| \begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \sum_{k=0}^{\infty} x^k &= \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1) \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} &= -\ln(1-x) \quad (|x| < 1) \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} &= \cos x \end{aligned}$$

Harmonische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \text{ konvergent f\u00fcr } \alpha > 1, \text{ divergent f\u00fcr } \alpha \leq 1$$

هارموني لړي د لپاره پولي ته ځي د لپاره پولط ته نه ځي يا پوله نه لري

(Autor: M. Reble)

Differentiation دفرنشيشن

Linearit\u00e4t
کرنيزوالی

$$(r f(x) + s g(x))' = r f'(x) + s g'(x)$$

Produktregel
د ضرب قانون

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Quotientenregel
د وېش قانون

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Kettenregel
خنجري قانون

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x)$$

Umkehrfunktion
معكوس تابع (په خټ-)

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad y = f(x)$$

Logarithmische

$$f'(x) = f(x) (\ln f(x))', \quad f(x) > 0$$

Ableitung

لوگاریتمي مشتق

Leibniz-Regel
د لایبنيچ قانون

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

غوره مشتقونه:

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	x^n	$n x^{n-1}$
e^x	e^x	$\sin x$	$\cos x$
$a^x (a > 0)$	$a^x \ln a$	$\cos x$	$-\sin x$
$\ln x $	$1/x$	$\tan x$	$1/\cos^2 x$
$\arcsin x (x < 1)$	$1/\sqrt{1-x^2}$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\arccos x (x < 1)$	$-1/\sqrt{1-x^2}$	$\cosh x$	$\sinh x$
$\arctan x$	$1/(1+x^2)$	$\tanh x$	$1/\cosh^2 x$
$\operatorname{arsinh} x$	$1/\sqrt{1+x^2}$	$\operatorname{arcosh} x (x > 1)$	$1/\sqrt{x^2-1}$
$\operatorname{artanh} x (x < 1)$	$1/(1-x^2)$		

Mittelwertsatz

منخارزبت جمله

$$\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c) (b - a)$$

Verallgemeinerter

Mittelwertsatz

تولیزه منخ ارزبنت قضیه

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Regel von l'Hospital

دل، پیتال قاعده

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\text{bei } \frac{0}{0} \text{ und } \frac{\infty}{\infty})$$

Satz von Taylor

د تیلور جمله

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n$$

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

Newton-Verfahren

د نیوٹن تئلار

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Leibniz-
Regel
د لا یبنیخ قانون

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x, t) dx + b'(t) f(b(t), t) - a'(t) f(a(t), t)$$

Extremum
افراطیت

$$f'(x) = 0$$

Notwendig : اربن

د مینیموم (مکسیموم) لپاره پوره کېدونکي شرطونه : ورزیا یا بر علاوه

$$f''(x) > 0 (< 0)$$

Wendepunkt

اورونتیکی

$$f''(x) = 0$$

: ; Notwendig
 $f'''(x) \neq 0$

پوره کېدونکي: ورزيات

(Autor: M. Reble)

Integration اینتیکرېشن

Hauptsatz
اصلي جمله

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

partielle
Integration
توټه اینتیکرېشن

$$\int f'(x)g(x) = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Substitution
بدلون يا تعویض

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y) dy, \quad y = g(x), dy = g'(x) dx$$

wichtige
Substitutionen
غوره بدلونونه

$$\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\text{Subst.: } x = a \sin t$$

$$\sqrt{a^2 + x^2}$$

$$\text{Subst.: } x = a \sinh t$$

$$R(\sin x, \cos x) \quad \text{Subst.: } t = \tan \frac{x}{2}, dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

لومړنی توابع

Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^n (n \neq -1)$	$x^{n+1}/(n+1)$	$1/x$	$\ln x $
e^x	e^x	$\ln x$	$x \ln x - x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln \cos x $	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$		

دکی یا حجم

څرخیدونی بدن یا جسم: څرخون د x په محور:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

څرخون د y په محور (د f همغږیز چگیدونکي لپاره):

$$V = 2\pi \int_0^b x(f(b) - f(x)) dx$$

د څرخیدونې بدن پوښ یا پورته سطحه

$$M = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

د لیندې اوږدوالس

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

د تراپخ قانون

$$\int_a^b f(x) dx = h (f(a)/2 + f(a+h) + \dots + f(b-h) + f(b)/2) + R_h$$

$$R_h = -\frac{b-a}{12} f''(\xi) h^2, \quad \xi \in (a, b)$$

(Autor: M. Reble)

Grundlegende Strukturen بنسټیز جوړښتونه

گروپونه

Assoziativgesetz قانون اسوخیاتیو:

$$a \diamond (b \diamond c) = (a \diamond b) \diamond c$$

Neutrales Element بی اغیزه توکی $a \diamond e = e \diamond a = a$:

Inverses Element معکوستوکی

$$a \diamond a^{-1} = a^{-1} \diamond a = e$$

د ابل گروپ

Kommutativ کموئاتیو قانون: $a \diamond b = b \diamond a$

بدن یا تن

$(K, +)$ د ابل گروپ دب ist abelsche Gruppe

$(K \setminus \{0\}, \cdot)$ د ابل گروپ دی ist abelsche Gruppe

Distributivgesetz: دیستریبوتیو قانون

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Vektorraum وکتورفضا

$(V, +)$ په K د ابل گروپ

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$$

$$\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$$

$$(\lambda_1 \lambda_2) \cdot v = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v)$$

$$1 \cdot v = v$$

سکالار ضرب

$$v \neq 0 \quad \langle v, v \rangle > 0$$

د لپاره

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$$

$$\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$$

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

اورتوگونال بستونه orthogonal Basis :

$$x = \sum_{k=1}^n c_k u_k, c_k = \frac{\langle x, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle}$$

$$|x|^2 = \sum_{k=1}^n |c_k|^2 |u_k|^2$$

کوشي - شورخ Cauchy-Schwarz

$$|\langle u, v \rangle| \leq |u| |v|, |u| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

نورم Norm :

$$\|v\| > 0, v \neq 0$$

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

کربنيز تابع

Additivität جمعوالی :

$$L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$$

$$L(\lambda v) = \lambda L(v)$$

هوموجينيتي Homogenität :

بيلد او کيرن Bild und Kern (پښتويي: څيره يا عکس اوزری)

Bild

$$(L) = \{w \in W : \exists v \in V \text{ له } L(v) = w \text{ بيلد يا عکس}\}$$

سره

کرن يا زری

$$\ker(L) = \{v \in V : L(v) = 0\}$$

$$\dim V = \dim \ker(L) + \dim \text{Bild}(L)$$

(Autor: M. Reble)

Matrizen ماتریکسونه

د ماتریکونو س ضرب Matrix-Multiplikation

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}$$

$$A(BC) = (AB)C, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (AB)^* = B^*A^*$$

کموټاتور Kommutator

$$[A, B] = AB - BA$$

رانگ Rang: د کرښیز خپلواکو (تابعو) لیک یا متو تعداد یا گڼون

$$\text{Rang } A = \text{Rang } A^t$$

$$\text{Rang}(BAC) = \text{Rang}(A) \quad B, C \text{ invertierbar (معکوسور)}$$

شپور Spur: د دیاگونالیا دو هکونجټرو توکو زیاتون یا جمعه:

$$A = \sum_{k=1}^n a_{kk}$$

Spur

$$\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$$

هر میتیک (سیمیک) hermitesch (symmetrisch)

: $A^* = A$ ($A^t = A$)

$$A^* = A \quad (A^t = A)$$

فقط حقیقیایگن رزینتونه، ONB (Orthonormalbasis) د ایگن وکتورونو څخه شتون لري

یونیتار (اورتوگونال)

$$A^* = A^{-1} \quad (A^t = A^{-1})$$

$$|\det A| = 1$$

متي ONB جوړوي

نورمال

normal

$$AA^* = A^*A$$

⇔ یونیتار دو هکونتری (وتر) کیدونکی

Drehmatrix
څرخونم تاریکس

$$\det A = 1 \text{ او } A \text{ اوتوگونال}$$

څرخونمحور و ایکن ارزښت 1 ته ایگنوکتور دی

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}(\text{Spur } A - 1)$$

Drehwinkel: څرخونکونج

Spiegelung هندارونه

$$E : d^t x = 0 : M = E - 2 \frac{dd^t}{d^t d}$$

Ebene سطحه

$$G : x = \lambda v : M = 2 \frac{vv^t}{v^t v} - E$$

Gerade کرښه

Eigenwerte / -vektoren
ایگنوکتور ایکن ارزښت

$$Av = \lambda v, v \neq 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda E) = 0$$

$$\sum \lambda_i = \text{Spur } A, \quad \prod \lambda_i = \det A$$

A^t ایکن ارزښت λ لري

$$A^{-1} \text{ ایگنوکتور } v \text{ او ایکن ارزښت } 1/\lambda \text{ لري}$$

A^n ایگنوکتور v او ایکن ارزښت λ^n لري

$$Q^{-1}v \text{ او ایکن ارزښت } \lambda \text{ لري} \quad Q^{-1}AQ$$

دوه کوچتري کونه یا وتري کونه:

د ایکنارزښتونو لپاره: البر = هندسي . دپرواروالی

$$B^{-1}AB = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$B = (b_1, \dots, b_n)$$

د ایگنوکتورونو بنسټ

جوردان-بنه:

بلوکوتري-يا دو هکونجتری ماتریکس Blockdiagonalmatrix

$$J = B^{-1}AB = \text{diag}(J_1, \dots, J_m)$$

بلوکونه په دیاگونال ایگن ارزښت λ لري،

1 په پورته څنګیز دیاگونال کې

د ماتریکس توانونه Matrix-Potenzen

$$A = Q^{-1}JQ \Rightarrow A^n = Q^{-1}J^nQ$$

$$|\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow A^n \rightarrow 0$$

زینګولار ارزښت تجزیه کونه

$$U^*AV = \text{diag}(s_1, s_2, \dots), \quad U, V \text{ unitär}$$

زینګولار ارزښتونه

$$s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_k > 0 \quad k = \text{Rang } A$$

د A^*A د ایگن ارزښت ریښې دي s_i

د V متي د A^*A ایگن وکتورونه دي

د U متي د AA^* ایگن وکتورونه دي

(Autor: M. Reble)

دیترمینانتونه او کرښیز مساوات سیستم

Determinanten und lineare Gleichungssysteme

دیترمینانتونه

$$\det A^t = \det A, \quad \det(AB) = \det A \det B$$

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}, \quad \det A^n = (\det A)^n$$

د دوه متو (لیکو) بدلېدنه مخ نڅښه بدلوي.

د یو متي دېرواره یوې بلې ته زیاتول دیترمینانت ته تغیر نه ورکوي

وديزينه:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{k,j} \det \tilde{A}_{k,j}$$

ليکي (پسي) k (ودسزينه د

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+l} a_{i,l} \det \tilde{A}_{i,l}$$

متي (پسي) l (ودسزينه د

$$\det A = 0 \Leftrightarrow \text{صفر ايگن ارزښت دی}$$

$$\Leftrightarrow Ax = b \text{ يواځني حل نه لري}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ پوره رانگ نه لري}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ اينوارينانت نه دی}$$

کرنيز مساوات سيستمونه: يا ټيک يو، هيڅ يا ناپای ډېر حلونه لري.

د گاوس ترانسفر ميشنونه: د کرنيز مساوات سيستم حلډېر د دوه مساواتو په بدلون تغير نه خوري.

$$r \neq 0$$

د يوه مساوات ضرب د سره.

د دوه مساواتو زياتون

د کرامر قاعده

$$x_i = \frac{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\det(a_1, \dots, a_n)}$$

برابروي پرابلم

$$|Ax - b| \rightarrow \min \Leftrightarrow A^t Ax = A^t b$$

(Autor: M. Reble)

کوادرېکونه Quadriken

شډله (په برخ) وېشنه

$$Q: x^t Ax + 2b^t x + c = 0, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} c & b^t \\ b & A \end{pmatrix}$$

$$\text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang } A$$

مخروطي کوادرېکونه:

$$\text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang } A + 1$$

منځتي کوادرېکونه:

$$\text{Rang } \tilde{A} = \text{Rang } A + 2$$

پارابولي کوادرېکونه:

$$Am = -b$$

منځتي

نور مالي بني

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

(ډبل) مخروط

د مخروطي کوادرېکونو

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

غوځوونکي سطحه

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

منځای هاپیرابول

منځکي کواډریکونه

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

یو پوښیز هاپرا بلوید

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$$

ایلیپسوید

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

هاپارابولیکه توته یا استوانه

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$$

ایلیپتیکي توته

$$-\frac{x^2}{a^2} + 1 = 0$$

غبرگسطحي

پارابولیکي کواډریکونه

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2z = 0$$

ایلیپتیکي پارابولوید

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2z = 0$$

هاپریولیکي پارابولوید

$$\frac{x^2}{a^2} + 2y = 0$$

پارابولیکي توته یا حیولیندر

Differentiation

دفرنځیشن

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^t$$

گرادینت

$$f' = J f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

جاکوبي ماتریکس

$$H f = \begin{pmatrix} \partial_1 \partial_1 f & \cdots & \partial_1 \partial_n f \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f & \cdots & \partial_n \partial_n f \end{pmatrix}$$

هسسی ماتریکس

$$h(x) = g(y), y = f(x) : h'(x) = g'(y) f'(x)$$

خنزیری قانون

$$f(x+h) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) h^\alpha + R$$

د تیلور و دیزینه

$$\theta \in [0, 1] \quad R = \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x + \theta h) h^\alpha$$

لپاره

د یوه

پاتی غری

نظم 2:

$$f(x+h) = f(x) + (\text{grad } f(x))^t h + \frac{1}{2} h^t H f(x) h + O(|h|^3)$$

تانجنتی سطحه

$$(u, v) \mapsto p(u, v) \quad f(x, y, z) = c$$

همداسی

سطحه

$$n = p_u \times p_v \quad n = \text{grad } f$$

همداسی

نور مالوکتور

$$\partial_v f(x) = (\text{grad } f)^t v$$

لوریز مشتق

$$\det f_x(x_*, y_*) \neq 0 \Rightarrow f(x, y) = 0$$

د x پسې حل

ایمائیختیت تابع

$$\det f'(x_0) \neq 0$$

وی.

معکوس تابع لوکال معکوس کیدونکی دی، که

$$x \approx x_0 \quad (f^{-1})'(y) = (f'(x))^{-1}, y = f(x)$$

لپاره .

د

$$\text{grad } f(x) = 0$$

کریټیکال ټکی

ایلیټیش: د H ټول ایگنوارزبنتونه همغه برابره منخنځنه لري

لوکال افراطیت \rightarrow

هاپارابولیک: ایگن ارزبنتونه شته د مختلفو منخنځنوسره

زینټکی \rightarrow

پارابولیش: لوټرلره یو ایگنارزبنت صفر دی، او نور ټول ایگن ارزبنتونه برابری منخنځنی لري.

لاگرانژ ضرب

$$g_i(x) = 0$$

لاندي

x_*

د فرعي شرایطو

افراطي ارزبنتونه

$$\Rightarrow f'(x_*) = \lambda^t g'(x_*)$$

د کون-تاکر Kuhn-Tucker شرطونه:

$$\begin{aligned}
 & \text{افراطي ارزبنتونه} \quad x_* \quad \text{د فرعي شرطونو} \quad g_i(x) \geq 0 \quad \text{لاندي} \\
 & \Rightarrow f'(x_*) = \lambda^t g'(x_*), \quad \lambda^t g(x_*) = 0 \\
 & \lambda_i \leq 0 \quad \text{ما کسيموم} \quad \lambda_i \geq 0 \quad \text{مينيموم}
 \end{aligned}$$

(Autor: M. Reble)

اينت

ايڻٽيگرالونه Integration

بدلون

$$\int_U f(g(x)) |\det g'(x)| dx = \int_{g(U)} f(y) dy$$

دسطحي مسطح يا هدار توکي

$$dA = dx dy$$

کار تيزي کو اور دیناتونه:

$$dA = r dr d\varphi$$

قطبي کو اور دینات :
د ډکي يا حجم توکي

$$dV = dx dy dz$$

کار تيزي کو اور دیناتونه :

د کزي انتيگرال

$$\int_C f = \int_a^b f(c(t)) |c'(t)| dt$$

د سطحي توکي

$$dS = |s_u \times s_v| du dv$$

پارامتر کونه :

$$z(x, y) : dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

تابع :

$$dS = \rho d\varphi dz$$

د توتي پوښن:

$$dS = r^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta$$

د غونډاري سطحه:

Schwerpunkt
درونډتکی

$$x_S = \frac{1}{m} \int_V x \rho(x) dV$$

Trägheitsmoment
بارتکی

$$I = \int_V \text{dist}(x, g)^2 \rho(x) dV$$

Hauptsatz
اصلي جمله

$$\int_V \text{grad } f = \int_{\partial V} f n^\circ$$

Greensche
Integralformeln
د گرین امتیگرال بینه

$$\int_{\partial V} f \frac{\partial g}{\partial n} = \int_V \text{grad } f \cdot (\text{grad } g)^t + f \Delta g$$

$$\int_{\partial V} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) = \int_V (f \Delta g - g \Delta f)$$

(Autor: Marcus Reble)

spezielle Differentialgleichungen خانگی دفرنشل مساوات

د لومړی درجی کرښیز دفرنشل مساوات

Lineare DGL 1. Ordnung

$$y' = p(x)y + q(x)$$

$$y(x_0) = y_0 \Rightarrow c = y_0$$

د P د بن ستتابع او سره

$$y = y_p + y_h$$

$$y_h = c \exp(P(x) - P(x_0)), \quad y_p = \int_{x_0}^x \exp(P(x) - P(s)) q(s) ds$$

د برنولي دفرنشل مساوات

Bernoulli DGL

$$y' + p(x)y = q(x)y^k$$

$$u = y^{1-k}$$

بلون:

$$\frac{1}{1-k} u' = -p(x)u + q(x)$$

Separable DGL

سپيار اېلي دم

$$y' = p(x) g(y)$$

د متحولو بيلول

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int p(x) dx$$

هوموجين دف مساوات

$$y' = f(y/x)$$

$$xz(x) = y(x)$$

بدلون

$$z' = \frac{1}{x} (f(z) - z)$$

تيك دف مساوات

$$y' = f(y/x)$$

دتيكوالي لپاره اريموالي

$$p_y = q_x$$

$$p(x, y) + q(x, y) y' = 0$$

$$F(x, y) = c$$

ايمپليڅيت حل

$$F_y = q \quad F_x = p$$

سره حل

او د

ثات ضريونه

$$u'' + pu' + qu = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2$$

د کرکترېستيکي پولینوم صفر ځايونه

دوه حقيقي

$$u_h = a \exp(\lambda_1 t) + b \exp(\lambda_2 t)$$

يو ډبل

$$u_h = a \exp(\lambda t) + b t \exp(\lambda t)$$

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm \rho i$$

سره

کنجوگيري کمپلکس له

$$u_h = \exp(\mu t) (a \cos(\rho t) + b \sin(\rho t))$$

Gedämpfte harmonische Schwingung

$$u'' + 2ru' + \omega_0^2 u = c \cos(\omega t)$$

$$r^2 > \omega_0^2$$

قوي Dämpfung:

$$r^2 = \omega_0^2$$

کريټيکل Dämpfung:

$$r^2 < \omega_0^2$$

ضعيف Dämpfung:

$$u_p = \tilde{c} \cos(\omega t + \delta)$$

$$\tilde{c} = c / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2r\omega)^2}$$

سرہ

$$\delta = \arg(\omega_0^2 - \omega^2 - i 2r\omega)$$

او

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2r^2$$

رېزونانث:

د پارټيکولار حلونو لپاره خانگري ايسنووني

spezielle Ansätze für partikuläre Lösungen

نظم 1. Ordnung

$$y' = py + q(x)$$

$$q(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j \rightarrow y_p = \sum_{j=0}^n d_j x^j$$

$$q(x) = c \exp(\lambda x), \lambda \neq p \rightarrow y_p = \frac{c}{\lambda - p} \exp(\lambda x)$$

$$q(x) = c \exp(px) \rightarrow y_p = cx \exp(px)$$

$$q(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x) \rightarrow y_p = c \cos(\omega x) + d \sin(\omega x)$$

2. Ordnung . نظم

$$u'' + pu' + qu = f(t)$$

$$f(t) = \sum_{j=0}^n c_j t^j \rightarrow u_p = \sum_{j=0}^n u_j t^j$$

، که وي

$$p \neq 0 \quad q \neq 0$$

$$f(t) = \exp(\lambda t) \rightarrow u_p = c \exp(\lambda t)$$

و که وي

$$\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$$

که λ د کرکترېستيکي پولینوم يو ساده يعني يو (ډبل) صفرخای وي، بايد c د ct (ct^2) په خای کېښيږي شي.

$$f(t) = \exp(\alpha t) (a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t))$$

$$\rightarrow u_p = \exp(\alpha t) (c \sin(\omega t) + d \cos(\omega t))$$

که $\alpha \pm i\omega$ د کرکترېستيکي پولینوم صفرخایونه وي، بايد u_p د t سره ضرب شي.

توليز:

د u_p ضربونو ټاکل د په خای اېښونې له لارې

$$y = y_h + y_p$$

همداسې

توليز حل دی

$$u = u_h + u_p$$

په ګډوله حالتونو کې د يوگونو حالتونو اېښوولو Superposition

Überlagerung د څپو يو په بل پرطوتل (فيزیک، ماتماتيک)

(Autor: Joachim Wipper)

Allgemeine Theorie

د پېانو جمله

$$u' = f(t, u), u(t_0) = u_0$$

ناپربکيدون کی: پيل ارزنت پرابلم لڙ تر لڙه يو ناپربکيدونکی مشتقور حل لري. f
 لپيشيخ ناپربکيدونکی نسبت u ته: د پيل ارزنت پرابلم حل پراخنی دی. f

پیکارد-ايتريشن Picard-Iteration

$$u^{\ell+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, u^\ell(\tau)) d\tau, \quad u^0(t) = u_0$$

د پيل شرايطو په واک کې والی

$$|v(t) - w(t)| \leq |v(t_0) - w(t_0)| \exp(L(t - t_0))$$

د L سره نسبت u ته. f
 د بني اړخ خپلواکوالی

$$u(t_0) = v(t_0) \quad u' = f(t, u), \quad v' = g(t, v)$$

$$|u(t) - v(t)| \leq \varepsilon(t - t_0) \exp(L(t - t_0))$$

$$\varepsilon = \max_{(s,w) \in D} |f(s, w) - g(s, w)|$$

د نظم ريډکشن Reduktion der Ordnung

$$u'' = f(u, u')$$

$$v \frac{dv}{du} = f(u, v) \quad u' = v(u)$$

بدلون راکوي
ستابيليتي

$$u' = f(u)$$

کرېتيکل ټکی u_*

$$v = u - u_* \quad v' = f'(u_*)v$$

کرېتيزوالی:
ستابيليتي:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u_*, u(0) \approx u_* \Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad \forall \lambda_i$$

نه ستابيليتي

$$\Leftrightarrow \exists \lambda_i : \operatorname{Re} \lambda_i > 0$$

$$f'(u_*) \quad \lambda_i$$

د سره د ایگن رازنت

Lineare Systeme کرینیز سیستمونه

Wronski-Determinante – دپترمینانتونه

$$\Gamma' = A(t)\Gamma$$

$$(\det \Gamma)' = \text{Spur } A(t)(\det \Gamma), \quad \Gamma$$

بنسټيزه ماتریکس

د ثابتو ورپیشن

$$u' = A(t)u + b(t)$$

$$c' = \Gamma^{-1}(t) b(t) \quad u_p = \Gamma c$$

اینوونه راکوي

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = \Gamma(t) \left[\Gamma(t_0)^{-1} u(t_0) + \int_{t_0}^t \Gamma(s)^{-1} b(s) ds \right]$$

ثابت ضربیونه

$$u'(t) = A u(t)$$

که v ایگنوکتورویو ایگن ارزښت λ ته، نو

$$u(t) = \exp(\lambda t) v$$

حل دی

کمپلکس ایگنارزښت و ایگنوکتور

$$\lambda = \sigma + i\rho$$

$$a + ib$$

ته دی

$$\text{Re}(\exp(\lambda t) v) = \exp(\sigma t) (a \cos(\rho t) - b \sin(\rho t))$$

او

$$\text{Im}(\exp(\lambda t) v) = \exp(\sigma t) (a \sin(\rho t) + b \cos(\rho t))$$

حقیقی حل دی.

جوردان-بڼه

$$u'(t) = A u(t) + b(t)$$

$$v' = Jv + Q^{-1}b \quad u = Qv \quad Q^{-1}AQ = J$$

راکوي، چې سوکڅیسو کمپوننت ډوله

دا سیستم

بدلون

حل کیدی شي.

$$v'_i = \lambda_i v_i + (Q^{-1}b)_i$$

د دوه کونجټري یا وتر J سره.

سره یوځای شوی یا سره نڅلولی سیستم

اویلر-دیرنڅیالمساوات Euler-Differentialgleichung

$$a_n t^n u^{(n)} + \dots + a_0 u = f(t)$$

$$v(s) \quad t = e^s, \quad v(s) = u(t)$$

لپاره کرینیز دفرنڅیال مساوات راکوي د ثابت ضربیونو سره

د

بدلون

ستابيليتي

$$u' = Au$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \lambda_i < 0 \forall \lambda_i$$

ستابيل :

$$\det A > 0 \wedge \operatorname{Spur} < 0 \quad (2 \times 2)$$

د - ماتريكس لپاره:

$u(t)$
بپاځيزه يا ناپيلی ستابيل: بنده او پيل ارزښت شتون لري.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t)| = \infty \Leftrightarrow \exists \lambda_i : \operatorname{Re} \lambda_i > 0$$

د کوم لپاره چې د 0 په لور پولي ته نه ځي.
ايستابيل:

Laplace-Transformation لاپلاس- ترانسفورميشن

$U = \mathcal{L}u, \quad U(s) = \int_0^{\infty} u(t) \exp(-st) dt$ $u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} U(s) \exp(st) ds$	<p>لاپلاس- ترانسفورميشن</p> <p>معكوس- ترانسفورميشن</p>
--	--

$au(t) + bv(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} aU(s) + bV(s)$	کرسبیزوالی
$u^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^n U(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \dots - u^{(n-1)}(0)$ $t^n u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n U^{(n)}(s)$	دفرنخیشن
$\int_0^t u(\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{U(s)}{s}, \quad u(t)/t \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_s^\infty U(\tau) d\tau$	انتیگریشن
$u(t-a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \exp(-as)U(s), \quad u(t) = 0 \text{ für } t < 0$ $\exp(at)u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s-a)$	راکبنه
$u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{1 - \exp(-Ts)} \int_0^T u(t) \exp(-st) dt$	T - پریودیکی تابع
$u(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{a} U(s/a)$	سکاله کونه
$(u * v)(t) = \int_0^t u(\tau) v(t-\tau) d\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) V(s)$	- غیرگونه

$u(t)$	$U(s)$	$u(t)$	$U(s)$	خانگری توابع
1	$1/s$	t^n	$n!/s^{n+1}$	
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	

پیل ارزینت پرابلم $U/\Phi - u(0) = F$ د $\Phi(s) = 1/(s+p)$ سره
۱. درجه

د په خت ترانسفورمیشن وروسته $u' + pu = f, p \in \mathbb{R}$ د $\varphi = e^{-pt}$ سره $u = \varphi * f + u(0)\varphi$

پیل ارزینت پرابلم
۲. درجه

Anfangswertproblem 1. Ordnung $u' + pu = f, p \in \mathbb{R}$	$U/\Phi - u(0) = F$ mit $\Phi(s) = 1/(s + p)$ nach Rücktransformation $u = \varphi \star f + u(0)\varphi$ mit $\varphi = e^{-pt}$
Anfangswertproblem 2. Ordnung $u'' + pu' + qu = f, p, q \in \mathbb{R}$	$U/\Phi - (s + p)u(0) - u'(0) = F$ mit $\Phi(s) = 1/(s^2 + ps + q)$ nach Rücktransformation $u = \varphi \star f + u(0)\varphi' + (u(0)p + u'(0))\varphi$ $\lambda \neq \varrho$ Nullstellen von $1/\Phi \Rightarrow \varphi = (e^{\lambda t} - e^{\varrho t})/(\lambda - \varrho)$ λ doppelte Nullstelle von $1/\Phi \Rightarrow \varphi = te^{\lambda t}$

Sturm-Liouville-Probleme د شتورم-لیوویل-پرابلم

د خان سره ادیونگیری

$$Lu = -(pu')' + qu$$

دفرنشیل اوپراتور

ترانفرومیشن په خان سره ادیونگیری بڼې

$$au'' + bu' + cu = f \quad a(x) \neq 0$$

$$-(pu')' + qu = g \quad \text{د لاندې سره} \quad \text{صرب له سره راکوي} \quad -p/a$$

$$p(x) = \exp\left(\int \frac{b(x)}{a(x)} dx\right)$$

$$q(x) = -c(x)p(x)/a(x)$$

$$g(x) = -f(x)p(x)/a(x).$$

آیگنارزینت پرابلم

$$L\psi = \lambda \varrho \psi$$

د ژئ شرطونو سره

$$\alpha_0 \psi(a) + \alpha_1 \psi'(a) = 0, \beta_0 \psi(b) + \beta_1 \psi'(b) = 0$$

ایکن تابع بلل کیری، ایکن ارزینت ψ

پخپله ادیونگیری ایکن ارزینت پر ابلمونه
ایکن ارزینونه حقیقی دی
همغھیا برابر ایگا ارزینت ته ایگت وابع کر بنیز بلواک دی

مختلفو ایکن ارزینتونو ته ایکن توابع q -اورتوگونال دی
ایکن ارزینتونه په کلکخ همغریزه پرلپسی
 $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$

جوروی

Differentiation دفر نخیشن

گرادینت

$$\text{grad } U = (\partial_x U, \partial_y U, \partial_z U)^t$$

$$\text{grad } \vec{F} = (\text{grad } F_x, \text{grad } F_y, \text{grad } F_z)^t$$

$$\text{div } \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

دیورگنت (پولی ته نه تلنه)

خرخون Rotation

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix}$$

$$\left(\text{rot } \vec{F} \right)_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k$$

$$\text{rot } \vec{F} = \partial_x F_y - \partial_y F_x$$

په همدې توگه

لاپاس - اوپراتور Laplace-Operator

$$\Delta U = \text{div}(\text{grad } U) = \partial_x^2 U + \partial_y^2 U + \partial_z^2 U$$

شمیرقوانین تول اوپراتورونه کر بنیز دی

$$\text{rot}(\text{grad } U) = \vec{0}$$

$$\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{F}) = \text{grad}(\text{div } \vec{F}) - \Delta \vec{F}$$

$$\text{grad}(UV) = U \text{ grad } V + V \text{ grad } U$$

$$\text{grad}(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\text{grad } \vec{F})^t \vec{G} + (\text{grad } \vec{G})^t \vec{F}$$

$$\text{div}(U\vec{F}) = U \text{ div } \vec{F} + \vec{F} \cdot \text{grad } U$$

$$\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \cdot \text{rot } \vec{G}$$

$$\text{rot}(U\vec{F}) = U \text{ rot } \vec{F} - \vec{F} \times \text{grad } U$$

نوٹہ- یا استوانہ کو اور دیناتونہ (پروتولار ارزبنتونہ)

$$(x, y, z) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, z), \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

$$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$U(x, y, z) = \Phi(\varrho, \varphi, z)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = \Psi_\varrho \vec{e}_\varrho + \Psi_\varphi \vec{e}_\varphi + \Psi_z \vec{e}_z$$

$$\text{grad } U = \partial_\varrho \Phi \vec{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho} \partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi + \partial_z \Phi \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho \Phi) + \frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi^2 \Phi + \partial_z^2 \Phi$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \Psi_\rho) + \frac{1}{\rho} \partial_\varphi \Psi_\varphi + \partial_z \Psi_z$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \left(\frac{1}{\rho} \partial_\varphi \Psi_z - \partial_z \Psi_\varphi \right) \vec{e}_\rho + (\partial_z \Psi_\rho - \partial_\rho \Psi_z) \vec{e}_\varphi \\ &\quad + \frac{1}{\rho} (\partial_\rho (\rho \Psi_\varphi) - \partial_\varphi \Psi_\rho) \vec{e}_z \end{aligned}$$

اکسیال سیمتریک ورشوگانط یا پتی Axialsymmetrische Felder

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

په واک کی دی Φ همداسی Ψ د

$$\operatorname{grad} \Phi = \partial_\rho \Phi \vec{e}_\rho$$

$$\Delta \Phi = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho \Phi)$$

$$\operatorname{div} (\Psi \vec{e}_\rho) = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \Psi)$$

$$\operatorname{rot} (\Psi \vec{e}_\rho) = \vec{0}$$

$$\operatorname{div} (\Psi \vec{e}_\varphi) = 0$$

$$\operatorname{rot} (\Psi \vec{e}_\varphi) = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \Psi) \vec{e}_z$$

د غونډوسکی یا کری کواوردیناتونه Kugelkoordinaten

$$(x, y, z) = (r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta), \quad \varphi \in [0, 2\pi), \quad \vartheta \in [0, \pi]$$

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U(x, y, z) = \Phi(r, \vartheta, \varphi)$$

$$\vec{F}(x, y, z) = \Psi_r \vec{e}_r + \Psi_\vartheta \vec{e}_\vartheta + \Psi_\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$\text{grad } U = \partial_r \Phi \vec{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\vartheta \Phi \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \Phi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2 \Phi + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \partial_\vartheta \Phi)$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \Psi_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi \Psi_\varphi + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \Psi_\vartheta)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} (\partial_\vartheta (\sin \vartheta \Psi_\varphi) - \partial_\varphi \Psi_\vartheta) \vec{e}_r \\ &+ \frac{1}{r \sin \vartheta} (\partial_\varphi \Psi_r - \sin \vartheta \partial_r (r \Psi_\varphi)) \vec{e}_\vartheta \\ &+ \frac{1}{r} (\partial_r (r \Psi_\vartheta) - \partial_\vartheta \Psi_r) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

راديال سيمتريكي ورشوكاني Radialsymmetrische Felder

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

په واک کې دي Φ همداسې Ψ د فقط د

$$\text{grad } \Phi = \partial_r \Phi \vec{e}_r$$

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \Phi)$$

$$\text{div}(\Psi \vec{e}_r) = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \Psi)$$

$$\text{rot}(\Psi \vec{e}_r) = \vec{0}$$

(Autor: Marcus Reble)

Integration انتيگرالونه

پارامتريک کونه

$$C : [a, b] \ni t \mapsto \vec{r}(t)$$

Kurve کزه

$$S : D \ni (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v)$$

Fläche سطحه

د کزې انتیگرال Kurvenintegral

$$\int_C U = \int_a^b U(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt$$

د کار انتیگرال Arbeitsintegral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

د سطحی انیگرال

Flächenintegral

$$\iint_S U dS = \iint_D U(\vec{r}(u, v)) |\vec{n}(u, v)| du dv, \quad \vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}$$

Flussintegral

جریان انتیگرال

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) du dv, \quad \vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}$$

Fluss durch Funktionsgraph

جریان له فنکشنگراف څخه

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D -F_x \partial_x f - F_y \partial_y f + F_z dx dy, \quad z = f(x, y)$$

Fluss durch Zylindermantel

جریان له توی پوښ څخه

$$\varrho = \varrho(\varphi) : \int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho \varrho - F_\varphi \partial_\varphi \varrho dz d\varphi$$

$$\varrho = \varrho(z) : \int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_{\varrho} \varrho - F_z \varrho \partial_z \varrho dz d\varphi$$

$$2\pi a (z_{\max} - z_{\min}) f(a) \quad \vec{F} = f(\varrho) \vec{e}_{\varrho} \quad \varrho = a$$

خانگری د لپاره د سره

Fluss durch
Kugeloberfläch
e

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} F_r a^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta$$

mit $r = a$

$$4\pi a^2 f(a) \quad \vec{F} = f(r) \vec{e}_r$$

speziell für

vektorielle

Kurvenintegrale وکتوري
گري انتيگرالونه

$$\int_C \vec{F} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \left(\int_C F_x, \int_C F_y, \int_C F_z \right)^t$$

$$\int_C \vec{F} \times d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \times \vec{r}'(t) dt = \begin{pmatrix} \int_C (F_y dz - F_z dy) \\ \int_C (F_z dx - F_x dz) \\ \int_C (F_x dy - F_y dx) \end{pmatrix}$$

vektorielle

Flächenintegrale

وکتوري سطحي
انتيگرالونه

$$\iint_S \vec{F} dS = \left(\iint_S F_x dS, \iint_S F_y dS, \iint_S F_z dS \right)^t$$

$$\iint_S U d\vec{S} = \iint_S U(\vec{r}) \vec{n}^\circ dS$$

$$\iint_S \vec{F} \times d\vec{S} = \iint_S \vec{F}(\vec{r}) \times \vec{n}^\circ dS$$

د گاوس جمله

Satz von
Gauß

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$\iiint_V \operatorname{grad} U dV = \iint_S U d\vec{S}$$

$$\iiint_V \operatorname{rot} \vec{F} dV = - \iint_S \vec{F} \times d\vec{S}$$

$$\iint_A \operatorname{div} \vec{F} dA = \int_C \vec{F} \times d\vec{r}, \quad A \subset \mathbb{R}^2$$

د گري Griesche انتیگرال فرمولونه

Griesche
Integralformel
n

$$\iint_S (U \operatorname{grad} W) \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\operatorname{grad} U \cdot \operatorname{grad} W + U \Delta W) dV$$

$$\iint_S (U \operatorname{grad} W - W \operatorname{grad} U) \cdot d\vec{S} = \iiint_V (U \Delta W - W \Delta U) dV$$

د ستوکس جمله

Satz von
Stokes

$$\iint_S (\operatorname{rot} \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$- \iint_S (\operatorname{grad} U) \times d\vec{S} = \int_C U d\vec{r}$$

$$\iint_A \operatorname{rot} \vec{F} dA = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad A \subset \mathbb{R}^2$$

سکالار پوتنشل

Skalares Potential

$$\text{grad}U = \vec{F}$$

د U سکالر ورشو سره

د شتون له پاره اړین شرطونه

$$\text{notwendige Bedingung für Existenz: } \text{rot } \vec{F} = \vec{0},$$

په یوه ساده سره اړوند ورشو باندې پوره کیدونکي

hinreichend auf einfach zusammenhängenden Gebieten D

C خوبه، په C کې له A څخه د B لور ځغلیدونکي لار

C ein beliebiger, in D von A nach B verlaufender Weg:

د انټیگرال د لارې
خپلواکوالی

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A) \Rightarrow$$

Wegunabhängigkeit

des Integrals

Vektorpotential

$$\text{Vektorfeld } \vec{A} \text{ mit } \text{rot } \vec{A} = \vec{F}$$

وکتور ورشو یا پټی

د شتون له پاره اړین شرطونه

$$\text{notwendige Bedingung für Existenz: } \text{div } \vec{F} = 0,$$

په یوه ساده سره اړوند ورشو باندې پوره کیدونکي

hinreichend auf einfach zusammenhängenden Gebieten

بنسټیز توابع Grundfunktionen

]

Komplexe
Funktion گډوله توابع

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy = re^{i\varphi}$$

Möbius-
Transformation

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad f^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

Geraden / Kreise werden auf Geraden / Kreise abgebildet

کرینې همداسې دایرې (گردی) په کرینو همداسې په گردیو تنظیمیږي

$(z_i, w_i) :$
Festlegung durch drei Punkte د درې ټکو له لارې کره کیدنه

$$\frac{w - w_2}{w - w_3} : \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3} = \frac{z - z_2}{z - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}$$

Exponentialfunktion

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Komplexer
Logarithmus

$$\text{Ln } z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Potenzfunktion

$$z^{p/q} = r^{p/q} \exp(p(\varphi + 2\pi j)i/q), \quad j = 0, \dots, q - 1$$

komplexe Differenzierbarkeit und konforme Abbildungen

Cauchy-Riemann

f
komplex differenzierbar:

Differentialgleichungen

$$f'(z) = f_x(z) = -if_y(z) \Leftrightarrow u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

$$\Rightarrow \Delta u = \Delta v = 0$$

konjugiert harmonische

$\Delta u = 0$ auf D einfach zusammenhängend

Funktion

$$\Rightarrow \exists v : \Delta v = 0 \text{ und } f = u + iv \text{ komplex differenzierbar}$$

Isotropie

$z \mapsto w(z)$
Abbildung

und Winkeltreue

dreht Richtungen um Winkel $\arg f'(z)$ streckt Längen um Faktor $|f'(z)|$

Orthogonalität krummliniger Gitter bleibt erhalten

elementare
Abbildungen
خیره ونی یا تابعگانی

خیره ونه یا تابع Abbildung	له مخه خیره یا - تابع Urbild	Bild خیره یا تابع
$w = z^\alpha$	Sektor $0 < \arg z < \gamma$	Sektor $0 < \arg w < \gamma\alpha$
$w = \frac{z+1}{iz-i}$ $\Leftrightarrow z = \frac{iw+1}{iw-1}$	Einheitskreisscheibe یونگر دی کتره یا توته $ z < 1$	obere Halbebene پورتنی نیمهواره $\operatorname{Im} w > 0$
$w = e^z$ $\Leftrightarrow z = \operatorname{Ln} w$	Streifen $0 < \operatorname{Im} z < \gamma$ کرنبی	Sektor برخه $0 < \arg w < \gamma$

Integration

Kurvenintegral

$$\int_C f dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt, \quad C : t \mapsto z(t), \quad t \in [a, b]$$

Stammfunktion

f
im Gebiet D komplex differenzierbar, C ein in D verlaufender
Weg von z_0 nach z_1 :

$$\int_C f' dz = f(z_1) - f(z_0) = [f]_{z_0}^{z_1}$$

Singularitäten

schwache Singularität: $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z) = 0$

Pol n -ter Ordnung: $|z - a|^{n-1}|f(z)| \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow a$,
 $(z - a)^n f(z)$ beschränkt für $z \rightarrow a$

wesentliche Singularität: $(z - a)^n f(z)$ für kein n beschränkt

Cauchys Theorem

f analytisch in D bis auf endlich viele schwache Singularitäten,
 $C \subset D$ geschlossene Kurve, homotop zu einem Punkt:

$$\int_C f(z) dz = 0$$

Cauchysche Integralformel

f analytisch, $n(C, z)$ Umlaufzahl von C bzgl. z :

$$n(C, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw$$

Integralformel für

Ableitungen

f analytisch, $n(C, z) = 1$:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

Mittelwerteigenschaft

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) dt$$

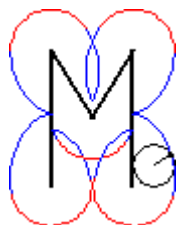
Maximumprinzip

$$\max_{z \in D} |f(z)| \leq \max_{z \in \partial D} |f(z)|$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

[\[vorangehende Seite\]](#) [\[nachfolgende Seite\]](#) [\[Gesamtverzeichnis\]](#) [\[Seitenübersicht\]](#)

automatisch erstellt am 31.1.2006



[\[Home\]](#) [\[Lexikon\]](#) [\[Aufgaben\]](#) [\[Tests\]](#) [\[Kurse\]](#) [\[Begleitmaterial\]](#) [\[Hinweise\]](#)
[\[Mitwirkende\]](#) [\[Publikationen\]](#) [\[Suche\]](#)

Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Komplexe Analysis

Residuenkalkül

[\[vorangehende Seite\]](#) [\[nachfolgende Seite\]](#) [\[Gesamtverzeichnis\]](#) [\[Seitenübersicht\]](#)

Residuum

f $D \setminus \{a\}$,
analytisch in

$$C \subset D$$

entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufener Kreis um a

$$\operatorname{Res}_{z=a} f(z) = \operatorname{Res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

einfache Polstelle:
$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z)$$

Pol n -ter Ordnung:

$$\operatorname{Res}_a f = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} \left((z-a)^n f(z) \right)$$

Residuensatz

C entgegen dem Uhrzeigersinn orientierter Rand eines beschränkten Gebietes D , a_j Singularitäten von f in D :

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}_{a_j} f$$

Trigonometrische

Integranden

$$\int_0^{2\pi} r(\cos t, \sin t) dt$$

geht mit der Substitution $z = e^{it}$ über in

$$\int_{|z|=1} f(z) dz, \quad f(z) = r\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{1}{iz}$$

Rationale

Integranden

f
rational ohne reelle Polstellen, Zählergrad mindestens um 2 kleiner als Nennergrad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{Res}_a f$$

Transzendente

Integranden

f
rational ohne reelle Polstellen, Zählergrad kleiner als Nennergrad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a > 0} \operatorname{Res}_a (f(z) e^{i\lambda z}), \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Algebraische

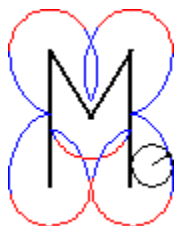
Integranden

f
rational ohne Polstellen auf der positiven reellen Achse, höchstens einfacher Pol bei 0, Zählergrad mindestens um 2 kleiner als Nennergrad:

$$\int_0^{\infty} f(x) x^\alpha dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{a \neq 0} \operatorname{Res}_a (f(z) z^\alpha), \quad 0 < \alpha < 1$$

[\[vorangehende Seite\]](#) [\[nachfolgende Seite\]](#) [\[Gesamtverzeichnis\]](#)[\[Seitenübersicht\]](#)

automatisch erstellt am 31.1.2006



[\[Home\]](#) [\[Lexikon\]](#) [\[Aufgaben\]](#) [\[Tests\]](#) [\[Kurse\]](#) [\[Begleitmaterial\]](#) [\[Hinweise\]](#)
[\[Mitwirkende\]](#) [\[Publikationen\]](#) [\[Suche\]](#)

Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Komplexe Analysis

Potenzreihen

[\[vorangehende Seite\]](#) [\[nachfolgende Seite\]](#) [\[Gesamtverzeichnis\]](#)[\[Seitenübersicht\]](#)

Taylor-
Polynom

$$p_n(z) = \sum_{j=0}^n \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (z-a)^j$$

Restglied:

$$f(z) - p_n(z) = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}(w-z)} dw \right) (z-a)^{n+1}$$

Taylor-Reihe

f analytisch in $D : |z-a| < r$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Konvergenzradius r : Abstand zur nächsten Singularität

$$r = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

Laurent-Reihe

f analytisch in $D : r_1 < |z-a| < r_2$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw$$

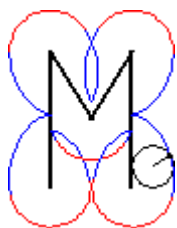
Konvergenzgebiet: maximaler Kreisring um a ohne Singularitäten, r_1, r_2 :
 Abstand der begrenzenden Singularitäten zu a

$$r_1 = \overline{\lim}_{n \rightarrow -\infty} |c_n|^{-1/n} \quad r_2 = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} \right)^{-1}$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)

[\[vorangehende Seite\]](#) [\[nachfolgende Seite\]](#) [\[Gesamtverzeichnis\]](#) [\[Seitenübersicht\]](#)

automatisch erstellt am 31.1.2006



[\[Home\]](#) [\[Lexikon\]](#) [\[Aufgaben\]](#) [\[Tests\]](#) [\[Kurse\]](#) [\[Begleitmaterial\]](#) [\[Hinweise\]](#)
[\[Mitwirkende\]](#) [\[Publikationen\]](#) [\[Suche\]](#)

Mathematik-Online-Kurs: Formelsammlung - Komplexe Analysis

Differentialgleichungen

[\[vorangehende Seite\]](#) [\[nachfolgende Seite\]](#) [\[Gesamtverzeichnis\]](#) [\[Seitenübersicht\]](#)

Regulärer Punkt

Die Differentialgleichung

$$r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$$

ist bei a regulär, wenn

q/r und p/r analytisch in einer Umgebung von a sind.

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n (z - a)^n$$

Entwicklung:

$$u_n = f_n(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_0), \quad n \geq 2$$

Rekursion:

$$u_0 = u(a) \quad u_1 = u'(a)$$

mit durch Anfangsbedingungen u_0 und u_1 eindeutig
 bestimmten Koeffizienten u_n

Singulärer Punkt

Die Differentialgleichung
 $r(z)u''(z) + q(z)u'(z) + p(z)u(z) = 0$
 hat bei a einen regulären
 singulären Punkt, wenn
 $q/r = q_0/(z-a) + O(1)$ und
 $p/r = p_0/(z-a)^2 + O(1/(z-a))$

Charakteristische Gleichung:
 $\varphi(\lambda) = \lambda(\lambda - 1) + q_0\lambda + p_0 = 0$

$$u = (z-a)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n (z-a)^n, \quad u_0 \neq 0$$

Entwicklung:

Rekursion:
 $\varphi(\lambda + n)u_n = f_n(u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_0), \quad n \geq 1$

Differenz der Nullstellen ganzzahlig: eine Lösung zur Nullstelle mit
 größtem Realteil, zweite Lösung mit Variation der Konstanten

Hypergeometrische
 Differentialgleichung

$$z(1-z)u''(z) + (c - (a+b+1)z)u'(z) - abu(z) = 0,$$

$$-c \notin \mathbb{N}_0$$

$$u(z) = F(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} z^n, \quad (t)_n = t(t+1) \cdots (t+n-1)$$

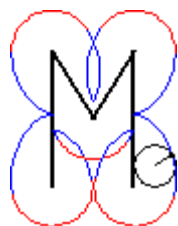
Bessel-
 Differentialgleichung

$$z^2 u''(z) + z u'(z) + (z^2 - \alpha^2) u(z) = 0, \quad \alpha \notin \mathbb{Z}$$

linear unabhängige Lösungen:

$$J_{\pm\alpha} = \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(\pm\alpha + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

(Autoren: Höllig/Hörner/Wipper)



Fourier-Reihen

Reelle Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

mit

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad k \geq 1$$

Komplexe Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$$

شمير بدلون د فوريي
ضريبونو له پاره

Umrechnungsformel
n für Fourier-
Koeffizienten

$$a_0 = 2c_0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}) \quad \text{für } k \geq 1$$

$$c_0 = a_0/2, \quad c_k = (a_k - ib_k)/2, \quad c_{-k} = (a_k + ib_k)/2 \quad \text{für } k \geq 1$$

سيموترSymmetrien

f
gerade:

$$b_k = 0, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad c_k = c_{-k}$$

f
ungerade:

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad c_k = -c_{-k}$$

سكالار
ضرب Skalarprodukt
نورم, Norm

$$\langle f, g \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx \quad \|f\|_{2\pi}^2 = \langle f, f \rangle_{2\pi}$$

Fourier-
Projektion فوريي
برپوسٽون

$$(p_n f)(x) = \sum_{|k| \leq n} \langle f, e^{ikt} \rangle_{2\pi} e^{ikx}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)(x-t))}{\sin((x-t)/2)} f(t) dt$$

Konvergenzrate د
پولي ته تلني كچه

$$\|f - p_n f\|_{2\pi} \leq (n+1)^{-k} \|f^{(k)}\|_{2\pi}$$

برزيول-ورته
والی Parseval-
Identität

$$\|f\|_{2\pi}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$$
$$= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Diskrete Fourier-Transformation

د فوريي
Fourier ماتريکسونه
-Matrizen

$$W_n = \begin{pmatrix} w_n^{0 \cdot 0} & \dots & w_n^{0 \cdot (n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{(n-1) \cdot 0} & \dots & w_n^{(n-1) \cdot (n-1)} \end{pmatrix}, \quad w_n = \exp(2\pi i/n)$$

$$(W_n)^{-1} = \frac{1}{n} W_n^*$$

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

Diskrete
Fourier-
Transformation

$$f = W_n c \Leftrightarrow f_j = \sum_{k=0}^{n-1} w_n^{jk} c_k, \quad j = 0, \dots, n-1$$

Inverse diskrete
Fourier-
Transformation

$$c = \frac{1}{n} W_n^* f \Leftrightarrow c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} w_n^{-kj} f_j, \quad k = 0, \dots, n-1$$

Fourier-Transformation

Fourier-
Transformation

$$\hat{f} = \mathcal{F}f, \quad \hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx$$

Inverse Fourier-
Transformation

$$f = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) e^{ixy} dy$$

د ترانسفورميشن لاري يا قوانين Transformationsregeln

Linearität کربنيزوالی

$$af(x) + bg(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} a\hat{f}(y) + b\hat{g}(y)$$

Symmetrie سيومتري

$$\hat{f}(y) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi f(-x)$$

Konjugation

$$\overline{f(x)} \xrightarrow{\mathcal{F}} \overline{\hat{f}(-y)}$$

Skalierung

$$f(ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(y/a)/|a|$$

Verschiebung

$$f(x - a) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-ia y} \hat{f}(y)$$

$$e^{ia x} f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(y - a)$$

Differentiation

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} (iy)^n \hat{f}(y)$$

$$(-ix)^n f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \left(\frac{d}{dy}\right)^n \hat{f}(y)$$

Faltung

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \tau)g(\tau)d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(y)\hat{g}(y)$$

$$f(x)g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y - \tau)\hat{g}(\tau) d\tau$$

Spezielle Funktionen

f	\hat{f}
1	$2\pi\delta(y)$
1 für $x \in [-a, a]$, 0 sonst	$2a \operatorname{sinc}(ay)$
$\operatorname{sign}(x)$	$2/(iy)$
$e^{-a x }$	$2a/(a^2 + y^2)$
e^{-ax^2}	$\sqrt{\pi/a} e^{-y^2/(4a)}$

Satz د پلانشرل جمله
von Plancherel

$$2\pi \langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle, \quad \sqrt{2\pi} \|f\| = \|\hat{f}\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(y)|^2 dy \right)^{1/2}$$

Poisson-
Summationsformel

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi l)$$

Heisenbergs
Unschärfeprinzip

$$\|xf\| \|y\hat{f}\| \geq \frac{1}{2} \|f\| \|\hat{f}\|$$

Rekonstruktionssatz
z

Hat f Bandbreite h , d.h. $\hat{f}(y) = 0$ für $|y| > h$, dann gilt

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(j\pi/h) \operatorname{sinc}(hx - j\pi)$$

Multivariate Fourier-Transformation

Fourier-Transformation $\hat{f} = \mathcal{F}f, \quad \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-iy^t x} dx, \quad y \in \mathbb{R}^n$

Inverse Fourier-Transformation $f = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}, \quad f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)e^{iy^t x} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$

Transformationsregeln

Linearität $af(x) + bg(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} a\hat{f}(y) + b\hat{g}(y)$

Symmetrie $\hat{f}(y) \xrightarrow{\mathcal{F}} (2\pi)^n f(-x)$

Transformation $f(Ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} |\det(A)|^{-1} \hat{f}((A^{-1})^t y), \quad \det(A) \neq 0$

Verschiebung $f(x - v) \xrightarrow{\mathcal{F}} \exp(-iv^t y) \hat{f}(y)$

$$\exp(iv^t x) f \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(y - v)$$

Differentiation $\partial^\alpha f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} i^{|\alpha|} y^\alpha \hat{f}(y), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$x^\alpha f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} i^{|\alpha|} \partial^\alpha \hat{f}(y)$$

Faltung

$$(f \star g)(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{f}(y)\widehat{g}(y)$$

Spezielle
Funktionen

f	\widehat{f}
1 für $x \in [-a, a]^n$, 0 sonst	$(2a)^n \operatorname{sinc}(ay_1) \cdots \operatorname{sinc}(ay_n)$
$\exp(- x)$	$\frac{2^n \pi^{(n-1)/2} \Gamma((n+1)/2)}{(1+ y ^2)^{(n+1)/2}}$
$\exp(- x ^2/2)$	$(2\pi)^{n/2} e^{- y ^2/2}$

Norminvarianz

$$(2\pi)^{n/2} \|f\| = \|\widehat{f}\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(y)|^2 dy \right)^{1/2}$$

د ډاکټر ماخان شينواري چاپ شوي او ناچاپ ليکني:

1988 Vienna (Austria):

لومړی:

H.K. Kaiser , M. Shinwari : Aproximation compact pological algebra : contributions to

general algebra 6 ; Page 117 – 122

1987 Vienna (Austria):

دوېچ:

Diss . Uni. Interpolation und Aproximation durch Polynime in Universalen Algebren .

Wien

Dissertation at the Interpolation and Aproximation by Polynome in universal Algebras,

University of Vienna/Austria

لاندې د شميرپوهنې پښتوټول کتابونه په المان کې د ،، افغانستان کلتوري ودې ټولنه، له خوا چاپ شوي دي

2000 Bonn (Germany):

درېم: د شميرپوهنې ستر کتاب : د شميرپوهنې برسیره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ،

همداسې د بنوونکو او زده کوونکو لپاره (دا کتاب په ۹۰۰ مخونو کې چاپ او دا نوې ليکنه به يې

خنو خايونو غزېدلې او خني خايونه ترې لري شوي دي)

2003 Bonn (Germany):

خلورم: خُمکچپوهنه(هندسه) ، په سلو، زرو کې شميرنه، د گټې – او کټې د کټې شميرنه ، د

اخيتمالوالي شميرنه کتاب د بنوونځي ټولي اړتياوي پوره کوي

2003 Bonn (Germany):

پنځم: الجبرونه (د الجبر بنسټونه دي)

2003 Bonn (Germany):

شپږم: د شمیرپوهنې انگرېزي - پښتو ډکشنري.

2003 Bonn (Germany):

اووم: د شمیرپوهنې الماني - پښتو - او پښتو الماني ډکشنري

Mathematical dictionary German/Pashto and Pashto/German

2003 Bonn (Germany):

اتم: دفرنخیال برابرېون (دا کتاب په دې څانگه کې یو پیل دی، ساده لیکل شوی)

Differential equation Translation; An Introduction

Bonn (Germany): 2003

نهم: د شمیر پوهنې فرمولونو ټولگه

Mathematical Formulas

2003 Bonn (Germany):

لسم: شمیرپوهنه له عربي په پښتو

1997 Bonn (Germany):

یوولسم: د افغانستان په هکله سپینې خبرې: په المان کې

،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،، له خو

یادونه: له ۲۰۰۰ کال دمخه ډاکتر ماخان شینواري د ،،د افغانستان روغې او بیا ابادولو ټولنه،،

له خوا درې ساسي مجلې هم را وستلې.

د ډاکتر ماخان ،،میري،، شینواري لیکنې او ژباړې چې په ۲۰۱۲ کې چاپ شوي.

ژباړې:

: Prof. Brinkmann. (From Brinkmann.du.de)

لاندي د برينکمن ليکنې چې له پرينکمن ن ج څخه ژباړل شوي دي.

۱ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره لومړی ټوک

۲ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره دويم ټوک

۳ - شمير پوهنه د بنوونځي لپاره دريم ټوک

۴ - د احتمالي شميرنه د بنوونځي لپاره

۵ - احصايه يا ستاتيستيک د بنوونځي لپاره

لاندي کتابونه د شتوتگارت د پوهنتون د استادانو د لکچرونو څخه چې د شتوتگارت پوهنتون ن ج

څخه خپاره شوي را ژباړل شوي.

۶ - اناليزی ۱

۷ - اناليزی ۲

۸ - کرينيز الجبر

۹ - د شمير پوهني بنسټونه

۱۰ - د فرمولونو ټولگه

۱۱ - فنکشنل اناليز

۱۲ - وکتور شمیرنه

۱۳ - له www.grundstudium.info/linearealgebra څخه: کرښيز الجبر

۱۴ - Georg Guttenbrunner گڼونپوهنه يا د اعدادو تيوري

زما ليکنې

Bonn (Germany):

۱۵ - د شميرپوهنې ستر کتاب دويم چاپ د پوره تغيراتو سره : دا کتاب د شميرپوهنې برخې برسیره د انجنري، فزيک او اقتصاد لپاره ، همداسې د بنوونکو او زدهکونکو لپاره پوره گټور دی. په کتاب کې د اړتيا سره زياتونه او کونه راغلي

۱۶ - ځمکچپوهنه (هندسه) دويم چاپ د پوره تغيراتو سره

۱۷ - الجبر بنسټونه دويم چاپ له تغيراتو سره

۱۸ - ډېری پوهنه يا سټ تيوري

۱۹ - د شميرپوهنې سم اند (منطق رياضي)

۲۰ - د يو څو شميرپوهانو ژوندليک

۲۱ - د شمير پوهنې گډې وډې ليکنې

۲۲ - داهم ژباړه ده، خو ليکونکی يې متأسفانه راڅخه نابلد شوی:

د مشتق او انتيگرال شميرنو ته تمرينونه او اوبيوني يا حلونه يې

۲۳ - د شميرپوهنې انگريزي پښتو او عربي + دري ډکشنري

۲۴ - د شمیرپوهنې پښتو انگرېزي ډکشنري

۲۵ - د شمیرپوهنې پښتو ډکشنري د شمیرپوهنیزو وییونو په پښتو روښانه ونه

۲۶ - د زره له کومې (دا هغه لیکنې دي، چې ځنې یې په نړیول جالونو کې خپرې شوي دي.)

۲۷ - د افغانستان په هکله سپینې خبرې، چې و به غزیري.

نوري لیکنې، چې په ژباړه یې پیل شوی، خو لا پوره نه دي

- د شتوتکارت پوهنتون لکچرنوټونو څخه، چې د شتوتکارت پوهنتون ن ج څخه خپریري:

د گروپونو تیوري

- د بنوونځي لپاره فزیک د برینکمن لیکنه

له پنځم ټولگي څخه تر اووم ټولگي پورې ژباړل شوی (دا چې زما دویم مسلک فزیک دی، دا لیکنې ژباړم. دا هم د دې لیکوال یوه ډېره بڼه لیکنه ده، چې د شمیرپوهنې په څیر- دلته هم زیات تمرینونه د حل یا اوبیوني سره په کې راغلي او ماته زیات گټور برېشي).

د اوم څخه تر دولسم ټولگي پورې د شمیرپوهنې کتابونه، چې لنډ وخت کې به ن ج ته پورته شي.

د دولسم ټولگي کتاب په درې، چې دا به هم زرتزره ن ج ته پورته شي.

**Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library**