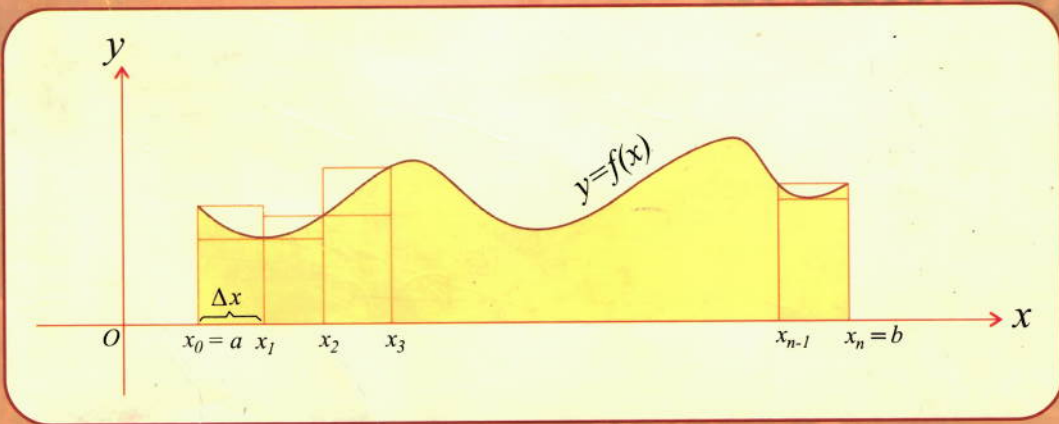
(نوی نصاب)

# عمومي رياضي

## له اووم ټولګي څخه تر دولسم ټولګي پورې





کوشي


اسحاق نیوټن


محمد بن موسی


ارتوستنس


ارشمیدس



مؤلف: استاد سردار محمد (خوږیانی)

# عمومي رياضي

(نوی نصاب)

استاد سردار محمد (خوږیانی)

# کتاب پېژندنه


د کتاب نوم/

**عمومي رياضي (نوی نصاب)**

**مؤلف/**

سردار محمد (خوږیانی)

**ډیزاین/**

الله یار تسل

**خپرندوی/**

میهن خپرندویه ټولنه

**چاپکال/**

۱۳۹۵ل

**چاپشمېر/**

۱۰۰۰ټوکه

**آدرس**

میهن خپرندویه ټولنه پېښور- جلال آباد

**جلال آباد:** اسحاقزی مارکیټ لاندې پوړ، لومړی دوکان

Email: Khorshidhimat@yahoo.com

Abdurashid.himat@gmail.com

Cell: ۰۳۰۰-۵۹۸۱۴۲۵- ۰۳۲۱۹۸۹۵۶۲۱

۰۷۸-۸۵۲۹۱۹۴ ۰۷۷۳۵۳۵۴۲۰

بسم الله الرحمن الرحیم

# مقدمه

الحمد لله الذی فهمنا بعلوم الاشیاء والحوادث و علمنا بزیادات هم و النواقص و الصلوة و سلام علی رسوله بفهم الانسان باشرع فی الاعمال و المباحث.

اما بعد!

خوشحاله یم چې د نوي نصاب د ریاضي په لیکلو باندې د خدای (جل جلاله) په فضل او مهرباني باندې قادر شوم. د نصاب د اول څخه ښوونکو او زده کوونکو د ریاضي په لندیز او وضاحت باندې اسرار کولو. دا دی د غه کتاب په د 1394 لمریز کال د سرطان په 23 نېټه بشپړ او چاپ ته چمتو شو. پدې کتاب کې د حساب څخه تر انتیګرالونو پورې ټول مباحث په جلا جلا توګه لیکل شوي او مثالونه یې حل شوي دي. که په غور سره ولوستل شي او مثالونه یې چې حل شویدي ځو ځو واره وکتل شي انشا الله د ریاضي په باب مو به ستونزې حل شي.

د کتاب تصحیح او سمون دوام او غور غوارې که څه هم مونږ دا کتاب ځو ځو واره په غور سره کتلي او کمی او نواقص مو د امکان تر حده سم کړي، که بیا هم په کتاب کې کوم نقص موجود ؤ، د کتاب سمون لپاره د سپین غر تعلیمي مرکز سره په لاندې پته تماس ونیسئ.

جلال اباد ښار-تالاشی چوک د حاجي زرخان پلازه

سردار محمد خوږیانی

د نصرت عالي لېسې د ریاضاتو استاد

# لیک لړ

## حساب

### اول فصل



### دویم فصل

**نهم فصل**



**لسم فصل**



**یوولسم فصل**

**دولسم فصل**



**دیارلسم فصل**



**څوارلسم فصل**



**پنځلسم فصل**

**اولسم فصل**

**احصائيه**

**اتلسم فصل**

**احتمالات**

**نوولسم فصل**

# حساب

# اول فصل

## رياضي

رياضي د رياض څخه اخيستل شويده په رياضي کی تر (ض) وروسته (ی) نسبتي ده رياض د روضة مجموعه ده نو د رياضي لغوي معنی باغونه يا باغچې دي.

او په اصطلاح کې رياضي هغه علم دی چې د اجسامود کيفيتو ، کميتو ، تغيراتو ، ارتباطاتو او تاثيراتو څخه بحث کوي.

رياضي ډېرې څانګې لري لکه :

1- حساب	2- الجبر	3- نجوم
4- هندسه	5- مثلثات	6- علم هيئت

او داسې نور.

څرنګه چې زمونږ د وطن په تعليمي نصاب کې حساب ، الجبر ، هندسه او مثلثات ټول ليکل شوي دي نو مونږ هم د نصاب مطابق همدغه څلور شيان په دی کتاب کې ليکو.

### 1- حساب :

حساب په لغت کې شمېرلو ته وايې او په اصطلاح کې حساب هغه علم دی چې په معلومو عددونو باندې يوه عمليه اجراء کوي او مجهول عدد پيدا کوي.

### د حساب د علم موضوع:

د حساب د علم موضوع د مکمل اعدادو سيټ دی .

### د مکمل اعدادو سيټ:

د صفر څخه تر (∞) پورې د اعدادو سيټ ته د مکمل اعدادو سيټ وايې.

$0 \longrightarrow \infty$

## د طبيعي اعدادو سيټ:

د (1) څخه تر (∞) پورې د اعدادو سيټ ته د طبيعي اعدادو سيټ وايي.

$$1 \longrightarrow \infty$$

## د حساب د علم د زده کړې غرض:

د حساب د علم زده کړه په ورځنيو معاملاتو کې انسان د غلطۍ څخه ساتي، لکه اخيستل ، خرڅول ، په صحيح ډول د دوا ګانو ترکيب، حتی چې د حساب د زده کړې څخه په غير په فزيک ، کيميا ، هندسه او داسې نورو علومو کې پر مخ تګ نا ممکن دی.

## د حساب اصطلاحات:

### واحد:

د هر شي يوې دانې ته واحد وايي. لکه يو موټر ، يوه طياره يوه کښتۍ او داسې نور.

### عدد:

واحد يا د واحدونو مجموعې ته عدد وايي . لکه (1) ، 13 ، 159 او داسې نور.

عدد ډېر قسمونه لري.

1- مشخص عدد: که د يوه عدد سره د کوم شي نوم ذکر وي دغسې عدد ته مشخص عدد وايي 12 کتابونه ، 107 شاګردان او داسې نور.

2- مجرد عدد: که د عدد سره د کوم شي نوم ذکر نه وي دغه ډول عدد ته مجرد عدد وايي. لکه 180 ، 240 او داسې نور،

3- جفت عدد: هغه عددونه چې په (2) باندې پوره تقسيميږي جفت عددونه دي لکه 170 ، 532 ، 714 ، 326 ، 748 او داسې نور ،

4- طاق عدد: هغه عدد دی چې په (2) باندې پوره نه ويشل کيږي لکه : 3 ، 41 ، 587 او داسې نور.

5- لمړنې عدد: هغه عدد دی چې په ځان او په (1) پوره ويشل کيږي په نورو عددو پوره نه ويشل کيږي. لکه 2 ، 3، 5 ، 7 او داسې نور.

د (1) او 100 تر منځ لمړني عددونه 25 دي. دا عددونه یو یوناني عالم چې Eratosthenes نومېده په (273 -192 ) ق م کې یې یونان کې ژوند کاوه په یوه جدول کې پیدا کړي ؤ.

د (1) څخه تر 100 پورې عددونه یې په یوه مربعي جدول کې ولیکل بیا یې (2) پریښودل او هغه عددونه چې په (2) ویشل کیدل حذف کړل. بیا یې (3) پریښودل او هغه عددونه چې په (3) ویشل کیدل حذف کړل په همدې ترتیب په (5) او (7) باندې چه کوم عددونه ویشل کیدل حذف یې کړل په اخر کې یې په جدول کې پاتې شوي عددونه چې 25 عددونه وه په یوه پاڼه کې ولیکل او لمړني عددونه یې وبلل. عددونه دا دي.

2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23 ، 29 ، 31 ، 37 ، 41 ، 43 ، 47 ، 53 ، 59 ، 61 ، 67،
71، 73، 79، 83 ، 89 ، 97

6- مرکب عددونه : هغه عددونه چې له ځان او یوه څخه په غیر په نورو عددو هم ویشل کیږي مرکب عددونه بلل کیږي. لکه 4 ، 6 ، 8 ، 9 ، 10 او داسې نور .

د (1) او 100 تر منځ مرکب عددونه 74 دي.

(1) نه لمړني عدد دی او نه مرکب عدد دی.

7- تام عدد: که د یوه عدد ټول واحدادت پوره وي دغه عدد ته تام عدد وایې لکه 12 هنداونې ، 15 روپۍ.

8- کسري عدد: هغه عدد دي چې یو واحد یې نیم کړې وي.

لکه $13\frac{1}{4}$ هندوانې، $17\frac{1}{2}$ډالر

کسري عددونه په درې قسمه دي.

a- مختوم کسر: که د کسر صورت په مخرج وویشل شي او باقي ونکړي دی کسر ته مختوم کسر وایې لکه $\frac{3}{4}$ ، $\frac{2}{5}$ ، چې $\frac{3}{4} = 0.75$او $\frac{2}{5} = 0.4$کیږي.

b- غیر مختوم متوالي کسر: هغه کسردی چې صورت په مخرج پوره تقسیم نه شي مگر د خارج قسمت رقمونه یې تکراري وي. لکه $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{6}$او داسې نور .

چې $\frac{1}{3} = 0.33\overline{3}$کیږي او $\frac{1}{6} = 0.166\overline{6}$کیږی.

c- غیر مختوم غیر متوالي کسر: که د یوه کسر صورت په مخرج پوره تقسیم نه شي او دخارج قسمت رقمونه یې هم تکراري نه وي دی کسر ته غیر مختوم غیر متوالي کسر وایې لکه $\frac{13}{47}$ چې $\frac{13}{47} = 0.27659574468085 1\ldots$ کیږي.

9- ناطق عدد: صحیح عدد، متوالي کسر او مختوم کسر ناطق عددونه دي. لکه 15 ، 28 ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{1}{2}$ او داسې نور.

10- غیر ناطق عدد: غیر مختوم غیر متوالي کسر او هغه جذري عددونه چې پوره جذر نلري غیر ناطق عددونه دي لکه $\frac{13}{49}$ ، $\frac{11}{47}$ ، $\sqrt{2}$ او $\sqrt{3}$ او داسې نور.

## ارقام:

د اعدادو د لیکنې سمبول ته رقم وایي.

په ډېرو ممالکو کې د اعدادو د لیکنې لپاره سمبولونه ټاکل شوي دي چې په همغه ممالکو کې استعمالیږي. مگر هغه رقمونه چې د نړۍ په زیاتو ممالکو کې استعمالیږي دري دي.

1- رومي رقمونه      2- هندو عربي رقمونه      3- اریک رقمونه.

### 1- رومي رقمونه :

د هندو عربیک رقمو تر لیکنې د مخه رومي رقمونه زیات استعمالیدل. اوس رومي رقمونه په کتابونو کې د مختلفو مقاصدو لپاره استعمالیږي. خو په حسابي او الجبري عملیو کې نه استعمالیږي $I$ د یو لپاره $V$ د 5 لپاره $X$ د 10 لپاره $L$ د 50 لپاره $C$ د 100 لپاره $D$ د 500 لپاره او $M$ د 1000 لپاره په سمبولیک ډول استعمالیږي.

که یو رقم دري واره څنګ په څنګ ولیکل شي جمع کیږي لکه $II$ دوه دي $III$ دري دي که $X$ درې واره ولیکل شي (30) کیږي که $L$ درې واره ولیکل شي 150 کیږي که دوه مختلف عددونه څنګ په څنګ ولیکل شي که د ښي خوا عدد زیات ؤ د چپې خوا عدد ور څخه منفي کیږي $IV$ چې څلور دي $IX$ نه دی $XL = 40$ دي $XC = 90$ دي او که د چپې خوا عدد زیات ؤ د ښې خوا عدد ور سره جمع کیږي.

$VI = 6$ ، $VII = 7$ او $VIII = 8$ دي $XIX = 19$ او $CX = 110$ ، $LX = 60$ دي $CXXX = 130$ او $MDCXIX = 1619$ دي.

2- اریک رقمونه :

هغه رقمونه دي چې اریائیانو لیکلي دي. دې رقمو ته شرقي رقمونه هم وایې. اریک رقمونه په لاندې ډول دي. ۰ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ ، ۸ ، ۹

ټول لس رقمونه دي.

3- هندو عربیک رقمونه :

هغه رقمونه چې مصریانو لیکلي دي او یوازې د صفر سمبول هندیانو لیکل دي دغه رقمو ته غربي رقمونه هم وایې دا رقمونه 10 دي او عبارت دي له 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 دا رقمونه په دوه برخو ویشل شویدي.

1- معنی دار رقمونه　　2- بې معنی رقم

1- معنی دار رقمونه : د 1 څخه تر 9 پورې رقمو ته معنی دار رقمونه وایې .

2- بې معنی رقم : صفر بې معنی رقم دې ځکه که یوازې هر څومره صفرونه ولیکو په کوم شي دلالت نه کوي لکه . 0000000

او که د عدد چپې خواته ولیکل شي هغه عدد نه ډیرېږي او نه کمیږي .

لکه 0000013 چې 13 دي.

طبقې : د عددو د لیکلو او لوستلو لپاره ریاضي دانانو طبقې لیکلی دي چې هره طبقه درې مرتبې ده هره طبقه خپل نوم لري تر اوسه پورې په ریاضي کې 22 طبقې لیکل شویدي.

| | | |
|---|---|---|
| 1- احادو طبقه | 9- کوادریلیون | 17- اوکتیلیون |
| 2- زرو طبقه | 10- کوادریلیارد | 18- اوکتیلیارد |
| 3- میلیون طبقه | 11 - کوینتیلیون | 19- نونیلیون |
| 4- میلیاردو طبقه | 12- کوینتیلیارد | 20- نونیلیارد |
| 5- بیلیون طبقه | 13- سکستیلیون | 21- د سیلیون |
| 6- بیلیاردو طبقه | 14- سکستیلیارد | 22- دسیلیارد |
| 7- تریلون طبقه | 15- سپتیلیون | |
| 8- تریلیارد طبقه | 16- سپتیلیارد | |

چې تر اوسه پورې په نړۍ کې د دغه طبقو څخه اته طبقې استعمال شویدي یعنې تر تریلیارد پورې طبقې استعمال شویدي.

د عدد لوستل : عدد د ښۍ خوا څخه په طبقو ویشو او د چپې خوا څخه یې لولو اول د طبقې عدد لولو بیا دطبقې نوم اخلو. که طبقه یا مرتبه صفر وه نوم یې نه اخیستل کیږي. لکه:

450,347,825,601,234,004,000,801

او داسې ویل کیږي څلورسوه اوپنځوس تریلیارده دری سوه اواوه څلویښت تریلونه اته سوه اوپنځه ویشت بیلیارده شپږسوه اویوبیلونه دوه سوه اوڅلوردېرش میلیارده څلورمیلونه اواته سوه اویو.

د عددو لیکل : عدد د چپې خوا څخه لیکل کیږي هر عدد په خپله طبقه او مرتبه کی لیکل کیږي که د کومې طبقې یا مرتبې نوم وانه خیستل شي پر ځای صفرونه لیکل کیږي لکه.

درې سوه څوارلس تریلیارده اوه تریلیونه نه ویشت بیلونه یو سل او دولس میلیارده نه څلویښت زره او اته

314,007,000,029,112,000,049,008

## د صحیح عددونو څلور ګونې عملیې:

### 1- د صحیح عددونو جمع:

جمع په لغت کې یو ځای کولو ته وایي.

او په اصطلاح کې د هم جنسو شیانو یو ځای کولو ته جمع وایي.

هغه عددونه چې جمع کیږي د جمع عوامل ورته وایي او هر عدد ته عامل وایي او هغه عدد چې د عواملو د جمع کېدو په نتیجه کې لاس ته راځي. د جمع حاصل ورته وایي.

### د جمع د عملیې طریقه :

د جمع عوامل داسې یو تر بل لاندې لیکو چې هر طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي. بیا د یویز مرتبو رقمونه جمع کوو که دجمع حاصل یې دوه رقمي شو لمړی رقم یې لیکو او دویم رقم یې دلسیز مرتبې د رقمو سره جمع کوو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو د جمع حاصل لاس ته راځي.

$$\begin{array}{r} +456783456 \\ \underline{789432187} \\ 1246215643 \end{array}$$

## د جمع د عملیې میزان:

### 1- د جمع میزان په جمع :

عوامل د لاندې خوا څخه پورته خواته جمع کوو که د جمع نوی حاصل د جمع د پخواني حاصل سره مساوي شو سوال صحیح حل شویدی.

$$\begin{array}{r} \underline{12349391} \\ +7894321 \\ 2578092 \\ \underline{1876978} \\ 12349391 \end{array}$$

### 2- د جمع میزان په تفریق:

که د جمع عوامل دوه وه د جمع د حاصل څخه یو عامل منفي کوو که بل عامل لاس ته راشي سوال صحیح حل شویدی.

$$\begin{array}{r} -1165759 \\ \underline{675974} \\ 489785 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\ 489785 \\ \underline{675974} \\ 1165759 \end{array}$$

### 3- د جمع میزان په طرح نه :

د جمع عوامل طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو . بیا د جمع حاصل طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د عواملو د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو. که دغه دوه عددونه مساوي شول سوال صحیح حل شویدی.

$$\begin{array}{r} +\ 5689247 \\ \underline{7563785} \\ 13253032 \end{array}$$

$\frac{41}{41} = 1$

1 ╳ 1

دجمع دعمليې اساسي اصول:

1- د جمع عمليه د جمعې د تبديلي د قانون پيروي کوي يعنې که د جمع د عواملو ځايونه تغير شي د جمع په حاصل کې تغير نه راځي.

لکه:

$$\begin{array}{r} +451 \\ 238 \\ \hline 689 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +238 \\ 451 \\ \hline 689 \end{array}$$

2- د جمع عمليه د اتحادي قانون پيروي کوي.

يعنې که د جمع عوامل زيات وي په يوه وار يې جمع کول مشکل وي نو دا عددونه په ګروپو ويشو د هر ګروپ د جمع حاصل پيد اکوو او بيا دا جمع حاصلونه جمع کوو د راکړ شوو عددونو د جمع حاصل لاس ته راځي.

3- د اعدادو سيټ د جمع د عمليې لاندې يو تړلی سيټ دی.

4- د جمع دعمليې خنثی عنصر صفر دی.

2- د صحيح عددونو تفريق:

تفريق په لغت بيلولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د دوه هم جنسو عددو د فرق د معلومولو طريقې ته تفريق وايي. لوی عدد ته مفروق منه وايي کوچنی عدد ته مفروق وايي د مفروق منه څخه د مفروق د کميدو په نتيجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي د تفريق حاصل ورته وايي.

د تفريق د عمليې طريقه:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې ليکو چې هره طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي. بيا د مفروق منه د يويز مرتبې د رقم څخه د مفروق د يويز مرتبې رقم منفي کوو د لسيز مرتبې د رقم څخه يې دلسيز مرتبې رقم منفي کوو په همدي ترتيب تر اخره اجرائت کوو د تفريق حاصل لاس ته راځي.

$$\begin{array}{r} -78402138 \\ 14987675 \\ \hline 63414463 \end{array}$$

## د تفریق د عملیې میزان:

### 1- د تفریق میزان په جمع :

د تفریق حاصل د مفروق سره جمع کوو که مفروق منه پلاس راغی سوال صحیح حل شویدی.

$$\begin{array}{r} +30368784 \\ 17987998 \\ \hline 48356782 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -48356782 \\ 17987998 \\ \hline 30368784 \end{array}$$

### 2- د تفریق میزان په تفریق:

د مفروق منه څخه د تفریق حاصل منفي کوو که مفروق لاس ته راغي سوال صحیح حل شویدی.

$$\begin{array}{r} -7854321546 \\ 1789756798 \\ \hline 6064564748 \end{array}$$

میزان

$$\begin{array}{r} -7854321546 \\ 6064564748 \\ \hline 1789756798 \end{array}$$

### 3- د تفریق میزان په طرح نه :

مفروق منه طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو بیا مفروق طرح نه کوو د طرح نه حاصل یط مفروق منه د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو . او منفي کوو یې او په دریم طرف کې یې لیکو بیا د تفریق حاصل طرح نه کوو په څلورم طرف کې یې لیکو د دریم او څلوزم عددونه مساوي وه سوال صحیح حل شویدی.

$$\begin{array}{r} -43756832109 \\ 12898098734 \\ \hline 30858733375 \end{array}$$

7

5      3+9=12

7

که د مفروق منه د طرح نه حاصل د مفروق د طرح نه د حاصل څخه کم ؤ د مفروق منه د طرح نه د حاصل سره 9 جمع کوو بیا د مفروق د طرح نه حاصل ور څخه منفي کوو.

د تفریق اساسي اصول:

1- که مفروق منه ثابت وي او مفروق زیات شي د تفریق حاصل کمیږي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 250 \\ \hline 200 \end{array}$$

2- که مفروق منه ثابت وي مفروق کم شي د تفریق حاصل زیاتیږي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -450 \\ 150 \\ \hline 300 \end{array}$$

3- که مفروق ثابت وي او مفروق منه زیات شي د تفریق حاصل ډیریږي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -500 \\ 200 \\ \hline 300 \end{array}$$

4- که مفروق ثابت وي او مفروق منه کم شي د تفریق حاصل کمیږي.

$$\begin{array}{r} -400 \\ 200 \\ \hline 200 \end{array}$$

5- که مفروق او مفروق منه په یوه اندازه زیات یا کم شي د تفریق په حاصل کې تغیر نه راځي.

$$\begin{array}{r} -450 \\ 200 \\ \hline 250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -500 \\ 250 \\ \hline 250 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -400 \\ 200 \\ \hline 200 \end{array}$$

3- د صحیح عددونو ضرب:

ضرب په لغت کې وهلو ته وایي.

او په اصطلاح کې د مساوي عددونو د جمع لنډي طریقې ته ضرب وایي. د ضرب په عملیه کې اول عدد ته مضروب فیه او د دویم عدد ته مضروب وایي. په مضروب فیه کې د مضروب د ضرب په نتیجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي د ضرب حاصل ورته وایي.

### د ضرب د عمليې طريقه:

مضروب د مضروب فيه لاندې ليکو د مضروب لمړی رقم د مضروب فيه په ټولو رقمو کې په نوبت سره ضربوو بيا د مضروف دويم رقم د مضروب فيه په ټولو رقمو کې په نوبت سره ضربوو په اخر کې دغه عددونه جمع کوو د راکړ شوو عددو د ضرب حاصل لاس ته راځي

```
×   4587
     896
---------
   27522
  41283
 36696
---------
 4109952
```

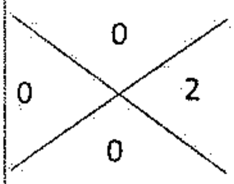
### د ضرب د عمليې ميزان:

#### 1- د ضرب ميزان په تقسيم:

د ضرب حاصل په مضروب فيه ويشو که مضروب لاس ته راغی سوال صحيح حل شوی دی او يا د ضرب حاصل په مضورب ويشو که مضروف فيه لاس ته راغي سوال حل شوی دي.

#### 2- د ضرب ميزان په طرح نه :

مضروب فيه طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د طرح نه د علامې په يوه طرف کې ليکو بيا مضروب طرح نه کوو د طرح نه حاصل يې د مضروب فيه د طرح نه د حاصل په مقابل کې ليکو او ضربوو يې که د ضرب حاصل يې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو يې په دريم طرف کې يې ليکو بيا د راکړ شوو عددو د ضرب حاصل طرح نه کوو په څلورم طرف کې يې ليکو که د دريم او څلورم طرفو عددونه مساوي شول د سوال حل صحيح دی.




```
×  56783
    5238
----------
   454264
  170349
 113566
283915
----------
297429354
```

د ضرب د عمليې اساسي اصول:

1- د اعدادو سيټ د ضرب د عمليې لاندې يو تړلی سيټ دی.
2- د ضرب عمليه د تبديلی د قانون پيروي کوي.
3- د ضرب عمليه د اتحادي قانون پيروي کوی.
4- د ضرب عمليه د توزيعي خاصيت پيروي کوي.
5- د ضرب دعمليې خنثی عنصر (1) دی.

## اضافي معلومات:

العاملي د بعضی عددونو د ضربولو په باره کې څو قاعدې په خلاصة الحساب کې ليکلي دي. موږ د شاګردادان د ذهن د انکشاف لپاره د دغه قاعدو څخه څو قاعدې رانقلوو.

بهاؤ الدين محمد بن الحسين چې مشهور په العاملي دی په 953 هـ ش کال په بعلبک کې زيږيدلی دی او په 1035 هـ ش په اصفهان کې وفات شويدی اصلاً د لبنان ؤ عامل په لبنان کې يو غر دی د بعلبک کلی پدې غره کې دی.

اوله قاعده :

د 5 او 10 تر منځ د عددونو د ضرب حاصل:

يو عدد په 10 کې ضربوو بل عدد د 10 څخه منفي کوو د تفريق حاصل په لمړني عدد کې ضربوو د ضرب حاصل يې د همدغه عدد د 10 چنده څخه منفي کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

1- مثال: د 7 او 9 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

حل:

$$10 \times 7 = 70$$
$$10 - 9 = 1$$
$$1 \times 7 = 7$$
$$70 - 7 = 63$$

2- مثال: د 6 او 8 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$10 \times 6 = 60$$

$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 6 = 12$$
$$60 - 12 = 48$$

دویمه قاعده:

عددونه جمع کوو د 10 څخه پورته برخه يې په 10 کې ضربوو د 10 څخه د عددو د تفاضل د ضرب حاصل ور سره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

حل:

$$6 + 8 = 14$$
$$10 \times 4 = 40$$
$$10 - 6 = 4$$
$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 4 = 8$$
$$40 + 8 = 48$$

دريمه قاعده:

د یو رقمي او د 10 او 20 تر منځ دوه رقمي عددو ضرب حاصل:

عددونه جمع کوو د 10 څخه پورته برخه يې په 10 کې ضربوو یو رقمي عدد د 10 څخه منفي کوو او د دوه رقمي عدد په لمړي رقم کې يې ضربوو او د اولني حاصل ضرب څخه يې منفي کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 7 او 19 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$19 + 7 = 26$$
$$16 \times 10 = 160$$
$$10 - 7 = 3$$
$$3 \times 9 = 27$$
$$160 - 27 = 133$$

مثال: د 8 او 17 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$8 + 17 = 25$$
$$15 \times 10 = 150$$
$$10 - 8 = 2$$
$$2 \times 7 = 14$$
$$150 - 14 = 136$$

څلورمه قاعده:

د 10 او 20 تر منځ د دوه رقمي عددو د ضرب حاصل:

د يوه عدد د يويز رقم د بل عدد سره جمع کوو د جمع حاصل په 10 کې ضربوو او د دواړو عدد د د يويز مرتبو د رقمو د ضرب حاصل ورسره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 13 او 18 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$18 \times 3 = 21$$
$$21 \times 10 = 210$$
$$3 \times 8 = 24$$
$$210 + 24 = 234$$

پنځمه قاعده:

په 5 ، 50 او 500 کې د يوه عدد ضربول:

د عدد نيمايي په 10 کې ضربوو په 5 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي د عدد نيمايي په 100 کې ضربوو په 50 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي.

د عدد نيمايي په 1000 کې ضربوو په 500 کې د هغه عدد د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثالونه:

$$5 \times 28 = 10 \times 14 = 140$$
$$50 \times 36 = 100 \times 18 = 1800$$
$$500 \times 32 = 1000 \times 16 = 16000$$

شپږمه قاعده:

د دوه رقمي عددو د ضرب د حاصل پيدا کول چې يو يې د 10 او 20 تر منځ وي.

د کوچني عدد يويز د لوي عدد په لسيز کې ضربوو او د لوي عدد سره جمع کوو او 10 چنده کوو يې او د يويز مرتبو د رقمو د ضرب حاصل ور سره جمع کوو.

حل: د 17 او 59 د ضرب حاصل پيدا کړئ؟

$$7 \times 5 = 35$$
$$35 + 59 = 94$$
$$94 \times 10 = 940$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$940 + 63 = 1003$$

اومه قاعده:

د 20 او 100 تر منځ د هغه عددو د ضرب حاصل چې لسیز یې مساوي وي.

د یوه عدد یویز د بل عدد سره جمع کوو او په لسیز رقم کې یې ضربوو او 10 چنده کوو یې او د یویز رقمو د ضرب حاصل ور سره جمع کوو مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 63 او 68 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$68 + 3 = 71$$
$$71 \times 6 = 426$$
$$426 \times 10 = 4260$$
$$4260 + 24 = 4284$$

اتمه قاعده:

د 20 او 100 تر منځ د هغه عددو د ضرب حاصل چې د لسیز مرتبې یې مختلفي وي.

د کوچني عدد لسیز په لوی عدد کې ضربوو د کوچني عدد د یویزمرتبې او دلوی عدد د لسیز مرتبې د ضرب حاصل ور سره جمع کوو او 10 چنده کوو یې او د یویز مرتبو د ضرب حاصل ورسره جمع کوو. مطلوب عدد لاس ته راځي.

مثال: د 27 او 69 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$69 \times 2 = 138$$
$$7 \times 6 = 42$$
$$138 + 42 = 180$$
$$180 \times 10 = 1800$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$1800 + 63 = 1863$$

مثال: د 35 او 87 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$87 \times 3 = 261$$
$$5 \times 8 = 40$$
$$261 + 40 = 301$$
$$301 \times 10 = 3010$$
$$5 \times 7 = 35$$
$$3010 + 35 = 3045$$

مثال: 47 او 95 د ضرب حاصل پیدا کړئ؟

$$95 \times 4 = 380$$
$$7 \times 9 = 63$$
$$380 + 63 = 443$$
$$443 \times 10 = 4430$$
$$7 \times 5 = 35$$
$$4430 + 35 = 4465$$

4- د صحیح عددونو تقسیم:

تقسیم په لغت کې ویشلو ته وایي.

او په اصطلاح کې د یوه عدد څخه د مساوي عددونو د تفریقولو لنډې طریقې ته تقسیم وایي.

هغه عدد چه ویشل کیږي مقسوم بلل کیږي هغه عدد چې مقسوم پرې ویشل کیږي مقسوم علیه بلل کیږي په مقسوم علیه باندې د مقسوم د تقسیمیدو په نتیجه کې چې کوم عدد لاس ته راځي خارج قسمت بلل کیږي د مقسوم هغه برخه چې د مقسوم علیه څخه کمه شي او په مقسوم علیه نه ویشل کیږي باقي بلل کیږي.

د تقسیم د عملیې طریقه:

د مقسوم علیه مرتبې شمیرو د مقسوم د چپې خوا څخه همغومره مرتبې را بېلوؤ د مقسوم علیه سره یې مقایسه کوو که تر مقسوم علیه زیات و پرې ویشو یې حاصل یې په خارج قسمت کې لیکو په مقسوم علیه کې یې ضربوو د ضرب حاصل د مقسوم لاندې لیکو او منفي کوو یې. د تفریق د حاصل مخې ته د مقسوم یو رقم راکښته کوو نوی مقسوم جوړ وو که تر مقسوم علیه زیات و پرې ویشو یې او که کم ؤ خارج قمست ته صفر پورته کوو او د مقسوم څخه یو بل رقم راکښته کوو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو تر څو چې مقسوم ختم شي او یا د مقسوم علیه څخه کم شي دغې کمې شوې برخې ته باقي وایي.

```
456340189 | 56342
450736    |______
--------- | 8099
 560418
 507078
---------
  533409
  507078
---------
   26331
```

د تقسیم د عملیې میزان:

1- د تقسیم دعملیې میزان په ضرب:

**خارج قسمت په مقسوم علیه کې ضربوو باقي ور سره جمع کوو که مقسوم لاس ته راغي سوال** صحیح دی.

```
       × 56342
          8099
      --------
        507078
       507078
      00000
    450736
  ------------
   456313858

 +456313858
      26331
 ----------
  456340189
```

2- د تقسیم د عملیې میزان په طرح نه :

مقسوم علیه طرح نه کوو د طرح حاصل یې د طرح نه د علامې په یوه طرف کې لیکو بیا خارج قسمت طرح نه کوو د طرح نه حاصل یې د مقسوم علیه د طرح نه د حاصل په مقابل کې لیکو او ضربوو یې. که د ضرب حاصل یې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو یې د باقي د طرح نه حاصل ور سره جمع کوو که د جمع حاصل یې تر (9) ډېر شو طرح نه کوو یې په دریم طرف کې یې لیکو بیا مقسوم طرح نه کوو په څلورم طرف کې یې لیکو که د دریم څلورم طرفو عددونه مساوي شول سوال صحیح حل شوی دی.

```
 7+6=13
 \  4  /
 8  X  2
 /  4  \
```

نوټ: که د تقسیم عملیې باقي نه لرل او یا یې باقي تر مقسوم علیه کم وه نو د تقسیم میزان په تقسیم هم کولای شو.

مقسوم په خارج قسمت ویشو که مقسوم علیه لاس ته راغی سوال صحیح دی.

| | |
|---|---|
| 893001 | 197 |
| 788 | 4534 |
| 1050 | |
| 985 | |
| 650 | |
| 591 | |
| 591 | |
| 394 | |
| 197 | |

| | |
|---|---|
| 893001 | 4532 |
| 4532 | 197 |
| 44980 | |
| 40788 | |
| 39214 | |
| 31724 | |
| 197 | |

## د تقسیم د عملیې اساسي اصول:

1- که مقسوم او مقسوم دواړه په یوه عدد کې ضرب شي په خارج قسمت کې تغیر نه راځي یوازي باقي په همغه عدد کې ضربیږي . لکه:

| | |
|---|---|
| 60 | 8 |
| 56 | 7 |
| 4 | |

| | |
|---|---|
| 300 | 50 |
| 280 | 7 |
| 20 | |

2- که مقسوم او مقسوم علیه په یوه عدد تقسیم شي په خارج قسمت کې تغیر نه راځي یوازي باقي په هغه عدد تقسیمیږي. مثال:

| | |
|---|---|
| 25 | 2 |
| 2 | 12 |
| 5 | |
| 4 | |
| 1 | |

| | |
|---|---|
| 250 | 20 |
| 20 | 12 |
| 50 | |
| 40 | |
| 10 | |

3- که د دوه عددو څخه هر یو په یو دریم عدد ویشل کیږي مجموعه یې هم په هغه عدد ویشل کیږي خارج قسمت یې د دواړو خارج قسمتو مجموعه ده .

مثال:

$$\begin{array}{r|l} 1280 & 80 \\ \cline{2-2} \underline{80} & 16 \\ 480 & \\ \underline{480} & \\ xxx & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2000 & 80 \\ \cline{2-2} \underline{160} & 25 \\ 400 & \\ \underline{400} & \\ xxx & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3280 & 80 \\ \cline{2-2} \underline{320} & 41 \\ 80 & \\ \underline{80} & \\ xxx & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +1280 \\ \underline{2000} \\ 3280 \end{array}$$

4- که د دوو عددو څخه هر یو په یو دریم عدد ویشل کیږي نو د هغوي تفاضل هم په هغه ویشل کیږي خارج قسمت یې د دواړو خارج قسمتو تفاضل دی.

$$\begin{array}{r} -2000 \\ \underline{1280} \\ 720 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 720 & 80 \\ \cline{2-2} \underline{720} & 9 \\ xxx & \end{array}$$

5- که د دوه عددو څخه یو په دریم عدد ویشل کیدلو د ضرب حاصل یې هم په هغه دریم عدد ویشل کیږي.

لکه 48 په 6 ویشل کیږي مگر 50 په 6 نه ویشل کیږي مگر $2400 = 48 \times 50$ په 6 ویشل کیږي.

$$\begin{array}{r|l} 2400 & 6 \\ \cline{2-2} \underline{24} & 400 \\ 00 & \end{array}$$

تمرين:

1- د دري عددو مجموعه 180 ده د اول او دويم مجموعه 105 ده د دويم او دريم مجموعه 135 ده عددونه پيدا کړئ؟

2- کوم عدد د 35817 څخه منفي شي چې 18465 لاس ته راشي.

3- د دوه ښارو تر منځ فاصله $900km$ ده يو موټر د يو ښار څخه د $85km$ په سرعت د بل موټر خواته په 7 بجې روانيږي او دويم موټر د دويم ښار څخه د $95km$ په سرعت اول ښار ته روانيږي ووايآست چې پس له څه وخته به سره مخ شي.

4- عبدالوهاب دوه ټانه رخت له يوه جنسه يو په $9000Rs$ او بل په $10500Rs$ واخيستل د ټانونو فرق 5 متره دی ووايآست چې هر ټان څو متره دی.

5- يو سړي دوه بوجۍ مميز له يوه جنسه يو په 37800 روپۍ او بل بوجۍ يې په $31500Rs$ واخيستل که د بوجيو فرق (9) منه وي د هرې بوجۍ اندازه پيدا کړئ؟

6- دوه طياري له يوه ميدان څخه په يوه وخت کې پرواز کوي د يوې سرعت $500km/_h$ او د بلې سرعت $750km/_h$ دی يوه د شرق او بله د غرب خواته ځي پس له 2 ساعتو به يې په منځ کې فاصله څومره شي؟

7- يو موټر په سهار په 7 بجې د کابل څخه حرکت کوي يو د شمال خواته او بل جنوب خواته ځي د يوه سرعت $70km/_h$ او د بلې سرعت $90km/_h$ دی پس له څو ساعتو به د دوي په منځ فاصله $960km$ شي.

# دویم فصل

## کسر:

کسر په لغت کې ماتولو ته وايي. او په اصطلاح کې که واحد په څو مساوي برخو وویشل شي دي عملیې ته کسر وايي.

کسر په دوه قسمه دی.

1- اعشار کسر 2- عام کسر

## 1- اعشار کسر:

که واحد په 10 یا د 10 په طاقت وویشل شي دی کسر ته اعشار کسر وايي. لکه 0.3 واحد په 10 برخو ویشل شویدی او 3 برخې ور څخه اخیستل شویدی.

0.13 واحد په 100 برخو ویشل شویدی او 13 برخې ترې اخیستل شویدی. 0.007 واحد په 1000 برخو ویشل شویدی او 7 برخې ور څخه اخیستل شویدی.

## د اعشار کسر څلور گونې عملیې:

### 1- د اعشار کسر جمع:

عددونه داسې یو تر بل لاندې لیکو چې صحیح عدد د صحیح عدد لاندې او اعشاري رقمونه د اعشاري رقمو لاندې راشي. بیا یې د صحیح عددونو د جمع په شان جمع کوو.

$$\begin{array}{r} +87965.38 \\ 32887.45 \\ \hline 120852.83 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +7678.3 \\ 6845.83 \\ \hline 14524.13 \end{array}$$

میزان یې د صحیح عددونو د جمع د میزان غوندې دي.

### 2- د اعشار کسر تفریق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې لیکو چې صحیح عدد د صحیح عدد لاندې او اعشاري رقمونه د اعشاري رقمو لاندې راشي بیا یې د صحیح عددو د تفریق په شان تفریقوو.

$$\begin{array}{r} -5345.870 \\ 2758.985 \\ \hline 2586.885 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -5345.87 \\ 2758.985 \\ \hline 2586.885 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -1467.23 \\ 894.85 \\ \hline 572.38 \end{array}$$

میزان یې د صحیح عددونو د تفریق د میزان غوندې دي.

3- د اعشار کسر ضرب:

مضروب د مضروب فیه لاندې لیکو. د صحیح عددونو د ضرب په شان یې ضربوو د کسر د ضرب د حاصل څخه د مضروب او مضروب فیه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه اعشاري رقمونه را بیلوو د راکړ شوو اعشاري کسرو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

```
    4563.85
     3278.3
   1369155
  3651080
 3194695
 912770
1369155
14961669.455
```

میزان یې د صحیح عددونو د ضرب د میزان غوندې دی.

4- د اعشار کسر تقسیم:

د اعشار کسرتقسیم په درې حالته کې مطالعه کوو.

1- چې په مقسوم کې اعشاریه وي او په مقسوم علیه که نه وي.

لکه

$$4587.5 \;\big|\; 345$$

د صحیح عددونو د تقسیم په شان یې تقسیموو کله چې اعشاریې ته ورسیږو اعشاریه خارج قسمت ته وړو او اعشاري رقم را کښته کوو عملیې ته تر درې اعشاري رقمو پورې ادامه ورکوو.

```
4587.5 | 345
345    | 13.297
------
 1137
 1035
------
 1025
  690
------
  3350
  3105
------
   2450
   2415
------
     35
```

2- حالت: چې په مقسوم علیه کې اعشاریه وي په مقسوم کې نه وي.

لکه:

7562 | 34.2

د مقسوم علیه څخه اعشاریه حذفوو او د مقسوم علیه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه د مقسوم مخې ته صفرونه ږدو او د صحیح عدد د تقسیم په شان یې تقسیموو که باقي وکړل باقي ته صفر ږدو او خارج قسمت کې اعشاریه ږدو تر درې اعشاري رقمو پورې یې تقسیموو.

756920 | 347

3- چې په مقسوم او مقسوم علیه دواړو کې اعشاري رقمونه وي دلته درې حالته موجود دي.

الف: چې د مقسوم او مقسوم علیه د اعشاري رقمو شمېر مساوي وي لکه:

7843.82 | 9.23

د مقسوم او مقسوم علیه دواړو څخه اعشاریه حذفوو د صحیح عددونو د تقسیم په شان یې تقسیموو که عملیې باقي وکړل د باقي مخې ته صفر ږدو او په خارج قسمت کې اعشاریه لیکو تر درې اعشاري رقمو پورې یې تقسیموو.

784382 | 923

ب: چې د مقسوم د اعشاري رقمو شمېر زیات او د مقسوم علیه د اعشاري رقمو شمېر کم وي لکه:

845.234 | 85.7

د مقسوم علیه څخه اعشاریه حذفوو او د مقسوم علیه د اعشاري رقمو د شمېر په اندازه اعشاریه مخ ته وړو بیا یې د اعشار کسر د تقسیم د اول حالت په څېر تقسیمو.

$$8452.34 \;\Big|\; \underline{857}$$

ج: چې د مقسوم علیه د اعشاري رقمو شمېر د مقسوم د اعشاري رقمو د شمېر څخه زیات وي لکه.

$$87635.3 \;\Big|\; \underline{0.456}$$

د مقسوم او مقسوم علیه څخه اعشاریه حذفوو اود مقسوم علیه د اضافه اعشاري رقمو په اندازه د مقسوم مخې ته صفرونه ږدو.

$$87635300 \;\Big|\; \underline{456}$$

د صحیح عددونو د تقسیم په شان یې تقسیموو.

میزان یې د صحیح عددونو د تقسیم د میزان غوندې دی.

2- عام کسر:

که واحد د 10 او او 10 د طاقت څخه په غیر په نورو عددو وویشل شي دی کسر ته عام کسر وایې لکه $\frac{2}{3}$، $\frac{5}{11}$، $\frac{7}{99}$، $\frac{4}{101}$، $\frac{17}{300}$ او داسې نور.

عام کسر په څلور قسمه دی.

1- اصل کسر یا واقعي کسر　　　2- واحد کسر

3- غیر واجب کسر　　　4- واجب کسر یا کسري عدد یا مخلوط کسر

1- واقعي کسر: هغه کسر دی چې صورت یې له مخرج یې ډېر وي.

لکه $\frac{5}{13}$، $\frac{7}{19}$، $\frac{13}{29}$ او داسې نور.

2- واحد کسر: هغه کسر دی چې صورت او مخرج یې مساوي وي لکه $\frac{8}{8}$، $\frac{9}{9}$ او داسې نور.

3- غیر واجب کسر : هغه کسر دی چې صورت یې ډېر او مخرج یې کم وي. لکه $\frac{7}{2}$ ، $\frac{9}{4}$ ، $\frac{13}{5}$ او داسې نور.

4- واجب کسر: هغه کسر دی چې دیوه صحیح عدداو یوه اصل کسرڅخه جوړ شوی وي لکه $3\frac{1}{4}$ ، $7\frac{2}{3}$ ، $8\frac{4}{5}$ او داسې نور.

غیر واجبول:

په غیر واجب کسر باندې د واجب کسر بدلولو ته غیر واجبول وایي.

طریقه یې داسې ده چې مخرج په صحیح عدد کې ضربوو صورت ورسره جمع کوو او پر مخرج یې لیکو.

مثال: $9\frac{1}{7}$ واجب کسر غیر واجب کړئ؟

$$9\frac{1}{7}=\frac{7\times 9+1}{7}=\frac{63+1}{7}=\frac{64}{7}$$

مثال: $8\frac{3}{5}$ غیر واجب یې کړئ؟

$$8\frac{3}{5}=\frac{5\times 8+3}{5}=\frac{40+3}{5}=\frac{43}{5}$$

تصحیح:

په واجب کسر باندې د غیر واجب کسر بدلولو ته تصحیح وایي .

طریقه یې داسې ده چې صورت په مخرج ویشو.

مثال: $\frac{27}{5}$ غیر واجب کسر دی واجب یې کړئ؟

$$\begin{array}{r|l} 27 & 5 \\ \underline{25} & 5 \\ 2 & \end{array}$$

$$\frac{27}{5}=5\frac{2}{5}$$

تمرين:

1- غیر واجب یې کړئ؟

1- $5\frac{3}{4}$ 2- $11\frac{6}{7}$ 3- $8\frac{2}{5}$ 4 – $9\frac{1}{8}$

2- تصحیح یې کړئ؟

1- $\frac{19}{3}$ 2- $\frac{48}{5}$ 3- $\frac{77}{8}$ 4- $\frac{46}{11}$ 5- $\frac{117}{11}$

## د کسرونو مقایسه:

1- که د څو کسرو صورتونه مساوي او مخرجونه یې مختلف وي لکه $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ او $\frac{1}{4}$ پدې کسرو کې هغه کسر لوی دی چې مخرج یې کوچنی وي.

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4}$$

2- که د څو کسرو صورتونه مختلف او مخرجونه یې مساوي وي.

لکه:

$$\frac{4}{7} ، \frac{3}{7} ، \frac{2}{7} ، \frac{1}{7}$$

پدې کسرو کې هغه کسر لوی دی چې صورت یې ډېر وي.

$$\frac{4}{7} > \frac{3}{7} > \frac{2}{7} > \frac{1}{7}$$

3- که د څو کسرو صورتونه او مخرجونه مختلف وي د دې کسرو د مقایسې لپاره کسرونه تجنیسوؤ.

تجنیس :

تجنیس په لغت کې هم جنس کولو ته وایې.

او په اصطلاح کې که د یوه کسر صورت او مخرج د بل کسر په مخرج کې ضرب شي دې عملیې ته تجنیس وایې.

مثال: $\frac{4}{7}$ او $\frac{5}{9}$ کسرونه مقایسه کړئ؟

$$\frac{4}{7}=\frac{4\times 9}{7\times 9}=\frac{36}{63}$$

$$\frac{5}{9}=\frac{5\times 7}{9\times 7}=\frac{35}{63}$$

$$\frac{36}{63}>\frac{35}{63}$$

$$\frac{4}{7}>\frac{5}{9}$$

## تمرین :

لاندې کسرونه مقایسه کړئ؟

1- $\frac{6}{11}$ او $\frac{9}{16}$ 2- $\frac{7}{9}$ او $\frac{8}{11}$ 3- $\frac{2}{5}$ او $\frac{3}{7}$ 4 - $\frac{5}{7}$ او $\frac{7}{9}$ او $\frac{9}{11}$

## د کسرونو اختصار :

اختصار په لغت کې لنډولو ته وایي.

او په اصطلاح کې د یوه کسر صورت او مخرج په یوه عدد ویشلو ته اختصار وایي.

مثال: $\frac{12}{15}$ کسر اختصار کړئ؟

صورت او مخرج په (3) ویشو .

$$\frac{\frac{4}{12}}{\frac{15}{5}}=\frac{4}{5}$$

صورت او مخرج په 7 ویشو.

$$\frac{\frac{5}{35}}{\frac{63}{9}}=\frac{5}{9}$$

صورت او مخرج په 6 بیا په 4 ویشو.

$$\frac{\frac{\frac{5}{20}}{120}}{\frac{144}{\frac{24}{6}}}=\frac{5}{6}$$

صورت او مخرج په 12 ويشو او بيا يې په (2) ويشو.

$$\frac{\frac{120}{10}}{\frac{144}{12}} = \frac{\frac{10}{5}}{\frac{12}{6}} = \frac{5}{6}$$

د کسر د اختصار لپاره د تقسيم د قابليتونو زده کړه ضرور ده.

1- په (2) باندې د ويش قابليت: که د يوه عدد لمړی رقم صفر يا جفت وي په (2) ويشل کيږي لکه 150، 158، 214، 102 او داسې نور.

2- په (3) باندې د ويش قابليت: که د يوه عدد رقمو مجموعه په 3 ويشل کيدله دا عدد په (3) ويشل کيږي.

لکه 11124 ، 1032 ، 11508 او داسې نور.

3- په (4) باندې د ويش قابليت: که د يوه عدد لمړی رقمونه صفرونه وه يا داسې دوه عددونه وي چې په څلورو ويشل کيږي. نو دا ټول په څلور ويشل کيږي . لکه 300 ، 712 ، 520 ، 316 ، 316 ، 728 او داسې نور.

4- په 5 باندې د ويش قابليت: که د يوه عدد لمړی رقم صفر يا 5 وي دا عدد په 5 ويشل کيږي لکه 310 ، 715 او داسې نور.

5- په (6) باندې د ويش قابليت :که يو عدد په 2 او 3 ويشل کيدلو دا عدد په (6) هم ويشل کيږي لکه 312 ، 414 ، 276 ، 1308 او داسې نور.

6- په (7) باندې د ويش قابليت: لمړی رقم حذفوو د حذف شوی دوه چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ترتيب عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر يا داسې عدد پلاس راغی چې په (7) ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په (7) ويشل کيږي.

لکه: 359156 په 7 ويشل کيږي او که نه:

$$\begin{array}{r} 359156 \\ \underline{12} \\ 35903 \\ \underline{6} \\ 3584 \\ \underline{8} \\ 350 \end{array}$$

ځرنګه چې 350 په 7 ويشل کيږي نو راکړ شوی عدد هم په 7 ويشل کيږي.

7- په (8) باندې د ويش قابليت : که د يوه عدد درې لمړي رقمونه صفرونه وه يا داسې درې عددونه وه چې په 8 ويشل کيدل نو دا ټول عدد په (8) ويشل کيږي.

لکه 11000 ، 13832 ، 15168 او داسې نور.

8- په (9) باندې د ويش قابليت : که د يوه عدد د رقمو مجموعه په (9) ويشل کيداله نو دا عدد په 9 ويشل کيږي.

لکه 1115 ، 11385 ، 591102 او داسې نور.

9- په 10 باندې د ويش قابليت : که د يوه عدد لمړی صفر وي په (10) ويشل کيږي لکه 1150 ، 210 او داسې نور.

10- په 11 باندې د ويش قابليت: د طاق مرتبو رقمونه بيل جمع کوو او د جفت مرتبو رقمونه بيل جمع کوو يو دبل څخه يې منفي کوو که د تفريق حاصل صفر يا داسې عدد شو چې په 11 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 11 ويشل کيږي.

لکه : 558998

11- په 12 باندې د ويش قابليت: که يو عدد په 3 او 4 ويش کيدلو دا عدد په 12 هم ويشل کيږي لکه 8016

12- په 13 باندې د ويش قابليت : د عدد لمړی رقم حذفوو څلور چنده يې د متباقي عد سره جمع کوو په همدې ترتيب عمليې ته ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 13 ويشل کيدلو نو راکړ شوي عدد هم په 13 ويشل کيږي.

لکه 593814 ، 739622 او داسې نور.

13- په 17 د ويش قابليت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شو 5 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ترتيب تر اخره عمليې ته ادامه ورکوو که په اخرکی صفر يا داسې يو عدد لاس ته راغی چې په 17 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 17 ويشل کيږي.

لکه 77673 ، 96713 او داسې نور.

14- په 19 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي دوه چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتيب عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر يا داسې عدد په لاس راغی چې په 19 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 19 ويشل کيږی لکه (871701) اوداسې نور.

15- په 23 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي اوه چنده د متباقي سره جمع کوو عمليې ته په همدې ډول ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 23 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد هم په 23 ويشل کيږي.

لکه 10510701 ، 1308562 او داسې نور.

16- په 29 باندې د ويش قابليت: لمړی رقم حذفوو حذف شوي دري چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که اخري عدد په 29 ويشل کيدلو نو راکړ شوی عدد هم په 29 ويشل کيږی.

لکه 1324923 ، 13249288 او داسې نور.

17- په 31 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 3 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که اخري عدد په 31 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد هم په 31 ويشل کيږی لکه 1416297 ، 141422 او داسې نور.

18- په 37 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 11 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عمليې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر يا داسې عدد په لاس راغی په 37 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 37 ويشل کيږي لکه 1690419 ، 210308 او داسې نور.

19- په 41 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي څلور چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو عمليې ته تر اخره ادامه ورکوو که اخرنی عدد په 41 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 41 باندې ويشل کيږي.

لکه 1855988 ، 23160039 او داسې نور.

20- په 43 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 13 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که په اخر کې په لاس راغلي عدد په 43 ویشل کیدلو نو ټول عدد په 43 ویشل کیږي.

لکه 2526078 ، 2531109 او داسې نور.

21- په 47 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 14 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو په همدې ډول عملیې ته ادامه ورکوو که اخرني عدد صفر یا داسې یو عدد شو چې په 47 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 47 ویشل کیږي.

لکه 2462048 ، 3766628 او داسې نور.

22- په 53 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 16 د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد لاس ته راغي چې په 53 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد په 53 ویشل کیږي لکه 24220311 ، 13383825 او داسې نور.

23- په 59 د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 6 چنده د پاتې عدد سره جمع کوو که اخري عدد په 59 ویشل کېدلو نو راکړ شوی عدد په 59 ویشل کیږي لکه 26962233 ، 5166158 او داسې نور.

24- په 61 باندې د ویش قابلیت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 6 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو که په اخر کې صفر یا داسې عدد پلاس راغی چې په 61 ویشل کیدلو نو دا ټول عدد هم په 61 ویشل کیږي.

لکه 397964 ، 3347192 او داسې نور.

25- په 67 باندې د ویش قابلیت : د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 20 چنده د پاتې عدد څخه منفي کوو که په اخر کې داسې عدد لاس ته راغلي چې په 67 ویشل کیدلو او یا صفر ؤ نو دا عدد په 67 ویشل کیږي.

لکه 30618129 ، 36648129 او داسې نور.

26- په 71 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو حذف شوي اوه چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو که د عمليې په اخر کې که صفر يا داسې عدد لاس ته راغی چې په 71 ويشل کيږي نو دا ټول په 71 ويشل کيږي.

لکه 3243919 ، 3719477 او داسې نور.

27- په 73 د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 22 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو په همدې ترتيب عمليې ته ادامه ورکوو که د عمليې په اخر کې صفر يا داسې عدد لاس ته راغی چې په 73 ويشل کيدلو نو راکړ شوي عدد په 73 ويشل کيږي.

لکه 333537 ، 42921372 او داسې نور.

28- په 79 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 8 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو که د عمليې په اخر کې صفر يا داسې عدد لاس ته راغي چې په 79 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 79 ويشل کيږي.

20066 ، 67828215 او داسې نور.

29- په 83 باندې د ويش قابليت: د عدد لمړی رقم حذفوو د حذف شوي 25 چنده د متباقي عدد سره جمع کوو عمليه تر اخره اجراء کوو که اخرني عدد په 83 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد په 83 ويشل کيږي.

لکه 629638 ، 379144 او داسې نور.

30- په 89 باندې د ويش قابليت : لمړی رقم حذفوو د حذف شوي (9) چنده د متباقي عدد سره جمع کوو که اخري عدد په 89 ويشل کيدلو نو راکړ شوي عدد هم په 89 ويشل کيږي.
لکه 406107 ، 6990594 او داسې نور.

31- په 97 باندې د تقسيم قابليت: لمړی رقم حذفوو د حذف شوي عدد 29 چنده د متباقي عدد څخه منفي کوو عمليه تر اجره اجراء کوو که اخرني عدد صفر شو او يا داسې يو عدد شو چې په 97 ويشل کيدلو نو دا ټول عدد بعضي راکړ شوي عدد په 97 ويشل کيږي.
لکه 530396 ، 5127808 او داسې نور.

## د عام کسر څلور ګوني عمليې

### 1- د عام کسر جمع او تفريق :

د څو کسرو د جمع کولو او تفريقولو لپاره لمړی مخرج مشترک پيدا کوو مخرج مشترک د هر کسر په مخرج ويشو د هغه کسر په صورت کې يې ضربوو د مخرج مشترک پر سر يې ليکو د جمع په سوال کې د جمع علامه ليکو .او د تفريق په سوال کې د تفريق علامه ليکو په همدې ترتيب عمليې ته ادامه ورکوو بالاخره د کسرونو د جمع حاصل يا د تفريق حاصل لاس ته راځي.

خو د مخرج مشترک د پيدا کولو لپاره د مخرجو پيژندل ضرور دي.

مخرجونه په څلور قسمه دي.

1- متماثل مخرجونه : مساوي مخرجو ته متماثل مخرجونه وايي.

$$4\frac{5}{9}+3\frac{7}{9}+8\frac{8}{9}$$

$$\frac{41}{9}+\frac{34}{9}+\frac{80}{9}=\frac{41+34+80}{9}=\frac{155}{9}=17\frac{2}{9}$$

$$\begin{array}{r|l} 155 & 9 \\ \underline{9} & 17 \\ 65 & \\ \underline{63} & \\ 2 & \end{array}$$

$$19\frac{3}{5}-8\frac{4}{5}$$

$$\frac{98}{5}-\frac{44}{5}=\frac{98-44}{5}=\frac{54}{5}=10\frac{4}{5}$$

$$\begin{array}{r|l} 54 & 5 \\ \underline{5} & 10 \\ 4 & \end{array}$$

2- متداخل مخرجونه : هغه مخرجونه دي چې لوي مخرج په کوچني مخرج پوره تقسيم شي لکه:

$$5\frac{7}{12}+8\frac{3}{4}+7\frac{5}{6}+8\frac{1}{2}$$

مخرج مشترک يې لوی مخرج دی.

$$\frac{67}{12}+\frac{35}{4}+\frac{47}{6}+\frac{17}{2}=\frac{67+105+94+102}{12}=\frac{368}{12}$$

$$30\frac{8}{12}=30\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 368 & 12 \\ \underline{36} & 30 \\ 8 & \end{array}$$

$$11\frac{5}{8}-4\frac{3}{4}$$

$$\frac{93}{8}-\frac{19}{4}=\frac{93-38}{8}=\frac{55}{8}=6\frac{7}{8}$$

$$\begin{array}{r|l} 55 & 8 \\ \underline{48} & 6 \\ 7 & \end{array}$$

3- **متوافق مخرجونه** : هغه مخرجونه دي چې ټول په يوه عدد ويشل کيږي لکه $8\frac{5}{9}+7\frac{5}{6}$

مخرج مشترک يې په ذو اضعاف اقل پيدا کيږي.

$$15\frac{5}{6}-7\frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} 97 & 12 \\ \underline{96} & 8 \\ 1 & \end{array}$$

$$2\,\underline{\Big)\ \frac{95}{6}+\frac{31}{4}=\frac{190-93}{12}=\frac{97}{12}=8\frac{1}{12}}$$

$$3\quad 2$$

4- **متباين مخرجونه** : هغه مخرجونه دي چې نه متماثل وي نه متداخل وي او نه متوافق وي لکه

$$9\frac{2}{3}+7\frac{3}{4}+7\frac{2}{5}$$

مخرج مشترک يې په حاصل ضرب پيدا کيږي.

$$\frac{29}{3}+\frac{31}{4}+\frac{37}{5}=\frac{580+456+444}{60}=\frac{1480}{60}=24\frac{40}{60}=24\frac{2}{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 1480 & 60 \\ \cline{2-2} 120 & 24 \\ \cline{1-1} 280 & \\ 240 & \\ \cline{1-1} 40 & \end{array}$$

$$19\frac{1}{2}-8\frac{2}{3}$$

$$\frac{39}{2}-\frac{26}{3}=\frac{117-52}{6}=\frac{65}{6}=10\frac{5}{6}$$

$$\begin{array}{r|l} 65 & 6 \\ \cline{2-2} 6 & 10 \\ \cline{1-1} 5 & \end{array}$$

تمرین :

لاندي سوالونه حل کړئ

1. $9\frac{4}{11}+8\frac{5}{11}+4\frac{7}{11}$
2. $12\frac{1}{3}-4\frac{2}{3}$
3. $9\frac{5}{6}+4\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}$
4. $14\frac{5}{8}-7\frac{1}{2}$
5. $6\frac{2}{9}+4\frac{1}{2}+3\frac{2}{3}$
6. $8\frac{1}{4}-3\frac{5}{6}$

2- د عام کسر ضرب:

که کسرونه واجب وه غیر واجبوو يې بیا صورت په صورت کې او مخرج په مخرج کې ضربوو.

1- $9\frac{2}{3}\times 5\frac{1}{4}$

$$\frac{29}{3}\times\frac{21}{4}=\frac{29\times 21}{3\times 4}=\frac{609}{12}=50\frac{9}{12}=50\frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r|l} 609 & 12 \\ \underline{60} & 50 \\ 9 & \end{array}$$

تمرین:

لاندې سوالونه حل کړئ؟

$12\frac{3}{4}\times 8\frac{7}{9}$ -1

$6\frac{1}{8}\times\frac{11}{13}$ -2

$2\times 4\frac{3}{4}$ -3

$6\frac{1}{8}\times 7$ -4

## 3- د عام کسر تقسیم:

که کسرونه واجب وه غیر واجبوو يې. بیا د تقسیم علامه په ضرب بدلوو او مقسوم علیه سرچپه کوؤ.

$19\frac{1}{2}\div 3\frac{1}{8}$ -1

$$\frac{39}{2}\div\frac{25}{8}=\frac{39}{2}\times\frac{8}{25}=\frac{312}{50}=6\frac{12}{50}=6\frac{6}{25}$$

$$\begin{array}{r|l} 312 & 50 \\ \underline{300} & 6 \\ 12 & \end{array}$$

$8\frac{1}{4}\div\frac{2}{3}$ -2

$$\frac{33}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{99}{8}=12\frac{3}{8}$$

$$\begin{array}{r|l} 99 & 8 \\ \underline{8} & 12 \\ 19 & \\ \underline{16} & \\ 3 & \end{array}$$

3- $15\frac{4}{9} \div 3$

$$\frac{139}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{139}{27} = 5\frac{4}{27}$$

$$\begin{array}{r|l} 139 & 27 \\ \underline{135} & 5 \\ 4 & \end{array}$$

4- $8 \div \frac{1}{2} = 8 \times \frac{2}{1} = 16$

تمرین:

1- $20\frac{2}{3} \div 8\frac{5}{6}$

2- $41\frac{2}{5} \div 3\frac{1}{5}$

3- $16\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}$

4- $111 \div 1\frac{1}{2}$

5- $14\frac{1}{5} \div \frac{2}{3}$

کسر الکسر یا مرکب کسر:

هغه کسر دی چې په صورت یا مخرج او یا په دواړو کې یې کسر وي.

لکه:

$$\frac{\frac{2}{3}}{7} \text{ یا } \frac{5}{\frac{3}{4}} \text{ ، } \frac{\frac{7}{11}}{\frac{8}{13}}$$

که د یوه کسر په صورت یا مخرج کې کسر نه وي نو مخرج یې یو دی.

$$\frac{\frac{2}{3}}{7} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{1}}$$

$$\frac{5}{\frac{3}{4}} = \frac{\frac{5}{1}}{\frac{3}{4}}$$

د کسر الکسر د ساده کولو لپاره د طرفينو حاصل ضرب په صورت کې او د وسطينو حاصل ضرب په مخرج کې ليکو.

$$\frac{\frac{2}{3}}{7}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{1}}=\frac{1\times 2}{3\times 7}=\frac{2}{21}$$

$$\frac{5}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{5}{1}}{\frac{3}{4}}=\frac{4\times 5}{3\times 1}=\frac{20}{3}$$

$$\frac{\frac{7}{11}}{\frac{8}{13}}=\frac{7\times 13}{8\times 11}=\frac{91}{88}$$

هغه کسرچه صورت او مخرج لري ساده کسر ورته وايي.

لکه: $\frac{2}{3}$

تمرين : لاندي کسرونه ساده کړئ؟

1- $\frac{\frac{6}{11}}{\frac{9}{22}}$

2- $\frac{9\frac{1}{8}+5\frac{1}{3}}{7\frac{1}{2}}$

3- $\frac{11\frac{1}{4}-2\frac{1}{3}}{4\frac{1}{5}}$

4- $\frac{4\frac{1}{2}\times 6\frac{1}{2}}{9\frac{1}{4}\div 2\frac{1}{3}}$

5- $\frac{6+7\frac{1}{2}}{9-3\frac{1}{4}}$

6- $\frac{\frac{2}{3}\div\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}\div\frac{1}{4}}$

## د کسرونو تبادله:

### 1- د عام کسر بدلول په اعشار کسر:

صورت په مخرج ویشو.

مثال: $\frac{4}{5}$ عام کسر اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{4}{5} = 0.8$$

$$\begin{array}{r|l} 40 & 5 \\ \underline{40} & 0.8 \\ 4 & \end{array}$$

مثال: $\frac{1}{6}$ اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 6 \\ \underline{6} & 0.16 \\ 40 & \\ \underline{36} & \\ 4 & \end{array}$$

مثال: $\frac{3}{8}$ کسر اعشار کسر ته واړوئ؟

$$\frac{3}{8} = 0.375$$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 8 \\ \underline{24} & 0.375 \\ 60 & \\ \underline{56} & \\ 40 & \\ \underline{40} & \\ xx & \end{array}$$

### 2- د اعشار کسر بدلول په عام کسر:

د اعشاري رقمو لاندې خط کشوو بیا د اعشاري رقمو په عوض خط لاندې صفرونه ږدو او د اعشاریې د علامې په عوض یو لیکو او اختصار وؤ یې.

1- مثال: 0.375 په عام کسر بدل کړئ.

$$\frac{0.375}{1000}=\frac{\overset{\overset{\overset{3}{\cancel{15}}}{\cancel{75}}}{\cancel{375}}}{\underset{\underset{\underset{8}{\cancel{40}}}{\cancel{200}}}{\cancel{1000}}}=\frac{3}{8}$$

2- مثال: $0.\overline{3}$ په عام کسر بدل کړئ؟

حل: پوهيږو چې دا اعشار د $\frac{1}{3}$ عام کسر څخه جوړ شويدی د 0.3 لاندې خط کشوو بيا صورت او مخرج د $\frac{1}{3}$ د کسر په مخرج کې ضربوو او د صورت سره باقي جمع کوو.

$$\frac{0.3}{10}=\frac{3\times3+1}{10\times3}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$$

يا دا چه د متوالي عدد لاندې 9 ليکو

$$\frac{0.3}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

مثال: $0.1\overline{6}$ عام کسر ته واړوئ؟

$$\frac{0.16}{100}=\frac{16\times6+4}{100\times6}=\frac{96+4}{600}=\frac{100}{600}=\frac{1}{6}$$

$$\frac{0.16}{90}=\frac{16-1}{90}=\frac{15}{90}=\frac{1}{6}$$

تمرين:

1- اعشار کسر ته يې واړوئ؟

1- $\frac{4}{7}$ 2- $\frac{3}{5}$ 3- $\frac{7}{8}$ 4- $\frac{5}{6}$ 5- $\frac{11}{15}$

2- عام کسر ته يې واړوئ؟

1- $0.\overline{27}$ 2- $0.7\overline{3}$ 3- $0.95\overline{45}$ 4- $0.4\overline{6}$

5- $0.3\overline{8}$ 6- $0.4\overline{16}$ 7- $0.9\overline{1}$ 8- $0.\overline{814}$

عبارتي سوالونه:

1- احمد د یوې هنداونې $\frac{3}{7}$ برخه واخیسته پاتې شوې برخه یې پیدا کړئ؟

2- د تیلو د ټانک $\frac{7}{9}$ برخه ډکه ده که د $200li$ گنجایش ولري وواياست په ټانک کې به ټول تیل څومره وي؟

3- د غوړیو د بیلر $\frac{2}{5}$ برخه د غوړیو څخه ډکه ده د ډکې برخې دريمه برخه یې $30kg$ ده د بيلر گنجایش څو دی؟

4- احمد د $200\frac{1}{2}$ روپو بوره د $300\frac{1}{4}$ روپۍ یې چای د $700\frac{3}{4}$ روپۍ غوښه $30\frac{1}{2}$ روپۍ یې مالگه او اورلگیت واخیست که د نوموړي تنخوا 2000 روپۍ وي وواياست چې څو روپۍ ور پاته دي؟

5- امين $10\frac{1}{2}kg$ غوښه واخیسته که غوښه کیلو گرام په $300\frac{1}{4}$ روپۍ وي وواياست چې قصاب څو روپۍ ور څخه اخیستي دي؟

6- چای خرڅوونکی د چایو یو پیتۍ چې $50kg$ چای پکې دی خلاصه کړه احمد ته $2\frac{3}{4}kg$ چای عمود ته یې $3\frac{1}{4}kg$ چای او یو دکاندار ورڅخه $20\frac{1}{4}$ کیلو گارم چای واخیستی دوست چې په پیتۍ کې څومره چای پاتې دی؟

# دریم فصل

## طاقت، تجزیه او جذر

### طاقت لرونکي عددونه:

هغه عددونه دي چې څو واره په خپل ځان کې ضرب شوي وي.

لکه:

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

هغه عدد چې په خپل ځان کې ضربیږي د طاقت لرونکي عدد قاعده ورته وایې او د ضربیدو کرتو ته توان وایې.

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$$

### د طاقت قوانین:

1- که څو طاقت لرونکي عددونه د ضرب په حال کې وي قاعدې یې مساوي او توانونه یې مختلف وي . د قاعدو څخه یوه قاعده لیکو او توانونه یې جمع کوو.

$$2^3 \times 2^5 \times 2^7 \times 2 = 2^{3+5+7+1} = 2^{16}$$

2- که څو طاقت لروکي عددونه د ضرب په حال کې وي قاعدې یې مختلفې او توانونه یې مساوي وي قاعدې سره ضربوؤ او د توانو څخه یو توان راخلو.

$$2^7 \times 3^7 \times 5^7 = (2 \times 3 \times 5)^7 = 30^7$$

3- که دوه طاقت لرونکي عددونه د تقسیم په حال کې وي قاعدې یې مساوي او توانونه یې مختلف وي د قاعدو څخه یوه قاعده لیکو او توانونه یې منفي کوو.

$$\frac{7^{11}}{7^5} = 7^{11-5} = 7^6$$

4- که دوه طاقت لرونکي عددونه د تقسیم په حال کې وي قاعدې یې مختلفې او توانونه یې مساوي وي قاعدې یې یو پر بل لیکو او د توانو څخه یو توان راخلو.

1- $\frac{6^5}{3^5} = \left(\frac{6}{3}\right)^5 = 2^5$

2- $\frac{16^7}{12^7} = (\frac{16}{12})^7 = (\frac{4}{3})^7$

3- $\frac{5^8}{3^8} = (\frac{5}{3})^8$

5- که یو طاقت لرونکی عدد په بل توان رفع شي توانونه یې ضربیږي.

$$(2^3)^4 = 2^{3\times4} = 2^{12}$$

6- هر عدد په توان د صفر یو کیږي.

$\{(5^3)^7\}^0 = 5^0 = 1$

$5^0 = 1$

$\frac{5^3}{5^3} = 1 \ldots\ldots\ldots I$

$\frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0 \ldots\ldots\ldots II$

د $I$ او $II$ رابطو چپ طرفونه مساوي دی نو ښي طرفونه یې هم مساوي دي. یعني $5^0 = 1$ کیږي.

2- که یو طاقت لرونکی عدد د صورت څخه مخرج ته یاد مخرج څخه صورت ته ویوړل شي د توان علامه یې تغیر خوري.

$2^5 = \frac{1}{2^{-5}}$

$3^{-7} = \frac{1}{3^7}$

$\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$

$\frac{1}{4^{-6}} = 4^6$

د $2^5 = \frac{1}{2^{-5}}$ ثبوت:

$$2^5 = \frac{2^5 \times 2^{-5}}{2^{-5}} = \frac{2^0}{2^{-5}} = \frac{1}{2^{-5}}$$

د $\frac{1}{4^{-6}} = 4^6$ ثبوت:

$$\frac{1}{4^{-6}} = \frac{1 \times 4^6}{4^{-6} \times 4^6} = \frac{4^6}{4^0} = \frac{4^6}{1} = 4^6$$

## تجزيه :

تجزيه په لغت کې ټوټه ټوټه کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د يوه مرکب عدد د ضربي عواملو د پيدا کولو طريقې ته تجزيه وايي.

## د تجزيې طريقه:

عدد ليکو خط يې لاندې کشوو چپې خواته يې عمودي خط رسموو د عمودي خط چپې خواته هغه لمړنی عدد ليکو چې د راکړ شوي عدد په ضربي عواملو کې د ټولو څخه کوچنی وي. راکړ شوی پدې لمړني عدد ويشو حاصل يې د خط لاندې ليکو په همدې ترتيب عمليې ته تر هغه وخته پورې ادامه ورکوؤ تر څو چې د عدد په ستون کې يو لاس ته راشي. د عمودي خط د چپې خوا عددونه د راکړ شوي عدد ضربي عوامل دي.

| | |
|---|---|
| 2 | 450 |
| 3 | 225 |
| 3 | 75 |
| 5 | 25 |
| 5 | 5 |
| | 1 |

$$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$$

د 55125 تجزيه کړئ؟

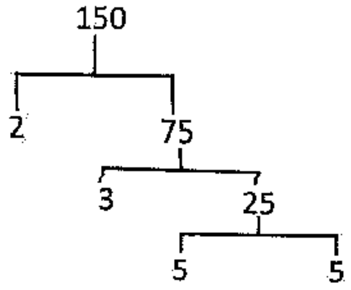
| | |
|---|---|
| 3 | 55125 |
| 3 | 18375 |
| 5 | 6125 |
| 5 | 1225 |
| 5 | 245 |
| 7 | 49 |
| 7 | 7 |
| | 1 |

$$55125 = 3^2 \times 5^3 \times 7^2$$

## د دیا ګرام په طریقه د یوه عدد تجزیه کول:

عدد لیکو په دوه برخو یې داسې ویشو چه یو یې لمړنی عدد او بل یې مرکب عدد وي مرکب عدد بیا په دوه برخو ویشو په همدې ډول دمرکب عدد ضربي عوامل لاس ته راځي.

مثال: 150 د دیاګرام په طریقه تجزیه کړئ؟




$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

## د تجزیې د استعمال ځایونه:

تجزیه د څو عددو د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب د پیدا کولو لپاره استعمالیږي.

لوی مشترک قاسم:دڅوعددولوی مشتر ک قاسم هغه عدد دی چې ترهغه په بل لوی عددباندې دا عددونه تقسیم نه شي.

لکه د 150 او 210 لوی مشترک قاسم 30 دی ځکه چې 150 او 210 تر 30 په بل غټ عدد نه ویشل کیږي.

کوچني مشترک مضرب: د څو عددو کوچنی مشترک مضرب هغه عدد دی چې تر هغه بل کوچنی عدد په دې عددو باندې تقسیم نه شي.

لکه 150 او 210 کوچنی مشترک مضرب 1050 دی . ځکه چې تر 1050 بل کوچنی عدد نشته چې په 150 او 210 باندې وویشل شي.

## د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پیدا کول:

عددونه تجزیه کوو په ضربي عواملو کې يې مشترک او غیر مشترک پیدا کوو په مشترکو ضربي عواملو کې د کوچني توان والاضربي عوامل راخلو ضربوويي لوی مشترک قاسم لاس ته راځي.

او که په مشترکو ضربي عواملو کې د لوړ توان والاضربي او غیر مشترک ضربي عوامل سره ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: 150 او 210 لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پیدا کړئ؟

| | |
|---|---|
| 2 | 150 |
| 3 | 75 |
| 5 | 25 |
| 5 | 5 |
| | 1 |

| | |
|---|---|
| 2 | 210 |
| 3 | 105 |
| 5 | 35 |
| 7 | 7 |
| | 1 |

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$
$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$G.C.D = 2 \times 3 \times 5 = 30$$
$$L.C.M = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 1050$$

2- د 660 او 840 لوی مشترک قاسم (G.C.D) او کوچني مشترک مضرب (L.C.M) پیدا کړئ؟

| | |
|---|---|
| 2 | 660 |
| 2 | 330 |
| 3 | 165 |
| 5 | 55 |
| 11 | 11 |
| | 1 |

| | |
|---|---|
| 2 | 840 |
| 2 | 420 |
| 2 | 210 |
| 3 | 105 |
| 5 | 35 |
| 7 | 7 |
| | 1 |

$$660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$$
$$840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$$
$$G.C.D = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$
$$L.C.M = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 9240$$

تمرین :

د لاندې عددونو لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

1- 630 او 450

2- 780 او 540

3- 960 او 660

5- 1440 او 1260

## د اقلیدس په طریقه د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پیدا کول:

لوی عدد په کوچني عدد ویشو که د تقسیم عملیه باقي وکړي مقسوم علیه په باقي ویشو په همدې ترتیب عملیې ته ادامه ورکوو کله چې باقي صفر شي اخرنی مقسوم علیه لوی مشترک قاسم دی

مثال: د 1080 او 780 لوی مشترک قسام او کوچنی مشترک مضرب د اقلیدس په طریقه پیدا کړئ؟

$$\begin{array}{r|l} 1080 & 780 \\ \underline{780} & 1 \\ 300 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 780 & 300 \\ \underline{600} & 2 \\ 180 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 300 & 180 \\ \underline{180} & 1 \\ 120 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 180 & 120 \\ \underline{120} & 1 \\ 60 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 120 & 60 \\ \underline{120} & 2 \end{array}$$

$$G.C.D = 60$$

عددونه سره ضربوو په لوی مشترک قاسم یې ویشو $L.C.M$ لاس ته راځي.

$$L.C.M = \frac{\text{د عددونو حاصل ضرب}}{G.C.D}$$

$$G.C.D = \frac{\text{د عددونو حاصل ضرب}}{L.C.M}$$

د راکړ شوي سوال $L.C.M$ په لاندې ډول پیدا کوو.

$$L.C.M = \frac{\overset{13}{780} \times 1080}{\underset{1}{60}} = 13 \times 1080 = 14040$$

$$L.C.M = 1404$$

## په یوه جدول کې د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک مضرب پیدا کول:

عددونه په یوه کرښه کې لیکو خط ور لاندې کشوو چپې خواته یې عمودي خط رسموؤ د عمودي خط چپې خواته هغه لمړنی عدد لیکو چې د دوي په ضربي عواملو کې د ټولو څخه کوچنی وي راکړ شوي عددونه په دغه لمړني عدد ویشو حاصل یې د خط لاندې لیکو تر هغو پورې عملیې ته ادامه ورکوو تر څو چې ټول په یوه عدد ویشل کیږي د عملیې په اخر کې که د عمودي خط د چپې خوا عددونه ضرب کړو لوی مشترک قاسم لاس ته راځي. او که د افقي خط لاندې عددونه هم پکې ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: د 780 او 1080 لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 780 | 1080 |
| 2 | 390 | 540 |
| 3 | 195 | 270 |
| 5 | 65 | 90 |
| | 13 | 18 |

$$G.C.D = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$$

$$L.C.M = 60 \times 13 \times 18 = 14040$$

تمرين:

د لاندې عددونه لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب د اقلیدس په طریقه پیدا کړئ؟

1- 1350 او 750

2- 930 او 870

3- 540 او 420

4- 900 او 720

د لاندې عددونو کوچنی مضرب او لوی مشترک قاسم په یوه جدول کې پیدا کړئ؟

1- 960 او 1530

2- 210 او 180 او 150

3- 225 او 135 او 120

4- 240 او 330 او 90

جذر :

جذر په لغت کې ولی، ریښه یا جرړې ته وایي.

او په اصطلاح کې د یوه عدد جذر هغه عدد دی چې د جذر په درجه رفع شي او د جذر لاندې عدد پلاس راشي لکه که $\sqrt[n]{a} = b$ وي

نو $b^n = a$ کیږي.

د یو عدد دویم جذر : هغه عدد دی چې د (2)په توان رفع شي او د جذر لاندې عدد پلاس راشي . لکه:

$$1\text{-}\ \sqrt{64} = 8$$
$$8^2 = 64$$
$$2\text{-}\ \sqrt{169} = 13$$
$$13^2 = 169$$

د یو عدد دریم جذر:

هغه عدد دی چې د دریې په توان رفع شي او د جذر لاندې عدد په لاس راشي لکه که

$$\sqrt[3]{64} = 4$$

نو $64 = 4^3$ کیږي.

ددویم جذرپیدا کول:

دیوه عدد دویم جذر په دوه طریقو پیدا کیږي.

1- د تجزیې پواسطه 2- په عمومي طریقه

## 1- د تجزيي پواسطه د يوه عدد د دويم جذر پيدا کول:

عدد تجزيه کوو په مساوي ضربي عواملو کې دوه ، دوه جوړه کوو د هرې جوړې څخه يو عدد راخلو او ضربوو يې د هغه عدد دويم جذر لاس ته راځي.

1- مثال: د (324) دويم جذر پيدا کړئ؟

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 324 |
| | 2 | 162 |
| 3 | 3 | 81 |
| | 3 | 27 |
| 3 | 3 | 9 |
| | 3 | 3 |
| | | 1 |

$$324 = 2 \times 3^{2}$$

## د يوه عدد د دريم جذر پيدا کول په

عدد تجزيه کوو مساوي ضربي عوامل ئي درې،درې جوړه کوو د هرې جوړې څخه يو عدد راخلو ضربوو يې د هغه عدد دريم جذر لاس ته راځي.

مثال: د (1000) دريم جذر پيدا کړئ؟

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 1000 |
| | 2 | 500 |
| | 2 | 250 |
| 5 | 5 | 125 |
| | 5 | 25 |
| | 5 | 5 |
| | | 1 |

$$\sqrt[3]{1000} = 2 \times 5 = 10$$

### د یو عدد څلورم جذر:

عدد تجزیه کوو مساوي ضربي عوامل څلور څلور جوړه کوؤ، د هرې جوړې څخه یو عدد راخلو او ضربوو د هغه عدد څلورم جذر لاس ته راځي.

مثال: 1296 څلورم جذر پیدا کړئ؟

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 1296 |
| | 2 | 648 |
| | 2 | 324 |
| | 2 | 162 |
| 3 | 3 | 81 |
| | 3 | 27 |
| | 3 | 9 |
| | 3 | 3 |
| | | 1 |

$$\sqrt[4]{1296} = 2 \times 3 = 6$$

نوټ: په همدغه ډول د تجزیې پواسطه ، پنځم ، شپږم او نور جذرونه پیدا کولای شو.

### 2- په عمومي ډول د یوه عدد د دویم جذر پیدا کول:

عدد لیکو ښي خواته یې د تقسیم علامه او چپې خواته یې یو عمودي خط رسموؤ بیا د عدد د ښي خوا څخه دوه ، دوه مرتبې جوړه کوؤ اخر ته به هم یادوه مرتبې جوړه شي او یا به یوه مرتبه یواځې پاتې شي په دواړه حالتو کې یو داسې عدد پیدا کوو چې په خپل ځان کې ضرب شي او دغه عدد پوره کړي او یا لږ کم شي دا عدد د تقسیم د علامې په سر او د عمودي خط چپې خواته لیکو او سره ضربوو یې د ضرب حاصل د راکړ شوي عدد د اخرني جوړې یا اخرني عدد لاندې لیکو منفي کوو یې د تفریق د حاصل مخې ته دوه رقمونه کښته او د مقسوم په څېر یې استعمالوو د عمودي خط د چپې خوا عدد دوه چنده کوو او د مقسوم علیه کار ور څخه اخلو مقسوم په مقسوم علیه ویشو حاصل یې د خارج قسمت د مخکیني عدد مخې ته او د عمودي خط د چپې د خوا د عدد مخې ته لیکو. په خارج قسمت کې دغه نوی عدد د عمودي خط د چپې خوا ته په ټول عدد کې ضربوو د ضرب حاصل یې د مقسوم لاندې لیکو او منفي کوو د

تفریق د حاصل مخې دوه نور رقمونه راکښته کوو د عمودي خط د چپې نوی رقم دوه چند کوو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو که عملیې باقي ونکړل د تقسیم د عملیې پر سر عدد د راکړ شوي عدد دویم جذر دی. که عملیې باقي وکړل د تفریق د حاصل مخې ته دوه صفرونه ږدو او خارج قسمت ته اعشاریه پورته کوو.

$$\sqrt{209764} = 458 \qquad \begin{array}{r|l|l} 4 & \overset{\frown}{20}\,\overset{\frown}{97}\,\overset{\frown}{64} & 458 \\ 85 & \underline{16} & \\ 805 & \;\;497 & \\ & \;\;\underline{425} & \\ & \;\;\;7264 & \\ & \;\;\;\underline{7264} & \\ & \;\;\;xxxx & \end{array}$$

$$\sqrt{502681} = 709 \qquad \begin{array}{r|l|l} 7 & \overset{\frown}{50}\,\overset{\frown}{26}\,\overset{\frown}{81} & 709 \\ 1409 & \underline{49} & \\ & 12681 & \\ & \underline{12681} & \\ & \;xxxx & \end{array}$$

تمرین:

د لاندې عددونو دویم جذر په عمومي طریقه پیدا کړئ؟

1- $\sqrt{298116} = ?$ 2- $\sqrt{318096} = ?$

3- $\sqrt{734449} = ?$ 4- $\sqrt{2047.5625} = ?$

5- $\sqrt{5484.8836} = ?$

## تقریبي جذر :

که د یوه عدد جذر په خپل ځان کې ضرب شي د ضرب حاصل یې هغه عدد پوره نکړي چې جذر یې نیول شویدی نو دغه جذر ته تقریبي جذر وایي د یوه عدد تقریبي جذر په دوه طریقو پیدا کیږي.

1- په عمومي طریقه 2- د اوسط په طریقه

1- په عمومي طريقه :

د عدد جذر په عمومي طريقه پيدا کوؤ که باقي يې وکړل د باقي مخې ته دوه صفرونه ږدو او خارج قسمت ته اعشاريه پورته کوو او د جذر عمليې ته ادامه ورکوو پلاس راغلي جذر ته تقريبي جذر وايي.

مثال: د 128968 جذر پيدا کړئ؟

| | | |
|---|---|---|
| 3 | 128968 | 359.1 |
| 65 | 9 | |
| 709 | 389 | |
| 7169 | 325 | |
| | 6468 | |
| | 6381 | |
| | 8600 | |
| | 7169 | |
| | باقي 1431 | |

359.1 د 128968 تقريبي جذر دی.

2- د اوسط په طريقه :

د کوچنيو عددونو تقريبي جذر د اوسط په طريقه پيدا کيږي طريقه يې داسې ده د راکړ شوي عدد څخه لاندې باندې دوه داسې عددونه پيدا کوو چې پوره جذر ولري جذرونه يې جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو اوسط يې مربع کوو که مربع يې کوچني عدد ته نژدې ؤ نو جذر يې د کوچني عدد د جذر سره جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو اوسط يې د راکړ شوي عدد تقريبي جذر دی.

مثال: د 5 تقريبي جذر پيدا کړئ؟

حل: د 5 څخه لاندې هغه عدد چې پوره جذر لري 4 دی چې جذر يې 2 دی د 5 څخه پورته عدد چې پوره جذر لري 9 دی او جذر يې دري (3) دی 2 او 3 جمع کوو او اوسط يې پيداکوو $2.5 = \frac{5}{2} = \frac{2+3}{2}$ اوسط يې 2.5 دی 2.5 مربع کوو مربع يې 6.25 ده 6.25 د 9 څخه 4 ته نژدې ده نو د 6.25 جذر د 4 د جذر سره جمع کوو او اوسط يې پيدا کوو.

$$\frac{2.5+2}{2}=\frac{4.5}{2}=2.25$$

2.25 د 5 تقریبي جذر دی.

نوټ: د 5 او 6 تقریبي 2.25جذر دی د 7 او 8 تقریبي جذر 2.75 دی.

## د اعشاري عدد دويم جذر پیدا کول:

صحیح عدد یې د ښي خوا څخه دوه دوه مرتبې جوړه کوو او اعشاري رقمونه یې د چپې خوا څخه دوه دوه جوړه کوو که اعشاري رقمونه یې طاق وي مخې ته یو صفر ږدو. کله چې د اعشار یې د علامې څخه اوړو اعشاریه خارج قسمت ته وړو.

مثال: 903.6036 دویم جذر پیدا کړئ؟

$$\begin{array}{r|l|l} 3 & \overset{\frown}{9}\,\overset{\frown}{03}.6036 & 30.06 \\ 6006 & 9 & \\ \hline & 036036 & \\ & 36036 & \\ \hline & \text{xxxxx} & \end{array}$$

تمرین:

لاندې عددو تقریبي جذر په عمومي طریقه پیدا کړئ؟

4716 -1    35811 -2    7504-3    9814 -4    6763 -5

2- د لاندې عددو تقریبي جذر د اوسط په طریقه پیدا کړئ؟

11 -1    13 -2    19 -3    29 -4    34-5

3- د لاندې اعشاري عدد دویم جذرپیدا کړئ؟

457.96 -1    1229.9049 -2    337444.81 -3    48830.25 -4

2605.0816 -5    64.048009 -6    2711.2849 -7

## د جذر قوانين:

1- که څو جذري عددونه د ضرب په حال کې وي د جذر لاندې عددونه يې مساوي او د جذر درجې يې مختلفې وي. که وغواړو چې تر يوه جذر يې لاندې کړو په طاقت لرونکو عددو يې بدلوود طاقت قوانين پرې تطبيقوو اخري عدد بيرته تر جذر لاندې کوو.

$$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[5]{2}=\sqrt[30]{2^{31}}$$
$$2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}=2^{\frac{15+10+6}{30}}=2^{\frac{31}{30}}=\sqrt[30]{2^{31}}$$

2- که څو جذري عددونه د ضرب په حال کې وي د جذر لاندې عددونه يې مختلف او د جذر درجې يې مساوي وي. د طاقت د قوانينو سره سم کولای شو چې تر يوه جذر يې لاندې کړو.

$$\sqrt[7]{2}\times\sqrt[7]{3}\times\sqrt[7]{5}=\sqrt[7]{2\times3\times5}=\sqrt[7]{30}$$
$$2^{\frac{1}{7}}\times3^{\frac{1}{7}}\times5^{\frac{1}{7}}=(2\times3\times5)^{\frac{1}{7}}=30^{\frac{1}{7}}=\sqrt[7]{30}$$

3-که دوه جذري عددونه د تقسيم په حال کې وي د جذر لاندې عددونه يې مساوي او د جذر درجې يې مختلفې وي د طاقت د قوانينو په اساس کولای شو چې تر يوه جذر يې لاندې کړو.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}}=\sqrt[35]{5^4}$$
$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}}=\frac{5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{7}}}=5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{7}}=5^{\frac{7-3}{21}}=5^{\frac{4}{21}}=\sqrt[21]{5^4}$$

4- که دوه جذري عددونه تقسيم په حال کې وي د جذر لاندې عددونه يې مختلف او د جذر درجې يې مساوي وي د طاقت د قوانينو سر سم يې تر يوه جذر لاندې ليکو.

$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}}=\sqrt[3]{\frac{5}{6}}$$
$$\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{6}}=\frac{5^{\frac{1}{3}}}{6^{\frac{1}{3}}}=\left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\frac{5}{6}}$$

5- که جذري عدد د جذر په درجه رفع شي د جذر لاندې عدد لاس ته راځي

$$\left(\sqrt[7]{5}\right)^7=5$$

$$\left(\sqrt[7]{5}\right)^7 = \left(5^{\frac{1}{7}}\right)^7 = 5^{\frac{1}{7}\times\frac{7}{1}} = 5^{\frac{7}{7}} = 5^1 = 5$$

6- که یو عدد تر مختلفو جذرو لاندې وي د طاقت د قوانینو سره سم یې تر یوه جذر لاندې کوو.

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \sqrt[30]{2}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} = \left\{(2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\right\}^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{30}} = \sqrt[30]{2}$$

تمرین:

تر یوه جذر یې لاندې کړئ؟

1- $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[5]{3}$ 2- $\sqrt[7]{2}\times\sqrt[7]{3}\times\sqrt[7]{5}$ 3- $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[9]{2}}$

4- $\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[6]{7}}$ 5- $\sqrt[6]{\sqrt[5]{\sqrt{3}}}$

## د حسابي افادو د قیمت پیدا کول:

حسابي افاده: که په یوه حسابي جمله کې څو عملیې (جمع ، تفریق ، ضرب ، تقسیم) او قوسونه طاقت او جذر موجود وي د دغسې افادې د قیمت د پیدا کولو لپاره لمړی طاقت او جذر د منځه وړو بیا قوسونه خلاصوو دریم قدم کې د ضرب او تقسیم عملیې او په اخر د جمع او تفریق عملیې اجراء کوو.

قوس: یو سمبول دی چې څو عددونه تر یوه حکم لاندې کوي قوسونه په درې قسمه دي.

1- کوچني قوسونه چې شکل یې ( ) دی.

2- منځنی قوسونه چې شکل یې { } دی.

3- لوی قوسونه چې شکل یې [ ] دی.

مثال:

$$(8-11)(4-5)+8-2\div 2-11$$

$$-3(-1)+8-1-11$$
$$3+8-12$$
$$11-12=-1$$

## هم درجه کول:

که څو جذري عددونه د ضرب یا تقسیم په حال کی وي د جذر لاندې عددونه مختلفې او درجې يې هم مختلفې وي که وغواړو چې تر یوه جذر يې لاندې کړو لمړی يې هم درجه کوو.

طریقه يې دا ده چې د ټولو جذرو درجې سره ضربوو چې د جذر عمومي درجه لاس ته راشي دا عمومي درجه د هر جذر په درجه تقسیموو د همغه جذري عدد توان لاس ته راځي.

1- مثال: $\sqrt[5]{3} \times \sqrt{2}$ تر یوه جذر لاندې کړئ؟

حل : لمړی يې هم درجه کوو.

$$\sqrt[10]{2^5} \times \sqrt[10]{3^2} = \sqrt[10]{2^5 \times 3^2} = \sqrt[10]{32 \times 9} = \sqrt[10]{288}$$

2- $\frac{\sqrt[7]{2}}{\sqrt{3}}$ هم درجه يې کړئ؟

$$\frac{\sqrt[14]{2^2}}{\sqrt[14]{3^7}} = \sqrt[14]{\frac{2^2}{3^7}}$$

تمرین : هم درجه يې کړئ؟

1- $\sqrt[3]{3} \times \sqrt{2}$ 2- $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{2}$ 3- $\sqrt[3]{4 \times \sqrt[4]{5}}$ 4- $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$

5- $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{5}}$ 6- $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{5}}}{\sqrt[3]{6}}$ 7- $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}$

## د جذري عددونو جمع کول او تفریقول:

همغه جذري عددونه جمع کولای او تفریقولای شو چې د جذر لاندې عددونه مساوی وي او د جذر درجې يې هم مساوي وي.

مثال:

$$7\sqrt[3]{2} + 11\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{2} - 15\sqrt[3]{2}$$

$(7+11+6)\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}$

$24\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{2}$

$(24-15)\sqrt[3]{2}=9\sqrt[3]{2}$

2- $5\sqrt{32}+7\sqrt{128}+5\sqrt{8}-20\sqrt{2}$ لازمي عمليې پرې اجراء کړئ؟

$5\sqrt{16\times 2}+7\sqrt{64\times 2}+5\sqrt{4\times 2}-20\sqrt{2}$

$5\times 4\sqrt{2}+7\times 8\sqrt{2}+5\times 2\sqrt{2}-20\sqrt{2}$

$(20+56+10-20)\sqrt{2}=66\sqrt{2}$

تمرين:

لاندې جذري عددونه جمع او تفريق کړئ؟

1- $11\sqrt{5}+19\sqrt{5}+8\sqrt{5}-25\sqrt{5}$

2- $\sqrt{128}+3\sqrt{8}-5\sqrt{32}$

3- $13\sqrt{27}+5\sqrt{243}-20\sqrt{3}$

ګويا کول:

که د يوه کسر په صورت يا مخرج کې جذري حد يا عدد موجود وي کولای شو چې ګويا يې کړو. مګر مشهور په رياضي کې د مخرج ګويا کول دي د کسر د مخرج ګويا کول په حساب کې دوه حالتونه لري.

1- چې د کسر په مخرج کې يو جذري عدد موجود وي او د جذر درجه يې 2 وي لکه $\frac{5}{\sqrt{15}}$ صورت او مخرج د مخرج په جذري عدد کې ضربوؤ.

$$\frac{5}{\sqrt{15}}=\frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15}\times\sqrt{15}}=\frac{5\sqrt{15}}{\sqrt{15^2}}=\frac{5\sqrt{15}}{15}=\frac{\sqrt{15}}{3}$$

2- چې د کسر په مخرج کې يو جذري عدد موجود وي او د جذر درجه يې د (2) څخه زياته وي لکه $\frac{3}{\sqrt[5]{12}}$ د دغه ډول کسرو د مخرجو د ګويا کول لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري عدد کې ضربوو د جذر د درجې او جذري عدد د توان د تفاضل په اندازه توان ورکوؤ.

$$\frac{2}{\sqrt[5]{12}}=\frac{2}{\sqrt[5]{12}\times\sqrt[5]{12^4}}=\frac{2\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12\times12^4}}=\frac{2\sqrt[5]{12^4}}{\sqrt[5]{12^5}}=\frac{2\sqrt[5]{12^4}}{12}$$

$$\frac{2}{\sqrt[5]{12}}=\frac{\sqrt[5]{12^4}}{6}$$

تمرین: ګویا یې کړئ؟

1- $\frac{2}{\sqrt{6}}$ 2- $\frac{3}{\sqrt{12}}$ 3- $\frac{14}{\sqrt{7}}$ 4- $\frac{15}{\sqrt{5}}$ 5- $\frac{2}{\sqrt{2}}$

6- $\frac{2}{\sqrt[3]{6}}$ 7- $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt[4]{5}}$ 8- $\frac{12}{\sqrt[5]{3}}$ 9- $\frac{14}{\sqrt[5]{7}}$ 10- $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

## د اعدادو سیستمونه:

څرنګه چې په حساب کې 10 رقمونه لیکل شویدی نو له همدې کبله هغه عددونه چې په روزمره ژوند کې استعمالیږي د 10 په قاعده د اعدادو سیستم او یا اعشاري سیستم بلل کیږي.

مثلاً 5918 یو عدد راکړ شویدی د دې د پاره چې معلوم کړو چې د دغه عدد قاعده معلومه کړو څرنګه چه رقمونه یې څلور دي نو راکړ شوي عدد څلور ځایه کوو او هر رقم په خپله مرتبه کې لیکو.

$$5918 + 5000 + 900 + 10 + 8$$
$$= 5 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$

که ضریبونه څنګ په څنګ په ترتیب سره ولیکل شي نو بیرته لمړنی عدد لاس ته راځي.

همدغه ډول که راکړ شوی عدد په مسلسله توګه په 10 وویشو او باقیات د تقسیم په مقابل کې د پاس څخه کښته خواته ولیکو. او بیا دباقیاتو د ستون رقمونه په افقي کرښه کې داسې ولیکو چې د ستون د سر رقم یې په سر کې راشي. او نور رقمونه یې په ترتیب سره ورپسې ولیکل شي بیرته راکړ شوی عدد لاس ته راځي.

| | | |
|---|---|---|
| 10 | 5918 | |
| 10 | 591 | 8 |
| 10 | 59 | 1 |
| 10 | 5 | 9 |
| | 0 | 5 |

$5918_{10} = 5918$

نو معلومه شوه چې په روزمره ژوند کې د مستعمل عددونو قاعده 10 ده په کمپیوتري معایناتو کې د امراضو د تشخیص لپاره دوه نور سیستمونه هم لیکل شویدي چې د 2 په قاعده د اعدادو سیستم او بل د 5 په قاعده د اعدادو سیستم دی

1- د 2 په قاعده د اعدادو سیستم:

که وغواړو چې یو عدد د 2 په قاعده د اعدادو سیستم ته واړوو عدد په مسلسل ډول په (2) ویشو باقیات یې د تقسیم د عملیې په مقابل کې دپاس څخه کښته خواته لیکو که د باقیاتو د ستون رقمونه په افقي ډول ولیکل شي د (2) په قاعده د اعدادو سیستم لاس ته راځي.

مثال:- 31 د 2 په قاعده د اعدادو سیستم ته واړوئ؟

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 31 | |
| 2 | 15 | 1 |
| 2 | 7 | 1 |
| 2 | 3 | 1 |
| 2 | 1 | 1 |
| | 0 | 1 |

$31_{10} = 11111_2$

یا دا چې د طاقت د قوانینو څخه استفاده کوو.

$31 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

$31 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$

$31 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2 + 1 \times 2^0$

$31_{10} = 11111_2$

د 2 د قاعدې اساسي رقمونه (2)دي چې عبارت له (0,1) څخه دي.

2- د 5 په قاعده د اعدادو سیستم:

عدد په مسلسل ډول په 5 ویشو د باقیاتو د ستون رقمونه په ترتیب سره په افقي کرښه کې لیکو د 5 په قاعده د اعدادو سیستم لاس ته راځي.

مثال: 251 د 5 قاعدې ته واړوئ؟

حل:

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 251 | |
| 5 | 50 | 1 |
| 5 | 10 | 0 |
| 5 | 2 | 0 |
| | 0 | 2 |

$$251_{10} = 2001_5$$

$$251 = 2 \times 125 + 1$$
$$251 = 2 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 1 \times 5^0$$
$$251 = 2001_5$$

د 5 د قاعدې اساسي رقمونه 5 دي چې عبارت دي له 4 ، 3 ، 2 ، 1 ، 0 څخه

تمرین:

لاندې عددونه د 2 په قاعده بانډې د اعدادو سیستم ته واړوئ؟

| | | |
|---|---|---|
| 33-1 | 47 -2 | 65 -3 |
| 77-4 | 71-5 | 97-6 |

لاندې عددونه د 5 په قاعده بانډې د اعدادو سیستم ته واړوئ؟

| | | |
|---|---|---|
| 211-1 | 314 -2 | 97 -3 |
| 86 -4 | 98 -5 | 101 -6 |

د 2 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته د یوه عدد اړول:

د 2 د قاعدې د عدد ټول رقمونه په ترتیب سره د 2 په مختلفو رقمو کې ضربوو د 10 په قاعده مربوطه عدد لاس ته راځي.

مثال: $111011_2$ د 10 قاعدې ته واړوئ.

$$1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$
$$32 + 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 59$$
$$59_{10} = 111011_2$$

## د 5 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته د یوه عدد اړول:

د 5 د قاعدې د عدد ټول رقمونه په ترتیب سره د 5 په مختلفو طاقتو کې داسې ضربوو چې لمړی رقم په $5^0$ کې دریم رقم $5^1$ کې ........ په همدې ترتیب تر اخره ضربوو د ضرب حاصلونه يې جمع کوو د 10 د قاعدې مربوطه عدد لاس ته راځي.

مثال: $32104_5$ د 10 قاعدې ته واړو.

$$3 \times 5^4 + 2 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 4 \times 5^0$$
$$3 \times 625 + 2 \times 125 + 1 \times 25 + 0 \times 5 + 4 \times 1$$
$$1875 + 250 + 25 + 0 + 4 = 2154$$

تمرین:

لاندې عددونه د 2 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته واړوئ؟

1- $101111_2$ 2- $111011_2$ 3- $111111_2$

4- $1010001_2$ 5- $100011_2$

لاندې عددونه د 5 د قاعدې څخه د 10 قاعدې ته واړوئ؟

1- $231_5$ 2- $341_5$ 3- $423_5$ 4- $143_5$ 5- $234_5$

# څلورم فصل

## نسبت او تناسب

نسبت:

نسبت په لغت کې رابطې ته وايي.

او په اصطلاح کې د دوه هم جنسو عددو تر منځ رابطې ته نسبت وايي. لکه:

$$\frac{a}{b}$$

$a$ ته اول حد يا صورت يا مقدم وايي $b$ ته دويم حد يا مخرج يا مؤخر وايي.

نسبت مجرد عدد دی واحد نلري.

نسبت د فيصد په شکل اود اعشار کسر په شکل هم ليکلای شو .

اوله قاعده - د نسبت پيداکول: که دوه عددونه راکړ شوي وي او وغواړو چې نسبت يې پيدا کړو يو پر بل يې ليکو او اختصاروؤ يې.

$$\text{نسبت} = \frac{\text{اول حد}}{\text{دويم حد}}$$

مثال: احمد 210 روپۍ او محمد 270 روپۍ لري نسبت يې پيدا کړئ؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د احمد روپۍ}}{\text{د محمد روپۍ}} = \frac{210}{270} = \frac{7}{9}$$

دويمه قاعده: چې د دوه کميتو نسبت او اول حد معلوم وي دويم حد معلوم نه وي. دويم حد په لاندې ډول پيدا کوو.

$$\text{دويم حد} = \text{اول حد} \div \text{نسبت}$$

مثال: د احمد او محمود د پيسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی که د احمد روپۍ 430 وي د محمود روپۍ څو دي؟

$\text{نسبت} = \frac{5}{8}$ $\text{د محمود روپۍ} = 430 \div \frac{5}{8} = 430 \times \frac{8}{5} = \frac{3440}{5} = 688$

$\text{احمد روپۍ} = 430$ $\text{د محمود روپۍ} = 688Rs$

$\text{د محمود روپۍ} = ?$

دريمه قاده: چې د دوه کميتو نسبت او دويم حد معلوم وي او اول حد معلوم نه وي.

$$\text{اول حد} = \text{دويم حد} \times \text{نسبت}$$

مثال: د احمد او محمود پيسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی د محمود روپۍ 688 دي د احمد روپۍ څو دي؟

$\text{نسبت} = \frac{5}{8}$ $\text{احمد روپۍ} = 688 \times \frac{5}{8} = \frac{3440}{8} = 430Rs$

$\text{محمود روپۍ} = 688$ $\text{احمد روپۍ} = 430Rs$

$\text{احمد روپۍ} = ?$

څلورمه قاعده: چې د دوه کميتو نسبت او مجموعه معلوم وي او کميتونه معلوم نه وي د کميتو د لاس ته راوړلو لپاره د کميتو مجموعه د صورت او مخرج په مجموعه ويشو که خارج قسمت په صورت کې ضرب کړو اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې يې ضرب کړو دويم حد لاس ته راځي.

مثال:- د اکرم او انور د پيسو نسبت $\frac{3}{5}$ دی او د پيسو مجموعه 4080 ده د هر يوه روپۍ څو دي؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د اکرم روپۍ}}{\text{د انور روپۍ}} = \frac{3}{5}$$

$\text{مجموعه} = 4080$ $\text{اکرم روپۍ} = \frac{3 \times 4080}{3+5} = \frac{12240}{8} = 1530$

$\text{د اکرم روپۍ} = ?$ $\text{انور روپۍ} = \frac{5 \times 4080Rs}{3+5} = \frac{20400}{8} = 2550$

$\text{د انور روپۍ} = ?$

پنځمه قاعده: چې د دوه کمیتو نسبت او تفاضل معلوم وي کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د لاس ته راوړلو لپاره د کمیتو تفاضل د صورت او مخرج په تفاضل ویشو که خارج قسمت په صورت کې ضرب شي اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې ضرب شي دویم حد لاس ته راځي.

مثال: د عبدالهادي او عبدالباري د پیسو نسبت $\frac{6}{11}$ دی او د پیسو فرق یې 750 دی د هر یوه پیسي څو دي؟

نسبت $= \frac{6}{11}$

تفاضل $= 750$

عبدالهادي روپۍ $= ?$

عبدالباري $= ?$

عبدالهادي روپۍ $= \frac{6 \times 750}{11-6} = \frac{4500}{5} = 900$

عبدالباري روپۍ $= \frac{11 \times 750}{11-6} = \frac{8250}{5} = 1650$

شپږمه قاعده : چې د دوه کمیتو نسبت او د ضرب حاصل معلوم وي کمیتونه معلوم نه وي د کمیتو د ضرب حاصل د صورت او مخرج په حاصل ضرب ویشو که د خارج قسمت جذر په صورت کې ضرب شي اول حد لاس ته راځي او که په مخرج کې ضرب شي دویم حد لاس ته راځي.

مثال:- د احمد او محمود د نسبت $\frac{5}{7}$ دی او د ضرب حاصل یې 2240 دی د هر یوه روپۍ پیدا کړئ؟

نسبت $= \frac{5}{7}$

د ضرب حاصل $= 2240$

د احمد روپۍ $= 5\sqrt{\frac{2240}{5 \times 7}} = 5\sqrt{64} = 5 \times 8 = 40$

د محمد روپۍ $= 7\sqrt{\frac{2240}{5 \times 7}} = 7\sqrt{64} = 7 \times 8 = 56$

اوومه قاعده - معکوس نسبتونه:

که دوه یا څو کسرونه ولرو چې د اول کسر مخرج د دویم کسر صورت په همدې ترتیب اخره وي دی کسروته معکوس نسبت وايي لکه $\frac{a}{b}$ او $\frac{b}{c}$ د معکوس نسبتود ضرب حاصل څخه د اول او اخر حد نسبت لاس ته راځي.

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{a}{\cancel{b}} \times \frac{\cancel{b}}{\cancel{c}} \times \frac{\cancel{c}}{\cancel{d}} \times \frac{\cancel{d}}{e} = \frac{a}{e}$$

مثال: که د احمد محمود د پیسو نسبت $\frac{3}{4}$ دی د محمود او حامد د پیسو نسبت $\frac{5}{7}$ دی که د احمد روپۍ 300 وي د حامد روپۍ څو دي؟

$$\text{نسبت} = \frac{\text{د احمد روپۍ}}{\text{دمحمودروپۍ}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{نسبت} = \frac{\text{محمود روپۍ}}{\text{حامد روپۍ}} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{\text{احمد}}{\cancel{\text{محمود}}} \times \frac{\cancel{\text{محمود}}}{\text{حامد}} = \frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$$

$$\frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{15}{28}$$

$$\text{احمد روپۍ} = 300Rs \qquad \text{نسبت} = \frac{\text{احمد}}{\text{حامد}} = \frac{15}{28} \qquad \text{د حامد روپۍ} = 300 \div \frac{15}{28}$$

$$\text{حامد روپۍ} = ?$$

$$\text{دحامد روپۍ} = 300 \times \frac{28}{15} = 20 \times 28 = 560$$

تمرین:

1- یو سړي 42 منه مميز د 70 منه نخودو سره ګډوي نسبت یې پیدا کړئ؟

2- د جوار او غنمو نسبت $\frac{3}{7}$ دی که مجموعاً 600 منه وي جوار څومره دي او غنم څومره دي؟

3- یو دکاندار دوه قسمه چای سره ګډوي چې نسبت $\frac{3}{8}$ دی که د ګډ شوي چای تفاضل 50 منه وي د چای د هر قسم مقدار پیدا کړئ؟

4- د میو او وریجو نسبت $\frac{1}{5}$ دی که وریجې 50 منه وي مې به څومره وي او څومره مې زیاتې شي چې نسبت یې $\frac{3}{8}$ شي؟

5- د احمد او محمود د پیسو نسبت $\frac{5}{8}$ دی او د ضرب حاصل یې 36000 دې د هر یوه روپۍ څو دي؟

6- د بادامو او پستې د قیمتو نسبت $\frac{2}{3}$ دی د پیستې د یومن قیمت 12800 دی د بادامو من په څو دي؟

7- د احمد او اکرم د پیسو نسبت $\frac{3}{5}$ د اکرم او انور د پیسو نسبت $\frac{7}{8}$ دی که د احمد روپۍ 3000 وي د انور روپۍ به څو وي؟

## تناسب :

د دوه نسبتو مساوات ته تناسب وايي.

لکه $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ يا $a:b::c:d$

اول او اخر حدو ته طرفين وايي دويم او دريم حدوته وسطين وايي.

$a$ او $d$ طرفين دي $b$ او $c$ وسطين دي.

## د تناسب خواص:

1- په تناسب کې د طرفينو د ضرب حاصل د وسطينو د ضرب د حاصل سره مساوي وي.

لکه:

$$\frac{2}{3}=\frac{16}{24}$$
$$2\times 24=3\times 16$$
$$48=48$$

2- که په تناسب کې د طرفينو ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

3- که په تناسب کې د وسطينو ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

4- که په تناسب کې د صورت او مخرج ځايونه تغير شي په تناسب کې تغير نه راځي.

5- که په تناسب کې د صورتو مجموعه د مخرجو پر مجموعه وليکل شي نوى نسبت د تناسب د هر نسبت سره تناسب جوړوي.

6- که د صورت او مخرج مجموعه پر مخرج وليکل شي دتناسب خواص تغير نه خوري .

7- که د صورت او مخرج تفاضل پر مخرج وليکل د تناسب خواص تغير نه خوري.

## د تناسب اقسام:

د تناسب اقسام په دريو حالتو کې مطالعه کوو.

1- د نسبتو د شمېر په لحاظ د تناسب اقسام:

د نسبتو د شمېر په لحاظ تناسب په دوه قسمه دي.

a- بسیط یا ساده تناسب          b- مرکب تناسب

a- بسیط تناسب: هغه تناسب دی چې د نسبتونو شمېر يې دوه وي لکه $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$

b- مرکب تناسب: که د تناسب د نسبتونو شمېر تر دوو زیات وي دې تناسب ته مرکب تناسب وايي.

لکه ......... $\frac{5}{8} = \frac{35}{56} = \frac{45}{72}$

2- د حدو د ارتباط له کبله د تناسب اقسام:

د حدو د ارتباط له کبله تناسب په دوه قسمه دی.

a- مستقیم تناسب          b- معکوس تناسب

a- مستقیم تناسب: که په یوه تناسب کې د یوه نسبت د یوه حد په ډېریدو د بل نسبت مربوطه حد ډېریدلو او په کمیدلو سره يې کمیدلو دی تناسب ته مستقیم تناسب وايي.

لکه 8 گزه رخت په 1600 روپۍ دی او 12 گزه رخت په 2400 روپۍ دي.

$$\frac{8}{12} = \frac{1600}{2400}$$

b- معکوس تناسب: که په یوه تناسب کې د یوه نسبت د یوه حد په کمیدو سره د بل نسبت مربوطه حد ډېریدولو او په ډېریدو سره يې کمیدلو دې تناسب ته معکوس تناسب وايي.

لکه 12 کسه یو کار په 18 ورځو کې کوي 6 کسه دا کار به 36 ورځو کې کوي

$$\frac{12}{6} = \frac{18}{36}$$

3- د حدو د ورکیدو له کبله دتناسب اقسام:

د حدو د ورکېدو له کبله تناسب په درې قسمه دی.

الف- څلورم تناسب: که په یوه تناسب کې یوه حد ورک ؤ دی تناسب ته څلورم تناسب وايي لکه:

$$\frac{5}{8}=\frac{45}{x}$$

د مجهول د لاس ته راوړلو لپاره د تناسب د اول خاصیت څخه استفاده کوو.

$$5x = 8 \times 45$$

$$5x = 360$$

$$\frac{5x}{5}=\frac{360}{5}$$

$$x = 72$$

ب- دریم تناسب: که په یوه تناسب کې وسطین مساوي وي دی تناسب ته دریم تناسب وايي.

مثال: د 5 او 30 دریم تناسب پیدا کړئ؟

$$\frac{5}{30}=\frac{30}{x}$$

$$x=\frac{30\times 30}{5}=\frac{900}{5}=180$$

$$x = 180$$

ج- هندسي وسط: که په یو تناسب کې طرفین معلوم او وسطین معلوم نه وي دې تناسب ته هندسي وسط وايي.

مثال: د 5 او 180 هندسي وسط پیدا کړئ؟

$$\frac{5}{x}=\frac{x}{180}$$

$$x^2 = 5 \times 180 \qquad x^2 = 900 \qquad \sqrt{x^2}=\sqrt{900}$$

$$x = 30$$

تمرین:

1- د $10kg$ غوښې قیمت $3500Rs$ دی ووایاست $16kg$ غوښه به په څو روپۍ وشي ؟

2- اته کسه یو کار په 20 ورځو کوي ووایاست چې 12 کسه به دا کار په څو ورځوکې وکړي؟

3- احمد یو کار په 4 ورځو او حامد یې په 12 ورځو کې کوي ووایاست چې دواړه به یې په شریکه په څو ورځو کې وکړي؟

4- احمد او محمود په شریکه یو کار په 3 ورځو کې کوي که احمد یې یوازې په 12 ورځو کې وکړي محمود به یې په څو ورځو کې وکړي ؟

5-احمد یو کار په 6 ورځو کې محمود یې په 9 ورځو کې او حامد یې په 12 ورځو کې کوي ووایاست چې ټول به یې په څو ورځو کې سرته ورسوي ؟

6- 8 کسه د ورځې 6 ساعته کار کوي او یو کار په 15 ورځو کې خلاصوي ووایه چه 10 کسه د ورځې څو ساعته کار وکړي چې همدغه کار په 15 ورځو کې خلاص کړي؟

7- د 8 او 12 دریم تناسب پیدا کړئ؟

8- د 8 او 18 هندسي وسط څو دي؟

9- د 20 او 80 هندسي وسط پیدا کړئ؟

10- 12 کسه د ورځې 4 ساعته کار کوي او یوه ځمکه چې $200m$ طول او $150m$ سور لري په 10 ورځو کې اړوي. ووایاست چې که 16 کسه د ورځو 3 ساعته کار وکړي او یوه ځمکه چې 180 متره طول او $120m$ سور لري په څو ورځو کې واړوي؟

# پنځم فصل

فیصد:

د 100 له قراره د یوې تجارتي معاملې د ګټې یا تاوان معلومولو ته فیصد وایې.

یا داچه په یوه مرکبه ماده، مخلوط یا محلول کې د 100 له قراره د هغوی د اجزاؤ د مقدار معلومولو ته فیصد وایې.

د فیصد فارمولونه دا دي.

$$\text{ګټه} = \frac{\text{سرمایه} \times \text{نرخ}}{100}$$

په مرکبه ماده یا مخلوط یا محلول کې د هغوي مقدار د سرمایې حیثیت لري د اجزاو فیصدي نرخ دی او په ټوله ماده کې د هغه جز مقدار د ګټې حیثیت لري.

$$\text{نرخ} = \frac{100 \times \text{ګټه}}{\text{سرمایه}}$$

$$\text{سرمایه} = \frac{100 \times \text{ګټه}}{\text{نرخ}}$$

مثال: 8000 روپۍ ګټه د 3 فیصد په نرخ پیدا کړئ؟

$$\text{ګټه} = \frac{3 \times 8000}{100} = 240$$

2- مثال: یو سړي په 12000 روپیو کې 960 روپۍ وګټلې نرخ کې څو دی؟

$$\text{نرخ} = \frac{100 \times 960Rs}{12000Rs} = 8$$

$\text{سرمایه} = 12000Rs$

$\text{ګټه} = 960Rs$

$\text{نرخ} = ?$

3- مثال: یو سړي 15000 روپۍ د 6% په نرخ ګټلي سرمایه یې پیدا کړئ؟

ګټه $= 15000$ سرمایه $= \frac{100 \times 15000}{6} = 250000$

نرخ $= 6$ سرمایه $= 250000$

سرمایه $= ?$

4- د یوه سړي د ګټې او سرمایې مجموعه $28000Rs$ ده که نرخ یې 12% وي سرمایه او ګټه یې معلومه کړئ؟

حل:

ګټه او سرمایه $= 28000Rs$ $100 + 12 = 112$

نرخ $= 12$

$$\frac{100}{x} = \frac{112}{28000}$$

سرمایه $= ?$

$$x = \frac{28000 \times 100}{112} = \frac{2800000}{112} = 25000$$

ګټه $= ?$

سرمایه $= x = 250000Rs$

ګټه $= 28000 - 25000 = 3000$

ګټه $= 3000$

پوښتنه:- په $40kg$ مخلوط کې 8% ممیز او نور نخود دي د ممیزو او نخودو مقدار پیدا کړئ ؟

تخفیف:

تخفیف په لغت کې سپکولو ته وایي.

او په اصطلاح کې هغه پیسې چې خرڅوونکي یې د جنس د اصلي قیمت څخه د معلوم نرخ له مخې اخیستونکي ته پریږدي. تخفیف بلل کیږي.

د تخفیف فارمولونه عیناً د فیصد د فارمولو غوندي دي خو د جنس اصلي قیمت د سرمایې په عوض او د ګټې یا تاوان په عوض تخفیف لیکل کیږي.

$$\text{تخفيف} = \frac{\text{اصلي قيمت} \times \text{نرخ}}{100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{\text{تخفيف} \times 100}{\text{اصلي قيمت}}$$

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{\text{تخفيف} \times 100}{\text{نرخ}}$$

$$\begin{array}{r} \text{اصلي قيمت} - \\ \text{تخفيف} \\ \hline \text{فعلي قيمت} \end{array}$$

مثال: د يوه موټر اصلي قيمت $300000Rs$ دى خرڅوونكى اخيستونكى ته په 100 كې 8 روپۍ پرېښودى تخفيف او اصلي قيمت يې پيدا كړئ؟

$\text{اصلي قيمت} = 300000$

$\text{نرخ} = 8\%$

$\text{تخفيف} = ?$

$\text{فعلي قيمت} = ?$

$$\text{تخفيف} = \frac{8 \times 300000}{100} = 24000$$

$$\text{تخفيف} = 24000$$

$$\text{فعلي قيمت} = 300000 - 24000 = 276000Rs$$

2- د يوه اس اصلي قيمت $240000Rs$ دي كه تخفيف يې $16800Rs$ وي نرخ يې پيدا كړئ؟

$$\text{نرخ} = \frac{100 \times 16800}{240000} = 7 \qquad \text{نرخ} = 7$$

3- د يوه موټرتخفيف $80000Rs$ دى نرخ يې 8 دى اصلي قيمت يې څو دى؟

$\text{تخفيف} = 80000R_s$

$\text{نرخ} = 8$

$\text{اصلي قيمت} = ?$

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{\text{تخفيف} \times 100}{8} = \frac{80000 \times 100}{8} = 1000000R_s$$

احدیت:

په لغت کې تنهایي او یوازي والي ته وایي.

او په اصطلاح کې د ډېرو هم جنسو شیانو د مجموعي قیمت څخه د یوه شي د قیمت پیدا کولو ته احدیت وایي.

طریقه یې داسې ده چې مجموعي قیمت د شیانو په شمېر ویشو.

$$\text{احدیت} = \frac{\text{مجموعي قیمت}}{\text{د شیانو شمېر}}$$

مثال: یو خیاط په څلور ورځو کې 28 کمیسونه وګنډل وواياست چې په یوه ورځ کې به یې څو کمیسونه ګنډلي وي؟

| کمیسونه | ورځې |
| --- | --- |
| $\frac{28}{x}$ | $\frac{4}{1}$ |

$$\frac{4}{1} = \frac{28}{x}$$

$$x = \frac{1 \times 28}{4} = 7$$

په یوه ورځ کې یې 7 کمیسونه ګنډلي دي.

2- یو درجن قلمونه چې (12) دانې دي په $240Rs$ کیږي 7 دانې به په څو روپۍ وشي.

حل: که څه دغه رنګه سوالونه په تناسب کې ډېر اسنه حل کیږي خو د احدیت په طریقه داسې حلیږي اول د یو پنسل قیمت پیدا کوو بیا یې په 7 کې ضربوو.

$$\text{د پنسل قیمت} = \frac{240}{12} = 20$$

$$\text{د 7 پنسلو قیمت} = 7 \times 20 = 140$$

مثال: که 3 متره رخت قیمت 360 روپۍ وي د یو متر رخت قیمت څو دی او بیا د 5 مترو قیمت یې پیدا کړئ؟

$$\text{د یوه متر قیمت} = \frac{360}{3} = 120$$

$$\text{د 5 مترو قیمت} = 5 \times 120Rs = 600$$

ربحه يا ربح:

ربح په لغت کې سود يا ګټې ته وايي.

او په اصطلاح کې په يوه ټاکلې موده کې د معلوم نرخ له مخې د يوې سرمايې د ګټې د پيدا کولو طريقې ته ربح وايي. ربح په دوه ډوله ده.

1- ساده ربح 2- مرکبه ربحه

1- ساده ربحه:

هغه ربحه ده چه د مودې تر رسيدلو وروسته ګټه اخيستل کيږي او سرمايه بيا په ربحه اچول کيږي

د ساده ربحې فارمولونه څلور دي.

$$ربح = \frac{سرمايه \times موده \times نرخ}{12 \times 100}$$

$$نرخ = \frac{1200 \times ربح}{موده \times سرمايه}$$

$$موده = \frac{1200 \times ربحه}{سرمايه \times نرخ}$$

$$سرمايه = \frac{1200 \times ربحه}{موده \times نرخ}$$

مثال: د 20000 روپيو ربحه د 15٪ په نرخ په 8 مياشتو کې پيدا کړئ؟

$$ربحه = \frac{8 \times 15 \times 20000}{1200} = 2000 \qquad ربحه = 2000Rs$$

مثال: يو سړی د 8 مياشتو لپاره $20000Rs$ په مرابحه واچوي پس له 8 مياشتو يې ربحه $2000Rs$ شوه نرخ يې پيدا کړئ؟

$$نرخ = \frac{1200 \times 2000}{8 \times 20000} = \frac{120}{8} = 15 \qquad نرخ = 15\%$$

مثال: د 20000 روپیو ربحه د 15٪ په نرخ 2000 روپۍ ده موده یې پیدا کړئ؟

$$\text{موده} = \frac{1200 \times 2000}{15 \times 20000} = \frac{120}{15} = 8 \qquad \text{موده} = 8 \text{ میاشتې}$$

مثال: یو سړي یوه سرمایه په مراجعه واچوله پس له 8 میاشتو یې د 15٪ په نرخ 2000 روپۍ ربحه واخیسته سرمایه یې پیدا کړئ؟

$$\text{سرمایه} = \frac{1200 \times 2000}{5 \times 15} = \frac{50 \times 2000}{5} = 20000Rs$$

$$\text{سرمایه} = 20000\text{Rs}$$

2- مرکبه ربحه :

که د مرابحې د وخت تر را رسیدلو وروسته ربحه او سرمایه بیا په ربحه واچول شي دې ربحې ته مرکبه ربحه وایې.

د مرکبې ربحې فارمول دی.

$$A = C(1 + r)^n$$

$A$ د سرمایې او ربحې مجموعه ده $C$ اولنۍ سرمایه ده $r$ نرخ دی او $n$ د کلونو شمېر دی.

$C$ سرمایه او $Cr$ ګټه او $A$ د دواړو مجموعه ده.

$$A_1 = C + Cr$$
$$A_1 = C(1 + r)$$
$$A_2 = C(1 + r) + C(1 + r)r$$
$$A_2 = C(1 + r)(1 + r) = c(1 + r)^2$$
$$A_3 = C(1 + r)^2 + C(1 + r)^2 r$$
$$A_3 = C(1 + r)^2(1 + r) = C(1 + r)^3$$

په همدې ډول کولای شو چې د $n$ کلو د سرمایې او ربحې مجموعه پیدا کړو.

په عمومي صورت لیکو چې:

$$A = C(1 + r)^n$$

مثال: يو سړي $50000Rs$ د 5% په نرخ د 3 کلو لپاره په ربحه واچولی ګټه او سرمايه يې پيدا کړئ؟

$$A = 50000(1+\frac{5}{100})^3$$

$$A = 50000(\frac{100+5}{100})^3$$

$$A = 50000\left(\frac{105}{100}\right)^3 = 50000\left(\frac{121550625}{1000000}\right)$$

$$A = \frac{5\times 1157625}{100} = \frac{1157625}{20} = \frac{231525}{4}$$

$$A = 57881.25$$

تمرين:

1- د 10000 روپيو ربحه 8٪ په نرخ په 9 مياشتو کې څو ده ؟

2- د 50000 روپيو ګټه په 6 مياشتو کې 5250 روپۍ شوه نرخ يې پيدا کړئ؟

3- د 20000 روپيو ګټه د اوه مياشتو په موده کې 1750 روپۍ ده نرخ يې څو دی؟

4- د 18000 او ګټې د 18٪ په نرخ 1750 روپۍ ده موده يې پيدا کړئ؟

5- لوی سرمايې په 8 مياشتو کې د 15٪ په نرخ 3000 ګټې سرمايه څو ده ؟

6- احمد 5000 روپۍ د 20٪ په نرخ د 4 کلو لپاره په مرکبه ربحه واچولي ګټه او سرمايه يې څو ده؟

## تنزیل:

تنزیل په لغت کې کښته کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې هغه پيسې چې سند خرڅوونکي يې سند اخيستونکي ته په يوه ټاکلې موده کې د معلوم نرخ له مخې پريږدي تنزيل بلل کيږي.

د تنزيل فارمولونه دا دي.

$$\text{تنزيل} = \frac{\text{اصلي قيمت} \times \text{موده} \times \text{نرخ}}{12 \times 100}$$

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times \text{تنزيل}}{\text{موده} \times \text{اصلي قيمت}}$$

$$\text{موده} = \frac{1200 \times \text{تنزيل}}{\text{اصلي قيمت} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{اصلي قيمت} = \frac{1200 \times \text{تنزيل}}{\text{موده} \times \text{نرخ}}$$

$$\text{تنزيل} - \text{اصلي قيمت} = \text{فعلي قيمت}$$

مثال: د سند اصلي قيمت $300000Rs$ دی مودې ته يې 9 مياشتې دي نرخ يې 15٪ دي تنزيل يې څو دي؟

$$\text{تنزيل} = \frac{15 \times 9 \times 300000}{12 \times 100} = 33750$$

2- د سند اصلي قيمت 50000 دی په 9 مياشتو کې يې تنزيل $3000Rs$ دی نرخ يې څو دی؟

$$\text{نرخ} = \frac{1200 \times 3000}{9 \times 50000} = \frac{40}{5} = 8 \qquad \text{نرخ} = 8$$

3- د 20000 د تنزيل د 15% په نرخ 1500 روپۍ وي موده يې پيدا کړئ؟

$$\text{موده} = \frac{1200 \times 1500}{15 \times 20000} = 6 \qquad \text{شپږ مياشتې} = \text{موده}$$

4- د یوه سند تنزیل د 15% په نرخ چې موده ته یې 6 میاشتې پاتې دي 3375 روپۍ شو د سند اصلي قیمت څو دی؟

$$\text{اصلي قیمت} = \frac{1200 \times 3375}{6 \times 15} = 45000$$

$$\text{اصلي قیمت} = 45000Rs$$

تمرین:

1- د یوه سند اصلي قیمت $450000Rs$ موده ته یې 6 میاشتې پاتې دي د 15% په نرخ یې تنزیل څو دی؟

2- د یوه سند اصلي قیمت $75000Rs$ دی د 4% په نرخ یې تنزیل $2250Rs$ شو موده ته یې څومره وخت پاتې دی.

3- د یو سند اصلي قیمت $90000Rs$ دی موده ته یې 8 میاشتې دی که تنزیل $3000Rs$ وي نرخ یې پیدا کړئ؟

4- د یوه سند تنزیل په 8 میاشتو کې د 7% په نرخ $5600Rs$ شوي اصلي قیمت یې څو دي.

مشارکت:

که څو کسه په یوه تجارتي معامله لاس پورې کړي ګټه او تاوان یې سره شریک وي دې تجارتي معاملې ته مشارکت وایي.

د شراکت د ګټې تقسیم په څلور حالتو کې مطالعه کوو.

اول حالت:

چې سرمایې او مودې یې مساوي وي. ګټه په نفرو ویشل کیږي.

مثال: احمد ، محمود او حامد هر یوه $500000Rs$ لري د حمل په اول یې په تجارت پیل وکړ د کال تر اخره پورې $900000Rs$ روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه څو ده.

حل:

$$\text{د هریوه ګټه} = \frac{900000}{3} = 300000Rs$$

دویم حالت:

چې مودې یې مساوي او سرمایې یې مختلفې وي ګټه د سرمایو په مجموعه ویشل کیږي بیا چه خارج قسمت د هر چا په سرمایه کې ضرب شي د هغه ګټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 40000 محمود 50000 او حامد $60000Rs$ لري په اول د حمل یې په تجارت پیل وکړ د کال تر اخره یې $300000Rs$ روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ.

د احمد سرمایه $= 40000Rs$ حمل/1

د محمود سرمایه $= 50000Rs$ حمل/1

د حامد سرمایه $= 60000Rs$ حمل/1

ګټه $= 300000Rs$

د هر یوه ګټه $=?$ $4 + 5 + 6 = 15$

$$\frac{300000}{15} = 20000$$

د احمد ګټه $= 4 \times 20000Rs = 80000Rs$

د محمود ګټه $= 5 \times 20000Rs = 100000Rs$

د حامد ګټه $= 6 \times 20000Rs = 120000Rs$

دریم حالت:

چې سرمایې یې مساوي او مودې یې مختلفې وي ګټه د مودو په مجموعه ویشل کیږي بیا چه خارج قسمت د هر چا په موده کې ضرب شي د هغه ګټه لاس ته راځي.

مثال: احمد $150000Rs$ لرلې د حمل په اول یې په تجارت شروع وکړه محمود د $150000Rs$ په سرمایه د اسد په اول ور سره شریک شو حامد د $150000Rs$ په سرمایه د عقرب په اول ور سره شریک شود کال تر اخره یې 500000 روپۍ وګټلې د هر یوه ګټه پیدا کړئ؟

حل:

| | | | |
|---|---|---|---|
| احمد | 150000 | 1/ حمل/ | 12 |
| محمود | 150000 | 1/ اسد/ | 8 |
| حامد | 150000 | 1/عقرب/ | $\frac{5}{25}$ |

گټه = 500000

د هر یوه گټه =?

$$\frac{500000}{25} = 20000$$

د احمد گټه = $12 \times 20000 = 240000$

د محمود گټه = $8 \times 20000 = 16000$

د حامد گټه = $5 \times 20000 = 100000$

خلورم حالت:

چې مودې او سرمايې مختلفې وي.

د هر سړي موده د هغه په سرمايه کې ضربيږي د ضرب حاصلونه يې جمع کيږي گټه په دغه مجموعه ويشل کيږي. خارج قسمت چې د هر چا د مودې او سرمايې په حاصل ضرب کې ضرب شي د هغه گټه لاس ته راځي.

مثال: احمد 50000 افغانۍ لرلې د حمل په اول يې په تجارت شروع وکړه محمود د 80000 افغانيو په سرمايه د ميزان په اول ور سره شريک شو د کال تر اخره يې 216000 افغانۍ وګټلې د هر يوه گټه څو ده؟

| | | |
|---|---|---|
| احمد | = 50000 | 1/حمل/ |
| محمود | = 80000 | 1/ميزان/ |
| گټه | = 216000 | |

د هر یوه گټه =?

$$5 \times 12 + 8 \times 6 = 60 + 48 = 108$$

$$\text{د قسط اندازه} = \frac{216000}{108} = 2000$$

$$\text{د احمد ګټه} = 2000 \times 60 = 120000$$

$$\text{د محمود ګټه} = 2000 \times 48 = 96000$$

تمرين:

1- څلور کسان هر يو 200000 روپۍ لرلې. په اول د حمل يې تجارت شروع کړ د کال تر اخره يې [illegible] روپۍ وګټلې د هر يوه ګټه څو ده؟

2- احمد 20000 روپۍ لرلې د حمل په اول يې تجارت شروع کړ محمود 20000 روپيو په سرمايه په اول دسنبله ور سره شريک شو د کال تر اخره يې 120000 روپۍ وګټلې د هر يوه ګټه پيدا کړئ؟

3- احمد 12000 روپۍ محمود 18000 روپۍ لرلې په اول د ثور يې تجارت شروع کړ د کال تر اخره يې 150000 روپۍ وګټلې د هر يوه ګټه پيدا کړئ؟

4- احمد 8000 روپۍ لرلې په اول د جوزا يې تجارت شروع کړ ، محمود د 10000 روپيو په سرمايه په اول د ميزان ور سره شريک شو د کال تر اخره يې 112000 روپۍ وګټلې د هر يوه ګټه پيدا کړئ؟

# شپږم فصل

سيټ (Set):

سيټ يو انګليسي لفظ دی چې مفهوم يې د ټولګې ، صنف ، لښکر ، ګلې او رمې سره برابر دی.

په اصطلاح کې سيټ د هغو شيانو مجموعه يا ټولګه ده چې په کافي ډول د تشخيص وړ وي.

سيټ د الفباء د غټو توريو په واسطه ښودل کيږي لکه A ، B ، C ، M ، ........... او داسې نور.

د سيټ نظريه د Gorge cantor ( 1845 – 1919) م په واسطه په رياضي کې داخل او معرفي شوه.

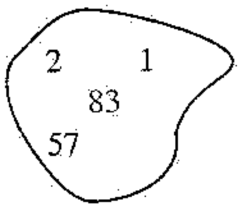
د سيټ عناصر Element of set:

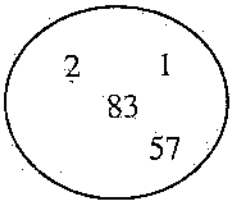
په سيټ کې شاملو شيانو ته د سيټ عناصر وايي. مثلاً $A = \{2,3,a,b\}$

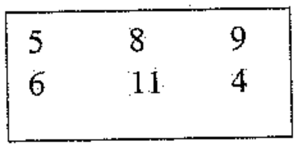
چې 2، 3، a او b د سيټ عناصر دي.

د سيټ نمايش:

Venn برطانوي عالم سيټ د هندسي او غير هندسي شکلو په واسطه رواج کړ چې دسيټ دغه نمايش Venn diagram وايي.







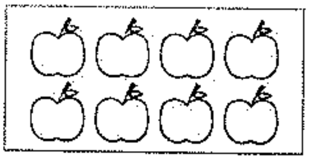

د سيټ د ليکلو طريقې:

د سيټ د ليکلو طريقې څلور دي.

Picture Method -1:

پدې ميتود کې د سيټ د عناصرو شکلونه رسموي دا ميتود په کښته ټولګيو کې استعماليږي.

لکه:



2- د Descriptive Method:

که د سیټ د عناصرو په منځ کې یو صفت موجود وي نو د دغه سیټ د توصیفي میتود پواسطه لیکل کیږي یعنې د سیټ د عناصرو مشترک صفت د یوې جملې پواسطه لیکل کیږي

د $E$ ژبې د بې اوازه تورو سیټ په $A$ ښیو.

$$A = \{\text{د } E \text{ بی اوازه توری}\}$$

$$B = \{\text{حسابي ارقام}\}$$

3- د Listing Method پواسطه:

که د سیټ عناصر محدود وي نو د قوس په داخل کې د عناصرو نومونه یا سمبولونه لیکي.

لکه:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$
$$B = \{1,2,3,4,5\}$$

4- Set Builder Notation په طریقه:

په دې طریقه کې د سیټ عناصر په یو سمبول یا حرف مثلاً په $(x)$ ښیي فرضاً د $A$ د سیټ عناصر د 15 او 120 تر منځ واقع دي نو $x$ د 15 او 120 تر منځ لیکي او د $(<)$ او $(>)$ د علامو پواسطه یې سره بیلوي.

$$A = \{x/15 < x < 120\}$$

او داسې ویل کیږي چې د $A$ د سیټ عناصر $x$ دي داسې چې د 120 څخه کم او د 15 څخه زیات دي.

## د سيټ اقسام:

سيټ په څلور قسمه دی.

1- خالي سيټ
2- يو عنصره سيټ
3- معين سيټ
4- غير معين سيټ

1- خالي سيټ: هغه سيټ چه عناصر نلري د خالي سيټ په نوم يادېږي لکه $A = \{\ \}$ خالي سيټ د $\phi$ د علامې پواسطه ښودل کيږي.

2- يو عنصره سيټ: که کوم سيټ يو عنصر ولري دې سيټ ته يو عنصره سيټ وايي. لکه $A = \{$لمر$\}$ يا $B = \{3\}$

3- معين سيټ: هغه سيټ چې عناصر يې د شمېرلو وړ وي لکه: د حسابي ارقامو سيټ.

$$A = \{0,1,2,3,,4,5,6,7,8,9\}$$
$$B = \{a, e, i, o, u\}$$

غير معين سيټ :

هغه سيټ چې عناصرئي د شمېرلو وړ نه وي لکه: د طبعي اعدادو سيټ.

$$A = \{IN \text{ د طبيعي اعدادو سيټ}\}$$
$$B = \{IR\}$$

## د روابطو له مخې د سيټونو اقسام:

د ارتباطاتو له مخې سيټونه په 8 اته قسمه دي.

1- فرعي سيټ
2- کلي سيټ
3- مکمله سيټ
4- طاقت لرونکي سيټ
5- مساوی سيټونه
6- معادل سيټونه
7- منفصل سيټونه
8- غير منفصل سيټونه

1- فرعي سيټ: که د $A$ او $B$ دوه داسي سيټونه ولرو چي د $B$ د سيټ هر عنصر د $A$ په سيټ کي شامل وي نو د $B$ سيټ د $A$ د سيټ فرعي سيټ بلل کيږي لکه

$A = \{x \epsilon IR / 1 < x < 12\}$ او د $B = \{4,6,8,10\}$

څرنګه چي د $B$ د سيټ هر عنصر په $A$ کي شامل دی نو د $B$ سيټ د $A$ د سيټ فرعي سيټ دی او داسي ليکل کيږي. $B \subset A$

فرعي سيټ په دوه قسمه دی.

a- واقعي فرعي سيټ b- غير واقعي فرعي سيټ

a- واقعي فرعي سيټ: که ديوه سيټ ټول عناصر په بل سيټ کي شامل وي او په دويم سيټ کی داسي عناصر وي چي په لمړی سيټ کي نه وي. لکه:

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ او د $B = \{3,4,5,6\}$ نو $B \subset A$

b- غير واقعي فرعي سيټ: که دوه داسي سيټونه ولرو چي د اول سيټ ټول عناصر په دويم سيټ کي او د دويم سيټ هر عنصر په اول سيټ کي شامل وي دغه سيټونه يو دبل غير واقعي فرعي سيټونه دي. لکه:

$A = \{2,4,6,8,10\}$ او $B = \{10,8,2,6,4\}$ نو $B \subseteq A$ او $A \subseteq B$.

2- کلي سيټ: که يو سيټ څو فرعي سيټونه ولري دي سيټ ته کلي سيټ وايي لکه $A = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$ چي $B = \{3,4\}$ او $C = \{5,6,7\}$ او د $D = \{8,9,10\}$ فرعي سيټونه دي نو د $A$ سيټ کلي سيټ وي.

3- مکمله سيټ: که يو کلي سيټ يو واقعي سيټ ولري نو د کلي سيټ د پاتی عناصرو سيټ د فرعي سيټ مکمله سيټ دی.

مثلاً $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ او $B = \{2,3,4,5,6\}$ دوه ستونه لرو چي $B \subset A$ دی نو د $B$ د سيټ مکمله سيټ چي په د $B'$ ښودل کيږي عبارت $B' = \{7,8,9,10,11,12\}$ دی.

4- طاقت لرونکی سيټونه: هر کلي سيټ د خپلو فرعي سيټونو طاقت لرونکي سيټ يا $Power\ Set$ دی لکه $A = \{\triangle, \odot, \boxdot\}$ او $A_1 = \{\triangle\}$

$A_2 = \{\odot\}$ ، $A_3 = \{\boxdot\}$ ، $A_4 = \{\triangle,\odot\}$ ، $A_5 = \{\triangle,\boxdot\}$ ، $A_6 = \{\odot,\boxdot\}$ ،
$A_7 = \{\triangle,\odot,\boxdot\}$ او $A_8 = \{\}$

ستونه لرو چې $A$ سيټ ئې کلي سيټ او نور يې فرعي سيټونه دي.

يعني $P(A) = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\}$

د يوه سيټ د فرعي سيټونو شمېر د $2^n$ پواسطه پيدا کيږي $n$ د سيټ د عناصرو شمېر دی.

مثال: د $B$ د سيټ عناصر څلور دي د فرعي سيټونو شمېر يې پيدا کړئ؟

$n = 4$

$P(B) = ?$

$$P(B) = 2^n$$
$$P(B) = 2^4 = 16$$
$$P(B) = 16$$

5- مساوي سيټونه: که د $A$ او $B$ دوه داسې سيټونه ولرو چې د A د سيټ هر عنصر د $B$ په سيټ کې او د $B$ دسيټ هر عنصر د $A$ په سيټ کې شامل وي . نو دې سيټونو ته مساوي سيټونه وايي.

يعني که $A \subseteq B$ او $B \subseteq A$ نو $A = B$ دی.

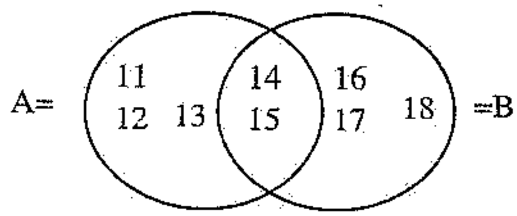
6- معادل سيټونه: هغه سيټونه دي چې د عناصرو شمېر يې مساوي او مختلف وي لکه $A = \{4,5,8\}$ او $B = \{E, F, G\}$

7- منفصل سيټونه: هغه سيټونه دي چې د هر سيټ هيڅ عنصر په بل سيټ کې نه وي.

لکه $A = \{1,3,5,7,99,11,13\}$ او $B = \{2,4,6,8,10,12\}$

8- غير منفصل سيټونه: که د دوه يا څو سيټونو يو يا څو عناصر سره شريک وي دې سيټونو ته غير منفصل سيټونه وايي.

لکه $A = \{11,12,13,14,15\}$ او $B = \{14,15,16,17,18\}$ چې $\{14,15\}$ په دواړه کې شامل وي نو د $A$ او $B$ سيټونه غير منفصل دي.




## د سیټونو عملیې:

په حساب کې د سیټونو عملیې درې دي.

1- د سیټونو اتحاد    2- د سیټونو تقاطع    3- د سیټونو تفاضل

### 1- دسیټونو اتحاد:

د دوه یا ډېرو سیټونو اتحاد د هغه عناصرو سیټ دی چې اقلاً هغه عناصر په دغه سیټونو کې یو وار شامل وي یعنې که بعضې په دوه یا درې سیټونو کې شامل وي د اتحاد په وخت کې یو وار لیکل کیږي. لکه:

$A = \{4,5,6,7,8,9\}$ او $B = \{8,9,10,11,12,13\}$

$$A \cup B = \{4,5,6,7,8,9\} \cup \{8,9,10,11,12,13\} = \{4,5,6,7,8,9,10,11,12,13\}$$

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

### 2- د سیټونو تقاطع:

د هغه عناصرو سیټ دی چې په دوه یا څو سیټونو کې شامل وي. لکه $A = \{3,4,5,6,7\}$ او $B = \{6,7,8,9,10\}$

$$A \cap B = \{6,7\}$$

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

### 3- د سیټونو تفاضل:

د هغه عناصرو سیټ دی چې په مفروق منه کې وي او په مفروق کې نه وي.

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$ او $B = \{4,5,6,7,8,9\}$

$$A - B = \{1,2,3,4,5,6\} - \{4,5,6,7,8,9\} = \{1,2,3\}$$

$$A - B = \{1,2,3\}$$

# الجبر

# اول فصل

## الجبر

الجبر د جبر څخه اخیستل شویدی چې جبر د مات هډوکي ترلو ته وایي.

او په اصطلاح کې الجبر هغه علم دی چې د حساب د ناحله مسایلو د حل لپاره معادلې او فارمولونه جوړوي.

### د الجبر د علم موضوع:

د الجبر د علم موضوع د حقیقي اعدادو سیټ دی چې په $IR$ سره ښودل کیږي.

### د حقیقي اعدادو سیټ $IR$ :

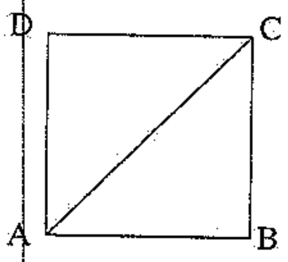
د $(-\infty)$ څخه تر $(+\infty)$ پورې د اعدادو سیټ ته د حقیقي اعدادو سیټ وایي.

$$IR = (-\infty, +\infty)$$

یا دا چې د ناطق او غیر ناطق عددونو سیټ ته د حقیقي عددونو سیټ وایي که ناطق عدد په $Q$ او غیر ناطق په $Q'$ وښیو نو $IR = [Q \cup Q']$

صحیح عددونه او کسري عددونه د عددو په کرښه کې په یوه نقطه کې مطابقت کوي.

مګر د غیر ناطقو عددونه لپاره نقطې د عدد په محور ندی پیدا شوي. مثلاً د $\sqrt{2}$ لپاره د عددو په کرښه کومه نقطه نده ټاکل شوی چه د $\sqrt{2}$ د نقطې د پیدا کولو لپاره د هندسي طریقې څخه استفاده کوو. $ABCD$ یوه مربع چې هره ضلع یې یو واحد ده داسې رسموو چې یو راس یې په مبداء واقع وي د دې مربع مساحت $1cm^2$ دي که د $A$ نقطه د $C$ سره وصل کړو نو $AC$ د مربع وتر لاس ته راځي چې



$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$$

$$\overline{AC}^2 = 1^2 + 1^2$$

$$\overline{AC}^2 = 1 + 1r$$

$$\overline{AC}^2 = 2 \qquad \overline{AC} = \sqrt{2}$$

د $\sqrt{2}$ د پاره د عددو په کرښه د نقطې پيدا کولو لپاره د $A$ نقطه مرکز نيسو او د $\sqrt{2} = \overline{AC}$ په اندازه د پرکار خوله خلاصوو او يوه دايره رسموو چه د عددو کرښه قطع کړی دغه د تقاطع نقطه د $\sqrt{2}$ مربوطه نقطه ده په همدې ترتيب کولای شو چې دغير ناطقو عدد و نقطې د عددو په کرښه پيدا کړو.

مثلاً د $\sqrt{3}$ غير ناطق عدد نقطې د پيدا کولو لپاره د $\sqrt{2}$ په نقطه کې د واحد په اندازه عمود رسموو د عمود انجام د مبداء سره وصلوؤد پرکارخوله په همدغه شعاع خلاصوواو قوس وهو د $XX'$ د محور سره يې د تقاطع نقطه د $\sqrt{3}$ مربوطه نقطه ده.

د $\sqrt{5}$ د نقطې د پيدا کولو لپاره د $\sqrt{3}$ په نقطه کې د $\sqrt{2}$ په اندازه عمود رسموو د عمود انجام د مبداء سره وصلوو او د پرکار خوله په همدغه اندازه خلاصوو او قوس وهو د $XX'$ د محور سره د قوس د تقاطع نقطه د $\sqrt{5}$ مربوطه نقطه ده.

## د الجبر د زده کړې غرض:

1- په حساب کې د عدد سره علامه نه ليکل کيږي مګر په الجبر کې عدد او علامه دواړه يو الجبري عدد دی.

مثلاً 19 حسابي عدد دی مګر $-19$ او $+19$ الجبري عددونه دي.

2- په حساب کې حروف نه استعماليږي مګر الجبري معادلې او فارمولونه د حروفو څخه جوړيږي.

لکه $4x - 5$ ، $7x^2 + 6x + 7 = 0$ ، $y = 3x - 4$ او داسې نور.

3- د حساب قوانين بشپړ شويدي زيادت نه قبلوي مګر الجبر د تمدن تابع دي د تخنيک او تکنالوژۍ د پرمختګ سره سم يې قوانين او فارمولونه د ېريږي او انکشاف کوي.

## د الجبر اصطلاحات:

حد Term: الجبري عدد، حرف او د حرف او عدد د ضرب ، تقسيم ، جذر او طاقت حالتو ته حد وايي.

لکه: $-3$ ، $x$ ، $4x$ ، $\frac{6}{x}$ ، $\frac{x}{2}$ ، $x^3$ ، $\sqrt[3]{x}$ او $\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{-5\sqrt{x^3}}$ او داسې نور.

مشابه حدونه: هغه حدونه دي چې د عين حروفو توانونه يې مساوي وي. لکه $7xy^2$ او $-15xy^2$ يا $7x^2y^2$ او $11x^2y^2$ يا $7x$ او $20x$ او داسې نور.

افاده: د حدونو د جمع او تفريق حالتو ته افاده وايي لکه $11x - 8$

يو حده افادې ته مونوم وايي لکه $20x$

دوه حده افادې ته بينوم وايي. لکه $19x - 20$

درې حده افدې ته ترينوم وايي.لکه $9x^2 - 10x + 7$

هغه افاده چې تر دريو زيات حدونه ولري کثير الحده افاده ورته وايي. لکه
$$7x^4 - 10x^3 + 7x^2 - 8x + 7$$
په عمومي صورت دغه ټولو افادو ته پولينوم وايي.

پولينوم:

هغه افاده ده چې د حروفو توانونه يې تام عددونه وي کسري عددونه نه وي.

عمومي شکل يې دا دی.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_0$$

د پولينوم د هر حد ضريب د همغه پولينوم د توان په نوم يادېږي.

لکه:

$$7x^5 - 12x^4 + 13x^3 - 2x + 15$$

$$a_5 = 7 \quad , a_4 = -12 \quad , \quad a_3 = 13 \quad , \quad a_2 = 0 \quad , a_1 = -2 \quad , \quad a_0 = 15$$

پولينوم په اته قسمه دي.

1- کامل پولينوم: هغه پولينوم دی چې د کوچني توان څخه تر لوړ توان پورې ټول توانونه پکې موجود وي لکه $7 + 8x^4 - 8x^2 + 20x^3 - 7x$ پدې پولينوم کې کوچني توان صفر دی او لوړ توان يې (4) دی د صفر او (4) تر منځ عددونه 1 ، 2 ، 3 دي چې درې واړه پکې موجود دي نو پورتني پولينوم کامل پولينوم دی.

2- ناقص پولينوم: هغه پولينوم دی چې د کوچني توان او لوړ توان تر منځ ټولو توانونه يکې موجود نه وي لکه.

$$7x^3 - 4x + 9$$

3- تام پولينوم: هغه پولينوم دی چې په مخرج کې يې حرف موجود نه وي. لکه:

$$7x^3 + 4x^2 + 11x + 8$$

$$\frac{3x^2 + 11x^2 - 20x + 17}{5}$$

4- کسري پولينوم: هغه پولينوم دی چې په مخرج کې حرف موجود وي لکه :

$$\frac{8}{x^2 + 3x - 1}, \frac{2x^2 + 41x + 1}{x + 3}, \frac{4x - 1}{x}$$

5- منظم پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې د توانونو په اساس په صعودي يا نزولي ډول ترتيب شوي وي.

لکه $2 - 4x + 11x^2 + 8x^3 + 8x^4$ په صعودي ډول منظم دي.

$7x^4 - 16x^3 + 8x^2 - 12x + 5$ په نزولي ډول منظم شوي دي.

6- غير منظم پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې د توانونو په اساس ترتيب شوي نه وي.
لکه: $3x - 8x^3 + 7 + 3x^2$

7- ناطق پولينوم: هغه پولينوم دی چې حروف يې تر جذر لاندې نه وي لکه $7x^2 + 8x - 5$ او $7x^2 - 31x + \sqrt{2}$.

8- غير ناطق پولينوم: هغه پولينوم دی چې کوم حرف يې تر جذر لاندې وي. لکه :

$$7\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x}$$

که په طاقت لرونکو عدد بدل شي توانونه يې کسري کيږي.

$$7x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 6$$

غير ناطق پولينوم ته ملتي نوم هم وايي.

ملتي نوم: ملتي نوم هغه افاده ده چې کوم حرف یې ترجذر لاندې وي که دطاقت په شکل وليکل شي توانونه يې کسري کيږي.

د مونوم درجه: د يو مجهوله مونوم درجه د مجهول درجه ده لکه د $7x^3$ دريمه درجه مونوم دی.

د دوه مجهوله يا څو مجهوله مونوم درجه د حروفو د توانونو مجموعه ده.

لکه: $5x^3y^2$ يو $3+2=5$ درجه مونوم دی.

د پولينوم درجه: $Degree\ of\ a\ Polynome$ د پولينوم درجه د هغه مونوم درجه ده چې هغه مونوم د پولينوم په ټولو حدو کې لوړه درجه ولري لکه $3xy^2+5x^2y^3+8x^3y^4$ چې اومه درجه پولينوم دی. $8x^3+5x^2-4x+2$ يو دريمه درجه پولينوم دی.

هوموجن: هغه افاده ده چې د ټولو حدونو درجې يې مساوي وي. لکه $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$

که په يوه هوموجن د کوم حد توان مجهول وي د مجهول قيمت د هغه حد د توان څخه پيدا کوو چې توان يې معلوم وي.

لکه $x^3+x^my+x^ny^2+y^3$

حل:

$m+1=3 \qquad m=3-1 \qquad m=2$

$n+2=3 \qquad n=3-2 \qquad n=1$

## د الجبري عددونو څلور ګوني عمليې

د الجبري عددونو جمع:

الجبري عددونه په افقي ډول او هم په عمودي ډول جمع کولای شو . هم علامه عددونه جمع کيږي او علامه يې شريکه علامه ليکل کيږي.

$$\begin{array}{r} -435 \\ -387 \\ \hline -822 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +215 \\ +416 \\ \hline +631 \end{array}$$

مختلف العلامه عددونه یو د بل څخه منفي کیږي او علامه د لوی عدد لیکل کیږي.

$$\begin{array}{r} +235 \\ \underline{-416} \\ -181 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +436 \\ \underline{-168} \\ +268 \end{array}$$

د الجبري عددونو تفریق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې لیکو چې هره طبقه د خپلې طبقې لاندې او هره مرتبه د خپلې مرتبې لاندې راشي بیا د مفروق علامو ته تغیر ورکوو. او د جمعي عملیه پرې اجراء کوؤ.

$$\begin{array}{r} +731 \\ \underline{\pm 263} \\ +468 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -216 \\ \underline{\mp 418} \\ +202 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -485 \\ \underline{\pm 316} \\ -801 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +465 \\ \underline{\mp 317} \\ +782 \end{array}$$

د الجبري عددونو ضرب:

د الجبري عددونو د ضربولو په وخت کې علامه په علامه کې او عدد په عدد کې ضربوو.

د علامو ضربول په یوه جدول کې مطالعه کوو.

| | |
|---|---|
| $+\times+=+$<br>$-\times-=+$ | د عین علامو د ضرب حاصل مثبت دی. |
| $+\times-=-$<br>$-\times+=-$ | او د مختلفو علامو د ضرب حاصل منفي دی. |

د $+=-\times-$ ثبوت:

اول د $+=-\times-$ ثبوت په عدد:

$$5\times 8=40$$

$$(6-1)(9-1)=40$$

$$54-6-9\,\boxed{\cdot}\,1=40$$

$$54-15\,\boxed{\cdot}\,1=40$$

$$39\,\boxed{\cdot}\,1=40$$

که په خالي خانه کې + علامه ولیکل شي د مساوات دواړه خواوې مساوي کیږي نو معلومه شوه چې:

$$(-1)(-1)=+1$$

دویم د + =− × − ثبوت په حروف:

$$(-a)(-b) = ab$$
$$(-a)(-b) = x \ldots\ldots\ldots\ldots I$$
$$(-a)(-b) - ab = x - ab$$
$$-a(-b + b) = x - ab$$
$$-a(0) = x - ab$$
$$0 = x - ab$$
$$ab = x$$

په $I$ رابطه کې د $x$ په عوض $ab$ وضع کوؤ.

$$(-a)(-b) = ab$$

ثابته شوه چې + =− × − کیږي.

د − =− × + ثبوت:

$$(+3)(+4) = 12$$
$$(+3)(+3) = 9$$
$$(+3)(+2) = 6$$
$$(+3)(+1) = 3$$
$$(+3)(\ 0\ ) = 0$$
$$(+3)(-1) = -3$$
$$(+3)(-2) = -6$$

ثابته شوه چې − =− × +

مثال:

$$(+5)(+6) = 30$$
$$(-8)(-9) = 72$$
$$(-5)(+3) = -5$$
$$(+4)(-7) = -28$$

$$\begin{array}{r} -13 \\ \underline{-\ 5} \\ +65 \end{array} \quad \begin{array}{r} +3 \\ \underline{-4} \\ -12 \end{array} \quad \begin{array}{r} -9 \\ \underline{+3} \\ -27 \end{array} \quad \begin{array}{r} +8 \\ \underline{+7} \\ +56 \end{array}$$

د الجبري عددونو تقسیم:

علامه په علامه او عدد په عدد ویشو لمړی د علامو خارج قسمت په یوه جدول کې مطالعه کوؤ.

$$\frac{+}{+}=+ \qquad \frac{-}{-}=+ \qquad \frac{+}{-}=- \qquad \frac{-}{+}=-$$

$$\frac{+18}{+3}=+6 \qquad \frac{-15}{-5}=+3 \qquad \frac{+12}{-6}=-2 \qquad \frac{-10}{+2}=-5$$

## د پولینومونو څلور ګونې عملیې

1- د پولینومونو جمع:

د جمع عوامل داسې یو تر بل لاندې لیکو چې مشابه حدونه یو تر بل لاندې راشي بیا هم علامه مشابه حدونه جمع کوو او علامه یې شریکه علامه لیکو او مختلف العلامه مشابه حدونه یو د بل څخه منفي کوو علامه د لوی عدد لیکو.

$$\begin{array}{r} 7x^3+8x^2-11x+8 \\ \underline{11x^3+9x^2+15x-3} \\ 18x^3+17x^2+4x+5 \end{array}$$

2- د پولینومونو تفریق:

مفروق د مفروق منه لاندې داسې لیکو چې مشابه حدونه یو د بل لاندې راشي بیا د مفروق علامو ته تغیر ور کوؤ او د جمع عملیه پرې تطبیقوو.

مثال:

$$\begin{array}{r} 13x^4-15x^3+8x^2-20x+\ \ 8 \\ \underline{\pm 35x^4\pm 9x^3\pm 11x^2\pm\ \ 9x\mp 16} \\ -22x^4-24x^3\ \ -3x^2-29x+24 \end{array}$$

3- د پولینومونو ضرب:

مضروب د مضروب فیه لاندې لیکو بیا علامه په علامه کې او عدد په عدد کې او حرف په حرف کې ضربوو په اخر کې مشابه حدونه جمع کوؤ د پولینومونو دضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال:

$$\begin{array}{r}
3x^3 - 5x^2 + 7x - 7 \\
7x^2 - 8x + 9 \\
\hline
21x^5 - 35x^4 + 49x^3 - 49x^2 \\
-24x^4 + 40x^3 - 56x^2 + 56x \\
27x^3 - 45x^2 + 63x - 63 \\
\hline
21x^5 - 59x^4 + 116x^3 - 150x^2 + 119x - 63
\end{array}$$

4- د پولینومو تقسیم:

د مقسوم اول حد د مقسوم علیه په اول حد ویشو حاصل یې په خارج قسمت کې لیکو په مقسوم علیه کې یې ضربوو د ضرب حاصل د مقسوم لاندې لیکو او منفي کوونې د تفریق د حاصل مخې ته د مقسوم یو حد را کښته کوو نوی مقسوم جوړو په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو تر څو چې مقسوم ختم شي او یا یې درجه د مقسوم علیه د درجې څخه کمه شي دغې پاتې شوې برخې ته باقي وایې.

مثال:

$$\begin{array}{r|l}
72x^5 + 95x^4 - 39x^3 + 9x^2 + 64x - 21 & 8x^2 + 7x - 3 \\
\cline{2-2}
\pm 72x^5 \pm 63x^4 \mp 27x^3 & 9x^3 + 4x^2 - 5x + 7 \\
\cline{1-1}
32x^4 - 12x^3 + 9x^2 & \\
\pm 32x^4 \pm 28x^3 \mp 12x^2 & \\
\cline{1-1}
-40x^3 + 21x^2 + 64x & \\
\mp 40x^3 \mp 35x^2 \pm 15x & \\
\cline{1-1}
56x^2 + 49x - 21 & \\
\pm 56x^2 \pm 49x \mp 21 & \\
\cline{1-1}
\end{array}$$

د باقي مانده دعوه :

د صحيح عددونو تقسيم میزان په لاندی ډول دی

باقي + خارج قسمت × مقسوم علیه = مقسوم

که مقسوم په $P(x)$ اومقسوم علیه په $(x-a)$ اوخارج قسمت په $Q(x)$ او باقي په $R$ وښیونو لیکو چې

$$P(x) = (x-a)Q(x) + R$$

که $x = a$ وي نو د $x$ په عوض $a$ وضع کوو نو :

$$P(a) = (a-a)Q(a) + R$$

$$Q(a) = R$$

دی دعوی ته د باقیمانده دعوه یا $Remainder's\ Theorem$ وائي.

مثال: وښیاست چه $x+2$ د $P(x) = 3x^2 + 5x^2 - 4x - 4$ دپولینوم جذر دی او که نه دی؟

حل : د $x+2$ جذر پیدا کوو.

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

د $P(x)$ په پولینوم کې د $x$ په عوض $(-2)$ وضع کوو که $f(x) = 0$ شونو $(-2)$ د پولینوم جذر دی او $x+2$ د پولینوم فکتور دی.

$$P(-2) = 3(-2)^3 + 5(-2)^2 - 4(-2) - 4$$
$$P(-2) = 3(-8) + 5(4) + 8 - 4$$
$$P(-2) = -24 + 20 + 8 - 4$$
$$P(-2) = -28 + 28$$
$$P(-2) = 0$$
$$R = 0$$

$x+2$ د $P(x)$ د پولینوم فکتور دی او $(-2)$ ئي جذر دی.

مثال: هغه افاده پیدا کړئ چه په $x-1$ باندی ووېشل شي باقي ئي $(-3)$ شي او که په $x+2$ باندې ووېشل شي باقي ئي $-9$ شي.

$$p(x) = ax + b$$
$$p(1) = a.1 + b = -3$$
$$p(-2) = a(-2) + b = -9$$
$$\begin{aligned} a + b &= -3 \\ \mp 2a \pm &= \mp 9 \\ \hline 3a &= 6 \end{aligned}$$
$$3a = 6 \Rightarrow a = 2$$
$$a + b = -3 \Rightarrow 2 + b = -3 \Rightarrow b = -3 - 2 = -5$$
$$b = -5$$

مطلوبه افاده $(2x-5)$ ده.

تمرین:

1- جمع یې کړئ؟

a- $\begin{array}{r} 11x^3 - 11x^2 + 7x - 9 \\ 8x^3 + 16x^2 - 11x + 13 \\ 9x^3 - 4x^2 + x - 2 \\ \hline \end{array}$

b- $\begin{array}{r} 3x^2 - 4x + 16 \\ 7x^2 - 20x + 8 \\ 5x^2 + 3x - 11 \\ \hline \end{array}$

2- تفریق کړئ؟

a- $\begin{array}{r} 8x^4 - 12x^3 + 7x^2 - 3x + 15 \\ 7x^4 - 20x^3 - 8x^2 + 9x - 20 \\ \hline \end{array}$

b- $\begin{array}{r} 11x^3 - 13x^2 + 20x - 8 \\ 5x^3 + 15x^2 + 8x + 11 \\ \hline \end{array}$

3- ضرب یې کړئ؟

a- $\begin{array}{r} 4x^3 - 8x^2 + 5x - 2 \\ 7x^2 - 8x + 6 \\ \hline \end{array}$

b- $\begin{array}{r} 2x^2 - 4x + 7 \\ 3x^2 + 7x - 8 \\ \hline \end{array}$

c- $\begin{array}{r} 6x^3 + 2x^2 - 4x + 7 \\ 3x^3 - 8x^2 + 6x - 8 \\ \hline \end{array}$

4- تقسیم یې کړئ؟

$$\frac{15x^5+16x^4-73x^3+101x^2-5x+6}{3x^2+8x-6} - a$$

$$\frac{21x^4+67x^3-58x^2-119x+77}{7x^2+6x-11} - b$$

$$\frac{35x^6-59x^5+36x^4+35x^3-74x^2+60x-24}{5x^3-7x^2+6x-3} - c$$

$$\frac{16x^4+96x^3y+216x^2y^2+216xy^3+81y^4}{2x+37} - d$$

## ترکیبي تقسیم $Synthetic\ Division$

هغه تقسیم دی چه د خارج قسمت د ضریبو د پیدا کولو لپاره د مقسوم ضریبونه ټول په یوه وار استعمالیږي.

طریقه یې داسې ده چه د مقسوم ضریبونه په یوه افقي کرښه کې لیکو د کرښې په اخر کې په یوه کنج کې د قیمت لیکو بیا یوی کرښې ته ځای پریږدو او یو خط کشوو دمقسوم د پولینوم د اول حد ضریب بې له کوم تغیره راکښته کوو. د $x$ په قیمت کې یې ضربوو د دویم حد دضریب لاندې یې لیکو او ورسره جمع کوو یې. د جمع حاصل د $x$ په قیمت کې ضربوو. په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو. د خط لاندې اخرني عدد د R قیمت دی. او نور عددونه د خارج قسمت ضریبونه دي د خارج قسمت درجه د مقسوم د درجې څخه یوه کمه ده.

که R=0 وي نو $x$-$a$ د مقسوم دپولینوم فکتور دی. او د قیمت د پولینوم جذر دي.

مثال:-د ترکیبي تقسیم پواسطه وښیاست چه $(x-2)$ د $P(x)=x^4+6x^3-8x^2-12x-8$ د پولینوم فکتور دي.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | +6 | -8 | -12 | -8 | 2 |
| | 2 | 16 | 16 | 8 | |
| 1 | 8 | 8 | 4 | 0 | |

$R=0$ نو $(x-2)$ د $P(x)$ د پولینوم فکتور دی او $(2)$ د پولینوم جذر دی او $q(x)=x^3+8x^2+8x+4$ د خارج قسمت پولینوم دي.

که بینوم د $(x-a)$ شکل لرلو و نو په زاویه کې $(+a)$ لیکل کیږي او که بینوم د $(x+a)$ شکل لرلوو نو په زاویه کې $(-a)$ لیکل کیږي او که بینوم د $(ax \pm b)$ شکل لرلو نو په زاویه کې $\left(\pm\frac{b}{a}\right)$ لیکل کیږي نوره طریقه کې کوم فرق نه لري.

## تمرین

1 : د باقیمانده دعوی پواسطه یې حل کړئ؟

کومه افاده ده چه که په $(x+3)$ وویشل شي باقي يې $(-24)$ شي او که په $(2x-3)$ وویشل شي باقي يې $(-6)$ شي

2 : د ترکیبي تقسیم پواسطه یې حل کړئ؟

$a$: $\dfrac{x^4-6x^3+15x^2-6x-40}{x-3}$

$b$: $\dfrac{2x^4-13x^3+4x^2+24x-28}{2x+3}$

$c$: $\dfrac{6x^3+4x^2-84x-9}{x+4}$

$d$: $\dfrac{12x^4-x^3-20x^2+8}{3x-2}$

# دویم فصل

## مساوات

د دوه افادو د عددي قیمتو برابری ته مساوات وایي.

مساوات په دوه قسمه دی.

1- مطابقت 2- شرطیه مساوات یا معادله

### 1- مطابقت:

مطابقت هغه مساوات دی چې د مجهول په ټولو قیمتو باندې یې دواړه خواوې مساوې وي.

د اسانتیا لپاره مطابقتونه په شپږو ګروپو کې مطالعه کوو.

1 ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a+b)^n$ شمکل ولري.

د دې ګروپ ټول مطابقتونه په انکشاف $n+1$ حدونه لري د ټولو حدونو علامې یې مثبت دي په اول حد کې د $a$ توان $n$ د $b$ توان صفر دی په نورو حدو کې د $a$ د توان څخه یو کمیږي $b$ ته ورکول کیږي تر څو چې د $a$ توان صفر او د $b$ توان $n$ شي د اول حد ضریب یو دی د دویم حد ضریب $n$ دی د نورو حدو د ضریبو د لاس ته راوړلو لپاره د مخکیني حد ضریب د $a$ په توان کې ضربوو د مخکینو حدو په شمېر یې ویشو.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$
$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$
$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$
$$(a+b)^9 = ?$$
$$(a+b)^{10} = ?$$
$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 + \dots\dots + nab^{n-1} + b^n$$

2- ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $(a-b)^n$ شکل ولري:

د دې ګروپ ټول مطابقتونه په انکشاف کې د اول ګروپ د مطابقتو په څیر دي. صرف د اول ګروپ د ټول حدو علامې مثبت دی او د دویم ګروپ د هر مطابقت د اول حد علامه مثبت د دویم حد علامه منفي ده د دریم علامه مثبت د څلورم حد علامه منفي ده په همدې ترتیب د طاق حدو علامې مثبت او د جفت حدو علامې منفي دي.

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$

$$(a-b)^7 = a^7 - 7a^6b + 21a^5b^2 - 35a^4b^3 + 35a^3b^4 - 21a^2b^5 + 7ab^6 - b^7$$

$$(a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$$

$(a-b)^9 = ?$

$(a-b)^{10} = ?$

$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + n(n-1)a^{n-2}b^2 \ldots\ldots + nab^{n-1} - b^n$

3- دریم ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n - b^n$ شکل لري:

د دې ګروپ ټول مطابقتونه د دوه قوسو په حاصل ضرب تجزیه کیږي اول قوس د دواړه حدو د قاعدو تفاضل دی دویم قوس $n$ حدونه لري د ټول حدو علامې مثبت دي په اول حد کې د $a$ توان $n-1$ دی د $b$ توان صفر دی په نورو حدو کې د $a$ د توان څخه یو کمیږي $b$ ته ورکول کیږي تر څو چې د $a$ توان صفر او د $b$ توان $(n-1)$ شي.

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

$a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

$$a^6 - b^6 = (a-b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$$
$$a^7 - b^7 = (a-b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6)$$

|

|

|

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{a-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots\ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

4- ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n + b^n$ شکل ولري او $n$ طاق وي د دې ګروپ ټول مطابقتونه د دوه قوسو په حاصل ضرب تجزیه کیږي اول قوس د دواړو حدو د قاعدو مجموعه ده دویم قوس $n$ حدونه لري د اول حد علامه مثبت د دویم حد علامه منفي ده د دریم حد علامه مثبت د څلورم حد علامه منفي ده د طاق حدو علامې مثبت او د جفت حدو علامې منفي دي. په اول حد کې د $a$ توان $n-1$ دی د $b$ توان صفر دی په نورو حدو کې د $a$ د توان څخه یو کمیږي $b$ ته ورکول کیږي تر څو چې د $a$ توان صفر شي او د $b$ توان $n-1$ شي.

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^4 + b^4 = (a+b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$$
$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$
$$a^6 + b^6 = (a+b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5)$$
$$a^7 + b^7 = (a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$$
$$a^9 + b^9 = ?$$
$$a^{11} + b^{11} = ?$$
$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{a-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots\ldots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

5- ګروپ: هغه مطابقتونه چې د $a^n + b^n$ شکل ولري او $n$ جفت وي د دې ګروپ ټول مطابقتونه د دوه مزدوجو قوسو په حاصل ضرب تجزیه کیږي د هر قوس اول حد د دواړو حدودقاعدو مجموعه ده او دویم حد یې د دواړو حدو د قاعدو د حاصل ضرب د دوه چند جذر دی.

$$a^2 + b^2 = \left(a + b - \sqrt{2ab)}\right)\left(a + b + \sqrt{2ab}\right)$$
$$a^4 + b^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 = \left(a^2 + b^2 - \sqrt{2a^2b^2}\right)\left(a^2 + b^2 + \sqrt{2a^2b^2}\right)$$

$= (a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab)(a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab)$

$a^6 + b^6 = (a^3)^2 + (b^3)^2 = (a^3 + b^3 - \sqrt{2a^3b^3})(a^3 + b^3 + \sqrt{2a^3b^3})$

**شپږم ګروپ:** هغه مطابقتونه چې د $(a + b + c)^2$ شکل ولري د دې ګروپ ټول مطابقتونه په انکشاف کې شپږ حدونه لري دري لمړي حدونه يې مربعګاني دي دري وروستي حدونه يې د دوه حدو د حاصل ضرب دوه چند دي.

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

مثال: انکشاف ورکړئ؟

1: $(2x + 3y)^2 = (2x)^3 + 3(2x)^2 3y + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^2$
$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

2: $(4x - 5y)^4 = (4x)^4 - 4(4x)^3(5y) + 6(4x)^2(5y)^2 - 4(4x)(5y)^3 + (5y)^4$
$= 256x^4 - 1280x^3y + 2400x^2y^2 - 2000xy^3 + 625y^4$

3: $(2x + 3y + 5z)^2 = (2x)^2 + (3y)^2 + (5z)^2 + 2 \times 2x \times 3y$
$+2 \times 2x \times 5y + 2 \times 3y \times 5z$
$= 4x^2 + 9y^2 + 25y^2 + 12xy + 20xz + 30yz$

2- مثال: تجزيه يې کړئ؟

1: $4x^2 - 9y^2 = (2x)^2 - (3y)^2 = (2x - 3y)(2x + 3y)$

5: $9x^4 + 36y^4 = (3x^2)^2 + (6y^2)^2 = \left(3x^2 + 6y^2 - \sqrt{2 \times 3x^2 \times 6y^2}\right)$
$(3x^2 + 6y^2 + \sqrt{2 \times 3x^2 \times 6y^2})$
$(3x^2 + 6y^2 - 6xy)(3x^2 + 6y^2 + 6xy)$

تمرين:

انکشاف ورکړئ

1- $(3x + 5y)^2$ 2- $(2x + 7y)^3$ 3- $(4x + 5y)^4$

4- $(4x - 5y)^5$ 5- $(3x - 7y)^4$ 6- $(2x - 3y)^6$

$\frac{8}{125}x^3 - \frac{216}{1331}y^3$ -9 $\quad 8m^3 - 125n^3$ -8 $\quad 7x^2 - 9y^2$ -7

$\frac{125}{216}x^3 + \frac{729}{1728}y^3$ -12 $\quad 64m^3 + 1000n^3$ -11 $\quad 8x^3 + 27y^3$ -10

$\frac{81}{625}m^4 + \frac{1296}{2401}n^4$ -15 $\quad 16x^4 + 256y^4$ -14 $\quad 4x^2 + y^2$ -13

$(\frac{2}{8}x - \frac{4}{5}y - \frac{7}{8}z)^2$ -18 $\quad (3x + 2y - 5z)^2$ -17 $\quad (2x + 3y + 5z)^2$ -16

**تجزيه:**

تجزيه په لغت کې توټه ، توټه کولو ته وايي.

او په اصطلاح کې د يوې افادې د ضربي عواملو د پيدا کولو طريقې ته تجزيه وايي.

1- د مشترک نيولو پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

که د يوې افادې په ټولو حدو کې کوم عدد يا حرف شامل وي دا شامل مشترک نيسو د قوس د باندې يې ليکو بيا د افادې هر حد په دې مشترک ويشو د قوس په داخل کې يې ليکو افاده تجزيه کيږي.

1: $3x^2 - 15 = 3(x^2 - 5)$

2: $5x^2 - 15x + 10 = 5(x^2 - 3x + 2)$

3: $4x^3 + 24x^2 - 36x = 4x(x^2 + 6x - 9)$

4: $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x = \frac{1}{4}x(x - 3)$

2- د $a^2 - b^2$ د مطابقت پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

1: $4x^2 - 25y^2 = (2x)^2 - (5y)^2 = (2x - 5y)(2x + 5y)$

2: $\frac{4}{25}m^2 - \frac{9}{49}n^2 = \left(\frac{2}{5}m\right)^2 - \left(\frac{3}{7}n\right)^2 = \left(\frac{2}{5}m - \frac{3}{7}n\right)\left(\frac{2}{5}m + \frac{3}{7}n\right)$

3: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{49} = \left(\frac{x}{6}\right)^2 - \left(\frac{y}{7}\right)^2 = \left(\frac{x}{6} - \frac{y}{7}\right)\left(\frac{x}{6} + \frac{y}{7}\right)$

3- د $a^3 - b^3$ د مطابقت پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

1: $8x^3 - 27y^3 = (2x)^3 - (3y)^3 = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$

2: $64x^3 - 125y^3 = (4x)^3 - (5y)^3 = (4x - 5y)(16x^2 + 20xy + 25y^2)$

3: $216m^3 - 343n^3 = (6m)^3 - (7n)^3 = (6m - 7n)(36m^2 + 42mn + 49n^2)$

4- د $a^3 + b^3$ د مطابقت پواسطه د يوې افادې تجزيه کول:

$$1:\ 8x^3 + 27y^3 = (2x)^3 + (3y)^3 = (2x + 3y)(4x^2 - 6xy + 9y^2)$$

$$2:\ 216m^3 + 343y^3 = (6m)^3 + (7y)^3$$
$$= (6m + 7y)(36m^2 - 42my + 49y^2)$$

$$3:\ \frac{8}{27}x^3 + \frac{125}{216}y^3 = \left(\frac{2}{3}x\right)^3 + \left(\frac{5}{6}y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}y\right)\left(\frac{4}{9}x^2 - \frac{5}{9}xy + \frac{25}{36}y^2\right)$$

ترينوم:

دري حده افادې ته ترينوم وايي.

عمومي شکل يې $ax^2 + bx + c$ دی.

د ترينوم تجزيه:

د ترينوم تجزيه په دوه حالته کې مطالعه کوو.

1- چې $a = 1$ وي

2- $a \neq 1$ وي.

1- چې $a = 1$ وي ترينوم د $x^2 - bx + c$ شکل غوره کوي د ترينوم د دغه شکل د تجزيې لپاره داسې دوه عدده پيدا کوو چې د ضرب حاصل يې $c$ او د جمع حاصل يې $b$ شي. فرضاً $m$ او $n$ داسې دوه عددونه دي.

يعنې $b = m + n$ او $c = mn$ دي نو:

$$x^2 + (m + n)x + mn$$

قوس خلاصوو

$$x^2 + mx + nx + mn$$

گروپ بندي کوو يې:

$$x(x + m) + n(x + n)$$
$$(x + m)(x + n)$$

1- مثال:

$x^2 + 11x + 30$

$x^2 + 5x + 6x + 30$

$x(x + 5) + 6(x + 5)$

$(x + 5)(x + 6)$

2- مثال :

$x^2 - 11x + 30$

$x^2 - 5x + 6x + 30$

$x(x - 5) - 6(x - 5)$

$(x - 5)(x - 6)$

نوټ: که په ترینوم کې د $(c)$علامه $(+)$وه هغه عددونه چې د ترینوم د تجزیې لپاره استعمالیږي هم علامه دي بیا د $b$ علامی ته ګورو که د $b$ علامه $(+)$ وه عددونه دواړه مثبت دي او که د $b$ علامه منفي وه عددونه دواړه منفي دي.

1: $x^2 + 15x + 36$

$x^2 + 12x + 3x + 36$

$x(x + 12) + 3(x + 12)$

$(x + 12)(x + 3)$

2: $x^2 - 13x + 40$

$x^2 - 8x - 5x + 40$

$x(x - 8) - 5(x - 8)$

$(x - 8)(x - 5)$

2- که په ترینوم کې د $c$ علامه منفي وه نو عددونه چې د ترینوم د تجزیې لپاره استعمالیږي مختلف العلامه دي بیا د $b$ علامې ته ګورو که د $b$ علامه $(+)$ وه لوی عدد مثبت دی او که د $b$ علامه منفي وه لوی عدد منفي وي.

1: $x^2 + 5x - 66$

$x^2 - 6x + 11x - 66$

$x(x - 6) + 11(x - 6)$

$(x - 6)(x + 11)$

2: $x^2-5x-66$

$x^2-11x+6x-66$

$x(x-11)+6(x-11)$

$(x-11)(x+6)$

تمرين:

1- $x^2+15x+44$

2- $x^2+19x+70$

3- $x^2+29x+180$

4- $x^2-16x+55$

5- $x^2-21x+90$

6- $x^2-13x+36$

7- $x^2+6x-135$

8- $x^2+11x-210$

9- $x^2+31x-630$

10- $x^2-7x-170$

11- $x^2-9x-400$

12- $x^2-25x-186$

2- حالت چي $a \neq 1$ وي

د ترينوم د دغه حالت د تجزيي لپاره داسي دوه عددونه پيدا كوو چي دضرب حاصل يي $ac$ او د جمع حاصل يي $b$ شي؟

1. $3x^2+11x+10$
   $ac=3(10)=30$
   $b=11$
   $3x^2+6x+5x+10$
   $3x(x+2)+5(x+2)$
   $(x+2)(3x+5)$
2. $5x^2-19x+12$
   $ac=5(12)=60$
   $b=-19$
   $5x^2-15x-4x+12$
   $5x(x-3)-4(x-3)$
   $(x-3)(5x-4)$
3. $7x^2+3x-34$
   $ac=7(-34)=-238$
   $7x^2-14x \quad x-34$
   $7x(x-2)+17(x-2)$
   $(x-2)(7x+17)$

4. $11x^2 - 23x - 30$
$ac = 11(-30) = 330$
$b = -23$
$11x^2 - 33x + 10x - 3$
$11x(x-3) + 10(x-3)$
$(x-3)(10x+10)$

تمرین:

لاندې ترینومونه حل کړئ؟

1- $5x^2 + 11x + 2$ 2- $7x^2 + 24x + 9$ 3- $3x^2 + 31x + 80$

4- $7x^2 - 19x + 10$ 5- $5x^2 - 22x + 21$ 6- $2x^2 - 17x + 35$

7- $3x^2 + 2x - 33$ 8- $4x^2 + 7x - 57$ 9- $7x^2 + 3x - 34$

10- $5x^2 - 10x - 54$ 11- $7x^2 - 11x - 30$ 12- $8x^2 - 23x - 85$

## د ګروپ بندۍ پواسطه د یوې افادې تجزیه کول:

که د یوې افادې حدونه تر درې حدو زیات وه او په ټولو حدو کې یو کوم حرف یا عدد شامل نه ؤ مګر په بعضو حدو کې شامل ؤ دغسې افاده په ګروپو ویشو په هر ګروپ کې شامل مشترک نیسو تر مشترک نیولو وروسته باید قوسونه مساوي وي قوسونه مشترک نیسو افاده په قوسو تجزیه کیږي.

$x^3 + 5x^2 + 3x + 15$
$x^2(x+5) + 3(x+5)$
$(x+5)(x^2+3)$

د تجزیې د استعمال ځایونه:

تجزیه د څو افاده د لوی مشترک قاسم او کوچني مشترک د پیدا کولو لپاره استعمالیږي.

لوی مشترک قاسم G.C.D:

د څو افادو لوی مشترک قاسم هغه افاده ده چې تر هغې په بله غټه افاده باندې راکړ شوې افادې تقسیم نشي لکه $x^2 + 7x + 12$ او $x^2 + 10x + 21$ چې په $x + 3$ باندې ویشل کیږي نو $x + 3$ د پورته افادو لوی مشترک قاسم وي.

## کوچني مشترک مضرب L.C.M:

د څو افادو کوچنی مشترک مضرب هغه افاده ده چې تر هغې بله کوچنۍ افاده په راکړ شو افادو باندې تقسیم نه شي. لکه $x^3 + 14x^2 + 61x + 84$ چې په $x^2 + 7x + 12$ او $x^2 + 10x + 21$ باندې تقسیمېږي او تر دې بله کوچنۍ افاده په راکړ شوو افادو باندې نه تقسیمېږي دې افادې ته د راکړ شوو افادو کوچنی مشترک مضرب دی.

## د لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کول:

افادې تجزیه کوو په ضربي عواملوکې یې مشترک او غیرمشترک پیدا کووکه په مشترکو ضربي عواملوکې د (کوچني) توان والا ضربي عوامل ضرب کړو لوی مشترک قاسم لاس ته راځي او که د لوړ توان والا ضربي او غیر مشترک ضربي عوامل سره ضرب کړو کوچنی مشترک مضرب لاس ته راځي.

مثال: د لاندې افادو لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب پیدا کړئ؟

1: $(x^2 + 2x)^2$

2: $2x^4 + 3x^3 - 2x^2$

3: $2x^3 - 3x^2 - 14x$

حل:

1: $(x^2 + 2x)^2 = \{x(x+2)\}^2 = x^2(x+2)^2$

2: $2x^4 + 3x^3 - 2x^2 = x^2(2x^2 + 3x - 2) = x^2(x+2)(2x-1)$

3: $2x^3 - 3x^2 - 14x = x(2x^2 - 3x - 14) = x(x+2)(2x-7)$

$G.C.D = x(x+2) = x^2 + 2x$

$L.C.M = x^2(x+2)^2(2x-1)(2x-7)$

## تمرین:

لوی مشترک قاسم او کوچنی مشترک مضرب یې پیدا کړئ؟

1- $2ax^3 - 4a^3x - 6a^3$

2- $ax^2 + 2a^2x + a^3$

3- $3a^2(x+a)^2$

# الجبري کسرونه

الجبري کسر هغه افاده ده چې په مخرج کې یې حرف موجود وي لکه:

$$\frac{x^2+3x-2}{x}\ ,\qquad \frac{3}{x+1}$$

الجبري کسرونه په دوه قسمه دي.

1- ناطق الجبري کسرونه 2- غیر ناطق الجبري کسرونه

2- ناطق الجبري کسرونه :

هغه الجبري کسرونه دي چې کوم حرف یې تر جذر لاندې نه وي.

ناطق الجبري کسرونه په دوه قسمه دي.

a- واقعي ناطق الجبري کسرونه b- غیر واقعي ناطق الجبري کسرونه

a- واقعي ناطق الجبري کسرونه: هغه کسرونه دي چې د صورت درجه یې د مخرج د درجې څخه کوچنۍ وي لکه $\frac{x}{x^2+5x+1}$ یا $\frac{2}{x+3}$

b- غیر واقعي ناطق الجبري کسرونه: هغه کسرونه دي چې د صورت درجه یې د مخرج د درجې څخه زیاته یا ورسره مساوي وي. لکه:

$$\frac{4x^2+5x-1}{x^2+3x-4}, \frac{3x^2+5x+3}{x+5}$$

2- غیر ناطق الجبري کسرونه :

هغه کسرونه دي چې کوم حرف یې تر جذر لاندې وي.

لکه $\frac{3\sqrt{x}+1}{x+2}$ ، $\frac{x+5}{\sqrt{x}+3}$

د الجبري کسرو خواص:

1- که د یوه کسر صورت او مخرج په یوه افاده کې ضرب شي په کسر کې تغیر نه راځي.

$$\frac{x+3}{x+7}=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+7)(x-1)}=\frac{x^2+2x-3}{x^2+6x-7}$$

2- که د یوه کسر صورت او مخرج په یوه افاده تقسیم شي په کسر کې تغیر نه راځي.

$$\frac{x^2+11x+24}{x^2+5x+6}=\frac{\frac{x^2+11x+24}{x+3}}{\frac{x^2+5x+6}{x+3}}=\frac{\frac{(x+3)(x+8)}{x+3}}{\frac{(x+3)(x+2)}{x+3}}=\frac{x+8}{x+2}$$

3- هر کسر درې علامې لري یوه د صورت علامه ده دویم د مخرج علامه ده او دریم د ټول کسر علامه ده که په دې درې علامو کې دوه علامو ته تغیر ورکړو په کسر کې تغیر نه راځي.

$$-\frac{-x}{-y}=-\frac{x}{y}=+\frac{x}{-y}=+\frac{-x}{y}=-\frac{x}{y}$$

## د الجبري کسرونو جمع:

د کسرونو مخرج مشترک پیدا کوو او د حسابي کسرونو په څیر عملیه پرې اجراء کوؤ

$$1:\quad \frac{x}{x+5}+\frac{3x-1}{x+5}-\frac{x+3}{x+5}=\frac{x+3x-1-x-3}{x+5}=\frac{3x-4}{x+5}$$

$$2:\quad \frac{x+3}{x^2-4}+\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+7}{x+2}=\frac{x+3+x^2+x-2+x^2+5x-14}{(x-2)(x+2)}$$

$$=\frac{2x^2+7x-13+1}{x^2-4}$$

$$3:\quad \frac{x}{x+1}+\frac{x+3}{x+2}=\frac{x(x+2)+(x+3)(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\frac{x^2+2x+x^2+4x+3}{x^2+3x+2}$$

$$=\frac{2x^2+6x+3}{x^2+3x+2}$$

## د الجبري کسرونو تفریق:

که وغواړو چې د یوه الجبري کسر څخه بل الجبري کسر تفریق کړو د مفروق علامو ته تغیر ورکوو او د جمع عملیه پرې تطبیقوو.

د الجبري کسرونو ضرب:

صورت په صورت کې او مخرج په مخرج کې ضربوو.

که د یوه کسر صورت د بل کسر د مخرج سره اختصاریدلو اختصاروو بیې بیا یې ضربوو.

$$1:\quad \frac{x+3}{x+1}\times\frac{x-3}{x+5}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x+1)(x+5)}=\frac{x^2-9}{x^2+6x+5}$$

2: $\frac{x^2-2x}{x+2}\times\frac{x^2+3x+2}{x^2+3x-10}=\frac{x(x-2)}{x+2}\times\frac{(x+2)(x+1)}{(x-2)(x+5)}=\frac{x(x+1)}{x+5}$
$=\frac{x^2+x}{x+5}$

## د الجبري کسرونو اختصار:

صورت او مخرج تجزیه کړو مساوي ضربي عوامل د صورت او مخرج څخه حذفوو.

1: $\frac{x^2+3x-28}{x^2+9x+14}=\frac{(x+7)(x-4)}{(x+7)(x+2)}=\frac{x-4}{x+2}$

2: $\frac{x^2+3x}{x^2+11x+24}=\frac{x(x+3)}{(x+3)(x+8)}=\frac{x}{x+8}$

## د الجبري کسرونو تقسیم:

د تقسیم علامه په ضرب بدلوو او مقسوم علیه سرچپه کوو.

1: $\frac{x^2+13x+30}{x+5}\div\frac{x^2+8x+15}{x^2+6x+15}$

$\frac{x^2+13x+30}{x+5}\times\frac{x^2+6x+5}{x^2+8x+15}$

$\frac{(x+3)(x+10)}{x+5}\times\frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)(x+5)}=\frac{(x+10)(x+1)}{x+5}=\frac{x^2+11x+10}{x+5}$

2: $\frac{x^2-11x+18}{x-3}\div\frac{x^2+7x-18}{x^2-9}$

$\frac{x^2-11x+18}{x-3}\times\frac{x^2-9}{x^2+7x-18}$

$\frac{(x-2)(x-9)}{x-3}\times\frac{(x-3)(x+3)}{(x+9)(x-2)}=\frac{(x-9)(x+3)}{x+9}=\frac{x^2-6x-27}{x+9}$

## تمرین:

1- لاندې کسرونه جمع کړئ؟

1- $\frac{2x-3y}{6y^2}+\frac{18xy-9y^2}{9y^2}$    2- $\frac{x+5}{x^2}+\frac{x-3}{x}-\frac{x+7}{x^3}$

3- $\frac{x+11}{x+3}+\frac{x-1}{x+2}$
4- $\frac{2x+1}{x^2-16}+\frac{x+3}{x-4}+\frac{x-1}{x+4}$
5- $\frac{x}{x+5}+\frac{3x+1}{x+5}-\frac{x-2}{x+5}$
6- $\frac{2}{x+7}+\frac{3}{x-7}$

2- لاندې کسرونه اختصار کړئ؟

1- $\frac{x^2-3x}{x^2-9}$
2- $\frac{x^2+5x-24}{x+8}$
3- $\frac{x^2-7x-44}{x^2-9x-22}$

3- لاندې کسرونه ضرب کړئ؟

1- $\frac{x^2+5x+6}{x+5}\times\frac{x^2+7x+6}{x^2+x-6}$
2- $\frac{x^2+x}{x-1}\times\frac{x^2-1}{x^2+5x+4}$
3- $\frac{x^2-3x-28}{x-7}\times\frac{x+5}{x+4}$
4- $\frac{x^2+3x-40}{x+8}\times\frac{x-3}{x+5}$

4- لاندې کسرونه تقسیم کړئ؟

1- $\frac{x^2+13x+6}{x+5}\div\frac{x^2+11x+28}{x^2+12x+35}$
2- $\frac{x}{x+1}\div\frac{x+1}{x}$
3- $\frac{x^2}{x-1}\div\frac{x}{x^2-1}$
4- $\frac{x}{x+3}\div\frac{x^2}{x^2-9}$
5- $\frac{x+5}{x}\div\frac{x+5}{x}$

## د کسرونو ګویا کول:

د یوه کسر د صورت یا مخرج څخه د جذر د منځه وړلو ته د کسر ګویا کول وایي. معمول په ریاضي کې د مخرج ګویا کول دي.

د کسر د مخرج ګویا کول څلور حالتونه لري.

1- چې د کسر په مخرج کې یو جذري حد وي او د جذر درجه یې (2) وي. لکه $\frac{3x}{\sqrt{x}}$ ، $\frac{2}{\sqrt{2x}}$ ، $\frac{3}{\sqrt{x^3}}$ او داسې نور.

د داسې کسرو د مخرجو ګویا کولو لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري حد کې ضربوو.

$$\frac{3x}{\sqrt{x}}=\frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}}=\frac{3x\times\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}}=\frac{3x\times\sqrt{x}}{x}=3\sqrt{x}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2x}}=\frac{2\times\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}\times\sqrt{2x}}=\frac{2\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}^2}=\frac{2\sqrt{2x}}{2x}=\frac{\sqrt{2x}}{x}$$

$$\frac{3}{\sqrt{x^3}}=\frac{3\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}\times\sqrt{x^3}}=\frac{3\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}^2}=\frac{3\sqrt{x^3}}{x^3}$$

2- چې دکسر په مخرج کې یو جذري حل موجود وي او د جذر درجه یې د (2) څخه ډېره وي لکه $\frac{x}{\sqrt[3]{3}}$ ، $\frac{3}{\sqrt[5]{x}}$ ، $\frac{2x^2}{\sqrt[7]{x}}$ او داسې نور.

د داسې کسرو د مخرجو د ګویا کولو لپاره صورت او مخرج د مخرج په جذري حد کې ضربوو. او د جذر د درجې او د توان د تفاضل په اندازه توان ورکوؤ.

$$1-\frac{x}{\sqrt[3]{x}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{x^2}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x\times x^2}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^3}}=\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{x}=\sqrt[3]{x^2}$$

$$2-\frac{3}{\sqrt[5]{x}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x}\times\sqrt[5]{x^4}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x\times x^4}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^5}}=\frac{3\sqrt[5]{x^4}}{x}$$

$$3-\frac{2x^2}{\sqrt[7]{x}}=\frac{2x^2\times\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x}\times\sqrt[7]{x^6}}=\frac{2x^2\times\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x\times x^6}}=\frac{2x^2\sqrt[7]{x^6}}{\sqrt[7]{x^7}}=\frac{2x^2\sqrt[7]{x^6}}{x}=2x\sqrt[7]{x^6}$$

3- چې د کسر مخرج کې دوه جذري حدونه موجود وي او د جذر درجه یې (2) وي.

لکه $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ، $\frac{x-11}{\sqrt{x}-\sqrt{11}}$ ، $\frac{x^3-x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}$ او داسې نور.

صورت او مخرج د مخرج په مزدوج کې ضربوو.

$$1:\quad \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}^2-\sqrt{y}^2}$$
$$=\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{x-y}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$$

$$2:\quad \frac{x-11}{\sqrt{x}-\sqrt{11}}=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{(\sqrt{x}-\sqrt{11})(\sqrt{x}+\sqrt{11})}=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{\sqrt{x}^2-\sqrt{11}^2}$$
$$=\frac{(x-11)(\sqrt{x}+\sqrt{11})}{x-11}=\sqrt{x}+\sqrt{11}$$

$$3:\quad \frac{x^3-x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x^3}-\sqrt{x})(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x^3})^2-(\sqrt{x})^2}$$
$$=\frac{(x^3-x)(\sqrt{x^3}+\sqrt{x})}{x^3-x}=\sqrt{x^3}+\sqrt{x}$$

4- چې د کسر په مخرج کې دوه حدونه موجود وي او د جذر درجې یې د ( 2)څخه زیاتې وي.
لکه: $\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}}$ ، $\frac{x-3}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}}$

که د جذري حدو تر منځ علامه منفي وه د $a^n - b^n$ د مطابقت د تجزیې دویم قوس کې صورت او مخرج ضربوو او که د منځ علامه یې مثبت وه نو د $a^n + b^n$ د مطابقت د تجزیې دویم قوس کې صورت او مخرج ضربوو.

$$1:\quad \frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}} = \frac{1\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{5^2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[3]{5x^2}+\sqrt[3]{25x}-\sqrt[3]{5x^2}-\sqrt[3]{25x}-\sqrt[3]{5^3}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{5x}+\sqrt[3]{25}}{x-5}$$

$$2:\quad \frac{x-3}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}} = \frac{(x-3)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}{\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{3}\right)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}$$

$$= \frac{(x-3)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}{\sqrt[5]{x^5}-\sqrt[5]{3x^4}+\sqrt[5]{9x^3}-\sqrt[5]{27x^2}+\sqrt[5]{81x}+\sqrt[5]{3x^4}-\sqrt[5]{9x^3}+\sqrt[5]{27x^2}-\sqrt[5]{81x}+\sqrt[5]{243}}$$

$$= \frac{(x+3)\left(\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}\right)}{x+3}$$

$$= \sqrt[5]{x^4}-\sqrt[5]{3x^3}+\sqrt[5]{9x^2}-\sqrt[5]{27x}+\sqrt[5]{81}$$

تمرین:

د لاندې کسرو مخرجونه ګویا کړئ؟

1- $\frac{2}{\sqrt{x}}$ 2- $\frac{x}{\sqrt{x}}$ 3- $\frac{x-1}{\sqrt{x}}$ 4- $\frac{3x}{\sqrt{x}}$ 5- $\frac{3}{\sqrt[3]{x}}$

6- $\frac{2x}{\sqrt[4]{x}}$ 7- $\frac{x+1}{\sqrt[5]{x}}$ 8- $\frac{x-1}{\sqrt[5]{x}}$ 9- $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ 10- $\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

11- $\frac{x}{\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}$ 12- $\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ 13- $\frac{x+2}{\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{2}}$ 14- $\frac{m-n}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}}$ 15- $\frac{x}{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}$

## قسمي کسرونه:

که د دوه کسرونو د مجموعې څخه یو واقعي کسر جوړ شي. دغه کسرونه د واقعي کسر قسمي کسرونه دي.

$$\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+5}=\frac{2(x+5)+3(x+1)}{(x+1)(x+5)}=\frac{2x+10+3x+3}{x^2+6x+5}=\frac{5x+13}{x^2+6x+5}$$

$\frac{5x+13}{x^2+6x+5}$ یو واقعي کسر دی د $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+5}$ څخه لاس ته راغلی دی نو $\frac{2}{x+1}$ او $\frac{3}{x+5}$ کسرونه یې قسمي کسرونه دي.

## د یوه واقعي کسر د قسمي کسرو پیدا کول:

د قسمي کسرو د پیدا کولو لپاره د واقعي کسر مخرج تجزیه کوو د مخرج د ضربي عواملو شمېر د قسمي کسرونو شمېر ښيي. د مخرج د ضربي عواملو په لحاظ د واقعي کسر د قسمي کسرو پیدا کول په څلورو حالتو کې مطالعه کوؤ.

1- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل غیر تکراري بینومونه وي هر بینوم د یوه کسر مخرج دی صورت یې د الفباء په غټو حروفو ښیو عملیې پرې اجراء کوو د حروفو قیمتونه پیدا کوو د هغوي په عوض یې وضع کوو د واقعي کسر قسمي کسرونه لاس ته راځي. $\frac{8x+51}{x^2+13x+42}$ قسمي کسرونه پیدا کړئ؟

$$\frac{8x+51}{x^2+13x+42}=\frac{8x+51}{(x+6)(x+7)}=\frac{A}{x+6}+\frac{B}{x+7}=\frac{A(x+7)+B(x+6)}{(x+6)(x+7)}$$

$$\frac{8x+51}{x^2+13x+42}=\frac{A(x+7)+B(x+6)}{x^2+13x+42}$$

مخرجونه یې مساوي دی نو $8x+51=A(x+7)+B(x+6)$

د $A$ او $B$ د قیمتو د پیدا کولو لپاره دوه حالتونه موجود دي.

الف: د جذر پواسطه د $A$ او د $B$ قیمتونه پیدا کوو نو د هر قوس جذر پیدا کوو.

$$x+7=0$$
$$x=-7$$

$-7$ د $x$ په عوض وضع کوؤ.

$$8(-7) + 51 = A(-7+7) + B(-7+6)$$
$$-56 + 51 = A(0) + B(-1)$$
$$-5 = 0 - B$$
$$-B = -5 \qquad B = 5$$
$$x + 6 = 0 \qquad x = -6$$

6- په معادله کې د $x$ په عوض وضع کوؤ.

$$8(-6) + 51 = A(-6+7) + B(-6+6)$$
$$-48 + 51 = A(1) + B(0)$$
$$3 = A \qquad A = 3$$

د $A$ په عوض 3 او د $B$ په عوض 5 وضع کوؤ.

$$\frac{3}{x+6} + \frac{5}{x+7}$$

پورتنی کسرونه د $\frac{8x+51}{x^2+13x+42}$ قسمي کسرونه دي.

ب: د عینیت پواسطه:

$$8x + 51 = A(x+7) + B(x+6)$$
$$8x + 51 = Ax + 7A + Bx + 6B$$
$$8x + 51 = Ax + Bx + 7A + 6B$$
$$8x + 51 = (A+B)x + 7A + 6B$$

په عینیت کې د مشابه حدو ضریبونه مساوي وي.

$$\begin{aligned} A + B &= 8 \\ \underline{7A + 6B} &\underline{= 51} \\ 7A + 7B &= 56 \\ \underline{-7A \pm 6B} &\underline{= \pm 51} \\ B &= 5 \end{aligned}$$

$$A + B = 8 \rightarrow A = 8 - 5 = 3$$
$$A = 3$$

2- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل تکراري بینومونه وي.

مثال: $\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}$ قسمي کسرونه پيدا کړئ؟

$$\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}=\frac{5x^2+12x+2}{x(x^2+2x+1)}=\frac{5x^2+12x+2}{x(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2+12x+2}{x^3+2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2+12x+2}{x(x+1)^2}=\frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو صورتونه يې هم مساوي دي.

$$5x^2+12x+2=A(x^2+2x+1)+Bx^2+Bx+Cx$$

$$=Ax^2+2Ax+A+Bx^2+Bx+Cx$$

$$=Ax^2+Bx^2+2Ax+Bx+Cx+A$$

$$5x^2+12x+2=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A$$

$$A+B=5$$

$$2A+B+C=12$$

$$A=2$$

$$A+B=5\to 2+B=5 \qquad B=5-2=3$$

$$B=3$$

$$2A+B+C=12$$

$$2\times 2+3+C=12$$

$$4+3+C=12$$

$$7+C=12$$

$$C=12-7$$

$$C=5$$

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{x+1}+\frac{5}{(x+1)^2}$$

3- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل غير تکراري ترينومونه وي. او د تجزيې وړ هم نه وي هغه کسر چې مخرج يې ترينوم وي په صورت کې يې بينوم ليکو.

مثال: $\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}$ قسمي کسرونه پيدا کړئ؟

$$\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+5x+7}=\frac{A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)}{x(x^2+5x+7)}$$

$$\frac{5x^2+20x+21}{x(x^2+5x+7)}=\frac{A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)}{x(x^2+5x+7)}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو.

$$5x^2+20x+21=A(x^2+5x+7)+x(Bx+C)$$

$$5x^2+20x+21=Ax^2+5Ax+7A+Bx^2+Cx$$

$$5x^2+20x+21=Ax^2+5Ax+7A+Bx^2+Cx$$

$$5x^2+20x+21=(A+B)x^2+(5A+C)x+7A$$

$$A+B=5$$

$$5A+C=20$$

$$7A=21$$

$$A=3$$

$$A+B=5\Rightarrow 3+B=5\Longrightarrow B=5-3=2$$

$$B=2$$

$$5A+C=20$$

$$5\times 3+C=20$$

$$15+c=20 \qquad\qquad C=20-15$$

$$C=5$$

$$\frac{3}{x}+\frac{2x+5}{x^2+5x+7}$$

پورتني کسرونه د راکړ شوي واقعي کسر قسمي کسرونه دي.

4- چې د کسر د مخرج ضربي عوامل تکراري ترينومونه وي. لکه:

$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}$$

قسمي کسرونه يې داسې پيدا کوو.

$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+3x+5}+\frac{Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$
$$=\frac{(Ax+B)(x^2+3x+5)+Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$
$$\frac{2x^3+7x^2+14x+5}{(x^2+3x+5)^2}=\frac{Ax^3+3Ax^2+5Ax++Bx^2+3Bx+5B+Cx+D}{(x^2+3x+5)^2}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو :

$$2x^3+7x^2+14x+5=Ax^3+3Ax^2+Bx^2+5Ax+3Bx+Cx+D+5B$$
$$2x^3+7x^2+14x+5=Ax^3+(3A+B)x^2+(5A+3B+C)x+D+5B$$
$$A=2$$
$$3A+B=7$$
$$3\times 2+B=7\Longrightarrow 6+B=7\Longrightarrow B=7-6$$
$$B=1$$
$$5A+3B+C=14$$
$$5\times 2+3\times 1+C=14$$
$$10+3+C=14$$
$$3+C=14$$
$$C=14-13$$
$$C=1$$
$$5B+D=5$$
$$5\times 1+D=5$$
$$5+D=5$$
$$D=5-5$$
$$D=0$$
$$\frac{2x+1}{x^2+3x+5}+\frac{x}{(x^2+3x+5)^2}$$

# دریم فصل

## معادله یا شرطیه مساوات

معادله هغه مساوات دی چې د مجهول په بعضو قیمتو یې دواړه خواوي مساوي وي لکه $5x + 3 = 13$ چې د $x = 2$ لپاره یې دواړه خواوي مساوي دي.

دغسې مساوات ته شرطیه مساوات وایې.

### د معادلې اقسام:

معادله په پر قسمونه لري.

1- یو مجهوله اوله درجه معادله
2- دوه مجهوله اوله درجه معادله
3- درې مجهوله اوله درجه معادله
4- څلور مجهوله اوله درجه معادله
5- یو مجهوله دویمه درجه معادله
6- یو مجهوله دریمه درجه معادله
7- یو مجهوله څلورمه درجه معادله
8- جذري معادلې
9- اکسپونیشل معادلې
10- لوګاریتمي معادلې
11- مثلثاتي معادلې

### اول: یو مجهوله اوله درجه معادله:

هغه معادله ده چې مجهول یې یو او د مجهول درجه یې هم یوه وي.

عمومي شکل یې دا دی $ax + b$ چه $a$ او $b$ ثابت عددونه دي او $x$ مجهول دی څرنګه چې د $x$ توان یو دی نو ځکه ورته یو مجهوله اوله درجه معادله وایې.

## د معادلې خواص:

1- که د معادلې د دواړو خواو سره عین عدد جمع شي په معادله کې تغیر نه راځي.

2- که د معادلې د دواړو خواو څخه عین عدد منفي شي په معادله کې تغیر نه راځي.

3- که د معادلې دواړه خواوې په عین عدد کې ضرب شي په معادله کې تغیر نه راځي.

4- که د معادلې دواړه خواوې په عین عدد تقسیم شي په معادله کې تغیر نه راځي.

5- که د معادلې دواړه خواوې په عین توان رفع شي په معادلې کې تغیر نه راځي.

6- که د معادلې دواړه خواوې تر عین جذر لاندې شي په معادله کې تغیر نه راځي.

د یو مجهوله اوله درجه معادلې د حل طریقه:

که د معادلې دواړه خواو ته حدونه موجود وي نو معلوم عددونه د مساوات ښي خواته او مجهول حدونه د مساوات چپې خواته وړو.

هر حد چې د مساوات د یوې خوا څخه بلې خوا ته وړل کیږي که مثبت وي منفي کیږي که منفي وي مثبت کیږي که د ضرب په حالت کې وي په بل طرف کې مخرج ته ځي او که په مخرج کې وي په بل طرف کې ضربیږي.

مثال:

1: $x+5=8 \qquad x=8-5 \qquad x=3$

2: $x-7=11 \qquad x=11+7 \qquad x=18$

3: $3x=36 \qquad \frac{3x}{3}=\frac{36}{3} \qquad x=12$

4: $\frac{x}{5}=4 \qquad 5\times\frac{x}{5}=4\times 5 \qquad x=20$

5: $\frac{5}{x}-3=-2 \qquad \frac{5}{x}=-2+3 \qquad \frac{5}{x}=\frac{1}{1} \qquad x=5$

6: $\frac{3}{x}+\frac{7}{x}+\frac{2}{x}=36$

$\frac{3+7+2}{x}=36$

$$\frac{12}{x} = 36 \qquad \frac{12}{x} = \frac{36}{1} \qquad 36x = 12$$

$$\frac{36x}{36} = \frac{12}{36} \qquad x = \frac{1}{3}$$

## جذري معادلې

هغه معادلې دي چې مجهول يې تر جذر لاندې وي

لکه $\sqrt{3x+30} + 11 = 17$

## د جذري معادلو دحل طريقه:

يو جذري حد د مساوات يوې خواته پرېږدو نور جذري او غېرجذري حدونه د مساوات بلې خواته ورو. بيا د مساوات دواړه خواوې د جذر په درجه رفع کوو جذر د منځه ځي. که بيا هم په معادله کې جذر موجود ؤ عمليه تکراروو.

1- مثال:

$$\sqrt{5x-4} + 8 = 14$$

$$\sqrt{5x-4} = 14 - 8 = 6$$

$$\sqrt{5x-4} = 6$$

$$\left(\sqrt{5x-4}\right)^2 = 6^2$$

$$5x - 4 = 36$$

$$5x = 36 + 4 = 40 \Longrightarrow 5x = 40 \Longrightarrow \frac{5x}{5} = \frac{40}{5} \Longrightarrow x = 8$$

$$x = 8$$

2- مثال:

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{5x+6} = 10$$

$$\sqrt{3x-2} = 10 - \sqrt{5x+6}$$

$$\left(\sqrt{3x-2}\right)^2 = \left(10 - \sqrt{5x+6}\right)^2$$

$$3x - 2 = 100 - 20\sqrt{5x+6} + 5x + 6$$

$$2x + 108 = -20\sqrt{5x+6}$$
$$\frac{2x+108}{2} = \frac{-20\sqrt{5x+6}}{2}$$
$$x + 54 = -10\sqrt{5x+6}$$
$$(x+54)^2 = \left(-10\sqrt{5x+6}\right)^2$$
$$x^2 + 108x + 2916 = 100(5x+6)$$
$$x^2 + 108x + 2916 = 500x + 600$$
$$x^2 + 108x - 500x + 2916 - 600 = 0$$
$$x^2 - 392x + 2316 = 0$$
$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac = 196^2 - 1 \times (2316)$$
$$\acute{\Delta} = 38416 - 2316 = 36100$$
$$\acute{\Delta} = 36100$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{2a} = \frac{-(-196) \pm \sqrt{36100}}{2 \times 1} = \frac{196 \pm 190}{2}$$
$$x_1 = \frac{386}{2} = 193$$
$$x_2 = \frac{196 - 190}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

3- مثال:

$$\sqrt{3x-1} - \sqrt{3x+4} = -1 \; \sqrt{3x-1} = \sqrt{3x+4} - 1$$
$$\left(\sqrt{3x-1}\right)^2 = \left(\sqrt{3x+4} - 1\right)^2$$
$$3x - 1 = 3x + 4 - 2\sqrt{3x+4} + 1$$
$$2\sqrt{3x+4} = 6$$
$$\left(2\sqrt{3x+4}\right)^2 = 6^2$$
$$4(3x+4) = 36$$
$$12x + 16 = 36 \Rightarrow 12x = 36 - 16 \Rightarrow 12x = 20 \Rightarrow \frac{12x}{4} = \frac{20}{4}$$
$$3x = 5 \quad \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

3- مثال:

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-7}=\frac{21}{\sqrt{x-7}}$$

$$\sqrt{x}=\frac{21}{\sqrt{x-7}}-\sqrt{x-7}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=\left(\frac{21}{\sqrt{x-7}}-\sqrt{x-7}\right)^2$$

$$x=\frac{441}{x-7}-2\left(\frac{21}{\sqrt{x-7}}\times\sqrt{x-7}\right)+x-7$$

$$\frac{441}{x-7}+49=0\Rightarrow 49x-343=441\Rightarrow 49x=441+343=784$$

$$49x=784$$

$$\frac{49x}{49}=\frac{784}{49}\quad\Rightarrow x=16$$

$$x=16$$

تمرین

لاندې جذري معادلې حل کړئ

1. $\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x+9}=0$ $\qquad x=1$

2. $\frac{2x^2-128}{\sqrt{3+x^2}}=0$ $\qquad x=8$

3. $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=\frac{91}{\sqrt{x+13}}$ $\qquad x=36$

4. $\frac{ax-1}{\sqrt{ax}+1}=4+\frac{\sqrt{ax}-1}{2}$ $\qquad x=\frac{81}{a}$

5. $\sqrt[5]{x+8}=\sqrt[10]{x^2+64x+36}$ $\qquad x=\frac{7}{12}$

6. $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=4+\frac{\sqrt{x}-1}{2}$ $\qquad x=81$

7. $\sqrt{x+13}-\sqrt{2x+1}=0$ $\qquad x=12$

8. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$ $\qquad x=\frac{16}{25}$

9. $\sqrt{x} + 5 = 6 - \sqrt{x+7}$ $\qquad x = 9$

10. $2(x+2) = 1 + \sqrt{4x^2 + 9x + 14}$ $\qquad x = \frac{5}{3}$

تمرین:

1. $\frac{5-x}{4} + \frac{x}{8} = 1$
2. $\frac{2}{x} - 3 = \frac{3}{x} - 8$
3. $\frac{4}{x-3} + \frac{5}{x-3} + \frac{7}{x-3} = 6$
4. $\frac{x}{2} - \frac{2x-8}{5} + \frac{4}{5} = 3$
5. $\frac{x-1}{4} + \frac{x-2}{3} + \frac{x-3}{2} + x - 4 = 4$
6. $\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1} = 2$

# خلورم فصل

## دوه مجهوله معادلی

هغه معادلي دي چې دوه مجهوله ولري او د هر مجهول توان يې يو وي عمومي شکل يې دا دی.

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$\underline{a_2x + b_2y = c_2}$$

$a_1$ ، $a_2$ ، $b_2$ ، $b_2$ ، $c_1$ او $c_2$ ثابت عددونه دي $x$ او $y$ مجهولونه دي څرنګه چې د هر مجهول توان يو دی نو ځکه ورته اوله درجه دوه مجهوله معادلي وايي.

مناقشه:

1- که $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ وي سيستم زيات حلونه لري.

2- که $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_1} \neq \frac{c_1}{c_2}$ وي سيستم حل نلري.

3- که $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ وي سيستم يو حل لري.

### د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

اوله درجه دوه مجهوله معادلي په (6) طريقو حليږي.

1- د جمع يا افناء په طريقه:

په دوارو معادلو کې د يوه مجهول ضريبونه مساوي کوو. که هم علامه ود معادلي يو د بل څخه منفي کوو او که مختلف العلامه وه معادلي جمع کوو پدې ترتيب د دوه مجهوله معادلو سيستم په يو مجهوله معادله بدليږي يو مجهوله معادله حلوو او د مجهول قيمت يي پيدا کوو بيا دا جذر د سيستم په يوه معادله کې وضع کوو د دويم مجهول قيمت لاس ته راځي.

مثال: لاندې سيستم حل کړئ؟

$$7x + 8y = 38$$
$$\underline{5x + 3y = 19}$$

$$\begin{array}{r} 5(7x + 8y = 38) \\ \underline{7(5x + 3y = 19)} \\ 35x + 40y = 190 \\ \underline{\pm 35x \pm 21y = \pm 133} \\ 19y = 57 \end{array}$$

$$y = 3$$

$$7x + 8y = 38$$

$$7x + 8 \times 3 = 38$$

$$7x + 24 = 38$$

$$7x = 38 - 24$$

$$7x = 14$$

$$x = 2$$

2- مثال:

$$\begin{array}{r} 3x - 5y = 2 \\ \underline{4x + 2y = 20} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2(3x - 5y = 2) \\ \underline{5(4x + 2y = 20)} \\ 6x - 10y \quad = 4 \\ \underline{20x + 10y \quad = 100} \\ 26x \qquad\quad = 104 \end{array}$$

$$x = 4$$

$$4(4) + 2y = 20$$

$$16 + 2y = 20$$

$$2y = 20 - 16$$

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

تمرین:

لاندې سیستمونه د افناء په طریقه حل کړئ؟

1- $\begin{aligned} 5x + 4y &= 32 \\ 8x - y &= 29 \end{aligned}$  2- $\begin{aligned} 6x - 8y &= 4 \\ 7x - 2y &= 12 \end{aligned}$

3- $\begin{aligned} 6x + 3y &= 21 \\ 5x + 7y &= 26 \end{aligned}$  4- $\begin{aligned} 9x - 2y &= -3 \\ 4x + 3y &= 57 \end{aligned}$

2- په تعویضي طریقه د دوه مجهوله معادلو حل:

د يوې معادلې څخه د يو مجهول قيمت د بل له جنسه پيدا کوو او په بله معادله کې يې د همغه مجهول په عوض وضع کوو د دوه مجهوله معادلو سيستم په يو مجهوله معادله بدليږي يو مجهوله معادله حلوؤ د مجهول قيمت يې پيدا کوو د مجهول دا قيمت د سيستم په يوه معادله کې وضع کوو د بل مجهول قيمت په لاس راځي.

مثال:

$$\begin{aligned} 3x - 11y &= 10 \\ 4x + 2y &= 30 \end{aligned}$$

$$x = \frac{11y + 10}{3}$$

$$4\left(\frac{11y + 10}{3}\right) + 2y = 30$$

$$44y + 40 + 6y = 90$$

$$50y = 50$$

$$y = 1$$

$$3x - 11y = 10$$

$$3x - 11 \times 1 = 10$$

$$3x - 11 = 10$$

$$3x = 10 + 11$$

$$3x = 21$$

$$x = 7$$

تمرین:

لاندې سیستمونه په تعویضي طریقه حل کړئ؟

-1
$$\begin{aligned} 3x + 13y &= 25 \\ 2x + 2y &= 10 \end{aligned}$$

-2
$$\begin{aligned} 6x - 5y &= 20 \\ 7x + 3y &= 41 \end{aligned}$$

-3
$$\begin{aligned} 11x + 5y &= 53 \\ 8x - 9y &= -12 \end{aligned}$$

-4
$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 2x + y &= 12 \end{aligned}$$

3- د مساوات په طریقه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

د دواړو معادلو څخه د یو مجهول قیمت د بل مجهول له جنسه پیدا کوو او سره مساوي کوو یې د دوه مجهوله معادلو سیستم په اوله درجه یو مجهوله معادله بدلیږي یو مجهوله معادله حلوو د مجهول قیمت یې پیدا کوو د مجهول دغه قیمت د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو د بل مجهول قیمت لاس ته راځي.

مثال: لاندې سیستم حل کړئ؟

$$\begin{aligned} 3x + 7y &= 19 \\ 5x - 2y &= 18 \end{aligned}$$

$$3x + 7y = 19 \qquad\qquad 5x - 2y = 18$$

$$3x = 19 - 7y \qquad\qquad 5x = 18 + 2y$$

$$x = \frac{19 - 7y}{3} \ldots\ldots I \qquad\qquad x = \frac{18 + 2y}{5} \ldots\ldots II$$

څرنګه چې په $I$ او $II$ نمبر مساواتو کې چپ طرفونه مساوي دي نو ښي طرفونه یې هم مساوي دي نو لیکو.

$$\frac{19 - 7y}{3} = \frac{18 + 2y}{5}$$

$$3(18 + 2y) = 5(19 - 7y)$$

$$54 + 6y = 95 - 35y$$

$$6y + 35y = -54 + 95$$

$$41y = 41$$

$$\frac{41y}{41} = \frac{41}{41}$$

$$y = 1$$

$$3x + 7y = 19$$

$$3x + 7 \times 1 = 19$$

$$3x + 7 = 19$$

$$3x = 19 - 7$$

$$3x = 12$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \quad ; \quad x = 4$$

تمرین:

-1 $\begin{array}{l} 4x + 2y = 14 \\ 15x - y = 10 \end{array}$ -2 $\begin{array}{l} 7x - 3y = 5 \\ 8x - 4y = 0 \end{array}$

-3 $\begin{array}{l} 11x + 6y = 40 \\ 2x + 9y = 31 \end{array}$ -4 $\begin{array}{l} 9x - 3y = 21 \\ 8x + 7y = 38 \end{array}$

4-د دیترمینانت په طریقه د دوه مجهوله اوله درجه معادلو حل:

دیترمینانت په لغت کې ( معین یا ثابت ) ته وایي او په اصطلاح کې د اعدادو مربعي ترتیب ته د یترمینانت وایي لکه $D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

د دیترمینانت پواسطه د دوه مجهوله معادلو حل :

د $x$ او $y$ د ضریبو دیترمینانت په $D$ ښیو او قیمت یې پیدا کوو . د $x$ د ضریبو په عوض ثابت عددونه لیکو په $D_x$ یې ښیو قیمت یې پیدا کوو بیا د $D$ په دیتر مینانت د $y$ د ضریبو په عوض ثابت عددونه لیکو په $D_y$ یې نیسو او قیمت یې پیدا کوو د $\frac{D_x}{D}$ څخه د $x$ قیمت لاس ته راځي د $\frac{D_y}{D}$ څخه د $y$ قیمت لاس ته راځي.

مثال: $\begin{array}{l} 3x - 5y = 2 \\ 5x + y = 22 \end{array}$ د دیترمینانت پواسطه حل کړئ؟

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

$$D = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 3 \times 1 - 5(-5) = 3 + 25 = 28 \Rightarrow D = 28$$

$$D_x = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

$$D_x = 2 \times 1 - 22(-5) = 2 + 110 = 112 \qquad D_x = 112$$

$$D_y = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1$$

$$D_y = 3 \times 22 - 5(2) = 66 - 10 = 56 \qquad D_y = 56$$

$$x = \frac{Dx}{D} = \frac{112}{28} = 4 \qquad x = 4$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{56}{28} = 2 \qquad y = 2$$

5- دګراف پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

په (     ) صفحه د تابع په بحث کې وګورئ.

6- د متریکس پواسطه د اوله درجه دوه مجهوله معادلو حل:

متریکس($Matrixes$):

او په اصطلاح کې د اعدادو مستطیلي ته وايي ترتیب ته متریکس وایي. لکه:

$$A = \begin{Bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{Bmatrix}$$

د متریکس په غټو حروفو ښودل کیږي او هغه اعداد یا حروف چې په متریکس کې لیکل کیږي د متریکس د عناصرو په نوم یادیږي.

هغه عناصر چې په افقي ډول لیکل شوی وي د متریکس د سطر په نوم یادیږي او هغه عددونه چې په عمودي ډول لیکل شوی وي د متریکس د ستن په نوم یادیږي د سطرونو شمیر په $i$ او د ستونونو شمېر په $j$ ښیئ چې $i$ او $j$ طبیعي عددونه دي. لکه:

$$A = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots \dots a_{mn} \end{Bmatrix}$$

د متریکس مرتبه:

که د متریکس د سطرونو شمیر $m$ او د ستونو شمیر یې $n$ وي دغه متریکس ته $m \times n$ مرتبه متریکس وایي.

او داسې لیکل کیږي $A = \{a_{ij}\}_{m\times n}$

مثال: لاندې متریکسونه حل کړئ؟

1- $(a_{ij})_{2\times 2} = (i+j)_{2\times 2}$ 　　 2- $(a_{ij})_{3\times 2} = (i+j)_{3\times 2}$

حل:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$a_{ij} = i + j$ 　　 $a_{12} = 1 + 2 = 3$ 　　 $a_{21} = 2 + 1 = 3$

$a_{11} = 1 + 1 = 2$

$a_{22} = 2 + 2 = 4$

په نتیجه کې لاندې متریکس لاس ته راځي.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

د متریکس ډولونه:

متریکس په اوه ډوله دی.

1- سطري متریکس: هغه متریکس چې یوازې یو سطر ولري لکه $A = [4 \quad 5 \quad 9]_{1\times 3}$

2- ستوني متریکس: هغه متریکس دی چې یو ستون ولري لکه $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}_{3\times 1}$

3- صفري متیریکس: هغه متریکس دی چې ټول عناصر یې صفر وي.

$$0_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \; 0_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4- مربعي متیریکس: هغه متریکس دی چې د سطرونو شمیر یې د ستونو د شمیر سره مساوي وي.

لکه :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

مربعي يا مستطيلي متريکسونه دوه قطرونه لري ، چې يوه ته اصلي قطر يا (Mean diagonal) او بل ته ($Minor\ diagonal$) فرعي قطر وايي.

$a_{11}, a_{22} \ldots\ldots\ldots a_{nn}$ اصلي قطر دی او $a_{nn} \ldots\ldots\ldots a_{12}$ ، $a_{21}$ فرعي قطر دی.

لاندې متريکسونه څه ډول متريکسونه دي. $3 \times 1$ او $1 \times 4$

5- قطري متريکس: هغه متريکس دی چې د اصلي قطر څخه په غير نور عناصر يې صفرونه وي.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

6- سکالر متريکس: که د قطري متريکس د اصلي قطر عناصر مساوي وي دې متريکس ته سکالر متريکس وايي.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

7- واحد متريکس: که د قطري متريکس داسې قطر عناصر يو (1) وي نو دې متريکس ته واحد متريکس وايي.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثلثي متريکس: که د يوه متريکس د اصلي قطر لاندې او يا پورته عناصر صفرونه وي دې متريکس ته مثلثي متريککس وايي لکه.

پورتنی مثلثي متريکس په لاندې ډول دی.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 8 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

لاندې مثلثي متريکس دی.

په انګليسي کې ورته $Upper\ Tringolar\ matrix$ او $Lower\ Tringolar\ matrix$ وايي.

## متقابل يا متضاد متريکس:

هغه متريکسونه چې عناصر يې يو د بل متضاد وي لکه: $A(a_{ij})_{m\times n} = A(-a_{ij})_{m\times n}$

$$-A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & +4 \\ -3 & -5 & 2 \\ 1 & -6 & -7 \end{bmatrix} . A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 3 & 5 & -2 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

د متريکسونو جمع:

د متريکسونو په جمع کې د متريکسو د مرتبې مساوات ضرور دي يعنې که $a_{ij}$ او $b_{ij}$ دوه متريکسونه ولرو کولای شو چې دغه دوړل متريکسونه جمع کړو $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ متريکسونه جمع کړئ؟

حل:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+2 \\ -2+1 & 0+2 \\ 1+0 & 7-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

د متريکس تفريق:

په تفريق کې هم د متريکس د تفريقولو لپاره د متريکس د مرتبو مساوات ضرور دی.

که $a_{ij}$ او $b_{ij}$ وي نو

$$a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 04 \end{bmatrix}$ دوه متریکسونه راکړ شويدي $A - B$ متريکس پيدا کړئ؟

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-(-2) & -1-(-1) \\ 3-3 & 1-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2 & -1+1 \\ 3-3 & +1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

## د متریکسونو د جمع او تفریق خاصیتونه:

1- د متریکسونو جمع د تبدیلی د قانون پيروي کوي مګر د متریکسونو تفریق د تبدیلی د قانون پيروي نه کوي. لکه

$$A + B = B + A$$
$$A - B \neq B - A$$

2- د متریکسونو جمع او تفریق د تبدیلی د خاصیت پيروي کوي.

$$(A \pm B) \pm C = A \pm (B \pm C)$$

3- د عینیت عنصر *Identity element*: په جمع کې صدق کوي مګر د متریکسونو په تفریق کې يې نه کوي.

$$A + 0 = 0 + A = A$$

## په متریکسونو کې د سکالر ضرب:

په يوه متریکس کې کولای شو چې حقیقي عدد ضرب کړو يعنی که $A = a_{ij}$ او $K \in IR$ وي نو $KA$ د $C$ سره مساوي دی.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ او $k = 2$ وي $KA$ پيدا کړئ؟

$$KA = 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times1 & 2\times3 & 2\times6 \\ 2\times2 & 2\times1 & 2\times0 \\ 2\times1 & 2\times0 & 2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 12 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

## د دوه متریکسونو ضرب :

د متریکس د ضرب لپاره باید د یوه متریکس د سطرونو شمېر د بل متریکس د ستونو د شمېر سره مساوي وي یعنی که $A = (a_{ij})_{m\times n}$ او $B = (b_{ij})_{n\times p}$ وي کولای شو چې ضرب یې کړو.

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

طریقه یې داسې ده چې د یوه متریکس لمړی سطر د دویم متریکس په ټولو ستونو کې په نوبت سره ضربوو او په اول سطر کې یې لیکو او په همدې ترتیب تر اخره اجرائت کوو د متریکسونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ وي $A \times B$ پیدا کړئ؟

حل:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 0 + 1(-1) \\ -1 \times 1 + 0 \times 0 + 0(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0 + 1 \\ -1 + 0 + 0 \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

مثال: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ وي $A \times B$ پیدا کړئ؟

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-3) + (-1)(-4) & 2 \times 4 + (-1)(-3) \\ 1(-3) + 2(-4) & 1 \times 4 + 2(-3) \end{bmatrix}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} -6 + 4 & 8 + 3 \\ -3 - 8 & 4 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ -11 & -2 \end{bmatrix}$$

## د متریکس د ضرب خواص:

1- د متریکس ضرب عمیله د تبدیلي د قانون پیروي نه کوي یعني:

$$A \times B \neq B \times A$$

2- د متریکسونو ضرب د اتحادي خاصیت پیروي کوي

$$(A \times B)C = A(B \times C)$$

3- د متريکسونو ضرب د توزيعي خاصيت پيروي کوي.

$$A(B+C)=AB+Ac$$

د يوه متريکس ترانسپوز متريکس:

که د يوه متريکس سطر په ستون او ستون يې په سطر بدل شي نوی متريکس ته ترانسپوز متريکس وايي.

که $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{bmatrix}$ وي نو $A^T=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ ته ترانسپوز متريکس وايي په $A^T$ ښودل کيږي.

که $A=A^T$ وي نو پدې صورت کې $A$ ته متناظر متريکس وايي.

لکه $A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{bmatrix}$ يو متناظر متريکس دی ځکه $A^T=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 4 & 2 & 3\\ 5 & 3 & 0\end{bmatrix}$

د ترانسپوز متريکس خواص:

1- ترانسپوز متريکس د خپل لمړني متريکس سره مساوي وي.

$$(A^T)^T=A=\left[\left(a_{ij}\right)^T\right]^T=\left(a_{ij}\right)A$$

2- د دوه يا څو ترانسپوز متريکسو د جمع او تفريق حاصلونه د لمړنيو متريکسو د جمع د حاصلو او تفريق د حاصلو د ترانسپوزو سره مساوي دي.

$$(A\pm B\pm C\pm.\dots\dots)^T=A^T+B^T+C\dots\dots\dots$$

$(AB)^T=A^T\times B^T$ -3

$(\alpha A)^T=\alpha\times A^T$ -4

$(-A)^T=-A^T$ -5

## دیترمینانت

مربعي متريكس ته ديترمينانت وايي.

لکه که $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ متريكس ولرو نو $A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$ يو ديترمينانت دی او په $|A|$ سره ښودل کيږي.

$a_{11}a_{22}$ اصلي قطر او $a_{12}a_{21}$ ته فرعي قطر وايي.

## د ديترمينانت محاسبه

د اصلي قطر څخه فرعي قطر منفي کوو $|A|=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1$

مثال: $|A|=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 7 & 2\end{vmatrix}$ قيمت پيدا کړئ

حل: $|A|=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 7 & 2\end{vmatrix}=3\times 2-7\times 4=6-28=-22$

## د ديترمينانت د حل طريقه

ديترمينانت په دوه طريقو حليږي.

1- دساروس په طريقه 2- دکرامر په طريقه

1- دساروس د ديترمينانت په طريقه لول

اول ستون او دريم سطر د منځه وړو او پاتې $2\times 2$ مرتبې ديترمينانت محاسبه کوو او د تقاطع عدد کې يې ضربوو.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})a_{31}$$

دويم ستون او دريم سطر د منځه وړو او د تقاطع عدد کې يې ضربوو.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})a_{32}$$

دريم ستون او دريم سطر د منځه ورو. اودتقاطع په عدد کې يې ضربوو.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

په لاس راغلي عددونه جمع کوو د ديترمينانت قيمت لاس ته راځي

$$|A| = (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})a_{31} + (a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21})a_{32} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{33}$$

$$|A| = a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

مثال: د $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & +2 \\ 4 & -1 & +7 \end{vmatrix}$ ديترمينانت حل کړئ

$$1)\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 4\big(6 \times 2 - (-3 \times 1)\big) = 4(12 + 3) = 4 \times 15 = 60$$

$$2)\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = -1\{2 \times 2 - 5(-3)\} = -1(4 + 15) = -1(19) = -19$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 7(2 \times 1 - 6 \times 5) = 7(2 - 30) = 7(-28) = -196$$

$$|A| = 60 - 19 - 196 = 60 - 215 = -155$$

دويم- د کرامر په طريقه:

د ديترمينانت دوه لمړي ستونونه د ديترمينانت د باندې ليکو د اصلي قطرو د مجموعې څخه د فرعي قطرومجموعه منفي کوو د ديترمينانت قيمت لاس ته راځي.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$|A| = \{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\} - \{a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\}$$

مثال:
$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|B| = \{2 \times 1 \times 7 + 6 \times 2 \times 4 + (-3) \times 5(-1)\}$$
$$-\{6 \times 5 \times 7 + 2 \times 2(-1) + (-3) \times 1 \times 4\}$$
$$|B| = (14 + 48 + 15) - (210 - 4 - 12) = 77 - (210 - 16) = 77 - 194$$
$$= -117$$
$$|B| = -117$$

## د دیترمینانت خواص

1-که د $A_{n\times n}$ د متریکس د یوه سطر یا یوه ستون ټول عناصر صفر وي نو د دیترمینانت د صفر سره مساوي دی.

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0 \quad \text{او} \quad |A| = \begin{vmatrix} 0 & a & d \\ 0 & b & e \\ 0 & c & f \end{vmatrix} = 0$$

1- که د $A_{n\times n}$ متریکس دوه سطرونه یا دوه ستونونه سره مساوي وي نو اړوند دیترمینانت یې صفر دي

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = |A| = \begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix} = 0$$

2- که د $A_{n\times n}$ د متریکس د یوه ستون یا یوه سطر عناصر د بل ستون یا سطر د عناصرو سره ګډ فکتور ولري نو $|A| = 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \lambda a & \lambda b & \lambda c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \lambda(0) = 0$$

3- د $A$ د متریکس دیترمینانت د $A^T$ دمتریکس د دیترمینانت سره مساوي دی

د $2 \times 2$ مرتبې متریکس ضربي معکوس د معکوس متریکس سره د مربعي متریکس د ضرب حاصل (1) کیږي.

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = 1$$

که د متريکس قيمت $|A| = 0$ وي نودی متريکس ته *Singular Matrix* وائي اوکه $|A| \neq 0$ وي نو دی متريکس ته *Non singular Matrix* وايي.

هغه متريکسونه چې معکوس لري .

1- چې متريکسونه مربعي وي يعنی د $A_{n\times n}$ شکل ولري.

2- چې $|A| \neq 0$ وي.

مثال: $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ او $B = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ متريکسونه يو د بل معکوس دي .

حل:-

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (-1)(-7) + 3(-2) & (-1)(-3) + 3(-1) \\ 2(-7) + (-7)(-2) & 2(-3) + (-7)(-1) \end{bmatrix}$$
$$AB = \begin{bmatrix} 7-6 & 3-3 \\ -14+14 & -6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$BA = \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-6 & -21+21 \\ 2-2 & -6+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ليدل کيږي چې $AB = BA = 1$ دي نو $A$ او $B$ يو د بل معکوس دي.

## الحاقي متريکس Adjoin of Matrix

که د يوه متريکس د اصلي قطر د عناصرو ځايونه بدل شي او د فرعي قطر د عناصرو علامی تغير شي دغه متريکس ته الحاقي متريکس وايي.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow AdjA = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
$$K = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow AdjA = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

الحاقي متريکس د يوه متريکس د معکوس متريکس د لاس ته راوړلو لپاره استعماليږي طريقه يې داسې ده چې دالحاقي متريکس د ديترمينانت دقيمت په معکوس کې ضربوو د راکړشوي متريکس معکوس متريکس لاس ته راځي.

$$A^{-1} = \frac{AdjA}{|A|}$$

مثال :- د $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ معکوس متریکس پیدا کړئ؟

حل:- $|A| = -3(6) - (-2)(5) = -18 + 10 = -8$

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{-5}{-8} & \frac{-3}{-8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{9}{4}-\frac{5}{4} & \frac{3}{4}-\frac{3}{4} \\ -\frac{15}{4}+\frac{15}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{9}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

په عمومي ډول ویلای شوچې که د $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ په متریکس کې $|A| \neq 0$ وي نو دغه متریکس معکوس لري او د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

## تمرین

د لاندې متریکسو معکوس متریکس پیدا کړئ

$a$: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$

$b$: $B = \begin{pmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$

## د متریکس پواسطه ددوه مجهوله معادلو حل

$$a_1x + b_1yc = c_1$$
$$\underline{a_2x + b_2y = c_2}$$

په پورته ډول د دوه مجهوله معادلو یو سیستم راکړ شوی دی غواړو چې دمتریکس پواسطه یې حل کړو د $x$ او $y$ د ضریبو متریکس په $A$ ښیو $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ د ثابت عددو متریکس په $B$ ښیي. او د $x$ او $y$ متریکس په $X$ ښیو.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ او } B = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

نو ليکو چې:

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B = (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow 1X = A^{-1}B$$

يا $X = A^{-1}B$

مثال: لاندې ددوه مجهوله معادلو سيستم د متريکس په طريقه حل کړئ؟

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

حل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 5 & -2 \times 7 \\ -1 \times 5 & 1 \times 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -14 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$x = 1 \quad \& \quad y = 2$

تمرين

لاندې د دوه مجهوله معادلو سيستمونه د متريکس په طريقه حل کړئ:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 3x - y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3p - 5q = 7 \\ 2p - 4q = 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$$

د ګوس Goose طريقه د افقاً طريقه ده.

په همدې ترتيب کولای شو چې څلورمجهوله، پنځه مجهوله او نورې څو مجهوله معادلې په مختلفو طريقو حل کړو.

# پنځم فصل

## دویمه درجه یومجهوله معادلې

هغه معادلې دي چې یو مجهول ولري او د مجهول توان یې دوه وي. عمومي شکل یې داسې دی:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

په دغه عمومي شکل کې $b, a$ او $c$ ثابت عددونه دي $(x)$ مجهول دی څرنګه چې د مجهول توان دوه دی نو ځکه ورته دویمه درجه یو مجهوله معادله وایي.

## خصوصي حالتونه

1- که b=c=0 وي معادله لاندې شکل غوره کوي $ax^2 = 0$ ددغې معادلې دواړه جذرونه صفر دي یعنې :

$$x_1 = 0 \qquad \& \qquad x_2 = 0$$

2- که $c = 0$ وي نو معادله لاندې شکل غوره کوي:

$$ax^2 + bx = 0$$

$(x)$ مشترک نیسو اومعادله د دوه قوسو په حاصل ضرب بدلوو بیا هر قوس په نوبت سره دصفر سره مساوي کووا و د معادلې جذرونه پیدا کوو.

$$ax^2 + bx = x(ax + b) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$ax + b = 0$$

$$ax = -b$$

$$\frac{ax}{a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

مثال: $5x^2 + 11x = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$5x^2 + 11x = x(5x + 11) = 0$$

$$cx_1 = 0$$
$$5x + 11 = 0$$
$$5x = -11$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{-11}{5}$$
$$x_2 = -\frac{11}{5}$$

3- که $b = 0$ وي نو معادله لاندې شکل غوره کوي $ax^2 + c = 0$

د دغسې معادلو د حل کافي او لازمي شرط دادې چې $a$ او $c$ باید مختلف العلامه وي .اوکه نه نو د حقیقي اعدادو په سیټ کې حل نلري .د مختلطو اعدادو په سیټ کې حل لري.

مثال: $3x^2 - 12 = 0$ معادله حل کړئ

حل:

$$3x^2 - 12 = 0$$
$$3x^2 = 12$$
$$\frac{3x^2}{3} = \frac{12}{3}$$
$$x^2 = 4$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$
$$x_1 = 2 \quad \& \quad x_2 = -2$$

تمرین

لاندې معادلې حل کړئ؟

1: $5x^2 + 21x = 0$ 2: $11x^2 - 22x = 0$ 3: $2x^2 + 28x = 0$

4: $7x^2 - 63 = 0$ 5: $4x^2 + 16 = 0$ 6: $-7x^2 + 28 = 0$

## د دویمه درجه یو مجهوله معادلو د عمومي شکل د حل طریقې

دویمه درجه یو مجهوله معادلې په څلورو طریقو حلیږي.

1- د تجزیې پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

2- د تکمیل مربع پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلوحلول

3- د محمد بن موسی دفارمول پواسطه د دویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

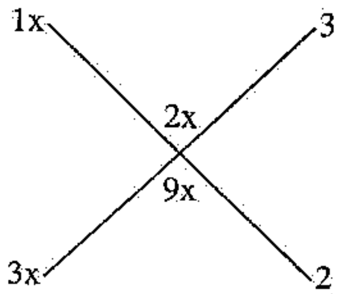
4- دګراف پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلو حلول

1- د تجزيي پواسطه ديو مجهوله دويمه درجه معادلوحل:

$(a)$ او $(c)$ تجزيه کوو د ضربي عواملو څخه يي داسې يوه يوه جوړه ضربي عوامل راخلو چې د ضرب حاصلونو مجموعه يي $(b)$ شي بيا دغه ضربي عوامل په چارت کې ليکواو د چارت له مخې قوسونه جوړوو او د هر قوس جذر پيدا کوو د معادلې جذرونه لاس ته راځي

مثال:- $3x^2 + 11x + 6 = 0$ معادله د تجزيي پواسطه حل کړئ.

$$a = 3 = 1.3 = -1(-3)$$
$$c = 6 = 2.3 = 1.6 = -2(-3) = -1(-6)$$
$$b = 11$$




$$(x + 3)(3x + 2) = 0$$
$$x + 3 = 0$$
$$x_{1=-3}$$
$$3x + 2 = 0$$
$$3x = -2$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{-2}{3} \qquad x_2 = -\frac{2}{3}$$

2- د تکميل مربع پواسطه د دويمه درجه يو مجهوله معادلو حل:

فرضاً د $5x^2 - 17x + 6 = 0$ معادله راکړشوی ده غواړو چې د تکميل مربع پواسطه يي حل کړو ټول حدونه د $x^2$ په ضريب ويشو.

$$\frac{5x^2}{5}-\frac{17x}{5}+\frac{6}{5}=0$$

$$x^2-\frac{17}{5}x+\frac{6}{5}=0$$

$$x^2-\frac{17}{5}x=-\frac{6}{5}$$

$$x^2-\frac{17}{5}x+\left(\frac{17}{10}\right)^2=\left(\frac{17}{10}\right)^2-\frac{6}{5}$$

$$\left(x-\frac{17}{10}\right)^2=\frac{289}{100}-\frac{6}{5}=\frac{289-120}{100}=\frac{169}{100}$$

$$\sqrt{\left(x-\frac{17}{10}\right)^2}=\sqrt{\frac{169}{100}}$$

$$x-\frac{17}{10}=\pm\frac{13}{10}$$

$$x=\frac{17}{10}\pm\frac{13}{10}=\frac{17\pm 13}{10}$$

$$x_1=3 \qquad x_2=\frac{2}{5}=0.4$$

3- د محمد بن موسی د فارمول پواسطه ددویمه درجه یو مجهوله معادلو حل:

لمړی د محمد بن موسی فارمول ثبوتوو.

$$ax^2+bx+c=0$$

$$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{0}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

دا ساتتیا لپاره $b^2-4ac$ په $\Delta$ ښیو:

$$\Delta=b^2-4ac$$

نو:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

د $(\Delta)$ په باب دری حالته موجود دي .

1- چې $\Delta>0$ وي معادله دوه جذرونه لري اوجذرونه یې:

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

په واسطه پیدا کیږي.

2- چې $\Delta=0$ وي معادله یو جذر لري اوجذر یې د $x=\frac{-b}{2a}$ پواسطه پیدا کیږي.

3- چې $\Delta<0$ وي معادله دحقیقي اعدادو په سیټ کې جذر نه لري.

مثال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$7x^2-13x-24=0$$

حل:

$$\Delta=b^2-4ac=(-13)^2-4\times7\times(-24)$$

$$\Delta=169+672=841$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13)+\sqrt{841}}{2\times 7} = \frac{13+29}{14} = \frac{42}{14} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-13)-\sqrt{841}}{2\times 7} = \frac{13-29}{14} = \frac{-16}{14} = -\frac{8}{7}$$

$$x_{1=3} \qquad x_2 = -\frac{8}{7}$$

مثال: لاندې معادله حل کړئ؟

$$9x^2 + 30x + 25 = 0$$

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 30^2 - 4\times 9\times 25 = 900 - 900 = 0$$

$$\Delta = 0$$

معادله یوجذر لري.

$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{30}{2\times 9} = -\frac{5}{3}$$

مثال: $2x^2 + 3x + 10 = 0$ معادله حل کړئ؟

حل:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\times 2\times 10 = 9 - 80 = -71$$

څرنګه چې $0 > \Delta$ دي نومعادله جذر نه لري.

تمرين

لاندې معادلې د تجزيې پواسطه حل کړئ.

1: $3x^2 + 5x - 42 = 0$ 2: $7x^2 - 29x + 4 = 0$ 3: $2x^2 + 3x - 14 = 0$

لاندې معادلې دتکميل مربع پواسطه حل کړئ.

1: $11x^2 - 17x - 48 = 0$ 2: $13x^2 + 7x - 360 = 0$ 3: $8x^2 - 65x + 102 = 0$

لاندې معادلې د محمد بن موسی د فارمول پواسطه حل کړئ.

1: $2x^2 + 3x - 65 = 0$ 2: $9x^2 - 43x + 48 = 0$

3: $25x^2 - 11x - 192 = 0$

## دمحمد بن موسی په فارمول کې اختصار

که $b$ جفت وي د $b$ نیمايي په $\acute{b}$ ښیو $\frac{b}{2}=\acute{b}$ او $b=2\acute{b}$ کیږي نو د محمد بن موسی په فارمول کې د $b$ په عوض $(2\acute{b})$ لیکو:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(2\acute{b})\pm\sqrt{(2\acute{b})^2-4ac}}{2a}=\frac{-2\acute{b}\pm\pm\sqrt{4\acute{b}^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-2\acute{b}\pm\sqrt{4(\acute{b}^2-ac)}}{2a}=\frac{-2\acute{b}\pm2\sqrt{\acute{b}^2-ac}}{2a}=\frac{2\left(-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{b}^2-ac}\right)}{2a}$$

$$=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{b}^2-ac}}{a}$$

$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{b}^2-ac}}{a}$$

داسانتیا لپاره $\acute{b}^2-ac$ په $\acute{\Delta}$ ښیو یعني:

$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac$$

د $\acute{\Delta}$ په باب هم دری حالته موجود دي.

1- که $\acute{\Delta}>0$ وي معادله دوه جذره لري اوجذرونه يې د $x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}$ پواسطه پیدا کیږي.

2- که $\acute{\Delta}=0$ وي معادله یوجذرلري، اوجذر يې د $x=\frac{-\acute{b}}{a}$ پواسطه پیدا کیږي

3- که $\acute{\Delta}<0$ وي معادله جذرنه لري.

مثال:- $3x^2+14x-40=0$

$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac=7^2-3(-40)=49+120=169$$

$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}=\frac{-14\pm13}{3}$$

$$x_1=-\frac{1}{3}\qquad x_2=-9$$

مثال:- $4x^2+12x+9=0$ معادله حل کړئ.

$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac = 6^2 - 4 \times 9 = 36 - 36 = 0$$

$$\acute{\Delta} = 0$$

معادله يو جذر لري.

$$x = -\frac{\acute{b}}{a} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad so \quad x = \frac{3}{2}$$

مثال:- لاندې معادله حل کړئ؟

$$5x^2 - 2x + 4 = 0$$

$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac = (-1)^2 - 5 \times 4 = 1 - 20 = -19$$

$$\acute{\Delta} = -19$$

$$\acute{\Delta} < 0$$

معادله جذر نه لري.

تمرين

1: $3x^2 + 8x - 28 = 0$

2: $11x^2 - 12x - 63 = 0$

3: $7x^2 + 14x - 56 = 0$

د يو مجهوله دويمه درجه معادلو د جذرو او ضريبو تر منځ ارتباط:

1: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

2: $x_1 x_2 = \frac{b}{a}$

3: $x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = s^2 - 2p$

4: $x_1{}^3 + x_2{}^3 = s^3 - 3sp = \frac{3abc - b^3}{a^3}$

5: $x_1{}^4 + x_2{}^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$

1- د $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ثبوت

دمحمد بن موسى فارمولونه ليکو:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فارمولونه طرف په طرف جمع کوو:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta} - b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

2- د $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ثبوت

د دمحمد بن موسی فارمولونه لیکو:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

فارمولونه طرف په طرف ضربوو:

$$x_1 . x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$x_1 . x_2 = \frac{b^2 - \sqrt{\Delta}^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4aa} = \frac{c}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

3: د $x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$ ثبوت

$$x_1{}^2 + 2x_1 x_2 + x_2{}^2 = (x_1 + x)^2$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

4: د $x_1{}^3 + x_2{}^3 = s^3 - 3sp = \frac{3abc - b^3}{a^3}$ ثبوت

$$x_1{}^3 + 3x_1{}^2x_2 + 3x_1x_2{}^2 + x_2{}^3 = (x_1 + x_2)^3$$

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1{}^2x_2 - 3x_1x_2{}^2$$

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$$

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2} = \frac{-b^3 + 3abc}{a^3} = \frac{3abc - b^3}{a^3}$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{3abc}{a^3}$$

5: د $x_1{}^4 + x_2{}^4 = s^4 - 4s^2p + 2p^2 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$ ثبوت

$$x_1{}^4 + 2x_1{}^2x_2{}^2 + x_2{}^4 = (x_1{}^2 + x_2{}^2)^2$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = (x_1{}^2 + x_2{}^2)^2 - 2x_1{}^2x_2{}^2$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = (x_1{}^2 + x_2{}^2)^2 - 2(x_1\, x_2)^2$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = \left(\frac{b^2 - 2ac}{a^2}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 4a^2c^2}{a^4} - \frac{2c^2}{a^2}$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 4a^2c^2 - 2a^2c^2}{a^4}$$

$$x_1{}^4 + x_2{}^4 = \frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$$

**مثال:** د لاندې معادلی د جذرونو مجموعه،د جذرونو د ضرب حاصل، دجذرو د مربعګانو مجموعه پیدا کړئ:

$$5x^2 + 7x - 34 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -\frac{7}{5}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-34}{5}$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = \frac{7^2 - 2 \times 5 \times (-34)}{5^2} == \frac{49 + 340}{25} = \frac{389}{25}$$

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 = \frac{389}{25}$$

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 = \frac{3abc - b^3}{a^3} = \frac{3 \times 5 \times 7 \times (-34) - 7^3}{5^3} = \frac{-3570 - 343}{125} = \frac{3913}{125}$$

## دجذرو له مخې د يو مجهوله دويمه درجه معادلې جوړول

که د يوې معادلې جذرونه راکړ شوي وي او وغواړو چې معادله يې پيدا کړو نو جذرونه د معادلې د جوړولو په فارمول کې وضع کوو د راکړشوو جذرو مربوطه معادله لاس ته راځي . د معادلې د جوړولو فارمولونه دوه دي:-

1: $x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$

2: $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

د $x^2 + (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$ ثبوت

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

مثال:- د يوې معادلې جذرونه په ترتيب سره $x_1 = 5$ او $x_2 = -7$ دي معادله يې پيدا کړئ

حل:

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$$
$$x^2-(5-7)x+(5)(-7)=0$$
$$x^2-(-2)x-35=0$$
$$x^2+2x-35=0$$

## تمرین

په لاندې ډول د معادلو جذرونه راکړ شوي دي معادلی حل معادلې په لاس راوړئ؟

1: $x_1=3$ & $x_2=\frac{3}{5}$    2: $x_1=\frac{7}{3}$ & $x_2=5$

3: $x_1=\sqrt{3}$ & $x_2=2$

## د دویمه درجه یومجهوله معادلو دجذرو مطالعه کول

دجذرو علامی په یوه جدول مطالعه کوو

| | | |
|---|---|---|
| که $0 <\Delta$ وي<br>معادله دوه جذره لري | که $P>0$ وي<br>جذرونه هم علامه دي | که $S>0$ وي<br>دواړه جذرونه مثبت دي |
| که $\Delta>0$ وي<br>معادله دوه جذره لري | که $P>0$ وي<br>جذرونه هم علامه دي | که $S<0$ وي<br>دواړه جذرونه منفي دي |
| که $\Delta>0$ وي<br>معادله دوه جذره لري | که $P<0$ وي<br>جذرونه مختلف العلامه دي | که $S>0$ وي<br>لوی جذر مثبت دي |
| که $\Delta>0$ وي<br>معادله دوه جذره لري | که $P<0$ وي<br>جذرونه مختلف العلامه دي | که $S<0$ وي<br>لوی جذر منفي دي |
| $\Delta=0$ وي<br>معادله یو جذر لري | | که $S>0$ وي<br>لوی جذر مثبت دي |
| $\Delta=0$ وي<br>معادله یو جذر لري | | که $S<0$ وي<br>لوی جذر منفي دي |
| $\Delta<0$ وي | معادله جذر نه لري | |

مثال: د $3x^2 + 5x - 22 = 0$ دجذروعلامی مطالعه کړئ؟

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 3 \times (-22) = 25 + 264 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$\Delta > 0$ معادله دوه جذره لري.

$$p = \frac{c}{a} = \frac{-22}{3}$$

$p < 0$ جذرونه مختلف العلامه دي.

$$s = \frac{-b}{a} = \frac{-5}{3}$$

$s < 0$ لوی جذر یې منفي دی.

## د دیکارت قاعده

دیکارت ددویمه درجه معادلو د علامو تغیر ته تحول وایي.

دیکارت وایي:

1- که دویمه درجه معادلودعلامو دوه تحوله لرل دمعادلی دواړه جذرونه مثبت دي

2- که د علامو تحول یو ؤ د معادلی یو جذر مثبت دي.

3- که په معادله د علامو تحول نه ؤ نو معادله مثبت جذر نه لري دواړه جذرونه یې منفي دي.

لکه:

$5x^2 - 17x + 6 = 0$ دواړه جذرونه یې مثبت دي.

$3x^2 + 7x - 26 = 0$ یو جذر یې مثبت دي.

$x^2 + 169x + 4 = 0$ دواړه جذرونه یې منفي دي.

### دهغه معادلو حلول چې په دویمه درجه یو مجهوله معادلو بدلیږي:

شپږ قسمه معادلې په دویمه درجه یو مجهوله معادلو بدلیږي.

1- دريمه درجه معادلې:

هغه دريمه درجه معادلې چې د $ax^3+bx^2+cx=0$ شکل ولري دداسې معادلود حل لپاره $x$ مشترک نيسو اومعادله د دوه فکټورو په حاصل ضرب بدلوو هر فکټورد صفر سره مساوي کوودمعادلې جذرونه لاس ته راځي.

مثال:- $5x^3+3x^2-14x=0$

$$x(5x^2+3x-14)=0$$
$$x_1=0$$
$$5x^2+3x-14=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=3^2-4\times5\times(-14)=9+280=289$$
$$\Delta=289$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{289}}{2\times5}=\frac{-3\pm17}{10}$$
$$x_2=\frac{7}{5}\qquad x_3=-2$$

2- څلورمه درجه معادلې:

هغه څلورمه درجه معادلې چې $ax^4+bx^2+c=0$ شکل ولري په دويمه درجه معادله بدليږي.طريقه يې داسې ده چې $x^2$ په $y$ شيوڅلورمه درجه معادله په دويمه درجه معادله بدليږي.دلته څلور حالتونه موجود دي.

1- که دويمه درجه معادلې دوه مثبت جذرونه لرل نو څلورمه درجه معادله څلور جذرونه لري چې دوه يې مثبت او دوه يې منفي وي.

2- که د دويمه درجه معادلې يو جذر مثبت ؤ نو څلورمه درجه معادله دوه جذرونه لري چې يو يې مثبت اوبل يې منفي وي.

3- که دويمه درجه معادلې مثبت جذر نه لرلو نو څلورمه درجه معادله جذر نلري.

4- که دويمه درجه معادلې جذر نه لرلو نو څلورمه درجه هم جذر نه لري.

مثال:- لاندې څلورمه درجه معادله حل کړئ؟

$$3x^4-7x^2-20=0$$

حل: $x^2$ په $y$ بنیو نو $x^4 = y^2$ کیږي

$$3y^2 - 7y - 20 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 3 \times (-20) = 49 + 240 = 289$$

$$\Delta = 289$$

$$\Delta > 0$$

معادله دوه جذره لري یوجذر یي مثبت او بل یي منفي دي نو څلورمه درجه معادله دوه جذرونه لري.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{7 \pm 17}{6}$$

$$y_1 = 4 \qquad y_2 = -\frac{5}{3}$$

$$x^2 = y = y_1 = 4$$

$$x^2 = 4 \qquad \sqrt{x^2} = \sqrt{4} \qquad x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$$

## تمرین

لاندي معادلی حل کړئ

1- $4x^2 + 3x - 45 = 0$ 2- $7x^2 - 11x - 6 = 0$
3- $5x^2 + 13x + 6 = 0$ 4- $13x^2 + x - 14 = 0$
5- $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ 6- $7x^4 + 3x^2 - 594 = 0$

## 3- جذري معادلی:

هغه جذري معادلی چې د $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ شکل ولري په دویمه درجه معادلو بدلیدلای شي طریقه یي داسې ده چې $\sqrt{x}$ په $y$ بنیو بیا دواړه خواوی مربع کوو چې $x = y^2$ کیږي اودویمه درجه معادله لاس ته راځي.

مثال:- $7x - 8\sqrt{x} - 12 = 0$ جذري معادله په دویمه درجه معادله بدله کړئ اوحل یي کړئ؟

حل: $y = \sqrt{x}$ بنیو نو $x = y^2$ کیږي د $(x)$ په عوض $(y^2)$ او د $(\sqrt{x})$ په عوض $(y)$ وضع کوو.

$$7y^2 - 8y - 12 = 0$$
$$\acute{\Delta} = \acute{b}^2 - ac$$
$$\acute{\Delta} = (-4)^2 - 7(-12) = 16 + 84 = 100$$
$$\acute{\Delta} = 100$$
$$x = \frac{-\acute{b} \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{100}}{7} = \frac{4 \pm 10}{7}$$
$$x_1 = 2 \qquad \& \qquad x_2 = -\frac{6}{7}$$

۴- هغه معادلې چې توانونه یې کسري وي اود یو مجهول توان د بل مجهول د توان دوه چنده وي. لکه:

$$5x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 26 = 0$$

$x^{\frac{1}{3}}$ په $(y)$ ښيو بيا دواړه خواوې مربع کوو نو $\left(x^{\frac{2}{3}} = y^2\right)$ کیږي.

$5y^2 + 3y - 26 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 5 \times (-26) = 9 + 520 = 529$
$\Delta = 529$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{529}}{2 \times 5} = \frac{-3 \pm 23}{10}$$
$$y_1 = \frac{-3 + 23}{10} = \frac{20}{10} = 2 \qquad \therefore \quad y_1 = 2$$
$$y_2 = \frac{-3 - 23}{10} = \frac{-26}{10} = -2\frac{3}{5} \qquad \therefore \quad y_2 = -2\frac{3}{5}$$
$$x^{\frac{1}{3}} = y = y_1 = 2 \qquad x^{\frac{1}{3}} = 2 \qquad \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 2^3$$
$$x_1 = 8$$

تمرين:

لاندې معادلې حل کړئ.

1- $x^{\frac{2}{5}} + 3x^{\frac{1}{5}} - 10 = 0$

2- $4x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 27 = 0$

3- $4x^{\frac{2}{3}} - 7x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$

۵- هغه معادلې چې توانونه یې کسري وي:

هغه معادلې چې د $ax^{\frac{m}{n}} + bx^{\frac{m}{2n}} + c = 0$ شکل ولري په دویمه درجه معادله بدلیږي.

$x^{\frac{m}{2n}}$ په $y$ او $x^{\frac{m}{n}}$ په $y^2$ بنیو پورتنۍ معادله لاندې شکل غوره کوي $ay^2 + by + c = 0$

دغه معادله د محمد بن موسی په فارمول یا په کومه بله طریقه حلوو قیمتونه یې پیداکوو د $y$

د قیمت له مخې د $x^{\frac{m}{2n}}$ قیمت پیداکوو دمعادلې جذرونه لاس ته راځي.

مثال :- د $2x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 33 = 0$ معادلې جذرونه پیدا کړئ؟

$x^{\frac{1}{3}} = y$ بنیو نو $x^{\frac{2}{3}} = y^2$ کیږي.

$$2x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{1}{3}} - 33 = 0$$
$$2y^2 + 5y - 33 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4 \times 2 \times (-33) = 25 + 264 = 289$$
$$\Delta = 289$$
$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{289}}{2 \times 2} = \frac{-5 \pm 17}{4}$$
$$y_1 = 3 \qquad y_2 = -\frac{11}{2}$$
$$\because\ x^{\frac{1}{3}} = y = y_1 = 3 \qquad \therefore\ x^{\frac{1}{3}} = 3 \Rightarrow \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 3^3 \qquad \&\ x_1 = 27$$
$$\because\ x^{\frac{1}{3}} = y = y_2 = -\frac{11}{2} \qquad \therefore\ x^{\frac{1}{3}} = -\frac{11}{2},$$
$$\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(-\frac{11}{2}\right)^3 = -\frac{1331}{8}$$
$$x_2 = -\frac{1331}{8}$$

تمرین :

لاندې معادلې دویمه درجه معادلو ته واړوئ؟

1: $5x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{5}} - 14 = 0$ 2: $4x^{\frac{2}{7}} + 3x^{\frac{1}{7}} - 22 = 0$

## عبارتي سوالونه

1: د $(A)$او $(B)$ ددوه ښارو تر منځ فاصله (450) کېلومتره ده يو موټر سهار په اوه بجې په يوسرعت د $(A)$ د ښار څخه د $(B)$ ښار ته حرکت وکړ او بل موټر سهار په اته بجې د $(x+15)$ کېلو مترو په سرعت حرکت وکړ دواړه په يو وخت کې د $(B)$ښار ته ورسيدل د هر يوه سرعت څو دي؟

حل:

$$\frac{450}{x}-\frac{450}{x+15}=1$$

$$\frac{450(x+15)-450x}{x(x+15)}=1$$

$$\frac{450x+6750-450x}{x(x+15)}=1$$

$$\frac{6750}{x(x+15)}=\frac{1}{1}$$

$$x^2+15x=6750$$
$$x^2+15x-6750=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=(15)^2-4\times1\times(-6750)=225+27000=27225$$

$$\Delta=27225$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-15\pm\sqrt{27225}}{2\times1}=\frac{-15\pm165}{2}$$

$$x_1=\frac{-15+165}{2}=\frac{150}{2}=75$$

$$x_2=\frac{-15-165}{2}=\frac{-180}{2}=-90$$

2- د يوه قايم الزاويه مثلث ضلعی په ترتيب سره $(x+1)$ ، $(x+2)$ او $(x+3)$ دي دمثلث ضلعی پيدا کړئ؟

حل:

$$(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2$$

$$x^2+2x+1+x^2+4x+4=x^2+6x+9$$
$$x^2=4$$
$$x_1=2 \qquad \& \qquad x_2=-2$$

۳- د دوه مثلثو قاعدی مساوي دي د یوه ارتفاع د قاعدی څخه یو متر او د بل ارتفاع دقاعدی څخه دری متره زیاته ده او د مساحتو تفاضل يي اوه مترمربع دی د هر یوه مساحت قاعده او ارتفاع پیدا کړئ

حل:

$$\frac{x(x+3)}{2}-\frac{x(x+1)}{2}=7$$
$$\frac{x^2+3x-x^2-x}{2}=7 \Longrightarrow \frac{2x}{2}=7 \Longrightarrow x=7$$

قاعده $x=7$

$x+1=8$ د کوچني مثلث ارتفاع

$x+3=10$ د لوی مثلث ارتفاع

۴- د یوه عدد د طرفینو د ضرب حاصل (323) عدد پیدا کړئ؟

حل:

$$(x-1)(x+1)=323$$
$$x^2-1=323$$
$$x^2=323+1=324$$
$$\sqrt{x^2}=\sqrt{324}$$
$$x=18$$

۵- دیوه مستطیل اوږدوالی تر سور دری متره زیات دی که مساحت يي (88) سانتي مترمربع وي سور او اوږدوالی يي پیدا کړئ؟

حل:

$$x(x+3)=88$$
$$x^2+3x-88=0$$
$$\Delta = x^2-4ac=3^2-4\times1\times(-88)=$$
$$9+352=361$$
$$\Delta = 361$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=-3\pm\frac{\sqrt{361}}{2\times1}=\frac{-3\pm19}{2}\Rightarrow x_1=8\Rightarrow x_2=-11$$

6- یو سړی د $(A)$ د ښار څخه د $(B)$ ښار ته په یوه سرعت روان شوبله ورځ يي په خپل سرعت کی دوه متره زیادت راوست نیم ساعت مخکی ورسېدو که د ښارو تر منځ فاصله (20) کېلومتره وي د نوموړي اولنی او اخرنی سرعت پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{20}{x}-\frac{20}{x+2}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{20(x+2)-20x}{x(x+2)}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{20x+40-20x}{x(x+2)}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{40}{x^2+2x}=\frac{1}{2}$$
$$x^2+2x=80$$
$$x^2+2x-80=0$$
$$\acute{\Delta}=\acute{b}^2-ac=1^2-1(-80)=1+80=81$$
$$\acute{\Delta}=81$$
$$x=\frac{-\acute{b}\pm\sqrt{\acute{\Delta}}}{a}=\frac{-1\pm\sqrt{81}}{1}=-1\pm 9=8$$

$x=8$ اولنی سرعت

$x+2=10$ اخرنی سرعت

7- د یوې دایرې مساحت (154) سانتي مترمربع دې شعاع يي څو ده؟

حل:

$$\pi r^2=154$$
$$\frac{22}{7}r^2=154$$
$$\frac{7}{22}\times\frac{22}{7}r^2=154\times\frac{7}{22}$$
$$r^2=49$$
$$\sqrt{r^2}=\sqrt{49}$$
$$r=7$$

## عبارتي سوالونه

1- د یوه مثلث ارتفاع د هغه د قاعدې څخه $(3cm)$ زیاته ده مساحت یې $27cm^2$ دې قاعده او ارتفاع یې پیدا کړئ؟

2- د یوه مستطیل طول د هغه د سور څخه $(5cm)$ زیات دی مساحت یې $(24cm^2)$ دی سور او طول یې پیدا کړئ؟

3- دیوې دایرې مساحت (616) سانتي مترمربع ده شعاع یې څو ده؟

4- د A او B د ښارو تر منځ فاصله $800m$ ده یو موټروان په یوه سرعت سره دا فاصله طی کوي دبېرته راتګ په وخت کې $5m$ په خپل سرعت کې تغیر راولي یو ساعت مخکې رارسیږي دتګ او راتګ سرعت یې پیدا کړئ؟

5- احمد د محمود څخه یوه روپۍ زیاته لري که د پیسو د ضرب حاصل یې (840) وي دهر یوه روپۍ پیدا کړئ؟

6- یو سړی په خپله ځمکه باندې دېوال تاووي د دېوال سور نیم متر دې که د دېوال تر تاوولو وروسته یې ځمکه $(29cm^2)$ کمه شي تر دېوال د مخه او وروسته به د ځمکې مساحت څو وي؟

7- د یوې دایرې مساحت د هغې تر محیط (5) واره زیات دې ضلعه یې پیدا کړئ؟

8- د یوه عدد او د هغه د معکوس مجموعه $\left(\frac{82}{9}\right)$ ده عدد پیدا کړئ؟

9- د کوم عدد مربع د هغه عدد (19) چنده ده؟

10- د دوه مثلثو قاعدې مساوي دي دیوه ارتفاع دقاعدې څخه د واحد په اندازه او د بل ارتفاع د قاعدې څخه د دوه واحدو په اندازه زیاته ده که مساحتونه یې جمع شي $(76cm^2)$ کیږي د مثلثو قاعدې او ارتفاعګانې پیدا کړئ؟

11- احمد دمحمود درې چنده کار کوي که دواړه په شریکه یو کار په (3) ورځو کې وکړي ووایاست چه هر یو به دا کار په څو ورځو کې وکړي؟

12- که د یوه عدد سره دهغه د معکوس دوه چنده جمع شي (3) کیږي عدد پیدا کړئ؟

13- که د یوه سړي اجوره دهغه تر ورځو (5) ډېره وي که (50) روپۍ يې کټلي وي ووایاست چه څو ورځی کار يې کړئ دئ؟

14- د یوه عدد څلورمه برخه د هغه عدد د معکوس سره مساوي ده عدد پیدا کړئ؟

15- د احمد او محمود د پیسو مجموعه (50) ده او د ضرب حاصل يې (609) ده د هر یوه پیسی څو دي؟

16- د احمد او محمود اجوره مساوي ده که د احمد اجوره (5) روپۍ زیاتی او د محمود روپۍ (5)کمی شي د یوی ورځی د اجوری د ضرب حاصل يې (2475) روپۍ کیږي د هر یوه اجوره څو ده ؟

17- احمد او محمود په دوه مساوي کارونو لګیا دي احمد خپل کار تر محمود دری ورځی د مخه خلاصوي که په شریکه يې په دوه ورځو کی وکړي ووایاست چه هر یو به دا کار په څو ورځو کی وکړي؟

18- د مربع مساحت ($125316cm^2$)دی ضلعه يې پیدا کړئ؟

19- د یوه مثلث قاعده تر ارتفاع (15) سانتي متره زیاته ده که مساحت يې ($675cm^2$) وي قاعده او ارتفاع به يې څو وي؟

20- یو موټر سهار په اته بجی حرکت کوي بل موټر یوساعت وروسته (10)کېلو متر سرعت په زیادت وریسی روان شوکه دواړه په یوه وخت کی مطلوب ته رسیږي که وهل شوی فاصله (900) کېلو متره وي د هریوه سرعت پیدا کړئ.

# شپږم فصل

## غېرمساوات

د دوه افادو د عددي قیمتو نه برابری ته غېرمساوات وایي.

د غېر مساوات علامه دا ($<$) یا دا ($>$) ده هره افاده چې ددی علامی مخی ته لیکل شوی وي لویه ده تر هغه افادی چې د علامی شاته لیکل شوی وي. لکه:

$$3x^2 + 12x > x^2 - 4x$$

یا لکه $18 < 45$ او داسې نور.

### د غیرمساوات خواص:

1- که د غېرمساوات د دواړو خواو سره عین عدد جمع شي دغېرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$11 < 19$$
$$11 + 8 < 19 + 8$$
$$19 < 27$$

2- که د غېرمساوات د دواړو خواو څخه عین عدد منفي شي د غېرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$13 > 9$$
$$13 - 10 > 9 - 10$$
$$3 > -1$$

3- که دغېرمساوات دواړه خواوی په مثبت عدد کی ضرب شي دغېرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$12 > 4$$
$$+2(12) > +2(4)$$
$$24 > 8$$

4- که د غېرمساوات دواړه خواوي په منفي عدد کی ضرب شي دغېرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$15 < 21$$

$$15(-2) > 21(-2)$$
$$-30 > -42$$

5- که د غیرمساوات دواړه خواوې په مثبت عدد تقسیم شي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$9 < 15$$
$$\frac{9}{3} < \frac{15}{3}$$
$$3 < 5$$

که د غیرمساوات دواړه خواوې په منفي عدد تقسیم شي د غیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$30 > 24$$
$$\frac{30}{-2} < \frac{24}{-2}$$
$$-15 < -12$$

7- که د غیرمساوات دواړه خواوې معکوس شي د غیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$5 < 7$$
$$\frac{1}{5} > \frac{1}{7}$$

8- که د غیرمساوات دواړه خواوې د طاق عدد په توان رفع شي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$2 > -9$$
$$(2)^3 > (-9)^3$$
$$8 > -729$$

9- که د غیرمساوات دواړه خواوې د جفت عدد په توان رفع شي دلته درې حالتونه موجود دي.

الف: که د غیرمساوات دواړه خواوې مثبت وي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$5 > 3$$
$$5^2 > 3^2$$
$$25 > 9$$

ب: که د غیرمساوات دواړه خواوې منفي وي د غیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$-2 > -5$$
$$(-2)^2 < (-5)^2$$
$$4 < 25$$

ج: که د غیرمساوات د یوی خوا عدد مثبت او د بلی خوا عدد منفي وي دلته دري حالته موجود دي.

a- که د مثبت عدد مطلقه قیمت د منفي عدد د مطلقه قیمت څخه زیات وي د غیرمساوات علامه تغیر نه خوري. لکه:

$$7 > -5$$
$$(7)^2 > (-5)^2$$
$$49 > 25$$

b- که د منفي عدد مطلقه قیمت د مثبت عدد د مطلقه څخه زیات وي دغیرمساوات علامه تغیر خوري. لکه:

$$4 > -7$$
$$(4)^2 < (-7)^2$$
$$16 < 49$$

c- که د مثبت مطلقه قیمت د منفي عدد د مطلقه سره مساوي وي غیرمساوات په مساوات بدلیږي. لکه:

$$6 > -6$$
$$(6)^2 = (-6)^2$$

## دغیر مساوات دحل سیټ:

د حقیقي اعدادو هغه سیټ چې په راکړشوی غیر مساوات کی صدق کوي د غیر مساوات د حل سیټ بلل کیږي.

## دغیرمساوات اقسام

په دی کتاب کی موږ دري قسمه غیر مساواتونه مطالعه کوو.

1- یومجهوله اوله درجه غیر مساوات
2- دوه مجهوله اوله درجه غیرمساوات
3- یومجهوله دویمه درجه غیرمساوات

1- يومجهوله اوله درجه غیر مساوات:

هغه غیرمساوات دي چې مجهول يي يو او د مجهول درجه يي يوه وي عمومي شکل يي دا $ax + b \geq 0$. يا دا $ax + b \leq 0$ دی.

دیومجهوله غیرمساوات د حل طریقه:

معلوم دغیرمساوات ښی خواته او مجهول د غیرمساوات چپې خواته وړولازمی عملیې پری اجراء کوو په اخر کی د غیرمساوات دواړه خواوی د $x$ په ضریب ویشو د غیرمساوات دحل سیټ لاس ته راځي.

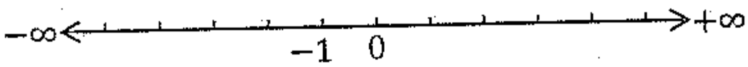
مثال: لاندې غیرمساوات حل کړئ.

$$3(4x + 11) - 2x + 6 \leq 15x + 44$$
$$12x + 33 - 2x + 6 \leq 15x + 44$$
$$10x + 39 \leq 15x + 44$$
$$10x - 15x \leq 44 - 39$$
$$-5x \leq 5$$
$$\frac{-5x}{-5} \geq \frac{5}{-5}$$
$$x \geq -1$$

د حل سیټ يي عبارت دی له:

$$A = \{x/-1 \leq x \leq \infty\}$$

د عددو په کرښه داسې ښودل کیږي.




تمرين:

لاندې غیرمساواتونه حل کړئ.

1: $8(3x - 4) + 7x - 11 \geq 9x + 23$

2: $6x + 14 < 8x - 4$ 3: $x + 5 \geq 3x - 1$

## مطلقه قیمت:

د یوه الجبري عدد حسابي برخی ته دهغه الجبري عدد مطلقه قیمت وایي.د مطلقه قیمت علامه دوه عمود خطونه دي هغه عدد چې مطلقه قیمت یې مطلوب وي د عمود خطونو تر منځ لیکل کیږي. لکه $|-15|$ یا $|+15|$چې دغه دواړه د مطلقه قیمت معنی ورکوي او داسې لیکل کیږي.

$$|\pm 15| = 15$$

مثال: لاندې غیرمساوات حل کړئ؟

$$|3x - 11| > 19$$

حل: یو وار افاده د راکړشوي عدد څخه لویه او بیا یې دعدد د متناظرڅخه کوچنی فرضوو.

$$3x - 11 > 19$$
$$3x > 19 + 11$$
$$3x > 30$$
$$\frac{3x}{3} > \frac{30}{3}$$
$$x > 10$$
$$A = \{x/x > 10\}$$
$$3x - 11 < -19 \Longrightarrow 3x < -19 + 11 \Longrightarrow 3x < -8$$
$$\frac{3x}{3} < \frac{-8}{3} \Rightarrow x < -\frac{8}{3}$$
$$B = \left\{x/x < -\frac{8}{3}\right\}$$
$$C = A \cup B\left\{x/x > 10 \vee x < -\frac{8}{3}\right\}$$

## دبینوم داشاری څیړل

د بینوم عمومي شکل$(ax + b)$ دې د بینوم داشاری د څیړلو لپاره $(a)$ مشترک نیسو د قوس د باندی یې لیکو د بینوم هر حد په دی مشترک وېشو او د قوس په داخل کی یې لیکو.دقوس جذر پیدا کوو.

$$ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

دلته د $(a)$ په باب دوه حالتونه موجود دي .

1- چې $a > 0$ وي

$$x + \frac{b}{a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$a > 0$$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x + \frac{b}{a}$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $a\left(x + \frac{b}{a}\right)$ | $-$ | 0 | $+$ |

دبينوم اشاره د جذر څخه کښته منفي اوپورته مثبت ده.

2- چې $a < 0$ وي

$$x + \frac{b}{a} = 0 \quad \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$a < 0$$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x + \frac{b}{a}$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $a\left(x + \frac{b}{a}\right)$ | $+$ | 0 | $-$ |

د بينوم اشاره د جذر څخه کښته مثبت او پورته منفي ده.

مثال: د $(3x-6)$ اشاره وټاکئ؟

حل: $3x-6=0 \quad \Rightarrow 3(x-2) \quad \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

| $x$ | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $3(x-2)$ | $-$ | 0 | $+$ |

دجذر څخه کښته د بینوم اشاره منفي او پورته مثبت ده.

مثال: د $-5x+15$ اشاره وټاکئ ؟

حل:

$$-5x+15=-5(x-3)$$
$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

| $x$ | $-\infty$ | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x-3$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $-5(x-3)$ | $+$ | 0 | $-$ |

دجذر څخه کښته د بینوم اشاره مثبت او پورته منفي ده.

تمرین:

د لاندې بینومونو اشارې وټاکئ؟

1- $2x-12$ 2- $3-x$ 3- $-4x+12$

4- $4x-20$ 5- $-6x-18$

د هغه افادو د اشارو ټاکل چې د څو بینومو د ضرب په شکل وي:

د هرې افادې اشاره پیدا کوو اوضربوو یې د حاصل ضرب اشاره لاس ته راځي

مثال: $(4-x)(x+4)$ اشاره وټاکئ؟

حل:

$4-x=0 \quad \Rightarrow -x=-4 \quad \Rightarrow x=4$
$x+4=0 \quad \Rightarrow x=-4$

| $x$ | $-\infty$ | $-4$ | | $+4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $4-x$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $x+4$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $(4-x)(x+4)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

دجذرو منځ کې د حاصل ضرب اشاره مثبت او په خارج کې منفي ده.

تمرين:

د لاندې بېنومونه د حاصل ضرب په شکل راکړشوي دي اشاره يې وڅېړئ؟

1- $(2x-12)(3-x)$ 2- $(3-x)(x+7)$
3- $(-4x+12)(x+8)$ 3- $(-6x-18)(x+5)$

## د کسري افادو د اشارو څېړل:

د صورت او مخرج اشارې پيدا کوواو يو پر بل يې ويشو د کسر اشاره لاس ته راځي.

مثال: د $\frac{x+4}{2x-6}$ اشاره وڅېړئ؟

$x+4=0 \quad \Rightarrow x=-4$
$2x-6=0$
$2x=6 \quad \Rightarrow \frac{2x}{2}=\frac{6}{2} \quad \Rightarrow x=3$

| $x$ | $-\infty$ | $-4$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+4$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $2x-6$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $\frac{x+4}{2x-6}$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

دجذرو منځ کې د کسر اشاره منفي او په خارج کې مثبت ده.

تمرین:

د لاندې کسرو اشارې وڅیړئ:

$$1:\ \frac{2x+6}{x-1} \qquad 2:\ \frac{3x+4}{2-x}$$

$$3:\ \frac{x+2}{12x-18} \qquad 4:\ \frac{-x-1}{1-2x}+3$$

## دهغه غیرمساوات دحل دسیټ پیدا کول چې د بېنومو د حاصل ضرب په شکل وي:

د بېنومو اشارې پیدا کوو او سره ضربوو یې دحاصل ضرب اشارې لاس ته راځي.دغه اشارې د غیرمساوات د علامې سره مقایسه کوو هره اشاره چې دغیرمساوات دعلامې سره موافق وه همغه یې د حل سیټ دی

مثال:

$$(x+3)(x-4)>0$$

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

$$x-4=0 \Rightarrow x=4$$

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | | $4$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $x-4$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $(x+3)(x-4)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $(x+3)(x-4)>0$ | د حل سیټ | | د حل سیټ نه دی | | د حل سیټ |

تمرین:

د لاندې غیرمساواتونو د حل سیټ پیدا کړئ:

$$1:\ (x-8)(2-x)<0 \qquad 2:\ (3x-6)(12-x)>0 \qquad 3:\ (x-1)(1-x)\le 0$$

## دهغه غېرمساوات دحل د سيټ پيدا کول چې د کسر په شکل وي:

دصورت او مخرج اشارې پيدا کوو دصورت اشاره د مخرج په اشاره ويشود کسر اشارې لاس ته راځي. دغه اشارې د غېرمساوات د علامې سره مقايسه کوو د غېر مساوات د حل سيټ لاس ته راځي.

مثال: د لاندې کسري غېرمساوات د حل سيټ پيدا کړئ

$$\frac{x+4}{x-2}+1<0$$

$$\frac{x+4+x-2}{x-2}<0$$

$$\frac{2x+2}{x-2}<0$$

$$2x+2=0 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow \frac{2x}{2}=\frac{-2}{2} \Rightarrow x=-1$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x+2$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $\frac{2x+2}{x-2}$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $\frac{2x+2}{x-2}<0$ | د حل سيټ نه دی | | د حل سيټ | | د حل سيټ نه دی |

تمرين:

د لاندې کسري غېرمساواتو دحل سيټ پيدا کړئ.

1: $\frac{2x+1}{x-1}+2>0$ 2: $\frac{4x+7}{2x-3}-1<0$

3: $\frac{x-6}{x+2}-2\geq 0$

## دیو مجهوله غیرمساوات سیستم:

دوه یو مجهوله غیرمساواتو ته د یو مجهوله غیرمساوات سیستم وایي.

د هر غیر مساوات د حل سیټ پیدا کوو هغه سیټ چې په دواړو غیر مساواتو صدق کوي، د سیستم د حل سیټ دی.

مثال: د لاندې غیرمساوات سیستم حل کړئ.

$$3x - 6 < 0$$
$$5x + 8 < 0$$

حل:-

$3x - 6 = 0 \quad \Rightarrow 3x = 6 \quad \Rightarrow x = 2$

$5x + 20 = 0 \quad \Rightarrow 5x = -20 \quad \Rightarrow x = -4$

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x - 6 < 0$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $5x + 20 < 0$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| | | د حل سیټ | | | | | |

تمرین:

په لاندې ډول دیو مجهوله غیرمساوات سیستمونه راکړ شویدي حل یې کړئ.

1- $7x - 11 > 0$ & $4x + 13 > 0$

2- 2: $13x + 2 > 0$ & $5x - 8 < 0$

## دوه مجهوله غیرمساوات

هغه غیرمساوات دی چې مجهولونه یي دوه او د هر مجهول درجه یي یوه وي عمومي شکل یي دا $ax + by \geq c$ یا دا $ax + by \leq c$ دي

د دغه رنګه غیرمساوات دحل د سیټ د لاس ته راوړلو لپاره دغیرمساوات ګراف رسموو ګراف مستوي په دوه برخو ویشي یوه برخه یي په غیرمساوات کی صدق کوي او بله برخه یي نه کوي دغه برخه یي کرښې، کرښې کوو بله برخه یي دغیر مساوات د حل سیټ دی.

مثال: $2y + 3x < 6$ دوه مجهوله غیرمساوات حل کړئ.

حل: غیرمساوات په مساوات بدلوو اوګراف یي رسموو.

$$2y + 3x = 6$$

1- $x = 0$ نو:

$$2y = 6 \quad \Rightarrow y = \frac{6}{2} = 3$$

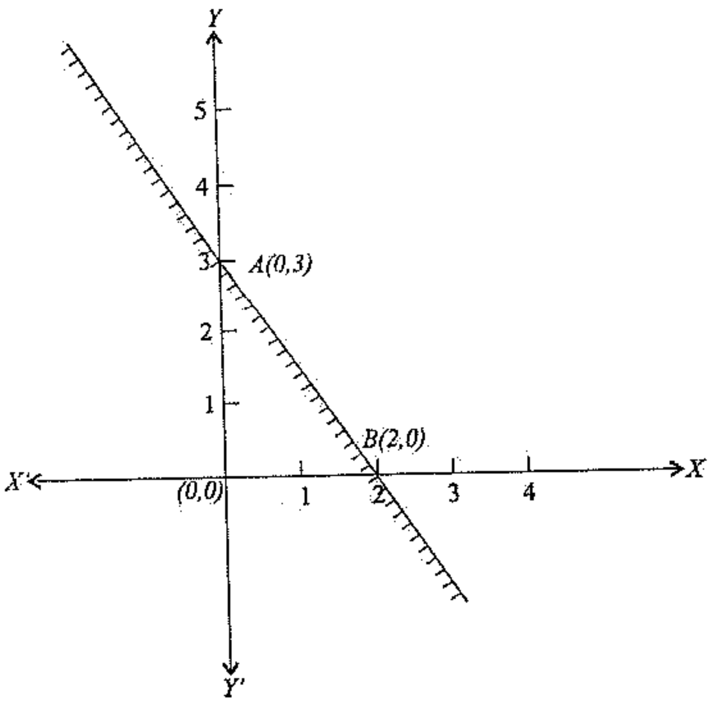
$$A(0,3)$$

2- $y = 0$ فرضوو نو:

$$3x = 6$$

$$x = \frac{6}{3} = 2$$

$$B(2,0)$$



## دوه مجهوله غیرمساوات سیستم:

په یوه کارتیزني مستوي کې دوه غیرمساواتوته د غیرمساوات سیستم وايي.

لکه: $2x - 3y > 6$ او $3x + 5y < 15$

دغه دوه غیرمساواتو ته د غیرمساوات سیستم وايي.

## دوه مجهوله غیرمساوات د سیستم د حل طریقه:

غیرمساواتونه په مساواتو بدلوو اود هر مساوات گرښه یعني گراف رسموو هر گراف مستوي په دوه برخو ویشي چې یوه برخه یې په مربوطه غیرمساوات کې صدق کوي.دهر غیرمساوات د حل سیټ پیدا کوو. څرنگه چې د غیرمساواتو گرافونه مستوي په څلورو برخو ویشي چې یوه برخه یې په دواړو غیرمساواتو کې صدق کوي چې همدغه برخه د سیستم د حل سیټ دي.

-1

$$3x + 5y < 15 \qquad \Longrightarrow 3x + 5y = 15$$

$x = 0$ فرضوو نو:

$$5y = 15 \qquad y = \frac{15}{5} = 3$$

$$A(0,3)$$

$$y = 0$$

$$3x = 15 \qquad x = \frac{15}{3} = 5$$

$$B(5,0)$$

-2

$$2x - 3y > 6 \qquad 2x - 3y = 6$$

$$x = 0$$

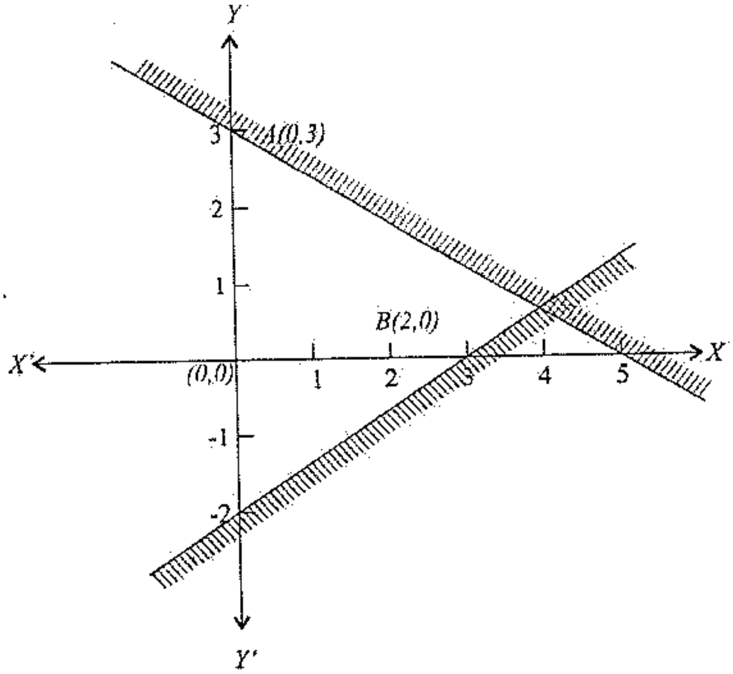
$$-3y = 6 \quad y = \frac{6}{-3} = -2$$

$$C(0,-2)$$

$$y = 0$$

$$2x = 6 \quad \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$$

$$D(3,0)$$




که درې دوه مجهوله غېرمساواتونه راکړ شوي وي د ګراف د ترسیم په وخت کې مثلث لاس ته راځي د څلور غېرمساواتونوڅخه څلور ضلعي په همدې ترتیب د دوه مجهوله غېرمساواتونو شمېر دمضلعګانو دضلعو شمېر رابښيئ.

## يو مجهوله دويمه درجه غيرمساوات

هغه غېرمساوات دي چې مجهول يي يو او د مجهول درجه يي دوه وي عمومي شکل يي دا $ax^2 + bx + c \geq 0$ يا دا $ax^2 + bx + c \leq 0$ دي

د غېرمساوات د حل څخه مطلب د هغه سيټ پيدا کول دي چې په غېرمساوات کې وضع شي اوپه غېرمساوات کې صدق وکړي.

## ددويمه درجه غبرمساوات دحل طريقه

که د غبرمساوات دواړو خواو ته حدونه موجود وي تول د غبر مساوات چپی خواته وړو لازمی عمليي پرې اجراء کوو او د ترينوم شکل ته يي راړوو او تجزيه کوويي. د هر قوس جذر پيدا کوو د حل سيټ يي په دوه طريقو پيدا کيږي.

1- د جدول په طريقه 2- د سيټ بلډر په طريقه

### 1- د جدول په طريقه:

جدول جوړوو کوچنی جذر چپی خواته او لوی جذر ښی خواته ليکو که د $(a)$ علامه مثبت وه د جذر ځخه کښته دقوس علامه منفي اوپورته مثبت ده او که د $(a)$ علامه منفي وه نو د جذر ځخه کښته د قوس علامه مثبت او پورته منفي ده.

مثال: د لاندې دويمه درجه غبرمساوات د حل سيټ پيدا کړئ.

$$3x^2 + 13x - 38 < 0$$

$$3x^2 - 6x + 19x - 38 < 0$$

$$3x(x-2) + 19(x-2) < 0$$

$$(x-2)(3x+19) < 0$$

$$x - 2 = 0 \quad \Rightarrow x = 2$$

$$3x + 19 = 0 \quad \Rightarrow 3x = -19 \quad \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{-19}{3} \Rightarrow x = -\frac{19}{3}$$

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{19}{3}$ | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $3x+19$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ |
| $(x-2)(3x+19)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $(x-2)(3x+19) < 0$ | د حل سيټ ندی | | د حل سيټ | | د حل سيټ ندی |

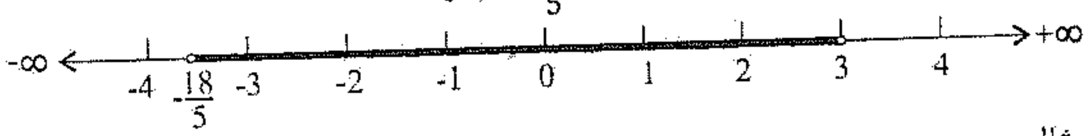
2- د سيټ بلډر په طريقه د دويمه درجه غيرمساوات حلول:

تر تجزيه کولو وروسته د غيرمساوات علامې ته ګورو که د غيرمساوات علامه مثبت وه نو قوسونه هم علامه دي يو وار دواړه مثبت اوبل وار دواړه منفي فرضوو او که د غيرمساوات علامه منفي وه نو قوسونه مختلف العلامه دي په نوبت سره يو مثبت او بل منفي فرضوو.

مثال: $5x^2+3x-54<0$

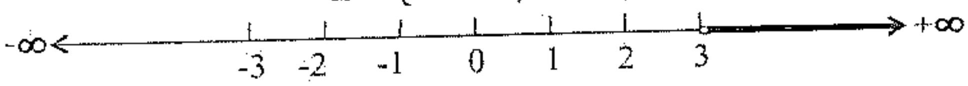
حل:

$$5x^2-15x+18x-54<0$$
$$5x(x-3)+18(x-3)<0$$
$$(x-3)(5x+18)<0$$
$$x-3<0 \Rightarrow x<3$$
$$5x+18>0 \implies 5x>-18 \Rightarrow \frac{5x}{5}>\frac{-18}{5} \Rightarrow x>-\frac{18}{5}$$
$$A=\{x\,/-\frac{18}{5}<x<3\}$$




مثال:

$$3x^2-13x+12>0$$
$$3x^2-9x-4x+12>0$$
$$3x(x-3)-4(x-3)>0$$
$$(x-3)(3x-4)>0$$
$$x-3>0 \qquad \implies x>3$$
$$3x-4>0 \qquad \implies 3x>4$$
$$\frac{3x}{3}>\frac{4}{3} \qquad \implies x>\frac{4}{3}$$
$$A=\{x\in I\mathcal{R}\,/\,x>3\}$$



## تمرین

لاندې دویمه درجه غیر مساوات ونه حل کړئ؟

1. $3x^2 - 11x + 1 > x^2 - 12$
2. $4x^2 + 3x - 22 \geq 0$
3. $\frac{3x+1}{x+2} \leq 2x + 3$
4. $7x^2 + \frac{x+5}{2} - 10 \leq 0$
5. $3x^2 - 17x + 13 > 3x - 15$
6. $\frac{x+1}{x} > 2$
7. $3x^2 + 7x - 48 \geq 0$
8. $11x - 4x^2 - 20 < 8 < x^2 + 3x + 12$
9. $13x - x^2 - 30 \geq 0$
10. $5(x^2 - 13x) \leq 6$
11. $9x + 5x^2 - 38 \leq 0$
12. $13x^2 + 5\left(\frac{2x+3}{3}\right) - 14 \geq 0$
13. $15x^2 + x - 12 \geq 4x^2 + 13x + 8$
14. $7x^2 + 3x \geq 0$
15. $9x^2 + x - 20 \leq 3x^2 + 3x + 2$

# اووم فصل

## پارامتریک معادلی

پارامتر په لغت کی معین غیرمشخص مقدار ته وایي

اوپه اصطلاح کی که په یوه معادله کی د اصلي متحول ځخه په غیر یو بل داسی حرف موجود وي چه د هغه حرف د قیمت په تغیر سره د معادلی په جذرو کی تغیر راشي دغه حرف ته پارامتر اودغې معادلی ته پارامتریک معادله وایي. لکه:

$$(m+3)x^2+3(m-3)x-19m-6=0$$

### د پارامتریک معادلی حلول:

پارامتریک معادلی په دوه طریقو حلیږي.

1- د پارامتر له جنسه د معادلی حلول

2- د پرامتر د قیمت له جنسه د معادلی حلول

### 1- د پارامتر له جنسه د معادلی حلول:

که پارامتریک معادله د دویمه درجه معادلی د حلولوپه هره طریقه حلیدله حلوو یې.

مګر ښه او اسانه طریقه یې د محمدبن موسی فارمول دی.

مثال: لاندې پارامتریک معادله حل کړئ؟

$$x^2+mx-(6m^2+10m+4)=0$$

حل:

$$\Delta= b^2-4ac$$
$$\Delta= m^2-4\{-(6m^2+10m+4)$$
$$\Delta= m^2+24m^2+40m+16$$
$$\Delta= 25m^2+40m+16$$
$$\Delta= (5m+4)^2$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-m\pm\sqrt{(5m+4)^2}}{2\times 1}=\frac{-m\pm(5m+4)}{2}$$

$$x_1 = \frac{-m + 5m + 4}{2} = \frac{4m + 4}{2} = \frac{4(m + 1)}{2} = 2(m + 1) = 2m + 2$$

$$x_1 = 2m + 2$$

$$x_2 = \frac{-m - 5m - 4}{2} = \frac{-6m - 4}{2} = \frac{2(-3m - 2)}{2} = -3m - 2$$

$$x_2 = -3m - 2 = -(3m + 2)$$

تمرین:

لاندې پارامتریک معادلو جذرونه د $m$ له جنسه پیدا کړئ؟

$$1: (2m + 1)x^2 + 2mx - (4m + 1) = 0$$

$2:\ (m + 4)x^2 + 6mx - (7m + 4) = 0$

$3:\ (2m + 4)x^2 + 4mx - (2m + 4) = 0$

$4:\ x^2 + (2m + 5)x + m^2 + 5m + 6 = 0$

$5:\ x^2 - 5mx + 6m^2 = 0$

## 2- د پارامتر د قیمت له مخې د مجهول د قیمت پیدا کول:

د یوه شرط له مخې د پارامتر قیمت پیدا کوو اوپه معادله کې یې وضع کوي یومجهوله دویمه درجه معادله لاس ته راځي. دغه معادله حلوو دمعادلې د اصلي مجهول قیمت لاس ته راځي.

1- مثال: د $(m - 1)x^2 + (2m + 1)x - 5m = 0$ په معادله کې د جذرو مجموعه $\left(-\frac{7}{2}\right)$ ده په معادله د $(m)$ کړئ؟

حل:

$$x_1 + x_2 = -\frac{7}{2}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2m + 1}{m - 1}$$

$$-\frac{2m + 1}{m - 1} = -\frac{7}{2}$$

$$7m - 7 = 4m + 2$$

$$7m - 4m = 2 + 7$$

$$3m = 9 \quad \Rightarrow \frac{3m}{3} = \frac{9}{3} \quad \Rightarrow m = 3$$

$$(m-1)x^2+(2m+1)x-5m=0$$
$$(3-1)x^2+(2\times 3+1)x-5\times 3=0$$
$$2x^2+7x-15=0$$
$$\Delta = b^2-4ac=7^2-4\times 2\times(-15)$$
$$\Delta = 49+120=169$$
$$\Delta = 169$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-7\pm\sqrt{169}}{2\times 2}=\frac{-7\pm 13}{4}$$
$$x_1=\frac{-7+13}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$
$$x_2=\frac{-7-13}{4}=\frac{-20}{4}=-5$$

2- مثال: د $(m-2)x^2-(m-1)x-4m-3=0$ معادلې دجذرو دضرب حاصل $(-15)$ معادله حل کړئ ؟

حل:

$$x_1x_2=-15$$
$$x_1x_2=\frac{c}{a}=-15$$
$$\frac{c}{a}=\frac{-4m-3}{m-2}=-15 \Rightarrow -15m+30=-4m-3$$
$$-15m+4m=-3-30$$
$$-11m=-33$$
$$\frac{-11m}{-11}=\frac{-33}{-11}$$
$$m=3$$
$$(m-2)x^2-(m-1)x-4m-3=0$$
$$(3-2)x^2-(3-1)x-4\times 3-3=0$$
$$x^2-2x-15=0$$
$$\Delta = b^2-ac=(-1)^2-1(-15)=1+15=16$$

$$\acute{\Delta}= 16$$

$$x = \frac{-\acute{b} \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{16}}{1} = \frac{1 \pm 4}{1}$$

$$x_1 = \frac{1+4}{1} = \frac{5}{1} = 5 \qquad \Rightarrow x_1 = 5$$

$$x_2 = \frac{1-4}{1} = \frac{-3}{1} = -3 \qquad \Rightarrow x_2 = -3$$

3- مثال: د $(m-3)x^2 - 3mx + 9m - 1 = 0$ په معادله کې $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{12}{35}$ رابطه کې معادله حل کړئ؟

حل:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{12}{35}$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{12}{35}$$

$$\frac{-\frac{b}{a}}{+\frac{c}{a}} = \frac{-b}{+c} = \frac{-(-3m)}{9m-1} = \frac{+3m}{9m-1} = \frac{12}{35}$$

$$108m - 12 = 105m$$

$$108m - 105m = 12$$

$$3m = 12$$

$$\frac{3m}{3} = \frac{12}{3} \quad \Rightarrow m = 4$$

$$(m-3)x^2 - 3mx + 9n - 1 = 0$$

$$(4-3)x^2 - 3 \times 4x + 9 \times 4 - 1 = 0$$

$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

$$\acute{\Delta}= \acute{b}^2 - ac = (-6)^2 - 1(35) = 36 - 35 = 1$$

$$\acute{\Delta}= 1$$

$$x = \frac{-\acute{b} \pm \sqrt{\acute{\Delta}}}{a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{1}}{1} = 6 \pm 1$$

$$x_1 = 6 + 1 = 7 \quad \Rightarrow x_1 = 7$$

$$x_2 = 6 - 1 = 5 \quad \Rightarrow x_2 = 5$$

4- مثال: $(m-1)x^2-(3m+1)x+5m=0$ معادلې جذرونه د $(3x_1-1)(3x_2-1)=70$ په رابطه کې صدق کوي د معادلې جذرونه پيدا کړئ؟

حل:

$$(3x_1-1)(3x_2-1)=70$$
$$9x_1x_2-3x_1-3x_2+1=70$$
$$9x_1x_2-3(x_1+x_2)+1=70$$
$$9\left(\frac{c}{a}\right)-3\left(\frac{-b}{a}\right)=70-1$$
$$9\left(\frac{5m}{m-1}\right)-3\left(\frac{-\{-(3m+1)\}}{m-1}\right)=69$$
$$\frac{45m}{m-1}-\frac{9m+3}{m-1}=69$$
$$\frac{45m-9m-3}{m-1}=69$$
$$\frac{36m-3}{m-1}=\frac{69}{1}$$
$$69m-69=36m-3$$
$$69m-36m=-3+69$$
$$33m=66 \qquad \Rightarrow m=2$$
$$(m-1)x^2-(3m+1)x+5m=0$$
$$(2-1)x^2-(3\times 2+1)x+5\times 2=0$$
$$x^2-7x+10=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times 1\times 10=49-40=9$$
$$\Delta=9$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-7\pm\sqrt{9})}{2\times 1}=\frac{7\pm 3}{2}$$
$$x_1=\frac{10}{2}=5 \ \Rightarrow\ x_1=5$$
$$x_2=\frac{7-3}{2}=\frac{4}{2}=2 \ \Rightarrow x_2=2$$

5- مثال: د $(m-4)x^2 - mx - 5m + 1 = 0$ په معادله کې د معادلی یو جذر (8) دی د $m$ قیمت پیدا کړئ؟

حل:

$$(m-4)8^2 - m \times 8 - 5m + 1$$
$$(m-4)64 - 8m - 5m + 1 = 0$$
$$64m - 256 - 13m + 1 = 0$$
$$51m - 255 = 0$$
$$51m = 255 \quad \Rightarrow m = 5$$

7- مثال: د $m$ په کوم قیمت باندی $(m-2)x^2 - (m-3)x - 8m - 1 = 0$ معادله دوه مساوي مختلف العلامه جذرونه لري؟

حل:

$$-\{-(m-3)\} = 0$$
$$m - 3 = 0 \quad \Rightarrow m = 3$$

7- مثال: د $(m)$ قیمت د $(2m-1)x^2 - (2m+1)x + 2m - 4 = 0$ څخه داسی پیدا کړئ چه د معادلی یو جذر صفر وي؟

حل: هغه وخت د معادلی یو جذر صفر کیږي چه $c = 0$ شي

$$-(2m+1) = 0$$
$$2m - 4 = 0 \ \Rightarrow 2m = 4 \quad \Rightarrow \frac{2m}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$m = 2$$

8- مثال: د $(m)$ په کوم قیمت $(2m+1)x^2 - (7m+2)x + 6m + 1 = 0$ معادله یو جذر لري؟

حل: کله چه $\Delta = 0$ شي.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = \{-(7m+2)\}^2 - 4(2m+1)(6m+1)$$
$$\Delta = 49m^2 + 28m + 4 - 48m^2 - 32m - 4$$
$$\Delta = m^2 - 4m$$
$$\Delta = 0 \quad \therefore \ m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m-4) = 0$$
$$m_1 = 0$$
$$m - 4 = 0 \quad \Rightarrow m = 4$$

9- مثال: د $(m)$ په کومو قیمتو باندی $(m-1)x^2-(2m+2)x+2m-5=0$ معادله دوه معکوس جذرونه لري؟

حل: کله چه $a=c$ شي

$$m-1=2m-5$$
$$m-2m=-5+1$$
$$-m=-4 \quad \Rightarrow m=4$$

10- مثال: د $(m)$ په کومو قیمتونو باندی $(m+1)x^2-mx-4m=0$ معادله دوه مختلف الاشاره جذرونه لري؟

حل:- کله چه $p<0$ وي

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-4m}{m+1}<0$$
$$(m+1)^2\left(\frac{-4m}{m+1}\right)<0\times(m+1)^2$$
$$-4m(m+1)<0$$
$$-4m<0$$
$$\frac{-4m}{-4}>\frac{0}{-4}$$
$$m>0$$
$$m+1>0 \quad \Rightarrow m>-1$$
$$A=\{m\in IR/m>-1\}$$

11- مثال: د $(m)$ په کومو قیمتونو باندی $(m-3)x^2-(m-2)x-2m+8=0$ معادله دوه حقیقي جذرونه لري؟

حل:- کله چه $(\Delta>0)$ تر صفر وي

$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=\{-(m-2)\}^2-4(m-3)(-2m+8)$$
$$\Delta=m^2-4m+4+8m^2-32m-24m+96$$
$$\Delta=9m^2-60m+100=(3m-10)^2$$
$$\Delta>0$$

$$(3m-10)^2 > 0$$
$$3m-10 > 0$$
$$3m > 10 \quad \Rightarrow m > \frac{10}{3}$$
$$A = \{m \in IR \,/\, m > \frac{10}{3}\}$$

12- مثال: د $(m)$ په کوم قیمت د $(m-2)x^2-(m-1)x-5m=0$ معادلې لوی جذر مثبت دي؟

حل:- کله چه $(b\ \&\ c)$ دواړه منفي وي

$$\Delta = b^2-4ac$$
$$\Delta = \{-(m-5)\}^2-4(m-2)(-6m)$$
$$\Delta = m^2-10m+25+24m^2-40m$$
$$\Delta = 25m^2-50m+25=(5m-5)^2$$

$$\Delta = (5m-5)^2 \Rightarrow \Delta = 5m-5 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 5m-5>0 \Rightarrow 5m > +5 \Rightarrow m > 1$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-\{-(m-5) \pm \sqrt{(5m-5)^2}}{2(m-2)} = \frac{m-5 \pm (5m-5)}{2(m-2)}$$
$$x_1 = \frac{m-5+5m-5}{2(m-2)} = \frac{6m-10}{2m-4}$$
$$x_2 = \frac{m-5-5m+5}{2m-4} = \frac{-4m}{2m-4}$$

تمرین:

لاندې پارامتریک معادلو کې د $(m)$ قیمت داسې تعین چه معادله دوه مختلف الاشاره جذرونه ولري.

1: $x^2-5x-3m+1=0$

2: $(2+3)x^2-mx-25m+4=0$

3: $mx^2-2(m+1)x+m+15=0$

4: $mx^2-(2m+1)x+m=0$

د لاندې معادلو څخه د $(m)$ قیمت داسې پیدا کړئ چه معادله دوه حقیقي جذرونه ولري.

5: $x^2 - 2(m-3)x + m + 9 = 0$

6: $(m+1)x^2 - 2(m+2)x + m + 3 = 0$

7: $3x^2 - 10x - 3m + 2 = 0$

8: $mx^2 - 2(m+1)x + m + 3 = 0$

9: $(2m+1)x^2 - 4mx + 2m - 3 = 0$

10: $2x^2 - mx + 1 = 0$

د لاندې معادلو څخه د $(m)$ قیمت داسې پیدا کړئ چه معادله دوه موهومي جذرونه ولري.

11: $mx^2 - (2m+1)x + 2m = 0$

12: $4x^2 + 4mx - 3m^2 = 0$

# اتم فصل

## اکسپوننشل (نمائي) معادلی

اکسپوننشل معادلی هغه معادلی دي چه توان يي مجهول وي عمومي شکل يې دا دی:

$$a^x = y$$

د اکسپوننشل معادلو قاعده خلاف د $(1)$ وي یعنی $(a \neq 1)$ وي که $(a > 1)$ وي معادله متزایده ده او که $(a < 1)$ وي معادله متناقصه ده.

داکسپوننشل معادلو د حلولو لپاره مجهول حدونه د مساوات چپې خواته وړو او معلوم دمساوات ښي خواته وړو لازمی عملیي پری اجراء کوو په د مساوات د دواړو خواو عددونه په داسی طاقت لرونکو عددو بدلوو چه قاعدی يي سره مساوي وي نو توانونه يي هم مساوي دي دلته څو حالتونه موجود دي

1- چه د مساوات په چپ طرف کی توان مونوم یا بینوم وي نو یو مجهوله اوله درجه معادله لاس ته راځي دغه معادله حلوو او جذرونه يي پیدا کوو

1- مثال: لاندی معادله حل کړئ؟

$$5 \times 3^x + 11 \times 3^x - 14 \times 3^x = 18$$
$$(5 + 11 - 14)3^x = 18$$
$$2 \times 3^x = 18 \quad \Rightarrow \frac{2 \times 3^x}{2} = \frac{18}{2} \quad \Rightarrow 3^x = 9 \quad \Rightarrow 3^x = 3^2$$

قاعدې يي مساوي دي نو توانونه يي هم مساوي دي.

$$x = 2$$

2- مثال: لاندی معادله حل کړئ؟

$$3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-1} = 45$$
$$3^x \cdot 3 - 4 \cdot 3^x \cdot 3^{-1} = 45$$
$$3^x(3 - 4 \cdot 3^{-1}) = 45$$
$$3^x\left(3 - \frac{4}{3}\right) = 45 \Longrightarrow 3^x\left(\frac{9-4}{3}\right) = 45 \Longrightarrow 3^x\left(\frac{5}{3}\right) = 45$$

د مساوات دواړه خواوې په $\frac{3}{5}$ کې ضربوؤ.

$$\frac{3}{5}\left\{3^x\left(\frac{5}{3}\right)\right\}=45\times\frac{3}{5}$$
$$3^x=27=3^3$$
$$3^x=3^3$$
$$x=3$$

2- چه د مساوات په چپ طرف کی دوه یا څو حده وي قاعدی يي مساوي اود يوه توان د بل د توان دوه چنده وي دغه ډول معادلی په دويمه درجه معادلو بدلوو. دغه معادلی حلوو اود جذرو له مخی يي د اکسپوننشل معادلی جذرونه پيدا کوو.

مثال:

$$3^{2x}-3^x=702$$
$$(3^x)^2-3^x=702$$

$3^x=y$ وضع کوو.

$$y^2-y-702=0$$
$$(y-27)(y+26)=0$$
$$y_1=27$$
$$x_2=-26$$
$$y_1=3^x=27=3^3$$
$$3^x=3^3$$
$$x=3$$
$$y_2=3^x=-26$$

د اکسپوننشل معادلی دومېن همېشه مثبت وي نود $(y_2)$ د قیمت څخه دمعادلی جذرنه پيدا کيږي.

3- چه د مساوات په چپ طرف کی دوه يا څو حدونه موجود وي او توانونه يي جذري حدونه وي .دغه ډول معادلی هم په دويمه درجه يو مجهوله معادله بدلولای شو.

مثال:

$$27^{2\sqrt{x}}=4\cdot3^{\sqrt{9x}}-3$$
$$27^{2\sqrt{x}}-4\cdot3^{3\sqrt{x}}+3=0$$
$$27^{2\sqrt{x}}-4\cdot27^{\sqrt{x}}+3=0$$
$$\left(27^{\sqrt{x}}\right)^2-4\cdot27^{\sqrt{x}}+3=0$$

$27^{\sqrt{x}} = y$ وضع کوو.

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$
$$(y-1)(y-3) = 0$$
$$y_1 = 1 \quad \& \quad y_2 = 3$$
$$27^{\sqrt{x}} = 1 = 27^0$$
$$\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$
$$27^{\sqrt{x}} = 3 \Rightarrow 3^{3\sqrt{x}} = 3^1$$
$$3\sqrt{x} = 1 \quad \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3}$$
$$x = \frac{1}{9}$$
$$S = \left\{x \in IR / x = 0 \vee x = \frac{1}{9}\right\}$$

4- چه دوه داسې اکسپونتشل معادلې راکړ شویوي چه چپ طرف یې د دوه داسې طاقت لرونکوعددو د ضرب حاصل وي چه قاعدې یې مساوي او توانونه یې مختلف وي دغسې معادلې په اوله درجه دوه مجهوله معادلو بدلوو.

مثال:

$$2^x \cdot 2^y = 16$$
$$2^{2x} \cdot 2^{3y} = 32768$$
$$2^{x+y} = 2^4$$
$$2^{x+y} = 2^4$$
$$\underline{2^{2x+3y} = 2^{15}}$$

$$x + y = 4$$
$$\underline{2x + 3y = 15}$$

$$2(x + y = 4)$$
$$2x + 2y = 8$$
$$\underline{\pm 2x \pm 3y = \pm 15}$$
$$-y = -7$$
$$y = 7$$
$$x + 7 = 4$$

$$x = 4 - 7 = -3$$
$$x = -3$$

## تمرين

1. $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$
2. $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$
3. $9^{x+1} + 9^{2x-1} = 54 \cdot 27^{x-1}$
4. $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$
5. $\frac{1-2^x}{2^x} = 1$
6. $4 \cdot 3^{2x} + 3^x = 2 \cdot 3^{2x} - 3 \cdot 3^x + 198$
7. $5^{2y} - 5^y - 600 = 0$
8. $\begin{cases} 3^{2x} \cdot 3^{5y} = 19683 \\ 3^x \cdot 3^{3y} = 243 \end{cases}$
9. $9^x - 5 \cdot 3^x - 46 = 0$
10. $2^{x+3} + 2^{x-1} = 17$
11. $\begin{cases} 2^{3x+1} \cdot 2^{y+1} = 128 \\ 2^{x+5} \cdot 2^{y+2} = 1024 \end{cases}$
12. $\frac{3^{2x+3}}{3^x} \cdot \frac{3^{3y+1}}{3^y} = 2187$
13. $2^{3x-2} \cdot 2^{y+5} = 128$

# نهم فصل

## لوګاریتمي معادلی Logarithm's Equation:

لوګاریتم په لغت کی د متناسبو عددو شمېرلو ته وایي.

او په اصطلاح کی داکسپونتشل معادلو معکوسی معادلی ته لوګارتمي معادله وایي.

فرضاً ($b = a^x$) یوه اکسپونتشل معادله لرو معکوسه معادله یي لوګاریتمي معادله ده.

چه داسی لیکل کیږي.

$$log_a b = x$$

$a$ ته د $log\ b$ قاعده وایي .

کولای شو چه اکسپونتشل تابع په لوګاریتمي تابع او لوګاریتمي تابع په اکسپونتشل تابع بدله کړو.لکه ($x = 2^3$) یوه اکسپونتشل تابع ده لوګاریتمي تابع یي عبارت له ($log_2 x = 3$) څخه ده .

اوهمدا ډول ($log_2 8 = x$) یوه لوګاریتمي تابع ده اکسپونتشل تابع یي عبارت له ($8 = 2^x$) څخه ده.

د لوګاریتم خواص:

1- د (1) لوګاریتم د هر مثبت عدد په قاعده باندی صفر (0) کیږي.

$$\begin{pmatrix} log_b 1 = 0 \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$$

2- د هر مثبت لوګاریتم په خپله قاعده باندی (1) کیږي. $\begin{pmatrix} log_b b =.1 \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$ دا ځکه چه ($b = b^1$) کیږي.

مثال:

$$log_8 8 = 1 \qquad\qquad log_x x = 1$$

3- د یوه طاقت لرونکي عدد لوګاریتم په خپله قاعده باندی د توان څخه عبارت دی. $\begin{pmatrix} log_b b^r = r \\ b \neq 1 \end{pmatrix}$ ځکه چه:

$$b^r = b^r$$

4- د يوه حاصل ضرب لوگاريتم په يوه قاعده باندی دضربي عواملو د لوگاريتمو د مجموعی سره مساوي دي په همغه قاعده باندی:

$$log_a(M \cdot N) = log_a M + log_a N.$$

$$log_a M = x \qquad M = a^X$$

$$log_a N = y \qquad N = a^Y$$

اکسپونتشل معادلی طرف په طرف ضربوو.

$$M \cdot N = a^x \cdot a^y$$

$$M \cdot N = a^{x+y}$$

دچپ طرف لوگاريتم نيسو.

$$log_a MN = x + y$$

$$log_a MN = log_a M + log_a N$$

1- مثال: $log_2(2x) =?$ لوگاريتم پيدا کړئ

حل:

$$log_2(2x) = log_2 2 + log_2 x = 1 + log_2 x$$

2- مثال:لاندې لوگاريتم پيدا کړئ ؟

$$log_x(xy) =?$$

$$log_x(xy) = log_x x + log_x y = 1 + log_x y$$

5- د يوه خارج قسمت لوگاريتم په يوه قاعده باندی د صورت او مخرج د لوگاريتمو د تفاضل سره مساوي دی په همغه قاعده باندی.

$$log_a \frac{M}{N} = log_a M - log_A N$$

$$log_a M = x \qquad M = a^x$$

$$log_a N = y \qquad N = a^y$$

اکسپونتشل معادلی طرف په طرف يو پر بل ويشو.

$$\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

د چپ طرف لوگاریتم نیسو.

$$log_a \frac{M}{N} = x - y = log_a M - log_a N$$

1- مثال: لاندې لوگاریتم حل کړئ؟

$$log_2 \frac{x}{2} = ?$$

$$log_2 \frac{x}{2} = log_2 x - log_2 2 = log_2 x - 1$$

2- مثال:

$$log_x \frac{5x}{y} = log_x(5x) - log_x y = log_x x + log_x 5 - log_x y$$

$$log_x \frac{5x}{y} = log_x(5x) - log_x y = 1 + log_x 5 - log_x y$$

6- که د یوه طاقت لرونکي عدد لوگاریتم په بله قاعده ونیول شي لوگاریتم یې عبارت دي توان ضرب یې دهغه لوگاریتم په همغه قاعده.

$$log_b M^r = r\, log_b M$$
$$log_b M = x$$
$$M = b^x$$
$$M^r = (b^x)^r \Longrightarrow M^r = b^{rx}$$
$$log_b M^r = rx$$
$$log_b M^r = r\, log_b M$$

1- مثال:

$$log_3 81^7 = ?$$
$$log_3 81^7 = 7\, log_3 81 = 7\, log_3 3^4 = 4 \times 7\, log_3 3 = 28 \times 1 = 28$$

2- مثال:

$$log_3(3x)^5 = ?$$
$$log_3(3x)^5 = 5\, log_3(3x) = 5(log_3 3 + log_3 x)$$
$$= 5(1 + log_3 x) = 5 + 5\, log_3 x$$

7- ديوه عدد لوګاريتم د يوه طاقت لرونکي عدد په قاعده باندى عبارت دي د قاعدى د توان معکوس ضرب يي دهغه عدد لوګاريتم د قاعدى دقاعدى په قاعده.

$$log_{a^b} M = \frac{1}{b} log_a m$$
$$x = log_{a^b} M$$
$$(a^b)^x = M$$
$$(a^x)^b = M \qquad \Rightarrow \sqrt[b]{(a^x)^b} = \sqrt[b]{M} \Rightarrow a^x = \sqrt[b]{M}$$
$$x = log_a M^{\frac{1}{b}} = \frac{1}{b} log_a M$$
$$log_{a^b} M = \frac{1}{b} log_a M$$

مثال:

$$log_{16} 32 = ?$$
$$log_{16} 32 = log_{2^4} 32 = \frac{1}{4} log_2 32$$
$$= \frac{1}{4} log_2 2^5 = 5 \times \frac{1}{4} log_2 2 = \frac{5}{4} \times 1 = \frac{5}{4}$$
$$log_{16} 32 = \frac{5}{4}$$

دقاعدى د بدلولو فارمول:

که د يوه عدد لوګاريتم په يو ه قاعده غوښتل شوى وي مګر په دغه قاعده باندى د راکړ شوي عدد د لوګاريتم پيدا کول مشکل وي نو د راکړشوي عدد او د لوګاريتم د قاعدى لوګاريتم په يوه بله قاعده باندى پيدا کوو د عدد لوګاريتم د لوګاريتم د قاعدى په لوګاريتم ويشو د راکړ شوي عدد لوګاريتم په را کړشوى قاعده باندى لاس ته راځي.

مثلاً $log_b M$ غوښتل شوى دى لوګاريتم يي د لاندى فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$log_b M = \frac{log_a M}{log_a b}$$

ثبوت: $log_b M$ په $x$ ښيو.

$$log_b M = x \quad \Rightarrow M = b^x$$
$$log_a M = log_a b^x = x\, log_a b$$

$$log_a M = log_b M \, log_a b$$
$$\frac{log_b M \, log_a b}{log_a b} = \frac{log_a M}{log_a b}$$
$$log_b M = \frac{log_a M}{log_a b}$$

1- مثال:

$$log_{27} 81 = ?$$
$$log_{27} 81 = \frac{log_3 81}{log_3 27} = \frac{log_3 3^4}{log_3 3^3} = \frac{4 \, log_3 3}{3 \, log_3 3} = \frac{4 \times 1}{3 \times 1} = \frac{4}{3}$$

2- مثال:

$$log_{32} 128 = ?$$
$$log_{32} 128 = \frac{log_2 128}{log_2 32} = \frac{log_2 2^7}{log_2 2^5} = \frac{7 \, log_2 2}{5 \, log_2 2} = \frac{7 \times 1}{5 \times 1} = \frac{7}{5}$$

## د لوګاريتم اقسام

لوګاريتم د قاعدې له مخې په دوه قسمه دی.

1- اعشاري لوګاريتم يا معمولي لوګاريتم *Common logarithm*

2- طبعي لوګاريتم *Natural logarithm*

1- اعشاري لوګاريتم:

که د لوګاريتم قاعده (10) وه دی لوګاريتم ته اعشاري لوګاريتم وايي.

$$log \, x$$

2- طبعي لوګاريتم:

هغه لوګاريتم دی چه قاعده يي $(e)$ وي.

څرنګه چه د دوارو قسمو قاعدې معلومې دي نو قاعده يي نه ليکل کيږي.

$$ln \, x$$

## ديوه عدد د لوګاريتم پيداکول:

د طاقت لرونکو عددو څخه په غير د نورو عددو لوګاريتم دوه برخې لري.یوه برخه يې صحيح او بله برخه يې اعشاري ده .صحيح برخې ته کرکترستيک ( $Characteristic$ ) او اعشاري برخې ته يې مانتيس ($Mantesa$) وايي .کرکترستيک د محاسبې پواسطه او مانتيس د جدول او يا د حساب د ماشين پواسطه پيدا کيږي.که دطاقت لرونکي عدد قاعده لس وي يوازې کرکترستيک لري او مانتيس نه لري

1- مثال : ?= $log(1000000)$ څو دی؟

$$log(1000000) = log\,10^6 = 6$$

کرکترستيک د ارقامو د شمېر څخه يو کم وي.

2- مثال: ?= $log(0.000000001)$ څو دی؟

$$log(0.000000001) = log\,10^{-9} = -9$$

کرکترستيک يي د اعشاريي د علامې د دواړو خواو د صفرو د شمېر سره مساوي دی او علامه يي منفي ده.

که عدد طاقت لرونکی نه ؤ نو دغه عدد مانتيس او کرکترستيک دواړه لري.لکه $log(4560000)$ د داسی عدد د لوګاريتم د پيدا کولو لپاره راکړشوی عدد په داسی اعشاري عدد بدلوو چه يو رقم يي صحيح او نور رقمونه يي اعشاري شي. د راکړشوي عدد د رقمونو شمېر ته ګورو عدد اوه رقمي دی نو په ($10^6 = 1000000$) کې يې ضربوو په دی ترتيب کولای شو چه کرکترستيک يي پيدا کړو.

$$log(4560000) = log(4.56 + 10^6) = log\,4.56 + log\,10^6 = log\,4.56 + 6$$

(6) د راکړشوي عدد کرکترستيک دی.مانتيس يي د ($log\,4.56$) څخه لاس ته راوړو.طريقه يي داسی ده چه (6) د دری رقمي عددو د لوګاريتمي دجدول په پورتني. کرښه کی پيدا کوواو (4.5) د جدول د چپ طرف په ستون کی پيداکوو او د مخکيني ليکل شوي عدد شاته يي ليکو بيا کرکترستيک ته ګورو که مثبت ؤ نو د کرکترستيک په اندازه د جدول څخه د پيدا شوي عدد مخی ته صفرونه ږدو. اوکه کرکترستيک منفي ؤ د پيدا شوي عدد شاته د اعشاريي د علامې دواړو خواو ته صفرونه ږدو.

$$log(4560000) = log\,4.56 + 6 = 0.6590 + 6 = 6.6590$$
$$log(4560000) = 6.6590$$

### د یوه او صفر تر منځ د کسرونو لوګاریتم:

د صفر او یوه تر منځ د راکړشوي کسر کرکترستیک منفي او مانتیس یې مثبت دی. که راکړشوی کسر عام وي په اعشار کسر یې بدلوو او د مخکیني سوال په څېر یې حلوو.

مثال: $log(0.00567)$ پیداکړئ؟

حل:

$$log(0.00567) = log(5.67 \times 10^{-3}) = log\,5.67 + log\,10^{-3}$$
$$= log\,5.67 - 3 = 0.3690 - 3$$

د راکړشوي عدد لوګاریتم $(0.3690 - 3)$ دی مګر که وغواړو چه د کرکترستیک او مانتیس څخه یو عدد جوړ کړو نود کرکترستیک پر سر منفي علامه لیکو چه علامه په دی دلالت کوي چه کرکترستیک منفي دی$(\bar{3}.3690)$ او که وغواړو چه مانتیس او کرکترستیک تر یو علامه لاندی کړو نو د کرکترستیک سره (1) جمع کوو او دمانتیس څخه یې منفي کوو نو:

$$(-2.6310)$$

$$log(0.00567) = 0.3690 - 3 = \bar{3}.3690 = -2.6310$$

### تمرین

د لاندی صحیح عددونو لوګاریتم پیدا کړئ؟

1- 456000
2- $log\,5890000$
3- $log\,69200$
4- $log\,73400$

د لاندی اعشاري عددونو لوګاریتم پیدا کړئ؟

1- $log\,0.00234$
2- $log\,0.0598$
3- $log\,0.000568$
4-$log\,0.008$

### د صفر لوګاریتم:

$$0 = \frac{1}{10^{\infty}} = 10^{-\infty}$$
$$log_{10}\,0 = -\infty$$

## انتي لوګاريتم:

هر عدد د خپل لوګاريتم انتي لوګاريتم دي.

مثلاً $(\log 1000 = 3)$ دی او $\text{anti}\log 3 = 1000$ دی.

## انتي لوګاريتم پيدا کول:

مانتيس په جدول کې پيدا کوو هغه عدد چه د مانتيس په ستون کې ليکل شوی دي ليکو بيا هغه عدد د مانتيس په کرښه کې دی په لسيز او سليز مرتبو کې ليکو کرکترستيک ته ګورو که مثبت ؤ کرکترستيک د عدد د ارقامو دشمېر څخه يو کم دی يعنی تر کرکترستيک يو صفر اضافه ورکوو. او که کرکترستيک منفي و نو دعدد شاته د کرکترستيک په اندازه د اعشاريي دواړو خواو ته صفرونه ږدو.

مثال:

$$\text{anti}\log(2.3690) = ?$$
$$\text{anti}\log(0.3690) = 2.338837239$$
$$\text{anti}\log(2.3690) = 233.8837239$$

مثال:

$$\text{anti}\log \bar{6}.3710 = ?$$
$$\text{anti}\log 0.3710 = 2.35$$
$$\text{anti}\log(\bar{6}.3710) = 0.00000235$$

تمرين:

1- $\text{anti}\log(3.4581)$  2- $\text{anti}\log(\bar{2}.6589)$

4- $\text{anti}\log(0.7551 - 4)$  3- $\text{anti}\log(-4.2907)$

د لوګ$(\log)$ اولن $(\ln)$ پيدا کول يو د بل له جنسه:

د قاعدی د بدلولو فارمول ليکو:

$$\log_b M = \frac{\log_a M}{\log_a b}$$
$$\log_b M \cdot \log_a b = \log_a M$$

د $(a)$ په عوض $(10)$ او د $(b)$ په عوض $(e)$ ليکو.

$$log_e M \cdot log_{10}\, e = log_{10} M$$
$$ln\, M \cdot log\, 2.72 = log\, M$$
$$ln\, M \cdot 0.4343 = log\, M$$

مثال: ($ln\, 6.73 = 1.9066$) دی ($log\, 6.73$) پیدا کړئ؟

حل:

$$log\, M = ln\, M \cdot 0.4343$$
$$log\, 6.73 = ln\, 6.73 \cdot 0.4343$$
$$log\, 6.73 = 1.9066 \cdot 0.4343$$
$$log\, 6.73 = 0.8280$$

د $log$ څخه د $ln$ د پیدا کولو لپاره د مساوات دواړه خواوی په (0.4343) ویشو.

$$\frac{ln\, M\ \cdot\ 0.4343}{0.4343} = \frac{log\, M}{0.4343} = \frac{1}{0.4343} log\, M$$
$$\frac{1}{0.4343} = 2.3026$$
$$ln\, M = 2.3026 \cdot log\, M$$

مثال:

$$ln\, 563 = ?$$
$$ln\, 563 = log\, 563 \cdot 2.3026$$
$$ln\, 563 = 2.7505 \cdot 2.3026 = 6.3$$

## انترپولېشن Interpolation:

انترپولېشن په نوي عبارت باندی د یوی موضوع بیانولو ته وایي.

او په اصطلاح کی انترپولېشن هغه عملیه ده چه د هغه عددو لوګاریتم پیدا کوي چه لوګاریتمي جدول یي ترتیب شوی نه وي طریقه یي داسی ده چه عدد لیکو مانتیس یي په یوه حرف ښیو د راکړشوي عدد څخه لاندی باندی عددونه په دری رقمي عدد کی پیدا کوو او لیکویي اومانتیس یي د جدول څخه لیکو په دی ترتیب شپږ عددونه لاس ته راځي چه یو به یي مجهول وي بیا د دوه هم جنسو عددو تفاضل پیدا کوو په نتیجه کی څلور عددونه لاس ته راځي چه یو به یي مجهول وي دغه مجهول عدد د تناسب په واسطه پیدا کوو او د کوچني عدد د مانتیس سره یي جمع کوود راکړشوي عدد مانتیس لاس ته راځي.

مثال:- $\log 4567$ پیدا کړئ؟

$$0.01\left[0.007\begin{pmatrix}\log 4.57 & 0.6599\\ \log 4.567 & m\\ \log 4.56 & 0.6589\end{pmatrix}d\right]0.0010$$

$$\frac{0.01}{0.007}=\frac{d}{0.0010}\Longrightarrow d=\frac{0.01\cdot 0.0010}{0.007}=\frac{10}{7000}=\frac{1}{700}=0.00143$$

$$d=0.00143$$
$$m-0.6589=0.00143$$
$$m=0.00143+0.6589=0.6603$$
$$\log 4567=3.6603$$

## دانترپولېشن پواسطه د انتي لوګاريتم پيدا کول:

د انتي لوګاريتم د پيدا کولو لپاره مانتيس په جدول کې لټوو که په جدول کې نه ؤ نو د دغه مانتيس انتي لوګاريتم په يوه حرف ښيو د مانتيس څخه لاندي باندي مانتيسونه په جدول کې پيدا کوو په نتيجه کې شپږ عددونه لاس ته راځي چه يو به يې مجهول وي پيا د دوه، دوه هم جنسو عددو تفاضل پيدا کوو شپږ عددونه په څلورو عددو بدليږي. چه يو به يې مجهول وي دغه مجهول عدد د تناسب پواسطه پيدا کوو اود کوچني عدد د انتي لوګاريتم سره يې جمع کوو د راکړشوي لوګاريتم انتي لوګ لاس ته راځي.

مثال:- د يوه عدد لوګاريتم (3.7351) دئ انتي لوګ يې پيدا کړئ؟

$$0.01\left[d\begin{pmatrix}5.44 & 0.735\\ m & 0.7352\\ 5.43 & 0.7348\end{pmatrix}0.0004\right]0.0008$$

$$\frac{0.01}{d}=\frac{0.0008}{0.0004}$$

$$d=\frac{0.0004\cdot 0.01}{0.0008}=\frac{4}{800}=\frac{1}{200}=0.005$$

$$m-5.43=d$$
$$m=d+5.43$$
$$m=0.005+5.43$$
$$m=5.435$$

## کولوګاريتم *Cologarthm*:

د يوه عدد د معکوس لوګاريتم ته د هغه عدد کولوګاريتم وايي.

مثلاً $(a)$ او $\left(\frac{1}{a}\right)$ عددونه یو د بل معکوس دي نو د $\left(\frac{1}{a}\right)$ لوګاریتم د $(a)$ د کولوګاریتم په نوم نوم یادیږي.

$$co\log a = \log\frac{1}{a} = \log 1 - \log a = 0 - \log a = -\log a$$
$$co\log a = -\log a$$

نو معلومه شوه چه د یوه عدد کولوګاریتم دهغه عدد منفي لوګاریتم دي.

## د لوګاریتمي معادلو د حل طریقه:

د لوګاریتمي معادلو په حلولو کې د لوګارتم څخه استفاده کوو.

1- مثال:

$$\log_a(x+6) - \log_a(x+2) = \log_a x$$
$$\log_a\frac{x+6}{x+2} = \log_a x$$
$$\frac{x+6}{x+2} = x$$
$$x^2 + 2x = x + 6$$
$$x^2 + 2x - x - 6 = 0 \Longrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times 1\times(-6) = 1 + 24 = 25$$
$$\Delta = 25$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2\times 1} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$
$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad x_1 = 2$$
$$x_2 = \frac{-1-5}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

2- مثال:

$$x^{2\log x} = 10x$$
$$\log x^{2\log x} = \log 10x$$
$$2\log x \times \log x = \log 10x \Longrightarrow 2\log^2 x = \log 10 + \log x$$
$$2\log^2 x - \log x - 1 = 0$$
$$2y^2 - y - 1 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$y_1 = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$y_2 = \frac{1-3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$log\, x = y = y_1 = 1$$

$$log_{10} x = 1$$

$$x = 10^1 = 10 \qquad x_1 = 10$$

$$log_{10} x = y = y_2 = -\frac{1}{2}$$

$$log_{10} x = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

3- مثال:

$$\frac{log(35 - x^3)}{log(5 - x)} = 3$$

$$3\, log(5 - x) = log(35 - x^3)$$

$$log(5 - x)^3 = log(35 - x^3)$$

$$(5 - x)^3 = 35 - x^3$$

$$125 - 75x + 15x^2 - x^3 = 35 - x^3$$

$$15x^2 - 75x + 90 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = 3$$

4- مثال:

$$log_5\left(log_{10}\sqrt{x^2 + 19}\right) = 0$$

$$log_{10}\sqrt{x^2 + 19} = 5^0 = 1$$

$$\sqrt{x^2 + 19} = 10^1 = 10$$

$$\left(\sqrt{x^2+19}\right)^2 = 10^2$$
$$x^2 + 19 = 100$$
$$x^2 = 100 - 19 = 81$$
$$x^2 = 81$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{81}$$
$$x = \pm 9$$

5- مثال:

$$log_3 x + log_9 x + log_{27} x = 5.5$$
$$log_3 x + log_{3^2} x + log_{3^3} x = 5.5$$
$$log_3 x + \frac{1}{2} log_3 x + \frac{1}{3} log_3 x = 5.5$$
$$log_3 x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 5.5$$
$$log_3 x\left(\frac{6+3+2}{6}\right) = \frac{11}{2}$$
$$log_3 x\left(\frac{11}{6}\right) = \frac{11}{2} \qquad \Rightarrow \frac{11}{6} log_3 x = \frac{11}{2}$$
$$log_3 x = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{11}{6}} = \frac{6 \times 11}{2 \times 11} = \frac{6}{2} = 3$$
$$log_3 x = 3$$
$$x = 3^3 = 27$$

6- مثال:

$$log_2(11x - 1) = 5$$
$$11x - 1 = 2^5$$
$$11x = 32 + 1 = 33$$
$$\frac{11x}{11} = \frac{33}{11}$$
$$x = 11$$

7- مثال:

$$log_3(2^x - 7) = 2$$
$$2^x - 7 = 2$$
$$2^x = 2 + 7 = 9 = 3^3$$

$x = 3$

8- مثال:

$$\log_{\sqrt[3]{x}} 25 = 18$$
$$25 = \sqrt[3]{x}^{18} = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{18} = x^6$$
$$5^2 = (x^3)^2$$
$$x^3 = 5$$
$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{5} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \sqrt[3]{5}$$

9- مثال:

$$\log_{10}\sqrt{x+1} + \log_{10}\sqrt{x-1} - \log_{10} 5 = 0$$
$$\log_{10}\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{5} = 0$$
$$\frac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{5} = 10^0 = 1$$
$$\sqrt{(x+1)(x-1)} = 5$$
$$\left(\sqrt{(x+1)(x-1)}\right)^2 = 5^2$$
$$x^2 - 1 = 25 \quad \Longrightarrow x^2 = 25 + 1 = 26$$
$$x^2 = 26 \quad \Longrightarrow x = \pm\sqrt{26}$$

10- مثال:

$$\log(x^2-1) - \log(x+1) = \log 2$$
$$Log\frac{x^2-1}{x+1} = \log 2$$
$$\frac{x^2-1}{x+1} = 2 \;\Longrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = 2 \quad \Longrightarrow x - 1 = 2\;,\;\; x = 3$$

11- مثال:

$$x^{\log_{10} x} = 10$$
$$\log x^{\log_{10} x} = \log 10$$
$$\log_{10} x \log_{10} x = 1 \quad \Longrightarrow \log^2{}_{10} x = 1 \quad \Longrightarrow x = 10$$

12- مثال:

$$\log_3(x+1) - \log_3(x-1) = 1$$
$$\frac{x+1}{x-1} = 3^1 \quad \Rightarrow x+1 = 3(x-1) \quad \Rightarrow x+1 = 3x-3$$
$$x - 3x = -3 - 1 \quad \Rightarrow -2x = -4 \quad \Rightarrow \frac{-2x}{-2} = \frac{-4}{-2} \Rightarrow x = 2$$

13- مثال:

$$\log_4(3x-3) = \log_2 3$$
$$\log_{2^2}(3x-3) = \log_2 3$$
$$\frac{1}{2}\log_2(3x-3) = \log_2 3$$
$$\log_2(3x-3)^{\frac{1}{2}} = \log_2 3$$
$$\sqrt{3x-3} = 3 \quad \Rightarrow \sqrt{(3x-3)}^2 = 3^2$$
$$3x - 3 = 9 \quad \Rightarrow 3x = 9 + 3 = 12 \Rightarrow\Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \Rightarrow x = 4$$

14- مثال:

$$\log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) = \log_2 4$$
$$\log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) = \log_2 2^2 \Rightarrow \log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2\log_2 2 = 2 \times 1 = 2$$
$$\log_3\left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2 \quad \Rightarrow 2 + \frac{1}{x} = 3^2 = 9 \Rightarrow \frac{1}{x} = 9 - 2 = 7$$
$$\frac{1}{x} = 7 \Rightarrow 7x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{7}$$

15- مثال:

$$\log\sqrt{x} + \log x^{\frac{3}{2}} = \log 100$$
$$\log\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3} = \log 100 \Rightarrow \log\sqrt{x\cdot x^3} = \log 100$$
$$x^2 = 10^2 \Rightarrow x = 10$$

16- مثال:

$$\log_{(x^2-x+4)}(x^2 + 5x - 1) = 1$$
$$x^2 + 5x - 1 = x^2 - x + 4 \quad \Rightarrow 5x - 1 = -x + 4$$
$$\Rightarrow 6x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

17- مثال:

$log_9 3 \cdot log_2 x = 1$

$log_{3^2} 3 \cdot log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} log_3 3 \cdot log_2 x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot log_2 x$

$= log_2 x^{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2 = \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$

x^(1/2)=2^1⟹x^(1/2)=2⟹(x^(1/2) )^2=2^2⟹ x=4

18- مثال:

$log_3 log_2(x-1) = 2$

$log_2(x-1) = 3^2 \Longrightarrow x - 1 = 2^9 \Longrightarrow x = 2^9 + 1$

$= 513 \Longrightarrow x = 513$

19- مثال:

$log_{10} x = \frac{log_3 12}{log_3 10}$

$log_{10} x = log_{10} 12$

$x = 12$

20- مثال:

$3^{log_4 16} = 27^x$

$3^{log_4 16} = 3^{3x}$

$log_4 16 = 3x \Longrightarrow 16 = 4^{3x} \Longrightarrow 2^4 = 2^{6x} \Longrightarrow 6x = 4 \Longrightarrow x = \frac{4}{6}$

$$x = \frac{2}{3}$$

تمرين:

لاندې معادلې حل کړئ؟

1) $x \log 3 - 1 = 2 \log 3 - \log\left(\frac{x}{3} + 1\right)$

2) $\log \sqrt{2x^2} - 1 = \frac{1}{2}$

3) $\log(x-3) = 1 - \log x$

4) $ln(y+1) = ln(y-7) + ln 4$

5) $log_2 x + log_x 2 = 2$

6) $\log_2 x + \log_3 x = 1$

7) $\log_3 x + \log_5 x = \log_{10} 15$

8) $\log^2{}_2(x-1)^2 - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 5$

9) $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = -3 \\ \log_{10} x^3 - \log_{10} y^2 = 7 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^y + 5x = -4 \\ \log_x 16 = y \end{cases}$

11) $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0 \\ x^2 - 4y^2 + 4 = 0 \end{cases}$

# لسم فصل

## توابع

تابع په لغت کې پیرو ته وایي.

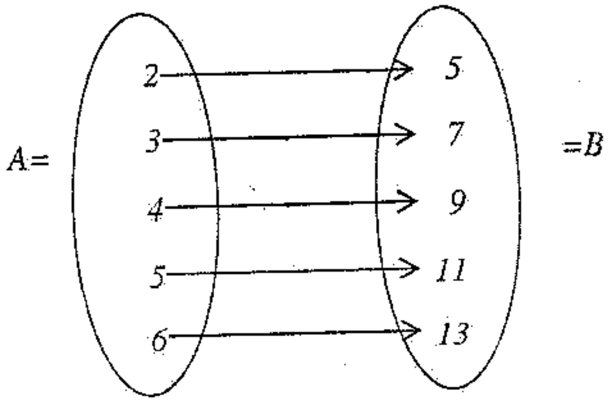
او په اصطلاح کې که د $(A)$ او $(B)$ دوه داسې سیټونه ولروچه د $(A)$ دسیټ هر عنصر د $(B)$ د سیټ د یوه عنصر سره تعلق ولري. دغسې تعلق یا رابطې ته تابع وایي.

لکه: $A = (2,3,4,5,6)$ او $B = (5,7,9,11,13)$

سیټونه د لاندې رابطې پیروي کوي.

$$y = 2x + 1$$

نو دغه ډول رابطې ته تابع وایي.




په تابع کې اول سیټ ته د تعریف ناحیه ،د قیمتونو سیټ اویا ډومېن$(Domain)$ وایي.

دویم سیټ ته د تصویرونو سیټ ، رنج$(Range)$ او کوډومېن$(Codomain)$ وایي.

رنج : د تعریف د ناحیې د عناصرو دتصویرونو سیټ ته رنج وایي.

کوډومېن: د دویم سیټ د ټولو عناصرو سیټ ته کوډومېن وایي.

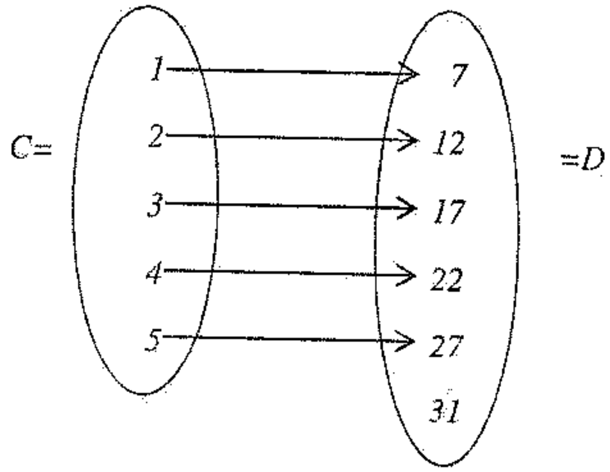
کله کله د ډومېن ټول عناصر د کوډومېن د ټولو عناصرو سره رابطه لري په دی صورت کې دویم سیټ هم رنج دی او هم کوډومېن دی.لکه پورتني سیټونه .

او که د دویم سیټ ټول عناصر د اول سیټ د عناصرو سره تعلق ونلري پدی صورت کې د دویم

سیټ هغه عناصر چه د اول سیټ د عناصرو سره تعلق لري د تصویرونو سیټ یا رنج بلل کیږي.
او د دویم سیټ ټول عناصر د کوډومېن په نوم یادیږي.

$C = (1,2,3,4,5)$

$D = (7,12,17,22,27,31)$




په دغه حالت کې د رنج او کوډومېن تر منځ لاندې رابطه موجود ده.

$Range \subseteq Codomain$

## د تابع اقسام:

تابع په دوه قسمه ده.

1- ناطقه تابع　　　2- ترانسندنتل تابع

## 1- ناطقه تابع:

خطي تابع ، دويمه درجه تابع او هوموګرافیک تابعګانی ناطقی تابعګانی دي.

$a$- خطي تابع:

هغه تابع ده چه ګراف یې مستقیم خط وي. عمومي شکل یې دا دی.

$$y = ax + b$$

$$y = mx + b$$

$(a)$ او $(b)$ ثابت عددونه دي $(x)$ متحول دی $(y)$ د $(x)$ تابع دی. $a$ او $m$ دواړه یو شی دي.

## دخطي تابع د تعريف ناحيه :

د خطي تابع د تعريف ناحيه د حقيقي اعدادو سيټ دی په $(IR)$ سره يي ښيي يعني:

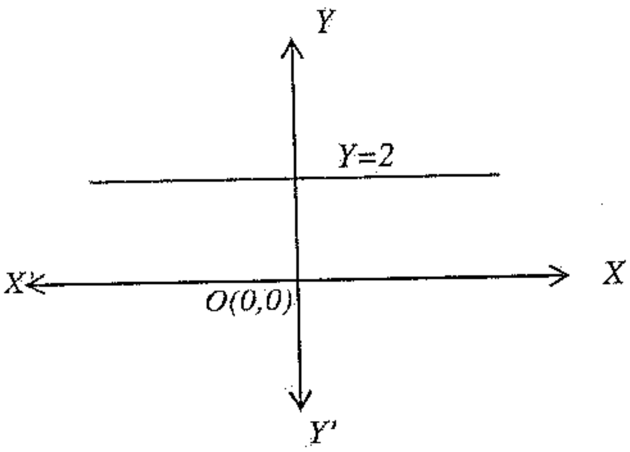
$$IR = (-\infty ، +\infty)$$

د خطي تابع میل د $(x)$ ضریب یعنی $(m)$ دی.

## خصوصي حالتونه:

1- که په يوه تابع کې $m = 0$ تابع لاندې شکل غوره کوي $(y = b)$ دی تابع ته ثابته تابع وايي.ګراف يي د $X\acute{X}$ د محورسره موازي دی.

مثال:- $Y = 2$ ګراف رسم کړئ؟




2- چه $m = 1$ او $b = 0$ وي تابع لاندې شکل غوره کوي.

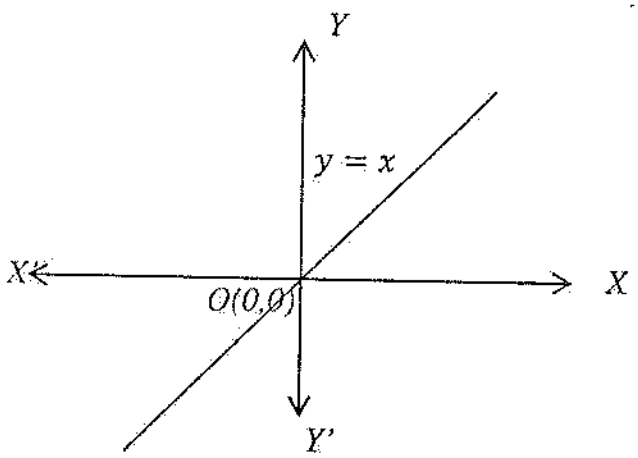
$$y = mx + b \Longrightarrow 1.x + 0 = x$$

$$y = x$$

دغې تابع ته د عینیت تابع وايي ګراف يي اوله او دريمه ربعه نيمايي کوي .

مثال:- $y = x$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

| $x$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |




دخطي تابع د عمومي شکل د ګراف ترسيم:

1- د $X\acute{X}$ محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

2- د $Y\acute{Y}$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو نو $X = 0$ فرضوو.

پيدا شوي نقطې وصلوو د راکړشوی تابع ګراف لاس ته راځي.

مثال: د $y = 3x + 6$ د تابع ګراف رسم کړئ

حل:

1- $x = 0$ فرضوو نو $y = 6$ کيږي نود $(YY')$ د محور سره د تابع د تقاطع نقطه عبارت له $A(0,6)$ څخه ده.

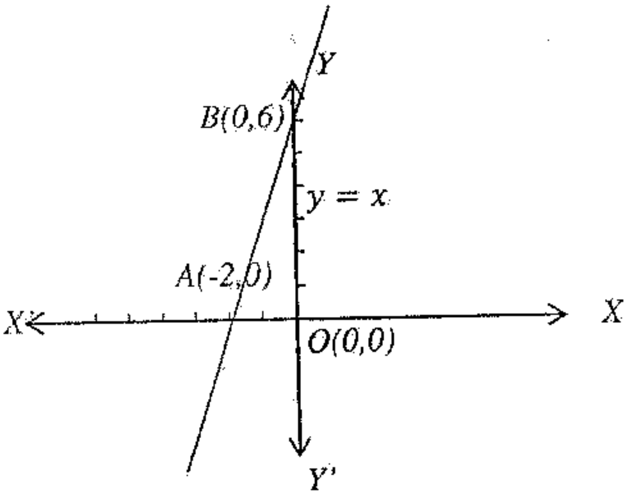
2- $y = 0$ فرضوو نو:

$$3x + 6 = 0$$

$$3x = -6 \Rightarrow \frac{3x}{3} = -\frac{6}{3} \Rightarrow x = -2$$

$$B(-2,0)$$

دا نقطه د $(XX')$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه ده د وضعيه کميتونو د محورونو په مستوي کې يې د وضعيه کميتونو د محورونو پر مخ يې پيدا کوو او و صلوو يې غوښتل شوی ګراف لاس ته راځي.

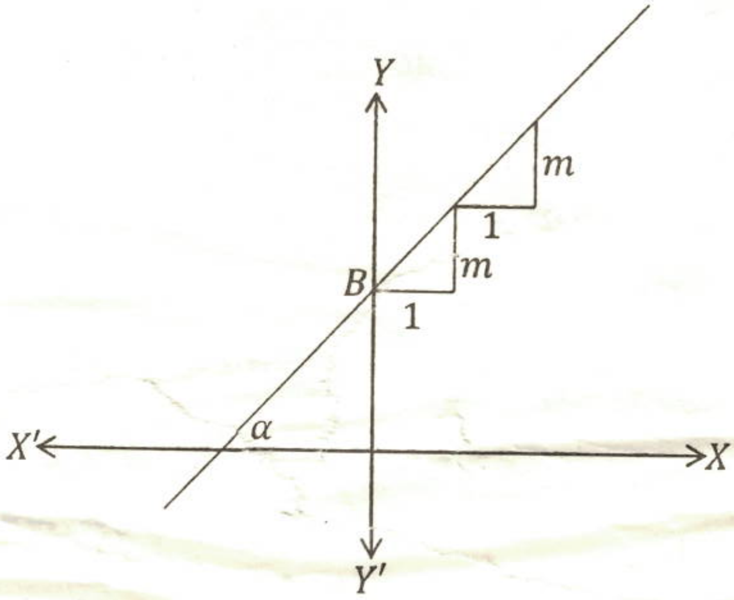



## د مستقيمي کرښي ميل:

د مستقيمي کرښې ميل د هغه زاويي تانجانت دی چه مستقيمه کرښه يي د $X\acute{X}$ د محور سره جوړوي.

په عمومي صورت د متحول ضريب د مستقيمي کرښې ميل دی.ددی خبری دثبوت لپاره د وضعيه کميتونو په مستوي کې د وضعيه کميتونو محورونه د $(\Delta)$د مستقيم پواسطه قطع کوو چه د $Y\acute{Y}$ محور د $B$ په نقطه کې قطع کړي او $X\acute{X}$ د محور سره د $(\alpha)$ په اندازه زاويه جوړه کړي بيا د $X\acute{X}$او $Y\acute{Y}$ د محورونو سره موازي خطونه رسموو په افقي خطو باندی د واحد په اندازه او په عمودي محورو باندی د $(m)$ په اندازه توټې را بېلو او د $(\alpha)$ د زاويې تانجانت پيدا کوو چه همدغه تانجانت د مستقيمی کرښی ميل دی. $\alpha$

$$tan\,\alpha = \frac{m}{1} = m$$



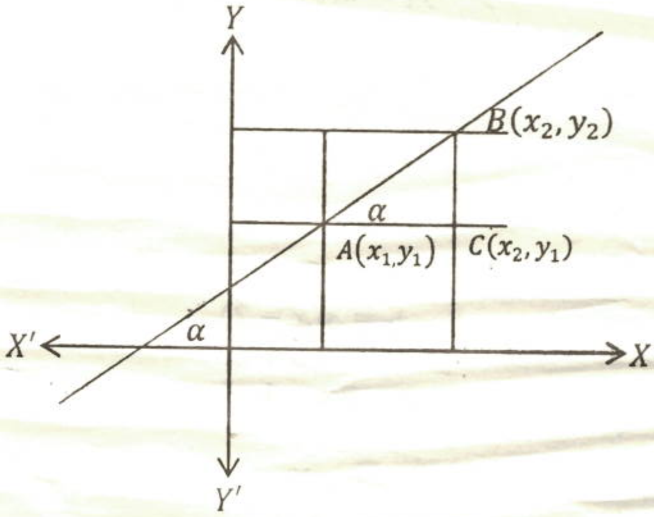

دمېل معادله

فرضاً د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ نقطې د مستقیمې دوه نقطې دي

د $(A)$ او $(B)$ د نقطو څخه د $X\acute{X}$ او $Y\acute{Y}$ د محورو سره موازي خطونه رسموو چه یو

او $B(X_2, Y_2)$ بل د $C(x_1, y_2)$ په نقطه کې قطع کړي د $ABC$

په مثلث کې د $\alpha$ دزاويي تانجانت پيدا کوو.



$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\tan\alpha = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال: $A(5,9)$ او $B(-2,-5)$ دیوی مستقیمی کربنې دوه نقطې دي مېل يې پيدا کړئ؟

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5-9}{-2-5} = \frac{-14}{-7} = 2 \Rightarrow m = 2$$

د هغه مستقيمې کربنې معادله چه مېل او يوه نقطه يې معلومه وي:

د مستقيمې کربنې عمومي معادله ليکو.

$$y = mx + b \dots 1$$

فرضاً $A(x_1, y_1)$ د يوې مستقيمې کربنې يوه نقطه ده په عمومي معادله کې يې وضع کوو.

$$y_1 = mx_1 + b \cdots 2$$

(2) رابطه د (1) رابطې څخه منفي کوو.

$$\begin{array}{r} y = mx + b \\ \pm y_1 = \pm mx_1 \pm b \\ \hline y - y_1 = mx - mx_1 \end{array}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال: د هغه مستقيمې کربنې معادله پيدا کړئ چه $m = 3$ وي او د $A(2,5)$ د نقطې څخه تېره شي؟

حل:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 5 = 3(x - 2)$$
$$y = 3x - 6 + 5$$
$$y = 3x - 1$$

د هغه مستقیمی کرښی د معادلی پیدا کول چه دوه نقطی یي معلومی وي:

د هغه مستقیمی کرښی معادله لیکو چه میل او یوه نقطه یي معلومه وي

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

د $(m)$ په عوض یي قیمت لیکو:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

مثال: د هغه مستقیمی کرښی معادله پیدا کړئ چه دوه نقطی یي $A(-4,14)$ او $B(4,8)$ وي.

حل:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 14 = \frac{8 - 14}{4 - (-4)}\{x - (-4)\}$$

$$y = \frac{-6}{4 + 4}(x + 4) + 14$$

$$y = \frac{-6}{8}(x + 4) + 14$$

$$y = -\frac{3}{4}(x + 4) + 14 = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{4} \cdot 4 + 14 = -\frac{3}{4}x - 3 + 14$$

$$= -\frac{3}{4}x + 8$$

## محوري معادله

محوري معادله هغه معادله ده چه د محورونو سره یي د تقاطع نقطی معلومی وي.

معادله یي په لاندي ډول ده.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ثبوت: فرضاً د $X\acute{X}$ د محور سره یي د تقاطع نقطه $A(a,0)$ ده او د $Y\acute{Y}$ سره یي د تقاطع نقطه $B(0,b)$ ده دا نقطی په هغه معادله کي وضع کوو چه دوه نقطی یي معلومی وي

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{b-0}{0-a}(x-a)$$

$$y=\frac{b}{-a}(x-a)$$

$$-ay=bx-ab$$

$$-bx-ay=-ab$$

$$\frac{-bx}{-ab}-\frac{ay}{-ab}=\frac{-ab}{-ab}$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

مثال: د یوی مستقیمی کرښی دوه نقطی $A(5,0)$ او $B(0,10)$ دي معادله یي پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{10}=1$$

$$\frac{2x+y}{10}=1$$

$$y=-2x+10$$

تمرین:

1- په لاندي ډول د کرښو نقطی را کړ شویدي میل یي پیدا کړئ؟

1- $A(3,5)$ , $B(4,-11)$ 2- $C(9,3)$ , $D(2,7)$
3- $E(9,3)$ , $F(3,-5)$

2- په لاندي ډول د مستقیمی کرښی یوه نقطه او میل را کړشوی دي معادله یي پیدا کړئ؟

1- $A(5,4)$ , $m=4$ 2- $B(5,8)$ , $m=2$

3- $C(-3,7)$ , $m=\frac{1}{2}$

3- په لاندي ډول د مستقیمی کرښی دوه نقطی را کړ شویدي معادله یي پیدا کړئ؟

1: $A(3,4)$ , $B(6,2)$ 2: $C(8,12)$ , $D(4,-7)$
3: $E(2,-1)$ , $F(3,-4)$

4- په لاندي ډول د محورونوسره د مستقیمی کرښی د تقاطع نقطی راکړشویدي محوري معادلی یې پیدا کړئ؟

1- $A(4,0)$ , $B(0,8)$ 2- $C(3,0)$ , $D(0,12)$
3- $E(8,0)$ , $F(0,24)$

جفته تابع :

که یوه تابع د او لپاره یو شان وي دی تابع ته جفته تابع وایي. لکه $y = x^2$ چې

$$f(x) = x^2$$
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

یعنی:

$$f(x) = f(-x)$$

طاقه تابع :

هغه تابع ده چه او لپاره یو شان نه وي. لکه $y = x^2 + 5x$ چه د $(x)$ او لپاره یو شان نه ده یعني د $(x)$ لپاره $f(x) = x^2 + 5x$ او د $(-x)$ لپاره $f(-x) = x^2 - 5x$ ده نو $f(x) \neq f(-x)$ نو دغه تابع طاق تابع ده.

معکوسه تابع:

دوه تابعګانی هغه وخت یو د بل معکوسی دي چه د یوی ډومېن دبلی کوډومېن وي او کوډومېن دبلی تابع ډومېن وي.

د معکوسې تابع جوړول:

د تابع څخه د $(x)$ قیمت د $(y)$ له جنسه پیداکوو اوبیا د $(x)$ او $(y)$ ځایونه بدلوو معکوسه تابع لاس ته راځي.

مثال: د $y = 3x - 7$ معکوسه تابع پیدا کړئ.

حل:

$$3x - 7 = y$$
$$3x = y + 7$$
$$x = \frac{y + 7}{3}$$
$$y = \frac{x + 7}{3}$$

## مرکبه تابع:

هغه تابع ده چه متحول یې د بل متحول تابع وي یا دا چه د تابع ،تابع ته مرکبه تابع وایي.

که وغواړو چه د دوه تابعګانو څخه مرکبه تابع جوړه کړو نو یوه تابع په بله تابع کې د متحول په عوض وضع کوو.مرکبه تابع لاس ته راځي اوداسی لیکل کیږي.

$$fog$$

مثال: $f(x) = 3x - 5$ او $g(x) = 3x^2 - 1$ دوه تابعګانی راکړشویدي $fog$ او $gof$ پیدا کړئ؟

$$fog = f\{g(x)\} = f(3x^2 - 1) = 3(3x^2 - 1) - 5 = 9x^2 - 3 - 5 = 9x^2 - 8$$

$$fog = 9x^2 - 8$$

$$gof = g\{f(x)\} = g(3x - 5) = 3(3x^2 - 1)^2 - 5 = 3(9x^2 - 6x + 1) - 5$$
$$= 27x^2 - 18x + 1 - 5$$

$$gof = 27x^2 - 18x - 4$$

## د مرکبې تابع د تعریف ناحیه

د مرکبې تابع د تعریف ناحیه د اولی تابع د تعریف د ناحیي د هغه عناصرو سیټ دی چه په مرکبه تابع کې تصویر ولري.

مثال: $f(x) = \sqrt{4x - 1}$ او $h(x) = x^2 + \frac{1}{4}$ دوه تابعګانې لرو چې $domf(x) = \left[\frac{1}{3}, \infty\right]$ او $domh(x) = IR$ دی، $hof$ او $foh$ او ډومېنونه یې پیدا کړئ؟

حل:

$$hof = h\{f(x)\} = h\left(\sqrt{4x - 1}\right) = \left(\sqrt{4x - 1}\right)^2 + \frac{1}{4} = 4x - 1 + \frac{1}{4} = 4x - \frac{3}{4}$$

$$hof = 4x - \frac{3}{4} \qquad ; \; domh\{f(x)\} = \left[\frac{1}{3}, \infty\right[$$

$$foh = f\{h(x)\} = f\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) = \sqrt{4\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) - 1} = \sqrt{4x^2 + 4 \times \frac{1}{4} - 1}$$

$$= \sqrt{4x^2 + 1 - 1}$$

$$foh = 2x \quad ; \quad domf\{h(x)\} = IR$$

تمرین:

د لاندې تابعګانو معکوسې تابعګانې پیدا کړئ؟

$1\text{-}\ y = 4x - 3$ $\qquad 2\text{-}\ y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{12}$

$3\text{-}\ y = x - \frac{1}{2}$ $\qquad 4\text{-}\ y = 5x - 8$

د لاندې تابعګانو ترکیب او ډومېنونه پیدا کړئ؟

$1\text{-}\ f(x) = 3x - 4\ ,\ g(x) = \sqrt{3x^2 + 4}$

$2\text{-}\ f(x) = x^2 + 1\ ,\ h(x) = \sqrt{x}$

## پولینومي تابعګانې

څو شاخه اي تابعګانو ته پولینومي تابع وايي.لکه

$$y = \begin{cases} x + 1 & : \ x < -2 \\ x + 3 & : \ x > 2 \\ x - 1 & : \ x < 1 \end{cases}$$

حل:

$$y = x + 3 \qquad : x > 2$$

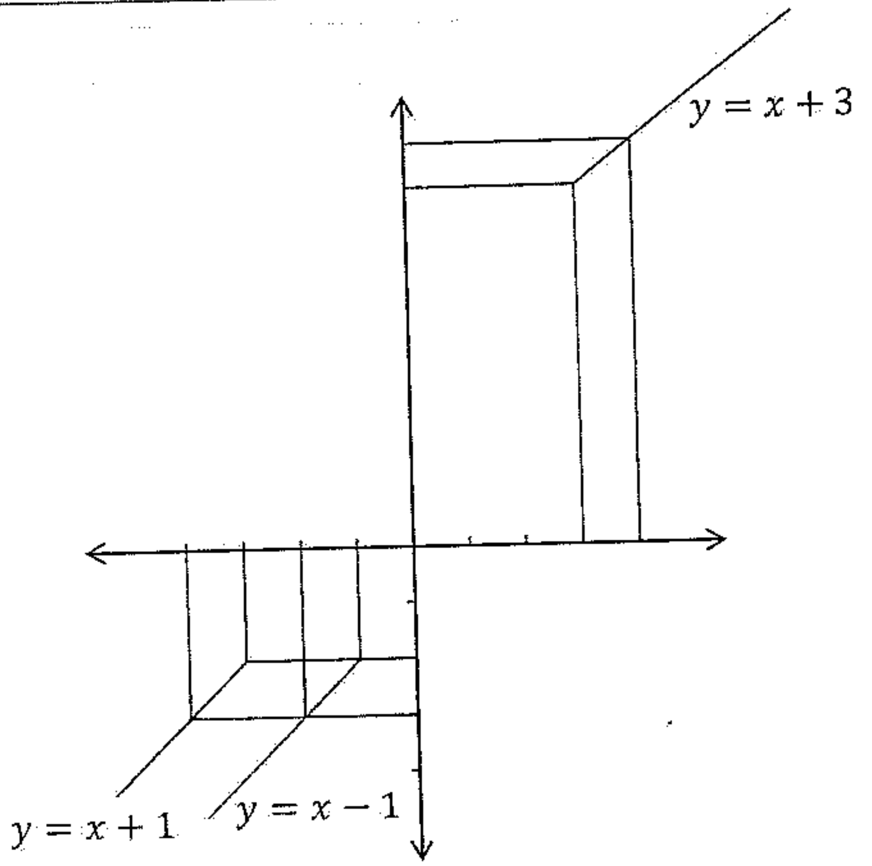
| $x$ | 3 | 4 |
|---|---|---|
| $y$ | 6 | 7 |

$$y = x + 1 \quad : x < -2$$

| $x$ | $-4$ | $-3$ |
|---|---|---|
| $y$ | $-3$ | $-2$ |

$$y = x - 1 \quad : x < 1$$

| $x$ | $-2$ | $-1$ |
|---|---|---|
| $y$ | $-3$ | $-2$ |




تمرين

د لاندې تابعګانو ګرافونه رسم کړئ؟

$$1\text{-}\ y = \begin{cases} x+2 & : \ x > 3 \\ x-2 & : x < 3 \end{cases}$$

$$2\text{-}\ y = \begin{cases} x-1 & : \ x > 2 \\ x+1 & : \ x < 2 \\ x+2 & : \ x > 5 \end{cases}$$

$$3\text{-}\ y = \begin{cases} x+4 & : \ x < 2 \\ x-1 & : x > 0 \end{cases}$$

$$4\text{-}\ y = \begin{cases} \frac{x+2}{3} & : \ x < 6 \\ \frac{x-2}{4} & : \ x > 6 \end{cases}$$

$$5\text{-}\ y = \begin{cases} x+4 & " \ \ x < 3 \\ x-4 & " \ \ x > 3 \end{cases}$$

# يوولسم فصل

## دويمه درجه تابع

دويمه درجه تابع هغه تابع ده چه د متحول درجه يې دوه وي.

عمومي شکل يې دا دی.

$$\begin{pmatrix} y = ax^2 + bx + c \\ a \neq 0 \end{pmatrix}$$

$a$، $b$ او $c$ ثابت عددونه دي او $(x)$ متحول دی او $(y)$ د $(x)$ تابع دی.

د دويمه درجه تابع د تعريف ناحيه:

د دويمه درجه تابع د تعريف ناحيه د حقيقي اعدادو سيټ دی او په $IR$ سره يې ښيي. د تعريف ناحيې ته د قيمتونوسيټ او ډومېن $(Domain)$ هم وايي.

د دويمه درجه تابع ګراف:

د دويمه درجه تابع ګراف ته پارابول وايي.

که په دويمه درجه تابع کې $a > 0$ وي تابع ګراف اصغري نقطه لري اود پارابول خوله پورته خواته خلاصيږي. او که $a < 0$ وي نو پارابول اعظمي نقطه لري او د پارابول خوله کښته خواته خلاصيږي.

اعظمي او اصغري نقطو ته د پارابول راس $(Vertex)$ وايي.

د دويمه درجه تابع د ګراف ترسيم:

د دويمه درجه تابع د ګراف ترسيم په درې حالته کې مطالعه کوو.

1- د $y = ax^2$ د تابع د ګراف ترسيم

2- د $y = ax^2 + c$ د تابع د ګراف ترسيم

3- د $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = ax^2 + bx \end{cases}$ د تابع ګراف رسم کړئ

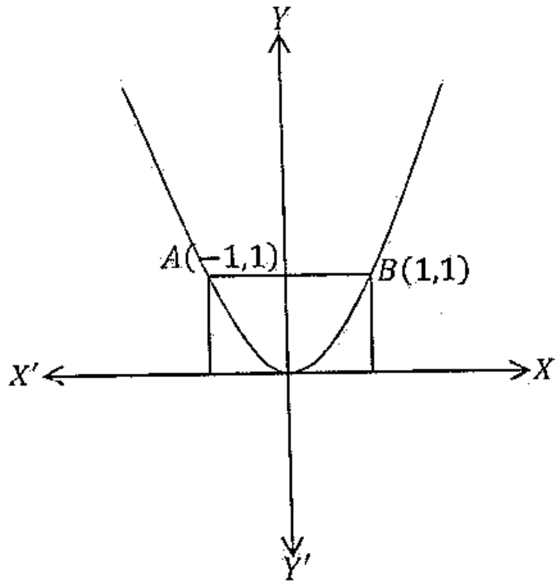
1- د $y = ax^2$ د تابع د ګراف ترسیم:

$x$ ته څو قیمتونه ورکوو او د $(y)$ قیمتونه پیدا کوو. بیا د تابع د ګراف وضعیت په یوه جدول کې مطالعه کوو.

مثال:- د $y = x^2$ ګراف رسم کړئ؟

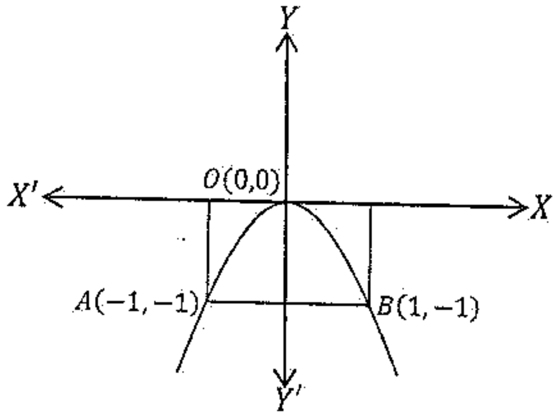
$x$ ته څو قیمتونه ورکوو او د $y$ قیمتونه پیدا کوو. او د تابع وضعیت په یوه جدول کې مطالعه کوو:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |



مثال:- د $y = -x^2$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

| $x$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |




نوټ:

که $(a < 1)$وي نو د تابع ګراف پلن او سورور وي او که $(a > 1)$ وي نو د تابع ګراف نري او کم سوری وي.

تمرین:

لاندې ګرافونه رسم کړئ؟

1- $y = 3x^2$ 2- $y = 2x^2$ 3- $y = -4x^2$

4- $y = \frac{1}{2}x^2$ 5- $-\frac{2}{3}x^2$

## د ګراف انتقال:

د $(X\acute{X})$ او $(Y\acute{Y})$ په محورو باندې د تابع د ګراف حرکت ته د تابع دګراف انتقال وایي.

1- د $(X\acute{X})$ پر محور باندې د تابع د ګراف انتقال :

که وغواړو چه د $(X\acute{X})$ پر محور باندې د تابع ګراف ته انتقال ورکړو نو مطلوب عدد د تابع سره جمع یا تفریقوو او ګراف یې رسموو.

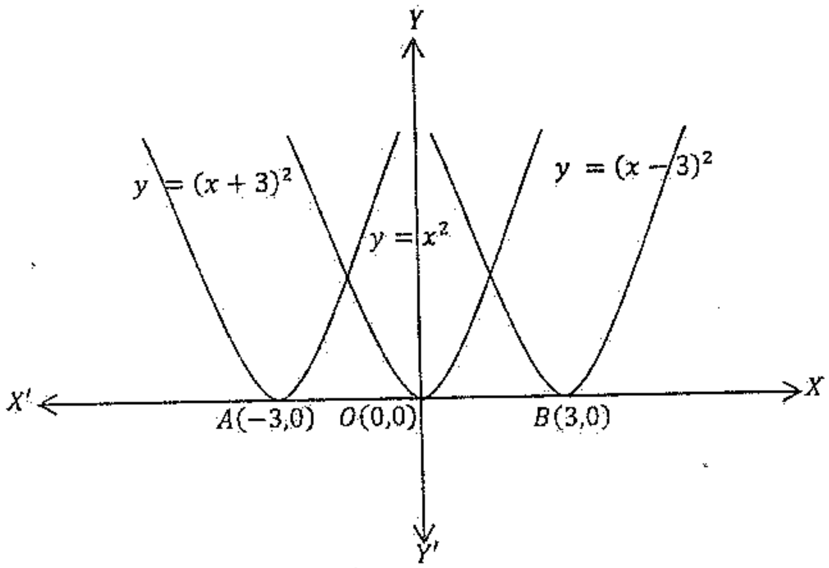
مثال:- د $y = x^2$ د تابع ګراف ته د (3) په اندازه چپې او ښې خواته انتقال ورکړئ؟

حل: چپې خواته د 3 په اندازه انتقال ورکوو نو 3 ورسره جمع کوو.

$$y = (x+3)^2$$
$$x + 3 = 0$$
$$x = -3$$
$$A(-3,0)$$

ښي خواته د انتقال لپاره (3) د متحول څخه منفي کوو:

$$y = (x-3)^2$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$




2- د $YY'$ په محور باندې د تابع د ګراف انتقال:

که وغواړو چه د $y = x^2$ د تابع ګراف ته د $(y\acute{y})$ په محور باندې انتقال ورکړو نو مطلوب عدد د تابع سره جمع یا تفریقوو.

مثال:- د $y = x^2$ د تابع ګراف ته د (2) په اندازه پورته او کښته خواته انتقال ورکړئ؟

حل:

که وغواړو چه (2) په اندازه ګراف ته پورته خواته انتقال ورکړو نو (2) د تابع سره جمع کوو.

$$y = x^2 + 2$$

... د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $y = 0$ فرضوو.

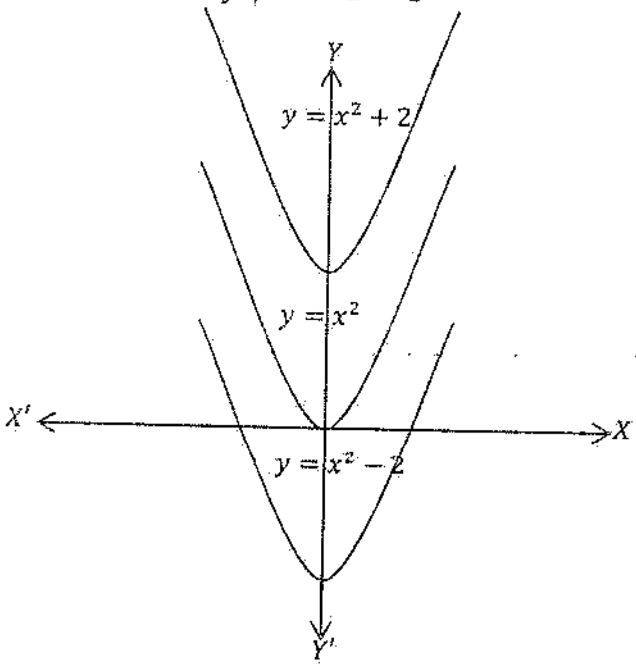
$$x^2 + 2 = 0$$
$$x^2 = -2$$

څرنګه چه منفي عدد جذر نه لري نو د تابع ګراف د $(X\acute{X})$ محور نه قطع کوي.

د ګراف د ښه ترسیم لپاره $(x)$ ته څو قیمتونه ورکوو او د $(y)$ قیمتونه پیدا کوو

2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو په نتیجه کې $y = 2$ کیږي چه د $Y\acute{Y}$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه $A(0,2)$ ده.

| $x$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $3$ | $2$ | $3$ |




تمرین:

لاندې تابعګانې رسم کړئ؟

1- د $y = 2x^2$ تابع ګراف ته د $(3)$ په اندازه ښي او چپې خواته انتقال ورکړئ؟

2- د $y = 3x^2$ تابع ګراف ته د $\left(\frac{3}{2}\right)$ په اندازه کښته او پورته خواته انتقال ورکړئ؟

2- د $y = ax^2 + c$ د تابع د ګراف ترسیم:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع دګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو د تقاطع نقطې یې عبارت دي.

$$A\left(+\sqrt{\frac{-c}{a}}, 0\right)$$

$$B\left(-\sqrt{\frac{-C}{A}}, 0\right)$$

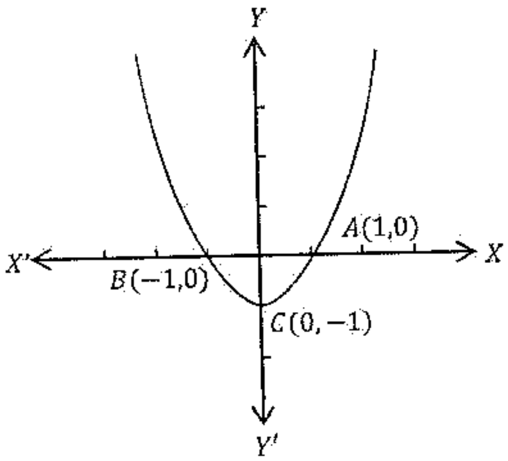
2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $x = 0$ فرضوو د تقاطع نقطه یې عبارت ده له $M(0, C)$ دغه نقطه د تابع د ګراف راس هم دی.

د $(A)$ نقطه د $(C)$سره او د $(C)$ نقطه د $(B)$ سره وصلوو د تابع ګراف لاس ته راځي.

مثال: د $y = x^2 - 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

1- د $(X\acute{X})$ دمحور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$x^2 - 1 = 0$$
$$x^2 = 1$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -1$$



د $xx'$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطې عبارت دي:

$$A(1,0) \qquad B(-1,0)$$

2- د $(Y\acute{Y})$ دمحور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو. چې $y = -1$ کیږي.نو د $(Y\acute{Y})$ سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده له $C(0,-1)$ څخه

مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$x^2 + 1 = 0$$
$$x^2 = -1$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$$

څرنګه چه منفي عدد جذر نه لري نو د تابع ګراف د $xx'$ د محور سره د تقاطع نقطه نلري.

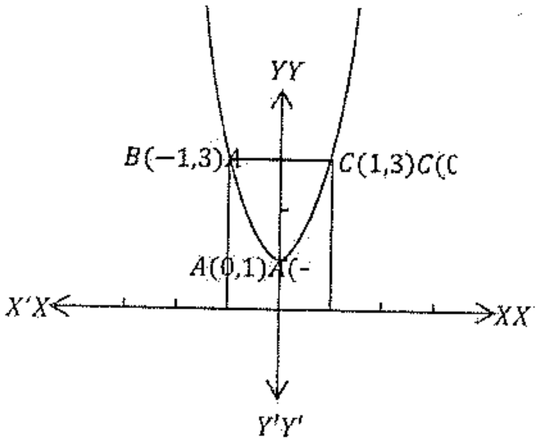
د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو نو د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده.

$$A(0,1)$$

د ګراف د دقیق ترسیم لپاره $(x)$ ته څو قیمتونه ورکوو او د $(y)$ قیمت پیدا کوو.

| $x$ | $-1$ | $0$ | $+1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $2$ | $0$ | $2$ |

$B(-1,2) \qquad O(0,1) \qquad C(1,2)$



مثال: د $y = -x^2 + 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

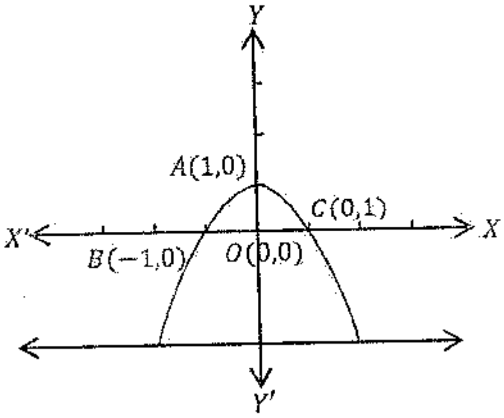
حل:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$-x^2 + 1 = 0$$
$$-x^2 = -1$$
$$x^2 = 1$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -1$$
$$A(1,0) \qquad B(-1,0)$$

2- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو. نو $y = 1$ کیږي د تقاطع نقطه يي عبارت ده.

$$C(0,1)$$




مثال: د $y = -x^2 - 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$-x^2 - 1 = 0$$
$$-x^2 = 1$$
$$x^2 = -1$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$$

ځرنګه چه منفي عدد جذر نلري نو د تابع ګراف د $(X\acute{X})$ محور نه قطع کوي.

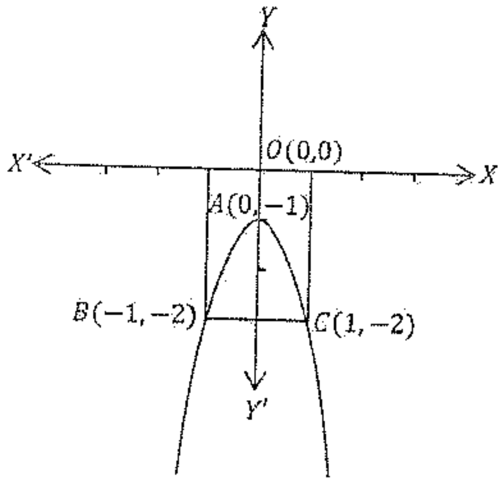
2- د $Y\acute{Y}$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو نو $y = -1$ نو د $X$ د محور سره د تقاطع نقطه عبارت ده.

$$A(0,-1)$$

د ګراف د دقیق ترسیم لپاره $(x)$ ته ځو قیمتونه ورکوو او د $(y)$ قیمت پیدا کوو.

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $-2$ | $-1$ | $-2$ |

$B(-1,-2)$ $\quad O(0,0)$ $\quad C(1,-2)$




3- د $\begin{cases} y = ax^2 + bx \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ د تابعګانو د ترسیم طریقه:

1- د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $(y = 0)$ فرضوو. په نتیجه کې $ax^2 + bx + c = 0$ دویمه درجه معادله لاس ته راځي . د دغه معادلې د حل لپاره د $(\Delta)$ قیمت پیدا کوو د $(\Delta)$ په باب دری حالته موجود دي.

a- که $\Delta > 0$ وي نو معادله دوه جذره لري او جذرونه یې د $x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ پواسطه پیدا کیږي او د تقاطع نقطې یې عبارت دي له: $A(X_1,0)$ او $B(X_2,0)$

b- که $(\Delta = 0)$ وي معادله یو جذر لري او د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي $x = \frac{-b}{a}$ نو د تقاطع نقطه یې عبارت ده له: $A(x,0)$

c- که $(\Delta = 0)$ وي معادله جذر نه لري نو د تابع ګراف د $(X\acute{X})$ محور نه قطع کوي.په دغه حالت کې د پاره ددې چه د $(Y\acute{Y})$ د محور يوی او بلی خواته دګراف خط السير تعين شي نو $(x)$ ته يو منفي او يو مثبت قيمت ورکوو اود $(y)$ قيمتونه پيدا کوو د $(Y\acute{Y})$ د محور يوی او بلی خواته دوه نقطې لاس ته راځي چه د تابع د ګراف خط السير تعينوي.

2- د $(Y\acute{Y})$ دمحورسره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوونو $x = 0$ فرضوود $(Y\acute{Y})$ د محورسره دتابع دګراف دتقاطع نقطه عبارت ده له: $M(0, c)$

3- د تابع د ګراف د راس نقطه

$$y = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$y = a\left\{x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right\}$$

$$y = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right\}$$

$$y = a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right\}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

که $a > 0$ وي

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0 \quad \therefore \quad a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} > -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y > -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

که $x + \frac{b}{2a} = 0$ شي نو $x = -\frac{b}{2a}$ کيږي.نو د راس نقطه عبارت ده.

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

که $a > 0$ وي بیا هم $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 > 0$ کیږي مګر $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 < 0$ کیږي. دواړه خواو ته $\frac{4ac-b^2}{4a}$ منفي کوو:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{4ac-b^2}{4a}<-\frac{4ac-b^2}{4a}$$

$$y<-\frac{4ac-b^2}{4a}$$

که $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ او $x=\frac{-b}{2a}$ شي نو $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ کیږي. نو د راس نقطه عبارت ده.

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$$

مثال: د $y=2x^2-3x-2$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل: د $(X\acute{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د د قاطع نقطه پیدا کوو نو $y=0$ فرضوو.

$2x^2-3x-2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times(-2)=9+16=25$

$\Delta=1$

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)\pm5}{2\times2}=\frac{3\pm5}{4}$

$x_1=\frac{3+5}{4}=\frac{8}{4}=2 \qquad \therefore\ x_1=2$

$x_2=\frac{3-5}{4}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2} \qquad \therefore\ x_2=\frac{-1}{2}$

نو د محور سره دګراف د د تقاطع نقطی عبارت دي:

$$A(2,0) \qquad B\left(\frac{-1}{2},0\right)$$

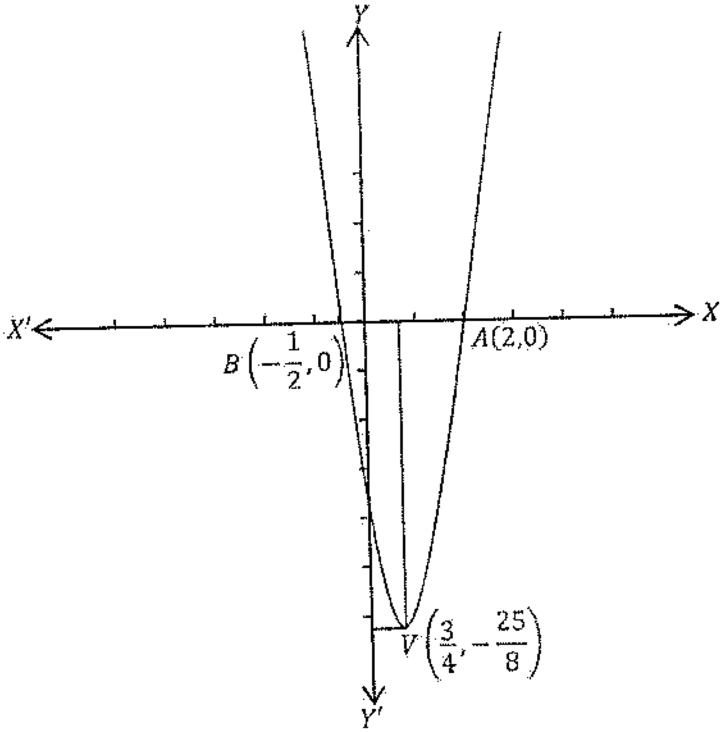
د $(X\acute{X})$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y=0$ فرضوو. نو $y=6$ کیږي. نو

د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه عبارت ده. $C(0,-2)$

د تابع د ګراف د راس نقطه پیدا کوو.

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{3}{4},\frac{4\times 2\times(-2)-(-3)^2}{4\times 2}=\frac{-16-9}{8}=-\frac{25}{8}\right)$$

$$V\left(\frac{3}{4},-\frac{25}{8}\right)$$

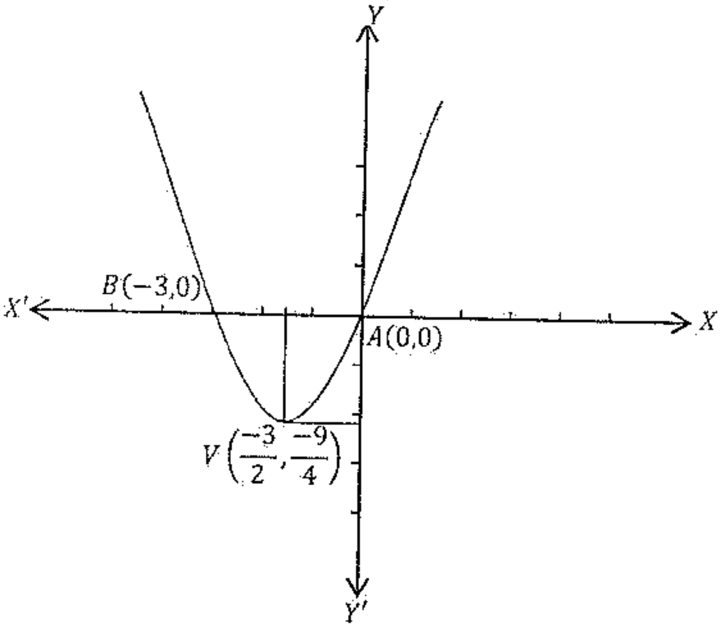



مثال: $y=x^2+3x$ گراف رسم کړئ؟

حل:

$y=0$
$x^2+3x=0$
$x(x+3)=0$
$x_1=0$
$x_2=-3$
$A(0,0)\quad B(-3,0)$

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{-3}{2},\frac{4\times 1\times 0-3^2}{4\times 1}\right)=\left(\frac{-3}{2},\frac{-9}{4}\right)$$




مثال: $y = -x^2 + 4x - 3$ گراف رسم کړئ؟

حل:

1- $y = 0$ فرضوو نو:

$$-x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-3) = 16 - 12 = 4$$

$$\Delta = 4$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm 2}{-2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{-4+2}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \quad : \quad x_1 = 1 \qquad A(1,0)$$

$$X_2 = \frac{-4-2}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3 \quad : \quad x_2 = 3 \qquad B(3,0)$$

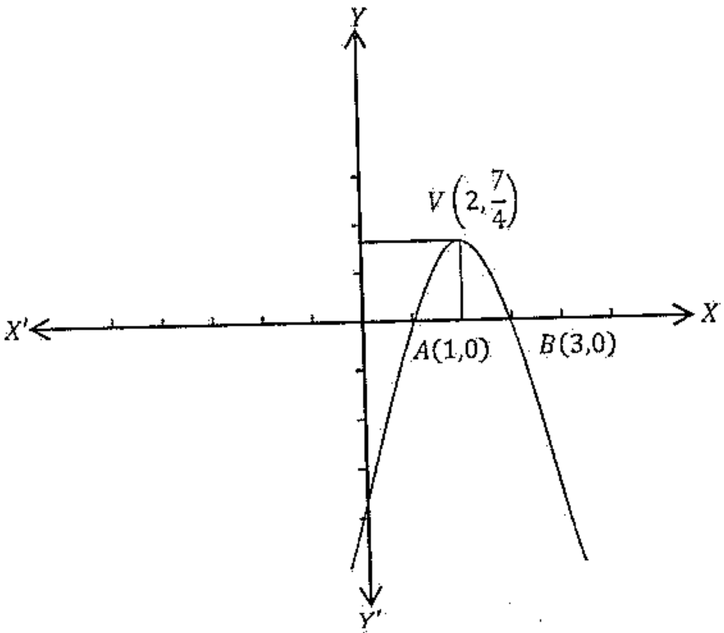
2- $x = 0$ فرضوو نو:

$$y = -3 \qquad C(0,-3)$$

اصغري او اعظمي ټکي یې پیدا کوو:

$$V\left(\frac{-b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)=\left(\frac{-4}{-2},\frac{4(-1)(-3)}{4(-1)}\right)=\left(2.\frac{7}{4}\right)$$

$$V\left(2,\frac{7}{4}\right)$$




مثال: $y = x^2 + 2x + 1$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

1- $y = 0$ فرضوو نو:

$$x^2+2x+1=0$$

$$\Delta = b^2-4ac = 2^2-4\times1\times1 = 4-4 = 0$$

$$\Delta = 0$$

معادله یو جذر لري.

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2\times1}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$A(-1,0)$$

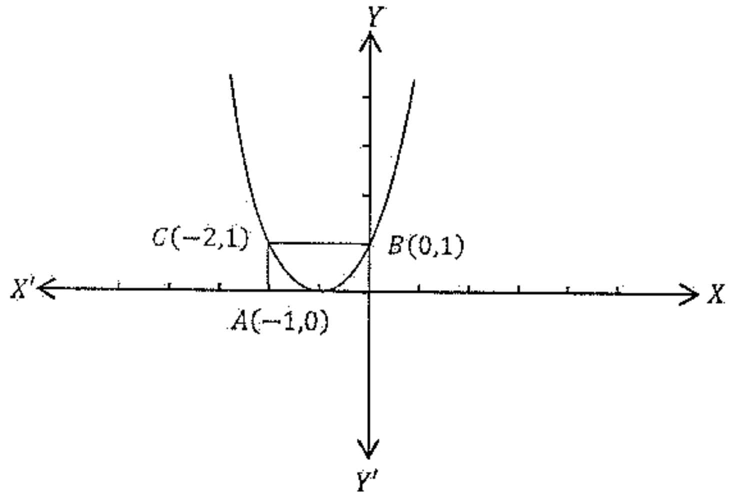
2- $x = 0$ فرضوو نو:

$$y = 1$$

$$B(0,1)$$

| $x$ | $-2$ |
|---|---|
| $y$ | $4$ |

$$C(-2,1)$$




تمرین:

د لاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ؟

1- $y = 3x^2 + 6x$

2- $5x^2 - 13x + 6$

3- $4x^2 - 4x + 1$

4- $-x^2 + 5x - 6$

5- $-2x^2 - 3x + 14$

6- $3x^2$

7- $4x^2 + 8x$

8- $6x^2 + x - 57$

9- $11x^2 - 13x - 18$

10- $2x^2 - 6x$

11- $2x^2 + x - 21$

12- $-x^2 + 4$

13- $11x^2 - 13x - 18$

14- $3x^2 - x - 10$

15- $5x^2 + 2x - 51$

16- $-9x^2 + 17x + 2$

## هوموګرافيک تابع

هغه تابع ده چه د بهنومو د نسبت څخه جوړه شوې وي. عمومي شکل يې دا دې.

$$f(x)=\frac{ax+b}{\acute{a}x+\acute{b}}$$ زوړ نصاب

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$ نوی نصاب

$a$، $b$، $c$ او $d$ ثابت عددونه دي $(x)$ متحول دی او $(y)$ د $(x)$ تابع دی.

مجانب $Asymptotes$:

كه د يو مستقيم او يوه منحني ترمنځ فاصله په لايتناهي$(\infty)$ کې صفرشي دا مستقيم د دی منحني مجانب دی.

مجانب په دری قسمه دی.

1- عمودي مجانب $Vertical\ Asymptotes$

2- افقي مجانب $Horizntil\ Asymptotes$

3- مايل مجانب $Slant\ or\ obligue\ Asymptotes$

1- عمودي مجانب:

هغه خط چه د $(x)$ په فاصله باندی د $(Y\acute{Y})$د محور سره موازي رسميږي د تابع د ګراف عمودي مجانب بلل ميږي.

د عمودي مجانب فارمول:

مخرج د صفر سره مساوي کوو د عمودي مجانب لاس ته راځي.

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$$
$$cx+d=0$$

$$cx = -d$$
$$x = \frac{-d}{c}$$

د عمودي مجانب فارمول دا دي:

$$x = \frac{-d}{c}$$

مثال:- د $g(x) = \frac{2x+3}{3x-6}$ د تابع عمودي مجانب پيدا کړئ؟

حل:

$$x = -\frac{d}{c} = -\frac{-6}{3} = 2 \Longrightarrow x = 2$$

2- افقي مجانب :

هغه خط چه د $(y)$ په ترتيب د $(Y\acute{Y})$ د محور سره موازي رسميږي د تابع د ګراف افقي مجانب دي.

د افقي مجانب فارمول:

د $F(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ په تابع کې صورت په مخرج ويشو خارج قسمت يي په $(m)$ ښيو او باقي په $(p)$ ښيو نو ليکو چه:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = m + \frac{p}{cx+d} = \frac{mcx+md+p}{cx+d}$$
$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{mcx+md+p}{cx+d}$$

مخرجونه يې مساوي دي نو صورتونه يې هم مساوي دي.

$$ax + b = mcx + md + p$$
$$a = mc \Longrightarrow m = \frac{a}{c}$$

دباقي د پيدا کولو لپاره ثابت عدد د ثابت عدد سره مساوي کوو.

$$md + p = b \Longrightarrow p = b - md = b - \frac{ad}{c} = \frac{bc-ad}{c}$$
$$p = \frac{bc-ad}{c}$$

مثال: د $h(x)=\frac{8x-3}{4x-9}$ تابع افقي مجانب او باقي مانده پيدا کړئ؟

حل:

$$m=\frac{a}{c}=\frac{8}{4}=2$$
$$m=2$$
$$p=\frac{bc-ad}{c}=\frac{-3\times 4-8(-9)}{4}=\frac{-12+72}{4}=\frac{60}{4}=15$$

3- مايل مجانب *Slant or Obligue Asymptotes*:

که د يوې تابع د صورت درجه د مخرج د درجې څخه د واحد په اندازه زياته وي دغه ډول تابعګانې مايل مجانب لري او د مجانب د معادلې د لاس ته راوړلو لپاره صورت په مخرج ويشو.

مثال: د $g(x)=\frac{6x^2-24}{x+2}$ تابع عمودي مجانب ، افقي مجانب،مايل مجانب يې پيدا کړئ؟

حل: عمودي مجانب:

$$x=\frac{-d}{c}=\frac{-2}{1}=-2$$

افقي مجانب نلري، مايل مجانب معادله يې دا ده.

$$\frac{6x^2-24}{x+2}=6x-12$$

د هوموګرافيک تابع د ګراف ترسيم:

1- عمودي مجانب پيدا کوو او رسمووېي.

2- افقي مجانب پيدا کوو او رسموو يې.

3- د $(X\acute{X})$ دمحور سره د ګراف دتقاطع نقطه پيدا کوو.

4- د $(Y\acute{Y})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو.

5- د ګراف د ښه دقيق ترسيم لپاره $(x)$ ته څو قيمتونه ورکوو او د $(y)$ قيمتونه پيدا کوو.

6- پيدا شوي نقطې دوضعيه کميتونود محورونو په مستوي کې پيدا کوو او وصلوو يې د راکړ شوې تابع ګراف لاس ته راځي.

مثال: د $f(x)=\frac{2x+4}{x-2}$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:عمودي مجانب:

$$x=-\frac{d}{c}=-\left(\frac{-2}{1}\right)=\frac{2}{1}=2$$

افقي مجانب:

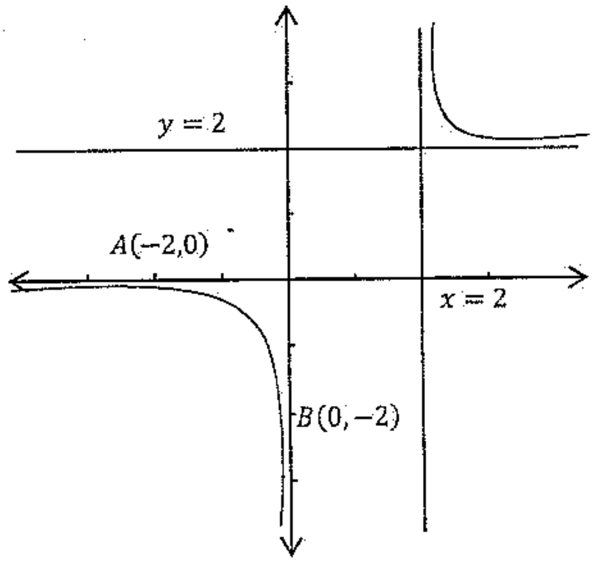
$$m=\frac{a}{c}=\frac{2}{1}=2$$

د $(X\acute{X})$ سره تقاطع پیدا کوونو $(y=0)$ فرضوو:

$$\frac{2x+4}{x-2}=0$$
$$(x-2)\left(\frac{2x+4}{x-2}\right)=0(x-2)$$
$$2x+4=0$$
$$2x=-4$$
$$\frac{2x}{2}=\frac{-4}{2}$$
$$x=-2 \qquad \therefore \quad A(-2,0)$$

د $(Y\acute{Y})$ سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوونو $x=0$ فرضوو.

نو $y=-2$ کیږي او د تقاطع نقطه یې: $B(0,-2)$




تمرين:

دلاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ

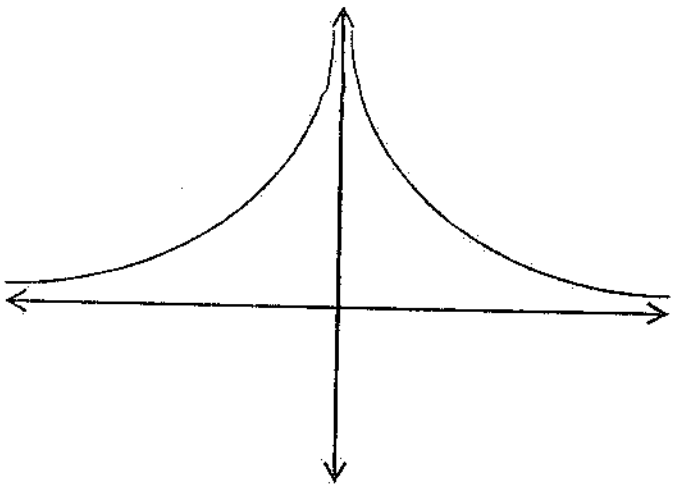
$$1: G(x)=\frac{4x-3}{2x+1} \qquad 2: F(x)=\frac{2x-6}{3x+6} \qquad 3: h(x)=\frac{3x+9}{x-6}$$

مثال: د $y=\frac{1}{x^2}$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\frac{1}{4}$ | $1$ | $1$ | $\frac{1}{4}$ |

$$A\left(-2,\frac{1}{4}\right) \quad B(-1,1) \quad C(1,1) \quad D\left(2,\frac{1}{4}\right)$$



تمرین:

د لاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ

1) $F(x) = 3x^2 + 7x - 10$
2) $g(x) = \frac{2x-3}{x+2}$
3) $h(x) = x^2 - 9$
4) $y = 6^x$
5) $y = \left(\frac{5}{3}\right)^x$

## اکسپوننشل تابع $Exponintiol\ function$:

اکسپوننشل تابع هغه تابع ده چه مجهول یې په توان کې وي. عمومي شکل یې دا دی.

$$y = a^x$$

$a$ ثابت عدد دی $(x)$ متحول دی او $(y)$ د $(x)$ تابع دی.

که $(a > 1)$ وي تابع متزایده ده او که $(a < 1)$ وي نوتابع متناقصه ده.

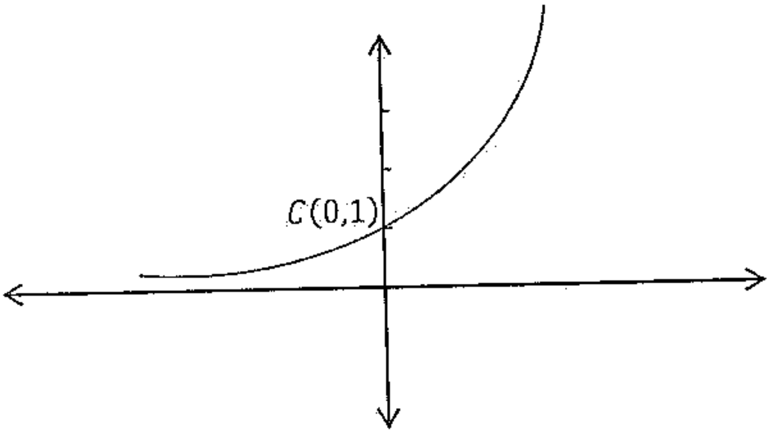
دتعریف ناحیه یې د حقیقي اعدادو سیټ دی او رنج یې د مثبت اعدادو سیټ دی. د ګراف د ترسیم لپاره یې $(x)$ ته څو قیمتونه ورکوو او د $(y)$ قیمتونه پیدا کوو. د او یوه جوړه قیمتونه د وضعیه کمیتونو په مستوي کې یوه نقطه تعینوي دا نقطې پیدا کوو او وصلوو یې د راکړشوی تابع ګراف لاس ته راځي.

مثال: $y = 2^x$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

حل:

| $x$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $4$ |

$A\left(-2,\frac{1}{4}\right)$ $\quad B\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ $\quad C(0,1)$ $\quad D(1,2)$ $\quad E(2,4)$

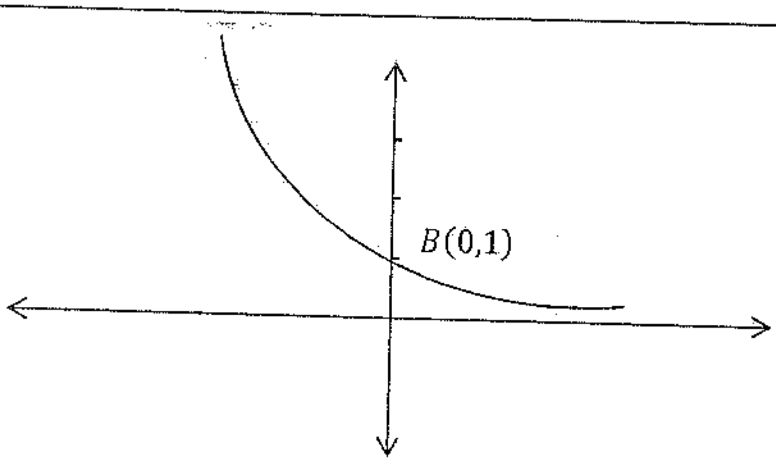



مثال: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ګراف رسم کړئ؟

حل:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $y$ | $2$ | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

$A(-1,2)$ $\quad B(0,1)$ $\quad C\left(1,\frac{1}{2}\right)$ $\quad D\left(2,\frac{1}{4}\right)$ $\quad E\left(3,\frac{1}{8}\right)$




تمرین:

د لاندې تابعګانو ګراف رسم کړئ؟

$1\text{-}\ y = 3^x$ $\quad$ $2\text{-}\ y = 5^x$ $\quad$ $3\text{-}\ y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$4\text{-}\ \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$5\text{-}\ y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ $\quad$ $6\text{-}\ y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ $\quad$ $7\text{-}\ y = 5^x$

$8\text{-}\ y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$

## لوګاریتمي تابع $Logarithmical\ functions$:

لوګاریتمي تابع د اکسپوننشل تابع معکوسه تابع ده.

د تعریف ناحیه یې د مکمل اعدادو سیټ دي او د تصویرونو سیټ یې د حقیقي اعدادو سیټ دی. ګراف یې په اوله او څلورمه ربعه کې رسمیږي.

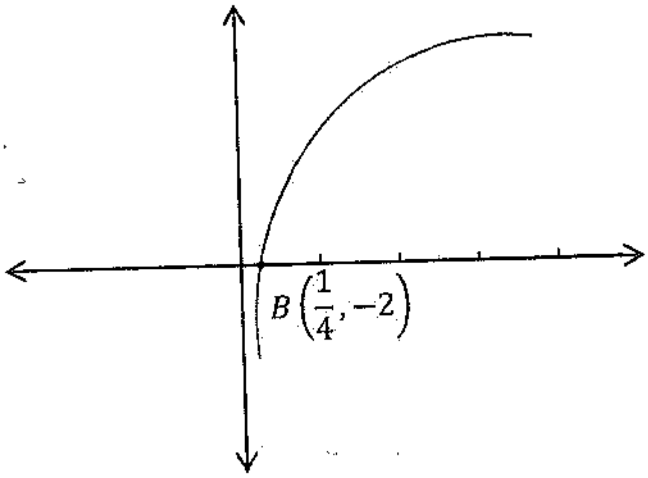
د ګراف د ترسیم لپاره $x$ ته څو قیمتونه ورکوو او د $y$ قیمت پیدا کوو.

مثال:- $\log_2 x = y$ ګراف رسم کړئ؟

| $x$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 |

| $x$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |

$A\left(\frac{1}{8},-3\right)$ $B\left(\frac{1}{4},-2\right)$ $C\left(\frac{1}{2},-1\right)$ $D(1,0)$ $E(2.1)$ $F(4,2)$




## تمرين

دلاندې تابعګانو ګرافونه رسم کړئ؟

1- $\log_3 x = y$

2- $log_2 x = y$

3- $log_4 x = y$

4- $\log_5 x = y$

5- $log_2 x = y$

6- $\log_8 x = y$

7- $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

8- $y = 3^{2x}$

9- $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

# دولسم فصل

## ردیف یا تصاعد

ردیف په لغت کې په اس یا موټرسایکل باندې یو په بل پسې سپرېدلو ته وايي.
او په اصطلاح کې د یوې قاعدې لاندې د اعدادو ترتیب ته ردیف وايي.

لکه: 2,7,12,17,22

یا لکه: 5,15,75,375,1875

که د ردیف حدونه معلوم وي معین ردیف ورته وائي. لکه:

7 , 21 , 63 ,189,567

او که د ردیف حدونه معلوم نه وي غیر معین ردیف ورته وائي. لکه:

1, 5, 9, 13, 17 ...

د غیر معین ردیف په اخر کې درې نقطې لیکي.

ردیف په درې قسمه دی.

1- حسابي ردیف *Arithmetic Sequences*

2- هندسي ردیف *Geometrical Sequences*

3- هارمونیکي ردیف *Harmonecal Sequences*

### 1- حسابي ردیف :

هغه ردیف دی چه هر وروستني حد یې د مخکیني حد سره د یوه ثابت د جمع کېدلو په نتیجه کې لاس ته راځي. او یا دا چه د دوه عددو تفاضل یې ثابت وي. لکه:

$$7, 15, 23, 31, 39$$

د حسابي ردیف فارمول:

اول حد په $(a_1)$ او مشترک تفاضل په $(d)$ او دحدونو شمېر په $(n)$ ښیو نو فارمول یې په لاندې ډول پیدا کوو.

$$a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d, a_1+4d$$

که د ضریب ته متوجه شود $(d)$ ضریب د حدو تر شمېر يو کم دې نو که د حدونو شمېر $(n)$ وي نو د $(d)$ ضریب به $(n-1)$ وي فارمول يې په لاندې ډول دی.

$$a_1\ , a_1 + d\ , a_1 + 2d\ , a_1 + 3d\ , a_1 + 4d, \dots + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

مثال: د يوه حسابي رديف اول حد $(30)$ دې مشترک تفاضل يې $(17)$ دی $(51)$ حد يې څو دی؟

$$a_1 = 30 \qquad d = 17 \qquad n = 51 \qquad a_{51} = ?$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_{51} = 30 + (51-1)17 = 30 + 50 \times 17$$
$$a_{51} = 30 + 850 = 880$$
$$a_{51} = 880$$

د $(d)$ ، $(a_1)$ او $(n)$ فارمولونه په لاندې ډول دي.

$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$
$$a_1 = a_n - (n-1)d$$
$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

مثال: ديوه حسابي رديف اول حد $(15)$ دې $(31)$ حد يې $(585)$ دې مشترک تفاضل يې پيدا کړئ؟

$$d = \frac{585 - 15}{31 - 1} = \frac{570}{30} = 19$$

تبصره: د حسابي رديف منځني حد دطرفينو اوسط دې.

مثال:- د يوه حسابي رديف $(50)$ام حد $(1973)$ دی مشترک تفاضل يې $(40)$ دی اول حد يې څو دې؟

حل:

$$a_1 = a_n - (n-1)d$$
$$a_1 = 1973 - (50-1)40 = 1973 - (49)40 = 1973 - 1960 = 13$$
$$a_1 = 13$$

مثال: د یوه حسابي ردیف اول حد (17) او اخري حدیي (2117) دی او مشترک تفاضل یي (21) دی د حدونو شمېر یي پیدا کړئ؟

حل:

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

$$n = \frac{2117 - 17}{21} + 1 = \frac{2100}{21} + 1 = 100 + 1 = 101$$

$$n = 101$$

## حسابي ردیف ته د حدونو داخلول

د حدونو د داخلولو لپاره مشترک تفاضل پیدا کوو یعنی په $d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$ کی دداخل شوي حدونه په $(m)$ ښیواودوه زاړه حدونه ورسره جمع کوو او د په عوض یي لیکو د $(d)$ قیمت لاس ته راځي.

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

$$d = \frac{a_n - a_1}{n - 1} = \frac{a_n - a_1}{m + 2 - 1} \quad \Longrightarrow d = \frac{a_n - a_1}{m + 1}$$

مثال:- د یوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (3) او (35) څخه دي څلور نور حدونه یي منځ ته ورداخل کړئ.

حل :

$$d = \frac{a_n - a_1}{m + 1} = \frac{35 - 3}{4 + 1} = \frac{32}{5} = 6.4$$

$$d = 6.4$$

$3 \ , \ 9.4 \ , \ 15.8 \ , \ 22.2 \ , \ 28.4 \ , \ 35$

تمرین:

لاندې عبارتي سوالونه حل کړئ؟

1- د یوه حسابي ردیف دوه حدونه عبارت له (4) او (324) دي (3) حدونه یي منځ ته ورداخل کړئ؟

2- د يوه حسابي رديف دوه حدونه عبارت له (5) او (675) څخه دي شپږ نور حدونه يې منځ ته ورداخل کړئ؟

لاندې سوالونه حل کړئ؟

1) $a_1 = 9, d = 13, n = 65, a_n = ?$
2) $d = 5, n = 11, a_{11} = 53, a_1 = ?$
3) $a_1 = 27, n = 31, a_{31} = 267, d = ?$
4) $a_1 = 7, a_{91} = 727, d = 8, n = ?$
5) $a_1 = 5, a_3 = 19, a_n = 110, n = ?$

2- هندسي رديف:

هغه رديف دی چه هر وروستنی حد يې د مخکيني حد سره د يوه ثابت عدد د ضربيدو په نتيجه کې په لاس راغلې وي يا دا چه د دوه مسلسلو حدو تفاضل يې ثابت وي. لکه:

$$2, 8, 32, 128, 512 \ \ldots$$

د هندسي رديف اول حد $(a_1)$ په مشترک نسبت يې په $(r)$ ښيي.

د هندسي رديف فارمول:

هغه رديف دی چه هر وروستنی حد يې د مخکيني حد سره د يوه ثابت عدد د ضربېدو په نتيجه کې لاس ته راغلی وي او يا دا چه د دوه حدو تفاضل يې ثابت وي. لکه:

$$3, 12, 48, 192, 768$$

$$5, 10, 20, 40, 80, 160 \cdots$$

د هندسي رديف فامول:

اول حد يې په $(a_1)$ او مشترک فصل په $(r)$ او ورستنی حد په $(a_n)$ ښيو نو .

$$a_1, a_x r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4$$

که د $(r)$ توان ته ځير شو د $(r)$ توان د حدو د شمېر څخه يو کم دې نوکه دحدونو شمېر $(n)$وي نو د $(r)$ توان به $(n-1)$ وي. نو:

$$a_1, a_1 r, a_1 r^2, a_1 r^3, a_1 r^4, \ldots \ldots a_1 r^{n-1}$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $a_1 = 2$ او مشترک نسبت یي $r = 3$ دي اوم حد $(a_7)$ یي څو دي؟

$$a_7 = a_1 r^{7-1} = 2 \times 3^6 = 2 \times 729 = 1458$$

د $(a_1)$او $(r)$قیمتونه د لاندی فارمولو پواسطه پیدا کیږي.

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اتم حد $(a_8 = 384)$ دي مشترک نسبت یي $(r = 2)$ دی اول حد یي څو دي؟

حل:

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}} = \frac{384}{2^{8-1}} = \frac{384}{128} = 3$$

$$a_1 = 3$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $(a_1 = 8)$ دی اوم حد یي $(5832)$ دی مشترک نسبت یي پیدا کړئ؟

حل:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[6]{\frac{5832}{8}} = \sqrt[6]{729} = 3$$

مثال: د یوه هندسي ردیف اول حد $(a_1 = 10)$ دی $(n)$ ام حد یي $a_n = 1280$ دی مشترک نسبت یي $(2)$ دي د حدونو شمېر یي څو دی؟

حل:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$1280 = 10 \times 2^{n-1}$$

$$\frac{1280}{10} = \frac{10 \times 2^{n-1}}{10} \Longrightarrow 128 = 2^{n-1} \Longrightarrow 2^7 = 2^{n-1}$$

$$n - 1 = 7 \Longrightarrow n = 7 + 1 = 8 \Longrightarrow n = 8$$

1- د يوه هندسي رديف دوه لمړي حدونه (2) او (1) دي څويم حد يې $\frac{1}{16}$ دي؟

$a_1 = 2 \qquad a_1 r^{n-1} = a_n$

$a_2 = 1 \qquad 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2}$

$r = \frac{1}{2} \qquad \frac{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{32} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^5} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$a_n = \frac{1}{16} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$n = ? \qquad n - 1 = 5 \Rightarrow n = 5 + 1 = 6 \quad \Rightarrow n = 6$

## د هندسي رديف خصوصيات:

1- په هندسي رديف کې هر حد د طرفينو د حاصل ضرب جذر دې.

مثال: $(3, 6, 12, 24, 24)$ د يوه هندسي رديف حدونه دي نو ليکو چه:

$$\sqrt{3(12)} = 6 \qquad and \qquad \sqrt{6(24)} = 12$$

2- که په يوه هندسي رديف کې اول او اخر حدونه ضرب شي او د حدو د شمېر په توان رفع شي او دويم جذر يې ونيول شي د رديف د ټولو حدونو د ضرب حاصل لاس ته راځي.

مثال :-لکه $(2, 6, 18, 54)$ يو هندسي رديف دی نو د دويم خاصيت سره سم ليکو چه:

$$(2)(6)(18)(54) = \sqrt{\{2(54)\}^4}$$
$$11664 = 11664$$

3- که يو هندسي رديف طاق حدونه ولري نو د منځني حد مربع يې د اول او اخر حدو د حاصل ضرب سره مساوي ده. لکه: $(5, 10, 20, 40, 80)$ يو هندسي رديف دی نو د دريم خاصيت سره سم ليکو:

$$(20)^2 = 5(80)$$
$$400 = 400$$

## په هندسي ردیف کې د حدو داخلول:

که د یوه هندسي ردیف حدونه دوه وي او وغواړو چه څو حدونه یې منځ ته ورداخل کړونو د هندسي ردیف دفارمول څخه د $(r)$ قیمت پیدا کوو.د حدو تر دخول د مخه د حدونو شمیر $(n)$ اوتر دخول وروسته د حدو شمېر $(m+2)$ دی نو د $(n)$ په عوض په فارمول کې $(m+2)$ لیکو. نو $r = \sqrt[m+2-1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}}$ لاس ته راځي.

مثال : د یوه هندسي ردیف دوه حدونه (3) او (96) دي څلور نور حدونه یې منځ ته ورداخل کړئ؟

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 96 \\ m = 4 \\ r = ? \end{cases} \qquad r = \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[4+1]{\frac{96}{3}} = \sqrt[5]{32} = 2$$

3,6, 12 ,24 , 48 , 96

مثال: درې داسې عددونه پیدا کړئ چه دویم حد یې د اول حد څخه د (3) په اندازه او دریم حد یې د دویم حد څخه د (6)په اندازه زیات وي او یو هندسي تصاعد جوړ کړي؟

حل:

$$\begin{cases} x \\ x+3 \\ x+9 \end{cases}$$

$$\frac{x+3}{x} = \frac{x+9}{x+3} \Rightarrow x(x+9) = x^2 + 6x + 9$$

$$x^2 + 9x = x^2 + 6x + 9$$

$$9x = 6x + 9 \Rightarrow 9x - 6x = 9 \Rightarrow 3x = 9$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 3$$

$$x = 3 \qquad x + 3 = 6 \qquad x + 6 = 9$$

### 3- هارمونیکي ردیف:

د حسابي ردیف معکوس ته هارمونیکي ردیف وایي.مثلاً لاندې ردیف یوحسابي ردیف دی. لکه:

(2,4,6,8 ,10)

د دغه رديف معکوس رديف عبارت له $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{1}{10}$ څخه دی دغه رديف ته هارمونيکي رديف وايي.

مثال: په يوه هارمونيکي رديف کې $a_1 = \frac{1}{4}$ دی او مشترک تفاضل يې $d = -3$ دی ترادف يې جوړ کړئ؟

حل:

$$\frac{1}{4}\ ,\frac{1}{4}-3\ ,\frac{1}{4}-6\ ,\frac{1}{4}-9\ ,\frac{1}{4}-12\ ,\cdots$$
$$\frac{1}{4}\ ,\frac{1-12}{4}\ ,\frac{1-24}{4}\ ,\frac{1-36}{4}\ \cdots$$
$$\frac{1}{4}\ ,\frac{-11}{4}\ ,\frac{-23}{4}\ ,\frac{-35}{4}\ \cdots$$

د هارمونيکي رديف حسابي اوسط:

$\frac{1}{a_{n+1}}, \frac{1}{a_n}, \frac{1}{a_{n-1}}$ د هارمونيکي رديف درې حدونه دي د منځني حد د لاس ته راوړلو لپاره اول او دريم حدونو اوسط پيدا کوو.

$$\frac{1}{a_n}=\frac{\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n-1}}}{2}=\frac{\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2}=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2a_{n+1}a_{n-1}}$$
$$a_n=\frac{2(a_{n+1})(a_{n-1})}{a_{n-1}+a_{n+1}}$$

مثال: د (2) او (8) هارمونيکي اوسط پيدا کړئ

حل: $a_n=\frac{2(2\times 8)}{2+8}=\frac{32}{10}=3.2$

سلسلی $Series$:

د ردیف د حدونو مجموعی ته سلسله وایي.

سلسلی په دوه ډوله دي.

1- حسابي سلسله $Arithmetc\ Series$

2- هندسي سلسله $Geometric\ Series$

1- حسابي سلسله :

د حسابي ردیف د حدونو مجموعی ته حسابي سلسله وایي.

د حسابي سلسلی فارمول:

د سلسلو مجموعه په $S_n$ ښیي. او داسې یې پیدا کوي.

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) \cdots + \{a_1 + (n-1)d\}$$

د عددونو مجموعه په منظم ډول داسی لیکو چه اخر حد یي په سر کی راشي بیا یي د اولنی مجموعی سره جمع کوو.

$$\begin{aligned} S_n &= \{a_1 + (n-1)d\} + \{a_1 + (n-2)d\} + \{a_1 + (n-3)d\} + \cdots + a_1 \\ S_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + \{a_1 + (n-1)d\} \\ \hline 2S_n &= \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \{2a_1 + (n-1)d\} + \cdots + \{2a_1 + (n-1)d\} \end{aligned}$$

$$2S_n = n\{2a_1 + (n-1)d\}$$

$$\frac{2S_n}{2} = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\} \Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$

دغه فارمول د حسابي سلسلی عمومي فارمول دی.

که $(2a_1)$ بیل، بیل ولیکو نو لاندی فارمول لاس ته راځي.

$$S_n = \frac{n}{2}\{a_1 + a_1 + (n-1)d\} \Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

مثال: د یوه هندسي ردیف $(a_1 = 7)$ او $(d = 6)$ دی د $(20)$ حدو مجموعه یې پیدا کړئ؟

حل:

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_{20} = \frac{20}{2}\{2 \times 7 + (20-1)6\} = 10\{14 + (19)6\} = 10(14 + 114)$$
$$S_{20} = 10(128) = 1280$$
$$S_{20} = 1280$$

مثال: د يوه حسابي رديف اول حد $(a_1 = 11)$ او يوپنځوسم حد يې $(a_{51} = 10761)$ دی د $(51)$ حدو مجموعه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$
$$S_{51} = \frac{51}{2}(11 + 311) = \frac{51}{2}(11 + 411) = \frac{51}{2}(422) = 51 \times 261 = 10761$$
$$S_{51} = 10761$$

د مسلسلو عددونو فارمول:

په مسلسلو عددونو کی $a_1 = 1$ او $(d = 1)$ دی دغه قيمتونه دحسابي په عمومي فارمول کی وضع کوو

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_n = \frac{n}{2}\{2 \cdot 1 + (n-1)1\} = \frac{n}{2}(2 + n - 1) = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال: په يوه ټولګي کی 50 کسه شاګردان دي د اول شاګرد سره يوه دويم شاګرد سره دوه په همدې ترتيب تر اخره روپۍ دي وواياست چه د ټولو سره څو روپۍ دي؟

حل:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$S_{50} = \frac{50(50+1)}{2} = 25 \cdot 51 = 1275$$

دجفتو عددو فارمول:

په جفتو عددو کې $a_1 = 2$ او $d = 2$ دی دغه عددونه د حسابي سلسلی په عمومي فارمول کی وضع کوو.

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_n = \frac{n}{2}\{2\cdot 2 + (n-1)2\} = \frac{n}{2}(4 + 2n - 2) = \frac{n}{2}(2n+2) = \frac{n}{2}\times 2(n+1)$$
$$S_n = n(n+1)$$

مثال: سل کسانو یوه مسجد ته اعانه ورکړه که اول سړي 2 روپۍ دویم سړي 4 روپۍ په همدی ترتیب تر اخره مرسته کړی وي ووایاست چه ټولو به څو روپۍ ورکړی وي؟

حل:

$$S_n = n(n+1)$$
$$S_{100} = 100(100+1) = 100\times 101 = 10100$$

د طاق عددونو فارمول:

په طاق عددو کې اول حد (1) اومشترک تفاضل یي (2) دی دغه عددونه د حسابي سلسلی په عمومي فارمول کې وضع کوو د طاق عددو فارمول لاس ته راځي.

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a_1 + (n-1)d\}$$
$$S_n = \frac{n}{2}\{2\cdot 1 + (n-1)2\} = \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) = \frac{n}{2}\cdot 2n = n^2$$
$$S_n = n^2$$

مثال: د (30) طاقو عددو مجموعه څو ده

حل:

$$S_n = n^2$$
$$S_{30} = 30^2 = 900$$

تبصره:

که د یوه حسابي ردیف حدونه طاق وي که منځني حد یې د حدونو په شمېرکی ضرب شي د حدونو مجموعه لاس ته راځي.

مثال : د یوه حسابي ردیف د حدونو شمیر 41 او منځني حد یې 145 دی د حدونو مجموعه یې پیدا کړئ؟

حل:

$$S_n = n\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

$$S_{41} = 41(145) = 5945$$

دویمه تبصره:

همدا ډول د اول او اخر حدو مجموعه د منځني حد د دوه چند سره مساوي دي.

$$a_1 + a_n = 2\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

مثال: د یوه حسابي ردیف $a_1 = 7$ او $a_9 = 47$ دی او منځني حدیې $a_5 = 27$ دی د اول اخر مجموعه یې پیدا کړئ؟

حل:

$$a_1 + a_n = 2\left(a_{\frac{n-1}{2}+1}\right)$$

$$a_1 + a_9 = 2(a_5) = 2(27) = 54$$

دریمه تبصره:

کله، کله د څو اولو حدو او په همغه شمیر د اخرو حدو مجموعه معلومه وي اول او اخر حد معلوم نه وي. د اول او اخر حدو مجموعه د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$a_1 + a_n = \frac{S_{m_1}+S_{m_2}}{m}$$

$m_1$ د شپږو اولوحدو مجموعه او $m_2$ د شپږو اخرو حدو مجموعه ده او $(m)$ د حدو شمیر دی.

مثال: یو حسابي ردیف $n$ حدونه لري د 4 لمړیو حدو مجموعه یې 62 او د 4 وروستیو حدو مجموعه یې 482 ده د ټولو حدو مجموعه یې څو ده؟

حل:

$S_{m_1} = 62$

$S_{m_2} = 482$

$m = 19$

$S_{19} = ?$

$$a_1 + a_{19} = \frac{S_{m_1} + S_{m_2}}{m} = \frac{62 + 482}{4} = \frac{544}{4} = 136$$
$$S_{19} = \frac{19}{2}(136) = 1292$$
$$S_{19} = 1292$$

2- هندسي سلسله $Geometric\ Series$:

د هندسي ردیف د حدونو مجموعې هندسي سلسله وايي.

د هندسي سلسلې فارمول:

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-1} \ldots\ldots\ldots I$$

دواړه خواوې په $(r)$ کې ضربوو اوبیا (I) رابطه ورڅخه منفي کوو.

$$rS_n = \cancel{a_1r} + \cancel{a_1r^2} + \cancel{a_1r^3} + a_1r^4 + \cdots + a_1r^n \ldots\ldots\ldots II$$
$$\pm S_n = \pm a_1 \pm \cancel{a_1r} \pm \cancel{a_1r^2} \pm \cancel{a_1r^3} \pm \cdots \pm \cancel{a_1r^{n-1}} \ldots\ldots\ldots I$$
$$rS_n - S_n = a_1r^n - a_1$$

$$S_n(r-1) = a_1(r^n - 1)$$
$$\frac{S_n(r-1)}{r-1} = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1} \Longrightarrow S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$
$$S_n = \frac{a_1(r^2-1)}{r-1}$$

دغه سلسلې ته متزایده سلسله وايي.

مثال: د یوې هندسي سلسلې $a_1 = 5$ او مسترک نسبت یې $r = 3$ دي د $n = 7$ حدو مجموعه یې پیدا کړئ؟

حل:

$$S_7 = \frac{5(3^7-1)}{3-1} = \frac{5(2187-1)}{2} = \frac{5 \times 2186}{2} = 5 \times 1093 = 5465$$

$S_7 = 5465$

او که د $I$ رابطي څخه $II$ رابطه منفي کړو نو:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

سلسله لاس ته راځي. دغه سلسلې ته متناقصه سلسله وايي.

مثال: د يوه هندسي رديف اول حد $a_1 = 8$ دی مشترک نسبت يي $r = \frac{1}{2}$ دی د (5) حدو مجموعه يي پيدا کړئ؟

حل:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_5 = \frac{8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8\left(1-\frac{1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8\left(\frac{32-1}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{8\left(\frac{31}{32}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{248}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{496}{32}$$

$$S_5 = 15.5$$

مثال: د يوې هندسي سلسلې د څلورو حدو مجموعه 120 ده او اول حد يي 5 دی مشترک نسبت يي څو دی؟

حل:

$a_1 = 8$

$S_8 = 120$

$n = 4$

$r = ?$

$$120 = \frac{(r-1)(r^3+r^2+r+1)}{r-1} = 15$$

$$r^3 + r^2 + r + 1 = 15$$

$$r^3 + r^2 + r + 1 - 15 = 0 \Rightarrow r^3 + r^2 + r - 14 = 0$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -14 & 2 \\ & 2 & 6 & 14 & \\ \hline 1 & 3 & 7 & 0 & \end{array}$$

$$r = 2$$

## د هندسي سلسلې پواسطه په عام کسر باندې داعشار کسر بدلول:

د متناقصې هندسي سلسلې فارمول لیکو:

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

په دغه فارمول کې $(r^n \to 0)$ صفر کیږي. نو $S_n = \frac{a_1}{1-r}$ کیږي د دغه فارمول پواسطه کولای شو چه اعشار کسر په عام کسر بدل کړو.

مثال: $0.\overline{3}$ اعشارکسردی . په عام کسر یي بدل کړئ؟

حل:

$$a_1 = o.\overline{3} = \frac{3}{10}$$

$$r = \frac{1}{10}$$

$$n = \infty \qquad S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{10-1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{10\times 3}{10\times 9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$S_n = ? \qquad S_n = \frac{1}{3}$$

مثال: $0.8\overline{3}$ اعشار کسر دی په عام کسر یي بدل کړئ؟

حل:

$$a = \frac{8}{10}$$

$$a_1 = \frac{3}{100} \qquad S_\infty = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{10-1}{10}}$$

$$r = \frac{1}{10} \qquad = \frac{8}{10} + \frac{\frac{3}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{8}{10} + \frac{10\times 3}{100\times 9} = \frac{8}{10} + \frac{1}{30}$$

$$S_n = ? \qquad S_\infty = \frac{24+1}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

تمرين

1- د (20)او (800) تر منځ د هغه عددو مجموعه پیدا کړئ چه لمړی رقم یې (3) وي؟

2- یو دیوالي ساعت د ساعتو په شمېر زنګونه وهي وواياست چه په شواروز کی څو زنګونه وهي؟

3- د یوه حسابي ردیف ددری حدومجموعه (33) او د ضرب حاصل یې (1287) دی عددونه یې پیدا کړئ؟

4- د یوه حسابي ردیف د څلورو حدومجموعه (26) او د مربعاتو مجموعه یې (214) ده عددونه پیدا کړئ؟

5- د یوه حسابي ردیف څلورو حدو دضرب حاصل (945) او مشترک تفاضل یې (2) دی عددونه پیدا کړئ؟

6- (3003) کسان په یوه ځای کی د مثلث په ډول ولاړ دي د مثلث په راس کی یو نفربیا دوه بیا دری.......په همدی ترتیب تر اخره ولاړ دي وواياست چه څو قطارونه جوړوي؟

7- د جفت عددو مجموعه د (40) څخه تر (540) پوری څو ده؟

8- د طاق عددونو مجموعه د (31) څخه تر (451) پوری څو ده؟

9- $a$ , $b$ او $c$ په کوم شرط په یوه حسابي ردیف کی شامل دي؟

10- د یوه ردیف د اول اخر حدو د ضرب حاصل (253) او د منځنیو حدو د ضرب حاصل یې(285) دی عدونه پیدا کړئ؟

11- (3) او (243) د یوه هندسي تصاعد دوه جملی دي دری حدونه پکی داخل کړئ؟

12- (221) په دری برخو داسی وویشئ چه د دریم او اول حد تفاضل یې (136) وي؟

13- د یوه متوازي السطوح حجم (3375) دی اودابعادو مجموعه یې(65) ده ابعاد یې پیدا کړئ؟

14- دوه کسه دیوه سړي سره مزدوران شول یو سړی د ورځی (20) اجوره لري اوبل سړی اول ورځ یوه روپۍ په دویمه ورځ دوه روپۍ په همدی ترتیب تراخره روپۍ اخلي ووایاست چه په څویمه ورځ به ددوی پیسی مساوي شي ؟

15- یو هندسي تصاعد اوه حدونه لري د شپږو اخرنیو حدو مجموعه یي دشپږو اولنیو حدو د مجموعی دوچنده دي که د اخرنیو شپږو حدو مجموعه یي(126) وي تصاعد معین کړئ؟

16- $0.\overline{123}$ ، $0.\overline{925}$، $0.\overline{27}$ کسرونه په عام کسر بدل کړئ؟

17- $0.1\overline{36}$ , $0.41\overline{6}$ , $0.6\overline{36}$ اعشار کسرونه په عام کسرو بدل کړئ؟

18- د یوه قایم الزاویه مثلث زاویي د هندسي تصاعد حدونه دي تصاعد پیدا کړئ؟

19- د یوی څلور ضلعي زاویي هندسي تصاعد دی که څلورمه زاویه د دویمی زاویي ( 9) برابره وي د هری زاویي پراخوالی پیدا کړئ؟

# دیارلسم فصل

## د رياضي استقراء Induction of Math

د ټولو طبعي عددو لپاره د يوه فارمول ثبوتولو ته د رياضي استقراء وايي.

څرنګه چه د ټولو عددو لپاره د يوه فارمول ثبوتول ډېر مشکل دي نو د يوه فارمول د ثبوتولو لپاره په لاندې ډول اجرائت کوو.

1- د يو لپاره فارمول ثبوتوو.

2- د $(n)$ لپاره فارمول صحيح فرضوو.

3- د $(n+1)$ لپاره فارمول ثبوتوو

مثال: ثبوت کړئ چه $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ د ټولو طبعي عددو لپاره صحيح دی

حل: د $(1)$ لپاره يې ثبوتوو.

$$1=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{1\times2}{2}=\frac{2}{2}=1$$

د $(1)$ لپاره صحيح دی. د $(n)$ لپاره يې صحيح فرضوو.

د $(n+1)$ لپاره يې ثبوتوو.

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)$$

$$=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+1)\{(n+1)+1\}}{2}$$

$$S_{n+1}=\frac{1}{2}(n+1)\{(n+1)+1\}$$

مثال: ثبوت کړئ چه $1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$ د ټولو طبيعي عددو لپاره صحيح دی.

حل: د (1)لپاره يې ثبوتوو.

$$1=\frac{1(3\times 1-1)}{2}=\frac{2}{2}=1$$

د $(n)$ لپاره يې صحيح فرضوو، د $(n+1)$ لپاره يې ثبوتوو:

$$1+4+7+\cdots+(3n-2)+\{3(n+1)-2\}=\frac{n(3n-1)}{2}+\{3(n+1)-2\}$$
$$S_n=\frac{3n^2-n+6n+2}{2}=\frac{3n^2+5n+2}{2}=\frac{3n^2+3n+2n+2}{2}$$
$$S_n=\frac{3n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(3n+2)}{2}=\frac{(n+1)\{3(n+1)-1\}}{2}$$
$$S_n=\frac{(n+1)\{3(n+1)-1\}}{2}$$

مثال: ثابت کړئ چه لاندې مساوات د هر طبعي $(n)$لپاره صحيح دی.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

حل: د (1) لپاره پورتنی رابطه صحيح ده څکه چه:

$$1^2=\frac{1}{6}\times 1(1+1)(2\times 1+1)=\frac{1}{6}(2)(3)=\frac{1}{6}\times 6=\frac{6}{6}=1$$

د $(n)$ لپاره يې صحيح فرضوو. او د $(n+1)$ لپاره يې ثبوتوو

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2$$
$$S_{n+1}=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=\frac{2n^3+n^2+2n^2+n+6(n+1)^2}{6}$$
$$S_{n+1}=\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}=\frac{2n^3+4n^2+5n^2+10n+3n+6}{6}$$
$$S_{n+1}=\frac{2n^2(n+2)+5n(n+2)+3(n+2)}{6}=\frac{(n+2)(2n^2+5n+3)}{6}$$
$$S_{n+1}=\frac{(n+2)(2n^2+2n+3n+3)}{6}=\frac{(n+2)\{2n(n+1)+3(n+1)\}}{6}$$
$$S_{n+1}=\frac{(n+2)(n+1)(2n+3)}{6}=\frac{1}{6}(n+1)\{(n+1)+1\}\{2(n+1)+1\}$$

ثابته شوه چه پورتنی مساوات د ټولو طبعي عددو لپاره صحيح دي.

مثال: ثبوت کړئ چه لاندی فارمول د ټولو طبعي عددو لپاره صحيح دی.

$$a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{a}{a-1}(a^n - 1) \quad , \quad a \neq 1$$

حل: د اول حد لپاره يي ثبوتوو.

$$a = \frac{a}{a-1}(a^1 - 1) = \frac{a(a-1)}{a-1} = a$$

د  لپاره يي صحيح فرضوو.

د  لپاره يي ثبوتوو.

$$a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n + a^{n+1} = \frac{a}{a-1}(a^n - 1) + a^{n+1}$$

$$S_{n+1} = \frac{a(a^n - 1) + a^{n+1}(a-1)}{a-1} = \frac{a^{n+1} - a + a^{n+2} - a^{n+1}}{a-1} = \frac{a^{n+2} - a}{a-1}$$

$$S_{n+1} = \frac{a(a^{n+1} - 1)}{a-1} = \frac{a}{a-1}(a^{n+1} - 1)$$

## تمرين

لاندې فارمولونه د رياضي د استقراء پواسطه ثبوت کړئ

1) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

2) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4} \cdot n^2(n+1)^2 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

3) $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n^2 + n$

4) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (n)^2 = \frac{1}{3} + n(2n-1)(2n+1)$

5) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

6) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

7) $4 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^n = \frac{4}{3}(4^n - 1)$

8) $1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$

9) $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2(2^n - 1)$

10) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + \cdots + n(n+2) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$

11) $2 + 5 + 10 + \cdots + (n^2 + 1) = \frac{n(2n^2 + 3n + 7)}{6}$

12) $a + (a+d) + (a+2d) + \cdots + \{a + (n-1)d\} = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

# څوارلسم فصل

## فکتوریل Factorial

د طبعي مسلسلو عددو د ضرب حاصل ته فکتوریل وايي.

د فکتوریل علامه دا ( ! ) ده.

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \ldots \times n$$

قضیه: $0! = 1$ کیږي

ثبوت: پوهیږو چه که یو فکتوریل په خپل اخري عدد تقسیم شي تر هغه د مخه فکتوریل لاس ته راځي. لکه:

$$\frac{5!}{5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{5} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1} = 4!$$

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

$$\frac{1!}{1} = \frac{1}{1} \Rightarrow 0! = 1$$

قضیه:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

په دغه قضیه کې باید د $n > k$ څخه کوچنی وي.

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\,(7-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

د $\binom{n}{0} = 1$ ثبوت:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

د $\binom{n}{n} = 1$ ثبوت:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!\cdot 1} = \frac{n!}{n!} = 1$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{n-1} = n$ کیږي؟

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\,\{n-(n-1)\}!} = \frac{n!}{(n-1)!\,(n-n+1)!}$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!} = \frac{(n-1)!\cdot n}{(n-1)!\cdot 1} = n$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ کیږي؟

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{1\cdot n!} = \frac{n!}{n!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{0!\,(n+1-0)!}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$ کیږي؟

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!\cdot 0!}$$

$$\binom{n}{n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)!\,\{(n+1)-(n+1)\}!} = \binom{n+1}{n+1}$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ کیږي؟

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,\{n-(k-1)\}!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{(k-1)!\cdot k(k+1)!\cdots n}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{(n-k)!\,(n-k+1)\cdots n}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{k(k+1)\cdots n}{(n-k+1)!} + \frac{(n-k+1)\cdots n}{k!}$$

$$= \frac{k!\,\{k\cdot(k+1)\cdot\ldots\cdot n\} + (n-k+1)!\cdot(n-k+1)\cdot\ldots\cdot n}{(n-k+1)!\cdot k!}$$

$$= \frac{k!\cdot\{k(k+1)\cdot\ldots\cdot n\} + (n-k+1)!\cdot\{(n-k+2)\cdot\ldots\cdot n\}}{(n-k+1)!\cdot k!}$$

$$= \frac{k \cdot n! + (n-k+1)\cdot n!}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(k+n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

د بینوم قضیه $Binomial\ Theorem$:

که چیرته $(a)$ او $b$ حقیقي عددونه او $(n)$ یو طبعي عدد وي نو

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n \cdots 1$$

د ریاضي د استقراء پواسطه د پورتنۍ قضیي ثبوت پورتنۍ قضیه د $(1)$ لپاره ثبوتوو.

$$(a+b)^1 = a^1 + b^1 = 1\cdot a^1 + 1\cdot b^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1$$

د $(n)$ لپاره یې صحیح فرضوو.او د $(n+1)$ لپاره یې ثبوتوو.

د $(1)$ مساوات دواړه خواوي په $(a+b)$ کې ضربوو.

$$(a+b)^n(a+b) = (a+b)\left\{\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \cdots + \binom{n}{n}b^n\right\}$$

$$= \binom{n}{0}(a^{n+1} + a^n b) + \binom{n}{1}(a^n b + a^{n-1}b^2) + \cdots$$
$$+ \binom{n}{k}\left(a^{n-k+1}b^k + a^{n-k}b^{k+1} + \binom{n}{n}(ab^n + b^{n+1})\right)$$

$$= \binom{n}{0}a^{n+1} + \left\{\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right\}a^n b + \left\{\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right\}a^{n-1}b^2 + \cdots + \left\{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right\}a^{n+1-k}b^k$$
$$+ \cdots + \binom{n}{n}b^{n+1}$$

$$= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \cdots + \binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k + \cdots + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}$$

که دغه مجموعه په $\sum$ وښیونو لیکو چه

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

مثال: د دوه جمله يي د دعوی په اساس انکشاف ورکړئ.

$(x+y)^5$

$$(x+y)^5=\sum_{n=1}^{5}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

$$(x+y)^5=\binom{5}{0}x^5+\binom{5}{1}x^4y+\binom{5}{2}x^3y^2+\binom{5}{3}x^2y^3+\binom{5}{4}xy^4+\binom{5}{5}y^5$$

$$(x+y)^5=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$

ثبوت کړئ چه $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ کیږي؟

# پنځلسم فصل

## لیمیټ limit

انټروال $Interval$:

د دوو مختلفو نقطو تر منځ فاصلې ته انټروال وایي.

انټروال په درې قسمه دي.

1- تړلی انټروال $Closed\ Interval$ :

هغه انټروال دی چه د دواړو انجامو نقطې پکی شاملی وي.

او په غټو قوسو ښودل کیږي. لکه:

$$A = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,]$$

او د سیټ په شکل داسی لیکل کیږي.

$$A = [x\epsilon IR/1 < x < 10]$$

2- نیم کښن انټروال $Half\ Open\ Interval$:

هغه انټروال دی چه د یوه انجام نقطه پکی شامله او د بل انجام نقطه پکی شامله نه وي. لکه:

$$A = [4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14)$$

او د سیټ په شکل داسی لیکل کیږي. $A = [x\epsilon IR/4 \le x < 14]$

3- خلاص انټروال $Open\ Interval$:

هغه انټروال دي چه د دواړو انجامو نقطې پکی شاملی نه وي. لکه:

$$A = (4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16)$$

او د سیټ په شکل داسی لیکل کیږي.

$$A = (x\epsilon IR/4 < x < 16)$$

مجاورت $Vicinity$:

هر خلاص انټروال د خپلو ټولو شاملو عناصرو مجاورت دی. که یوه نقطه د یوه انټروال په وسطي نقطه کی واقع وي نو دا انټروال د دی نقطی متناظر مجاورت دی.

لکه (1)د (5)او (3) متناظر مجاورت دي. په يوه مجاورت کې هره نقطه زيات متناظر مجاورتونه لري.

د ليميټ تعريف:

$Kart\ weierstras$ کارت وېرس ترس انګليسي رياضيدان چه په (1897 – 1815) م سنه کې اوسېده دليميټ تعريف داسې کړېدې.

ديوی تابع ليميټ په يوه نقطه کی هغه عدد دې چه د دغه عدد د هر مجاورت لپاره د تابع د تعريف په ناحيه يو داسې مجاورت موجود وي چه د دغه مجاورت د هر عنصر تصوير د تابع د ليميټ په مجاورت کی شامل وي.

يعنی د $F(x)$ دتابع ليميټ د $(a)$ په نقطه کی $(b)$ دې په دی شرط چه د $(b)$ دهر مجاورت $(N)$ لپاره د تابع د تعريف په ناحيه کی د $(D)$ يو داسې مجاورت موجود وي چه د$(D)$ دهر عنصر تصوير په $(N)$کی شامل وي. او داسې ليکل کيږي.

$$\lim_{x\to 0} F(x) = b$$

مثال: د $F(x) = 5x + 3$ تابع ليميټ د$x \to 1$ په نقطه کی پيدا کړئ؟

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(5x + 3) = 5 \cdot 1 + 3 = 5 + 3 = 8$$

دپورته تابع د ليميټ ثبوت په دوه طريقو کيږي.

1- د جدول پواسطه 2- د مجاورت په طريقه

1- د جدول په طريقه د تابع د ليميټ ثبوت:

$(x)$ ته د دواړه خواوڅخه قيمتونه ورکوو او د $(y)$ قيمتونه پيدا کوو.

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $-12$ | $-7$ | $-2$ | $3$ | $8$ | $13$ | $16$ | $23$ | $28$ |

دپورته جدول څخه معلوميږي چه $(x)$ته په هره اندازه چه $(1)$ ته نژدې قيمت ورکړشي په همغه اندازه د$(y)$قيمت $(8)$ ته نژدې کيږي.

1- د مجاورت په طریقه د تابع د لیمیټ ثبوت:

د تابع لیمیټ (8) ته د (ε) په اندازه مجاورت ورکوو.

$$N = (8-\varepsilon, 8+\varepsilon)$$

د $(D)$ د مجاورت د پیدا کولو لپاره تابع د (8) د مجاورت په منځ کې لیکو

$$8-\varepsilon < 5x+3 < 8+\varepsilon$$
$$8-\varepsilon-3 < 5x < 8+\varepsilon-3$$
$$5-\varepsilon < 5x < 5+\varepsilon$$
$$\frac{5}{5}-\frac{\varepsilon}{5} < \frac{5x}{5} < \frac{5}{5}+\frac{\varepsilon}{5}$$
$$1-\frac{\varepsilon}{5} < x < 1+\frac{\varepsilon}{5}$$
$$D = \left(1-\frac{\varepsilon}{5}, 1+\frac{\varepsilon}{5}\right)$$

(ε) ته $\left(0.5 = \frac{1}{2}\right)$ قیمت ورکوو.

$$N = \left(8-0.5, 8+0.5\right)$$
$$N = (7.5, 8.5)$$
$$D = \left(1-\frac{\frac{1}{2}}{5}, 1+\frac{\frac{1}{2}}{5}\right) = \left(1-\frac{1}{10}, 1+\frac{1}{10}\right) = (0.9, 1.1)$$
$$D = (0.9, 1.1)$$
$$\lim_{x\to 0.9}(5x+3) = 5\times 0.9+3 = 7.5$$
$$\lim_{1.1}(5x+3) = 5.5+3 = 8.5$$

ثابته شوه چه (8) د (1) په نقطه کې د تابع لیمیټ دی.

مثال: ثبوت کړئ چه $\lim_{x\to 1}\left(3-\frac{1}{x}\right) = 2$ کیږي؟

$$N = (2-\varepsilon, 2+\varepsilon)$$
$$2-\varepsilon < 3-\frac{1}{x} < 2+\varepsilon$$
$$2-3-\varepsilon < -\frac{1}{x} < 2-3+\varepsilon$$

$$-1-\varepsilon < -\frac{1}{x} < -1+\varepsilon$$

$$\frac{1}{-(1+\varepsilon)} > -x > \frac{1}{-(1-\varepsilon)}$$

$$\frac{1}{1+\varepsilon} < x < \frac{1}{1-\varepsilon}$$

$$D = \left(\frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1-\varepsilon}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4}$$

$$N = (2-\varepsilon, 2+\varepsilon) = \left(2-\frac{1}{4}, 2+\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right)$$

$$D = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{4}}, \frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = \left(\frac{1}{\frac{5}{4}}, \frac{1}{\frac{3}{4}}\right) = \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{3}\right)$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{5}}\left(3-\frac{1}{x}\right) = 3-\frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{1}-\frac{5}{4} = \frac{12-5}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{3}}\left(3-\frac{1}{x}\right) = 3-\frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{1}-\frac{3}{4} = \frac{12-3}{4} = \frac{9}{4}$$

د ليميټ د استعمال ځايونه *Utilization of limit*:

اسحق نيوټن (Isaac Newton) (1642 – 1727) م او لايبنز (Leibniz) په (1646 -1716) م کالونو کې د ليميټ پواسطه د انتيګرال او ديفرينسيال مسايل حلول يعنې دليميټ داستعمال ډېر مهم ځايونه د ديفرينسيال اوانتيګرال د مسايلو حلول دي. او هم د مشتق تعريف دليميټ څخه په غير ناممکن دی.

ارشميدس د دايرې دمحيط د اندازه کولو لپاره داسې محاطي مضلعګانې په دايره کې رسمولې چه ضلعې يې بې اندازه کوچنې وې په دې ترتيب يې د (2π) تقريبي قيمت پيداکړ .نوموړي هم د ليميټ د استعمال څخه استفاده کړې وه.

د ليميټ پيدا کول:

که وغواړو چه په يوه نقطه کی د يوی تابع ليميټ پيدا کړو.نقطه په تابع کی د متحول په عوض وضع کوو.

مثال: د $f(x) = 5x - 8$ دتابع ليميټ د $(x \to 3)$ په نقطه کی پيدا کړئ؟

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}(5x - 8) = 5 \times 3 - 8 = 15 - 8 = 7$$

1- مثال: $g(x) = x$ د تابع ليميټ $(x \to -3)$ په نقطه کی پيدا کړئ؟

$$\lim_{x\to -3} g(x) = \lim_{x\to -3} x = -3$$

2- مثال: د $h(x) = 4 - \frac{5}{x+2}$ تابع ليميټ په $x \to 3$ کی پيداکړئ؟

حل:

$$\lim_{x\to 3} h(x) = \lim_{x\to 3}\left(4 - \frac{5}{x+2}\right) = 4 - \frac{5}{3+2} = 4 - \frac{5}{5} = 3$$

## دصفر په نقطه کی د يوی تابع د ليميټ پيدا کول

1- د صفر په نقطه کې د تامې تابع دليميټ پيدا کول:

که په تابع کی ثابت عدد موجود ؤ نو په صفر کی يي ليميټ همدغه ثابت عدد دي.

مثال: $\lim_{x\to 0}(7x^3 - 3x^2 + 2x - 5) = -5$

که په تابع کی ثابت عدد نهٔ ؤ ليميټ يي په صفر کی صفر دي.

مثال: $\lim_{x\to 0}(3x^3 + 11x^2 - 8x) = 0$

2- د صفر په نقطه کې د کسري تابع ليميټ:

دلته څو حالتونه موجود دي.

الف: چه په صورت اومخرج دواړو کی ثابت عددونه موجود وي ليميټ يي په صفر کی د همدغه ثابت عدد و نسبت دی.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^3 + 7x^2 - 20x - 12}{2x^2 + 5x - 3} = \frac{-12}{-3} = 4$$

ب: چه په صورت کی ثابت عدد وي او په مخرج کی نه وي ليميټ يي په صفر کی لايتناهي دي.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2-4x+7}{2x^2-3x}=\frac{7}{0}=\infty$$

ج: چه په صورت کی ثابت عدد نه وي او په مخرج کی وي ليميټ يي په صفر کی صفر دی.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2+7x}{2x^2+7x-11}=\frac{0}{-11}=0$$

د: چه په صورت او مخرج دواړو کی ثابت عدد نه وي دلته بيا څو حالتونه موجود دي.

a- چه دصورت او مخرج دټيټ حد درجی مساوي وي ليميټ يي په صفر کی د کوچني توان حدو دضريبونسبت دي.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^3-6x^2+12x}{5x^3+3x^2-6x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(7x^2-6x+12)}{x(5x^2+3x-6)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^2-6x+12}{5x^2+3x-6}=\frac{12}{-6}=-2$$

b- چه د کسر د صورت د ټيټ حد درجه د مخرج د ټيټ حد د درجی څخه ډيره وي ليميټ يي په صفر کی صفر دی.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{11x^4+5x^3-4x^2}{8x^3-4x^2-3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(11x^3+5x^2-4x)}{x(8x^2-4x-3)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{11x^3+5x^2-4x}{8x^2-4x-3}=\frac{0}{-3}=0$$

چه د کسر د صورت د ټيټ حد درجه د مخرج دټيټ حد د درجی څخه کمه وي ليميټ يي په صفر کی ($\infty$) دی.

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7x^3+5x^2-4x}{2x^4+2x^3+5x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(7x^2+5x-4)}{x(2x^3+2x^2+5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{7x^2+5x-4}{2x^3+2x^2+5x}$$

$$=\frac{-4}{0}=-\infty$$

په $(\infty)$ کې د يوی تابع ليميټ:

په $(\infty)$ د يوې تابع ليميټ په دوه حالته کی مطالعه کوو.

الف: په $(\infty)$ کی د تامی تابع ليميټ: د تامی تابع ليميټ په $(\infty)$ کی $(\infty)$ دی.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}(3x^3-7x^2+7x-17)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(3-\frac{7}{x}+\frac{7}{x^2}-\frac{17}{x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}x^3\left(3-\frac{7}{\infty}+\frac{7}{\infty^2}-\frac{17}{\infty^3}\right)=\lim_{x\to\infty}3x^3=3\cdot\infty^3=\infty$$

ب: په $(\infty)$ کی د کسري تابع ليميټ: د کسري تابع ليميټ په $(\infty)$ کی په دری حالته کی مطالعه کوو.

a- که دکسر د صورت درجه دمخرج د درجې څخه ډېره وه ليميټ يې په $(\infty)$ کې $(\infty)$ دې.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3-8x^2+6x-30}{2x^2+5x-21}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7-\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{30}{x^3}}{\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{21}{x^3}}=\frac{7-\frac{8}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}-\frac{30}{\infty^3}}{\frac{2}{\infty}+\frac{5}{\infty^2}-\frac{21}{\infty^3}}=\frac{7}{0}=\infty$$

b- که د کسر د صورت درجه د مخرج د درجې سره مساوي وي نوليمټ يې په $(\infty)$ کې د لوړ توان والاحدود ضريبو نسبت دی.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^3-8x^2+6x-30}{2x^3+5x^2-21x+3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8-\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}-\frac{30}{x^3}}{2+\frac{5}{x}-\frac{21}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{8-\frac{8}{\infty}+\frac{6}{\infty^2}-\frac{30}{\infty^3}}{2+\frac{5}{\infty}-\frac{21}{\infty^2}+\frac{3}{\infty^3}}=\frac{8}{2}=4$$

c- که د کسر دصورت درجه دمخرج د درجی څخه کمه وي ليميټ يي په $(\infty)$ کی صفر دي.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-8}{x^3+2x^2-3x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{8}{x^3}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}}=\frac{0}{1}=0$$

د ليميټ قضيې *Theorms of limit*:

اوله قضيه:

د ثابتې تابع ليميټ په يوه نقطه کی په خپله همغه عدد دی.

مثال:

$$\lim_{3} 12 = 12$$

دويمه قضيه:

د يوه عدد او يوی تابع د حاصل ضرب ليميټ د تابع د ليميټ اوثابت عدد د حاصل ضرب سره مساوي دی.

$$\lim_{x\to a}kf(x)=k\lim_{x\to a}f(x)=kb$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}6x^2=6\lim_{x\to 2}x^2=6\times 2^2=24$$

دریمه قضیه:

ددوه تابعګانو د مجموعی لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د مجموعی سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)=b+c$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}(5x^2+7x^3)=\lim_{x\to 2}5x^2+\lim_{x\to 2}7x^3$$
$$(5\cdot 2^2+7\cdot x^3)=5\cdot 2^2+7\cdot 2^3$$
$$(5\cdot 4+7\cdot 8)=5\cdot 4+7\cdot 8$$
$$(20+56)=20+56$$
$$(76)=76$$

څلورمه قضیه:

ددوه تابعګانو د حاصل ضرب لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د حاصل ضرب سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot h(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}h(x)=b\cdot c$$

مثال:

$$\lim_{x\to -1}(x-1)^2=\lim_{x\to -1}(x-1)\cdot\lim_{x\to -1}(x-1)$$
$$=(-1-1)^2=(-1-1)\cdot(-1-1)$$
$$(-2)^2=(-2)(-2)\Rightarrow 4=4$$

پنځمه قضیه:

د دوه تابعګانو د خارج قسمت لیمیټ په یوه نقطه کی د تابعګانو د لیمیټو د خارج قسمت سره مساوي دی په همغه نقطه کی.

$$\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b}{c}$$

$$\left(\lim_{x\to a}g(x)=c\neq 0\right)$$

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x-3}{x+1}=\frac{\lim_{x\to 0}4x-\lim_{x\to 0}3}{\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}1}=\frac{0-3}{0+1}=-3$$

شپږمه قضيه:

د یوی جذري تابع لیمیټ په یوه نقطه کی دتابع دلیمیټ دجذر سره مساوي دی په همغه نقطه کې:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}=\sqrt[n]{b}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{8x^6}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 2}8x^6}=\sqrt[3]{8\cdot 2^6}=2\cdot 2^3=16$$

بې نهایت کوچنۍ تابع: که د یوی تابع لیمیټ په یوه نقطه کی صفر شي دی تابع ته بی نهایت کوچنۍ تابع وایي. لکه:

$$\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$$

تبصره :

a- د بی نهایت کوچنۍ تابع ګانو مجموعه یوه بی نهایت کوچنۍ تابع ده.

b- د بی نهایت کوچنۍ تابعګانو دضرب حاصل هم یوه بی نهایت کوچنۍ تابع ده.

c- که $\varepsilon(x)$ تابع د $x\to a$ په صورت کی یوه بی نهایت کوچنۍ تابع وي نو:

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{\varepsilon(x)}=\infty$$

d- که چیری $\varepsilon(x)$ یوه بی نهایت کوچنۍ تابع وي او $u(x)\neq 0$ وي نو $v(x)=\frac{\varepsilon(x)}{u(x)}$ یوه بې نهایت کوچنۍ تابع ده.

مثال: د (3) په نقطه کی د $\lim_{x\to 3}(x^2-9)$ تابع لیمیټ پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to 3}(x^2-9)=3^2-9=9-9=0$$

مثال: د $\varepsilon(x)=\frac{1}{2x}$ تابع لیمیټ په $x\to\infty$ کې پیدا کړئ؟

$$\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2\cdot\infty}=\frac{1}{\infty}=0$$

1- د $\lim_{x\to a}f(x)=b$ ثبوت:

$\lim_{x\to a}f(x)=b+\varepsilon(x)$ فرضوو او دا چه $\lim_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ دي نو:

$$\lim_{x\to a}f(x)=b$$

2- د $\lim_{x\to a}\{f(x_1)+f(x_2)\}=\lim_{x\to a}f(x_1)+\lim_{x\to a}f(x_2)$ ثبوت:

$$\lim_{x\to a}f(x_1)=b_1+\varepsilon_1$$
$$\lim_{x\to a}f(x_2)=b_2+\varepsilon_2$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1)+f(x_2)\}=\lim_{x\to a}f(x_1)+\lim_{x\to a}f(x_2)=\{b_1+\varepsilon_1\}+\{b_2+\varepsilon_2\}$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1)+f(x_2)\}=b_1+b_2+\{\varepsilon_1+\varepsilon_2\}$$
$$\{\varepsilon_1+\varepsilon_2\}=0$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x_1)+f(x_2)\}=b_1+b_2$$

3- د دوه تابعګانو د حاصل ضرب لیمیټ په یوه نقطه کې د تابعګانو د لیمیټو د حاصل ضرب سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$$
$$\lim_{x\to a}f(x)=b_1+\varepsilon_1$$
$$\lim_{x\to a}g(x)=b_2+\varepsilon_2$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}g(x)=(b_1+\varepsilon_1)(b_2+\varepsilon_2)$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=b_1b_2+b_1\varepsilon_2+b_2\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2$$
$$\varepsilon_1\varepsilon_2=0\quad\&\quad b_1\cdot\varepsilon_2=0\quad\&\quad b_2\varepsilon_1=0$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x)\cdot g(x)\}=b_1b_2$$

4- د دوه تابعګانو د نسبت لیمیټ په یوه نقطه کې د تابعګانو د لیمیټو د نسبت سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g\,(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

$$\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$$

ثبوت:

$$f(x)=b_1+\varepsilon_1$$
$$g(x)=b_2+\varepsilon_2$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

د مساوات د دواړو خواو څخه $\frac{b_1}{b_2}$ منفي کوو.

$$\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}-\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)-b_1(b_2+\varepsilon_2)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$
$$=\frac{b_1b_2+b_2\varepsilon_1-b_1b_2-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}+\frac{b_1}{b_2}=\frac{b_2\varepsilon_1-b_1\varepsilon_2+b_1b_2+b_1\varepsilon_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_2\varepsilon_1+b_1b_2}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}$$
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b_2(b_1+\varepsilon_1)}{b_2(b_2+\varepsilon_2)}=\frac{b_1+\varepsilon_1}{b_2+\varepsilon_2}$$

څرنګه چه $\varepsilon_1$ او $\varepsilon_2$ ډېر کوچني مثبت عددونه دي نوصفر کيږي. نو ثابته شوه چه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{b_1}{b_2}$$

اومه قضيه يا د ساندويچ قضيه:

که $f(x)$, $g(x)$ او $h(x)$ دری تابعګانی ولرو چه $f(x)\le g(x)\le h(x)$ وي که:

$$\lim_{x\to a}f(x)=b=\lim_{x\to a}h(x)$$

نو $\lim_{x\to a}g(x)=b$ کيږي.

مثال: که $\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\le u(x)\le\left(1+\frac{x^2}{4}\right)$ وي نو ? $=\lim_{x\to 0}u(x)$ دی.

$\lim_{x\to0}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=1=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)$ وي نودسانډويچ د قضيي سره سم د $u(x)$ قيمت پيدا کړئ؟

حل:

$$\lim_{x\to a}u(x)=1$$

تمرين:

لاندې ليميټونه حل کړئ؟

1- $\lim_{x\to0}(x^2-2x^2+5x+3)$

2- $\lim_{x\to-1}(x^2-2x-5)$

3- $\lim_{x\to0}\frac{(9x+2)^2-4}{x}$

4- $\lim_{x\to0}\frac{3x^3-4x^2+7x-14}{2x^2-11x+7}$

5- $\lim_{x\to0}\frac{4x^2-21x}{3x^3+5x^2+7x}$

6- $\lim_{x\to0}\frac{5x^3-4x^2}{7x^2-3x}$

7- $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+7x-3}{2x^2-3x+1}$

8- $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-4x+5}{3x-1}$

9- $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x-11}{2x^3+3x^2-4x+7}$

10- $\lim_{x\to\infty}(4x^3-3x^2+4x-12)$

11- $\lim_{x\to3}\frac{3x^2-3x+7}{1+\frac{2-x}{x}}$

12- $\lim_{x\to4}\left(\frac{x-3}{x-5}+\frac{x}{x+5}+\frac{x+4}{x}\right)$

اتمه قضيه:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

په داسې حال کې چه $(n)$ يو طبعي عدد او $(a)$ يو حقيقي عدد دي.

ثبوت:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\cdots+a^{n-1})$$

$$\lim_{x\to a}x^{n-1}+a\lim_{x\to a}x^{n-2}+a^2\lim_{x\to a}x^{n-3}+\cdots+a^{n-2}\lim_{x\to a}x+\lim_{x\to a}a^{n-1}$$

$$=a^{n-1}+a\cdot a^{n-2}+\cdots+a^{n-2}\cdot a+a^{n-1}$$

$$=a^{n-1}+a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots+a^{n-1}+a^{n-1}=na^{n-1}$$

دغه قضيه د ټولو جذري افادود ليميټ د پيدا کولو لپاره استعمالولای شو.

مثال:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n}}}{x-a}=\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}=\frac{1}{n}a^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}a^{\frac{-(n-1)}{n}}=\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n-1}}}$$

مثال:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{3}}{x-3}=?$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{3}}{x-3}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{1-5}{5}}=\frac{1}{5}\cdot 3^{\frac{-4}{5}}=\frac{1}{5\cdot\sqrt[5]{3^4}}$$

مثال:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=?$$

د دغه سوال د حل لپاره $(x=y^6)$ او $a=b^6$ ښيو:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}=\lim_{y\to b}\frac{\sqrt[3]{y^6}-\sqrt[3]{b^6}}{\sqrt{y^6}-\sqrt{b^6}}=\lim_{y\to b}\frac{y^2-b^2}{y^3-b^3}$$

$$=\lim_{y\to b}\frac{(y-b)(y+b)}{(y-b)(y^2+by+b^2)}$$

$$\lim_{y\to b}\frac{y+b}{y^2+by+b^2}=\frac{b+b}{b^2+b^2+b^2}=\frac{2b}{3b^2}=\frac{2}{3b}$$

$$\therefore\quad b^6=a\quad\because\quad b=\sqrt[6]{a}$$

$$=\frac{2}{3\sqrt[6]{a}}$$

ابهام $Uncertainty$:

په اعدادو یا ($\infty$) باندی دعملیودنتایجو عدم قاطعیت یا نامعلومي ته ابهام وائي.

مبهم اشکال په لاندی ډول دي.

$$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^0$$

د ابهام رفع کول:

د څلورو لمړیو شکلو یعنی $\left(\infty - \infty \text{ ، } 0 \cdot \infty \text{ ، } \frac{0}{0} \frac{\infty}{\infty}\right)$ ابهام په څلورو طریقو رفع کیږي.

1- د تقسیم پواسطه

2- د مزدوج د ضربېدو پواسطه

3- د تجزئي پواسطه

4- د لوهسپیتال په طریقه

1- د تقسیم پواسطه د ابهام رفع کول:

که په یوه کسري تابع کی د لیمیټ د پیدا کولو په وخت کی ابهام منځ ته راشي صورت او مخرج په هغه متحول ویشو چه درجه یي لوړه وي.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-2}=\frac{\infty-1}{\infty-2}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{3x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{3-\frac{1}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{3-\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{3}$$

2- د تجزیي پواسطه د ابهام رفع کول:

که یوه کسري تابع د لیمیټ د پیدا کولو په وخت کی مبهم شکل غوره کړي او د تجزیي وړ وي تجزیه کوو یي.

مثال:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{(-2)^2-4}{-2+2}=\frac{4-4}{-2+2}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2^2}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2}$$
$$\lim_{x\to -2}(x-2)=-2-2=-4$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\frac{2^2-6\cdot 2+8}{2-2}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x-4x+8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)-4(x-2)}{x-2}$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-4)=2-4=-2$$

3- د مزدوج د ضربولو پواسطه د ابهام رفع کول:

که د يوى تابع ابهام د تقسيم او تجزيي پواسطه نه رفع کېدلو په مزدوج کی يي ضربوو.

مثال:

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\frac{\sqrt{16}-4}{16-16}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}=\lim_{x\to 16}\frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}=\lim_{x\to 16}\frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$
$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}^2-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}=\lim_{x\to 16}\frac{x-16}{(x-16)(\sqrt{x}+4)}$$
$$\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt{x}+4}=\frac{1}{\sqrt{16}+4}=\frac{1}{8}$$

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\infty-\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x}^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

مثال:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = ?$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{\sqrt{x+1}^2-4}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(\sqrt{x+1}+2)$$

$$= \sqrt{3+1}+2$$

$$\sqrt{4}+2 = 2+2 = 4$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2} = ?$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{4}{5}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{10x-4x^2-4}{5(x^2+1)}}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(-4x^2+10x-4)}{5(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(-4x^2+2x+8x-4)}{5(x^2+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\{-2x(2x-1)+4(2x-1)\}}{5(x^2+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{-2(x-2)(2x-1)}{5(x^2+1)(x-2)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{-2(2x-1)}{5(x^2+1)} = \frac{-2(2\cdot 2-1)}{5(2^2+1)} = \frac{-6}{25}$$

د $\left(1^{\infty}، \infty^{0}، 0^{0}\right)$ اشکالو د ابهام رفع کول:

ددغه اشکالو د رفع کولو لپاره د $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ کار اخیستل کیږي. چه:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

د $e = 2.718281828$ عدد د یوه جرمني عالم ایولر *Euler* پواسطه کشف شویدی.

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

د پاره د دې چې پوښتنه د ایولر د فارمول شکل ته ورواړوو نو $\frac{1}{\alpha}$ په $x$ ښیو:

$$x=\frac{1}{\alpha}\Longrightarrow\because\ \alpha\to 0\quad\therefore\ x\to\infty$$

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

مثال:ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=e^{\alpha\beta}$$

حل:

$$u=\frac{\alpha}{x}\quad\Longrightarrow\ \therefore\ x\to\infty\quad\because\quad u\to 0\ \Longrightarrow x=\frac{\alpha}{u}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\beta\frac{\alpha}{u}}=\lim_{u\to 0}\left\{(1+u)^{\frac{1}{u}}\right\}^{\alpha\beta}$$

$$\frac{1}{u}=x\Longrightarrow u=\frac{1}{x}\quad\therefore\ u\to 0\quad\because x\to\infty$$

$$\lim_{u\to 0}\left\{(1+u)^{\frac{1}{u}}\right\}^{\alpha\beta}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right\}^{\alpha\beta}=e^{\alpha\beta}$$

مثال:ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x}=1$$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Ln(1+x)}{x} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}ln(1+x)\right\} = \lim_{x\to 0}\left\{ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\} = ln\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}$$

$$\frac{1}{x} = u \Rightarrow x = \frac{1}{u} \qquad \therefore\ x \to 0 \quad \because\ u \longrightarrow \infty$$

$$= ln\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\} = ln\left\{\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right\} = lne = 1$$

مثال: ثبوت کړئ چې:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$$

د سوال د حل لپاره $(e^x - 1)$ په $(y)$ ښيو:

$$e^x - 1 = y \Rightarrow e^x = 1 + y \Rightarrow \ln e^x = \ln(1+y) = x\ln e = \ln(1+y)$$

$$x = \ln(1+y)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{1}{y} = x \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

$$\therefore\ y \to 0 \quad \because\ x \to \infty$$

$$= \frac{1}{\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}} = \frac{1}{\ln e} = \frac{1}{1} = 1$$

تبصره:

که يوه تابع د $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ شکل ولري د ليميټ د لاس ته راوړلو لپاره يې طبعي لوګاريتم نيسو او د پورتنيو مبهمو شکلو څخه چې که هر شکل يې لرلو د $(0\cdot\infty)$ شکل ته ئي را اړوو او د مخکينيو څلورو حالتو څخه چه په هر حالت ئي ابهام د منځه تللو ابهام ئي د منځه وړو.

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \ln\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a}\ln f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a}\{g(x)\ln f(x)\}$$

د مبهم شکل عمومي حالت :-که $\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = 1^{\infty}$ وي په دی حالت کی$(\alpha)$ په $(u-1)$ ښیو:

$$(\alpha = u-1)$$

$$\lim_{x\to a} u^{v} = \lim_{x\to a}(1+u-1)^{\frac{v}{u-1}\cdot u-1} = \lim_{x\to a}\left\{(1+\alpha)^{\frac{v}{\alpha}\cdot\alpha}\right\}$$

$$= \lim_{x\to a}\left\{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\lim\limits_{x\to a}(v\alpha)}$$

څرنګه چه $(\alpha = u-1)$ دی نو که $(u\to 1)$ وکړي په نتیجه کی $(\alpha\to 0)$ کوي په نتیجه کی لیکو چې:

$$\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = \left\{\lim_{x\to a}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}^{\lim\limits_{x\to a} v(u-1)} = e^{\lim\limits_{x\to a} v(u-1)} = e^{p}$$

$$\lim_{x\to a}\{u(x)\}^{v(x)} = e^{p} \qquad , \qquad p = \lim_{x\to a}\{v(u-1)\}$$

1- مثال :د $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$ پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 1+\frac{2}{x} \qquad , \qquad v = x$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = e^{p} \qquad , \qquad p = \lim_{x\to\infty}\left\{x\left(1+\frac{2}{x}-1\right)\right\} = \lim_{x\to a} x\left(\frac{2}{x}\right) = 2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x} = e^{p} = e^{2}$$

2- مثال :د $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}}$ قیمت محاسبه کړئ؟

حل: لمړی د لیمیټ بڼه لیکو:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}} = e^{p}$$

$$p = \lim_{x\to a} v(u-1) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2}\left(1+\frac{1}{x}-1\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{5}{x}}{\frac{2x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x}}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x-5}{2}}=e^p=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

3- مثال: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل:

$$u=\cos x \quad , \quad v=\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}=e^p$$

$$p=\lim_{x\to 0}\{v(u-1)\}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{x}(\cos x-1)\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x(\cos x+1)}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=1\cdot\frac{0}{1}=1\cdot 0=0$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+1)^{\frac{1}{x}}=e^p=e^0=1$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}=?$

حل:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(1+\frac{1}{x}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1+\frac{1}{\infty}=1+0=1$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=?$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{x+3}{x-1}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{x+3-x+1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}(x+2)\left(\frac{4}{x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+8}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{x}+\frac{8}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{8}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{4+\frac{8}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{4}{1}=4$$

مثال: $\lim_{x\to\infty}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\cos 2x-1)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-2\sin^2 x-1}{x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\sin x$$

$$=-2\cdot 1\cdot 0=0$$

مثال: $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x}=?$

حل:

$$x-1=y\Rightarrow x=1+y$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y)}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}}$$

$$\frac{1}{y}=u\Rightarrow y=\frac{1}{u}\qquad \therefore\ y\to 0\quad \because\ u\to\infty$$

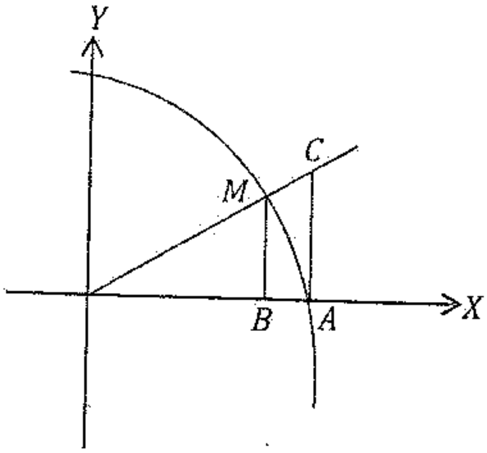
$$\frac{1}{\ln\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}}=e$$

### د مثلثاتي تابعگانو لیمیټ $:limit\ of\ Trigono\ metrical\ Functions$

د یوې زاويي د ساین اوهغه زاويي د نسبت لیمیټ په صفر کی (1) دې. یعني:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

ثبوت:په يوه دايره کې يو داخلي او يو خارجي مثلثونه رسموو اوهم ددې مثلثو تر منځ يوه قطاع په نظر کې نيسو. مساحتونه ئي پيدا کوو او مقايسه کووېي.




$A_{OBM} < A_{OAM} < A_{OAC}$

$\frac{1}{2} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{MB} < \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \widehat{AM} < \frac{1}{2} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AC}$

$\overline{OB} = \cos x \quad , \quad \overline{MB} = \sin x \ , \quad \overline{OA} = 1 \quad , \widehat{AM} = x$

$\sin x \cos x < x < \tan x$

$$\frac{\sin x \cos x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x}$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} > \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} > \lim_{x\to 0} \cos x$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 = \lim_{x\to 0} \cos x$$

د ساندويچ د قضيي سره سم:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

1- مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=?$

حل:

$$2x=\alpha \Longrightarrow x=\frac{\alpha}{2} \qquad \therefore\ x\longrightarrow 0 \qquad \because \quad \alpha\longrightarrow 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{2}}=2\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=2\cdot 1=2$$

2- مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\tan 2x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 2x}{7x\cos 2x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot 2x\cdot\frac{\sin 2x}{2x}}{7x\cos 2x}=\frac{10}{7}\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim_{x\to 0}\cos 2x}=\frac{10}{7}$$

3- مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2sin^2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-1+2sin^2x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sin x=2\cdot 1\cdot 0=0$$

څلورم مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 5x}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}{\cos 3x}}{5x\cdot\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{\frac{3x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x\to 0}\cos 3x}}{5x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{5}$$

5- مثال: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 4x-\cos 6x}{x^2}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{4x+6x}{2}\sin\frac{4x-6x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\sin(-x)}{x^2}$$

$$2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=10\cdot 1\cdot 1=10$$

6- مثال: $\lim_{x\to 0}\sqrt{\cos 2x-\cos x+1}=?$

حل:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{2cos^2x-1-cosx+1}=\lim_{x\to 0}\sqrt{2cos^2x-cosx}$$

$$=\sqrt{2(1^2)-1}=\sqrt{2\cdot 1-1}=\sqrt{2-1}=1$$

## د تابعګانو متمادیت (اتصال):

د اتصال له مخې تابع په دوه ډوله ده.

1- متمادي تابع        2- غېر متمادي تابع

### 1- متمادي تابع:

هغه تابع ده چه دګراف د ترسیم په وخت کې یې د پنسل څوکه د کاغذ څخه نه پورته کیږي یعنی ګراف یې پریکړون نه لري.په عمومي ډول خطي تابع، دویمه درجه تابع، اکسپونشل تابع، لوګاریتمي تابع، د ساین او کوساین تابعګانې متمادي تابعګانی دي په دې شرط چه کومه نقطه ورڅخه وتلې نه وي.

### 2- غېر متمادي تابعګانې:

هغه تابعګانې دي چه ګراف یې څو ټوټې وي. لکه هوموګرافیک تابع، د تانجانت، کوتانجانت، سیکېنټ او کوسیکېنټ تابعګانې.

کولای شو چې متمادي تابګانې په غېرمتمادي تابګانو بدلې کړو مګر نشو کولای چې غېر متمادي تابعګانې په متمادي تابعګانو بدلې کړو.

د متمادیت شرطونه:

د متمادیت شرطونه دری دي .

1- د $(a)$ نقطه باید په $\lim_{x\to a} f(x)$ کی شامل وي.

2- $\lim_{x\to a} f(x)$ باید موجود وي.

3- د تابع لیمیټ په یوه نقطه کی باید د تابع د قیمت سره مساوي وي په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

که پورتني دری واړه شرطونه په یوه تابع کی موجود وه تابع متمادي ده او که د دغه درې شرطو څخه یو یکی موجود نه و تابع متمادي نه ده غیرمتمادي ده.

1- مثال: وښیاست چه $f(x) = x^2 + 2x - 1$ تابع د $x \to 2$ په نقطه کی متمادي ده.

حل:

$2\epsilon dom f(x) \because 2 \in IR$ -1

$\lim_{x\to 2}(x^2 + 2x - 1) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = 7$ -2

$f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 - 1 = 7$ -3

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

نو تابع متمادي ده.

2- مثال: د $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ د تابع متمادیت د $(x = -1)$ په ټکي کی وڅیړئ؟

حل: څرنګه چه د تابع مخرج په $(-1)$ کې صفر کیږي او هر هغه عدد چه د تابع مخرج صفرکوي د تابع د تعریف په ناحیه کی شامل نه دی$(-1 \notin dom f(x))$ نو تابع متمادي نه ده

د تابع د لیمیټ شرطونه :که دیوی تابع د ښي لاس لیمیټ د تابع دچپ لاس د لیمیټ سره مساوي وي نوتابع لیمیټ لري. اوکه د ښي لاس لیمیټ د چپ لاس د لیمیټ سره مساوي نه ؤ لیمیټ نه لري.

د ښي لاس لیمیټ :

د $(b)$ عدد د $(a)$ په نقطه کې د $f(x)$ د تابع د ښي لاس لیمیټ دې په دې شرط چه د $(b)$ د هر مجاورت $(N)$ لپاره د تابع د تعریف په ناحیه کې د $(a, a+\delta)$ یو خلاص انټروال موجود وي چه د دې انټروال د هر عنصر تصویر د $(N)$ په مجاورت شامل وي او داسې لیکل کیږي.

$$\lim_{x \to a+} f(x)$$

د چپ لاس لیمیټ:

د $(b)$ عدد د $(a)$ په نقطه کې د $f(x)$ د تابع د چپ لاس لیمیټ دې په دې شرط چه د $(b)$ د هر مجاورت $(N)$ لپاره د تابع د تعریف په ناحیه کې د $(-\infty - a, a)$ یو انټروال موجود وي چه د دې مجاورت د هر عنصر تصویر د $(N)$ په مجاورت کې شامل وي او داسې لیکل کیږي.

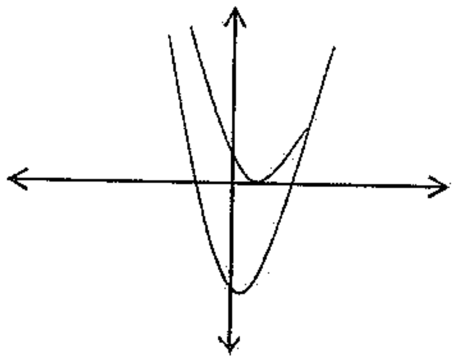
$$\lim_{x \to a-} f(x)$$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & ; \quad x < 2 \\ x^2 - 3 & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$$

حل:

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (x^2 - 2x + 1) = 1$$
$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (x^2 - 3) = 1$$
$$\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} f(x)$$
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \exists$$



4- مثال: $f(x)=\begin{cases}2x+1 & ; & x\geq 1\\ 1-x & ; & x<1\end{cases}$ تابع په راکړ شوو ټکو کې یې متمادیت وڅېړئ؟

حل:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1+}(2x+1)=3\\ \lim\limits_{x\to 1-}(1-x)=0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x)\neq \lim_{x\to 1-} f(x)$$

نو $\lim_{x\to 1} f(x)=\nexists$ تابع لیمیټ نه لري.

نو تابع د $(x=1)$ په نقطه کې غیرمتمادي ده.

تبصره:

1- که $g(x)$ تابع د $(x=a)$ په نقطه کې متمادي وي او $f(x)$ په $(x=g(a))$ کې متمادي وي نو $f(g(x))$ هم په $(x=a)$ کې متمادي ده.

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)=f(g(a))$$

2- د یوې طاقت لرونکې تابع د لیمیټ دپیدا کولو لپاره لمړی دتابع لیمیټ پیدا کوو او بیا یې په همغه توان رفع کوو.

$$\lim_{x\to a}(f(x))^a=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^a$$

3- د اکسپوننشل تابع د لیمیټ دپیدا کولو لپاره قاعده دتابع دتوان دلیمیټ په توان لیکو.

$$\lim_{x\to a}(b)^{f(x)}=b^{\lim_{x\to a} f(x)}$$

4- د لوګاریتمي تابع لیمیټ په یوه نقطه کې دتابع دلیمیټ دلوګاریتم سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\log_b f(x)=\log_b \lim_{x\to a} f(x)$$

5- د یوې مثلثاتي تابع لیمیټ په یوه نقطه کې د هغه تابع دلیمیټ دمثلثاتي نسبت سره مساوي دی په همغه نقطه کې.

$$\lim_{x\to a}\sin f(x)=\sin\lim_{x\to a} f(x)$$

د متمادي تابعګانو خواص:

که د دوه تابعګانو څخه هره یوه په یوه نقطه کی متمادي وي نو ددوی مجموعه ،تفاضل ، حاصل ضرب او خارج قسمت هم په همغه نقطه کی متمادي دی.

مثال : که $f(x) = x^2 + 3$ او $g(x) = x^2 + 3x - 2$ دوه تابعګاني متمادي وي نو ثبوت کړئ چې $g(x) \neq 0$; $\frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x) \cdot g(x)$ , $f(x) - g(x)$, $f(x) + g(x)$ هم متمادي دي.

حل:

$$1: Df(x) = IR$$
$$2: \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2 + 3) = 1^2 + 3 = 4$$
$$3: f(1) = (1^2 + 3) = 4$$

نو د $f(x)$ تابع د $x = 1$ په نقطه کې متمادي ده.

$$1: Dg(x) = IR$$
$$2: \lim_{x\to 1}(x^2 + 3x - 2) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 2$$
$$3: g(1) = (1^2 + 3 \cdot 1 - 2) = 2$$

نو د $g(x)$ تابع د $x = 1$ په نقطه کی متمادي ده.

اوس د تابعګانو دمجموعی او حاصل ضرب متمادیت څیړو.

الف:

$$f(x) + g(x) = x^2 + 3 + x^2 + 3x - 2 = 2x^2 + 3x + 1$$
$$1: D\{f(x) + g(x)\} = IR$$
$$2: \lim_{x\to 1}\{f(x) + g(x)\} = \lim_{x\to 1}(2x^2 + 3x + 1) = 6$$
$$3: f(1) + g(1) = (2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1) = 2 + 3 + 1 = 6$$
$$\lim_{x\to 1}\big(f(x) + g(x)\big) = f(1) + g(1) = 6$$

ب: د او تابعګانو دحاصل ضرب متمادیت وڅیړئ؟

$$1: Df(x) \cdot g(x) = IR$$
$$2: \lim_{x\to 1}\{f(x) \cdot g(x)\} = \lim_{x\to 1}(x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3) = 2 \cdot 4 = 8$$
$$3: f(1) \cdot g(1) = 2 \cdot 4 = 8$$

د تابعګانو حاصل ضرب هم متمادي دی.

## تمرين

د لاندې تابعګانو ليميټ پيدا کړئ؟

1: $\lim_{x\to\infty}(x^2-2x+17)$

2: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+3}{x+1}$

3: $\lim_{x\to 1}(x^3+5x^2-11x+1)$

4: $\lim_{x\to 1}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

# شپاړلسم فصل

## مشتق

مشتق مفعوله صیغه ده د اشتقاق څخه اخیستل شوی ده.

او په اصطلاح کې په عربي ژبه کی د مصدر څخه د نورو افعالو او اسماؤ اخیستلو ته اشتقاق وایي. د مشتق څخه مقصد د دوه یمی درجې، دریمی درجې او داسې نورو تابعګانو د میل پیدا کول دي.

### د خطي تابع میل:

په خطي تابع کی د مستقیم خط میل د $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ پواسطه پیدا کیږي.

مثال: $A(3,7)$ او $B(5,9)$ د مستقیمی کرښی دوه نقطی دي میل یي پیدا کړئ؟

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9-7}{5-3} = \frac{2}{2} = 1$$

خو څرنګه چه په منحني خطو کی دوه نقطی په یوه استقامت واقع نه وي نو له همدی امله دمنحني خطو دمیل د پیدا کولو لپاره د مستقیم خط د میل څخه استفاده کوي نو څکه د منحني میل ته مشتق وایي.

مثلاً $f(x) = x^2$ یوه تابع راکړشوی ده د میل ددغه تابع د ګراف دوه نقطی په یوه استقامت وجود نلري نو په تقریبي ډول دوه نقطی پیداکواو میل یي لاسته راوړو فرضاً $A(x, f(x))$ او $B(x+h, f(x+h))$ دمنحني خط دوه نقطی دي نود مستقیم خط د میل څخه استفاده کوونو لیکو چه:

$$m_{AB} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

د منحني خط دهری اختیاري نقطی میل عبارت $\lim_{x \to a} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ دی.

1- مثال: د $f(x) = 2x - x^2$ تابع د ګراف میل د $P(3,-3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

حل: څرنګه چې د $P(3,-3)$ په نقطه کې $x = 3$ دی نو کولای شو چه د میل په فارمول کې د $(x)$ په عوض $(3)$ وضع کړو.

$$m = \lim_{x\to a}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$m = \lim_{h\to 0}\frac{2(3+h)-(3+h)^2-(2\cdot 3-3^2)}{h}$$
$$m = \lim_{h\to 0}\frac{6+2h-(9+6h+h^2)-6+9}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h-9-6h-h^2+9}{h}$$
$$m = \lim_{h\to 0}\frac{h(-4-h)}{h} = \lim_{h\to 0}(-4-h) = -4 \Rightarrow m = -4$$

2- مثال: د $f(x) = x^3 - 1$ د تابع میل د $(x = -3)$ په نقطه کی پیدا کړئ؟

حل:

$$m = \lim_{x\to -3}\frac{f(-3+h)-f(-3)}{h} = \lim_{x\to -3}\frac{\{(-3+h)^3-1\}-\{(-3)^3-1\}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-27+27h-9h^2+h^3-1+27+1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3-9h^2+27h}{h}$$
$$m = \lim_{h\to 0}\frac{h(h^2-9h+27)}{h} = \lim_{h\to 0}(h^2-9h+27) = 27$$

منحنی یا وسطي تعبیر:

د متحرک پواسطه وهل شوی فاصله د وخت تابع ده. یعني:

$$S = f(t)$$

د $t_1$ او $t_2$ په وختونو کی د وهل شوو فاصلود تفاضل او وختو د تفاض نسبت ته د متحرک وسطي سرعت یا متوسط سرعت وايي. یاداچه دتابع اومتحول دزیادت نسبت ته متوسط سرعت وايي.

$$\acute{v} = \frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$

د متوسط سرعت لیمیټ ته لحظوي سرعت وايي

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0}\frac{S-S_0}{t-t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

1- مثال: د $y = f(x) = x^2$ په تابع کې متوسط تغیرات د $[2,5]$ په انټروال کې پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{25 - 4}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

2- مثال: د $f(t) = 5t^2 - 3t + 1$ د تابع متوسط سرعت د $[2,4]$ په انټروال کې پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{(5 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1) - (5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1)}{4 - 2} = \frac{69 - 15}{2} = 27$$

د یوې تابع مشتق:

که $y = f(x)$ یوه تابع ولرو نو که $(x)$ د $(\Delta x)$ په اندازه زیادت وکړي نو $(y)$ د $(\Delta y)$ په اندازه زیادت کوي.

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

دغه لیمیټ ته مشتق وایي.

د مشتق په باب لمړنی تصور پیري فرماټ (Pierre fermat) فرانسوي عالم په (1601 – 1665)م کې کړی ؤ نوموړي خپلې لیکلنې د نړۍ ریاضیدانانو ته پېشنهاد کړلې. وروسته بیا اسحق نیوټن (1642 – 1727)م او جورج ویلیم لایبنز(1664 – 1715)م د مشتق د موجودیت ضرورت په ریاضي کې ثابت او د ساینسدانانو کمیسون ته یې پېشنهاد کړ او د مشتق د تعریف وضاحت یې په ډېر ښه ډول وکړ.

د مشتق تعریف:

د صفر په نقطه کې د تابع او متحول د زیادت د نسبت لیمیټ ته مشتق وايي. لکه $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$
او په $f'(x)$ یا $y'$ ، $\frac{dy}{dx},\frac{df}{dx}$ ښودل کیږي.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=y'=f'(x)$$

1- مثال: د $f(x)=2x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-2x}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}=2$$

2- مثال: د $f(x)=x^3$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2)=3x^2\quad\Rightarrow f'(x)=3x^2$$

3- مثال: د $f(x)=\sqrt{x}\,;\,x\geq 0$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4- مثال: د $f(x) = 2x^2 + x$ د تابع مشتق د تعریف په مرسته وڅېرئ؟

حل:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{2(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)\}-(2x^2+x)}{\Delta x}$$

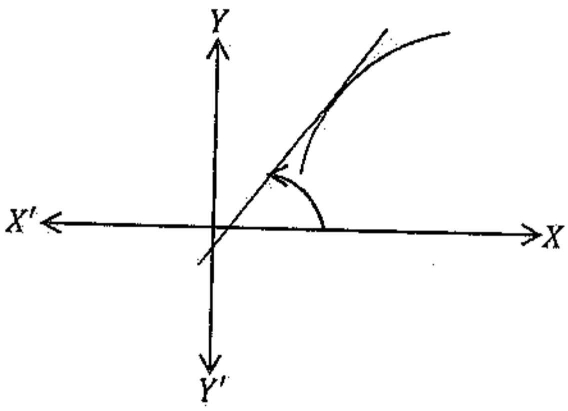
$$\lim_{\Delta\to x0}\frac{2x^2+4x\Delta x+2(\Delta x)^2+x+\Delta x-2x^2-x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4x\Delta x+2(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(4x+2\Delta x+1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}(4x+2\Delta x+1)=4x+1 \quad \Rightarrow f'(x)=4x+1$$

د مشتق هندسي تعبير

په یوه نقطه کې د یوه منحني خط مېل دهغه زاویې تانجانت دی چه مستقیمه کرښه یې د $(XX')$ د محور دمثبت جهت سره جوړوي.




1- مثال: د هغه مماس مېل او معادله پیدا کړئ چې د $f(x) = 2x^3 - 1$ په منحني باندې د $A(1,1)$ په نقطه کې رسمیږي.

حل:

$$m = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{2(x+\Delta x)^3 - 1\} - (2x^3 - 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - (2x^3 - 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^3 + 6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3 - 1 - 2x^3 + 1}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x^2\Delta x + 6x(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} (6x^2 + 6x\Delta x + 2(\Delta x)^2) = 6x^2$$

د $A(1,1)$ په ټکي کې د مماس میل $m = f'(x) = f'(1) = 6(1)^2 = 6 \cdot 1 = 6$ دی او معادله یې په لاندې ډول ده.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = 6(x - 1) \qquad \Rightarrow y = 6x - 6 + 1 = 6x - 5 \Rightarrow y = 6x - 5$$

2- مثال: د $y = x^2 + 1$ د تابع د مماس میل د $x_0 = 2$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + 1 - (x_0^2 + 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4$$

3- مثال: د $y = f(x) = x^2$ تابع راکړشوی ده د $x = x_0$ په نقطه کې اوخصوصاً د $x_0 = 2$ په نقطه کې یې مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 = 2 \cdot 2 = 4$$

4- مثال: د $f(x) = \frac{1}{x}$ د تابع مشتق د $(x_0)$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

حل:

$$y = f(x_0)$$
$$y + \Delta y = f(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$
$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)} = -\frac{1}{{x_0}^2} \quad \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{{x_0}^2}$$

5- مثال: د $f(x) = 4x^2 - 3$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$y = f(x)$$
$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$
$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\{4(x + \Delta x)^2 - 3\} - (4x^2 - 3)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\{4(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - 3\} - (4x^2 - 3)}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x^2 + 8x\Delta x + 4(\Delta x)^2 - 3 - 4x^2 + 3}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8x\Delta x + 4(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(8x + 4\Delta x)}{\Delta x}$$
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (8x + 4\Delta x) = 8x$$

تمرین:

د لاندې تابعګانو مشتق پیدا کړئ؟

1- $f(x) = \sqrt{x+1}$ 2- $f(x) = \frac{x^2-5}{x}$

3- $f(x) = 1 - \frac{3}{x}$ 4- $f(x) = \frac{2}{x^2+5x-7}$

5- $f(x) = x - \frac{1}{x}$ 6- $f(x) = 5x - 1$

## د مشتق قوانين:

### اوله قضيه:

د ثابت عدد مشتق صفر دی.

مفروض : $y = c$ یوه تابع لرو.

مطلوب : ثبوتوو چه $\acute{y} = 0$

ثبوت:

$$y + \Delta y = c \quad \Rightarrow \Delta y = c - y = c - c$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

### د يوې طاقت لرونکی تابع مشتق:

مفروض : $y = f(x) = x^n$ یوه طاقت لرونکی تابع ده.

مطلوب : ثبوتوو چه $\acute{y} = \acute{f}(x) = nx^{n-1}$

ثبوت:

$$y = x^n$$
$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n \quad \Rightarrow \Delta y = (x + \Delta x)^n - y = (x + \Delta x)^n - x^n$$
$$\Delta y = (x + \Delta x - x)\{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 \cdots + x^{n-1}\}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \cdots + x^{n-1}\}}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \{(x + \Delta x)^{n-1} + (x + \Delta x)^{n-2} \cdot x + (x + \Delta x)^{n-3} \cdot x^2 + \cdots + x^{n-1}\}$$
$$\acute{y} = x^{n-1} + x^{n-1} + x^{n-1} + \cdots + x^{n-1} = nx^{n-1}$$

1- مثال: د $f(x) = x^5$ تابع مشتق $x = \frac{1}{2}$ په ټکي کې پیدا کړئ؟

$$f(x) = x^5$$
$$f'(x) = 5x^{5-1} = 5x^4$$
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 5\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{5}{16}$$

2- مثال: د $f(x) = x^{-2}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3}$$

3- مثال: د $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2-3}{3}} = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{-1}{3}} = \frac{2}{3 \cdot x^{\frac{1}{3}}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

د دوه تابعګانو د حاصل جمع مشتق:

د دوه تابعګانو د مجموعی مشتق د تابعګانو دمشتقو د مجموعی سره مساوي دی.

مفروض: $(u)$ او $(v)$ دوه تابعګانی لرو.

مطلوب: ثبوتوو چه $y' = u' + v'$

ثبوت: د تابعګانو د جمع حاصل په $(y)$ ښیو:

$$y = u + v$$
$$y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - y$$
$$\Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v - u - v$$
$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$y' = u' + v'$$

## د دوه تابعگانو دتفاضل مشتق

د دوه تابعگانو دتفاضل مشتق د تابعگانو د مشتقو د تفاضل سره مساوي دی.

مفروض : $(u)$ او $(v)$ دوه تابعگانی لرو.

مطلوب : ثبوتوو چه: $\acute{y} = \acute{u} - \acute{v}$

ثبوت: د $(u)$ او $(v)$ تابعگانو تفاضل په $(y)$ ښیو.

$$y = u - v$$
$$y + \Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v)$$
$$\Delta y = (u + \Delta u) - (v + \Delta v) - u + v$$
$$\Delta y = u + \Delta u - v - \Delta v - u + v$$
$$\Delta y = \Delta u - \Delta v$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u - \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} - \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\acute{y} = \acute{u} - \acute{v}$$

1- مثال: د $y = 2x + 1$ د تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 2x \qquad \& \qquad v = 1$$
$$\acute{u} = 1 \cdot 2x^{1-1} = 2x^0 = 2$$
$$\acute{v} = 0 \qquad \because \ \acute{y} = 2$$

2- مثال: د $f(x) = 4x^2 - 3x + 5$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 4x^2 \ , \quad v = -3x \ , \ w = 5$$
$$\acute{y} = \acute{u} + \acute{v} + \acute{w}$$
$$\acute{y} = (4x^2)' - (-3x)' + 5'$$
$$\acute{y} = 8x - 3$$

د حاصل ضرب مشتق:

د دوه تابعګانو د حاصل ضرب مشتق مساوي دي د اولی تابع مشتق ضرب دویمه تابع جمع د دویمي تابع مشتق ضرب اوله تابع.

مفروض: د $(u)$ او $(v)$ دوه تابعګانی لرو او د حاصل ضرب تابع یي په $(y)$ ښیو.

$$y = u \cdot v$$

مطلوب : ثبوتوو چه: $\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$

ثبوت:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v)$$
$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - u \cdot v$$
$$\Delta y = u \cdot v + u \cdot \Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v - u \cdot v$$
$$\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta$$
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \lim_{\Delta x 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$
$$\acute{y} = v\acute{u} + \acute{v}u + 0 \cdot \acute{v}$$
$$\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$$

1- مثال: د $y = x^3(x^2 - 3)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = x^3 \ \Rightarrow \acute{u} = 3x^2$$
$$v = x^2 - 3 \ \Rightarrow \acute{v} = 3x$$
$$\acute{y} = \acute{u}v + \acute{v}u$$
$$\acute{y} = 3x^2(x^2 - 3) + 2x(x^3)$$
$$\acute{y} = 3x^4 - 9x^2 + 2x^4 = 5x^4 - 9x^2$$

2- مثال: د $f(x) = (2x^2 - 5x + 7)(3x - 15)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 2x^2 - 5x + 7 \quad \Rightarrow \acute{u} = 4x - 5$$
$$v = 3x - 15 \quad \Rightarrow \acute{v} = 3$$
$$\acute{f}(x) = (4x - 5)(3x - 15) + 3(2x^2 - 5x + 7)$$
$$\acute{f}(x) = 12x^2 - 60x - 15x + 75 + 6x^2 - 15x + 21$$
$$\acute{f}(x) = 18x^2 - 90x + 96$$

**د حاصل تقسیم مشتق:**

د دوه تابعګانو د خارج قسمت مشتق عبارت دی دصورت مشتق ضرب مخرج منفي د مخرج مشتق ضرب صورت پر مخرج مربع باندی.

مفروض: د $(u)$ او $(v)$ دوه تابعګانی لرود خارج قسمت تابع يي په $(y)$ ښيو. نو:

$$y = \frac{u}{v}$$

مطلوب: ثبوتوو چې:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - y$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)} = \frac{v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \lim_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)}$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$

1- مثال: د $y=\frac{2+3x}{1-2x}$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = 2 + 3x \Rightarrow \acute{u} = 3$$
$$v = 1 - 2x \Rightarrow \acute{v} = -2$$
$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow \acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$
$$\acute{y} = \frac{3(1-2x) - \{-2(2+3x)\}}{(1-2x)^2} = \frac{3 - 6x + 4 + 6x}{(1-2x)^2} = \frac{7}{(1-2x)^2}$$

2- مثال: د $f(x)=\frac{7x-15}{2x^2+3x}$ تابع مشتق پیداکړئ؟

حل:

$$u = 7x - 15 \Rightarrow \acute{u} = 7$$
$$v = 2x^2 + 3x \Rightarrow \acute{v} = 4x + 3$$
$$\acute{f}(x) = \frac{7(2x^2+3x) - (4x+3)(7x-15)}{(2x^2+3x)^2}$$
$$\acute{f}(x) = \frac{14x^2 + 21x - 28x^2 + 60x - 21x + 45}{(2x^2+3x)^2}$$
$$\acute{f}(x) = \frac{-14x^2 + 60x + 45}{(2x^2+3x)^2}$$

3- مثال: د $y=\frac{x^2}{3x+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$u = x^2 \Rightarrow \acute{u} = 2x$$
$$v = x + 1 \Rightarrow \acute{v} = 3$$
$$\acute{y} = \frac{2x(3x+1) - 3 \cdot x^2}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2}{(3x+1)^2}$$
$$u = x^2 \Rightarrow \acute{u} = 2x$$
$$v = x + 1 \Rightarrow \acute{v} = 3$$
$$\acute{y} = \frac{2x(3x+1) - 3 \cdot x^2}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2 + 2x - 3x^2}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$
$$\acute{y} = \frac{3x^2 + 2x}{(3x+1)^2}$$

## د جذري تابع مشتق:

1- د هغه جذري تابع مشتق چې د جذر درجه يې دوه وي. لکه:

$$y = \sqrt{x}$$

مشتق يې عبارت دی د جذر د داخل مشتق پر دوه ضرب تابع .

فارمول يې په لاندې ډول دی.

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

مفروض: $y = \sqrt{u}$ يوه تابع راکړ شوې ده.

مطلوب: ثبوتوو چې:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \sqrt{u + \Delta u}$$

$$\Delta y = \sqrt{u + \Delta u} - y = \sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u}$$

$$\Delta y = \frac{(\sqrt{u + \Delta u} - \sqrt{u})(\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{u + \Delta u - u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}}{\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u}} = \frac{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \to 0} (\sqrt{u + \Delta u} + \sqrt{u})} = \frac{\acute{u}}{\sqrt{u} + \sqrt{u}} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{2\sqrt{u}}$$

مثال:- د $y = \sqrt{x}$ مشتق پيدا کړئ؟

د پورته تابع مشتق عبارت دی.

$$\acute{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ثبوت:

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - y$$

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال: $y = \sqrt{x^2 + 1}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$y + \Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}}$$

$$\Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - y$$

$$\Delta y = \sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$= \frac{\left[\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} - \sqrt{x^2 + 1}\right]\left[\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}\right]}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Delta y = \frac{(x + \Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\Delta y = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x^2 - 1}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}}{\sqrt{\{(x + \Delta x)^2 + 1\}} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2+1}+\sqrt{x^2+1}\right)}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$$

مثال: د $f(x)=\sqrt{2x^3-3x^2+4x-11}$ مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x)=\frac{6x^2-6x+4}{2\sqrt{2x^3-3x^2+4x-11}}$$

## د مرکبې تابع مشتق:

مرکبه تابع هغه تابع ده چه متحول یې د بل متحول تابع وي یا دا چه دتابع ، تابع ته مرکبه تابع وایي.لکه که د $f$ تابع د $g(x)$ تابع وي او $g$ د $x$ تابع وي نودغه تابع ته مرکبه تابع وایي.

د مرکبې تابع د مشتق دفارمول د پیدا کولو لپاره په لاندې ډول اجراات کوو.

$$\Delta y=\Delta y\Rightarrow\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\acute{y}_{(x)}\Rightarrow\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\acute{y}_{(u)}\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\acute{u}_{(x)}$$

$$\acute{y}_{(x)}=\acute{y}_{(u)}\cdot\acute{u}_{(x)}$$

نو په دې اساس که $y=u^n$ وي مشتق یې $\acute{y}=nu^{n-1}\cdot\acute{u}$ دی.

او که $y=\sqrt[n]{u}$ وي نو:

$$\acute{y}=\frac{\acute{u}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

1- مثال :

$$y = (2x^2 - 1)^3$$
$$\acute{y} = 3(2x^2 - 1)^{3-1} \cdot 4x = 3(2x^2 - 1)^2 \cdot 4x = 3(4x^4 - 4x^2 + 1) \cdot 4x$$
$$= (12x^4 - 12x^2 + 3) \cdot 4x$$
$$\acute{y} = 48x^5 - 48x^3 + 12x$$

2- مثال:

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

حل:

$$\acute{y} = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3- مثال:

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$$

حل:

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}} \quad , \quad \acute{y} = \frac{3x^2 - 4x}{3\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}$$

څلورم مثال:

$$y = (x^2 - 2)^{-3}$$

حل:

$$\acute{y} = -3(x^2 - 2)^{-3-1} \cdot 2x = -3(x^2 - 2)^{-4} \cdot 2x$$
$$= \frac{-6x}{(x^2 - 2)^4}$$

نوټ:

که د $(f)$ تابع د $(x_0)$ په نقطه کې مشتق ولري نو $\acute{f}(x)$ دهغه مماس میل دی چه د $[x_0, f(x_0)]$ په نقطه په منحني باندې مماس وي.

مثال: د $f(x) = x^3$ دتابع میل د $x_0 = 1$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

حل: څرنګه چه $x_0 = 1$ دی نو $f(x_0) = 1$ کیږي نو $P(1,1)$ د تماس ټکی دی نو مېل یې عبارت دی.

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1}(x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

که یوه تابع د $x = x_0$ په نقطه کی د مشتق وړ وي نو دا تابع په دی نقطه کی متمادي ده مګر ممکن یوه تابع په یوه نقطه کی متمادي وي مګر مشتق دی ونلري.

مثال: د $f(x) = |x|$ دتابع مشتق د $x = 0$ په نقطه کی پیدا کړئ

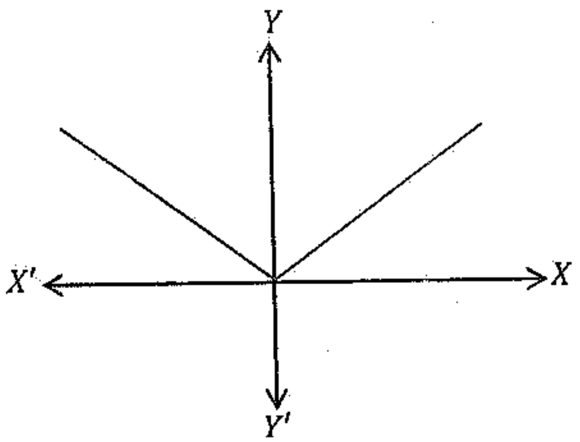
$$f'(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$\lim_{x \to 0+} f(x) \neq \lim_{x \to 0-} f(x)$$

لیمیټ نلري نو مشتق هم نلري.

$$f(x) = |x|$$



د مثلثاتي تابعګانو مشتق:

د $y = \sin x$ تابع مشتق:

د $y = \sin x$ مشتق عبارت دی له $y' = \cos x$ څخه

ثبوت:

$$
\begin{aligned}
&y = \sin x\\
&y + \Delta y = \sin(x + \Delta x)\\
&\Delta y = \sin(x + \Delta x) - y\\
&\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x\\
&\quad = 2\cos\frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x - x}{2} = 2\cos\frac{2x + \Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}\\
&\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2} = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\\
&\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x\\
&\acute{y} = \cos x
\end{aligned}
$$

که $f(x) = \sin u$ وي او $(u)$ د $(x)$ تابع وي نو مشتق يي عبارت دی له:

$$\acute{f}(x) = \acute{u}\cos u$$

1- مثال: د $f(x) = \sin 4x$ مشتق پیدا کړئ؟

$$
\left.\begin{aligned}
f(x) &= \sin 4x\\
u = 4x &\Rightarrow \acute{u} = 4\\
\acute{f}(x) &= \acute{u}\cos u
\end{aligned}\right| \qquad \acute{f}(x) = 4\cos 4x
$$

2- مثال :- د $f(x) = x^3 \csc x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$
\begin{aligned}
&f(x) = x^3 \cdot \csc x = x^3 \cdot \frac{1}{\sin x}\\
&g(x) = x^3 \Rightarrow \acute{g}(x) = 3x^2\\
&h(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow \acute{h}(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\cot x \csc x\\
&\acute{f}(x) = 3x^2 \cdot \csc x + x^3 \cdot (-\cot x \csc x)\\
&\acute{f}(x) = 3x^2 \cdot \csc x - x^3 \cot x \csc x
\end{aligned}
$$

3-مثال: د $y = \frac{\sin x}{1+x}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$$
$$v = 1 + x \Rightarrow \acute{v} = 1$$
$$\acute{y} = \frac{\cos x(1+x) - 1 \cdot \sin x}{(1+x)^2}$$

د $y = \cos x$ تابع مشتق:

د $y = \cos x$ تابع مشتق $\acute{y} = -\sin x$ دی.

ثبوت:

$$y = \cos x$$
$$y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$$
$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$
$$\Delta y = -2\sin\frac{x + \Delta x + x}{2}\sin\frac{x + \Delta x - x}{2} = -2\sin\frac{2x + \Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\Delta y = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0}\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\sin\frac{\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x \cdot 1 = -\sin x$$
$$y = \cos x \Rightarrow \acute{y} = -$$

پورتنی مشتق په لاندی ډول هم ثبوتولای شو.

$$sin^2 x + cos^2 x = 1$$
$$\cos x = \sqrt{1 - sin^2 x} = (1 - sin^2 x)^{\frac{1}{2}}$$
$$(\cos x)' = \frac{1}{2}(1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}(-2\sin x\cos x) = \frac{-2\sin x\cos x}{2(1 - sin^2 x)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{cos^2 x}}$$
$$= -\frac{\sin x\cos x}{\cos x} = -\sin x$$

1-مثال: $f(x) = \sin 2x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$f(x) = \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{f}(x) = \acute{u}v + \acute{v}u$

$\acute{f}(x) = 2[\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)]$

$\acute{f}(x) = 2(cos^2x - sin^2x) = 2\cos 2x$

2- مثال: د $f(x) = x - \sin x \cos x$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$y = x \Rightarrow \acute{y} = 1$

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{f}(x) = 1 - \{\cos x \cos x + \sin x(-\sin x)\}$

$\acute{f}(x) = 1 - (cos^2x - sin^2x) = 1 - \cos 2x$

3- مثال: $f(x) = (\sec 2x + \tan 2x)^2 = ?$

$\acute{f}(x) = 2(2\sec 2x \tan 2x + 2sec^2 2x) = 4\sec 2x(\tan 2x + \sec 2x)$

د $y = \tan x$ تابع مشتق:

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$u = \sin x \Rightarrow \acute{u} = \cos x$

$v = \cos x \Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$$\acute{y} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{cos^2x} = \frac{cos^2x + sin^2x}{cos^2x}$$

$$\acute{y} = \frac{1}{cos^2x} = sec^2x$$

څلورم د $y = \cot x$ تابع مشتق

ثبوت:

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$u = \cos x \Rightarrow \acute{u} = -\sin x$

$v = \sin x \;\Rightarrow \acute{v} = \cos x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{sin^2x} = \frac{-(sin^2x + cos^2x)}{sin^2x}$$

$$\acute{y} = -\frac{1}{sin^2x} = -csc^2x \qquad \therefore \quad co\acute{t}gx = -csc^2x$$

د $y = \sec x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$u = 1 \;\Rightarrow \acute{u} = 0$

$v = \cos x \;\Rightarrow \acute{v} = -\sin x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{0 \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot 1}{cos^2x} = \frac{\sin x}{cos^2x}$$

$$\acute{y} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x$$

د $y = \csc x$ تابع مشتق:

ثبوت:

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$u = 1 \;\Rightarrow \acute{u} = 0$

$v = \sin x \;\Rightarrow \acute{v} = \cos x$

$\acute{y} = ?$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2} = \frac{0 \cdot \sin x - \cos x \cdot 1}{sin^2x} = \frac{-\cos x}{sin^2x} = -\frac{\cos x}{\sin x}\frac{1}{\sin x}$$

$$\acute{y} = -\cot x \csc x \; v$$

که په یوه تابع کې څو متحوله موجود وي او د ضرب یا تقسیم په حال کې وي نو کله چه د دغه ډول تابعګانو مشتق پیدا کوو نو په نوبت سره دیوی تابع مشتق نظر یوه متحول ته نیول کیږي بل متحول ثابت فرض کیږي دغه ډول مشتقاتو ته ضمني مشتقات وایي او مشتق یې د لاندی فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$$

لمړی مثال: د $y = \sin\frac{x}{y} + 1$ تابع ضمني مشتق د $(\pi, 1)$ په ټکي کی پیدا کړئ؟

حل: د $y = \sin\frac{x}{y} + 1$ تابع مشتق د $y'_{(x)} = \frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}}$ رابطی څخه پیدا کوو.

$$y - \sin\frac{x}{y} - 1 = 0$$

$$f'_{(x)} = y'_{(x)} - \left(\sin\frac{x}{y}\right)'_{x} - (1)_x = 0 - \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y} - 0 = -\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}$$

$$f'_{(y)} = y'_y - \left(\sin\frac{x}{y}\right)'_{y} - (1)_y = 1 - \frac{x}{1}\cos\frac{x}{y} - 0 = 1 - x \cdot \cos\frac{x}{y}$$

$$y'_{(x)} = -\frac{f'_{(x)}}{f'_{(y)}} = -\frac{-\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 - x \cdot \cos\frac{x}{y}} = \frac{\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}}{1 - x \cdot \cos\frac{x}{y}}$$

اوس په $y'_{(x)}$ رابطه کی د $(x)$ او $(y)$ قیمتونه وضع کووچه $y'(\pi, 1)$ په لاس راشي

$$y'_{(\pi.1)} = \frac{\frac{1}{1}\cos\frac{\pi}{1}}{1 + \pi\cos\frac{\pi}{1}} = \frac{\cos\pi}{1 + \pi\cos\pi} = \frac{-1}{1 - \pi} = \frac{1}{\pi - 1}$$

دویم مثال: د $x^2y + 2y^3 = 3x + 2$ رابطی ضمني مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$x^2y + 2y^3 - 3x - 2 = 0$$
$$f'_{(x)} = 2xy + 0 - 3 - 0 = 2xy - 3$$

$$\acute{f}_{(y)} = x^2 + 6y^2 - 0 = x^2 + 6y^2$$

$$\acute{f}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2xy - 3}{x^2 + 6y^2} = \frac{3 - 2xy}{x^2 + 6y^2}$$

دريم مثال: د $y^6 - y - x^2 = 0$ ضمني مشتق پيدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}_{(x)} = -2x$$

$$\acute{f}_{(y)} = 6y^5 - 1$$

$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{-2x}{6y^5 - 1} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

دپورتنی تابع ضمني مشتق په لاندی ډول هم لاس ته راوړلای شو.

$$y^6 - y - x^2 = 0$$

$$6y^5\acute{y} - \acute{y} - 2x = 0$$

$$\acute{y}(6y^5 - 1) = 2x$$

$$\acute{y} = \frac{2x}{6y^5 - 1}$$

## د تابع دويم ضمني مشتق:

که يوه دويمه درجه دوه مجهوله تابع راکړشوی وي او وغواړو چه دويم ضمني مشتق يي پيدا کړو نو اول ضمني مشتق يي د فارمول پواسطه پيدا کوو.او بيا د مشتق دفارمولو پواسطه دويم ضمني مشتق پيدا کوو.

مثال: د $x^2 - y^2 = 1$ تابع دويم ضمني مشتق پيدا کړئ

حل:

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0$$

$$\acute{f}_{(x)} = 2x$$

$$\acute{f}_{(y)} = -2y$$

$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

اوس د $\acute{y}_{(x)}$ د رابطې $y''_{(x)}$ پیدا کوو

$$y''_{(x)} = \frac{\acute{x}y - \acute{y}x}{y^2} = \frac{y - \acute{y}x}{y^2} = \frac{y - \frac{x}{y} \cdot x}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3} = \frac{-1}{y^3} \Rightarrow y''_{(x)} = -\frac{1}{y^3}$$

دویم مثال: د $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$ په معادله کې د $(y)$ مشتق نظر $(x)$ ته د $(1,1)$ په ټکي کې پیدا کړئ او د منحني د مماس معادله پیدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}_{(x)} = 2x + y$$
$$\acute{f}_{(y)} = x + 2y$$
$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2x + y}{x + 2y} \quad \Rightarrow x + 2y \neq 0$$
$$\acute{y} = -\frac{2x + y}{x + 2y} = -\frac{2 \cdot 1 + 1}{1 + 2 \cdot 1} = -\frac{2 + 1}{1 + 2} = -\frac{3}{3} = -1$$
$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 1 = -1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -x + 2$$

د پورته معادلې ضمني مشتق په لاندې ډول هم پیدا کولای شو.

$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$
$$2x + y + x\acute{y} + 2y\acute{y} = 0 \Rightarrow 2x + y + (x + 2y)\acute{y} = 0$$
$$\acute{y} = \frac{-2x - y}{x + 2y} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

دریم مثال: د $x^2y^3 = 5y^3 + x$ ضمني مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$x^2y^3 - 5y^3 - x = 0$$
$$\acute{f}_{(x)} = 2xy^3 - 0 - 1 = 2xy^3 - 1$$
$$\acute{f}_{(y)} = 3x^2y^2 - 15y^2 - 0 = 3x^2y^2 - 15y^2$$
$$\acute{y}_{(x)} = -\frac{\acute{f}_{(x)}}{\acute{f}_{(y)}} = -\frac{2xy^3 - 1}{3x^2y^2 - 15y^2}$$

## متوالي مشتقات:

د مشتق مشتق ته متوالي مشتقات وايي کولای شو چه د يوی تابع دويم ،دريم، څلورم ··· او نور مشتقات ونيسو ترڅو چه مشتق يي صفر شي.

لمړی مثال: د $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ تابع دريم مشتق ونيسئ؟

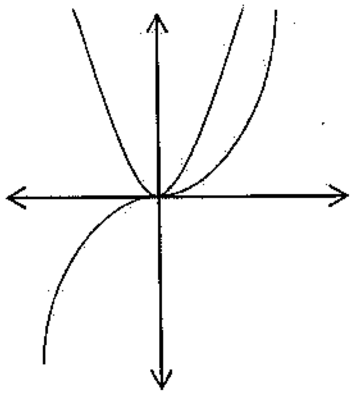
حل:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$$
$$f'_{(x)} = 3x^2 - 6x + 4$$
$$f''_{(x)} = 6x - 6$$
$$f'''_{(x)} = 6$$

دويم مثال: د $y = \frac{1}{3}x^3$ تابع ګراف اود هغی دلمړی مرتبی مشتق پيدا کړئ؟ او ګراف يي رسم کړئ؟

حل:

$$y' = x^2 \qquad y = \frac{1}{3}x^3$$
$$y' = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 = x^2$$



دويم مثال: که $y = \sin x + \cos x$ وي نود $\left(y^{(9)}\right)^2 + y^2$ قيمت پيدا کړئ؟

حل:

$$y = \sin x + \cos x$$
$$\acute{y}_{(x)} = \cos x + (-\sin x) = \cos x - \sin x$$
$$y''_{(x)} = -\sin x - \cos x$$
$$y'''_{(x)} = -\cos x - (-\sin x) = -\cos x + \sin x = \sin x - \cos x$$
$$\vdots$$
$$y'(9)_{(x)} = \cos x - \sin x$$
$$\left(y^{(9)}\right)^2_{(x)} + y^2 = (\cos x - \sin x)^2 + (\sin x + \cos x)^2$$
$$= cos^2x - 2\sin x\cos x + sin^2x + sin^2x + 2\sin x\cos x + cos^2x$$
$$= 2sin^2x + 2cos^2x = 2(sin^2x + cos^2x) = 2\cdot 1 = 2$$

## د مشتق د استعمال ځایونه:

د مشتق د استعمال موارد په لاندې ډول دي:

1- د توابعو دتزاید او تناقص لپاره.

2- د اعظمي نقطو ،اصغري نقطو ،اعظمي حجم، د لنډې فاصلې ،اعظمي مساحت اوداسې نورو شیانو دپیدا کولو لپاره.

3- د لوړې درجې تابعګانو د ګراف د ترسیم لپاره.

4- د مبهمو اشکالو دلیمیټ د پیداکولو لپاره.

لنډه دا چه د مشتق استعمال په فزیک ، کیمیا ، هندسه اونورو علومو کې زیات ګټور دی.

1- دتوابعو د تزاید او تناقص لپاره د مشتق استعمال:

که د $f(x)$ یوه تابع د $[a,b]$ په تړلي انټروال کې متمادي وي او په $(a,b)$ انټروال کې مشتق ولري نو که $\acute{f}(x) > 0$ وي نو تابع په دغه انټروال متزایده ده.او که $\acute{f}(x) < 0$ وي تابع متناقصه ده.

اول مثال: وښیئ چه د $f(x) = x^3 + 3x + 1$ تابع ګراف متزاید دې؟

حل : څرنګه چه تابع تامه ده نو $domf(x) = IR$ دې مشتق یې په لاندې ډول دي .

$$f(x) = x^3 + 3x + 1$$
$$\acute{f}(x) = 3x^2 + 3$$

که په مشتق کی د $(x)$ په عوض هر ډول عدد وضع کړو مثبت کیږي نو $\acute{f}(x) > 0$ دی په نتیجه کی تابع متزایده ده.

دویم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 5$ تابع په کوم انټروال کی متناقصه ده؟

حل: د $f(x)$ تابع متمادي ده اومشتق لري د تناقص د انټروال د معلومولو لپاره $\acute{f}(x) < 0$ پیدا کوو.

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 3 < 0$$

$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

د تابع مشتق د $-1 < x < 1$ په انټروال کی منفي دی نو تابع په همدی انټروال $(-1,1)$کی متناقصه ده.

دریم مثال: د $f(x) = 5x - 4$ تابع تحولات وڅیړئ؟

حل:

$$D_{f(x)} = IR$$
$$f(x) = 5x - 4$$
$$\acute{f}(x) = 5 > 0$$

تابع متزایده ده.

څلورم مثال: د $y = x^2$ تابع په کوم انټروال کی متزایده او په کوم انټروال کی متناقصه ده.

حل: که $\acute{y} < 0$وي تابع متناقصه ده او که $\acute{y} > 0$ وي تابع متزایده ده.

$$y = x^2$$
$$\acute{y} = 2x$$

د تناقص شرط $\acute{y} < 0 \Rightarrow 2x < 0 \Rightarrow x < 0$

د تزاید شرط $\acute{y} > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\acute{y}$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $y$ | $+\infty \searrow$ | $4 \searrow$ | $1 \searrow$ | $0$ | $1 \nearrow$ | $4 \nearrow$ | $+\infty \nearrow$ |

## د يوې تابع بحراني ټکي

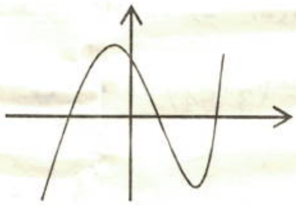
د يوې تابع اعظمي او اصغري ټکو ته بحراني ټکي وايي.

اعظمي نقطه *Maximum point* :

د تابع د ګراف تر ټولو جګې نقطې ته اعظمي نقطه وايي.

اصغري نقطه *Minimum point* :

د تابع دګراف تر ټولو ټيټې نقطې ته اصغري نقطه وايي.



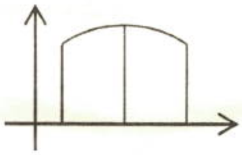
ثابته تابع :

هغه تابع ده چې مشتق يې صفر وي.

$y' > 0 \quad y' < 0$

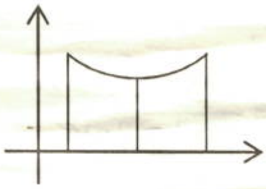
متزايده تابع :

که د $(a, b)$ په فاصله کې $\acute{y} > 0$ وي، تابع متزايده ده.



متناقصه تابع :- که د $(a, b)$ په فاصله کې $\acute{y} < 0$ وي تابع متناقصه ده.

$\acute{y} < 0 \ \acute{y} > 0$



## د انعطاف نقطه:

هغه نقطه ده چه په دې نقطه کې د تابع ګراف خپل جهت ته تغیرورکوي.

لمړی مثال: د $f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x$ یوه تابع راکړ شوی ده ووایاست چه ددی تابع ګراف ځو بحراني ټکي لري.

حل: د تابع لمړی مشتق پیدا کوو اود $(x)$ قیمتونه پیدا کوو.

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 7x + 2$$
$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = (x-2)(3x-1)$$
$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \therefore \quad A(2,-2)$$ اصغري نقطه ده
$$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \quad \therefore \quad B\left(\frac{1}{3},\frac{17}{54}\right)$$ اعظمي نقطه ده

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{3}$ | | $1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\acute{f}(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\frac{17}{54}$ | | $-2$ | | $-2$ | $+\infty$ |

دويم مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$ تابع بحراني نقطه یا نسبتي نقطه پیدا کړئ؟

حل: د تابع مشتق پیدا اوعلامی یي مطالعه کوو.

$$y = \frac{u}{v}$$
$$\acute{y} = \frac{\acute{u}v - \acute{v}u}{v^2}$$
$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x}$$
$$\acute{f}(x) = \frac{1\cdot(x^2-2x) - (2x-2)(x+1)}{(x^2-2x)^2} = \frac{(x^2-2x) - 2(x^2-1)}{(x^2-2x)^2}$$
$$\acute{f}(x) = \frac{x^2-2x-2x^2+2}{(x^2-2x)^2} = \frac{-x^2-2x+2}{(x^2-2x)^2}$$

په اعظمي او اصغري نقطو کې د تابع مشتق صفر وي.

$-x^2-2x+2=0 \Leftarrow f(x)=0$

$\Delta = b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot(-1)\cdot 2=4+8=12$

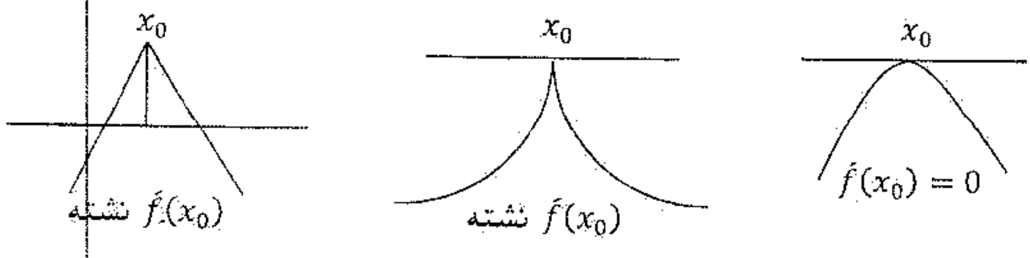
$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+\sqrt{12}}{2(-1)}=\frac{2+\sqrt{3.4}}{-2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{-2}=\frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)}{-2}=-2.73$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-\sqrt{12}}{2(-1)}=\frac{2-\sqrt{3.4}}{-2}=\frac{2-2\sqrt{3}}{-2}=\frac{2\left(1-\sqrt{3}\right)}{-2}=0.73$$

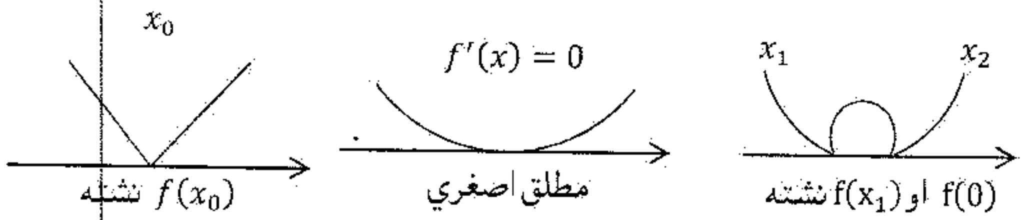
| $x$ | | $-3$ | | $-2.73$ | | $-1$ | | $0.73$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $\frac{2}{15}$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | max | $\searrow$ | $-2$ | $\searrow$ |

د کسر اشاره دجذرو منځ کی مثبت او په خارج منفي ده.

مطلق اعظمي $Maximum$ د $f(x)$ په تابع کې که د هر $(x)$ لپاره $f(x) \le f(x_0)$ وي نو $\left(x_0, f(x_0)\right)$ تکي ته مطلق اعظمي وايي.




مطلق اصغري $Minimum$ که د $f(x)$ د تابع دتعریف د ناحیي د هر $(x)$ لپاره $f(x) \ge f(x_0)$ وي نو $\left(x_0, f(x_0)\right)$ نقطې ته مطلق اصغري وايي.



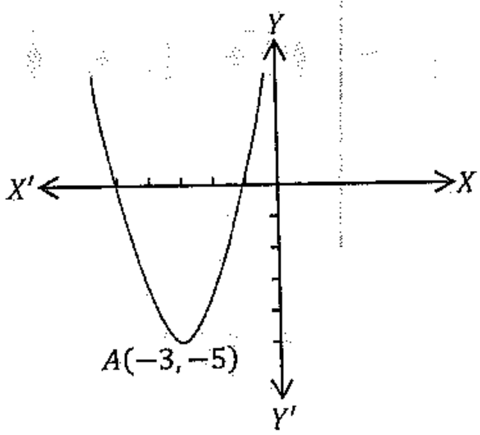
لمړی مثال: د $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ تابع مطلق اصغري پيدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x) = x + 3 \quad \because \acute{f}(x) = 0 \quad \therefore \quad x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$f(-3) = \frac{1}{2}(-3)^2 + 3(-3) - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} - 9 - \frac{1}{2} = \frac{9 - 18 - 1}{2} = -5$$

$A(-3,-5)$




دويم مثال: د $f(x) = x^3 - 3x + 2$ د تابع اعظمي او اصغري نقطې پيدا کړئ؟

حل:

$$\acute{f}(x) = 3x^2 - 3$$

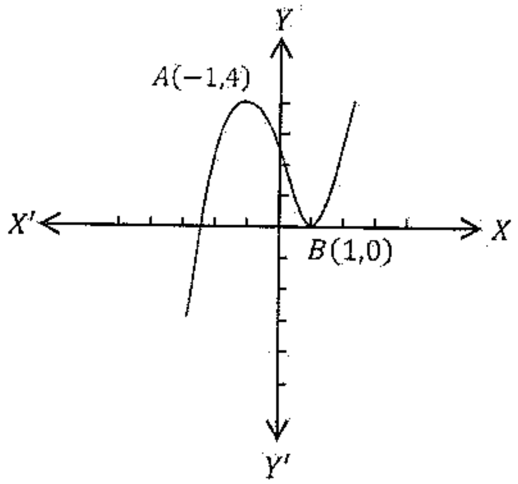
په اعظمي او اصغري نقطو کې د تابع مشتق صفر وي.

$$\acute{f}(x) = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow \frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow x^2 = 1$$

اصغري ده $x_1 = 1 \quad \Rightarrow A(1,0)$

اعظمي ده $x_2 = -1 \quad \Rightarrow B(-1,4)$




د تابع د ګراف د ترسیم طریقه:

1- د تابع اتصال مطالعه کوو.

2- د محورونو سره د ګراف د تقاطع نقطې پیدا کوو.

3- د تزاید او تناقص د انټروال د معلومولو لپاره د مشتق اشارې مطالعه کوو.

4- د ګراف مجانبونه معلوموو.

5- د دقیق ترسیم لپاره $(x)$ ته څو قیمتونه ورکوو او د $(y)$ قیمتونه پیدا کوو.

6- په جدول کې د تابع د ګراف وضعیت مطالعه کوو.

7- پیدا شوې نقطې د وضعیه کمیتونو په مستوي کې پیدا کوو او وصلوو یې.

دریم مثال: د $y = 2 + x - x^2$ د تابع ګراف رسم کړئ؟

1- د $(X\bar{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $y = 0$ فرضوو.

$$2 + x - x^2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-1)(2) = 1 + 8 = 9 \quad \Rightarrow \Delta = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \;\; \& \;\; x_2 = \frac{-1 - 3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

د $(X\bar{X})$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطې $A(-1,0)$ او $B(2,0)$ دي.

2- د $Y\acute{Y}$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو. نو $x = 0$ فرضوو.

$$y = 2 + x - x^2 = 2 + 0 + 0^2 = 2$$

د $Y\acute{Y}$ د محور سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه $C(0,2)$ ده.

3- د تابع د ګراف اعظمي يا اصغري نقطې د پيدا کولو لپاره د تابع مشتق نيسو.

$$\acute{y} = 1 - 2x$$
$$\acute{y} = 0 \quad \therefore \quad 1 - 2x = 0 \;\Rightarrow -2x = -1 \;\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

د $(x)$ دغه قيمت په تابع کې وضع کوو د $(y)$ قيمت لاس ته راورو.

$$y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{8 + 2 - 1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

نو د $D\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$ نقطه يا اعظمي ده يا اصغري ده.د تابع دويم مشتق پيدا کووکه $y'' > 0$ وُ اصغري نقطه ده اوکه $y'' < 0$ وُ نو اعظمي نقطه ده.

$y'' = -2$ څرنګه چه همېشه منفي دې نو د $D\left(\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}\right)$ نقطه اعظمي نقطه ده.

$$D\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right) \quad D\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$$

د انعطاف د نقطې پيدا کول:

د تابع دويم مشتق نيسو او قيمت يې پيدا کوو بيا يې په معادله کې وضع کوو د انعطاف د نقطې وضعيه کميات لاس ته راځي.

مثال: د $y = x^3 + 9x^2 - 6x + 1$ تابع د انعطاف نقطه يې پيدا کړئ؟

حل:

$$\acute{y} = 3x^2 + 18x - 6$$
$$y'' = 6x + 18$$
$$y'' = 0 \Rightarrow 6x + 18 = 0 \Rightarrow 6x = -18 \Rightarrow \frac{6x}{6} = \frac{-18}{6} \Rightarrow x = -3$$
$$f(-3) = (-3)^3 + 9(-3)^2 - 6(-3) + 1 = -27 + 81 + 18 + 1 = 73$$

$A(-3,73)$ انعطاف نقطه ده.

د دویمه درجه تابع ګراف:

د دویمه درجه تابع عمومي شکل $ax^2 + bx + c = 0$ دی.

ډومېن يې د حقیقي اعدادو سیټ دی. $D_f = (-\infty, +\infty)$ چه په دغه ساحه کی تابع متمادي ده. د تناظر محور يي د اول مشتق پواسطه پیدا کیږي.

$$f'(x) = 2ax + b$$
$$f'(x) = 0$$
$$2ax + b = 0 \Rightarrow 2ax = -b$$
$$x = -\frac{b}{2a}$$

د تناظر محوردی.

د راس د نقطې د پیدا کولو لپاره د تناظر په محور کی د $x$ قیمت په تابع کی وضع کوو دراس د نقطېوضعیه کمیتونه لاس ته راځي

$$f(x) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$f(x) = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

د راس نقطه يې $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ ده.

که $a > 0$ وي د تابع ګراف مقعر دی یعنی ګراف اصغري نقطه لري. که $a < 0$ وي د تابع ګراف محدب دي یعنی ګراف اعظمي نقطه لري

لمړی مثال: د $f(x) = x^2 - 4x + 3$ د تابع تحولات مطالعه کړئ او ګراف يې رسم کړئ؟

حل:

1- $D_f = (-\infty, +\infty)$

2- د $X\bar{X}$ د محور سره د تقاطع نقطه پیدا کوو:

$$y = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x-1)(x-3) = 0$$

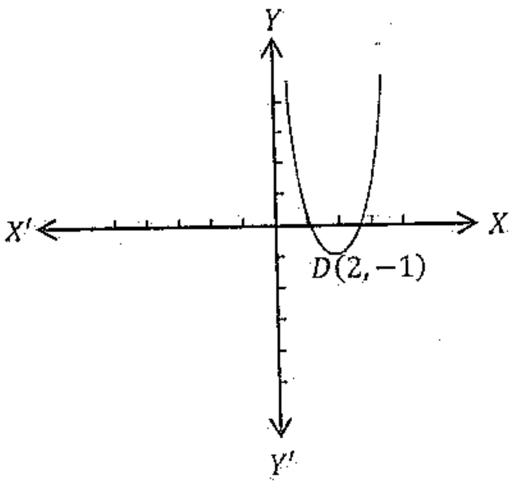
$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$
$$A(1,0) \quad , \quad B(3,0)$$

3- د $(Y\acute{Y})$ د محورسره دتابع د تقاطع نقطه پيدا کوو.

$x = 0$
$y = 0 - 4 \cdot 0 + 3$
$y = 3$
$C(0,3)$

4- د بحراني نقطې دپيدا کولو لپاره د تابع مشتق نيسو او د $(x)$ قيمت پيدا کوودا قيمت په تابع کې وضع کوو د $(y)$ قيمت لاس ته راځي د $(x)$ او $(y)$ يوه جوړه قيمتونه بحراني نقطه تعينوي بيا يي دويم مشتق پيدا کوو که $y'' > 0$ ؤ بحراني نقطه اصغري ده او که $y'' < 0$ ؤ نوبحراني نقطه اعظمي ده.

$\acute{f}(x) = 2x - 4 \Rightarrow x = 2$
$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1 \Rightarrow D(2, -1)$




دويم مثال: $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ د تابع تحولات مطالعه او ګراف يې رسم کړئ؟

**حل:**

1- $D_f = (-\infty, +\infty)$

2- د $X\acute{X}$ سره تقاطع:

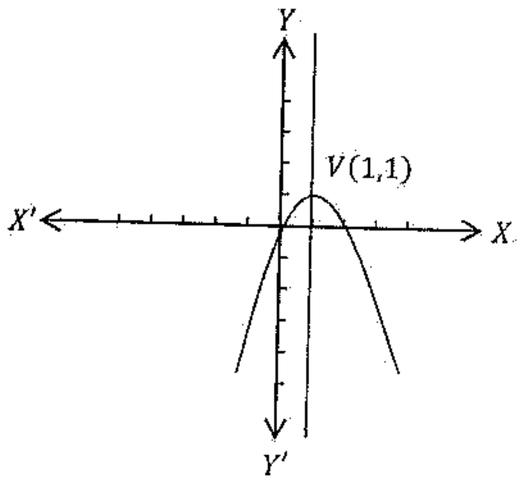
$$f(x) = 0$$
$$-x^2 + 2x = 0$$
$$x(-x + 2) = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$-x + 2 = 0$$
$$-x = -2 \Rightarrow x = 2$$
$$A(0,0) \ \& \ B(2,0)$$

3- د $YY'$ سره تقاطع:

$$x = 0$$
$$f(x) = 0 + 2 \cdot 0 = 0$$
$$C(0,0)$$

4- بحراني نقطه يې پيدا کوو. نومشتق يې نيسو.

$$\acute{f}(x) = -2x + 2$$
$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = 1$$
$$f(1) = -(1)^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$$
$$V(1,1)$$



## هوموگرافيک تابع

هغه تابع ده چه د دوه بېنومو د نسبت څخه جوړه شوی وي.عمومي شکل يې دادی
$f(x) = \frac{ax+b}{\acute{a}x+\acute{b}} = \frac{ax+b}{cx+d}$

مجانب:- $Asymptote$ : که د يوه مستقيم او يوه منحني تر منځ فاصله په لايتناهي کی صفر شي دا مستقيم ددی منحني مجانب دي.

مجانب د منحني لپاره لاربنود دي.

مجانب په دری قسمه دی.

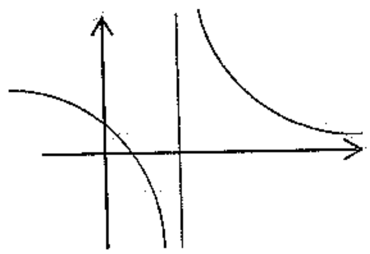
1- عمودي مجانب $(Vertical\ Asymptote)$

2- افقي مجانب $(Horizontal\ asymptote)$

3- مايل مجانب(Slant Asymptote)

1- عمودي مجانب:

که په يوه ثابت عدد کی د تابع ليميټ $(\infty)$ شي هغه خط چه د دغه ثابت عدد په فاصله باندی د $Y\acute{Y}$ د محور سره موازي رسميږي د تابع دګراف عمودي مجانب دی. يعني که $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ وي نو $x = a$ عمودي مجانب دی.

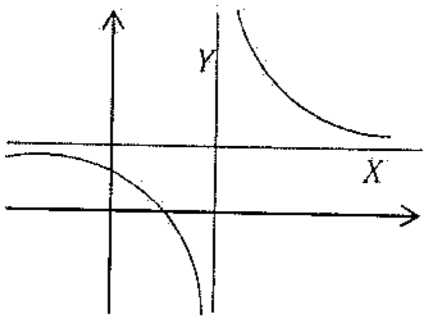


2- افقي مجانب:

که په لایتناهي کی دیوی تابع لیمیت یو ثابت عدد ؤ نو هغه خط چه د دې ثابت عدد په ترتیب د $YY'$ د محور سره موازي رسمیږي د راکړشوی تابع افقي مجانب دی. یعنی که:

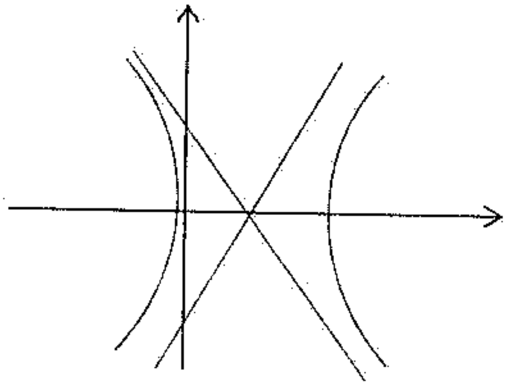
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b$$

نو $y = b$ د تابع د ګراف افقي مجانب دي.




3- مایل مجانب $Slant\ Asymptote$:

په کسري تابعګانو کی که دصورت درجه د مخرج د درجي څخه د واحد په اندازه ډېره وه نو دغه ډول تابعګانی مایل مجانب لري دمایل مجانب دترسیم لپاره صورت په مخرج ویشو خارج قسمت د مایل مجانب معادله ده.



لمړی مثال: د $f(x) = \frac{x+1}{2x-4}$ د تابع عمودي مجانب پیدا کړئ؟

حل:

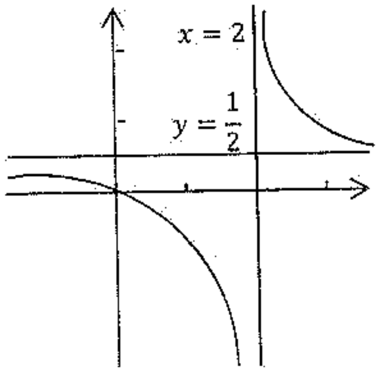
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x+1}{2x-4} = \frac{2+1}{2\cdot 2-4} = \frac{3}{0} = \infty$$

$x = 2$ عمودي مجانب دی.

مایل مجانب یې پیدا کوؤ.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-4} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{2x}{x}-\frac{4}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2-\frac{4}{x}} = \frac{1+\frac{1}{\infty}}{2-\frac{4}{\infty}} = \frac{1+0}{2-0}\frac{1}{2}$$

$y = \frac{1}{2}$ افقي مجانب دی.




دویم مثال: د $y = \frac{x^2+2x-1}{x}$ تابع د منحني مجانبونه وټاکئ؟

حل: مایل مجانب:

$$y = \frac{x^2+2x-1}{x} = x+2-\frac{1}{2} \Rightarrow y = x+2$$

عمودي مجانب:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x-1}{x} = \infty$$

نو $x = 0$ عمودي مجانب دی.

افقي مجانب نلري ځکه د هری تابع ګراف چه مایل مجانب و لري افقي مجانب نلري.

دریم مثال: د $f(x) = \frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$ تابع مجانبونه پیدا کړئ؟

حل:

عمودي مجانب

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=\infty$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x+2)}{(x+1)(x-2)}=\infty$$

بالاخره $x=-1$ او $x=2$ عمودي مجانبونه دي.

مايل مجانب نلري.

## د مجانب د ټاکلو عمومي لار:

1- که د $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ په هوموګرافیک تابع کی $(m)$ دصورت درجه او $(n)$ دمخرج درجه وي نو

الف: که $m<n$ وي نو د $(x)$ محورافقي مجانب دی.

ب: که $m=n$ وي نو $y=b$ افقي مجانب دی $(b)$ د صورت اومخرج دمساوي درجووالا حدودضریبونو نسبت دي.

ج: که $m>n$ وي افقي مجانب نلري د مايل مجانب احتمال شته.

د: که د صورت درجه د مخرج ددرجی څخه د واحد په اندازه ډېره وي مايل مجانب لري او افقي مجانب نلري.

مثال: $f(x)=\frac{2x-5}{x}$ د تابع د تزاید او تناقص په باب خپل نظر وليکئ؟

حل:

$$f'(x)=\frac{2\cdot x-1(2x-5)}{x^2}=\frac{2x-2x+5}{x^2}=\frac{5}{x^2}$$
$$f'(x)=\frac{5}{x^2}>0$$

تابع متزايده ده.

انعطاف نقطه یې داسې پیدا کیږي.

$$\acute{f}(x) = 0$$

$$3ax^2 + 2bx + c = 0$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f''(x) = 0$$

$$6ax + 2b = 0 \Rightarrow 6ax = -2b \Rightarrow x = \frac{-2b}{6a} = -\frac{b}{3a}$$

$$y = a\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{3a}\right) + c = a\left(\frac{b^2}{9a^2}\right) - \frac{b^2}{3a} + c$$

$$y = \frac{ab^2}{9a^2} - \frac{b^2}{3a} + c = \frac{b^2}{9a} - \frac{b^2}{3a} + c = \frac{b^2 - 3b^2 + 9ac}{9a} = \frac{9ac - 2b^2}{9a}$$

$$M\left(-\frac{b}{3a}, \frac{9ac - 2b^2}{9a}\right)$$

1- مثال: د $f(x) = (x-1)(x+2)^2$ تابع تحولات وڅېړئ او ګراف یې رسم کړئ؟

حل:

$$f(x) = (x-1)(x+2)^2 = (x-1)(x^2 + 4x + 4)$$

$$= x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 4x - 4$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$\acute{f}(x) = 3x^2 + 6x$$

$$\acute{f}(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 6x = 0 \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$$

$$f(0) = 0^3 + 3 \cdot 0^2 - 4 = -4 \Rightarrow y_1 = -4$$

$A(0,-4)$ اصغري نقطه ده.

$$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 - 4 = -8 + 12 - 4 = 0$$

$$y_2 = 0$$

$B(-2,0)$ اعظمي نقطه ده.

انعطاف نقطه پیدا کوو.

$f''(x) = 6x + 6$

$f''(x) = 0$

$6x + 6 = 0$

$x = -1$

$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 = -1 + 3 - 4 = -2$

$C(-1,-2)$ انعطاف نقطه ده.

د $X\acute{X}$ سره تقاطع: $y = 0$ فرضوو.

$y = 0$

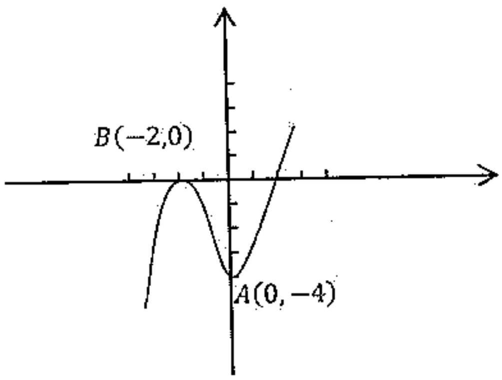
$(x-1)(x+2)^2 = 0$

$$\left.\begin{array}{c} x-1=0 \\ x=1 \\ C(1,0) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{c} (x+2)^2=0 \\ x+2=0 \\ x=-2 \\ D(-2,0) \end{array}\right\}$$

د $Y\acute{Y}$ سره د تابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو $x = 0$ فرضوو.

$y = 0^3 + 3 \cdot x^2 - 4 = -4$

$E(0,-4)$




دويم مثال: د $f(x) = -x^3 + 3x^2$ تابع تحولات وڅېړئ او ګراف يي رسم کړئ؟

حل:

$f(x) = -x^3 + 3x^2$

$\acute{f}(x) = -3x^2 + 6x$

$\acute{f}(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -3x^2 + 6x = 0 \ \Rightarrow -3x(x-2)$

$-3x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \ \Rightarrow x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$A(2,4)$ اعظمي نقطه ده او $O(0,0)$ اصغري نقطه ده.

د $X\acute{X}$ سره تقاطع پيدا کوو $y = 0$ فرضوو.

$f(x) = 0$

$-x^3 + 3x^2 = 0 \ \Rightarrow -x^2(x-3) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \quad \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$O(0,0) \ \Rightarrow B(3,0)$

د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه $(x = 0)$ فرضوو.

$f(x) = -x^3 + 3x^2 = -0^3 + 3 \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow (0,0)$

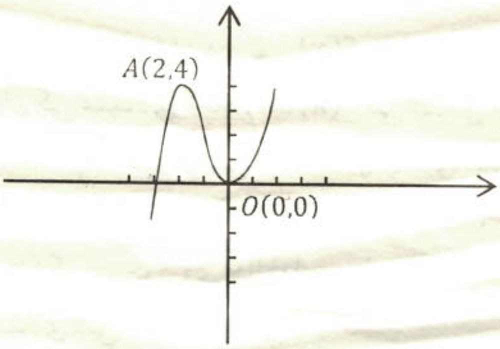
انعطاف نقطه پيدا کوو دويم جذر يي پيدا کوو.

$f''(x) = -6x + 6$

$x = 1$

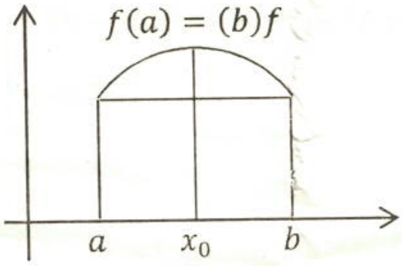
$f(1) = 2$

$C(1,2)$




د رول قضيه: *Theorem of Rolle*:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $a \le x \le b$ انټروال کې متمادي وي او د $a < x < b$ په انټروال کې د مشتق وړ وي او $f(a) = f(b)$ وي نود $a < x < b$ په انټروال کې $(x_0, f(x_0))$ يو تکې شته چه $\acute{f}(x) = 0$ وي




ثبوت: هره تابع چه متمادي وي او د مشتق وړ وي.نودغه تابع بحراني نقطه لري.

1- که تابع ثابته وي نو $\acute{f}(x) = 0$ دی.

2- که $f(x)$ تابع ثابته نه وي او $x_2, x_1 \in (a, b)$ او $f(x_1) > 0$ وي نوتابع په $x_0 \in [a, b]$ نقطه کی $Maximum$ لري چه $f(x_0) \geq f(x_1) \geq 0$ وي او $f(x_2) < 0$ وي نو تابع یوه اصغري نقطه لري په اعظمي او اصغري نقطو کی $\acute{f}(x_0) = 0$ وي.

لمړی مثال: د $f(x) = \cos x$ تابع راکړشوی ده د $[a, b] = [\pi, 5\pi]$ په انټروال کی د $Rolle$ قضیه پری تطبیق کړئ؟

حل: پوهیږو چه $f(\pi) = f(5\pi) = -1$ دی نو $f(x)$ د هر $(x)$ لپاره د مشتق وړ ده نو دا تابع د $[\pi, 5\pi]$ په انټروال کی متمادي اوپه $(\pi, 5\pi)$ کی مشتق منونکی ده نود $Rolle$ د قضیي سره سم د $(\pi, 5\pi)$ په انټروال کی اقلاً د $(x_0)$ یوه نقطه باید موجود وي چه $(\cos x)' = -\sin x$ شي څرنګه چه $-\sin x = 0$ دی نو د $f(x) = \cos x$ د معادلی اقلاً یو حل باید په $(\pi, 5\pi)$ کی موجود وي حال دا چه دا معادله په $(\pi, 5\pi)$ انټروال کی دری ځله دا قیمتونه اخیستلای شي.

دویم مثال: د $[a, b] = [-1,1]$ په انټروال کی د $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ په تابع باندی د $Rolle$ قضیه تطبیق کړئ؟

حل: دانټروال د پیل او انجام په نقطو کی تابع مشتق پذیره نده مګرد رول قضیه پری دتطبیق وړ ده ځکه چه $f(-1) = f(1) = 0$ او $f(0)$ تابع په $[-1,1]$ متمادي ده او د $[-1,1]$ په انټروال کی د $(x_0)$ یو عدد شته چه $\acute{f}(x_0) = 0$ شي او هغه $x_0 = 0$ دی.

$\acute{y}(x)=\frac{\acute{u}(x)}{2\sqrt{u}}$ څخه استفاده کوو.

$$\acute{f}(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow \acute{f}(0)=\frac{0}{\sqrt{1-0^2}}=0$$

## د متوسط قیمت قضیه:

که چېرې د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او د $(a,b)$ په انټروال کې دمشتق وړ وي نو د $(a,b)$ په انټروال کې د $(c)$ یو عدد شته چه لاندې رابطه تحقیق کړي.
$f(b)-f(a)=\acute{f}(c)(b-a)$ یعنی $\acute{f}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ دی.

ثبوت :- $f(x)-\acute{f}(x)\cdot x$ په $g(x)$ ښیو:

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x$$

$$g(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a=\frac{f(a)b-f(a)a-f(b)a+f(a)a}{b-a}$$

$$g(a)=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a}\cdots\cdots\cdots I$$

$$g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b=\frac{f(b)b-f(b)a-f(b)b+f(a)b}{b-a}$$

$$g(b)=\frac{f(a)b-f(b)a}{b-a}\cdots\cdots\cdots II$$

د (I) او (II) رابطې د مقایسې څخه څرګندیږي چه $g(a)=g(b)$ دی نو د رول د قضیې سره سم د $[a,b]$ په انټروال کې د $(c)$ یو داسې عدد شته چه $\acute{g}(c)=0$ دی نو لیکو چه

$$\acute{g}(x)=\acute{f}(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Rightarrow \acute{g}(c)=\acute{f}(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\acute{g}(c)=0$$

$$\acute{f}(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\Rightarrow \acute{f}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f(b)-f(a)=\acute{f}(c)(b-a)$$

مثال: د $f(x)=2x^3-8x+1$ په تابع کې د متوسط قیمت قضیه د $[a,b]=[1,3]$ په انټروال کې وڅېړئ؟

حل: د $f(x)$ تابع د $[1,3]$ په انتروال کی متمادي ده اود $(1,3)$ په انتروال کی د مشتق وړ ده نو د متوسط قیمت د قضیې سره سم د $(1,3)$ په انتروال کی یو $(x_0)$ شته چه

$$f(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{36}{2} = 18$$

د $(c)$ دپیدا کولو لپاره د تابع مشتق نیسو.

$$f'(x_0) = 6x^2 - 8 = 18 \Rightarrow 6x^2 = 18 + 8 = 26 \Rightarrow x^2 = \frac{26}{6}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{26}{6}} = \pm\sqrt{\frac{13}{3}}$$

$x = +\sqrt{\frac{13}{3}}$ عدد د $(1،3)$ په انتروال کی شامل دی نو $x_0 = \sqrt{\frac{13}{3}}$ ده مګر $x = -\sqrt{\frac{13}{3}}$ عدد د $(1،3)$ په انتروال کی شامل نه دی نو د سوال حل نه بلل کیږي.

## د لوهپیتال قاعده:

که د کسري تابعګانو لیمیټ د $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right)$ مبهم شکل غوره کړي. نو د لوپیتال په طریقه کولای شو چه لیمیټ یې پیدا کړو.

دیوی تابع لیمیټ په یوه نقطه کی د تابع د مشتق دلیمیټ سره مساوي دی په همغه نقطه کی .که تر اول مشتق وروسته بیا هم ابهام موجود ؤ دویم مشتق یې نیسو په همدی ترتیب عملیه تر هغه وخته اجراء کووتر څو چه ابهام رفع شي.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \cdots\cdots$$

مثال:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4} = \frac{2\cdot 2^2+2-10}{2^2-4} = \frac{8+2-10}{4-4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-4x+5x-10}{x^2-2^2} = \lim_{x\to 2}\frac{2x(x-2)+5(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+5)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+2} = \frac{2\cdot 2+5}{2+2} = \frac{9}{4}$$

لمړی مثال:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{x-\sin 2x}=\frac{0+\sin 2\cdot 0}{0-\sin 2\cdot 0}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+\sin 2x)'}{(x+\sin 2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1+2\cos 2x}{1-2\cos 2x}=\frac{1+2}{1-2}=\frac{3}{-1}=-3$$

دویم مثال:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\frac{3^4-81}{3-3}=\frac{81-81}{3-3}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^4-81)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3}\frac{4x^3}{1}=4\cdot 3^3=4\cdot 27=108$$

دریم مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\frac{\infty}{\infty}$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+6}{7x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2-4x+6)'}{(7x^2-2x+1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x-4)'}{(14x-2)'}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

## دبحراني ټکو تطبیق:

1- داسې دوه عددونه پیدا کړئ چه د جمع حاصل یې (20) او د ضرب حاصل یې اعظمي وي؟

حل:

$x =$ اول عدد

$20 - x =$ دویم عدد

$= f(x) = x(20-x) = 20x - x^2$ د ضرب حاصل

$$\acute{f}(x) = 20 - 2x$$
$$\acute{f}(x) = 0$$
$$20 - 2x = 0 \Rightarrow -2x = -20 \Rightarrow x = 10$$
$$f(10) = 20\cdot 10 - 10^2 = 200 - 100 = 100$$
$$f(0) = 20\cdot 0 - 0^2 = 0$$
$$f(20) = 20\cdot 20 - 20^2 = 400 - 400 = 0$$

اعظمي نقطه $[10،100]$ ده او مطلوب عددونه $x_1 = 10$ او $x_2 = 10$ دي چه د ضرب حاصل يي (100) دي.

2- د يوه متحرک معادله $x = (t-2)(t-3)$ ده متوسط سرعت يي د $t_1 = 3$ او $t_2 = 4$ د وخت په واټنو کې پيدا کړئ؟

حل: د منځني سرعت د فارمول څخه استفاده کوو.

$$\text{منځني سرعت} = \frac{x_{(t_2)} - x_{(t_1)}}{t_2 - t_1} = \frac{x_{(4)} - x_{(3)}}{4-3} = \frac{2-0}{4-3} = 2$$

3- د کرې دحجم او سطحې تر منځ نسبت پيدا کړئ؟

حل:

$$\text{د کرې حجم} = v_{(r)} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{د کرې مساحت} = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)' = 4\pi r^2$$

$$\frac{v_{sphere}}{A_{Sphere}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = \frac{1}{3}r$$

4- د سانتي ګيرېډ او فارنهايټ تر منځ $C = \frac{5}{9}(F-32)$ رابطه موجود ده د سانتي ګيرېډ او فارنهايټ تر منځ منځني نسبت پيدا کړئ؟

حل: د منځني سرعت د تعريف $V_m = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ سره سم ليکو چه:

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F+\Delta F) - CF}{\Delta F} = \frac{\frac{5}{9}(F+\Delta F-32) - \frac{5}{9}(F-32)}{\Delta F} = \frac{5}{9}$$

5- د يوې مستطيلي ځمکې محيط (200) دی اعظمي مساحت يي پيدا کړئ؟

حل:

$\text{د مستطيل طول} = x$

$\text{د مستطيل عرض} = y$

$\text{د مستطيل مساحت} = S$

$$محیط = 2x + 2y = 200$$

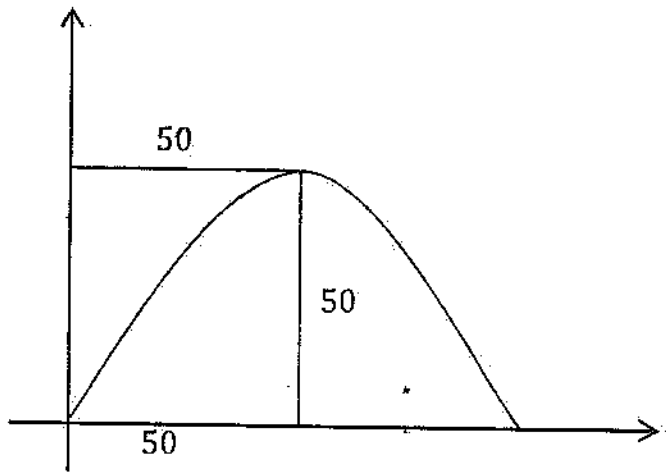
$$محیط = x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$$

$$S = x \cdot y \Rightarrow x(100 - x) = 100x - x^2 \quad ,D_f = IR$$

د $[0.100]$ په انټروال کې دتابع اعظمي مساحت پیدا کوو.

$$\acute{S} = 100 - 2x$$

$$\acute{S} = 0 \Rightarrow 100 - 2x \Rightarrow -2x = 100 \Rightarrow x = 50 \Rightarrow S_{(50)} = 2500$$




6- د $(A)$ ټکی د $y = \frac{2}{x}$ دمنحني دپاسه حرکت کوي ووایاست چه څه وخت به د $(A)$ او مبداء تر منځ فاصله اصغري شي؟

حل:

$$A\left(x, \frac{2}{x}\right)$$

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2{}_{(A)} + y^2{}_{(A)}} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}} \Rightarrow \overline{OA}^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} = d^2$$

$$\acute{d}_{(x)} = (x^2)' + \left(\frac{4}{x^2}\right)' = 2x - \frac{8x}{x^4} = 2x - \frac{8}{x^3} = \frac{2x^4 - 8}{x^3}$$

$$\acute{d}_{(x)} = 0 \Rightarrow \frac{2x^4 - 8}{x^3} = 0 \Rightarrow 2x^4 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^4 = 8$$

$$= \frac{2x^4}{2} = \frac{8}{2} \quad \Rightarrow x^4 = 4 \quad \Rightarrow \sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2}$$

$$x_1 = \sqrt{2} \quad \& \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

$$d_{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \frac{4}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 2 + \frac{4}{2} = 4$$

$$d_{-\sqrt{2}} = 4$$

يو مربع القاعده مكعب مستطيل لروچه د درى واړه بعدونو مجموعه يي (24)ده اعظمي حجم يي پيدا كړئ؟

حل: دقاعدى اوږدوالى په $(x)$او ارتفاع په $(y)$ ښيو.

$$x + x + y = 24 \;\Rightarrow y = 24 - 2x$$
$$y \geq 0 \quad \& \quad 0 \leq x \leq 12$$
$$V = x^2 \cdot y = x^2(24 - 2x) = 24x^2 - 2x^3$$
$$\acute{V}(x) = 48x - 6x^2 \quad \because \acute{V}(x) = 0 \quad \therefore \quad 48x - 6x^2 = 0$$
$$x(48 - 6x) = 0 \quad , \quad x_1 = 0 \;\; \& \;\; x_2 = 8$$
$$V(0) = 24 \cdot 0^2 - 2 \cdot 0^3 = 0$$
$$V(8) = 24 \cdot 8^2 - 2 \cdot 8^3 = 1536 - 1024 = 512$$
$$V(12) = 24 \cdot 12^2 - 2 \cdot 12^3 = 3456 - 3456 = 0$$

د مكعب مستطيل اعظمي حجم $(512cm^3)$ او هره ضلعه يي $(8cm)$ ده.

# اولسم فصل

## انتیګرال Integral

انتیګرال په لغت کی جامع ، مکمل او بشپړوونکي ته وائي.

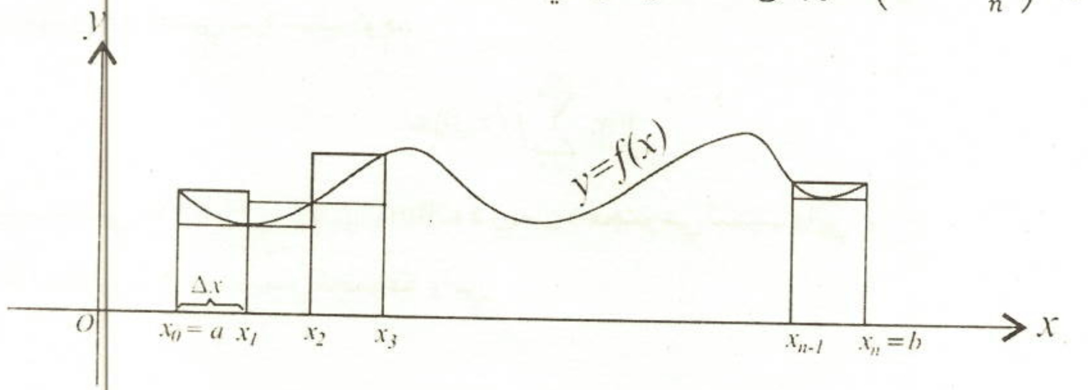
اوپه اصطلاح کی د مشتق دعملیي معکوسی عملیي ته انتیګرال وائي.یعنی د اولنی تابع د پیدا کولو طریقی ته انتیګرال وایي.

ارشیمیدس چه په (287 – 212)ق م کی یي ژوند کاوه د سطحو ، ناحیو او دجامداتو دحجمودمحاسبی لپاره فارمولونه ترتیب کړل دنوموړي انتیګرال نیونه استثنائي او فوق العاده وه.ریمان (1866 – 1826) اولایبنز (1941 – 1875) معین انتیګرال کشف کړ.

دانتیګرال علامه لایبنز ( $\int$ ) لیکلی ده. چه د ریمان دمجموعی (sum)د لمړي توري غزېدلی شکل دی.غیر معین انتیګرال لیووبل (1882 – 1809)کشف کړی دي. ګانوس (1855 – 1777) دانتیګرال اولین جدول ترتیب کړي دي.د کمپیوټر د منځ ته راتلو سره سم د انتیګرال په باب زیات پرمختګ وشو.

## د ریمان مجموعه Riemann's sum:

فرضاً $y = f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کی متمادي او تعریف شوی تابع ده.دهغه سطحی د مساحت دپیدا کولو لپاره چه د $X\acute{X}$دمحور او $y = f(x)$ تابع دګراف تر منځ واقع دي که منظم هندسي شکل یي لرلو نو هندسي فارمولو پواسطه یي مساحت پیدا کیږي.او هندسي شکل یي نه لرلو نو د $[a\ ,b]$ ترلی انټروال په مستطیلو ویشو د هر مستطیل عرض د $\left(\Delta x = \frac{b-a}{n}\right)$ رابطی څخه لاس ته راځي.



د هر مستطیل دهر انټروال اوږدوالی د $i = 1,2,3,4,\cdots,n$ لپاره په لاندې ډول دی.

$$x_0 = a\,, \quad x_1 = a + \Delta x \quad , \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad x_i = a + i\Delta x, \cdots, x_n = b$$

$$[x_0, x_1] \;, [x_1, x_2] \;, [x_2, x_3], \cdots, [x_{i-1}, x_i], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

په شکل کې د لاندېنيو مستطيلونو مساحت په $f(x_{i-1},)\Delta x$ او د پورتنيو مستطيلو مساحت په $f(x_i)\Delta x$ ښيو نو ليکو چه:

$$\text{د لاندېنيو مستطيلونو د مساحتونه مجموعه} = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

$$\text{د پورتنيو مستطيلونو د مساحتونو مجموعه} = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

که محصور شوي مساحتونه په $A$ وښيونو:

$$\sum_{i=1}^{n} f\,(x_{i-1})\Delta x < A < \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\Delta x$$

د رابطې د اطراف ليميټ نيسو.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \le \lim_{N\to\infty} A \le \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i)\,\Delta x$$

د ساندويچ د قضيې سره سم ليکو چه:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

ليميټ يعني $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$ ته د ريمان د مجموعې ليميټ وايي.

$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$ ته د ريمان مجموعه وايي.

لومړی مثال: د $[0.2]$ انټروال په څلورو مساوي برخو وويشئ د $y = x^2 + 1$ د منحني او ($xx'$) د محور تر منځ د سطحې مساحت پيدا کړئ؟

حل: د $[0.2]$ انټروال په څلورو برابرو برخو ويشو.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

د مستطيل د هر انټروال اوږدوالی عبارت دی له:

$$x_0 = a = 0 \quad , \qquad x_1 = a + \Delta x = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = a + 2\Delta x = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$x_3 = a + 3\Delta x = \frac{3}{2}$$

$$x_4 = a + 4\Delta x = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$[x_0, x_1] \;, \qquad [x_1, x_2] \;, \qquad [x_2, x_3] \;, \qquad [x_3, x_4]$$

$$\left[0, \frac{1}{2}\right] \;, \qquad \left[\frac{1}{2}, 1\right] \;, \qquad \left[1, \frac{3}{2}\right] \;, \qquad \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

د ګراف د ترسيم لپاره د $(x)$ قيمتونه په تابع کې وضع کوو او د $(y)$ قيمتونه پيدا کوو.

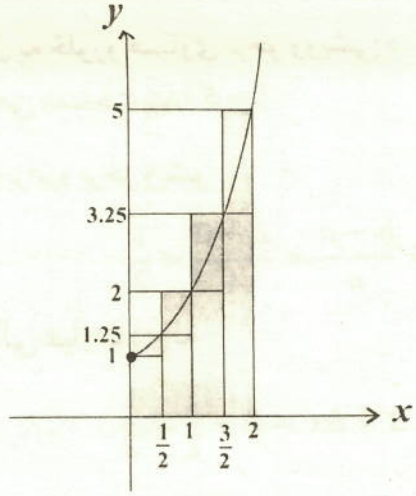
$$f(x) = x^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1 \qquad , \; A(0,1)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = 1\frac{1}{4} = 1.25 \quad , \qquad B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right) = (0.5, 1.25)$$

$$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2 \qquad , \quad C(1,2)$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{9+4}{4} = \frac{13}{4} = 3.25 \qquad D\left(\frac{3}{2}, \frac{13}{4}\right) = (1.5, 3.25)$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5 \qquad\qquad E(2,5)$$




$$\text{د لاندینیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1.25 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3.25 \cdot \frac{1}{2}$$
$$= 3.75$$
$$\text{د پورتنیو مستطیلونو د مساحتونو مجموعه} = 1.25 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} + 3.25 \times \frac{1}{2} + 5 \times \frac{1}{2}$$
$$= 5.75$$
$$3.75 < A < 5.75$$

**دویم مثال:** د $f(x) = 1 + x$ تابع د ریمان د مجموعی لیمیټ د $[1،10]$ په انټروال کی پیدا کړئ؟

**حل:** پوهیږو چه:

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{10-1}{n} = \frac{9}{n}$$

$$x_i = a + \Delta x_i = 1 + \left[\frac{9}{n}\right] \quad , \quad i = 0,1,2,3,4,5 \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}(1 + x_i)\,\Delta x\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\Delta x\sum_{i=1}^{n}(1 + x_i)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\Delta x\sum_{i=1}^{n}1 + \Delta x\sum_{i=1}^{n}x_i\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}(a + x_i)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{9}{n}i\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{9}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}1 + \frac{9}{n}\sum_{i=1}^{n}i\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{9}{n}\cdot n + \frac{9}{n}\left(n + \frac{9}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{9}{n}\left(n + \frac{9n^2 + 9n}{2n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{9}{n}\left(\frac{2n^2 + 9n^2 + 9n}{2n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{9}{n}\left(\frac{11n^2 + 9n}{2n}\right)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{99n^2 + 81n}{2n^2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[9 + \frac{99n^2}{2n^2} + \frac{81n}{2n^2}\right] = 9 + \frac{99}{2} + \frac{81}{2n} = 58.5$$

دویم مثال: د $[0,3]$ انټروال په شپږو مساوي برخو ووېشئ او $y = 3x$ د مستقیم خط او د $(X\acute{X})$ د محور تر منځ مساحت محاسبه کړئ؟

حل:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$x_0 = 0 \quad , x_1 = a + 2\Delta x = 0 + 2\cdot\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x_1 = 1 \quad , x_2 = 3\Delta x = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{3}{2}$$

$$x_3 = 0 + 4\cdot\frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x_3 = 2 \quad , x_4 = 0 + 5\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x_4 = \frac{5}{2}$$

$$x_5 = 0 + 6\cdot\frac{1}{2} = 3 \Rightarrow x_5 = 3 \quad , x_6 = 0 + 7\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow x_6 = \frac{7}{2}$$

$$[x_0, x_1] \quad , [x_1, x_2] \quad , [x_2, x_3] \quad , [x_3, x_4] \quad , [x_4, x_5] \quad , [x_5, x_6]$$

$$[0,1] \quad , \quad \left[1, \frac{3}{2}\right] \quad , \quad \left[\frac{3}{2}, 2\right] \quad , \quad \left[2, \frac{5}{2}\right] \quad , \quad \left[\frac{5}{2}, 3\right] \quad , \left[3, \frac{7}{2}\right]$$

$f(0)=0\,,\qquad A(0,0),\qquad f(1)=3(1)=3\qquad B(1,3)$

$f\left(\frac{3}{2}\right)=3\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{2}\Rightarrow C\left(\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)\quad ,f(2)=3\cdot 2=6\ \Rightarrow D(2,6)$

$f\left(\frac{5}{2}\right)=3\cdot\frac{5}{2}=\frac{15}{2}\ \Rightarrow E\left(\frac{5}{2},\frac{15}{2}\right)\ ,f(3)=3\cdot 3=9\ \ \Rightarrow F(3,9)$

## د انتيګرال مفهوم $Concept\ of\ Integral$:

انتيګرال دهغه تابع پيدا کول دي چه مشتق يې موجود وي يا د ريمان د مجموعې ليميټ ته انتيګرال وايي د انتيګرال علامه دا ( $\int$ )ده چه د ريمان دمجموعی $Sum$ د لمړي توري غزېدلی شکل دی. لکه:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x=\int f(x)\,dx$$

چه دلته $f(x)$ داتيګرال تابع ده او $dx$ نظر $(x)$ ته د $f(x)$ دتابع د انتيګرال متحول دي.

## د انتيګرال اقسام:

انتيګرال په دوه قسمه دی.

1- غېرمعين انتيګرال

2- معين انتيګرال

1- غېرمعين انتيګرال $Indefinite\ Integral$:

که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انتروال کې تعريف او $F(x)$ د $f(x)$ د تابع يوه لمړنی تابع وي نود $F(x)+c$ دتابعګانو سيټ د $f(x)$ دتابع غېرمعين انتيګرال دی. اوداسی ليکل کيږي.

$$\int f(x)dx=\quad F(x)+C$$

لمړی مثال: $\int xdx$ پيدا کړئ؟

حل:

$$\int xdx=\frac{x^{1+1}}{1+1}+c=\frac{x^2}{2}+c$$

دویم مثال: $\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}dx$ حساب کړئ؟

حل:

$$\int \frac{1}{\sqrt[7]{x^3}}dx = \int x^{-\frac{3}{7}}dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + c = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + c = \frac{7}{4}\sqrt[7]{x^4} + c$$

دریم مثال:

$$\int \sqrt[8]{x^4} \cdot xdx = \int \sqrt[8]{x^6}dx = \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + c = \frac{4}{7}\sqrt[7]{x^4} + c$$

دریم مثال:

$$\int \frac{\sqrt[6]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{\frac{2}{6}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{\frac{2}{6}+1}}{\frac{2}{6}+1} \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = \frac{x^{\frac{8}{6}}}{\frac{8}{6}} \cdot \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} \cdot \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c = \frac{9}{16}\sqrt[3]{x^4 \cdot x^4} + c$$

$$= \frac{9}{16}\sqrt[3]{x^8} + c$$

## د غیر معین انتیګرال خواص:

لکه څرنګه چه د تابعګانو مشتق د خاصو قوانینو پواسطه نیول کېدلو په همدغه ډول غیر معین انتیګرال هم ځانګړي خواص لري چه یې د ثبوته منل شوي دي.

1- که $(k)$ یو ثابت عدد وي نو غیر معین انتیګرال یې داسی پیدا کیږي.

$$\int kdx = k\int dx = kx + c$$

مثال: د $\int 5dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int 5dx = 5\int dx = 5x + c$$

2- که چېرې $n \neq -1$ وي نو:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

مثال: د $\int x^4 dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c = \frac{1}{5}x^5 + c$$

3- که $a$ یو ثابت عدد او $f(x)$ یوه تابع وي نو:

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

مثال: د $\int 2x^2 dx$ انتیګرال محاسبه کړئ؟

حل:

$$\int 2x^2 dx = 2\int x^2 dx = 2\cdot\frac{x^3}{3} + c = \frac{2}{3}x^3 + c$$

4- که $f(x)$ او $g(x)$ دوه تابعګانې وي د تابعګانو دمجموعې اوتفاضل انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د مجموعې اوتفاضل سره مساوي دي.

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

مثال:

$$\int (2x^2+3)dx = \int 2x^2 dx + \int 3dx = \frac{2x^3}{3} + 3x + c$$

مثال:

$$\int (8-2x)dx = 8\int dx - 2\int xdx = 8x - x^2 + c$$

5- که چېرې د تابعګانو ترادف تر انتیګرال لاندې وي نو انتیګرال يې د ټولو حدونو د انتیګرالونو مجموعه ده.

$$\int[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]\,dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx+\cdots+\int f_n(x)\,dx$$

مثال:

$$\int(x^3-6x^2+9x+1)dx=\int x^3dx-\int 6x^2+\int 9xdx+\int dx$$
$$\frac{x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}+\frac{9x^2}{2}+x+c$$

6- د دوه تابعګانو دحاصل ضرب انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د حاصل ضرب سره مساوي نه دي

$$\int[f(x)\cdot g(x)]dx\neq\int f(x)dx\cdot\int g(x)dx$$

مثال: که چیرې $f(x)=x+1$ او $g(x)=x-2$ وي

الف: لمړی یې ضربوو بیایې انتیګرال نیسو.

$$\int[f(x)\cdot g(x)]dx=\int[(x+1)(x-2)]dx$$
$$=\int(x^2-x-2)dx=\int x^2dx-\int xdx-2\int dx$$
$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+c$$

ب: د هرې تابع انتیګرال پیدا او بیا یې ضربوو.

$$\int f(x)dx\cdot\int g(x)dx=\int(x+1)dx\cdot\int(x-2)dx$$
$$=\left[\int xdx+\int dx\right]\left[\int xdx-2\int dx\right]$$
$$=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)+c=\left(\frac{x^2+2x}{2}\right)\left(\frac{x^2-4x}{2}\right)+c$$
$$\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+c\neq\left(\frac{x^2+2x}{2}\right)\left(\frac{x^2-4x}{2}\right)+c$$

7- د تابعګانو د خارج قسمت انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د خارج قسمت سره مساوي نه دی.

مثال: $f(x) = x^2 + 2x + 1$ او $g(x) = x + 1$ تابعګانې راکړشوي دي.

ثبوتوو چې د تابعګانو د خارج قسمت انتیګرال د تابعګانو د انتیګرالو د خارج قسمت سره مساوي نه دي.

$$\int (x^2 + 2x + 1)dx = \int x^2dx + \int 2xdx + \int dx$$

$$= \int x^2dx + 2\int xdx + \int dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

$$\int (1 + x)dx = \int dx + \int xdx = x + \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{\int (x+1)^2}{\int (x+1)} = \frac{\frac{x^3}{3} + x^2 + x}{x + \frac{x^2}{2}}$$

$$\int \frac{(x+1)^2}{x+1} = \int (x+1) = \int xdx + \int dx = \frac{x^2}{2} + x$$

$$\frac{\int (x+1)^2}{\int (x+1)} \neq \int \frac{(x+1)^2}{x+1}$$

8- د $\int (ax+b)^2m + dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)} + c$ پواسطه د تابعګانو د انتیګرال پیدا کول.

مثال: د $\int (2x-1)^5 dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int (2x-1)^5 dx = \frac{(2x-1)^{5+1}}{2(5+1)} + c = \frac{(2x-1)^6}{12} + c$$

مثال: $\int \frac{2dx}{\sqrt[5]{1-2x}}$ انتیګرال پیدا کړئ؟

$$\int \frac{2dx}{\sqrt[5]{1-2x}} = 2\int (1-2x)^{-\frac{1}{5}}dx = 2 \cdot \frac{(1-2x)^{-\frac{1}{5}+1}}{-2\left(-\frac{1}{5}+1\right)} + c = -\frac{(1-2x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + c$$

9- د $\int e^x dx = e^x + c$ پواسطه د انتیګرال پیدا کول:

مثال: $\int 4e^x dx = 4e^x + c$

د $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$ پواسطه د انتیګرال پیدا کول.

مثال:

$$\int 7^{4x-3}dx = ?$$

$$\int 7^{4x-3}dx = \int \frac{(7^4)^x}{7^3}dx = \frac{(7^4)^x}{7^3 \cdot \ln 7^4} + c = \frac{7^{4x-3}}{\ln 7^4} + c$$

## معین انتیګرال *Definite Integral*

که چیری د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انتروال کی متمادي وي او د $f(x)$ د تابع ریمان د مجموعي لیمیټ ته کله چه $n \to \infty$ او د فرعي انتروالونو اوږدوالی $\Delta x \to 0$ ته وکړي نو $x = a$ څخه تر $x = b$ پوری انتیګرال ته معین انتیګرال وایي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$(a)$ ته د انتیګرال لاندیني سرحد او $(b)$ ته د انتیګرال پورتني سرحد وایي.

لومړی مثال: د $\int_1^3 x^2dx$ معین انتیګرال پیدا کړئ؟

$$\int_1^3 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27-1}{3} = \frac{26}{3}$$

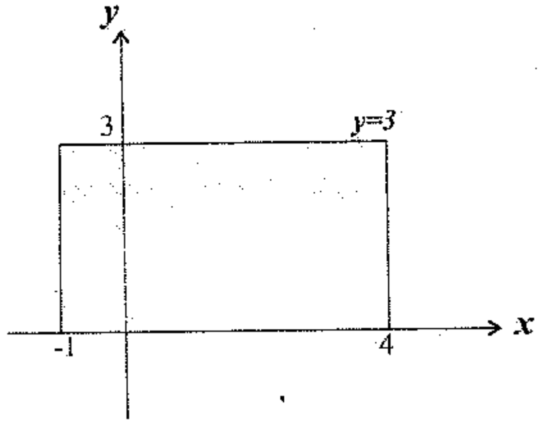
دویم مثال: د $y = 3$ مستقیم او د $(X\acute{X})$ د محور تر منځ د مضلع مساحت د $[-1,4]$ په انتروال کی پیدا کړئ؟

$\int_{-1}^{3} 3dx$ د مستطیل مساحت رانښیي.

د مستطیل مساحت $= 3[4-(-1)] = 3 \cdot 5 = 15$

د انتیګرال پواسطه یې مساحت په لاندی ډول پیدا کوو.

$$\int_{-1}^{3} 3dx = [3x]_{-1}^{4} = 3[4-(-1)] = 15$$




دريم مثال: هغه سطحه چه د $y = x - 1$ مستقيم او $(X\acute{X})$ د محور ترمنځ په $[0,3]$ انټروال کی جوړيږي محاسبه کړئ

$$A_1 = \frac{1}{2}(2 \cdot 2) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$
$$A_2 = \frac{1}{2}[1(-1)] = -\frac{1}{2}$$
$$A_1 + A_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1.5$$
$$\int_0^3 (x-1)dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^3 = \left[\frac{3^2}{2} - 3\right] - 0 = \frac{9-6}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

څلورم مثال : د هغه سطحی مساحت پيدا کړئ چه د $y = -2x + 1$ او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ د $[1,2]$ په انټروال کی محصور وي؟

$$A_1 = \frac{2(-1-3)}{2} = -4$$
$$A_2 = 1(-1) = -1$$
$$A = A_1 - A_2 = -4 - (-1) = -4 + 1 = -3$$
$$\int_1^2 (-2x+1)dx = \left[-2 \cdot \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 = [-x^2 + x]_1^2$$
$$= (-2^2 + 2) + (-2 \cdot 1^2 + 1) = -2 - 1 = -3$$

## د معین انتیګرال خواص Properties of definite integral:

1- د $[a, b]$ په انټروال کی د ثابتی تابع انتیګرال یعنې $\int_a^b cdx$ عبارت دی.

$$\int_a^b Cdx = C\int_a^b dx = c[x]_a^b = c(b-a)$$

ثبوت: د $[a, b]$ انټروال په $(n)$ مساوي برخو ویشویعنی $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ بیا د هر $(x_i)$ لپاره د $i-$ ام انټروال څخه لرو.

$$f(x_i) = c \qquad , \qquad i = 1,2,3, \cdots n$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} C\Delta x_i = C(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

$$= C\left(\frac{b-a}{n} + \frac{b-a}{n} + \cdots + \frac{b-a}{n}\right)$$

$$C(b-a)\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = C(b-a)\frac{n}{n} = C(b-a)$$

مثال: $\int_3^4 dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$\int_3^4 dx = [x]_3^4 = 4 - 3 = 1$$

2- د یوه ثابت عدد اویوی تابع د حاصل ضرب انتیګرال د ثابت عدد او هغه تابع د انتیګرال د حاصل ضرب سره مساوي دي.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

ثبوت: که د $[a, b]$ انټروال د $x_i$ چه $i = 1,2,3,4, \cdots, n$ وي په $(n)$ مساوي برخو وویشونو د ریمان دمجموعی او انتیګرال دتعریف سره سم لیکو چه:

$$\lim_{N\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} kf(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} k \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= k \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = k \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k \int_a^b f(x)dx$$

مثال: د $\int_{-2}^{2} 4dx$ انتیګرال محاسبه کړئ؟

$$\int_{-2}^{2} 4dx = 4 \int_{-2}^{2} dx = 4[2-(-2)] = 4 \cdot 4 = 16$$

3- که د $F(x)$ تابع د $f(x)$ د تابع یوه لمړنی تابع او په $[a,b]$ کې متمادي وي نو:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

ثبوت:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -\{-F(b) + F(a)\}$$

$$= -\{F(a) - F(b)\} = -\int_b^a f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

مثال: د $\int_2^3 2xdx = -\int_3^2 2xdx$ انتیګرالونو مساوات پیدا کړئ؟

$$\int_2^3 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_2^3 = \frac{2(3)^2}{2} - \frac{2(2)^2}{2} = \frac{2(9)}{2} - \frac{2(4)}{2}$$

$$= \frac{18}{2} - \frac{8}{2} = \frac{18-8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\int_3^2 2xdx = \left[\frac{2x^2}{2}\right]_3^2 = \frac{2(2)^2}{2} - \frac{2(3)^2}{2}$$

$$= \frac{2(4)}{2} - \frac{2(9)}{2} = \frac{8}{2} - \frac{18}{2} = \frac{8-18}{2} = -\frac{10}{2} = -5$$

$$\int_2^3 2xdx = -\int_3^2 2xdx$$

4- که د $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او $a = b$ وي نوانتیګرال یې صفر دی.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$$

مثال: د $\int_3^3 3x^2dx$ انتیګرال محاسبه کړئ؟

$$\int_3^3 3x^2dx = \left[\frac{3x^3}{3}\right]_3^3 = [3^3 - 3^3] = 27 - 27 = 0$$

5- د دوه تابعګانو د مجموعې او تفاضل انتیګرال په یوه انټروال کې د تابعګانو د انتیګرالو د مجموعې او تفاضل د انتیګرالو سره مساوي دي په همغه انټروال کې.

مثلاً د $f(x)$ او $g(x)$ تابعګانو انتیګرال د $[a,b]$ په انټروال کې نیول شوی دي نو:

$$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

ثبوت:

$$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\{f(x_i) \pm g(x_i)\}\,\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \pm \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i) = \int_a^b f\,(x)dx \pm \int_a^b g(x_i)dx$$

مثالونه:

$$\int_0^1 (4+3x^2)dx = \int_0^1 4dx + \int_0^1 3x^2dx$$

$$= 4\int_0^1 dx + 3\int_0^1 x^2dx = 4[x]_0^1 + 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 4+1 = 5$$

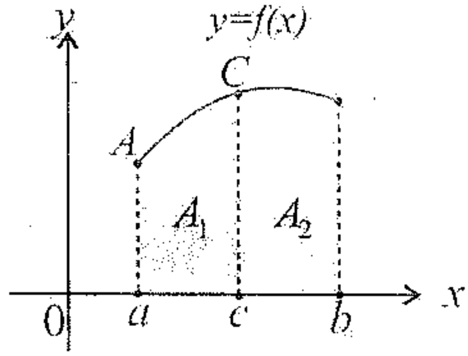
$$\int_0^3 (x^2-1)\,dx = \int_0^3 x^2dx - \int_0^3 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - [x]_0^3 = \frac{27}{3} - 3 = \frac{27-9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

6- که چېرته د $f(x)$ يوه تابع چه په يوه تړلي انټروال چه د $a$ , $b$ او $(c)$ ټکي پکې شامل وي او انتيګرال منونکي وي. نود ټول انټروال انتيګرال دانټروال د ټوټو د انتيګرالو د مجموعې سره مساوي دی.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ثبوت: د $[a,b]$ انټروال د $[a,c]$ او $[b,c]$ په دوه انټروالو ويشو:




د $A=\int_a^b f(x)dx$ د هغې سطحې مساحت دی چه د $f(x)$ دتابع د ګراف او $(X\acute{X})$ دمحور ترمنځ د $[a,b]$ په انټروال کې واقع دي.

$$A_1 = \int_a^c f(x)dx \quad \text{او} \quad A_2 \int_c^b f(x)dx$$

د تابع د ګراف د توټو مساحت دي. نو ليکو چه:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_x^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

مثال:-که $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ او $\int_0^8 f(x)dx = 12$ وي نو $\int_8^{10} f(x)dx = ?$ محاسبه کړئ؟

$$\int_8^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx - \int_0^8 f(x)dx = 17 - 12 = 5$$

7- که $f(x) \le g(x)$ تابعګانی په $[a,b]$ کی انتيګرال منونکي وي او $g(x) \ge f(x)$ او $\Delta x \ge 0$ وي نو د سلسلی هر حد مثبت دې پس ليميټ يي هم مثبت وي.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[g(x_i) - f(x_i)]\Delta x \ge 0 \Rightarrow \int_a^b [g(x) - f(x)]dx \ge 0$$

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \ge 0 \quad \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \ge \int_a^b f(x)dx$$

مثال: که $f(x) = 1 - \frac{x^2}{4}$ او $g(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$ وي د $x > 1$ لپاره وښياست چه

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) \le \int_a^b \left(1 + \frac{x^2}{2}\right) \Rightarrow \int_a^b dx - \int_a^b \frac{x^2}{4}dx \le \int_a^b dx + \int_a^b \frac{x^2}{2}dx$$

$$[x]_a^b - \frac{1}{12}[x^3]_a^b \le [x]_a^b + \frac{1}{6}[x^3]_a^b$$

$$(b-a) - \frac{1}{12}(b^3 - a^3) \le (b-a) + \frac{1}{6}(b^3 - a^3)$$

اطراف په $(b-a)$ ویشو.

$$1-\frac{1}{12}(b^2-a^2) \le 1+\frac{1}{6}(b^2-a^2)$$
$$-\frac{1}{12}(b^2-a^2) \le \frac{1}{6}(b^2-a^2)$$
$$-\frac{1}{12} < \frac{1}{6} \quad \Rightarrow -1 < 2$$

8- که $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کې متمادي وي او $(m)$ اصغري نقطه او $(M)$ اعظمي نقطه وي نو

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

ثبوت :

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx$$
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

دغه قضیه د انټیګرال د تخمیني قضیې په نوم یادیږي.

مثال: $\int_0^1 e^{-x^2}$ انټیګرال په تخمیني توګه حساب کړئ؟

څرنګه چه د $f(x) = e^{-x^2}$ تابع په $[0,1]$ انټروال کې متمادي ده او $M = f(0) = e^0 = 1$ مطلق اعظمي او $m = f(1) = e^{-1}$ مطلق اصغري ده نو لیکو چه:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$
$$e^{-1}(1-0) \le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le 1(1-0)$$

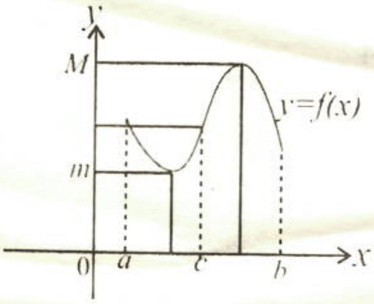
$$e^{-1} \le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \le \int_0^1 e^{-x^2}dx \le 1$$

$$\frac{1}{e} = 0.3679$$

$$0.3679 \le \int_0^1 f(x)dx \le 1$$

9- که $f(x)$ تابع په $[a,b]$ کی متمادي وي نو د $(c)$ یو عدد موجود دی چه $a < c < b$ دی نو:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$




ثبوت: د $a < b$ لپاره د $(m)$ او $(M)$ قیمتونه په ترتیب سره د $[a,b]$ په انتروال کی د تابع اصغري او اعظمي نقطی دي او $c \in [a,b]$ دی

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

فرضوو چه $k = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ دی نو $m \le k \le M$ دی او د هر $(c)$ حقیقي عدد لپاره $a \le c \le b$ دی نو لرو چه $k = f(c)$ نو:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

پورته رابطه د متوسط قیمت درابطی په نوم یادیږي. $f(c)$ طول او $(b-a)$ عرض دي او حاصل ضرب یې د مستطیل مساحت دی. یعنی:

$$A = f(c)(b-a)$$

مثال: د $[1,4]$ په انټروال کې د $f(x) = x^2$ تابع اولاندی رابطه راکړ شوی ده د (c) قیمت په لاس راوړئ؟

$$\int_1^4 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 = \left[\frac{64}{3} - \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{64-1}{3}\right] = \frac{63}{3} = 21$$

د $(x)$ په عوض $(c)$ وضع کوواو د متوسط قیمت د قضیي څخه استفاده کوو.

$$\int_a^b x^2 dx = c^2(4-1) \Rightarrow 3c^2 = 21 \Rightarrow c^2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

$$a < c < b = 1 < \sqrt{7} < 4$$

$$f(c) = c^2 = \sqrt{7}^2 = 7$$

$$A = f(c)(b-a) = 7 \cdot \sqrt{7} = 7\sqrt{7}$$

## دانتیګرال او مشتق اساسي قضیي:

**اوله قضیه :**

که $f(x)$ تابع د $[a,b]$ په انټروال کی متمادي وي او $(x)$ په دی انټروال شامل وي که $x \in [a,b]$ نولیکلای شو چه:

$$\acute{F}(x) = f(x)$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(a) + F(a) - F(x)}{h}$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(a) - F(x) - F(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x)\big|_a^{x+h} - F(x)\big|_a^x}{h}$$

د $F(x)$ په $F(t)$ بنیبو:

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F\left(t\big|_a^{x+h} - F(t)\big|_a^x\right)}{h}$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^{x} f(t)dt}{h}$$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}$$

د متوسط قیمت د قضیي څخه لیکو چه:

$$f(c) = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)dt$$

نو معلومه شوه چه $x < c < x + h$

$$\acute{F}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)dt = \lim_{c\to x} f(c) = f(x)$$

مثال: د $f(x) = \int_2^{x^2+1}\frac{1}{x^2+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$$

$$u = g(x) = x^2 + 1$$

$$f(t) = \frac{1}{t^2+1}$$

$$\acute{F}(x) = f\big(g(x)\big)\cdot \acute{g}(x)$$

$$\acute{F}(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot (x^2+1)' = \frac{1}{(x^2+1)^2+1}\cdot 2x$$

$$\acute{F}(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2+1}$$

**دویمه قضیه:**

که $F(x)$ تابع د $f(x)$ د تابع اولنی تابع او د $[a,b]$ په انتروال کی متمادي وي پدی صورت کی لیکلای شو چه:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

ثبوت: که $F(x)=\int_a^b f(t)dt$ وي نو د هر $x\in[a,b]$ لپاره $\acute{F}(x)=f(x)$ دی د تابعګانو تفاضل په $(k)$ ښیو:

$$f(x)-F(x)=k\Rightarrow f(x)=F(x)+k$$

$$\acute{F}(x)=\int_a^b f(t)dt=f(x)=F(x)+k$$

$$\int_a^b f(t)dt-F(x)=k\cdots 1$$

د $(x)$ په عوض $(a)$ وضع کوو:

$$\int_a^b f(t)dt-F(a)=k\Rightarrow 0-F(a)=k\Rightarrow k=-F(a)$$

د $k$ قیمت په $(1)$ رابطه کې وضع کوو.

$$\int_a^b f(t)dt-F(x)=-F(a)$$

د $(x)$ په عوض $(b)$ وضع کوو.

$$\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$$

اخري رابطه د $\int_a^b f(t)dt=[F(x)]_a^b$ شکل ښودل کیږي. دغه رابطه د اولنۍ تابع او $\int_a^b f(t)dt$ انتیګرال تر منځ رابطه ښیي چه د نیوټن (لایبنز) په نوم یادیږي.

مثال: $\int_0^1 x^2dx$ انتیګرال لاس ته راوړئ؟

$$\int_0^1 x^2\,dx=F(1)-F(0)=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{1}{3}\cdot 0^3=\frac{1}{3}$$

## په تعویضي طریقې سره د انتیګرال نیول:

... انتیګرال دلاس ته راوړلو لپاره يي

$u = g(x)$ او $F'(x) = f(x)$ بنیو $\frac{du}{dx} = g'(x)$ او $du = g'(x)dx$ بنیو:

$$\int_a^b f\{g(x)\}\, g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

لمړی مثال: $\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2}$ انتیګرال پیدا کړئ؟

$$u = 3 - 5x \quad , \quad \frac{du}{dx} = -5 \Rightarrow dx = -\frac{du}{5}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow 3 - 5 \cdot 1 = -2 \Rightarrow u = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ u = 3 - 5x \Rightarrow u = 3 - 5 \cdot 2 = -7 \Rightarrow u = -7 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = \int_{-2}^{-7} \frac{1}{u^2}\left(-\frac{1}{5}\right) du = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{5}\left[\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = -\frac{1}{5}\left[\frac{1}{7} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{5}\left[\frac{2-7}{14}\right] = -\frac{1}{5}\left[\frac{-5}{14}\right] = \frac{1}{14}$$

دویم مثال: د $\int_0^1 x^3(1+2x^3)^5 dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$u = 1 + 2x^3 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 6x^2 \quad , \quad x^2 dx = \frac{1}{6}du$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ u = 1 + 2x^2 \Rightarrow 1 + 2 \cdot 0 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ u = 1 + 2x^2 \Rightarrow u = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \Rightarrow u = 3 \end{cases}$$

$$\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5 dx = \int_1^3 u^5 \cdot \frac{1}{6} \cdot du = \frac{1}{6}\int_1^3 u^5 du = \frac{1}{6}\left[\frac{u^6}{6}\right]_1^3 = \frac{1}{6}\left[\frac{3^6}{6} - \frac{1}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{729-1}{6}\right] = \frac{728}{36} = \frac{182}{9} = 20.\overline{2}$$

پورته فارمول په غېر معین انتیګرال کی هم د تطبیق وړ دي.

مثال: $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$u = 1 - 4x^2 \quad , \quad \frac{du}{dx} = -8x \quad , \quad xdx = -\frac{1}{8}du$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot xdx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\left(-\frac{1}{8}du\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = -\frac{1}{8}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right) + C = -\frac{1}{8}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) + C = -\frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{u}}{\frac{1}{2}}\right) + C = -\frac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

دويم مثال: $\int x^3 \cos(x^4+2)\, dx$ انتيګرال حساب کړئ؟

$$u = x^4 + 2 \quad , \quad \frac{du}{dx} = 4x^3 \quad , \quad x^3dx = \frac{1}{4}du$$

$$\int x^3 \cos((x^4+2)dx) = \int cosux^3dx = \int cosu \cdot \frac{1}{4}du$$

$$= \frac{1}{4}\int cosudu = \frac{1}{4}\sin u + C$$

$$\int x^3 \cos(x^4+2)\, dx = \frac{1}{4}\sin(x^4+2) + C$$

## قسمي انتيګرالونه:

د $\int f(x)g(x)dx$ په انتيګرال کې $f(x) = u$ او $g(x) = v$ ښيو او دحاصل ضرب مشتق يي پيدا کوو.

$$(u \cdot v)' = \acute{u}v + \acute{v}u \quad \Rightarrow \acute{v}u = (u \cdot v)' - \acute{u}v$$

$$\int \acute{v}\, udx = u \cdot v - \int \acute{u}\, vdx$$

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

پورته رابطه په قسمي طريقه د غير معين انتيګرال فارمول دی.

که $(u)$ او $(v)$ تابعګانې د $[a,b]$ په انټروال کی تعريف شوی وي نود معين انتيګرال فارمول په قسمي طريقه په لاندی ډول دی.

$$\int_a^b \acute{v}\, u\, dx = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v\acute{u}\, dx \quad \text{V} \quad \int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

لمړی مثال: د $\int x \sin x dx$ انتیګرال پیدا کړئ؟

$$u = x \quad , \quad du = dx$$

$$v = -\cos x \quad , \quad \frac{dv}{dx} = \sin x \quad \Rightarrow dv = \sin x dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int x \sin x dx = x(-\cos x) - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

دویم مثال: د $\int_0^1 -xe^x dx$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$u = -x \quad \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \quad \Rightarrow du = -dx$$

$$v = e^x \quad \Rightarrow \frac{dv}{dx} = e^x \Rightarrow dv = e^x dx$$

$$h \int_a^b \acute{v}\, u\, dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b v\acute{u}\, dx$$

$$\int_0^1 -xe^x dx = [-xe^x]_0^1 + \int_0^1 e^x dx$$

$$= -e^1 + 0 \cdot e^0 + [e^x]_0^1 = -e^1 + e^1 - e^0 = -e^0 = -1$$

## دلوګاریتمي او اکسپوننشل تابعګانو مشتق:

1- که $f(x) = \ln x$ وي نو $\acute{f}(x) = \frac{1}{x}$ کیږي.

ثبوت:

$$\acute{f}(x) = (\ln x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$\frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \frac{x}{h} \ln\left(\frac{x}{x} + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \lim_{h \to 0} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

که $u = \frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x} = \frac{1}{u}$ کيږي او څرنګه چه $h \to 0$ تقرب وکړي نو $u \to \infty$ ته تقرب کوي

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}\lim_{u\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x}\ln\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{1}{x}$$

2- که $g(x) = a^x$ وي نومشتق يې دلاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$\acute{g}(x) = a^x \ln a$$
$$\ln y = \ln a^x = x\ln a$$
$$(\ln y)' = (x\ln a)'$$
$$\frac{\acute{y}}{y} = 1\cdot \ln a + x\cdot 0 = \ln a$$
$$\acute{y} = y\ln a = a^x \ln a$$

## د اعشاري لوګاريتم مشتق:

د $f(x) = \log_a x$ تابع مشتق عبارت دی له :

$$\acute{f}(x) = \frac{1}{x}\log_a e$$

$$\acute{f}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h) - \log_a x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

که $u = \frac{x}{h}$ وضع شي نو $\frac{h}{x} = \frac{1}{u}$ کيږي او کله چه $h \to 0$ تقرب وکړي نو $u \to \infty$ تقرب کوي.

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a \lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u = \frac{1}{x}\log_a e$$

غواړو چه ثبوت کړو چه:

$$\{\log_a g(x)\}' = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}\log_a e$$
$$\acute{f}(x) = \{\log_a g(x)\}' = \{\log_a g(x)\}'\cdot \acute{g}(x)$$
$$= \frac{1}{g(x)}\log_a e\cdot \acute{g}(x) = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}\log_a e$$

که $a = e$ وضع شي نو:

$$\{\log_e g(x)\}' = \{\ln g(x)\}' = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}$$

1- د $y = e^x$ مشتق

$$\ln y = \ln e^x = x \ln e = x$$

$$(\ln y)' = \acute{x} \quad \Rightarrow \frac{\acute{y}}{y} = 1 \Rightarrow \acute{y} = y \cdot 1 = y \Rightarrow \acute{y} = e^x$$

2- که $y = a^u$ وي کله چه $a > 0$ او $a \neq 1$ وي نو:

$$\acute{y} = \acute{u} \cdot a^u \ln a$$

3- که په لوګاریتمي تابعګانو کی د لوګاریتم قاعده د طبعي لوګاریتم څخه اعشاري لوګاریتم ته بدله شي ټول لوګاریتمي عددونه دصورت څخه مخرج ته اویا د مخرج څخه صورت ته ځي لکه:

$$y = \log_a u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u} \log_a e = \frac{\acute{u}}{u \log_e a} = \frac{\acute{u}}{u \ln a}$$

لمړی مثال: د $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

حل:

$$g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow \acute{g}(x) = 2x$$

$$\{\ln g(x)\}' = \frac{\acute{g}(x)}{g(x)}$$

$$\{\ln(x^2 + 1)\}' = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

دویم مثال:

$$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4) \quad \Rightarrow \acute{f}(x) = \frac{(x^2 - 5x + 4)'}{x^2 - 5x + 4} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 4}$$

دریم مثال:

$$f(x)=\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\log_a\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\log_a\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\{\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1)\}$$
$$f'(x)=\left(\log_a\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right)'=\frac{1}{2}\{\log_a(x^2+1)-\log_a(x^2-1)\}'$$
$$\frac{1}{2}\left\{\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\log_a e-\frac{(x^2-1)'}{x^2-1}\log_a e\right\}=\frac{1}{2}\left\{\frac{2x}{x^2+1}\log_a e-\frac{2x}{x^2-1}\log_a e\right\}$$
$$\frac{1}{2}\cdot 2x\log_a e\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$$
$$=x\log_a e\left(\frac{x^2-1-x^2-1}{x^4-1}\right)=\frac{-2x}{x^4-1}\log_a e$$

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}=\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\{\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)\}$$

$$f'(x)=\left(\ln\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right)'=\frac{1}{2}\{\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)\}'$$

$$=\frac{1}{2}[\{\ln(x^2+1)\}'-\{\ln(x^2-1)\}']$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1}\right)=\frac{-2x}{x^4-1}$$

څلورم مثال: د $y=e^{x^2+1}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$y'=(x^2+1)'\cdot e^{x^2+1}=2x\cdot e^{x^2+1}$$

پنځم مثال: د $y=\sqrt[x]{2}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$y=\sqrt[x]{2}$$
$$\ln y=\ln\sqrt[x]{2}=\ln 2^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\ln 2$$

$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{x}\ln 2\right)'$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \ln 2 + \frac{1}{x} \cdot (\ln 2)' = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} \cdot \ln 2 + \frac{1}{x} \cdot 0 = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln 2 + 0$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = -\frac{1}{x^2}\ln 2 \Rightarrow \acute{y} = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln 2 \cdot y = -\frac{1}{x^2} \cdot \sqrt[x]{2} \cdot \ln 2$$

شپږم مثال : د $y = x^{2x}$ مشتق پیدا کړئ؟

$$y = x^{2x}$$

$$\ln y = \ln x^{2x} = 2x \ln x$$

$$(\ln y)' = (2x \cdot \ln x)' \Rightarrow \frac{\acute{y}}{y} = 2 \cdot \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2\ln x + 2 = 2(\ln x + 1)$$

$$\frac{\acute{y}}{y} = 2(\ln x + 1) \Rightarrow \acute{y} = 2(\ln x + 1) \cdot y \Rightarrow \acute{y} = 2(\ln x + 1) \cdot x^{2x}$$

اووم مثال :

$$y = \log_{10}(x^4 + 1)$$

$$\acute{y} = ?$$

$$x^4 + 1 = u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_{10} e = \frac{4x^3}{x^4 + 1}\log_{10} e = \frac{4x^3}{(x^4 + 1)\ln 10}$$

اتم مثال:

$$y = \log_3(\log_2 x)$$

$$\acute{y} = ?$$

$$\log_2 x = u$$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_a e = \frac{\frac{1}{x}\log_2 e}{\log_2 x}\log_3 e = \frac{1}{x \log_2 x \ln 2 \ln 3} = \frac{1}{x\frac{\log_e x}{\log_e 2} \cdot \ln 2 \ln 3}$$

$$\acute{y} = \frac{1}{x\frac{\ln x}{\ln 2}\ln 2 \ln 3} = \frac{1}{x \ln x \ln 3}$$

نهم مثال:

$$y = \log_{(x^2-1)}(x^2 + 1)$$

$\acute{y} = ?$

$x^2 + 1 = u$

$$\acute{y} = \frac{\acute{u}}{u}\log_a e = \frac{2x}{x^2+1}\log_{(x^2-1)} e$$

## د معکوسو تابعګانو مشتق:

که دوه تابعګانی یو د بل معکوس وي نو مشتقونه يي هم یو د بل معکوس دي.

مثلاً که $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$ وي نو:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

یا:

$$\acute{y}_{(x)} = \frac{1}{\acute{x}_{(y)}}$$

نو د ضمني تابعګانو د مشتق له مخی لیکو.

$$\left.\begin{matrix} y = f(x) \\ x = g(y) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \acute{y}_x \cdot \acute{x}_y = \acute{y}_y \Longrightarrow \acute{y}_x \cdot \acute{x}_y = 1 \Longrightarrow \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y}$$

مثال: د $y = a^x$ د تابع مشتق د هغې د معکوسی تابع له مخی پیدا کړئ؟

$$y = a^x \Longrightarrow x = \log_a y$$

$$\acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{y}}\log_e a = y\ln a = a^x \ln a$$

## د معکوسومثلثاتي تابعګانومشتق:

د معکوسو مثلثاتي تابعګانو مشتق دلاندی رابطو پواسطه پیدا کیږي.

1- $(arc\sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2- $(arc\cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

3- $(arc\tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

4- $(arc\cot x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

-1

$$y = arc\sin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

$$(arc\sin x)' = ?$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \Rightarrow \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

-2

$$y = arc\cos x \quad \Leftrightarrow x = \cos y$$

$$(arc\cos x)' = ?$$

$$\acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\cos y)'} = \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-cos^2y}} \Longrightarrow (arc\cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

-3

$$y = arc\tan x \Leftrightarrow x = \tan y \Rightarrow (arc\tan x)' = \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\frac{1}{cos^2y}}$$

$$= cos^2y = \frac{cos^2y}{1} = \frac{cos^2y}{sin^2y + cos^2y}$$

$$= \frac{\frac{cos^2y}{cos^2y}}{\frac{sin^2y}{cos^2y} + \frac{cos^2y}{cos^2y}} = \frac{1}{tan^2y + 1} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(arc\tan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

-4

$$y = arc\cot x \Leftrightarrow x = \cot y$$

$$(arc\cot x)' = ?$$

$$(arc\cot x)' = \acute{y}_x = \frac{1}{\acute{x}_y} = \frac{1}{(\cot y)'} = \frac{1}{\frac{-1}{sin^2y}}$$

$$= -sin^2y = \frac{-sin^2y}{1} = \frac{-sin^2y}{sin^2y + cos^2y}$$

$$= \frac{\frac{-sin^2y}{sin^2y}}{\frac{sin^2y}{sin^2y}+\frac{cos^2y}{sin^2y}} = \frac{-1}{1+cot^2y} = -\frac{1}{1+x^2}$$

لمړی مثال:- د $y = (arc\tan x)^5$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = 5(arctanx)^4\frac{1}{1+x^2}$$

دويم مثال:- د $y = \log_5(arc\tan x)$ تابع مشتق پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = \{\log_5(arc\tan x)\}' = \log_5 u = \frac{\acute{u}}{u\ln a}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+x^2}}{arc\tan x\ln 5} = \frac{1}{(1+x^2)(arc\tan x\ln 5)}$$

دریم مثال:- د $y = arctane^x$ تابع مشتق د $x = 0$ په نقطه کې پیدا کړئ؟

$$\acute{y} = (arc\tan e^x)' = (arc\tan u)' = \frac{\acute{u}}{1+u^2} = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

$$\acute{y}(0) = \frac{e^0}{1+e^{2\cdot 0}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

قسمي کسرونه:

د یوه واقعي کسر قسمي کسرونه هغه کسرونه دي چه د هغوی دمجموعی څخه دغه واقعي کسر جوړشوی وي. دواقعي کسرد قسمي کسرو پیدا کول دری حالته لري.

اول حالت:

چه د واقعي کسرد مخرج ضربي عوامل غیر تکراري بېنومونه وي.لکه

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10} = \frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$= \frac{A(x^2+x-2)+B(x^2-3x-10)+C(x^2-6x+5)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10} = \frac{Ax^2+Ax-2A+Bx^2-3Bx-10B+Cx^2-6Cx+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x-2A-10B+5C}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

$$4x^2-x-39=(A+B+C)x^2+(A-3B-6C)x-2A-10B+5C$$

$A+B+C=4$
$A-3B-6C=-1$
$-2A-10B+5C=-39$

$$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

دویم حالت :

چه دکسر د مخرج په ضربي عواملو کې تکراري بېنومونه وي.

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{A(x-1)^2+B(x-2)(x-1)+C(x-2)}{(x-2)(x-1)^2}$$

$$3x^2-6x+2=A(x^2-2x+1)+B(x^2-3x+2)+C(x-2)$$

$$3x^2-6x+2=Ax^2-2Ax+A+Bx^2-3Bx+2B+Cx-2C$$

$$3x^2-6x+2=(A+B)x^2-(2A+3B-C)x+A+2B-2C$$

$A+B=3$

$-2A-3B$

$+C=-6$

$A+2B-2C=2$

$$\frac{3x^2-6x+2}{x^3-4x^2+5x-2}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

دریم حالت:

چه د کسرد مخرج ضربي عوامل غېرتکراري ترینومونه وي،په صورت کې یې بېنوم لیکل کیږي.

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+4}+\frac{C}{x+1}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2+2x+4)}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4} = \frac{(A+C)x^2+(A+B+2C)x+B+4C}{(x^2+2x+4)(x+1)}$$

$$= 5x^2+8x+9 = (A+C)x^2+(A+B+2C)x+B+4C$$

$$A+C=5$$

$$A+B+2C=8$$

$$B+4C=9$$

$$A=3 \quad , \; B=1 \quad , \; C=1$$

$$\frac{5x^2+8x+9}{x^3+3x^2+6x+4} = \frac{3X+1}{x^2+2x+4} + \frac{2}{x+1}$$

## د اکسپوننشل تابعګانو انتيګرالونه:

د $f(x) = e^x$ طبعي اکسپوننشل تابع لپاره لرورچه

$$\int e^x dx = e^x + c$$

په عمومي ډول

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \; a \neq 1 \;\; \& \;\; a \in IR$$

ثبوت:

$$\int a^x dx$$

$$u = 1 \quad , \; \frac{du}{dx} = 0 \quad , \; du = 0 \cdot dx$$

$$v = a^x \quad , \; \frac{dv}{dx} = \frac{a^x}{\ln a} \quad , \quad dv = \frac{a^x}{\ln a} dx$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a} \cdot 0 \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

لمړی مثال: د $f(x) = 2^{x-3}$ اکسپوننشل تابع انتيګرال پيدا کړئ؟

$$2^{x-3} = \frac{2^x}{2^3} = \frac{2^x}{8} = \frac{1}{8} \cdot 2^x$$

$$\int 2^{x-3}dx = \int \frac{1}{8}\cdot 2^x dx = \frac{1}{8}\int 2^x dx = \frac{1}{8}\cdot\frac{2^x}{\ln 2} + C$$

دویم مثال:

$$\int 3^{x+1}dx = ?$$

$$\int 3^{x+1}dx = \int 3^x \cdot 3dx = 3\int 3^x dx = 3\cdot\frac{3^x}{\ln 3} + C$$

## د لوګاریتمي تابعګانو انتیګرال:

که $(x \in IR^+)$ $\quad f(x) = \ln x$ وي نوانتیګرال یې په لاندې ډول دی.

$$\int \ln dx = x\ln x - x + C$$

که $(x, a \in IR^+)$ $\quad f(x) = \log_a x$ وي نو انتیګرال یې داسې پیدا کوو.

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e}$$

ثبوت:

1- که $a = e$ وضع شي

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_e x\,dx = \int \ln x dx = x\log_e \frac{x}{e} = x(\log_e x - \log_e e) = x(\ln x - 1) + C$$

2- حالت:

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$u = \log_a x \;,\; \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}\log_a e \quad , du = \frac{1}{x}\log_a e\,dx$$

$$v = x \quad , \quad \frac{dv}{dx} = 1 \Rightarrow dv = dx$$

$$\int \log_a x\,dx = x\log_a x - \int x\cdot\frac{1}{x}\log_a e\,dx = x\log_a x - \log_a e\int dx$$

$$= x\log_a x - x\log_a e = x(\log_a x - \log_a e) = x\log_a \frac{x}{e} + C$$

$$\int \log_A x dx = x\log_a \frac{x}{e}$$

مثال: د $\int \ln 3x dx$ غیرمعین انتیګرال پیدا کړئ؟

حل:

$$\int \ln 3x dx = \int (\ln 3 + \ln x)dx = \int \ln 3dx + \ln x dx$$

$$= x\ln 3 + x\ln x - x = x(\ln 3 + \ln x) - x = x(\ln 3x - 1)$$

په تعویضي طریقه هم کولای شوچه د غیرمعین انتیګرال قیمت پیدا کړو.

لمړی مثال:

$$\int \frac{1}{2}e^{-2x-3}\,dx = ?$$

$$u = -2x - 3 \quad , \quad \frac{du}{dx} = -2 \quad , \quad dx = -\frac{1}{2}du$$

$$\int \frac{1}{2}e^u\left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{4}\int e^u du = -\frac{1}{4}e^u + C$$

دویم مثال:

$$\int \frac{2dx}{x+2} = ?$$

$$x + 2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 1 \quad , \quad du = dx$$

$$\int \frac{2du}{u} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|x+2| + C$$

دریم مثال: د $f(x) = e^{2x}$ تابع انتیګرال پیدا کړئ؟

$$\int f(xdx) = \int e^{2x}dx = ?$$

$$2x = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad , dx = \frac{du}{2}$$

$$\int f(x)dx = \int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{e^u}{2} + C = \frac{1}{2}\cdot e^{2x} + C$$

څلورم مثال: د $f(x) = x\cdot \ln x^2$ انتیګرال حساب کړئ؟

$$\int f(x)dx = \int (x\ln x^2)dx = ?$$

$$x^2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad , \quad dx = \frac{1}{2x}du$$

$$\int f(x)dx = \int x\ln u \cdot \frac{1}{2x}du = \frac{1}{2}\int \ln u du = \frac{1}{2}[u \cdot \ln u - u + C]$$

$$= \frac{1}{2}u \cdot \ln u - \frac{1}{2}u + C = \frac{1}{2}x^2\ln x^2 - \frac{1}{2}x^2 + C$$

معین انتیګرالونه هم په تعویضي طریقه حلولای شو.

$$\int_{-1}^{1} e^{2x}dx = ?$$

$$u = 2x \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2 \quad , \quad dx = \frac{1}{2}du$$

$$\begin{cases} x = -1 \ , & u = 2x = 2(-1) = -2 \\ x = 1 & , \ u = 2x = 2(1) = 2 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} e^u du = \frac{1}{2}[e^u]_{-2}^{2} = 3.627$$

دویم مثال:

$$\int_{1}^{2} 2x \cdot \ln x^2 dx = ?$$

$$x^2 = u \quad , \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad , \quad dx = \frac{1}{2x}du$$

$$x = 1 \quad , \quad u = x^2 = 1$$

$$x = 2 \qquad u = x^2 = 4$$

$$\int_{1}^{2} 2x\ln x^2 dx = \int_{1}^{4} 2x \cdot \ln u \cdot \frac{1}{2x}du = \int_{1}^{4} \ln u du$$

$$= [u \cdot \ln u - u]_{1}^{4} = [4 \cdot \ln 4 - 4] - [1 \cdot \ln 1 - 1] = 2.545$$

د قسمي کسروپواسطه دواقعي کسرد انتيګرال لاس ته راوړل که وغواړو چه د يوه واقعي کسر انتيګرال پيدا کړو نو لمړی يي قسمي کسرونه پيدا کوو بيا د قسمي کسرو انتيګرالونه پيدا کوو او جمع کوو يي.

لمړی مثال: $\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}$ محاسبه کړئ؟

$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-4}=\frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)}$$
$$=\frac{Ax-4A+Bx-2B}{(x-2)(x-4)}$$
$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=\frac{(A+B)x-4A-2B}{(x-2)(x-4)}$$
$$7x-12=(A+B)x-4A-2B$$
$$A+B=7$$
$$-4A-2B=-12 \Rightarrow 4A+2B=12 \cdots\cdots\cdots 1$$
$$A=7-B \Longrightarrow 4(7-B)+2B=12$$
$$28-4B+2B=12$$
$$-2B=12-28=-16 \Rightarrow B=8$$
$$A=7-B=7-8=-1 \Rightarrow A=-1$$
$$\frac{7x-12}{x^2-6x+8}=-\frac{1}{x-2}+\frac{8}{x-4}$$
$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=\int \frac{-1}{x-2}dx+\int \frac{8}{x-4}dx$$
$$\int \frac{7x-12}{x^2-6x+8}dx=-\int \frac{1}{x-2}dx+8\int \frac{1}{x-4}dx$$
$$=-\ln|x-2|+8\ln|x-4|+C=\ln(x-2)^{-1}+\ln(x-4)^8+C$$
$$=\ln\{(x-2)^{-1}\cdot(x-4)^8\}=\ln\left\{\frac{(x-4)^8}{x-2}\right\}+C$$

## د منحني سطحی د مساحت پیدا کول

### Acconting area of curve plane

هغه مستوي چه د $(X\acute{X})$ د محور او د $Y = F(x)$ د تابع د ګراف او $x = a$ او $x = b$ د کرښو تر منځ محصور وي مساحت يې دلاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

که $y = f(x)$ تابع د $[a, b]$ په انتیروال کی مثبت اومتمادي وي یعنی $y = f(x) \geq 0$ وي پدی صورت کی د $f(x)$ دتابع ګراف د $(X\acute{X})$ دمحورپه پورتني طرف کی پروت دی او که $y = f(x) \leq 0$ وي پدی صورت کی د $f(x)$ تابع ګراف د $(X\acute{X})$ دمحورپه کښتني طرف کی پروت دی.

لمړی مثال: د $x = 4 - y^2$ د تابع د ګراف او د $(Y\acute{Y})$ د محور تر منځ د سطحی مساحت پیدا کړئ؟

د تابع د ګراف بحراني ټکی او د $(Y\acute{Y})$ د محور سره دتابع د ګراف د تقاطع ټکي پیدا کوو.

$x = 4 - y^2$

$\acute{x} = 0 - 2y = -2y$

په بحراني نقطه دتابع مشتق صفر وي نو $\acute{x} = 0$ نو:

$-2y = 0 \Rightarrow y = 0$

د $(y)$ قیمت په اوله معادله کی وضع کوود $(x)$ قیمت لاس ته راځي

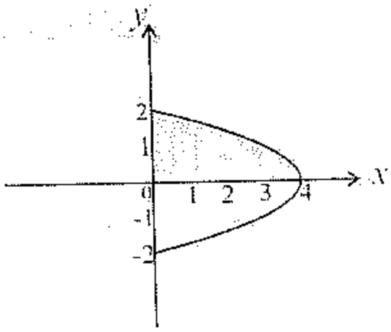
$x = 4 - y^2 = 4 - (0)^2 = 4 - 0 = 4$
$x = 4$

$A(4,0)$ نقطه بحراني نقطه ده.د $Y\acute{Y}$ دمحور سره دتابع د ګراف د تقاطع نقطه پیدا کوو نو $x = 0$ فرضوو او د $y$قیمت لاس ته راځي

$x = 0$

$4 - y^2 = 0 \quad \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$B(0,2) \qquad C(0,-2)$




$$A = \int_{-2}^{2} (4 - Y^2)dy = 2\int_{0}^{2} (4 - y^2)\, dy = 2\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2$$

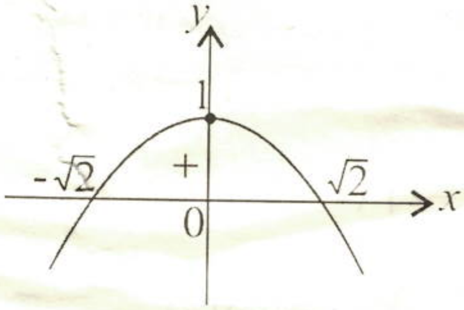
$$A = 2\left[\left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - 0\right] = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = 2\left(\frac{24 - 8}{3}\right) = 2\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3}$$

دويم مثال: د $(X\acute{X})$ دمحور او $Y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ دتابع دګراف پواسطه د محصورې سطحې مساحت محاسبه کړئ؟

$$y = 1 - \frac{1}{2}x^2$$
$$\acute{y} = -x$$
$$\acute{y} = 0 \qquad x = 0$$
$$y = 1 - \frac{1}{2}(0)^2 = 1$$

$A(0,1)$ بحراني نقطه ده. اوس د $(X\acute{X})$ دمحور سره د تابع دګراف د تقاطع نقطه پيدا کوو $Y = 0$ فرضوو.

$$y = 0$$
$$1 - \frac{1}{2}x^2 = 0 \qquad \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 = -1 \qquad \Rightarrow x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$
$$(\sqrt{2}, 0) \qquad\qquad C(-\sqrt{2}, 0)$$




$$A=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)dx=2\int_{0}^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)dx=2\left(\left[x-\frac{1}{6}x^3\right]_{0}^{\sqrt{2}}\right)$$

$$A=2\left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}^3}{6}-0\right)=2\left(\frac{6\sqrt{2}-(\sqrt{2})^3}{6}\right)=2\left(\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{6}\right)=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

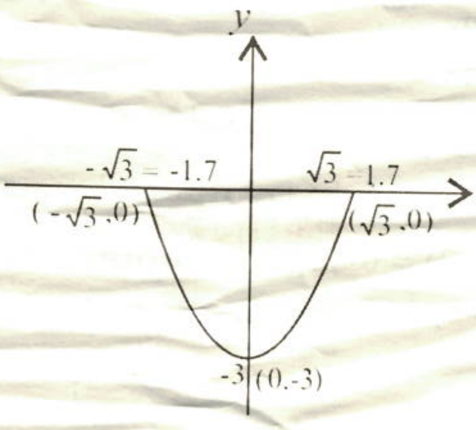
دریم مثال: د هغه سطحې مساحت پیدا کړئ چه د $y=x^2-3$ د تابع دګراف او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ محصوروي.

حل:

$y=x^2-3 \quad , \quad \acute{y}=2x$
$\acute{y}=0 \quad \therefore \; x=0$
$y=0^2-3=-3 \quad , \quad A(0,-3)$
$y=0$

$$x^2-3=0 \Rightarrow x^2=3 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{3}$$

$B(\sqrt{3},0) \qquad C(-\sqrt{3},0)$



څرنګه چه ګراف يي د $y = x^2 - 3$ د محور لاندې واقع دی نو انتيګرال يې منفي دی. او څرنګه چه $\sqrt{3}$ او $-\sqrt{3}$ متناظر دي نو مساحت يې د سر حداتو دنيمايي څخه پيدا کوو.

$$A = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)dx = -2\int_0^{\sqrt{3}} (x^2 - 3)$$

$$= -2\left(\int_0^{\sqrt{3}} x^2dx - 3\int_0^{\sqrt{3}} dx\right) = -2\left(\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} - [3x]_0^{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -2\left(\frac{1}{3}\left[\sqrt{3}^3 - 0\right] - 3[\sqrt{3} - 0]\right) = -2\left(\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3 - 3\sqrt{3}\right)$$

$$= -\frac{2}{3}(\sqrt{3})^3 + 6\sqrt{3} = \frac{2}{3}(1.7)^3 + 6(1.7)$$

$$= -\frac{2}{3}(4.913) + 10.2 = \frac{9.826}{3} + 10.2 = -3.2753 + 10.2 = 6.9247$$

څلورم مثال: د $y = x^2 - 3x$ د تابع ګراف رسم کړئ او د منحني او $(X\acute{X})$ دمحور تر منځ فاصله پيدا کړئ؟

$$y = x^2 - 3x$$
$$\acute{y} = 2x - 3 \Rightarrow \acute{y} = 0$$
$$2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$
$$y = x^2 - 3x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9 - 18}{4} = \frac{-9}{4}$$

$A\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ بحراني نقطه

څرنګه چه $y'' = 2 > 0$ دی نو بحراني نقطه اصغري نقطه ده.

د $(X\acute{X})$ دمحور سره د ګراف د تقاطع د نقطی د پيدا کولو لپاره $y = 0$ فرضوو

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \quad , x_1 = 0 \quad , O(0,0)$$
$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad , \quad B(3,0)$$

$$A = A_1 - A_2 + A_3 = \int_{-1}^{0}(x^2 - 3x)dx - \int_{0}^{3}(x^2 - 3x)dx + \int_{3}^{4}(x^2 - 3x)dx$$

$$A = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_{3}^{4}$$

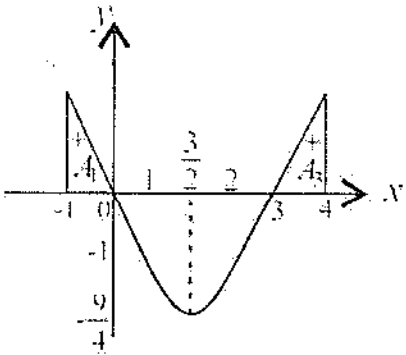
$$A = \left[\left(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0\right) - \left\{\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - \frac{3}{2}(-1)^2\right\}\right] - \left[\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{3}{2}\cdot 0\right)\right] + \left[\frac{1}{3}\cdot(4)^3 - \frac{3}{2}\cdot 4^2 - \left\{\frac{1}{3}(3)^3 - \frac{3}{2}\cdot 3^2\right\}\right]$$

$$= -\left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9\right) + \left\{\left(\frac{1}{3}\cdot 64 - \frac{3}{2}\cdot 16\right) - \left(\frac{1}{3}\cdot 27 - \frac{3}{2}\cdot 9\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2} + \frac{64}{3} - \frac{48}{2} - \frac{27}{3} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{27}{3} + \frac{64}{3} - \frac{27}{3} + \frac{3}{2} + \frac{27}{2} - \frac{48}{2} + \frac{27}{2}$$

$$= \frac{1 - 27 + 64 - 27}{3} + \frac{3 + 27 - 48 + 27}{2} = \frac{11}{3} + \frac{9}{2} = \frac{22 + 27}{6} = \frac{49}{6}$$



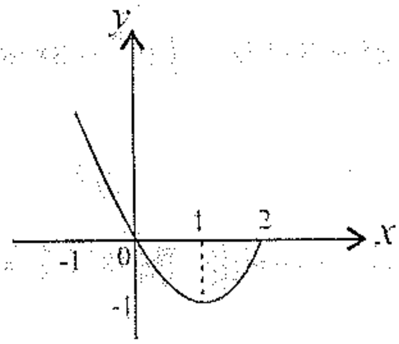
پنځم مثال: د $y = x^2 - 2x$ د منحني او $(X\acute{X})$ د محور تر منځ مساحت په داسې حال کې پیدا کړئ چه د $x = 2$ او $x = -1$ تر منځ واقع وي.

$\acute{y} = (x^2 - 2x)' = 2x - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1$

$y = x^2 - 2x = 1^2 - 2\cdot 1 = 1 - 2 = -1$

$A(-1,1)$ بحراني نقطه

د $(X\acute{X})$ د محور سره د ګراف د تقاطع نقطې پیدا کوو $y = 0$ فرضوو.




$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$
$x_1 = 0 \quad , \quad O(0,0)$
$X - 2 = 0 \Rightarrow X = 2 \quad , B(2,0)$

منحني د $[-1,2]$ په انټروال کې د مبداء څخه تیریږي یوه برخه یې د $[-1,0]$ په انټروال کې د $(X\acute{X})$ د محور په پورتنۍ برخه کې پرته ده او انټروال یې مثبت دي. بله برخه یې د $[0,2]$ په انټروال کې د $(X\acute{X})$ دمحور په لاندینۍ برخه کې واقع دی او انټروال یې منفي دي.

$$A = \int_{-1}^{0}(x^2 - 2x)dx - \int_{0}^{2}(x^2 - 2x) = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{0}^{2}$$
$$= \left\{0 - \left(-\frac{1}{3} - 1\right)\right\} - \left\{\left(\frac{8}{3} - 4\right) - 0\right\} = -\left(-\frac{1}{3} - 1\right) - \left(\frac{8}{3} - 4\right)$$
$$= -\left(\frac{-1-3}{3}\right) - \left(\frac{8-12}{3}\right)$$
$$= -\left(\frac{-4}{3}\right) - \left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

د هغه سطحو دمساحت محاسبه چه دمنحني خطو پواسطه محاصره وي:

*Accounting of area bounded by tow curves*

د $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ دوه منحنیګانو پواسطه د محصور شوي سطحې دمحاسبې لپاره که $f(x) > g(x)$ وي یعنی که $f(x)$ تابع د $g(x)$ دتابع د پاسه واقع وي د پاسنۍ تابع د انتیګرال څخه د لاندینۍ تابع انتیګرال منفي کوو د محصور شوي سطحې مساحت لاس ته راځي.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]d = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)$$

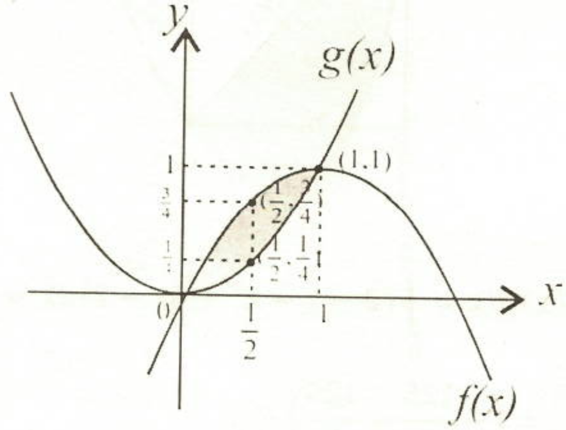
که د $G(x)$ تابع ګراف د $f(x)$ تابع د ګراف د پاسه واقع وي نود محصورشوی سطحی مساحت په لاندی ډول پیدا کیږي.

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

لومړی مثال: د $f(x) = 2x - x^2$ او $g(x) = x^2$ منحنیګانو د ګرافونو تر منځ د سطحی مساحت پیدا کړئ؟

حل:- اول د منحنیګانو د تقاطع ټکی پیدا کوو.

$$f(x) = 2x - x^2$$
$$g(x) = x^2$$
$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x - x^2 = x^2 \Rightarrow$$
$$2x - x^2 - x^2 = 0 \Rightarrow 2x - 2x^2 = 0$$
$$2x(1 - x) = 0$$
$$2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$1 - x = 0 \Rightarrow 1 = x \Rightarrow x = 1$$




د منحنیګانو د تقاطع نقطی عبارت دي $A(1,1)$ او $O(0,0)$ دي.

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 (2x - x^2 - x^2)dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)dx =$$

$$\left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \left(1 - \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$$

دويم مثال :د $f(x) = x^2 - 6x + 2$ او $g(x) = 2 - x$ تابعګانو د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت پيدا کړئ؟

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 2 \\ g(x) &= 2 - x \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

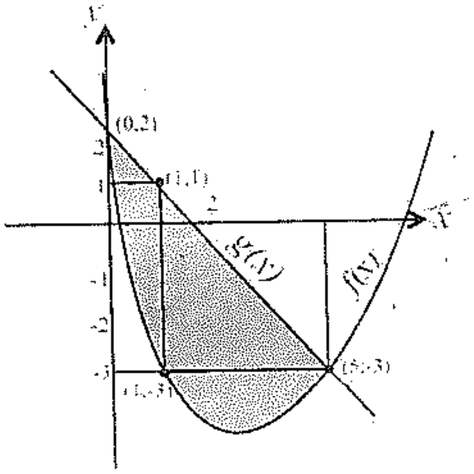
$$x^2 - 6x + 2 = 2 - x \Rightarrow x^2 - 6x + 2 - 2 + x = 0 \Rightarrow x^2 - 5x = 0$$

$$x(x-5) = 0 \quad , \quad x_1 = 0$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x_2 = 5$$

$$y_1 = 2, \quad O(0,2)$$

$$y_2 = -3 \quad A(5,-3)$$



$$A = \int_a^b \{g(x) - f(x)\}dx = \int_0^5 (2 - x - x^2 + 6x - 2)dx = \int_0^5 (-x^2 + 5x)dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 5 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^5 = \left(-\frac{125}{3} + \frac{125}{2}\right) - 0$$

$$= -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{-250 + 375}{6} = \frac{125}{6}$$

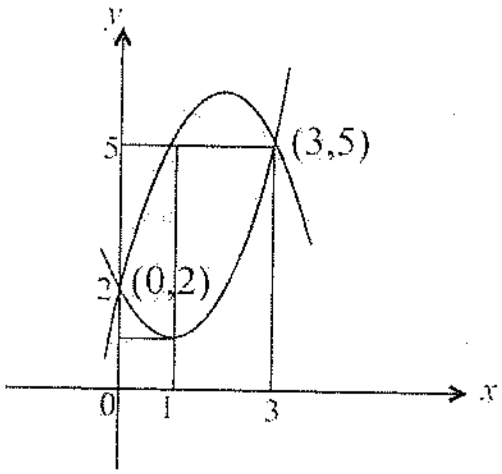
دريم مثال:- د $f(x) = -x^2 + 4x + 2$ او $g(x) = x^2 - 2x + 2$ تابعګانو د ګرافونو تر منځ د سطحې مساحت محاسبه کړئ؟

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x + 2 \\ g(x) &= x^2 - 2x + 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

$$-x^2+4x+2=x^2-2x+2$$
$$-x^2+4x+2-x^2+2x-2=0$$
$$-2x^2+6x=0\Rightarrow x(-2x+6)=0$$
$$\Rightarrow x_1=0 \quad , \quad -2x+6=0 \quad \Rightarrow -2x=-6\Rightarrow x=3$$

د منحنیگانود تقاطع نقطی عبارت دي $B(3,5)$ , $A\left(0.2\right)$

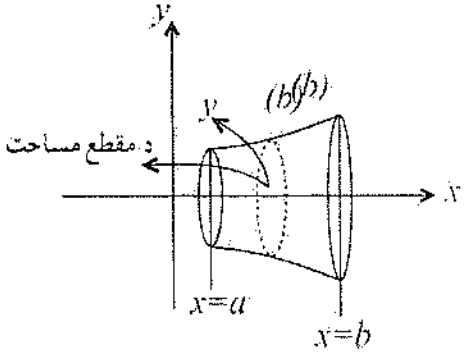
$$A=\int_a^b[f(x)-g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$
$$=\int_0^3(-x^2+4x+2)dx-\int_0^3(x^2-2x+2)dx$$
$$=\left[-\frac{x^3}{3}+4\cdot\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^3-\left[\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right]_0^3$$
$$=-\frac{27}{3}+18+6-0-\frac{27}{3}+9-6+0=9$$



## دکروي اجسامو دحجمو محاسبه:

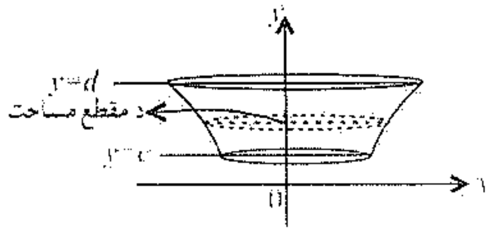
*Accounting volume of Spherical things*

که د $y = f(x)$ دتابع ګراف منحني وي او د $x = a$ او $x = b$ دخطو منځ کې محصوروي د منحني خط د دوران په نتیجه کې استوانه لاس ته راځي چه ارتفاع يي $\Delta x = b - a$ ده د استوانی مقاطع دايروي سطحی دي چه مساحتونه يي $A_{(x)} = \pi r^2$ دي او د $(Y\acute{Y})$ دمحور سره موازي دي شعاع يي $y = r$ ده د حجم فارمول يي د ريمان د مجموعی سره سم په لاندی ډول دی.




$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_{(x)}\Delta x = \int_a^b \pi r^2 dx = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi\{f(x)\}^2$$

که $x = f(y)$ تابع دمنحني ګراف د $y = c$ او $y = d$ کربښو ترمنځ محصور وي مساحت يي نظر د $(Y\acute{Y})$ محور ته د $A_{(Y)} = \pi r^2$ فارمول دی ارتفاع يي $\Delta y = d - c$ ده او شعاع يي $y = r$ ده حجم يي د لاندی فارمول پواسطه پيدا کيږي.

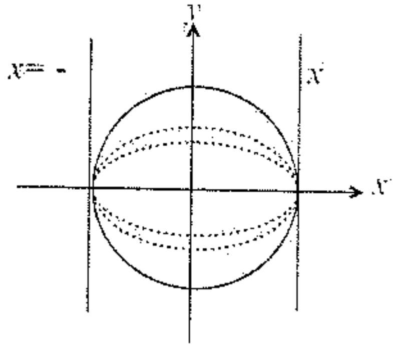



$$v = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A_{(y)}\Delta y = \int_a^b \pi r^2 dy = \int_a^b \pi y^2 dy = \int_a^b \pi\{f(y)\}^2 dy$$

## د انتیګرال پواسطه د کرې د حجم پیدا کول

که نیمه دایره د قطر په اطراف وڅرخیږي کره لاس ته راځي. د دایرې معادله دا $x^2 + y^2 = r^2$ ده د نیمې کرې حجم د دایرې د معادلې څخه پیدا کوو او دوه چنده کوو یې د کرې حجم لاس ته راځي.

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$y^2 = r^2 - x^2$$



$$V = \int_{-r}^{r} \pi y^2 dx = \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = 2\pi \left[ r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r$$

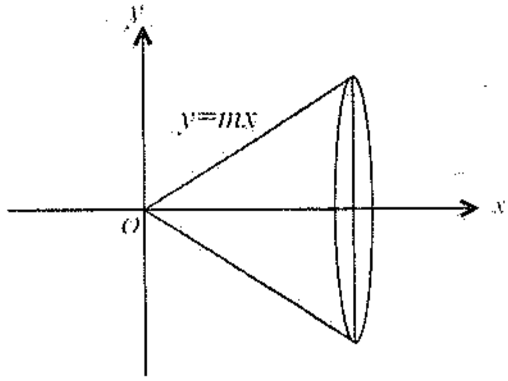
$$= 2\pi \left[ r^3 - \frac{r^3}{3} \right] - 0 = 2\pi \left( \frac{3r^3 - r^3}{3} \right) = 2\pi \left( \frac{2r^3}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

## د انتیګرال پواسطه د مخروط دحجم پیدا کول

که د مستقیم د یوانجام نقطه ثابته وي او مستقیم خط دهمدغه ثابتې نقطې په شاوخوا دوران وکړي مخروط لاس ته راځي نو

$$V = \int_{a}^{b} \pi y^2 dx$$




$$V = \int_a^b \pi m^2 x^2 dx = \pi m^2 \int_a^b x^2 dx$$

$y = mx$

$$= \pi m^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi m^2 \left(\frac{h^3}{3}\right) = \frac{\pi h}{3}(mh)^2$$

د مخروط حجم $= V = \dfrac{\pi h}{3}(mh)^2$

د پورته شکل څخه معلوميږي چه د مخروط قاعده دايروي ده او شعاع يي د $(Y\acute{Y})$ دمحور سره موازي ده يعنى $y//r$ اود مخروط ارتفاع $(h)$ ده چه د $(x)$ په محور باندى منطبق ده يعنى $(x = h)$نود $y = mx$په رابطه کی يي قيمت ليکو:

$$y = mx \Rightarrow r = mh$$

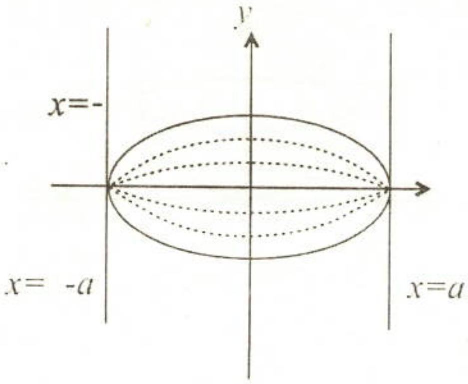
$$V = \frac{\pi h}{3} r^2 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

## د انتيګرال پواسطه دبيضوي دحجم پيدا کول:

هغه بيضوي چه مرکز يي د وضعيه کميتونو په ميداء واقع وي معادله يي عبارت ده له:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

دنيمی بيضوي حجم پيدا کوو او دوه چنده کوو يي د ټولی بيضوي حجم لاس ته راځي.




$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y^2}{a^2}=1-\frac{x^2}{b^2}\Rightarrow y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$V=\int_{-a}^{a}\pi y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}\left[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right]dx$$

$$=2\pi\int_{0}^{a}\left[b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right]dx=2\pi\left[b^2x-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$=2\pi\left[\left(b^2a-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{a^3}{3}\right)-0\right]=2\pi\left[b^2a-\frac{b^2a}{3}\right]$$

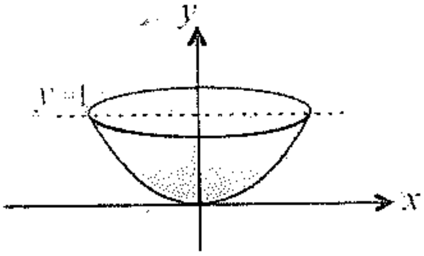
$$=2\pi\left[\frac{3ab^2-ab^2}{3}\right]=2\pi\left[\frac{2ab^2}{3}\right]$$

$$V=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

که چېرته د الپس محراقونه د $(Y\acute{Y})$ د محور پر مخ پراته وي حجم يي د لاندی فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$V=\frac{4}{3}\pi a^2b$$

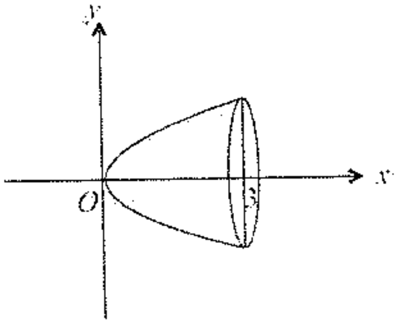
لمړی مثال: د جسم حجم چه د $y=x^2$ او $y=1$ کرښی تر منځ پروت وي او د $(Y\acute{Y})$ د محور په شاوخوا دوران کوي پيدا کړئ؟




$$V = \int_a^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^1 y dy$$

$$= \frac{1}{2}\pi y^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2}\pi = \frac{\pi}{2}$$

دويم مثال: د $y = \sqrt{2x}$ او $y = 3$ تر منځ د څرخول شوي جسم مساحت پيدا کړئ؟




$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \int_0^3 \pi\left(\sqrt{2x}\right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left[\sqrt{2x}\right]^2 dx = \pi \int_0^3 2x dx$$

$$V = 2\pi \int_0^3 x dx = 2\pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 9\pi$$

تبصره:

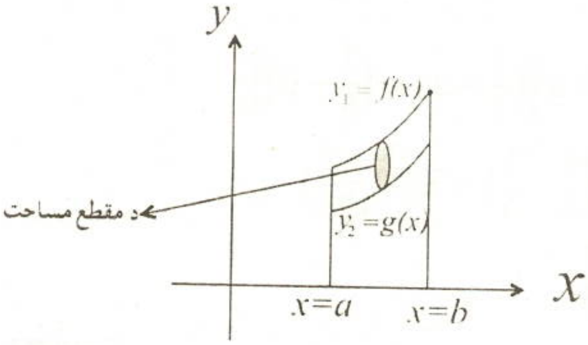
که $y_1 = f(x)$ او $y_2 = g(x)$ تابعګانې $[a, b]$ په انټروال کې متمادي وي دهغه جسم حجم چه د $f(x)$ او $g(x)$ منحنيګانو او د $x = a$ او $x = b$ کرښو تر منځ دوران کوي د لاندې فارمول پواسطه لاس ته راځي.

$\Delta x =$ د استوانې ارتفاع

$A(x) = \left(\text{استوانې د مقطع مساحت}\right) = \pi y_1 - \pi y_2 = \pi(y_1 - y_2)$

د هغه استوانی د جحم د فارمول پیدا کول چه د $f(x)$ دتابع گراف د $g(x)$ د تابع د گراف

شخه پورته پورته وي

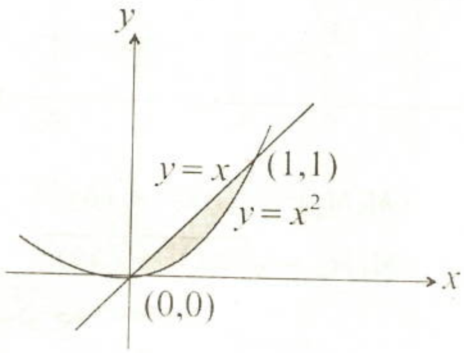



$$V = \int_a^b \pi({y_1}^2 - {y_2}^2)dx = \pi \int_a^b ({y_1}^2 - {y_2}^2)dx$$

د هغه استوانی دحجم دفارمول پیدا کول چه د $g(x)$ دتابع گراف د $f(x)$ دتابع د گراف شخه پورته واقع وي.

$$V = \int_a^b \pi({y_2}^2 - {y_1}^2)dx = \pi \int_a^b ({y_2}^2 - {y_1}^2)dx$$

مثال: د هغه جسم حجم پیدا کړئ چه د $y = x^2$ د منحني او $y = x$ د کربنی تر منځ د $(x)$ د محور په شاوخوا تر منځ د دوران څخه لاس ته راځي.




$$\left.\begin{array}{l} y_1 = f(x) = x^2 \\ y_2 = g(x) = x \end{array}\right\} \Rightarrow y_2 > y_1 \quad , \quad g(x) > f(x)$$

$$= \int_a^b \pi({y_2}^2 - {y_1}^2)dx = \int_0^1 \pi(x^2 - (-x^2)^2)dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx$$

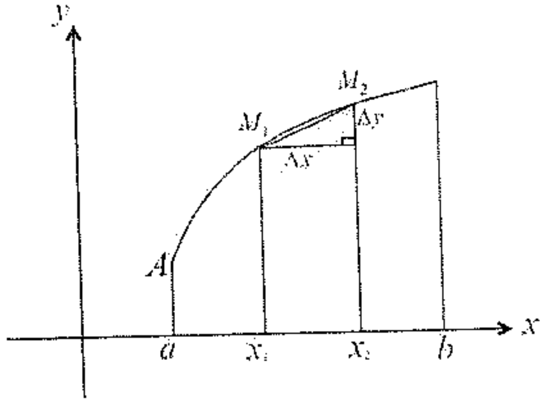
$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi\left[\left(\frac{1}{3} - 0\right) - \left(\frac{1}{5} - 0\right)\right]$$

$$= \pi\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right] = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \pi\left(\frac{5-3}{15}\right)$$

$$V = \pi\left(\frac{2}{15}\right) = \frac{2\pi}{15}$$

## د قوس د اوږدوالي محاسبه:

د قوس د $AM_1$ او $M_1M_2$ او $M_2B$ په دری ټوټو ویشو د $A, M_1, M_2$ او د $B$ د نقطو څخه په $(X\acute{X})$ عمودونه رسموو بیا $M_1$ د $M_2$ سره په یوه روښانه خط نښلوود $M_1$ څخه په $M_2X_2$ عمود رسمووا و دتقاطع نقطه په $H$ ښیو او $\Delta x = M_1H$ او $M_2H = \Delta y$ وضع کوود فیثاغورث دقضیې سره لیکو




$$(M_1M_2)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

د مشتق د فارمول سره سم لیکو چه:

$$\acute{f}(x) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \acute{g}(x) = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\Delta x = \acute{f}(x)\Delta t \qquad \Delta y = \acute{g}(x)\Delta t$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\acute{f}(t)\Delta t\right)^2 + (\acute{g}(t)\Delta t)^2}$$

$$M_1M_2 = \sqrt{\left[\acute{f}(t)\right]^2 + [\acute{g}(t)]^2} \cdot \Delta t$$

د ریمان د مجموعی څخه لیکو چه:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\acute{f}(t)\right)^2 + \left(\acute{f}(t)\right)^2} \cdot \Delta t$$

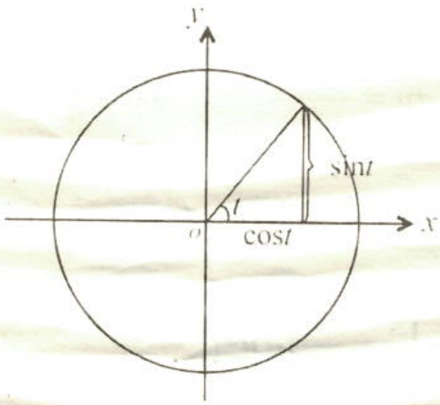
لومړی مثال: د $x^2 + y^2 = r^2$ دایری محیط محاسبه کړئ؟

د دایرې پارامتریک معادله په لاندی ډول ده.

$$x = r\cos t$$
$$y = r\sin t$$

که $0 \le t \le \pi$ نو د دایری نیمایي محیط پیدا کړئ؟

$$P = \int_0^{\pi} \sqrt{\acute{x}^2 + \acute{y}^2} \cdot dt$$




$$P = \int_0^{\pi} \sqrt{(-r\sin t)^2 + (r\cos t)^2} \cdot dt$$

$$P = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} \cdot dt = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} \cdot dt = \int_0^{\pi} \sqrt{r^2} \cdot dt$$

$P = [rt]_0^{\pi} = (r \cdot \pi - r \cdot 0) = \pi r$ د دايرې نيمايي محيط

$2\pi r =$ د دايرې مکمل محيط

تبصره :

1- د $y = f(x)$ منحني معادله په $a \leq x \leq b$ انټروال کې راکړشوی ده د $(x)$ دپارامتر په پام کې نيولو سره د منحني د قوس اوږدوالی داسې محاسبه کوو.

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx$$

مثال: د $y = f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ دمنحني دقوس اوږدوالی په $0 \leq x \leq 4$ انټروال کې پيدا کړئ؟

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} \qquad , \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} \cdot dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \cdot dx$$

$$u = 1 + \frac{9}{4}x \qquad , du = \frac{9}{4dx} \qquad , \quad dx = \frac{4}{9}du$$

$$= \int_0^4 \sqrt{u}\frac{4}{9}du \Rightarrow$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^4 u^{\frac{1}{2}}du = \frac{4}{9}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\left[\sqrt{u^3}\right]_0^4$$

$$= \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^3}\right]_0^4 = \frac{8}{27}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{9}{4} \cdot 4\right)^3} - 1\right]$$

$$L = \frac{8}{27}\left(\sqrt{10^3} - 1\right) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$$

2- د $x = f(y)$ منحني په $a \le y \le b$ انټروال کې راکړ شوی دی د $(y)$ دپارامتر په پام کې نیولو سره لیکو:

$$L = \int_a^b \sqrt{\acute{f}^2(y) + 1} \cdot dy$$

مثال: د $x = f(y) = y^{\frac{3}{2}}$ دمنحني د قوس اوږدوالي د $[1,4]$ په انټروال کې حساب کړئ؟

$$f(y) = y^{\frac{3}{2}} \quad , \quad \acute{f}(y) = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{f'^2(y) + 1} \cdot dy = \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 1} \cdot dy$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{\frac{9}{4} y + 1} \cdot dy = \int_1^4 \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du \qquad , \qquad u = \frac{9}{4} y + 1 \Rightarrow du = \frac{9}{4} dy$$

$$L = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{8}{27} \left[\sqrt{\left(\frac{9}{4} y + 1\right)^3}\right]_1^4 \qquad , \quad dy = \frac{4}{9} du$$

$$L = \frac{8}{27} \left[\sqrt{1000} - \sqrt{\left(\frac{13}{4}\right)^3}\right] = \frac{8}{27} \left[10\sqrt{10} - \sqrt{\frac{2197}{64}}\right]$$

## تفاضلي معادلې (*Differential Equations*):

هر هغه مساوات چه د یوی تابع مشتق او یویاځو مستقل اوغیرمستقل متحوله پکی موجود وي تفاضلي معادلې بلل کیږي. لکه

$$\frac{dy}{dx} = 3x$$

$$(4x + y)dx + xdy = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dv}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0$$

دغه تفاضلي معادلی ته معمولي تفاضلي معادلې هم وايي.

که په یوه تفاضلي معادله کی د یوه غېرمستقل متحول معمولي مشتق نظرمستقل متحول ته

ونیول شي دغسې تفاضلي معادلې ته معمولي تفاضلي معادله وايي.

$$\frac{dy}{dx} = 3xy \quad , \ (4x + y)dx + xdy = 0 \quad , \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 9x = 0$$

که د مستقل متحول مشتق نظر زیاتومستقلومتحولو ته ونیول شي دغسی ډیفرینشیال

معادلی ته جزئي یا یوطرفه ډیفرینشیال معادلې وايي. لکه:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 8u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 5\frac{\partial u}{\partial y}$$

د ډیفرینشیال ترتیب:

دیوی افادی دمشتق نیولو شمېرې ته د ډیفرینشیال معادلی ترتیب وايي.

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 3y = 4x$$

څرنګه چه دافادی څلورم مشتق نیول شوی دی نو د ډیفرینشیال ترتیب $(4)$ ده مشتق نیول د

$(d)$ دتوان څخه معلومیږي

د ډیفرینشیال معادلی درجه:

د مشتق دلوړ ترتیب توان ته د ډیفرینشیال معادلی درجه وايي.

که د ډیفرینشیال معادلی توان کسري وي. توان یې باید په صحیح عدد بدل شي.

$$(y''')^{\frac{2}{3}} = 4 + y'$$

$$\left\{(y''')^{\frac{2}{3}}\right\}^3 = (4 + y')^2 \Rightarrow (y''')^2 = (4 + y')^2$$

د پورتنی معادلی درجه (2) ده.

د $y'''' = \sqrt{5x+3y}$ یا $y''' = \sqrt{4+y'}$ معادلو درجه یوه ده.

کله کله یوه دیفرینشیال معادله درجه نلري. لکه:

$$6x^2\frac{d^3y}{dx^3}+(\sin x)\frac{d^2y}{dx^3}-\cos xy=0$$

دپورته معادلی درجه معلومه نه ده.ځکه چه د $(y)$ نامعلومه تابع د $\cos xy$ ترانسندنتل تابع په مناقشه کی ده نو نه شو کولای چه دپولینوم په شکل یي ولیکواونه یي مشتق پیدا کیږي.

## خطي دیفرینشیال معادلی Linear Differential equation

هغه دیفرینشیال معادله ده چه د $(y)$اول مشتق یي موجود وي او د $(y)$ او $(y')$ دضرب حاصل یي معدوم وي. لکه:

$$2\frac{d^2y}{dx}+5\frac{dy}{dx}+3y=0$$

$$\frac{dy}{dx}-x^2y=3x$$

هغه دیفرینشیال معادلی چه خطي نه وي د غیرخطي معادلو یا $(non-linear\ equation)$ په نوم یادیږي. لکه:

$$\frac{d^3y}{dx^3}+4y^2=0 \qquad (\text{د } y \text{ توان} \neq 1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+7x\cdot\frac{dy}{dx}+12y=0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\sin xy=0$$

$$5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+2\frac{d^2y}{dx^2}+3y=0$$

څرنګه چه د دغه معادلو پروګرام د لیسی د سویئي څخه لوړ دی د عالي ریاضیاتو په مستقل کتاب کې د دیفریشیال معادلو د تفصیل تصمیم شته د پاک الله جل جلاله څخه توفیق غواړو.

# احصائیه

# اتلسم فصل

## احصائیه

احصائیه په لغت کی سرشماری ته وایي.

او په اصطلاح احصائیه هغه علم دی چه د اجتماعي ژوند واقعات بررسي کوي.

قاعده یي داده چه نفوس ، حاصلات،او نور شیان محاسبه کوي او بیایي د عددو په شکل لیکي.

احصائیه ډېر قسمونه لري لکه اقتصادي احصائیه ،اخلاقي احصائیه ،سیاسي احصائیه ،د نفوسو احصائیه او داسې نور.

داتا $Data$ :

راټول شوو معلوماتو ته داتا وایي.

### د اطلاعاتو د راټولو طریقه:

اطلاعات معمولاًپه څلورو طریقو راټولیږي

1- د پوښتنو پواسطه

2-دلیکنو پواسطه

3- د لیدنې پواسطه

4- د تجربې پواسطه

1- د پوښتنو پواسطه د اطلاعاتو راغونډول:

که وغواړو چه د یوې کورنۍ د عایداتو اطلاعات لاس ته راوړو نو که عایدات لږ وي کولای شو چه د شفاهي پوښتنو پواسطه اطلاعات لاس ته راوړو.

2- د لیکنې پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

که د یوې کورنۍ عایدات زیات وي په ذهن کی یې حفظ مشکل وي نودلیک پواسطه یې دعایداتو اطلاعات راټولوو اوپه راجستر کی یې لیکو.چه د عایداتو اطلاعات وساتل شي اودمنځه لاړ نه شي.

3- د ليدنې پواسطه د اطلاعاتو لاس ته راوړل:

که وغواړو چه د يوه شاګرد نمرو په هکله اطلاعات لاس ته راوړو. نو ښه طريقه داده چه نتايج يا اطلاعنامه وکتل شي او دنوموړي د نمرو په باب ښه معلومات حاصل شي.

4- د تجربې پواسطه داطلاعاتو لاس ته راوړل:

مثلاً ديوه مرکب جسم داجزاؤ د ښه معلومات لپاره تجربه ضرور ده.

ټولنه او جامعه *Population and sample*:

هغه خلک چه د اړتيا وړ اطلاعات ترې لاس ته راځي.جامعه بلل کيږي .

پوښتنه: د جامعې د هر تن څخه د اطلاعاتو لاس ته راوړلو ته پوښتنه وايي.

نمونه: دجامعې هغه برخه ده چه د جامعې د اطلاعاتو د لاس ته راوړلو لپاره ترې پوښتنې کيږي او د جامعې خواص پکې موجود وي .لکه يو موټې وريجې د يو ګدام وريجو نمونه ده.

تصادفي نمونه:

دپه يوه صفت موصوف شيانوڅخه د يوې برخې ټاکل تصادفي نمونه ده.

دغه برخه بايد لاندې درې صفات ولري.

1- د نمونې دغړي په توګه د يوه شي يا يوه کس ټاکل بايد امکان ولري.

2- تر ټاکنې د مخه بايد د نمونې د غړو په هکله قضاوت ناممکن وي.

3- د نمونې ټول غړي بايد په نمونه کې برابره برخه ولري که نمونه تصادفي وي اوکه نه. مثلاً که د دولت په مامورينوکې د ښوونکو معاش دوه چنده شي نودا پېښه يوه تصادفي پېښه ده.

تصادفي متحول او ډولونه يې:

که په يوه ټولنه کې د يوې موضوع په باب راټول شوي معلومات يا اطلاعات د يوه غړي څخه بل غړي ته د انتقال وړ نه وي دغه موضوع يوه تصادفي اطلاع ده.

تصادفي متحول په دوه ډوله دی.

1- کیفي تصادفي متحول
2- مقداري تصادفي متحول

## 1- کیفي تصادفي متحول:

چه معلومات یې په توصیفي ډول بیانیږي عدد ته ضرورت نه لري.لکه د کارګرانو د سواد اندازه ، یا د یوه کلي دیندار خلک

## 2- مقداري تصادفي متحول :

هغه متحول دی چه د اطلاعاتو معلومات یې په شمېر سره کیږي. او په دوه ډوله دی.

الف: متصل مقداري تصادفي متحول ب: منفصل مقداري تصادفي متحول

الف- متصل مقداري تصادفي متحول :چه معلومات یې په عدد سره کیږي او د پرلپسې عددو تر منځ یې عدد پیدا نه شي.

ب- منفصل مقداري تصادفي متحول: چه د پرلپسې عددو تر منځ یې عدد موجود وي.

## دفریکونسي جدول $Table\ of\ frequncy$:

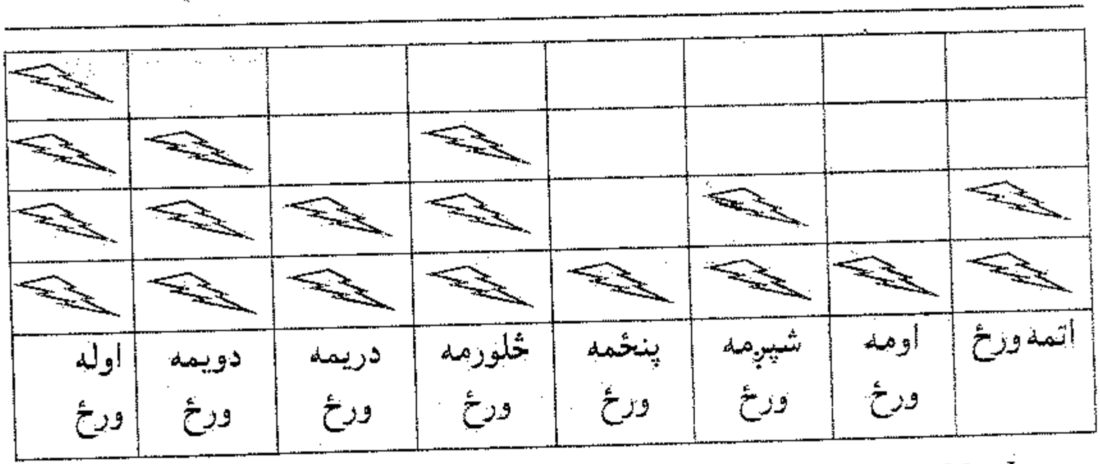
هغه جدول دی چه د داتاګانو معلومات پکې ترتیب شوی وي.که جدول په عمودي ډول ترتیب شوې وي دجدول د چپ طرف ستون داتاګانې یا معلومات ښیي او دښي طرف ستون یې د داتاګانو فریکونسي ښیي.لکه درنګونوجدول چه چپ طرف رنګونه یا داتا ښیي اوښې طرف فریکونسي ښیي.او که جدول په افقي ډول ترتیب شوی وي اول سطر د داتاګانو نمایندګي کوي اودویم سطر د هری داتا فریکونسي ښیي.

| دکورنۍ غړي | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | مجموعه |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| دکورنۍ شمېر | 4 | 7 | 9 | 8 | 6 | 2 | 3 | 1 | 40 |

## انځوریز ګراف یا تصویري ګراف

که په راکړشوو معلوماتو باندی د ښې پېژندګلوی لپاره شکلونه یا سمبولونه په یوه جدول کې استعمال شي دغه ګراف د انځوریز ګراف په نوم یادیږي.

دشکل څخه معلوم کړئ چه دکاندار په کومه ورځ زیاتی اری خرڅې کړې دي.




موډ $Mode$:

د راټول شوو معلوماتو زیاتي فریکونسي ته موډ وايي.

موډ د مالونو په خرڅولو کې، د رایو په اچولو کې، د امتحان په نمرو او داسې نورو شیانو کې استعمالیږي.

اوسط $Mean$:

د اعدادو د مجموعې او شمېر نسبت ته اوسط وايي.

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

مثال: یو دکاندار په اوله ورځ څلور کتونه په دویمه ورځ پنځه کتونه په دریمه ورځ شپږ کتونه خرڅ کړي دي وواياست چه په اوسط ډول يي د ورځې څو کتونه خرڅ کړيدي؟

$$x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{4 + 5 + 6}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

## د مجزا داتا ګانو د کثرت جدول:

هغه جدول دي چه په هره طبقه کی د داتاګانو شمېر راښيي.

مثلاً د یوه ټولګي د شاګردانو د رياضي دمضمون نمرې په یوه جدول کی لیکل شوی دي دا نمرې په ګروپو ويشو او په هرګروپ کی دشاملو نمرو شمېرلیکو په دغه شمېرکی زیات عدد ته د داتا کثرت وايي . اودی جدول ته د داتاګانو دکثرت جدول وايي که په جدول کی د داتاګانو دکثرت عدد کوچنی یا صفر وي. دجدول جوړول فايده نه کوي.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 42 | 25 | 30 | 35 | 48 | 67 | 59 | 51 | 58 | 78 |
| 62 | 77 | 48 | 56 | 75 | 78 | 72 | 71 | 56 | 43 |
| 54 | 53 | 57 | 63 | 72 | 70 | 42 | 55 | 47 | 20 |
| 59 | 40 | 62 | 12 | 75 | 26 | 76 | 72 | 63 | 56 |

جدول يي داسی جوړيږي.

| نمرې | شمېر |
|---|---|
| 0 - 9 | 0 |
| 10 – 19 | 1 |
| 20 - 29 | 3 |
| 30 -39 | 2 |
| 40 -49 | 7 |
| 50 -59 | 11 |
| 60 -69 | 5 |
| 70 -79 | 11 |

## د کثرت د جدول د اجزاؤ خاصیتونه:

په یوه طبقه کی کوچني عدد ته ټیټ سرحد اوغټ عدد ته لوړسرحد وايي.هغه داتاګانی چه په یوه طبقه کی راځي د طبقې د وسعت په نوم یادیږي.د یوی طبقی د وسعت دپیدا کولو دطبقی سرحدات یو دبل څخه منفي کوو.

| | |
|---|---|
| $50 - 0 = 50$ | د لمړی طبقې وسعت |
| $60 - 50 = 10$ | د دویمې طبقې وسعت |

ډله ایز (تجمعي) کثرت:

د ټولو طبقود کثرتو مجموعی ته تجموعي کثرت وایي.

مثلاً که د کال د هری میاشتي د رخصتی ورځو ته کثرت ووایو نود ټول کال د رخصتیو مجموعه ډله ایز کثرت یا تجموعي کثرت دی.

نسبي کثرت:

د دوه ډلو د مطلق کثرت او تجموعي کثرت نسبت ته نسبي کثرت وایي.

$$\text{نسبي کثرت} = \frac{\text{مطلق کثرت}}{\text{د ټولو داتاګانو کثرت}}$$

مثال: په یوه ازموینه کی د دوه ټولګیو نمری په لاندی جدول کی راوړل شوي دي دا ټولګي دنمرو په لحاظ پرتله کړئ؟

| مطلق کثرت | د الف ټولګی |
|---|---|
| 6 | 10-30 ضعیف |
| 10 | 30 -50 متوسط |
| 4 | 50 -70 ښه |

| مطلق کثرت | د ب ټولګی |
|---|---|
| 19 | 10 -30 ضعیف |
| 25 | 30 -50 متوسط |
| 16 | 50 -70 ښه |

حل: د دوارو ټولګیونسبي کثرت پیدا کوو

| د نسبي کثرت فیصدي | نسبي کثرت | مطلق کثرت | د الف ټولګی |
|---|---|---|---|
| 30% | $\frac{6}{20}$ | 6 | 10- 30 |
| 50% | $\frac{10}{20}$ | 10 | 30-50 |
| 20% | $\frac{4}{20}$ | 4 | 50- 70 |

| د نسبي کثرت فیصدي | نسبي کثرت | مطلق کثرت | د ب ټولګی |
|---|---|---|---|
| 31.6% | $\frac{19}{60}$ | 19 | 10-30 |
| 41.6% | $\frac{25}{60}$ | 25 | 30-50 |
| 26.6% | $\frac{16}{60}$ | 16 | 50=70 |

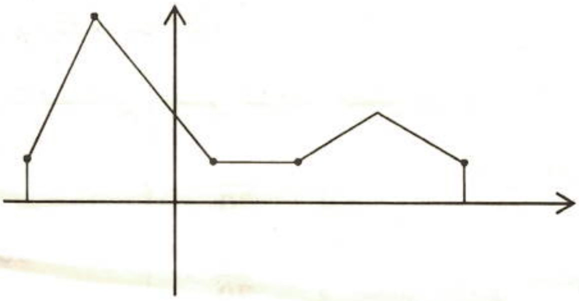
## میله اي ګراف

که د هری طبقی ګراف داسې رسم شي چه هر واحد يي يوه مربع وښودل شي اومربعګانی یو پر بل کېښودل شي دغه ګراف ته میله يي ګراف وايي.

مثلاً دخو کلونو دپنبی د حاصلاتو ګراف یا درنګونو ګراف چه هره مربع په یوه رنګ خوښوونکي دلالت وکړي.

## دمنکسری کرښی ګراف:

داتا ګانی د ټکو پواسطه د وضعیه کمیتونو پر مخ وښیو که دغه نقطی په یوه استقامت نه وی او وصل يي کړو منکسر خط لاس ته راځي چه دغه ګراف ته د منکسری کرښی ګراف وايي



## د گسسته یا غیر متصلو داتا گانو اوسط:

داتاگانی جمع کوو اود داتاگانو په شمېر يي ويشود داتاگانو اوسط په لاس راځي.د داتاگانو دتکرار په صورت کی د مکرری داتاگانی په فریکونسي کی ضربوو او جمع کوو یي د داتاگانو په شمېر يي ويشود داتاگانو اوسط په لاس راځي.که د داتاگانولمړی گروپ په $x_1$ او فریکونسي يي په $f_1$ وښيو او اوسط په $\acute{x}$ وښيو نود اوسط فارمول په لاندی ډول دی

$$\acute{x} = \frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n} = \frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{n}$$

مثال :د یوه شرکت دعایداتو اندازه په لاندی ډول ده.

| دنده | د افغانیو په حساب میاشتنی عاید |
|---|---|
| رئیس | 50000 |
| دوه مرستیالان | 40000 |
| منشي | 20000 |
| دری متخصصان | 30000 |
| پنځه مامورین | 25000 |
| دوه خانه سامانه | 10000 |

د شرکت مدیر وايي چه بایداوسط عایدباید 30000 وي ووایاست چه داادعا درسته ده

| $job$ | $f$ | $x$ | $f \times x$ |
|---|---|---|---|
| رئیس | 1 | 50000 | $1 \times 50000 = 50000$ |
| مرستیال | 2 | 40000 | $2 \times 40000 = 80000$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| منشي | 1 | 20000 | $1 \times 20000 = 20000$ |
| متخصصین | 3 | 30000 | $3 \times 30000 = 90000$ |
| مامورین | 5 | 25000 | $5 \times 25000 = 125000$ |
| خانه سامان | 2 | 10000 | $2 \times 10000 = 20000$ |

د کارکوونکو شمېر $n = 1 + 2 + 1 + 3 + 5 + 2 = 14$

$$\acute{x} = \frac{50000 + 80000 + 20000 + 90000 + 125000 + 20000}{14}$$

$$= \frac{385000}{14} = 27500$$

د مدیر ادعا سمه نه ده .

د جدول په مرسته د نښتو داتاګانو اوسط:

د هم جنسه شیانو داتاګانو ته نښتی داتاګانی وایي.که د دغه داتاګانوفریکونسیانی مختلفی وي.هغه داتاګانی چه فریکونسیانی یي نژدی وي په یوه ګروپ کی لیکواو د ګسسته داتاګانو د فارمول په څېر یي اوسط پیداکوو.

مثال: یوه بزګر الوګانو په بوریو کی واچول اوویي ویل چه د بوریو وزن په اوسط ډول اوه منه دي.د ښاروالی له خوا بوری بیا وتلل شولی چه نتیجه یي په لاندی جدول کی درج ده.

| د بوریو شمېر | د هری بوری وزن |
|---|---|
| 11 | 6 - 6.5 |
| 14 | 6.5 - 7 |
| 12 | 7 - 7.5 |
| 8 | 7.5 - 8 |

د هر ګروپ اوسط د بوریو په شمېر کی ضربوو.اوسط یي پیدا کوو.

| دبوریو شمېر | دبوریو وزن |
|---|---|
| 11 | 6.25 |

| | |
|---|---|
| 6.75 | 14 |
| 7.25 | 12 |
| 7.75 | 8 |

د بوريووزن $x = 6.25 \times 11 + 6.75 \times 14 + 7.25 \times 12 + 7.75 \times 8$

$x = 68.75 + 94.5 + 87 + 62 = 312.25$

د بوريو شمېر $n = 11 + 14 + 12 + 8 = 45$

په اوسط ډول د بوريو وزن $\acute{x} = \frac{312.25}{45} = 6.93\overline{8}$

## د داتاګانو د ګېډې کولو طريقه

که د داتاګانو د اعضاؤ شمېر سره نژدې ؤ کولای شو چه د داتاګانو څخه ګېډې جوړه کړو.

لکه:

115 140 118 120 128 143 117 127

115 − 120

120 − 128

128 − 143

وسعت:

د لوئي داتا او کوچنۍ داتا تر منځ فاصلې ته وسعت وايي.

## د ګېډې اوږدوالی:

که د داتاګانو وسعت د ګېډيو په شمېر ووېشل شي د ګېډې طول يااوږدوالی لاس ته راځي.

## ميله ئي ګراف:

که مربعګانې يا مستطيلونه سر په سر کېښودل شي .ميله ئي ګراف لاس ته راځي.

## د متصلو داتاګانو دسته بندي:

هم جنسه داتاګانو ته متصلې داتاګانې وايي . د دسته بندۍ لپاره يي هغه داتاګانې چه د واحداتو اندازه يي نژدې وي په يوه ګېډې کې ليکو.

د (15) ذده کوونکواوږدوالی په لاندې ډول ليکل شوی دي

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 153 | 148 | 151 | 138 | 136 |
| 142 | 131 | 141 | 141 | 139 |
| 152 | 159 | 139 | .132 | 146 |

پورته داتاګانو څخه ګیډۍ جوړې کړئ

| د ذده کوونکو دونی اوږدوالی | دذده کوونکو شمېر |
|---|---|
| 130 – 140 | 6 |
| 140 – 150 | 5 |
| 150 – 160 | 4 |

وزني اوسط یا منځنی قیمت:

وزني اوسط یا منځنی قیمت په مجموعه یي ویشو.

هره داتا په مربوطه ضریب کی ضربوو او د داتاګانو په مجموعه یي ویشو.

$\acute{x} = \frac{w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n}{w_1+w_2+\cdots+w_n}$ وزني اوسط

مثال : د ځینو پوهنتونونو نمرې د تورو په اساس ورکول کېږي .لکه A, B. C, D, F چه $A = 4$ او $B = 3$ او $C = 2$ او $D = 1$ او $F = 0$ ارزښت لري یو محصل لاندې لمبرې اخیستې دي.

| مضمون | نمری | د کریدیتونو شمېر |
|---|---|---|
| ریاضیات | $B$ | 3 |
| فزیک | $A$ | 3 |
| کیمیا | $C$ | 2 |
| بیولوژي | $D$ | 3 |
| ژبه | $F$ | 1 |

د محصل د نمرو اوسط څو دی؟

حل:

| مضمون | حرفي نمری | د کریدیتوشمېر $= x$ | عددي لمبری $= w$ | $w \cdot x$ |
|---|---|---|---|---|
| ریاضیات | $B$ | 3 | 3 | $3 \times 3 = 9$ |
| فزیک | $A$ | 3 | 4 | $4 \times 3 = 12$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| كيميا | $C$ | 2 | 2 | $2 \times 2 = 4$ |
| بيولوژي | $D$ | 3 | 3 | $3 \times 3 = 9$ |
| ژبه | $F$ | 1 | 4 | $4 \times 1 = 4$ |

د کريډيټونو شمېر $= n = 12$

$$\text{د نمرو اوسط} = \acute{x} = \frac{9+12+4+9+4}{12} = \frac{38}{12} = 3.16$$

## مستطيلي ګراف

په مستطيلي ګراف کې د مستطيل قاعده د ډاټاګانو اتصال يا پيوستون راښيي. مساحت د ګډې کثرت راښيي. که د ګډيو اوږدوالي مساوي وي نو د مساحتو په عوض کثرت ليکو په دې حالت کې اوږدوالی د کثرت عمودي محور دی.

مثال: په يوه ټولګي کې د ذده کوونکو وزن په لاندې ډول دی.

| د ذده کوونکو وزن په کېلوګرام | $40-45$ | $45-50$ | $50-60$ | $60-70$ | $70-90$ |
|---|---|---|---|---|---|
| دذده کوونکو شمېر | 4 | 6 | 12 | 8 | 8 |

وزن د $(X\acute{X})$ په محور ښيو او ځرنګه چه $5kg$ د ټولو منځ کې مشترک دي نو د $(X\acute{X})$ په محورټول وزنونه په يوه واحد اندازه کوو $(40-45)$ په يوواحدښيو. د مستطيلو د ارتفاعګانود پيداکولو لپاره کثرت په اوږدوالي وېشو.

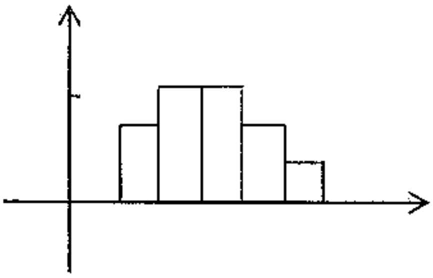
$$40-50 \rightarrow \frac{4}{1} = 4 \rightarrow \frac{4}{5} = 0.8$$

$$45-50 \rightarrow \frac{6}{1} = 6 \rightarrow \frac{6}{5} = 1.2$$

$$50-60 \rightarrow \frac{12}{2} = 6 \rightarrow \frac{12}{10} = 1.2$$

$$60 \rightarrow 70 \Rightarrow \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \frac{4}{10} = 0.4$$

$$70 \rightarrow 80 \Rightarrow \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow \frac{2}{20} = 0.1$$



## دایروي ګراف:

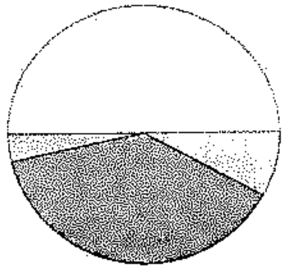
د دایرې په مرسته د ناڅاپي متحول د ډاټاګانو ښودلو ته دایروي ګراف وایي.

د کثرت د درجې د لاس ته راوړلو لپاره د ډاټاګانو کثرت د ټولو ډاټاګانو په شمېر ویشو او په ($360^\circ$) کې یې ضربوو د هرې ګېډۍ مرکزي زاویه لاس ته راځي.

$$\text{د کثرت د درجې له جنسه} = \frac{\text{د ډاټاګانو کثرت}}{\text{د ټولو ډاټاګانو شمېر}} \times 360^\circ$$

مثال:-د یوې مؤسسې د کارکوونکو شمېر (200) کسه دي وظیفې یې د تحصیل د درجې له جنسه وېشلې دي.

| د تحصیل درجه | کثرت | مرکزي زاویه د درجې له جنسه |
|---|---|---|
| ډاکټر | 5 | $\frac{5}{200} \times 360^\circ = 9$ |
| ماسټر | 10 | $\frac{10}{200} \times 360^\circ = 18$ |
| لیسانس | 100 | $\frac{100}{200} \times 360^\circ = 180$ |
| څوارلسم پاس | 45 | $\frac{45}{200} \times 360^\circ = 81$ |
| دولسم پاس | 40 | $\frac{40}{200} \times 360^\circ = 72$ |



### میانه $Median$:

د داتاگانو د تحول وسطي عدد ته میانه وايي.

لکه: (4 1 5 3 2) د اعدادو د سیټ په څېر یې ترتیبوو.

(5 4 3 2 1) وسطي عدد یې (3) دی.که د داتاگانو شمېر جفت وي.د منځنیو دوه داتاگانواوسط د داتاگانو میانه ده.لکه (10 4 3 9 6 2) چه میانه یې داسې پیدا کیږي.(10 9 $\boxed{4 \quad 6}$ 3 2) چه $\frac{4+6}{2} = 5$ یعنی میانه یې (5) ده.

### د تحول ساحه $Evolution\ of\ field$:

که د متحول د اوږدوالي تغیر په یوه ساحه کی ممکن وي دغه ساحی ته د تحول ساحه وايي.

په ټولنه کی د ساحی وسعت د ټولنې پراګنده ګي ښیي.په هره اندازه چه دا توپیر کم وي پراګنده ګي کمه ده او دټولنی د وګړو تر منځ نژدېکت زيات دی. که د تحول ساحه صفر وه نودټولنی د ځېړنی ځانګړتیاوی برابری دي اوټولنه متجانسه ده.

مثال : په څلور میاشتنی ازموینه کی د دوه ذده کوونکو لمبری په لاندی ډول دي.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 39 | 38 | 37 | 36 | 35 | 33 | 32 | 25 | 21 | 20 |
| 39 | 35 | 34 | 34 | 35 | 35 | 35 | 34 | 33 | 20 |

د دواړو سیټونو د تحول ساحه پیدا کړئ او ووایاست چه په کومه ګډه کی پراګنده ګي زياته ده ؟

حل:- د لوړو سرحدو څخه ټیټ سرحدونه منفي کوو.

$$39 - 20 = 19$$

د دواړو د تحول ساحه مساوي ده مګر په اول ګروپ کی پراګنده ګي زياته ده.

## د انحراف اوسط *Average deviation*

د داتاګانو او اوسط د تفاضل اوسط ته د انحراف اوسط وايي

د داتاګانو د اوسط انحرافونو مجموعه صفر وي نو له همدی امله د اوسط انحرافونو د جمع کولو په وخت کی د هغوی مطلقه قیمتونه جمع کوي.او په لاندی ډول جمع کیږي.

$$د\ انحراف\ اوسط = \frac{|x_1-\acute{x}|+|x_2-\acute{x}|+\cdots+|x_n-\acute{x}|}{n}$$

مثال : د (40) تنو شاګردانو لمبری په لاندی جدول کی راکړشوي دي.

| نمری | کثرت |
|---|---|
| $0-10$ | 2 |
| $10-20$ | 7 |
| $20-30$ | 4 |
| $30-40$ | 5 |
| $40-50$ | 10 |
| $50-60$ | 12 |

د انحراف اوسط يي پيدا کړئ؟

$$\acute{x} = \frac{10+105+100+175+450+660}{40} = \frac{1500}{40} = 37.5$$

| $f$ = کثرت | د داتاګانو اوسط | $f \cdot x$ | $x-\acute{x}$ | $f(x-\acute{x})$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 5 | 10 | $5-37.5=-32.5$ | $2\times(-32.5)=-65$ |
| 7 | 15 | 105 | $15-37.5=-22.5$ | $7(-22.5)=-157.5$ |
| 4 | 25 | 100 | $25-37.5=-12.5$ | $4\times(-12.5)=-50$ |
| 5 | 35 | 175 | $35-37.5=-2.5$ | $5\times(-2.5)=-12.5$ |
| 10 | 45 | 450 | $45-37.5=7.5$ | $10\times7.5=75$ |
| 12 | 55 | 660 | $55-37.5=17.5$ | $12\times17.5=210$ |
| $\frac{1}{n=40}$ | | 1500 | | |

$$f(x-\acute{x}) = -65-157.5-50-12.5+75+210=0$$

ليدل کيږي چه د جمع حاصل يي صفر دې نود انحرافونو د اوسطونو مطلقه قيمت په نظر کی نيسو.

$$\text{د انحرافونو اوسط} = \frac{|-65| + |-157.5| + |-50| + |-12.5| + |75| + |210|}{40}$$

$$\text{د انحرافونو اوسط} = \frac{65 + 157.5 + 50 + 12.5 + 75 + 210}{40} = \frac{570}{40} = 14.25$$

## د څوضلعي فريکونسي ګراف

د څوضلعي فريکونسي ګراف د متصلو داتاګانو د پاره استعماليږي.

مثلاً که څو کلاسونه ولرو چه سرحدات يي معلوم وي او وغواړو چه ګراف يي رسم کړو د هرکلاس مرکز(منځنی نقطه) په افقي محور او فريکونسي يي په عمودي محور ښيو

د کلاس مرکزاوفريکونسي د وضعيه کميتونو په مستوي کی يوه نقطه تعينوي دغه نقطی وصلوو منکسر خط لاس ته راځي که د کلاسونو په اول کی $(x_1 - c, 0)$نقطه او کلاسونو په اخر کی $(x_n + c, 0)$ نقطه اضافه کړو نو دڅو ضلعي فريکونسي ګراف لاس ته راځي.

مثال: په لاندی جدول کی د داتا څو ضلعي او مستطيلي ګراف رسم کړئ.

| $cl$ =د کلاسونو حدود | $11-16$ | $16-21$ | $21-26$ | $26-31$ | $31-36$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_i$ = مطلقه فريکونسي | 3 | 5 | 8 | 7 | 2 |
| $x_i$ =د کلاسونو مرکز | 13.5 | 18.5 | 23.5 | 28.5 | 33.5 |

$c = 5$ دی نو د دو ه اختياري نقطو د پيدا کولو لپاره په لاندی ډول اجرائت کوو.

$(x_1 - 5,0) = (13.5 - 5,0) = (8.5,0)$

$(x_2 + 5,0) = (33.5 + 5,0) = (38.5,0)$

داتا په صعودي ډول ترتیبوو. او د یو څخه تر$(n)$ پورې کود ورکوو د $(p = 1,2,3)$ موقعیت دلاندی رابطی پواسطه پیدا کیږي.

$$C_{QP} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

مثال: په (140 100 120 80 85 90) دیتا کی داولی ربعی او دریمی ربعومقادیر پیدا کړئ؟

حل:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| د دیتا شمېره | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | 80 | 85 | 90 | 100 | 120 | 140 |

د لمړۍ اودریمی ربعو ځایونه عبارت دي.

$$c_{q_1} = \frac{1 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 2$$
$$c_{q_3} = \frac{3 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 5$$
$$q_1 = 85 \qquad \& \qquad q_2 = 120$$

## صندوقچه يي ګراف:

صندوقچه يي ګراف هغه ګراف دي چه د نورو ګرافونو په نسبت د ډېټا تیت والې زیات روښانه؛ کوي د ډېټا ګراف د لاندی اندازو په بنیاد روښانه کوي.

الف- تر ټولو کوچنۍ ډېټا

ب- لمړۍ څلورمه

ج- میانه

د - دریمه څلورمه

ج- لویه ډېټا

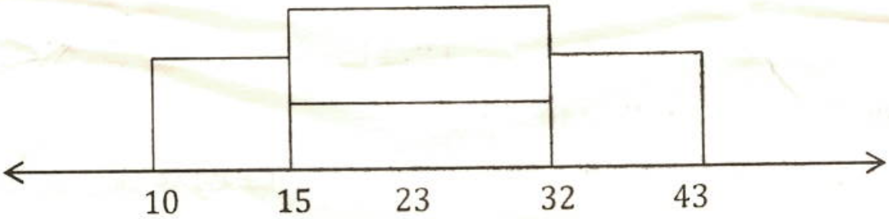
مثال : په یوه ښارکی په (15) ورځو کی د ترافیکي پېښو شمېر په لاندی ډول دې صندوقچه يي ګراف ئي رسم کړئ.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 10 | 15 | 23 | 14 | 27 | 16 |
| 34 | 41 | 43 | 32 | 18 | 25 | 31 |

پورتنی داتا په ترتيب ليکو .

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 12 | 14 | 15 | 16 | 18 | 23 |
| 25 | 27 | 31 | 32 | 34 | 41 | 43 |

تر ټولو کوچنی داتا $(q_1 = 10)$ ده اوتر ټولولويه داتا$(q_n = 43)$ ده ميانه $(med = 23)$ده لمړی ربعه $q_1 = 15$

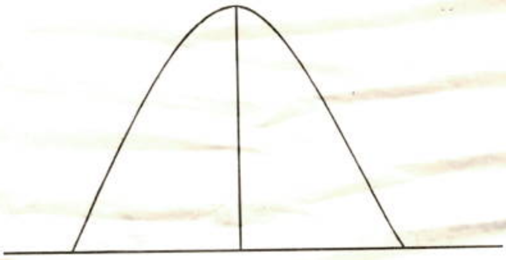



پورتنی ګراف صندوقچه يي ګراف دی چه 50% داتا د صندوق په داخل کی ده دلمړی او ځلورمی ربعو په منځ کی ده 25% د 10 او15 تر منځ ده او 75% د 32 او 43 ترمنځ ده.

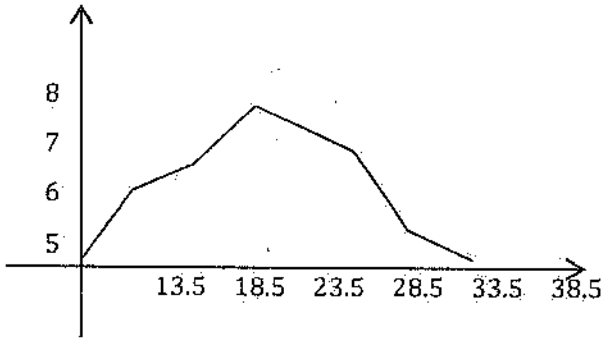
## د نارمل منحني د مرکزي ټاکونکو پرتله کول:

نارمل منحني يو متناظر منحني دې چه ديوه زنګ په ډول شکل لري او زياتی طبعي پيښی د همدغه منحني په واسطه ښودل کيږي.اوسط ، ميانه او موډ يي په مرکزي برخه کی قرار لري نوځکه ورته د نارمل منحني ټاکونکي وايي.

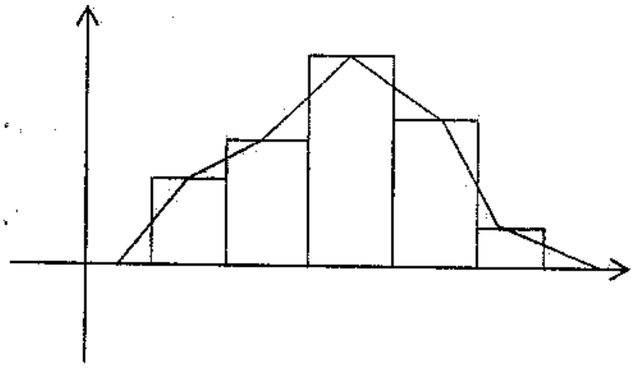
که منحني متناظر وي نواوسط په ميانه منطبق دی اوځرنګه چه يوه اعظمي نقطه لري نو ځکه يي موډ هم د اوسط اوميانې سره مساوي دی.



$\acute{X} = mod = med$




مستطیلي ګراف اود فریکونسي څو ضلعي ګراف:



د فریکونسي څو ضلعي دګراف راسونه د فریکونسي دارونده جدول د مستطیلو د پورتنی ضلعی په نیمایي منطبق دي دفریکونسي څو ضلعي مساحت دمستطیلو د مساحت سره مساوي دي.

## د ساقی او پاڼی ګراف $Grph\ of\ stem\ and\ wrench$:

په دوه رقمي عدد کی د لسیز رقم ساقه او د یویز رقم پاڼه ده.

مثال : د سانتي متر په حساب د شل نوو پیدا شوو ماشومانود تنی اوږدوال په لاندی ډول انتخاب شوی دي.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45 | 46 | 47 | 43 | 49 | 40 | 42 | 46 | 45 | 43 |
| 43 | 43 | 48 | 49 | 47 | 49 | 48 | 49 | 47 | 45 |

پورتنی داتاګانی په صعودي ډول ترتیب کړئ او څرنګه چه د(4) رقم یعني دلسیز رقم یکی مشترک دی نو داتاګانی په لاندي ډول ترتیبوو.

$4 + (0,2,3,3,3,3,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9,9) \cdots\cdots\cdots 1$

د صفر څخه تر (9) پوری د رقمو تکرار دپاڼو شمېر ښيي.پورتني رقمونه په لاندی ډول هم ليکلای شو.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | 3 | 3 | 3 |
| 5 | 5 | 5 | |
| 6 | 6 | | |
| 8 | 8 | | 9 |
| 9 | 9 | 9 | |

که د (1) شماری د جدول څخه ګراف جوړ کړود ساقی او پاڼی ګراف لاس ته راځي چه (4) به يي قاعده او دقوس په منځ کی رقمونه به يي پاڼی وي.که پورتني جدول ته د $90^\circ$ په اندازه دوران ورکړو. ميله يي ګراف لاس ته راځي.

3 9
3 5 7 9
3 5 6 7 8 9
0 2 3 5 6 7 8 9

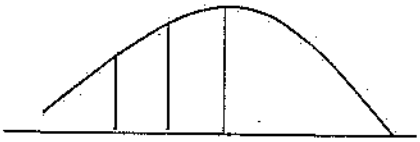
ربعی $Quarters$:

د يوه شي څلورمی برخی ته ربع وايي.

يعنی که يو شی په څلورو برابرو برخو ووېشو برخی يي د اولی ربعي،دويمی ربعي، دريمی ربعی او څلورمی ربعی په نوم يادېږي.

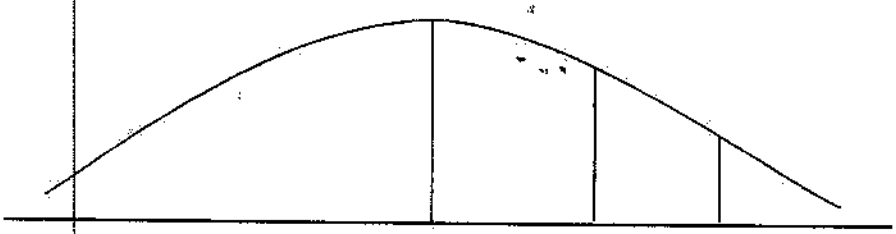
اوله ربعه د شي %25 دويمه ربعه دشي %50 اودريمه ربعه دشي %75 وي.که داتا په صعودي ډول ترتيب شي د داتا ميانه د($Q_2$)سره مساوي ده د داتا داولی نيمايي ميانه ($Q_1$)ده او د دويمی نيمايي ميانه ($Q_3$) ده.

که اوسط اومیانه مساوي وي نو تر اوسط او میانی د مخه داتاګانی اوداوسط او میانی د وروسته دېټاګانو سره مساوي ږي.اوکه اوسط د میانی کیڼی خواته پروت وي نو دهغه داتاګانو شمېر چه داوسط ښۍ خواته پرتی دي زیات دی تر هغه دېټاګانو دشمېر څخه چه د اوسط چپی خواته پرتی دي.



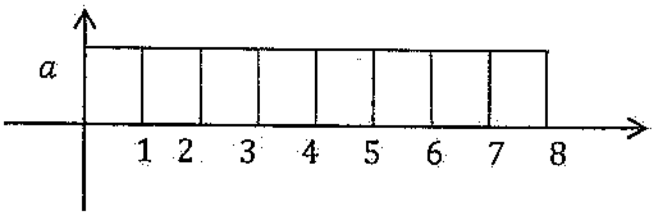
$\acute{X} = mod = med$

او که اوسط دمیانی ښۍ خواته پروت وي نود هغه داتاګانوشمېر چه د اوسط چپی خواته پرتی دي زیات دېد هغه داتاګانوتر شمېر چه د اوسط ښۍ خواته پرتی دي



$mod > med > \acute{x}$

مثال: په لاندی ګراف کی اوسط او میانه پیدا کړئ؟




$$med = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$\acute{x} = \frac{a \cdot 1 + a \cdot 2 + a \cdot 3 + a \cdot 4 + a \cdot 5 + a \cdot 6 + a \cdot 7 + a \cdot 8}{a + a + a + a + a + a + a + a} = \frac{36a}{8a}$$

$$\acute{x} = \frac{9}{2} = 4.5$$

## ربعي انحراف

ربعي انحراف يو له هغه ټاکونکو څخه دی چه د ډېټا تیت والی ښکاره کوي.

مثلاً 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په منځ کی پرته ده په هره اندازه چه دا فاصله لږ وي په همغه اندازه ډېټا نژدی وي یعنی تیتوالی یی کم وي.

کله کله دڅلورمو انحراف په $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ شکل ښيي چه دی ته د څلورمی د نیمایي لمن وايي.

مثال: د لاندی عددونو د څلورمو انحراف پیدا کړئ.

20 22 22 23 24 25 29 30 31 35 36

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

$$C_{Q_n} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33 + 2}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$$

$$Q_3 = 30.75$$

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11 + 2}{4} = \frac{13}{4} = 3.25$$

$$Q_1 = 22.25$$

$$Q = Q_3 - Q_1 = 30.75 - 22.25 = 8.5$$

## واريانس (*Variance*):

واريانس په لغت کی اختلاف ته وايي.

اوپه اصطلاح کی که څو داتاګانی ولرو دهری داتا اوسط پیدا کړود داتاګانواو دهغوی د اوسطونودتفاضل د مربعګانود مجموعی اوسط ته واريانس وايي.

د انحرافونو د مربعګانو مجموعه عبارت ده.

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \acute{x})^2 = (x_1 - \acute{x})^2 + (x_2 - \acute{x})^2 + \cdots + (x_n - \acute{x})^2$$

پورتنی مجموعه په ($n$) ویشواو په ($s^2$) یي ښیو.واریانس لاس ته راځي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \acute{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \acute{x})^2 + (x_2 - \acute{x})^2 + \cdots + (x_n - \acute{x})^2}{n}$$

د واریانس د پیدا کولو لپاره د لاندې فارمول څخه هم کټه اخلي.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

ثبوت:

$$\acute{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_1 - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} 2x_i\bar{x}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \acute{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\bar{x} \cdot \bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}.^2$$

مثال: دلاندې دېټا وریانس د دواړو فارمولو په مرسته پیدا کړئ

1 5 6 7 9

الف: د $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{n}$ دفارمول پواسطه:

$$x' = \frac{1+5+6+7+9}{5} = \frac{28}{5} = 5.6$$

$$s^2 = \frac{(1-5.6)^2 + (5-5.6)^2 + (6-5.6)^2 + (7-5.6)^2 + (9-5.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{(-4.6)^2 + (-0.6)^2 + (1.6)^2 + (2.6)^2 + (4.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{21.16 + 0.36 + 2.56 + 6.76 + 21.16}{5} = \frac{52}{5} = 10.4$$

ب: د $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2}{5} - \bar{x}^2$ فارمول څخه استفاده کول:

$$s^2=\frac{{x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+{x_4}^2+{x_5}^2}{5}-\acute{x}^2$$

$$s^2=\frac{1+25+36+49+91}{5}-(5.6)^2=\frac{192}{5}-31.36=38.4-31.36$$

$$s^2=7.04$$

یادونه:

که دځو کلاسو دېټاګانې $x_1, x_2, \ x_3, \cdots x_n$ وي او فریکونسي ګانې يې په لاندې ډول وي. $f_1, f_2, f_3, \cdots f_n$ واریانس يې د لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_1(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\bar{x})^2}{N}$$

$N=\sum_{i=1}^{n} f_i$ دی

د متحول دمربع واحد د واریانس واحد دی.

## معیاري انحراف (مطلق تیتوالی):

د واریانس مربع جذر ته معیاري انحراف وایي په $(s)$ سره يې ښیي اود لاندې فارمول پواسطه پیدا کیږي.

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2}{n}-\acute{x}^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}$$

واحد يې د متحول واحد دی.

ثبوت:

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\acute{x})^2$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}({x_i}^2-2\acute{x}x_i+\acute{x}^2)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2-2x\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\acute{x}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2-2n\acute{x}^2+n\acute{x}^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2-n\acute{x}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2\right\} = \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}\right\}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2 \Rightarrow s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2}$$

مثال:- د (5) ناروغانو د بدن دحرارت درجه په لاندی ډول راکړشوی ده.

38 39 39 40 41

د حرارت د درجې معیاري انحراف یي پیدا کړئ.

حل:

$$\acute{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{38+39+39+40+41}{5} = \frac{197}{5} = 39.4$$

$$s^2 = \frac{(38-39.4)^2+(39-39.4)^2+(39-39.4)^2+(40-39.4)^2+(41-39.4)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{(-1.4)^2+(-0.4)^2+(-0.4)^2+(0.6)^2+(1.6)^2}{5}$$

$$s^2 = \frac{1.96+0.16+0.16+0.36+2.56}{5} = \frac{5.2}{5} = 1.04$$

$$s^2 = 1.04 \quad \Rightarrow s = \sqrt{1.04} = 1.0198$$

$$s = 1.0198$$

پاملرنه:

د فریکونسیو د جدول څخه معیاري انحراف په تقریبي ډول په لاندی ډول هم لاس ته راځي.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\acute{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i^{\,2}}{\sum_{i=1}^{n} f_i} - \acute{x}^2}$$

چه $\acute{x}$ د دیټا اوسط ، $x_i$ د کلاس مرکز او $f_i$ د کلاس فریکونسي ده.

دبدلون ضریب یانسبي پراګنده ګي:

د بدلون یاتغیر ضریب د معیاري انحراف او مطلق اوسط نسبت دی مطلق اوسط واحد نلري.

$$\text{د بدلونونو یا تغیراتو ضریب} = \frac{\text{معیاري انحراف}}{\text{اوسط}}$$

$$C \cdot V = \frac{S}{\acute{x}}$$

که د تغیراتو ضریب په 100 کی ضرب کړودتحول ضریب لاس ته راځي.

$$C \cdot V = 100 \cdot \frac{S}{\acute{x}}$$

د بدلون ضریب دمثبتو دېټاګانو لپاره دی.که دېټاګانی مساوي وي د بدلون ضریب صفر دی.که ټولی دېټاګانی په یوه مثبت عدد کی ضرب شي د بدلون ضریب تغیر نه کوي.

که دهری دېټاسره یو مثبت عدد ورزیات شي د بدلون ضریب کوچنی کیږي.

مثال: د $(1.3.5)$ دېټا د بدلون ضریب محاسبه کړئ؟

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+3+5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2}{3} = \frac{(-2)^2 + 0^2 + 2^2}{3}$$

$$s^2 = \frac{4+4}{3} = \frac{8}{3} = 2.67$$

$$\sqrt{s^2} = \sqrt{2.67} \Rightarrow s = 1.6$$

$$c \cdot v = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1.634013464}{3} = 0.545$$

دویم مثال: د تلویزون د تصویري لامپونو تولیدوونکې د$(A)$ او $(B)$ دوه ډوله لامپونه تولیدوي د $(A)$ متوسط عمر $(1495)$ ساعته او د $(B)$ متوسط عمر $(1875)$ ساعته دې معیاري انحرافونه یي په ترتیب سره $(280)$ او $(310)$ دي دکوم لامپ دضریب بدلون زیات دی.

حل:

$$C \cdot V_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{280}{1495} \cdot 100 = 18.7\%$$

$$C \cdot V_B = \frac{310}{1875} \cdot 100 = 16.5\%$$

ځرنګه چه $C \cdot V_A > C \cdot V_B$ دی نو لامپ د یره پراګنده ګي لري ولی تینګښت یې کم دی.

## په نورمال منحني کی تیتوالی:

دنورمال منحني په دواړو خواو کی د $(\acute{x} - s , \acute{x} + s)$ اویاد $(\acute{x} - 2s , \acute{x} + 2s)$ پواسطه پراګنده ګي یا تیتوالی پیدا کیږي.

مثال: د یوی موسسی د معاش اوسط (12500) او معیاري انحراف یې (700) دی.

**الف**: په نورماله توزیع کي د فیصدی په نظر کی نیولو سره د معاش توزیع تشریح کړئ؟

ب: ایا ویلای شئ چه (14000) افغانی معاش غیر عادي معاش دی؟

حل: لمړي $\acute{x} \pm s$ او $\acute{x} \pm 2s$ او $\acute{x} \pm 3s$ قیمتونه په لاس راوړو.

| فیصدي | فاصله د افغانیو له مخی | فاصله د $(s)$ له مخی |
|---|---|---|
| 68% | 11800 − 13200 | $\acute{x} \pm s$ |
| 96% | 11100 − 13900 | $\acute{x} \pm 2s$ |
| 99.6% | 10400 − 14600 | $\acute{x} \pm 3s$ |

$$\acute{x} = \frac{11800 + 11100 + 10400 + 13200 + 13900 + 14600}{6}$$

$$= \frac{75000}{6} = 12500$$

$$14000 - \acute{x} = 14000 - 12500 = 1500$$

$$\frac{1500}{700} = 2.14$$

نو (14000) افغانی معاش غیرعادي معاش دی ځکه چه د $(2S)$ داندازی څخه زیات اوهم د $(\acute{x})$ داندازی څخه ډیر دي.

د نورماله توزيع مشخصات:

د نورمال په دواړو خواو کی د نورمال په نسبت د منحني د ټيټوالي، جګوالي او نژدېکت عامل ته شاخص وايي.شاخص په دوه ډوله دي.

1- د خلمېدلو شاخص $Skewness$ :

هغه توزيع چه د اوسط په دواړو خواو کی متناظره نه وي خلمېدل نوميږي. د لاندی دوو ضريبونو پواسطه ښودل کيږي.

الف- د خلمېدلو ضريب: د خلمېدلوضريب هغه شاخص دی چه د خلمېدلو د ميزان د ټاکلو لپاره استعماليږي.فارمول يي په لاندی ډول دی.

$$\alpha_3 = \frac{\frac{1}{n}\sum(x_i - \acute{x})^2}{s^2}$$

که $\alpha_3 = 0$ وي نوتوزيع متناظره ده.

که $\alpha_3 > 0$ وي د منحني د توزيع خلمېدل مثبت دي $Possitive\ Skewness$ يعنی خمېدل يي ښی خواته دي.

او که $\alpha_3 < 0$ وي د منحني دتوزيع خلمېدل منفي $Negative\ Skewness$ دي.يعنی چپی خواته خلميږي. که چېرته دکثرت جدول موجود وي خلميدلو(عدم تناظر) يي د $\alpha_3 = \frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^3}{\sum s^a}$ فارمول پواسطه پيدا کيږي.

ب- د پيرسون دخلميدو ضريب: د پيرسون د خمېده ګی ضريب په لاندی ډول دی.

$$sk_{(p)} = \frac{3(\bar{x} - med)}{s}$$

2- د پړسوب $kurtosis$ شاخص:

دا شاخص ښيي چه څه وخت منحني جګوالی اوڅه وخت ټيټوالی لري فارمول يي په لاندی ډول دی يک

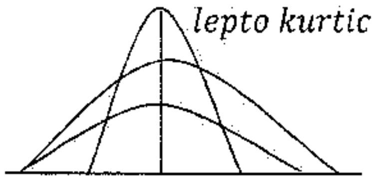
$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

که د کثرت جدول موجود وي نو د پړسوب فارمول په لاندی ډول دی.

$$\alpha_4 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^4}{s^4}$$

په دی فارمول کی $(s)$ معیاري انحراف دی. دغه شاخص د پړتله کېدلو لپاره استعمالیږي. د توزیع په ځای او پراګنده ګی پوری اړه نلري.

مثال: لاندې شکل په پام کې ونیسئ د ضریب دری ډوله خلمېدل او پړسوب ښیي.




حل : په نورمالي توزیع کی $\alpha_4 = 3$ دی ځکه که $\alpha_4 > 3$ شي نو پړسوب يي د نورمال منحني څخه ډېرېږي او که $\alpha_4 < 3$ وي نو پړسوب يي کم دی.

## څومتحوله ټولنې:

که په یوه کلاس کی یوازی د شاګردانو دونې په باب خبری کیږي نو په دغه ځای کی متحول یو دی. او که د شاګردانو د چاغښت په باب هم خبری وشي نو په دي صورت کی متحولونه دوه کیږي. د دغسی متحولونو تر منځ ریاضیکي اړیکي د قایمو مختصاتو په سیستم کی جوړېږي. لمړی د متحولونو معادلی جوړوو بیا د متحولونو په باب معلومات په مستوي کی په نخښه کووا و وصلوو یې.

مثال: یو متخصص د غذائي موادو تاثیر په یو شمېر موږکانو باندی وڅېړل د غذاء تر تطبیق دمخه یې د هر موږک وزن اندازه کړ او بیا یې د عملیې تر تطبیق وروسته د هر موږک وزن اندازه کړ او لاندی د ېتا ګانی یې په لاس راوړلی.

$$(1.8). (2.3). (1.7). (3.5). (2.4)$$

په هره جوړه کی لمړی مختصه د موږکانو د غذاء ترتطبیق دمخه وزن او دویمه مختصه د غذائي موادو تر تطبیق وروسته وزن دی.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| د موږکانو شمېر | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| د موږکانو لمړنی وزن | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| د غذائي موادو تر تطبيق وروسته د موږکانو وزن | 8 | 3 | 7 | 5 | 4 |

پورتنی جدول په ستوني ډول جوړ کړئ.

| دموږکانوشمېر | د موږکانولمړنی وزن | دغذائي رژيم ترتطبيق وروسته د موږکانووزن |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 8 |
| 2 | 2 | 3 |
| 3 | 1 | 7 |
| 4 | 3 | 5 |
| 5 | 2 | 4 |

پورتنی دېټاګانی دوه متحوله ټولنه معرفي کوي.

## دپراګنده ګی ګراف $Scatter\ Diagram$:

د دېټا داندازه کولولپاره په يوه مستوي کی پاشل شوی نقطی د پراګنده ګراف په نوم يادېږي.

لاندې مرتبې جوړې راکړشوي دي .

$$(1،2)،(2،3)،(3،4)،(4،5)$$

پورته دېټا د شېر او خط دېټا ده.که سکه پورته خواته وغورزول شي او دشېر مخ کښته خواته وي نود $(y)$ په محور يو ډېرېږي.

د موږکانو د غذائي رژيم دېټا په لاندی ډول ده.

$$(2،4)،(1،8)،(2،3)،(3،5)،(1،7)$$

په دغه دېټا کی د هری نقطی تابع بېله ده. نو له همدغه جهته ځو متحوله ټولنه ورته وائي.

## پېوستون او دپېوستون ضريب:

د يوه مستقيم او نقطو تر منځ دفاصلی د پيدا کولو فارمول ته دپېوستون ضريب وائي او په $(r)$ سره يي ښيي .او د لاندی فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$$r = \frac{\frac{\sum xy}{n} - \bar{x}\bar{y}}{s_x s_y}$$

لاندی دېټا دموږکانو دغذائي رژیم دېټا ده.

| دموږکانو شمېر | لمړنی وزن$(x)$ | وروستنی وزن $(y)$ | $xy$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 8 | 8 |
| 2 | 2 | 3 | 6 |
| 3 | 1 | 7 | 7 |
| 4 | 3 | 5 | 15 |
| 5 | 2 | 4 | 8 |
| | $\sum 9$ | $\sum 27$ | $\sum 44$ |

دموږکانود غذائي رژیم د وزنونو تر منځ دپیوستون ضریب محاسبه کړئ؟

لمړي وزنونه په $(x)$ او وروستني وزنونه په $(y)$ ښیو دموږکانو شمېر $n = 5$ دی.

$$\bar{x} = \frac{9}{5} = 1.8 \quad , \quad \bar{y} = \frac{27}{5} = 5.4$$

$$s_x{}^2 = \frac{(1-1.8)^2 + (2-1.8)^2 + (1-1.8)^2 + (3-1.8)^2 + (2-1.8)^2}{5}$$

$$= \frac{0.64 + 0.04 + 0.64 + 1.44 + 0.04}{5} = \frac{2.8}{5} = 0.56$$

$$s_y{}^2 = \frac{(8-5.4)^2 + (3-5.4)^2 + (7-5.4)^2 + (5-5.4)^2 + (4-5.4)^2}{5}$$

$$= \frac{6.76 + 5.76 + 2.56 + 0.16 + 1.96}{5} = \frac{17.2}{5} = 3.44$$

$$\frac{\text{او } y \text{ د ضرب د حاصل مجموعه } x}{\text{د دېټا شمېر}} = \frac{\sum x + \sum y}{n}$$

$$= \frac{(1 \cdot 8) + (2 \cdot 3) + (1 \cdot 7) + (3 \cdot 5) + (2 \cdot 4)}{5}$$

$$= \frac{8 + 6 + 7 + 15 + 8}{5} = \frac{44}{5} = 8.8$$

د پیوستون ضریب په لاندی ډول لاس ته راځي.

$$\text{د پیوستون ضریب} = r = \frac{8.8 - (1.8)(5.4)}{\sqrt{0.56}\sqrt{3.44}} = \frac{8.8 - 9.72}{1.36} = \frac{-0.92}{1.36} = -0.67$$

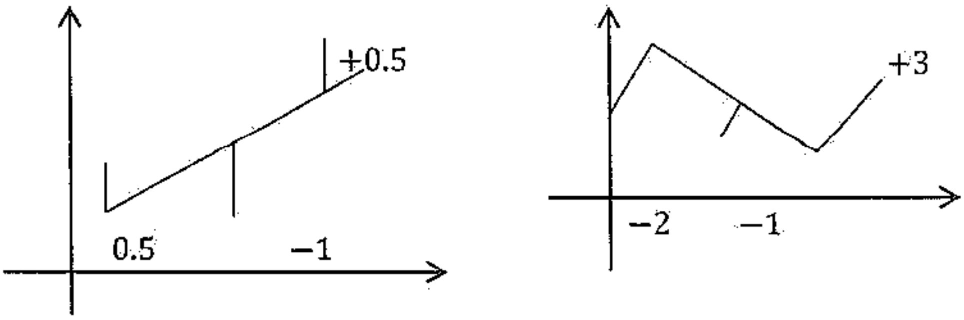
## د خطي مېلان معادله:

$y = ax + b$ د مستقيم خط معادله ده. چه دمستقيم خط مېلان دی که $a > 0$ وي کرښه متزايده ده. اوکه $a < 0$ وي نو کرښه متناقصه ده که $(x, y)$ جوړه د $y = ax + b$ په معادله کی صدق وکړي

نونقطه په خط پرته ده . که دنقطی په مستوي داسی پاشلی وي چه کرښی ته نژدی وي نود پيوستون ضريب به $(-1)$ او$(+1)$ ته نژدی وي که يوه داسی کرښه چه معادله يي $y = ax + b$ وي د ټکو له منځه داسی تېره کړو چه ټولو ټکو ته نژدی وي نو د دغه کرښی د ترسيم لپاره بايد يوه داسی معادله جوړه کړو دفارمول تر جوړولو دمخه لاندې مثال په نظر کی نيسو.

| $x$ | 1 | 5 | 9 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 6 | 5 | 7 |

د دغه ډېټا لپاره لاندې شکلونه رسموو اود کرښو خطاوی يي دمشاهدی څخه معلوموو.




په پورته دواړو حالتونو کی د کرښو د خطاګانو الجبري مجموعه صفر ده .

د الف حالت: $0 = 3 + (-1) + (-2)$ = دکرښی د خطاګانو الجبري مجموعه

د ب حالت: $0 = 0.5 + (-1) + (0.5)$ = د کرښی دخطاګانو الجبري مجموعه

څرنګه چه په دواړو حالتو د جمعی حاصل صفر دی نومناسبه کرښه نه معلومېږي.نو دپاره ددی چه مثبت او منفي علامی يو اوبل دمنځه يونسي نووروسته تر مربع کولو يي جمع کوو.

$14 = (3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2$ = د خطاګانو ددويم توان جمع

$$\text{دخطاګانو د دویم توان جمع} = (0.5)^2 + (-1)^2 + (0.5)^2 = 1.5$$

هغه کرښه چه د مربعګانو مجموعه یي (1.5) مناسبه کرښه ده دغسی کرښو ته ریګریشن کرښی وایي.د رګریشن اومشاهداتوتوپیرپه وښیو نو د دویم توانونو دلاکوچني والي په خاطر لیکو.

$$\text{د خطاګانو ددویمو توانونو مجموعه} = \sum(y-\bar{y})^2 = \sum\{y-(ax+b)\}^2$$
$$= \sum(y-b-ax)^2$$
$$= (ax_1+b-y_1)^2 + (ax_2+b-y_2)^2$$

په دې حالت کی $(x)$ او $(y)$ ثابت عددونه دي $(a)$ او $(b)$ متحولین دي

$$b = \text{د پیوستون ضریب} \times \frac{\text{د } y \text{ معیاري انحراف}}{\text{د } x \text{ معیاري انحراف}}$$

د $(a)$ او $(b)$ دمحاسبی دغه لارد لږکیو مربعګانو دتګلاری په نوم یادیږي.

نتیجه :-د ریګریشن کرښه هغه کرښه ده چه دیوه متحول د مقدار دمعلومولو دبل متحول د مقدار څخه استفاده کیږي.

مثال :- لاندی دېتاپه نظر کی ونیسئ.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

د ریګریشن کرښه نظر ته پیدا کړئ؟

حل : څرنګه چه

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$
$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{4+3+2+1+0}{5} = \frac{10}{5} = \frac{10}{5} = 2$$
$$s_x{}^2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n} = \frac{(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2}{5}$$

$$= \frac{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2}{5} = \frac{4+1+0+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\sqrt{{s_x}^2} = \sqrt{2} \Rightarrow s_x = \sqrt{2}$$

$$S_y^2 = \frac{\sum (y_1 - \bar{y})^2}{}$$

$$= \frac{(4-2)^2 + (3-2)^2 + (2-2)^2 + (1-2)^2 + (0-2)^2}{5}$$

$$= \frac{\mathbf{4+1+0+1+4}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{5}} = \mathbf{2}$$

$${s_y}^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{{s_y}^2} = \sqrt{2} \Rightarrow s_y = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{(1\cdot 4) + (2\cdot 3) + (3\cdot 2) + (4\cdot 1) + (5\cdot 0)}{5}$$

$$\frac{\sum xy}{n} = \frac{4+6+6+4+0}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum xy - \bar{x}\bar{y}}{s_x \cdot s_y} = \frac{4 - 3\cdot 2}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$b = \bar{y} - b\bar{x} = 2 - b\cdot 3 \Rightarrow 4b = 2 \Rightarrow b = 0.5$$

$$a = r\frac{s_y}{s_x} = -1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -1$$

$$y = ax + b = -x + 0.5$$

## د احتمال د تابع توزیع

هغه تصادفي متحول چه په احصائیه او احتمالاتو کې څېړل کیږي عبارت د هغه تابع څخه دی چه د تعریف ناحیه یې نمونه یي فضاء او د قیمتونو سیټ یې د حقیقي اعدادو سیټ وي. که $\{x_n, f(x_n)\}_{n=1,2,3,4,..}$ ولرو نو لیکو چه

$$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \cdots (x_n, f(x_n))$$

دغه مرتبو جوړو ته مجزا (گسسته) احتمال تابع وایي.

د تجمعي او پیوسته احتمال تابع د $F(x) = P(X \leq x)$ په شکل لیکل کیږي.

که چېرې $f(x)$ د احتمال تابع او $(x)$ تصادفي متحول وي په دې صورت کې د دې احتمال چه $(x)$ د $(k_1)$ او $(k_2)$ په منځ کې وي دلاندې رابطې سره برابر دی.

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = \int_{k_1}^{k_2} f(x)dx$$

که چېرې $(x)$ پیوسته ناڅاپي متحول وي او $(k_1 < k_2)$ وي په دې صورت کې لیکو چه،

$$P(k_1 \leq x \leq k_2) = F(k_2) - F(k_1)$$

که چېرې ناڅاپه مجزا (گسسته) متحول وي په دې حالت اوسط $(Expected\ Value)$ د تصادفي مجزا متحول چه د $E(x)$ په شکل ښودل کیږي د لاندې رابطې سره برابر دي.

$$E(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \cdots\cdots\cdots + x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

$E(x)$ د $(x)$ اوسط دی په $(\bar{x})$ سره هم ښودل کیږي که $(x)$ تصادفي گسسته متحول وي په دې صورت کې د $(x)$ وریانس چه د $(s^2)$ په شکل ښودل کیږید لاندې رابطې سره برابر دی.

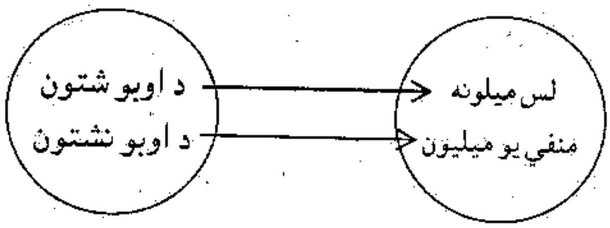
$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(x_i)]^2 f(x_i)$$

مثال: يو شخصي شرکت غواړي د يوې غونډۍ په سر يوه څاه وکني د اوبو څاه په يوميلون افغانۍ تماميږي . که څاه اوبه وکړي د شرکت مالک لس ميلونه افغانۍ اخلي او که اوبه ونه کړي يو ميلون تاوان ورکوي.

الف :-دا موضوع د يوې تابع په شکل وښيئ.

ب:- که د اوبو احتمال (0.2) وي او د اوبو د نه ورکولو احتمال (0.8) وي په دې صورت کې د احتمال تابع ،اوسط (*Expected Value*) ، وريانس او د تصادفي متحول معياري انحراف پيدا کړئ؟

د الف حل:




د ب حل: تصادفي متحول، داحتمال تابع ،اوسط ،وريانس، او معياري انحراف په لاندې جدول کې ښودل شوي دي.

| تصادفي متحول | د تابع احتمال | اوسط | دتصادفي متحول دمربعاتوانحراف د تصادفي متحول له اوسط څخه | واريانس | معياري انحراف |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | $f(x_i)$ | $E(x) = \sum x_i f(x_i)$ | $[x_i - E(x)]^2$ | $s^2 = [x_i - E(x)]^2 f(x_i)$ | $s$ |
| $-1$<br>$10$ | $0.8$<br>$0.2$ | $-1 \cdot 0.8 = -0.8$<br>$10 \cdot 0.2 = 2$ | $(-1 - 1.2)^2 = 4.84$<br>$(10 - 1.2)^2 = 77.44$ | $4.84 \cdot 0.8 = 3.872$<br>$77.44 \cdot 0.2 = 15.488$ | $4.4$ |
| | $0.1$ | $1.2$ | | $\sum s^2 = 19.360$ | |

## د دوه جمله یي توزیع او د برنولي ازمایښت:

د احتمال دوه جمله یي توزیع یوه مجزا (ګسسته) توزیع ده چه د مختلفو پېښود توصیف لپاره استعمالیږي.

د برنولي ناڅاپي ازمایښت په بریالیتوب او نابریالیتوب په دوه دستودسته بندي کیږي.

د برنولي توزیع کولای شوچه په $P(x=m)=P^m(1-P)^{1-m}=P^m\cdot q^{1-m}$ بڼه وښیو.
$(P)$ د بریالیتوب او $q=I-P$ دنابریالیتوب احتمال دی.

که یو ازمایښت $(n)$ ځله تکرار شي ترادف لاس ته راځي چه دهرازمایښت دبریالیتوب احتمال په $(P)$ او دنابریالیتوب احتمال په $(q)$ښیو $(n)$ ځله ازمایښت څخه د $(m)$ ځلي بریالیتوب احتمال عبارت دی له:

$$P(x\le m)=\binom{n}{m}P^m q^{n-m}\qquad ,0\le m\le n$$

د دوه جمله یي دتوزیع اوسط په $\bar{x}=np$ اومعیاري انحراف یي په $s=\sqrt{npq}$ ښودل کیږي.

مثال: د شکرې د مرض څخه د یوه مریض د جوړېدلو احتمال(0.4) دی که چېرته د ناروغانو شمېر (15) وي څومره احتمال شته چه پنځه تنه ښه شي او یا د (3) څخه تر (4) تنو پورې جوړشي.

حل:

$$n=15\quad,\qquad m=5\quad,\qquad P=0.4\quad .\ q=0.6$$

$$P(m=5)=\binom{n}{m}P^m\cdot q^{n-m}=\binom{15}{5}(0.4)^5\cdot(0.6)^{15-5}$$

$$=\frac{15!}{5!\,(15-5)!}\times 0.01024\cdot 0.00604661760=\frac{360360}{120}\cdot 0.00006191$$

$$=\frac{22.3098876}{120}=0.1859$$

$$P(3\le m\le 4)=\sum_{i=3}^{4}\binom{15}{i}(0.4)^i(0.6)^{15-i}$$

$$=(3^{15})(0.4\,)^3(0.6)^{15-3}+(4)^{15}(0.4)^4(0.6)^{15-4}$$

$$= \frac{15!}{3!\,(15-3)!}\cdot(0.064)(0.6)^{12} + \frac{15!}{4!\,(15-4)!}\cdot(0.0256)(0.6)^{11}$$
$$= \frac{2730}{6}(0.000139264) + \frac{3270}{24}(0.0000928512) = \frac{0.38019072}{6} + \frac{0.3036}{24}$$
$$= 0.063365 + 0.012650 = 0.07601$$

## د پواسن داحتمال توزيع:

د پواسن د احتمال دتوزيع فارمول دا $P(x=m)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}$ دی $\lambda = n$

او $e = 2.718281\cdots$ دی.

مثال: (200) کسانو دطياري ټېکټ اخيستی دی که د مسافرينود نه راتګ احتمال (0.01) وي ددی احتمال چه (3) کسه رانشي څو دي؟

حل:

$$n = 200 \quad , \quad P = 0.01$$
$$P(x-m) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!} \qquad ,\lambda = np = 200\cdot 0.01 = 2$$
$$P(3) = \frac{(2.71828)^{-2}\cdot 2^3}{3!} = \frac{\frac{1}{(2.71828)^2}\cdot 8}{6} = \frac{\frac{8}{7.389046158}}{\frac{6}{1}}$$
$$P(3) = \frac{8}{44.33427695} = 0.180447287$$

دا احتمال د دوه جمله يي په فارمول محاسبه کوو.

$$P(x=m) = \binom{n}{m}P^m q^{n-m}$$
$$\left.\begin{matrix} n = 200 \\ P = 0.01 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q = 0.09$$
$$P(x-m) = P(3) = \binom{200}{3}(0.01)^3(0.09)^{200-3}$$
$$= \frac{200!}{3!\,(200-3)!}(0.01)^3(0.09)^{197} = 0.1814$$

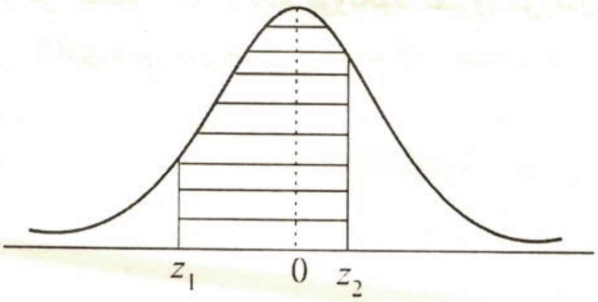
د دواړو فارمولو جوابونه معادل دي.

د جدول دجوړولو شکل د احصائیوي دېتا د ستېنډرډ کولو پواسطه حل کړو.

$z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ چه $(z)$ د ستېنډرډ نورمال متحول او منحني ته دستېنډرډ نورمال منحني یا د نورمال احتمال منحني په نوم یادیږي. د نورمال منحني او افقي محور تر منځ فاصله د واحد سره برابره وي.

لاندی مساحت د منحني د یوی برخی مساحت دی او $z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ سره یې تر بدلولو وروسته په لاندی ډول وښیو.

$$f(z_1 < z < z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-z^2}{2}} dx = \int_{z_1}^{z_2} N(z,0,1)\, dz$$




د ستېنډرډ نورمال د توزیع احتمال دجدول د استعمال له لاری کولای شو. د جدول په عمودي ستون د $(z)$ د مقدا ردوه لمړي رقمونه د اعشاريي دعلامی دواړو خواوته رقمونه د منحني ارتفاع راښئي اوپورتنی سطرد اعشاريي دعلامی سلیز رقم د منحني دواحد قاعده راښئي.

مثال: که $(z = 1.56)$ وي د منحني مساحت پیدا کړئ؟

حل: د $(z)$په ستون کی $(1.5)$ او په سطر کی $(0.06)$ پیدا کوو ګوروچه د$(1.5)$ دعددپه کرښه او د $(0.06)$ دعدد په ستون کی واقع دی $(0.9406)$ دی چه همدغه دمنحني مساحت دي.

لمړی مثال: د جوسو د بوتلونو دستګاه داسی تنظیم شوی ده چه که$(952)$ملي لېتره مایع په بوتل کی واچوي معیاري انحرا ف یي $(4)$ ملي لېتره کیږي که مایع د $(952)$ او $(956)$ ملي ېترو تر منځ وي معیاري انحراف یي څو دی؟

حل : لمړي د له جنسه پیداکوو.

یادداشت:

که د پواسن په فارمول کې د($\lambda$) سره (t) ضرب شي په یوه ټاکلي وخت کې د ورتللو د شمېر احتمال رابښيي.

$$P(x=m)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}$$

مثال: که په یوه ساعت کې د یوه بانک د مراجعینو په متوسط ډول وي ددې احتمال چه څلور تنه به په لمړیو دریو دقیقو کې راغلي وي څومره وي؟

حل:

$$\lambda=60 \qquad , \qquad t=\frac{3}{60}=\frac{1}{20}$$

$$m=4 \qquad , \qquad \lambda t=60\cdot\frac{1}{20}=3$$

$$P(m=4)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^m}{m!}=\frac{e^{-3}\cdot 3^4}{4!}=\frac{(2.71828)^{-3}\cdot 3^4}{4!}$$

$$=\frac{\frac{1}{(2.71828)^3}\cdot 81}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{\frac{81}{20.0854}}{\frac{24}{1}}=\frac{1\cdot 81}{24\cdot 20.0854}=\frac{27}{8\cdot 20.0854}$$

$$=\frac{27}{160.6832}=0.168032$$

## د نورمال توزیع:

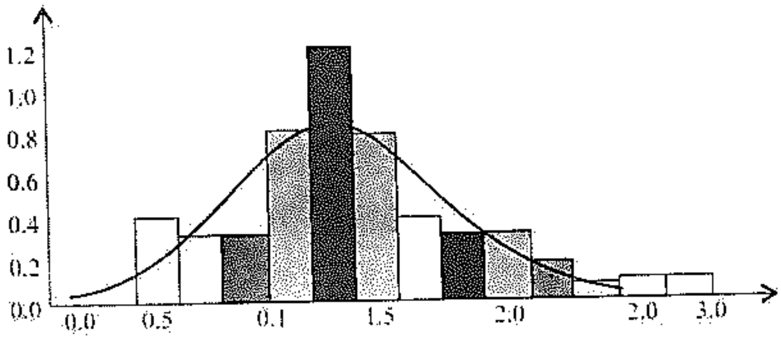
دنورمال د توزیع ریاضیکي معادله چه د $f(x)$ احتمال توزیع تابع ښودونکې ده په لاندې ډول ده.

$$f(x)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{3}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

$x$ پېوسته تصادفي مقدار $(s)$معیاري انحراف او $f(x)$ د منحني جګوالی دي.

د نورمال توزیع د پیوسته توزیعګانو څخه ده.

مثال: د موټر ماشين دتېلو دسوځولو په وخت کې يوه اندازه مضرلوګی خارجوي د هغه مضر لوګي مقدارچه د (46) موټرانو څخه توليديږي په (1980) ميلادي کې ديوه فزيکدان پواسطه چه لورنزن نومېده وڅېړل شو. لوګی يوه اندازه $N_2$ او $(O_2)$ لري لاندې مستطيلي ګراف د $N_2$ او $O_2$ اندازه چه واحد يې $^{gr}/_{mil}$ دي او په(46) موټرانوکې دتېلو د سوځېدوڅخه توليديږي ددغه موټرانو نورمال احتمال توزيع ، اوسط او وريانس رابښئي د هرمستطيل مساحت د مستطيل دقاعدې او ارتفاع دحاصل ضرب څخه لاس ته راځي.مثلاً په څلورم ستون کې چه د (1) څخه شروع او تر (1.2) پورې يې د قاعدې طول دی مساحت يې په لاندې ډول لاس ته راځي $\frac{4}{46} \times 0.2 = 0.01739 \approx 0.0174$

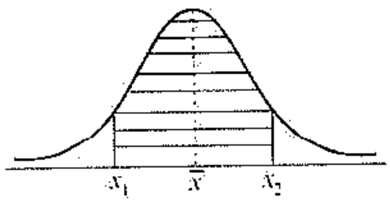



## د نورمال توزيع منحني لاندې مساحت او د هغه ستېنډرډ کول:

کله چه $(x)$پيوسته تصادفي متحول د $x_1$ او $x_2$ تر منځ قيمت واخلي نوبايد د $(x)$ داحتمال دتوزيع له تابع څخه انتيګرال ونيول شي.

$$f(x_1 < x < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} N(x, \overline{x, s})dx$$



$$z_1 = \frac{x-\bar{x}}{s} = \frac{952-952}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z_2 = \frac{956-952}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

**نوپه دی اساس د دتعریف ناحیه د ځخه تر پوری ده اود دتعریف ناحیه د صفر ځخه تر (1) پوری ده. د جدول ځخه معلومیږي چه $P(0 \le z \le 1) = 0.8413$**

**معلومه شوه چه هغه بوتلونه چه (84.13%)ډک شوي وي د (952) ځخه تر (956) پوری مایع لري.**

دويم مثال : په يوه خاص مضمون کې د ذده کوونکود نمبرود نورمال توزيع اوسط (70) اومعياري انحراف يې (8)دی د نورمال جدول ځخه په ګټه اخيستوسره د (54)ځخه تر (84) پوری فيصدي پيدا کړئ؟

حل:

$$z_1 = \frac{54-70}{8} = \frac{-16}{8} = -2$$

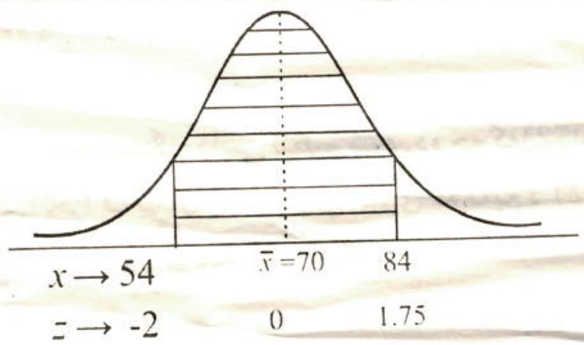
$$z_2 = \frac{84-70}{8} = \frac{14}{8} = 1.75$$

$$P(-2 \le z \le 0) = P(0 \le z \le 2) = 0.9772$$

$$P(0 \le z \le 1.75) = 0.9599$$

پورته مساحتونه جمع کوو.

$$P(-2 \le z \le 0) + P(0 \le z \le 1.75) = 0.9772 + 0.9599 = 1.9371$$



## نمونه اخیستل

ناڅاپه نمونه اخیستنه:

که دټولنې ټول عناصر په ټاکل کېدلو کې هم چانسه وي.

سیستماتیک نمونه اخیستنه:

د ټولنې په ټولو عناصرباندې یو ډول کود وهل کیږي.

طبقه یي نمونه اخیستنه:

په دې نمونه اخیستنه کې ټولنه په بېلابېلو متجانسو ډلو وېشل شوې وي.

خوشه یي نمونه اخیستنه:-که ټولنه ډېره لویه وي هغه په بیلابیلو ځانګو ویشو او له هرې ځانګې څخه یوه نمونه اخلو.

تبصره:

دهرې ټولنې عددي خصوصیاتو ( اوسط ، معیاري انحراف)ته د ټولنې پارامتر وائي.

د هرې ټولنې د عددي نمونه ګیرې خصوصیاتو(اوسط معیار انحراف) ته آماره وایي.

د $(x_1, x_2, x_3, ... x_n)$ ناڅاپه متحولونو ته د $(x)$ یوه ناڅاپي نمونه وایي.که چېرته یي تابع په دې ډول تعریف شوې وي.

$$f(x_1, x_2, ...... x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdots f(x_n)$$

مثال: فرضوو چه په یوه قطۍ (5) سپینې او(7) توری ګلولې شته د قطۍ د منځ څخه (5) ګلولې یوه یوه ځای په ځای کوو دیوه عنصر دویم ځل ټاکل مجاز دي.د ټاکل شوو ناڅاپه نمونو د تصادفي متحولینو په ژبه بیان کړئ.

حل: د (0) عدد دتورې ګلولې لپاره اود (1) عدد د سپینې ګلولې لپاره انتخابوو.

د $(x_1, x_2, x_3)$ ناڅاپه متحولونه د برنولي نا خاپه متحولین دي. د $P = \frac{5}{12}$ او د $i = 1,2,3$ د مقدارونو لپاره لروچه:

$$f(x_i) = \left(\frac{5}{12}\right)^{x_i} \left(1 - \frac{5}{12}\right)^{1-x_i}$$

$$f(0)=\left(\frac{5}{12}\right)^{0}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-0}=1\cdot\frac{7}{12}=\frac{7}{12}$$
$$f(1)=\left(\frac{5}{12}\right)^{1}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-1}=\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{12}=\frac{35}{144}$$
$$f(2)=\left(\frac{5}{12}\right)^{2}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-2}=\frac{25}{144}\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^{-1}=\frac{25}{144}\cdot\frac{12}{7}=\frac{25}{84}$$
$$f(3)=\left(\frac{5}{12}\right)^{3}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{-2}=\frac{\frac{125}{1728}}{\left(\frac{7}{12}\right)^{2}}=\frac{144\cdot125}{1728\cdot49}=\frac{125}{12\cdot49}=\frac{125}{588}$$
$$f(4)=\left(\frac{5}{12}\right)^{4}\left(1-\frac{5}{12}\right)^{1-4}=\frac{\frac{5^4}{12^4}}{\frac{7^3}{12^3}}=\frac{12^3\cdot5^4}{12^4\cdot7^3}=\frac{5^4}{12\cdot343}$$
$$f(5)=?$$

### د نمونې د اوسط توزيع:

$f(x)$ د احتمال تابع او $x_1,x_2,\cdots,x_n$ ناخاپي نمونې وي په دې صورت کې د ناخاپه نمونې د احتمال توزيع عبارت ده.

| $x$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots x_n$ |
|---|---|---|---|
| $(x)$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | $\cdots\ \frac{1}{n}$ |

د $\bar{x}$ دمتحول اوسط $E(\bar{x}_n)=\mu$

د $\bar{x}_n$ دمتحول وريانس $U(\bar{x}_n)=\frac{1}{n}\delta$

د نمونه يي وريانس $s_n^2=s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$

د نمونه يي وريانس اوسط $E(S^2)=\delta^2$

په داسې حال کې چه $\bar{x}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ نمونه يي اوسط $\mu$ دټولنې اوسط $\delta^2$ د ټولنې ريانس وي او $s^2$ دنمونې وريانس وي.

# احتمالات

# نولسم فصل

## احتمالات $Probability$:

که د یوې پېښې وړاندیز د عددونو یا رقمونو پواسطه د اټکل وړ وي د ناڅاپي پېښې یا احتمال په نوم یادیږي .د ناممکنې پېښې احتمال صفر دی. او د ممکنې پېښې احتمال یو دی.

مثلاً دمعارف رئیس بې سواده دې نو احتمال یې صفر دی.

لمر د ختیځ له خوا راخیژي احتمال یې یو دی.

### چانس:

که دیوې پېښې دوړاندیز لپاره اعداد یا ارقام نه استعمالېدل دغې پېښې ته چانس وايي.

په چانس کې دممکن ، ناممکن، خامخا او داسې نورې کلیمې استعمالیږي.

### تصادفي پېښه :

هغه پېښه چه نتیجه یې معلومه وي. تصادفي پېښه، نا څاپي ازمایښت یا تصادفي تجربه ورته وايي. لکه احمد د بامه راولویدلو پښه یې ماته شوله.

### تجربوي احتمال:

هغه احتمال چه د یوې تجربې په سرته رسولو کې په عملي ډول ولیدل شي تجربوي احتمال ورته وايي.

لکه د $(Cl_2)$ او $(2Na)$ څخه مالګه لاس ته راځي.

### نظري احتمال:

د تصادفي پېښو د شمېر او د تجربو د نتیجو دشمېر نسبت ته نظري احتمال وايي.

$$\text{تصادفي پېښې احتمال} = \frac{\text{د تصادفي پېښو دحالتونوشمېر}}{\text{د تجربې دټولوحالتونوشمېر}}$$

## نسبي کثرت او احتمال:

احتمال د پېښې تر پېښېدلو دمخه وړاندیز ته ویل کیږي. مګر نسبي کثرت د ازمایښت تر نتیجه وروسته د ارقامو په اساس حسابیږي په ناڅاپي پېښو کې دتجربي احتمال د پېښې دنسبي کثرت سره مساوي وي دنسبي کثرت مجموعه ( 1) ده.

مثال: تېرکال د لیندۍ (10) ورځې په پرلپسې ډول باران اوریدلو.

الف: اوربښت او د وریځو دورځو نسبي کثرت د لیندۍ په میاشت کې پیدا کړئ؟

ب: دراتلونکي لیندۍ په باب خپل وړاندیز ولیکئ.

ج: ایا دا قطعي ده چه هر کال به دلیندۍ په دغه لسو ورځو کې باران اوري؟

حل:

الف: $30\% = \frac{1}{3} = \frac{10}{03} =$ نسبي کثرت

ب: په راتلونکي کال کې به هم ممکن د تېر کال په څېر نسبي کثرت (30%) وي.

ج: د هر کال لپاره وړاندیز قطعي نه دی.

## په نمونه يي فضا کې برابر او نابرابر چانس:

د ناڅاپي پېښې په درشل کې ددې امکان شته چه هر ممکن حالت منځ ته راشي دغه پېښې ته ناڅاپي یا اتفاقي پېښه وایي.

احتمال په $(P)$ او $P(A)$ د $(A)$ د ناڅاپي پېښې احتمال دی که یوه نمونه يي فضا $(n)$ غړي ولري په دې صورت کې دهرې لمړنۍ پېښې احتمال مساوي $P(E) = \frac{1}{n}$ سره دی.

لمړی مثال: یوه داسې سکه په نظرکې نیسو چه دواړه مخونه يي شېر وي.لاندې سوالونو ته جوابونه ووایې.

الف: چه پېسه شېر راشي.

ب: چه پېسه خط راشي.

ج: ایا دشېر او خط د اتفاقي پېښو احتمال برابر دي؟

حل:

الف: $P\left(\text{شمېر}\right) = \frac{1}{1} = 1$

ب: $P\left(\text{خط}\right) = \frac{0}{1} = 0$

ج: $0 \neq 1$

مثال: د يوه نورمال رمل اچول په نظر کې نيسو څرنګه چه د نمونې فضا $S = (1,2,3,4,5,6)$ ده نو له همدې کبله:

$$P(E) = P(6) = P(5) = P(4) = P(3) = P(=) = P\left(1 = \frac{1}{6} = 0.17 = 17\%\right)$$

## د يوې نمونه يي فضا ناڅاپي پېښه:

د $(S)$ د نمونه يي فضا هرفرعي سيټ يوه اتفاقي پېښه ده چه په $(E)$ سره ښودل کيږي. که د غړو شمېر يي $(n)$ وي د اتفاقي پېښو ټول شمېر $(2^n)$ دی.

د ښار په ګڼه ګوڼه کې د ورځې د $(10)$ او $(12)$ بجو په شاوخوا کې د احمد د جيب ښه غلا شوې ده د پوليسو تر پلټنې وروسته معلومه شوله چه دری ګڼکپان په دغه سيمه کې ليدل شوي دي دپېښې نمونه يي فضاده د احتمالاتو له مخې د غلو په باب څېل معلومات وليکئ؟

مثال: د اتفاقي پېښو نمونه يي فضا $S = (x, y, z)$ ده کلي سيټ يي پيدا کړئ؟

$E_1 = (x)$ يوازې غل دی.

$E_2 = (y)$ يوازې غل دی.

$E_3 = (z)$ يوازې غل دی.

$E_4 = (x, y)$ $(x, y)$ دواړه غله دي.

$E_5 = (x, z)$ $(x, z)$ دواړه غله دي.

$E_6 = (y, z)$ $(y, z)$ دواړه غله دي.

$E_7 = (x, y, z)$ $(x, y, z)$ دري واړه غله دي.

$E_8 = \{\ \} = \phi$ يو هم غل نه دی.

## د احتمال قاعدې:

1- د يوې اتفاقي پېښې احتمال تل د (0) او (1) تر منځ وي که اتفاقي پېښه $(E)$ وي نو:

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

2- که چېرې $(S)$ د يوه ازمايښت نمونه يي فضا وي نو $P(S) = 1$ د $(S)$ ناڅاپي پېښه د ډاډمنې پېښې په نوم ياديږي.

3- د ناشونې پېښې لپاره لرو:

$$P(\phi) = 0$$

مثال: د دوه سکو د اچولو نمونه يي فضا $S = (TT, TH, HT, HH)$ ده خط $= T$ او شېر $= S$ دې لاندېني احتمالات پيدا کړئ؟

الف: دواړه سکې شېر دي.
ب: لږ ترلږه يوه سکه شېر ده.
ج: دواړه سکې يو شان دي.
د: دواړه سکې يو شان نه دي.
ها: د سکو يوه هم خط نه دې.

حل:

$$E_1 = \{H, H\} \qquad \Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

$$P(E_3) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_4) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

$$P(E_5) = \frac{2}{4} = 0.5 = 50\%$$

## ونه ایز دیاګرام

کولای شو چه هر ناځاپي ازمایښت د ونه ایز دیا ګرام پواسطه رسم کړو طریقه یي داسی ده چه د ازمایښت دپیل څخه دیاګرام پیل کوو بیا د هری نتیجی څخه څانګی شروع کوویه هره څانګه کی نتیجی د پاڼو په شکل لیکو دغه ډول ګراف ته ونه ایز دیاګرام وایي.د احتمالونو د جمع حاصل د هری څانګی د نشرېدو په ټکي کی د $(1)$ سره مساوي دې همدا ډول دټولو پېښو د احتمالاتو د جمع حاصل هم د $(1)$ سره مساوي دې.

مثال: په یوه کڅوره کی څلور توپونه پراته دي دوه توپونه په سره رنګ$(r)$ دری توپونه په شنه رنګ $(g)$ او یو توپ په تور رنګ $(b)$ رنګ شوي دي توپونه د لیدو لپاره راایستل کیږي او بیا بېرته اېښودل کیږي مربوطه احتمالات یي پیدا کړئ؟

حل:-

| $w$ | $rr$ | $rg$ | $rb$ | $gr$ | $gg$ | $gb$ | $br$ | $bg$ | $bb$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(w)$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{9}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |

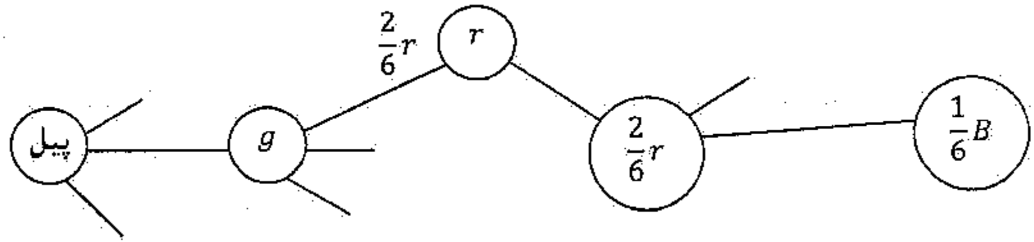
په پورته جدول کی ټول کسرونه متماثل دي د پېښو احتمالات د صورتو څخه څرګندیږي

### د ضرب د حاصل لومړی قاعده:

د یوی لومړنی پېښی احتمالات عبارت دي د پېښی د پیل څخه د پېښی تراخره پوری داحتمالاتو د ضرب د حاصل څخه .په دغه موضوع باندی د ښه پوهېدلو لپاره د یوی کورنی شجره لیکو هر شاخ بیل بیل ضربوو او جمع کوو یي د ټولی کورنی د غړو شمېر لاس ته راځي.

مثال:- په یوه کڅوره کی سری مری دری شنی مری او یوه توره مرۍ ایښودل شوي دي مرۍ د کڅوری څخه داسی راوباسو چه ترکتلو وروسته بیاکڅوری ته اچول کیږي اوپېل (شنې ،سرې، تورې) څخه وي.

حل:




$$P(w) = P(grrb) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{12}{1296} = 0.0092 = 0.92\%$$

$$P(w) = 0.0092 = 0.92\%$$

يعنی د (شنی، سری ،توری)مريو د وتلو احتمال 0.92% دی

## د ناڅاپي پېښو اتحاد

1- که د (S)په يوه نمونه يي فضا کی د $(A)$ او $(B)$ دوه داسی ناڅاپي پېښی وي چه $A \subseteq B$ وي نو: $A \cup B = B$

2- که د$(S)$ په نمونه يي فضا کی $(A)$ او $(B)$ دوه ناڅاپي پېښی يود بل سره فرق ونه لري نو:

$$A \cup B = B \cup A$$

3: که د$(S)$ په نمونه يي فضا کی د$(A)$ يا$(B)$ يوه پېښه رامنځ ته شي نو د $(A \cup B)$ پېښه هم را منځ ته شوی ده چه:

$$A \subseteq A \cup B \text{ او } B \subseteq A \cup B$$

4-که د $(A)$ پېښه د $(S)$ په نمونه يي فضا کی پېښه شوی وي او بله پېښه نه وي نو:

$$A \cup \phi = A$$

5- د $A \cup B$ پېښه په دی معنی ده چه اقلاً د $(A)$ يا $(B)$ پېښه، پېښه شوی ده.

مثال: که د $(C)$ پېښه د $(A)$ او $(B)$ دوه بيلا بيلی پېښی په ځان کی ولري نو په دې صورت کی د $A \cup B$ ناڅاپي پېښه هم په ځان کی لري.

حل:فرضاً $A = \{1,2\}$ او $B = \{2,3\}$ وي او $C = \{1,2,3,4\}$ وي ليدل کيږي چه $A \subseteq C$ او $B \subseteq C$دي ځکه چه:

$$A \cup B = B \cup A = \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\} \Rightarrow A \cup B \subseteq C$$

## دناخاپي پېښو تقاطع

1- په یوه نمونه یي فضا کې د دوه یا څو ناخاپي پېښو تقاطع د تبدیلی د قانون پیروي کوي.

فرضاً د $(A)$او $(B)$ او $(C)$ ناخاپي پېښې دي نو $A \cap B = B \cap A$ رابطه صحیح ده.

2- که په یوه نمونه یي فضا کې دوه ناخاپي پېښې واقع شي نود دوی تقاطع دهری یا خاپي پېښې فرعي سيټ دی.

فرضاً د $(A)$ او $(B)$ دوه ناخاپي پېښې دي نو $A \cap B \subseteq A$ او $A \cap B \subseteq B$

3- که د $(S)$ په یوه نمونه یي فضا کې د $(A)$ ناخاپي پېښه وي او بله پېښه نه وي نو:

$$A \cap S = A, A \cap \phi = \phi$$

4- که $A$ او $B$ دوه ناخاپي پېښې وي او $A \subseteq B$ وي نود دواړو پېښو تقاطع کوچنۍ پېښه ده.

$$A \cap B = A$$

مثال: دیوه ښوونځي دفوتبال دټیم څخه دری تنه د والیبال په ټیم کې هم شامل دي که دفوتبال دټیم غړي په (A) اود والیبال د ټیم غړي په (B) وښیو او ددواړو ټیمونو گډ غړي په (C) وښیو نو دټیمونو تر منځ اړیکه د سيټ تیوري په شکل ولیکئ:

حل:

$$A \cap B = C \Rightarrow A \cap B \subseteq A \ \& \ A \cap B \subseteq B$$

## کلي او مکمله سيټ

د څو فرعي سیټونو مجموعي سيټ ته کلي سيټ وایي. که په یوه کلي سيټ کې دوه سیټونه موجود وي نودا سیټونه یو د بل مکمله سیټونه دي.

که $(S)$ یوه نمونه یي فضا وي او $(A)$ یوه ناخاپي پېښه وي او $(\acute{A})$ یوه بله ناخاپي پېښه وي چه د $(A)$ سره په یوه وخت کې پېښه شوی نه وي. $(S)$ د دغه دواړه سیټونو کلي سيټ دي او $(\acute{A})$د $(A)$ مکمله سيټ دی.

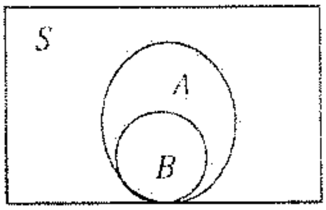
الف: $A \cup \acute{A} = S$

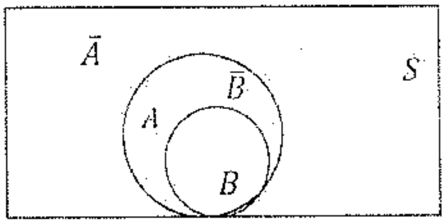
ب: $P(A \cup \acute{A}) = P(S) = 1$

ج: $P(\acute{A}) = 1 - P(A)$

که د $(S)$ په یوه نمونه یي فضا کی د $(A)$ ناڅاپي پېښه د $(B)$ ناڅاپي پېښه په بر کی ولري په ګرافیکي ډول وښیي چه د $(\bar{A})$ ناڅاپي د $(\bar{B})$ یوه ناڅاپي پېښه په بر کی لري

حل: څرنګه چه $B \subseteq A$ ده نو د شکل څخه معلومېږي چه:




د سیټونو او ماډل جوړونه:

د سیټ تیوري په واسطه د احتمالاتو مسایل حلیږي یعنی د ناڅاپي پېښو د پېښېدو د مسایلو حل اوس د سیټ تیوري په واسطه حلیږي چه په دی اساس د سیټ تیوري د فعالیت ساحه نوره هم پراخه شوه

مثال د په نمونه یي فضا کې د او ناڅاپي پېښی په لاندی دیاګرام کی راکړشوي دي د پېښېدو احتمال مطلوب دی

a: د دي احتمال چه د $(A)$ یا $(B)$ حادثه ناڅاپي پېښه شي.

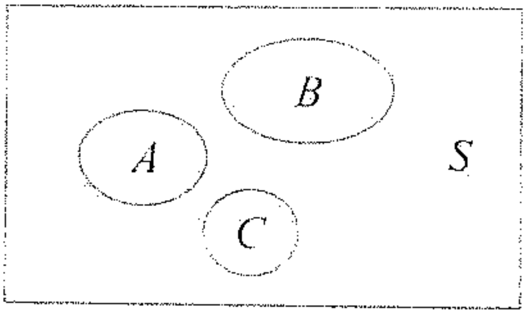
b: د دي احتمال چه د $(A)$ پېښه ،پېښه شي.

c: د دي احتمال چه د $(C)$ پېښه پېښه نه شي

حل:

a: د $(A)$ یا $(B)$ احتمال په حقیقت کی د $A \cup B$ احتمال دی څرنګه چه دا پېښی یو د بل څخه بېلی دي نو یعنی $A \cap B = \phi$ دي نو

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$




b. د دی احتمال چه د $(A)$ پېښه ناڅاپه پېښه شي د $(\acute{A})$ د پېښې څخه عبارت دی چه د $(\acute{A})$ پېښه نه ده پېښه شوې د $(\acute{A})$ پېښه د $(B)$ او $(C)$ د پېښو اتحاد دې یعنی دغه دواړه پېښې نه دي پېښې شوي نو $P(\tilde{A}) = P(C \cup B)$ څرنګه $P(A) = 1 - P(\acute{A})$ نو

$$P(A) = 1 - P(C \cup B) = 1 - P(C) - P(B)$$

c. د پاره ددی چه د $(C)$ پېښه ناڅاپه پېښه نه شي هغه پېښې دپېښېدلو د احتمال سره برابره ده چه د $(A)$ او $(B)$ پېښې. پېښې شي یعنی $(A \cup B)$ دپېښې د پېښېدلو څخه عبارت دی نو.

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

د شمېرنې اصل:

د دوه سیټونو د شمېرنې اصل په ترکیب او ترتیب پورې اړه لري

1- د دوه سیټونو دعناصرو دشمېرنې لپاره عناصر سره ضربوو مجموعه یې د سیټونو د عناصرو د حاصل ضرب مجموعه ده.

2- که د یوه سیټ عناصر $(m)$ اودبل سیټ عناصر $(n)$ وي نو $(m \times n)$ یې د حاصل ضرب مجموعه ده.

مثال د $(0.1.2.3.4)$ رقمونو څخه څو دوه رقمي عددونه جوړېږي. او څو عددونه په $(2)$ پوره وېشل کیږي

حل $(4 \times 5 = 20)$ دوه رقمي عددونه وز څخه جوړېږي او $(3 \times 4 = 12)$ عددونه په $(2)$ پوره وېشل کیږي

پرموتیشن(ترتیب) $Permotaion$:

که څو شیان ولرو او ددی شیانو څخه جوړې جوړی کړوپه دغه جوړو کی د شیانو بدلولو ته ترتیب وایي.

$(a,b,c,d)$ څلور حروف راکړشوي دي غواړو چه دوه ،دوه يي جوړه کړو نو په لاندی ډول يي جوړه کوو.

$(ab,ac,ad,bc,bd,cd)$ نو که څلور شیان دوه،دوه جوړه کړو نو شپږ جوړی ورڅخه جوړیږي.

فکتوریل:

د مثبتو مسلسلو عددونوضربولوته فکتوریل وایي. او په (!) سره ښودل کیږي.

$0! = 1$ او همدا ډول $1! = 1$ دی. ثبوت يې په (277) صفحه کې وګورئ.

(n) مسلسل عددونه په$(P_n)$ ښیي $(P_n = n!)$ دی.

## ترکیب $(Combinatuin)$:

هغه روش چه د هغه پواسطه د بینوم ضریبونه پیدا کیږي د ترکیب په نوم یادیږي. اوپه لاندی ډول لیکل کیږي.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$0 \le k \le n$ او $\binom{n}{k}$ داسی ویل کیږي. (k)دپاسه $(n)$

$$\binom{n}{0} = 1 \quad ,\binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

د کمبینیشن علامه او فارمول دادی.

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

مثال: $\binom{7}{4}$ قیمت پیدا کړی؟

$$C_4^7 = \frac{7!}{4!\,(7-4)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4(1\cdot 2\cdot 3)} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{6} = 35$$

## وریشن(تبدیل) *Variation*:

په تبدیل اوترتیب کی د جوړو شمېر ته تبدیل وایي.

وریشن یا تبدیل په ($V_k^n$) ښيي. د لاندی فارمول پواسطه لاس ته راځي.

$$V_k^n = k!C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال: په (30) کسانو کی (4) کسه یو ځان د ریاست لپاره دویم ځان داول معاونیت لپاره دریم ځان د دویم معاونیت لپاره او څلورم د منشي په توګه ځان کاندیدوي. د امکاناتو شمېر یي پیدا کړئ؟

حل:

$$V_4^{30} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{26! \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30}{26!}$$

$$= 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30 = 657520$$

پورتني معومات په لاندی جدول کی خلاصه کوو.

| د تاکنو ډول $k$ غړي د $n$ غړو څخه | دامکاناتو شمېر | | |
|---|---|---|---|
| | سره له تکراره $k \le n$ | پرته له تکرار څخه $k \le n$ | |
| ترتیب یا پرموټیشن | $P(n,k) = \frac{n!}{k!}$ | $P(n,k) = n!\,, n = k$ | |
| ترکیب یا کمبېنیشن | $C_k^n = \binom{n+k-1}{k}$ | $C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ | |
| تبدیل یا وریشن | $V_k^n = n^k$ | $V_k^n = k!\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$ | |

مثال: د یوی سکي په اچولو کی چه د راتګ امکان یي په یا خط کی ممکن دی او د هری خوا دراتګ احتمال یي د $\frac{1}{2}$ سره مساوي دي که سکه (2) ځلي، (3) ځلي، (6) ځلي، (8) ځلي، (16) ځلیوغورځول شي د هم چانسو لمړنیوپیښو په نمونه یي فضا کی یو ونه ایزګراف لاس ته راځي.

$$S = \text{شېر} \quad \text{او} \quad T = \text{خط}$$

په پورتني مثال کی د شېر او خط دراتګ احتمال په یو ،دوه،دری،څلور ځلي غورځولو کی په لاندی جدول کی را ټول شوي دي

| څلور خله | | دری خله | | دوه خله | | یو خل | | هیڅ خل | | د سکي غورځول |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| احتمال | خط | احتمال | خط | احتمال | خط | احتمال | خط | احتمال | خط | |
| $\frac{1}{16}$ | 0 | $\frac{1}{8}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 1 | 0 | |
| $\frac{4}{16}$ | 1 | $\frac{3}{8}$ | 1 | $\frac{2}{4}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 1 | | | |
| $\frac{6}{16}$ | 2 | $\frac{3}{8}$ | 2 | $\frac{1}{4}$ | 2 | | | | | |
| $\frac{4}{16}$ | 3 | $\frac{1}{8}$ | 3 | | | | | | | |
| $\frac{1}{16}$ | 4 | | | | | | | | | |

که جدول ته ښه په غور سره وګورو نو د هر وارد احتمال د کسرونو په صورت کی یو نظم موجود دی چه د بینوم په انکشاف کی د حدونو ضریبونه دي . دغه عددونه اول وار د پاسکال فرانسوي په واسطه په یوه جدول کی ترتیب شوي وه کولای شو چه د بینوم په انکشاف کی تری استفاده وکړو

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

$$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

$$(a+b)^6 = 1a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + 1b^6$$

عمومي شکل یې دا دی.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

د خط راتلو احتمال په مرتبه کې عبارت دی

$$P\left(\text{د خط راتگ}\right) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

د بینوم قضیه:

د بینوم قضیه مخکې ویل شوی ده تکرار ته ضرورت نشته

تبصره.

که د یوی ناخاپي پېښې پېښېدلو ته (1) او نه پېښېدلو ته یې (0) ووایو لاندی جدول د $n=2$ لپاره بشپړ کړئ

| $k$ | ممکنی پایلی | احتمال | د بینوم د ضریبونو ارایه |
|---|---|---|---|
| 0 | | $(1-P)^2$ | $\binom{2}{0}P^0(1-P)^2$ |
| 1 | 10 | $2P(1-P)$ | |
| 2 | 11 | | $\binom{2}{2}P^2(1-P)^2$ |
| | | $\{P+(1-P)\}^2$ | $\sum\binom{n}{k}P^{k(1-P)^{n-k}}=?$ |

که یوه تجربه په مساوي احتمالاتو تکرار شي په $(n)$ ځله تکرار کی د بینوم دانکشاف $(k)$. ام حد لاندی احتمال لري.

$$\binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k}$$

پورتنی بینوم په $B(n,p,k)$ ښودل کیږي او د برنولي د پرابلم د احتمال په نوم یادیږي.اوداسی لیکل کیږي.

$$B(n,p,k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-kb}$$

## د دوه جمله یي احتمال:

که یوه نمونه یي فضا دوه غړي ولري نو که د یوه غړي احتمال یي $(P)$ وي نو دبل حالت احتمال یي $(1-P)$ دی چه بایلل ورته وایي.که دا ډول تجربه ځلي تکرار شي نو ام ځلي وړل په ځلي تکرار کی او د بایللو احتمال په ښودل کیږي.

$$k-\text{ام ځلي وړل په n ځلي تکرار کی}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

مثال: که په یوه تجربه کی د وړلو احتمال$\left(\frac{1}{2}\right)$ او د بایللو احتمال هم $\left(\frac{1}{2}\right)$ وي محاسبه یي په لاندی ډول کیږي.

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

دویم مثال: په یوه پنځه اولاده فامیل کې ددې احتمال چه دوه تنه هلکان او پاتې انجونې دي څو دي؟

حل:

$$P = \frac{1}{2}$$

نو

$$q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\binom{5}{2}}{2^5} = \frac{\frac{5!}{2!\,(5-2)!}}{2^5} = \frac{\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}}{32} = \frac{10}{32} = 0.3125 = 31.25\%$$

دریم مثال: درمل یوه دانه (6) واره غورځوددې احتمال پیدا کړئ چه په (4) واره غورځولو کې راغلي خالونه د (3) څخه لږ وي؟

حل: د (3) څخه لږ راتلل وړل وګڼو نو

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.3333 = 33.33\%$$

$$Q = 1 - P = 1 - \frac{1}{3} = \frac{3-1}{3} = \frac{2}{3} = 0.6666 = 66.66\%$$

$$= \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{6!}{4!\,(6-4)!} \cdot \frac{1}{81} \cdot \frac{4}{9} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2} \cdot \frac{4}{729} = \frac{60}{729}$$
$$= 0.0823 = 8.23\%$$

څلورم مثال: د یوی سکې د خط د راتلو احتمال $\frac{1}{3}$ دي که څلور واره وغورځول شي د دی احتمال چه شپږ (3) واره راشي مطلوب دی؟

حل:

$$1 - P = \frac{1}{3}P$$

$$P = \frac{3}{4} \qquad , \quad Q = \frac{1}{4}$$

$$= \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{3}{64} + \frac{1}{256} = \frac{13}{256} = 0.05078 = 5.08\%$$

پنځم مثال: يوه نورماله سکه څو واره وغورځول شي چه لږ ترلږه د خط دراتلو احتمال 0.99 څخه زيات شي

حل: سکه واره غورځوو.

$$T = 1 - S$$

$$= 1 - \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

په دې ډول د دې شرط:

$$1 - \frac{1}{2^n} > 0.99 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2^n} < 0.01 \quad \text{so} \quad 2^n > 100 \quad \Rightarrow n \geq 7$$

## متمادي او غير متمادي فضاګانې:

د يوې ناڅاپه تجربې نمونه يي فضايو معين يا غير معين سيټ دي. يعنې که د فضا عناصر معين ($Countable$)وي نمونه يي فضا معينه ده. چه پرېکړې فضا هم ورته وايي او که د فضا عناصر معين نه وي نو فضا غير معينه ده چه نښتې يا متمادي فضا هم ورته وايي

مثال: د لاندې فضاګانو څخه کومه يوه متصله او کوم يوه پرېکړې ده؟

الف: د دوو رملي دانو اچول

ب: د (8) او (12) ترمنځ د يوه حقيقي عدد ټاکل

ج: د (30) ذده کوونکو څخه د (3) تنو ټاکل

د: د يوې د ګړې د حرارت د درجې لوړېدل د (100) درجو د سانتي ګېرېډ څخه تر (1000) درجو د سانتي ګېرېډ پورې.

هـ: د $(30^\circ)$ او $(45^\circ)$ درجو ترمنځ د يوې زاويې ټاکل

حل: څرنګه چه د (الف او ج) نمونه يي فضاګاني دمحدودو عناصرو د شمېر شحخه جوړې شوي دي نو پريکړې فضاګاني دي او (ب ، د او ها) فضاګاني دنامحدودوعددونو څخه جوړې شوي دي نو نبېتي بامتمادي فضاګاني

ورته وايي.

دويم مثال: عبداله د خپل کور دګلانو د اوبولو لپاره يو واټرپمپ وا خيستلو د واټر پمپ عمر د ساعت له مخې پيدا کړئ؟

حل: { } خالي سيټ د واټر پمپ د ورانېدو وخت دی او $S = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0$ د واټر پمپ د عمر اوږد والې دی.

هم چانسه پېښې

هغه ساده پېښې چه د هغوی د پېښېدلو چانس په يوه تجربه کې برابر وي د هم چانسه پېښو په نوم يادېږي

که چېرې $S = (e_1, e_2, \cdots e_n)$ يوه نمونه يي فضا وي نو $(e_i)$ د هر $i = 1,2,3, \cdots n$ لپاره يوه ناڅاپه لمړنی پېښه ده په دې شرط چه $0 \leq P(e_i) \leq 1$ وي

د لمړنيو پېښو داحتمالاتو مجموعه ديوه سره مساوي ده

$$P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) = \sum_{i=1}^{n} P(e_i) = 1$$

مثال: څلور کسه په يوه لوبه کې اشتراک کوي د هر يوه نمونه يي فضا هم چانسه ده د هر يوه د ګټلو احتمال پيدا کړئ؟

حل: که چېرې $S = (a, b, c, d)$ نمونه يي فضا وي نو دهرې ناڅاپه لومړنۍ پېښې احتمال $\left(\frac{1}{4}\right)$ دې نو ليکو چه

$$P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$$

لومړنۍ پېښې هم چانسه دي

## د متمادي فضاګانو احتمال:

پیوسته نمونه يي فضا ګانې د لايتناهي ټکو مجموعه ده چه شکل يي د اعدادو په محور ، سطحه او د اجسامو په حجمونو کې ليدل کيږي. د دغه ډول ټکو ښودنه ممکنه نه ده مګر د احتمال د نسبت لپاره يي خطونه ،سطحې او حجمونه په توټو وېشو. د اعدادو د محور څخه د يوه حرف لکه $(x)$ او په سطحو کې ددوه تورو لکه $(x, y)$ څخه او په احجامو کې د درې تورو څخه لکه $(x, y, z)$ څخه استفاده کوو

لومړی مثال: د اعدادو په محور د $(0,3)$ په انټروال کې د يو ټکی وټاکئ چه:

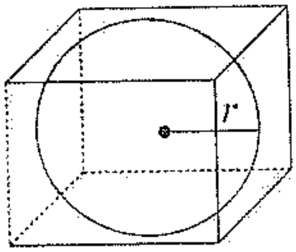
$$1 < x < 2.5$$

$$P(A) = \frac{\overline{A}}{\overline{B}} = \frac{2.5 - 1}{3 - 0} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}$$

دويم مثال: يوه کره په يوه مکعب کې محاط ده د مکعب ضلعه (2) واحده ده په مکعب کې يوه نقطه ټاکو ايا ددې احتمال شته چه دا نقطه د کرې پر مخ پرته وي؟

$r = \frac{a}{2} = \frac{2}{2} = 1$ د کرې شعاع

$$P(A) = \frac{A_{globe}}{A_{CUB}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{a^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi (1)^3}{2^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi}{8} = \frac{\pi}{6}$$




## مشروط احتمال:

که $S$ نمونه يي فضا او $(A)$ او $(B)$ په دغه نمونه يي فضا کې دوه ناڅاپي پېښې وي په داسې حال کې چه $P(B) \neq 0$ وي نو مشروط احتمال د لاندې فارمول پواسطه پيدا کيږي.

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ يعنې د $(A)$ د پېښې احتمال نظر د $(B)$ ناڅاپي پېښې ته مشروط احتمال بلل کيږي.

د پورته فارمول څخه لیکو چه:

-1

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$
$$P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$
$$P(A) = P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)$$

-2

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

له لومړي پایلې څخه په لاس راځي چې:

$$P_A(B) = \frac{P_B(A) \cdot P(B)}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

3- که پورته فارمول ته عمومیت ورکړو نو لیکو چه:

$$P_A(B_i) = \frac{P_{B_i}(A) \cdot P(B_i)}{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A) + \cdots + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)} = \frac{P(A \cap B)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k) \cdot P_{B_n}(A)}$$

لومړی مثال: یو شاګرد ښوونځي د تللو لپاره (50%) هره ورځ دګاډی څخه کټه اخلي چه (70%) په ټاکلیوخت ښوونځي ته رسیږي په منځني ډول نوموړی (60%) په ټاکلي وخت ښوونځي ته حاضریږي که چیری پیښې:

1- د ګاډی پواسطه راتلل

2- په ټاکلي وخت رسیدل اوپه دې صورت کې د $(A)$ مشروط احتمال نظر $(B)$ ته $P_B(A)$ مطلوب دې ؟

حل:

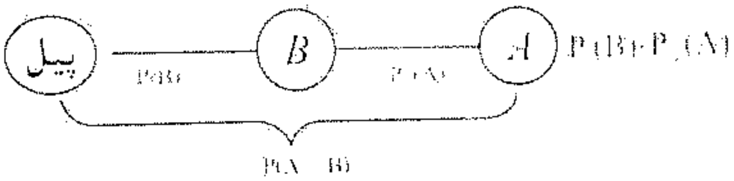
$$P_B(A) = \frac{P(A) \cdot P_B(A)}{P(B)} = \frac{0.5 \cdot 0.7}{0.6} = \frac{3.5}{6} = 0.58\bar{3} = 58.33\%$$

## د حاصل ضرب اصل

د  په نمونه يي فضا کې د  او  د دوه ناخاپي پېښو لپاره د مشروط احتمال د تعريف سره سم ليکو چه:

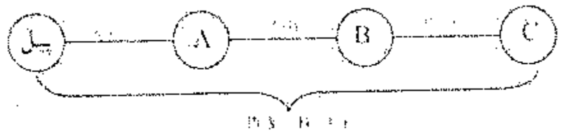
$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مسئله د ونه ايز دياګرام پواسطه هم لاس ته راوړلای شو.




$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P_B(A)$$

دا مطلب د  او  او  درې پېښو لپاره هم د تطبيق وړ دی

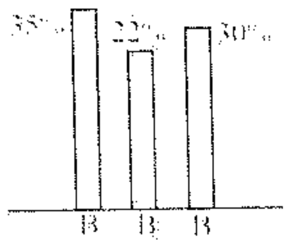



$$\Rightarrow P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{A \cap B}(C)$$

مثال - د $B_1$، $B_2$ او $B_3$ په درې ولايتونو کې په پارلماني ټاکنو کې د ګډون کوونکو فيصدي او د جمهوري ګوند فيصدي برخه ورکړشوې ده.

په کوم احتمال د ټاکنو ګډون کوونکو او يا رائي اچوونکو جمهوري ګوند ګټلی شي.

ناخاپي په لاندې ډول تعريفوو




$V$: هغه رايي ورکوونکي چه جمهوري ګوند يې ټاکلی وي.

$B_i$ د ولايت رايي ورکوونکي

| ولایت | درایو ورکوونکو فیصدي | جمهوري ګوند ته رای ورکوونکي |
|---|---|---|
| $B_1$ | 33.2% | 35 |
| $B_2$ | 46.5% | 22 |
| $B_3$ | 20.3% | 30 |

1- $B_i$ دوه په دوه یو دبل څخه مستقل عناصر نه لري.

2- د $(S)$ نمونه یي فضا لپاره $S = B_1 \cap B_2 \cup B_3 = \cup_{i=1}^{3} B_i$ دی نو:

$B_i \cap V(i = 1,2,3,)$ یو له بل سره مستقل صورت نیسي.

$$V = \bigcup_{i=1}^{3} (B_1 \cap V)$$

د دوارو خواو د احتمال لپاره لیکو.

$$P(V) = P\left\{\bigcup_{i=1}^{3} (B_i \cap V)\right\} = \sum_{i=1}^{3} P(B_i \cap V) = \sum_{i=1}^{3} P(B_i) \cdot P_{B_i}(V)$$
$$= P(B_1) \cdot P_{B_1}(V) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(V) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(V)$$
$$= 0.332 \cdot 0.35 + 0.465 \cdot 0.22 + 0.203 \cdot 0.3$$
$$= 0.1162 + 0.1023 + 0.0609 = 0.2794$$
$$P(V) = 27.94\%$$

تعریف:

که چیري د $B_1, B_2 \cdots, B_n$ رای ورکوونکي وي او $P(B_i) \neq 0$ وي $i = 1 \cdots n$ پیښو عمومي حالت د $(S)$ په نمونه یي فضا کی یوه پیښه وي نو $P(A)$ د کامل احتمال په نوم یادیږي او د $(A)$ اختیاري ناڅاپي پیښی لپاره لرو.

$$P(A) = \sum_{i=0}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)$$

د $B_i$ چه $i = 1 \cdots n$ د $(S)$ نمونه یي فضا د یوی پیښی لپاره چه $P(B_i) \neq 0$ د $(A)$ ناڅاپي پیښی احتمال چه $P(A) \neq 0$ وی د $(Bayex)$ بائیزفارمول پواسطه لاس ته راځي

$$P_A(B_i) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{i-1}^{n} P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}$$

د بائیز فارمول زیات استعمال لري لکه $n = 2$ لپاره $B_2 = \bar{B}$ ، $B_1 = \bar{B}$ په پام کې ونیسو په حقیقت کې $B_1$ او $B_2$ د $(S)$ دنمونه یي فضا پېښې دي.

$$P_A(B) = \frac{P(B \cdot P_B(A))}{P(B) \cdot P_B(A) + P(\bar{B}) \cdot P_{\bar{B}}(A)}$$

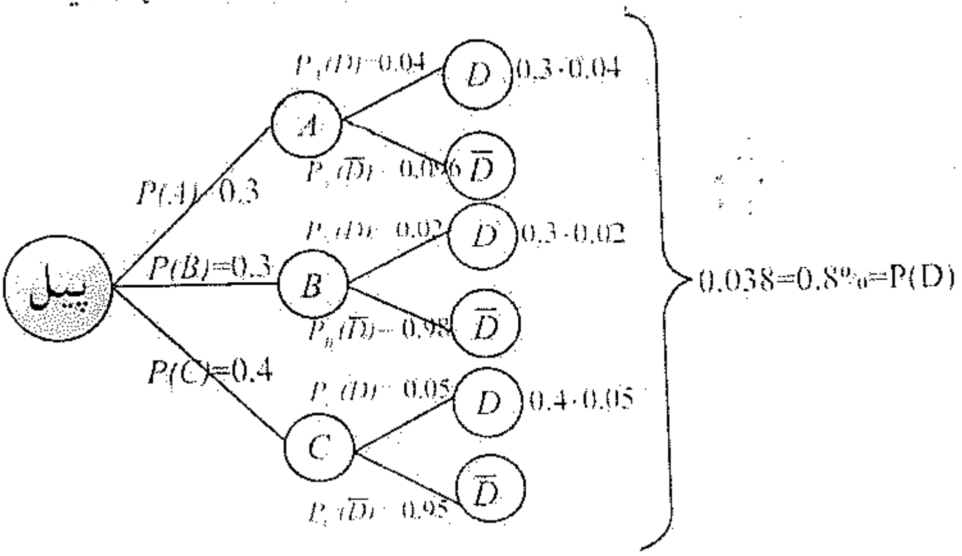
پورتنی فارمول د لپاره د بائیز له فارمول څخه عبارت دی.

مثال: په یوه فابریکه کې د $A$ ، $B$ او $C$ دری ماشینونه په ترتیب سره 30%، 30% او 40% د برق ګروپونه تولیدوي که چېرته په ماشینونو کې دګروپونو د خرابېدو کچه په ترتیب سره 4%، 2% او 5% وي او نوموړي ګروپونه په ګډه سره خرڅ شي مطلوب دی

a: ددې احتمال چه یو اخیستل شوی ګروپ وران دی.

b: په کوم احتمال خراب شوی ګروپ د $C$ په ماشین پوری اړه لري.

c: یو نوی تولید شوی ګروپ لرو په کوم احتمال سره به د په ماشین پوری اړه ولري.




د $b$ جز حل:

$$P_D(C) = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(C) \cdot P_C(D)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.05}{0.038} = \frac{0.02}{0.038} = 0.526 = 52.6\%$$

د C جزء:

$$P_D(B) = \frac{P(\bar{D} \cap B)}{P(\bar{D})} = \frac{P(B) \cdot P_B(\bar{D})}{P(\bar{D})}$$

$$= \frac{0.3 \cdot 0.98}{0.3 \cdot 0.96 + 0.3 \cdot 0.98 + 0.4 \cdot 0.95} = \frac{0.294}{0.962} = 0.3056 = 30.56\%$$

## د ناڅاپه پېښو استقلالیت:

د ناڅاپي پېښو استقلالیت لاندې خواص لري

1- که د دوه ناڅاپي پېښو د ضرب حاصل د هغوی د تقاطع د سیټ سره مساوي وي نو دغه دول ناڅاپي پېښو ته مستقلې پېښې وايي يعنې پېښې استقلالیت لري.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

2- که د $A$ او $B$ پېښې ګډ ټکي ونه لري نو:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

مثال: که چېرې د یوه ښوونځي ذده کوونکي د سترګو رنګ او ذکاوت د اغېزې پرته فرض شوي وي لاندې پېښو ته ځواب ور کړئ.

الف: ټاکل شوی ذده کوونکی یو هوښیار ذده کوونکی دی

ب: ټاکل شوی ذده کوونکی توری سترګې لري

حل: څرنګه چه $P_B(H) = P(H)$ اوسربېره پردی $P_B(H) = \frac{P(B \cap H)}{P(B)}$ نو:

$$P(B \cap H) = P(H) \cdot P(B)$$

عمومي حالت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ ناڅاپي پېښې احتمالاً یو له بلې څخه مستقلې بلل کېږي که چېرې د هرو دوو پېښو په ترکیب کې د ضرب د حاصل قاعدة صدق وکړي پرته له هغې پېښې یو له بلې سره تړلې دي.

نتیجه:

1- $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{B} \cap \bar{A}$, $\bar{B} \cap A$ د پېښو دغه تقاطع په جدول کې هم پیدا کولای شو.

| | $B$ | $\bar{B}$ | |
|---|---|---|---|
| $A$ | $P(A\cap B)=a\cdot b$ | $P(A\cap\bar{B})=a(1-b)$ | $a$ |
| $\bar{A}$ | $P(A\cap B)=b(1-a)$ | $P(\bar{A}\cap\bar{B})=(1-a)(1-b)$ | $1-a$ |
| | $b$ | $1-b$ | 1 |

2- د $A$ ، $B$ او $C$ درې ناڅاپه پېښې چه يو د بل څخه مستقلې دي نولرو چه:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

دويم مثال: د لاندې متقاطع جدول خالي ځايونه ډک کړئ؟

| | $B$ | $\bar{B}$ | |
|---|---|---|---|
| $A$ | 0.12 | $P(A\cap\bar{B})=$ ? | ? |
| $\bar{A}$ | $P(\bar{A}\cap B)=?$ | $P(\bar{A}\cap\bar{B})=$ ? | ? |
| | ? | 0.6 | |

حل: څرنګه چه $P(\bar{B})=0.6$ نو $P(B)$ داسې پيدا کوو

$$P(B)=1-P(\bar{B})=1-0.6=0.4$$
$$P(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.4}=0.30$$
$$P(\bar{A})=1-P(A=1-0.3=0.7)$$

نو د پېښو د تقاطع څخه لرو چه:

$$P(A\cap\bar{B})=P(A)P(\bar{B})=0.3\cdot0.6=0.18$$
$$P(\bar{A}\cap B)=P(\bar{A})\cdot P(B)=0.7\cdot0.4=0.28$$
$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=0.7\cdot0.6=0.42$$

که پيدا شوي عددونه په جدول کې په خپلو ځايو کې وليکو جدول تکميليږي.

# شلم فصل

موهومي عددونه *Imaginary Numbers*:

منفي عددونه جفت جذر نه لري نو له همدې کبله کله چه په دويمه درجه معادلو کې $\Delta < 0$ شي نو معادله جذر نه لري ترڅو چه په (1795) ميلادي کال يوجرمني ساينسدان چه *Friedrich Gouss* نوميدلو $(i^2 = -1)$ وضع کړ چه د نوموړي په دغه ابتکار سره دهغه معادلود حل لپاره لاره خلاصه شوه چه $(\Delta < 0)$ وه.

موهومي عدد (*Imaginary Numbers*) يو عدد دی چه په روزمره ژوند کې په راکړه ورکړه کې نه استعماليږي. مګر دعلمي مسايلو د حل لپاره د زيات اهميت وړ دی لمړی حرف يې د ايوتا (*iota*) يوناني کلمې څخه اخيستل شوی دی.

مثال:- $\sqrt{-36}$ جذر پيدا کړئ؟

حل:

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36(-1)} = \sqrt{36i^2} = \pm 6i$$

دويم مثال: دا $x^2 + y^2 = 0$ معادله حل کړئ؟

$$x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -y^2 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{-y^2}$$
$$x = \sqrt{(-1)y^2} = \sqrt{i^2y^2} = \pm iy$$

د موهومي عددونو طاقت:

څرنګه چه $i = \sqrt{-1}$ او $i^2 = -1$ کيږي نو کولای شو چه د دغه ابتکار په واسطه د موهومي عددونه ساده کړو. مګر د موهومي عددونو مربع منفي ده.

$1:\ i = \sqrt{-1} \qquad 2:\ i^2 = -1 \qquad 3:\ i^3 = -i \qquad 4:\ i^4 = 1$

$5:\ i^5 = i \qquad 6:\ i^6 = -1$

په عمومي صورت د موهومي عددونو طاقت په لاندې جدول کې خلاصه کوو.

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i \ , i^{4n+2} = -1 \ , i^{4n+3} = -i$$

هغه موهومي عددونه چه توانونه يې منفي وي د پورته جدول پواسطه حليږي.

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = -i$$

$i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{-1} = -1$
$i^{-3} = i^{-2} \cdot i^{-1} = (-1)(-i) = i$
$i^{-4} = i^{-3} \cdot i^{-1} = i(-i) = -i^2 = -(-1) = 1$
$i^{-5} = i^{-4} \cdot i^{-1} = 1(-i) = -i$

لاندې موهومي عددونه د طاقت څخه وباسئ:

$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$
$i^{89} = i^{88} \cdot i = 1 \cdot i = i$

## د اعدادو سیټونه:

### 1- د طبعي اعدادو سیټ $Set\ of\ Natural\ Numbers$:

د(1) څخه تر لایتناهي ($\infty$) پورې د اعدادو سیټ ته د طبعي اعدادو سیټ وايي په (IN) سره يې ښيي.

$$\mathrm{IN} = (1، 2، 3، 4، 5 \cdots \infty)$$

### 2- د مکمل اعدادو سیټ $Set\ of\ Whole\ Numbers$:

د (0) څخه تر ($\infty$) پورې داعدادو سیټ ته د مکمل اعدادو سیټ وايي په (w) سره يې ښيي.

$$\mathrm{w} = (0، 1، 2، 3، 4، \cdots \infty)$$

### 3- د تام اعدادو سیټ $Set\ of\ Integer\ Numbers$:

د ($-\infty$) څخه تر ($+\infty$) پورې د اعدادو سیټ ته د تام اعدادو سیټ وايي او په (I) سره يې ښيي.

$$\mathrm{I} = (-\infty، \cdots، -3، 2، 1، 0، 1، 2، 3 \cdots \infty)$$

### 4- د دناطق اعدادو سیټ $Set\ Of\ Rational\ Numbers$:

صحیح عدد، مختوم کسر، غیر مختوم متوالي کسر ته ناطق عدد وايي او په ($Q$) سره يې ښيي.

$$Q = \left(1،2،15،109،\frac{4}{5}،\frac{2}{3}\cdots\right)$$

5- د غیرناطق اعدادو سیټ *Set Of Irrational Numbers*:

غیرمختوم غیر متوالي کسر او هغه جذري عددونه چه پوره جذر نه لري غیرناطق عدد بلل کیږي او په $(\bar{Q})$ سره ښودل کیږي

$$\bar{Q} = \left(\frac{11}{47} \ , \ \frac{13}{49} \ , \ \sqrt[3]{2} \ , \sqrt{3}\right)$$

په [illegible] د حقیقي اعدادو د سیټ په نوم یادیږي او په (IR) سره یي ښیي

$$\text{IR} = (\text{Q} + \bar{\text{Q}}) = \left(-\infty، -3، +6، \sqrt{2}، \frac{2}{5}، \frac{5}{6}، \frac{13}{49}\cdots\infty\right)$$

6- موهومي عددونه *Set Of Imaginary Numbers*:

هغه عددونه چه یوازی د $(i)$ حرف پکی موجود وي او د حقیقي عددو سره د جمع یا تفریق په حال کی نه وي موهومي عددونه بلل کیږي. لکه $\left(-i \ ,11i, \ \ \frac{2}{3}i \ , \ \sqrt{5i^3},\right)$

دموهومي عددونو څلورګوني عملیې:

1- د موهومي عددونو جمع اوتفریق:

هم علامه عددونه جمع کووعلامه یې شریکه علامه لیکو او مختلف العلامه عددونه یو دبل څخه منفي کوو علامه د لوی عدد لیکو

$1{:}\ 15i - 31i = 16i$ $\qquad$ $2{:}\ 14i - i = 13i$

2- د موهومي عددونو ضرب:

علامه په علامه کی ،عدد په عدد کی ضربوو. توانونه یې جمع کوو.

اول مثال:

$$(7i)(-5i) = -35i^2 = -35(-1) = 35$$

دویم مثال:

$$(11i)(-3i^2) = -33i^3 = -33 \cdot i^2 \cdot i = -33(-1)i = 33i$$

3- د موهومي عددونو تقسيم:

علامه په علامه عدد په عدد ویشو او توانونه یو د بل څخه منفي کوو.

مثال:

$$\frac{12i^3}{2i} = 6i^2 = 6(-1) = -6$$

7- مختلط عددونه *Complex Numbers*.

هغه عددونه دي چه د حقيقي عدد او موهومي عدد د مجموعې يا تفاضل څخه لاس ته راغلی وي لکه ( $5 + 11i$ , $8 - 20i$ ) او داسې نور. مختلط عدد په $(z)$ سره ښيي $z = 3 \pm 21i$ او داسې نور.

صفري مختلط عدد:

هغه عدد دی چه حقيقي او موهومي دواړه برخې يې صفر وي.

مثال:- که په $z = a + bi$ کې $a = 0$ او $b = 0$ وي نو $z = a + bi = 0 + 0i = 0$ کيږي دغه عدد ته صفري مختلط عدد وايي.

مثال: لاندې $(i - 3, 4, 2i, 2i - 3)$ عددونه په معياري شکل وليکئ؟

| مختلط عددونه | معياري شکل $(z = a + bi)$ |
|---|---|
| $i - 3$ | $-3 + i$ |
| $4$ | $4 + 0i$ |
| $2i$ | $0 + 2i$ |
| $2i - 3$ | $-3 + 2i$ |

د مختلطو عددونو څلورګونی عملیې:

د مختلطو عددونو جمع:

حقيقي عدد د حقيقي عدد سره او موهومي عدد د موهومي عدد سره جمع کوو. د موهومي عددونو د جمع حاصل بیا هم یو موهومي عدد دی.

$$\begin{array}{r} 17+45i \\ \underline{28-106i} \\ 45-61i \end{array}$$

که $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وي نو $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ کیږي

$z_1 = 2 - 3i$ او $z_2 = 3 + 4i$ وي نو $z_1 + z_2$ پیدا کړئ

$$Z_1 + Z_2 = (2 - 3i) + (3 + 4i) = (2 + 3) + (-3i + 4i) = 5 + i$$

د مختلط عددونو د جمعی دعملیي خنثی عنصر $(0)$ دی. همدا ډول د $a + bi$ د عدد جمعي معکوس $-a - bi$ دی.

$$(a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i$$

د مختلطو عددونو تفریق:

حقیقي عدد د حقیقي عدد څخه او موهومي عدد د موهومي عدد څخه منفي کوو.

$$\begin{array}{r} 29-18i \\ \underline{\pm 35 \pm 67i} \\ 64+49i \end{array}$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

د مختلط عددونوضرب:

علامه په علامه کی عدد په عدد کی ضربوو اوتوانونه یې سره جمع کوو.

مثال:- $z_2 = c + di\,,\ z_1 = a + bi$ دوه مختلط عددونه راکړشوي دي دضرب حاصل یې پیدا کړئ؟

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$
$$= ac + (ad + bc)i + bd(-1)$$
$$= ac + (ad + bc)i - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

اول مثال: $z_2 = 8 + 5i, z_1 = 3 - 5i$ دوه مختلط عددونه راکړ شوي دي $z_1.z_2$ پیدا کړئ؟

$$z_1 \cdot z_2 = (3 - 5i)(8 + 5i) = 24 + 15i - 40i - 25i^2$$
$$= 24 - 25i - 25(-1) = 24 - 25i + 25$$
$$z_1 \cdot z_2 = 49 - 25i$$

د مختلط عدد مزدوج $(Cnjugate\ of\ Complex\ Number)$:

د یوه مختلط عدد مزدوج د بینوم د مزدوج په څېر دی .او په $\bar{z}$ سره یې ښیي .مثلاً که $(z)$ یو مختلط عدد وي نو مزدوج یې $(\bar{z})$ دی. فرضاً $z = x + yi$ یو مختلط عدد دې او مزدوج یې $\bar{z} = x - yi$ دې.

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2 \cdot i^2$$
$$= x^2 - y^2(-1) = x^2 + y^2$$

$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ چه دغه قاعدی ته نورم , $Norm$ (میزان، ماخذ ،هنجار، نمونه) وایي.

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \qquad ,2xRel(z)$$
$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = x - x + yi + yi = 2yi \quad , \qquad 2yiIm(z)$$

د مختلط عدد ضري معکوس:

فرضاً $a + bi$ یو مختلط عدد راکړ شوی دې د ضربي معکوس دلاس ته راوړلو لپاره یې د $\frac{1}{a+bi}$ صورت او مخرج د مخرج په مزدوج کې ضربووك

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{1 \cdot (a - bi)}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$
$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

$\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$ د $\frac{1}{a^2+b^2}$ ضربي معکوس دې.

مثال: د $2 - 3i$ ضربي معکوس پیدا کړئ؟

$$\frac{1}{2 - 3i} = \frac{2}{2^2 + 3^2} + \frac{3}{2^2 + 3^2}i = \frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$$

مثال: $x^2 + 4$ افاده تجزیه کړئ؟

$$x^2 - (-1)4 = x^2 - 4i^2 = x^2 - (2i)^2 = (x - 2i)(x + 2i)$$

د دوو مختلطو عددونو وېش:

په یوه مختلط عدد باندی د بل مختلط عدد د وېشلو لپاره مقسوم او مقسوم علیه دواړه د مقسوم علیه په مزدوج کې ضربوو.

مثال:- د $\frac{4+3i}{2+5i}$ خارج قسمت لاس ته راوړئ؟

$$\frac{4+3i}{2+5i}=\frac{4+3i}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}=\frac{8-20i+6i-15i^2}{4-25i^2}$$
$$=\frac{8-14i-15(-1)}{4-25(-1)}=\frac{8-14i+15}{4+25}$$
$$=\frac{23-14i}{29}=\frac{23}{29}-\frac{14}{29}i$$

## د يوه مختلط عدد د مزدوج خاصيت:

1- د دوه مختلطو عددو د مجموعې مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د مجموعې سره مساوي دي.

2- د دوه مزدوجو عددو د تفاضل مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د تفاضل سره مساوي دي.

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

3- د دوه مزدوجو عددو د حاصل ضرب مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو دتفاضل سره مساوي دي او هم د تبديلي د قانون پيروي کوي.

$$\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$$

4- د دوه مزدوجو عددو د خارج قسمت مزدوج د مختلطو عددو د مزدوجو د خارج قسمت سره مساوي دي.

5- د يوه مختلط عدد او دهغه د مزدوج مجموعه د حقيقي برخې دوه چند دی.

$$z+\bar{z}=2x$$

6- د يوه مختلط عدد اود هغه د مزدوج تفاضل د موهومي برخې دوه چند دی.

$$z-\bar{z}=2yi$$

7- د يوه مختلط عدد دمزدوج ،مزدوج د مختلط عدد سره مساوي دی.

$$\bar{\bar{z}}=z$$

مثال: که $z_1=4+5i$ او $z_2=-3+2i$ وي ثبوت کړئ چه $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ او $z_1\cdot z_2=z_1\cdot z_2$ کيږي؟

حل:

$z_1+z_2=(4+5i)+(-3+2i)=1+7i \quad \Rightarrow \overline{z_1+z_2}=1-7i$

$\bar{z}_1+\bar{z}_2=(4-5i)+(-3-2i)=1-7i$

ثابته شوه چه:

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z_1}+\bar{z_2}$$
$$z_1\cdot z_2=(4+5i)(-3+2i)=-12+8i-15i+10i^2$$
$$=-12-7i+10(-1)$$
$$z_1\cdot z_2=-12-7i-10=-22-7i$$
$$\overline{z_1\cdot z_2}=-22+7i$$
$$\bar{z_1}\cdot\bar{z_2}=(4-5i)(-3-2i)=-12-8i+15i+10i^2$$
$$=-12+7i+10(-1)$$
$$\bar{z_1}\cdot\bar{z_2}=-22+7i$$

په نتيجه کې:

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z_1}\cdot\bar{z_2}=-22+7i$$

## د مختلطو عددونو په ساحه کی د دويمې درجې يو مجهوله معادلې حل:

د دويمې درجې معادلې عمومي شکل $ax^2+bx+c=0$ دی او $\Delta=b^2-4ac$ ده که $\Delta>0$ وي معادله دوه جذره لري. که $\Delta=0$ وي معادله يو جذر لري او که $\Delta<0$ وي دغه ډول معادلې د حقيقي اعدادو په سيټ کی حل نلري مګر په موهومي اعدادو کی حل لري.

مثال: $x^2-10x+26=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4\cdot1\cdot26=100-104=-4$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-10)\pm\sqrt{-4}}{2\cdot1}=\frac{10\pm\sqrt{4(-1)}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{4i^2}}{2}=\frac{10\pm2i}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{2(5\pm i)}{2}=5\pm i$$

$$x_1=5+i, x_2=5-i$$

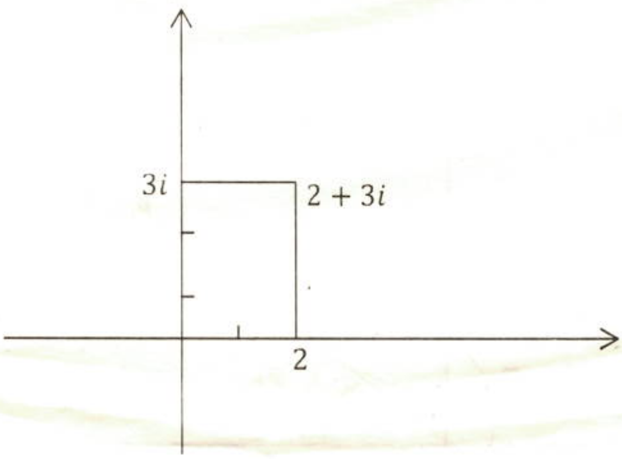
مثال: $4x^2+4ix+15=0$ معادله حل کړئ؟

حل:

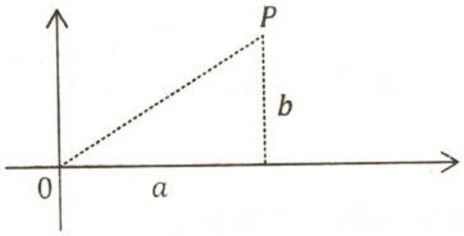
$$\Delta = b^2 - 4ac = (4i)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15 = 16i^2 - 240$$
$$= 16(-1) - 240 = -16 - 240 =$$
$$\Delta = -256$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4i \pm \sqrt{-256}}{2 \cdot 4} = \frac{-4i \pm \sqrt{256(-1)}}{8} = \frac{-4i \pm \sqrt{256i^2}}{8}$$
$$x_{1,2} = \frac{-4i \pm 16i}{8}$$
$$x_1 = \frac{-4i + 16i}{8} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i$$
$$x_2 = \frac{-4i - 16i}{8} = \frac{-20i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

په مختلط عددونو کې حقیقي برخه په افقي محور او موهومي برخه په عمودي محور پیدا کیږي.په دې ترتیب کولای شو چه دګوس داعدادو په مستوي کې مطلوب نقاط پیدا کړو د نقطو دوصلیدو څخه خط لاس ته راځي.او د خطودترسیم په نتیجه کې مختلف اشکال رسمولای شو.

مثال:- د $(2 + 3i)$ نقطه پیدا کړئ




که یوه نقطه چه وضعیه کمیتونه یې مختلط اعداد وي او وغواړو چه د محورونو د مبداء څخه یې فاصله کړو نونقطه د مبداء سره وصلوو.مطلقه قیمت یې د مبداء څخه فاصله ده .چه د فیثاغورث د قضیې سره سم یې هم فاصله پیدا کیږي.



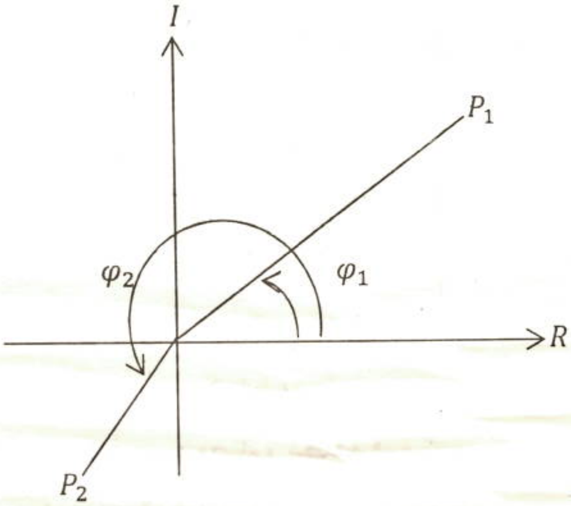

مثال: د $(P)$ د نقطي وضعيه كميت $(4 + 3I)$ دی مطلقه قیمت يي د مبداء څخه څو دی؟

$$4 + 3i = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

دمزدوجو مختلطو عددونو مطلقه قیمتونه مساوي وي او فاصله يي د محورونو د مبداء څخه مساوي ده .

| | |
|---|---|
| $-5 + 12i$ | $-5 - 12i$ |
| $= \sqrt{(-5)^2 + 12^2}$ | $= \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2}$ |
| $= \sqrt{169}$ | $= \sqrt{169}$ |
| $= 13$ | $= 13$ |

د $(\varphi)$ هغه زاويه چه د $(\overline{OP})$ خط يي د افقي سره جوړوي د مختلطو اعدادو د $(Argument)$ په نوم یادیږي حرکت يي د ساعت د عقربی خلاف وي يعنی دا زاويه همېشه مثبت وي.



# یوویشتم فصل

## د ریاضي منطق

### د ریاضي استدلال:

د ریاضیکي بیان د سمون لپاره چه کومې علامې اوطریقې استعمالیږي د ریاضي د استدلال په نوم یادیږي.

شهودي درک یا مشاهدات:-هغه مفاهیم چه د حواسو پواسطه درک شي اوقبلېدل یې استدلال ته ضرورت و نه لري. مشاهدات یا شهودي درک ورته وایي.

لکه موازي خطونه، نه قطع کوي. متقابل براس زاویې مساوي وي.او داسې نور.

### تمثیلي استدلال:

هغه استدلال دې چه د یوریاضیکي بیان د وضاحت لپاره مثالونه وویل شي او د هغوی د ورته والي له کبله نتایج لاس ته راوړل شي.

لکه په عامیانه ډول [مار خوړلی د پړي نه ډاریږي] دا یو قیاسي استدلال دی.

### استقرائي استدلال:

استقراء کلي په کلي ګرځېدلو ته وائي.

او په اصطلاح کی د ټولو طبعي عددونو ،ټولو جفتو عددونو یا ټولو طاقو عددونو لپاره د یوه فارمول ثبوتولو ته استقراء یا استقرائي استدلال وایي.

د ټولو طاقوعددونو مجموعه د $S_n = n^2$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

د ټولو جفتوعددونو مجموعه د $S_n = n(n+1)$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

د ټولو مسلسلوعددونو مجموعه د $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ فارمول پواسطه پیدا کیږي.

داستقرائي استدلال ثبوت

دغه ثبوتونه د ریاضي په استقراء کی ثبوت شوي دي.

لاندی جدول کی خالي ځایونه ډک کړئ

| د متوالي عددونو شمېر | دمتوالي طبعي عددونومکعبونه | دمکعبونومجموعه | دمجموعې فارمول |
|---|---|---|---|
| 1 | $1^3$ | | $1^2$ |
| 2 | $1^3+2^3$ | | |
| 3 | $1^3+2^3+3^3$ | 36 | |
| 4 | $1^3+2^3+3^3+4^3$ | | $10^2$ |
| $n$ | $1^3+2^3+3^3+\cdots n^3$ | | $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$ |

مثال: ثبوت کړئ چه $P(n)=4^{2n}-1$ په (5) باندی د وېش وړ دي؟

حل: د (1) لپاره يي ثبوتوو.

$$P(1)=4^{2\cdot1}-1=16-1=15$$

(15) په (5) باندی وېشل کيږي.

په $(n)$باندې يې د وېش وړ فرضوو.

ثبوتوو چه په $(n+1)$ باندی هم د وېش وړ دی.

ثبوت:

$$P(n)=4^{2n}-1=5r$$
$$4^2\cdot(4^{2n}-1)=5r\cdot4^2\Rightarrow4^{2n+2}-4^2=5r\cdot16$$
$$4^{2(n+1)}-1=15+16\cdot5r=5(3+16r)$$

د مساوات ښۍ خوا په (5) وېشل کيږي. نو چپ طرف يي هم وېشل کيږي.نو اخرنی مساوات عبارت دی:

$$P(n+1)=4^{2(n+1)}-1$$

ثابته شوه چه که په راکړ شوي فارمول کی د $(n)$ په عوض هر طبعي عدد وضع شي په (5) وېشل کيږي.

## استنتاجي استدلال

که د یوی عملیی نتیجه همېشه ثابته وي او ښه په ډاډ سره يي په صحت حکم وشي دغه استدلال ته استنتاجي استدلال وايي. لاندی جدول ته وګورئ

| | | | |
|---|---|---|---|
| 8 | 12 | 19 | 23 |
| 15 | 19 | 26 | 30 |
| 30 | 38 | [illegible] | [illegible] |
| 18 | 26 | 40 | 48 |
| 9 | 13 | 20 | 24 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

په پورته جدول کی د عدد سره (7) جمع شوي دي.دجمع حاصل يي دوه چند شوی دي.بيا ببرته (12) ورڅخه منفي شوي دي د تفريق حاصل يي نيمايي شوی دي په دغه عددو کی هرعدد د اولني عدد څخه د(1) په اندازه زيات شوی دي.چه دغسی عمل ته استنتاجي استدلال وايي.

## دحکم د نفی کولو استدلال:

دغېرناطقو عددونو د جمع حاصل يو غېر ناطق عدد وي.

د دغه حکم د معلومات لپاره چه دا حکم همېشه صحيح دی. نو$(x)$ او$(y)$ دوه مجهول عددونه په نظر کی نيسو چه دجمع حاصل يي $(x+y)$ دی بيا دغه عددونو ته قيمتونه ورکوو. مثلاً $x=1+\sqrt{2}$ او $y=1-\sqrt{2}$ دي دواړه عددونه طرف په طرف جمع کوو.

$$x+y=1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=2$$

ګورو چه $(x+y=2)$ يو ناطق عدد دي.غېر ناطق عدد نه دي.نو ثابته شوه چه د دوه غېرناطقو عددو د جمع حاصل همېشه غېرناطق عدد نه وي.

## د خلف برهان يا غېر مستقيم ثبوت:

دقضيي د عکس ثبوت ته غېر مستقيم ثبوت وايي.

قضيه: که د يوه عدد مربع جفت وي نو عدد هم جفت دی.

مفروض: که $n^2$ جفت وي .

مطلوب: ثبوتوو چه $(n)$ هم جفت دي.

ثبوت: $n = 2k + 1$ فرضوو نو ليکو چه:

$$n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$
$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

د پورته رابطی څخه څرګنده شوه چه $(n^2)$ طاق دی او دا د فرضيي خلاف ده نو داچه $(n)$ يو جفت عدد دی صحيح نه دی.

## د رياضي منطق او د بيان استنتاج:

بيان يوه خبري جمله ده چه د (هو) او (نه) دواړو احتمال ولري.

که بيان په (P) او د بيان صحت په (T) او غلطي يي په (F) وښيو او(~P) د (P) دبيان نفي وي نو د صحت جدول يي په لاندی ډول جوړيږي.

| $P$ | $\sim P$ |
|---|---|
| $T$ | $P$ |
| $F$ | $T$ |

## د بيانونو ترکيب:

1- $P \wedge Q$ کی $(\wedge)$ د (او) معنی ورکوي.
2- $P \vee Q$ کی $(\vee)$ د (يا) معنی ورکوي.
3- $P \Rightarrow Q$ کی $(\Rightarrow)$ د (په نتيجه کې) معنی ورکوي.
4- $P \Leftrightarrow Q$ کې $(\Leftrightarrow)$ د دوه ارتباط معنی ورکوي

مثال: د ثحت په جدول کی وښياست چه $p \vee (p \Rightarrow q)$ بيان په کوم وخت کی صحيح دی.

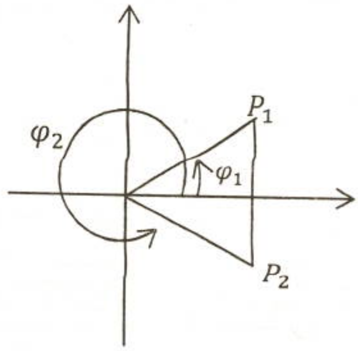
| $p$ | $q$ | $p \Rightarrow q$ | $p \vee (p \Rightarrow q)$ |
|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $F$ | $F$ | $T$ |
| $F$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $F$ | $F$ | $T$ | $T$ |

تمت بالخير

په 1394/4/23 نيټه چه د روژی د مبارکی مياشتی د اوه ويشتم سره سمون خوري د جلال اباد په ښار کی د تالاشی چوک د حاجي زرخان په پلازه کی پای ته ورسيدلو .

سردار محمد (خوږيانی)

ددوه مزدوجو مختلطو عددونو د ارګومینټونو د جمع حاصل مکمل دوران ($360^\circ$) وي.




## دمختلطو عددونود دويم جذر پيدا کول:

دمختلط عدد دويم جذر د لاندې فارمول په واسطه پيدا کيږي.

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$$

ثبوت:

$$\left(\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi}\right)^2 = a+bi+2\sqrt{a+bi}\cdot\sqrt{a-bi}+a-bi \ldots\ldots 1$$

$$= 2\sqrt{a^2+b^2}+2a$$

$$\sqrt{\left(\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi}\right)^2} = \sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} \ldots..2$$

$$\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi} = \sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} \ldots\ldots 3$$

$$\sqrt{a+bi}-\sqrt{a-bi} = \sqrt{2\left(-\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} = i\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)} \ldots..4$$

دريمه او څلورمه معادله طرف په طرف جمع کوو.

$$\frac{2\sqrt{a+bi}}{2} = \frac{\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)}+i\sqrt{2\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}}{2} \ldots\ldots.5$$

$$\sqrt{a+bi}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots 6$$

$$\sqrt{a-bi}=\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \quad \ldots\ldots 7$$

اول مثال: د $\sqrt{-5+12i}$ دويم جذر پيدا کړئ؟

$$\sqrt{-5+12i}=\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}=3+2i$$

دويم مثال:

$$\sqrt{-2i}=\sqrt{\frac{\sqrt{0+4}+0}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{0+4}-0}{2}}=1$$

# د ځینو کاشفینو انځورونه


بینارډ ریمان


کارل فریډ ریچ


اریتوستنس


جورج کانتیور


اسحاق نیوټن


ارشمیدس


محمد بن موسی


پیرک اندرویس


فارما


وین ستهندریو


لایبنیز


کووشی


وایرس ترس


هرمت

## چاپ شوي کتابونه

- ❊ عمومي رياضي ( نوی نصاب )
- ❊ عمومي فزيک ( نوی نصاب )
- ❊ ابتدائيه رياضي او هندسه (نوی نصاب)

## تر چاپ لاندې کتابونه

- ❊ د فزيک د تمريناتو حل ( نوی نصاب)
- ❊ د رياضي د تمريناتو حل ( نوی نصاب)
- ❊ د عمومي رياضي ( فارسي ترجمه)
- ❊ عمومي هندسه
- ❊ د عمومي هندسې ( فارسي ترجمه )
- ❊ عمومي مثلثات
- ❊ عمومي رياضي ( فارسي ژباړه)
- ❊ عمومي فزيک ( فارسي ژباړه)

**سپين غر تعليمي مرکز**

ميهن خپرندويه ټولنه

پېښور - جلال آباد

0321-9895621-03005981425
0788529194 - 0773535420