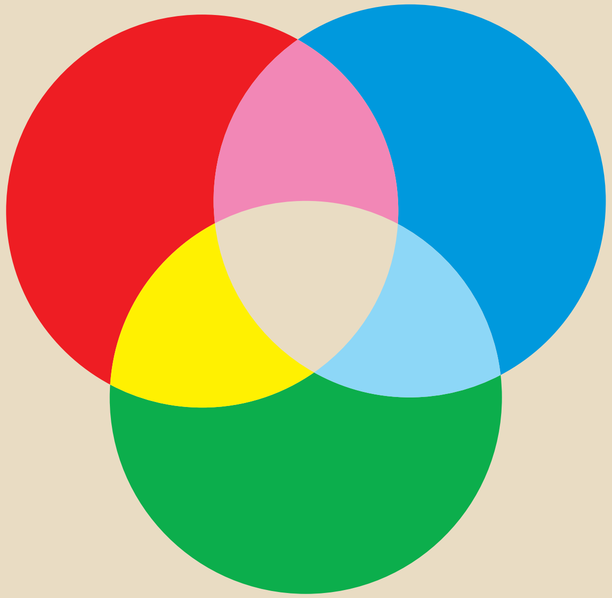
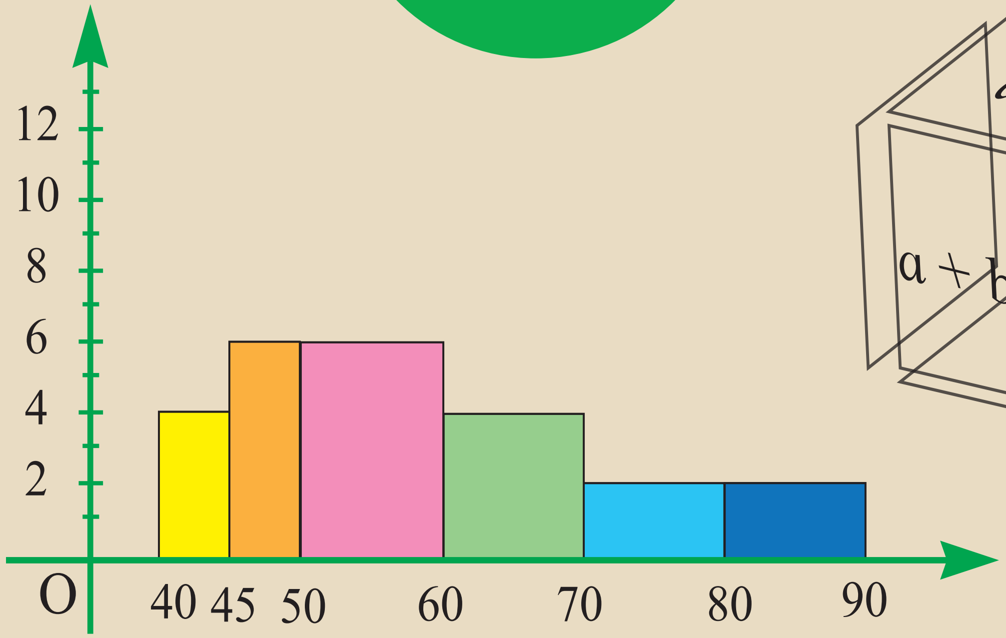
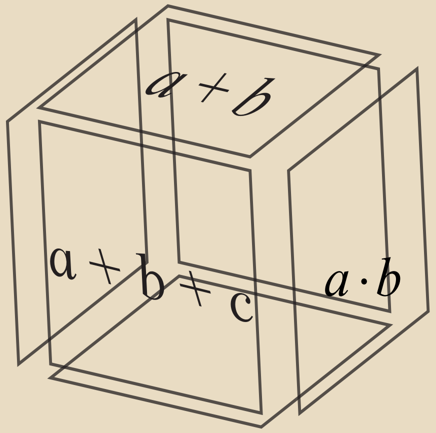
د پوهنې وزارت

رياضي

نهم ټولګی







رياضي نهم ټولګی

۱۳۹۸ هـ. ش.

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هېواد به تل ځلیږي
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه یان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحيم

رياضي
نهم
ټولگی

۱۳۹۸

هـ.ش

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: رياضي

مؤلفين: د تعليمي نصاب د رياضي ديپارتمنت د درسي کتابونو مؤلفين

اډيټ کوونکي: د پښتو ژبې د اډيټ ديپارتمنت غړي

ټولګی: نهم

د متن ژبه: پښتو

انکشاف ورکوونکی: د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف لوی رياست

خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړيکو او عامه پوهاوي رياست

د چاپ کال: ١٣٩٨ هجري شمسي

د چاپ ځای: کابل

چاپخونه:

برېښناليک پته: curriculum@moe.gov.af

د درسي کتابونو د چاپ، وېش او پلورلو حق د افغانستان اسلامي جمهوريت د پوهنې وزارت سره محفوظ دی. په بازار کې يې پلورل او پېرودل منع دي. له سرغړوونکو سره قانوني چلندکيږي.

د پوهنې د وزير پيغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښوونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته يې ژوند رابښلی، او د لوست او ليک له نعمت څخه يې برخمن کړي يو، او د الله تعالی پر وروستي پيغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پيغام ورته (لوستل) و، درود وايو.

څرنګه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمريز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د ګران هېواد ښوونيز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدينو شوراګانې د هېواد د پوهنيز نظام شپږګوني بنسټيز عناصر بلل کيږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختيا او پرمختيا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونيز نظام کې د ودې او پراختيا په لور بنسټيزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونيز نصاب اصلاح او پراختيا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړيتوبونو څخه دي. همدارنګه په ښوونځيو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونيزو تأسيساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کيفيت او توزيع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور يو، چې د باکيفيته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنيو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونيز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توګه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مديرانو څخه په درناوي هيله کوم، چې د هېواد بچيانو ته دې د درسي کتابونو په تدريس، او د محتوا په لېږدولو کې، هيڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د يوه فعال او په ديني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زيار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤوليت په درک سره، په دې نيت لوست پيل کړي، چې د نن ورځې ګران زده‌کوونکي به سبا د يوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او ګټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانګه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه ګټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځيرکو او فعالو ګډونوالو په توګه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدريس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونيز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په ليکلو او چمتو کولو کې يې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپيڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بريا غواړم.

د معياري او پرمختللي ښوونيز نظام او د داسې ودان افغانستان په هيله چې وګړي يې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزير

دکتور محمد ميرويس بلخي

فهرست

مخ

لومړی څپرکی: دایره ۱

- د دایرې عناصر، د یوې مستقیمې کرښې حالتونه، د دایرو موقعیت نظر یو بل ته
- د دایرې اړوند زاویې
- د دایرې د وتر او شعاع ځانګړتیاوې
- د دایرې محیطي او مماسي زاویې

دویم څپرکی: په یوه دایره کې د اوړدوالي اړیکې ۲۷

- د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته
- د دایرې مماس کرښه، د دایرې دننی او باندنی زاویه
- محیطي او محاطي دایره
- په دایره کې د مرسوم څلور ضلعي ځانګړتیاوې (خواص)
- د منظمې مضلع ترسیم، د د ایرې محیط او مساحت

دریم څپرکی: تحلیلي هندسه ۵۵

- د دوو ټکو تر منځ واټن (فاصله)
- د یوه قطعه خط (ټوټې کرښې) د منځنی ټکي مختصات
- د مستقیمې کرښې میل، د موازي او عمود کرښو میلونه
- د مستقیمې کرښې معادله، د هغې مستقیمې کرښې معادله چې میل او یو ټکی یې معلوم وي
- د مستقیمې کرښې عمومي معادله
- د خطي معادلو سیستم
- د خطي معادلو د سیستم حل په تعویضي او افنا طریقې سره
- د ځای بدلون، انتقال، انعکاس او دوران

څلورم څپرکی: مثلثات ۹۵

په مثلث کې د تالس قضیه

- د حاده زاویې ساین، کوساین او تانجنت
- د ځانګړو زاویومثلثاتي نسبتونه، د میل او تانجنت تر منځ اړیکې
- مثلثاتي جدول، د قایم الزاویو مثلثونو حل
- مثلثاتي معادلې

فهرست مخ

پنځم څپرکی: څو جمله يي ګانې ۱۲۷
- په فکتورونو تجزيه
- د الجبري افادو ضرب، د مکعبونو مجموع او تفاضل
- کوچنی مشترک مضرب
- د الجبري افادو وېش
- د الجبري افادو د عمليو د سرته رسولو ترتيب

شپږم څپرکی: نامساوات ۱۵۱
- د خطي نا مساواتو حل
- فاصلې يا انتروالونه
- د بينوم د علامې ټاکل، د کسري افادو د علامو تحليل او ټاکل
- کسري نامساواتونه، دوه متحوله خطي نامساوات
- د نامساواتو سيستمونه

اووم څپرکی: يو مجهوله دويمه درجه معادلې ۱۷۵
- د دويمې درجې د معادلو حل
- غير خطي اړيکې
- په هندسيي لاره د دويمې درجې د معادلو حل د محمد بن موسی فورمول، تکميل مربع

اتم څپرکی: احصائيه ۱۹۵
- د ډېټا data د دسته بندي لاره، د نبنتو يا متصلو ډېټا data ګانو دسته بندي او وزني اوسط
- مستطيلي او دايروي ګرافونه
- ميانه، د تحول ساحه او د انحراف اوسط

نهم څپرکی: احتمالات ۲۲۱
- د ناڅاپه پېښو اتحاد او تقاطع
- بشپړ او مکمل سټ
- په ستونو مدل جوړول
- د شمېرلو اصول

لومړی څپرکی

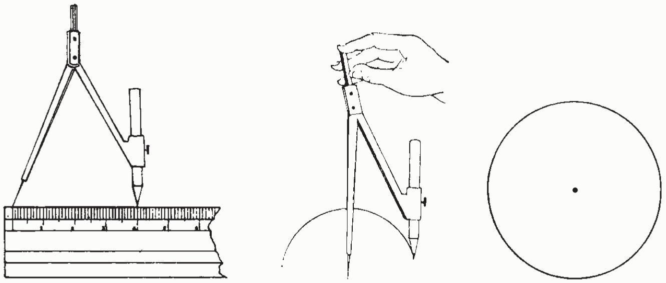
دایـــره

دایــره (CIRCLE)

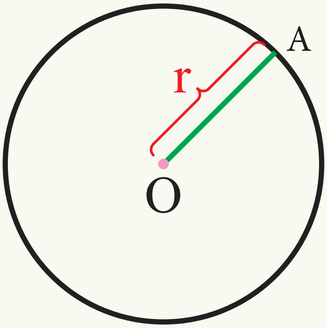
شکل ته پام وکړئ هغه هندسي شکلونه چــې په تصویــر کــې وینــئ، نومونه یې واخلئ.

فعالیت

یــو ټکــی د کاغــذ پر مخ وټاکئ، د 4cm پــه اوږدوالي د پرکار خولــه خلاصه او ددې ټکي شاوخواته، یو بشپړ دوران ورکړئ، لاسته راغلی شکل او ټاکل شوی ټکی څه نومیږي؟



تعریف

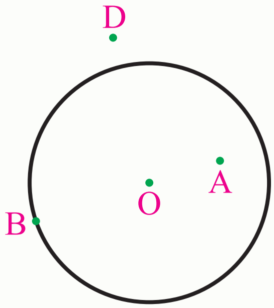


په یوه مستوي کې د هغو ټولو ټکو سټ چې له یوه ټاکلي ټکي څخه مساوي واټن(فاصله) ولري، دایره نومیږي، یا په بل عبارت دایره له یوې تړلې منحني څخه عبارت ده چې له یوه ټاکلي ټکي څخه مساوي واټن ولري.

تړلې منحني ته د دایرې محیط او ټاکلي ټکي ته د دایرې مرکز وایي چې په $C(O,r)$ ښودل کیږي.

د دایرې مرکز په شکل کې O او شعاع یې د r په توررو ښودل کیږي.

فعالیت



- په لاندې شکل کې د A ، B او D ټکو ځایونه (موقعیت) نظر O دایرې ته وټاکئ.
- د هغو ټکو واټن د دایرې له مرکز څخه اندازه او د دایرې د شعاع له اوږدوالي سره پرتله کړئ.
- په خپله خوښه درې نور ټکي چې په دایره کې دننه او له دایرې څخه بهر پراته وي، په پام کې ونیسئ. آیا لاسته راغلې اړیکې د دې ټکو لپاره هم سمې دي؟

پایله:

1- د هغو ټکو سټ چې واټن یې د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع څخه کوچنی وي، د دایرې دننه ساحه(منخ) بلل کیږي، یا $I=\{A/|\overline{OA}|<r\}$

2- د هغو ټکو سټ چې واټن یې د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع سره مساوي وي، د دایرې محیط یا مخ ویل کیږي، یا $C=\{B/|\overline{OB}|=r\}$

3- د هغو ټکو سټ چې فاصله یې د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع څخه لوی وي، د دایرې باندنی ساحې په نامه یادیږي، یا $E=\{D/|\overline{OD}|>r\}$

4- د مستوي هغه برخه چې د دایرې د محیط او د هغې د د اخلي سطحې په واسطه جلا شوې وي، د دایرې د سطحې په نوم یادیږي.

پوښتنې

1- یوه دایره د $2cm$ په شعاع رسم کړئ. د لاندې ټکو څخه کوم یو یې د دایرې په دننه، بهر او په محیط کې پروت دی:

- د A ټکي واټن د دایرې له مرکز څخه $1.4cm$ دی.
- د B ټکي واټن د دایرې له مرکز څخه $2.3cm$ دی.
- د C ټکي واټن د دایرې له مرکز څخه صفر دی.
- د D ټکي واټن د دایرې له مرکز څخه $\frac{4}{2}cm$ دی.

2- په کوم حالت کې یو ټکی د دایرې پر محیط پروت وي.

د دايرې عناصر
(Elements of a Circle)

شکل ته پام وکړئ د کېک مخ کوم هندسي شکل را ښيي او پرې شوې برخه يې د دايرې کوم عنصر راښيي؟

د دايرې د عناصرو تعريف

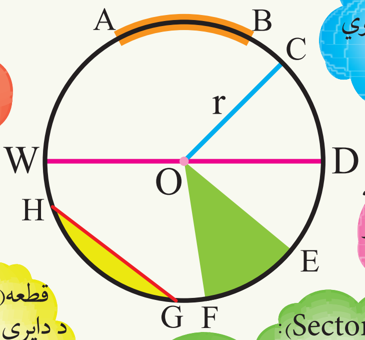
لومړی شکل او د دايرې د عناصرو تعريفونه خپلو کتابچوته نقل او وروسته لاندې تعريفونه د شکل له اړوندو عناصرو سره، په خپلو کتابچو کې ونښلوئ.

قوس(Arc):
د دايرې د محيط يوه برخه د دايرې د قوس په نوم يادېږي.

شعاع(Radius):
هغه کرښه چې د دايرې مرکز دمحيط له يوه ټکي سره نښلوي د دايرې شعاع بلل کېږي.

وتر(Chard):
هغه قطعه خط چې د دايرې د محيط دوه ټکي ونښلوي د دايرې وتر بلل کېږي.

قطر(Diameter):
هغه وتر چې د دايرې له مرکز څخه تېر شي، د دايرې قطر بلل کېږي او اوږوالی يې د شعاع دوه برابره وي.



قطعه(Segment):
د دايرې د سطحې يوه برخه چې د وتر په واسطه د دايرې له سطحې څخه جلا شوې وي د دايرې د قطعې په نوم يادېږي.

قطاع(Sector):
د دايرې د سطحې يوه برخه چې د دوو شعاع ګانو يا ورانګو او اړوند قوس په واسطه د دايرې له سطحې څخه جلا شوې وي.

فعالیت

- د 4cm شعاع په اندازه یوه دایره رسم او له کاغذ څخه هغه پرې کړئ.
- د غه دایره داسې قات کړئ چې دواړه نیمې دایرې یو پر بل منطبقې شي.
- کاغذ خلاص کړئ، د کاغذ پر مخ قات شوې کرښه د څه په نامه یادېږي.
- دا ځل دوه نیمې دایرې بیا قات او قات کاغذ داسې خلاص کړئ چې څلور مساوي برخې لاسته راغلې وي. څو قطعه خطونه(ټوټه کرښې)وینئ. هر یو د څه په نامه یادېږي؟
- څلور لاسته راغلې زاویې اندازه کړئ او وواياست چې یو له بل سره څه اړیکې لري؟
- د یوې دایرې د قطر او شعاع تر منځ اړیکې څه دي؟
- دایره داسې قات کړئ چې دوه نامساوي برخې جوړې شي، هغه خلاصه کړئ، جوړه شوې کرښه د څه په نامه یادېږي؟ د هغې اوږدوالی د دایرې له قطر سره پرتله کړئ.

پایله:

- ومو لیدل چې په هره دایره کې که چېرې د دایرې د محیط دوه ټکي سره ونښلوو، د دایرې وتر لاسته راځي.
- په هره دایره کې ترټولو لوی وتر، د دایرې قطر دی چې د شعاع دوه برابره دی.
- د یوې دایرې هر قطر، وتر، خو هر وتر قطر نه دی.
- هغه قوس چې د یوې دایرې د محیط له نیمايي څخه کوچنی وي، د کوچني قوس (minor Arc) په نامه یادېږي.
- هغه قوس چې د یوې دایرې د محیط له نیمايي څخه لوی وي، د لوی قوس (major Arc) په نامه یادېږي.

پوښتني

1- د $C(0,4)$ دایره رسم کړئ.

a) د دایرې شعاع یا وړانګه، قطر، قطعه او قطاع په شکل کې و ښیئ.

b) د دایرې د قطر اوږدوالی وټاکئ.

c) د دایرې محیط په څلورو مساوي برخو وویشئ، له دې څخه، کومه پایله په لاس راځي؟

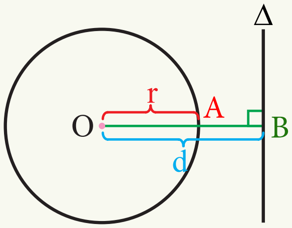
d) د دایرې داخلي ناحیه، خارجي ناحیه او د دایرې محیط د مختلفو رنګونو په واسطه په نښه کړئ.

له دایرې سره د یوې مستقیمې کرښې حالتونه

مخامخ شکل ته پام وکړئ او ووایاست چې قلمونه او هندسي بکس، له دایرې سره څه اړیکې لري؟ هره یوه توضیح کړئ.

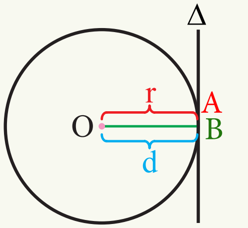
فعالیت

- یوه دایره او مستقیمونه داسې رسم کړئ چې له دایرې سره یوه‌ټکی، دوه ټکي او هېڅ ګډ(مشترک) ټکی و نه لري.
- د دایرې له مرکز څخه په هره مستقیمه کرښه باندې عمودي کرښې رسم کړئ، د دایرې د مرکز اوکرښې تر منځ واټن اندازه کړئ او هر حالت، د دایرې د شعاع له اوږوالي سره پرتله کړئ.



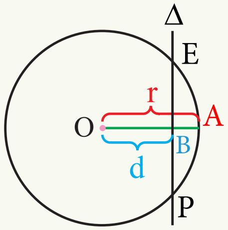
د پورتني فعالیت له کړنې څخه لیدل کېږي چې یوه مستقیمه کرښه او دایره نظر یو بل ته درې لاندې حالتونه لري:

1- که چېرې مستقیمه Δ له دایرې سره ګډ ټکي و نه لري، مستقیمه Δ له دایرې څخه بهر پرته ده، په دې حالت کې د مستقیمې Δ واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع څخه لوی دی یعنې: $d > r$

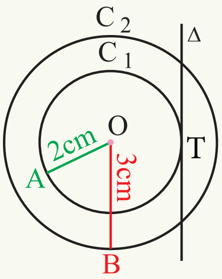


2- که چېرې Δ مستقیمه له دایرې سره یو ګډ ټکی ولري، نو د مستقیمې Δ ته پر دایره مماس وایي. په دې حالت کې د Δ مستقیمې واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع سره برابر ده یعنې: $d = r$

3– که چیرې د Δ مستقیم له دایرې سره دوه ګډ ټکي ولري، مستقیم ته د دایرې قاطع وایي، په دې حالت کې د Δ مستقیم واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع څخه کوچنی دی، یعني $d < r$



(**بېلګه مثال**): د (O) ټکی په پام کې نیسو، د (O) په مرکز د 2 او 3 سانتي مترو په شعاع دوې متحدالمرکز دایرې رسم کړئ. د مستقیمې کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه د C_1 او C_2، دوو دایرو له شعاع ګانو سره څه اړیکې لري؟



حل: په شکل کې لیدل کېږي چې د Δ مستقیم واټن د C_1 دایرې له مرکز څخه د هغې دایرې د وړانګې یا شعاع سره برابر دی یعني: $d = r$

د Δ مستقیم واټن د C_2 دایرې له مرکز څخه د هغې دایرې له وړانګې یا شعاع څخه کوچنی دی یعني: $d < r$

پوښتنې

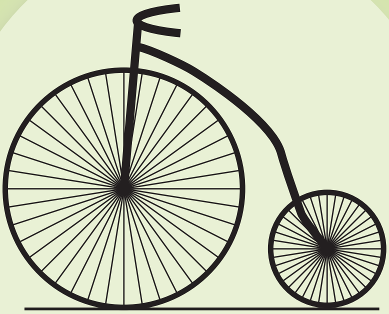
د $3cm$ شعاع په اوږدوالي سره یوه دایره رسم کړئ، په دې دایره کې کرښې، په لاندینیو راکړل شویو واټنو کې رسم او حالتونه یې څرګند کړئ:

الف: د کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه $2.5cm$ وي.

ب: د کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه $4cm$ وي.

ج: د کرښې واټن د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع سره برابره وي.

د دایرو موقعیت نسبت یو بل ته



مخامخ شکل ته په پام سره ووایئ چې:

1- د بایسیکل ټایرونه کوم هندسي شکل لري؟

2- ټایرونه یو له بل سره څو حالتونه غوره کولای شي؟

فعالیت

- دوې دایرې داسې رسم کړئ چې:

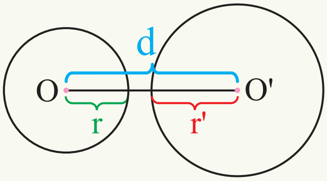
1: یو له بل سره یو ګډ ټکی ولري.

2: دوه ګډ ټکي ولري.

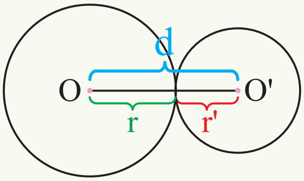
3: له یو بل سره ګډ ټکی و نه لري.

- د دایرو د مرکزونو تر منځ اوږدوالی په پورته حالتونو کې د هغو له شعاع سره پرتله کړئ.

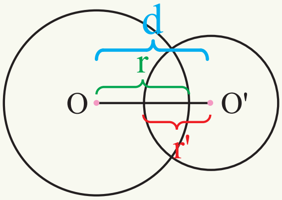
له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راځي چې:



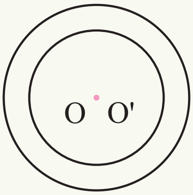
که چیرې د دوو دایرو د مرکزونو ترمنځ واټن، د هغو د شعاع له مجموعې اوږدوالي څخه زیات وي، په دې حالت کې دایرو ته ناپرېکړې یا نا متقاطع دایرې وایي، یعني $d > r + r'$



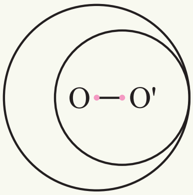
که چیرې د دوو دایرو د مرکزونو تر منځ واټن د هغو د شعاع له مجموعې سره مساوي وي. په دې حالت کې، دایرو ته خارجا مماس وایي، یعني $d = r + r'$



که د دوو دایرو د مرکزونو تر منځ واټن، د هغو د شعاع ګانو د مجموعې له اوږدوالي څخه کوچنی او د شعاع ګانو د تفریق حاصل له مطلقه قیمت څخه لوی وي، دایرې یو له بل سره متقاطع دي یعني $|r-r'|<d<r+r'$



که د دوو دایرو د مرکزونو تر منځ واټن صفر وي، دایرې د متحدالمرکز په نامه سره یادیږي، یعني $d=0$

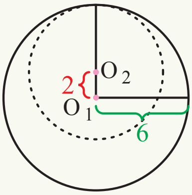


که د دوو دایرو د مرکزونو ترمنځ واټن د هغو د شعاع ګانو د تفریق حاصل له مطلقه قیمت سره مساوي وي، دایرو ته له دننه مماس وایي، یعني
$d=|r-r'|$

مثال(بیلګه): دوې دایرې داسې رسم کړئ چې د لومړۍ دایرې شعاع $6cm$ ، د دویمې دایرې او لومړۍ دایرې مرکزونو تر منځ واټن 2cm او د دویمې دایرې شعاع د لومړۍ دایرې د شعاع $\frac{2}{3}$ برابره وي، په دې حالت کې، د دې دوو دایرو موقعیت نظر یو بل ته پیدا کړئ؟

حل: که د لومړنۍ دایرې شعاع r_1 او د دویمې دایرې شعاع r_2 ونوموو، نو لرو:

$$\left.\begin{array}{l} r_1 = 6cm \\ r_2 = \frac{2}{3} r_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} r_2 = \frac{2}{3}\times 6 \\ r_2 = 4cm \end{array}$$



$$d = |r_1 - r_2| = |6-4| = |2| = 2$$

څرنګه چې:
نو له دایرې سره داخلاً مماس دي.

پوښتنې

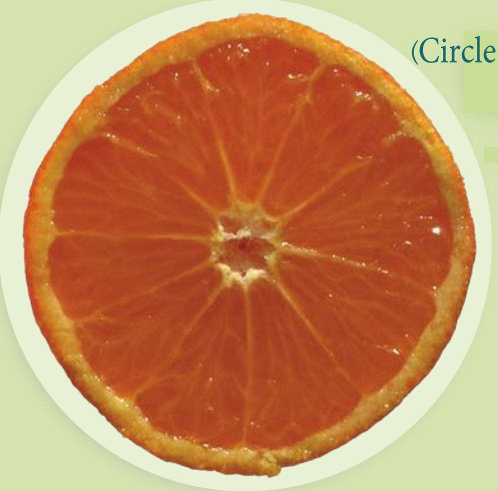
1- دوې دایرې د 6cm او 4cm په شعاع په پام کې و نیسئ او په لاندې توګه یې رسم کړئ.

الف: دایرې خارجاً (له باندې) سره مماس دي. ب: دایرې داخلاً (له دننه) سره مماس وي.

ج: له دایرې سره متقاطع وي. د: دایرې سره غیر متقاطع (ناپرېکړې) وي.

هـ : دایرې متحدالمرکزه (ګډ مرکز) وي.

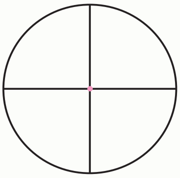
د دایرې اړوند زاويې (Circle of a Angles)



د دایرې مرکزي زاويې

تصوير ته پام وکړئ، هغه هندسي شکلونه چې په هغه کې ليدل کېږي، نوم يې واخلئ؟

فعاليت



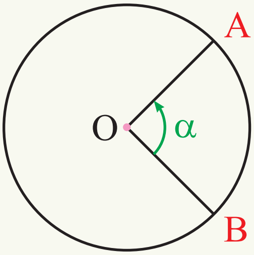
- په پورتني شکل کې، څو زاويې ليدلای شئ.
- د دې زاويو ګډ خاصيتونه کوم دي؟
- د $C(0,3)$ دايره رسم کړئ.
- په دې دايره کې يو پر بل دوه عمود قطرونه رسم کړئ.
- څو مرکزي زاويې لاسته راځي؟ د هرې زاويې د مقابل قوس اندازه څو درجې ده؟
- د دې دايرې محيط څو درجې دی؟

د پورتني فعاليت له نتيجې څخه ليکلای شو چې:

د يوه قوس اوږدوالی د هغه د مرکزي زاويې په پراخوالي پورې اړه لري، يعنې:

$$\frac{A\hat{O}B}{360^\circ} = \frac{\text{د قوس اوږدوالی}}{\text{د دايرې محيط}}$$

تعريف



هغه زاويه چې راس يې د دايرې په مرکز پروت او ضلعې يې د دايرې شعاع ګانې وي، مرکزي زاويه بلل کېږي، لکه: د $A\hat{O}B$ يا د $\hat{\alpha}$ زاويه:

هره مرکزي زاويه له دايرې څخه يو قوس بېلوي چې دغه قوس د خپلې مخامخ مرکزي زاويې سره مساوي اندازه لري، لکه: د $\overset{\frown}{AB}$ قوس چې له α زاويې سره مساوي دی.

د قرارداد له مخې ويلای شو چې په يوه دايره کې د مخامخ قوس اندازه د درجې له مخې له مرکزي زاويې سره مساوي ده، يعني: $\hat{AOB} = \overset{\frown}{AB} = \hat{\alpha}$

لومړی مثال: که د $C(O, r)$ په دايره کې لوی قوس د کوچني قوس پنځه برابره وي، نو د کوچني قوس، لوی قوس او د هغې د مرکزي زاويو اندازه پيدا کړئ.

حل: که کوچنی قوس $\overset{\frown}{PQ} = x$ وي، نو لوی قـوس يې $\overset{\frown}{PAQ} = 360^{o} - x$ دی نو ليکلای شو، چې:

$$\overset{\frown}{PQ} + \overset{\frown}{PAQ} = 360^{o}$$

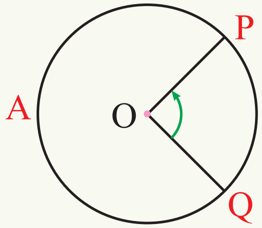
$$\overset{\frown}{PAQ} = 5\overset{\frown}{PQ}$$

$$x + 5x = 360^{o}$$

$$6x = 360^{o}$$

$$x = 60^{o} \quad \Rightarrow \hat{POQ} = x = 60^{\circ}$$

$$\overset{\frown}{PAQ} = 5x = 5 \times 60 = 300^{\circ}$$



دويم مثال: په لاندې شکل کې چې که $\hat{KOS} = 31^{\circ}$ ، $\hat{EOJ} = 82^{\circ}$ ، $\overline{EK}$ د دايرې قطر وي. د $\overset{\frown}{SJ}, \overset{\frown}{KJ}, \overset{\frown}{SK}$ د $\overset{\frown}{ES}$ قوسونه په درجه پيدا کړئ.

$\overset{\frown}{SK} = \hat{SOK} = 31^{o} \quad \Rightarrow \overset{\frown}{SK} = 31^{o}$ ...... د مرکزي زاويې مخامخ قوس

$$\hat{KOJ} = 180^{o} - \hat{EOJ} = 180^{o} - 82^{o} = 98^{o}$$

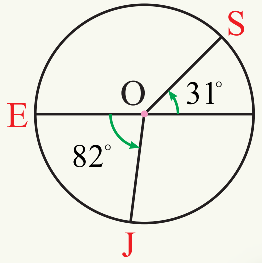
$$\hat{KOJ} = \overset{\frown}{KJ} = 98^{\circ}$$

$$\overset{\frown}{SJ} = \overset{\frown}{SK} + \overset{\frown}{KJ} = 31^{o} + 98^{o} = 129^{o}$$

$$\overset{\frown}{JE} = \hat{EOJ} = 82^{o}$$

$$\overset{\Delta}{EOS} = 180^{o} - \overset{\Delta}{SOK} = 180^{o} - 31^{o} = 149^{o}$$

$$\overset{\Delta}{EOS} = \overset{\frown}{ES} = 149^{o}$$

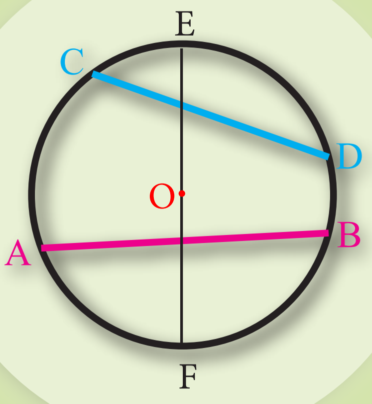


پوښتنې

1- د A, B او C درې ټکي د $C(O, r)$ پر دايره داسې پراته دي چې $\hat{AOB} = 75^{\circ}$ ، $\hat{BOC} = 136^{\circ}$ زاويې د OB دواړو خواوو ته پرتې وي، $\overset{\frown}{AC}$ حساب کړئ.

2 - يوه مرکزي زاويه، د 180° په اندازه رسم کړئ.

د دايرې د وتر خواص



شکل ته پام وکړئ د $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$ او $\overline{EF}$ مستقيمي کرښې په څه نامه ياديږي؟ د $\overline{EF}$ کرښې ځانګړتيا څه ده؟ او له $\overline{AB}$ او $\overline{CD}$ کرښې سره څه اړيکې لري؟

فعاليت

- د $C(O,r)$ په دايره کې د $\overline{AB}$ وتر رسم کړئ.
- د دايرې د $\overline{ED}$ قطر داسې رسم کړئ چې د $\overline{AB}$ په وتر د H په نقطه عمود وي.
- د (O) ټکی د A او B سره ونښلوئ، لاسته راغلی مثلث څه ډول مثلث دی؟
- په لاندې تشو ځايونو کې د $(=,<$ يا $>)$ ور نښې وليکئ.

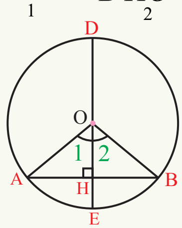
$$\overline{OA}\ \square\ \overline{OB}\quad,\quad \overset{\frown}{AE}\ \square\ \overset{\frown}{EB}\quad,\quad \overline{AH}\ \square\ \overline{HB}$$

د دې فعاليت له پايلې څخه کولای شو، لاندې قضيه بيان او ثبوت کړو.

قضيه: په هره دايره کې په وتر عمود قطر، وتر او د هغې مقابل قوس نيمو ي.

ثبوت: د $B\overset{\Delta}{HO}_2$ او $A\overset{\Delta}{HO}_1$ دوو مثلثونو څخه ليکلای شو چې:

$$\left.\begin{array}{ll}\overline{OA}=\overline{OB}\text{.........} & \text{د دايرې شعاع}\\ \hat{H}_1=\hat{H}_2\text{ ....} & \text{قايمه}\\ \overline{OH}=\overline{OH}\text{........} & \text{مشترک}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{AHO}\cong\overset{\Delta}{OHB}$$

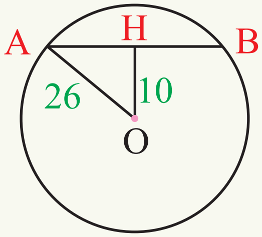


نو د دوو مثلثونو له تساوي څخه داسې پايله لاسته راځي، چې: $\overline{AH}=\overline{HB}$ او د $\overset{\Delta}{AOH}$ او $\overset{\Delta}{BOH}$ مرکزي زاويې سره مساوي دي، په پايله کې $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EB}$ دی.

مثال: د $C(O,26)$ دايره راکړل شوې ده، که چيرې پر وتر د عمود اوږدوالی، د دايرې له مرکز څخه (2) واحده وي، د $\overline{AB}$ وتر اوږدوالی حساب کړئ.

حل: د $\overset{\Delta}{OAH}$ په مثلث کې د فیثاغورث د قضیې له مخې لرو چې:

$$\overline{OA}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{OH}^2$$
$$(26)^2 = \overline{AH}^2 + (10)^2$$
$$\overline{AH}^2 = (26)^2 - (10)^2$$
$$\overline{AH}^2 = 676 - 100 = 576$$
$$\overline{AH} = 24$$
$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times 24 = 48\,\text{unit}$$



فعالیت

- د $C(0,3)$ دایره رسم کړئ.
- په دایره کې د $\overline{PQ}$ او $\overline{ER}$ دوه مساوي وترونه رسم کړئ.
- د دایرې له مرکز څخه د $\overline{PQ}$ او $\overline{ER}$ په وترونو عمود کرښې رسم او اوږدوالی یې معلوم کړئ.

د دې فعالیت له پایلې څخه لاندې قضیه بیان او ثبوتوو.

قضیه: په هره دایره کې د هغې مساوي وترونه، د دایرې له مرکز څخه مساوي واټن لري.

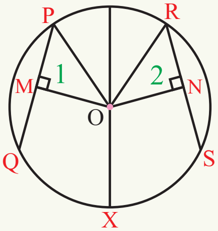
ثبوت: د $\overset{\Delta}{PMO}$ او $\overset{\Delta}{RNO}$ د دوو مثلثونو څخه لرو چې:

$\overline{OP} = \overline{OR}$ ....د دایرې شعاع

$\hat{1} = \hat{2}$ ....قایمه

$\overline{PQ} = \overline{RS}$ .... مساوي وترونه $\Rightarrow$ $\overset{\Delta}{PMO} \cong \overset{\Delta}{RNO}$

$\dfrac{\overline{PQ}}{2} = \dfrac{\overline{RS}}{2} \Rightarrow \text{PM} = \text{RN}$ $\qquad \overline{OM} = \overline{ON}$



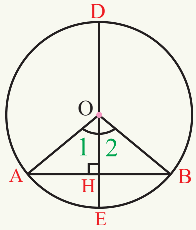
په پایله کې ویلای شو چې په هره دایره کې مساوي وترونه له مرکز څخه مساوي واټن لري.

پوښتنې

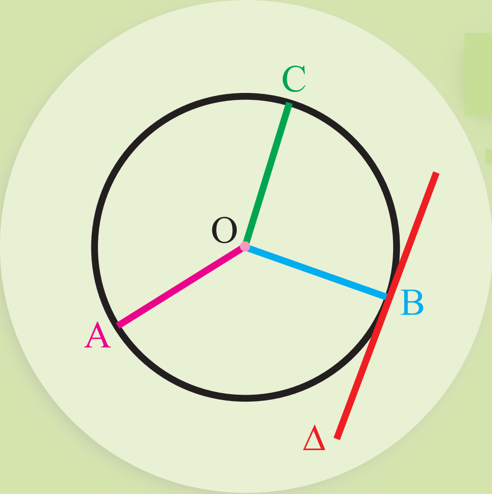
1- د $C(0,13)$ په دایره کې د $\overline{AB}$ وتر د دایرې له مرکز څخه 5 واحده واټن لري، د $\overline{AB}$ اوږدوالی پیدا کړئ.

2- که چیرې د یوې دایرې قطر د وتر له نیمایي څخه تیر شي، ثبوت کړئ چې پر وتر عمود دی.

3- په یوې دایره کې $\overline{AB} = 8cm$ وتر رسم کړئ. که چیرې د وتر عمودي واټن له مرکز څخه $\overline{OH} = 3cm$ وي، د دایرې قطر او محیط محاسبه کړئ.

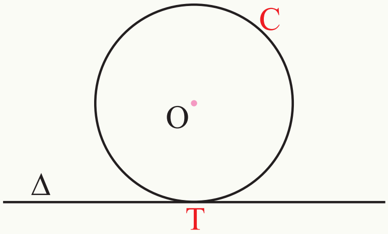


د دایرې د شعاع ځانګړتیاوې



شکل ته په پام سره، د OA، OB او $\overline{OC}$ کرښې څه نومیږي او د Δ کرښه، د دایرې او له $\overline{OB}$ وړانګې سره څه اړیکې لري؟

فعالیت



- په مخامخ شکل د (Δ) مستقیمه کرښه، د $C(0,2)$ دایرې د T په ټکي کې مماس ده. د A, B, C او D ټکي، د مماس پر مخ د T ټکی دواړو خواوو کې وټاکئ او د دایرې له مرکز سره یې ونښلوئ.
- قطعه خطونه، د خط کش په مرسته اندازه کړئ.
- د دایرې د مرکز او مماس تر منځ لنډ واټن ونیاياست؟

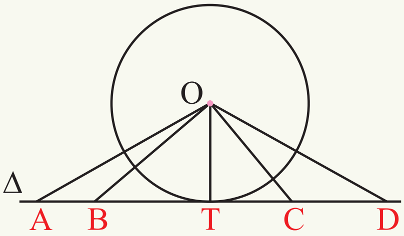
تر ټولو کوچنی واټن د یوه ټکي او یوې مستقیمې کرښې تر منځ، کوم واټن دی؟

- له پورتنیو دوو حالتونو څخه، څه پایله لاسته راوړئ؟

د دې فعالیت له پایلې څخه په لاندې توګه قضیه بیان او ثبوتوو.

قضیه: د دایرې شعاع، د تماس په ټکي کې، پر مماس عمود ده.

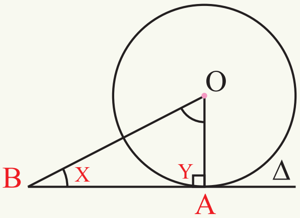
ثبوت: په لاندې شکل کې لیدل کیږي چې:



$$\overline{OT} < \overline{OB} < \overline{OA}$$
$$\overline{OT} < \overline{OC} < \overline{OD}$$

پوهیږو چې تر ټولو کوچنی واټن، د یوه ټکي او مستقیم ترمنځ عمودي واټن دی. په پایله کې ویلای شو چې مستقیمې کرښې: $\overline{OT} \perp \Delta$ دي.

لومړی مثال: په لاندې شکل کې، د Δ مستقیمه کرښه، د A په ټکي، د $C(O,r)$ پر دایره مماس ده. که چېرې د $\hat{AOB}$ مساوي 60° وي، د x زاویه پیدا کړئ.



$OA \perp BA \Rightarrow \hat{y} = 90^\circ$

$\hat{o} + \hat{x} + \hat{y} = 180^\circ$

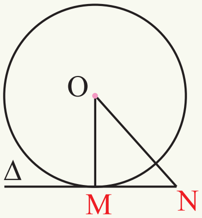
$60^\circ + \hat{x} + 90^\circ = 180^\circ$

$x = 180^\circ - 150^\circ$

$x = 30^\circ$

دویم مثال: په لاندې شکل کې، د Δ مستقیمه کرښه، د $C(O,r)$ پر دایره مماس ده، که $\overline{OM} = 4unit$ او $\overline{ON} = 5unit$ اوږدوالي ولري، د $\overline{MN}$ اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: پوهېږو، چې د دایرې شعاع، د تماس په ټکي، پر مماس عمود ده په پایله کې د $\overset{\Delta}{OMN}$ په قایم الزاویه مثلث کې، د فیثاغورث د قضیې پربنسټ لرو چې:



$\overline{ON}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MN}^2$

$\overline{MN}^2 = \overline{ON}^2 - \overline{OM}^2$

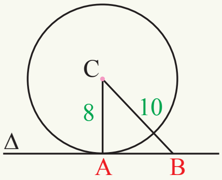
$\overline{MN}^2 = 5^2 - 4^2 = 9$

$\overline{MN} = 3$

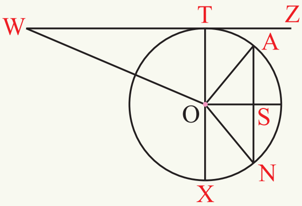
- د دایرې شعاع، د تماس په ټکي کې، پر مماس عمود وي.
- هر مماس، په هغه شعاع چې د تماس له ټکي څخه تېرېږي، عمود دی.

پوښتنې

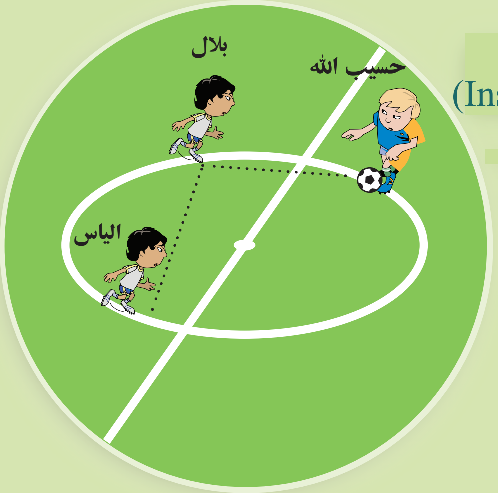
1- په مخامخ شکل کې د Δ کرښه د $P(C,r)$ پر دایرې مماس ده، که $\overline{AC} = 8unit$ او $\overline{BC} = 10unit$ اوږدوالی ولري، د AB اوږدوالی پیدا کړئ.



2 - په مخامخ شکل کې، که $\overline{WZ}$ د T په ټکي، د $C(O,r)$ پر دایرې مماس وي، $\overline{OS} = 1unit$، TW=3unit وي، د $\overline{OA}, \overline{AS}, \overline{SN}, \overline{OW}$ او $\overline{TX}$ اوږدوالی پیدا کړئ.



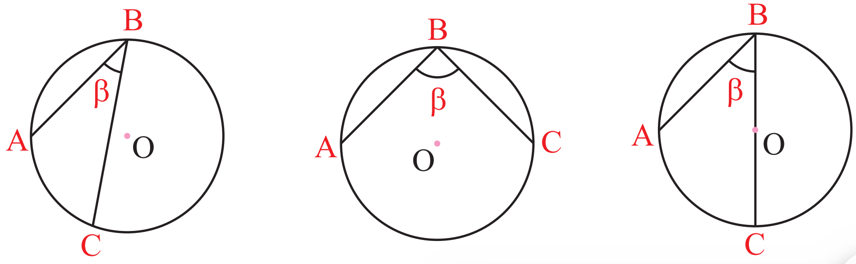
د دایرې محیطي زاویه
(Inscribed Angel of a Circle)



د فوټبال د میدان په مرکزي دایره کې حسیب الله، بلال ته او بلال الیاس ته توپ پاس کړ. هغه شکل چې د توپ د شوټ له مسیر څخه جوړیږي، څه ډول دی؟

تعریف

هغه زاویه چې رأس یې د دایرې پر محیط او ضلعې یې د دایرې دوه وترونه وي، محیطي زاویه بلل کیږي، لکه: د $\hat{ABC}$ یا د $\hat{\beta}$.



فعالیت

- د $C(O,r)$ په دایره کې د $\hat{ABC}$ محیطي زاویه چې د $\overline{BC}$ ضلع یې د دایرې له مرکز څخه تیره شي، رسم کړئ.
- د A ټکی د دایرې له مرکز (O) سره ونښلوئ، څرنګه مثلث لاسته راځي؟
- د $\hat{A}$ او $\hat{B}$ زاویې د $\overset{\Delta}{OAB}$ په مثلث کې یو له بل سره څه اړیکې لري؟
- د $\hat{AOC}$ زاویه له $\hat{A}$ او $\hat{B}$ له زاویو سره څه اړیکې لري؟

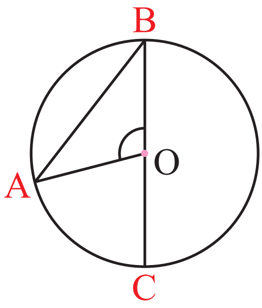
په یاد ولرئ چې:
- د مرکزي زاویې پراخوالی د خپل مخامخ قوس سره مساوي دی.
- په هر مثلث کې د خارجي زاویې پراخوالی له مجاورې زاویې پرته د دوو داخلي زاویو له مجموعې سره مساوي دی.

د مخکيني مخ د فعاليت له پايلې څخه په لاندې توګه، قضيه بيان او ثبوتوو.

قضيه: د هرې محيطي زاويې پراخوالی د خپل مخامخ قوس نيمايي دی.

دلته قضيه په هغه حالت کې ثبوتوو چې د محيطي زاويې يوه ضلع د دايرې قطر وي. د دوو نورو حالتونو ثبوت د کورنۍ دندې په توګه، زده کوونکو ته پاتې شو.

ثبوت: د $\hat{AOC}$ زاويه د $\overset{\Delta}{AOB}$ د مثلث خارجي زاويه ده، ليکلای شو چې:



مرکزي زاويه ..... $\hat{AOC} = \overset{\frown}{AC}$

$\hat{AOC} = 2\hat{B}$

نو: $\overset{\frown}{AC} = 2\hat{B}$

په پايله کې $\hat{ABC} = \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2}$

$$\left.\begin{aligned} \hat{AOC} &= \hat{A} + \hat{B} \\ \hat{A} &= \hat{B} \text{ ....ولی} \\ \hat{AOC} &= \hat{B} + \hat{B} \\ \hat{AOC} &= 2\hat{B} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

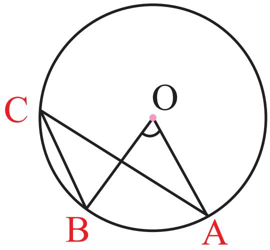
د $\hat{ABC}$ د محيطي زاويې پراخوالی له $\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ سره برابر دی.

مثال: د $C(O,r)$ په دايره کې چې مرکزي زاويه $\hat{AOB} = 60^\circ$ وي، د $\hat{ACB}$ محيطي زاويې مخامخ $\overset{\frown}{AB}$ قوس، يې پيدا کړئ.

حل: په يوه دايره کې د مرکزي زاويې او د هغې د مخامخ قوس له اړيکو څخه ليکلای شو چې:

$$\left.\begin{aligned} \hat{AOB} &= 60^\circ \\ \hat{AOB} &= \overset{\frown}{AB} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 60^\circ$$

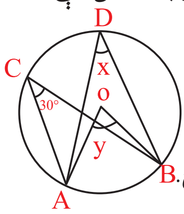
$$\left.\begin{aligned} \overset{\frown}{AB} &= 60^\circ \\ \hat{ACB} &= \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{ACB} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$



پوښتنې

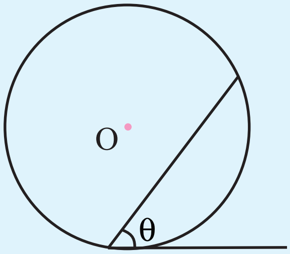
1 - په يوه دايره کې د 90° په اندازه، محيطي زاويه رسم کړئ.

2 - د دايرې پر محيط د A او B دوه ټکي په پام کې ونيسئ. د $\overset{\frown}{AB}$ د قوس په مقابل کې، څو محيطي زاويې رسمولای شو.



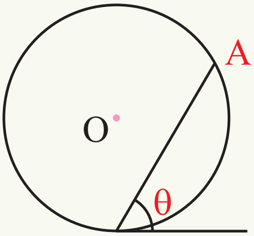
3 - په باندې شکل کې په پام کې ونيسئ، د مجهول زاويې قيمت پيدا کړئ.

د دايرې مماسي زاويه



شــکل ته پام وکړئ، هغو مســتقيمو کرښو چــې د θ زاويــه يې جــوړه کــړې ده، نوم واخلئ او د زاويې رأس چېرته پروت دی؟

تعريف



هغه زاويه چې يوه ضلع يې پر دايره مماس او دويمه ضلع يې د دايرې وتر وي او رأس يې د تماس په ټکي کې پروت وي مماسي زاويه بلل کيږي، لکه: د θ زاويه.

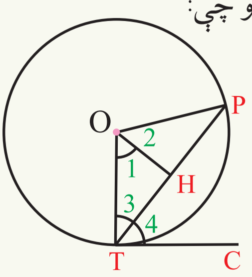
فعاليت

- د $C(0,6)$ دايره رسم کړئ.
- په دې دايره کې يوه مماسي زاويه $C\hat{T}P$ رسم کړئ.
- د دايرې د وتر انجامونه $\overline{PT}$ له مرکز سره ونښلوئ، څه ډول مثلث لاسته راځي؟
- د دايرې له مرکز څخه پر وتر عمود رسم کړئ.
- د $T\hat{O}P$ مرکزي زاويه او د $P\hat{T}C$ مماسي زاويې سره څه اړيکې لري؟

د دې فعاليت له پايلې څخه لاندې قضيه ثبوتولی شو.

قضيه: په يوه دايره کې د مماسي زاويې پراخوالی، د هغې د مخامخ قوس نيمايي په اندازه دی.

ثبوت: د $\overset{\Delta}{OHT}$ قايم الزاويه مثلث او $O\hat{T}C$ قايمې زاويې څخه لرو چې:

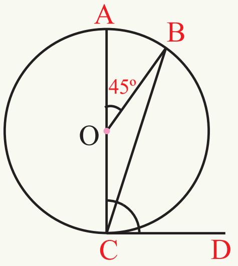


$$\left.\begin{array}{l}\hat{3}+\hat{1}=90^\circ\\ \hat{3}+\hat{4}=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{3}+\hat{1}=\hat{3}+\hat{4}\Rightarrow \hat{1}=\hat{4}$$

$$\hat{1}=\frac{P\hat{O}T}{2}=\frac{\overset{\frown}{PT}}{2}\Rightarrow P\hat{T}C=\frac{\overset{\frown}{PT}}{2}$$

لومړی مثال: په لاندې شکل کې چې د $C(0,r)$ په دایره کې د هغې مرکزي زاویه 45° وي، د محیطي او مماسي زاویو پراخوالی پیدا کړئ.

حل: د مرکزي زاویې او د هغې د مخامخ قوس له اړیکو څخه په ګټه لیکلای شو چې:



$$\hat{AOB} = 45^\circ \quad \Rightarrow \quad \overset{\frown}{AB} = 45^\circ$$

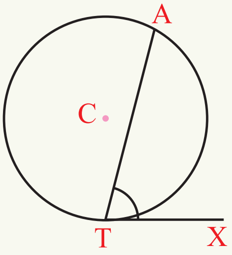
$$\hat{BOC} = 135^\circ \quad \Rightarrow \quad \overset{\frown}{BC} = 135^\circ$$

$$\hat{BCD} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67.5^\circ$$

$$\hat{ACB} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{45^\circ}{2} = 22.5^\circ$$

دویم مثال: په لاندې شکل کې د $\overset{\frown}{AT}$ قوس چې د $\hat{ATX}$ زاویې مخامخ ته واقع دی $(2\alpha - 6)^\circ$ دی، د $\hat{ATX}$ مماسي زاویې اندازه پیدا کړئ.

حـل: د مماســي زاویـې او دهغې د مخامخ قوس لـه اړیکو څخه دګټې اخیسـتلو له مخې لیکلای شو، چې:



$$\hat{ATX} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AT}$$

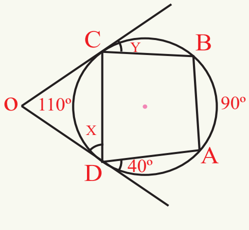
$$\hat{ATX} = \frac{1}{2}(2\alpha - 6)^\circ$$

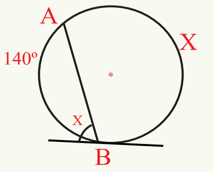
$$= (\alpha - 3)^\circ$$

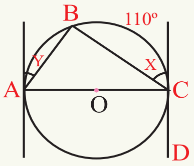
پایله: محیطي او مماسي زاویې چې د عین قوس په مقابل کې پرتې وي، سره مساوي دي. مماسي زاویه، د مخامخ قوس نیمایي ده.

پوښتنې

۱- د مماسي زاویو اندازه په لاندې شکلونو کې په لاس راوړئ.







د لومړي څپرکي لنډيز

- **دایره**: د هغو ټکو سټ یا هندسي محل چې له یوه ټاکلي ټکي څخه مساوي واټن ولري، دایره بلل کیږي.
- د هغو ټکو سټ چې واټن یې د دایرې له شعاع څخه کوچنی وي، د دایرې دننه ساحه بلل کیږي.
- د هغو ټکو سټ چې واټن یې د دایرې له مرکز څخه د دایرې له شعاع سره مساوي وي، د دایرې محیط یا مخ بلل کیږي.
- د هغو ټکو سټ چې واټن یې د دایرې له مرکز څخه نسبت د دایرې شعاع ته لوی وي، د دایرې باندنۍ ساحه بلل کیږي.
- د مستوي هغه برخه چې د منحني او د دایرې د داخلي سطحې په واسطه ببله شوې وي، د دایرې سطحه بلل کیږي.
- **د دایرې شعاع**: هغه کرښه چې د دایرې مرکز او د محیط یو ټکی سره نښلوي، د دایرې شعاع بلل کیږي.
- **د دایرې وتر**: هغه ټوټه کرښه چې د دایرې د محیط دوه ټکي سره نښلوي، ددایرې وتر بلل کیږي.
- **د دایرې قطر**: د دایرې هغه وتر چې له مرکز څخه تېرېږي د دایرې قطر بلل کیږي. هر قطر، د شعاع دوه برابره دی.
- **د دایرې قوس**: د دایرې د محیط یوه برخه چې د دوو ټکو په مرسته ببله شوې وي قوس بلل کیږي.
- **د دایرې مماس**: هغه کرښه چې له دایرې سره یو ګډ ټکی ولري، مماس بلل کیږي.
- د دایرې قطعه: د دایرې هغه برخه چې د دایرې د وتر او اړونده قوس تر منځ پرته وي، د دایرې قطعه بلل کیږي
- **د دایرې قطاع**: د دایرې یوه برخه ده چې د دوو شعاع ګانو او اړوند قوس په مرسته، د دایرې له سطحې څخه ببله شوې وي.
- که یو مستقیم له یوې دایرې سره یو ګډ ټکی ولري، د مماس او که چیرې دوه ګډ ټکي ولري، د قاطع په نوم یادیږي.
- په هره دایره کې د دایرې له مرکز څخه پر وتر عمودي کرښه، وتر او مخامخ قوس نیمايي کوي.

- د دايرې شعاع د تماس په ټکي کې پر مماس عمود ده.
- د يوې دايرې مساوي وترونه، د هغې له مرکز څخه مساوي واټن لري.
- **مرکزي زاويه**: هغه زاويه چې رأس يې د دايرې په مرکز پروت او ضلعې يې د دايرې شعاع ګانې وي، مرکزي زاويه بلل کېږي.

- د هرې مرکزي زاويې اندازه، د هغې له مخامخ قوس سره مساوي ده.
- د مرکزي زاويې د مخامخ قوس اوږدوالی د دې رابطې $\frac{A\hat{O}B}{360^\circ} = \frac{\text{د قوس اوږدوالی}}{\text{د دايرې محيط}}$ څخه په لاس راځي.
- **محيطي زاويه**: هغه زاويه ده چې رأس يې د دايرې پر محيط او ضلعې يې د دايرې وترونه وي، محيطي زاويه بلل کېږي.
- د هرې محيطي زاويې پراخوالی، د هغې د مخامخ قوس له نيمايي سره مساوي دی.
- هره محيطي زاويه، د هغې د مرکزي زاويې نيمايي ده چې د عين قوس په مخامخ کې پر ته ده.
- **مماسي زاويه**: هغه زاويه ده چې يوه ضلعه يې په دايرې مماس او بله يې د دايرې وتر او رأس يې د تماس په ټکي کې د دايرې پر محيط پروت وي، مماسي زاويه بلل کېږي.
- هره مماسي زاويه د هغې مرکزي زاويې نيمايي ده چې د عين قوس په مخامخ پرته وي.
- د دوو دايرو حالتونه يو بل ته:

_ که د دوو دايرو د مرکز ونو د واټن اوږدوالی د هغو د شعاع ګانو له مجموعې څخه لوی وي دايرې غير متقاطع بلل کېږي.

_ که د دوو دايرو د مرکزونو د واټن اوږدوالی د هغو د شعاع ګانو له مجموعې سره مساوي وي دايرې له باندې خوا مماس بلل کېږي.

_ که د دوو دايرو د مرکزونو اوږدوالی د هغو د شعاع ګانو له اوږدوالي څخه کوچنی او د شعاع ګانو د تفريق حاصل يې له مطلقه قيمت څخه لوی وي، متقاطع بلل کېږي.

_ که د دايرو د مرکزونو تر منځ واټن، د هغې د شعاع ګانو د تفريق حاصل مطلقه قيمت سره مساوي وي دايرې (دننه) مماس دی.

_ که د دايرو د مرکزونو تر منځ واټن صفر وي دايرې متحد المرکز(د يوه مرکز لرونکي) بلل کېږي.

د لومړي څپرکي پوښتنې

• په لاندې پوښتنو کې د هرې پوښتنې لپاره، څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ.

1– د یوې دایرې د قطر اوږدوالی مساوي دی په:

a) $3r$ b) π c) 2π d) $2r$

2– دایره په لاندې ډول ښودل کېږي:

a) 0 b) $(1,2)$ c) (b,a) d) $C(o,r)$

3- هغه مستقیمه کرښه چې له دایرې سره یو ګډ ټکی ولري:

a) د وتر په نوم یادېږي. b) د قوس په نوم یادېږي.

c) د مماس په نوم یادېږي. d) د محیط په نوم یادېږي.

4- د هغو ټکو سټ چې واټن یې د دایرې له شعاع څخه لوی وي:

a) د دایرې مخ بلل کېږي. b) د دایرې خارج بلل کېږي.

c) دایره بلل کېږي. d) د دایرې داخل بلل کېږي.

5- هغه وتر چې د دایرې مرکز ته له نورو وترونو څخه نژدې وي نظر نورو وترونوته:

a) لنډ وتر دی. b) اوږد وتر دی.

c) مساوي دی. d) هیڅ یو.

6- که یوه مستقیمه کرښه، دایره په دوو ټکو کې پرې کړي، هغې ته:

a) عمود وایي. b) قاطع وایي.

c) مماس وایي. d) موازي وایي.

7- که د یوې دایرې مرکزي زاویه 80° وي، د مخامخ قوس اندازه یې مساوي په:

a) 90° b) $70'$ c) $80''$ d) 80°

8- یوه مستقیمه کرښه له یوې دایرې سره څو حالتونه لري:

a) 3 b) 7 c) 4 d) 1

9- هغه زاویه چې راس یې د ایرې پر محیط او ضلعې یې دوه وترونه وي:

a) مرکزي زاویه ده. b) مماسي زاویه ده.

c) محیطي زاویه ده.

• تش ځايونه په مناسبو کلمو ډک کړئ:

1- د دايـرې هغـه برخـه چې د وتر په واسـطه د دايرې له سـطحې څخه بېله شـوې وي، د دايرې د..................... په نوم يادېږي.

2- د دايرې تر ټولو لوی وتر .... بلل کېږي.

3- د هغو ټکو سټ چې .... د دايرې له شعاع څخه لږ وي د دايرې .... بلل کېږي.

4- که مسـتقيمه کرښـه له يوې دايرې سره هېڅ ګډ .... ونلري هغه مستقيمه کرښه له دايرې څخه..................... پر ته ده.

5- په هره دايره کې پر وتر..................... قطر، وتر نيمايي او .... قوسونه د هغې څخه بېلوي.

6- په هر قايم الزاويه مثلث کې د وتر .... د .... ضلعو د مربعاتو له مجموعې سره مساوي ده.

7- په هره دايره کې هغه وتر چې مرکز ته نژدې وي، تر ټولو .... وتر دی.

8- د دايرې شعاع د تماس په ټکي پر .... عمود وي.

9- مرکزي زاويه هغه زاويه ده چې .... يې د دايرې په مرکز او ضلعې يې د دايرې..................... وي.

10- هغه زاويه چې يوه ضلع يې .... په دايره او بله يې د دايرې .... او راس يې د .... په ټکي پروت وي د .... زاويې په نوم يادېږي.

• په لاندې جملو کې سمې او نا سمې جملې د(ص) او (غ) د تورو په واسطه په نښه کړئ.

1- (　) د يوې مستوي د ټولو ټکو سټ چې د(O) له يوه ټاکلي ټکي څخه د(r) مساوي فاصلې ولري، دايره بلل کېږي.

2- (　) دايره د خپل محيط په نامه يادېږي.

3- (　) هغه قطعه خط يا ټوټه کرښه چې د دايرې د محيط دوه ټکي سره نښلوي، د دايرې د قطر په نامه يادېږي.

4- (　) په يوه دايره کې شعاع يا وړانګه د قطر نيمايي ده.

5- (　) د دايرې قطعه د($\frown$) په نښه ښودل کېږي.

-6 (   ) د هغو ټکو سټ چې د دایرې له شعاع سره مساوي واټن ولري، د دایرې د باندنۍ ساحه بلل کېږي.

-7 (   ) په یوه دایره کې عمود قطر په وتر، وتر نیمايي او دوه بېلابېل قوسونه منځ ته راوړي.

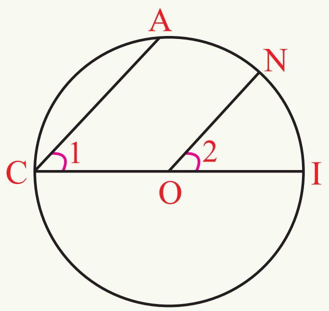
-8 (   ) ټوله دایره، د دایرې د قوس په نوم یادېږي.

-9 (   ) د $d = \frac{r}{2}$ په رابطه کې d قطر او r د دایرې شعاع ده.

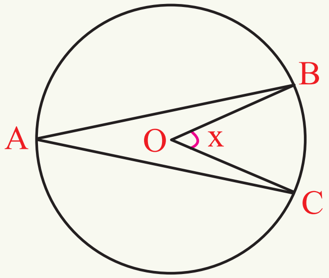
-10 (   ) د یوې دایرې شعاع د تماس په ټکي پر مماس عمود وي.

- لاندې پوښتنې په تفصیل سره حل کړئ.

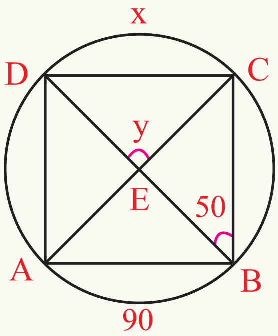
1- په لاندې شکل کې که $\overline{CI}$ د دایرې قطر او $\overline{ON} \parallel \overline{CA}$ وي، ثبوت کړئ چې $\overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{NI}$ دی.



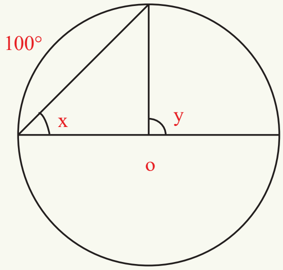
2- په لاندې شکل کې که $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AC} = 155^{\circ}$ وي، د $\hat{x}$ پیداکړئ.



3- په لاندې شکل کې د x او y اندازه وټاکئ.



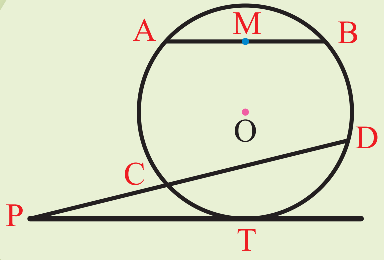
4- په لاندې شکل کې د x او y اندازې پیدا کړئ.



دويم څپـــرکی

په يوه دايره کې د
اوږدوالي اړيکې

په دايره کې د اوږدوالي اړيکې



هغه ټوټه کرښې چې په مخامخ شکل کې وينئ، نوم يې واخلئ.

تعريف

د اوږدوالي اړيکې: په يوه هندسي شکل کې، د کرښو د اجزاوو تر منځ اړيکې د اوږدوالي د اړيکو په نوم يادېږي.

فعاليت

- د P له ټکي څخه چې د $C(O,r)$ دايرې په بهر کې پروت، د $\overline{PAB}$ او $\overline{PCD}$ قاطع کرښې رسم کړئ.
- د A ټکی له D او د B ټکی له C ټکي سره ونښلوئ.
- وښايئ چې د $P\hat{A}D$ او $P\hat{C}B$ مثلثونه، مشابه دي.
- په پورته دوو مثلثونو کې، د تشابه نسبتونه وليکئ؟

مرسته

- که چيرې په دوه مثلثونو کې دوه زاويې سره مساوي وي، دريمه زاويه يې هم سره مساوي وي.
- په مشابه مثلثونو کې د مساوي زاويو مخامخ ضلعې متناسبې دي.

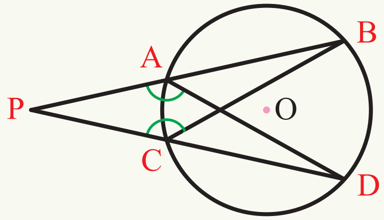
د دې فعاليت له پايلې څخه لاندې قضيه څرګندېږي.

قضيه (2-1): که چيرې د يوې دايرې له بهرني ټکي څخه پر دايره دوه قاطع کرښې رسم شي، د يوې قاطع د قطعاتو د ضرب حاصل، د بل قاطع د قطعاتو د ضرب له حاصل سره مساوي دي.

يعني: $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\ \overline{PD}$

ثبوت: د $\overset{\Delta}{PAD}$ او $\overset{\Delta}{PCB}$ مثلثونو تر منځ، لاندې اړیکې شته دي.

$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$



$\hat{D}=\hat{B}$ د عین قوس محیطي زاویې

$\hat{P}=\hat{P}$ ګډ

$\Rightarrow \hat{A}=\hat{C}$

د پورتنیو دریو زاویو له تساوي څخه پوهېږو چې د $\overset{\Delta}{PAD}$ او $\overset{\Delta}{PCB}$ مثلثونه مشابه دي، نو لیکلای شو چې:

$$\overset{\Delta}{PCB}\sim\overset{\Delta}{PAD}\Rightarrow\frac{PA}{PC}=\frac{PD}{PB}\Rightarrow PA\cdot PB=PC\cdot PD$$

مثال: په لاندې شکل کې، $\overline{PA}$ او $\overline{PB}$ د $C(O,r)$ د دایرې دوه قاطع کرښې دي.

که $\overline{PA}=10cm$, $\overline{PC}=6cm$ او $\overline{PD}=4cm$ اوږدوالی ولري، د $\overline{PB}$ او $\overline{DB}$ اوږدوالی پیدا کړئ؟

حل: هغه قطعات(ټوټه کرښې) چې د P له ټکي څخه رسمېږي او د(2-1) قضیې په مرسته لیکلای شو چې:

$\overline{PA}\cdot\overline{PC}=\overline{PB}\cdot\overline{PD}$

$10\cdot 6=\overline{PB}\cdot 4$

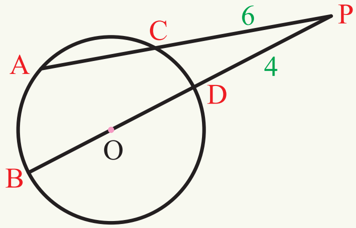
$60=4\overline{PB}$

$\overline{PB}=15cm$

$\overline{DB}=\overline{PB}-\overline{PD}$

$\overline{DB}=15-4$

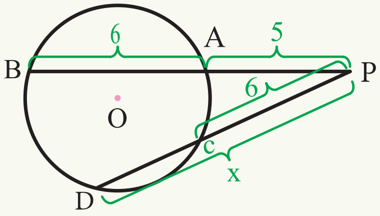
$\overline{DB}=11cm$

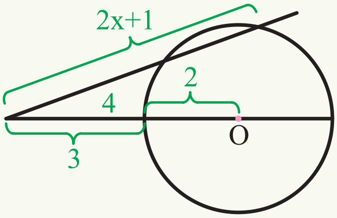


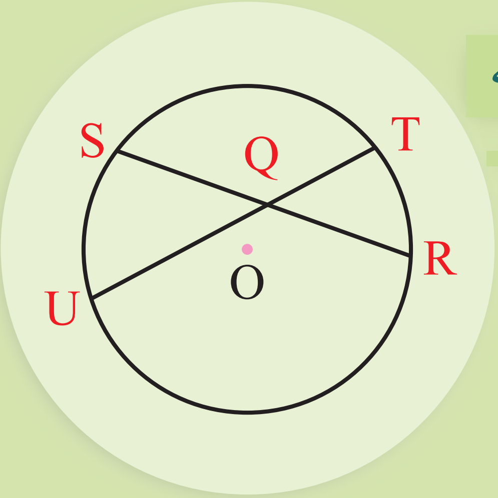
که چیرې د یوې دایرې له بهرني ټکي څخه، پر دایره دوه قاطع کرښې رسم شي، د یوې قاطع د قطعاتو د ضرب حاصل، د بل قاطع د قطعاتو د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

پوښتنې

1- په لاندې شکلونو کې، د x عددي قیمت پیدا کړئ.



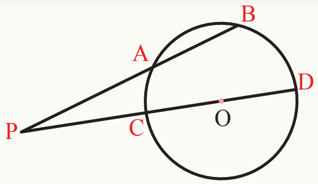




د يوه ټکي طاقت، نظر دايرې ته

مخامخ شكل ته پاملرنه وكړئ، ويلاى شئ چې د $\overline{QU}\cdot\overline{QT}=\overline{QR}\cdot\overline{QS}$ مساوات سم دى.

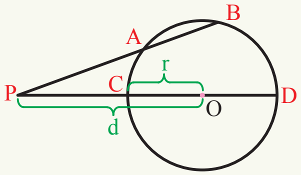
فعاليت



- د P له يوه ټاكلي ټكي څخه چې C(O,r) د دايرې څخه بهر پروت دى پر هغه د $\overline{PAB}$ قاطع رسم كړئ.
- د P له بهرنى ټكي څخه، د PCD قاطع داسې رسم كړئ چې د $C(O,r)$ دايرې له مركز څخه تېر شي.
- د $\overline{PAB}$ او PCD د قطعه خطونو ترمنځ اړيكې د (2-1) قضيې له مخې وليكئ.
- په پورتنى اړيكه كې، د $\overline{PC}$ او $\overline{PD}$ اوږدوالى، د دايرې له مركز څخه وليكئ؟
- كه د P ټكي واټن، د دايرې له مركز څخه په (d) او شعاع يا وړانګه په (r) سره وښيو، پورتنى اړيكه د d او r تر منځ وليكئ.

د پاسنى فعاليت له پايلې څخه لاندې قضيه څرګندېږي.

قضيه(2-2): كه د يوه ټاكلي ټكي څخه دوې قاطع كرښې، په يوه دايره داسې رسم كړئ چې، دويمه قاطع د دايرې له مركز څخه تېره شي. د لومړى قاطع د ټوټه كرښو تر منځ د ضرب حاصل د يوه ټاكلي اندازې (d^2-r^2) سره مساوي دى، (d) د ټاكلي ټكي او د دايرې د مركز تر منځ واټن او (r) د دايرې شعاع يا وړانګه ده.



لومړى حالت: كه چېرې ټاكلى ټكى د دايرې په بهر كې پروت وي.

ثبوت: كه چېرې د P ټكى د دايرې په بهر كې او واټن يې له مركز څخه په (d) او د دايرې شعاع په (r) سره وښيو، د (2-1)

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}....(2-1)$$
$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=(\overline{PO}-\overline{CO})(\overline{PO}+\overline{OD})$$
$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=(d-r)(d+r)$$
$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=d^2-r^2$$

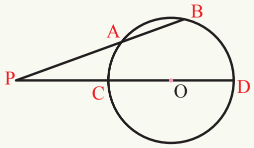
تعریف

د $\overline{PA}\cdot\overline{PC}=d^2-r^2$ اړیکه د P د ټکي طاقت، نظر د $C(o,r)$ دایرې ته وایي چې ثابته اندازه ده چې د $P_{(o)}=d^2-r^2$ په شکل ښودل کېږي.

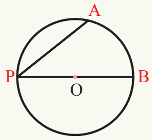
لومړی مثال: که د یوې دایرې قطر $10cm$ او د P ټکی د $13cm$ په اندازه، د دایرې له مرکز څخه واټن ولري، د P ټکي طاقت، نظر $C(o,r)$ دایرې ته پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دایرې قطر راکړل شوی دی، لومړی د دایرې شعاع وروسته د P ټکي طاقت، نظر دایرې ته پیدا کړئ.

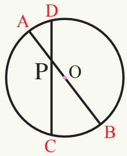
$$r=\frac{D}{2}=\frac{10}{2}=5\,cm$$
$$P_{(O)}=d^2-r^2$$
$$P_{(O)}=(13)^2-(5)^2$$
$$P_{(O)}=169-25\Rightarrow P_{(O)}=144$$



- که د یوه ټکي طاقت نظر یوې دایرې ته مثبت وي، ټکی له دایرې څخه بهر پروت دی، $P_{(o)}=d^2-r^2>0\Rightarrow d^2>r^2$ لکه د(2-2) قضیې شکل



- که د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته صفر وي، ټکی د دایرې پر محیط پروت دی، یعنې $P_{(0)}=d^2-r^2=0\Rightarrow d^2=r^2$



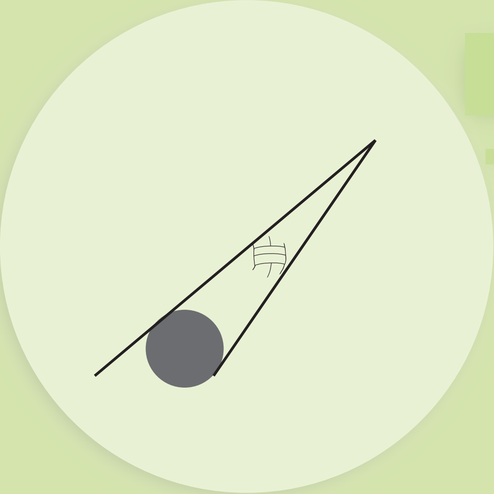
- که د یوه ټکي طاقت، نظر دایرې ته منفي وي ټکی د دایرې دننه پروت دی، یعنې $P_{(0)}=d^2-r^2<0\Rightarrow d^2<r^2$

پوښتنې

۱ - په لاندې حالتونو کې د یوه ټکي طاقت نظر یوې دایرې ته پیدا کړئ.

الف) که $d=7$ او $r=4$ وي. ب) که $d=3$ او $r=3$ وي. ج) که $d=3$ او $r=5$ وي.

د دايرې مماس کرښه



شکل ته پام وکړئ.
که چېرې د نور د وړانګو د حرکت مسير مستقيمې کرښې ومنل شي، دغه کرښې نظر توپ او د هغه له سيورى سره څه اړيکې لري؟

فعاليت

- د P له يوه بهرني ټکي نه د $C(O,r)$ په دايره د $\overline{PR}$ او $\overline{PQ}$ دوه مماسونه رسم کړئ.
- که د Q او R ټکي پر دايرو د تماس ټکي وي.آيا د P د ټکي پر دايرې بل مماس رسمېدلای شي؟
- د O ټکي د Q، R او P ټکو سره و نښلوئ.
- لاسته راغلي مثلثونه څه اړيکې سره لري؟
- آيا رسم شوي مماسونه سره برابر دي؟

د دې فعاليت له پايلې څخه لاندې قضيه څرګندېږي.

قضيه(2-3): د يوې دايرې له بهرني ټکي څخه پر دايرې دوه مساوي مماسونه رسمېږي.

ثبوت: په $\overset{\Delta}{POR}$ او $\overset{\Delta}{POQ}$ مثلثونوکې ليکلی شو چې:

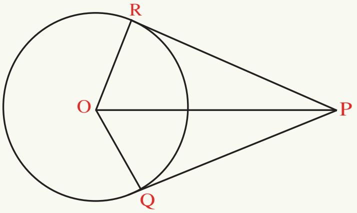
$\overline{OR} = \overline{OQ}$.... د دايرې شعاع يا وړانګه

$\overline{PO} = \overline{PO}$ .... ګډ

$\hat{R} = \hat{Q}$..............90°

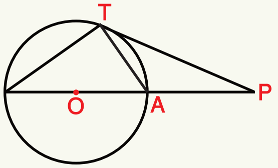
$\overset{\Delta}{POR} \cong \overset{\Delta}{POQ}$

$\overline{PR} = \overline{PQ}$



قضيه(2-4): که د P له ټکي څخه د $\overline{PT}$ مماس او د $\overline{PB}$ يو قاطع پر يوه دايره رسم شي، ثبوت کړئ چې د يوه ټکي طاقت، نظر دايرې ته، د مماس له مربع سره مساوي دی.

ثبوت: د $C(O,r)$ په دایره کې، $\overline{PT}$ مماس او $\overline{PAB}$ قاطع دی، که د T ټکی له A او B ټکوسره ونښلوو، د $\overset{\Delta}{PTA}$ او $\overset{\Delta}{PTB}$ مثلثونو څخه لیکلای شو چې:



$P\hat{T}A = P\hat{B}T.....(I)$ د عین قوس مخامخ

$\hat{P} = \hat{P}..........(II)$ (مشترک)

د I او II رابطو له مخې لیکلای شو چې:

$P\hat{T}B = P\hat{A}T$

$\Rightarrow \overset{\Delta}{PTB} \sim \overset{\Delta}{PTA}$

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} = \frac{\overline{PT}}{\overline{PB}}$$

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB} = \overline{PT}^2 \Rightarrow \overline{PT}^2 = d^2 - r^2$$

په پایله کې لیکلای شو چې: $PT = PT'$

مثال: په لاندې شکل کې د $\overline{PT}$ او $\overline{PT'}$ اوږدوالی لاسته راوړئ.

حل:

$PA = 4cm$

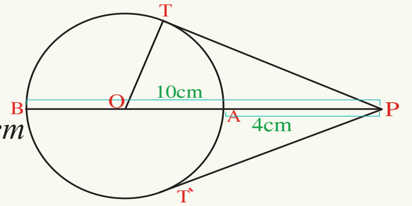
$PB = 10cm$

$PT = ?$

$PT^2 = PA\cdot PB$

$PT^2 = 4\times 10 = 40$

$PT = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}cm$

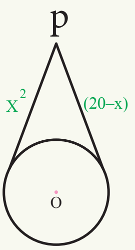


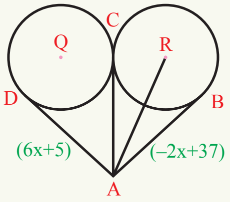
- د یوې دایرې له باندنې ټکي څخه پر هغې دوه مساوي مماسونه رسمولای شو.

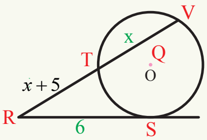
که چېرې د یوې دایرې له بهرنې ټکي څخه پر دایرې یو قاطع او یو مماس رسم شي، د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته، د مماس له مربع سره مساوي دی.

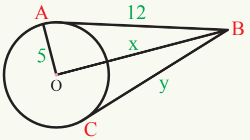
پوښتنې

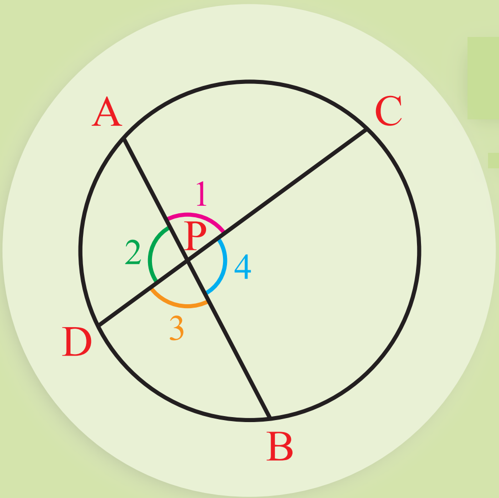
په لاندې شکلونو کې د x قیمت لاسته راوړئ.











د دايرې دننۍ (داخلي) زاويه

د يوې دايرې په دننه کې، دوه متقاطع وترونه رسم کړئ او وواياست چې څو زاويې جوړوي او څه يې نوموئ؟

تعريف

هغه زاويې چې د دايرې په دننه کې، د دوو وترونو د تقاطع په مرسته منځ ته راځي، د دايرې دننۍ زاويې بلل کيږي، لکه په پورتني شکل کې، د $\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4}$ زاويې.

فعاليت

- د $C(O,r)$ دايره رسم کړئ، په هغې کې د $\overline{AB}$ او $\overline{CD}$ دوه وترونه داسې رسم کړئ چې د P په ټکي که يو بل پرې کړي، هغه زاويې چې منځ ته راغلې د څه په نامه يادېږي؟
- د D او C ټکي د B سره ونښلوئ د $\hat{CPB}$ زاويه چې د $\overset{\Delta}{PBD}$ باندنۍ زاويه ده، د مثلث د دوو ناګاونډيو زاويو سره څه اړيکه لري؟

په ياد ولرئ:

- هره محيطي زاويه، د مخامخ قوس نيمايي ده.
- په يوه مثلث کې، د هرې خارجي زاويې پراخوالی د دوو ناګاونډيو زاويو له مجموعې سره برابره دی.

د دې فعاليت له پايلې څخه، لاندې قضيه بيان او ثبوتوو.

قضيه (5-2): د يوې دايرې د هرې دننه (داخلي) زاويې پراخوالی، د هغو قوسونو د مجموعې له نيمايي سره مساوي دی چې د زاويو د اضلاعو په مرسته د دايرې له محيط څخه جلا کيږي.

ثبوت: څرنګه چې د $\hat{B}$ او $\hat{D}$ د دايرې محيطي زاويې دي، نو کولای شو وليکو:

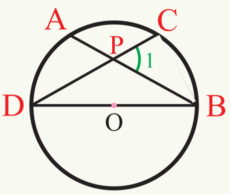
$\hat{B}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$ د محيطي زاويې وسعت

$\hat{D}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ د محيطي زاويې وسعت

$\hat{CPB}=\hat{B}+\hat{D}$ د هر مثلث خارجی زاويه

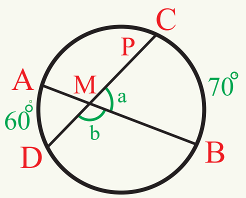
$$\Rightarrow \hat{CPB}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$$

$$\hat{CPB}=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC})$$



لومړی مثال: په لاندې شکل کې د $\hat{a}$ او $\hat{b}$ زاويې پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې د يوې دايرې دننه زاويې پراخوالی، د هغو قوسونو دمجموعې له نيمايي سره مساوي دی، چې د زاويو په مخامخ کې پراته وي، يعنې:

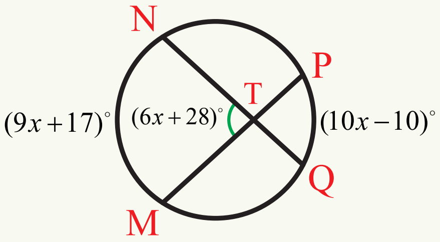


$$C\hat{M}B = \hat{a} = \frac{\hat{AD} + \hat{BC}}{2} = \frac{60^\circ + 70^\circ}{2} = 65^\circ$$

$$\hat{b} = 180^\circ - a = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$$

دويم مثال: په لاندې شکل کې د x او $N\hat{T}M$ زاويې پراخوالی وټاکئ.

حل: د يوې دايرې دننه زاويو د اړيکو له مخې ليکلای شو چې:



$$\overset{\frown}{NM} = 9x + 17 \quad , \quad \overset{\frown}{PQ} = 10x - 10$$

$$N\hat{T}M = 6x + 28$$

$$6x + 28 = \frac{\overset{\frown}{NM} + \overset{\frown}{PQ}}{2}$$

$$6x + 28 = \frac{9x + 17 + 10x - 10}{2}$$

$$12x + 56 = 19x + 7$$

$$-7x = -49$$

$$x = 7$$

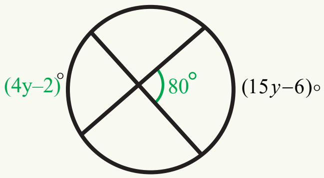
$$N\hat{T}M = 6x + 28$$

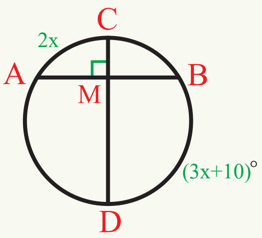
$$= 6 \times 7 + 28 = 42 + 28 \Rightarrow N\hat{T}M = 70^\circ$$

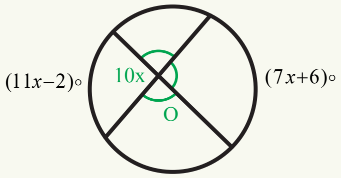
$$N\hat{T}M = 70^\circ$$

پوښتنې

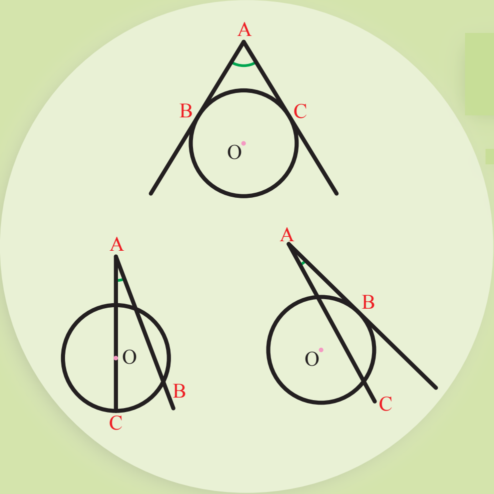
1- په لاندې شکلونو کې د x او y اندازې معلومې کړئ.







د دایرې باندنۍ زاویه



په مخامخ شکلونو کې، د ټوټه کرښو او د زاویو نومونه واخلئ.

تعریف

هغه زاویه چې د دوو قاطع کرښو، دوو مماسونو یا د یو قاطع او یوه مماس له پرېکړې څخه د دایرې په بهر کې منځ ته راغلې وي، د دایرې باندنۍ زاویه بلل کېږي.

فعالیت

- د $C(O,r)$ په دایره کې د $\overline{AB}$ او $\overline{CD}$ دوه غیر موازي وترونه غزوو، ترڅو د $B\hat{V}D$ بهرنۍ زاویه منځ ته راشي د C ټکی له B سره ونښلوئ.
- د $\overset{\Delta}{BVC}$ مثلث باندنۍ زاویه یعنې ($\hat{1}$) د مثلث د دوو ناګاونډیو زاویو سره څه اړیکې لري؟

د دې فعالیت له پایلې څخه لاندې قضیه بیانیږي.

قضیه (6-2): د یوې دایرې د باندنۍ زاویې پراخوالی، د هغو قوسونو د توپیر له نمایي سره مساوي دی چې د وترونو له تقاطع څخه منځ ته راغلې وي.

ثبوت: د B ټکی له C سره نښلوو او $\overset{\Delta}{VBC}$ مثلث کې لرو چې:

$\hat{1}=\hat{2}+\hat{3}$ د مثلث خارجي زاویې پراخوالی

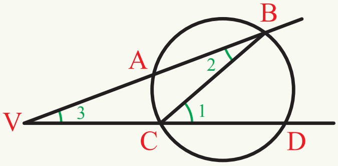
$\hat{3}=\hat{1}-\hat{2}$ د محیطي زاویې پراخوالی

$\hat{1}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$

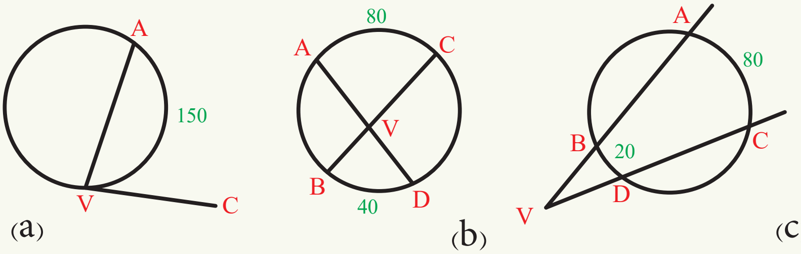
$\hat{2}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ د محیطي زاویې پراخوالی

$$\Rightarrow \hat{3}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}-\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$$

$$B\hat{V}D=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{AC})$$



لومړی مثال: په لاندې شکلونو کې د $A\hat{V}C$ زاویو پراخوالی پیدا کړئ.



حل:په دایره کې دننه، دباندې او مماسي زاویو له پراخوالي څخه په ګټې اخستلو سره لیکلای شو، چې:

$$a)\ A\hat{V}C = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AV} = \frac{1}{2}\cdot(150)^\circ \qquad A\hat{V}C = 75^\circ$$

$$b)\ A\hat{V}C = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}) = \frac{1}{2}\cdot(80+40)^\circ \qquad A\hat{V}C = 60^\circ$$

$$c)\ A\hat{V}C = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD}) = \frac{1}{2}\cdot(80-20)^\circ \qquad A\hat{V}C = 30^\circ$$

دویم مثال: له لاندې شکل څخه په ګټې اخیستلو سره د x او قیمتونه پیدا کړئ.

$$A\hat{N}B = \frac{x+y}{2} \Rightarrow 70 = \frac{x+y}{2} \Rightarrow x+y = 140.....I$$

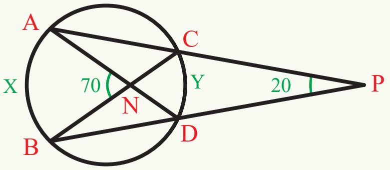
$$A\hat{P}B = \frac{x-y}{2} \Rightarrow 20 = \frac{x-y}{2} \Rightarrow x-y = 40.....II$$

که چیرې د I او II اړیکې خوا په خوا جمع کړو لرو چې:

$2x = 180^{o}$

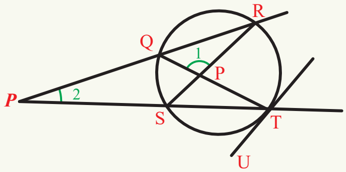
$x = 90^{o}$

$y = 50^{o}$



پوښتنې

په لاندې شکلونو کې نا معلوم کمیتونه پیدا کړئ.

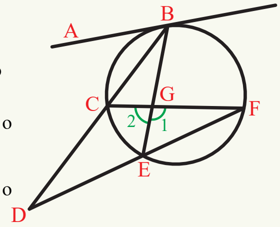


$\overset{\frown}{QR} = 120^{o}$

$\overset{\frown}{RT} = 90^{o}$

$\overset{\frown}{QS} = 50^{o}$

$S\hat{T}U = ?\quad , \quad \hat{1} = ?\quad , \quad \hat{2} = ?$



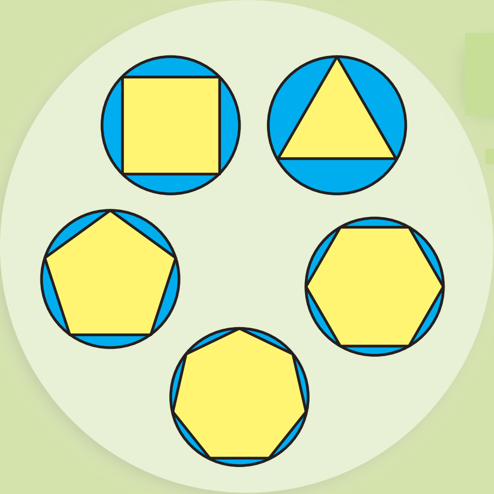
$\overset{\frown}{BC} = 90^{o}$

$\overset{\frown}{BF} = 110^{o}$

$\overset{\frown}{EF} = 110^{o}$

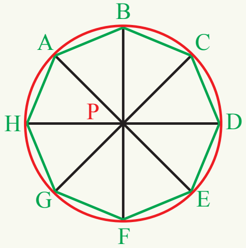
$\hat{1} = ?\ ,\ \hat{2} = ?\ ,\ \hat{D} = ?\ ,\ A\hat{B}C = ?$

محیطي دایره



مخامخ شکل ته پام وکړئ، کوم هندسي شکلونه چې وینئ نومونه یې واخلئ.

تعریف



هغه دایره چې د مضلع له رأسونو څخه تېره شوې وي محیطي دایره بلل کېږي او مضلع مرسوم په دایره کې بلل کېږي، لکه په مخامخ شکل کې:

د مثلث محیطي دایره: هغه دایره چې د مثلث له درې رأسونو څخه تېره شوې وي، د مثلث د محیطي دایرې په نامه یادېږي.

فعالیت

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث رسم کړئ.
- د $\overline{AC}$ او $\overline{BC}$ د اضلاع ګانو عمودي ناصفونه رسم کړئ.
- پورتنی عمودي ناصفونه په څو ټکو کې پرې کوي؟ د هغې د تقاطع ټکی په O سره وښیئ.
- د $\overline{OA}$,$\overline{OB}$ او $\overline{OC}$ اوږدوالی سره پرتله کړئ.
- که چېرې یوه دایره د O په مرکز او د $\overline{OA}$ په شعاع رسم شي آیا د B او C له ټکو تېرېږي او که نه؟
- آیا دا دایره د B او C له ټکو څخه هم تېرېږي؟ ولې؟
- رسم شوې دایره، د مثلث د څه په نامه یادېږي؟

> **په یاد ولرئ چې**: هغه دایره چې د مضلع د راسونو څخه تیریږي، مضلع ته مرسوم په دایره وایي.

ددې فعالیت له پایلې څخه په لاندې ډول لیکلای شو:

پایله:د اضلاع ګانو د وسطي عمودونو د پرېکړې ټکی، د مثلث د محیطي دایرې مرکز دی.

مثال: د $\overset{\Delta}{ABC}$ قایم الزاویه مثلث داسې رسم کړئ چې د قایمو څنډو اوږدوالی یې ، په ترتیب سره $8cm$ او $6cm$ وي، د دې مثلث د محیطي دایرې شعاع لاس ته راوړئ؟

حل: پوهېږو چې په هر قایم الزاویه مثلث کې د هغې د محیطي دایرې مرکز پر وتر باندې پروت وي، نو لومړی د قایم الزاویه مثلث د وتر اوږدوالی پیدا کوو چې د نیمایي ټکی یې د محیطي دایرې مرکز دی.

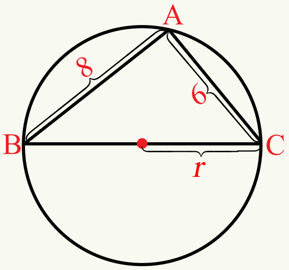
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

$$\overline{BC}^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$$

$$\overline{BC}^2 = 100$$

$$\overline{BC} = 10cm$$

$$r = \frac{\overline{BC}}{2} \Rightarrow r = \frac{10}{2} = 5cm$$



• هغه دایره چې د مضلع له رأسونو څخه تېرېږي د مضلع محیطي دایرې په نامه یادېږي او مضلع ته مرسوم په دایره وایي.

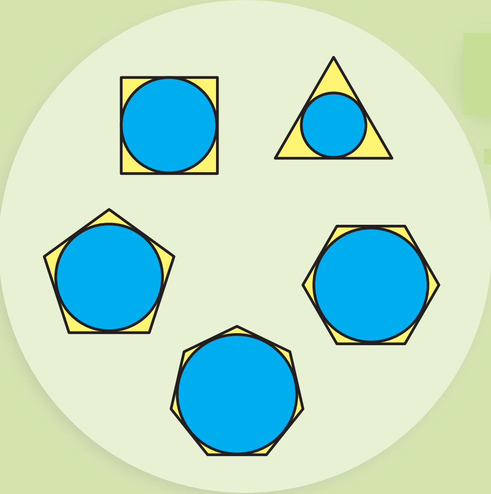
• د یوه مثلث د اضلاعو د منځنۍ(وسطي) عمودونو د تقاطع ټکی د مثلث د محیطي دایرې مرکز دی.

پوښتنې

1- یو مثلث چې د اضلاعو اوږدوالی یې په ترتیب سره $3cm$, $4cm$ او $5cm$ وي، رسم کړئ، د هغې د محیطي دایرې شعاع حساب کړئ.

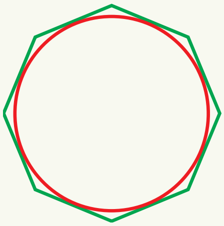
2 - د قایم الزاویه مثلث، متساوي الاضلاع او متساوي الساقین مثلثونو د محیطي دایرو مرکزونه په کومو ځایونو کې موقعیت لري؟ په شکل کې یې وښایاست.

محاطي دایره



• هغه هندسي شکلونه چې په مخامخ شکل کې وینئ، نومونه یې واخلئ.
• د شکلونو تر منځ څه اړیکي وینئ؟

تعریف



هغه دایره چې محیط یې د مضلع پر ضلعو باندې مماس وي، د مضلع د محاطي دایرې په نامه یادیږي، لکه: مخامخ شکل، چې د مضلع په واسطه راچاپېره شوې دی.

د مثلث محاطي دایره: هغه دایره چې محیط یې د یو مثلث په دري ضلعو مماس وي، د مثلث محاطي دایره بلل کیږي.

فعالیت

مرسته:
د یوه مثلث وسطي عمودونه د مثلث دننه په یوه ټکي کې پرېکوي

• د $\overset{\Delta}{ABC}$ یو کیفي مثلث رسم کړئ.
• د $\hat{A}, \hat{B}$ او $\hat{C}$ زاویو ناصفونه رسم او د تقاطع ټکی په (O) سره وښیاست.
• د (O) له ټکي څخه د مثلث پر اضلاعو د $\overline{OM}, \overline{ON}$ او $\overline{OP}$ عمود کرښې رسم کړئ.
• د $\overline{OM}, \overline{ON}$ او $\overline{OP}$ عمودونو اوږدوالي پرتله کړئ.
• آیا هغه دایره چې د (O) په مرکز او د $\overline{ON}$ په شعاع رسم شي، د M او P له ټکو څخه تیریږي؟ ولې؟
• رسم شوې دایره، د څه په نامه یادیږي؟

د مثلث محاطي دايره

د هر مثلث دننه ناصف الزاويو ترمنځ د تقاطع ټکی، د مثلث د محاطي دايرې له مرکز څخه عبارت دی.

د پورتني فعاليت پايله کولای شو په لاندې توګه څرګنده کړو.

فعاليت

د مثلث محاطي دايره رسم کړئ.

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث رسم کړئ او $\overline{AB}$ او $\overline{AC}$ ضلعو ته امتداد ورکړئ؟
- د مثلث د $\hat{B}$ او $\hat{C}$ زاويو باندنی ناصف الزاويې رسم او د تقاطع ټکی په (O) سره وښيئ.
- ايا د (O) ټکی د مثلث د محاطي دايرې مرکز کيدای شي؟ ولې؟
- د (O) له ثابت ټکي څخه د $\overline{OP}$, $\overline{OM}$ او $\overline{ON}$ عمودونه کرښې، د مثلث په يوه ضلعه او د هغه په امتداد رسم او وښيئ چې د O دايرې شعاع ګاني دي.

فکر او څېړنه وکړئ:

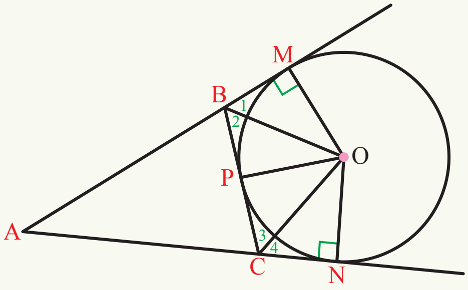
- که چيرې د يوې څلور ضلعي د مخامخ زاويو مجموعه 180° وي څلور ضلعي په دايره مرسوم دي.

په ياد ولرئ:

- هر منظمه مضلع محيطي او محاطي دايره لري.

د پورتني فعاليت پايله کولای شو، په لاندې توګه څرګنده کړو.

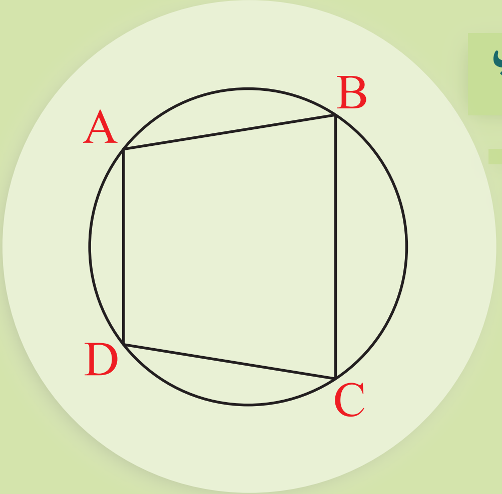
هغه دايره چې د يوه مثلث په يوه ضلع او د دوو ضلعو پر امتداد مماس وي، د هغه مثلث محاطي دايره بلل کيږي.



پوښتني

1- په کومو مثلثونو کې د محيطي دايرې او محاطي دايرې مرکزونه منطبق دي؟ هغه رسم او په شکل کې يې وښيئ.

په دايره کې د مرسوم څلورضلعي
ځانګړتياوې(خواص)



په مخامخ شکل کې دايره د څلور ضلعي
له رأسونو سره څه اړيکه لري؟

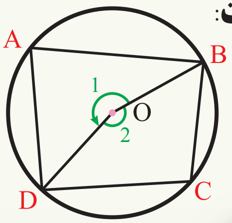
فعاليت

- د $ABCD$ يو کيفي څلور ضلعي مرسوم په دايره رسم کړئ.
- د محيطي دايرې منځ ته راغلې زاويې څه نوميږي؟
- د دايرې مرکز، د څلور ضلعي له دوو مخامخ رأسونو سره ونښلوئ، د منځ ته راغلي مرکزي زاويې مجموعه څو درجې ده؟
- د مرکزي او محيطي زاويو اړيکې چې د عين قوس مخامخ پرتې وي د پورته مرکزي زاويو لپاره وليکئ.

د دې فعاليت له پايلې څخه لاندې قضيه داسې بيانولای شی:

قضيه: په يوه دايره کې، د مرسوم څلور ضلعي د مخامخ زاويو مجموعه 180° ده.

ثبوت:



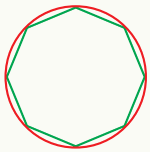
$$\hat{O}_1+\hat{O}_2=360^{\circ}$$

$$D\hat{C}B=\frac{1}{2}\hat{O}_1$$

$$D\hat{A}B=\frac{1}{2}\hat{O}_2$$

$$D\hat{C}B+D\hat{A}B=\frac{1}{2}(\hat{O}_1+\hat{O}_2)=\frac{360^{\circ}}{2}=180^{\circ}$$

فعاليت



- منظم درې ضلعي، د څه په نامه يادېږي، د هرې زاويې پراخوالی څو درجې دی؟
- منظم څلور ضلعي څرنګه ونوموو؟
- د هغې د هرې زاويې پراخوالی څو درجې دی؟

تعریف

هغه مضلع چې اضلاع او زاویې یې یو له بل سره مساوي وي، منظمه مضلع بلل کېږي.

فعالیت

- په خپله خوښه، یوه پنځه ضلعي رسم کړئ.
- یو رأس چې د هغې له ناګاونډه رأس سره ونښلوئ، څو مثلثونه منځ ته راځي؟
- د دې مثلثونو دننیو زاویو مجموعه څو درجې ده؟
- د پنځه ضلعي دننیو زاویو مجموعې په هکله، څه فکر کوئ؟
- دغه فعالیت د یو شپږ ضلعي په هکله تکرار کړئ.
- که چیرې n ضلعي مضلع ولرو، د هغې دننه زاویو مجموعه به یې څو درجې وي؟

که چیرې د یوې مضلع د ضلعو شمېر، په n او د هغې دننه زاویو مجموعه په S_n وښیو، نو د هر n ضلعي دننیو زاویو مجموعه $S_n = (n-2)180^\circ$ درجې ده.

مثال: د یوه څلور ضلعي او لس ضلعي دننیو زاویو مجموعه پیدا کړئ.

حل: د هر مضلع دننیو زاویو مجموعه، د $S_n = (n-2)180^\circ$ اړیکې له مخې ټاکل کېږي.

$$S_n = (n-2)(180^\circ)$$

$$S_4 = (4-2)(180^\circ) \Rightarrow S_4 = 360^\circ$$

$$S_{10} = (10-2)(180^\circ) \Rightarrow 8\times 180 \Rightarrow S_{10} = 1440^\circ$$

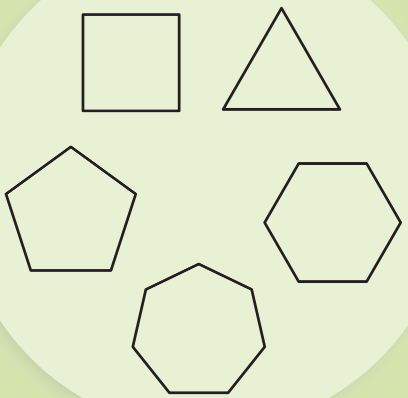
په یاد ولرئ چې:

- د قطرونو شمېر د n ضلعي له یوه رأس څخه د n-3 اړیکې په مرسته لاس ته راځي.
- له یوه رأس څخه د مضلع په منځ کې د مثلثونو شمېر د n-2 اړیکې په مرسته لاسته راځي.
- په یوه دایره کې د مرسوم څلور ضلعي د مخامخ زاویو مجموعه 180° ده.
- هغه مضلع چې د ضلعو اوږدوالی یې سره مساوي وي، منظم مضلع بلل کېږي.

پوښتنې

1- د یوې منظمې شپږ ضلعي مضلع، د زاویو پراخوالی څو درجې دي؟
2- د یوې منظمې n ضلعي مضلع، د زاویو اندازه څو درجې ده؟
3- په یوه لس ضلعي مضلع کې، د قطرونو په مرسته له یوه رأس څخه څو مثلثونه منځ ته راځي؟

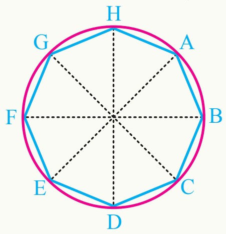
د منظمي مضلع ترسیم



- پام وکړئ.
- په مخامخ شــکل کې، څه ډول مضلع ګانې وینئ.
- ستاســي په نظر، دغه مضلع ګانې په څه ډول رسم شوې دي؟

فعالیت

- د $C(O,r)$ دایره رسم کړئ او د هغې په مرکز کې (8) مساوي مرکزي زاويې رسم کړئ.
- که چیرې n د مضلع د اضلاعو شمېر او θ د مخامخ ضلعې مرکزي زاویه وي، آیا د $\hat{\theta} = \dfrac{360^{\circ}}{n}$ اړیکه سمه ده؟
- یو 8 ضلعي مضلع، د $C(O,r)$ په دایره کې رسم کړئ.
- د دایرې له محیط سره د مرکزي زاویو د ضلعو د تقاطع ټکي ونښلوئ.
- آیا د منځ ته راغلي مضلع ضلعې، سره مساوي دي؟ ولې؟
- منځ ته راغلي مضلع څه ډول ده؟ د مضلع د هرې ضلعې د مخامخ مرکزي زاويې پراخوالی څو درجې ده؟



دیوه منظم n ضلعي مضلع، د هر ضلع مخامخ د مرکزي زاويې پراخلوالی مساوي په $\hat{\theta} = \dfrac{360^{\circ}}{n}$ دی.

فعالیت

- د $C(O,r)$ په دایره کې یوه منظمه شپږ ضلعي رابنده ده.
- د دایرې مرکز د مضلع له شپږو رأسونو سره ننښلوو، څو مثلثونه منځ ته راځي؟
- د شپږ ضلعي د مخامخ ضلعو د مرکزي زاویو پراخوالی څو درجې دی؟
- منځ ته راغلي مثلثونه څه ډول مثلثونه دي؟

د پورتني فعالیت پایله کولای شو، په لاندې توګه څرګنده کړو.

د يوې شپږ ضلعي، د هرې ضلعې اوږدوالی، د هغې د محيطي دايرې له شعاع سره مساوي دی.

مثال: هغه دايره چې شعاع يې $2cm$ دی، څرنگه کولای شو چې هغه په يوه منظم شپږ ضلعي مضلع محاط کړو؟

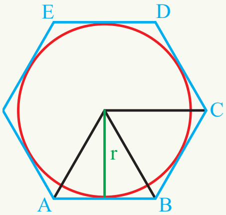
حل: پوهېږو چې د هرې منظمې شپږ ضلعي مضلع هره ضلع، د هغې د محيطي دايرې له شعاع سره مساوي ده، نو د پرکار خوله د $2cm$ په اندازه خلاصوو او په پرله پسې توگه، د دايرې له محيط څخه مساوي قوسونه جلاکوو. د ټاکل شويو ټکو له نښلولو څخه منظم شپږ ضلعي منځ ته راځي.

د محاطي دايرې د شعاع له مخې، د منظمې مضلع مساحت

فعاليت

- د $C(O,r)$ محاطي دايره او د $ABCDEF$ منظمه مضلع رسم کړئ.
- د O ټکی د B, A او C رأسونو سره ونښلوئ. د $\overset{\Delta}{OAB}$ او $\overset{\Delta}{OBC}$ مثلثونه چې منځ ته راغلي دي، انطباق منونکي دي؟ ولې؟
- د $\overset{\Delta}{AOB}$ په مثلث کې د $\overline{AB}$ د ضلعې جگوالی(ارتفاع)، د محاطي دايرې له شعاع سره مساوي دی؟ ولې؟
- د پورتنيو مثلثونو مساحت له کومې رابطې څخه په لاس راځي؟
- آيا د منظمې n ضلعي مضلع مساحت د n انطباق منونکو مثلثونو څخه جوړ دی؟
- د منظمې مضلع محيط د $P = AB \cdot n$ له اړيکې يا رابطې څخه لاسته راځي؟ ولې؟

که چېرې د منظمې مضلع مساحت په A، محيط يې په P او د يوې منظمې n ضلعي مضلع د محاطي دايرې شعاع، په r سره وښيو، نو د مضلع مساحت عبارت دی له: $A = \frac{1}{2}P \cdot r$ چې په لاندې ډول ثبوتېږي:



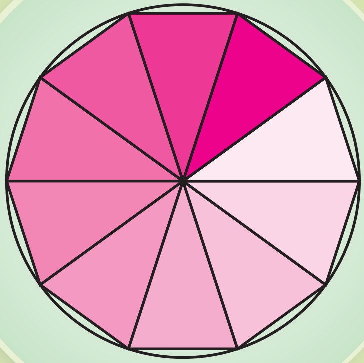
$$A = \frac{1}{2}AB \cdot r \cdot n$$

$$P = AB \cdot n \text{ د مضلع محيط } \Rightarrow A = \frac{1}{2}P \cdot r$$

پوښتنې

1- په يوه دايره کې چې شعاع يې $3cm$ وي، يو متساوي الاضلاع مثلث داسې رسم کړئ چې محاط په دايرې وي؟

د دايرې محيط او مساحت



په راکړل شوي شکل کې، د مثلثونو مجموعي مساحت د دايرې او د مثلثونو د يو شمېر ضلعو د مجموع اوږدوالی، د دايرې له محيط سره پرتله کړئ.

د $C(O,r)$ په دايره کې، که قطر په (d) او محيط يې د (C) په توروو وښودل شي، د دايرې د دې دوو غړو تر منځ لاندې اړيکه شته؟

$$\frac{\text{د دايرې محيط}}{\text{د دايرې قطر}} = \frac{c}{d} = \text{constant}$$

$$\frac{c}{d} = \pi \Rightarrow c = \pi d \;\; .... \; (I) \quad [\pi \approx 3.14159\cdots]$$

پوهېږو چې $r = \frac{d}{2}$ يا $d = 2r$ که چېرې په (I) اړيکه کې د (d) پر ځای د $(2r)$ قيمت وليکو، د دايرې محيط له لاندې اړيکې څخه لاسته راځي:

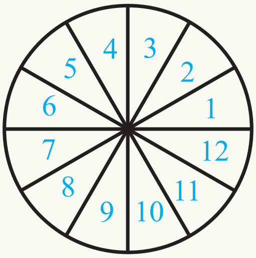
$$C = \pi d$$

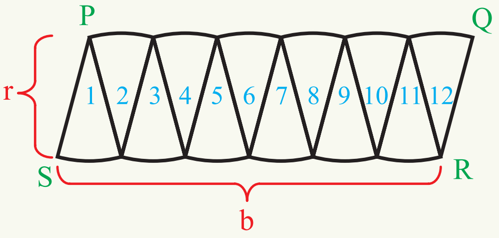
$$C = 2\pi r$$

د دايرې د مساحت د ثبوت او محاسبې لپاره، پرمختللې رياضي ته اړ يو، نو په دې ډول د دايرې د مساحت د محاسبې لپاره، په لاندې توګه عمل کوو:

يوه دايره د هغې د قطرونو په مرسته په (12) مساوي برخو وېشو او هره برخه يې، له 1 څخه تر 12 پورې په شمېرو سره وښيو، که چېرې د دايرې دغه مثلثي ټوټې غوځې او بيا هغوی څنګ په څنګ د لاندې شکل په څېر ترتيب کړو.

په روښانه ډول ليدل کېږي چې متوازي الاضلاع ته ورته شکل منځ ته راځي.





پوهېږو چې د b قاعده د دايرې د محيط نيمايي ده، ولې؟ نو:

جګوالی × قاعده = د متوازي الاضلاع مساحت

$\frac{1}{2}Cr=$ د متوازي الاضلاع مساحت

له بلې خوا پوهېږو چې($C=2\pi r=$ د دايرې محيط)دی، نو لروچې:

$A=\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r=\pi r^2=$ د متوازي الاضلاع مساحت

پوهېږو، چې د متوازي الاضلاع مساحت او دايرې سره ډېر نژدې دي، نو ليکلای شو: $A=\pi r^2$

په پايله کې ويلای شو چې د دايرې مساحت، د $A=\pi r^2$ اړيکې او محيط يې د $C=2\pi r$ اړيکې په مرسته په لاس راځي.

لومړی مثال: د يوې دايرې شعاع 14cm ده، د دايرې مساحت پيدا کړئ.

حل: د دايرې د مساحت له اړيکې څخه په ګټې اخيستلو سره يعنې $A=\pi r^2$ لرو چې:

$$A=\pi r^2$$

$$\pi=(3.14159)$$

$$A=(3.14159).196cm^2 \Rightarrow A=615.75cm^2$$

دويم مثال: که چيرې د دايرې قطر 70cm وي، د دايرې شعاع او مساحت پيدا کړئ.

حل:څرنګه چې د دايرې محيط راکړل شوی دی، نو لومړی شعاع او وروسته مساحت پيدا کوو.

$$r=\frac{d}{2}\Rightarrow r=\frac{70}{2}=35$$

$$A=\pi r^2 \Rightarrow A=3.14159(35)^2 \Rightarrow A=3848.4\,cm^2$$

دريم مثال: که چيرې د دايرې محيط، $14\pi cm$ وي، د دايرې شعاع او مساحت پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دايرې محيط راکړل شوی دی، نو د مساحت پيدا کولو لپاره، لومړی شعاع پيدا کوو.

$$C=14\pi cm$$

$$2\pi r=14\pi \Rightarrow 2r=14 \Rightarrow r=\frac{14}{2}=7$$

$$A=\pi r^2 \Rightarrow (3.14159)\cdot 7\cdot 7 \Rightarrow A=153.93\,cm^2$$

- د يوې دايرې مساحت، د r په شعاع د $A=\pi r^2$ له اړيکې څخه لاس ته راورو.
- د يوې دايرې محيط، د r په شعاع د $C=2\pi r$ له اړيکې څخه لاس ته راورو.

پوښتني

1– که چيرې د يوې دايرې محيط 41cm وي، د دايرې شعاع يې لاس ته راوړئ؟

2– د يوې دايرې محيط چې شعاع يې د اوږدوالی يو واحد وي، لاس ته راوړئ.

3– د يوې دايرې مساحت چې شعاع يې د اوږدوالي يو واحد وي لاس ته راوړئ.

په دايره کې د اوړدوالي اړيکې:

- هغه اړيکې چې د يو هندسي شکل د کرښو د اجزاوو تر منځ موجودې وي، د اوږدوالي د اړيکو په نامه يادېږي.
- که چيرې د يوې دايرې له يوه بهرني ټکي څخه پر دايره دوه قاطع کرښې رسم شي، د يوې قاطع د قطعاتو د ضرب حاصل، د بل قاطع د قطعاتو د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

يعني: $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\ \overline{PD}$

- که چيرې د يوې دايرې له بهرني ټکي څخه، دوه قاطع کرښې، پر يوه دايره داسې رسم شي چې دويم قاطع د دايرې له مرکز څخه تېر شي، نو د قاطع او د هغه د بهرنۍ قطعې د ضرب حاصل، له يوې ټاکلې اندازې يعني: $d^2 - r^2$ سره مساوي دی.
- له يوه باندني ټکي څخه، پر يوې دايرې دوه مساوي مماسونه رسمېدلای شي.
- که چيرې $d^2 - r^2 > 0$ يا $d^2 > r^2$ وي ټکی د دايرې په بهر کې پروت دی.
- که چيرې $d^2 = r^2 = 0$ يا $d^2 = r^2$ يا $d = r$ وي، ټکی د دايرې پر محيط پروت وي.
- که چيرې $d^2 - r^2 < 0$ يا $d^2 < r^2$ وي، ټکی د دايرې په دننه کې پروت دی.

د دايرې داخلي زاويې: هغه زاويې چې د قاطع کرښو په مرسته، د دايرې په دننه کې منځ ته راځي، د دايرې داخلي زاويې بلل کېږي.

- د يوې دايرې د هرې دننۍ زاويې پراخوالی، د هغې د مخامخ قوسونو د مجموعې له نيمايي سره مساوي دی. $\hat{\alpha} = \dfrac{\overset{\frown}{a} + \overset{\frown}{b}}{2}$

باندنۍ زاويې:

- هغه زاويه چې د دوو قاطع کرښو، دوو مماسونو، يا يو قاطع او يو مماس له تقاطع څخه د دايرې په بهر کې منځ ته راغلې وي، د دايرې باندنۍ زاويه بلل کېږي.

- د يوې دايرې د هرې باندنۍ زاويې پراخوالی د هغې د مخامخ قوسونو، تفاضل له نيمايي سره مساوي دی، يعني: $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{a} - \overset{\frown}{b}}{2}$

مضلع:

- هغه شکل چې د څو ټوټه کرښو په مرسته احاطه شوی وي، مضلع بلل کېږي.

په دې شرط چې:

- دوه ضلعې يې يوازې په خپلو انجامونو کې سره قطع کړئ.
- دوه ګاونډۍ ضلعې، د يوې مستقيمې کرښې په اوږدوالي پرتې نه وي.
- هغه مضلع چې ضلعې او زاويې يې سره مساوي وي، منظم مضلع بلل کېږي.

د مضلع محيطي دايره: هغه دايره چې د مضلع له رأسونو څخه تېره شي، د مضلع محيطي دايره بلل کېږي.

د مضلع محاطي دايره: هغه دايره چې د مضلع پر ضلعو مماس وي، د مضلع محاطي دايره بلل کېږي.

د مثلث محاطي دايره: هغه دايره چې د مثلث پر يوه ضلعه او د دوو نورو ضلعو په امتداد مماس وي، د مثلث محاطي دايره بلل کېږي.

- د دوو متقاطع دايرو د مرکزونو ترمنځ کرښه په ګډوتر عمود ده.
- که چيرې يوه څلور ضلعي مرسوم په دايره وي، د هغې د مخامخ زاويو مجموعه 180° ده.
- د دايرې محيط، د مخامخ اړيکې په مرسته لاس ته راځي: $C = 2\pi r$
- د دايرې مساحت، د مخامخ اړيکې په مرسته لاسته راځي: $A = \pi r^2$

د دویم څپرکي پوښتنې:

- په لاندې پوښتنو کې د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، له سم ځواب څخه دایره راتاوه کړئ.

1- که چیرې د P ټکی، د دایرې پر محیط پروت وي، د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته عبارت دی له:

a) 1 b) 2

c) 0 d) درې واړه ځوابونه سم دي.

2- که چیرې د P یو ټکی د دایرې په دننه کې پروت وي، د دې نقطې طاقت، نظر یوې دایرې ته عبارت دی، له:

a) د P دټکي طاقت مثبت دی. b) د P ټکي طاقت منفي دی.

c) د P ټکي طاقت صفر دی. d) درې واړه ځوابونه سم نه دي.

3-که دP ټکی له دایرې څخه د باندې پروت وي، دP ټکي طاقت نظریوې دایرې ته، عبارت دی، له:

a) $d-r$ b) d^2-R^2

c) $r-d$ d) R^2-d^2

4- که چیرې د یوې دایرې شعاع R او د دایرې دننه ټکي او د مرکز واټن، په d سره وښیو، د نوموړي ټکي طاقت نظر دایرې ته، عبارت دی، له:

a) $R^2=d^2$ b) $d^2=R^2$

c) دواړه ځوابونه سم دي. d) دواړه ځوابونه نا سم دي.

5- یو ټکی د $13cm$ په اندازه د $C(O,r)$ دایرې له مرکز څخه واټن لري، که د دایرې قطر $10cm$ وي، د قاطع د بهرنۍ برخې اوږدوالی له نوموړي ټکي په لاندې ځوابونو کې وښیئ:

a) 13 cm b) 10 cm

c) 12 cm d) 8 cm

6-که چیرې د P له ټکي څخه د یو مماس اوږدوالی، د $C(O,r)$ په دایرې $12cm$ او قطر یې 10cm وي، د P او O د ټکو تر منځ واټن عبارت دی، له:

a) 13 cm b) 12 cm

c) 10 cm d) 5 cm

7- که چیرې د $C(O,r)$ د دایرې د $\overline{AB}$ وتر ته، تر P ټکي پورې امتداد ورکړو، داسې چې: $\overline{AP}=8cm$ او $\text{BP}=2\text{cm}$ وي، د $\overline{PT}$ د مماس اوږدوالی عبارت دی، له:

a) 4 cm b) 8 cm

c) 2 cm d) درې واړه ځوابونه نا سم دي.

- په لاندې پوښتنو کې تش ځایونه په مناسبو کلمو سره ډک کړئ:

1- $d^2 - r^2$ د یوه ټکي .... نظر یوې دایرې ته دی.

2- که چېرې $\overline{PT}$، د $C(O,r)$ پر دایره مماس وي، د P د ټکي طاقت نظر $C(O,r)$ دایرې ته، عبارت دی له .... $\overline{PT}^2$ دی.

3- که چېرې د P ټکی د دایرې پر محیط پروت وي، نو د ټکي طاقت نظر دایرې ته .... دی.

4- که ټکی د دایرې په دننه کې وي، نو د ټکي طاقت نظر دایرې ته .... دی.

5- که ټکی له دایرې څخه د باندې وي، نو د ټکي طاقت نظر دایرې ته .... دی.

6- که $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ وي، د A, B, C او D د .... پر محیط پرتې وي او د P ټکی د .... په دننه او یا بهر پروت دی.

7- که د A, B او T ټکي د دایرې پر محیط پراته وي، A, B او P د یوې کرښې په امتداد دی او د P ټکی د دایرې په بهر کې دی. په دې توګه ....$=$ $\overline{PT}^2$ دی.

- د سمو جملو په مخامخ کې د(ص) او د ناسمو جملو مخامخ کې د(غ) توری ولیکئ.

1- (   ) د یوه ټکي طاقت نظر دایرې ته، د ټکي او د دایرې د مرکز واټن له مربع سره مساوي دی.

2- (   ) که ټکی د دایرې پر محیط پروت وي، د ټکي طاقت نظر دایرې ته صفر دی.

3- (   ) که ټکی د دایرې په دننه کې وي، د ټکي طاقت نظر دایرې ته منفي دی.

4- (   ) که ټکی د د دایرې په بهر کې وي، دټکي طاقت نظر دایرې ته مثبت دی.

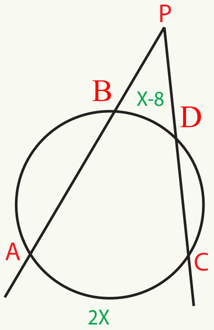
5- (   ) د یوه ټکي طاقت، نظر هرې دایرې ته مثبت دی.

6- (   ) د یوه ټکي طاقت، نظر دایرې ته $d^2 - r^2$ دی که د d د ټکي واټن دایرې ته او r د دایرې شعاع وي.

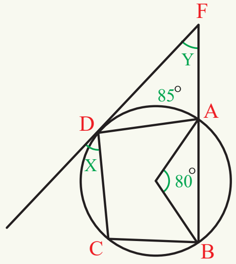
7- (   ) که دوه دایرې مماس وي، د هغوی طاقت نظر ګډ مماس ته په هر ټکي کې مساوي وي.

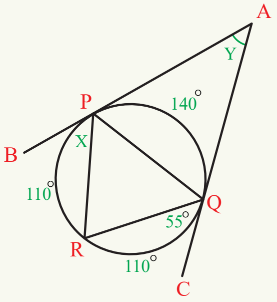
• لاندې پوښتنې په تفصيل سره حل کړئ:

1 - په لاندې شکل کې $\hat{p} = 40^\circ$ او مخامخ قوسونه يې، په ترتيب سره $(x-8)^\circ$ او $(2x)^\circ$ وي د اوږدوالي قوسونو $\overset{\frown}{BD}$ او $\overset{\frown}{AC}$ پيدا کړئ.

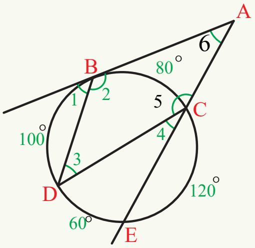


2 - په لاندې شکلونو کې د $\hat{x}$ او $\hat{y}$ د زاويو پراخوالى پيدا کړئ.



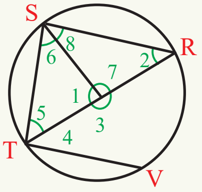


3- په لاندې شکل کې $\overline{AB}$ پر دايره مماس دى، که $\overset{\frown}{DB} = 100^\circ$, $\overset{\frown}{DE} = 60^\circ$ او $\overset{\frown}{CE} = 120^\circ$ وي، د $\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}$ او $\hat{6}$ زاويو پراخوالى پيدا کړئ.

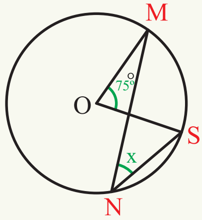


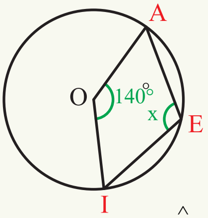
4- د $C(O,r)$ په دايره کې، $RS // TV$, $\hat{RTS} = 50^\circ$ او RT د دايرې قطر دى، د

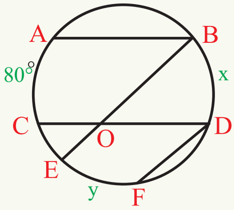
$\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5},\hat{6},\hat{7}$ او $\hat{8}$ زاويو اندازه پيدا کړئ.



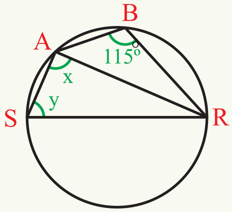
5- په لاندې شکلونو کې د $\hat{x},\hat{y}$ زاويو اندازه، وټاکئ.

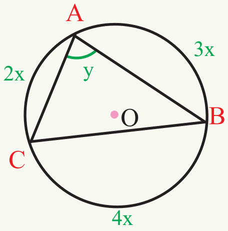


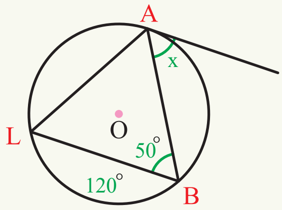




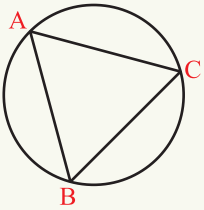
6- په لاندې شکلونو کې د $\hat{x}$ او $\hat{y}$ زاويو اندازه، پيدا کړئ.



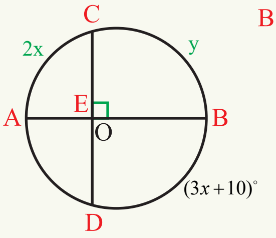


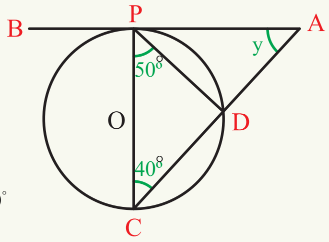


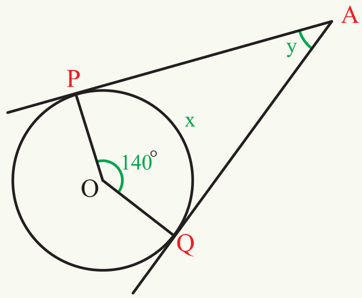
7- د محاطي دايرې د تعريف له مخې وښيئ، چې د هر مثلث دننيو زاويو مجموعه 180° وي.



8- په لاندې شکلونو کې، د $\hat{x}$ او $\hat{y}$ زاويو اندازه پيدا کړئ.







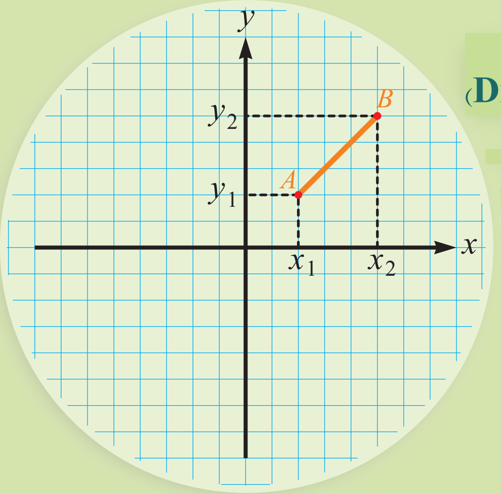
دریم څپـــرکی

تحلیلي هندسه

تحليلي هندسه

(Analytic Geometry)

د الجبر ا و هندسې تر منځ اړيکې، له تحليلي هندسې څخه عبارت دی چې د الجبري معادلو او هندسي شکلونو په مرسته تر بحث لاندې نيول کېږي، فرانسوي رياضي پوه ديکارت، د لومړي ځل لپاره، د ټاکلو هندسي اشکالو او الجبري معادلو ترمنځ، اړيکه و څېړله، ويې ويل: چې ځينې الجبري معادلې، يو ټاکلی هندسي شکل لري. څرنګه چې د هندسې د علم د بنسټ ټکی او د الجبري معادلو بنسټ عدد جوړوې، له لدې کبله، لومړی د ټکي او عدد ترمنځ اړيکې تر څېړنې لاندې نيسو، ديکارت د عدد او ټکي ترمنځ د اړيکو د څېړنې لپاره، د قايم مختصاتو د محورونو داسې يو سيستم راوپېژاند چې تراوسه د ديکارت په نامه يادېږي.



د دوو ټکو ترمنځ واټن
(Distance between twoPoint)

د $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ دوه ټکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې، د AB یو قطعه خط ټاکي. ستاسې په اند، څرنګه کولای شوچې، د A او B ټکو ترمنځ واټن وشمیرو؟

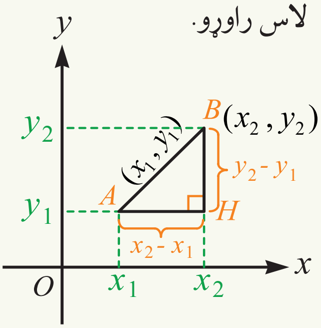
فعالیت

- د $A(3,5)$ او $B(5,4)$ ټکي، د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وښایاست.
- د AB کرښه رسم کړئ.
- د A او B ټکو ترمنځ واټن وشمېرئ؟

له پورتني فعالیت څخه کولای شو، په عمومي ډول، د $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ دوو ټکو ترمنځ واټن په لاندې ډول په لاس راوړو.

په لاندې شکل کې $\overset{\Delta}{AHB}$ مثلث یوقایم الزاویه مثلث دی.

د فیثاغورث د قضیې په مرسته کولای شو، د A او B ټکو ترمنځ واټن په لاندې ډول په لاس راوړو.



$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{BH}^2$ ......د فیثاغورث د قضیې

$$\left.\begin{aligned}\overline{AH} &= x_2 - x_1\\ \overline{BH} &= y_2 - y_1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

لومړی مثال: د $A(1,7)$ او $B(5,4)$ ټکو ترمنځ واټن پیدا کړئ.

حل: د دوو ټکو د واټن له فورمول څخه په ګټې اخیستنې سره لیکلای شو، چې:

$$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$\overline{AB}=\sqrt{(5-1)^2+(4-7)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}$$

$$\overline{AB}=5\ unit$$

دویم مثال: د $A(3,4)$ ټکي واټن له مبدأ څخه حساب کړئ.

حل: پوهیږو چې د مبدا مختصات $O(0,0)$ دی، نو د دوو ټکو تر منځ د واټن د فورمول $\overline{0A}=\sqrt{x^2+y^2}$ څخه په لاس راځي:

$$\overline{OA}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}\Rightarrow\overline{OA}=5$$

د $A(x_1,y_1)$ او $B(x_2,y_2)$ واټن عبارت دی، له: $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

د $P(x,y)$ یو اختیاري ټکی واټن، د قایمو کمیاتو له مبدأ څخه عبارت دی، له:

$$\overline{OA}=\sqrt{x^2+y^2}$$

پوښتنې

1- د $A(0,3)$ او $B(2,0)$ ټکو ترمنځ واټن پیداکړئ.

2- که $A(4,6)$ ، $B(-2,4)$ او $C(-8,2)$ د یوه مثلث دراسونو مختصات وي، د مثلث ډول وټاکئ.

3- د K عددي قیمت داسې وټاکئ، هغه ټوټه کرښه، چې له $A(2,3)$ او $B(5K,6)$ ټکو څخه تېرېږي، اوږدوالی یې د $\overline{AB}$ پنځه برابره شي.

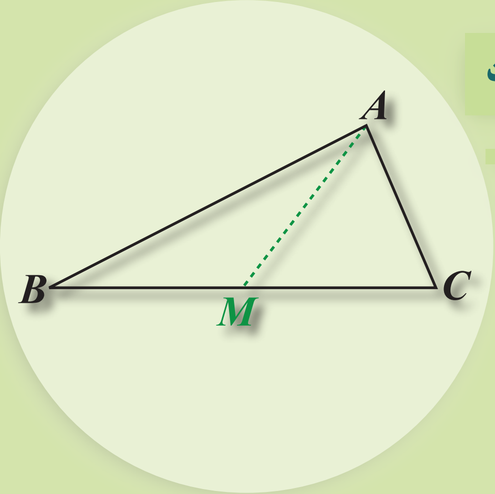
4- د $P(1,\sqrt{3})$ او $Q(-1,1+\sqrt{3})$ ترمنځ واټن پیداکړئ.

5- که $A(-1,4)$, $B(-3,-7)$ او $C(1,9)$ د یوه مثلث د رأسونومختصات وي، د مثلث محیط حساب کړئ.

6- د هغه مثلث مساحت پیداکړئ چې رأسونه یې، د $A(2,0)$ ، $B(6,2)$ او $C(1,2)$ په ټکوکې واقع وي.

7- که $A(10,5)$ ، $B(3,2)$ او $C(6,-5)$ د یوه مثلث د څوکو(رأسونه) مختصات وي، د مثلث ډول وټاکئ.

د يوه قطعه خط د منځني ټکي مختصات

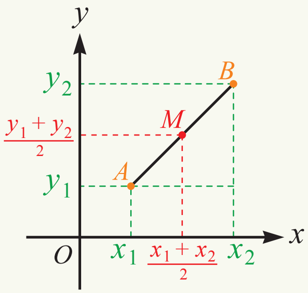


د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې د $\overline{AM}$ قطعه خط د مثلث میانه ده، د میانې ځانګړتیا بیان کړئ.

فعالیت

- د $D(2,0)$ او $E(6,0)$ ټکې، د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- که چیرې د C ټکی، د $\overline{DE}$ قطعه خط منځنی ټکی وي، د هغې مختصات ولیکئ.
- د C ټکي مختصات د D او E ټکو له مختصاتوسره څه اړیکه لري؟
- د $P(0,1)$ او $Q(0,4)$ ټکي د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- که چیرې د R ټکی، د $\overline{PQ}$ ټوټه کرښې منځنی ټکی وي، د هغې مختصات په لاس راوړئ.
- د R ټکي مختصات، د P او Q ټکو له مختصاتوسره څه اړیکه لري؟

د پورتني فعالیت پایله کولای شوچې په بشپړډول داسې بیان کړو: که $A(x_1,0)$ او $B(x_2,0)$ دوه ټکو د x په محورو پراته وي، نو د M ټکي مختصات چې د $\overline{AB}$ ټوټه کرښې منځنی ټکی دی داسې په لاس راځي: $M(\frac{x_1+x_2}{2},0)$



که $P(0,y_1)$ او $Q(0,y_2)$ دوه ټکي، د y په محور پراته وي، د M د ټکي مختصات چې د $\overline{PQ}$ ټوټه کرښې منځنی ټکی دی داسې په لاس راوړو: $M(0,\frac{y_1+y_2}{2})$

په بشپړ ډول $A(x_1,y_1)$ ، $B(x_2,y_2)$ د وضیعه کمیاتو په سیستم کې دوه ټکي، او M د $\overline{AB}$ کرښې منځنی ټکی وي، نو د M ټکي مختصات داسې په لاس راځي: $M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$

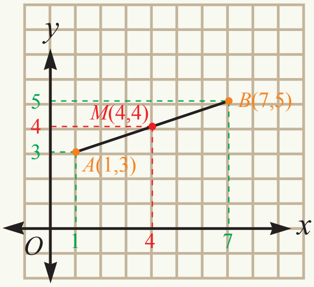
لومړی مثال: که چېرې $A(1,3)$ او $B(7,5)$ د $\overline{AB}$ ټوټه کرښې د پیل او پای مختصات وي، د ټوټه کرښې د منځنۍ ټکي مختصات په لاس راوړئ؟

حل: د یوې ټوټه کرښې د منځنۍ ټکي له مختصاتوڅخه په ګټه اخیستنې سره لیکلای شو چې:

$$M(\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1+y_2}{2})$$

$$M(\frac{1+7}{2}\ ,\ \frac{3+5}{2})$$

$$M(4,4)$$



دويم مثال: د $P(-1,3)$ ټکي واټن، د هغې مستقیمې کرښې له منځنۍ ټکي څخه پیداکړئ چې د $A(1,2)$ او $B(3,-4)$ ټکو څخه تېرشي.

حل: د AB د مستقیمې کرښې، له منځنې ټکي څخه د P ټکي د واټن د پیدا کولو لپاره لومړی د AB منځنې ټکي مختصات، په لاس راوړو، نولیکلای شو چې:

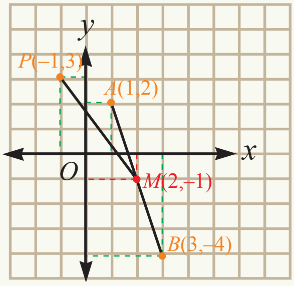
$$M_{\overline{AB}}=(\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1+y_2}{2})$$

$$=(\frac{1+3}{2},\frac{2-4}{2})=(2,-1)\Rightarrow M_{\overline{AB}}=(2,-1)$$

$$\overline{PM}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(2+1)^2+(-1-3)^2}$$

$$\overline{PM}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}$$

$$\overline{PM}=5\ \text{unit}$$



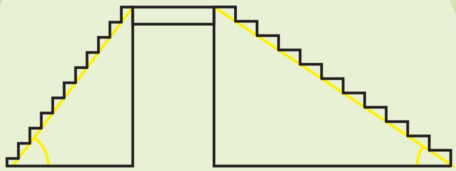
پوښتنې

1- د یوه مثلث درې رأسونه $A(5,-2)$, $B(3,-1)$ او $C(1,5)$ راکړل شوي دي، د $\overline{AM}$ د میانې اوږدوالی پیداکړئ.

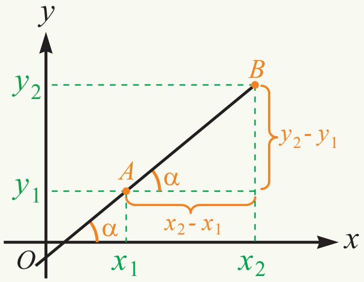
2 - که چېرې $A(2,4)$, $B(5,9)$, $C(14,9)$ او $D(11,4)$ ټکي د یوه متوازي الاضلاع رأسونه وي، د متوازي الاضلاع د قطرونو د تقاطع د ټکو مختصات پیداکړئ.

3 - که چېرې $A(-1,4)$, $B(-3,-7)$ او $C(1,9)$ د یوه مثلث رأسونه وي، نو د هغه د میانې یا منځنۍ کرښې اوږدوالی پیدا کړئ چې د BC په ضلع رسمیږي.

د مستقیمې کرښې میل



شکل ته وګورئ، په کومه زینه، په آسانۍ سره ختلی شئ، ولې؟ دلیل یې بیان کړئ.



که $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2 y_2)$ د $\overline{AB}$ مستقیمې کرښې دوه اختیاري ټکي وي، د $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ نسبت ته د مستقیمې کرښې میل وایي او په لاندې ډول یې لیکي: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

لومړی مثال: د هغې مستقیمې کرښې میل پیداکړئ چې د $A(3,5)$ او $B(4,6)$ ټکو څخه تېرشي.

حل: پوهېږو چې د مستقیمې کرښې میل د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ اړیکې څخه لاسته راځي، نو لرو چې:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-5}{4-3} = 1$$

دویم مثال: هغه مستقیم چې د $A(2,5)$ او $B(4,k)$ ټکو څخه تېریږي، د k قیمت په هغه کې داسې وټاکئ چې د مستقیمې کرښې میل ۳ وي.

حل: د k قیمت د لاسته راوړلو لپاره ددې رابطې $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ څخه په لاندې ډول ګټه اخلو:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad 3 = \frac{K-5}{2}$$

$$3 = \frac{k-5}{4-2} \qquad K - 5 = 6$$

$$K = 11$$

دریم مثال: د هغې مستقیمې کرښې میل پیداکړئ چې د $P(2,3)$ ټکي او د وضیعه کمیاتو له مبدأ څخه تېرشي.

حل: څرنگه چې مستقیمه کرښه د وضیعه کمیاتو له مبدأ څخه تېرېږي، نود مبدأ مختصات $O(0,0)$ دی او میل یې په لاندې ډول په لاس راورو:

$$m_{\overline{PO}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3}{2}$$

$$m_{\overline{PO}} = 1.5$$

فعالیت

- د $A(2,3)$ او $B(4,6)$ ټکي د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وښیئ.
- هغه مستقیم چې د A او B ټکوڅخه تېرېږي، رسم کړئ او په Δ_1 سره یې وښیئ؟
- د Δ_1 مستقیم میل په لاس راوړئ؟
- د Δ_1 مستقیم د x محور له مثبت جهت سره څه ډول زاویه جوړوي.
- د $M(1,5)$ او $N(4,2)$ ټکي په همغه وضیعه کمیاتوکې په بل رنگ وټاکئ.
- هغه مستقیم چې د M او N ټکوڅخه تېرېږي، هغه ته Δ_2 ووایئ.
- د Δ_2 مستقیم میل په لاس راوړئ؟
- د Δ_2 مستقیم د x محور د مثبت جهت سره څه ډول زاویه جوړوي؟
- د جوړ شویو زاویو او کرښوترمنځ، څه ډول اړیکه شته؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایلې په لاس راځي.

د هرې مستقیمې کرښې میل په هغه زاویې پورې اړه لري چې مستقیمه کرښه یې، د x د محور له مثبت لورې سره جوړوي.

که یوه مستقیمه کرښه، د x محور له مثبت جهت سره حاده زاویه جوړه کړي، میل یې یومثبت عدد دی.

که یوه مستقیمه کرښه، د x محور له مثبت جهت سره، منفرجه زاویه جوړه کړي، میل یې یو منفي عدد دی.

پوښتني

1 - د هغې مستقیمې کرښې میل په لاس راوړئ چې د $A(1,1)$ او $B(-1,-1)$ ټکوڅخه تېرشي.

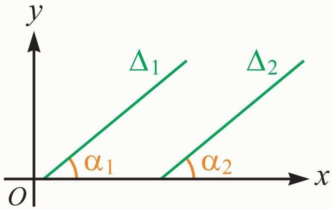
2 - هغه مستقیم چې د $A(-2,2\sqrt{3})$ او $B(1,a)$ ټکوڅخه تېرېږي، د a عددي قیمت داسې و ټاکئ، چې د مستقیم میل $\sqrt{3}$ وي.

3 - که چېرې $A(5,-2)$, $B(3,-1)$ او $C(1,5)$ ټکي، د یوه مثلث رأسونه وي، د نوموړي مثلث د $\overline{BC}$ ضلعې د میانې میل پیداکړئ.

د موازي کرښو میل

په ورکړل شوي شکل کې، زینه په پام کې ونیسئ، د هغې د بازوګانو تر منځ څه ډول اړیکه شتون لري؟

فعالیت



- د راکړل شویو وضیعه کمیاتو په سیستم کې د Δ_1 او Δ_2 موازي کرښې له یوې بلې سره داسې رسم کړئ چې د x محور له مثبت جهت سره حاده زاویې جوړې کړي.
- د Δ_1 او Δ_2 کرښو میلونه حساب او له یو بل سره یې پرتله کړئ، کرښې له یو بل سره څه اړیکې لري؟
- که چېرې د Δ_1 مستقیم د x محور له مثبت جهت سره د α_1 زاویه د Δ_2 مستقیم د x محور له مثبت جهت سره د α_2 زاویه جوړه کړي، نو α_1 او α_2 یو له بل سره څه اړیکه لري؟

په عمومي ډول د پورتني فعالیت پایله، په لاندې ډول بیانوو:
موازي کرښې، د مساوي میلونو لرونکې دي.
که چیرې دوه مستقیمې کرښې مساوي میلونه ولري، په پایله کې هغه زاویې چې د x محور له مثبت جهت سره یې جوړوي، یو له بل سره مساوي دي؟

مثال: که چېرې د Δ_1 مستقیم، د $A(2,5)$ او $B(-6,-11)$ ټکو او د Δ_2 مستقیم، د $C(-4,-6)$ او $D(3,8)$ ټکو څخه تېرشي، د Δ_1 او Δ_2 کرښې یوه له بلې سره څه اړیکه لري؟

$$\left.\begin{aligned} m_{\overline{AB}} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ m_{\Delta_1} &= \frac{-11-(5)}{-6-2} = \frac{-16}{-8} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_1} = 2 \\ m_{\Delta_2} &= \frac{8+6}{3+4} = \frac{14}{7} = 2 \Rightarrow m_{\Delta_2} = 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow m_{\Delta_1} = m_{\Delta_2} \Rightarrow \Delta_1 \parallel \Delta_2$$

خرنگه چې د Δ_1 او Δ_2 میلونه سره مساوي دي، نو نوموړي کرښې یوه له بلې سره موازي دي.

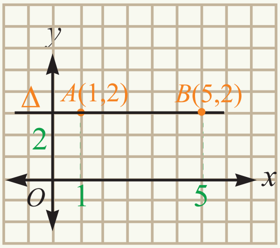
فعالیت

- د $A(1,2)$ او $B(5,2)$ ټکي د وضیعه کمیاتو په مستوي کې وټاکئ.
- هغه مستقیمه کرښه چې له A او B ټکوڅخه تېرېږي، رسم کړئ او په Δ يې ونوموئ.
- د Δ مستقیم د x محور له مثبت جهت سره، څه ډول زاویه جوړوي؟
- د Δ مستقیم میل حساب کړئ.

د پورتني فعالیت پایله په لاندې ډول بیانوو:

که چېرې د A او B دوه اختیاري ټکي او مساوي ترتیبونه ولري، لکه: $B(x_2,a), A(x_1,a)$

هغه کرښې چې د A او B ټکوڅخه تېرېږي، د x له محورسره موازي دي. او میل يې، له صفرسره مساوي دی. یعنې: $m = \frac{a-a}{x_2-x_1} = 0$



فعالیت

- د $M(3,2)$ او $N(3,5)$ ټکي، د وضیعه کمیاتو په مستوي کې وټاکئ.
- هغه مستقیمه کرښه چې له M او N ټکوڅخه تیریږي، رسم کړئ او په Δ یې ونوموئ.
- د Δ مستقیمه کرښه، د x له محور سره څه ډول زاویه جوړ وي، د Δ مستقیمې کرښې د میل په اړه څه ویلای شئ؟

له پورتني فعالیت څخه دې پایلې ته رسیږو، هغه مستقیمه کرښه چې د x له محورسره قایمه زاویه جوړه کړي، نشو کولای د هغې میل حساب کړو، په دې حالت کې ویل کیږي چې د Δ مستقیم خط ټاکلی میل نه لري.

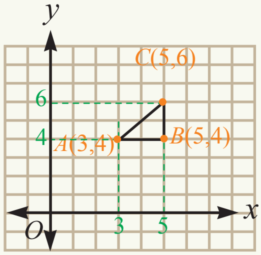
مثال: که چېرې د $A(3,4)$ ، $B(5,4)$ او $C(5,6)$ ټکې، د یوه مثلث رأسونه وي، د مثلث ډول وټاکئ اوهغه د وضیعه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ؟

حل: څرنګه چې، د AB مستقیمه کرښه د x له محور سره موازي ده، نو میل یې صفر دی.

$$m_{\overline{AB}} = \frac{4-4}{5-3} = \frac{0}{2} = 0$$

په همدې ډول، د BC مستقیمه کرښه د y له محور سره موازي ده، نومیل یې نامعین دی (نه دی تعریف شوی).

$$m_{\overline{BC}} = \frac{6-4}{5-5} = \frac{2}{0} = \infty$$



$$\overline{AB}^2 = (5-3)^2 + (4-4)^2 = 4$$

$$\overline{BC}^2 = (5-5)^2 + (6-4)^2 = 4$$

$$\overline{AC}^2 = (5-3)^2 + (6-4)^2 = 8$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$$

په پایله کې:

څرنګه چې د فیثاغورث قضیه پکې تطبیق کیږي، نو د $\overline{AB}$ مستقیمه کرښه، د $\overline{AC}$ په مستقیمې کرښې عمود ده، نو د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث قایمه الزاویه دی.

هغه مستقیمه کرښه چې د x له محور سره موازي او یا د y په محور عمود وي، میل یې صفردی.

هغه مستقیمه کرښه چې د x په محور عمود یا د y له محور سره موازي وي، میل یې نه دی تعریف شوی.(معین عدد نه دی)

پوښتنې

1- که د $A(3,0)$ ، $B(0,5)$ ، $C(-3,0)$ او $D(0,-5)$ د یوې څلورضلعي راسونه وي:

الف: د څلورضلعي مخامخ ضلعې یوه له بلې سره څه اړیکې لري؟

ب: د قطرونو میلونه پیدا کړئ؟

۲- $A(3,4), B(-3,4), C(3,-4)$ او $D(-3,-4)$ ټکی په پام کې ونیسئ.

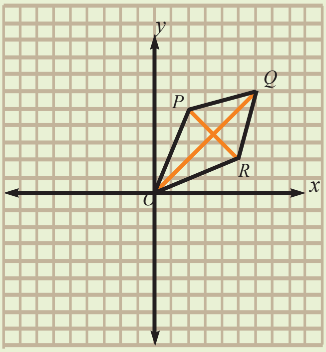
الف: هغه مستقیمه کرښه چې د A او B له ټکو څخه تیریږي، له هغې کرښې سره چې د C او D ټکوڅخه تیریږي، څه اړیکې لري؟

ب: هغه مستقیمه کرښه چې د A او B ټکو اوهغه کرښه چې د C او D ټکو څخه تیریږي څه ا ړیکه لري؟

ج: د $ABCD$ څلورضلعي، څه ډول څلور ضلعي ده؟

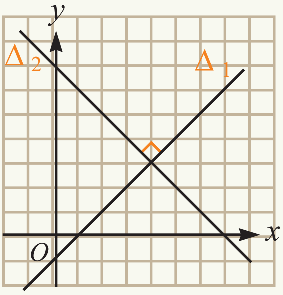
د: د قطرونو میل یې پیدا کړئ.

د یو پر بل باندې د عمود مستقیمو کرښو میل



$OPQR$ څلورضلعي یولوزي دی.
کولای شئ، د لوزي څانګړتیا، د هغې د رأسونو د مختصاتو په مرسته بیان کړئ؟

تعریف



د Δ_1 او Δ_2 دوه مستقیمې کرښې چې میلونه یې m_1 او m_2 دي، هغه وخت یو پربل عمود دي چې لاندې رابطه د هغوی ترمنځ موجوده وي. $m_1 \cdot m_2 = -1$

لومړی مثال: هغه مستقیمه کرښه چې د $A(7,5)$ او $B(1,1)$ او هغه چې د $C(0,5)$ او $D(2,2)$ ټکو څخه تیرېږي، له یوبل سره څه اړیکه لري؟

حل:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-5}{1-7} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$$

$$m_{\overline{CD}} = \frac{2-5}{2-0} = \frac{-3}{2}$$

$$m_{\overline{AB}} \cdot m_{\overline{CD}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{-3}{2} = -1$$

په پایله کې، د $\overline{AB}$ او $\overline{CD}$ مستقیمې کرښې، یو پربل عمود دي.

فعالیت

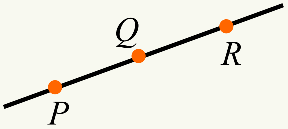
- د $C(4,4), B(1,3), O(0,0)$ او $D(3,1)$ ټکي، د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وښایاست.
- د $OBCD$ شکل رسم کړئ.
- د $\overline{OB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ او $\overline{DO}$ ضلعو اوږدوالی پیدا کړئ.

- د $\overline{OBCD}$ خلورضلعي، څه ډول خلورضلعي ده؟
- وښيئ چې د $\overline{OC}$ او $\overline{BC}$ قطرونه، يو پر بل عمود دي؟

پوهېږو چې په يوه مستوي کې، له دوو ټکوڅخه، يوازې يو مستقيم تېرېږي، په کوم حالت کې له درېو ټکو څخه يومستقيم خط تېرېدلای شي؟

تعريف

د Q, P او R ټکي هغه وخت پر يوه مستقيم پراته دي چې د $\overline{PQ}$ ميل د $\overline{QR}$ له ميل سره مساوي وي.



دويم مثال: د $B(2,3), A(0,-1)$ او $C(-1,-3)$ درې ټکي په پام کې ونيسئ، دا وښيئ چې دا درې واړه ټکي په يوه مستقيمه کرښه پراته دي؟

حل: د AB ميل عبارت دی له:

$$m_{\overline{AB}}=\frac{3+1}{2-0}=\frac{4}{2}=2$$

$$m_{\overline{AC}}=\frac{-3-(-1)}{-1-0}=\frac{-2}{-1}=2$$

د AC ميل عبارت دی، له : $m_{\overline{BC}}=\frac{-3-3}{-1-2}=\frac{-6}{-3}=2$

څرنگه چې د $\overline{AB}, \overline{AC}$ او $\overline{BC}$ کرښو ميلونه سره مساوي دي، نو په پايله کې د B, A او C ټکي په يوه مستقيمه کرښه پراته دي.

- که چېرې د دوو کرښو د ميلونو د ضرب حاصل (-1) وي، نو کرښې يو پر بل عمودي دي.
- درې ټکي، هغه وخت په يوه کرښه پراته وي چې د ټوټه کرښو ميلونه سره مساوي وي.

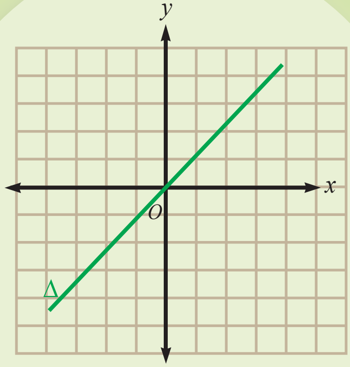
پوښتنې

1- که د $A(6,1)$ ، $B(8,3)$ او $C(6,5)$ ټکي، د يوه مثلث رأسونه وي، دا وښيئ چې نوموړی مثلث قايم الزاويه دی او که نه؟

2 - هغه ټوټه کرښې چې د $(7,5)$ او $(1,1)$ ټکو څخه تېرېږي له هغې ټوټه کرښې سره چې د $(0,5)$ او $(2,2)$ ټکوڅخه تېرېږي، اړيکې يې يو له بل سره وڅېرئ.

3 - يوه کرښه چې د $(2,4)$ او $(7,5)$ ټکو او بله د $(1,-4)$ او $(-3,-5)$ ټکوڅخه تېرېږي، د دواړو کرښوحالت يو له بل سره بيان کړئ.

د مستقيمې کرښې معادله



په مخامخ شکل کې، د مستقیمې کرښې پرمخ څو ټکي وټاکئ، د کرښې پرمخ د ټاکل شویو ټکو د واټن اوترتیب ترمنځ کومه اړیکه وینئ؟

فعالیت

- د $A(1,-1)$، $B(-2,2)$، $C(4,-4)$ او $D(-3,3)$ ټکي د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- ددې ټکو له ترلوڅخه کوم شکل لاسته راځي؟
- د $A(1,1)$ او $B(0,0)$ ټکي د شکل پرمخ پراته دي اوکه نه؟ ولې؟

د پورتني فعالیت پایله، په عمومي ډول داسې بیانوو:

د $y=x$ او $y=-x$ رابطې چې د یوې کرښې پرمخ د ټکو د واټن اوترتیب ترمنځ اړیکه رانښیي، د مستقیمې کرښې معادله بلل کیږي.

پوهیږو چې د هرو دوو ټکو څخه چې په یوه مستوي کې پرتې وي، یوازې او یوازې یوه مستقیمه کرښه تیریږي. اوس غواړو چې د هغې مستقیمې کرښې معادله پیدا کړو چې له دوو اختیاري ټکو څخه تیریږي.

فعالیت

- د $A(1,3)$ او $B(3,5)$ دوه ټکي، د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- هغه مستقیمه کرښه رسم کړئ چې له A او B ټکوڅخه تیره شي.

ددې لپاره چې د $M(x,y)$ اختیاري ټکي د $\overline{AB}$ کرښې پر مخ پروت وي، کوم شرط لازمي دی؟ د $\overline{AM}$ او $\overline{AB}$ ټوټه کرښو میلونو له مساویتوب څخه کومه اړیکه لاسته راځي؟

د پورتني فعالیت پایله کولای شو په عمومي ډول داسې بیان کړو.

د هغې کرښې معادله چې د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ له دوو ټکو څخه تېره شي، داسې په لاس راځي:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

لومړی مثال: د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې د $A(3,4)$ او $B(2,-1)$ له ټکوڅخه تېره شي.

حل: د هغې مستقیمې کرښې د معادلې په مرسته چې دوه ټکي يې معلوم وي، لیکلای شو چې:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-4}{x-3}=\frac{-1-4}{2-3}\Rightarrow\frac{y-4}{x-3}=\frac{-5}{-1}=5$$

$$y-4=5(x-3)$$

$$y=5x-15+4=5x-11$$

دویم مثال: د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې د x محور په واټن، د $x=-3$ ټکي کې او د y محور په ترتیب د $y=4$ ټکي کې قطع کړي؟

حل: څرنګه چې، مستقیمه کرښه د x محور په $x=-3$ ټکي کې قطع کوي، نو د مختصاتو په سیستم کې، ددې ټکي د تقاطع مختصات $(-3,0)$ دی. په همدې ډول، د y له محور سره د تقاطع د ټکو د مختصات د وضعیه کمیاتو په سیستم کې $(0,4)$ دی، اوس د یوه مستقیم د دوو ټکو پېژندلو په مرسته کولای شو، د مستقیمې کرښې معادله داسې ولیکو:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow\frac{y-0}{x-(-3)}=\frac{4-0}{0-(-3)}$$

$$\frac{y}{x+3}=\frac{4}{3}\Rightarrow 3y=4(x+3)$$

$$3y-4x=12$$

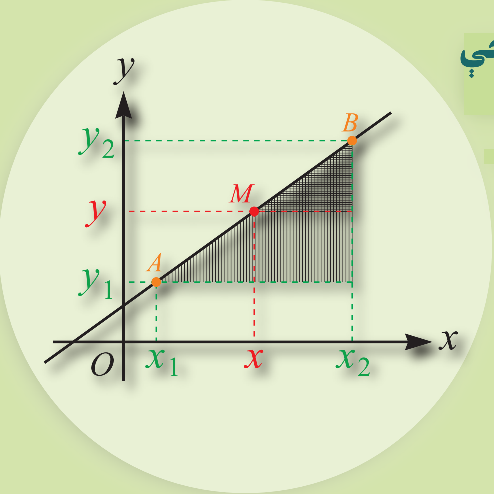
پوښتنې

1- د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې د $A(2,-1)$ او $B(3,4)$ له ټکو څخه تېره شي؟

2- د هغه مثلث د $\overline{AM}$ میانې معادله ولیکئ چې رأسونه يې $A(1,3), B(-1,4)$ او $C(5,6)$ وي؟

3- د هغې مستقیمې کرښې معادله پیدا کړئ چې د x محور په $A(3,0)$ او د y محور په $B(0,-2)$ ټکي کې قطع کړي؟

د هغې مستقیمې کرښې معادله چې میل او یو ټکی یې معلوم وي



په مخامخ شکل کې د $\overline{AB}$ میل، د $\overline{MA}$ له میل سره څه اړیکه لري؟

بله هره ټوټه کرښه چې ددې ټوټه کرښې پرمخ وټاکو، د $\overline{AB}$ له میل سره برابر میل لري، ولې؟

پوهیږو چې د هغې کرښې معادله چې د $A(x_1, y_1)$ او $B(x_2, y_2)$ دوه ټکي ښکاره کوي عبارت ده، له:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

یا

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

څرنګه چې $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ د مستقیمې کرښې میل راښیي، نو پورتنی معادله لاندې شکل غوره کوي. $y - y_1 = m(x - x_1)$

وروستنی معادله، د هغې کرښې معادله ده چې میل یې (m) او د $A(x_1, y_1)$ له نقطې څخه تیریږي.

لومړی مثال: د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې له $(2,3)$ ټکي څخه تېره اومیل یې $\frac{1}{2}$ وي.

حل: څرنګه چې د مستقیمې کرښې میل اویو ټکی راکړل شوي دي، نو د $y - b = m(x - a)$ معادلې څخه لیکلای شو:

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$2(y - 3) = (x - 2)$$

$$2y - 6 = x - 2$$

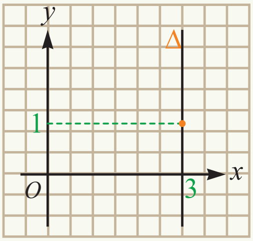
$$2y - x = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

دویم مثال: هغه مستقیمه کرښه چې د $(3,1)$ ټکي څخه تېره او د x له محور سره موازي وي، ولیکئ؟

حل: څرنګه چې مستقیمه کرښه د x له محور سره موازي ده، نومیل یې صفر دی. په پایله کې یې معادله په لاندې ډول ده.

$$y-b=m(x-a)$$
$$y-1=0\ (x-3)$$
$$y-1=0 \Rightarrow y=1$$

دریم مثال: د هغې مستقیمې کرښې معادله ولیکئ چې له $(3,1)$ ټکي څخه تېره او د y له محور سره موازي وي؟



حل: څرنګه چې مستقیم د y له محور سره موازي دی، نومیل یې نه دی تعریف شوی (معین میل نه لري)، ځکه پوهېږو چې، ددې کرښې پرمخ د هر ټکي واټن د $(3,1)$ ټکي سره مساوي دی چې معادله یې په دې ډول $x=3$ ده.

په عمومي ډول، هغه کرښه چې له (a,b) ټکي څخه تېره او د x له محور سره موازي وي، عبارت له $y=b$ سره ده.

هغه کرښه چې د (a,b) ټکي څخه تیرېږي او د y له محور سره موازي وي، عبارت له $x=1$ سره ده.

څلورم مثال: د Δ توټه کرښې د عمودي ناصف معادله پیدا کړئ چې د $A(2,-4)$ او $B(-2,4)$ ټکوڅخه تېره شي.

حل: د عمودي ناصف د معادلې د پیداکولو لپاره لومړی د $\overline{AB}$ توټه کرښې میل په لاس راوړو او بیا د هغې د منځ د $\overline{AB}$ د منځنۍ ټکي مختصات په لاس راوړو.

$$m_{\overline{AB}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4+4}{-2-2}=-2 \quad\Rightarrow\quad m_{\Delta}=-\frac{1}{m_{\overline{AB}}}=\frac{1}{2}$$

$$(x,y)_{\overline{AB}}=(\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1+y_2}{2})=(\frac{0}{2},\frac{0}{2})=(0,0)$$

$$y-y_1=m(x-x_1) \quad\Rightarrow\quad y-0=\frac{1}{2}(x-0)\Rightarrow y=\frac{1}{2}x$$

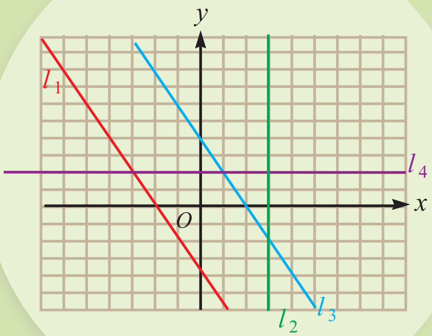
پوښتنې

1- د هغې مستیمې کرښې معادله پیدا کړئ چې میل یې 4 او y محور د 3 په ټکي کې پرې کړي؟

2- د هغې مستقیمې کرښې معادله پیدا کړئ چې د $P(5,-4)$ ټکي څخه تېره او میل یې 2- وي؟

3- د $3x+4y-7=0$ معادله کې، د مستقیم میل او د y له محور سره یې د تقاطع ټکی پیدا کړئ؟

د مستقيمې کرښې عمومي معادله



د l_1 ، l_2 ، l_3 ، l_4 څلورکرښې، نسبت يوې بلې ته، کوم وضعيتونه لري؟

د يوې کرښې الجبري معادله د هغه ټکي د مختصاتو اړيکه چې په مستقيمه کرښه پروت دی راښيي، په عمومی ډول د يوې مستقيمې کرښې معادله په لاندې ډول بيانوو:

په معياري يا ستندرډ ډول، د يوې مستقيمې کرښې معادله په لاندې ډول ده.

$y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$ يا $ax+by+c=0$ ، b, a او c حقيقي عددونه او $b\neq 0$ دی.

په پورتنی معادله کې $\frac{-a}{b}$ د کرښې ميل او $\frac{-c}{b}$ د y له محور سره د تقاطع ټکی بلل کيږي،

نو ويلای شوچې د هرې کرښې معادله، په يوه مستوي کې په لاندې ډول ده:

$y=mx+h$ چې m د مستقيمې کرښې ميل او h د y محور سره د تقاطع ټکي يا ترتيب دی

په عمومي ډول، هره خطي اړيکه، د x او y له جنسه چې په هغه کې د x او y توان يو وي، د مستقيمې کرښې معادله بلل کيږي.

فعاليت

- د $2x+3y-6=0$ او $y-x=2$ دوې مستقيمې کرښې، د وضيعه کمياتو په مستوي کې رسم کړئ.
- د هريوه مستقيم ميل پيدا کړئ.
- دا دوې کرښې يوه له بلې سره څه وضعيتونه لري؟

له پورتني فعاليت پايله په لاندې ډول بيانوو:

که د دوو کرښو ميلونه سره مساوي نه وي، نوکرښو يوه بله پرې کړې ده.

په عمومي ډول، که د $a_1x+b_1y+c_1=0$ او $a_2x+b_2y+c_2=0$ دوې کرښې يوه بله قطع کړي. نو ميلونه يې سره مساوي نه دي، له دې څخه داسې پايله په لاس راځي.

$$\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2} \quad \text{يا} \quad \frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$$

فعالیت

- د $-3x+y-5=0$ او $6x-2y+1=0$ مستقیمې کرښې، د قایمو وضیعه کمیاتو په مستوي کې رسم کړئ.
- ددې مستقیمې کرښې میل په لاس راوړئ.
- دا دوې مستقیمې کرښې، نسبت یوه بلې ته څه حالت لري؟ ولې ؟

په عمومي ډول، د $a_1x+b_1y+c_1=0$ او $a_2x+b_2y+c_2=0$ دوه مستقیمې کرښې، هغه وخت موازي دي چې میلونه یې سره مساوي وي، له دې ځایه دا پایله په لاس راځي چې د هغوی د متحولینو د ضریبونو ترمنځ، لاندې اړیکه موجوده ده.

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}\Rightarrow\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$$

که د متحولینو د ضریبونو ترمنځ $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_1}=\frac{c_1}{c_2}$ اړیکه وي، په دې حالت کې کرښې یو پر بل پرتې(منطبق) دي.

لومړی مثال: د $3x+4y=5$ او $4x-3y=-1$ د مستقیمو اړیکو، نظر یو بل ته بیان کړئ.

حل: د دوو کرښو د معادلاتو له ثابتوضریبونو څخه په ګټې اخیستنې سره لروچې:

$a_1=3$ $b_1=4$ $c_1=-5$

$a_2=4$ $b_2=-3$ $c_2=1$

1- څرنګه چې $\frac{4}{-3}\neq\frac{3}{4}$ نو $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}$ دی په دې حالت کې کرښې یوبل قطع.

2- څرنګه چې، $\frac{3}{4}\times\frac{4}{-3}=-1$ نو $\frac{a_1}{a_2}\times\frac{b_1}{b_2}=-1$ دي، نو د کرښو د تقاطع په ټکي کې یو پر بل عمود دي.

دویم مثال: په لاندې معادلوکې د k عددې قیمت داسې وټاکئ چې مستقیمونه له یوبل سره عمودې وي، $2x-6y+3=0$ او $kx+3y-1=0$

حل: د عمودیت شرط څېرو:

$$kx+3y-1=0\ ,2x-6y+3=0$$
$$a_1.a_2+b_1.b_2=0$$
$$2\cdot k+(-6)3=0\ \Rightarrow k=9$$

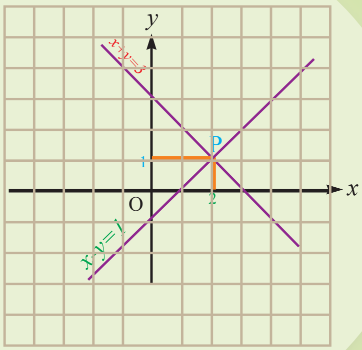
پوښتنې

1- د $4x+3y-1=0$ او $8x+6y+5=0$ کرښوحالت، یوبل ته بیان کړئ.

1 - د $8x-4y+10=0$ او $4x-2y+5=0$ کرښو حالت یو بل ته بیان کړئ.

3 - د $(k+1)x+ky=0$ او $2x-3y+5=0$ معادلوکې د k قیمت داسې وټاکئ چې کرښې یوه له بلې سره موازي وي.

د خطي معادلو سیستم
(System of liear equation)



شکل ته پام وکړئ، آیا د P ټکي مختصات، د کرښو په دواړو معادلو کې صدق کوي؟

فعالیت

- د $y = 4x - 2$ او $y = 3x + 5$ کرښو میلونه پیدا کړئ.
- دا کرښې نظر یو بل ته څه اړیکې لري؟ ولې؟
- پورتنی دواړه کرښې، د وضعیه کمیاتو په سیستم کې رسم کړئ؟ د رسم شویو کرښو تر منځ څه اړیکه لیدل کیږي؟

په پورتني فعالیت کې لیدل کیږي چې د هغو دوو کرښو میلونه مساوي نه وي، یو بل د P په ټکي کې قطع کوي.
خرنګه چې، تقاطع ټکی د دواړو کرښو په مخ پراته دي، نو د هغه ټکي مختصات، د کرښو په معادلو کې صدق کوي. که د تقاطع د ټکي مختصات، په P(x,y) وښیو، نو: $y = -3x + 5$ او $y = 4x - 2$ معادلو څخه لیکلای شو چې:

$$4x - 2 = -3x + 5$$
$$7x = 7$$
$$x = 1$$

د کرښو په معادلو کې، د x قیمت په وضع کولو سره د y قیمت په لاس راوړلای شو:

$$y = 4x - 2 \Rightarrow y = 4(1) - 2 \Rightarrow y = 2$$

نو د تقاطع ټکي مختصات عبارت دي له $P(1,2)$ په پایله کې ویلای شو چې $P(1,2)$

ټکی داسې ټکی دی چې په دواړو معادلو کې حقیقت لري چې د $\begin{cases} y = 4x - 2 \\ y = -3x + 5 \end{cases}$ خطي معادلو د سیستم حل دی.

فعالیت

- مخامخ، د خطي معادلو سیستم په پام کې ونیسئ.
- a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 او c_2 د څه په نامه یادېږي؟
- په پورتنیو معادلو کې x او y ته څه ویل کېږي؟
- آیا ددې دوو کرښو د تقاطع د ټکي، د مختصاتو د سیستم یو حل کېدای شي؟

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \quad .... \quad I \end{cases}$$

د خطي سیستم د حل لپاره د (I) سیستم داسې لیکو چې په هغه حالت کې b_1 او b_2 د صفر خلاف وي.

$$\begin{cases} y = -\dfrac{a_1}{b_1}x + \dfrac{c_1}{b_1} \\ y = -\dfrac{a_2}{b_2}x + \dfrac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

نو لاندې درې حالتونه لرو:

1- که چېرې، د دوو کرښو میلونه سره مساوي نه وي، نو دا کرښې یوه او بله، په یوه ټکي کې قطع کوي.

2- که چیرې د کرښو میلونه سره مساوي وي، خو د y محور یې د تقاطع ټکي سره مساوي نه وي، نو هغه وخت دا دوه کرښې سره موازي دي.

3- که چېرې د کرښومیلونه او د y محور سره، د تقاطع ټکي مساوي وي، نو بیا هغه دوه کرښې سره منطبق وي.

لومړی مثال: د لاندې خطي معادلو سیستم حل کړئ:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

حل: د دې سیستم د حل لپاره، نوموړی سیستم په دې ډول لیکو:

$$\begin{cases} y = 7 - x \quad \Rightarrow y = -x + 7 \\ y = 5 - 2x \Rightarrow y = -2x + 5 \end{cases}$$

لیدل کېږي چې د پورتنیو کرښو د معادلو میلونه، 1- او 2- دي، ځرنګه چې د دوو خطونو میلونه مساوي نه دي، نو کرښې یوه او بله په یوه ټکي کې قطع کوي چې د تقاطع د ټکي د مختصاتو د پیداکولو لپاره په لاندې ډول عمل کوو:

$$-x+7=-2x+5$$
$$-x+2x=5-7 \quad \Rightarrow x=-2$$

د کرښو په یوه معادله کې، د x پر ځای د 2- په وضع کولو سره لرو چې:

$$y=-x+7$$
$$y=-(-2)+7 \quad \Rightarrow y=9$$

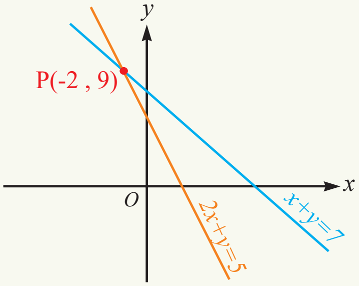
نو $(-2,9)$ د کرښو د معادلو د سیستم حل او د تقاطع ځای دی چې په شکل کې لیدل کېږي.

$x+y=7$

x	0	7
y	7	0

$2x+y=5$

x	0	$5/2$
y	5	0



دویم مثال: د لاندې خطي معادلو سیستم حل کړئ.

حل: لومړی معادلې په لاندې ډول لیکو:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 6y=-6x+12 \end{cases}$$

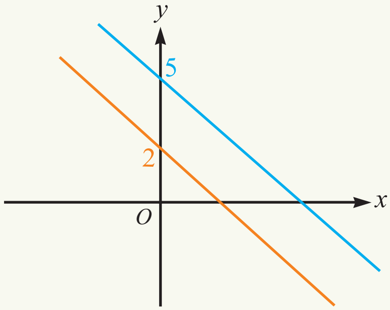
$$\begin{cases} y=-x+5 \\ y=-\dfrac{6}{6}x+\dfrac{12}{6} \end{cases}$$

$y=-x+5$

x	0	5
y	5	0

$y=-x+2$

x	0	2
y	2	0



ځرنګه چې د دواړو کرښو میل 1- دی، په پایله کې کرښې په خپل منځ کې موازي دي او یوه بله نه قطع کوي، یعنې د موازي کرښو د معادلو سیستم حل نه لري.

دریم مثال: د لاندې خطي معادلو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} x+y=7 \\ -28=-4x-4y \end{cases}$$

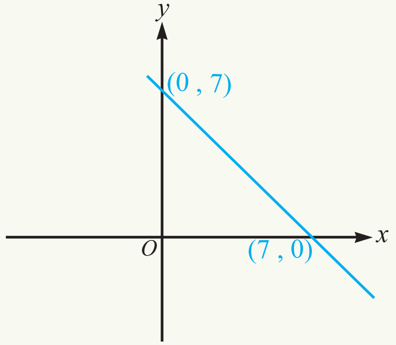
حل: لومړی د معادلاتو سیستم په لاندې ډول لیکو:

$$\begin{cases} y=-x+7 \\ y=\dfrac{-4}{4}x+\dfrac{28}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-x+7 \\ \\ y=-x+7 \end{cases}$$

x	0	7
y	7	0

x	0	7
y	7	0



لیدل کېږي چې د کرښو میل او د y په محور د تقاطع ټکي سره برابر دي، نو دواړه کرښې سره منطبق دي، په دې حالت کې کرښې ډېر ګډ ټکي لري، په پایله کې د خطي معادلو سیستم ډېر حلونه لري.

که $a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2$ او c_2 حقیقي عددونه x او y مجهولونه وي، په دې حالت کې د خطي معادلو سیستم $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ دی.

- که چېرې کرښې، یوه او بله په یوه ټکي کې پرې کړي، معادلې یو حل لري.
- که چېرې کرښې یوه له بلې سره موازي وي، معادلې حل نه لري.
- که چېرې کرښې یو پر بل منطبق وي، معادلې یې ډېر حل لري.

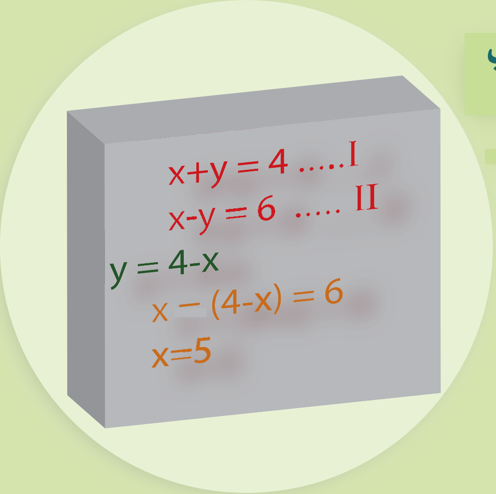
پوښتنې

د لاندې خطي معادلو سیستمونه حل کړئ:

1) $\begin{cases} y=2x+5 \\ y=4x-3 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x-2=y \\ 3x-y=2 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y=-x+3 \\ y=2x-1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ 3x-2y=5 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4x-y=6 \\ 8x-2y=6 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x-y=6 \\ -6x+2y=-10 \end{cases}$

د خطي معادلو سیستم حل، په تعویضي لاره



د خطي سیستم د معادلو حل ته پام وکړئ د x مجهول عددي قیمت، ستاسو په نظر څنګه په لاس راغلی دی؟

فعالیت

- د یوه مثلث د دوو زاویو مجموعه، 100° او د تفریق حاصل یې، 20° دی، الجبري معادلې یې ولیکئ.
- د معادلاتو دا سیستم څو مجهوله لري؟ د هر یوه عددي قیمت پیدا کړئ؟
- په لاس راغلي قیمتونه، د معادلاتو په سیستم کې وازمایئ؟

له پورتني فعالیت څخه د مسألې حل او د خطي معادلو سیستم د حل لاره، په لاندې ډول داسې لیکو:

حل: که چیرې د مثلث زاویې په $\hat{A}$ او $\hat{B}$ ونوموو پورتنی عبارت د الجبري معادلو په بڼه داسې لیکو:

$$\hat{A}+\hat{B}=100^\circ \quad ....I$$

$$\hat{A}-\hat{B}=20^\circ \quad ....II$$

او د $\hat{A}$ زاویې قیمت، د $\hat{B}$ زاویې له جنسه، له لومړۍ معادلې څخه په لاس راوړو $\hat{A}=100^\circ-\hat{B}$ دا قیمت په دویمه معادله کې د A په عوض وضع کوواو معادله حلوو:

$$100^\circ-\hat{B}-\hat{B}=20^\circ \Rightarrow -2\hat{B}=-80^\circ \Rightarrow \hat{B}=40^\circ$$

اوس د $\hat{B}$ قیمت، د خطي معادلاتو په سیستم کې وضع کوو چې د $\hat{A}$ قیمت په لاس راځي:

$$\hat{A}-\hat{B}=20^\circ$$

$$\hat{A}-40^\circ=20^\circ \Rightarrow \hat{A}=20^\circ+40^\circ \Rightarrow \hat{A}=60^\circ$$

دويم مثال: لاندې د دوه مجهوله معادلو سیستم حل کړئ:

$$\begin{cases} 2x+3y=0 \\ 3x+2y=10 \end{cases}$$

حل: لومړی د یوه مجهول قیمت، د بل مجهول له جنسه، د یوې معادلې څخه په لاس راوړو او په بله معادله کې یې وضع کوو:

$$2x+3y=0 \quad \Rightarrow 2x=-3y \quad \Rightarrow x=-\frac{3}{2}y$$

$$\left.\begin{aligned} &3x+2y=10 \\ &3(-\frac{3}{2}y)+2y=10 \\ &-\frac{9}{2}y+2y=10 \\ &\frac{-9+4}{2}y=10 \\ &-5y=20 \quad \Rightarrow y=-4 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &x=-\frac{3}{2}y \\ &x=-\frac{3}{2}(-4) \\ &x=-3(-2) \\ &x=6 \end{aligned}$$

د دوه مجهوله، لومړۍ درجو معادلو سیستم د حل لپاره، په لاندې ډول عمل کوو:

- د یوه مجهول قیمت، د بل مجهول له جنسه، د یوې معادلې څخه په لاس راوړو او هغه په بله معادله کې د هغه په عوض وضع کوو.
- په لاس راغلې یو مجهوله لومړۍ درجه معادله حلوو او د مجهول قیمت په لاس راوړو.
- دا په لاس راغلی مجهول قیمت، د سیستم په معادلو کې وضع او د بل مجهول قیمت، په لاس راوړو.
- په لاس راغلي قیمتونه، د سیستم په معادلو کې وضع کوو که سم له لاسه، په دواړو معادلو کې یې حقیقت ولري، د معادلې حل سم او پرته له هغه، د معادلې حل نه او سم نه دی.

پوښتنې

د لاندې سیستمونو حل، په تعویضي طریقه په لاس راوړئ:

1) $\begin{cases} y=2x \\ x+y=6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x-2y=15 \\ 6x-y=10 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} a+2b=2 \\ 2a-3b=25 \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{2x-1}{3}+\frac{y+2}{4}=4 \\ \frac{x+3}{3}=\frac{x-y}{3} \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \frac{5}{x}-\frac{3}{y}=1 \\ \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=7 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \frac{2x}{3}+\frac{y}{5}=6 \\ \frac{x}{6}-\frac{y}{2}=-4 \end{cases}$

د خطي معادلو د سیستم حل، د افنا په لاره طریقي

$$x + y = ?$$

$$\frac{1}{3}x + y = ?$$

$$x = ?$$

$$y = ?$$

حمیرا، زحل ته وویل: که ته خپلي پیسي ما ته راکړې، زه د 15 افغانیو ښتنته کېږم، زحل حمیرا ته وویل: که ته د خپلو پیسو دریمه برخه ما ته راکړې، زه د 5 افغانیو ښتنته کېږم، هره یوه څو افغانی لري؟

فعالیت

- د معادلو یو سیستم ولیکئ چي دوه معادلې او دوې مجهوله ولري؟
- نوموړی سیستم، د ګراف په مرسته حل کړئ.
- نوموړي معادلې، په تعویضي طریقه حل کړئ.
- آیا بله طریقه شته، چي نوموړي معادلې پرې حل شي؟

یوه بله لاره چي د دوه مجهوله معادلو سیستم پرې حلولای شو، د افنا طریقه یا لاره ده چي په لاندي مثال کي یې څېړو.

مثال: د خطي معادلو دا سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} 7x + 5y = 41 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \text{I} \\ 5x - 2y = 7 \;\;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \text{II} \end{cases}$$

حل: لومړی معادلو ته داسي بدلون ورکوو چي که هغوی خوا په خوا سره جمع یا تفریق کړو، نو له مجهولونو څخه یو مجهول افنا یا له منځه لاړ شي، که د x مجهول وغواړو چي افنا یې کړو، د لومړی معادلې دواړه خواوي، د دویمي معادلې د x په ضریب یعني(5) کي ضربوو او د دویمي معادلې دواړه خواوي، د لومړی معادلې د x په ضریب یعني (7) کي ضربوو.

$$\begin{cases} 7x + 5y = 205 & \Rightarrow \quad 35x + 25y = 205 \\ 5x - 2y = 7 & \Rightarrow \quad 35x - 14y = 49 \end{cases}$$

په لاس راغلي معادلې چي په هغه کي د x ضریبونه مساوي دي، یو له بل څخه تفریقوو.

$$\begin{array}{r} 35x + 25y = \;205 \\ 35x - \;\;2y = \;\;49 \\ -\quad\;\; + \qquad - \quad \\ \hline 39y = 156 \end{array} \quad \Rightarrow y = \frac{156}{39} \Rightarrow \; y = 4$$

د y په لاس راغلی قیمت، د سیستم په یو معادله کې وضع کوو، تر څو د بل مجهول قیمت په لاس راشي:

$$5x-2y=7$$
$$5x-2(4)=7 \Rightarrow 5x=15 \Rightarrow x=3$$

دویم مثال: د معادلو لاندې سیستم، د افنا په طریقه حل کړئ:

$$\begin{cases}3x+2y=4\\2x-3y=-1\end{cases}$$

حل: لومړی یو مجهول له منځه وړو، لکه: y، نو لومړی معادله، په 3- کې او دویمه معادله په 3- کې ضربوو، په لاس راغلي معادلې خوا په خوا سره جمع کوو:

$$\begin{aligned}3x+2y=4 &\Rightarrow -9x-6y=-12\\2x-3y=-1 &\Rightarrow \underline{\ _-4x \mp 6y=\mp 2}\\&\quad -13x+0=-10\\&\quad x=\frac{10}{13}\end{aligned}$$

$$3\left(\frac{10}{13}\right)+2y=4 \Rightarrow \frac{30}{13}+2y=4$$
$$2y=4-\frac{30}{13} \Rightarrow 2y=\frac{52-30}{13}$$
$$2y=\frac{22}{13} \Rightarrow y=\frac{11}{13}$$

د دوه مجهوله معادلو سیستم د افنا په طریقه داسې حلوو:

- هر مجهول چې وغواړو، هغه افنا کړو، د هغې ضریبونه په پام کې نیسو. لومړی معادله د دویمې معادلې د افنا شوي مجهول په ضریب کې او دویمه معادله، د لومړی معادلې د افنا شوي مجهول په ضریب کې ضربوو.
- په لاس راغلې معادلې یوه له بلې څخه تفریق یا جمع کوو چې د یوه مجهول قیمت په لاس راځي، دا په لاس راغلی قیمت د سیستم په یوه معادله کې وضع کوو چې د بل مجهول قیمت په لاس راځي.

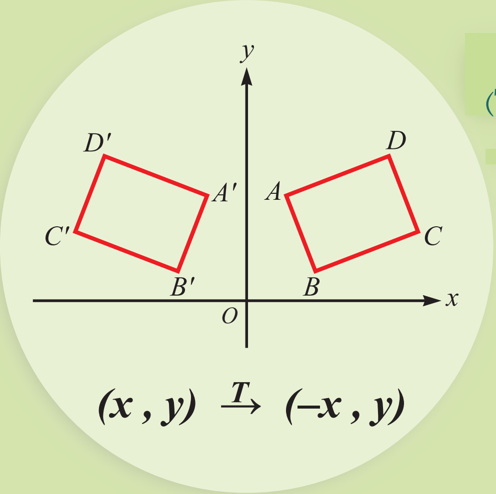
پوښتنې

د معادلو لاندې سیستم د افنا په طریقه حل کړئ.

1) $\begin{cases}x+y=3\\2x-y=10\end{cases}$　2) $\begin{cases}x+y=-39\\x-y=9\end{cases}$　3) $\begin{cases}x+2y=2\\x-4y=1\end{cases}$

4) $\begin{cases}\frac{2}{x}-\frac{5}{y}=5\\\frac{3}{x}+\frac{10}{y}=18\end{cases}$　5) $\begin{cases}y+x-1=0\\2x+y-9=0\end{cases}$　6) $\begin{cases}10x+3y=26\\8x+3y=18\end{cases}$

د ځای بدلون(تغیرمکان)
(Transformation)



په مخامخ شکل کې کوم توپیرونه اوخه ډول یووالی وینئ؟

فعالیت

په مخامخ شکل کې کوم توپیرونه او څه ډول یووالی وینئ؟

- د $A(1,2)$، $B(-2,3)$ او $C(2,-4)$ ټکي د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- ددې ټکو د x په مختصه باندې، ۲ واحد ور زیات کړئ.
- په لاس راغلی ټکي، د وضیعه کمیاتو په سیستم کې وښیئ.

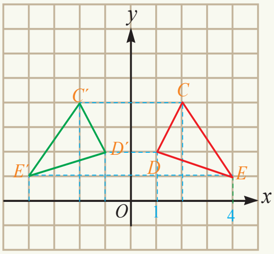
په پورتني فعالیت کې ولیدل شول چې هراختیاري ټکی (x, y) په یوه مستوي کې کولای شو د $(x+2, y)$ ټکي ته په دې ډول بدلون ورکړو، په دې حالت کې ویلای شو چې په لاس راغلی ټکی د راکړل شوی ټکي خېرې یا تصویر د $(x+2, y)$ تر بدلون لاندې دی، هغه اړیکه چې د مستوي د هر ټکي د وضیعه کمیاتو په مستوي کې یوازې او یوازې، یوه نوې ټکي ته نسبت ورکړئ په مستوي کې د ځای یا ټکي بدلون بلل کیږي.

لومړی مثال: د $D(1,2)$، $E(4,1)$ او $C(2,4)$ ټکو خېرې یا تصویر، د لاندې بدلون پر بنسټ د وضیعه کمیاتو په مستوي کې په لاس راوړئ.

$a: \ (x, y) \xrightarrow{T_1} (-x, y)$ $\qquad b: \ (x, y) \xrightarrow{T_2} (x, -y)$

$c: \ (x, y) \xrightarrow{T_3} (y, x)$ $\qquad d: \ (x, y) \xrightarrow{T_4} (x+2, y+3)$

حل: لومړی راکړل شوی ټکی د وضیعه کمیاتو په سیستم کې ټاکو.

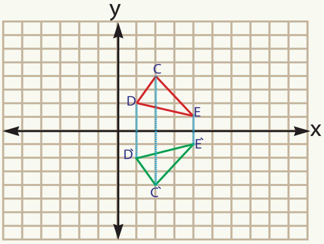


a: د $(x, y) \xrightarrow{T_1} (-x, y)$ تربدلوني لاندې لرو چې:

$T(4,1) = (-4,1)$

$T(1,2) = (-1,2)$

$T(2,4) = (-2,4)$

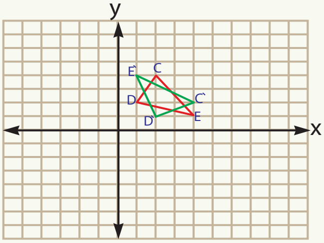


b: د $(x,y)\xrightarrow{T_2}(x,-y)$ تربدلون لاندې لرو چې:

$R(4,1)=(4,-1)$

$R(1,2)=(1,-2)$

$R(2,4)=(2,-4)$

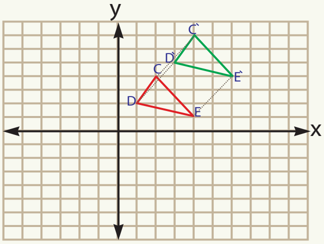


c د $(x,y)\xrightarrow{T_3}(y,x)$ تربدلون لاندې لرو چې:

$M(4,1)=(1,4)$

$M(1,2)=(2,1)$

$M(2,4)=(4,2)$



d: د $(x,y)\xrightarrow{T_4}(x+2,y+3)$ تربدلون لاندې لرو چې:

$S(4,1)=(6,4)$

$S(1,2)=(3,5)$

$S(2,4)=(4,7)$

په پورتنیو مثالونکې شودلای شو چې د ځای په بدلونونو سره د ټکو ترمنځ واټن، توپیرنه کوي.

د مثال په ډول: که $T(c)=c'$ او $T(E)=E'$ وي، نو $EC=E'C'$ ده.

هغه بدلونونه چې د ټکو ترمنځ واټن ساتي، ایزومتري $(Isometry)$، بلل کیږي.

که یوشکل د ایزومتري په ډول خپل ځای بدل کړي، نو د اصل شکل سره انطباق منونکې دی.

پوښتنې

1- د $(1,-1),(-2,-2),(-3,1)$ او $(3,3)$ ټکو تصویر د لاندېنیو بدلونونو پر بنسټ د وضیعه کمیاتو په سیستم کې په لاس راوړئ.

a: $(x,y)\xrightarrow{T}(x-1,y+2)$

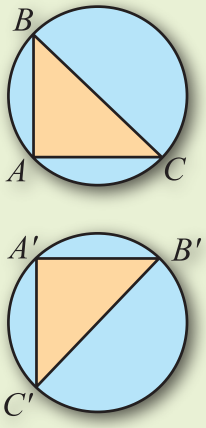
b: $(x,y)\xrightarrow{D}(2x,y)$

c: $(x,y)\xrightarrow{K}(x+5,0)$

d: $(x,y)\xrightarrow{R}(0,y-2)$

e: $(x,y)\xrightarrow{P}(3x-1,\ y+2)$

انتقال
(Translation)



په مخامخ شکل کې، د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث چې په مستوي کې يې له لومړي حالته، دوم حالت، $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ غوره کړې دی،تاسوکولای شئ چې ددې حرکت د ځای بدلون شرح کړئ؟

فعاليت

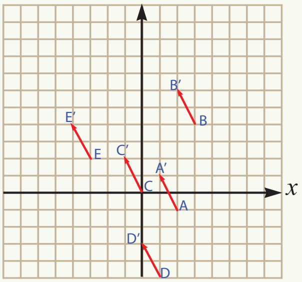
- د وضيعه کمياتو په مستوي کې د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث رسم او مختصات يې وليکئ.
- د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث رأسونه د محور په مثبت جهت، د (2) واحد په اندازه او د y محور په مثبت جهت د (1) واحد په اندازه حرکت ورکړئ، نو يو حاصل شويو ټکوته A', B' او C' ووايئ.
- د A', B' او C' ټکي يو له بل سره وتړئ او د $\overset{\Delta}{ABC}$ او $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ مثلثونه، د اضلاعو اوږدوالي او ظاهري شکل له مخې پرتله کړئ.

که چيرې، د يوه شکل ټول ټکي په يوه ټاکلې جهت(لورى) او يو واټن حرکت ورکړو په لاس راغلی شکل له لومړي شکل سره انطباق منونکي دي، دې حرکت ته انتقال وايي او هغه په دې ډول ښودل کيږي: $T(x,y)=(x+h,y+K)$
په داسې حال کې چې h او k حقيقي عددونه دي.

لومړی مثال: د $A(2,-1), B(3,4), C(0,0), D(1,-5)$ او $E(-3,2)$ ټکی د وضيعه کمياتو په سيستم کې د $T(x,y)=(x-1,y+2)$ انتقالي رابطې په اساس وښيئ.

حل: لومړی راکړل شوي ټکي د وضيعه کمياتو په سيستم کې وښيئ اوبيا هغه ټکی چې د $T(x,y)=(x-1,y+2)$ اړيکې څخه لاسته راځي په لاس راوړئ.

$A(2,-1), T_A(2-1,-1+2)=(1,1)$
$B(3\ ,\ 4), T_B(3-1\ ,\ 4+2)=(2,6)$
$C(0\ ,\ 0), T_C(0-1\ ,\ 0+2)=(-1,2)$
$D(1\ ,-5), T_D(1-1\ ,-5+2)=(0,-3)$
$E(-3\ ,2), T_E(-3-1\ ,2+2)=(-4,\ 4)$



په پورتني مثال کې، د هکوله ترلوخخه د شکل څېره لاسته راځي، ليدل کېږي چې د $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ او $\overline{EE'}$ يو له بل سره موازي او مساوي دي.

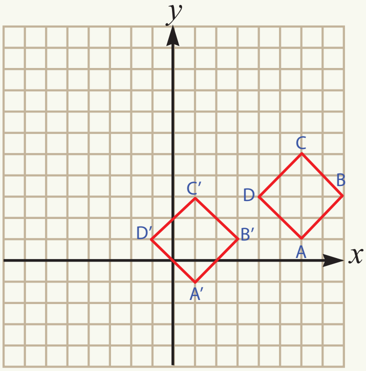
دويم مثال: که چېرې $A(6,1), B(8,3), C(6,5)$ او $D(4,3)$ د يوې مربع راسونه وي، هغه د وضعيه کمياتو په سيستم کې ترديې $T(x,y)=(x-5,y-2)$ اړيکې لاندې رسم کړئ.

الف: د مربع د اضلاع ګانو اوږدوالي اوتصوير، نظر يوبل ته پرتله کړئ.

ب: د مربع د اضلاع ګانو ميل اوڅېره يې، نظر يوبل ته پرتله کړئ.

حل: د ABCD منطقله مربع ترانتقال لاندې د $\overline{A'B'C'D'}$ څلور ضلعي ده.

$A(6,1), T_A=(6-5\ ,\ 1-2) \quad \Rightarrow A'=(1,-1)$
$B(8,3), T_B=(8-5\ ,\ 3-2) \quad \Rightarrow B'=(3,1)$
$C(6,5), T_C=(6-5,5-2) \quad \Rightarrow C'=(1,3)$
$D(4,3), T_D=(4-5,3-2) \quad \Rightarrow D'=(-1,1)$



د (الف) او (ب) جزونو د زده کوونکو کورنی دنده ده.

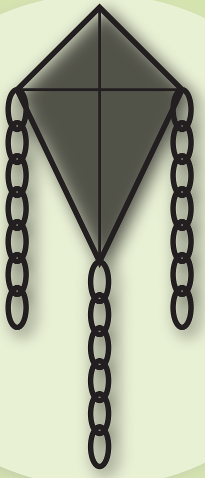
انتقال يو ايزومتري رابطه ده.

پوښتني

1-که د $M(1,-1), N(2,-5)$، $O(2,5)$ او $P(3,3)$ يوه څلور ضلعي وي، څلور ضلعي او د هغې تصوير تر دې رابطې $T(x,y)=(x+9,-y)$ لاندې رسم کړئ.

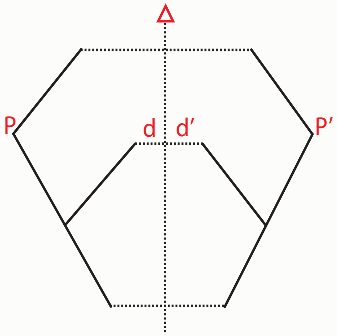
۲-که $L(7,0), I(5,0)$ او $0(5,3)$ د يوه مثلث رأسونه وي، مثلث او د هغې تصوير ياځېره د $F(x,y)=(-y+3,x-3)$ بدلون پربنسټ رسم کړئ.

انعکاس
(Reflection)



د کاغذ پران خېرې ته پاملرنه وکړئ، ستاسو په نظر د کاغذپران نسبت کوم یوه قطر ته متناظردی؟

فعالیت



- د یوې صفحې په نیمایي کې یوشکل رسم کړئ.
- د شکل ټولې کرښې په داسې رنګ رسم کړئ چې په کاغذ کې ژر جذب نه شي.
- کاغذ په منځ داسې قات کړئ چې د قات شوې لیکې یوې خوا ته شکل پروت وي.
- صفحه خلاصه کړئ، ووایئ چې کوم شکل د اصلي شکل مخامخ پروت او د دوی ترمنځ څه توپیر دی؟

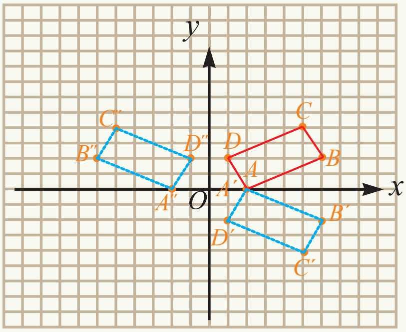
تعریف

که چیرې د P شکل یا خیرې هر ټکی، د p' شکل یاخېرې په هر ټکي کې داسې بدل شي چې د P شکل یاخیرې د هر ټکي واټن، نظر Δ محورته د p' د شکل د هر ټکي واټن سره مساوي وي، دې بدلون ته نظر Δ محورته انعکاس وایي او Δ محور ته، د انعکاس محوروایي.

لومړی مثال: که چیرې د A(2,0)، B(6,2)، C(5,4) او D(1,2) ټکي د یوه مستطیل رأسونه وي، د وضیعه کمیاتو په سیستم کې مستطیل رسم، خېره او تصویریې نظر x او y محورته رسم کړئ.

حل: که چیرې د $\overline{ABCD}$ مستطیل خېره نظرد y محور ته رسم کړو په دې حالت کی یوازې د x مختصه یې په $(-x)$ بدلیږي او که چیرې خېره یا تصویر یې نسبت x محورته رسم کړو

یوازې د y مختصه یې، په $(-y)$ بدلیږي، لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کیږي.



ټکی (x , y)	نظر x محورته انعکاس $(x , -y)$	نظر y محور ته انعکاس $(-x , y)$
$A(2 , 0)$	$A'(2 , 0)$	$A''(-2 , 0)$
$B(6 , 2)$	$B'(6 , -2)$	$B''(-6 , 2)$
$C(5 , 4)$	$C'(5 , -4)$	$C''(-5 , 4)$
$D(1 , 2)$	$D'(1 , -2)$	$D''(-1 , 2)$

د $T(x, y) = (-x, y)$ لیږدونه، نسبت y محورته یو انعکاس دی.
د $T(x, y) = (x, -y)$ لیږدونه، نسبت x محورته یو انعکاس دی.
د $T(x, y) = (x, y)$ لیږدونه، نسبت $y = x$ مستقیم ته یو انعکاس دی.

پوښتني

1- که $(A(3,1)$, $B(7,1)$ او $C(3,1)$ د یوه مثلث رأسونه وي، مثلث او د هغې تصویر یاځیره د لاندې ورکړل شویو د انعکاسي اړیکو پر بنسټ رسم کړئ.

$a: \; R_1(x, y) = (-x, y)$ $\qquad$ $b: R_2(x, y) = (x, -y)$

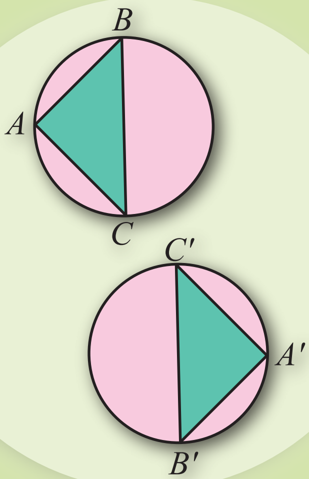
$c: \; R_3(x, y) = (y, x)$ $\qquad$ $d: R_4(x, y) = (-y, -x)$

2- که چیرې $(A(0,2)$, $B(-5,0)$, $C(-3,-5)$ او $D(2,-3)$ د یوې مربعې رأسونه وي، مربع او د هغې تصویر د $R(x, y) = (-x, -y)$ انعکاسي اړیکې پر بنسټ رسم کړئ.

۳- د $(A(1,4)$, $B(3,-2)$ او $C(5,1)$ د یوه مثلث رأسونه وي، د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث تصویر یاځیره، تر انعکاس لاندې نسبت لاندې کرښو ته:

- $x + 2 = 0$ رسم کړئ او په $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ یې ونوموئ.
- $y + 3 = 0$ رسم کړئ او په $\overset{\Delta}{A''B''C''}$ یې ونوموئ.

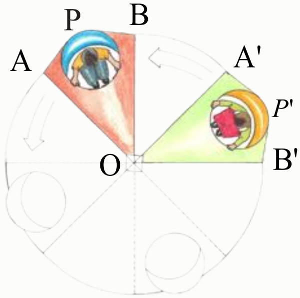
دوران
(Rotations)



په مخامخ شــکل کې د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث په مســتوي کې حرکت کړی او د $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ نوی ځای یې نیولی دی، تاسې کولای شئ د دې ډول بدلون حرکت شرح کړئ؟

فعاليت

مخامخ مدل د ماشومانو د لوبو د څرخ دوه بېلابېل ځايونه راښيي.



- له شکل څخه ليدل کېږي چې A' د A ټکي متناظر او B' د B ټکي متناظر دی، د $A\hat{O}A'$ او $B\hat{O}B'$ زاويې اندازه کړئ او يوه له بلې سره پرتله کړئ؟
- اوس د څرخ د څوکۍ په لومړي ځای يوټکی وټاکئ اوهغه په P ونوموئ.
- د P ټکي متناظر ټکی، د څوکۍ په دويم ځای کې پيدا کړئ او هغه p' ونوموئ.
- د $P\hat{O}P'$ زاويه اندازه کړئ.

د پورتني فعاليت په پام کې نيولو سره، دوران په مستوي کې د لېږدوني په عنوان داسې تعريفوو:

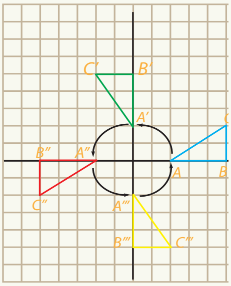
که يوشکل په يوه مستوي کې د يوه ټاکلي ټکي په شاوخوا د $\hat{\alpha}$ زاويې په اندازه دوران وکړي ټول ټکي يې د $\hat{\alpha}$ زاويې په اندازه دوران کوي، په دې حالت کې، د O ثابت ټکی د دوران مرکز او د $\hat{\alpha}$ ثابته زاويې ته د دوران زاويه وايي.

مثال: د B(5,0), A(2,0) او $C(5,2)$ د يوه مثلث رأسونه دي، د وضعيه کمياتو په مستوي کې د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث او د هغه څېره يا تصوير لاندې تبديل ورکړ شويو اړيکو په اساس رسم او بيا هريو بدلون تشريح کړئ.

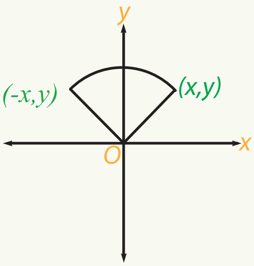
الف: $R_1(x,y)=(-x,y)$ ب: $R_2(x,y)=(-x,-y)$ ج: $R_3(x,y)=(y,-x)$

حل:

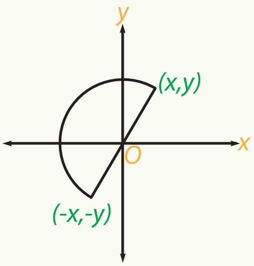
تکی	خېره تصویر)		
(x,y)	(-y,x)	(-x,-y)	(y,-x)
A(2,0)	A'(0,2)	A''(-2,0)	A'''(0,-2)
B(5,0)	B'(0,5)	B''(-5,0)	B'''(0,-5)
C(5,2)	C'(-2,5)	C''(-5,-2)	C'''(2,-5)



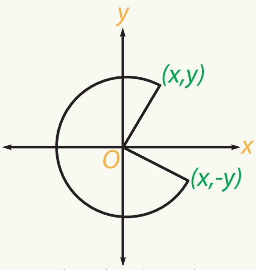
په شکل کې لیدل کېږي چې د R_1, R_2 او R_3 بدلونونه، د وضعیه کمیاتو د مبدأ په مرکز دورانونه، په ترتیب د $90°, 180°$ او $270°$ زاویوسره دي.



R(x,y)=(-y,x)
د دوران مرکز (0,0)
د دوارن زاویه 90°



R(x,y)=(-x,-y)
د دوران مرکز (0,0)
د دوارن زاویه 180°



R(x,y)=(y,-x)
د دوران مرکز (0,0)
د دوارن زاویه 270°

پوښتنې

1- که $A(0,0)$ $B(6,-2)$ او $C(7,1)$ د یوه مثلث رأسونه وي.

الف: د $R\ (x,y)=(-y,x)$ ترتبدیل لاندې د ABC مثلث شکل اوتصویر رسم کړئ.

ب: د مثلث د اضلاع ګانو اوږدوالی د هغه له تصویر یا خېرې سره پرتله کړئ. آیا دا دوران یو ایزومتري دی؟

2- که $(A(-1,-2)$, $B(7,2)$, $C(5,6)$ او $D(-3,2)$ د یو مستطیل رأسونه وي.

الف: $R\ (x,y)=(-y,-x)$ تر دوران لاندې مستطیل او د هغه تصویریا خېره رسم کړئ.

ب: د مستطیل د اضلاع ګانو اوږدوالی او مساحت، د هغه له تصویر یاخېرې سره پرتله کړئ.

د درېم څپرکي لنډيز:

• په يوه مستوي کې چې دوه افقي اوعمودي محورونه يو بل په عمودي توګه قطع کړي، د وضيعه کمياتو د سيستم په نامه يادېږي.

• د وضيعه کمياتو په سيستم کې افقي محورته، د فاصلې يا واټن محور اوعمودي محورته، د ترتيب محور او د تقاطع ټکي ته يې مبدأ وايي.

• د A او B دوو ټکو تر منځ واټن، د $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ اړيکې څخه لاسته راځي.

• د يوې کرښې د منځ ټکي مختصات د $M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$ څخه لاسته راځي.

• هغه کرښه چې دy مختصه يې صفر وي د منځ د ټکي مختصات يې $M(\frac{x_1+x_2}{2},0)$ دی.

• هغه کرښه چې د x مختصه يې صفر وي، د منځ د ټکي مختصات يې $M(0,\frac{y_1+y_2}{2})$

د هرې مستقيمې کرښې ميل د $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ له اړيکو څخه لاسته راځي.

• د هر مستقيم خط ميل، په هغه زاويې پورې اړه لري، چې مستقيم يې د x محور له مثبت جهت سره جوړ وي.

• هر مستقيم، چې د x محور د مثبت جهت سره حاده زاويه جوړه کړي، ميل يې مثبت او که منفرجه زاويه جوړه کړي، ميل يې منفی دی.

• موازی مستقيمونه، د مساوي ميلونو لرونکي دي.

• هر مستقيم خط چې له x محور سره موازي وي، ميل يې صفر او هر مستقيم خط چې د x پر محور عمود وي، ميل يې نه دی تعريف شوی.

• دوه مستقيم خطونه هغه وخت يو پربل عمود دي چې د ميلونو د ضرب حاصل يې (-1) وي.

• درې ټکي هغه وخت په يوې کرښې پراته دي چې د هر قطعه خط ميلونه يې سره مساوي وي.

• د وضيعه کمياتو په مستوي کې د يوه ټکي هغه اړيکه چې يوازې او يوازې يوه نوي ټکي ته نسبت ورکړي، يوه لېږدونه ياتغيير مکان بلل کيږي.

• که چېرې د يوه شکل ټولو ټکو ته، په يوه ټاکلي جهت او يوه واټن کې حرکت ورکړو، په لاس راغلی شکل له لومړي شکل سره انطباق منونکی دی او دې حرکت ته انتقال وايي.

• که په يوه مستوي کې يوشکل د يوه ټاکلي ټکي په شاوخوا د $\hat{\alpha}$ زاويې په اندازه دوران وکړي ټول ټکي يې په عين زاويه دوران کوي چې دې حرکت ته دوران وايي.

د دریم څپرکی پوښتني

• په لاندي پوښتنوکي هري پوښتني ته څلورځوابونه ورکړ شوي دي، سم ځواب وټاکئ.

1- د دوو عمودي کرښو د میلونو د ضرب حاصل:

a) (1) دی. b) صفر دی. c) ∞ دی. d)منفي یو دی.

2- د مستقیمي کرښي معادله چي له y محور سره یې د تقاطع ټکی او میل یې ښکاره وي، عبارت له:

a) $y = mx + c$ b) $y = b$ c) $y = mx + b$ d) $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

3- د هغي کرښي معادله چي دوه ټکي یې ښکاره وي، عبارت له:

a) $y = mx + b$ b) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ c) $\dfrac{y_2 - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y - y_1}{x_2 - x_1}$ d) $y = mx$

4- د $A(0, y_1)$ او $B(0, y_2)$ دوو ټکو د منځني ټکي مختصات عبارت دی له:

a) $M(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, 0)$ b) $M(\dfrac{y_2 + y_1}{2}, 0)$ c) $M(0, \dfrac{y_1 + y_2}{2})$ d) $M(0,0)$

5- د $A(x_1, 0)$ او $B(x_2, 0)$ دوو ټکو د منځني ټکي مختصات عبارت دی له :

a) $M(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, 0)$ b) $M(\dfrac{y_2 + y_1}{2}, 0)$ c) $M(0, \dfrac{y_1 + y_2}{2})$ d) $M(0,0)$

6- د A او B دوو ټکو ترمنځ واټن، عبارت دی له:

a) $AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$ b) $AB = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2}$

c) $AB = \sqrt{(x_2 + y_2)^2 + (x_2 - y_1)^2}$ d) $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

7- د یوه ټکي او د وضیعه کمیاتو د مبدأ ترمنځ واټن، عبارت دی له:

a) $AB = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ b) $AB = \sqrt{y_1^2 + y_1^2}$

c) $AB = \sqrt{x^2 + y^2}$ d) $AB = \sqrt{x^2 - y^2}$

8-د یوي مستقیمي کرښي میل عبارت دی له:

a) $m = \dfrac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$ b) $m = \dfrac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1}$ c) $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ d) $m = \dfrac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}$

9- دوه مستقیمونه هغه وخت یو له بل سره موازي وي چي:

a: د هغو میلونه سره مساوي وي. b: میلونه یې مساوي نه وی.

c: د میلونو د ضرب حاصل یې منفي یو وي. d: ټول ځوابونه سم دی.

• لاندې تش ځايونه، په مناسبو کلمو سره ډک کړئ:

۱- د وضيعه کمياتو په سيستم کې، د x محورته، د .... او محورته د .... وايي.

۲- پـه دويمـه ناحيه کـې هغه ټکـي پراتـه دي چـې x يـې .... او y يې .... دی.

۳- په دريمه ناحيه کې هغه ټکي پراته دي چې x او y دواړه .... دي.

٤- هغه مستقيم چې د x محور له مثبت جهت سره مساوي حاده زاويه جوړه کړي، ميل يې .... دی.

٥- دوه موازي مستقيمې کرښې چې د x محورد مثبت جهت سره مساوي .... جوړ وي.

٦- د x له محورسره د هر موازي مستقيم ميل .... دی.

٧- درې ټکي، هغه وخت په يوه مستقيمه کرښه پراته وي چې د ټوټه کرښو .... سره مساوي وي.

٨- که د دووکرښو ميلونه، له يوبل سره مساوي نه وي، دا کرښې .... دي.

• لاندې جملې، کومې سمې اوکومې يې ناسمې دي، د سمويه مخ کې د(ص) توری او د ناسمې په مخ کی د (غ) توری وليکئ.

1- (   ) که د وضيعه کمياتو په مستوي کې د هر ټکي لپاره يوازې او يوازې يوه نوي ټکي ته نسبت ورکړئ، په مستوي کې بدلون رامنځ ته کيږي.

2- (   ) که د p شکل هر ټکي د 'P شکل په يوه ټکي داسې تبديل شي چې د p د شکل د هر ټکي واټن، نظر يوه محورته، د 'P د شکل له هر ټکي سره مساوي وي، دې بدلون ته انعکاس وايي.

3- (   ) د $T(x, y) = (-x, y)$ بدلون، نسبت y محورته، يوانعکاس دی.

4- (   ) د $T(x, y) = (x, -y)$ بدلون، نسبت x محورته، يو انعکاس دی.

5- (   ) د $T(x, y) = (y, x)$ بدلون، نسبت $y = x$ مستقيم ته، يوانعکاس دی.

6- (   ) انتقال هغه تغييرمکان يا لېږدونه ده چې په هغه کې د واټنونو او د زاويو پراخوالی ثابت پاتې شي.

7- (   ) که په مستوي کې يوشکل(O) د ټاکلي ټکي په شاوخوا، د $\hat{\alpha}$ زاويې په اندازه دوران وکړي، د هغې ټول ټکي په عين زاويه دوارن کوي.

• لاندې سوالونه حل کړئ:

1- لاندې ټکي چې وضعيه کميات يې ورکړ شوي دي، د وضعيه کمياتو په سيستم کې وټاکئ.

$1:\ (0,1)$ $2:\ (2,3)$ $3:\ (0,-4)$ $4:\ (5,0)$

2- د لاندې ټکو د جوړو ترمنځ واټن چې وضيعه کميات يې ورکړل شي ښکاره کړئ.

$1:\ (0,9),(-5,4)$ $2:\ (4,1),(3,-2)$ $3:\ (-7,4),(1,-11)$

3-دا را وښيئ چې لاندې ټکي د يوه قايم الزاويه مثلث رأسونه دي او هم د مثلث مساحت پيدا کړئ.

$1:\ (0,9)\ ,\ (-4,-1)\ ,\ (3,2)$ $2:\ (3,-2)\ ,\ (-2,3)\ ,\ (4,-4)$

4-دا څرگند کړئ چې لاندې ورکړې شوي ټکي، د يوې مستقيمې کرښې له پاسه پراته دي.

$1:\ (0,4)\ ,\ (3,-2)\ ,\ (-2,8)$ $2:\ (1,2)\ ,\ (-3,10)\ ,\ (4,-4)$

5-د يوې مستقيمې کرښې ميل او يو ټکی په لاندې ډول ورکړل شوي، د هغې معادله په لاس راوړئ.

$1:\ (2,3)\ ,\ m=-\frac{1}{2}$ $2:\ (-4,1)\ ,\ m=-\frac{2}{3}$ $3:\ (-1,-4)\ ,\ m=-2$

6- که د يوه مستطيل رأسونه $(3,1-)$، $(1,3-)$، $(3,-1)$ او $(1,-3)$ وي، مساحت يې پيدا کړئ.

7- که د يوه متوازي الاضلاع رأسونه $(2,4)$، $(5,9)$، $(4,9)$ او $(1,4)$ وي، د قطرونو اوږدوالی يې پيدا کړئ.

8- را وښاياست چې د $(3,1-)$، $(9,4-)$، $(12,0)$ او $(6,3)$ د يوه متوازي الاضلاع راسونه دي.

9- که $(3,2-)$، $(5,0)$ او $(1,-3)$ د يوه مثلث راسونه وي د اضلاع گانو د منځنی ټکي وضعيه کميات په لاس راوړئ.

10- ثبوت کړئ:

الف: چې د مربعې قطرونه يو پربل عمود دي.

ب: چې د مستطيل قطرونه يوبل نيمايي کوي.

11- هغه مستقيم چې د $A(3,-1)$ او $B(5,3)$ ټکوڅخه تېرېږی د وسطي عمود معادله يې پيدا کړئ.

12- د هغه مستقيم معادله پيدا کړئ چې $P(4,5)$ له ټکي څخه تېر شي او په ترتيب سره د x او y له محوررونو سره موازي وي.

13- که چېرې $A(5,0)$، $B(7,0)$ او $C(5,3)$ د يوه مثلث رأسونه وي.

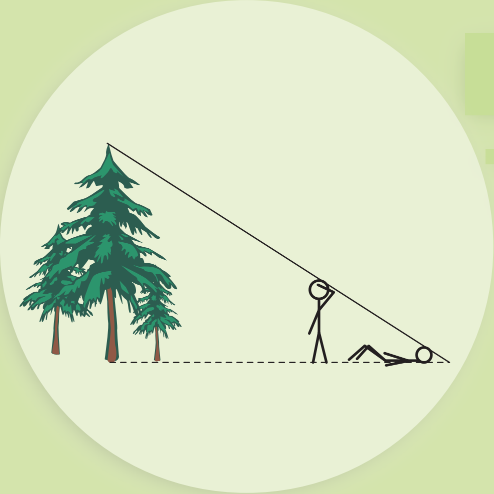
الف: د $T(x,y)=(-y+3,x-3)$ ترتيب لاندې مثلث او د هغه تصوير ياځېره رسم کړئ.

ب: د ABC مثلث تصوير، د $R(x,y)=(-y,x)$ تر دوران لاندې پيدا کړئ او هغه ته $A'B'C'$ ووايئ، وروسته د $T(x,y)=(x+3,y-3)$ تصوير يا ځېره د ترانتقال ياليږدونې لاندې وټاکئ.

څلورم څپرکی

مثلثات

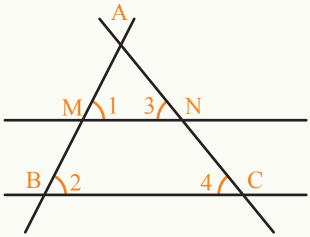
په مثلث کې د تالس قضیه



دوه زده کوونکي له يو بل ســره خبري کوي چــې د يوې ونــې جګ والى څنګــه اندازه کړي، پــه دوى کې يو په ځمکه اوږد پرېوت او لــه خپل ملګري څخه يې وغوښــتل چې دومره حرکت وکړي چې د ده ســر او د ونې څوکه په يوه مســتقيمه کرښــه سره ووينې. د زده کوونکي په غوښتنه سوچ وکړئ.

فعاليت

• د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې، $\overline{MN} // \overline{BC}$ دی. د هرې ټوټه کرښې اندازه، د خط کش په واسطه پيدا او په تشو ځايونو کې يې وليکئ؟



$\overline{MN} =$ ____ $\quad \overline{AN} =$ ____ $\quad \overline{AM} =$ ____

$\overline{BC} =$ ____ $\quad \overline{AC} =$ ____ $\quad \overline{AB} =$ ____

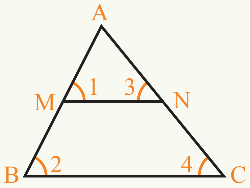
• هغه زاويې چې يوه له بلې سره مساوي ده وښيئ؟

• د $\dfrac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$ ، $\dfrac{\overline{AN}}{\overline{AC}}$ او $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$ نسبتونه پيدا او يو له بل سره څه اړيکه لري؟

له پورتني فعاليت څخه د تالس قضيه داسې بيانوو؟

قضيه: که د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث په يوې ضلعې يا ځنډې، موازي کرښه رسم کړو، د تشکيل شوي مثلث د اضلاعو نسبت، د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث پر اضلاعو يو له بل سره مساوي دي. دا قضيه په مثلث کې د تالس قضيې په نامه يادېږي.

ثبوت: څرنګه چې د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې $\overline{MN} // \overline{BC}$ دي، نو کولای شو وليکو چې:



$\hat{1} = \hat{2}$....... متوافقه

$\hat{3} = \hat{4}$....... متوافقه

$\hat{A} = \hat{A}$.....مشترک

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AMN} \qquad \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MN}}{\overline{BC}}$$

لومړی مثال: د $\overset{\Delta}{ABC}$ په قایم الزاویه مثلث کې $\overline{EF}$ له $\overline{BC}$ سره موازي دي په پام کې ونیسئ، د قایمو اضلاعو اود $\overline{EF}$ د موازي کرښې اوږدوالی پیدا کړئ؟

حل: څرنګه چې د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې $\overline{EF}//\overline{BC}$ سره دي، نو د تالس د قضیې پربنسټ دا دوه مثلثونه سره ورته یا مشابه دي، نو کولای شو ولیکو چې:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$$

$$AC^2=BC^2+AB^2$$

$$5^2=BC^2+3^2$$

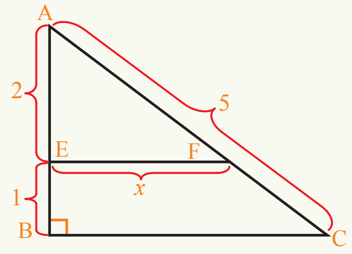
$$BC^2=25-9=16$$

$$\boxed{BC=4}$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{x}{4}$$

$$x=\frac{8}{3}=2.6$$

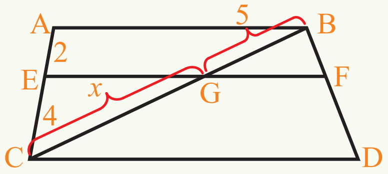


دویم مثال: په لاندې ذوذنقه کې، $EF//BA$ دي، د x مقدار وټاکئ.

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{GB}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} \quad \text{یا} \quad \frac{\overline{CG}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{GB}}{\overline{AE}}$$

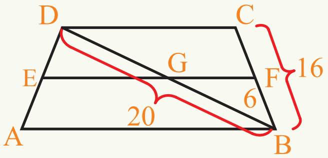
$$\frac{x}{4}=\frac{5}{2} \Rightarrow x=\frac{4\cdot 5}{2}=\frac{20}{2}$$

$$x=10$$

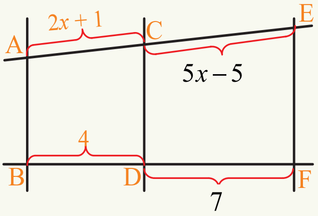


پوښتنې

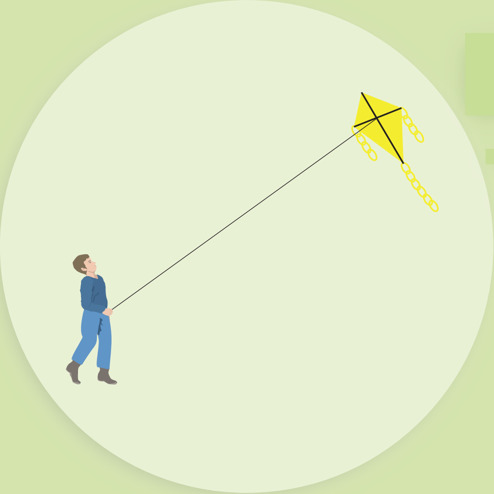
1- د ذوذنقو په لاندې شکلونو کې د x مقدار وټاکئ؟



2- په لاندې شکل کې، که $\overline{CD}//\overline{EF}$ او $\overline{AB}//\overline{CD}$ وي، د x مقدار وټاکئ؟



د يوې حاده زاويې ساين

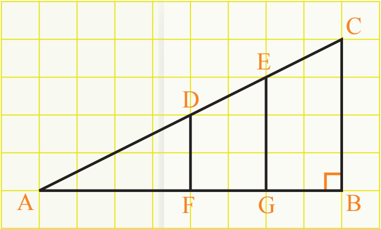


که يو کاغذ پران په هوا کې د الوتلو په حالت کې وي، کولای شئ واټن يې له ځمکې څخه په لاس راوړئ؟

فعاليت

● په قايم الزاويه مثلث کې، د $\overline{AC}$ په وتر باندې د D او E ټکي ټاکل شوي دي. له دې ټکو څخه د مثلث په $\overline{BC}$ ضلعه موازي رسم کړئ او د تقاطع ټکي يې، په وار سره F او G نوموو.

● له خط کش څخه په ګټې اخيستنې سره، د مثلث اضلاعوې اندازه او د $\frac{\overline{DF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{AE}}$ او $\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$ نسبتونه محاسبه او پرتله يې کړئ؟

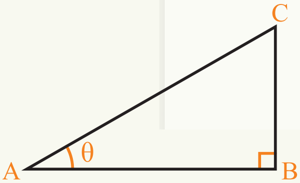


● ايا د D او E ټکو د ځای په بدلون سره د $\frac{\overline{DF}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{AE}}$ او $\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$ نسبتونه هم بدلون کوي؟ ديوه ټکي په ټاکلو سره هغه وښيئ.

● د AC د ځای په بدلون، د $\hat{A}$ زاويې په مقدار کې بدلون رامنځ ته کېږي.

● اوس $\overline{AC}$ ثابت پرېږدئ او د $\hat{A}$ زاويې ته زياتوالی ورکړئ. سوچ وکړئ، چې په پورتنيو مساوي نسبتونو کې څه پيښېږي؟ ويې څېړئ؟

تعريف

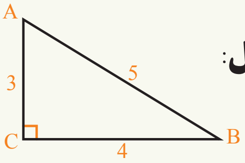


په هر قايم الزاويه مثلث کې، د يوې حاده زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی، د وتر پر اوږدوالي تل مساوي له يو ثابت مقدار سره دی، چې د حاده زاويې په اندازې پورې اړه لري. دې نسبت ته $Sin\theta$ (د حاده زاويې ساين) ويل کېږي.

$$\sin\theta = \frac{\text{د } \theta \text{ حاده زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}$$

لومړی مثال: په لاندې شکل کې، $SinA$ او $SinB$ په لاس راوړئ.

حل:

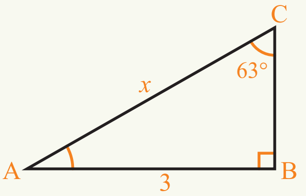


$$\sin A=\frac{\text{د A زاویې د مخامخ څنډې یا ضلعې اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}}\frac{\overline{BC}}{AB}=\frac{4}{5}\Rightarrow \sin\hat{A}=0.8$$

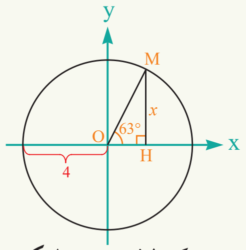
$$\sin B=\frac{\text{د B زاویې د مخامخ څنډې یا ضلعې اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}}=\frac{AC}{AB}=\frac{3}{5}=0.6$$

دویم مثال: که $Sin63^o$ مساوي په 0,891 وي، په لاندې شکلونو کې د x اندازه پیدا کړئ.

شکل (الف)



شکل (ب)



حل:

د الف جز: د یوې حاده زاویې له تعریف څخه په ګټې اخیستنې سره کولای شو ولیکو چې:

$$\sin 63^{\circ}=\frac{AB}{AC}$$

$$0.891=\frac{3}{x}\Rightarrow x=\frac{3}{0.891}\quad\Rightarrow\quad x\approx 3.37$$

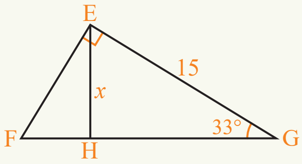
د ب جز:

$$\sin 63^{\circ}=\frac{MH}{OM}$$

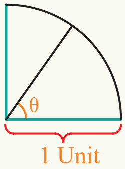
$$0.891=\frac{x}{4}\Rightarrow x\approx 3.56$$

پوښتنې

1- که $Sin33^{o}$ مساوي، په 0,5446 وي، په مخامخ شکل کې، د x عددي قیمت پیدا کړئ.



2- د دایرې د څلورمې برخې شکل په پام کې ونیسئ.



الف: که د θ زاویه لویه شي $Sin\theta$ څرنګه بدلون مومي؟

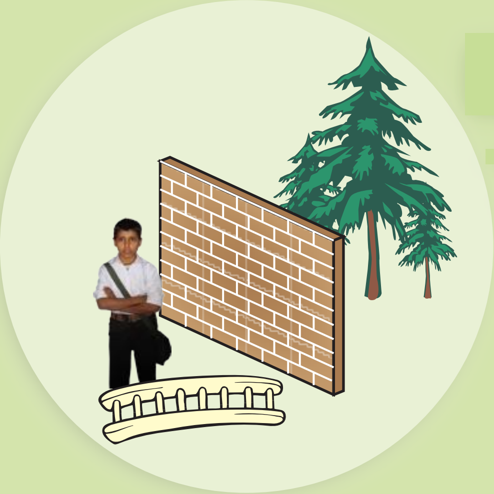
ب: که د θ زاویه صفر ته نژدې شي $Sin\theta$ کوم عدد ته نژدې کیږي؟

ج: که زاویه 90° ته نژدې شي، $Sin\theta$ کوم عدد ته نژدې کیږي.

3- د 40°, 80° او 65° زاویې په وار سره رسم او بیا هره زاویه یوه قایم الزاویه مثلث کې رسم کړئ، د کربنې یا خط کش څخه په ګټې اخیستنې سره د مثلث اضلاعوې اندازه او $Sin80^o$, $Sin65^o$ او $Sin40^o$ پیدا کړئ او یو له بل سره یې پرتله کړئ.

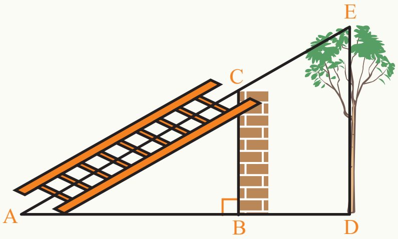
4- یو متساوي الساقین مثلث چې قاعده یې 8 واحده او $\hat{B}=54^{\circ}$ وي، رسم کړئ. که یوه څنډه یا ضلعه یې 5 واحده وي د B زاویې Sin ساین پیدا کړئ.

د يوې حاده زاويې کوساين



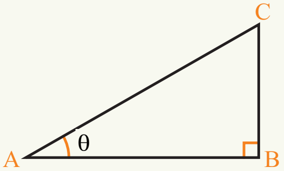
د يوه ديوال شاته د ناجو يوه ونه ولاړه ده. يو زده کوونکی غواړي و پوهېږي چې ونه له ديواله څومره واټن لري؟ د دې کار لپاره يې يوازې يوه لنده زينه درلوده. فکر وکړئ هغه څه سوچ کوي؟

فعاليت



- په مخامخ شکل کې د تشکيل شويو مثلثونو نومونه واخلئ.
- $\overline{BC}$ او $\overline{DE}$ يو له بل سره څه اړيکه لري؟ ولې؟
- د $\overset{\Delta}{ABC}$ او $\overset{\Delta}{ADE}$ مثلثونه يو بل سره څه اړيکه لري؟
- د زينې واټن تر ديوال او بيا يې تر ونې پورې پيدا کړئ.
- د تالس د قضيې په مرسته لاندې مساوات تکميل او د $\overline{AE}$ اوږدوالی په لاس راوړئ.
- دا مقدار په څه پورې تړلی دی؟ $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{....}{AE}$

په عمومي ډول د $\overset{\Delta}{ABC}$ په قايم الزاويه مثلث کې چې يوه حاده زاويه يې θ ده، د دې زاويې د ګاونډې يا مجاورې ضلعې د اوږدوالي او د وتر د اوږدوالي نسبت ته کوساين وايي.

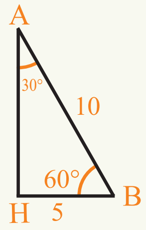


$$\cos\theta = \frac{\text{د } \theta \text{ زاويې د ګاونډې ضلعې اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

مثال: د AHB پـه مثلـث کـې کـه $\hat{A}=30^\circ$ او $\hat{B}=60^o$ وي، وښاياسـت چـې

$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$ او $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ ، $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ دی.

حل: د فيثاغورث له قضيې څخه په ګټې اخيستنې سره د AH جګوالی کولای شو وليکو چې:



$$\overline{AB}^2=\overline{AH}^2+\overline{HB}^2$$

$$10^2=\overline{AH}^2+5^2 \Rightarrow \overline{AH}^2=100-25=75$$

$$\overline{AH}=\sqrt{75} \Rightarrow \overline{AH}=5\sqrt{3}$$

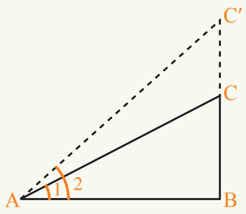
$$\sin 60^\circ=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \cos 60^\circ=\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ=\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2} \quad , \quad \cos 30^\circ=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

پوښتنې

1- که يوه حاده زاويه لويه شي د کوساين په اندازه کې څه بدلون راځي؟

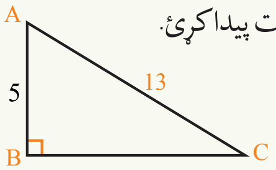
د مخامخ مثلث او مثلثاتي دايرې په مرسته خپل نظر بيان کړئ.



- د $CosA_1$ لپاره يو نسبت وليکئ.
- د $CosA_2$ لپاره يو نسبت وليکئ.
- په تشو ځايونو کې مناسبې علامې وليکئ.

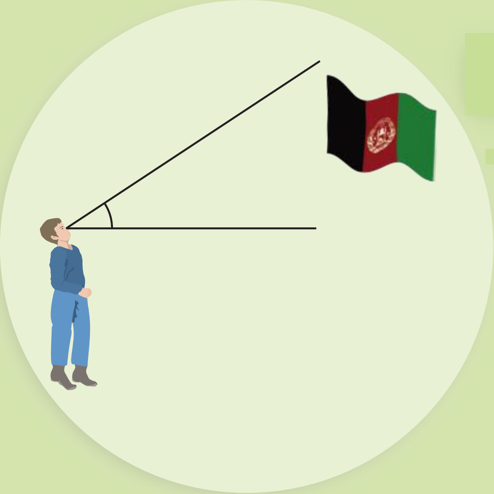
$\overline{AC}$		$\overline{AC'}$
$\cos A_1$		$\cos A_2$

3- په لاندې قايم الزاويه مثلث کې د $SinA$ او $CosA$ عددي قيمت پيدا کړئ.



4- د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې چې د اضلاعو اوږدوالی يې 8,6 او 10 واحده وي، د $SinA$ او $CosA$ مثلثاتي نسبتونه محاسبه کړئ.

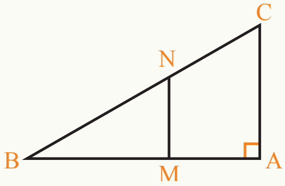
د حاده زاويې تانجنت



يو زده کوونکی، د بيرغ مخکې ولاړ دی.
سوچ کوئ چې د بيرغ د ميلې اوږدوالی څنګه پيدا کړئ؟

فعاليت

د $\overset{\Delta}{BAC}$ مثلث، چې د $\hat{A}$ زاويه يې قايمه ده، د $\hat{B}$ زاويې مثلثاتي نسبتونه $(\cos\hat{B}, \sin\hat{B})$ په پام کې ونيسئ چې د $\overline{MN}$ ټوټه کرښه په $\overline{AC}$ موازي رسم شوې ده.



- د $\overset{\Delta}{BAC}$ مثلث په پام کې نيولو سره $\sin\hat{B}$ او $\cos\hat{B}$.

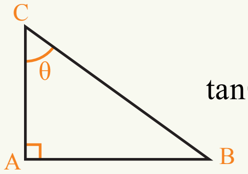
د $\overset{\Delta}{BAC}$ مثلث د اضلاعو له مخې وليکئ.

- د $\overset{\Delta}{BAC}$ مثلث د اضلاعو له مخې د $\dfrac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}$ نسبت وليکئ.
- له $\overset{\Delta}{BMN}$ مثلث څخه په ګټې اخيستنې سره د اضلاعو له مخې $\dfrac{\sin\hat{B}}{\cos\hat{B}}$ وليکئ.

د $\overline{MN}, \overline{BC}, \overline{AC}$ او $\overline{BN}$ کرښو د مخامخ اندازه کولو په مرسته پورتني دوه نسبتونه سره پرتله کړئ.

- فکر وکړئ، که چېرې $\dfrac{CosB}{SinB}$ پيدا کړو، نو دا نسبت د مخامخ اضلاعو له اوږدوالي سره تړاو لري يا يوازې د زاويې په مقدار پورې تړاو لري؟

لومړی پايله: په يوه قايم الزاويه مثلث کې د يوې حاده زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی او د هغې زاويې د ګاونډې ضلعې د اوږدوالي نسبت، يو ثابت مقدار دی چې (د حاده زاويې تانجنت) په نامه يادېږي.



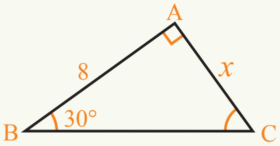
$$\tan\theta = \frac{\text{د } \hat{\theta} \text{ زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی}}{\text{د } \hat{\theta} \text{ زاويې د ګاونډې ضلعې اوږدوالی}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

دویمه پایله: د θ حاده زاویې تانجنت د حاده زاویې ساین پر کوساین له نسبت سره مساوي دی:

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

دریمه پایله: $\frac{Cos\theta}{Sin\theta}$ یو بل مقدار دی چې د حاده زاویې کوتانجنت (Cotangentθ) یا د θ زاویې دګاونډی یا مجاورې ضلعې اوږدوالي د θ زاویې د مخامخ خنډې یا مقابلې ضلعې پر اوږدوالي ته کوتانجنت $Cot\theta$ وایي. دا نسبت د نورو نسبتونو په څېر یوازې د زاویې په پراخوالي پورې اړه لري.

لومړی مثال: په لاندې مثلث کې چې $x=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ وي، د $\tan 30^\circ$ عددي قیمت په لاس راوړئ؟

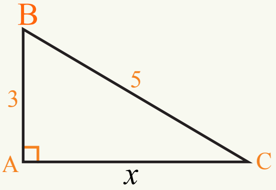


حل: د tanθ له تعریف څخه په ګټې اخیستنې سره کولای شو ولیکو چې:

$$\tan 30^\circ=\frac{x}{8}\quad\Rightarrow \tan 30^\circ=\frac{8\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{8}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

دویم مثال: د $B\overset{\Delta}{A}C$ مثلث چې لاندې رسم شوی دی، په دې مثلث کې $\tan c,\cos c,\sin c$ او $\cot c$ په لاس راوړئ او د $\tan c$ رابطه د $\cos c$ او $\sin c$ نسبتونو سره پرتله کړئ؟

حل: لومړی د فیثاغورث د قضیې په مرسته، د ABC په مثلث کې، د AC اوږدوالی پیدا کوو.



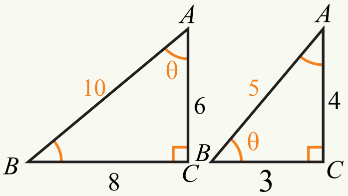
$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$$

$$5^2=3^2+x^2\ \Rightarrow\ x^2=25-9\ \Rightarrow\ x^2=16\ \Rightarrow x=4$$

$$\sin C=\frac{3}{5}\qquad \cos C=\frac{4}{5}$$

$$\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{5}\div\frac{4}{5}=\frac{3}{5}\times\frac{5}{4}=\frac{3}{4}\ \Rightarrow\ \tan C=\frac{3}{4}\quad\Rightarrow\ \cot C=\frac{4}{3}$$

پوښتنې

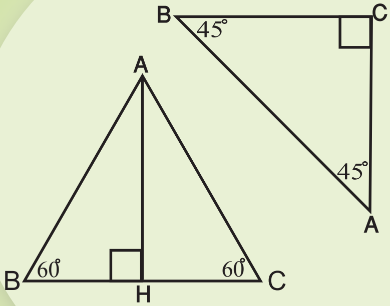


1- په مخامخ شکلونو کې $Sin\theta, Cos\theta, \tan\theta$ او $Cot\theta$ پیدا کړئ.

2- د $\overset{\Delta}{ABC}$ په مثلث کې چې ضلعې یې سره مساوي دي، $\tan A$ او $\tan B$ پیدا کړئ؟

3- که د یوه قایم الزاویه مثلث قاعده ثابته وساتو او حاده زاویه یې لویه شي د $\tan\theta$ په نسبت کې څه بدلون پیښیږي؟

د ځانګړو زاویو مثلثاتي نسبتونه
$(30°، 60°، 45°$ او $90°)$



مخامـخ مثلثونـه څـه ډول مثلثونه دي؟ د اضلاعو اوږدوالی یې وټاکئ.

فعالیت

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ یو متساوي الاضلاع مثلث رسم کړئ.
- د $\overline{AH}$ ارتفاع رسم کړئ، په دې ډول مثلثونو کې ارتفاع کومې ځانګړتیاوې لري؟
- د فیثاغورث له قضیې څخه په ګټې اخیستنې سره د مثلث ارتفاع پیدا کړئ؟
- آیا کولای شئ چې د 30° او 60° زاویو مثلثاتي نسبتونو عددي قیمت پیدا کړئ؟
- د $\overset{\Delta}{ABC}$ یو متساوي الساقین، قایم الزاویه مثلث رسم کړئ چې د هرې ضلعې اوږدوالی یې یو واحد وي؟
- هره حاده زاویه څو درجې ده؟ د وتر د اوږدوالي اندازه یې حساب کړئ.
- د 45° زاویې مثلثاتي نسبتونه په لاس راوړئ.

له پورتني فعالیت څخه لاندې جدول جوړ ولای شو:

زاویې / مثلثاتي نسبتونه	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	نا ټاکلی (نا معین)

مثال: په لاندي اړيکو کې د x او y عددي قيمت پيدا کړئ.

1) $x=\sin 60^\circ+\sin 30^\circ$ 　　 2) $y=\cos 60^\circ+\cos 30^\circ$

3) $\tan 60^\circ-\sin 30^\circ=?$ 　　 4) $y=\tan 30^\circ-\cos 60^\circ$

5) $\tan 45^\circ-\sin 45^\circ=?$ 　　 6) $y=\tan 30^\circ+\tan 60^\circ$

حل: په پورتنيو اړيکو کې د هر مثلثاتي نسبت پر ځای عددي قيمت وضع کوو:

$$1)\ x=\sin 60^\circ+\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$2)\ y=\cos 60^\circ+\cos 30^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$3)\ x=\tan 60^\circ-\sin 30^\circ=\sqrt{3}-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$$

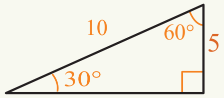
$$4)\ y=\tan 30^\circ-\cos 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{3}-3}{6}$$

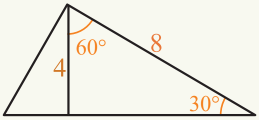
$$5)\ x=\tan 45^\circ-\sin 45^\circ=1-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

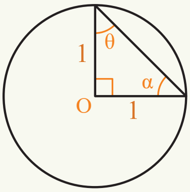
$$6)\ y=\tan 30^\circ+\tan 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{3}$$

پوښتني

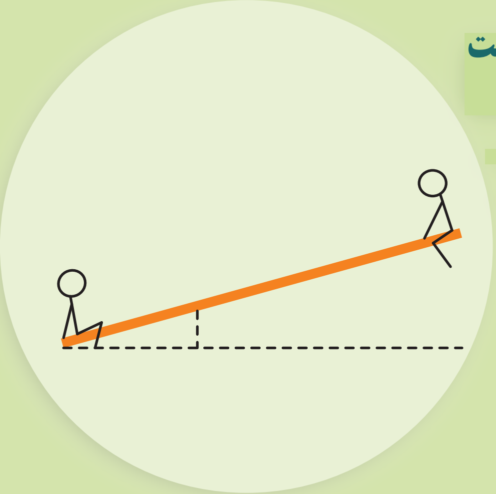
په لاندي شکلونو کې د $30^o, 45^o$ او 60° زاويو، د $Sin, Cos, \tan$ او Cot مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.







د یوه مستقیم خط د میل او تانجنت ترمنځ اړیکه



د رافعي میل ښــی یاکیڼـي خوا ته په څه پورې اړه لري؟

فعالیت

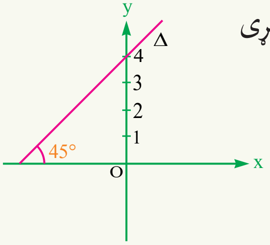
- د $B(0,0), C(1,0)$ او $A(1,3)$ ټکي، د وضعیه کمیاتو په مستوي کې وښایاست، هغه مثلث چې رأسونه یې له دې ټکو څخه جوړېږي، څه ډول مثلث دی؟ ولې؟
- د $\overline{AB}$ مستقیمي کرښې میل په لاس راوړئ.
- د $\overline{AB}$ مستقیمي کرښې معادله د $y = mx + h$ په شکل ولیکئ.
- $\tan A$ په لاس راوړئ، د $\overline{AB}$ د مستقیمي کرښې له میل سره څه اړیکه لري؟
- د $\overline{AB}$ په مستقیم دوه اختیاري ټکي په پام کې ونیسئ، د دې ټکو په لرلوسره د مستقیمې کرښې میل پیدا کړئ. ایا د $\tan B$ د مستقیمې کرښې د میل برابرې لیدل کیږي؟

له پورتني فعالیت څخه لیدل کیږي چې د هغې مستقیمي کرښې میل چې د x له محور سره حاده زاویه جوړوي، د هغې زاویې له تانجنت سره چې د کرښې او د x محور مثبت جهت سره یې جوړوي، برابره ده. د $y = mx + h$ معادله کې $m = \tan A$ دی.

لومړی مثال: د Δ مستقیمه کرښه، د y محور په 4 کې پرېکوي او د x محور له مثبت لوري سره 45° زاویه جوړوي، که $\tan 45^o = 1$ وي، د Δ مستقیمي کرښې معادله ولیکئ؟

حل: پوهېږو چې د مستقیمي کرښې معادله $y = mx + h$ ده، نو لومړی د مستقیمي کرښې میل په لاس راوړو:

$$\left.\begin{array}{l} m = \tan\theta \\ m = \tan 45^o \\ m = 1 \\ h = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y = mx + h \\ y = x + 4 \end{array}$$



دویم مثال: د $\sqrt{3}y - x = 2\sqrt{3}$ مستقیمې کرښې په معادله کې د مستقیمې کرښې میل، د میل زاویه او د y له محور سره د تقاطع ټکي په لاس راوړئ؟

حل: لومړی د مستقیمې کرښې معادله، په ستندرد شکل $y = mx + h$ بدلوو چې وروسته یې میل او له محور سره د تقاطع ټکي، په آسانۍ سره پیداکولای شو.

$$\sqrt{3}\,y - x = 2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}\,y = x + 2\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$$

$$m = \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \theta = 30^\circ \qquad , \qquad h = 2$$

آیا کولای شئ د فیثاغورث د قضیې او مثلثات ترمنځ اړیکه پیدا کړئ.

فعالیت

- د $\overset{\Delta}{ABC}$ یو قایم الزاویه مثلث چې قایمې جوړوونکې ضلعې یې 6 او 8 دي رسم او قایمه زاویه یې په A وښیئ؟
- $\sin B$, $\cos B$, $(\sin B)^2$, $(\cos B)^2$ او $(\sin B)^2 + (\cos B)^2$ حساب کړئ؟
- $\sin B$, $\cos B$, $(\sin B)^2$, $(\cos B)^2$ او $(\sin B)^2 + (\cos B)^2$ د AB, AC او BC اضلاعو له جنسه ولیکئ، څه پایله ترې اخلئ.

له پورتني فعالیت څخه ښکاري چې د یوې حاده زاویې د ساین او کوساین د مربعاتو جمع، مساوي له 1 سره ده. $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$

ځینې وخت د مثلثاتي نسبت د توان علامه په لاندې ډول سره ښودل کېږي.

$$(\sin A)^2 = \sin^2 A$$

پاملرنه وکړئ، چې د 2 توان د زاویې په ساین پورې اړه لري، نه په زاویه یې پورې

$$SinA^2 \neq Sin^2 A$$

پوښتنې

1- د هغې مستقیمې کرښې معادله په لاس راوړئ چې د x محور له مثبت جهت سره 60° زاویه جوړه کړي اود y محور په $(0,5)$ ټکي کې قطع کړي.

2- د $y = x + 4$ کرښې په معادله کې، میل، د میل زاویه او د y له محور سره د تقاطع ټکي پیدا کړئ.

3- ثبوت یې کړئ:

b) $1 + \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}$

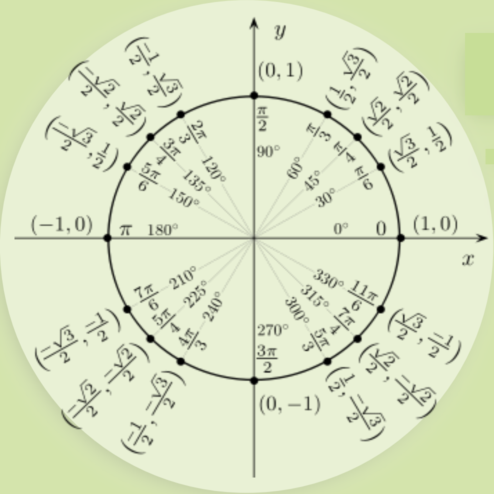
a) $\frac{(\sin\theta + \cos\theta)^2}{1 + 2\sin\theta\cos\theta} = 1$

d) $\frac{(\sin A + \cos A)^2 - 1}{2\sin A} = \cos A$

c) $\frac{\tan^2\theta - \sin^2\theta}{\cos\theta} = \sin\theta \times \tan^3\theta$

e) $\sin^4 A + \cos^2 A \times \sin^2 A + \cos^2 A = 1$

مثلثاتي جدول او د هغه استعمال



د مخامخ شکل په مثلثاتي دايرې کې،
د نومورو زاويو مثلثاتي نسبتونه ښودلای
شئ؟

فعاليت

- يو متساوي الاضلاع مثلث رسم کړئ او د هرې زاويې پراخوالى يې وټاکئ؟
- په يو مثلث کې، د 30° او 60° زاويو مثلثاتي نسبتونه پيداکړئ؟
- د زاويې مثلثاتي نسبتونه، په يوه مثلث کې وټاکئ؟
- ايا د هرې زاويې مثلثاتي نسبتونه په پورتني شکل کې پيداکولای شو؟

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

پايله:
د ځينوزاويو مثلثاتي نسبتونه کولای شو، په آسانى سره په لاس راوړو، خو د يو شمېر نورو زاويو د مثلثاتي نسبتونو محاسبه، ګران کار دی، نو ددې کار لپاره، د ځينو پوهانو له خوا مثلثاتي جدولونه، د خاصو فورمولونو په واسطه جوړ شوي چې ددې ډول جدول په مرسته، د هرې زاويې مثلثاتي نسبتونه پيداکولای شو.

د يادونې وړ ده چې د جدول په ترتيب کې په يوه قايم الزاويه مثلث کې، د θ او $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ يا $(90-\theta)$ زاويو له اړيکو څخه ګټه اخيستل شوې ده.

مثلثاتي جدول:

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
0° 00′	0.0000	1.0000	0.0000	∞	**90°** 00′
10	0.0029	1.0000	0.0029	343.77	50
20	0.0058	1.0000	0.0058	171.89	40
30	0.0087	1.0000	0.0087	114.59	30
40	0.0116	0.9999	0.0116	85.940	20
50	0.0145	0.9999	0.0145	68.750	10
1° 00′	0.0175	0.9998	0.0175	57.290	**89°** 00′
10	0.0204	0.9998	0.0204	49.104	50
20	0.0233	0.9997	0.0233	42.964	40
30	0.0262	0.9997	0.0262	38.188	30
40	0.0291	0.9996	0.0291	34.368	20
50	0.0320	0.9995	0.0320	31.242	10
2° 00′	0.0349	0.9994	0.0349	28.636	**88°** 00′
10	0.0378	0.9993	0.0378	26.432	50
20	0.0407	0.9992	0.0407	24.542	40
30	0.0436	0.9990	0.0437	22.904	30
40	0.0465	0.9989	0.0466	21.470	20
50	0.0494	0.9988	0.0495	20.206	10
3° 00′	0.0523	0.9986	0.0524	19.081	**87°** 00′
10	0.0552	0.9985	0.0553	18.075	50
20	0.0581	0.9983	0.0582	17.169	40
30	0.0610	0.9981	0.0612	16.350	30
40	0.0640	0.9980	0.0641	15.605	20
50	0.0669	0.9978	0.0670	14.924	10
4° 00′	0.0698	0.9976	0.0699	14.301	**86°** 00′
10	0.0727	0.9974	0.0729	13.727	50
20	0.0756	0.9971	0.0758	13.197	40
30	0.0785	0.9969	0.0787	12.706	30
40	0.0814	0.9967	0.0816	12.251	20
50	0.0843	0.9964	0.0846	11.826	10
5° 00′	0.0872	0.9962	0.0875	11.430	**85°** 00′
10	0.0901	0.9959	0.0904	11.059	50
20	0.0929	0.9957	0.0934	10.712	40
30	0.0958	0.9954	0.0963	10.385	30
40	0.0987	0.9951	0.0992	10.078	20
50	0.1016	0.9948	0.1022	9.7882	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
6° 00′	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	**84°** 00′
10	0.1074	0.9942	0.1080	9.2553	50
20	0.1103	0.9939	0.1110	9.0098	40
30	0.1132	0.9936	0.1139	8.7769	30
40	0.1161	0.9932	0.1169	8.5555	20
50	0.1190	0.9929	0.1198	8.3450	10
7° 00′	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	**83°** 00′
10	0.1248	0.9922	0.1257	7.9530	50
20	0.1276	0.9918	0.1287	7.7704	40
30′	0.1305	0.9914	0.1317	7.5958	30′
40	0.1334	0.9911	0.1346	7.4287	20
50	0.1363	0.9907	0.1376	7.2687	10
8° 00′	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	**82°** 00′
10	0.1421	0.9899	0.1435	6.9682	50
20	0.1449	0.9894	0.1465	6.8269	40
30	0.1478	0.9890	0.1495	6.6912	30
40	0.1507	0.9886	0.1524	6.5606	20
50	0.1536	0.9881	0.1554	6.4348	10
9° 00′	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	**81°** 00′
10	0.1593	0.9872	0.1614	6.1970	50
20	0.1622	0.9868	0.1644	6.0844	40
30	0.1650	0.9863	0.1673	5.9758	30
40	0.1679	0.9858	0.1703	5.8708	20
50	0.1708	0.9853	0.1733	5.7694	10
10° 00′	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	**80°** 00′
10	0.1765	0.9843	0.1793	5.5764	50
20	0.1794	0.9838	0.1823	5.4845	40
30	0.1822	0.9833	0.1853	5.3955	30
40	0.1851	0.9827	0.1883	5.3093	20
50	0.1880	0.9822	0.1914	5.2257	10
11° 00′	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	**79°** 00′
10	0.1937	0.9811	0.1974	5.0658	50
20	0.1965	0.9805	0.2004	4.9894	40
30	0.1994	0.9799	0.2035	4.9152	30
40	0.2022	0.9793	0.2065	4.8430	20
50	0.2051	0.9787	0.2095	4.7729	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
12° 00′	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	**78°** 00′
10	0.2108	0.9775	0.2156	4.6382	50
20	0.2136	0.9769	0.2186	4.5736	40
30	0.2164	0.9763	0.2217	4.5107	30
40	0.2193	0.9757	0.2247	4.4494	20
50	0.2221	0.9750	0.2278	4.3897	10
13° 00′	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	**77°** 00′
10	0.2278	0.9737	0.2339	4.2747	50
20	0.2306	0.9730	0.2370	4.2193	40
30	0.2334	0.9724	0.2401	4.1653	30
40	0.2363	0.9717	0.2432	4.1126	20
50	0.2391	0.9710	0.2462	4.0611	10
14° 00′	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	**76°** 00′
10	0.2447	0.9696	0.2524	3.9617	50
20	0.2476	0.9689	0.2555	3.9136	40
30	0.2504	0.9681	0.2586	3.8667	30
40	0.2532	0.9674	0.2617	3.8208	20
50	0.2560	0.9667	0.2648	3.7760	10
15° 00′	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	**75°** 00′
10	0.2616	0.9652	0.2711	3.6891	50
20	0.2644	0.9644	0.2742	3.6470	40
30	0.2672	0.9636	0.2773	3.6059	30
40	0.2700	0.9628	0.2805	3.5656	20
50	0.2728	0.9621	0.2836	3.5261	10
16° 00′	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	**74°** 00′
10	0.2784	0.9605	0.2899	3.4495	50
20	0.2812	0.9596	0.2931	3.4124	40
30	0.2840	0.9588	0.2962	3.3759	30
40	0.2868	0.9580	0.2994	3.3402	20
50	0.2896	0.9572	0.3026	3.3052	10
17° 00′	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	**73°** 00′
10	0.2952	0.9555	0.3089	3.2371	50
20	0.2979	0.9546	0.3121	3.2041	40
30	0.3007	0.9537	0.3153	3.1716	30
40	0.3035	0.9528	0.3185	3.1397	20
50	0.3062	0.9520	0.3217	3.1084	10
18° 00′	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	**72°** 00′
10	0.3118	0.9502	0.3281	3.0475	50
20	0.3145	0.9492	0.3314	3.0178	40
30	0.3173	0.9483	0.3346	2.9887	30
40	0.3201	0.9474	0.3378	2.9600	20
50	0.3228	0.9465	0.3411	2.9319	10
19° 00′	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	**71°** 00′
10	0.3283	0.9446	0.3476	2.8770	50
20	0.3311	0.9436	0.3508	2.8502	40
30	0.3338	0.9426	0.3541	2.8239	30
40	0.3365	0.9417	0.3574	2.7980	20
50	0.3393	0.9407	0.3607	2.7725	10
20° 00′	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	**70°** 00′
10	0.3448	0.9387	0.3673	2.7228	50
20	0.3475	0.9377	0.3706	2.6985	40
30	0.3502	0.9367	0.3739	2.6746	30
40	0.3529	0.9356	0.3772	2.6511	20
50	0.3557	0.9346	0.3805	2.6279	10
21° 00′	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	**69°** 00′
10	0.3611	0.9325	0.3872	2.5826	50
20	0.3638	0.9315	0.3906	2.5605	40
30	0.3665	0.9304	0.3939	2.5386	30
40	0.3692	0.9293	0.3973	2.5172	20
50	0.3719	0.9283	0.4006	2.4960	10
22° 00′	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	**68°** 00′
10	0.3773	0.9261	0.4074	2.4545	50
20	0.3800	0.9250	0.4108	2.4342	40
30	0.3827	0.9239	0.4142	2.4142	30
30′	0.3827	0.9239	0.4142	2.4142	30′
40	0.3854	0.9228	0.4176	2.3945	20
50	0.3881	0.9216	0.4210	2.3750	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
23° 00′	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	**67°** 00′
10	0.3934	0.9194	0.4279	2.3369	50
20	0.3961	0.9182	0.4314	2.3183	40
30	0.3987	0.9171	0.4348	2.2998	30
40	0.4014	0.9159	0.4383	2.2817	20
50	0.4041	0.9147	0.4417	2.2637	10
24° 00′	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	**66°** 00′
10	0.4094	0.9124	0.4487	2.2286	50
20	0.4120	0.9112	0.4522	2.2113	40
30	0.4147	0.9100	0.4557	2.1943	30
40	0.4173	0.9088	0.4592	2.1775	20
50	0.4200	0.9075	0.4628	2.1609	10
25° 00′	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	**65°** 00′
10	0.4253	0.9051	0.4699	2.1283	50
20	0.4279	0.9038	0.4734	2.1123	40
30	0.4305	0.9026	0.4770	2.0965	30
40	0.4331	0.9013	0.4806	2.0809	20
50	0.4358	0.9001	0.4841	2.0655	10
26° 00′	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	**64°** 00′
10	0.4410	0.8975	0.4913	2.0353	50
20	0.4436	0.8962	0.4950	2.0204	40
30	0.4462	0.8949	0.4986	2.0057	30
40	0.4488	0.8936	0.5022	1.9912	20
50	0.4514	0.8923	0.5059	1.9768	10
27° 00′	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	**63°** 00′
10	0.4566	0.8897	0.5132	1.9486	50
20	0.4592	0.8884	0.5169	1.9347	40
30	0.4617	0.8870	0.5206	1.9210	30
40	0.4643	0.8857	0.5243	1.9074	20
50	0.4669	0.8843	0.5280	1.8940	10
28° 00′	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	**62°** 00′
10	0.4720	0.8816	0.5354	1.8676	50
20	0.4746	0.8802	0.5392	1.8546	40
30	0.4772	0.8788	0.5430	1.8418	30
40	0.4797	0.8774	0.5467	1.8291	20
50	0.4823	0.8760	0.5505	1.8165	10
29° 00′	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	**61°** 00′
10	0.4874	0.8732	0.5581	1.7917	50
20	0.4899	0.8718	0.5619	1.7796	40
30	0.4924	0.8704	0.5658	1.7675	30
40	0.4950	0.8689	0.5696	1.7556	20
50	0.4975	0.8675	0.5735	1.7437	10
30° 00′	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	**60°** 00′
10	0.5025	0.8646	0.5812	1.7205	50
20	0.5050	0.8631	0.5851	1.7090	40
30	0.5075	0.8616	0.5890	1.6977	30
40	0.5100	0.8601	0.5930	1.6864	20
50	0.5125	0.8587	0.5969	1.6753	10
31° 00′	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	**59°** 00′
10	0.5175	0.8557	0.6048	1.6534	50
20	0.5200	0.8542	0.6088	1.6426	40
30	0.5225	0.8526	0.6128	1.6319	30
40	0.5250	0.8511	0.6168	1.6212	20
50	0.5275	0.8496	0.6208	1.6107	10
32° 00′	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	**58°** 00′
10	0.5324	0.8465	0.6289	1.5900	50
20	0.5348	0.8450	0.6330	1.5798	40
30	0.5373	0.8434	0.6371	1.5697	30
40	0.5398	0.8418	0.6412	1.5597	20
50	0.5422	0.8403	0.6453	1.5497	10
33° 00′	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	**57°** 00′
10	0.5471	0.8371	0.6536	1.5301	50
20	0.5495	0.8355	0.6577	1.5204	40
30	0.5519	0.8339	0.6619	1.5108	30
40	0.5544	0.8323	0.6661	1.5013	20
50	0.5568	0.8307	0.6703	1.4919	10
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

θ	Sin θ	Cos θ	Tan θ	Cot θ	
34° 00′	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	**56°** 00′
10	0.5616	0.8274	0.6787	1.4733	50
20	0.5640	0.8258	0.6830	1.4641	40
30	0.5664	0.8241	0.6873	1.4550	30
40	0.5688	0.8225	0.6916	1.4460	20
50	0.5712	0.8208	0.6959	1.4370	10
35° 00′	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	**55°** 00′
10	0.5760	0.8175	0.7046	1.4193	50
20	0.5783	0.8158	0.7089	1.4106	40
30	0.5807	0.8141	0.7133	1.4019	30
40	0.5831	0.8124	0.7177	1.3934	20
50	0.5854	0.8107	0.7221	1.3848	10
36° 00′	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	**54°** 00′
10	0.5901	0.8073	0.7310	1.3680	50
20	0.5925	0.8056	0.7355	1.3597	40
30	0.5948	0.8039	0.7400	1.3514	30
40	0.5972	0.8021	0.7445	1.3432	20
50	0.5995	0.8004	0.7490	1.3351	10
37° 00′	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	**53°** 00′
10	0.6041	0.7969	0.7581	1.3190	50
20	0.6065	0.7951	0.7627	1.3111	40
30	0.6088	0.7934	0.7673	1.3032	30
40	0.6111	0.7916	0.7720	1.2954	20
50	0.6134	0.7898	0.7766	1.2876	10
38° 00′	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	**52°** 00′
10	0.6180	0.7862	0.7860	1.2723	50
20	0.6202	0.7844	0.7907	1.2647	40
30	0.6225	0.7826	0.7954	1.2572	30
40	0.6248	0.7808	0.8002	1.2497	20
50	0.6271	0.7790	0.8050	1.2423	10
39° 00′	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	**51°** 00′
10	0.6316	0.7753	0.8146	1.2276	50
20	0.6338	0.7735	0.8195	1.2203	40
30	0.6361	0.7716	0.8243	1.2131	30
40	0.6383	0.7698	0.8292	1.2059	20
50	0.6406	0.7679	0.8342	1.1988	10
40° 00′	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	**50°** 00′
10	0.6450	0.7642	0.8441	1.1847	50
20	0.6472	0.7623	0.8491	1.1778	40
30	0.6494	0.7604	0.8541	1.1708	30
40	0.6517	0.7585	0.8591	1.1640	20
50	0.6539	0.7566	0.8642	1.1571	10
41° 00′	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	**49°** 00′
10	0.6583	0.7528	0.8744	1.1436	50
20	0.6604	0.7509	0.8796	1.1369	40
30	0.6626	0.7490	0.8847	1.1303	30
40	0.6648	0.7470	0.8899	1.1237	20
50	0.6670	0.7451	0.8952	1.1171	10
42° 00′	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	**48°** 00′
10	0.6713	0.7412	0.9057	1.1041	50
20	0.6734	0.7392	0.9110	1.0977	40
30	0.6756	0.7373	0.9163	1.0913	30
40	0.6777	0.7353	0.9217	1.0850	20
50	0.6799	0.7333	0.9271	1.0786	10
43° 00′	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	**47°** 00′
10	0.6841	0.7294	0.9380	1.0661	50
20	0.6862	0.7274	0.9435	1.0599	40
30	0.6884	0.7254	0.9490	1.0538	30
40	0.6905	0.7234	0.9545	1.0477	20
50	0.6926	0.7214	0.9601	1.0416	10
44° 00′	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	**46°** 00′
10	0.6967	0.7173	0.9713	1.0295	50
20	0.6988	0.7153	0.9770	1.0235	40
30	0.7009	0.7133	0.9827	1.0176	30
40	0.7030	0.7112	0.9884	1.0117	20
50	0.7050	0.7092	0.9942	1.0058	10
45° 00′	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	**45°** 00′
	Cos θ	Sin θ	Cot θ	Tan θ	θ

فعالیت

- د جدول لومړۍ پرته لیکه یا سطر او ولاړه لیکه یا ستون څه راښیي؟
- د جدول د کینې او ښۍ خوا لومړۍ ولاړه لیکه یا ستون په کومه زاویه پیل او په کومه زاویه ختم شوې دی؟
- د جدول لومړۍ او وروستۍ کرښه څه را ښیي؟
- که یوه زاویه 45° او یا له هغه څخه کوچنۍ وي، هغه د جدول په کینې خوا کې د درجې په ستنو کې پیدا کوو او مثلثاتي نسبت یې، له پورته خوا څخه لولو یا له ښکته خوا څخه او که زاویه له 45° څخه لویه وي، څه کوو؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

که زاویه له 45° څخه کوچنۍ وي، هغه دجدول د کینې خوا په لومړۍ ولاړه لیکه یا ستون کې او مثلثاتي نسبت یې، په پورته خوا لومړۍ پرته لیکه یا سطر کې ګورو.
که زاویه له 45° څخه لویه وي، هغه زاویه د جدول د ښۍ خوا په لومړۍ ولاړه لیکه یا ستون کې او مثلثاتي نسبت یې له ښکته خوا څخه پورته خوا ته په وروستنۍ پرته لیکه یا سطر کې پیداکوو چې د پام وړ زاویې د اړوند کرښې او د مثلثاتي نسبت د اړوندې ولاړې لیکې یا ستون تقاطع د زاویې مطلوب نسبت راکوي.

لومړی مثال: د $30^\circ\ 10'$ کوساین پیدا کړئ.

حل: لومړی د جدول له کینې خوا څخه په لومړۍ ولاړه لیکه یا ستون کې مطلوبه زاویه $(30^\circ10')$ پیدا کوو او د جدول په لومړۍ کرښه(سطر) کې مطلوب مثلثاتي نسبت پیدا کوو، ددې ولاړې او پرتې لیکې(سطر اوستون) تقاطع، د $0{,}8646$ عدد راکوي چې دا د $(30^\circ10')$ زاویې کوساین دی.

$$\cos(30^\circ10') = ? \qquad 30^\circ10' \cdots\cdots 0{,}8\ 6\ 46$$

(cos)

دویم مثال : د $84^\circ\ 50'$ ساین وټاکئ؟

حل: لومړی د جدول د ښۍ خوا په لومړي ستون کې د پام وړ زاویه $84^\circ\ 50'$ پیداکوو او د جدول په وروستنۍ کرښه(سطر) کې د پام وړ مثلثاتي نسبت پیدا کوو، ددې پرتې او ولاړو لیکو(سطر او ستون) تقاطع، د $(0{,}9959)$ عدد راکوي چې د $84^\circ\ 50'$ زاویه کوساین دی.

$$\sin 84^\circ\ 50' = ? \qquad 0.9959 \cdots\cdots 84^\circ\ 50'$$

(sin)

يادونه

هغه جدول چې تر اوسه مو ترې کار واخيست د هغو زاويو مثلثاتي نسبتونه چې توپير يې لس دقيقې وي، راښيي د هرې زاويې مثلثاتي نسبت د دې جدول په مرسته نه شو ټاکلی، نو اوس غواړو داسې طريقه بيان کړو، چې ددې جدول په مرسته د هرې زاويې مثلثاتي نسبتونه په لاس راوړو، چې دا طريقه د انټرپوليشن Interpolation په نامه يادېږي او په لاندې مثالونو کې يې ترې کار اخلو:

دريم مثال: د $\tan 42^\circ 35'$ زاويې تانجنت په لاس راوړئ.

حل: په جدول کې د $42^\circ 35'$ زاويې تانجنت نشته، خو د $42^\circ 40'$ او $42^\circ 30'$ زاويو تانجانتونه شته دي چې د هغوی په مرسته $42^\circ 35'$ زاويې مثلثاتي نسبت داسې پيداکوو:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\tan\ 42^\circ 40' \\ \tan\ 42^\circ 35'\end{array}\right] 5 \\ \\ \tan\ 42^\circ 30' \end{array}\right]\ 10 \quad \left.\begin{array}{r} = 0{,}9217 \left.\right]\ x \\ x \\ = 0{,}9163 \end{array}\right] 0{,}0054$$

د مثلثاتي نسبتونو توپير		د دو زاويو توپير
0.00054	:	10'
x	:	5'

ليدل کيږي چې د لومړۍ او دويمې زاويې توپير 5 او د لومړۍ او دريمې زاويې توپير، 10 دی. په همدې ترتيب سره، د tan توپير يې x او 0,0054 دی. يعنې که زاويه د 10 په اندازه توپير ولري، نو tan يې د 0,0054 په اندازه فرق کوي او که زاويه د 5 په اندازه توپير وکړي، نو tan د x په اندازه توپير کوي چې د تناسب په مرسته ليکو:

$$\frac{5}{10} = \frac{x}{0{,}0054} \Rightarrow x = 0{,}0027$$

د x قيمت د کوچنۍ زاويو له tan سره جمع کوو:

$$0{,}9163 + 0{,}0027 = 0{,}9190$$

$$\tan\ 42^\circ\ 35' = 0{,}9190$$

پوښتنې

له مثلثاتي جدول څخه په ګټې اخيستنې سره د $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ مثلثاتي نسبونه د $\alpha = 35^\circ 20'$ او $\alpha = 75^\circ 10'$ زاويو پيدا کړئ.

د قايم الزاويو مثلثونو حل

مخامخ شكل ته پام وكړئ، د خلي(منار)
جګوالی څنګه پيدا کولای شئ؟

فعاليت

- كه د يوه قايم الزاويه مثلث يوه زاويه $30°\ 40'$ وي، بله زاويه يې پيدا كړئ.
- كه د يوه قايم الزاويه مثلث يوه زاويه $29°$ او وتر يې $25cm$ وي، د مثلث مجهول عناصر پيدا کړئ.
- كه د قايم الزاويه مثلث دوې ضلعې يا يوه ضلعه او يوه حاده زاويه يې معلومه وي، د مثلث نور عناصر څنګه پيداكولای شو؟

د پورتني فعاليت پايله داسې بيانوو:

په هر قايم الزاويه مثلث كې كه يوه حاده زاويه يا دوه ضلعې معلومې وي، د مثلث پاتې اجزاوې د مثلثاتي توابعو په مرسته په لاس راوړو.

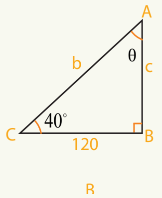
مثال: ديوه قايمه الزاويه مثلث يوه حاده زاويه، $40°$ ، كه ددې زاويې مجاوره ضلعه، 120 واحده د اوږوالي وي، نوموړی مثلث حل كړئ؟

حل: څرنګه چې د مثلث يوه زاويه او دوه ضلعې نا معلومې وي، نو ددې معلومو اجزاوو په مرسته، نا معلومې اجزاوې په لاندې ډول په لاس راوړو:

$$1,\quad \theta = 90° - \hat{c} = 90° - 40° = 50°$$

$$2,\quad \tan 40° = \frac{c}{120} \Rightarrow c = 120 \tan 40° = 120 \cdot 0{,}8391 = 100{,}692$$

$$3,\quad \cos 40° = \frac{120}{b} \Rightarrow b = \frac{120}{\cos 40°} = \frac{120}{0{,}7660} = 156.6579$$



دويم مثال: د يوه قايمه الزاويه مثلث وتر $49.7cm$ او يوه قايمه ضلعه يې $25cm$ وي نوموړی مثلث حل کړئ.

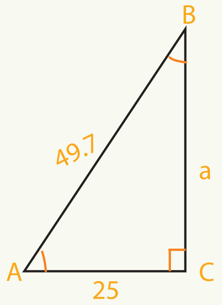
حل: ليدل کېږي چې د مثلث دوه عناصر معلوم وي، نو نا معلوم عناصر يې داسې پيدا کوو:

$$1)\cos\hat{A} = \frac{25}{49,7} = 0,503$$

$$\cos\hat{A} = 0,503 \quad \Rightarrow \hat{A} = 59,8° = 59°,48'$$

$$2)B = 90° - \hat{A} \quad \Rightarrow B = 90 - 59,8° = 30,2° = 30°12'$$

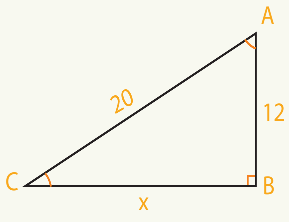
$$3)\tan\hat{A} = \frac{a}{25} \quad \Rightarrow a = \tan\hat{A} \cdot 25 = 25 \cdot 1,7182 = 43$$



پوښتنې

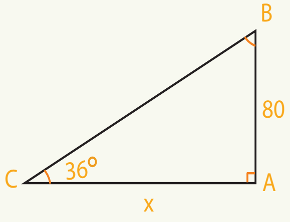
1 - د يوه قايمه الزاويه مثلث يوه حاده زاويه $38° \ 50'$ او د دې زاويې مجا وره ضلعه 311 واحده ده، نو موړی مثلث حل کړئ.

2 - په لاندې شکلونو کې مجهول عناصر وټاکئ.



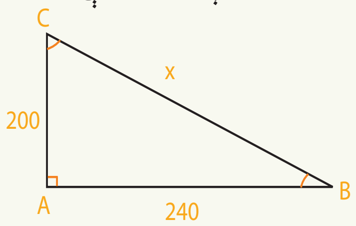
$x = ?$

$\hat{A} = ?$



$x = ?$

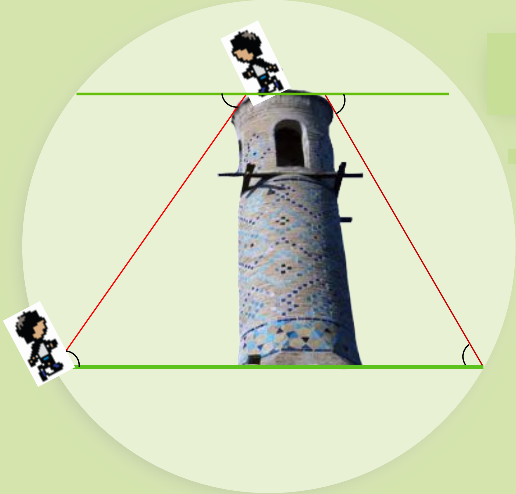
$\hat{B} = ?$



$\hat{B} = ?$

$\overline{BC} = ?$

د میل یا ارتفاع او تنزیل زاویې



مخامخ شکل ته پام وکړئ، د میل
او تنزیل زاویې وښایاست؟

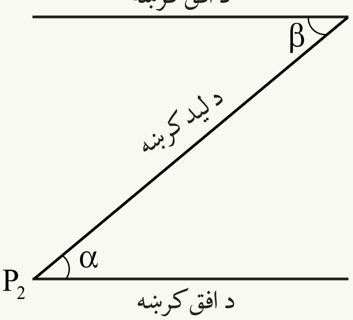
فعالیت

- که احمد په یو جګوالی پروت وي، د لید کرښه له افقي سطحې سره، څه ډول زاویه جوړوي او دا زاویه په کوم نوم یا دېږي(د تحول ساحه یې کومه فاصله ده) ؟
- که یو شی په یوه ښکته ځای کې پروت وي، د لید کرښه له افقي سطحې سره څه ډول زاویه جوړوي او دا زاویه په کوم نامه یادېږي(د تحول ساحه یې په کومه فاصله ده) ؟

د پورتني فعالیت پایله داسې بیانوو:

1 - د ارتفاع زاویه (Angle of Elevation)

که یو شی په یوه ارتفاع پروت وي، نو دلید کرښه له افق سره یوه زاویه جوړوي چې د جګوالي زاویه بلل کېږي، لکه: په ورکړل شوي شکل کې د α زاویه.



2 - د تنزیل زاویه (Angle of Depression)

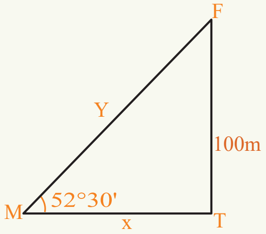
که یو شی په ټیټ ځای کې پروت وي، د لید کرښه له شي سره یوه زاویه جوړوي چې د تنزیل زاویه بلل کېږي لکه په شکل کې د β زاویه.

لومړی مثال: د $\overset{\Delta}{MTF}$ قایم الزاویه مثلث کې ارتفاع زاویه $52° \ 30'$ ده که د مثلث جګوالی $100m$ وي، د مثلث وتر او قاعده یې پیداکړئ.

$$\tan 52°30' = \frac{TF}{MF} = \frac{100}{X}$$

$$X = \frac{100}{\tan 52°30'} = \frac{100}{1.3092} \Rightarrow X = 76.73m$$

x



$$Sin\, 52\overset{o}{3}\acute{0} = \frac{TF}{MF} = \frac{100}{y}$$

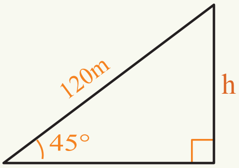
$$y = \frac{100}{Sin\, 52\overset{o}{3}\acute{0}} = \frac{100}{0,7934} \Rightarrow y = 126,04$$

دویم مثال: د یوه کاغذ پران د تار اوږد دوالی 120m وي، ددې کاغذ پران د جګوالي یا ارتفاع زاویه $45°$ ده، د کاغذ پران(پتنګ) جګوالی وټاکئ.

$$Sin\, 45^{o} = \frac{h}{120}$$

$$h = 120.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

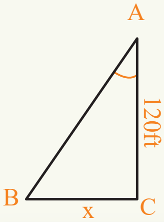
$$h = 60\sqrt{2}m$$



درېیم مثال: یو نوري(ترسد) برج له سمندر څخه $120f$ جګوالی لري، هغه نزولي زاویه چې د برج نه یوه کښتۍ لیدل کېږي، $15°$ درجې ده، نوموړي کښتۍ له برج څخه څومره واټن لري؟

$$\tan 30^{o} = \frac{X}{120}$$

$$X = 120.\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 40\sqrt{3}\,ft$$

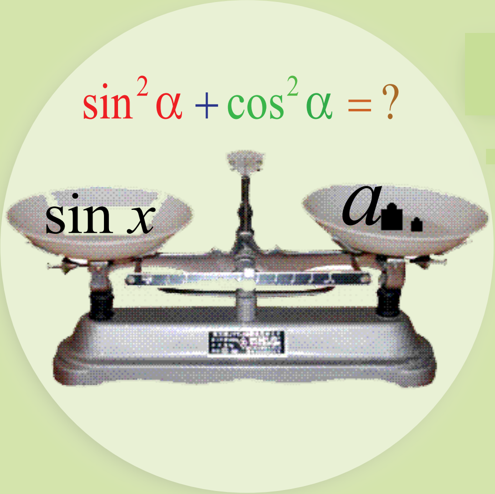


پوښتنې

1- د هغې ونې ارتفاع پیداکړئ چې د ارتفاع زاویه یې له $20°$ څخه $40°$ واوړي، نو په هغه حالت کې به لیدونکی $75\,ft$ ونې ته نژدې شي.

2- یوه ونه باد له پورته خواڅخه داسې ماته کړې چې د ونې تنه او ماته برخه یې یو قایم الزاویه مثلث له ځمکې سره جوړه کړې، که ماته برخه له ځمکې سره $50°$ زاویه جوړه کړې وي او د ونې تنه $20\,ft$ وي، د ونې جګوالي پیداکړئ.

مثلثاتي معادلې



مخامخ مثلثاتي اړیکې له څه سره مساوي دي؟ روښانه يې کړئ.

پوهېږو چې مطابقت هغه مساوات دی چې د ټولو قيمتونو د متحول لپاره د مساوات دواړه خواوې سره برابرې شي او معادله هغه مساوات دی چې د متحول د ځينو بيو لپاره، د مساوات دواړه خواوې سره برابرې شي.

فعاليت

- د فيثاغورث د قضيې او مثلثاتو ترمنځ اړيکه وښيئ، آيا دا اړيکه مطابقت دی که معادله؟
- مطابقت او معادله څه تو پير لري؟ دا توپير په مثلثاتي اړيکو کې وڅېړئ.
- د $\sin x = 1$ رابطه کې x مجهول دی که $\sin x$

په يوه تعريف کې د پورتني فعاليت پايله په لاندې ډول بيانوو:

تعريف:

هره معادله چې په هغې کې يو يا څو مثلثاتي نسبتونه ګډون ولري مثلثاتي معادله بلل کېږي، لکه: $\sin x - 1 = 0$ يا $2\cos x - 1 = 0$

- هغه قوس يا زاويه چې د هغې مثلثاتي نسبت مطلوب وي، اصلي مجهول بلل کېږي، لکه: په پورتنيو معادلو کې x اصلي مجهول دی.

- د اصلي مجهول مثلثاتي نسبت ته فرعي مجهول وايي، لکه په پورتنيو معادلو کې $\cos x$ او $\sin x$ فرعي مجهول دي.

د مثلثاتي معادلو د حل لپاره په لاندې ډول عمل کوو:

1 - د الجبري معادلو د حل په مرسته د فرعي مجهول قیمت په لاس راوړو.

2- د مثلثاتي نسبتونو د جدول په مرسته د اصلي مجهول قیمت په لاس راوړو.

3- څرنګه چې مثلثاتي معادلې پریودیک معادلې دي چې ډېر حلونه لري، نو د هغو زاویو د فورمولونو په مرسته چې یو ډول نسبتونه لري، د معادلې حلونه دي.

مثال: د $2\sin x-\sqrt{2}=0$ او $\cos x+\frac{1}{2}=1$ مثلثاتي معادلو حلونه پیدا کړئ.

$$2\sin x-\sqrt{2}=0 \qquad\qquad \cos x+\frac{1}{2}=1$$

$$2\sin x=\sqrt{2} \qquad\qquad \cos x=1-\frac{1}{2}$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad \cos x=\frac{1}{2}$$

$$x=45^\circ=\frac{\pi}{4} \qquad\qquad x=30^\circ=\frac{\pi}{6}$$

پوښتنې

د لاندې معادلو حل پیدا کړئ.

$a)\ \sqrt{3}\cot x-1=0$ $\qquad b)\ 2\sin 3x+\sqrt{3}=0$ $\qquad c)\ 2\cos 4x-\sqrt{2}=0$

د څلورم څپرکي لنډيز:

- مثلثات له دوو يوناني کلمو ټرايګون او متري څخه چې د مثلث د اندازه کولو معنا لري، جوړ شوی دی او له هغه علم څخه عبارت دی چې د مثلث د عناصرو ترمنځ اړيکې څېړي.
- که د مثلث له يوې ضلعې يوه موازي کرښه رسم شي، متقاطع ضلعې په مناسبو ټوټو وېشي چې دا قضيه د تالس د قضيې په نامه يادېږي.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د حاده زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی، د وتر په اوږدوالي او د حاده زاويې د ساين sine په نامه يادېږي.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د حاده زاويې د ګاونډۍ يا مجاورې ضلعې اوږدوالی، د وتر په اوږدوالي او د حاده زاويې د کوساين cosine په نامه يادېږي.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د حاده زاويې د مخامخ څنډۍ يا ضلعې اوږدوالی، د ګاونډۍ يا مجاورې څنډې يا ضلعې په اوږدوالي، د حاده زاويې د تانجنت tangent په نامه يادېږي.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د حاده زاويې د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ نسبتونو نسبت، د حاده زاويې د $\tan\theta$ په نامه يادېږي $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د حاده زاويې د $\cos$ او $\sin$ نسبتونو نسبت، د حاده زاويې د cot په نامه يادېږي $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$.
- هغه زاويه، لکه (α) چې مستقيمه کرښه يې د x محور له مثبت جهت سره جوړوي، د ميل زاويې په نامه يادېږي او د دې کرښې ميل د $\tan\alpha$ سره مساوي ده $m = \tan\alpha$.
- په هر قايم الزاويه مثلث کې د $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ اړيکه ريښتيا ده.
- د $\sin x, \cos x$ او $\tan x$ مثلثاتي نسبتونه، له زاويې پرته معنا نه لري.
- د m, $y = mx + b$ په معادله کې m د هغې زاويې تانجنت دی چې مستقيمه کرښه يې د x محور له مثبت جهت سره جوړوي او h د y له محور سره د تقاطع ټکی دی.
- $Sin30^o$ له $Cos60^o$ سره برابر دی.
- $Cos30^o$ له $\sin 60^o$ سره برابر دی.
- $Cos45^o$ له $Sin45^o$ برابر دی.

د څلورم څپرکي پوښتنې

• د لاندې سوالونو کې هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې په نښه کړئ:

1- د يوې حاده زاويې $\sin\alpha$ عبارت دی له:

a) $\dfrac{\text{د حاده زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}}$

c) $\dfrac{\text{د حاده زاويې دګاونډي(مجاوري) ضلعې اوږدوالی}}{\text{دوتر اوږدوالی}}$

b) $\dfrac{\text{دوتر اوږدوالی}}{\text{د حاده زاويې دګاونډي(مجاوري) ضلعې اوږدوالی}}$

d) $\dfrac{\text{دوتر اوږدوالی}}{\text{د حاده زاويې د مخامخ ضلعې اوږدوالی}}$

2- د $\tan x$ نسبت مساوي دی، په:

a) $\dfrac{\sin x}{\cos x}$ b) $\dfrac{\cos x}{\sin x}$ c) $\dfrac{1}{\sin x}$ d) $\dfrac{1}{\cos x}$

3- د $2y = 2x - 3$ په معادله کې د مستقيمې کرښې ميل عبارت دی، له:

a) $\dfrac{3}{2}$ b) -1 c) 1 d) b او a

4- د هغې مستقيمې کرښې معادله چې د y محور په (۳ ، ۰) کې تقاطع او د x محور له مثبت جهت سره 45° زاويه جوړه کړې، عبارت ده له:

a) $y = x + 3$ b) $2y = 2x - 3$ c) $2x - y = 0$ d) هيڅ يو

5- د $\sin^2 30 + \cos^2 30$ افادې قيمت مساوي دی، له:

a) 1 b) 2 c) -2 d) -1

6- $\sin 45^o$ او $\cos 45^o$ مساوي دی، له:

a) 1 b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}$

7- د $\dfrac{\sin 30^o - \cos 60^o}{\cos 60^o + \sin 30^o}$ افادې قيمت عبارت دی له:

a) 0 b) 1 c) -1 d) درې واړه ځوابونه سم دي.

• لاندې تش ځایونه په مناسبو بیانونو سره ډک کړئ:

1- په یوه قایم الزاویه مثلث کې د دوو نورو حاده زاویو مجموعه .... ده.

2- که د یوه متساوي الاضلاع مثلث یوه څنډه $10cm$ وي، جګوالی یې.............. دی.

3- په هر قایمه الزاویه مثلث کې، د یوې حاده زاویې ساین عبارت دی له......................

4- Triganomitry له دوو کلمو.............. او .... څخه جوړه شوې ده.

5- $\tan\theta \cdot \cot\theta$ مساوي په .... دی.

• له لاندې جملو څخه کومه سمه او کومه ناسمه ده، د سمې جملې په مخ کې د (ص) توری او د ناسمې په مخ کې د (غ) توری ولیکئ؟

1- (   ) د $\sin x$ نسبت، مساوي په $\dfrac{\text{د مخامخ ضلعې اوږدوالی}}{\text{د وتر اوږدوالی}}$ دی.

2- (   ) $\sin 30^o$ او $\cos 60^o$ یو بل سره مساوي دي.

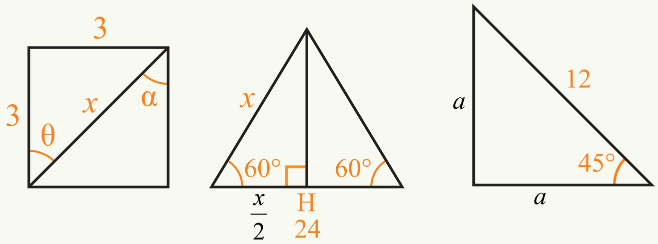
3- (   ) د $2y = 5x - 1$ معادلې کې د دې کرښې میل $\dfrac{2}{5}$ دی.

4- (   ) د $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ نسبت د $\tan\theta$ سره برابر دی.

5- (   ) $1+\cos^2\theta$ برابر په $\sin^2\theta$ دی.

• لاندې پوښتنې حل کړئ.

1- په لاندې شکلونو کې د ورکړ شوو زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ؟



2- په لاندې پوښتنوکې د A او B قیمتونه حساب کړئ:

1) $A = \cos 30^\circ - \sin 30^\circ$

2) $B = \cos 60^\circ - \sin 30^\circ$

3) $A = \tan 30^\circ - \tan 60^\circ$

4) $B = \cos 60^\circ + \sin 30^\circ$

5) $A = \frac{1}{2}(\tan 45^\circ - \cos 45^\circ)$

6) $B = \tan 45^\circ + \tan 60^\circ$

7) $A = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 60^\circ + \cos 45^\circ)$

8) $B = 2 - \frac{1}{2}(\sin 45^\circ - \cot 45^\circ)$

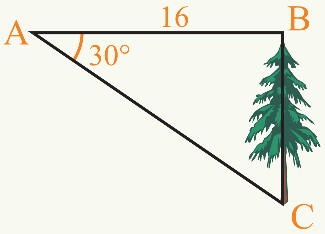
9) $A = \sin 45^\circ + \cos 30^\circ - \tan 45^\circ$

3- که $\sin x = \frac{7}{12}$ وي $\cos x$ او $\tan x$ پیداکړئ.

4- که $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ وي $\sin x$ او $\tan x$ پیداکړئ.

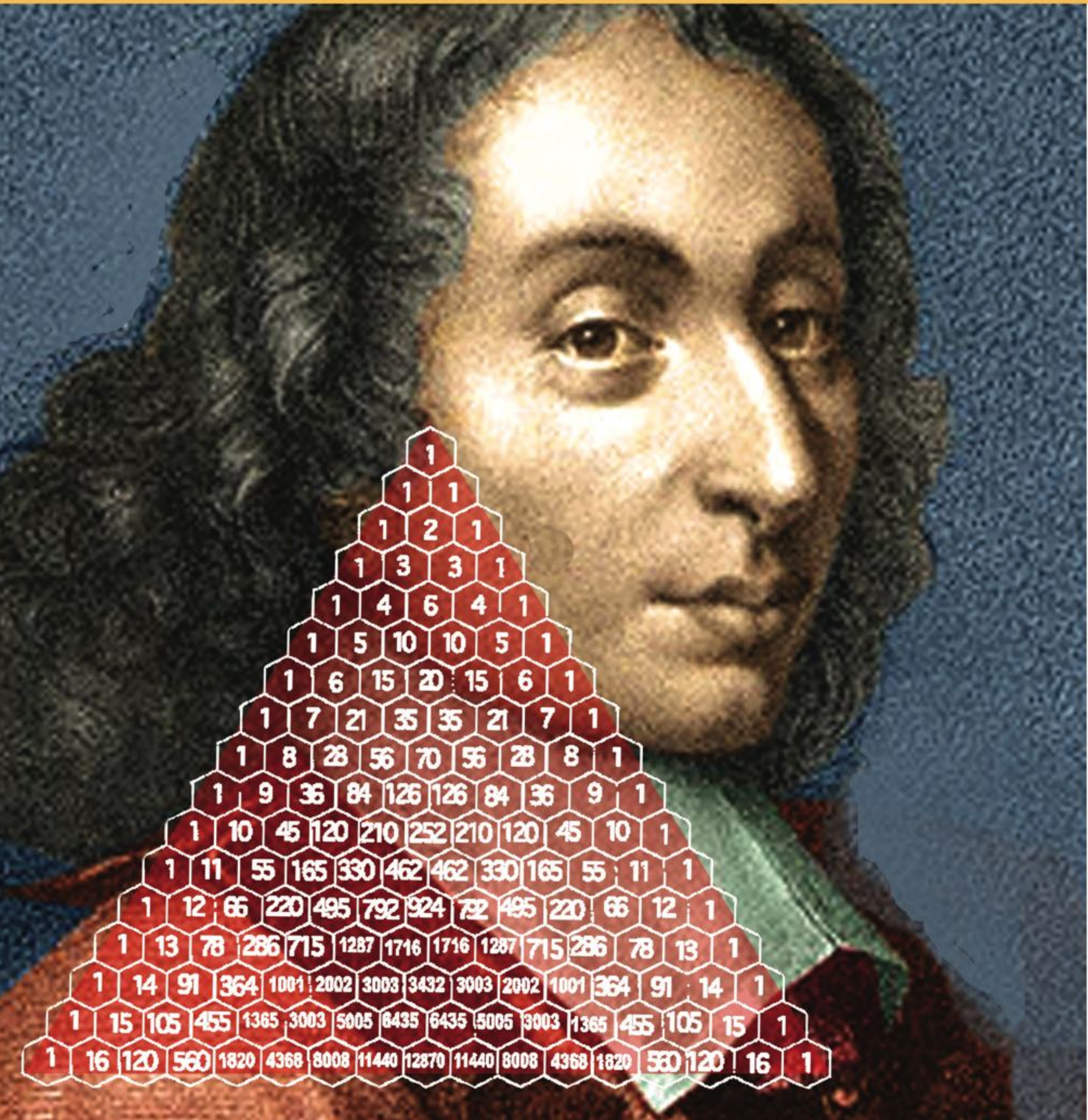
5- که چېرې α زاویه، صفر ته نژدې شي، $\tan \alpha$ کوم عدد ته نژدې کېږي؟ د شکل له مخې د خپلې وینا سموالی وښیئ.

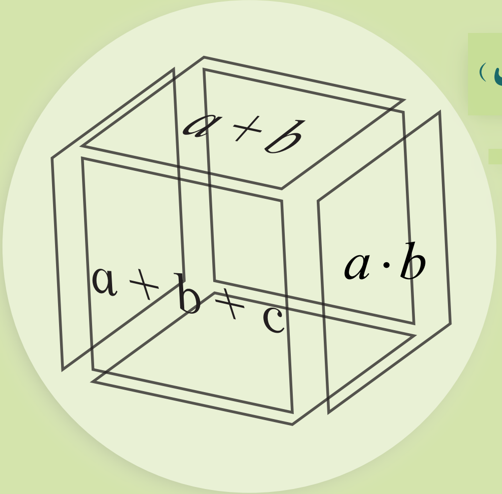
6- په لاندې شکل کې که $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ وي، د $\overline{AC}$ او $\overline{BC}$ واټنونه حساب کړئ.



پنځم څپـــرکی

څو جمله يي


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1
1 16 120 560 1820 4368 8008 11440 12870 11440 8008 4368 1820 560 120 16 1



ځوجمله یي ګاني(الجبري افادې)

د مخامخ شـکل په سطحو، د لیکل شویو الجبري افادو نومونه واخلئ.

فعالیت

لاندې افادې په پام کې ونیسئ:

$a)\ \ 2x \qquad b)\ \ \frac{1}{3}xy^3 \qquad c)\ \ \sqrt{2}xym^t \qquad d)\ \ 9x^2$

$e)\ \ 5x \qquad f)\ \ 2xy^3 \qquad g)\ \ 3x^2 \qquad h)\ \ \frac{4x^2}{x-1}$

- یوبل ته ورته افادې په نښه کړئ.
- لاندې الجبري افادې، تر ممکن حده پورې ساده کړئ.

$a)\ 2x+6x^2+\sqrt{2}xym^4 \qquad b)\ 3x^2+6x^2 \qquad c)\ \frac{1}{3}xy^3+2x \qquad d)\ \frac{1}{3}xy^3+2xy^3$

- هغه افادې چې نه شي ساده کیدای،ځنګه باید ولیکل شي، د هرې یوې لپاره د کومو نومونو وړاندیزو نه کوئ؟
- په هرحالت کې د افادو تر ټولو لوړ توان، نسبت X ته وټاکئ.

له پورتني فعالیت ځخه کولای شو، ولیکوچې:

که چیرې په یوه الجبري افاده کې د مشابه جملو له ساده کولوځخه وروسته، یوازې یوه جمله ولرئ، هغې ته یوه جمله یي،(Monomial)، که جمع یا تفریق د دووجملوولرو، هغې ته دوه جمله یي یا (Bionomial)، که جمع یا تفریق ددرېوجملوو لرو، هغې ته درې جمله یي یا (Trinomial) او که له درېوجملوځخه زیاتې جملې ولرو، ځوجمله یي یا(Polinomila) په نامه یادیږي. په هره الجبري افاده کې، تر ټولو لوړ توان نسبت یوه ځانګړې متحول ته د الجبري افادې درجه، نظر هغه متحول ته بلل کیږي.

مثال: لاندې جدول بشپړ کړئ.

الجبري افادې	مناسبې نومونې				درجه	
	خو جمله يي	دري جمله يي	دوه جمله يي	يوه جمله يي	نظر y ته	نظر x ته
$\sqrt{32}\,y^2-3y+2y^3$						
$3x^2-7x$			✓			2
$6x^2-4x-1$						
$0.4x^2y-2x^4+16y^2$						
$13x-2y^3+6x^3y$						
$\dfrac{2x-4}{x}$						
$3-5+x^2-y^3-2xy$						
$4x^2-2x+6x^2-5x$						

پوښتنې

1- لاندې الجبري افادې، ساده او د هرې يوې درجه نسبت هرمتحول ته وټاکئ.

$a)\ x^2-3x+6x^2-\frac{3}{2}x$ $\qquad b)\ \sqrt{2}mn^2-\frac{1}{2}m+2\sqrt{2}n^2m+3m$

$c)\ -4x^2+2x^2+14x-8+4x^3-16x-2x^2$ $\qquad d)\ 4-x^3y-2+yx^3-4xy-1$

2- لاندې الجبري افادې خوجمله يي دي؟ د هرې يوې درجه نسبت هر متحول ته وټاکئ.

$a)\ 6x^2-4x-12xy^6-2x^5$ $\qquad b)\ 8x^6-4xy^6-5x^2$

$c)\ 6x^2y^6m^9$ $\qquad d)\ \sqrt{3}x-y+6x^2y^3-2y^2$

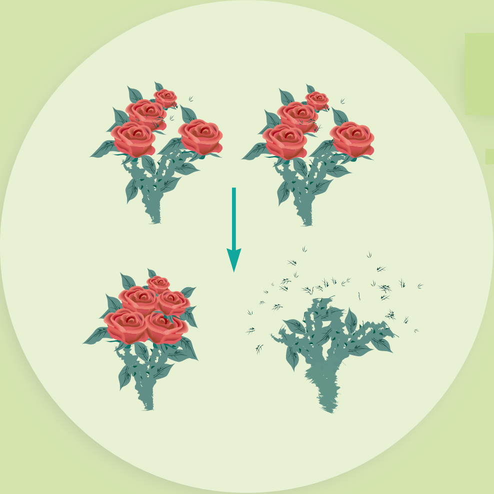
$e)\ 3pq^3-8p^4q^3-12q^4-0.5p^6$ $\qquad f)\ \dfrac{4m-2n}{2m-n}$

3- د B, A او C په افادوکې ورته حدود وښاياست اوافادې ساده کړئ.

$$A=4xy+2x^2y-3xy^2-\sqrt{2}xy-0.5x^2y-\frac{1}{2}xy^2$$

$$B=\frac{4}{3}a^2b-a^2+b^2-0.7a^2b-2a^2-3b^2+xy$$

$$C=2\sqrt{8x}+\sqrt{2}-3\sqrt{8x}+\sqrt{32}$$



په فکتورونو تجزیه(فکتور نیونه)

په مخامخ شکل کې څو غونچې ګلونه وینئ؟
کومې غونچې، یو بل ته ورته دي؟ یوه غونچه له
څو ګلانو څخه جوړه ده؟

فعالیت

- تش ځایونه ډک کړئ.

$$5x = (.......+......)\,x = ...x + ...x$$

$$6y = (......+......)\,y = ...y + ...y$$

- په پاسنیو اړیکو کې له کومې ځانګړتیا څخه ګټه اخیستل شوې ده؟
- د شپې اړخ عددي ضریبونه، د کین اړخ د متحولینو له ضریبونوسره څه اړیکه لري؟

$$3x + 2x = (........+...........)\,x = ...x$$

$$ax + bx = (..........+..........)\,x = ...x$$

- آیا کولای شو چې $a + b$ ساده کړو؟

په پور تنی فعالیت کې لیدل کیږی چې:
د ځینوالجبري افادو په تجزیه کې کولای شو چې د ضرب له توزیعي خاصیت څخه پرجمع باندې ګټه واخلو. د ګډعامل په پېژندلوسره په افاده کې کولای شو الجبري افادې تجزیه کړو.

لومړی مثال: لاندې الجبري افادې تجزیه کړئ.

$a)\quad ab + ac - ad$ $\qquad b)\quad x^4 - x^3y + x^2y^2$

$c)\quad \frac{1}{2}m^2 - 2m$ $\qquad d)\quad 3xy - 6x^2$

حل:په راکړل شویوافادوکې لومړی په ټولوحدونوکې ګډ حد پیدا کوو او هغه د قوس مخکې لیکو، وروسته ټول حدونه بیل بیل په جملو وېشو اوحاصل یې، د قوس په منځ کې لیکو:

$$a)\quad ab+ac-ad \qquad = a(b+c-d)$$
$$b)\quad x^4-x^3y+x^2y^2 = x^2(x^2-xy+y^2)$$
$$c)\quad \frac{1}{2}m^2-2m \qquad = m(\frac{1}{2}m-2)$$
$$d)\quad 3xy-6x^2 \qquad = 3x(y-2x)$$

دويم مثال: لاندې الجبري افادې تجزیه کړئ.

$a)\ Ax+Bx+Ay+By$ $\qquad b)\ x^2-4y^2+x+2y$

$c)\ 2x^2+2xy+3x+3y$ $\qquad d)\ 2x-2y+2x+2y$

حل: لومړی افاده داسې ترتیبوو چې ورته حدونه څنګ پر څنګ راشي او وروسته د افادې ګډ حدود پیداکوو او بیا یې تجزیه کوو:

$$a)\ \underbrace{Ax+Bx}_{x}+\underbrace{Ay+By}_{y}$$
$$= x(A+B)+y(A+B)$$
$$= (A+B)(x+y)$$

$$b)\ x^2-4y^2+x+2y$$
$$= [x^2-(2y)^2]+(x+2y)$$
$$= (x-2y)(x+2y)+(x+2y)$$
$$= (x+2y)(x-2y+1)$$

$$c)\ 2x^2+2xy+3x+3y$$
$$= 2x(x+y)+3(x+y)$$
$$= (x+y)(2x+3)$$

$$d)\ 2x+2y+2x+2y$$
$$= 4x+4y$$
$$= 4(x+y)$$

پوښتنې

لاندې افادې تجزیه کړئ.

1) $x^4-x^3y+x^2x$ $\qquad$ 2) $x(2x-3y)^2+8(2x-3y)$

3) $10ab-15ac$ $\qquad$ 4) $32x^2y-4xy^2$

5) $\sqrt{2}x^3y^2-\sqrt{8}xy$ $\qquad$ 6) $0.5mn^2-0.125m^4n^3$

7) $ab+b+b$ $\qquad$ 8) $\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{6}x^2-\frac{1}{2}x^2-x^4$

9) $mab+my+ny+nab$ $\qquad$ 10) $ab(b+a+c)+ac(a+b+c)+bc(c+b+a)$

د الجبري افادوضرب چې یوه ګډه جمله ولري

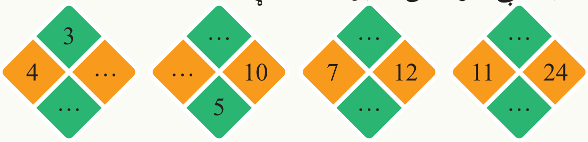
$$(x+a)(x+b)$$
$$= x^2 + (a+b)\,x + ab$$

د مخامخ قوسونو له ضرب څخه وواياست چې د دوو عددونو د جمعې او ضرب حاصل له کومو عددونو سره برابر دی؟

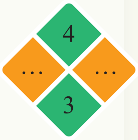
فعالیت

- په هره مربع کې د عددونو ترمنځ څه ډول اړیکه لیدل کېږي؟

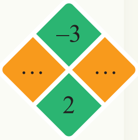
- له پورتنی اړیکې څخه په ګټې اخیستنې سره تش ځایونه ډک کړئ.



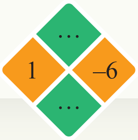
$(x+4)(x+3) = x^2 + ...x + ...x + ... = x^2 ....x + ...$



$(x-3)(x+2) = x^2 + ...x + ...x + ... = x^2 ....x + ...$



$x^2 + 8x + 12 = (x + ...)(x + ...)$



$x^2 + x - 6(x + ...)(x + ...)$

له پورتني فعاليت څخه ليدل کېږي:

د دوو الجبري عبارتونوله ضرب څخه چې يوه ګډه جمله و لري، ليکلای شو چې:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + a\times b$$

که چيرې وغواړو يوه ترينوم الجبري افاده د x^2+bx+c تجزيه کړو، نو لومړی بايد دوه عددونه داسې پيداکړو چې د ضرب حاصل يې c او د جمع حاصل يې b شي، که دي عددونو ته m او n وويل شي، نو لرو چې:

$$x^2+bx+c = x^2+(m+n)x+m\cdot n$$

مثال: د لاندې افادو ضرب اوتجزيه سرته ورسوئ.

$a)\ (t-4)(t+5)$ $\quad b)\ (a+3)(a+4)$ $\quad c)\ (x-0.4)(x+0.2)$

$d)\ (y+\frac{2}{3})(y+\frac{1}{2})$ $\quad e)\ x^2+12x+32$ $\quad f)\ x^2+4x+3$

$g)\ x^2-3x-28$ $\quad h)\ x^2-5x+6$

حل:

$a)\ (t-4)(t+5) = t^2+(-4+5)t+(-4\times 5) = t^2+t-20$

$b)\ (a+3)(a+4) = a^2+(3+4)a+(3\times 4) = a^2+7a+12$

$c)\ (x-4)(x-2) = x^2+(-4-2)x+(-4\times -2) = x^2-6x+8$

$d)\ (y+\frac{2}{3})(y+\frac{1}{2}) = y^2+(\frac{1}{2}+\frac{2}{3})y+\frac{2}{6} = y^2+\frac{7}{6}y+\frac{2}{6}$

$e)\ x^2+12x+32 = x^2+4x+8x+32 = x(x+4)+8(x+4) = (x+8)(x+4)$

$f)\ x^2+4x+3 = x^2+3x+x+3 = x(x+3)+(x+3) = (x+3)(x+1)$

$g)\ x^2-3x-28 = x^2+(4-7)x+(4)(-7) = x^2+4x-7x-28$

$= x(x+4)-7(x+4) = (x-7)(x+4)$

$h)\ x^2-5x+6 = x^2-2x-3x+6 = x(x-2)-3(x-2) = (x-3)(x-2)$

پوښتنې

1- لاندې افادې تجزيه کړئ.

$a)\ x^2+7x+12$ $\quad b)\ m^2-6m-7$

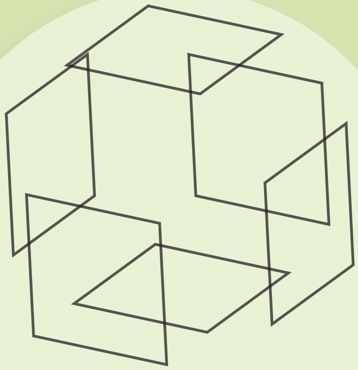
$c)\ a^2+a-2$ $\quad d)\ x^2-x-20$

2- لاندې افادې ضرب کړئ.

$a)\ (2x-1)(x+3)$ $\quad b)\ (\sqrt{2}+x^2)(x-\sqrt{2})$

$c)\ (a-3)(a+4)$ $\quad d)(0.5xm-\frac{1}{2})(4xm+0.5)$

د مکعبونو مجموع او تفاضل



$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

شکل ته پام وکړئ، وواياست چې له دې سطحو څخه که سره نږدې شي، کوم جسم په لاس راځي؟

فعاليت

لاندې جدول ډک کړئ.

a	b	$a^3 + b^3$	$(a + b)$	$a^2 - ab + b^2$	$(a + b)(a^2 - ab + b^2)$
5	2				
4	1				
–3	2				
3	–2				
4	4				

- د دوو $a^3 + b^3$ او $(a+b)(a^2 - ab + b^2)$ ولاړو ليکو ترمنځ، څه ډول اړيکې ليدل کيږي؟
- آيا کولای شئ يوه ورته رابطه د $a^3 - b^3$ لپاره وليکئ.

له پورتني فعاليت څخه کولای شو، دا پايله وليکو:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

دا اړيکه کولای شو چې په الجبري ډول وښيو:

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a(a^2 - ab + b^2) + b(a^2 - ab + b^2)$$
$$= a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + b^3$$

لومړی مثال: لاندې الجبري افادې تجزیه کړئ.

$a)\ b^3-8 \qquad b)\ a^6b^6-x^3y^3 \qquad c)\ h^3+\dfrac{1}{h^3}$

حل: لومړی الجبري افاده، د $a^3 \pm b^3$ مطابقت شکل ته اړوو، وروسته د مطابقت په مرسته هغه تجزیه کوو:

$$a)\ b^3-8=b^3-2^3=(b-2)(b^2+2b+4)$$

$$b)\ a^6b^6-x^3y^3=(a^2b^2)^3-(xy)^3=(a^2b^2-xy)(a^4b^4+a^2b^2xy+x^2y^2)$$

$$c)\ h^3+\frac{1}{h^3}=h^3+(\frac{1}{h})^3=(h+\frac{1}{h})(h^2-1+\frac{1}{h^2})$$

دویم مثال: د یوه مکعب مستطیل حجم داسې $27x^3-\frac{1}{8}$ بنودل شوی دی، که د مکعب مستطیل جګوالی $3x-\frac{1}{2}$ وي، ددې مکعب مستطیل د قاعدې مساحت به څومره وي؟

د مکعب مستطیل حجم = د قاعدې مساحت × ارتفاع ⇐ د قاعدې مساحت = $\dfrac{\text{د مکعب مستطیل حجم}}{\text{ارتفاع}}$

$$\text{د قاعدې مساحت}=\frac{27x^3-\frac{1}{8}}{3x-\frac{1}{2}}=\frac{(3x)^3-(\frac{1}{2})^3}{3x-\frac{1}{2}}=\frac{(3x-\frac{1}{2})[(3x)^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}]}{(3x-\frac{1}{2})}=9x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$$

دریم مثال : د $\dfrac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$ افاده ساده کړئ:

حل : لومړی د صورت مطابقت، په انکشافي یا غزېدلې بڼه لیکو:

$$\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^2+xy+y^2}=x-y$$

څلورم مثال :د $x^3+\dfrac{2}{x^3}$ افاده تجزیه کړئ؟

$$x^3+\frac{2}{x^3}=x^3+\frac{(\sqrt[3]{2})^3}{x^3}=x^3+(\frac{\sqrt[3]{2}}{x})^3$$

$$=(x+\frac{\sqrt[3]{2}}{x})(x^2-\sqrt[3]{2}+\frac{\sqrt[3]{4}}{x^2})$$

پوښتنې

1- د $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ مساوات صحت، په الجبري بڼه وښیئ.

2- لاندې افادې تجزیه کړئ.

$a)\ a^6b^6+x^3y^3 \qquad b)\ 8+b^3 \qquad c)\ x^{12}-y^{12}$

$d)\ 125x^3+y^3 \qquad e)\ 0.125x^3-1 \qquad f)\ \dfrac{1}{x^3}+1$

$g)\ 8-64a^3b^6 \qquad h)\ 8a^3-27b^3 \qquad i)\ b^6-1$

کوچنی مشترک مضرب (L.C.M)

L.C.M

د $\frac{5}{6}+\frac{3}{4}$ د کسرونو په حاصل کې د 6 او 4 د کوچني مشترك مضرب یا دواړو کسرونو ګډ مخرج پیداکولو لپاره مو یوه لاره درلوده، د $\frac{2}{2x+2}+\frac{3}{x^2-1}$ جمعې د حاصل لپاره څه وړاندیزونه کوئ؟

فعالیت

- د $\frac{2}{8}$ او $\frac{3}{6}$ کسرونو د جمع حاصل لپاره مو لومړی د ٦ او ٨ کوچني ګډ مضرب یا دواړو کسرونو ګډ مخرج پیدا کولو پړاوونه توضیح کړئ؟
- د $2x+2$ او x^2-1 افادې په ضربي عواملوتجزیه کړئ؟
- ضربي ګډ او ناګډعوامل یې وټاکئ؟
- د $2x+2$ او x^2-1 کوچني ګډ مضرب پیدا کولو لپاره سوچ وکړئ، څه باید وکړو؟
- د $2x+2$ او x^2-1 کوچنی ګډ مضرب څودی؟هغه په لاس راوړئ.
- د $\frac{2}{2x+2}+\frac{3}{x^2-1}$ کسرونو، د جمع حاصل په لاس راوړئ؟

ددوو یاڅو الجبري افادو د کوچني ګډ مضرب د پیداکولو لپاره، لومړی هغوی په لومړنیو ضربي عواملوتجزیه، وروسته هغه ګډعوامل چې تر ټولو لوی توان لري، له ناګډعواملو سره ضربوو چې کوچنی ګډ مضرب په لاس راکړي.

لومړی مثال: د $4x^2$، $2x+2$ او x^2-1 کوچنی ګډ مضرب په لاس راوړئ؟

حل: لومړی افادې جلا جلا تجزیه کوو:

$$4x^2 = 2^2x^2$$

$$2x+2 = 2(x+1)$$

$$x^2-1 = (x-1)(x+1)$$

لیدل کېږي چې هغه ګډ عامل چې لوی توان لري، $(x+2)$ او 2^2 دي چې د ضرب حاصل یې له ناګډو عواملو سره برابر په $2^2(x+1)(x-1)x^2 = 4x^2(x^2-1)$ دی چې د کوچني ګډ مضرب یا (L.C.M) په نامه یادېږي.

دویم مثال: د $68x^2+40x+32$ ، $6x^2-6$ او $4x^2+12x-16$ افادو کوچنی ګډ مضرب پیدا کړئ.

$$4x^2+12x-16 = 4(x^2+3x-4) = 2^2(x+4)(x-1)$$
$$8x^2+40x+32 = 8(x^2+5x+4) = 2^3(x+4)(x+1)$$
$$6x^2-6 = 6(x^2-1) = 2\times3(x-1)(x+1)$$

په پایله کې کوچنی ګډ مضرب عبارت دی له:

$$2^3\times3(x+1)(x+4)(x-1)$$

پوښتنې

د کوچني ګډ مضرب په پام کې نیولو سره یې ساده کړئ.

1) $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{4}{5x}\div\dfrac{3}{10x}$

2) $\dfrac{3x-1}{x^2+2x-15}-\dfrac{2}{x+5}$

3) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{4}{x^2-1}$

4) $\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{3}{x^3-1}+\dfrac{1}{x+1}$

د الجبري افادو ویش

$$\frac{2xy^2-4x^2y^4}{-2xy^2}=?$$

پام وکړئ چې د مخرج افاده د صورت په کومې افادې پورې اړه لري، آیا کولای شئ هغه ساده کړئ؟

فعالیت

- کله چې د $\frac{995}{7}$ کسر، نور ونشو کړای، چې ساده یا اختصار کړو، نو پایله څه ده؟
- لاندې الجبري افادې ترممکن حده پورې ساده کړئ.

$a)\ \frac{2m^2y-3x^3y^4+24xy^3}{-3xy^2}\ ,\quad x\neq 0\ \wedge\ y\neq 0$ $\qquad b)\ \frac{x^2-5x+6}{x-2}\ ,\quad x\neq 2$

$c)\ \frac{x^3-x^2-x-6}{x+2}\ ,\quad x\neq -2$

- لاندې عملیو ته پام وکړئ او روښانه کړئ چې هرګام دکوم کاریه پایله کې لاس ته راغلي؟ ولې؟

$a)$

$$\begin{array}{r|l} 995 & 7 \\ \cline{2-2} -7 & 142 \\ \cline{1-1} 29 & \\ 28 & \\ \cline{1-1} 15 & \\ 14 & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

$b)$

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x^2-11x-6 & x+2 \\ \cline{2-2} \pm x^3\pm 2x^2 & x^2-4x-3 \\ \quad -4x^2-11x & \\ \quad \mp 4x^2\mp 8x & \\ \qquad -3x-6 & \\ \qquad \mp 3x\mp 6 & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

- د (a) په جزکې مو ولې وېش له کیڼې خوا له لومړی رقم ۹ څخه پیل وکړ؟ فکر وکړئ، په (b) جز کې مو ولې، له x^3 څخه د وېش عملیه پیل کړې ده؟

د یوې الجبري افادې له کيڼ لوري ښخه ښي لوري (خوا) ته ليکل او ترتيبول د لوېې درجې څخه کوچنۍ درجې ته د څوجمله يي ترتيب نزولي ترتيب نومېږي

د دوو الجبري افادو د يو پربل د وېش لپاره لاندې پړاوونه ترسره کړئ.

1- د مقسوم او مقسوم عليه پولينومونه په نزولي ډول ترتيب کړئ.

2- د مقسوم لومړی حد، د مقسوم عليه په لومړي حد ووېشئ چې حاصل يې د خارج قسمت لومړی حد دی.

3- په لاس راغلی خارج قسمت، د مقسوم عليه په ټولوحدونو کې ضرب، حاصل يې د مقسوم له ورته حدودو څخه تفريق کوو.

4- د مقسوم بل حد راښکته کوو د پاتې افادې څنګ ته يې ليکو، وروسته ددې افادې لومړی حد د مقسوم عليه په لومړي حد وېشواوحاصل يې د مقسوم عليه په ټولوحدودوکې ضربوو او حاصل يې له پاتې افادې څخه تفريق کوو.

5- وروسته 1، 2، 4 پړاوونو ته تر هغه دوام ورکوو چې د پاتې حدودو درجه د مقسوم عليه د حدونو له درجې څخه کوچنۍ شي.

لومړی مثال : د $x^3-3x^2-23x+30$ افاده په $x-6$ افادې باندې ووېشئ.

د تقسيم مراحل

$$I-\quad \frac{x^3}{x}=x^2$$

$$II-\quad \frac{3x^2}{x}=3x$$

$$III-\quad \frac{-5x}{x}=-5$$

$$\begin{array}{l|l} x^3-3x^2-23x+30 & x-6 \\ \underline{-x^3\mp 6x^2} & x^2+3x-5 \\ \quad 3x^2-23x & \\ \quad \underline{-3x^2\mp 18x} & \\ \qquad -5x+30 & \\ \qquad \underline{\mp 5x\pm 30} & \\ \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

دویم مثال: د $x^5-2x^3+x^2-8x+4$ افاده په x^2-x-4 افادې وویشئ.

حل : دمقسوم اومقسوم علیه پولینومونه په نزولي ډول ترتیبوو او بیا عملیه سرته رسوو:

$$
\begin{array}{r|l}
x^5+0.x^4-2x^3+x^2-8x+4 & x^2-x-4 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^5 \mp x^4 \mp 4x^3} \qquad\qquad\quad & x^3+x^2+3x+8 \\
x^4+2x^3+x^2 \qquad\quad & \\
\underline{-x^4 \mp x^3 \mp 4x^2} \qquad\quad & \\
3x^3+5x^2-8x \qquad & \\
\underline{-3x^3 \mp 3x^2 \mp 12x} \qquad & \\
8x^2+4x+4 & \\
\underline{-8x^2 \mp 8x \mp 32} & \\
12x+36 &
\end{array}
$$

د تقسیم مراحل

$$
\left.\begin{array}{ll}
I- & \dfrac{x^5}{x^2}=x^3 \\[2mm]
II- & \dfrac{x^4}{x^2}=x^2 \\[2mm]
III- & \dfrac{3x^3}{x^2}=3x \\[2mm]
IV- & \dfrac{8x^2}{x^2}=8
\end{array}\right\}
$$

خرنګه چې د دوو عددونو وېش د ســموالي لپاره مو دوه شــرطونه وڅېړل، نو د دوو الجبري افادو د وېش د سموالی لپاره هم دوه شرطونه څېړو:

1- د خارج قسمت اومقسوم علیه د ضرب حاصل د جمع پاتي د مقسوم له الجبري افادي سره باید برابر وي.

۲- پاتي درجه د مقسوم علیه له درجې څخه باید کوچنی وي.

لکه، په دویم مثال کې:

$$(x^2-x-4)(x^3+x^2+3x+8)+12x+36$$
$$=x^5-2x^3-8x+4$$

لیدل کېږي چې د خارج قسمت او مقسوم علیه، د ضرب حاصل، جمع پاتي د مقسوم له افادې سره برابر دي او د خارج قسمت درجه، نظر x ته له 3 سره برابره ده پاتي درجه (1) ده، نو په لاس راغلي پایله سمه ده.

دریم مثال: د $2x^2 + x^4 - 3x + 1$ افاده په $x + 3$ افاده وویشئ:

حل: لومړی دمقسوم اومقسوم علیه افادې، په نزولي ډول ترتیبوو.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + 2x^2 - 3x + 1 & x + 3 \\
\hline
\underline{{}_{-}x^4 \pm 3x^3} & x^3 - 3x^2 + 11x - 36 \\
\quad -3x^3 + 2x^2 & \\
\quad \underline{\mp 3x^3 \mp 9x^2} & \\
\qquad 11x^2 - 3x & \\
\qquad \underline{\mp 11x^2 \pm 33x} & \\
\qquad\quad -36x + 1 & \\
\qquad\quad \underline{\pm 36x \mp 108} & \\
\qquad\qquad 109 &
\end{array}
$$

پوښتني

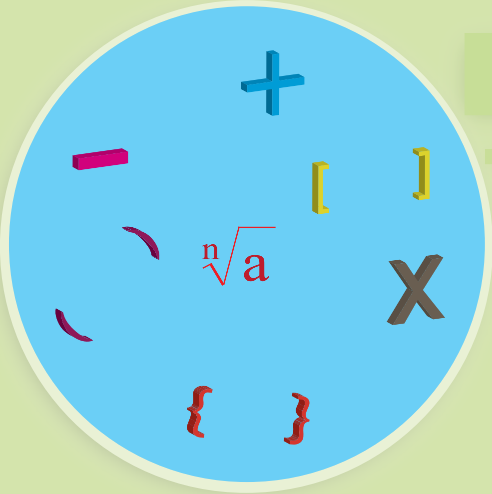
د لاندې افادو د وېش حاصل پیدا کړئ.

1) $(2t^3 - 4t^2 - 2t - 6) \div (t^2 + 9t + 7)$

2) $(1 - x^2 - x) \div (1 - x)$

3) $(2y^3 + y - 3y) \div (y^2 - 3y - 1)$

4) $(2x^3 + 5x^2 - x - 1) \div (x + 3)$



د الجبري افادو د عمليو د سر ته رسولو ترتيب

که چېرې په الجبري افادو کې مخامخ نښې راغلې وي، په څه ډول يې په ترتيب سره افاده ساده کوو؟

فعاليت

• د لاندې افادو د ساده کولو لپاره کومې عمليې سرته ورسوو؟ د عمليې د سرته رسولو ترتيب، په شمېر سره ونوموئ.

$3-2^4\times 5+(16\div 4)$

$4\times 5\div 2-3(2+3^2)+2$

$3x^2-4x(2+x)$

$2x-3\{-2(x+1)(x+2)\}+6x\div 2$

په پورتني فعاليت کې مو وليدل، چې د الجبري افادو عمليې، په ترتيب سره سرته رسول د عددونو د قانون له ترتيب څخه پيروي کوي. د يوې الجبري افادې د ساده کولو لپاره په ترتيب سره، په لاندې ډول عمل کوو

1- توان رفع کوو.

۲- د قوسونو په لرلو سره، لومړی هغه ساده کوو.

۳- په ترتيب سره له کيڼ څخه ښي اړخ ته د ضرب او وېش عمليې سرته رسوو.

٤- په ترتيب سره له کيڼ څخه ښي اړخ ته د جمع او تفريق عمليې سرته رسوو.

لومړی مثال : لاندې افادې ساده کړئ.

$$1)\ \frac{1}{2}m-3\left\{\left[5(m-\frac{1}{2}-m)\right]-m-6\right\}\div 2$$

$$=\frac{1}{2}m-3\left\{5m-\frac{5}{2}-5m-m-6\right\}\div 2$$

$$=\frac{1}{2}m-3\left\{-m-\frac{17}{2}\right\}\div 2$$

$$=\frac{1}{2}m+(3m+\frac{51}{2})\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}m+\frac{3}{2}m+\frac{51}{4}$$

$$=\frac{m+3m}{2}+\frac{51}{4}=\frac{4m}{2}+\frac{51}{4}$$

$$=2m+\frac{51}{4}$$

$$2)\ 2x-1-\{-2(x+2)\}+2x\div 2\times 5x$$

$$=2x-1-(-2x-4)+2x\div 2\times 5x$$

$$=2x-1+2x+4+x\times 5x$$

$$=2x-1+2x+4+5x^2$$

$$=4x+5x^2+3$$

فعاليت

- مخامخ عبارتونه ساده کړئ.

$a)\ \sqrt[3]{\frac{5}{8}}$

$b)\ \sqrt{8x^3y^3}$

$c)\ \sqrt{3a\sqrt{49a^2}}$

- د $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ او $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ کسرونو د مخرج د جذرونو د له منځه وړلو لپاره چې مخرج گویا شي $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ او $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ ، له کوم مطابقت څخه مرسته اخیستلای شئ؟

- د $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ او $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ کسرونوجذرونه په مخرج له منځه یوسئ اوساده یې کړئ.

د یوه کسرد مخرج د جذرونو له منځه وړلوعملیه، د الجبري کسر د گویا کولو یا ناطق کولو په نامه یادېږي.

مثال: د لاندې کسرونو مخرج ناطق کړئ.

1) $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$　　2) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{a}}$

3) $\dfrac{a-1}{\sqrt{a}-1}$　　4) $\dfrac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

حل:

1) $$\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$
$$=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$$

2) $$\frac{2}{\sqrt[3]{a}}=\frac{2}{\sqrt[3]{a}}\times\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}}$$
$$=\frac{2\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^3}}=\frac{2\sqrt[3]{a^2}}{a}$$

3) $$\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}=\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}\times\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+1}$$
$$=\frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{(\sqrt{a})^2-1^2}$$
$$=\frac{(a-1)(\sqrt{a}+1)}{a-1}=\sqrt{a}+1$$

4) $$\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2-3}$$
$$=\frac{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{-1}=-5(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

د يوې الجبري افادې د ساده کولو لپاره په ترتيب سره لومړی قوسونه له منځه ورو، ورپسې د توان عمليه او په پای کې په ترتيب سره د وېش ضرب، جمع او تفريق عمليې له ښي خخه کيڼ اړخ ته سر ته رسوو.

- د $\sqrt{x}$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x}$ دی.
- د $\sqrt{x}+1$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x}-1$ دی.
- د $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ دی.

پوښتنې

لاندې افادې ساده کړئ.

1) $2x\times -2\{3x-(2+x)-1\}\div 2$

2) $\frac{1}{3}y-5\left[-2\left\{6(y-\frac{1}{3}-y)\right\}\right]\div 3$

3) $5+(-18)-[24+(-30)](-7)$

4) $[(-102)+(-330)]\div 16+[168+240-(-210)]\div 6$

5) $\frac{2}{\sqrt{7}}$

6) $\frac{3}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

7) $2\sqrt{2000ab}-\frac{b}{a}\sqrt{72ab}$

8) $\frac{2a}{\sqrt{a}}$

9) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

10) $2\sqrt{18x}+\sqrt{50x}-\frac{1}{2}\sqrt{20x}$

د پنځم څپرکي لنډیز:

• هغه الجبري افادې یا الجبري جملې چې له یوې جملې څخه جوړې شـوې وي، دمونوم یا یو جمله یي په نامه یادیږي، لکه: ax^n

• هغــه الجبــري افــاده چې له دوو حدونو څخه جوړه شــوې وي، دوه جمله یــي یا بینوم بلل کیږي، لکه: ax^2+b

• هغه الجبري افاده چې له دریو حدونو څخه جوړه شــوې وي، دري جمله یي یا ترینوم بلل کیږي، لکه: ax^2+bx+c

• هغه الجبري افادې چې له یوه یا څوحدونوڅخه جوړې شوې وي او د تورو توانونه یې بشپړ عددونه دي پولینوم بلل کیږي لکه: $ax^5+bx^3+cx^2-x-d$

• په یوه الجبري افاده کې، د متحول تر ټولو لوی توان دالجبري افادې درجه بلل کیږي.

• د پولینــوم هغــه ترتیب چې له کیڼې خوا څخه ښــی خوا ته، له لوی تــوان څخه کوچنې ته ترتیب شوی وي، نزولي ترتیب بلل کیږي.

• د هر a او b لپاره لرو:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

• د الجبري افادو د ګډو عواملو، چې تر ټولو لوی توان ولري، د ضرب حاصل، له ناګډو عواملو سره د L.C.M په نامه یادیږي.

• کــه چیــرې په یوه الجبري افاده کــې قوســونه او(+ ، - ، × او ÷ ...) عملیې راغلې وي، د ســاده کولو لپاره یې په ترتیب ســره لومړی کوچنی، منځنی او بیا لوی قوس له منځه ورو، وریســې د توان عملیه او په پای کې په ترتیب ســره د وېش، ضرب، جمع او تفریق عملیې له کیڼ څخه ښي اړخ ته سرته رسوو.

• د $\sqrt{x}$ د ناطق کولو عامل $\sqrt{x}$ دی.

• د $\sqrt{x}+1$ د ناطق کولوعامل $\sqrt{x}-1$ دی.

• د $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ د ناطق کولوعامل عبارت له $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ دی.

دپنځم څپرکي پوښتنې

- په لاندې پوښتنو کې هره پوښتنې سوال ته څلورځوابونه ورکړل شوي، سم ځواب يې وټاکئ.

1- د $2x^2 - \frac{1}{2}x$ افاده کې ګډ عامل :

a) 2 دی. b) x دی. c) $2x$ دی. d) نه لري.

2- د $(x-2)(x+3)$ الجبري افادوضرب حاصل عبارت دی، له:

a) x^2+5x+6 b) x^2-5x-6

c) x^2+x-6 d) x^2-x+6

3- د $\frac{3}{x^2-1}+\frac{3}{2x+2}$ افادې کوچنی ګډ مضرب، عبارت دی، له :

a: $2(x+1)(x-1)$ b) $(x+1)(x-1)$

c) $(2x+2)(x^2-1)$ d) هیڅ یو.

4- د $\frac{2x-4x^3+x^2+16x-8}{2x^2-8}$ افادې، د وېش حاصل عبارت له:

a) $-2x+1$ b) $(-2x+1)(2x)+\frac{-2x}{2x^2-8}$

c) الف او ب d) هیڅ یو.

5- د $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ د ناطق کولوعامل عبارت دی، له :

a) $\sqrt{a}$ b) $\sqrt{b}$

c) $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ d) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$

• لاندې تش ځایونه په مناسبو کلمو سره ډک کړئ.

1- د $2x^3-4x^2+3x-1$ الجبري افاده، یوه . . . . حده درجه . . . . افاده ده.

2- د $x^2+7x+12$ الجبري افادې ضربی عوامل . . . . .او. . . . . . .دی.

3- د $\frac{x^2-1}{x+1}$ وېش حاصل عبارت له . . . . دی.

4- $a^3+b^3=(\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

5- د $(x^2+x-1)(x^2-x-1)$ د ضرب حاصل عبارت له . . . . دی.

• په لاندې جملو کې، کومه یوه سمه اوکومه یوه ناسمه ده؟ د سمې مخ ته (ص) توری او د ناسمې مخ ته (غ) توری ولیکئ.

1- (   ) هغه الجبري افادې چې له څو حدونوڅخه جوړه شوې وي او د تورو توانونه یې بشپړ عددونه وي، د پولینوم په نامه یادېږي.

2- (   ) د $x^2+2ax+a^2$ افادې تجزیه $(x+a)\ (x+a)$ ده

3- (   ) د $21x^3y^3$ او $14x^3y^2$ کوچنی ګډ مضرب $42x^3y^4$ دی.

4- (   ) $a^3-b^3=(a+b)(a^2+ab+b^2)$

5- (   ) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

• لاندې پوښتنې بشپړې حل کړئ:

1- تجزیه یې کړئ

a) $y^2 - y - 2$

b) $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$

c) $21a - 14ab + 28a^2$

d) $72m^8n^6 - 98m^6n^8$

e) $a^2x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}$

f) $1 + 2ab - (a^2 + b^2)$

2- ساده یې کړئ

a) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x+1}{x-2} + \frac{1}{x^2-4}$

b) $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

c) $\frac{a^2b^{-2} - b^2a^{-2}}{ab^{-1} - ba^{-1}}$

3- و یې ویشئ

a) $\frac{12a^2 - 4a + 20}{40 - 5a}$

b) $\frac{a^4 - b^4}{a - b}$

c) $(3x^3 - x^2 - 4) \div (x - \frac{1}{2})$

d) $(x^3 - 5x + 6) \div (x - 2)$

e) $(x^2 - 5x + 64) \div (-x + 5)$

شپږم څپرکی

نامساوات

نامساوات
(Inequality)

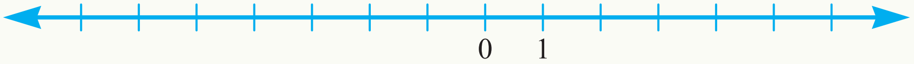
په دې انځور کې تله په کوم حالت کې ده؟
ولې؟

عموماً په ورځني ژوند کې د نامساوي کمیتونو پرتله کولو ته اړتیا لرو، لکه د یوه ټولګي د زده کوونکو د نمرو ټولګه(مجموعه) که نمرې له زیاتو څخه کمو نمرو ته درجه بندي کړو، آیا تاسې کولای شئ چې داسې نور مثالونه په ورځني ژوند کې ووایئ چې نا مساوي عددونه سره پرتله شي.

که چیرې عددونه د ($<,\leq,>,\geq$) علامو په مرسته اړیکې ولري، د نامساوي په نامه یادیږي، لکه: $5>4$, $18\leq18$ ....

فعالیت

• د $3, \frac{-3}{2}, \sqrt{2}, -4$ او $\frac{2}{3}$ عددونه، د عددونو په محورونو وټاکئ.



• له مناسبو علامو څخه په کار اخیستلو سره پورتني عددونه په ترتیب سره له کوچني څخه تر لوی پورې ولیکئ.
• د عددونو په محور، د عددونو د ترتیب او د عددونو د ځای تر منځ څه اړیکې وینئ؟

د پورتني فعالیت کتنی، په لاندې ډول داسې لنډوو:

د عددونو په محور، هغه عدد چې د عدد ښی خواته پروت وي لوی او له هغه عدد څخه چې د هغې کیڼې خوا ته پروت دی، کوچنی عدد دی.

په بشپړ ډول سره ویلای شو چې که د a,b او c درې حقیقي عددونه وي، نو صورت نیسي، چې:

$$a<b\ ,\ b<c\quad\Rightarrow\quad a<c$$

فعالیت

- دوه نامساوي عددونه وټاکئ او د هغوی تر منځ اړیکه د کوچنیو یا لویو علامو په کار اخیستلوسره بیان کړئ؟
- د نامساوي دواړو خواوو ته د ۵ عدد ورجمع کړئ، ایا د نامساوي د علامې په لوري کې څه بدلون راځي؟
- د پورتنی نامساوي له دواړو خوا وو څخه د ۳ عدد تفریق کړئ، آیا د نامساوي علامې په جهت کې، څه بدلون راځي؟

په بشپړ ډول سره، د پورتني فعالیت پایله داسي بیانوو:

که $a < b$ وي، نو د b, a او c اختیاري حقیقي عددونو لپاره لرو: $a + c < b + c$

$a - c < b - c$

فعالیت

- دوه نامساوي عددونه وټاکئ او د هغوی تر منځ اړیکه له کوچنی یا لویې علامې(>) څخه په کار اخیستلوسره ولیکئ؟
- د پورتنی نامساوي دواړه خواوې د ٤ په عدد کې ضرب کړئ، آیا د نامساوي علامې په لوری کې څه بدلون راځي؟
- د پورتنی نامساوي دواړه خواوې، د ٤- په عدد کې ضرب کړی، ایا د نامساوي د علامې په لوري کې څه بدلون راځي؟
- که د $4 < 7$ نامساوي دواړه خواوې معکوس کړو، آیا د نامساوي علامې په لوري کې بدلون راځي؟

په بشپړ ډول، د پورتني فعالیت پایله داسي بیانوو:

د b, a او c حقیقي عددونو لپاره لرو چي:

$a < b$ ، $c > 0 \Rightarrow ac < bc$

$a < b$ ، $c < 0 \Rightarrow ac > bc$

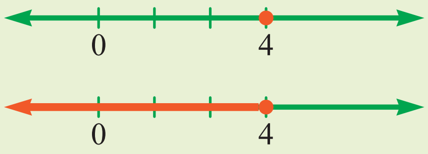
$0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

په یاد ولرئ چي د وېش عملیه د ضرب د عملیې معکوسه عملیه ده، یعني که وغواړو چي یو عدد په a وویشو، هغه عدد په $\frac{1}{a}$ کې ضربوو، نو د نامساوات د ضرب عملیې ټول خواص، د وېش په عملیه کې هم $(a \neq 0)$ صدق کوي.

پوښتنې

د $-3 < 9$ په نامساوي کې د یوه اختیاري عدد په جمع، تفریق، ضرب او تقسیم کولو سره د نامساوي ټول خواص وڅېړئ؟

د خطي نامساواتو حل



د $x=4$ او $x \leq 4$ دوه الجبري جملې په پام کې ونیسئ، د دې عبارتونو تر منځ څه ورته والی او توپیر وینئ؟

فعالیت

- د $x+3=7$ معادله، د x د کوم عددي قیمت لپاره سمه ده؟
- آیا د x له په لاس راغلي قیمت څخه پرته بل قیمت x ته پیداکولای شئ چې په معادله کې رښتینوالی ولري؟
- د x د کوم عددي قیمت لپاره، د $x+3<7$ نامساوي سمه ده؟
- آیا د x په لاس راغلی قیمت څخه پرته بل قیمت شته چې نامساوي پرې سمه وي؟
- د x د څو عددي قیمتونو لپاره پورتنۍ نامساوي سمه ده؟

د پورتني فعالیت په لیدو سره نامساوي د مساوات په پرتله ډېر حلونه لري.
هغه الجبري رابطې چې د($>, <, \leq$ او $\geq$) علامو په مرسته یوه له بلې سره اړیکې ولري او په هغه کې د متحول توان یو وي، لومړۍ درجه یو مجهوله یا خطي نامساوي بلل کېږي.
لاندې نامساوي د یو مجهوله لومړۍ درجې نامساواتو بېلګه ده.

$$x+3<0 \quad , \quad 2x-\frac{1}{3}>3-x$$

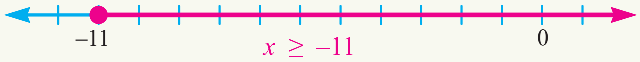
$$6x+7\leq 5 \quad , \quad \frac{x}{5}+\sqrt{2}\geq 12$$

په بشپړ ډول، د x د هغو قیمتونو د پیدا کولو لپاره چې په نامساوي کې حقیقت ولري، د نامساواتو له خواصو څخه په ګټې اخیستنې سره نامساوي ته داسې بدلون ورکوو چې د نامساوي یو اړخ ته x او بل اړخ ته یې عددونه پراته وي.
د نامساوي حل څخه موخه دا ده چې د x لپاره باید هغه قیمتونه پیدا کړو چې د نامساوي په ساحه کې حقیقت ولري، دا ساحه د نامساوي د حل ساحه بلل کېږي.

لومړی مثال: د $x+4\geq -7$ نامساوي حل کړئ او د نامساوي د حل ساحه یې د عددونو په محور وښيئ؟
حل: د نامساوي په دواړو خواوو کې د (-4) عدد په جمع کولو سره لرو چې:

$$x+4-4\geq -7-4$$

$$x\geq -11$$



دویم مثال: د $2x+1>5$ نامساوي حل کړئ؟
حل: د نامساوي له خواصو څخه په ګټې اخیستنې سره کولای شو معلوم د نامساوي علامې یو اړخ ته او مجهول بل اړخ ته انتقال کړو:

$$2x+1>5$$

نو د نامساوي له دواړو خواوو څخه، د (-1) عدد تفریق کوو:

$$2x+1-1>5-1$$

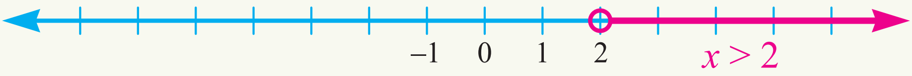
$$2x>4$$

د نامساوي دواړه خواوې په 2 وېشو یا یې په $\frac{1}{2}$ کې یې ضربوو:

$$\frac{1}{2}\times(2x)>\frac{1}{2}\times 4$$

$$x>2$$

یعنې د ټولو هغو قیمتو لپاره چې له 2 څخه لوی وي، نامساوي صدق کوي، دا مطلب د عددونو په محور داسې ښودلای شو:



پوښتنه: فکر وکړئ چې ولې په لومړي مثال کې د عددونو په محور 11- په(●) او دویم مثال کې د عددونو په محور، په(O) بدل شوی دی؟

په دې دوو مثالونو کې هغو علامو ته چې د نامساوي د حل ساحې د ټاکلو لپاره په کار وړل شوي دي پاملرنه وکړئ.

په عمومي حالت کې د $ax+b<cx+d$ الجبري عبارت چې په هغه کې a, b, c او d حقیقي عددونه او x متحول وي، لومړۍ درجه یو مجهوله یا خطي نامساوي بلل کېږي.

د نامساوي د حل لپاره لاندې ټکي په پام کې نیسو:

- د نامساوي د خواصو په پام کې نیولو سره معلوم یو اړخ او مجهول د نامساوي بل اړخ ته انتقالوو.
- معلوم عددونه په خپل منځ کې او مجهول حدونه په خپل منځ کې جمع کوو.
- د متحول د عددي قیمت دپیدا کولو لپاره د نامساوي دواړه خواوې د متحول په ضریب، د نامساوي د خواصو په پام کې نیولو سره وېشو.

دریم مثال: د $3x+1<x-5$ نامساوي حل کړئ.

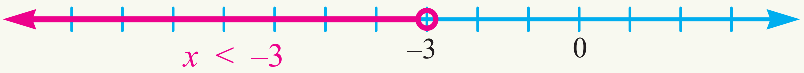
حل:

$$3x-x<-5-1$$

$$2x<-6$$

$$x<-\frac{6}{2}$$

$$x<-3$$



څلورم مثال: لاندې نامساوي حل کړئ.

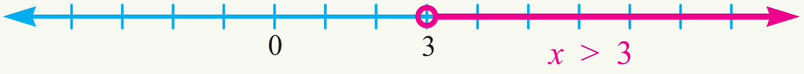
$$x+5<3x-1$$

$$x-3x<-1-5$$

$$-2x<-6$$

$$\frac{-2x}{-2}>\frac{-6}{-2}$$

$$x>3$$



1- د لاندې نامساوي گانو حل پيدا او د هغوی دحل ساحه د عددونو په محور کې وښيئ.

$a)\ \ 4x \geq 8$

$b)\ 8 + x < 5$

$c)\ 5 + x < 2x - 1$

$d)\ -3x - 4 > x + 7$

$e)\ \frac{3}{2}x - 1 > x - \frac{2}{3}$

$f)\ \ 0.5 - x < 3x - 1$

$g)\ \ 2 - x \leq 2$

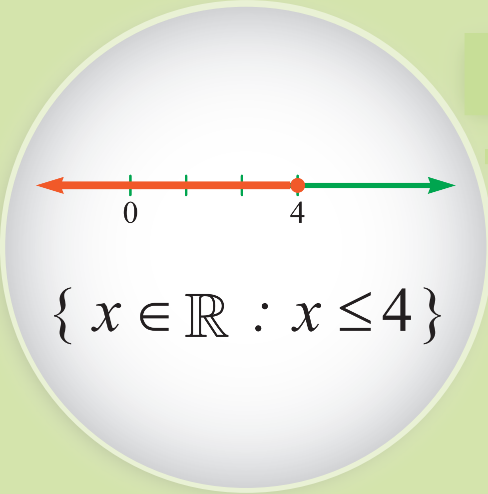
$h)\ 2x - 5 - 7x > 0$

$i)\ 5x + 6 > 0$

2- د 1325 د ويش پر 25 بايد تر ټولو لوی عدد پيداکړو چې په 25 کې ضرب او له 1325 څخه کوچنی يا ورسره مساوي شي، دا عبارت په نامساوي وښيئ او خارج قسمت يې پيدا کړئ.

3- که تاسې ته وويل شي چې د يوه فعاليت د سرته رسولو لپاره حد اکثر 5 ورځې وخت لرئ، دا عبارت په نامساوات وښيئ.

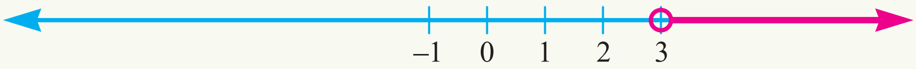
فاصلې (انټروالونه)



د یوه نامساوي د حل لپاره کولای شو، ډېر عددونه، په لاس راوړو چې د هغه نامساوي حل وي، داسې ټول حقیقي عددونه که د یوه سټ په ډول په پام کې ونیسو، دې سټ ته د نامساوي حل وايي.

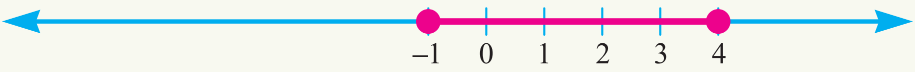
د مثال په ډول: $x > 3$ د $3x - 2 > 7$ نامساوي حل د ی، ځکه هر هغه عدد چې له 3 څخه لوی وي، په نوموړی نامساوي کې صدق کوي، دا د حل سټ، د ریاضي په ژبه داسې ښودل کېږي: $\{x \in IR : x > 3\}$

داسې لوستل کېږي: د x ټول هغه حقیقي عددونه، چې له درېو(3) څخه لوی وي.



لیدل کېږي چې دې ډول عددونو مجموعه، د عددونو د محور یوه برخه ده چې په ریاضي کې ورته واټن یا انټروال وايي.

په لاندې شکل کې د عددونو په محور ټاکل شوی هغه واټن (انټروال) دی، چې له 1- څخه لوی یا ورسره مساوي او له 4 څخه کوچنی یا ورسره مساوي دی.

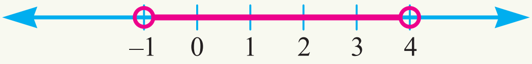


دا واټن، په $[-1,4]$ یا $\{x \in R \ : -1 \leq x \leq 4\}$ سره ښودل کېږي.

پاملرنه وکړئ، چې د -1 او 4 عددونه په فاصله کې ګډون لري. په هغه حالت کې چې د انټروال د پیل او پای ټکی ګډون ولري، دې واټن ته تړلی واټن وايي.

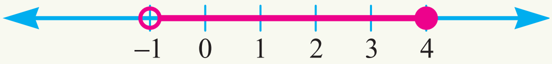
نو که په پورتني واټن کې، د 1- او 4 ټکي ګډون و نه لري، دې واټن ته خلاص واټن وايي او په لاندې ډول یې ښودلای شو:

$(-1,4) = \{x \in IR : \ -1 < x < 4\}$



که د مخکیني واټن د پای له ټکو څخه یوازې یو ټکی، لکه 4 په واټن کې شامل وي، هغه واټن ته نیمه خلاص یا نیم تړلی واټن وايي او هغه په لاندې شکل ښيو:

$(-1,4]=\{x \in IR:\ -1 < x \le 4\}$



په عمومي ډول، د هرو دوو a او b حقیقي عددونو چې، $a \le b$ څخه وي لرو:

د a او b تړلي واټن $[a,b]=\{x\in IR : a \le x \le b\}$

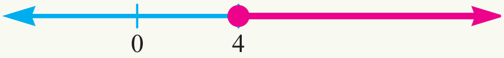
د a او b خلاص واټن $(a,b)=\{x\in IR : a < x < b\}$

د a او b نیمه خلاص واټن $(a,b]=\{x\in IR : a < x \le b\}$

د a او b نیمه تړلي واټن $[a,b)=\{x\in IR : a \le x < b\}$

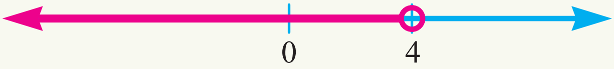
پاملرنه وکړئ چې د عددونو په محور باندې کولای شو، هغه واټن په پام کې ونیسو چې له یوې خوا څخه تړلي نه وي، په دې حالت کې، واټن، د ∞ علامې څخه په ګټې اخیستنې سره، چې هغه بې نهایت لولو، ښیو، لکه: د هغو عددونو سټ چې له 4 څخه لوی یا ورسره مساوي وي، داسې ښیو:

$\{x\in IR : 4 \le x\}=[4,\infty)$



او هغه عددونه چې له 4 څخه کوچني وي عبارت دي له:

$\{x \in IR : 4 > x\} = (-\infty,4)$



نو په عمومي ډول، که a یو حقیقي عدد وي، نو لرو چې:

له a څخه لوی حقیقي عددونه $(a,\infty)=\{x\in IR : a < x\}$

له a څخه لوی یا ورسره مساوي حقیقي عددونه $[a,\infty)=\{x\in IR : a \le x\}$

له a څخه کوچني حقیقي عددونه وي. $(-\infty,a)=\{x\in IR : x < a\}$

له a څخه کوچني یا ورسره مساوي حقیقي عددونه. $(-\infty,a]=\{x\in IR : x \le a\}$

پوښتنې

1- لاندې انټروالونه د سټ په شکل ولیکئ او د عددونو په محور یې وښیئ.

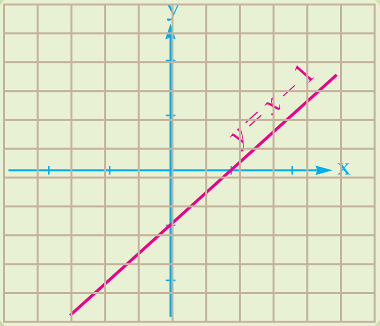
1) $[5,7]$ 2) $(9,-3)$ 3) $[-2,8)$ 4) $(6,1]$ 5) $[2,\infty)$

2- لاندې سټونه، د انټروال په ډول ولیکئ.

1) $A=\{x \in IR : 2 < x < 6\}$ 2) $B=\{x \in IR : -3 \le x \le 5\}$

3) $C=\{x \in IR : 0 \le x < 4\}$

د لومړۍ درجې بینوم د علامې ټاکل



په مخامخ شکل کې، x دکوم قیمت لپاره د $y = x - 1$ مستقیمه کرښه، د x محور نه د پاسه او x دکوم قیمت لپاره مستقیمه کرښه، د x محور نه لاندې پرته ده؟

فعالیت

- د $2x - 4$ الجبري افاده څو حده ده؟
- دا افاده د x متحول په کوم قیمت له صفر سره مساوی ده؟
- دا افاده د x متحول په کومو قیمتونو سره مثبت ده؟
- دا افاده د x متحول په کومو قیمتونو سره منفي ده؟
- د $P(x) = 2x - 4$ الجبري افادې گراف رسم کړئ.

د پورتني فعالیت ریاضي بیان، په لاندې ډول په جدول کې لنډوو:

x	$x < 2$	2	$x > 2$
$2x - 4$	$-$	0	$+$

په دې جدول کې لیدل کیږي چې د $2x - 4$ بینوم په $x = 2$ کې مساوي په صفر دی او د هغو قیمتونو لپاره چې له 2 نه کوچني وي، منفي علامه او په هغو قیمتونو کې چې له 2 نه لوی وي، بینوم مثبته علامه لري.

لومړی مثال: د $P(x) = -\dfrac{1}{2}x + 3$ د بینوم علامه وټاکئ.

حل: لومړی هغه قیمت پیدا کوو چې بینوم په هغې کې صفر وي:

$$-\frac{1}{2}x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{2}x = -3 \quad \Rightarrow \quad x = 6$$

وروسته هغه قیموتونه چې بینوم په هغې کې مثبت وي، په لاس راوړو:

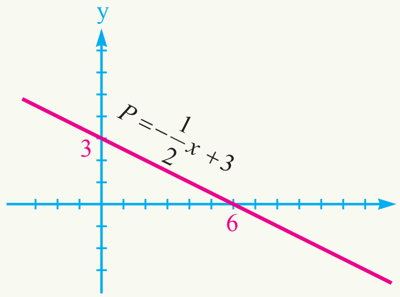
$$-\frac{1}{2}x+3>0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{2}x>-3 \quad \Rightarrow \quad x<6$$

په همدې ترتیب، هغه قیمتونه چې بینوم په هغې کې منفي وي، عبارت دي له:

$$-\frac{1}{2}x+3<0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{2}x<-3 \quad \Rightarrow \quad x>6$$

لاسته راغلي پایلې په لاندې جدول کې راټولوو:

x	$x<6$	6	$x>6$
$-\frac{1}{2}x+3$	+	0	−



پوښتنه: د $-\frac{1}{2}x+3$ بینوم علامه، د $x=7, x=3, x=-1$ او $x=12$ قیمتونو لپاره په لاس راوړئ او د بینوم رسم شوی ګراف شرح کړئ او د ځواب سم والی له پورتني جدول سره پرتله کړئ.

نو په کلي حالت کې د $y=ax+b$ بینوم د علامې د ټاکلو لپاره لومړی هغه قیمت په لاس راوړو چې بینوم په هغې کې صفر کېږي او د علامې د ټاکلو جدول یې په لاندې ډول دی:

1) $a>0$:

x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x>-\frac{b}{a}$
$ax+b$	−	0	+

2) $a<0$:

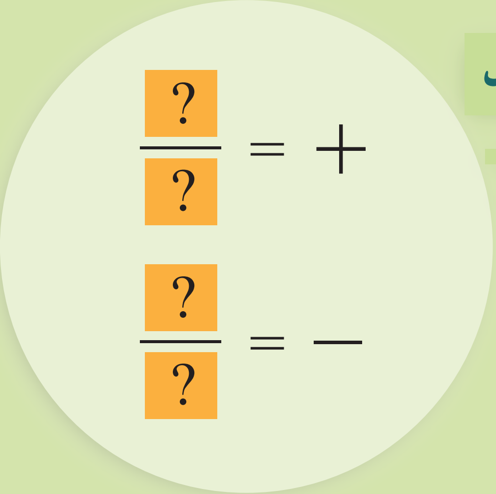
x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x>-\frac{b}{a}$
$ax+b$	+	0	−

پوښتني

د لاندې الجبري افادو علامې وټاکئ.

1) $3x-9$ 2) $7x-2$ 3) $\frac{3}{4}x-1$

4) $0.5x+10$ 5) $2x-4+x-1$ 6) $\frac{1}{2}x+3$



د کسري افادو د علامو تحليل او ټاکل

د a، b حقيقي عددونو لپاره، د $\frac{a}{b}$ کسر، څه وخت مثبت او څه وخت منفي علامه لري؟

فعاليت

- د $P(x)=\dfrac{3x+5}{2x-2}$ کسري افاده په پام کې ونيسئ.
- د $P(x)$ افاده په کوم حالت کې مثبت کېږي؟
- د $P(x)$ افاده په کوم حالت کې منفي کېږي؟
- د x په کوم قيمت سره د $P(x)$ کسري افاده مساوي په صفر ده؟
- آيا کولای شئ د $P(x)$ په افاده کې د x په ځای (۱) وضع کړئ؟ ولې.

د $P(x)$ د افادې د صورت او مخرج د علامې له ټاکلو څخه وروسته کولای شو، د $P(x)$ کسري افادې علامه د صورت او مخرج د علامو د وېش له حاصل څخه په لاس راوړو:

$$3x+5=0 \Rightarrow x=\frac{-5}{3}$$

پوهېږو چې د $x<\frac{-5}{3}$ لپاره د بينوم د صورت علامه منفي او د $x>\frac{-5}{3}$ لپاره د بينوم د صورت علامه مثبت ده.

د مخرج د علامې د ټاکلو لپاره لومړی هغه قيمت پيدا کوو چې $2x-2$ په هغه کې صفر شي.

$$2x-2=0 \Rightarrow x=1$$

په پايله کې له $x<1$ څخه بينوم د مخرج علامه منفي او د $x>1$ لپاره د بينوم د مخرج علامه مثبته ده.

پاملرنه وکړی، په هغه قیمت کې چې د کسري افادې مخرج صفر کېږي نه دی تعریف شوی، پورتنی بحث په لاندې ډول د علامو د تحلیل او ټاکلو په جدول کې داسې لنډوو:

x	$x<-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}<x<1$	1	$1<x$
$3x+5$	$-$	0	$+$		$+$
$2x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{3x+5}{2x-2}$	$+$	0	$-$	نه دی تعریف شوی	$+$

نو د $x<\frac{-5}{3}$ او $x>1$ قیمتونو لپاره د $\frac{3x+5}{2x-2}$ کسري افادې اشاره مثبت او د $\frac{-5}{3}<x<1$ قیمتونو لپاره د $\frac{3x+5}{2x-2}$ کسري افادې اشاره منفي ده.

او د $x=\frac{-5}{3}$ قیمت لپاره کسري افاده مساوي صفر ده.

په عمومي ډول، د کسري افادې د اشارې د تحلیل او ټاکلو لپاره لومړی د کسر د صورت او مخرج اشاره ټاکو، وروسته د صورت او مخرج د اشارو او د وېش له حاصل څخه د کسري افادې اشاره په لاس راوړو.

مثال: د $\frac{-x+3}{x}$ کسري افادې اشاره وټاکئ.

حل:

$$-x+3=0 \quad \Rightarrow \quad x=3$$

$$x=0$$

x		0		3	
$-x+3$	$+$		$+$	0	$-$
x	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{-x+3}{x}$	$-$	نه دی تعریف شوی	$+$	0	$-$

پوښتني

د لاندې کسري افادو اشاره وټاکئ.

$a)\ \frac{-x+1}{5+x}$ $\qquad b)\ \frac{x}{x+1}$ $\qquad c)\ \frac{1}{x}+\frac{2}{7}$

$$y = \frac{x+1}{x}$$

$y > 0$ ؟

$y < 0$

کسري نامساوات

د x په کوم قیمت سره د مخامخ کسري افاده مثبته او د x په کوم قیمت سره افاده منفي ده؟

فعالیت

د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ کسري نامساوي په پام کې ونیسئ.

- د پورتني نامساوي د ربتینوالي لپاره د کسري افادې صورت او مخرج باید کومه علامه ولري؟
- د x متحول د کومو قیمتونو لپاره د پورتنۍ کسري افادې صورت مثبت دی؟
- د x متحول د کومو قیمتونو لپاره د پورتنۍ کسري افادې مخرج مثبت دی؟
- د x متحول د کومو قیمتونو لپاره د پورتنۍ کسري افادې صورت منفي دی؟
- د x متحول د کومو قیمتونو لپاره د پورتنۍ کسري افادې مخرج منفي دی؟
- د پورتني فعالیت د لاس ته راغلو پایلو په پام کې نیولو سره د x متحول د کومو قیمتونو لپاره د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ نامساوي سم دی؟

د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه ولیدل شول چې د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ نامساوي حل لپاره باید بېلابېل حالتونه په پام کې ونیسو. د کسري نامساواتو د حل د سټ پیدا کولو یوه بله لاره، د علامو د ټاکلو او تحلیل جدول دی، د مثال په ډول د $\frac{x-2}{4+2x} > 0$ نامساوي د حل سټ پیدا کولو لپاره داسې عمل کوو:

$$x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

$$4+2x=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$$

x		-2		2	
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
$4+2x$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-2}{4+2x}$	$+$ د نامساوي حل	نه دی تعریف شوی	$-$	0	$+$ د نامساوي حل

د علامو د تحلیل او ټاکلو په جدول کې لیدل کېږي چې هغه قیمتونه چې له($x<-2$) او له($x>2$) وي، افاده یې مثبته ده او له هغو قیمتونو څخه چې له(-2) څخه لوی او له(2) کوچنی($-2<x<2$) وي، منفي ده. په پایله کې نامساوي د حل سټ عبارت دی له $x<-2$ او د $x>2$ یا $\{x\in R : x<-2\}\cup\{x\in R : x>2\}$ یا $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$

مثال: د $\frac{2x}{5x+3}\geq 1$ کسري نامساوي حل کړئ؟

حل: د نامساوي د حل سټ د پیدا کولو لپاره، لومړی کسري افاده له صفر څخه یو وار کوچنۍ یا لویه لیکو:

$$\frac{2x}{5x+3}\geq 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{2x}{5x+3}-1\geq 0$$

$$\frac{2x-(5x+3)}{5x+3}\geq 0 \;\Rightarrow\; \frac{-3x-3}{5x+3}\geq 0$$

$$-3x-3=0\Rightarrow x=-1$$

$$5x+3=0 \quad\Rightarrow x=\frac{-3}{5}$$

اوس د نامساواتو د علامو د ټاکلو له جدول څخه د نامساوي حل په لاس راوړو.

x		-1		$-\frac{3}{5}$	
$-3x-3$	$+$	0	$-$		$-$
$5x+3$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{-3x-3}{5x+3}$	$-$	0	$+$ د نامساوي حل	نه دی تعریف شوی	$-$

پورتني جدول ته په پاملرنې سره د نامساوي حل عبارت دی له: $\{x\in IR : -1\leq x<\frac{-3}{5}\}$

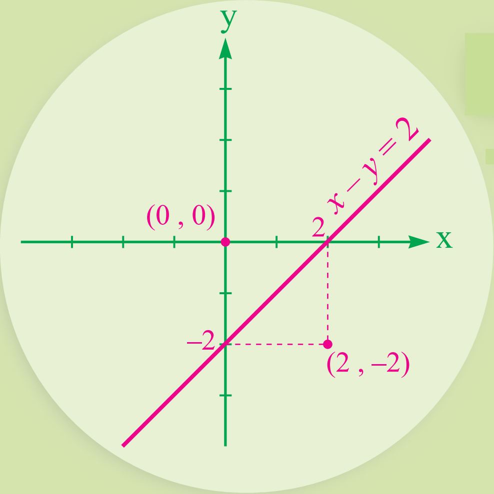
په بشپړ ډول د کسري نامساوي د حل لپاره په لاندې ډول پر مخ ځو:

- نامساوي داسې لیکو چې له صفر څخه کوچنۍ یا لویه وي.
- نامساوي د علامو د ټاکلو له جدول څخه د نامساوي د حل سټ په لاس راوړو.

پوښتنې

د لاندې نامساواتو د حل سټ پیدا کړئ.

1) $\frac{-x-9}{2x+4}<0$ 2) $\frac{6x+7}{7-6x}\leq 0$ 3) $\frac{x+10}{2x-3}\geq 0$ 4) $\frac{7x-2}{3-2x}>3$



خطي دوه متحوله نامساوات

د $x - y = 2$ مستقيمه کرښه، د وضعيه کمياتو مستوي، په دوه پاسني او لانديني ناحيو وېشي دکومې ناحيې د ټکو مختصات په $x - y < 2$ نامساوي کې صدق کوي؟

د $x - y < 2$ نامساوي چې په هغې کې د x او y متحولين لومړۍ درجه دي يو خطي دوه متحوله نامساوي بلل کېږي.

فعاليت

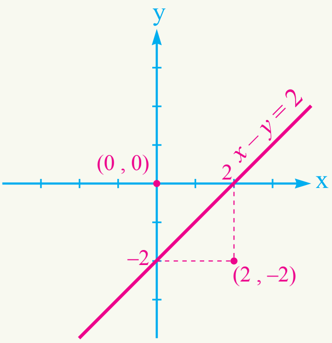
- د (x, y) مرتبې جوړې داسې په لاس راوړئ چې په $x - y < 2$ نامساوي کې صدق وکړي.
- څومره مرتبې جوړې پيداکولای شئ چې په پورتنۍ نامساوي کې حقيقت ولري؟
- آيا کولای شئ نورې درې مرتبې جوړې پيداکړئ چې په پورتنۍ نامساوي کې صدق وکړي؟

په پورتنيو حالاتو کې ويلای شو چې:

د $ax + by < c$ نامساوي چې په هغه کې b, a او c حقيقي عددونه او $a \neq 0$ يا $b \neq 0$ وي، خطي دوه متحوله نامساوي بلل کېږي.

د دې نامساوي د حل سټ، د هغو عددونو مرتبې جوړې دي چې په نامساوي کې صدق کوي.

لومړی مثال: د $x - y < 2$ دوه متحوله نامساوات د حل سټ پيداکړئ؟



حل: د دې نامساوي د حل لپاره لومړی $x - y = 2$ کرښه د وضعيه کمياتو په مستوي کې رسموو. ليدل کېږي چې د $x - y = 2$ مستقيمه کرښه د وضعيه کمياتو مستوي په دوو ناحيو وېشي. د دې لپاره چې و پوهېږو، د کومې ناحيې د عددونو

مرتبې جوړې په نامساوي کې صدق کوي، له هرې ناحيې څخه يوه مرتبه جوړه ټاکو او په نامساوي کې يې وضع کوو.

د مثال په ډول، $(0,0)$ مرتبه جوړه په نامساوي کې صحيح ده.

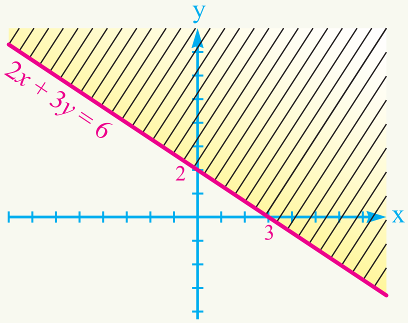
$$0-0<2 \quad \Rightarrow \quad 0<2$$

نو هغه ټکی چې د مستقيمی کرښې پورته خوا ته دی، د نامساوي حل دی.

د نامساوي د حل سټ د ښودلو لپاره هغه اړخ د مستقيمې کرښې تورو چې په نامساوي کې سموالی نه لري.

پوښتنه: څو نور ټکي له مستقيمې کرښې څخه پورته او ښکته خواته وټاکئ او بيا پورتنی پايله وڅيړئ؟

دويم مثال: د $2x+3y<6$ نامساوي د حل سټ پيدا کړئ؟



حل: لومړی د $2x+3y<6$ کرښه د وضعيه کمياتو په مستوي کې رسموو، وروسته د نامساوي د حل سټ د پيدا کولو لپاره د مستقيم د پاسه يا ښکته خواته د يوه ټکي مختصات ټاکو او په نامساوي کې يې وضع کوو، که حقيقت يې درلود، هغه اړخ د نامساوي حل دی او بل عکس نه دی.

لکه د $(0,0)$ د وضعيه کمياتو مبدأ مرتبه جوړه په پام کې نيسو:

$$2x+3y<6$$
$$2\times(0)+3\times(0)<6$$
$$0<6$$

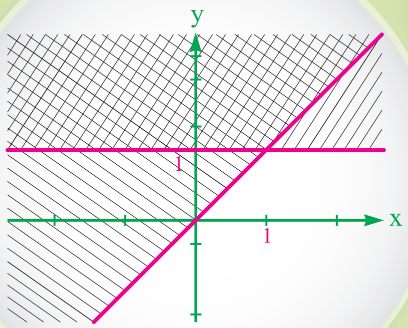
څرنگه چې د نوموړي ټکي مختصات په نامساوات کې حقيقت لري، نو د کرښې لاندې خوا ټکي د نامساوي د حل سټ دی.

پوښتنې

1) $3x-2<5x+y$ 2) $2y<3x$ 3) $x+y>0$

4) $2x-6y\geq 8x+4y$ 5) $x+y<0$ 6) $5x-3y<-1$

د دوه متحوله خطي نامساوي سیستمونه



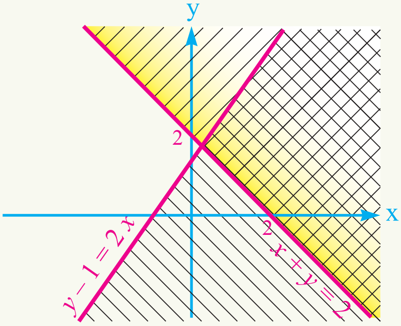
د لاندې نامساوي ګانو، د حل سټ پیدا کړئ. آیا کولای شئ اټکل وکړئ چې مخامخ شکل د کومو نامساواتو د حل ساحه راښيي؟

د $\begin{cases} x+y<2 \\ y-1>2x \end{cases}$ د نامساواتو سیستم چې په هغه کې دوه خطي، دوه متحوله نامساوي دي، د نامساوي سیستم بلل کېږي.

د نامساواتو سیستم له حل څخه مطلب دا دی چې هغه مرتبې جوړې پیدا کړو چې په یوه وخت کې په دواړو نامساواتو کې صدق وکړي.

لومړی د هر یوه نامساوي حل د وضعیه کمیاتو په مستوي کې په لاس راوړو.

هغه ناحیه چې ګډه نه ده خط، خط شوې له نامساوات سره په یوه وخت کې د حل په سټ کې ګډون لري او دا ناحیه د نامساوات د سیستم حل دی.



د $x+y=2$ کرښې د رسمولو لپاره، که $x=0$ وي، $y=2$ او که، $y=0$ وي، نو $x=2$ کېږي او د $y-1=2x$ کرښه کې که $x=0$ وي، $y=1$ او که $y=0$ وي، نو $x=\frac{-1}{2}$ سره کېږي.

د دوه متحوله خطي نامساوي د سیستم د حل لپاره داسې عمل کوو:

لومړی د هر یوه دوه متحوله خطي نامساوي د سیستم حل، د وضعیه کمیاتو په مستوي کې ټاکو.

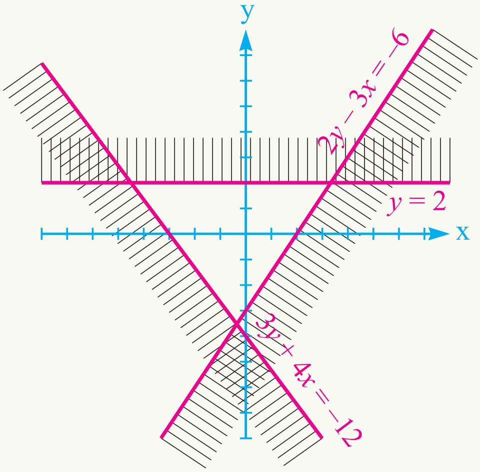
هغه ناحیه چې په یوه وخت کې د دواړو نامساواتو د حل د سټ یوه برخه وي، د سیستم حل دی.

مثال: د لاندې نامساواتو سیستم حل کړئ.

$$\begin{cases} 2y-3x>-6 \\ y-2<0 \\ 3y+4x>-12 \end{cases}$$

حل: لومړې د پورتنی نامساوي هره یوه کرښه رسمووو یعني:

$2y-3x=-6$ ، $y-2=0$ او $3y+4x=-12$



د $2y-3x=-6$ رسمولو لپاره که $x=0$ وي، $y=-3$ او د $y-2=0$ گراف لپاره که $x=0$ وي، $y=2$ کېږي او د $3y+4x=-12$ کرښې د رسمولو لپاره که $x=0$ وي، $y=-4$ کېږي چې د نومورو قیمتونو په مرسته يې گراف په مخامخ بڼه رسموو.

وروسته د هرې يوې نامساوي د حل ساحه په بيل بيل ډول ټاکو.
د ورکړل شوو نامساواتو سیستم د حل سټ په شکل کې د نه توري شوې ناحیې په شکل کې لیدل کیږي.

پوښتنې

د لاندې سیستمونو د حل سټ د گراف په مرسته په لاس راوړئ؟

1) $\begin{cases} x<3 \\ 2x+y<4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y<9 \\ 5x-2y>5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x<3 \\ y>2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x-3y<-3 \\ 5x-2y>9 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x+y<4 \\ x-y<3 \\ 5x-y>1 \end{cases}$

د شپږم څپرکي لنډيز:

• که چيرې عددونه د دې علامو $(<, \leq, >, \geq)$ په مرسته يو له بل سره اړيکه ولري، د نامساوي په نامه يادېږي.

• که د يوه نامساوي له دواړو خواوو سره يو حقيقي عدد جمع يا تفريق کړو، په نامساوي کې بدلون نه راځي.

• که د يوه نامساوي دواړه خواوې، په يوه مثبت حقيقي عدد د صفر خلاف ضرب يا تقسيم شي په نامساوي کې بدلون نه راځي.

• که د يوه نامساوي دواړه خواوې، په يوه منفي حقيقي عدد د صفر خلاف ضرب يا ووېشل شي، د نامساوي لورى بدلون کوي.

تړلی انټروال	$[a,b]=\{x\in IR : a\leq x\leq b\}$
خلاص انټروال	$(a,b)=\{x\in IR : a< x< b\}$
نيمه خلاص انټروال	$(a,b]=\{x\in IR : a< x\leq b\}$
نيمه تړلی انټروال	$[a,b)=\{x\in IR : a\leq x< b\}$

• د يوې کسري افادې د علامې د ټاکلو لپاره لومړى د صورت او مخرج علامه بېله بېله ټاکو وروسته د علامو د وېش حاصل په لاس راوړو.

• د $x+3\leq 5$ دوه متحوله خطي نامساوي د سيستم د حل لپاره داسې عمل کوو.

لومړى د هر دوه متحوله خطي نامساوي د سيستم حل، د وضعيه کمياتو په مستوي کې ټاکو. هغه ناحيه چې په يوه وخت کې د دواړو نامساواتو د حل سټ يوه برخه وي، د سيستم حل دى.

د شپږم څپرکي پوښتنې:

• په لاندې پوښتنو کې د هرې پوښتنې لپاره څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب په نښه کړئ:

1– له لاندې نامساواتو څخه کوم یو سم دی؟

$a)\ \frac{1}{2}+\frac{3}{6}\le 2-\frac{1}{3}$ $\quad b)\ \frac{3}{2}>\sqrt{2}$ $\quad c)\ \sqrt{9+16}\ge 5$ $\quad d)$ د b,a او c ځوابونه

2– د $x+3\le 5$ نامساوي د حل سټ عبارت دی له:

$a)\ \{x\in IR: x\le 2\}$ $\quad b)\ \{x\in IR: 2\le x\}$

$c)\ \{x\in IR: x\le 8\}$ $\quad d)\ \{x\in IR: x<-2\}$

3– د لاندې انټروالونو څخه کوم یو د $2x+3>-1$ نامساواتو د حل سټ دی.

$a)\ [-2,\infty)$ $\quad b)\ (2,\infty)$ $\quad c)\ (1,\infty)$ $\quad d)\ (-2,\infty)$

4– که $0<a<b$ څخه وي، له لاندې اړیکو څخه کومه یوه سمه ده.

$a)\ \frac{1}{b}<\frac{1}{a}$ $\quad b)\ \frac{-1}{b}<\frac{-1}{a}$ $\quad c)\ -b<-a$ $\quad d)$ ځوابونه b,a او c

5– له لاندې انټروالونو څخه کوم یو د $\frac{x+3}{3-x}>0$ نامساوي د حل سټ دی؟

$a)\ (-3,3)$ $\quad b)\ (-\infty,3)$ $\quad c)\ (-3,\infty)$ $\quad d)\ (-3,3)$

• تش ځایونه، په مناسبو کلمو سره ډک کړئ:

1– د $ax+by<0$ نامساواتو کې د ټولو هغه .... سټ چې په نامساواتو کې صدق وکړي، د پورتنې نامساواتو د حل سټ بلل کېږي.

2- د $[4,5]$ انټروال، د .... په نامه یادېږي.

3- د $2x+4$ بینوم، د .... قیمتونو لپاره منفي کېږي.

4- د $-x+\frac{1}{2}$ بینوم، د .... قیمتونولپاره مثبت کېږي.

5- د $2x+5\le\frac{1}{5}-x$ نامساوي د حل سټ عبارت دی له ....

• له لاندې جملو څخه چې کومه یوه سمه وي، د هغې په مخ کې د(س) توری او د ناسمې په مخ کې د(غ) توری ولیکئ.

1- (   ) د یوې نامساوي د حل سټ یو عنصر لري.

2- (   ) د $\{x \in R \ : 2 \le x < 5\}$ یو تړلی انتروال دی.

3- (   ) د نامساوي ګانو د سیستم د حل سټ، د وضعیه کمیاتو د مستوي یوه برخه ده.

4- (   ) د خطي نامساوي د حل ستونه بې شمیره دي.

5- (   ) څرنګه چې $3 < 2-$ څخه دی نو، له دې ځایه دا پایله $-\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$ اخیستلای شو.

• لاندې پوښتنې په بشپړ ډول حل کړئ:

1- د لاندې نامساوي ګانو حل په لاس راوړئ.

$a)\ \frac{x-5}{4} - \frac{x-8}{3} < 0$

$b)\ x-2 < 3(2x-9)$

$c)\ x^2 - 9 < 0$

$d)\ \frac{3x+4}{x} - 1 < 0$

$e)\ 1 - \frac{2}{x} \le 3$

2- لاندې انتروالونه د عددونو پر محور وښیئ.

$a)\ [-1,2]$ $b)\ (-2,1]$ $c)\ [-1,1)$ $d)\ (-2,2)$

3- د لاندې عددونو ستونه، د انټروال په بڼه ولیکئ او د عددونو پر محور یې وښیئ.

$a)\ \{x \in IR : x \le 2\}$ $b)\ \{x \in IR : x \le 5\}$

$c)\ \{x \in IR : -1 \le x \le 6\}$ $d)\ \{x \in IR : -4 < x < 2\}$

4- د لاندې نامساوي د سیستم حل پیدا کړئ:

$$a)\ \begin{cases} y > x \\ 3y < 2 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 2x - y > 0 \\ x - 2y < 0 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x + y < 2 \\ y - 4 > 2x \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} 2x + 2y < 8 \\ 3x - 3y < 9 \\ 10x - 2y > 2 \end{cases}$$

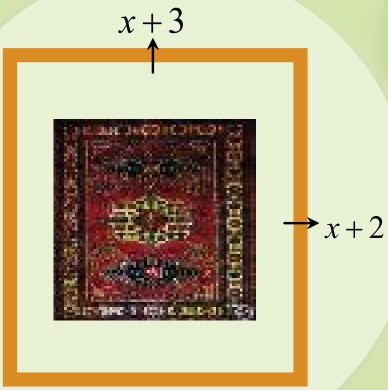
$$e)\ \begin{cases} y > 2 \\ x > -3 \\ y + x < 0 \end{cases}$$

$$f)\ \begin{cases} y < 2 \\ x < -3 \\ y + x > 0 \end{cases}$$

اووم څپـــرکی

دویمه درجه یو مجهوله معادلې

دویمه درجه یو مجهوله معادلې
(Quadratic Equation)



که یوه کوټه، د یوې مربع شکل غالۍ په وسیله فرش کړو، په دې شرط چې د خونې اوږدوالی د غالۍ له اوږدوالي څخه د 3m په اندازه او سورېې د غالۍ له سور څخه د 2m په اندازه زیات وي، د کوټې او غالۍ د مساحتونو معادلې څه ډول لیکلای شو؟

فعالیت

- الجبري افاده تعریف کړئ.
- معادله تعریف کړئ.
- د یو مجهوله لومړۍ درجې معادلې یو مثال ولیکئ.
- د یو مجهوله لومړۍ درجې معادلې عمومي شکل ولیکئ.
- د $(x-2)(x+3)=0$ معادلې د قوسونو د ضرب حاصل پیدا کړئ.
- د پورتني معادلې درجه د $x+4=3x-1$ معادلې له درجې سره پرتله کړئ.

هغه معادلې چې یو مجهول ولري او د هغې درجه دوه وي یو مجهوله دویمه درجه معادله بلل کېږي چې عمومي شکل یې $ax^2+bx+c=0$ ، $a\neq 0$ چې a, b او c حقیقي عددونه او x مجهول بلل کېږي، که چېرې $b=0$ یا $c=0$ وي، په دې حالت کې دې ډول معادلې ته نیمګړې دویمه درجه معادله وایي.

لومړی مثال: یو تار چې یو متر اوږدوالی لري غواړو له هغه څخه یو مستطیل چې مساحت یې $600cm^2$ دی جوړ کړو، د دې مستطیل اوږدوالی او سور څرنګه وټاکو؟

حل: که د مستطیل اوږدوالی x او سورېې په y وښیو، د مستطیل محیط د $2(x+y)=100 \ldots I$ اړیکې او مساحت یې له $x\times y=600 \ldots II$ اړیکې څخه په لاس راوړو.

$$\begin{cases}2(x+y)=100 \\ x\cdot y=600\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+y=50 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{I} \\ x\cdot y=600 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \text{II}\end{cases}$$

د I له معادلې څخه د y قيمت د x له جنسه په لاس راوړو او په II معادله کې يې وضع کوو:

$$\begin{cases} 2(x+y)=100 \\ x\cdot y=600 \end{cases} \Rightarrow x(50-x)=600$$

$$50x-x^2=600$$

څرنګه چې په پورتنۍ معادله کې د x درجه دوه ده، نو نوموړې معادله دويمه درجه ده. د معادلو د حلونو پيدا کولو لپاره بېلابېلې لارې شته چې هغه تر څېړنې لاندې نيسو.

دويم مثال: هغه عدد په لاس راوړئ چې مربع يې د 6 په اندازه له خپل عدد څخه زياته وي.

حل: که چېرې عدد په x ونوموو، نو پورتنی بيان د رياضي په ښه داسې ليکو:

$x^2=6+x$ يا $x^2-x-6=0$

د دې ډول معادلو حل به په راتلونکي لوست کې وڅېړو

درېيم مثال: په لاندې معادلو کې د عمومي شکل له مخې د a, b او c ضريبونو قيمتونه وليکئ.

حل:

$a)\ 2x^2-4x+1=0$ $b)\ 3x-x^2=4$ $c)\ 4x^2-1=0$

$d)\ 7x^2=49$ $e)\ x^2-4=0$ $f)\ \frac{3}{4}-x^2=\frac{2}{3}x$

جزء	معادلې	د a ضريب	د b ضريب	د c ضريب
a	$2x^2-4x+1=0$	2	–4	1
b	$3x-x^2=4$	–1	3	–4
c	$4x^2-1=0$	4	0	–1
d	$7x^2=49$	7	0	–49

پوښتنې

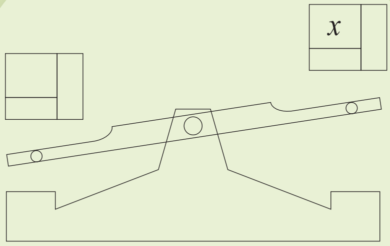
1- په لاندې معادلو کې پوره او نيمګړې دويمه درجه معادلې په ګوته کړئ.

$a)\ 6-2x+x^2=0$ $b)\ 5x^2-3x+1$ $c)\ \sqrt{2}x^2-4x=0$ $d)\ -x^2=3$

2- په لاندې معادلو کې د a، b او c ضريبونه وښيئ.

$a)\ 6x^2-4x=2$ $b)\ 3x-4=x^2$ $c)\ 4x-x^2-6=4x^2$

د دويمه درجه يو مجهوله معادلې حل



آيا كولای شئ چې د x لپاره داسې قيمت پيدا كړئ چې تله په تعادل كې راشي؟

فعاليت

• د $2x + 4 = 3x - 1$ معادلې حل پيدا كړئ.

• پورتنی مساوات د x د بېلابېلو قيمتونو لپاره په مخامخ جدول كې وڅېړئ.

x	$2x + 4$	$3x - 1$
-3		
-2		
0		
5		

• د جدول او پاسنی پوښتنې په پام كې نيولو سره توضيح وركړئ چې د معادلې د حلولو پيدا كول يعنې څه؟

• مخامخ جدول پوره او د هغې له مخې د $x^2 - 4x + 3 = 0$ معادلې حلونه په لاس راوړئ؟

x	$x^2 - 4x + 3$
-3	
-2	
-1	
0	
1	

هغه قيمتونه چې په يوه دويمه درجه معادله كې برابروالی راولې، د يو مجهوله دويمې درجې معادلې حل بلل كېږي.

لومړی مثال: هغه عدد پيدا كړئ چې مربع يې د 12 واحدو په اندازه له عدد څخه زياته وي.

حل: كه چېرې عدد ته x ووايو، نو الجبري عبارت داسې بڼه نيسي:

$$x^2 = x + 12$$

څرنگه كولای شو چې له پورتني مساوات څخه د هغې حل پيدا كړو؟

که چېرې $x=1$ په معادله کې وضع کړو، نو ليدل کېږي چې د مساوات ښی اړخ د 13 عدد او کيڼ اړخ ته يې د 1 عدد په لاس راځي. په معادله کې د $x=2$ قيمت په وضع کولو سره ليدل کېږي چې د مساوات ښي اړخ ته 14 او کيڼ اړخ ته يې، د 4 عدد په لاس راځي او د $x=3$ په وضع کولو سره ليدل کېږي چې ښي اړخ ته د 15 عدد او کيڼ اړخ ته د 9 عدد دی.

په همدې ترتيب د نورو قيمتونو په وضع کولو سره، لکه په $x=4$ ليدل کېږي چې د مساوات ښي اړخ ته د 16 عدد او کيڼ اړخ ته هم 16 عدد په لاس راځي، ليدل کېږي چې له 16=16 مساوي کېږي، نو $x=4$ د معادلې يو حل دی.

x	x^2	$x+12$
1	1	13
2	4	14
3	9	15
4	16	16

د پورتنۍ لارې لنډيز چې د معادلې حل د پيدا کولو لپاره مو ترې ګټه واخيسته کولای شو، په مخامخ جدول کې داسې وليکو:

آيا کولای شو چې د دويمې درجې معادله د حل لپاره يوه بشپړه لاره پيدا کړو؟

دويم مثال: هغه عدد په لاس راوړئ چې د هغې د مربع جمع له 1 سره مساوي په صفر شي.

حل: د پاسني بيان الجبري افاده عبارت ده له: $x^2+1=0$

x	x^2	-1
1	1	-1
2	4	-1
0	0	-1
-1	1	-1
-2	4	-1
-3	9	-1

د پورتنۍ لارې په څېر د اټکل شويو عددونو په وضع کولو سره د معادلې د حل په لټولو پيل کوو او پر مخ ځو، د دې کار لپاره د پورتني جدول په څېر، مخامخ جدول په پام کې نيسو.

په دې جدول کې ليدل کېږي چې نه شو کولای تعادل وساتو، يعني د x لپاره داسې قيمت نه شو پيدا کولای چې د معادلې دواړه خواوې مساوي کړي. له بلې خوا له معادلې څخه ښکاري چې کله چې يو عدد مربع کړو او يو ورسره جمع کړو، هيڅ وخت مساوي په صفر نه شي کيدلای، نو دا دويمه درجه معادله حل نه لري.

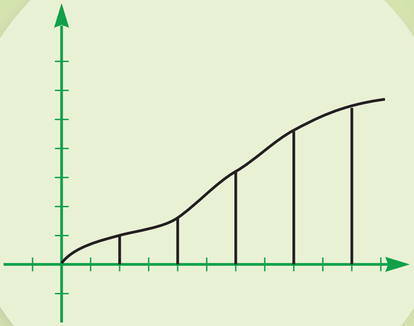
پوښتنې

1- يوه دويمه درجه يو مجهوله معادله وليکئ چې حل و نه لري.

2- لاندې معادلې حل کړئ.

$a)\ x^2-1=0 \qquad b)\ x^2=0$

غیر خطي اړیکي



ډاکټران د یوه ماشوم د ونې(قد)اوږدوالی په بېلابېلو وختونو کې، په مخامخ ګراف کې ښيي. آیا تاسې تر اوسه پورې د خپلې ونې(قد) د اوږدوالي بدلون ته فکر کړی دی چې په بېلابېلو وختونو کې څومره وو؟

فعالیت

- د یوې مربع د ضلعې د اوږدوالي او مساحت تر منځ اړیکه په پام کې ونیسئ، د مربع د ضلعې اوږدوالی په x او مساحت یې په y ښیو.
- د x او y اړیکه په یوه معادله کې وښيئ.
- مخامخ جدول پوره کړئ.

x	1	2	3	4	
y		4			25

- د قایمو مختصاتو په سیستم کې د پورتنیو مرتبو جوړو ټکي وټاکئ او له یو بل سره یې ونښلوئ.
- د دقیق ګراف د رسمولو لپاره x ته ډېر سره نژدې قیمتونه ورکوو، لاندې جدول پوره کړئ، د پورته په څېر ټکي د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ او ګراف یې رسم کړئ.

x	0	0.2	0.5	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4	2.6	2.8	3
y		0.4			1				3.24	4					9

- د پورتنې جدول په مرسته لاندې جدول په خپلو کتابچو کې بشپړ کړئ.

x	−3	−2.8	−2.6	−2.4	−2.2	−2	−1.8	−1.6	−1.4	−1.2	−1	−0.8	−0.5	−0.2	
$y=x^2$															0

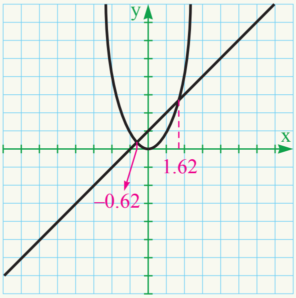
- له پورتنیو جدولونو څخه په ګټې اخیستلو سره، د $y=x^2$ معادلې ګراف په ډېر غورسره رسم کړئ.

له پورتنې فعالیت څخه، لاندې پایله په لاس راځي:

پایله: په پورتني فعالیت کې مو ولیدل چې د $y=x^2$ معادلې ګراف کرښه نه ده.

مثال: د $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x+1 \end{cases}$ سیستم د معادلاتو ګراف د قایمو مختصاتو په سیستم کې رسم کړئ او ګډ حل یې پیدا کړئ؟

حل: له هغو لارو څخه چې مخکې مو د ګراف د رسمولو لپاره ترې ګټه واخیسته، د پورتنیو معادلو د ګرافونو د رسمولو لپاره د هغو د عددونو د مرتبو جوړو جدولونه ترتیب او د مختصاتو په سیستم کې د معادلو له ټاکلو څخه وروسته یې ګرافونه رسموو.



– د $y=x^2$ لپاره لرو:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$y=x^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

– د $y=x+1$ لپاره:

x	0	1
$y=x+1$	1	2

د ګراف له مخې د ګډ حل د ټکو ورنژدې قیمتونه یې مساوي په:

$x_1=1.62 \;\;,\;\; x_2=-0.62$

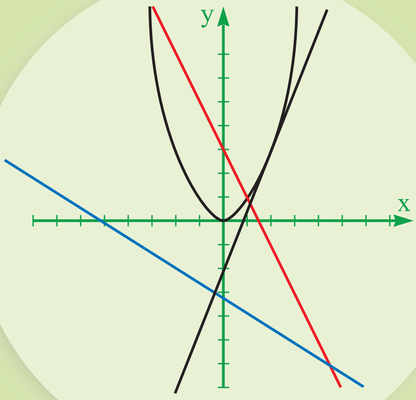
پوښتنې

د لاندې سیستمونو ګراف رسم کړئ.

1- $\begin{cases} y=x^2 \\ y=x-2 \end{cases}$

2- $\begin{cases} y=x^2 \\ y=0 \end{cases}$

د دويمي درجې معادلې حل، په هندسي لاره(طريقه)



په مخامخ شکل کې، مستقيمې کرښې، له ورکړل شوي منحنې سره، په څو حالتونو کې دي؟

فعاليت

- آيا د $x^2 - 6x + 7 = 0$ معادله کولای شو چې داسې $x^2 = 6x - 7$ وليکو؟
- که چيرې نومورې مساوات له y سره مساوي وي، $y = x^2 = 6x - 7$ نو $y = x^2$ او $y = 6x + 7$ دی.
- د $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 6x - 7 \end{cases}$ معادلو د سيستم ګراف د مختصاتو په سيستم کې رسم کړئ؟
- د پورتني سيستم ګرافونه يو بل په څو ټکو کې پرې کوي؟
- د پورتني سيستم حل د ګرافونو د پرېکړې له ټکو سره څه اړيکه لري؟

له پورتني فعاليت څخه لاندې پايله په لاس راځي:

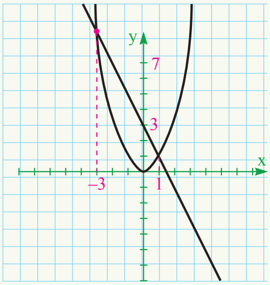
- هره دويمه درجه معادله کولای شو چې د $y = x^2$ معادلې او د $y = ax + b$ کرښه ايزو معادلو په څېر وليکو.

- د x ټکی د تقاطع مختصه(په هغه حالت کې چې وي) د دويمې درجې معادلې حل دی د پورتنی کړنې په مرسته د دويمه درجه معادلې حل پيدا کول د هندسي حل په نامه يادېږي.

لومړی مثال: د $x^2 + 2x - 3 = 0$ معادلې حل په هندسي لاره پيدا کړئ؟

حل: د $x^2 + 2x - 3 = 0$ معادله کولای شو په لاندې ډول وليکو او ګراف يې رسم کړو.

$$x^2 = -2x + 3 \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$$



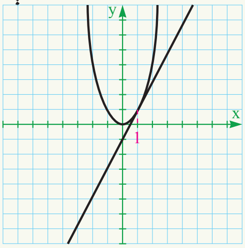
x	−2	−1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

x	0	3
y	3	−3

له شکل څخه لیدل کیږي چې مستقیمه کرښه منحني په دوو بېلو ټکو کې قطع کوي چې د تقاطع ټکي د x مختصه د دویمه درجه معادلې حل دی یعنې $x_1=-3$, $x_2=1$

دويم مثال: د $x^2+2x+3=0$ معادلې حل د هندسي لارې په مرسته پيدا کړئ؟

حل: د $y=x^2$ معادلې او د $y=2x-1$ مستقيمې کرښې شکلونه رسموو.



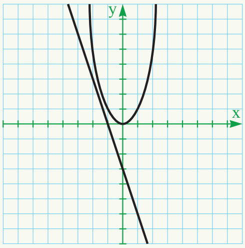
$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x-1 \end{cases}$$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	+9	4	1	0	1	4	9

x	0	−1
y	−1	-3

ليدل کيږي چې کرښه له منحني سره په يوه ټکي کې مماس ده چې د x نقطې مختصه (قيمت) د معادلې حل دی.

دريم مثال: د $x^2+3x+3=0$ معادلې حل په هندسي لاره پيدا کړئ.



$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=3x-3 \end{cases}$$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	+9	4	1	0	1	4	9

x	0	−1
y	−3	0

ليدل کيږي چې مستقيمه کرښه منحني نه قطع ، نو دويمه درجه معادله حل نه لري.

يادونه:

که چيرې منحني په دوو ټکو کې قطع کړي، معادله دوه حله لري.

که چيرې منحني په يوه ټکي کې قطع کړي، معادله يو حل لري.

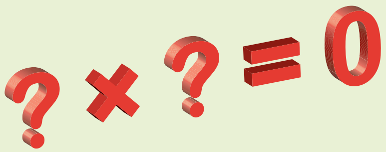
که چيرې منحني قطع يا غوڅه نه کړي، معادله حل نه لري.

پوښتنې

1− د لاندې معادلو حل په هندسي لاره پيدا کړئ.

$a)\ x^2-2x+2=0$ $\quad b)\ x^2-6x+8=0$ $\quad c)\ x^2-5+7=0$

د یو مجهول دویمه درجه معادلو حل، د تجزیې په لاره(طریقه)



د دوو عددونو د ضرب حاصل، څه وخت مساوي په صفر دی؟

فعالیت

- که a او b دوه حقیقي عددونه وي، څه وخت $a \times b = 0$ کېږي؟
- د $(x-1)(2x+3)$ د ضرب حاصل په پام کې ونیسئ، آیا ویلای شئ چې څه وخت دا حاصل ضرب مساوي په صفر دی؟
- د $2x^2 + x - 3 = 0$ معادله له $(x-1)(2x+3)$ حاصل ضرب سره څه اړیکه لري؟
- د مخکینی لارې(طریقې) څخه په ګټې اخیستنې سره د $2x^2 + x - 3 = 0$ معادلې حلونه پیدا کړئ او د $(x-1)(2x+3) = 0$ معادلې له حلونو سره یې پرتله کړئ؟

د پورتني فعالیت پایله په لاندې ډول په لاس راوړو:

پایله: که وغواړو، چې دویمه درجه معادله، د دوو خطي افادو د ضرب د حاصل په شکل واړوو، نو په دې حالت کې، د معادلې حل ساده کېږي چې په لاندې ډول عمل کوو:

- د اعدادو له خاصیتونو څخه پوهېږو چې د دوو عددونو د ضرب حاصل هغه وخت صفر دی چې یو د هغوی له ضربي اجزاوو څخه یو مساوي په صفر وي، دا مسأله د الجبري افادو لپاره هم سمه ده.
- د هرې خطي یا کرښه ایزې الجبري افادې حل چې د یوې دویمې درجې معادلې مساوي ده، د دویمې درجه معادلې حل دی.

لومړی مثال: د $x^2-7x+6=0$ معادلې حل د تجزیې په مرسته په لاس راوړئ.

حل: د x^2-7x+6 له تجزیې څخه لرو چې:

$$x^2-7x+6=(x-1)(x-6)=0$$

د نوموړې ضرب حاصل هغه وخت صفر دی چې یو د هغو فکتورونو څخه مساوي په صفر وي او یا دواړه صفر وي یعنې:

$$1)\ \ x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=1$$

$$2)\ \ x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=6$$

نو 1 او 6 د $x^2-7x+6=0$ معادلې حلونه دي.

دویم مثال: د $2x^2-5x-3=0$ معادلې حل د تجزیې په لاره پیدا کړئ.

حل: تر اوسه مو هغه معادلې په فکټورونو تجزیه کړې، چې د x^2 ضریب (1) و، خو د هغو معادلو چې د x^2 ضریب یې یو نه وي، په لاندې ډول یې بدلوو، د دې لپاره چې د x^2 ضریب یوه بشپړه مربع شي، نو د معادلې دواړه خواوې د x^2 په ضریب کې ضربوو:

$$A=2x^2-5x-3$$

$$2A=4x^2-10x-6=(2x)^2-5(2x)-6$$

$$2A=(2x+1)(2x-6)$$

$$A=\frac{1}{2}(2x+1)(2x-6)$$

$$A=(2x+1)(x-3)$$

او د A د معادلې د حل لپاره لرو:

$$1)\ \ 2x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-\frac{1}{2}$$

$$2)\ \ x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=3$$

پوښتنې

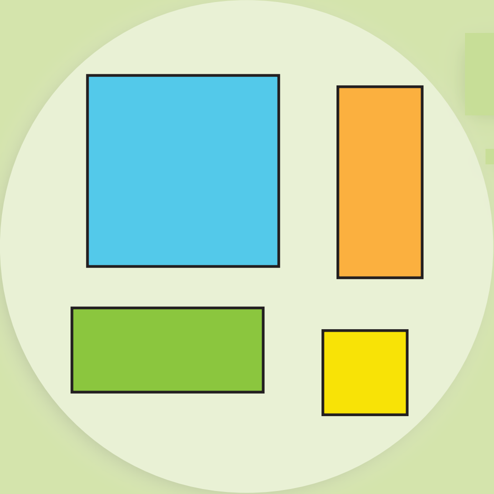
لاندې معادلې د تجزیې په لاره حل کړئ.

$$1)\ \ x^2+4x+3=0$$

$$2)\ \ x^2+x-2=0$$

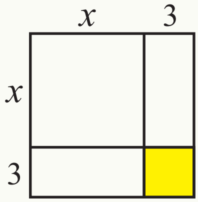
$$3)\ \ x^2-6x+8=0$$

د دويمې درجې معادلې حل د تکميل مربع په طريقه



هڅه وکړئ چې د دې شکلونو په يو ځای کېدو سره يوه لويه مربع جوړه کړئ.

فعاليت



- د لويې مربعې د ضلعې اوږدوالی څومره دی؟
- د هرې برخې مساحت، د شکل پر مخ وليکئ.
- د $x^2+6x-40=0$ معادله داسې ترتيبوو چې متحول لرونکي حدونه، يو اړخ او ثابت عددونه د مساوات بل اړخ ته نقلوو.
- متحول لرونکې الجبري افاده له رنګ شوي مساحت سره څه اړيکه لري؟
- د مستطيلونو د مساحت عددي ضريب، د دويمې درجې معادلې د x له ضريب سره څه اړيکه لري؟
- د لويې مربع مساحت څومره دی؟
- د دې لپاره چې د متحول لرونکې الجبري افادې د لويې مربع د مساحت سره برابره شي، کوم عدد، د تساوي دواړو خواوو ته ورزيات کړو؟
- له پورته لاس راغلې اړيکې څخه د قيمت (د دويمې درجه معادلې حل) حل په لاس راوړو.

محمد بن موسی دا لاره(طريقه)، د دويمې درجې معادلې لپاره پيدا کړله. د دې طريقې په پوره کېدو سره د دويمې درجې د معادلو په حل کې په بشپړه توګه ګټه اخيستل کېږي، په دې روش کې د $x^2+bx+c=0$ دويمه درجه معادله په $(x+p)^2=q^2$ بڼه بدلېږي چې د تجزيې پراوونه يې عبارت دي له:

• لومړی p د x د ضریب له نیمایي سره وضع کوو، یعنې $P=\frac{b}{2}$

• وروسته $q^2=-c+(\frac{b}{2})^2$ وضع کوو.

• په پای کې د $x+p=q$ معادله لرو.

لومړی مثال: د $x^2+2x-8=0$ معادله د تکمیل مربع په تګ لاره حل کړئ؟

حل: لومړی معادله په لاندې ډول لیکو:

$$x^2+2x=8$$

د x د ضریب نیمایي په لاس راوړو، مربع یې له دواړو خواوو سره جمع کوو:

$$x^2+2x+1=8+1$$

$$(x+1)^2=9$$

$$x+1=3$$

$$x=2$$

یادونه: ټولې دویمه درجه معادلې نه شو کولای په دې میتود حل کړو، ځکه دا میتود هندسي بدلون ته اړتیا لري، نو ځکه په دې میتود نه شو کولای چې د هغو معادلو حل چې منفي جذرونه لري هم په لاس راوړو.

پوښتنې

لاندې معادلې د تکمیل مربع په تګ لاره حل کړئ؟

$a)\ x^2+8x-24=0$ $b)\ x^2-x-\frac{5}{4}=0$ $c)\ x^2-6x-13=0$

د محمد بن موسی فورمول یا د تکمیل مربع طریقې د حل پراختیا:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

د $ax^2+bx+c=0$ معادلې دواړه خواوې د x^2 په ضریب ووېشو او وواياست چې مخامخ مساوات حقیقت لري، که نه؟

ومو لیدل چې دویمه درجه معادله په عمومي ډول داسې $ax^2+bx+c=0$ لیکو چې په هغې کې b,a او c حقیقي عددونه او a د صفر خلاف یو عدد دی، د دې معادلې د حل لپاره داسې عمل کوو:

- د $ax^2+bx+c=0$ معادلې دواړه خواوې په a وېشو: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$
- ثابت عددونه، د مساوات یو خوا او مجهول حدونه، د مساوات بلې خوا ته نقلوو، د x د ضریب د نیمایي مربعې دواړو خواوو ته جمع کوو:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

د لنډې لیکنې لپاره b^2-4ac په Δ سره ښیوو.

فعالیت

هره دویمه درجه معادله چې $ax^2+bx+c=0$ بڼه ولري، لاندې پوښتنو ته ځوابونه ووایئ:

1- که $\Delta=b^2-4ac=0$ وي، نو په دې صورت کې د معادلې حلونه کوم دي؟

2- که $\Delta=b^2-4ac>0$ وي، نو په دې صورت کې د معادلې حلونه کوم دي؟

3- که $\Delta=b^2-4ac<0$ وي، نو د حلونو د لرلو په صورت کې د معادلې حلونه کوم دي.

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

لومړۍ پایله: د $ax^2+bx+c=0$ دویمې درجه معادلې چې b,a او c حقیقي $a\neq 0$ وي.

د $\Delta = b^2 - 4ac$ چې د قاسمې په نوم يادېږي، له مخې لرو:

1- که $\Delta > 0$ وي، معادله دوه بېلابېل حلونه لري چې عبارت دي له:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

2-که $\Delta = 0$ وي، معادله دوه مساوي يا مضاعف حلونه لري چې عبارت دي له: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

3- که $\Delta < 0$ وي، معادله د حقيقي عددونو په سېټ کې حل نه لري.

دويمه پايله: د حلونو د جمع او ضرب حاصل

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

د جذرونو د جمع او ضرب له حاصل څخه کولای شو د دويمې درجه معادلې په تجزيه کولو کې ګټه واخلو.

لومړی مثال: د $x^2 - 3x + 1 = 0$ معادلې حلونه پيدا کړئ.

حل: لومړی د Δ قيمت پيدا کوو: $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4\times1\times1 = 5$

څرنګه چې $\Delta > 0$ ده، نو معادله دوه بېلا بېل حلونه لري.

$$x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

دويم مثال: د $9x^2 - 12x + 4 = 0$ حلونه پيدا کړئ.

حل: لرو چې: $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - (4\times9\times4) = 144 - 144 = 0$

څرنګه چې $\Delta = 0$ ده، معادله دوه مساوي حلونه لري:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{2\times9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

درېيم مثال: د $5x^2 + 2x + 1 = 0$ معادله حل کړئ.

حل: نوموړې معادله د حقيقي عددونو په سېټ کې حل نه لري، ځکه $\Delta < 0$ څخه ده يعنې
$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4\times5\times1 = 4 - 20 = -16$

څلورم مثال: د $4x - 3x - 1 = 0$ معادلې د جذرونو د جمع او ضرب حاصل پيدا کړئ.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{3}{4} \quad , \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-1}{4}$$

پوښتنې

لاندې معادلې حل کړئ

a) $x^2 + 4x - 21 = 0$ b) $x^2 + 6x + 9 = 0$ c) $3x^2 - 12x + 60 = 0$

د اووم څپرکي لنډيز:

- د دويمې درجه معادلې عمومي بڼه د $ax^2+bx+c=0$ چې $a\neq 0$ ډول ده.
- هغه معادلې چې د $ax^2+c=0$ او $ax^2+bx=0$ په ډول وي، د دويمې درجې نيمګړي معادلې په نامه ياديږي.
- د $ax^2+bx=0$ معادلې حل عبارت دی له $x_1=0$ او، $x_2=-\frac{b}{a}$.
- هره دويمه درجه معادله، له دوو برخو(مستقيمه کرښه او يوه منحني) جوړه شوې ده.
- که يو مستقيم منحني په دوو ټکوکې قطع معادله دوه حله لري.
- که يو مستقيم له منحني سره مماس وي، معادله دوه مساوي حلونه لري.
- که مستقيمه کرښه له منحني سره تقاطع ونه لري، معادله په حقيقي عددونوکې حل نه لري.
- د دوو قوسونو د ضرب حاصل هغه وخت مساوي په صفر دی، چې لږ تر لږه يو يې مساوي په صفر وي.
- د حلونو د جمع حاصل له دې اړيکې $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ څخه او د حلونو د ضرب حاصل له دې اړيکې $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$ څخه په لاس راځي.
- په بشپړ ډول، د هرې دويمې درجې معادلې جذرونه يا حل $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ فورمول څخه په لاس راځي چې $\Delta=b^2-4ac$ دی.
- که چيرې $\Delta>0$ وي، معادله دوه بېلابېل حلونه لري.
- که چيرې $\Delta=0$ وي، معادله دوه مساوي حلونه لري.
- که چيرې $\Delta<0$ وي، معادله د حقيقي عددونو په set کې حل نه لري.
- د دويمې درجې معادلې د تشکيل لپاره $x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$ يا $(x-x_1)(x-x_2)=0$ څخه ګټه اخلو.

د اووم څپرکي پوښتني

• په لاندي سوالونو کې هر سوال ته څلور ځوابونه ورکړل شوي دي، سم ځواب يې وټاکئ.

1- د $4x=3x^2$ معادلې b,a او c ضریبونه عبارت دي له:

الف) $a=3$, $b=4$, $c=1$ ب) $a=-3$, $b=4$, $c=1$

ج) $a=4$, $b=3$, $c=-1$ د) هېڅ يو.

2- د $3x^2-8x+5=0$ معادلې حلونه عبارت دي له:

الف) $x_1=1$, $x_2=\frac{5}{3}$ ب) $x_2=1$, $x_1=-\frac{5}{3}$

ج) الف او ب د) هيڅ يو.

3- د $y=x^2$ معادلې ګراف عبارت دی له:

الف) مستقيم دی. ب) منحني دی.

ج) الف او ب. د) هېڅ يو.

4- د $x^2-10x+16=0$ معادلې د حلونو د جمع حاصل برابر دی له:

الف) $x_1+x_2=5$ ب) $x_1+x_2=-5$

ج) $x_1+x_2=8$ د) $x_1+x_2=10$

5- که $\Delta>0$ څخه وي معادله:

الف) دوه مساوي حلونه لري. ب) دوه حقيقي او مختلف حلونه لري.

ج) حل نه لري. د) يو حل لري.

• تش ځايونه ډک کړئ:

1- د يو مجهوله دويمه درجه معادلو عمومي بڼه .... ده.

2- $-\frac{b}{a}$ د حلونو .... او $\frac{c}{a}$ د حلونو .... دی.

3- که .... وي، معادله حل نه لري.

4- که د معادلې درجه دوه وي، معادله .... لري.

5- د $x^2-x+0.25=0$ معادلې حلونه .... او .... دی.

• لاندې پوښتنې ولولئ د سم په مخ کې(س) او د ناسم په مخ کې(غ) کلمه وليکئ.

1 - (   ) که $b^2-4ac<0$ وي، معادله د حقيقي عددونو په set کې حل نه لري.

2 - (   ) د محمد بن موسی فورمول $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ دی.

3 - (   ) د $2x^2-4x=0$ معادلې يو حل، صفر دی.

4 - (   ) د دويمې درجه معادلې د تشکيل لپاره $x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$ څخه گټه اخلو.

5 - (   ) که چېرې په يوه دويمه درجه معادله کې د علامو تحول نه وي، نو معادله يو منفي حل لري.

• لاندې پوښتنې حل کړئ:

1- په لاندې معادلو کې b, a او c ضريبونه و ښيئ او وواياست کومه معادله بشپړه او کومه معادله نيمگړې ده.

$a)\ 3x^2-4x+1=0$ $\quad b)\ 3x^2-1=0$ $\quad c)\ 2x^2-6x=0$

2- د لاندې معادلو حل پيدا کړئ.

$a)\ 3x^2+x-4=0$ $\quad b)\ x^2+4x-32=0$ $\quad c)\ 6x^2-x-2=0$

3- لاندې معادلې د تجزيې په لار(طريقه) حل کړئ.

$a)\ 3x^2-3x-4=0$ $\quad b)\ x^2+4x-32=0$

$c)\ x^2-2\sqrt{3}\,x+3=0$ $\quad d)\ cx^2-2acx+ca^2=0$

4- لاندې معادلې په هندسي تگ لاره يې سره حل کړئ.

$a)\ 2x^2+7x-1=0$ $\quad b)\ x^2-2x+1=0$

5- لاندې معادلې د تجزيې په طريقه حل کړئ.

$a)\ 4x^2+3x-1=0$ $\quad b)\ x^2+\dfrac{x}{5}=\dfrac{6}{5}$

$c)\ 2x^2+3x+1=0$ $\quad d)\ x^2+3x=0$

6- لاندې معادلې له عمومي فورمول څخه په ګټې اخیستنې سره حل کړئ.

$a)\ 7x^2 - 8x + 1 = 0$ $\qquad b)\ x^2 - 3x + 2 = 0$

$c)\ t^2 - 0.27 + 0.6t = 0$

7- که د یوه مستطیل مساحت $20cm^2$ او اوږدوالی د سور دوه برابره وي، د مستطیل اوږدوالی او سور پیدا کړئ؟

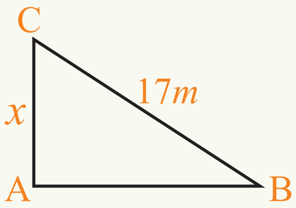
8- که د یوه قایم الزاویه مثلث د قایمو ضلعو اوږدوالی $2a$ او $2a+1$ وي، د وتر اوږدوالی یې پیدا کړئ؟

9- که دیوه مستطیل مساحت $24cm^2$ او محیط یې $36cm$ وي، اوږدوالی او سور یې پیدا کړئ؟

10- هغه معادلې ولیکئ چې حلونه یې په لاندې ډول دي.

$a)\ -2, 0.5$ $\qquad b)\ 3, -1$ $\qquad c)\ 0, 2$ $\qquad d)\ \sqrt{2} - 1, 2$

11-دوه تنه بایسیکل چلوونکي، A ټکي څخه یو ختیځ لور ته او بل شمال لورته حرکت وکړ، په هغه وخت کې چې د دوی تر منځ واټن $17m$ دی، هغه بایسیکل چلوونکی چې ختیځ لور ته یې حرکت کړی دی $7m$ زیات واټن یې له هغه تن څخه چې شمال لور ته یې حرکت کړی وهلی دی. د هغه الجبري معادلې په واسطه د هر یوه بایسیکل چلوونکی د وهل شوي لارې واټن معلوم او وېې ولیکئ.



اٹھــــویں

اکائی

د ډېټا(Data) د دسته بندۍ لاره

آيا تاسې په خپل ټولګي کې تر ټولو جګه ونه لرئ؟ که چېرې فلپين او يا اندونيزيا ته ولاړ شئ، څنګه؟
په کومه کچه په يوه هېواد کې جګ او په بل هېواد کې لنډې ونې شمېرل کېږي؟ معيارونه يې کوم دي؟

فعاليت

د يو شمېر کورنيو شمېر چې په څو کليو کې پرتې دي، د کليو په اړه يې په لاندې ډول ليکل شوي اطلاعات په لاس راغلي:

52	49	40	42	45	53	35	38	40	43
51	55	38	39	44	37	46	41	50	56

غواړو دا راکړل شوی ډېټا data، په درېو صنفونو کې داسې ځای پر ځای کړو، تر څو پوه شو، چې کوم کلی ډېر، منځنی او کم وګړي لري.

- آيا کولای شو چې يو يا څو ورکړل شوي ډېټا data له منځه يوسو؟
- تر ټولو لويې او تر ټولو کوچنۍ کورنۍ پيدا کړئ.
- د لږو او ډېرو ډېټاګانو data تر منځ وسعت (پراخوالی) څومره دی؟
- دا وسعت، د صنفونو په شمېر ووېشئ. فکر وکړئ، دا عدد څه شی راښيي؟
- له عددونو څخه په ګټې اخيستنې سره جدول ډک کړئ.
- ميله يي ګراف يې رسم کړئ.

د کورنيو شمېر	د کليو شمېرf
35 - 41	
42 - 48	
49 - 56	

د ډېټا data د صنف بندي کولو لپاره لاندې ګامونه په وار سره تر سره کړئ.

- د ډېټاګانو د زيات مقدار او کم مقدار وسعت په لاس راوړئ.
- دا وسعت د دستو په تعداد وويشئ او د صنفونو اوږدوالی په لاس راوړئ، که چېرې حاصل يې طبيعي عدد نه وي، کولای شئ هغه(round up)کړئ.
- له دې مقدارونو څخه صنفونه جوړ کړئ.

مثال: په لاندې جدول کې د 30 روغتونونو ناروغان چې په اټکلي ډول نيول شوي، داسې راغلي دي:

163	165	161	140	157	160	152	151	152
149	153	146	154	174	172	170	166	164
177	158	146	169	170	172	165	175	172
						168	165	160

دا ډېټا په يې څلورو صنفونو کې ځای پر ځای کړئ.

- که چيرې د ناروغانو شمېر په يوه روغتون کې له 175 څخه زيات وي، هغه روغتون ته ازدهامي(ګڼه ګوڼه) يې روغتون وايي. څو روغتونونه ازدهامي(ګڼه ګوڼه) دي؟
- د ګڼه ګوڼې د پرتله کولو لپاره ميله يې ګراف رسم کړئ.

حل: د دې لپاره چې ډاډه شو، ټول ارقام په يوه جدول کې ځای پر ځای کوو او تر ټولو زيات او تر ټولو کم ارقام يې په لاس راوړو.

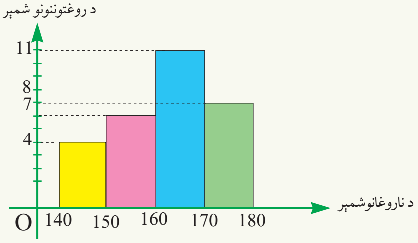
$140 =$ ترټولو ټيټ رقم

$177 =$ تر ټولو لوړ رقم

لوړ رقم − ټيټ رقم $= 177 - 140 = 37$

د صنفونو د اوږدوالي دپيدا کولو لپاره دا وسعت د صنفونو په شمېر وېشو $\frac{37}{4} = 9.25$ له دې عدد څخه د صنف په وسعت کې ګټه اخلو، خو د کار د آسانۍ لپاره دا عدد روند اپ په پام کې نيسو چې په دې ډول، د صنف وسعت د(10) عدديه لاس راځي.

د ناروغانو شمېر	د روغتونونو کثرت f
$140-150$	4
$150-160$	7
$160-170$	11
$170-180$	8
	n = 30



پاملرنه وکړئ، که چېرې د صنف پراخوالی پورته خوا پوره په پام کې و نه نیسو، یعنې روند اپ(Round up) یې نه کړو، د صنفونو د پراخوالي مجموعه، له 37 څخه لږ په لاس راځي چې په دې ډول یو شمېر ډېټا له جدول څخه خارجیږي او دا سم کار نه دی.

په ځینو وختونو کې د صنفونو د شمېر پر ځای، د صنفونو پراخوالی موږ ته پېژندل شوي وي، په دې حالت کې د صنفونو شمېر موږ ته اهمیت نه لري. د صنفونو د پراخوالي په لرلو سره داسې لیکو چې د هغو پراخوالی د فرض شویو صنفونو سره برابر وي او وروسته یې جدول پوره کوو.

مثال: په پورتني مثال کې که د صنفونو پر ځای د صنفونو پراخوالی 8 فرض کړو، اوسط یې پیدا کړئ؟

حل: ټیټ رقم یعنې 140 څخه پیل کوو. څرنګه چې د صنف پراخوالی 8 دی، د دوو لاندې پرله پسې سرحدونو تر منځ واټن باید 8 وي، یعنې د دویم صنف لاندېنی سرحد باید 148 وي. اته، اته تر هغه زیاتوو، تر څو ډېره ډېټا په جدول کې ځای پر ځای شي په دې توګه، تر پایه دوام ورکوو.

د ناروغانو شمېر	د رغتونونو شمېر f
140 – 147	3
148 – 155	6
156 – 163	6
164 – 171	9
172 – 179	6
	n = 30

پوښتنې

1- لاندې ډېټا د 20 زده کوونکو د رسېدلو وخت په دقیقو له کوره تر ښوونځی راښیي:

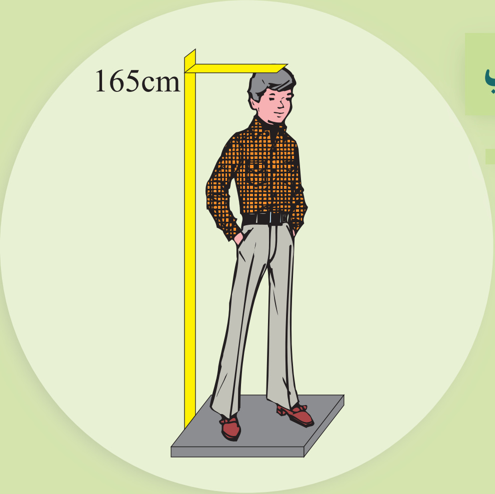
33	65	50	10
23	11	5	48
32	26	26	37
19	13	7	17
22	21	43	29

- پورتنی ډېټا په اووه ډلوکې صنف بندي کړئ؟
- د هر صنف کثرت پیدا کړئ.
- میله یي ګراف یې رسم کړئ.
- که چېري ډېټا په هغو ډلوکې چې د صنف پراخوالی یې 10 وي کېږدو، د کثرت جدول یې جوړ کړئ؟

2- یو مثال راوړئ چې ډېټا د صنف بندي لپاره د صنفونو له پراخوالي څخه ګټه اخیستل شوې وي.

3-د موضوع د خبرلو لپاره یو مثال ورکړئ چې د ډېټا د صنف بندي لپاره، د صنفونو له شمېر څخه ګټه اخیستل شوې وي.

د نښتو یا متصلو ډېټاګانو دسته بندي



که چیرې له تاسې څخه پوښتنه وشي چې ونه (قد) مو څومره جګه ده، څه ځواب ورکوئ؟ که ستاسو قد په متر اندازه شي ستاسو له اټکل سره به څومره سمون ولري؟

فعالیت

• که له تاسې څخه پوښتنه وشي چې څو وروڼه لرئ، څه وایئ؟ آیا کولای شئ، ادعا وکړئ چې د دغه ډول پوښتنې په ځواب او یا نورو عمومي پوښتنو چې لا تیک وسایل مو لرلي، کولای مو شول چې د خپلو ټولګیوالو شمېر په تیک ډول و وایئ؟

• ناڅاپي متحول مو څه شی دی او له کومو ډولونو څخه دی؟

• که ستاسې یو دوست ووایي، د قد اوږدوالی یې 156 سانتي متره دی، آیا د ونې(قد) اوږدوالی یې پوره 156 سانتي متره دی؟

• د 15 زده کوونکو د قدونو اوږدوالي وروسته له پوښتنې څخه داسې ورکړل شوي دي.

153	148	151	138	136
142	131	141	141	139
152	159	139	132	146

لاندې جدول بشپړ کړئ:

د زده کوونکو د ونې جګوالی	د زده کوونکو شمېر
130 – 140	
140 – 150	
150 – 160	

• په فکر وکړئ او ووایئ، چې ولې د 140 عدد یو وار د صنفونو د پورتني سرحد په څېر او یو وار د صنفونو د لاندېني سرحد په څېر راوړل شوي دي؟

• که چیرې د یوه سړي د قد اوږدوالی 140 سانتي متره وي، څه فکر کوئ چې په کوم صنف کې به وي؟

که چېرې یو نښتي یا متصل متحول ولرو، د اطلاعاتو په صنف بندۍ کې د یوه صنف پورتنی سرحد به له کوزني سرحد سره برابر وي، د قرارداد له مخې که ډېټا د پورتني صنف سره برابره وي، په ورپسې سرحد کې لوېږي.

مثال: د 25 ډول ډول موټرونو چټکتیا په لاندې ډول احصائیه نیول شوې ده:

32	35	38	47	44	48	28
30	40	36	51	52	54	31
27	32	42	52	31	29	29
54	49	37	43			

- د کثرت جدول یې ډک کړئ.
- که چېرې په ښار کې د چلولو پرمهال مجاز سرعت په یوه ساعت کې 30 کیلومتره وي، څو موټرونه د چټکتیا له مجاز سرعت څخه زیات چلېدلي دي؟
- د صنفونو د کثرت د جمع حاصل څو دی؟ دا عدد له څه شي سره برابر دی؟

حل: څرنګه چې سرعت یو متصل متحول دی، نو د نښتي یا متصل متحول لپاره جدول جوړوو. د 30 عدد په دویم صنف کې او د 40 عدد په درېیم صنف کې لوېږي، د صنفونو د کثرت جمع له $n = 4+9+7+5 = 25$ سره برابره ده چې د موټرونو له شمېر سره مساوي ده او (21) موټرونه له خپل جواز څخه چټک چلېدلي دي.

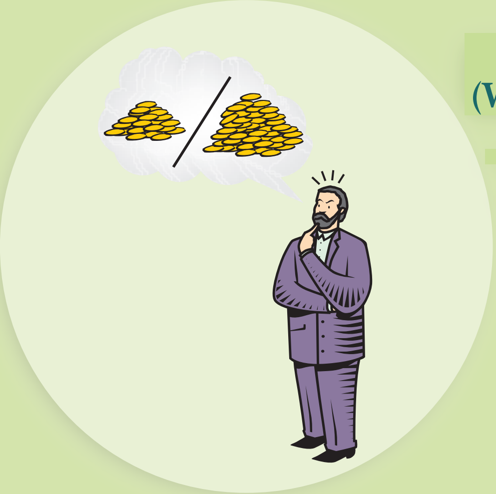
سرعت	تعداد f
20 – 30	4
30 – 40	9
40 – 50	7
50 – 60	5
	25

پوښتنې

1- لاندې ډېټاګانې چې د 34 زده کوونکو د هوش ضریب، د ښوونځي په لومړي کال کې راښیي، په پام کې ونیسئ:

86	108	108	111	111	103	108	101	88
91	103	105	105	112	96	111	107	96
92	100	112	112	92	89	95	90	105
111	95	108	77	106	90	77		

د 4 صنفي جدول په جوړولو سره د صنفونو د کثرت د جمع حاصل پیدا کړئ.



وزني اوسط يا منځنۍ قيمت
(Weighted Mean)

که څوك ښه کار سرته ورسوي، انعام يې
نظر کوم عدد ته څو برابره دی؟

فعاليت

اوريدلي مو دي چې هغه زده کوونکی چې دولسم ټولګی پای ته ورسوي، د کانکور آزموينه په څلورو خانګوکې له خاصو ضريبونو سره سرته رسوي او د هغې د نمرو په اساس د پوهنتونونو بېلابېلو پوهنځيو ته وېشل کېږي. اټکل کوو چې د دوو زده کوونکو د کانکور نمرې په لاندې ډول دي:

مضمون	ژبه او ادبيات د 3 په ضرب	ټولنيز علوم د 2 په ضرب	طبيعي علوم د 3 په ضرب	رياضي د 4 په ضرب
ضريب	3	2	3	4
لومړی زده کوونکی	61	66	62	61
دويم زده کوونکی	61	66	62	60

مضمون	د دويم زده کوونکي نمبرې	ضريب
رياضي	60	4
طبيعي علوم	62	3
ټولنيز علوم	66	2
ژبه او ادبيات	61	3

مضمون	د لومړي زده کوونکي نمبرې	ضريب
رياضي	61	4
طبيعي علوم	62	3
ټولنيز علوم	66	2
ژبه او ادبيات	61	3

- د دواړو زده کوونکو د نمرو منځنۍ يا وسطي قيمت پيدا کړئ.
- د کوم مضمون نمرې په منځني يا وسطي قيمت ډېره اغيزه لري، ولې؟
- د کوم مضمون نمرې په منځني يا وسطي قيمت لږ اغېزه لري، ولې؟
- که د زده کوونکو د رياضي د مضمون په نمرو 5 نمرې او همدارنګه د ټولنيزو علومو په مضمون 5 نمرې ور زياتې شي، منځنۍ يا وسطي قيمت، په کوم حالت کې ډېر بدلون مومي.

که چېرې ډېټا په ځانګړې ضریب سره ورکړل شوې وي، دا په دې معنا ده چې د ډېټا اغېزه یوشان نه ده، بلکې د هغې له ضریب سره تړاو لري. په دې حالت کې د ضریبونو د کثرت جدول، د ډېټا د کثرت په عنوان حسابېږي او په W سره ښودل کېږي. په لاس راغلي اوسط ته، وزني اوسط وایي:

$$\text{وزني اوسط } \bar{x} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

مثال: په ځینو پوهنتونونو کې نمرې د تورو په اساس، لکه: A, B, C, D او F اعلانېږي، په دې پوهنتونونو کې د A ارزښت څلور، د B ارزښت درې، د C ارزښت دوه، د D ارزښت یو او د F ارزښت صفر وي، یوه محصل لاندې نمرې اخیستې دي.

مضمون	نمرې	د کریډتونو شمېر
ریاضیات	B	3
فزیک	A	3
کیمیا	C	2
بیولوژي	B	3
ژبه	A	1

– د دې محصل د نمرو اوسط څو دی؟

حل:

مضمون	حرفي نمره	د کریډتو شمېر =x	عددي نمرې =W	W · X
ریاضیات	B	3	3	$3 \times 3 = 9$
فزیک	A	3	4	$4 \times 3 = 12$
کیمیا	C	2	2	$2 \times 2 = 4$
بیولوژی	B	3	3	$3 \times 3 = 9$
ژبه	A	1	4	$4 \times 1 = 4$

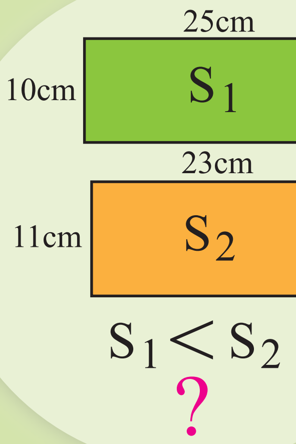
د کریډتونو شمېر $n = 12$

$$\text{وزني اوسط یا منځنی} = \bar{x} = \frac{9+12+4+9+4}{12} = \frac{38}{12} = 3.16$$

پوښتنې

که د کانکور په یوه آزموینه کې د یوه زده کوونکي نمرې په ترتیب سره $65, 61, 53$ او 70 او ضریبونه یې، په ترتیب سره $3,2,1,1$ وي، د دې زده کوونکي د نمرو اوسط حساب کړئ؟

مستطيلي ګراف
(Histogram)

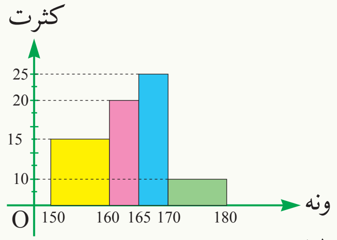


که د یوه مسـتطیل اوږدوالی 25 سـانتي متـره او سـور یې 10 سـانتي متـره او د بل مسـتطیل اوږدوالی 23 سـانتي متره او سـور یې 11 سـانتي متره وي، د دې دواړو مستطیلونو مساحتونه پیدا او یو له بل سره یې پرتله کړئ؟

فعالیت

د یوه ښوونځي د 70 زده کوونکو د ونو(قدونو) اندازه، په لاندې ډول، په جدول کې ورکړل شوې ده:

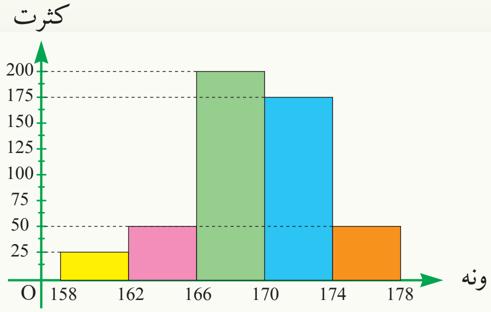
ونه په سانتي	150 – 160	160 – 165	165 – 170	170 – 180
کثرتf	15	20	25	10



- په پورتني ګراف کې د مستطیلونو قاعدې څه شی راښیي؟
- د هر مستطیل مساحت په لاس راوړئ. د مستطیل مساحت څه شی راښیي؟
- د مستطیلونو ارتفاع څه شی راښیي؟
- پورتنی ګراف، له میله یي ګراف سره څه توپیر لري؟

یو ځل بیا د یوه ښوونځي د 500 زده کوونکو ونې (قد) چې اندازه یې په لاندې جدول کې ورکړ شوې ده، په پام کې ونیسئ:

ونه په سانتي متر	158 – 162	162 – 166	166 – 170	170 – 174	174 – 178
کثرتf	25	50	200	175	50



• جدول ته په پاملرنې سره، د مستطیل قاعده څه شی راښیي؟
• د مستطیل اوږدوالی څه شی راښیي؟
• میله یي ګراف له پورتني ګراف سره څه توپیر لري؟

د نښتو یا متصلو ډیټاګانو د ښودلو لپاره له مستطیلي ګراف څخه ګټه اخلو، په دې ګراف کې، د مستطیل عرض، د صنفونو له پراخوالي سره برابر دی. په مستطیلي ګراف کې مساحتونه، د هر صنف کثرت راښیي چې په آسانۍ یو له بل سره د مقایسې وړ دي.
که د صنف پراخوالي یو له بل سره برابر وي، کولای شو د مساحتونو پر ځای راساً کثرت پرتله کړو په دې حالت کې عمودي محور، کثرت راښیي.

مثال: د یوه ټولګي د زده کوونکو وزن په لاندې جدول کې راکړل شوی دی:

د زده کوونکو وزن په کیلوګرام	40 - 45	45 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 90
د زده کوونکو شمېر	4	6	12	8	8

دلته لیدل کېږي چې د صنفونو واټن مساوي نه دي، د مستطیلي ګراف له رسمولو څخه مخکې لازمه ده چې د مستطیلونو ارتفاع یوه ګډه واټن ته په پام کې نیولو سره د ټولو صنفونو لپاره پیدا کړو، په دې مثال کې $5Kg$ ګډ یا مشترک دی، نو کولای شو چې ټول پنځه واره واحده، د x په محور په یوه واحد وښیو:

د $40-45$ صنف لپاره یو واحده.

د $45-50$ صنف لپاره یو واحده.

د $50-60$ صنف لپاره دوه واحده.

د $60-70$ صنف لپاره دوه واحده.

د $70-90$ صنف لپاره څلور واحده.

د مستطیلونو د عمودي اوږدوالي د پیداکولو لپاره، د صنفونو کثرت، د صنفونو په پراخوالي وېشو:

$$40-45 \rightarrow \frac{4}{1} = 4 \rightarrow \frac{4}{5} = 0.8$$

$$45-50 \rightarrow \frac{6}{1} = 6 \rightarrow \frac{6}{5} = 1.2$$

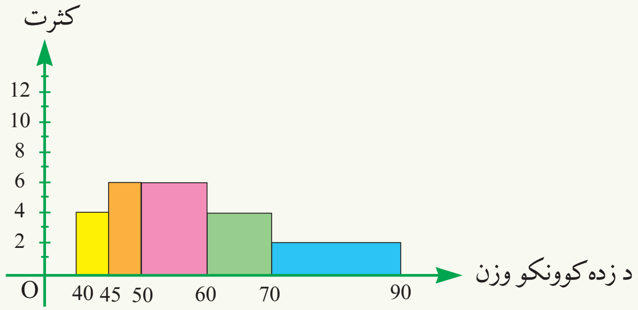
$$50-60 \rightarrow \frac{12}{2} = 6 \rightarrow \frac{12}{10} = 1.2$$

$$60-70 \rightarrow \frac{8}{2} = 4 \rightarrow \frac{8}{10} = 0.8$$

$$70-90 \rightarrow \frac{8}{4} = 2 \rightarrow \frac{8}{20} = 0.4$$

اوس په لاس راغلي پایلې په لاندې جدول کې ترتیب او د راکړل شوي مثال مستطیلي ګراف رسموو:

د زده کوونکو وزن په Kg	40-45	45-50	50-60	60-70	70-90
کثرت نظر واحد فاصلې ته	4	6	6	4	2



پوښتني

1- لاندې جدول د یوه روغتون د هغو ټاکلو ورځو د ناروغانو شمېر راښيي چې په روغتون کې بستر شوي دي:

د ورځو شمېر	1 - 5	5 - 9	9 - 13	13 - 17	17 - 21	21- 25
د ناروغانو شمېر f	12	10	16	18	14	8

ـ د پورتني جدول مستطیلي ګراف رسم کړئ؟

2- د یوه ټولګي د 50 زده کوونکو د IQ (ذکاوت) په آزموینه کې ګډون کړی دی چې پایلې یې په لاندې ډول دي:

115	113	109	118	92	130	112	114	117	122
127	107	108	113	124	112	111	106	116	118
121	107	118	118	110	124	115	103	100	114
104	124	116	123	104	135	121	126	116	110
94	134	98	129	102	103	107	113	117	112

- نومورو ډېټا ته د کثرت جدول جوړ کړئ. د دې جدول لپاره ۷ ګروپونه داسې په پام کې ونیسئ چې د صنفونو پراخوالی یې مساوي وي.
- د دې ډېټا مستطیلي ګراف رسم کړئ.
- څه پایلې اخلئ؟

دایروي ګراف

مخامخ شکل، د لرګي یوه کنده ده، هغه کرښې چې ددې لرګي په مقطع کې وینئ، د څه شي شکل ته ورته دی؟

فعالیت

د افغانستان د ښوونې او روزنې وزارت په 1387 کال کې لاندې ارقام د ښوونځیو د زده کوونکو د شمېر په اړه خپاره کړي دي: د ابتدایي زده کوونکو شمېر 250000 د منځنیو ښوونځیو د زده کوونکو شمېر 200000 او د ثانوي زده کوونکو شمېر 150000 دی.

- که د هرې ډېټا نسبي کثرت، په 360° درجو کې ضرب کړو، هره دوره به څو درجې وي؟
- یوه دایره رسم او مرکزي زاویې یې د لاس ته راغلو عددونو په اندازه بېلې کړئ د هرې زاویې دننه د اړونده تحصیلي دورې نوم ولیکئ.
- یو عنوان، د ګراف لپاره و ټاکئ او د ګراف لاندې یې ولیکئ.
- په دایروي ګراف کې څه، څه سره پرتله کېږي؟
- د دایرې په کوچنې کېدو یا لوییدو سره په دایروي ګراف کې څه توپیر راځي؟

له پورتني فعالیت څخه پوه شو او کولای شو ډېټا د دایرې په مرسته وښیو. د یو ناڅاپي یا اتفاقي متحول د ډېټا ښودل، د دایرې په مرسته د دایروي ګراف په نامه یادېږي، په دایروي ګراف کې لومړی د هر صنف کثرت د ټولې ډیټا په شمېر وېشو او وروسته یې په 360° کې ضربوو چې د صنفونو مرکزي زاویه راښیي؛ یعنې:

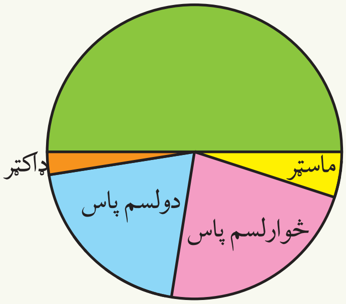
$$\text{له جنسه د درجې کثرت} = \frac{\text{د ډېټا کثرت}}{\text{د ټولو ډېټا شمېر}} \times 360^\circ$$

مثال: یوه مؤسسه چې د کارکوونکو شمېر یې 200 او د تحصیل د درجې له مخې وېشل شوي دي:

د تحصیل درجه	ډاکتر	ماستر	لیسانس	څوارلسم پاس	دولسم پاس
د کارمندانو شمېر f	5	10	100	45	40

د دې ډېټا دایروي ګراف په لاندې ډول دی.

د تحصیل درجه	کثرت f	مرکزي زاویه د درجې له جنسه
ډاکتر	5	$\frac{5}{200}\times 360° = 9°$
ماستر	10	$\frac{10}{200}\times 360° = 18°$
لیسانس	100	$\frac{100}{200}\times 360° = 180°$
څوارلسم پاس	45	$\frac{45}{200}\times 360° = 81°$
دولسم پاس	40	$\frac{40}{200}\times 360° = 72°$



پوښتنې

– د لاندې جدول په پام کې نیولو سره د کورنیو د وېش دایروي ګراف د جمعیت له مخې رسم کړئ.

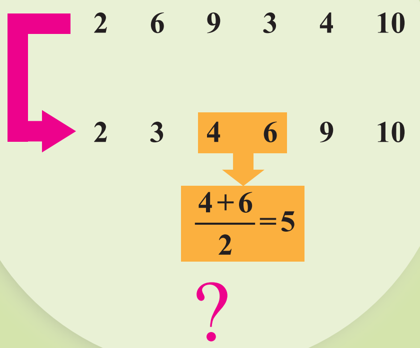
د کورنۍ نوع	ډېر جمعیت	منځنۍ جمعیت سره	لږ جمعیت	جمع
د کورنۍ شمېر f	11	23	6	40

– دایروي ګراف د څه ډول متحول لپاره مناسب دی؟

- که د ډېټا کثرت دوه برابره کړو، آیا مرکزي زاویه یې بدلون مومي؟

میانه
(Median)

کـه له تاسـي څخه وپوښـتل شـي چي د نومرو اوسـط مو څو دی؟ له اوسط څخه ګټه اخلئ که له تاسـي څخه وپوښتل شي چي هغه نمرې چي ستاسـو په اطلاعنامه کـې ډېـرې تکرار شـوي دي، څـو دي؟ که له تاسـې پوښـتنه وشـي چې تاسـې د شـو زده کوونکـو په منځ کې یاسـت، که د کمـزورو زده کوونکـو پـه منـځ کـې، تاسـې دې پوښتنې ته څه ځواب ورکوئ؟



فعالیت

- فکر وکړئ؟ د((میانې)) لغت یعني څه؟
- که یو شمېر ډېټا ولرو، څرنګه کولای شو، د هغو وسطي مقدار پیدا کړو؟
- که د ډېټا شمېر طاق وي، آیا وسطي مقدار د ډېټا په میانه کې شته دی؟
- که د ډېټا شمېر جفت وي، ایا وسطي مقدار د ډېټا په میانه کې شته دی؟
- آیا کولای شو وسطي مقدار پرته له ترتیب کولو څخه د ډېټا په لاس راوړو؟
- که د ډېټا مقدار جفت وي، اټکل کولای شئ چي څه مقدار د وسطي مقدار په عنوان وټاکو؟
- لاندې ډېټا په پام کې ونیسئ:

2 3 5 1 4

– وسطي مقدار یې پیدا کړئ.
– د ډېټا شمېر، د وسطي مقدار څخه وروسته د مخکینی ډېټا له شمېر سره څه اړیکه لري؟
– لاندې ډېټا په پام کې ونیسئ.

2 3 5 1 4 5

– یو وسطي عدد پیدا کړئ چې د ډېټا شمېر یې وروسته او د مخکنې له هغه عدد د ډېټا له شمېر سره برابر وي.

د ډیټا له ترتیبولو څخه وروسته هغه عدد چې له هغه څخه وروسته د ډیټا شمېر او له هغه څخه مخکې د ډیټا له شمېر سره برابر وي، میانه بلل کیږي. که چیرې د ډیټا شمېر طاق وي، نو منځنی ډیټا له میانې څخه عبارت ده، خو که چیرې د ډیټا شمېر جفت وي، نو میانه د دوو منځنیو ډیټاګانو له وسط څخه

عبارت ده.

مثال: د 5 کورنیو میاشتنی عاید، د افغانۍ له مخې په لاندې ډول راکړل شوی دی:

10000 7000 4000 6000 3000

ددې data میانه حساب کړئ.

حل: لومړی data مرتب کوو:

3000 4000 6000 7000 10000

لیدل کېږي چې د 6000 عدد د عددونو په وسط(منځ) کې شتون لري، نو 6000 د پورتنی data میانه ده.

دویم مثال: د لاندېdata میانه وټاکئ.

2 6 9 3 4 10

حل: د میانې د حسابولو لپاره عددونه (data) ترتیب کوو.

2 3 4 6 9 10

لیدل کېږي چې د data په منځ کې داسې عدد نشته چې د میانې خاصیت صدق کړي، نو که چېرې

تاسې $5 = \frac{4+6}{2}$ په پام کې ونیسئ چې د میانې ځانګړتیا پکې صدق کوي او دا عدد د پورتنی ډېټا

میانه ده چې له 5 ځخه وروسته، د ډېټا شمېر له 5ځخه د مخکې د ډېټا له شمېر سره برابر دی.

پوښتنې

1- د ډېټا لاندې دوه ګروپونه، په پام کې ونیسئ او د هغوی میانه پیدا کړئ؟

1 ,2 ,3 او 0 ,2 ,100

2- لاندې ډېټا راکړل شوې ده، د دغې ډېټا میانه پیدا کړئ.

5 ,15 ,4 ,0 ,12 ,15 ,5 ,6 ,5 ,0

3- که له ټولو ډېټا وو سره یو ثابت عدد جمع شي، د میانې په مقدار کې څه اغېزه منځ ته راځي؟ په یوه مثال کې یې وښیئ.

4- که ډېټا دوه برابره کړو، د میانې په مقدار څه اغېزه کوي؟ په یوه مثال کې یې وښایاست.

د تحول ساحه
(Range)

د خپلو هم ټولګيوالو قد مو اندازه کړئ.
د تر ټولو لوړ قد او تر ټولو ټيټ قد تر منځ توپير حساب کړئ، که چېرې وغواړئ چې د زده کوونکو د قدونو ترمنځ تر ټولو زيات توپير پيدا کړئ، آيا لازمه ده چې د نورو زده کوونکو قدونه اندازه کړئ؟

فعاليت

د اووم ټولګي د 10 زده کوونکو او د لسم ټولګي د 10 زده کوونکو د قدونو لوړوالی چې په اتفاقي ډول ټاکل شوي، په لاندې ډول دي:

د اووم ټولګي زده کوونکي : 142 ,145 ,146 ,148 ,148 ,148 ,149 ,149 ,150 , 152

د لسم ټولګي زده کوونکي : 150 ,151 ,153 ,156 ,158 ,158 ,159 ,160 ,160 , 160

- د دواړو ډلو د لوړو او ټيټو قدونو تر منځ توپير پيدا کړئ؟
- ايا د دواړو ډلو د عددونو تر منځ توپير يو شان دی؟
- که چېرې ډېټا و نه لرو، آيا د ډېټا د لږو او ډېرو توپيرونو په لرلو سره ډلو موږ کولای شو دواړه ډلې چې سره پرتله کړو.
- ايا د بدلون يا تحول د ساحې برابروالي په دواړو ډلو کې د ډېټا د يووالي په معنا دی؟
- د نمونې د تعريف په پاملرنې سره که دا ډلې، د ټولنې په عنوان په پام کې ونيسو په نمونه کې د واټن د اوږدوالي زياتوالی، په ټولنه کې د واټن د اوږدوالي د زياتوالي پايله راکوي.

له پورتني فعاليت څخه پوهېږو چې د هغه واټن اوږدوالی چې متحول په هغې کې د بدلون امکان لري، د تحول د ساحې په نامه يادېږي. دا معيار د تر ټولو لوېې او تر ټولو کوچنې ډېټا ترمنځ وسعت را په ګوته کوي.پاملرنه بايد وشي چې په يوه ټولنه کې د تحول د ساحې لوی والی، په هغه ټولنه کې د تيت والي يا پراګندګي ډېر والی دی. هر څومره چې دا تيت والی کم وي، د وګړو پراګندګي کمه ده. د يوې ټولنې وګړي، د دې ځانګړتيا له مخې يو بل ته نژدې دي که د تحول ساحه صفر وي، که د وګړو د څېړنو د ځانګړتياوې سره برابري او يو شان وي په دې حالت کې ټولنه يوه متجانسه ټولنه بولو.

مثال: د دوو زده کوونکو د $4\frac{1}{2}$ میاشتنی آزموینې نمرې، په لاندې ډول دي:

الف: 20 , 21 , 25 , 32 , 33 , 35 , 36 , 37 , 38 , 39

ب : 20 , 33 , 34 , 35 , 35 , 35 , 34 , 34 , 35 , 39

- د دوارو صنفونو د تحول ساحه پیدا کړئ.
- آیا د ډېټا تیت والی یا پراګندګي په لومړي او که په دویم ګروپ کې کمه ده؟

حل: د دوارو ډلو د تحول ساحه یوه برابر ده.

$$39 - 20 = 19$$

د دویمې ډلې د ډېټا تیت والی یا پراګندګي لږ ده، ځکه په ډېټا کې، د 34 او 35 عددونه زیات تکرار شوي دي، واټن یې کم دی، خو پراګندګي په لومړی ډله کې ډېره ده، د تحول ساحه یوازې له لږو او زیاتو مقدارونو سره کار کوي. د ډېټا په اړه او د هغوی تر منځ هېڅ اطلاعات مورږ ته نه راکوي، نو د تحول د ساحې په لرلو سره نشو کولای، د ډېټا د میانې د پراګندګي د میزان اټکل وکړو.

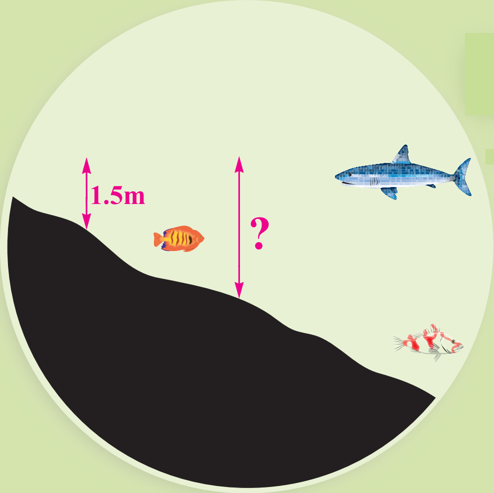
پوښتنې

1- لاندې ډېټا په پام کې ونیسئ.

15, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 6, 5, 2, 1

- ددې ډېټا د تحول ساحه پیدا کړئ.
- که د پورتنې data، تر ټولو زیات او کم data له منځه یوسو، د تحول ساحه یې پیدا کړئ.
- دا دواړه د تحول ساحه یو له بل سره پرتله کړئ او ووایاست چې د کوم یوه پراګندګي زیاته ده؟

د انحراف اوسط
(Average deviation)



که د یوه سیند د یوه ټکي ژوروالی 1.5 متره وي، فکر وکړئ چې د سیند د ټولو ټکو ژوروالی یو شان دی؟

فعالیت

پنځو تنو زده کوونکو په یوه صنفي آزموینه کې لاندې نمرې اخیستې دي.

20 18 16 14 12

- د دې نمرو اوسط او یا منځنی قیمت پیدا کړئ.
- د ټولو ډېټا وو د اوسط توپیر پیدا کړئ.
- د هرې ډېټا د اوسط د توپیر د جمع حاصل ولیکئ.
- د هرې ډېټا د اوسط د توپیر د مطلقه قیمتونو د جمع حاصل پیدا کړئ.
- په لاس راغلي قیمتونه سره پرتله کړئ.
- تاسې په خپله د 5 ډېټاګانو یو مثال ورکړئ او پورتنۍ عملیې پرې سر ته ورسوئ.

له پورتني فعالیت څخه پوهېږو هغه توپیر چې د ډېټا او اوسط تر منځ دی د منځني یا اوسط انحراف په نامه یادېږي.

د data د منځني یا اوسط انحراف مجموعه، همېشه صفر ده. په دې دلیل د data د خیړنې لپاره له انحراف د مطلقه قیمت څخه ګټه اخلو. که د ټولو انحرافونو مطلقه قیمت جمع کړو او د data په شمېر یې ووېشو، د انحراف اوسط ورته ویل کېږي، د لاندې فورمول په مرسته حسابېږي:

$$\text{د انحراف اوسط یا منځنی} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

دلته $X_1, X_2 \dots X_n$ عبارت له data او $\bar{X}$ د ډېټا يا اوسط او n د ډېټا شمېر دی، ليدل کېږي، چې هر څومره د اوسط انحراف لوی وي ، نو په هم هغه اندازه د data د پراګندګي له اوسط نه ډېره ده.

مثال: د 40 تنو زده کوونکو نمرې په لاندې جدول کې ورکړل شوې دي.

نمرې	کثرت
0 – 10	2
10 – 20	7
20 – 30	4
30 – 40	5
40 – 50	10
50 – 60	12

د پورتنيو نمرو د انحراف اوسط پيدا کړئ؟

حل: لومړی د اوسط مقدار په لاس راوړو.

f= کثرت	د ډيټاګانو اوسط	f · x	$x - \bar{x}$	$f(x - \bar{x})$
2	5	10	5 – 37.5 = –32.5	2 × (–32.5) = –65
7	15	105	15 – 37.5 = –22.5	7 × (–22.5) = –157.5
4	25	100	25 – 37.5 = –12.5	4 × (–12.5) = –50
5	35	175	35 – 37.5 = –2.5	5 × (–2.5) = –12.5
10	45	450	45 – 37.5 = 7.5	10 × 7.5 = 75
12	55	660	55 – 37.5= 17.5	12 × 17.5 = 210
$\frac{1}{n = 40}$		1500		

$$\bar{x} = \frac{10+105+100+175+450+660}{40} = \frac{1500}{40} = 37.5$$

ليدل کېږي چې، د $f(x-\bar{x})$ د جمع حاصل له صفر سره مساوي دی، نو بايد مطلقه قيمت يې سره جمع کړو.

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{|-65|+|-157.5|+|-50|+|-12.5|+|75|+|210|}{40}$$

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{65+157.5+50+12.5++75+210}{40} = \frac{570}{4} = 14.25$$

پوښتنې

د A او B دوو جمعيتونو انحرافونه په لاندې ډول راکړل شوي.

د A جمعيت انحرافونه :	4	2	0	0	-1	-2	-3
د B جمعيت انحرافونه :	8	1	0	0	-2	-3	-4

- د A جمعيت د انحراف اوسط پيدا کړئ.
- د کوم جمعيت پراکندګي زياته ده؟

• صنف د هغې ډېټا مجموعه ده چې ګډې ځانګړتياوې ولري. د ډېټا د صنف بندۍ لپاره لاندې پراوونه په پام کې نيسو:

- د تحول ساحه: د ډېټا د ډېرو لږو او ډېرو زياتو مقدارونو تر منځ وسعت.
- د صنف پراخوالی: د تحول د ساحې او د صنفونو د شمېر نسبت.
- د صنفونو کثرت: د هغو ډېټاګانو د صنفونو شمېر چې په هر صنف کې شته.
- د صنف مرکز: د هر صنف د اوسط محاسبه.

• که په صنف بندۍ کې متحولونه نښتې يا متصل وي، د راتلونکي صنف پورتنی سرحد د مخکيني صنف د لاندېني سرحد سره برابر دی. په هغه حالت کې چې ډېټا د صنف د پورتنی سرحد سره برابر وي، هغه ډېټا په راتلونکي صنف پورې اړه لري.

د صنفونو د ډيټاګانو د شمېر مجموعه، د ټولې ډېټا له شمېر سره برابره ده.

• فرض کوو، د $X_1, X_2 \ldots X_n$ ډيټاګاني په ترتيب سره د $W_1, W_2 \ldots W_n$ ضريبونو لرونکي وي، دغه اطلاعات کولای شو په لاندې جدول کې خلاصه کړو.

data	X_1	X_2	...	X_n
د ضريب (وزن)	W_1	W_2	...	W_n

• په دې حالت کې د پورتنی ډېټا منځنی قيمت (اوسط) په لاندې ډول محاسبه کېږي:

$$\text{وزني اوسط} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots .. + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \ldots .. + w_n}$$

• هستوګرام يا مستطيلي ګراف، عبارت له هغه ګراف څخه دی چې د کثرت توزيع يې د مستطيلونو په مرسته ښودل کېږي.

د مستطيل جګوالی، د صنف له کثرت سره برابر دی.

د هر مستطيل مساحت د صنفونو د پراخوالي او د صنف د کثرت له حاصل ضرب سره برابر دی.

په مستطيلي ګراف کې مستطيلونه له يو بل سره ترلي او د ترليو(متصلو) متحولينو څخه د ګراف د ښودلو لپاره ګټه اخلي.

• په یوه اختیاري شعاع یوه دایره د مرکزي زاویې په مرسته په n برخو وېشو، داسې چې د هرې برخې د مرکزي زاویې اندازه، د کثرت له قیمت سره متناسبه وي، په دې حالت کې یې، مرکزي زاویه نظر لومړي صنف ته عبارت ده له:

$$\text{کثرت د درجې له مخې} = \frac{\text{د ډېټا کثرت}}{\text{د ټولو ډېټا شمېر}} \times 360^\circ$$

• د میانې د پیداکولو لپاره په لومړي پړاو کې ډېټا منظم کوو او وروسته:

- که د ډېټا شمېر طاق وي، د ډېټا میانه له منځنۍ ډېټا څخه عبارت ده.

- که د ډېټا شمېر جفت وي، میانه د دوو منځنیو ډېټاگانو اوسط دی.

• د تر ټولو کوچنۍ ډېټا او تر ټولو لویې ډېټا ترمنځ توپیر، د تحول له ساحې څخه عبارت ده، یا په بل عبارت، ډېټا په هغه ساحه کې بدلون کوي.

• د هرې ډېټا د اوسط تفاضل ته د منځني د اوسط انحراف وایي.

د انحراف اوسط د انحرافونو د مطلقه قیمت له اوسط څخه عبارت دی او فورمول یې د اړوندې ډېټا لپاره په لاندې ډول لیکو:

$$\text{د انحراف اوسط} = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \cdots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

د اتم څپرکي پوښتنې:

1- لاندې جدول ډک کړئ.

جمعي کثرت	د صنف مرکز	کثرتf	صنف
		12	7.5-10.5
		10	10.5-13.5
		15	13.5-16.5

● پورتنی جدول د کومې دسته بندي ګراف راښيي. پیوسته یا نښتی یا مجزا؟

2- لاندې جدول د 100 شل کلنو ځوانانو د ونو اوږدوالی راښيي.

د صنف مرکز	کثرتf	صنف
153	15	149.5-156.5
160	20	156.5-163.5
167	30	163.5-170.5
174	25	170.5-177.5
181	10	177.5-184.5

● مستطیلي ګراف یې رسم کړئ.

3-د A, B, C, D او E په ښارونو کې، 200 میلیونه افغانی سرمایه په کار اچول شوی ده، داسې چې:

● د A ښار لپاره 110 میلیونه افغانی
● د B ښار لپاره 32 میلیونه افغانی
● د C ښار لپاره 24 میلیونه افغانی
● د D ښار لپاره 14 میلیونه افغانی
● د E ښار لپاره 20 میلیونه افغانی.

ورکړل شوی معلومات په جدول کې پوره او دایروي ګراف یې رسم کړئ.

ښارونه	د سرمایې ویش په میلیون	سرمایه په فیصدی	سرمایه په درجه
A	110		
B	32		
C	24		
D	14		
E	20		

4- یو شمیر کورنی د خپلو غړو له شمیر سره په لاندې جدول کې ورکړ شوې دي.

کورنی	18	12	15	8
د کورنی غړيf	2	4	5	8

● د کورنی موډ(Mode) پیدا کړئ.
● اوسط یې پیدا کړئ.
● میانه یا منځنی پیدا کړئ.
● د تحول ساحه یې محاسبه کړئ.

5- د یوه ټولګي د زده کوونکو د قدونو اندازه په لاندې جدول کې ورکړل شوې ده:

د قد اندازه	1.5-1.6	1.6-1.7	1.7-1.8	1.8-1.9	1.9-2
کثرتf	5	16	9	4	1

● د صنف موډ مشخص کړئ.
● اوسط یې پیدا کړئ.
● د صنفونو مرکز حساب کړئ.

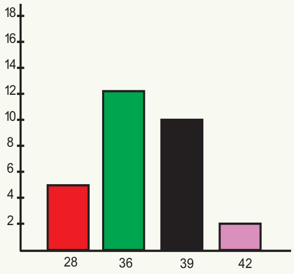
6- یوه ښوونکي د یوې صنفي آزموینې د اوسط محاسبه داسې وکړه:

$$\text{د ازموینې اوسط} = \frac{1\cdot4+3\cdot6+2\cdot8+7\cdot9+3\cdot10+3\cdot11+5\cdot12+1\cdot15}{25}$$

● د ټولګي د زده کوونکو شمېر پیدا کړئ.
● څو نمرې د 8 او 13 تر منځ قرار لري؟ د (8 او 13 په ګډون)
● عمومي اوسط یې څو دی؟

7- لاندې میله یي ګراف د هغو کتابونو شمېر راښیي چې په یوه میاشت کې مطالعه شوی دی.

● احصائیوي جدول یې رسم کړئ.
● د مطالعه شویو کتابونو شمېر په میاشت کې څو دی؟



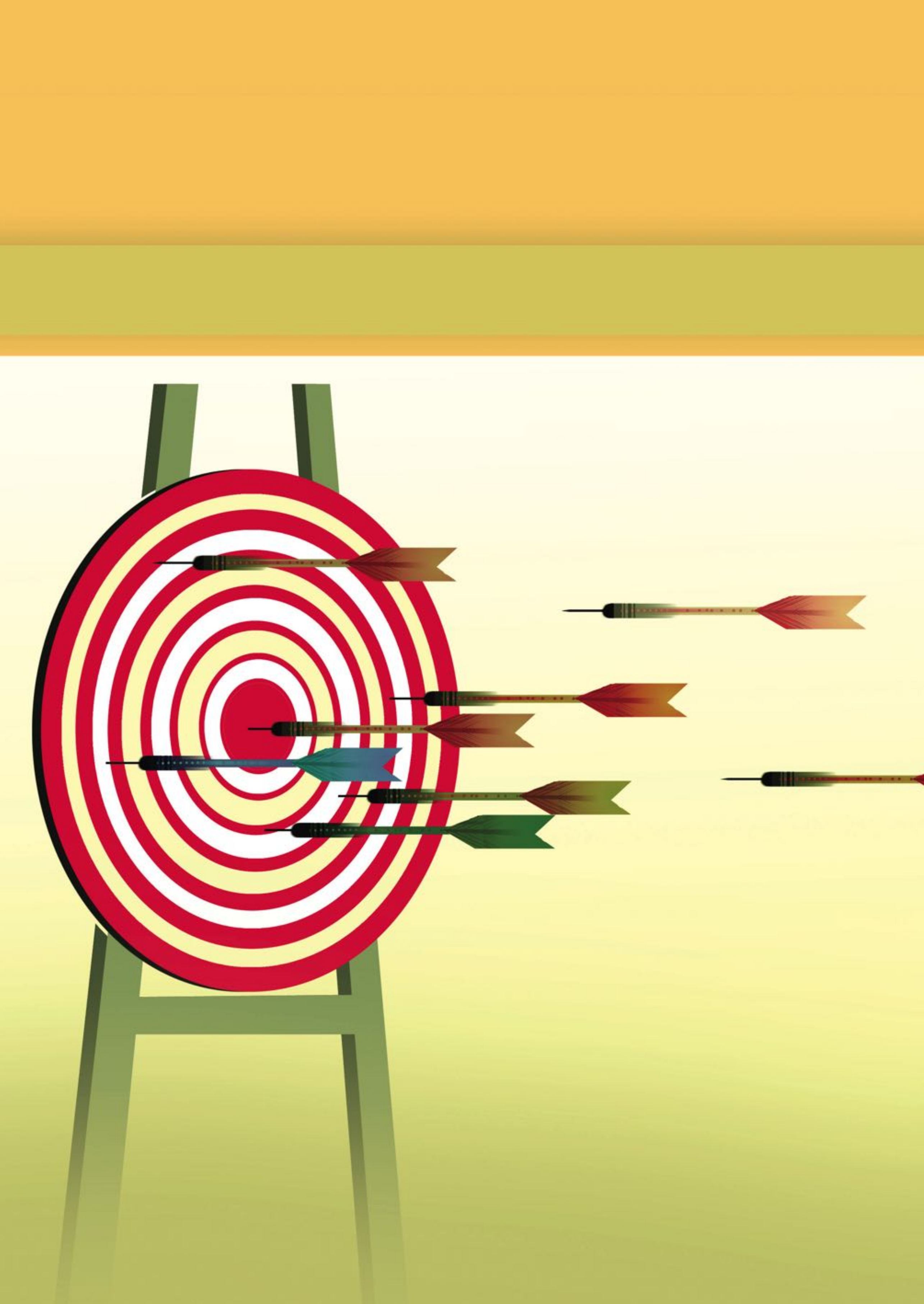
8- که د تحول ساحه له صفر سره برابره وي، له ډېټاګانو څخه څومره پایله اخلئ؟
9- که په ډېټاګانو باندې یو ثابت مقدار زیات کړو، د تحول ساحه څرنګه تحول کوي؟

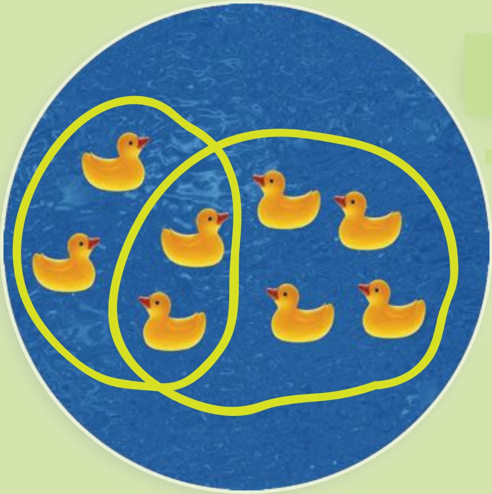
10- د څلورو زده کوونکو د هغو ساعتونو شمېر چې لوبو ته یې ورکړي دي، په لاندې ډول راغلي دي:
9 7 5 1

● د پورتنیو ډېټاګانو، د انحراف اوسط حساب کړئ.

نهـم ځپرکی

احتمالات





د ناخاپو پېښو اتحاد

په دوارو شکلونو کې یو ځای څو هیلۍ وینئ. هیلۍ په کومه حلقه پورې اړه لري؟

فعالیت

- د یوې دانې رمل د اچولو په تجربه کې، د $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ نمونې فضا او د $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,5,6\}$ او $C=\{1,2\}$ ناخاپي پېښې په پام کې نیسو.
- د A او C ناخاپي پېښې یو له بل سره څه اړیکې لري؟
- که د A یا د B پېښې رامنځ ته شوې وي، آیا ویلای شئ چې د $A\cup B$ پېښه رامنځته شوې ده؟
- د A پېښه رامنځ ته شوې او بله کومه اختیاري پېښه چې هېڅ پېښه شوې نه ده نا ممکنه یا ϕ پېښه نومول کېږي.
- ویلای شئ، چې د $A\cup\phi$ او د A پېښې یو له بل سره څه توپیر لري؟

د پورتني فعالیت پایلې په عمومي ډول د S په نمونه یې فضاکې د B,A او C ناخاپي پېښو لپاره په لاندې ډول په لاس راوړو.

پایله:

- که چیرې د S په یو نمونه یې فضا کې $A\subseteq B$ یوه ناخاپي پېښه وي، په دې حالت کې:

$$A\cup B=B$$

- که چیرې د S په یوه نمونه یې فضا کې A او B ناخاپي پېښې وي، د $A\cup B$ او $B\cup A$ پېښې یو له بل سره توپیر نه لري؛ یعني:

$$A\cup B=B\cup A$$

- که چیرې د S په یوه نمونه یې فضا کې د A یا B یوه پېښه رامنځ ته شي، نو د $A\cup B$

پيښه هم رامنځ ته شوې ده او سربېره په دې

$$B\subseteq A\cup B \quad \text{او} \quad A\subseteq A\cup B$$

- د A پېښه د S په نمونه يي فضا کې پېښه شوې ده او يوه بله پېښه چې هېڅ نه پېښېږي، يعني ϕ، په دې معنا ده چې يوازې د A پېښه را منځ ته شوې ده.

$$A\cup\emptyset = A$$

- د $A\cup B$ ناخاپي پېښه په دې معنا ده چې لږ تر لږه د A يا B پېښه منځ ته راغلې ده.

مثال: که چېرې د C ناخاپي پېښه د A او B دوې بېلا بېلې ناخاپي پېښې په خپل ځان کې ولري، په دې حالت کې د $A\cup B$ ناخاپي پېښه هم په خپل ځان کې لري، په يوه مثال کې يې روښانه کړئ؟

حل: د $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$ او $C=\{1,2,34\}$ پېښې په پام کې نيسو ليدل کېږي چې $A\subseteq C$ او $B\subseteq C$ دی، نو:

$$B\cup A = A\cup B = \{1 , 2 , 3\} \Rightarrow A\cup B\subseteq C$$

پوښتنې

1- د S له يوې نمونه يي فضا څخه، د A,B او C د ناخاپي پېښو لپاره د يوه مثال (بېلګې) په مرسته يې د لاندې اړيکو سم والی وښيئ.

a) $A\cup\emptyset = A$

b) $A\cup A = A$

c) $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$

2- که $A\subseteq B$ وي په يوه مثال کې وښيئ چې $A\cup B = B$ دی.

3 - که چېرې د A او $A\cup B$ ناخاپي پېښې سره برابرې وي، په يوه ګراف کې يې وښاياست، چې د A ناخاپي پېښه د B ناخاپي پېښه په بر کې لري.

د ناڅاپي پېښو تقاطع

د نــور د اصلي رنگونو لــه تقاطع څخه کوم نور رنگونه لاسته راځي؟

فعالیت

- د رمل د یوې دانې د اچولو نمونه یي فضا $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ او د $A=\{2,4,6\}$، $B=\{4,6\}$ او $C=\{1,3,5\}$ ناڅاپي پېښې په پام کې نیسو.
- د $A\bigcap B$ او $B\bigcap A$ ناڅاپي پېښې، یوه له بلې سره څه اړیکه لري؟
- آیا د A او B پېښې د $A\bigcap B$ ناڅاپي پېښه په بر کې لرلی شي، که نه؟
- دارا وښیئ، چې د $B\bigcap C$ ناڅاپي پېښه یوه ناشوني پېښه ده.
- که د B پېښه د A پېښه په ځان کې ولري، د A او $B\bigcap A$ ناڅاپي پېښې سره پرتله کړئ.

له پورتني فعالیت څخه کولای شو لاندې پایلې په عمومي ډول بیان کړو:

پایله:

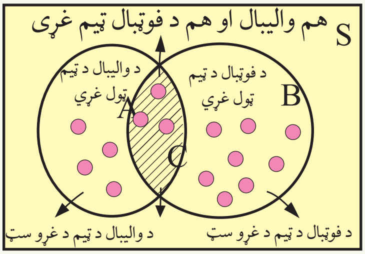
د S په یوه نمونه یي فضا کې د A, B او C ناڅاپي(تصادفي) پېښو لپاره لرو:

- د $A\bigcap B$ او $B\bigcap A$ ناڅاپي، پېښې یو شان دي.
- د A او B هره ناڅاپي پېښه هره یوه یې د $A\bigcap B$ ناڅاپي پېښه په خپل ځان کې لري.
- که د A او B د دوه پېښو لپاره $A\bigcap B=\phi$ وي، په دې حالت کې د A او B پېښې یوه له بله بیلې پېښې بلل کېږي.
- د A پېښې لپاره لرو:

$$A\bigcap S=A \text{ ، } A\bigcap \emptyset=\emptyset$$

- که چېرې د B پېښه د A پېښه په خپل ځان کې ولري، نو $A\bigcap B=A$ سره ده.

مثال: د یوه ښوونځي د فوټبال له ټیم څخه درې تنه د ښوونځي د واليبال د ټیم غړي هم دي.
که چیرې د فوټبال د ټیم غړي په A د واليبال د ټیم غړي په B او د دواړو ټیمونو ګډ غړي په C سره وښیو، په دې حالت کې د ستونو تر منځ اړیکه د سټ د تیورۍ په بڼه وليکئ:



$$A \cap B = C$$

آيا پوهېږئ چې د B د سټ په مکمله سټ کې يعنې $\overline{B}$ کې د واليبال د ټیم ټول غړي ګډون لري، که نه؟
نو د $\overline{B}$ په سټ کې ټول هغه زده کوونکي ګډون لري چې د فوټبال د ټیم غړي نه دي. څرنګه چې 3 تنه زده کوونکي د واليبال د ټیم غړي چې په عين حال کې د فوټبال د ټیم غړي هم دي، په $\overline{B}$ کې ګډون نه لري، نو په دې اساس د واليبال ټیم د $\overline{B}$ سټ په پام کې نیولو سره نیمګړی دی.

پوښتنې

1- د A, B ناخاپي پیښنه د دیاګرام په مرسته د A او B د بیلابیلو حالاتو لپاره چې د C پیښنه د A او B پیښې په خپل ځان کې لري، وښيئ او وضاحت ورکړئ.

2- په یوه مثال کې د A, B او C پیښې چې A او B په خپل ځان کې لري، وښيئ چې:

$a)\ \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$b)\ \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

3- لاندې پیښې په بیان سره وليکئ:

$a)\ \overline{A} \cup \overline{B}$

$b)\ \overline{A \cap B}$

$c)\ \overline{A \cup B}$

بشپړ سټ

که چیرې، S د افغانستان ولایتونه A د شمال او B نور پاتې ولایتونه وي، نو $S-A$ او $S-B$ کوم ولایتونه رابنیي؟

فعالیت

- د رمل یوې داني د اچولو نمونه یي فضا $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ او د $A=\{1,3,5\}$ ناځاپي پېښه په پام کې ونیسئ.
- د A د ناځاپي پېښې مکمله یعنې $\overline{A}$ کومه ناځاپي پېښه کیدلی شي؟
- یوه ناځاپي پېښه پیداکړئ چې A یې په بر کې ولري او په $\overline{A}$ کې شامله نه وي.
- آیاکولای شئ د S له نمونه یي فضا څخه یوه پېښه پیداکړئ چې په یوه وخت کې نه په A کې او نه په $\overline{A}$ کې ګډون ولري؟
- د A او $\overline{A}$ د ناځاپي پېښو اتحاد له حتمي پېښې سره څه اړیکه لري؟
- د A او $\overline{A}$ پېښو تقاطع، د ناشونې پېښې سره څه اړیکه لري؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راځي:

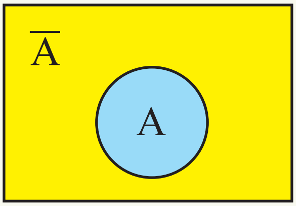
پایله: که چیرې S یوه نمونه یي فضا او A یوه ناځاپي پېښه وي:

- $\overline{A}$ یوه ناځاپي پېښه ده چې په یوه وخت د A سره نه پېښېږي.
- د A د هرې ناځاپي پېښې لپاره لرو چې:

a) $A\cup\overline{A}=S$

b) $P(A\cup\overline{A})=P(S)=1$

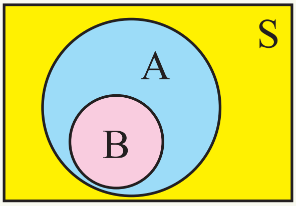
c) $P(\overline{A})=1-P(A)$

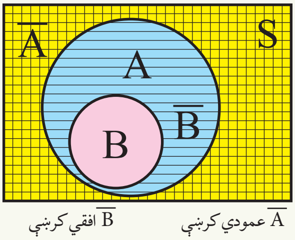


د S نمونه فضا

مثال: که د S په یوه نمونه یي فضا کې د A ناخاپي پېښه د B ناخاپي پېښه په خپل ځان کې ولري، په ګرافیکي ډول وښایاست، چې د $\overline{B}$ ناخاپي پېښه د $\overline{A}$ ناخاپي پېښه په خپل ځان کې لري؟

حل: څرنګه چې $B \subseteq A$ دی که چیرې مور په شکل کې $\overline{A}$ او $\overline{B}$ وښیو، نو له لاندې رسم شوي شکل څخه په آسانۍ سره لیدل کېږي چې: $\overline{A} \not\subset \overline{B}$





پوښتنې

1- د یوه مثال او ګراف په مرسته د S د نمونه یي فضا او د A او B ناخاپي پېښو لپاره وښیئ چې:

a) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\overline{S} = \emptyset$

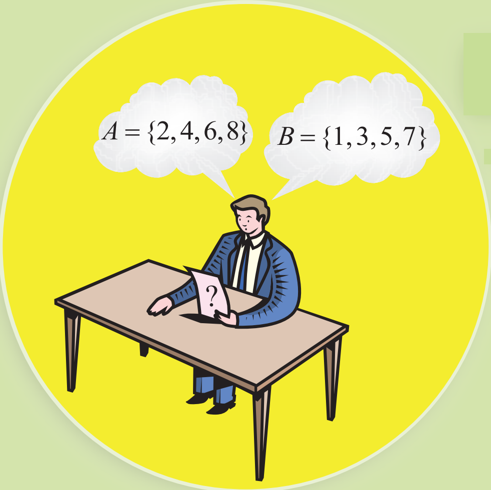
c) $S = \overline{\emptyset}$

2- د S نمونه یي فضا او د A او B ناخاپي پېښو لپاره لاندې پېښې په عبارت سره ولیکئ.

a) $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$

b) $\overline{(A \cup B)}$

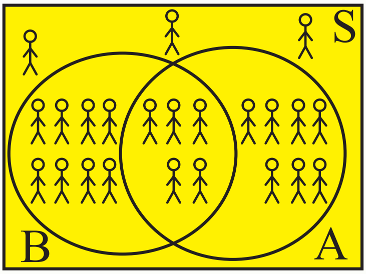
په ستونو مډل جوړول



تر اوســـه مو له الجبري یا هندسي قوانینو څخه د ژوندانه د مســـایلو په حل کې ګټه اخیســـتله. آیا فکر مو کړی چې د ســـتونو څخه هم کولای شـــو چې د خپلو مسایلو د حل لپاره ګټه واخلو؟

فعالیت

د یوه ټولګي له 23 زده کوونکو څخه مو د خویندو او وروڼو لرونکو زده کوونکو احصائیه راټوله کړې ده چې په لاندې دیاګرام کې لیکل شوې ده.



په شکل کې ټول هغه زده کوونکي چې خویندې لري د A په سټ او هغه زده کوونکي چې وروڼه لري د B په سټ سره ښودل شوي دي.

شکل په پام کې ونیسئ، د لاندې فعالیت سوالونو ته ځواب پیدا کړئ:

- څو تنه خویندې لري؟
- څو تنه وروڼه لري؟
- څو تنه هم خویندې او هم وروڼه لري؟
- څو تنه، نه خویندې او نه وروڼه لري؟
- څرنګه کولای شو، دا مسأله د ریاضي په ژبه ولیکو؟
- ټول هغه کسان چې خویندې نه لري، څو تنه دي؟

لیدل کیږي چې پورتنی ګراف کولای شي پورتنیو ټولو سوالونو او د هغوی په څېر نورو سوالونو ته په ښه توګه ځواب ورکړي.

نو له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راوړو:

پایله: لیدل کېږي چې دسټ د تیوري په کارولو سره، د ډېرو هغو مسایلو حل چې په ورځني ژوند کې ورسره مخامخ کېږو حل پیدا کړو او هغه و ارزوو.

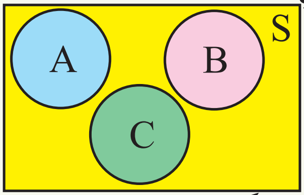
د سټ د تیوري تطبیق په احتمالاتو کې او یا په بل عبارت، د هغو ناخاپي پېښو د پېښېدو د مسائلو حل او د سټ د تیورۍ په مرسته د هغې ښودنه، د سټ د تیورۍ یوه بله د اهمیت وړ د تطبیق ساحه شمېرل کیدای شي.

مثال: د S د نمونه یي فضا او د B, A او C ناخاپه پېښې په لاندې دیاګرام کې ورکړل شوې دي، په پام کې ونیسئ، د لاندې پېښو د پېښېدو احتمال مطلوب دي:

a. د دې احتمال شته چې د A یا B ناخاپي پېښه رامنځته شي.

b. د دې احتمال شته چې د A پېښه رامنځته شي.

c. د دې احتمال شته چې د C پېښه رامنځته شي.



حل:

a. د A یا B احتمال په حقیقت کې د $A \cup B$ احتمال دی، څرنګه چې دا پېښې یو له بل څخه بېلې یا مستقلې دي، یعني $A \cap B = \phi$ دی، نو: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

b) د دې احتمال چې د A ناخاپي پېښه رامنځته شي،په دې معنا چې د $\overline{A}$ پېښه نه ده پېښه شوې، په بل عبارت، هغه پېښه ده چې د C یا B حادثه پېښه نه شي، نو:

$P(A) = 1 - P(\overline{A})$ څرنګه چې $P(\overline{A}) = P(C \cup B)$ دی، نو

$P(A) = 1 - (P(C \cup B)) = 1 - P(C) - P(B)$

c) د دې احتمال شته چې د C ناخاپي پېښه رامنځته نه شي د هغې پېښې د پېښېدو له احتمال سره برابر دی چې د A یا B پېښې، پېښې شي او دا د $A \cup B$ دپېښې د پېښېدو څخه عبارت ده.

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

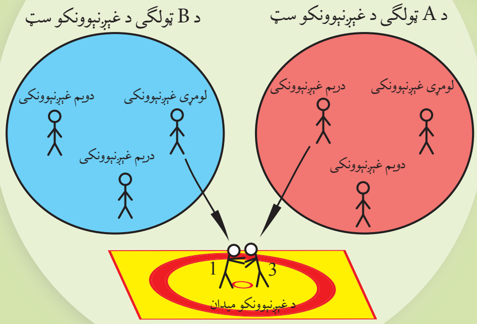
پوښتنې

1- هغه مثال چې په فعالیت کې مو ترې ګټه اخیستې ده په پام کې ونیسئ:

a) د دې احتمال مطلوب دی چې له دې ټولګې څخه یو زده کوونکی په تصادفي یا ناخاپي ډول وټاکل شي چې خور او ورو ونه لري.

b) د یوه داسې زده کوونکي د ټاکلو احتمال شته چې په ناخاپي ډول ټاکل کېږي، پیدا کړئ چې لږ تر لږه خور یا ورور ولري.

د شمېرلو اصل



د A او B دوو ټولگیو څخه درې تنه د غېږې نیولو لپاره ټاکل شوي دي، د A او B د ټیمونو غړي، په څو ډوله کولای شي، چې یو له بل سره په غېږه ورشي؟

فعالیت

دوه عدده، تور او سرمه یي رنگه پتلونونه له درې عدده سپین، آبي او پولادي رنگه کمیسونو سره په پام کې نیسو.

- په څو ډوله کولای شوو هغه واغوندو؟
- د شمېرنې د ترتیب لپاره له ونه ییز گراف څخه گټه واخلئ.
- د اغوستلو د ټولو امکاناتو او د پتلونونو او کمیسونو د شمېر تر منځ څه ډول اړیکه شته ده؟

له پورتني فعالیت څخه لاندې پایله په لاس راوړو.

پایله:

1- د دوو سټونو د عناصرو په ترکیب کې د ټولو امکاناتو شمېر د هر سټ د عناصرو د شمېر د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

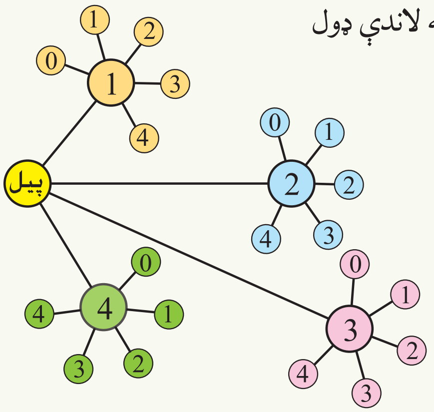
2- که چیرې د امکاناتو شمېر او یا د یوه سټ عناصر په m او د یو بل سټ د عناصرو شمېر مساوي په n وي، په دې حالت کې دواړه ټاکنې یو له بل سره په $(m \times n)$ ډوله امکان لري.

مثال: د 0، 1، 2، 3 او 4 رقمونو څخه په ګټې اخیستنې سره څو دوه رقمي عددونه جوړولای شو؟ ونه ییز گراف یې رسم کړئ او هغه احتمال پیدا کړئ چې له دې عددونو څخه یو عدد په ناڅاپي ډول و ټاکل شي چې هغه عدد په 2 د وېش وړ وي.

د دې کار لپاره د ذکر شوي دوه رقمي عدد د جوړولو لپاره دوه تش ځايونه د هر رقم لپاره په پام کې نيسو.

له کيڼ خوا په په تش ځای کې د راکړل شويو پنځو رقمونو څخه 4 امکانه (پرته له صفر) د 3,2,1,0 او 4 عددونو د ځای پر ځای کولو لپاره شته دي، خو د ښي خوا د تش ځای لپاره 3,2,1,0 او 4 هرو پنځو عددونو څخه ګټه اخلو. په دې ترتيب د دې رقم د ټاکلو پنځه امکانه شته دي چې په مجموعي ډول د پورتنيو عددونو په وسيله د دوه رقمي عدد د جوړولو لپاره $4 \times 5 = 20$ امکانه شته دي.

دا مطلب کولای شو د ونه ييز ګراف په مرسته په لاندې ډول وښيو، لکه:



د دې لپاره چې نوموړی، رقم پر 2 د وېش وړ وي د ښي خوا په تش ځای کې د 5 برابرو امکاناتو څخه يوازې 3 امکانه د (2,0 او 4) شته دی. د داسې عددونو د جوړولو لپاره چې پر 2 د وېش وړ وي، د $12 = 3 \times 4$ برابر حالتونه دي چې په دې حالت کې د هغه رقم د ټاکل کيدو احتمال چې پر 2 د وېش وړ وي عبارت دی له:

د هغه عدد احتمال چې په 2 د وېش وړ وي = P(په 2 د وېش وړ عدد) $= \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0.6 = 60\%$

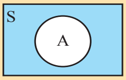
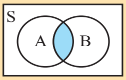
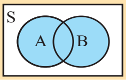
پوښتنې

1- د (م، ر، ی،م) تورو څخه په ګټې اخيستنې سره څو څلور حرفي معنا لرونکي او معنا نه لرونکي کلمې جوړولای شو؟ موضوع د ونه ييز ګراف په مرسته تشريح کړئ؟
که چيرې له دې ترکيبي کلمو څخه په ناڅاپي ډول يوه کلمه وټاکو د دې احتمال پيدا کړئ چې دا کلمه((مريم)) وي.

2- د 8,7,4,1,0 او 9 عددونو څخه د مبايل تليفون څو داسې شپږ رقمي نمرې جوړولای شو چې له کيڼ خوا څخه، په 077 پيل شوي وي؟

د نهم څپرکي لنډيز:

- د دې لپاره چې وکولای شو د ناخاپي پېښو د ترکيب د بېلا بېلو حالتونو د پرتله کولو لپاره د ستونو د تيوري په کارولو سره يو ښه تصور ولرو، هغه مو په لاندې جدول کې راټول کړل.

د پېښې احتمال	د Venn دياګرام او ناخاپي پېښه	د بيان شوندنه د سټ په واسطه	د ناخاپي پېښې بيان
خرنګه چې $P(S)=1$ دی نو $P(A)=1-P(\overline{A})$		$\overline{A}=S-A$ يا $S=A\cup\overline{A}$	د S هغه ټولې ناخاپي پېښې چې د A پېښه په کې ګډون و نه لري د A پېښې عکس دی.
$P(A\cap B)$		$A\cap B$	د A ناخاپه پېښه او د B ناخاپه پېښه پېښېږي.
$P(A\cup B)$ $=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$		$A\cup B$	لږ تر لږه د A يا د B د ناخاپي پېښو څخه يوه پېښېږي.

د شمېرنې حل: د دوو ستونو د عناصرو په ترکيب کې د ټولو امکاناتو شمېر، د هرې ترکيبي مجموعې، د عناصرو د ضرب له حاصل سره مساوي دی.

که د سټ د عنصرونو امکان په m ډول او د بل سټ د عنصرونو امکان په n ډول، وي يو له بل سره د دوی د ترکيب د ټولو امکاناتو شمېر، د $m\times n$ سره برابر دی.

د نهم څپرکي پوښتنې

1- که S يوه نمونه يي فضا او A د هغې يوه ناخاپه پېښه وي وښاياست چې:

a) که $A\subseteq\phi$ وي وښيئ چې $P(A)=0$ دی.

b) که $A\subseteq S$ وي په دې حالت کې $P(A)=1$ دی.

2- که چېرې د C ناخاپي پېښه، د A او B ناخاپي پېښې په ځان کې ولري، وښيئ چې همدارنګه، د C ناخاپي پېښه د $A\cup B$ په ځان کې ولري.

3- که چېرې د S د A او B يوه نمونه يي فضا وي، د B او $A\cup B$ ناخاپي پېښې يو بل په بر کې ولري، وښيئ چې د $A\cup B$ او د B احتمال يو د بل سره برابر دي.

4- که د S په يوه نمونه يي فضا کې د B ناخاپه پېښه د A پېښه په بر کې ولري، وښيئ چې د A او $A\cup B$ ناخاپه پېښې يو بل په ځان کې لري. سربېره پر دې واضح کړئ چې د دې ناخاپي پېښو احتمال يو له بل سره څه اړيکه لري؟

5- که چېرې S يوه نمونه يي فضا وي او B د هغې يوه ناخاپه پېښه وي، وښيئ چې: $S-B=\overline{B}$.

6- د ګراف په مرسته وښيئ چې دS يوې نمونه يي فضا د A او B دوو ناخاپي پېښو لپاره $B-A$ او $\overline{A}-\overline{B}$ سره مساوي دي، يعنې: $\overline{A}-\overline{B}=B-A$.

7- وښيئ چې، د $\overline{A}\cap\left[(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\right]$ ناخاپي پېښ، احتمال له صفر سره مساوي دی.