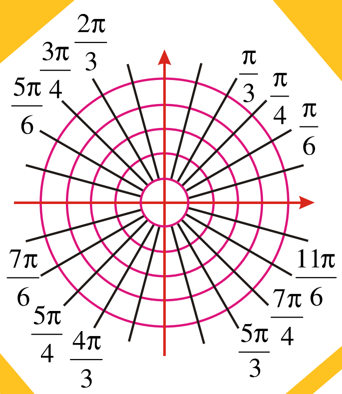
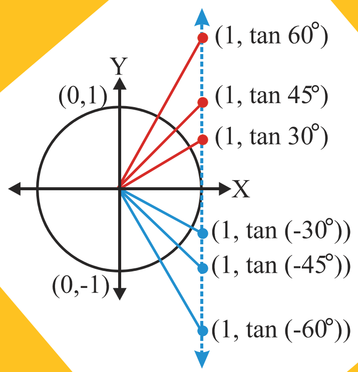
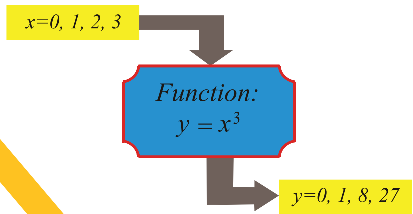
د پوهنې وزارت

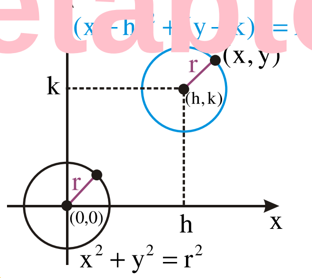
ریاضی

لسم ټولګی









Ketabton.com

۱۳۹۸

ریاضی لسم ټولګی

(c) ketabton.com: The Digital Library

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی — دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې — هر بچی يې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی — د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو — د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، ګوجر دي — پاميريان، نورستانيان
براهوي دي، قزلباش دي — هم ايماق، هم پشه يان
دا هيواد به تل ځليږي — لکه لمر پر شنه آسمان
په سينه کې د آسيا به — لکه زړه وي جاويدان
نوم د حق مو دی رهبر — وايو الله اکبر وايو الله اکبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحیم

رياضي
لسم
ټولګی

۱۳۹۸
هـ . ش.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: رياضي
مؤلفين: د تعليمي نصاب د رياضياتو ديپارتمنت د درسي کتابونو مؤلفين
اډيټ کوونکي: د پښتو ژبې د اډيټ ديپارتمنت غړي
ټولګی: لسم
د متن ژبه: پښتو
انکشاف ورکوونکی: د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف لوی رياست
خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړيکو او عامه پوهاوي رياست
د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي
د چاپ ځای: کابل
چاپخونه:
برېښناليک پته: curriculum@moe.gov.af

د درسي کتابونو د چاپ، وېش او پلورلو حق د افغانستان اسلامي جمهوريت د پوهنې وزارت سره محفوظ دی. په بازار کې يې پلورل او پېرودل منع دي. له سرغړوونکو سره قانوني چلندکيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوهنې د وزیر پیغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته یې ژوند رابښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه یې برخمن کړي یو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پیغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنګه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمریز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د ګران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدینو شوراګانې د هېواد د پوهنیز نظام شپږګوني بنسټیز عناصر بلل کېږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنګه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تأسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنیو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توګه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، هیڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤولیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې ګران زده‌کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او ګټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانګه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه ګټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځیرکو او فعالو ګډونوالو په توګه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې یې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپېڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وګړي یې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي

(c) ketabton.com: The Digital Library

عنوان	فهرست	مخ

لومړی څپرکی (پولینوم) ۳

الجبري افادې، د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه، د پولینوم د قیمت او پولینوم دضربونو د مجموعی پیدا کول، د پولینوم څلورګوني عملیې

د باقي مانده قضیه، فکټور قضیه او ترکیبي وېش

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

دویم څپرکی: رابطه ۵۳

مرتبې جوړې او کارتیز يني مستوي، دکارتیزيني ضرب حاصل ا وګراف يې

رابطه او معکوسه رابطه.

معادله رابطه.

د څپر کي لنډيز او پوښتنې

دریم څپرکی : تابع ۶۹

د تابع دليکلو طريقه او ديوې تابع د قيمت پيدا کول، د تابع د تعريف د ساحې پيدا کول، د يوې تابع ګراف او د ګراف له مخې

د يوې تابع پېژندنه، دګراف له مخې د يوې تابع د تعريف او د قيمتونو د ناحيو او د تابع قيمتونو پيدا کول، ځينې خاصې تابع ګانې اوګرافونه يې.متزايدې او متناقصې تابع ګانې، جفتې او طاقې تابع ګانې دګرافونو انتقال (عمودي انتقال، افقي انتقال او دعمودي او افقي انتقالونو ترکيب، د تابع ګانو عمليې د تابع ګانو ترکيب، معکوسه تابع، يو په يو تابع، د تابع او د هغې د معکوسي تابع ګراف، پولينومي تابع ګانې (لومړۍ او دويمه درجه تابعګاني) اوګرافونه يې

ناطقی تابع ګانې اوګراف يې (عمودې، افقي او مايل مجانبونه)

د څپرکي لنډيز او پوښتنې

څلورم څپرکی: مثلثاتي تابع ګاني ۱۴۹

زاويه او د زاويې د اندازه کولو واحدونه، ديوې زاويې معياري حالت اوکوټر مينل زاويې

مثلثاتي تابع ګانې او د ځينو خاصو زاويو مثلثاتي نسبتونه

د $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$ او 360° زاويو مثلثاتي نستونه

د يوې حاده زاويې او نورو زاويو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړيکې

د مثلثاتي تابع ګانو ګراف

د څپرکي لنډيز او پوښتنې

پنځم څپرکی: د مثلثاتو تطبیقات ۲۲۳

د مرکبو زاويو د مثلثاتي نسبتونه، د دوو زاويو د مجموعې او تفاضل مثلثاتي فورمولونه

د αزاويې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د 2α او 3α زاويو د مثلثاتي نسبتونو پيداکول، د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل بدلول، د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل په شکل،

(c) ketabton.com: The Digital Library

عنوان	فهرست	مخ

د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول په جمع یا یې په تفاضل باندې، د قوس اوږدوالی، د یوې دایرې قطاع او مساحت یې، د دایرې قطعه او مساحت، د مثلث مساحت د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو ترمنځ د زاویې له جنسه، د مثلث مساحت د مثلث د دریو ضلعوله جنسه (د هیرون فورمول) د یوه مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاع ګانې

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

شپږم څپرکی: مختلط عددونه **۲۷۷**

موهومي عددونه او د موهومي عددونو څلورګونې عملیې

د مختلطو عددونو د جمعې او تفریق عملیې

د مختلطو عددونو ضرب، د یو مختلط عدد مزدوج، د مختلط عدد ضربي معکوس

د مختلطو عددونو وېش

د مختلطو عددونو په ساحه کې ددویمې درجې یو مجهوله معادلو حل

د څپرکی لنډیز او پوښتنې

اووم څپرکی تحلیلي هندسه **۳۰۵**

د وضعیه کمیاتو سیستم او د دوو نقطو ترمنځ فاصله

د هغې نقطې د وضعیه کمیاتو پیداکول چې یو قطعه خط په یوه نسبت باندې وېشي

د یوه مستقیم خط میل

د یوه مستقیم خط معادله (د یو مستقیم خط معیاري معادله، دهغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي، دوې نقطې یې معلومې وي. له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي، د مستقیم خط نورمال معادله او د مستقیم خط عمومي معادله)

د یوه مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول، د مستقیم خط د معادلو په نورو شکلونو باندې.

د یوې نقطې فاصله له یوه مستقیم خط څخه، د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله

دایره او د دایرې معادله، د یوه مستقیم خط حالتونه له یوې دایرې سره، د مماس معادله او د مماس اوږدوالی

د مثلث د مساحت پیداکول چې د راسونو و ضعیه کمیات یې معلوم وي.

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

اتم څپرکی احصائیه **۳۵۹**

د فریکونسي څو ضلعي ګراف، د ساقې او پاڼې ګراف، ربعي (څلورمې)، صندوقچه یي ګراف، د نارمل منحني د مرکزي ټاکوونکو پرتله کول، ربعي انحراف، واریانس، معیاري انحراف،

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

نهم څپرکی د ریاضي منطق **۳۹۱**

د شهودي درک استدلال، تمثیلي استدلال، استقرایي استدلال، د ریاضي د استقرا استدلال، استنتاجي استدلال، د مثال د نفي کولو استدلال، غیر مستقیم ثبوت، د ریاضي منطق او د بیان استنتاج، د څپرکي لنډیز او پوښتنې

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی څپرکی

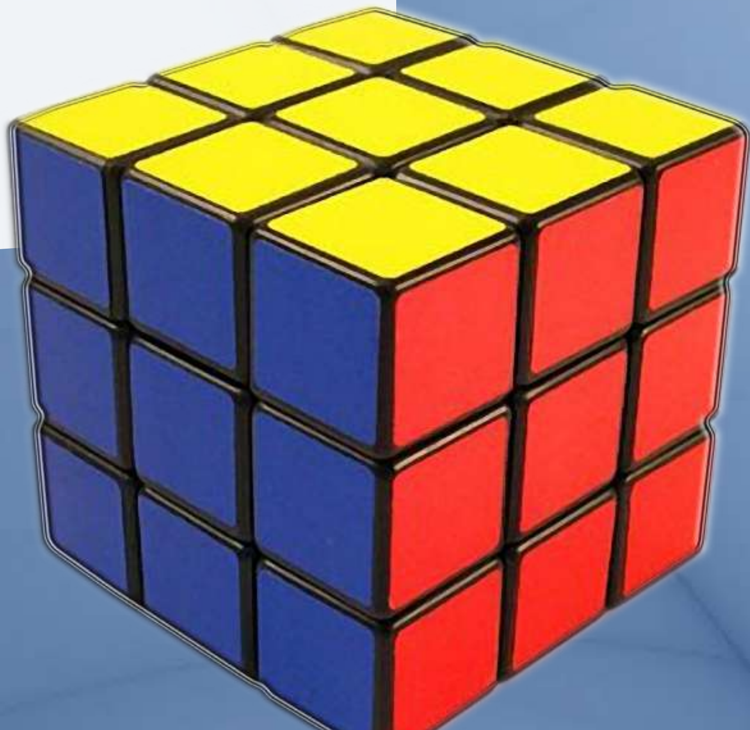
پولینوم

پولینوم(Polynome)

یا (Polynomial)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(3x^2+5x+2)+(5x+6)$$
$$=3x^2+5x+2+5x+6$$
$$=3x^2+5x+5x+6+2$$
$$=3x^2+10x+8$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبري افادي
(Algebraic Expressions)

ایــــا ویـــلای شـیئ چـې پـه $\frac{x^4-1}{x^2}$ ، $\sqrt{y^2+1}$ او $x^3+\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x}+y^3$ الجبري افادو کې کومـه یوه ناطقه اوکومه یوه غیر ناطقه الجبري افاده ده؟

متحول او ثابت (variable and constant): متحول یو سمبول (Symbol) دی چې د یوه غیر خالي سټ د هر عنصر په ځای وضع کېږي.یا یو توري چې قیمتونه یې تغیر کوي د مثال په ډول که $A=\{x/x\in IN$ او $x\le 10\}$ وي.

نو د A په سټ کې x له یوه څخه تر 10 پورې د طبیعي عددونو قیمتونه اخیستلای شي. x ، ته متحول(Variable) وایي. عموماً متحولونه د انګلیسي ژبې د کوچنیو تورو، لکه: x,y,z او نورو په واسطه ښودل کېږي.

د یوه عدد قیمت تغیر نه کوي، لکه: د 4 عدد هیڅکله له 5 یا 3 او یا کوم بل عدد سره مساوي کېدای نه شي، نو ټول حقیقي عددونه ثابت (Constants) دي.

د حقیقي عددونو سربېره د انګلیسي ژبې توري، لکه: $a,b\,c\ldots$ او نور هم د ثابتو پر ځای کارول کېږي.

الجبري افاده (Algebraic Expression): کېدای شي الجبري افاده له یوه ثابت، یو متحول او یا د ثابتو او متحولونو له ترکیب څخه جوړه شوې وي. د الجبري افادو لاندې مثالونه وګورئ.

$5\sqrt{x}$ ، $4x+5+\frac{15}{t^2}$ ، $\sqrt{3}x$ ، x^2-x+1 ، x ، -12 ، 12 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $3x^2$ الجبري افاده کې 3 ته ضریب (Coefficient) وايي. په $-\frac{1}{2}y$ کې د $-\frac{1}{2}$ عدد او په x کې (1) ضریب دی. $-3x^5y^5$ او $15x^5y^5$ مشابه حدونه (Liketerms) دي چې مشابه متحولونه او مساوي توانونه لري، خو عددي ضریبونه يې سره توپیر لري.

د الجبري افادو ډولونه: الجبري افادې په درو ډولونو دي.

1- پولینومي الجبري افادې (Polynomial algebraic expressions)

پولینوم: هغه یوه یا څو حده الجبري افاده چې د تورو توانونه يې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي، پولینوم نومېږي او x^3-x+1 ، $2x^2+x-1$، $x-1$، 12 پولینومونه دي، خو $x^{-2}+x-1$، $\frac{1}{x}+x$ او $x^3+\sqrt{x}+\frac{y}{x^2}$ پولینومونه نه دي یا د پولینوم مشخصې دا دي:

- د ټولو متحولونو توانونه يې مکمل عددونه وي.
- په مخرج کې متحول ونه لري.
- متحول تر جذر لاندې نه وي.

لومړی مثال: په لاندې راکړل شوو الجبري افادو کې کوم یو پولینوم او کوم یو يې پولینوم نه دي؟

$$\text{e)}x^{-3}+x^2 \quad , \quad \text{d)}x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \text{c)}\frac{1}{y^2}-\frac{2}{x^3} \quad , \quad \text{b)}2\sqrt{x} \quad , \quad \text{a)}\sqrt{2}x$$

$$\text{i)}6a^2-4a \quad , \quad \text{h)}88 \quad , \quad \text{g)}9x^2-\frac{7}{x^2} \quad \text{f)}8p^2+p^{2.2}$$

حل: h, a او i پولینومونه دي، خو b, c, d, e, f او g پولینومونه، نه دي. په یاد ولرئ چې هر پولینوم، یوه ناطقه الجبري افاده ده، خو هره ناطقه الجبري افاده پولینوم نه دی. د مثال په ډول:

$x^3+\frac{y}{x^2}+\frac{y}{x}+y^3$ یوه ناطقه الجبري افاده ده، خو پولینوم نه دی.

12 هم یو پولنیوم دی، ځکه چې: $12=12x^0$ دی او صفر هم د مکملو عددونو په سټ کې شامل دی، خو $5\sqrt{x}$ او $\frac{5}{x^3}$ پولینومونه نه دي، ځکه $5\sqrt{x}=5x^{\frac{1}{2}}$، $\frac{5}{x^3}=5x^{-3}$ چې $\frac{1}{2}$ او -3

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مکملو عددونو په سټ کې شامل نه دي.

پولینوم د یو توري په واسطه، لکه: P ښودل کیږي، یو پولینوم چې له یو متحول څخه جوړ شوی وي عمومي شکل یې په لاندې ډول دی چې د معیاري شکل په نامه یادیږي.

$$P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

n یو مکمل عدد او $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}, a_n$ ضریبونه دي چې حقیقي عددونه دي. که $a_n \neq 0$ وي، نو n د پولینوم درجه ده.

فعالیت

له $\sqrt{8}x^3, -8x^2$, $\frac{1}{x}$, x , $\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x}+6$, $2x^3-x^2$ او $8\sqrt{x}$ الجبري افادو څخه کومه یوه یې پولینوم دی او کومه یوه پولینوم نه دی؟

دویم مثال: د $P(x)=-5x^3+x^2-x+12$ په پولینوم کې، $n=3$ ، $a_n=-5$ ، $a_2=1$ ، $a_1=-1$ و $a_0=12$ دی. او د $11x^2-1$ په پولینوم کې، $n=2$ ، $a_n=11$ ، $a_1=0$ ، او $a_0=-1$ دی.

2- ناطقه الجبري افاده (Rational algebraic expression):

که یوه الجبري افاده د $\frac{p}{q}\,(q\neq 0)$ په شکل ولیکلای شو چې p او q پولینومونه وي. داسې الجبري افادې ته ناطقه الجبري افاده وایي. د مثال په ډول $x^2-\frac{1}{x^2}$ چې د $\frac{x^4-1}{x^2}$ په شکل یې هم لیکلای شو چې یو متحول لري یوه ناطقه الجبري افاده ده. څرنګه چې هرې الجبري افادې ته یو مخرج ورکولای شو، نو (x^2-1) هم یوه ناطقه الجبري افاده ده، ځکه چې $\frac{x^2-1}{1}=x^2-1$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- غیر ناطقه الجبري افاده (Irrational algebraic expression):

داسې یوې الجبري افادې ته چې د دوو پولینومونو د خارج قسمت په بڼه یې نه شو لیکلای، غیر ناطقه الجبري افاده ده، لکه: $\sqrt{xy}$، $\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$ او $\sqrt{y^2+1}$ د غیر ناطقو الجبري افادو مثالونه دي.

یوه الجبري افاده کېدای شي چې ناطقه، غیر ناطقه او یا پولینومي الجبري افاده وي. پولینوم هغه یو یا څو حده الجبري افاده ده چې د تورو توانونه یې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.

پوښتنې

1- په لاندې الجبري افادو کې کومه یوه ناطقه، غیر ناطقه او پولینومي الجبري افاده ده؟

$$\frac{1}{x} \;,\quad \sqrt{x}-\frac{1}{2} \;,\quad \frac{3x^2}{2} \;,\quad \frac{m+3}{6} \;,\quad x+\frac{1}{x} \;,\quad 3x^2+\frac{xy}{2} \text{ او } 13$$

2- په لاندې الجبري افادو کې کومه یوه یې پولینوم او کومه یوه یې پولینوم نه دی؟

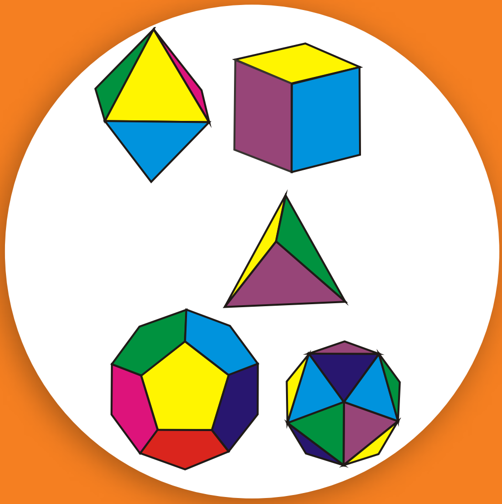
$$3x^2+\frac{xy}{2} \;,\quad -20a^3b+28ab^4 \;,\quad \frac{1}{7}x^3-x$$

$$\frac{1}{x}-\frac{x^2}{5} \;,\quad 8\sqrt{x} \;,\quad 8x^{-8} \;,\quad 3x \;,\quad -0.03$$

3. د $Px^4-ax^3+bx^2+cx+d$ په پولینوم کې، a_1,a_2,a_3,a_n او a_0 وښیاست.

4. د $P(x)=\frac{x^3}{2}-2x^2-1$ په پولینوم کې، a_1,a_2,a_3 او a_0 وښیاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه

آیا ویلای شئ چې د:

$12y^5x^3 + x^4y^3 \square 2x^3 \square + x^2 - x$ او

12 د پولینومونو درجې څو دي؟

مونوم عدد، یو متحول یا د یو عدد او یو یا څو متحولینو د ضرب حاصل دی.

$3x$ یا $16x$ ته مونوم یا (Monomial) (یو حده) الجبري افاده وایي. $x-4$ یا $ab-y$ ته باینوم (Binome) یا (Binomial) (دوه حده) الجبري افاده وایي او د $2x^3-x-1$ الجبري

افاده ترینوم (Trinomial) (درې حده) الجبري افاده ده او $\sqrt{2x}-\frac{1}{y}+1$ الجبري افادې ته مولټینوم (Multinomial) وایي. په یوه پولینوم کې مونومونه د پولینوم د حدونو په نامه یادیږي او هر مونوم یو پولینوم دی.

ځینې وختونه پولینوم له یو، دوه، درې او څو متحولونو څخه جوړ شوی وي.

د $2x^3-8x^2+7x+11$ پولینوم د یو متحول، $2x^3-3y$ پولینوم د دوه متحولونو او $x+y+z$ د دریو متحولونو لرونکی پولینوم دی چې په لاندې جدول کې ښودل شوي دي.

متحول	مونوم (یو حده)	باینوم (دوه حده)	ترینوم (درې حده)
یو متحول	$5x^3$	$5y^2+3y$	$3x^2+2x-4$
دوه متحولونه	$7x^2y$	$7x^2-4y^3$	$6x^2+5x-3y^2$
درې متحولونه	$4xyz^2$	$8a^2b+4c$	$3a^2b^2+6c^2-z^5a$

یادونه: باید پام مو وي چې $2\sqrt{xy}, \frac{5}{x}$ او y^{-3} هریو یې مونوم نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د ax^2+bx+c، $2x-y$، 15، $-3x$ او $4x^2-4y$ الجبري افادو کې مونوم، باینوم او ترینوم وښیاست.

د یوه پولینوم درجه (Degree of a Polynome): که پولینوم له یوه توري څخه جوړ شوی وي، د هغه توري لوړ توان د پولینوم درجه ده، لکه: د $x^5+1+2x+x^3-$ د پولینوم درجه 5 ده. که پولینوم له ډېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د زیات توان لرونکي مونوم درجه د پولینوم درجه ده، لکه: د $2x^2y^3-5xy^5+x^3y$ د پولینوم درجه 6 ده، $(1+5=6)$ او دا پولینوم نظر x ته دریمه درجه او نظر y ته پنځمه درجه پولینوم دی. که د یوه پولینوم درجه یوه وي، خطي پولینوم (Liner Polynome) او که د پولینوم درجه دوه وي، دویمه درجه پولینوم (Quadratic Polynome) او که درجه یې درې وي، دریمه درجه پولینوم (Cubic Polynomial) ورته وایي. او هم د $3x^2$ مونوم دویمه درجه، د $3x^2y^3$ مونوم درجه 5 او د 12 مونوم درجه صفرده. داسې پولینوم ته ثابت پولینوم وایي، ځکه چې $12=12x^0$

ثابت پولینوم: هغه پولینوم دی چې درجه یې صفر وي.یا هغه پولینوم دی چې د ټولو متحولونو ضریبونه یې صفر وي.

لومړی مثال: د m او n قیمتونه پیدا کړئ، که $(2m-4)x^2+(5-n)x+13$ یو ثابت پولینوم وي.

حل: څرنګه چې دا یو ثابت پولینوم دی، نو د هر حد د متحول ضریب یې صفر دی.

نو:

$$2m-4=0 \qquad 5-n=0$$
$$2m=4 \qquad n=5$$
$$m=2$$

صفري پولینوم (Zero Polynome): که د ثابت پولینوم ثابت حد صفر وي، داسې پولینوم ته صفري پولینوم وایي، لکه: $P(x)=0$ ، د صفري پولینوم درجه تعریف شوې نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د a قیمت پیدا کړئ که چېرې $(b-4)x^3-(2c+6)x+(a-b+c)$ یوصفري پولینوم وي.

حل: په صفري پولینوم کې هر حد صفر وي، نو:

$$b-4=0 \qquad 2c+6=0 \qquad a-b+c=0$$
$$b=4 \qquad 2c=-6 \qquad a-4-3=0$$
$$c=-3 \qquad a=7$$

دریم مثال: د $P(x)=x^2-1+3x^5$ ، $g(x)=2xy^2-x^2y^3$ او $h(x)=\sqrt{3}$ د پولینومونو درجې پیدا کړئ.

حل: د $P(x)$ د پولینوم درجه 5 د $g(x)$ د پولینوم درجه هم 5 ده، $(n=5)$ خو د $h(x)$ د پولینوم درجه صفر ده.

فعالیت

د هر پولینوم درجه څو ده؟ او هم د دې پولینومونو درجې نظر هر توري ته پیدا کړئ.

$x^2-x^3+2x+5x^5$, $x-1$, 15 , $2m^3n^2-3mn^3-mn$

مکمل او ناقص پولینومونه: مکمل پولینوم هغه پولینوم دی چې له لوړ توان څخه تر ثابت عدد پورې ټول حدونه ولري $x^3+1+2x-x^2$, $x-1$ او 51 مکمل پولینومونه دي، خو x^2-1 او x^3+x+1 ناقص پولینومونه دي. موږ کولای شو دا ناقص پولینومونه د مکملو پولینومو په شکل ولیکو، لکه: $x^2-1=x^2+0\cdot x-1$ او $x^3+x-1=x^3+0\cdot x^2+x-1$

منظم او غیر منظم پولینومونه: د $2x^3-3x^2+4x-1$ یا $-11+12x+13x^2-x^3$ پولینومونه منظم، خو د $3x^4-x+1+x^3+x^2$ پولینوم یو غیر منظم پولینوم دی. کولای شو چې یو غیر منظم پولینوم د منظم پولینوم په شکل ولیکو، لکه: همدا پولینوم په دوه ډوله د منظم پولینوم په شکل لیکلای شو. $3x^4+x^3+x^2-x+1$ یا $1-x+x^2+x^3+3x^4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نزولي او صعودي پولينومونه
:(Descending and ascending Polynomes)

که یو پولینوم د متحول له لوړ توان څخه ټیټ توان ته ترتیب شوی وي، نزولي او که له ټیټ توان څخه لوړ توان ته ترتیب شوی وي، صعودي ترتیب ورته وایي.

د مثال په ډول $x^4 + 3x^3 + x^2 + x + 1$ په نزولي ترتیب او د $1 + x + x^2 + 3x^3 + x^4$ پولینوم په صعودي ترتیب لیکل شوی دی.

که یو پولینوم له دوو یا څو تورو څخه جوړ شوی وي، نو موږ کولای شو نظر هر توري ته يې په صعودي یا نزولي ډول ترتیب کړو، لکه: د $x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 - 5y^4$ پولینوم نظر x ته په نزولي ډول او نظر y ته په صعودي ډول ترتیب شوی دی.

فعالیت

دا پولینومونه په صعودي ډول ترتیب کړئ:

$$4x - 5 + 6x^2 + 8x^3 \ , \ 2y^2 - 4y + 3 - 3y^4 + y^3 \ , \ 2a^3 - 5 + 4a^4 + a^5 + 3a^2 + a$$

څلورم مثال: د $P(y) = 4xy^4 - 3x^3y^2 + 2x^2y^3 + x^4 + y^5$ پولینوم نظر y ته په صعودي ترتیب ولیکئ:

حل

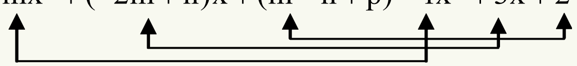
$$P(y) = x^4 - 3x^3y^2 + 2x^2y^3 + 4xy^4 + y^5$$

معادل پولینومونه: هغه پولینومونه دي چې یو متحول ولري او د مشابه حدونو ضریبونه یې سره مساوي وي.

پنځم مثال: که د $x^2 + 3x + 2$ او $m(x-1)^2 + n(x-1) + P$ پولینومونه سره معادل وي، د n, m او p قیمتونه پیدا کړئ.

حل

$$m(x^2 - 2x + 1) + nx - n + p = x^2 + 3x + 2$$
$$mx^2 - 2mx + m + nx - n + p = x^2 + 3x + 2$$
$$mx^2 + (-2m + n)x + (m - n + p) = 1x^2 + 3x + 2$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

په نتیجه کې:

$$\begin{aligned} &m=1 \\ &-2m+n=3 &&\Rightarrow n=5 \\ &m-n+p=2 &&\Rightarrow p=6 \end{aligned}$$

متجانس پولینومونه (Hemogence Polynomes): چې د ټولو حدونو توانونه يې سره مساوي وي، لکه: د $2x^2+y^2-z^2$ يو متجانس پولینوم دی.

شپږم مثال: که د $3x^2y+5x^mz-7y^{n-3}z^2$ پولینوم متجانس وي، د m او n قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{aligned} &m+1=2+1 && n-3+2=m+1 \\ &m=2 && n-1=m+1 \\ & && n-1=2+1 \\ & && n=4 \end{aligned}$$

که پولینوم له یوه توري څخه جوړ شوی وي، د دې توري لوړ توان د پولینوم درجه ده او که پولینوم له ډېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د لوړ توان لرونکي مونوم درجه د دې پولینوم درجه ده. هغه پولینومونه چې یو متحول ولري او د مشابه حدونو ضریبونه یې سره مساوي وي، د معادلو پولینومونو په نامه یادېږي او هغه پولینوم چې د ټولو حدونو توانونه یې سره مساوي وي، متجانس پولینوم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- په لاندې افادو کې مونوم، باينوم او ترينوم وښياست او درجې يې پيدا کړئ.

$$\frac{1}{2}x^2y^5 \quad , \quad x^2-y+4 \quad , \quad x-1$$
$$x-x^2-x^3 \quad , \quad 12x \quad , \quad -12$$

2- په لاندې پولينومونو کې مکمل او ناقص پولينومونه وښياست او بيا ناقص پولينومونه د مکملو پولنيومونو په شکل وليکئ.

$$x \quad , \quad x+1 \quad , \quad x^2-1 \quad ,$$
$$2x^2-2x-2 \quad , \quad 15 \quad , \quad x^3+x-1$$

3- لومړی د لاندې پولينومونو درجې پيدا کړئ او بيا يې په نزولي ډول ترتيب کړئ.

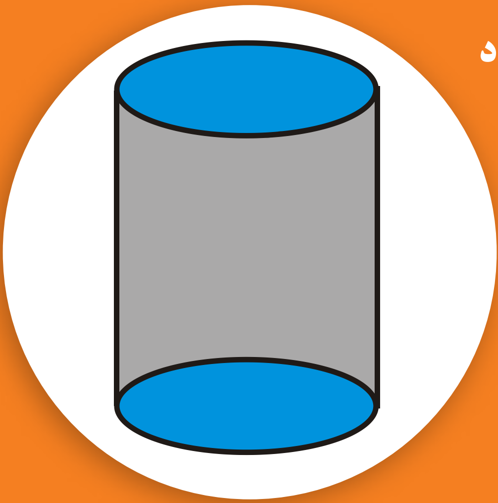
$$4x-5+6x^2+8x^3$$
$$2y^2-4y+3-3y^4+y^3$$
$$1-x^3+x^2+2x^4-x^5+x$$

4- که $P(x-1)^2+n(x+3)+c=2x^2-x+22$ وي د n,p او c قيمتونه پيدا کړئ.

5- د b,a او c قيمتونه پيدا کړئ که $P(x)=7x^4-(2a-3)x^3+5x-(c-3)$ او $Q(x)=(3b+4)x^4+2x^3+5x$ معادل پولينومونه وي.

6- که $5xy^2+8x^pz-3y^{m-3}z^2$ يو متجانس پولينوم وي، د m او p قيمتونه پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولینوم د قیمت او د پولینوم د ضریبونو د مجموعې پیدا کول

آیا ویلای شئ د $x=-1$ لپاره د
$P(x)=x^3-x^2-x-1$ پولینوم قیمت
څو دی؟ یا $P(-1)=?$

که په یوه پولینوم کې د متحول پر ځای یو حقیقي عدد (د متحول خاص قیمت) وضع کړو، یو حقیقي عدد په لاس راځي چې دا حقیقي عدد دې پولینوم قیمت دی. د $x=2$ لپاره د $P(x)=3x+2$ پولینوم قیمت $P(2)=3\cdot 2+2=8$ دی.

لومړی مثال: د $P(x)=2x^2-7x+1$ پولینوم قیمتونه د $P(5)$، $P(-1)$ او $P(0)$ لپاره پیدا کړئ.

حل:

$$P(5)=2\cdot 5^2-7(5)+1=50-35+1=51-35=16$$
$$P(0)=1$$
$$P(-1)=2(-1)^2-7(-1)+1=2+7+1=10$$

فعالیت

د $P(x)=x^5-x^3-x-1$ پولینوم لپاره $P(0)$، $P(-1)$ او $P(1)$ پیدا کړئ.

دویم مثال: که $P(x)=16x^3-8x^2+\frac{3}{4}$ وي، نو $P(-\frac{1}{4})$ پیدا کړئ.

حل:

$$P(-\frac{1}{4})=16(-\frac{1}{4})^3-8(-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}=16(-\frac{1}{64})-8(\frac{1}{16})+\frac{3}{4}$$
$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{-1-2+3}{4}=\frac{-3+3}{4}=\frac{0}{4}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم مثال: لکه: څرنګه چې پوهېږئ د دايرې محيط (Circumference) د

$C = 2\pi r$ له فورمول څخه لاس ته راځي چې که چېرې $\pi = \dfrac{22}{7}$ او د دايرې شعاع

$r = 3\dfrac{1}{2}cm$ وي، نو د دې دايرې محيط (C) پيدا کړئ.

حل

$$C = 2\pi r = 2\cdot\frac{22}{7}\cdot\frac{7}{2}cm = 22cm$$

څلورم مثال: که b, a او c د مثلث د ضلعو اوږدوالی او p د مثلث د محيط نيمايي وي يعنې

$p = \dfrac{a+b+c}{2}$، د مثلث مساحت د دې فورمول په واسطه لاس ته راځي.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

که په يوه مثلث کې د ضلعو اوږدوالی $b = 12cm,\ a = 9cm$ او $c = 15cm$ وي، ددې مثلث مساحت پيدا کړئ.

حل

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+12+15}{2} = \frac{36}{2} = 18cm$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)}$$

$$= \sqrt{18\cdot9\cdot6\cdot3} = \sqrt{2\cdot9\cdot9\cdot2\cdot3\cdot3} = \sqrt{2^2\cdot3^2\cdot9^2} = 2\cdot3\cdot9 = 54cm^2$$

فعاليت

د استوانې حجم د $V = \pi r^2 h$ له فورمول څخه لاس ته راځي چې V د استوانې حجم، r د قاعدې شعاع او h د استوانې لوړوالی دی. که د يوې استوانې $r = 5cm$ او $h = 21cm$ وي، ددې استوانې حجم پيدا کړئ.

د پولينوم د ضريبونو د مجموعې پيدا کول:

که $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ وي، د ضريبونو مجموعه يې $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ ده.

پنځم مثال: د $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ پولينوم د ضريبونو مجموعه په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: $p(1)$ پیدا کوو: $P(1)=2\cdot1^3+5\cdot1^2-3\cdot1+1=2+5-3+1=5$

که پولینوم له څو تورو څخه جوړ شوی وي، د هر توري پر ځای یو (1) وضع کوو، لکه: د $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$ د ضریبونو د مجموعې د پیداکولو لپاره د x او y پر ځای یو (1) وضع کوو:

$$1^4+4\cdot1^3\cdot1+6\cdot1^2\cdot1^2+4\cdot1\cdot1^3+1^4=1+4+6+4+1=16$$

شپږم مثال: د $(x-3y)^4$ د ضریبونو مجموعه پیدا کړئ.

حل:

$$(1-3\cdot1)^4=(1-3)^4=(-2)^4=16$$

اووم مثال: د $(7x^2-5x-1)^{600}(2x^3-1)^{17}(x+2)^4$ د ضریبونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل:

$$(7\cdot1^2-5\cdot1-1)^{600}(2\cdot1^3-1)^{17}(1+2)^4=(1)^{600}(1)^{17}(3)^4=81$$

اتم مثال: که ددې توپ شعاع 6cm وي، ددې توپ حجم پیدا کړئ.

حل:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(6cm)^3=\frac{4}{3}\pi(216cm^3)=288\pi cm^3$$

د x د راکړل شوي قیمت لپاره د $P(x)$ په پولینوم کې د x پر ځای راکړل شوی قیمت وضع کوو، د پولینوم قیمت په لاس راځي که په یوه پولینوم کې د توري (متحول) پر ځای یو وضع شي د پولینوم د ضریبونو مجموعه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1. که $p(x)=-x^4-x^3-x^2-x-1$ وي $p(-1)$ او $p(\frac{1}{2})$ پیداکړئ.
2. د $p(x)=kx^3-x^2+3x-1$ په پولینوم کې که $p(2)=17$ وي د k قیمت پیداکړئ.
3. که د mx^2-2x+1 د ضریبونو مجموعه 18 وي د m قیمت پیداکړئ.
4. د $x=-\frac{1}{2}$ لپاره د $p(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ پولینوم قیمت پیداکړئ.
5. د $A=x^2-4x+4$ ، $B=-4x^3+10x^2$ ، $C=-x+3x^4-6x^3$ او $D=x^2+4x-4$ په پولینومونو کې د $x=4$ لپاره دکوم پولینوم قیمت له 100 څخه زیات دی؟

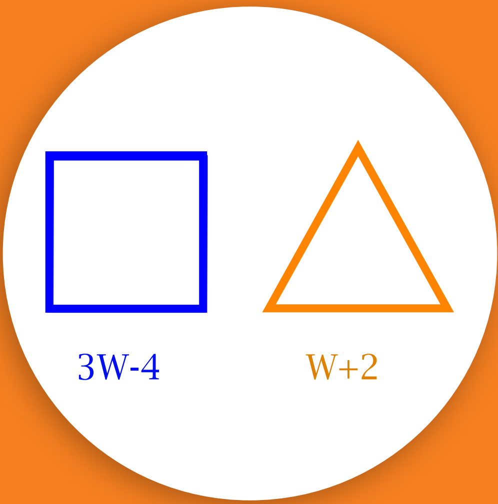
a) C b) D c) A d) B

6. په لاندې پولینومونو کې د $x=5$ لپاره دکوم پولینوم قیمت تر ټولو زیات دی؟

a) x^2-2x+6
b) $3x^4+6x+12$
c) $-x^3-40x-300$
d) x^5-120x^4+10

7. که $p(x)=x^4-x^3-x^2-x-1$ وي، $p(-1)$ ، $p(0)$ ، $p(\frac{1}{2})$ او $p(-\frac{1}{2})$ پیداکړئ.
8. د $x=2$ لپاره د $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{8}x+\frac{7}{8}$ پولینوم قیمت پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولينوم څلورګوني عمليې

که د مربع هره ضلع $3w-4$ او د متساوي الاضلاع مثلث هره ضلع $w+2$ وي، يوه الجبري افاده وليکئ چې د دواړو شکلونو محيط ښکاره کړي.

که $A=8x^2-2x+3$ او $B=9x-5$ وی، $A+B$ او $A-B$ پيداکړئ.

1 **د جمعې عمليه**: مشابه حدونه (Like terms) يو له بل سره جمع کېږي او هم مشابه حدونه يو له بله تفريق کېږي، دا دواړه عمليې په افقي او عمودي ډول سر ته رسيدلای شي.

لومړی مثال: که $A=-3cd^2-2cd+5$ او $B=9cd-7cd^2-5$ وي $A+B$ پيداکړئ.

حل:

$$A+B=(-3cd^2-2cd+5)+(9cd-7cd^2-5)$$
$$=-3cd^2-2cd+5+9cd-7cd^2-5=-10cd^2+7cd$$

فعاليت

که $A=ab^2+3a$, $B=2ab^2+3a-2$ او $C=2a+4$ وي، د دې درې واړو پولينومونو د جمعې حاصل پيداکړئ. $(A+B+C=?)$

دويم مثال: جمع يې کړئ که: $A=1+2x+3x^2$, $B=3x-5-2x^2$ او $C=x^2-5x+4$ او هم که $A=a^4b-2a^3b^2-3a^2b^3-4c-2b$, $B=a^3b^2-2a^2b^3+4b-4$ او $C=a^4b+a^3b^2-2c$ وي.

حل: لومړی پولينومونه په منظم ډول ليکو او بيا مشابه حدونه سره جمع کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{r} 3x^2+2x+1 \\ -2x^2+3x-5 \\ +\quad x^2-5x+4 \\ \hline 2x^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a^4b-2a^3b^2-3a^2b^3-4c-2b \\ \qquad\quad a^3b^2-2a^2b^3\qquad +4b-4 \\ a^4b+a^3b^2\qquad\qquad -2c \\ \hline 2a^4b\qquad -5a^2b^3-6c+2b-4 \end{array}$$

2- **د تفریق عملیه**: د تفریق په عملیه کې د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کوو. یا په بل عبارت د مفروق علامې تغیروو او له مفروق منه سره یې جمع کوو.

لومړی مثال: د B پولینوم د A له پولینوم څخه تفریق کړئ، که $A=-x^3+x^2+x-7$ او $B=-x^3+x^2+4x+3$ وی او هم که $A=2b^2-2c^2-2d^2-2e^2$ او $B=b^2-3c^2-3d^2-3e^2-f^2$ وي.

حل:

$$\begin{array}{l} A=2b^2-2c^2-2d^2-2e^2 \\ B=\pm b^2\mp 3c^2\mp 3d^2\mp 3e^2\mp f^2 \\ \hline A-B=b^2+c^2+d^2+e^2+f^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A=-x^3+x^2+x-7 \\ -B=\mp x^3\pm x^2\pm 4x\pm 3 \\ \hline A-B=\qquad -3x-10 \end{array}$$

یا

$$-x^3+x^2+x-7-(-x^3+x^2+4x+3)$$
$$=-x^3+x^2+x-7+x^3-x^2-4x-3$$
$$=-3x-10$$

باید په یاد ولرو چې د یو پولینوم د ساده کولو لپاره مشابه حدونه (Like terms) سره جمع یا تفریقوو. د مثال په ډول

a) $x^2+6x^4-8+9x^2+2x^4-6x^2=8x^4+4x^2-8$

b) $3x-x-1+3-2x=2$

c) $2x^2-x-x^2-x-2=x^2-2x-2$

d) $6xy-xy-x-y+2x=5xy+x-y$

e) $mn-4+mn-5=2mn-9$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

په لاندې پولینومونو کې مشابه حدونه (Like terms) وښیاست.

$-t+5t^2-6t^2+6t-3$ $9rs-2r^2s^2+4r^2s^2+3rs-7$

$3p-4p^2+6p+10p^2$ $2fg+f^2g-fg^2-2fg+3f^2g+5fg^2$

دویم مثال: د $a^4+2a^3b-3ab^3+a^2b^2$ له پولینوم سره کوم پولینوم جمع کړو چې د جمعې حاصل یې $2a^4-3a^3b-3ab^3-b^4+a^2b^2$ شي؟

حل:

$$\begin{array}{l} 2a^4-3a^3b+a^2b^2-3ab^3-b^4 \\ \underline{-a^4 \pm 2a^3b \pm a^2b^2 \mp 3ab^3} \\ a^4-5a^3b \qquad\qquad -b^4 \end{array}$$

فعالیت

د $4x+6-2x^2$ او $3x^2-x^3-3$ پولینومونو مجموعه د x^3+x^2-2x او $-2x^3+3x-7$ پولینومونو له مجموعې څخه تفریق کړئ.

دریم مثال: تفریق یې کړئ.

$$\begin{array}{l} 202x^4y-303x^3y^2-101x^2y^3-404xy^4-505y^5 \\ \underline{-101x^4y \mp 303x^3y^2 \pm 101x^2y^3 \mp 404xy^4 \pm 505\,y^5} \\ 101x^4y \qquad -202x^2y^3 \qquad -1010y^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3ax-5bx-8cx-11dx \\ \underline{\pm 3ax \mp 5bx \mp 8cx \mp 11dx} \\ \qquad 0 \end{array}$$

څلورم مثال: مشابه حدونه (Like terms) سره جمع او ساده یې کړئ.

$8-10+x-7+x=2x-9$ $20-k-k-10-6-k^2=-k^2-2k+4$

$ab+a-b-a=ab-b$ $y^2-1+y^2-1=2y^2-2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$4b^3-2b^2-2+b-4b^3+b^2+b^2-b+2=0$$

$$x^2-5x-2x^2+5=-x^2-5x+5$$

باید په یاد ولرو چې که Q, P او R پولینومونه وي، نو

(د جمعې د عملیې تبدیلي خاصیت)...................... $P+Q=Q+P$

(د جمعې د عملیې اتحادي خاصیت)..... $P+(Q+R)=(P+Q)+R$

(د ضرب توزیعي خاصیت پر جمع باندې)......... $P(Q+R)=PQ+PR$

یا $(Q+R)P=QP+RP$

د پولینومونو د جمعې او تفریق په عملیو کې مشابه حدونه سره جمع او یا یو له بله تفریق کېږي د پولینومونو د جمعې په عملیه کې د تبدیلي او اتحادي خاصیتونه صدق کوي او د تفریق په عملیه کې د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي او د ضرب توزیعي قانون پر جمع باندې په پولینومونو کې هم صدق کوي.

پوښتنې

1. د دوو پولینومونو مجموعه x^2+2x-y^2 ده، که یو پولینوم $x^2-2xy+3$ وي، بل پولینوم پیدا کړئ.
2. د $3x^4+5x^3+2x^2-x+1$ پولینوم له $4x^4+2x^2+x^3-x+1$ پولینوم څخه تفریق کړئ.
3. د $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$، پولینوم څخه د $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ پولینوم تفریق کړئ.
4. که $A=a^3+2a^2-6a+7$ ، $B=a^3+2a+5$ او $C=2a^3-a^2+2a-8$ وي ددې درې واړو پولینومونو مجموعه پیدا کړئ. $(A+B+C=?)$
5. د $(ab^2+3a)+(2ab^2+3a-2)+(2a+4)$ افادې د جمعې حاصل مساوي دی، په:

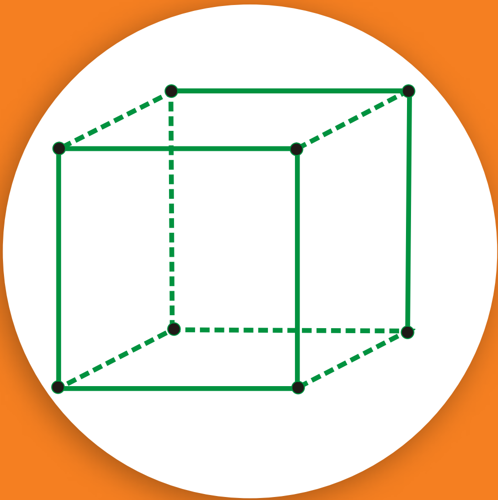
a) $-3ab^2+8a+2$ b) $3ab^2+8a$ c) $3ab^2+8a+2$

6. جمع یې کړئ.

$$(3a^2b^2+2a^2-5ab)+(-3ab+a^2-2)+(1+6ab)$$

7. که دوه الوتکې له یوه هوایي ډګر څخه یو د بل مخالف لورې ته والوزي، که 2 ساعتونه وروسته د یوې الوتکې واټن له هوایي ډګر څخه $x^2+2x+400$ میله وي او د بلې الوتکې واټن له هوایي ډګر څخه $3x^2-50x+100$ میله وي، ددې دواړو الوتکو تر منځ واټن(فاصله) پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولینومونو ضرب

د هغه مکعب حجم به څومره وي چې هره ضلع یې $(x+1)$ سانتي متره وي؟

د مونوم ضرب په مونوم کې: که د $3r^2s^3$ مونوم د $5r^4s^5$ په مونوم کې ضرب کړو، د ضرب حاصل یې $(3r^2s^3)(5r^4s^5)=15r^6s^8$ کیږي.

فعالیت

د $(7x^2y)(-3x^4yz^8)$ ، $(-\frac{1}{3}x)(-x)$ او $(-30a^2b)(-5ab)$ سره ضرب کړئ.

لومړی مثال: د لاندې مونومونو د ضرب حاصل پیدا کړئ.

$$(-5y^a)(5y)=-25y^{a+1}$$

$$(-4s^2t^2)(2st^3)=-8s^3t^5$$

$$-a^{2x}(-2a)=2a^{2x+1}$$

$$(-\frac{1}{2}a)(-\frac{1}{2}a)=\frac{1}{4}a^2$$

$$(-0.1)(-0.1)(-0.1)=-0.001$$

$$(-mn)(-mn^2)=m^2n^3$$

$$\frac{1}{4}(4)^2(\frac{1}{2})^2=(\frac{16}{4})(\frac{1}{4})=\frac{16}{16}=1$$

$$(-2a)^3(-2a)^2=-32a^5$$

$$x(x^m)=x^{m+1}=x^{1+m}$$

$$(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)=\frac{125}{8}m^3n^3$$

$$(-a^b)(-a)=a^{b+1}=a^{1+b}$$

$$(0.01p)(0.01p)=0.0001p^2$$

$$(0.1x^2)(0.1x^2)=0.01x^4$$

د مونوم ضرب په پولینوم کې:

دویم مثال: د ضرب لاندې حاصل لاس ته راوړئ.

$$(2m^2n^3)(1-4mn^4)=2m^2n^3-8m^3n^7$$

$$x^3(x-x^2y^4)=x^4-x^5y^4$$

$$-3b(5b^4-8b+12)=-15b^5+24b^2-36b$$

$$-4s^2t^2(5s^2t+6st-2s^2t^2)=-20s^4t^3-24s^3t^3+8s^4t^4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د هغه مکعب حجم پیداکړئ چې اوږدوالی یې، $2x$، سور یې x او لوړوالی یې $x+2$ وي.

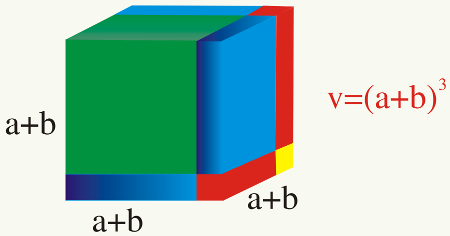
د پولینوم ضرب په پولینوم کې:

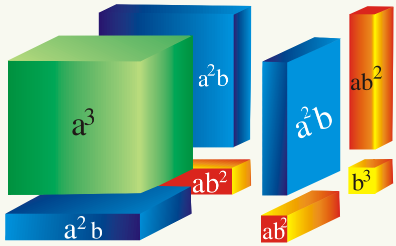
دریم مثال: **a**: د $(x-4)(x-5)$ د ضرب حاصل لاس ته راوړئ.

حل: $(x-4)(x-5)=x^2-5x-4x+20=x^2-9x+20$

	x	-4
x	x^2	$-4x$
-5	$-5x$	20

b) $(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$





c: که $P(x)=x^3+2x$ او $Q(x)=2x^2-x+1$ وي. $P(x)\cdot Q(x)$ پیداکړئ.

$$P(x)\cdot Q(x)=(x^3+2x)\cdot(2x^2-x+1)$$

$$=x^3\cdot 2x^2+x^3(-x)+x^3\cdot 1+2x\cdot 2x^2+2x(-x)+2x\cdot 1$$

$$=2x^5-x^4+x^3+4x^3-2x^2+2x=2x^5-x^4+5x^3-2x^2+2x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم مثال: لاندې افادې د a^3+b^3 او a^3-b^3 مطابقتونو په مرسته ضرب کړئ.

حل

a) $(x^m+y^n)(x^{2m}-x^my^n+y^{2n})=(x^m+y^n)[(x^m)^2-(x^m)(y^n)+(y^n)^2]$

$=(x^m)^3+(y^n)^3=x^{3m}+y^{3n}$

b) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)(x-\sqrt{xy}+y)$

$=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y)$

$=[(\sqrt{x})^3-(\sqrt{y})^3][(\sqrt{x})^3+(\sqrt{y})^3]=[(\sqrt{x})^3]^2-[(\sqrt{y})^3]^2$

$=(x^{\frac{3}{2}})^2-(y^{\frac{3}{2}})^2=x^3-y^3$

په یاد ولرئ چې که P, Q او R پولینومونه وي

(د ضرب د تبدیلی خاصیت) $P\cdot Q=Q\cdot P$

(د ضرب اتحادی خاصیت) $P\cdot(Q\cdot R)=(P\cdot Q)\cdot R$

فعالیت

که $P(x)=2x^2-x-1$ او $Q(x)=4x-8$ وي، د ضرب د تبدیلی او اتحادي خاصیتونه په کې وڅېړئ.

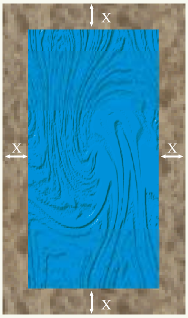
په لاندې جدول کې د هندسی شکلونو مساحت (Area) پیدا کړئ.

مساحت	راکړ شوی اوږدوالی	هندسي شکلونه
n^2+n-20	اوږدوالی یې $n+5$ اوسور یې $n-4$	مستطیل
$6y^2+3y-3$	اوږدوالی یې $3y+3$ اوسور یې $2y-1$	مستطیل
$b^3-\frac{5}{2}b^2+2b-5$	قاعده یې $2b-5$ او لوړوالی یې b^2+2	مثلث
$m^2+26m+169$	هره ضلع یې $m+13$، ده	مربع
$4g^2-16g+16$	هره ضلع یې $2g-4$ ده	مربع
$(9c^2+12c+4)\pi$	شعاع یې $3c+2$ ده	دایره

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.



پوښتنه: د یوه حوض خلورو خواوو ته له سمنټو څخه پخه شوې لاره ده، که د دې لارې سور x متره وي او د حوض اوږدوالی او سور په ترتیب سره $50m$ او $25m$ وي د لارې مساحت معلوم کړئ.

حل: د لارې او حوض مجموعي مساحت

$$A=(25+2x)(50+2x)=1250+150x+4x^2$$

د حوض مساحت: $(25m)(50m)=1250m^2$

د لارې مساحت: $1250+150x+4x^2-1250=4x^2+150x$

د پولینومونو په ضرب کې کیدای شي، مونوم په مونوم کې، مونوم په پولینوم کې او یا پولینوم په پولینوم کې ضرب کړو او د ضرب په عملیه کې د تبدیلی، اتحادي او د ضرب توزیعي خاصیت په جمع باندې هم صدق کوي.

پوښتنې

1. ضرب یې کړئ: $(4x^2y^2z)(-5xy^3z^2)$, $-2xy(2x^2+2y^2-2)$

2. یو بکس چې لوړوالی یې x انچه، اوږدوالی یې $(x+1)$ او سور یې $2x-4$ انچه دی، که لوړوالی یې 3 انچه وي، د دې بکس حجم مساوي دی، په:

a) $40in^3$ b) $24in^3$ c) $48in^3$ d) $20in^3$

3. د $(\frac{a^p}{a^{-q}})^{p-q}(\frac{a^q}{a^{-r}})^{q-r}(\frac{a^r}{a^{-p}})^{r-p}$ د ضرب حاصل مساوي دی، په:

a) 1 b) -1 c) صفر d) درې واړه سم نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینوم وېش پر مونوم

آیا د

$$\frac{\frac{4m^2}{n}}{n}\ ,\ \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}\ ,\ \frac{3mn^2}{-mn}\ ,\ \frac{-x^2}{x}$$

او د $\frac{-n^a}{n^b}$ او د $\frac{14x^5}{2x^2}$ د وېش حاصل په لاس

راوړلای شئ؟(هیڅ یو مخرج له صفر سره مساوي نه دی).

د مونوم وېش پر مونوم (Dividing monomial by monomial):

لومړی مثال: ویې وېشئ:

$$\frac{36a^5b^5c^7}{12a^4bc^3}=3ab^4c^4\ ,\ \frac{6x^9y^3}{4x^6y^2}=\frac{3}{2}x^3y\ ,\ \frac{-a^2}{-a^x}=a^{2-x}\ ,\ \frac{-n^a}{n^b}=-n^{a-b}$$

د پولینوم وېش پر مونوم:

$$(x^4+5x^3-7x^2)\div x^2$$

$$\frac{x^4+5x^3-7x^2}{x^2}=\frac{x^4}{x^2}+\frac{5x^3}{x^2}-\frac{7x^2}{x^2}=x^2+5x-7 \qquad (x^2\neq 0)$$

دویم مثال: ویې وېشئ.

$$\frac{x^8y^2-x^4y^6-4x^3y^9}{x^3y}=x^5y-xy^5-4y^8 \qquad (x^3y\neq 0)$$

$$\frac{r^6s^2-r^5s-4r^3s^4}{r^2s}=r^4s-r^3-4rs^3 \qquad (r^2s\neq 0)$$

فعالیت

د وېش حاصل په لاس راوړئ. (مخرجونه خلاف د صفر دي)

$$a:\frac{27x^6y^{13}-18x^{12}y^8}{9x^3y^8} \qquad b:\frac{x^2}{y^2-1}\div\frac{x^2}{y-1} \qquad c:\frac{10b^3c^7}{6b^2c^7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینوم وېش پر پولینوم: څه وخت چې یو پولینوم پر بل پولینوم وېشو، مقسوم (Dividend) او مقسوم علیه (Divisor) دواړه باید په منظم ډول ترتیب شي.

دریم مثال: د $(13x+2x^4+12+3x^3-4x^2)\div(3+x^2-2x)$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4+3x^3-4x^2+13x+12 & x^2-2x+3 \\
\underline{\pm 2x^4 \mp 4x^3 \pm 6x^2} & \overline{2x^2+7x+4} \\
7x^3-10x^2+13x & \\
\underline{\pm 7x^3 \mp 14x^2 \pm 21x} & \\
4x^2-8x+12 & \\
\underline{\pm 4x^2 \mp 8x \pm 12} & \\
0 &
\end{array}
$$

فعالیت

د $(a^5+b^5)\div(a+b)$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

څلورم مثال: د وېش حاصل یې پیدا کړئ $(x^3-19x-30)\div(x+3)$.

حل:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 \qquad -19x-30 & x+3 \\
\underline{\underline{}x^3 \pm 3x^2} & \overline{x^2-3x-10} \\
-3x^2-19x & \\
\underline{\mp 3x^2 \mp 9x} & \\
-10x-30 & \\
\underline{\mp 10x \mp 30} & \\
0 &
\end{array}
$$

پنځم مثال: د $4x^3-10x^2+12x+6$ له پولینوم سره کوم عدد جمع کړو چې په $(2x+1)$ پوره ووېشل شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل

$$
\begin{array}{l|l}
4x^3-10x^2+12x+6 & 2x+1 \\
\underline{-4x^3 \pm 2x^2} & 2x^2-6x+9 \\
\quad -12x^2+12x & \\
\quad \underline{\mp 12x^2 \mp 6x} & \\
\qquad 18x+6 & \\
\qquad \underline{-18x \pm 9} & \\
\qquad -3 &
\end{array}
$$

په نتیجه کې چې که له پورتني پولینوم سره 3 جمع کړو، نو په $(2x+1)$ پوره د وېشلو وړ دی.
باید پام مو وي، د وېش عملیې ته به تر هغو پورې دوام ورکوو چې پاتې(باقي مانده) صفر او یا د باقي مانده درجه د مقسوم علیه له درجې څخه د یو په ا ندازه کمه شي.

فعالیت

د دوو پولینومونو د ضرب حاصل $6y^3-11y^2+6y-1$ دی. که یو پولینوم $3y^2-4y+1$ وي، بل پولینوم پیدا کړئ.

شپږم مثال: د x په کوم قیمت $12x^4+3x^3-13x^2+x+5$ پولینوم پر $3x^2-1$ باندې پوره وېشل کېږي؟

حل

$$
\begin{array}{l|l}
12x^4+3x^3-13x^2+x+5 & 3x^2-1 \\
\underline{-12x^4 \qquad \mp 4x^2} & 4x^2+x-3 \\
\quad 3x^3-9x^2+x & \\
\quad \underline{-3x^3 \qquad \mp x} & \\
\qquad -9x^2+2x+5 & \\
\qquad \underline{\mp 9x^2 \qquad \pm 3} & \\
\qquad\quad 2x+2 &
\end{array}
$$

$$2x+2=0$$
$$2x=-2$$
$$x=-1$$

نو د $x=-1$ لپاره پورتنی پولینوم پر $3x^2-1$ پوره وېشل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینومونو په وېش کې کېدای شي چې مونوم پر مونوم، پولینوم پر مونوم او یا پولینوم پر پولینوم ووېشو. لومړی باید مقسوم او مقسوم علیه په نزولي ډول ترتیب شي او د وېش عملیې ته تر هغه پورې دوام ورکوو، تر څو د پاتې (باقي) درجه د مقسوم علیه له درجې څخه د یو په اندازه کمه شي.

پوښتنې

1. د P په کوم قیمت $3x^3-7x^2-9x+p$ پولینوم پر $x-13$ پوره وېشل کېږي؟

2. د وېش حاصل یې پیدا کړئ.

$(a^3+b^3+c^3-3abc)\div(a+b+c)$

$(x^2+x-6)\div(x-2)$

$(x^5-y^5)\div(x-y)$

$\dfrac{j^5k^2-3j^8k^4}{2j^4k}$

$\dfrac{12x^5+9x^4+15x^2}{3x^3}$

$\dfrac{27a^6b^{13}-18a^{12}b^8}{9a^3b^8}$

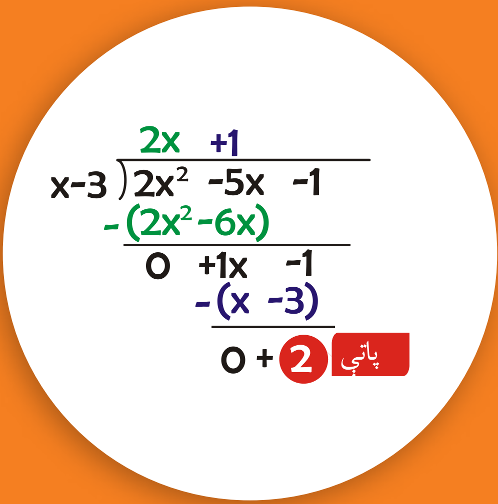
$(x^3-a^3)\div(x^2-ax+a^2)$

$(9x^4+2x^2+7x+2)\div(3x+2)$

$(8x^3+27y^3)\div(2x+3y)$

$(7x-12+2x^4-8x^3-x^2)\div(2x^2+5)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د باقي مانده قضيه
(Remainder Theorem)

آيا د ويش د عمليې له سرته رسولو پرته ويلای شئ چې که د x^3-6x^2-x-6 پولينوم په $x-4$ وويشو پاتې(باقي) به څو وي؟

که د $P(x)$ پولينوم په $x-a$ وويشل شي باقي (پاتې) د $P(a)$ سره مساوي ده. يا $R=P(a)$

لومړی مثال: که د $P(x)=2x^2+3x+4$ پولينوم پر ($x+3$) وويشل شي، نو باقي (Remainder) له $P(-3)$ سره مساوي ده.

حل: $P(-3)=2(-3)^2+3(-3)+4=13$

اوس يې ازمايو او د ويش عمليه سرته رسوو.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^2+3x+4 & x+3 \\ \hline
\underline{\ 2x^2 \pm 6x} & 2x-3 \\
\quad -3x+4 & \\
\quad \underline{\mp 3x \mp 9} & \\
\qquad 13 &
\end{array}
$$

قضيه: که د $P(x)$ پولينوم په $(x-a)$ وويشو، نو باقي يا پاتې $R=P(a)$ ده.

ثبوت: که د $P(x)$ پولينوم په $(x-a)$ ، وويشو او خارج قسمت $Q(x)$ او پاتې R وي، نو لرو چې:

$$P(x)=Q(x)(x-a)+R \qquad x-a=0$$
$$P(a)=Q(a)(a-a)+R \qquad x=a$$
$$P(a)=R$$

دويم مثال: که د $2x^3-x^2-7$ پولينوم پر $(x-2)$ وويشل شي، پاتې به څو وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$P(2)=2(2)^3-(2)^2-7=16-4-7=5$$
$$R=5$$

فعالیت

د پورتنی قضیې په مرسته یې پاتې(باقي مانده) پیدا کړئ.

- که $x^3-x^2-226x+1410$ پر $(x+17)$ وویشل شي.
- که x^3-2x^2+3x+5 پر $(x-4)$ وویشل شي.
- که $x^3+18x^2+164x+199$ پر $(x+8)$ وویشل شي.

دریم مثال: که د $5x^2+x-9$ پولینوم پر $(x+\frac{1}{2})$ وویشل شي، د وېش د عملیې له سرته رسولو څخه پرته ووایاست چې څو پاتې کېږي؟

حل

$$x+\frac{1}{2}=0$$
$$x=-\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2})=5(-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}-9$$
$$=5(\frac{1}{4})-\frac{1}{2}-9=\frac{5}{4}-\frac{1}{2}-9=\frac{5-2-36}{4}=-\frac{33}{4}$$

څلورم مثال: که د $P(y)=10y^3+7y^2-y-11$ پولینوم پر $(2y+1)$ ووېشو، د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته یې پاتې(باقي) پیدا کړئ.

حل

$$2y+1=0\Rightarrow 2y=-1$$
$$\Rightarrow y=-\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2})=10(-\frac{1}{2})^3+7(-\frac{1}{2})^2-(-\frac{1}{2})-11$$
$$P(-\frac{1}{2})=10(-\frac{1}{8})+7(\frac{1}{4})+\frac{1}{2}-11$$
$$=-\frac{5}{4}+\frac{7}{4}+\frac{1}{2}-11=\frac{-5+7+2-44}{4}=\frac{-40}{4}=-10$$
$$R=-10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د 4 مثال په پوښتنه کې د وېش عملیه سرته ورسوئ او باقي یې په لاس راوړئ.

پنځم مثال: که د $4x^4+12x^3-13x^2-33x+18$ پولینوم پر $(x+4)$ ووېشل شي، باقي یې پیدا کړئ.

حل:

$$P(-4)=4(-4)^4+12(-4)^3-13(-4)^2-33(-4)+18$$
$$=1024-768-208+132+18=1174-976=198$$

اوس د وېش عملیه سرته رسوو.

$$\begin{array}{l|l}
4x^4+12x^3-13x^2-33x+18 & x+4 \\ \hline
-4x^4\pm16x^3 & 4x^3-4x^2+3x-45 \\ \hline
\quad -4x^3-13x^2 & \\
\quad \mp4x^3\mp16x^2 & \\ \hline
\qquad 3x^2-33x & \\
\qquad \pm3x^2\pm12x & \\ \hline
\qquad\quad -45x+18 & \\
\qquad\quad \mp45x\mp180 & \\ \hline
\qquad\qquad 198 &
\end{array}$$

که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشل شي، د وېش د عملیې له سر ته رسوولو پرته یې د باقي مانده قضیې (Remainder Theorem) په مرسته باقي پیدا کولای شو چې باقي مانده (R) له (a) P سره مساوي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1.د باقي مانده قضيې (Remainder theorem) په مرسته يې باقي (پاتې) پيدا کړئ.

$(5x^3 - x^2 + 4x + 1) \div (x - 3)$ ، $(6p^3 + 2p^2 - p + 20) \div (p - \frac{1}{2})$

$(6x^2 + 15) \div (4x + 9)$ ، $(4y^2 - y - 6) \div (y - 1.6)$

2. د باقي مانده قضيې په مرسته ووایاست چې د k په کوم قيمت د $5x^3 - k^2x^2 + 3kx - 6$ پولينوم پر $(x + 2)$ ووېشل شي، تر څو -44 باقي شي؟

3. د k په کوم قيمت که د $2k^2y^4 - ky^2 + 1$ پولينوم، پر $(y - \frac{1}{2})$ ووېشل شي، ترڅو 2 باقي شي؟

4. که چېرې $m^2x^4 - 10x^2 + 2$ پولينوم پر $(x - 1)$ ووېشو او باقي 17 وي، د m قيمت به څو وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فکټور قضیه
(The Factor Theorem)

$(x^5+1)\div(x+1)$

$P(-1)=[(-1)^5+1]$
$=-1+1=0$

آیا $(x-1)$ د $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ پولینوم یو فکټور دی؟

که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ وویشل شي او $P(a)=0$ شي، نو $x-a$ ددې پولینوم یو فکټور دی.

ثبوت: د باقي مانده قضیې په اساس $R=P(a)$ دی، نو که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ وویشل شي او د ویش حاصل(خارج قسمت) یې $Q(x)$ وي، نو لرو چې: $P(x)=Q(x)(x-a)+R$
که $R=0$ وي، نو: $P(x)=Q(x)(x-a)$

لیدل کېږي چې $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکټور دی. او یا که $(x-a)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکټور وي، نو $P(a)=0$ دی.

لومړی مثال: وښیاست چې $(x-2)$ د $P(x)=x^3+3x^2+4x-28$ د پولینوم یو فکټور دی.

حل

$x-2=0$

$x=2$

$P(x)=x^3+3x^2+4x-28$

$P(2)=2^3+3(2)^2+4\cdot2-28=8+3(4)+8-28=0$

څرنګه چې R یا $P(2)=0$ دی، نو $(x-2)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکټور دی.

فعالیت

د ویش د عملیې له سرته رسولو پرته، د فکټور د قضیې په مرسته وښیاست چې $x-1$ د $P(x)=2x^3-13x^2+26x-15$ پولینوم یو فکټور دی.

دویم مثال: د فکټور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-2)$ د $P(x)=x^5-32$ پولینوم یو فکټور دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل

$$P(x) = x^5 - 32$$
$$P(2) = 2^5 - 32 = 32 - 32 = 0$$

څرنګه چې $R = P(2) = 0$ ده، نو $(x-2)$ د $x^5 - 32$ پولینوم یو فکتور دی.

دریم مثال: وښیاست چې $(x+1)$ د $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7x + 4$ پولینوم یو فکتور دی.

حل: $P(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 + 7(-1) + 4 = -2 + 5 - 7 + 4 = 0$

څرنګه چې R یا $P(-1)$ له صفر سره مساوي دی، نو $(x-1)$ د دې پولینوم یو فکتور دی.

څلورم مثال: د k په کوم قیمت، $(x-1)$ د $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - x - 2k$ پولینوم یو فکتور دی؟

حل

$$P(1) = 2(1)^4 - 3(1)^3 - 1 - 2k = 2 - 3 - 1 - 2k = -2 - 2k$$
$$-2 - 2k = 0$$
$$-2k = 2$$
$$k = -1$$

د $k = -1$ لپاره باقي مانده صفر کېږي، نو $x - 1$ د دې پولینوم یو فکتور دی.

فعالیت

د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې آیا د کینې خوا دوه حدي (باینومونه) د اړوندو پولینومونو فکتورونه دي او که نه؟

$(y+5):(y^3+125)$

$(x-6):(x^6-36x^3+1296)$

$(x-\frac{1}{2}):(x^3-\frac{1}{8})$

$(x+\frac{1}{2}):(20x^3+7x+6)$

$(x+2):(x^5+32)$

$(x-0.1):(10x^3-11x^2+1)$

د فکتور د قضیې معکوس (Converse of Factor Theorem):

که $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکتور وي، نو $P(a)=0$ دی او د a عدد د $P(x)=0$ پولینومي معادلې یو جذر (Root) دی.

لومړی مثال: که $(x-2)$ د $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ پولینوم یو فکتور وي، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

وښیاست چې $P(2)=0$ دی او 2 د $x^3-6x^2+11x-6=0$ معادلې یو جذر دی.

حل: که 2 د $x^3-6x^2+11x-6=0$ معادلې یو جذر وي، نو $(x-2)$ ددې پولینوم یو فکتور دی $P(2)=0$ دی.

$$P(2)=2^3-6(2)^2+11(2)-6=8-24+22-6=0$$

دویم مثال: که -2 د $x^3+4x^2+kx+8=0$ معادلې یو جذر وي، د k قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$(-2)^3+4(-2)^2+k(-2)+8=0$$
$$-8+16+k(-2)+8=0$$
$$-2k=-8+8-16$$
$$k=8$$

دریم مثال: وښیاست چې 3 د $x^3-6x^2+5x+12=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی.

حل:

$$(3)^3-6(3)^2+5(3)+12=0$$
$$27-54+15+12=0$$
$$54-54=0$$
$$0=0$$

نو لیدل کېږي چې 3 ددې پولینومي معادلې یو جذر دی.

فعالیت

وښیاست چې 2 د $x^3-4x^2+5x-2=0$ معادلې یوجذر دی.

څلورم مثال: د k دکوم قیمت لپاره 3 د $2x^4-6x^3-7x^2+kx-15=0$ معادلې یو جذر دی؟

حل:

$$2(3)^4-6(3)^3-7(3)^2+3k-15=2(81)-6(27)-7(9)+3k-15=0$$
$$162-162-63+3k-15=0$$
$$3k=15+63+162-162=78$$
$$3k=78$$
$$k=26$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (x−a) د $P(x)$ پولینوم یو فکتور وي، نو $P(a)=0$ دی او که د $P(x)$ په پولینوم کې $P(a)=0$ شي نو $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکتور دی.

پوښتني

1 - د k د کوم قیمت لپاره $(x-2)$ د $P(x)=2x^4-x^3+kx^2+kx-12$ پولینوم یو فکتور دی؟

2 - آیا $(x+3)$ د $P(x)=x^5-x^3+27x^2-27$ پولینوم یو فکتور دی؟

3 - د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x+7)$ د $P(x)=x^3+8x^2+8x+7$ د پولینوم یو فکتور دی، که نه؟

4 - د وېش د عملیې د سرته رسولو پرته وښیاست چې آیا $(y-7)$ د $P(y)=y^4+2y^3-6y^2-14y-7$ پولینوم یو فکتور دی که نه؟

5 - وښیاست چې آیا $(m+\frac{1}{2})$ د $P(x)=2m^2+4m-2$ پولینوم یو فکتور دی که نه؟

6 - د $x^3+x^2-10x+8$ پولینوم د فکتور د قضیې په مرسته تجزیه کړئ.

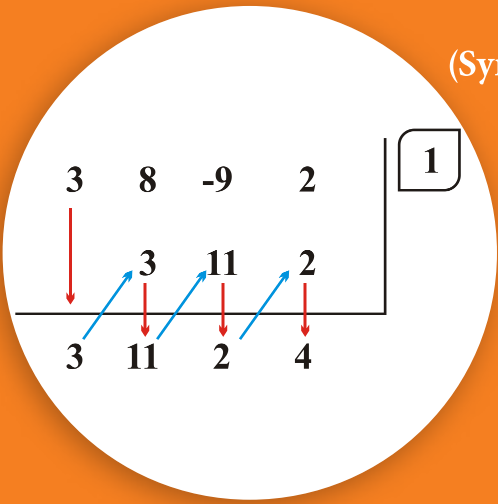
7 - که $(x-1)$ او $(x+1)$ د $P(x)=x^3+ax^2+bx+2$ د پولینوم فکتورونه وي، د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

8 - د k، د کوم قیمت لپاره $(x-5)$ د $Q(x)=x^3-5x^2-16x+k$ پولینوم یو فکتور دی؟

9 - د k د کوم قیمت لپاره (-1)، د $x^3-9x^2+14x+k=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترکيبي وېش
(Synthetic Division)



آیا د وېش عمليې له سرته رسولو پرته، د وېش حاصل او باقي پيداکولای شئ.
که د $P(x)=2x+3x^3-x^2-5$ پولينوم پر $(x-2)$ ووېشل شي؟

د $P(x)$ پولينوم پر $(x-a)$، د وېشلو لپاره ترکيبي وېش (Horner's Method) يوه لنده طريقه ده چې په عمومي ډول د دې هدفونو لپاره ترې کار اخيستل کېږي.

1 – د x د مختلفو قيمتونو لپاره د $P(x)$ پولينوم د قيمت پيداکول.

2 – د $P(x)=0$ معادلې د ناطق جذر د پيداکولو لپاره.

3 – د الجبري افادو د تجزيې لپاره.

لومړی مثال: که د $P(x)=4x^4+12x^3-13x^2-33x+18$ پولينوم پر $(x+4)$ باندې ووېشو د وېش د عمليې له سرته رسولو پرته د ترکيبي وېش (تقسيم) په مرسته يې د وېش حاصل (Quotient) او باقي مانده (Remainder) پيدا کړئ.

حل:

$x+4=0$

$x=-4$

-4	18	-33	-13	12	4	لومړی کرښه
	180	-12	16	-16		دويمه کرښه
	198	-45	3	-4	4	درېمه کرښه

چې د وېش حاصل (خارج قسمت) يې $4x^3-4x^2+3x-45$ او پاتې يا باقي مانده يې 198 ده، په دې معنا چې: $P(x)=(x+4)(4x^3-4x^2+3x-45)+198$

پورتنۍ عمليه په لاندې پړاوونو کې بنودلای شو.

د لومړۍ کرښې عددونه د مقسوم ضريبونه دي چې نظر د x توان ته په نزولي ډول ترتيب شوي دي.

1. د 4 عدد له لومړۍ کرښې څخه درېمې کرښې ته راښکته شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. 4 په (4-) کې ضرب شوی دی چې (16-) کېږي او (16-) د 12 د عدد لاندې په دویمه کرښه کې لیکل شوی دی.
3. د 12 او (16-) د جمعې حاصل چې (4-) کېږي، په دریمه کرښه کې لیکو.
4. د(4-) عدد په (4-) کې ضربوو چې 16 کېږي او د (13 -) لاندې یې په دویمه کرښه کې لیکو.
5.د16 او (13-) د جمعې حاصل چې 3 کېږي، په دریمه کرښه کې لیکل شوی دی.
6. د 3 او (4-)د ضرب حاصل چې (12-) کېږي، د (33-) لاندې په دویمه کرښه کې لیکل شوی دی.
7. د(33-) او (12-) د جمعې حاصل چې (45 -) کېږي، په دریمه کرښه کې لیکو.
8. د(45-) او (4-) د ضرب حاصل چې 180 کېږي، تر 18 لاندې په دویمه کرښه لیکل شوی دی.
9. د180 او 18 د جمعې حاصل 198 په دریمه کرښه کې دی، 198باقي مانده دی او $4x^3-4x^2+3x-45$ د وېش حاصل دی.

$Q(x)=4x^3-4x^2+3x-45$ او $R=198$

$P(x)=(4x^3-4x^2+3x-45)(x+4)+198$

پاتې + (د وېش حاصل) x (مقسوم علیه) = مقسوم

فعالیت

د وېش عملیې د سرته رسولو په مرسته د پورتنی پوښتنې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

دویم مثال: د ترکیبي وېش او د وېش د عملیې د سرته رسولو په مرسته یې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

$(4x^4-5x^2+2x-3)\div(x-2)$

په یاد ولرئ کوم حدونه چې موجود نه وي، د هغوی د ضریبونو پر ځای صفر لیکو یا په بل عبارت پولینوم د مکمل پولینوم په شکل په نزولي ډول ترتیبوو.

4	0	−5	2	−3	2
	8	16	22	48	
4	8	11	24	45	

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د وېش عملیه سرته رسووو:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4 \qquad -5x^2+2x-3 & x-2 \\ \underline{-4x^4 \mp 8x^3} & \overline{4x^3+8x^2+11x+24} \\ \quad 8x^3-5x^2 & \\ \quad \underline{-8x^3 \mp 16x^2} & \\ \qquad 11x^2+2x & \\ \qquad \underline{-11x^2 \mp 22x} & \\ \qquad\quad 24x-3 & \\ \qquad\quad \underline{-24x \mp 48} & \\ \qquad\qquad 45 & \end{array}$$

د وېش حاصل $4x^3+8x^2+11x+24$
او باقي (45) ده.

دریم مثال: $(x^5-x^3+27x^2-28)\div(x+3)$ د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او پاتې(باقي) پیدا کړئ.

حل: $x^5-x^3+27x^2-28=x^5-0\cdot x^4-x^3+27x^2+0\cdot x-28$

$$\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 27 & 0 & -28 & -3 \\ & -3 & 9 & -24 & -9 & 27 & \\ \hline 1 & -3 & 8 & 3 & -9 & -1 & \end{array}$$

$x+3=0$

$x=-3$

د وېش حاصل(خارج قسمت) یې $x^4-3x^3+8x^2+3x-9$ او پاتې(باقي مانده) عبارت له (-1) څخه دی.

څلورم مثال: د $(2t^3-7t^2-2t+14)\div(2t-3)$ د وېش حاصل(خارج قسمت) او پاتې (باقي) پیدا کړئ.

حل:

$$\frac{2t-3}{2}=t-\frac{3}{2}$$

$$t-\frac{3}{2}=0$$

$$t=\frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -7 & -2 & 14 & \frac{3}{2} \\ & 3 & -6 & -12 & \\ \hline 2 & -4 & -8 & 2 & \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $2t^2-4t-8$ د وېش حاصل نه دی، بلکې د وېش حاصل (t^2-2t-4) دی. (مقسوم او مقسوم علیه دواړه په 2 وېشل شوي دي).

پنځم مثال: د ترکیبي وېش (Synthetic division) په مرسته د وېش حاصل (quotient) او پاتې یې (remainder) پیدا کړئ.

$$(4V^3-2V^2+5)\div(V-5)$$

4	−2	0	5	
	20	90	450	5
4	18	90	455	

نو $Q(x)=4v^2+18v+90$ او $R=455$ ده.

فعالیت

د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او پاتې پیدا کړئ.

$$(x^5+6x^3-5x^4+5x-15)\div(x-3)$$

که د P(x) پولینوم پر (x-a) باندې ووېشو، نو مقسوم د مکمل نزولي پولینوم په شکل ترتیبوو او د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته د وېش حاصل او باقي مانده لاس ته راوړلای شو چې د وېش د حاصل درجه د یوه په اندازه د مقسوم علیه له درجې څخه کمه ده.

پوښتنې

1- د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

$(2x^3-7x^2-2x+12)\div(2x-3)$ $\quad$ $(10x^2+2x+1)\div(x+1)$

$(6x^2+15)\div(4x+9)$ $\quad$ $(5x^3-3x+7)\div(x+4)$

$(6p^3+2p^2-p+20)\div(p-\frac{1}{2})$

2- د ترکیبي وېش په مرسته یې پاتې (باقي مانده) او د وېش حاصل پیدا کړئ.

$(4x^3-2x^2+5)\div(x-5)$, $(y^5-17y^3-9)\div(y-3)$

$(x^3+8x^2+8x+7)\div(x+7)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترکیبي وېش په مرسته د پولینوم د فکتور او د پولینوم د قیمت پیدا کول

1	+ 2	− 5	− 6	−1
	− 1	− 1	+ 6	
1	1	− 6	0	

آیا د ترکیبي وېش په مرسته وبلای شئ چې $(x+3)$ د $x^3+9x^2+27x+27$ پولینوم یو فکتور دی؟

لومړی مثال: د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې $(x-1)$ د $P(x)=2x^4-x^3-x^2+x-1$ پولینوم یو فکتور دی.

2	−1	−1	1	−1	1
	2	1	0	1	
2	1	0	1	0	

څرنګه چې $R=0$ دی، نو $(x-1)$ ددې پولینوم یو فکتور دی. یا دا چې:

$$2x^4-x^3-x^2+x-1=(x-1)(2x^3+x^2+1)$$

یا د باقي مانده قضیې په مرسته:

$$P(1)=2\cdot1^4-1^3-1^2+1-1=2-1-1+1-1=0$$

دویم مثال: آیا $(x+10)$ د x^3+3x^2-150 پولینوم یو فکتور دی او که نه؟

1	3	0	−150	−10
	−10	70	−700	
1	−7	70	−850	

څرنګه چې $R=-850$ دی $(R\neq0)$، نو $(x+10)$ د x^3+3x^2-150 پولینوم فکتور نه دی.

درېیم مثال: که $P(x)=3x^3-12x^2+25+5x$ وي، د $x=2$ لپاره د ترکیبي وېش په مرسته ددې پولینوم قیمت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: لومړی پولینوم په نزولي ډول ترتیبوو.

$$P(x)=3x^3-12x^2+5x+25$$

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & -12 & 5 & 25 & 2 \\ & 6 & -12 & -14 & \\ \hline 3 & -6 & -7 & 11 & \end{array}$$

نو: $P(2)=11$ دی.

فعالیت

د ترکیبي وېش په مرسته د $P(x)=x^3-x^2+10x+5$ پولینوم قیمت د $x=1$ او $x=3$ لپاره پیدا کړئ.

څلورم مثال: د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې $(r-4)$ د r^4-256 یو فکتور دی.

$$r^4-256=r^4+0\cdot r^3+0\cdot r^2+0\cdot r-256$$

حل:

$$r-4=0$$
$$r=4$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -256 & \\ & 4 & 16 & 64 & 256 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 16 & 64 & 0 & \end{array}$$

$$Q(x)=r^3+4r^2+16r+64$$
$$R=0$$

نو $(r-4)$ د r^4-256 یو فکتور دی.

د ترکیبي وېش په مرسته د یوې معادلې د جذرونو پیدا کول:

پنځم مثال: که د (1) عدد د $x^3+4x^2+x-6=0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي وېش په مرسته یې نور جذرونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

1	4	1	−6	
	1	5	6	1
1	5	6	0	

نو د وېش حاصل يې x^2+5x+6 دی.

$$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x^2+5x+6)$$
$$x^2+5x+6=0$$
$$(x+3)(x+2)=0$$
$$x=-3 \qquad x=-2$$

د دې معادلې دوه نور جذرونه $2-$ او $3-$ دي.

د ترکيبي وېش په مرسته د پولينوم فکتور، د پولينوم قيمت او د پولينومي معادلې جذر پيدا کولای شو، که چېرې د $P(x)$ پولينوم په $(x-a)$ وويشو او $(R=0)$ وی، نو $(x-a)$ د دې پولينوم يو فکتور دی او د (a) عدد د $P(x)=0$ پولينومي معادلې يو جذر دی.

پوښتنې

1- د ترکيبي وېش په مرسته وښياست چې $(x+\frac{1}{2})$ د $20x^3+7x+6$ پولينوم يوفکتور دی او $(x+1)$ د x^4-2x^2+x+2 پولينوم يو فکتور دی.

2- آيا $(x-0{,}1)$ د $10x^3-11x^2+1$ د پولينوم يو فکتور دی؟ ولې؟

3- د ترکيبي وېش په مرسته د $6-y-6y^2+y^3$ پولينوم قيمت د $y=6$ لپاره پيدا کړئ.

4- که (1) د $x^3+x^2-10x+8=0$ معادلې يو جذر وي، د ترکيبي وېش په مرسته يې نور جذرونه پيدا کړئ.

5- که د (-2) عدد د $x^3+4x^2+kx+8=0$ معادلې يو جذر وي، د ترکيبي وېش په مرسته د k قيمت پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي لنډيز

• الجبري افادې په درې ډوله دي(ناطقه الجبري افاده، غير ناطقه الجبري افاده، پولينومي الجبري افاده).

• هغه حدونه چې متحولونه او درجې يې سره مساوي وي، مشابه حدونه (Like terms) نومېږي، لکه: $3x^2$ او $5x^2$ يا $4x^2y^2$ او $-6x^2y^2$ مشابه حدونه دي.

• پولينوم هغه يو يا څو حده الجبري افاده ده چې د حروفو توانونه يې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.

• د يوه پولينوم درجه چې له يوه توري (متحول) څخه جوړ شوی وي، د هغه توري له لوړ توان څخه عبارت ده او که له يوه څخه د زياتو تورو څخه جوړ شوی وي، د زيات توان لرونکي مونوم درجه ددې پولينوم درجه ده.

• د يوه حد عددي فکټور (Numerical Factor) ته ضريب وايي، لکه: په $3x^2$ کې 3 د x^2 ضريب دی.

• ټول ثابت عددونه پولينومونه دي چې ثابت پولينومونه نومېږي او درجه يې صفر ده، د صفري پولينوم درجه تعريف شوې نه ده.

• هغه پولينومونه چې يو متحول ولري او د مشابه حدونو ضريبونه يې سره مساوي وي، د معادلو پولينومونو په نوم يادېږي.

• د متحول په راکړ شوي قيمت کې د يوه پولينوم قيمت هغه عدد دی چې په پولينوم کې د متحول د راکړل شوي قيمت له وضع کېدو څخه په لاس راځي.

• هغه پولينومونه چې د متحول له لوړ توان څخه تر ثابت عدده پورې، ټول حدونه په کې موجود وي، مکمل پولينوم او که يو يا څو حدونه، ونه لري، د ناقص پولينوم په نوم يادېږي.

• که د يوه پولينوم متحول له ټيټ توان څخه تر لوړ توان پورې ترتيب شي، منظم صعودي او که له لوړ توان څخه تر ټيټ توان پورې ترتيب شي، منظم نزولي پولينوم نومېږي.

• د پولينوم د جمعې په عمليه کې مشابه حدونه (Like terms) يو له بل سره جمع کېږي، د تفريق

(c) ketabton.com: The Digital Library

په عمليه کې د مفروق علامې ته تغير ورکوو او نوره عمليه د جمعې د عمليې په شان سرته رسول کېږي (د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي.

- د پولينومونو د جمعې او ضرب په عمليو کې د تبديلي او اتحادي خاصيتونه او هم د ضرب توزيعي خاصيت پر جمع باندې صدق کوي.
- د ضرب په عمليه کې کولای شو، مونوم په مونوم کې، مونوم په پولينوم کې او يا پولينوم په پولينوم کې ضرب کړو.
- په همدې ډول کولای شو، د وېش په عمليه کې مونوم پر مونوم، پولينوم پر مونوم يا پولينوم پر پولينوم باندې ووېشو.
- که د $P(x)$ پولينوم پر $(x-a)$ ووېشو د باقي مانده قضيې په اساس پاتې(باقي) له $P(a)$ سره مساوي ده.
- که د $P(x)$ پولينوم پر $(x-a)$ ووېشو او باقي صفر شي، نو $(x-a)$ د $P(x)$ د پولينوم يو فکتور دی.
- د فکتور د معکوسې قضيې په اساس که $(x-c)$ د $M(x)$ پولينوم يو فکتور وي، نو $P(c)=0$ او د c عدد د $M(x)=0$ پولينومي معادلې يو جذر دی.
- د ترکيبي وېش په مرسته کولای شو چې که $P(x)$ پولينوم پر $(x-a)$ ووېشو، د وېش حاصل او باقي لاس ته راوړو او هم د ترکيبي وېش په مرسته د متحول په راکړ شوي قيمت کې د $P(x)$ د پولينوم قيمت پيدا کولای شو.
- د ترکيبي وېش په مرسته $P(x)=0$ د پولينومي معادلې جذرونه پيدا کولای شو.
- د باقي مانده قضيې په مرسته الجبري افاده هم تجزيه کولای شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځېرکي پوښتنې:

1 – د k قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ چې:

a: که $(x+5)$ د $P(x)=x^3+kx+125$ پولینوم یو فکتور وي.

b: که $(x-1)$ د $Q(x)=2x^4-3x^3-x-2k$ پولینوم یو فکتور وي.

c: که $(x-2)$ د $P(x)=x^3+3x^2-x+k$ پولینوم یو فکتور وي.

2 – د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل (Quotient) او پاتې (Remainder) پیدا کړئ.

$(5x^4-6x^2+3x-4)\div(x+4)$, $(x^5+4x^4+x^2-3x-28)\div(x+4)$

$(10x^2-31x+24)\div(x-\frac{3}{2})$, $(30x^3-20x^2-100x+1000)\div(x-10)$

3 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-1)$ د $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ د پولینوم یو فکتور دی.

4 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-\frac{1}{2})$ د $P(x)=x^3-\frac{1}{8}$ پولینوم یو فکتور دی.

5 – د ترکیبي وېش په مرسته د $x=-\frac{1}{2}$ لپاره د $P(x)=5x^2+x-9$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

6 – د ترکیبي وېش په مرسته د $x=3$ لپاره د $k(x)=2x^3-3x^2+4x+1$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

7 – د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې د 3 عدد د $x^3-3x^2+x-3=0$ پولینومي معادلې یو حل (جذر) دی.

8 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې د -1 او 2 عددونه د $x^4-5x^2+4=0$ معادلې حلونه (جذرونه) دي.

9 – د ترکیبي وېش په مرسته د k قیمت پیدا کړئ چې که $(x+3)$ د $P(x)=3x^3+kx^2-22x+24$ پولینوم یو فکتور وي.

10 – د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او باقي پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(4x^4-5x^2+2x-3)\div(x-2)$ $(x^3-x^2-14x+11)\div(x-4)$

$(7x^4+41x^2-6)\div(x+6)$ $(5x^3-3x+7)\div(x+4)$

11- د b او c قیمتونه په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د $P(x)=x^4+6x^3-20x^2+bx+c$ پولینوم پر x^2-3x+2 وویشو، باقي صفر شي.

12 - د m قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د $k(x)=2x^3+5x^2-mx+4$ پولینوم پر (x^2+2x-1) وویشو او باقي صفر شي.

13 - که $k=3a(x-1)^2-a(x-1)-4$ او $L=16+b(x-1)-3b(x-1)^2$ وي $Kb+La$ پیدا کړئ.

14- د x په کوم قیمت د $P(x)=12x^4+3x^3-13x^2+x+5$ پولینوم پر $(3x^2-1)$ پوره وېشل کېږي؟

15 - د P د کوم قیمت لپاره د $K(x)=3x^3-7x^2-9x+P$ پولینوم پر $(x-13)$ پوره د وېشلو وړ دی؟

16 - که د $P(x)=2x^3-x^2+3x-1$ پولینوم پر $(2x+1)$ ووېشل شي، د وېش د عملیې د سرته رسولو پرته ویلای شئ چې پاتې (باقي مانده) به څومره وي؟

a) -3 b) $-\frac{3}{2}$ c) 3 d) $\frac{7}{2}$

17 - د m قیمت به څو وي، که د $P(x)=5x^2+6x-7$ پولینوم پر $(x+m)$ ووېشل شي تر څو باقي مانده (1) شي؟

a) 2 b) $\frac{-4}{5}$ c) -4 d) a او b سم دي

18- که د $P(x)=x^3+3x^2-5x-8$ پولینوم، پر $(x+3)$ ووېشل شي د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته وواياست چې باقي څومره ده؟

a) صفر b) 13 c) -23 d) 7

19- که چېرې $x=4$, $y=-3$ او $z=2$ وي، د لاندې الجبري افادو قیمت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a: x^2yz+zxy^2+3xyz^2$ $b: \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{4}Z^2$

20 - د x د راکړل شوو قیمتونو لپاره د ترکیبي وېش په مرسته د لاندې پولینومو قیمتونه پیدا کړئ.

$P(x)=2x^3+3x^2-2x+5 \quad , \quad x=2$

$P(x)=3x^3+4x^2-5x+6 \quad , \quad x=-1$

$P(x)=2x^4-5x^3+4x-1 \quad , \quad x=1$

$P(x)=4x^4+6x^3+x^2+x-3 \quad , \quad x=-2$

21 - د لاندې معادلو يو، يو جذر راکړل شوی دی، د ترکیبي وېش په مرسته يې نور جذرونه پیدا کړئ.

$x^3-3x^2+x-3=0$ يو جذر يې (3) دی.

$x^3-5x^2+7x+13=0$ يو جذر يې (-1) دی.

$x^4-5x^2+4=0$ يو جذر يې (-1) دی.

$x^4-x^3-9x^2-11x-4=0$ يو جذر يې (-1) دی.

22 - که $P(x)=0$ وي، د دې پولینوم درجه څو ده؟

a) 1 b) -1 c) صفر d) تعریف شوې نه دی

23 - د هغه مستطیل له مساحت څخه چې بعدونه يې $(x+5)$ او $(x+2)$ وي، د هغه مستطیل مساحت تفریق کړئ چې بعدونه يې $(x+3)$ او $(x+1)$ وي.

24 - که $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ او $a=13$, $b=5$, $c=12$ او $p=\frac{a+b+c}{2}$ وي، د A قیمت پیدا کړئ.

25 - که $(x-1)^3$ او x^3+ax^2+bx+c معادل پولینومونه وي، د b قیمت مساوي دی په:

a) 1 b) 3 c) -3 d) -1

26 - د $(a-\frac{2}{a-1})$ $(a\div\frac{a+1}{a-1})$ افادې حاصل مساوي دی په:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $a(a+1)$ b) $a(a-2)$ c) $\frac{a-2}{a}$ d) $\frac{a-1}{a}$

27 - د $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)$ د ضرب حاصل مساوي دی په:

a) x^2-y^2 b) x^2+y^2 c) $2x^2-y$ d) $x-y$

28 -لاندې پولینومونه په نزولي ډول (Descending Order) ترتیب او هم ووایاست چې درجې یې څو دي؟

a) $-5x^2+3x^5+9$ b) $-x^2+xy^2z^3-x^5$ c) 3

29 - د $Q(x)=x^2+3x-5$ په پولینوم کې $Q(-1)$ مساوي دی، په:

a) 7 b) -7 c) 1 d) -1

30 - که $P(x)=x^2-2x+3$ او $Q(x)=2x^2+3x-1$ وي، د لاندې افادو قیمتونه پیدا کړئ.

$P(x)-Q(x)$ $P(0)+Q(0)$ $P(1)-Q(-1)$

$P(x)-P(x)$ $[P(x)+Q(x)]+p(x)$

31 - لاندې پولینومونه نظر y ته په نزولي ډول ترتیب کړئ.

$4x^2y-3xy^2+x^3+y^3$ $4xy^3-3x^3y+2x^2y^2+x^4+y^4$

32 - په لاندې الجبري افادو کې پولینومونه، ناطقې الجبري افادې او غیر ناطقې الجبري افادې په نښه کړئ.

13 , $\sqrt{2}x$, 0

$\frac{3x^2}{2}$, $\sqrt{x}-\frac{1}{x}$, $y^2-\frac{1}{y^2}$

33 - د $(1+2x+3x^2)+(3x-5-2x^2)+(-x^2-5x+4)$ افادې حاصل مساوي دی په:

a) 1 *b*) صفر *c*) -1 *d*) 2

34 - د دوو الجبري افادو د ضرب حاصل $(a^3+b^3+c^3-3abc)$ دی. که یوه افاده یې $(a+b+c)$ وي، بله افاده پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

35 - د وېش حاصل یې پیدا کړئ.

$(a^3+b^3)\div(a+b)$ $\quad$ $(12x^4+3x^3-13x^2+x+5)\div(3x^2-1)$

$(a^5-b^5)\div(a-b)$ $\quad$ $(4x^3-10x^2+12x+6)\div(2x+1)$

$\dfrac{-m^a}{m^b}$ $\quad$ $\dfrac{x^{a-2}}{x}$

36 - ضرب یې کړئ.

$(a^{2x}-2)(a^{2x}-2)$ $\quad$ $(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})$

$(e^x+1)(e^x-1)$ $\quad$ $(m^2-2n^2)(2m^2-n^2)$

$(0.1x^2)(0.1x^2)(0.1x^2)$ $\quad$ $(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)$

37 - لومړی لاندې افادې ساده او بیا یې جمع کړئ.

$(a-1)+1-(a-1)-3$ $\quad$ $-(10mn-m)-(m^2+m)+m^2$

$(y^2-1)+(y^2-1)$ $\quad$ $[-4(a-b)-5]+[(2a+b)-(a-b)]$

$10[-\{-(x^2-1)+5\}-x(x-2)]$ $\quad$ $10(x+1)-(x+1)-3(x+2)$

$mn-4+mn-5$

38 - د کومې لاندینې راکړل شوې یو حده درجه صفر ده؟

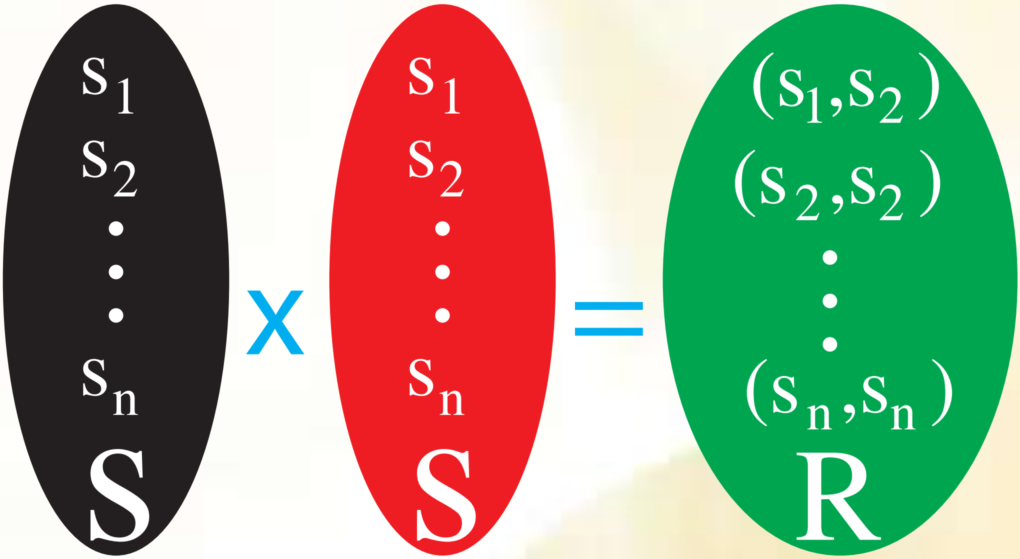
a) x $\quad$ b) $\sqrt{2}\ x$ $\quad$ c) $\sqrt{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

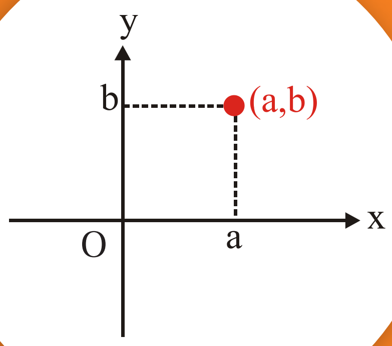
دویم څپرکی

رابطه

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library



مرتبي جوړې او کارتيزيني مستوي

• د (a,b) مرتبه جوړه په کوم حالت کې د (c,d) له مرتبې جوړې سره مساوي کېدای شي؟
• آيا د (a,b) مرتبه جوړه د (b,a) له مرتبې جوړې سره مساوي ده؟

که a اوb د يوه سټ او يا د مختلفو سټونو عناصر وي او a ته لومړنی عنصر او b ته دويم عنصر ووايو، نو (a,b)ته مرتبه جوړه وايي او (b,a) هم يو مرتبه جوړه ده، خو $(a,b) \neq (b,a)$ د (a,b) مرتبه جوړه په هغه صورت کې د (c,d) له مرتبې جوړې سره مساوی کېدای شي چې a=c او b=d وي.

لومړی مثال: که $(x-2, y+1) = (1,3)$ وي د x او y قيمتونه پيدا کړئ.

حل

$$x-2=1 \qquad y+1=3$$

$$\boxed{x=3} \qquad \boxed{y=2}$$

فعاليت

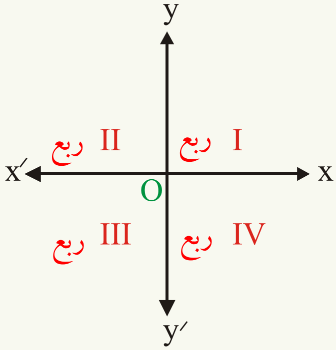
که $(a+1, 2b-3) = (0,-1)$ وي، د a او b قيمتونه پيدا کړئ.

کارتيزيني مستوي (Cartesian Plane)

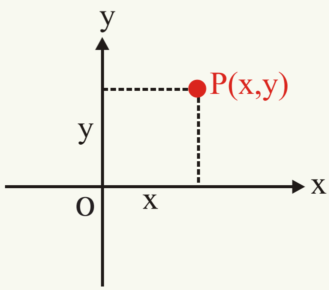
دوه، عمود او افقي خطونه رسم کړئ او د تقاطع ټکي ته يې مبدأ (Origin) وايي، افقي خط ته د X محور او عمود خط ته د Y محور وايي.
د X محوريه X'OX او د Y محور په Y'OY سره ونبيئ، هغه مستوي چې دا محورونه په کې واقع دي د کارتيزيني مستوي په نامه ياديږي.
دواړه محورونه مستوي په څلورو برخو وېشي چې هرې برخې ته يې ربع (ناحيه)(Quadrant)

(c) ketabton.com: The Digital Library

وايي، د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف جهت (Anti clockwise) په ترتيب سره لومړنی دويمه، دريمه او څلورمه ربع ده، لکه: څنګه چې په شکل کې ليدل کېږي.

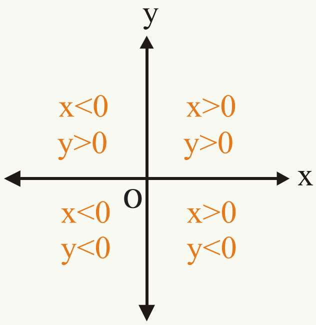


په دې مستوي کې د P دنقطې موقعيت د (x,y) د حقيقي عددونو د مرتبې جوړې په واسط داسې ښودل کېږي چې دP د نقطې افقي فاصله د Y له محور څخه x او د P د نقطې عمودي فاصله د x له محور څخه y ده.



که د P نقطه د Y د محوربني خواته واقع وي، د x قيمت مثبت دی او که د Y د محور کيڼې خواته واقع وي، د x قيمت منفي دی او که د P نقطه د Y پر محور پرته وي $x = 0$ دی.

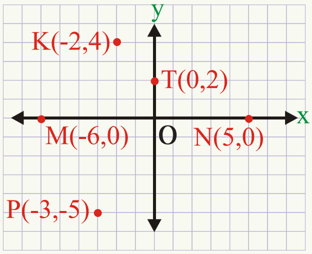
همدارنګه که د P نقطه د X له محور څخه پورته واقع وي، د y قيمت مثبت او که د X له محور څخه لاندې واقع وي د y قيمت منفي دی. $(y < 0)$ او که د p نقطه د X پر محور پرته وي، $y = 0$ کېږي، په لنډ ډول په شکل کې ښودل شوي دي



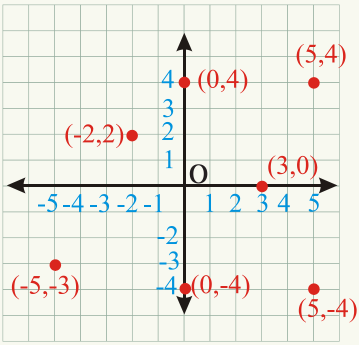
(c) ketabton.com: The Digital Library

چې x او y ته کارتيزيني مختصات (Cartesion Coordinates) وايي چې په $P(x, y)$ کې لومړنی عنصر x ته فاصله (abscissa) او دويم عنصر y ته ترتيب (Ordinate) وايي چې د مختصاتو مبدا $(0,0)$ ده، څرګنده ده چې د حقيقي عددونو (x, y) د هرې مرتبې جوړې لپاره په مستوي کې يوه نقطه او د مستوي د هرې نقطې لپاره د حقيقي عددونو يوه جوړه شته دی.

دويم مثال: د $P(-3,-5), K(-2,4), T(0,2), N(5,0)$ او $M(-6,0)$ نقطې د وضعيه کمياتو په مستوي کې وټاکئ.



دريم مثال: د هرې نقطې لپاره چې په لاندې شکل کې ښودل شوي دي، اړونده مرتبه جوړه وليکئ.



فعاليت

د $(2,-1), (-1,2), (-2,-1), (2,1), (2,0)$ او $(0,1)$ نقطې دوضعيه کمياتو په سيستم کې وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1 - که د P د نقطې فاصله مثبت او ترتیب یې منفي وي، د P نقطه په کومه ربع کې واقع ده؟

2 - که د یوه شکل څلور رأسونه $A(3,3)$, $B(-3,3)$, $C(-3,-3)$ او $D(3,-3)$ وي، دا کوم ډول هندسي شکل دی؟

3 - د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هغه مثلث چې رأسونه یې $A(2,0)$, $B(0,2)$ او $C(0,0)$ وي رسم کړئ او وواياست چې د اکوم ډول مثلث دی؟

4 - د $P_1(2,-3)$, $P_2(-3,2)$, $P_3(1,5)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.

5 - وواياست چې لاندې مرتبې جوړې په کومه ربع کې واقع دي؟

$(1,5)$, $(-5,1)$

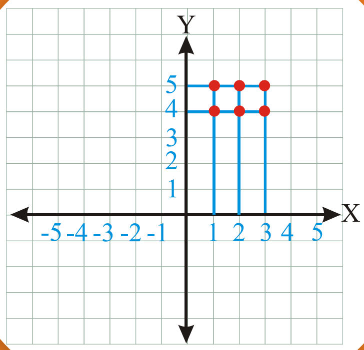
$(-4,-6)$, $(4,-5)$

$(-\frac{1}{2},-2)$, $(-\frac{1}{2},2)$

$(2\frac{1}{2},\frac{1}{4})$, $(2,0)$

$(0,-1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د کارتیزني ضرب حاصل او گراف يې

آيا په مخامخ شکل کې $A\times B$ ښودلای شئ؟

فعالیت

که $A\{1,2,3\}$ او $B=\{4,5\}$ وي:

- $A\times B$ پیداکړئ.
- د $A\times B$ د عناصرو شمېر پیداکړئ.
- آیا $A\times B=B\times A$ دی؟
- آیا $A\times A$ او $B\times B$ پیداکولای شئ؟

که A او B دوه غیر خالي ستونه وي، $(A\times B)$ په لاندې ډول تعریف شوي دي:

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\}$$

په دې معنا چې د A او B د ضرب حاصل $(A\times B)$ داسې یوسټ دی چې عناصر یې د (x,y) د هغه مرتبو جوړوسټ دی چې x د A د سټ او y د B د سټ عنصروي، که $A\neq B$ وي نو: $A\times B\neq B\times A$ دي که د A د سټ د عنصرونو شمېر m او د B دسټ د عنصرونو شمېر n وي، د $A\times B$ د عناصرو شمېر له $(m\times n)$ څخه عبارت دی.

لومړی مثال: که $A=\{0,1,2\}$ او $B=\{3,4\}$ وي $A\times B$, $B\times A$, او $A\times A$ پیداکړئ.

حل

$$A\times B=\{0,1,2\}\times\{3,4\}=\{(0,3),(0,4),(1,3)(1,4),(2,3),(2,4)\}$$

$$B\times A=\{3,4\}\times\{0,1,2\}=\{(3,0),(3,1),(3,2)(4,0),(4,1),(4,2)\}$$

$$A\times A=\{0,1,2\}\times\{0,1,2\}=\{(0,0),(0,1),(0,2)(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

که $A=\{-4,-1,0\}$ او $B=\{1,4\}$ وي $A\times A, A\times B$ او $B\times B$ پیداکړئ.

دویم مثال: که $IN=\{1,2,3...\}$ او $L=\{0\}$ وي، نو $IN\times L$ پیداکړئ.

حل:

$$IN\times L=\{(1,0),(2,0),(3,0),(4,0)...\}=\{(x,0)/x\in IN\}$$

دریم مثال: که $IN=\{1,2,3...\}$ او $W=\{0,1,2,3...\}$ وي $W\times N$ پیداکړئ.

حل

$$W\times IN=\{(0,1),(0,2),(0,3),...,(1,1),(1,2),(1,3),...,(2,1),(2,2),...,\}$$
$$=\{(x,y)/x\in w\wedge y\in IN\}$$

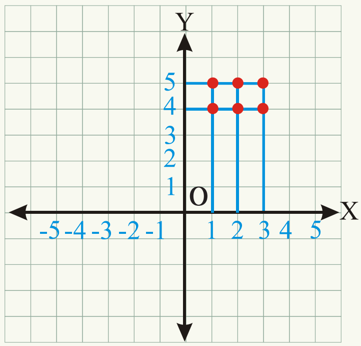
د کارتیزني حاصل ضرب گراف: (Graph of Cartesian Product)

کولای شو چې د کارتیزني ضرب حاصل د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هم وښودلای شو.

څلورم مثال: که $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{4,5\}$ وي $A\times B$ پیداکړئ او د وضعیه کمیاتو په مستوي کې یې وښیاست.

حل

$$A\times B=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$$



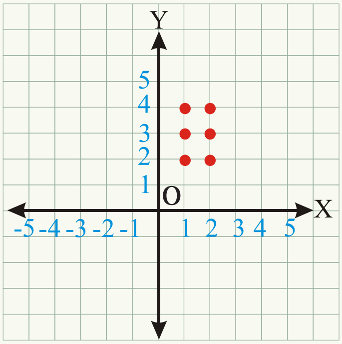
د X پرمحور د 1,2,3 عددونه او د Y پر محور د 4 او 5 عددونه ټاکو له 2,1 او3 څخه عمود خطونه او له 4 او 5 څخه افقي خطونه رسموو، ددې دواړو خطونو د تقاطع نقطې د $A\times B$ مرتبې جوړې ښکاره کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

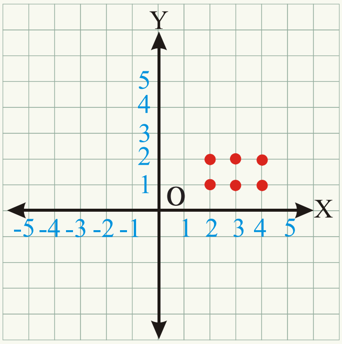
پنځم مثال: که $A=\{1,2\}$ او $B=\{2,3,4\}$ وي $A\times B$ او $B\times A$ پیداکړئ او په شکل کې يې وښیاست.

$$A\times B=\{1,2\}\times\{2,3,4\}=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$$

$$B\times A=\{2,3,4\}\times\{1,2\}=\{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$



$A\times B$

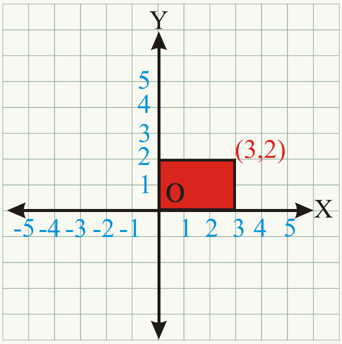


$B\times A$

شپږم مثال: که $A=\{x/x\in IR, 0\le x\le 3=[0,3]\}$ او $B=\{y/y\in IR, 0\le y\le 2=[0,2]\}$ وي $A\times B$ په شکل کې يې وښیاست.

حل

$$A\times B=\{(x,y)/0\le x\le 3\wedge 0\le y\le 2\}$$



فعالیت

که چیرې $A=\{1,2\}$ او $B=\{3,4\}$ وي $A\times B$ پیدا او په شکل کې يې وښیاست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1 - که:

$A = \{-1,1,3\}$ i) $B = \{2,4\}$

$A = \{-1,1\}$ ii) $B = \{2,3\}$

وي $A \times B$ پیدا او په شکل کې یې وښیاست.

2 - د لومړۍ پوښتنې د ستونو لپاره $B \times A$ پیدا او په شکل کې یې وښیاست.

3 - که $A = \{1,2,3\}$ وی $A \times A$ پیدا کړئ.

4 - که $A = \{2,4,6\}$ او $B = \{1,3,5\}$ وی $A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ او $B \times B$ پیدا کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

رابطه
(Relation)

عطاالله د عزت الله ورور دی

(عطا الله R عزت الله)

وروروليي هم يوه رابطه ده.

يوسټ چې د شيانو او مفهومونو له مرتبو جوړو څخه جوړ شوی وي، له يوې رابطې څخه عبارت دی. ياكه A او B دوه غير خالي سټونه (non empty sets) وي، نو د $A \times B$ هرفرعي سټ له A څخه په B كې يوه رابطه ده، كه $R \ni (a,b)$ وي، ويل كېږي چې a له b سره رابطه لري او د (aRb) په شكل ليكل كېږي.

كه R له A څخه په B كې يوه رابطه وي، نو $R \subset A \times B$ ده او كه R د $A \times A$ يو فرعي سټ وي، نو R په A كې يوه رابطه ده.

لومړی مثال: كه $A = \{x, y\}$ او $B = (1,2)$ وي، $A \times B$ پيدا كړئ، او له A څخه په B كې څلور رابطې وليكئ.

حل

$$A \times B = \{(x,1),(x,2),(y,1),(y,2)\}$$
$$R_1 = \{(x,1),(x,2)\}$$
$$R_2 = \{(y,1)\}$$
$$R_3 = \{(y,2)\}$$
$$R_4 = \{(x,1),(y,1)\}$$

چې د $A \times B$ د عناصرو شمېر څلور او د $A \times B$ د ټولو فرعي سټونو شمېر $2^4 = 16$ دی، نو له A څخه په B كې د ټولو رابطو شمېر 16 دی.

دويم مثال: كه $A = \{1,3,5,...19\}$ چې د A د سټ د عناصرو شمېر 10 دی او $B = \{2,4,6\}$ وي چې د B د عناصرو شمېر (3) دی، د $A \times B$ د عناصرو شمېر(ټولې مرتبې جوړې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$10\times 3=30$ دي او له A څخه په B کې د ټولو رابطو شمېر 2^{30} دی.

پام موږ چې: ϕ او $A\times B$ هم په فرعي سټونوکې شامل دی.

دریم مثال: که $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{a,b\}$ وي له A څخه په B کې (3) رابطې ولیکئ.

حل:

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

درې رابطې عبارت دي له:

$$R_1=\{(1,a),(1,b),(2,a),(3,a),(3,b)\}$$
$$R_2=\{(1,b),(2,a),(3,a),(3,b)\}$$
$$R_3=\{(2,a),(2,b),(3,a)\}$$

فعالیت

که $R=\{(x,y)/x+y=5)\}$ په $A=\{1,2,3,4\}$ کې یوه رابطه وي، د R عناصر ولیکئ.

څلورم مثال: که $R=\{(x,y)/x-y=2\}$ په $A=\{1,2,3,4\}$ کې یوه رابطه وي، د R عناصر ولیکئ.

حل: $R=\{(3,1),(4,2)\}$ ده.

د رابطې د تعریف ساحه (Domain) او د قیمتونو ساحه (Range) یې:

پوهېږو چې که R له A څخه په B کې یوه رابطه وي، نو $R\subseteq A\times B$ ده، په دې معنا چې R یو سټ دی چې عناصر یې د (x,y) مرتبې جوړې دي چې $x\in A$ او $y\in B$ ده.

د R د تعریف ساحه د مرتبو جوړو لومړني عناصر دي چې په Dom_R سره ښودل کېږي. همدارنګه د R د قیمتونو ساحه (Range) د مرتبو جوړو دویمې عناصر دي، په $Range_R$ سره ښودل کېږي.

لومړی مثال: که $A=\{1,2\}$ او $B=\{x,y\}$ وي او R له A څخه په B کې یوه رابطه وي، لومړی د دې رابطې عناصر ولیکئ، بیا د رابطې د تعریف ساحه (Dom_R) او د قیمتونو ساحه ($Range_R$) یې ولیکئ.

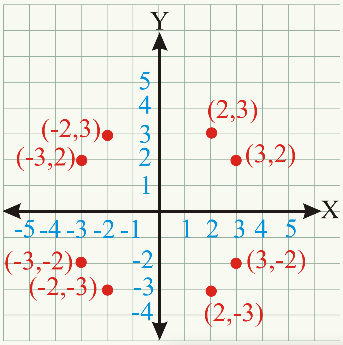
(c) ketabton.com: The Digital Library

حل

$$R=\{(1,x),(2,x),(1,y),(2,y)\}$$
$$Dom_R=\{1,2\} \qquad Range_R=\{x,y\}$$

دویم مثال: که د $R=\{(x,y)/x^2+y^2=13\}$ رابطه د $A=\{-3,-2,1,2,3\}$ په سټ کې تعریف شوې وي، لومړی د (R) عناصر د مرتبو جوړو په شکل ولیکئ، (Dom_R) او ($Range_R$) پیدا کړئ او بیا یې ګراف رسم کړئ.

$$R=\{(-3,-2),(-3,2),(-2,-3),(-2,3),(2,-3),(2,3),(3,-2),(3,2)\}$$
$$Dom_R=\{-3,-2,2,3\}$$
$$Range_R=\{-3,-2,2,3\}$$



فعالیت

که $R=\{(x,y)/y=2x\}$ وي او د R د تعریف ناحیه $\{0,4,8\}$ وي، د R د قیمتونو ناحیه معلومه کړئ.

معکوسه رابطه (Inverse of a Relation)

که R له A څخه په B کې یوه رابطه وي، د R معکوس چې په R^{-1} سره ښودل کیږي او له $R^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in R\}$ څخه عبارت ده:

$$(x,y)\in R \Leftrightarrow (y,x)\in R^{-1}$$

د R دتعریف ساحه د R^{-1} د قیمتونو ساحه او د R^{-1} د تعریف ساحه د R د قیمتونو له ساحې څخه عبارت ده.

مثال: که $R=\{(1,2)(2,3)(3,4)\}$ د طبیعي عددونو په سټ کې یوه رابطه وي، د R د رابطې معکوسه رابطه یا R^{-1} پیدا کړئ.

حل:

$$R^{-1}=\{(2,1)(3,2)(4,3)\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

معادله رابطه (Equivalent Relation): د R رابطه د A په سټ کې یوه معادله رابطه ده، که درې لاندنې خاصیتونه ولري:

1- انعکاسي خاصیت (Reflexive Property): د x د هر عنصر $x \in A$ لپاره $(x,x) \in R$ وي یا $\forall x \in A \Rightarrow (x,x) \in R$

2- تناظري خاصیت (Symmetric Property): ( ): که (x,y) په R کې شامله وي، نو (y,x) هم په R کې شامله وي یا: $\forall (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

3 - انتقالي خاصیت (Transitive Property): که $(x,y) \in R$ او هم $(y,z) \in R$ وي په نتیجه کې (x,z) مرتبه جوړه هم په R کې شامله وي یا:

$$(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$$

مثال: د مساوات رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې یوه معادله رابطه ده:

1- په حقیقي عددونو کې د هر x لپاره $x=x$ دی، $5=5$ (انعکاسي خاصیت)

2- د هر $x, y \in IR$ لپاره که $x=y$ وي، نو $y=x$ ده(تناظري خاصیت)

3- د هر $x, y, z \in IR$ لپاره که $x = y$ او $y=z$ وي په نتیجه کې $x=z$ دی(انتقالي خاصیت)

پوښتنې

1- که $A = \{1,2\}$ □ $B = \{0,4,6\}$ وي.

له A څخه په B کې درې رابطې ولیکئ.

له B څخه په A کې څلور رابطې ولیکئ.

په A کې څلور رابطې ولیکئ.

2- که $A = \{1,2,3,4\}$ او $B = \{1,3,5\}$ وي او $R = \{(x,y) | y < x\}$، له A څخه په B کې یوه رابطه وي، د R عناصر ولیکئ.

3- که $R = \{(x,y) | y+1 = 2x^2\}$ د طبیعي عددونو په سټ کې یوه رابطه وي او د تعریف ساحه یې ټول طبیعي عددونو وي، د قیمتونو ساحه (Range) یې پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دڅېړکې لنډيز

- (a,b): چې دليکلو ترتيب په کې اهميت لري، مرتبه جوړه نومېږي چې a ته لومړنی مختصه او b ته دويمه مختصه وايي، په عمومي ډول $(a,b) \neq (b,a)$
- د (a,b) او (c,d) دوه مرتبې جوړي په داسې حال کې سره مساوي دي چې $a = c$ او $b = d$ وي.
- **د کارتيزيني ضرب حاصل**: د A او B دستونو کارتيزيني ضرب چې په $A \times B$ سره ښودل کېږي په دې ډول تعريف شوی دی: $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$
- که د A سټ د عناصرو شمېر په m او د B د سټ د عناصرو شمېر په n سره وښايو، د $A \times B$ د عناصر شمېر $m \times n$ دی.
- کولای شوچې د A اوB، دستونو ضرب $(A \times B)$ د وضعيه کمياتو په مستوي کې وښايو.
- **رابطه**: د $A \times B$ هر فرعي سټ له A څخه په B کې د R يوه رابطه ده.
  که $R \subset A \times B$ او که $R \subset A \times A$ وي، نو په دې صورت کې R په A کې يوه رابطه ده.
  $(x\ ,\ y) \in R \Leftrightarrow x\,R\,y$
- که د A سټ د عناصرو شمېر په n سره وښايو، د A د فرعي ستونو شمېر 2^n دی.
- که د A سټ د عناصرو شمېر په m او د B دسټ د عناصرو شمېر په n سره وښايو له A څخه په B کې د رابطو شمېر 2^{mxn} دی
- که R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، د R د تعريف ساحه (Dom_R) د مرتبو جوړو دلومړنيو عناصرو سټ او د قيمتونو ساحه $(Range_R)$ يې دمرتبو جوړو د دويمو عناصرو سټ دی.
- **معکوسه رابطه**: که R له A څخه پهB کې يوه رابطه وي، د R معکوسه رابطه په R^{-1} سره ښودل کېږي چې:

$$R.^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in R\}$$

$$(x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R^{-1}$$

ښکاره خبره ده چې R^{-1} د تعريف ساحه د R دقيمتونو له ساحې سره او د R^{-1} دقيمتونو ساحه د R د تعريف له ساحې سره مساوي ده.

- **معادله رابطه**: R د A په سټ کې يوه معادله رابطه ده که چېرې لاندې درې خاصيتونه ولري.

1- انعکاسي خاصيت. 2- تناظري خاصيت. 3- انتقالي خاصيت.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دځېرکي پوښتني

1- که $A=\{1,3,5\}$ او $B=\{2,4,6\}$ وي $A\times B, B\times A$ او $A\times A$ پیدا کړئ.

2- که $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{0,1\}$ وي $A\times B$ په شکل کې وښیاست.

3- که $(x-2y,2x+y)=(3,1)$ وي د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

4- په $A=\{1,3,5\}$ کې د R رابطه داسې په لاس راوړئ چې R د مساوات رابطه وي.

5- که $A=\{a,b\}$ وي د A^2 عناصر ولیکئ.

6- که د $R=\{(x,y)|y=x^2\}$ رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې تعریف شوي وي د R رابطې گراف رسم کړئ.

7- که $R=\{(x,y)|y^2=x\}$ رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې تعریف شوي وي د R د رابطې گراف رسم کړئ.

8- که $R=\{(1,-1),(2,-2)(3,-3)\}$ وي د R^{-1} د تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

9- که $R=\{(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)\}$ وي دR او R^{-1} د تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

10- که $A=\{3,6,12\}$ او $B=\{-1,0\}$ وي په A کې د رابطو شمېر او له A څخه په B کې درابطو شمېر پیدا کړئ.

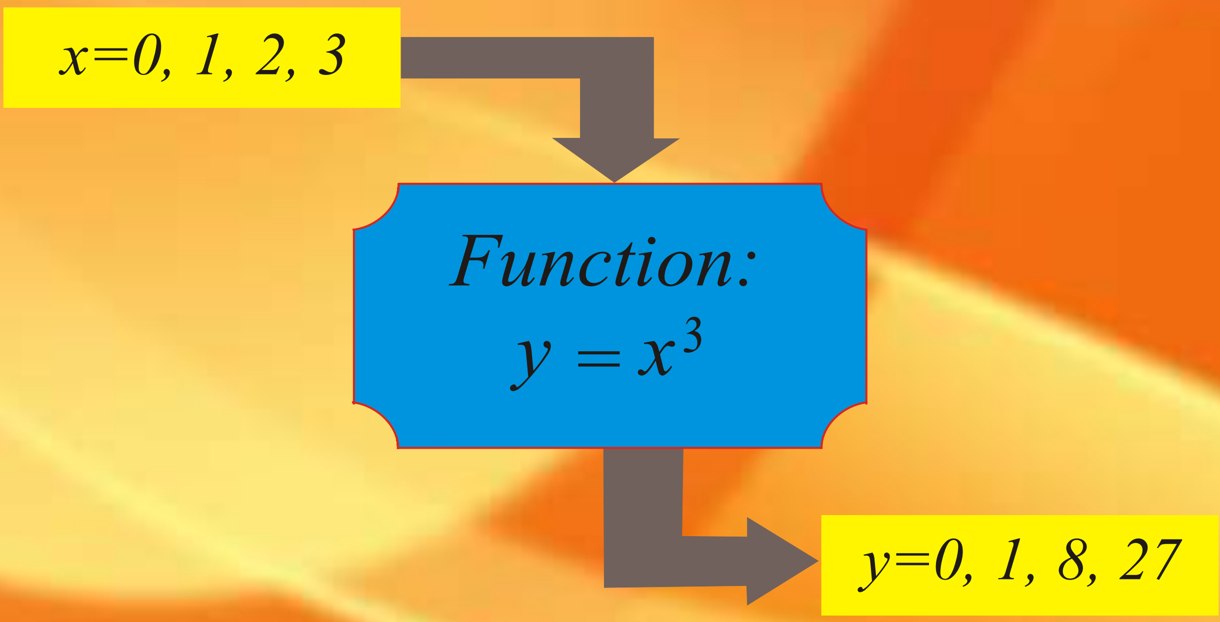
11- که د $(4a+1,2b+a)$ او $(5,3a-4b)$ دوه مرتبې جوړې سره مساوي وي د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

12- که $A=\{a,b,c\}$ او $B=\{x,y\}$ وي $A\times B$ او $B\times A$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

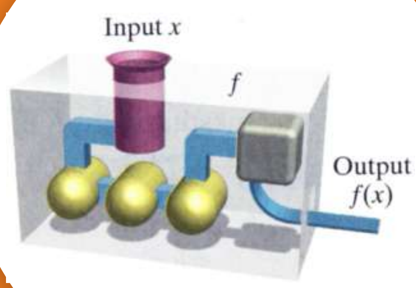
دریم څپرکی
تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

تابع (function)



آیا تابع او رابطه یو له بله سره توپیر لري؟

فعالیت

- آیا هره تابع یوه رابطه ده او هره رابطه یوه تابع ده ؟
- آیا د مرتبو جوړو هر سټ یوه تابع ده؟
- آیا کولای شئ چې یوې تابع ته د یو ماشین په شان فکر وکړئ؟

د لومړي ځل لپاره د تابع مفهوم د یوه الماني ریاضي پوه لیبنز (Leibniz)، (1716 – 1646) له خوا معرفي شوه.

تابع یوه رابطه یا یوه قاعده ده چې یو کمیت ته د بل کمیت سره اړیکه ورکوي، د تابع د مفهوم د ښه پوهیدو لپاره لاندې مثالونه تر غور لاندې ونیسئ.

1 - د یوې مربع مساحت (A) د مربع په ضلعې (x) پورې اړه لري. هغه معادله چې د مربع مساحت ته د مربع په ضلعې پورې اړیکه ورکوي له $A = x^2$ څخه عبارت ده.

د مربع ضلع x	1	2	3	4	5	...
د مربع مساحت A	1	4	9	16	25	...

یا په بل عبارت د مربع مساحت د مربع د ضلعې تابع دی یا $A = f(x)$

2 - د نړۍ د نفوسو شمېر (p) په وخت (t) پورې اړه لري، لکه: څرنګه چې په لاندې جدول کې لیدل کېږي په تقریبي ډول د نړۍ د نفوسو شمېر د میلیون په حساب ښودل شوی دی.

کال (t)	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
نفوس په میلیون (p)	1650	1750	1860	2070	2300	2560	3040	3710	4450	5280	6080

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کیږي چې نفوس (Population) یا P د وخت (t) تابع ده یا $p = f(t)$

3 - د دایرې مساحت (A) ، د دایرې په شعاع (r) پورې اړه لري($A = \pi r^2$)

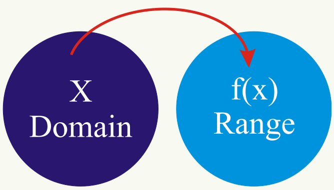
4 – د کرې حجم (V) د کرې په شعاع (r) پورې اړه لري چې د $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ د معادلې په واسطه ښودل کیږي.

له پورتنیو مثالونو څخه دا نتیجه اخیستل کیږي چې د تابع په مفهوم کې اړیکه مرکزي حیثیت لري د مثال په ډول د هر انسان عمر له یوه عدد سره اړیکه لري، په یوه مغازه کې هر جنس له یوه ټاکلي قیمت سره اړیکه لري، هر موټر د یوې ټاکلې شمیرې جوازسېر پورې اړه لري او د هر عدد مکعب، یو عدد دی $(2^3 = 8 \quad , \quad 3^3 = 27)$.

په پورتنیو مثالونو کې لیدل کیږي چې مساحت (A)، نفوس (P) اوحجم (V) د مربع ضلعې (x)، وخت (t) او د کرې شعاع (r) تابع دي چې مساحت، نفوس او حجم هر یوه ته مربوط (مقید) متحول (dependent Variable) او د مربع ضلعې، د کرې شعاع او د وخت کمیتونو ته ازاد متحول یا مستقل متحول (Independent Variable) وایي کولای شو چې تابع داسې تعریف کړو:

تعریف

تابع د دوو ستونو تر منځ یوه داسې رابطه یا قاعده ده چې د لومړني سټ هر عنصر یوازې او یوازې د دویم سټ له یو عنصر سره اړیکه ولري چې لومړني سټ د تعریف د ناحیې (Domain) او دویم سټ د قیمتونو د ناحیې (Range) په نوم یادیږي.



یا تابع د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر یې تکرار شوي نه وي.

که $S = \{(1,4)(2,3)(3,2)(4,3)(5,4)\}$ وي، نو د S رابطه د یوې تابع ښودونکې ده، ځکه چې د مرتبو جوړو لومړني عناصر یې تکرار شوي نه دي.

$$Domain(s) = \{1,2,3,4,5\}$$
$$Range(s) = \{2,3,4\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

که $T=\{(1,4),(2,3),(3,2),(2,4),(1,5)\}$ وي آيا T يوه تابع ښيي؟

لومړی مثال: په لاندې جدولونو کې کوم یو، یوه تابع ښکاره کوي؟

(جدول III)

Domain (د عدد مربع جذر)	Range (عدد)
0	0
1	1
1	-1
4	2
4	-2
9	3
9	-3

(جدول II)

Domain (عدد)	Range (د عدد مربع)
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

(جدول I)

Domain (عدد)	Range (د عدد مکعب)
-2	8
-1	-1
0	0
1	1
2	8

I او II جدولونه تابع ښکاره کوي، لیکن III جدول تابع نه ښکاره کوي، ځکه چې د لومړنۍ سټ یا (Domain) یو عنصر د دویم سټ (Range) له دوو عنصرو سره اړیکه لري، یا په بل عبارت د مرتبو جوړو لومړني عناصر تکرار شوي دي چې مرتبې جوړې یې :

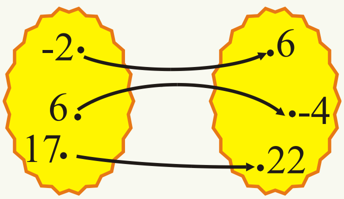
$(1,1),(1,-1),(4,2),(4,-2),(0,0),(9,3),(9,-3)$ دي او یا دا چې د لومړنۍ سټ د یو عنصر لپاره په دویم سټ کې دوه تصویرونه (Images) موجود دي، ډېره ښه به دا وي چې یوې تابع ته د یو ماشین فکر وکړو، کوم شکل چې د څېرکې په لومړي مخ کې راکړل شوی دی، خام مواد یا ورودي (input) یا Domain او خروجي output یا $f(x)$ د Range په نامه یادېږي.

که A او B د حقیقي عددونو سټونه وي له A څخه B ته هره تابع د حقیقي تابع په نامه یادېږي. پام مو وي چې : $Range \subseteq codomain$ دی.

دويم مثال: که $f=\{(-5,3m),(-5,2m-10),(1,2)\}$ د یوې تابع ښودونکې وي، د m قیمت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $-5=-5$ دي، نو باید $3m=2m-10$ سره وي، په نتیجه کې $m=-10$ کېږي په دې معنا ددې لپاره چې f یوه تابع وي، باید $m=-10$ وي.

درېیم مثال: له لاندېنیو دیاګرامونو څخه کوم یو یې یوه تابع ښيي؟



(a)

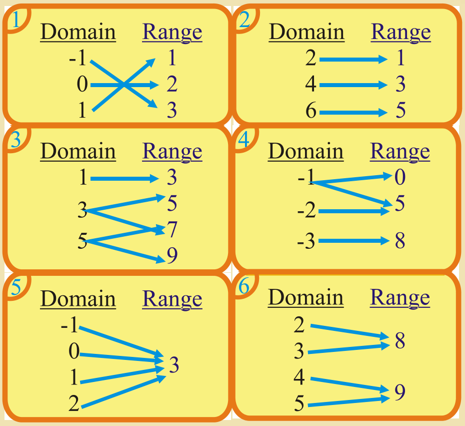
(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د a او b دیاگرامونه تابع ښيي، لیکن د c دیاګرام د یوې تابع ښودونکی نه دی.

تابع د X او Y د دوو سټونو ترمنځ یوه داسې رابطه ده چې د x د سټ یا (Domain) هر عنصر یوازې د Y د سټ (Range) د یو عنصر سره اړیکه لري چې X ته ازاد متحول او Y ته مقید (مربوط) متحول وایي یا تابع د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني یې عناصر یې تکرار شوي نه وي.

پوښتني

1 – د مخامخ جدولونو څخه کوم یو یې د تابع ښودونکی دی؟



2 – د لاندې مرتبو جوړو له سټونو څخه کومه یوه یې یوه تابع ښيي؟ د تعریف ساحه (Domain) او د قیمتونو ساحه (Range) یې تعین کړئ.

1– $\{(2,4)\ ,\ (3,6)\ ,\ (4,8)\ ,\ (5,10)\}$

2– $\{(-1,4)\ ,\ (0,3)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,1)\}$

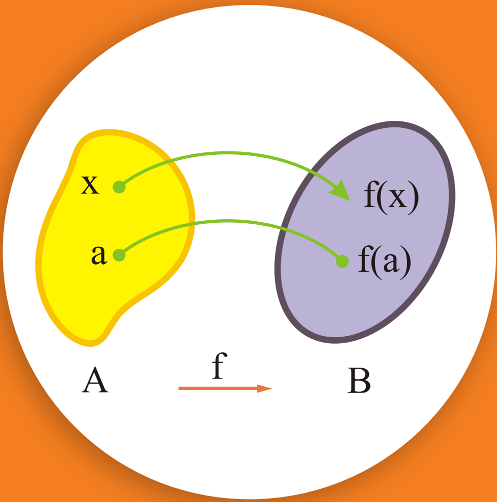
3– $\{(10,-10)\ ,\ (5,-5)\ ,\ (0,0)\ ,\ (5,5)\ ,\ (10,10)\}$

4– $\{(-10,10)\ ,\ (-5,5)\ ,\ (0,0)\ ,\ (5,5)\ ,\ (10,10)\}$

5– $\{(0,11),(1,1),(2,1),(3,2),(4,2),(5,2)\}$

6– $\{(1,1)\ ,\ (2,1)\ ,\ (3,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,2)\ ,\ (3,2)\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د تابع د ليکلو طريقه او د يوې تابع د قيمت پيدا کول

- څه وخت يوه معادله د يوې تابع ښکارندويه ده؟
- يوه رابطه څه وخت يوه تابع ښيي؟
- يو جدول څه وخت يوه تابع ښيي؟

د لومړي ځل لپاره سويسي رياضي پوه اويولر (1707 -1783) (Euler) دا عبارت چې y د x تابع ده، د $y = f(x)$ مساوات په شکل وښوده چې $f(x)$ د x لپاره د y يا $f(x)$ د تابع قيمت دی. که f له A څخه B ته يوه تابع وي، په لاندې ډول ښودل کېږي چې

$f : A \to B$

$y = f(x)$ يا

په شکل کې x له (input) او $f(x)$ له (output) څخه عبارت دی، تابع ګانې د f,g,h او نورو تورو په واسطه ښودل کېږي.

تابع عموماً په 4 طريقو ښودل کېږي.

1 – د عبارتونو (جملو) په واسطه (Verbally)

2 – د يوه جدول په واسطه يا عددي (Numerically)

3 - مشاهده وي: د ګراف په واسطه (Visually)

4 - د يو واضح فورمول يا معادلې په واسطه يا په الجبري ډول (Algebraically)

فعاليت

که $f(x)$ او $g(x)$ په جدولونو کې په لاندې ډول راکړل شوي وي، د x په راکړل شوو قيمتونو کې ددې تابع ګانو قيمت پيدا کړئ. يا په بل عبارت د تابع د تعريف ساحه (Domain) درکړل شوې ده، د تابع اړونده قيمتونه (Range) يې پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x)=\frac{1}{2}x-4$

x=	-1	-2	0	2	4
f(x)=	?	?	?	?	?

$g(x)=x^3-1$

x=	0	-1	1	2
g(x)=	?	?	?	?

لومړی مثال: که $f(x)=x^2+3x-2$ وي $f(2)$ ، $f(0)$ ، $f(-3)$ او $f(a)$ پیدا کړئ.

حل:

د تابع قیمتونه	تابع (Rule) $f(x)=x^2+3x-2$	د تعریف ساحه
8	$f(2)=2^2+3\cdot2-2=4+6-2$	2
-2	$f(0)=0^2+3\cdot0-2=-2$	0
-2	$f(-3)=(-3)^2+3(-3)-2=9-9-2$	-3
a^2+3a-2	$f(a)=a^2+3a-2$	a

یا $f(2)=8$ ، $f(0)=-2$ ، $f(-3)=-2$ ، $f(a)=a^2+3a-2$

دویم مثال: که $f(x)=x^2+3x+5$ وي، $f(-x)$ ، $f(x+3)$ او $f(2)$ پیدا کړئ.

حل

$$f(2)=2^2+3\cdot2+5=4+6+5=15$$

$$f(x+3)=(x+3)^2+3(x+3)+5=x^2+6x+9+3x+9+5=x^2+9x+23$$

$$f(-x)=(-x)^2+3(-x)+5=x^2-3x+5$$

فعالیت

که $g(x)=x^2-2x+7$ وي $g(-x)$ ، $g(x+4)$ او $g(-5)$ پیدا کړئ.

دریم مثال: که $h(x)=3-2x$ او $f(x)=2x+6$ وي $f(-1)$ ، $h(6)$ او $f(-1)+f(3)$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$f(-1)=2(-1)+6=-2+6=4$$
$$h(6)=3-2\cdot 6=3-12=-9$$
$$f(-1)+f(3)=4+2\cdot 3+6=4+12=16$$

څلورم مثال: که $f(x)=ax^2-bx+1$ او $f(1)=0$ او $f(3)=10$ وي د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$10=9a-3b+1 \quad , \quad 0=a-b+1$$

$$10=9a-3b+1$$
$$0=_3a\mp 3b\pm 3$$

$$10=6a-2 \qquad 10=18-3b+1$$
$$12=6a \qquad 3b=19-10$$
$$a=2 \qquad 3b=9$$
$$b=3$$

پنځم مثال: له لاندینیو معادلو څخه کومه یوه یې یوه تابع ښیي؟

$a:\quad x^2+y=4 \qquad b: x^2+y^2=4$

حل: هغه وخت یوه معادله یوه تابع ښیي چې د x د هر قیمت لپاره د y یو قیمت موجود شي.

$a:\quad x^2+y=4 \Rightarrow y=4-x^2$

د x د هر قیمت لپاره y یو قیمت لري، د مثال په ډول که $x=1$ وي، $y=4-1^2=3$، نو $y=4-x^2$ یوه تابع ده.

$b:\quad x^2+y^2=4 \Rightarrow y=\pm\sqrt{4-x^2}$

د x د یوه قیمت لپاره y دوه قیمتونه لري، نو y یوه تابع نه ده.

د مثال په ډول که $x=1$ وي، $y=\pm\sqrt{3}$ یا $(1,\sqrt{3})(1,-\sqrt{3})$ چې لومړني عناصر یې تکرار شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

وښیاست چې د $y-x^2=1$ او د $x^3-y=2$ معادلې د تابع ښودونکې دي او د $x^2+y^2=4$ معادله د یوې تابع ښودونکې نه ده.

یوه تابع د $y=f(x)$ په شکل لیکل کېږي، د تابع د قیمت د پیدا کولو لپاره د x قیمت د تابع په معادله کې وضع کوو، د تابع قیمت په لاس راځي او یوه معادله هغه وخت د یوې تابع ښکارندویه وي چې د هر x لپاره یو y وجود ولري.

پوښتنې

1– که $g(x)=x^2+x-2$ او $f(x)=2x^2+3x-1$ وي $g(2)-g(-3)$, $g(-2), f(-3)$ او $\frac{f(0)\cdot g(-2)}{f(-3)}$ پیدا کړئ.

2 – که $f(x)=x^2-x$ او $g(x)=\sqrt{x+4}$ وي $f(-2)$, $g(0)$ او $f(x-1)$ پیدا کړئ.

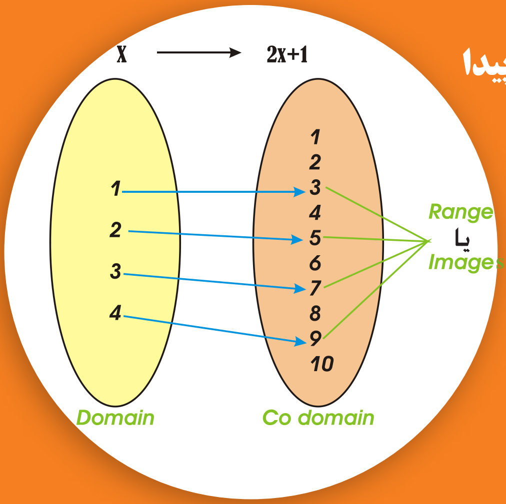
3– که $g(x)=3\sqrt{x}$ او $h(x)=1+4x$ وي $h(16)$, $h(-3)$ او $g(-4)$ پیدا کړئ.

4 – $f(x)=\frac{15}{x-3}$, $g(x)=16+3x-x^2$ او $h(x)=\sqrt{25-x^2}$ وي $g(-7), f(6)$ او $f(0)+g(4)-h(-3)$ پیدا کړئ.

5 – که $g(x)=\sqrt{x+40}-2$ وي $g(12)$, $g(5)$, $g(4)$, $g(0)$ او $g(-2)$ پیدا کړئ.

6 – آیا د $x^2+xy=1$ معادله یوه تابع ښیي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



د يوې تابع د تعريف د ساحې پيدا کول

آيا کېداى شي چې د هرې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه وي؟

فعاليت

- د x کوم قيمتونه دتابع د تعريف په ساحه کې شامل وي؟
- د $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$ تابع د تعريف ساحه وټاکئ.
- آيا $g(x)=3\sqrt{x}$ تابع د تعريف په ساحه کې $x=-4$ شامل دی؟

د يوې تابع د تعريف په ساحه (Domain) کې د x ټول هغه قيمتونه شامل وي چې تابع په هغه قيمتونو کې تعريف شوې وي يا د تابع قيمت يو حقيقي عدد وي.

لومړى مثال: د لاندې تابع گانو د تعريف ساحه (Domain) وټاکئ.

$$f(x)=\frac{1}{x-3}\qquad h(x)=x^2-7x\qquad K(x)=\frac{6x}{x^2-9}$$

$$g(x)=\sqrt{x}\qquad R(x)=\sqrt{3x+12}$$

حل:

- د $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ تابع په $x=3$ کې تعريف شوې نه ده، ځکه چې $x=3$ لپاره د تابع مخرج صفر کېږي يا د $x=3$ لپاره د تابع قيمت يو حقيقي عدد نه دی نو:

$$\text{Dom}f=\{x\in IR\,/\,x\neq 3\}$$

- د $g(x)=\sqrt{x}$ په تابع کې ددې لپاره چې د تابع قيمت يو حقيقي عدد (Real number)

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي، باید $x \geq 0$ وي، نو $Dom\,g = \{x \in IR / x \geq 0\}$ یا $dom\,g = [0\ ,\ \infty)$

- $h(x) = x^2 - 7x$ په تابع کې، څرنګه چې د x د هر قیمت لپاره د $h(x)$ تابع تعریف شوي ده، نو: (د حقیقي عددونو سټ) $Dom\ h = IR = (-\infty\ ,\ \infty)$

- د $k(x) = \dfrac{6x}{x^2 - 9}$ یا $k(x) = \dfrac{6x}{(x-3)(x+3)}$ تابع د تعریف ساحه عبارت ده له:

$$Dom\,k(x) = \{x \in IR / \quad x \neq 3\ ,\quad x \neq -3\}$$

- د $R(x) = \sqrt{3x + 12}$ په تابع کې باید $3x + 12 \geq 0$ وي، نو $x \geq -4$ کېږي.

$$Dom\,R = \{x \in IR / x \geq -4\} = [-4, \infty)$$

فعالیت

د لاندې تابع ګانو د تعریف ساحه (Domain) پیدا کړئ.

$$f(x) = x^2 + 3x - 17 \quad , \quad g(x) = \frac{5x}{x^2 - 49} \quad , \quad h(x) = \sqrt{9x - 27}$$

دویم مثال: د $y = \sqrt{x - 3}$ د تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$$x - 3 \geq 0 \quad \Rightarrow x \geq 3$$

$$Dom\ y = \{x \in IR / \ x \geq 3\} = [3\ ,\ \infty)$$

دریم مثال: د لاندې تابع ګانو د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$f(x) = \sqrt{x - 2}$ $\qquad$ $Dom\ f = \{x / \quad x \geq 2\}$ یا $[2, \infty]$

$g(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 4}$ $\qquad$ $dom\,g = IR - \{4\}$ یا $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

یا د سټ په شکل:

$$dom\,g = \{x \in IR / x \neq 4\}$$

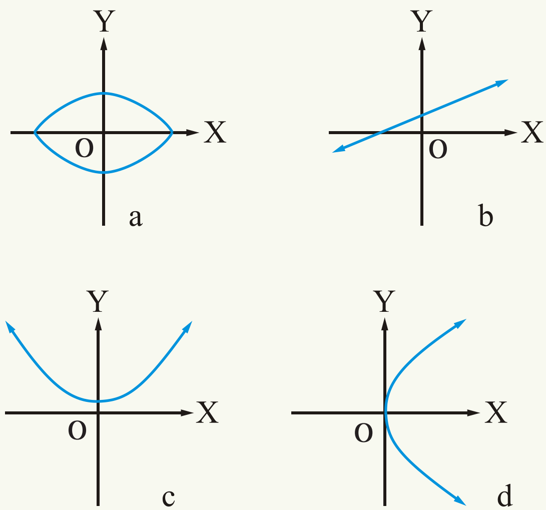
$$h(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$$

$Dom\ h = \{x /\ x \leq -1$ یا $x \geq 3\}$ یا $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوې تابع ګراف او د ګراف له مخې د یوې تابع پېژندنه
(Graph of a function and vertical line test)

په راکړل شوو شکلونو کې کوم ګراف د یوې تابع ګراف دی؟



فعالیت

- د y له محور سره یو موازي خط رسم کړئ.
- وګورئ چې دا خط د تابع ګراف په څو نقطو کې قطع کوي؟
- که دا خط ګراف په یوه نقطه کې قطع کړي آیا دا ګراف به د یوې تابع ګراف وي؟
- که دا خط، ګراف له یوې نقطې څخه په زیاتو نقطو کې قطع کړي آیا دا ګراف به د یوې تابع ګراف وي؟

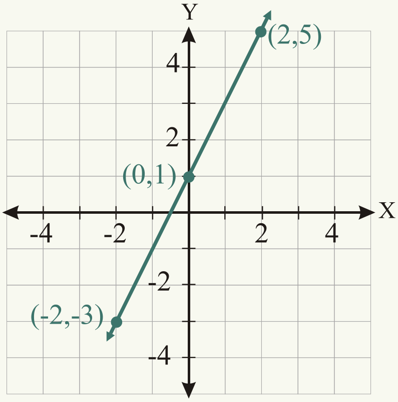
که $f(x)$ یوه حقیقي تابع وي، د $f(x)$ د تابع ګراف د $(x\ ,\ f(x))$ د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې د $y=f(x)$ په معادله کې صدق وکړي.

یا د یوې تابع ګراف د XOY د مستوي د هغو نقطو سټ دی چې $\{(x\,,y)\ /\ y=f(x)\}$ صدق کړي او $x \in dom\ f(x)$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي مثال: د $y = f(x) = 2x+1$ تابع ګراف رسم کړئ.

input	تابع	output	مرتبې جوړې
x	$2x+1$	$y=f(x)$	(x,y)
0	$2(0)+1$	1	$(0,1)$
2	$2(2)+1$	5	$(2,5)$
-2	$2(-2)+1$	-3	$(-2,-3)$



دويم مثال: د $f(x) = x^2+1$ او $y=-1$ تابع ګانو ګراف رسم کړئ.

د تعريف او د قيمتونو ساحې يې هم پيدا کړئ.

حل:

$f(x) = x^2+1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	10	5	2	1	2	5	10

د $(3\ ,10)\ ,\ (2,5)\ ,\ (1,2)\ ,\ (0,1)\ ,\ (-1\ ,2)\ ,\ (-2\ ,\ 5)\ ,\ (-3,10)$ مرتبو جوړو په نظر کې نيولو سره د تابع ګراف رسم کړئ:

يا

$f(-3) = (-3)^2+1 = 9+1 = 10$

$f(-2) = (-2)^2+1 = 4+1 = 5$

$f(-1) = (-1)^2+1 = 1+1 = 2$

$f(0) = 0^2+1 = 0+1 = 1$

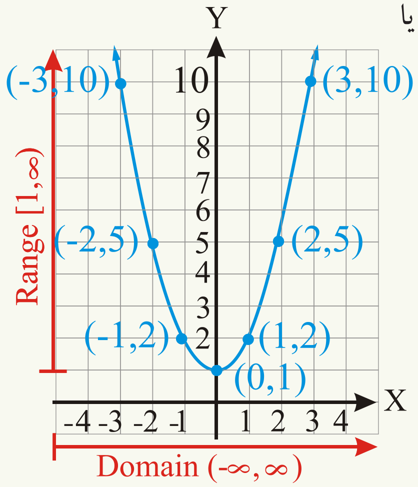
$f(1) = 1^2+1 = 2$

$f(2) = 2^2+1 = 5$

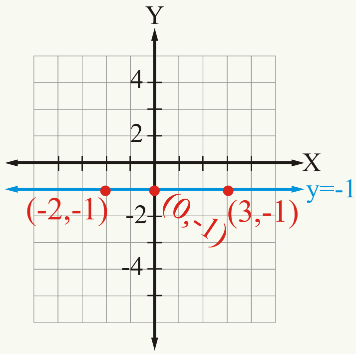
$f(3) = 3^2+1 = 10$

$\text{Dom}\, f = (-\infty,\infty)$

$\text{Range}\, f = (1,\infty)$



(c) ketabton.com: The Digital Library



$f(x) = -1$

Input	Output	مرتبه جوړه
x	$y = f(x)$	(x, y)
-2	-1	$(-2, -1)$
0	-1	$(0, -1)$
3	-1	$(3, -1)$

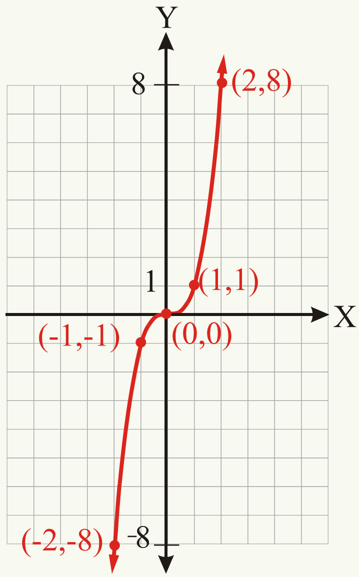
$\text{Dom } y = IR$

$\text{Range } y = -1$

فعالیت

د $f(x) = x^2 - 4$ تابع ګراف رسم کړئ.

دریم مثال: د $y = f(x) = x^3$ تابع ګراف رسم کړئ.



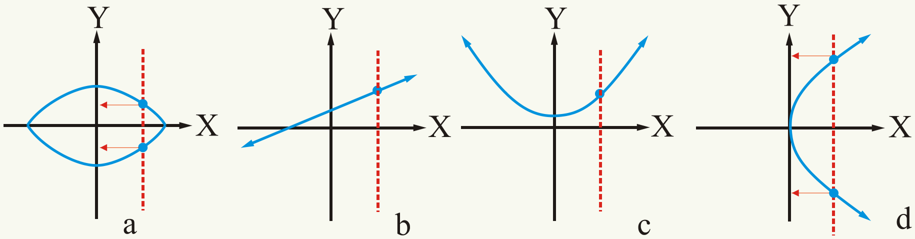
$f(x) = x^3$

x	2	1	0	-1	-2
$y = f(x)$	8	1	0	-1	-8

که یو عمودي خط (د y له محور سره موازي) یو ګراف یوازې په یوه نقطه کې قطع کړي، نو دا ګراف د یوې تابع ګراف دی او که له یوې نقطې څخه یې په زیاتو نقطو کې قطع کړي، نو دا ګراف د یوې تابع ګراف نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: په لاندې راکړل شوو گرافونو کې لیدل کېږي چې b او c د تابع گانو گرافونه دي، ځکه چې عمود خط یې گرافونه په یوه نقطه کې قطع کړي دي، لیکن د a او d گرافونه د تابع گرافونه نه دي، ځکه چې عمودي خط گرافونه له یوې څخه په زیاتو نقطو (دوو نقطو) کې قطع کړي دي یا د یوه x لپاره د y یا f(x) دوه قیمتونه وجود لري، نو د a او d گرافونه د تابع گرافونه نه دي.



د تابع د تعریف په ناحیه domain کې هغه عددونه شامل وي چې تابع په کې تعریف شوي وي یا د تابع قیمت یو حقیقي عدد وي. د یوې تابع گراف د XOY په مستوي کې د S د نقطو سټ دی، په دې ډول چې $S=\{(x,y)\,|\,y=f(x)\}$ چې x د تابع د تعریف په ساحه کې شامل وي، که د y له محور سره موازي خط گراف یوازې په یوه نقطه کې قطع کړي، دا گراف د یوې تابع گراف دی.

پوښتنې

1 - د لاندې تابع گانو د تعریف ساحې (Domains) پیدا کړئ.

$f(x)=\sqrt{x^2-9}$, $g(x)=2x-5$, $h(x)=\sqrt{x^2-4}$

$f(x)=\sqrt{x+1}$, $g(x)=|x-3|$, $h(x)=\dfrac{3}{x-4}$

$f(x)=\dfrac{7x}{x^2-16}$, $g(x)=\dfrac{2}{(x+3)(x-7)}$, $h(x)=\dfrac{4}{x^2+11x+24}$

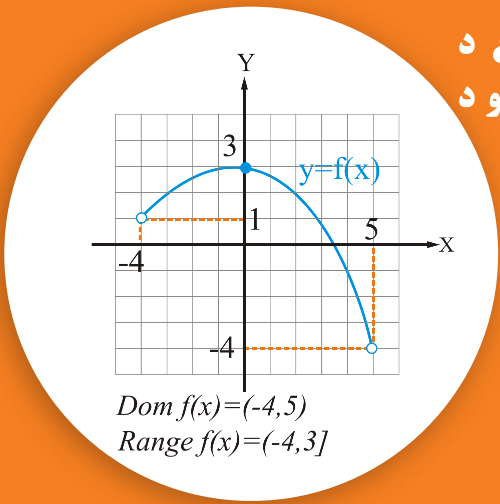
$f(x)=\dfrac{3}{x^2+4}$

2 - د $f(x)=x^2$ او $f(x)=-x^2$ د تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

3 - د $g(x)=2x-1$ تابع گراف رسم کړئ که $x=-3\,,-2\,,-1\,,0,\,1,\,2,\,3,$ وي.

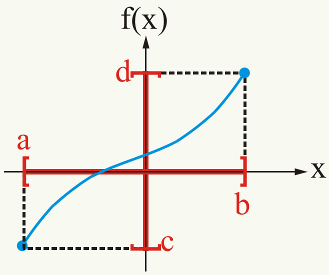
4 - د $x=y^2-2$ گراف رسم کړئ او آیا دا د یوې تابع گراف دی؟ ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

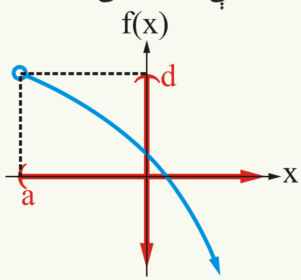


د ګراف له مخې د يوې تابع د تعريف او د قيمتونو د ناحيو او د تابع د قيمتونو پيدا کول:

آيا د توابعو په لاندينيو راکړل شوو ګرافونو کې د تابع د تعريف ساحه (Domain) او د قيمتونو ساحه (Range) يې ټاکلای شئ؟



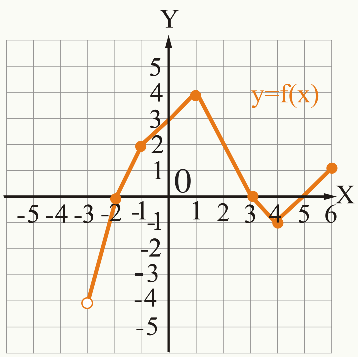
Dom f=[a,b]
Rage f= [c,d]



Dom f = (a,∞)
Rang f =(-∞,d)

فعاليت

شکل وګورئ لاندينيو پوښتنو ته ځواب ورکړئ:

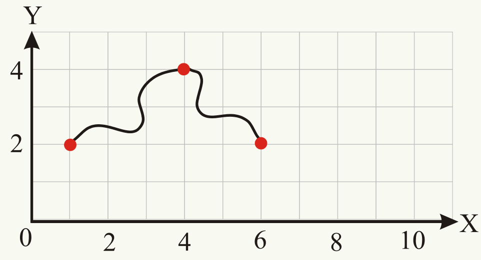


- د شکل له مخې د f تابع د تعريف او قيمتونو ساحه پيدا کړئ.
- آيا د 4 – عدد د f تابع د قيمتونو په ساحه کې شامل دی؟ ولې؟
- آيا د 3 – عدد د f د تعريف په ساحه کې شامل دی؟ ولې؟
- آيا د 6 عدد د f د تعريف په ساحه کې شامل دی؟

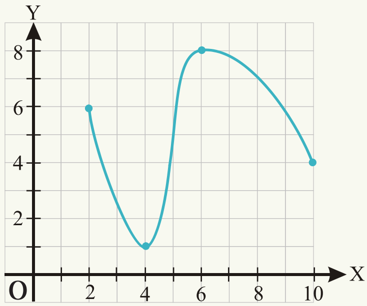
(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې $f(-1)=2$ او $f(1)=4$ دي او هم د شکل له مخې د تابع د تعریف ساحه له 3- څخه تر 6 پورې ده، لیکن $-3\notin dom\ f$ او $6\in dom\ f$، نو $dom\ f=(-3,6]$ او په همدې ډول د f(x) تابع د قیمتونو ساحه (Range) له 4- څخه تر 4 پورې ده، خو $-4\notin Range\ f$ نو $Range\ f=(-4\ ,4]$.

لومړی مثال: په راکړل شوو شکلونو کې د تابع ګانو د تعریف او د قیمتونو ساحې پیداکړئ.



(1)



(2)

حل:

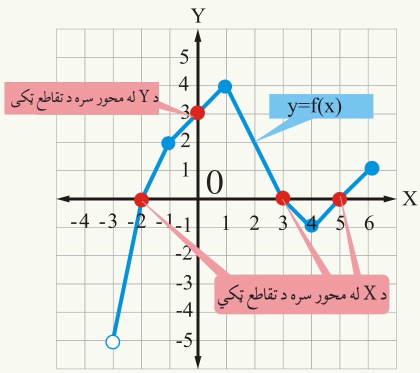
د لومړي شکل په ګراف کې د تعریف ساحه د 1 او 6 تر منځ ټول حقیقي عددونه دي او د قیمتونو ساحه یې د 2 او 4 تر منځ ټول حقیقي عددونه دي یا: $1\leq x\leq 6$ او $2\leq y\leq 4$

د (2) شکل په ګراف کې $2\leq x\leq 10$ یا $\mathrm{Dom}=[2\ ,10]$

$1\leq y\leq 8$ یا $Range=[1\ ,8]$

دویم مثال: لاندې شکل په پام کې ونیسئ.

- $f(-2)$, $f(3)$ او $f(5)$ پیداکړئ.
- د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیداکړئ.



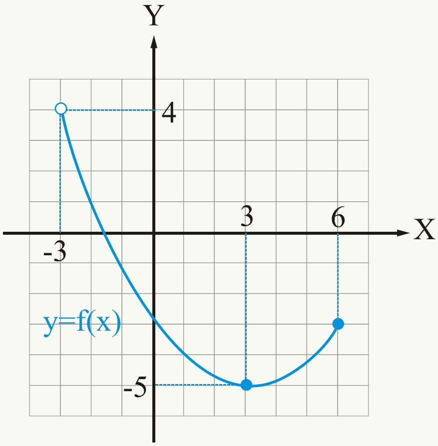
حل: څرنګه چې د X له محور سره د ګراف د تقاطع په ټکي کې $y=0$ وي، نو $f(-2)=0$, $f(3)=0$ او $f(5)=0$ دي، نو ګراف د X محور د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(-2,0)$ ، $(3,0)$ او $(5,0)$ په نقطو کې قطع کوي.

خرنګه چې د y له محور سره د ګراف د تقاطع په ټکي کې $x=0$ دی $f(0)=3$ ، نو ګراف د y محور د $(0,3)$ په نقطه کې قطع کوي.

دريم مثال: په لاندې شکل کې د f تابع Domain او Range پيدا کړئ، f (3) او f (6) هم په لاس راوړئ.



حل: ليدل کيږي چې د تعريف ساحه يې له 3 - څخه تر 6 پورې ده، خو 3 - د تعريف په ساحه کې شامل نه دی.

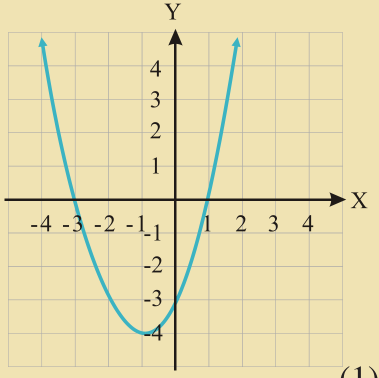
$Domain\ f(x) = -3 < x \le 6$ يا $(-3, 6]$

او د قيمتونو ساحه يې: $Range\ f(x) = -5 \le y < 4$ يا $[-5, 4)$ ، $f(6) = -3$ او $f(3) = -5$ ده.

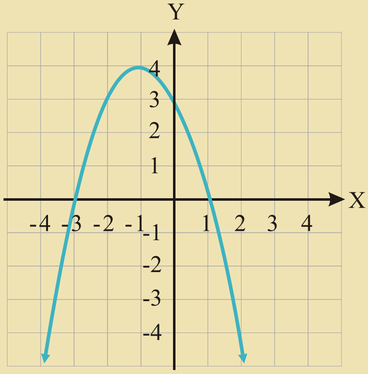
(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

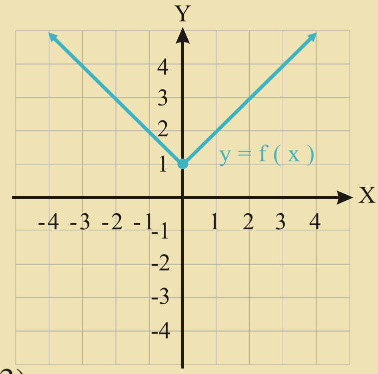
په راکړل شوو شکلونو کې:



(1)



(2)



(3)

$f(-1)=?$ $f(3)=?$

a- د تابع د تعریف ساحه

b- د تابع د قیمتونو ساحه

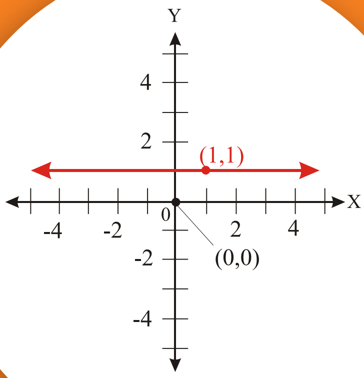
c- د X له محور سره د ګراف د تقاطع ټکي

d- د Y له محور سره د تقاطع ټکي او په دریم شکل کې د تابع غوښتل شوي قیمتونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځيني خاصي تابع ګاني او ګرافونه يې

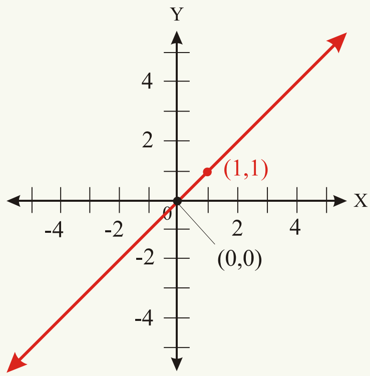
د هغو تابع ګانو نومونه واخلئ چې ګرافونه يې راکړل شوي دي



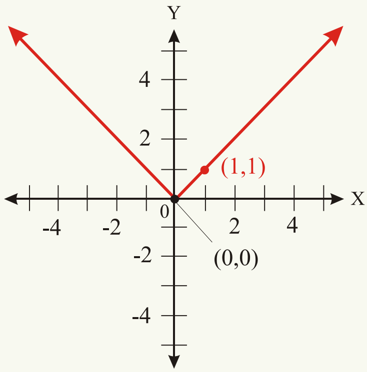
$f(x)=1$

توابع ډېر ډولونه لري چې ځيني خاصې تابع ګانې ترڅېړنې لاندې نيسو:

ثابته تابع، د عينيت تابع، د مطلقه قيمت تابع، څو معادله يي تابع او د علامې تابع



$f(x)=x$



$f(x)=|x|$

فعاليت

- ثابتي تابع ته ولې ثابته تابع وايي؟
- آيا د عينيت تابع د تعريف او د قيمتونو ساحې سره مساوي وي؟
- آيا د مطلقه قيمت د تابع د قميتونو ساحه منفي قيمتونه اخيستلای شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثابته تابع (Constant Function)

که x او y د حقیقي عددونو ستونه وي، د $f: x \to y$ یا $f(x) = y$ په تابع کې چې y له یوه ثابت عدد سره مساوي وي یا $y = f(x) = c$ چې (c) یو ثابت عدد دی، نو د y د ثابتې تابع په نوم یادېږي.

د مثال په ډول: $f(x) = 2$ ، $f(x) = -3$ او $f(x) = -2$ او داسې نورې ثابتې تابع ګانې دي.

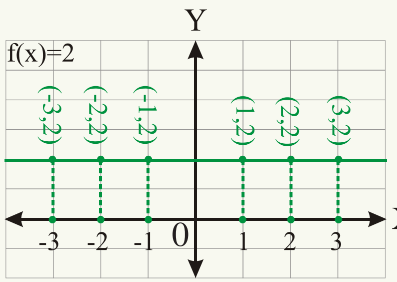
لومړی مثال: $f(x) = 2$ او $f(x) = -2$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

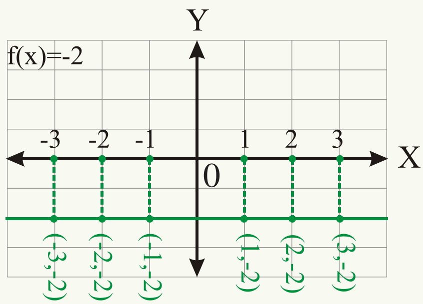
$f(x) = 2$

x =	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	2	2	2	2	2	2

$f(x) = -2$

x =	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	−2	−2	−2	−2	−2	−2

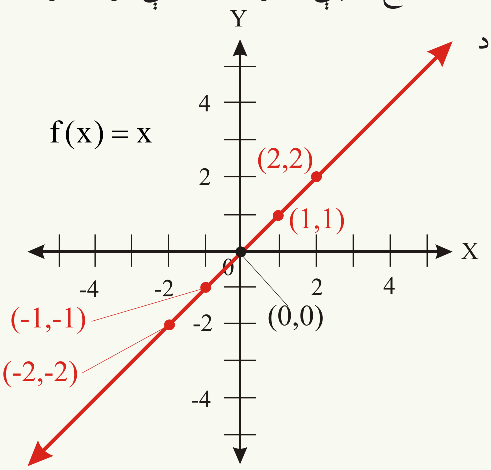




په دې معنا چې په ثابته تابع کې د تعریف د ساحې د هر عنصر تصویر همغه ثابت عدد دی.

د عینیت تابع (Identity function): هغه تابع ده چې د تعریف د ساحې هر عنصر ته له خپل ځان سره ارتباط ورکړي یا $f(x) = x$ د عینیت د تابع په نامه یادېږي.

مثال: د $f(x) = x$ د تابع ګراف رسم کړئ.



$f(x) = x$

x =	0	1	2	−1	−2	...
f(x) =	0	1	2	−1	−2	...

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مطلقه قیمت تابع (Absolute value function)

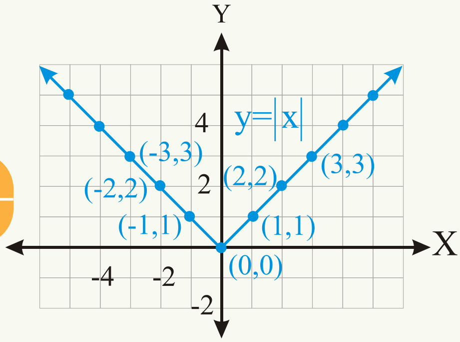
د مطلقه قمیت تابع $f(x)=|x|$ په لاندې ډول تعریف شوی ده:

$$f(x)=\begin{cases} x & , x\geq 0 \\ -x & , x<0 \end{cases}$$

لومړی مثال: د $f(x)=|x|$ تابع ګراف رسم کړئ.

$f(x)=|x|$

$x=$	0	1	2	3	-1	-2	-3
$f(x)=$	0	1	2	3	1	2	3



لیدل کېږي چې د مطلقه قیمت د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ساحه یې $[0,\infty)$ ده.

څو معادله یي تابع (Piecewise function) او ګراف یي

آیا کېدای شي چې یوه تابع د تعریف په ساحه کې د دوو یا څو معادلو په واسطه تعریف شوي وي؟

لومړي مثال: که $f(x)=\begin{cases} 2x+3 : x<4 \\ x^2-1 : 4\leq x\leq 10 \end{cases}$ وي، نو $f(-5)$, $f(8)$ او د f تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې $-5<4$ دی، نو په لومړی معادله کې وضع کېږي، لرو چې:

$$f(-5)=2(-5)+3=-10+3=-7$$

او څرنګه چې د 8 عدد د 4 او 10 ترمنځ واقع دی $4<8<10$ ، نو په دویمه معادله کې وضع کېږي لرو چې:

$$f(8)=8^2-1=64-1=63$$

د f تابع د تعریف ساحه په لومړی معادله کې $(-\infty\ ,\ 4)$ او په دویمه معادله کې $[4\ ,\ 10]$ ده، نو د

(c) ketabton.com: The Digital Library

f د تعریف ساحه د $(-\infty , 10]$ څخه عبارت ده.

فعالیت

که چېرې $g(x)=\begin{cases}-\frac{11}{60}x+15 & : 0\le x<60\\ \frac{1}{5}x-8 & : 60\le x\le 90\end{cases}$ وي،

وښیاست چې $g(80)=8$ او $g(30)=9.5$ دي.

د څو معادله یې تابع ګراف (Graph of function defined piecewise)

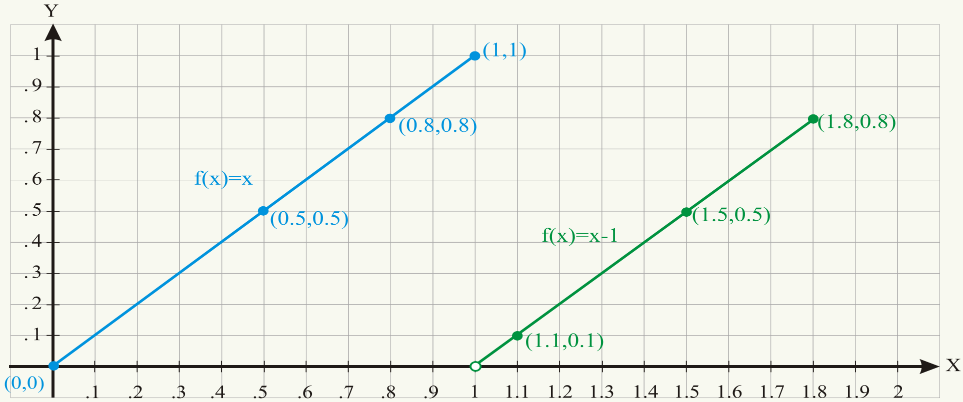
دویم مثال: د (x) f تابع د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا او ګراف یې هم رسم کړئ که:

$f(x)=\begin{cases}x : 0\le x\le 1\\ x-1 : 1<x\le 2\end{cases}$ وي.

حل: د لومړۍ معادلې د تعریف ساحه $[0,1]$ او د دویمې معادلې د تعریف ساحه $[1,2]$ ده چې په

نتیجه کې د (x) f د تعریف ساحه $[0,2]$ ده.

د ګراف د رسمولو لپاره، د دواړو برخو ګراف رسموو په دې ډول:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$y=f(x)=x$

x	0	0.5	0.8	1
y = f(x)	0	0.5	0.8	1

$y=f(x)=x-1$

x	1,1	1,5	1,8
$f(x)$	0,1	0,5	0,8

په نتیجه کې دوه مستقیم خطونه په لاس راځي چې دواړه د f (x) تابع ګراف دی.

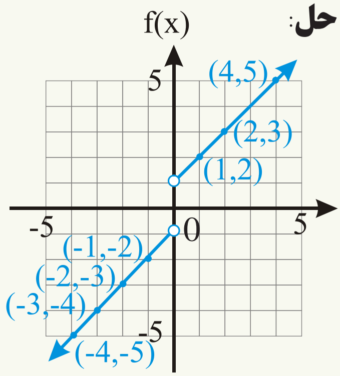
فعالیت

که: $f(x)=\begin{cases} x \Leftarrow 0\le x\le 4 \\ x-1 \Leftarrow 0<x<-4 \end{cases}$ وي، $f(0), f(-2), f(2)$ پیداکړئ او ددې تابع ګراف هم رسم کړئ.

دریم مثال: د $f(x)=\begin{cases} x-1 \Leftarrow x<0 \\ x+1 \Leftarrow x>0 \end{cases}$ تابع ګراف رسم د تعریف او د قیمتونو ساحې یې وټاکئ.

حل:

x	1	2	4	-1	-2	-3	-4
$f(x)$	2	3	5	-2	-3	-4	-5



لیدل کېږي چې د تابع د تعریف په ساحه کې صفر شامل نه دی $(x\ne 0)$ یا

$Dom\ f(x)=(-\infty\ ,\ 0)\cup(0,\infty)$ او د قیمتونو ناحیه (Range) یې عبارت دی له:

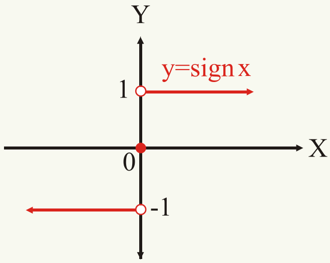
$(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ یا $y>1$ او $y<-1$

د علامې تابع (Sign Function): د علامې تابع چې په sgn (x) سره ښودل کېږي د خو معادله یې تابع یو مثال دی چې په لاندې ډول تعریف شوې ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$sgn(x)=\begin{cases}1 & : x>0\\ 0 & : x=0\\ -1 & : x<0\end{cases}$$ د دې تابع د تعریف ناحیه د حقیقي عددونو سټ او د قیمتونو ساحه

(Range) يې $\{-1,0,1\}$ ده.



$Dom_{sgn}=IR \quad Range_{sgn}=\{-1\ ,\ 0\ ,1\}$

$f(x)=c$ ثابته تابع ، $f(x)=x$ د عینیت تابع او $f(x)=|x|$ د مطلقه قیمت تابع ده چې د تعریف ساحه یې ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ساحه یې صفر او مثبت حقیقي عددونه دي.

پوښتني

1- د $f(x)=-5$ ، $g(x)=\frac{1}{2}$ او $h(x)=4$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

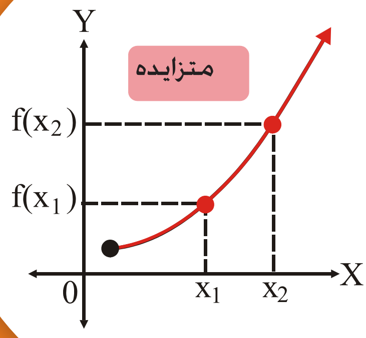
2 – د $f(x)=|x|-3$ تابع ګراف رسم کړئ.

3- که $f(x)=\begin{cases}-x : x<0\\ x : x\geq 0\end{cases}$ وي $f(0)$ ، $f(-2,3)$ او $f(16)$ پیداکړئ.

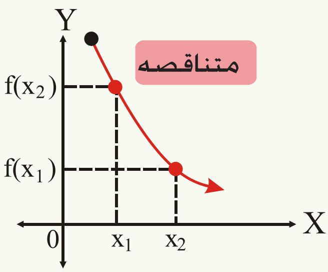
4- که $h(x)=\begin{cases}x+1 : -1\leq x<0\\ -x+1 : 0\leq x\leq 1\end{cases}$ وي د $h(x)$ تابع د تعریف ساحه پیداکړئ.

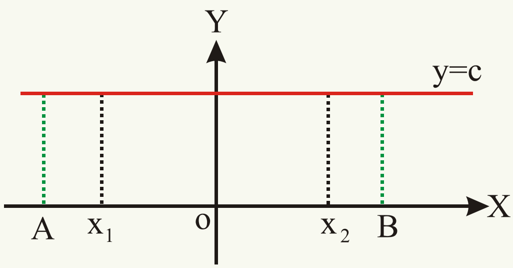
(c) ketabton.com: The Digital Library

متزايدي او متناقصي تابع گاني
(Increasing and decreasing functions)



- په راکړل شوو ګرافونو کې کوم ګراف د متزايدی تابع ګراف دی؟
- کوم ګراف د متناقصی تابع ګراف دی؟
- کوم ګراف نه متزايد دی او نه متناقص؟





1 – يوه تابع په يوه انټروال کې متزايده ده که $x_1 < x_2$ وي، په نتيجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي.

2 – يوه تابع په يوه انټروال کې متناقصه ده که $x_1 < x_2$ وي، په نتيجه کې $f(x_1) > f(x_2)$ شي.

3 – که $x_1 < x_2$ وي او په نتيجه کې $f(x_1) = f(x_2)$ شي دا تابع نه متناقصه ده او نه متزايده.

لکه: خرنګه چې په شکل کې ليدل کيږي دا يوه ثابته تابع ده.

مثال: د $f(x) = x^2$ او $f(x) = -x^2$ د تابع ګانو ګراف په کومو انټروالونو کې متزايد او په کومو انټروالو کې متناقص دی؟

x	0	1	-1	2	-2
$f(x) = x^2$	0	1	1	4	4

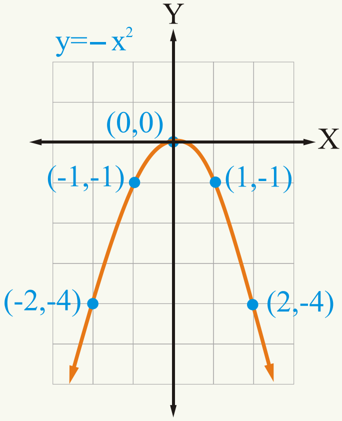
x	0	1	-1	2	-2
$f(x) = -x^2$	0	-1	-1	-4	-4

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-1 < 2$

$f(-1) > f(2)$

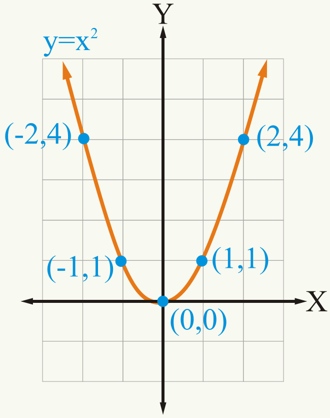
$-1 > -4$



$-1 < 2$

$f(-1) < f(2)$

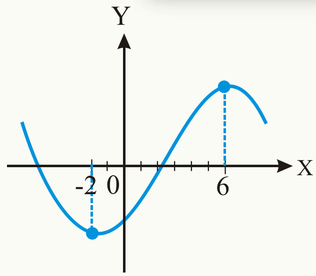
$1 < 4$



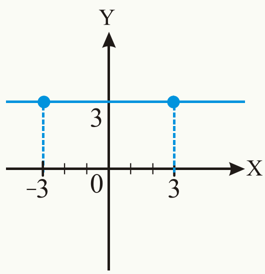
ليدل کېږي چې د $f(x) = x^2$ تابع د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې متناقصه او د $(0\ ,\ \infty)$ په انټروال کې متزايده ده، ليکن د $f(x) = -x^2$ تابع په $(-\infty, 0)$ انټروال کې متزايده او د $(0, \infty)$ په انټروال کې متناقصه ده.

فعاليت

په راکړل شوو شکلونو کې د تابع گراف په کومو انټروالونو کې متزايد په کومو کې متناقص دی، کوم گراف نه متزايد او نه متناقص دی؟



(a)



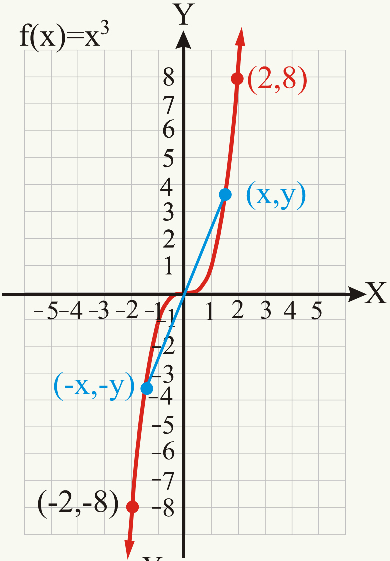
(b)

جفتي او طاقي تابع گانې (Even and Odd Functions):

1- د $f(x)$ تابع يوه جفته تابع ده که چېرې $f(-x) = f(x)$ وي، په دې معنا که په تابع کې د x پر ځای $-x$ عوض کړو، د تابع په قيمت کې تغير رانه شي.

2- د $f(x)$ تابع يوه طاقه تابع ده که چېرې $f(-x) = -f(x)$ وي يا دا چې که په تابع کې د

(c) ketabton.com: The Digital Library



x پر ځای x− عوض کړو، د تابع قیمت منفي شي.

لومړی مثال: د $f(x)=x^2$ او $f(x)=x^3$ په تابع ګانو کې کومه تابع جفته او کومه یوه طاقه ده؟

حل: په دواړو تابع ګانو کې

د x پر ځای x − عوض کوو:

$$f(-x)=(-x)^3=(-x)(-x)(-x)=-x^3$$

نو د $f(x)=x^3$ تابع یوه طاقه تابع ده،

ځکه چې $f(-x)=-f(x)$ کیږي لکه:

$f(-2)=-f(2)=-8$ او د $f(x)=x^2$ په

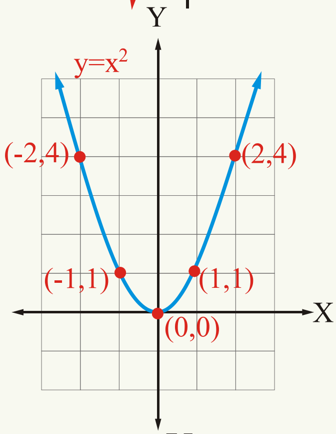
تابع کې لرو چې:

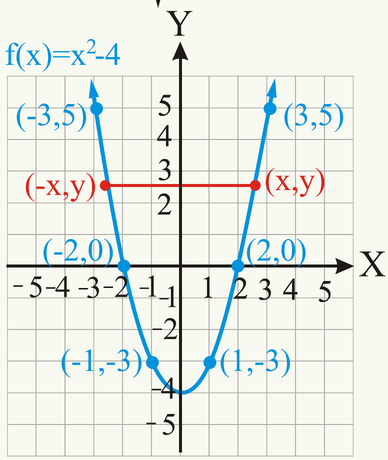
$$f(-x)=(-x)^2=(-x)(-x)=x^2$$

نو $f(x)=x^2$ یو جفته تابع ده، ځکه چې

$f(-x)=f(x)$ کیږي لکه: $f(-2)=f(2)=4$

لیدل کیږي چې د جفتو تابع ګانو ګرافونه نظر د Y محور ته او د طاقو تابع ګانو ګرافونه نظر د وضعیه کمیاتو مبدا ته سره متناظر دي.





دویم مثال: د $f(x)=x^2-4$ او $g(x)=x^2+3x+2$ په تابع ګانو کې کومه یوه جفته او کومه یوه طاقه ده؟

حل:

$$f(-x)=(-x)^2-4=x^2-4=f(x)$$

نو دا تابع جفته ده، په شکل کې هم لیدل کیږي، دوه نقطې د $(3,5)$ او $(-3,5)$ تابع د $x=3$ او $x=-3$ لپاره د تابع قیمت سره مساوي دي چې د (5) عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعني: $f(-3)=f(3)=5$

همدارنګه د $x=2$ او $x=-2$ لپاره د تابع قیمت سره مساوي دی چې صفر دی، نو په نتیجه کې تابع جفته ده.

$$g(x)=(-x)^2+3(-x)+2=x^2-3x+2$$

چې دا تابع نه جفته او نه طاقه ده.

دریم مثال: که f له حقیقي عددونو څخه حقیقي عددونو ته یوه طاقه تابع وي او $f(-2)=k+5$ او $f(2)=2k+3$ وي، د k قیمت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې f یوه طاقه تابع ده، نو: $f(-x)=-f(x)$

د طاقې تابع د تعریف په اساس: $f(-2)=-f(2)$

$$k+5=-(2k+3)$$
$$k+5=-2k-3$$
$$3k=-8$$
$$k=-\frac{8}{3}$$

که د $f(x)$ په تابع کې $x_1<x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1)<f(x_2)$ شي تابع متزایده او که $x_1<x_2$ وي او $f(x_1)>f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده که $f(-x)=f(x)$ وي تابع جفته او که $f(-x)=-f(x)$ شي تابع طاقه ده د جفتو تابع ګانو ګراف نظر د Y محور ته او د طاقو تابع ګانو ګراف نظر د وضعیه کمیاتو مبدأ ته سره متناظر دي.

پوښتنې

1- د لاندېنیو تابع ګانو څخه کومه یوه یې متزایده، کومه یوه یې متناقصه او کومه یوه نه متزایده او نه متناقصه ده؟

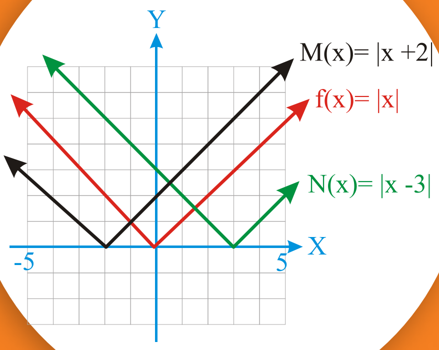
$f(x)=x^3+x$, $f(x)=x^2+x$, $f(x)=x^2-x^4$

2- د لاندېنیو راکړل شوو تابع ګانو څخه کومه یوه جفته او کومه یوه طاقه ده؟

$f(x)=x$, $f(x)=|x|$

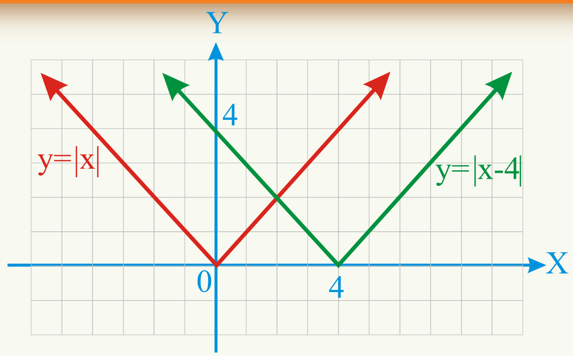
$f(x)=x^4$, $f(x)=x^5$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ګرافونو انتقال (Translation)

آیا کولای شئ چې ووایئ راکړل شوي ګرافونه
یو له بله سره څه اړیکه لري؟



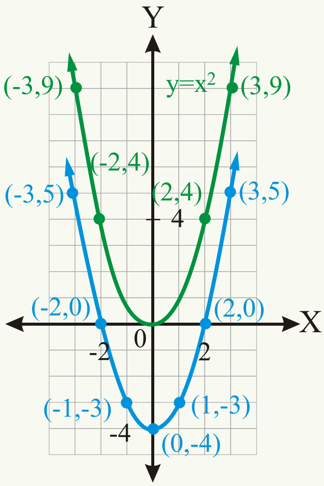
فعالیت

- د $f(x)=x^2$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=x^2+4$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x)=x^2-4$ تابع ګراف رسم کړئ.
- وواياست چې پورتني ګرافونه یو له بله سره څه ډول اړیکه لري؟

که د $f(x)=x^2$ ګراف رسم کړو، څنګه کولای شو د $f(x)=x^2$ د ګراف له انتقال څخه د $f(x)=x^2-4$ تابع ګراف رسم کړو؟

د $y=x^2$ د ګراف د (x,y) د هري نقطې لپاره د $(x,y-4)$ اړونده نقطه د $y=x^2-4$ په ګراف واقع ده، نو د $y=x^2$ تابع ګراف هره نقطه د 4 واحدو په اندازه ښکته خواته انتقال کوي تر څو د $y=x^2-4$ ګراف لاس ته راشي، لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کیږي، دا انتقال

(c) ketabton.com: The Digital Library



د عمودي انتقال (Vertical Translation) په نوم یادېږي.

انتقال په دوه ډوله دی: عمودي انتقال او افقي انتقال.

1- عمودي انتقال (Vertical Translation):

عمودي انتقال پورته او یا ښکته خواته وي.

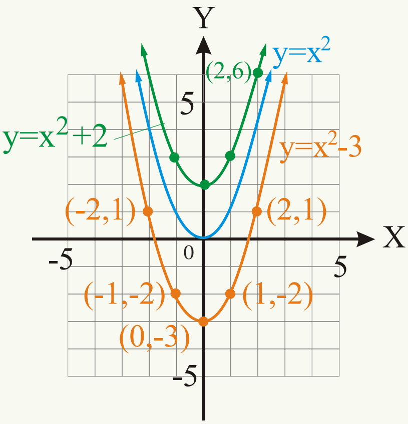
که $c > 0$ وي:

1: که د $y = f(x)$ د تابع ګراف د c په اندازه پورته خواته انتقال شوی وي، نو د $y = f(x) + c$ ګراف لاس ته راځي.

2: که د $y = f(x)$ د تابع ګراف د c په اندازه ښکته خواته انتقال شوی وي، نو د $y = f(x) - c$ ګراف لاس ته راځي.

لومړی مثال: د $y = x^2 + 2$ او $y = x^2 - 3$ تابع ګانو ګرافونه د $y = x^2$ تابع له ګراف سره څرنګه اړیکه لري؟ درې واړه ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ.

حل: د $y = x^2$ تابع ګراف د (2) واحدو په اندازه پورته خواته انتقالوو، ترڅو د $y = x^2 + 2$ د تابع ګراف په لاس راشي او که د $y = x^2$ تابع ګراف د (3) واحدو په اندازه ښکته خواته نقل کړو، د $y = x^2 - 3$ تابع ګراف لاس ته راځي:



x =	0	1	2	−1
$y = x^2$	0	1	4	1
$y = x^2 + 2$	2	3	6	3
$y = x^2 - 3$	−3	−2	1	−2

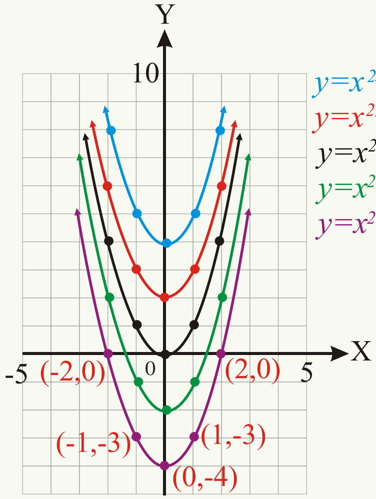
یا عمودي انتقال داسې هم تعریفولای شو:

که د تابع په ګراف کې د y پر ځای y − a وضع کړو داسې چې a یو ثابت عدد دی، نو ګراف د $|a|$ په اندازه په عمودي ډول انتقال کوي که $a > 0$ وي، انتقال په عمودي ډول پورته خواته او که $a < 0$ وي ګراف د $|a|$ په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $y=x^2$ تابع ګراف له انتقاله څخه د $y=x^2+2$, $y=x^2-2$ ، $y=x^2+4$ او $y=x^2-4$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

$y=x^2$		$y=x^2+2$		$y=x^2+4$		$y=x^2-2$		$y=x^2-4$	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	0	0	2	0	4	0	−2	0	−4
±1	1	±1	3	±1	5	±1	−1	±1	−3
±2	4	±2	6	±2	8	±2	2	±2	0



افقي انتقال: (Horizontal Translation)

که د تابع په ګراف کې د x پر ځای $x-b$ وضع شي چې b یو ثابت عدد دی. د تابع ګراف د $|b|$ په اندازه په افقي ډول انتقال کوي، که $b>0$ وي ګراف ښي خواته او که $b<0$ وي، ګراف کیڼې خواته انتقال کوي.

دریم مثال: د $y=x^2$ ګرا ف له انتقال څخه د $y=(x+2)^2$ او $y=(x-3)^2$ ګرافونه رسم کړئ.

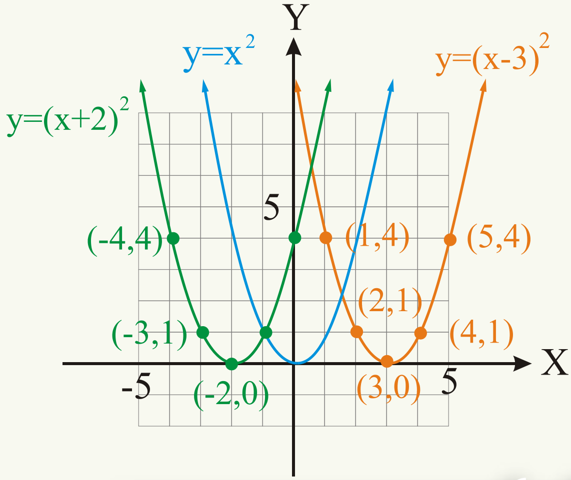
حل: لکه څنګه چې په شکل کې لیدل کیږي که د $y=x^2$ تابع ګراف د 2 واحدو په اندازه کیڼې

(c) ketabton.com: The Digital Library

خواته انتقال کړو، د $y=(x+2)^2$ گراف لاس ته راځي، که د $y=x^2$ گراف 3 واحده ښي خواته انتقال کړو، د $y=(x-3)^2$ د تابع گراف لا س ته راځي، لکه: څنگه چې په شکل کې هم ليدل کيږي.

x	-2	0	-1	-3	-4	....
$y=(x+2)^2$	0	4	1	1	4	....

x =	3	4	2	5	1	....
$y=(x-3)^2$	0	1	1	4	4	....



فعاليت

د $f(x)=|x|$ تابع گراف له انتقال څخه د $g(x)=|x+2|$ او $h(x)=|x-3|$ تابع گانو گرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم کړئ.

د عمودي او افقي انتقالونو ترکيب:

(Combining Horizontal and Vertical Shifts)

څلورم مثال: د $g(x)=(x+1)^2$ او $h(x)=(x+1)^2-3$ د تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

حل: لومړی د $f(x)=x^2$ تابع گراف رسموو چې د دويمې درجې تابع د معياري گراف په نامه يادېږي لومړی د گراف پر مخ د $(0,0)$ ، $(2,4)$ او $(-2,4)$ درې نقطې ټاکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیا د $g(x)=(x+1)^2$ تابع گراف رسموو چې د $f(x)=x^2$ د تعریف له ساحې سره د (1) عدد جمع کوو، ترڅو چې د $f(x)=x^2$ گراف کیڼې خواته د یو واحد په اندازه نقل شي، په دویم شکل کې ښودل شوی دی. په پای کې د $f(x)=(x+1)^2-3$ تابع گراف د رسمولو لپاره د دویم شکل گراف د 3 واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقالوو چې گراف یې په دریم شکل کې ښودل شوی دی:

$f(x)=x^2$

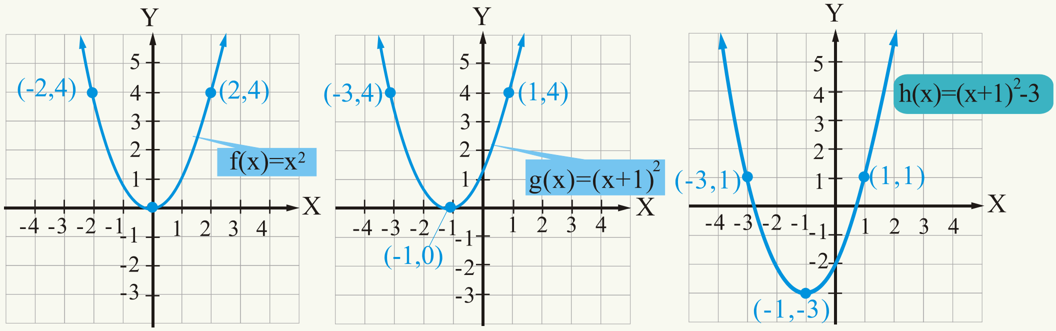
x	0	2	−2
f(x)	0	4	4

$g(x)=(x+1)^2$

x	−1	1	−3
f(x)	0	4	4

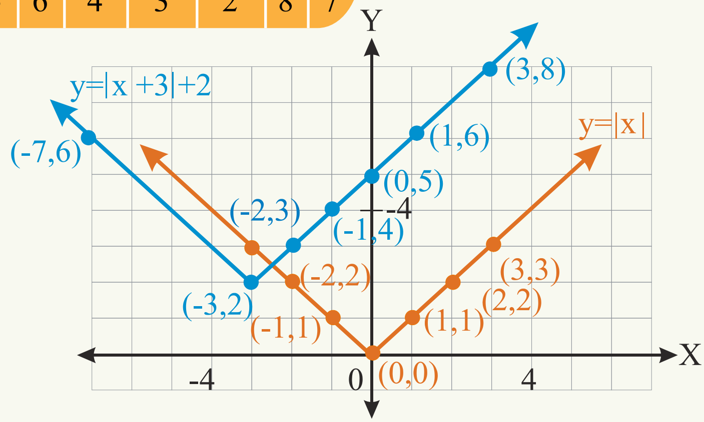
$f(x)=(x+1)^2-3$

x	1	−3	−1
f(x)	1	1	−3



پنځم مثال: د $y=|x|$ تابع گراف له انتقال کولو څخه د $y=|x+3|+2$ تابع گراف رسم کړئ.

x	0	1	−1	−2	−3	3	2
y=|x|	0	1	1	2	3	3	2
y=|x+3|+2	5	6	4	3	2	8	7



(c) ketabton.com: The Digital Library

انتقال په (2) ډول دی، (عمودي او افقي)

عمودي انتقال: که c يو مثبت عدد وي.

1- که چېرې د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته انتقال شي، د $y = f(x) + c$ تابع ګراف لاس ته راځي.

2- که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال شي د $y = f(x) - c$ تابع ګراف لاس ته راځي.

افقي انتقال: که c يو مثبت عدد وي.

1- که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه کيڼي خواته انتقال شي، د $y = f(x+c)$ ګراف لاس ته راځي.

2- که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شي، د $y = f(x-c)$ د تابع ګراف لاس ته راځي.

پوښتني

1- د $y = x^2$ تابع ګراف له انتقال څخه د لاندېنيو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

$g(x) = x^2 - 2$, $g(x) = x^2 - 1$, $g(x) = (x-2)^2$

2- د $f(x) = \sqrt{x}$ تابع ګراف رسم کړئ او ددې له انتقال څخه د $f(x) = \sqrt{x} + 2$ او $f(x) = \sqrt{x+2}$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

3- د $f(x) = |x|$ تابع ګراف رسم کړئ او ددې ګراف له انتقال څخه د $g(x) = |x| + 4$, $g(x) = |x+4|$ او $h(x) = |x-4|$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

4- د $f(x) = x^3$ تابع ګراف له انتقال څخه د $g(x) = x^3 - 3$ او $g(x) = (x-3)^3$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\sqrt{4-x}$$
$$g(x)=\sqrt{3+x}$$
$$(f+g)(x)=?$$

د تابع ګانو عمليې
(Operations on functions)

که $f(x)=x+2$ او $g(x)=2x+11$ وي $(f+g)(x)$ او $(f-g)(x)$ پیدا کولای شی؟

د تابع ګانو څلورګوني عمليې په لاندې ډول تعريف شوي دي:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad (f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x).\,g(x) \qquad (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x)\neq 0)$$

$$dom\,(f+g)(x)=dom\ f\cap\ dom\,g$$
$$dom\,(f-g)(x)=dom\ f\cap\ dom\,g$$
$$dom\,(f\cdot g)(x)=dom\ f\cap\ dom\,g$$
$$dom\,(\frac{f}{g})(x)=dom\ f\cap\ dom\,g\ -\ \{x/g(x)=0\}$$

لومړی مثال: که $f(x)=2x+1$ او $g(x)=x^2-4$ وي، $(f+g)(x)$ پیدا کړئ او هم د دې تابع د تعريف ساحه په لاس راوړئ.

حل:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f+g)(x)=(2x+1)+(x^2-4)=2x-3+x^2=x^2+2x-3$$
$$dom\ g=IR \quad \text{او} \quad dom\ f=IR$$
$$dom(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$$

دویم مثال: که $f(x)=x^2-3$ او $g(x)=4x+5$ وي، $(f+g)(x)$ او $(f+g)(3)$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$(f+g)(x)=(x^2-3)+(4x+5)=x^2+4x+2$$

$$(f+g)(3)=3^2+4(3)+2=9+12+2=23$$

$$\text{dom } g=IR \quad \square \quad \text{dom } f=IR$$

$$\text{dom}(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$$

فعاليت

که $f(x)=3x^2+4x-1$ او $g(x)=2x+7$ وي، $(f+g)(x)$ او $(f+g)(4)$ پيدا کړئ.

دريم مثال: که $f(x)=2x-1$ او $g(x)=x^2+x-2$ وي، $(f-g)(x)$ $(f\cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})(x)$ پيدا کړئ او د تعريف ساحې يې هم وټاکئ.

حل

$$(f-g)(x)=(2x-1)-(x^2+x-2)=2x-1-x^2-x+2=-x^2+x+1$$

څرنګه چې $dom\ f=IR$ او $dom\ g=IR$

$$dom(f-g)(x)=IR\cap IR=IR$$

$$(f\cdot g)(x)=(2x-1)(x^2+x-2)=2x^3+x^2-5x+2$$

$$dom(f\cdot g)(x)=IR\cap IR=IR$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{2x-1}{x^2+x-2}=\frac{2x-1}{(x+2)(x-1)}$$

$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x)=IR\cap IR-\{x/g(x)=0\}$$

$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\neq -2 \text{ او } x\neq 1\}$$

فعاليت

که $f(x)=x-5$ او $g(x)=x^2-1$ وي، نو $(\frac{f}{g})(x)$ ، $(f\cdot g)(x)$ او $(f-g)(x)$ پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځلورم مثال: که $f(x)=x+3$ او $g(x)=x-1$ وي، $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})(x)$ پیداکړئ.

حل:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x+3-(x-1)=x+3-x+1=4$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x+3)(x-1)=x^2+2x-3$$

څرنګه چې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې ټول حقیقي عددونه شامل دي (x هر حقیقي عدد اخیستلای شي) یا $dom\ f=IR$ په همدې ډول: $dom\ g=IR$

$$dom(f-g)(x)=IR\cap IR=IR$$
$$dom(f\cdot g)(x)=IR\cap IR=IR$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+3}{x-1}\quad(x\neq 1)$$
$$dom(\frac{f}{g})(x)=IR-\{1\}$$

یا
$$dom(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR / x\neq 1\}$$

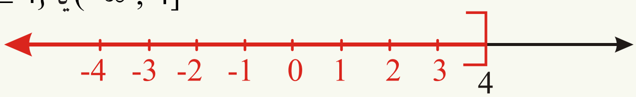
یا
$$dom(\frac{f}{g})(x)=(-\infty,1)\cup(1,\infty)$$

پنځم مثال: که $f(x)=\sqrt{4-x}$ او $g(x)=\sqrt{3+x}$ وي، $f+g$, $f-g$ $f\cdot g$ او $\frac{f}{g}$ پیداکړئ او د تعریف ناحیه (Domain) یې وټاکئ.

حل:

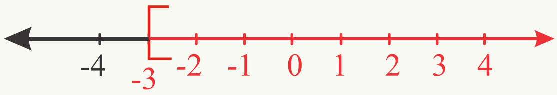
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{3+x}$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{4-x}-\sqrt{3+x}$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(\sqrt{4-x})(\sqrt{3+x})=\sqrt{(4-x)(3+x)}$$
$$=\sqrt{12+x-x^2}$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3+x}}=\sqrt{\frac{4-x}{3+x}}$$

$dom f:\{4-x\geq 0\ ,\ x\leq 4\}$ یا $(-\infty\ ,\ 4]$



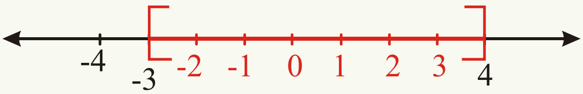
(c) ketabton.com: The Digital Library

$\mathrm{dom}\,g : \{x / 3 + x \ge 0 , x \ge -3\}$ یا $[-3 ,\infty)$

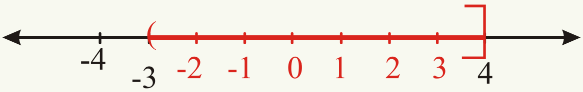


$(-\infty ,4] \cap [-3 , \infty) = [-3 , 4]$

چې $[-3,4]$ د $f+g$, $f-g$ او $f \cdot g$ د تابع گانو د تعریف ساحه ده.



د $dom\dfrac{f}{g}$ د تعریف په ناحیه کې خرنگه چې $g(-3) = 0$ دی، نو: $Dom\dfrac{f}{g} = (-3 , 4]$



له ثابت عدد سره د تابع د ضرب حاصل

که c یو ثابت عدد او f یوه تابع وي، نو حاصل ضرب یې عبارت دی له:

$(c\,f)(x) = c \cdot f(x)$

شپږم مثال: که $f(x) = x^2 - x + 2$ او $c = 5$ وي.

$(5\ f)(x) = 5 \cdot f(x) = 5(x^3 - x + 2) = 5x^3 - 5x + 10$

پوښتنې

لاندې تابع گانې په پام کې ونیسئ .

1 - $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ او $(\dfrac{f}{g})x$ پیدا کړئ.

2- د تعریف ناحیې یې وټاکئ.

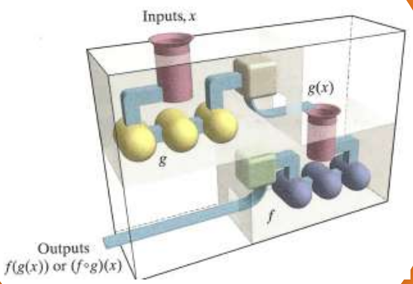
$a: f(x) = 2x + 3$ ، $g(x) = x - 1$ ، $b: f(x) = x - 5$ ، $g(x) = 3x^2$

$c: f(x) = 2x^2 - x - 3$ ، $g(x) = x + 1$ ، $d: f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = x - 5$

$e: f(x) = \sqrt{x+4}$ ، $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، $f: f(x) = \sqrt{3x}$ ، $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع ګانو ترکیب یا مرکبي تابع ګاني
composition of functions or composite functions



فعالیت

- که $f(x)=x^2-2$ او $g(x)=x+3$ وي، $(f\,o\,g)(x)$ او $(g\,o\,f)(x)$ پیدا کړئ.
- په کوم حالت کې $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)$ وي.
- $(f\,o\,f)(x)$ او $(g\,o\,g)(x)$ پیدا کړئ.

که چېرې f او g د x تابع ګاني وي د f ترکیب له g سره د $(f\,o\,g)(x)$ یا $f(g(x))$ سره ښودل کېږي $(f\,o\,g)(x)=f(g(x))=f[g(x)]$

د $(f\,o\,g)(x)$ د تعریف ساحه عبارت له x څخه ده چې x د g د تعریف په ساحه کې او $g(x)$ د f د تعریف په ساحه کې شامل وي.

یا: د $(f\,o\,g)$ تعریف ساحه: $\text{Dom}\,(fog)x=\{x\in IR\,/\,x\in \text{dom}\,g, g(x)\in \text{dom}\,f\}$

1- چې x د g د تعریف په ساحه کې شامل وي.

2- $g(x)$ د f د تعریف په ساحه کې شامل وي.

په پورتني شکل کې $(f\,o\,g)(x)$ تابع د دوو ماشینو په واسطه ښودل شوې ده چې په لومړي ماشین کې ورودي x ، (in put) دی او خروجي (output) یې g(x) ده، په دویم ماشین کې (input) یې $g(x)$ او (output) یې $(fog)(x)$ دی. که g(x) د f د تعریف په ساحه کې شامل نه وي، نو په دویم ماشین (f) کې داخلېدلای نه شي.

$$x \xrightarrow{g} \boxed{g(x)} \xrightarrow{f} f(g(x))$$

$$x \xrightarrow{f} \boxed{f(x)} \xrightarrow{g} g(f(x))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: که $f(x)=x^2-1$ او $g(x)=3x$ وي $(f o g)(x)$ او $(g o f)(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f o g)(x)=f(g(x))=f(3x)=(3x)^2-1=9x^2-1$$
$$(g o f)(x)=g((f(x))=g(x^2-1)=3(x^2-1)=3x^2-3$$

لیدل کیږي چې:

$$(f o g)(x)\neq(g o f)(x)$$
$$9x^2-1\neq 3x^2-3$$

دویم مثال: که $f(x)=3x-4$ او $g(x)=x^2+6$ وي $(f o g)(x)$ او $(g o f)(x)$ پیدا کړئ.

حل: په حقیقت کې په $(f o g)(x)$ کې د $g(x)$ تابع د f په تابع کې د (Domain) یا x ځای نیسي

$$f(g(x))=f(x^2+6)=3(x^2+6)-4=3x^2+18-4=3x^2+14$$
$$g(f(x))=(g o f)(x)=g(3x-4)=(3x-4)^2+6=9x^2-24x+22$$

ښکاره خبره ده چې د $(f o g)(x)$ او $(g o f)(x)$ د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

فعالیت

که $f(x)=x+6$ او $g(x)=x-6$ وي، وښیاست چې $(f o g)(x)=(g o f)(x)$ دی.

دریم مثال: که $g(x)=1-x$ او $f(x)=\sqrt{x}$ وي:

لومړی د fog او gof د تعریف ساحې پیدا کړئ، بیا $f o g$ او gof په لاس راوړئ.

حل: د f تابع د تعریف ساحه $[0\ ,\ \infty)$ او د g تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه $(-\infty,\infty)$ دي.

یا: $\mathrm{Dom} f=[0,\infty)$ $\qquad$ $\mathrm{Dom} g=(-\infty,\infty)$

یا: $\mathrm{Dom}(f o g)=\{x / x\in \mathrm{dom} g\ ,\ g(x)\in \mathrm{dom} f\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

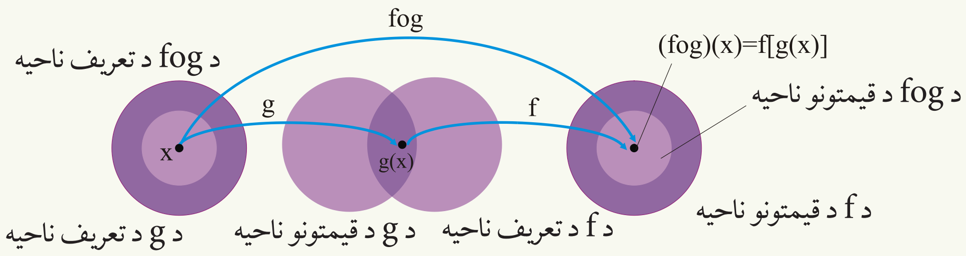
$$Dom(fog)=\{x/x\in IR\ ,\ 1-x\geq 0\}\ ,\ -x\geq -1\Rightarrow\ x\leq 1=(-\infty,1]$$

$$Dom\ (g\,o\,f)=\{x/x\in dom\,f\,,f(x)\in dom\,g\}=\{x/x\geq 0\ ,\sqrt{x}\in IR\}=(0,\infty]$$

$$(f\,o\,g)(x)=f(1-x)=\sqrt{1-x}$$

$$(g\,o\,f)(x)=g(\sqrt{x})=1-\sqrt{x}$$

د مرکبو تابع ګانو د تعریف د ساحې د لا روښانتیا لپاره لاندې شکل وګورئ.



څلورم مثال:که $h(x)=\sqrt{3x^2+1}$ وي، په دوو طریقو سره وښیاست چې د $h(x)$ تابع د کومو دوو تابع ګانو له ترکیب څخه په لاس راغلي ده؟

حل: د $h(x)$ تابع کولای شو د $(g\,o\,f)(x)$ او (jok)(x) دوو تابع ګانو د ترکیب په شکل ولیکو.

په دې ډول که: $f(x)=3x^2+1$ او $g(x)=\sqrt{x}$ وي.

$$(g\,o\,f)(x)=g\big(f(x)\big)=g(3x^2+1)=\sqrt{3x^2+1}$$

په همدې ډول کولای شو د $h(x)$ تابع د (jok)(x) د دوو تابع ګانو د ترکیب په شکل ولیکو. په دې ډول چې: $j(x)=\sqrt{x+1}$ او $k(x)=3x^2$ وي.

$$(j\,o\,k)(x)=j\big(k(x)\big)=j(3x^2)=\sqrt{3x^2+1}$$

پنځم مثال:که $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$ ، $(x\neq -2)$ وي،$f(f(x))$ $(f\,o\,f)(2)$ او $(fo\,fo\,f)(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f\,o\,f)(x)=\frac{\dfrac{x}{x+2}}{\dfrac{x}{x+2}+2}=\frac{\dfrac{x}{x+2}}{\dfrac{x+2x+4}{x+2}}=\frac{x}{x+2}\cdot\frac{x+2}{3x+4}=\frac{x}{3x+4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(fof)(2)=?\quad (fof)(x)=\frac{x}{3x+4}\Rightarrow (fof)(2)=\frac{2}{3\cdot 2+4}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

$$(fofof)(x)=\frac{\frac{x}{x+2}}{3(\frac{x}{x+2})+4}=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x}{x+2}+4}=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x+4x+8}{x+2}}$$

$$=\frac{x}{x+2}\cdot\frac{x+2}{7x+8}=\frac{x}{7x+8}$$

فعالیت

که $f(x)=x^2-2$ او $g(x)=x+3$ وي، $(f\,o\,g)(x)$ ، $(g\,o\,f)(x)$ ، $(g\,o\,f)(-2)$ او $(fog)(3)$ پیداکړئ.

پوښتنې

1- که $f(x)=-3x+2$ او $g(x)=x^3$ وي:

$(\frac{g}{f})(x)$ ، $(f\cdot g)(x)$ ، $(g-f)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f+g)(x)$ پیدا او د تعریف ساحې یې هم وټاکئ.

2- که $f(x)=x^2-3$ او $g(x)=\sqrt{x-3}$ وي، $(f\cdot g)(x)$ ، $(\frac{f}{g})(x)$ او $(\frac{g}{f})(x)$ پیدا کړئ.

3- که $f(x)=x^2+1$ ، $g(x)=\frac{1}{x}$ ، $h(x)=\sqrt{4-x^2}$ او $k(x)=\sqrt{3x+4}$ وي، د $(f\cdot g)(x)$ ، $(\frac{f}{g})(x)$ ، $(h\cdot k)(x)$ او $(\frac{h}{k})(x)$ تابع گانو د تعریف ساحې پیداکړئ.

4- که $f(x)=3x-2$ ، $g(x)=x^2$ وي $(g\,o\,f)(3)$ او $(f\,o\,g)(1)$ پیداکړئ.

5- که $f(x)=\sqrt{x}$ او $g(x)=\sqrt{2-x}$ وي، $f\,o\,g$ $g\,o\,f$ او $f\,o\,f$ پیداکړئ.

6- که $f(x)=\frac{x}{x+1}$ ، $g(x)=x^{10}$ او $h(x)=x+3$ وي $(f\,o\,goh)(x)$ پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

معکوسه تابع (Inverse Function)

فعالیت

- په شکل کې د دواړو تابع ګانو ترمنځ کومه اړیکه شتون لري؟
- آیا د هرې تابع معکوس، هم یوه تابع وي؟
- که د یوې تابع معکوس هم یوه تابع وي، داسې تابع په څه نامه یادیږي؟
- که $f=\{(1,2)(3,5)(6,7)\}$ او $g=\{(2,1)(5,3)(7,6)\}$ وي آیا د g تابع د f معکوسه تابع ده او که نه؟ ولې؟
- که $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)$ وي، آیا د g او f تابع معکوسه تابع ده؟

په پورتني شکل کې یو ترمامیتر لیدل کېږي او پوهېږو چې د سانتي ګرېډ او فارنهایټ د تودوخې د درجو ترمنځ د $f=\frac{9}{5}c+32$ اړیکه شته دی، که دا معادله د (c) له پاره حل شي لرو چې:

$$f=\frac{9}{5}c+32\Rightarrow f-32=\frac{9}{5}c+32-32$$

$$\Rightarrow\frac{5}{9}(f-32)=\frac{5}{9}(\frac{9}{5}c)$$

$$c=\frac{5}{9}(f-32)$$

د c تابع د f معکوسه تابع ده.

د (x,y) رابطې معکوس له (y,x) څخه عبارت ده چې د معکوسې تابع د تعریف ساحه د تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قیمتونو د ساحې او د معکوسې تابع د قیمتونو ساحه، د تابع د تعریف له ساحې څخه عبارت ده.

$$domain f^{-1} = Range f \quad \text{او} \quad Range\, f^{-1} = dom\, f$$

د f د تابع معکوس په f^{-1} ښودل کېږي، پام مو وي چې: $(f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)}$

لومړی مثال: که $f(x) = \{(1,5)(3,7)(8,-10)\}$ وي.

نو $f^{-1}(x) = \{(5,1)(7,3)(-10,8)\}$ ده. ځکه چې:

$$f(3) = 7 \qquad f^{-1}(7) = 3$$
$$f(1) = 5 \qquad f^{-1}(5) = 1$$
$$f(8) = -10 \qquad f^{-1}(-10) = 8$$

نو $f^{-1}(x)$ هم یوه تابع ده.

خو که $f(x) = \{(1,2)(3,2)(4,5)\}$ وي، $f^{-1}(x) = \{(2,1)(2,3)(5,4)\}$ ده.

لیدل کېږي چې $f^{-1}(x)$ یوه تابع نه ده، ځکه د $x = 2$ لپاره دوه مختلف تصویرونه په (Range) کې وجود لري. $f(2) = 1$ او $f(2) = 3$.

نو د هرې تابع معکوس یوه تابع نه وي، یا په بل عبارت هره تابع معکوس منونکې نه وي.

څه وخت چې یوه تابع د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوې وي، که د لومړیو او دویمو عناصر ځایونه یې یو تر بله تبدیل کړو، هغه رابطه چې لاسته راځي، د لومړنۍ تابع معکوسه ده، هغه تابع چې معکوس یې هم تابع وي، نو تابع معکوس منونکې ده.

دویم مثال: آیا د f او g تابع ګانې چې په لاندې ډول د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوې دي معکوس منونکې دي که نه؟

$$f = \{(1,2), (-2,3), (3,1), (0,-1)\} \quad g = \{(2,4), (3,1), (0,2), (5,1)\}$$

حل: که د مرتبو جوړو د لومړنیو او دویمو عناصرو ځایونه یو تر بله تبدیل شي، نو لرو چې:

$$f^{-1} = \{(2,1), (3,-2), (1,3), (-1,0)\}$$

لیدل کېږي چې f^{-1} یا د f تابع معکوس هم یوه تابع ده، ځکه چې د f^{-1} د مرتبو جوړو لومړنۍ عناصر تکرار شوي نه دي. او $g^{-1} = \{(4,2), (1,3), (2,0), (1,5)\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې g^{-1} یا د $g(x)$ معکوس تابع نه ده، ځکه د $x=1$ لپاره دوه قیمتونه د 3 او 5 وجود لري، نو د g تابع معکوس منونکی تابع نه ده.

په لنډ ډول څرنګه چې f یو په یو تابع ده، نو معکوس منونکي هم ده او د g تابع چې یو په یو تابع نه ده، نو معکوس منونکي هم نه ده.

نتیجه: یوازې د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع وي.

یو په یو تابع (one-to-one function)

د $f(x)$ تابع یوه یو په یو تابع ده که چېرې $x_1 \neq x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) \neq f(x_2)$ شي.

یا: $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ او که $a=b \Rightarrow f(a)=f(b)$

که یوه تابع یو په یو وي، نو معکوس یې هم یوه تابع ده.

دریم مثال: که $f(x)=-4x+12$ او $g(x)=\sqrt{25-x^2}$ وي، وښیاست چې کومه یوه له دې تابع ګانو څخه یو په یو تابع ده؟

حل: که $a \neq b$ وي، $-4a+12 \neq -4b+12$ دی.

نو $f(x)$ یوه یو په یوتابع ده.

د مثال په ډول: که $x=2$ وي:

$$f(2)=-4(2)+12=-8+12=4$$

که $x=3$ وي:

$$f(3)=-4(3)+12=-12+12=0$$

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

$$2 \neq 3 \Rightarrow 4 \neq 0$$

نو $f(x)$ یو په یو تابع ده. او $g(x)=\sqrt{25-x^2}$ لپاره:

که $x=3$ وي. $g(3)=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

که $x=-3$ وي. $g(-3)=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

$f(3)=f(-3)$ لیکن $3 \neq -3$ نو $g(x)$ یو په یو تابع نه ده.

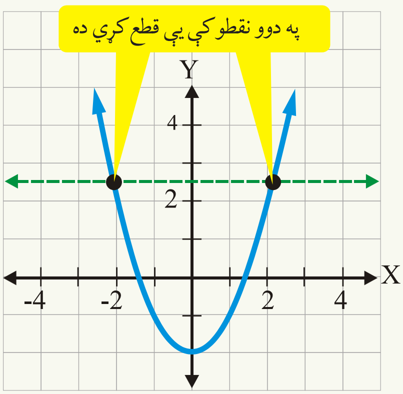
فعالیت

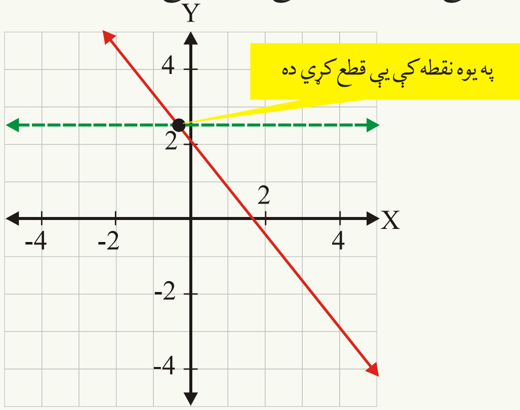
که $f(x)=3x+8$ او $g(x)=x^2$ وي، وښیاست چې کومه یوه تابع یو په یو تابع ده او کومه یوه تابع یو په یو تابع نه ده؟ ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګراف له مخې د يو په يو تابع پېژندنه: که يو افقي خط چې د x له محور سره موازي وي د تابع ګراف په يوه نقطه کې قطع کړي، دا يو په يو تابع ده، که افقي خط د تابع ګراف له يوې نقطې څخه په زياتو نقطو کې قطع کړي، نو داګراف د يو په يو تابع ګراف نه دی.

څلورم مثال: په راکړل شوو شکلونو کې ليدل کېږي چې د x له محور سره موازي خط لومړنی تابع ګراف په يوه نقطه کې او د دويمي تابع ګراف يې په دوو نقطو کې قطع کړی دی، نو لومړنی تابع يو په يو تابع ده، خو دويمه تابع يو په يو تابع نه ده.





د معکوسې تابع تعريف: که f يوه يو په يو تابع وي چې د تعريف ساحه يې x او د قيمتونو ساحه يې y ده، نو د g تابع د f د تابع معکوسه تابع ده، که د g د تعريف ساحه y او د قيمتونو ساحه يې x وي او يا د g تابع په هغه صورت کې د f د تابع معکوسه ده که چېرې:

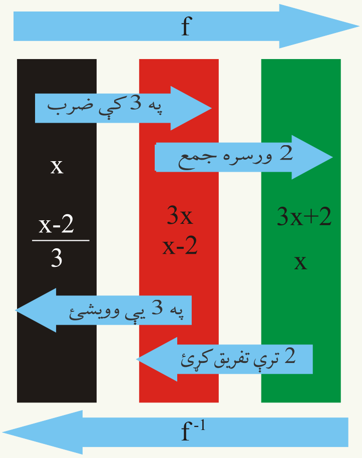
$$(f \circ g)(x) = x$$
$$(g \circ f)(x) = x$$
$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

پنځم مثال: که $f(x) = 3x + 2$ وي، د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع $f^{-1}(x)$ پيداکړئ.

حل:

$$y = f(x) = 3x + 2$$
$$x = 3y + 2$$
$$3y = x - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$y=\frac{x-2}{3}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x-2}{3}=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$$

$$f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$$

دا مثال په لنډ ډول په شکل کې هم ښودل شوی دی.

له بلې خواکه $f^{-1}(x)$ په $g(x)=\frac{x-2}{3}$ سره وښودل شي، $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)=x$ دی.

ځکه چې:

$$(f\,o\,g)(x)=3(\frac{x-2}{3})+2=x-2+2=x$$

$$(g\,o\,f)(x)=\frac{3x+2-2}{3}=\frac{3x}{3}=x$$

یا: $f^{-1}(f(x))=x$ او $f(f^{-1}(x))=x$

شپږم مثال: که $f(x)=x^3+1$ وي $f^{-1}(x)$ او که $g(x)=x^2$ وي $g^{-1}(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$y=x^3+1$$

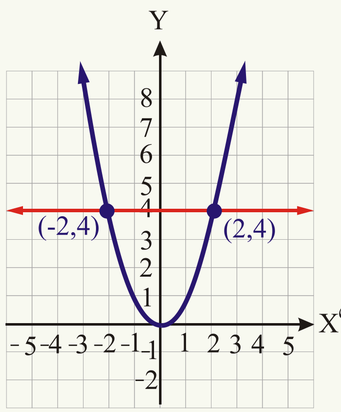
$$x=y^3+1 \qquad \Rightarrow y^3=x-1 \Rightarrow y=\sqrt[3]{x-1}$$

که y په $f^{-1}(x)$ سره وښیو، نو $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$

$$g(x)=x^2 \Rightarrow y=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$$

x پر y او y پر x بدلوو.

$g^{-1}(x)=\pm\sqrt{x}$ یا $y=\pm\sqrt{x}$



لیدل کېږي چې $g^{-1}(x)$ یوه تابع نه ده، ځکه چې که $x=2$ او یا $x=-2$ وي، $g(-2)=4$ او $g(2)=4$ کېږي شکل وګورئ نو د g(x) تابع معکوس پذیره نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم مثال: د x دکوم قمیت لپاره د $f(x)=5x-2$ تابع له خپل معکوس سره مساوي کېږي؟

حل: که $y=5x-2$ وي، نو معکوس يې

$$x=5y-2 \Rightarrow \qquad 5y=x+2$$

$$y=\frac{x+2}{5} \qquad f^{-1}(x)=\frac{x+2}{5}$$

$$\frac{x+2}{5}=5x-2 \Rightarrow \qquad 24x=12$$

$$x=\frac{1}{2}$$

نو د $x=\frac{1}{2}$ په قیمت سره د $f(x)$ تابع له خپلې معکوسې تابع سره مساوي کېږي.

اتم مثال: وښیاست چې د $f(x)=7x-2$ او $g(x)=\frac{1}{7}x+\frac{2}{7}$ تابعګاني يو د بل معکوسې تابع ګاني دي.

حل:

$$(f\,o\,g)(x)=f(g(x))=f(\frac{1}{7}x+\frac{2}{7})=7(\frac{1}{7}x+\frac{2}{7})-2=x$$

$$(g\,o\,f)(x)=f(g(x))=g(7x-2)=\frac{1}{7}(7x-2)+\frac{2}{7}=x$$

نو د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې يو د بل معکوسي تابعګاني دي، نو نتیجه کېږي چې د تابع او د تابع د معکوسې تابع ترکيب د عينيت $\left(f(x)=x\right)$ تابع ده.

فعالیت

که $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ وي، $f^{-1}(x)$ پیدا کړئ او هم وښیاست چې $(f\,o\,f^{-1})(x)=x$ کېږي.

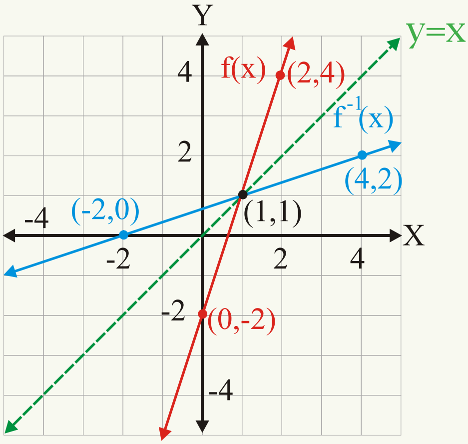
د تابع او دهغې د معکوسي تابع ګراف: د $f(x)$ د يو په يو تابع او د هغې د معکوسی تابع $f^{-1}(x)$ دګرافونو ترمنځ يوه رابطه موجوده ده، څکه که چېرې (a,b) د $f(x)$ تابع دګراف پر مخ يوه نقطه وي، نو د (b,a) نقطه د $f^{-1}(x)$ تابع دګراف پرمخ واقع ده چې (a,b) او (b,a) نقطې له نظره د $y=x$ خط ته سره متناظرې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم مثال: که $f(x)=3x-2$ وي، نو ښکاره ده چې $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ د $f(x)$ معکوسه تابع ده. د دواړو تابع گانو گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ چې گرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.

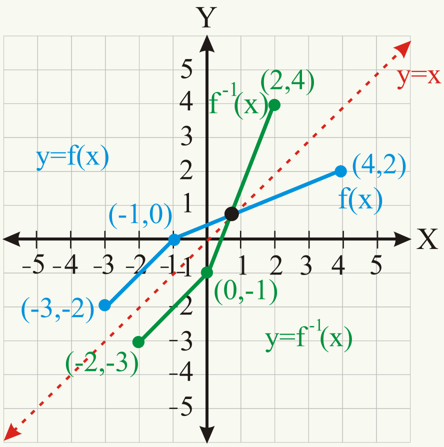
x	0	1	2
$f(x)$	-2	1	4

x	-2	1	4
$f^{-1}(x)$	0	1	2



لیدل کېږي چې د دواړو تابع گانو گرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.

لسم مثال: که د $f(x)$ د $(-3,-2),(-1,0)$ او $(4,2)$ مرتبو جوړو لرونکې وي د $f(x)$ او $f^{-1}(x)$ د تابع گانو گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړي او وښیاست چې دواړه گرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

ليدل کېږي چې د f (x) او $f^{-1}(x)$ تابع ګانو ګرافونه نظر د y=x خط ته سره متناظر دي.

- د يو په يو تابع معکوس هم يوه تابع ده.
- د X له محور سره موازي خط (افقي خط) د يو په يو تابع ګراف په يوه نقطه کې قطع کوي.
- د $y=f(x)$ تابع د معکوس د پيدا کولو لپاره د تابع معادله د x لپاره حلوو، بيا x پر y او y پر x بدلوو په لاس راغلې تابع $y=f^{-1}(x)$ ده چې د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع ده.
- د $f(x)$ د تابع او د $f(x)$ د معکوسې تابع ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.
- $dom\ f(x)=Range\ f^{-1}(x)$ او $Range\ f(x)=dom\ f^{-1}(x)$ دي.

پوښتنې

1- د لاندېنيو تابع ګانو معکوس پيدا کړئ او ووايئ چې د کومې تابع معکوس هم يوه تابع ده؟

$$f=\{(-1,0),(-2,1),(4,3),(3,4)\} \quad h=\{(1,4),(2,3),(4,1)\}$$
$$g=\{(1,2),(2,3),(3,2),(4,1)\} \quad k=\{(3,0),(2,-1),(1,2),(0,1),(-1,2)\}$$

2 – د لاندېنيو هرې يوې تابع معکوسه تابع پيدا کړئ او د خپل ځواب صحت د $f(f^{-1}(x))=x$ سره وازمايئ.

$$f(x)=x+3 \qquad f(x)=2x \qquad f(x)=2x+3$$
$$f(x)=x^3+2 \qquad f(x)=(x+2)^3 \qquad f(x)=\frac{1}{x}$$

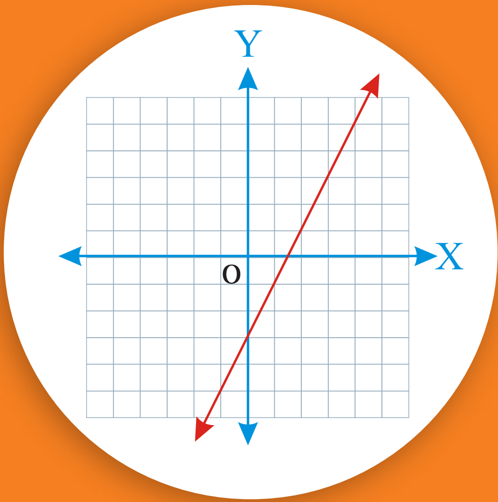
3 – د لاندېنيو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ او د X له محور سره د موازي خط (افقي خط) په واسطه وښياست چې ددوی معکوس هم يوه تابع ده.

$$f(x)=1-x^2 \qquad g(x)=\frac{7-2x}{5}$$

4 – له لاندېنيو تابع ګانو څخه کومه يوه يو په يو تابع ده.

$$y=4x-5 \qquad y=6-x \qquad y=(x-2)^2 \qquad y=9 \qquad y=\frac{1}{x+2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پولینومي تابع ګاني

- آیا پوهیږئ چې لومړي درجې تابع ته ولې خطي تابع وایي؟
- آیا د لومړي درجې تابع ګراف یو مستقیم خط دی؟

پولینومونه مو په لومړي فصل کې تر څېړنې لاندې ونیول. هغه پولینوم چې له یوه توري (متحول) څخه جوړ شوي وي د پولینومي تابع په نامه یادېږي.

خطي تابع (Liner function) یا لومړۍ درجه تابع

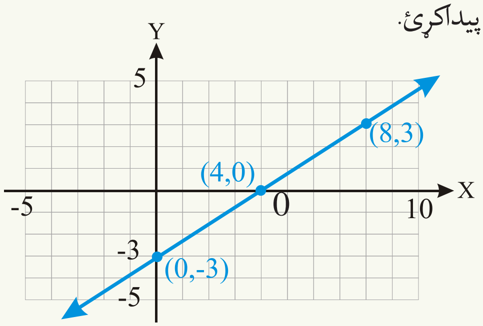
هغه پولینومي تابع ده چې درجه یې یوه وي، د لومړۍ درجې تابع عمومي شکل $f(x)=ax+b$ دی چې $a\neq 0$ او b , a حقیقي عددونه دي.

د مثال په ډول: $f(x)=3x+4$, $f(x)=x-1$, $f(x)=2x$ او $f(x)=\frac{1}{2}x$ خطي تابع ګاني دي.

لومړی مثال: د $f(x)=\frac{3}{4}x-3$ تابع ګراف رسم کړئ او د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع نقطې پیداکړئ.

$$f(x)=\frac{3}{4}x-3$$

x =	8	4	0
f(x)	3	0	−3



د X له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه (4 ,0) او د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه (0,−3) ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې د لومړۍ درجې تابع ګراف یو مستقیم خط دی او له همدې سببه ورته خطي تابع هم وايي، د خطي تابع د ګراف د رسمولو لپاره همدومره کافي ده چې د X او Y له محورونو سره یې د تقاطع ټکي پیدا کړو او مستقیم خط رسم کړو، لکه: چې په شکل کې لیدل کېږي.

فعالیت

د $y = f(x) = x + 1$ او $y = x - 1$ تابع ګانو ګراف رسم او د X او Y له محورنو سره یې د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات هم پیدا کړئ.

دویم مثال: د $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ خطي تابع ګراف رسم کړئ.

حل: د Y له محور سره د ګراف د تقاطع په نقطه کې $(x = 0)$ دی، نو:

$$f(0) = \frac{2}{3}(0) + 2 = 2$$

نو د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه $(0, 2)$ ده.

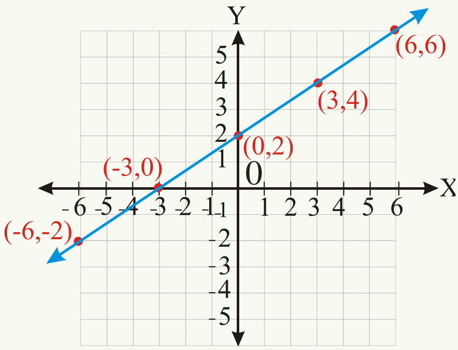
او د X له محور سره د ګراف د تقاطع په نقطه کې د y یا f (x) قیمت صفر دی $f(x) = 0$

$$0 = \frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow x = -3$$

نو د X له محور سره د ګراف د تقاطع ټکی $(-3, 0)$ دی.

د $(0 , 2)$ او $(-3 , 0)$ نقطې یو له بله سره نښلوو او مستقیم خط رسموو او هم کولای شو چې د ګراف یو څو نورې نقطې وټاکو چې پر همدې مستقیم خط باندې پرتې دي.

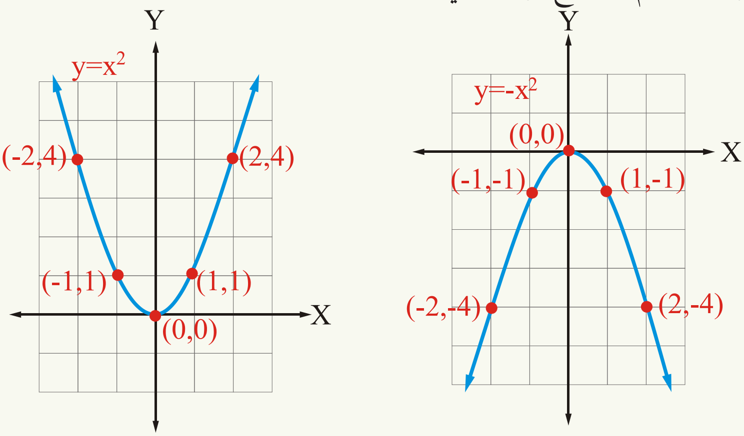
x =	0	3	−3	6	−6	...
f(x) =	2	4	0	6	−2	...



(c) ketabton.com: The Digital Library

دویمه درجه تابع (Quadratic Function) او ګراف يې:

دا ګرافونه د کوم ډول تابع ګرافونه دي؟



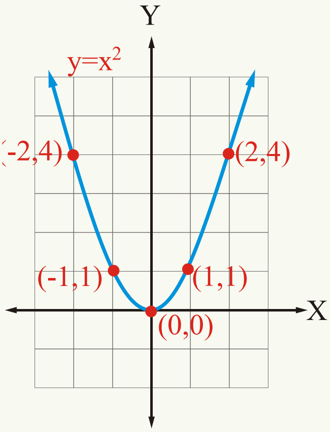
- دا دواړه ګرافونه سره څه توپير لري؟
- له $f(x)=x^2+7x+12$, $g(x)=x^2+1$, $h(x)=x^2+3x$, $k(x)=x^2$ او $r(x)=2x-1$ څخه کومه يوه يې دويمه درجه تابع نه ده؟

هغه پولينومي تابع چې درجه يې يوه وي، لومړي درجه يا د خطي تابع (Liner Function) په نامه يادېږي او که د پولينومي تابع درجه (2) وي، د دويمې درجې تابع په نوم يادېږي.

فعاليت

- د دويمې درجې تابع ګراف په کوم نوم يادېږي؟
- د دويمې درجې تابع د ګراف د تناظر محور کوم خط دی؟
- د دويمې درجې تابع ګراف څه وخت پورته خواته او کوم وخت ښکته خواته خلاصېږي؟
- د دويمې درجې تابع د ګراف رأس په کوم وخت کې اصغري (Minimum) او په کوم وخت کې اعظمي (Maximum) دی؟
- آيا د دويمې درجې تابع ګراف د رأس د نقطې وضعيه کميات پيدا کولای شي؟
- په کوم حالت کې د دويمې درجې تابع ګراف د X او Y محورونه قطع کولای شي؟
- آيا د X او Y له محورونو سره د دويمې درجې تابع د ګراف د تقاطع د نقطو وضعيه کميات پيدا

(c) ketabton.com: The Digital Library



x	0	1	2	-1	-2
y	0	1	4	1	4

کولای شئ؟

د دويمې درجې تابع عمومي شکل $f(x) = ax^2 + bx + c$ دی چې b ، a او c حقیقي عددونه او $a \neq 0$ دی.

د دويمې درجې تابع ګراف: ترټولو ساده دویمه درجه تابع د $f(x) = y = x^2$ تابع ده چې $a = 1$ او $b = c = 0$ که x ته یو څو قیمتونه ورکړل شي د تابع یا y اړونده قیمتونه لاس ته راوړلای شو، ګراف يې رسم کېدای شي لکه: څنګه چې په شکل کې ليدل کېږي.

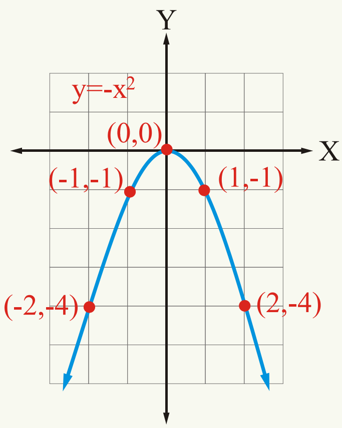
دويمې درجې تابع ګراف د پارابولا (Parabola) په نوم يادېږي چې داګراف نظر د y محور ته متناظر دی، هغه خط چې د پارابول له رأس څخه تېر شي او د y له محور سره موازي وي، د تناظر د محور په نامه يادېږي چې د y محور ددې تابع د ګراف د تناظر محور دی.

هغه نقطه چې د تناظر محور په کې ګراف قطع کوي، د پارابول د رأس (Vertex) په نامه يادېږي. که a>0 وي، د پارابول خوله پورته خواته خلاصېږي او د ګراف د رأس ټکی اصغري دی د $y = x^2$ د تابع ګراف د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې متناقص او د $(0, \infty)$ په انټروال کې ګراف متزايد دی.

لومړی مثال: د $y = -x^2$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

د پارابول خوله ښکته خواته خلاصېږي، ځکه چې $a < 0$ دی، د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې ګراف متزايد او د $(0, \infty)$ په انټروال کې ګراف متناقص دی.



x	0	1	-1	2	-2
y	0	-1	-1	-4	-4

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $y = x^2 + 4$ تابع ګراف رسم کړئ.

دویم مثال: د $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$ او $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

$g(x) = 2x^2$

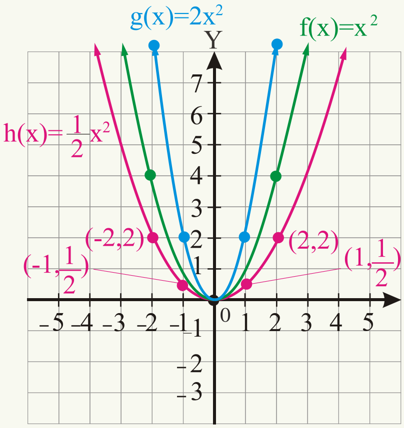
$x =$	0	1	-1	2	-2
g(x) =	0	2	2	8	8

$f(x) = x^2$

$x =$	0	1	-1	2	-2
$f(x) =$	0	1	1	4	4

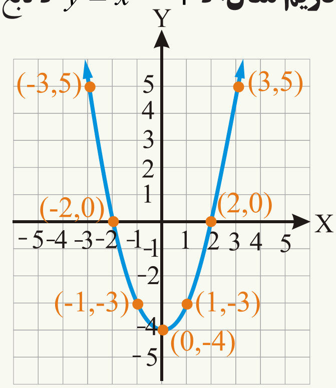
$h(x) = \frac{1}{2}x^2$

$x =$	0	1	-1	2	-2
h(x) =	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	2



دریم مثال: د $y = x^2 - 4$ د تابع ګراف رسم کړئ.

x	0	1	−1	2	−2	3	−3
y	−4	−3	−3	0	0	5	5

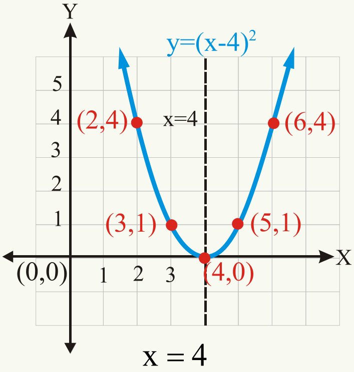


په حقیقت کې د $y = x^2$ تابع ګراف 4 واحده ښکته خواته نقل شوی دی.

څلورم مثال: د $y = (x-4)^2$ تابع ګراف رسم کړئ.

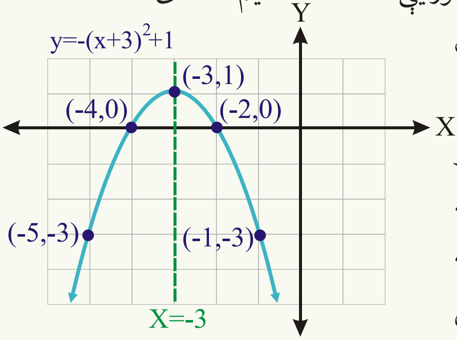
حل: که x ته یو څو قیمتونه ورکړو او د y اړونده قیمتونه پیدا کړو د تابع ګراف رسمیدلای شي لکه:

(c) ketabton.com: The Digital Library



x	4	5	3	6	2	...
y	0	1	1	4	4	...

ليدل کېږي چي گراف د $(-\infty\ ,\ 4)$ په انټروال کې متناقص او د $(4,\infty)$ په انټروال کې متزايد دی. له شکل څخه ليدل کېږي چي د $y=x^2$ گراف په افقي ډول 4 واحده ښي خواته انتقال شوی دی د پارابول رأس د $(4\ ,0)$ ټکی دی او د تناظر محور يې $x=4$ مستقيم خط دی.



پنځم مثال: د $y=-(x+3)^2+1$ تابع گراف رسم کړئ.

د $y=x^2$ گراف درې واحده کيڼې خواته او يو واحد په عمودي ډول پورته خواته نقل شوی دی او د پارابول راس د $(-3,1)$ ټکی د گراف اعظمي نقطه او د تناظر محور يې $x=-3$ دی چې په شکل کې هم ليدل کېږي.

x	-3	-2	-4	-5	-1
y	1	0	0	-3	-3

فعاليت

د $y=3x^2$ او $y=-3x^2$ تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

د X او Y له محورونو سره د گراف د تقاطع ټکي:

ددې لپاره چي په اسانی سره پارابول رسم کړو، د X او Y له محور سره يې د تقاطع ټکي پيدا کوو (که چېرې د X له محور سره تقاطع ولري)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د Y له محور سره د تقاطع ټکي پیداکولو لپاره د $y = ax^2 + bx + c$ معادله کې x=0 وضع کېږي په نتیجه کې y=c دی.

د X له محور سره د تقاطع د پیداکولو لپاره $y = 0$ وضع کوو، نو لرو چې:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$0 = ax^2 + bx + c \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

څرنګه چې پوهېږئ $ax^2 + bx + c = 0$ یوه دویمه درجه معادله ده او جذرونه یې $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ دی، پوهېږو چې ددې معادلې جذرونه هغه وخت حقیقي عددونه دي چې $b^2 - 4ac \geq 0$ وي، که $b^2 - 4ac < 0$ ګراف د X محور قطع کولای نه شي، په لنډ ډول یې په لاندې جدول کې وګورئ:

د $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ **تابع ګراف**

a	د دویمې درجې تابع ګراف په هغه صورت کې د X محور په دوو نقطو کې قطع کوي چې $b^2 - 4ac > 0$ وي.
b	په هغه صورت کې د X محور په یوه نقطه کې قطع کوي چې $b^2 - 4ac = 0$ وي.
c	په هغه صورت کې د X محور قطع کولای نه شي چې $b^2 - 4ac < 0$ وي.

د پارابولا د راس د نقطې د وضعیه کمیاتو پیدا کول:

د تکمیل مربع په طریقه هم کولای شو چې د پارابول د رأس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړو.

$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

$$y = a\left[(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2\right] + c$$

$$= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a(\frac{b^2}{4a^2}) + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پارابولا د رأس د ټکي وضعیه کمیات $(-\frac{b}{2a} , \frac{4ac-b^2}{4a})$ او یا (h,k) دي او څرنګه چې د تناظر محور د پارابولا له رأس څخه تېرېږي، نو $x=-\frac{b}{2a}$ د تناظر د محور معادله ده.

که چېرې $a>0$ وي، رأس اصغري (Minimum) او که $a<0$ وي، رأس اعظمي (Maximum) دی.

شپږم مثال: د $f(x)=2x^2+4x+5$ تابع ګراف رسم کړئ.

1- د X له محور سره د تقاطع ټکي پیدا کوو. څرنګه چې $a=2$ ، $b=4$ او $c=5$ دي.

$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\cdot2\cdot5=-24<0$ ادا چې $\Delta<0$ ده نو ګراف د X محور نه قطع کوي.

2- د Y له محور سره د ګراف د تقاطع ټکي پیدا کوو په دې حالت کې $x=0$ دی.

د $y=ax^2+bx+c$ په تابع کې که $x=0$ شي $y=c$ کېږي، نو $(0,c)$ د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه ده. $f(0)=2\cdot0^2+4\cdot0+5=5$

نو په دې مثال کې $(0,5)$ د y له محور سره د تقاطع نقطه ده.

3 – د رأس د نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له:

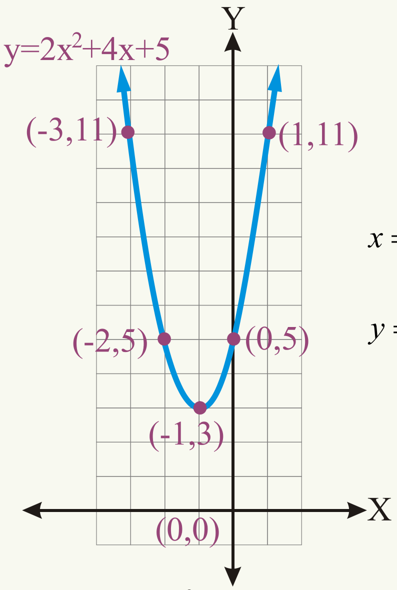
$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\cdot2}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot2\cdot5-4^2}{4\cdot2}=\frac{40-16}{8}=\frac{24}{8}=3$$

$(-1,3)$ د پارابولا د رأس د نقطې وضعیه کمیات دي او رأس اصغري دی، ځکه چې $a>0$ دی.

4 – د تناظر د محور معادله $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-4}{4}=-1$

د ګراف د تناظر د محور معادله $x=-1$ ده، د ګراف د رسمولو لپاره کولای شو د ګراف یو څو نورې نقطې هم پیدا کړو:



$f(x)=2x^2+4x+5$

x =	−1	−2	0	1	−3
f(x) =	3	5	5	11	11

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم مثال: د $y=-3x^2-2x+1$ تابع ګراف رسم کړئ.

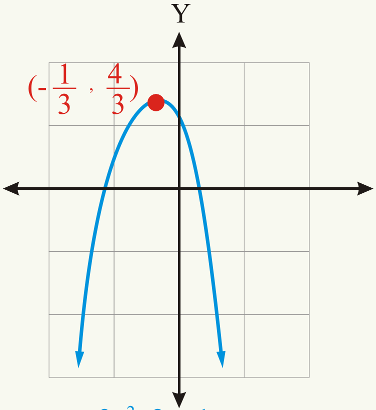
$$y=-3(x^2+\frac{2}{3}x)+1$$

د x د ضریب نیمايي مربع جمع او هم تفریقوو.

$$y=-3\left[x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{3})^2\right]+1$$

$$y=-3\left[x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2\right]-3(-\frac{1}{9})+1=-3\left[(x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2\right]+\frac{4}{3}$$

$$y=-3(x+\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}$$



y=-3x² -2x+1

$y=-3(x+\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}$

په نتیجه کې $x=-\frac{1}{3}$ د تناظر د محور معادله ده، ځکه چې : $x+\frac{1}{3}=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ او $(-\frac{1}{3},\frac{4}{3})$ د رأس د ټکي وضعیه کمیات دي او څرنګه چې $a<0$ دی، نو د پارابولا رأس اعظمي دی.

یادونه: که دویمه درجه تابع د $y-k=a(x-h)^2$ یا $y=a(x-h)^2+k$ په شکل ولیکل شي $x=h$ د تناظر د محور معادله او (h,k) د رأس د نقطې وضعیه کمیات دي.

$f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$ د لومړۍ درجې یا خطي تابع عمومي شکل دی.

او $y=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$ د دویمې درجې معادلې عمومي شکل دی.

د دویمې درجې تابع ګراف ته پارابول (Parabola) وایي که $a>0$ وي، رأس اصغري او که $a<0$ وه، رأس اعظمي دی. $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ د پارابولا د رأس وضعیه کمیات او $x=-\frac{b}{2a}$ د پارابول د تناظر د محور معادله ده. که $\Delta=b^2-4ac>0$ پارابولا د X محور په دوو نقطو کې او که $\Delta=0$ نو پارابولا د X محور په یوه نقطه کې قطع کوي او که $\Delta<0$ وي، پارابولا د X محور قطع کولای نه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 - د $h(x)=-\frac{3}{2}x+3$ د تابع گراف رسم کړئ.

2 – د $g(x)=2x+1$ او $g(x)=2x-1$ تابع گانو گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم

کې رسم او سره پرتله یې کړئ.

3– د $f(x)=x^2$, $f(x)=2x^2$, $f(x)=3x^2$, $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ او $f(x)=\frac{1}{3}x^2$

تابع گانو گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ او یو له بله سره یې پرتله کړئ

4 – د لاندې تابع گانو د گراف د تناظر محور معادلې پیدا کړئ.

$f(x)=3x^2-2x+6$ ، $f(x)=x^2-12x+30$ ، $f(x)=x^2+8x+13$

5 – د $f(x)=(x-2)^2$, $g(x)=(x+1)^2$ او $h(x)=(x-3)^2$ تابع گانو گرافونه رسم

کړئ او وواياست چې د $f(x)=x^2$ له گراف سره څه اړیکه لري؟

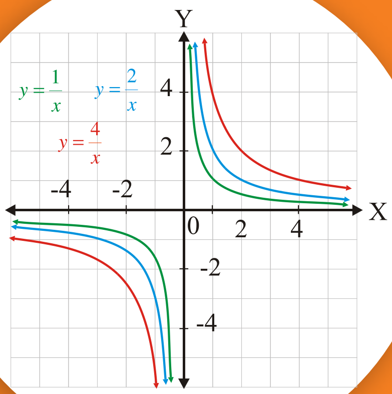
6 – د $y=-x^2-1$ تابع د گراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

a : $(-1,1)$ b: $(1,-1)$ c: $(0,-1)$ d : $(0,1)$

7 – د $y=(x-1)^2-2$ تابع د گراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

a : $(1,1)$ b: $(-1,2)$ c: $(-1,-2)$ d : $(1,-2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ناطقي يا نسبتي تابع ګاني (Rational functions)

دا شکل د کوم ډول تابع ګانو ګرافونه دي؟

فعاليت

- آيا د ناطقې تابع د عمودي مجانب معادله پيدا کولای شئ ؟
- آيا د هرې ناطقې تابع د تعريف په ساحه کې ټول حقيقي عددونه شاملیدلای شي؟
- آيا د يوې ناطقې تابع افقي مجانب پيدا کولای شئ؟
- آيا هره ناطقه تابع عمودي مجانب لري؟

تعريف

ناطقه تابع هغه تابع ده چې د دوو پولينومي تابع ګانو له خارج قسمت څخه جوړه شوې وي که $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ ، $g(x)\neq 0$ وي، په داسې حال کې چې $p(x)$ او $g(x)$ پولينومونه وي، نو $f(x)$ يوه ناطقه تابع ده.

د ناطقې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه دي، پرته د x له هغو قيمتونو څخه چې د ناطقې تابع مخرج پرې صفر کېږي، د مثال په ډول: $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $h(x)=\frac{x^3-1}{x}$
$g(x)=\frac{x-1}{x^2-x-6}$ ، $g(x)=3$ او $P(x)=2x^2-3$ ناطقې تابع ګانې دي.

فعاليت

آيا $k(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x+2}$ يوه ناطقه تابع ده؟ ولې ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناطقي تابع د تعریف د ساحې پیدا کول

(Finding Domain of Rational function)

لومړی مثال: د لاندېنیوناطقو تابع گانو د هرې یوې د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{x^2-9} \quad , \quad h(x)=\frac{x+3}{x^2+9}$$

حل: د $f(x)$ په تابع کې د $x=3$ لپاره د تابع مخرج صفر کېږي، نو د 3 عدد د $f(x)$ د ناطقې تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی یا: $Dom\ f(x)=\{x/x\in IR \ , \ x\neq 3\}$

د $g(x)$ په تابع کې که چېرې $x=3$ یا $x=-3$ شي، نو مخرج یې صفر کېږي، نو د 3 او 3 - عددونه د $g(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

$$Dom\ g(x)=\{x/x\in IR \ , \ x\neq 3 \ , \ x\neq -3\}$$

څرنگه چې د $h(x)$ تابع مخرج د x په هیڅ قیمت نه صفر کېږي، نو د $h(x)$ تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

$$Dom\ h(x)=IR \quad \text{یا} \quad Dom\ h(x)=(-\infty \ , \ \infty)$$

فعالیت

د لاندېنیو ناطقو تابع گانو د تعریف ساحې تعین کړئ.

$$f(x)=\frac{x^2-25}{x-5} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{x^2-25} \quad , \quad h(x)=\frac{x+5}{x^2+25}$$

دویم مثال: د لاندېنیو ناطقو تابع گانو د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا کړئ.

$$f(x)=\frac{x+3}{x-4} \qquad g(x)=\frac{x-3}{x+5}$$

حل: د f(x) تابع د تعریف ساحه پرته له (4)څخه ټول حقیقي عددونه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$dom\ f(x) = IR \setminus \{4\}$ یا $IR - \{4\}$

$y = f(x) = \dfrac{x+3}{x-4} \Rightarrow y(x-4) = x+3$

$xy - x = 4y + 3$

$(y-1)x = 4y + 3$

$xy - 4y = x + 3 \Rightarrow \quad x = \dfrac{4y+3}{y-1}$

$Range\ f(x) = IR \setminus \{1\}$ یا $IR - \{1\}$

د $g(x)$ تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته له (-5) څخه:

$dom\,g(x) = IR - \{-5\}$ یا $\{x \in IR / x \neq -5\}$

$g(x) = y = \dfrac{x-3}{x+5} \Rightarrow y(x+5) = x-3 \Rightarrow xy + 5y = x - 3$

$x = \dfrac{-5y-3}{y-1} \qquad Range\,g(x) = IR - \{1\}$ یا $\{y \in IR / y \neq 1\}$

فعالیت

د لاندې راکړل شوو ناطقو تابع ګانو د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا کړئ.

$h(x) = \dfrac{1}{x^3} \quad , \quad k(x) = \dfrac{x+1}{3} \quad , \quad r(x) = \dfrac{4x-1}{2-x} \quad , \quad m(x) = \dfrac{x}{3x-2}$

د ناطقي تابع د ګراف رسمول (Graphing Rational function):

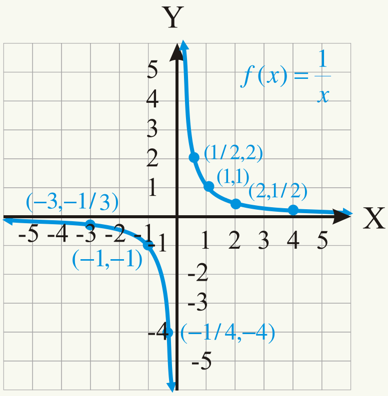
دریم مثال: د $f(x) = \dfrac{1}{x}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل: که $x = 0$ شي، نو د تابع مخرج صفر کېږي، صفر د $f(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

$Dom\ f = IR - \{0\}$

x	$\ldots -4$	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	$4\ldots$
f(x)	$\ldots -\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}\ldots$

(c) ketabton.com: The Digital Library



اوس د $f(x)=\frac{1}{x}$ د تابع وضعیت مطالعه کوو:
څرنګه چې $x=0$ د $f(x)$ تابع د تعریف په ناحیه کې شامل نه دی، ددې تابع د ګراف د رسمولو لپاره x ته داسې قیمتونه ورکوو چې له دواړو خواوو څخه صفر ته نژدې شي (تقرب وکړي)، که x له کیڼې خوا څخه صفر ته نژدې شي $(x\to 0^-)$ د تابع قیمت $-\infty$ ته نږدې کیږي $(f(x)\to-\infty)$ او که x له ښې خوا څخه صفر ته نژدی کیږي، $(x\to 0^+)$ د تابع قیمت $+\infty$ ته تقرب کوي $(f(x)\to\infty)$ لاندې جدول وګورئ.

a: x له کیڼې خوا څخه صفر ته نژدې کیږي.

x	$\ldots-1$	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	$x\to 0^-$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\ldots-1$	-2	-10	-100	-1000	$f(x)\to-\infty$

b : x له ښې خوا څخه صفر ته نژدې کیږي.

x	$0^+\leftarrow x$	0.001	0.01	0.1	0.5	1...
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\infty\leftarrow f(x)$	1000	100	10	2	1...

عمودي مجانب (Vertical Asymptotes)

که په یوه ناطقه تابع $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ کې چې صورت او مخرج یې مشترک فکتور، ونه لري او $p(a)\neq 0$ وي، که $g(a)=0$ شي، نو د $x=a$ خط د $f(x)$ د تابع عمودي مجانب دی چې د y له محور سره موازي دی. د عمودي مجانبونو شمېر د مخرج د جذرونو له شمېر سره مساوي دي یا په بل عبارت که $x\to a$ په نتیجه کې $f(x)\to+\infty$ یا $f(x)\to-\infty$، نو د $x=a$ عمودي خط ددې تابع عمودي مجانب دی یا که:

$x\to a \Rightarrow |f(x)|\to\infty$ نو $x=a$ د تابع عمودي مجانب دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

x هر څومره چې د a قیمت ته نژدې شي، خو د تابع ګراف د $x = a$ مستقیم خط قطع کولای نه شي، ځکه چې د a عدد د تابع دتعریف په ساحه کې شامل نه دی، لکه: د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع د تعریف په ساحه کې صفر شامل نه دی، نو $x = 0$ یا د Y محور د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع عمودي مجانب دی.

څلورم مثال: د $f(x) = \frac{2x}{x-3}$، $g(x) = \frac{x}{x^2-25}$ او $h(x) = \frac{x+5}{x^2+25}$ تابع ګانو عمودي مجانبونه پیداکړئ.

حل:

1 - د f(x) تابع د عمودي مجانب د پیداکولو لپاره د x هغه قیمت پیداکوو چې د f(x) تابع مخرج پرې صفر کېږي. نو د 3 عدد د $f(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

$$dom f(x) = \{x / x \in IR \;\; , \;\; x \neq 3\}$$

نو د $x = 3$ خط د f(x) تابع عمودي مجانب دی.

2 -

$$g(x) = \frac{x}{x^2-25} = \frac{x}{(x-5)(x+5)}$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

د x=5 او $x = -5$ لپاره د g(x) تابع مخرج صفر کېږي، نو د 5 او 5 - عددونه د g(x) د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

$$dom\, g(x) = \{x / \in IR \;\; , \;\; x \neq -5 \;\; , \;\; x \neq 5\}$$

نو د $g(x)$ د تابع عمودي مجانبونه د $x = 5$ او $x = -5$ خطونه دي.

3 - څرنګه چې د x په هر قیمت د $h(x) = \frac{x+5}{x^2+25}$ تابع مخرج نه صفر کېږي، نو عمودي مجانب نه لري یا ددې تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

افقي مجانب (Horizontal Asymptote)

که په یوه ناطقه تابع کې د صورت او مخرج درجې سره مساوي وي، نو ښکاره خبره ده چې دوېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

حاصل (خارج قسمت) به یو ثابت عدد وي، که دې ثابت عدد ته b ووايو، نو د $y=b$ افقي خط ددې تابع افقي مجانب دی چې دا خط یا د X محور او یا د X له محور سره موازي خط دی چې په حقیقت کې د b عدد د صورت او مخرج د لویو توانونو د ضریبونو له نسبت څخه عبارت دی او یا صورت پر مخرج ویشو.

د مثال په ډول د $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ د تابع افقي مجانب د $y=2$ خط دی.

افقي مجانب داسې تعریفوو:

که $x\to\infty$ یا $x\to-\infty$ او په نتیجه کې $f(x)\to b$ نو $y=b$ مستقیم خط د f(x) تابع افقي مجانب دی او یا که $|x|\to\infty$ او $y\to b$، نو $y=b$ مستقیم خط ددې تابع افقي مجانب دی.

پنځم مثال: د $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

1 - **د X له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه**: د X له محور سره د تقاطع په نقطه کې $f(x)=0$ کېږي، په نتیجه کې لرو چې: $0=\dfrac{2x}{x-1}\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$

نو د تابع ګراف د X محور په $x=0$ یا د $(0,0)$ په نقطه کې قطع کوي.

2 - **د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه**: $f(0)=\dfrac{2\cdot0}{0-1}=\dfrac{0}{-1}=0$

نو ګراف د X او Y محورونه د $(0,0)$ په نقطه کې قطع کوي یا په بل عبارت ددې تابع ګراف د وضیعه کمیاتو له مبدأ څخه تېرېږي.

3 - د تابع د عمودي مجانب معادله: $x-1=0\Rightarrow x=1$ دی دا خط رسم کړئ.

4 - د تابع د ګراف افقي مجانب $\dfrac{2}{1}=2$ دی، نو $y=f(x)=2$ د تابع افقي مجانب دی، یا $\dfrac{2x}{x-1}=2+\dfrac{2}{x-1}$ افقي مجانب یې هم رسم کړئ.

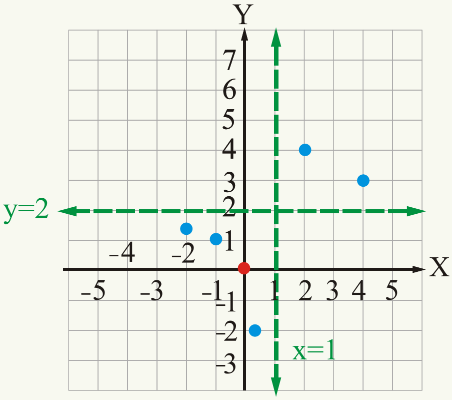
5 - د ګراف یو څو نورې نقطې هم پیدا کوو، لکه:

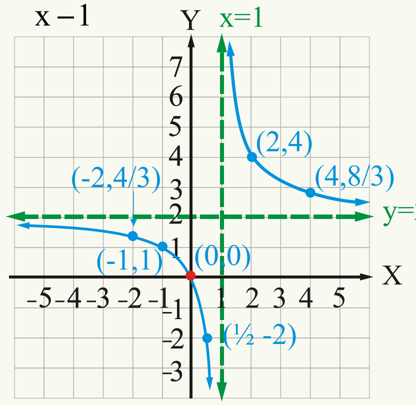
x	0	-2	-1	$\frac{1}{2}$	2	4
$y=f(x)$	0	$\frac{4}{3}$	1	-2	4	$\frac{8}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له محورونو سره د تقاطع نقطې ټاکو، د تابع مجانبونه رسموو او بيا يې ګراف، لکه: ښنګه چې په شکل کې ليدل کيږي، رسموو.

$$f(x)=\frac{2x}{x-1}$$





فعاليت

د $f(x)=\dfrac{3x}{x-2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

شپږم مثال: د $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ د تابع افقي او عمودي مجانبونه پيدا کړئ او ګراف يې رسم کړئ.

حل: د عمودي او افقي مجانبونو معادلې عبارت دي له:

1 - د عمودي مجانب معادله $x=2$

2 - د افقي مجانب معادله $f(x)=y=1$

3 - د Y له محور سره تقاطع:

که $x=0$ شي، نو $f(x)=-1$ دي، ګراف د Y محور په $(0,-1)$ کې قطع کوي.

4 - د X له محور سره تقاطع $f(x)=0$ شي، نو:

$$x+2=0$$

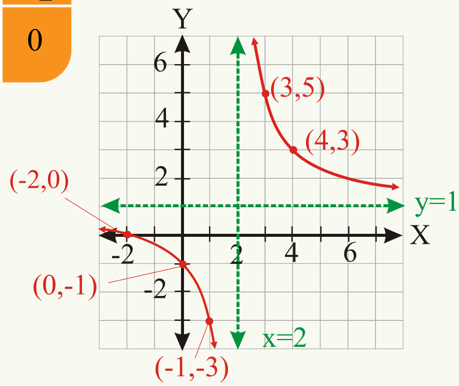
$$x=-2$$

نو د $(-2,0)$ په نقطه کې ګراف د X محور قطع کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

5 - ددې لپاره چې ګراف په اسانه ډول رسم شي، په لاندې جدول کې د ګراف د هرې څانګې قیمتونه وګورئ.

x	-1	0	1	3	4	5	-2
f(x)	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	5	3	$2\frac{1}{3}$	0



که صورت پر مخرج ووېشو $\frac{x+2}{x-2}=1+\frac{4}{x-2}$

په حقیقت کې د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع ګراف د یو واحد په اندازه پورته خواته او د (2) واحدونو په اندازه ښي خواته ا نتقال شوی دی او $f(x)=1$ y= د تابع افقي مجانب دی.

مایل مجانب: (slant or Oblique asymptote)

څه وخت چې د یوې ناطقې تابع د صورت درجه د یو په اندازه د مخرج له درجې څخه زیاته وي ښکاره خبره ده چې تابع افقي مجانب نه لري په دې حالت کې تابع مایل مجانب لري.

اووم مثال: د $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

1 - د مایل مجانب د پیداکولو لپاره صورت پر مخرج وېشو، نو لرو چې:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}=\underbrace{x+1}_{\text{مایل مجانب}}+\frac{2}{x-1}$$

که $|x|$ هر څومره لوی شي $\frac{2}{x-1}$ صفر ته نژدې کېږي، نو په نتیجه کې ګراف د $y=f(x)=x+1$ مستقیم خط ته نژدې کېږي چې همدا د $y=x+1$ خط د $f(x)$ تابع مایل مجانب دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2 – د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه:

$$f(0)=0+1+\frac{2}{0-1}=1-2=-1$$

ګراف د $(0,-1)$ په نقطه کې د Y محور قطع کوي.

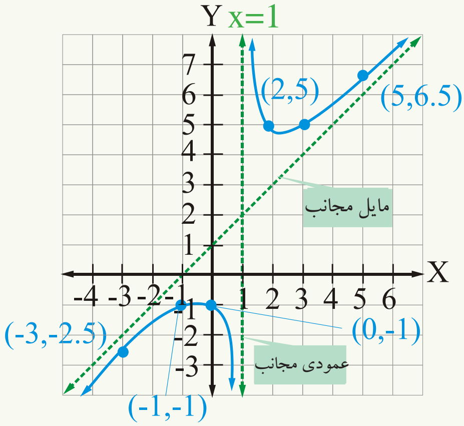
3 - ښکاره خبره ده چې ګراف د X محور قطع کولای نه شي، ځکه چې $x=\sqrt{-1}$ کېږي.

4 - عمودي مجانب يې

$x-1=0 \Rightarrow x=1$ دی.

5 - ښکاره ده چې افقي مجانب نه لري.

6 - یو څو نوري نقطې پیداکوو او د تابع ګراف رسموو:



x	2	3	5	-1	-3
f(x)	5	5	6.5	-1	-2.5

اتم مثال: د $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

1 - د تابع عمودي مجانب د $x=2$ خط دی، ځکه چې $x-2=0 \Rightarrow x=2$

2 - x^2+1 پر $(x-2)$ ویشو لرو چې: $\dfrac{x^2+1}{x-2}=x+2+\dfrac{5}{x-2}$

که $|x|$ لوی شي $\dfrac{5}{x-2}$ صفر ته نږدې کېږي او د تابع ګراف د $y=x+2$ خط ته نژدې کېږي

چې $y=x+2$ خط ددې تابع مایل مجانب دی.

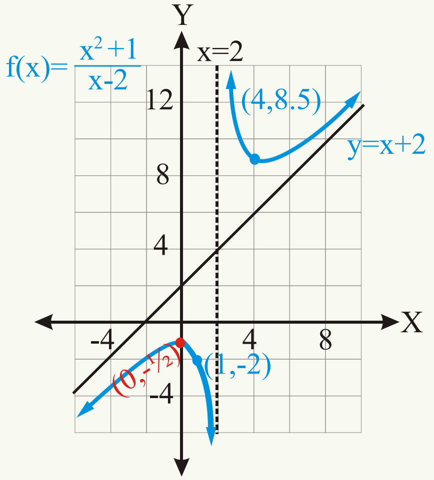
3 – د Y له محور سره تقاطع $-\dfrac{1}{2}$ ده، ځکه که $x=0$ شي $f(0)=\dfrac{0+1}{0-2}=-\dfrac{1}{2}$

4 – ګراف د X له محور سره تقاطع نه لري، ځکه چې که $f(x)=0$ شي، نو: $0=\dfrac{x^2+1}{x-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x^2+1=0 \Rightarrow x=\sqrt{-1}$ (چې په حقیقي عددونو کې تعریف شوی نه دی)

د مجانبونو په رسمولو او د Y له محور سره د تقاطع ټکی او خو نورو قیمتونو په مرسته د تابع ګراف رسمولای شو.



x	0	1	4
f(x)	$-\frac{1}{2}$	-2	8.5

که $f(x)=\frac{P(x)}{g(x)}$ په تابع کې په ترتیب سره m او n د صورت او مخرج درجې وي نو:

1 – که $m<n$ وي د x محور افقي مجانب دی.

2 – که $m=n$ وي $y=b$ د تابع افقي مجانب دی چې b د m او n د درجو حدونو د ضریبونو نسبت دی یا که چیرې $f(x)=\frac{a_nx^n+...+a_0}{b_nx^n+...+b_0}$، $(b_n\neq 0)$ وي، نو $y=\frac{a_n}{b_n}$ د f(x) تابع افقي مجانب دی.

3 – که $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري.

4 – که د صورت درجه د یو په اندازه د مخرج له درجې څخه زیاته وي، نو د تابع ګراف مایل مجانب لري چې په بې نهایت کې له ګراف سره موازي کیږي، یوه ناطقه تابع یو یا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو یو افقي یا مایل مجانب به لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 – د $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-4}$ تابع افقي او عمودي مجانبونه پيدا کړئ.

2 – آيا د $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+1}$ تابع عمودي مجانب لري؟ ولې؟

3 – د لاندې راکړل شوو تابع ګانو د تعريف ساحې پيدا کړئ او د عمودي مجانبونو معادلې يې وليکئ.

$$f(x)=\frac{5x}{x-4}\ ,\ g(x)=\frac{3x^2}{(x-5)(x+4)}\ ,\ h(x)=\frac{x+7}{x^2-49}\ ,\ k(x)=\frac{x+7}{x^2+49}$$

4 – له لاندې تابع ګانو څخه کومه يوه چې عمودي مجانب ولري، پيدا يې کړئ.

$$f(x)=\frac{x}{x+4}\quad ,\quad g(x)=\frac{x+3}{x(x+4)}$$

$$h(x)=\frac{x}{x(x+4)}\quad ,\quad k(x)=\frac{x}{x^2+4}$$

5 – د لاندې ناطقو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

$$f(x)=\frac{4x}{x-2}\quad ,\quad g(x)=\frac{2x}{x-4}$$

6 - د $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}$ تابع افقي مجانب عبارت دی له:

$a:\quad y=2$ $\qquad b:\quad y=3$

$c:\quad y=-2$ $\qquad d:\quad y=-3$

7 - د $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ او $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ او د $f(x)=\dfrac{1}{x}$ د تابع له ګراف سره يې پرتله کړئ.

8 – د $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ تابع مايل مجانب پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځیرکي لنډیز

• تابع د دوو سټونو تر منځ داسې یوه رابطه یا قاعده (Rule) ده چې د لومړني سټ هر عنصر یوازې او یوازې د دویم سټ له یو عنصر سره اړیکه ولري. لومړني سټ ته د تابع د تعریف ساحه (Domain) او دویم سټ ته د قیمتونو ساحه (Range) وایي یا تابع د هغو مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر یې تکرار شوي نه وي.

• یوه تابع د $y = f(x)$ په شکل لیکل کېږي، په یوه نقطه کې د تابع د قیمت د پیدا کولو لپاره د x راکړل شوی قیمت د تابع په معادله کې وضع کوو، د تابع قیمت په هغه نقطه کې په لاس راځي او یوه معادله هغه وخت د یوې تابع ښودونکی وي چې د هر x لپاره یو y وجود ولري.

• د یوې تابع د تعریف په ساحه (Domain) کې هغه عددونه شامل وي چې تابع په کې تعریف شوې وي یا د تابع قیمت یو حقیقي عدد وي. د یوې تابع ګراف د XOY په مستوي کې د S د هغو نقطو سټ دی په دې ډول چې $S = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ او x د تابع د تعریف په ساحه کې شامل وي، که د y له محور سره موازي خط ګراف یوازې په یوه نقطه کې قطع کړي، دا ګراف د یوې تابع ګراف دی.

• $f(x) = c$ ثابته تابع، $f(x) = ax + b$ خطي تابع، $(a \neq 0)$ $f(x) = x$ د عینیت تابع او $f(x) = |x|$ د مطلقه قیمت تابع ده چې د تعریف ساحه یې ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ساحه یې صفر او مثبت حقیقي عددونه دي.

• د علامې تابع دا ډول تعریف شوې ده:

$$f: \mathrm{IR} \rightarrow \mathrm{IR} \qquad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 : x > 0 \\ 0 : x = 0 \\ -1 : x < 0 \end{cases}$$

ددې تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ساحه یې $\{-1, 0, 1\}$ ده.

• د دویمې درجې تابع عمومي شکل $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ دی او د دویمې درجې تابع ګراف ته پارابولا (parabola) وایي که $a > 0$ وي، رأس اصغري او که $a < 0$ وي، رأس اعظمي دی. $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$ د پارابولا د رأس وضعیه کمیات او $x = -\frac{b}{2a}$ د پارابول د تناظر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

محور معادله ده. که $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ پارابولا د X محور په دوو نقطو کې او که $\Delta = 0$ ، نو پارابولا د X محور په یوه نقطه کې قطع کوي او که $\Delta < 0$ ، وي پارابول د X محور نه قطع کوي.

- که د $f(x)$ په تابع کې $x_1 < x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي، تابع متزایده، که $x_1 < x_2$ وي او $f(x_1) > f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده او هم که $f(-x) = f(x)$ وي، تابع جفته او که $f(-x) = -f(x)$ شي، تابع طاقه ده.
- انتقال په (2) ډوله دی (عمودي او افقي انتقال)
- **عمودي انتقال**: که c یو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته انتقال شي د $y = f(x) + c$ تابع گراف لاس ته راځي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال شي، د $y = f(x) - c$ تابع گراف لاس ته راځي.

افقي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه کیڼې خواته انتقال شي، د $y = f(x+c)$ گراف لاس ته راځي.

که د $y = f(x)$ تابع گراف د c واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شي، د $y = f(x-c)$ تابع گراف لاس ته راځي.

- د تابع گانو عملیې په لاندې ډول تعریف شوي دي:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

$$\mathrm{dom}(f+g)(x) = \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$$

$$\mathrm{dom}(f-g)(x) = \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$$

$$\mathrm{dom}(f \cdot g)(x) = \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$$

$$\mathrm{dom}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g - \{x / g(x) = 0\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

• د مرکبو تابع گانو د تعریف ساحه:

$$Dom(fog)(x) = \{x / x \in domg \quad , \quad g(x) \in domf\}$$
$$Dom(gof)(x) = \{x / x \in domf \quad , \quad f(x) \in domg\}$$

• د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع ده.

• د X له محور سره موازي خط (افقي خط) د یو په یو تابع ګراف په یوه نقطه کې قطع کوي.

• د $y = f(x)$ یو په یو تابع د معکوس د پیدا کولو لپاره معادله د x لپاره حلوو، بیا x پر y او y پر x بدلوو په لاس راغلی تابع $f^{-1}(x)$ ده چې د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع ده. د f(x) او د f(x) د معکوسې تابع ګرافونه نظر د y=x خط ته سره متناظر دي.

• که د $f(x) = \dfrac{P(x)}{g(x)}$ په ناطقه تابع کې په ترتیب سره m او n عددونه د صورت او مخرج درجې وي، نو:

1 – که $m < n$ وي، د X محور افقي مجانب دی.

2 – که $m = n$ وي، $y = b$ د تابع افقي مجانب دی چې b د m او n درجو لرونکو حدونو د ضریبونو نسبت دی یا که چېرې $f(x) = \dfrac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_0}$ وي، $(b_n \neq 0)$ نو $y = \dfrac{a_n}{b_n}$ د f (x) د تابع افقي مجانب دی.

3– که $m > n$ وي، نو افقي مجانب نه لري.

4 – که د صورت درجه د یو په اندازه د f(x) د مخرج له درجې څخه زیاته وي، نو تابع مایل مجانب لري.

• یوه ناطقه تابع یو یا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو یو افقي یا مایل مجانب به لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتني

1 - د لاندېنيو مرتبو جوړو له ستونو څخه کوم يو يې د يوې تابع ښودونکي دی؟ د تعريف او د قيمتونو ساحې يې پيدا کړئ.

$1-\quad \{(1,2),(3,4),(5,5)\}$

$2-\quad \{(3,4),(3,5),(4,4),(4,5)\}$

$3-\quad \{(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0)\}$

$4-\quad \{(1,4),(1,5),(1,6)\}$

2 - که $g(x)=x^2+2x+3$ وي، $g(-x), g(-1)$ او $g(x+5)$ پيدا کړئ.

3 - که $h(x)=x^4+x^2+1$ وي، $h(-x), h(-1), h(2)$ او $h(3a)$ پيدا کړئ.

4 - د لاندېنيو تابع ګانو دتعريف ساحې پيدا کړئ.

$f(x)=2x$ $\qquad f(x)=(x-3)^{\frac{1}{2}}$

$f(x)=\sqrt{16-x^2}$ $\qquad f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$

$f(x)=\sqrt{\dfrac{3}{x^2+25}}$ $\qquad f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$

5 - که چېرې $f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x<0 \\ 4x+7 & : \quad x\geq 0 \end{cases}$ وي، $f(0), f(3)$ او $f(-2)$ پيدا کړئ.

6 - که چېرې $g(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x\geq -3 \\ -(x+3) & : \quad x<-3 \end{cases}$ وي، $g(-6), g(0)$ او $g(-3)$ پيدا کړئ.

7- که چېرې $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \Leftarrow \quad x\neq 3 \\ 6 & \Leftarrow \quad x=3 \end{cases}$ وي، $h(0), h(3)$ او $h(5)$ پيدا کړئ.

8 - له لاندېنيو معادلو څخه کومه يوه يې تابع تعريفوي؟

$x+y=16$ $\qquad x^2+y=16$ $\qquad x^2+y^2=16$

$x=y^2$ $\qquad y=\sqrt{x+4}$ $\qquad x+y^3=8$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9 - په لاندېنيو تابع ګانو کې کومه طاقه، کومه يوه جفته او کومه يوه، نه طاقه او نه جفته ده؟

$$f(x)=x^4-2x^2+5 \quad , \quad f(x)=x^2+2x-1 \quad . \quad f(x)=\frac{2}{x-6}$$

10 - د $f(x)=(x-1)^2, f(x)=x^2-1$ تابع ګانو ګرافونه رسم او د $f(x)=x^2$ سره يې پرتله کړئ.

11 - د لاندېنيو تابع ګانو $(f+g),(f-g),(f\cdot g)$ او $(\frac{f}{g})$ پيدا کړئ او د تعريف ساحې يې وټاکئ.

$f(x)=4x-1 \qquad g(x)=6x+3$

$f(x)=\sqrt{2x+5} \qquad g(x)=\sqrt{4x-9}$

$f(x)=4x^2-11x+2 \qquad g(x)=x^2+5$

12 - که $f(x)=4x^2-2x$ او $g(x)=8x+1$ وي، نو:

$(f+g)(3) \qquad (f+g)(-5) \qquad (f\cdot g)(4)$

$(\frac{f}{g})(4) \qquad (fog)(2) \qquad (gof)(-5)$

پيدا کړئ.

13 - fog او gof پيدا کړئ که:

$f(x)=8x+12 \qquad g(x)=3x-1$

$f(x)=5x+3 \qquad g(x)=-x^2+4x+3$

$f(x)=-x^3+2 \qquad g(x)=4x$

$f(x)=\frac{1}{x} \qquad g(x)=x^2$

$f(x)=\sqrt{x+2} \qquad g(x)=8x^2-6$

14 - د $y=f(x)$ تابع د ګراف په پام کې نيولو سره وواياست چې د $y=f(x)-5$ تابع ګراف د 5 واحدو په اندازه:

a- ښکته خواته انتقال شوي دی. b- پورته خوا ته انتقال شوي دی.

c- ښې خواته انتقال شوي دی. d- کيڼې خواته انتقال شوي دی.

15 - که د f(x) تابع په لاندې ډول تعريف شوی وي ګراف يې رسم کړئ، د تعريف او قيمتونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساحې يې وټاکئ.

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & : \quad x>1\\ x^2 & : \quad -1<x<1\\ x+2 & : \quad x<-1\end{cases}$$

16 - د $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ تابع د تعريف او قيمتونو ساحې وټاکئ.

17 - د $f(x)=\sqrt{2x-1}$ تابع د تعريف او قيمتونو ساحې وټاکئ.

18 - د لاندېنيو ناطقو تابع ګانو د تعريف ساحې پيدا کړئ او کومه تابع چې عمودي مجانب ولري، د عمودي مجانبونو معادلې يې هم پيدا کړي.

$f(x)=\dfrac{5x}{x-4}$ $\qquad g(x)=\dfrac{7x}{x-8}$ $\qquad h(x)=\dfrac{x+8}{x^2-64}$

$f(x)=\dfrac{x+8}{x^2+64}$ $\qquad g(x)=\dfrac{x+7}{x^2-49}$ $\qquad h(x)=\dfrac{x+7}{x^2-36}$

19 - د $f(x)=x^2+2$, $f(x)=x^2+1$, $f(x)=x^2-1$ او $f(x)=x^2-2$ تابع ګانو ګرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم او د $f(x)=x^2$ د تابع له ګراف سره يې پرتله کړئ.

20 - د لاندېنيو دويمې درجې تابع ګانو د رأسونو وضعيه کميات اود تناظر د محوررونو معادلې پيدا کړئ.

$y=(x-2)^2 \qquad y=(x+3)^2-4$

21 - د $y=-\dfrac{x}{2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

22 - د $f(x)=\dfrac{x^2-5}{x+2}$ تابع عمودي او مايل مجانبونه پيدا کړئ.

23 - د $h(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$ تابع د افقي مجانب معادله عبارت ده له:

$a)\quad y=-1$ $\qquad b)\quad y=1$

$c)\quad y=-\dfrac{1}{4}$ $\qquad d)\quad y=4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

24 - د $f(x)=\begin{cases}3x+1 & : x<2\\ -x & : x\geq 2\end{cases}$ د تابع گراف رسم کړئ.

25- $g(x)=|x|-5$ د تابع گراف رسم او د قیمتونو ساحه یې پیدا کړئ.

26 - د علامې تابع د قیمتونو په ساحه کې کوم عددونه شامل وي؟

27 - د لاندېنیو تابع گانو معکوسه تابع پیدا کړئ او وښیاست چې $f(f^{-1}(x))=x$ دی.

$f(x)=\frac{1}{8}x$ $\quad f(x)=8x-1$ $\quad f(x)=x^2+6$

$f(x)=\frac{4x+6}{5}$ $\quad f(x)=x^3-1$

28- آیا د $g(x)=x^2$ تابع معکوس منونکې ده؟ (معکوس یې هم یوه تابع ده)

29 - که $(fog)(x)=(gof)(x)$ وي، د f او g تابع گانې سره څه اړیکه لري؟

30 - د X او Y له محورونو سره د $g(x)=3-\frac{3}{2}x$ د گراف، د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیدا کړئ.

31 - د $f(x)=-3$ تابع گراف رسم کړئ.

32 - د $f(x)=2x^2+4x+5$ تابع د گراف د رأس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

33 - د $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $f(x)=3x^2$, $f(x)=2x^2$ او $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ تابع گانو گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او د $f(x)=x^2$ تابع د گراف سره یې پرتله کړئ.

34 - د $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ د ناطقې تابع مایل مجانب عبارت دی له:

$a:\ y=x$

$b:\ y=x-1$

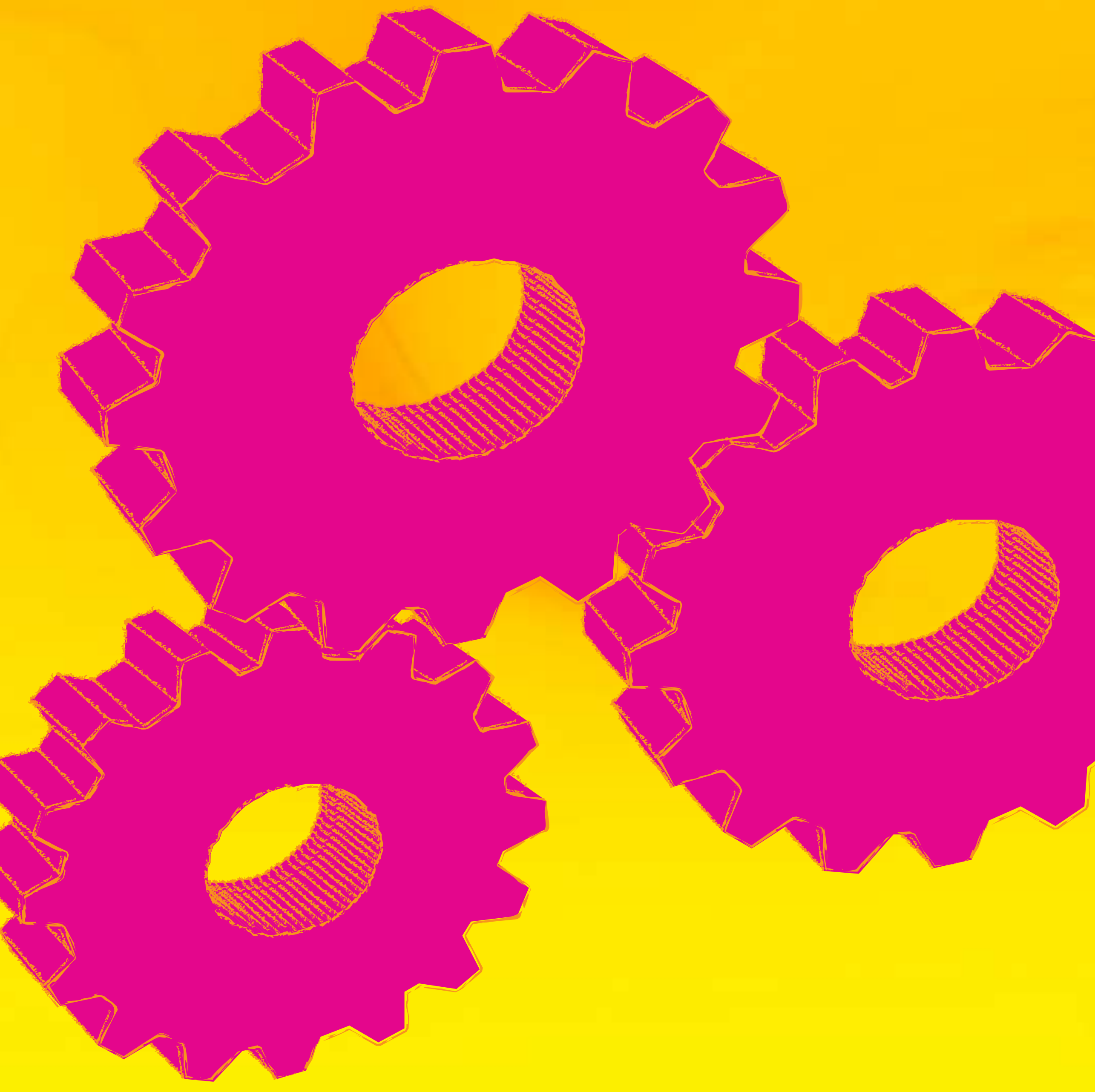
$c:\ y=x+1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم څپرکی

مثلثاتي تابع ګانې

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

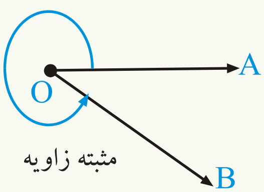
زاويه او راډيان(Angle and Radian)
زاويه او د زاويې د اندازه کولو واحدونه:

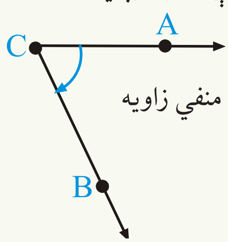
آيا زاويه په مثلثاتو او هندسه کې يو له بله توپير لري؟
آيا په هندسه کې منفي زاويې شته دي؟

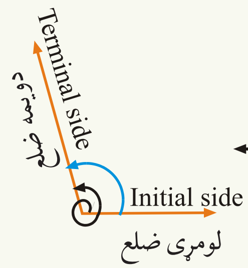
له هندسې څخه پوهېږو، زاويه هغه شکل دی چې د دوه نيمو خطونو له يو ځای کېدو څخه چې مشترکه مبدأ ولري، تشکيل شوی وي چې مشترکه مبدأ د زاويې له رأس څخه عبارت ده. په هندسه کې زاويه له 1° څخه تر 360° پورې وي، خو په مثلثاتو کې په هره اندازه زاويه درلودلای شو. له بلې خوا په مثلثاتو کې مثبتې او منفي زاويې هم شته دي.

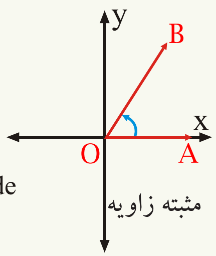
په مثلثاتو کې زاويه د يو خط له دوران څخه په دې ډول چې د خط يو انجام ثابت وي، لاس ته راځي. چې د لومړي خط دوران د دويمې ضلعې موقعيت اختياروي(يوه ضلع د رأس په نقطه کې دوران کوي). د ساعت د عقربې د حرکت مطابق دوران(clockwise) منفي او د ساعت د عقربې د حرکت مخالف(Counter clockwise) دوران مثبت فرض شوی دی.

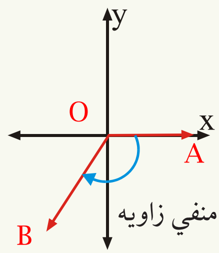
چې لومړي ضلعې ته (Initial side) او د دوران پای ته دويمه ضلع (Terminal side) وايي. لکه: څرنګه چې په شکل کې ليدل کېږي.





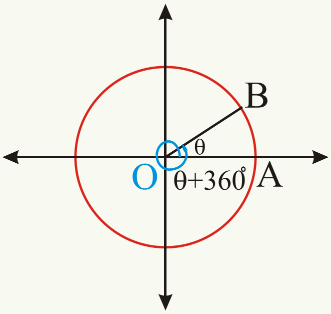






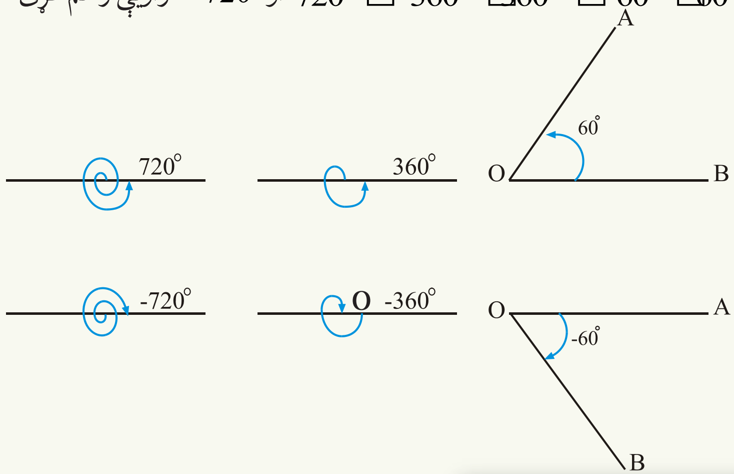
(c) ketabton.com: The Digital Library

که په شکل کې د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته د مختصاتو د مبدأ پر شاوخوا د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف جهت کې دوران ورکړو، د θ زاویه لاس ته راځي.



که د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته د 360° په اندازه(یو پوره دوارن) دوران ورکړو، او دوران ته دوام ورکړو، تر څو د$\overrightarrow{OA}$ نیم خط د OB موقعیت ته ورسېږي. په دې حالت کې جوړه شوې زاویه $\theta+360^\circ$ ده. او که د دوو پوره دورانونو وروسته د B ټکي ته ورسېږو، طی شوې زاویه به $\theta+720^\circ$ او په همدې ډول که د $\overrightarrow{OA}$نیم خط ته K دورانونه ورکړو او د B ټکي ته ورسېږو، نو د زاویې اندازه به $\theta+K\cdot360^\circ$ وي، لکه: څرنګه چې لیدل کېږي، په مثلثاتو کې له 360° څخه لوېې زاویې هم شته دی.

لومړی مثال: د: 60° ، -60° ، 360° ، -360° ، 720° او -720° زاویې رسم کړئ.



فعالیت

د 45° ، 90° ، -180° او 180° زاویې رسم کړئ.

د زاویې د اندازه کولو واحدونه: زاویه د درجې، ګراد او راډیان په مرسته اندازه کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

درجه: د یو دوران (Rotation) $\frac{1}{360}$ برخه له درجې څخه عبارت ده، یا دیوې قایمې زاویې $\frac{1}{90}$ برخې ته درجه وایي.

$$1^{\circ} = 60' \qquad 1' = 60'' \qquad 1^{\circ} = 60 \cdot 60 = 3600''$$

$$(\frac{1}{60})^{\circ} = 1' \quad , \quad (\frac{1}{60})' = 1'' \qquad (\frac{1}{3600})^{\circ} = 1''$$

دويم مثال: $35^{\circ}\ 15'\ 27''$ د درجې په اعشاري شکل ولیکئ او $(48,3625)^{\circ}$ په درجه، دقیقه او ثانیه (DMS) واړوئ.

حل

$$35^{\circ}\ 15'\ 27'' = 35^{\circ} + (\frac{15}{60})^{\circ} + (\frac{27}{3600})^{\circ} = 35^{\circ} + 0,25^{\circ} + 0,0075^{\circ} = 35,2575^{\circ}$$

$$48,3625^{\circ} = 48^{\circ} + 0,3625^{\circ} = 48^{\circ} + (0,3625 \cdot 60)' = 48^{\circ} + (21,75)'$$

$$= 48^{\circ} + (21)' + (0,75 \cdot 60)'' = 48^{\circ}\quad 21'\quad 45''$$

فعالیت

$36^{\circ}\ \ 47'\ 12''$ په درجه واړوئ او $55,967663^{o}$ په درجه، دقیقه او ثانیه (DMS) (Degree, Minute, Second) واړوئ.

ګراد: ګراد هم د زاویې د اندازه کولو واحد دی، د یو دوران $\frac{1}{400}$ برخې ته ګراد وایي. د ګراد $\frac{1}{100}$ برخې ته دقیقه ګراد او د دقیقه ګراد $\frac{1}{100}$ مې برخې ته ثانیه ګراد وایي.

$$1g = 100'g \quad , \quad 1'g = 100''g \quad , \quad 1g = 10000''g$$

د درجې بدلول په ګراد او د ګراد بدلول په درجې باندې: کولای شو چې درجه په ګراد او ګراد په درجه واړوو.

دريم مثال: 45° درجې په ګراد او $100g$ په درجه واړوئ.

حل: څرنګه چې یو مکمل دوران 360° یا $400g$ دی نو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$400g = 360^{\circ}$$

$$1g = \left(\frac{360}{400}\right)^{\circ} = \left(\frac{9}{10}\right)^{\circ}$$

$$100g = 100\left(\frac{9}{10}\right)^{\circ} = 90^{\circ}$$

$$360^{\circ} = 400g$$

$$1^{0} = \frac{400}{360}g = \frac{10}{9}g$$

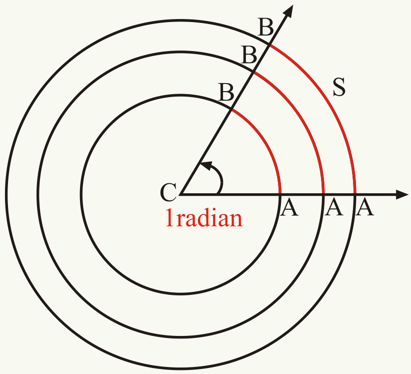
$$45^{\circ} = 45\left(\frac{10}{9}\right)g = 50g$$

اویا:

$$\frac{d}{180} = \frac{g}{200} \quad , \quad \frac{d}{180} = \frac{100}{200}$$

$$d = \frac{180 \cdot 100}{200} = 90^{\circ}$$

راډیان(Radian): د درجې او ګراد سربېره د زاویې د اندازه کولو بل واحد راډیان دی. راډیان د هغوي مرکزي زاویې اندازه ده چې د مقابل قوس اوږدوالی یې د شعاع له اوږدوالي سره مساوي وي. راډیان په عالي ریاضیاتو کې ډېر استعمالیږي. په شکل کې د $A\hat{C}B$ مرکزي زاویه چې شعاع یې r او د AB قوس اوږدوالی له r سره مساوي دی، نو د $A\hat{C}B$ زاویه 1Radian ده.

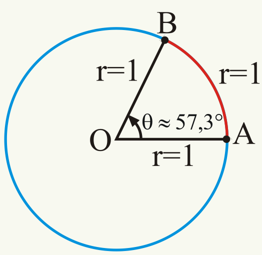


$$A\hat{C}B = 1\,\text{radian} = 1^{R}$$

که د AB قوس د دایرې له شعاع r سره مساوي وي، θ د راډیان په حساب مساوي ده په:

$$\hat{\theta} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{s}{r} \text{ او یا } s = r\theta$$

په مثلثاتي دایره یا واحده دایره(Unite Circle) کې چې شعاع یې د اوږدوالي واحد او مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې واقع وي، د راډیان په حساب د مرکزي زاویې اندازه له مقابل قوس سره مساوي ده.



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\theta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{1} = \overset{\frown}{AB} = S \quad \text{radian}$$

خرنگه چې د دايرې محيط $C = 2\pi r$ دی، نو $\frac{2\pi\, r}{r} = 2\pi \ \ radian$ په دې معنا چې يو پوره دوارن 360^o يا $2\pi^R$ دی.

$$2\pi^R = 360^\circ$$

$$1^R = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx \frac{180^\circ}{3.14159} \approx (57.29578)^\circ \approx 57^\circ 17'45'' \approx (57.3)^\circ$$

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ} \approx \frac{3.14159}{180^\circ} \approx 0.01745 \,\text{Randians}$$

څلورم مثال: د $\frac{\pi}{3}$ $radian$ د مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی پيدا کړئ، که د دايرې قطر $30m$ وي.

حل: خرنگه چې: $r = \frac{d}{2} = \frac{30m}{2} = 15m$ دی، نو: $s = r\theta = 15(\frac{\pi}{3}) = 5\pi\ m \approx 15,7m$

فعاليت

د $1Rad$ مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی به څو سانتي متره وي؟ که د دايرې شعاع $10cm$ وي.

د درجې او گراد بدلول په راډيان او د راډيان بدلول په درجه او گراد:

خرنگه چې $360^o = 400g = 2\pi^R$ دی،نو $\frac{d}{360^\circ} = \frac{g}{400} = \frac{R}{2\pi}$ او يا $\frac{d}{180} = \frac{g}{200} = \frac{R}{\pi}$

او يا

$$360^o = 2\pi^R$$

$$1^o = (\frac{2\pi}{360})^R = (\frac{\pi}{180})^R$$

په همدې ډول خرنگه چې: $2\pi^R = 360^o$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1^R = (\frac{360}{2\pi})^o = (\frac{180}{\pi})^o$$

$$1^R = \frac{200g}{\pi} = \frac{200g}{3,1415} \approx 63,66198g$$

پنځم مثال: د 75^o , 220^o , -400° , $-100g$ او 40° زاویې په راډیان واړوئ.

څرنګه چې $1^o = (\frac{\pi}{180})^R$ ده، نو:

$$220 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{9} \text{radain}, \qquad 75^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12} \text{radain}$$

$$40^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{9} \text{ radian} \qquad -400^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = -\frac{20\pi}{9} \text{ radain}$$

څرنګه چې یو پوره دوران $2\pi^R$ او یا $400g$ دی، نو:

$$1g = (\frac{2\pi}{400})^R = (\frac{\pi}{200})^R$$

$$-100g = (-100 \cdot \frac{\pi}{200})^R = (-\frac{\pi}{2})^R$$

پوښتنه: که د ګراد په حساب له یوې زاویې څخه 30 واحده کم کړو، په لاس راغلی عدد، د زاویې اندازه په درجه راکوي، دا زاویه څو راډیانه ده؟

حل

$$\frac{270}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{3\pi}{2} \text{Radian}$$

$$\frac{10}{9}D - 30 = D$$

$$\frac{10}{9}D - D = 30 \Rightarrow \frac{10D - 9D}{9} = 30 \Rightarrow D = 270^\circ$$

نو دا زاویه $\frac{3\pi}{2}$ راډیانه ده.

شپږم مثال: a: $(\frac{5\pi}{6})$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{9}$ او 6π راډیان په درجه واړوئ.

b): د یو دوران (Revolution) $\frac{1}{4}$ برخه څو راډیانه کېږي؟

حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1^R = (\frac{180}{\pi})^o \quad , \quad \frac{\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi} = 36^\circ$$

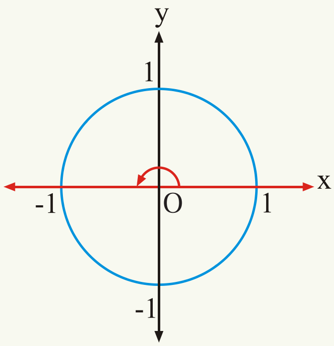
$$a : (\frac{5\pi}{6}) \cdot (\frac{180}{\pi}) = 150^\circ \quad , \quad 6\pi \cdot \frac{180}{\pi} = 1080^\circ \quad , \quad \frac{4\pi}{9} \cdot \frac{180}{\pi} = 80^\circ$$

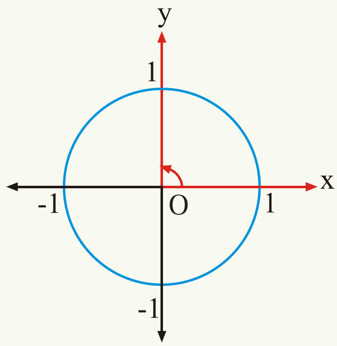
$$b : = \frac{1}{4} \cdot 2\pi^R = \frac{\pi}{2} \text{radian}$$

لاندې شکلونه وګورئ.

$\frac{1}{2}$ Rev , $\frac{1}{4}$ Rev

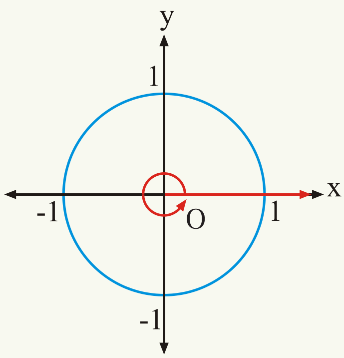
$\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi^R$, $\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}$ Radain

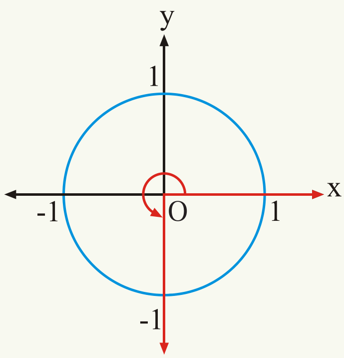




1 Revolution , $\frac{3}{4}$ Revolution

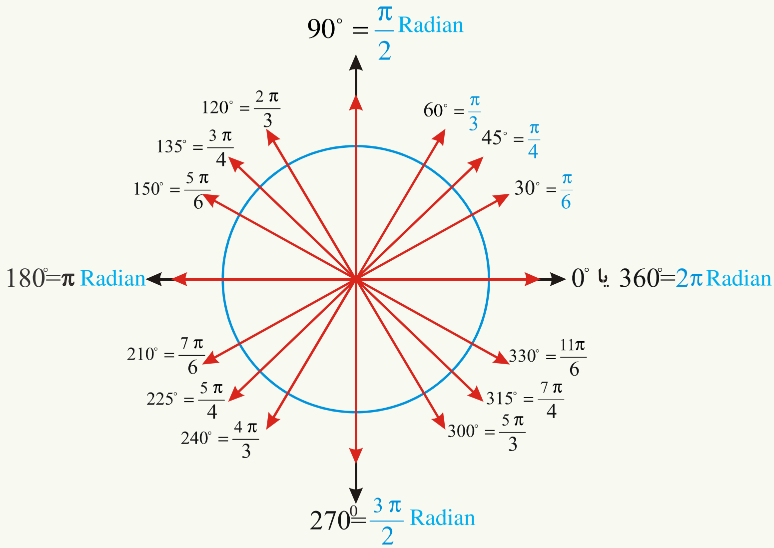
2 π Radians , $\frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ Radians





(c) ketabton.com: The Digital Library

د درجي او راډيان تر منځ د اړيکي د ښه څرګندېدو لپاره لاندي شکل هم وګورئ:



فعالیت

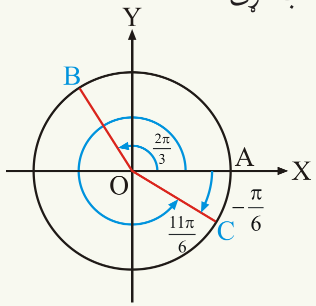
$\frac{\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{4}$ او $\frac{5\pi}{4}$ – راډیانه زاويي په درجه واړوئ.

اووم مثال

(a) د $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{6}$ او $\frac{\pi}{6}$ – زاويي په شکل کې وښياست:

(b) په شکل کې لوی او کوچنی خرخ ښودل شوی دی، که د θ_1 او θ_2 د زاويو مقدار د راډيان په حساب وي، د θ_2 د زاويي مقدار د θ_1، r_1 او r_2 له جنسه حساب کړئ.

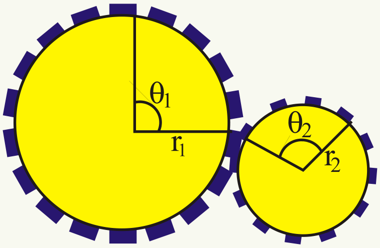
د (a) حل:



(c) ketabton.com: The Digital Library

له شکل څخه ليدل کېږي چې د $\frac{11\pi}{6}$ او $\frac{\pi}{6}-$ زاويو دويمې ضلعې يو پر بل منطبقې دي.

د (b) حل:



$$\theta_2 r_2 = \theta_1 r_1 \quad \Rightarrow \theta_2 = \frac{\theta_1 r_1}{r_2}$$

اتم مثال: که د ساعت د ثانيې عقربې 40 ثانيې دوران کړی وي، د ثانيې د عقربې په واسطه طی شوې مثبته زاويه په راډيان پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې 60 ثانيې يو پوره دوران يا 2π راډيان کېږي، نو $\frac{40}{60}=\frac{2}{3}\text{Rev}$ او څرنګه چې يو دوران 2π *Radian* دی، نو: $\frac{2}{3}\cdot 2\pi^R = \frac{4\pi}{3}$ Radian

همدارنګه د ساعت د دوو عقربو ترمنځ د زاويې د پيدا کولو لپاره له $\theta = |5{,}5\min - 30hr|$ څخه کار اخلو.

د مثال په توګه د 3 بجو او 40 دقيقو په وخت کې د ساعت ګرد او دقيقه ګرد په منځ کې زاويه څو درجې ده؟

$$\theta = |5{,}5\cdot 40 - 30\cdot 3| = 130^\circ$$

پوښتنې

1 - که د يوې مرکزي زاويې مقابل قوس 50cm او د دايرې شعاع 25cm وي، مرکزي زاويه به څو راډيانه وي؟

2 - $32{,}4222^\circ$ په درجې، دقيقې او ثانيې واړوئ.

3 - د يو دوران $\frac{1}{8}$ برخه څو راډيانه، څو درجې او څو ګراده کېږي؟

4 - $\frac{5\pi}{4}$ راډيانه څو ګراده او $-7{,}5^\circ$ څو راډيانه کېږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

5- $225^\circ, -315^\circ, 720^\circ$ او 45° زاويې په راډيان اوګراد واړوئ

6 - د يو دوران $\frac{1}{9}$ ، $\frac{1}{24}$ ، $\frac{1}{18}$ او $\frac{4}{5}$ برخې څو راډيانه او څو درجې کېږي؟

7 - $\frac{11\pi}{3}$ ، $\frac{9\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{6}$ ، $-\frac{\pi}{6}$ ، $-\frac{\pi}{10}$ ، $\frac{2\pi}{5}$ او $-\frac{5\pi}{12}$ راډيانه په درجو واړوئ

8 - که د يو ساعت د ثانيې د عقربې اوږدوالی 6cm وي، په 40 ثانيو کې د ثانيې عقربه څو سانتي متره فاصله طی کوي؟

9 - که د دايرې شعاع 3cm او مرکزي زاويه $\frac{5}{3}$ راډيانه وي. د دې مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی به څو سانتي متره وي؟

10 - که د يو ساعت د ثانيې د عقربې دوران 35 ثانيې وي، نو د ثانيې عقربې به څو راډيانه مثبته زاويه طی کړې وي؟

11 - د دوو زاويو مجموعه 152° ده، که د يوې زاويې اندازه د درجې په حساب له بلې زاويې سره د ګراد په حساب برابره وي، د هرې زاويې اندازه د راډيان په حساب څومره ده؟

12- 1620° څو راډيانه کېږي؟

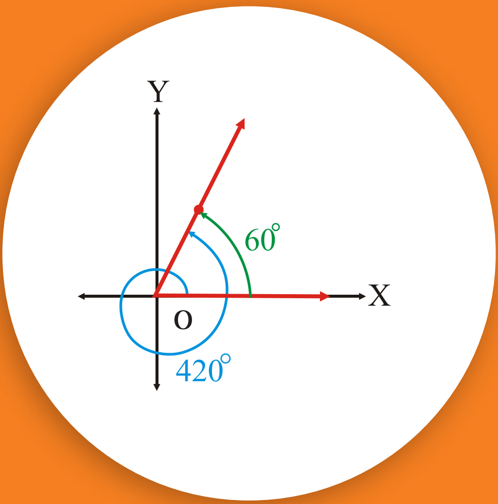
a) $4\pi^R$ b) $8\pi^R$ c) $9\pi^R$ d) $10\pi^R$

13 - خلور دورانونه څو راډيانه کېږي؟

a) $2\pi^R$ b) $4\pi^R$ c) $6\pi^R$ d) $8\pi^R$

14 - که د يوې دايرې شعاع 10m وي، د 45 radian مرکزي زاويې، مقابل قوس به څو متره وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



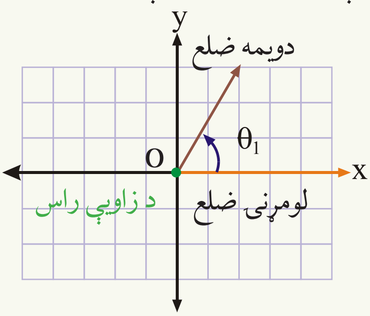
د يوې زاويې معياري حالت او کوټرمينل زاويې

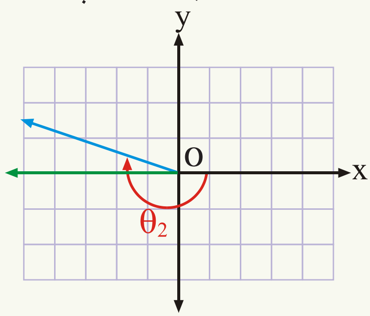
آيا ويلای شئ چې د 60° او 420° زاويو دويمې ضلعې يو پر بل منطبق دي؟ ولې؟

د يوې زاويې معياري حالت (Standard position of an angle):

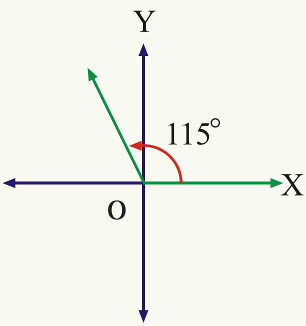
که د يوې زاويې رأس د وضعيه کمياتو په مبدأ کې او لومړنۍ ضلع يې د X د محور په مثبت جهت پرته وي، نو دا زاويه په معياري حالت کې ده.

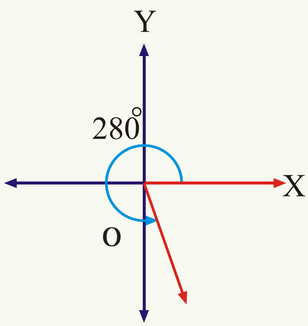
د مثال په توګه: په لاندې شکلونو کې د θ_1 او θ_2 زاويې په معياري حالت کې ښودل شوې دي.

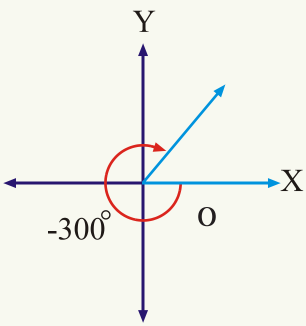




لومړی مثال: 115°، 280° او 300° – زاويې په معياري حالت کې رسم کړئ.







(c) ketabton.com: The Digital Library

که په معیاري حالت کې د یوې زاویې دویمه ضلع د X او یا د Y پر محور منطبق شي، داسې زاویې ته ربعي زاویه(Quadrantale angle) وایي.

د مثال په توګه: $90^o, 180^o, 270^o, 360^o$ او داسې نورې زاویې ربعي زاویې دي.

فعالیت

د $130^o, 50^o, 500^o$ او -210^o زاویې په معیاري حالت کې رسم کړئ.

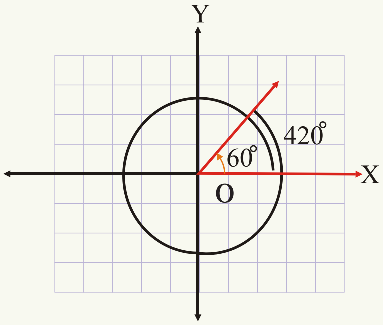
کوټرمینل زاویې (Conterminal angles):

دوې یا څو زاویې چې په معیاري حالت کې یې دویمې ضلعې یو پر بل منطبقې شي، د کوټرمینل زاویو په نامه یادېږي.

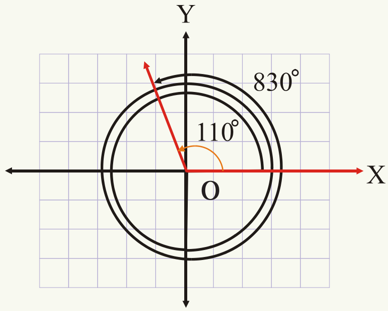
دویم مثال: په شکل کې وښیاست چې د 60^o او 420^o زاویې او همدارنګه د 110^o او 830^o زاویې چې په معیاري حالت کې دي، یو له بلې سره کوټرمینل زاویې دي.

حل: څرنګه چې په معیاري حالت کې د دې زاویو لومړنۍ ضلعې یو پر بل منطبق دي، لکه څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي د 60^o او 420^o زاویو دویمې ضلعې(Conterminal sides) یو پر بل منطبق دي. نو د تعریف په اساس دا دواړه زاویې سره کوټرمینل دي.

همدرانګه د 110^o او 830^o زاویې هم سره کوټرمینل دي.



(a)

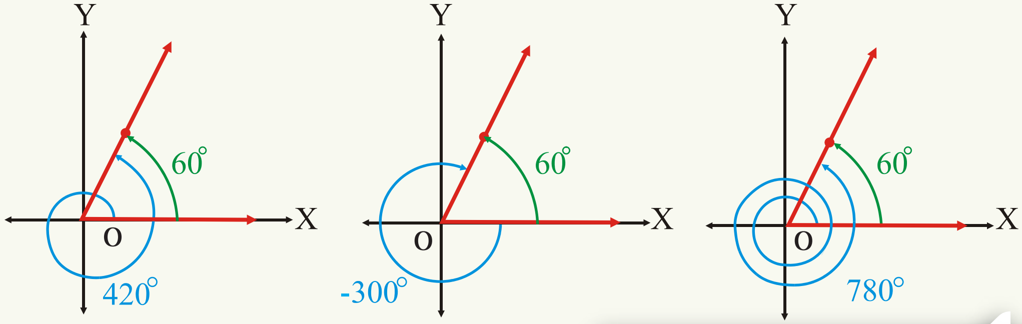


(b)

دریم مثال: په معیاري حالت کې د 60^o زاویې سره درې کوټرمینل زاویې رسم کړئ او په شکل کې یې هم وښیاست.

حل: $60^o + 360^o = 420^o, \quad 60^o - 360^o = -300^o, 60^o + 2 \cdot 360^o = 780^o$

(c) ketabton.com: The Digital Library



فعاليت

ايا د 230° ، 590° او 230° ، -130° زاويې سره کوټرمينل دي؟ رسم يې کړئ.

خرنگه چې کوټرمينل زاويې يو له بله سره د يوه پوره دوران (360°) يا $2\pi^R$ او يا څو دورانونه $n\cdot 360^\circ$ او يا $n\cdot 2\pi$ توپير لري، نو د θ د زاويې سره کوټرمينل زاويې عبارت دي له:

$\theta+2\pi$	$\theta+360^\circ$
$\theta+2\cdot 2\pi$	$\theta+2\cdot 360^\circ$
$\theta+3\cdot 2\pi$	$\theta+3\cdot 360^\circ$
-----	-----
$\theta+2n\pi$	$\theta+n\cdot 360^\circ$

خلورم مثال:

(a) له 30° زاويې سره څلور کوټرمينل زاويې پيدا کړئ.

(b): له 90° زاويې سره دوه کوټرمينل زاويې پيدا او په شکل کې يې وښياست.

حل(a)

$$30^\circ+360^\circ=390^\circ \text{ يا } \frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13\pi}{6} \text{ Radian}$$

$$30^\circ+2\cdot 360^\circ=750^\circ \text{ يا } \frac{\pi}{6}+2\cdot 2\pi=\frac{25\pi}{6} \text{ Radian}$$

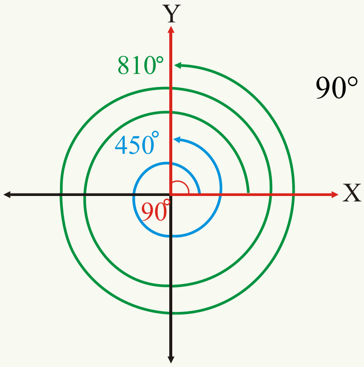
$$30^\circ+3\cdot 360^\circ=1110^\circ \text{ يا } \frac{\pi}{6}+3\cdot 2\pi=\frac{37\pi}{6} \text{ Radian}$$

$$30^\circ+4\cdot 360^\circ=1470^\circ \text{ يا } \frac{\pi}{6}+4\cdot 2\pi=\frac{49\pi}{6} \text{ Radian}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل(b

$90^\circ + 2\cdot 360^\circ = 810^\circ$ $\quad$ $90^\circ + 360^\circ = 450^\circ$



پنځم مثال: آیا $\underline{410^\circ, 50^\circ}$ $\underline{800^\circ, 80^\circ}$ $\underline{-680^\circ, 40^\circ}$ او د 60° او 410° زاويې سره کوټرمينل دي؟

حل: څرنګه چې $410^\circ = 50^\circ + 360^\circ$ دی، نو د 50° او 410° زاويې سره کوټرمينل دي او $800^0 = 80^\circ + 2\cdot 360^\circ$ نو د 80° او 800° زاويې هم سره کوټرمينل دي. همدرانګه $-680^\circ = 40^\circ - 2\cdot 360^\circ$ نو 40° او -680° زاويې هم سره کوټرمينل دي، خو $410^\circ \neq 60^\circ + 360^\circ$، نو د 410° او 60° زاويې سره کوټرمينل نه دي.

که د يوې زاويې رأس د وضعيه کمياتو په مبدا کې او لومړنی ضلع يې د X د محور پر مثبت جهت منطبق وي، نو دا زاويه په معياري حالت کې ده. که په معياري حالت کې د دوو يا څو زاويو دويمې ضلعې يو پر بل منطبق وي، داسې زاويې د کوټرمينل زاويو په نوم يادېږي.

پوښتنې

1 - د $-270^\circ, 120^\circ, 90^\circ$ او 240° زاويې په معياري حالت کې رسم کړئ.

2 - تر ټولو کوچنۍ مثبته زاويه پيدا کړئ چې له لاندېنيو زاويو سره کوټرمينل وي.

-40° $\quad -125^\circ$ $\quad 450^\circ$ $\quad 539^\circ$ $\quad 60^\circ$ $\quad 90^\circ$ $\quad 135^\circ$

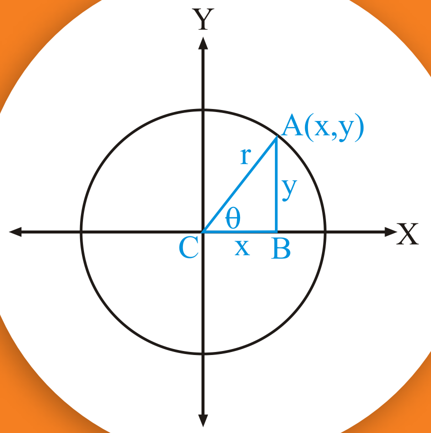
3 - آیا د (-80° ، 280°) او د (35° ، 395°) زاويې سره کوټرمينل دي؟

4 - له 40° زاويې سره، شپږ کوټرمينل زاويې پيدا کړئ.

5 - آیا د $(-930^\circ, 150^\circ)$ او د $(180^\circ, 900^\circ)$ زاويې سره کوټرمينل دي، په شکل کې يې هم وښياست؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلثاتي تابعګاني
(Trigonometric Functions)



آيا ويلای شئ چې د θ د زاويې مثلثاتي نسبتونه د θ د زاويې د ضلعو په اوږدوالی پورې اړه لري او که نه؟

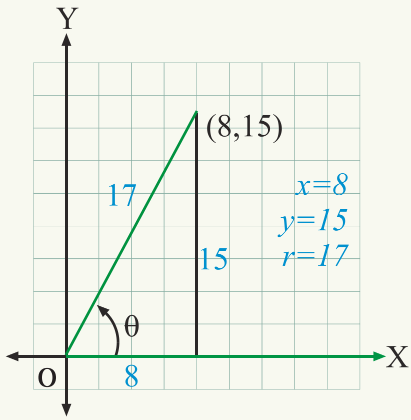
خرنګه چې پوهېږو چې د يوې حادې زاويې (θ) مثلثاتي نسبتونه (Trigonometric ratios) په يوه قايمه الزاويه مثلث کې په لاندې ډول تعريف شوي دي.

$$\sin\theta=\frac{AB}{AC}=\frac{y}{r}\ ,\ \cos\theta=\frac{BC}{AC}=\frac{x}{r}$$

$$\tan\theta=\frac{AB}{BC}=\frac{y}{x}\ ,\ \cot\theta=\frac{BC}{AB}=\frac{x}{y}$$

$$\sec\theta=\frac{AC}{BC}=\frac{r}{x}\ ,\ \csc\theta=\frac{AC}{AB}=\frac{r}{y}$$

او په نتيجه کې ليدل کېږي چې: $\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$ او $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$.



لومړی مثال: که په معياري حالت کې د θ زاويې دويمه ضلع د (8,15) له ټکي څخه تېره شي، د θ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

د فيثاغورث د قضيې په اساس لروچې: $r^2=x^2+y^2$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

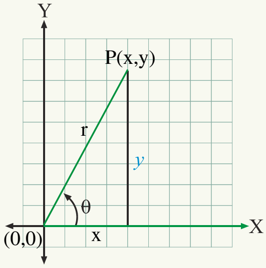
$$r^2 = 8^2 + (15)^2 = 64 + 225 = 289$$
$$r = \sqrt{289} = 17$$
$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{15}{17}\ ,\ \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{8}{17}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{15}{8}\ ,\ \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{8}{15}$$
$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{17}{8}\ ,\ \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{17}{15}$$

د زاویو د ځینو مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اساسي اړیکي:

د فیثاغورث د قضیې په اساس د شکل له مخې لیکلای شوچې:

$$y^2 + x^2 = r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{I}$$

دواړو خواوې په r^2 وېشو:



$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$
$$\left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1$$
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

همدارنګه که د (I) معادلې دواړه خواوې په y^2 ووېشو، نو لرو چې:

$$\frac{y^2}{y^2} + \frac{x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2} \Rightarrow 1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \left(\frac{r}{y}\right)^2$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

او که د (I) معادلې دواړه خواوې په x^2 ووېشو:

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = \left(\frac{r}{x}\right)^2$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

له بلې خوا:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y}{x}=\tan\theta \qquad \frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{x}{y}=\cot\theta$$

او له دي ځایه څخه نتیجه کیږي چې:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\ ,\ \sin\theta\cdot\csc\theta=1\ ,\ 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta\ ,\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta\cdot\cot\theta=1\ ,\ \cos\theta\cdot\sec\theta=1\ ,\ 1+\cot^2\theta=\csc^2\theta\ ,\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

څرنګه چې دا اړیکې د θ د هر قیمت لپاره سمې دي، نو په دې اساس مثلثاتي مطابقتونه هم ورته وایي.

فعالیت

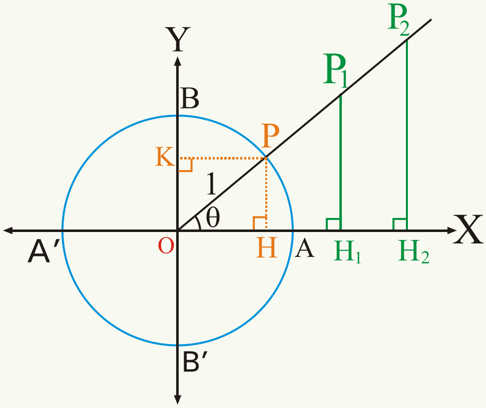
که په معیاري حالت کې د θ دوهمه ضلع د $(12,5)$ له ټکي څخه تیره شي، د θ د زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د مثلثاتي تابع ګانو پورتني قیمتونه یوازې د θ زاویې د اندازې پورې اړه لري، د P د ټکي پر موقعیت پورې چې د θ پر دوهمه ضلع واقع دی اړه نه لري چې دا حقیقت په شکل کې د $\overset{\Delta}{OH_1P_1} \sim \overset{\Delta}{OPH}$ او $\overset{\Delta}{OH_2P_2}$ مثلثونو د مشابهت په اساس لیدل کیږي.

$$|OP|=1$$

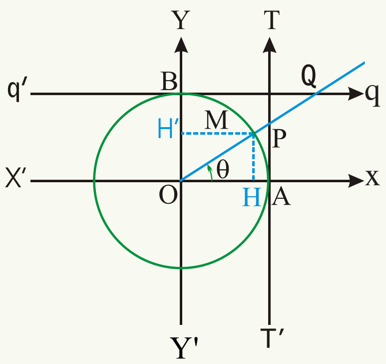
$$\cos\theta=\frac{|OH|}{|OP|}=\frac{|OH_1|}{|OP_1|}=\frac{|OH_2|}{|OP_2|}$$

$$\sin\theta=\frac{|PH|}{|OP|}=\frac{|P_1H_1|}{|OP_1|}=\frac{|P_2H_2|}{|OP_2|}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

که د θ زاویه د راډیان په حساب وي. θ آزاد متحول او $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \cot\theta, \sec\theta$ او $\csc\theta$ مقید (مربوط) متحولونه دي. په دې معنا چې $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \cot\theta, \sec\theta$ او $\csc\theta$ مثلثاتي تابعګانې دي چې مقدار یې د θ د ضلعو اوږدوالي پورې اړه نه لري، بلکې د θ د زاویې په مقدار پورې اړه لري.



خرنګه چې مثلثاتي دایره (Trigonometric Circle) هغه دایره ده چې د شعاع اوږدوالي یې د اوږدوالي واحد دی.

په مثلثاتي دایره کې چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې او د XX' او YY' محورونه د دې دایرې افقي او عمودي قطرونه دي. د قرارداد په اساس $y'oy$ ته د ساینو محور او $x'ox$ ته د کوساینو محور وایې. د TAT' محور چې د A په ټکي کې له دایرې سره مماس دی، د ټانجانټ محور او د $q'Bq$ محور چې د B په ټکي کې پر دایره مماس دی، د کوټانجانټ محور بلل کېږي. د ساینو او کوساینو د محورونو مبدأ د دایرې مرکز او د ټانجانټ د محور مبدأ، د A ټکی د کوټانجانټ د محور مبدأ، د B ټکی دی.

که چېرې د A له ټکي څخه په مثبت جهت کې د M تر ټکي حرکت وکړو او د $M\hat{O}A$ زاویې ته θ ووایو، د θ د زاویې مثلثاتي توابع په لاندې ډول هم تعریفېږي.

$(r = OM = OA = OB = 1)$

$$\sin\theta = \frac{HM}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{1} = \overline{OH'} \qquad \cos\theta = \frac{\overline{OH}}{OM} = \frac{\overline{OH}}{1} = \overline{OH}$$

$$\tan\theta = \frac{HM}{OH} = \frac{\overline{AP}}{OA} = \overline{AP} \qquad \sec\theta = \frac{OM}{OH} = \frac{OP}{OA} = \overline{OP}$$

$$\cot\theta = \frac{\overline{OH}}{HM} = \frac{BQ}{OB} = \overline{BQ} \qquad \csc\theta = \frac{OM}{HM} = \frac{OQ}{OB} = \overline{OQ}$$

په دې اساس مثلثاتي نسبتونو ته مثلثاتي خطونه هم وایي.

په همدې ډول که د θ دویمه ضلع او یا دقوس پای په دویمه، دریمه یا څلورمه ناحیه (ربع) کې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

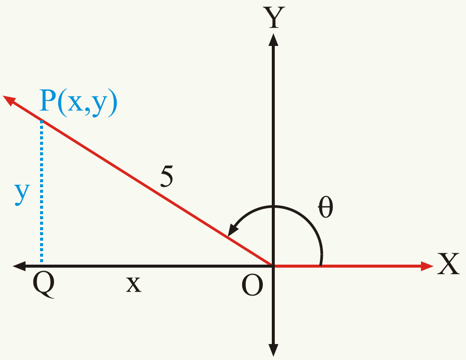
کولی شو چې مثلثاتي نسبتونه یې پر لاس راوړو:
د مثلثاتي نسبتونو علامې په څلورو ناحیو(ربعو) (quadrants) کې په لاندې ډول دي.

$\sin\theta > 0$	$\sin\theta > 0$
$\cos\theta < 0$	$\cos\theta > 0$
$\tan\theta < 0$	$\tan\theta > 0$
$\cot\theta < 0$	$\cot\theta > 0$
$\sec\theta < 0$	$\sec\theta > 0$
$\csc\theta > 0$	$\csc\theta > 0$
$\sin\theta < 0$	$\sin\theta < 0$
$\cos\theta < 0$	$\cos\theta > 0$
$\tan\theta > 0$	$\tan\theta < 0$
$\cot\theta > 0$	$\cot\theta < 0$
$\sec\theta < 0$	$\sec\theta > 0$
$\csc\theta < 0$	$\csc\theta < 0$

ربع	$\sin\theta, \csc\theta$	$\tan\theta, \cot\theta$	$\sec\theta, \cos\theta$
I	+	+	+
II	+	−	−
III	−	+	−
IV	−	−	+

د ویم مثال: له لاندې شکل سره سم که په معیاري حالت کې د θ د زاویې دویمه ضلع، په دویمه ناحیه(ربع) کې واقع وي او $\cos\theta = \frac{-3}{5}$ وي، د θ د زاویې نور مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل: لومړی د P د ټکي وضعیه کمیات پیدا کوو: څرنګه چې $\cos\theta = \frac{-3}{5}$ دی، په دویمه ربع کې د x قیمت منفي دی، نو $x=-3$ او $r=5$ د فیثاغورث د قضیې له مخې لرو چې:



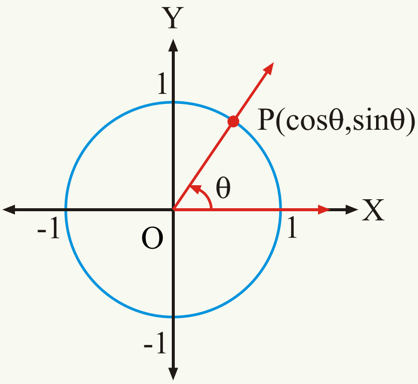
$$5^2 = (-3)^2 + y^2$$
$$y^2 = 25 - 9 = 16$$
$$y = \pm\sqrt{16}$$
$$y = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(ځکه چې د P ټکی په دویمه ربع کې دی، $y > 0$ دی)

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5} \ ، \ \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5} \ ، \ \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{-3}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{4} \ ، \ \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{-3} \ ، \ \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{4}$$



څرنګه چې د X محور ته د cos محور او د Y محور ته د sine محور وايي، موږ کولای شو چې په مثلثاتي دايره کې د P د ټکي وضعيه کميات له $P(\cos\theta, \sin\theta)$ او يا $P(x, y)$ سره وښايو.

د θ د زاويي مثلثاتي توابع يوازې د θ د زاويې په مقدار پورې اړه لري چې θ آزاد متحول او د θ مثلثاتي نسبتونه مقيد متحولونه دي.

په لومړي ناحيه(ربعه) کې ټول مثلثاتي نسبتونه مثبت، په دويمه ناحيه(ربع) کې $\sin\theta$ او $\csc\theta$ مثبت، په دريمه ناحيه(ربع) کې $\tan\theta, \cot\theta$ مثبت او په څلورمه ناحيه(ربع) کې $\cos\theta, \sec\theta$ مثبت او نور منفي دي.

پوښتني

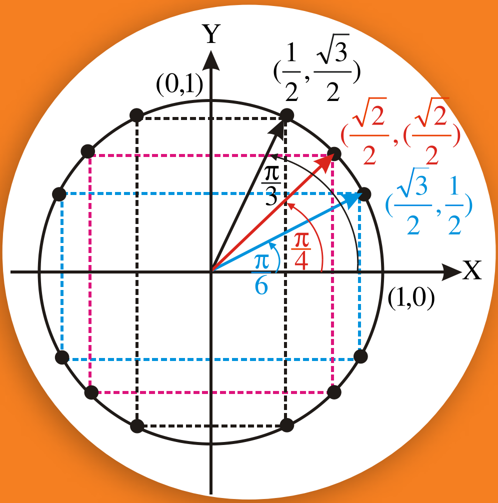
1- د لاندېنيو زاويو د مثلثاتي نسبتونو نښې(علامې) په شفاهي ډول ووایاست.

$\sin 120^\circ$	$\tan 170^\circ$	$\tan 60^\circ$	$\cos 330^\circ$	$\sec 200^\circ$
$\cot 271^\circ$	$\csc 91^\circ$	$\sin 271^\circ$	$\csc 181^\circ$	$\csc 315^\circ$

2- که θ په معياري حالت کې د راډيان په حساب وي او د θ دويمه ضلع له لاندې راکړل شوو ټکو څخه تېره شي، $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ او $\tan\theta$ پيداکړئ.

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ , \ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ , \ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ , \ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ځينو خاصو زاويو مثلثاتي نسبتونه

آياکولای شئ چې ووايئ $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ دی؟

د 45° مثلثاتي نسبتونه: په يوه قايم الزاويه متساوي الساقين مثلث کې، دوې قايمې ځنډې يې يو، يو واحد په پام کې ونيسئ.

$$r^2 = 1^2 + 1^2$$

$$r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابله ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

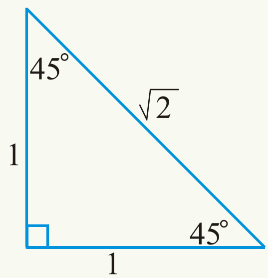
$$\cos 45^\circ = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاوره ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابله ضلع}}{\text{مجاوره ضلع}} = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \cot\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاوره ضلع}}{\text{مقابله ضلع}} = \frac{x}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \sec\frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاوره ضلع}} = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45^\circ = \csc\frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابله ضلع}} = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$



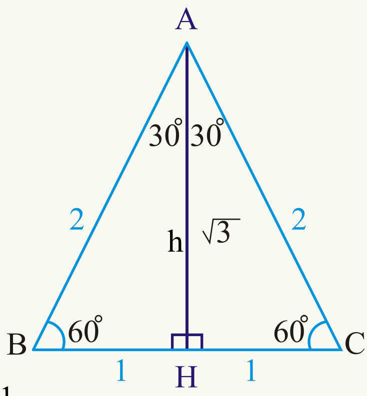
(c) ketabton.com: The Digital Library

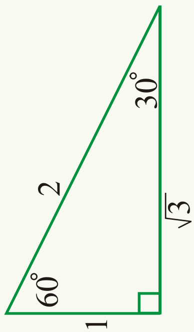
فعالیت

یو متساوي الساقین قایمه زاویه مثلث داسې په پام کې ونیسئ چې هره قایمه ضلع یې b واحده وي، د 45° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

که د $A\overset{\Delta}{B}C$ متساوي الاضلاع مثلث چې هره ضلع یې دوه واحده وي، په پام کې ونیسو، د A له رأس څخه د AH ارتفاع رسموو، څرنګه چې د $\hat{A}$ زاویه نیمایي شوې ده چې نیمایي یې 30° ده، نو:

$$h^2 + 1^2 = 2^2$$
$$h^2 = 4 - 1 = 3$$
$$h = \sqrt{3}$$





$$\sin 30^\circ = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot 30^\circ = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ = \sec\frac{\pi}{6} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \csc 30^\circ = \csc\frac{\pi}{6} = \frac{2}{1} = 1$$

فعالیت

یو داسې متساوي الاضلاع مثلث په پام کې ونیسئ چې هره ضلع یې a واحده وي د $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

همدارنګه که شکل ته پام وکړو:

$$\cos 60^\circ = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot 60^\circ = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\csc 60^\circ = \csc\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec 60^\circ = \sec\frac{\pi}{3} = 2$$

لیدل کیږي چې $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ کیږي:

$$\tan 30^\circ = \cot 60^\circ \qquad \cos 30^\circ = \sin 60^\circ \qquad \sin 30^\circ = \cos 60^\circ$$

$$\cot 30^\circ = \tan 60^\circ \qquad \csc 30^\circ = \sec 60^\circ \qquad \sec 30^\circ = \csc 60^\circ$$

یا په عمومي ډول هر وخت چې د دوو زاویو مجموعه 90° وي، که یوه زاویه θ وي، بله زاویه به $(90^\circ - \theta)$ وي.

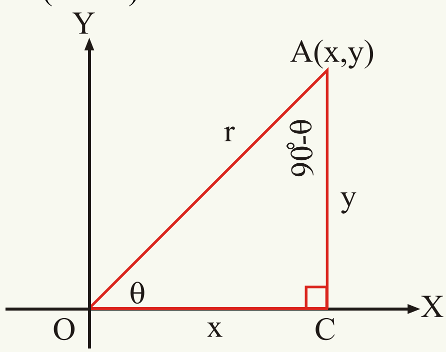
$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{x}{r} \quad , \cos\theta = \frac{x}{r} \quad \Rightarrow \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{y}{r} \quad , \sin\theta = \frac{y}{r} \quad \Rightarrow \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{x}{y} \quad , \cot\theta = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \frac{r}{y} \quad , \csc\theta = \frac{r}{y} \quad \Rightarrow \sec(90^\circ - \theta) = \csc\theta$$

$$\csc(90^\circ - \theta) = \frac{r}{x} \quad , \sec\theta = \frac{r}{x} \quad \Rightarrow \csc(90^\circ - \theta) = \sec\theta$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

په همدې ډول وښیاست چې: $\cot(90° - \theta) = \tan\theta$

لکه: څنګه چې د نهم ټولګي په مثلثاتو کې مو ویلي دي چې د زاویو د مثلثاتي نسبتونو جدول هم په همدې اساس جوړ شوی دی:

لومړی مثال: د 39° زاویې مثلثاتي نسبتونه راکړل شوي دي، د 51° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$\sin 39^\circ = 0{,}6293$ $\quad$ $\tan 39^\circ = 0{,}8098$ $\quad$ $\sec 39^\circ = 1{,}287$

$\cos 39^\circ = {,}7771$ $\quad$ $\cot 39^\circ = 1{,}235$ $\quad$ $\csc 39^\circ = 1{,}589$

حل: څرنګه چې $39° + 51° = 90°$ کېږي، نو:

$\sin 51^\circ = \cos 39^\circ = 0{,}7771$ $\quad$ $\cos 51^\circ = \sin 39 = 0{,}6293$

$\tan 51^0 = \cot 39^\circ = 1{,}235$ $\quad$ $\cot 51^\circ = \tan 39^\circ = 0{,}8098$

$\sec 51^\circ = \csc 39 = 1{,}589$ $\quad$ $\csc 51^\circ = \sec 39^\circ = 1{,}287$

پوښتنې

1 – که:

$\sin 17^\circ = 0{,}2927$ $\quad$ $\cos 17^\circ = 0{,}9563$ $\quad$ $\sec 17^\circ = 1{,}046$ $\quad$ $\csc 17^\circ = 3{,}420$

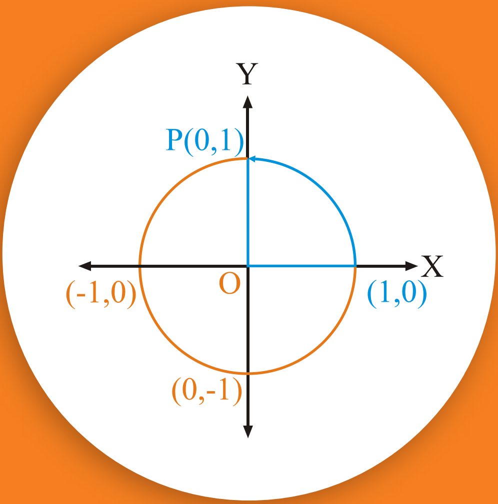
$\cot 17^\circ = 3{,}271$ □ $\tan 17^\circ = 0{,}3057$ وي د 73° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2 – د لاندې اړیکو څخه کومه یوه یې ناسمه ده؟

$\sin 28° = \cos 62°$ $\quad$ $\cos 12° \; 10' \; 20'' = \sin 77° \; 49' \; 40''$

$\sec 12° = \sec 88°$ $\quad$ $\tan 70° = \cot \; 20°$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $0°, 90°, 180°, 270°$ او $360°$ زاويو مثلثاتي نسبتونه:

آيا $\tan 90^o$ او $\tan 270^o$ تعریف شوي دي؟

د $\frac{\pi}{2} = 90^o$ زاويې مثلثاتي نسبتونه:

خرنگه چې $P(0,1)$ ټکی په مثلثاتي دايره باندي د 90^o زاويې په دويمه ضلع واقع دی، نو:

$$r = 1 \qquad x = 0 \qquad y = 1$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \sin\frac{\pi}{2} = \sin 90° = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot\frac{\pi}{2} = \cot 90° = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \tan\frac{\pi}{2} = \tan 90° = \frac{y}{x} = \frac{1}{0}$$ (تعريف شوی نه دی)

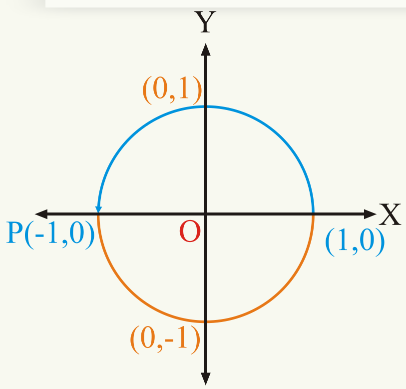
$$\csc\frac{\pi}{2} = \csc 90° = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \sec\frac{\pi}{2} = \sec 90° = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}$$ (تعريف شوی نه دی)

فعاليت

آيا کولای شئ، ووايئ چې $\cot 0°$ او $\csc 0°$ تعريف شوي نه دي؟ ولې؟

د 180^o زاويې مثلثاتي نسبتونه: خرنگه چې د $p(-1,0)$ ټکی په مثلثاتي دايره باندي د $180°$ زاويې په دويمه ضلع باندي پروت دی، نو:

$r = 1 \quad x = -1$ او $y = 0$ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

$\sin 180^\circ = \sin\pi = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 180^\circ = \cos\pi = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$

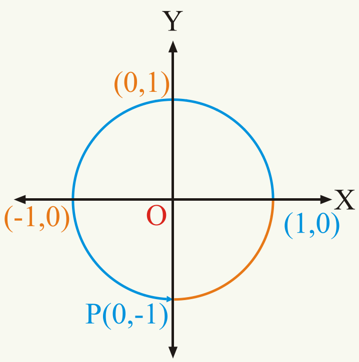
$\tan 180^\circ = \tan\pi = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0 \qquad \cot 180^\circ = \cot\pi = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} =$ (تعریف شوی نه دی)

فعالیت

$\sec 180^\circ$ او $\csc 180^\circ$ پیداکړئ.

د $\frac{3\pi}{2} = 270^o$ زاويې مثلثاتي نسبتونه:

خرنګه چې د $P(0,-1)$ ټکی په مثلثاتي دایره باندې د 270^o زاويې پر دویمه ضلع واقع دی.



$r = 1 \qquad x = 0 \qquad y = -1$

$\sin\frac{3\pi}{2} = \sin 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \cos\frac{3\pi}{2} = \cos 270^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$

$\tan\frac{3\pi}{2} = \tan 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0}$ (تعریف نه دی) $\cot\frac{3\pi}{2} = \cot 270^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$

$\sec\frac{3\pi}{2} = \sec 270^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}$ (تعریف نه دی) $\csc\frac{3\pi}{2} = \csc 270^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{-1} = -1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یاد ولرئ چې د 360° او 0° زاویو مثلثاتي نسبتونه سره مساوي دي، کولای شئ چې ووایئ ولې؟

د $360^{\circ}=2\pi$ زاویې مثلثاتي نسبتونه:

خرنگه چې د $p(1,0)$ نقطه د 360° د زاویې په دویمه ضلعه باندې پرته ده، نو:

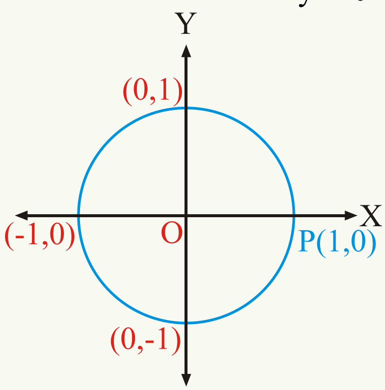
$x=1 \qquad y=0 \qquad r=1$

$\sin 2\pi=\sin 360^{0}=\frac{y}{r}=\frac{0}{1}=0 \qquad \cos 2\pi=\cos 360^{\circ}=\frac{x}{r}=\frac{1}{1}=1$

$\tan 2\pi=\tan 360^{\circ}=\frac{y}{x}=\frac{0}{1}=0$

$\cot 2\pi=\cot 360^{\circ}=\frac{x}{y}=\frac{1}{0}$ (تعریف شوې نه دي)

$\sec 2\pi=\sec 360^{\circ}=\frac{r}{x}=\frac{1}{1}=1$ ، $\csc 2\pi=\csc 360^{\circ}=\frac{r}{y}=\frac{1}{0}$ (تعریف شوې نه دي)



فعالیت

د 0° زاویې ټول مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$0^{\circ}, 90^{\circ}, 180^{\circ}, 270^{\circ}$ او 360° زاویو ته محوري زاویې وایي چې د هرې زاویې دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعریف شوي نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- لاندې جدول ډک کړئ.

θ	0°	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					

2- $\tan 270^\circ = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی

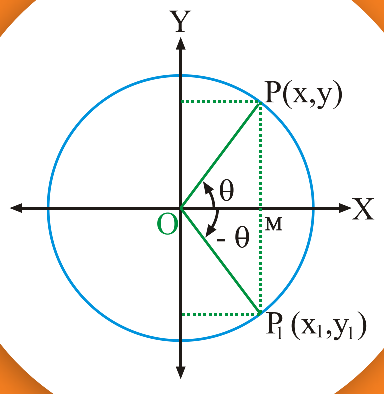
3- $\cos 90^\circ = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی

4- آیا $\cos\frac{9\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2}$ دی؟ ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې حاده زاويې او نورو زاويو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړيکې:



څرنګه چې مو په نهم ټولګي کې ولیدل چې مثلثاتي جدول یوازې د یوې حادې مثبتې زاویې مثلثاتي نسبتونه را ښيي ددې لپاره چې د منفي او منفرجه زاويو مثلثاتي نسبتونه هم له مثلثاتي جدول څخه پيدا کړای شو، نو بايد ددې زاويو او د يوې حاده مثبتې زاويې د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړيکې پيداکړو.

د $\hat{\theta}$ او $-\hat{\theta}$ زاويو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړيکې:

د θ حاده زاويه مثبت او له θ سره مساوي زاويه، د ساعت د عقربې د حرکت په جهت کې $-\theta$ زاويه په معياري حالت په مثلثاتي دايره کې رسموو.

د $P(x,y)$ ټکی د θ پر دوهمه ضلع او د $P_1(x_1,y_1)$ ټکی د $-\theta$ د زاويې پر دوهمه ضلع واقع دی.

څرنګه چې په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OMP}$ او $\overset{\Delta}{OMP_1}$ مثلثونه يو له بله سره مساوي دي.

$$x_1 = x \qquad |y_1| = |y| \qquad -y_1 = y \quad \Rightarrow \quad y_1 = -y$$

$$\sin(-\theta) = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{1} = y_1 = -y = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = x = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

$$\cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

لومړی مثال: د $(-30^\circ = -\frac{\pi}{6})$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل

$$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot(-30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec(-30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \csc(-30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$$

فعالیت

و ښیاست چې: $\csc(-\theta) = -\mathrm{cec}\theta$, $\mathrm{Sec}(-\theta) = \mathrm{Sec}\theta$.

دویم مثال: د $-\frac{3\pi}{2}$ د زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:

$$\sin(-\frac{3\pi}{2}) = -\sin\frac{3\pi}{2} = -(-1) = 1$$

$$\cos(-\frac{3\pi}{2}) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

فعالیت

د $-\frac{3\pi}{2}$ زاويې نور خلور مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec\theta \qquad \csc(-\theta) = -\csc\theta$$

پوښتني

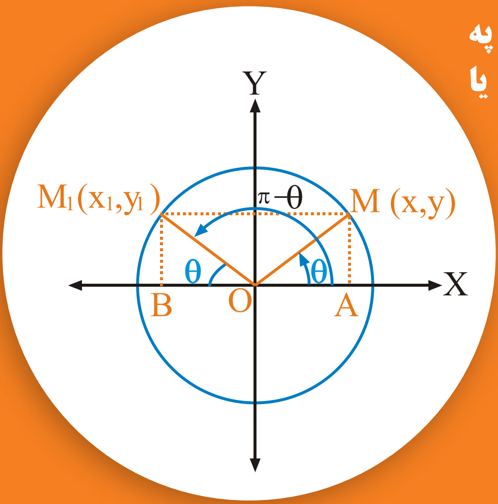
1 - د -360^o یا -2π راډيان مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2 - د -45^o یا $-\frac{\pi}{4}$ راډيان د (-30°) او (-60°) زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

3 - د -90^o یا $-\frac{\pi}{2}$ راډيان مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه زاویو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړیکې چې مجموعه او یا توپیر یې π یا 180° وي



- آیا د 150° او 135° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیداکولای شئ؟
- آیا $\sin 135^{\circ}$ او $\sin 45^{\circ}$ سره مساوي دي؟ ولې؟
- آیا ویلای شئ چې $\sin 130^{\circ}$ او $\sin 50^{\circ}$ یو له بله سره څه اړیکه لري؟

دوې زاویې چې مجموعه یې π یا 180° وي، په پام کې نیسو. که θ یوه حاده مثبته زاویه وي بله زاویه $(\pi-\theta)$ ده. دا دواړه زاویې په مثلثاتي دایره کې په معیاري حالت کې رسموو.

د $M(x,y)$ ټکی د θ د زاویې په دویمه ضلع باندې او د $M_1(x_1,y_1)$ ټکی د $(\pi-\theta)$ یا $(180-\theta)$ د زاویې پر دویمه ضلع باندې واقع دی. څرنګه چې په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OAM}$ او $\overset{\Delta}{OM_1B}$ مثلثونه سره مساوي دي.

$$(r=1)\qquad |x_1|=|x| \quad -x_1=x \ \Rightarrow\ x_1=-x \qquad y_1=y$$

$$\sin(180^{\circ}-\theta)=\sin(\pi-\theta)=\frac{y_1}{r}=\frac{y_1}{1}=y_1=\sin\theta$$

$$\cos(180^{\circ}-\theta)=\cos(\pi-\theta)=\frac{x_1}{r}=\frac{-x}{r}=\frac{-x}{1}=-x=-\cos\theta$$

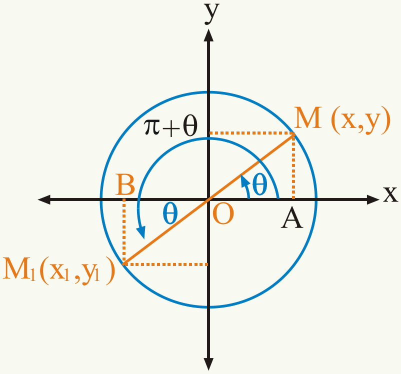
$$\tan(180^{\circ}-\theta)=\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin(180^{\circ}-\theta)}{\cos(180^{\circ}-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$$

فعالیت

- د $(\pi-\theta)$ زاویې نور درې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د هغو دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکې چې توپیر یې 180° او یا π رادیان وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



که حاده زاویه θ وي، بله زاویه $(\pi+\theta)$ کیږي.
د $M(x,y)$ ټکی پر مثلثاتي دایره باندې د θ پر دویمه ضلع او د $M_1(x_1,y_1)$ ټکی د $(\pi+\theta)$ یا $(180^\circ+\theta)$ د زاویې پر دویمه ضلع باندې واقع دی.

څرنګه چې د $\overset{\Delta}{OAM}$ او $\overset{\Delta}{OBM_1}$ مثلثونه سره مساوي دي: $x_1=-x$, $y_1=-y$

$$\sin(180^\circ+\theta)=y_1=-y=-\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ+\theta)=x_1=-x=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ+\theta)=\frac{\sin(180^\circ+\theta)}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\cot(180^\circ+\theta)=\frac{\cos(180^\circ+\theta)}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{-\cos\theta}{-\sin\theta}=\cot\theta$$

$$\sec(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta$$

$$\csc(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

لومړی مثال: د 120^o او 240^o زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 120^o=\sin(\pi-60^\circ)=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^o=\cos(\pi-60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^o=\tan(\pi-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\sin 240^o=\sin(180^\circ+60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

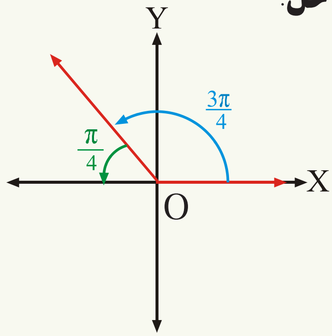
$$\tan 240^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

فعالیت

د 120° او 240° زاويو نور درې، درې مثلثاتي نسبتونه پيداکړئ.

دويم مثال: د $\frac{3\pi}{4}$ او $\frac{4\pi}{3}$ زاويو sin ، cos او tan پيداکړئ.

حل:

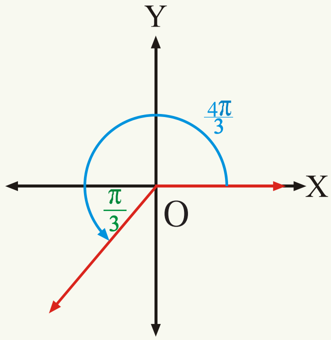


$$\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \tan\frac{3\pi}{4} = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$



$$\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin\frac{4\pi}{3} = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{4\pi}{3} = \tan(\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

خرنگه چې $(180^\circ - \theta)$ د زاويې دويمه ضلع په دويمه ناحيه(ربع) کې پرته ده. په دويمه ناحيه کې $\sin\theta$ او $\csc\theta$ مثبت او د $(180^\circ - \theta)$ زاويې نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي او خرنگه چې د $(180+\theta)$ يا $(\pi+\theta)$ زاويې دويمه ضلع په دريمه ربع کې پرته ده، نو ددې زاويې $\tan\theta$ او $\cot\theta$ مثبت او د $(180+\theta)$ د زاويې نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د 225° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2- د 210° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

3- د 150° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

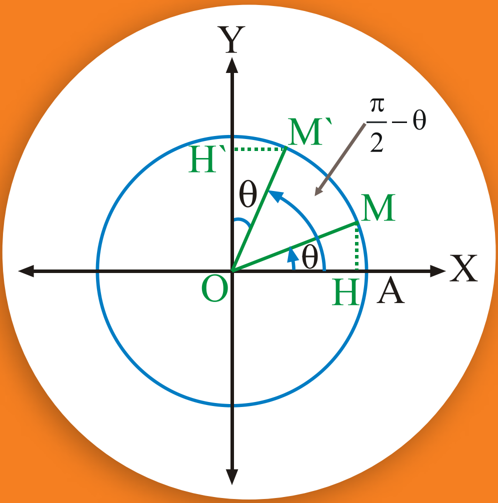
4- $\cot\frac{3\pi}{4} = ?$

a) $-\frac{1}{2}$ b) 1 c) 0 d) -1

5- $\sec(225^{\circ}) = ?$

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $-\frac{2}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دوو زاويو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړيکي چې مجموعه يې

90^o يا $\frac{\pi}{2}$ راډيانه وي.

- آيا $\sin 60^o = \cos 30^o$ دی؟ ولې؟
- د 150^o او 60^o زاويو مثلثاتي نسبتونه سره څه اړيکه لري؟

د $A\hat{O}M$ زاويه θ او د $A\hat{O}M'$ زاويه له $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ څخه عبارت ده چې د θ او $\frac{\pi}{2}-\theta$ زاويو مجموعه 90^o يا $\frac{\pi}{2}$ کيږي. څرنګه چې د $\overset{\Delta}{OHM}$ او $\overset{\Delta}{OH'M'}$ مثلثونه سره مساوي دي.

$$\overline{OH'}=\overline{OH}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta$$

$$\overline{H'M'}=\overline{HM}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)}=\frac{1}{\cot\theta}=\tan\theta$$

فعاليت

وښياست چې: $\sec(90-\theta)=\csc\theta$ او $\csc(90-\theta)=\sec\theta$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: که:

$$\sin 23^\circ = 0,3907 \qquad \cos 23^\circ = 0,9205 \qquad \tan 23^\circ = 0,4245$$

$$\cot 23^\circ = 2,356 \qquad \sec 23^\circ = 1,086 \qquad \csc 23^\circ = 2,559$$

وي، د 67° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:

$$\sin 67^\circ = \cos 23^\circ = 0.9205 \qquad \cot 67^\circ = \tan 23^\circ = 0.4245$$

$$\cos 67^\circ = \sin 23^\circ = 0.3907 \qquad \sec 67^\circ = \csc 23^\circ = 2.559$$

$$\tan 67^\circ = \cot 23^\circ = 2.356 \qquad \csc t67^\circ = \sec 23^\circ = 1.086$$

فعاليت

که:

$$\sin 8^\circ \ 10' = 0.1421 \qquad \cos 8^\circ \ 10' = 0.9899$$

$$\tan 8^\circ \ 10' = 0.1435 \qquad \cot 8^\circ \ 10' = 6.968$$

$$\sec 8^\circ \ 10' = 1.010 \qquad \csc 8^\circ \ 10' = 7.040$$

وي، د $81^\circ \ 50'$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

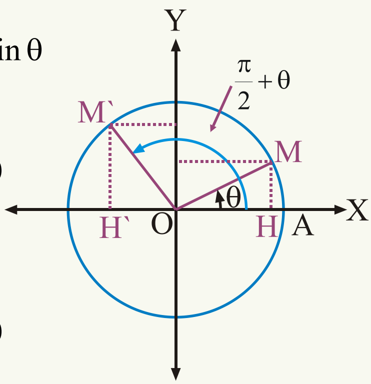
د هغو زاويو مثلثاتي نسبتونه چې توپير يې $\frac{\pi}{2}$ يا 90° وي په لاندې ډول دي:

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \sin[\frac{\pi}{2}-(-\theta)] = \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos[\frac{\pi}{2}-(-\theta)] = \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

$$\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

دويم مثال: د 120° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل

$$\sin 120^\circ=\sin(90^\circ+30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ=\cos(90^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ=\tan(90^\circ+30^\circ)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\cot 120^\circ=\cot(90^\circ+30^\circ)=-\tan 30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 120^\circ=\sec(90^\circ+30^\circ)=-\csc 30^\circ=-2$$

$$\csc 120^\circ=\csc(90^\circ+30^\circ)=\sec 30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta \qquad \sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta \qquad \cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta \qquad \tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta)=\tan\theta \qquad \cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$$

$$\sec(\frac{\pi}{2}-\theta)=\csc\theta \qquad \sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$$

$$\csc(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sec\theta \qquad \csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sec\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د 135° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2- د 150° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

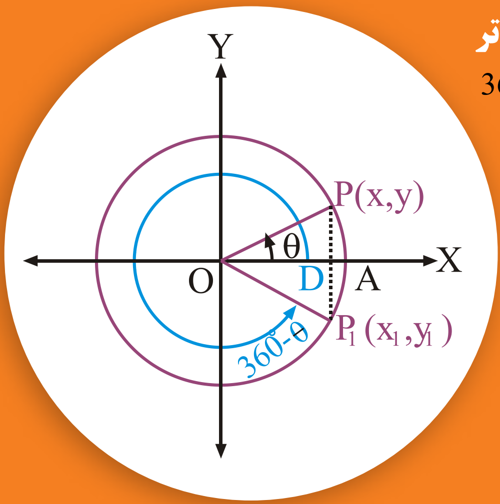
3- $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=?$

a) $\cos x$ b) $\sin x$ c) $-\cos x$ d) $-\sin x$

4- $\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=?$

a) $\tan\theta$ b) $-\tan\theta$ c) $\cot\theta$ d) $-\cot\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د هغه زاويو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړیکې چې مجموعه يې 360° يا 2π وي.

آيا ښودلای شئ چې

$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$ او

$\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$ اړیکې سمې

دي؟

په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OPD}$ او $\overset{\Delta}{OP_1D}$ مثلثونو له مساوي والي څخه لرو چې:

$$x_1 = x \qquad |y_1| = |y| \qquad -y_1 = y \Rightarrow y_1 = -y$$

$$\sin(360^\circ - \theta) = y_1 = -y = -\sin\theta$$

$$\cos(360^\circ - \theta) = x_1 = x = \cos\theta$$

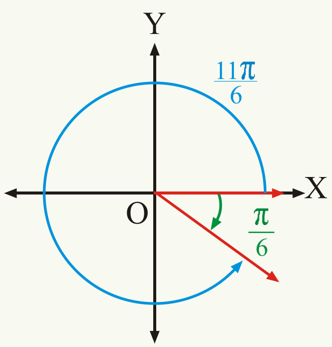
$$\tan(360^\circ - \theta) = \frac{\sin(360^\circ - \theta)}{\cos(360^\circ - \theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

فعاليت

په همدې ډول د θ او $360^\circ - \theta$ زاويو د $\sec, \cot$ او $\csc$ د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکې پيدا کړئ او د θ او $(-\theta)$ زاويو مثلثاتي نسبتونو له اړيکو سره يې پرتله کړئ.

مثال: د 330° يا $\frac{11\pi}{6}$ راډيانه زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\frac{11\pi}{6} = \sin(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \sin 330^\circ = \sin(360^\circ - 30^0) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{11\pi}{6} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{11\pi}{6} = \tan(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \tan 330^\circ = \tan(360^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot\frac{11\pi}{6} = \cot(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \cot 330^\circ = \cot(360^\circ - 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

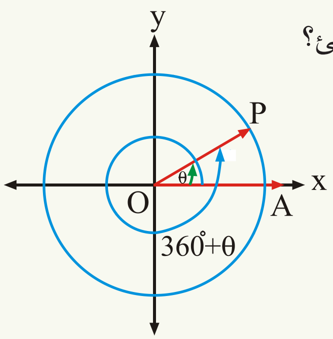
$$\sec\frac{11\pi}{6} = \sec(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \sec 330^\circ = \sec(360^\circ - 30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\csc\frac{11\pi}{6} = \csc(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \csc 330^\circ = \csc(360^\circ - 30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$$

فعالیت

د 315° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د کوټرمینل زاویو مثلثاتي نسبتونه:



- آیا $\sin 450^\circ$، $\tan 390^\circ$ او $\csc 450^\circ$ پیدا کولای شئ؟
- آیا $\sin 90^\circ$، $\sin 450^\circ$ او $\sin 790^\circ$ سره برابر دي ؟ ولې؟

په معیاري حالت کې د θ حاده زاویې او $360^\circ + \theta$ زاویو دویمې ضلعې یو پر بل پرتې دي، نو:

$$\sin(360^\circ + \theta) = \sin\theta \qquad \cos(360^\circ + \theta) = \cos\theta$$

$$\tan(360^\circ + \theta) = \tan\theta \qquad \cot(360^\circ + \theta) = \cot\theta$$

$$\csc(360^\circ + \theta) = \csc\theta \qquad \sec(360^\circ + \theta) = \sec\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د 405° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 405^\circ = \sin(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 405^\circ = \cos(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 405^\circ = \tan(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan(360^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\cot 405^\circ = \cot(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cot(360^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1$$

$$\sec 405^\circ = \sec(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sec(360^\circ + 45^\circ) = \sec 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\csc 405^\circ = \csc(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \csc(360^\circ + 45^\circ) = \csc 45^\circ = \sqrt{2}$$

دویم مثال: د 1500° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin 1500^\circ = \sin(4\cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 1500^\circ = \cos(4\cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 1500^\circ = \tan(4\cdot 360^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 1500^\circ = \cot(4\cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 1500^\circ = \sec(4\cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sec 60^\circ = 2$$

$$\csc 1500^\circ = \csc(4\cdot 360^\circ + 60^\circ) = \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

دریم مثال: د 900° او -930° زاویو sin ، cos او tan پیدا کړئ.

حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-930^\circ + 3\cdot 360^\circ = 150^\circ$$

$$\sin(-930^\circ) = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

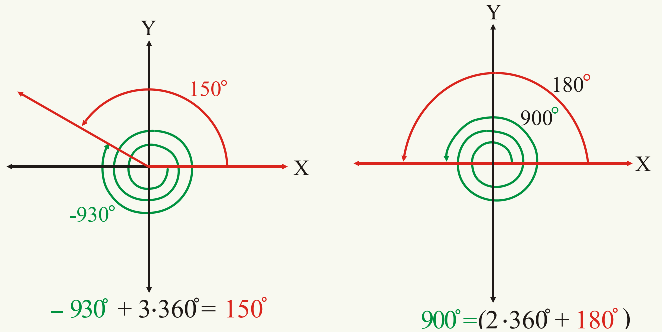
$$\cos(-930^\circ) = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-930^\circ) = \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = \tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 900^\circ = \sin(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \sin 180^\circ = 0$$

$$\cos 900^\circ = \cos(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \cos 180^\circ = -1$$

$$\tan 900^\circ = \tan(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \tan 180^\circ = 0$$



خلورم مثال: د $-\frac{5\pi}{2}$ او $\frac{7\pi}{3}$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$$-\frac{5\pi}{2} = (-2\pi - \frac{\pi}{2})$$

$$\sin\frac{7\pi}{3} = \sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{3} = \cos(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{7\pi}{3} = \tan(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\cot(\frac{7\pi}{3}) = \cot(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin(-\frac{5\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

$$\cos(-\frac{5\pi}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\tan(-\frac{5\pi}{2}) = \tan(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{\cos(-\frac{\pi}{2})} = \frac{-1}{0}$$

تعریف شوی نه دی

$$\cot(-\frac{5\pi}{2}) = \cot(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\cos(-\frac{\pi}{2})}{\sin(-\frac{\pi}{2})} = \frac{0}{-1} = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $\frac{7\pi}{3}$ او $(-\frac{5\pi}{2})$ زاويو نور دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

$$\sin(2\pi-\theta)=\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(2\pi-\theta)=\cos(360^\circ-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(2\pi-\theta)=\tan(360^\circ-\theta)=-\tan\theta$$
$$\cot(2\pi-\theta)=\cot(360^\circ-\theta)=-\cot\theta$$
$$\sec(2\pi-\theta)=\sec(360^\circ-\theta)=\sec\theta$$
$$\csc(2\pi-\theta)=\csc(360^\circ-\theta)=-\csc\theta$$

$$\sin(2\pi+\theta)=\sin(360^\circ+\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(2\pi+\theta)=\cos(360^\circ+\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(2\pi+\theta)=\tan(360^\circ+\theta)=\tan\theta$$
$$\cot(2\pi+\theta)=\cot(360^\circ+\theta)=\cot\theta$$
$$\sec(2\pi+\theta)=\sec(360^\circ+\theta)=\sec\theta$$
$$\csc(2\pi+\theta)=\csc(360^\circ+\theta)=\csc\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د 480^{o} او 390^{o} زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2- د 600^{o} او 300^{o} زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

3- د 1830^{o} او د $(1095^{\circ}\ 20')$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

4- د $\frac{25\pi}{6}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

5- د $\frac{5\pi}{3}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

6- د $\frac{41\pi}{6}$، $\frac{4\pi}{3}$ او $\frac{3\pi}{4}$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

7- د -300^{o}، 780^{o} او 420^{o} زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

8- $\cos(-3\pi) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

9- $\cos(-15\pi) = ?$

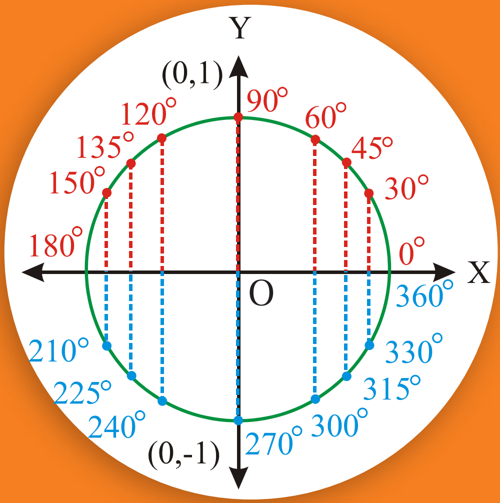
a) 1 b) -1 c) 0 d) درې واړه سم نه دي.

10- $\sin(-1110^{\circ}) = ?$

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي تابع ګانو ګراف



• آیا کولای شئ وواياست چې د $f(x) = \sin x$ او $f(x) = \cos x$ د تابعګانو د تناوب دوره څومره ده؟

• آیا ویلای شئ چې د $f(x) = \sin x$ او $f(x) = \cos x$ د تواېعو domain کوم عددونه دي؟

د $f(x) = \sin x$ تابع د ګراف رسمول (graph of the sine function):

د $f(x) = \sin x$ د تابع د تعریف ناحیه (domain) د ټولو حقیقي عددونو سټ دی او Range يې $[-1,1]$ دی. د دې تابع د تناوب دوره 2π ده، ځکه پوهېږئ چې د یوې تابع د تعریف ساحه ټول هغه حقیقي عددونه (Real numbers) دي چې تابع په کې تعریف شوی وي.

د هر حقیقي عدد x لپاره یوه د x راډیان زاویه او له مثلثاتي دایرې سره د x راډیان د زاویې د تقاطع ټکی، هر وخت تعریف شوی دی. که x د راډیان په حساب وي، ددې ټولو زاویو اندازه $2k\pi + x$ راډیان ده، نو د sine او cosine د تابع ګانو د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

څرنګه چې sinx او cosx په مثلثاتي دایره باندې د یوه ټکي وضعیه کمیات دي، نو د $f(x) = y = \sin x$ او $f(x) = y = \cos x$ د تابع ګانو Range د (1) او (−1) تر منځ دی، یا د $[-1,1]$ انټروال د $y = \sin\theta$ او $y = \cos\theta$ د تابع ګانو Range دی.

فعالیت

وښیاست چې $-1 \le \sin\theta, \cos\theta \le 1$ دی.

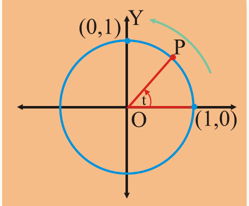
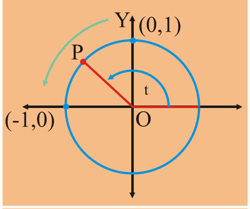
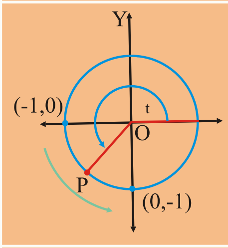
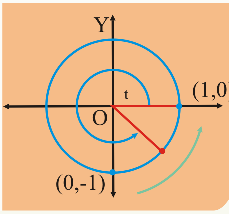
باید په یاد ولرو چې د f تابع ته متناوبه تابع ویل کېږي، که چېرې د t یو عدد د صفر خلاف موجود وي، په دې شرط چې که لومړی $x \in D_F$ وي $x+t$ او $x-t$ هم د f د تابع د تعریف په ساحه (domain) کې شامل وي او $f(x+t) = f(x)$ وي.

تر ټولو کوچنی داسې عدد، لکه: (t) چې د $f(x+t) = f(x)$ په اړیکه کې صدق وکړي. دا د (t)

(c) ketabton.com: The Digital Library

عدد د f د تابع د اصلي تناوب په نوم یادیږي. که (t) د f د تابع د تناوب دوره وي. نو (-t) هم د f د تابع د تناوب دوره ده. څرنګه چې پوهیږئ $\sin(x+2K\pi)=\sin x$ او $\cos(x+2K\pi)=\cos x$ دی چې K یو تام عدد دی، نو د sinx او cosx توابع متناوبې توابع دي او تر ټولو کوچنی عدد چې په پورتنیو اړیکو کې صدق کوي 2π دی، نو د دې دواړو توابعو اصلي تناوب 2π دی.

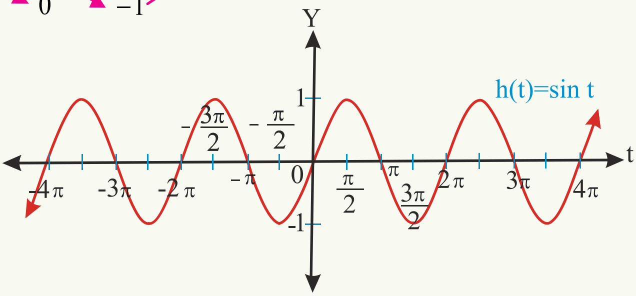
له شکل سره سم په معیاري حالت کې یو د $\hat{t}$ راډیان زاویه په پام کې ونیسئ په داسې حال کې چې د t د زاویې دویمه ضلع مثلثاتي دایره د p په ټکي کې قطع کوي، نو د p د ټکي د y مختصه له sin t څخه عبارت ده. $h(t)=\sin t$ د t او sint تغیرات په لاندې جدول او شکل کې وګورئ:

اړونده شکل	sin t	د P د ټکي حرکت	د t په قیمت کې تغیر
	له صفر څخه تر یوه پورې تزاید کوي	له (1,0) څخه تر (0,1)	له 0 څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې
	له یوه څخه تر صفره پورې تناقص کوي	له (0,1) څخه تر (−1,0)	له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې
	له صفره څخه تر 1- پورې تناقص کوي	له (−1,0) څخه تر (0,−1)	له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې
	له 1- څخه تر صفره پورې تزاید کوي	له (0,−1) څخه تر (1,0)	له $3\frac{\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول په هر 2π کې تکرارېږي په نتیجه کې $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$ دی.
لاندې جدول او شکل وګورئ:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$h(t) = \sin t$	0	1	0	-1	0

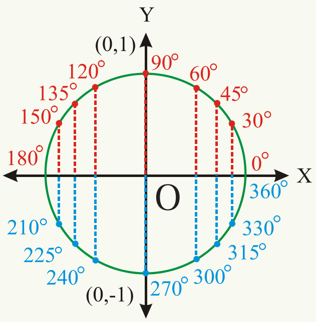


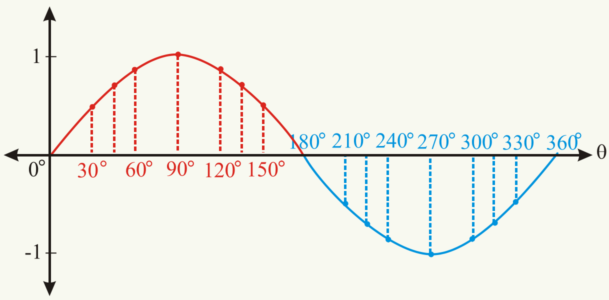
او یا کولای شو، که د یو دوران زاویې د درجې په حساب وي، د sin t تغیرات په لاندې جدول او شکل کې وښایو:

$h(t) = \sin t$

t	واقعي	تقریبي
0°	0	0.00
30°	$\frac{1}{2}$	0.50
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
90°	1	1.00
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
150°	$\frac{1}{2}$	0.50
180°	0	0.00
210°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
270°	-1	-1.00
300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
330°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
360°	0	0.00

(c) ketabton.com: The Digital Library





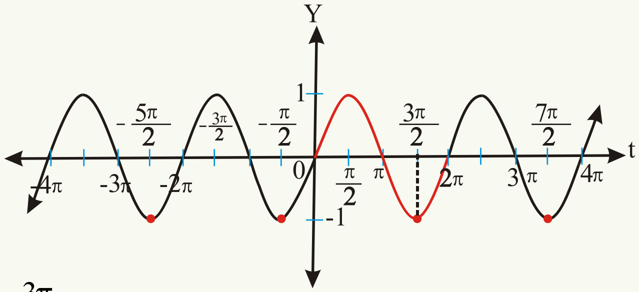
دې ته په پام سره چې sint د تابع د تناوب دوره 2π ده، نو $\sin(t\pm2\pi)=\sin t$ دی، نو د $\sin t$
د تابع گراف په $[0,2\pi]$، $[2\pi,4\pi]$، $[4\pi,6\pi]$، $[-2\pi,0]$ او داسې نورو انټروالوکې يو شان دی.

فعالیت

په 4π, 2π, π, 0, $-\pi$, -2π, -3π او -4π کې د $\sin t$ د تابع قیمتونه پیدا کړئ.

لومړی مثال: د t هغه ټول قیمتونه وښیاست چې د $\sin t$ قیمت په کې (-1) وي.

حل: څرنگه چې د sint قیمت د (1) او (-1) تر منځ دی او په هر 2π کې په افقي محور باندې تکرارېږي، نو بې شمېره قیمتونه شته چې په هغه کې د sint قیمت 1 - دی. د نمونې په ډول څو ټکي په سور رنگ په شکل کې ښودل شوي دي.

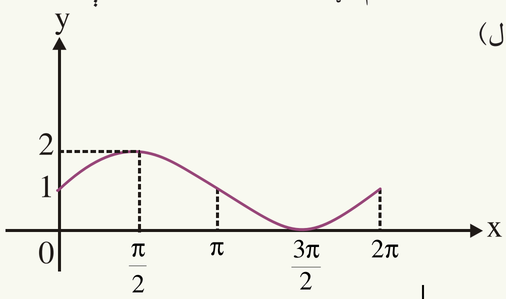


د sint په گراف کې له صفر څخه تر 2π پورې يوازې يو ټکی(نقطه) د $(\frac{3\pi}{2},-1)$ شته چې په سره رنگ ښودلی شوی دی. ټول هغه قیمتونه چې sint په کې (-1) دی، له $t=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ څخه عبارت دي چې k يو تام عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $y = \sin x + 1$ تابع ګراف په $[0,2\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

حل: ددې لپاره د تابع د تعریف ساحه $[0,2\pi]$ او Range یې $[0,2]$ دی، ددې تابع د ګراف د رسمولو لپاره همدا بس دی چې د $y = \sin x$ ګراف رسم کړو او د یوه واحد په اندازه یې د Y پر محور پورته خوا ته انتقال کړو.(عمودی انتقال)



x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y = \sin x + 1$	1	2	1	0	1

د sine او $\cos ine$ د تابع ګانو پریود او لمن(Amplitude):

که $b > 0$ وي د $f(t) = \sin bt$ او $g(t) = \cos bt$ ګرافونه، د صفر او 2π تر منځ یوه دوره(Cycle) جوړوي، ددې دواړو تابع ګانو پریود $\frac{2\pi}{b}$ دی($b > 0$). د مثال په ډول د $y = \cos 3t$ پریود $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3}$ دی او د $y = \sin \frac{1}{2} t$ تابع پریود $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$ دی او د $y = a \sin bt$ او $y = a \cos bt$ د تابعګانو لمن د $|a|$ دی($a \neq 0$)، د مثال په ډول د $y = -2\sin 4t$ لمن $|a| = |-2| = 2$ او پریود یې $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ دی.

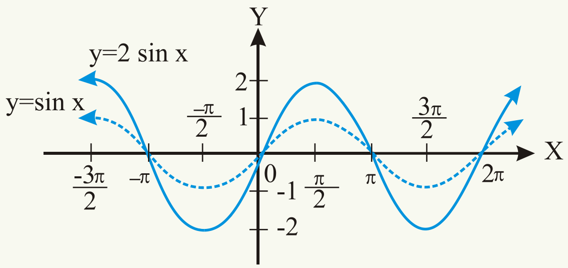
دریم مثال: د $y = 2\sin x$ تابع ګراف رسم او د $y = \sin x$ د تابع له ګراف سره یې پرتله کړئ.

حل: د دې تابع ګراف توپیر د $y = \sin x$ د تابع له ګراف سره دا دی چې $-2 \leq y \leq 2$ دی چې د 2 عدد ته لمن(amplitude) وایي. ځکه چې د $|2| = 2$ دی. ددې تابع پر یو د هم 2π

(c) ketabton.com: The Digital Library

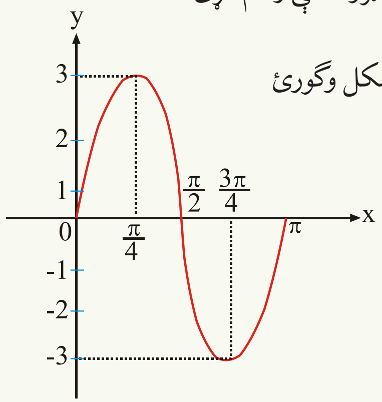
دی، لاندې جدول او شکل وګورئ:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	1	0	-1	0
2 sin x	0	2	0	-2	0



خلورم مثال: د $y = 3\sin 2x$ تابع ګراف په $[0,\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

حل: د دې تابع پریود $\frac{2\pi}{2} = \pi$ دی، لاندې جدول او شکل وګورئ



x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
2x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sin 2x	0	1	0	-1	0
3 sin 2x	0	3	0	-3	0

د sint د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، د sint د تابع ګراف د y محور په (0،0) او د X محور په (0.0)، π، 2π، 3π، 4π ... او $-\pi$، -2π، -3π -4π او نورو کې قطع

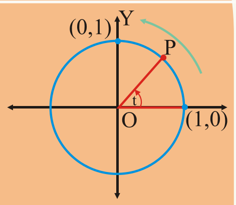
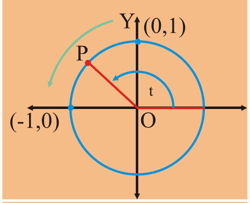
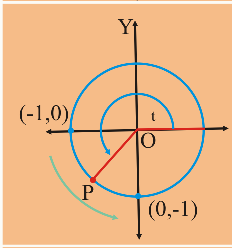
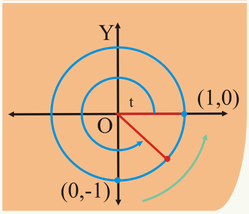
کوي، د $\sin t$ تابع له صفر څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې متزایده، له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې متناقصه، له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې متناقصه او له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې متزایده ده.

د $f(t) = \cos t$ د تابع ګراف (Graph of the cosine function)

د دې تابع د تعریف ساحه(domain) هم د ټولو حقیقي عددونو سېټ دی او Range يې $[-1,1]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

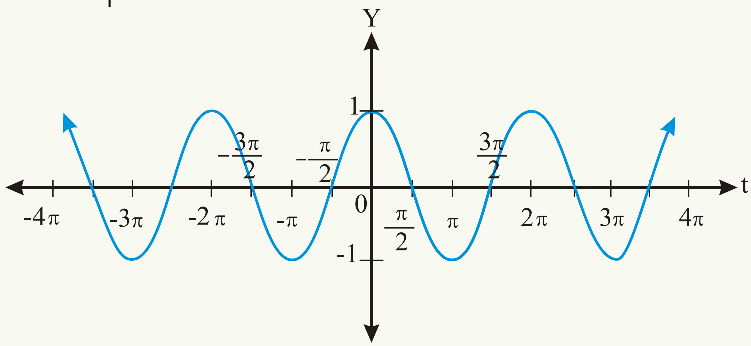
دی، د cosx د تابع د تناوب دوره هم 2π ده، له شکل سره سم په معیاري حالت(Standard position) کې د $\hat{t}$ رادیان یوه زاویه په پام کې ونیسئ چې د $\hat{t}$ د زاویې دویمه ضلع مثلثاتي دایره د p په ټکي کې قطع کوي، نو د p د ټکي د x مختصه د cost څخه عبارت ده. $f(t)=\cos t$ د تابع ګراف د رسمولو لپاره لاندې جدول او شکلونه وګورئ.

اړونده شکل	cost یا د p د ټکي د x مختصه	د P د ټکي حرکت	د t په قیمت کې تغیر
	له یوه څخه ترصفره پورې تناقص کوي	له (1,0) څخه تر (0,1) پورې	له 0 څخه تر $\frac{\pi}{2}$
	له صفر څخه تر 1- پورې تناقص کوي.	له (0,1) څخه تر $(-1,0)$ پورې	له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π
	له 1- څخه تر صفره پورې تزاید کوي.	له $(-1,0)$ څخه تر $(0,-1)$ پورې	له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$
	له صفر څخه تر یوه پورې تزاید کوي	له $(0,-1)$ څخه تر (1,0) پورې	له $3\frac{\pi}{2}$ څخه تر 2π

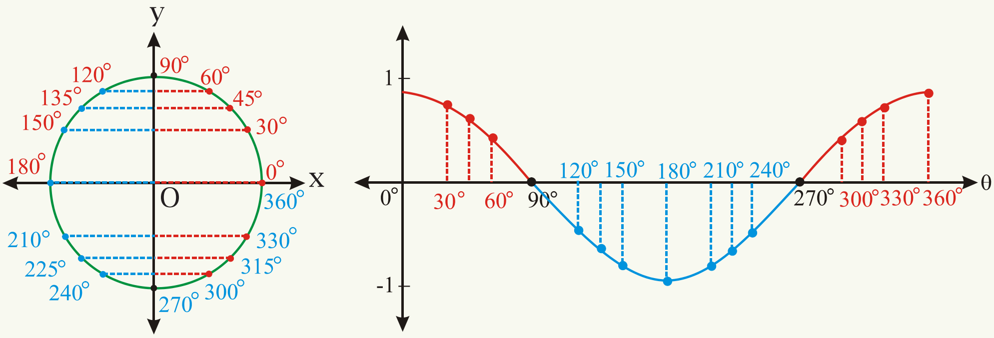
(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدي ډول په هر 2π کې تکراریږي. په نتیجه کې $\cos(t \pm 2\pi) = \cos t$ دی. لاندې جدول او شکل وګورئ.

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(t) = \cos t$	1 ↘	0 ↘	-1 ↗	0 ↗	1



کولای شو، د درجې په حساب د $f(t) = \cos t$ تابع ګراف هم رسم کړو:



د $f(t) = y = \cos t$ تابع د تناوب دوره 2π ده، څکه چې د $\cos t$ د تابع ګراف د$[0,2\pi]$، $[2\pi,4\pi]$، $[4\pi,6\pi]$ او $[-2\pi,0]$ او داسې نورو کې یو شان دی.

د $\cos t$ د تابع د تعریف ساحه د حقیقي عددونو سټ او Range یا د y قیمت یې د 1 او -1 تر منځ دی، یا د $[-1,1]$ انټروال د $\cos t$ د تابع Range دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(t)=\cos t$

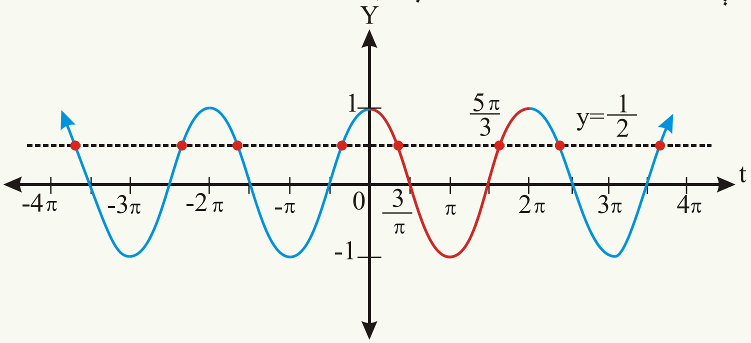
t	واقعي	تقریبي
0°	1	1.00
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{1}{2}$	0.50
90°	0	0.00
120°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
150°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
180°	-1	-1.00
210°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
240°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
270°	0	0.00
300°	$\frac{1}{2}$	0.50
315°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.711
330°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
360°	1	1.00

فعالیت

د $g(t)=\cos t$ تابع گراف د t په کومو قیمتونو کې د y محور قطع کوي؟

لومړی مثال: د t ټول هغه قیمتونه وښیاست چې د cost د تابع قیمت په کې له $\frac{1}{2}$ سره مساوي وي.

حل: خرنګه چې بې شمېره زاويې شته دی چې په هغه قیمتونو کې $y=\cos t=\frac{1}{2}$ دي، په شکل کې خو ټکي د نمونې په ډول په سره رنګ ښودل شوي دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د $[0,2\pi]$ په انټروال کې داسې دوه ټکي شته چې $\cos t = \frac{1}{2}$ شي چې له $(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$ او $(\frac{5\pi}{3},\frac{1}{2})$ څخه عبارت دي. ټول هغه قیمتونه چې په هغو کې $\cos t = \frac{1}{2}$ وي، له $t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ یا $t = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ څخه عبارت دي. چې k یو تام عدد دی.

د sin او cos تابع ګانو د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، $y = \cos t$ تابع له صفره څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې متناقصه او له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π هم متناقصه ده. لیکن له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ متزایده او له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې هم متزایده ده. د $y = \sin t$ او $y = \cos t$، د تابع ګانو پریود 2π دی، په دې معنا چې: $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$, $\cos(t \pm 2\pi) = \cos t$ دی.

د $f(t) = \sin t$ تابع طاقه او $f(t) = \cos t$ تابع یوه جفته تابع ده، ځکه چې: $\sin(-t) = -\sin t$ او $\cos(-t) = \cos t$ دی یا د $\sin t$ د تابع ګراف نظر مبداء ته متناظر او د $\cos t$ تابع ګراف نظر د y محور ته متناظر دی.

پوښتنې

1- د لاندې تابع ګانو ګرافونه په راکړل شوو انټروالونو کې رسم کړئ.

$g(t) = \cos t : [\pi, 3\pi]$ $\qquad$ $f(t) = \sin t : [2\pi, 6\pi]$

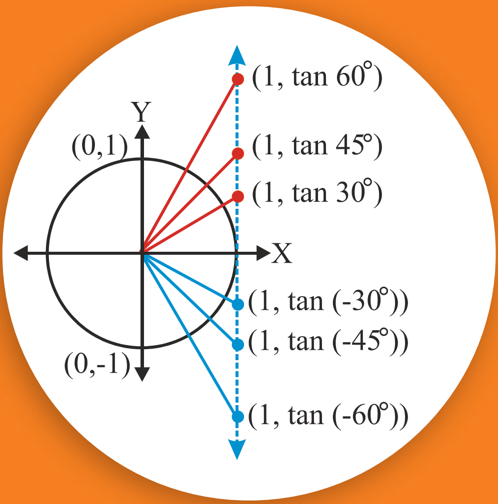
2- د $[-2\pi, 6\pi]$ په انټروال کې د t د کوم قیمت لپاره $\sin t = 1$ دی؟

3- د $[-2\pi, 6\pi]$ په انټروال کې د t دکوم قیمت لپاره $\cos t = 0$ دی؟

4- د $g(t) = -\frac{1}{2}\sin t$ د تابع ګراف په $[-2\pi, 6\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجانټ د تابع ګراف



آیا پوهیږئ چې د tan تابع یوه متزایده تابع ده؟

خرنګه چې $\tan t = \frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t}$ دی، په دې شرط چې $\cos t \neq 0$ وي، نو د tan تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته له هغو زاویو څخه چې cos یې صفر وي، د $\frac{\pi}{2}$ او $\frac{3\pi}{2}$ او یا $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ او $\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ د زاویو کوساینونه صفر دي.

خرنګه چې د $\frac{\pi}{2}$ زاویې د دویمې ضلعې د تقاطع ټکی له مثلثاتي دایرې سره د $(0,1)$ ټکی دی، نو د $\frac{\pi}{2}$ زاویې سره د یو پوره دوران (2π) په جمع کولو سره د $\dots -\frac{7\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2} \dots$ زاویې په لاس راځي چې ددې زاویو د tan قیمتونه تعریف شوي نه دي او د $t = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ مستقیم خطونه د tan د تابع عمودي مجانبونه دي.

په همدې ډول د $(0,-1)$ ټکی د $\frac{3\pi}{2}$ زاویې پر دویمه ضلع واقع دي، د $\frac{3\pi}{2}$ له زاویې سره د یو پوره دوران (2π) له جمع کولو څخه د $\dots -\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2} \dots$ زاویې په لاس راځي چې د tan د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

یا د tan د تابع د تعریف په ناحیه(domain) کې ټول حقیقي عددونه شامل دي پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه، او یا $IR - \{t / t \in IR, t = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ او د ټانجانټ د تابع د Range د

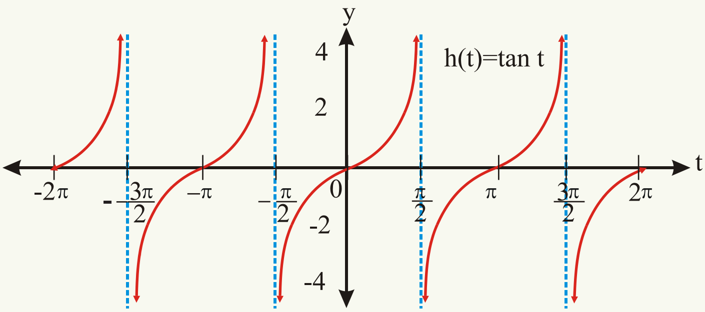
(c) ketabton.com: The Digital Library

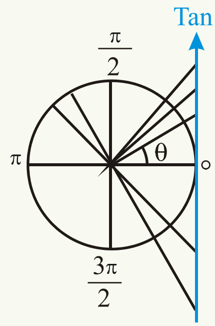
ټولو حقيقي عددونو سټ دی. د ټانجانټ د تابع پريود π دی. د t راډيان زاويې لپاره لرو چې:

$\tan(t\pm\pi)=\tan t$ دی. څه وخت چې د $\hat{t}$ زاويه له صفره تر $\frac{\pi}{2}$ پورې تزايد وکړي، نو $\tan t$ هم له صفره څخه تر $+\infty$ پورې تزايد کوي ($\tan\frac{\pi}{2}$ تعريف شوی نه دی). په دويمه ربع کې هم څه وخت چې د t زاويه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې تزايد وکړي، $\tan t$ هم له $-\infty$ څخه تر صفره پورې تزايد کوي.

په همدې ډول په درېمه ناحيه کې هغه وخت چې د $\hat{t}$ زاويه له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې تزايد وکړي، د $\hat{t}$ د زاويې ټانجانټ له صفره څخه تر $+\infty$ پورې تزايد کوي. په څلورمه ناحيه کې د $\hat{t}$ د زاويې ټانجانټ له $-\infty$ څخه تر صفره پورې تزايد کوي. لاندې جدول د ټانجانټ د تابع تحول ښکاره کوي، همدارنګه د دې تابع تحول په لاندې شکلونو کې ښودل شوی دی:

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$3\pi/2$		2π
$\tan t$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

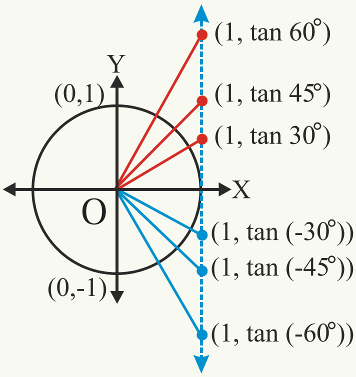


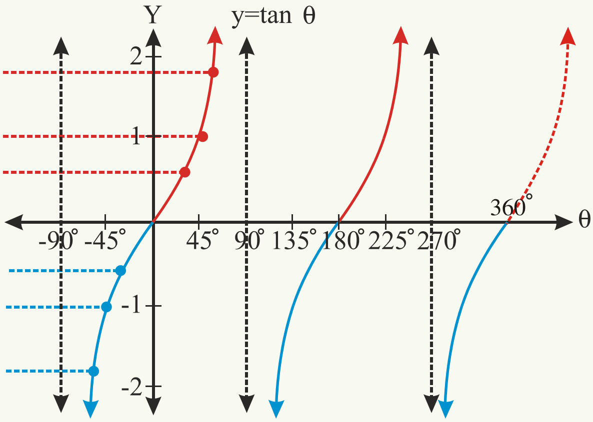


که θ د درجې په حساب وي، د ټانجانټ تابع قيمتونه او شکل په لاندې ډول وګورئ.

	θ	-90° 90°	-60° 120°	-45° 135°	-30° 150°	0° 180°	30° 210°	45° 255°	60° 240°
$\tan\theta$	حقيقي	تعريف شوی نه دی	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
	تقريبي	تعريف شوی نه دی	-1.73	-1	-0.58	0	0.58	1	1.73

(c) ketabton.com: The Digital Library

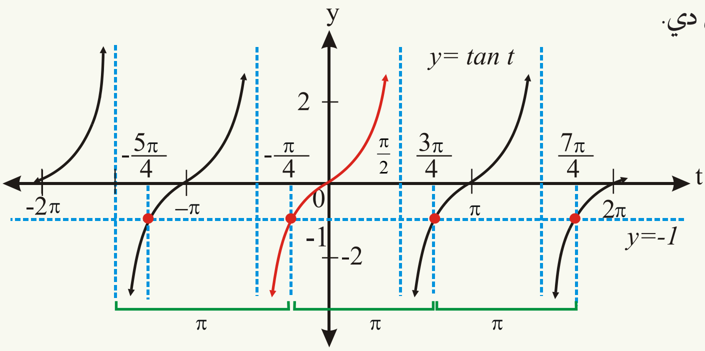




خرنگه چې د $(\pi,2\pi)$ او د $(0,\pi)$ په فاصله کې د ټانجانټ د تابع تغیرات یو شی دي، نو د tan تابع پریود π دی او د tan تابع یوه متزایده تابع ده. له بلې خواکه $b>0$ وي، د $f(t)=\tan bt$ تابع د $\frac{\pi}{2}$ او $-\frac{\pi}{2}$ تر منځ یوه دوره(Cycle) جوړوي، د دې تابع پریود $\frac{\pi}{b}$ دی. د مثال په ډول د $f(t)=\tan 2t$ پریود $\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$ دی.

مثال: د t ټول هغه قیمتونه پیدا کړئ چې $\tan t=-1$ وي.

حل: خرنگه چې د $\tan t$ قیمتونه د π په فاصله کې تکراریږي، نو د t بې شمېره قیمتونه شته چې $y=\tan t$ له 1 - سره مساوي وي چې په لاندې شکل کې څو ټکي د نمونې په ډول ښودل شوي دي.



خرنگه چې د $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ په انټروال کې یوازې د $(-\frac{\pi}{4},-1)$ یو ټکی لري، نو د t ټول قیمتونه چې $\tan t=-1$ دي مساوي دي په: $t=-\frac{\pi}{4}+K\pi$ (K یو تام عدد دی).

(c) ketabton.com: The Digital Library

د tan تابع هر وخت متزایده ده او پرته د $\frac{\pi}{2}$ د طاق مضرب له زاویو څخه پرته په ټولو حقیقي عددونو کې تعریف شوې ده. او د تناوب دوره یې π ده، ځکه چې: $\tan(t \pm \pi) = \tan(t)$.

څرنګه چې $\tan(-t) = -\tan t$ دی، نو $y = \tan t$ یوه طاقه تابع ده او د $\frac{\pi}{2}$ په تام مضرب کې عمودي مجانب هم لري.

د sine ، cosine او tangent تابع ګانو د مشخصو لنډیز:

تابع	سمبول	Domain	Range	پریود	طاقه / جفته
$\sin e$	$f(t) = \sin t$	د ټولو حقیقي عددونو سټ	ټول حقیقي عددونه د 1 او 1 - ترمنځ	2π	طاقه
$\cos ine$	$f(t) = \cos t$	ټول حقیقي عددونه	ټول حقیقي عددونه د 1 او 1 - ترمنځ	2π	جفته
$\tan gent$	$f(t) = \tan t$	ټول حقیقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه	ټول حقیقي عددونه	π	طاقه

یا په بل عبارت:

$$D_{\sin} = D_{\cos} = IR \qquad R_{\sin} = R_{\cos} = [-1,1]$$

$$D_{\tan} = \{x \in IR \quad : \quad \cos x \neq 0\}$$

پوښتني

1 – د t د زاویې په کوم قیمت د $\tan t$ د تابع قیمت په $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ انټروال کې له صفره کوچنی دی؟

2 – د $y = 3\tan\theta$ تابع ګراف رسم کړئ.

3 – د $\tan\theta$ تابع پریود مساوي دی په:

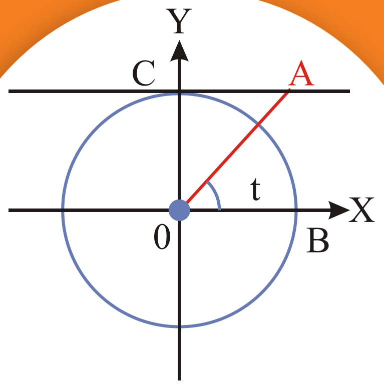
a) 2π b) π c) 3π d) درې واړه سم نه دي

4 – که د θ زاویه له 0° څخه تر 90° پورې تحول وکړي، د $\tan\theta$ تحول عبارت دی له:

a) $-\infty$ له 1- څخه تر b) $+\infty$ له صفر څخه تر c) $+\infty$ څخه تر $-\infty$ له

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوټانجانټ د تابع ګراف



$$\cot(t)=\frac{AC}{OC}=\frac{AC}{1}=AC$$

• آیا د کوټانجانټ د تابع د تناوب دوره پېژنئ؟
• که $\sin t = 0$ وي، آیا $\cot(t)$ تعریف شوی دی؟ که نه، ولې؟

څرنګه چې $\cot(t)=\dfrac{\cos t}{\sin t}$ دی، که $\sin t = 0$ وي، $\cot(t)$ تعریف شوی نه دی چې t يو تام عدد وي.

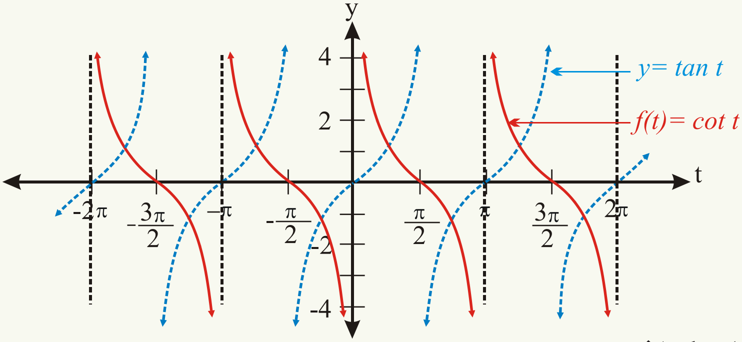
د cot تابع د تعریف ساحه (domain) ټول حقیقي عددونه دي پرته د π له تام مضرب څخه، یا په بل عبارت $IR-\{t/t\in IR, t=k\pi, k\in z\}$ یا $dom_{cot}=\{t\in IR/\sin t\neq 0\}$ او د دې تابع Range ټول حقیقي عددونه دي.

د $f(t)=\cos(t)$ د تابع ګراف د π په تام مضرب کې عمودي مجانب (Vertical asymptotes) لري $(t=k\pi)$ چې k یو تام عدد دی.

څه وخت چې د t زاویه له صفره تر $\dfrac{\pi}{2}$ پورې زياته شي، د $\cot(t)$ قیمت له $+\infty$ څخه تر صفره پورې کمیږي ($\cot\ 0°$ نه دی تعریف شوی) په دویمه ناحیه کې څه وخت چې د t زاویه له $\dfrac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې زیاته شي، $\cot(t)$ له صفره تر $-\infty$ پورې کمیږي (تناقص کوي). دې ته په پام سره چې د cot د تابع د تناوب دوره π ده، نو په دریمه او څلورمه ناحیه کې د $\cot(t)$ د تابع تغیرات د لومړي او دویمې ناحیې په شان دي. پورتنی حقیقت په لاندې جدول او شکل کې لیدلای شئ.

t	0			$\pi/2$		π			$\frac{3\pi}{2}$		2π	
$\cot t$	‖	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$		↘	0	↘	$-\infty$ ‖	$+\infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د secant(t) تابع گراف (Graph of the secant Function)

د sec (t) او cos (t) گرافونه یو له بله سره څه اړیکه لري؟

د $f(t) = \sec(t)$ د تابع گراف د $\cos t$ د تابع له گراف سره معکوسه اړیکه لري، ځکه چې

$\sec(t) = \frac{1}{\cos(t)}$ دی. که $\sec t$ د $\frac{1}{\cos t}$ په شکل په پام کې ونیسو، څه وخت چې د t زاویې

قیمت له صفر څه تر $\frac{\pi}{2}$ یا 90° پورې زیات شي، د $\cos t$ قیمت له (1) څخه صفر ته نژدې

کېږي، د $\frac{1}{\cos t}$ یا $\sec t$ قیمت له 1 څخه تر $+\infty$ زیاتېږي، که $t = 90^\circ$ شي، $\sec t$ تعریف

شوی نه دی ، که t له 90° لږ څه زیاته شي د $\sec t$ قیمت $-\infty$ کېږي او په $t = \pi = 180^\circ$

کې د -1 سره مساوي کېږي. په همدې ډول که t له 180° څخه تر 270° پورې زیاته شي، نو د

$\cos t$ قیمت له -1 څخه صفر ته نژدې کېږي او $\sec(t)$ له -1 څخه تر $-\infty$ پورې کمېږي.

په $t = \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$ کې د $\sec t$ قیمت غیر معین کېږي په همدې ډول، څه وخت چې د t

قیمت له 270° څخه تر 360° زیات شي، نو $\cos(t)$ له صفر څخه تر یوه پورې قیمت اخلي

او $\sec(t)$ د $+\infty$ څخه تر (1) پورې تناقص کوي. لیدل کېږي چې:

$$\text{Domain } \sec t = \mathbb{R} - \{t \mid t = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in z\}$$

او $\text{Range } \sec(t) = \mathbb{R} - \{t \mid -1 \le t \le 1\}$ یا ټول حقیقي عددونه پرته د $[-1,1]$ له انټروال

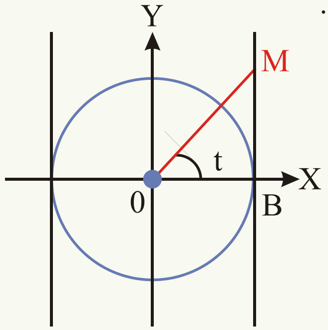
څخه یا په بل عبارت د $f(t) = \sec(t)$ تابع د تعریف ساحه (*Domain*) د ټولو حقیقي عددونو

سټ دی پرته د $\frac{\pi}{2}$ د طاق مضرب څخه او د $f(t) = \sec(t)$ د تابع Range ټول حقیقي عددونه

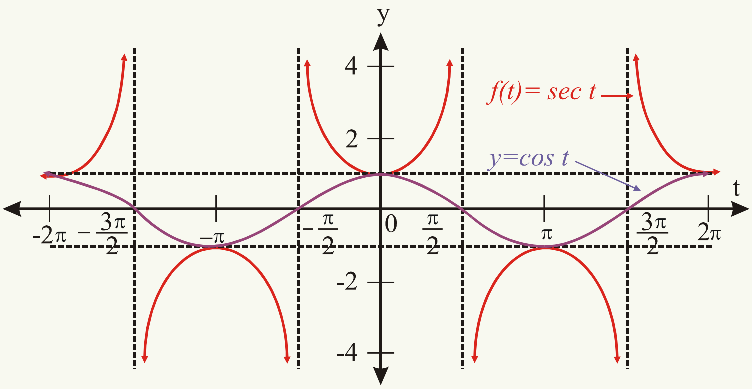
دي چې لوی یا مساوي د یو او یا کوچنی یا مساوي له -1 وي، لکه: ځکه چې لیدل کېږي د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\sec(t)$ تابع پریود هم 2π دی او د $f(t)=\sec(t)$ تابع د $t=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ کې عمودي مجانبونه لري چې k یو تام عدد دی.



$$\sec t=\frac{\overline{OM}}{OB}=\frac{\overline{OM}}{1}=\overline{OM}$$



t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
t	$0°$		$90°$		$180°$		$270°$		360
$F(t)=\sec t$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

فعالیت

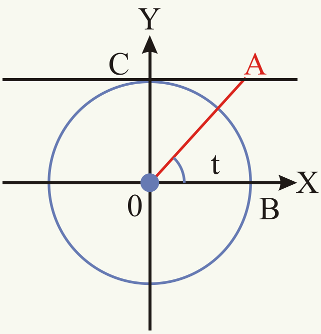
د $f(t)=\frac{4}{3}\sec(t)$ تابع گراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د cosecant د تابع ګراف (Graph of the cosecant Function)

د $f(t)=\sin(t)$ تابع ګراف د $f(t)=\csc(t)$ د تابع له ګراف سره څه اړیکه لري؟

څرنګه چې $\csc t=\dfrac{1}{\sin t}$ دی، $\sin t$ او $\csc t$ یو د بل معکوس دي. څه وخت چې $\sin(t)=0$ وي، $\csc t$ تعریف شوی نه دی، د $f(t)=\csc(t)$ د تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه دي پرته له هغو زاویو څخه چې د π تام مضرب وي، (هغه زاویې چې sine یې صفر وي) چې په دې قیمتونو کې عمودي مجانبونه هم لري او د $f(t)=\csc(t)$ د تابع Range ټول هغه حقیقي عددونه دي چې لوی یا مساوي د یو، کوچنی یا مساوي له (-1) سره وي. او ددې تابع پریود هم 2π دی.



څه وخت چې د t زاویه له $0°$ څخه تر $90°$ پورې زیاته شي، نو $\sin t$ له صفر څخه تر (1) پورې زیاتېږي (تزاید کوي) او $\csc(t)$ له $+\infty$ څخه تر (1) پورې کمېږي (تناقص کوي)، څه وخت چې $t=90°$ شي، $\csc(t)=1$ کېږي او که د t زاویه له $90°$ څخه تر $180°$ زیاته شي، نو $\sin(t)$ له یوه څخه صفر ته راکمېږي او $\csc(t)$ له (1) څخه $+\infty$ ته زیاتېږي (تزاید کوي). کله چې $t=180°$ شي نو $\sin(t)=0$ او د $\csc(t)$ قیمت غیر معین شي او که د t زاویه $180°$ څخه تر $270°$ پورې زیاته شي، $\sin(t)$ له صفر څخه تر (-1) پورې کمېږي او $\csc(t)$ له $-\infty$ څخه تر (-1) پورې زیاتېږي، د $t=270°$ په قیمت $\csc(t)$ له (-1) سره مساوي کېږي. په همدې ډول کله چې د t زاویه له $270°$ څخه تر $360°$ پورې زیاته شي (تزاید وکړي)، نو $\sin t$ له -1 څخه صفر ته نژدې کېږي او $\csc(t)$ له (-1) څخه تر $-\infty$ پورې کمېږي. په $t=360°$ کې د $\csc(t)$ قیمت غیر معین شي (تعریف شوی نه دی). $t=k\pi$ کې تابع عمودي مجانبونه لري.

په شکل کې د مثلثاتي دایرې د C په ټکي کې یو مماس رسموو، د $\overset{\Delta}{OCA}$ په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

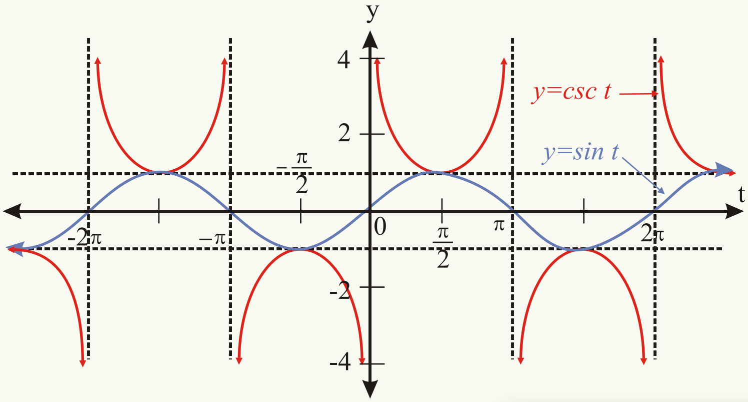
$$\csc(t)=\csc O\hat{A}C=\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{OA}}{1}=\overline{OA}\qquad(\hat{t}=O\hat{A}C)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\overline{OA}$ د خط یا csc(t) تحول په لاندې جدول کې لنډوو:

t	0	$\pi/2$	π		$3\pi/2$	2π
$F(t)=\csc t$	$+\infty$ ↘	1 ↗	$+\infty$	$-\infty$ ↗	-1 ↘	$-\infty$

لیدل کېږي چې که د t زاویه له صفر څخه تر 360° یا (2π) پورې قیمتونه واخلي، نو $\csc(t)\le -1$ او یا $\csc(t)\ge 1$ کېږي، نو لاندې شکل وګورئ.



فعالیت

د $h(t)=-3\csc t$ د تابع ګراف رسم کړئ.

لاندې جدول ته وګورئ:

سمبول	Domain	Range	پریود	طاق یا جفته
$f(t)=\sec t$	ټول حقیقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه	ټول حقیقي عددونه کوچني یامساوي په -1، لوی یا مساوي په (1)	2π	جفته

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(t)=\csc(t)$	ټول حقيقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه	ټول حقيقي عددونه کوچني یامساوي په -1 لوی یا مساوي په 1	2π	طاقه
$f(t)=\cot(t)$	ټول حقيقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه	ټول حقيقي عددونه	π	طاقه

له مثلثاتي تابع ګانو څخه دا نتيجه په لاس راځي چې: د θ یا (t) د زاويې په زیاتوالي سره د $\sin\theta$ او $\tan\theta$ مثلثاتي نسبتونه هم زياتيږي، خو د $\cos\theta$ او $\cot\theta$ قيمت کميږي.

پوښتنې

1 – د $f(t)=\cot(t)$ تابع د t په کوم قیمت کې تعریف شوې نه ده او ولې؟

2 – څه وخت چې د θ زاويه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې تحول وکړي، د $\cot\theta$ تحول عبارت دی:

a) $1\to-\infty$ b) $0\to-\infty$ c) دواړه سمې نه دي

3 – که $\hat{t}=\pi$ وي، $\cot(t)$ عبارت دی له:

$a)$ صفر $b)\ -1$ $c)$ نه دی تعریف شوی

4 – د sec او csc تابع ګانو *Range* عبارت دی له:

a) $IR-\{t\,|-1<t<1\}$ $b)$ ټول حقیقي عددونه c) $IR-\{t\,|-1\le t\le 1\}$

5 – د $f(t)=\csc(t)$ تابع د تعريف ساحه $(Domain)$ عبارت ده، له:

a) ټول حقيقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه

b) ټول حقيقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه

c) ټول حقيقي عددونه پرته د 2π له تام مضرب څخه d) دري واړه سمې نه دي

6 – د $f(t)=\csc(t)$ تابع د $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې:

$a)$ متزايده ده $b)$ متناقصه ده $c)$ نه متزايده او نه متناقصه ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي لنډیز

- د $\frac{d}{180} = \frac{g}{200} = \frac{R}{\pi}$ د فورمول په مرسته کولای شو، زاویه له یوه واحد څخه بل واحد ته واړوو.
- یو راډیان هغه مرکزي زاویه ده چې د مقابل قوس اوږدالی یې د شعاع له اوږدوالي سره مساوي وي.
- θ د راډیان په حساب مساوي ده په: $\theta = \frac{s}{r}$ چې s د مرکزي زاویې مقابل قوس او r د دایرې شعاع ده.
- که د یوې زاویې رأس د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې او لومړنی ضلع یې د X د محور په مثبت جهت منطبق وي، زاویه په معیاري حالت کې ده.
- که په معیاري حالت کې د دوو یا څو زاویو دویمې ضلعې یو پر بل منطبقې وي، دا زاویې کوټرمینل زاویې نومېږي.
- مثلثاتي دایره هغه دایره ده چې د شعاع اوږدوالی یې د اوږدوالي واحد وي.

$\sin(90-\theta)=\cos\theta$ $\cos(90-\theta)=\sin\theta$ $\tan(90-\theta)=\cot\theta$	$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$	$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(90-\theta)=\tan\theta$ $\sec(90-\theta)=\csc\theta$ $\csc(90-\theta)=\sec\theta$	$\cot(-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(-\theta)=\sec\theta$ $\csc(-\theta)=-\csc\theta$	$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(\pi-\theta)=-\sec\theta$ $\csc(\pi-\theta)=\csc\theta$
$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$ $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$ $\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$	$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$	$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$ $\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$ $\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$ $\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sec\theta$	$\cot(\pi+\theta)=-\cot\theta$ $\sec(\pi+\theta)=-\sec\theta$ $\csc(\pi+\theta)=-\csc\theta$	$\cot(2\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(2\pi-\theta)=\sec\theta$ $\csc(2\pi-\theta)=-\csc\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

• د θ او $(\theta + 2k\pi)$ زاويې چې k يو تام عدد دى، کوټرمينل زاويې دي چې ټول مثلثاتي نسبتونه يې سره مساوي دي.

• د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ د توابعو *domain* ټول حقيقي عددونه او *Range* يې $[-1,1]$ دى.

• د $y = \sin\theta$ تابع يوه طاقه تابع ده، ځکه چې $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ ددې تابع گراف نظر د وضعيه کمياتو مبدأ ته متناظر دى او د $y = \cos\theta$ تابع جفته تابع ده، ځکه چې $\cos(-\theta) = \cos\theta$ او د cos تابع گراف نظر y محور ته متناظر دى.

• د $0°$ ، $\frac{\pi}{2}$ ، π ، $\frac{3\pi}{2}$ او 2π د زاويو دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعريف شوې نه دي.

• د sin ، cos ، sec او csc تابع گانو د تناوب دوره 2π او د tan او cot د تابع گانو د تناوب دوره(پريود)، π ده.

• د tan تابع هر وخت متزايد او د cot تابع هر وخت متناقصه تابع ده.

• د cos او sec تابع گانې جفتې او د sin، tan، cot او csc تابع گانې طاقې دي.

• که د يوې تابع گراف نظر د y محور ته متناظر وي، دا ډول تابع گانې جفتې دي يا د هر x لپاره، $x \in domf$ د $f(-x) = f(x)$ رابطه صدق وکړي.

• که د يوې تابع گراف نظر د وضعيه کمياتو مبدأ ته سره متناظر وه، طاقه تابع ده چې د هر x لپاره، $x \in domf$ د $f(-x) = -f(x)$ رابطه صدق وکړي.

د مثلثاتي توابعو تحول په لنډ ډول په لاندې جدول کې ښودل شوى دى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

θ / تابع	0°	I	$\frac{\pi}{2}$	II	π	III	$\frac{3\pi}{2}$	IV	2π
Sin	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
Cos	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
Tan	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	0
Cot	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$
Sec	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	1
Csc	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

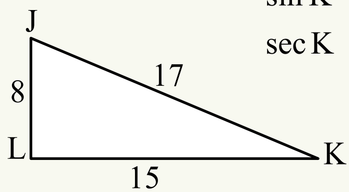
(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي پوښتنې

1 – $42,6033°$ په درجه، دقيقه او ثانيه بدلې کړئ؟

2 – که د يو ساعت د ثانيې د عقربې دوران 3 دقيقې او25 ثانيې وي، د ثانيې عقربې به څو راډيانه مثبته زاويه طی کړې وي؟

3 – د JKL په مثلث کې لاندې قيمتونه پيدا کړئ؟



sin K	sin J	cos J	cos K	tan K	tan J
sec K	sec J	cot J	cot K	csc J	csc K

4 –که د يوې دايرې شعاع 20cm او د مرکزي زاويې مقابل قوس يې $s = 85cm$ وي، مرکزي زاويه څو راډيانه ده؟

5 – د 1 radian او $2\,radian$ مرکزي زاويو د مقابلو قوسو اوږدوالی پيدا کړئ. په دې ډول چې د دايرې قطر 10 cm وي.

6 – د لاندې زاويو دويمې ضلعې (terminal side) چېرې واقع کېږي؟

$$\frac{3\pi}{2}\ ,\ -7\pi\ ,\ -\frac{11\pi}{2}\ ,\ -500°\ ,\ 900°\ ,\ -\pi$$

7 – لاندې زاويې چې په راډيان راکړل شوې دي، په درجه يې واړوئ.

$$\frac{\pi}{8}\ ,\ \frac{\pi}{15}\ ,\ \frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{6}\ ,\ \frac{17\pi}{45}$$

8 – په 54 دقيقو کې د يوه ساعت د ثانيې او د ساعت عقربه هره يوه څو راډيانه طی کوي؟

9 – که د يوه ټراکټور د کوچنې ټاير قطر يو متر او د لوی ټاير قطر 120cm وي، څه وخت چې کوچنی ټاير د $70°$ درجو په اندازه وڅرخېږي لوی ټاير څو راډيانه طی کوي؟

10 – يو څرخ په يو ساعت کې 300ReV دورانونه کوي، دا څرخ په يوه ثانيه کې څو راډيانه ګرځي؟

11 – د يوه مثلث زاويې په ترتيب سره $4x$ درجې، $\frac{70x}{9}$ ګراده او $\frac{\pi x}{20}$ راډيانه دي. هره يوه

(c) ketabton.com: The Digital Library

زاویه څو درجې ده؟

12– $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ ، $\hat{C}$ او $\hat{D}$ دیوې څلور ضلعې زاویې دي،که $\hat{A}+\hat{D}=240^\circ$ ، $\hat{C}+\hat{D}=200g$

او $\hat{B}+\hat{D}=\frac{2\pi}{3}^R$ وي: د دې څلور ضلعې زاویې د درجې په حساب پیدا کړئ.

13 – دیوه دوران $\frac{1}{12}$ برخه مساوي ده په:

a) $=30^\circ$ b) $\frac{\pi}{6}$radian c) $\frac{100}{3}$g d) درې واړه سمې دي

14 – د دوو زاویو مجموعه 17° او تفاضل یې 17 گراده دی، دا دواړه زاویې پیدا کړئ.

15 – د درجې په حساب د دوو زاویو مجموعه x او تفاضل یې د گراد په حساب هم x دی، دا دواړه زاویې پیدا کړئ.

16 –لاندې زاویې د درجې په اعشاري شکل ولیکئ.

47° 15' 36'' 15° 24' 45''

17 – لاندې زاویې په درجه، دقیقه او ثانیې (DMS) واړوئ.

23.16° 4.2075°

18 – $\sin(-\frac{\pi}{3})$ ، $\tan\frac{3\pi}{4}$ او $\cot\frac{7\pi}{6}$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ

19 – د $[-2\pi,2\pi]$ په انټروال کې د θ په کوم قیمت، $\sin\theta=1$ دی؟

20 – د $[-2\pi,2\pi]$ په انټروال کې د $\tan\theta$ تابع، د θ په کومو قیمتونو کې عمودي مجانب لري؟

21 – له (i) څخه تر (iii) پورې کومه یوه اړیکه سمه نه ده؟

(i) $\sin(-x)=-\sin x$ (ii) $\cos(-x)=-\cos x$

(iii) $\tan(-x)=-\tan x$

a) i او ii سمې دي. b) یوازې ii سمه ده.

c) i او iii سمې دي. d) درې واړه سمې دي.

e) هیڅ یو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

22 - $\cos\frac{47\pi}{2}$ ، $\sin(-13\pi)$ او $\tan\frac{8\pi}{3}$ پیدا کړئ؟

23 –داسې زاویه پیدا کړئ چې که دګراد په حساب یې له مقدار ه 23 واحده کم کړو، د زاویې مقدار په درجه لاس ته راشي.

24 - د دریو زاویو مجموعه 240ګراده ده، که لومړنۍ زاویه 40 ګراده، دویمه $\frac{3\pi}{4}$ راډیانه وي، دریمه زاویه څو درجې ده؟

25 – د $4185°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

26 – د $(-3660°)$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

27 – د $y=\cos\theta$ تابع د $[\frac{3\pi}{2},\ 2\pi]$ په انټروال کې:

$a)$ متزایده ده $b)$ متناقصه ده $c)$ هم متزایده او هم متناقصه ده

28 – د $y=\tan\theta$ تابع پریود عبارت دی، له:

a) 2π b) π c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{3\pi}{2}$

29 – د $f(t)=\cos(t)$ تابع:

a) جفته ده   b) طاقه ده   c) نه جفته او نه طاقه ده

30 – هغه تابع چې ګراف یې نظر مبدأ ته متناظر وي.

a) جفته ده   b) طاقه ده   c) نه جفته او نه طاقه ده

31 – د $y=\cos\theta$ تابع د تناوب دوره عبارت ده، له:

a) π b) $\frac{3\pi}{2}$ c) 2π d) 3π

32 – $\sin 67°$ له $\sin 787°$ سره څه اړیکه لري؟

a) $\sin 787° > \sin 67°$ b) $\sin 787° < \sin 67°$ c) $\sin 67° = \sin 787°$

33 –کومه یوه له لاندې اړیکو څخه سمه ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\sec 135^\circ = -\csc 45^\circ$ b) $\sec 135^\circ = \csc 45^\circ$

d) $\sec 135^\circ = \sec 45^\circ$ c) $\sec 135^\circ = -\sec 45^\circ$

34 - کومه یوه له لاندې اړیکو څخه سمه ده؟

a) $\tan 240^\circ = \tan 60^\circ$ b) $\tan 240^\circ = -\tan 60^\circ$

c) $\tan 240^\circ = \cot 60^\circ$ d) $\tan 240^\circ = -\cot 60^\circ$

35 - $\cot 0^\circ = ?$

a) 1 *b*) −1 *c*) 0 *d*) تعریف شوی نه دی.

36 - $\cos 9\pi = ?$

a) 1 *b*) −1 *c*) 0 *d*) $\frac{1}{2}$

37 - $\sin(-\frac{13\pi}{2}) = ?$

a) 1 *b*) −1 *c*) 0 *d*) درې واړه سم نه دي

38 - د -2430° له زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

39 - $\sin(270^\circ - \theta) = ?$

a) $\sin\theta$ *b*) $-\sin\theta$ *c*) $\cos\theta$ *d*) $-\cos\theta$

40 - $\sin(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

a) 1 *b*) −1 *c*) 0 *d*) تعریف شوی نه دی

41 - $\sec(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

a) 1 *b*) −1 *c*) 0 *d*) تعریف شوی نه دی

42 - $\tan(-15\pi) = ?$

a) 1 *b*) −1 *c*) 0 *d*) تعریف شوی نه دی

43 - $\sec(-1530^\circ) =$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

44 – $\cot(-2430°) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

45 – $\sin(\frac{235\pi}{2}) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)$ تعریف شوی نه دی

46 – $\cos(\frac{407\pi}{2}) = ?$

a) 1 b) 0 c) −1 d) ∞

47 – $\tan(90+\theta)$ مساوی دی په:

$a)\ \cot\theta$ $b)\ -\cot\theta$ $c)\ -\tan\theta$ $d)\ \tan\theta$

48 – $\tan(270+\theta) = ?$

$a)\ \cot\theta$ $b)\ -\cot\theta$ $c)\ \tan\theta$ $d)\ -\tan\theta$

49 – $\sin(-1980°) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)\ \frac{1}{2}$

50 – $\sin(-\frac{3\pi}{2}) = ?$

$a)\ 1$ $b)\ -1$ $c)\ 0$ $d)\ \frac{1}{2}$

51 – له لاندې اړیکو څخه کومه یوه یې سمه ده؟

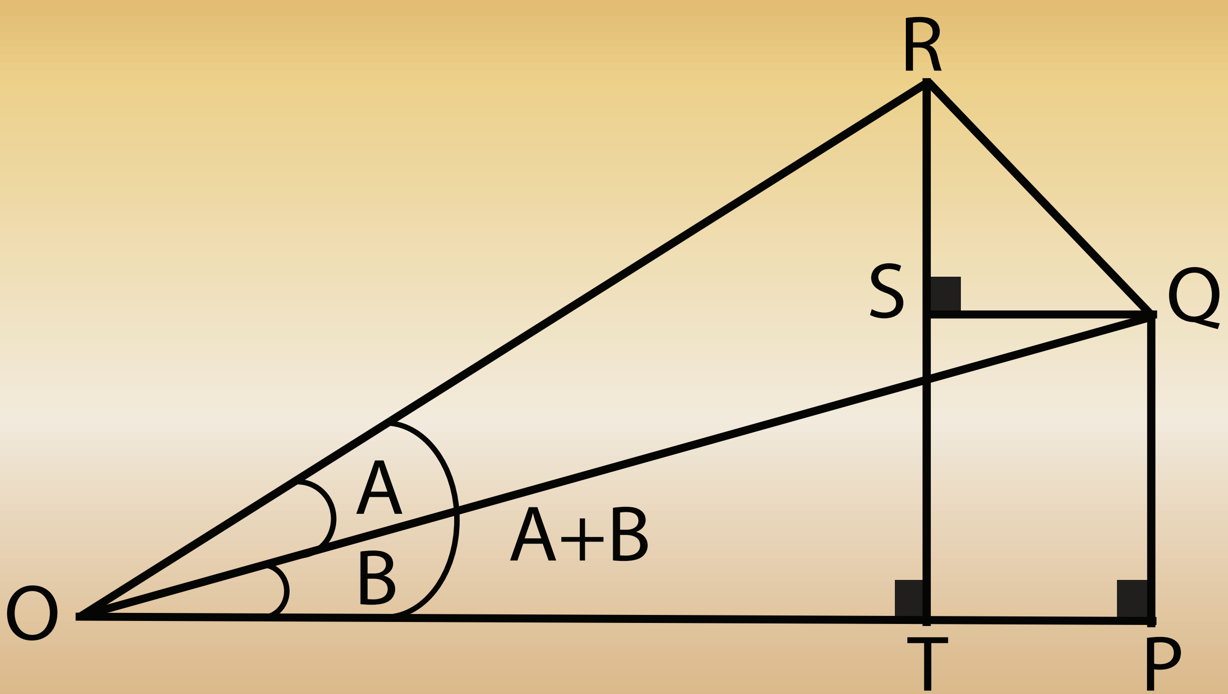
a) $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$ b) $\sin\frac{3\pi}{4} > \sin\frac{\pi}{4}$ c) $\sin\frac{3\pi}{4} < \sin\frac{\pi}{4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم څپرکی

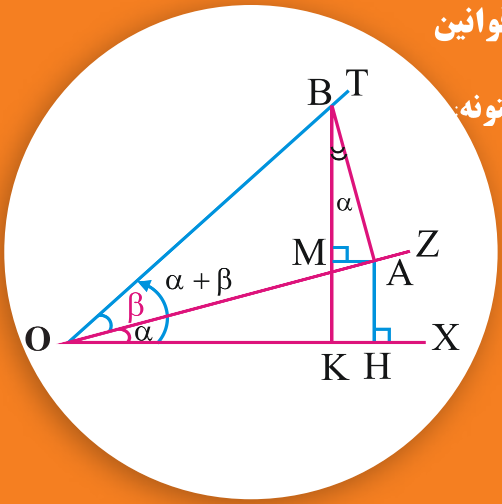
د مثلثاتو تطبیقات

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکبو زاویو د مثلثاتي نسبتونو قوانین
د جمعې او تفاضل فورمولونه
د دوو زاویو د مجموعې مثلثاتي نسبتونه:



آیا د

$$\text{Sin}(\alpha+\beta)=\text{Sin}\alpha\cos\beta+\text{Cos}\alpha\text{Sin}\beta$$

رابطې سموالی ښودلای شئ؟

1- د $Sin(\alpha+\beta)$ محاسبه کول: د $X\hat{O}Z$ زاویه له α او د $Z\hat{O}T$ زاویه له β سره مساوي جلاکوو او داسې یې یو د بل څنګ ته ږدو چې دوه مجاورې زاویې جوړې کړي بیا د OT د قطعه خط پر مخ د OB قطعه خط د واحد په اندازه جلاکوو. د B له ټکي څخه د BA خط پر OZ عمود رسموو، بیا د A له ټکي څخه د AH خط پر OX عمود رسموو، شکل ته په پام سره لرو چې:

$$\text{Sin}\beta=\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{AB}}{1}=\overline{AB}$$

$$\text{Cos}\beta=\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OA}}{1}=\overline{OA}$$

$$\text{Sin}\alpha=\frac{\overline{HA}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{HA}}{\cos\beta}\Rightarrow\overline{HA}=\sin\propto\cos\beta$$

$$\text{Cos}\alpha=\frac{\overline{OH}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OH}}{\cos\beta}\Rightarrow\overline{OH}=\cos\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\overline{KB}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{KB}}{1}=\overline{KB}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{OK}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OK}}{1}=\overline{OK}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د A له ټکي څخه پر KB باندې د AM عمود رسموو چې د KHAM څلور ضلعي مستطيل دی، په نتيجه کې KM=HA او MA=KH دی.

د $M\hat{B}A$ زاويه د α له زاويې سره مساوي ده (ددې دواړو زاويو ضلعې يو پر بل باندې عمود دي). د BMA په قايم الزاويه مثلث کې لرو چې:

$$\cos(M\hat{B}A) = \cos\alpha = \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \frac{MB}{\sin\beta} \Rightarrow \overline{MB} = \cos\alpha\ \sin\beta$$

$$\sin(M\hat{B}A) = \sin\alpha = \frac{\overline{MA}}{\overline{AB}} = \frac{MA}{\sin\beta} = \frac{\overline{KH}}{\sin\beta} \Rightarrow \overline{KH} = \sin\alpha\ \sin\beta$$

که د $\overline{KB} = \overline{KM} + \overline{MB}$ په رابطه کې د KM، KB او $\overline{MB}$ پر ځای يې قيمتونه وضع کړو، لرو چې: $(KM = AH = \sin\alpha\cos\beta)$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

:2 د $\cos(\alpha+\beta)$ محاسبه کول : په همدې ډول که د $\overline{OK} = \overline{OH} - \overline{KH}$ په رابطه کې د OK، KH او OH پر ځای يې قيمتونه وضع کړو، نو لرو چې:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta}$$

:3 د $\tan(\alpha+\beta)$ محاسبه کول:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta}$$

صورت او مخرج په $\cos\alpha\cos\beta$ ويشو:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

لومړی مثال: $\sin\frac{7\pi}{12}$، $\sin 120°$، $\cos 120°$ او $\tan\frac{5\pi}{12}$ پيدا کړئ.

حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 120^\circ=\sin(90^\circ+30^\circ)=\sin 90^\circ\cos 30^\circ+\cos 90^\circ\sin 30^\circ$$
$$\sin 120^\circ=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 120^\circ=\cos(90^\circ+30^\circ)=\cos 90^\circ\cos 30^\circ-\sin 90^\circ\sin 30^\circ$$
$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{5\pi}{12}=\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$$
$$=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

د دوو زاویو د تفاضل مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin 120^\circ=\sin(180^\circ-60^\circ)=?$$

که د جمعې په فورمولونوکې د β پر ځای $-\beta$ وضع کړو، نو لرو چې:

$$\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha(-\sin\beta)$$

پوهېږو چې:

$$\cos(-\beta)=\cos\beta$$
$$\sin(-\beta)=-\sin\beta$$
$$\tan(-\beta)=-\tan\beta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta-\cos\alpha\ \sin\beta$$

$$\cos[\alpha+(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta$$

$$\tan[(\alpha+(-\beta)]=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(-\beta)}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

فعالیت

په همدې ډول وښیاست چې: $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cdot\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$ دی.

لومړي مثال: $\cos\dfrac{\pi}{12}$ او $\sin 150°$ پیداکړئ.

حل:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 150°=\sin(180°-30°)=\sin 180°\cos 30°-\cos 180°\sin 30°$$

$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-(-1)\cdot\frac{1}{2}=-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

دویم مثال: د تفاضل د فورمولونو په مرسته ښکاره کړئ چې $\cos(\dfrac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$ دی.

حل:

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta+\sin\frac{\pi}{2}\sin\theta=0\cdot\cos\theta+1\cdot\sin\theta=\sin\theta$$

دریم مثال: وښیاست چې $\cos(270°-\theta)=-\sin\theta$ دی.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos(270^\circ - \theta) = \cos 270^\circ \cos\theta + \sin 270^\circ \sin\theta$$
$$\cos(270^\circ - \theta) = 0 \cdot \cos\theta + (-1)\sin\theta = -\sin\theta$$

خلورم مثال: $\tan 120^\circ$ پیدا کړئ:

حل:

$$\tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = \frac{\tan 180^\circ - \tan 60^\circ}{1 + \tan 180^\circ \cdot \tan 60^\circ} = \frac{0 - \sqrt{3}}{1 + 0 \cdot \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{1}$$
$$= -\sqrt{3}$$

فعالیت

وښیاست چې: $\sin 211^\circ \cos 59^\circ + \cos 211^\circ \sin 59^\circ = -1$ او
$\cos 211^\circ \cos 149^\circ - \sin 211^\circ \sin 149^\circ = 1$ دی.

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$	$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$	$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- وښیاست چې:

$$\tan(45-\theta)=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

2- وښیاست چې:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\ \sin\beta$$

3- $\cos 277^\circ \cos 97^\circ + \sin 277^\circ \sin 97^\circ = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

4- د جمعې د فورمولونو په مرسته $\sin 240^\circ$، $\cos 240^\circ$ او $\tan 240^\circ$ پیداکړئ.

5- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته وښیاست چې:

$\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]=\cos x\cdot\cos y$ دی.

6- د جمعې د فورمولونو په مرسته د 210° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیداکړئ.

7- $\sin 105^\circ$، $\cos 105^\circ$ او $\tan 105^\circ$ پیداکړئ $(105^\circ=(60^\circ+45^\circ))$

8- که $\sin x=-\frac{3}{4}$ وی او $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ وی، $\cos(\frac{\pi}{4}+x)$ پیداکړئ.

9- وښیاست چې: $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$ دی.

10- $\sin 2^\circ\cos 88^\circ+\cos 2^\circ\sin 88^\circ=?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 2α مثلثاتی نسبتونه د α له جنسه:

$$\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}=?$$

$$\cos^2 x-\sin^2 x=?$$

آیا ښودلای شئ چې:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

دی؟

$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

څرنګه چې $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ دی:

$$\cos 2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

او همدارنګه $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ دی، نو:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=\cos^2\alpha-1+\cos^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

لومړی مثال: که $\sin\theta=\frac{4}{5}$ او د θ دویمه ضلع په دویمه ناحیه (ربع) کې واقع وي، $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیدا کړئ.

حل: $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$ (د θ دویمه ضلع په دویمه ربع کې ده).

$$\cos\theta=-\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\sqrt{\frac{25-16}{25}}=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2(\frac{4}{5})(-\frac{3}{5}) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (\frac{-3}{5})^2 - (\frac{4}{5})^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{-\frac{24}{25}}{\frac{-7}{25}} = \frac{24}{7}$$

فعالیت

که $\cos\alpha = \frac{4}{5}$، وي او د α دویمه ضلع په لومړی ربع کې پرته وي، $\tan 2\alpha$ پیدا کړئ.

او که $\sin\beta = \frac{12}{13}$ او د β دویمه ضلع په دویمه ربع کې وي $\sin 2\beta$ پیدا کړئ.

دویم مثال: د 60° زاویې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه د 120° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin 120^\circ = 2\sin 60^\circ\cos 60^\circ = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 120^\circ = \cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ = (\frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \Rightarrow \tan 120^\circ = \frac{2\tan 60^\circ}{1-\tan^2 60^\circ} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}$$

په همدې ډول:

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

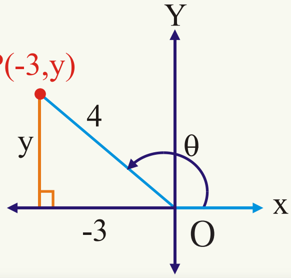
$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \quad , \quad \tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

دریم مثال: که $90° < \theta < 180°$ او $\cos\theta = -\frac{3}{4}$ وي، د $\cos 2\theta$ قیمت پیدا کړئ.

حل:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$(-3)^2 + y^2 = 4^2$$
$$y = \pm\sqrt{4^2 - (-3)^2}$$
$y = \sqrt{7}$ (ځکه چې د y قیمت په دویمه ربع کې مثبت دی.)

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (-\frac{3}{4})^2 - (\frac{\sqrt{7}}{4})^2 = \frac{1}{8}$$



فعالیت

که $90° < \theta < 180°$ او $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ وي، د $\sin\frac{\theta}{2}$ قیمت پیدا کړئ.

همدارنګه کولای شو چې د $\sin\theta$، $\cos\theta$ او $\tan\theta$ قیمتونه د $\tan\frac{\theta}{2}$ له جنسه پیدا کړو:

$$\sin\theta = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}}$$

پوهېږو چې:

$$\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} = 1$$

(صورت او مخرج پر $\cos^2\frac{\theta}{2}$ وېشو:)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\theta=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}+1}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{1}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\quad,\quad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

همدارنگه کولای شو چې د θ زاويې مثلثاتي نسبتونه د 2θ زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه په لاس راوړو:

$$2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$$

$$2\cos^2\theta=1+\cos 2\theta$$

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$ يا $$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول:

$$1-2\sin^2\theta=\cos 2\theta$$
$$-2\sin^2\theta=-1+\cos 2\theta$$
$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$
$$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \quad \text{یا} \quad \sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

په نتیجه کې:

$$\tan\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}} \quad \text{یا} \quad \tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

لومړی مثال: د $30°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه د $60°$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\sin 30°=\sqrt{\frac{1-\cos 60°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$\cos 30°=\sqrt{\frac{1+\cos 60°}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30°=\sqrt{\frac{1-\cos 60°}{1+\cos 60°}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

دویم مثال: که $180°<\theta<270°$ او $\sin\theta=-\frac{2}{3}$ وي د $\cos\frac{\theta}{2}$ قیمت پیداکړئ.

حل:

$$x^2+y^2=r^2$$
$$x^2+(-2)^2=3^2 \qquad x=\pm\sqrt{3^2-(-2)^2}=-\sqrt{5}$$

(ځکه چې د x قیمت په دویمه ربع کې منفي دی) $\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{5}}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنګه چې $180° < \theta < 270°$ده، نو $\frac{180°}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{270°}{2}$ یا $90° < \theta < 135°$ ده په دې معنا چې د $\cos\frac{\theta}{2}$ علامه منفي ده.

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+(\frac{\sqrt{5}}{3})}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{\sqrt{5}}{3})} = -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{6}}$$

فعالیت

وښیاست چې: $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$ او $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ دی.

دریم مثال: **که** $\cos\theta = \frac{4}{5}$وي او د θ دویمه ضلع په لومړنی ربع کې وي $\sin\frac{\theta}{2}$، $\cos\frac{\theta}{2}$ او $\tan\frac{\theta}{2}$ قیمتونه پیداکړئ.

حل:

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم مثال: وښیاست چې $2 = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}$ دی.

حل:

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin 3\theta\cos\theta - \cos 3\theta\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin(3\theta-\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 2$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \quad ، \quad \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \qquad \tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \qquad \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

$$\tan\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د 120° زاويې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د 240° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2 - که $\sin\theta = \frac{3}{5}$ وي او د θ دويمه ضلع په لومړنی ربع کې وي، $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پيدا کړئ.

3 - که $\sin\theta = \frac{4}{5}$ وي او د θ دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي $\cos\theta/2$ پيدا کړئ.

4 - $\sin\frac{\pi}{12}$ د $\sin\frac{\pi}{6}$ له جنسه پيدا کړئ.

5 - که $\sin\theta = \frac{12}{13}$ وي او د θ دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي، $\sin\theta/2$ او $\tan\theta/2$ پيدا کړئ.

6 - د 15° زاويې مثلثاتي نسبتونه د 30° زاويې له جنسه پيدا کړئ.

7 - که $\sin\beta = \frac{12}{13}$ وي او د β دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي، د $\sin 2\beta$ قيمت مساوی دی په:

a) $\frac{120}{169}$ b) $-\frac{120}{169}$ c) $= -\frac{169}{120}$ d) درې واړه سم نه دي

8 - $\frac{\cos 3\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = ?$

a) 2 b) 1 c) -2 d) -1

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 3α زاويي مثلثاتي نسبتونه د α زاويي د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$4\cos^3 45^\circ - 3\cos 45^\circ = ?$$

آيا ښودلای شئ چې دا رابطه

$$\cos 90^\circ = 4\cos^3 30^\circ - 3\cos 30^\circ$$

سمه ده؟

ثرنګه چې:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha$$

$$\sin 3\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \qquad (\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \qquad (\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha)$$

$$= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$$

$$\boxed{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}$$

لومړي مثال: $\sin 180^\circ$ د $\sin 60^\circ$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\sin 180^\circ = 3\sin 60^\circ - 4\sin^3 60^\circ = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{12\sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

ثرنګه چې:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha$$

$$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha$$

$$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)\quad(\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha)$$

$$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha$$

$$\boxed{\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}$$

فعالیت

$\cos270^\circ$ د $\cos90^\circ$ له جنسه پیدا کړئ.

دویم مثال: $\cos180^\circ$ د $\cos60^\circ$ له جنسه پیدا کړئ.

حل:

$$\cos180^\circ=4\cos^3 60^\circ-3\cos60^\circ=4(\frac{1}{2})^3-3\cdot\frac{1}{2}=4\cdot\frac{1}{8}-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$$

د $\tan3\propto$ پیدا کول:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan3\alpha=\tan(2\alpha+\alpha)=\frac{\tan2\alpha+\tan\alpha}{1-\tan2\alpha\cdot\tan\alpha}=\frac{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\tan\alpha}{1-\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cdot\tan\alpha}$$

$$=\frac{\frac{2\tan\alpha+\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{\frac{1-\tan^2\alpha-2\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}}=\frac{2\tan\alpha+\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha-2\tan^2\alpha}=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

دریم مثال: $\tan135^\circ$ د $\tan45^\circ$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\tan135^\circ=\frac{3\tan45^\circ-\tan^3 45^\circ}{1-3\tan^2 45^\circ}=\frac{3\cdot1-1}{1-3\cdot1}=\frac{2}{-2}=-1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم مثال: وښیاست چې $4\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta)=\sin 3\theta$

حل:

$$4\sin\theta(\sin 60^\circ\cos\theta-\cos 60^\circ\sin\theta)(\sin 60^\circ\cos\theta+\cos 60^\circ\sin\theta)$$

$$=4\sin\theta(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta)(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta)$$

$$=4\sin\theta(\frac{3}{4}\cos^2\theta-\frac{1}{4}\sin^2\theta)=\sin\theta(3\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$\text{Sin}\,\theta[3(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta]=\sin\theta\cdot 3-3\sin^3\theta-\sin^3\theta$$

$$=3\sin\theta-4\sin^3\theta=\sin 3\theta$$

د $(\alpha+\beta+\square)$ **مثلثاتي نسبتونه**:

$$\sin(\alpha+\beta+\square)=\sin[\alpha+(\beta+\square)]=\sin\alpha\cos(\beta+\square)+\cos\alpha\sin(\beta+\square)$$

$$=\sin\alpha(\cos\beta\cos\square-\sin\beta\sin\square)+\cos\alpha(\sin\beta\cos\square+\cos\beta\sin\square)$$

$$\boxed{=\sin\alpha\cos\beta\cos\square-\sin\alpha\sin\beta\sin\square+\sin\beta\cos\alpha\cos\square+\sin\square\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\cos[\alpha+(\beta+\square)]=\cos\alpha\cos(\beta+\square)-\sin\alpha\sin(\beta+\square)$$

$$=\cos\alpha(\cos\beta\cos\square-\sin\beta\sin\square)-\sin\alpha(\sin\beta\cos\square+\cos\beta\sin\square)$$

$$\boxed{=\cos\alpha\cos\beta\cos\square-\cos\alpha\sin\beta\sin\square-\cos\square\sin\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\alpha\sin\square}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\square)=\tan[\alpha+(\beta+\square)]=\frac{\tan\alpha+\tan(\beta+\square)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(\beta+\square)}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\square)=\frac{\tan\alpha+\dfrac{\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\tan\square}}{1-\tan\alpha\dfrac{\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\cdot\tan\square}}$$

$$=\frac{\dfrac{\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta\tan\square+\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\tan\square}}{\dfrac{1-\tan\beta\tan\square-\tan\alpha\tan\beta-\tan\alpha\cdot\tan\square}{1-\tan\beta\cdot\tan\square}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\square+\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\square}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta-\tan\beta\tan\square+\tan\alpha\tan\square}$$

پنځم مثال: $\sin 135^\circ$ د $\sin(30^\circ+45^\circ+60^\circ)$ له جنسه په لاس راوړئ.

حـل

:

$$\sin 135^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ+60^\circ)=\sin 30^\circ\cos 45^\circ\cos 60^\circ$$
$$-\sin 30^\circ\sin 45^\circ\sin 60^\circ+\sin 45^\circ\cos 30^\circ co60^\circ+\sin 60^\circ\cos 30^\circ\cos 45^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{6}}{8}+\frac{\sqrt{6}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{8}=\frac{4\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پوښتنې

1- $\sin 90^\circ$ ، $\cos 90^\circ$ او $\tan 90^\circ$ په ترتیب سره د $\sin 30^\circ$ ، $\cos 30^\circ$ او $\tan 30^\circ$ له جنسه پیداکړئ.

2- $\cos 135^\circ$ او $\tan 135^\circ$ پیداکړئ. $(135^\circ=(30^\circ+45^\circ+60^\circ)$

3- $8\cos^3\theta-6\cos\theta=?$

a) $\cos 3\theta$ b) $2\cos 3\theta$ c) $-2\cos 3\theta$

4 – $\mathrm{Cos}(\hat{A}-\hat{B}+\hat{C})$ د $\hat{A}$, $\hat{B}$ او $\hat{C}$ زاویو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه پیداکړئ.

5- وښیاست چې:

$$4\cos x\cos(60^\circ-x)\cos(60^\circ+x)=\cos 3x$$
$$\tan x\tan(60^\circ-x)\tan(60^\circ+x)=\tan 3x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل بدلول د ضرب دحاصل په شکل

$$\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = ?$$
$$\tan 45^\circ + \tan 60^\circ = ?$$

آیا د $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ$ قیمت پیدا کولای شئ؟

څرنګه چې پوهیږو:

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \ldots (I)$$
$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \ldots (II)$$

که $A+B=P$ او $A-B=q$ فرض کړو او (I) او (II) رابطې سره جمع کړو، نولرو چې:

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cos B$$

$$\begin{aligned} A+B&=p \\ A-B&=q \\ \hline 2A&=P+q \\ A&=\frac{P+q}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A+B&=p \\ -A \mp B&=-q \\ \hline 2B&=P-q \\ B&=\frac{P-q}{2} \end{aligned}$$

په نتیجه کې لرو چې:

$$\boxed{\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

که له I رابطې څخه II رابطه تفریق کړو، نو لرو چې:

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \sin B$$

$$\boxed{\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول:

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B....III$$
$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B....IV$$

که III رابطه د IV سره جمع کړو، لرو چې:

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$$

$$\boxed{\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

که له III رابطې څخه IV رابطه تفریق کړو، نو:

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

فعالیت

د $\sin 60°+\sin 30°$ او $\cos 60°+\cos 30°$ قیمتونه پیدا کړئ.

$$\tan p+\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q+\cos p\sin q}{\cos p\cos q}=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$$
$$\tan p-\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}-\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q-\cos p\sin q}{\cos p\cos q}=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$$

لومړی مثال(a): وښیاست چې $\frac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\tan 5\theta$

$$\frac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\frac{2\sin\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}{2\cos\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}=\frac{\sin 5\theta\cos 2\theta}{\cos 5\theta\cos 2\theta}=\tan 5\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b: وښیاست چې $\sin 3x + \sin x = 2\cdot\sin 2x\cdot\cos x$ دی:

حل:
$$\sin 3x + \sin x = 2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2} = 2\cdot\sin 2x\cdot\cos x$$

فعالیت

وښیاست چې $\cot p + \cot q = \dfrac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$ او $\cot p - \cot q = \dfrac{\sin(q-p)}{\sin p\sin q}$

دویم مثال: وښیاست چې: $\dfrac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \tan(\beta-\theta)$ او

$$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2\sin 3\theta\sin\theta$$

حل:
$$\frac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \frac{-2\sin\frac{2\theta+2\beta}{2}\sin\frac{2\theta-2\beta}{2}}{2\sin\frac{2\theta+2\beta}{2}\cos\frac{2\theta-2\beta}{2}} = \frac{-2\sin(\theta+\beta)\sin(\theta-\beta)}{2\sin(\theta+\beta)\cos(\theta-\beta)}$$

$$= -\frac{\sin(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\beta)} = -\tan(\theta-\beta) = \tan(\beta-\theta)$$

$$\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2\sin\frac{4\theta+2\theta}{2}\sin\frac{4\theta-2\theta}{2} = -2\sin 3\theta\sin\theta$$

د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول په جمع او یا تفاضل باندې:

خرنګه چې: $A+B=P$ ، $A-B=q$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

یا

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$$

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$\boxed{\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B) + \sin(A-B)]}$$

خرنګه چې: $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو:

$$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$$

$$\boxed{\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]}$$

څرنګه چې:

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$$

نو:

$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$

$$\boxed{\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]}$$

څرنګه چې:

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$$

نو:

$$-2\sin A\sin B=\cos(A+B)-\cos(A-B)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin A\sin B&=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)\\&=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]\end{aligned}}$$

لومړی مثال: وښیاست چې:

a: $\dfrac{\sin 8x+\sin 5x+\sin 2x}{\cos 8x+\cos 5x+\cos 2x}=\tan 5x$

b: $\cos 75°-\cos 15°=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

د a حل:

$$=\frac{2\sin\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2}+\sin 5x}{2\cos\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2}+\cos 5x}$$

$$=\frac{2\sin 5x\cos 3x+\sin 5x}{2\cos 5x\cos 3x+\cos 5x}=\frac{\sin 5x(2\cos 3x+1)}{\cos 5x(2\cos 3x+1)}=\tan 5x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د b حل:

$$\cos 75^\circ - \cos 15^\circ = -2\cdot\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\sin\frac{75^\circ-15^\circ}{2} = -2\sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= -2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

دويم مثال: د جمعي يا تفاضل شکل ته يې واړوئ.

$$2\cos 95^\circ \sin 13^\circ = \sin(95^\circ+13^\circ) - \sin(95^\circ-13^\circ) = \sin 108^\circ - \sin 82^\circ$$

$$\cos 38^\circ \cos 61^\circ = \frac{1}{2}[\cos(38^\circ+61^\circ) + \cos(38^\circ-61^\circ)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 99^\circ + \cos(-23^\circ)] = \frac{1}{2}[\cos 99^\circ + \cos 23^\circ]$$

$$\cos(x+\frac{\pi}{4})\cos(x-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}[\cos 2x + \cos\frac{\pi}{2}] = \frac{1}{2}\cos 2x$$

دريم مثال:

$$\cos 34^\circ \sin 28^\circ = \frac{1}{2}[\sin(34^\circ+28^\circ) - \sin(34^\circ-28^\circ)] = \frac{1}{2}(\sin 62^\circ - \sin 6^\circ)$$

$$2\cos 45^\circ \cos 15^\circ = \cos(45^\circ+15^\circ) + \cos(45^\circ-15^\circ) = \cos 60^\circ + \cos 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 10\theta \cos 4\theta = \frac{1}{2}[\sin(10\theta+4\theta) + \sin(10\theta-4\theta)] = \frac{1}{2}(\sin 14\theta + \sin 6\theta)$$

څلورم مثال: وښياست چې: $\frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] = \cos x \cos y$

حل:

$$\frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] = \frac{1}{2}[(\cos x\cos y - \sin x \sin y)$$

$$+ (\cos x \cos y + \sin x \sin y)] = \frac{1}{2}[(\cos x\cos y + \cos x \cos y)]$$

$$= \frac{1}{2}(2\cos x \cos y) = \cos x \cos y$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: وښیاست چې: $\frac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}=\tan 2\theta$

حل:

$$\frac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}=\frac{\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 7\theta)-\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 3\theta)}{\frac{1}{2}(\cos 3\theta+\cos\theta)+\frac{1}{2}(\cos 7\theta-\cos\theta)}$$

$$=\frac{\sin 7\theta-\sin 3\theta}{\cos 3\theta+\cos 7\theta}=\frac{2\cos 5\theta\sin 2\theta}{2\cos 5\theta\cos(-2\theta)}=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\tan 2\theta$$

$$\sin A+\sin B=2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\tan A+\tan B=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}\qquad \tan A-\tan B=\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}$$

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\text{Sin}A\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-(\cos A-B)]=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- وښیاست چې:

$$\frac{\cos 37^\circ + \sin 37^\circ}{\cos 37^\circ - \sin 37^\circ} = \cot 8^\circ$$

2- د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب حاصل د جمعي یا تفاضل شکل ته واړوئ.

$\sin 5x \cos 8x$ $\sin 3\theta \cos 5\theta$ $\cos 30^\circ \cos 60^\circ$

$\sin 32^\circ \cdot \cos 24^\circ$ $\cos 5x \sin 8x$ $\cos 7\theta \sin 5\theta$

$\sin 88^\circ \sin 12^\circ$ $2\sin 60^\circ \cdot \sin 20^\circ$

$2\cos 8\theta \cdot \sin 4\theta$ $2\cos 75\alpha \cdot \sin 25\alpha$ $\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}$

3- د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د جمعي او تفریق حاصل، ضرب ته واړوئ.

$\cos 56^\circ + \cos 22^\circ$ $\sin 84^\circ - \sin 76^\circ$ $\sin 94^\circ - \sin 86^\circ$

$\cos 86^\circ + \cos 22^\circ$ $\cos 84^\circ - \cos 76^\circ$ $\sin 8\theta + \sin 4\theta$

$\cos 95^\circ - \cos 41^\circ$ $\sin\frac{P+Q}{2} - \sin\frac{P-Q}{2}$ $\sin\frac{5x}{3} - \sin\frac{5x}{6}$

$\cos\frac{3A}{4} + \cos\frac{4A}{3}$ $\cos 84^\circ + \cos 76^\circ$ $\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}$

4- وښیاست چې:

$$\frac{\sin 4A - \sin 2A}{\cos 4A + \cos 2A} = \tan A \quad , \quad \frac{\cos\beta + \cos 9\beta}{\sin\beta + \sin 9\beta} = \cot 5\beta$$

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$$

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$$

5- که $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ وي، (دیو مثلث د داخلي زاویو مجموعه) وښیاست چې:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- وښياست چې:

$$\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ = 0$$

-7

$$\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ = ?$$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

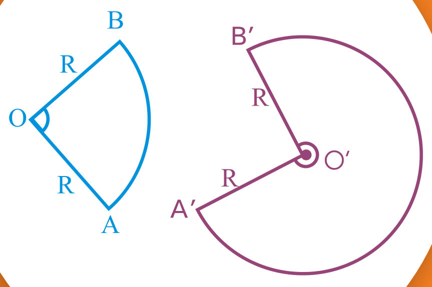
8- د جمعې یا تفاضل د فورمولونو په واسطه وښياست چې:

$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta \qquad \cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$$

$$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta \qquad \sin(270^\circ + \theta) = -\cos\theta$$

$$\cos(270^\circ + \theta) = \sin\theta \qquad \cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د قوس اوږدوالی
(Arc length)

که دیوې دایرې شعاع 5cm وي، د دې دایرې د $45°$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی به څو cm وي؟

که د دووقوسونو شعاع ګانې سره مساوي وي، د دې دوو قوسونو اوږدوالی د راډیان په حساب د قوس له مقدار سره متناسب دی، لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{mAB} = \frac{\overset{\frown}{A'B'}}{m\overset{\frown}{A'B'}}$$

چې $m\ \overset{\frown}{AB}$ او $m\ A'B'$ ددې دواړو قوسونو مقدار د راډیان په حساب دي. که د قوس مقدار دوه چنده شي، د قوس اوږدوالی هم دوه چنده کېږي.
که د یو قوس مقدار $\theta°$ او شعاع یې R وي، د $\theta°$ د زاویې د مقابل اږدوالی L او د دایرې محیط C وي، نو لرو چې:

$$\frac{L}{\theta°} = \frac{C}{360°}$$

څرنګه چې د دایرې محیط $C = 2\pi R$ دی، نو:

$$\frac{L}{\theta^{\circ}} = \frac{2\pi R}{360^{\circ}} \Rightarrow L = \frac{\theta^{\circ}}{180^{\circ}}\pi R$$

باید پام مو وي، که د قوس یا θ مقدار د راډیان په حساب وي، نو $L = R\theta$ کېږي.

لومړی مثال: د $45°$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی پیدا کړئ، که د دایرې شعاع 14cm وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$L=\frac{45^{\circ}}{180^{\circ}}\cdot\pi\cdot 14cm=\frac{14}{4}\pi cm\approx\frac{14}{4}\cdot\frac{22}{7}cm=11cm$$

دويم مثال: د $\frac{\pi}{4}$ مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی پيدا کړئ، که د دايرې شــعاع 14cm وي.

$$L=R\theta$$

$$L=14cm\frac{\pi}{4}\approx 14cm\cdot\frac{22}{7}\cdot\frac{1}{4}=11cm$$

دريــم مثال: که په يوه دايره کې، د 45° مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی $3\pi cm$ وي، د دې دايرې شعاع پيدا کړئ.

حل: څرنگه چې $45^{\circ}=\frac{\pi}{4}$ radian، نو:

$$L=R\theta$$

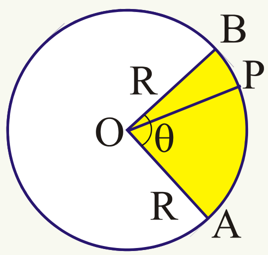
$$R=\frac{L}{\theta}=\frac{3\pi cm}{\frac{\pi}{4}}=3\pi\cdot\frac{4}{\pi}=12cm$$

د يــوې دايرې قطاع (Sector of a circle): د يوې دايرې د $\overset{\frown}{AB}$ قوس چې د دايرې مرکز O او شعاع يې R ده، په پام کې نيسو، د $\overline{OP}$ د ټولو خطونو مجموعې ته چې P د $\overset{\frown}{AB}$ د قوس يوه نقطه ده، قطاع ويل کېږي.

که د $\overset{\frown}{AB}$ قوس اندازه θ راډيان وي، θ ته د قطاع زاويه وايي.

يا قطاع په دې ډول هم تعريفولای شو:

د يوې دايرې د سطحې هغه برخه چې د دايرې د دوو شعاعگانو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کېږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د قطاع د مساحت پیدا کول: که د دایرې شعاع R وي، د دې دایرې د θ راډیان د قطاع مساحت مساوي دی په: $S=\frac{1}{2}R^2\theta$ چې S د قطاع مساحت او R د دایرې شعاع ده، ځکه چې:

$$\begin{matrix} 2\pi^R & \square R^2 \\ \theta^R & S \end{matrix}\Bigg\}\Rightarrow S=\frac{\pi R^2\cdot\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}R^2\theta$$

او یاکه د θ زاویه د درجې په حساب وي.

$$\begin{matrix} 360^\circ & \pi R^2 \\ \theta^\circ & S \end{matrix}\Bigg\}\Rightarrow S=\pi R^2\frac{\theta}{360^\circ}$$

لومړی مثال: که د یوې دایرې شعاع $10cm$ وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پیدا کړئ چې د قطاع زاویه یې $\theta=90^\circ$ وي.

حل: څرنګه چې $\text{Radian}\ \frac{\pi}{2}=90^\circ$ دی:

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta$$

$$S=\frac{1}{2}(10cm)^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\cdot 100cm^2\cdot\frac{\pi}{2}=25\pi cm^2$$

دویم مثال: که د یوې دایرې شعاع $10cm$ وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پیدا کړئ چې د قطاع زاویه یې $\theta=72^\circ$ وي.

حل:

$$72^\circ=72\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{2\pi}{5}\ \text{Radian}$$

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta=\frac{1}{2}\cdot 100cm^2\cdot\frac{2\pi}{5}=20\pi\, cm^2$$

دریم مثال: که د دایرې شعاع $6cm$ او د دې دایرې د یوې قطاع مساحت $15\pi cm^2$ وي. د قطاع د قوس اوږداولی پیدا کړئ.

حل:

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta \quad \text{یا} \quad 15\pi cm^2=\frac{1}{2}(6cm)^2\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$15\pi cm^2 = 18\theta$$

$$\theta = \frac{15\pi}{18} = \frac{5\pi}{6} \text{ Radian}$$

طول قوس $L = R\theta = 6cm\frac{5\pi}{6} = 5\pi cm = 5\cdot 3{,}14cm \approx 15{,}7cm$

څلورم مثال: یوه دایره چې $7cm$ شــعاع لري، ددې دایرې محیط، مســاحت او د $60°$ مرکزي زاویــې د مقابــل قــوس اوږدوالی یې پیــدا کړئ او هم ددې دایــرې د قطاع مســاحت پیدا کړئ چې $\theta = 60°$ وي.

حل: څرنگه چې $60° = \frac{\pi}{3}$ Radian دی، نو:

$$C = 2\pi R \approx 2\cdot\frac{22}{7}\cdot 7cm = 44cm \ , \ A = \pi R^2 \approx \frac{22}{7}\cdot 49cm^2 = 154cm^2$$

$$L = R\theta = 7\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}cm \qquad , \ A = \frac{1}{2}R^2\theta = \frac{1}{2}\cdot 49cm^2\cdot\frac{\pi}{3} \approx 25.6cm^2$$

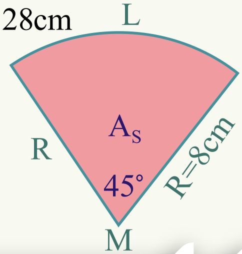
پنځم مثال: که د یوې دایرې شعاع $8cm$ او د قطاع زاویه یې $45°$ وي، د قطاع مساحت، د قطاع د مقابل قوس اوږدوالی او ددې قطاع محیط پیدا کړئ.

حل:

د قطاع مساحت $A_s = \pi R^2\frac{\theta}{360°} = (8cm)^2(3{,}14)\cdot\frac{45°}{360°} \approx 25{,}12cm$

د قطاع مقابل قوس $L = 2\pi R\frac{\theta}{360°} = 2\cdot 8cm\cdot 3.14\cdot\frac{45°}{360°} \approx 6.28cm$

د قطاع محیط $= 2\pi R\frac{\theta}{360°} + 2R = 6.28cm + 2\cdot 8cm \approx 22.28cm$



فعالیت

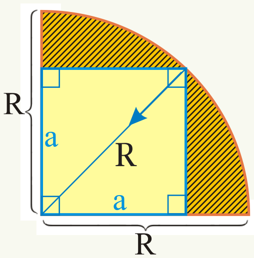
که د دایرې شعاع $10cm$ وي، د هغه قطاعگانو مساحت پیدا کړئ چې د قوس اندازه یې $180°$، $216°$ او $324°$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم مثال: د لاندې شکل په شان په $90°$ قطاع کې د R په شعاع مربع محاط شوې ده، د خط شوې برخې مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دایرې شعاع R ده، د دایرې په څلورمه برخه کې د مربع قطر $d = R = a\sqrt{2}$ دی، که a د مربع ضلع وي، نو د مربع یوه ضلع $a = \frac{R}{\sqrt{2}}$ او د مربع مساحت $S = \frac{R^2}{2}$

دی، څرنګه چې د دایرې د څلورمې برخې مساحت $\frac{1}{4}\pi R^2$ دی.

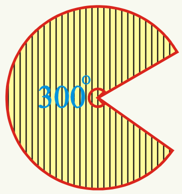


نو د خط شوې برخې مساحت مساوي دی په: $\frac{1}{4}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 = \frac{R^2}{4}(\pi - 2)$

اووم مثال: په شکل کې د دایرې قطاع چې شعاع یې $1cm$ او مرکزي زاویه یې $300°$ ده. د دې شکل محیط څو سانتي متره کېږي؟

$360°$ $2\pi R$

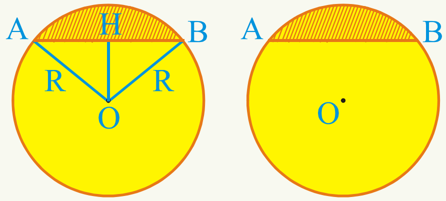
$300°$ x $x = \frac{300° \cdot 2\pi R}{360°} = \frac{5\pi R}{3}cm$



د دې شکل محیط $= (\frac{5}{3}\pi R + 2)cm$

د دایرې قطعه (Segment of a circle): د دایرې د سطحې یوې برخې ته چې د قوس او مقابل وتر تر منځ واقع وي، قطعه وایي.

د دایرې قطعه د قطعې د قوس په حساب $\overset{\frown}{AB}$ ښودل کېږي. د مثال په ډول که د قوس $\frac{\pi}{6}$ راډیان وي، قطعې ته هم $\frac{\pi}{6}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

راډیان وایي.

د قطعې مساحت: د θ راډیان د قطعې مساحت چې د دایرې شعاع R وي، مساوي دی، په:

$$S=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$$

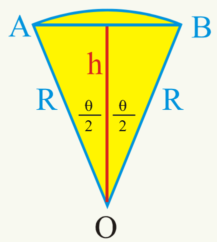
ځکه که د AB قوس θ راډیان وي او د O نقطه د A او B له نقطو سره ونښلوو، نو لرو چې:

د AOB د مثلث مساحت - د AOB د قطاع مساحت = د قطعې مساحت

$S_{\overset{\Delta}{AOB}}$ د مثلث مساحت $-$ S_{OAB} د قطاع مساحت $=S$ د قطعې مساحت

په لاندې شکل کې لیدل کیږي چې د $A\overset{\Delta}{O}B$ مثلث متساوي الساقین دی، نو په دې اساس:

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{h}{R}$$



ارتفاع $h=R\cos\frac{\theta}{2}$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\frac{AB}{2}}{R}$$

د مثلث قاعده: $AB=2R\sin\frac{\theta}{2}$

$$\text{د } A\overset{\Delta}{O}B \text{ مثلث مساحت}=\frac{\text{قاعده . ارتفاع}}{2}=\frac{h\cdot AB}{2}$$

څرنګه چې $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ دی.

په نتیجه کې: $$\text{مثلث مساحت}=\frac{R\cos\frac{\theta}{2}\cdot 2R\sin\frac{\theta}{2}}{2}=\frac{R^2\sin\theta}{2}=\frac{1}{2}R^2\sin\theta$$

څرنګه چې $\frac{R^2\sin\theta}{2}=S_{OAB}$ د مثلث مساحت او د قطاع مساحت $A_s=\frac{1}{2}R^2\theta$ دی.

نو:

$$\text{د قطعې مساحت } S=\frac{1}{2}R^2\theta-\frac{1}{2}R^2\sin\theta=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$$

لومړی مثال: د پورته شکل په شان که د یوې دایرې شعاع $R=6.8\text{cm}$ وي او د دې دایرې د یوې قطاع زاویه $\theta=71^\circ$ وي، د قطاع مساحت، د ABO د مثلث مساحت او د دې دایرې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

قطعي مساحت پیدا کړئ.

حل:

$R = 6{,}8cm$

$\theta = 71°$

د قطاع مساحت $A = \pi R^2 \dfrac{\theta}{360°} = (6.8cm)^2 \cdot 3.14 \dfrac{71°}{360°} \approx 28.64cm^2$

د مثلث ارتفاع $h = R\cos\dfrac{\theta}{2} = 6.8cm \cdot \cos\dfrac{71°}{2} \approx 5.54cm$

$\cos 35°30' = 0.8141$

د مثلث قاعده $b = 2 \cdot R\sin\dfrac{\theta}{2} = 2 \cdot 6.8cm \cdot \sin\dfrac{71°}{2} \approx 7.9cm$

$\sin 35°30' = 0.5807$

د مثلث مساحت $A = \dfrac{1}{2}R^2\sin\theta = \dfrac{1}{2}(6.8cm)^2 \cdot \sin 71° \approx 21.96cm^2$

$\sin 71° = 0.9455$

د مثلث مساحت - د قطاع مساحت = د قطعي مساحت

د قطعي مساحت $= 28{,}64cm^2 - 21{,}96cm^2 = 6{,}68cm^2$

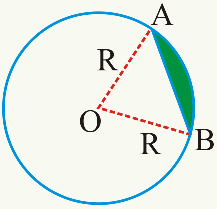
دویم مثال: د هغه قطعي مساحت پیدا کړئ چې شعاع یې R او قوس یې $\overset{\frown}{AB}$ وي، که: $\overset{\frown}{AB} = 60°$, $R = 12cm$ وي.

حل: خرنګه چې $60° = \dfrac{\pi^R}{3}$ دی، نو:

$$S = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2}(12cm)^2(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \cdot 144cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= 72cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 24\pi\, cm^2 - 36\sqrt{3}\, cm^2 = (24\pi - 36\sqrt{3})cm^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

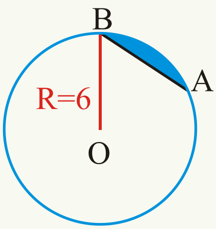


فعاليت

د هغې دايرې د قطعې مساحت پيدا کړئ چې شعاع يې 6cm او $\overset{\frown}{AB} = 120°$ قوس وي.

دريم مثال: د هغه قطعې مساحت پيدا کړئ چې د 6cm وتر په واسطه جلا شوی وي او د دايرې شعاع هم 6cm وي.

حل: ځرنګه چې د قطعې قوس $\frac{\pi}{3}$ راډيانه دی:



$$S = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2}(6cm)^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$= 18cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = (6\pi - 9\sqrt{3})cm^2$$

$$\approx 6(3.14)cm^2 - 9(1.73)cm^2 = 3.27cm^2$$

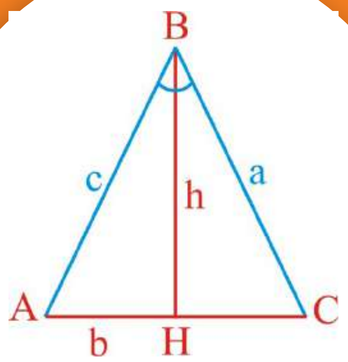
پوښتنې

1- د هغې قطاع مساحت پيدا کړئ چې د $\frac{\pi}{6}$ راډيان مرکزي زاويې په مقابل کې واقع وي، که د دايرې شعاع 20cm وي.

2- د هغې قطاع اړونده مرکزي زاويه پيدا کړئ چې مساحت يې $55.5cm^2$ او د دايرې شعاع 12cm وي.

3- که د يوې دايرې شعاع 10m وي، د هغو قوسونو اوږدوالی پيدا کړئ چې د 3,8 راډيان او 27 راډيانه مرکزي زاويو په مقابل کې واقع وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د مثلث د مساحت پيدا کول د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو تر منځ د زاويې له جنسه:

که په يوه مثلث کې د دوو ضلعو اوږدوالی $4cm$ او $8cm$ وي او ددې ضلعو تر منځ زاويه $30°$ وي آيا ددې مثلث مساحت پيدا کولای شئ؟

د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث په پام کې نيسو او د B له راس څخه د $\overline{BH}$ ارتفاع د $\overline{AC}$ پر ضلع باندې رسموو:

څرنګه چې $\sin A = \frac{BH}{c} = \frac{h}{c}$ دی، په نتيجه کې $h = c\sin A$ کيږي له هندسې څخه پوهيږو

چې د يوه مثلث مساحت($S = \frac{\text{ارتفاع . قاعده}}{2}$) دی.

$$S_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc\sin A \qquad (h = c\sin A)$$

فعاليت

د پورتني مثلث د A او C له رأسونو څخه ارتفاع ګانې رسم کړئ او وښياست چې:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab\sin C$ او $S_{ABC} = \frac{1}{2} ac\sin B$ دی.

لومړی مثال: د هغه مثلث مساحت پيدا کړئ چې د دوو ضلعو اوږدوالی يې $a = 3{,}5cm$ او $c = 6cm$ او د دواړو ضلعو ترمنځ زاويه يې $B = 47{,}5°$ وي.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A = \frac{1}{2} ac \sin B$$

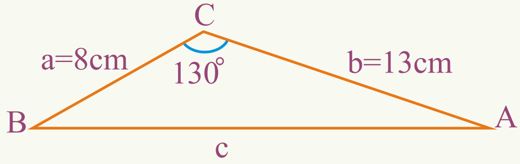
$$\sin 47.5^\circ = 0.73727733$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3{,}5cm \cdot 6cm \cdot \sin 47{,}5^\circ \approx 7{,}74cm^2$$

دويم مثال: د لاندې شکل د مثلث مساحت پيدا کړئ.

حل:

$$A = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2}(8)(13)\sin 130^\circ \approx 39.83\,cm^2$$

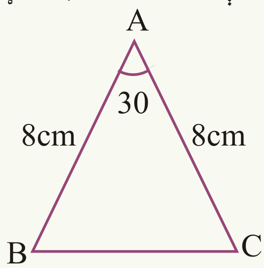


$(\sin 130^\circ = 0.7660)$

دريم مثال: د $\overset{\Delta}{ABC}$ په متساوي الساقين مثلث کې $\overline{AB} = \overline{AC} = 8cm$ او $A = 30^\circ$ ده، ددې مثلث مساحت پيدا کړئ.

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin 30^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 16\,cm^2$$



د مثلث د مساحت پيدا کول د دريو ضلعو له جنسه (د هيرون فورمول)

ددې کار لپاره د يوې زاويې د نيمايي د sin، د مثلث د ضلعو د اوږدوالي له جنسه په لاس راوړو:

د ABC په هر مثلث کې لاندې اړيکې صدق کوي.

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}, \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

چې a, b, c د مثلث ضلعې او p د مثلث د محيط نيمايي ده $(p = \frac{a+b+c}{2})$ په تيرو لوستو کې مولوستل چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}\ \square\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos B}{2}}\ \square\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{2}}$$

په هر مثلث کې $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ چې دا رابطه د $\cos ine$ د قضيې په نوم يادېږي، دلته د دې رابطې له ثبوت څخه صرف نظر کوو او په خپل وخت کې به وروسته ثبوت شي، د $\cos A$ پر ځای يې قيمت وضع کوو.

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}$$

خرنګه چې: $a+b+c=2p$ دی.

$$a-b+c=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b)$$
$$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c)$$

د $(a-b+c)$ او $(a+b-c)$ قيمتونه وضع کوو، نو لرو چې:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2(p-b)2(p-c)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

فعاليت

په همدې ډول وښياست چې:

$\sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{ac}}$, $\sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{ab}}$ وي.

په همدې ډول کولای شو چې د مثلث د ضلعو له جنسه د يوې زاويې نيمايي $\cos ine$ په لاس راوړو:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\ \square\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\ \square\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: خرنگه چې $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ دی.

د $\cos A$ قیمت وضع کوو:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{1+\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

$$b+c+a-2a=2p-2a$$

$$b+c-a=2p-2a=2(p-a)$$

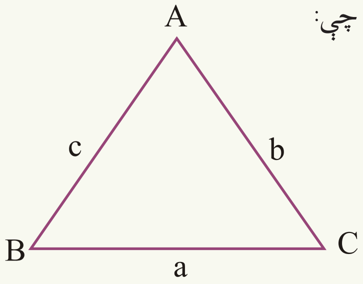
په نتیجه کې لرو چې:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

فعالیت

خرنگه چې $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ دی، وښیاست چې: $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

پوهیږو چې $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ دی که د $\sin\frac{A}{2}$ او $\cos\frac{A}{2}$ قیمتونه وضع کړو لرو چې:



$$\sin A=2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\sin A=2\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}}$$

$$\sin A=\frac{2}{bc}\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

خرنگه چې د $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$ مثلث مساحت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\ A$$

د $\sin A$ قیمت وضع کوو:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

د پورتنیو مساواتو له پرتله کولو ځخه لرو چې:

$$\sin A=\frac{2}{bc}\cdot S=\frac{2S}{bc}\quad\square\quad \sin B=\frac{2S}{ac}\quad\square\quad \sin C=\frac{2S}{ab}$$

دریم مثال: د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې په لاندې ډول راکړل شوی وي.

$a=5cm \qquad b=4cm \qquad c=3cm$

حل:

$$P=\frac{a+b+c}{2}=\frac{5cm+4cm+3cm}{2}=6cm$$
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)}$$
$$=\sqrt{6\cdot1\cdot2\cdot3}=\sqrt{36}=6\,cm^2$$

فعالیت

د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې: $b=5cm\ ,\ c=6cm$ او $a=4cm$ وي.

څلورم مثال: که د یوه مثلث ضلعې $a=18cm$، $b=24cm$ او $c=30cm$ وي. د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل

$$P=\frac{a+b+c}{2}=\frac{18+24+30}{2}=36cm$$
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$=\sqrt{36(36-18)(36-24)(36-30)}=\sqrt{36\cdot18\cdot12\cdot6}=216\ cm^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: د هغه مثلث مساحت پيدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی يې $a = 29{,}7ft$، $b = 42{,}3ft$ او $c = 38{,}4ft$ وي.

حل:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{29.7+42.3+38.4}{2} = 55{,}2ft$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{55.2(55.2-29.7)(55.2-42.3)(55.2-38.4)}$$

$$= \sqrt{55.2(25.5)(12.9)(16.8)} = 552ft^2$$

د يو مثلث د محيطي دايرې د شعاع پيدا کول:

محيطي دايره هغه دايره ده چې مثلث د دايرې په داخل کې واقع وي او دايره د مثلث په دريو واړو راسونو باندې مماس وي، او د محيطي دايرې مرکز د مثلث د دريو واړو عمودي ناصفونو د تقاطع نقطه ده.

د شکل په شان د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث د ضلعو اوږدوالی د a، b او c څخه عبارت دی چې د O ټکی چې د دايرې مرکز دی د مثلث د ضلعو د دريو واړو عمودي ناصفونو (Bisector Perpendicular) د تقاطع ټکی هم دی.

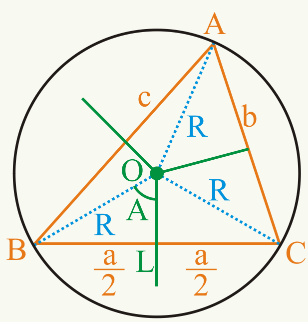
څرنګه چې د BOC مثلث متساوي الساقين دی، نو ارتفاع د $B\hat{O}C$ زاويه او د مثلث قاعده نيمايي کوي. په نتيجه کې: $\hat{A} = B\hat{O}L = L\hat{O}C$

$$\sin\hat{A} = \sin B\hat{O}L = \sin L\hat{O}C$$

څکه چې مرکزي زاويه د محيطي زاويې دوه برابره ده چې د عين قوس په مقابل کې واقع وي.

$$\sin\hat{A} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$$

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{a}{2\cdot\frac{2s}{bc}} = \frac{abc}{4s} \qquad \left(\sin A = \frac{2S}{bc}\right)$$



او د $R = \dfrac{a}{2\sin A}$ څخه لرو چې:

$$a = R\cdot 2\sin A$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \text{ یا } R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}$$

لومړی مثال: د ABC مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې ضلعې یې $a=11cm$، $b=12cm$ او $c=13cm$ وي.

حل:

$$p=\frac{11+12+13}{2}=18cm \quad , \quad R=\frac{abc}{4s}=\frac{11\cdot 12\cdot 13}{4\sqrt{18\cdot 7\cdot 6\cdot 5}}=6{,}98cm$$

فعالیت

د هغه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $18cm$، $24cm$ او $30cm$ وي.

دویم مثال: د هغه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a=3cm$ $b=5cm$ او $c=6cm$ وي.

حل:

$$R=\frac{abc}{4\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{3\cdot 5\cdot 6}{4\cdot\sqrt{7\cdot 4\cdot 2\cdot 1}}=\frac{90}{4\cdot\sqrt{56}}=\frac{45}{2\cdot\sqrt{56}}\approx 3cm$$

د یو مثلث د محاطي دایرې د شعاع پیدا کول:

د مثلث محاطي دایره هغه دایره ده چې دایره د مثلث په دننه کې واقع وي او دایره د مثلث په دننه کې د مثلث د درې واړه ضلعو سره مماس وي، د محاطي دایرې مرکزد مثلث د درې واړو ناصف الزاویو د تقاطع ټکی (O) دی.

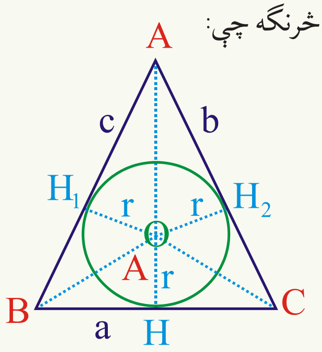
د $\overset{\Delta}{OAB}$ + د $\overset{\Delta}{OCA}$ + د $\overset{\Delta}{OBC}$ مثلثونو مساحت = د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث له مساحت سره

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr==\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}r\cdot 2p$$

$$S=r\cdot p \quad \Rightarrow r=\frac{s}{p}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنګه چې:



$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

دریم مثال: د هغه مثلث د محاطي دایرې شعاع او د محاطي دایرې مساحت پیداکړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې 7cm ، 8cm او 9cm وي.

حل

$$p=\frac{7+8+9}{2}=12cm$$

$$S=\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}=26.83cm^2$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{26.83cm^2}{12cm}=2.23cm$$

د محاطي دایرې مساحت مساوي دی، په: $=\pi r^2=\frac{22}{7}\cdot(2.23cm)^2\approx 15.6cm^2$

څلورم مثال: د یو قایم الزاویه مثلث دوه قایمې ضلعې په ترتیب سره 3cm او 4cm دي، د محیطي او محاطي دایرو شاع ګانې یې پیدا کړئ.

حل:

$$(\overline{AC})^2=(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2$$

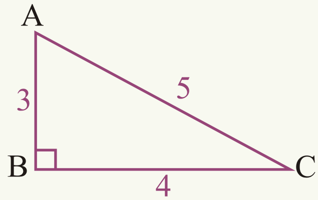
$$AC=\sqrt{9+16}=5$$

$$p=\frac{3+4+5}{2}=6cm$$

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot\sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}}=\frac{60}{4\cdot\sqrt{6\cdot3\cdot2\cdot1}}=\frac{60}{4\cdot6}=\frac{60}{24}$$

$$=\frac{5}{2}cm=2,5cm$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{6}{6}=1cm$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: د MTN په قایم الزاویه مثلث کې چې که قایمې ضلعې یې m او n راکړ شـوي وي، د دې مثلث مساحت او د محیطي دایرې شعاع یې پیدا کړئ.

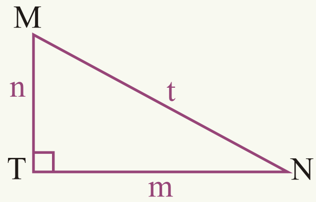
حل:

$$(\overline{MN})^2 = m^2 + n^2$$

$$t = MN = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$S = \frac{n \cdot m}{2} \ , \ R = \frac{m \cdot n \cdot t}{4S} = \frac{m \cdot n \cdot \sqrt{m^2 + n^2}}{4\frac{n\,m}{2}} = \frac{m\,n\sqrt{m^2 + n^2}}{2mn}$$

$$R = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{2}$$ محیطی دایری شعاع



فعالیت

د هغه مثلث د محاطي دایرې شعاع پیدا کړئ، که چېرې د ضلعو اوږدوالی یې 34cm ، 35cm او 36cm وي.

د متساوي الاضلاع مثلث ارتفاع، مساحت او د محیطي او محاطي دایرو د شعاع ګانو پیدا کول:

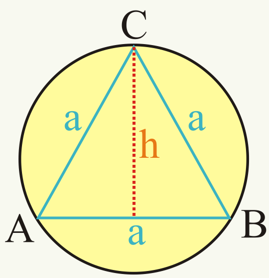
$$\sin A = \sin 60° = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

د فیثاغورث د قضیې په اساس لرو چې:

$$h^2 + (\frac{a}{2})^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

د ABC مثلث مساحت

$$S=\frac{h\cdot a}{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot a}{2}=\frac{\sqrt{3}a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{a^3}{4\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}}=\frac{a^3}{a^2\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{a}{3}\sqrt{3}$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}}{\frac{3a}{2}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{3a}=\frac{a}{6}\sqrt{3}$$

شپږم مثال: د يو متساوي الاضلاع مثلث محيط 18cm دی. د دي مثلث مساحت، ارتفاع او د محيطي او محاطي دايرو شعاع گاني پيدا کړئ.

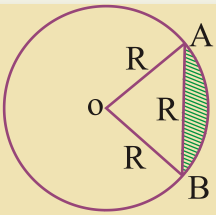
حل: د دي مثلث يوه ضلع (a) مساوي ده، په:

$$a=\frac{1}{3}\cdot 18cm=6cm$$

$$S=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=\frac{(6cm)^2}{4}\sqrt{3}=15{,}6cm^2 \qquad h=\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{6cm}{2}\sqrt{3}=5{,}2cm$$

$$R=\frac{a}{3}\sqrt{3}=\frac{6cm}{3}\sqrt{3}=3{,}5cm \qquad r=\frac{a}{6}\sqrt{3}=\frac{6cm}{6}\sqrt{3}\approx 1{,}7cm$$

پوښتني



1- د شکل مطابق د OAB مثلث متساوي الاضلاع دی چي هره ضلع يي R ده. د O په مرکز دايره رسم شوي ده چي د A او B له ټکو څخه تيريږي. د AB په وتر سره د قطعي مساحت مساوي دی په:

a) $(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4})R^2$ b) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{5})R^2$ c) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2})R^2$

d) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{2})R^2$ e) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})R^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که د یو متساوی الساقین مثلث د هر ساق اوږدوالی $6cm$ او د ساقو تر منځ زاویه یې $30°$ وي د مثلث مساحت پیدا کړئ.

3- که د یوه مثلث د دوو ضلعو اوږدوالی $5\sqrt{2}cm$ او $6cm$ وي، او دواړو ضلعو تر منځ زاویه یې $45°$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

4- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره $3cm$، $4cm$ او $5cm$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

5- د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a = 7cm$، $b = 9cm$ او $c = 12cm$ وي.

6- د هغه قایم الزاویه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ، که قایمې ضلعې یې $12cm$ او $5cm$ وي.

7- که د ABC، د متساوي الساقین مثلث قاعده $a = 8cm$ او د دې مثلث محاطي شعاع $r = 3cm$ وي. د محیطي دایرې شعاع اوږدوالی یې پیدا کړئ.

8- که د یوه قایم الزاویه مثلث مساحت $84cm^2$ وي او د یوې ارتفاع اوږدوالی یې $3,36cm$ وي، د دې مثلث د محیطي شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښرکي لنډيز

- د جمعي او تفاضل فورمولونه:

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ او $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ او $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} \qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

- د 2α د زاويې مثلثاتي نسبتونه د α د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

- د يوې زاويې مثلثاتي نسبتونه، د زاويې د دوه چند مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \ ، \ \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \ ، \ \tan\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$$

- د يوې زاويې د نيمايي مثلثاتي نسبتونه د زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \ , \ \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \ , \ \tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

- د يوې زاويې د درې چنده مثلثاتي نسبتونه د هغې زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha \quad , \quad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

- د درېو زاويو د مجموعې $(\alpha+\beta+\theta)$ مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin(\alpha+\beta+\theta)=\sin\alpha\cos\beta\cos\theta+\sin\beta\cos\alpha\cos\theta$$
$$+\sin\theta\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\theta$$

$$\cos(\alpha+\beta+\theta)=\cos\alpha\cos\beta\cos\theta-\cos\alpha\sin\beta\sin\theta$$
$$-\cos\beta\sin\alpha\sin\theta-\cos\theta\sin\alpha\sin\beta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(\alpha+\beta+\theta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\theta-\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\theta-\tan\alpha\tan\theta}$$

د ضرب فورمولونه (هغه فورمولونه چې د دوو زاويو د مجموعې يا تفاضل مثلثاتي نسبتونه په ضرب بدلوي).

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

- هغه فورمولونه چې د دوه زاويو د مثلثاتي نسبتونو ضرب د جمعې او يا د تفاضل په شکل بدلوي:

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\sin A\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)]=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

- د R په شعاع د دايرې د مرکزي زاويې (θ°) د مقابل قوس اوږدوالی مساوي دی په:

$$L=\pi R\frac{\theta^\circ}{180^\circ}$$

- د R په شعاع د دايرې مرکزي زاويې θ راډيان د مقابل قوس اوږدوالی مساوي دی په:

$$L=R\theta$$

- د دايرې د سطحې هغه برخه چې د دوو شعاعو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کېږي:
- د قطاع مساحت د ($A_{\sec tor}=\frac{1}{2}R^2\theta$) د فورمول په مرسته لاسته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

• د دايرې د سطحې هغه برخه چې د قوس او د مقابل وتر تر منځ واقع وي، قطعه بلل کېږي:

• د قطعې مساحت د $A_{Segment} = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta)$ د فورمول په مرسته پيدا کېږي:

• د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو تر منځ زاويې له جنسه د مثلث مساحت مساوي دی په:

$$S = \frac{1}{2}ac\sin B\ ,\quad S = \frac{1}{2}bc\sin A\ ,\quad S = \frac{1}{2}ab\sin C$$

• د يوې زاويې د نيمايي مثلثاتي نسبتونه د مثلث د ضلعو د اوږدوالی له جنسه:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\quad \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\quad \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{ab}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

• د مثلث مساحت د مثلث د ضلعو د اوږدوالی له جنسه:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

• د يوه مثلث د محيطي دايرې شعاع(R) مساوي دی په:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

يا $R = \frac{abc}{4S}$

• د يوه مثلث د محاطي دايرې شعاع د $r = \frac{s}{p}$ يا $r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$ فرمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1- وښیاست چې د متساوي الاضلاع مثلث مساحت $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ دی، که a د مثلث یوه ضلع وي؟

2- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a=7cm$ ، $b=8cm$ او $c=9cm$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ؟

3- د جمعې د فورمولونو په مرسته $\cos 165°$ او $\sin 165°$ پیدا کړئ؟

4- $\sin(-165°)=?$ مساوي دی په:

$a)\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\quad b)\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ $\quad c)\ \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

5- وښیاست چې: $\frac{\cos 3\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}$ دی.

6- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندېنیو زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ؟

$\sin(30°+45°)$ $\quad \cos(150°-45°)$ $\quad \tan(30°+60°)$

$\sin(135°+180°)$ $\quad \sin(135°-180°)$ $\quad \tan(180°-45°)$

7- د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندېنیو رابطو سموالی وښیاست.

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$ $\quad \cos(90°+\theta)=-\sin\theta$ $\quad \cos(90°-\theta)=\sin\theta$

$\sin(270°+\theta)=-\cos\theta$ $\quad \cos(180°-\theta)=-\cos\theta$ $\quad \sin(180°-\theta)=\sin\theta$

8- که $0°<\theta<90°$ او $\sin\theta=\frac{2}{5}$ وي، د $\cos 2\theta$ ، $\sin 2\theta$ ، $\cos\frac{\theta}{2}$ او $\sin\frac{\theta}{2}$ قیمتونه په لاس راوړئ؟

9- وښیاست چې:

$\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta$, $\quad \cos 2\theta+1=2\cos^2\theta$, $\quad \cos 2\theta+2\sin^2\theta=1$

$2\cos^2\theta-2\sin^2\theta=2\cos 2\theta$, $\quad \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\cos\theta-\sin\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

10- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره $5cm$ ، $7cm$ او $8cm$ وي، د دې مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاع گاني پیدا کړئ؟

11- $\sin(180^\circ+\theta)=?$

$a)\ \sin\theta \qquad b)\ -\cos\theta \qquad c)\ -\sin\theta \qquad d)\ \cos\theta$

12- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته وښیاست چې:

$\sec(360^\circ-\theta)=\sec\theta\ ,\quad \tan(180^\circ+\theta)=\tan\theta$ او $\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$

13- $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=?$

$a)\ 2\sin\alpha\sin\beta \qquad b)2\cos\alpha\cos\beta \qquad c)-2\sin\alpha\sin\beta$

14- وښیاست چې: $\dfrac{\sin\alpha}{\sec 4\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\csc 4\alpha}=\sin 5\alpha$ دی؟

15- لاندې د مثلثاتي نسبتونو ضرب حاصلونه د مجموعې او یا تفاضل په شکل ولیکئ؟

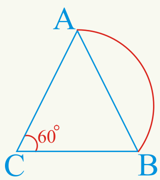
$\cos 100^\circ \sin 50^\circ \quad , \quad \cos 40^\circ \cos 60^\circ$

$\sin 8\theta \cos 10\theta \quad , \quad \sin\dfrac{3\theta}{2}\sin\dfrac{5\theta}{2}$

16- لاندې د مثلثاتي نسبتونو مجموعې او یا تفاضل د ضرب د حاصل په څېر ولیکئ؟

$\sin 80^\circ-\sin 72^\circ\ .\ \sin 12\theta+\sin 8\theta$

17- وښیاست چې: $\dfrac{\sin 5\theta+\sin 3\theta}{\cos 5\theta-\cos 3\theta}=-\cot\theta$ دی.



18- د یوې دایرې مساحت $180cm^2$ دی، ددې دایرې د 80° قطاع مساحت پیدا کړئ.

19- د شکل مطابق د 60° مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی $(1cm)$ دی. د دې قوس شعاع او د وتر اوږدوالی یې پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

-20 $\frac{\tan 60° - \tan 30°}{1 + \tan 60° \cdot \tan 30°} = ?$

$a) -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad b) \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad c) \sqrt{3}$ $\quad d) -\sqrt{3}$

-21 که $\sin\theta = \frac{3}{5}$ او د θ دویمه ضلع په لومړی ربع کې وي، $\sin 2\theta$ ، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیدا کړئ؟

-22 وښیاست چې: $\tan(45° + \theta) = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$ دی؟

-23 $\cos 37° \cos 53° - \sin 37° \sin 53°$ مساوي دی په:

$a)\ 1$ $\quad b)\ -1$ $\quad c)\ 0$ $\quad d)$ دري واړه ناسم دي

-24 $\cos 60° \cos 14° + \sin 60° \sin 14°$ مساوي دی په:

$a) \cos 74°$ $\quad b) \cos 46°$ $\quad c) \sin 74°$ $\quad d) \sin 46°$

-25 $\cos 14° \cos 31° - \sin 14° \sin 31°$ مساوي دی په:

$a) \cos 17°$ $\quad b) \cos 45°$ $\quad c) \sin 17°$ $\quad d) -\sin 17°$

-26 $\cos 80° \cos 35° + \sin 80° \sin 35°$ مساوي دی په:

$a) \cos 115°$ $\quad b) \sin 115°$ $\quad c) \cos 45°$ $\quad d) \sin 45°$

-27 که $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ ، $\sin\beta = \frac{5}{13}$ وي، α او β په لومړنی ربع کې واقع وي $\cos(\alpha - \beta)$ پیدا کړئ؟

-28 که $\cos\theta = -\frac{8}{17}$ ، $\cos \square = -\frac{3}{5}$ وي او د θ او $\square$ دویمي ضلعې په دریمه ربع کې واقع وي. $\cos(\theta - \square)$ پیدا کړئ؟

-29 وښیاست چې: $\tan x \cdot \tan y = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{\cos(x - y) + \cos(x + y)}$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-30 $\cos(0^\circ - t) = ?$

$a)\sin t$ $\quad b)\cos t$ $\quad c)-\sin t$ $\quad d)-\cos t$

-31 وښیاست چې: $\sin\theta = \dfrac{\cos\theta \cdot \sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$ دی؟

-32 وښیاست چې:

$$\frac{\cos 8x + \cos 4x}{\cos 8x - \cos 4x} = -\cot 6x \cot 2x$$

$$\frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = -\tan x \quad , \quad \frac{\sin 4x + \sin 6x}{\cos 4x - \cos 6x} = \cot x$$

$$\frac{\sin t + \sin 3t}{\cos t + \cos 3t} = \tan 2t \quad , \quad \frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x - \cos 3x} = -\cot 2x$$

-33 $\cos(x+y)\cos y + \sin(x+y)\sin y$ افاده مساوي ده په:

$a)\sin x$ $\quad b)\cos x$ $\quad c)-\sin x$ $\quad d)-\cos x$

-34 $\sin(x-y)\cos y + \cos(x-y)\sin y = ?$

$a)\sin x$ $\quad b)\cos x$ $\quad c)-\sin x$ $\quad d)-\cos x$

35 – د هغې قطاع مساحت چې شعاع یې $2m$ او مرکزي زاویه یې $0,5\ radian$ وي، مساوي ده په:

$a)\ 3m^2$ $\quad b)\ 2m^2$ $\quad c)\ 1m^2$ $\quad d)$ درې واړه سمې نه دي

36 – که د یوې دایرې د یوې قطاع مساحت 200cm^2 او مرکزي زاویه یې 2 radian وي، د دې دایرې شعاع مساوي ده په:

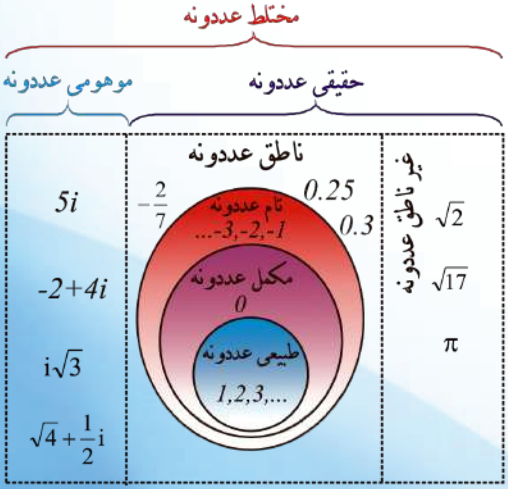
a) 14.14cm $\quad$ b) −14.14cm $\quad$ c) 14cm $\quad$ d) درې واړه غلط دي.

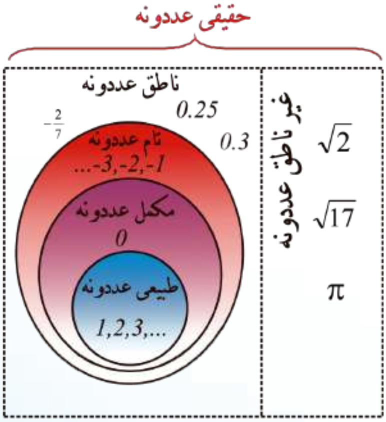
(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی

مختلط عددونه

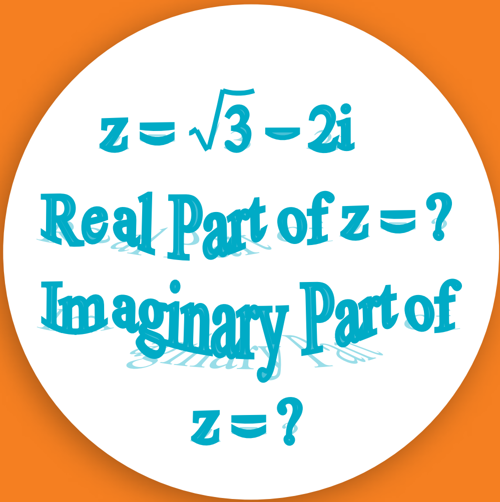
(c) ketabton.com: The Digital Library





(c) ketabton.com: The Digital Library

مختلط عددونه
(Complex Numbers)



آیا ویلای شئ چې د $x^2+9=0$ معادله ولې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري؟

آیا پوهیږئ چې د حقیقي عددونو سټ د مختلطو عددونو د سټ یو فرعي سټ دی؟

موهومي عددونه (Imaginary Numbers):

$i=\sqrt{-1}$ یا $i^2=-1$ دی د i توری له یوناني کلمې (iota) څخه اخیستل شوی دی چې $i=\sqrt{-1}$ ته، د موهومي عددونو واحد وایي.

لومړی مثال: $\sqrt{-16}$ پیدا کړئ.

حل: $\sqrt{-16}=\sqrt{(-1)\cdot 16}=\sqrt{-1}\sqrt{16}=i\sqrt{16}=\pm 4i$

دویم مثال: د $x^2+a^2=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$x^2+a^2=0$$
$$x^2=-a^2$$
$$x=\pm\sqrt{-a^2}=\pm\sqrt{(-1)\cdot(a^2)}=\pm a\sqrt{-1}=\pm ai$$

ai او −ai موهومي عددونه دي (چې a یو حقیقي عدد دی).

د (i) طاقتونه (Powers of i):

لیدل کیږي چې د $i^2=-1$ یا $i=\sqrt{-1}$ په مرسته موهومي عددونه ساده کولای شو . په یاد ولرئ چې د حقیقي عددونو مربع مثبت او د موهومي عددونو مربع منفي ده.

$i=\sqrt{-1}$ $\qquad i^2=(\sqrt{-1})^2=-1$ $\qquad i^3=i^2\cdot i=(-1)\cdot(i)=-i$

$i^4=(\sqrt{-1})^4=[(\sqrt{-1}^2)]^2=(-1)^2=1$ یا $i^4=i^2\cdot i^2=(-1)(-1)=1$

$i^5=i^4\cdot i=(1)(i)=i$ $\qquad i^6=(i)^4\cdot(i)^2=(1)\cdot(-1)=-1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$i^7 = (i)^6 \cdot (i) = (-1)\cdot(i) = -i \qquad i^8 = i^7 \cdot i = (-i)\cdot(i) = -i^2 = -(-1) = 1$$

(i) ته موهومي واحد وايي.

له دې ځايه نتيجه په لاس راځي، که د موهومي واحد توان $n=4$ يا يوداسې عددوي چې پر څلورو د وېش وړوي، نو له يوه (1) سره مساوي دی.

دريم مثال:

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1 = 1$$
$$i^{12} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$
$$i^{16} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$
$$\vdots$$
$$i^{4n} = i^4 \cdot i^4 \ldots i^4 = 1$$
$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = 1\cdot i = i$$
$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1\cdot(-1) = -1$$
$$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^2 \cdot i = 1(-1)i = -i$$

فعاليت

$(i)^{61}, (i)^{-37}$ و $(i)^{256}$ طاقتونو قيمت پيدا کړئ.

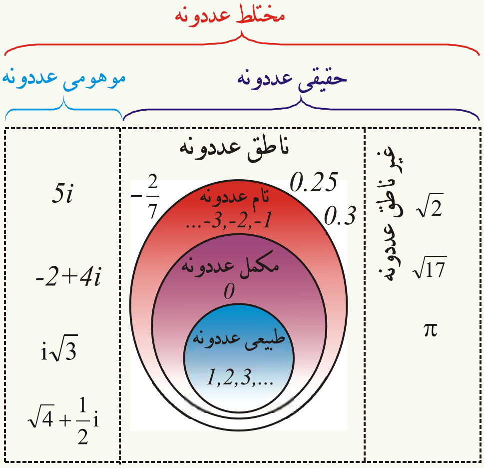
څلورم مثال: i^{54}، i^{1998} او i^{89} پيدا کړئ.

حل: که د 54 عدد پر 4 ووېشو، پاتې (باقي) يې 2 ده، نو:

$$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = i^{4\cdot 13} \cdot i^2 = (i^4)^{13} \cdot i^2 = (1)\cdot i^2 = (1)\cdot(-1) = -1$$
$$i^{1998} = i^{4(499)} \cdot i^2 = 1\cdot i^2 = i^2 = -1$$
$$i^{89} = i^{4\cdot 22} \cdot i = 1\cdot i = i$$

هغه عددونه چې $\sqrt{-1}$ يې يو فکتور وي، د موهومي عددونو په نوم يادېږي. د i طبيعي توانونه يو له i،1،$-i$ او -1 عددونو څخه دي. د حقيقي عددونو مربع مثبت اود موهومي عددونو مربع منفي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د عددونو سټونه د تاریخ په اوږدوکې د ارتیاوو او د ریاضي د علم له انکشاف سره سم منځ ته راغلي دي، لکه: څرنګه چې پوهېږئ، د طبیعي عددونو سټ $IN=\{1,2,3,4....\}$ ټولو مسألو ته ځواب نه شي ویلای. د مثال په ډول د $3x=0$ معادله د طبیعي عددونو په سټ کې حل نه لري، ښکاره خبره ده چې ځواب یې $x=0$ دی، نو یو بل سټ ته ارتیا پیدا شوه چې د مکملو عددنو سټ $W=\{0,1,2,3,...\}$ دی. دا سټ هم ځینو پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای، لکه: د $x+2=0$ معادله د مکملو عددونو په سټ کې حل نه لري، ځکه چې ځواب یې $x=-2$ دی چې 2 - د مکملو عددونو په ست کې شامل نه دی، نو یو بل سټ ته ارتیا پیدا شوه چې منفي عددونه هم ولري چې د تامو عددونو د سټ (Integer Numbers set) یا $I=\{...,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ په نامه یادېږي، خو د عددونو په دې سټ کې هم د $2x+1=2$ د معادلې حل نشته، ځکه چې حل یې $x=\frac{1}{2}$ دی، نو د ناطقو عددونو سټ (Rational Numbers Set) منځ ته راغی خو د $x^2-2=0$ معادله د ناطقو یاګویا عددونو په سټ کې هم حل نه لري، ځکه چې، ددې معادلې حل $x=\sqrt{2}$ دی چې $\sqrt{2}$ د غیرو ناطقو عددونو (Irrational Numbers set) په سټ کې شامل دی، نو د غیر ناطقو عددونو سټ منځ ته راغی د ناطقو او غیر ناطقو عددونو د سیټونو مجموعې ته د حقیقي عددونو سټ (Real Numbers Set) وایي.

خود حقیقي عددونو سټ هم ځینو پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای، لکه: د $x^2+16=0$ یا د $x^2+1=0$ د معادلو حل د حقیقي عددونو په سټ کې نه شته دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

يا په بل عبارت منفي عددونه د حقيقي عددونو په سټ کې جفت جذر نه لري، لکه: $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-25}$ او نور، خو هغه معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري. په 1795م. کال کې یو جرمني ریاضي پوه ګوس (Gauss) د مختلطو عددونو مفهوم په لاندې ډول وړاندی کړ. که یو مختلط عدد په z سره وښایو $z = a + bi$ چې د یو مختلط عدد معیاري شکل دی چې a د z عدد حقیقي برخه (Real Part of z) او bi د z د مختلط عدد موهومي برخه (Imaginary Part of z) ده، د مختلطو عددونو سټ داسې تعریف کېږي. $C = \{z \mid z = a + bi \;,\; a, b \in 1R \;,\; i^2 = -1\}$ د z یو مختلط عدد د یوې مرتبې جوړې په شکل هم لیکلای شو : $z = a - bi = (a,-b)$, $z = a + bi = (a, b)$ که a=0 شي: $Z = 0 + bi = bi$ چې bi ته خالص موهومي عدد (Pure imaginary number) وایي او که $b = 0$ وي، نو $z = a + 0 \cdot i = a$ (چې a یو خالص حقیقي عدد (Pure real number) دی) په یاد ولرئ چې مختلط عددونه، لکه: حقیقي عددونه د ترتیب خاصیت نه لري.

صفري مختلط عدد (Zero Complex Number):

هغه عدد دی چې حقیقي او موهومي دواړه برخې یې صفرونه وي. $(a = 0 \quad b = 0)$ ، نو $z = a + bi = 0 + 0i = 0$ صفري مختلط عدد دی.

فعالیت

په $4 + 3i$ او $2 - 5i$ مختلطو عددونو کې حقیقي او موهومي برخې وښیاست.

لومړی مثال: د $1 - i$, $\sqrt{3} - 3i$, $5i$ او $2 - 5i$ په مختلطو عددونو کې حقیقي او موهومي برخې وښیاست.

حل: په $1 - i$ کې حقیقي برخه یې 1 او موهومي برخه یې $-i$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sqrt{3}-3i$ مختلط عدد کې حقیقي برخه یې $\sqrt{3}$ او موهومي برخه یې $-3i$ ده، په $2-5i$ مختلط عدد کې حقیقي برخه یې 2 او موهومي برخه یې $-5i$ ده.

په $5i$ کې حقیقي برخه صفر او موهومي برخه یې $5i$ ده.

دویم مثال: د $6i$, -9 , 0 , $9-i$ او $i-1$ مختلط عددونه په معیاري شکل (Standard Form) ولیکئ.

حل: څرنګه چې $z=a+bi$ ته د مختلط عدد معیاري شکل وایي چې a ته د مختلط عدد حقیقي برخه او bi یې موهومي برخه ده. په لاندې جدول کې پورتني مختلط عددونه په معیاري شکل بنودل شوي دي.

معیاری شکل $(z=a+bi)$	مختلط عددونه
$0+6i$	$6i$
$-9+0i$	-9
$0+0i$	0
$9-i$	$9-i$
$-1+i$	$i-1$

$z=a+bi$ د یوه مختلط عدد معیاري شکل دی چې a ته د مختلط عدد حقیقي برخه او bi یې موهومي برخه ده، که a=0 وي، نو bi خالصه موهومي برخه او که b=0 وي، نو a د مختلط عدد خالصه حقیقي برخه ده او هغه معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- د $(i)^{-33}, (i)^{79}, (i)^{202}, (2i)^{2}$ او $(3i)^{2}$ قيمتونه پيداکړئ.

2- لاندې عددونه د مختلطو عددونو په معياري شکل وليکئ.

$-i-4 \quad , \quad 5i \quad , \quad -4i+\sqrt{2} \quad , \quad -3i$

3 - $-3i \; , \; 5+3i \; , \; 7-i \qquad \sqrt{5}-\sqrt{7}i$ مختلط عددونه د مرتبو جوړو په شکل وليکئ.

4- د $-i$ په مختلط عدد کې حقيقي برخه مساوي ده په:

a) 1 , b) −1 , c) 0 , d) 2

5- د $\sqrt{-16}$ عدد جذر مساوي دی په:

a) ±4 , b) −4 , c) ±4i , d) ±2

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$4i+3i=7i$$
$$4i-3i=i$$
$$4i-(-3i)=7i$$

د موهومي عددونو څلورګوني عمليې

آیا د $3i$ او $4i$ موهومي عددونه جمع کولای شئ؟

آیا د $10i$ او $50i$ موهومي عددونو د ضرب حاصل یو حقیقي عدد دی؟

د موهومي عددونو جمع او تفریق: موهومي عددونه کولای شو چې په لاندې ډول یې جمع او تفریق کړو.

a: د جمعي عملیه: د دوو موهومي عددونو د جمعې حاصل یو موهومي عدد دی.

لومړی مثال: د $(7i+8i)$ او $5i$ او $\sqrt{7}i$ د جمعې حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$7i+8i=(7+8)i=15i$$
$$\sqrt{7}i+5i=(\sqrt{7}+5)i$$

b: د تفریق علمیه: د دوو عددونو د تفریق حاصل یو موهومي عدد دی.

دویم مثال: $7i-4i$ او $9i-13i$ د تفریق حاصل پیدا کړئ.

$$7i-4i=(7-4)i=3i$$
$$9i-13i=(9-13)i=-4i$$

c: د ضرب عملیه: د دوو موهومي عددونو د ضرب حاصل یو حقیقي (Real number) عدد دی.

دریم مثال: د $(10i)\cdot(5i)$ او $(\sqrt{9}i)\cdot(\sqrt{4}i)$ د ضرب حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$(10i)\cdot(5i)=(10)\cdot(5)\cdot i\cdot i=50i^2=-50$$

څکه چې $i^2=-1$ دی نو $50i^2=50\cdot(-1)=-50$ چې -50 یو حقیقي عدد (Real number) دی.

همدارنګه $(\sqrt{4}i)\cdot(\sqrt{9}i)=\sqrt{4\cdot 9}\cdot i\cdot i=\sqrt{36}\cdot i^2=6\cdot(-1)=-6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د موهومي عددونو د ضرب په عمليه کې د تبديلي خاصيت (Commutative Property)

صدق کوي يعني: $\boxed{(ai)\cdot(bi)=(bi)\cdot(ai)=-ab}$

فعاليت

$(\frac{2}{3}i)\cdot(-\frac{3}{5}i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

d : **د وېش عمليه**: د دوو موهومي عددونو دوېش حاصل يو حقيقي عدد دی.

ځلورم مثال: $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}$, $\frac{5i}{7i}$ او $\frac{\sqrt{13}\,i}{\sqrt{3}\,i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل:

1) $\frac{5i}{7i}=\frac{5}{7}$ ($\frac{5}{7}$ يو حقيقي عدد دی)

2) $\frac{\sqrt{13}\,i}{\sqrt{3}\,i}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ ($\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ يو حقيقي عدد دی)

3) $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}\,i}{\sqrt{5}\,i}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

فعاليت

$36i$ پر $-2i$ ووېشئ.

د موهومي عددونو د جمعې او ضرب په عمليو کې د تبديلي خاصيت صدق کوي. د دوو موهومي عددونو د ضرب او وېش حاصل يو حقيقي عدد دی.

پوښتنې

1) جمع يې کړئ. $\sqrt{-1}b+\sqrt{-1}c$, $\sqrt{-7}+\sqrt{-4}$, $\sqrt{7}\,i+\sqrt{7}\,i$

2) تفريق يې کړئ. $\sqrt{5}\,i-\sqrt{5}\,i$, $12i-7i$, $5i-2i$

3) لاندې موهومي عددونه سره ضرب او تقسيم کړئ.

$\frac{13i}{26i}$, $\frac{16i}{-4i}$ $(3i)\cdot(5i)$, $(\sqrt{7}\,i)\cdot(-7i)$, $(\frac{7}{4}i)(-\frac{2}{9}i)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلطو عددونو د جمعې او تفریق عملیې:

$(1+2i)+(-1-2i)=0$

آیا د $3x-2yi=6+i$ له مساوات څخه د x او y قیمتونه په لاس راوړلای شئ؟

آیا پوهېږئ چې کوم عدد ته د مختلطو عددونو د جمعې د عملې د عینیت عنصر وایي؟

مساوي مختلط عددونه (Equal Complex Numbers): دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقیقي او موهومي برخې یو له بله سره مساوي وي. د $z_1=a+bi$ او $z_2=x+yi$ عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې $x=a$ او $y=b$ وي.

لومړی مثال: که چېرې $z_1=x_1+2y_1i$ او $z_2=3-5i$ وي، نو هغه وخت $z_1=z_2$ دی چې: $x_1=3$ او $y_1=-\frac{5}{2}$ وي.

فعالیت

1- که چېرې $z_1=\sqrt{2}\,x+\sqrt{3}\,yi$ او $z_2=-5-6i$ وي، د $z_1=z_2$ له مخې د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

2- که چېرې $2+mi=k+3i$ وي د m او k حقیقي عددونو قیمت پیدا کړئ.

د مختلطو عددونو د جمعې عملیه: د مختلطو عددونو د جمعې عملیه داسې تعریف شوې ده. که چېرې $z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ وي، نو:

$$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\cdot i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

يا په بل عبارت د دوو مختلطو عددونو د جمعي حاصل يو بل داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د دوارو عددونو د حقيقي برخو او موهومي برخه يې د دې دوارو عددونو د موهومي برخو له مجموعې څخه په لاس راغلي وي.

دويم مثال: که چېرې $z_1 = 2-3i$ او $z_2 = 3+4i$ وی، $z_1 + z_2$ پيدا کړئ

$$z_1 + z_2 = (2-3i)+(3+4i) = (2+3)+(-3+4)i = 5+i$$

په همدې ډول:

$$(3-4i)+(-2+6i) = (3-2)+(-4+6)i = 1+2i$$

$$(-9+7i)+(3-15i) = (-9+3)+(7-15)i = -6-8i$$

$0+0i$ د مختلطو عددونو د جمعې د عمليې د عينت عنصر (additive identity) دی، ځکه چې: $(a+bi)+(0+0i) = (a+0)+(b+0)i = a+bi$.

همدارنګه د $a+bi$ عدد جمعي معکوس (additive inverse) د $-a-bi$ عدد دی، ځکه چې:

$$(a+bi)+(-a-bi) = (a-a)+(b-b)i = 0+0i$$

فعاليت

د $(3x-yi)+(5x+3yi)$ د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

د مختلطو عددونو د تفريق عمليه: د دوو مختلطو عددونو د تفريق حاصل يو بل داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د حقيقي برخو او موهومي برخه يې د موهومي برخو د تفريق له حاصل څخه په لاس راغلي وي يعنې: $(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$

لومړی مثال: $(-4+3i)-(6-7i) = (-4+3i)+(-6+7i) = -10+10i$

دويم مثال: $(12-5i)-(8-3i) = (12-8)+(-5+3)i = 4-2i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقیقي او موهومي برخې یو له بله سره مساوي وي. د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل یو داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د حقیقي برخو اوموهومي برخه یې د موهومي برخو له مجموعې څخه په لاس راغلې وي، په همدې ډول د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل یو داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د دواړو عددونو د موهومي برخو له حاصل تفریق څخه په لاس راغلې وي.

پوښتنې

1- لاندې مختلط عددونه جمع کړئ.

$(2+5i)+(3+4i)$ ، $(13-12i)+(13+12i)$

$(-3+6i)+(10-7i)$ ، $(\sqrt{3}-ci)+(d+5ci)$

2- لاندې مختلط عددونه یو له بله تفریق کړئ.

$(5-i)-(7+3i)$

$(2\sqrt{3}+5\cdot\sqrt{7}\,i)-(\sqrt{3}+3\sqrt{7}\,i)$

$(3c+4di)-(3c+8di)$

3- د لاندې مختلطو عددونو جمعي معکوس پیدا کړئ.

$2+3i$, $(2,-3)$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$

4 – که $(x, y \in IR)$ او $3x+2iy-ix+5y=7+5i$ وي، د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

5- لاندې عملیې سرته ورسوئ او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل ولیکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(2+3i)+(-5+2i)$

$(-5-4i)-(-2-\sqrt{2}i)$

$(2+3i)+(-5-i)$

$(6-5i)+(3+2i)$

$(3.7+6.1i)-(1+5.9i)$

$(8+\frac{3}{4}i)-(-7+\frac{2}{3}i)$

$(-6-\frac{5}{8}i)+(4+\frac{1}{2}i)$

$(-2+5i)+(3-i)$

$(3+\frac{3}{5}i)-(-11+\frac{7}{15}i)$

$(-4-\frac{5}{6}i)+(13+\frac{3}{8}i)$

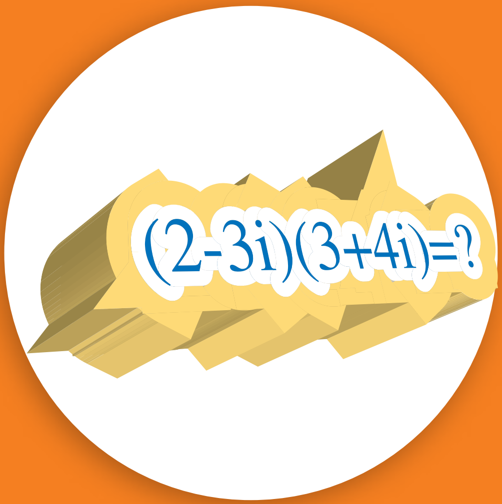
$(-7-\sqrt{-72})+(8+\sqrt{-50})$

$(\sqrt{3}+\sqrt{-2})-(\sqrt{12}+\sqrt{8})$

6- د لاندي مختلطو عددونو جمعي معکوس پیداکړئ.

$2-3i$	$8+11i$	$1-i$	$-1+i$
$5-8i$	$-13+13i$	$-5i$	$2i$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د مختلطو عددونو ضرب

آیا کولای شئ چې د $(2-3i)(3+4i)$ مختلطو عددونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ؟

د $i^2=-1$ په نظر کې نیولو سره د دوو مختلطو عددونو ضرب په لاندې ډول دی که:

$z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ وي.

$$z_1\cdot z_2=(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bidi$$
$$=ac+adi+bci+bdi^2$$
$$=ac+(ad+bc)i+bd(-1)$$
$$z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

لومړی مثال: د $(5-4i)\cdot(7-2i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$(5-4i)(7-2i)=5(7)+5(-2i)+(-4i)(7)-4i(-2i)=35-10i-28i+8i^2$$
$$=35-38i+8(-1)$$
$$=35-38i-8$$
$$=27-38i$$

فعالیت

د $(2-3i)(3+4i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

څرنګه چې $(a+bi)(1+0i)=a\cdot1+a\cdot0i+bi\cdot1+bi\cdot0i=a+bi$ دی، نو $1+0i$ ته د مختلطو عددونو د ضرب د عملیې د عینیت عنصر (Multiplicative identity) وایي لکه:

$$(3+5i)(1+0i)=3+5i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه مختلط عدد مزدوج (Conjugate of a Complex Number):

د $z = x + yi$، د مختلط عدد مزدوج $\bar{z} = x - yi$ دی په دې ډول چې:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \quad , \quad 2x \, Re(z)$$

$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi \quad , \quad 2yi \, Im(z)$$

دویم مثال: د $z = 3 + 4i$ د عدد مزدوج $\bar{z} = 3 - 4i$ دی، $z + \bar{z}$, $z - \bar{z}$ او $z \cdot \bar{z}$ په لاس راوړئ:

$$z \cdot \bar{z} = (3 + 4i) \cdot (3 - 4i) = 3(3) + 3(-4i) + 4i(3) + 4i(-4i)$$

$$= 9 - 16i^2 = 9 - 16(-1) = 9 + 16 = 25$$

$$z + \bar{z} = (3 + 4i) + (3 - 4i) = 6$$ (6 یو حقیقي عدد دی)

$$z - \bar{z} = (3 + 4i) - (3 - 4i) = 8i$$ (8i یو موهومي عدد دی)

فعالیت

د $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 7 + i$ او $z_3 = \sqrt{5} + \sqrt{7}i$ مختلطو عددونو مزدوجونه پیدا کړئ.

خرنګه چې وموليدل، د یو مختلط عدد د مزدوج د پیدا کولو لپاره، یوازې د موهومي برخې علامه تغیروو لکه:

عدد	مزدوج یې
-i	i
1-i	1+i
-4+2i	-4-2i
5i-6	-5i-6

د یو مختلط عدد ضربي معکوس (Multiplicative inverse)

پوهیږو چې د $a + bi$ د عدد مزدوج $a - bi$ دی او

$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (b^2 i^2) = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a+bi$ عدد د ضربي معکوس د پيداکولو له پاره د $\frac{1}{a+bi}$ عدد د مختلط عدد په معياري شکل ليکو، نو د $\frac{1}{a+bi}$ د عدد صورت او مخرج په $a-bi$ کې ضربوو. ($a-bi$ د مخرج مزدوج دی)

$$\frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

د $(a+bi)$ د عددضربي معکوس $(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)$ دی.

دريم مثال: د $2-3i$ د عدد ضربي معکوس پيداکړئ.

$$\frac{1}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{2+3i}{4-9i^2}=\frac{2+3i}{4+9}=\frac{2+3i}{13}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$$

څلورم مثال: د x^2+4 افاده تجزيه کړئ.

$$x^2+4=x^2-(-1)\cdot4=x^2-(i)^2\cdot4=x^2-(2i)^2=(x-2i)(x+2i)$$

فعاليت

د $5+3i$ او $\sqrt{2}-4i$ مختلطو عددونو ضربي معکوس پيداکړئ.

که چيرې $z=x+yi$ او $w=x'+y'i$ دوه مختلط عددونه وي، نو $z\cdot w$ په دې ډول تعريف شوی دی.

$$z\cdot w=(xx'-yy')+(xy'+x'y)i$$

د يو مختلط عدد د مزدوج د پيداکولو لپاره يوازې د موهومي برخې علامه تغيرو او د $a+bi$ د مختلط عدد ضربي معکوس $(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- لاندې مختلط عددونه سره ضرب کړئ.

$(2+i)(3-2i)$, $(3+i)(3-i)$

$(-2+3i)(4-2i)$, $(2-5i)(2+5i)$

$(5+2i)(5-3i)$, $(\sqrt{6}+i)(\sqrt{6}-i)$

$(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)$

2- د لاندې مختلطو عددونو ضربي معکوس پیدا کړئ.

$1-i$, $2+4i$, $5-3i$, $3a-4bi$, $(7,4)$

3- لاندې افادې تجزیه کړئ.

x^2+16 , x^2+8 , x^2+5 , x^2+7

4- د $(-3+2i)^2$ او $(2+i)^2$ قیمتونه په لاس راوړئ.

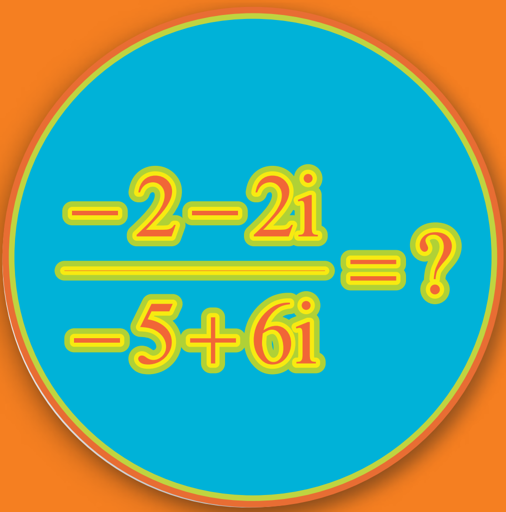
5- که $z=4-3i$ وي، $8z-z^2$ پیدا کړئ.

6- دا معادله حل کړئ. $x+yi=(2-3i)(2+3i)$.

7- وښیاست چې: $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ، د i مربع جذر دی.

8- وښیاست چې: $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ د i- دریم جذر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دوو مختلطو عددونو وېش
Division of two complex numbers

آيا د $\frac{-2-2i}{-5+6i}$ د وېش حاصل (خارج قسمت) په لاس راوړلای شئ؟

خرنگه چې د $\frac{a+bi}{c+di}$ عدد په مخرج کې c حقیقي عدد او di موهومي عدد دی، نو لومړی باید مخرج په حقیقي عدد بدل کړو، ددې لپاره صورت او مخرج، د مخرج په مزدوج کې ضربوو چې دې عملیې ته گویا کول (Rationalization) وايي.

لومړی مثال: د $\frac{4+3i}{2+5i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل: د $2+5i$ مزدوج $2-5i$ دی، صورت او مخرج د مخرج په مزدوج یا $2-5i$ کې ضربوو.

$$\frac{4+3i}{2+5i}=\frac{4+3i}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}=\frac{8-20i+6i-15i^2}{4-10i+10i-25i^2}=\frac{8-14i-15(-1)}{4-25(-1)}$$
$$=\frac{23-14i}{29}=\frac{23}{29}-\frac{14}{29}i$$

لیدل کېږي چې د وېش په حاصل کې حقیقي او موهومي برخې سره جلا دي.

فعالیت

د $\frac{1+i}{1-i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ او خپل ځواب د مختلط عدد په معیاري شکل ولیکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف

که $z_1 = a + bi$ او $z_2 = c + di$ وي، $\frac{z_1}{z_2}$ په لاندې ډول تعریف شوی دی

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2i^2} = \frac{ac + bd - (ad - bc)i}{c^2 + d^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \frac{ad - bc}{c^2 + d^2}i$$

دویم مثال: د $z_1 = 2 - 3i$ عدد پر $z_2 = 1 + i$ وویشئ او بیا یې امتحان کړئ.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{1+i} = \frac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1-5i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i$$

$$(1+i)(-\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i) = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i - \frac{1}{2}i - \frac{5}{2}i^2 = -\frac{1}{2} - 3i + \frac{5}{2} = 2 - 3i$$

دریم مثال: د $\frac{3+2i}{5-i}$ د ویش حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\frac{3+2i}{5-i} = \frac{(3+2i)(5+i)}{(5-i)(5+i)} = \frac{15 + 3i + 10i + 2i^2}{25 - i^2} = \frac{15 + 13i - 2}{25 + 1} = \frac{13 + 13i}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

که $z = x + yi$ او $w = x' + y'i$ دوه مختلط عددونه وی، نو $\frac{z}{w}$ داسې تعریف شوی دی.

$$\frac{z}{w} = \frac{xx' + yy'}{x'^2 + y'^2} + \frac{x'y - xy'}{x'^2 + y'^2}i \quad , \quad (x'^2 + y'^2 \neq 0)$$

د یو مختلط عدد د مزدوج خاصیتونه:

که z_1 او z_2 دوه مختلط عددونه وي:

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

2) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$ 4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

5) $z + \overline{z} = 2x$ 6) $z - \overline{z} = 2yi$

7) $\overline{\overline{z}} = z$

لومړی مثال: که $z_1 = 4 + 5i$ او $z_2 = -3 + 2i$ وي، وښیاست چې:

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ او $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

حل:

$$z_1 + z_2 = (4+5i) + (-3+2i) = 1 + 7i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = 1 - 7i$$
$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (4-5i) + (-3-2i) = 1 - 7i$$

په پایله کې $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = (4+5i)\cdot(-3+2i) = -12 - 10 + (8-15)i = -22 - 7i$$
$$\Rightarrow \overline{z_1 \cdot z_2} = -22 + 7i$$
$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (4-5i)\cdot(-3-2i) = -12 - 8i + 15i + 10i^2 = -12 - 8i + 15i - 10$$
$$= -22 + 7i$$

په پایله کې: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$

دویم مثال: که $z = x + yi$ وي $z + \overline{z}$ او $z - \overline{z}$ پیداکړئ.

حل: $z - \overline{z} = (x+yi) - (x-yi) = 2yi$, $z + \overline{z} = (x+yi) + (x-yi) = 2x$

فعالیت

که $z = 2 + 3i$ وي، $\overline{\overline{Z}}, Z + \overline{Z}$ او $Z - \overline{Z}$ پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- د وېش حاصل يې پيدا کړئ:

$$\frac{7-i}{3-5i} \quad , \quad \frac{5-2i}{6-i} \quad , \quad \frac{3-4i}{2-5i} \quad , \quad \frac{1+i}{1-1}$$

2- که $z_1 = -a-3bi$ او $z_2 = 2a-3bi$ وي. وښياست چې:

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ او $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ دی.

3- د وېش حاصل پيداکړئ او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل وليکئ.

$$a: \frac{2}{5-i} \qquad b: \frac{3-i}{2+i} \qquad c: \frac{2-3i}{3}$$

4- د $\frac{6+\sqrt{-36}}{3+\sqrt{-9}}$ د وېش حاصل مساوي دی په:

$a:1 \qquad b:2 \qquad c:3i \qquad d:-2$

5- خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل وليکئ.

$$\frac{3+4i}{4i} \qquad \frac{-5}{2-3i} \qquad \frac{6}{1+3i}$$

$$\frac{7}{7-2i} \qquad \frac{-4+8i}{2-4i} \qquad \frac{3-2i}{-6+4i}$$

$$\frac{1}{i}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلطو عددونو په ساحه کې د دويمې درجې يو مجهوله معادلې حل:

$x^2+x+4=0$

$x_1=?$

$x_2=?$

آيا د $x^2+x+4=0$ معادلې جذرونه پيدا کولای شئ؟

د يوې دويمې درجې يو مجهوله معادلې عمومي شکل $ax^2+bx+c=0$ ، $(a\neq 0)$ دی.

که $\Delta=b^2-4ac>0$ معادله دوه د مختلفو علامو لرونکي حقيقي جذرونه لري.

که $\Delta=0$ معادله دوه مساوی جذرونه لري.

که $\Delta<0$ معادله د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، خو د مختلطو عددونو په ساحه کې دوه جذرونه لري.

لومړی مثال: د $x^2-10x+26=0$ معادله حل کړئ.

حل: $a=1\quad b=-10\quad c=26$ دي.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot26}}{2\cdot1}=\frac{10\pm\sqrt{-4}}{2}$$

$$=\frac{10\pm 2i}{2}=5\pm i\qquad\Rightarrow\qquad x_1=5+i\qquad x_2=5-i$$

فعاليت

دا جذرونه په پورتنۍ معادله کې وضع او امتحان يې کړئ.

دويم مثال: د $4x^2+4i\ x+15=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\Delta=b^2-4ac=(4i)^2-4\cdot4\cdot15=16i^2-240=-256$$

$$\pm\sqrt{\Delta}=\pm\sqrt{-256}=\pm\sqrt{256(-1)}=\pm16i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 = \frac{-4i+16i}{2\cdot 4} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i$$

$$x_2 = \frac{-4i-16i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

دريم مثال: $x^2 + 3ix - 2 = 0$ معادله د محمد بن موسی د فورمول په مرسته، د مختلطو عددونو په ساحه کې حل کړئ.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3i)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 3^2\cdot i^2 + 8 = -9 + 8 = -1$$

$$\pm\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

$$x_{1,2} = \frac{-3i \pm i}{2\cdot 1} \qquad x_1 = \frac{-4i}{2} = -2i \qquad x_2 = \frac{-2i}{2} = -i$$

فعاليت

د $x^2 + 3 = 0$ ، $x^2 - 6x + 18 = 0$ او $x^2 - 4x + 13 = 0$ معادلې حل کړئ.

پوښتنې

1) هغه دويمه درجه معادله پيداکړئ چې جذرونه يې $(3+2i)$ او $(3-2i)$ وي.

2) لاندې معادلې حل کړئ.

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \ , \ x^2 - 6x + 18 = 0 \ , \ -4x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$x^2 + 8x + 41 = 0 \ , \ x^4 - 1 = 0 \ , \ 3x^2 + x + 2 = 0$$

3) داسې دويمې درجې معادلې په لاس راوړئ چې جذرونه يې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

$2+5i \ , \ 2-5i$	$1+i \ , \ 1-i$
$4i \ , \ -4i$	$5i \ , \ -5i$
$2i \ , \ 3i$	$i \ , \ \frac{1}{i}$
$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i \ , \ \frac{2}{3}-\frac{1}{2}i$	$2-i \ , \ 2+i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي لنډيز

• منفي عددونه د حقيقي عددونو په سټ کې جفت جذرنه لري، خو د مختلطو عددونو په سټ کې منفي عددونه جفت جذر لري.

• مختلط عددونه د حقيقي او موهومي عددونو له يو ځای کېدو څخه په لاس راځي.

• د حقيقي عددونو مربع مثبت، خو د موهومي عددونو مربع منفي ده

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

• داسې عددونو ته چې $\sqrt{-1}$ يې يو فکتور وي، موهومي عددونه وايي.

• د مختلطو عددونو سټ C په لاندې ډول تعريف شوی دی:

$$C = \{z / z = a + bi, \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{IR}, \mathrm{i} = \sqrt{-1}\}$$

• د يو مختلط عدد معياري شکل $\mathrm{z = a + bi}$ دی چې a ته د z د عدد حقيقي برخه او bi ته د z موهومي برخه وايي يا $a = \mathrm{Re}(z)$ او $\mathrm{bi = Im\,g(z)}$

• د i د مختلفو توانونو د پيداکولو لپاره د i توان پر 4 وېشو چې له يوه سره مساوي کېږي او که پوره پرې نه وېشل کېږي، نو د i د توري توان پر 4 د وېشلو له پاتې (باقي مانده) سره مساوي دی، لکه:

$$\mathrm{(i)^{1379} = i^{4 \cdot 344} \cdot i^3 = (1)(i)^3 = -i} \quad \text{يا} \quad i^{4k+r} = i^r$$

• که د $\mathrm{z = a + bi}$ په مختلط عدد کې $b = 0$ وي، نو a ته خالص حقيقي عدد او که $a = 0$ وي، bi ته خالص موهومي عدد وايي.

• هغه مختلط عدد چې حقيقي او موهومي برخې يې دواړه صفرونه وي، صفري مختلط عدد ورته وايي. $\mathrm{(a = 0, b = 0)}$

• دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقيقي او موهومي برخې يو له بله سره مساوي وي. $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$ او $\mathrm{Im\,g}(z_1) = \mathrm{Im\,g}(z_2)$

• د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل يو بل داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د دواړو عددونو د حقيقي برخو او موهومی برخه يې د دواړو عددونو د موهومي برخو له مجموعې

(c) ketabton.com: The Digital Library

څخه عبارت ده.

• د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل داسې یو مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د دواړو عددونو د موهومي برخو د تفریق له حاصل څخه عبارت ده.

•که $z_1 = x_1 + y_1 i$ او $z_2 = x_2 + y_2 i$ وي، نو د مختلطو عددونو د جمعې، تفریق، ضرب او وېش عملیې داسې تعریف شوي دي.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

$$z_1 . z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}.i \quad , \quad (z_2 \neq 0)$$

• د $z = x + yi$ مختلط عدد مزدوج له $\overline{Z} = x - yi$ څخه عبارت دی.

$$z\overline{z} = x^2 + y^2$$

$$z + \overline{z} = 2x$$

$$z - \overline{z} = 2yi$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

• د $z = a + bi$ عدد جمعي معکوس $-a - bi$ دی او ضربي معکوس یې $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$ دی.

• $0 + 0i = (0,0)$ د مختلطو عددونو د جمعې د عملیې د عینیت عنصر او $1 + 0i$ د ضرب د عملیې د عینیت عنصر دی.

• هغه دویمه درجې معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فصل پوښتنې:

1) $(i)^{51}$ مساوي دي په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

2) i^{-98} موهومي عدد مساوی دی په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

3) i^{67} موهومي عدد مساوي دی په:

a) $-i$ b) 1 c) -1 d) i

4) $7i-4i$ مساوي دی په:

a) $-3i$ b) $3i$ c) 3 d) -3

5) $3i\cdot 4i$ مساوي دی په:

a) -12 b) 12 c) $12i$ d) $-12i$

6) $\frac{64i}{8i}$ مساوي دی په:

a) -8 b) 8 c) $8i$ d) $-8i$

7) $\frac{7}{9}i\cdot\frac{2}{9}i$ مساوي دی په:

a) $-\frac{14}{81}$ b) $\frac{14}{81}$ c) $-\frac{14}{81}i$ d) $\frac{14}{81}i$

8) $\frac{\sqrt{-11}}{\sqrt{-5}}$ مساوي دی په:

a) $\sqrt{\frac{11}{5}}$ b) $\frac{-11}{5}$ c) $\frac{-11}{5}i$ d) $\frac{11}{5}i$

9) $\frac{\sqrt{-1}\sqrt{5}}{\sqrt{-1}\cdot 5}$ مساوي دی په:

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\frac{5}{3}i$ d) دري واړه سم نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

10) $-\frac{xi}{\sqrt{yi}}$ مساوي دی په:

a) $\frac{x}{\sqrt{y}}$ b) $\frac{-x}{\sqrt{y}}$ c) $\frac{xi}{\sqrt{y}}$ d) $\frac{x}{y}$

11) لاندې مختلط عددونه جمع کړئ.

$(3+4i)+(2+5i)$ $(a+bi)+(c+di)$

$(1+i)+(1-i)$ $(2+3i)+(2-3i)$

12) لاندې مختلط عددونه تفريق کړئ.

$(4+3i)-(4+4i)$ $(3-2i)-(3+2i)$

$(4+4i)-(4+3i)$ $(1+i)-(1-i)$

13) $(2a+ib)-(2a-ib)$ مساوي دي په:

a) $-ib$ b) $-2ib$ c) $2ib$ d) $4a$

14) $(2-3i)(2+3i)$ د ضرب حاصل مساوي دی په:

a) -13 b) $13i$ c) 13 d) $9i$

15) لاندې مختلط عددونه د $a+bi$ په شکل وليکئ.

$4(2+5i)-(3-4i)$ $(4-3i)(2+i)$

$i(3-2i)^2$ i^{51}

16) که $z_1=2-4i$ او $z_2=1-i$ وي، وښياست چې:

$$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}\ ,\quad \overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\ ,\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

17) د لاندې مختلطو عددونو جمعي او ضربي معکوس پيدا کړئ.

$3x-\frac{1}{2}yi$ $2a-bi$ $2+5i$ $-7+3i$ $-6+2i$ $3-i$ $\sqrt{2}+i$

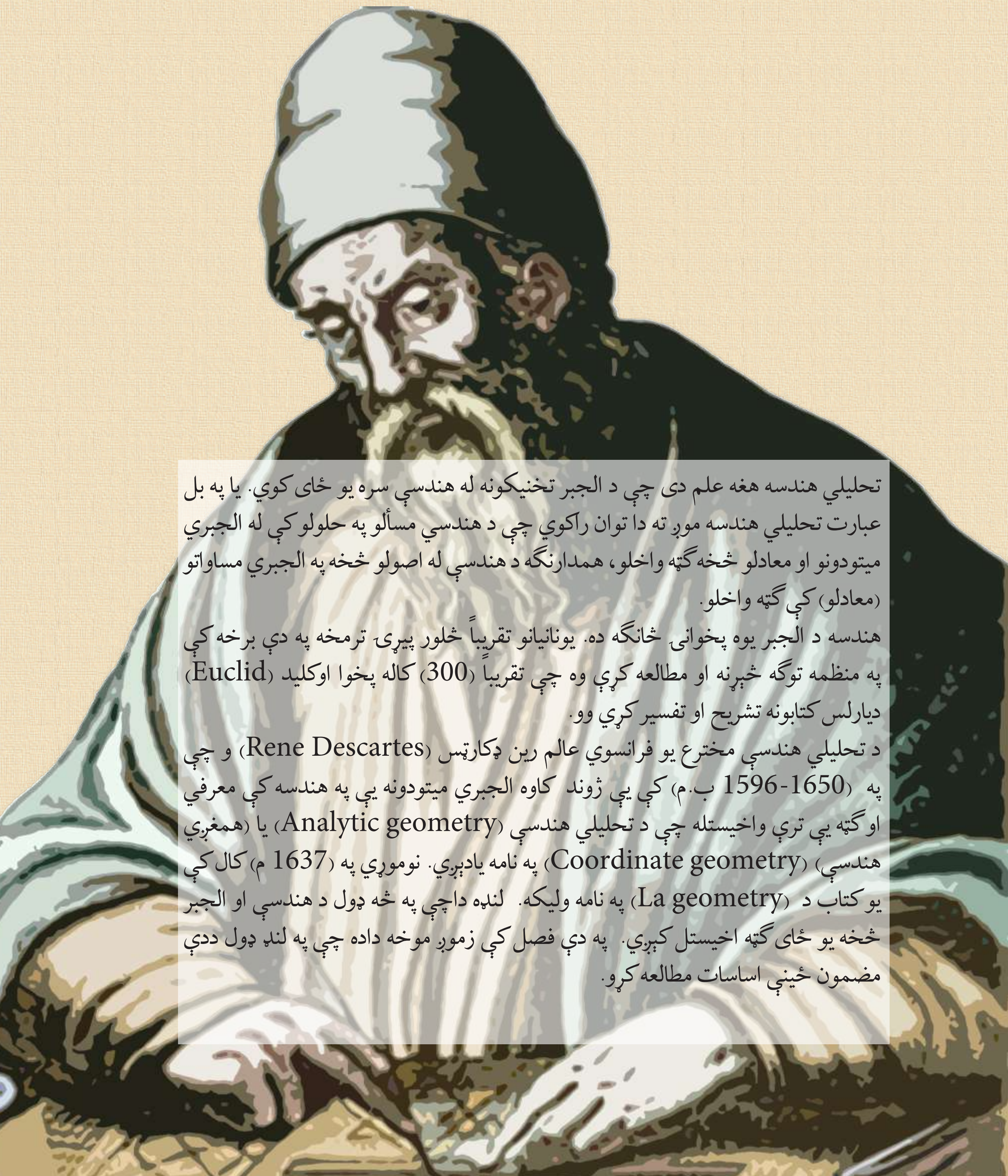
18) د $5x^2+2x+1=0$ معادله حل کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم څپرکی

تحليلي هندسه

(c) ketabton.com: The Digital Library

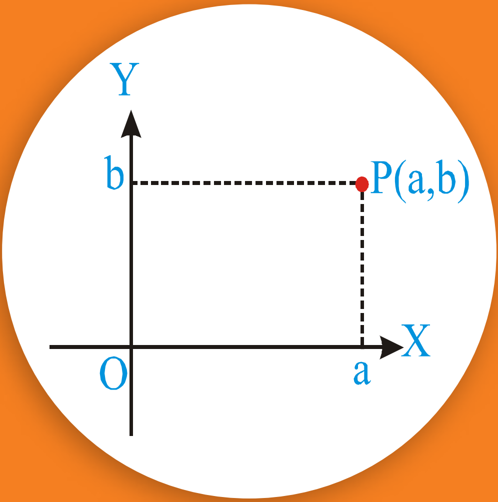


تحليلي هندسه هغه علم دی چې د الجبر تخنيکونه له هندسې سره يو ځای کوي. يا په بل عبارت تحليلي هندسه موږ ته دا توان راکوي چې د هندسي مسألو په حلولو کې له الجبري ميتودونو او معادلو څخه ګټه واخلو، همدارنګه د هندسې له اصولو څخه په الجبري مساواتو (معادلو) کې ګټه واخلو.

هندسه د الجبر يوه پخوانۍ څانګه ده. يونانيانو تقريباً څلور پيړۍ ترمخه په دې برخه کې په منظمه توګه څېړنه او مطالعه کړې وه چې تقريباً (300) کاله پخوا اوکليد (Euclid) ديارلس کتابونه تشريح او تفسير کړي وو.

د تحليلي هندسې مخترع يو فرانسوي عالم رين ډکارټس (Rene Descartes) و چې په (1596-1650 ب.م) کې يې ژوند کاوه الجبري ميتودونه يې په هندسه کې معرفي او ګټه يې ترې واخيستله چې د تحليلي هندسې (Analytic geometry) يا (همغږي هندسې) (Coordinate geometry) په نامه يادېږي. نوموړي په (1637 م) کال کې يو کتاب د (La geometry) په نامه وليکه. لنډه داچې په څه ډول د هندسې او الجبر څخه يو ځای ګټه اخيستل کېږي. په دې فصل کې زموږ موخه داده چې په لنډ ډول ددې مضمون ځينې اساسات مطالعه کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د وضعیه کمیاتو سیستم یا کوارډنټ سیستم

(Coordinate system)

آیا د $(0,-1)$ ، $(2,2)$ ، $(-4,7)$ ، $(2,0)$ او د $(0,-2)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکلای شئ؟

فعالیت

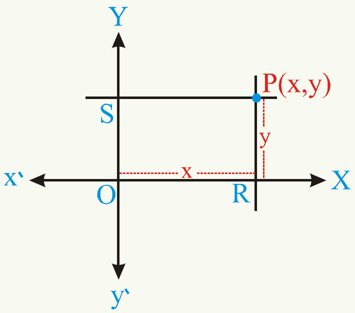
د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د XX' او YY' یو پر بل دوه عمود خطونه رسم کړئ. ددې دوو خطونو د تقاطع ټکي (نقطې) ته (O) وایي چې د O نقطې ته د وضعیه کمیاتو د محورونو مبدا (Origin) وایي.

دوه یو پر بل عمود خطونه د کوارډنټ د محورونو (Coordinate axises) په نامه یادیږي. چې د XOX' افقي خط د X محور او د YOY' عمودي خط د Y له محور څخه عبارت دی. بنکاره ده ټول عددونه چې د X پر محور د مبدا ښي خواته واقع دي، مثبت او که د مبدا کیڼې خواته واقع وي، منفي دي. همدارنګه هغه عددونه چې د Y پر محور له مبدا پورته واقع دي، مثبت او که له مبدا لاندې واقع دي، منفي عددونه دي.

فرضوو چې که p په مستوي کې یوه نقطه وي، کولای شو چې د p نقطه د یوې مرتبې جوړې $(OrderPair)$ په واسطه وښایو. په دې ډول چې د p له نقطې څخه د X او Y له محورونو سره موازي مستقیم خطونه رسموو. چې دا مستقیم خطونه د Y محور د S په نقطه کې او د X محور د R په نقطه کې قطع کوي. چې د $\overline{OR}$ مستقیمه فاصله $\overline{OR}=x$ او $\overline{OS}=y$ ده. په نتیجه کې د p د نقطې موقعیت د (x,y) د مرتبې جوړې په واسطه د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکل کیږي.

په مستوي کې هره مرتبه جوړه د یوې نقطې په واسطه او د مستوي هره نقطه د (x,y) د حقیقي عددونو د مرتبې جوړې په واسطه ښودل کیږي. چې x او y د X او Y له محورونو څخه د p د

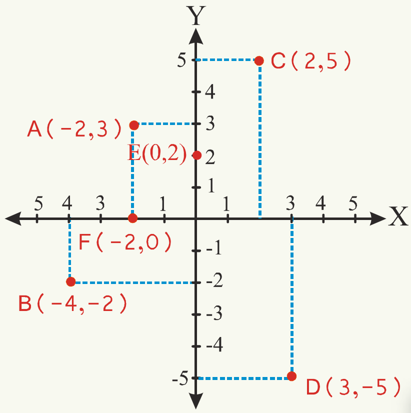
(c) ketabton.com: The Digital Library



نقطې مستقيمي فاصلې دي چې دې سيستم ته کارتيزني يا کوارډنټ سيستم (Coordinate System) وايي. د مرتبې جوړې لومړني مرکبې ته د x مختصه او دويمې ته د y مختصه (Y-Coordinate) وايي. د کوارډنټ محورونه مستوي په څلورو ناحيو (ربعو) (quadrants) وېشي. په دې ډول چې په لومړني ناحيه (ربع) کې، $x > 0$ ، $y > 0$ په دويمه ربع کې $x < 0$ ، $y > 0$ په دريمه ربع کې $x < 0$ ، $y < 0$ او په څلورمه ربع کې $x > 0$ او $y < 0$ دي.

لومړی مثال: د $A(-2,3)$ ، $B(-4,-2)$ ، $C(2,5)$ ، $D(3,-5)$ ، $E(0,2)$ او $F(-2,0)$ نقطې د وضعيه کمياتو په سيستم کې وټاکئ.

حل:



فعاليت

- وښياست کومې نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د y مختصې يې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي، د x مختصې يې صفر دي.
- ووياست چې د $(2,3)$، $(-2,3)$، $(2,-3)$، $(-2,-3)$، $(0,4)$ او $(4,0)$ نقطې په کومو ربعو کې واقع دي.

د دوو نقطو ترمنځ فاصله (Distance between two points):

آيا کولای شئ چې و وواياست، د $A(4,8)$ او $B(1,2)$ د نقطو تر منځ فاصله څو واحده ده؟

که $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ په مستوي کې دوې نقطې وي. موږ کولای شو چې د P_1 او

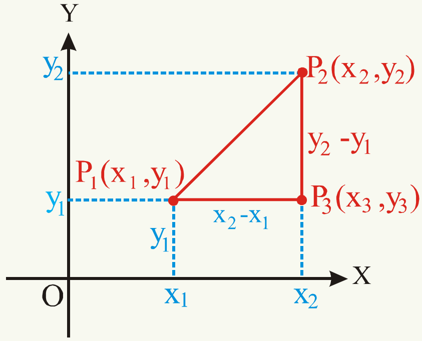
(c) ketabton.com: The Digital Library

P_2 ترمنځ فاصله یا $d = \left| P_1 P_2 \right|$ د دوو نقطو ترمنځ فاصله د $P_1 \overset{\Delta}{P_3} P_2$ د قایم الزاویه مثلث له مخې د فیثاغورث د قضیې په اساس پیدا کړو، لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

$$(\overline{P_1 P_2})^2 = (\overline{P_1 P_3})^2 + (\overline{P_2 P_3})^2$$

$$d = \left| P_1 P_2 \right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

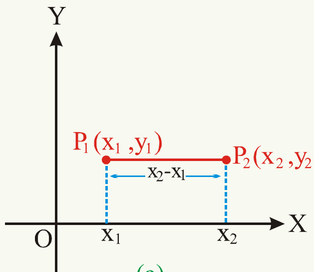


پام مو وي چې که د $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ نقطې پر افقي خط باندې واقع وي، په دې حالت کې $y_1 = y_2$ کېږي، لکه څرنګه چې د (a) په شکل کې لیدل کېږي.

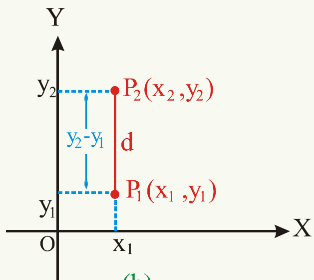
$$d = \left| P_1 P_2 \right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0} = \left| x_2 - x_1 \right|$$

او که د P_1 او P_2 نقطې پر عمودي خط باندې واقع وي، په دې حالت کې $x_1 = x_2$ دی، لکه چې د (b) په شکل کې ښودل شوي دي.

$$d = \left| P_1 P_2 \right| = \sqrt{0 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = \left| y_2 - y_1 \right|$$



(a)



(b)

دویم مثال: د $P_1(3, -2)$ او $P_2(-1, -5)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-1-3)^2+[-5-(-2)]^2} = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

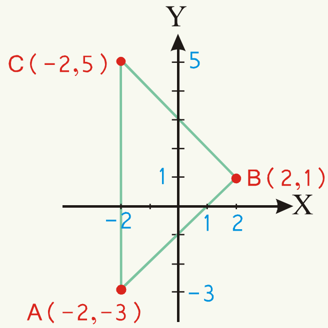
فعالیت

د $P_1\,(8,0)$ او $P_2\,(2,0)$ نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

دریم مثال: د فاصلې د فورمول په مرسته وښیاست چې $A(-2,-3)$ ، $B(2,1)$ او $C(-2,5)$ د یو قایم الزاویه مثلث رأسونه دي.

حل:

$$|AB| = \sqrt{[2-(-2)]^2+[1-(-3)]^2} = \sqrt{32}$$
$$|BC| = \sqrt{(-2-2)^2+(5-1)^2} = \sqrt{32}$$
$$|CA| = \sqrt{[-2-(-2)]^2+[5-(-3)]^2} = \sqrt{64}$$
$$|AB|^2+|BC|^2 = 32+32 = 64$$
$$|CA|^2 = 64$$



خرنگه چې: $|CA|^2 = |AB|^2+|BC|^2$ دی نو د $A\overset{\Delta}{B}C$ مثلث یو قایمه زاویه مثلث دی.

فعالیت

وښیاست چې $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ نقطې د قایمه زاویه مثلث راسونه دي.

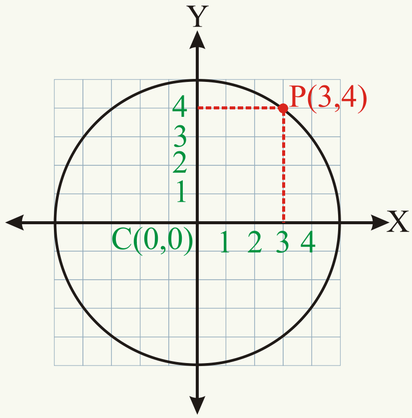
څلورم مثال: که $C(0,0)$ د دایرې مرکز او د $P(3,4)$ نقطه د دایرې د محیط یوه نقطه وی،

ددې دایرې د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\overline{PC} = R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2}$$
$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د Y مختصې یې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د X مختصې یې صفر دي.

د $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ د دوو نقطو تر منځ فاصله د $d = |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- په لاندې راکړل شوو نقطو کې د کومې نقطې فاصله د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه 15 واحده ده؟

$a:(\sqrt{176},7)$

$b:(10,-10)$

$C:(1,15)$

$d:(\frac{15}{2},\frac{15}{2})$

2- وښیاست چې د $A(0,2)$ ، $B(\sqrt{3},1)$ او $C(0,-2)$ نقطې د یو قایمه زاویه مثلث راسونه دي.

3 - د $(0,5)$ او $(0,-3)$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

4 - د $A(-\frac{1}{2},3)$ او $B(-1,\frac{-3}{4})$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

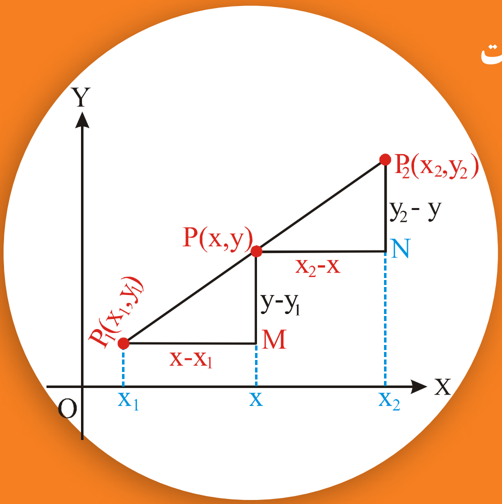
5 - د $(7,11)$ او $(1,3)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

6 - د $(3,6)$ او $(1,2)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

7 - د $(3,7)$ او $(12,19)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغې نقطې د وضعیه کمیاتو پیدا کول چې یو قطعه خط په یوه نسبت باندې ویشي:



آیا کولای شئ د هغه مستقیم خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $A(3,1)$ او $B(-2,4)$ له نقطو څخه تیرېږي؟

که د p د نقطې وضعیه کمیات (x,y) وي

چې د $\overline{P_1P_2}$ مستقیم خط د r په نسبت وېشي یا $\dfrac{P_1P}{PP_2}=r$ وي. د $P_1\overset{\Delta}{M}P$ او $P\overset{\Delta}{N}P_2$ د مثلثونو له مشابهت څخه لرو چې:

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{PM}{P_2N}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=r$$
$$y-y_1=ry_2-ry$$
$$y+ry=ry_2+y_1$$
$$(1+r)y=ry_2+y_1$$
$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{P_1M}{PN}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=r$$
$$x-x_1=rx_2-rx$$
$$x+rx=rx_2+x_1$$
$$(1+r)x=rx_2+x_1$$
$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$$

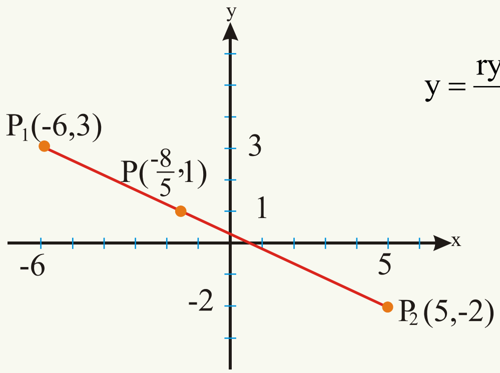
لومړی مثال: د P نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، که هغه مستقیم خط چې د $P_1(-6,3)$ او $P_2(5,-2)$ له نقطو څخه تیرېږي د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي یا $\dfrac{P_1P}{PP_2}=\dfrac{2}{3}$ وي.

حل

$$x_1=-6 \qquad x_2=5 \qquad r=\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 5-6}{1+\frac{2}{3}}=-\frac{8}{5}$$

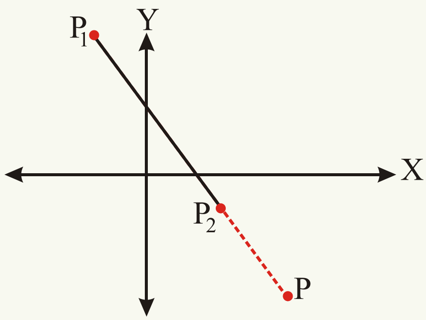
(c) ketabton.com: The Digital Library



$$y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(-2)+3}{1+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{-4}{3}+3}{1+\frac{2}{3}}=1$$

نو د p نقطې وضعيه کميات $P(\frac{-8}{5},1)$ دي چې د $\overline{P_1P_2}$ خط د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي.

متوجه بايد اوسو چې که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط داخلاً د r په نسبت و وېشي، $r>0$ او که خارجاً يې و وېشي، نو $r<0$ دی.



د مثال په ډول په شکل کې ليدل کېږي چې که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه داخلاً د r په نسبت ووېشي يا په بل عبارت که P_1P او PP_2 همجهت وي، $r>0$ او که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د r په نسبت ووېشي يا داچې P_1P او PP_2 مختلف الجهت وي، $r<0$ دی، نو $\frac{P_1P}{PP_2}=-r$ لکه: چې په پورتني شکل کې ليدل کېږي.

دويم مثال: د p د نقطې وضعيه کميات پيدا کړئ، که هغه مستقيم خط چې د $P_1(-8,4)$ او $P_2(2,-1)$ له نقطو څخه تېرېږي.

a: داخلاً يې د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي. b: خارجاً يې د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي.

د a حل:

$$r=\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 2-8}{1+\frac{2}{3}}=\frac{-20}{5}=-4\ ,\ \ y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(-1)+4}{1+\frac{2}{3}}=\frac{10}{5}=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط داخلاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي له $(-4,2)$ څخه عبارت دي

د b حل: څرنګه چې د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي، نو:

$$r=-\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{(\frac{-2}{3})\cdot 2-8}{1-\frac{2}{3}}=-28 \quad , \quad y=\frac{(\frac{-2}{3})(-1)+4}{1-\frac{2}{3}}=14$$

د p د نقطی وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1\ P_2}$ قطعه خط خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي له $(-28,14)$ څخه عبارت دي.

فعالیت

د p د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، په داسې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4,6)$ او $B(-2,3)$ له نقطو څخه تېرېږي، داخلاً يې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

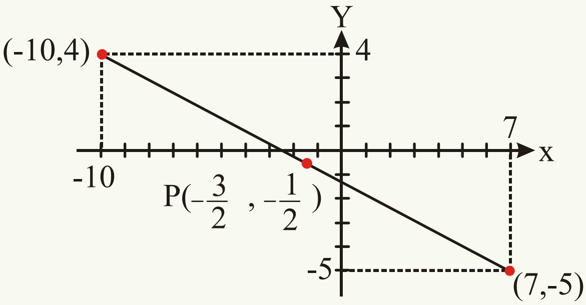
که د p نقطه د $\overline{P_1\ P_2}$ د مستقیم خط د تنصیف نقطه وي، په دې حالت کې $r=1$ دی او د p نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ او $y=\frac{y_1+y_2}{2}$

دریم مثال: د هغه قطعه خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $(-10,4)$ او $(7,-5)$ له نقطو څخه تېرېږي.

حل:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-10+7}{2}=-\frac{3}{2} \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{4-5}{2}=-\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د p د نقطي وضعيه کميات چې د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط د r په نسبت وېشي.

د $y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}$, $x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}$ او د $P_1 P_2$ قطعـه خط د تنصيف د نقطي وضعيه کميات

عبـارت دي له: $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ □ $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ که د p نقطه د $\overline{P_1 P_2}$ قطعه خط داخلاً د r

په نسبت و وېشی، نو r مثبت او که خارجاً يې و وېشی، نو r منفي دی.

پوښتني

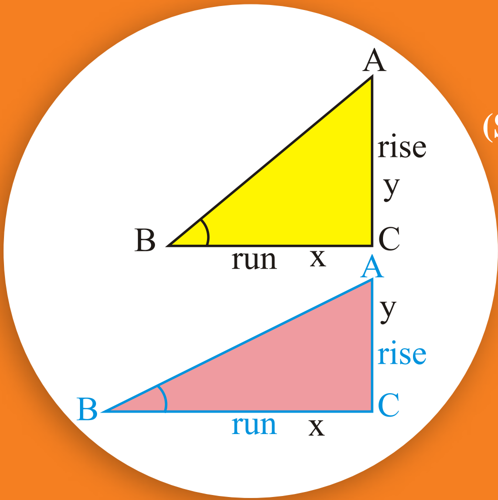
1 - د $\overline{AB}$ مستقيم خط د تنصيف د نقطي وضعيه کميات $(2,-1)$ دي، که $A(-1,-3)$ وي، د B د نقطي وضعيه کميات پيدا کړئ.

2 - د هغـه قطعـه خط د تنصيف نقطي وضعيه کميات پيدا کړئ چې د $A(3,1)$ او $B(-2,-4)$ له نقطو څخه تېرېږي.

3 - د هغي نقطي وضعيه کميات پيدا کړئ په داسـي حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4,6)$ او $B(-2,3)$ له نقطو څخه تېرېږي

a: داخلاً يې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي. b: خارجاً يې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

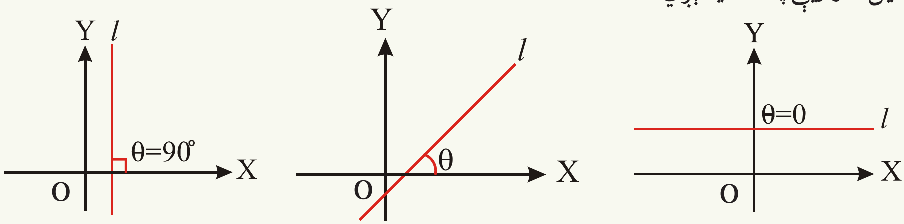


د یو مستقیم خط میل

(Slope of a straight Line)

کولای شئ چې ووایئ د کومې مایلې سطحې میل زیات دی؟

د □ زاویه چې د l مستقیم خط یې د X د محور له مثبت جهت سره جوړوي، د مستقیم خط د میل د زاویې په نامه یادیږي.



لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کیږي که د l خط د X له محور سره موازي وي $0 =$□ او که د Y له محور سره موازي وي، نو $90° =$□ ده.

څه وخت چې موږ پر مایله سطحه (inclined plane) پورته خواته حرکت کوو، په یو وخت کې افقي فاصله (run) او عمودي فاصله (rise) طی کوو. که د AB د مستقیم خط میل په m و ښایو.

$$m = \frac{rise}{run} = \frac{y}{x} = \tan\theta$$

د مستقیم خط میل د هغه زاویې له tan څخه عبارت دی چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي، که $0 < \theta < 90°$ وي، نو د مستقیم خط میل مثبت او که $90° < \theta < 180°$ وي میل منفي دی او که $\theta = 0$ وي $\tan 0° = 0$ دی، نو میل یې صفر او که $\theta = 90°$ وي، نو په دې حالت کې د مستقیم خط میل تعریف شوی نه دی، ځکه چې $\tan 90°$ تعریف شوی نه دی.

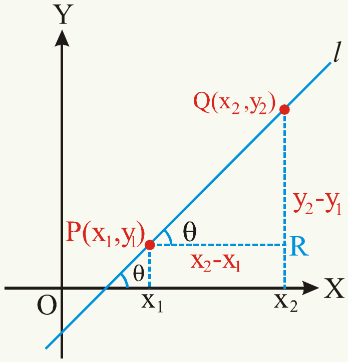
(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د X او Y د محورونو د میل په برخه کې څه فکر کوئ؟

د هغه مستقیم خط میل چې عمود نه وي او د $P(x_1 y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تیرېږي. $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta = m$ دی، څکه لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

$$\hat{RPQ} = \hat{\theta}$$
$$\overline{PR} = x_2 - x_1$$
$$\overline{QR} = y_2 - y_1$$
$$m = \tan\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



که د A، B، او C درې نقطې داسې ولرو چې د $\overline{AB}$ د مستقیم خط میل د $\overline{BC}$ د مستقیم خط له میل سره مساوي وي، نو د A، B، او C نقطې په یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

لومړی مثال: د هغه مستقیم خط میل پیداکړئ چې د $P_1\ (2,4)$ او $P_2\ (6,10)$ له نقطو څخه تیرېږي.

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-4}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

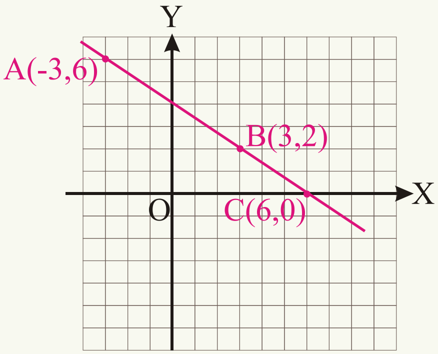
یا:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4-10}{2-6} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: و ښیاست چې د $A(-3,6)$، $B(3,2)$ او $C(6,0)$ درې نقطې پر یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

د $\overline{AB}$ مستقیم خط میل $= \frac{2-6}{3-(-3)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



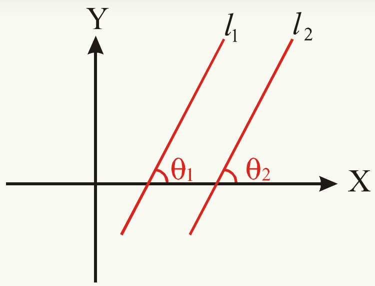
د $\overline{BC}$ د مستقیم خط میل $= \frac{0-2}{6-3} = -\frac{2}{3}$

څرنګه چې د $\overline{AB}$ او $\overline{BC}$ مستقیمو خطونو میلونه سره مساوي دي.نو د A، B او C نقطې په یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

نتیجه: د یوه مستقیم خط میل د مستقیم خط په ټولو نقطو کې سره مساوي دي.

فعالیت

- د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(-2,4)$ او $(5,1)$ له نقطو څخه تیرېږي.
- د مستقیم خط د میل په مرسته وښیاست چې د $(4,-5)$ ، $(7,5)$ او $(10,15)$ نقطې پر یوه مستقیم خط پرتې دي.



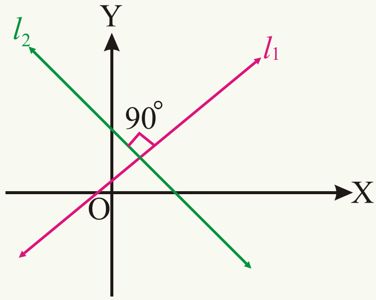
که د l_1 او l_2 دوه مستقیم خطونه وي او میلونه یې په ترتیب سره m_1 او m_2 وي، نو:

1- که l_1 د l_2 سره موازي وي $m_1 = m_2$ دی.

ځکه چې د شکل مطابق $\theta_1 = \theta_2$ دی

$$\tan\theta_1 = \tan\theta_2$$

$$m_1 = m_2$$



2- که l_1 او l_2 یو پر بل عمود وي، نو:

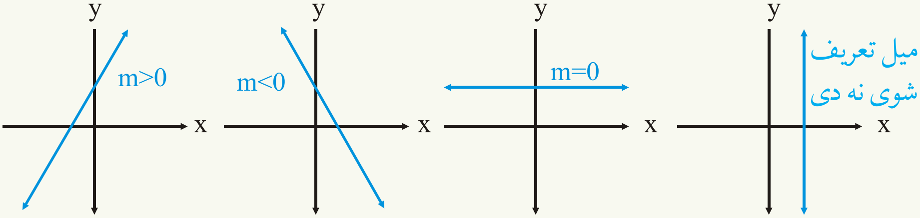
$m_1 = -\frac{1}{m_2}$ یا $m_1 m_2 + 1 = 0$ یا

$m_1 \cdot m_2 = -1$ دی.

د یو مستقیم خط میل چې د $P_1(x_1, y_1)$ او د $P_2(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تیرېږي، د $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ له فورمول څخه په لاس راځي د X د محور او د هغو مستقیمو

(c) ketabton.com: The Digital Library

خطونو میل چې د X له محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغو مستقیمو خطونو میل چې د Y له محور سره موازي وي تعریف شوی نه دی. که د یوه مستقیم خط د میل زاویه حاده وي، میل یې مثبت او که منفرجه وي، میل یې منفي دی او که د مستقیم خط د میل زاویه صفر وي، میل یې صفر دی.



پوښتنې

1 - د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(3,-2)$ او $(2,7)$ له نقطو څخه تېرېږي.

2 - که $A(8,6)$ ، $B(-4,2)$ او $C(-2,-6)$ د یو مثلث رأسونه وي، د مثلث د هرې ضلعې میل پیدا کړئ.

3 - د مستقیم خط د میل په مرسته و ښیاست چې د $(a,2b)$ ، $(c,a+b)$ او $(2c-a,2a)$ نقطې پر یو مستقیم خط باندې واقع دي.

4 - د $\overline{AB}$ مستقیم خط چې د $A(1,-2)$ او $B(2,4)$ له نقطو او د $\overline{CD}$ مستقیم خط چې د $C(4,1)$ او $D(-8,2)$ له نقطو څخه تېرېږي، دا دواړه خطونه سره:

a: موازي دي b: عمود دي c: هېڅ یو

5 - د $y=3$ مستقیم خط او د $x=3$ مستقیم خط یو له بله سره څه اړیکه لري؟

a - موازي دي b - عمود دي c - هېڅ یو

6 - د $x=-1$ او $x=3$ خطونه سره: a - موازي دي b - عمود دي c - هېڅ یو

7 - د $y=-\sqrt{3}$ مستقیم خط میل مساوي دی په:

a - 1 b- صفر c- -1 d- تعریف شوی نه دی

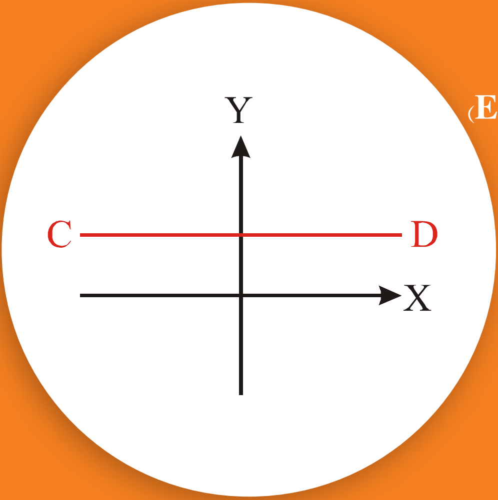
8 - د $x=0{,}03$ مستقیم خط میل مساوي دی په:

a - 1 b- صفر c- -1 d- تعریف شوی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

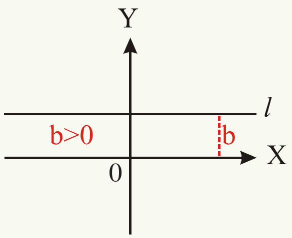
د يو مستقيم خط معادله

(Equation of a straight Line)



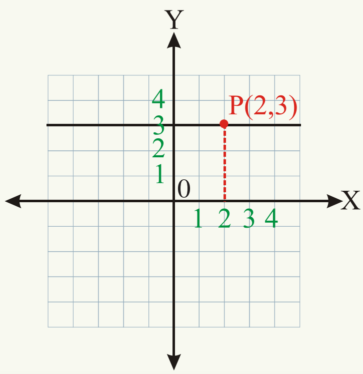
آیا کولای شئ د $\overline{CD}$ د مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د X له محور سره موازي وي.

1- د هغه مستقیم خط معادله چې د X له محور سره موازي وي.



ټولې نقطې چې د l پر مستقیم خط پرتې وي، د X له محور څخه مساوي فاصلې لري یا په بل عبارت د ټولو هغو نقطو د y مختصې چې د X له محور سره پر موازي خط واقع دي سره مساوي دي. که د X له محور څخه د l د خط فاصلې ته (b) ووایو د l د مستقیم خط معادله $y = b$ ده.

که $b > 0$ وي، نو د l خط د X له محور څخه پورته او که $b < 0$ وي، نو د l خط د X له محور لاندې او که $b = 0$ وي، نو د l خط د X پر محور پروت دی.



لومړی مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د (2,3) له نقطې څخه تیریږي او د X له محور سره موازي وي.

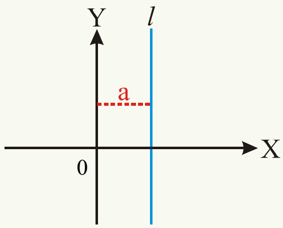
حل: $y = 3$ ددې خط معادله ده

فعالیت

د X د محور معادله پیدا کړئ.

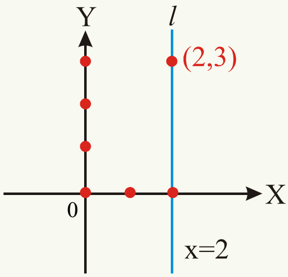
(c) ketabton.com: The Digital Library

2 - **د هغه مستقيم خط معادله چې د Y له محور سره موازي وي**: تولې نقطې چې



د l پر خط چې د Y له محور سره موازي دی، پرتې وي، د Y له محور څخه مساوي فاصلې لري که د Y له محور څخه د l د مستقيم خط فاصلې ته a و وايو چې a ددې نقطو لومړنی مختصه ده، نو د l د خط معادله $x = a$ ده.

که $a > 0$ وي د l خط د Y د محور ښي خواته او که $a < 0$ وي د l خط د Y د محور کيڼې خواته او که $a = 0$ وي، نو د l خط د Y پر محور منطبق دی.



دويم مثال: د هغه مستقيم خط معادله پيدا کړئ چې د (2,3) له نقطې څخه تېر شي او د Y له محور سره موازي وي.

حل: $x = 2$ ددې خط معادله ده.

فعاليت

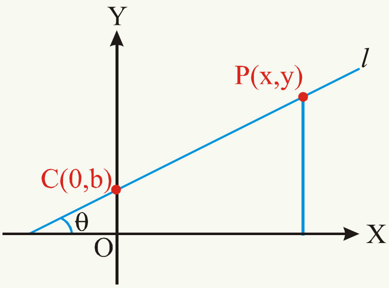
د Y د محور معادله وليکئ.

3. **د هغه مستقيم خط معادله چې ميل او د Y له محور سره يې د تقاطع نقطه معلومه وي يا د مستقيم خط معياري معادله**:

که $P(x,y)$ د l مستقيم خط يوه نقطه وي او $C(0,b)$ د Y له محور سره د مستقيم خط د تقاطع نقطه وي، نو د l د مستقيم خط ميل عبارت دی له:

$$m = \frac{y-b}{x-0} = \frac{y-b}{x}$$

$y - b = mx$ يا $y = mx + b$



(c) ketabton.com: The Digital Library

که $b=0$ وي، د مستقيم خط معادله $y=mx$ ده چې په دې حالت کې مستقيم خط د وضعيه کمياتو له مبدا څخه تېرېږي.

دريم مثال: د هغه مستقيم خط معادله پيدا کړئ چې:

a- ميل يې 2 او د Y محور په 5 کې قطع کړي.

b- د Y محور په $\frac{4}{3}$ کې قطع کړي او پر هغه خط عمود وي چې ميل يې -6 دی.

حل:

a: $m=2$ او $b=5$ $\qquad y=mx+b \Rightarrow y=2x+5$

b: ددې خط ميل $m_2=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{-6}=\frac{1}{6}$

$b=\frac{4}{3}$ او $m=\frac{1}{6}$ دی؛ نو:

$$y=mx+b \Rightarrow y=\frac{1}{6}x+\frac{4}{3}$$

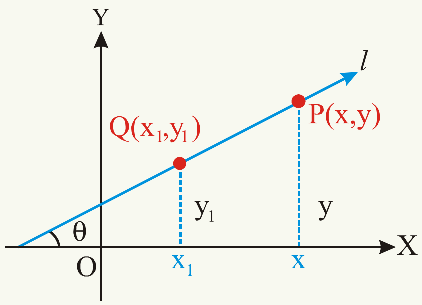
دا معادله کولای شو، د $6y=x+8$ ، $6y-x=8$ او يا $x-6y+8=0$ په شکل وليکو.

4 - د هغه مستقيم خط معادله چې ميل او يوه نقطه يې معلومه وي:

د l د مستقيم خط معادله چې ميل يې m او د $Q(x_1,y_1)$ له نقطې څخه تېرېږي.

که $p(x,y)$ د l د مســتقيم خط يوه اختياري نقطه وي. څرنګه چې د $Q(x_1,y_1)$ او $P(x,y)$ نقطې په يوه مستقيم خط واقع دي، نو د l د مستقيم خط ميل مساوي دی په:

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow y-y_1=m(x-x_1)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

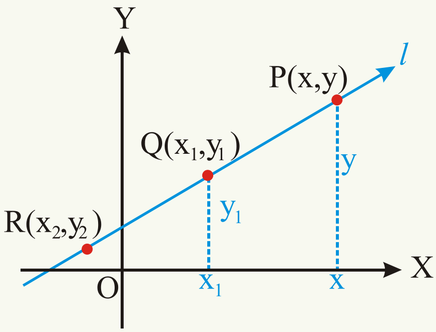
څلورم مثال: د هغه مستقيم خط معادله پيدا کړئ چې ميل يې (-2) او د $(5,1)$ له نقطې څخه تېرېږي.

حل:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-1=-2(x-5)$$
$$y=-2x+11$$
يا $2x+y-11=0$

5: **د هغه مستقيم خط معادله چې دوې نقطې يې معلومې وي**:

د l د خط ميل چې عمود نه وي، د $Q(x_1,y_1)$ او $R(x_2,y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي او $P(x,y)$ ددې خط يوه کيفي نقطه وي، ځرنگه چې د مستقيم خط ميل په هره نقطه کې سره مساوي دي، نو لرو چې:



$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y-y_2}{x-x_2}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
يا $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

پنځم مثال: د هغه مستقيم خط معادله پيدا کړئ چې د $(-2,1)$ او $(6,-4)$ له نقطو څخه تېرېږي.

حل:

$$x_1=-2 \quad , \quad y_1=1$$
$$x_2=6 \quad , \quad y_2=-4$$

$$y-1=\frac{-4-1}{6-(-2)}[x-(-2)]$$
$y-1=\frac{-5}{8}(x+2)$ يا $5x+8y+2=0$

6: **د هغه مستقيم خط معادله چې له محورونو سره يې تقاطع معلومه وي**:

که $P(x,y)$ د l د مستقيم خط يوه کيفي نقطه وي او د l مستقيم خط د X محور په a کې او د Y محور په b کې قطع کړي يا د X محور د $A(a,0)$ او د Y محور د $B(0,b)$ په نقطه کې قطع کوي چې د B ، A او p نقطې د l پر مستقيم خط واقع دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه مستقیم خط له معادلې څخه چې دوې نقطې یې معلومې وي لرو چې:

$x_1 = a \ , \ y_1 = 0 \quad x_2 = 0 \ , y_2 = b$

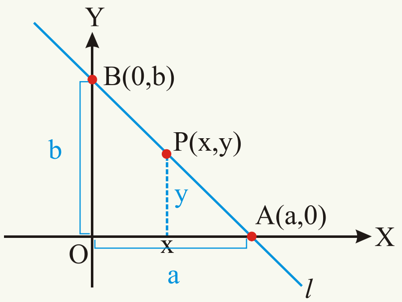
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \ , \ y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x-a) \Rightarrow -ay = b(x-a)$$

$-ay = bx - ab$

$bx + ay = ab$

دواړه خواوې پر ab ویشو

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



شپږم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د X محور په (2,0) او د Y محور په (0,–4) کې قطع کوي.

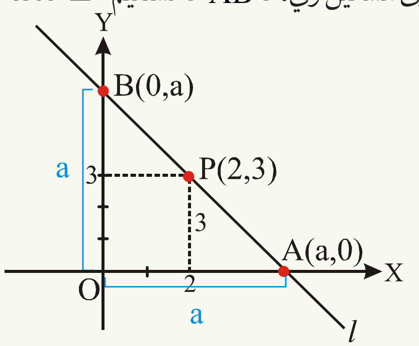
حل: $a = 2$ او $b = -4$ ده.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$$

یا $2x - y - 4 = 0$

اووم مثال: په شکل کې چې د $O\overset{\Delta}{A}B$ مثلث متساوی الساقین وي، د $\overline{AB}$ د مستقیم خط معادله په داسې حالت کې پیدا کړئ چې ددې مثلث د $\overline{AB}$ ضلع د $P(2,3)$ له نقطې څخه تیرېږي.



حل: د $\overline{AB}$ د مستقیم خط میل مساوي دی په:

$$\overline{AB} = \frac{a-0}{0-a} = -1 \quad \text{د مستقیم خط میل}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو اوس د هغه مستقيم خط معادله چې ميل يې (-1) او د $P(2,3)$ له نقطې څخه تېرېږي عبارت ده له:

$y-3=-1(x-2)$ يا $x+y-5=0$

د هغه مستقيم خط معادله چې ميل او د Y له محور سره يې تقاطع معلومه وي عبارت ده له:

$y=mx+b$ د هغه مستقيم خط معادله چې ميل او يوه نقطه يې معلومه وي عبارت ده له:

$y-y_1=m(x-x_1)$ ، د هغه مستقيم خط معادله چې دوې نقطې يې معلومې وي عبارت ده له:

$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ اود هغه مستقيم خط معادله چې له محورونو سره يې د تقاطع نقطې معلومې وي: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ ده.

پوښتني

1- د لاندې مستقيمو خطونو معادلې پيدا کړئ چې:

a: د هغه افقي خط معادله پيدا کړئ چې له $(7,-9)$ نقطې څخه تېرېږي.

b: د هغه مستقيم خط معادله چې د X پر محور عمود او له $(-5,3)$ نقطې څخه تېرېږي.

2- د لاندې مستقيمو خطونو معادلې پيدا کړئ چې:

a: ميل يې 7 او د $(-6,5)$ له نقطې څخه تېر شي.

b: ميل يې صفر او د $(8,-3)$ له نقطې څخه تېرېږي.

c: د $(-8,5)$ له نقطې څخه تېرېږي او ميل يې تعريف شوی نه وي.

d: د $(-5,-3)$ او $(9,-1)$ له نقطو څخه تېرېږي.

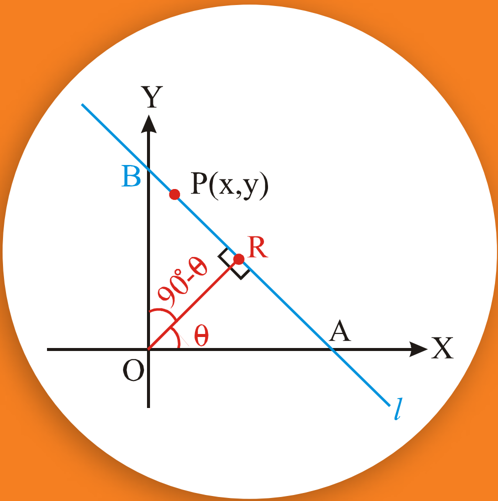
e: ميل يې -4 او د Y محور په -9 کې قطع کړي.

3- د هغه مثلث د ضلعو معادلې پيدا کړئ چې راسونه يې $A(-3,2)$ ، $B(5,4)$ او $C(3,-8)$ وي.

4- د هغه مستقيم خط معادله پيدا کړئ چې د $(-4,-6)$ له نقطې څخه تېرېږي او پر هغه خط عمود وي چې ميل يې $\dfrac{-3}{2}$ وي.

5- د هغه مستقيم خط معادله پيدا کړئ چې د $(11,-5)$ له نقطې څخه تېرېږي او له هغه خط سره موازي وي چې ميل يې -24 وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



7 - د مستقیم خط نورمال معادله

آیا ویلای شـئ د یوه مسـتقیم خط نورمال خط کوم خط ته وایي؟

د l د مســتقیم خط معادله که p د هغه عمود خط اوږدوالی وي چې د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د l پر خط عمود وي او θ د عمود خط د میل زاویه وي.

عبارت ده له: $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ یا $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$

د l مســتقیم خـط د X محـور د A پـه نقطه کې او د Y محـور د B په نقطه کې قطع کوي، که $P(x,y)$ د $\overline{AB}$ د مســتقیم خط یوه کیفي نقطه وي او د $\overline{OR}$ خط د l پر خط عمود وي، نو: $|\overline{OR}| = P$ دی چې د $\overline{OR}$ خط ته د l د خط نورمال خط وایي او P د نورمال اوږدوالی دی.

د $\overset{\Delta}{ORA}$ او $\overset{\Delta}{ORB}$ په قایمه زاویه مثلثونو کې لرو چې:

$$\cos\theta = \frac{P}{OA} \quad \text{یا} \quad OA = \frac{P}{\cos\theta}$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{P}{OB} \; \text{یا} \; OB = \frac{P}{\cos(90^\circ - \theta)} = \frac{P}{\sin\theta}$$

له مثلثاتو پوهېږو: $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

څرنګه چې د $\overline{AB}$ مســتقیم خط د X محور په $(OA,0)$ او د Y محور په $(0,OB)$ کې قطع کوي، نو د $\overline{AB}$ د مستقیم خط معادله عبارت ده له:

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x}{\frac{P}{\cos\theta}}+\frac{y}{\frac{P}{\sin\theta}}=1$$

یا:
$$x\cos\theta + y\sin\theta = P$$

چې $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ یا $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$ د l د مستقیم خط نورمال معادله ده.

لومړی مثال: که د هغه عمود خط اوږدوالی چې د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د l پرخط عمود وي 5 واحده وي او ددې عمود خط د میل زاویه $120°$ وي، د l د مستقیم خط میل، نورمال معادله یې او د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه پیدا کړئ.

حل: $\theta = 120°$ او $P = 5$ دي.

$$x\cos 120° + y\sin 120° = 5$$

$$-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=5 \qquad (\cos 120° = -\frac{1}{2} \quad , \quad \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$x-\sqrt{3}y+10=0$$

د l خط د میل د پیداکولو لپاره د ا معادله د $y = mx + b$ په شکل لیکو:

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{10}{\sqrt{3}}$$

نو د l خط میل $m=\frac{1}{\sqrt{3}}$ او د Yمحور د $(0,\frac{10}{\sqrt{3}})$ په نقطه کې قطع کوي.

فعالیت

د هغه مستقیم خط نورمال معادله پیداکړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحده او نورمال یې د X د محور له مثبت جهت سره د $30°$ زاویه جوړوي.

8- د مستقیم خط عمومي معادله: (General equation of a straight Line)

د $ax + by + c = 0$ معادله د x او y دوه متحوله لري a، b، او c ثابت عددونه دي چې a او b دواړه په یو وخت کې صفر نه وي، د مستقیم خط دعمومي معادلې په نامه یادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1) که $a \neq 0$ او $b = 0$ وي، نو $x = -\frac{c}{a}$ یا $ax + c = 0$ دا د هغه مستقیم خط معادله ده چې د Y له محور سره موازي وي ددې خط مستقیمه فاصله د Y له محور څخه $-\frac{c}{a}$ ده.

2) که $a = 0$ او $b \neq 0$ وي، نو معادله د $by + c = 0$ شکل نیسي یا $y = -\frac{c}{b}$ چې دا د هغه مستقیم خط معادله ده چې د X له محور سره موازي دی. د X له محور څخه ددې خط مستقیمه فاصله $\frac{-c}{b}$ ده.

3) که $a \neq 0$ او $b \neq 0$ وي، نو:

$$by = -ax - c \quad \text{یا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

دا د هغه مستقیم خط معادله ده چې میل یې $m = \frac{-a}{b}$ دی او د y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

1- د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په معیاري شکل:

د $ax + by + c = 0$ عمومي معادله د معیاري معادلې په شکل عبارت ده له:

$$by = -ax - c \quad \text{یا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

چې ددې خط میل $m = \frac{-a}{b}$ او د Y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

دویم مثال: د $5x - 12y + 39 = 0$ مستقیم خط عمومي معادله په معیاري شکل واړوئ.

حل:

$$12y = 5x + 39 \quad \text{یا} \quad y = \frac{5}{12}x + \frac{39}{12}$$

چې میل یې $m = \frac{5}{12}$ او د Y محور په $\frac{39}{12}$ کې قطع کوی.

2- د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $ax+by+c=0$ په معادله کې د مستقیم خط میل $\frac{-a}{b}$ او یوه نقطه یې $(\frac{-c}{a},0)$ ده، نو:

$$y=\frac{-a}{b}(x+\frac{c}{a}) \qquad m=\tan\theta=\frac{-a}{b}$$

دریم مثال: د $5x-12y+39=0$ د مستقیم خط عمومي معادله د هغه خط د معادلې په شکل تبدیله کړئ چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي.

حل: د $5x-12y+39=0$ مستقیم خط یوه نقطه $(\frac{-39}{5},0)$ ده او میل یې $\frac{5}{12}$ دی، نو:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{5}{12}(x+\frac{39}{5})\Rightarrow y=\frac{5}{12}x+\frac{39}{12}$$

3 - د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې دوې نقطې یې معلومې وي.

هغه خط چې معادله یې $ax+by+c=0$ وي، د $(\frac{-c}{a},0)$ او $(0,\frac{-c}{b})$ له نقطو تېرېږي.

$$y_1=0 \qquad x_1=\frac{-c}{a} \qquad y_2=\frac{-c}{b} \qquad x_2=0$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{\frac{-c}{b}-0}{0+\frac{c}{a}}(x+\frac{c}{a})=\frac{\frac{-c}{b}}{\frac{c}{a}}(x+\frac{c}{a})=-\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}(x+\frac{c}{a})$$

$$y=\frac{-a}{b}(x+\frac{c}{a})$$

څلورم مثال: د $5x-12y+39=0$ مستقیم خط عمومي معادله د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل ولیکئ چې دوې نقطې یې معلومې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د $5x-12y+39=0$ خط د $P_2(0,\frac{39}{12})$ او $P_1(\frac{-39}{5},0)$ له نقطو څخه تېرېږي.

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$ یا $$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$\frac{y-0}{x+\frac{39}{5}}=\frac{\frac{39}{12}-0}{0+\frac{39}{5}}$$

4- د یو مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې د X او Y له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي.

$$ax+by+c=0$$

$$ax+by=-c$$

دواړه خواوې په $(-c)$ وېشو:

$$\frac{ax}{-c}+\frac{by}{-c}=1$$

یا

$$\frac{x}{\frac{-c}{a}}+\frac{y}{\frac{-c}{b}}=1$$

پنځم مثال: د $5x-12y+39=0$ معادله د هغه مستقیم خط معادلې ته واړوئ چې له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي.

$$5x-12y=-39$$

دواړه خواوې په -39 وېشو:

$$\frac{5x}{-39}-\frac{12y}{-39}=1$$

:

$$\frac{x}{-\frac{39}{5}}+\frac{y}{\frac{39}{12}}=1$$

په دې معنا چې دا مستقیم خط د X محور د $(-\frac{39}{5},0)$ او د Y محور د $(0,\frac{39}{12})$ په نقطه کې قطع کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $3x-2y=6$ مســتقیم خط د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات د X او Y، له محورونو ســره پیدا کړئ.

5: د یوه مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په نورمال شکل:

څرنګه چې پوهېږو د مســتقیم خط نورمال معادله $x\cos\theta+y\sin\theta=P$ ده او عمومي معادله یې $ax+by+c=0$ یا $ax+by=-c$ ده چې دواړه د یوه مستقیم خط ښودونکي دي، نو د ضریبونو نسبتونه یې د k د یوه ثابت عدد سره مساوي دی.

$$\frac{a}{\cos\theta}=\frac{b}{\sin\theta}=\frac{-c}{P}=k$$

$$\frac{P}{-c}=\frac{\cos\theta}{a}=\frac{\sin\theta}{b}=\frac{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

ځکه چې: $$\frac{\cos^2\theta}{a^2}=\frac{\sin^2\theta}{b^2}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{a^2+b^2}$$

په نتیجه کې: $\sin\theta=\dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ او $\cos\theta=\dfrac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ کېږي.

د $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$ په معادله کې د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ د قیمتونو په لیکلو سره لرو چې:

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

$$\frac{ax+by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

او یا $$\frac{b}{\sin\theta}=k \quad , \quad \frac{a}{\cos\theta}=k$$

نو: $k\sin\theta=b$ ، $k\cos\theta=a$ او $k^2\sin^2\theta=b^2$ ، $k^2\cos^2\theta=a^2$

$$k^2\cos^2\theta+k^2\sin^2\theta=a^2+b^2$$

$$k^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=a^2+b^2$$

یا: $$k=\pm\sqrt{a^2+b^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $ax+by=-c$ معادلې دواړه خواوې په K وېشو، نو لرو چې:

$$\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}y=-\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{یا} \quad \frac{ax+by+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

ددې لپاره چې د p قيمت هر وخت مثبت وي، نو د مخرج د جذر علامه د c مخالفه علامه ده او که $c=0$ وي، د جذر علامه د b د علامې په شان ده.

شپږم مثال: $2x-3y+6=0$ معادله په نورمال شکل واړوئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې په $\sqrt{2^2+(-3^2)}=\pm\sqrt{13}$ باندې وېشو. ددې لپاره چې ښي خوا مثبت وي د $\sqrt{13}$ علامه بايد منفي ونيول شي:

$$\frac{2x-3y+6}{-\sqrt{13}}=0 \quad \text{یا} \quad -\frac{2}{\sqrt{13}}x+\frac{3}{\sqrt{13}}y-\frac{6}{\sqrt{13}}=0$$

نو θ په دويمه ناحيه (ربعه) کې ده.

له مثلثاتي جدول څخه لرو چې $\theta=123^\circ 40'$ ده، نو ددې مســتقيم خط نورمال معادله عبارت ده له:

$$x\cos 123^\circ 40'+y\sin 123^\circ 40'-\frac{6}{\sqrt{13}}=0$$

فعاليت

د $5x-12y+39=0$ مستقيم خط معادله په نورمال شکل تبديله کړئ.

د يوه مستقيم خط نورمال معادله $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$ او د مستقيم خط عمومي معادله $ax+by+c=0$ ده. د مستقيم خط عمومي معادله د نورمال معادلې په شکل عبارت له:

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1 - د $x\cos 60° + y\sin 60° - 7 = 0$ مستقیم خط نورمال معادله د مستقیم خط په عمومي معادله تبدیله کړئ.

2 - د $x\cos 225° + y\sin 225° - 6 = 0$ مستقیم خط نورمال معادله، د مستقیم خط په عمومي معادله واړوئ.

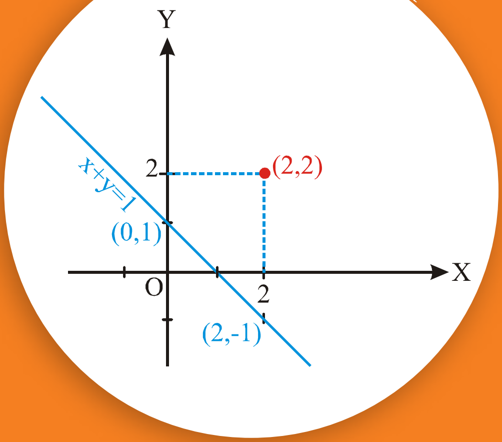
3 - د مستقیم خط لاندې عمومي معادلې په نورمال شکل واړوئ.

$2x + 4y + 7 = 0$ $\qquad$ $2x + 5y - 2 = 0$ $\qquad$ $15y - 8x + 3 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه:

(Distance of a point from a line)



آيا د $(2,2)$ نقطې فاصله د $x+y=1$ له خط څخه پيداکولای شئ؟

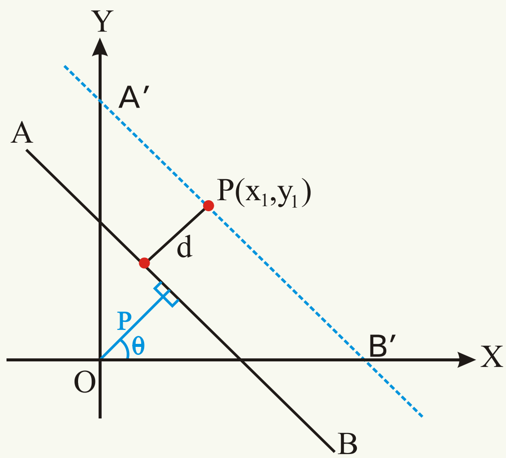
کــه د P نقطې فاصله، لکه: څنګه چې په شــکل کــې ليدل کيږي د $\overline{AB}$ له خط څخه چې د P نقطه پر $\overline{AB}$ واقع نه وي، d فرض کړو (د $\overline{AB}$ خط نه عمود وي او نه افقي) د p له نقطې څخه د $\overline{A'B'}$ مستقيم خط له $\overline{AB}$ سره موازي رسم کړئ، په دې حالت کې د AB د خط نورمال معادله عبارت ده له: $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$

څرنګــه چــې د $A'B'$ مســتقيم خط د AB له خط ســره موازي دی، نــو د $A'B'$ د خط نورمال معادله عبارت ده له:

$$x\cos\theta + y\sin\theta - (p+d) = 0 \quad \text{يا} \quad d = x\cos\theta + y\sin\theta - p$$

څرنګه چې د $P(x_1, y_1)$ نقطه د $\overline{A'B'}$ پر مستقيم خط پرته ده، نو په پورتنی معادله کې په ترتيب سره د x او y، پرځای x_1 او y_1 ږدو، نولرو چې:

$$\boxed{d = x_1\cos\theta + y_1\sin\theta - P}$$



چــې دا معادله د $\overline{AB}$ له خــط څخه د p د نقطې فاصله ښــيي، کــه چيرې د AB د خط معادله په نورمال شــکل راکړل شــوي وي او که د $\overline{AB}$ د خط معادله په عمومي شکل $(ax+by+c=0)$ راکړل شوي وي، نو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنگه چې: $\sin\theta = \dfrac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ ، $\cos\theta = \dfrac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ او $p = \dfrac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$

که دا قیمتونه د AB د مستقیم خط په نورمال معادله کې وضع کړو، لرو چې:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

د فاصلې پــه معادله کې که د P نقطه او د وضعیه کمیاتو مبدا د ABد خط یوې خواته واقع وي، نو د d قیمــت منفــي کېږي. او کــه د pنقطه او مبدا د AB د خط دواړو خواوو ته واقع وي د d قیمت مثبت دی. خرنگه چې فاصله هر وخت مثبت ده، نو باید چې مطلقه قیمت یې په پام کې ونیسو. (د c علامه د مخرج د جذر د علامې مخالفه علامه ده)

لومړی مثال: د $P(-2,8)$ د نقطې فاصله د $4x + 3y - 11 = 0$ له خط څخه پیدا کړئ.

حل: $a = 4$ ، $b = 3$ او $c = -11$ ده، خرنگه چې د c علامه منفي ده، نو د جذر علامه باید مثبت وي.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4(-2)+3(8)-11|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}} = \frac{|-8+24-11|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

فعالیت

د $(5,8)$ نقطې فاصله د $3x - 2y + 7 = 0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله:

:(Distance between two parallel lines)

د دوو مــوازي خطونــو ترمنځ فاصلــه پر یو ددې خطونو د یــوې نقطې فاصله ده، لــه بل موازي خط څخه:

دویم مثال: د $2x - 5y + 13 = 0$ او $2x - 5y + 6 = 0$ موازي مستقیمو خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

حل: یوه نقطه په یو ددې موازي خطونو باندې پیدا کوو، د مثال په ډول که د

$$2x - 5y + 13 = 0$$

په معادله کې $x = 1$ وي، نو $y = 3$ کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس نو د $(1,3)$ نقطې فاصله د $2x-5y+6=0$ له مستقيم خط څخه د فاصلې د فورمول $d=\frac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ په مرسته په لاس راوړو.

$$d=\frac{|2(1)-5(3)+6|}{\sqrt{(2)^2+(-5)^2}}=\frac{|2-15+6|}{\sqrt{4+25}}=\frac{7}{\sqrt{29}}$$

يادونه: د وضعيه کمياتو له مبدا څخه د $ax+by+c=0$ مستقيم خط فاصله د $\frac{|C|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ څخه عبارت ده.

فعالیت

د $3x+2y=10$ او $y=-\frac{3}{2}x+7$ د موازي خطونو ترمنځ فاصله پيدا کړئ.

دريم مثال: د $2x+y+2=0$ او $6x+3y-8=0$ د مستقيمو موازي خطونو ترمنځ فاصله پيداکړئ.

حل: که د $2x+y+2=0$ په معادله کې $x=0$ وي، $y=-2$ کيږي. اوس د $(0,-2)$ او د $6x+3y-8=0$ د مستقيم خط فاصله په لاس راوړو:

$$d=\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|6(0)+3(-2)-8|}{\sqrt{36+9}}=\frac{14}{3\sqrt{5}}$$

د $P(x_1,y_1)$ د نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه د $d=x_1\cos\theta+y_1\sin\theta-P$ او يا د $d=\frac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د هــرو دوو جــوړو موازي خطونو ترمنځ فاصله پیداکــړئ چې معادلې یې په لاندي ډول دي:

$3x-4y+3=0$ او $3x-4y+7=0$

$12x+5y-6=0$ او $12x+5y+13=0$

$x+2y-5=0$ او $2x+4y=1$

2 - د $P(6,-1)$ نقطې فاصله له $6x-4y+9=0$ مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

3 - د $3x+6y-8=0$ او $2x+4y+5=0$ مــوازي خطونــو ترمنځ فاصله مســاوي ده په:

a) $\frac{31}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{31}{6\sqrt{5}}$ c) $6\sqrt{5}$ d) هیڅ یو

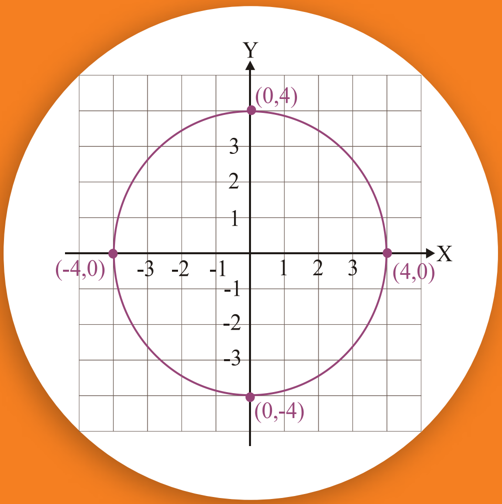
4 - د $(1,2)$ د نقطې فاصله د $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+2=0$ مستقیم خط څخه مساوي ده په:

$a:2$ $b:1$ $c:3$ $d:\frac{1}{2}$

5 - د $(-2,7)$ نقطې فاصله له $24x+7y-2=0$ مستقیم خط څخه مساوي ده په:

$a:0,04$ $b:\frac{1}{25}$ $c:4\times10^{-2}$ d: دري واړه سم دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



دایره (Circle)

آیــا د هغې دایرې معادله پیداکولای شــئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدأ کې او شــعاع یې 4 واحده وي؟

تعریف

دایره د هغو نقطو سټ دی چې له یوې ثابتې نقطې څخه یې فاصلې مساوي وي. چې دې ثابتې نقطې ته د دایرې مرکز (Center) او مساوي فاصلې ته د دایرې شعاع (Radius) وایي.

د دایرې معادله (Equation of circle): که $C(h,k)$ د دایرې مرکز، r د دایرې شــعاع او $P(x,y)$ د دایرې په محیط یوه نقطه وي، د شــکل له مخې د فیثاغورث د قضیې په اســاس لرو چې:

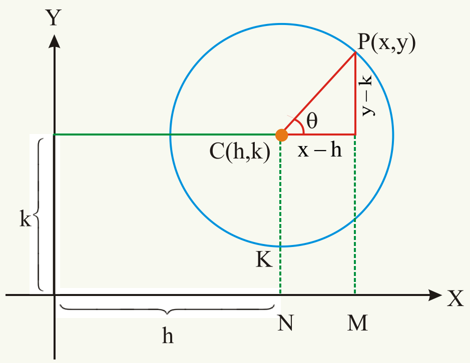
$$(\overline{CP})^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (\overline{CP} = r)$$

چې دې معادلې ته د دایرې معیاري معادله وایي. که د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، نو په دې حالت کې $h = k = 0$ دی او د دایرې معادلــه: $(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$ یــا

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ده، او که $r = 0$ وي داســې دایرې ته نقطوي دایره (Point circle) وایي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې مرکز يې $(-3,5)$ او د شعاع اوږدوالی يې (7) واحده وي.

حل: $r = 7$ ، $k = 5$ او $h = -3$

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 7^2$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 10y - 15 = 0$$

فعاليت

د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې او شعاع يې 3 واحده وي.

د يوې دايرې عمومي معادله (General form of an equation of a circle):

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 = 0$$

يا:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

که $-k = f$ ، $-h = g$ او $h^2 + k^2 - r^2 = c$ فرض شي، نو لرو چې:

$$(x+g)^2 + (y+f)^2 = g^2 + f^2 - c \quad \text{يا} \quad x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

چې دې معادلې ته د دايرې عمومي معادله وايي چې مرکز يې $(-g,-f)$ او شعاع يې $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ ده.

که $g^2 + f^2 - c > 0$ وي دايره حقيقي ده.

که $g^2 + f^2 - c = 0$ دايره نقطوي ده.

که $g^2 + f^2 - c < 0$ دايره مجازي ده. (دايره وجود نه لري)

او يا که د $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$

په معادله کې $-2h = a$ ، $-2k = b$ او $h^2 + k^2 - r^2 = c$ عوض کړو لرو چې

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ چې دا هم د دايرې عمومي معادله ده، ځينې وختونه د دايرې عمومي معادله داسې هم ښودل کېږي.

$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey - F = 0$ په دې ډول چې $A = B$ او هم علامه وي، نو دا هم د دايرې عمومي معادله ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

خاص حالتونه:

1- که د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ د دايرې په معادله کې $h=0$ وي، نو د دايرې مرکز د Y پر محور پروت دی او د دايرې معادله دا شکل $x^2+(y-k)^2=r^2$ غوره کوي.

2- او که $k=0$ وي، د دايـرې مرکـز د X پرمحـور پـروت دی او د دايـرې معادلـه دا: $(x-h)^2+y^2=r^2$ ده.

3- که $k=r$ وي، دايره د X پر محور مماس ده او د دايرې معادله $(x-h)^2+(y-r)^2=r^2$ ده.

4- اوکه $h=r$ وي، دايره د Y پر محور مماس ده او د دايرې معادله $(x-r)^2+(y-k)^2=r^2$ ده.

5- يوه دايره هغه وخت د وضعيه کمياتو له مبدا څخه تيرېږي چې د $h^2+k^2=r^2$ رابطه صدق کړي.

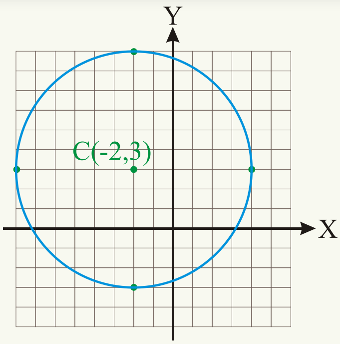
6- يوه دايره هغه وخت د X او Y پر محورونو مماس ده چې معادله يې دا $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ شکل ولري.

دويم مثال: د $x^2+(y-5)^2=10$ دايرې مرکز د Y پر محور پروت دی.
د $(x-1)^2+(y-5)^2=25$ دايره د X له محور سره مماس ده.
د $(x+3)^2+y^2=9$ د دايرې مرکز د X پر محور پروت دی.

فعاليت

په شکل کې وښياست چې د دويم مثال، د لومړې دايرې مرکز د Y پر محور پروت دی، دويمه دايره د X له محور سره مماس ده او د دويمې دايرې مرکز د X پر محور واقع دی.

دريم مثـال: د هغې دايرې عمومي او معياري معادلې پيدا کړئ چې د مرکز وضعيه کميات يې $(-2,3)$ او شـعاع يې 6 واحده وي او هم دا دايره رسم کړئ.



(د دايرې معياري معادله)

$$(x+2)^2+(y-3)^2=6^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(د دايرې عمومي معادله)

$$x^2+y^2+4x-6y-23=0$$

څلورم مثال: وښياست چې $5x^2+5y^2+24x+36y+10=0$ ديوې دايرې معادله ده او هم ددې دايرې د مرکز وضعيه کميات او د شعاع اوږدوالی پيدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 5 وېشو، نو لرو چې:

$$x^2+y^2+\frac{24}{5}x+\frac{36}{5}y+2=0$$

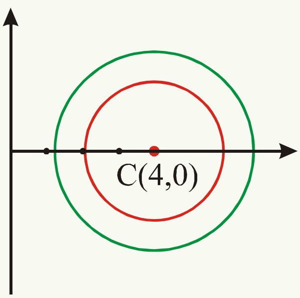
چې $g=\frac{12}{5}$ ، $f=\frac{18}{5}$ او $c=2$ دی.

د دايرې مرکز $(-g,-f)=(\frac{-12}{5},\frac{-18}{5})$

او د دايرې شعاع: $r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{\frac{144}{25}+\frac{324}{25}-2}=\sqrt{\frac{418}{25}}=\frac{\sqrt{418}}{5}$

پنځم مثال: د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې د $x^2+y^2-8x+4=0$ له دايرې سره متحد المرکز (Concnteric) وي او د $x+2y+6=0$ له مستقيم خط سره مماس وي.

حل: د $x^2+y^2-8x+4=0$ دايرې مرکز $C_1(-g,-f)$ دی.



$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

$$2g=-8\Rightarrow g=-4\Rightarrow -g=4$$

$$2f=0\quad\Rightarrow\quad f=0$$

د $C_1\ (4,0)$ نقطه د هغې دايرې مرکز هم دی چې غواړو معادله يې پيداکړو، نو د C_1 وضعيه کميات د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ په معادله کې وضع کوو، لرو چې:

$$(x-4)^2+(y-0)^2=r^2$$

ددې لپاره چې د C_2 ددايرې شعاع پيداکړو، نو څرنګه چې دايره د $x+2y+6=0$ له مستقيم خط سره مماس ده. نو د $(4,0)$ د نقطې فاصله له دې مستقيم خط څخه د دايرې شعاع ده

$$d=r=\frac{|4(1)+2(0)+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt5}\qquad \text{يا}\qquad r^2=\frac{100}{5}=20$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو ددې دايرې معادله عبارت ده له: $(x-4)^2+y^2=20$ يا $x^2+y^2-8x-4=0$

شپږم مثال: د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې د $B(6,5)$ او $A(4,1)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز يې د $4x+y-16=0$ پر مستقيم خط پروت وي.

حل: که د ايرې مرکز $C(h,k)$ وي، نو د دايرې معادله $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ده، څرنگه چې مرکز يې د $4x+y-16=0$ پر مستقيم خط واقع دی، نو $4h+k=16$ دی.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \quad \text{او} \quad |AC|=|BC| \quad \text{او} \quad |AC|^2=|BC|^2$$

$$(h-4)^2+(k-1)^2=(h-6)^2+(k-5)^2$$

$$4h+8k=44$$

$$\underline{\pm 4h \pm k = \pm 16}$$

$$7k=28$$

$$k=4 \quad \Rightarrow \quad h=3$$

$$r^2=(3-4)^2+(4-1)^2=10$$

$$(x-3)^2+(y-4)^2=10 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-6x-8y+15=0$$

چې دا د غوښتل شوې دايرې عمومي معادله ده.

فعاليت

د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تېرېږي او د $y-1=0$ له خط سره مماس وي.

اووم مثال: د هغې دايرې د مرکز وضعيه کميات او د شعاع اوږدوالی پيدا کړئ چې معادله يې $x^2+y^2-4x+4y-9=0$

حل:

$$x^2+y^2-4x+4y-9=0$$

$$x^2-4x+y^2+4y-9=0$$

$$x^2-4x+(-2^2)-(-2^2)+y^2+4y+2^2-2-9=0$$

$$(x-2)^2+(y+2)^2=17$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو مرکز یې $(2-2)$ او شعاع یې $r=\sqrt{17}$

د هغې دایرې معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې واقع وي له $x^2+y^2=r^2$ څخه عبارت ده او که مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدآ کې واقع نه وي او (h,k) یې مرکز وي: معادله یې $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ یا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ او یا $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ده.

پوښتنې

1 - د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې:

a: د مرکز مختصات یې $(5,-2)$ او $r=4$ وي

b: د مرکز مختصات یې $(\sqrt{2},-3\sqrt{3})$ اوشعاع یې $r=2\sqrt{2}$ وي.

c: مرکز یې $(0,0)$ اود $(1,2)$ له نقطې څخه تېرېږي.

d: د مرکز مختصات یې $(0,0)$ او د $(-3,-4)$ له نقطې څخه تېرېږي.

e: د مرکز مختصات یې $(8,-6)$ او د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تېرېږي

2 - لومړی وښیاست چې لاندې راکړل شوې معادلې د دایرې معادلې دي، بیا یې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

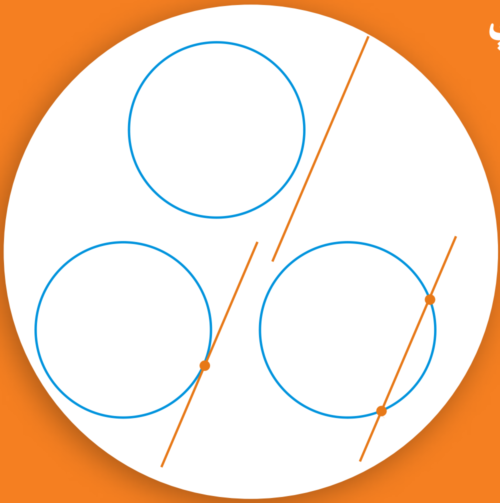
$5x^2+5y^2+14x+12y=0$ ، $x^2+y^2+12x-10y=0$

$3x^2+3y^2-2x+4y-1=0$ ، $x^2+y^2-6x+4y+13=0$

$a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يو مستقيم خط حالتونه له يوې دايرې سره:



کولای شئ چې ووایاست د $3x - 4y + 20 = 0$ مســتقیم خط د $x^2 + y^2 = 25$ دایره په څو نقطو کې قطع کوي؟

د $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ دایـرې معادله په پام کې نیســو او غواړو چې د یو مســتقیم خط حالت له دایرې ســره وڅېړو چې آیا دا مســتقیم خط دایره په دوو نقطوکې قطع کوي، یا مستقیم خط پر دایره مماس دی او یا دا چې مستقیم خط دایره نه قطع کوي.

د x او یا y قیمت د مســتقیم خط له معادلې څخه په لاس راوړو او د دایرې په معادله کې یې وضع کوو. یوه دویمه درجه یو مجهوله معادله په لاس راځي.

1) که په دې معادله کې $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ وي، مســتقیم خط دایره په دوو نقطوکې قطع کوي.

2) که $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ وي مستقیم خط له دایرې سره مماس دی.

3) او که $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ مستقیم خط دایره نه قطع کوي.

لومړی مثال: آیا د $2x = y + 7$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$ دایره قطع کوي؟ د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات یې پیدا کړئ.

حل: د مستقیم خط له معادلې څخه $y = 2x - 7$ ده چې د y دا قیمت د دایرې په معادله کې وضع کوو.

$$x^2 + (2x-7)^2 - 8x - 2(2x-7) + 12 = 0$$

$$5x^2 - 40x + 75 = 0$$

یا $x^2 - 8x + 15 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4\cdot 15 = 64 - 60 = 4 > 0$$

نو دا مستقیم خط دایره په دوو نقطوکې قطع کوي او د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات يې عبارت دي له:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_1 = 5 \quad , \quad x_2 = 3$$

د y قیمت د پیداکولو لپاره د $x_1 = 5$ او $x_2 = 3$ قیمتونه د مستقیم خط په معادله کې وضع کوو، نو لرو چې:

$$y_1 = 2x_1 - 7 = 2\cdot 5 - 7 = 3$$

$$y_2 = 2x_2 - 7 = 2\cdot 3 - 7 = -1$$

نو دا خط دایره د $(3,-1)$ او $(5,3)$ په نقطوکې قطع کوي.

دویم مثال: آیا د $x + 3y - 5 = 0$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ له دایرې سره مماس دی که نه؟

حل: د مستقیم خط له معادلې څخه لرو چې $x = 5 - 3y$ دی، د x دا قیمت د دایرې په معادله کې وضع کوو:

$$(5 - 3y)^2 + y^2 - 2(5 - 3y) + 4y - 5 = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

او $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1 = 0$ نو دا مستقیم خط له دایرې سره مماس دی او د تماس د نقطې وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

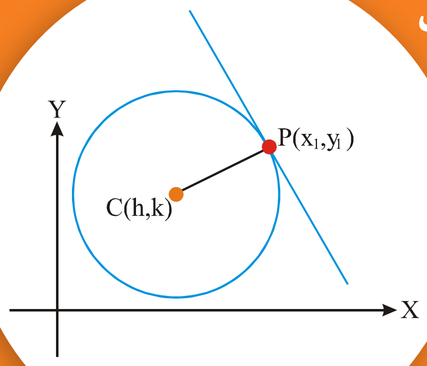
$$x = 5 - 3\cdot 1 = 2$$

نو مستقیم خط د $(2,1)$ په نقطه کې پر دایره مماس دی.

فعالیت

آیا د $x - y + 1 = 0$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 5 = 0$ له دایرې سره مماس دی، که دایره په دوو نقطوکې قطع کوي او یا دا چې دایره نه قطع کوي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



د مماس معادله او د مماس اوږدوالی

آیا د هغه مماس معادله پیداکولای شــی چې د $P(-3,-2)$ په نقطه کې د $x^2+y^2=13$ په دایره مماس وي؟

کـه یو مســتقیم خط پر هغــه دایره چې مرکز يې $C(h,k)$ او د $p_1(x_1,y_1)$ پــه نقطه کې پر دایره مماس وي، نو د شعاع میل مساوي دی په: $m=\dfrac{k-y_1}{h-x_1}$

او څرنګه چې شعاع د تماس په نقطه کې پر مماس عمود ده، نو د مماس میل له $-\dfrac{h-x_1}{k-y_1}$ سره مساوي دی.

څرنګه چې د مستقیم خط یوه نقطه $P_1\ (x_1\,,y_1\,)$ او میل یې $-\dfrac{h-x_1}{k-y_1}$ دی.

د مستقیم خط د $y-y_1\ =m(x-x_1\,)$ معادلې په نظر کې نیولو سره لرو چې:

$$y-y_1\ =-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1\,)$$

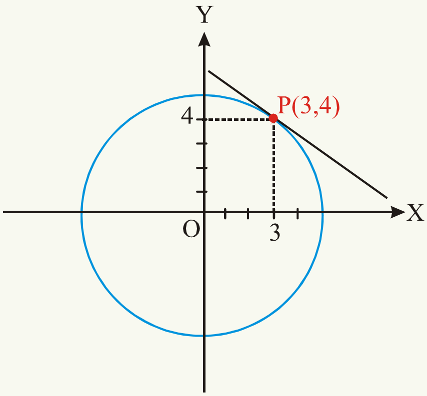
چې دا د هغه مماس معادله ده چې د $P_1\ (x_1\,,y_1\,)$ په نقطه کې پر دایره مماس دی.

او کـه د دایـرې مرکـز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، نو پــه دې حالت کې $h=k=0$ دی او د مماس معادله دا شکل اختیاروي.

$$y-y_1\ =-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1\,) \quad \text{یا} \quad yy_1\ +xx_1\ =x_1^2+y_1^2$$

څرنګه چې $x_1^2+y_1^2=r^2$ ، نو د مماس معادله $yy_1\ +xx_1\ =r^2$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لومړی مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(3,4)$ په نقطه کې د $x^2 + y^2 = 25$ پر دایره مماس وي:

حل: څرنګه چې د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې دی، نو: $y \cdot 4 + x \cdot 3 = 25$

نو د مماس معادله عبارت ده له: $3x + 4y = 25$

او یا $3x + 4y - 25 = 0$.

دویم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $P(3,5)$ په نقطه کې پر هغې دایرې مماس دي چې مرکز یې $(1,2)$ دی.

$$h = 1 \qquad k = 2$$

$$x_1 = 3 \qquad y_1 = 5$$

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

$$m = -\frac{1-3}{2-5} = -\frac{2}{3}$$

$$y - 5 = -\frac{2}{3}(x - 3)$$

$$2x + 3y = 21$$

یا:

$$2x + 3y - 21 = 0$$

د مماس اوږدوالی

که د $P_1\ (x_1, y_1)$ له نقطې څخه چې له دایرې د باندې واقع ده، د $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ پر دایره د P_1T. مماس د شکل په شان رسم شي، د (T) د تماس نقطه د دایرې له مرکز (C) سره ونښلوو، دفیثاغورث د قضیې په اساس د $P_1\ TC$ په قایمه زاویه مثلث کې لرو چې:

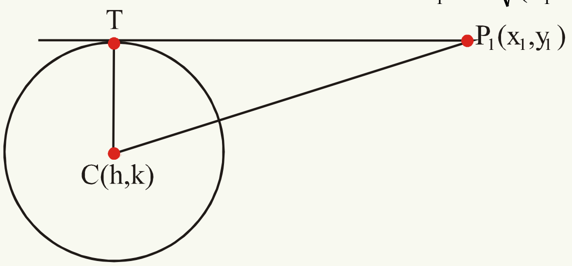
$$(\overline{P_1 C})^2 = (\overline{P_1 T})^2 + (\overline{CT})^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(P_1T)^2 = (P_1C)^2 - (CT)^2$ یا

له بلي خوا: $(P_1C)^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2$ او $\overline{CT} = r$ نو د مماس اوږدوالی مساوي

دی په: $\overline{P_1T} = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}$



پــه یاد ولرئ چــې د مماس په امتداد د مماس د اوږدوالی د پیــداکولو لپاره د دایرې له کومې خارجي نقطې څخه د x او y قیمتونه د دایرې په معادله کې وضع کوو.

دریم مثال: د $(-5,10)$ له نقطې څخه د $5x^2 + 5y^2 + 14x + 12y - 10 = 0$ پر دایره د مماس اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 5 وېشو، نو لرو چې: $x^2 + y^2 + \frac{14}{5}x + \frac{12}{5}y - 2 = 0$

$$\text{د مماس اوږدوالی} = \sqrt{(-5)^2 + (10)^2 - 14 + 24 - 2} = \sqrt{133}$$

فعالیت

د هغه مماس اوږدوالی پیدا کړئ چې د $P(-2,2)$ له نقطې څخه د $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ پر دایره باندې مماس وي.

د دایــرې پــه معادله کې د مســتقیم خط د یو مجهول په وضع کولو ســره، یــوه دویمه درجه یو مجهولــه معادله په لاس راځي، که په دې معادله کې $\Delta > 0$ وي، مســتقیم خط دایره په دوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

نقطـوکـې قطع کوي او که $\Delta = 0$ وي خط پر دايره مماس دی او که $\Delta < 0$ وي، مسـتقيم خط دايره نه قطع کوي.

د هغـه مسـتقيم خط معادله چـې د $P_1(x_1, y_1)$ په نقطه کـې پر هغه دايره چـې مرکز يې (h,k) دی مماس وي، عبارت ده له:

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

که د دايرې مرکز د وضعيه کمياتو په مبداکې وي، نو د مماس معادله: $yy_1 + xx_1 = x_1^2 + y_1^2$ يا $yy_1 + xx_1 = r^2$ ده، د مماس اوږدوالی د $P(x, y)$ له نقطې څخه چې د دايرې د باندې واقع ده او د دايرې مرکز (h,k) دی مساوی ده په:

$$\overline{PT} = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2 - r^2}$$

پوښتني

1 - د لاندې مسـتقيو خطونو حالتونه له دايرو سـره چې معادلې يې په لاندې ډول راکړل شـوي دي وڅيړئ.

د مستقيمو خطونو معادلې	د دايرو معادلې
$3x - 2y + 3 = 0$	$x^2 + y^2 - 4x - y - 3 = 0$
$x - y - 1 = 0$	$2(x^2 + y^2) - 3x + 2y - 6 = 0$
$5x - y = 1$	$x^2 + y^2 - x - 9y + 14 = 0$

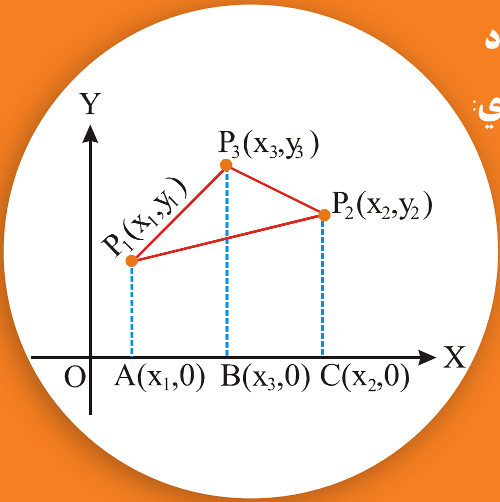
2- د هغه مستقيم خط معادله پيداکړئ چې په $(2,-3)$ نقطه کې د $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ له دايرې سره مماس وي.

3 - د هغه مماس اوږدوالی پيداکړئ چې د $(-5,4)$ له نقطې څخه د $5x^2 + 5y^2 - 10x + 15y - 131 = 0$ پر دايره مماس رسم شوی وي

4- د هغه مماس اوږدوالی پيداکړئ چې د $(-2,-5)$ له نقطې څخه د $x^2 + y^2 + 8x + 5y = 7$ پر دايره مماس رسم شوی وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلث د مساحت پیدا کول چې د راسونو وضعیه کمیات یې معلوم وي:



آیا د هغه مثلث مساحت پیداکولای شئ چې رأسونه یې $(-3,6)$ ، $(3,2)$ او $(6,0)$ وي؟

که P_1 ، P_2 او P_3 لکه چې په شکل کې لیدل کېږي د یوه مثلث راسونه وي. د X پر محور $\overline{P_1A}$ ، $\overline{P_2C}$ او $\overline{P_3B}$ دری عمود خطونه رسم کړئ.

د $P_1P_2P_3$ مثلث مساحت = P_1ABP_3 ذوذنقې مساحت + P_3BCP_2 ذوذنقي مساحت

$-P_1ACP_2$ د ذوذنقي مساحت

لکه څرنګه چې پوهېږو:

د ذوذنقي مساحت = (د موازي ضلعو د نیمایي مجموعه) × (د موازي ضلعو ترمنځ فاصله)

نو:

$$\text{د } \overset{\Delta}{P_1P_2P_3} \text{ مثلث مساحت} = \frac{1}{2}(|P_1A|+|P_3B|)(|AB|)+\frac{1}{2}(|P_3B|+|P_2C|)(|BC|)$$

$$-\frac{1}{2}(|P_1A|+|P_2C|)(|AC|)$$

$$=\frac{1}{2}[(y_1+y_3)(x_3-x_1)]+\frac{1}{2}[(y_3+y_2)(x_2-x_3)]-\frac{1}{2}[(y_1+y_2)(x_2-x_1)]$$

$$=\frac{1}{2}(x_3y_1+x_3y_3-x_1y_1-x_1y_3+x_2y_3+x_2y_2$$

$$-x_3y_3-x_3y_2-x_2y_1-x_2y_2+x_1y_1+x_1y_2)$$

$$=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: که چېرې $A(4,-5)$ ، $B(5,-6)$ او $C(3,1)$ د یوه مثلث راسونه وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل: $x_1 = 4 \quad , \quad y_1 = -5 \quad , \quad x_2 = 5 \quad , \quad y_2 = -6 \quad x_3 = 3 \quad y_3 = 1$

$$\text{د مثلث مساحت } \overset{\Delta}{ABC} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[4(-6-1) + 5(1+5) + 3(-5+6)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(-28+30+3) = \frac{1}{2}\cdot 5 = \frac{5}{2} = 2.5$$

که د $P_1 \overset{\square}{P_2} P_3$ مثلث رأسونه $P_1(x_1, y_1)$ ، $P_2(x_2, y_2)$ او $P_3(x_3, y_3)$ وی، نو د مثلث مساحت د $\frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$ له فورمول څخه په لاس راځي.

پوښتنې

1 - د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې رأسونه یې $A(0,0)$ ، $B(8,6)$ او $C(12,4)$ وي.

2 - که د یوه مثلث رأسونه $A(4,0)$ ، $B(-4,0)$ او $C(0,3)$ وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

3 - د هغه څلور ضلعي مساحت پیدا کړئ چې رأسونه یې $A(1,0)$ ، $B(6,2)$ ، $C(8,6)$ او $D(2,4)$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښېرکي لنډيز:

• د وضعيه کمياتو په مستوي کې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د y مختصه يې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د x مختصه يې صفر ده

• د $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ د دوو نقطو تر منځ فاصله د $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

• د p د نقطې وضعيه کميات چې د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط د r په نسبت وېشي عبارت دي له: $y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}$ او $x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}$ د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط د تنصيف د نقطې وضعيه کميات عبارت دي له:

$y=\frac{y_1+y_2}{2}$ $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ خط داخلاً د r په نسبت ووېشي نو r مثبت او که خارجاً يې و وېشي، نو r منفي دی.

• د يو مستقيم خط ميل چې د $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي د $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ له فورمول څخه په لاس راځي د X د محور او د هغو خطونو ميل چې د X له محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغو خطونو ميل چې د Y له محور سره موازي وي، تعريف شوي نه دي. که د يوه مستقيم خط د ميل زاويه حاده وي، ميل يې مثبت او که منفرجه وي ميل يې منفي دی.

• د هغې مستقيم خط معادله چې ميل او د Y له محور سره يې تقاطع معلومه وي، عبارت ده له:

$y=mx+b$.

د هغه مستقيم خط معادله چې ميل او يوه نقطه يې معلومه وي، عبارت ده له:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

د هغه مستقيم خط معادله چې دوې نقطې يې معلومې وي عبارت ده له:

$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ اويا $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ او د هغه مستقيم خط معادله چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

له محورونو سره يې د تقاطع نقطې معلومې وي: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ده.

• د يوه مستقيم خط نورمال معادله $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ او د مستقيم خط عمومي معادله $ax+by+c=0$ ده.

• د $P(x_1, y_1)$ د نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه د $d = x\cos\theta + y\sin\theta - P$ او يا د $d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

• د هغې دايرې معادله چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې واقع وي له $x^2+y^2=r^2$ څخه عبارت ده او که مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدا کې واقع نه وي او (h,k) يې مرکز وي، معادله يې: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

يا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ او يا $x^2+y^2+ax+by+c=0$

• د دايرې په معادله کې د مستقيم خط د يو مجهول په وضع کولو سره، يوه دويمه درجه يو مجهوله معادله په لاس راځي، که په دې معادله کې $\Delta>0$ وي، مستقيم خط دايره په دوو نقطو کې قطع کوي او که $\Delta=0$ وي خط پر دايره مماس دی او که $\Delta<0$ وي، خط دايره نه قطع کوي.

• د هغه مستقيم خط معادله چې د $P_1\ (x_1, y_1)$ په نقطه کې پر هغه دايره چې مرکز يې (h,k) دی مماس وي عبارت ده له: $y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$

او که د دايرې مرکز د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي، نو د مماس معادله يې:

$yy_1+xx_1=x_1^2+y_1^2$ يا $yy_1+xx_1=r^2$ ده او د PT مماس اوږدوالی د $P(x_1, y_1)$ له نقطې څخه چې له دايرې د باندې واقع ده او مرکز يې (h,k) دی، مساوي ده په:

$$\overline{PT}=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-r^2}$$

• که د يوه مثلث رأسونه $P_1\ (x_1, y_1)$، $P_2\ (x_2, y_2)$ او $P_3\ (x_3, y_3)$ وي، نو $\square P_1 P_2 P_3$ د مثلث مساحت د $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$ له فورمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې:

1 - د لاندې هرې جوړې نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ او همدرانګه ددې مستقیمو خطونو د تنصیف د نقطو وضعیه کمیات پیداکړئ چې د A او B له دوو نقطو څخه تېرېږي.

$A(3,1)\ ,B(-2,-4) \qquad A(-8,3)\ \ ,B(2,-1)$

$A(-\sqrt{5},-\frac{1}{3})\ ,\ B(-3\sqrt{5},5)$

2 - که $A(\sqrt{3},-1)$ ، $B(0,2)$ او $C(h,-2)$ د یوه قایم الزاویه مثلث راسونه وي او د $\hat{A}=90°$ وي، د (h) قیمت پیداکړئ.

3 - د p د نقطې وضعیه کمیات پیداکړئ، په داسې حال کې هغه مستقیم خط چې د $A(1,4)$ او $B(5,6)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{AP}{PB}=2$ په نسبت و وېشي.

4 - د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې میل یې (-2) او د Y محور په 3 کې قطع کړي.

5 - د $x=\sqrt{7}$ او $y=-\sqrt{7}$ د خطونو میل پیداکړئ.

6 - د y د محور میل مساوي دی په:

$a)\ -1 \qquad b)\ 1 \qquad c)\,0 \qquad d)$ تعریف شوی نه دی

7 - د یوه مستقیم خط میل $m=\frac{2}{3}$ دی، د هغه خط میل چې پر دې خط عمودوي، مساوي دی په:

$a)\ \frac{2}{3} \qquad b)\ -\frac{2}{3} \qquad c)\,\frac{3}{2} \qquad d)\,\frac{-3}{2}$

8 - د هغو مستقیمو خطونو میل پیداکړئ چې د لاندې راکړل شوو نقطو له جوړو څخه تېرېږي.

$(4,8)$ او $(4,6)$ $\qquad$ $(2,7)$ او $(3,-2)$ $\qquad$ $(5,11)$ او $(-2,4)$

9 - د $4x-y+2=0$ او $12x-3y+1=0$ مستقیم خطونه:

a) موازي دي $\qquad$ b) عمود دي $\qquad$ c) نه موازي او نه عمود دي

10 - د $3x-4y+3=0$ او $3x-4y+7=0$ مستقیمو خطونو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

11 - د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د $(-4,7)$ له نقطې تېر شي او د $2x-7y+4=0$ له مستقیم خط سره موازي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

12 - د $P(6,-1)$ نقطې فاصله د $6x-4y+9=0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

13 - د p د نقطې وضعیه کمیات په داسې حال کې پیدا کړئ چې $\overline{P_1P_2}$ مستقیم خط چې د $P_1\ (2,-5)$ او $P_2\ (6,3)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{3}{4}$ په نسبت ووېشئ.

14 - د لاندې مستقیمو خطونو معادلې نورمال شکل ته واړوئ.

$2x+5y-2=0$ $\qquad$ $2x-3y+6=0$

15 - د هغـه مسـتقیم خـط میل چې د $(4,0)$ او $(-4,0)$ له نقطو څخه تېرېږي مسـاوي دی په:

a) 1 $\qquad$ b) -1 $\qquad$ c) 0 $\qquad$ d) تعریف شوي نه دی

16 - د هغه مسـتقیم خط معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحده او نورمال خط یې د X محور له مثبت جهت سره د $30°$ زاویه جوړوي.

17 - د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې راسونه یې $A(2,3)$ ، $B(-1,1)$ او $C(4,-5)$ وي.

18 - د هغه مثلث مساحت چې رأسونه یې $A(1,4)$ ، $B(2,-3)$ او $C(3,-10)$ دي مساوي دی په:

a) 1 $\qquad$ b) 2 $\qquad$ c) 0 $\qquad$ d) هېڅ یو

19 - د $x+2y=6$ د مستقیم خط د تقاطع نقطې د $x^2+y^2-2x-2y-39=0$ له دایرې سره پیدا کړئ.

20 - د هغـې دایـرې معادله پیدا کړی چې د $A(1,1)$, $B(2,-1)$ او $C(3,-2)$ له نقطو څخه تېرېږي.

21 - د هغـې دایـرې معادله پیدا کړئ چې د $A(3,-1)$ او $B(0,1)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز یې د $4x-3y-3=0$ پر مستقیم خط واقع وي.

22 - د $4x^2+4y^2-8x+12y-25=0$ دایـرې د مرکـز وضعیـه کمیـات او د شـعاع اوږدوالی یې پیداکړئ.

23 - د هغـې دایرې معادله پیـدا کړی چې د $A(4,1)$ او $B(6,5)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز یې د $4x+y-16=0$ پر مستقیم خط باندې واقع وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

24 - که د یوه مثلث رأسونه $A(5,-6)$ ، $B(-3,5)$ او $C(-1,2)$ وي، دا مثلث:

c) مختلف الاضلاع دی b) متساوی الساقین دی a) متساوی الاضلاع دی

25 - که د یوه مثلث رأسونه په ترتیب سره $(5,4)$ ، $(4,10)$ او $(7,8)$ وي دا مثلث:

c) مختلف الاضلاع دی b) متساوي الساقین دی a) متساوي الاضلاع دی

26 - کـه $P(-8,4)$ او $Q(2,-1)$ وي د A د نقطـې مختصات پیدا کړئ که د A نقطه د PQ خط داخلاً او خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي.

27 - د $x-y+1=0$ مسـتقیم خـط د تقاطـع نقطې له $x^2+y^2=5$ دایرې سـره پیدا کړئ.

28 - کـه د $x+ay-5=0$ مسـتقیم خط د $x^2+y^2-2x+4y=0$ پـر دایره مماس وي، د a قیمت پیدا کړئ.

29 - د هغې دایرې معادله چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تېرېږي او د $y-1=0$ له مستقیم خط سره مماس وي، عبارت ده له:

a) $x^2+y^2-4x=0$ b) $x^2+y^2-2x=0$ c) $x^2+y^2+2x=0$

30 - هغه دایره چې معادله یې $x^2+y^2-6x+4y+14=0$ ده:

c) موهومي ده b) نقطوي ده a) حقیقي ده

31 - هغه دایره چې معادله یې $x^2+y^2+2x-4y+5=0$

a) موهومي ده b) نقطوي ده c) حقیقي ده

32 - کـه $A(4,-3)$ او $B(-2,-5)$ وي د A او B د نقطـو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او هم د $\overline{AB}$ د خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

33 -کـه د یوه مثلث رأسـونه $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ وي، وښیاسـت چې دا مثلث قایم الزاویه مثلث دی.

34 - وښیاست چې $A(0,0)$ ، $B(a,0)$ ، $C(0,b)$ او $D(a,b)$ د یو مستطیل رأسونه دي او هم وښیاست چې د مستطیل د قطرونو اوږدوالی سره مساوي دی.

35 - وښیاست چې $A(3,1)$ ، $B(6,2)$ او $C(9,3)$ نقطې پر یوه مستقیم خط واقع دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

36 - د هغـه مسـتقیمو خطونـو معادلې پیداکړئ چـې د لاندې هروجوړو لـه نقطو څخه تېرېږي.

(5,8)	(1,2)	(3,5)	(8,15)
(−1,−3)	(2,−1)	(−2,−1)	(3,−4)
(0,3)	(5,0)	(0,2)	(−2,0)

37 - د هغـه مسـتقیم خط معادله چې د (5,8) او (−1,10) له نقطو څخـه تېرېږي عبارت ده له:

$a: \quad y=-\frac{1}{3}x+9\frac{2}{3}$

$b: \quad y=-\frac{x}{3}+9\frac{2}{3}$

$c: \quad y=-\frac{1}{3}x+\frac{29}{3}$

d: درې واړه سم دي

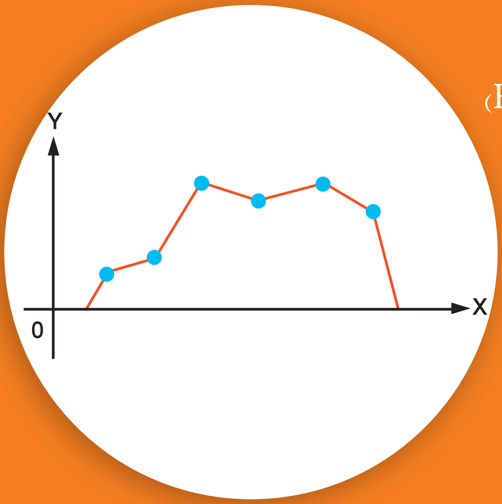
(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم څپرکی

احصائیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library



د فریکونسي څو ضلعي ګراف
(Frequency Polygon graph)

مخامخ شکل په پام کې ونیسئ، آیا کولای شئ د راکړل شوي منحني لاندې مساحت پیدا کړئ؟ آیا ویلای شئ چې تر منحني لاندې مساحت له څه شي سره برابر دی؟

فعالیت

د فریکونسیو مخامخ جدول په نظر کې ونیسئ.

فریکونسي	د کلاس (صنف)مرکز	کلاسونه
3	11.5	10-13
6	14.5	13-16
7	17.5	16-19
4	20.5	19-22

• د هر کلاس (صنف) مرکز د لومړی مختصې او اړونده فریکونسي يې د دویمې مختصې په حیث د مرتبو جوړو په شکل په نظر کې ونیسئ.
• ددې مرتبو جوړو موقعیت د قایمو وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
• هغه نقطې چې په مستوي کې له دې مرتبو جوړو څخه په لاس راځي، سره ونښلوئ.

آیا کولای شئ چې ددې ګراف لاندې مساحت پیدا کړئ؟

• د X پر محور د ګراف دواړو خواوو ته (8.5,0) او (38.5,0) نقطې زیاتې کړئ. په لاس راغلی ګراف د فریکونسي جدول له مستطیلي ګراف سره یوځای رسم کړئ او د مستطیلونو مساحت د منحني لاندې مساحت سره پرتله کړئ.

په څو ضلعي ګراف کې د هر کلاس مرکز پر افقي محور اود هر کلاس مطلقه فریکونسي یا نسبي

(c) ketabton.com: The Digital Library

فريکونسي پر عمودي محور ښودل کېږي، د کلاس مرکز (منځني نقطه) او د کلاس د فريکونسيو په مقابل کې په مستوي کې يوه نقطه ټاکل کېږي چې عرض يې د کلاس مرکز او اوږدوالی يې د هماغه کلاس له فريکونسيو سره برابر دی، د جدول د کلاسونو په شمېر په مستوي کې په هماغه اندازه نقطې په لاس راځي. که د کلاسونو په اول او اخر کې دوي نورې د $(x_n + c\ ,\ 0)\ ,\ (x_1 - c\ ,\ 0)$ اختياري نقطې زياتې کړئ، ځرنګه چې c د هر کلاس وسعت دی يعني (پاسني سرحد منفي د هماغه صنف لاندينی سرحد) چې ددې نقطو له نښلولو څخه يو ګراف په لاس راځي چې د فريکونسي څو ضلعي ګراف نوميږي.

مثال: د لاندې جدول د ډېټا (Data) مستطيلي (هستوګرام) او د فريکونسيو څو ضلعي ګرافونه يې رسم کړئ.

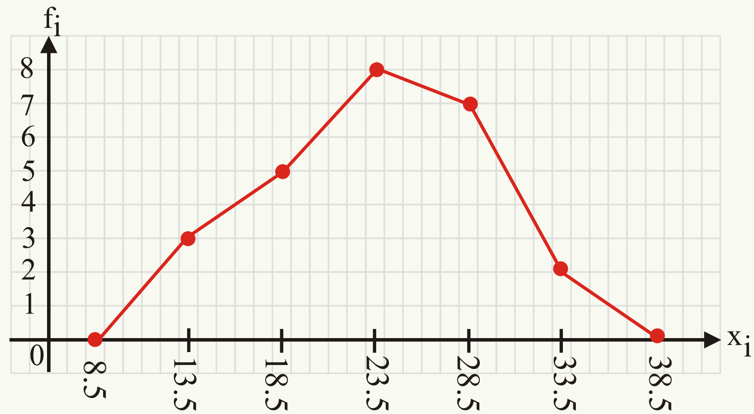
CL = د کلاسونو حدود	11-16	16-21	21-26	26-31	31-36
f_i = مطلقه فريکونسي	3	5	8	7	2
X_i = د کلاسونو مرکز	13.5	18.5	23.5	28.5	33.5

پوهېږو چې $c = 5$ ده، ددې لپاره چې دوه اختياري نقطې په لاس راوړو، نو:

$$(x_1 - 5\ ,\ 0) = (13.5 - 5\ ,\ 0) = (8.5\ ,\ 0)$$

$$(x_n + 5\ ,\ 0) = (33.5 + 5\ ,\ 0) = (38.5\ ,\ 0)$$

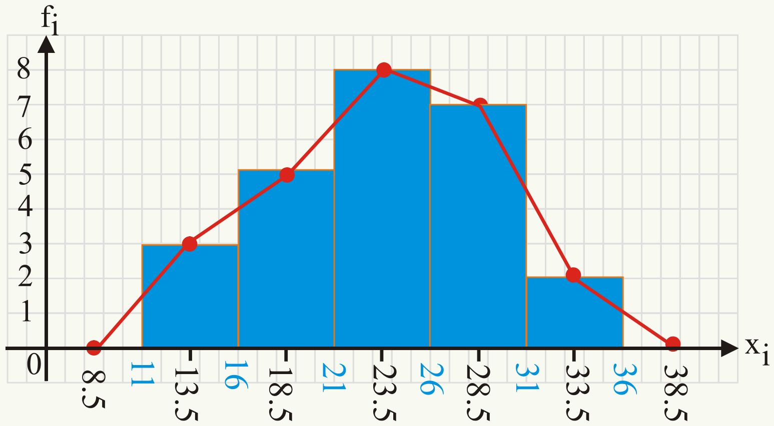
ددې نقطو $(8.5\ ,0)$ او $(38.5\ ,0)$ په اضافه کولو سره ګراف رسموو:



د فريکونسي څو ضلعي ګراف

(c) ketabton.com: The Digital Library

مستطیلي ګراف د فریکونسي څو ضلعي ګراف سره:



له پورتني ګراف څخه لیدل کیږي چې:

- د فریکونسیو څو ضلعي ګراف راسونه تر مطالعې لاندې دفریکونسیو له جدول د اړونده مستطیل د پورتنی ضلعې منځنی نقطه سره واقع دي.
- د فریکونسیو څو ضلعي ګراف د لاندې سطحې مساحت د مستطیلي ګراف له مساحت سره برابر دی.
- د نسبي فریکونسیو څو ضلعي ګرافونه زیات د متصلو ډیټاوو (Data) له پاره کارول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1 - د نهم اولسم ټولګیو د 24 زده کوونکو د تنې لوړوالى د سانتي متر په حساب په لاندې ډول راکړل شوى دى.

138	107	136	128	148	118
142	129	115	123	133	123
121	128	122	144	126	135
152	98	117	153	141	126

د پورتنى ډیټا (Data) لپاره د فریکونسي یو جدول ترتیب کړئ.ډیټا (Data) په شپږو طبقو وویشئ، ددې ډیټا (Data) د ښودلو لپاره کوم ډول ګراف ښه دى، د فریکونسیو څو ضلعي ګراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساقې او پاڼې ګراف

موږ د عددونو په نړۍ کې ژوند کوو، هر تن د خپل هیواد د ټولنې د یو غړي په حیث یوه خاصه شمېره لري چې د نورو مشخصو په شان د اهمیت وړ ده. آیا ویلای شئ چې دا شمېره څه شی ده؟ او آیا تاسو هم خپله شمېره پیژنئ؟

فعالیت

- په لاندې جدول کې د سانتي متر په حساب د 20 نویو پیدا شوو ماشومانو د تنې لوړوالی چې په تصادفي ډول انتخاب شوی دی، راکړل شوی دی.

45	46	47	43	49	40	42	46	45	43
43	43	48	49	47	49	48	49	47	45

- پورتنی ډیټا (Data) له کوچني عدد څخه لوی عدد ته ترتیب کړئ.

- لیدل کېږي چې په دې ټولو عددونو کې د 4 رقم مشترک دی، کولای شو چې دا رقمونه په لاندې ډول ولیکو.

$$40 + (0,2,3,3,3,3,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9,9)$$

- له 0 تر 9 پورې رقمونه هر یو رقم څو واري تکرار شوی دی.

پورتني رقمونه په لاندې شکل لیکو.

4	0			
	2			
	3	3	3	3
	5	5	5	
	6	6		
	7	7	7	
	8	8		
	9	9	9	9

(c) ketabton.com: The Digital Library

• که د عددونو پورتنی شکل د 90° زاویې په اندازه کینې خوا ته دوران ورکړئ، دا شکل له کوم ډول ګراف سره مشابه دی؟

ډیټا عموماً د عددونو په شکل وي. له دې عددونو څخه څرنګه چې په پورتني فعالیت کې ولیدل شول، کولای شو، ګراف یې جوړ کړو چې دا ګراف د ساقې او پاڼې د ګراف په نامه یادېږي.

او که دې ګراف ته د 90° زاویې په اندازه کینې خواته دوران ورکړو، میله یې ګراف لاس ته راځي.

د مثال په ډول که ډیټا د صفر او 100 ترمنځ وي، کولای شو، لکه: د 37 عدد 3 په ساقه او (7) د پاڼې په حیث ولیکو.

د ساقې او پاڼې ګراف د هغو ډیټا (Data) لپاره چې تر ټولو لوی او تر ټولوکوچنی ډیټا (Data) ترمنځ توپیر یې لږ وي، مناسب دی.

لومړی مثال: دکتابونو په یو پلورنځي کې 20 ډوله کتابونه چې هر ډول شمېر یې په لاندې جدول کې راکړل شوی دی، ددې ډیټا (Data) د ساقې او پاڼې ګراف رسم کړئ.

39	39	38	38	28	27	23	15	11	10
65	58	57	52	46	46	45	44	41	40

حل: ښکاره ده چې د ډیټا (Data) د کینې خوا اولني عددونه 5.4.3.2.1 او 6 دي. چې دا عددونه د ساقې لپاره په نظر کې نیسو. او د هرې خانګې اړونده ډیټا ورته ددې عددونو مخکې لیکو چې په لاندې ډول لاس ته راځي.

ساقه	پاڼې					
1	0	1	5			
2	3	7	8			
3	8	8	9	9		
4	0	1	4	5	6	6
5	2	7	8			
6	5					

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د کتاب مخ ته د ساعت د ستنې حرکت په مخالفه خوا کې د 90° زاويې په اندازه دوران ورکړو.
داګراف د ميله يي ګراف په شکل بدليږي چې په لاندې ډول يې ليکلای شو.

فریکونسی

6				6		
5				6		
4			9	5		
3	5	8	9	4	8	
2	1	7	8	1	7	
1	0	3	8	0	2	5
	1	2	3	4	5	6

دويم مثال: د رياضي په يوه امتحان کې لاندې نتيجې له زده کوونکو څخه پلاس راغلي دي، ددې ډيټا لپاره د ساقې او پاڼې ګراف رسم کړئ.

25	45	46	50	50	50	55	55	55	55
55	57	58	58	60	60	62	65	67	72

حل: د ساقې د رسم لپاره له لسيزو رقمونو او د پاڼې د ترسيم لپاره له يوويزو رقمونو څخه استفاده کوو:

ساقه	پاڼې										
2	5										
3											
4	5	6									
5	0	0	0	5	5	5	5	5	7	8	8
6	0	0	2	5	7						
7	2										

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د لاندې ډیټا (Data) لپاره د ساقې اوپاڼې ګراف رسم کړئ.

7.9	8.3	10.9	11.7	8.4	9.1	6.8	12.5
11.2	7.8	12	11.3	8.4	13	6.8	

پاملرنه: د ساقې او پاڼې د ګراف د ښودلو لپاره د 8.3 عدد د 83 په شکل او د 11.2 عدد د 112په شکل او د 12 عدد د 120 په شکل لیکو.

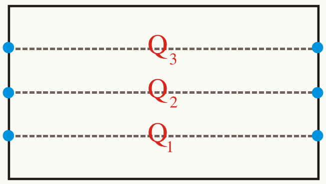
(c) ketabton.com: The Digital Library

ربعي (څلورمي)

په مخامخ شکل کې چې كه دا د خلكو ټولنه نظر د دوی د ټنې د لوړوالي په نسبت په څلورو مساوي برخو و وېشل شي، هره برخه يې په کوم نامه يادوي ؟

فعاليت

مخامخ شکل يو مستطيل دی چې د Q_1, Q_2 او Q_3 خطونو په واسطه په څلورو مساوي برخو وېشل شوی دی.



- د مستطيل د مساحت څو فيصده مساحت د Q_1 د خط لاندې، څو فيصده مساحت د Q_1 د خط له پاسه واقع دی؟
- دمستطيل څو فيصده مساحت د Q_2 تر خط لاندې او څوفيصده مساحت د Q_2 د خط له پاسه دی؟
- د مستطيل څو فيصده مساحت د Q_3 تر خط لاندې او څو فيصده مساحت د Q_3 د خط له پاسه دی؟

هغه عددونه چې ترتيب شوي ډيټا په څلورو مساوي برخو وېشي، دغه عددونو ته لومړی ربع، دويمه ربعه او دريمه ربع وايي او په Q_1, Q_2 او Q_3 سره ښودل کېږي.

لومړي ربع هغه مقدار دی چې 25% ډيټا له هغې لاندې او 75% ډيټا له هغې پورته واقع وي.

دويمه ربع هغه مقدار دی چې 50% ډيټا له هغې لاندې او 50% ډيټا له هغې پورته واقع وي.

دريمه ربع هغه مقدار دی چې 75% ډيټا ترې لاندې او 25% ډيټا يې له پاسه واقع وي.

که ډيټا (Data)په صعودي ډول ترتيب کړو، د ډيټا (Data)ميانه د Q_2 سره مساوي لومړنی نيمايي ډيټا (Data) ميانه له Q_1 سره مساوي او همدارنګه د دويمې نيمايي ميانه له Q_3 سره مساوي ده.
د ربعو د پيداکولو په وخت کې لاندې پړاونه په پام کې ونيسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- ډيټا (Data)په صعودي ډول ترتيب کړئ.
- ترتيب شوی ډيټا ته له (1) څخه تر n پورې شمېره (کوډ) ورکړئ.
- د P ام موقعيت ($P = 1, 2, 3$) دلاندې رابطې په مرسته په لاس راځي.

$$C_{QP} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

- د ربعي د موقعيت په اساس، د ربعي مقدار وټاکئ.

مثال: فرض کړئ په لاس راغلي ډيټا (مشاهدې) په لاندې ډول راکړل شوي وي.

90 85 80 120 100 140

د لومړي او دريمې ربعي ځايونه وټاکئ.

د لومړي او دريمې ربعي مقدارونه پلاس راوړئ.

د ډيټا شمېره:	6	5	4	3	2	1
ډيټا :	140	120	100	90	85	80

د لومړي او دريمې ربعي ځايونه عبارت دي له:

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 2$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 6}{4} + \frac{1}{2} = 5$$

نو د لومړي او دريمې، ربعي مقدارونه مساوي دي په:

$Q_1 = 85$ $Q_3 = 120$

پوښتنې

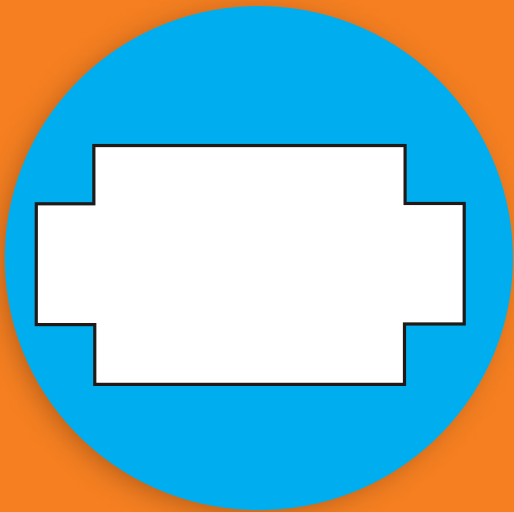
فرض کړئ په لاس راغلي ډيټا په لاندې ډول راکړل شوي وي.

100 90 80 120 160 140 85

- لومړی او دريمه ربعي (څلورمې) پيدا کړئ.
- له میانې تر مخه عددونه وليکئ.
- له میانې وروسته عددونه په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

صندوقچه يي ګراف



د يوې تختې کاغذ له څلورو کنجونو څخه څلور مربعګانې چې هره ضلع يې $5cm$ وي، جلا کړئ، بيا د کاغذ څنډې له پورته خواڅخه قات کړئ.
کوم شکل چې په لاس راځي، له څه شي سره ورته والی لري؟

فعاليت

د هغه ناروغانو شمېر چې د 17 ورځو، په موده کې يوه روغتون ته راغلي دي، په لاندې ډول ثبت شوي دي.

11 10 15 23 14 27 16 17 24
28 13 31 31 18 25 26 19

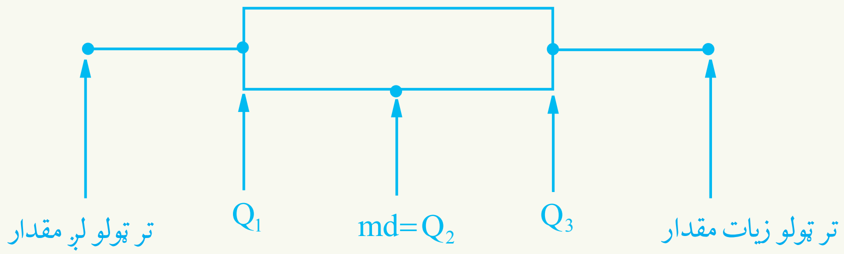
- ميانه يې پيدا کړئ.
- هغه عددونه وليکئ چې د مياني تر مخې نيمايي کې پراته دي.
- ددې عددونو لپاره ميانه پيدا کړئ.
- هغه عددونه وليکئ چې د مياني په وروسته نيمايي کې پراته دي.
- ددې عددونو لپاره ميانه پيدا کړئ.
- دويمه ربع (څلورمه) يا Q_2 کوم عدد دی؟

صندوقچه يي يا جعبه يي ګراف: دا يو داسې تصويري ګراف دی چې د ډيټا (Data) تيت والی د نورو ګرافونو په نسبت ښه روښانه کوي، د ا ګراف د لاندېنيو اندازو پر بنياد د ډيټا (Data) ګراف ښکاره کوي.

الف) تر ټولو کوچنۍ ډيټا ب) لومړنی ربع (څلورمه) ج) ميانه
د) دريمه ربع هـ) تر ټولو لويه ډيټا

صندوقچه يي ګراف د ربعو او له زيات نه زيات او کم تر کمه ډيټا (Data) ښودونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



کولای شو د صندوقچه يي ګراف د رسمولو پړاوونه په لاندې ډول وليکو:

الف) تر ټولو کوچنی ډيټا پيدا کړئ. ب) تر ټولو لويه ډيټا پيدا کړئ

ج) ميانه پيدا کړئ د) لومړی ربع پيدا کړئ

هـ) دريمه ربع پيدا کړئ و) ګراف رسم کړئ.

مثال: که په يو ښارکې د 15 ورځو په موده کې د ترافيکي پيښو شمېر په لاندې ډول راکړل شوي وي، صندوقچه يي ګراف يي رسم کړئ.

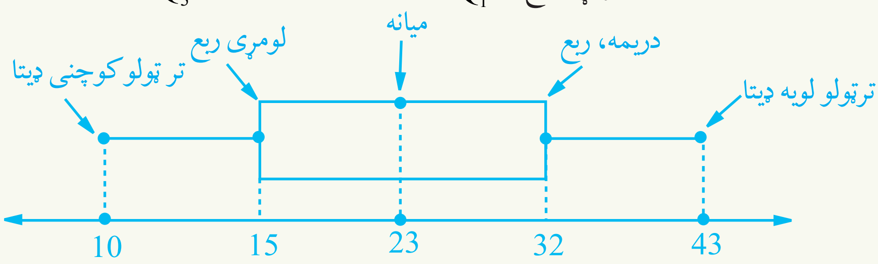
12	10	15	23	14	27	16	34
	41	43	32	18	25	31	19

حل: پورتنی ډيټا په ترتيب ليکو.

10 12 14 15 16 18 19 23 25 27 31 32 34 41 43

نو: تر ټولو کوچنی ډيټا = 10 تر ټولو لويه ډيټا= 43

ميانه = 23 لومړی ربع = $Q_1 = 15$ دريمه ربعه = $Q_3 = 32$



پورتنی ګراف صندوقچه يي ګراف دی چې 50% ډيټا دصندوق په داخل کې (د لومړی، دريمې او ربعې ترمنځ) پرتې دي، 25% يې 10 او 15 ترمنځ او 25% ډيټا د 32 او 43 ترمنځ پرته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نارمل منحني د مرکزي ټاکوونکو پرتله کول

آیا کولای شو چې د نارمل منحني په مرسته
مرکزي ټاکوونکی پلاس راوړو؟

$$\text{mod} = ?$$
$$\text{med} = ?$$
$$\overline{x} = ?$$

لاندې کوم منحني چې وینئ، په احصائیه کې یوله مشهورو منحني ګانو څخه دی، کولای شو چې زیاتې طبیعي پیښې ددې منحني په مرسته وښایو. نارمل منحني یو متناظره منحني دی چې د یوه زنګ په شان شکل لري.

- آیا د اوسط، میاني او موډ د مرکزي ټاکوونکو ځایونه په دې منحني کې ښودلای شئ؟

فعالیت

- که په یوه ټولګي کې ټول زده کوونکي ښې نمرې واخلي:
- آیا څه فکر کوئ چې ددوی د نمرو اوسط هم ښه دی؟
- آیا د اوسط لوړوالی د ټولګي د تعلیمي وضعې پر ښه والي دلالت کوي؟
- ددې لپاره چې د ټولګي وضع ښه ارزیابي کړې، نیم ټولګی باید ښې نمرې واخلي.
- هغه کومه نمره ده چې د نیمایي ټولګي د زده کوونکو نمرې له هغې زیاتې وي؟

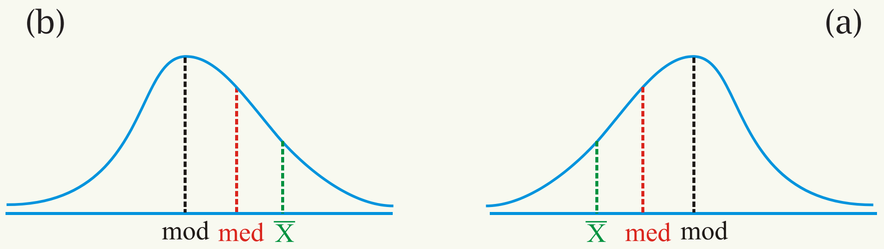
(c) ketabton.com: The Digital Library

- که میانه له اوسط څخه ډېره کوچنۍ وي، له دې څخه څه شی په لاس راځي؟
- که میانه له اوسط څخه ډېره لویه وي، له دې څخه څه شی په لاس راځي؟

د پورتني فعالیت او د منحني له متناظر والي څخه نتیجه په لاس راځي چې د میاني او اوسط ځای په نارمل منحني کې یو دی او څرنگه چې نارمل منحني اعظمي نقطه لري، نو له همدې سببه د موډ ځای هم له اوسط او میاني سره مساوي دی یعني:

$$\overline{X} = \text{mod} = \text{md}$$

که نارمل منحني، متناظره نه وي، په دې حالت کې لرو چې:



$\text{mod} < med < \overline{x}$ $\qquad$ $\overline{x} < med < \text{mod}$

- که چېرې اوسط او میانه سره مساوي وي، له اوسط او میاني څخه تر مخه او له اوسط او میاني څخه وروسته ډېټاگانې سره مساوي دي.

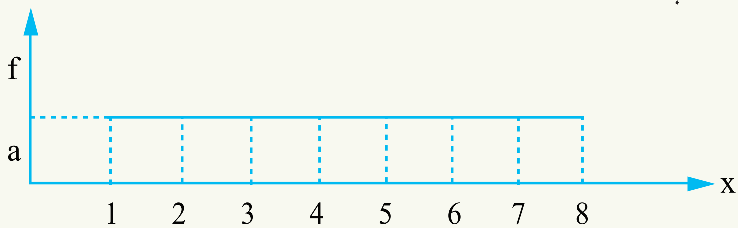
-که اوسط د میاني کیڼې خوا ته پروت وي، د هغو ډېټا شمېر چې د اوسط ښي خواته پرتې دي، د هغو ډېټا (Data) له شمېر څخه چې د اوسط کیڼې خواته پرتې دي، زیات دی، لکه: د a په شکل کې.

-که اوسط د میاني ښې خواته پروت وي، د هغه ډېټا (Data) شمېر چې د اوسط ښي خواته پرتې دي، د هغه ډېټاوو (Data) له شمېر څخه چې د اوسط کیڼې خوا ته پرتې دي، لږ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د b به شکل کې

مثال: په لاندې ګراف کې اوسط او میانه پیدا کړئ.



حل:

= میانه

$$med = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

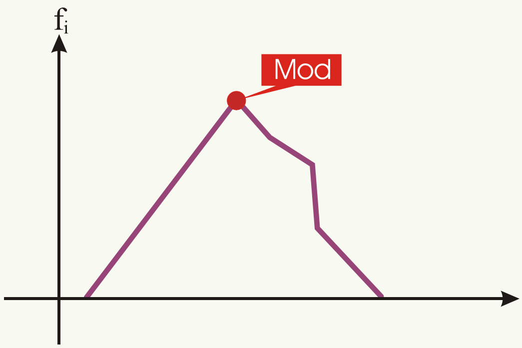
= اوسط

$$\bar{x} = \frac{a \cdot 1 + a \cdot 2 + a \cdot 3 + a \cdot 4 + a \cdot 5 + a \cdot 6 + a \cdot 7 + a \cdot 8}{a + a + a + a + a + a + a + a}$$

$$\bar{x} = \frac{36a}{8a} = 4.5$$

مثال: په لاندې ګراف کې د موډ تقريبي قيمت پرته له محاسبې په ګوته کړئ.

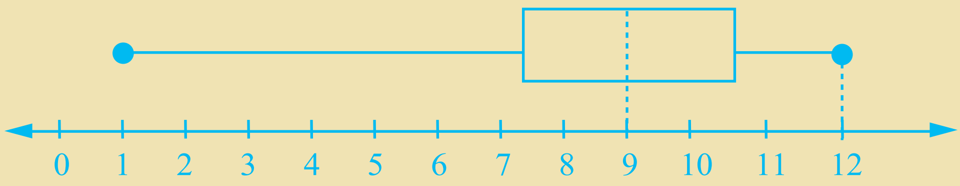
حل:



(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- دلاندې صندوقچه یې ګراف په نظر کې نیولو سره لاندې اړوندو پوښتنو ته ځوابونه ورکړئ.



- په پورتني ګراف کې میانه څومره ده؟
- په دې ډیټا کې لومړنی، ربع د 8 عدد دی، دا عدد، څه شی ښیي؟
- دریمه ربع څو ده؟ دا عدد، د څه شي ښودونکی ده؟
- دا چې میانه د صندوق کیڼې خواته ده، د څه شي ښکارندویه دی؟
- داچې د کیڼې خوا د عددونو شمېر نظر ښې خوا ته زیات دی دا زیاتوالی د څه ښکاره کوونکی دی؟

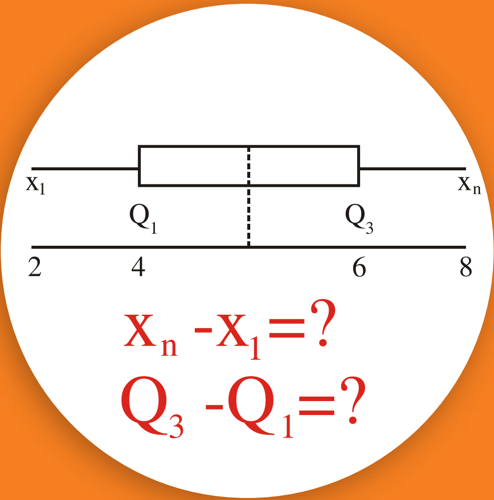
2- د یوه هېواد د فوټبال ملي ټیم د لوبغاړو عمرونه په لاندې ډول دي.

25	24	26	19	31	18	23	22	25	26
25	27	23	29	25	25	33	31	26	

د لاندې نتیجو څخه کومه یوه سمه ده؟

- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه لوړ وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له میانې څخه لوړ وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه ښکته وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه یې له اوسط څخه ډېر وي د هغه لوبغاړو له شمېر سره مساوي دی چې عمرونه یې له اوسط څخه لږ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ربعي انحراف

که د یوې ټولنې د احصائیوي تغیراتو لمن لویه وي، آیا فکر کوئ چې د ډیټا د تحول ساحه به له ټولنې څخه نامناسبه پایله وړاندې کړي؟

فعالیت

له یو موزیم څخه د لیدونکو شمېر په 12 ورځو کې په لاندې ډول دی.

0 1 2 8 7 6 5 9 10 6 15 11

- ددې ډیټا (Data) د تحول ساحه پلاس راوړئ.
- په عمومي ډول پورتنی ډیټاوې د کومو دوو عددونو ترمنځ تیت شوي دي؟
- یو په خلورمه برخه ډیټا له پورته اوښکته خوا څخه حذف کړئ او بیا د پاتې ډیټا (Data) د تحول ساحه پیدا کړئ.
- دا د تحول دوه ساحې چې په لاس راغلي دي، یو له بله سره یې پرتله کړئ، کومه یو ه یې ډېر تیت والي ښیي؟
- په ځینو وختونو کې د تحول ساحه د دوو ډېرو کوچنیو او یا ډېرو لویو مقدارونو له سببه، نامناسبه تعبیرونه له ټولنې څخه مونږ ته په لاس راکوي.

نو له دې امله د نورو ټاکونکو څخه چې د ربعو د انحراف په نامه یادېږي، ګټه اخیستل کېږي، تر څو د ټولنې د تحول ساحه په ښه ډول وټاکي.

که Q_1 او Q_3 په ترتیب سره د ډیټا د سټ، لومړی ربع او دریمه ربع وي، نو د ربعو انحراف په (Q) سره ښودل کېږي او په لاندې ډول تعریف شوي دي.

$$Q = Q_3 - Q_1$$

ربعي انحراف یو له هغو ټاکونکو څخه دی چې د ډیټا (Data) تیت والي ښکاره کوي. داسې چې د لومړي او دریمې ربعې له تعریف څخه پوهېږو چې 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه چې دا فاصله لږه وي، ډیټا سره نژدې دي، یا په بل عبارت د هغوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

تیت والي لړ دی.

ځینې وختونه د ربعو (څلورمو) انحراف د $Q = \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$ په شکل تعریفوي او دې ته د ربعو نیمایي لمن وایي.

مثال: دلاندې عددونو د ربعو (څلورمو) انحراف پیدا کړئ.

36 35 29 30 31 25 24 23 22 22 20

حل: لومړی عددونه په صعودي ډول ترتیب کوو او بیا ورته یوه شمېره ټاکو:

20	22	22	23	24	25	29	30	31	35	36
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$$C_{Q_n} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33+2}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$$

نوله دې ځایه:

$$Q_3 = 30.75$$

همدارنګه:

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11+2}{4} = \frac{13}{4} = 3.25$$

نوله دې ځایه:

$$Q_1 = 22.25$$

د لومړنۍ او درېمې، ربعي قیمتونه

په ترتیب سره 22.25 او 30.75 دي نو:

$$Q = Q_3 - Q_1 = 30.75 - 22.25 = 8.5$$

پوښتنې

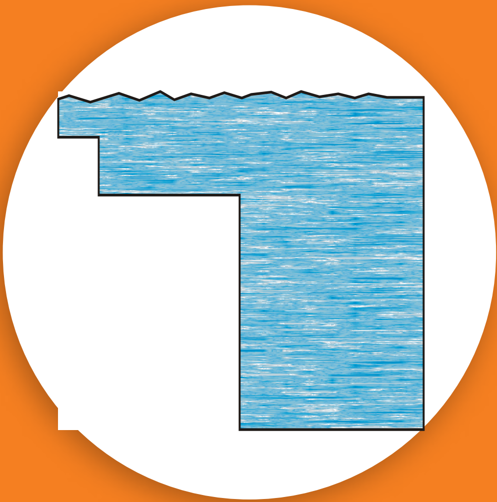
1 – د لاندې ډیټا د تحول ساحه، د ربعو (څلورمو) انحراف او موډ پیدا کړئ او ووایاست چې د ډیټا ګنیوالی په کومه ساحه کې ډېر دی.

5 11 12 14 15 15 16 17 30

2 – د لاندې ډیټا د تحول ساحه او د څلورمو انحراف پیدا او د لومړی پوښتنې د تحول د ساحې او د څلورومو د انحراف سره یې پرتله یې کړئ.

27 24 21 29 28 26 23 22

(c) ketabton.com: The Digital Library



واریانس (variance)

که ستاسو لامبو ښه زده نه وي او وغواړئ چې په داسې ډنډ کې ولامبئ چې ژور والی یې په ټولو برخو کې یو شان نه وي. ددې لپاره چې په ډاډه زړه ولامبئ، کوم معلومات باید ولرئ؟

فعالیت

که د لمبا په یو ډنډ کې د یوځای ژوروالی 1.5 متره او دبل ځای ژوروالی یې 2.5 متره وي.

- ددې ډنډ د دواړوو ځایونو د ژوروالي اوسط پیدا کړئ.
- ددې دوو ډیټاوو د انحرافونو مربع له حسابي اوسط څخه پیدا کړئ.
- ددې دوو ډیټاوو د انحرافو د مربعګانو مجموعه پیدا کړئ.
- د پورتنیو ډیټاوو (Data) مجموعه د مجموعې د غړو پر شمېر و ویشئ.

د $x_1, x_2, \dots, x_n$ ډیټا د واریانس د پیدا کولو لپاره لاندې پړاوونه په نظر کې ونیسئ.

- د ډیټا اوسط پیدا کړئ یعنې:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

- د انحرافونو د مربعګانو مجموعه یعنې:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2$$

په لاس راوړئ.

-پورتنی مجموعه د مجموعې د غړو پر شمېر (n) و ویشئ او په s^2 یې وښیې:

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې دلته S^2 د واریانس په نامه یادېږي. واریانس برابر دی د انحرافونو د مربع اوسط له اوسط څخه.
پاملرنه: ځینې وختونه واریانس د پیداکولو لپاره له دې لاندې فورمول څخه هم ګټه اخلي.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \bar{x}^2$$

ثبوت: پورتنې فورمول کولای شو، په لاندې ډول لاس ته راوړو.

پوهېږو چې :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\bar{x}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{\,2} - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} 2x_i\bar{x}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - 2\bar{x}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{n\bar{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - 2\bar{x}\cdot\bar{x} + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}{n} - \bar{x}^2$$

مثال: د لاندې ډیټا (Data) وریانس د دواړو فورمولونو په مرسته پیداکړئ.

1 5 6 7 9

الف: د $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(xi - \bar{x})^2}{5}$ له فورمول څخه څرنګه چې $i = 1,2,3,4,5$

$$\bar{x} = \frac{1+5+6+7+9}{5} = 5.6$$

$$S^2 = \frac{(1-5.6)^2 + (5-5.6)^2 + (6-5.6)^2 + (7-5.6)^2 + (9-5.6)^2}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\frac{(-4.6)^2+(-0.6)^2+(0.4)^2+(1.4)^2+(3.4)^2}{5}$$

$$=\frac{21.16+0.36+0.16+1.96+11.56}{5}=\frac{35.2}{5}=7.04$$

ب: له دې فورمول $S^2=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_i^2}{5}-\bar{x}^2$ څخه هم کولی شو چې همدا قیمت په لاس راوړو

$$S^2=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2}{5}-\bar{x}^2=\frac{192}{5}-(5.6)^2$$

$$=38.4-31.36=7.04$$

یادونه: که ډیټا په ګروپونو (کلاسوونو) کې ترتیب شوي وي او د کلاسونو مرکزونه $x_1, x_2, .., x_n$ او $f_1, f_2, ..., f_n$ فریکونسي هم راکړل شوي وي. په دې حالت کې د واریانس د پیدا کولو لپاره له لاندې فورمول څخه کار واخلو:

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}f_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-\bar{x})^2}{N}$$

داسې چې $N=\sum_{i=1}^{n}f_i$ دی.

د واریانس د واحد ټاکل مشکل دي. په عمومي ډول په عمل کې مطلقه قیمت یې نیول کیږي، څینې وخت د متحول د واحد مربع د واریانس د واحد په حیث ګڼل کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

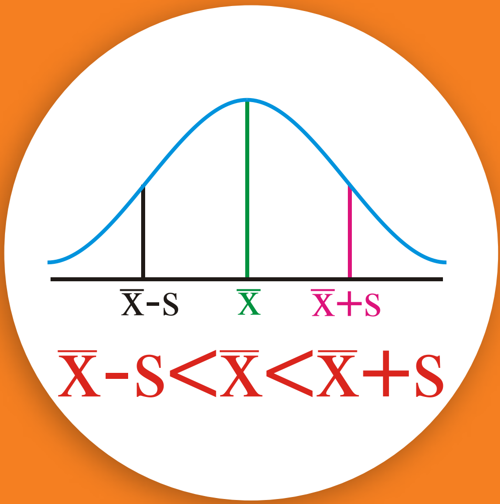
د هغو ساعتونو شمېر چې زده کوونکو په یوه اونۍ کې د لوبو کولو لپاره ټاکلي دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي.

3 2 1 4 3 2 2

ددې ډیټا (Data) وریانس پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

معياري انحراف



که S دوريانس جذر $\bar{x}$ دډيټا اوسط وي
مخامخ شکل کوم ډول ټاکونکی توضيح کوي؟

فعاليت

که S^2 د $x_1, x_2, \dots, x_n$ ډيټا واريانس وي. آيا څه فکر کوئ چې د S^2 او S واحدونه سره څه توپير لري؟ فرض کړئ چې په يوه اونۍ کې يوې کارخانې ته د توکو د فرمايشونو د تسليمۍ وخت له څېنو ټاکونکو سره، لکه: انحراف، د انحراف مطلقه قيمت د انحرافو مربع په لاندې جدول کې راکړل شوی وي، څرنګه چې:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{n} = \frac{8+9+6+4+8}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

ورکړې وخت په ورځ x_i	$\bar{x}$	انحراف $x_i - \bar{x}$	دانحراف مطلقه قيمت $\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	د انحرافونو مربع $(x_i - \bar{x})^2$
8	7	1	1	1
9	7	2	2	4
6	7	-1	1	1
4	7	-3	3	9
8	7	1	1	1

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د ډيټا (جامو) د ورکړې د وخت اوسط پيدا کړئ.
- د انحرافو د مطلقه قيمت اوسط يا په لنډ ډول د انحراف اوسط (AD) پيدا کړئ.
- د توکو د ورکړې وخت واريانس پيدا کړئ.
- د واريانس مربع جذر محاسبه کړئ.
- د واريانس د مربع جذر واحد د واريانس له واحد سره پرتله کړئ.

د واريانس له فورمول څخه مو زده کړل چې په توان ورلو سره نه يوازې داچې د واريانس اندازه کولو مقياس له شک سره مخامخ کوي، بلکې انحرافونه هم لوی ښيي.

ددې لپاره چې دا ستونزې له مينځه يوسو، په کار ده چې د وريانس مربع جذر په لاس راوړو.

د واريانس جذر د ډيټا (Data) د تيت والي، يو بل ته کوونکی د معياري انحراف يا مطلق تيت والي په نوم را پيژني.

معياری انحراف چې د S په سمبول ښودل کېږي، د واريانس له مربع جذر سره مساوي دی.

په دې معنا:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\bar{x}^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}$$

د معياری انحراف يا د مطلق تيت والي واحد هم هغه د متحول واحد دی.

پورتنی رابطه په لاندې ډول ثبوت کېږي:

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2\bar{x}x_i+\bar{x}^2)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2n\bar{x}^2+n\bar{x}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}{n}\right)$$

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2\Rightarrow S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د 5 ناروغانو د بدن د حرارت درجې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

38 39 39 40 41

معیاري انحراف یې پیدا کړئ

حل:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\frac{38+39+39+40+41}{5}=\frac{197}{5}=39.4$$

$$S^2=\frac{(38-39.4)^2+(39-39.4)^2+(39-39.4)^2+(40-39.4)^2+(41-39.4)^2}{5}$$

$$S^2=\frac{(-1.4)^2+(-0.4)^2+(-0.4)^2+(0.6)^2+(1.6)^2}{5}$$

$$S^2=\frac{1.96+0.16+0.16+0.36+2.56}{5}=\frac{5.2}{5}=1.04$$

$$S=\sqrt{1.04}=1.01980$$

پاملرنه: د فریکونسیو له جدول څخه، معیاري انحراف په تقریبي ډول په لاندې ډول په لاس راځي:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-(\bar{x}))^2}{\sum_{i=1}^{n}f_i}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}f_ix_i^2}{\sum_{i=1}^{n}f_i}-\bar{x}^2}$$

چې $\bar{x}$ د ډیټا، اوسط، x_i د کلاس مرکز او f_i د کلاس فریکونسي ښيي.

پوښتنې

د څلورو ټلویزوني سټیشنونو د ښوونې او روزنې د پروګرامونو د خپرولو د ساعتونو شمېر په لاندې ډول راکړل شوی دی، د ډیټا معیاري انحراف پیدا کړئ.

1 3 4 5

(c) ketabton.com: The Digital Library

• **د فریکونسي څو ضلعي ګراف**:د هغو مرتبو جوړو نقطې چې عرض یې د کلاس مرکز او اوړدوالی یې د هماغه کلاس له فریکونسي سره مساوي دی، یوه له بلې سره ونښلوو، د فریکونسي څو ضلعي ګراف په لاس راځي، د فریکونسي په څو ضلعي ګراف کې دوې نورې اختیاري نقطې د صفر په فریکونسي د کلاسونو (ګروپونو) په لومړي او اخیرنی برخه کې ډېروو، تر څو د فریکونسي څو ضلعي ګراف له محور سره ونښلوي.

• **د ساقې او پاڼې ګراف**: د ساقې او پاڼې د ګراف د رسمولو لپاره له عددونو څخه ګټه اخیستل کېږي. احصائیوی ډېټا د عددونو په شکل راوړو، بیا له دې عددونو څخه د ساقې او پاڼې ګراف رسموو. دا ډول ګراف د هغو ډېټا (Data) لپاره چې د رقمونو د شمېر له مخې تر ټولو لوی او کوچنی رقم تر منځ توپیر لږ وي، مناسب دی.

• **ربعي**: هغه عدد چې مرتبه جامعه په دوو مساوی برخو ووېشي، د میانې په نوم یادېږي. اوس هغه عددونه په نظر کې ونیسئ چې مرتبه جامعه په څلورو مساوي برخو وېشي، دا عددونه په Q_2, Q_1 او Q_3 سره ښودل کېږي، دې عددونو ته په ترتیب سره لومړی ربع، دویمه ربع او د دریمه ربع وایي. ښکاره ده چې Q_2 میانه ده.

• **صندوقچه یې یا جعبه یې ګراف**: له دې ګراف څخه د هغې ډېټا (Data) لپاره چې سره نژدې دي یا هغه ډېټاوې چې د اوسط پر شاوخوا راټولې شوي دي او یا هم هغه ډېټا چې ترټولو لویو یا ترټولو کوچنیو ډېټاګانو پرشاوخوا راټولې شوي وي، ګټه اخیستل کېږي، داګراف یو تصویري ګراف دی چې ترټولو لویې ډېټا، ترټولو کوچنی ډېټا، میانې، لومړی ربعې او دریمې ربعې په اساس ښکاره کوي.

• **د نارمل منحني په بنیاد د مرکزي ټاکونکو پرتله کول**: څه وخت چې وغواړو مرکزي ټاکونکي (اوسط، میانه، او موډ) له نارمل منحنې څخه په ګټه اخیستنې سره پرتله کړو: په دې حالت کې که نارمل منحني متناظر وي، نو اوسط، میانه او موډ سره مساوي دي. که نارمل منحني متناظر نه وي، نو مرکزي ټاکونکي نظرخپل موقعیت ته د منحني ښې خوا یا کیڼې خواته قیمتونه اخلي.

• **ربعي انحراف**: که Q_1 او Q_3 په ترتیب سره د ډېټا (Data)لومړی ربع او دریمه ربع وي، کولای شوو چې د څلورمو (ربعي) انحراف (Q) په لاندې ډول ولیکو

$$Q = Q_3 - Q_1$$

له پورتني تعریف څخه ښکاری چې 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې دا فاصله لږه وي، ډیټاګانې دي او د ډیټا تیت والی لږ دی.

• **واریانس**: د تیت والی ټاکونکی هغه مقدارونه دي چې د ډیټا (Data) د تیت والی حالت نسبت یوبل ته او نسبت یې اوسط ته ټاکي.

واریانس د ډیټې والي له ټاکونکو څخه یو مهم ټاکونکی دی چې په S^2 سره ښودل کېږي او له لاندې رابطې څخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}$$

د واریانس پیداکول د فریکونسي په جدول کې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

(x_i دکلاس مرکز دی)

• **معیاري انحراف**: د واریانس مربع جذر په S ښیي چې معیاري انحراف ورته وایي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}}$$

د معیاري انحراف پیداکول د فریکونسي له جدول څخه د لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

(x_i دکلاس مرکز دی)

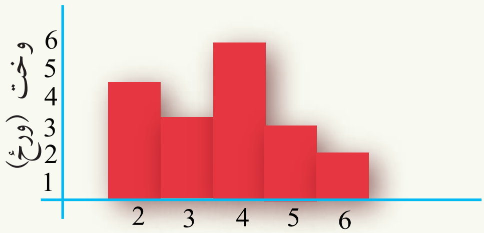
(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1 - لاندې ګراف د باد سرعت په 19 ورځو کې ښکاره کوي، په ګراف کې د راکړل شوو اطلاعاتو پر بنسټ د باد سرعت لپاره د فریکونسي څو ضلعي ګراف رسم کړئ.

که چېرې یوې کشتۍ ته د حرکت لپاره لږ تر لږه په یوه ساعت کې 5 کیلو متره د باد سرعت ته اړتیا وي، نو څو ورځې د کشتۍ د حرکت کولو لپاره مناسبې دي؟

په دې پوښتنه کې ولې د فریکونسي څو ضلعي ګراف، نظر مستطیلي ګراف ته مناسب دی؟



2 - د فریکونسي څو ضلعي ګراف هغه ګراف دی چې .... په افقي محور او .... د عمودي محور پر مخ ښودل کېږي.

الف) د کلاسونو مرکز، نسبي فریکونسي

ب) نسبي فریکونسي، د کلاسونو مرکز

ج) د کلاسونو حدود، مطلقه فریکونسي

د) د کلاس مرکز، مطلقه فریکونسي

3 - دساقې او پاڼې ګراف راکړل شوی دی:

- له دې ګراف څخه په لاس راغلې ډیټا ولیکئ.

ساقه	پاڼې				
1	0	3	3	4	
2	0	2	4	8	8
3	2				

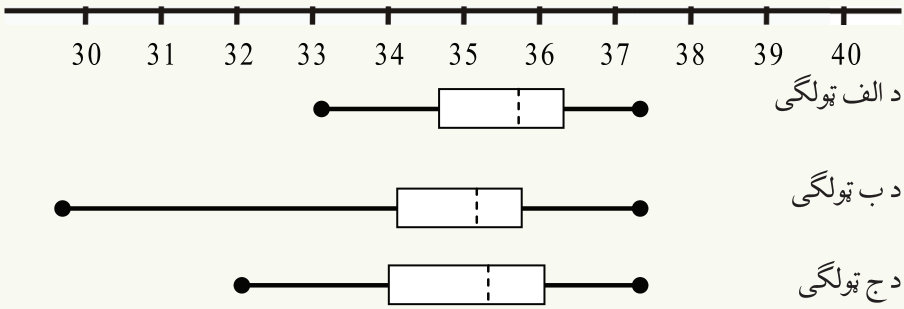
4 - کوم ګراف ته د 90° په اندازه (د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف لوري ته) دوران ورکړو، تر څو میله یي ګراف لاس ته راشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) د ساقې او پاڼې ګراف　　　　ب) مستطيلي ګراف

ج) د فريکونسي د څو ضلعي ګراف　　　　د) دايروی ګراف

5: لاندې ګراف د الف، ب او ج د دريو ټولګيو د رياضي ازموينې نمرې ښکاره کوي، ګراف ته په پاملرنې سره لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- د کوم ټولګي د تحول ساحه زياته ده؟
- د کوم ټولګي د نمرو ميانه تر ټولو زياته ده؟ او د کوم ټولګي د نمرو ميانه تر ټولو لږه ده؟
- د کوم ټولګي د نمرو تيت والی تر ټولو ډېر دی.
- ددې دريو ټولګيو د ازموينې نمرې له کمزورې څخه د قوي په لور ترتيب کړئ.

6 : په ګراف کې د a مقدار عبارت دی له:

الف) ميانه　　ب) اوسط　　ج) دريمه ربع　　د) موډ

(c) ketabton.com: The Digital Library

7: د غذايي موادو د توليد دوه فابريکې د A او B په نامه، د 48 گرامو په قطيو کې بسکيت خرڅوي.

• په تصادفي ډول د دواړو فابريکو د بسکيت له قطيو څخه 5 قطي ټاکل شوي دي او په پوره غور سره يې وزنونه معلوم شوي دي چې په لاندې ډول دي.

A :	48.08	48.32	47.96	47.84	47.96
B :	49.16	48.84	48.88	49.08	49

• په قطيو کې کومه فابريکه زيات بسکيت خرڅوي؟ د پوښتنې د حل لپاره له کوم ټاکونکي څخه استفاده کوي؟

• د بسکيت په وېشلو کې کومې فابريکې يو شان عمل کړى دى؟

8: که د ډيټا د تحول ساحه صفر وي. د ډيټا په برخه کې څه نتيجه اخلئ؟

9 : د هغه ساعتونو شمېر چې زده کوونکو په يوه اونى کې د لوبو لپاره ټاکلې دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي.

1 5 7 9

ددې ډيټا (Data) ورايانس پيدا کړئ.

10: په لاندې جدول کې واريانس پيدا کړئ.

x_i	25	35	45
f_i	10	25	15

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم څپرکی

د رياضي منطق

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شهودي درک استدلال:

پخوا تر ډېــر و پيړيو پورې خلکو فکر کاوه چې ځمکه هواره ده او ستورې د ځمکې پر شاوخوا څرخيږي.
آيا پوهيږې چې ځمکه کروي ده؟
آيا لمر دځمکې پر شــاوخوا او که ځمکه د لمر پرشاوخوا څرخيږي؟

تعريف: هغه طبيعي يا حسي پوهه چې دهغې په مرسته ديوې موضوع سموالى يا حقيقت او يا يو مفهوم پر ته له استدلاله قبلوو، له شهودی درک څخه عبارت دی چې کيدلی شي، دوخت په مختلفو مرحلو کې يوله بله سره توپير ولري.

فعاليت

د لاندې شکل په نظر کې نيولو سره د مستقيم خط پر مخ د A او B دوې نقطې په پام کې ونيسئ.

يو سړی غواړي چې ددې مستقيم خط پر مخ د A له نقطې څخه د B نقطې ته لاړشي چې د $\overline{AB}$ د قطعه خط منځنۍ نقطه A_1 کې توقف وکړي او بل وار چې د A_1 نقطې ته رسيدلي دی، ددې لپاره چې د B نقطې ته ورسيږي، بياد A_2 په نقطه (د $\overline{A_1B}$ د قطعه خط دتنصيف نقطه) کې توقف وکړي، که په همدې ډول دوام ورکړي، نو لاندې پوښتنو ته ځوابونه ورکړئ:

- آيا په پورته ډول چې د خط پر مخ د هرو دوو نقطو په منځنۍ نقطه کې توقف وکړي، پاى لرى؟
- که په همدې ډول تر پايه دوام ورکړي، دا سړی به د B نقطې ته ورسيږي؟
- که دا سړی توقف و نه کړي او يا له لارې بيرته راونه گرځي، نو نه يوازې چې د B نقطې ته به ورسيږي، بلکې ترې تېر به هم شي. په دې اساس ددې مسئلې د واقعيت او ستاسو د شهودي درک ترمنځ څه توپير شته؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعاليت څخه لاندې نتيجه لاس ته راځي:

نتيجه: د شهودي درک نتيجه هر وخت صحيح نه وي، خو کېداى شي چې د قضيو دحل لپاره يو ښه بنسټ وي.

له هغه مثال څخه چې په پورتني فعاليت کې مو ترې استفاده وکړه او يادا‌سې نور مثالونه دا ددې په معنا نه دي چې دشهودي درک استدلال گمراه کوونکى دى، بلکې بر عکس په زياتو حالتونوکې دشهودي درک استدلال د مسلؤ دحل، د انگيزې د پيداکولو او د نورو سوالونو د طرح کولو سبب گرځي.

لومړى مثال: د شهودي درک په استدلال سره په اسانۍ سره حکم کولاى شو چې دوه موازي خطونه يو بل نه قطع کوي.

څرنگه چې ددې مسلې په قبلولو کې استدلال په کار وړل شوى نه دى، په واقعيت يو احساس دى چې پر اساس يې داحکم منل کېږي، نو دا ډول نتيجه اخيستنه دشهودي درک په نامه يادوو.

دويم مثال: که يوه نقطه د داسې دايرې د باندې پرته وي چې قطر يې 4 واحده وي. ددې نقطې د فاصلې د مطالعه کولو لپاره چې له 2 واحده څخه زياته ده، نه شو ويلاى چې دا استدلال يو شهودي درک دى، ځکه دمسلئې د وضاحت لپاره لازمه ده چې استدلال وکړو. څرنگه چې د دايرې د مرکز فاصله له محيط څخه 2 واحد ده. نقطه د دايرې د باندې واقع ده، نوله دې امله د دايرې له مرکز څخه د نقطې فاصله د 2 واحده څخه لويه ده. يعني پرته له استدلال څخه د طبيعي پوهې او يا غريزه يې احساس په واسطه نه شو کولاى، مسئله درک او صحت يې قبول کړو.

پوښتني

1- د دوو نقطو ترمنځ لنډه فاصله له يوه مستقيم خط څخه عبارت ده، آيا ددې مسئلې درک کول يو شهودي درک دى؟ څرنگه استدلال کوئ؟

2- له لاندې حکمونو څخه کوم يو يې د شهودي استدلال په طريقه د درک وړدى؟

a- ديوې متوازي الاضلاع مقابلې زاويې سره مساوي دي.

b- د لوزي (معين) قطرونه يو پر بل عمود او يوبل نيمايي کوي.

c- په يوه قايم الزاويه مثلث کې و تر، له هرو دوو ضلعو څخه لوى دى.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمثيلي يا ګماني استدلال

ووايه زما په لاسونو کې څه شی دی؟ تقريباً ګرد دی، رنګ یې سپین دی او دسپینو په منځ کې يو ژيړ شی دی؟

د منطق يوه ښوونکي غوښتل چې دخپل يوه زده کوونکي قياسي استدلال وازمايي، خپل مخ يې هغه ته وروا ړوه او ورته ويې ويل:

پوهيږئ چې ګمان او يا تمثيل حقيقت ته د رسيدو پل دی. د لوست په جريان کې مو زده کړل چې تمثيلي استدلال موږ حقيقت ته نژدې کوي، ليکن هر وخت سوچه حقيقت نه دی.

ښوونکي په داسې حال کې چې په خپلو لاسونوکې یې د چرګې هګۍ پټه کړي وه، له زده کوونکي وپوښتل: ووايه زما په لاسونو کې څه شی دی؟ تقريباً ګرد دی، رنګ يې سپين دی او دسپینو په منځ کې يو ژيړ شی دی.

زده کوونکي چې په همدې وخت کې له زراعتی فارم نه راغلی و، له ژور فکر کولو وروسته يې ښوونکي ته مخ وروا ړوه او ويې ويل:

استاده فکر کوم چې دسپين شوي شلغم(ټيپر) په منځ کې ګازره ده.

تعريف

د دوو پېښو ترمنځ د ورته والي پيداکول او دهغوی په باره کې د يوشان نتيجې اخيستلوته تمثيلي يا قياسي (ګماني) استدلال وايي.

فعاليت

يوه ښوونکي يو شوخ زده کوونکی چې لوست يې اخلالوه، له ټولګي څخه وويست. دټولګي د باندې يې د خپل ټولګي بل زده کوونکی وليده چې هغه هم له ټولګي څخه د باندې و تلی دی. دپورتني تعريف په نظر کې نيولو سره له لاندې اړيکو څخه کوم يو يې يو تمثيلي يا قياسي استدلال دی.

- دويم زده کوونکي د لوست په وخت کې تفريح کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- دویم زده کوونکي هم شوخي کړي ده.
- ناروغه دی، نه غواړي چې په ټولګی کې واوسي.

له تعریف او د زده کوونکو له فعالیت څخه لاندې نتیجه په لاس راځي:

نتیجه: قیاس یا تمثیل په حقیقت کې د مختلفو مفهومونو په منځ کې د ورته والي پیداکول دي. له دې سببه تمثیلونه کېدای شي، د ډېرو مفهومونو یا دریاضي د قضیو د درک کولو لپاره شهودي زمینه پیداکړي. تمثیلي استدلال د ثبوت په حیث نه شمارل کېږي، بلکې د ثبوت لپاره زمینه برابروي.

لومړی مثال: په عامه ژ به(مارخوړلی له برګ پړي څخه ډارېږي) دا یو قیاسي استدلال دی، ځکه چې برګ پړی له مار سره پر تله شوی دی او د هغوی په منځ کې ورته والی لیدل شوی دی.

دویم مثال: له تمثیلي استدلال څخه په ګټه، ددې حقیقت درکول چې د دوو منفي عددونو حاصل ضربِ مثبت عدد او د یو منفي او یو مثبت عدد حاصل ضرب منفي عدد دی، داسې په لاس راوړو: مثلاً ددې حقیقت د درک کولو لپاره چې که چېرې د یوه زده کوونکي لیاقت د (+) په علامه او نا لایق والی د (-) په علامې سره په پام کې ونیسو او ددې دواړو عملونو د حاصل د(دی) لپاره (+) او (نه دی) لپاره (-) په پام کې ونیسو، له تمثیل او یا قیاس څخه ګټه اخلو او که دوی سره ترکیب کړو په نتیجه کې لرو چې:

لایق دی = مثبت ، لایق نه دی = منفي

(+) (+) = + ، (+) (-) = -

نالایق دی = منفي ، نالایق نه دی = مثبت

(-) (+) = - ، (-) (-) = +

پوښتنې

1 - دا بیان چې(بختور کال د هغه کال له پسرلي نه معلومیږي،) په لاندې کوم استدلال باندې دلالت کوي.

a- شهودي درک استدلال.

b- قیاسي استدلال. c- هیڅ ډول استدلال په کې نشته دی.

2- د قیاسي استدلال په مرسته په کوم مثلث کې د فیثاغورث د قضیې په اساس لاندې نتیجه ثبوت کېدلای شي:

$$\sin^2\propto+\cos^2\propto=1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

استقرايي استدلال:

يو زده کوونکی په لومړنی صنفي ازموینه کې 100 نمرې اخلي او په دویم او دریم صنفي ازموینو کې هم 100 نمرې اخلي.
په اخرنۍ ازموینه کې څه نتیجه اخیستلای شئ چې دا زده کوونکی به څونمرې واخلي؟

فعالیت

د مسلسلو طاقو طبیعي عددونو د جمعې حاصل په پام کې نیسو، ددې کار لپاره له یو 1 له عدد څخه پیل وکړئ او تش ځایونه ډک کړئ.

$1+3= \square = (\quad)^2$

$1+3+5= \square = (\quad)^2$

$1+3+5+7= \square = (\quad)^2$

$1+3+5+7+9= \square = (\quad)^2$

پورتنیو پوښتنو ته په پاملرنې سره لیدل کېږي چې د طاقو طبیعي عددونو د جمعې حاصل د طبیعي عددونو د شمېر له پوره مربع سره مساوي دی.

- آیا کولای شو نتیجه واخلو چې هر وخت د طاقو مسلسلو عددونو د جمعې حاصل ددې عددونو د شمېر له مربع سره مساوي دی؟
- کوښښ وکړئ له n طاقو مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل لپاره فورمول په لاس راوړئ.

دپورتني فعالیت د سرته رسولو په اساس لاندې نتیجه په لاس راځي.

نتیجه: استقرايي استدلال د یو شمېر مشاهدو او پر بنسټ د عمومي نتیجې اخیستني طریقه ده. په حقیقت کې یوې کوچنی نمونې ته په لویه نمونه عمومیت ورکول دي.

لومړی مثال: (موټې د خروار نمونه ده) داخبره استقرايي استدلال ته اشاره کوي، څکه په دې مثال

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې له یوې کوچنۍ نمونې څخه د کل نتیجه اخیستل کېږي، په حقیقت کې له مسئلې څخه د یوشمېر مشاهد و پر بنسټ نتیجه اخیستل شوي ده، نو له استقرایي استدلال څخه کار اخېستل شوی دی.

دویم مثال: یو زده کوونکی په اتفاقي ډول په څومرحلو کې درې مسلسل عددونه سره ضرب کړل او ویې لیدل چې د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دی. له دې کار څخه نتیجه اخلي چې (د هر درو مسلسلو عددونو د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دی)

نوموړې زده کوونکي کوم استدلال کړي دي.

الف: شهودي استدلال ب: قیاسي (ګماني) ج: استقرایي استدلال د: هېڅ یو

حل: استقرایی استدلال

پوښتنې

1- هغه طریقه چې د یوه محدوده شمېر ډېټا پر اساس ترینه عمومي نتیجه اخیستل کېږي، څرنګه یو استدلال دی.

الف: قیاسي یا تمثیلي استدلال ب: استقرایي استدلال

ج: د شهودي درک استدلال

2 – د عددونو ترتیب ته په پاملرنې سره لاندې تش ځایونه ډک کړئ:

$1\times8+1=\square$

$12\times8+2=\square$

$123\times8+3=\square$

$1234\times8+4=\square$

3-

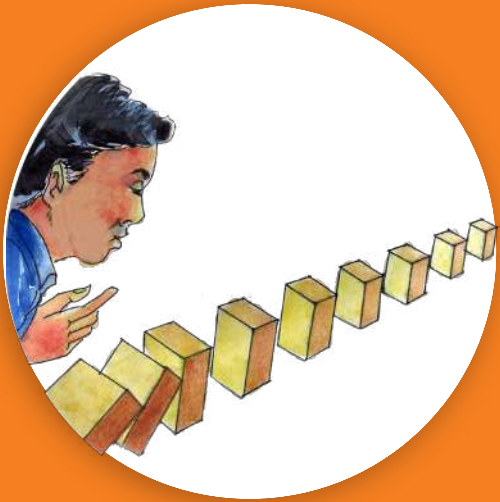
a) د دویمې پوښتنې حل ته په پام سره کېدای شي چې د عددونو پورتني ترتیب ته تر بې نهایت پورې دوام ورکړي؟

b) د محاسبه کولو پرته او د پورتنیو پوښتنو په پاملرنې سره اټکل کړئ چې کوم عددونه د لاندې پوښتنو په تش ځایونو کې را تلای شي:

$12345\times8+5=\square$

$123456\times8+6=\square$

(c) ketabton.com: The Digital Library



دریاضي د استقرا استدلال

د دوو مینو لوبه :

آیا تاسوکله د دوو مینو لو به تر سره کړې ده؟

پوهیږئ چې د دوو مینو په لوبه کې د لومړي خښتې لوېدل، د دویمې خښتې پرمخ چې یوه دبلې څنګ ته پرته وي، په ترتیب سره لومړنۍ پر دویمه، دویمه پر دریمه... تر پا یه پورې پر مخکه ولوېږي، داد خښتو یو پر بله لوېدل چې د پورته شکل په شان په مساوي فاصلو یو دبل څنګ ته پریوزي، د علاقه مندانو لپاره یو په زړه پورې تصویر ښکاره کوي.

لیدل کېږي چې د k ام خښتې لوېدل د $k+1$ ام د خښتې دلوېدلو سبب ګرځي، اوس نو که د خښتو لوېدل له یوې ټاکلې شمېرې څخه پیل شي، له هغې څخه وروسته خښتې یو پر له پسې راولیږي او ټولې خښتې د ځمکې مخ نیسي.

فعالیت

پوهیږئ چې $100=1+8+27+64$ دی، که دا عددونه د مکعبونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول ولیکو:

$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$$

- آیا هر وخت د مسلسلو طبیعي عددونو د مکعبونو مجموعه د عددونو د مجموعې له مربع سره مساوي ده؟

- آیا کولای شئ د پورتنۍ پوښتنې د حل لپاره یوه عمومي طریقه ووایاست، د پورتنۍ پوښتنې د ځواب لپاره لاندې جدول ډک کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متوالي عددونو شمېر	دمتوالي طبيعي عددونو مکعبونه	د مکعبونو مجموعه	د عددونو د مجموعې مربع
1	1^3		1^2
2	1^3+2^3		
3	$1^3+2^3+3^3$	36	
4	$1^3+2^3+3^3+4^3$		10^2
n	$1^3+2^3+3^3+...+n^3$		$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

- د $n=1$ ، $n=2$ ، $n=3$ او $n=4$ د طبيعي مسلسلو عددونو د مکعبونو د مجموعې لپاره د $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ فورمول سموالى وازمايئ.

- اوس که د n مسلسلو طبيعي عددونو لپاره پورتنى فورمول قبول کړو يعنې که:

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

وي، نو د $n+1$ د مسلسلو طبيعي عددونو لپاره يې ثبوت کړئ يا داچې وښياست:

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې نتيجه لاس ته راځي.

نتيجه: که چېرې $P(n)$ د n طبيعي عددونو په برخه کې يو حکم راکړل شوى وي، که د $n=1$ لپاره $P(1)$ صحيح وي، په دويم پړاو کې که د $P(k)$ له سموالي څخه $P(k+1)$ په لاس راشي، نو دا ادعا د $P(n)$ د هر n طبيعي عدد لپاره هم سمه ده.

لومړى مثال: وښياست چې $P(n)=4^{2n}-1$ د هر طبيعي عدد لپاره پر 5 د وېش وړ دى.

حل: د $n=1$ لپاره سمه ده ځکه چې:

$$n=1 \quad , \quad P(1)=4^{2\cdot1}-1=4^2-1=16-1=15$$

ليدل کېږي چې $P(1)=15$ پر 5 د وېش وړ دى.

قبلوو چې د k طبيعي عدد لپاره پورتنى ادعا سمه ده يعنې: $P(k)=4^{2k}-1$ پر 5 د وېش وړ

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی.

ځرنګه چې پر 5 د وېش وړ دی، نو کولای شو په لاندې ډول یې ولیکو

$$P(k)=4^{2k}-1=5r\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

غواړو وښایو چې د $n=k+1$ لپاره دا ادعا سمه ده، نو لروچې:

$$n=k+1 \qquad , \qquad P(k+1)=4^{2(k+1)}-1\ldots\ldots\ldots(**)$$

د (*) د رابطې دواړه خواوې په 4^2 کې ضربوو.

$$4^2(4^{2k}-1)=5r\cdot 4^2$$

$$4^{2k+2}-4^2=5r\cdot 16\Rightarrow 4^{2(k+1)}-1=15+16\cdot(5r)$$

$$4^{2(k+1)}-1=5(3+16r)$$

د پورتني مساوات له ښي خوا $5\cdot(3+16r)$ څخه ښکاري چې د مساوات کینه خوا پر 5 د وېش وړ ده.

نو اخرني مساوات ښکاره کوي چې $P(k+1)=4^{2(k+1)}-1$ هم پر 5 دوېش وړ دی، ځرنګه چې د $P(k)$ له سموالي څخه د $P(k+1)$ سموالي نتیجه شوه، نو د ریاضي د استقرا د اصل په اساس پورتنی ادعا $P(n)$ د هر طبیعي عدد (n) لپاره سمه ده.

یادونه: د ریاضي د استقرا په مرسته د ریاضي د حکمونو د ثبوتولو لپاره لومړی $P(1)$ په لاس راوړو، بیا $P(k)$ د استقرا د حکم په حیث په پام کې نیسو او په همدې ترتیب له فرضیې څخه حکم ثبوتوو.

دویم مثال: د ریاضي د استقرآ په مرسته ثبوت کړئ چې لاندې رابطه د هرطبیعي عدد n لپاره سمه ده:

$$1\times 2+2\times 3+3\times 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

حل: په پورتنی رابطه کې د $n=1$ لپاره لرو چې:

$$n=1 \qquad , \qquad P(1)=1\times 2=\frac{1(1+1)(1+2)}{3}=\frac{1\times 2\times 3}{3}=2$$

$$\Rightarrow 2=2$$

نود $n=1$ لپاره پورتنی رابطه سمه ده، که د $n=k$ لپاره یې سمه قبوله کړو، نو د $n=k+1$ لپاره یې داسې ثبوتوو، لروچې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$n = k \ , \ P(k) = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + ... + k\times(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

داستقرا فرضیه:

د $P(k)$ په فرضولو سره $P(n)$ رابطه د $n = k+1$ په نظر کې نیولو سره د رابطې سموالی ښکاره کړو، نو لروچې:

$$n = k+1, \quad P(k+1) = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + ... + (k+1)(k+2)$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

د استقرا حکم:

د استقرا د فرضیې په نظر کې نیولو سره لروچې:

$$P(k+1) = [1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + ... + k(k+1)] + (k+1)(k+2)$$
$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$
$$\Rightarrow 1\times 2 + 2\times 3 + ... + (k+1)(k+2) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

دا رابطه د $n = k+1$ لپاره سمه ده، نو په دې ډول د $P(n)$ رابطه د هر طبیعي عدد (n) لپاره سمه ده.

پوښتنې

1 – د ریاضي د استقرا په مرسته وښیاست چې د هر طبیعي عدد n لپاره لروچې:

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2 – د ریاضي د استقرا په مرسته وښیاست چې :

(i) $2 + 6 + 10 + ... + (4n-2) = 2n^2$

(ii) $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

استنتاجي(نتيجوی) استدلال:

آیا کولای شو د شپې په تیاره کې له رڼا څخه پرته شیان ووینو؟

فعالیت

درې مختلف داسې ستونه ولیکئ چې د هر ستن عناصر درې اختیاري مسلسل طبیعي عددونه وي.

- د هرستن د عناصرو د ضرب حاصل جلا، جلا په لاس راوړئ.

- آیا ویلای شو چې دا د ضرب حاصلونه:

(I): پر 2 د وېش وړ دي؟ ولې؟

(II): پر 3 د وېش وړ دي؟ ولې؟

- آیا ویلای شو چې د دریو مسلسلو طبیعي عددونو د ضرب حاصل هروخت پر 6 د وېش وړ دي؟ ولې؟

- د دریو مسلسلو طبیعي عددونو د ضرب حاصل موولی پر 6 د وېش وړ قبول کړو، د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

نتیجه: داسې طریقې ته چې د حقایقو سموالی یې په لومړي پړاو کې ومنو او عمومي نتیجه ترې لاس ته راوړو، استنتاجي استدلال یا د نتیجې اخیستنې طریقه ورته وایي یا په بل عبارت استنتاجي استدلال هغه طریقه ده چې سموالی مو ثبوت کړی یا منلی وي.

څه وخت چې له استنتاجي استدلال څخه استفاده کوو، ډاډمن یو چې نتیجه یې هر وخت سمه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د لاندې جدول پراونو ته په دقت سره وګورئ موږ څرنګه له عددونو سره چې د هر پړاوحقیقت او سموالی منو، بل پړاوته ځو او نتیجه په لاس راوړو.

د یادونې وړ ده چې په جدول کې په اختیاري ډول عدد ټاکل شوی دی، تاسوکولای شئ چې ددې عدد پرځای بل هر عدد چې موغوښتی وي، وټاکئ، وګورئ چې د هر عدد لپاره نتیجه یوشان ده.

یو عدد په خپله خوښه وټاکئ.	4	7	12
له لومړي عدد سره 5 جمع کړئ.	9	12	17
اوس یې دوه برابره کړئ.	18	24	34
له حاصل څخه د 4 عدد کم کړئ.	14	20	30
پر 2 یې وویشئ.	7	10	15
هغه عدد چې لومړی موټاکلی و، له عدد څخه کم کړئ.	3	3	3

اساسي خبره داده چې موږ په حقیقت کې د هغه عبارت پر بنسټ چې سموالی یې موږ قبول کړی دی، بله نتیجه لاس ته راوړو، دا مسله موږ ډاډ من کوي چې دهر اختیاري عدد په ټاکلو سره نتیجه هر وخت یوشان له 3 سره مساوي ده.

پوښتني

1 – ښکاره کړئ چې د دوو طاقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت یو جفت عدد دی.

2 – ثبوت کړئ چې هر صحیح طاق عدد د $2k+1$ په شکل دی.

3 – د سرو زرو په 9 سکوکې یوه تقلبي ده چې له نورو سکو څخه یې وزن کم دی.

څرنګه کولای شو چې د نورو وزنونو څخه د استفادې کولو پرته د پله یې ترازو په واسطه له دوه واره تللو سره تقلبي سکه پلاس راوړو؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثال د نفي کولو استدلال:

یوموټې د خروار نمونه ده.
که د یوجنس یوه کوچنۍ نمونه بې کیفیته وي.
آیا کولای شو ادعا وکړو چې ددې جنس لویه کتله ښه کیفیت لري؟

فعالیت

کولای شو، ډېر طبیعي عددونه د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په ډول ولیکو، لکه:

$9 = 2 + 3 + 4$

- پورتني مثال ته په پاملرنې سره لاندې تش ځایونه ډک کړئ؟

$15 = \square + 2\ \square + 4 + 5$

$\square = \square + 5 + \square + 7$

$\square = 12 + \square + \square + 14$

$74 = 17 + \square + 19 + \square$

- آیا کولای شو چې هر طبیعي عدد د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په شکل ولیکو؟
- که چېرې ځواب مو (نه) وي، نومثال یې ووایاست.

د پورتني فعالیت له سرته رسولوڅخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

نتیجه: کله چې له مثال سره وښایو چې عمومي نتیجه سمه نه ده او د ادعا ناسموالی ښکاره کړو دې ته د مثال د نفي کولو استدلال وایي.

مثال: د مسلئې د ثبوت لپاره همدو مره کافي ده چې وښایو چې د x او y دوه غیر ناطق عددونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکن ددوی د جمعې حاصل x+y یو ناطق عدد دی.

ددې لپاره که د $x = 1+\sqrt{2}$ او $y = 1-\sqrt{2}$ وټاکو، لروچې:

$$x + y = (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 1+1 = 2$$

لیدل کېږي چې ددې دواړو عددونو د جمعې حاصل د 2 عدد دی چې یوناطق عدد دی، په داسې حال کې چې x او y غیر ناطق (ګنګ) عددونه دي، نو دا ادعا نه شو کولای چې د دووغیر ناطقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت یو غیر ناطق عدد دی.

پوښتنې

1- د مثال د نفې کولو په استدلال سره وښیاست چې(د هر مثبت حقیقي عدد مربع دعدد له مکعب څخه کوچنی ده)

2- دلاندې کوم یو بیان لپاره د نفې مثال و جود نه لري؟

a) د دوو ناطقو عددونو مجموعه یو ناطق عدد دی.

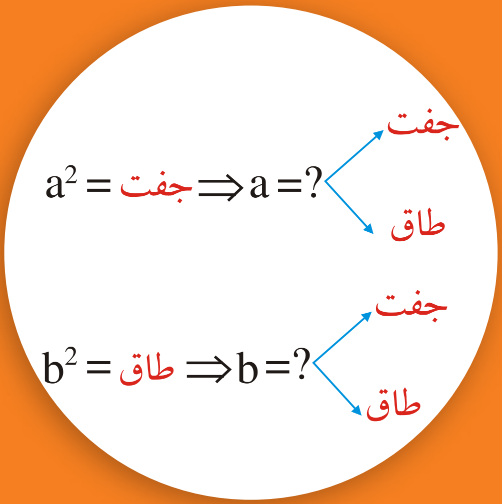
b) د هر مثبت عدد مربع له عدد څخه لویه ده.

c) دوې زاویې چې متناظرې ضلعې یې سره موازي وي، دا دوې زاویې سره مساوي هم دي.

d) د دوو طاقو عددونو مجموعه یو جفت عدد دی.

e) د دوو غیر ناطقو عددونو د ضرب حاصل، غیر ناطق عدد نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

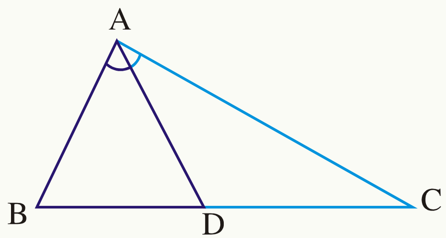


د خلف برهان یا غیر مستقیم ثبوت:

که د یوه عدد مربع جفت وي آیا خپله عدد جفت دی که طاق؟
آیا کولای شو چې دا ادعا وکړو، که د هر عدد مربع جفته وي، خپله عدد جفت دی؟
که وښایو چې خپله عدد طاق نه دی، څه نتیجه اخلئ ؟

فعالیت

د ABC مثلث د لاندې شکل په شان په پام کې ونیسئ:



- د $\hat{A}$ د زاویې ناصف رسم کړئ.
- که $\overline{BD} \neq \overline{CD}$ وي، نو د $\overline{AB}$ او $\overline{AC}$ ضلعې سره څه اړیکه لري؟
- که فرض کړو چې که $\overline{BD} \neq \overline{CD}$ و ي، خو $\overline{AC} \neq \overline{AB}$ دی، دا مسئله موږ کومې نتیجې ته رسوي؟

نتیجه: که د خپلې ادعا د عکس په فرضولو او یا د قبلولو په نتیجه کې د فرض شوې ادعا خلاف ته ورسېږو، نو په دې حالت کې زموږ فرض شوې ادعا سمه ده، دا ډول استدلال د غیر مستقیم ثبوت (برهان خلف) په نامه یادیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یادونه: په یاد ولرئ څه وخت چې له غیر مستقیم ثبوت څخه ګټه اخلو، لاندې پړاوونه په پام کې نیسو:

لومړی پړاو: فرضوو چې مطلوبه ادعا سمه نه ده.

دویم پړاو: ښکاره کوو چې دا فرض د اسې نتیجه په لاس راکوي چې پیژندل شوي حقیقتونه نفې کوي.

دریم پړاو: اوس چې نتیجه نفې شوې ده، نومعلومه خبره ده چې د لومړي پړاو فرض سم نه دی، نو مطلوب سم دی.

مثال: وښیاست که n^2 یو جفت طبعي عدد وي، نو n هم جفت دی؟

ددې مسلئې د ثبوت لپاره فرضوو، سره ددې چې n^2 جفت دی، خو n یو طاق عدد دی، نو کولای شو چې n د $n = 2k + 1$ په شکل ولیکو، په داسې حال کې چې k یو تام عدد دی، نو ددې عدد مربع مساوي ده په:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

$$\Rightarrow n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$

پورتنې مساوات ښکاره کوي چې n^2 یو طاق عدد دی چې دا د فرض خلاف ده، نو په نتیجه کې دا فرض چې n یو طاق عدد دی، ناسمه ده او دې نتیجې ته رسیږو چې n هم یو جفت عدد دی، ځکه دا فرض چې n طاق عدد دی، موږ دې نتیجې ته ورسولو چې n^2 هم طاق عدد دی

پوښتنه

وښیاست چې $\sqrt{3}$ یو غیر ناطق عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رياضی منطق او دبيان استنتاج

له خنګ ملګرى څخه د يو خبر اوريدل به څه نتيجه ولري؟
آيا خبر سم دى كه ناسم؟

تعريف

يوې خبرې جملې ته بيان وايي چې نتيجه يې په سموالي يا ناسم والي پاى ته ورسيږي.

فعاليت

لاندې جملې په پام کې ونيسئ او وښياست چې له هغو څخه کومه يوه يې بيان او کومه يوه يې بيان نه دى او منطقي نتيجه يې څه ده؟

i) نن ورځ باران نه اوري.
ii) آيا نن ورځ باران نه اوري؟
iii) بارانه اووره..
iv) څه زيات باران اوري!

له پورتني فعاليت څخه لاندې نتيجه لاس ته راځي.

نتيجه:

1 - هره جمله نه شي کېداى چې بيان وي. يوه جمله کيداى شي يوه حکمي، تعجبي پوښتنه او يا يو خبر وي.

2 - هره خبري جمله سمه يا ناسمه ده.

يادونه: كه يو بيان ته P ووايو، د سم بيان د ليكلو طريقه $P \equiv T$ او د ناسم بيان د ليكلو طريقه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P \equiv F$ دی، سر بیره پر دې $\sim P$ د P د بیان نفي ښيي.
هغه جدول ته چې د یو بیان ارزیابي په کې صورت نیسي، د صحت د جدول په نامه یادېږي، نو د P د هربیان لپاره لروچې:

P	$\sim P$
T	F
F	T

مثال: د (مسکا د لسم ټولګي زده کوونکې ده $P=$) بیان لپاره د صحت جدول ترتیب کړئ.
حل: د پورتني بیان د ارزیابۍ لپاره پوهېږو چې نو موړی بیان سم او یا ناسم دی.
که بیان سم وي، نو کولای شو چې ولیکو $P \equiv T$ او $\sim P \equiv F$ دی.
نو د P د بیان د نفي حالت عبارت دی له «P سم نه دی» یعني: $\sim P \equiv F$ دی. دا بیان د دې په معنا دی چې مسکا د لسم ټولګي زده کوونکې نه ده، یعني P ناسم دی.
که $P \equiv F$ وي، نو په دې حالت کې $\sim P = T$ دی. د پورتني ځواب صحت په لاندې جدول کې ګورو:

P	$\sim P$
T	F
F	T

د بیانونو ترکیب

که د p او q دوه بیانونه را کړشوي وي، په دې حالت کې:
1 - د $p \wedge q$ ترکیب د p او q د بیانونو د عطفي ترکیب یا (منطقي " او") په نامه یادېږي، د "$\wedge$" علامه د (او) په معنا په کار وړل شوې ده.
2 - د $p \vee q$ ترکیب د p او q د بیانونو د فصلي ترکیب (منطقي " یا ") په نامه یادېږي، د "$\vee$" علامه د (یا) په معنا په کار وړل شوې ده.
3 - د $p \Rightarrow q$ د مشروط ترکیب او یا د (که p نو q ویل کېږي) په نامه یادېږي، د $\Rightarrow$ علامه ښکاره کوي چې p د شرطي ترکیب اساس چې q ترې نتیجه کېږي.
4 - د $p \Leftrightarrow q$ د دوو خواوو د شرطي ترکیب په نامه او یا د (که او یوازې که) په نامه یادېږي.
د ($\Leftrightarrow$) علامه ښکاره کوي چې که p د شرطي ترکیب اساس وي q ترې نتیجه کېږي او که q دشرطي ترکیب اساس وي، p ترې نتیجه کېږي. په دې ډول د p د بیانونو او (که اویوازې که) ترکیب لاندې د صحت په جدول کې ګورو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

p	q	$p \wedge q$	pvq	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

لومړی مثال: که چیرې $P \equiv (2+4=6)$ او (دمنفي عدد مربع) $\equiv q$ بیانونه راکړل شوي وي د q، p، ~p، ~q، $p \vee q$، $p \wedge q$ ، $\sim(p \wedge q)$ او $\sim(p \vee q)$ د بیانونو نتیجې پلاس راوړی.

حل: پورتنیو بیانونو ته په توجه سره ددې بیانونو ارزښت عبارت دی له:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(p \vee q)$
T	F	F	T	F	T	T	F

دویم مثال: د سموالي (صحت) دجدول په تر تیبولو سره ښکاره کړئ چې د $P \vee (p \Rightarrow q)$ بیان هر وخت سم دی.

حل:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee (p \Rightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

د سموالي دجدول په اخیرني ستون کې وینو چې د $p \vee (p \Rightarrow q)$ بیان هر وخت سم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 - د صحت د جدول په تر تيبولو سره وښياست چې د $(p \Rightarrow q) \vee \sim (\sim p \vee q)$ بیان هر وخت سم دی- متوجه اوسئ چې p او p ~ یوله بله مستقل نه دی.

2 - د صحت د جدول په جوړولو سره وښیاست چې د $(p \Rightarrow q)$ او د $\sim (p \vee q)$ د بیانونو ارزښت سره مساوي دی یعنې:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim (p \vee q)$$

د فصل لنډیز

د رياضي استدلال:

هغه طريقه چې د هغې په واسطه د رياضي د يوبيان سموالی په لاس راځي، د رياضي د استدلال په نامه يادېږي.

شهودي درک:

هغه طبيعي يا حسي پوهه چې د هغې په مرسته ديوې موضوع سموالی يا حقيقت او يا يو مفهوم پرته له استدلاله قبلوو، له شهودي درك څخه عبارت ده چې د وخت په مختلفو مرحلوکې يوله بله سره توپير لري.

تمثيلي يا قياسي استدلال:

د دوو پيښو تر منځ د ورته والی پيداکول او د هغوی په باره کې يوشان نتيجې اخيستلو ته تمثيلي يا قياسي استدلال وايي.

استقرايي استدلال:

هغه طريقه چې د يو شمېر مشاهد و پر اساس ور څخه عمومي نتيجه اخيستل کېږي يعنې د جز نه کل په لاس راځي د استقرايي استدلال په نامه يادېږي.

د رياضي د استقرا استدلال:

که چېرې P(n) د n د طبيعي عددونو په برخه کې يو حکم راکړل شوی وي، که د n=1 لپاره P(1) سم وي او په دويم پړاوکې د $p(k)$ له سموالي څخه د $p(k+1)$ سموالی په لاس راشي، نو د $p(n)$ بيان د هر طبيعي عدد (n) لپاره سم دی او درياضي د استقرا د استدلال په نامه يادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نتیجوي استدلال:

له هغه حقیقتونو څخه په ګټه اخیستنه چې صحیح والی یې په پیل کې منل شوی وي، عمومي نتیجه لاس ته راوړل شي، د استنتاجي استدلال یا د نتیجې اخیستنې د طریقې په نامه یادېږي.

یا په بل عبارت هغه طریقه ده چې سم والی مو ثبوت یا قبول کړی وي.

د نفی مثال استدلال:

کله چې له مثال سره وښایو چې عمومي نتیجه سمه نه ده او د ادعا ناسموالی په عمومي ډول ښکاره کړو، دې ته د مثال د نفي کولو استدلال وایي.

غیر مسقیم ثبوت:

که د خپلې ادعا یا قضیې د عکس په فرضولو یا قبلولو د فرض شوي ادعا خلاف ته ورسېږو، نو په دې حالت کې فرضیه ناسمه او خلاف یې سم دی. دې ډول استدلال ته غیرمستقیم ثبوت (برهان خلف) وایي.

بیان :

یوې خبرې جملې ته چې نتیجه یې سمه یا ناسمه وي، د بیان په نامه یادېږي، یوه جمله چې نتیجه یې سمه اویا ناسمه نه وي، بیان نه دی.

د بیانونو ترکیب:

که د p او q دوه بیانونه راکړل شوي وي، په دې حالت کې:

1- د $p \wedge q$ ترکیب د p او q دوه بیانونه د عطفي ترکیب یا (منطقي "او") په نامه یادېږي.

چې د p او q د بیان په شکل ویل کېږي.

2- د $p \vee q$ ترکیب د p او q د بیانونو د فصلي ترکیب (منطقی " یا ") په نامه یادېږي، د ($\vee$) علامه د (یا) په معنا په کار وړل شوې ده.

3- (که چېرې نو) او یا د "$\Rightarrow$" منطقي علامه د $p \Rightarrow q$ د p او q مشروط بیان دی، که p نو q ویل کېږي، د $\Rightarrow$ علامه ښکاره کوی چې p د شرطي ترکیب اساس دی، ددې لپاره چې q له هغې نتیجه شي.

4- که یوازې که یا دا "$\Leftrightarrow$" منطقي علامه د p او q د بیانونو دوو خواوو شرطي ترکیب دی چې د (p که اویوازې که q) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فصل پوښتنې

1 – له لاندې ځوابونو څخه ستاسو په نظر کوم يو سم دی؟
الف- په مشاهداتو کې خطا د استقرايي طريقې له ستونزو څخه يوه ستونزه ده.
ب- د رياضي د استدلال له قوي طريقو څخه يوه هم استقرايي طريقه ده.
ج- د رياضي په استقرايي طريقې کې يوه ستونزه د مشاهداتو کموالی دی.
د- د الف او ج ځوابونه سم دي.

2 – له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم نه دی؟
استقرايي استدلال
الف- د رياضي له مسألو څخه يوه قوي طريقه ده.
ب- د مسألو په برخه کې موږ ته د عمومي قوانينو لارښوونه کوي.
ج- دمسألو دحل لپاره له رياضي پرته يوه طريقه ده.
د – دمسألو د حلولو لپاره د رياضي طريقه نه ده.

3 – د شهود په برخه کې له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم (صحيح) دی؟
الف- دداسې نتيجې د اخيستنې لپاره چې سل په سلو کې سمه ده.
ب- له شهود څخه په ګټه اخيستنه پر ډېر سره نه شوويلای چې نتيجه سل په سلو کې سمه ده.
ج شهود د رياضي د ښه درک کولو لپاره دی.
د: له شهود څخه په ګټه اخيستنه، کولای شو د ثبوت لپاره قطعي ګمان له حتمي استدلال سره وکړو.

4 – له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم نه دی؟
الف: استقرايي استدلال له جز څخه کل ته رسيدل دي.
ب: استقرايي استدلال له کل څخه جز ته رسيدل دي.
ج: له استقرايي استدلال څخه نه شو کولای چې د رياضي د دقيق ثبوت لپاره ګټه واخلو.
د: استقرايي استدلال ديو شمېر مشاهد و پر اساس يوه کلي نتيجه ده.

5 – د استنتاجي استدلال پر اساس له لاندې ځوابونو څخه کوم يو يې سم نه دی؟
الف: که واوره اوري ځمکه نمجنه کېږي، ځمکه نمجنه ده، نو واوره وريدلې ده.
ب: د يوه ښوونځي ټول فارغان له کمپيوټر سره بلد او په رياضي ښه پوهېږي، ضمير چې له همدې ښوونځي څخه فارغ شوی دی. نو له کمپيوټر سره ښه بلد او په رياضي ښه پوهېږي.
ج: که يوه څلور ضلعي مربع وي، نو قطرونه يې يو پربل عمود دي، که د څلور ضلعي قطرونه يو پر بل عمود وي، نو دا څلور ضلعي مربع ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د: که د یوه مثلث دوې ضلعې سره مساوي وي، متساوي الساقین مثلث دی او که د مثلث درې ضلعې سره مساوي وي، متساوي الاضلاع مثلث دی، نو هر متساوي الاضلاع مثلث، متساوي الساقین مثلث دی.

6 – د قیاسي استدلال په واسطه وښیاست د هرې زاويې لپاره $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ده.

7 – د استقرایي استدلال په واسطه وښیاست چې د n مسلسلو تاقو طبیعي عددونو مجموعه له n^2 سره مساوي ده.

8 – له استقرایي استدلال سره وښیاست چې د هر طبیعي عدد n لپاره لاندې مساوات سم دی.

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

9 – د استنتاجي استدلال په اساس ثبوت کړئ چې د دوو جفتو عددونو د جمعې حاصل هر وخت جفت عدد دی؟

10 – له یوه مثال سره وښیاست چې د 2^n+3 افاده د هر طبیعي عدد لپاره هر وخت لومړنی عدد نه دی.

11 – د غیر مستقیم ثبوت د استدلال په واسطه وښیاست که n یو طبیعي اختیاری عدد وی او هم n^2 طاق وي، نو n هم طاق دی.

12 – د (باران اوري او وریځ نشته دی، نو باران نه اوري) د ترکیبي بیانونو لپاره د صحت جدول جوړ کړئ، په داسی حال کې که

($\alpha =$ باران اوري)) او ((وریځ ده $= \beta$)) سره وښایو. (1) عدد د سم او د (0) عدد د ناسم لپاره په کار یوسي.

$\propto$	β	$-\propto$	$-\beta$	$\propto\wedge-\beta$	$\propto\wedge-\beta\Rightarrow-\propto$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library