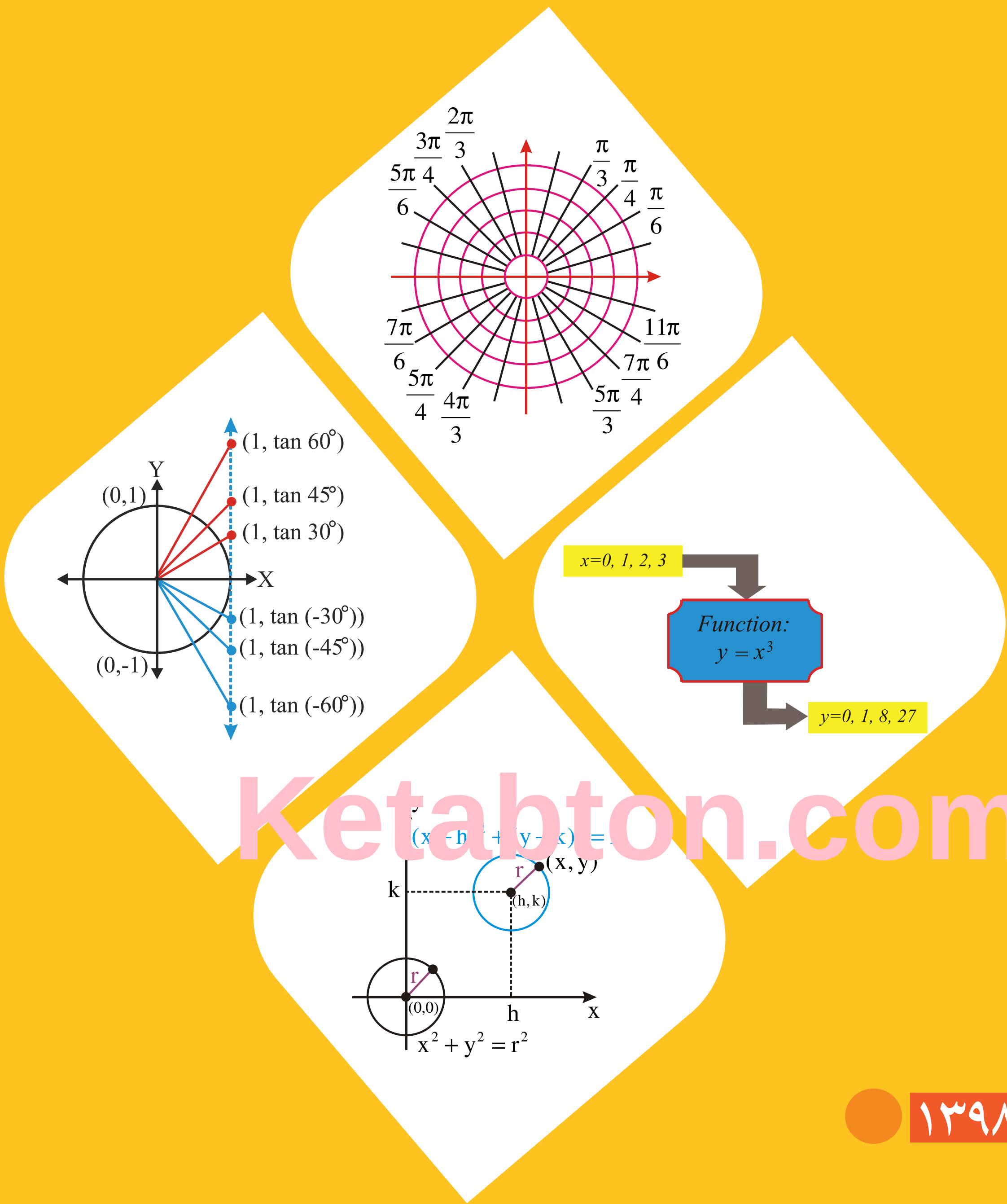
د پوهنې وزارت

ریاضی

لسم ټولګی



Ketabton.com

ریاضی لسم ټولګی

۱۳۹۸

(c) ketabton.com: The Digital Library

ملي سرود

دا وطن افغانستان دی
کور د سولې کور د تورې
دا وطن د ټولو کور دی
د پښتون او هزاره وو
ورسره عرب، گوجر دي
براهوي دي، قزلباش دي
دا هیواد به تل ځلیږي
په سینه کې د آسیا به
نوم د حق مو دی رهبر

دا عزت د هر افغان دی
هر بچی یې قهرمان دی
د بلوڅو د ازبکو
د ترکمنو د تاجکو
پامیریان، نورستانیان
هم ایماق، هم پشه یان
لکه لمر پر شنه آسمان
لکه زړه وي جاویدان
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

(c) ketabton.com: The Digital Library

بسم الله الرحمن الرحيم

رياضي
لسم
ټولګی

۱۳۹۸
هـ . ش.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کتاب ځانګړتیاوې

مضمون: رياضي

مؤلفين: د تعليمي نصاب د رياضياتو ديپارتمنت د درسي کتابونو مؤلفين

اډيټ کوونکي: د پښتو ژبې د اډيټ ديپارتمنت غړي

ټولګی: لسم

د متن ژبه: پښتو

انکشاف ورکوونکی: د تعليمي نصاب د پراختيا او درسي کتابونو د تأليف لوی رياست

خپروونکی: د پوهنې وزارت د اړيکو او عامه پوهاوي رياست

د چاپ کال: ۱۳۹۸ هجري شمسي

د چاپ ځای: کابل

چاپخونه:

برېښناليک پته: curriculum@moe.gov.af

د درسي کتابونو د چاپ، وېش او پلورلو حق د افغانستان اسلامي جمهوريت د پوهنې وزارت سره محفوظ دی. په بازار کې يې پلورل او پېرودل منع دي. له سرغړوونکو سره قانوني چلندکيږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پوهنې د وزير پيغام

اقرأ باسم ربک

د لوی او ښښونکي خدای ﷻ شکر په ځای کوو، چې موږ ته یې ژوند رابښلی، او د لوست او لیک له نعمت څخه یې برخمن کړي یو، او د الله تعالی پر وروستي پیغمبر محمد مصطفی ﷺ چې الهي لومړنی پیغام ورته (لوستل) و، درود وایو.

څرنګه چې ټولو ته ښکاره ده ۱۳۹۷ هجري لمریز کال د پوهنې د کال په نامه ونومول شو، له دې امله به د ګران هېواد ښوونیز نظام، د ژورو بدلونونو شاهد وي. ښوونکی، زده‌کوونکی، کتاب، ښوونځی، اداره او د والدینو شوراګانې د هېواد د پوهنیز نظام شپږګوني بنسټیز عناصر بلل کیږي، چې د هېواد د ښوونې او روزنې په پراختیا او پرمختیا کې مهم رول لري. په داسې مهم وخت کې د افغانستان د پوهنې وزارت د مشرتابه مقام، د هېواد په ښوونیز نظام کې د ودې او پراختیا په لور بنسټیزو بدلونونو ته ژمن دی.

له همدې امله د ښوونیز نصاب اصلاح او پراختیا، د پوهنې وزارت له مهمو لومړیتوبونو څخه دي. همدارنګه په ښوونځیو، مدرسو او ټولو دولتي او خصوصي ښوونیزو تأسیساتو کې، د درسي کتابونو محتوا، کیفیت او توزیع ته پاملرنه د پوهنې وزارت د چارو په سر کې ځای لري. موږ په دې باور یو، چې د باکیفیته درسي کتابونو له شتون پرته، د ښوونې او روزنې اساسي اهدافو ته رسېدلی نشو.

پورتنیو موخو ته د رسېدو او د اغېزناک ښوونیز نظام د رامنځته کولو لپاره، د راتلونکي نسل د روزونکو په توګه، د هېواد له ټولو زړه سواندو ښوونکو، استادانو او مسلکي مدیرانو څخه په درناوي هیله کوم، چې د هېواد بچیانو ته دې د درسي کتابونو په تدریس، او د محتوا په لېږدولو کې، هیڅ ډول هڅه او هاند ونه سپموي، او د یوه فعال او په دیني، ملي او انتقادي تفکر سمبال نسل په روزنه کې، زیار او کوښښ وکړي. هره ورځ د ژمنې په نوي کولو او د مسؤولیت په درک سره، په دې نیت لوست پیل کړي، چې د نن ورځې ګران زده‌کوونکي به سبا د یوه پرمختللي افغانستان معماران، او د ټولنې متمدن او ګټور اوسېدونکي وي.

همدا راز له خوږو زده کوونکو څخه، چې د هېواد ارزښتناکه پانګه ده، غوښتنه لرم، څو له هر فرصت څخه ګټه پورته کړي، او د زده کړې په پروسه کې د ځیرکو او فعالو ګډونوالو په توګه، او ښوونکو ته په درناوي سره، له تدریس څخه ښه او اغېزناکه استفاده وکړي.

په پای کې د ښوونې او روزنې له ټولو پوهانو او د ښوونیز نصاب له مسلکي همکارانو څخه، چې د دې کتاب په لیکلو او چمتو کولو کې یې نه ستړې کېدونکې هلې ځلې کړې دي، مننه کوم، او د لوی خدای ﷻ له دربار څخه دوی ته په دې سپېڅلې او انسان جوړوونکې هڅې کې بریا غواړم.

د معیاري او پرمختللي ښوونیز نظام او د داسې ودان افغانستان په هیله چې وګړي یې خپلواک، پوه او سوکاله وي.

د پوهنې وزیر

دکتور محمد میرویس بلخي

(c) ketabton.com: The Digital Library

عنوان فهرست مخ

لومړی څپرکی (پولینوم) ۳

الجبري افادې، د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه، د پولینوم د قیمت او پولینوم دضربونو د مجموعی پیداکول، د پولینوم څلورګونې عملیې

د باقي مانده قضیه، فکتور قضیه او ترکیبي وېش

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

دویم څپرکی: رابطه ۵۳

مرتبې جوړې او کارتیز ینې مستوي، دکارتیزینې ضرب حاصل ا وګراف یې

رابطه او معکوسه رابطه.

معادله رابطه.

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

دریم څپرکی : تابع ۶۹

د تابع دلیکلو طریقه او دیوې تابع د قیمت پیداکول، د تابع د تعریف د ساحې پیداکول، د یوې تابع ګراف او د ګراف له مخې

د یوې تابع پېژندنه، دګراف له مخې د یوې تابع د تعریف او د قیمتونو د ناحیو او د تابع قیمتونو پیدا کول، ځینې خاصې تابع ګانې اوګرافونه یې.متزایدې او متناقصې تابع ګانې، جفتې او طاقې تابع ګانې دګرافونو انتقال (عمودي انتقال، افقي انتقال او دعمودي او افقي انتقالونو ترکیب، د تابع ګانو عملیې د تابع ګانو ترکیب، معکوسه تابع، یو په یو تابع، د تابع او د هغې د معکوسې تابع ګراف، پولینومي تابع ګانې (لومړۍ او دویمه درجه تابعګانې) اوګرافونه یې

ناطقې تابع ګانې اوګراف یې (عمودي، افقي او مایل مجانبونه)

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

څلورم څپرکی: مثلثاتي تابع ګانې ۱۴۹

زاویه او د زاویې د اندازه کولو واحدونه، دیوې زاویې معیاري حالت اوکوټر مینل زاویې

مثلثاتي تابع ګانې او د ځینو خاصو زاویو مثلثاتي نسبتونه

د 0°, 90°, 180°, 270° او 360° زاویو مثلثاتي نستونه

د یوې حاده زاویې او نورو زاویو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړیکې

د مثلثاتي تابع ګانو ګراف

د څپرکي لنډیز او پوښتنې

پنځم څپرکی: د مثلثاتو تطبیقات ۲۲۳

د مرکبو زاویو د مثلثاتي نسبتونه، د دوو زاویو د مجموعې او تفاضل مثلثاتي فورمولونه

د αزاویې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د 2α او 3α زاویو د مثلثاتي نسبتونو پیداکول، د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل بدلول، د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل په شکل،

(c) ketabton.com: The Digital Library

عنوان	فهرست	مخ

د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول په جمع يا يې په تفاضل باندې، د قوس اوږدوالی، د يوې دايرې قطاع او مساحت يې، د دايرې قطعه او مساحت، د مثلث مساحت د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو ترمنځ د زاويې له جنسه، د مثلث مساحت د مثلث د دريو ضلعوله جنسه (د هيرون فورمول) د يوه مثلث د محيطي او محاطي دايرو شعاع ګانې
د څپرکي لنډيز او پوښتنې

شپږم څپرکی: مختلط عددونه **۲۷۷**

موهومي عددونه او د موهومي عددونو څلورګونې عمليې
د مختلطو عددونو د جمعې او تفريق عمليې
د مختلطو عددونو ضرب، د يو مختلط عدد مزدوج، د مختلط عدد ضربي معکوس
د مختلطو عددونو وېش
د مختلطو عددونو په ساحه کې ددويمې درجې يو مجهوله معادلو حل
د څپرکی لنډيز او پوښتنې

اووم څپرکی تحليلي هندسه **۳۰۵**

د وضعيه کمياتو سيستم او د دوو نقطو ترمنځ فاصله
د هغې نقطې د وضعيه کمياتو پيداکول چې يو قطعه خط په يوه نسبت باندې وېشي
د يوه مستقيم خط ميل
د يوه مستقيم خط معادله (د يو مستقيم خط معياري معادله، دهغه مستقيم خط معادله چې ميل او يوه نقطه يې معلومه وي، دوې نقطې يې معلومې وي. له محوروںو سره يې د تقاطع نقطې معلومې وي، د مستقيم خط نورمال معادله او د مستقيم خط عمومي معادله)
د يوه مستقيم خط د عمومي معادلې بدلول، د مستقيم خط د معادلو په نورو شکلونو باندې.
د يوې نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه، د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله
دايره او د دايرې معادله، د يوه مستقيم خط حالتونه له يوې دايرې سره، د مماس معادله او د مماس اوږدوالی
د مثلث د مساحت پيداکول چې د راسونو و ضعيه کميات يې معلوم وي.
د څپرکي لنډيز او پوښتنې

اتم څپرکی احصائيه **۳۵۹**

د فريکونسي څو ضلعي ګراف، د ساقې او پاڼې ګراف، ربعي (څلورمې)، صندوقچه يي ګراف، د نارمل منحني د مرکزي تمايل پرتله کول، ربعي انحراف، واريانس، معياري انحراف،
د څپرکي لنډيز او پوښتنې

نهم څپرکی د رياضي منطق **۳۹۱**

د شهودي درک استدلال، تمثيلي استدلال، استقرايي استدلال، د رياضي د استقرا استدلال، استنتاجي استدلال، د مثال د نفي کولو استدلال، غير مستقيم ثبوت، د رياضي منطق او د بيان استنتاج، د څپرکي لنډيز او پوښتنې

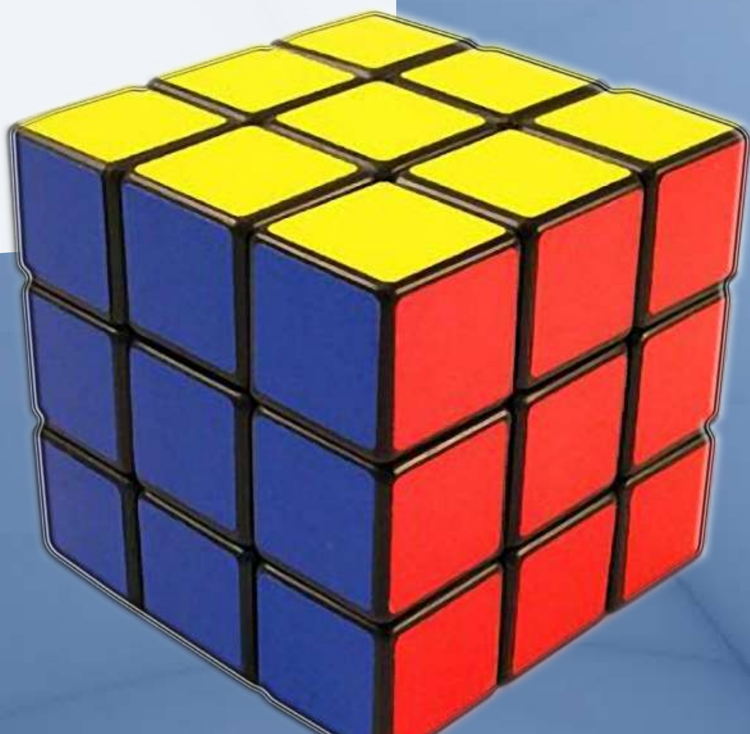
(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی څپرکی
پولینوم

پولینوم(Polynome)
یا (Polynomial)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(3x^2+5x+2)+(5x+6)$$
$$=3x^2+5x+2+5x+6$$
$$=3x^2+5x+5x+6+2$$
$$=3x^2+10x+8$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

الجبري افادې
(Algebraic Expressions)

ایــــا ویــــلای شــئ چــې پــه $\frac{x^4-1}{x^2}$ ، $\sqrt{y^2+1}$ او $x^3+\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x}+y^3$ الجبري افادو کې کومــه یوه ناطقه اوکومه یوه غیر ناطقه الجبري افاده ده؟

متحول او ثابت (variable and constant): متحول یو سمبول (Symbol) دی چې د یوه غیر خالي سټ د هر عنصر په ځای وضع کېږي.یا یو توري چې قیمتونه یې تغیر کوي د مثال په ډول که $A=\{x / x \in IN$ او $x \leq 10\}$ وي.

نو د A په سټ کې x له یوه څخه تر 10 پورې د طبیعي عددونو قیمتونه اخیستلای شي. x ، ته متحول(Variable) وایي. عموماً متحولونه د انګلیسي ژبې د کوچنیو تورو، لکه: x, y, z او نورو په واسطه ښودل کېږي.

د یوه عدد قیمت تغیر نه کوي، لکه: د 4 عدد هیڅکله له 5 یا 3 او یا کوم بل عدد سره مساوي کېدای نه شي، نو ټول حقیقي عددونه ثابت (Constants) دي.

د حقیقي عددونو سربېره د انګلیسي ژبې توري، لکه: $a, b c \ldots$ او نور هم د ثابتو پر ځای کارول کېږي.

الجبري افاده (Algebraic Expression): کېدای شي الجبري افاده له یوه ثابت، یو متحول او یا د ثابتو او متحولونو له ترکیب څخه جوړه شوې وي. د الجبري افادو لاندې مثالونه وګورئ.

$5\sqrt{x}$ ، $4x+5+\frac{15}{t^2}$ ، $\sqrt{3}x$ ، x^2-x+1 ، x ، -12 ، 12 او داسې نور.

(c) ketabton.com: The Digital Library

په $3x^2$ الجبري افاده کې 3 ته ضریب (Coefficient) وایي. په $-\frac{1}{2}y$ کې د $-\frac{1}{2}$ عدد او په x کې (1) ضریب دی. $-3x^5y^5$ او $15x^5y^5$ مشابه حدونه (Liketerms) دي چې مشابه متحولونه او مساوي توانونه لري، خو عددي ضریبونه یې سره توپیر لري.

د الجبري افادو ډولونه: الجبري افادې په درو ډولونو دي.

1- **پولینومي الجبري افادې** (Polynomial algebraic expressions)

پولینوم: هغه یوه یا څو حده الجبري افاده چې د تورو توانونه یې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي، پولینوم نومېږي او x^3-x+1 ، $2x^2+x-1$، $x-1$، 12 پولینومونه دي، خو $x^{-2}+x-1$، $\frac{1}{x}+x$ او $x^3+\sqrt{x}+\frac{y}{x^2}$ پولینومونه نه دي یا د پولینوم مشخصې دا دي:

- د ټولو متحولونو توانونه یې مکمل عددونه وي.
- په مخرج کې متحول ونه لري.
- متحول تر جذر لاندې نه وي.

لومړی مثال: په لاندې راکړل شوو الجبري افادو کې کوم یو پولینوم او کوم یو یې پولینوم نه دي؟

$$e)x^{-3}+x^2 \quad , \quad d)x^{\frac{1}{2}} \quad , \quad c)\frac{1}{y^2}-\frac{2}{x^3} \quad , \quad b)2\sqrt{x} \quad , \quad a)\sqrt{2}x$$

$$i)6a^2-4a \quad , \quad h)88 \quad , \quad g)9x^2-\frac{7}{x^2} \quad f)8p^2+p^{2.2}$$

حل: h,a او i پولینومونه دي، خو f, e, d, c, b او g پولینومونه، نه دي. په یاد ولرئ چې هر پولینوم، یوه ناطقه الجبري افاده ده، خو هره ناطقه الجبري افاده پولینوم نه دی. د مثال په ډول:

$x^3+\frac{y}{x^2}+\frac{y}{x}+y^3$ یوه ناطقه الجبري افاده ده، خو پولینوم نه دی.

12 هم یو پولنیوم دی، ځکه چې: $12=12x^0$ دی او صفر هم د مکملو عددونو په سټ کې شامل دی، خو $5\sqrt{x}$ او $\frac{5}{x^3}$ پولینومونه نه دي، ځکه $5\sqrt{x}=5x^{\frac{1}{2}}$، $\frac{5}{x^3}=5x^{-3}$ چې $\frac{1}{2}$ او -3

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مکملو عددونو په سټ کې شامل نه دي.

پولینوم د یو توري په واسطه، لکه: P ښودل کېږي، یو پولینوم چې له یو متحول څخه جوړ شوی وي عمومي شکل یې په لاندې ډول دی چې د معیاري شکل په نامه یادېږي.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$$

n یو مکمل عدد او $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}, a_n$ ضریبونه دي چې حقیقي عددونه دي. که $a_n \neq 0$ وي، نو n د پولینوم درجه ده.

فعالیت

له $\sqrt{8}x^3, -8x^2$, $\frac{1}{x}$, x , $\frac{3}{x^2} + \frac{5}{x} + 6$, $2x^3 - x^2$ او $8\sqrt{x}$ الجبري افادو څخه کومه یوه یې پولینوم دی او کومه یوه پولینوم نه دی؟

دویم مثال: د $P(x) = -5x^3 + x^2 - x + 12$ په پولینوم کې، $n = 3$، $a_n = -5$، $a_2 = 1$ و $a_1 = -1$ و $a_0 = 12$ دی. او د $11x^2 - 1$ په پولینوم کې، $n = 2$، $a_n = 11$، $a_1 = 0$، او $a_0 = -1$ دی.

2- ناطقه الجبري افاده (Rational algebraic expression):

که یوه الجبري افاده د $\frac{p}{q} \; (q \neq 0)$ په شکل ولیکلای شو چې p او q پولینومونه وي. داسې الجبري افادې ته ناطقه الجبري افاده وایي. د مثال په ډول $x^2 - \frac{1}{x^2}$ چې د $\frac{x^4 - 1}{x^2}$ په شکل یې هم لیکلای شو چې یو متحول لري یوه ناطقه الجبري افاده ده. څرنګه چې هرې الجبري افادې ته یو مخرج ورکولای شو، نو $(x^2 - 1)$ هم یوه ناطقه الجبري افاده ده، ځکه چې $\frac{x^2 - 1}{1} = x^2 - 1$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

3- غیر ناطقه الجبري افاده (Irrational algebraic expression):

داسې يوې الجبري افادې ته چې د دوو پولينومونو د خارج قسمت په بڼه يې نه شو ليکلای، غير ناطقه الجبري افاده وايي، لکه: $\sqrt{xy}$، $\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}$ او $\sqrt{y^2+1}$ د غير ناطقو الجبري افادو مثالونه دي.

يوه الجبري افاده کېدای شي چې ناطقه، غير ناطقه او يا پولينومي الجبري افاده وي. پولينوم هغه يو يا څو حده الجبري افاده ده چې د تورو توانونه يې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.

پوښتني

1- په لاندې الجبري افادو کې کومه يوه ناطقه، غير ناطقه او پولينومي الجبري افاده ده؟

$$\frac{1}{x}\ ,\quad \sqrt{x}-\frac{1}{2}\ ,\quad \frac{3x^2}{2}\ ,\quad \frac{m+3}{6}\ ,\quad x+\frac{1}{x}\ ,\quad 3x^2+\frac{xy}{2} \text{ او } 13$$

2- په لاندې الجبري افادو کې کومه يوه يې پولينوم او کومه يوه يې پولينوم نه دی؟

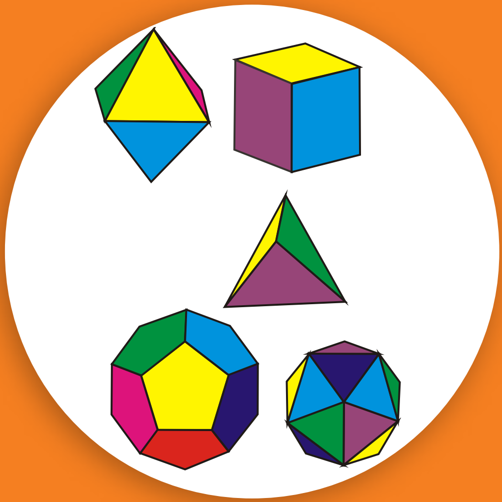
$$\frac{1}{7}x^3-x\ ,\quad -20a^3b+28ab^4\ ,\quad 3x^2+\frac{xy}{2}$$

$$-0.03\ ,\quad 3x\ ,\quad 8x^{-8}\ ,\quad 8\sqrt{x}\ ,\quad \frac{1}{x}-\frac{x^2}{5}$$

3. د $Px^4-ax^3+bx^2+cx+d$ په پولينوم کې، a_1,a_2,a_3,a_n او a_0 وښياست.

4. د $P(x)=\frac{x^3}{2}-2x^2-1$ په پولينوم کې، a_1,a_2,a_3 او a_0 وښياست.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولینوم درجه او د پولینوم ډولونه

آیا ویلای شئ چې د:

$12y^5x^3 + x^4y^3 \square 12x^3 \square + x^2 - x$ او

12 د پولینومونو درجې څو دي؟

مونوم عدد، یو متحول یا د یو عدد او یو یا څو متحولینو د ضرب حاصل دی.

$3x$ یا $16x$ ته مونوم یا (Monomial) (یو حده)الجبري افاده وایي. $x-4$ یا $ab-y$ ته باینوم (Binome) یا (Binomial) (دوه حده) الجبري افاده وایي او د $2x^3 - x - 1$ الجبري

افاده ترینوم (Trinomial) (دري حده) الجبري افاده ده او $\sqrt{2x} - \frac{1}{y} + 1$ الجبري افادي ته مولتینوم (Multinomial) وایي. په یوه پولینوم کې مونومونه د پولینوم د حدونو په نامه یادېږي او هر مونوم یو پولینوم دی.

ځینې وختونه پولینوم له یو، دوه، دري او څو متحولونو څخه جوړ شوی وي.

د $2x^3 - 8x^2 + 7x + 11$ پولینوم د یو متحول، $2x^3 - 3y$ پولینوم د دوه متحولونو او $x+y+z$ د دریو متحولونو لرونکی پولینوم دی چې په لاندې جدول کې ښودل شوي دي.

متحول	مونوم (یو حده)	باینوم (دوه حده)	ترینوم (دري حده)
یو متحول	$5x^3$	$5y^2 + 3y$	$3x^2 + 2x - 4$
دوه متحولونه	$7x^2y$	$7x^2 - 4y^3$	$6x^2 + 5x - 3y^2$
دري متحولونه	$4xyz^2$	$8a^2b + 4c$	$3a^2b^2 + 6c^2 - z^5a$

یادونه: باید پام مو وي چې $2\sqrt{xy}, \frac{5}{x}$ او y^{-3} هریو یې مونوم نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د ax^2+bx+c، $2x-y$، 15، $-3x$ او $4x^2-4y$ الجبري افادو کې مونوم، باینوم او ترینوم وښیاست.

د یوه پولینوم درجه (Degree of a Polynome): که پولینوم له یوه توري څخه جوړ شوی وي، د هغه توري لوړ توان د پولینوم درجه ده، لکه: د $-x^3+2x+1+x^5$ د پولینوم درجه 5 ده. که پولینوم له ډېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د زیات توان لرونکي مونوم درجه د پولینوم درجه ده، لکه: د $2x^2y^3-5xy^5+x^3y$ د پولینوم درجه 6 ده، ($1+5=6$) او دا پولینوم نظر x ته دریمه درجه او نظر y ته پنځمه درجه پولینوم دی. که د یوه پولینوم درجه یوه وي، خطي پولینوم (Liner Polynome) او که د پولینوم درجه دوه وي، دویمه درجه پولینوم (Quadratic Polynome) او که درجه یې درې وي، دریمه درجه پولینوم (Cubic Polynomial) ورته وایي. او هم د $3x^2$ مونوم دویمه درجه، د $3x^2y^3$ مونوم درجه 5 او د 12 مونوم درجه صفرده. داسې پولینوم ته ثابت پولینوم وایي، ځکه چې $12=12x^0$

ثابت پولینوم: هغه پولینوم دی چې درجه یې صفر وي.یا هغه پولینوم دی چې د ټولو متحولونو ضریبونه یې صفر وي.

لومړی مثال: د m او n قیمتونه پیدا کړئ، که $(2m-4)x^2+(5-n)x+13$ یو ثابت پولینوم وي.

حل: څرنګه چې دا یو ثابت پولینوم دی، نو د هر حد د متحول ضریب یې صفر دی.

نو:

$$2m-4=0 \qquad 5-n=0$$
$$2m=4 \qquad n=5$$
$$m=2$$

صفري پولینوم(Zero Polynome): که د ثابت پولینوم ثابت حد صفر وي، داسې پولینوم ته صفري پولینوم وایي، لکه: $P(x)=0$ ، د صفري پولینوم درجه تعریف شوې نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دويم مثال: د a قيمت پيدا کړئ که چېرې $(b-4)x^3-(2c+6)x+(a-b+c)$ يوصفري پولينوم وي.

حل: په صفري پولينوم کې هر حد صفر وي، نو:

$$b-4=0 \qquad 2c+6=0 \qquad a-b+c=0$$
$$b=4 \qquad 2c=-6 \qquad a-4-3=0$$
$$c=-3 \qquad a=7$$

دريم مثال: د $P(x)=x^2-1+3x^5$ ، $g(x)=2xy^2-x^2y^3$ او $h(x)=\sqrt{3}$ د پولينومونو درجې پيدا کړئ.

حل: د $P(x)$ د پولينوم درجه 5 د $g(x)$ د پولينوم درجه هم 5 ده، $(n=5)$ خو د $h(x)$ د پولينوم درجه صفر ده.

فعاليت

د هر پولينوم درجه څو ده؟ او هم د دې پولينومونو درجې نظر هر توري ته پيدا کړئ.

$x^2-x^3+2x+5x^5$, $x-1$, 15 , $2m^3n^2-3mn^3-mn$

مکمل او ناقص پولينومونه: مکمل پولينوم هغه پولينوم دی چې له لوړ توان څخه تر ثابت عدد پورې ټول حدونه ولري $x^3+1+2x-x^2$, $x-1$ او 51 مکمل پولينومونه دي، خو x^2-1 او x^3+x+1 ناقص پولينومونه دي. موږ کولای شو دا ناقص پولينومونه د مکملو پولينومو په شکل وليکو، لکه: $x^2-1=x^2+0\cdot x-1$ او $x^3+x-1=x^3+0\cdot x^2+x-1$

منظم او غير منظم پولينومونه: د $2x^3-3x^2+4x-1$ يا $-11+12x+13x^2-x^3$ پولينومونه منظم، خو د $3x^4-x+1+x^3+x^2$ پولينوم يو غير منظم پولينوم دی. کولای شو چې يو غير منظم پولينوم د منظم پولينوم په شکل وليکو، لکه: همدا پولينوم په دوه ډوله د منظم پولينوم په شکل ليکلای شو. $3x^4+x^3+x^2-x+1$ يا $1-x+x^2+x^3+3x^4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نزولي او صعودي پولينومونه

:(Descending and ascending Polynomes)

که يو پولينوم د متحول له لوړ توان څخه ټيټ توان ته ترتيب شوی وي، نزولي او که له ټيټ توان څخه لوړ توان ته ترتيب شوی وي، صعودي ترتيب ورته وايي.

د مثال په ډول $x^4+3x^3+x^2+x+1$ په نزولي ترتيب او د $1+x+x^2+3x^3+x^4$ پولينوم په صعودي ترتيب ليکل شوی دی.

که يو پولينوم له دوو يا څو تورو څخه جوړ شوی وي، نو موږ کولای شو نظر هر توري ته يې په صعودي يا نزولي ډول ترتيب کړو، لکه: د $x^3y+3x^2y^2+2xy^3-5y^4$ پولينوم نظر x ته په نزولي ډول او نظر y ته په صعودي ډول ترتيب شوی دی.

فعاليت

دا پولينومونه په صعودي ډول ترتيب کړئ:

$$4x-5+6x^2+8x^3\ ,\ 2y^2-4y+3-3y^4+y^3\ ,\ 2a^3-5+4a^4+a^5+3a^2+a$$

څلورم مثال: د $P(y)=4xy^4-3x^3y^2+2x^2y^3+x^4+y^5$ پولينوم نظر y ته په صعودي ترتيب وليکئ:

حل

$$P(y)=x^4-3x^3y^2+2x^2y^3+4xy^4+y^5$$

معادل پولينومونه: هغه پولينومونه دي چې يو متحول ولري او د مشابه حدونو ضريبونه يې سره مساوي وي.

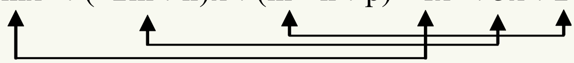
پنځم مثال: که د x^2+3x+2 او $m(x-1)^2+n(x-1)+P$ پولينومونه سره معادل وي، د n,m او p قيمتونه پيدا کړئ.

حل

$$m(x^2-2x+1)+nx-n+p=x^2+3x+2$$

$$mx^2-2mx+m+nx-n+p=x^2+3x+2$$

$$mx^2+(-2m+n)x+(m-n+p)=1x^2+3x+2$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

په نتیجه کې:

$$\begin{aligned} m &= 1 \\ -2m+n &= 3 && \Rightarrow n = 5 \\ m-n+p &= 2 && \Rightarrow p = 6 \end{aligned}$$

متجانس پولینومونه (Hemogence Polynomes): چې د ټولو حدونو توانونه يې سره مساوي وي، لکه: د $2x^2+y^2-z^2$ يو متجانس پولینوم دی.

شپږم مثال: که د $3x^2y+5x^mz-7y^{n-3}z^2$ پولینوم متجانس وي، د m او n قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\begin{aligned} m+1 &= 2+1 \qquad & n-3+2 &= m+1 \\ m &= 2 & n-1 &= m+1 \\ & & n-1 &= 2+1 \\ & & n &= 4 \end{aligned}$$

که پولینوم له یوه توري څخه جوړ شوی وي، د دې توري لوړ توان د پولینوم درجه ده او که پولینوم له ډېرو تورو څخه جوړ شوی وي، د لوړ توان لرونکي مونوم درجه د دې پولینوم درجه ده. هغه پولینومونه چې یو متحول ولري او د مشابه حدونو ضریبونه يې سره مساوي وي، د معادلو پولینومونو په نامه یادېږي او هغه پولینوم چې د ټولو حدونو توانونه يې سره مساوي وي، متجانس پولینوم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- په لاندې افادو کې مونوم، باینوم او ترینوم وښیاست او درجې یې پیدا کړئ.

$\frac{1}{2}x^2y^5$, x^2-y+4 , $x-1$

$x-x^2-x^3$, $12x$, -12

2- په لاندې پولینومونو کې مکمل او ناقص پولینومونه وښیاست او بیا ناقص پولینومونه د مکملو پولنیومونو په شکل ولیکئ.

x , $x+1$, x^2-1 ,

$2x^2-2x-2$, 15 , x^3+x-1

3- لومړی د لاندې پولینومونو درجې پیدا کړئ او بیا یې په نزولي ډول ترتیب کړئ.

$4x-5+6x^2+8x^3$

$2y^2-4y+3-3y^4+y^3$

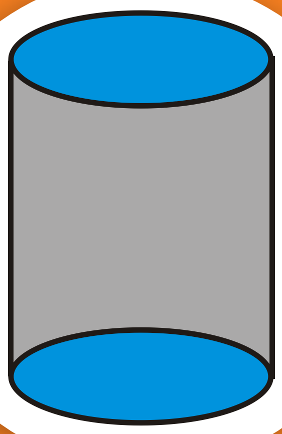
$1-x^3+x^2+2x^4-x^5+x$

4- که $P(x-1)^2+n(x+3)+c=2x^2-x+22$ وي د n, p او c قیمتونه پیداکړئ.

5- د b, a او c قیمتونه پیدا کړئ که $P(x)=7x^4-(2a-3)x^3+5x-(c-3)$ او $Q(x)=(3b+4)x^4+2x^3+5x$ معادل پولینومونه وي.

6- که $5xy^2+8x^pz-3y^{m-3}z^2$ یو متجانس پولینوم وي، د m او p قیمتونه پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولینوم د قیمت او د پولینوم د ضربیونو د مجموعې پیدا کول

آیا ویلای شئ د $x=-1$ لپاره د $P(x)=x^3-x^2-x-1$ پولینوم قیمت صفر دی؟ یا $P(-1)=?$ څو دی؟

که په یوه پولینوم کې د متحول پر ځای یو حقیقي عدد (د متحول خاص قیمت) وضع کړو، یو حقیقي عدد په لاس راځي چې دا حقیقي عدد دې پولینوم قیمت دی. د $x=2$ لپاره د $P(x)=3x+2$ پولینوم قیمت 8 یعنې $P(2)=3\cdot2+2=8$ دی.

لومړی مثال: د $P(x)=2x^2-7x+1$ پولینوم قیمتونه د $P(5)$، $P(-1)$ او $P(0)$ لپاره پیدا کړئ.

حل:

$$P(5)=2\cdot5^2-7(5)+1=50-35+1=51-35=16$$

$$P(0)=1$$

$$P(-1)=2(-1)^2-7(-1)+1=2+7+1=10$$

فعالیت

د $P(x)=x^5-x^3-x-1$ پولینوم لپاره $P(0)$، $P(-1)$ او $P(1)$ پیدا کړئ.

دویم مثال: که $P(x)=16x^3-8x^2+\frac{3}{4}$ وي، نو $P(-\frac{1}{4})$ پیدا کړئ.

حل:

$$P(-\frac{1}{4})=16(-\frac{1}{4})^3-8(-\frac{1}{4})^2+\frac{3}{4}=16(-\frac{1}{64})-8(\frac{1}{16})+\frac{3}{4}$$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{-1-2+3}{4}=\frac{-3+3}{4}=\frac{0}{4}=0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دريم مثال: لکه: څرنګه چې پوهېږئ د دايرې محيط (Circumference) د

$C = 2\pi r$ له فورمول څخه لاس ته راځي چې که چېرې $\pi = \dfrac{22}{7}$ او د دايرې شعاع

$r = 3\dfrac{1}{2}\text{cm}$ وي، نو د دې دايرې محيط (C) پيدا کړئ.

حل

$$C = 2\pi r = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{7}{2}\text{cm} = 22\text{cm}$$

څلورم مثال: که b, a او c د مثلث د ضلعو اوږدوالی او p د مثلث د محيط نيمايي وي يعنې

$p = \dfrac{a+b+c}{2}$، د مثلث مساحت د دې فورمول په واسطه لاس ته راځي.

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

که په يوه مثلث کې د ضلعو اوږدوالی $a = 9\text{cm}$, $b = 12\text{cm}$ او $c = 15\text{cm}$ وي، ددې مثلث

مساحت پيدا کړئ.

حل

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+12+15}{2} = \frac{36}{2} = 18\text{cm}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)}$$

$$= \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 9^2} = 2 \cdot 3 \cdot 9 = 54\text{cm}^2$$

فعاليت

د استوانې حجم د $V = \pi r^2 h$ له فورمول څخه لاس ته راځي چې V د استوانې حجم، r د قاعدې شعاع او h د استوانې لوړوالی دی. که د يوې استوانې $r = 5\text{cm}$ او $h = 21\text{cm}$ وي، ددې استوانې حجم پيدا کړئ.

د پولينوم د ضريبونو د مجموعې پيدا کول:

که $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ وي، د ضريبونو مجموعه يې

$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ ده.

پنځم مثال: د $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x + 1$ پولينوم د ضريبونو مجموعه په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: $p(1)$ پیدا کوو: $P(1)=2\cdot1^3+5\cdot1^2-3\cdot1+1=2+5-3+1=5$

که پولینوم له څو تورو څخه جوړ شوی وي، د هر توري پر ځای یو (1) وضع کوو، لکه: د $x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$ د ضریبونو د مجموعې د پیداکولو لپاره د x او y پر ځای یو (1) وضع کوو:

$$1^4+4\cdot1^3\cdot1+6\cdot1^2\cdot1^2+4\cdot1\cdot1^3+1^4=1+4+6+4+1=16$$

شپږم مثال: د $(x-3y)^4$ د ضریبونو مجموعه پیداکړئ.

حل:

$$(1-3\cdot1)^4=(1-3)^4=(-2)^4=16$$

اووم مثال: د $(7x^2-5x-1)^{600}(2x^3-1)^{17}(x+2)^4$ د ضریبونو مجموعه په لاس راوړئ.

حل:

$$(7\cdot1^2-5\cdot1-1)^{600}(2\cdot1^3-1)^{17}(1+2)^4=(1)^{600}(1)^{17}(3)^4=81$$

اتم مثال: که ددې توپ شعاع 6cm وي، ددې توپ حجم پیداکړئ.

حل:

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(6cm)^3=\frac{4}{3}\pi(216cm^3)=288\pi cm^3$$

د x د راکړل شوي قیمت لپاره د $P(x)$ په پولینوم کې د x پر ځای راکړل شوی قیمت وضع کوو، د پولینوم قیمت په لاس راځي که په یوه پولینوم کې د توري (متحول) پر ځای یو وضع شي د پولینوم د ضریبونو مجموعه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1. که $p(x) = -x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$ وي $p(-1)$ او $p(\frac{1}{2})$ پیداکړئ.

2. د $p(x) = kx^3 - x^2 + 3x - 1$ په پولینوم کې که $p(2) = 17$ وي د k قیمت پیداکړئ.

3. که د $mx^2 - 2x + 1$ د ضریبونو مجموعه 18 وي د m قیمت پیداکړئ.

4. د $x = -\frac{1}{2}$ لپاره د $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ پولینوم قیمت پیداکړئ.

5. د $A = x^2 - 4x + 4$ □ $B = -4x^3 + 10x^2$ □ $C = -x + 3x^4 - 6x^3$ او $D = x^2 + 4x - 4$ په پولینومونو کې د $x = 4$ لپاره د کوم پولینوم قیمت له 100 څخه زیات دی؟

a) C　　b) D　　c) A　　d) B

6. په لاندې پولینومونو کې د $x = 5$ لپاره د کوم پولینوم قیمت تر ټولو زیات دی؟

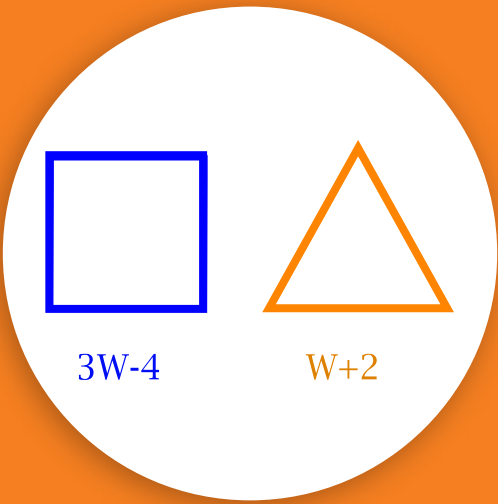
a) $x^2 - 2x + 6$
b) $3x^4 + 6x + 12$
c) $-x^3 - 40x - 300$
d) $x^5 - 120x^4 + 10$

7. که $p(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$ وي، $p(-1)$ ، $p(0)$ ، $p(\frac{1}{2})$ او $p(-\frac{1}{2})$ پیداکړئ.

8. د $x = 2$ لپاره د $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{8}x + \frac{7}{8}$ پولینوم قیمت پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینوم څلورګوني عملیې



که د مربع هره ضلع $3w-4$ او د متساوي الاضلاع مثلث هره ضلع $w+2$ وي، یوه الجبري افاده ولیکئ چې د دواړو شکلونو محیط ښکاره کړي.

که $A=8x^2-2x+3$ او $B=9x-5$ وی، $A+B$ او $A-B$ پیداکړئ.

1 د جمعې عملیه: مشابه حدونه (Like terms) یو له بل سره جمع کېږي او هم مشابه حدونه یو له بله تفریق کېږي، دا دواړه عملیې په افقي او عمودي ډول سر ته رسیدلای شي.

لومړی مثال: که $A=-3cd^2-2cd+5$ او $B=9cd-7cd^2-5$ وي $A+B$ پیداکړئ.

حل:

$$A+B=(-3cd^2-2cd+5)+(9cd-7cd^2-5)$$
$$=-3cd^2-2cd+5+9cd-7cd^2-5=-10cd^2+7cd$$

فعالیت

که $A=ab^2+3a$, $B=2ab^2+3a-2$ او $C=2a+4$ وي، د دې درې واړو پولینومونو د جمعې حاصل پیداکړئ. $(A+B+C=?)$

دویم مثال: جمع یې کړئ که: $A=1+2x+3x^2$, $B=3x-5-2x^2$ او $C=x^2-5x+4$ او هم که $A=a^4b-2a^3b^2-3a^2b^3-4c-2b$, $B=a^3b^2-2a^2b^3+4b-4$ او $C=a^4b+a^3b^2-2c$ وي.

حل: لومړی پولینومونه په منظم ډول لیکو او بیا مشابه حدونه سره جمع کوو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\begin{array}{r} 3x^2+2x+1 \\ -2x^2+3x-5 \\ +\quad x^2-5x+4 \\ \hline 2x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} a^4b-2a^3b^2-3a^2b^3-4c-2b \\ \qquad a^3b^2-2a^2b^3+4b-4 \\ a^4b+a^3b^2\qquad -2c \\ \hline 2a^4b\quad -5a^2b^3-6c+2b-4 \end{array}$$

2- **د تفریق عملیه**: د تفریق په عملیه کې د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کوو. یا په بل عبارت د مفروق علامې تغیروو او له مفروق منه سره یې جمع کوو.

لومړی مثال: د B پولینوم د A له پولینوم څخه تفریق کړئ، که $A=-x^3+x^2+x-7$ او $B=-x^3+x^2+4x+3$ وی او هم که $A=2b^2-2c^2-2d^2-2e^2$ او $B=b^2-3c^2-3d^2-3e^2-f^2$ وي.

حل:

$$\begin{array}{l} A=2b^2-2c^2-2d^2-2e^2 \\ B=\pm b^2\mp 3c^2\mp 3d^2\mp 3e^2\mp f^2 \\ \hline A-B=b^2+c^2+d^2+e^2+f^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A=-x^3+x^2+x-7 \\ -B=\mp x^3\pm x^2\pm 4x\pm 3 \\ \hline A-B=\qquad -3x-10 \end{array}$$

یا

$$-x^3+x^2+x-7-(-x^3+x^2+4x+3)$$
$$=-x^3+x^2+x-7+x^3-x^2-4x-3$$
$$=-3x-10$$

باید په یاد ولرو چې د یو پولینوم د ساده کولو لپاره مشابه حدونه (Like terms) سره جمع یا تفریقوو. د مثال په ډول

a) $x^2+6x^4-8+9x^2+2x^4-6x^2=8x^4+4x^2-8$

b) $3x-x-1+3-2x=2$

c) $2x^2-x-x^2-x-2=x^2-2x-2$

d) $6xy-xy-x-y+2x=5xy+x-y$

e) $mn-4+mn-5=2mn-9$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

په لاندې پولینومونو کې مشابه حدونه (Like terms) وښیاست.

$9rs-2r^2s^2+4r^2s^2+3rs-7$ $\qquad$ $-t+5t^2-6t^2+6t-3$

$2fg+f^2g-fg^2-2fg+3f^2g+5fg^2$ $\qquad$ $3p-4p^2+6p+10p^2$

دويم مثال: د $a^4+2a^3b-3ab^3+a^2b^2$ له پولینوم سره کوم پولینوم جمع کړو چې د جمعې حاصل یې $2a^4-3a^3b-3ab^3-b^4+a^2b^2$ شي؟

حل:

$$\begin{array}{l} 2a^4-3a^3b+a^2b^2-3ab^3-b^4 \\ \underline{-a^4\pm 2a^3b\pm a^2b^2\mp 3ab^3} \\ a^4-5a^3b \qquad\qquad -b^4 \end{array}$$

فعالیت

د $4x+6-2x^2$ او $3x^2-x^3-3$ پولینومونو مجموعه د x^3+x^2-2x او $-2x^3+3x-7$ پولینومونو له مجموعې څخه تفریق کړئ.

دریم مثال: تفریق یې کړئ.

$$\begin{array}{l} 202x^4y-303x^3y^2-101x^2y^3-404xy^4-505y^5 \\ \underline{-101x^4y\mp 303x^3y^2\pm 101x^2y^3\mp 404xy^4\pm 505y^5} \\ 101x^4y \qquad -202x^2y^3 \qquad -1010y^5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3ax-5bx-8cx-11dx \\ \underline{\pm 3ax\mp 5bx\mp 8cx\mp 11dx} \\ 0 \end{array}$$

څلورم مثال: مشابه حدونه (Like terms) سره جمع او ساده یې کړئ.

$8-10+x-7+x=2x-9$ $\qquad$ $20-k-k-10-6-k^2=-k^2-2k+4$

$ab+a-b-a=ab-b$ $\qquad$ $y^2-1+y^2-1=2y^2-2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$4b^3-2b^2-2+b-4b^3+b^2+b^2-b+2=0$

$x^2-5x-2x^2+5=-x^2-5x+5$

باید په یاد ولرو چې که Q, P او R پولینومونه وي، نو

(د جمعې د عملیې تبدیلي خاصیت)...................... $P+Q=Q+P$

(د جمعې د عملیې اتحادي خاصیت)...... $P+(Q+R)=(P+Q)+R$

(د ضرب توزیعي خاصیت پر جمع باندې)......... $P(Q+R)=PQ+PR$

یا $(Q+R)P=QP+RP$

د پولینومونو د جمعې او تفریق په عملیو کې مشابه حدونه سره جمع او یا یو له بله تفریق کېږي د پولینومونو د جمعې په عملیه کې د تبدیلي او اتحادي خاصیتونه صدق کوي او د تفریق په عملیه کې د مفروق جمعې معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي او د ضرب توزیعي قانون پر جمع باندې په پولینومونو کې هم صدق کوي.

پوښتنې

1. د دوو پولینومونو مجموعه x^2+2x-y^2 ده، که یو پولینوم $x^2-2xy+3$ وي، بل پولینوم پیدا کړئ.
2. د $3x^4+5x^3+2x^2-x+1$ پولینوم له $4x^4+2x^2+x^3-x+1$ پولینوم څخه تفریق کړئ.
3. د $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$، پولینوم څخه د $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ پولینوم تفریق کړئ.
4. که $A=a^3+2a^2-6a+7$ ، $B=a^3+2a+5$ او $C=2a^3-a^2+2a-8$ وي ددې درې واړو پولینومونو مجموعه پیدا کړئ. ($A+B+C=?$)
5. د $(ab^2+3a)+(2ab^2+3a-2)+(2a+4)$ افادې د جمعې حاصل مساوي دی، په:

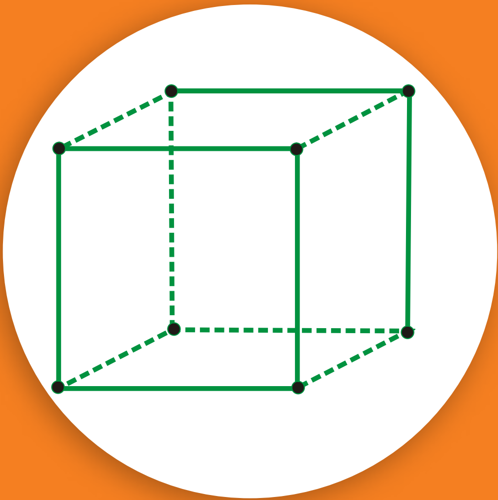
a) $-3ab^2+8a+2$ b) $3ab^2+8a$ c) $3ab^2+8a+2$

6. جمع یې کړئ.

$(3a^2b^2+2a^2-5ab)+(-3ab+a^2-2)+(1+6ab)$

7. که دوه الوتکې له یوه هوایي ډګر څخه یو د بل مخالف لورې ته والوزي، که 2 ساعتونه وروسته د یوې الوتکې واټن له هوایي ډګر څخه $x^2+2x+400$ میله وي او د بلې الوتکې واټن له هوایي ډګر څخه $3x^2-50x+100$ میله وي، ددې دواړو الوتکو تر منځ واټن (فاصله) پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د پولينومونو ضرب

د هغه مکعب حجم به څومره وي چې هره ضلع يې $(x+1)$ سانتي متره وي؟

د مونوم ضرب په مونوم کې: که د $3r^2s^3$ مونوم د $5r^4s^5$ په مونوم کې ضرب کړو، د ضرب حاصل يې $(3r^2s^3)(5r^4s^5)=15r^6s^8$ کيږي.

فعاليت

د $(7x^2y)(-3x^4yz^8)$ ، $(-\frac{1}{3}x)(-x)$ او $(-30a^2b)(-5ab)$ سره ضرب کړئ.

لومړی مثال: د لاندې مونومونو د ضرب حاصل پيدا کړئ.

$(-5y^a)(5y)=-25y^{a+1}$

$\frac{1}{4}(4)^2(\frac{1}{2})^2=(\frac{16}{4})(\frac{1}{4})=\frac{16}{16}=1$

$(-4s^2t^2)(2st^3)=-8s^3t^5$

$(-2a)^3(-2a)^2=-32a^5$

$-a^{2x}(-2a)=2a^{2x+1}$

$x(x^m)=x^{m+1}=x^{1+m}$

$(-\frac{1}{2}a)(-\frac{1}{2}a)=\frac{1}{4}a^2$

$(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)(\frac{5}{2}mn)=\frac{125}{8}m^3n^3$

$(-0.1)(-0.1)(-0.1)=-0.001$

$(-a^b)(-a)=a^{b+1}=a^{1+b}$

$(-mn)(-mn^2)=m^2n^3$

$(0.01p)(0.01p)=0.0001p^2$

$(0.1x^2)(0.1x^2)=0.01x^4$

د مونوم ضرب په پولينوم کې:

دويم مثال: د ضرب لاندې حاصل لاس ته راوړئ.

$(2m^2n^3)(1-4mn^4)=2m^2n^3-8m^3n^7$

$x^3(x-x^2y^4)=x^4-x^5y^4$

$-3b(5b^4-8b+12)=-15b^5+24b^2-36b$

$-4s^2t^2(5s^2t+6st-2s^2t^2)=-20s^4t^3-24s^3t^3+8s^4t^4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د هغه مکعب حجم پیداکړئ چې اوږدوالی یې، $2x$ سور یې x او لوړوالی یې $x+2$ وي.

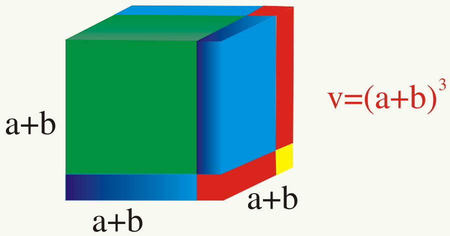
د پولینوم ضرب په پولینوم کې:

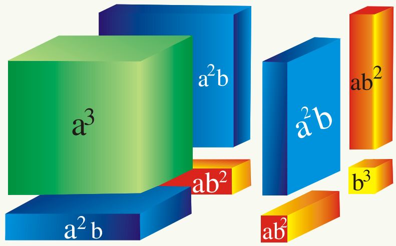
دریم مثال: **a**: د $(x-4)(x-5)$ د ضرب حاصل لاس ته راوړئ.

حل: $(x-4)(x-5)=x^2-5x-4x+20=x^2-9x+20$

	x	-4
x	x^2	$-4x$
-5	$-5x$	20

b) $(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$





c: که $P(x)=x^3+2x$ او $Q(x)=2x^2-x+1$ وي. $P(x)\cdot Q(x)$ پیداکړئ.

$$P(x)\cdot Q(x)=(x^3+2x)\cdot(2x^2-x+1)$$

$$=x^3\cdot 2x^2+x^3(-x)+x^3\cdot 1+2x\cdot 2x^2+2x(-x)+2x\cdot 1$$

$$=2x^5-x^4+x^3+4x^3-2x^2+2x=2x^5-x^4+5x^3-2x^2+2x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: لاندې افادې د a^3+b^3 او a^3-b^3 مطابقتونو په مرسته ضرب کړئ.

حل

a) $(x^m+y^n)(x^{2m}-x^my^n+y^{2n})=(x^m+y^n)[(x^m)^2-(x^m)(y^n)+(y^n)^2]$

$$=(x^m)^3+(y^n)^3=x^{3m}+y^{3n}$$

b) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)(x-\sqrt{xy}+y)$

$$=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y)$$

$$=[(\sqrt{x})^3-(\sqrt{y})^3][(\sqrt{x})^3+(\sqrt{y})^3]=[(\sqrt{x})^3]^2-[(\sqrt{y})^3]^2$$

$$=(x^{\frac{3}{2}})^2-(y^{\frac{3}{2}})^2=x^3-y^3$$

په یاد ولرئ چې که P,Q او R پولینومونه وي

(د ضرب د تبدیلی خاصیت) $P\cdot Q=Q\cdot P$

(د ضرب اتحادی خاصیت) $P\cdot(Q\cdot R)=(P\cdot Q)\cdot R$

فعالیت

که $P(x)=2x^2-x-1$ او $Q(x)=4x-8$ وي، د ضرب د تبدیلی او اتحادي خاصیتونه په کې وخیړئ.

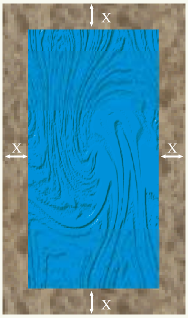
په لاندې جدول کې د هندسی شکلونو مساحت (Area) پیدا کړئ.

مساحت	راکړ شوی اوږدوالی	هندسي شکلونه
n^2+n-20	اوږدوالی یې $n+5$ اوسور یې $n-4$	مستطیل
$6y^2+3y-3$	اوږدوالی یې $3y+3$ اوسور یې $2y-1$	مستطیل
$b^3-\frac{5}{2}b^2+2b-5$	قاعده یې $2b-5$ او لوړوالی یې b^2+2	مثلث
$m^2+26m+169$	هره ضلع یې $m+13$، ده	مربع
$4g^2-16g+16$	هره ضلع یې $2g-4$ ده	مربع
$(9c^2+12c+4)\pi$	شعاع یې $3c+2$ ده	دایره

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.



پوښتنه: د یوه حوض خلورو خواوو ته له سمنتو څخه پخه شوي لاره ده، که د دې لارې سور x متره وي او د حوض اوږدوالی او سور په ترتیب سره $50m$ او $25m$ وي د لارې مساحت معلوم کړئ.

حل: د لارې او حوض مجموعي مساحت

$$A=(25+2x)(50+2x)=1250+150x+4x^2$$

د حوض مساحت: $(25m)(50m)=1250m^2$

د لارې مساحت: $1250+150x+4x^2-1250=4x^2+150x$ د

پولینومونو په ضرب کې کېدای شي، مونوم په مونوم کې، مونوم په پولینوم کې او یا پولینوم په پولینوم کې ضرب کړو او د ضرب په عملیه کې د تبدیلی، اتحادي او د ضرب توزیعي خاصیت په جمع باندې هم صدق کوي.

پوښتنې

1. ضرب یې کړئ: $(4x^2y^2z)(-5xy^3z^2)$, $-2xy(2x^2+2y^2-2)$

2. یو بکس چې لوړوالی یې x انچه، اوږدوالی یې $(x+1)$ او سور یې $2x-4$ انچه دی، که لوړوالی یې 3 انچه وي، د دې بکس حجم مساوي دی، په:

a) $40in^3$ b) $24in^3$ c) $48in^3$ d) $20in^3$

3. د $(\frac{a^p}{a^{-q}})^{p-q}(\frac{a^q}{a^{-r}})^{q-r}(\frac{a^r}{a^{-p}})^{r-p}$ د ضرب حاصل مساوي دی، په:

a) 1 b) -1 c) صفر d) درې واړه سم نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینوم وېش پر مونوم

آیا د

$$\frac{\frac{4m^2}{n}}{n}\ ,\ \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}\ ,\ \frac{3mn^2}{-mn}\ ,\ \frac{-x^2}{x}$$

او د $\frac{-n^a}{n^b}$ او د $\frac{14x^5}{2x^2}$ د وېش حاصل په لاس راوړلای شئ؟(هیڅ یو مخرج له صفر سره مساوي نه دی).

د مونوم وېش پر مونوم (Dividing monomial by monomial):

لومړی مثال: ویې وېشئ:

$$\frac{36a^5b^5c^7}{12a^4bc^3}=3ab^4c^4\ ,\ \frac{6x^9y^3}{4x^6y^2}=\frac{3}{2}x^3y\ ,\ \frac{-a^2}{-a^x}=a^{2-x}\ ,\ \frac{-n^a}{n^b}=-n^{a-b}$$

د پولینوم وېش پر مونوم:

$$(x^4+5x^3-7x^2)\div x^2$$

$$\frac{x^4+5x^3-7x^2}{x^2}=\frac{x^4}{x^2}+\frac{5x^3}{x^2}-\frac{7x^2}{x^2}=x^2+5x-7 \qquad (x^2\neq 0)$$

دویم مثال: ویې وېشئ.

$$\frac{x^8y^2-x^4y^6-4x^3y^9}{x^3y}=x^5y-xy^5-4y^8 \qquad (x^3y\neq 0)$$

$$\frac{r^6s^2-r^5s-4r^3s^4}{r^2s}=r^4s-r^3-4rs^3 \qquad (r^2s\neq 0)$$

فعالیت

د وېش حاصل په لاس راوړئ. (مخرجونه خلاف د صفر دي)

$$a:\frac{27x^6y^{13}-18x^{12}y^8}{9x^3y^8} \qquad b:\frac{x^2}{y^2-1}\div\frac{x^2}{y-1} \qquad c:\frac{10b^3c^7}{6b^2c^7}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولينوم وېش پر پولينوم: څه وخت چې يو پولينوم پر بل پولينوم وېشو، مقسوم (Dividend) او مقسوم عليه (Divisor) دواړه بايد په منظم ډول ترتيب شي.

دريم مثال: د $(13x+2x^4+12+3x^3-4x^2)\div(3+x^2-2x)$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4+3x^3-4x^2+13x+12 & x^2-2x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{\pm 2x^4 \mp 4x^3 \pm 6x^2} & 2x^2+7x+4 \\
7x^3-10x^2+13x & \\
\underline{\pm 7x^3 \mp 14x^2 \pm 21x} & \\
4x^2-8x+12 & \\
\underline{\pm 4x^2 \mp 8x \pm 12} & \\
0 &
\end{array}
$$

فعاليت

د $(a^5+b^5)\div(a+b)$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

څلورم مثال: د وېش حاصل يې پيدا کړئ $(x^3-19x-30)\div(x+3)$.

حل:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 \qquad -19x-30 & x+3 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^3 \pm 3x^2} & x^2-3x-10 \\
-3x^2-19x & \\
\underline{\mp 3x^2 \mp 9x} & \\
-10x-30 & \\
\underline{\mp 10x \mp 30} & \\
0 &
\end{array}
$$

پنځم مثال: د $4x^3-10x^2+12x+6$ له پولينوم سره کوم عدد جمع کړو چې په $(2x+1)$ پوره ووېشل شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل

$$\begin{array}{l|l} 4x^3-10x^2+12x+6 & 2x+1 \\ \underline{-4x^3 \pm 2x^2} & 2x^2-6x+9 \\ -12x^2+12x & \\ \underline{\mp 12x^2 \mp 6x} & \\ 18x+6 & \\ \underline{-18x \pm 9} & \\ -3 & \end{array}$$

په نتيجه کې چې که له پورتني پولينوم سره 3 جمع کړو، نو په $(2x+1)$ پوره د وېشلو وړ دی.

بايد پام مو وي، د وېش عمليې ته به تر هغو پورې دوام ورکوو چې پاتې(باقي مانده) صفر او يا د باقي مانده درجه د مقسوم عليه له درجې څخه د يو په اندازه کمه شي.

فعاليت

د دوو پولينومونو د ضرب حاصل $6y^3-11y^2+6y-1$ دی. که يو پولينوم $3y^2-4y+1$ وي، بل پولينوم پيدا کړئ.

شپږم مثال: د x په کوم قيمت $12x^4+3x^3-13x^2+x+5$ پولينوم پر $3x^2-1$ باندې پوره وېشل کېږي؟

حل

$$\begin{array}{l|l} 12x^4+3x^3-13x^2+x+5 & 3x^2-1 \\ \underline{-12x^4 \qquad \mp 4x^2} & 4x^2+x-3 \\ 3x^3-9x^2+x & \\ \underline{-3x^3 \qquad \mp x} & \\ -9x^2+2x+5 & \\ \underline{\mp 9x^2 \qquad \pm 3} & \\ 2x+2 & \end{array}$$

$$2x+2=0$$
$$2x=-2$$
$$x=-1$$

نو د $x=-1$ لپاره پورتنی پولينوم پر $3x^2-1$ پوره وېشل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پولینومونو په وېش کې کېدای شي چې مونوم پر مونوم، پولینوم پر مونوم او یا پولینوم پر پولینوم ووېشو. لومړی باید مقسوم او مقسوم علیه په نزولي ډول ترتیب شي او د وېش عملیې ته تر هغه پورې دوام ورکوو، تر څو د پاتې (باقي) درجه د مقسوم علیه له درجې څخه د یو په اندازه کمه شي.

پوښتنې

1. د P په کوم قیمت $3x^3-7x^2-9x+p$ پولینوم پر $x-13$ پوره وېشل کېږي؟

2. د وېش حاصل یې پیدا کړئ.

$(a^3+b^3+c^3-3abc)\div(a+b+c)$

$(x^2+x-6)\div(x-2)$

$(x^5-y^5)\div(x-y)$

$\dfrac{j^5k^2-3j^8k^4}{2j^4k}$

$\dfrac{12x^5+9x^4+15x^2}{3x^3}$

$\dfrac{27a^6b^{13}-18a^{12}b^8}{9a^3b^8}$

$(x^3-a^3)\div(x^2-ax+a^2)$

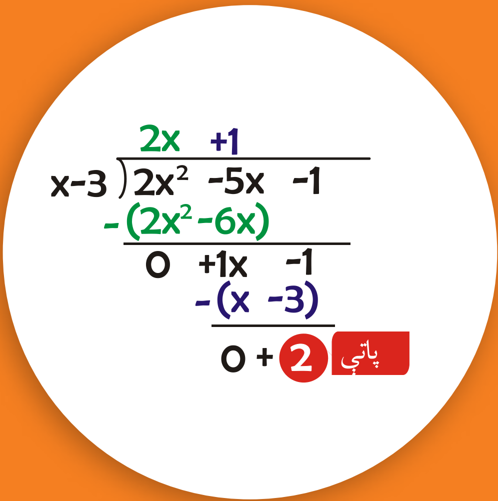
$(9x^4+2x^2+7x+2)\div(3x+2)$

$(8x^3+27y^3)\div(2x+3y)$

$(7x-12+2x^4-8x^3-x^2)\div(2x^2+5)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د باقي مانده قضیه
(Remainder Theorem)



آیا د ویش د عملیې له سرته رسولو پرته ویلای شئ چې که د x^3-6x^2-x-6 پولینوم په $x-4$ وویشو پاتې (باقي) به څو وي؟

که د $P(x)$ پولینوم په $x-a$ وویشل شي باقي (پاتې) د $P(a)$ سره مساوي ده. یا $R=P(a)$

لومړی مثال: که د $P(x)=2x^2+3x+4$ پولینوم پر ($x+3$) وویشل شي، نو باقي (Remainder) له $P(-3)$ سره مساوي ده.

حل: $P(-3)=2(-3)^2+3(-3)+4=13$

اوس یې ازمایو او د ویش عملیه سرته رسوو.

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+3x+4 & x+3 \\ \hline \underline{-\,2x^2 \pm 6x} & 2x-3 \\ -3x+4 & \\ \underline{\mp 3x \mp 9} & \\ 13 & \end{array}$$

قضیه: که د $P(x)$ پولینوم په $(x-a)$ وویشو، نو باقي یا پاتې $R=P(a)$ ده.

ثبوت: که د $P(x)$ پولینوم په $(x-a)$، وویشو او خارج قسمت $Q(x)$ او پاتې R وي، نو لرو چې:

$$P(x)=Q(x)(x-a)+R \qquad x-a=0$$
$$P(a)=Q(a)(a-a)+R \qquad x=a$$
$$P(a)=R$$

دویم مثال: که د $2x^3-x^2-7$ پولینوم پر $(x-2)$ وویشل شي، پاتې به څو وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$P(2) = 2(2)^3 - (2)^2 - 7 = 16 - 4 - 7 = 5$$
$$R = 5$$

فعالیت

د پورتنی قضیې په مرسته یې پاتې(باقي مانده) پیدا کړئ.

- که $x^3 - x^2 - 226x + 1410$ پر $(x+17)$ وویشل شي.
- که $x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ پر $(x-4)$ وویشل شي.
- که $x^3 + 18x^2 + 164x + 199$ پر $(x+8)$ وویشل شي.

دریم مثال: که د $5x^2 + x - 9$ پولینوم پر $(x + \frac{1}{2})$ وویشل شي، د وېش د عملیې له سرته رسولو څخه پرته وواياست چې څو پاتې کېږي؟

حل

$$x + \frac{1}{2} = 0$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2}) = 5(-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} - 9$$
$$= 5(\frac{1}{4}) - \frac{1}{2} - 9 = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} - 9 = \frac{5-2-36}{4} = -\frac{33}{4}$$

څلورم مثال: که د $P(y) = 10y^3 + 7y^2 - y - 11$ پولینوم پر $(2y+1)$ وویشو، د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته یې پاتې(باقي) پیدا کړئ.

حل

$$2y + 1 = 0 \Rightarrow 2y = -1$$
$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$P(-\frac{1}{2}) = 10(-\frac{1}{2})^3 + 7(-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2}) - 11$$
$$P(-\frac{1}{2}) = 10(-\frac{1}{8}) + 7(\frac{1}{4}) + \frac{1}{2} - 11$$
$$= -\frac{5}{4} + \frac{7}{4} + \frac{1}{2} - 11 = \frac{-5+7+2-44}{4} = \frac{-40}{4} = -10$$
$$R = -10$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د 4 مثال په پوښتنه کې د وېش عملیه سرته ورسوئ او باقي یې په لاس راوړئ.

پنځم مثال: که د $4x^4+12x^3-13x^2-33x+18$ پولینوم پر $(x+4)$ ووېشل شي، باقي یې پیدا کړئ.

حل:

$$P(-4)=4(-4)^4+12(-4)^3-13(-4)^2-33(-4)+18$$
$$=1024-768-208+132+18=1174-976=198$$

اوس د وېش عملیه سرته رسوو.

$$\begin{array}{l|l}
4x^4+12x^3-13x^2-33x+18 & x+4 \\ \hline
-4x^4 \pm 16x^3 & 4x^3-4x^2+3x-45 \\ \hline
\quad -4x^3-13x^2 & \\
\quad \mp 4x^3 \mp 16x^2 & \\ \hline
\qquad 3x^2-33x & \\
\qquad \pm 3x^2 \pm 12x & \\ \hline
\qquad\quad -45x+18 & \\
\qquad\quad \mp 45x \mp 180 & \\ \hline
\qquad\qquad 198 &
\end{array}$$

که د P(x) پولینوم پر P(x-a) ووېشل شي، د وېش د عملیې له سر ته رسوولو پرته یې د باقي مانده قضیې (Remainder Theorem) په مرسته باقي پیدا کولای شو چې باقي مانده (R) له (a) P سره مساوي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1.د باقي مانده قضیې (Remainder theorem) په مرسته يې باقي (پاتې) پیدا کړئ.

$(5x^3 - x^2 + 4x + 1) \div (x - 3)$ ، $(6p^3 + 2p^2 - p + 20) \div (p - \frac{1}{2})$

$(6x^2 + 15) \div (4x + 9)$ ، $(4y^2 - y - 6) \div (y - 1.6)$

2. د باقي مانده قضیې په مرسته ووایاست چې د k په کوم قیمت د $5x^3 - k^2x^2 + 3kx - 6$ پولینوم پر $(x + 2)$ وویشل شي، تر څو -44 باقي شي؟

3. د k په کوم قیمت که د $2k^2y^4 - ky^2 + 1$ پولینوم، پر $(y - \frac{1}{2})$ وویشل شي، ترڅو 2 باقي شي؟

4. که چیرې $m^2x^4 - 10x^2 + 2$ پولینوم پر $(x - 1)$ وویشو او باقي 17 وي، د m قیمت به څو وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فکټور قضیه
(The Factor Theorem)

$(x^5+1)\div(x+1)$

$P(-1)=[(-1)^5+1]$
$=-1+1=0$

آیا $(x-1)$ د $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ پولینوم یو فکتور دی؟

که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ وویشل شي او $P(a)=0$ شي، نو $x-a$ ددې پولینوم یو فکتور دی.

ثبوت: د باقي مانده قضیې په اساس $R=P(a)$ دی، نو که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ وویشل شي او د وېش حاصل(خارج قسمت) يې $Q(x)$ وي، نو لرو چې: $P(x)=Q(x)(x-a)+R$ که $R=0$ وي، نو: $P(x)=Q(x)(x-a)$

لیدل کېږي چې $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکتور دی. او یا که $(x-a)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکتور وي، نو $P(a)=0$ دی.

لومړی مثال: وښیاست چې $(x-2)$ د $P(x)=x^3+3x^2+4x-28$ د پولینوم یو فکتور دی.

حل

$x-2=0$

$x=2$

$P(x)=x^3+3x^2+4x-28$

$P(2)=2^3+3(2)^2+4\cdot2-28=8+3(4)+8-28=0$

څرنګه چې R یا $P(2)=0$ دی، نو $(x-2)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکتور دی.

فعالیت

د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته، د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $x-1$ د $P(x)=2x^3-13x^2+26x-15$ پولینوم یو فکتور دی.

دویم مثال: د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-2)$ د $P(x)=x^5-32$ پولینوم یو فکتور دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل

$P(x) = x^5 - 32$

$P(2) = 2^5 - 32 = 32 - 32 = 0$

څرنګه چې $R = P(2) = 0$ ده، نو $(x-2)$ د $x^5 - 32$ پولینوم یو فکټور دی.

دریم مثال: وښیاست چې $(x+1)$ د $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7x + 4$ پولینوم یو فکټور دی.

حل: $P(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1)^2 + 7(-1) + 4 = -2 + 5 - 7 + 4 = 0$

څرنګه چې R یا $P(-1)$ له صفر سره مساوي دی، نو $(x-1)$ د دې پولینوم یو فکټور دی.

څلورم مثال: د k په کوم قیمت، $(x-1)$ د $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - x - 2k$ پولینوم یو فکټور دی؟

حل

$P(1) = 2(1)^4 - 3(1)^3 - 1 - 2k = 2 - 3 - 1 - 2k = -2 - 2k$

$-2 - 2k = 0$

$-2k = 2$

$k = -1$

د $k = -1$ لپاره باقي مانده صفر کېږي، نو $x - 1$ د دې پولینوم یو فکټور دی.

فعالیت

د فکټور د قضیې په مرسته وښیاست چې آیا د کیڼې خوا دوه حدې (باینومونه) د اړوندو پولینومونو فکټورونه دي او که نه؟

$(y+5):(y^3+125)$ $\qquad$ $(x-6):(x^6-36x^3+1296)$

$(x-\frac{1}{2}):(x^3-\frac{1}{8})$ $\qquad$ $(x+\frac{1}{2}):(20x^3+7x+6)$

$(x+2):(x^5+32)$ $\qquad$ $(x-0.1):(10x^3-11x^2+1)$

د فکټور د قضیې معکوس (Converse of Factor Theorem):

که $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکټور وي، نو $P(a)=0$ دی او د a عدد $P(x)=0$ پولینومي معادلې یو جذر (Root) دی.

لومړی مثال: که $(x-2)$ د $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ پولینوم یو فکټور وي، نو

(c) ketabton.com: The Digital Library

وښياست چې $P(2)=0$ دی او 2 د $x^3-6x^2+11x-6=0$ معادلې يو جذر دی.

حل: که 2 د $x^3-6x^2+11x-6=0$ معادلې يو جذر وي، نو $(x-2)$ ددې پولينوم يو فکتور دی $P(2)=0$ دی.

$$P(2)=2^3-6(2)^2+11(2)-6=8-24+22-6=0$$

دويم مثال: که 2- د $x^3+4x^2+kx+8=0$ معادلې يو جذر وي، د k قيمت پيدا کړئ.

حل:

$$(-2)^3+4(-2)^2+k(-2)+8=0$$
$$-8+16+k(-2)+8=0$$
$$-2k=-8+8-16$$
$$k=8$$

دريم مثال: وښياست چې 3 د $x^3-6x^2+5x+12=0$ پولينومي معادلې يو جذر دی.

حل:

$$(3)^3-6(3)^2+5(3)+12=0$$
$$27-54+15+12=0$$
$$54-54=0$$
$$0=0$$

نو ليدل کېږي چې 3 ددې پولينومي معادلې يو جذر دی.

فعاليت

وښياست چې 2 د $x^3-4x^2+5x-2=0$ معادلې يوجذر دی.

څلورم مثال: د k د کوم قيمت لپاره 3 د $2x^4-6x^3-7x^2+kx-15=0$ معادلې يو جذر دی؟

حل:

$$2(3)^4-6(3)^3-7(3)^2+3k-15=2(81)-6(27)-7(9)+3k-15=0$$
$$162-162-63+3k-15=0$$
$$3k=15+63+162-162=78$$
$$3k=78$$
$$k=26$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که (x−a) د $P(x)$ پولینوم یو فکټور وي، نو $P(a)=0$ دی او که د $P(x)$ په پولینوم کې $P(a)=0$ شي نو $(x-a)$ د $P(x)$ پولینوم یو فکټور دی.

پوښتنې

1 - د k د کوم قیمت لپاره $(x-2)$ د $P(x)=2x^4-x^3+kx^2+kx-12$ پولینوم یو فکټور دی؟

2 - آیا $(x+3)$ د $P(x)=x^5-x^3+27x^2-27$ پولینوم یو فکټور دی؟

3 - د فکټور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x+7)$ د $P(x)=x^3+8x^2+8x+7$ د پولینوم یو فکټور دی، که نه؟

4- د وېش د عملیې د سرته رسولو پرته وښیاست چې آیا $(y-7)$ د $P(y)=y^4+2y^3-6y^2-14y-7$ پولینوم یو فکټور دی که نه؟

5- وښیاست چې آیا $(m+\frac{1}{2})$ د $P(x)=2m^2+4m-2$ پولینوم یو فکټور دی که نه؟

6- د $x^3+x^2-10x+8$ پولینوم د فکټور د قضیې په مرسته تجزیه کړئ.

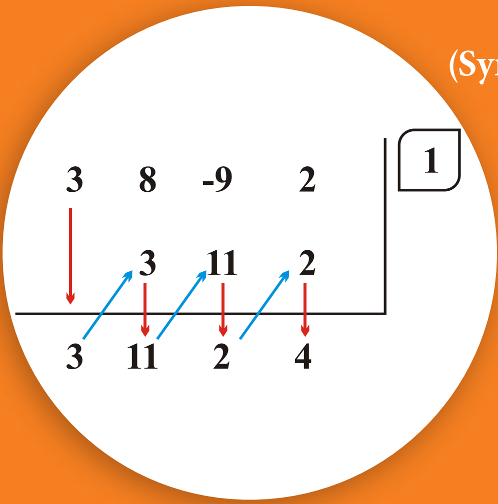
7- که $(x-1)$ او $(x+1)$ د $P(x)=x^3+ax^2+bx+2$ د پولینوم فکټورونه وي، د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

8- د k، د کوم قیمت لپاره $(x-5)$ د $Q(x)=x^3-5x^2-16x+k$ پولینوم یو فکټور دی؟

9 - د k د کوم قیمت لپاره (-1)، د $x^3-9x^2+14x+k=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ترکيبي وېش
(Synthetic Division)



1

آيا د وېش عمليې له سرته رسولو پرته، د وېش حاصل او باقي پيداکولای شئ.
که د $2x+3x^3-x^2-5$ $P(x)=$ پولينوم پر $(x-2)$ ووېشل شي؟

د $P(x)$ پولينوم پر $(x-a)$، د وېشلو لپاره ترکيبي وېش (Horner's Method) يوه لنډه طريقه ده چې په عمومي ډول د دې هدفونو لپاره ترې کار اخيستل کېږي.

1 – د x د مختلفو قيمتونو لپاره د $P(x)$ پولينوم د قيمت پيداکول.

2 – د $P(x)=0$ معادلې د ناطق جذر د پيداکولو لپاره.

3 – د الجبري افادو د تجزيې لپاره.

لومړی مثال: که د $P(x)=4x^4+12x^3-13x^2-33x+18$ پولينوم پر $(x+4)$ باندې ووېشو د وېش د عمليې له سرته رسولو پرته د ترکيبي وېش (تقسيم) په مرسته يې د وېش حاصل (Quotient) او باقي مانده (Remainder) پيداکړئ.

حل:

$x+4=0$

$x=-4$

-4	18	-33	-13	12	4	لومړی کرښه
	180	-12	16	-16		دويمه کرښه
	198	-45	3	-4	4	دريمه کرښه

چې د وېش حاصل (خارج قسمت) يې $4x^3-4x^2+3x-45$ او پاتي يا باقي مانده يې 198 ده، په دې معنا چې: $P(x)=(x+4)(4x^3-4x^2+3x-45)+198$

پورتنی عمليه په لاندې پړاوونو کې بنودلای شو.

د لومړۍ کرښې عددونه د مقسوم ضريبونه دي چې نظر د x توان ته په نزولي ډول ترتيب شوي دي.

1. د 4 عدد له لومړۍ کرښې څخه دريمې کرښې ته راښکته شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2. 4 په (4−) کې ضرب شوی دی چې (16−) کېږي او (16−) د 12 د عدد لاندې په دویمه کرښه کې لیکل شوی دی.
3. د 12 او (16−) د جمعې حاصل چې (4−) کېږي، په دریمه کرښه کې لیکو.
4. د(4−) عدد په (4−) کې ضربوو چې 16 کېږي او د (13 −) لاندې یې په دویمه کرښه کې لیکو.
5.د16 او (13−) د جمعې حاصل چې 3 کېږي، په دریمه کرښه کې لیکل شوی دی.
6. د 3 او (4−)د ضرب حاصل چې (12−) کېږي، د (33-) لاندې په دویمه کرښه کې لیکل شوی دی.
7. د(33−) او (12−) د جمعې حاصل چې (45 −) کېږي، په دریمه کرښه کې لیکو.
8. د(45−) او (4−) د ضرب حاصل چې 180 کېږي، تر 18 لاندې په دویمه کرښه لیکل شوی دی.
9. د180 او 18 د جمعې حاصل 198 په دریمه کرښه کې دی، 198باقي مانده دی او $4x^3-4x^2+3x-45$ د وېش حاصل دی.

$Q(x)=4x^3-4x^2+3x-45$ او $R=198$

$P(x)=(4x^3-4x^2+3x-45)(x+4)+198$

پاتې + (د وېش حاصل)x(مقسوم علیه)= مقسوم

فعالیت

د وېش عملیې د سرته رسولو په مرسته د پورتنۍ پوښتنې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

دویم مثال: د ترکیبي وېش او د وېش د عملیې د سرته رسولو په مرسته یې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

$(4x^4-5x^2+2x-3)\div(x-2)$

په یاد ولرئ کوم حدونه چې موجود نه وي، د هغوی د ضریبونو پر ځای صفر لیکو یا په بل عبارت پولینوم د مکمل پولینوم په شکل په نزولي ډول ترتیبوو.

4	0	−5	2	−3	2
	8	16	22	48	
4	8	11	24	45	

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس د وېش عملیه سرته رسوو:

$$\begin{array}{l|l} 4x^4 \qquad -5x^2+2x-3 & x-2 \\ \hline -4x^4 \mp 8x^3 & 4x^3+8x^2+11x+24 \\ \quad 8x^3-5x^2 & \\ \quad -8x^3 \mp 16x^2 & \\ \qquad 11x^2+2x & \\ \qquad -11x^2 \mp 22x & \\ \qquad\quad 24x-3 & \\ \qquad\quad -24x \mp 48 & \\ \qquad\qquad 45 & \end{array}$$

د وېش حاصل $4x^3+8x^2+11x+24$
او باقي (45) ده.

دریم مثال: $(x^5-x^3+27x^2-28)\div(x+3)$ د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او پاتې(باقي) پیدا کړئ.

حل: $x^5-x^3+27x^2-28=x^5-0\cdot x^4-x^3+27x^2+0\cdot x-28$

$$\begin{array}{cccccc|l} 1 & 0 & -1 & 27 & 0 & -28 & -3 \\ & -3 & 9 & -24 & -9 & 27 & \\ \hline 1 & -3 & 8 & 3 & -9 & -1 & \end{array}$$

$x+3=0$

$x=-3$

د وېش حاصل(خارج قسمت) یې $x^4-3x^3+8x^2+3x-9$ او پاتې(باقي مانده) عبارت له (-1) څخه دی.

څلورم مثال: د $(2t^3-7t^2-2t+14)\div(2t-3)$ د وېش حاصل(خارج قسمت) او پاتې (باقي) پیدا کړئ.

حل:

$$\frac{2t-3}{2}=t-\frac{3}{2}$$

$$t-\frac{3}{2}=0$$

$$t=\frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 2 & -7 & -2 & 14 & \frac{3}{2} \\ & 3 & -6 & -12 & \\ \hline 2 & -4 & -8 & 2 & \end{array}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو $2t^2-4t-8$ د وېش حاصل نه دی، بلکې د وېش حاصل (t^2-2t-4) دی. (مقسوم او مقسوم علیه دواړه په 2 وېشل شوي دي).

پنځم مثال: د ترکیبي وېش (Synthetic division) په مرسته د وېش حاصل (quotient) او پاتې یې (remainder) پیدا کړئ.

$$(4V^3-2V^2+5)\div(V-5)$$

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & -2 & 0 & 5 & \\ & 20 & 90 & 450 & 5 \\ \hline 4 & 18 & 90 & 455 & \end{array}$$

نو $Q(x)=4v^2+18v+90$ او $R=455$ ده.

فعالیت

د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او پاتې پیدا کړئ.

$$(x^5+6x^3-5x^4+5x-15)\div(x-3)$$

که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ باندې ووېشو، نو مقسوم د مکمل نزولي پولینوم په شکل ترتیبوو او د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته د وېش حاصل او باقي مانده لاس ته راوړلای شو چې د وېش د حاصل درجه د یوه په اندازه د مقسوم علیه له درجې څخه کمه ده.

پوښتنې

1- د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او باقي مانده پیدا کړئ.

$(2x^3-7x^2-2x+12)\div(2x-3)$ $(10x^2+2x+1)\div(x+1)$

$(6x^2+15)\div(4x+9)$ $(5x^3-3x+7)\div(x+4)$

$(6p^3+2p^2-p+20)\div(p-\frac{1}{2})$

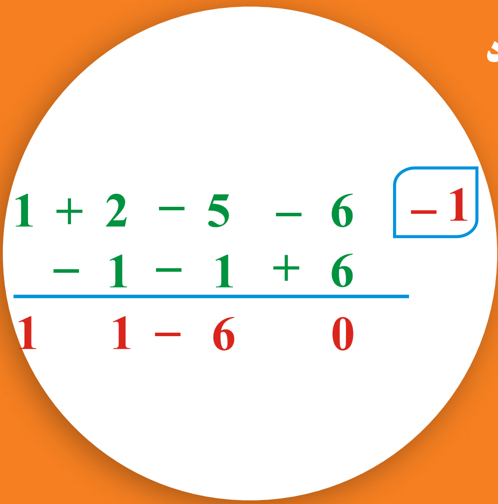
2- د ترکیبي وېش په مرسته یې پاتې (باقي مانده) او د وېش حاصل پیدا کړئ.

$(4x^3-2x^2+5)\div(x-5)$, $(y^5-17y^3-9)\div(y-3)$

$(x^3+8x^2+8x+7)\div(x+7)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ترکیبي وېش په مرسته د پولینوم د فکتور او د پولینوم د قیمت پیدا کول



آیا د ترکیبي وېش په مرسته ویلای شئ چې $(x+3)$ د $x^3+9x^2+27x+27$

پولینوم یو فکتور دی؟

لومړی مثال: د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې $(x-1)$ د $P(x)=2x^4-x^3-x^2+x-1$ پولینوم یو فکتور دی.

2	−1	−1	1	−1	1
	2	1	0	1	
2	1	0	1	0	

څرنګه چې $R=0$ دی، نو $(x-1)$ ددې پولینوم یو فکتور دی. یا دا چې:

$$2x^4-x^3-x^2+x-1=(x-1)(2x^3+x^2+1)$$

یا د باقي مانده قضیې په مرسته:

$$P(1)=2\cdot1^4-1^3-1^2+1-1=2-1-1+1-1=0$$

دویم مثال: آیا $(x+10)$ د x^3+3x^2-150 پولینوم یو فکتور دی او که نه؟

1	3	0	−150	−10
	−10	70	−700	
1	−7	70	−850	

څرنګه چې $R=-850$ دی $(R\neq0)$، نو $(x+10)$ د x^3+3x^2-150 پولینوم فکتور نه دی.

درېیم مثال: که $P(x)=3x^3-12x^2+25+5x$ وي، د $x=2$ لپاره د ترکیبي وېش په مرسته ددې پولینوم قیمت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: لومړی پولینوم په نزولي ډول ترتیبوو.

$$P(x) = 3x^3 - 12x^2 + 5x + 25$$

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & -12 & 5 & 25 & 2 \\ & 6 & -12 & -14 & \\ \hline 3 & -6 & -7 & 11 & \end{array}$$

نو: $P(2) = 11$ دی.

فعالیت

د ترکیبي وېش په مرسته د $P(x) = x^3 - x^2 + 10x + 5$ پولینوم قیمت د $x = 1$ او $x = 3$ لپاره پیدا کړئ.

څلورم مثال: د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې $(r-4)$ د $r^4 - 256$ یو فکټور دی.

$$r^4 - 256 = r^4 + 0\cdot r^3 + 0\cdot r^2 + 0\cdot r - 256$$

حل:

$$r - 4 = 0$$
$$r = 4$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -256 & \\ & 4 & 16 & 64 & 256 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 16 & 64 & 0 & \end{array}$$

$$Q(x) = r^3 + 4r^2 + 16r + 64$$
$$R = 0$$

نو $(r-4)$ د $r^4 - 256$ یو فکټور دی.

د ترکیبي وېش په مرسته د یوې معادلې د جذرونو پیدا کول:

پنځم مثال: که د (1) عدد د $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$ معادلې یو جذر وي، د ترکیبي وېش په مرسته یې نور جذرونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

1	4	1	−6	
	1	5	6	1
1	5	6	0	

نو د وېش حاصل يې x^2+5x+6 دی.

$$x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x^2+5x+6)$$
$$x^2+5x+6=0$$
$$(x+3)(x+2)=0$$
$$x=-3 \qquad x=-2$$

د دې معادلې دوه نور جذرونه -2 او -3 دي.

د ترکيبي وېش په مرسته د پولينوم فکتور، د پولينوم قيمت او د پولينومي معادلې جذر پيدا کولای شو، که چېرې د $P(x)$ پولينوم په $(x-a)$ ووېشو او $(R=0)$ وی، نو $(x-a)$ د دې پولينوم يو فکتور دی او د (a) عدد د $P(x)=0$ پولينومي معادلې يو جذر دی.

پوښتنې

1- د ترکيبي وېش په مرسته وښياست چې $(x+\frac{1}{2})$ د $20x^3+7x+6$ پولينوم يوفکتور دی او $(x+1)$ د x^4-2x^2+x+2 پولينوم يو فکتور دی.

2- آيا $(x-0{,}1)$ د $10x^3-11x^2+1$ د پولينوم يو فکتور دی؟ ولې؟

3- د ترکيبي وېش په مرسته د $6-y-6y^2+y^3$ پولينوم قيمت د $y=6$ لپاره پيدا کړئ.

4- که (1) د $x^3+x^2-10x+8=0$ معادلې يو جذر وي، د ترکيبي وېش په مرسته يې نور جذرونه پيدا کړئ.

5- که د (-2) عدد د $x^3+4x^2+kx+8=0$ معادلې يو جذر وي، د ترکيبي وېش په مرسته د k قيمت پيدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښېرکي لنډيز

• الجبري افادې په درې ډوله دي(ناطقه الجبري افاده، غیر ناطقه الجبري افاده، پولینومي الجبري افاده).

• هغه حدونه چې متحولونه او درجې يې سره مساوي وي، مشابه حدونه (Like terms) نومېږي، لکه: $3x^2$ او $5x^2$ یا $4x^2y^2$ او $-6x^2y^2$ مشابه حدونه دي.

• پولینوم هغه یو یا څو حده الجبري افاده ده چې د حروفو توانونه يې د مکملو عددونو په سټ کې شامل وي.

• د یوه پولینوم درجه چې له یوه توري (متحول) څخه جوړ شوی وي، د هغه توري له لوړ توان څخه عبارت ده او که له یوه څخه د زیاتو تورو څخه جوړ شوی وي، د زیات توان لرونکي مونوم درجه ددې پولینوم درجه ده.

• د یوه حد عددي فکتور (Numerical Factor) ته ضریب وایي، لکه: په $3x^2$ کې 3 د x^2 ضریب دی.

• ټول ثابت عددونه پولینومونه دي چې ثابت پولینومونه نومېږي او درجه يې صفر ده، د صفري پولینوم درجه تعریف شوې نه ده.

• هغه پولینومونه چې یو متحول ولري او د مشابه حدونو ضریبونه يې سره مساوي وي، د معادلو پولینومونو په نوم یادېږي.

• د متحول په راکړ شوې قیمت کې د یوه پولینوم قیمت هغه عدد دی چې په پولینوم کې د متحول د راکړل شوي قیمت له وضع کېدو څخه په لاس راځي.

• هغه پولینومونه چې د متحول له لوړ توان څخه تر ثابت عدده پورې، ټول حدونه په کې موجود وي، مکمل پولینوم او که یو یا څو حدونه، ونه لري، د ناقص پولینوم په نوم یادېږي.

• که د یوه پولینوم متحول له ټیټ توان څخه تر لوړ توان پورې ترتیب شي، منظم صعودي او که له لوړ توان څخه تر ټیټ توان پورې ترتیب شي، منظم نزولي پولینوم نومېږي.

• د پولینوم د جمعې په عملیه کې مشابه حدونه (Like terms) یو له بل سره جمع کېږي، د تفریق

(c) ketabton.com: The Digital Library

په عملیه کې د مفروق علامې ته تغیر ورکوو او نوره عملیه د جمعې د عملیې په شان سرته رسول کېږي (د مفروق جمعي معکوس له مفروق منه سره جمع کېږي.

• د پولینومونو د جمعې او ضرب په عملیو کې د تبدیلي او اتحادي خاصیتونه او هم د ضرب توزیعي خاصیت پر جمع باندې صدق کوي.

• د ضرب په عملیه کې کولای شو، مونوم په مونوم کې، مونوم په پولینوم کې او یا پولینوم په پولینوم کې ضرب کړو.

• په همدې ډول کولای شو، د وېش په عملیه کې مونوم پر مونوم، پولینوم پر مونوم یا پولینوم پر پولینوم باندې ووېشو.

• که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشو د باقي مانده قضیې په اساس پاتې(باقي) له $P(a)$ سره مساوي ده.

• که د $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشو او باقي صفر شي، نو $(x-a)$ د $P(x)$ د پولینوم یو فکتور دی.

• د فکتور د معکوسې قضیې په اساس که $(x-c)$ د $M(x)$ پولینوم یو فکتور وي، نو $P(c)=0$ او د c عدد د $M(x)=0$ پولینومي معادلې یو جذر دی.

• د ترکیبي وېش په مرسته کولای شو چې که $P(x)$ پولینوم پر $(x-a)$ ووېشو، د وېش حاصل او باقي لاس ته راوړو او هم د ترکیبي وېش په مرسته د متحول په راکړ شوي قیمت کې د $P(x)$ د پولینوم قیمت پیدا کولای شو.

• د ترکیبي وېش په مرسته $P(x)=0$ د پولینومي معادلې جذرونه پیدا کولای شو.

• د باقي مانده قضیې په مرسته الجبري افاده هم تجزیه کولای شو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځېرکي پوښتنې:

1 – د k قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ چې:

a: که $(x+5)$ د $P(x)=x^3+kx+125$ پولینوم یو فکتور وي.

b: که $(x-1)$ د $Q(x)=2x^4-3x^3-x-2k$ پولینوم یو فکتور وي.

c: که $(x-2)$ د $P(x)=x^3+3x^2-x+k$ پولینوم یو فکتور وي.

2 – د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل (Quotient) او پاتې (Remainder) پیدا کړئ.

$(5x^4-6x^2+3x-4)\div(x+4)$, $(x^5+4x^4+x^2-3x-28)\div(x+4)$

$(10x^2-31x+24)\div(x-\frac{3}{2})$, $(30x^3-20x^2-100x+1000)\div(x-10)$

3 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-1)$ د $P(x)=x^3-4x^2+x+2$ د پولینوم یو فکتور دی.

4 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې $(x-\frac{1}{2})$ د $P(x)=x^3-\frac{1}{8}$ پولینوم یو فکتور دی.

5 – د ترکیبي وېش په مرسته د $x=-\frac{1}{2}$ لپاره د $P(x)=5x^2+x-9$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

6 – د ترکیبي وېش په مرسته د $x=3$ لپاره د $k(x)=2x^3-3x^2+4x+1$ پولینوم قیمت پیدا کړئ.

7 – د ترکیبي وېش په مرسته وښیاست چې د 3 عدد د $x^3-3x^2+x-3=0$ پولینومي معادلې یو حل (جذر) دی.

8 – د فکتور د قضیې په مرسته وښیاست چې د -1 او 2 عددونه د $x^4-5x^2+4=0$ معادلې حلونه (جذرونه) دي.

9 – د ترکیبي وېش په مرسته د k قیمت پیدا کړئ چې که $(x+3)$ د $P(x)=3x^3+kx^2-22x+24$ پولینوم یو فکتور وي.

10 – د ترکیبي وېش په مرسته یې د وېش حاصل او باقي پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(4x^4-5x^2+2x-3)\div(x-2)$ $\quad$ $(x^3-x^2-14x+11)\div(x-4)$

$(7x^4+41x^2-6)\div(x+6)$ $\quad$ $(5x^3-3x+7)\div(x+4)$

11- د b او c قیمتونه په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د $P(x)=x^4+6x^3-20x^2+bx+c$ پولینوم پر x^2-3x+2 وویشو، باقي صفر شي.

12 - د m قیمت په داسې حال کې پیدا کړئ چې که د $k(x)=2x^3+5x^2-mx+4$ پولینوم پر (x^2+2x-1) وویشو او باقي صفر شي.

13 - که $k=3a(x-1)^2-a(x-1)-4$ او $L=16+b(x-1)-3b(x-1)^2$ وي $Kb+La$ پیدا کړئ.

14- د x په کوم قیمت د $P(x)=12x^4+3x^3-13x^2+x+5$ پولینوم پر $(3x^2-1)$ پوره وېشل کېږي؟

15 - د P د کوم قیمت لپاره د $K(x)=3x^3-7x^2-9x+P$ پولینوم پر $(x-13)$ پوره د وېشلو وړ دی؟

16 - که د $P(x)=2x^3-x^2+3x-1$ پولینوم پر $(2x+1)$ ووېشل شي، د وېش د عملیې د سرته رسولو پرته ویلای شئ چې پاتې (باقي مانده) به څومره وي؟

a) -3 $\quad$ b) $-\frac{3}{2}$ $\quad$ c) 3 $\quad$ d) $\frac{7}{2}$

17 - د m قیمت به څو وي، که د $P(x)=5x^2+6x-7$ پولینوم پر $(x+m)$ ووېشل شي تر څو باقي مانده (1) شي؟

a) 2 $\quad$ b) $\frac{-4}{5}$ $\quad$ c) -4 $\quad$ d) a او b سم دي

18- که د $P(x)=x^3+3x^2-5x-8$ پولینوم، پر $(x+3)$ ووېشل شي د وېش د عملیې له سرته رسولو پرته وواياست چې باقي څومره ده؟

a) صفر $\quad$ b) 13 $\quad$ c) -23 $\quad$ d) 7

19- که چېرې $x=4$, $y=-3$ او $z=2$ وي، د لاندې الجبري افادو قیمت پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$a: x^2yz + zxy^2 + 3xyz^2$ $\qquad$ $b: \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{4}Z^2$

20 - د x د راکړل شوو قیمتونو لپاره د ترکیبي وېش په مرسته د لاندې پولینومو قیمتونه پیدا کړئ.

$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x + 5 \quad , \quad x = 2$

$P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \quad , \quad x = -1$

$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 4x - 1 \quad , \quad x = 1$

$P(x) = 4x^4 + 6x^3 + x^2 + x - 3 \quad , \quad x = -2$

21 - د لاندې معادلو یو، یو جذر راکړل شوی دی، د ترکیبي وېش په مرسته یې نور جذرونه پیدا کړئ.

$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$ یو جذر یې (3) دی.

$x^3 - 5x^2 + 7x + 13 = 0$ یو جذر یې (-1) دی.

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ یو جذر یې (-1) دی.

$x^4 - x^3 - 9x^2 - 11x - 4 = 0$ یو جذر یې (-1) دی.

22 - که $P(x) = 0$ وي، د دې پولینوم درجه څو ده؟

a) 1 $\qquad$ b) -1 $\qquad$ c) صفر $\qquad$ d) تعریف شوې نه دی

23 - د هغه مستطیل له مساحت څخه چې بعدونه یې $(x+5)$ او $(x+2)$ وي، د هغه مستطیل مساحت تفریق کړئ چې بعدونه یې $(x+3)$ او $(x+1)$ وي.

24 - که $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ او $a = 13$, $b = 5$, $c = 12$ او $p = \frac{a+b+c}{2}$ وي، د A قیمت پیدا کړئ.

25 - که $(x-1)^3$ او $x^3 + ax^2 + bx + c$ معادل پولینومونه وي، د b قیمت مساوي دی په:

a) 1 $\qquad$ b) 3 $\qquad$ c) −3 $\qquad$ d) −1

26 - د $(a - \frac{2}{a-1})$ $(a \div \frac{a+1}{a-1})$ افادې حاصل مساوي دی په:

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $a(a+1)$ b) $a(a-2)$ c) $\frac{a-2}{a}$ d) $\frac{a-1}{a}$

27 – د $(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+y)$ د ضرب حاصل مساوي دی په:

a) x^2-y^2 b) x^2+y^2 c) $2x^2-y$ d) $x-y$

28 -لاندې پولينومونه په نزولي ډول (Descending Order) ترتیب او هم وواياست چې درجې يې څو دي؟

a) $-5x^2+3x^5+9$ b) $-x^2+xy^2z^3-x^5$ c) 3

29 – د $Q(x)=x^2+3x-5$ په پولينوم کې $Q(-1)$ مساوي دی، په:

a) 7 b) -7 c) 1 d) -1

30 – که $P(x)=x^2-2x+3$ او $Q(x)=2x^2+3x-1$ وي، د لاندې افادو قيمتونه پيدا کړئ.

$P(x)-Q(x)$ $P(0)+Q(0)$ $P(1)-Q(-1)$

$P(x)-P(x)$ $[P(x)+Q(x)]+p(x)$

31 - لاندې پولينومونه نظر y ته په نزولي ډول ترتيب کړئ.

$4x^2y-3xy^2+x^3+y^3$ $4xy^3-3x^3y+2x^2y^2+x^4+y^4$

32 – په لاندې الجبري افادو کې پولينومونه، ناطقې الجبري افادې او غير ناطقې الجبري افادې په نښه کړئ.

13 , $\sqrt{2}x$, 0

$\frac{3x^2}{2}$, $\sqrt{x}-\frac{1}{x}$, $y^2-\frac{1}{y^2}$

33 – د $(1+2x+3x^2)+(3x-5-2x^2)+(-x^2-5x+4)$ افادې حاصل مساوي دی په:

a) 1 *b*) صفر *c*) -1 *d*) 2

34 – د دوو الجبري افادو د ضرب حاصل $(a^3+b^3+c^3-3abc)$ دی. که یوه افاده يې $(a+b+c)$ وي، بله افاده پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

35 - د وېش حاصل يې پيدا کړئ.

$(a^3+b^3)\div(a+b)$ $\quad$ $(12x^4+3x^3-13x^2+x+5)\div(3x^2-1)$

$(a^5-b^5)\div(a-b)$ $\quad$ $(4x^3-10x^2+12x+6)\div(2x+1)$

$\dfrac{-m^a}{m^b}$ $\quad$ $\dfrac{x^{a-2}}{x}$

36 - ضرب يې کړئ.

$(a^{2x}-2)(a^{2x}-2)$ $\quad$ $(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})$

$(e^x+1)(e^x-1)$ $\quad$ $(m^2-2n^2)(2m^2-n^2)$

$(0.1x^2)(0.1x^2)(0.1x^2)$ $\quad$ $(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)(2\frac{1}{2}mn)$

37 - لومړی لاندې افادې ساده او بيا يې جمع کړئ.

$(a-1)+1-(a-1)-3$ $\quad$ $-(10mn-m)-(m^2+m)+m^2$

$(y^2-1)+(y^2-1)$ $\quad$ $[-4(a-b)-5]+[(2a+b)-(a-b)]$

$10[-\{-(x^2-1)+5\}-x(x-2)]$ $\quad$ $10(x+1)-(x+1)-3(x+2)$

$mn-4+mn-5$

38 - د کومې لاندينې راکړل شوې يو حده درجه صفر ده؟

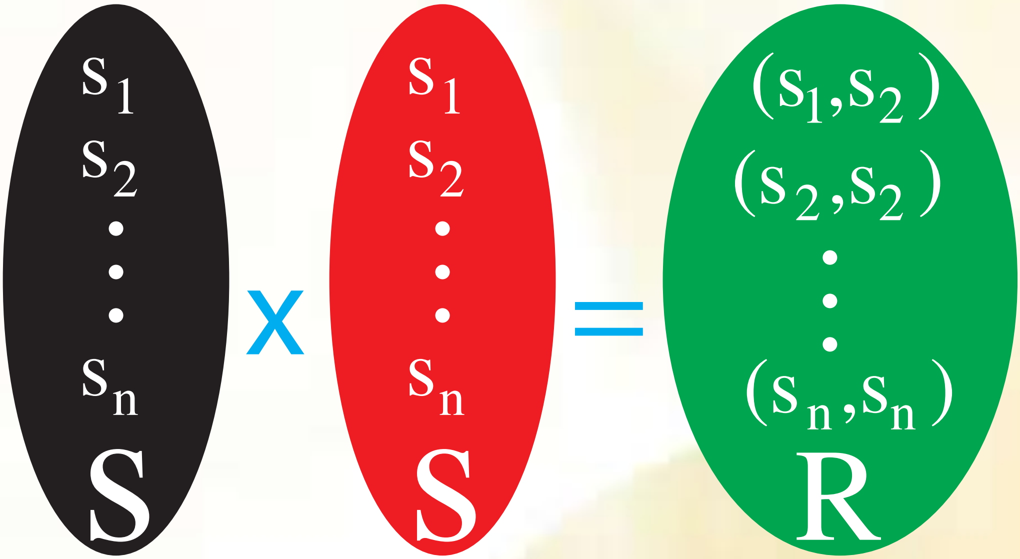
a) x $\quad$ b) $\sqrt{2}\,x$ $\quad$ c) $\sqrt{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم څپرکی

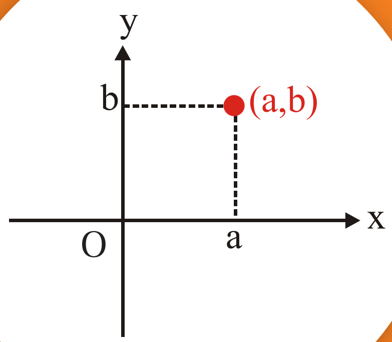
رابطه

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

مرتبې جوړې او کارتیزیني مستوي



- د (a,b) مرتبه جوړه په کوم حالت کې د (c,d) له مرتبې جوړې سره مساوي کېدای شي؟
- آیا د (a,b) مرتبه جوړه د (b,a) له مرتبې جوړې سره مساوي ده؟

که a اوb د یوه سټ او یا د مختلفو سټونو عناصر وي او a ته لومړنی عنصر او b ته دویم عنصر ووایو، نو (a,b)ته مرتبه جوړه وایي او (b,a) هم یو مرتبه جوړه ده، خو $(a,b) \neq (b,a)$ د (a,b) مرتبه جوړه په هغه صورت کې د (c,d) له مرتبې جوړې سره مساوی کېدای شي چې a=c او b=d وي.

لومړی مثال: که $(x-2, y+1) = (1,3)$ وي د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

حل

$$x-2=1 \qquad y+1=3$$

$$\boxed{x=3} \qquad \boxed{y=2}$$

فعالیت

که $(a+1, 2b-3) = (0,-1)$ وي، د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

کارتیزیني مستوي (Cartesian Plane)

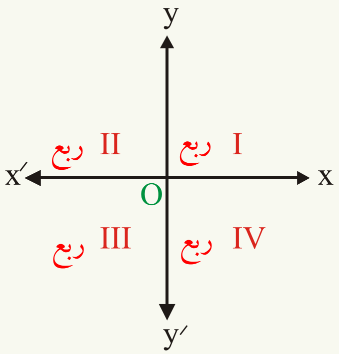
دوه، عمود او افقي خطونه رسم کړئ او د تقاطع ټکي ته یې مبدأ (Origin) وایي، افقي خط ته د X محور او عمود خط ته د Y محور وایي.

د X محوریه X'OX او د Y محور په Y'OY سره وښیئ، هغه مستوي چې دا محورونه په کې واقع دي د کارتیزیني مستوي په نامه یادیږي.

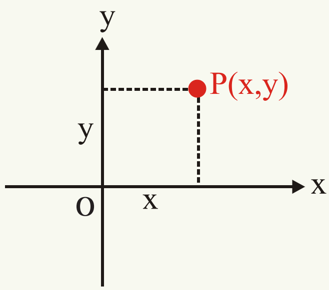
دواړه محورونه مستوي په څلورو برخو وېشي چې هرې برخې ته یې ربع (ناحیه)(Quadrant)

(c) ketabton.com: The Digital Library

وايي، د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف جهت (Anti clockwise) په ترتيب سره لومړنی دويمه، دريمه او څلورمه ربع ده، لکه: څنګه چې په شکل کې ليدل کېږي.

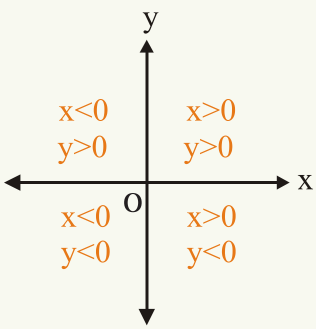


په دې مستوي کې د P دنقطې موقعيت د (x,y) د حقيقي عددونو د مرتبې جوړې په واسط داسې ښودل کېږي چې دP د نقطې افقي فاصله د Y له محور څخه x او د P د نقطې عمودي فاصله د x له محور څخه y ده.



که د P نقطه د Y د محورښي خواته واقع وي، د x قيمت مثبت دی او که د Y د محورکيڼې خواته واقع وي، د x قيمت منفي دی او که د P نقطه د Y پر محور پرته وي $x = 0$ دی.

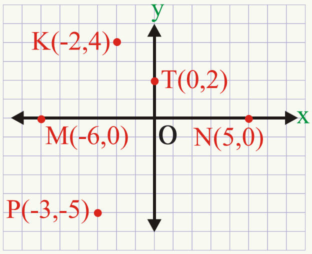
همدارنګه که د P نقطه د X له محور څخه پورته واقع وي، د y قيمت مثبت او که د X له محور څخه لاندې واقع وي د y قيمت منفي دی. $(y < 0)$ او که د p نقطه د X پر محور پرته وي، $y = 0$ کېږي، په لاندې ډول په شکل کې ښودل شوې دي



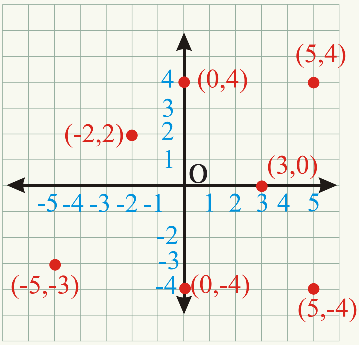
(c) ketabton.com: The Digital Library

چي x او y ته کارتيزيني مختصات(Cartesion Coordinates) وايي چې په $P(x,y)$ کې لومړنی عنصر x ته فاصله (abscissa) او دويم عنصر y ته ترتيب(Ordinate) وايي چې د مختصاتو مبدا $(0,0)$ ده، څرګنده ده چې د حقيقي عددونو (x,y) د هرې مرتبې جوړې لپاره په مستوي کې يوه نقطه او د مستوي د هرې نقطې لپاره د حقيقي عددونو يوه جوړه شته دی.

دويم مثال: د $P(-3,-5)$, $K(-2,4)$, $T(0,2)$, $N(5,0)$ او $M(-6,0)$ نقطې د وضعيه کمياتو په مستوي کې وټاکئ.



دريم مثال: د هرې نقطې لپاره چې په لاندې شکل کې ښودل شوې دي، اړونده مرتبه جوړه وليکئ.



فعاليت

د $(2,-1)$, $(-1,2)$, $(-2,-1)$, $(2,1)$, $(2,0)$ او $(0,1)$ نقطې دوضعيه کمياتو په سيستم کې وټاکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1 - که د P د نقطې فاصله مثبت او ترتیب یې منفي وي، د P نقطه په کومه ربع کې واقع ده؟

2 - که د یوه شکل څلور رأسونه $A(3,3)$, $B(-3,3)$, $C(-3,-3)$ او $D(3,-3)$ وي، داکوم ډول هندسي شکل دی؟

3 - د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هغه مثلث چې رأسونه یې $A(2,0)$, $B(0,2)$ او $C(0,0)$ وي رسم کړئ او وواياست چې د اکوم ډول مثلث دی؟

4 - د $P_1(2,-3)$, $P_2(-3,2)$, $P_3(1,5)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.

5 - وواياست چې لاندې مرتبې جوړې په کومه ربع کې واقع دي؟

$(1,5)$, $(-5,1)$

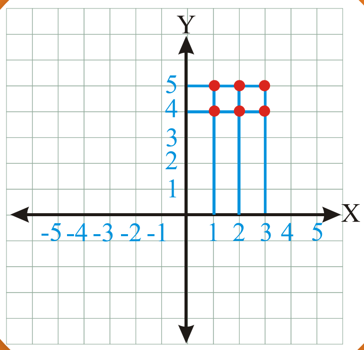
$(-4,-6)$, $(4,-5)$

$(-\frac{1}{2},-2)$, $(-\frac{1}{2},2)$

$(2\frac{1}{2},\frac{1}{4})$, $(2,0)$

$(0,-1)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د کارتیزني ضرب حاصل او گراف یې

آیا په مخامخ شکل کې $A\times B$ ښودلای شئ؟

فعالیت

که $A\{1,2,3\}$ او $B=\{4,5\}$ وي:

- $A\times B$ پیداکړئ.
- د $A\times B$ د عناصرو شمېر پیداکړئ.
- آیا $A\times B=B\times A$ دی؟
- آیا $A\times A$ او $B\times B$ پیداکولای شئ؟

که A او B دوه غیر خالي سټونه وي، $(A\times B)$ په لاندې ډول تعریف شوې دي:

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\}$$

په دې معنا چې د A او B د ضرب حاصل $(A\times B)$ داسې یوسټ دی چې عناصر یې د (x,y) د هغه مرتبو جوړوسټ دی چې x د A د سټ او y د B د سټ عنصروي، که $A\neq B$ وي نو: $A\times B\neq B\times A$ دی که د A د سټ د عنصرونو شمېر m او د B دسټ د عنصرونو شمېر n وي، د $A\times B$ د عناصرو شمېر له $(m\times n)$ څخه عبارت دی.

لومړی مثال: که $A=\{0,1,2\}$ او $B=\{3,4\}$ وي $A\times B$, $B\times A$ او $A\times A$ پیداکړئ.

حل

$$A\times B=\{0,1,2\}\times\{3,4\}=\{(0,3),(0,4),(1,3)(1,4),(2,3),(2,4)\}$$

$$B\times A=\{3,4\}\times\{0,1,2\}=\{(3,0),(3,1),(3,2)(4,0),(4,1),(4,2)\}$$

$$A\times A=\{0,1,2\}\times\{0,1,2\}=\{(0,0),(0,1),(0,2)(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

که $A=\{-4,-1,0\}$ او $B=\{1,4\}$ وي $A\times B$, $A\times A$ او $B\times B$ پیداکړئ.

دویم مثال: که $IN=\{1,2,3...\}$ او $L=\{0\}$ وي، نو $IN\times L$ پیداکړئ.

حل:

$$IN\times L=\{(1,0),(2,0),(3,0),(4,0)...\}=\{(x,0)/x\in IN\}$$

دریم مثال: که $IN=\{1,2,3...\}$ او $W=\{0,1,2,3...\}$ وي $W\times N$ پیداکړئ.

حل

$$W\times IN=\{(0,1),(0,2),(0,3),...,(1,1),(1,2),(1,3),...,(2,1),(2,2),...,\}$$
$$=\{(x,y)/x\in w\wedge y\in IN\}$$

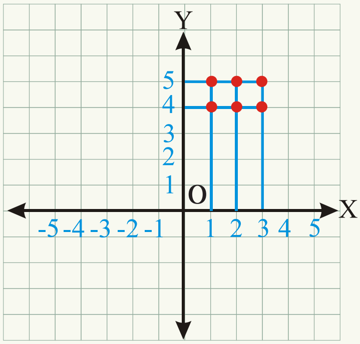
د کارتیزني حاصل ضرب گراف: (Graph of Cartesian Product)

کولای شو چې د کارتیزني ضرب حاصل د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هم وښودلای شو.

څلورم مثال: که $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{4,5\}$ وي $A\times B$ پیداکړئ او د وضعیه کمیاتو په مستوي کې یې وښیاست.

حل

$$A\times B=\{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$$

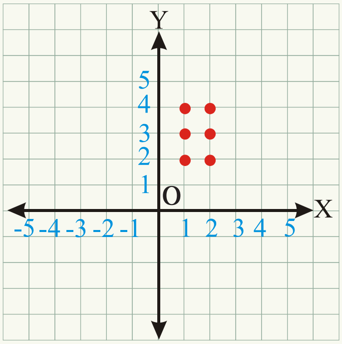


د X پرمحور د 1,2,3 عددونه او د Y پر محور د 4 او 5 عددونه ټاکو له 2,1 او3 څخه عمود خطونه او له 4 او 5 څخه افقي خطونه رسموو، ددې دواړو خطونو د تقاطع نقطې د $A\times B$ مرتبې جوړې ښکاره کوي.

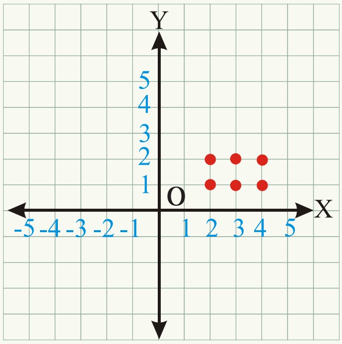
(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: که $A = \{1,2\}$ او $B = \{2,3,4\}$ وي $A \times B$ او $B \times A$ پيداکړئ او په شکل کې پې وښياست.

$$A \times B = \{1,2\} \times \{2,3,4\} = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4)\}$$
$$B \times A = \{2,3,4\} \times \{1,2\} = \{(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$$



$A \times B$

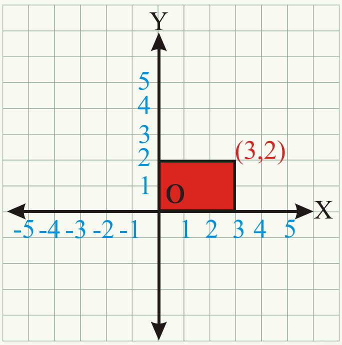


$B \times A$

شپږم مثال: که $A = \{x / x \in IR, 0 \le x \le 3 = [0,3]\}$ او $B = \{y / y \in IR, 0 \le y \le 2 = [0,2]\}$ وي $A \times B$ په شکل کې يې وښياست.

حل

$$A \times B = \{(x, y) / 0 \le x \le 3 \wedge 0 \le y \le 2\}$$



فعاليت

که چېرې $A = \{1,2\}$ او $B = \{3,4\}$ وي $A \times B$ پيدا او په شکل کې يې وښياست.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 - که:

$A = \{-1,1,3\}$ i) $B = \{2,4\}$

$A = \{-1,1\}$ ii) $B = \{2,3\}$

وي $A \times B$ پیدا او په شکل کې یې وښیاست.

2 - د لومړۍ پوښتنې د ستونو لپاره $B \times A$ پیدا او په شکل کې یې وښیاست.

3 - که $A = \{1,2,3\}$ وی $A \times A$ پیدا کړئ.

4 - که $A = \{2,4,6\}$ او $B = \{1,3,5\}$ وی $A \times B , B \times A , A \times A$ او $B \times B$ پیدا کړئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

رابطه
(Relation)

عطاالله د عزت الله ورور دی

(عطا الله R عزت الله)

وروروالي هم یوه رابطه ده.

یوستې چې د شیانو او مفهومونو له مرتبو جوړو څخه جوړ شوی وي، له یوې رابطې څخه عبارت دی. یاکه A او B دوه غیر خالي سټونه (non empty sets) وي، نو د $A\times B$ هرفرعي سټ له A څخه په B کې یوه رابطه ده، که $R \ni (a,b)$ وي، ویل کېږي چې a له b سره رابطه لري او د (aRb) په شکل لیکل کېږي.

که R له A څخه په B کې یوه رابطه وي، نو $R\subset A\times B$ ده او که R د $A\times A$ یو فرعي سټ وي، نو R په A کې یوه رابطه ده.

لومړی مثال: که $A=\{x,y\}$ او $B=(1,2)$ وي، $A\times B$ پیدا کړئ، او له A څخه په B کې څلور رابطې ولیکئ.

حل

$$A\times B=\{(x,1),(x,2),(y,1),(y,2)\}$$
$$R_1=\{(x,1),(x,2)\}$$
$$R_2=\{(y,1)\}$$
$$R_3=\{(y,2)\}$$
$$R_4=\{(x,1),(y,1)\}$$

چې د $A\times B$ د عناصرو شمېر څلور او د $A\times B$ د ټولو فرعي سټونو شمېر $2^4=16$ دی، نو له A څخه په B کې د ټولو رابطو شمېر 16 دی.

دویم مثال: که $A=\{1,3,5,...19\}$ چې د A د سټ د عناصرو شمېر 10 دی او $B=\{2,4,6\}$ وي چې د B د عناصرو شمېر (3) دی، د $A\times B$ د عناصرو شمېر(ټولې مرتبې جوړې)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$10\times3=30$ دي او له A څخه په B کې د ټولو رابطو شمېر 2^{30} دی.

پام موږ چې: ϕ او $A\times B$ هم په فرعي سټونو کې شامل دی.

دريم مثال: که $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{a,b\}$ وي له A څخه په B کې (3) رابطې وليکئ.

حل:

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

درې رابطې عبارت دي له:

$$R_1=\{(1,a),(1,b),(2,a),(3,a),(3,b)\}$$
$$R_2=\{(1,b),(2,a),(3,a),(3,b)\}$$
$$R_3=\{(2,a),(2,b),(3,a)\}$$

فعاليت

که $R=\{(x,y)/x+y=5)\}$ په $A=\{1,2,3,4\}$ کې يوه رابطه وي، د R عناصر وليکئ.

څلورم مثال: که $R=\{(x,y)/x-y=2\}$ په $A=\{1,2,3,4\}$ کې يوه رابطه وي، د R عناصر وليکئ.

حل: $R=\{(3,1),(4,2)\}$ ده.

د رابطې د تعريف ساحه (Domain) او د قيمتونو ساحه (Range) يې:

پوهېږو چې که R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، نو $R\subseteq A\times B$ ده، په دې معنا چې R يو سټ دی چې عناصر يې د (x,y) مرتبې جوړې دي چې $x\in A$ او $y\in B$ ده.

د R د تعريف ساحه د مرتبو جوړو لومړني عناصر دي چې په Dom_R سره ښودل کېږي. همدارنګه د R د قيمتونو ساحه (Range) د مرتبو جوړو دويمي عناصر دي، په $Range_R$ سره ښودل کېږي.

لومړی مثال: که $A=\{1,2\}$ او $B=\{x,y\}$ وي او R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، لومړی د دې رابطې عناصر وليکئ، بيا د رابطې د تعريف ساحه (Dom_R) او د قيمتونو ساحه ($Range_R$) يې وليکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل

$R = \{(1,x),(2,x),(1,y),(2,y)\}$

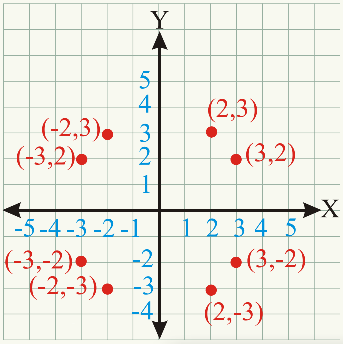
$Dom_R = \{1,2\} \quad Range_R = \{x,y\}$

دویم مثال: که د $R = \{(x,y) / x^2 + y^2 = 13\}$ رابطه د $A = \{-3,-2,1,2,3\}$ په سټ کې تعریف شوې وي، لومړی د (R) عناصر د مرتبو جوړو په شکل ولیکئ، (Dom$_R$) او (Range$_R$) پیدا کړئ او بیا یې ګراف رسم کړئ.

$R = \{(-3,-2),(-3,2),(-2,-3),(-2,3),(2,-3),(2,3),(3,-2),(3,2)\}$

$Dom_R = \{-3,-2,2,3\}$

$Range_R = \{-3,-2,2,3\}$



فعالیت

که $R = \{(x,y) / y = 2x\}$ وي او د R د تعریف ناحیه $\{0,4,8\}$ وي، د R د قیمتونو ناحیه معلومه کړئ.

معکوسه رابطه (Inverse of a Relation)

که R له A څخه په B کې یوه رابطه وي، د R معکوس چې په R^{-1} سره ښودل کېږي او له $R^{-1} = \{(y,x) | (x,y) \in R\}$ څخه عبارت ده:

$(x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R^{-1}$

د R دتعریف ساحه د R^{-1} د قیمتونو ساحه او د R^{-1} د تعریف ساحه د R د قیمتونو له ساحې څخه عبارت ده.

مثال: که $R = \{(1,2)(2,3)(3,4)\}$ د طبیعي عددونو په سټ کې یوه رابطه وي، د R د رابطې معکوسه رابطه یا R^{-1} پیدا کړئ.

حل:

$R^{-1} = \{(2,1)(3,2)(4,3)\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

معادله رابطه (Equivalent Relation): د R رابطه د A په سټ کې یوه معادله رابطه ده، که درې لاندنې خاصیتونه ولري:

1- انعکاسي خاصیت (Reflexive Property): د x د هر عنصر $x \in A$ لپاره $(x,x) \in R$ وي یا $\forall x \in A \Rightarrow (x,x) \in R$

2- تناظري خاصیت (Symmetric Property): ( ): که (x,y) په R کې شامله وي، نو (y,x) هم په R کې شامله وي یا: $\forall (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$

3 - انتقالي خاصیت (Transitive Property): که $(x,y) \in R$ او هم $(y,z) \in R$ وي په نتیجه کې (x,z) مرتبه جوړه هم په R کې شامله وي یا:
$(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

مثال: د مساوات رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې یوه معادله رابطه ده:

1- په حقیقي عددونو کې د هر x لپاره x=x دی، 5=5 (انعکاسي خاصیت)

2- د هر $x, y \in IR$ لپاره که x=y وي، نو y=x ده(تناظري خاصیت)

3- د هر $x, y, z \in IR$ لپاره که $x = y$ او y=z وي په نتیجه کې x=z دی(انتقالي خاصیت)

پوښتنې

1- که $A = \{1,2\}$ □ $B = \{0,4,6\}$ وي.

له A څخه په B کې درې رابطې ولیکئ.

له B څخه په A کې څلور رابطې ولیکئ.

په A کې څلور رابطې ولیکئ.

2- که $A = \{1,2,3,4\}$ او $B = \{1,3,5\}$ وي او $R = \{(x,y) | y < x\}$، له A څخه په B کې یوه رابطه وي، د R عناصر ولیکئ.

3- که $R = \{(x,y) | y+1 = 2x^2\}$ د طبیعي عددونو په سټ کې یوه رابطه وي او د تعریف ساحه یې ټول طبیعي عددونو وي، د قیمتونو ساحه (Range) یې پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دڅېرکي لنډيز

- (a,b): چې دليکلو ترتيب په کې اهميت لري، مرتبه جوړه نومېږي چې a ته لومړنی مختصه او b ته دويمه مختصه وايي، په عمومي ډول $(a,b) \neq (b,a)$
- د (a,b) او (c,d) دوه مرتبې جوړې په داسې حال کې سره مساوي دي چې $a=c$ او $b=d$ وي.
- **د کارتيزيني ضرب حاصل**: د A او B دستونو کارتيزيني ضرب چې په $A\times B$ سره ښودل کېږي په دې ډول تعريف شوي دی: $A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A\wedge y\in B\}$
- که د A سټ د عناصرو شمېر په m او د B د سټ د عناصرو شمېر په n سره وښايو، د $A\times B$ د عناصر شمېر $m\times n$ دی.
- کولای شوچې د A اوB، دستونو ضرب $(A\times B)$ د وضعيه کمياتو په مستوي کې وښايو.
- **رابطه**: د $A\times B$ هر فرعي سټ له A څخه په B کې د R يوه رابطه ده.
  که $R\subset A\times B$ او که $R\subset A\times A$ وي، نو په دې صورت کې R په A کې يوه رابطه ده.
  $(x\ ,\ y)\in R\Leftrightarrow x\,R\,y$
- که د A سټ د عناصرو شمېر په n سره وښايو، د A د فرعي سټونو شمېر 2^n دی.
- که د A سټ د عناصرو شمېر په m او د B دسټ د عناصرو شمېر په n سره وښايو له A څخه په B کې د رابطو شمېر 2^{mxn} دی
- که R له A څخه په B کې يوه رابطه وي، د R د تعريف ساحه (Dom_R) د مرتبو جوړو دلومړنيو عناصرو سټ او د قيمتونو ساحه $(Range_R)$ يې دمرتبو جوړو د دويمو عناصرو سټ دی.
- **معکوسه رابطه**: که R له A څخه پهB کې يوه رابطه وي، د R معکوسه رابطه په R^{-1} سره ښودل کېږي چې:

$$R.^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in R\}$$

$$(x,y)\in R\Leftrightarrow(y,x)\in R^{-1}$$

ښکاره خبره ده چې R^{-1} د تعريف ساحه د R دقيمتونو له ساحې سره او د R^{-1} دقيمتونو ساحه د R د تعريف له ساحې سره مساوي ده.

- **معادله رابطه**: R د A په سټ کې يوه معادله رابطه ده که چېرې لاندې درې خاصيتونه ولري.

1- انعکاسي خاصيت. 2- تناظري خاصيت. 3- انتقالي خاصيت.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دخپرکي پوښتني

1- که $A=\{1,3,5\}$ او $B=\{2,4,6\}$ وي $A\times B, B\times A$ او $A\times A$ پیداکړئ.

2- که $A=\{1,2,3\}$ او $B=\{0,1\}$ وي $A\times B$ په شکل کې وښیاست.

3- که $(3,1)=(x-2y,2x+y)$ وي د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

4- په $A=\{1,3,5\}$ کې د R رابطه داسې په لاس راوړئ چې R د مساوات رابطه وي.

5- که $A=\{a,b\}$ وي د A^2 عناصر ولیکئ.

6- که د $R=\{(x,y)|y=x^2\}$ رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې تعریف شوي وي د R رابطې

ګراف رسم کړئ.

7- که $R=\{(x,y)|y^2=x\}$ رابطه د حقیقي عددونو په سټ کې تعریف شوي وي د R د

رابطې ګراف رسم کړئ.

8- که $R=\{(1,-1),(2,-2)(3,-3)\}$ وي د R^{-1} د تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

9- که $R=\{(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)\}$ وي دR او R^{-1} د تعریف او قیمتونو ساحې وټاکئ.

10- که $A=\{3,6,12\}$ او $B=\{-1,0\}$ وي په A کې د رابطو شمېر او له A څخه په Bکې

درابطو شمېر پیداکړئ.

11- که د $(4a+1,2b+a)$ او $(5,3a-4b)$ دوه مرتبې جوړې سره مساوي وي د a او b

قیمتونه پیداکړئ.

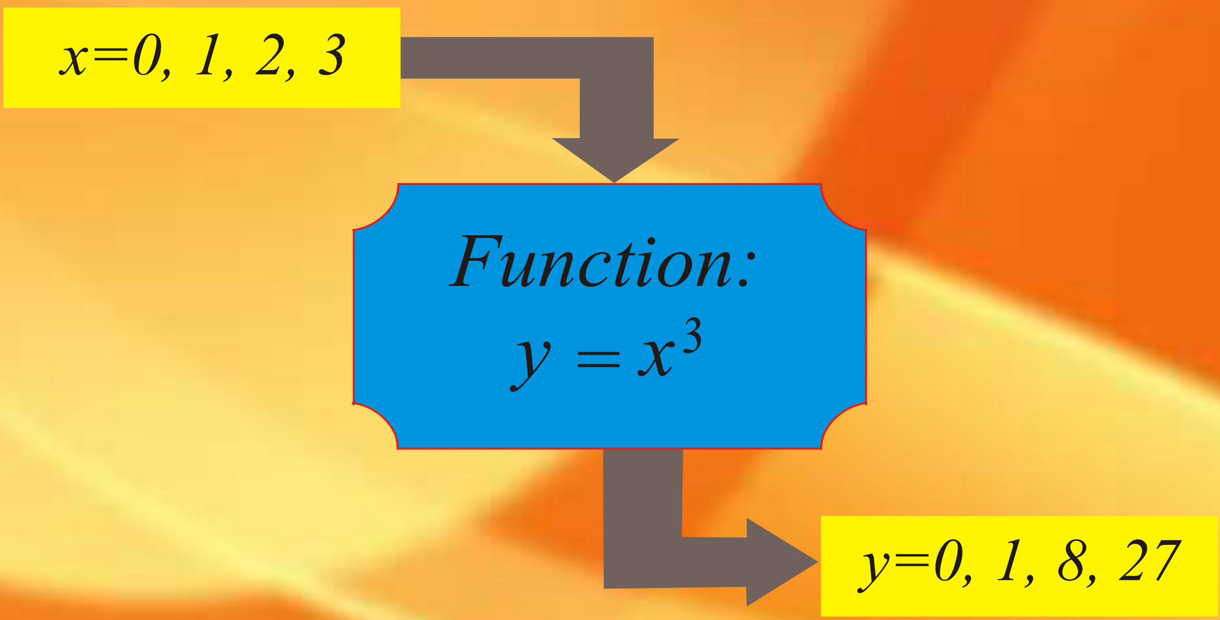
12- که $A=\{a,b,c\}$ او $B=\{x,y\}$ وي $A\times B$ او $B\times A$ پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

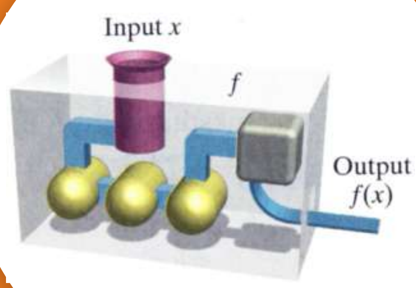
دریم څپرکی

تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library



تابع (function)

آیا تابع او رابطه یو له بله سره توپیر لري؟

فعالیت

- آیا هره تابع یوه رابطه ده او هره رابطه یوه تابع ده ؟
- آیا د مرتبو جوړو هر سټ یوه تابع ده؟
- آیا کولای شئ چې یوې تابع ته د یو ماشین په شان فکر وکړئ؟

د لومړي ځل لپاره د تابع مفهوم د یوه الماني ریاضي پوه لیبنز (Leibniz)، (1716 – 1646) له خوا معرفي شوه.

تابع یوه رابطه یا یوه قاعده ده چې یو کمیت ته د بل کمیت سره اړیکه ورکوي، د تابع د مفهوم د ښه پوهیدو لپاره لاندې مثالونه تر غور لاندې ونیسئ.

1 - د یوې مربع مساحت (A) د مربع په ضلعې (x) پورې اړه لري. هغه معادله چې د مربع مساحت ته د مربع په ضلعې پورې اړیکه ورکوي له $A = x^2$ څخه عبارت ده.

د مربع ضلع x	1	2	3	4	5	...
د مربع مساحت A	1	4	9	16	25	...

یا په بل عبارت د مربع مساحت د مربع د ضلعې تابع دی یا $A = f(x)$

2 - د نړۍ د نفوسو شمېر (p) په وخت (t) پورې اړه لري، لکه: څرنګه چې په لاندې جدول کې لیدل کېږي په تقریبي ډول د نړۍ د نفوسو شمېر د میلیون په حساب ښودل شوی دی.

کال (t)	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
نفوس په میلیون (p)	1650	1750	1860	2070	2300	2560	3040	3710	4450	5280	6080

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کیږي چې نفوس (Population) یا P د وخت (t) تابع ده یا $p = f(t)$

3 - د دایرې مساحت (A) ، د دایرې په شعاع (r) پورې اړه لري ($A = \pi r^2$)

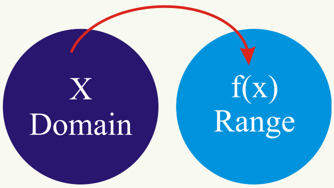
4 – د کرې حجم (V) د کرې په شعاع (r) پورې اړه لري چې د $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ د معادلې په واسطه ښودل کیږي.

له پورتنیو مثالونو څخه دا نتیجه اخیستل کیږي چې د تابع په مفهوم کې اړیکه مرکزي حیثیت لري د مثال په ډول د هر انسان عمر له یوه عدد سره اړیکه لري، په یوه مغازه کې هر جنس له یوه ټاکلي قیمت سره اړیکه لري، هر موټر د یوې ټاکلې شمېرې جوازسېر پورې اړه لري او د هر عدد مکعب، یو عدد دی ($2^3 = 8$, $3^3 = 27$).

په پورتنیو مثالونو کې لیدل کیږي چې مساحت (A)، نفوس (P) اوحجم (V) د مربع ضلعې (x)، وخت (t) او د کرې شعاع (r) تابع دي چې مساحت، نفوس او حجم هر یوه ته مربوط (مقید) متحول (dependent Variable) او د مربع ضلعې، د کرې شعاع او د وخت کمیتونو ته ازاد متحول یا مستقل متحول (Independent Variable) وایي کولای شو چې تابع داسې تعریف کړو:

تعریف

تابع د دوو ستونو تر منځ یوه داسې رابطه یا قاعده ده چې د لومړني سټ هر عنصر یوازې او یوازې د دویم سټ له یو عنصر سره اړیکه ولري چې لومړني سټ د تعریف د ناحیې (Domain) او دویم سټ د قیمتونو د ناحیې (Range) په نوم یادیږي.



یا تابع د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر یې تکرار شوي نه وي.

که $S = \{(1,4)(2,3)(3,2)(4,3)(5,4)\}$ وي، نو د S رابطه د یوې تابع ښودونکې ده، ځکه چې د مرتبو جوړو لومړني عناصر یې تکرار شوي نه دي.

$\text{Domain}(s) = \{1,2,3,4,5\}$

$\text{Range}(s) = \{2,3,4\}$

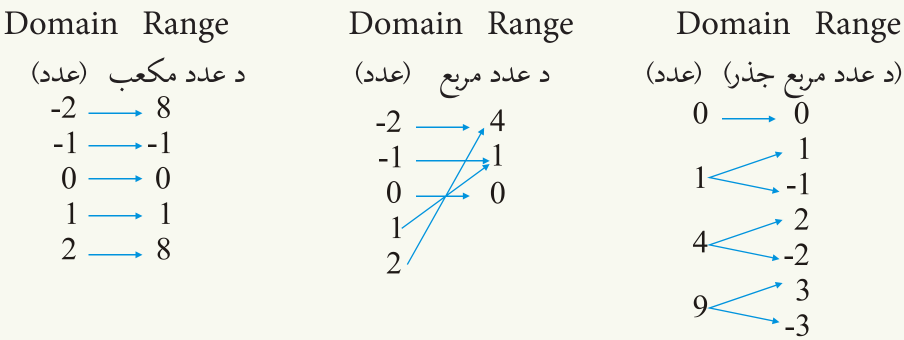
(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

که $T=\{(1,4),(2,3),(3,2),(2,4),(1,5)\}$ وي آیا T یوه تابع ښیي؟

لومړی مثال: په لاندې جدولونو کې کوم یو، یوه تابع ښکاره کوي؟

(جدول III)　　　(جدول II)　　　(جدول I)

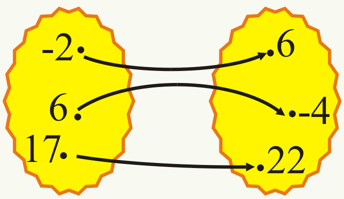


I او II جدولونه تابع ښکاره کوي، لیکن III جدول تابع نه ښکاره کوي، ځکه چې د لومړنۍ سټ یا (Domain) یو عنصر د دویم سټ (Range) له دوو عنصرو سره اړیکه لري، یا په بل عبارت د مرتبو جوړو لومړني عناصر تکرار شوي دي چې مرتبې جوړې يې : $(9,-3),(9,3),(0,0),(4,-2),(4,2),(1,-1),(1,1)$ دي او یا دا چې د لومړنۍ سټ د یو عنصر لپاره په دویم سټ کې دوه تصویرونه (Images) موجود دي، ډېره ښه به دا وي چې یوې تابع ته د یو ماشین فکر وکړو، کوم شکل چې د ځېرکې په لومړي مخ کې راکړل شوی دی، خام مواد یا ورودي (input) یا Domain او خروجي output یا $f(x)$ د Range په نامه یادېږي.
که A او B د حقیقي عددونو ستونه وي له A څخه B ته هره تابع د حقیقي تابع په نامه یادېږي. پام مو وي چې : $Range \subseteq codomain$ دی.

دویم مثال: که $f=\{(-5,3m),(-5,2m-10),(1,2)\}$ د یوې تابع ښودونکې وي، د m قیمت پیدا کړئ.

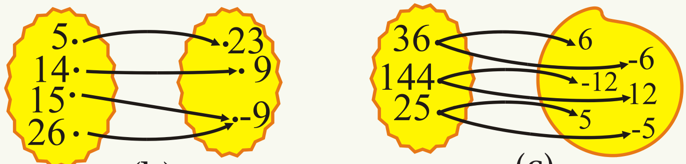
حل: څرنګه چې $-5=-5$ دي، نو باید $3m=2m-10$ سره وي، په نتیجه کې $m=-10$ کېږي په دې معنا ددې لپاره چې f یوه تابع وي، باید $m=-10$ وي.

دریم مثال: له لاندینیو دیاګرامونو څخه کوم یو یې یوه تابع ښیي؟



(a)

(c) ketabton.com: The Digital Library



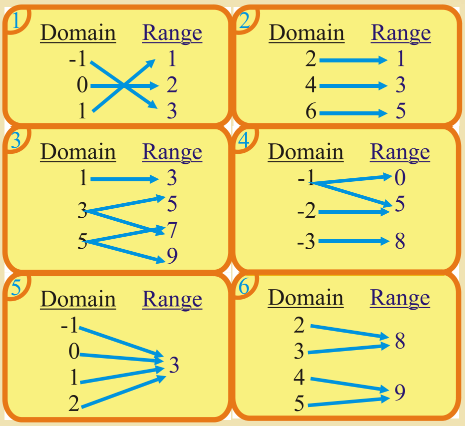
(b) (c)

حل: د a او b دیاګرامونه تابع ښيي، لیکن د c دیاګرام د یوې تابع ښودونکی نه دی.

تابع د X او Y د دوو ستونو ترمنځ یوه داسې رابطه ده چې د x د سټ یا (Domain) هر عنصر یوازې د Y د سټ (Range) د یو عنصر سره اړیکه لري چې X ته ازاد متحول او Y ته مقید (مربوط) متحول وایي یا تابع د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر یې تکرار شوي نه وي.

پوښتنې

1 – د مخامخ جدولونو څخه کوم یو یې د تابع ښودونکی دی؟



2 – د لاندې مرتبو جوړو له ستونو څخه کومه یوه یې یوه تابع ښيي؟ د تعریف ساحه (Domain) او د قیمتونو ساحه (Range) یې تعین کړئ.

1– $\{(2,4)\ ,\ (3,6)\ ,\ (4,8)\ ,\ (5,10)\}$

2– $\{(-1,4)\ ,\ (0,3)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,1)\}$

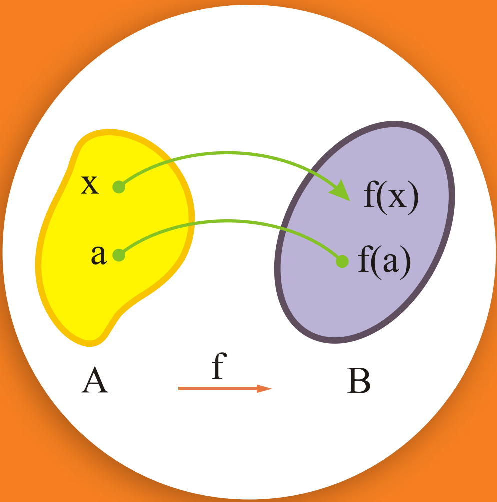
3– $\{(10,-10)\ ,\ (5,-5)\ ,\ (0,0)\ ,\ (5,5)\ ,\ (10,10)\}$

4– $\{(-10,10)\ ,\ (-5,5)\ ,\ (0,0)\ ,\ (5,5)\ ,\ (10,10)\}$

5– $\{(0,11),(1,1),(2,1),(3,2),(4,2),(5,2)\}$

6– $\{(1,1)\ ,\ (2,1)\ ,\ (3,1)\ ,\ (1,2)\ ,\ (2,2)\ ,\ (3,2)\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د تابع د ليکلو طريقه او د يوې تابع د قيمت پيدا کول

- څه وخت يوه معادله د يوې تابع ښکارندويه ده؟
- يوه رابطه څه وخت يوه تابع ښيي؟
- يو جدول څه وخت يوه تابع ښيي؟

د لومړي ځل لپاره سويسي رياضي پوه اويولر (1707 -1783) (Euler) دا عبارت چې y د x تابع ده، د $y = f(x)$ مساوات په شکل وښوده چې $f(x)$ د x لپاره د y يا f(x) د تابع قيمت دی. که f له A څخه B ته يوه تابع وي، په لاندې ډول ښودل کېږي چې

$f : A \to B$

$y = f(x)$ يا

په شکل کې x له (input) او f(x) له (output) څخه عبارت دی، تابع ګانې د h,g,f او نورو تورو په واسطه ښودل کېږي.

تابع عموماً په 4 طريقو ښودل کېږي.

1 – د عبارتونو (جملو) په واسطه (Verbally)

2 – د يوه جدول په واسطه يا عددي (Numerically)

3 - مشاهده وي: د ګراف په واسطه (Visually)

4 - د يو واضح فورمول يا معادلې په واسطه يا په الجبري ډول (Algebraically)

فعاليت

که f(x) او g(x) په جدولونو کې په لاندې ډول راکړل شوي وي، د x په راکړل شوو قيمتونو کې ددې تابع ګانو قيمت پيدا کړئ. يا په بل عبارت د تابع د تعريف ساحه (Domain) درکړل شوې ده، د تابع اړونده قيمتونه (Range) يې پيدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(x)=\frac{1}{2}x-4$

x=	-1	-2	0	2	4
f(x)=	?	?	?	?	?

$g(x)=x^3-1$

x=	0	-1	1	2
g(x)=	?	?	?	?

لومړی مثال: که $f(x)=x^2+3x-2$ وي $f(2)$ ، $f(0)$ ، $f(-3)$ او $f(a)$ پیدا کړئ.

حل:

د تابع قیمتونه	تابع (Rule) $f(x)=x^2+3x-2$	د تعریف ساحه
8	$f(2)=2^2+3\cdot2-2=4+6-2$	2
-2	$f(0)=0^2+3\cdot0-2=-2$	0
-2	$f(-3)=(-3)^2+3(-3)-2=9-9-2$	-3
a^2+3a-2	$f(a)=a^2+3a-2$	a

یا $f(2)=8$ ، $f(0)=-2$ ، $f(-3)=-2$ ، $f(a)=a^2+3a-2$

دویم مثال: که $f(x)=x^2+3x+5$ وي، $f(-x)$ ، $f(x+3)$ او $f(2)$ پیدا کړئ.

حل

$$f(2)=2^2+3\cdot2+5=4+6+5=15$$

$$f(x+3)=(x+3)^2+3(x+3)+5=x^2+6x+9+3x+9+5=x^2+9x+23$$

$$f(-x)=(-x)^2+3(-x)+5=x^2-3x+5$$

فعالیت

که $g(x)=x^2-2x+7$ وي $g(-x)$ ، $g(x+4)$ او $g(-5)$ پیدا کړئ.

دریم مثال: که $h(x)=3-2x$ او $f(x)=2x+6$ وي $f(-1)$، $h(6)$ او $f(-1)+f(3)$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$f(-1) = 2(-1) + 6 = -2 + 6 = 4$$
$$h(6) = 3 - 2\cdot 6 = 3 - 12 = -9$$
$$f(-1) + f(3) = 4 + 2\cdot 3 + 6 = 4 + 12 = 16$$

څلورم مثال: که $f(x) = ax^2 - bx + 1$ او $f(3) = 10, f(1) = 0$ وي د a او b قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$10 = 9a - 3b + 1 \quad , \quad 0 = a - b + 1$$

$$10 = 9a - 3b + 1$$
$$0 = _\ 3a \mp 3b \pm 3$$

$$10 = 6a - 2 \qquad\qquad 10 = 18 - 3b + 1$$
$$12 = 6a \qquad\qquad 3b = 19 - 10$$
$$a = 2 \qquad\qquad 3b = 9$$
$$b = 3$$

پنځم مثال: له لاندېنیو معادلو څخه کومه یوه یې یوه تابع ښیي؟

$a: \quad x^2 + y = 4 \qquad\qquad b: x^2 + y^2 = 4$

حل: هغه وخت یوه معادله یوه تابع ښیي چې د x د هر قیمت لپاره د y یو قیمت موجود شي.

$a: \quad x^2 + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x^2$

د x د هر قیمت لپاره y یو قیمت لري، د مثال په ډول که $x = 1$ وي، $y = 4 - 1^2 = 3$، نو $y = 4 - x^2$ یوه تابع ده.

$b: \quad x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

د x د یوه قیمت لپاره y دوه قیمتونه لري، نو y یوه تابع نه ده.

د مثال په ډول که $x = 1$ وي، $y = \pm\sqrt{3}$ یا $(1 , \sqrt{3})(1 , -\sqrt{3})$ چې لومړني عناصر یې تکرار شوي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

وښیاست چې د $y-x^2=1$ او د $x^3-y=2$ معادلې د تابع ښودونکي دي او د $x^2+y^2=4$

معادله د یوې تابع ښودونکې نه ده.

یوه تابع د $y=f(x)$ په شکل لیکل کېږي، د تابع د قیمت د پیدا کولو لپاره د x قیمت د تابع په معادله کې وضع کوو، د تابع قیمت په لاس راځي او یوه معادله هغه وخت د یوې تابع ښکارندویه وي چې د هر x لپاره یو y وجود ولري.

پوښتنې

1- که $g(x)=x^2+x-2$ او $f(x)=2x^2+3x-1$ وي $g(2)-g(-3)$ ، $g(-2),f(-3)$

او $\dfrac{f(0)\cdot g(-2)}{f(-3)}$ پیدا کړئ.

2 – که $f(x)=x^2-x$ او $g(x)=\sqrt{x+4}$ وي $f(-2)$ ، $g(0)$ او $f(x-1)$ پیدا کړئ.

3- که $g(x)=3\sqrt{x}$ او $h(x)=1+4x$ وي $h(16)$ ، $h(-3)$ او $g(-4)$ پیداکړئ.

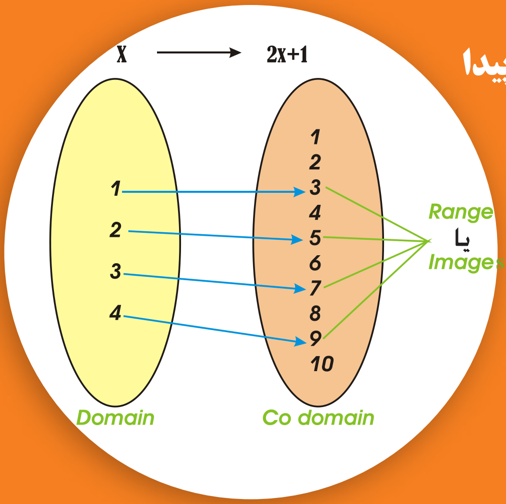
4 - $f(x)=\dfrac{15}{x-3}$ ، $g(x)=16+3x-x^2$ او $h(x)=\sqrt{25-x^2}$ وي $g(-7),f(6)$

او $f(0)+g(4)-h(-3)$ پیداکړئ.

5 – که $g(x)=\sqrt{x+40}-2$ وي $g(12)$ ، $g(5)$ ، $g(4)$ ، $g(0)$ او $g(-2)$ پیداکړئ.

6 – آیا د $x^2+xy=1$ معادله یوه تابع ښیي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



د يوې تابع د تعريف د ساحې پيدا کول

آيا کېدای شي چې د هرې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه وي؟

فعاليت

- د x کوم قيمتونه دتابع د تعريف په ساحه کې شامل وي؟
- د $f(x)=\dfrac{1}{x-4}$ تابع د تعريف ساحه وټاکئ.
- آيا $g(x)=3\sqrt{x}$ تابع د تعريف په ساحه کې $x=-4$ شامل دی؟

د يوې تابع د تعريف په ساحه (Domain) کې د x ټول هغه قيمتونه شامل وي چې تابع په هغه قيمتونو کې تعريف شوې وي يا د تابع قيمت يو حقيقي عدد وي.

لومړی مثال: د لاندې تابع گانو د تعريف ساحه (Domain) وټاکئ.

$$f(x)=\frac{1}{x-3} \qquad h(x)=x^2-7x \qquad K(x)=\frac{6x}{x^2-9}$$

$$g(x)=\sqrt{x} \qquad R(x)=\sqrt{3x+12}$$

حل:

- د $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ تابع په $x=3$ کې تعريف شوې نه ده، ځکه چې $x=3$ لپاره د تابع مخرج صفر کېږي يا د $x=3$ لپاره د تابع قيمت يو حقيقي عدد نه دی نو:

$$\text{Dom}f=\{x\in IR\,/\,x\neq 3\}$$

- د $g(x)=\sqrt{x}$ په تابع کې ددې لپاره چې د تابع قيمت يو حقيقي عدد (Real number)

(c) ketabton.com: The Digital Library

وي، باید $x \geq 0$ وي، نو $Dom\, g = \{x \in IR / x \geq 0\}$ یا $\operatorname{dom} g = [0\ ,\ \infty)$

- $h(x) = x^2 - 7x$ په تابع کې، څرنګه چې د x د هر قیمت لپاره د $h(x)$ تابع تعریف شوي ده، نو: (د حقیقي عددونو سټ) $\operatorname{Dom} h = IR = (-\infty\ ,\ \infty)$

- د $k(x) = \dfrac{6x}{x^2 - 9}$ یا $k(x) = \dfrac{6x}{(x-3)(x+3)}$ تابع د تعریف ساحه عبارت ده له:

$$Dom\, k(x) = \{x \in IR /\quad x \neq 3\ ,\quad x \neq -3\}$$

- د $R(x) = \sqrt{3x + 12}$ په تابع کې باید $3x + 12 \geq 0$ وي، نو $x \geq -4$ کېږي.

$$Dom\, R = \{x \in IR / x \geq -4\} = [-4, \infty)$$

فعالیت

د لاندې تابع ګانو د تعریف ساحه (Domain) پیدا کړئ.

$$f(x) = x^2 + 3x - 17 \quad , \quad g(x) = \frac{5x}{x^2 - 49} \quad , \quad h(x) = \sqrt{9x - 27}$$

دویم مثال: د $y = \sqrt{x - 3}$ د تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$$x - 3 \geq 0 \qquad \Rightarrow x \geq 3$$

$$\operatorname{Dom} y = \{x \in IR / \ x \geq 3\} = [3\ ,\ \infty)$$

دریم مثال: د لاندې تابع ګانو د تعریف ساحه پیدا کړئ.

$f(x) = \sqrt{x - 2}$ $\qquad \operatorname{Dom} f = \{x / \quad x \geq 2\}$ یا $[2, \infty]$

$g(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 4}$ $\qquad dom\, g = IR - \{4\}$ یا $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

یا د سټ په شکل: $dom\, g = \{x \in IR / x \neq 4\}$

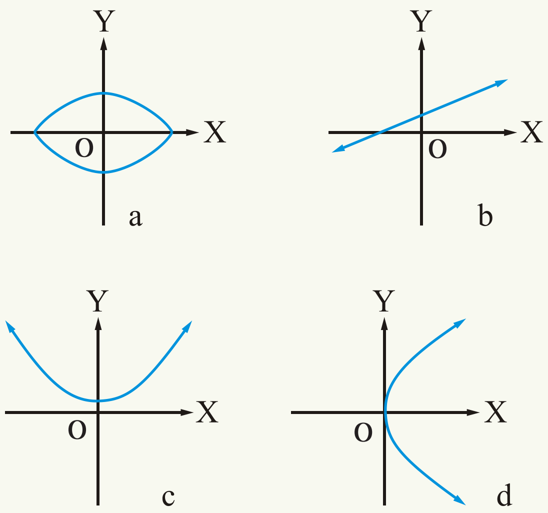
$$h(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$$

$\operatorname{Dom} h = \{x / \ x \leq -1$ یا $\quad x \geq 3\}$ یا $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې تابع ګراف او د ګراف له مخې د يوې تابع پېژندنه
(Graph of a function and vertical line test)

په راکړل شوو شکلونو کې کوم ګراف د يوې تابع ګراف دی؟



فعاليت

- د y له محور سره يو موازي خط رسم کړئ.
- وګورئ چې دا خط د تابع ګراف په څو نقطو کې قطع کوي؟
- که دا خط ګراف په يوه نقطه کې قطع کړي آيا دا ګراف به د يوې تابع ګراف وي؟
- که دا خط، ګراف له يوې نقطې څخه په زياتو نقطو کې قطع کړي آيا دا ګراف به د يوې تابع ګراف وي؟

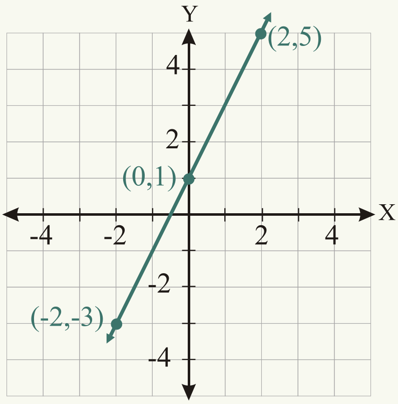
که f(x) يوه حقيقي تابع وي، د f(x) د تابع ګراف د (x , f(x)) د هغه مرتبو جوړو سټ دی چې د y=f(x) په معادله کې صدق وکړي.

يا د يوې تابع ګراف د XOY د مستوي د هغو نقطو سټ دی چې $\{(x,y) \,/\, y=f(x)\}$ صدق کړي او $x \in dom\, f(x)$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړي مثال: د $y = f(x) = 2x+1$ تابع ګراف رسم کړئ.

input	تابع	output	مرتبي جوړي
x	$2x+1$	$y=f(x)$	(x,y)
0	$2(0)+1$	1	$(0,1)$
2	$2(2)+1$	5	$(2,5)$
-2	$2(-2)+1$	-3	$(-2,-3)$



دويم مثال: د $f(x) = x^2+1$ او $y=-1$ تابع ګانو ګراف رسم کړئ.

د تعريف او د قيمتونو ساحې يې هم پيدا کړئ.

حل:

$f(x) = x^2+1$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	10	5	2	1	2	5	10

د $(3\,,10)$, $(2{,}5)$, $(1{,}2)$, $(0{,}1)$, $(-1\,,2)$, $(-2\,,5)$, $(-3{,}10)$ مرتبو جوړو په نظر کې نيولو سره د تابع ګراف رسم کړئ.

يا

$f(-3) = (-3)^2+1 = 9+1 = 10$

$f(-2) = (-2)^2+1 = 4+1 = 5$

$f(-1) = (-1)^2+1 = 1+1 = 2$

$f(0) = 0^2+1 = 0+1 = 1$

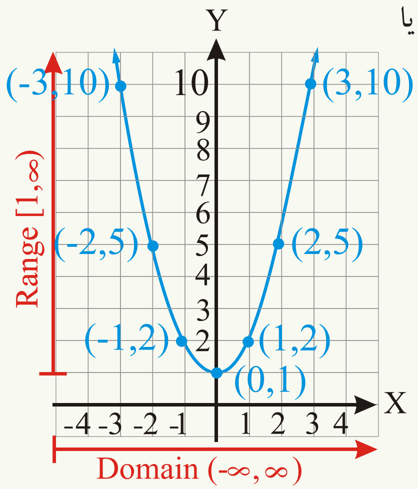
$f(1) = 1^2+1 = 2$

$f(2) = 2^2+1 = 5$

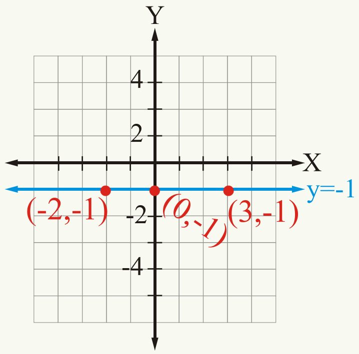
$f(3) = 3^2+1 = 10$

$\text{Dom} f = (-\infty,\infty)$

$\text{Range} f = (1,\infty)$



(c) ketabton.com: The Digital Library



$f(x) = -1$

Input	Output	مرتبه جوړه
x	$y = f(x)$	(x, y)
-2	-1	$(-2, -1)$
0	-1	$(0, -1)$
3	-1	$(3, -1)$

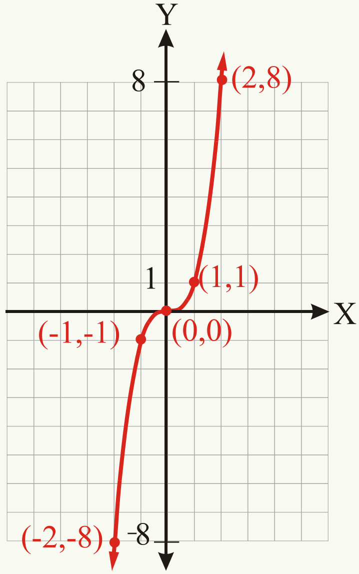
$\text{Dom } y = IR$

$\text{Range } y = -1$

فعالیت

د $f(x) = x^2 - 4$ تابع ګراف رسم کړئ.

دریم مثال: د $y = f(x) = x^3$ تابع ګراف رسم کړئ.



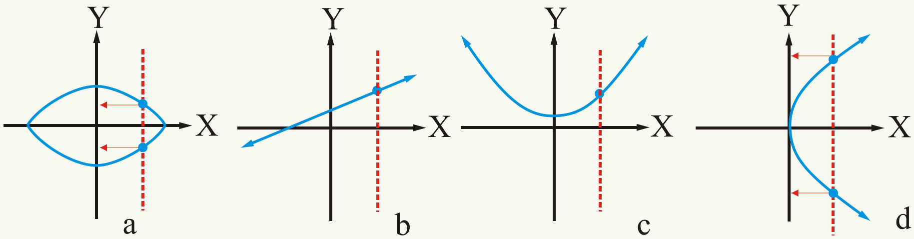
$f(x) = x^3$

x	2	1	0	-1	-2
$y = f(x)$	8	1	0	-1	-8

که یو عمودي خط (د y له محور سره موازي) یو ګراف یوازې په یوه نقطه کې قطع کړي، نو دا ګراف د یوې تابع ګراف دی او که له یوې نقطې څخه یې په زیاتو نقطو کې قطع کړي، نو دا ګراف د یوې تابع ګراف نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: په لاندې راکړل شوو ګرافونو کې لیدل کېږي چې b او c د تابع ګانو ګرافونه دي، ځکه چې عمود خط یې ګرافونه په یوه نقطه کې قطع کړي دي، لیکن د a او d ګرافونه د تابع ګرافونه نه دي، ځکه چې عمودي خط ګرافونه له یوې څخه په زیاتو نقطو (دوو نقطو) کې قطع کړي دي یا د یوه x لپاره د y یا f(x) دوه قیمتونه وجود لري، نو د a او d ګرافونه د تابع ګرافونه نه دي.



د تابع د تعریف په ناحیه domain کې هغه عددونه شامل وي چې تابع په کې تعریف شوي وي یا د تابع قیمت یو حقیقي عدد وي. د یوې تابع ګراف د XOY په مستوي کې د S د نقطو سټ دی، په دې ډول چې $S = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ چې x د تابع د تعریف په ساحه کې شامل وي، که د y له محور سره موازي خط ګراف یوازې په یوه نقطه کې قطع کړي، داګراف د یوې تابع ګراف دی.

پوښتنې

1 - د لاندې تابع ګانو د تعریف ساحې (Domains) پیداکړئ.

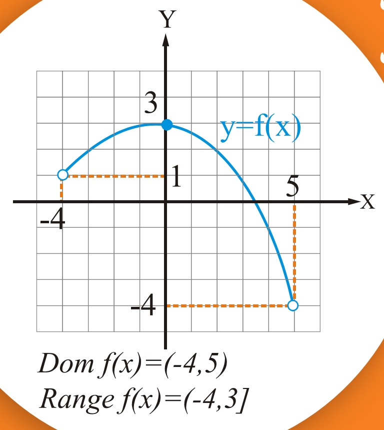
$h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$	$g(x) = 2x - 5$	$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
$h(x) = \dfrac{3}{x-4}$	$g(x) = \lvert x - 3 \rvert$	$f(x) = \sqrt{x+1}$
$h(x) = \dfrac{4}{x^2 + 11x + 24}$	$g(x) = \dfrac{2}{(x+3)(x-7)}$	$f(x) = \dfrac{7x}{x^2 - 16}$
		$f(x) = \dfrac{3}{x^2 + 4}$

2 - د $f(x) = x^2$ او $f(x) = -x^2$ د تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

3 - د $g(x) = 2x - 1$ تابع ګراف رسم کړئ که $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,$ وي.

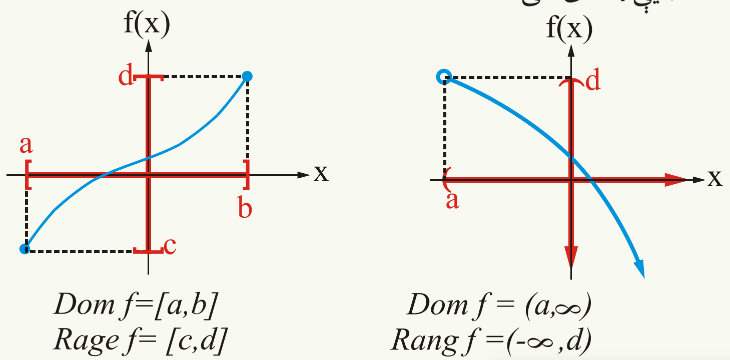
4 - د $x = y^2 - 2$ ګراف رسم کړئ او آیا دا د یوې تابع ګراف دی؟ ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library



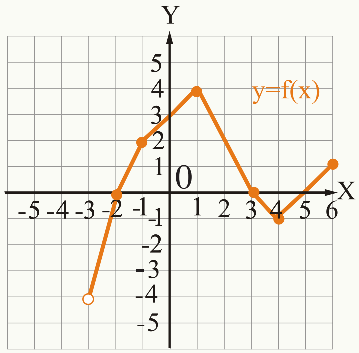
د ګراف له مخې د يوې تابع د تعريف او د قيمتونو د ناحيو او د تابع د قيمتونو پيدا کول:

آيا د توابعو په لاندېنيو راکړل شوو ګرافونو کې د تابع د تعريف ساحه (Domain) او د قيمتونو ساحه (Range) يې ټاکلای شئ؟



فعاليت

شکل وګورئ لاندېنيو پوښتنو ته ځواب ورکړئ:

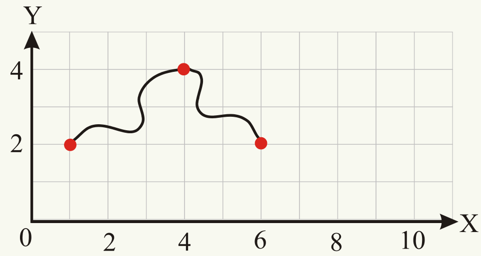


- د شکل له مخې د f تابع د تعريف او قيمتونو ساحه پيدا کړئ.
- آيا د 4 – عدد د f تابع د قيمتونو په ساحه کې شامل دی؟ ولې؟
- آيا د 3 – عدد د f د تعريف په ساحه کې شامل دی؟ ولې؟
- آيا د 6 عدد د f د تعريف په ساحه کې شامل دی؟

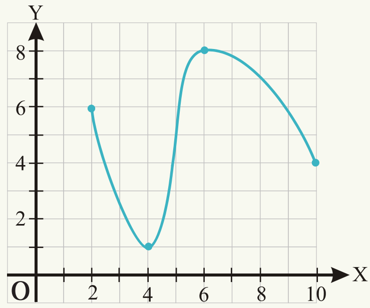
(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې $f(-1)=2$ او $f(1)=4$ دي او هم د شکل له مخې د تابع د تعریف ساحه له 3- څخه تر 6 پورې ده، لیکن $-3\notin dom\ f$ او $6\in dom\ f$، نو $dom\ f=(-3,6]$ او په همدې ډول د f(x) تابع د قیمتونو ساحه (Range) له 4- څخه تر 4 پورې ده، خو $-4\notin Range\ f$ نو $Range\ f=(-4,4]$.

لومړی مثال: په راکړل شوو شکلونو کې د تابع ګانو د تعریف او د قیمتونو ساحې پیداکړئ.



(1)



(2)

حل:

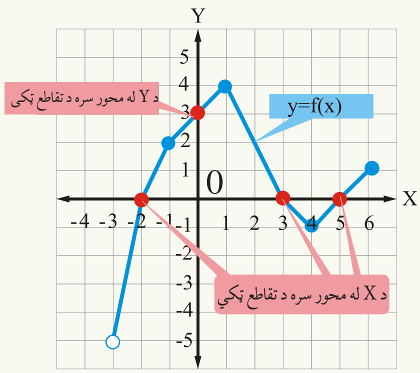
د لومړي شکل په ګراف کې د تعریف ساحه د 1 او 6 تر منځ ټول حقیقي عددونه دي او د قیمتونو ساحه يې د 2 او 4 تر منځ ټول حقیقي عددونه دي یا: $1\le x\le 6$ او $2\le y\le 4$

د (2) شکل په ګراف کې $2\le x\le 10$ یا $Dom=[2\ ,\ 10]$

$1\le y\le 8$ یا $Range=[1\ ,\ 8]$

دويم مثال: لاندې شکل په پام کې ونیسئ.

- $f(-2)$, $f(3)$ او $f(5)$ پیداکړئ.
- د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیداکړئ.



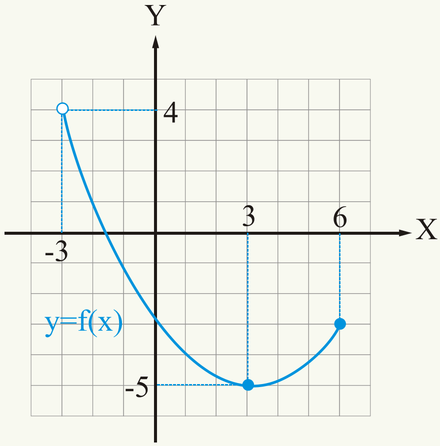
حل: څرنګه چې د X له محور سره د ګراف د تقاطع په ټکي کې $y=0$ وي، نو $f(-2)=0$, $f(3)=0$ او $f(5)=0$ دي، نو ګراف د X محور د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(-2,0)$, $(3,0)$ او $(5\ ,\ 0)$ په نقطو کې قطع کوي.

څرنګه چې د y له محور سره د ګراف د تقاطع په ټکي کې $x=0$ دی $f(0)=3$ ، نو ګراف د y محور د $(0,3)$ په نقطه کې قطع کوي.

دریم مثال: په لاندې شکل کې د f تابع Domain او Range پیدا کړئ، f (3) او f (6) هم په لاس راوړئ.



حل: لیدل کیږي چې د تعریف ساحه یې له 3 - څخه تر 6 پورې ده، خو 3 - د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

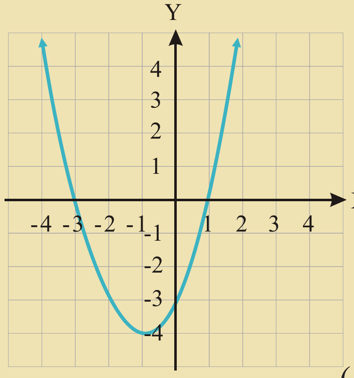
$$Domain\ f(x) = -3 < x \leq 6 \text{ یا } (-3\ ,6]$$

او د قیمتونو ساحه یې: $\text{Range}\ f(x) = -5 \leq y < 4$ یا $[-5\ ,\ 4)$ ، $f(6) = -3$ او $f(3) = -5$ ده.

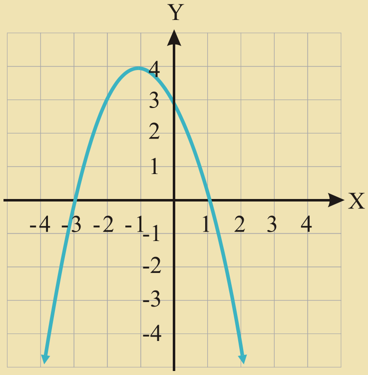
(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

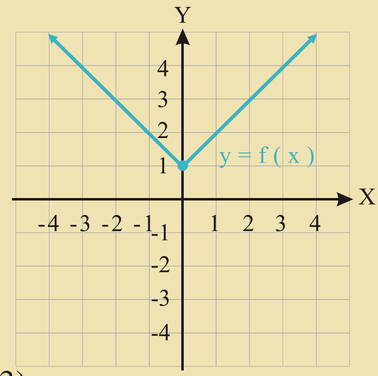
په راکړل شوو شکلونو کې:



(1)



(2)



(3)

$f(-1)=?$ $f(3)=?$

a- د تابع د تعریف ساحه

b- د تابع د قیمتونو ساحه

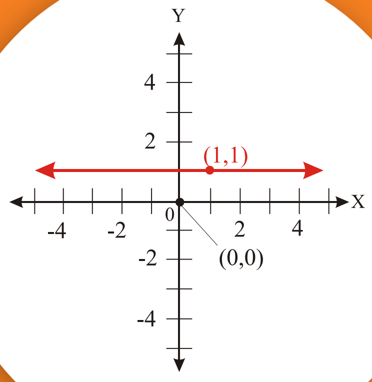
c- د X له محور سره د ګراف د تقاطع ټکي

d- د Y له محور سره د تقاطع ټکي او په دریم شکل کې د تابع غوښتل شوي قیمتونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

ځیني خاصي تابع ګاني او ګرافونه یې

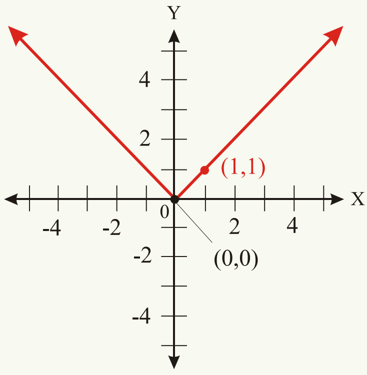
د هغو تابع ګانو نومونه واخلئ چې ګرافونه یې راکړل شوي دي



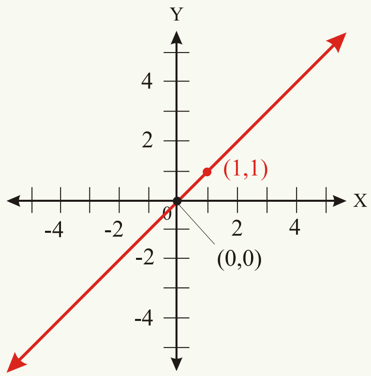
$f(x)=1$

توابع ډېر ډولونه لري چې ځیني خاصې تابع ګاني ترځېرني لاندې نیسو:

ثابته تابع، د عینیت تابع، د مطلقه قیمت تابع، څو معادله یي تابع او د علامې تابع



$f(x)=|x|$



$f(x)=x$

فعالیت

- ثابتي تابع ته ولې ثابته تابع وایي؟
- آیا د عینیت تابع د تعریف او د قیمتونو ساحې سره مساوي وي؟
- آیا د مطلقه قیمت د تابع د قمیتونو ساحه منفي قیمتونه اخیستلای شي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثابته تابع (Constant Function)

که x او y د حقیقي عددونو ستونه وي، د $f : x \to y$ یا $f(x) = y$ په تابع کې چې که y له یوه ثابت عدد سره مساوي وي یا $y = f(x) = c$ چې (c) یو ثابت عدد دی، نو د y د ثابتې تابع په نوم یادېږي.

د مثال په ډول: $f(x) = 2$, $f(x) = -3$ او $f(x) = -2$ او داسې نورې ثابتې تابع ګانې دي.

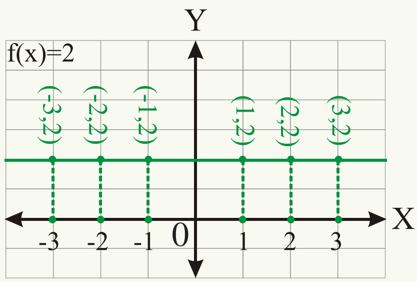
لومړی مثال: $f(x) = 2$ او $f(x) = -2$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

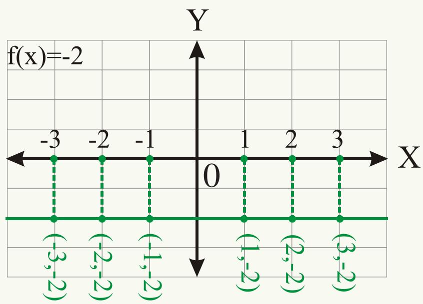
$f(x) = 2$

x =	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	2	2	2	2	2	2

$f(x) = -2$

x =	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	−2	−2	−2	−2	−2	−2





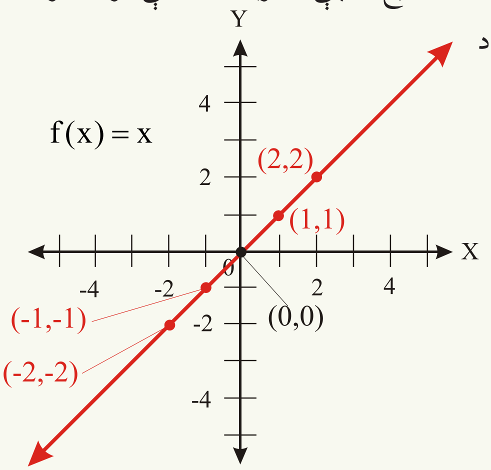
په دې معنا چې په ثابته تابع کې د تعریف د ساحې د هر عنصر تصویر همغه ثابت عدد دی.

د عینیت تابع (Identity function): هغه تابع ده چې د تعریف د ساحې هر عنصر ته له خپل ځان سره ارتباط ورکړي یا $f(x) = x$ د عینیت د تابع په نامه یادېږي.

مثال: $f(x) = x$ د تابع ګراف رسم کړئ.

$f(x) = x$

x =	0	1	2	−1	−2	...
f(x) =	0	1	2	−1	−2	...



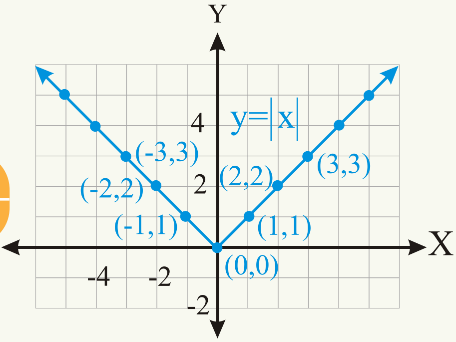
(c) ketabton.com: The Digital Library

د مطلقه قیمت تابع (Absolute value function)

د مطلقه قمیت تابع $f(x)=|x|$ په لاندې ډول تعریف شوی ده:

$$f(x)=\begin{cases} x & , x\geq 0 \\ -x & , x<0 \end{cases}$$

لومړی مثال: د $f(x)=|x|$ تابع گراف رسم کړئ.



$f(x)=|x|$

x =	0	1	2	3	−1	−2	−3
f(x) =	0	1	2	3	1	2	3

لیدل کېږي چې د مطلقه قیمت د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ساحه یې $[0,\infty)$ ده.

ځو معادله یي تابع (Piecewise function) او گراف یي

آیا کېدای شي چې یوه تابع د تعریف په ساحه کې د دوو یا ځو معادلو په واسطه تعریف شوې وي؟

لومړی مثال: که $f(x)=\begin{cases} 2x+3 : x<4 \\ x^2-1 : 4\leq x\leq 10 \end{cases}$ وي، نو $f(-5)$, $f(8)$ او د f تابع د تعریف ساحه پیدا کړئ.

حل: څرنگه چې $-5<4$ دی، نو په لومړی معادله کې وضع کېږي، لرو چې:

$$f(-5)=2(-5)+3=-10+3=-7$$

او څرنگه چې د 8 عدد د 4 او 10 ترمنځ واقع دی $4<8<10$ ، نو په دویمه معادله کې وضع کېږي لرو چې:

$$f(8)=8^2-1=64-1=63$$

د f تابع د تعریف ساحه په لومړی معادله کې $(-\infty\ ,\ 4)$ او په دویمه معادله کې $[4\ ,\ 10]$ ده، نو د

(c) ketabton.com: The Digital Library

f د تعریف ساحه د $\left(-\infty\,,\,10\right]$ شخه عبارت ده.

فعالیت

که چیرې $g(x)=\begin{cases}-\dfrac{11}{60}x+15 & : 0\le x<60\\ \dfrac{1}{5}x-8 & : 60\le x\le 90\end{cases}$ وي،

وښیاست چې $g(80)=8$ او $g(30)=9.5$ دی.

د څو معادله یې تابع ګراف (Graph of function defined piecewise)

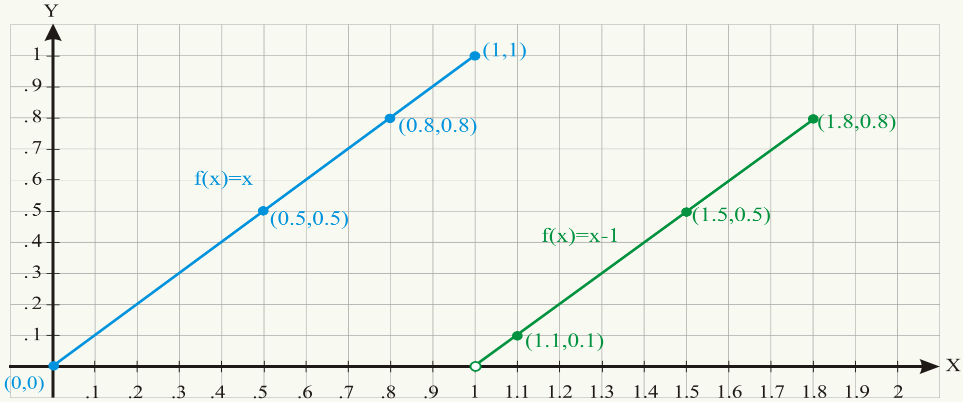
دویم مثال: د f (x) تابع د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا او ګراف یې هم رسم کړئ که:

$f(x)=\begin{cases}x:0\le x\le 1\\ x-1:1<x\le 2\end{cases}$ وي.

حل: د لومړی معادلې د تعریف ساحه $[0,1]$ او د دویمې معادلې د تعریف ساحه $[1,2]$ ده چې په

نتیجه کې د f (x) د تعریف ساحه $[0,2]$ ده.

د ګراف د رسمولو لپاره، د دواړو برخو ګراف رسموو په دې ډول:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$y = f(x) = x$

x	0	0.5	0.8	1
$y = f(x)$	0	0.5	0.8	1

$y = f(x) = x - 1$

x	1,1	1,5	1,8
$f(x)$	0,1	0,5	0,8

په نتيجه کې دوه مستقيم خطونه په لاس راځي چې دواړه د f (x) تابع ګراف دی.

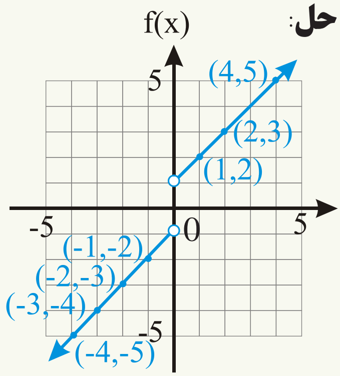
فعاليت

که: $f(x) = \begin{cases} x \Leftarrow 0 \le x \le 4 \\ x - 1 \Leftarrow 0 < x < -4 \end{cases}$ وي، $f(0), f(-2), f(2)$ پیداکړئ او ددې تابع ګراف هم رسم کړئ.

دريم مثال: د $f(x) = \begin{cases} x - 1 \Leftarrow x < 0 \\ x + 1 \Leftarrow x > 0 \end{cases}$ تابع ګراف رسم د تعريف او د قيمتونو ساحې يې وټاکئ.

حل:

x	1	2	4	-1	-2	-3	-4
$f(x)$	2	3	5	-2	-3	-4	-5



لیدل کیږي چې د تابع د تعریف په ساحه کې صفر شامل نه دی $(x \neq 0)$ یا

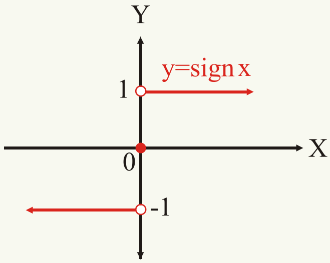
$Dom\ f(x) = (-\infty\ ,\ 0) \cup (0, \infty)$ او د قيمتونو ناحيه (Range) يې عبارت دی له:

$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ يا $y > 1$ او $y < -1$

د علامې تابع (Sign Function): د علامې تابع چې په sgn (x) سره ښودل کيږي د ځو معادله يې تابع يو مثال دی چې په لاندې ډول تعریف شوې ده:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 & : x>0\\ 0 & : x=0\\ -1 & : x<0\end{cases}$$ د دې تابع د تعریف ناحیه د حقیقي عددونو سټ او د قیمتونو ساحه (Range) یې $\{-1,0,1\}$ ده.



$$Dom_{sgn}=IR \qquad Range_{sgn}=\{-1\ ,\ 0\ ,1\}$$

$f(x)=c$ ثابته تابع ، $f(x)=x$ د عینیت تابع او $f(x)=|x|$ د مطلقه قیمت تابع ده چې د تعریف ساحه یې ټول حقیقي عددونه او د قیمتونو ساحه یې صفر او مثبت حقیقي عددونه دي.

پوښتنې

1- د $f(x)=-5$ ، $g(x)=\frac{1}{2}$ او $h(x)=4$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

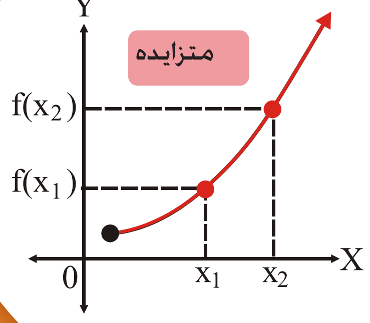
2 – د $f(x)=|x|-3$ تابع ګراف رسم کړئ.

3- که $f(x)=\begin{cases}-x : x<0\\ x : x\geq 0\end{cases}$ وي $f(0)$ ، $f(-2,3)$ او $f(16)$ پیداکړئ.

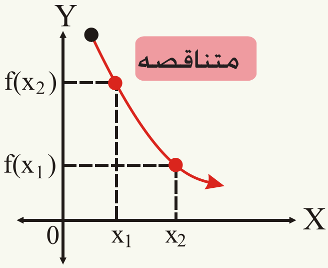
4- که $h(x)=\begin{cases}x+1 : -1\leq x<0\\ -x+1 : 0\leq x\leq 1\end{cases}$ وي د $h(x)$ تابع د تعریف ساحه پیداکړئ.

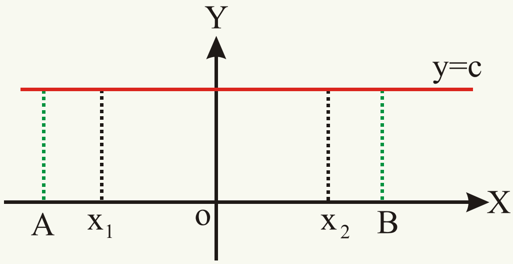
(c) ketabton.com: The Digital Library

متزايدي او متناقصي تابع ګاني
(Increasing and decreasing functions)



- په راکړل شوو ګرافونو کې کوم ګراف د متزايدی تابع ګراف دی؟
- کوم ګراف د متناقصی تابع ګراف دی؟
- کوم ګراف نه متزايد دی او نه متناقص؟





1 – يوه تابع په يوه انټروال کې متزايده ده که $x_1 < x_2$ وي، په نتيجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي.

2 – يوه تابع په يوه انټروال کې متناقصه ده که $x_1 < x_2$ وي، په نتيجه کې $f(x_1) > f(x_2)$ شي.

3 – که $x_1 < x_2$ وي او په نتيجه کې $f(x_1) = f(x_2)$ شي دا تابع نه متناقصه ده او نه متزايده.

لکه: خرنګه چې په شکل کې ليدل کيږي دا يوه ثابته تابع ده.

مثال: د $f(x) = x^2$ او $f(x) = -x^2$ د تابع ګانو ګراف په کومو انټروالونو کې متزايد او په کومو انټروالو کې متناقص دی؟

x	0	1	−1	2	−2
$f(x) = -x^2$	0	−1	−1	−4	−4

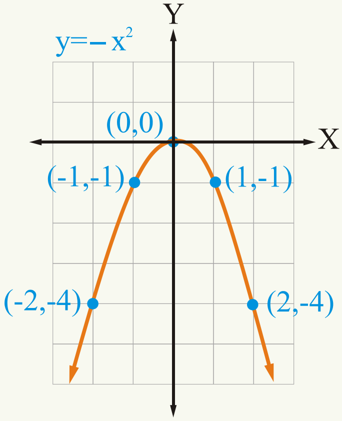
x	0	1	−1	2	−2
$f(x) = x^2$	0	1	1	4	4

(c) ketabton.com: The Digital Library

$-1 < 2$

$f(-1) > f(2)$

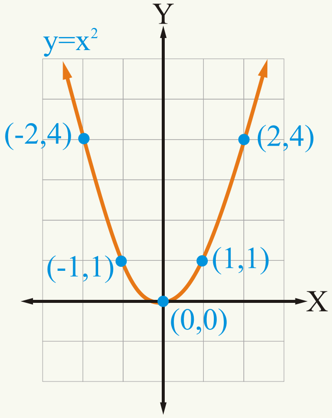
$-1 > -4$



$-1 < 2$

$f(-1) < f(2)$

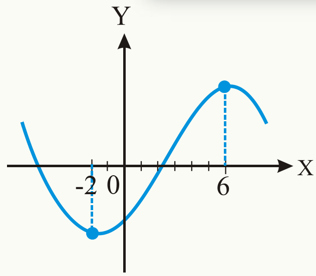
$1 < 4$



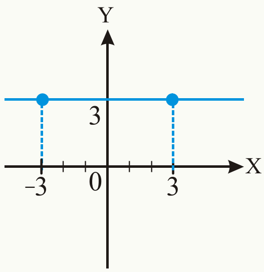
لیدل کېږي چې د $f(x) = x^2$ تابع د $(-\infty, 0)$ په انټروال کې متناقصه او د $(0 , \infty)$ په انټروال کې متزایده ده، لیکن د $f(x) = -x^2$ تابع په $(-\infty, 0)$ انټروال کې متزایده او د $(0, \infty)$ په انټروال کې متناقصه ده.

فعالیت

په راکړل شوو شکلونو کې د تابع ګراف په کومو انټروالونو کې متزاید په کومو کې متناقص دی، کوم ګراف نه متزاید او نه متناقص دی؟



(a)



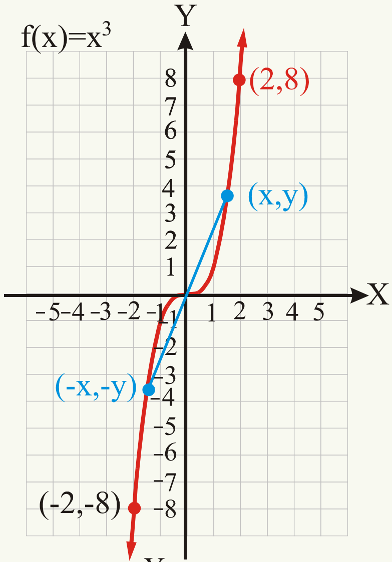
(b)

جفتي او طاقي تابع ګانې (Even and Odd Functions):

1- د $f(x)$ تابع یوه جفته تابع ده که چېرې $f(-x) = f(x)$ وي، په دې معنا که په تابع کې د x پر ځای $-x$ عوض کړو، د تابع په قیمت کې تغیر رانه شي.

2- د $f(x)$ تابع یوه طاقه تابع ده که چېرې $f(-x) = -f(x)$ وي یا دا چې که په تابع کې د

(c) ketabton.com: The Digital Library



x پر ځای x− عوض کړو، د تابع قیمت منفي شي.

لومړی مثال: د $f(x)=x^2$ او $f(x)=x^3$ په تابع ګانو کې کومه تابع جفته او کومه یوه طاق ده؟

حل: په دواړو تابع ګانو کې

د x پر ځای x − عوض کوو:

$$f(-x)=(-x)^3=(-x)(-x)(-x)=-x^3$$

نو د $f(x)=x^3$ تابع یوه طاق تابع ده،

ځکه چې $f(-x)=-f(x)$ کیږي لکه:

$f(-2)=-f(2)=-8$ او د $f(x)=x^2$ په

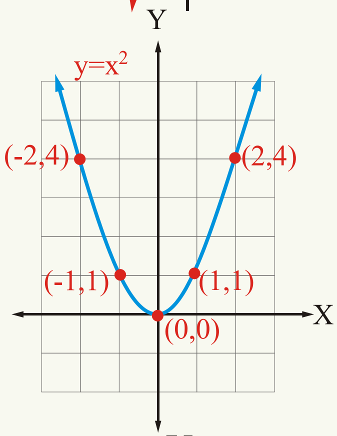
تابع کې لرو چې:

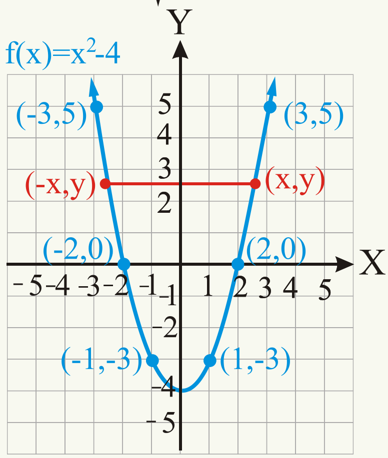
$$f(-x)=(-x)^2=(-x)(-x)=x^2$$

نو $f(x)=x^2$ یو جفته تابع ده، ځکه چې

$f(-x)=f(x)$ کیږي لکه: $f(-2)=f(2)=4$

لیدل کیږي چې د جفتو تابع ګانو ګرافونه نظر د Y محور ته او د طاقو تابع ګانو ګرافونه نظر د وضعیه کمیاتو مبدا ته سره متناظر دي.





دویم مثال: د $f(x)=x^2-4$ او $g(x)=x^2+3x+2$ په تابع ګانو کې کومه یوه جفته او کومه یوه طاق ده؟

حل:

$$f(-x)=(-x)^2-4=x^2-4=f(x)$$

نو دا تابع جفته ده، په شکل کې هم لیدل کیږي، دوه نقطې د (3,5) او (−3,5) تابع د $x=3$ او $x=-3$ لپاره د تابع قیمت سره مساوي دي چې د (5) عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

یعنې: $f(-3)=f(3)=5$

همدارنګه د $x=2$ او $x=-2$ لپاره د تابع قیمت سره مساوي دی چې صفر دی، نو په نتیجه کې تابع جفته ده.

$$g(x)=(-x)^2+3(-x)+2=x^2-3x+2$$

چې دا تابع نه جفته او نه طاقه ده.

دریم مثال: که f له حقیقي عددونو څخه حقیقي عددونو ته یوه طاقه تابع وي او $f(-2)=k+5$ او $f(2)=2k+3$ وي، د k قیمت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې f یوه طاقه تابع ده، نو: $f(-x)=-f(x)$

د طاقې تابع د تعریف په اساس: $f(-2)=-f(2)$

$$k+5=-(2k+3)$$
$$k+5=-2k-3$$
$$3k=-8$$
$$k=-\frac{8}{3}$$

که د $f(x)$ په تابع کې $x_1<x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1)<f(x_2)$ شي تابع متزایده او که $x_1<x_2$ وي او $f(x_1)>f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده که $f(-x)=f(x)$ وي تابع جفته او که $f(-x)=-f(x)$ شي تابع طاقه ده د جفتو تابع ګانو ګراف نظر د Y محور ته او د طاقو تابع ګانو ګراف نظر د وضعیه کمیاتو مبدأ ته سره متناظر دي.

پوښتنې

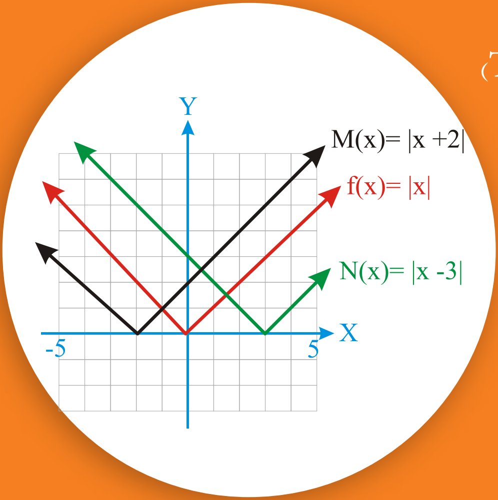
1- د لاندېنیو تابع ګانو څخه کومه یوه یې متزایده، کومه یوه یې متناقصه او کومه یوه نه متزایده او نه متناقصه ده؟

$$f(x)=x^3+x \quad , \quad f(x)=x^2+x \quad , \quad f(x)=x^2-x^4$$

2- د لاندېنیو راکړل شوو تابع ګانو څخه کومه یوه جفته او کومه یوه طاقه ده؟

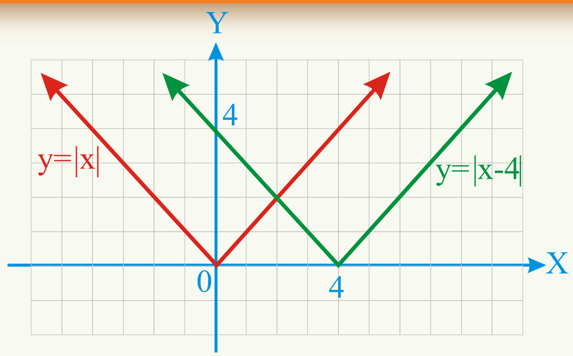
$$f(x)=x \quad , \quad f(x)=|x|$$
$$f(x)=x^4 \quad , \quad f(x)=x^5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ګرافونو انتقال (Translation)

آیا کولای شئ چې ووایئ راکړل شوي ګرافونه یو له بله سره څه اړیکه لري؟



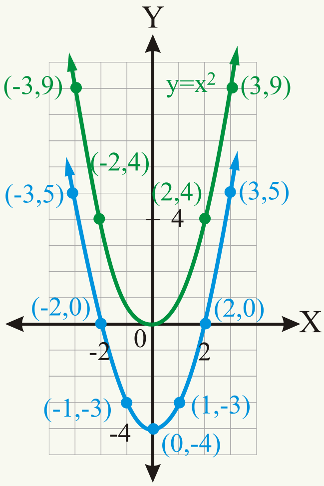
فعالیت

- د $f(x) = x^2$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x) = x^2 + 4$ تابع ګراف رسم کړئ.
- د $f(x) = x^2 - 4$ تابع ګراف رسم کړئ.
- وواياست چې پورتني ګرافونه یو له بله سره څه ډول اړیکه لري؟

که د $f(x) = x^2$ ګراف رسم کړو، ځنګه کولای شو د $f(x) = x^2$ د ګراف له انتقال څخه د $f(x) = x^2 - 4$ تابع ګراف رسم کړو؟

د $y = x^2$ د ګراف د (x, y) د هري نقطې لپاره د $(x, y-4)$ اړونده نقطه د $y = x^2 - 4$ په ګراف واقع ده، نو د $y = x^2$ تابع ګراف هره نقطه د 4 واحدو په اندازه ښکته خواته انتقال کوي تر څو د $y = x^2 - 4$ ګراف لاس ته راشي، لکه: ځنګه چې په شکل کې لیدل کیږي، دا انتقال

(c) ketabton.com: The Digital Library



د عمودي انتقال (Vertical Translation) په نوم يادېږي.
انتقال په دوه ډوله دی: عمودي انتقال او افقي انتقال.

1- عمودي انتقال (Vertical Translation):

عمودي انتقال پورته او يا ښکته خواته وي.

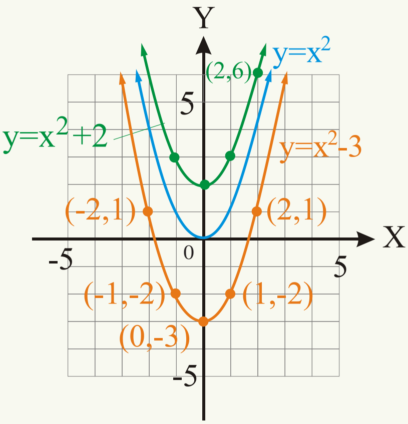
که $c>0$ وي:

1: که د $y=f(x)$ د تابع ګراف د c په اندازه پورته خواته انتقال شوی وي، نو د $y=f(x)+c$ ګراف لاس ته راځي.

2: که د $y=f(x)$ د تابع ګراف د c په اندازه ښکته خواته انتقال شوی وي، نو د $y=f(x)-c$ ګراف لاس ته راځي.

لومړی مثال: د $y=x^2+2$ او $y=x^2-3$ تابع ګانو ګرافونه د $y=x^2$ تابع له ګراف سره څرنګه اړیکه لري؟ درې واړه ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ.

حل: د $y=x^2$ تابع ګراف د (2) واحدو په اندازه پورته خواته انتقالوو، ترڅو د $y=x^2+2$ د تابع ګراف په لاس راشي او که د $y=x^2$ تابع ګراف د (3) واحدو په اندازه ښکته خواته نقل کړو، د $y=x^2-3$ تابع ګراف لاس ته راځي:



$x=$	0	1	2	-1
$y=x^2$	0	1	4	1
$y=x^2+2$	2	3	6	3
$y=x^2-3$	-3	-2	1	-2

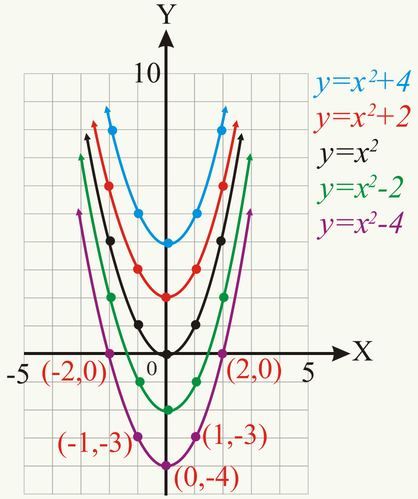
يا عمودي انتقال داسې هم تعريفولای شو:

که د تابع په ګراف کې د y پر ځای $y-a$ وضع کړو داسې چې a يو ثابت عدد دی، نو ګراف د $|a|$ په اندازه په عمودي ډول انتقال کوي که $a>0$ وي، انتقال په عمودي ډول پورته خواته او که $a<0$ وي ګراف د $|a|$ په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $y = x^2$ تابع ګراف له انتقاله څخه د $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 2$ ، $y = x^2 + 4$ او $y = x^2 - 4$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

$y=x^2$		$y=x^2+2$		$y=x^2+4$		$y=x^2-2$		$y=x^2-4$	
x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
0	0	0	2	0	4	0	−2	0	−4
±1	1	±1	3	±1	5	±1	−1	±1	−3
±2	4	±2	6	±2	8	±2	2	±2	0



افقي انتقال: (Horizontal Translation)

که د تابع په ګراف کې د x پر ځای $x - b$ وضع شي چې b یو ثابت عدد دی. د تابع ګراف د $|b|$ په اندازه په افقي ډول انتقال کوي، که $b > 0$ وي ګراف ښي خواته او که $b < 0$ وي، ګراف کیڼې خواته انتقال کوي.

دریم مثال: د $y = x^2$ ګرا ف له انتقال څخه د $y = (x+2)^2$ او $y = (x-3)^2$ ګرافونه رسم کړئ.

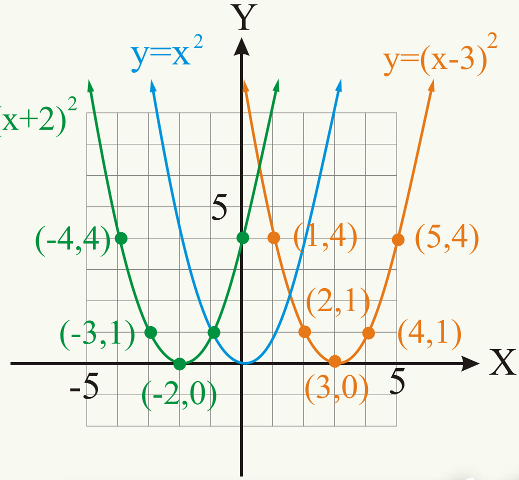
حل: لکه څنګه چې په شکل کې لیدل کیږي که د $y = x^2$ تابع ګراف د 2 واحدو په اندازه کیڼې

(c) ketabton.com: The Digital Library

خواته انتقال کړو، د $y=(x+2)^2$ ګراف لاس ته راځي، که د $y=x^2$ ګراف 3 واحده ښي خواته انتقال کړو، د $y=(x-3)^2$ د تابع ګراف لا س ته راځي، لکه: ځنګه چې په شکل کې هم ليدل کيږي.

x	-2	0	-1	-3	-4	....
$y=(x+2)^2$	0	4	1	1	4	....

x =	3	4	2	5	1	....
$y=(x-3)^2$	0	1	1	4	4	....



فعاليت

د $f(x)=|x|$ تابع ګراف له انتقال څخه د $g(x)=|x+2|$ او $h(x)=|x-3|$ تابع ګانو ګرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم کړئ.

د عمودي او افقي انتقالونو ترکيب:

(Combining Horizontal and Vertical Shifts)

څلورم مثال: د $g(x)=(x+1)^2$ او $h(x)=(x+1)^2-3$ د تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

حل: لومړی د $f(x)=x^2$ تابع ګراف رسموو چې د دويمې درجې تابع د معياري ګراف په نامه يادېږي لومړی د ګراف پر مخ د $(0,0)$ ، $(2,4)$ او $(-2,4)$ درې نقطې ټاکو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

بیا د $g(x)=(x+1)^2$ تابع ګراف رسموو چې د $f(x)=x^2$ د تعریف له ساحې سره د (1) عدد جمع کوو، ترڅو چې د $f(x)=x^2$ ګراف کیڼې خواته د یو واحد په اندازه نقل شي، په دویم شکل کې ښودل شوی دی. په پای کې د $f(x)=(x+1)^2-3$ تابع ګراف د رسمولو لپاره د دویم شکل ګراف د 3 واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقالوو چې ګراف یې په دریم شکل کې ښودل شوی دی:

$f(x)=x^2$

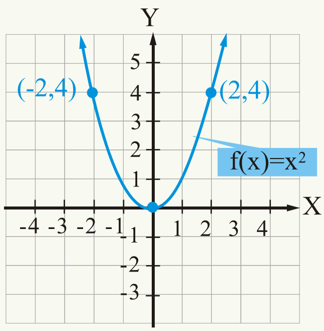
x	0	2	−2
f(x)	0	4	4

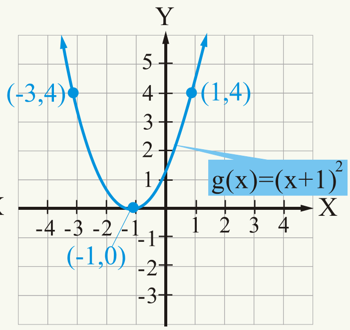
$g(x)=(x+1)^2$

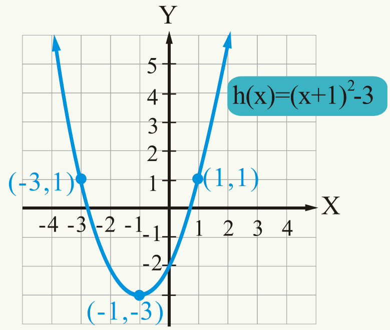
x	−1	1	−3
f(x)	0	4	4

$f(x)=(x+1)^2-3$

x	1	−3	−1
f(x)	1	1	−3

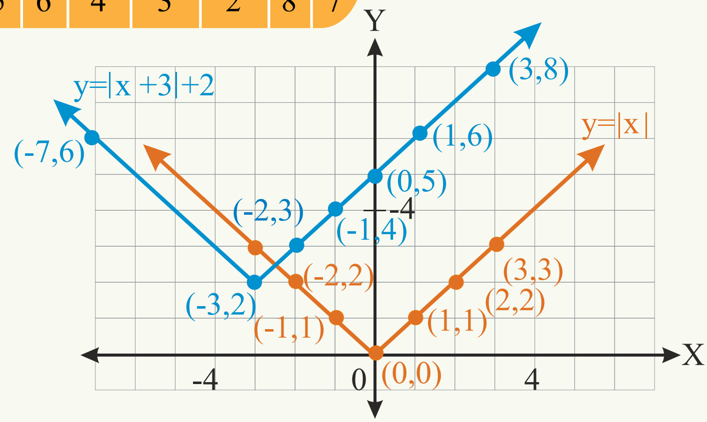






پنځم مثال: د $y=|x|$ تابع ګراف له انتقال کولو څخه د $y=|x+3|+2$ تابع ګراف رسم کړئ.

x	0	1	−1	−2	−3	3	2
$y=\|x\|$	0	1	1	2	3	3	2
$y=\|x+3\|+2$	5	6	4	3	2	8	7



(c) ketabton.com: The Digital Library

انتقال په (2) ډول دی، (عمودي او افقي)

عمودي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

1- که چېرې د $y=f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته انتقال شي، د $y=f(x)+c$ تابع ګراف لاس ته راځي.

2- که د $y=f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال شي د $y=f(x)-c$ تابع ګراف لاس ته راځي.

افقي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

1- که د $y=f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه کیڼې خواته انتقال شي، د $y=f(x+c)$ ګراف لاس ته راځي.

2- که د $y=f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شي، د $y=f(x-c)$ د تابع ګراف لاس ته راځي.

پوښتني

1- د $y=x^2$ تابع ګراف له انتقال څخه د لاندېنیو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

$g(x)=x^2-2$, $g(x)=x^2-1$, $g(x)=(x-2)^2$

2- د $f(x)=\sqrt{x}$ تابع ګراف رسم کړئ او ددې له انتقال څخه د $f(x)=\sqrt{x}+2$ او $f(x)=\sqrt{x+2}$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

3- د $f(x)=|x|$ تابع ګراف رسم کړئ او ددې ګراف له انتقال څخه د $g(x)=|x|+4$, $g(x)=|x+4|$ او $h(x)=|x-4|$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

4- د $f(x)=x^3$ تابع ګراف له انتقال څخه د $g(x)=x^3-3$ او $g(x)=(x-3)^3$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$f(x)=\sqrt{4-x}$$
$$g(x)=\sqrt{3+x}$$
$$(f+g)(x)=?$$

د تابع ګانو عملیې
(Operations on functions)

که $f(x)=x+2$ او $g(x)=2x+11$ وي $(f+g)(x)$ او $(f-g)(x)$ پیدا کولای شی؟

د تابع ګانو څلورګونې عملیې په لاندې ډول تعریف شوي دي:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \qquad (f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x).\,g(x) \qquad (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x)\neq 0)$$

$$\mathrm{dom}\,(f+g)(x)=\mathrm{dom}\ f \cap \mathrm{dom}\,g$$
$$\mathrm{dom}\,(f-g)(x)=\mathrm{dom}\ f \cap \mathrm{dom}\,g$$
$$\mathrm{dom}\,(f\cdot g)(x)=\mathrm{dom}\ f \cap \mathrm{dom}\,g$$
$$\mathrm{dom}\,(\frac{f}{g})(x)=\mathrm{dom}\ f \cap \mathrm{dom}\,g - \{x/g(x)=0\}$$

لومړی مثال: که $f(x)=2x+1$ او $g(x)=x^2-4$ وي، $(f+g)(x)$ پیدا کړئ او هم د دې تابع د تعریف ساحه په لاس راوړئ.

حل:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f+g)(x)=(2x+1)+(x^2-4)=2x-3+x^2=x^2+2x-3$$
$$dom\ g=IR \quad \text{او} \quad dom\ f=IR$$
$$dom(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$$

دویم مثال: که $f(x)=x^2-3$ او $g(x)=4x+5$ وي، $(f+g)(x)$ او $(f+g)(3)$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$(f+g)(x)=(x^2-3)+(4x+5)=x^2+4x+2$$

$$(f+g)(3)=3^2+4(3)+2=9+12+2=23$$

$$\text{dom } g=IR \quad \square \quad \text{dom } f=IR$$

$$\text{dom}(f+g)(x)=IR\cap IR=IR$$

فعالیت

که $f(x)=3x^2+4x-1$ او $g(x)=2x+7$ وي، $(f+g)(x)$ او $(f+g)(4)$ پیدا کړئ.

دریم مثال: که $f(x)=2x-1$ او $g(x)=x^2+x-2$ وي، $(f-g)(x)$ $(f\cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})(x)$ پیدا کړئ او د تعریف ساحې یې هم وټاکئ.

حل

$$(f-g)(x)=(2x-1)-(x^2+x-2)=2x-1-x^2-x+2=-x^2+x+1$$

څرنګه چې $dom\,f=IR$ او $dom\,g=IR$

$$dom(f-g)(x)=IR\cap IR=IR$$

$$(f\cdot g)(x)=(2x-1)(x^2+x-2)=2x^3+x^2-5x+2$$

$$dom(f\cdot g)(x)=IR\cap IR=IR$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{2x-1}{x^2+x-2}=\frac{2x-1}{(x+2)(x-1)}$$

$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x)=IR\cap IR-\{x/g(x)=0\}$$

$$\text{dom}(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\neq -2 \text{ او } x\neq 1\}$$

فعالیت

که $f(x)=x-5$ او $g(x)=x^2-1$ وي، نو $(\frac{f}{g})(x)$ ، $(f\cdot g)(x)$ او $(f-g)(x)$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم مثال: که $f(x)=x+3$ او $g(x)=x-1$ وي، $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ او $(\frac{f}{g})(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x+3-(x-1)=x+3-x+1=4$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(x+3)(x-1)=x^2+2x-3$$

څرنګه چې د $f(x)$ د تعریف په ساحه کې ټول حقیقي عددونه شامل دي (x هر حقیقي عدد اخیستلای شي) یا $dom\ f=IR$ په همدې ډول: $dom\ g=IR$

$$dom(f-g)(x)=IR\bigcap IR=IR$$
$$dom(f\cdot g)(x)=IR\bigcap IR=IR$$

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x+3}{x-1}\quad(x\neq 1)$$
$$dom(\frac{f}{g})(x)=IR-\{1\}$$

یا
$$dom(\frac{f}{g})(x)=\{x\in IR/x\neq 1\}$$

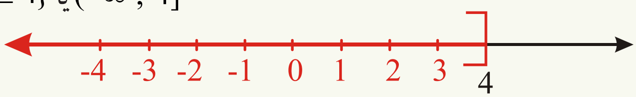
یا
$$dom(\frac{f}{g})(x)=(-\infty,1)\bigcup(1,\infty)$$

پنځم مثال: که $f(x)=\sqrt{4-x}$ او $g(x)=\sqrt{3+x}$ وي، $f+g$, $f-g$ $f\cdot g$ او $\frac{f}{g}$ پیدا کړئ او د تعریف ناحیه (Domain) یې وټاکئ.

حل:

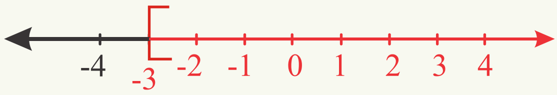
$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{4-x}+\sqrt{3+x}$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{4-x}-\sqrt{3+x}$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=(\sqrt{4-x})(\sqrt{3+x})=\sqrt{(4-x)(3+x)}$$
$$=\sqrt{12+x-x^2}$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3+x}}=\sqrt{\frac{4-x}{3+x}}$$

$dom\,f:\{4-x\geq 0\ ,\ x\leq 4\}$ یا $(-\infty\ ,\ 4]$



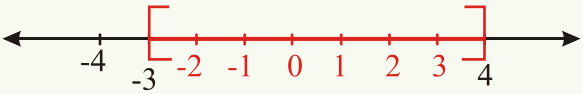
(c) ketabton.com: The Digital Library

$\mathrm{dom}\, g : \{x / 3 + x \geq 0 , x \geq -3\}$ یا $[-3 , \infty)$

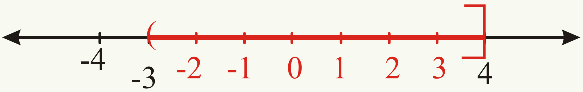


$(-\infty , 4] \cap [-3 , \infty) = [-3 , 4]$

چې $[-3,4]$ د $f+g$, $f-g$ او $f \cdot g$ د تابع ګانو د تعریف ساحه ده.



د $dom\dfrac{f}{g}$ د تعریف په ناحیه کې څرنګه چې $g(-3)=0$ دی، نو: $Dom\dfrac{f}{g} = (-3 , 4]$



له ثابت عدد سره د تابع د ضرب حاصل

که c یو ثابت عدد او f یوه تابع وي، نو حاصل ضرب یې عبارت دی له:

$(c\, f)(x) = c \cdot f(x)$

شیږم مثال: که $f(x) = x^2 - x + 2$ او $c = 5$ وي.

$(5\ f)(x) = 5 \cdot f(x) = 5(x^3 - x + 2) = 5x^3 - 5x + 10$

پوښتنې

لاندې تابع ګانې په پام کې ونیسئ .

1 - $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ او $(\dfrac{f}{g})x$ پیداکړئ.

2- د تعریف ناحیې یې وټاکئ.

$a: f(x) = 2x + 3$ ، $g(x) = x - 1$ ، $b: f(x) = x - 5$ ، $g(x) = 3x^2$

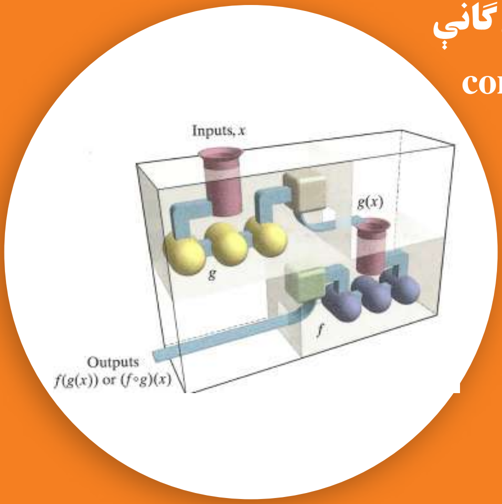
$c: f(x) = 2x^2 - x - 3$ ، $g(x) = x + 1$ ، $d: f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = x - 5$

$e: f(x) = \sqrt{x+4}$ ، $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، $f: f(x) = \sqrt{3x}$ ، $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تابع ګانو ترکیب یا مرکبې تابع ګاني

composition of functions or composite functions



فعالیت

- که $f(x)=x^2-2$ او $g(x)=x+3$ وي، $(f\,o\,g)(x)$ او $(g\,o\,f)(x)$ پیدا کړئ.
- په کوم حالت کې $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)$ وي.
- $(f\,o\,f)(x)$ او $(g\,o\,g)(x)$ پیدا کړئ.

که چیرې f او g د x تابع ګاني وي د f ترکیب له g سره د $(f\,o\,g)(x)$ یا $f(g(x))$ سره ښودل کیږي $(f\,o\,g)(x)=f(g(x))=f[g(x)]$

د $(f\,o\,g)(x)$ د تعریف ساحه عبارت له x څخه ده چې x د g د تعریف په ساحه کې او $g(x)$ د f د تعریف په ساحه کې شامل وي.

یا: د (f o g) تعریف ساحه: $\text{Dom}(fog)x=\{x\in IR / x\in \text{dom}\,g, g(x)\in \text{dom}\,f\}$

1- چې x د g د تعریف په ساحه کې شامل وي.

2- $g(x)$ د f د تعریف په ساحه کې شامل وي.

په پورتني شکل کې $(f\,o\,g)(x)$ تابع د دوو ماشینو په واسطه ښودل شوي ده چې په لومړي ماشین کې ورودي x ، (in put) دی او خروجي (output) یې g(x) ده، په دویم ماشین کې (input) یې $g(x)$ او (output) یې $(fog)(x)$ دی. که g(x) د f د تعریف په ساحه کې شامل نه وي، نو په دویم ماشین (f) کې داخلیدلای نه شي.

$$x \xrightarrow{g} \boxed{g(x)} \xrightarrow{f} f(g(x))$$

$$x \xrightarrow{f} \boxed{f(x)} \xrightarrow{g} g(f(x))$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: که $f(x)=x^2-1$ او $g(x)=3x$ وي $(f o g)(x)$ او $(g o f)(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f o g)(x)=f(g(x))=f(3x)=(3x)^2-1=9x^2-1$$
$$(g o f)(x)=g((f(x))=g(x^2-1)=3(x^2-1)=3x^2-3$$

لیدل کېږي چې:

$$(f o g)(x)\neq(g o f)(x)$$
$$9x^2-1\neq 3x^2-3$$

دویم مثال: که $f(x)=3x-4$ او $g(x)=x^2+6$ وي $(f o g)(x)$ او $(g o f)(x)$ پیدا کړئ.

حل: په حقیقت کې په $(f o g)(x)$ کې د $g(x)$ تابع د f په تابع کې د (Domain) یا x ځای نیسي

$$f(g(x))=f(x^2+6)=3(x^2+6)-4=3x^2+18-4=3x^2+14$$
$$g(f(x))=(g o f)(x)=g(3x-4)=(3x-4)^2+6=9x^2-24x+22$$

ښکاره خبره ده چې د $(f o g)(x)$ او $(g o f)(x)$ د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

فعالیت

که $f(x)=x+6$ او $g(x)=x-6$ وي، وښیاست چې $(f o g)(x)=(g o f)(x)$ دی.

دریم مثال: که $g(x)=1-x$ او $f(x)=\sqrt{x}$ وي:

لومړی د fog او gof د تعریف ساحې پیدا کړئ، بیا $f o g$ او gof په لاس راوړئ.

حل: د f تابع د تعریف ساحه $[0,\infty)$ او د g تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه $(-\infty,\infty)$ دي.

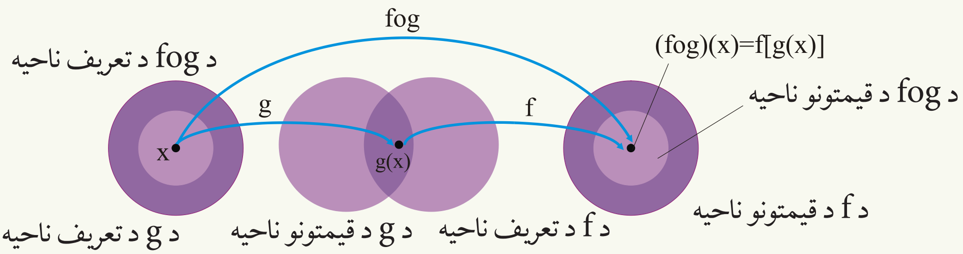
یا: $\text{Domf}=[0,\infty)$ $\qquad$ $\text{Domg}=(-\infty,\infty)$

یا: $\text{Dom}(fog)=\{x / x\in \text{domg}\ ,\ g(x)\in \text{domf}\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$Dom(fog)=\{x/x\in IR\ ,\ 1-x\geq 0\}\ ,-x\geq -1\Rightarrow\ x\leq 1=(-\infty,1]$$
$$Dom\,(g\,o\,f)=\{x/x\in dom\,f\,,f(x)\in dom\,g\}=\{x/x\geq 0\,,\sqrt{x}\in IR\}=(0,\infty]$$
$$(f\,o\,g)(x)=f(1-x)=\sqrt{1-x}$$
$$(g\,o\,f)(x)=g(\sqrt{x})=1-\sqrt{x}$$

د مرکبو تابع گانو د تعریف د ساحې د لا روښانتیا لپاره لاندې شکل وګورئ.



خلورم مثال:که $h(x)=\sqrt{3x^2+1}$ وي، په دوو طریقو سره وښیاست چې د $h(x)$ تابع د کومو دوو تابع ګانو له ترکیب څخه په لاس راغلې ده؟

حل: د $h(x)$ تابع کولای شو د $(g\,o\,f)(x)$ او $(jok)(x)$ دوو تابع ګانو د ترکیب په شکل ولیکو.

په دې ډول که: $f(x)=3x^2+1$ او $g(x)=\sqrt{x}$ وي.

$$(g\,o\,f)(x)=g\big(f(x)\big)=g(3x^2+1)=\sqrt{3x^2+1}$$

په همدې ډول کولای شو د $h(x)$ تابع د $(jok)(x)$ د دوو تابع ګانو د ترکیب په شکل ولیکو. په دې ډول چې: $j(x)=\sqrt{x+1}$ او $k(x)=3x^2$ وي.

$$(j\,o\,k)(x)=j\big(k(x)\big)=j(3x^2)=\sqrt{3x^2+1}$$

پنځم مثال:که $f(x)=\dfrac{x}{x+2}$ ، $(x\neq -2)$ وي، $f(f(x))$ $(f\,o\,f)(2)$ او $(fo\,fo\,f)(x)$ پیدا کړئ.

حل:

$$(f\,o\,f)(x)=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{x}{x+2}+2}=\frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{x+2x+4}{x+2}}=\frac{x}{x+2}\cdot\frac{x+2}{3x+4}=\frac{x}{3x+4}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$(fof)(2) = ? \quad (fof)(x) = \frac{x}{3x+4} \Rightarrow (fof)(2) = \frac{2}{3\cdot 2+4} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

$$(fofof)(x) = \frac{\frac{x}{x+2}}{3(\frac{x}{x+2})+4} = \frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x}{x+2}+4} = \frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{3x+4x+8}{x+2}}$$

$$= \frac{x}{x+2}\cdot\frac{x+2}{7x+8} = \frac{x}{7x+8}$$

فعاليت

که $f(x) = x^2 - 2$ او $g(x) = x+3$ وي، $(f\,o\,g)(x)$ ، $(g\,o\,f)(x)$ ، $(g\,o\,f)(-2)$ او $(fog)(3)$ پیدا کړئ.

پوښتنې

1- که $f(x) = -3x+2$ او $g(x) = x^3$ وي:

$(\frac{g}{f})(x)$ ، $(f\cdot g)(x)$ ، $(g-f)(x)$ ، $(f-g)(x)$ ، $(f+g)(x)$ پیدا او د تعریف ساحې یې هم وټاکئ.

2- که $f(x) = x^2 - 3$ او $g(x) = \sqrt{x-3}$ وي، $(f\cdot g)(x)$ ، $(\frac{f}{g})(x)$ او $(\frac{g}{f})(x)$ پیدا کړئ.

3- که $f(x) = x^2+1$ ، $g(x) = \frac{1}{x}$ ، $h(x) = \sqrt{4-x^2}$ او $k(x) = \sqrt{3x+4}$ وي، د $(f\cdot g)(x)$ ، $(\frac{f}{g})(x)$ ، $(h\cdot k)(x)$ او $(\frac{h}{k})(x)$ تابع ګانو د تعریف ساحې پیدا کړئ.

4- که $f(x) = 3x-2$ ، $g(x) = x^2$ وي $(g\,o\,f)(3)$ او $(f\,o\,g)(1)$ پیدا کړئ.

5- که $f(x) = \sqrt{x}$ او $g(x) = \sqrt{2-x}$ وي، $f\,o\,g$ $g\,o\,f$ او $f\,o\,f$ پیدا کړئ.

6- که $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ، $g(x) = x^{10}$ او $h(x) = x+3$ وي $(f\,o\,goh)(x)$ پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

معکوسه تابع (Inverse Function)

فعالیت

- په شکل کې د دواړو تابع گانو ترمنځ کومه اړیکه شتون لري؟
- آیا د هرې تابع معکوس، هم یوه تابع وي؟
- که د یوې تابع معکوس هم یوه تابع وي، داسې تابع په څه نامه یادیږي؟
- که $f=\{(1,2)(3,5)(6,7)\}$ او $g=\{(2,1)(5,3)(7,6)\}$ وي آیا د g تابع د f معکوسه تابع ده او که نه؟ ولې؟
- که $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)$ وي، آیا g د f تابع معکوسه تابع ده؟

په پورتني شکل کې یو ترمامیتر لیدل کیږي او پوهیږو چې د سانتي گریډ او فارنهایټ د تودوخې د درجو ترمنځ د $f=\frac{9}{5}c+32$ اړیکه شته دی، که دا معادله د (c) له پاره حل شي لرو چې:

$$f=\frac{9}{5}c+32 \Rightarrow f-32=\frac{9}{5}c+32-32$$

$$\Rightarrow \frac{5}{9}(f-32)=\frac{5}{9}(\frac{9}{5}c)$$

$$c=\frac{5}{9}(f-32)$$

د c تابع د f معکوسه تابع ده.

د (x,y) رابطې معکوس له (y,x) څخه عبارت ده چې د معکوسې تابع د تعریف ساحه د تابع

(c) ketabton.com: The Digital Library

د قيمتونو د ساحې او د معکوسې تابع د قيمتونو ساحه، د تابع د تعريف له ساحې څخه عبارت ده.

$$\text{domain}\, f^{-1} = \text{Range}\, f \quad \text{او} \quad \text{Range}\, f^{-1} = \text{dom}\, f$$

د f د تابع معکوس په f^{-1} ښودل کېږي، پام مو وي چې: $(f^{-1}(x) \neq \dfrac{1}{f(x)})$

لومړی مثال: که $f(x) = \{(1,5)(3,7)(8,-10)\}$ وي.

نو $f^{-1}(x) = \{(5,1)(7,3)(-10,8)\}$ ده. ځکه چې:

$$f(3) = 7 \qquad f^{-1}(7) = 3$$
$$f(1) = 5 \qquad f^{-1}(5) = 1$$
$$f(8) = -10 \qquad f^{-1}(-10) = 8$$

نو $f^{-1}(x)$ هم يوه تابع ده.

خو که $f(x) = \{(1,2)(3,2)(4,5)\}$ وي، $f^{-1}(x) = \{(2,1)(2,3)(5,4)\}$ ده.

ليدل کېږي چې $f^{-1}(x)$ يوه تابع نه ده، ځکه د $x = 2$ لپاره دوه مختلف تصويرونه په (Range) کې وجود لري. $f(2) = 1$ او $f(2) = 3$.

نو د هرې تابع معکوس يوه تابع نه وي، يا په بل عبارت هره تابع معکوس منونکې نه وي.

څه وخت چې يوه تابع د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوې وي، که د لومړيو او دويمو عناصر ځايونه يې يو تر بله تبديل کړو، هغه رابطه چې لاسته راځي، د لومړنۍ تابع معکوسه ده، هغه تابع چې معکوس يې هم تابع وي، نو تابع معکوس منونکې ده.

دويم مثال: آيا د f او g تابع ګانې چې په لاندې ډول د مرتبو جوړو په شکل راکړل شوې دي معکوس منونکې دي که نه؟

$$f = \{(1,2), (-2,3), (3,1), (0,-1)\} \quad g = \{(2,4), (3,1), (0,2), (5,1)\}$$

حل: که د مرتبو جوړو د لومړنيو او دويمو عناصرو ځايونه يو تر بله تبديل شي، نو لرو چې:

$$f^{-1} = \{(2,1), (3,-2), (1,3), (-1,0)\}$$

ليدل کېږي چې f^{-1} يا د f تابع معکوس هم يوه تابع ده، ځکه چې د f^{-1} د مرتبو جوړو لومړني عناصر تکرار شوي نه دي. او $g^{-1} = \{(4,2), (1,3), (2,0), (1,5)\}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې g^{-1} یا د $g(x)$ معکوس تابع نه ده، ځکه د $x=1$ لپاره دوه قیمتونه د 3 او 5 وجود لري، نو د g تابع معکوس منونکی تابع نه ده.

په لنډ ډول څرګنده چې f یو په یو تابع ده، نو معکوس منونکي هم ده او د g تابع چې یو په یو تابع نه ده، نو معکوس منونکي هم نه ده.

نتیجه: یوازې د یو په یو تابع معکوس هم یوه تابع وي.

یو په یو تابع (one-to-one function)

د $f(x)$ تابع یوه یو په یو تابع ده که چېرې $x_1 \neq x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) \neq f(x_2)$ شي.

یا : $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ او که $a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$

که یوه تابع یو په یو وي، نو معکوس یې هم یوه تابع ده.

دریم مثال: که $f(x) = -4x + 12$ او $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$ وي، وښیاست چې کومه یوه له دې تابع ګانو څخه یو په یو تابع ده؟

حل:که $a \neq b$ وي، $-4a + 12 \neq -4b + 12$ دی.

نو $f(x)$ یوه یو په یوتابع ده.

د مثال په ډول: که $x = 2$ وي:

$$f(2) = -4(2) + 12 = -8 + 12 = 4$$

که $x = 3$ وي:

$$f(3) = -4(3) + 12 = -12 + 12 = 0$$

$$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$$

$$2 \neq 3 \Rightarrow 4 \neq 0$$

نو $f(x)$ یو په یو تابع ده. او $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$ لپاره:

که $x = 3$ وي.

$$g(3) = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

که $x = -3$ وي.

$$g(-3) = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

$f(3) = f(-3)$ لیکن $3 \neq -3$ نو $g(x)$ یو په یو تابع نه ده.

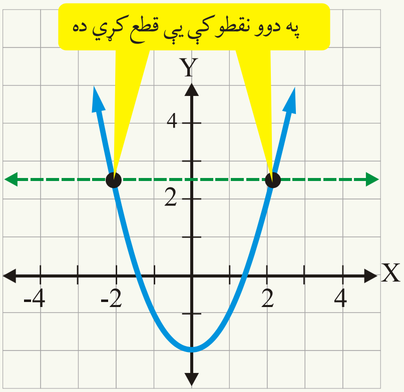
فعالیت

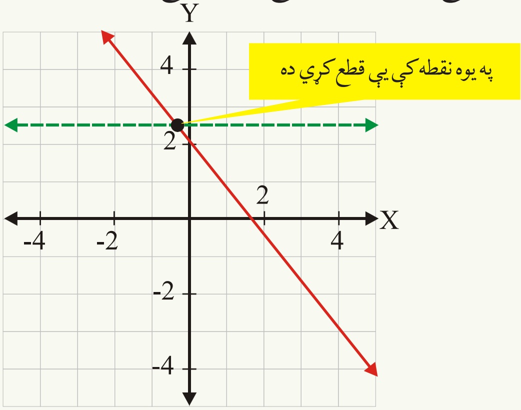
که $f(x) = 3x + 8$ او $g(x) = x^2$ وي، وښیاست چې کومه یوه تابع یو په یو تابع ده او کومه یوه تابع یو په یو تابع نه ده؟ ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ګراف له مخې د یو په یو تابع پېژندنه: که یو افقي خط چې د x له محور سره موازي وي د تابع ګراف په یوه نقطه کې قطع کړي، دا یو په یو تابع ده، که افقي خط د تابع ګراف له یوې نقطې څخه په زیاتو نقطو کې قطع کړي، نو داګراف د یو په یو تابع ګراف نه دی.

څلورم مثال: په راکړل شوو شکلونو کې لیدل کېږي چې د x له محور سره موازي خط لومړنی تابع ګراف په یوه نقطه کې او د دویمي تابع ګراف یې په دوو نقطو کې قطع کړی دی، نو لومړنی تابع یو په یو تابع ده، خو دویمه تابع یو په یو تابع نه ده.





د معکوسي تابع تعریف: که f یوه یو په یو تابع وي چې د تعریف ساحه یې x او د قیمتونو ساحه یې y ده، نو د g تابع د f د تابع معکوسه تابع ده، که د g د تعریف ساحه y او د قیمتونو ساحه یې x وي او یا د g تابع په هغه صورت کې د f د تابع معکوسه ده که چېرې:

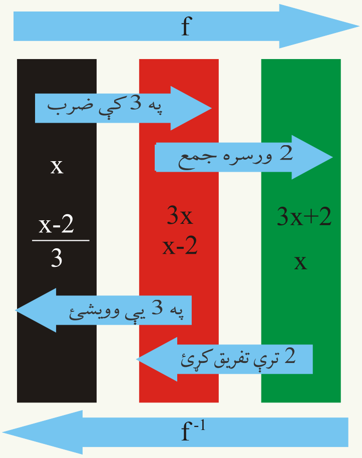
$$(f \circ g)(x) = x$$
$$(g \circ f)(x) = x$$
$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$$

پنځم مثال: که $f(x) = 3x + 2$ وي، د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع $f^{-1}(x)$ پیداکړئ.

حل:

$$y = f(x) = 3x + 2$$
$$x = 3y + 2$$
$$3y = x - 2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



$$y=\frac{x-2}{3}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x-2}{3}=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$$

$$f(f^{-1}(x))=f^{-1}(f(x))=x$$

دا مثال په لنډ ډول په شکل کې هم ښودل شوی دی.

له بلې خواکه $f^{-1}(x)$ په $g(x)=\frac{x-2}{3}$ سره وښودل شي، $(f\,o\,g)(x)=(g\,o\,f)(x)=x$ دی.

ځکه چې:

$$(f\,o\,g)(x)=3(\frac{x-2}{3})+2=x-2+2=x$$

$$(g\,o\,f)(x)=\frac{3x+2-2}{3}=\frac{3x}{3}=x$$

يا: $f^{-1}(f(x))=x$ او $f(f^{-1}(x))=x$

شپږم مثال: که $f(x)=x^3+1$ وي $f^{-1}(x)$ او که $g(x)=x^2$ وي $g^{-1}(x)$ پيدا کړئ.

حل:

$$y=x^3+1$$

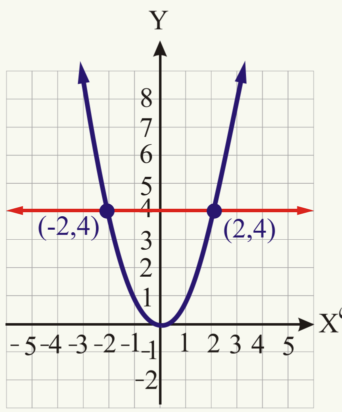
$$x=y^3+1 \qquad \Rightarrow y^3=x-1 \Rightarrow y=\sqrt[3]{x-1}$$

که y په $f^{-1}(x)$ سره وښيو، نو $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}$

$$g(x)=x^2 \Rightarrow y=x^2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{y}$$

x پر y او y پر x بدلوو.

$g^{-1}(x)=\pm\sqrt{x}$ يا $y=\pm\sqrt{x}$



ليدل کېږي چې $g^{-1}(x)$ يوه تابع نه ده، ځکه چې که $x=2$ او يا $x=-2$ وي، $g(-2)=4$ او $g(2)=4$ کېږي شکل وګورئ نو د g(x) تابع معکوس پذيره نه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم مثال: د x د کوم قیمت لپاره د $f(x)=5x-2$ تابع له خپل معکوس سره مساوي کېږي؟

حل: که $y=5x-2$ وي، نو معکوس یې

$$x=5y-2\Rightarrow \qquad 5y=x+2$$

$$y=\frac{x+2}{5} \qquad f^{-1}(x)=\frac{x+2}{5}$$

$$\frac{x+2}{5}=5x-2\Rightarrow \qquad 24x=12$$

$$x=\frac{1}{2}$$

نو د $x=\frac{1}{2}$ په قیمت سره د $f(x)$ تابع له خپلې معکوسې تابع سره مساوي کېږي.

اتم مثال: وښیاست چې د $f(x)=7x-2$ او $g(x)=\frac{1}{7}x+\frac{2}{7}$ تابعګانې یو د بل معکوسې تابع ګانې دي.

حل:

$$(f\,o\,g)(x)=f(g(x))=f(\frac{1}{7}x+\frac{2}{7})=7(\frac{1}{7}x+\frac{2}{7})-2=x$$

$$(g\,o\,f)(x)=f(g(x))=g(7x-2)=\frac{1}{7}(7x-2)+\frac{2}{7}=x$$

نو د $f(x)$ او $g(x)$ تابع ګانې یو د بل معکوسې تابعګانې دي، نو نتیجه کېږي چې د تابع او د تابع د معکوسې تابع ترکیب د عینیت $\left(f(x)=x\right)$ تابع ده.

فعالیت

که $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$ وي، $f^{-1}(x)$ پیدا کړئ او هم وښیاست چې $(f\,o\,f^{-1})(x)=x$ کېږي.

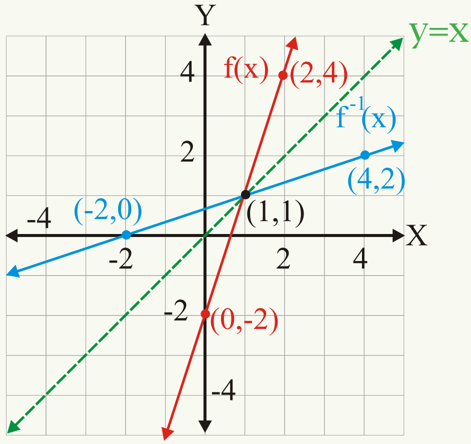
د تابع او دهغې د معکوسې تابع ګراف: د $f(x)$ د یو په یو تابع او د هغې د معکوسی تابع $f^{-1}(x)$ د ګرافونو ترمنځ یوه رابطه موجوده ده، څکه که چېرې (a,b) د $f(x)$ تابع د ګراف پر مخ یوه نقطه وي، نو د (b,a) نقطه د $f^{-1}(x)$ تابع د ګراف پرمخ واقع ده چې (a,b) او (b,a) نقطې له نظره د $y=x$ خط ته سره متناظرې دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم مثال: که $f(x)=3x-2$ وي، نو ښکاره ده چې $f^{-1}(x)=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ د $f(x)$ معکوسه تابع ده. د دواړو تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ چې ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.

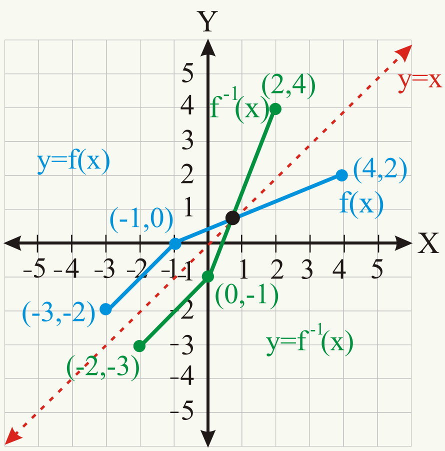
x	0	1	2
$f(x)$	-2	1	4

x	-2	1	4
$f^{-1}(x)$	0	1	2



لیدل کېږي چې د دواړو تابع ګانو ګرافونه نظر د $y = x$ خط ته سره متناظر دي.

لسم مثال: که $f(x)$ د $(-3,-2),(-1,0)$ او $(4,2)$ مرتبو جوړو لرونکې وي د $f(x)$ او $f^{-1}(x)$ د تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ او وښیاست چې دواړه ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

ليدل کېږي چې د f (x) او $f^{-1}(x)$ تابع ګانو ګرافونه نظر د y=x خط ته سره متناظر دي.

- د يو په يو تابع معکوس هم يوه تابع ده.
- د X له محور سره موازي خط (افقي خط) د يو په يو تابع ګراف په يوه نقطه کې قطع کوي.
- د $y=f(x)$ تابع د معکوس د پيدا کولو لپاره د تابع معادله د x لپاره حلوو، بيا x پر y او y پر x بدلوو په لاس راغلې تابع $y=f^{-1}(x)$ ده چې د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع ده.
- د $f(x)$ د تابع او د $f(x)$ د معکوسې تابع ګرافونه نظر د $y=x$ خط ته سره متناظر دي.
- $dom\, f(x)=Range\, f^{-1}(x)$ او $Range\, f(x)=dom\, f^{-1}(x)$ دي.

پوښتنې

1- د لاندېنيو تابع ګانو معکوس پيدا کړئ او ووايئ چې د کومې تابع معکوس هم يوه تابع ده؟

$$f=\{(-1,0),(-2,1),(4,3),(3,4)\} \quad h=\{(1,4),(2,3),(4,1)\}$$
$$g=\{(1,2),(2,3),(3,2),(4,1)\} \quad k=\{(3,0),(2,-1),(1,2),(0,1),(-1,2)\}$$

2 – د لاندېنيو هرې يوې تابع معکوسه تابع پيدا کړئ او د خپل ځواب صحت د $f(f^{-1}(x))=x$ سره وازمايئ.

$$f(x)=x+3 \qquad f(x)=2x \qquad f(x)=2x+3$$
$$f(x)=x^3+2 \qquad f(x)=(x+2)^3 \qquad f(x)=\frac{1}{x}$$

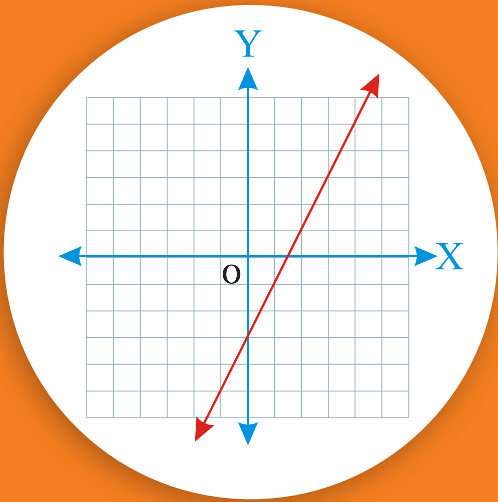
3 – د لاندېنيو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ او د X له محور سره د موازي خط (افقي خط) په واسطه وښياست چې ددوی معکوس هم يوه تابع ده.

$$f(x)=1-x^2 \qquad g(x)=\frac{7-2x}{5}$$

4 – له لاندېنيو تابع ګانو څخه کومه يوه يو په يو تابع ده.

$$y=\frac{1}{x+2} \qquad y=9 \qquad y=(x-2)^2 \qquad y=6-x \qquad y=4x-5$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



پولینومي تابع ګاني

- آیا پوهېږئ چې لومړي درجې تابع ته ولې خطي تابع وايي؟
- آیا د لومړي درجې تابع ګراف یو مستقیم خط دی؟

پولینومونه مو په لومړي فصل کې تر څېړنې لاندې ونیول. هغه پولینوم چې له یوه توري (متحول) څخه جوړ شوي وي د پولینومي تابع په نامه يادېږي.

خطي تابع (Liner function) یا لومړۍ درجه تابع

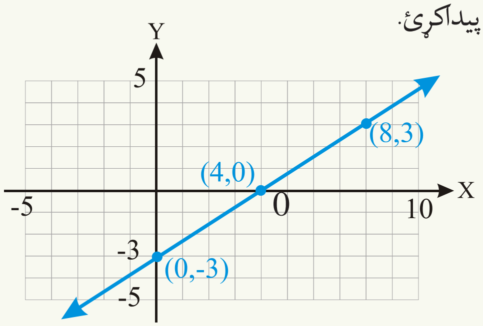
هغه پولینومي تابع ده چې درجه يې يوه وي، د لومړي درجې تابع عمومي شکل $f(x)=ax+b$ دی چې $a\neq 0$ او b , a حقیقي عددونه دي.

د مثال په ډول: $f(x)=3x+4$, $f(x)=x-1$, $f(x)=2x$ او $f(x)=\frac{1}{2}x$ خطي تابع ګاني دي.

لومړی مثال: د $f(x)=\frac{3}{4}x-3$ تابع ګراف رسم کړئ او د X او Y له محورونو سره د ګراف د تقاطع نقطې پیداکړئ.

$f(x)=\frac{3}{4}x-3$

x =	8	4	0
f(x)	3	0	−3



د X له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه (4 ,0) او د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه (0,−3) ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیدل کېږي چې د لومړۍ درجې تابع ګراف یو مستقیم خط دی او له همدې سببه ورته خطي تابع هم وايي، د خطي تابع د ګراف د رسمولو لپاره همدومره کافي ده چې د X او Y له محورونو سره يې د تقاطع ټکي پيدا کړو او مستقیم خط رسم کړو، لکه: چې په شکل کې ليدل کېږي.

فعالیت

د $y = f(x) = x + 1$ او $y = x - 1$ تابع ګانو ګراف رسم او د X او Y له محورنو سره يې د تقاطع د نقطو وضعيه کميات هم پيدا کړئ.

دويم مثال: د $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$ خطي تابع ګراف رسم کړئ.

حل: د Y له محور سره د ګراف د تقاطع په نقطه کې $(x = 0)$ دی، نو:

$$f(0) = \frac{2}{3}(0) + 2 = 2$$

نو د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه $(0,2)$ ده.

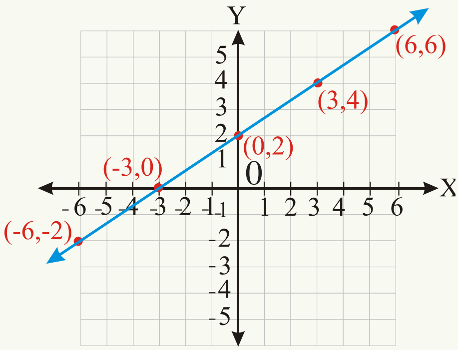
او د X له محور سره د ګراف د تقاطع په نقطه کې د y يا f (x) قيمت صفر دی $f(x) = 0$

$$0 = \frac{2}{3}x + 2 \Rightarrow x = -3$$

نو د X له محور سره د ګراف د تقاطع ټکی $(-3,0)$ دی.

د $(0\ ,\ 2)$ او $(-3\ ,\ 0)$ نقطې يو له بله سره نښلوو او مستقیم خط رسموو او هم کولای شو چې د ګراف يو څو نورې نقطې وټاکو چې پر همدې مستقیم خط باندې پرتې دي.

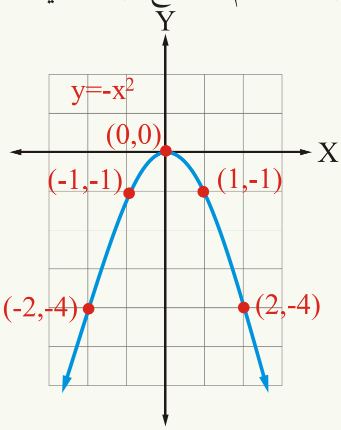
x =	0	3	−3	6	−6	...
f(x) =	2	4	0	6	−2	...

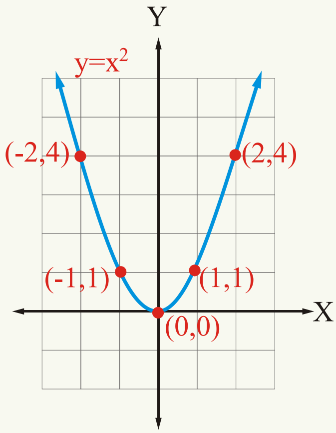


(c) ketabton.com: The Digital Library

دویمه درجه تابع (Quadratic Function) او ګراف یې:

دا ګرافونه د کوم ډول تابع ګرافونه دي؟





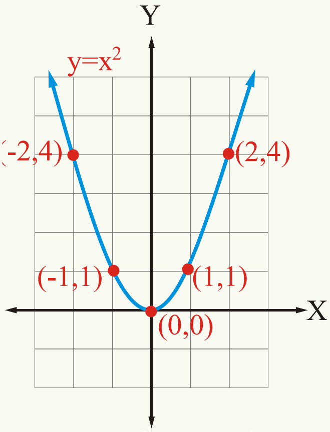
- دا دواړه ګرافونه سره څه توپیر لري؟
- له $f(x)=x^2+7x+12$ ، $g(x)=x^2+1$ ، $h(x)=x^2+3x$ ، $k(x)=x^2$ او $r(x)=2x-1$ څخه کومه یوه یې دویمه درجه تابع نه ده؟

هغه پولینومي تابع چې درجه یې یوه وي، لومړی درجه یا د خطي تابع (Liner Function) په نامه یادېږي او که د پولینومي تابع درجه (2) وي، د دویمي درجې تابع په نوم یادېږي.

فعالیت

- د دویمي درجې تابع ګراف په کوم نوم یادېږي؟
- د دویمي درجې تابع د ګراف د تناظر محور کوم خط دی؟
- د دویمي درجې تابع ګراف څه وخت پورته خواته او کوم وخت ښکته خواته خلاصېږي؟
- د دویمي درجې تابع د ګراف رأس په کوم وخت کې اصغري (Minimum) او په کوم وخت کې اعظمي (Maximum) دی؟
- آیا د دویمي درجې تابع ګراف د رأس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کولای شي؟
- په کوم حالت کې د دویمي درجې تابع ګراف د X او Y محورونه قطع کولای شي؟
- آیا د X او Y له محورونو سره د دویمي درجې تابع د ګراف د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیدا

(c) ketabton.com: The Digital Library



x	0	1	2	-1	-2
y	0	1	4	1	4

کولای شئ؟

د دويمي درجې تابع عمومي شکل $f(x)=ax^2+bx+c$ دی چې b ، a او c حقيقي عددونه او $a\neq 0$ دی.

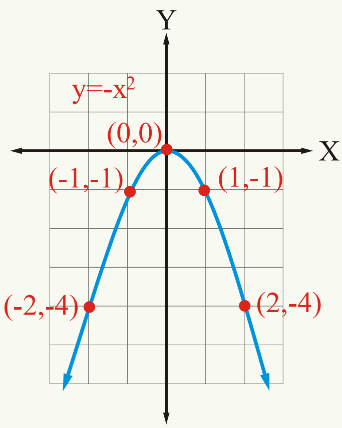
د دويمي درجې تابع ګراف: ترټولو ساده دويمه درجه تابع د $f(x)=y=x^2$ تابع ده چې $a=1$ او $b=c=0$ که x ته يو څو قيمتونه ورکړل شي د تابع يا y اړونده قيمتونه لاس ته راوړلای شو، ګراف يې رسم کېدای شي لکه: څنګه چې په شکل کې ليدل کېږي.

دويمې درجې تابع ګراف د پارابولا (Parabola) په نوم يادېږي چې داګراف نظر د y محور ته متناظر دی، هغه خط چې د پارابول له رأس څخه تېر شي او د y له محور سره موازي وي، د تناظر د محور په نامه يادېږي چې د y محور ددې تابع د ګراف د تناظر محور دی. هغه نقطه چې د تناظر محور په کې ګراف قطع کوي، د پارابول د رأس (Vertex) په نامه يادېږي. که a>0 وي، د پارابول خوله پورته خواته خلاصېږي او د ګراف د رأس ټکی اصغري دی د $y=x^2$ د تابع ګراف د $(-\infty,0)$ په انټروال کې متناقص او د $(0,\infty)$ په انټروال کې ګراف متزايد دی.

لومړی مثال: د $y=-x^2$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

د پارابول خوله ښکته خواته خلاصېږي، ځکه چې $a<0$ دی، د $(-\infty,0)$ په انټروال کې ګراف متزايد او د $(0,\infty)$ په انټروال کې ګراف متناقص دی.



x	0	1	-1	2	-2
y	0	-1	-1	-4	-4

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $y = x^2 + 4$ تابع ګراف رسم کړئ.

دویم مثال: د $f(x) = x^2$ ، $g(x) = 2x^2$ او $h(x) = \frac{1}{2}x^2$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او یو له بله سره یې پرتله کړئ.

$g(x) = 2x^2$

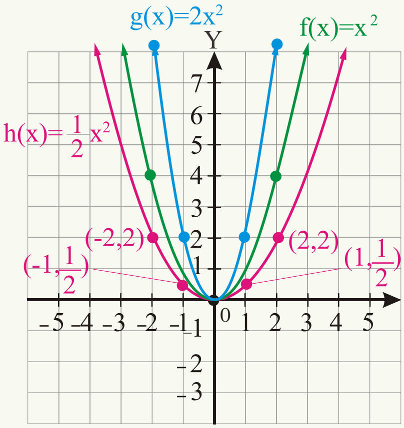
$x =$	0	1	-1	2	-2
g(x) =	0	2	2	8	8

$f(x) = x^2$

$x =$	0	1	-1	2	-2
$f(x) =$	0	1	1	4	4

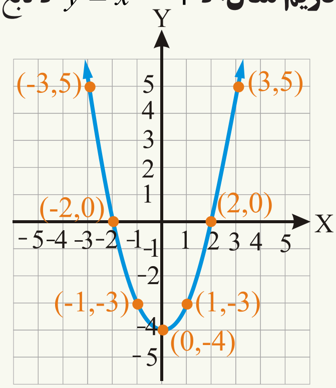
$h(x) = \frac{1}{2}x^2$

$x =$	0	1	-1	2	-2
h(x) =	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	2



دریم مثال: د $y = x^2 - 4$ د تابع ګراف رسم کړئ.

x	0	1	-1	2	-2	3	-3
y	-4	-3	-3	0	0	5	5

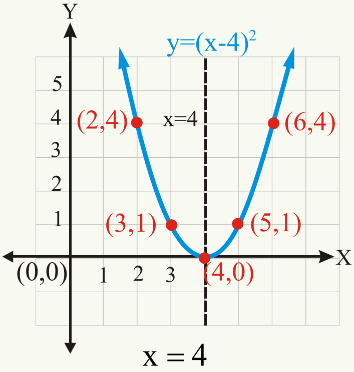


په حقیقت کې د $y = x^2$ تابع ګراف 4 واحده ښکته خواته نقل شوی دی.

څلورم مثال: د $y = (x-4)^2$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل: که x ته یو څو قیمتونه ورکړو ا و د y اړونده قیمتونه پیدا کړو د تابع ګراف رسمیدلای شي لکه:

(c) ketabton.com: The Digital Library

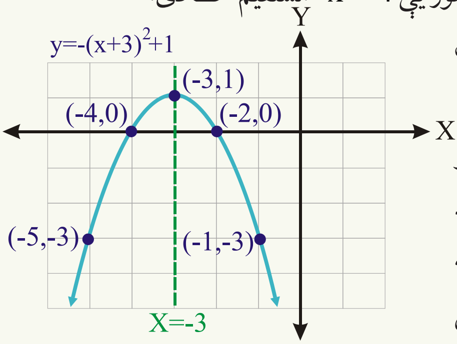


x	4	5	3	6	2	...
y	0	1	1	4	4	...

لیدل کېږي چې گراف د $(-\infty , 4)$ په انټروال کې متناقص او د $(4,\infty)$ په انټروال کې متزايد دی. له شکل څخه لیدل کېږي چې د $y = x^2$ گراف په افقي ډول 4 واحده ښي خواته انتقال شوی دی د پارابول رأس د $(4 ,0)$ ټکی دی او د تناظر محور یې $x = 4$ مستقیم خط دی.

پنځم مثال: د $y = -(x+3)^2 + 1$ تابع گراف رسم کړئ.

د $y = x^2$ گراف درې واحده کیڼې خواته او یو واحد په عمودي ډول پورته خواته نقل شوی دی او د پارابول راس د $(-3,1)$ ټکی د گراف اعظمي نقطه او د تناظر محور یې $x = -3$ دی چې په شکل کې هم لیدل کېږي.



x	-3	-2	-4	-5	-1
y	1	0	0	-3	-3

فعالیت

د $y = 3x^2$ او $y = -3x^2$ تابع گانو گرافونه رسم کړئ.

د X او Y له محورونو سره د گراف د تقاطع ټکي:

ددې لپاره چې په اسانی سره پارابول رسم کړو، د X او Y له محور سره یې د تقاطع ټکي پیدا کوو (که چېرې د X له محور سره تقاطع ولري)

(c) ketabton.com: The Digital Library

د Y له محور سره د تقاطع ټکي پیداکولو لپاره د $y = ax^2 + bx + c$ معادله کې x=0 وضع کېږي په نتیجه کې y=c دی.

د X له محور سره د تقاطع د پیداکولو لپاره $y = 0$ وضع کوو، نو لرو چې:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$0 = ax^2 + bx + c \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$$

څرنګه چې پوهېږئ $ax^2 + bx + c = 0$ یوه دویمه درجه معادله ده او جذرونه یې $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ دی، پوهېږو چې ددې معادلې جذرونه هغه وخت حقیقي عددونه دي چې $b^2 - 4ac \geq 0$ وي، که $b^2 - 4ac < 0$ ګراف د X محور قطع کولای نه شي، په لنډ ډول یې په لاندې جدول کې وګورئ:

د $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ **تابع ګراف**

a	د دویمې درجې تابع ګراف په هغه صورت کې د X محور په دوو نقطو کې قطع کوي چې $b^2 - 4ac > 0$ وي.
b	په هغه صورت کې د X محور په یوه نقطه کې قطع کوي چې $b^2 - 4ac = 0$ وي.
c	په هغه صورت کې د X محور قطع کولای نه شي چې $b^2 - 4ac < 0$ وي.

د پارابولا د راس د نقطې د وضعیه کمیاتو پیدا کول:

د تکمیل مربع په طریقه هم کولای شو چې د پارابول د رأس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړو.

$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x) + c$$

$$y = a\left[(x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2\right] + c$$

$$= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - a(\frac{b^2}{4a^2}) + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د پارابولا د رأس د ټکي وضعیه کمیات $\left(-\frac{b}{2a}\ ,\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ او یا (h,k) دي او څرنګه چې د تناظر محور د پارابولا له رأس څخه تیریږي، نو $x=-\frac{b}{2a}$ د تناظر د محور معادله ده.

که چیرې $a>0$ وي، رأس اصغري (Minimum) او که $a<0$ وي، رأس اعظمي (Maximum) دی.

شپږم مثال: د $f(x)=2x^2+4x+5$ تابع ګراف رسم کړئ.

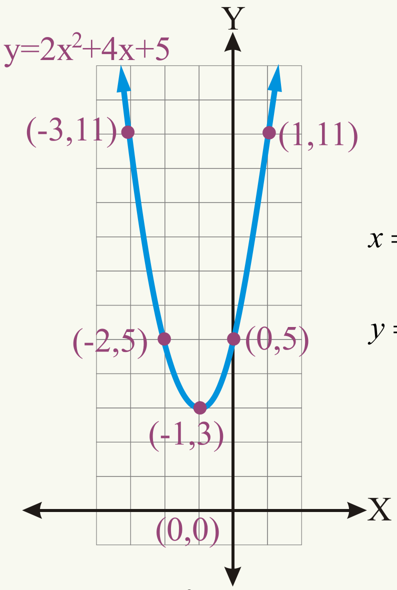
1- د X له محور سره د تقاطع ټکي پیدا کوو. څرنګه چې $a=2$ ، $b=4$ او $c=5$ دي.

$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\cdot2\cdot5=-24<0$ اد چې $\Delta<0$ ده نو ګراف د X محور نه قطع کوي.

2- د Y له محور سره د ګراف د تقاطع ټکي پیدا کوو په دې حالت کې $x=0$ دی.

د $y=ax^2+bx+c$ په تابع کې که $x=0$ شي $y=c$ کیږي، نو $(0,c)$ د Y له محور سره د ګراف د تقاطع نقطه ده. $f(0)=2\cdot0^2+4\cdot0+5=5$

نو په دې مثال کې $(0,5)$ د y له محور سره د تقاطع نقطه ده.



3 – د رأس د نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له:

$$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\cdot2}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$y=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4\cdot2\cdot5-4^2}{4\cdot2}=\frac{40-16}{8}=\frac{24}{8}=3$$

$(-1,3)$ د پارابولا د رأس د نقطې وضعیه کمیات دي او رأس اصغري دی، ځکه چې $a>0$ دی.

4 – د تناظر د محور معادله $x=-\frac{b}{2a}=\frac{-4}{4}=-1$

د ګراف د تناظر د محور معادله $x=-1$ ده، د ګراف د رسمولو لپاره کولای شو د ګراف یو څو نورې نقطې هم پیدا کړو:

$f(x)=2x^2+4x+5$

$x=$	-1	-2	0	1	-3
$f(x)=$	3	5	5	11	11

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم مثال: د $y=-3x^2-2x+1$ تابع ګراف رسم کړئ.

$$y=-3(x^2+\frac{2}{3}x)+1$$

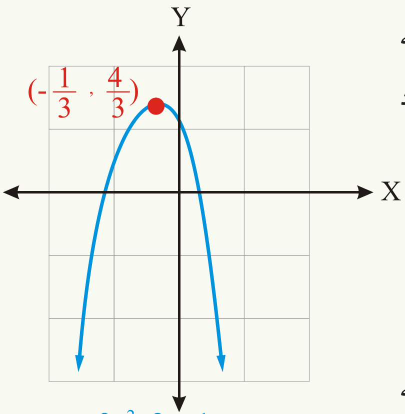
د x د ضریب نیمايي مربع جمع او هم تفریقوو.

$$y=-3\left[x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2-(\frac{1}{3})^2\right]+1$$

$$y=-3\left[x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2\right]-3(-\frac{1}{9})+1=-3\left[(x^2+\frac{2}{3}x+(\frac{1}{3})^2\right]+\frac{4}{3}$$

$$y=-3(x+\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}$$

په نتیجه کې $x=-\frac{1}{3}$ د تناظر د محور معادله ده، ځکه چې : $x+\frac{1}{3}=0\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$ او $(-\frac{1}{3},\frac{4}{3})$ د رأس د ټکي وضعیه کمیات دي او څرنګه چې $a<0$ دی، نو د پارابولا رأس اعظمي دی.



y=-3x² -2x+1

$y=-3(x+\frac{1}{3})^2+\frac{4}{3}$

یاددونه: که دویمه درجه تابع د $y-k=a(x-h)^2$ یا $y=a(x-h)^2+k$ په شکل ولیکل شي $x=h$ د تناظر د محور معادله او (h,k) د رأس د نقطې وضعیه کمیات دي.

$f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$ د لومړی درجې یا خطي تابع عمومي شکل دی.

او $y=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$ د دویمې درجې معادلې عمومي شکل دی.

د دویمې درجې تابع ګراف ته پارابول (Parabola) وایي که $a>0$ وي، رأس اصغري او که $a<0$ وه، رأس اعظمي دی. $(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$ د پارابولا د رأس وضعیه کمیات او $x=-\frac{b}{2a}$ د پارابول د تناظر د محور معادله ده. که $\Delta=b^2-4ac>0$ پارابولا د X محور په دوو نقطو کې او که $\Delta=0$ نو پارابولا د X محور په یوه نقطه کې قطع کوي او که $\Delta<0$ وي، پارابولا د X محور قطع کولای نه شي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 - د $h(x) = -\frac{3}{2}x + 3$ د تابع ګراف رسم کړئ.

2 – د $g(x) = 2x + 1$ او $g(x) = 2x - 1$ تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم

کې رسم او سره پرتله یې کړئ.

3–د $f(x) = x^2$, $f(x) = 2x^2$, $f(x) = 3x^2$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ او $f(x) = \frac{1}{3}x^2$

تابع ګانو ګرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم کړئ او یو له بله سره یې پرتله کړئ

4 – د لاندې تابع ګانو د ګراف د تناظر محور معادلې پیدا کړئ.

$f(x) = 3x^2 - 2x + 6$ ، $f(x) = x^2 - 12x + 30$ ، $f(x) = x^2 + 8x + 13$

5 – د $f(x) = (x-2)^2$, $g(x) = (x+1)^2$ او $h(x) = (x-3)^2$ تابع ګانو ګرافونه رسم

کړئ او وواياست چې د $f(x) = x^2$ له ګراف سره څه اړیکه لري؟

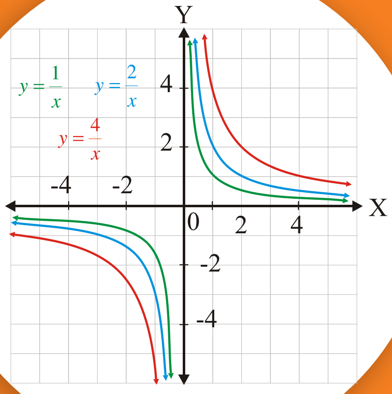
6 – د $y = -x^2 - 1$ تابع د ګراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

a : $(-1, 1)$ b: $(1, -1)$ c: $(0, -1)$ d : $(0, 1)$

7 – د $y = (x-1)^2 - 2$ تابع د ګراف د راس وضعیه کمیات عبارت دي له:

a : $(1, 1)$ b: $(-1, 2)$ c: $(-1, -2)$ d : $(1, -2)$

(c) ketabton.com: The Digital Library



ناطقي يا نسبتي تابع ګاني
(Rational functions)

دا شکل د کوم ډول تابع ګانو ګرافونه دي؟

فعاليت

- آيا د ناطقي تابع د عمودي مجانب معادله پيدا کولای شئ ؟
- آيا د هرې ناطقې تابع د تعريف په ساحه کې ټول حقيقي عددونه شامليدلای شي؟
- آيا د يوې ناطقې تابع افقي مجانب پيدا کولای شئ؟
- آيا هره ناطقه تابع عمودي مجانب لري؟

تعريف

ناطقه تابع هغه تابع ده چې د دوو پولينومي تابع ګانو له خارج قسمت څخه جوړه شوې وي که $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ ، $g(x)\neq 0$ وي، په داسې حال کې چې $p(x)$ او $g(x)$ پولينومونه وي، نو $f(x)$ يوه ناطقه تابع ده.

د ناطقې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه دي، پرته د x له هغو قيمتونو څخه چې د ناطقې تابع مخرج پرې صفر کېږي، د مثال په ډول: $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $h(x)=\frac{x^3-1}{x}$
$g(x)=\frac{x-1}{x^2-x-6}$ ، $g(x)=3$ او $P(x)=2x^2-3$ ناطقې تابع ګانې دي.

فعاليت

آيا $k(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x+2}$ يوه ناطقه تابع ده؟ ولې ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ناطقي تابع د تعريف د ساحې پيدا کول

(Finding Domain of Rational function)

لومړی مثال: د لاندېنيوناطقو تابع ګانو د هرې يوې د تعريف ساحه پيدا کړئ.

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{x^2-9} \quad , \quad h(x)=\frac{x+3}{x^2+9}$$

حل: د $f(x)$ په تابع کې د $x=3$ لپاره د تابع مخرج صفر کېږي، نو د 3 عدد د $f(x)$ د ناطقې تابع د تعريف په ساحه کې شامل نه دی يا: $Dom\ f(x)=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq 3\}$

د $g(x)$ په تابع کې که چېرې $x=3$ يا $x=-3$ شي، نو مخرج يې صفر کېږي، نو د 3 او 3 - عددونه د $g(x)$ د تابع د تعريف په ساحه کې شامل نه دي.

$$Dom\ g(x)=\{x/x\in IR\ ,\ x\neq 3\ ,\ x\neq -3\}$$

څرنګه چې د $h(x)$ تابع مخرج د x په هيڅ قيمت نه صفر کېږي، نو د $h(x)$ تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه دي.

$$Dom\ h(x)=IR \quad \text{يا} \quad Dom\ h(x)=(-\infty\ ,\ \infty)$$

فعاليت

د لاندېنيو ناطقو تابع ګانو د تعريف ساحې تعين کړئ.

$$f(x)=\frac{x^2-25}{x-5} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{x^2-25} \quad , \quad h(x)=\frac{x+5}{x^2+25}$$

دويم مثال: د لاندېنيو ناطقو تابع ګانو د تعريف او قيمتونو ساحې پيدا کړئ.

$$f(x)=\frac{x+3}{x-4} \qquad g(x)=\frac{x-3}{x+5}$$

حل: د f(x) تابع د تعريف ساحه پرته له (4)څخه ټول حقيقي عددونه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$dom\ f(x) = IR \setminus \{4\} \quad \text{یا} \quad IR - \{4\}$$

$$y = f(x) = \frac{x+3}{x-4} \Rightarrow y(x-4) = x+3 \qquad \begin{aligned} xy - x &= 4y+3 \\ (y-1)x &= 4y+3 \end{aligned}$$

$$xy - 4y = x+3 \Rightarrow \quad x = \frac{4y+3}{y-1}$$

$$Range\ f(x) = IR \setminus \{1\} \quad \text{یا} \quad IR - \{1\}$$

د (x) g تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته له (5−) څخه:

$$\text{dom}\, g(x) = IR - \{-5\} \ \text{یا}\ \{x \in IR / x \neq -5\}$$

$$g(x) = y = \frac{x-3}{x+5} \Rightarrow y(x+5) = x-3 \Rightarrow xy + 5y = x-3$$

$$x = \frac{-5y-3}{y-1} \qquad \text{Range}\, g(x) = IR - \{1\} \ \text{یا}\ \{y \in IR / y \neq 1\}$$

فعالیت

د لاندې راکړل شوو ناطقو تابع گانو د تعریف او قیمتونو ساحې پیدا کړئ.

$$h(x) = \frac{1}{x^3} \quad , \quad k(x) = \frac{x+1}{3} \quad , \quad r(x) = \frac{4x-1}{2-x} \quad , \quad m(x) = \frac{x}{3x-2}$$

د ناطقي تابع د گراف رسمول (Graphing Rational function):

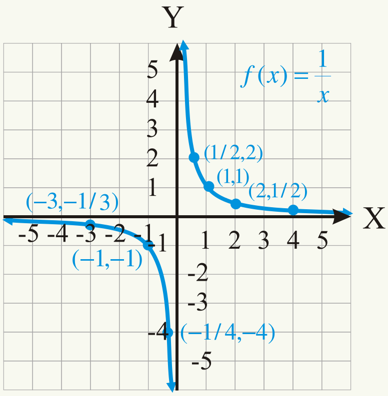
دریم مثال: د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع گراف رسم کړئ.

حل: که $x = 0$ شي، نو د تابع مخرج صفر کېږي، صفر د $f(x)$ د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دی.

$$Dom\ f = IR - \{0\}$$

x	...−4	−3	−2	−1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4...
f(x)	$...-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	−1	−2	−4	−3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}...$

(c) ketabton.com: The Digital Library



اوس د $f(x)=\frac{1}{x}$ د تابع وضعیت مطالعه کوو:
څرنګه چې $x=0$ د $f(x)$ تابع د تعریف په ناحیه کې شامل نه دی، ددې تابع د ګراف د رسمولو لپاره x ته داسې قیمتونه ورکوو چې له دواړو خواوو څخه صفر ته نژدې شي (تقرب وکړي)، که x له کیڼې خوا څخه صفر ته نژدې شي $(x\to 0^-)$ د تابع قیمت $-\infty$ ته نږدې کیږي $(f(x)\to -\infty)$ او که x له ښي خوا څخه صفر ته نژدې کیږي، $(x\to 0^+)$ د تابع قیمت $+\infty$ ته تقرب کوي $(f(x)\to \infty)$ لاندې جدول وګورئ.
a: x له کیڼې خوا څخه صفر ته نژدې کیږي.

x	...−1	−0.5	−0.1	−0.01	−0.001	$x\to 0^-$
$f(x)=\frac{1}{x}$	...−1	−2	−10	−100	−1000	$f(x)\to -\infty$

b : x له ښي خوا څخه صفر ته نژدې کیږي.

x	$0^+\leftarrow x$	0.001	0.01	0.1	0.5	1...
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\infty\leftarrow f(x)$	1000	100	10	2	1...

عمودي مجانب (Vertical Asymptotes)

که په یوه ناطقه تابع $f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}$ کې چې صورت او مخرج یې مشترک فکتور، ونه لري او $p(a)\neq 0$ وي، که $g(a)=0$ شي، نو د $x=a$ خط د $f(x)$ د تابع عمودي مجانب دی چې د y له محور سره موازي دی. د عمودي مجانبونو شمیر د مخرج د جذرونو له شمیر سره مساوي دی یا په بل عبارت که $x\to a$ په نتیجه کې $f(x)\to +\infty$ یا $f(x)\to -\infty$، نو د $x=a$ عمودي خط ددې تابع عمودي مجانب دی یا که:
$x\to a \Rightarrow |f(x)|\to \infty$ نو $x=a$ د تابع عمودي مجانب دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

x هر څومره چې د a قيمت ته نږدې شي، خو د تابع ګراف د $x = a$ مستقيم خط قطع کولای نه شي، ځکه چې د a عدد د تابع دتعريف په ساحه کې شامل نه دی، لکه: د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع د تعريف په ساحه کې صفر شامل نه دی، نو $x = 0$ يا د Y محور د $f(x) = \frac{1}{x}$ تابع عمودي مجانب دی.

ځلورم مثال: د $f(x) = \frac{2x}{x-3}$ ، $g(x) = \frac{x}{x^2-25}$ او $h(x) = \frac{x+5}{x^2+25}$ تابع ګانو عمودي مجانبونه پيدا کړئ.

حل:

1 - د f(x) تابع د عمودي مجانب د پيداکولو لپاره د x هغه قيمت پيداکوو چې د f(x) تابع مخرج پرې صفر کېږي. نو د 3 عدد د $f(x)$ د تابع د تعريف په ساحه کې شامل نه دی.

$$domf(x) = \{x / x \in IR \;,\; x \neq 3\}$$

نو د $x = 3$ خط د f(x) تابع عمودي مجانب دی.

2 -

$$g(x) = \frac{x}{x^2-25} = \frac{x}{(x-5)(x+5)}$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

د x=5 او $x = -5$ لپاره د g(x) تابع مخرج صفر کېږي، نو د 5 او 5 - عددونه د g(x) د تابع د تعريف په ساحه کې شامل نه دي.

$$dom\,g(x) = \{x / \in IR \;,\; x \neq -5 \;,\; x \neq 5\}$$

نو د $g(x)$ د تابع عمودي مجانبونه د $x = 5$ او $x = -5$ خطونه دي.

3 - څرنګه چې د x په هر قيمت د $h(x) = \frac{x+5}{x^2+25}$ تابع مخرج نه صفر کېږي، نو عمودي مجانب نه لري يا ددې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه دي.

افقي مجانب (Horizontal Asymptote)

که په يوه ناطقه تابع کې د صورت او مخرج درجې سره مساوي وي، نو ښکاره خبره ده چې دوېش

(c) ketabton.com: The Digital Library

حاصل (خارج قسمت) په یو ثابت عدد وي، که دې ثابت عدد ته b ووایو، نو د $y=b$ افقي خط ددې تابع افقي مجانب دی چې دا خط یا د X محور او یا د X له محور سره موازي خط دی چې په حقیقت کې د b عدد د صورت او مخرج د لویو توانونو د ضریبونو له نسبت څخه عبارت دی او یا صورت پر مخرج وېشو.

د مثال په ډول د $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ د تابع افقي مجانب د $y=2$ خط دی.

افقي مجانب داسې تعریفوو:

که $x\to\infty$ یا $x\to-\infty$ او په نتیجه کې $f(x)\to b$ نو $y=b$ مستقیم خط د f(x) تابع افقي مجانب دی او یا که $|x|\to\infty$ او $y\to b$، نو $y=b$ مستقیم خط ددې تابع افقي مجانب دی.

پنځم مثال: د $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$ تابع گراف رسم کړئ.

حل:

1 - **د X له محور سره د گراف د تقاطع نقطه**: د X له محور سره د تقاطع په نقطه کې $f(x)=0$ کېږي، په نتیجه کې لرو چې: $0=\dfrac{2x}{x-1}\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$

نو د تابع گراف د X محور په $x=0$ یا د $(0,0)$ په نقطه کې قطع کوي.

2 - **د Y له محور سره د گراف د تقاطع نقطه**: $f(0)=\dfrac{2\cdot 0}{0-1}=\dfrac{0}{-1}=0$

نو گراف د X او Y محورونه د $(0,0)$ په نقطه کې قطع کوي یا په بل عبارت ددې تابع گراف د وضیعه کمیاتو له مبدأ څخه تېرېږي.

3 - د تابع د عمودي مجانب معادله: $x-1=0\Rightarrow x=1$ دی دا خط رسم کړئ.

4 - د تابع د گراف افقي مجانب $\dfrac{2}{1}=2$ دی، نو $y=f(x)=2$ د تابع افقي مجانب دی، یا $\dfrac{2x}{x-1}=2+\dfrac{2}{x-1}$ افقي مجانب یې هم رسم کړئ.

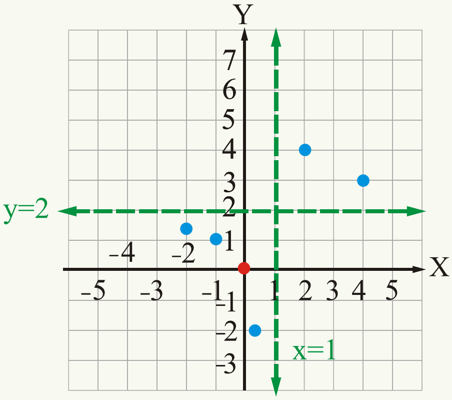
5 - د گراف یو څو نورې نقطې هم پیدا کوو، لکه:

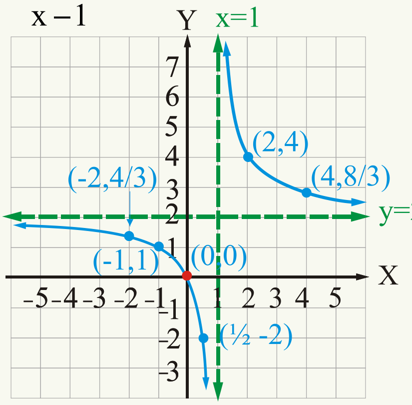
x	0	-2	-1	$\frac{1}{2}$	2	4
$y=f(x)$	0	$\frac{4}{3}$	1	-2	4	$\frac{8}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

له محورونو سره د تقاطع نقطې ټاکو، د تابع مجانبونه رسموو او بيا يې ګراف، لکه: څنګه چې په شکل کې ليدل کيږي، رسموو.

$$f(x)=\frac{2x}{x-1}$$





فعاليت

د $f(x)=\dfrac{3x}{x-2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

شپږم مثال: د $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ د تابع افقي او عمودي مجانبونه پيدا کړئ او ګراف يې رسم کړئ.

حل: د عمودي او افقي مجانبونو معادلې عبارت دي له:

1 - د عمودي مجانب معادله $x=2$

2 - د افقي مجانب معادله $f(x)=y=1$

3 - د Y له محور سره تقاطع:

که $x=0$ شي، نو $f(x)=-1$ دي، ګراف د Y محور په $(0,-1)$ کې قطع کوي.

4 - د X له محور سره تقاطع $f(x)=0$ شي، نو:

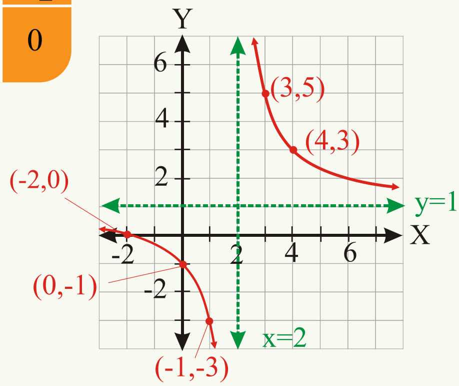
$$x+2=0$$
$$x=-2$$

نو د $(-2,0)$ په نقطه کې ګراف د X محور قطع کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

5 - ددې لپاره چې ګراف په اسانه ډول رسم شي، په لاندې جدول کې د ګراف د هرې خانګې قيمتونه وګورئ.

x	-1	0	1	3	4	5	-2
f(x)	$-\frac{1}{3}$	-1	-3	5	3	$2\frac{1}{3}$	0



که صورت پر مخرج وويشو $\frac{x+2}{x-2}=1+\frac{4}{x-2}$

په حقيقت کې د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع ګراف د يو واحد په اندازه پورته خواته او د (2) واحدونو په اندازه ښي خواته ا نتقال شوی دی او $y=f(x)=1$ د تابع افقي مجانب دی.

مايل مجانب: (slant or Oblique asymptote)

څه وخت چې د يوې ناطقې تابع د صورت درجه د يو په اندازه د مخرج له درجې څخه زياته وي ښکاره خبره ده چې تابع افقي مجانب نه لري په دې حالت کې تابع مايل مجانب لري.

اووم مثال: د $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$ تابع ګراف رسم کړئ.

حل:

1 - د مايل مجانب د پيداکولو لپاره صورت پر مخرج ويشو، نو لرو چې:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}=\underbrace{x+1}+\frac{2}{x-1}$$

مايل مجانب

که $|x|$ هر خومره لوی شي $\frac{2}{x-1}$ صفر ته نژدې کيږي، نو په نتيجه کې ګراف د $y=f(x)=x+1$ مستقيم خط ته نژدې کيږي چې همدا د $y=x+1$ خط د $f(x)$ تابع مايل مجانب دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

2 – د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه:

$$f(0)=0+1+\frac{2}{0-1}=1-2=-1$$

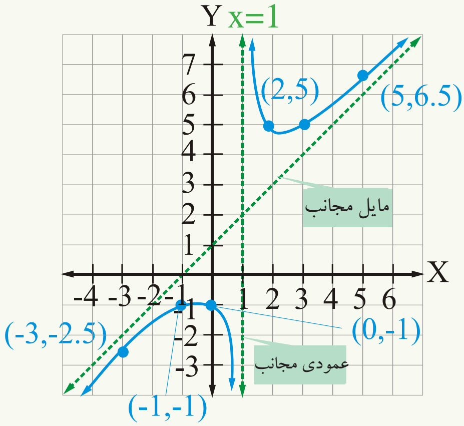
ګراف د $(0,-1)$ په نقطه کې د Y محور قطع کوي.

3 - ښکاره خبره ده چې ګراف د X محور قطع کولای نه شي، ځکه چې $x=\sqrt{-1}$ کېږي.

4 - عمودي مجانب یې $x-1=0 \Rightarrow x=1$ دی.

5 - ښکاره ده چې افقي مجانب نه لري.

6 - یو څو نورې نقطې پیدا کوو او د تابع ګراف رسموو:



x	2	3	5	-1	-3
f(x)	5	5	6.5	-1	-2.5

اتم مثال: د $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-2}$ تابع ګراف رسم کړئ.

1 - د تابع عمودي مجانب د $x=2$ خط دی، ځکه چې $x-2=0 \Rightarrow x=2$

2 - x^2+1 پر $(x-2)$ ویشو لرو چې: $\dfrac{x^2+1}{x-2}=x+2+\dfrac{5}{x-2}$

که $|x|$ لوی شي $\dfrac{5}{x-2}$ صفر ته نږدې کېږي او د تابع ګراف د $y=x+2$ خط ته نژدې کېږي

چې $y=x+2$ خط ددې تابع مایل مجانب دی.

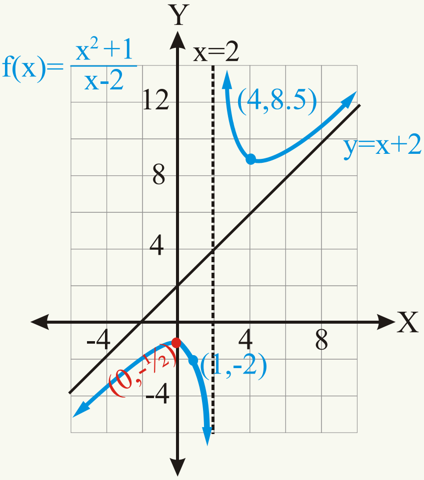
3 – د Y له محور سره تقاطع $-\dfrac{1}{2}$ ده، ځکه که $x=0$ شي $f(0)=\dfrac{0+1}{0-2}=-\dfrac{1}{2}$

4 – ګراف د X له محور سره تقاطع نه لري، ځکه چې که $f(x)=0$ شي، نو: $0=\dfrac{x^2+1}{x-2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$x^2+1=0 \Rightarrow x=\sqrt{-1}$ (چي په حقيقي عددونو کې تعريف شوی نه دی)

د مجانبونو په رسمولو او د Y له محور سره د تقاطع ټکی او څو نورو قيمتونو په مرسته د تابع گراف رسمولای شو.



x	0	1	4
f(x)	$-\frac{1}{2}$	-2	8.5

که $f(x)=\dfrac{P(x)}{g(x)}$ په تابع کې په ترتيب سره m او n د صورت او مخرج درجې وي نو:

1 – که $m<n$ وي د x محور افقي مجانب دی.

2 – که $m=n$ وي $y=b$ د تابع افقي مجانب دی چې b د m او n د درجو حدونو د ضريبونو نسبت دی يا که چيرې $f(x)=\dfrac{a_nx^n+\ldots+a_0}{b_nx^n+\ldots+b_0}$، $(b_n\neq 0)$ وي، نو $y=\dfrac{a_n}{b_n}$ د f(x) تابع افقي مجانب دی.

3 – که $m>n$ وي، نو افقي مجانب نه لري.

4 – که د صورت درجه د يو په اندازه د مخرج له درجې څخه زياته وي، نو د تابع گراف مايل مجانب لري چې په بې نهايت کې له گراف سره موازي کيږي، يوه ناطقه تابع يو يا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو يو افقي يا مايل مجانب به لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 – د $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-4}$ تابع افقي او عمودي مجانبونه پیدا کړئ.

2 – آیا د $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+1}$ تابع عمودي مجانب لري؟ ولې؟

3 – د لاندې راکړل شوو تابع ګانو د تعریف ساحې پیدا کړئ او د عمودي مجانبونو معادلې یې ولیکئ.

$$f(x)=\frac{5x}{x-4}\ ,\ g(x)=\frac{3x^2}{(x-5)(x+4)}\ ,\ h(x)=\frac{x+7}{x^2-49}\ ,\ k(x)=\frac{x+7}{x^2+49}$$

4 – له لاندې تابع ګانو څخه کومه یوه چې عمودي مجانب ولري، پیدا یې کړئ.

$$f(x)=\frac{x}{x+4}\quad ,\quad g(x)=\frac{x+3}{x(x+4)}$$

$$h(x)=\frac{x}{x(x+4)}\quad ,\quad k(x)=\frac{x}{x^2+4}$$

5 – د لاندې ناطقو تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ.

$$f(x)=\frac{4x}{x-2}\quad ,\quad g(x)=\frac{2x}{x-4}$$

6 - د $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}$ تابع افقي مجانب عبارت دی له:

$a:\quad y=2$ $\qquad b:\quad y=3$

$c:\quad y=-2$ $\qquad d:\quad y=-3$

7 - د $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ او $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$ تابع ګانو ګرافونه رسم کړئ او د $f(x)=\dfrac{1}{x}$ د تابع له ګراف سره یې پرتله کړئ.

8 – د $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ تابع مایل مجانب پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي لنډيز

- تابع د دوو سټونو تر منځ داسې يوه رابطه يا قاعده (Rule) ده چې د لومړني سټ هر عنصر يوازې او يوازې د دويم سټ له يو عنصر سره اړيکه ولري. لومړني سټ ته د تابع د تعريف ساحه (Domain) او دويم سټ ته د قيمتونو ساحه (Range) وايي يا تابع د هغو مرتبو جوړو سټ دی چې لومړني عناصر يې تکرار شوي نه وي.
- يوه تابع د $y = f(x)$ په شکل ليکل کېږي، په يوه نقطه کې د تابع د قيمت د پيدا کولو لپاره د x راکړل شوی قيمت د تابع په معادله کې وضع کوو، د تابع قيمت په هغه نقطه کې په لاس راځي او يوه معادله هغه وخت د يوې تابع ښودونکې وي چې د هر x لپاره يو y وجود ولري.
- د يوې تابع د تعريف په ساحه (Domain) کې هغه عددونه شامل وي چې تابع په کې تعريف شوې وي يا د تابع قيمت يو حقيقي عدد وي. د يوې تابع ګراف د XOY په مستوي کې د S د هغو نقطو سټ دی په دې ډول چې $S = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ او x د تابع د تعريف په ساحه کې شامل وي، که د y له محور سره موازي خط ګراف يوازې په يوه نقطه کې قطع کړي، دا ګراف د يوې تابع ګراف دی.
- $f(x) = c$ ثابته تابع، $f(x) = ax + b$ خطي تابع، $(a \neq 0)$, $f(x) = x$ د عينيت تابع او $f(x) = |x|$ د مطلقه قيمت تابع ده چې د تعريف ساحه يې ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ساحه يې صفر او مثبت حقيقي عددونه دي.
- د علامې تابع دا ډول تعريف شوې ده:

$$f : IR \rightarrow IR \qquad sgn(x) = \begin{cases} 1 : x > 0 \\ 0 : x = 0 \\ -1 : x < 0 \end{cases}$$

ددې تابع د تعريف ساحه ټول حقيقي عددونه او د قيمتونو ساحه يې $\{-1, 0, 1\}$ ده.

- د دويمې درجې تابع عمومي شکل $(a \neq 0)$ $y = ax^2 + bx + c$ دی او د دويمې درجې تابع ګراف ته پارابولا (parabola) وايي که $a > 0$ وي، رأس اصغري او که $a < 0$ وي، رأس اعظمي دی. $(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a})$ د پارابولا د رأس وضعيه کميات او $x = -\dfrac{b}{2a}$ د پارابول د تناظر د

(c) ketabton.com: The Digital Library

محور معادله ده. که $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ پارابولا د X محور په دوو نقطو کې او که $\Delta = 0$ ، نو پارابولا د x محور په یوه نقطه کې قطع کوي او که $\Delta < 0$ ، وي پارابول د x محور نه قطع کوي.

- که د $f(x)$ په تابع کې $x_1 < x_2$ وي او په نتیجه کې $f(x_1) < f(x_2)$ شي، تابع متزایده، که $x_1 < x_2$ وي او $f(x_1) > f(x_2)$ شي، تابع متناقصه ده او هم که $f(-x) = f(x)$ وي، تابع جفته او که $f(-x) = -f(x)$ شي، تابع طاقه ده.
- انتقال په (2) ډوله دی (عمودي او افقي انتقال)
- **عمودي انتقال**: که c یو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول پورته خواته انتقال شي د $y = f(x) + c$ تابع ګراف لاس ته راځي.

که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه په عمودي ډول ښکته خواته انتقال شي، د $y = f(x) - c$ تابع ګراف لاس ته راځي.

افقي انتقال: که c یو مثبت عدد وي.

که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه کیڼې خواته انتقال شي، د $y = f(x+c)$ ګراف لاس ته راځي.

که د $y = f(x)$ تابع ګراف د c واحدونو په اندازه ښي خواته انتقال شي، د $y = f(x-c)$ تابع ګراف لاس ته راځي.

- د تابع ګانو عملیې په لاندې ډول تعریف شوي دي:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

$$\mathrm{dom}(f+g)(x) = \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$$

$$\mathrm{dom}(f-g)(x) = \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$$

$$\mathrm{dom}(f \cdot g)(x) = \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$$

$$\mathrm{dom}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g - \{x / g(x) = 0\}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

• د مرکبو تابع گانو د تعریف ساحه:

$$Dom(fog)(x) = \{x / x \in domg \quad , \quad g(x) \in domf\}$$
$$Dom(gof)(x) = \{x / x \in domf \quad , \quad f(x) \in domg\}$$

• د يو په يو تابع معکوس هم يوه تابع ده.

• د X له محور سره موازي خط (افقي خط) د يو په يو تابع گراف په يوه نقطه کې قطع کوي.

• د $y = f(x)$ يو په يو تابع د معکوس د پيدا کولو لپاره معادله د x لپاره حلوو، بيا x پر y او y پر x بدلوو په لاس راغلی تابع $f^{-1}(x)$ ده چې د $f(x)$ د تابع معکوسه تابع ده. د f(x) او د f(x) د معکوسې تابع گرافونه نظر د y=x خط ته سره متناظر دي.

• که د $f(x) = \dfrac{P(x)}{g(x)}$ په ناطقه تابع کې په ترتيب سره m او n عددونه د صورت او مخرج درجې وي، نو:

1 – که $m < n$ وي، د X محور افقي مجانب دی.

2 – که $m = n$ وي، $y = b$ د تابع افقي مجانب دی چې b د m او n درجو لرونکو حدونو د ضريبونو نسبت دی يا که چېرې $f(x) = \dfrac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_n x^n + \ldots + b_0}$ وي، $(b_n \neq 0)$ نو $y = \dfrac{a_n}{b_n}$ د f (x) د تابع افقي مجانب دی.

3– که $m > n$ وي، نو افقي مجانب نه لري.

4 – که د صورت درجه د يو په اندازه د f(x) د مخرج له درجې څخه زياته وي، نو تابع مايل مجانب لري.

• يوه ناطقه تابع يو يا څو عمودي مجانبونه درلودلای شي، خو يو افقي يا مايل مجانب به لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1 - د لاندېنيو مرتبو جوړو له ستونو څخه کوم يو يې د يوې تابع ښودونکې دي؟ د تعريف او د قيمتونو ساحې يې پيدا کړئ.

$1-\quad \{(1,2),(3,4),(5,5)\}$

$2-\quad \{(3,4),(3,5),(4,4),(4,5)\}$

$3-\quad \{(-3,-3),(-2,-2),(-1,-1),(0,0)\}$

$4-\quad \{(1,4),(1,5),(1,6)\}$

2 - که $g(x)=x^2+2x+3$ وي، $g(-x),g(-1)$ او $g(x+5)$ پيداکړئ.

3 - که $h(x)=x^4+x^2+1$ وي، $h(-x),h(-1),h(2)$ او $h(3a)$ پيداکړئ.

4 - د لاندېنيو تابع ګانو دتعريف ساحې پيدا کړئ.

$f(x)=2x$ $\qquad f(x)=(x-3)^{\frac{1}{2}}$

$f(x)=\sqrt{16-x^2}$ $\qquad f(x)=\dfrac{2}{x^2-4}$

$f(x)=\sqrt{\dfrac{3}{x^2+25}}$ $\qquad f(x)=\sqrt{x^2-4x-5}$

5 - که چېرې $f(x)=\begin{cases}x+3 & : \quad x<0\\ 4x+7 & : \quad x\geq 0\end{cases}$ وي، $f(0),f(3)$ او $f(-2)$ پيداکړئ.

6 - که چېرې $g(x)=\begin{cases}x+3 & : \quad x\geq -3\\ -(x+3) & : x<-3\end{cases}$ وي، $g(-6),g(0)$ او $g(-3)$ پيداکړئ.

7- که چېرې $h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & \Leftarrow \quad x\neq 3\\ 6 & \Leftarrow \quad x=3\end{cases}$ وي، $h(0),h(3)$ او $h(5)$ پيداکړئ.

8 - له لاندېنيو معادلو څخه کومه يوه يې تابع تعريفوي؟

$x+y=16$ $\qquad x^2+y=16$ $\qquad x^2+y^2=16$

$x=y^2$ $\qquad y=\sqrt{x+4}$ $\qquad x+y^3=8$

(c) ketabton.com: The Digital Library

9 - په لاندېنيو تابع گانو کې کومه طاقه، کومه يوه جفته او کومه يوه، نه طاقه او نه جفته ده؟

$f(x)=x^4-2x^2+5$, $f(x)=x^2+2x-1$. $f(x)=\dfrac{2}{x-6}$

10 - د $f(x)=(x-1)^2, f(x)=x^2-1$ تابع گانو گرافونه رسم او د $f(x)=x^2$ سره يې پرتله کړئ.

11 - د لاندېنيو تابع گانو $(f+g),(f-g),(f\cdot g)$ او $(\frac{f}{g})$ پيدا کړئ او د تعريف ساحې يې وټاکئ.

$f(x)=4x-1$ $g(x)=6x+3$

$f(x)=\sqrt{2x+5}$ $g(x)=\sqrt{4x-9}$

$f(x)=4x^2-11x+2$ $g(x)=x^2+5$

12 - که $f(x)=4x^2-2x$ او $g(x)=8x+1$ وي، نو:

$(f+g)(3)$ $(f+g)(-5)$ $(f\cdot g)(4)$

$(\frac{f}{g})(4)$ $(fog)(2)$ $(gof)(-5)$

پيدا کړئ.

13 - fog او gof پيدا کړئ که:

$f(x)=8x+12$ $g(x)=3x-1$

$f(x)=5x+3$ $g(x)=-x^2+4x+3$

$f(x)=-x^3+2$ $g(x)=4x$

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ $g(x)=x^2$

$f(x)=\sqrt{x+2}$ $g(x)=8x^2-6$

14 - د y=f(x) تابع د گراف په پام کې نيولو سره وواياست چې د $y=f(x)-5$ تابع گراف د 5 واحدو په اندازه:

a- ښکته خواته انتقال شوي دی. b- پورته خوا ته انتقال شوي دی.

c- ښې خواته انتقال شوي دی. d- کيڼې خواته انتقال شوي دی.

15 - که د f(x) تابع په لاندې ډول تعريف شوی وي گراف يې رسم کړئ، د تعريف او قيمتونو

(c) ketabton.com: The Digital Library

ساحې يې وټاکئ.

$$f(x)=\begin{cases}-x+2 & : \quad x>1\\ x^2 & : \quad -1<x<1\\ x+2 & : \quad x<-1\end{cases}$$

16 - د $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ تابع د تعريف او قيمتونو ساحې وټاکئ.

17 - د $f(x)=\sqrt{2x-1}$ تابع د تعريف او قيمتونو ساحې وټاکئ.

18 - د لاندېنيو ناطقو تابع گانو د تعريف ساحې پيدا کړئ او کومه تابع چې عمودي مجانب ولري، د عمودي مجانبونو معادلې يې هم پيدا کړي.

$\mathrm{f(x)}=\dfrac{5\mathrm{x}}{\mathrm{x}-4}$ $\qquad$ $\mathrm{g(x)}=\dfrac{7\mathrm{x}}{\mathrm{x}-8}$ $\qquad$ $\mathrm{h(x)}=\dfrac{\mathrm{x}+8}{\mathrm{x}^2-64}$

$\mathrm{f(x)}=\dfrac{\mathrm{x}+8}{\mathrm{x}^2+64}$ $\qquad$ $\mathrm{g(x)}=\dfrac{\mathrm{x}+7}{\mathrm{x}^2-49}$ $\qquad$ $\mathrm{h(x)}=\dfrac{\mathrm{x}+7}{\mathrm{x}^2-36}$

19 - د $f(x)=x^2+2$ ، $f(x)=x^2+1$ ، $f(x)=x^2-1$ او $f(x)=x^2-2$ تابع گانو گرافونه د وضعيه کمياتو په عين سيستم کې رسم او د $f(x)=x^2$ د تابع له گراف سره يې پرتله کړئ.

20 - د لاندېنيو دويمې درجې تابع گانو د رأسونو وضعيه کميات اود تناظر د محورونو معادلې پيدا کړئ.

$y=(x-2)^2 \qquad y=(x+3)^2-4$

21 - د $y=-\dfrac{x}{2}$ تابع گراف رسم کړئ.

22 - د $f(x)=\dfrac{x^2-5}{x+2}$ تابع عمودي او مايل مجانبونه پيدا کړئ.

23 - د $h(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$ تابع د افقي مجانب معادله عبارت ده له:

$a)\quad y=-1$ $\qquad$ $b)\quad y=1$

$c)\quad y=-\dfrac{1}{4}$ $\qquad$ $d)\quad y=4$

(c) ketabton.com: The Digital Library

24 - د $f(x)=\begin{cases}3x+1 & : x<2\\ -x & : x\geq 2\end{cases}$ د تابع گراف رسم کړئ.

25- $g(x)=|x|-5$ د تابع گراف رسم او د قیمتونو ساحه یې پیدا کړئ.

26 - د علامې تابع د قیمتونو په ساحه کې کوم عددونه شامل وي؟

27 - د لاندېنیو تابع گانو معکوسه تابع پیدا کړئ او وښیاست چې $f(f^{-1}(x))=x$ دی.

$f(x)=\frac{1}{8}x$ $\qquad f(x)=8x-1$ $\qquad f(x)=x^2+6$

$f(x)=\frac{4x+6}{5}$ $\qquad f(x)=x^3-1$

28 -آیا د $g(x)=x^2$ تابع معکوس منونکي ده؟ (معکوس یې هم یوه تابع ده)

29 - که $(fog)(x)=(gof)(x)$ وي، د f او g تابع گانې سره څه اړیکه لري؟

30 - د X او Y له محورونو سره د $g(x)=3-\frac{3}{2}x$ د گراف، د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات پیدا کړئ.

31 - د $f(x)=-3$ تابع گراف رسم کړئ.

32 - د $f(x)=2x^2+4x+5$ تابع د گراف د رأس د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

33 - د $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $f(x)=3x^2$, $f(x)=2x^2$ او $f(x)=\frac{1}{3}x^2$ تابع گانو گرافونه د وضعیه کمیاتو په عین سیستم کې رسم او د $f(x)=x^2$ تابع د گراف سره یې پرتله کړئ.

34 - د $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$ د ناطقې تابع مایل مجانب عبارت دی له:

a: $y=x$

b: $y=x-1$

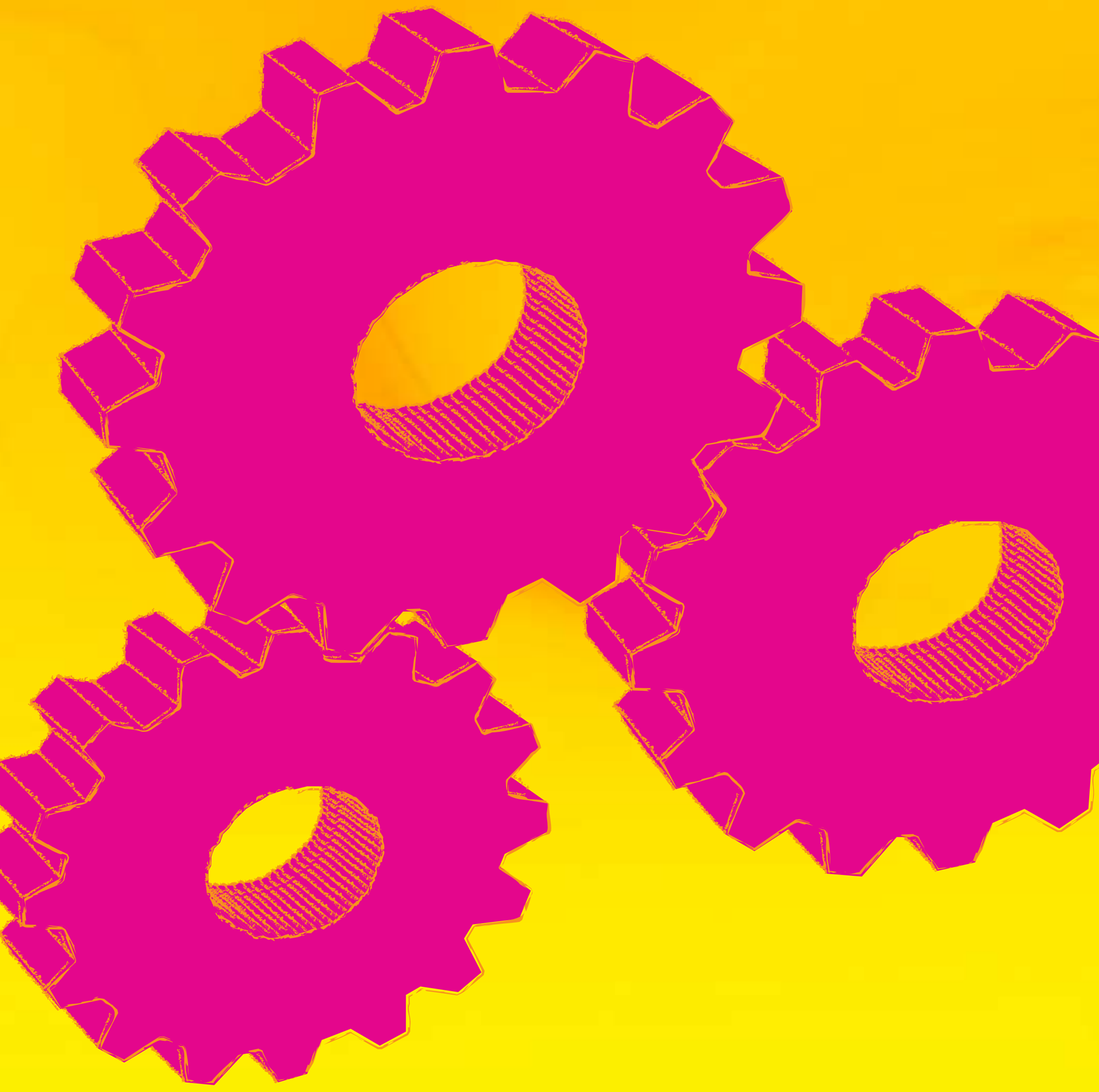
c: $y=x+1$

(c) ketabton.com: The Digital Library

څلورم څپرکی

مثلثاتي تابع ګاني

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

زاویه او راډیان(Angle and Radian)
زاویه او د زاویې د اندازه کولو واحدونه:

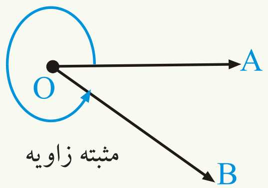
آیا زاویه په مثلثاتو او هندسه کې یو له بله توپیر لري؟

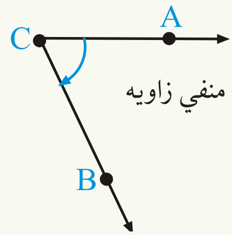
آیا په هندسه کې منفي زاویې شته دي؟

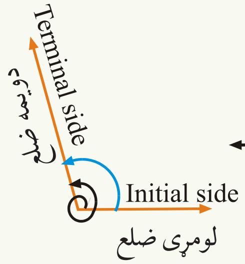
له هندسي څخه پوهېږو، زاویه هغه شکل دی چې د دوه نیمو خطونو له یو ځای کېدو څخه چې مشترکه مبدأ ولري، تشکیل شوی وي چې مشترکه مبدأ د زاویې له رأس څخه عبارت ده. په هندسه کې زاویه له $1°$ څخه تر $360°$ پورې وي، خو په مثلثاتو کې په هره اندازه زاویه درلودلای شو. له بلې خوا په مثلثاتو کې مثبتې او منفي زاویې هم شته دي.

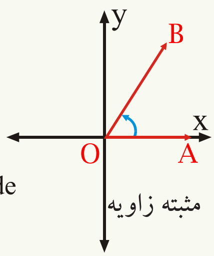
په مثلثاتو کې زاویه د یو خط له دوران څخه په دې ډول چې د خط یو انجام ثابت وي، لاس ته راځي. چې د لومړي خط دوران د دویمې ضلعې موقعیت اختیاروي(یوه ضلع د رأس په نقطه کې دوران کوي). د ساعت د عقربې د حرکت مطابق دوران(clockwise) منفي او د ساعت د عقربې د حرکت مخالف(Counter clockwise) دوران مثبت فرض شوی دی.

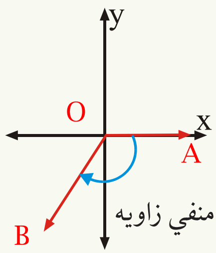
چې لومړۍ ضلعې ته (Initial side) او د دوران پای ته دویمه ضلع (Terminal side) وایي. لکه: څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.





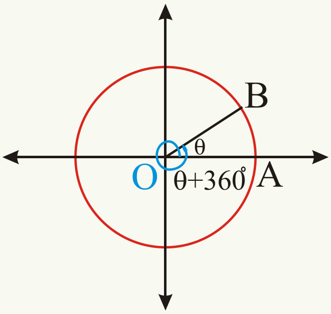






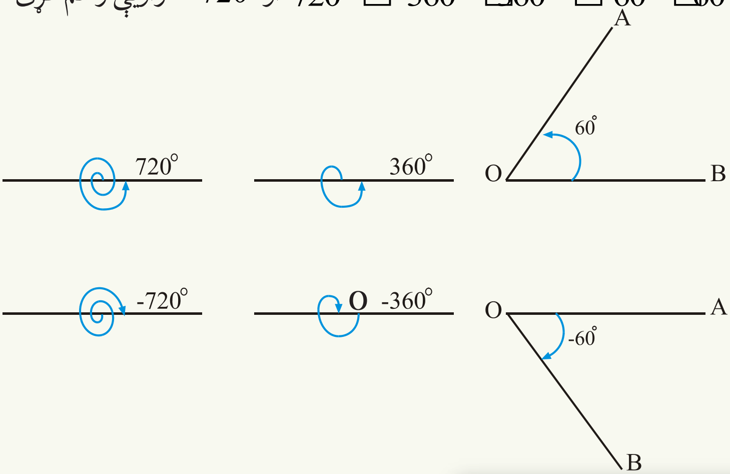
(c) ketabton.com: The Digital Library

که په شکل کې د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته د مختصاتو د مبدأ پر شاوخوا د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف جهت کې دوران ورکړو، د θ زاویه لاس ته راځي.



که د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته د 360° په اندازه(یو پوره دوارن) دوران ورکړو، او دوران ته دوام ورکړو، تر څو د$\overrightarrow{OA}$ نیم خط د OB موقعیت ته ورسېږي. په دې حالت کې جوړه شوې زاویه $\theta + 360^\circ$ ده. او که د دوو پوره دورانونو وروسته د B ټکي ته ورسېږو، طی شوی زاویه به $\theta + 720^\circ$ او په همدې ډول که د $\overrightarrow{OA}$ نیم خط ته K دورانونه ورکړو او د B ټکي ته ورسېږو، نو د زاویې اندازه به $\theta + K \cdot 360^\circ$ وي، لکه: څرنګه چې لیدل کېږي، په مثلثاتو کې له 360° څخه لوېې زاویې هم شته دی.

لومړی مثال: د 60° □60° □ 360° □360° □720° او -720° زاویې رسم کړئ.



فعالیت

د 45° , 90° , -180° او 180° زاویې رسم کړئ.

د زاویې د اندازه کولو واحدونه: زاویه د درجې، ګراد او راډیان په مرسته اندازه کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

درجه: د یو دوران (Rotation) $\frac{1}{360}$ برخه له درجې څخه عبارت ده، یا دیوې قایمې زاویې $\frac{1}{90}$ برخې ته درجه وایي.

$$1^{o}=60' \qquad 1'=60'' \qquad 1^{o}=60\cdot 60=3600''$$

$$(\frac{1}{60})^{o}=1' \quad , \quad (\frac{1}{60})'=1'' \qquad (\frac{1}{3600})^{o}=1''$$

دویم مثال: $35^{o}\ 15'\ 27''$ د درجې په اعشاري شکل ولیکئ او $(48{,}3625)^{o}$ په درجه، دقیقه او ثانیه (DMS) واړوئ.

حل

$$35^{o}\ 15'\ 27''=35^{o}+(\frac{15}{60})^{o}+(\frac{27}{3600})^{o}=35^{o}+0{,}25^{o}+0{,}0075^{o}=35{,}2575^{o}$$

$$48{,}3625^{o}=48^{o}+0{,}3625^{o}=48^{o}+(0{,}3625\cdot 60)'=48^{o}+(21{,}75)'$$
$$=48^{o}+(21)'+(0{,}75\cdot 60)''=48^{o}\quad 21'\quad 45''$$

فعالیت

$36^{o}\ 47'\ 12''$ په درجه واړوئ او $55{,}967663^{o}$ په درجه، دقیقه او ثانیه (DMS) (Degree, Minute, Second) واړوئ.

ګراد: ګراد هم د زاویې د اندازه کولو واحد دی، د یو دوران $\frac{1}{400}$ برخې ته ګراد وایي. د ګراد $\frac{1}{100}$ برخې ته دقیقه ګراد او د دقیقه ګراد $\frac{1}{100}$ مې برخې ته ثانیه ګراد وایي.

$$1g=100'g \quad , \quad 1'g=100''g \quad , \quad 1g=10000''g$$

د درجې بدلول په ګراد او د ګراد بدلول په درجې باندې: کولای شو چې درجه په ګراد او ګراد په درجه واړوو.

دریم مثال: 45^{o} درجې په ګراد او $100g$ په درجه واړوئ.

حل: څرنګه چې یو مکمل دوران 360^{o} یا $400g$ دی نو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$360^\circ = 400g \qquad\qquad 400g = 360^\circ$$

$$1^0 = \frac{400}{360}g = \frac{10}{9}g \qquad\qquad 1g = (\frac{360}{400})^\circ = (\frac{9}{10})^\circ$$

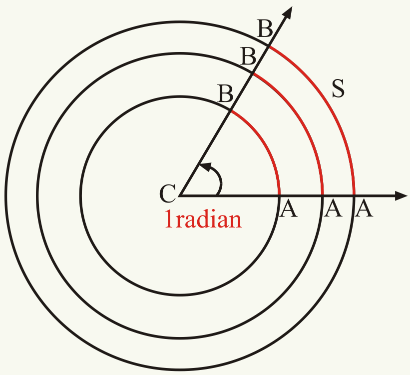
$$45^\circ = 45(\frac{10}{9})g = 50g \qquad\qquad 100g = 100(\frac{9}{10})^\circ = 90^\circ$$

اویا:

$$\frac{d}{180} = \frac{g}{200} \quad , \quad \frac{d}{180} = \frac{100}{200}$$

$$d = \frac{180 \cdot 100}{200} = 90^\circ$$

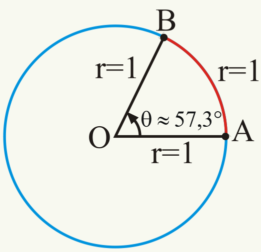
راډیان(Radian): د درجې او ګراد سربېره د زاویې د اندازه کولو بل واحد راډیان دی. راډیان د هغوی مرکزي زاویې اندازه ده چې د مقابل قوس اوږدوالی یې د شعاع له اوږدوالی سره مساوي وي. راډیان په عالي ریاضیاتو کې ډېر استعمالیږي. په شکل کې د $\hat{ACB}$ مرکزي زاویه چې شعاع یې r او د AB قوس اوږدوالی له r سره مساوي دی، نو د $\hat{ACB}$ زاویه 1Radian ده.



$$\hat{ACB} = 1\,\text{radian} = 1^R$$

که د AB قوس د دایرې له شعاع r سره مساوي وي، θ د راډیان په حساب مساوي ده په:

$$\hat{\theta} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{s}{r} \text{ او یا } s = r\theta$$



په مثلثاتي دایره یا واحده دایره(Unite Circle) کې چې شعاع یې د اوږدوالي واحد او مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې واقع وي، د راډیان په حساب د مرکزي زاویې اندازه له مقابل قوس سره مساوي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\theta = \frac{\overset{\frown}{AB}}{r} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{1} = \overset{\frown}{AB} = S \quad \text{radian}$$

خرنګه چې د دایرې محیط $C = 2\pi r$ دی، نو $\frac{2\pi\, r}{r} = 2\pi \ \ radian$ په دې معنا چې یو پوره دوارن 360^{o} یا $2\pi^{R}$ دی.

$$2\pi^{R} = 360^{\circ}$$

$$1^{R} = \frac{360^{\circ}}{2\pi} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \approx \frac{180^{\circ}}{3.14159} \approx (57.29578)^{\circ} \approx 57^{\circ}\,17'45'' \approx (57.3)^{\circ}$$

$$1^{\circ} = \frac{2\pi}{360^{\circ}} = \frac{\pi}{180^{\circ}} \approx \frac{3.14159}{180^{\circ}} \approx 0.01745 \,\text{Randians}$$

څلورم مثال: د $\frac{\pi}{3}$ $radian$ د مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی پیدا کړئ، که د دایرې قطر $30m$ وي.

حل: خرنګه چې $r = \frac{d}{2} = \frac{30m}{2} = 15m$ دی، نو: $s = r\theta = 15(\frac{\pi}{3}) = 5\pi\ m \approx 15{,}7m$

فعالیت

د $1Rad$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی په څو سانتي متره وي؟ که د دایرې شعاع $10cm$ وي.

د درجې او ګراد بدلول په راډیان او د راډیان بدلول په درجه او ګراد:

خرنګه چې $360^{o} = 400g = 2\pi^{R}$ دی،نو $\frac{d}{360°} = \frac{g}{400} = \frac{R}{2\pi}$ او یا $\frac{d}{180} = \frac{g}{200} = \frac{R}{\pi}$

او یا

$$360^{o} = 2\pi^{R}$$

$$1^{o} = (\frac{2\pi}{360})^{R} = (\frac{\pi}{180})^{R}$$

په همدې ډول خرنګه چې: $2\pi^{R} = 360^{o}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1^R=(\frac{360}{2\pi})^o=(\frac{180}{\pi})^o$$

$$1^R=\frac{200g}{\pi}=\frac{200g}{3,1415}\approx 63,66198g$$

پنځم مثال: د 75^o , 220^o , -400° , $-100g$ او 40° زاويې په راډيان واړوئ.

څرنگه چې $1^o=(\frac{\pi}{180})^R$ ده، نو:

$$220\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{11\pi}{9}\text{radain},\qquad 75^\circ\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{5\pi}{12}\text{radain}$$

$$40^\circ\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{2\pi}{9}\text{ radian}\qquad -400^\circ\cdot\frac{\pi}{180}=-\frac{20\pi}{9}\text{ radain}$$

څرنگه چې يو پوره دوران $2\pi^R$ او يا $400g$ دی، نو:

$$1g=(\frac{2\pi}{400})^R=(\frac{\pi}{200})^R$$

$$-100g=(-100\cdot\frac{\pi}{200})^R=(-\frac{\pi}{2})^R$$

پوښتنه: که د گراد په حساب له يوې زاويې څخه 30 واحده کم کړو، په لاس راغلی عدد، د زاويې اندازه په درجه راکوي، دا زاويه څو راډيانه ده؟

حل

$$\frac{270}{180}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{3\pi}{2}\text{Radian}$$

$$\frac{10}{9}D-30=D$$

$$\frac{10}{9}D-D=30\Rightarrow\frac{10D-9D}{9}=30\Rightarrow D=270^\circ$$

نو دا زاويه $\frac{3\pi}{2}$ راډيانه ده.

شپږم مثال: a: $(\frac{5\pi}{6})$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{9}$ او 6π راډيان په درجه واړوئ.

b): د يو دوران(Revolution) $\frac{1}{4}$ برخه څو راډيانه کېږي؟

حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$1^R = \left(\frac{180}{\pi}\right)^o \quad , \quad \frac{\pi}{5}\cdot\frac{180}{\pi} = 36^\circ$$

$$a : \left(\frac{5\pi}{6}\right)\cdot\left(\frac{180}{\pi}\right) = 150^\circ \quad , \quad 6\pi\cdot\frac{180}{\pi} = 1080^\circ \quad , \quad \frac{4\pi}{9}\cdot\frac{180}{\pi} = 80^\circ$$

$$b : = \frac{1}{4}\cdot 2\pi^R = \frac{\pi}{2}\text{radian}$$

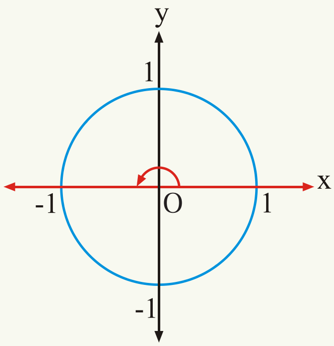
لاندې شکلونه وګورئ.

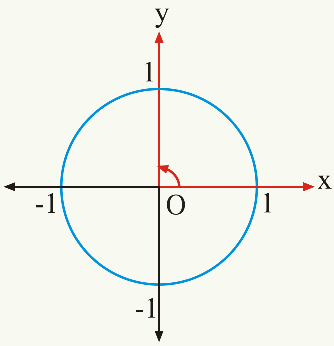
$\frac{1}{2}$ Rev

$$\frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi^R$$

$\frac{1}{4}$ Rev

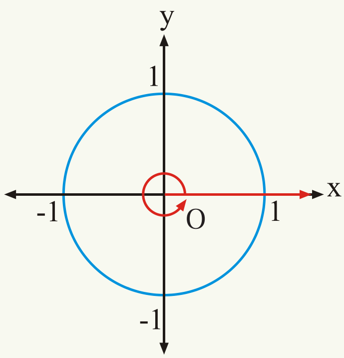
$$\frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}\text{Radain}$$

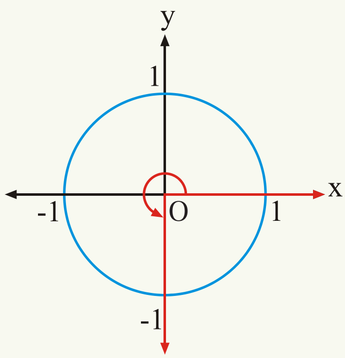




1 Revolution , $\frac{3}{4}$ Revolution

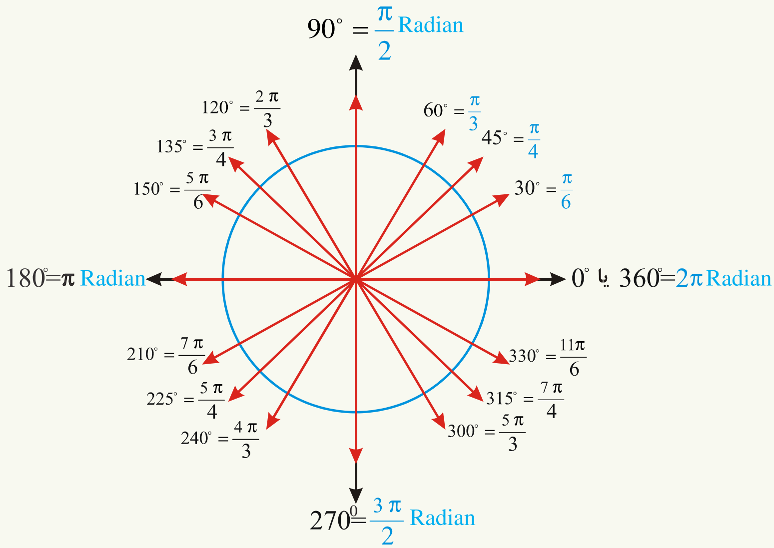
2 π Radians , $\frac{3}{4}\cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}$ Radians





(c) ketabton.com: The Digital Library

د درجي او راډيان تر منځ د اړيکي د ښه خرګنديدو لپاره لاندي شکل هم وګورئ:



فعاليت

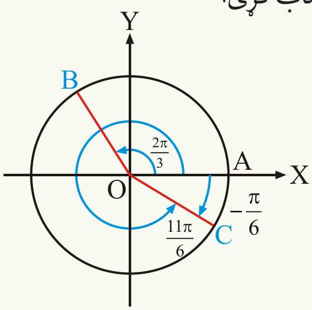
$\frac{\pi}{12}$, $\frac{3\pi}{4}$ او $\frac{5\pi}{4}$ – راډيانه زاويي په درجه واړوئ.

اووم مثال

(a) د $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{11\pi}{6}$ او $-\frac{\pi}{6}$ زاويي په شکل کي وښياست:

(b) په شکل کي لوی او کوچنی خرخ ښودل شوی دی، که د θ_1 او θ_2 د زاويو مقدار د راډيان په حساب وي، د θ_2 د زاويي مقدار د θ_1، r_1 او r_2 له جنسه حساب کړئ.

د (a) حل:

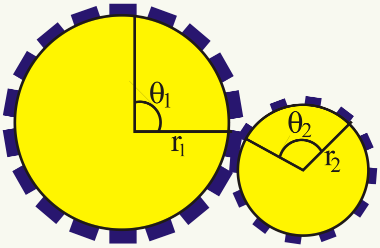


(c) ketabton.com: The Digital Library

له شکل څخه ليدل کېږي چې د $\frac{11\pi}{6}$ او $\frac{\pi}{6}$ – زاويو دويمې ضلعې يو پر بل منطبقې دي.

د (b) حل:

$$\theta_2 r_2 = \theta_1 r_1 \quad \Rightarrow \theta_2 = \frac{\theta_1 r_1}{r_2}$$



اتم مثال: که د ساعت د ثانيې عقربې 40 ثانيې دوران کړی وي، د ثانيې د عقربې په واسطه طی شوې مثبته زاويه په راډيان پيدا کړئ.

حل: څرنګه چې 60 ثانيې يو پوره دوران يا 2π راډيان کېږي، نو $\frac{40}{60} = \frac{2}{3} \text{Rev}$ او څرنګه چې يو دوران 2π *Radian* دی، نو: $\frac{2}{3} \cdot 2\pi^R = \frac{4\pi}{3}$ Radian

همدارنګه د ساعت د دوو عقربو تر منځ د زاويې د پيدا کولو لپاره له $\theta = |5{,}5\min - 30hr|$ څخه کار اخلو.

د مثال په توګه د 3 بجو او 40 دقيقو په وخت کې د ساعت ګرد او دقيقه ګرد په منځ کې زاويه څو درجې ده؟

$$\theta = |5{,}5 \cdot 40 - 30 \cdot 3| = 130^\circ$$

پوښتنې

1 - که د يوې مرکزي زاويې مقابل قوس 50cm او د دايرې شعاع 25cm وي، مرکزي زاويه به څو راډيانه وي؟

2 - $32{,}4222^\circ$ په درجې، دقيقې او ثانيې واړوئ.

3 - د يو دوران $\frac{1}{8}$ برخه څو راډيانه، څو درجې او څو ګراده کېږي؟

4 - $\frac{5\pi}{4}$ راډيانه څو ګراده او $-7{,}5^\circ$ څو راډيانه کېږي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

5- $225^\circ, -315^\circ, 720^\circ$ او 45° زاويې په راډيان اوګراد واړوئ

6 - د يو دوران $\frac{1}{9}$ ، $\frac{1}{24}$ ، $\frac{1}{18}$ او $\frac{4}{5}$ برخې څو راډيانه او څو درجې کېږي؟

7 - $\frac{11\pi}{3}$ ، $\frac{9\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{6}$ ، $-\frac{\pi}{6}$ ، $-\frac{\pi}{10}$ ، $\frac{2\pi}{5}$ او $-\frac{5\pi}{12}$ راډيانه په درجو واړوئ

8 - که د يو ساعت د ثانيې د عقربې اوږدوالی 6cm وي، په 40 ثانيو کې د ثانيې عقربه څو سانتي متره فاصله طی کوي؟

9 - که د دايرې شعاع 3cm او مرکزي زاويه $\frac{5}{3}$ راډيانه وي. د دې مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی به څو سانتي متره وي؟

10 - که د يو ساعت د ثانيې د عقربې دوران 35 ثانيې وي، نو د ثانيې عقربې به څو راډيانه مثبته زاويه طی کړې وي؟

11 - د دوو زاويو مجموعه 152° ده، که د يوې زاويې اندازه د درجې په حساب له بلې زاويې سره دګراد په حساب برابره وي، د هرې زاويې اندازه د راډيان په حساب څومره ده؟

12- 1620° څو راډيانه کېږي؟

a) $4\pi^R$ b) $8\pi^R$ c) $9\pi^R$ d) $10\pi^R$

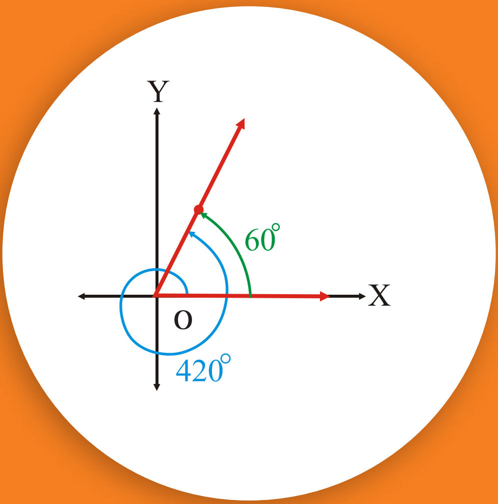
13 - خلور دورانونه څو راډيانه کېږي؟

a) $2\pi^R$ b) $4\pi^R$ c) $6\pi^R$ d) $8\pi^R$

14 - که د يوې دايرې شعاع 10m وي، د 45 radian مرکزي زاويې، مقابل قوس به څو متره وي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې زاويې معياري حالت او کوټرمينل زاويې

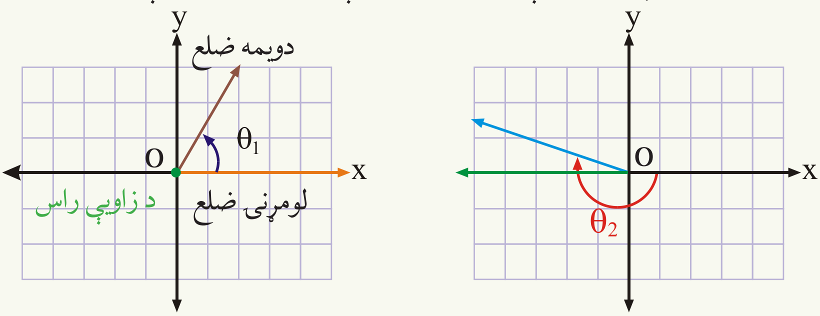


آيا ويلای شئ چې د 60^o او 420^o زاويو دويمې ضلعې يو پر بل منطبق دي؟ ولې؟

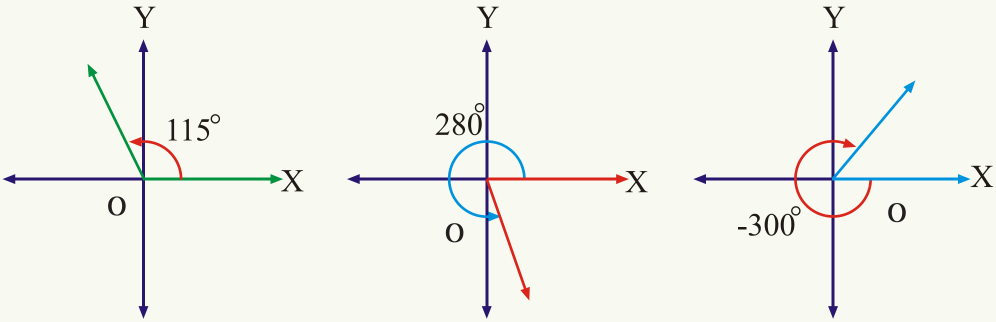
د يوې زاويې معياري حالت (Standard position of an angle):

که د يوې زاويې رأس د وضعيه کمياتو په مبدأ کې او لومړنی ضلع يې د X د محور په مثبت جهت پرته وي، نو دا زاويه په معياري حالت کې ده.

د مثال په توګه: په لاندې شکلونو کې د θ_1 او θ_2 زاويې په معياري حالت کې ښودل شوي دي.



لومړی مثال: $115°$ ، $280°$ او $-300°$ زاويې په معياري حالت کې رسم کړئ.



(c) ketabton.com: The Digital Library

که په معیاري حالت کې د یوې زاویې دویمه ضلع د X او یا د Y پر محور منطبق شي، داسې زاویې ته ربعي زاویه(Quadrantale angle) وایي.

د مثال په توګه: $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ او داسې نورې زاویې ربعي زاویې دي.

فعالیت

د $130^\circ, 50^\circ, 500^\circ$ او -210° زاویې په معیاري حالت کې رسم کړئ.

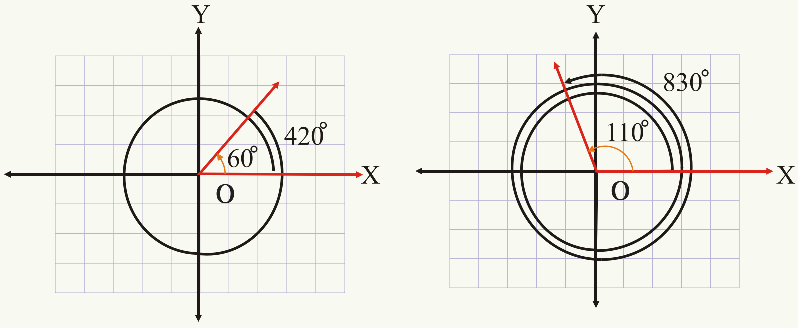
کوټرمینل زاویې: (Conterminal angles)

دوې یا څو زاویې چې په معیاري حالت کې یې دویمې ضلعې یو پر بل منطبقې شي، د کوټرمینل زاویو په نامه یادیږي.

دویم مثال: په شکل کې وښیاست چې د 60° او 420° زاویې او همدارنګه د 110° او 830° زاویې چې په معیاري حالت کې دي، یو له بلې سره کوټرمینل زاویې دي.

حل: څرنګه چې په معیاري حالت کې د دې زاویو لومړنی ضلعې یو پر بل منطبق دي، لکه څنګه چې په شکل کې لیدل کیږي د 60° او 420° زاویو دویمې ضلعې(Conterminal sides) یو پر بل منطبق دي. نو د تعریف په اساس دا دواړه زاویې سره کوټرمینل دي.

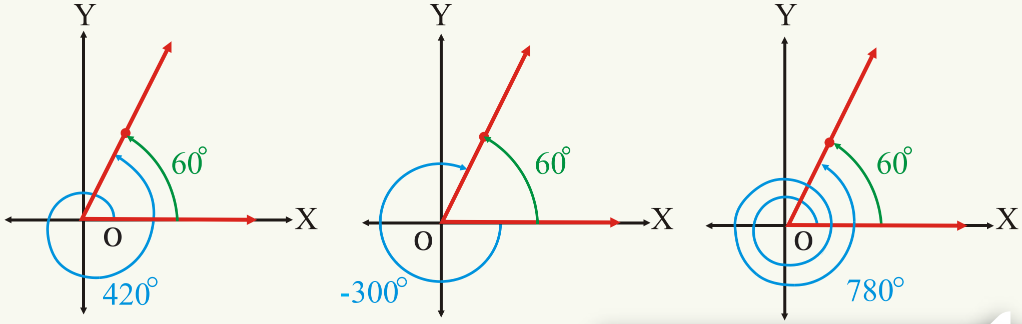
همدرانګه د 110° او 830° زاویې هم سره کوټرمینل دي.



دریم مثال: په معیاري حالت کې د 60° زاویې سره درې کوټرمینل زاویې رسم کړئ او په شکل کې یې هم وښیاست.

حل: $60^\circ + 360^\circ = 420^\circ$, $60^\circ - 360^\circ = -300^\circ$, $60^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 780^\circ$

(c) ketabton.com: The Digital Library



فعالیت

ایا د 230° ، 590° او 230° ، -130° زاويې سره کوترمينل دي؟ رسم يې کړئ.

خرنګه چې کوټرمينل زاويې يو له بله سره د يوه پوره دوران (360°) يا $2\pi^R$ او يا څو دورانونه $n\cdot 360^\circ$ او يا $n\cdot 2\pi$ توپير لري، نو د θ د زاويې سره کوټرمينل زاويې عبارت دي له:

$\theta+2\pi$	$\theta+360^\circ$
$\theta+2\cdot 2\pi$	$\theta+2\cdot 360^\circ$
$\theta+3\cdot 2\pi$	$\theta+3\cdot 360^\circ$
-----	-----
$\theta+2n\pi$	$\theta+n\cdot 360^\circ$

خلورم مثال:

(a) له 30° زاويې سره څلور کوټرمينل زاويې پيدا کړئ.

(b): له 90° زاويې سره دوه کوټرمينل زاويې پيدا او په شکل کې يې وښياست.

حل(a)

$30^\circ+360^\circ=390^\circ$ يا $\frac{\pi}{6}+2\pi=\frac{13\pi}{6}$ Radian

$30^\circ+2\cdot 360^\circ=750^\circ$ يا $\frac{\pi}{6}+2\cdot 2\pi=\frac{25\pi}{6}$ Radian

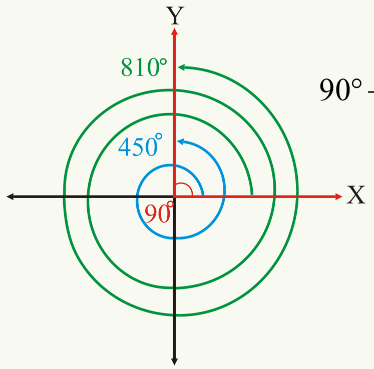
$30^\circ+3\cdot 360^\circ=1110^\circ$ يا $\frac{\pi}{6}+3\cdot 2\pi=\frac{37\pi}{6}$ Radian

$30^\circ+4\cdot 360^\circ=1470^\circ$ يا $\frac{\pi}{6}+4\cdot 2\pi=\frac{49\pi}{6}$ Radian

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل(b)

$90^\circ + 2\cdot 360^\circ = 810^\circ$ $\qquad$ $90^\circ + 360^\circ = 450^\circ$



پنځم مثال: آیا $\underline{410^\circ, 50^\circ}$ $\quad$ $\underline{800^\circ, 80^\circ}$ $\quad$ $\underline{-680^\circ, 40^\circ}$ او د 60° او 410° زاويې سره کوټرمينل دي؟

حل: څرنګه چې $410^\circ = 50^\circ + 360^\circ$ دی، نو د 50° او 410° زاويې سره کوټرمينل دي او $800^0 = 80^\circ + 2\cdot 360^\circ$ نو د 80° او 800° زاويې هم سره کوټرمينل دي. همدارنګه $-680^\circ = 40^\circ - 2\cdot 360^\circ$ نو 40° او -680° زاويې هم سره کوټرمينل دي، خو $410^\circ \neq 60^\circ + 360^\circ$، نو د 410° او 60° زاويې سره کوټرمينل نه دي.

که د يوې زاويې رأس د وضعيه کمياتو په مبدا کې او لومړنی ضلع يې د X د محور پر مثبت جهت منطبق وي، نو دا زاويه په معياري حالت کې ده. که په معياري حالت کې د دوو يا څو زاويو دويمې ضلعې يو پر بل منطبق وي، داسې زاويې د کوټرمينل زاويو په نوم يادېږي.

پوښتنې

1 - د $90^\circ, 120^\circ, -270^\circ$ او 240° زاويې په معياري حالت کې رسم کړئ.

2 - تر ټولو کوچنۍ مثبته زاويه پيدا کړئ چې له لاندېنيو زاويو سره کوټرمينل وي.

$135^\circ \quad 90^\circ \quad 60^\circ \quad 539^\circ \quad 450^\circ \quad -125^\circ \quad -40^\circ$

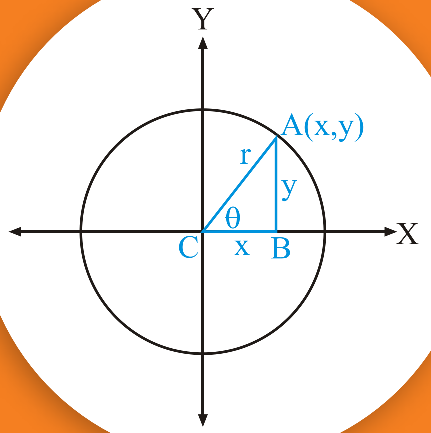
3 - آيا د (-80° ، 280°) او د (35° ، 395°) زاويې سره کوټرمينل دي؟

4 - له 40° زاويې سره، شپږ کوټرمينل زاويې پيدا کړئ.

5 - آيا د $(-930^\circ, 150^\circ)$ او د $(180^\circ, 900^\circ)$ زاويې سره کوټرمينل دي، په شکل کې يې هم وښياست؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثلثاتي تابعګاني
(Trigonometric Functions)



آیا ویلای شئ چې د θ د زاويي مثلثاتي نسبتونه د θ د زاويي د ضلعو په اوږدوالي پورې اړه لري او که نه؟

خرنګه چې پوهیږو چې د یوې حادې زاويي (θ) مثلثاتي نسبتونه (Trigonometric ratios) په یوه قایمه الزاويه مثلث کې په لاندې ډول تعریف شوي دي.

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{y}{r}, \quad \cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{r}$$

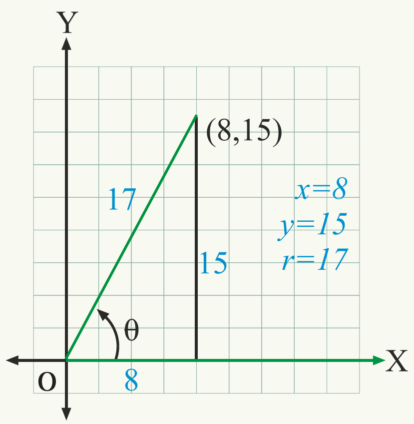
$$\tan\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{y}{x}, \quad \cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{r}{x}, \quad \csc\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{r}{y}$$

او په نتیجه کې لیدل کیږي چې: $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ او $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$.

لومړی مثال: که په معیاري حالت کې د θ زاويي دویمه ضلع د $(8,15)$ له ټکي څخه تېره شي، د θ زاويي مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د فیثاغورث د قضيې په اساس لروچې: $r^2 = x^2 + y^2$ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$r^2 = 8^2 + (15)^2 = 64 + 225 = 289$$

$$r = \sqrt{289} = 17$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{15}{17} \;,\; \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{8}{17}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{15}{8} \;,\; \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{8}{15}$$

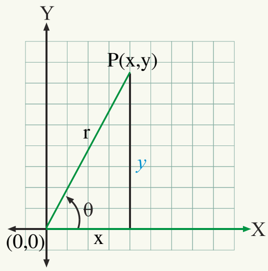
$$\sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{17}{8} \;,\; \csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{17}{15}$$

د زاويو د ځينو مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اساسي اړيکي:

د فيثاغورث د قضيې په اساس د شکل له مخې ليکلای شوچې:

$$y^2 + x^2 = r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots I$$

دواړو خواوې په r^2 وېشو:



$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

$$(\frac{y}{r})^2 + (\frac{x}{r})^2 = 1$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

همدارنګه که د (I) معادلې دواړه خواوې په y^2 ووېشو، نو لرو چې:

$$\frac{y^2}{y^2} + \frac{x^2}{y^2} = \frac{r^2}{y^2} \Rightarrow 1 + (\frac{x}{y})^2 = (\frac{r}{y})^2$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

او که د (I) معادلې دواړه خواوې په x^2 ووېشو:

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{x^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} \Rightarrow (\frac{y}{x})^2 + 1 = (\frac{r}{x})^2$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

له بلې خوا:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y}{x}=\tan\theta \qquad \frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{x}{y}=\cot\theta$$

او له دې خایه خخه نتیجه کېږي چې:

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\ ,\ \sin\theta\cdot\csc\theta=1\ ,\ 1+\tan^2\theta=\sec^2\theta\ ,\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta\cdot\cot\theta=1\ ,\ \cos\theta\cdot\sec\theta=1\ ,\ 1+\cot^2\theta=\csc^2\theta\ ,\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

خرنگه چې دا اړیکې د θ د هر قیمت لپاره سمې دي، نو په دې اساس مثلثاتي مطابقتونه هم ورته وايي.

فعالیت

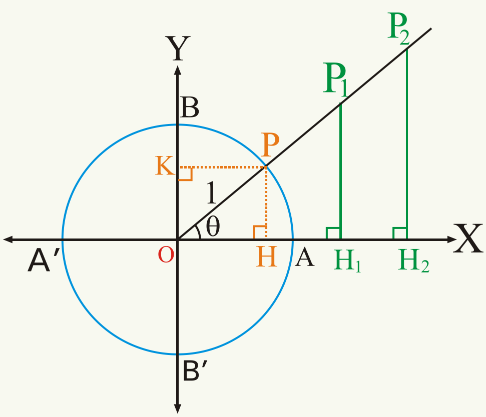
که په معیاري حالت کې د θ دویمه ضلع د $(12,5)$ له ټکي خخه تېره شي، د θ د زاويې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

د مثلثاتي تابع گانو پورتني قیمتونه یوازې د θ زاويې د اندازې پورې اړه لري، د P د ټکي پر موقعیت پورې چې د θ پر دویمه ضلع واقع دی اړه نه لري چې دا حقیقت په شکل کې د $\overset{\Delta}{OH_1P_1}$ $\square$ $\overset{\Delta}{OPH}$ او $\overset{\Delta}{OH_2P_2}$ مثلثونو د مشابهت په اساس لیدل کېږي.

$$|OP|=1$$

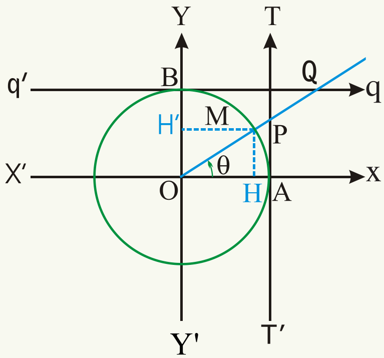
$$\cos\theta=\frac{|OH|}{|OP|}=\frac{|OH_1|}{|OP_1|}=\frac{|OH_2|}{|OP_2|}$$

$$\sin\theta=\frac{|PH|}{|OP|}=\frac{|P_1H_1|}{|OP_1|}=\frac{|P_2H_2|}{|OP_2|}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

که د θ زاویه د راډیان په حساب وي. θ آزاد متحول او $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \cot\theta, \sec\theta$ او $\csc\theta$ مقید (مربوط) متحولونه دي. په دي معنا چې $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta, \cot\theta, \sec\theta$ او $\csc\theta$ مثلثاتي تابعګانې دي چې مقدار يې د θ د ضلعو اوږدوالي پورې اړه نه لري، بلکې د θ د زاويې په مقدار پورې اړه لري.



خرنګه چې مثلثاتي دايره

(Trigonometric Circle) هغه دايره ده چې د شعاع اوږدوالي يې د اوږدوالي واحد دی.

په مثلثاتي دايره کې چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبداکې او د XX' او YY' محورونه د دې دايرې افقي او عمودي قطرونه دي. د قرارداد په اساس $y'oy$ ته د ساينو محور او $x'ox$ ته د کوساينو محور وايي. د TAT' محور چې د A په ټکي کې له دايرې سره مماس دی، د ټانجانټ محور او د $q'Bq$ محور چې د B په ټکي کې پر دايره مماس دی، د کوټانجانټ محور بلل کيږي. د ساينو او کوساينو د محورونو مبدأ د دايرې مرکز او د ټانجانټ د محور مبدأ، د A ټکی د کوټانجانټ د محور مبدأ، د B ټکی دی.

که چيرې د A له ټکي څخه په مثبت جهت کې د M تر ټکي حرکت وکړو او د $\hat{MOA}$ زاويې ته θ ووايو، د θ د زاويې مثلثاتي توابع په لاندې ډول هم تعريفيږي.

$(r = OM = OA = OB = 1)$

$$\sin\theta = \frac{HM}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{OM} = \frac{\overline{OH'}}{1} = \overline{OH'} \qquad \cos\theta = \frac{\overline{OH}}{OM} = \frac{\overline{OH}}{1} = \overline{OH}$$

$$\tan\theta = \frac{HM}{OH} = \frac{\overline{AP}}{OA} = \overline{AP} \qquad \sec\theta = \frac{OM}{OH} = \frac{OP}{OA} = \overline{OP}$$

$$\cot\theta = \frac{\overline{OH}}{HM} = \frac{BQ}{OB} = \overline{BQ} \qquad \csc\theta = \frac{OM}{HM} = \frac{OQ}{OB} = \overline{OQ}$$

په دې اساس مثلثاتي نسبتونو ته مثلثاتي خطونه هم وايي.

په همدې ډول که د θ دويمه ضلع او يا دقوس پای په دويمه، دريمه يا څلورمه ناحيه(ربع) کې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

کولی شو چې مثلثاتي نسبتونه يې پر لاس راوړو:

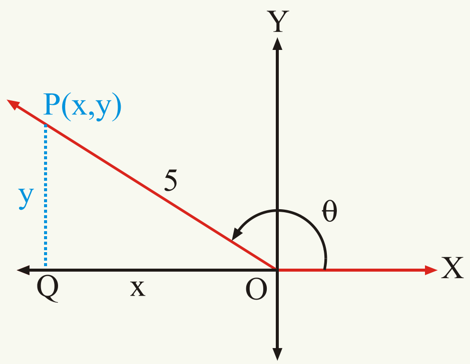
د مثلثاتي نسبتونو علامې په څلورو ناحيو(ربعو) (quadrants) کې په لاندې ډول دي.

$\sin\theta > 0$	$\sin\theta > 0$
$\cos\theta < 0$	$\cos\theta > 0$
$\tan\theta < 0$	$\tan\theta > 0$
$\cot\theta < 0$	$\cot\theta > 0$
$\sec\theta < 0$	$\sec\theta > 0$
$\csc\theta > 0$	$\csc\theta > 0$
$\sin\theta < 0$	$\sin\theta < 0$
$\cos\theta < 0$	$\cos\theta > 0$
$\tan\theta > 0$	$\tan\theta < 0$
$\cot\theta > 0$	$\cot\theta < 0$
$\sec\theta < 0$	$\sec\theta > 0$
$\csc\theta < 0$	$\csc\theta < 0$

ربع	$\sin\theta, \csc\theta$	$\tan\theta, \cot\theta$	$\sec\theta, \cos\theta$
I	+	+	+
II	+	−	−
III	−	+	−
IV	−	−	+

دويم مثال: له لاندې شکل سره سم که په معياري حالت کې د θ د زاويې دويمه ضلع، په دويمه ناحيه(ربع) کې واقع وي او $\cos\theta = \frac{-3}{5}$ وي، د θ د زاويې نور مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل: لومړی د P د ټکي وضعيه کميات پيدا کوو: څرنګه چې $\cos\theta = \frac{-3}{5}$ دی، په دويمه ربع کې د x قيمت منفي دی، نو $x = -3$ او $r = 5$ د فيثاغورث د قضيې له مخې لرو چې:



$$5^2 = (-3)^2 + y^2$$

$$y^2 = 25 - 9 = 16$$

$$y = \pm\sqrt{16}$$

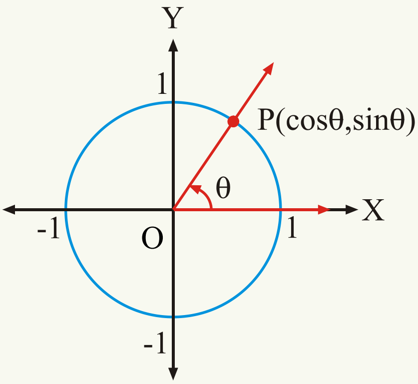
$$y = 4$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(ځکه چې د P ټکی په دویمه ربع کې دی، $y > 0$ دی)

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{4}{5} ، \quad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{5} ، \quad \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{4}{-3}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{4} ، \quad \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{-3} ، \quad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{4}$$



څرنګه چې د X محور ته د cos محور او د Y محور ته د sine محور وايي، موږ کولای شو چې په مثلثاتي دايره کې د P د ټکي وضعيه کميات له $P(\cos\theta, \sin\theta)$ او يا $P(x, y)$ سره وښايو.

د θ د زاويې مثلثاتي توابع يوازې د θ د زاويې په مقدار پورې اړه لري چې θ آزاد متحول او د θ مثلثاتي نسبتونه مقيد متحولونه دي.

په لومړي ناحيه(ربعه) کې ټول مثلثاتي نسبتونه مثبت، په دويمه ناحيه(ربع) کې $\sin\theta$ او $\csc\theta$ مثبت، په دريمه ناحيه(ربع) کې $\tan\theta, \cot\theta$ مثبت او په څلورمه ناحيه(ربع) کې $\cos\theta, \sec\theta$ مثبت او نور منفي دي.

پوښتني

1- د لاندېنيو زاويو د مثلثاتي نسبتونو نښې(علامې) په شفاهي ډول ووياست.

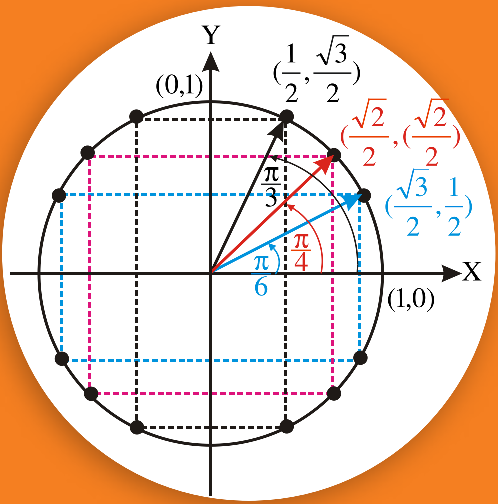
$\sin 120^\circ$ $\quad \tan 170^\circ$ $\quad \tan 60^\circ$ $\quad \cos 330^\circ$ $\quad \sec 200^\circ$

$\cot 271^\circ$ $\quad \csc 91^\circ$ $\quad \sin 271^\circ$ $\quad \csc 181^\circ$ $\quad \csc 315^\circ$

2- که θ په معياري حالت کې د راډيان په حساب وي او د θ دويمه ضلع له لاندې راکړل شوو ټکو څخه تېره شي، $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ او $\tan\theta$ پيدا کړئ.

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) ، \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) ، \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) ، \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د ځینو خاصو زاویو مثلثاتي نسبتونه

آیا کولای شئ چې ووایئ $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$ دی؟

د 45° **مثلثاتي نسبتونه**: په یوه قایم الزاویه متساوي الساقین مثلث کې، دوې قایمې ضلعې یې یو، یو واحد په پام کې ونیسئ.

$$r^2 = 1^2 + 1^2$$

$$r^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابله ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

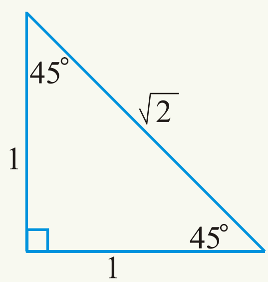
$$\cos 45^\circ = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاوره ضلع}}{\text{وتر}} = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مقابله ضلع}}{\text{مجاوره ضلع}} = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45^\circ = \cot\frac{\pi}{4} = \frac{\text{مجاوره ضلع}}{\text{مقابله ضلع}} = \frac{x}{y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45^\circ = \sec\frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مجاوره ضلع}} = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45^\circ = \csc\frac{\pi}{4} = \frac{\text{وتر}}{\text{مقابله ضلع}} = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$



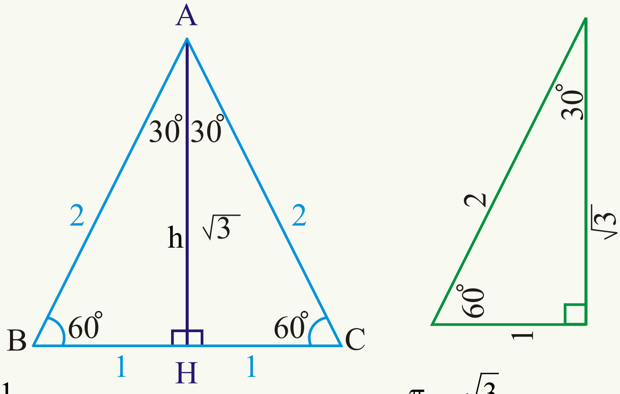
(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

یو متساوي الساقین قایمه زاویه مثلث داسې په پام کې ونیسئ چې هره قایمه ضلع یې b واحده وي، د 45° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

که د $A\overset{\Delta}{B}C$ متساوي الاضلاع مثلث چې هره ضلع یې دوه واحده وي، په پام کې ونیسو، د A له رأس څخه د AH ارتفاع رسموو، څرنګه چې د $\hat{A}$ زاویه نیمایي شوې ده چې نیمایي یې 30° ده، نو:

$$h^2+1^2=2^2$$
$$h^2=4-1=3$$
$$h=\sqrt{3}$$



$$\sin 30^\circ=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \qquad \cos 30^\circ=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot 30^\circ=\cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ=\sec\frac{\pi}{6}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \csc 30^\circ=\csc\frac{\pi}{6}=\frac{2}{1}=1$$

فعالیت

یو داسې متساوي الاضلاع مثلث په پام کې ونیسئ چې هره ضلع یې a واحده وي د $30^\circ=\frac{\pi}{6}$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

همدارنګه که شکل ته پام وکړو:

$$\sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \qquad \cot 60^\circ = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 60^\circ = \sec\frac{\pi}{3} = 2 \qquad \csc 60^\circ = \csc\frac{\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

لیدل کیږي چې $30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$ کیږي:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ \qquad \cos 30^\circ = \sin 60^\circ \qquad \tan 30^\circ = \cot 60^\circ$$

$$\sec 30^\circ = \csc 60^\circ \qquad \csc 30^\circ = \sec 60^\circ \qquad \cot 30^\circ = \tan 60^\circ$$

یا په عمومي ډول هر وخت چې د دوو زاویو مجموعه 90° وي، که یوه زاویه θ وي، بله زاویه به $(90^\circ - \theta)$ وي.

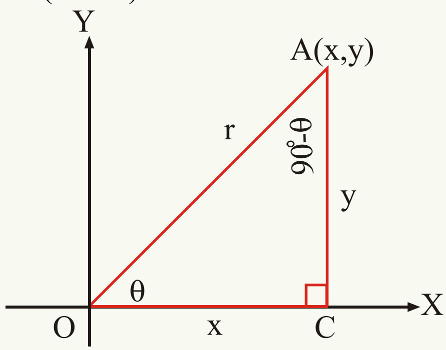
$$\sin(90^\circ - \theta) = \frac{x}{r} \;,\; \cos\theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{y}{r} \;,\; \sin\theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{x}{y} \;,\; \cot\theta = \frac{x}{y} \Rightarrow \tan(90^\circ - \theta) = \cot\theta$$

$$\sec(90^\circ - \theta) = \frac{r}{y} \;,\; \csc\theta = \frac{r}{y} \Rightarrow \sec(90^\circ - \theta) = \csc\theta$$

$$\csc(90^\circ - \theta) = \frac{r}{x} \;,\; \sec\theta = \frac{r}{x} \Rightarrow \csc(90^\circ - \theta) = \sec\theta$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

په همدې ډول وښیاست چې: $\cot(90°-\theta)=\tan\theta$

لکه: څنګه چې د نهم ټولګي په مثلثاتو کې مو ويلي دي چې د زاويو د مثلثاتي نسبتونو جدول هم په همدې اساس جوړ شوی دی:

لومړی مثال: د 39° زاويې مثلثاتي نسبتونه راکړل شوي دي، د 51° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

$\sin 39^\circ = 0{,}6293$ $\quad$ $\tan 39^\circ = 0{,}8098$ $\quad$ $\sec 39^\circ = 1{,}287$

$\cos 39^\circ = {,}7771$ $\quad$ $\cot 39^\circ = 1{,}235$ $\quad$ $\csc 39^\circ = 1{,}589$

حل: څرنګه چې $39^\circ + 51^\circ = 90^\circ$ کېږي، نو:

$\sin 51^\circ = \cos 39^\circ = 0{,}7771$ $\quad$ $\cos 51^\circ = \sin 39 = 0{,}6293$

$\tan 51^0 = \cot 39^\circ = 1{,}235$ $\quad$ $\cot 51^\circ = \tan 39^\circ = 0{,}8098$

$\sec 51^\circ = \csc 39 = 1{,}589$ $\quad$ $\csc 51^\circ = \sec 39^\circ = 1{,}287$

پوښتنې

1 – که:

$\sin 17^\circ = 0{,}2927$ $\quad$ $\cos 17^\circ = 0{,}9563$ $\quad$ $\sec 17^\circ = 1{,}046$ $\quad$ $\csc 17^\circ = 3{,}420$

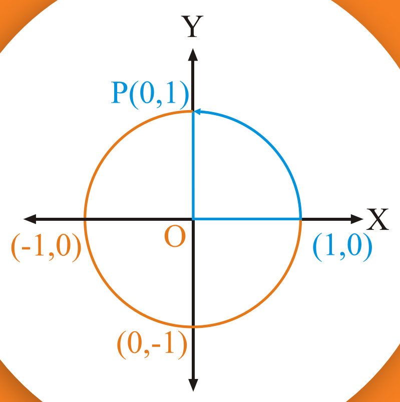
$\cot 17^\circ = 3{,}271$ □ $\tan 17^\circ = 0{,}3057$ وي د 73° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2 – د لاندې اړيکو څخه کومه يوه يې ناسمه ده؟

$\sin 28^\circ = \cos 62^\circ$ $\quad$ $\cos 12^\circ\ 10'\ 20'' = \sin 77^\circ\ 49'\ 40''$

$\sec 12^\circ = \sec 88^\circ$ $\quad$ $\tan 70^\circ = \cot\ 20^\circ$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د $0°, 90°, 180°, 270°$ او $360°$ زاويو مثلثاتي نسبتونه:

آيا $\tan 90^o$ او $\tan 270^o$ تعريف شوي دي؟

د $\frac{\pi}{2} = 90^o$ زاويې مثلثاتي نسبتونه:

خرنگه چې $P(0,1)$ ټکی په مثلثاتي دايره باندې د 90^o زاويې په دويمه ضلع واقع دی، نو:

$$r = 1 \qquad x = 0 \qquad y = 1$$

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos 90° = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \sin\frac{\pi}{2} = \sin 90° = \frac{y}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot\frac{\pi}{2} = \cot 90° = \frac{x}{y} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \tan\frac{\pi}{2} = \tan 90° = \frac{y}{x} = \frac{1}{0}$$ (تعريف شوی نه دی)

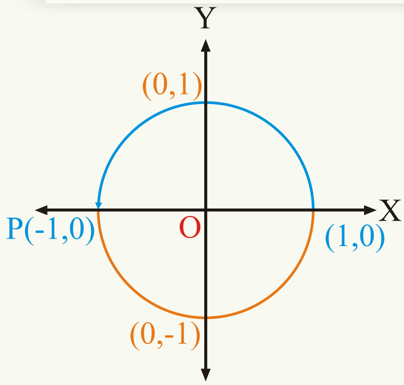
$$\csc\frac{\pi}{2} = \csc 90° = \frac{r}{y} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \sec\frac{\pi}{2} = \sec 90° = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}$$ (تعريف شوی نه دی)

فعاليت

آيا کولای شئ، ووايئ چې $\cot 0°$ او $\csc 0°$ تعريف شوي نه دي؟ ولې؟

د 180^o زاويې مثلثاتي نسبتونه: خرنگه چې د $p(-1,0)$ ټکی په مثلثاتي دايره باندې د $180°$ زاويې په دويمه ضلع باندې پروت دی، نو:

$r = 1 \qquad x = -1$ او $y = 0$ دی.



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 180^\circ = \sin \pi = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 180^\circ = \cos \pi = \frac{x}{r} = \frac{-1}{1} = -1$$

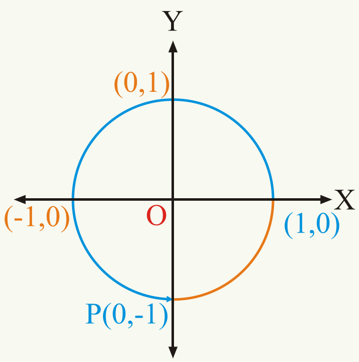
$$\tan 180^\circ = \tan \pi = \frac{y}{x} = \frac{0}{-1} = 0 \qquad \cot 180^\circ = \cot \pi = \frac{x}{y} = \frac{-1}{0} = \text{(تعریف شوی نه دی)}$$

فعالیت

$\sec 180^\circ$ او $\csc 180^\circ$ پیداکړئ.

د $\frac{3\pi}{2} = 270^o$ زاويې مثلثاتي نسبتونه:

خرنګه چې د $P(0,-1)$ ټکی په مثلثاتي دایره باندې د 270^o زاويې پر دويمه ضلع واقع دی.



$r = 1 \qquad x = 0 \qquad y = -1$

$$\sin\frac{3\pi}{2} = \sin 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-1}{1} = -1 \qquad \cos\frac{3\pi}{2} = \cos 270^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan\frac{3\pi}{2} = \tan 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-1}{0}\text{(تعریف نه دی)} \qquad \cot\frac{3\pi}{2} = \cot 270^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\sec\frac{3\pi}{2} = \sec 270^\circ = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}\text{(تعریف نه دی)} \qquad \csc\frac{3\pi}{2} = \csc 270^\circ = \frac{r}{y} = \frac{1}{-1} = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په یاد ولرئ چې د 360^o او 0^o زاویو مثلثاتي نسبتونه سره مساوي دي، کولای شئ چې ووایئ ولې؟

د $360^\circ = 2\pi$ زاویې مثلثاتي نسبتونه:

خرنگه چې د $p(1,0)$ نقطه د 360° د زاویې په دویمه ضلعه باندې پرته ده، نو:

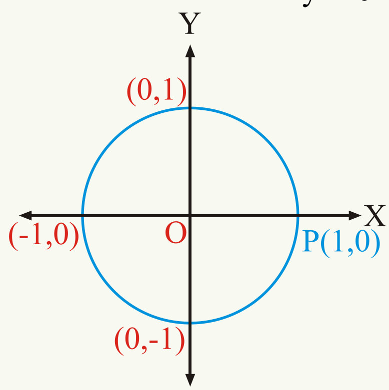
$x = 1 \quad y = 0 \quad r = 1$

$\sin 2\pi = \sin 360^0 = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0 \qquad \cos 2\pi = \cos 360^o = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$

$\tan 2\pi = \tan 360^o = \frac{y}{x} = \frac{0}{1} = 0$

$\cot 2\pi = \cot 360^o = \frac{x}{y} = \frac{1}{0}$ (تعریف شوی نه دی)

$\sec 2\pi = \sec 360^o = \frac{r}{x} = \frac{1}{1} = 1$ ، $\csc 2\pi = \csc 360^o = \frac{r}{y} = \frac{1}{0}$ (تعریف شوی نه دی)



فعالیت

د 0^o زاویې ټول مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$0^o, 90^o, 180^o, 270^o$ او 360^o زاویو ته محوري زاویې وایي چې د هرې زاویې دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعریف شوي نه دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- لاندې جدول ډک کړئ.

θ	0°	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					

2- $\tan 270^{\circ} = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف شوې نه دې

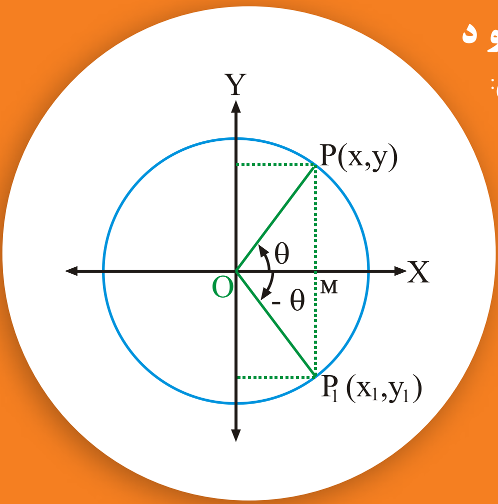
3- $\cos 90^{\circ} = ?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) تعریف شوې نه دې

4- آیا $\cos\frac{9\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2}$ دي؟ ولې؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې حاده زاويې او نورو زاويو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړيکې:



څرنګه چې مو په نهم ټولګي کې ولیدل چې مثلثاتي جدول یوازې د یوې حادې مثبتې زاویې مثلثاتي نسبتونه را ښیي ددې لپاره چې د منفي او منفرجه زاویو مثلثاتي نسبتونه هم له مثلثاتي جدول څخه پیدا کړای شو، نو باید ددې زاویو او د یوې حاده مثبتې زاویې د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړیکې پیدا کړو.

د $\hat{\theta}$ او $-\hat{\theta}$ زاويو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړيکې:

د θ حاده زاویه مثبت او له θ سره مساوي زاویه، د ساعت د عقربې د حرکت په جهت کې $-\theta$ زاویه په معیاري حالت په مثلثاتي دایره کې رسموو.

د $P(x,y)$ ټکی د θ پر دوهمه ضلع او د $P_1(x_1,y_1)$ ټکی د $-\theta$ د زاويې پر دوهمه ضلع واقع دی.

څرنګه چې په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OMP}$ او $\overset{\Delta}{OMP_1}$ مثلثونه يو له بله سره مساوي دي.

$$x_1 = x \qquad |y_1| = |y| \qquad -y_1 = y \quad \Rightarrow \quad y_1 = -y$$

$$\sin(-\theta) = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{1} = y_1 = -y = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \frac{x}{r} = x = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

$$\cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

لومړی مثال: د $(-30^\circ = -\frac{\pi}{6})$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل

$$\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(-30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cot(-30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec(-30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \csc(-30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$$

فعالیت

و ښیاست چې: $\csc(-\theta) = -\text{cec}\theta$ ، $\text{Sec}(-\theta) = \text{Sec}\theta$.

دویم مثال: د $-\frac{3\pi}{2}$ د زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\sin(-\frac{3\pi}{2}) = -\sin\frac{3\pi}{2} = -(-1) = 1$$

$$\cos(-\frac{3\pi}{2}) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

فعالیت

د $-\frac{3\pi}{2}$ زاویې نور څلور مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec\theta \qquad \csc(-\theta) = -\csc\theta$$

پوښتنې

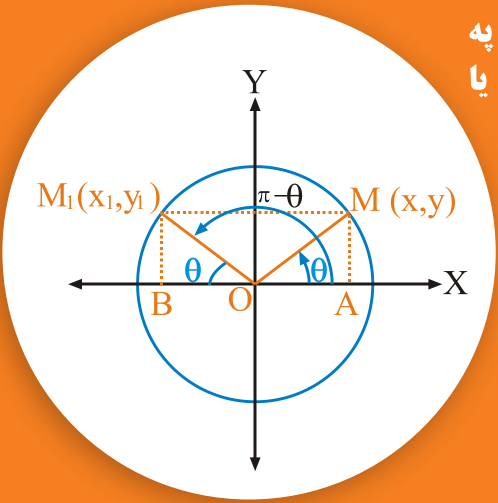
1 - د -360^o یا -2π راډیان مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

2 - د -45^o یا $-\frac{\pi}{4}$ راډیان د (-30°) او (-60°) زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

3 - د -90^o یا $-\frac{\pi}{2}$ راډیان مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د دوه زاويو د مثلثاتي نسبتونو په منځ کې اړيکې چې مجموعه او يا توپير يې π يا 180° وي



- آيا د 150° او 135° زاويو مثلثاتي نسبتونه پيداکولای شئ؟
- آيا $\sin 135^\circ$ او $\sin 45^\circ$ سره مساوي دي؟ ولې؟
- آيا ويلای شئ چې $\sin 130^\circ$ او $\sin 50^\circ$ يو له بله سره څه اړيکه لري؟

دوې زاويې چې مجموعه يې π يا 180° وي، په پام کې نيسو. که θ يوه حاده مثبته زاويه وي بله زاويه $(\pi-\theta)$ ده. دا دواړه زاويې په مثلثاتي دايره کې په معياري حالت کې رسموو.

د $M(x,y)$ ټکی د θ د زاويې په دويمه ضلع باندې او د $M_1(x_1,y_1)$ ټکی د $(\pi-\theta)$ يا $(180-\theta)$ د زاويې پر دويمه ضلع باندې واقع دی. څرنګه چې په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OAM}$ او $\overset{\Delta}{OM_1B}$ مثلثونه سره مساوي دي.

$$(r=1)\qquad |x_1|=|x|\qquad -x_1=x\ \Rightarrow\ x_1=-x\qquad y_1=y$$

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin(\pi-\theta)=\frac{y_1}{r}=\frac{y_1}{1}=y_1=\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ-\theta)=\cos(\pi-\theta)=\frac{x_1}{r}=\frac{-x}{r}=\frac{-x}{1}=-x=-\cos\theta$$

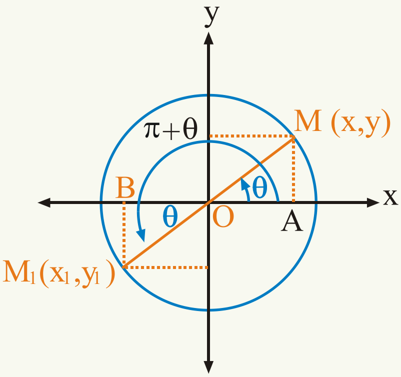
$$\tan(180^\circ-\theta)=\tan(\pi-\theta)=\frac{\sin(180^\circ-\theta)}{\cos(180^\circ-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}=-\tan\theta$$

فعاليت

- د $(\pi-\theta)$ زاويې نور درې مثلثاتي نسبتونه پيداکړئ.

د هغو دوو زاويو د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړيکې چې توپير يې 180° او يا π راډيان وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



که حاده زاویه θ وي، بله زاویه $(\pi+\theta)$ کیږي.
د $M(x,y)$ ټکی پر مثلثاتي دایره باندې د θ پر دویمه ضلع او د $M_1(x_1,y_1)$ ټکی د $(\pi+\theta)$ یا $(180^\circ+\theta)$ د زاویې پر دویمه ضلع باندې واقع دی.
ښرنګه چې د $\overset{\Delta}{OAM}$ او $\overset{\Delta}{OBM_1}$ مثلثونه سره مساوي دي: $x_1=-x$, $y_1=-y$

$$\sin(180^\circ+\theta)=y_1=-y=-\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ+\theta)=x_1=-x=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ+\theta)=\frac{\sin(180^\circ+\theta)}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}=\tan\theta$$

$$\cot(180^\circ+\theta)=\frac{\cos(180^\circ+\theta)}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{-\cos\theta}{-\sin\theta}=\cot\theta$$

$$\sec(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\cos\theta}=-\sec\theta$$

$$\csc(180^\circ+\theta)=\frac{1}{\sin(180^\circ+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

لومړی مثال: د 120° او 240° زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 120^\circ=\sin(\pi-60^\circ)=\sin(180^\circ-60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ=\cos(\pi-60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ=\tan(\pi-60^\circ)=-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\sin 240^\circ=\sin(180^\circ+60^\circ)=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

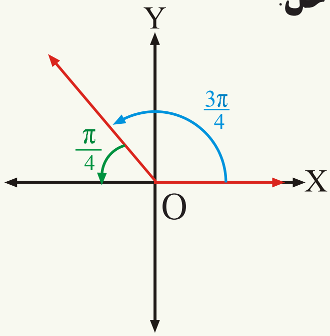
$$\tan 240^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

فعالیت

د 120° او 240° زاویو نور درې، درې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

دویم مثال: د $\frac{3\pi}{4}$ او $\frac{4\pi}{3}$ زاویو sin ، cos او tan پیداکړئ.

حل:

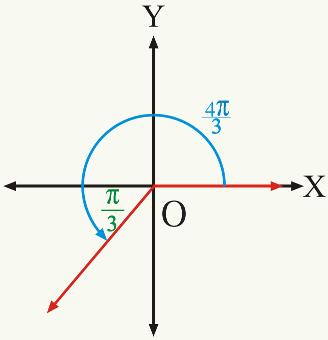


$$\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(\pi - \frac{3\pi}{4}) = \tan\frac{3\pi}{4} = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$



$$\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin\frac{4\pi}{3} = \sin(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{4\pi}{3} = \tan(\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

څرنګه چې $(180^\circ - \theta)$ د زاويې دويمه ضلع په دويمه ناحيه(ربع) کې پرته ده. په دويمه ناحيه کې $\sin\theta$ او $\csc\theta$ مثبت او د $(180^\circ - \theta)$ زاويې نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي او څرنګه چې د $(180+\theta)$ يا $(\pi+\theta)$ زاويې دويمه ضلع په دريمه ربع کې پرته ده، نو ددې زاويې $\tan\theta$ او $\cot\theta$ مثبت او د $(180+\theta)$ زاويې نور مثلثاتي نسبتونه منفي دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د 225° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2- د 210° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

3- د 150° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

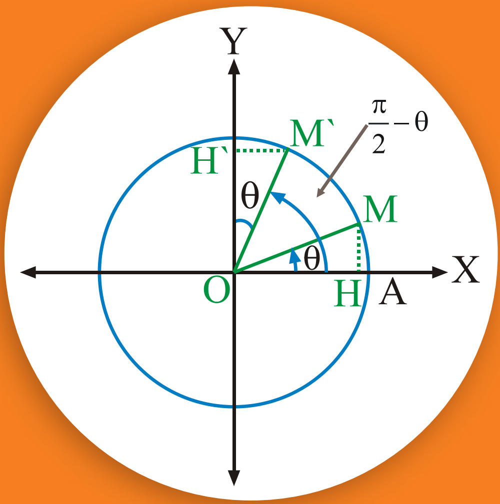
4- $\cot \frac{3\pi}{4} = ?$

a) $-\frac{1}{2}$ b) 1 c) 0 d) -1

5- $\sec(225^\circ) = ?$

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $-\frac{2}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د دوو زاویو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړیکې چې مجموعه یې

90^o یا $\frac{\pi}{2}$ راډیانه وي.

- آیا $\sin 60^\circ = \cos 30^\circ$ دی؟ ولې؟
- د 150° او 60° زاویو مثلثاتي نسبتونه سره څه اړیکه لري؟

د $A\hat{O}M$ زاویه θ او د $A\hat{O}M'$ زاویه له $(\frac{\pi}{2}-\theta)$ څخه عبارت ده چې د θ او $\frac{\pi}{2}-\theta$ زاویو مجموعه 90° یا $\frac{\pi}{2}$ کیږي. څرنګه چې د $\overset{\Delta}{OHM}$ او $\overset{\Delta}{OH'M'}$ مثلثونه سره مساوي دي.

$$\overline{OH'}=\overline{OH}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta$$

$$\overline{H'M'}=\overline{HM}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta)=\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)}=\frac{1}{\cot\theta}=\tan\theta$$

فعالیت

وښیاست چې: $\sec(90-\theta)=\csc\theta$ او $\csc(90-\theta)=\sec\theta$ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: که:

$$\sin 23^\circ = 0{,}3907 \qquad \cos 23^\circ = 0{,}9205 \qquad \tan 23^\circ = 0{,}4245$$
$$\cot 23^\circ = 2{,}356 \qquad \sec 23^\circ = 1{,}086 \qquad \csc 23^\circ = 2{,}559$$

وي، د 67° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل:

$$\sin 67^\circ = \cos 23^\circ = 0.9205 \qquad \cot 67^\circ = \tan 23^\circ = 0.4245$$
$$\cos 67^\circ = \sin 23^\circ = 0.3907 \qquad \sec 67^\circ = \csc 23^\circ = 2.559$$
$$\tan 67^\circ = \cot 23^\circ = 2.356 \qquad \csc t67^\circ = \sec 23^\circ = 1.086$$

فعاليت

که:

$$\sin 8^\circ\ 10' = 0.1421 \qquad \cos 8^\circ\ 10' = 0.9899$$
$$\tan 8^\circ\ 10' = 0.1435 \qquad \cot 8^\circ\ 10' = 6.968$$
$$\sec 8^\circ\ 10' = 1.010 \qquad \csc 8^\circ\ 10' = 7.040$$

وي، د $81^\circ\ 50'$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

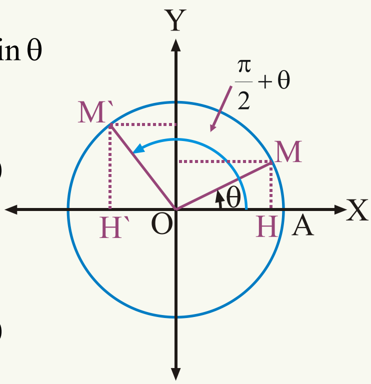
د هغو زاويو مثلثاتي نسبتونه چې توپير يې $\frac{\pi}{2}$ يا 90° وي په لاندې ډول دي:

$$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \sin[\frac{\pi}{2}-(-\theta)] = \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos[\frac{\pi}{2}-(-\theta)] = \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\csc\theta$$

$$\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta$$

دویم مثال: د 120° زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 120^\circ=\sin(90^\circ+30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ=\cos(90^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ=\tan(90^\circ+30^\circ)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\cot 120^\circ=\cot(90^\circ+30^\circ)=-\tan 30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 120^\circ=\sec(90^\circ+30^\circ)=-\csc 30^\circ=-2$$

$$\csc 120^\circ=\csc(90^\circ+30^\circ)=\sec 30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta \qquad \sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta \qquad \cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cot\theta \qquad \tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{2}-\theta)=\tan\theta \qquad \cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$$

$$\sec(\frac{\pi}{2}-\theta)=\csc\theta \qquad \sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$$

$$\csc(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sec\theta \qquad \csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sec\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- د 135^{o} زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2- د 150° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

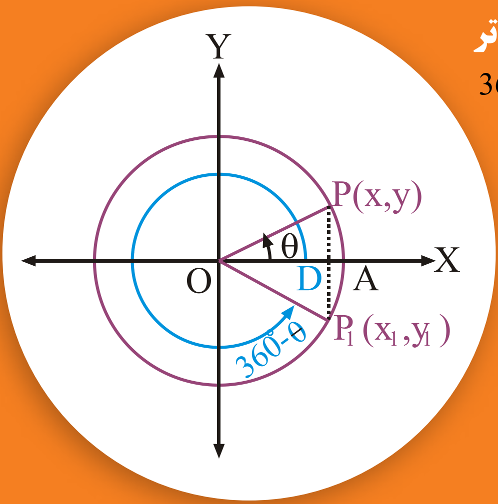
3- $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=?$

a) $\cos x$ b) $\sin x$ c) $-\cos x$ d) $-\sin x$

4- $\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=?$

a) $\tan\theta$ b) $-\tan\theta$ c) $\cot\theta$ d) $-\cot\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د هغه زاویو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ اړیکې چې مجموعه یې 360° یا 2π وي.

آیا ښودلای شئ چې
$\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$ او
$\cos(360^\circ-\theta)=\cos\theta$ اړیکې سمې
دي؟

په پورته شکل کې د $\overset{\Delta}{OPD}$ او $\overset{\Delta}{OP_1D}$ مثلثونو له مساوي والی څخه لرو چې:

$x_1 = x \qquad |y_1| = |y| \qquad -y_1 = y \Rightarrow y_1 = -y$

$\sin(360^\circ-\theta) = y_1 = -y = -\sin\theta$

$\cos(360^\circ-\theta) = x_1 = x = \cos\theta$

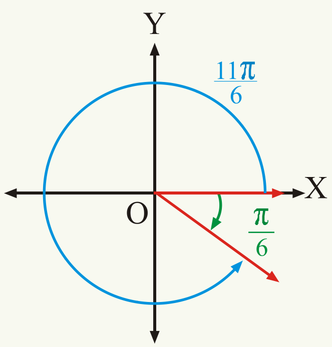
$$\tan(360^\circ-\theta) = \frac{\sin(360^\circ-\theta)}{\cos(360^\circ-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$$

فعالیت

په همدې ډول د θ او $360^\circ-\theta$ زاویو د $\sec, \cot$ او $\csc$ د مثلثاتي نسبتونو ترمنځ اړیکې پیدا کړئ او د θ او $(-\theta)$ زاویو مثلثاتي نسبتونو له اړیکو سره یې پرتله کړئ.

مثال: د 330° یا $\frac{11\pi}{6}$ راډیانه زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\frac{11\pi}{6}=\sin(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sin 330^\circ=\sin(360^\circ-30^0)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{11\pi}{6}=\cos(2\pi-\frac{\pi}{6})=\cos 330^\circ=\cos(360^\circ-30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{11\pi}{6}=\tan(2\pi-\frac{\pi}{6})=\tan 330^\circ=\tan(360^\circ-30^\circ)=-\tan 30^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot\frac{11\pi}{6}=\cot(2\pi-\frac{\pi}{6})=\cot 330^\circ=\cot(360^\circ-30^\circ)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\sec\frac{11\pi}{6}=\sec(2\pi-\frac{\pi}{6})=\sec 330^\circ=\sec(360^\circ-30^\circ)=\sec 30^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

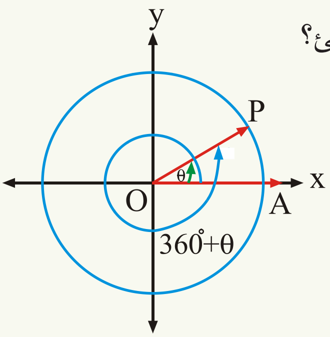
$$\csc\frac{11\pi}{6}=\csc(2\pi-\frac{\pi}{6})=\csc 330^\circ=\csc(360^\circ-30^\circ)=-\csc 30^\circ=-2$$

فعالیت

د 315° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

د کوټرمينل زاويو مثلثاتي نسبتونه:

- آيا $\sin 450^\circ$, $\tan 390^\circ$ او $\csc 450^\circ$ پيدا کولای شئ؟
- آيا $\sin 90^\circ$، $\sin 450^\circ$ او $\sin 790^\circ$ سره برابر دي ؟ ولې؟



په معياري حالت کې د θ حاده زاويې او $360^\circ+\theta$ زاويو دويمې ضلعې يو پر بل پرتې دي، نو:

$$\sin(360^\circ+\theta)=\sin\theta \qquad \cos(360^\circ+\theta)=\cos\theta$$

$$\tan(360^\circ+\theta)=\tan\theta \qquad \cot(360^\circ+\theta)=\cot\theta$$

$$\csc(360^\circ+\theta)=\csc\theta \qquad \sec(360^\circ+\theta)=\sec\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د 405° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

حل

$$\sin 405^\circ = \sin(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 405^\circ = \cos(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 405^\circ = \tan(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \tan(360^\circ + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

$$\cot 405^\circ = \cot(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cot(360^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1$$

$$\sec 405^\circ = \sec(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sec(360^\circ + 45^\circ) = \sec 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\csc 405^\circ = \csc(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \csc(360^\circ + 45^\circ) = \csc 45^\circ = \sqrt{2}$$

دويم مثال: د 1500° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

$$\sin 1500^\circ = \sin(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 1500^\circ = \cos(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 1500^\circ = \tan(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot 1500^\circ = \cot(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 1500^\circ = \sec(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \sec 60^\circ = 2$$

$$\csc 1500^\circ = \csc(4 \cdot 360^\circ + 60^\circ) = \csc 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

دريم مثال: د 900° او -930° زاويو sin ، cos او tan پيدا کړئ.

حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$-930^\circ + 3\cdot 360^\circ = 150^\circ$$

$$\sin(-930^\circ) = \sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

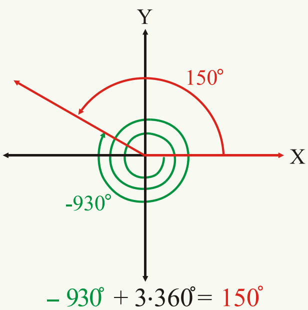
$$\cos(-930^\circ) = \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

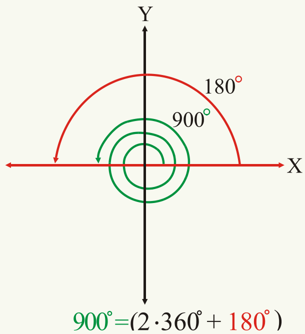
$$\tan(-930^\circ) = \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = \tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 900^\circ = \sin(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \sin 180^\circ = 0$$

$$\cos 900^\circ = \cos(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \cos 180^\circ = -1$$

$$\tan 900^\circ = \tan(2\cdot 360^\circ + 180^\circ) = \tan 180^\circ = 0$$





خلورم مثال: د $-\frac{5\pi}{2}$ او $\frac{7\pi}{3}$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل:

$$-\frac{5\pi}{2} = (-2\pi - \frac{\pi}{2})$$

$$\sin\frac{7\pi}{3} = \sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{3} = \cos(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{7\pi}{3} = \tan(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\cot(\frac{7\pi}{3}) = \cot(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin(-\frac{5\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$$

$$\cos(-\frac{5\pi}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\tan(-\frac{5\pi}{2}) = \tan(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{\cos(-\frac{\pi}{2})} = \frac{-1}{0}$$ تعریف شوی نه دی

$$\cot(-\frac{5\pi}{2}) = \cot(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\cos(-\frac{\pi}{2})}{\sin(-\frac{\pi}{2})} = \frac{0}{-1} = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $\frac{7\pi}{3}$ او $(-\frac{5\pi}{2})$ زاویو نور دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

$$\sin(2\pi-\theta)=\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(2\pi-\theta)=\cos(360^\circ-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(2\pi-\theta)=\tan(360^\circ-\theta)=-\tan\theta$$
$$\cot(2\pi-\theta)=\cot(360^\circ-\theta)=-\cot\theta$$
$$\sec(2\pi-\theta)=\sec(360^\circ-\theta)=\sec\theta$$
$$\csc(2\pi-\theta)=\csc(360^\circ-\theta)=-\csc\theta$$

$$\sin(2\pi+\theta)=\sin(360^\circ+\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(2\pi+\theta)=\cos(360^\circ+\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(2\pi+\theta)=\tan(360^\circ+\theta)=\tan\theta$$
$$\cot(2\pi+\theta)=\cot(360^\circ+\theta)=\cot\theta$$
$$\sec(2\pi+\theta)=\sec(360^\circ+\theta)=\sec\theta$$
$$\csc(2\pi+\theta)=\csc(360^\circ+\theta)=\csc\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د 480^{o} او 390^{o} زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2- د 600^{o} او 300^{o} زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

3- د 1830^{o} او د $(1095^{\circ}\ 20')$ زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

4- د $\frac{25\pi}{6}$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

5- د $\frac{5\pi}{3}$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

6- د $\frac{41\pi}{6}$، $\frac{4\pi}{3}$ او $\frac{3\pi}{4}$ زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

7- د -300^{o}، 780^{o} او 420^{o} زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

8- $\cos(-3\pi) = ?$

a) 1 b) -1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

9- $\cos(-15\pi) = ?$

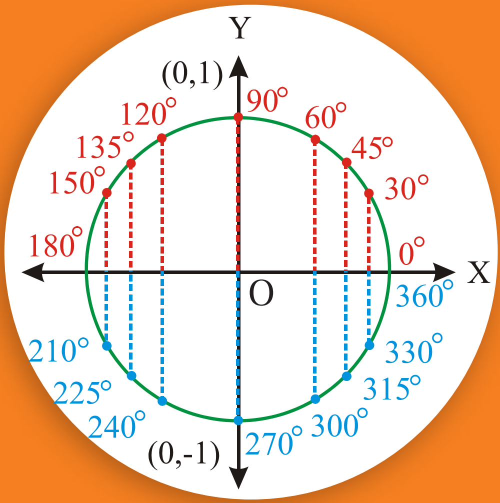
a) 1 b) -1 c) 0 d) دري واړه سم نه دي.

10- $\sin(-1110^{\circ}) = ?$

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلثاتي تابع ګانو ګراف



• آیاکولای شئ ووایاست چې د $f(x)=\sin x$ او $f(x)=\cos x$ د تابعګانو د تناوب دوره څومره ده؟

• آیا ویلای شئ چې د $f(x)=\sin x$ او $f(x)=\cos x$ د تواوبو domain کوم عددونه دي؟

د $f(x)=\sin x$ تابع د ګراف رسمول (graph of the sine function):

د $f(x)=\sin x$ د تابع د تعریف ناحیه (domain) د ټولو حقیقي عددونو سټ دی او Range يې $[-1,1]$ دی. د دې تابع د تناوب دوره 2π ده، ځکه پوهېږئ چې د یوې تابع د تعریف ساحه ټول هغه حقیقي عددونه (Real numbers) دي چې تابع په کې تعریف شوې وي.

د هر حقیقي عدد x لپاره یوه د x راډیان زاویه او له مثلثاتي دایرې سره د x راډیان د زاویې د تقاطع ټکی، هر وخت تعریف شوی دی. که x د راډیان په حساب وي، ددې ټولو زاویو اندازه $2k\pi + x$ راډیان ده، نو د sine او cosine د تابع ګانو د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي.

څرنګه چې sinx او cosx په مثلثاتي دایره باندې د یوه ټکي وضعیه کمیات دي، نو د $f(x)=y=\sin x$ او $f(x)=y=\cos x$ د تابع ګانو د Range (1) او (−1) تر منځ دي، یا د $[-1,1]$ انټروال د $y=\sin\theta$ او $y=\cos\theta$ د تابع ګانو د Range دی.

فعالیت

وښیاست چې $-1\le \sin\theta ,\cos\theta \le 1$ دی.

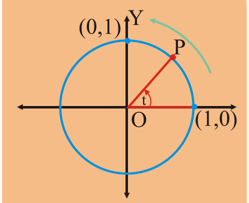
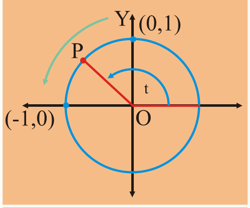
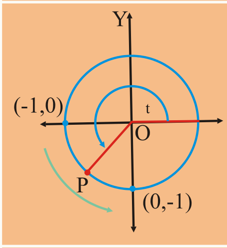
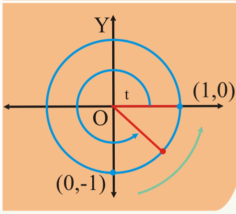
باید په یاد ولرو چې د f تابع ته متناوبه تابع ویل کېږي، که چېرې د t یو عدد د صفر خلاف موجود وي، په دې شرط چې که لومړی $x\in D_F$ وي $x+t$ او $x-t$ هم د f د تابع د تعریف په ساحه (domain) کې شامل وي او $f(x+t)=f(x)$ وي.

تر ټولو کوچنی داسې عدد، لکه: (t) چې د $f(x+t)=f(x)$ په اړیکه کې صدق وکړي. دا د (t)

(c) ketabton.com: The Digital Library

عدد د f د تابع د اصلي تناوب په نوم يادېږي. که (t) د f د تابع د تناوب دوره وي. نو (-t) هم د f د تابع د تناوب دوره ده. څرنګه چې پوهېږئ $\sin(x+2K\pi)=\sin x$ او $\cos(x+2K\pi)=\cos x$ دی چې K يو تام عدد دی، نو د sinx او cosx توابع متناوبې توابع دي او تر ټولو کوچنی عدد چې په پورتنيو اړيکو کې صدق کوي 2π دی، نو د دې دواړو توابعو اصلي تناوب 2π دی.

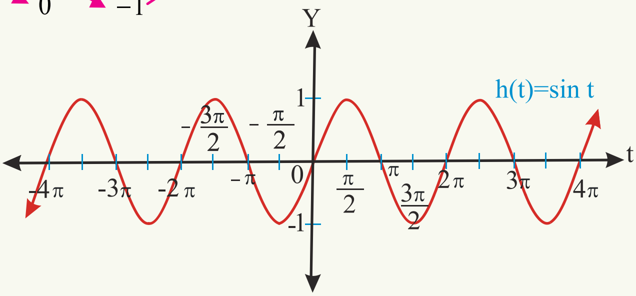
له شکل سره سم په معياري حالت کې يو د $\hat{t}$ راډيان زاويه په پام کې ونيسئ په داسې حال کې چې د t د زاويې دويمه ضلع مثلثاتي دايره د p په ټکي کې قطع کوي، نو د p د ټکي د y مختصه له sin t څخه عبارت ده. $h(t)=\sin t$ د t او sint تغيرات په لاندې جدول او شکل کې وګورئ:

اړونده شکل	sin t	د P د ټکي حرکت	د t په قيمت کې تغير
	له صفرڅخه تر يوه پورې تزايد کوي	له $(1,0)$ څخه تر $(0,1)$	له 0 څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې
	له يوه څخه تر صفره پورې تناقص کوي	له $(0,1)$ څخه تر $(-1,0)$	له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې
	له صفره څخه تر -1 پورې تناقص کوي	له $(-1,0)$ څخه تر $(0,-1)$	له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې
	له -1 څخه تر صفره پورې تزايد کوي	له $(0,-1)$ څخه تر $(1,0)$	له $3\frac{\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول په هر 2π کې تکرارېږي په نتیجه کې $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$ دی.
لاندې جدول او شکل وګورئ:

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$h(t) = \sin t$	0	1	0	-1	0



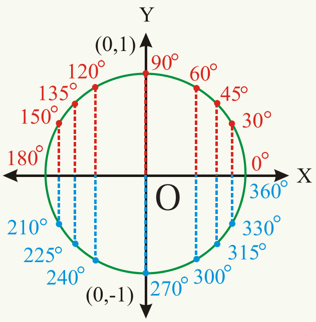
او یا کولای شو، که د یو دوران زاویې د درجې په حساب وي، د sin t تغیرات په لاندې جدول او شکل کې وښایو:

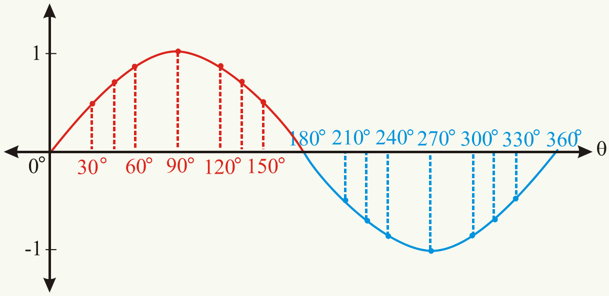
$h(t) = \sin t$

t	واقعي	تقریبي
0°	0	0.00
30°	$\frac{1}{2}$	0.50
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
90°	1	1.00
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
150°	$\frac{1}{2}$	0.50

180°	0	0.00
210°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
270°	-1	-1.00
300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
330°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
360°	0	0.00

(c) ketabton.com: The Digital Library





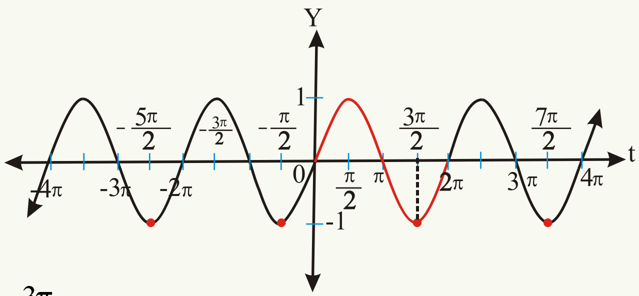
دې ته په پام سره چې sint د تابع د تناوب دوره 2π ده، نو $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$ دی، نو د $\sin t$ د تابع ګراف په $[0,2\pi]$، $[2\pi,4\pi]$، $[4\pi,6\pi]$، $[-2\pi,0]$ او داسې نورو انټروالو کې یو شان دی.

فعالیت

په 4π، 2π، π، 0، $-\pi$، -2π، -3π او -4π کې د $\sin t$ د تابع قیمتونه پیدا کړئ.

لومړی مثال: د t هغه ټول قیمتونه وښیاست چې د $\sin t$ قیمت په کې (-1) وي.

حل: څرنګه چې د sint قیمت د (1) او (-1) تر منځ دی او په هر 2π کې په افقي محور باندې تکرارېږي، نو بې شمېره قیمتونه شته چې په هغه کې د sint قیمت -1 دی. د نمونې په ډول څو ټکي په سور رنګ په شکل کې ښودل شوي دي.

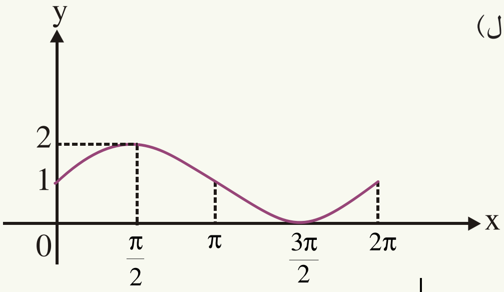


د sint په ګراف کې له صفر څخه تر 2π پورې یوازې یو ټکی(نقطه) د $(\frac{3\pi}{2},-1)$ شته چې په سره رنګ ښودلی شوی دی. ټول هغه قیمتونه چې sint په کې (-1) دی، له $t=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ څخه عبارت دي چې k یو تام عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

دویم مثال: د $y=\sin x+1$ تابع گراف په $[0,2\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

حل: ددې لپاره د تابع د تعریف ساحه $[0,2\pi]$ او Range يې $[0,2]$ دی، ددې تابع د گراف د رسمولو لپاره همدا بس دی چې د $y=\sin x$ گراف رسم کړو او د یوه واحد په اندازه يې د Y پر محور پورته خوا ته انتقال کړو.(عمودی انتقال)



x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y=\sin x+1$	1	2	1	0	1

د sine او cos*ine* **د تابع گانو پریود او لمن(Amplitude):**

که $b>0$ وي د $f(t)=\sin bt$ او $g(t)=\cos bt$ گرافونه، د صفر او 2π تر منځ یوه دوره(Cycle) جوړوي، ددې دواړو تابع گانو پریود $\frac{2\pi}{b}$ دی($b>0$). د مثال په ډول د $y=\cos 3t$ پریود $\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{3}$ دی او د $y=\sin\frac{1}{2}t$ تابع پریود $4\pi=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=\frac{2\pi}{b}$ دی او د $y=a\sin bt$ او $y=a\cos bt$ د تابعگانو لمن د $|a|$ دی($a\neq 0$)، د مثال په ډول د $y=-2\sin 4t$ لمن $2=|-2|=|a|$ او پریود يې $\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{4}=\frac{2\pi}{b}$ دی.

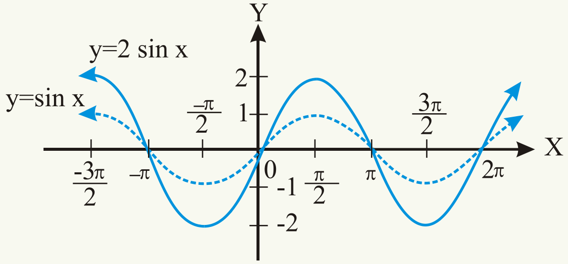
دریم مثال: د $y=2\sin x$ تابع گراف رسم او د $y=\sin x$ د تابع له گراف سره يې پرتله کړئ.

حل: د دې تابع گراف توپیر د $y=\sin x$ د تابع له گراف سره دا دی چې $-2\leq y\leq 2$ دی چې د 2 عدد ته لمن(amplitude) وايي. ځکه چې د $|2|=2$ دی. ددې تابع پر یو د هم 2π

(c) ketabton.com: The Digital Library

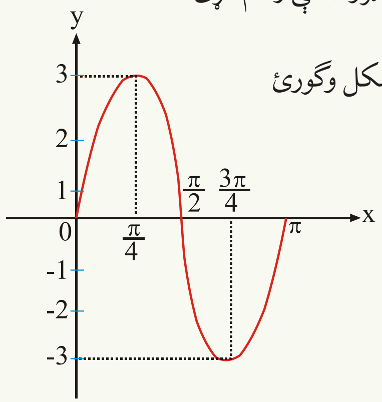
دی، لاندې جدول او شکل وګورئ:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	1	0	-1	0
2 sin x	0	2	0	-2	0



خلورم مثال: د $y = 3\sin 2x$ تابع ګراف په $[0,\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

حل: د دې تابع پریود $\frac{2\pi}{2} = \pi$ دی، لاندې جدول او شکل وګورئ



x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
2x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sin 2x	0	1	0	-1	0
3 sin 2x	0	3	0	-3	0

د sint د تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، د sint د تابع ګراف د y محور په (0،0) او د X محور په (0.0)، π، 2π، 3π، 4π ... او $-\pi$، -2π، -3π -4π او نورو کې قطع

کوي، د $\sin t$ تابع له صفر څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې متزایده، له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې متناقصه، له π

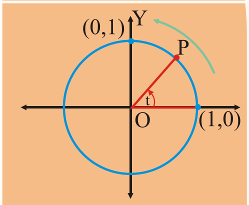
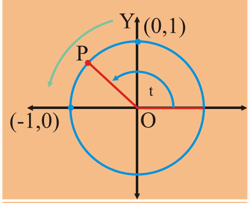
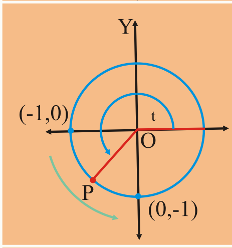
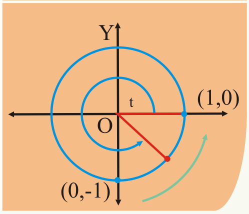
څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې متناقصه او له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې متزایده ده.

د $f(t) = \cos t$ د تابع ګراف (Graph of the cosine function)

د دې تابع د تعریف ساحه(domain) هم د ټولو حقیقي عددونو سټ دی او Range يې $[-1,1]$

(c) ketabton.com: The Digital Library

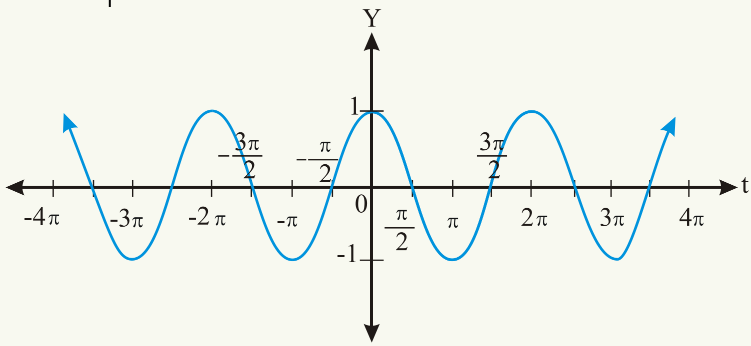
دی، د cosx د تابع د تناوب دوره هم 2π ده، له شکل سره سم په معیاري حالت(Standard position) کې د $\hat{t}$ رادیان یوه زاویه په پام کې ونیسئ چې د $\hat{t}$ د زاویې دویمه ضلع مثلثاتي دایره د p په ټکي کې قطع کوي، نو د p د ټکي د x مختصه د cost څخه عبارت ده. $f(t) = \cos t$
د تابع ګراف د رسمولو لپاره لاندې جدول او شکلونه وګورئ.

اړونده شکل	cost یا د p ټکي د x مختصه	د P د ټکي حرکت	د t په قیمت کې تغیر
	له یوه څخه ترصفره پورې تناقص کوي	له (1,0) څخه تر (0,1) پورې	له 0 څخه تر $\frac{\pi}{2}$
	له صفر څخه تر -1 پورې تناقص کوي.	له (0,1) څخه تر (−1,0) پورې	له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π
	له -1 څخه تر صفره پورې تزاید کوي.	له (−1,0) څخه تر (0,−1) پورې	له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$
	له صفر څخه تر یوه پورې تزاید کوي	له (0,−1) څخه تر (1,0) پورې	له $3\frac{\pi}{2}$ څخه تر 2π

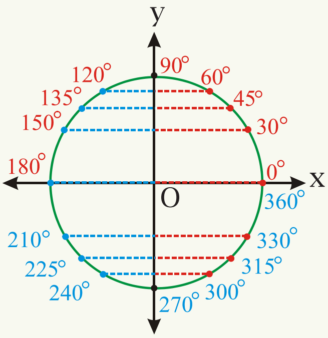
(c) ketabton.com: The Digital Library

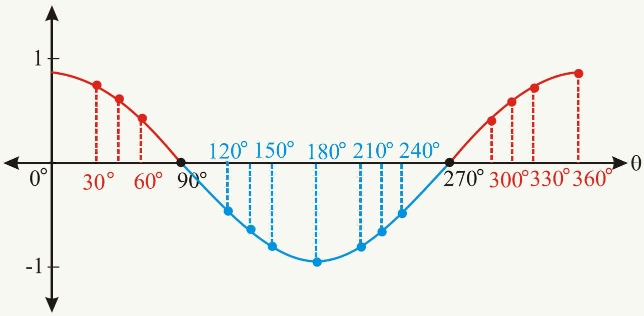
په همدې ډول په هر 2π کې تکراریږي. په نتیجه کې $\cos(t \pm 2\pi) = \cos t$ دی. لاندې جدول او شکل وګورئ.

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(t) = \cos t$	1	0	-1	0	1



کولای شو، د درجې په حساب د $f(t) = \cos t$ تابع ګراف هم رسم کړو:





د $f(t) = y = \cos t$ تابع د تناوب دوره 2π ده، څکه چې د $\cos t$ د تابع ګراف د $[0,2\pi]$، $[2\pi,4\pi]$، $[4\pi,6\pi]$ او $[-2\pi,0]$ او داسې نورو کې یو شان دی.

د $\cos t$ د تابع د تعریف ساحه د حقیقي عددونو سټ او Range یا د y قیمت یې د 1 او -1 تر منځ دی، یا د $[-1,1]$ انټروال د $\cos t$ د تابع Range دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(t) = \cos t$

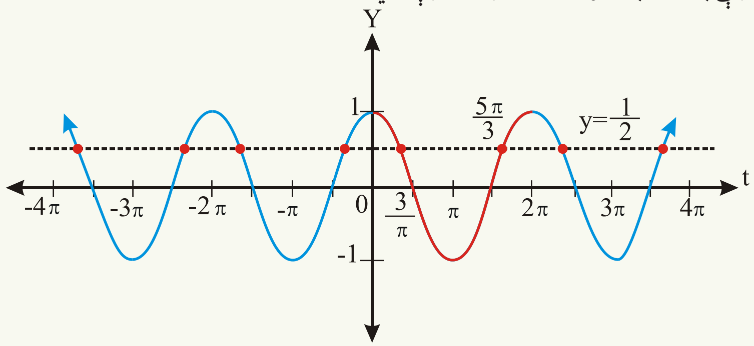
t	واقعي	تقريبي
0°	1	1.00
30°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.71
60°	$\frac{1}{2}$	0.50
90°	0	0.00
120°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
150°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
180°	-1	-1.00
210°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0.87
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0.71
240°	$-\frac{1}{2}$	-0.50
270°	0	0.00
300°	$\frac{1}{2}$	0.50
315°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0.711
330°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0.87
360°	1	1.00

فعالیت

د $g(t) = \cos t$ تابع ګراف د t په کومو قیمتونو کې د y محور قطع کوي؟

لومړی مثال: د t ټول هغه قیمتونه وښیاست چې د cost د تابع قیمت په کې له $\frac{1}{2}$ سره مساوي وي.

حل: څرنګه چې بې شمېره زاویې شته دی چې په هغه قیمتونو کې $y=\cos t=\frac{1}{2}$ دي، په شکل کې څو ټکي د نمونې په ډول په سره رنګ ښودل شوي دي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د $[0,2\pi]$ په انټروال کې داسې دوه ټکي شته چې $\cos t = \frac{1}{2}$ شي چې له $(\frac{\pi}{3},\frac{1}{2})$ او $(\frac{5\pi}{3},\frac{1}{2})$ څخه عبارت دي. ټول هغه قیمتونه چې په هغو کې $\cos t = \frac{1}{2}$ وي، له $t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ یا $t = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ څخه عبارت دي. چې k یو تام عدد دی.

د sin او cos تابع ګانو د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، $y = \cos t$ تابع له صفره څخه تر $\frac{\pi}{2}$ پورې متناقصه او له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π هم متناقصه ده. لیکن له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ متزایده او له $\frac{3\pi}{2}$ څخه تر 2π پورې هم متزایده ده. د $y = \sin t$ او $y = \cos t$، د تابع ګانو پریود 2π دی، په دې معنا چې: $\sin(t \pm 2\pi) = \sin t$, $\cos(t \pm 2\pi) = \cos t$ دی.

د $f(t) = \sin t$ تابع طاقه او $f(t) = \cos t$ تابع یوه جفته تابع ده، ځکه چې: $\sin(-t) = -\sin t$ او $\cos(-t) = \cos t$ دی یا د $\sin t$ د تابع ګراف نظر مبداء ته متناظر او د $\cos t$ تابع ګراف نظر د y محور ته متناظر دی.

پوښتني

1- د لاندې تابع ګانو ګرافونه په راکړل شوو انټروالونو کې رسم کړئ.

$g(t) = \cos t : [\pi, 3\pi]$ $\qquad$ $f(t) = \sin t : [2\pi, 6\pi]$

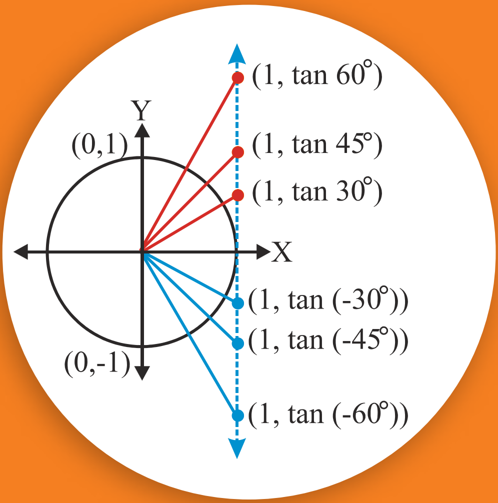
2- د $[-2\pi, 6\pi]$ په انټروال کې د t د کوم قیمت لپاره $\sin t = 1$ دی؟

3- د $[-2\pi, 6\pi]$ په انټروال کې د t دکوم قیمت لپاره $\cos t = 0$ دی؟

4- د $g(t) = -\frac{1}{2}\sin t$ د تابع ګراف په $[-2\pi, 6\pi]$ انټروال کې رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د تانجانټ د تابع ګراف



آیا پوهیږئ چې د tan تابع یوه متزایده تابع ده؟

څرنګه چې $\tan t = \frac{y}{x} = \frac{\sin t}{\cos t}$ دی، په دې شرط چې $\cos t \neq 0$ وي، نو د tan تابع د تعریف ساحه ټول حقیقي عددونه دي، پرته له هغو زاویو څخه چې cos یې صفر وي، د $\frac{\pi}{2}$ او $\frac{3\pi}{2}$ او یا $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ او $\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ د زاویو کوساینونه صفر دي.

څرنګه چې د $\frac{\pi}{2}$ زاویې د دویمې ضلعې د تقاطع ټکی له مثلثاتي دایرې سره د $(0,1)$ ټکی دی، نو د $\frac{\pi}{2}$ زاویې سره د یو پوره دوران (2π) په جمع کولو سره د $\dots -\frac{7\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\dots$ زاویې په لاس راځي چې ددې زاویو د tan قیمتونه تعریف شوي نه دي او د $t = k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ مستقیم خطونه د tan د تابع عمودي مجانبونه دي.

په همدې ډول د $(0,-1)$ ټکی د $\frac{3\pi}{2}$ زاویې پر دویمه ضلع واقع دی، د $\frac{3\pi}{2}$ له زاویې سره د یو پوره دوران (2π) له جمع کولو څخه د $\dots -\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}\dots$ زاویې په لاس راځي چې د tan د تابع د تعریف په ساحه کې شامل نه دي.

یا د tan د تابع د تعریف په ناحیه(domain) کې ټول حقیقي عددونه شامل دي پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه، او یا $IR - \{t / t \in IR, t = k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ او د ټانجانټ د تابع Range د

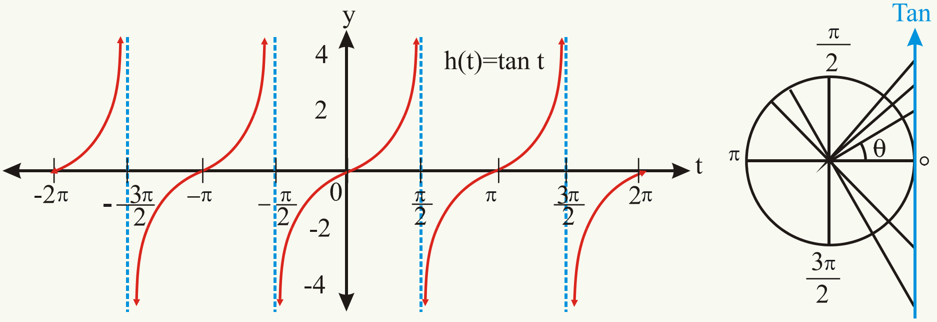
(c) ketabton.com: The Digital Library

ټولو حقیقي عددونو سټ دی. د ټانجانټ د تابع پریود π دی. د t راډیان زاویې لپاره لرو چې:

$\tan(t\pm\pi)=\tan t$ دی. څه وخت چې د $\hat{t}$ زاویه له صفره تر $\frac{\pi}{2}$ پورې تزاید وکړيئ، نو $\tan t$ هم له صفره څخه تر $+\infty$ پورې تزاید کوي ($\tan\frac{\pi}{2}$ تعریف شوی نه دی). په دویمه ربع کې هم څه وخت چې د t زاویه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې تزاید وکړي، $\tan t$ هم له $-\infty$ څخه تر صفره پورې تزاید کوي.

په همدې ډول په دریمه ناحیه کې هغه وخت چې د $\hat{t}$ زاویه له π څخه تر $\frac{3\pi}{2}$ پورې تزاید وکړي، د $\hat{t}$ د زاویې ټانجانټ له صفره څخه تر $+\infty$ پورې تزاید کوي. په څلورمه ناحیه کې د $\hat{t}$ د زاویې ټانجانټ له $-\infty$ څخه تر صفره پورې تزاید کوي. لاندې جدول د ټانجانټ د تابع تحول ښکاره کوي، همدارنګه د دې تابع تحول په لاندې شکلونو کې ښودل شوی دی:

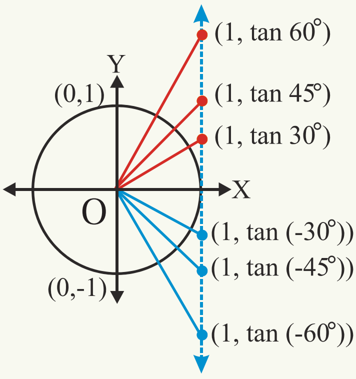
t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$3\pi/2$		2π
$\tan t$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0

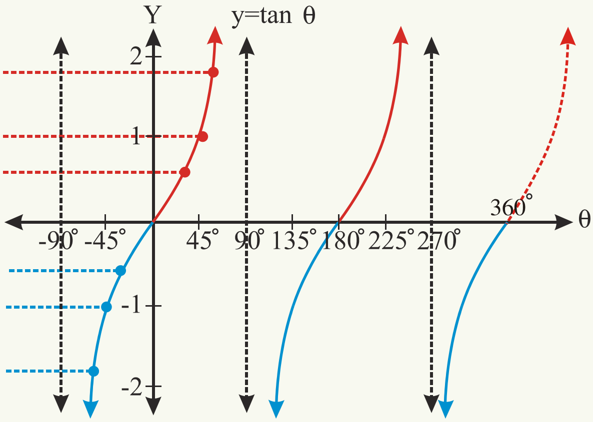


که θ د درجې په حساب وي، د ټانجانټ تابع قیمتونه او شکل په لاندې ډول وګورئ.

	θ	-90° 90°	-60° 120°	-45° 135°	-30° 150°	0° 180°	30° 210°	45° 255°	60° 240°
$\tan\theta$	حقیقي	تعریف شوی نه دی	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
	تقریبي	تعریف شوی نه دی	-1.73	-1	-0.58	0	0.58	1	1.73

(c) ketabton.com: The Digital Library

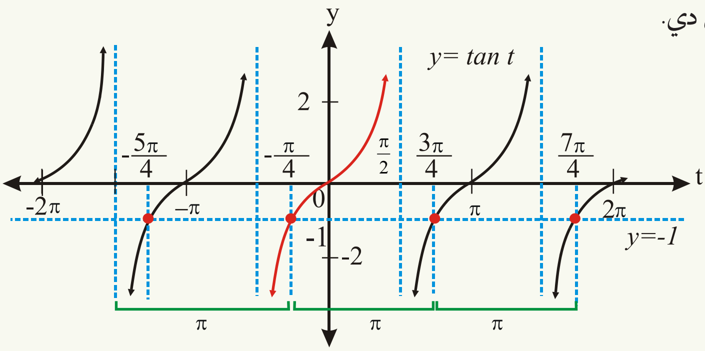




خرنګه چې د $(\pi,2\pi)$ او د $(0,\pi)$ په فاصله کې د ټانجانټ د تابع تغیرات یو شی دي، نو د tan تابع پریود π دی او د tan تابع یوه متزایده تابع ده. له بلې خواکه $b>0$ وي، د $f(t)=\tan bt$ تابع د $\frac{\pi}{2}$ او $-\frac{\pi}{2}$ تر منځ یوه دوره(Cycle) جوړوي، د دې تابع پریود $\frac{\pi}{b}$ دی. د مثال په ډول د $f(t)=\tan 2t$ پریود $\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$ دی.

مثال: د t ټول هغه قیمتونه پیداکړئ چې $\tan t=-1$ وي.

حل: خرنګه چې د $\tan t$ قیمتونه د π په فاصله کې تکرارېږي، نو د t بې شمېره قیمتونه شته چې $y=\tan t$ له 1 - سره مساوي وي چې په لاندې شکل کې څو ټکي د نمونې په ډول ښودل شوي دي.



خرنګه چې د $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ په انټروال کې یوازې د $(-\frac{\pi}{4},-1)$ یو ټکی لري، نو د t ټول قیمتونه چې $\tan t=-1$ دي مساوي دی په: $t=-\frac{\pi}{4}+K\pi$ (K یو تام عدد دی).

(c) ketabton.com: The Digital Library

د tan تابع هر وخت متزایده ده او پرته د $\frac{\pi}{2}$ د طاق مضرب له زاویو څخه پرته په ټولو حقیقي عددونو کې تعریف شوې ده. او د تناوب دوره یې π ده، ځکه چې: $\tan(t \pm \pi) = \tan(t)$.

څرنګه چې $\tan(-t) = -\tan t$ دی، نو $y = \tan t$ یوه طاقه تابع ده او د $\frac{\pi}{2}$ په تام مضرب کې عمودي محانب هم لري.

د sine ، cosine او tangent تابع ګانو د مشخصو لنډیز:

طاقه / جفته	پریود	Range	Domain	سمبول	تابع
طاقه	2π	ټول حقیقي عددونه د 1 او 1 - ترمنځ	د ټولو حقیقي عددونو سټ	$f(t) = \sin t$	$\sin e$
جفته	2π	ټول حقیقي عددونه د 1 او 1 - ترمنځ	ټول حقیقي عددونه	$f(t) = \cos t$	$\cos ine$
طاقه	π	ټول حقیقي عددونه	ټول حقیقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه	$f(t) = \tan t$	$\tan gent$

یا په بل عبارت:

$D_{\sin} = D_{\cos} = IR \qquad R_{\sin} = R_{\cos} = [-1,1]$

$D_{\tan} = \{x \in IR \quad : \quad \cos x \neq 0\}$

پوښتنې

1 – د t د زاویې په کوم قیمت د $\tan t$ د تابع قیمت په $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ انټروال کې له صفره کوچنی دی؟

2 – د $y = 3\tan\theta$ تابع ګراف رسم کړئ.

3 – د $\tan\theta$ تابع پریود مساوي دی په:

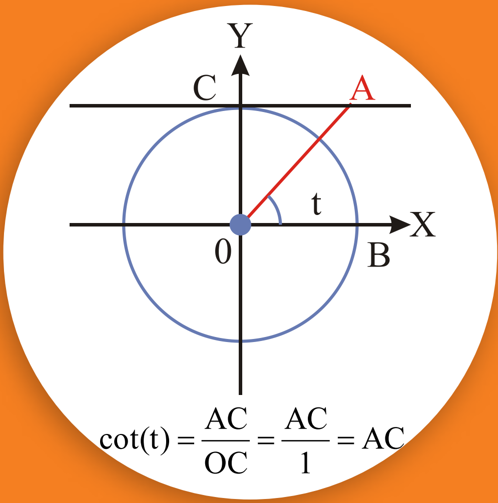
a) 2π b) π c) 3π d) درې واړه سم نه دي

4 – که د θ زاویه له 0° څخه تر 90° پورې تحول وکړي، د $\tan\theta$ تحول عبارت دی له:

a) له 1- څخه تر $-\infty$ b) له صفر څخه تر $+\infty$ c) له $-\infty$ څخه تر $+\infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د کوټانجانټ د تابع ګراف



- آیا د کوټانجانټ د تابع د تناوب دوره پیژنئ؟
- که $\sin t = 0$ وي، آیا $\cot(t)$ تعریف شوی دی؟ که نه، ولې؟

خرنګه چې $\cot(t) = \frac{\cos t}{\sin t}$ دی، که $\sin t = 0$ وي، $\cot(t)$ تعریف شوی نه دی چې t یو تام عدد وي.

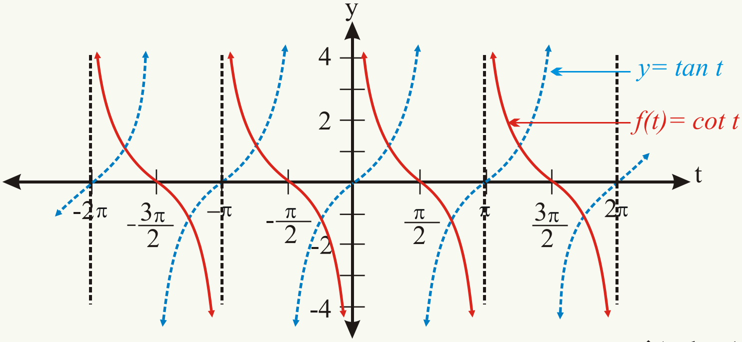
د cot تابع د تعریف ساحه (domain) ټول حقیقي عددونه دي پرته د π له تام مضرب څخه، یا په بل عبارت $IR - \{t / t \in IR, t = k\pi, k \in z\}$ یا $dom_{cot} = \{t \in IR / \sin t \neq 0\}$ او د دې تابع Range ټول حقیقي عددونه دي.

د $f(t) = \cos(t)$ د تابع ګراف د π په تام مضرب کې عمودي مجانب (Vertical asymptotes) لري $(t = k\pi)$ چې k یو تام عدد دی.

څه وخت چې د t زاویه له صفره تر $\frac{\pi}{2}$ پورې زیاته شي، د $\cot(t)$ قیمت له $+\infty$ څخه تر صفره پورې کمیږي ($\cot 0°$ نه دی تعریف شوی) په دویمه ناحیه کې څه وخت چې د t زاویه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې زیاته شي، $\cot(t)$ له صفره تر $-\infty$ پورې کمیږي (تناقص کوي). دې ته په پام سره چې د cot د تابع د تناوب دوره π ده، نو په دریمه او څلورمه ناحیه کې د $\cot(t)$ د تابع تغیرات د لومړۍ او دویمې ناحیې په شان دي. پورتنی حقیقت په لاندې جدول او شکل کې لیدلای شئ.

t	0		$\pi/2$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cot t$	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د secant(t) تابع گراف (Graph of the secant Function)

د sec (t) او cos (t) گرافونه يو له بله سره څه اړيکه لري؟

د $f(t)=\sec(t)$ د تابع گراف د $\cos t$ د تابع له گراف سره معکوسه اړيکه لري، ځکه چې

$\sec(t)=\frac{1}{\cos(t)}$ دی. که $\sec t$ د $\frac{1}{\cos t}$ په شکل په پام کې ونيسو، څه وخت چې د t زاويې

قيمت له صفر څه تر $\frac{\pi}{2}$ يا $90°$ پورې زيات شي، د $\cos t$ قيمت له (1) څخه صفر ته نژدې

کېږي، د $\frac{1}{\cos t}$ يا $\sec t$ قيمت له 1 څخه تر $+\infty$ زياتېږي، که $t=90°$ شي، $\sec t$ تعريف

شوی نه دی ، که t له $90°$ لږ څه زياته شي د $\sec t$ قيمت $-\infty$ کېږي او په $t=\pi=180°$

کې د -1 سره مساوي کېږي. په همدې ډول که t له $180°$ څخه تر $270°$ پورې زياته شي، نو د

$\cos t$ قيمت له -1 څخه صفر ته نژدې کېږي او $\sec(t)$ له -1 څخه تر $-\infty$ پورې کمېږي.

په $t=\frac{3\pi}{2}=270°$ کې د $\sec t$ قيمت غير معين کېږي په همدې ډول، څه وخت چې د t

قيمت له $270°$ څخه تر $360°$ زيات شي، نو $\cos(t)$ له صفر څخه تر يوه پورې قيمت اخلي

او $\sec(t)$ د $+\infty$ څخه تر (1) پورې تناقص کوي. ليدل کېږي چې:

$$\text{Domain } \sec t=IR-\{t \mid t=(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in z\}$$

او $\text{Range } \sec(t)=IR-\{t \mid -1\le t\le 1\}$ يا ټول حقيقي عددونه پرته د $[-1,1]$ له انټروال

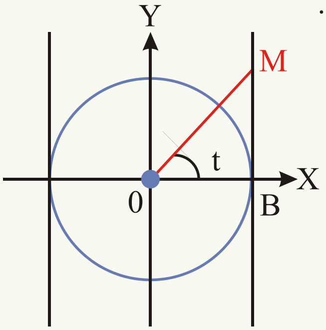
څخه يا په بل عبارت د $f(t)=\sec(t)$ تابع د تعريف ساحه (*Domain*) د ټولو حقيقي عددونو

سټ دی پرته د $\frac{\pi}{2}$ د طاق مضرب څخه او د $f(t)=\sec(t)$ د تابع Range ټول حقيقي عددونه

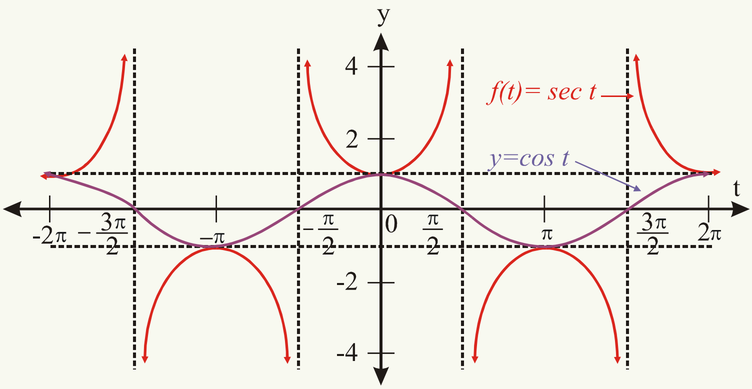
دي چې لوی يا مساوي د يو او يا کوچنی يا مساوي له -1 وي، لکه: ځنګه چې ليدل کېږي د

(c) ketabton.com: The Digital Library

$\sec(t)$ تابع پریود هم 2π دی او د $f(t)=\sec(t)$ تابع د $t=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ کې عمودي مجانبونه لري چې k یو تام عدد دی.



$$\sec t=\frac{\overline{OM}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OM}}{1}=\overline{OM}$$



t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	360
$F(t)=\sec t$	1 ↗ $+\infty$	‖ $-\infty$ ↗	-1	↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	1

فعالیت

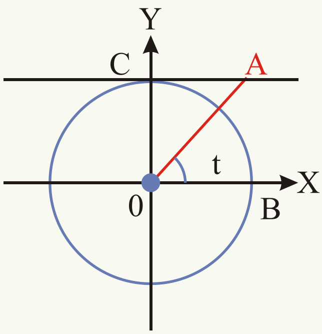
د $f(t)=\frac{4}{3}\sec(t)$ تابع گراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د cosecant د تابع ګراف (Graph of the cosecant Function)

د $f(t)=\sin(t)$ تابع ګراف د $f(t)=\csc(t)$ د تابع له ګراف سره څه اړیکه لري؟

څرنګه چې $\csc t=\dfrac{1}{\sin t}$ دی، $\sin t$ او $\csc t$ یو د بل معکوس دي. څه وخت چې $\sin(t)=0$ وي، $\csc t$ تعریف شوی نه دی، د $f(t)=\csc(t)$ د تابع د تعریف ناحیه ټول حقیقي عددونه دي پرته له هغو زاویو څخه چې د π تام مضرب وي، (هغه زاویې چې sine یې صفر وي) چې په دې قیمتونو کې عمودي مجانبونه هم لري او د $f(t)=\csc(t)$ د تابع Range ټول هغه حقیقي عددونه دي چې لوی یا مساوي د یو، کوچنی یا مساوي له (-1) سره وي. او دغه تابع پریود هم 2π دی.



څه وخت چې د t زاویه له $0°$ څخه تر $90°$ پورې زیاته شي، نو $\sin t$ له صفر څخه تر (1) پورې زیاتیږي (تزاید کوي) او $\csc(t)$ له $+\infty$ څخه تر (1) پورې کمیږي (تناقص کوي)، څه وخت چې $t=90°$ شي، $\csc(t)=1$ کیږي او که د t زاویه له $90°$ څخه تر $180°$ زیاته شي، نو $\sin(t)$ له یوه څخه صفر ته راکمیږي او $\csc(t)$ له (1) څخه $+\infty$ ته زیاتیږي (تزاید کوي). کله چې $t=180°$ شي نو $\sin(t)=0$ او د $\csc(t)$ قیمت غیر معین شي او که د t زاویه $180°$ څخه تر $270°$ پورې زیاته شي، $\sin(t)$ له صفر څخه تر (-1) پورې کمیږي او $\csc(t)$ له $-\infty$ څخه تر (-1) پورې زیاتیږي، د $t=270°$ په قیمت $\csc(t)$ له (-1) سره مساوي کیږي.

په همدې ډول کله چې د t زاویه له $270°$ څخه تر $360°$ پورې زیاته شي (تزاید وکړي)، نو $\sin t$ له -1 څخه صفر ته نژدې کیږي او $\csc(t)$ له (-1) څخه تر $-\infty$ پورې کمیږي. په $t=360°$ کې د $\csc(t)$ قیمت غیر معین شي (تعریف شوی نه دی). $t=k\pi$ کې تابع عمودي مجانبونه لري.

په شکل کې د مثلثاتي دایرې د C په ټکي کې یو مماس رسموو، د $\overset{\Delta}{OCA}$ په قایم الزاویه مثلث کې لرو چې:

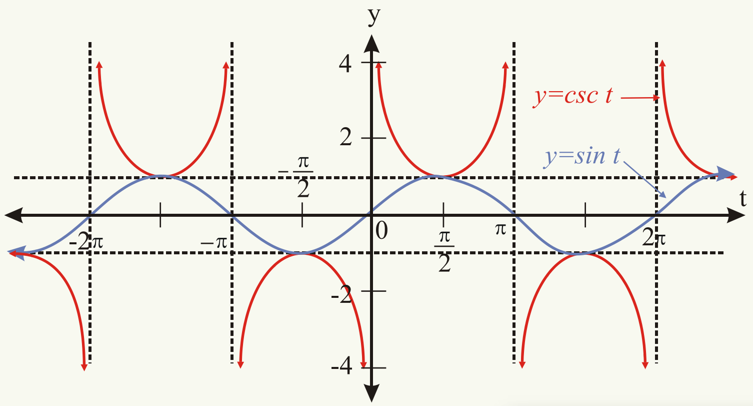
$$\csc(t)=\csc O\hat{A}C=\frac{\overline{OA}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{OA}}{1}=\overline{OA}\qquad (\hat{t}=O\hat{A}C)$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\overline{OA}$ د خط یا $\csc(t)$ تحول په لاندې جدول کې لنډوو:

t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$F(t)=\csc t$	$+\infty \searrow$	$1 \nearrow$	$+\infty \mid\mid -\infty \nearrow$	$-1 \searrow$	$-\infty$

لیدل کېږي چې که د t زاویه له صفر څخه تر $360°$ یا (2π) پورې قیمتونه واخلي، نو $\csc(t) \le -1$ او یا $\csc(t) \ge 1$ کېږي، نو لاندې شکل وګورئ.



فعالیت

د $h(t)=-3\csc t$ د تابع ګراف رسم کړئ.

لاندې جدول ته وګورئ:

سمبول	Domain	Range	پریود	طاق یا جفته
$f(t)=\sec t$	ټول حقیقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه	ټول حقیقي عددونه کوچني یامساوي په -1، لوی یا مساوي په (1)	2π	جفته

(c) ketabton.com: The Digital Library

$f(t)=\csc(t)$	ټول حقيقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه	ټول حقيقي عددونه کوچني يامساوي په -1 لوی يا مساوي په 1	2π	طاق
$f(t)=\cot(t)$	ټول حقيقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه	ټول حقيقي عددونه	π	طاق

له مثلثاتي تابع ګانو څخه دا نتيجه په لاس راځي چې: د θ يا (t) د زاويې په زياتوالي سره د $\sin\theta$ او $\tan\theta$ مثلثاتي نسبتونه هم زياتيږي، خو د $\cos\theta$ او $\cot\theta$ قيمت کميږي.

پوښتني

1 – د $f(t)=\cot(t)$ تابع د t په کوم قيمت کې تعريف شوې نه ده او ولې؟

2 – څه وخت چې د θ زاويه له $\frac{\pi}{2}$ څخه تر π پورې تحول وکړي، د $\cot\theta$ تحول عبارت دی:

a) $1\to-\infty$ b) $0\to-\infty$ c) دواړه سمې نه دي

3 – که $\hat{t}=\pi$ وی، $\cot(t)$ عبارت دی له:

$a)$ صفر $b)\ -1$ $c)$ نه دی تعريف شوی

4 – د $\sec$ او $\csc$ تابع ګانو *Range* عبارت دی له:

a) $IR-\{t\,|\,-1<t<1\}$ $b)$ ټول حقيقي عددونه c) $IR-\{t\,|\,-1\le t\le 1\}$

5 – د $f(t)=\csc(t)$ تابع د تعريف ساحه (*Domain*) عبارت ده، له:

a) ټول حقيقي عددونه پرته د π له تام مضرب څخه

b) ټول حقيقي عددونه پرته د $\frac{\pi}{2}$ له طاق مضرب څخه

c) ټول حقيقي عددونه پرته د 2π له تام مضرب څخه d) دري واړه سمي نه دي

6 – د $f(t)=\csc(t)$ تابع د $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ په انټروال کې:

$a)$ متزايده ده $b)$ متناقصه ده $c)$ نه متزايده او نه متناقصه ده

(c) ketabton.com: The Digital Library

د خپرکي لنډيز

- د $\frac{d}{180}=\frac{g}{200}=\frac{R}{\pi}$ د فورمول په مرسته کولای شو، زاویه له یوه واحد څخه بل واحد ته واړوو.
- یو راډیان هغه مرکزي زاویه ده چې د مقابل قوس اوږدالی یې د شعاع له اوږدوالي سره مساوي وي.
- θ د راډیان په حساب مساوي ده په: $\theta=\frac{s}{r}$ چې s د مرکزي زاویې مقابل قوس او r د دایرې شعاع ده.
- که د يوې زاويې رأس د وضعيه کمیاتو په مبدأ کې او لومړنی ضلع يې د X د محور په مثبت جهت منطبق وي، زاویه په معیاري حالت کې ده.
- که په معیاري حالت کې د دوو یا څو زاویو دویمې ضلعې یو پر بل منطبقې وي، دا زاویې کوټرمینل زاویې نومېږي.
- مثلثاتي دایره هغه دایره ده چې د شعاع اوږدوالی یې د اوږدوالي واحد وي.

$\sin(90-\theta)=\cos\theta$ $\cos(90-\theta)=\sin\theta$ $\tan(90-\theta)=\cot\theta$	$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(-\theta)=\cos\theta$ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$	$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(90-\theta)=\tan\theta$ $\sec(90-\theta)=\csc\theta$ $\csc(90-\theta)=\sec\theta$	$\cot(-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(-\theta)=\sec\theta$ $\csc(-\theta)=-\csc\theta$	$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(\pi-\theta)=-\sec\theta$ $\csc(\pi-\theta)=\csc\theta$
$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)=\cos\theta$ $\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\sin\theta$ $\tan(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\cot\theta$	$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$	$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$ $\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$ $\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$
$\cot(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\tan\theta$ $\sec(\frac{\pi}{2}+\theta)=-\csc\theta$ $\csc(\frac{\pi}{2}+\theta)=\sec\theta$	$\cot(\pi+\theta)=-\cot\theta$ $\sec(\pi+\theta)=-\sec\theta$ $\csc(\pi+\theta)=-\csc\theta$	$\cot(2\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\sec(2\pi-\theta)=\sec\theta$ $\csc(2\pi-\theta)=-\csc\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

• د θ او $(\theta+2k\pi)$ زاويې چې k يو تام عدد دی، کوټرمينل زاويې دي چې ټول مثلثاتي نسبتونه يې سره مساوي دي.

• د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ د توابعو *domain* ټول حقيقي عددونه او *Range* يې $[-1,1]$ دی.

• د $y=\sin\theta$ تابع يوه طاقه تابع ده، ځکه چې $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ ددې تابع گراف نظر د وضعيه کمياتو مبدأ ته متناظر دی او د $y=\cos\theta$ تابع جفته تابع ده، ځکه چې $\cos(-\theta)=\cos\theta$ او د cos تابع گراف نظر y محور ته متناظر دی.

• د 0° ، $\frac{\pi}{2}$ ، π ، $\frac{3\pi}{2}$ او 2π د زاويو دوه، دوه مثلثاتي نسبتونه تعريف شوې نه دي.

• د sin ، cos ، sec او csc تابع گانو د تناوب دوره 2π او د tan او cot د تابع گانو د تناوب دوره(پريود)، π ده.

• د tan تابع هر وخت متزايد او د cot تابع هر وخت متناقصه تابع ده.

• د cos او sec تابع گانې جفتې او د sin، tan، cot او csc تابع گانې طاقې دي.

• که د يوې تابع گراف نظر د y محور ته متناظر وي، دا ډول تابع گانې جفتې دي يا د هر x لپاره، $x\in domf$ د $f(-x)=f(x)$ رابطه صدق وکړي.

• که د يوې تابع گراف نظر د وضعيه کمياتو مبدأ ته سره متناظر وه، طاقه تابع ده چې د هر x لپاره، $x\in domf$ د $f(-x)=-f(x)$ رابطه صدق وکړي.

د مثلثاتي توابعو تحول په لنډ ډول په لاندې جدول کې ښودل شوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

θ / تابع	0°	I	$\frac{\pi}{2}$	II	π	III	$\frac{3\pi}{2}$	IV	2π
Sin	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
Cos	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
Tan	0	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	0
Cot	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$
Sec	1	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ / $+\infty$	↘	1
Csc	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$ / $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

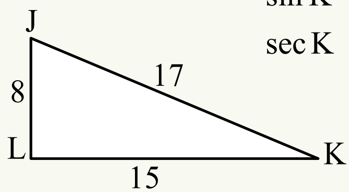
(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1 – $42,6033^\circ$ په درجه، دقیقه او ثانیه بدلې کړئ؟

2 – که د یو ساعت د ثانیې د عقربې دوران 3 دقیقې او25 ثانیې وي، د ثانیې عقربې به څو راډیانه مثبته زاویه طی کړې وي؟

3 – د JKL په مثلث کې لاندې قیمتونه پیدا کړئ؟



sin K	sin J	cos J	cos K	tan K	tan J
sec K	sec J	cot J	cot K	csc J	csc K

4 –که د یوې دایرې شعاع 20cm او د مرکزي زاویې مقابل قوس یې $s = 85cm$ وي، مرکزي زاویه څو راډیانه ده؟

5 – د 1 radian او $2\,radian$ مرکزي زاویو د مقابلو قوسو اوږدوالی پیدا کړئ. په دې ډول چې د دایرې قطر 10 cm وي.

6 – د لاندې زاویو دویمې ضلعې (terminal side) چېرې واقع کېږي؟

$\frac{3\pi}{2}$, -7π , $-\frac{11\pi}{2}$, -500° , 900° , $-\pi$

7 – لاندې زاویې چې په راډیان راکړل شوي دي، په درجه یې واړوئ.

$\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{15}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{45}$

8 – په 54 دقیقو کې د یوه ساعت د ثانیې او د ساعت عقربه هره یوه څو راډیانه طی کوي؟

9 – که د یوه ټراکتور د کوچنې ټایر قطر یو متر او د لوی ټایر قطر 120cm وي، څه وخت چې کوچنی ټایر د 70° درجو په اندازه وڅرخېږي لوی ټایر څو راډیانه طی کوي؟

10 – یو څرخ په یو ساعت کې 300ReV دورانونه کوي، دا څرخ په یوه ثانیه کې څو راډیانه ګرځي؟

11 – د یوه مثلث زاویې په ترتیب سره $4x$ درجې، $\frac{70x}{9}$ ګراده او $\frac{\pi x}{20}$ راډیانه دي. هره یوه

(c) ketabton.com: The Digital Library

زاویه څو درجې ده؟

12- $\hat{A}$، $\hat{B}$، $\hat{C}$ او $\hat{D}$ دیوې څلور ضلعې زاویې دي،که $\hat{A}+\hat{D}=240°$ ، $\hat{C}+\hat{D}=200g$

او $\hat{B}+\hat{D}=\frac{2\pi}{3}^R$ وي: د دې څلور ضلعې زاویې د درجې په حساب پیدا کړئ.

13 - دیوه دوران $\frac{1}{12}$ برخه مساوي ده په:

a) $=30^{\circ}$ b) $\frac{\pi}{6}$radian c) $\frac{100}{3}$g d) درې واړه سمې دي

14 - د دوو زاویو مجموعه $17°$ او تفاضل یې 17 گراده دی، دا دواړه زاویې پیدا کړئ.

15 - د درجې په حساب د دوو زاویو مجموعه x او تفاضل یې د گراد په حساب هم x دی، دا دواړه زاویې پیدا کړئ.

16 -لاندې زاویې د درجې په اعشاري شکل ولیکئ.

$47°\ \ 15'\ \ 36''$ $15°\ \ 24'\ \ 45''$

17 - لاندې زاویې په درجه، دقیقه او ثانیې (DMS) واړوئ.

$23.16°$ $4.2075°$

18 - $\sin(-\frac{\pi}{3})$ ، $\tan\frac{3\pi}{4}$ او $\cot\frac{7\pi}{6}$ زاویو مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ

19 - د $[-2\pi, 2\pi]$ په انټروال کې د θ په کوم قیمت، $\sin\theta=1$ دی؟

20 - د $[-2\pi, 2\pi]$ په انټروال کې د $\tan\theta$ تابع، د θ په کومو قیمتونو کې عمودي مجانب لري؟

21 - له (i) څخه تر (iii) پورې کومه یوه اړیکه سمه نه ده؟

(i) $\sin(-x)=-\sin x$ (ii) $\cos(-x)=-\cos x$

(iii) $\tan(-x)=-\tan x$

a) i او ii سمې دي. *b*) یوازې ii سمه ده.

c) i او iii سمې دي. *d*) درې واړه سمې دي.

e) هیڅ یو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

22 - $\cos\frac{47\pi}{2}$ ، $\sin(-13\pi)$ او $\tan\frac{8\pi}{3}$ پیدا کړئ؟

23 –داسې زاويه پيدا کړئ چې که دګراد په حساب يې له مقدار ه 23 واحده کم کړو، د زاويې مقدار په درجه لاس ته راشي.

24 - د دريو زاويو مجموعه 240ګراده ده، که لومړنۍ زاويه 40 ګراده، دويمه $\frac{3\pi}{4}$ راډيانه وي، دريمه زاويه څو درجې ده؟

25 – د $4185°$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

26 – د $(-3660°)$ زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

27 – د $y=\cos\theta$ تابع د $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ په انټروال کې:

$c)$ هم متزايده او هم متناقصه ده $b)$ متناقصه ده $a)$ متزايده ده

28 – د $y=\tan\theta$ تابع پريود عبارت دی، له:

a) 2π b) π c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{3\pi}{2}$

29 – د $f(t)=\cos(t)$ تابع:

c) نه جفته او نه طاقه ده b) طاقه ده a) جفته ده

30 – هغه تابع چې ګراف يې نظر مبدأ ته متناظر وي.

c) نه جفته او نه طاقه ده b) طاقه ده a) جفته ده

31 – د $y=\cos\theta$ تابع د تناوب دوره عبارت ده، له:

a) π b) $\frac{3\pi}{2}$ c) 2π d) 3π

32 – $\sin 67°$ له $\sin 787°$ سره څه اړيکه لري؟

a) $\sin 787° > \sin 67°$ b) $\sin 787° < \sin 67°$ c) $\sin 67° = \sin 787°$

33 –کومه يوه له لاندې اړيکو څخه سمه ده؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) $\sec 135^\circ = -\csc 45^\circ$ b) $\sec 135^\circ = \csc 45^\circ$
d) $\sec 135^\circ = \sec 45^\circ$ c) $\sec 135^\circ = -\sec 45^\circ$

34 - کومه یوه له لاندې اړیکو څخه سمه ده؟

a) $\tan 240^\circ = \tan 60^\circ$ b) $\tan 240^\circ = -\tan 60^\circ$
c) $\tan 240^\circ = \cot 60^\circ$ d) $\tan 240^\circ = -\cot 60^\circ$

35 - $\cot 0^\circ = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعریف شوی نه دی.

36 - $\cos 9\pi = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ $\frac{1}{2}$

37 - $\sin(-\frac{13\pi}{2}) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ درې واړه سم نه دي

38 - د -2430° له زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

39 - $\sin(270^\circ - \theta) = ?$

$a)$ $\sin\theta$ $b)$ $-\sin\theta$ $c)$ $\cos\theta$ $d)$ $-\cos\theta$

40 - $\sin(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعریف شوی نه دی

41 - $\sec(-\frac{9\pi}{2}) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعریف شوی نه دی

42 - $\tan(-15\pi) = ?$

$a)$ 1 $b)$ -1 $c)$ 0 $d)$ تعریف شوی نه دی

43 - $\sec(-1530^\circ) =$

(c) ketabton.com: The Digital Library

a) 1 b) −1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی

44 – $\cot(-2430°) = ?$

a) 1 b) −1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی

45 – $\sin(\frac{235\pi}{2}) = ?$

a) 1 b) −1 c) 0 d) تعریف شوی نه دی

46 – $\cos(\frac{407\pi}{2}) = ?$

a) 1 b) 0 c) −1 d) ∞

47 – $\tan(90+\theta)$ مساوی دی په:

a) $\cot\theta$ b) $-\cot\theta$ c) $-\tan\theta$ d) $\tan\theta$

48 – $\tan(270+\theta) = ?$

a) $\cot\theta$ b) $-\cot\theta$ c) $\tan\theta$ d) $-\tan\theta$

49 – $\sin(-1980°) = ?$

a) 1 b) −1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

50 – $\sin(-\frac{3\pi}{2}) = ?$

a) 1 b) −1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

51 – له لاندې اړیکو څخه کومه یوه یې سمه ده؟

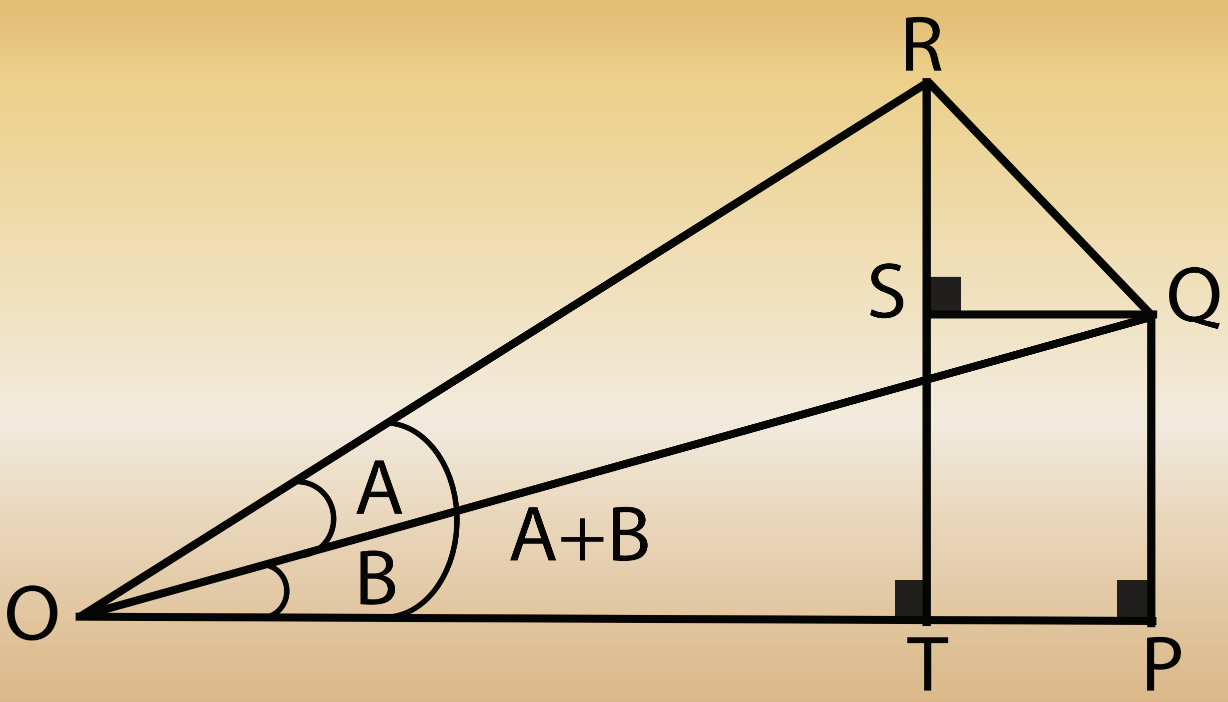
a) $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4}$ b) $\sin\frac{3\pi}{4} > \sin\frac{\pi}{4}$ c) $\sin\frac{3\pi}{4} < \sin\frac{\pi}{4}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم څپرکی

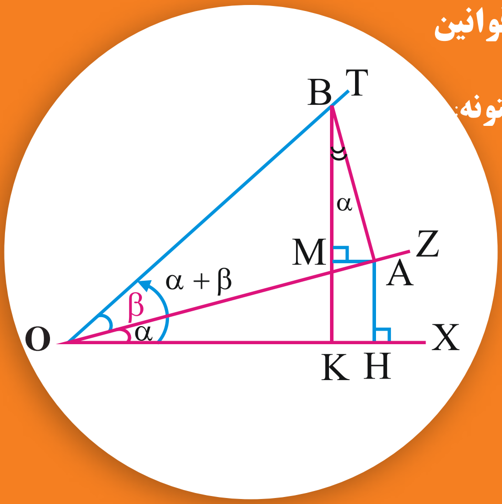
د مثلثاتو تطبیقات

(c) ketabton.com: The Digital Library



(c) ketabton.com: The Digital Library

د مرکبو زاويو د مثلثاتي نسبتونو قوانين
د جمعي او تفاضل فورمولونه
د دوو زاويو د مجموعي مثلثاتي نسبتونه:



آيا د

$$Sin(\alpha+\beta) = Sin\alpha\cos\beta + Cos\alpha Sin\beta$$

رابطې سموالی ښودلای شئ؟

1- د $Sin(\alpha+\beta)$ **محاسبه کول**: د $X\hat{O}Z$ زاویه له α او د $Z\hat{O}T$ زاویه له β سره مساوي جلا کوو او داسې يې يو د بل څنګ ته ږدو چې دوه مجاورې زاويې جوړې کړي بيا د OT د قطعه خط پر مخ د OB قطعه خط د واحد په اندازه جلا کوو. د B له ټکي څخه د BA خط پر OZ عمود رسموو، بيا د A له ټکي څخه د AH خط پر OX عمود رسموو، شکل ته په پام سره لرو چې:

$$Sin\beta = \frac{\overline{AB}}{\overline{\overline{OB}}} = \frac{\overline{AB}}{1} = \overline{AB}$$

$$Cos\beta = \frac{\overline{OA}}{\overline{\overline{OB}}} = \frac{\overline{OA}}{1} = \overline{OA}$$

$$Sin\alpha = \frac{\overline{HA}}{\overline{\overline{OA}}} = \frac{\overline{HA}}{\cos\beta} \Rightarrow \overline{HA} = \sin\propto\cos\beta$$

$$Cos\alpha = \frac{\overline{OH}}{\overline{\overline{OA}}} = \frac{\overline{OH}}{\cos\beta} \Rightarrow \overline{OH} = \cos\alpha\cos\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\overline{KB}}{\overline{\overline{OB}}} = \frac{\overline{KB}}{1} = \overline{KB}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\overline{OK}}{\overline{\overline{OB}}} = \frac{\overline{OK}}{1} = \overline{OK}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د A له ټکي څخه پر KB باندې د AM عمود رسموو چې د KHAM څلور ضلعي مستطيل دی، په نتيجه کې KM=HA او MA=KH دی.

د $M\hat{B}A$ زاويه د α له زاويې سره مساوي ده (ددې دوارو زاويو ضلعې يو پر بل باندې عمود دي). د BMA په قايم الزاويه مثلث کې لرو چې:

$$\cos(M\hat{B}A) = \cos\alpha = \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \frac{MB}{\sin\beta} \Rightarrow \overline{MB} = \cos\alpha \ \sin\beta$$

$$\sin(M\hat{B}A) = \sin\alpha = \frac{\overline{MA}}{\overline{AB}} = \frac{MA}{\sin\beta} = \frac{\overline{KH}}{\sin\beta} \Rightarrow \overline{KH} = \sin\alpha \ \sin\beta$$

که د $\overline{KB} = \overline{KM} + \overline{MB}$ په رابطه کې د KM، KB او $\overline{MB}$ پر ځای يې قيمتونه وضع کړو، لرو چې: $(KM = AH = \sin\alpha\cos\beta)$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \ \cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

2: د $\cos(\alpha+\beta)$ **محاسبه کول** : په همدې ډول که د $\overline{OK} = \overline{OH} - \overline{KH}$ په رابطه کې د OK، KH او OH پر ځای يې قيمتونه وضع کړو، نو لرو چې:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \ \cos\beta - \sin\alpha \ \sin\beta}$$

3: د $\tan(\alpha+\beta)$ **محاسبه کول**:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha \ \cos\beta + \cos\alpha \ \sin\beta}{\cos\alpha \ \cos\beta - \sin\alpha \ \sin\beta}$$

صورت او مخرج په $\cos\alpha\cos\beta$ ویشو:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

لومړی مثال: $\sin\frac{7\pi}{12}$، $\sin 120°$، $\cos 120°$ او $\tan\frac{5\pi}{12}$ پيدا کړئ.

حل

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 120°=\sin(90°+30°)=\sin 90°\cos 30°+\cos 90°\sin 30°$$

$$\sin 120°=1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+0\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120°=\cos(90°+30°)=\cos 90°\cos 30°-\sin 90°\sin 30°$$

$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-1\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{5\pi}{12}=\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

د دوو زاويو د تفاضل مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin 120^\circ=\sin(180^\circ-60^\circ)=?$$

که د جمعې په فورمولونو کې د β پر ځای $-\beta$ وضع کړو، نو لرو چې:

$$\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha(-\sin\beta)$$

پوهېږو چې:

$$\cos(-\beta)=\cos\beta$$

$$\sin(-\beta)=-\sin\beta$$

$$\tan(-\beta)=-\tan\beta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta-\cos\alpha\ \sin\beta}$$

$$\cos[\alpha+(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta$$

$$\tan[(\alpha+(-\beta)]=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(-\beta)}$$

$$\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}}$$

فعالیت

په همدې ډول وښیاست چې: $\cot(\alpha-\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cdot\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$ دی.

لومړي مثال: $\cos\dfrac{\pi}{12}$ او $\sin 150°$ پیدا کړئ.

حل:

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 150°=\sin(180°-30°)=\sin 180°\cos 30°-\cos 180°\sin 30°$$

$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-(-1)\cdot\frac{1}{2}=-(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

دویم مثال: د تفاضل د فورمولونو په مرسته ښکاره کړئ چې $\cos(\dfrac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$ دی.

حل:

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\theta+\sin\frac{\pi}{2}\sin\theta=0\cdot\cos\theta+1\cdot\sin\theta=\sin\theta$$

دریم مثال: وښیاست چې $\cos(270°-\theta)=-\sin\theta$ دی.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos(270^\circ-\theta)=\cos 270^\circ\cos\theta+\sin 270^\circ\sin\theta$$
$$\cos(270^\circ-\theta)=0\cdot\cos\theta+(-1)\sin\theta=-\sin\theta$$

خلورم مثال: $\tan 120^\circ$ پیدا کړئ:

حل:

$$\tan 120^\circ=\tan(180^\circ-60^\circ)=\frac{\tan 180^\circ-\tan 60^\circ}{1+\tan 180^\circ\cdot\tan 60^\circ}=\frac{0-\sqrt{3}}{1+0\cdot\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{1}$$
$$=-\sqrt{3}$$

فعالیت

وښیاست چې: $\sin 211^\circ\cos 59^\circ+\cos 211^\circ\sin 59^\circ=-1$ او $\cos 211^\circ\cos 149^\circ-\sin 211^\circ\sin 149^\circ=1$ دی.

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$	$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$	$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- وښياست چې:

$$\tan(45-\theta)=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

2- وښياست چې:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\ \sin\beta$$

3- $\cos 277^\circ\cos 97^\circ+\sin 277^\circ\sin 97^\circ=?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

4- د جمعي د فورمولونو په مرسته $\sin 240^\circ$، $\cos 240^\circ$ او $\tan 240^\circ$ پيداکړئ.

5- د جمعي او تفاضل د فورمولونو په مرسته وښياست چې:

$\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y]=\cos x\cdot\cos y$ دی.

6- د جمعي د فورمولونو په مرسته د 210° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيداکړئ.

7- $\sin 105^\circ$، $\cos 105^\circ$ او $\tan 105^\circ$ پيداکړئ $(105^\circ=(60^\circ+45^\circ))$

8- که $\sin x=-\frac{3}{4}$ وی او $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ وی، $\cos(\frac{\pi}{4}+x)$ پيداکړئ.

9- وښياست چې: $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta$ دی.

10- $\sin 2^\circ\cos 88^\circ+\cos 2^\circ\sin 88^\circ=?$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 2α مثلثاتي نسبتونه د α له جنسه:

$$\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}=?$$

$$\cos^2 x-\sin^2 x=?$$

آيا ښودلای شئ چې:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

دی؟

$$\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

خرنګه چې $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ دی:

$$\cos 2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

او همدارنګه $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ دی، نو:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=\cos^2\alpha-1+\cos^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

لومړی مثال: که $\sin\theta=\frac{4}{5}$ او د θ دویمه ضلع په دویمه ناحیه (ربع) کې واقع وي، $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پیدا کړئ.

حل: $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}$ (د θ دویمه ضلع په دویمه ربع کې ده).

$$\cos\theta=-\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\sqrt{\frac{25-16}{25}}=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2(\frac{4}{5})(-\frac{3}{5}) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (\frac{-3}{5})^2 - (\frac{4}{5})^2 = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{-\frac{24}{25}}{\frac{-7}{25}} = \frac{24}{7}$$

فعالیت

که $\cos\alpha = \frac{4}{5}$، وي او د α دویمه ضلع په لومړی ربع کې پرته وي، $\tan 2\alpha$ پیدا کړئ.

او که $\sin\beta = \frac{12}{13}$ او د β دویمه ضلع په دویمه ربع کې وي $\sin 2\beta$ پیدا کړئ.

دویم مثال: د $60°$ زاویې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه د $120°$ زاویې مثلثاتي نسبتونه پیدا کړئ.

حل

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\sin 120° = 2\sin 60°\cos 60° = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 120° = \cos^2 60° - \sin^2 60° = (\frac{1}{2})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \Rightarrow \tan 120° = \frac{2\tan 60°}{1-\tan^2 60°} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}$$

په همدې ډول:

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \quad , \quad \tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

دریم مثال: که $90° < \theta < 180°$ او $\cos\theta = -\frac{3}{4}$ وي، د $\cos 2\theta$ قیمت پیدا کړئ.

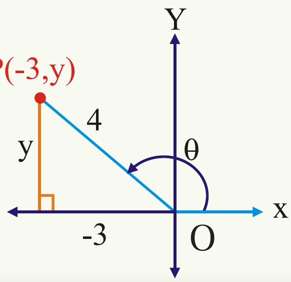
حل:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$(-3)^2 + y^2 = 4^2$$
$$y = \pm\sqrt{4^2 - (-3)^2}$$

$y = \sqrt{7}$ (ځکه چې د y قیمت په دویمه ربع کې مثبت دی.)

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (-\frac{3}{4})^2 - (\frac{\sqrt{7}}{4})^2 = \frac{1}{8}$$



فعالیت

که $90° < \theta < 180°$ او $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ وي، د $\sin\frac{\theta}{2}$ قیمت پیدا کړئ.

همدارنګه کولای شو چې د $\sin\theta$، $\cos\theta$ او $\tan\theta$ قیمتونه د $\tan\frac{\theta}{2}$ له جنسه پیدا کړو:

$$\sin\theta = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}}$$

پوهیږو چې:

$$\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} = 1$$

(صورت او مخرج پر $\cos^2\frac{\theta}{2}$ ویشو:)

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\theta=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}+1}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{1}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\cos\theta=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\quad,\quad\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

همدارنګه کولای شو چې د θ زاویې مثلثاتي نسبتونه د 2θ زاویې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه په لاس راوړو:

$$2\cos^2\theta-1=\cos2\theta$$

$$2\cos^2\theta=1+\cos2\theta$$

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos2\theta}{2}$$

$$\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{1+\cos2\theta}{2}}\quad \text{یا} \quad \cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول:

$$1-2\sin^2\theta=\cos 2\theta$$
$$-2\sin^2\theta = -1+\cos 2\theta$$
$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \quad \text{يا} \quad \sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

په نتيجه کې:

$$\tan\theta=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}} \quad \text{يا} \quad \tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

لومړی مثال: د 30° زاويې مثلثاتي نسبتونه د 60° له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\sin 30^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 60^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ=\sqrt{\frac{1+\cos 60^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 60^\circ}{1+\cos 60^\circ}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

دويم مثال: که $180^\circ<\theta<270^\circ$ او $\sin\theta=-\frac{2}{3}$ وي د $\cos\frac{\theta}{2}$ قيمت پيداکړئ.

حل:

$$x^2+y^2=r^2$$
$$x^2+(-2)^2=3^2 \qquad x=\pm\sqrt{3^2-(-2)^2}=-\sqrt{5}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{5}}{3}$$ (ځکه چې د x قيمت په دويمه ربع کې منفي دی)

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنگه چې $180° < \theta < 270°$ ده، نو $\frac{180°}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{270°}{2}$ یا $90° < \theta < 135°$ ده په دې معنا چې د $\cos\frac{\theta}{2}$ علامه منفي ده.

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+(\frac{\sqrt{5}}{3})}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}(1+\frac{\sqrt{5}}{3})} = -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{6}}$$

فعالیت

وښیاست چې: $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$ او $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ دی.

دریم مثال: **که** $\cos\theta = \frac{4}{5}$ وي او د θ دویمه ضلع په لومړنی ربع کې وي $\sin\frac{\theta}{2}$، $\cos\frac{\theta}{2}$ او $\tan\frac{\theta}{2}$ قیمتونه پیدا کړئ.

حل:

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{9}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{5}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم مثال: وښیاست چې $2 = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta}$ دی.

حل:

$$\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos 3\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin 3\theta\cos\theta - \cos 3\theta\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin(3\theta-\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 2$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \quad ، \quad \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \qquad \tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \qquad \cos\theta = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

$$\tan\theta = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د 120° زاويې د مثلثاتي نسبتونو له مخې د 240° زاويې مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ.

2 - که $\sin\theta = \frac{3}{5}$ وي او د θ دويمه ضلع په لومړنی ربع کې وي، $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پيدا کړئ.

3 - که $\sin\theta = \frac{4}{5}$ وي او د θ دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي $\cos\theta/2$ پيدا کړئ.

4 - $\sin\frac{\pi}{12}$ د $\sin\frac{\pi}{6}$ له جنسه پيدا کړئ.

5 - که $\sin\theta = \frac{12}{13}$ وي او د θ دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي، $\sin\theta/2$ او $\tan\theta/2$ پيدا کړئ.

6 - د 15° زاويې مثلثاتي نسبتونه د 30° زاويې له جنسه پيدا کړئ.

7 - که $\sin\beta = \frac{12}{13}$ وي او د β دويمه ضلع په دويمه ربع کې وي، د $\sin 2\beta$ قيمت مساوی دی په:

a) $\frac{120}{169}$ b) $-\frac{120}{169}$ c) $= -\frac{169}{120}$ d) درې واړه سم نه دي

8 - $\frac{\cos 3\beta}{\cos\beta} - \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta} = ?$

a) 2 b) 1 c) -2 d) -1

(c) ketabton.com: The Digital Library

د 3α زاويي مثلثاتي نسبتونه د α زاويي د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$4\cos^3 45^\circ - 3\cos 45^\circ = ?$$

آيا ښودلای شئ چې دا رابطه

$$\cos 90^\circ = 4\cos^3 30^\circ - 3\cos 30^\circ$$

سمه ده؟

ثرنگه چې:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha$$

$$\sin 3\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos\alpha + (1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

$$= 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \qquad (\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha \qquad (\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha)$$

$$= 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha$$

$$\boxed{\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}$$

لومړي مثال: $\sin 180^\circ$ د $\sin 60^\circ$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\sin 180^\circ = 3\sin 60^\circ - 4\sin^3 60^\circ = 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{12\sqrt{3}}{8}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

ثرنگه چې:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha$$

$$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha$$

$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha) \quad (\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha)$$

$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha$$

$$\boxed{\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}$$

فعالیت

$\cos 270°$ د $\cos 90°$ له جنسه پیدا کړئ.

دويم مثال: $\cos 180°$ د $\cos 60°$ له جنسه پیدا کړئ.

حل:

$$\cos 180° = 4\cos^3 60° - 3\cos 60° = 4(\frac{1}{2})^3 - 3\cdot\frac{1}{2} = 4\cdot\frac{1}{8} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

د $\tan 3\alpha$ پیدا کول:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan 3\alpha = \tan(2\alpha+\alpha) = \frac{\tan 2\alpha + \tan\alpha}{1-\tan 2\alpha\cdot\tan\alpha} = \frac{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} + \tan\alpha}{1 - \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cdot\tan\alpha}$$

$$= \frac{\frac{2\tan\alpha + \tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{\frac{1-\tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}} = \frac{2\tan\alpha + \tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha} = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

دريم مثال: $\tan 135°$ د $\tan 45°$ له جنسه په لاس راوړئ.

حل:

$$\tan 135° = \frac{3\tan 45° - \tan^3 45°}{1-3\tan^2 45°} = \frac{3\cdot 1 - 1}{1-3\cdot 1} = \frac{2}{-2} = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خلورم مثال: وښياست چې $4\sin\theta\sin(60^\circ-\theta)\sin(60^\circ+\theta)=\sin 3\theta$

حل:

$$4\sin\theta(\sin 60^\circ\cos\theta-\cos 60^\circ\sin\theta)(\sin 60^\circ\cos\theta+\cos 60^\circ\sin\theta)$$

$$=4\sin\theta(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta)(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta)$$

$$=4\sin\theta(\frac{3}{4}\cos^2\theta-\frac{1}{4}\sin^2\theta)=\sin\theta(3\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$

$$\mathrm{Sin}\,\theta[3(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta]=\sin\theta\cdot 3-3\sin^3\theta-\sin^3\theta$$

$$=3\sin\theta-4\sin^3\theta=\sin 3\theta$$

د $(\alpha+\beta+\square)$ مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin(\alpha+\beta+\square)=\sin[\alpha+(\beta+\square)]=\sin\alpha\cos(\beta+\square)+\cos\alpha\sin(\beta+\square)$$

$$=\sin\alpha(\cos\beta\cos\square-\sin\beta\sin\square)+\cos\alpha(\sin\beta\cos\square+\cos\beta\sin\square)$$

$$=\sin\alpha\cos\beta\cos\square-\sin\alpha\sin\beta\sin\square+\sin\beta\cos\alpha\cos\square+\sin\square\cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos[\alpha+(\beta+\square)]=\cos\alpha\cos(\beta+\square)-\sin\alpha\sin(\beta+\square)$$

$$=\cos\alpha(\cos\beta\cos\square-\sin\beta\sin\square)-\sin\alpha(\sin\beta\cos\square+\cos\beta\sin\square)$$

$$=\cos\alpha\cos\beta\cos\square-\cos\alpha\sin\beta\sin\square-\cos\square\sin\alpha\sin\beta-\cos\beta\sin\alpha\sin\square$$

$$\tan(\alpha+\beta+\square)=\tan[\alpha+(\beta+\square)]=\frac{\tan\alpha+\tan(\beta+\square)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(\beta+\square)}$$

$$\tan(\alpha+\beta+\square)=\frac{\tan\alpha+\dfrac{\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\tan\square}}{1-\tan\alpha\dfrac{\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\cdot\tan\square}}$$

$$=\frac{\dfrac{\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta\tan\square+\tan\beta+\tan\square}{1-\tan\beta\tan\square}}{\dfrac{1-\tan\beta\tan\square-\tan\alpha\tan\beta-\tan\alpha\cdot\tan\square}{1-\tan\beta\cdot\tan\square}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\square+\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\square}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta-\tan\beta\tan\square+\tan\alpha\tan\square}$$

پنځم مثال: $\sin 135^\circ$ د $\sin(30^\circ+45^\circ+60^\circ)$ له جنسه په لاس راوړئ.

حـل

:

$$\sin 135^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ+60^\circ)=\sin 30^\circ\cos 45^\circ\cos 60^\circ$$
$$-\sin 30^\circ\sin 45^\circ\sin 60^\circ+\sin 45^\circ\cos 30^\circ co60^\circ+\sin 60^\circ\cos 30^\circ\cos 45^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{6}}{8}+\frac{\sqrt{6}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{8}=\frac{4\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پوښتنې

1- $\sin 90^\circ$ ، $\cos 90^\circ$ او $\tan 90^\circ$ په ترتيب سره د $\sin 30^\circ$ ، $\cos 30^\circ$ او $\tan 30^\circ$ له جنسه پيدا کړئ.

2- $\cos 135^\circ$ او $\tan 135^\circ$ پيدا کړئ. $135^\circ=(30^\circ+45^\circ+60^\circ)$

3- $8\cos^3\theta-6\cos\theta=?$

a) $\cos 3\theta$ b) $2\cos 3\theta$ c) $-2\cos 3\theta$

4- $\text{Cos}(\hat{A}-\hat{B}+\hat{C})$ د $\hat{A}$, $\hat{B}$ او $\hat{C}$ زاويو د مثلثاتي نسبتونو له جنسه پيدا کړئ.

5- وښياست چې:

$$4\cos x\cos(60^\circ-x)\cos(60^\circ+x)=\cos 3x$$
$$\tan x\tan(60^\circ-x)\tan(60^\circ+x)=\tan 3x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = ?$$

$$\tan 45^\circ + \tan 60^\circ = ?$$

د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل بدلول د ضرب دحاصل په شكل

آيا د $\sin 30^\circ + \sin 60^\circ$ قيمت پيدا كولاى شئ؟

څرنګه چې پوهيږو:

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \ldots (I)$$
$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \ldots (II)$$

كه $A+B=P$ او $A-B=q$ فرض كړو او (I) او (II) رابطې سره جمع كړو، نولرو چې:

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cos B$$

$$\begin{array}{l} A+B=p \\ \underline{A-B=q} \\ 2A = P+q \\ A = \dfrac{P+q}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} A+B=p \\ \underline{{}_{-}A\mp B=-q} \\ 2B = P-q \\ B = \dfrac{P-q}{2} \end{array}$$

په نتيجه كې لرو چې:

$$\boxed{\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

كه له I رابطې څخه II رابطه تفريق كړو، نو لرو چې:

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \sin B$$

$$\boxed{\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول:

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B....III$$
$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B....IV$$

که III رابطه د IV سره جمع کړو، لرو چې:

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$$

$$\boxed{\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}}$$

که له III رابطې څخه IV رابطه تفریق کړو، نو:

$$\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$$
$$\cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

فعالیت

د $\sin 60^\circ+\sin 30^\circ$ او $\cos 60^\circ+\cos 30^\circ$ قیمتونه پیدا کړئ.

$$\tan p+\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}+\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q+\cos p\sin q}{\cos p\cos q}=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$$
$$\tan p-\tan q=\frac{\sin p}{\cos p}-\frac{\sin q}{\cos q}=\frac{\sin p\cos q-\cos p\sin q}{\cos p\cos q}=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$$

لومړی مثال(a): وښیاست چې $\dfrac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\tan 5\theta$

$$\frac{\sin 7\theta+\sin 3\theta}{\cos 7\theta+\cos 3\theta}=\frac{2\sin\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}{2\cos\frac{7\theta+3\theta}{2}\cos\frac{7\theta-3\theta}{2}}=\frac{\sin 5\theta\cos 2\theta}{\cos 5\theta\cos 2\theta}=\tan 5\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

b: وښیاست چې $\sin 3x+\sin x=2\cdot\sin 2x\cdot\cos x$ دی:

حل:

$$\sin 3x+\sin x=2\sin\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}=2\cdot\sin 2x\cdot\cos x$$

فعالیت

وښیاست چې $\cot p+\cot q=\dfrac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$ او $\cot p-\cot q=\dfrac{\sin(q-p)}{\sin p\sin q}$

دویم مثال: وښیاست چې: $\dfrac{\cos 2\theta-\cos 2\beta}{\sin 2\theta+\sin 2\beta}=\tan(\beta-\theta)$ او

$$\cos 4\theta-\cos 2\theta=-2\sin 3\theta\sin\theta$$

حل:

$$\frac{\cos 2\theta-\cos 2\beta}{\sin 2\theta+\sin 2\beta}=\frac{-2\sin\frac{2\theta+2\beta}{2}\sin\frac{2\theta-2\beta}{2}}{2\sin\frac{2\theta+2\beta}{2}\cos\frac{2\theta-2\beta}{2}}=\frac{-2\sin(\theta+\beta)\sin(\theta-\beta)}{2\sin(\theta+\beta)\cos(\theta-\beta)}$$

$$=-\frac{\sin(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\beta)}=-\tan(\theta-\beta)=\tan(\beta-\theta)$$

$$\cos 4\theta-\cos 2\theta=-2\sin\frac{4\theta+2\theta}{2}\sin\frac{4\theta-2\theta}{2}=-2\sin 3\theta\sin\theta$$

د زاویو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب د حاصل بدلول په جمع او یا تفاضل باندې:

خرنګه چې: $A+B=P$ ، $A-B=q$

$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

یا

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$$

$$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$$

$$\boxed{\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]}$$

خرنګه چې: $\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو: $2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$

$$\boxed{\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]}$$

څرنګه چې: $\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$

نو: $2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$

$$\boxed{\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]}$$

څرنګه چې: $\cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B$

نو: $-2\sin A\sin B=\cos(A+B)-\cos(A-B)$

$$\boxed{\begin{aligned}\sin A\sin B&=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)\\&=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]\end{aligned}}$$

لومړی مثال: وښیاست چې:

$$a:\qquad \frac{\sin 8x+\sin 5x+\sin 2x}{\cos 8x+\cos 5x+\cos 2x}=\tan 5x$$

$$b:\qquad \cos 75^\circ-\cos 15^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

د a حل:

$$=\frac{2\sin\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2}+\sin 5x}{2\cos\frac{8x+2x}{2}\cos\frac{8x-2x}{2}+\cos 5x}$$

$$=\frac{2\sin 5x\cos 3x+\sin 5x}{2\cos 5x\cos 3x+\cos 5x}=\frac{\sin 5x(2\cos 3x+1)}{\cos 5x(2\cos 3x+1)}=\tan 5x$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د b حل:

$$\cos 75° - \cos 15° = -2 \cdot \sin\frac{75°+15°}{2}\sin\frac{75°-15°}{2} = -2\sin 45° \sin 30°$$

$$= -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

دویم مثال: د جمعې یا تفاضل شکل ته یې واړوئ.

$$2\cos 95° \sin 13° = \sin(95°+13°) - \sin(95°-13°) = \sin 108° - \sin 82°$$

$$\cos 38° \cos 61° = \frac{1}{2}[\cos(38°+61°) + \cos(38°-61°)]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 99° + \cos(-23°)] = \frac{1}{2}[\cos 99° + \cos 23°]$$

$$\cos(x+\frac{\pi}{4})\cos(x-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}[\cos 2x + \cos\frac{\pi}{2}] = \frac{1}{2}\cos 2x$$

دریم مثال:

$$\cos 34° \sin 28° = \frac{1}{2}[\sin(34°+28°) - \sin(34°-28°)] = \frac{1}{2}(\sin 62° - \sin 6°)$$

$$2\cos 45° \cos 15° = \cos(45°+15°) + \cos(45°-15°) = \cos 60° + \cos 30°$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 10\theta \cos 4\theta = \frac{1}{2}[\sin(10\theta+4\theta) + \sin(10\theta-4\theta)] = \frac{1}{2}(\sin 14\theta + \sin 6\theta)$$

څلورم مثال: وښیاست چې: $\frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] = \cos x \cos y$

حل:

$$\frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)] = \frac{1}{2}[(\cos x \cos y - \sin x \sin y)$$

$$+ (\cos x \cos y + \sin x \sin y)] = \frac{1}{2}[(\cos x \cos y + \cos x \cos y)]$$

$$= \frac{1}{2}(2\cos x \cos y) = \cos x \cos y$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: وښیاست چې: $\dfrac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}=\tan 2\theta$

حل:

$$\frac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}=\frac{\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 7\theta)-\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 3\theta)}{\frac{1}{2}(\cos 3\theta+\cos\theta)+\frac{1}{2}(\cos 7\theta-\cos\theta)}$$

$$=\frac{\sin 7\theta-\sin 3\theta}{\cos 3\theta+\cos 7\theta}=\frac{2\cos 5\theta\sin 2\theta}{2\cos 5\theta\cos(-2\theta)}=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\tan 2\theta$$

$$\sin A+\sin B=2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cdot\cos\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\cdot\sin\frac{A+B}{2}\cdot\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\tan A+\tan B=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}\qquad \tan A-\tan B=\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}$$

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\text{Sin}A\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-(\cos A-B)]=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- وښیاست چې:

$$\frac{\cos 37^\circ + \sin 37^\circ}{\cos 37^\circ - \sin 37^\circ} = \cot 8^\circ$$

2- د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د ضرب حاصل د جمعي يا تفاضل شکل ته واړوئ.

$\cos 30^\circ \cos 60^\circ$ $\quad \sin 3\theta \cos 5\theta$ $\quad \sin 5x \cos 8x$

$\cos 7\theta \sin 5\theta$ $\quad \cos 5x \sin 8x$ $\quad \sin 32^\circ \cdot \cos 24^\circ$

$2\sin 60^\circ \cdot \sin 20^\circ$ $\quad \sin 88^\circ \sin 12^\circ$

$\sin\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2}$ $\quad 2\cos 75\alpha \cdot \sin 25\alpha$ $\quad 2\cos 8\theta \cdot \sin 4\theta$

3- د زاويو د مثلثاتي نسبتونو د جمعي او تفريق حاصل، ضرب ته واړوئ.

$\sin 94^\circ - \sin 86^\circ$ $\quad \sin 84^\circ - \sin 76^\circ$ $\quad \cos 56^\circ + \cos 22^\circ$

$\sin 8\theta + \sin 4\theta$ $\quad \cos 84^\circ - \cos 76^\circ$ $\quad \cos 86^\circ + \cos 22^\circ$

$\sin\frac{5x}{3} - \sin\frac{5x}{6}$ $\quad \sin\frac{P+Q}{2} - \sin\frac{P-Q}{2}$ $\quad \cos 95^\circ - \cos 41^\circ$

$\cos\frac{A+B}{2} + \cos\frac{A-B}{2}$ $\quad \cos 84^\circ + \cos 76^\circ$ $\quad \cos\frac{3A}{4} + \cos\frac{4A}{3}$

4- وښیاست چې:

$$\frac{\cos\beta + \cos 9\beta}{\sin\beta + \sin 9\beta} = \cot 5\beta \quad , \quad \frac{\sin 4A - \sin 2A}{\cos 4A + \cos 2A} = \tan A$$

$$\sin 10^\circ \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \frac{1}{16}$$

$$\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{16}$$

5- که $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ وي، (ديو مثلث د داخلي زاويو مجموعه) وښياست چې:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

6- وښیاست چې:

$$\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ = 0$$

-7

$$\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ = ?$$

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

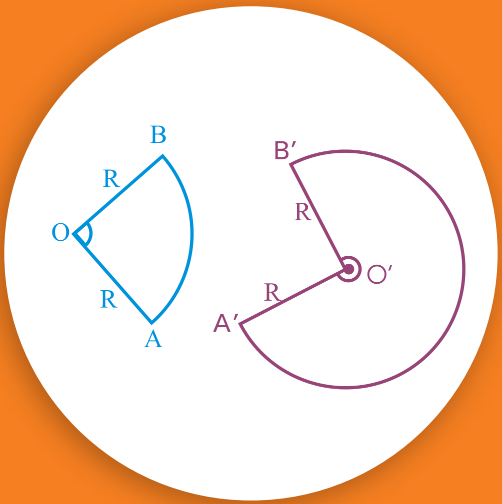
8- د جمعې یا تفاضل د فورمولونو په واسطه وښیاست چې:

$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin\theta$ $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$

$\sin(360^\circ - \theta) = -\sin\theta$ $\sin(270^\circ + \theta) = -\cos\theta$

$\cos(270^\circ + \theta) = \sin\theta$ $\cos(360^\circ - \theta) = \cos\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د قوس اوږدوالی
(Arc length)

که دیوې دایرې شعاع 5cm وي، د دې دایرې د 45° مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی به څو cm وي؟

که د دووقوسونو شعاع ګانې سره مساوي وي، د دې دوو قوسونو اوږدوالی د راډیان په حساب د قوس له مقدار سره متناسب دی، لکه: څنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

$$\frac{\overset{\frown}{AB}}{m\overset{\frown}{AB}}=\frac{\overset{\frown}{A'B'}}{m\overset{\frown}{A'B'}}$$

چې $m\ \overset{\frown}{AB}$ او $m\ A'B'$ ددې دواړو قوسونو مقدار د راډیان په حساب دي. که د قوس مقدار دوه چنده شي، د قوس اوږدوالی هم دوه چنده کېږي.

که د یو قوس مقدار θ° او شعاع يې R وي، د θ° د زاويې د مقابل اږدوالی L او د دايرې محيط C وي، نو لرو چې:

$$\frac{L}{\theta^\circ}=\frac{C}{360^\circ}$$

څرنګه چې د دايرې محيط $C=2\pi R$ دی، نو:

$$\frac{L}{\theta^\circ}=\frac{2\pi R}{360^\circ}\Rightarrow L=\frac{\theta^\circ}{180^\circ}\pi R$$

بايد پام مو وي، که د قوس يا θ مقدار د راډيان په حساب وي، نو $L=R\theta$ کېږي.

لومړی مثال: د 45° مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالی پيدا کړئ، که د دايرې شعاع 14cm وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$L=\frac{45^{\circ}}{180^{\circ}}\cdot\pi\cdot 14\,cm=\frac{14}{4}\pi\,cm\approx\frac{14}{4}\cdot\frac{22}{7}cm=11cm$$

دویم مثال: د $\frac{\pi}{4}$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی پیدا کړئ، که د دایرې شعاع 14cm وي.

$$L=R\,\theta$$

$$L=14\,cm\frac{\pi}{4}\approx 14\,cm\cdot\frac{22}{7}\cdot\frac{1}{4}=11cm$$

دریم مثال: که په یوه دایره کې، د 45° مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی $3\pi cm$ وي، د دې دایرې شعاع پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې: $45^{\circ}=\frac{\pi}{4}$ radian، نو:

$$L=R\theta$$

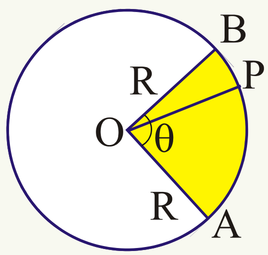
$$R=\frac{L}{\theta}=\frac{3\pi cm}{\frac{\pi}{4}}=3\pi\cdot\frac{4}{\pi}=12cm$$

د یوې دایرې قطاع (Sector of a circle): د یوې دایرې د $\overset{\frown}{AB}$ قوس چې د دایرې مرکز O او شعاع یې R ده، په پام کې نیسو، د $\overline{OP}$ د ټولو خطونو مجموعې ته چې P د $\overset{\frown}{AB}$ د قوس یوه نقطه ده، قطاع ویل کېږي.

که د $\overset{\frown}{AB}$ قوس اندازه θ راډیان وي، θته د قطاع زاویه وایي.

یا قطاع په دې ډول هم تعریفولای شو:

د یوې دایرې د سطحې هغه برخه چې د دایرې د دوو شعاع ګانو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کېږي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

د قطاع د مساحت پیدا کول: که د دایرې شعاع R وي، د دې دایرې د θ راډیان د قطاع

مساحت مساوي دی په: $S=\frac{1}{2}R^2\theta$ چې S د قطاع مساحت او R د دایرې شعاع ده، ځکه

چې:

$$\begin{matrix} 2\pi^R & \square R^2 \\ \theta^R & S \end{matrix}\Bigg\}\Rightarrow S=\frac{\pi R^2\cdot\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}R^2\theta$$

او یاکه د θ زاویه د درجې په حساب وي.

$$\begin{matrix} 360^\circ & \pi R^2 \\ \theta^\circ & S \end{matrix}\Bigg\}\Rightarrow S=\pi R^2\frac{\theta}{360^\circ}$$

لومړی مثال: که د یوې دایرې شعاع 10cm وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پیدا کړئ چې د قطاع زاویه یې $\theta=90^\circ$ وي.

حل: څرنګه چې $\text{Radian}\ \ 90^\circ=\frac{\pi}{2}$ دی:

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta$$

$$S=\frac{1}{2}(10\text{cm})^2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\cdot 100\text{cm}^2\cdot\frac{\pi}{2}=25\pi\text{cm}^2$$

دویم مثال: که د یوې دایرې شعاع 10cm وي، د دایرې د هغه قطاع مساحت پیدا کړئ چې د قطاع زاویه یې $\theta=72^\circ$ وي.

حل:

$$72^\circ=72\cdot\frac{\pi}{180^\circ}=\frac{2\pi}{5}\ \text{Radian}$$

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta=\frac{1}{2}\cdot 100\text{cm}^2\cdot\frac{2\pi}{5}=20\pi\,\text{cm}^2$$

دریم مثال: که د دایرې شعاع 6cm او د دې دایرې د یوې قطاع مساحت $15\pi\text{cm}^2$ وي. د قطاع د قوس اوږداولی پیدا کړئ.

حل:

$$S=\frac{1}{2}R^2\theta \quad \text{یا} \quad 15\pi\text{cm}^2=\frac{1}{2}(6\text{cm})^2\theta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$15\pi cm^2 = 18\theta$$

$$\theta = \frac{15\pi}{18} = \frac{5\pi}{6} \text{ Radian}$$

طول قوس $L = R\theta = 6cm\frac{5\pi}{6} = 5\pi cm = 5\cdot 3{,}14cm \approx 15{,}7cm$

څلورم مثال: يوه دايره چې 7cm شعاع لري، ددې دايرې محيط، مساحت او د 60° مرکزي زاويې د مقابل قوس اوږدوالى يې پيدا کړئ او هم ددې دايرې د قطاع مساحت پيدا کړئ چې $\theta = 60^\circ$ وي.

حل: څرنګه چې $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ Radian دی، نو:

$$C = 2\pi R \approx 2\cdot\frac{22}{7}\cdot 7\,cm = 44\,cm \;,\; A = \pi R^2 \approx \frac{22}{7}\cdot 49\,cm^2 = 154\,cm^2$$

$$L = R\theta = 7\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}cm \quad , \quad A = \frac{1}{2}R^2\theta = \frac{1}{2}\cdot 49\,cm^2\cdot\frac{\pi}{3} \approx 25.6\,cm^2$$

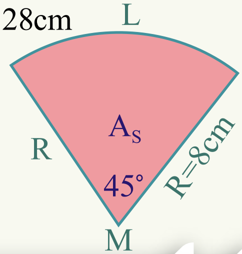
پنځم مثال: که د يوې دايرې شعاع 8cm او د قطاع زاويه يې 45° وي، د قطاع مساحت، د قطاع د مقابل قوس اوږدوالى او ددې قطاع محيط پيدا کړئ.

حل:

د قطاع مساحت $A_s = \pi R^2\frac{\theta}{360^\circ} = (8cm)^2(3{,}14)\cdot\frac{45^\circ}{360^\circ} \approx 25{,}12cm$

د قطاع مقابل قوس $L = 2\pi R\frac{\theta}{360^\circ} = 2\cdot 8cm\cdot 3.14\cdot\frac{45^\circ}{360^\circ} \approx 6.28cm$

د قطاع محيط $= 2\pi R\frac{\theta}{360^\circ} + 2R = 6.28cm + 2\cdot 8cm \approx 22.28cm$



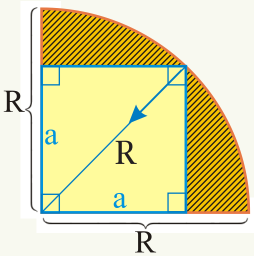
فعاليت

که د دايرې شعاع 10cm وي، د هغه قطاع ګانو مساحت پيدا کړئ چې د قوس اندازه يې 180°، 216° او 324° وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم مثال: د لاندې شکل په شان په 90° قطاع کې د R په شعاع مربع محاط شوې ده، د خط شوې برخې مساحت پیدا کړئ.

حل: څرنګه چې د دایرې شعاع R ده، د دایرې په څلورمه برخه کې د مربع قطر $d = R = a\sqrt{2}$ دی، که a د مربع ضلع وي، نو د مربع یوه ضلع $a = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$ او د مربع مساحت $S = \dfrac{R^2}{2}$ دی، څرنګه چې د دایرې د څلورمې برخې مساحت $\dfrac{1}{4}\pi R^2$ دی.



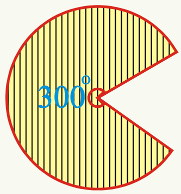
نود خط شوې برخې مساحت مساوي دی په: $\dfrac{1}{4}\pi R^2 - \dfrac{1}{2}R^2 = \dfrac{R^2}{4}(\pi - 2)$

اووم مثال: په شکل کې د دایرې قطاع چې شعاع یې 1cm او مرکزي زاویه یې 300° ده. د دې شکل محیط څو سانتي متره کیږي؟

$360^\circ \qquad 2\pi R$

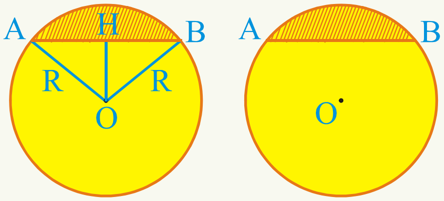
$300^\circ \qquad x \qquad\qquad x = \dfrac{300^\circ \cdot 2\pi R}{360^\circ} = \dfrac{5\pi R}{3}\text{cm}$

د دې شکل محیط $= (\dfrac{5}{3}\pi R + 2)\text{cm}$



د دایرې قطعه (Segment of a circle): د دایرې د سطحې یوې برخې ته چې د قوس او مقابل وتر تر منځ واقع وي، قطعه وایي.

د دایرې قطعه د قطعې د قوس په حساب ښودل کیږي. د مثال په ډول که د $\overset{\frown}{AB}$ قوس $\dfrac{\pi}{6}$ راډیان وي، قطعې ته هم $\dfrac{\pi}{6}$



(c) ketabton.com: The Digital Library

راډيان وايي.

د قطعې مساحت: د θ راډيان د قطعې مساحت چې ددايرې شعاع R وي، مساوي دی، په:

$$S=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$$

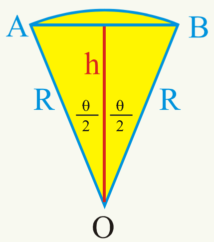
ځکه که د AB قوس θ راډيان وي او د O نقطه د A او B له نقطو سره ونښلوو، نو لرو چې:

د AOB د مثلث مساحت - د AOB د قطاع مساحت = د قطعې مساحت

$S_{\overset{\Delta}{AOB}}$ د مثلث مساحت − S_{OAB} د قطاع مساحت =S د قطعې مساحت

په لاندې شکل کې ليدل کېږي چې د $A\overset{\Delta}{O}B$ مثلث متساوي الساقين دی، نو په دې اساس:

$$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{h}{R}$$



ارتفاع $h=R\cos\frac{\theta}{2}$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\frac{AB}{2}}{R}$$

د مثلث قاعده: $AB=2R\sin\frac{\theta}{2}$

$$\text{د } A\overset{\Delta}{O}B \text{ مثلث مساحت}=\frac{\text{قاعده . ارتفاع}}{2}=\frac{h\cdot AB}{2}$$

څرنګه چې $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ دی.

په نتيجه کې: $\text{مثلث مساحت}=\frac{R\cos\frac{\theta}{2}\cdot 2R\sin\frac{\theta}{2}}{2}=\frac{R^2\sin\theta}{2}=\frac{1}{2}R^2\sin\theta$

څرنګه چې $S_{OAB}=\frac{R^2\sin\theta}{2}$ د مثلث مساحت او د قطاع مساحت $A_s=\frac{1}{2}R^2\theta$ دی.

نو:

$$\text{د قطعې مساحت } S=\frac{1}{2}R^2\theta-\frac{1}{2}R^2\sin\theta=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$$

لومړی مثال: د پورته شکل په شان که د يوې دايرې شعاع $R=6.8cm$ وي او د دې دايرې د يوې قطاع زاويه $\theta=71°$ وي، د قطاع مساحت، د ABO د مثلث مساحت او د دې دايرې د

(c) ketabton.com: The Digital Library

قطعي مساحت پيداکړئ.

حل:

$R = 6{,}8cm$

$\theta = 71°$

د قطاع مساحت $A = \pi R^2 \frac{\theta}{360°} = (6.8cm)^2 \cdot 3.14 \frac{71°}{360°} \approx 28.64cm^2$

د مثلث ارتفاع $h = R\cos\frac{\theta}{2} = 6.8cm \cdot \cos\frac{71°}{2} \approx 5.54cm$

$\cos 35^\circ 30' = 0.8141$

د مثلث قاعده $b = 2 \cdot R\sin\frac{\theta}{2} = 2 \cdot 6.8cm \cdot \sin\frac{71°}{2} \approx 7.9cm$

$\sin 35^\circ 30' = 0.5807$

د مثلث مساحت $A = \frac{1}{2}R^2 \sin\theta = \frac{1}{2}(6.8cm)^2 \cdot \sin 71° \approx 21.96cm^2$

$\sin 71^\circ = 0.9455$

د مثلث مساحت - د قطاع مساحت = د قطعي مساحت

د قطعي مساحت $= 28{,}64cm^2 - 21{,}96cm^2 = 6{,}68cm^2$

دويم مثال: د هغه قطعي مساحت پيداکړئ چې شعاع يې R او قوس يې $\overset{\frown}{AB}$ وي، که:

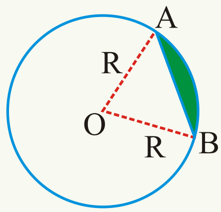
$\overset{\frown}{AB} = 60°\ ,\ R = 12cm$ وي.

حل: څرنګه چې $\frac{\pi^R}{3} = 60^\circ$ دی، نو:

$S = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta) = \frac{1}{2}(12cm)^2(\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \cdot 144cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})$

$= 72cm^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 24\pi\, cm^2 - 36\sqrt{3}\, cm^2 = (24\pi - 36\sqrt{3})cm^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library



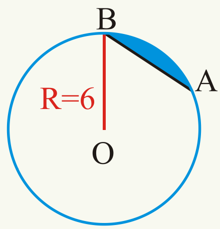
فعالیت

د هغې دایرې د قطعې مساحت پیدا کړئ چې شعاع یې 6cm او $\overset{\frown}{AB}=120°$ قوس وي.

دریم مثال: د هغه قطعې مساحت پیدا کړئ چې د 6cm وتر په واسطه جلا شوی وي او د دایرې شعاع هم 6cm وي.

حل: څرنګه چې د قطعې قوس $\frac{\pi}{3}$ راډیانه دی:

$$S=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)=\frac{1}{2}(6cm)^2(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2})$$
$$=18cm^2(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2})=(6\pi-9\sqrt{3})cm^2$$
$$\approx 6(3.14)cm^2-9(1.73)cm^2=3.27cm^2$$



پوښتنې

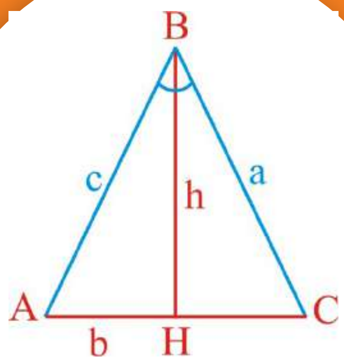
1- د هغې قطاع مساحت پیدا کړئ چې د $\frac{\pi}{6}$ راډیان مرکزي زاویې په مقابل کې واقع وي، که د دایرې شعاع 20cm وي.

2- د هغې قطاع اړونده مرکزي زاویه پیدا کړئ چې مساحت یې $55.5cm^2$ او د دایرې شعاع 12cm وي.

3- که د یوې دایرې شعاع 10m وي، د هغو قوسونو اوږدوالی پیدا کړئ چې د 3,8 راډیان او 27 راډیانه مرکزي زاویو په مقابل کې واقع وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلث د مساحت پیدا کول د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو تر منځ د زاويې له مخې:



که په يوه مثلث کې د دوو ضلعو اوږدوالي 4cm او 8cm وي او ددې ضلعو تر منځ زاويه 30° وي آيا ددې مثلث مساحت پيدا کولای شئ؟

د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث په پام کې نيسو او د B له راس څخه د $\overline{BH}$ ارتفاع د $\overline{AC}$ پر ضلع باندې رسموو:

څرنګه چې $\sin A = \frac{BH}{c} = \frac{h}{c}$ دی، په نتيجه کې $h = c\sin A$ کېږي له هندسې څخه پوهېږو

چې د يوه مثلث مساحت($S = \frac{\text{ارتفاع . قاعده}}{2}$) دی.

$$S_{ABC} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} b c \sin A \qquad (h = c\sin A)$$

فعاليت

د پورتني مثلث د A او C له رأسونو څخه ارتفاع ګانې رسم کړئ او وښياست چې:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab\sin C$ او $S_{ABC} = \frac{1}{2} ac\sin B$ دی.

لومړی مثال: د هغه مثلث مساحت پيدا کړئ چې د دوو ضلعو اوږدوالي يې $a = 3{,}5cm$ او $c = 6cm$ او د دواړو ضلعو ترمنځ زاويه يې $B = 47{,}5°$ وي.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$A=\frac{1}{2}ac\sin B$$

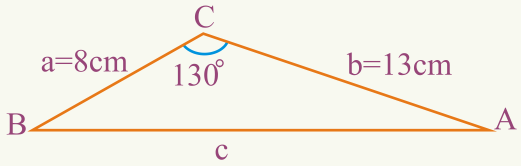
$$\sin 47.5^\circ=0.73727733$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot 3{,}5cm\cdot 6cm\cdot \sin 47{,}5^\circ\approx 7{,}74cm^2$$

دویم مثال: د لاندې شکل د مثلث مساحت پیدا کړئ.

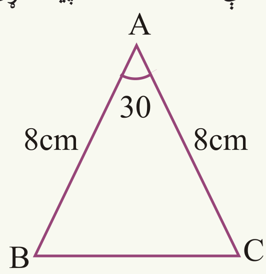
حل:

$$A=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}(8)(13)\sin 130^\circ\approx 39.83cm^2$$



$(\sin 130^\circ=0.7660)$

دریم مثال: د $\overset{\Delta}{ABC}$ په متساوي الساقین مثلث کې $\overline{AB}=\overline{AC}=8cm$ او $A=30^\circ$ ده، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.



$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin 30^\circ$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot\frac{1}{2}=16cm^2$$

د مثلث د مساحت پیدا کول د دریو ضلعو له جنسه (د هیرون فورمول)

ددې کار لپاره د یوې زاویې د نیمایي sin، د مثلث د ضلعو د اوږدوالي له جنسه په لاس راوړو:
د ABC په هر مثلث کې لاندې اړیکې صدق کوي.

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

چې a,b,c د مثلث ضلعې او p د مثلث د محیط نیمایي ده $\left(p=\frac{a+b+c}{2}\right)$ په تیرو لوستو کې مولوستل چې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}\quad \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos B}{2}}\quad \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{2}}$$

په هر مثلث کې $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ چې دا رابطه د $\cos ine$ د قضیې په نوم یادیږي، دلته د دې رابطې له ثبوت څخه صرف نظر کوو او په خپل وخت کې به وروسته ثبوت شي، د $\cos A$ پر ځای یې قیمت وضع کوو.

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}$$

خرنګه چې: $a+b+c=2p$ دی.

$$a-b+c=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b)$$
$$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c)$$

د $(a-b+c)$ او $(a+b-c)$ قیمتونه وضع کوو، نو لرو چې:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2(p-b)2(p-c)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

فعالیت

په همدې ډول وښیاست چې:

$\sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{ab}}$, $\sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{ac}}$ وي.

په همدې ډول کولای شو چې د مثلث د ضلعو له جنسه د یوې زاویې نیمایي $\cos ine$ په لاس راوړو:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\quad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\quad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

ثبوت: خرنګه چې $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ دی.

د $\cos A$ قیمت وضع کوو:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{1+\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

$$b+c+a-2a=2p-2a$$

$$b+c-a=2p-2a=2(p-a)$$

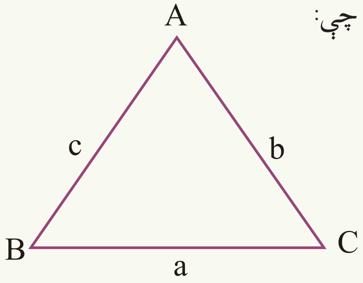
په نتیجه کې لرو چې:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

فعالیت

خرنګه چې $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$ دی، وښیاست چې: $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

پوهیږو چې $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ دی که د $\sin\frac{A}{2}$ او $\cos\frac{A}{2}$ قیمتونه وضع کړو لرو چې:



$$\sin A=2\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\sin A=2\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}}$$

$$\sin A=\frac{2}{bc}\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

خرنګه چې د $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$ مثلث مساحت دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\ A$$

د $\sin A$ قیمت وضع کوو:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

د پورتنیو مساواتو له پرتله کولو څخه لرو چې:

$$\sin A=\frac{2}{bc}\cdot S=\frac{2S}{bc}\quad \square \quad \sin B=\frac{2S}{ac}\quad \square \quad \sin C=\frac{2S}{ab}$$

دریم مثال: د هغه مثلث مســاحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې په لاندې ډول راکړل شوی وي.

$a=5cm \qquad b=4cm \qquad c=3cm$

حل:

$$P=\frac{a+b+c}{2}=\frac{5cm+4cm+3cm}{2}=6cm$$
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{6(6-5)(6-4)(6-3)}$$
$$=\sqrt{6\cdot1\cdot2\cdot3}=\sqrt{36}=6\,cm^2$$

فعالیت

د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې: $c=6cm$, $b=5cm$ او $a=4cm$ وي.

څلـورم مثال: که د یوه مثلـث ضلعې $a=18cm$، $b=24cm$ او $c=30cm$ وي. د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل

$$P=\frac{a+b+c}{2}=\frac{18+24+30}{2}=36cm$$
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$=\sqrt{36(36-18)(36-24)(36-30)}=\sqrt{36\cdot18\cdot12\cdot6}=216\ cm^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: د هغه مثلث مساحت پیداکړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a = 29,7\text{ft}$ ، $b = 42,3\text{ft}$ او $c = 38,4\text{ft}$ وی.

حل:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{29.7+42.3+38.4}{2} = 55,2\text{ft}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{55.2(55.2-29.7)(55.2-42.3)(55.2-38.4)}$$

$$= \sqrt{55.2(25.5)(12.9)(16.8)} = 552\text{ft}^2$$

د یو مثلث د محیطي دایرې د شعاع پیدا کول:

محیطي دایره هغه دایره ده چې مثلث د دایرې په داخل کې واقع وي او دایره د مثلث په درې واړو راسونو باندې مماس وي، او د محیطي دایرې مرکز د مثلث د درې واړو عمودي ناصفونو د تقاطع نقطه ده.

د شکل په شان د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث د ضلعو اوږدوالی د a، b او c څخه عبارت دی چې د O ټکی چې د دایرې مرکز دی د مثلث د ضلعو د درې واړو عمودي ناصفونو (Bisector Perpendicular) د تقاطع ټکی هم دی.

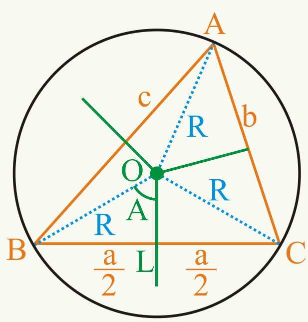
څرنګه چې د BOC مثلث متساوي الساقین دی، نو ارتفاع د $B\hat{O}C$ زاویه او د مثلث قاعده نیمایي کوي. په نتیجه کې: $\hat{A} = B\hat{O}L = L\hat{O}C$

$$\sin\hat{A} = \sin B\hat{O}L = \sin L\hat{O}C$$

څکه چې مرکزي زاویه د محیطي زاویې دوه برابره ده چې د عین قوس په مقابل کې واقع وي.

$$\sin\hat{A} = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$$

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{a}{2\cdot\frac{2s}{bc}} = \frac{abc}{4s} \qquad \left(\sin A = \frac{2S}{bc}\right)$$



او د $R = \dfrac{a}{2\sin A}$ څخه لرو چې:

$$a = R\cdot 2\sin A$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

په همدې ډول

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \text{ یا } R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}$$

لومړی مثال: د ABC مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې ضلعې یې $a=11cm$ ، $b=12cm$ او $c=13cm$ وي.

حل:

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{11\cdot12\cdot13}{4\sqrt{18\cdot7\cdot6\cdot5}}=6{,}98cm \quad , \quad p=\frac{11+12+13}{2}=18cm$$

فعالیت

د هغه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $18cm$ ، $24cm$ او $30cm$ وي.

دویم مثال: د هغه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a=3cm$ ، $b=5cm$ او $c=6cm$ وي.

حل:

$$R=\frac{abc}{4\cdot\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{3\cdot5\cdot6}{4\cdot\sqrt{7\cdot4\cdot2\cdot1}}=\frac{90}{4\cdot\sqrt{56}}=\frac{45}{2\cdot\sqrt{56}}\approx3cm$$

د یو مثلث د محاطي دایرې د شعاع پیدا کول:

د مثلث محاطي دایره هغه دایره ده چې دایره د مثلث په دننه کې واقع وي او دایره د مثلث په دننه کې د مثلث د درې واړه ضلعو سره مماس وي، د محاطي دایرې مرکزد مثلث د درې واړو ناصف الزاویو د تقاطع ټکی (O) دی.

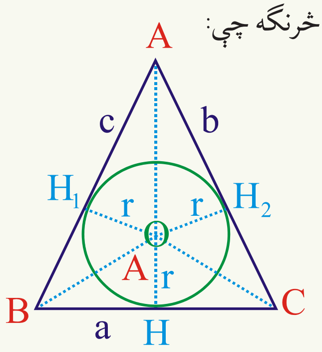
د $\overset{\Delta}{OAB}$ + د $\overset{\Delta}{OCA}$ + د $\overset{\Delta}{OBC}$ مثلثونو مساحت = د $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث له مساحت سره

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr==\frac{1}{2}r(a+b+c)=\frac{1}{2}r\cdot2p$$

$$S=r\cdot p \quad \Rightarrow r=\frac{s}{p}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنگه چې:



$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

دريم مثال: د هغه مثلث د محاطي دايرې شعاع او د محاطي دايرې مساحت پيداکړئ چې د ضلعو اوږدوالی يې 7cm ، 8cm او 9cm وي.

حل

$$p=\frac{7+8+9}{2}=12cm$$

$$S=\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}=26.83cm^2$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{26.83cm^2}{12cm}=2.23cm$$

د محاطي دايرې مساحت مساوي دی، په: $=\pi r^2=\frac{22}{7}\cdot(2.23cm)^2\approx 15.6cm^2$

څلورم مثال: د يو قايم الزاويه مثلث دوه قايمې ضلعې په ترتيب سره 3cm او 4cm دي، د محيطي او محاطي دايرو شعاګانې يې پيدا کړئ.

حل:

$$(\overline{AC})^2=(\overline{AB})^2+(\overline{BC})^2$$

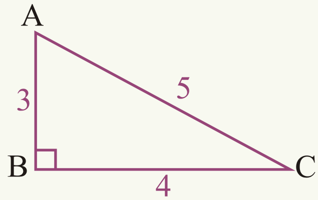
$$AC=\sqrt{9+16}=5$$

$$p=\frac{3+4+5}{2}=6cm$$

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot\sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)}}=\frac{60}{4\cdot\sqrt{6\cdot3\cdot2\cdot1}}=\frac{60}{4\cdot6}=\frac{60}{24}$$

$$=\frac{5}{2}cm=2{,}5cm$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{6}{6}=1cm$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

پنځم مثال: د MTN په قايم الزاويه مثلث کې چې که قايمې ضلعې يې m او n راکړ شـوي وي، د دې مثلث مساحت او د محيطي دايرې شعاع يې پيدا کړئ.

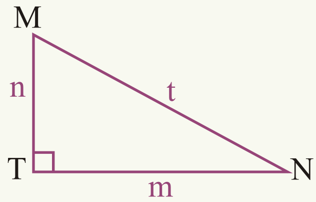
حل:

$$(\overline{MN})^2 = m^2 + n^2$$

$$t = MN = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$S = \frac{n \cdot m}{2} \ , \ R = \frac{m \cdot n \cdot t}{4S} = \frac{m \cdot n \cdot \sqrt{m^2 + n^2}}{4\frac{n\,m}{2}} = \frac{m\,n\sqrt{m^2 + n^2}}{2mn}$$

محيطی دايرې شعاع $R = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{2}$



فعاليت

د هغه مثلث د محاطي دايرې شعاع پيدا کړئ، که چېرې د ضلعو اوږدوالی يې 34cm ، 35cm او 36cm وي.

د متساوي الاضلاع مثلث ارتفاع، مساحت او د محيطي او محاطي دايرو د شعاع ګانو پيدا کول:

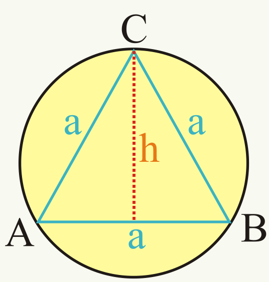
$$\sin A = \sin 60^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

د فيثاغورث د قضيې په اساس لرو چې:

$$h^2 + (\frac{a}{2})^2 = a^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2 - a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

$$S=\frac{h\cdot a}{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}\cdot a}{2}=\frac{\sqrt{3}a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$ د ABC مثلث مساحت

$$R=\frac{abc}{4s}=\frac{a^3}{4\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}}=\frac{a^3}{a^2\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{a}{3}\sqrt{3}$$

$$r=\frac{s}{p}=\frac{\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}}{\frac{3a}{2}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2}{3a}=\frac{a}{6}\sqrt{3}$$

شپږم مثال: د يو متساوي الاضلاع مثلث محيط 18cm دی. د دي مثلث مساحت، ارتفاع او د محيطي او محاطي دايرو شعاع ګاني پيدا کړئ.

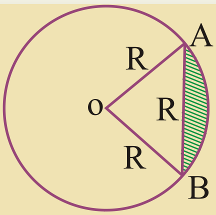
حل: د دي مثلث يوه ضلع (a) مساوي ده، په:

$$a=\frac{1}{3}\cdot 18cm=6cm$$

$$S=\frac{a^2}{4}\sqrt{3}=\frac{(6cm)^2}{4}\sqrt{3}=15{,}6cm^2 \qquad h=\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{6cm}{2}\sqrt{3}=5{,}2cm$$

$$R=\frac{a}{3}\sqrt{3}=\frac{6cm}{3}\sqrt{3}=3{,}5cm \qquad r=\frac{a}{6}\sqrt{3}=\frac{6cm}{6}\sqrt{3}\approx 1{,}7cm$$

پوښتني



1- د شکل مطابق د OAB مثلث متساوي الاضلاع دی چې هره ضلع يې R ده. د O په مرکز دايره رسم شوې ده چې د A او B له ټکو څخه تيرېږي. د AB په وتر سره د قطعې مساحت مساوي دی په:

a) $(\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4})R^2$ b) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{5})R^2$ c) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2})R^2$

d) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{2})R^2$ e) $(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4})R^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

2- که د یو متساوی الساقین مثلث د هر ساق اوږدوالی $6cm$ او د ساقو تر منځ زاویه یې $30°$ وي د مثلث مساحت پیدا کړئ.

3- که د یوه مثلث د دوو ضلعو اوږدوالی $5\sqrt{2}cm$ او $6cm$ وي، او دوارو ضلعو تر منځ زاویه یې $45°$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

4- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره $3cm$ ، $4cm$ او $5cm$ وي، د دې مثلث مساحت پیدا کړئ.

5- د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې د ضلعو اوږدوالی یې $a = 7cm$ ، $b = 9cm$ او $c = 12cm$ وي.

6- د هغه قایم الزاویه مثلث د محیطي دایرې شعاع پیدا کړئ، که قایمې ضلعې یې $12cm$ او $5cm$ وي.

7- که د ABC ، د متساوي الساقین مثلث قاعده $a = 8cm$ او د دې مثلث محاطي شعاع $r = 3cm$ وي. د محیطي دایرې شعاع اوږدالی یې پیدا کړئ.

8- که د یوه قایم الزاویه مثلث مساحت $84cm^2$ وي او د یوې ارتفاع اوږدوالی یې $3,36cm$ وي، د دې مثلث د محیطي شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څېرکي لنډيز

- د جمعي او تفاضل فورمولونه:

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ او $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ او $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} \qquad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

- د 2α د زاويې مثلثاتي نسبتونه د α د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

- د يوې زاويې مثلثاتي نسبتونه، د زاويې د دوه چند مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \ ، \ \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \ ، \ \tan\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$$

- د يوې زاويې د نيمايي مثلثاتي نسبتونه د زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \ , \ \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \ , \ \tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

- د يوې زاويې د درې چنده مثلثاتي نسبتونه د هغې زاويې د مثلثاتي نسبتونو له جنسه:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha \quad , \quad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

- د درېو زاويو د مجموعې $(\alpha+\beta+\theta)$ مثلثاتي نسبتونه:

$$\sin(\alpha+\beta+\theta)=\sin\alpha\cos\beta\cos\theta+\sin\beta\cos\alpha\cos\theta+\sin\theta\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\theta$$

$$\cos(\alpha+\beta+\theta)=\cos\alpha\cos\beta\cos\theta-\cos\alpha\sin\beta\sin\theta-\cos\beta\sin\alpha\sin\theta-\cos\theta\sin\alpha\sin\beta$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\tan(\alpha+\beta+\theta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\theta-\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\theta-\tan\alpha\tan\theta}$$

د ضرب فورمولونه (هغه فورمولونه چې د دوو زاویو د مجموعې یا تفاضل مثلثاتي نسبتونه په ضرب بدلوي).

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

- هغه فورمولونه چې د دوه زاویو د مثلثاتي نسبتونو ضرب د جمعې او یا د تفاضل په شکل بدلوي:

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\sin A\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)]=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

- د R په شعاع د دایرې د مرکزي زاویې(θ°) د مقابل قوس اوږدوالی مساوي دی په:

$$L=\pi R\frac{\theta^\circ}{180^\circ}$$

- د R په شعاع د دایرې مرکزي زاویې θ راډیان د مقابل قوس اوږدوالی مساوي دی په:

$$L=R\theta$$

- د دایرې د سطحې هغه برخه چې د دوو شعاعو تر منځ واقع وي، قطاع بلل کیږي:
- د قطاع مساحت د($A_{sector}=\frac{1}{2}R^2\theta$) د فورمول په مرسته لاسته راځي:

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د دايرې د سطحې هغه برخه چې د قوس او د مقابل وتر تر منځ واقع وي، قطعه بلل کېږي:
- د قطعې مساحت د $A_{Segment}=\frac{1}{2}R^2(\theta-\sin\theta)$ د فورمول په مرسته پيدا کېږي:
- د دوو ضلعو او ددې دوو ضلعو تر منځ زاويې له جنسه د مثلث مساحت مساوي دی په:

$$S=\frac{1}{2}ac\sin B\ ,\quad S=\frac{1}{2}bc\sin A\ ,\quad S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

- **د يوې زاويې د نيمايي مثلثاتي نسبتونه د مثلث د ضلعو د اوږدوالی له جنسه:**

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\quad \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\quad \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{ab}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\quad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\quad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

- **د مثلث مساحت د مثلث د ضلعو د اوږدوالی له جنسه:**

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- د يوه مثلث د محيطي دايرې شعاع(R) مساوي دی په:

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}\ \Rightarrow\ 2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

يا $R=\frac{abc}{4S}$

- د يوه مثلث د محاطي دايرې شعاع د $r=\frac{s}{p}$ يا $r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$ فرمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1- وښياست چې د متساوي الاضلاع مثلث مساحت $S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ دی، که a د مثلث يوه ضلع وي؟

2- که د يوه مثلث د ضلعو اوږدوالی $a=7cm$ ، $b=8cm$ او $c=9cm$ وي، د دې مثلث مساحت پيدا کړئ؟

3- د جمعې د فورمولونو په مرسته $\cos 165°$ او $\sin 165°$ پيدا کړئ؟

4- $\sin(-165°)=?$ مساوي دی په:

$a)\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\qquad b)\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ $\qquad c)\ \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

5- وښياست چې: $\frac{\cos 3\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta}$ دی.

6- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندنيو زاويو مثلثاتي نسبتونه پيدا کړئ؟

$\sin(30°+45°)$ $\qquad \cos(150°-45°)$ $\qquad \tan(30°+60°)$

$\sin(135°+180°)$ $\qquad \sin(135°-180°)$ $\qquad \tan(180°-45°)$

7- د دوو زاويو د مثلثاتي نسبتونو د مجموعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته، د لاندينيو رابطو سموالی وښياست.

$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$ $\qquad \cos(90°+\theta)=-\sin\theta$ $\qquad \cos(90°-\theta)=\sin\theta$

$\sin(270°+\theta)=-\cos\theta$ $\qquad \cos(180°-\theta)=-\cos\theta$ $\qquad \sin(180°-\theta)=\sin\theta$

8- که $0°<\theta<90°$ او $\sin\theta=\frac{2}{5}$ وي، د $\cos 2\theta$ ، $\sin 2\theta$ ، $\cos\frac{\theta}{2}$ او $\sin\frac{\theta}{2}$ قيمتونه په لاس راوړئ؟

9- وښياست چې:

$\frac{\sin 2\theta}{\cos\theta}=2\sin\theta$, $\cos 2\theta+1=2\cos^2\theta$, $\cos 2\theta+2\sin^2\theta=1$

$2\cos^2\theta-2\sin^2\theta=2\cos 2\theta$, $\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\cos\theta-\sin\theta$

(c) ketabton.com: The Digital Library

10- که د یوه مثلث د ضلعو اوږدوالی په ترتیب سره $5cm$ ، $7cm$ او $8cm$ وي، د دې مثلث د محیطي او محاطي دایرو شعاعگانې پیدا کړئ؟

11- $\sin(180°+\theta)=?$

$a)\ \sin\theta$ $\quad b)\ -\cos\theta$ $\quad c)\ -\sin\theta$ $\quad d)\ \cos\theta$

12- د جمعې او تفاضل د فورمولونو په مرسته وښیاست چې:

$\sec(360°-\theta)=\sec\theta$, $\tan(180°+\theta)=\tan\theta$ او $\sin(360°-\theta)=-\sin\theta$

13- $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=?$

$a)\ 2\sin\alpha\sin\beta$ $\quad b)\ 2\cos\alpha\cos\beta$ $\quad c)\ -2\sin\alpha\sin\beta$

14- وښیاست چې: $\dfrac{\sin\alpha}{\sec 4\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\csc 4\alpha}=\sin 5\alpha$ دی؟

15- لاندې د مثلثاتي نسبتونو ضرب حاصلونه د مجموعې او یا تفاضل په شکل ولیکئ؟

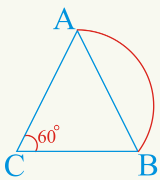
$\cos 40°\cos 60°$, $\cos 100°\sin 50°$

$\sin\dfrac{3\theta}{2}\sin\dfrac{5\theta}{2}$, $\sin 8\theta\cos 10\theta$

16- لاندې د مثلثاتي نسبتونو مجموعې او یا تفاضل د ضرب د حاصل په څیر ولیکئ؟

$\sin 80°-\sin 72°$. $\sin 12\theta+\sin 8\theta$

17- وښیاست چې: $\dfrac{\sin 5\theta+\sin 3\theta}{\cos 5\theta-\cos 3\theta}=-\cot\theta$ دی.



18- د یوې دایرې مساحت $180cm^2$ دی، ددې دایرې د $80°$ قطاع مساحت پیدا کړئ.

19- د شکل مطابق د $60°$ مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی $(1cm)$ دی. د دې قوس شعاع او د وتر اوږدوالی یې پیدا کړئ؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

-20 $\dfrac{\tan 60° - \tan 30°}{1 + \tan 60° \cdot \tan 30°} = ?$

$a)\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad b)\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad c)\ \sqrt{3}$ $\qquad d)\ -\sqrt{3}$

-21 که $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$ او د θ دويمه ضلع په لومړۍ ربع کې وي، $\sin 2\theta$، $\cos 2\theta$ او $\tan 2\theta$ پيدا کړئ؟

-22 وښياست چې: $\tan(45° + \theta) = \dfrac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$ دی؟

-23 $\cos 37° \cos 53° - \sin 37° \sin 53°$ مساوي دی په:

$a)\ 1$ $\qquad b)\ -1$ $\qquad c)\ 0$ $\qquad d)$ دري واړه ناسم دي

-24 $\cos 60° \cos 14° + \sin 60° \sin 14°$ مساوي دی په:

$a)\ \cos 74°$ $\qquad b)\ \cos 46°$ $\qquad c)\ \sin 74°$ $\qquad d)\ \sin 46°$

-25 $\cos 14° \cos 31° - \sin 14° \sin 31°$ مساوي دی په:

$a)\ \cos 17°$ $\qquad b)\ \cos 45°$ $\qquad c)\ \sin 17°$ $\qquad d)\ -\sin 17°$

-26 $\cos 80° \cos 35° + \sin 80° \sin 35°$ مساوي دی په:

$a)\ \cos 115°$ $\qquad b)\ \sin 115°$ $\qquad c)\ \cos 45°$ $\qquad d)\ \sin 45°$

-27 که $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$، $\sin\beta = \dfrac{5}{13}$ وي، α او β په لومړنی ربع کې واقع وي $\cos(\alpha - \beta)$ پيدا کړئ؟

-28 که $\cos\theta = -\dfrac{8}{17}$، $\cos \square = -\dfrac{3}{5}$ وي او د θ او └ دويمې ضلعې په دريمه ربع کې واقع وي. $\cos(\theta - \square)$ پيدا کړئ؟

-29 وښياست چې: $\tan x \cdot \tan y = \dfrac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)}$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

-30 $\cos(0^\circ - t) = ?$

$a)\sin t$ $b)\cos t$ $c)-\sin t$ $d)-\cos t$

-31 وښياست چې: $\sin\theta = \dfrac{\cos\theta \cdot \sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}$ دی؟

-32 وښياست چې:

$$\frac{\cos 8x + \cos 4x}{\cos 8x - \cos 4x} = -\cot 6x \cot 2x$$

$$\frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = -\tan x \quad , \quad \frac{\sin 4x + \sin 6x}{\cos 4x - \cos 6x} = \cot x$$

$$\frac{\sin t + \sin 3t}{\cos t + \cos 3t} = \tan 2t \quad , \quad \frac{\sin x - \sin 3x}{\cos x - \cos 3x} = -\cot 2x$$

-33 $\cos(x+y)\cos y + \sin(x+y)\sin y$ افاده مساوي ده په:

$a)\sin x$ $b)\cos x$ $c)-\sin x$ $d)-\cos x$

-34 $\sin(x-y)\cos y + \cos(x-y)\sin y = ?$

$a)\sin x$ $b)\cos x$ $c)-\sin x$ $d)-\cos x$

35 – د هغې قطاع مساحت چې شعاع يې $2m$ او مرکزي زاويه يې $0{,}5\ radian$ وي، مساوي ده په:

$a)\ 3m^2$ $b)\ 2m^2$ $c)\ 1m^2$ $d)$ درې واړه سمې نه دي

36 – که د يوې دايرې د يوې قطاع مساحت 200cm^2 او مرکزي زاويه يې 2 radian وي، د دې دايرې شعاع مساوي ده په:

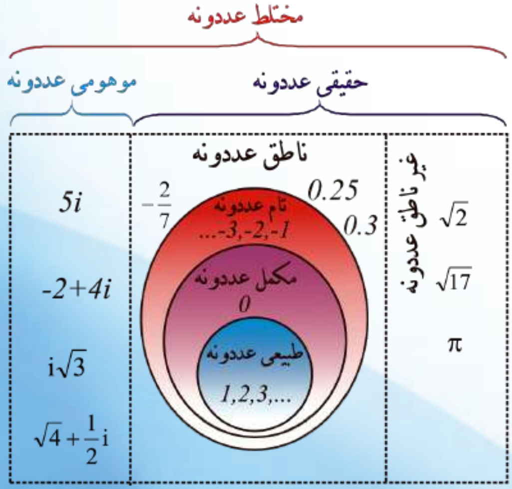
a) 14.14cm b) −14.14cm c) 14cm d) درې واړه غلط دي.

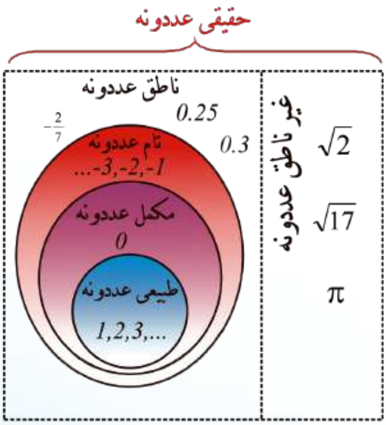
(c) ketabton.com: The Digital Library

شپږم څپرکی

مختلط عددونه

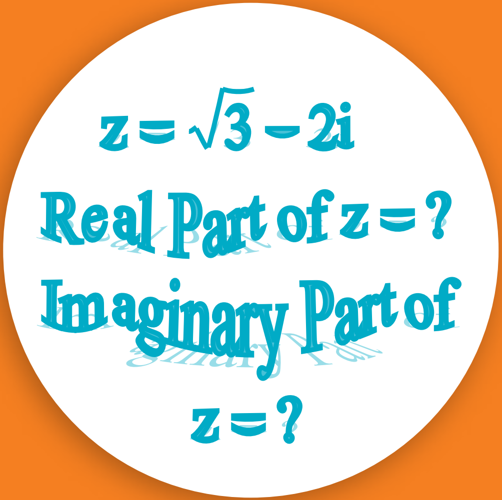
(c) ketabton.com: The Digital Library





(c) ketabton.com: The Digital Library

مختلط عددونه
(Complex Numbers)



آیا ویلای شئ چې د $x^2 + 9 = 0$ معادله ولې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري؟

آیا پوهیږئ چې د حقیقي عددونو سټ د مختلطو عددونو د سټ یو فرعي سټ دی؟

موهومي عددونه (Imaginary Numbers):

$i = \sqrt{-1}$ یا $i^2 = -1$ دی د i توری له یوناني کلمې (iota) څخه اخیستل شوی دی چې $i = \sqrt{-1}$ ته، د موهومي عددونو واحد وایي.

لومړی مثال: $\sqrt{-16}$ پیداکړئ.

حل: $\sqrt{-16} = \sqrt{(-1)\cdot 16} = \sqrt{-1}\sqrt{16} = i\sqrt{16} = \pm 4i$

دویم مثال: د $x^2 + a^2 = 0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$x^2 + a^2 = 0$$
$$x^2 = -a^2$$
$$x = \pm\sqrt{-a^2} = \pm\sqrt{(-1)\cdot(a^2)} = \pm a\sqrt{-1} = \pm ai$$

ai او ai − موهومي عددونه دي (چې a يو حقيقي عدد دی).

د (i) طاقتونه (Powers of i):

لیدل کیږي چې د $i^2 = -1$ یا $i = \sqrt{-1}$ په مرسته موهومي عددونه ساده کولای شو . په یاد ولرئ چې د حقیقي عددونو مربع مثبت او د موهومي عددونو مربع منفي ده.

$$i = \sqrt{-1} \qquad i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1 \qquad i^3 = i^2 \cdot i = (-1)\cdot(i) = -i$$

$$i^4 = (\sqrt{-1})^4 = [(\sqrt{-1}^2)]^2 = (-1)^2 = 1 \quad \text{یا} \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = (1)(i) = i \qquad i^6 = (i)^4 \cdot (i)^2 = (1)\cdot(-1) = -1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$i^7 = (i)^6 \cdot (i) = (-1)\cdot(i) = -i \qquad i^8 = i^7 \cdot i = (-i)\cdot(i) = -i^2 = -(-1) = 1$$

(i) ته موهومي واحد وايي.

له دې ځایه نتیجه په لاس راځي، که د موهومي واحد توان $n=4$ یا یوداسې عددوي چې پر

څلورو د وېش وړوي، نو له یوه (1) سره مساوي دی.

دريم مثال:

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1 = 1$$
$$i^{12} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$
$$i^{16} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 1$$
$$\vdots$$
$$i^{4n} = i^4 \cdot i^4 \ldots i^4 = 1$$
$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = 1\cdot i = i$$
$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1\cdot(-1) = -1$$
$$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^2 \cdot i = 1(-1)i = -i$$

فعالیت

$(i)^{61}, (i)^{-37}$ و $(i)^{256}$ طاقتونو قیمت پیدا کړئ.

څلورم مثال: i^{54}، i^{1998} او i^{89} پیدا کړئ.

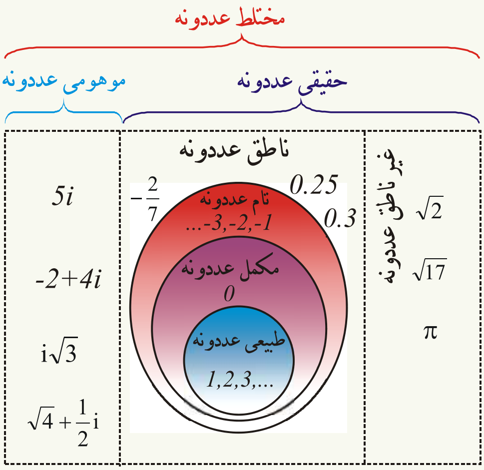
حل: که د 54 عدد پر 4 ووېشو، پاتې (باقي) یې 2 ده، نو:

$$i^{54} = i^{52} \cdot i^2 = i^{4\cdot 13} \cdot i^2 = (i^4)^{13} \cdot i^2 = (1)\cdot i^2 = (1)\cdot(-1) = -1$$
$$i^{1998} = i^{4(499)} \cdot i^2 = 1\cdot i^2 = i^2 = -1$$
$$i^{89} = i^{4\cdot 22} \cdot i = 1\cdot i = i$$

هغه عددونه چې $\sqrt{-1}$ یې یو فکتور وي، د موهومي عددونو په نوم یادېږي. د i طبیعي توانونه یو له

i، 1، $-i$ او -1 عددونو څخه دي. د حقیقي عددونو مربع مثبت اود موهومي عددونو مربع منفي ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



د عددونو سټونه د تاریخ په اوږدوکې د ارتیاوو او د ریاضي د علم له انکشاف سره سم منځ ته راغلي دي، لکه: څرنګه چې پوهېږئ، د طبیعي عددونو سټ $IN = \{1,2,3,4....\}$ ټولو مسألو ته ځواب نه شي ویلای. د مثال په ډول د $3x = 0$ معادله د طبیعي عددونو په سټ کې حل نه لري، ښکاره خبره ده چې ځواب یې $x = 0$ دی، نو یو بل سټ ته ارتیا پیدا شوه چې د مکملو عددنو سټ $W = \{0,1,2,3,...\}$ دی. دا سټ هم ځینو پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای، لکه: د $x + 2 = 0$ معادله د مکملو عددونو په سټ کې حل نه لري، ځکه چې ځواب یې $x = -2$ دی چې 2 - د مکملو عددونو په ست کې شامل نه دی، نو یو بل سټ ته ارتیا پیدا شوه چې منفي عددونه هم ولري چې د تامو عددونو د سټ (Integer Numbers set) یا $I = \{...,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ په نامه یادېږي، خو د عددونو په دې سټ کې هم د $2x + 1 = 2$ د معادلې حل نشته، ځکه چې حل یې $x = \frac{1}{2}$ دی، نو د ناطقو عددونو سټ (Rational Numbers Set) منځ ته راغی خو د $x^2 - 2 = 0$ معادله د ناطقو یاګویا عددونو په سټ کې هم حل نه لري، ځکه چې، ددې معادلې حل $x = \sqrt{2}$ دی چې $\sqrt{2}$ د غیرو ناطقو عددونو (Irrational Numbers set) په سټ کې شامل دی، نو د غیر ناطقو عددونو سټ منځ ته راغی د ناطقو او غیر ناطقو عددونو د سیټونو مجموعې ته د حقیقي عددونو سټ (Real Numbers Set) وایي.

خود حقیقي عددونو سټ هم ځینو پوښتنو ته ځواب نه شي ورکولای، لکه: د $x^2 + 16 = 0$ یا د $x^2 + 1 = 0$ د معادلو حل د حقیقي عددونو په سټ کې نه شته دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

يا په بل عبارت منفي عددونه د حقيقي عددونو په سټ کې جفت جذر نه لري، لکه: $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-25}$ او نور، خو هغه معادلې چې د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري. په 1795م. کال کې يو جرمني رياضي پوه ګوس (Gauss) د مختلطو عددونو مفهوم په لاندې ډول وړاندې کړ. که يو مختلط عدد په z سره وښايو $z = a + bi$ چې د يو مختلط عدد معياري شکل دی چې a د z عدد حقيقي برخه (Real Part of z) او bi د z د مختلط عدد موهومي برخه (Imaginary Part of z) ده، د مختلطو عددونو سټ داسې تعريف کېږي. $C = \{z \mid z = a + bi \;,\; a, b \in \mathbb{R} \;,\; i^2 = -1\}$ د z يو مختلط عدد د يوې مرتبې جوړې په شکل هم ليکلای شو : $z = a - bi = (a, -b)$, $z = a + bi = (a, b)$ که a=0 شي: $Z = 0 + bi = bi$ چې bi ته خالص موهومي عدد (Pure imaginary number) وايي او که $b = 0$ وي، نو $z = a + 0 \cdot i = a$ (چې a يو خالص حقيقي عدد (Pure real number) دی) په ياد ولرئ چې مختلط عددونه، لکه: حقيقي عددونه د ترتيب خاصيت نه لري.

صفري مختلط عدد (Zero Complex Number):

هغه عدد دی چې حقيقي او موهومي دواړه برخې يې صفرونه وي. $(a = 0 \quad b = 0)$ ، نو

$z = a + bi = 0 + 0i = 0$ صفري مختلط عدد دی.

فعاليت

په $4 + 3i$ او $2 - 5i$ مختلطو عددونو کې حقيقي او موهومي برخې وښياست.

لومړی مثال: د $1 - i$, $\sqrt{3} - 3i$, $5i$ او $2 - 5i$ په مختلطو عددونو کې حقيقي او موهومي برخې وښياست.

حل: په $1 - i$ کې حقيقي برخه يې 1 او موهومي برخه يې $-i$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $\sqrt{3}-3i$ مختلط عدد کې حقیقي برخه یې $\sqrt{3}$ او موهومي برخه یې $-3i$ ده، په $2-5i$ مختلط عدد کې حقیقي برخه یې 2 او موهومي برخه یې $-5i$ ده.

په 5i کې حقیقي برخه صفر او موهومي برخه یې 5i ده.

دویم مثال: د $6i$, -9 , 0 , $9-i$ او $i-1$ مختلط عددونه په معیاري شکل (Standard Form) ولیکئ.

حل: څرنګه چې $z=a+bi$ ته د مختلط عدد معیاري شکل وایي چې a ته د مختلط عدد حقیقي برخه او bi یې موهومي برخه ده. په لاندې جدول کې پورتني مختلط عددونه په معیاري شکل بنودل شوي دي.

معیاری شکل $(z=a+bi)$	مختلط عددونه
$0+6i$	$6i$
$-9+0i$	-9
$0+0i$	0
$9-i$	$9-i$
$-1+i$	$i-1$

$z=a+bi$ د یوه مختلط عدد معیاري شکل دی چې a ته د مختلط عدد حقیقي برخه او bi یې موهومي برخه ده، که a=0 وي، نو bi خالصه موهومي برخه او که b=0 وي، نو a د مختلط عدد خالصه حقیقي برخه ده او هغه معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د $(i)^{-33}, (i)^{79}, (i)^{202}, (2i)^2$ او $(3i)^2$ قیمتونه پیداکړئ.

2- لاندې عددونه د مختلطو عددونو په معیاري شکل ولیکئ.

$-i-4 \quad , \quad 5i \quad , \quad -4i+\sqrt{2} \quad , \quad -3i$

3 - $-3i \,,\, 5+3i \,,\, 7-i$ $\quad \sqrt{5}-\sqrt{7}i$ مختلط عددونه د مرتبو جوړو په شکل ولیکئ.

4- د $-i$ په مختلط عدد کې حقیقي برخه مساوي ده په:

a) 1 , b) −1 , c) 0 , d) 2

5- د $\sqrt{-16}$ عدد جذر مساوي دی په:

a) ±4 , b) −4 , c) ±4i , d) ±2

(c) ketabton.com: The Digital Library

د موهومي عددونو څلورګوني عمليې

$4i+3i=7i$

$4i-3i=i$

$4i-(-3i)=7i$

آیا د $3i$ او $4i$ موهومي عددونه جمع کولای شئ؟

آیا د $10i$ او $50i$ موهومي عددونو د ضرب حاصل یو حقیقي عدد دی؟

د موهومي عددونو جمع او تفریق: موهومي عددونه کولای شو چې په لاندې ډول یې جمع او تفریق کړو.

a: د جمعې عمليه: د دوو موهومي عددونو د جمعې حاصل يو موهومي عدد دی.

لومړی مثال: د $(7i+8i)$ او $5i$ او $\sqrt{7}i$ د جمعې حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$7i+8i=(7+8)i=15i$$
$$\sqrt{7}i+5i=(\sqrt{7}+5)i$$

b: د تفریق علمیه: د دوو عددونو د تفریق حاصل یو موهومي عدد دی.

دویم مثال: $7i-4i$ او $13i-9i$ د تفریق حاصل پیدا کړئ.

$$7i-4i=(7-4)i=3i$$
$$9i-13i=(9-13)i=-4i$$

c: د ضرب عملیه: د دوو موهومي عددونو د ضرب حاصل یو حقیقي (Real number) عدد دی.

دریم مثال: د $(10i)\cdot(5i)$ او $(\sqrt{9}i)\cdot(\sqrt{4}i)$ د ضرب حاصل پیدا کړئ.

حل:

$$(10i)\cdot(5i)=(10)\cdot(5)\cdot i\cdot i=50i^2=-50$$

ځکه چې $i^2=-1$ دی نو $50i^2=50\cdot(-1)=-50$ چې -50 یو حقیقي عدد (Real number) دی.

همدارنګه $(\sqrt{4}i)\cdot(\sqrt{9}i)=\sqrt{4\cdot 9}\cdot i\cdot i=\sqrt{36}\cdot i^2=6\cdot(-1)=-6$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د موهومي عددونو د ضرب په عمليه کې د تبديلي خاصيت (Commutative Property)

صدق کوي يعني: $\boxed{(ai)\cdot(bi)=(bi)\cdot(ai)=-ab}$

فعاليت

$(\frac{2}{3}i)\cdot(-\frac{3}{5}i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

d : **د وېش عمليه**: د دوو موهومي عددونو دوېش حاصل يو حقيقي عدد دی.

خلورم مثال: $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}$, $\frac{5i}{7i}$ او $\frac{\sqrt{13}\ i}{\sqrt{3}\ i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل:

1) $\frac{5i}{7i}=\frac{5}{7}$ ($\frac{5}{7}$ يو حقيقي عدد دی)

2) $\frac{\sqrt{13}\,i}{\sqrt{3}\ i}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ ($\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ يو حقيقي عدد دی)

3) $\frac{\sqrt{-7}}{\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}\,i}{\sqrt{5}\,i}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

فعاليت

$36i$ پر $-2i$ ووېشئ.

د موهومي عددونو د جمعې او ضرب په عمليو کې د تبديلي خاصيت صدق کوي. د دوو موهومي عددونو د ضرب او وېش حاصل يو حقيقي عدد دی.

پوښتنې

1) جمع يې کړئ. $\sqrt{7}\,i+\sqrt{7}\,i$, $\sqrt{-7}+\sqrt{-4}$, $\sqrt{-1}b+\sqrt{-1}c$

2) تفريق يې کړئ. $5i-2i$, $12i-7i$, $\sqrt{5}\,i-\sqrt{5}\,i$

3) لاندې موهومي عددونه سره ضرب او تقسيم کړئ.

$(\frac{7}{4}i)(-\frac{2}{9}i)$, $(\sqrt{7}\,i)\cdot(-7i)$, $(3i)\cdot(5i)$, $\frac{16i}{-4i}$, $\frac{13i}{26i}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(1+2i)+(-1-2i)=0$

د مختلطو عددونو د جمعې او تفریق عملیې:

آیا د $3x-2yi=6+i$ له مساوات څخه د x او y قیمتونه په لاس راوړلای شئ؟

آیا پوهېږئ چې کوم عدد ته د مختلطو عددونو د جمعې د عملې د عینیت عنصر وایي؟

مساوي مختلط عددونه (Equal Complex Numbers): دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقیقي او موهومي برخې یو له بله سره مساوي وي. د $z_1=a+bi$ او $z_2=x+yi$ عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې $x=a$ او $y=b$ وي.

لومړی مثال: که چېرې $z_1=x_1+2y_1i$ او $z_2=3-5i$ وي، نو هغه وخت $z_1=z_2$ دی چې: $x_1=3$ او $y_1=-\frac{5}{2}$ وي.

فعالیت

1- که چېرې $z_1=\sqrt{2}\,x+\sqrt{3}\,yi$ او $z_2=-5-6i$ وي، د $z_1=z_2$ له مخې د x او y قیمتونه پیدا کړئ.

2- که چېرې $2+mi=k+3i$ وي د m او k حقیقي عددونو قیمت پیدا کړئ.

د مختلطو عددونو د جمعې عملیه: د مختلطو عددونو د جمعې عملیه داسې تعریف شوې ده. که چېرې $z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ وي، نو:

$$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\cdot i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا په بل عبارت د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل یو بل داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د دې دواړو عددونو د موهومي برخو له مجموعې څخه په لاس راغلې وي.

دویم مثال: که چېرې $z_1 = 2-3i$ او $z_2 = 3+4i$ وي، $z_1 + z_2$ پیدا کړئ

$$z_1 + z_2 = (2-3i)+(3+4i) = (2+3)+(-3+4)i = 5+i$$

په همدې ډول:

$$(3-4i)+(-2+6i) = (3-2)+(-4+6)i = 1+2i$$

$$(-9+7i)+(3-15i) = (-9+3)+(7-15)i = -6-8i$$

$0+0i$ د مختلطو عددونو د جمعې د عملیې د عینت عنصر (additive identity) دی، ځکه چې: $(a+bi)+(0+0i) = (a+0)+(b+0)i = a+bi$.

همدارنګه د $a+bi$ عدد جمعي معکوس (additive inverse) د $-a-bi$ عدد دی، ځکه چې: $(a+bi)+(-a-bi) = (a-a)+(b-b)i = 0+0i$

فعالیت

د $(3x-yi)+(5x+3yi)$ د جمعې حاصل په لاس راوړئ.

د مختلطو عددونو د تفریق عملیه: د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل یو بل داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د موهومي برخو د تفریق له حاصل څخه په لاس راغلې وي یعنې: $(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$

لومړی مثال: $(-4+3i)-(6-7i) = (-4+3i)+(-6+7i) = -10+10i$

دویم مثال: $(12-5i)-(8-3i) = (12-8)+(-5+3)i = 4-2i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقیقي او موهومي برخې يو له بله سره مساوي وي. د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل يو داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه يې د حقیقي برخو اوموهومي برخه يې د موهومي برخو له مجموعې څخه په لاس راغلي وي، په همدې ډول د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل يو داسې مختلط عدد دی چې حقیقي برخه يې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومي برخه يې د دواړو عددونو د موهومي برخو له حاصل تفریق څخه په لاس راغلي وي.

پوښتنې

1- لاندې مختلط عددونه جمع کړئ.

$(2+5i)+(3+4i)$ ، $(13-12i)+(13+12i)$

$(-3+6i)+(10-7i)$ ، $(\sqrt{3}-ci)+(d+5ci)$

2- لاندې مختلط عددونه يو له بله تفریق کړئ.

$(5-i)-(7+3i)$

$(2\sqrt{3}+5\cdot\sqrt{7}\,i)-(\sqrt{3}+3\sqrt{7}\,i)$

$(3c+4di)-(3c+8di)$

3- د لاندې مختلطو عددونو جمعي معکوس پيدا کړئ.

$2+3i$, $(2,-3)$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$

4 – که $(x, y\in IR)$ او $3x+2iy-ix+5y=7+5i$ وي، د x او y قيمتونه پيدا کړئ.

5- لاندې عمليې سرته ورسوئ او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل وليکئ

(c) ketabton.com: The Digital Library

$(2+3i)+(-5+2i)$

$(-5-4i)-(-2-\sqrt{2}i)$

$(2+3i)+(-5-i)$

$(6-5i)+(3+2i)$

$(3.7+6.1i)-(1+5.9i)$

$(8+\frac{3}{4}i)-(-7+\frac{2}{3}i)$

$(-6-\frac{5}{8}i)+(4+\frac{1}{2}i)$

$(-2+5i)+(3-i)$

$(3+\frac{3}{5}i)-(-11+\frac{7}{15}i)$

$(-4-\frac{5}{6}i)+(13+\frac{3}{8}i)$

$(-7-\sqrt{-72})+(8+\sqrt{-50})$

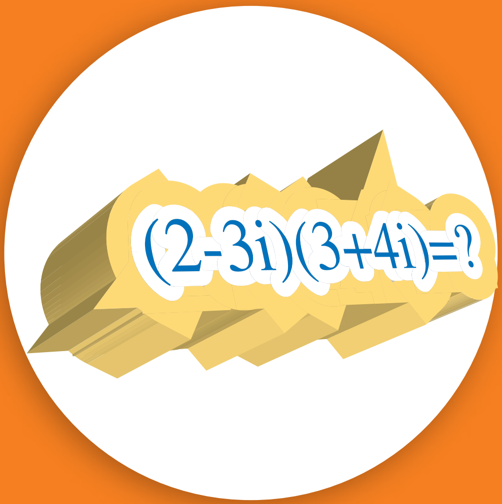
$(\sqrt{3}+\sqrt{-2})-(\sqrt{12}+\sqrt{8})$

6- د لاندې مختلطو عددونو جمعي معکوس پیداکړئ.

$2-3i$	$8+11i$	$1-i$	$-1+i$
$5-8i$	$-13+13i$	$-5i$	$2i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلطو عددونو ضرب



آیا کولای شئ چې د $(2-3i)(3+4i)$ مختلطو عددونو د ضرب حاصل په لاس راوړئ؟

د $i^2=-1$ په نظر کې نیولو سره د دوو مختلطو عددونو ضرب په لاندې ډول دی که:
$z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ وي.

$$z_1\cdot z_2=(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bidi$$
$$=ac+adi+bci+bdi^2$$
$$=ac+(ad+bc)i+bd(-1)$$
$$z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

لومړی مثال: د $(5-4i)\cdot(7-2i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$(5-4i)(7-2i)=5(7)+5(-2i)+(-4i)(7)-4i(-2i)=35-10i-28i+8i^2$$
$$=35-38i+8(-1)$$
$$=35-38i-8$$
$$=27-38i$$

فعالیت

د $(2-3i)(3+4i)$ د ضرب حاصل په لاس راوړئ.

خرنګه چې $(a+bi)(1+0i)=a\cdot1+a\cdot0i+bi\cdot1+bi\cdot0i=a+bi$ دی، نو $1+0i$ ته د مختلطو عددونو د ضرب د عملیې د عینیت عنصر (Multiplicative identity) وایي لکه:
$(3+5i)(1+0i)=3+5i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د یوه مختلط عدد مزدوج (Conjugate of a Complex Number):

د $z = x + yi$، د مختلط عدد مزدوج $\bar{z} = x - yi$ دی په دې ډول چې:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$$

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

$$z + \bar{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x \quad , \quad 2x \, Re(z)$$

$$z - \bar{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi \quad , \quad 2yi \, Im(z)$$

دویم مثال: د $z = 3 + 4i$ د عدد مزدوج $\bar{z} = 3 - 4i$ دی، $z - \bar{z}$, $z + \bar{z}$ او $z \cdot \bar{z}$ په لاس راوړئ:

$$z \cdot \bar{z} = (3 + 4i) \cdot (3 - 4i) = 3(3) + 3(-4i) + 4i(3) + 4i(-4i)$$

$$= 9 - 16i^2 = 9 - 16(-1) = 9 + 16 = 25$$

$$z + \bar{z} = (3 + 4i) + (3 - 4i) = 6$$ (6 یو حقیقي عدد دی)

$$z - \bar{z} = (3 + 4i) - (3 - 4i) = 8i$$ (8i یو موهومي عدد دی)

فعالیت

د $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 7 + i$ او $z_3 = \sqrt{5} + \sqrt{7}i$ مختلطو عددونو مزدوجونه پیدا کړئ.

څرنګه چې ومولیدل، د یو مختلط عدد د مزدوج د پیدا کولو لپاره، یوازې د موهومي برخې علامه تغیرو لکه:

مزدوج یې	عدد
i	-i
1+i	1-i
-4-2i	-4+2i
-5i-6	5i-6

د یو مختلط عدد ضربي معکوس (Multiplicative inverse)

پوهیږو چې د $a + bi$ د عدد مزدوج $a - bi$ دی او

$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (b^2 i^2) = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $a+bi$ عدد د ضربي معکوس د پیداکولو له پاره د $\frac{1}{a+bi}$ عدد د مختلط عدد په معیاري شکل لیکو، نو د $\frac{1}{a+bi}$ د عدد صورت او مخرج په $a-bi$ کې ضربوو. ($a-bi$ د مخرج مزدوج دی)

$$\frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$\frac{1}{a+bi}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$$

د $(a+bi)$ د عددضربي معکوس $(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)$ دی.

دریم مثال: د $2-3i$ د عدد ضربي معکوس پیداکړئ.

$$\frac{1}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{2+3i}{4-9i^2}=\frac{2+3i}{4+9}=\frac{2+3i}{13}=\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$$

څلورم مثال: د x^2+4 افاده تجزیه کړئ.

$$x^2+4=x^2-(-1)\cdot4=x^2-(i)^2\cdot4=x^2-(2i)^2=(x-2i)(x+2i)$$

فعالیت

د $5+3i$ او $\sqrt{2}-4i$ مختلطو عددونو ضربي معکوس پیداکړئ.

که چیرې $z=x+yi$ او $w=x'+y'i$ دوه مختلط عددونه وي، نو $z\cdot w$ په دې ډول تعریف شوی دی.

$$z\cdot w=(xx'-yy')+(xy'+x'y)i$$

د یو مختلط عدد د مزدوج د پیداکولو لپاره یوازې د موهومي برخې علامه تغیرو او د $a+bi$ د مختلط عدد ضربي معکوس $(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i)$ دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- لاندې مختلط عددونه سره ضرب کړئ.

$(2+i)(3-2i)$, $(3+i)(3-i)$
$(-2+3i)(4-2i)$, $(2-5i)(2+5i)$
$(5+2i)(5-3i)$, $(\sqrt{6}+i)(\sqrt{6}-i)$
$(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)$

2- د لاندې مختلطو عددونو ضربي معکوس پیدا کړئ.

$1-i$, $2+4i$, $5-3i$, $3a-4bi$, $(7,4)$

3- لاندې افادې تجزیه کړئ.

x^2+16 , x^2+8 , x^2+5 , x^2+7

4- د $(-3+2i)^2$ او $(2+i)^2$ قیمتونه په لاس راوړئ.

5- که $z=4-3i$ وي، $8z-z^2$ پیدا کړئ.

6- دا معادله حل کړئ. $x+yi=(2-3i)(2+3i)$.

7- وښیاست چې: $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ، د i مربع جذر دی.

8- وښیاست چې: $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ د i- دریم جذر دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{-2-2i}{-5+6i}=?$$

د دوو مختلطو عددونو وېش
Division of two complex numbers

آیا د $\frac{-2-2i}{-5+6i}$ د وېش حاصل (خارج قسمت) په لاس راوړلای شئ؟

څرنګه چې د $\frac{a+bi}{c+di}$ عدد په مخرج کې c حقیقي عدد او di موهومي عدد دی، نو لومړی باید مخرج په حقیقي عدد بدل کړو، ددې لپاره صورت او مخرج، د مخرج په مزدوج کې ضربوو چې دې عملیې ته ګویاکول (Rationalization) وایي.

لومړی مثال: د $\frac{4+3i}{2+5i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل: د $2+5i$ مزدوج $2-5i$ دی، صورت او مخرج د مخرج په مزدوج یا $2-5i$ کې ضربوو.

$$\frac{4+3i}{2+5i}=\frac{4+3i}{2+5i}\cdot\frac{2-5i}{2-5i}=\frac{8-20i+6i-15i^2}{4-10i+10i-25i^2}=\frac{8-14i-15(-1)}{4-25(-1)}$$
$$=\frac{23-14i}{29}=\frac{23}{29}-\frac{14}{29}i$$

لیدل کېږي چې د وېش په حاصل کې حقیقي او موهومي برخې سره جلا دي.

فعالیت

د $\frac{1+i}{1-i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ او خپل ځواب د مختلط عدد په معیاري شکل ولیکئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تعریف

که $z_1=a+bi$ او $z_2=c+di$ وي، $\frac{z_1}{z_2}$ په لاندې ډول تعریف شوی دی

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2}=\frac{ac+bd-(ad-bc)i}{c^2+d^2}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{ad-bc}{c^2+d^2}i$$

دویم مثال: د $z_1=2-3i$ عدد پر $z_2=1+i$ ووېشئ او بیا یې امتحان کړئ.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2-3i}{1+i}=\frac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-1-5i}{2}=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i$$

$$(1+i)(-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i)=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i-\frac{1}{2}i-\frac{5}{2}i^2=-\frac{1}{2}-3i+\frac{5}{2}=2-3i$$

دریم مثال: د $\frac{3+2i}{5-i}$ د وېش حاصل په لاس راوړئ.

حل:

$$\frac{3+2i}{5-i}=\frac{(3+2i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}=\frac{15+3i+10i+2i^2}{25-i^2}=\frac{15+13i-2}{25+1}=\frac{13+13i}{26}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

که $z=x+yi$ او $w=x'+y'i$ دوه مختلط عددونه وی، نو $\frac{z}{w}$ داسې تعریف شوی دی.

$$\frac{z}{w}=\frac{xx'+yy'}{x'^2+y'^2}+\frac{x'y-xy'}{x'^2+y'^2}i \quad , \quad (x'^2+y'^2\neq 0)$$

د یو مختلط عدد د مزدوج خاصیتونه:

که z_1 او z_2 دوه مختلط عددونه وي:

1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

2) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$ 4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

5) $z + \overline{z} = 2x$ 6) $z - \overline{z} = 2yi$

7) $\overline{\overline{z}} = z$

لومړی مثال: که $z_1 = 4 + 5i$ او $z_2 = -3 + 2i$ وي، وښیاست چې:

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ او $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

حل:

$$z_1 + z_2 = (4 + 5i) + (-3 + 2i) = 1 + 7i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = 1 - 7i$$
$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (4 - 5i) + (-3 - 2i) = 1 - 7i$$

په پایله کې $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$$z_1 \cdot z_2 = (4 + 5i) \cdot (-3 + 2i) = -12 - 10 + (8 - 15)i = -22 - 7i$$
$$\Rightarrow \overline{z_1 \cdot z_2} = -22 + 7i$$
$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (4 - 5i) \cdot (-3 - 2i) = -12 - 8i + 15i + 10i^2 = -12 - 8i + 15i - 10$$
$$= -22 + 7i$$

په پایله کې: $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = -22 + 7i$

دویم مثال: که $z = x + yi$ وي $z + \overline{z}$ او $z - \overline{z}$ پیداکړئ.

حل: $z - \overline{z} = (x + yi) - (x - yi) = 2yi$, $z + \overline{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x$

فعالیت

که $z = 2 + 3i$ وي، $\overline{\overline{Z}}, Z + \overline{Z}$ او $Z - \overline{Z}$ پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د وېش حاصل يې پيدا کړئ:

$$\frac{1+i}{1-1}\ ,\ \frac{3-4i}{2-5i}\ ,\ \frac{5-2i}{6-i}\ ,\ \frac{7-i}{3-5i}$$

2- که $z_1=-a-3bi$ او $z_2=2a-3bi$ وي. وښياست چې:

$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ او $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ دی.

3- د وېش حاصل پيداکړئ او خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل وليکئ.

$$a:\frac{2}{5-i}\qquad b:\frac{3-i}{2+i}\qquad c:\frac{2-3i}{3}$$

4- د $\frac{6+\sqrt{-36}}{3+\sqrt{-9}}$ د وېش حاصل مساوي دی په:

$a:1\qquad b:2\qquad c:3i\qquad d:-2$

5- خپل ځوابونه د $a+bi$ په شکل وليکئ.

$$\frac{3+4i}{4i}\qquad \frac{-5}{2-3i}\qquad \frac{6}{1+3i}$$

$$\frac{7}{7-2i}\qquad \frac{-4+8i}{2-4i}\qquad \frac{3-2i}{-6+4i}$$

$$\frac{1}{i}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مختلطو عددونو په ساحه کې د دويمې درجې يو مجهوله معادلې حل:

$$x^2+x+4=0$$
$$x_1=?$$
$$x_2=?$$

آيا د $x^2+x+4=0$ معادلې جذرونه پيدا کولای شئ؟

د يوې دويمې درجې يو مجهوله معادلې عمومي شکل $ax^2+bx+c=0$ ، $(a \neq 0)$ دی.

که $\Delta = b^2-4ac > 0$ معادله دوه د مختلفو علامو لرونکي حقيقي جذرونه لري.

که $\Delta = 0$ معادله دوه مساوی جذرونه لري.

که $\Delta < 0$ معادله د حقيقي عددونو په سټ کې حل نه لري، خو د مختلطو عددونو په ساحه کې دوه جذرونه لري.

لومړی مثال: د $x^2-10x+26=0$ معادله حل کړئ.

حل: $a=1 \quad b=-10 \quad c=26$ دي.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot1\cdot26}}{2\cdot1}=\frac{10\pm\sqrt{-4}}{2}$$
$$=\frac{10\pm2i}{2}=5\pm i \qquad \Rightarrow \qquad x_1=5+i \qquad x_2=5-i$$

فعاليت

دا جذرونه په پورتنۍ معادله کې وضع او امتحان يې کړئ.

دويم مثال: د $4x^2+4i\ x+15=0$ معادله حل کړئ.

حل:

$$\Delta=b^2-4ac=(4i)^2-4\cdot4\cdot15=16i^2-240=-256$$
$$\pm\sqrt{\Delta}=\pm\sqrt{-256}=\pm\sqrt{256(-1)}=\pm16i$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$x_1 = \frac{-4i+16i}{2\cdot 4} = \frac{12i}{8} = \frac{3}{2}i$$
$$x_2 = \frac{-4i-16i}{8} = -\frac{5}{2}i$$

دريم مثال: $x^2+3ix-2=0$ معادله د محمد بن موسی د فورمول په مرسته، د مختلطو عددونو په ساحه کې حل کړئ.

$$\Delta = b^2-4ac = (3i)^2-4\cdot 1\cdot(-2) = 3^2\cdot i^2+8 = -9+8 = -1$$
$$\pm\sqrt{\Delta} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$
$$x_{1,2} = \frac{-3i\pm i}{2\cdot 1} \qquad x_1 = \frac{-4i}{2} = -2i \qquad x_2 = \frac{-2i}{2} = -i$$

فعالیت

د $x^2+3=0$ ، $x^2-6x+18=0$ او $x^2-4x+13=0$ معادلې حل کړئ.

پوښتنې

1) هغه دويمه درجه معادله پیدا کړئ چې جذرونه يې $(3+2i)$ او $(3-2i)$ وي.

2) لاندې معادلې حل کړئ.

$$x^2-4x+13=0\ ,\quad x^2-6x+18=0\ ,\quad -4x^2+3x-5=0$$
$$x^2+8x+41=0\ ,\quad x^4-1=0\ ,\quad 3x^2+x+2=0$$

3) داسې دويمې درجې معادلې په لاس راوړئ چې جذرونه يې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

$2+5i\ ,\ 2-5i$	$1+i\ ,\ 1-i$
$4i\ ,\ -4i$	$5i\ ,\ -5i$
$2i\ ,\ 3i$	$i\ ,\ \frac{1}{i}$
$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}i\ ,\ \frac{2}{3}-\frac{1}{2}i$	$2-i\ ,\ 2+i$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ځپرکي لنډيز

- منفي عددونه د حقيقي عددونو په سټ کې جفت جذرنه لري، خو د مختلطو عددونو په سټ کې منفي عددونه جفت جذر لري.
- مختلط عددونه د حقيقي او موهومي عددونو له يو ځای کېدو څخه په لاس راځي.
- د حقيقي عددونو مربع مثبت، خو د موهومي عددونو مربع منفي ده

$$i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$$

- داسې عددونو ته چې $\sqrt{-1}$ يې يو فکتور وي، موهومي عددونه وايي.
- د مختلطو عددونو سټ C په لاندې ډول تعريف شوی دی:

$$C = \{z / z = a + bi, \text{a, b} \in \text{IR}, \text{i} = \sqrt{-1}\}$$

- د يو مختلط عدد معياري شکل $z = a + bi$ دی چې a ته د z د عدد حقيقي برخه او bi ته د z موهومي برخه وايي يا $a = \text{Re}(z)$ او $bi = \text{Img}(z)$
- د i د مختلفو توانونو د پيداکولو لپاره د i توان پر 4 وېشو چې له يوه سره مساوي کېږي او که پوره پرې نه وېشل کېږي، نو د i د توري توان پر 4 د وېشلو له پاتې (باقي مانده) سره مساوي دی، لکه:

$$(\text{i})^{1379} = \text{i}^{4 \cdot 344} \cdot \text{i}^3 = (1)(\text{i})^3 = -\text{i} \quad \text{يا} \quad i^{4k+r} = i^r$$

- که د $z = a + bi$ په مختلط عدد کې $b = 0$ وي، نو a ته خالص حقيقي عدد او که $a = 0$ وي، bi ته خالص موهومي عدد وايي.
- هغه مختلط عدد چې حقيقي او موهومي برخې يې دواړه صفرونه وي، صفري مختلط عدد ورته وايي. $(a = 0, b = 0)$
- دوه مختلط عددونه هغه وخت سره مساوي دي چې د دواړو عددونو حقيقي او موهومي برخې يو له بله سره مساوي وي. $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$ او $\text{Img}(z_1) = \text{Img}(z_2)$
- د دوو مختلطو عددونو د جمعې حاصل يو بل داسې مختلط عدد دی چې حقيقي برخه يې د دواړو عددونو د حقيقي برخو او موهومی برخه يې د دواړو عددونو د موهومي برخو له مجموعې

(c) ketabton.com: The Digital Library

څخه عبارت ده.

• د دوو مختلطو عددونو د تفریق حاصل داسې یو مختلط عدد دی چې حقیقي برخه یې د دواړو عددونو د حقیقي برخو او موهومي برخه یې د دواړو عددونو د موهومي برخو د تفریق له حاصل څخه عبارت ده.

•که $z_1 = x_1 + y_1 i$ او $z_2 = x_2 + y_2 i$ وي، نو د مختلطو عددونو د جمعې، تفریق، ضرب او وېش عملیې داسې تعریف شوي دي.

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$$

$$z_1 . z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}.i \quad , \quad (z_2 \neq 0)$$

• د $z = x + yi$ مختلط عدد مزدوج له $\overline{Z} = x - yi$ څخه عبارت دی.

$$z\overline{z} = x^2 + y^2 \qquad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$z + \overline{z} = 2x \qquad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$z - \overline{z} = 2yi \qquad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_2} \cdot \overline{z_1}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

• د $z = a + bi$ عدد جمعي معکوس $-a - bi$ دی او ضربي معکوس یې $\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$ دی.

• $0 + 0i = (0,0)$ د مختلطو عددونو د جمعې د عملیې د عینیت عنصر او $1 + 0i$ د ضرب د عملیې د عینیت عنصر دی.

• هغه دویمه درجې معادلې چې د حقیقي عددونو په سټ کې حل نه لري، د مختلطو عددونو په سټ کې حل لري.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فصل پوښتنې:

1) $(i)^{51}$ مساوي دي په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

2) i^{-98} موهومي عدد مساوی دی په:

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$

3) i^{67} موهومي عدد مساوي دی په:

a) $-i$ b) 1 c) -1 d) i

4) $7i-4i$ مساوي دی په:

a) $-3i$ b) $3i$ c) 3 d) -3

5) $3i\cdot 4i$ مساوي دی په:

a) -12 b) 12 c) $12i$ d) $-12i$

6) $\dfrac{64i}{8i}$ مساوي دی په:

a) -8 b) 8 c) $8i$ d) $-8i$

7) $\dfrac{7}{9}i\cdot\dfrac{2}{9}i$ مساوي دی په:

a) $-\dfrac{14}{81}$ b) $\dfrac{14}{81}$ c) $-\dfrac{14}{81}i$ d) $\dfrac{14}{81}i$

8) $\dfrac{\sqrt{-11}}{\sqrt{-5}}$ مساوي دی په:

a) $\sqrt{\dfrac{11}{5}}$ b) $\dfrac{-11}{5}$ c) $\dfrac{-11}{5}i$ d) $\dfrac{11}{5}i$

9) $\dfrac{\sqrt{-1}\sqrt{5}}{\sqrt{-1\cdot 5}}$ مساوي دی په:

a) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ b) $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\dfrac{5}{3}i$ d) دري واړه سم نه دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

10) $-\frac{xi}{\sqrt{yi}}$ مساوي دی په:

a) $\frac{x}{\sqrt{y}}$ b) $\frac{-x}{\sqrt{y}}$ c) $\frac{xi}{\sqrt{y}}$ d) $\frac{x}{y}$

11) لاندې مختلط عددونه جمع کړئ.

$(3+4i)+(2+5i)$ $(a+bi)+(c+di)$

$(1+i)\ +(1-i)$ $(2+3i)+(2-3i)$

12) لاندې مختلط عددونه تفريق کړئ.

$(4+3i)-(4+4i)$ $(3-2i)-(3+2i)$

$(4+4i)-(4+3i)$ $(1+i)-(1-i)$

13) $(2a+ib)-(2a-ib)$ مساوي دي په:

a) $-ib$ b) $-2ib$ c) $2ib$ d) $4a$

14) $(2-3i)\,(2+3i)$ د ضرب حاصل مساوي دی په:

a) -13 b) $13i$ c) 13 d) $9i$

15) لاندې مختلط عددونه د $a+bi$ په شکل وليکئ.

$4(2+5i)-(3-4i)$ $(4-3i)(2+i)$

$i(3-2i)^2$ i^{51}

16) که $z_1=2-4i$ او $z_2=1-i$ وي، وښياست چې:

$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

17) د لاندې مختلطو عددونو جمعي او ضربي معکوس پيدا کړئ.

$3x-\frac{1}{2}yi$ $2a-bi$ $2+5i$ $-7+3i$ $-6+2i$ $3-i$ $\sqrt{2}+i$

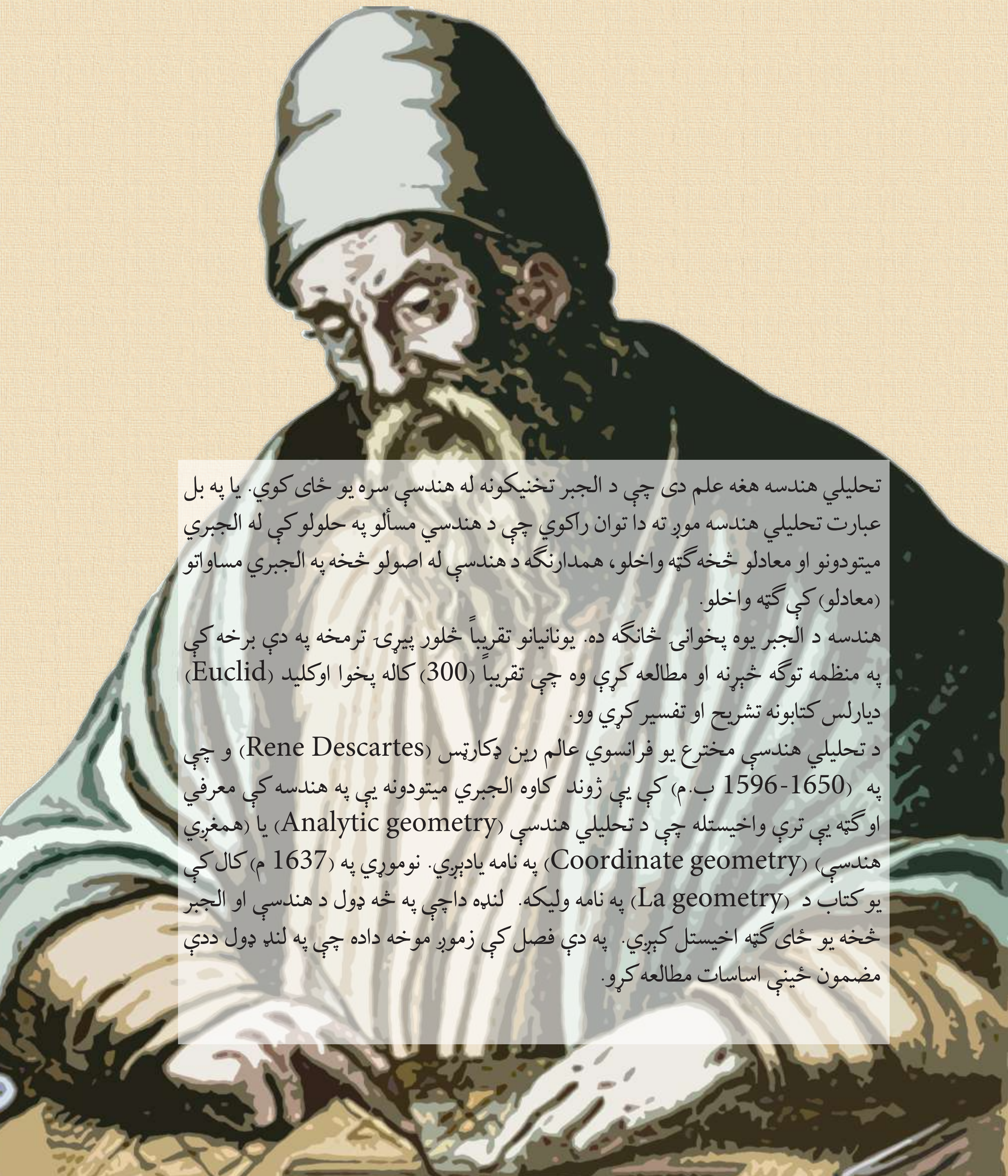
18) د $5x^2+2x+1=0$ معادله حل کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اووم څپرکی

تحليلي هندسه

(c) ketabton.com: The Digital Library



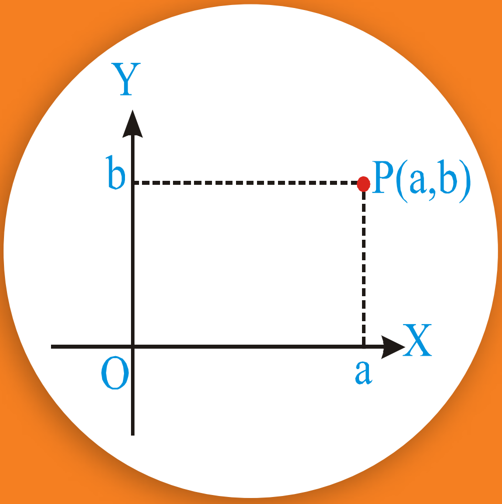
تحلیلي هندسه هغه علم دی چې د الجبر تخنیکونه له هندسې سره یو ځای کوي. یا په بل عبارت تحلیلي هندسه موږ ته دا توان راکوي چې د هندسي مسألو په حلولو کې له الجبري میتودونو او معادلو څخه ګټه واخلو، همدارنګه د هندسې له اصولو څخه په الجبري مساواتو (معادلو) کې ګټه واخلو.

هندسه د الجبر یوه پخوانۍ څانګه ده. یونانیانو تقریباً څلور پیړۍ ترمخه په دې برخه کې په منظمه توګه څېړنه او مطالعه کړې وه چې تقریباً (300) کاله پخوا اوکلید (Euclid) دیارلس کتابونه تشریح او تفسیر کړي وو.

د تحلیلي هندسې مخترع یو فرانسوي عالم رین ډکارټس (Rene Descartes) و چې په (1596-1650 ب.م) کې یې ژوند کاوه الجبري میتودونه یې په هندسه کې معرفي او ګټه یې ترې واخیستله چې د تحلیلي هندسې (Analytic geometry) یا (همغږې هندسې) (Coordinate geometry) په نامه یادېږي. نوموړي په (1637 م) کال کې یو کتاب د (La geometry) په نامه ولیکه. لنډه داچې په څه ډول د هندسې او الجبر څخه یو ځای ګټه اخیستل کېږي. په دې فصل کې زموږ موخه داده چې په لنډ ډول ددې مضمون ځینې اساسات مطالعه کړو.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د وضعیه کمیاتو سیستم یا کوارډنټ سیستم
(Coordinate system)



آیا د $(0,-1)$ ، $(2,2)$ ، $(-4,7)$ ، $(2,0)$ او د $(0,-2)$ نقطې د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکلای شئ؟

فعالیت

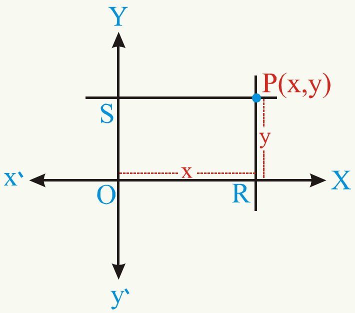
د وضعیه کمیاتو په مستوي کې د XX' او YY' یو پر بل دوه عمود خطونه رسم کړئ. ددې دوو خطونو د تقاطع ټکي (نقطې) ته (O) وایي چې د O نقطې ته د وضعیه کمیاتو د محورونو مبدا (Origin) وایي.

دوه یو پر بل عمود خطونه د کوارډنټ د محورونو (Coordinate axises) په نامه یادیږي. چې د XOX' افقي خط د X محور او د YOY' عمودي خط د Y له محور څخه عبارت دی. بنکاره ده ټول عددونه چې د X پر محور د مبدا ښي خواته واقع دي، مثبت او که د مبدا کیڼې خواته واقع وي، منفي دي. همدرانګه هغه عددونه چې د Y پر محور له مبدا پورته واقع دي، مثبت او که له مبدا لاندې واقع دي، منفي عددونه دي.

فرضوو چې که p په مستوي کې یوه نقطه وي، کولای شو چې د p نقطه د یوې مرتبې جوړې $(OrderPair)$ په واسطه وښایو. په دې ډول چې د p له نقطې څخه د X او Y له محورونو سره موازي مستقیم خطونه رسموو. چې دا مستقیم خطونه د Y محور د S په نقطه کې او د X محور د R په نقطه کې قطع کوي. چې د $\overline{OR}$ مستقیمه فاصله $\overline{OR}=x$ او $\overline{OS}=y$ ده. په نتیجه کې د p د نقطې موقعیت د (x,y) د مرتبې جوړې په واسطه د وضعیه کمیاتو په سیستم کې ټاکل کیږي.

په مستوي کې هره مرتبه جوړه د یوې نقطې په واسطه او د مستوي هره نقطه د (x,y) د حقیقي عددونو د مرتبې جوړې په واسطه ښودل کیږي. چې x او y د X او Y له محورونو څخه د p د

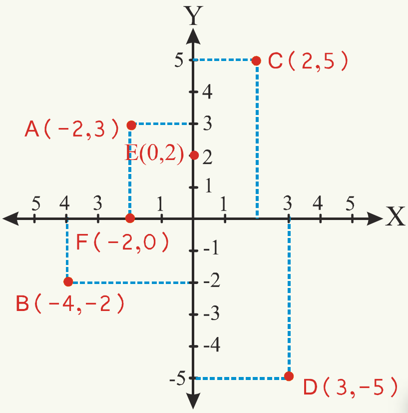
(c) ketabton.com: The Digital Library



نقطې مستقيمې فاصلې دي چې دې سيستم ته کارتيزني يا کوارډنټ سيستم (Coordinate System) وايي. د مرتبې جوړې لومړنی مرکبې ته د x مختصه او دويمې ته د y مختصه (Y-Coordinate) وايي. د کوارډنټ محورونه مستوي په څلورو ناحيو (ربعو) (quadrants) وېشي. په دې ډول چې په لومړنی ناحيه (ربع) کې، $x > 0$ ، $y > 0$ په دويمه ربع کې $x < 0$ ، $y > 0$ په دريمه ربع کې $x < 0$ ، $y < 0$ او په څلورمه ربع کې $x > 0$ او $y < 0$ دي.

لومړی مثال: د $A(-2,3)$ ، $B(-4,-2)$ ، $C(2,5)$ ، $D(3,-5)$ ، $E(0,2)$ او $F(-2,0)$ نقطې د وضعيه کمياتو په سيستم کې وټاکئ.

حل:



فعاليت

- وښياست کومې نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د y مختصې يې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي، د x مختصې يې صفر دي.
- وواياست چې د (2,3)، (−2,3)، (2,−3)، (−2,−3)، (0,4) او (4,0) نقطې په کومو ربعو کې واقع دي.

د دوو نقطو ترمنځ فاصله (Distance between two points):

آيا کولای شئ چې و وواياست، د $A(4,8)$ او $B(1,2)$ د نقطو تر منځ فاصله څو واحده ده؟

که $P_1\,(x_1\,,y_1\,)$ او $P_2\,(x_2\,,y_2\,)$ په مستوي کې دوې نقطې وي. موږ کولای شو چې د P_1 او

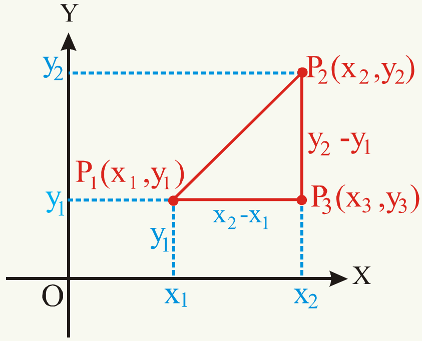
(c) ketabton.com: The Digital Library

P_2 ترمنځ فاصله یا $d=|P_1\,P_2|$ د دوو نقطو ترمنځ فاصله د $P_1\overset{\Delta}{P_3}P_2$ د قایم الزاویه مثلث له مخې د فیثاغورث د قضیې په اساس پیداکړو، لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

$$(\overline{P_1\,P_2})^2=(\overline{P_1\,P_3})^2+(\overline{P_2\,P_3})^2$$

$$d=|P_1\,P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

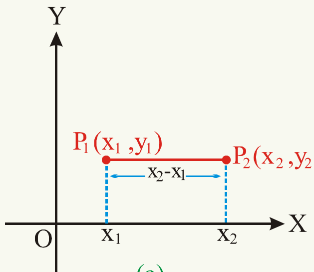


پام مو وي چې که د $P_1\ (x_1\,,y_1)$ او $P_2\ (x_2\,,y_2)$ نقطې پر افقي خط باندې واقع وي، په دې حالت کې $y_1\ =y_2$ کېږي، لکه: څرنګه چې د (a) په شکل کې لیدل کېږي.

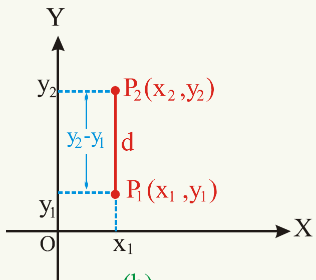
$$d=|P_1\,P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+0}=|x_2-x_1|$$

او که د P_1 او P_2 نقطې پر عمودي خط باندې واقع وي، په دې حالت کې $x_1\ =x_2$ دی، لکه: چې د (b) په شکل کې ښودل شوي دي.

$$d=|P_1\,P_2|=\sqrt{0+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(y_2-y_1)^2}=|y_2-y_1|$$



(a)



(b)

دویم مثال: د $P_1\ (3,-2)$ او $P_2\ (-1,-5)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

حل:

(c) ketabton.com: The Digital Library

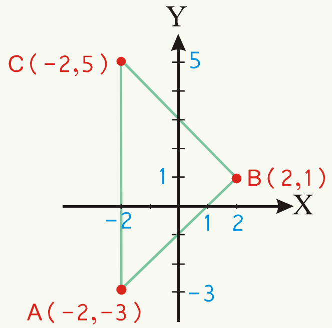
$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$= \sqrt{(-1-3)^2+[-5-(-2)]^2} = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

فعالیت

د $P_1\,(8,0)$ او $P_2\,(2,0)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

دریم مثال: د فاصلې د فورمول په مرسته وښیاست چې $A(-2,-3)$ ، $B(2,1)$ او $C(-2,5)$ د یو قایم الزاویه مثلث رأسونه دي.

حل:



$$|AB| = \sqrt{[2-(-2)]^2+[1-(-3)]^2} = \sqrt{32}$$
$$|BC| = \sqrt{(-2-2)^2+(5-1)^2} = \sqrt{32}$$
$$|CA| = \sqrt{[-2-(-2)]^2+[5-(-3)]^2} = \sqrt{64}$$
$$|AB|^2+|BC|^2 = 32+32 = 64$$
$$|CA|^2 = 64$$

څرنګه چې $|CA|^2 = |AB|^2+|BC|^2$ دی نو د $A\overset{\Delta}{B}C$ مثلث یو قایمه زاویه مثلث دی.

فعالیت

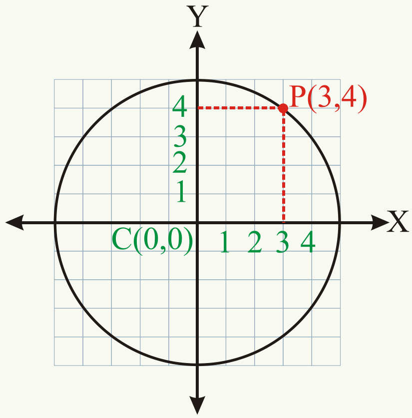
وښیاست چې $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ نقطې د قایمه زاویه مثلث راسونه دي.

څلورم مثال: که $C(0,0)$ د دایرې مرکز او د $P(3,4)$ نقطه د دایرې د محیط یوه نقطه وي، ددې دایرې د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل:

$$\overline{PC} = R = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2}$$
$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



د وضعیه کمیاتو په مستوي کې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د Y مختصې یې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د X مختصې یې صفر دي.

د $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ د دوو نقطو تر منځ فاصله د $d = |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- په لاندې راکړل شوو نقطو کې د کومې نقطې فاصله د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه 15 واحده ده؟

$a : (\sqrt{176}, 7)$

$b : (10, -10)$

$C : (1, 15)$

$d : (\frac{15}{2}, \frac{15}{2})$

2- وښیاست چې د $A(0,2)$ ، $B(\sqrt{3}, 1)$ او $C(0,-2)$ نقطې د یو قایمه زاویه مثلث راسونه دي.

3 - د $(0,5)$ او $(0,-3)$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

4 - د $A(-\frac{1}{2}, 3)$ او $B(-1, \frac{-3}{4})$ نقطو تر منځ فاصله پیدا کړئ.

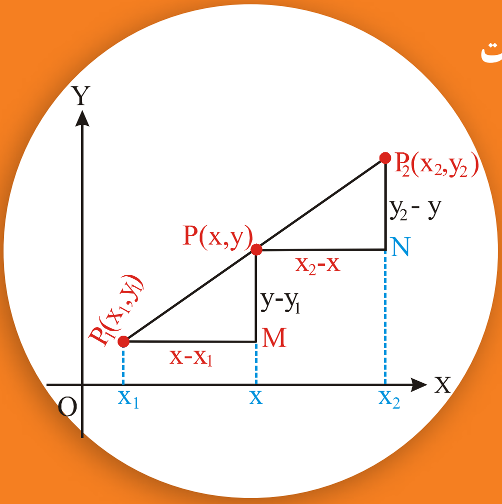
5 - د $(7, 11)$ او $(1, 3)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

6 - د $(3, 6)$ او $(1, 2)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

7 - د $(3, 7)$ او $(12, 19)$ نقطو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغې نقطې د وضعيه کمياتو پيدا کول چې يو قطعه خط په يوه نسبت باندې وېشي:



آيا کولای شئ د هغه مستقيم خط د تنصيف د نقطې وضعيه کميات پيداکړئ چې د $A(3,1)$ او $B(-2,4)$ له نقطو څخه تېرېږي؟ که د p د نقطې وضعيه کميات (x,y) وي

چې د $\overline{P_1P_2}$ مستقيم خط د r په نسبت وېشي يا $\frac{P_1P}{PP_2}=r$ وي. د $P_1\overset{\Delta}{M}P$ او $P\overset{\Delta}{N}P_2$ د مثلثونو له مشابهت څخه لرو چې:

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{PM}{P_2N}=\frac{y-y_1}{y_2-y}=r$$
$$y-y_1=ry_2-ry$$
$$y+ry=ry_2+y_1$$
$$(1+r)y=ry_2+y_1$$
$$y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}$$

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{P_1M}{PN}=\frac{x-x_1}{x_2-x}=r$$
$$x-x_1=rx_2-rx$$
$$x+rx=rx_2+x_1$$
$$(1+r)x=rx_2+x_1$$
$$x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}$$

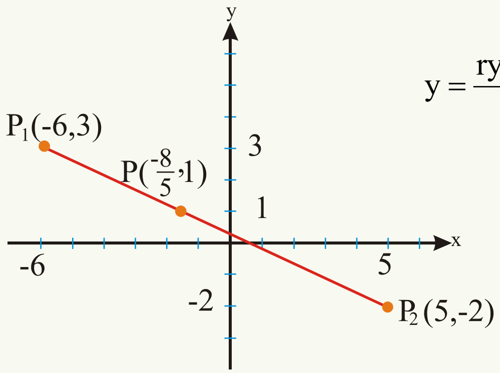
لومړی مثال: د P نقطې وضعيه کميات پيداکړئ، که هغه مستقيم خط چې د $P_1\,(-6,3)$ او $P_2\,(5,-2)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي يا $\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{2}{3}$ وي.

حل

$$x_1=-6 \qquad x_2=5 \qquad r=\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 5-6}{1+\frac{2}{3}}=-\frac{8}{5}$$

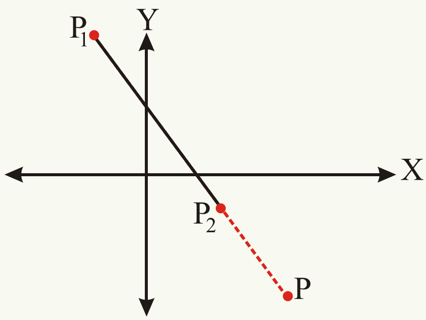
(c) ketabton.com: The Digital Library



$$y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(-2)+3}{1+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{-4}{3}+3}{1+\frac{2}{3}}=1$$

نو د p نقطې وضعیه کمیات $P(\frac{-8}{5},1)$ دي چې د $\overline{P_1P_2}$ خط د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي.

متوجه بايد اوسو چې که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط داخلاً د r په نسبت و وېشي، $r>0$ او که خارجاً يې و وېشي، نو $r<0$ دی.



د مثال په ډول په شکل کې ليدل کېږي چې که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه داخلاً د r په نسبت ووېشي يا په بل عبارت که P_1P او PP_2 همجهت وي، $r>0$ او که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د r په نسبت ووېشي يا داچې P_1P او PP_2 مختلف الجهت وي، $r<0$ دی، نو $\frac{P_1P}{PP_2}=-r$ لکه: چې په پورتني شکل کې ليدل کېږي.

دویم مثال: د p د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، که هغه مستقیم خط چې د $P_1(-8,4)$ او $P_2(2,-1)$ له نقطو څخه تېرېږي.

a : داخلاً يې د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي.　　b: خارجاً يې د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي.

د a حل:

$$r=\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{rx_2+x_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}\cdot2-8}{1+\frac{2}{3}}=\frac{-20}{5}=-4\ ,\ \ y=\frac{ry_2+y_1}{1+r}=\frac{\frac{2}{3}(-1)+4}{1+\frac{2}{3}}=\frac{10}{5}=2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط داخلاً د $\frac{2}{3}$ په نســبت وېشــي له $(-4,2)$ څخه عبارت دي

د b حل: څرنګه چې د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي، نو:

$$r=-\frac{2}{3}$$

$$x=\frac{(\frac{-2}{3})\cdot 2-8}{1-\frac{2}{3}}=-28 \quad , \quad y=\frac{(\frac{-2}{3})(-1)+4}{1-\frac{2}{3}}=14$$

د p د نقطی وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت وېشي له $(-28,14)$ څخه عبارت دي.

فعالیت

د p د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، په داســې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4,6)$ او $B(-2,3)$ له نقطو څخه تېرېږي، داخلاً یې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

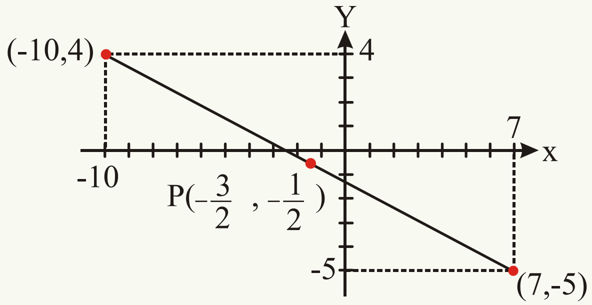
که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ د مســتقیم خط د تنصیف نقطه وي، په دې حالت کې $r=1$ دی او د p نقطې وضعیه کمیات عبارت دي له: $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ او $y=\frac{y_1+y_2}{2}$

دریم مثال: د هغه قطعه خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $(-10,4)$ او $(7,-5)$ له نقطو څخه تېرېږي.

حل:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-10+7}{2}=-\frac{3}{2} \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{4-5}{2}=-\frac{1}{2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library



د p د نقطې وضعیه کمیات چې د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط د r په نسبت وېشي.

د $y = \frac{ry_2 + y_1}{1+r}$, $x = \frac{rx_2 + x_1}{1+r}$ او د P_1P_2 قطعــه خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات

عبــارت دي له: $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ □ $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط داخلاً د r

په نسبت و وېشي، نو r مثبت او که خارجاً یې و وېشي، نو r منفي دی.

پوښتنې

1 - د $\overline{AB}$ مستقیم خط د تنصیف د نقطې وضعیه کمیات $(2,-1)$ دي، که $A(-1,-3)$ وي،

د B د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

2 - د هغــه قطعــه خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د $A(3,1)$ او $B(-2,-4)$

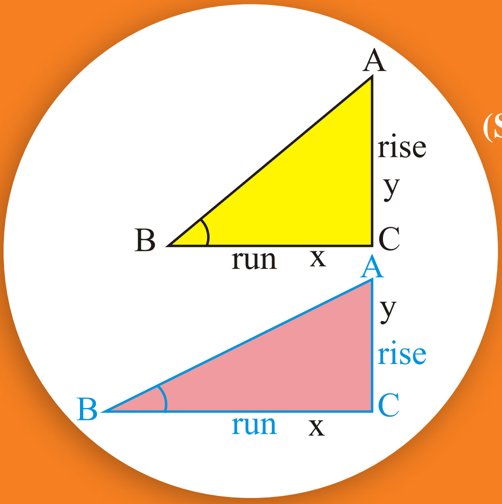
له نقطو څخه تیرېږي.

3 - د هغې نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ په داســې حال کې هغه قطعه خط چې د $A(4,6)$ او

$B(-2,3)$ له نقطو څخه تیرېږي

a: داخلاً یې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي. b: خارجاً یې د $\frac{1}{2}$ په نسبت و وېشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

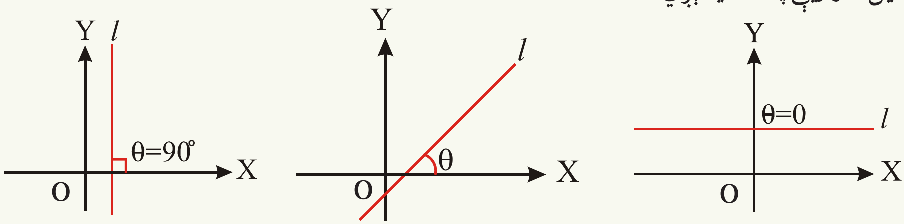


د یو مستقیم خط میل

(Slope of a straight Line)

کـولای شـئ چـې ووایـئ د کومـې مایلې سطحې میل زیات دی؟

د □ زاویه چې د l مســتقیم خط یې د X د محور له مثبت جهت ســره جوړوي، د مستقیم خط د میل د زاويې په نامه یادېږي.



لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي که د l خط د X له محور سره موازي وي 0 =□ او که د Y له محور سره موازي وي، نو $90°$ =□ ده.

څه وخت چې موږ پر مایله ســطحه (inclined plane) پورته خواته حرکت کوو، په یو وخت کې افقي فاصله (run) او عمودي فاصله (rise) طی کوو. که د AB د مســتقیم خط میل په m و ښایو.

$$m=\frac{rise}{run}=\frac{y}{x}=\tan\theta$$

د مستقیم خط میل د هغه زاويې له tan څخه عبارت دی چې مستقیم خط یې د x د محور له مثبت جهت سره جوړوي، که $0<\theta<90°$ وي، نو د مستقیم خط میل مثبت او که $90°<\theta<180°$ وي میل منفي دی او که $\theta=0$ وي $\tan 0°=0$ دی، نو میل یې صفر او که $\theta=90°$ وي، نو په دې حالت کې د مستقیم خط میل تعریف شوی نه دی، ځکه چې $\tan\ 90°$ تعریف شوی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د X او Y د محورونو د میل په برخه کې څه فکر کوئ؟

د هغه مستقیم خط میل چې عمود نه وي او د $P(x_1 y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تیرېږي.

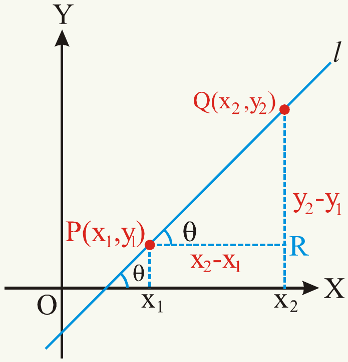
$m = \tan\theta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ دی، څکه لکه څرنګه چې په شکل کې لیدل کېږي.

$$\hat{RPQ} = \hat{\theta}$$

$$\overline{PR} = x_2 - x_1$$

$$\overline{QR} = y_2 - y_1$$

$$m = \tan\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



که د A، B، او C درې نقطې داسې ولرو چې د $\overline{AB}$ د مستقیم خط میل د $\overline{BC}$ د مستقیم خط له میل سره مساوي وي، نو د A، B، او C نقطې په یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

لومړی مثال: د هغه مستقیم خط میل پیداکړئ چې د $P_1\ (2,4)$ او $P_2\ (6,10)$ له نقطو څخه تیرېږي.

حل:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-4}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

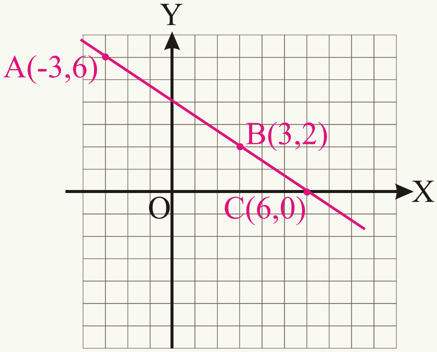
یا:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4-10}{2-6} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

دویم مثال: و ښیاست چې د $A(-3,6)$، $B(3,2)$ او $C(6,0)$ درې نقطې پر یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

د $\overline{AB}$ مستقیم خط میل $= \dfrac{2-6}{3-(-3)} = \dfrac{-4}{6} = -\dfrac{2}{3}$

(c) ketabton.com: The Digital Library



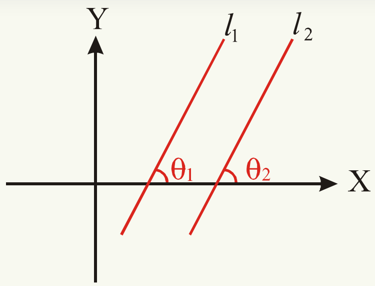
د $\overline{BC}$ مستقیم خط میل $= \dfrac{0-2}{6-3} = -\dfrac{2}{3}$

څرنګه چې د $\overline{AB}$ او $\overline{BC}$ مستقیمو خطونو میلونه سره مساوي دي.نو د A، B او C نقطې په یوه مستقیم خط باندې واقع دي.

نتیجه: د یوه مستقیم خط میل د مستقیم خط په ټولو نقطو کې سره مساوي دی.

فعالیت

- د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(-2,4)$ او $(5,1)$ له نقطو څخه تېرېږي.
- د مستقیم خط د میل په مرسته وښیاست چې د $(4,-5)$ ، $(7,5)$ او $(10,15)$ نقطې پر یوه مستقیم خط پرتې دي.



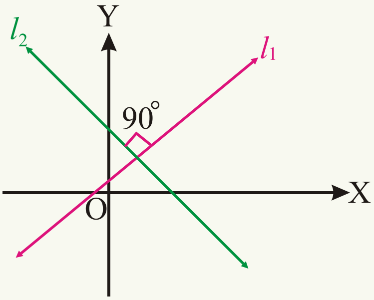
که د l_1 او l_2 دوه مستقیم خطونه وي او میلونه یې په ترتیب سره m_1 او m_2 وي، نو:

1- کـه l_1 د l_2 سره موازي وي $m_1 = m_2$ دی.

څکه چې د شکل مطابق $\theta_1 = \theta_2$ دی

$$\tan\theta_1 = \tan\theta_2$$

$$m_1 = m_2$$



2- که l_1 او l_2 یو پر بل عمود وي، نو:

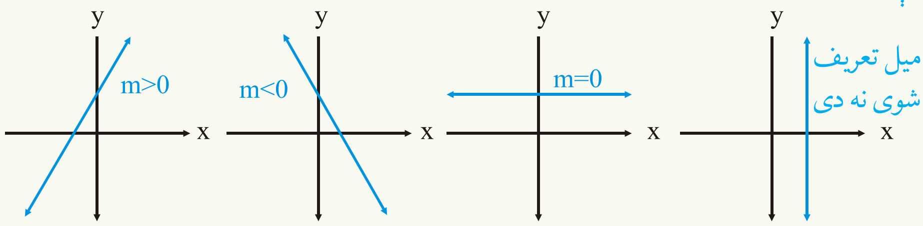
$m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$ یا $m_1 m_2 + 1 = 0$ یا

$m_1 \cdot m_2 = -1$ دی.

د یو مستقیم خط میل چې د $P_1(x_1, y_1)$ او د $P_2(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي، د $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ لـه فورمول څخه پـه لاس راځي د X د محور او د هغو مستقیمو

(c) ketabton.com: The Digital Library

خطونو میل چې د X له محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغو مستقیمو خطونو میل چې د Y له محور سره موازي وي تعریف شوی نه دی. که د یوه مستقیم خط د میل زاویه حاده وي، میل یې مثبت او که منفرجه وي، میل یې منفي دی او که د مستقیم خط د میل زاویه صفر وي، میل یې صفر دی.



پوښتني

1 - د هغه مستقیم خط میل پیدا کړئ چې د $(3,-2)$ او $(2,7)$ له نقطو څخه تېرېږي.

2 - که $A(8,6)$ ، $B(-4,2)$ او $C(-2,-6)$ د یو مثلث رأسونه وي، د مثلث د هرې ضلعې میل پیدا کړئ.

3 - د مستقیم خط د میل په مرسته و ښیاست چې د $(a,2b)$ ، $(c,a+b)$ او $(2c-a,2a)$ نقطې پر یو مستقیم خط باندې واقع دي.

4 - د $\overline{AB}$ مستقیم خط چې د $A(1,-2)$ او $B(2,4)$ له نقطو او د $\overline{CD}$ مستقیم خط چې د $C(4,1)$ او $D(-8,2)$ له نقطو څخه تېرېږي، دا دواړه خطونه سره:

a: موازي دي b: عمود دي c: هېڅ یو

5 - د $y=3$ مستقیم خط او د $x=3$ مستقیم خط یو له بله سره څه اړیکه لري؟

a - موازي دي b - عمود دي c - هېڅ یو

6 - د $x=-1$ او $x=3$ خطونه سره: a - موازي دي b - عمود دي c - هېڅ یو

7 - د $y=-\sqrt{3}$ مستقیم خط میل مساوي دی په:

a - 1 b- صفر c- -1 d- تعریف شوی نه دی

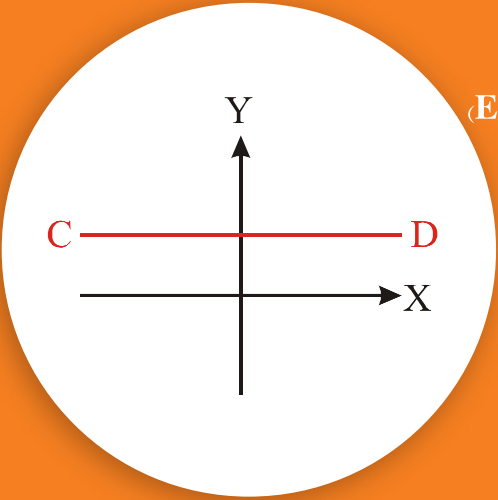
8 - د $x=0{,}03$ مستقیم خط میل مساوي دی په:

a - 1 b- صفر c- -1 d- تعریف شوی نه دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يو مستقيم خط معادله

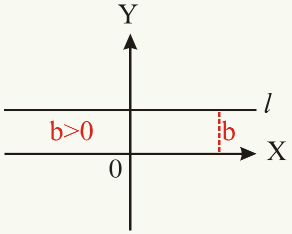
(Equation of a straight Line)



آيا كولای شئ د $\overline{CD}$ د مستقيم خط معادله پيدا كړئ چې د X له محور سره موازي وي.

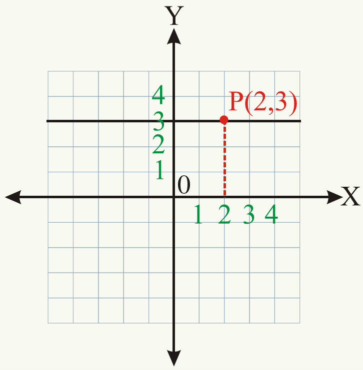
1-د هغه مستقيم خط معادله چې د X له محور سره موازي وي.

ټولې نقطې چې د l پر مستقيم خط پرتې وي، د X له محور څخه مساوي فاصلې لري يا په بل عبارت د ټولو هغو نقطو د y مختصې چې د X له محور سره پر موازي خط واقع دي سره مساوي دي. كه د X له محور څخه د l د خط فاصله ته (b) وواېو د l د مستقيم خط معادله $y = b$ ده.



كه $b > 0$ وي، نو د l خط د X له محور څخه پورته او كه $b < 0$ وي، نو د l خط د X له محور لاندې او كه $b = 0$ وي، نو د l خط د X پر محور پروت دی.

لومړی مثال: د هغه مستقيم خط معادله پيدا كړئ چې د (2,3) له نقطې څخه تيرېږي او د X له محور سره موازي وي.



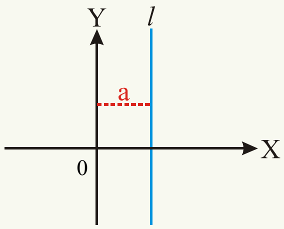
حل: $y = 3$ ددې خط معادله ده

فعاليت

د X د محور معادله پيدا كړئ.

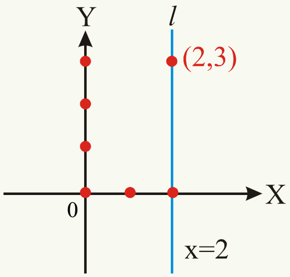
(c) ketabton.com: The Digital Library

2 - د هغه مستقیم خط معادله چې د Y له محور سره موازي وي: تولې نقطې چې



د l پر خط چې د Y له محور سره موازي دی، پرتې وي، د Y له محور څخه مساوي فاصلې لري که د Y له محور څخه د l د مستقیم خط فاصلې ته a و وایو چې a ددې نقطو لومړنی مختصه ده، نو د l د خط معادله $x = a$ ده.

که $a > 0$ وي د l خط د Y د محور ښي خواته او که $a < 0$ وي د l خط د Y د محور کیڼې خواته او که $a = 0$ وي، نو د l خط د Y پر محور منطبق دی.



دویم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د (2,3) له نقطې څخه تیر شي او د Y له محور سره موازي وي.

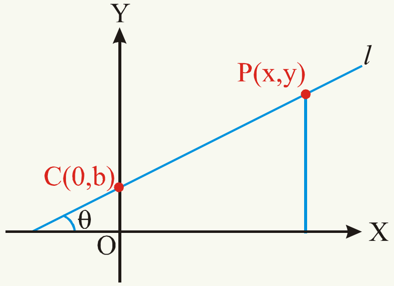
حل: $x = 2$ ددې خط معادله ده.

فعالیت

د Y د محور معادله ولیکئ.

3. د هغه مستقیم خط معادله چې میل او د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه معلومه وي یا د مستقیم خط معیاري معادله:

که $P(x, y)$ د l مستقیم خط یوه نقطه وي او $C(0, b)$ د Y له محور سره د مستقیم خط د تقاطع نقطه وي، نو د l د مستقیم خط میل عبارت دی له:



$$m = \frac{y-b}{x-0} = \frac{y-b}{x}$$

$$y = mx + b \quad \text{یا} \quad y - b = mx$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

که $b=0$ وي، د مستقیم خط معادله $y=mx$ ده چې په دې حالت کې مستقیم خط د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تېرېږي.

دریم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې:

a- میل یې 2 او د Y محور په 5 کې قطع کړي.

b- د Y محور په $\frac{4}{3}$ کې قطع کړي او پر هغه خط عمود وي چې میل یې -6 دی.

حل:

a: $m=2$ او $b=5$ $\qquad y=mx+b \Rightarrow y=2x+5$

b: ددې خط میل $m_2=-\frac{1}{m_1}=-\frac{1}{-6}=\frac{1}{6}$

$b=\frac{4}{3}$ او $m=\frac{1}{6}$ دی؛ نو:

$$y=mx+b \Rightarrow y=\frac{1}{6}x+\frac{4}{3}$$

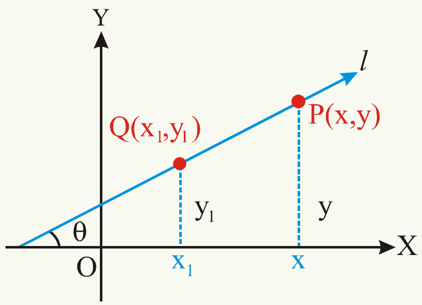
دا معادله کولای شو، د $6y=x+8$ ، $6y-x=8$ او یا $x-6y+8=0$ په شکل ولیکو.

4 - د هغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي:

د l د مستقیم خط معادله چې میل یې m او د $Q(x_1,y_1)$ له نقطې څخه تېرېږي.

که $p(x,y)$ د l د مســتقیم خط یوه اختیاري نقطه وي. څرنګه چې د $Q(x_1,y_1)$ او $P(x,y)$ نقطې په یوه مستقیم خط واقع دي، نو د l د مستقیم خط میل مساوي دی په:

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1} \Rightarrow y-y_1=m(x-x_1)$$



(c) ketabton.com: The Digital Library

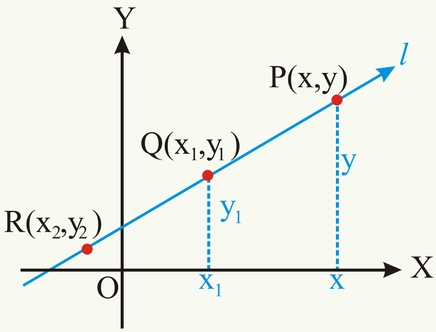
ځلورم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې میل یې (-2) او د $(5,1)$ له نقطې څخه تېرېږي.

حل:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = -2(x - 5)$$
$$y = -2x + 11$$
$$2x + y - 11 = 0 \quad \text{یا}$$

5: **د هغه مستقیم خط معادله چې دوې نقطې یې معلومې وي**:

د l د خط میل چې عمود نه وي، د $Q(x_1, y_1)$ او $R(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي او $P(x, y)$ ددې خط یوه کیفي نقطه وي، څرنګه چې د مستقیم خط میل په هره نقطه کې سره مساوي دي، نو لرو چې:



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \text{یا}$$

پنځم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(-2,1)$ او $(6,-4)$ له نقطو څخه تېرېږي.

حل:

$$y_1 = 1 \quad , \quad x_1 = -2$$
$$y_2 = -4 \quad , \quad x_2 = 6$$

$$y - 1 = \frac{-4 - 1}{6 - (-2)}[x - (-2)]$$

$$y - 1 = \frac{-5}{8}(x + 2) \quad \text{یا} \quad 5x + 8y + 2 = 0$$

6: **د هغه مستقیم خط معادله چې له محورونو سره یې تقاطع معلومه وي**:

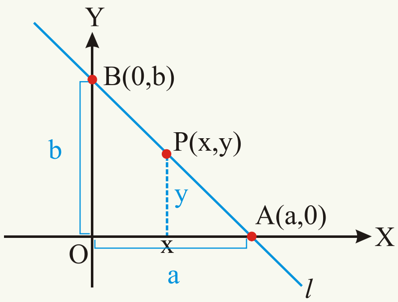
که $P(x, y)$ د l د مستقیم خط یوه کیفي نقطه وي او د l مستقیم خط د X محور په a کې او د Y محور په b کې قطع کړي یا د X محور د $A(a,0)$ او د Y محور د $B(0,b)$ په نقطه کې قطع کوي چې د B ، A او p نقطې د l پر مستقیم خط واقع دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د هغه مستقيم خط له معادلې څخه چې دوې نقطې يې معلومې وي لرو چې:

$x_1 = a\ ,\ y_1 = 0 \quad x_2 = 0\ , y_2 = b$

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)\ ,\ y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x-a) \Rightarrow -ay = b(x-a)$



$-ay = bx - ab$

$bx + ay = ab$

دواړه خواوې پر ab ويشو

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

شپږم مثال: د هغه مستقيم خط معادله پيدا کړئ چې د x محور په $(2,0)$ او د Y محور په $(0,-4)$ کې قطع کوي.

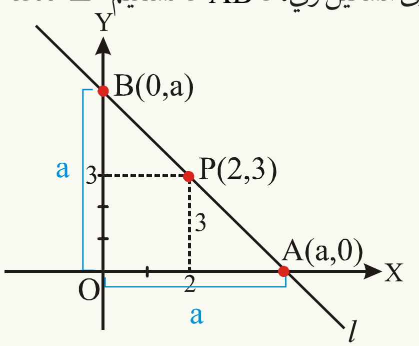
حل: $a = 2$ او $b = -4$ ده.

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$\frac{x}{2} + \frac{y}{-4} = 1$

يا $2x - y - 4 = 0$

اووم مثال: په شکل کې چې د $O\overset{\Delta}{A}B$ مثلث متساوی الساقين وي، د $\overline{AB}$ د مستقيم خط معادله په داسې حالت کې پيدا کړئ چې ددې مثلث د $\overline{AB}$ ضلع د $P(2,3)$ له نقطې څخه تيريږي.



حل: د $\overline{AB}$ د مستقيم خط ميل مساوي دی په:

$\overline{AB} = \frac{a-0}{0-a} = -1$ د مستقيم خط ميل

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو اوس د هغه مستقیم خط معادله چې میل یې (-1) او د $P(2,3)$ له نقطې څخه تېرېږي عبارت ده له:

$$y-3=-1(x-2) \text{ یا } x+y-5=0$$

د هغه مستقیم خط معادله چې میل او د Y له محور سره یې تقاطع معلومه وي عبارت ده له:

$y=mx+b$ د هغه مستقیم خط معادله چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي عبارت ده له:

$y-y_1=m(x-x_1)$، د هغه مستقیم خط معادله چې دوې نقطې یې معلومې وي عبارت ده له:

$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ اود هغه مستقیم خط معادله چې له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ ده.

پوښتنې

1- د لاندې مستقیمو خطونو معادلې پیداکړئ چې:

a: د هغه افقي خط معادله پیداکړئ چې له $(7,-9)$ نقطې څخه تېرېږي.

b: د هغه مستقیم خط معادله چې د X پر محور عمود او له $(-5,3)$ نقطې څخه تېرېږي.

2- د لاندې مستقیمو خطونو معادلې پیداکړئ چې:

a: میل یې 7 او د $(-6,5)$ له نقطې څخه تېر شي.

b: میل یې صفر او د $(8,-3)$ له نقطې څخه تېرېږي.

c: د $(-8,5)$ له نقطې څخه تېرېږي او میل یې تعریف شوی نه وي.

d: د $(-5,-3)$ او $(9,-1)$ له نقطو څخه تېرېږي.

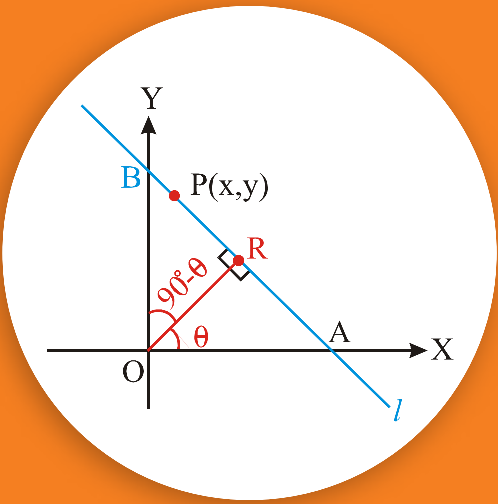
e: میل یې -4 او د Y محور په -9 کې قطع کړي.

3- د هغه مثلث د ضلعو معادلې پیداکړئ چې راسونه یې $A(-3,2)$، $B(5,4)$ او $C(3,-8)$ وي.

4- د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د $(-4,-6)$ له نقطې څخه تېرېږي او پر هغه خط عمود وي چې میل یې $\dfrac{-3}{2}$ وي.

5- د هغه مستقیم خط معادله پیداکړئ چې د $(11,-5)$ له نقطې څخه تېرېږي او له هغه خط سره موازي وي چې میل یې -24 وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



7 - د مستقیم خط نورمال معادله

آیا ویلای شئ د یوه مستقیم خط نورمال خط کوم خط ته وایي؟

د l د مستقیم خط معادله که p د هغه عمود خط اوږدوالی وي چې د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د l پر خط عمود وي او θ د عمود خط د میل زاویه وي.

عبارت ده له: $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ یا $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$

د l مستقیم خط د X محور د A په نقطه کې او د Y محور د B په نقطه کې قطع کوي، که $P(x,y)$ د $\overline{AB}$ د مستقیم خط یوه کیفي نقطه وي او د $\overline{OR}$ خط د l پر خط عمود وي، نو: $|\overline{OR}| = P$ دی چې د $\overline{OR}$ خط ته د l د خط نورمال خط وایي او P د نورمال اوږدوالی دی.

د $O\overset{\Delta}{R}A$ او $O\overset{\Delta}{R}B$ په قایمه زاویه مثلثونو کې لرو چې:

$$\cos\theta = \frac{P}{OA} \quad \text{یا} \quad OA = \frac{P}{\cos\theta}$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \frac{P}{OB} \quad \text{یا} \quad OB = \frac{P}{\cos(90^\circ - \theta)} = \frac{P}{\sin\theta}$$

له مثلثاتو پوهېږو: $\cos(90^\circ - \theta) = \sin\theta$

څرنګه چې د $\overline{AB}$ مستقیم خط د X محور په $(OA,0)$ او د Y محور په $(0,OB)$ کې قطع کوي، نو د $\overline{AB}$ د مستقیم خط معادله عبارت ده له:

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\frac{x}{\frac{P}{\cos\theta}}+\frac{y}{\frac{P}{\sin\theta}}=1$$

یا:

$$x\cos\theta + y\sin\theta = P$$

چې $x\cos\theta + y\sin\theta = P$ یا $x\cos\theta + y\sin\theta - P = 0$ د l د مستقیم خط نورمال معادله ده.

لومړی مثال: که د هغه عمود خط اوږدوالی چې د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د l پرخط عمود وي 5 واحده وي او ددې عمود خط د میل زاویه $120°$ وي، د l د مستقیم خط میل، نورمال معادله یې او د Y له محور سره یې د تقاطع نقطه پیدا کړئ.

حل: $\theta = 120°$ او $P = 5$ دی.

$$x\cos120° + y\sin120° = 5$$

$$-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=5 \qquad (\cos120° = -\frac{1}{2} \quad , \quad \sin120° = \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$x-\sqrt{3}y+10=0$$

د l خط د میل د پیداکولو لپاره د ا معادله د $y = mx + b$ په شکل لیکو:

$$y=\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{10}{\sqrt{3}}$$

نو د l خط میل $m=\frac{1}{\sqrt{3}}$ او د Y محور د $(0,\frac{10}{\sqrt{3}})$ په نقطه کې قطع کوي.

فعالیت

د هغه مستقیم خط نورمال معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحده او نورمال یې د X د محور له مثبت جهت سره د $30°$ زاویه جوړوي.

8- د مستقیم خط عمومي معادله:(General equation of a straight Line)

د $ax + by + c = 0$ معادله د x او y دوه متحوله لري a، b، او c ثابت عددونه دي چې a او b دواړه په یو وخت کې صفر نه وي، د مستقیم خط دعمومي معادلې په نامه یادېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

1) که $a \neq 0$ او $b = 0$ وي، نو $x = -\frac{c}{a}$ یا $ax + c = 0$ دا د هغه مستقیم خط معادله ده چې د Y له محور سره موازي وي ددې خط مستقیمه فاصله د Y له محور څخه $-\frac{c}{a}$ ده.

2) که $a = 0$ او $b \neq 0$ وي، نو معادله د $by + c = 0$ شکل نیسي یا $y = -\frac{c}{b}$ چې دا د هغه مســتقیم خط معادله ده چې د X له محور ســره موازي دی. د X له محور څخه ددې خط مستقیمه فاصله $\frac{-c}{b}$ ده.

3) که $a \neq 0$ او $b \neq 0$ وي، نو:

$$by = -ax - c \quad \text{یا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

دا د هغه مســتقیم خط معادله ده چې میل یې $m = \frac{-a}{b}$ دی او د y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

1- د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په معیاري شکل:

د $ax + by + c = 0$ عمومي معادله د معیاري معادلې په شکل عبارت ده له:

$$by = -ax - c \quad \text{یا} \quad y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + b$$

چې ددې خط میل $m = \frac{-a}{b}$ او د Y محور په $\frac{-c}{b}$ کې قطع کوي.

دویم مثال: د $5x - 12y + 39 = 0$ مستقیم خط عمومي معادله په معیاري شکل واړوئ.

حل:

$$12y = 5x + 39 \quad \text{یا} \quad y = \frac{5}{12}x + \frac{39}{12}$$

چې میل یې $m = \frac{5}{12}$ او د Y محور په $\frac{39}{12}$ کې قطع کوی.

2- د مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $ax+by+c=0$ په معادله کې د مستقیم خط میل $\frac{-a}{b}$ او یوه نقطه یې $(\frac{-c}{a},0)$ ده، نو:

$$m=\tan\theta=\frac{-a}{b} \qquad y=\frac{-a}{b}(x+\frac{c}{a})$$

دریم مثال: د $5x-12y+39=0$ د مستقیم خط عمومي معادله د هغه خط د معادلې په شکل تبدیله کړئ چې میل او یوه نقطه یې معلومه وي.

حل: د $5x-12y+39=0$ مستقیم خط یوه نقطه $(\frac{-39}{5},0)$ ده او میل یې $\frac{5}{12}$ دی، نو:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{5}{12}(x+\frac{39}{5})\Rightarrow y=\frac{5}{12}x+\frac{39}{12}$$

3 - د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې دوې نقطې یې معلومې وي.

هغه خط چې معادله یې $ax+by+c=0$ وي، د $(\frac{-c}{a},0)$ او $(0,\frac{-c}{b})$ له نقطو تېرېږي.

$$x_2=0 \qquad y_2=\frac{-c}{b} \qquad x_1=\frac{-c}{a} \qquad y_1=0$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{\frac{-c}{b}-0}{0+\frac{c}{a}}(x+\frac{c}{a})=\frac{\frac{-c}{b}}{\frac{c}{a}}(x+\frac{c}{a})=-\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}(x+\frac{c}{a})$$

$$y=\frac{-a}{b}(x+\frac{c}{a})$$

څلورم مثال: د $5x-12y+39=0$ مستقیم خط عمومي معادله د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل ولیکئ چې دوې نقطې یې معلومې وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

حل: د $5x-12y+39=0$ خط د $P_2(0,\frac{39}{12})$ او $P_1(\frac{-39}{5},0)$ له نقطو څخه تېرېږي.

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$ یا $$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$\frac{y-0}{x+\frac{39}{5}}=\frac{\frac{39}{12}-0}{0+\frac{39}{5}}$$

4- د یو مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول د هغه مستقیم خط د معادلې په شکل چې د X او Y له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي.

$$ax+by+c=0$$
$$ax+by=-c$$

دواړه خواوې په $(-c)$ وېشو:

$$\frac{ax}{-c}+\frac{by}{-c}=1$$

یا

$$\frac{x}{\frac{-c}{a}}+\frac{y}{\frac{-c}{b}}=1$$

پنځم مثال: د $5x-12y+39=0$ معادله د هغه مستقیم خط معادلې ته واړوئ چې له محورونو سره یې د تقاطع نقطې معلومې وي.

$$5x-12y=-39$$

دواړه خواوې په -39 وېشو:

$$\frac{5x}{-39}-\frac{12y}{-39}=1$$

:

$$\frac{x}{-\frac{39}{5}}+\frac{y}{\frac{39}{12}}=1$$

په دې معنا چې دا مستقیم خط د X محور د $(-\frac{39}{5},0)$ او د Y محور د $(0,\frac{39}{12})$ په نقطه کې قطع کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

فعالیت

د $3x-2y=6$ مســتقیم خط د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات د X او Y، له محورونو ســره پیدا کړئ.

5: د یوه مستقیم خط د عمومي معادلې بدلول په نورمال شکل:

څرنګه چې پوهېږو د مســتقیم خط نورمال معادله $x\cos\theta+y\sin\theta=P$ ده او عمومي معادله يې $ax+by+c=0$ یا $ax+by=-c$ ده چې دواړه د یوه مستقیم خط ښودونکي دي، نو د ضریبونو نسبتونه يې د k د یوه ثابت عدد سره مساوي دی.

$$\frac{a}{\cos\theta}=\frac{b}{\sin\theta}=\frac{-c}{P}=k$$

$$\frac{P}{-c}=\frac{\cos\theta}{a}=\frac{\sin\theta}{b}=\frac{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

ځکه چې: $\frac{\cos^2\theta}{a^2}=\frac{\sin^2\theta}{b^2}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{a^2+b^2}$

په نتیجه کې: $\sin\theta=\frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ او $\cos\theta=\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ کېږي.

د $x\cos\theta+y\sin\theta-p=0$ په معادله کې د $\sin\theta$ او $\cos\theta$ د قیمتونو په لیکلو سره لرو چې:

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=0$$

$$\frac{ax+by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

او یا $\frac{b}{\sin\theta}=k \quad , \quad \frac{a}{\cos\theta}=k$

نو: $k\sin\theta=b$ ، $k\cos\theta=a$ او $k^2\sin^2\theta=b^2$ ، $k^2\cos^2\theta=a^2$

$$k^2\cos^2\theta+k^2\sin^2\theta=a^2+b^2$$

$$k^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=a^2+b^2$$

یا: $k=\pm\sqrt{a^2+b^2}$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د $ax + by = -c$ معادلې دواړه خواوې په K وېشو، نو لرو چې:

$$\frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}x + \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}y = -\frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{يا} \quad \frac{ax+by+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

ددې لپاره چې د p قيمت هر وخت مثبت وي، نو د مخرج د جذر علامه د c مخالفه علامه ده او که $c = 0$ وي، د جذر علامه د b د علامې په شان ده.

شپږم مثال: $2x - 3y + 6 = 0$ معادله په نورمال شکل واړوئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې په $\sqrt{2^2 + (-3^2)} = \pm\sqrt{13}$ باندې وېشو. ددې لپاره چې ښي خوا مثبت وي د $\sqrt{13}$ علامه بايد منفي ونيول شي:

$$-\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0 \quad \text{يا} \quad \frac{2x-3y+6}{-\sqrt{13}} = 0$$

نو θ په دويمه ناحيه (ربعه) کې ده.

له مثلثاتي جدول څخه لرو چې $\theta = 123^\circ\, 40'$ ده، نو ددې مستقيم خط نورمال معادله عبارت ده له:

$$x\cos 123^\circ 40' + y\sin 123^\circ 40' - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0$$

فعاليت

د $5x - 12y + 39 = 0$ مستقيم خط معادله په نورمال شکل تبديله کړئ.

د يوه مستقيم خط نورمال معادله $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ او د مستقيم خط عمومي معادله $ax + by + c = 0$ ده. د مستقيم خط عمومي معادله د نورمال معادلې په شکل عبارت له:

$$\frac{ax}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{by}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}} = 0$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1 - د $x\cos 60° + y\sin 60° - 7 = 0$ مستقیم خط نورمال معادله د مستقیم خط په عمومي معادله تبدیله کړئ.

2 - د $x\cos 225° + y\sin 225° - 6 = 0$ مستقیم خط نورمال معادله، د مستقیم خط په عمومي معادله واړوئ.

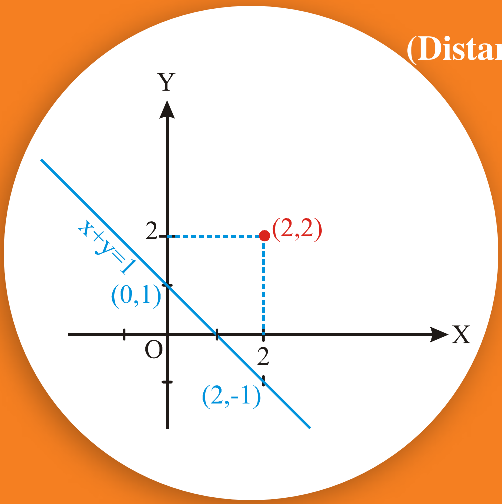
3 - د مستقیم خط لاندې عمومي معادلې په نورمال شکل واړوئ.

$2x + 4y + 7 = 0$ $\qquad$ $2x + 5y - 2 = 0$ $\qquad$ $15y - 8x + 3 = 0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يوې نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه:

(Distance of a point from a line)



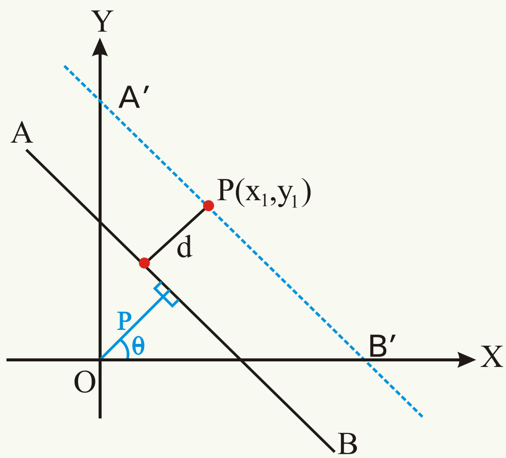
آیا د $(2,2)$ نقطې فاصله د $x+y=1$ له خط څخه پیداکولای شئ؟

کــه د P نقطې فاصله، لکه: څنګه چې په شــکل کــې لیدل کیږي د $\overline{AB}$ له خط څخه چې د P نقطه پر $\overline{AB}$ واقع نه وي، d فرض کړو (د $\overline{AB}$ خط نه عمود وي او نه افقي)
د p له نقطې څخه د $\overline{A'B'}$ مستقیم خط له $\overline{AB}$ سره موازي رسم کړئ، په دی حالت کې د AB د خط نورمال معادله عبارت ده له: $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$
خرنګــه چــې د $A'B'$ مســتقیم خط د AB له خط ســره موازي دی، نــو د $A'B'$ د خط نورمال معادله عبارت ده له:

$$x\cos\theta + y\sin\theta - (p+d) = 0 \quad \text{یا} \quad d = x\cos\theta + y\sin\theta - p$$

خرنګه چې د $P(x_1, y_1)$ نقطه د $\overline{A'B'}$ پر مستقیم خط پرته ده، نو په پورتنی معادله کې په ترتیب سره د x او y ، پرځای x_1 او y_1 ږدو، نو لرو چې:

$$\boxed{d = x_1\cos\theta + y_1\sin\theta - P}$$



چــې دا معادله د $\overline{AB}$ له خــط څخه د p د نقطې فاصله ښــيي، کــه چیرې د AB د خط معادله په نورمال شــکل راکړل شــوی وي او که د $\overline{AB}$ د خط معادله په عمومي شکل $(ax+by+c=0)$ راکړل شوي وي، نو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

خرنګه چې: $\sin\theta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ ، $\cos\theta = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ او $p = \frac{-c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$

که دا قیمتونه د AB د مستقیم خط په نورمال معادله کې وضع کړو، لرو چې:

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

د فاصلې پــه معادله کې که د P نقطه او د وضعیه کمیاتو مبدا د ABد خط یوې خواته واقع وي، نو د d قیمــت منفــي کیږي. او کــه د pنقطه او مبدا د AB د خط دواړو خواوو ته واقع وي د d قیمت مثبت دی. خرنګه چې فاصله هر وخت مثبت ده، نو باید چې مطلقه قیمت یې په پام کې ونیسو. (د c علامه د مخرج د جذر د علامې مخالفه علامه ده)

لومړی مثال: د $P(-2,8)$ د نقطې فاصله د $4x + 3y - 11 = 0$ له خط څخه پیدا کړئ.

حل: $a = 4$ ، $b = 3$ او $c = -11$ ده، خرنګه چې د c علامه منفي ده، نو د جذر علامه باید مثبت وي.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|4(-2)+3(8)-11|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}} = \frac{|-8+24-11|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1$$

فعالیت

د $(5,8)$ نقطې فاصله د $3x - 2y + 7 = 0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

د دوو موازي خطونو تر منځ فاصله:

:(Distance between two parallel lines)

د دوو مــوازي خطونــو ترمنځ فاصلــه پر یو ددې خطونو د یــوې نقطې فاصله ده، لــه بل موازي خط څخه:

دویم مثال: د $2x - 5y + 13 = 0$ او $2x - 5y + 6 = 0$ موازي مستقیمو خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

حل: یوه نقطه په یو ددې موازي خطونو باندې پیدا کوو، د مثال په ډول که د

$$2x - 5y + 13 = 0$$

په معادله کې $x = 1$ وي، نو $y = 3$ کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

اوس نو د $(1,3)$ نقطې فاصله د $2x-5y+6=0$ له مستقیم خط څخه د فاصلې د فورمول $d=\frac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ په مرسته په لاس راوړو.

$$d=\frac{|2(1)-5(3)+6|}{\sqrt{(2)^2+(-5)^2}}=\frac{|2-15+6|}{\sqrt{4+25}}=\frac{7}{\sqrt{29}}$$

یادونه: د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه د $ax+by+c=0$ مستقیم خط فاصله د $\frac{|C|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ څخه عبارت ده.

فعالیت

د $3x+2y=10$ او $y=-\frac{3}{2}x+7$ د موازي خطونو ترمنځ فاصله پیدا کړئ.

دریم مثال: د $2x+y+2=0$ او $6x+3y-8=0$ د مستقیمو موازي خطونو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

حل: که د $2x+y+2=0$ په معادله کې $x=0$ وي، $y=-2$ کیږي. اوس د $(0,-2)$ او د $6x+3y-8=0$ د مستقیم خط فاصله په لاس راوړو:

$$d=\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|6(0)+3(-2)-8|}{\sqrt{36+9}}=\frac{14}{3\sqrt{5}}$$

د $P(x_1,y_1)$ د نقطې فاصله له یوه مستقیم خط څخه د $d=x_1\cos\theta+y_1\sin\theta-P$ او یا د $d=\frac{ax_1+by_1+c}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د هــرو دوو جــوړو موازي خطونو ترمنځ فاصله پيدا کــړئ چې معادلې يې په لاندې ډول دي:

$3x-4y+7=0$ او $3x-4y+3=0$

$12x+5y+13=0$ او $12x+5y-6=0$

$2x+4y=1$ او $x+2y-5=0$

2 - د $P(6,-1)$ نقطې فاصله له $6x-4y+9=0$ مستقيم خط څخه پيدا کړئ.

3 - د $3x+6y-8=0$ او $2x+4y+5=0$ مــوازي خطونــو ترمنځ فاصله مســاوي ده په:

a) $\frac{31}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{31}{6\sqrt{5}}$ c) $6\sqrt{5}$ d) هيڅ يو

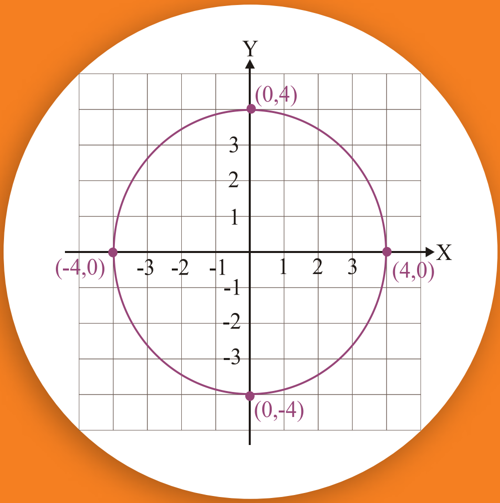
4 - د $(1,2)$ د نقطې فاصله د $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y+2=0$ مستقيم خط څخه مساوي ده په:

$a:2$ $b:1$ $c:3$ $d:\frac{1}{2}$

5 - د $(-2,7)$ نقطې فاصله له $24x+7y-2=0$ مستقيم خط څخه مساوي ده په:

$a:0,04$ $b:\frac{1}{25}$ $c:4\times10^{-2}$ d: درې واړه سم دي

(c) ketabton.com: The Digital Library



دايره (Circle)

آيـا د هغې دايرې معادله پيداکولای شـئ چې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبدأ کې او شـعاع يې 4 واحده وي؟

تعريف

دايره د هغو نقطو سټ دی چې له يوې ثابتې نقطې څخه يې فاصلې مساوي وي. چې دې ثابتې نقطې ته د دايرې مرکز (Center) او مساوي فاصلې ته د دايرې شعاع (Radius) وايي.

د دايرې معادله (Equation of circle): که $C(h,k)$ د دايرې مرکز، r د دايرې شـعاع او $P(x,y)$ د دايرې په محيط يوه نقطه وي، د شــکل له مخې د فيثاغورث د قضيې په اساس لرو چې:

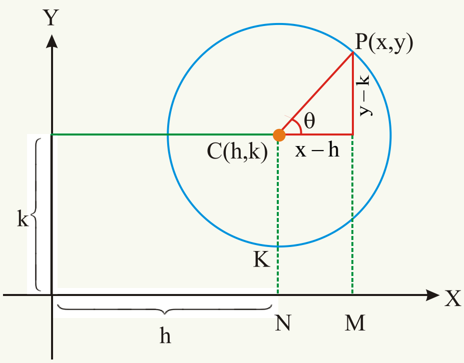
$$(\overline{CP})^2=(x-h)^2+(y-k)^2$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \qquad (\overline{CP}=r)$$

چې دې معادلې ته د دايرې معياري معادله وايي. که د دايرې مرکز د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي، نو په دې حالت کې $h=k=0$ دی او د دايرې معادلـه: $(x-0)^2+(y-0)^2=r^2$ يـا

$$x^2+y^2=r^2$$

ده، او که $r=0$ وي داســې دايرې ته نقطوي دايره (Point circle) وايي.



(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې مرکز یې $(-3,5)$ او د شعاع اوږدوالی یې (7) واحده وي.

حل: $r=7$,$k=5$ او $h=-3$

$$(x+3)^2+(y-5)^2=7^2$$
$$x^2+y^2+6x-10y-15=0$$

فعالیت

د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې او شعاع یې 3 واحده وي.

د یوې دایرې عمومي معادله (General form of an equation of a circle):

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2-r^2=0$$

یا:

$$x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

که $-k=f$ ، $-h=g$ او $h^2+k^2-r^2=c$ فرض شي، نو لرو چې:

$$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c \quad \text{یا} \quad x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

چې دې معادلې ته د دایرې عمومي معادله وایي چې مرکز یې $(-g,-f)$ او شعاع یې $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$ ده.

که $g^2+f^2-c>0$ وي دایره حقیقي ده.

که $g^2+f^2-c=0$ دایره نقطوي ده.

که $g^2+f^2-c<0$ دایره مجازي ده. (دایره وجود نه لري)

او یا که د $x^2+y^2-2hx-2ky+h^2+k^2-r^2=0$

په معادله کې $-2h=a$ ، $-2k=b$ او $h^2+k^2-r^2=c$ عوض کړو لرو چې

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ چې دا هم د دایرې عمومي معادله ده، ځینې وختونه د دایرې عمومي معادله داسې هم ښودل کیږي.

$Ax^2+By^2+Dx+Ey-F=0$ په دې ډول چې $A=B$ او هم علامه وي، نو دا هم ددایرې عمومي معادله ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

خاص حالتونه:

1- که د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ د دایرې په معادله کې $h=0$ وي، نو د دایرې مرکز د Y پر محور پروت دی او د دایرې معادله دا شکل $x^2+(y-k)^2=r^2$ غوره کوي.

2- او که $k=0$ وي، د دایرې مرکز د X پرمحور پروت دی او د دایرې معادله دا: $(x-h)^2+y^2=r^2$ ده.

3- که $k=r$ وي، دایره د X پر محور مماس ده او د دایرې معادله $(x-h)^2+(y-r)^2=r^2$ ده.

4- او که $h=r$ وي، دایره د Y پر محور مماس ده او د دایرې معادله $(x-r)^2+(y-k)^2=r^2$ ده.

5- یوه دایره هغه وخت د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تیرېږي چې د $h^2+k^2=r^2$ رابطه صدق کړي.

6- یوه دایره هغه وخت د X او Y پر محورونو مماس ده چې معادله یې دا $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ شکل ولري.

دویم مثال: د $x^2+(y-5)^2=10$ دایرې مرکز د Y پر محور پروت دی.

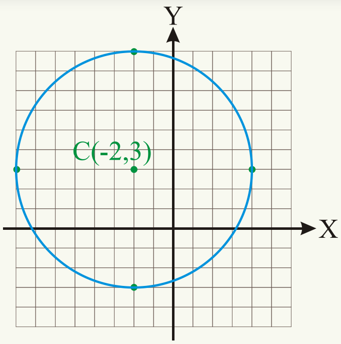
د $(x-1)^2+(y-5)^2=25$ دایره د X له محور سره مماس ده.

د $(x+3)^2+y^2=9$ د دایرې مرکز د X پر محور پروت دی.

فعالیت

په شکل کې وښیاست چې د دویم مثال، د لومړۍ دایرې مرکز د Y پر محور پروت دی، دویمه دایره د X له محور سره مماس ده او د دویمې دایرې مرکز د X پر محور واقع دی.

دریم مثال: د هغې دایرې عمومي او معیاري معادلې پیدا کړئ چې د مرکز وضعیه کمیات یې $(-2,3)$ او شعاع یې 6 واحده وي او هم دا دایره رسم کړئ.



(د دایرې معیاري معادله)

$$(x+2)^2+(y-3)^2=6^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

(د دایرې عمومي معادله)

$$x^2+y^2+4x-6y-23=0$$

خلورم مثال: وښیاست چې $5x^2+5y^2+24x+36y+10=0$ دیوې دایرې معادله ده او هم ددې دایرې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 5 وېشو، نو لرو چې:

$$x^2+y^2+\frac{24}{5}x+\frac{36}{5}y+2=0$$

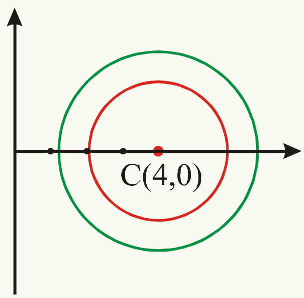
چې $g=\frac{12}{5}$ ، $f=\frac{18}{5}$ او $c=2$ دی.

د دایرې مرکز $(-g,-f)=(\frac{-12}{5},\frac{-18}{5})$

او د دایرې شعاع: $r=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{\frac{144}{25}+\frac{324}{25}-2}=\sqrt{\frac{418}{25}}=\frac{\sqrt{418}}{5}$

پنځم مثال: د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې د $x^2+y^2-8x+4=0$ له دایرې سره متحد المرکز (Concnteric) وي او د $x+2y+6=0$ له مستقیم خط سره مماس وي.

حل: د $x^2+y^2-8x+4=0$ دایرې مرکز $C_1(-g,-f)$ دی.



$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

$$2g=-8\Rightarrow g=-4\Rightarrow -g=4$$

$$2f=0 \quad\Rightarrow\quad f=0$$

د $C_1\ (4,0)$ نقطه د هغې دایرې مرکز هم دی چې غواړو معادله یې پیداکړو، نو د C_1 وضعیه کمیات د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ په معادله کې وضع کوو، لرو چې:

$$(x-4)^2+(y-0)^2=r^2$$

ددې لپاره چې د C_2 ددایرې شعاع پیداکړو، نو څرنګه چې دایره د $x+2y+6=0$ له مستقیم خط سره مماس ده. نو د $(4,0)$ د نقطې فاصله له دې مستقیم خط څخه د دایرې شعاع ده

$$d=r=\frac{|4(1)+2(0)+6|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}} \quad \text{یا} \quad r^2=\frac{100}{5}=20$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو ددې دايرې معادله عبارت ده له: $(x-4)^2+y^2=20$ يا $x^2+y^2-8x-4=0$

شپږم مثال: د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې د $B(6,5)$ او $A(4,1)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز يې د $4x+y-16=0$ پر مستقيم خط پروت وي.

حل: که د ايرې مرکز $C(h,k)$ وي، نو د دايرې معادله $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ده، څرنگه چې مرکز يې د $4x+y-16=0$ پر مستقيم خط واقع دی، نو $4h+k=16$ دی.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \quad \text{او} \quad |AC|=|BC| \quad \text{او} \quad |AC|^2=|BC|^2$$

$$(h-4)^2+(k-1)^2=(h-6)^2+(k-5)^2$$

$$4h+8k=44$$

$$\underline{\pm 4h \pm k = \pm 16}$$

$$7k=28$$

$$k=4 \quad \Rightarrow \quad h=3$$

$$r^2=(3-4)^2+(4-1)^2=10$$

$$(x-3)^2+(y-4)^2=10 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2-6x-8y+15=0$$

چې دا د غوښتل شوې دايرې عمومي معادله ده.

فعاليت

د هغې دايرې معادله پيدا کړئ چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تېرېږي او د $y-1=0$ له خط سره مماس وي.

اووم مثال: د هغې دايرې د مرکز وضعيه کميات او د شعاع اوږدوالی پيدا کړئ چې معادله يې $x^2+y^2-4x+4y-9=0$

حل:

$$x^2+y^2-4x+4y-9=0$$

$$x^2-4x+y^2+4y-9=0$$

$$x^2-4x+(-2^2)-(-2^2)+y^2+4y+2^2-2-9=0$$

$$(x-2)^2+(y+2)^2=17$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

نو مرکز یې $(2-2)$ او شعاع یې $r=\sqrt{17}$

د هغې دایرې معادله چې مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې واقع وي له $x^2+y^2=r^2$ څخه عبارت ده او که مرکز یې د وضعیه کمیاتو په مبدا کې واقع نه وي او (h,k) یې مرکز وي: معادله یې $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ یا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ او یا $x^2+y^2+ax+by+c=0$ ده.

پوښتنې

1 – د هغې دایرې معادله پیدا کړئ چې:

a: د مرکز مختصات یې $(5,-2)$ او $r=4$ وي

b: د مرکز مختصات یې $(\sqrt{2},-3\sqrt{3})$ اوشعاع یې $r=2\sqrt{2}$ وي.

c: مرکز یې $(0,0)$ اود $(1,2)$ له نقطې څخه تېرېږي.

d: د مرکز مختصات یې $(0,0)$ او د $(-3,-4)$ له نقطې څخه تېرېږي.

e: د مرکز مختصات یې $(8,-6)$ او د وضعیه کمیاتو له مبدا څخه تېرېږي

2 - لومړی وښیاست چې لاندې راکړل شوی معادلې د دایرې معادلې دي، بیا یې د مرکز وضعیه کمیات او د شعاع اوږدوالی پیدا کړئ.

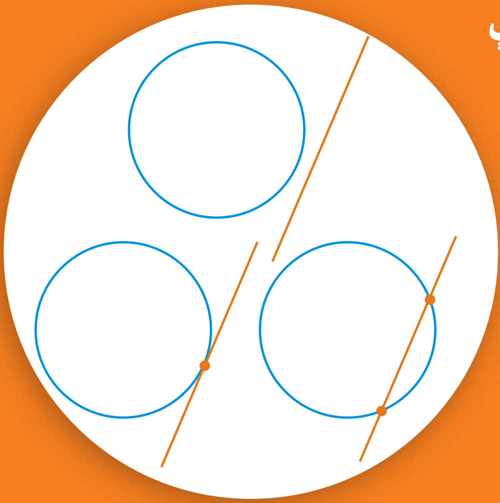
$5x^2+5y^2+14x+12y=0$ ، $x^2+y^2+12x-10y=0$

$3x^2+3y^2-2x+4y-1=0$ ، $x^2+y^2-6x+4y+13=0$

$a(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

د يو مستقيم خط حالتونه له يوې دايرې سره:



کولای شئ چې وواياست د $3x-4y+20=0$ مســتقيم خط د $x^2+y^2=25$ دايره په څو نقطو کې قطع کوي؟

د $x^2+y^2+ax+by+c=0$ دايــرې معادله په پام کې نيســو او غواړو چې د يو مســتقيم خط حالت له دايرې ســره وڅېړو چې آيا دا مســتقيم خط دايره په دوو نقطو کې قطع کوي، يا مستقيم خط پر دايره مماس دی او يا دا چې مستقيم خط دايره نه قطع کوي.

د x او يا y قيمت د مســتقيم خط له معادلې څخه په لاس راوړو او د دايرې په معادله کې يې وضع کوو. يوه دويمه درجه يو مجهوله معادله په لاس راځي.

1) که په دې معادله کې $\Delta=b^2-4ac>0$ وي، مســتقيم خط دايره په دوو نقطو کې قطع کوي.

2) که $\Delta=b^2-4ac=0$ وي مستقيم خط له دايرې سره مماس دی.

3) او که $\Delta=b^2-4ac<0$ مستقيم خط دايره نه قطع کوي.

لومړی مثال: آيا د $2x=y+7$ مستقيم خط د $x^2+y^2-8x-2y+12=0$ دايره قطع کوي؟ د تقاطع د نقطو وضعيه کميات يې پيدا کړئ.

حل: د مستقيم خط له معادلې څخه $y=2x-7$ ده چې د y دا قيمت د دايرې په معادله کې وضع کوو.

$$x^2+(2x-7)^2-8x-2(2x-7)+12=0$$

$$5x^2-40x+75=0$$

يا $x^2-8x+15=0$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 15 = 64 - 60 = 4 > 0$$

نو دا مستقیم خط دایره په دوو نقطو کې قطع کوي او د تقاطع د نقطو وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_1 = 5 \quad , \quad x_2 = 3$$

د y قیمت د پیدا کولو لپاره د $x_1 = 5$ او $x_2 = 3$ قیمتونه د مستقیم خط په معادله کې وضع کوو، نو لرو چې:

$$y_1 = 2x_1 - 7 = 2 \cdot 5 - 7 = 3$$

$$y_2 = 2x_2 - 7 = 2 \cdot 3 - 7 = -1$$

نو دا خط دایره د $(3,-1)$ او $(5,3)$ په نقطو کې قطع کوي.

دویم مثال: آیا د $x + 3y - 5 = 0$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ له دایرې سره مماس دی که نه؟

حل: د مستقیم خط له معادلې څخه لرو چې $x = 5 - 3y$ دی، د x دا قیمت د دایرې په معادله کې وضع کوو:

$$(5 - 3y)^2 + y^2 - 2(5 - 3y) + 4y - 5 = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

او $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 = 0$ نو دا مستقیم خط له دایرې سره مماس دی او د تماس د نقطې وضعیه کمیات یې عبارت دي له:

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{2} = 1$$

$$x = 5 - 3 \cdot 1 = 2$$

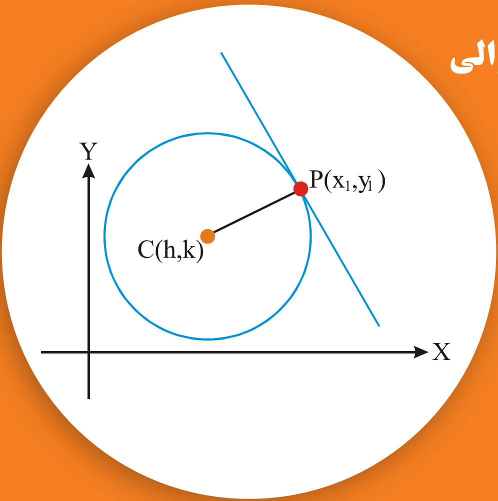
نو مستقیم خط د $(2,1)$ په نقطه کې پر دایره مماس دی.

فعالیت

آیا د $x - y + 1 = 0$ مستقیم خط د $x^2 + y^2 - 5 = 0$ له دایرې سره مماس دی، که دایره په دوو نقطو کې قطع کوي او یا دا چې دایره نه قطع کوي؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مماس معادله او د مماس اوږدوالی



آیا د هغه مماس معادله پیداکولای شــی چې د $P(-3,-2)$ په نقطه کې د $x^2+y^2=13$ په دایره مماس وي؟

کــه یو مســتقیم خط پر هغــه دایره چې مرکز یې $C(h,k)$ او د $p_1(x_1,y_1)$ پــه نقطه کې پر دایره مماس وي، نو د شعاع میل مساوي دی په: $m=\dfrac{k-y_1}{h-x_1}$

او خرنگه چې شعاع د تماس په نقطه کې پر مماس عمود ده، نو د مماس میل له $-\dfrac{h-x_1}{k-y_1}$ سره مساوي دی.

خرنگه چې د مستقیم خط یوه نقطه $P_1\ (x_1\ ,y_1\ )$ او میل یې $-\dfrac{h-x_1}{k-y_1}$ دی.

د مستقیم خط د $y-y_1=m(x-x_1\ )$ معادلې په نظر کې نیولو سره لرو چې:

$$y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1\ )$$

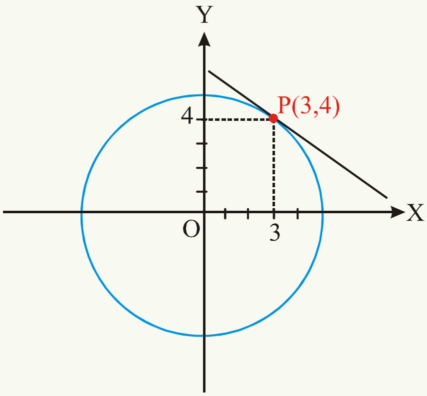
چې دا د هغه مماس معادله ده چې د $P_1\ (x_1\ ,y_1\ )$ په نقطه کې پر دایره مماس دی.

او کــه د دایــرې مرکــز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې وي، نو پــه دې حالت کې $h=k=0$ دی او د مماس معادله دا شکل اختیاروي.

$$yy_1+xx_1=x_1^2+y_1^2 \qquad \text{یا} \qquad y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1\ )$$

خرنگه چې $x_1^2+y_1^2=r^2$ ، نو د مماس معادله $yy_1+xx_1=r^2$ ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library



لومړی مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(3,4)$ په نقطه کې د $x^2+y^2=25$ پر دایره مماس وي:

حل: څرنګه چې د دایرې مرکز د وضعیه کمیاتو په مبدا کې دی، نو: $y\cdot 4+x\cdot 3=25$

نو د مماس معادله عبارت ده له: $3x+4y=25$

او یا $3x+4y-25=0$.

دویم مثال: د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $P(3,5)$ په نقطه کې پر هغې دایرې مماس دي چې مرکز یې $(1,2)$ دی.

$$h=1 \qquad k=2$$

$$x_1=3 \qquad y_1=5$$

$$y-y_1=-\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$$

$$m=-\frac{1-3}{2-5}=-\frac{2}{3}$$

$$y-5=-\frac{2}{3}(x-3)$$

$$2x+3y=21$$

یا:

$$2x+3y-21=0$$

د مماس اوږدوالی

که د $P_1\ (x_1,y_1)$ له نقطې څخه چې له دایرې د باندې واقع ده، د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ پر دایره د P_1T. مماس د شکل په شان رسم شي، د (T) د تماس نقطه د دایرې له مرکز (C) سره ونښلوو، دفیثاغورث د قضیې په اساس د $P_1\ TC$ په قایمه زاویه مثلث کې لرو چې:

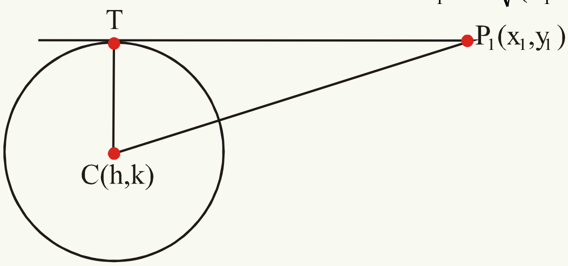
$$(\overline{P_1C})^2=(\overline{P_1T})^2+(\overline{CT})^2$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

یا $(P_1T)^2 = (P_1C)^2 - (CT)^2$

له بلې خوا: $(\overline{P_1C})^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2$ او $\overline{CT} = r$ نو د مماس اوږدوالی مساوي

دی په: $\overline{P_1T} = \sqrt{(x_1-h)^2 + (y_1-k)^2 - r^2}$



پــه یاد ولرئ چــې د مماس په امتداد د مماس د اوږدوالی د پیــداکولو لپاره د دایرې له کومې خارجي نقطې څخه د x او y قیمتونه د دایرې په معادله کې وضع کوو.

دریم مثال: د $(-5,10)$ له نقطې څخه د $5x^2 + 5y^2 + 14x + 12y - 10 = 0$ پر دایره د مماس اوږدوالی پیدا کړئ.

حل: د معادلې دواړه خواوې پر 5 وېشو، نو لرو چې: $x^2 + y^2 + \frac{14}{5}x + \frac{12}{5}y - 2 = 0$

د مماس اوږدوالی $= \sqrt{(-5)^2 + (10)^2 - 14 + 24 - 2} = \sqrt{133}$

فعالیت

د هغه مماس اوږدوالی پیدا کړئ چې د $P(-2,2)$ له نقطې څخه د $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ پر دایره باندې مماس وي.

د دایــرې پــه معادله کې د مســتقیم خط د یو مجهول په وضع کولو ســره، یــوه دویمه درجه یو مجهولــه معادله په لاس راځي، که په دې معادله کې $\Delta > 0$ وي، مســتقیم خط دایره په دوو

(c) ketabton.com: The Digital Library

نقطـوکـي قطع کوي او که $\Delta = 0$ وي خط پر دايره مماس دی او که $\Delta < 0$ وي، مسـتقيم خط دايره نه قطع کوي.

د هغـه مسـتقيم خط معادله چـې د $P_1(x_1, y_1)$ په نقطه کـې پر هغه دايره چـې مرکز يې (h,k) دی مماس وي، عبارت ده له:

$$y - y_1 = -\frac{h - x_1}{k - y_1}(x - x_1)$$

که د دايرې مرکز د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي، نو د مماس معادله: $yy_1 + xx_1 = x_1^2 + y_1^2$

يا $yy_1 + xx_1 = r^2$ ده، د مماس اوږدوالی د $P(x, y)$ له نقطې څخه چې د دايرې د باندې واقع ده او د دايرې مرکز (h,k) دی مساوي ده په:

$$\overline{PT} = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2 - r^2}$$

پوښتنې

1 - د لاندې مسـتقيمو خطونو حالتونه له دايرو سـره چې معادلې يې په لاندې ډول راکړل شـوي دي وڅېړئ.

د مستقيمو خطونو معادلې	د دايرو معادلې
$3x - 2y + 3 = 0$	$x^2 + y^2 - 4x - y - 3 = 0$
$x - y - 1 = 0$	$2(x^2 + y^2) - 3x + 2y - 6 = 0$
$5x - y = 1$	$x^2 + y^2 - x - 9y + 14 = 0$

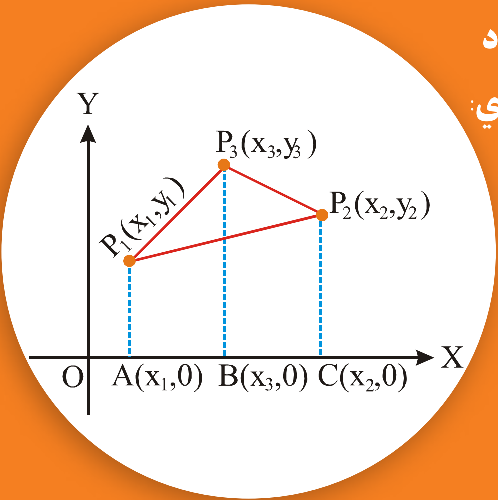
2- د هغه مستقيم خط معادله پيدا کړئ چې په $(2,-3)$ نقطه کې د $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ له دايرې سره مماس وي.

3 - د هغه مماس اوږدوالی پيدا کړئ چې د $(-5,4)$ له نقطې څخه د $5x^2 + 5y^2 - 10x + 15y - 131 = 0$ پر دايره مماس رسم شوی وي

4- د هغه مماس اوږدوالی پيدا کړئ چې د $(-2,-5)$ له نقطې څخه د $x^2 + y^2 + 8x + 5y = 7$ پر دايره مماس رسم شوی وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثلث د مساحت پیدا کول چې د راسونو وضعیه کمیات یې معلوم وي:



آیا د هغه مثلث مساحت پیداکولای شئ چې رأسونه یې $(-3,6)$، $(3,2)$ او $(6,0)$ وي؟

که P_1، P_2 او P_3 لکه چې په شکل کې لیدل کېږي د یوه مثلث راسونه وي. د X پر محور $\overline{P_1A}$، $\overline{P_2C}$ او $\overline{P_3B}$ درې عمود خطونه رسم کړئ.

د $P_1P_2P_3$ مثلث مساحت = د P_1ABP_3 ذوذنقې مساحت + د P_3BCP_2 ذوذنقې مساحت $-$ د P_1ACP_2 ذوذنقې مساحت

لکه څرنګه چې پوهېږو:

د ذوذنقې مساحت = (د موازي ضلعو د نیمايي مجموعه) × (د موازي ضلعو ترمنځ فاصله)

نو:

$$\text{مساحت د } \overset{\Delta}{P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}(|P_1A|+|P_3B|)(|AB|)+\frac{1}{2}(|P_3B|+|P_2C|)(|BC|)$$

$$-\frac{1}{2}(|P_1A|+|P_2C|)(|AC|)$$

$$=\frac{1}{2}[(y_1+y_3)(x_3-x_1)]+\frac{1}{2}[(y_3+y_2)(x_2-x_3)]-\frac{1}{2}[(y_1+y_2)(x_2-x_1)]$$

$$=\frac{1}{2}(x_3y_1+x_3y_3-x_1y_1-x_1y_3+x_2y_3+x_2y_2$$

$$-x_3y_3-x_3y_2-x_2y_1-x_2y_2+x_1y_1+x_1y_2)$$

$$=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: که چیرې $A(4,-5)$ ، $B(5,-6)$ او $C(3,1)$ د یوه مثلث راسونه وي، ددې مثلث مساحت پیدا کړئ.

حل: $x_1=4$, $y_1=-5$, $x_2=5$, $y_2=-6$ $x_3=3$ $y_3=1$

$$\text{د } \overset{\Delta}{ABC} \text{ مثلث مساحت} = \frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

$$=\frac{1}{2}\left[4(-6-1)+5(1+5)+3(-5+6)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(-28+30+3)=\frac{1}{2}\cdot 5=\frac{5}{2}=2.5$$

که د $P_1\overset{\square}{P_2}P_3$ مثلث رأسونه $P_1(x_1,y_1)$ ، $P_2(x_2,y_2)$ او $P_3(x_3,y_3)$ وی، نو د مثلث مسـاحت د $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$ له فورمول څخه په لاس راځي.

پوښتنې

1 - د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې رأسونه یې $A(0,0)$ ، $B(8,6)$ او $C(12,4)$ وي.

2 - کـه د یـوه مثلث رأسـونه $A(4,0)$ ، $B(-4,0)$ او $C(0,3)$ وي، ددې مثلث مسـاحت پیدا کړئ.

3 - د هغـه څلور ضلعي مسـاحت پیـدا کړئ چې رأسـونه یې $A(1,0)$ ، $B(6,2)$ ، $C(8,6)$ او $D(2,4)$ وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ښېرکي لنډيز:

• د وضعيه کمياتو په مستوي کې هغه نقطې چې د X پر محور پرتې دي، د y مختصه يې صفر او کومې نقطې چې د Y پر محور پرتې دي د x مختصه يې صفر ده

• د $P(x_1, y_1)$ او $Q(x_2, y_2)$ د دوو نقطو تر منځ فاصله د $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

• د p د نقطې وضعيه کميات چې د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط د r په نسبت وېشي عبارت دي له: $y=\dfrac{ry_2+y_1}{1+r}$ □ $x=\dfrac{rx_2+x_1}{1+r}$ او د $\overline{P_1P_2}$ د قطعه خط د تنصيف د نقطې وضعيه کميات عبارت دي له:

$y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$ □ $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ که د p نقطه د $\overline{P_1P_2}$ خط داخلاً د r په نسبت ووېشي نو r مثبت اوکه خارجاً يې و وېشي، نو r منفي دی.

• د يو مستقيم خط ميل چې د $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ له نقطو څخه تېرېږي د $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ له فورمول څخه په لاس راځي د X د محور او د هغو خطونو ميل چې د X له محور سره موازي وي صفر او د Y د محور او د هغو خطونو ميل چې د Y له محور سره موازي وي، تعريف شوي نه دي. که د يوه مستقيم خط د ميل زاويه حاده وي، ميل يې مثبت او که منفرجه وي ميل يې منفي دی.

• د هغې مستقيم خط معادله چې ميل او د Y له محور سره يې تقاطع معلومه وي، عبارت ده له: $y=mx+b$.

د هغه مستقيم خط معادله چې ميل او يوه نقطه يې معلومه وي، عبارت ده له:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

د هغه مستقيم خط معادله چې دوې نقطې يې معلومې وي عبارت ده له:

$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ اويا $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ او د هغه مستقيم خط معادله چې

(c) ketabton.com: The Digital Library

له محوروںنو سره يې د تقاطع نقطې معلومې وي: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ده.

• د يــوه مســتقيم خط نورمال معادله $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ او د مســتقيم خط عمومي معادله $ax+by+c=0$ ده.

• د $P(x_1, y_1)$ د نقطې فاصله له يوه مستقيم خط څخه د $d = x\cos\theta + y\sin\theta - P$ او يا د $d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$ له فورمول څخه په لاس راځي.

• د هغــې دايــرې معادله چــې مرکز يې د وضعيه کمياتو په مبــدا کې واقع وي له $x^2+y^2=r^2$ څخــه عبــارت ده او که مرکز يې د وضعيه کمياتو پــه مبدا کې واقع نه وي او (h,k) يې مرکز وي، معادله يې: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

يا $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ او يا $x^2+y^2+ax+by+c=0$

• د دايرې په معادله کې د مستقيم خط د يو مجهول په وضع کولو سره، يوه دويمه درجه يو مجهوله معادلــه په لاس راځي، که په دې معادله کې $\Delta>0$ وي، مســتقيم خــط دايره په دوو نقطو کې قطع کوي او که $\Delta=0$ وي خط پر دايره مماس دی او که $\Delta<0$ وي، خط دايره نه قطع کوي.

• د هغه مستقيم خط معادله چې د $P_1\ (x_1, y_1)$ په نقطه کې پر هغه دايره چې مرکز يې (h,k) دی مماس وي عبارت ده له: $y-y_1 = -\frac{h-x_1}{k-y_1}(x-x_1)$

او که د دايرې مرکز د وضعيه کمياتو په مبدا کې وي، نو د مماس معادله يې:

$yy_1+xx_1=x_1^2+y_1^2$ يا $yy_1+xx_1=r^2$ ده او د PT مماس اوږدوالی د $P(x_1, y_1)$ له نقطې څخه چې له دايرې د باندې واقع ده او مرکز يې (h,k) دی، مساوي ده په:

$$\overline{PT}=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2-r^2}$$

• که د يوه مثلث رأســونه $P_1\ (x_1, y_1)$، $P_2\ (x_2, y_2)$ او $P_3\ (x_3, y_3)$ وي، نو $\square P_1 P_2 P_3$ د مثلث مســاحت د $\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$ له فورمول څخه په لاس راځي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې:

1 - د لاندې هرې جوړې نقطو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او همدرانګه ددې مستقیمو خطونو د تنصیف د نقطو وضعیه کمیات پیدا کړئ چې د A او B له دوو نقطو څخه تېرېږي.

$A(3,1)\ ,B(-2,-4)\qquad A(-8,3)\ \ ,B(2,-1)$

$A(-\sqrt{5},-\frac{1}{3})\ ,\ B(-3\sqrt{5},5)$

2 - که $A(\sqrt{3},-1)$ ، $B(0,2)$ او $C(h,-2)$ د یوه قایم الزاویه مثلث راسونه وي او د $\hat{A}=90^\circ$ وي، د (h) قیمت پیدا کړئ.

3 - د p د نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ، په داسې حال کې هغه مستقیم خط چې د $A(1,4)$ او $B(5,6)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{AP}{PB}=2$ په نسبت و وېشي.

4 - د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې میل یې (-2) او د Y محور په 3 کې قطع کړي.

5 - د $x=\sqrt{7}$ او $y=-\sqrt{7}$ د خطونو میل پیدا کړئ.

6 - د y د محور میل مساوي دی په:

$a)\ -1\qquad b)\ 1\qquad c)\,0\qquad d)$ تعریف شوی نه دی

7 - د یوه مستقیم خط میل $m=\frac{2}{3}$ دی، د هغه خط میل چې پر دې خط عمودوي، مساوي دی په:

$a)\ \frac{2}{3}\qquad b)\ -\frac{2}{3}\qquad c)\,\frac{3}{2}\qquad d)\,\frac{-3}{2}$

8 - د هغو مستقیمو خطونو میل پیدا کړئ چې د لاندې راکړل شوو نقطو له جوړو څخه تېرېږي.

$(4,8)$ او $(4,6)$ $\qquad (2,7)$ او $(3,-2)$ $\qquad (5,11)$ او $(-2,4)$

9 - د $4x-y+2=0$ او $12x-3y+1=0$ مستقیم خطونه:

a) موازي دي $\qquad$ b) عمود دي $\qquad$ c) نه موازي او نه عمود دي

10 - د $3x-4y+3=0$ او $3x-4y+7=0$ مستقیمو خطونو ترمنځ فاصله پیداکړئ.

11 - د هغه مستقیم خط معادله پیدا کړئ چې د $(-4,7)$ له نقطې تېر شي او د $2x-7y+4=0$ له مستقیم خط سره موازي وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

12 - د $P(6,-1)$ نقطې فاصله د $6x-4y+9=0$ له مستقیم خط څخه پیدا کړئ.

13 - د p د نقطې وضعیه کمیات په داسې حال کې پیدا کړئ چې $\overline{P_1\,P_2}$ مستقیم خط چې د $P_1\ (2,-5)$ او $P_2\ (6,3)$ له نقطو څخه تېرېږي د $\frac{3}{4}$ په نسبت ووېشئ.

14 - د لاندې مستقیمو خطونو معادلې نورمال شکل ته واړوئ.

$2x+5y-2=0$ $\qquad$ $2x-3y+6=0$

15 - د هغــه مســتقیم خــط میل چې د $(4,0)$ او $(-4,0)$ له نقطو څخه تېرېږي مســاوي دی په:

a) 1 $\qquad$ b) -1 $\qquad$ c) 0 $\qquad$ d) تعریف شوي نه دی

16 - د هغه مســتقیم خط معادله پیدا کړئ چې د نورمال اوږدوالی یې 10 واحده او نورمال خط یې د X محور له مثبت جهت سره د $30°$ زاویه جوړوي.

17 - د هغه مثلث مساحت پیدا کړئ چې راسونه یې $A(2,3)$ ، $B(-1,1)$ او $C(4,-5)$ وي.

18 - د هغه مثلث مساحت چې رأسونه یې $A(1,4)$ ، $B(2,-3)$ او $C(3,-10)$ دي مساوي دی په:

a) 1 $\qquad$ b) 2 $\qquad$ c) 0 $\qquad$ d) هېڅ یو

19 - د $x+2y=6$ د مستقیم خط د تقاطع نقطې د $x^2+y^2-2x-2y-39=0$ له دایرې سره پیدا کړئ.

20 - د هغــې دایــرې معادله پیداکړی چې د $A(1,1)$, $B(2,-1)$ او $C(3,-2)$ له نقطو څخه تېرېږي.

21 - د هغــې دایــرې معادله پیداکړئ چې د $A(3,-1)$ او $B(0,1)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز یې د $4x-3y-3=0$ پر مستقیم خط واقع وي.

22 - د $4x^2+4y^2-8x+12y-25=0$ دایــرې د مرکــز وضعیــه کمیــات او د شــعاع اوږدوالی یې پیداکړئ.

23 - د هغــې دایرې معادله پیــداکړی چې د $A(4,1)$ او $B(6,5)$ له نقطو څخه تېرېږي او مرکز یې د $4x+y-16=0$ پر مستقیم خط باندې واقع وي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

24 - که د یوه مثلث رأسونه $A(5,-6)$ ، $B(-3,5)$ او $C(-1,2)$ وي، دا مثلث:

مختلف الاضلاع دی (c   متساوی الساقین دی (b   متساوی الاضلاع دی (a

25 - که د یوه مثلث رأسونه په ترتیب سره $(5,4)$ ، $(4,10)$ او $(7,8)$ وي دا مثلث:

مختلف الاضلاع دی (c   متساوي الساقین دی (b   متساوي الاضلاع دی (a

26 - کـه $P(-8,4)$ او $Q(2,-1)$ وي د A د نقطـې مختصات پیدا کړئ که د A نقطه د PQ خط داخلاً او خارجاً د $\frac{2}{3}$ په نسبت و وېشي.

27 - د $x-y+1=0$ مسـتقیم خـط د تقاطـع نقطې له $x^2+y^2=5$ دایرې سـره پیدا کړئ.

28 - کـه د $x+ay-5=0$ مسـتقیم خط د $x^2+y^2-2x+4y=0$ پـر دایره مماس وي، د a قیمت پیدا کړئ.

29 - د هغې دایرې معادله چې د $(0,0)$ او $(2,0)$ له نقطو څخه تېرېږي او د $y-1=0$ له مستقیم خط سره مماس وي، عبارت ده له:

a) $x^2+y^2-4x=0$ b) $x^2+y^2-2x=0$ c) $x^2+y^2+2x=0$

30 - هغه دایره چې معادله یې $x^2+y^2-6x+4y+14=0$ ده:

موهومي ده (c   نقطوي ده (b   حقیقي ده (a

31 - هغه دایره چې معادله یې $x^2+y^2+2x-4y+5=0$

موهومي ده (a   نقطوي ده (b   حقیقي ده (c

32 - کـه $A(4,-3)$ او $B(-2,-5)$ وي د A او B د نقطـو ترمنځ فاصله پیدا کړئ او هم د $\overline{AB}$ د خط د تنصیف نقطې وضعیه کمیات پیدا کړئ.

33 -کـه د یوه مثلث رأسـونه $A(-6,3)$ ، $B(3,-5)$ او $C(-1,5)$ وي، وښیاسـت چې دا مثلث قایم الزاویه مثلث دی.

34 - وښیاست چې $A(0,0)$ ، $B(a,0)$ ، $C(0,b)$ او $D(a,b)$ د یو مستطیل رأسونه دي او هم وښیاست چې د مستطیل د قطرونو اوږدوالی سره مساوي دی.

35 - وښیاست چې $A(3,1)$ ، $B(6,2)$ او $C(9,3)$ نقطې پر یوه مستقیم خط واقع دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

36 - د هغــه مســتقيمو خطونــو معادلې پيداکړئ چــې د لاندې هروجوړو لــه نقطو ثخه تېرېږي.

(5,8)	(1,2)	(3,5)	(8,15)
(−1,−3)	(2,−1)	(−2,−1)	(3,−4)
(0,3)	(5,0)	(0,2)	(−2,0)

37 - د هغــه مســتقيم خط معادله چې د (5,8) او (−1,10) له نقطو څخــه تېرېږي عبارت ده له:

$a: \quad y=-\frac{1}{3}x+9\frac{2}{3}$

$b: \quad y=-\frac{x}{3}+9\frac{2}{3}$

$c: \quad y=-\frac{1}{3}x+\frac{29}{3}$

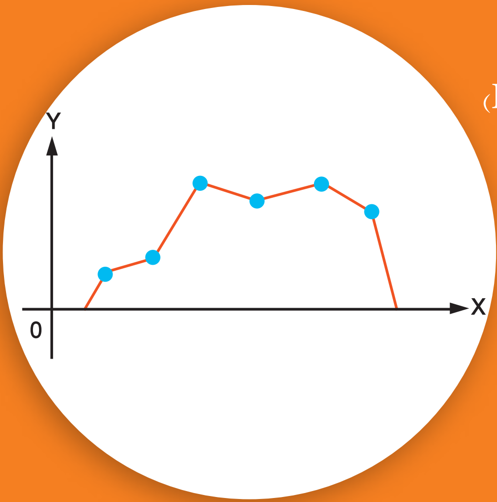
d: درې واړه سم دي

(c) ketabton.com: The Digital Library

اتم خپرکی احصائیه

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library



د فریکونسي څو ضلعي ګراف
(Frequency Polygon graph)

مخامخ شکل په پام کې ونیسئ، آیا کولای شئ د راکړل شوي منحني لاندې مساحت پیدا کړئ؟
آیا ویلای شئ چې تر منحني لاندې مساحت له څه شي سره برابر دی؟

فعالیت

د فریکونسیو مخامخ جدول په نظر کې ونیسئ.

فریکونسي	د کلاس (صنف)مرکز	کلاسونه
3	11.5	10-13
6	14.5	13-16
7	17.5	16-19
4	20.5	19-22

- د هر کلاس (صنف) مرکز د لومړی مختصې او اړونده فریکونسي یې د دویمې مختصې په حیث د مرتبو جوړو په شکل په نظر کې ونیسئ.
- ددې مرتبو جوړو موقعیت د قایمو وضعیه کمیاتو په سیستم کې وټاکئ.
- هغه نقطې چې په مستوي کې له دې مرتبو جوړو څخه په لاس راځي، سره ونښلوئ.

آیا کولای شئ چې ددې ګراف لاندې مساحت پیدا کړئ؟

- د X پر محور د ګراف دواړو خواوو ته (8.5,0) او (38.5,0) نقطې زیاتې کړئ. په لاس راغلی ګراف د فریکونسي جدول له مستطیلي ګراف سره یوځای رسم کړئ او د مستطیلونو مساحت د منحني لاندې مساحت سره پرتله کړئ.

په څو ضلعي ګراف کې د هر کلاس مرکز پر افقي محور اود هر کلاس مطلقه فریکونسي یا نسبي

(c) ketabton.com: The Digital Library

فریکونسي پر عمودي محور ښودل کېږي، د کلاس مرکز (منځني نقطه) او د کلاس د فریکونسیو په مقابل کې په مستوي کې یوه نقطه ټاکل کېږي چې عرض یې د کلاس مرکز او اوږدوالی یې د هماغه کلاس له فریکونسیو سره برابر دی، د جدول د کلاسونو په شمېر په مستوي کې په هماغه اندازه نقطې په لاس راځي. که د کلاسونو په اول او اخر کې دوي نورې د $(x_1 - c\ ,\ 0)\ ,\ (x_n + c\ ,\ 0)$ اختیاري نقطې زیاتې کړئ، څرنګه چې c د هر کلاس وسعت دی یعنې (پاسنی سرحد منفي د هماغه صنف لاندینی سرحد) چې ددې نقطو له نښلولو څخه یو ګراف په لاس راځي چې د فریکونسي څو ضلعي ګراف نومېږي.

مثال: د لاندې جدول د ډیټا (Data) مستطیلي (هستوګرام) او د فریکونسیو څو ضلعي ګرافونه یې رسم کړئ.

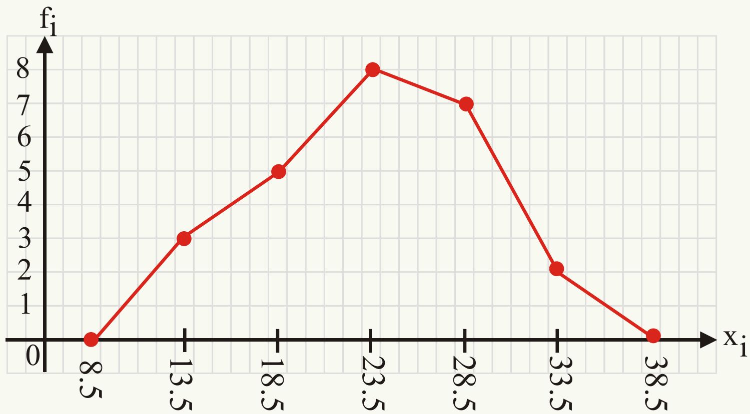
د کلاسونو حدود = CL	11-16	16-21	21-26	26-31	31-36
مطلقه فریکونسي = f_i	3	5	8	7	2
د کلاسونو مرکز = X_i	13.5	18.5	23.5	28.5	33.5

پوهېږو چې $c = 5$ ده، ددې لپاره چې دوه اختیاري نقطې په لاس راوړو، نو:

$$(x_1 - 5\ ,\ 0) = (13.5 - 5\ ,\ 0) = (8.5\ ,\ 0)$$

$$(x_n + 5\ ,\ 0) = (33.5 + 5\ ,\ 0) = (38.5\ ,\ 0)$$

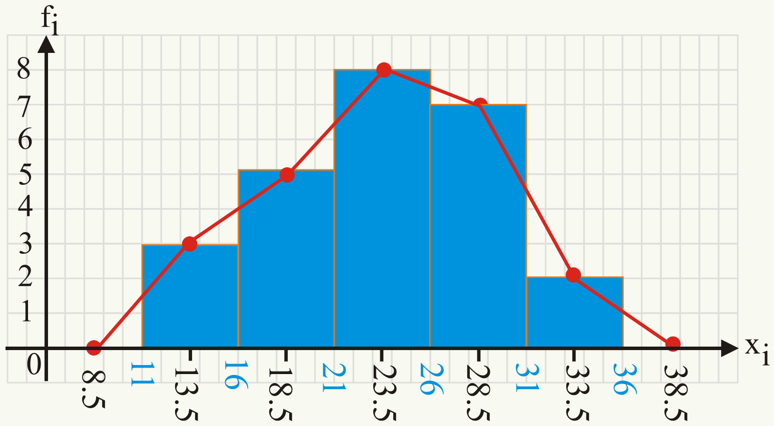
ددې نقطو $(8.5\ ,0)$ او $(38.5\ ,0)$ په اضافه کولو سره ګراف رسموو:



د فریکونسي څو ضلعي ګراف

(c) ketabton.com: The Digital Library

مستطیلي ګراف د فریکونسي څو ضلعي ګراف سره:



له پورتني ګراف څخه لیدل کیږي چې:

- د فریکونسیو څو ضلعي ګراف راسونه تر مطالعې لاندې دفریکونسیو له جدول د اړونده مستطیل د پورتنی ضلعې منځني نقطه سره واقع دي.
- د فریکونسیو څو ضلعي ګراف د لاندې سطحې مساحت د مستطیلي ګراف له مساحت سره برابر دی.
- د نسبي فریکونسیو څو ضلعي ګرافونه زیات د متصلو ډیټاوو (Data) له پاره کارول کیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1 - د نهم اولسم ټولګيو د 24 زده کوونکو د تنې لوړوالی د سانتي متر په حساب په لاندې ډول راکړل شوی دی.

138	107	136	128	148	118
142	129	115	123	133	123
121	128	122	144	126	135
152	98	117	153	141	126

د پورتنی ډیتا (Data) لپاره د فریکونسي یو جدول ترتیب کړئ.ډیتا (Data) په شپږو طبقو وویشئ، ددې ډیتا (Data) د ښودلو لپاره کوم ډول ګراف ښه دی، د فریکونسیو څو ضلعي ګراف رسم کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د ساقې او پاڼې ګراف

موږ د عددونو په نړۍ کې ژوند کوو، هر تن د خپل هیواد د ټولنې د یو غړي په حیث یوه خاصه شمېره لري چې د نورو مشخصو په شان د اهمیت وړ ده. آیا ویلای شئ چې دا شمېره څه شی ده؟ او آیا تاسو هم خپله شمېره پېژنئ؟

فعالیت

- په لاندې جدول کې د سانتي متر په حساب د 20 نویو پیدا شوو ماشومانو د تنې لوړوالی چې په تصادفي ډول انتخاب شوی دی، راکړل شوی دی.

45	46	47	43	49	40	42	46	45	43
43	43	48	49	47	49	48	49	47	45

- پورتنی ډیټا (Data) له کوچني عدد څخه لوی عدد ته ترتیب کړئ.

- لیدل کېږي چې په دې ټولو عددونو کې د 4 رقم مشترک دی، کولای شو چې دا رقمونه په لاندې ډول ولیکو.

$$40 + (0,2,3,3,3,3,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9,9,9,9)$$

- له 0 تر 9 پورې رقمونه هر یو رقم څو واري تکرار شوی دی. پورتني رقمونه په لاندې شکل لیکو.

```
4    0
     2
     3   3   3   3
     5   5   5
     6   6
     7   7   7
     8   8
     9   9   9   9
```

(c) ketabton.com: The Digital Library

• که د عددونو پورتنی شکل د 90° زاویې په اندازه کیڼې خوا ته دوران ورکړئ، دا شکل له کوم ډول ګراف سره مشابه دی؟

ډیټا عموماً د عددونو په شکل وي. له دې عددونو څخه څرنګه چې په پورتني فعالیت کې ولیدل شول، کولای شو، ګراف یې جوړ کړو چې داګراف د ساقې او پاڼې د ګراف په نامه یادیږي.

او که دې ګراف ته د 90° زاویې په اندازه کیڼې خواته دوران ورکړو، میله یې ګراف لاس ته راځي.

د مثال په ډول که ډیټا د صفر او 100 ترمنځ وي، کولای شو، لکه: د 37 عدد 3 په ساقه او (7) د پاڼې په حیث ولیکو.

د ساقې او پاڼې ګراف د هغو ډیټا (Data) لپاره چې تر ټولو لوی او تر ټولوکوچنی ډیټا (Data) ترمنځ توپیر یې لږ وي، مناسب دی.

لومړی مثال: د کتابونو په یو پلورنځي کې 20 ډوله کتابونه چې هر ډول شمېر یې په لاندې جدول کې راکړل شوی دی، ددې ډیټا (Data) د ساقې او پاڼې ګراف رسم کړئ.

10	11	15	23	27	28	38	38	39	39
40	41	44	45	46	46	52	57	58	65

حل: ښکاره ده چې د ډیټا (Data) د کیڼې خوا اولني عددونه 5.4.3.2.1 او 6 دي. چې دا عددونه د ساقې لپاره په نظر کې نیسو. او د هرې خانګې اړونده ډیټا ورته ددې عددونو مخکې لیکو چې په لاندې ډول لاس ته راځي.

ساقه	پاڼې
1	0 1 5
2	3 7 8
3	8 8 9 9
4	0 1 4 5 6 6
5	2 7 8
6	5

(c) ketabton.com: The Digital Library

که د کتاب مخ ته د ساعت د ستنې حرکت په مخالفه خوا کې د 90° زاويې په اندازه دوران ورکړو.
داګراف د ميله يي ګراف په شکل بدليږي چې په لاندې ډول يې ليکلای شو.

فریکونسی

6				6		
5				6		
4			9	5		
3	5	8	9	4	8	
2	1	7	8	1	7	
1	0	3	8	0	2	5
	1	2	3	4	5	6

دويم مثال: د رياضي په يوه امتحان کې لاندې نتيجې له زده کوونکو څخه پلاس راغلي دي، ددې ډيټا لپاره د ساقې او پاڼې ګراف رسم کړئ.

25 45 46 50 50 50 55 55 55 55
55 57 58 58 60 60 62 65 67 72

حل: د ساقې د رسم لپاره له لسيزو رقمونو او د پاڼې د ترسيم لپاره له يوويزو رقمونو څخه استفاده کوو:

ساقه	پاڼې										
2	5										
3											
4	5	6									
5	0	0	0	5	5	5	5	5	7	8	8
6	0	0	2	5	7						
7	2										

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

1- د لاندې ډیټا (Data) لپاره د ساقې اوپاڼې ګراف رسم کړئ.

12.5	6.8	9.1	8.4	11.7	10.9	8.3	7.9
	6.8	13	8.4	11.3	12	7.8	11.2

پاملرنه: د ساقې او پاڼې د ګراف د بنودلو لپاره د 8.3 عدد د 83 په شکل او د 11.2 عدد د 112په شکل او د 12 عدد د 120 په شکل لیکو.

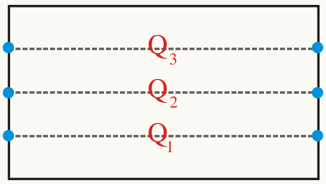
(c) ketabton.com: The Digital Library

ربعي (څلورمي)

په مخامخ شکل کې چې که دا د خلکو ټولنه نظر د دوی د تنې د لوړوالي په نسبت په څلورو مساوي برخو و وېشل شي، هره برخه یې په کوم نامه یادوي ؟

فعالیت

مخامخ شکل یو مستطیل دی چې د Q_1, Q_2 او Q_3 خطونو په واسطه په څلورو مساوي برخو وېشل شوی دی.



- د مستطیل د مساحت څو فیصده مساحت د Q_1 د خط لاندې، څو فیصده مساحت د Q_1 د خط له پاسه واقع دی؟
- دمستطیل څو فیصده مساحت د Q_2 تر خط لاندې او څوفیصده مساحت د Q_2 د خط له پاسه دی؟
- د مستطیل څو فیصده مساحت د Q_3 تر خط لاندې او څو فیصده مساحت د Q_3 د خط له پاسه دی؟

هغه عددونه چې ترتیب شوي ډېټا په څلورو مساوي برخو وېشي، دغه عددونو ته لومړی ربع، دویمه ربعه او دریمه ربع وايي او په Q_1, Q_2 او Q_3 سره ښودل کېږي.

لومړی ربع هغه مقدار دی چې 25% ډېټا له هغې لاندې او 75% ډېټا له هغې پورته واقع وي.

دویمه ربع هغه مقدار دی چې 50% ډېټا له هغې لاندې او 50% ډېټا له هغې پورته واقع وي.

دریمه ربع هغه مقدار دی چې 75% ډېټا ترې لاندې او 25% ډېټا یې له پاسه واقع وي.

که ډېټا (Data)په صعودي ډول ترتیب کړو، د ډېټا (Data)میانه د Q_2 سره مساوي لومړنی نیمایي ډېټا (Data) میانه له Q_1 سره مساوي او همدارنګه د دویمې نیمایي میانه له Q_3 سره مساوي ده.

د ربعو د پیداکولو په وخت کې لاندې پړاونه په پام کې ونیسئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- ډیټا (Data)په صعودي ډول ترتیب کړئ.
- ترتیب شوی ډیټا ته له (1) څخه تر n پورې شمېره (کوډ) ورکړئ.
- د P ام موقعیت ($P=1,2,3$) دلاندې رابطې په مرسته په لاس راځي.

$$C_{QP}=\frac{P\cdot n}{4}+\frac{1}{2}$$

- د ربعې د موقعیت په اساس، د ربعې مقدار وټاکئ.

مثال: فرض کړئ په لاس راغلي ډیټا (مشاهدې) په لاندې ډول راکړل شوي وي.

90 85 80 120 100 140

د لومړی او درېمې ربعې ځایونه وټاکئ.

د لومړی او درېمې ربعې مقدارونه پلاس راوړئ.

د ډیټا شمېره:	6	5	4	3	2	1
ډیټا :	140	120	100	90	85	80

د لومړی او درېمې ربعې ځایونه عبارت دي له:

$$C_{Q_1}=\frac{1\cdot 6}{4}+\frac{1}{2}=2$$

$$C_{Q_3}=\frac{3\cdot 6}{4}+\frac{1}{2}=5$$

نو د لومړی او درېمې، ربعې مقدارونه مساوي دي په:

$Q_1=85$ $Q_3=120$

پوښتنې

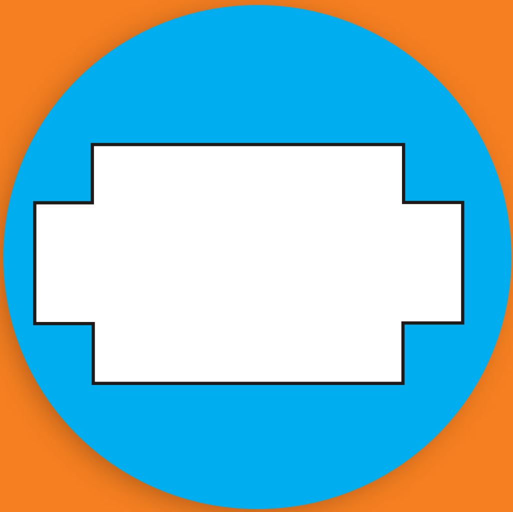
فرض کړئ په لاس راغلي ډیټا په لاندې ډول راکړل شوي وي.

100 90 80 120 160 140 85

- لومړی او درېمه ربعې (څلورمې) پیدا کړئ.
- له میاني تر مخه عددونه ولیکئ.
- له میاني وروسته عددونه په لاس راوړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

صندوقچه يي گراف



د يوې تختې کاغذ له څلورو کنجونو څخه څلور مربعګانې چې هره ضلع يې $5cm$ وي، جلا کړئ، بيا د کاغذ څنډې له پورته خواڅخه قات کړئ.
کوم شکل چې په لاس راځي، له څه شي سره ورته والی لري؟

فعاليت

د هغه ناروغانو شمېر چې د 17 ورځو، په موده کې يوه روغتون ته راغلي دي، په لاندې ډول ثبت شوي دي.

24	17	16	27	14	23	15	10	11
	19	26	25	18	31	31	13	28

- ميانه يې پيدا کړئ.
- هغه عددونه وليکې چې د ميانې تر مخې نيمايي کې پراته دي.
- ددې عددونو لپاره ميانه پيدا کړئ.
- هغه عددونه وليکئ چې د ميانې په وروسته نيمايي کې پراته دي.
- ددې عددونو لپاره ميانه پيدا کړئ.
- دويمه ربع (څلورمه) يا Q_2 کوم عدد دی؟

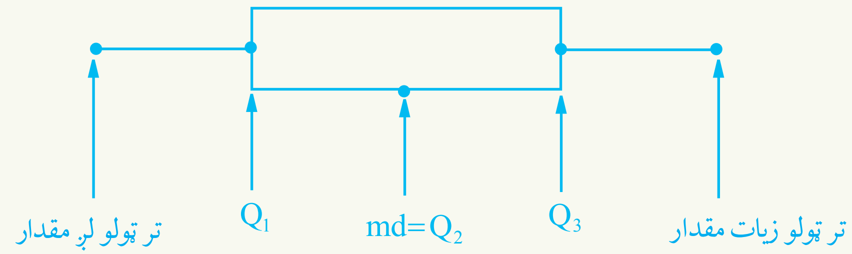
صندوقچه يي يا جعبه يي ګراف: دا يو داسې تصويري ګراف دی چې د ډيټا (Data) تيت والی د نورو ګرافونو په نسبت ښه روښانه کوي، د ا ګراف د لاندېنيو اندازو پر بنياد د ډيټا (Data) ګراف ښکاره کوي.

الف) تر ټولو کوچنۍ ډيټا ب) لومړنی ربع (څلورمه) ج) ميانه

د) دريمه ربع هـ) تر ټولو لويه ډيټا

صندوقچه يي ګراف د ربعو او له زيات نه زيات او کم تر کمه ډيټا (Data) ښودونکی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library



کولای شو د صندوقچه يي ګراف د رسمولو پړاوونه په لاندې ډول وليکو:

الف) تر ټولو کوچنی ډيټا پيدا کړئ. ب) تر ټولو لويه ډيټا پيداکړئ

ج) ميانه پيدا کړئ د) لومړی ربع پيدا کړئ

هـ) دريمه ربع پيدا کړئ و) ګراف رسم کړئ.

مثال: که په يو ښار کې د 15 ورځو په موده کې د ترافيکي پيښو شمېر په لاندې ډول راکړل شوي وي، صندوقچه يي ګراف يې رسم کړئ.

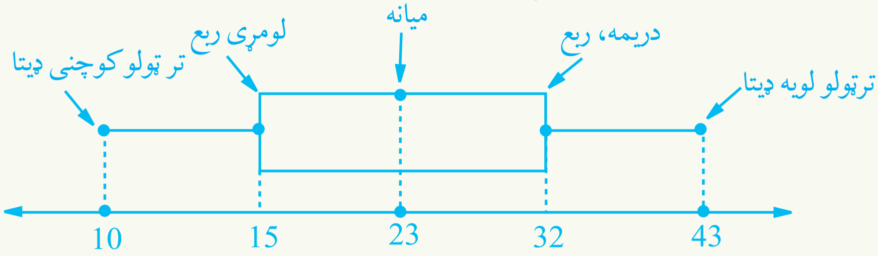
12 10 15 23 14 27 16 34
41 43 32 18 25 31 19

حل: پورتنی ډيټا په ترتيب ليکو.

10 12 14 15 16 18 19 23 25 27 31 32 34 41 43

نو: تر ټولو کوچنی ډيټا = 10 تر ټولو لويه ډيټا= 43

ميانه = 23 لومړی ربع = $Q_1 = 15$ دريمه ربعه = $Q_3 = 32$



پورتنی ګراف صندوقچه يي ګراف دی چې 50% ډيټا دصندوق په داخل کې (د لومړی، دريمې او ربعې ترمنځ) پرتې دي، 25% يې 10 او 15 ترمنځ او 25% ډيټا د 32 او 43 ترمنځ پرته ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د نارمل منحني د مرکزي ټاکوونکو پرتله کول

$$mod = ?$$
$$med = ?$$
$$\overline{x} = ?$$

آیا کولای شو چې د نارمل منحني په مرسته مرکزي ټاکوونکی پلاس راوړو؟

لاندې کوم منحني چې وینئ، په احصائیه کې یوله مشهورو منحني ګانو څخه دی، کولای شو چې زیاتې طبیعي پیښې ددې منحني په مرسته وښایو. نارمل منحني یو متناظره منحني دی چې د یوه زنګ په شان شکل لري.

- آیا د اوسط، میاني او موډ د مرکزي ټاکوونکو ځایونه په دې منحني کې ښودلای شئ؟

فعالیت

- که په یوه ټولګي کې ټول زده کوونکي ښې نمرې واخلي:
- آیا څه فکر کوئ چې ددوی د نمرو اوسط هم ښه دی؟
- آیا د اوسط لوړوالی د ټولګي د تعلیمي وضعې پر ښه والي دلالت کوي؟
- ددې لپاره چې د ټولګي وضع ښه ارزیابي کړی، نیم ټولګی باید ښې نمرې واخلي.
- هغه کومه نمره ده چې د نیمايي ټولګي د زده کوونکو نمرې له هغې زیاتې وي؟

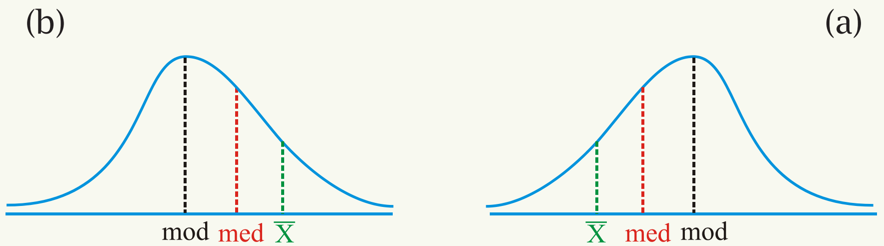
(c) ketabton.com: The Digital Library

- که میانه له اوسط څخه ډېره کوچنۍ وي، له دې څخه څه شی په لاس راځي؟
- که میانه له اوسط څخه ډېره لویه وي، له دې څخه څه شی په لاس راځي؟

د پورتني فعالیت او د منحنی له متناظر والي څخه نتیجه په لاس راځي چې د میانې او اوسط ځای په نارمل منحنی کې یو دی او ځرنګه چې نارمل منحنی اعظمي نقطه لري، نو له همدې سببه د موډ ځای هم له اوسط او میانې سره مساوي دی یعنې:

$$\overline{X} = \text{mod} = \text{md}$$

که نارمل منحنی، متناظره نه وي، په دې حالت کې لرو چې:



$\text{mod} < med < \overline{x}$ $\qquad$ $\overline{x} < med < \text{mod}$

- که چېرې اوسط او میانه سره مساوي وي، له اوسط او میانې څخه تر مخه او له اوسط او میانې څخه وروسته ډیټاګانې سره مساوي دي.

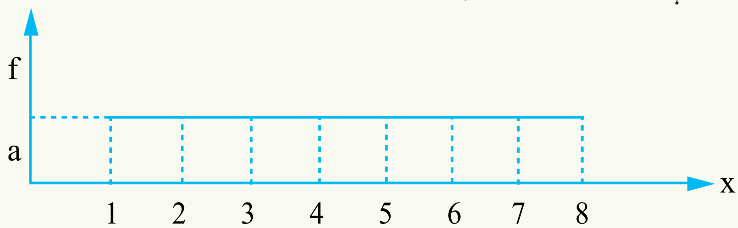
-که اوسط د میانې کیڼې خوا ته پروت وي، د هغو ډیټا شمېر چې د اوسط ښې خواته پرتې دي، د هغو ډیټا (Data) له شمېر څخه چې د اوسط کیڼې خواته پرتې دي، زیات دی، لکه: د a په شکل کې.

-که اوسط د میانې ښې خواته پروت وي، د هغه ډیټا (Data) شمېر چې د اوسط ښي خواته پرتې دي، د هغه ډیټاوو (Data) له شمېر څخه چې د اوسط کیڼې خوا ته پرتې دي، لږ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لکه د b به شکل کې

مثال: په لاندې ګراف کې اوسط او میانه پیدا کړئ.



حل:

= میانه

$$med = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

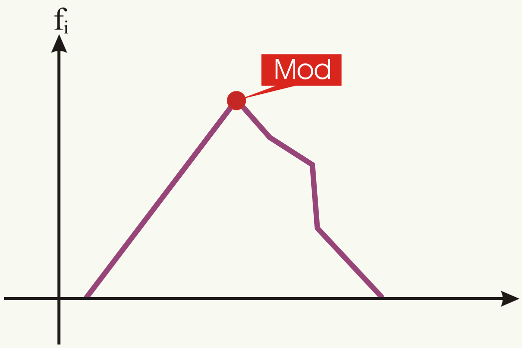
= اوسط

$$\bar{x} = \frac{a\cdot1+a\cdot2+a\cdot3+a\cdot4+a\cdot5+a\cdot6+a\cdot7+a\cdot8}{a+a+a+a+a+a+a+a}$$

$$\bar{x} = \frac{36a}{8a} = 4.5$$

مثال: په لاندې ګراف کې د موډ تقريبي قيمت پرته له محاسبې په ګوته کړئ.

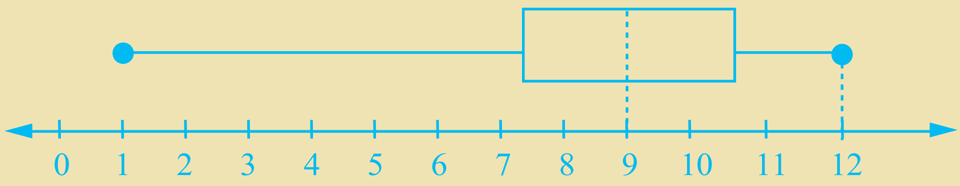
حل:



(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1- دلاندې صندوقچه يي ګراف په نظر کې نيولو سره لاندې اړوندو پوښتنو ته ځوابونه ورکړئ.



- په پورتني ګراف کې ميانه څومره ده؟
- په دې ډيټا کې لومړنی، ربع د 8 عدد دی، دا عدد، څه شی ښيي؟
- دريمه ربع څو ده؟ دا عدد، د څه شي ښودونکی ده؟
- دا چې ميانه د صندوق کيڼې خواته ده، د څه شي ښکارندويه دی؟
- داچې دکيڼې خوا د عددونو شمېر نظر ښي خوا ته زيات دی دا زياتوالی د څه ښکاره کوونکی دی؟

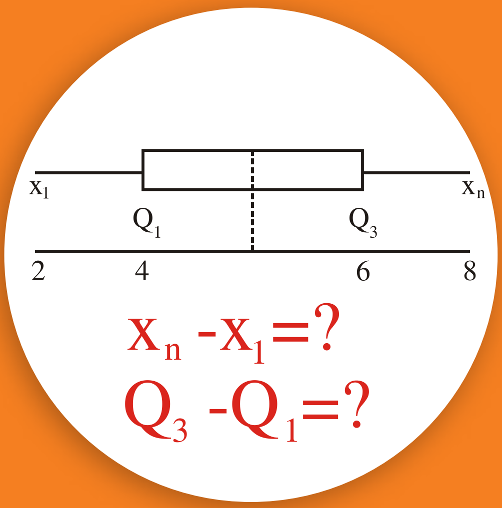
2- د يوه هېواد د فوټبال ملي ټيم د لوبغاړو عمرونه په لاندې ډول دي.

25	24	26	19	31	18	23	22	25	26
25	27	23	29	25	25	33	31	26	

د لاندې نتيجو څخه کومه يوه سمه ده؟

- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه يې له اوسط څخه لوړ وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه يې له ميانې څخه لوړ وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه يې له اوسط څخه ښکته وي، ډېر دي.
- د هغو لوبغاړو شمېر چې عمرونه يې له اوسط څخه ډېر وي د هغه لوبغاړو له شمېر سره مساوي دی چې عمرونه يې له اوسط څخه لږ دي.

(c) ketabton.com: The Digital Library



ربعي انحراف

که د يوې ټولنې د احصائيوي تغيراتو لمن لويه وي، آيا فکر کوئ چې د ډيټا د تحول ساحه به له ټولنې څخه نامناسبه پايله وړاندې کړي؟

فعاليت

له يو موزيم څخه د ليدونکو شمېر په 12 ورځو کې په لاندې ډول دی.

0 1 2 8 7 6 5 9 10 6 15 11

- ددې ډيټا (Data) د تحول ساحه پلاس راوړئ.
- په عمومي ډول پورتنۍ ډيټاوې د کومو دوو عددونو ترمنځ تيت شوي دي؟
- يو په څلورمه برخه ډيټا له پورته اوښکته خوا څخه حذف کړئ او بيا د پاتې ډيټا (Data) د تحول ساحه پيدا کړئ.
- دا د تحول دوه ساحې چې په لاس راغلي دي، يو له بله سره يې پرتله کړئ، کومه يو ه يې ډېر تيت والي ښيي؟
- په څېنو وختونو کې د تحول ساحه د دوو ډېرو کوچنيو او يا ډېرو لويو مقدارونو له سببه، نامناسبه تعبيرونه له ټولنې څخه موږ ته په لاس راکوي.

نو له دې امله د نورو ټاکونکو څخه چې د ربعو د انحراف په نامه يادېږي، ګټه اخيستل کېږي، تر څو د ټولنې د تحول ساحه په ښه ډول وټاکي.

که Q_1 او Q_3 په ترتيب سره د ډيټا د سټ، لومړی ربع او درېمه ربع وي، نو د ربعو انحراف په (Q) سره ښودل کېږي او په لاندې ډول تعريف شوي دي.

$$Q = Q_3 - Q_1$$

ربعي انحراف يو له هغو ټاکونکو څخه دی چې د ډيټا (Data) تيت والي ښکاره کوي. داسې چې د لومړي او درېمې ربعې له تعريف څخه پوهېږو چې 50% ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه چې دا فاصله لږه وي، ډيټا سره نژدې دي، يا په بل عبارت د هغوی

(c) ketabton.com: The Digital Library

تیت والي لږ دی.

ځینې وختونه د ربعو (څلورمو) انحراف د $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ په شکل تعریفوي او دې ته د ربعو نیمايي لمن وايي.

مثال: دلاندې عددونو د ربعو (څلورمو) انحراف پیدا کړئ.

36 35 29 30 31 25 24 23 22 22 20

حل: لومړی عددونه په صعودي ډول ترتیب کوو او بیا ورته یوه شمېره ټاکو:

20	22	22	23	24	25	29	30	31	35	36
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

$$C_{Q_n} = \frac{P \cdot n}{4} + \frac{1}{2}$$

$$C_{Q_3} = \frac{3 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33+2}{4} = \frac{35}{4} = 8.75$$

نوله دې ځایه:

$$Q_3 = 30.75$$

همدارنګه:

$$C_{Q_1} = \frac{1 \cdot 11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11+2}{4} = \frac{13}{4} = 3.25$$

نوله دې ځایه:

$$Q_1 = 22.25$$

د لومړني او دریمې، ربعي قیمتونه

په ترتیب سره 22.25 او 30.75 دي نو:

$$Q = Q_3 - Q_1 = 30.75 - 22.25 = 8.5$$

پوښتنې

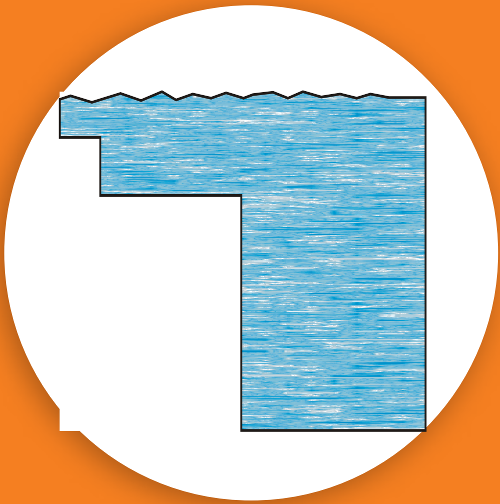
1 – د لاندې ډیټا د تحول ساحه، د ربعو (څلورمو) انحراف او موډ پیدا کړئ او وواياست چې د ډيټا ګڼوالی په کومه ساحه کې ډېر دی.

5 11 12 14 15 15 16 17 30

2 – د لاندې ډیټا د تحول ساحه او د څلورمو انحراف پیدا او د لومړۍ پوښتنې د تحول د ساحې او د څلورومو د انحراف سره يې پرتله يې کړئ.

27 24 21 29 28 26 23 22

(c) ketabton.com: The Digital Library



واريانس (variance)

که ستاسو لامبو بڼه زده نه وي او وغواړئ چې په داسې ډنډ کې ولامبئ چې ژور والي يې په ټولو برخو کې يو شان نه وي. ددې لپاره چې په ډاډه زړه ولامبئ، کوم معلومات بايد ولرئ؟

فعالیت

که د لمبا په يو ډنډ کې د يوځای ژوروالی 1.5 متره او دبل ځای ژوروالی يې 2.5 متره وي.

- ددې ډنډ د دواړوو ځايونو د ژوروالي اوسط پيدا کړئ.
- ددې دوو ډيتاوو د انحرافونو مربع له حسابي اوسط څخه پيدا کړئ.
- ددې دوو ډيتاوو د انحرافو د مربعګانو مجموعه پيدا کړئ.
- د پورتنيو ډيتاوو (Data) مجموعه د مجموعې د غړو پر شمېر و وېشئ.

د $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ډيتا د واريانس د پيدا کولو لپاره لاندې پړاوونه په نظر کې ونيسئ.

- د ډيتا اوسط پيدا کړئ يعني:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{n}$$

- د انحرافونو د مربعګانو مجموعه يعني:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \quad \ldots + (x_n - \bar{x})^2$$

په لاس راوړئ.

-پورتنی مجموعه د مجموعې د غړو پر شمېر (n) و وېشئ او په s^2 يې وښيي:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې دلته S^2 د واريانس په نامه يادېږي. واريانس برابر دی د انحرافونو د مربع اوسط له اوسط څخه.
پاملرنه: ځينې وختونه واريانس د پيداکولو لپاره له دې لاندې فورمول څخه هم ګټه اخلي.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{x}^2$$

ثبوت: پورتنی فورمول کولای شو، په لاندې ډول لاس ته راوړو.

پوهېږو چې :

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = n\overline{x}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} 2x_i\overline{x}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} \overline{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\overline{x}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{n\overline{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - 2\overline{x}\cdot\overline{x} + \overline{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \overline{x}^2$$

مثال: د لاندې ډيټا (Data) وريانس د دواړو فورمولونو په مرسته پيداکړئ.

1 5 6 7 9

الف: د $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(xi - \overline{x})^2}{5}$ له فورمول څخه څرنګه چې $i = 1,2,3,4,5$

$$\overline{x} = \frac{1+5+6+7+9}{5} = 5.6$$

$$S^2 = \frac{(1-5.6)^2 + (5-5.6)^2 + (6-5.6)^2 + (7-5.6)^2 + (9-5.6)^2}{5}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$= \frac{(-4.6)^2 + (-0.6)^2 + (0.4)^2 + (1.4)^2 + (3.4)^2}{5}$$

$$= \frac{21.16 + 0.36 + 0.16 + 1.96 + 11.56}{5} = \frac{35.2}{5} = 7.04$$

ب: له دې فورمول $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2}{5} - \bar{x}^2$ څخه هم کولی شو چې همدا قیمت په لاس راوړو

$$S^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2}{5} - \bar{x}^2 = \frac{192}{5} - (5.6)^2$$

$$= 38.4 - 31.36 = 7.04$$

یادونه: که ډیټا په ګروپونو (کلاسوونو) کې ترتیب شوي وي او د کلاسونو مرکزونه $x_1, x_2, .., x_n$ او $f_1, f_2, ..., f_n$ فریکونسي هم راکړل شوي وي. په دې حالت کې د واریانس د پیدا کولو لپاره له لاندې فورمول څخه کار واخلو:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

داسې چې $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$ دی.

د واریانس د واحد ټاکل مشکل دي. په عمومي ډول په عمل کې مطلقه قیمت یې نیول کېږي، ځېنې وخت د متحول د واحد مربع د واریانس د واحد په حیث ګڼل کېږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتنې

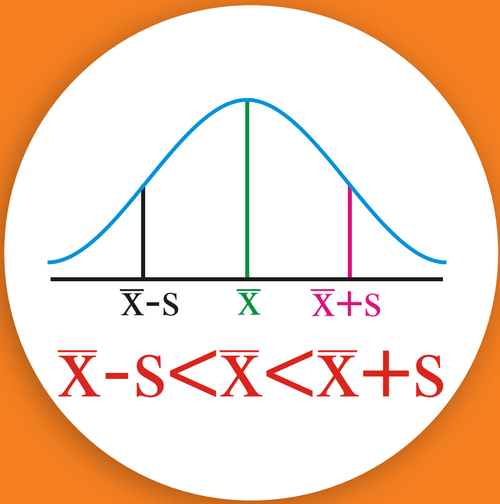
د هغو ساعتونو شمېر چې زده کوونکو په یوه اونۍ کې د لوبو کولو لپاره ټاکلي دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي.

3 2 1 4 3 2 2

ددې ډیټا (Data) وریانس پیدا کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

معیاري انحراف



که S دوریانس جذر $\bar{x}$ دډیټا اوسط وي
مخامخ شکل کوم ډول ټاکونکی توضیح کوي؟

فعالیت

که S^2 د $x_1, x_2, ..., x_n$ ډیټا واریانس وي. آیا څه فکر کوئ چې د S^2 او S واحدونه سره څه توپیر لري؟ فرض کړئ چې په یوه اونۍ کې یوې کارخانې ته د توکو د فرمایشونو د تسلیمی وخت له څېنو ټاکونکو سره، لکه: انحراف، د انحراف مطلقه قیمت د انحرافو مربع په لاندې جدول کې راکړل شوی وي، څرنګه چې:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{n} = \frac{8+9+6+4+8}{5} = \frac{35}{5} = 7$$

د انحرافونو مربع $(x_i-\bar{x})^2$	دانحراف مطلقه قیمت $\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	انحراف $x_i-\bar{x}$	$\bar{x}$	ورکړې وخت په ورځ x_i
1	1	1	7	8
4	2	2	7	9
1	1	-1	7	6
9	3	-3	7	4
1	1	1	7	8

(c) ketabton.com: The Digital Library

- د ډیتا (جامو) د ورکړي د وخت اوسط پیدا کړئ.
- د انحرافو د مطلقه قیمت اوسط یا په لنډ ډول د انحراف اوسط (AD) پیدا کړئ.
- د توکو د ورکړې وخت واریانس پیدا کړئ.
- د واریانس مربع جذر محاسبه کړئ.
- د واریانس د مربع جذر واحد د واریانس له واحد سره پرتله کړئ.

د واریانس له فورمول څخه مو زده کړل چې په توان ورلو سره نه یوازې داچې د واریانس اندازه کولو مقیاس له شک سره مخامخ کوي، بلکې انحرافونه هم لوی ښیي.

ددې لپاره چې دا ستونزې له منځه یوسو، په کار ده چې د وریانس مربع جذر په لاس راوړو.

د واریانس جذر د ډیتا (Data) د تیت والي، یو بل ټاکوونکی د معیاري انحراف یا مطلق تیت والي په نوم را پیژني.

معیاری انحراف چې د S په سمبول ښودل کېږي، د واریانس له مربع جذر سره مساوي دی.

په دې معنا:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}}{n}-\bar{x}^2}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}$$

د معیاری انحراف یا د مطلق تیت والي واحد هم هغه د متحول واحد دی.

پورتنی رابطه په لاندې ډول ثبوت کېږي:

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^{2}-2\bar{x}x_i+\bar{x}^2)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}-2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\bar{x}^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}-2n\bar{x}^{2}+n\bar{x}^{2}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}-n\bar{x}^{2}\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}-n\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}-\frac{(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2}{n}\right)$$

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2\Rightarrow S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}}{n}-\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

مثال: د 5 ناروغانو د بدن د حرارت درجې په لاندې ډول راکړل شوي دي.

38 39 39 40 41

معياري انحراف يې پيدا کړئ

حل:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\frac{38+39+39+40+41}{5}=\frac{197}{5}=39.4$$

$$S^2=\frac{(38-39.4)^2+(39-39.4)^2+(39-39.4)^2+(40-39.4)^2+(41-39.4)^2}{5}$$

$$S^2=\frac{(-1.4)^2+(-0.4)^2+(-0.4)^2+(0.6)^2+(1.6)^2}{5}$$

$$S^2=\frac{1.96+0.16+0.16+0.36+2.56}{5}=\frac{5.2}{5}=1.04$$

$$S=\sqrt{1.04}=1.01980$$

پاملرنه: د فریکونسیو له جدول څخه، معیاري انحراف په تقریبي ډول په لاندې ډول په لاس راځي:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}f_i(x_i-(\bar{x}))^2}{\sum_{i=1}^{n}f_i}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}f_ix_i^2}{\sum_{i=1}^{n}f_i}-\bar{x}^2}$$

چې $\bar{x}$ د ډیټا، اوسط، x_i د کلاس مرکز او f_i د کلاس فریکونسي ښیي.

پوښتنې

د څلورو ټلويزوني سټيشنونو د ښوونې او روزنې د پروګرامونو د خپرولو د ساعتونو شمېر په لاندې ډول راکړل شوی دی، د ډیټا معیاري انحراف پیدا کړئ.

1 3 4 5

(c) ketabton.com: The Digital Library

• **د فريکونسي څو ضلعي ګراف**:د هغو مرتبو جوړو نقطې چې عرض يې د کلاس مرکز او اوړدوالي يې د هماغه کلاس له فريکونسي سره مساوي دی، يوه له بلې سره ونښلوو، د فريکونسي څو ضلعي ګراف په لاس راځي، د فريکونسي په څو ضلعي ګراف کې دوې نورې اختياري نقطې د صفر په فريکونسي د کلاسونو (ګروپونو) په لومړي او اخيرنی برخه کې ډېروو، تر څو د فريکونسي څو ضلعي ګراف له محور سره ونښلوي.

• **د ساقې او پاڼې ګراف**: د ساقې او پاڼې د ګراف د رسمولو لپاره له عددونو څخه ګټه اخيستل کېږي. احصائيوی ډيټا د عددونو په شکل راوړو، بيا له دې عددونو څخه د ساقې او پاڼې ګراف رسموو. دا ډول ګراف د هغو ډيټا (Data) لپاره چې د رقمونو د شمېر له مخې تر ټولو لوی او کوچنی رقم تر منځ توپير لږ وي، مناسب دی.

• **ربعي**: هغه عدد چې مرتبه جامعه په دوو مساوي برخو وويشي، د مياني په نوم يادېږي. اوس هغه عددونه په نظر کې ونيسئ چې مرتبه جامعه په څلورو مساوي برخو وېشي، دا عددونه په Q_2, Q_1 او Q_3 سره ښودل کېږي، دې عددونو ته په ترتيب سره لومړی ربع، دويمه ربع او د دريمه ربع وايي. ښکاره ده چې Q_2 ميانه ده.

• **صندوقچه يي يا جعبه يې ګراف**: له دې ګراف څخه د هغې ډيټا (Data) لپاره چې سره نژدې دي يا هغه ډيټاوې چې د اوسط پر شاوخوا راټولې شوي دي او يا هم هغه ډيټا چې ترټولو لويو يا ترټولو کوچنيو ډيټاګانو پرشاوخوا راټولې شوي وي، ګټه اخيستل کېږي، داګراف يو تصويري ګراف دی چې ترټولو لويې ډيټا، ترټولو کوچنی ډيټا، مياني، لومړی ربعې او دريمې ربعې په اساس ښکاره کوي.

• **د نارمل منحني په بنياد د مرکزي ټاکونکو پرتله کول**: څه وخت چې وغواړو مرکزي ټاکونکي (اوسط، ميانه، او موډ) له نارمل منحنې څخه په ګټه اخيستنې سره پرتله کړو: په دې حالت کې که نارمل منحني متناظر وي، نو اوسط، ميانه او موډ سره مساوي دي. که نارمل منحني متناظر نه وي، نو مرکزي ټاکونکي نظرخپل موقعيت ته د منحني ښې خوا يا کيڼې خواته قيمتونه اخلي.

• **ربعي انحراف**: که Q_1 او Q_3 په ترتيب سره د ډيټا (Data)لومړی ربع او دريمه ربع وي، کولای شوو چې د څلورمو (ربعي) انحراف (Q) په لاندې ډول وليکو

$$Q = Q_3 - Q_1$$

له پورتني تعريف څخه ښکاري چې %50 ټولنه د $Q_3 - Q_1$ په فاصله کې پرته ده. په هره اندازه

(c) ketabton.com: The Digital Library

چې دا فاصله لږه وي، ډیټاګانې دي او د ډیټا تیټ والی لږ دی.

• **واریانس**: د تیټ والی ټاکونکي هغه مقدارونه دي چې د ډیټا (Data) د تیټ والی حالت نسبت یوبل ته او نسبت یې اوسط ته ټاکي.

واریانس د تیټ والي له ټاکونکو څخه یو مهم ټاکونکی دی چې په S^2 سره ښودل کېږي او له لاندې رابطې څخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\ldots+(x_n-\overline{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}$$

د واریانس پیدا کول د فریکونسي په جدول کې له دې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

(x_i دکلاس مرکز دی)

• **معیاري انحراف**: د واریانس مربع جذر په S ښیي چې معیاري انحراف ورته وایي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}}$$

د معیاري انحراف پیدا کول د فریکونسي له جدول څخه د لاندې فورمول څخه په لاس راځي:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}}$$

(x_i دکلاس مرکز دی)

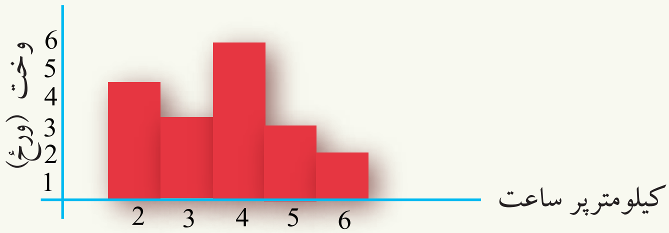
(c) ketabton.com: The Digital Library

د څپرکي پوښتنې

1 - لاندې ګراف د باد سرعت په 19 ورځو کې ښکاره کوي، په ګراف کې د راکړل شوو اطلاعاتو پر بنسټ د باد سرعت لپاره د فریکونسي څو ضلعي ګراف رسم کړئ.

که چیرې یوې کشتۍ ته د حرکت لپاره لږ تر لږه په یوه ساعت کې 5 کیلو متره د باد سرعت ته اړتیا وي، نو څو ورځې د کشتۍ د حرکت کولو لپاره مناسبې دي؟

په دې پوښتنه کې ولې د فریکونسي څو ضلعي ګراف، نظر مستطیلي ګراف ته مناسب دی؟



2 - د فریکونسي څو ضلعي ګراف هغه ګراف دی چې .... په افقي محور او .... د عمودي محور پر مخ ښودل کېږي.

الف) د کلاسونو مرکز، نسبي فریکونسي

ب) نسبي فریکونسي، د کلاسونو مرکز

ج) د کلاسونو حدود، مطلقه فریکونسي

د) د کلاس مرکز، مطلقه فریکونسي

3 - دساقې او پاڼې ګراف راکړل شوی دی:

- له دې ګراف څخه په لاس راغلې ډېټا ولیکئ.

ساقه	پاڼې				
1	0	3	3	4	
2	0	2	4	8	8
3	2				

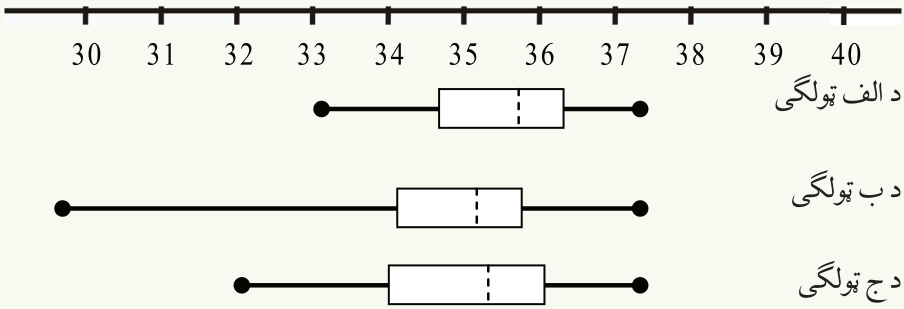
4 - کوم ګراف ته د 90° په اندازه (د ساعت د عقربې د حرکت په مخالف لورې ته) دوران ورکړو، تر څو میله یې ګراف لاس ته راشي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

الف) د ساقې او پاڼې ګراف　　　　ب) مستطيلي ګراف

ج) د فريکونسي د څو ضلعي ګراف　　　　د) دايروي ګراف

5: لاندې ګراف د الف،ب او ج د دريو ټولګيو د رياضي ازموينې نمرې ښکاره کوي، ګراف ته په پاملرنې سره لاندې پوښتنو ته ځواب ورکړئ.



- د کوم ټولګي د تحول ساحه زياته ده؟
- د کوم ټولګي د نمرو ميانه تر ټولو زياته ده؟ او د کوم ټولګي د نمرو ميانه تر ټولو لږه ده؟
- د کوم ټولګي د نمرو تيت والی تر ټولو ډېر دی.
- ددې دريو ټولګيو د ازموينې نمرې له کمزورې څخه د قوي په لور ترتيب کړئ.

6 : په ګراف کې د a مقدار عبارت دی له:

الف) ميانه　　ب) اوسط　　ج) دريمه ربع　　د) موډ

(c) ketabton.com: The Digital Library

7: د غذايي موادو د توليد دوه فابريکې د A او B په نامه، د 48 ګرامو په قطيو کې بسکيت خرڅوي.

• په تصادفي ډول د دواړو فابريکو د بسکيت له قطيو څخه 5 قطي ټاکل شوي دي او په پوره غور سره يې وزنونه معلوم شوي دي چې په لاندې ډول دي.

A:	48.08	48.32	47.96	47.84	47.96
B:	49.16	48.84	48.88	49.08	49

• په قطيو کې کومه فابريکه زيات بسکيت خرڅوي؟ د پوښتنې د حل لپاره له کوم ټاکونکي څخه استفاده کوي؟

• د بسکيت په وېشلو کې کومې فابريکې يو شان عمل کړی دی؟

8: که د ډيټا د تحول ساحه صفر وي. د ډيټا په برخه کې څه نتيجه اخلئ؟

9 : د هغه ساعتونو شمېر چې زده کوونکو په يوه اونۍ کې د لوبو لپاره ټاکلې دي، په لاندې ډول راکړل شوي دي.

1 5 7 9

ددې ډيټا (Data) ورايانس پيدا کړئ.

10: په لاندې جدول کې واريانس پيدا کړئ.

x_i	25	35	45
f_i	10	25	15

(c) ketabton.com: The Digital Library

نهم څپرکی

د رياضي منطق

(c) ketabton.com: The Digital Library

(c) ketabton.com: The Digital Library

د شهودي درک استدلال:

پخوا تر ډېر و پیړیو پورې خلکو فکر کاوه چې ځمکه هواره ده او ستورې د ځمکې پر شاوخوا څرخیږي.
آیا پوهیږې چې ځمکه کروي ده؟
آیا لمر دځمکې پر شاوخوا او که ځمکه د لمر پرشاوخوا څرخیږي؟

تعریف: هغه طبیعي یا حسي پوهه چې دهغې په مرسته دیوې موضوع سموالی یا حقیقت او یا یو مفهوم پر ته له استدلاله قبلوو، له شهودی درک څخه عبارت دی چې کیدلی شي، دوخت په مختلفو مرحلو کې یوله بله سره توپیر ولري.

فعالیت

د لاندې شکل په نظر کې نیولو سره د مستقیم خط پر مخ د A او B دوې نقطې په پام کې ونیسئ.

یو سرې غواړې چې ددې مستقیم خط پر مخ د A له نقطې څخه د B نقطې ته لاړشي چې د $\overline{AB}$ د قطعه خط منځنۍ نقطه A_1 کې توقف وکړي او بل وار چې د A_1 نقطې ته رسیدلي دی، ددې لپاره چې د B نقطې ته ورسیږي، بیاد A_2 په نقطه (د $\overline{A_1B}$ د قطعه خط دتنصیف نقطه) کې توقف وکړي، که په همدې ډول دوام ورکړي، نو لاندې پوښتنو ته ځوابونه ورکړئ:

- آیا په پورته ډول چې د خط پر مخ د هرو دوو نقطو په منځنۍ نقطه کې توقف وکړي، پای لري؟
- که په همدې ډول تر پایه دوام ورکړي، دا سړی به د B نقطې ته ورسیږي؟
- که دا سړی توقف و نه کړي او یا له لاړې بیرته راونه ګرځي، نو نه یوازې چې د B نقطې ته به ورسیږي، بلکې ترې تیر به هم شي. په دې اساس ددې مسلئې د واقعیت او ستاسو د شهودي درک ترمنځ څه توپیر شته؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

له پورتني فعالیت څخه لاندي نتیجه لاس ته راځي:

نتیجه: د شهودي درک نتیجه هر وخت صحیح نه وي، خو کېدای شي چي د قضیو دحل لپاره یو ښه بنسټ وي.

له هغه مثال څخه چي په پورتني فعالیت کي مو تري استفاده وکړه او یاداسي نور مثالونه دا ددي په معنا نه دي چي دشهودي درک استدلال گمراه کوونکی دی، بلکي بر عکس په زیاتو حالتونوکي دشهودي درک استدلال د مسلؤ دحل، د انگیزي د پیداکولو او د نورو سوالونو د طرح کولو سبب گرځي.

لومړی مثال: د شهودي درک په استدلال سره په اساني سره حکم کولای شو چي دوه موازي خطونه یو بل نه قطع کوي.

څرنگه چي ددي مسلي په قبلولو کي استدلال په کار ورل شوی نه دی، په واقعیت یو احساس دی چي پر اساس یي داحکم منل کېږي، نو دا ډول نتیجه اخیستنه دشهودي درک په نامه یادوو.

دویم مثال: که یوه نقطه د داسي دایري د باندي پرته وي چي قطر یي 4 واحده وي. ددي نقطي د فاصلي د مطالعه کولو لپاره چي له 2 واحده څخه زیاته ده، نه شو ویلای چي دا استدلال یو شهودي درک دی، ځکه دمسلئي د وضاحت لپاره لازمه ده چي استدلال وکړو. څرنگه چي د دایري د مرکز فاصله له محیط څخه 2 واحد ده. نقطه د دایري د باندي واقع ده، نوله دي امله د دایري له مرکز څخه د نقطي فاصله د 2 واحده څخه لویه ده. یعني پرته له استدلال څخه د طبیعي پوهي او یا غریزه یي احساس په واسطه نه شو کولای، مسئله درک او صحت یي قبول کړو.

پوښتني

1- د دوو نقطو ترمنځ لنډه فاصله له یوه مستقیم خط څخه عبارت ده، آیا ددي مسئلي درک کول یو شهودي درک دی؟ څرنگه استدلال کوئ؟

2- له لاندي حکمونو څخه کوم یو یي د شهودي استدلال په طریقه د درک وړ دی؟

a- دیوي متوازي الاضلاع مقابلي زاویي سره مساوي دي.

b- د لوزي (معین) قطرونه یو پر بل عمود او یوبل نیمایي کوي.

c- په یوه قایم الزاویه مثلث کي و تر، له هرو دوو ضلعو څخه لوی دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

تمثيلي يا ګماني استدلال

وواېه زما په لاسونو کې څه شی دی؟ تقريباً ګرد دی، رنګ يې سپين دی او دسپينو په منځ کې يو ژېړ شی دی؟

د منطق يوه ښوونکي غوښتل چې دخپل يوه زده کوونکي قياسي استدلال وازمايي، خپل مخ يې هغه ته ورواړوه او ورته ويې ويل:
پوهېږئ چې ګمان او يا تمثيل حقيقت ته د رسيدو پل دی. د لوست په جريان کې مو زده کړل چې تمثيلي استدلال موږ حقيقت ته نژدې کوي، ليکن هر وخت سوچه حقيقت نه دی.
ښوونکي په داسې حال کې چې په خپلو لاسونوکې يې د چرګې هګۍ پټه کړې وه، له زده کوونکي وپوښتل: وواېه زما په لاسونو کې څه شی دی؟ تقريباً ګرد دی، رنګ يې سپين دی او دسپينو په منځ کې يو ژېړ شی دی.
زده کوونکی چې په همدې وخت کې له زراعتي فارم نه راغلی و، له ژور فکر کولو وروسته يې ښوونکي ته مخ وروااړوه او ويې ويل:
استاده فکر کوم چې دسپين شوي شلغم(ټيپر) په منځ کې ګازره ده.

تعريف

د دوو پېښو ترمنځ د ورته والي پيداکول او دهغوی په باره کې د يوشان نتيجې اخيستلوته تمثيلي يا قياسي (ګماني) استدلال وايي.

فعاليت

يوه ښوونکي يو شوخ زده کوونکی چې لوست يې اخلالوه، له ټولګي څخه وويست. دټولګي د باندې يې د خپل ټولګي بل زده کوونکی وليده چې هغه هم له ټولګي څخه د باندې و تلی دی. دپورتني تعريف په نظر کې نيولو سره له لاندې اړيکو څخه کوم يو يې يو تمثيلي يا قياسي استدلال دی.
- دويم زده کوونکي د لوست په وخت کې تفريح کوي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

- دویم زده کوونکي هم شوخي کړي ده.
- ناروغه دی، نه غواړي چې په ټولګی کې واوسي.

له تعریف او د زده کوونکو له فعالیت څخه لاندې نتیجه په لاس راځي:

نتیجه: قیاس یا تمثیل په حقیقت کې د مختلفو مفهومونو په منځ کې د ورته والي پیداکول دي. له دې سببه تمثیلونه کېدای شي، د ډېرو مفهومونو یا دریاضي د قضیو د درک کولو لپاره شهودي زمینه پیداکړي. تمثیلي استدلال د ثبوت په حیث نه شمارل کېږي، بلکې د ثبوت لپاره زمینه برابروي.

لومړی مثال: په عامه ژبه(مارخوړلی له برګ پړي څخه ډارېږي) دا یو قیاسي استدلال دی، ځکه چې برګ پړی له مار سره پر تله شوی دی او د هغوی په منځ کې ورته والی لیدل شوی دی.

دویم مثال: له تمثیلي استدلال څخه په ګټه، ددې حقیقت درکول چې د دوو منفي عددونو حاصل ضرب مثبت عدد او د یو منفي او یو مثبت عدد حاصل ضرب منفي عدد دی، داسې په لاس راوړو: مثلاً ددې حقیقت د درک کولو لپاره چې که چېرې د یوه زده کوونکي لیاقت د (+) په علامه او نا لایق والی د (-) په علامې سره په پام کې ونیسو او ددې دواړو عملونو د حاصل د(دی) لپاره (+) او (نه دی) لپاره (-) په پام کې ونیسو، له تمثیل او یا قیاس څخه ګټه اخلو او که دوی سره ترکیب کړو په نتیجه کې لرو چې:

لایق دی = مثبت ، لایق نه دی = منفي

(+) (+) = + ، (+) (-) = -

نالایق دی = منفي ، نالایق نه دی = مثبت

(-) (+) = - ، (-) (-) = +

پوښتني

1 - دا بیان چې(بختور کال د هغه کال له پسرلي نه معلومیږي،) په لاندې کوم استدلال باندې دلالت کوي.

a- شهودي درک استدلال.

b- قیاسي استدلال.   c- هیڅ ډول استدلال په کې نشته دی.

2- د قیاسي استدلال په مرسته په کوم مثلث کې د فیثاغورث د قضیې په اساس لاندې نتیجه ثبوت کېدلای شي:

$$\sin^2 \propto + \cos^2 \propto = 1$$

(c) ketabton.com: The Digital Library

استقرايي استدلال:

يو زده کوونکی په لومړنی صنفي ازموينه کې 100 نمرې اخلي او په دويم او دريم صنفي ازموينو کې هم 100 نمرې اخلي.
په اخرنۍ ازموينه کې څه نتيجه اخيستلای شئ چې دا زده کوونکی به څونمرې واخلي؟

فعاليت

د مسلسلو طاقو طبيعي عددونو د جمعې حاصل په پام کې نيسو، ددې کار لپاره له يو 1 له عدد څخه پيل وکړئ او تش ځايونه ډک کړئ.

$1+3= \boxed{} = (\quad)^2$

$1+3+5= \boxed{} = (\quad)^2$

$1+3+5+7= \boxed{} = (\quad)^2$

$1+3+5+7+9= \boxed{} = (\quad)^2$

پورتنيو پوښتنو ته په پاملرنې سره ليدل کېږي چې د طاقو طبيعي عددونو د جمعې حاصل د طبيعي عددونو د شمېر له پوره مربع سره مساوي دی.
- آيا کولای شو نتيجه واخلو چې هر وخت د طاقو مسلسلو عددونو د جمعې حاصل ددې عددونو د شمېر له مربع سره مساوي دی؟
- کوښښ وکړئ له n طاقو مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل لپاره فورمول په لاس راوړئ.

دپورتني فعاليت د سرته رسولو په اساس لاندې نتيجه په لاس راځي.

نتيجه: استقرايي استدلال د يو شمېر مشاهدو او پر بنسټ د عمومي نتيجې اخيستنې طريقه ده. په حقيقت کې يوې کوچنۍ نمونې ته په لويه نمونه عموميت ورکول دي.

لومړی مثال: (موټې د خروار نمونه ده) داخبره استقرايي استدلال ته اشاره کوي، ځکه په دې مثال

(c) ketabton.com: The Digital Library

کې له یوې کوچنۍ نمونې څخه د کل نتیجه اخیستل کېږي، په حقیقت کې له مسئلې څخه د یوشمېر مشاهد و پر بنسټ نتیجه اخیستل شوې ده، نو له استقرایي استدلال څخه کار اخېستل شوی دی.

دویم مثال: یو زده کوونکی په اتفاقي ډول په څومرحلو کې درې مسلسل عددونه سره ضرب کړل او ویې لیدل چې د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دی. له دې کار څخه نتیجه اخلي چې (د هر درو مسلسلو عددونو د ضرب حاصل د 6 عدد مضرب دی)

نوموړې زده کوونکې کوم استدلال کړی دی.

الف: شهودي استدلال ب: قیاسي (ګماني) ج: استقرایي استدلال د: هیڅ یو

حل: استقرایی استدلال

پوښتنې

1- هغه طریقه چې د یوه محدوده شمېر ډېټا پر اساس ترینه عمومي نتیجه اخیستل کېږي، څرنګه یو استدلال دی.

الف: قیاسي یا تمثیلي استدلال ب: استقرایي استدلال

ج: د شهودي درک استدلال

2 – د عددونو ترتیب ته په پاملرنې سره لاندې تش ځایونه ډک کړئ:

$1\times8+1=\square$

$12\times8+2=\square$

$123\times8+3=\square$

$1234\times8+4=\square$

3-

a) د دویمې پوښتنې حل ته په پام سره کېدای شي چې د عددونو پورتنې ترتیب ته تر بې نهایت پورې دوام ورکړې؟

b) د محاسبه کولو پرته او د پورتنیو پوښتنو په پاملرنې سره اټکل کړئ چې کوم عددونه د لاندې پوښتنو په تش ځایونو کې را تلای شي:

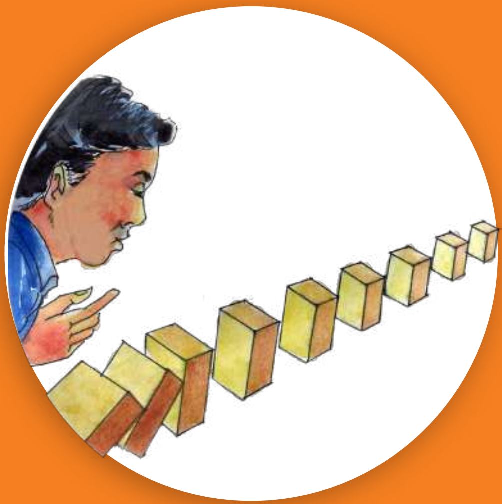
$12345\times8+5=\square$

$123456\times8+6=\square$

(c) ketabton.com: The Digital Library

دریاضي د استقرا استدلال

د دوو مینو لوبه :



آیا تاسوکله د دوو مینو لو به تر
سره کړې ده؟

پوهېږئ چې د دوو مینو په لوبه کې د لومړۍ خښتې لوېدل، د دویمې خښتې پرمخ چې یوه دبلې څنګ ته پرته وي، په ترتیب سره لومړنۍ پر دویمه، دویمه پر دریمه... تر پا یه پورې پر مځکه ولوېږي، داد خښتو یو پر بله لوېدل چې د پورته شکل په شان په مساوي فاصلو یو دبل څنګ ته پرېوزي، د علاقه مندانو لپاره یو په زړه پورې تصویر ښکاره کوي.

لیدل کېږي چې د k ام خښتې لوېدل د $k+1$ ام د خښتې دلوېدلو سبب ګرځي، اوس نو که د خښتو لوېدل له یوې ټاکلې شمېرې څخه پیل شي، له هغې څخه وروسته خښتې یو پر له پسې راولېږي او ټولې خښتې د ځمکې مخ نیسي.

فعالیت

پوهېږئ چې $100=1+8+27+64$ دی، که دا عددونه د مکعبونو د مجموعې په شکل په لاندې ډول ولیکو:

$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$$

- آیا هر وخت د مسلسلو طبیعي عددونو د مکعبونو مجموعه د عددونو د مجموعې له مربع سره مساوي ده؟

- آیا کولای شئ د پورتنۍ پوښتنې د حل لپاره یوه عمومي طریقه وواياست، د پورتنۍ پوښتنې د ځواب لپاره لاندې جدول ډک کړئ.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د متوالي عددونو شمېر	دمتوالي طبيعي عددونو مکعبونه	د مکعبونو مجموعه	د عددونو د مجموعې مربع
1	1^3		1^2
2	1^3+2^3		
3	$1^3+2^3+3^3$	36	
4	$1^3+2^3+3^3+4^3$		10^2
n	$1^3+2^3+3^3+...+n^3$		$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

- د $n=1$ ، $n=2$ ، $n=3$ او $n=4$ د طبيعي مسلسلو عددونو د مکعبونو د مجموعې لپاره د $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ فورمول سموالى وازمايئ.

- اوس که د n مسلسلو طبيعي عددونو لپاره پورتنى فورمول قبول کړو يعني که:

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

وي، نو د $n+1$ د مسلسلو طبيعي عددونو لپاره يې ثبوت کړئ يا داچې وښياست:

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

د پورتني فعاليت له سرته رسولو څخه لاندې نتيجه لاس ته راځي.

نتيجه: که چېرې $P(n)$ د n طبيعي عددونو په برخه کې يو حکم راکړل شوى وي، که د $n=1$ لپاره $P(1)$ صحيح وي، په دويم پړاو کې که د $P(k)$ له سموالي څخه $P(k+1)$ په لاس راشي، نو دا ادعا د $P(n)$ د هر n طبيعي عدد لپاره هم سمه ده.

لومړى مثال: وښياست چې $P(n)=4^{2n}-1$ د هر طبيعي عدد لپاره پر 5 د وېش وړ دى.

حل: د $n=1$ لپاره سمه ده ځکه چې:

$$n=1 \quad , \quad P(1)=4^{2\cdot1}-1=4^2-1=16-1=15$$

ليدل کېږي چې $P(1)=15$ پر 5 د وېش وړ دى.

قبلوو چې د k طبيعي عدد لپاره پورتنى ادعا سمه ده يعني: $P(k)=4^{2k}-1$ پر 5 د وېش وړ

(c) ketabton.com: The Digital Library

دی.

ځرنګه چې پر 5 د وېش وړ دی، نو کولای شو په لاندې ډول یې ولیکو

$$P(k) = 4^{2k} - 1 = 5r \text{.......................}(*)$$

غواړو وښایو چې د $n = k+1$ لپاره دا ادعا سمه ده، نو لروچې:

$$n = k+1 \qquad , \qquad P(k+1) = 4^{2(k+1)} - 1 \text{...........}(**)$$

د (*) د رابطې دواړه خواوې په 4^2 کې ضربوو.

$$4^2(4^{2k} - 1) = 5r \cdot 4^2$$

$$4^{2k+2} - 4^2 = 5r \cdot 16 \Rightarrow 4^{2(k+1)} - 1 = 15 + 16 \cdot (5r)$$

$$4^{2(k+1)} - 1 = 5(3 + 16r)$$

د پورتني مساوات له ښي خوا $5 \cdot (3+16r)$ ځخه ښکاري چې د مساوات کینه خوا پر 5 د وېش وړ ده.

نو اخرني مساوات ښکاره کوي چې $P(k+1) = 4^{2(k+1)} - 1$ هم پر 5 دوېش وړ دی، ځرنګه چې د $P(k)$ له سموالي ځخه د $P(k+1)$ سموالي نتیجه شوه، نو د ریاضي د استقرا د اصل په اساس پورتنی ادعا $P(n)$ د هر طبیعي عدد (n) لپاره سمه ده.

یادونه: د ریاضي د استقرا په مرسته د ریاضي د حکمونو د ثبوتولو لپاره لومړی $P(1)$ په لاس راوړو، بیا $P(k)$ د استقرا د حکم په حیث په پام کې نیسو او په همدې ترتیب له فرضیې ځخه حکم ثبوتوو.

دویم مثال: د ریاضي د استقرآ په مرسته ثبوت کړئ چې لاندې رابطه د هرطبیعي عدد n لپاره سمه ده:

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

حل: په پورتنی رابطه کې د $n = 1$ لپاره لرو چې:

$$n = 1 \qquad , \qquad P(1) = 1 \times 2 = \frac{1(1+1)(1+2)}{3} = \frac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2$$

$$\Rightarrow 2 = 2$$

نود $n = 1$ لپاره پورتنی رابطه سمه ده، که د $n = k$ لپاره یې سمه قبوله کړو، نو د $n = k+1$ لپاره یې داسې ثبوتوو، لروچې:

(c) ketabton.com: The Digital Library

$$n=k\ ,\ P(k)=1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+k\times(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

داستقرا فرضیه:

د $P(k)$ په فرضولو سره $P(n)$ رابطه د $n=k+1$ په نظر کې نیولو سره د رابطې سموالی ښکاره کړو، نو لرو چې:

$$n=k+1,\quad P(k+1)=1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

د استقرا حکم:

د استقرا د فرضیې په نظر کې نیولو سره لرو چې:

$$P(k+1)=[1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+k(k+1)]+(k+1)(k+2)$$
$$=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}$$
$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$
$$\Rightarrow 1\times2+2\times3+\ldots+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

دا رابطه د $n=k+1$ لپاره سمه ده، نو په دې ډول د $P(n)$ رابطه د هر طبیعي عدد (n) لپاره سمه ده.

پوښتنې

1 – د رياضي د استقرا په مرسته وښياست چې د هر طبيعي عدد n لپاره لرو چې:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2 – د رياضي د استقرا په مرسته وښياست چې :

(i) $2+6+10+\ldots+(4n-2)=2n^2$

(ii) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

(c) ketabton.com: The Digital Library

استنتاجی(نتیجوی) استدلال:

آیا کولای شو د شپې په تیاره کې له رڼا څخه پرته شیان ووینو؟

فعالیت

درې مختلف داسې ستونه ولیکئ چې د هر سټ عناصر درې اختیاري مسلسل طبیعي عددونه وي.

- د هرسټ د عناصرو د ضرب حاصل جلا، جلا په لاس راوړئ.

- آیا ویلای شو چې دا د ضرب حاصلونه:

(I): پر 2 د وېش وړ دي؟ ولې؟

(II): پر 3 د وېش وړ دي؟ ولې؟

- آیا ویلای شو چې د دریو مسلسلو طبیعي عددونو د ضرب حاصل هروخت پر 6 د وېش وړ دي؟ ولې؟

- د دریو مسلسلو طبیعي عددونو د ضرب حاصل موولی پر 6 د وېش وړ قبول کړو، د پورتني فعالیت له سرته رسولو څخه لاندې نتیجه لاس ته راځي.

نتیجه: داسې طریقې ته چې د حقایقو سموالی یې په لومړی پړاو کې ومنو او عمومي نتیجه ترې لاس ته راوړو، استنتاجي استدلال یا د نتیجې اخیستنې طریقه ورته وایي یا په بل عبارت استنتاجي استدلال هغه طریقه ده چې سموالی مو ثبوت کړی یا منلی وي.

څه وخت چې له استنتاجي استدلال څخه استفاده کوو، ډاډمن یو چې نتیجه یې هر وخت سمه ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

لومړی مثال: د لاندې جدول پړاونو ته په دقت سره وګورئ موږ څرنګه له عددونو سره چې د هر پړاوحقیقت او سموالی منو، بل پړاوته ځو او نتیجه په لاس راوړو.

د یادونې وړ ده چې په جدول کې په اختیاري ډول عدد ټاکل شوی دی، تاسوکولای شئ چې ددې عدد پرځای بل هر عدد چې موغوښتی وي، وټاکئ، وګورئ چې د هر عدد لپاره نتیجه یوشان ده.

یو عدد په خپله خوښه وټاکئ.	4	7	12
له لومړي عدد سره 5 جمع کړئ.	9	12	17
اوس یې دوه برابره کړئ.	18	24	34
له حاصل څخه د 4 عدد کم کړئ.	14	20	30
پر 2 یې وویشئ.	7	10	15
هغه عدد چې لومړی موټاکلی و، له عدد څخه کم کړئ.	3	3	3

اساسي خبره داده چې موږ په حقیقت کې د هغه عبارت پر بنسټ چې سموالی یې موږ قبول کړی دی، بله نتیجه لاس ته راوړو، دا مسله موږ ډاډ من کوي چې دهر اختیاري عدد په ټاکلو سره نتیجه هر وخت یوشان له 3 سره مساوي ده.

پوښتنې

1 – ښکاره کړئ چې د دوو طاقو عددونو د جمعې حاصل هر وخت یو جفت عدد دی.

2 – ثبوت کړئ چې هر صحیح طاق عدد د $2k+1$ په شکل دی.

3 – د سرو زرو په 9 سکوکې یوه تقلبي ده چې له نورو سکو څخه یې وزن کم دی.

څرنګه کولای شو چې د نورو وزنونو څخه د استفادې کولو پرته د پله یې ترازو په واسطه له دوه واره تللو سره تقلبي سکه پلاس راوړو؟

(c) ketabton.com: The Digital Library

د مثال د نفي کولو استدلال:

یوموټی د خروار نمونه ده.
که د یوجنس یوه کوچنی نمونه بې کیفیته وي.
آیا کولای شو ادعا وکړو چې ددې جنس لویه
کتله ښه کیفیت لري؟

فعالیت

کولای شو، ډېر طبیعي عددونه د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په ډول ولیکو، لکه:

$9 = 2 + 3 + 4$

- پورتني مثال ته په پاملرنې سره لاندې تش ځایونه ډک کړئ؟

$$15= \square +2 \square +4+5$$

$$\square = \square + 5 + \square +7$$

$$\square = 12 + \square + \square +14$$

$$74=17+ \square +19+ \square$$

- آیا کولای شو چې هر طبیعي عدد د مسلسلو عددونو د جمعې د حاصل په شکل ولیکو؟
- که چېرې ځواب مو (نه) وي، نومثال يې ووياست.

د پورتني فعالیت له سرته رسولوڅخه لاندې نتيجه لاس ته راځي.

نتيجه: کله چې له مثال سره وښایو چې عمومي نتيجه سمه نه ده او د ادعا ناسموالی ښکاره کړو دې ته د مثال د نفي کولو استدلال وايي.

مثال: د مسلئې د ثبوت لپاره همدو مره کافي ده چې وښایو چې د x او y دوه غیر ناطق عددونه

(c) ketabton.com: The Digital Library

لیکن ددوی د جمعي حاصل x+y یو ناطق عدد دی.

ددې لپاره که د $x = 1+\sqrt{2}$ او $y = 1-\sqrt{2}$ وټاکو، لروچې:

$$x + y = (1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2}) = 1 + 1 = 2$$

لیدل کېږي چې ددې دواړو عددونو د جمعي حاصل د 2 عدد دی چې یوناطق عدد دی، په داسې حال کې چې x او y غیر ناطق (ګنګ) عددونه دي، نو دا ادعا نه شو کولای چې د دووغیر ناطقو عددونو د جمعي حاصل هر وخت یو غیر ناطق عدد دی.

پوښتنې

1- د مثال د نفې کولو په استدلال سره وښیاست چې(د هر مثبت حقیقي عدد مربع دعدد له مکعب څخه کوچنی ده)

2- دلاندې کوم یو بیان لپاره د نفې مثال و جود نه لري؟

a) د دوو ناطقو عددونو مجموعه یو ناطق عدد دی.

b) د هر مثبت عدد مربع له عدد څخه لویه ده.

c) دوې زاویې چې متناظرې ضلعې یې سره موازې وي، دا دوې زاویې سره مساوي هم دي.

d) د دوو طاقو عددونو مجموعه یو جفت عدد دی.

e) د دوو غیر ناطقو عددونو د ضرب حاصل، غیر ناطق عدد نه دی.

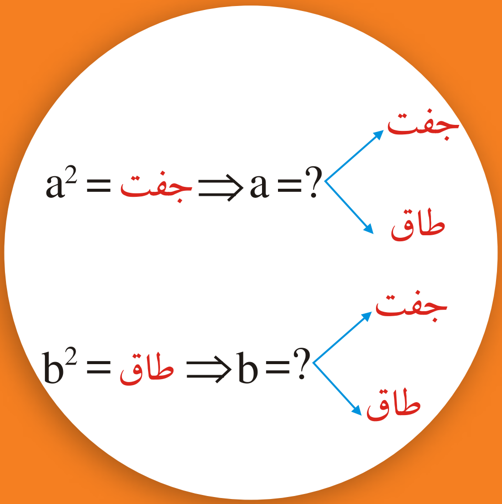
(c) ketabton.com: The Digital Library

د خلف برهان یا غیر مستقیم ثبوت:

که د یوه عدد مربع جفت وي آیا خپله عدد جفت دی که طاق؟

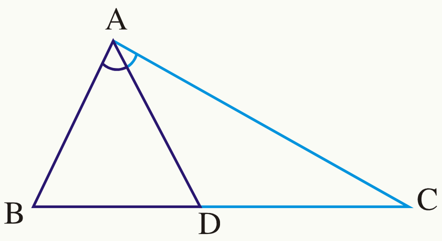
آیا کولای شو چې دا ادعا وکړو، که د هر عدد مربع جفته وي، خپله عدد جفت دی؟

که وښایو چې خپله عدد طاق نه دی، څه نتیجه اخلئ؟



فعالیت

د ABC مثلث د لاندې شکل په شان په پام کې ونیسئ:



- د $\hat{A}$ د زاویې ناصف رسم کړئ.
- که $\overline{BD} \neq \overline{CD}$ وي، نو د $\overline{AB}$ او $\overline{AC}$ ضلعې سره څه اړیکه لري؟
- که فرض کړو چې که $\overline{BD} \neq \overline{CD}$ وي، خو $\overline{AC} \neq \overline{AB}$ دی، دا مسئله موږ کومې نتیجې ته رسوي؟

نتیجه: که د خپلې ادعا د عکس په فرضولو او یا د قبلولو په نتیجه کې د فرض شوي ادعا خلاف ته ورسېږو، نو په دې حالت کې زموږ فرض شوی ادعا سمه ده، دا ډول استدلال د غیر مستقیم ثبوت (برهان خلف) په نامه یادیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

يادونه: په ياد ولرئ څه وخت چې له غير مستقيم ثبوت څخه ګټه اخلو، لاندې پړاوونه په پام کې نيسو:

لومړی پړاو: فرضوو چې مطلوبه ادعا سمه نه ده.

دويم پړاو: ښکاره کوو چې دا فرض د اسې نتيجه په لاس راکوي چې پيژندل شوي حقيقتونه نفي کوي.

دريم پړاو: اوس چې نتيجه نفي شوې ده، نومعلومه خبره ده چې د لومړي پړاو فرض سم نه دی، نو مطلوب سم دی.

مثال: وښياست که n^2 يو جفت طبعي عدد وي، نو n هم جفت دی؟

ددې مسلئې د ثبوت لپاره فرضوو، سره ددې چې n^2 جفت دی، خو n يو طاق عدد دی، نو کولای شو چې n د $n = 2k+1$ په شکل وليکو، په داسې حال کې چې k يو تام عدد دی، نو ددې عدد مربع مساوي ده په:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

$$\Rightarrow n^2 = 4(k^2 + k) + 1$$

پورتنې مساوات ښکاره کوي چې n^2 يو طاق عدد دی چې دا د فرض خلاف ده، نو په نتيجه کې دا فرض چې n يو طاق عدد دی، ناسمه ده او دې نتيجې ته رسيږو چې n هم يو جفت عدد دی، ځکه دا فرض چې n طاق عدد دی، موږ دې نتيجې ته ورسولو چې n^2 هم طاق عدد دی

پوښتنه

وښياست چې $\sqrt{3}$ يو غير ناطق عدد دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د رياضي منطق او دبيان استنتاج

له څنګ ملګرى څخه د يو خبر اوريدل به څه نتيجه ولري؟
آيا خبر سم دى که ناسم؟

تعريف

يوې خبري جملې ته بيان وايي چې نتيجه يې په سموالي يا ناسم والي پاى ته ورسيږي.

فعاليت

لاندي جملې په پام کې ونيسئ او وښياست چې له هغو څخه کومه يوه يې بيان او کومه يوه يې بيان نه دى او منطقي نتيجه يې څه ده؟

i) نن ورځ باران نه اوري.
ii) آيا نن ورځ باران نه اوري؟
iii) بارانه اووره..
iv) څه زيات باران اوري!

له پورتني فعاليت څخه لاندي نتيجه لاس ته راځي.
نتيجه:
1 - هره جمله نه شي کېداى چې بيان وي. يوه جمله کېداى شي يوه حکمي، تعجبي پوښتنه او يا يو خبر وي.
2 - هره خبري جمله سمه يا ناسمه ده.

يادونه: که يو بيان ته P ووايو، د سم بيان د ليکلو طريقه $P \equiv T$ او د ناسم بيان د ليکلو طريقه

(c) ketabton.com: The Digital Library

$P \equiv F$ دی، سر بیره پر دې $\sim P$ د P د بیان نفي ښيي.
هغه جدول ته چې د یو بیان ارزیابي په کې صورت نیسي، د صحت د جدول په نامه یادېږي، نو د P د هربیان لپاره لروچې:

P	~ P
T	F
F	T

مثال: د (مسکا د لسم ټولګي زده کوونکې ده =P) بیان لپاره د صحت جدول ترتیب کړئ.
حل: د پورتني بیان د ارزیابۍ لپاره پوهېږو چې نو موړی بیان سم او یا ناسم دی.
که بیان سم وي، نو کولای شو چې ولیکو $P \equiv T$ او $\sim P \equiv F$ دی.
نو د P د بیان د نفي حالت عبارت دی له «P سم نه دی» یعنې : $\sim P \equiv F$ دی. دا بیان د دې په معنا دی چې مسکا د لسم ټولګي زده کوونکې نه ده، یعنې P ناسم دی.
که $P \equiv F$ وي، نو په دې حالت کې $\sim P = T$ دی. د پورتني ځواب صحت په لاندې جدول کې ګورو:

P	~ P
T	F
F	T

د بیانونو ترکیب

که د p او q دوه بیانونه راکړشوي وي، په دې حالت کې:
1 - د $p \wedge q$ ترکیب د p او q د بیانونو د عطفي ترکیب یا (منطقي " او") په نامه یادېږي، د "$\wedge$" علامه د (او) په معنا په کار وړل شوي ده.
2 -د $p \vee q$ ترکیب د p او q د بیانونو د فصلي ترکیب (منطقي " یا ") په نامه یادېږي، د "$\vee$" علامه د (یا) په معنا په کار وړل شوي ده.
3 - د $p \Rightarrow q$ د مشروط ترکیب او یا د (که p نو q ویل کېږي) په نامه یادېږي، د $\Rightarrow$ علامه ښکاره کوي چې p د شرطي ترکیب اساس چې q تري نتیجه کېږي.
4 - د $p \Leftrightarrow q$ د دوو خواوو د شرطي ترکیب په نامه او یا د (که او یوازې که) په نامه یادېږي.
د ($\Leftrightarrow$) علامه ښکاره کوي چې که p د شرطي ترکیب اساس وي q تري نتیجه کېږي او که q دشرطي ترکیب اساس وي، p تري نتیجه کېږي. په دې ډول د p د بیانونو او (که اویوازې که) ترکیب لاندې د صحت په جدول کې ګورو:

(c) ketabton.com: The Digital Library

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

لومړی مثال: که چیرې $P \equiv (2+4=6)$ او (دمنفي عدد مربع) $q \equiv$ بیانونه راکړل شوي وي د q، p، ~p، ~q، $p \vee q$، $p \wedge q$، $\sim(p \wedge q)$ او $\sim(p \vee q)$ د بیانونو نتیجې پلاس راوړی.

حل: پورتنیو بیانونو ته په توجه سره ددې بیانونو ارزښت عبارت دی له:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim(p \vee q)$
T	F	F	T	F	T	T	F

دویم مثال: د سموالي (صحت) دجدول په تر تیبولو سره ښکاره کړئ چې د $P \vee (p \Rightarrow q)$ بیان هر وخت سم دی.

حل:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee (p \Rightarrow q)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	T

د سموالي دجدول په اخیرني ستون کې وینو چې د $p \vee (p \Rightarrow q)$ بیان هر وخت سم دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

پوښتني

1 – د صحت د جدول په تر تیبولو سره وښیاست چې د $(p \Rightarrow q) \vee \sim (\sim p \vee q)$ بیان هر وخت سم دی- متوجه اوسیږ چې p او p ~ یوله بله مستقل نه دی.

2 – د صحت د جدول په جوړولو سره وښیاست چې د $(p \Rightarrow q)$ او د $\sim (p \vee q)$ د بیانونو ارزښت سره مساوي دی یعني:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim (p \vee q)$$

د فصل لنډیز

د ریاضي استدلال:

هغه طریقه چې د هغې په واسطه د ریاضي د یوبیان سموالی په لاس راځي، د ریاضي د استدلال په نامه یادیږي.

شهودي درک:

هغه طبیعي یا حسي پوهه چې د هغې په مرسته دیوې موضوع سموالی یا حقیقت او یا یو مفهوم پرته له استدلاله قبلوو، له شهودي درک څخه عبارت ده چې د وخت په مختلفو مرحلوکې یوله بله سره توپیر لري.

تمثیلي یا قیاسي استدلال:

د دوو پیښو تر منځ د ورته والی پیداکول او د هغوی په باره کې یوشان نتیجې اخیستلو ته تمثیلي یا قیاسي استدلال وایي.

استقرایی استدلال:

هغه طریقه چې د یو شمیر مشاهد و پر اساس ور څخه عمومي نتیجه اخیستل کیږي یعني د جز نه کل په لاس راځي د استقرایي استدلال په نامه یادیږي.

د ریاضي د استقرا استدلال:

که چیرې $P(n)$ د n د طبیعي عددونو په برخه کې یو حکم راکړل شوی وي، که د n=1 لپاره $P(1)$ سم وي او په دویم پړاوکې د $p(k)$ له سموالي څخه د $p(k+1)$ سموالی په لاس راشي، نو د $p(n)$ بیان د هر طبیعي عدد (n) لپاره سم دی او دریاضي د استقرا د استدلال په نامه یادیږي.

(c) ketabton.com: The Digital Library

نتیجوي استدلال:
له هغه حقیقتونو څخه په ګټه اخیستنه چې صحیح والی یې په پیل کې منل شوی وي، عمومي نتیجه لاس ته راوړل شي، د استنتاجي استدلال یا د نتیجې اخیستنې د طریقې په نامه یادېږي.
یا په بل عبارت هغه طریقه ده چې سم والی مو ثبوت یا قبول کړی وي.

د نفی مثال استدلال:
کله چې له مثال سره وښایو چې عمومي نتیجه سمه نه ده او د ادعا ناسموالی په عمومي ډول ښکاره کړو، دې ته د مثال د نفي کولو استدلال وایي.
غیر مسقیم ثبوت:
که د خپلې ادعا یا قضیې د عکس په فرضولو یا قبلولو د فرض شوي ادعا خلاف ته ورسېږو، نو په دې حالت کې فرضیه ناسمه او خلاف یې سم دی. دې ډول استدلال ته غیرمستقیم ثبوت (برهان خلف) وایي.

بیان :
یوې خبرې جملې ته چې نتیجه یې سمه یا ناسمه وي، د بیان په نامه یادېږي، یوه جمله چې نتیجه یې سمه اویا ناسمه نه وي، بیان نه دی.

د بیانونو ترکیب:
که د p او q دوه بیانونه راکړل شوي وي، په دې حالت کې:
1- د $p \wedge q$ ترکیب د p او q دوه بیانونه د عطفي ترکیب یا (منطقي "او") په نامه یادېږي.
چې د p او q د بیان په شکل ویل کېږي.

2- د $p \vee q$ ترکیب د p او q د بیانونو د فصلي ترکیب (منطقی " یا ") په نامه یادېږي، د ($\vee$) علامه د (یا) په معنا په کار وړل شوې ده.

3- (که چېرې نو) او یا د "$\Rightarrow$" منطقي علامه د $p \Rightarrow q$ د p او q مشروط بیان دی، که p نو q ویل کېږي، د $\Rightarrow$ علامه ښکاره کوی چې p د شرطي ترکیب اساس دی، ددې لپاره چې q له هغې نتیجه شي.
4- که یوازې که یا دا "$\Leftrightarrow$" منطقي علامه د p او q د بیانونو دوو خواوو شرطي ترکیب دی چې د (p که اویوازې که q) دی.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د فصل پوښتني

1 – له لاندې ځوابونو څخه ستاسو په نظر کوم یو سم دی؟

الف- په مشاهداتو کې خطا د استقرایي طریقې له ستونزو څخه یوه ستونزه ده.

ب- د ریاضي د استدلال له قوي طریقو څخه یوه هم استقرایي طریقه ده.

ج- د ریاضي په استقرایي طریقې کې یوه ستونزه د مشاهداتو کموالی دی.

د- د الف او ج ځوابونه سم دي.

2 – له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې سم نه دی؟

استقرایي استدلال

الف- د ریاضي له مسألو څخه یوه قوي طریقه ده.

ب- د مسألو په برخه کې موږ ته د عمومي قوانینو لارښوونه کوي.

ج- دمسألو دحل لپاره له ریاضي پرته یوه طریقه ده.

د – دمسألو د حلولو لپاره د ریاضي طریقه نه ده.

3 – د شهود په برخه کې له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې سم (صحیح) دی؟

الف- دداسې نتیجې د اخیستنې لپاره چې سل په سلو کې سمه ده.

ب- له شهود څخه په ګټه اخیستنه پر ډاډ سره نه شوویلای چې نتیجه سل په سلو کې سمه ده.

ج شهود د ریاضي د ښه درک کولو لپاره دی.

د: له شهود څخه په ګټه اخیستنه، کولای شو د ثبوت لپاره قطعي ګمان له حتمي استدلال سره وکړو.

4 – له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې سم نه دی؟

الف: استقرایي استدلال له جز څخه کل ته رسیدل دي.

ب: استقرایي استدلال له کل څخه جز ته رسیدل دي.

ج: له استقرایي استدلال څخه نه شو کولای چې د ریاضي د دقیق ثبوت لپاره ګټه واخلو.

د: استقرایي استدلال دیو شمېر مشاهد و پر اساس یوه کلي نتیجه ده.

5 – د استنتاجي استدلال پر اساس له لاندې ځوابونو څخه کوم یو یې سم نه دی؟

الف: که واوره اوري ځمکه نمجنه کېږي، ځمکه نمجنه ده، نو واوره وریدلي ده.

ب: د یوه ښوونځي ټول فارغان له کمپیوټر سره بلد او په ریاضي ښه پوهېږي، ضمیر چې له همدې ښوونځي څخه فارغ شوی دی. نو له کمپیوټر سره ښه بلد او په ریاضي ښه پوهېږي.

ج: که یوه څلور ضلعي مربع وي، نو قطرونه یې یو پربل عمود دي، که د څلور ضلعي قطرونه یو پر بل عمود وي، نو دا څلور ضلعي مربع ده.

(c) ketabton.com: The Digital Library

د: که د یوه مثلث دوې ضلعې سره مساوي وي، متساوي الساقین مثلث دی او که د مثلث درې ضلعې سره مساوي وي، متساوي الاضلاع مثلث دی، نو هر متساوي الاضلاع مثلث، متساوي الساقین مثلث دی.

6 – د قیاسي استدلال په واسطه وښیاست د هرې زاویې لپاره $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ده.

7 – د استقرایي استدلال په واسطه وښیاست چې د n مسلسلو تاقو طبیعي عددونو مجموعه له n^2 سره مساوي ده.

8 – له استقرایي استدلال سره وښیاست چې د هر طبیعي عدد n لپاره لاندې مساوات سم دی.

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

9 – د استنتاجي استدلال په اساس ثبوت کړئ چې د دوو جفتو عددونو د جمعې حاصل هر وخت جفت عدد دی؟

10 – له یوه مثال سره وښیاست چې د 2^n+3 افاده د هر طبیعي عدد لپاره هر وخت لومړنی عدد نه دی.

11 – د غیر مستقیم ثبوت د استدلال په واسطه وښیاست که n یو طبیعي اختیاری عدد وی او هم n^2 طاق وي، نو n هم طاق دی.

12 – د (باران اوري او وریځ نشته دی، نو باران نه اوري) د ترکیبي بیانونو لپاره د صحت جدول جوړ کړئ، په داسی حال کې که

(α = باران اوري)) او ((وریځ ده = β)) سره وښایو. (1) عدد د سم اود (0) عدد د ناسم لپاره په کار یوسي.

$\propto$	β	$-\propto$	$-\beta$	$\propto \wedge -\beta$	$\propto \wedge -\beta \Rightarrow -\propto$
1	1				
1	0				
0	1				
0	0				

Get more e-books from www.ketabton.com
Ketabton.com: The Digital Library